

В. П. ЛЯШЕНКО, Т. А. НАБОК, Л. М. СКОТНІКОВА

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

КРЕМЕНЧУК 2025

УДК 517.91

Рецензенти:

лауреат державної премії України, доктор технічних наук, професор, професор Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського Чорний Олексій Петрович;
доктор педагогічних наук, професор, професор Глухівського національного педагогічного університету імені Олександра Довженка Бурчак Станіслав Олександрович

Рекомендовано до друку вченою радою
Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського
(протокол № 4 від 24 грудня 2024 року)

Ляшенко В. П., Набок Т. А., Скотнікова Л. М.

Диференціальні рівняння: навч. посіб. Кременчук, 2025. 166 с.

Запропонований навчальний посібник є продовженням навчального посібника «Вища математика» і призначений для поглибленого вивчення диференціальних рівнянь. У посібнику викладено основи теорії звичайних диференціальних рівнянь та систем рівнянь, а також споріднені питання (рівняння з частинними похідними першого порядку). Автори намагалися поєднати строгість викладу матеріалу теорії диференціальних рівнянь з прикладним спрямуванням її методів розв'язання. Кожна тема супроводжується питаннями та завданнями для самостійного розв'язування. Ґрунтовно проаналізовано методи розв'язання типових задач і задач підвищеної складності. Структура посібника дозволяє студенту самостійно отримувати практичні навички розв'язання диференціальних рівнянь.

Посібник може бути використаний студентами, аспірантами PhD та викладачами закладів вищої освіти.

УДК 517.91

© КрНУ

©Ляшенко В. П., 2025

© Набок Т. А., 2025

© Скотнікова Л. М., 2025

ВСТУП

Посібник призначено для здобувачів вищої освіти, що навчаються у закладах вищої освіти України та вивчають диференціальні рівняння на педагогічних і технічних спеціальностях університетів. Він є продовженням навчального посібника «Вища математика», написаного авторами, і призначений для розширення навичок застосування диференціальних рівнянь для розв'язання задач практичного спрямування.

Метою запропонованого навчального посібника є висвітлення і узагальнення основних теоретичних й методичних підходів щодо практичного розв'язання диференціальних рівнянь та задач, що сприяють до їх застосуванню під час розв'язання складних задач геометрії та інженерії. У посібнику наведено велику кількість задач різної складності, розв'язування яких ґрунтовно пояснюється.

Матеріал посібника викладено у п'яти розділах. У першому розділі вводяться визначення диференціальних рівнянь, загального і частинного розв'язку, загального і частинного інтеграла, інтегральних кривих. Сформульовано теорему існування і єдності розв'язку звичайних диференціальних рівнянь. Розглядаються диференціальні рівняння першого порядку, що розв'язуються відносно похідної (з відокремленими та відокремлюваними змінними, однорідні, лінійні, Бернуллі, у повних диференціалах), а також рівняння, що не розв'язуються відносно похідної (Лагранжа, Клеро).

У другому розділі подано диференціальні рівняння вищих порядків, що розв'язуються у квадратурах, загальна теорія лінійних диференціальних рівнянь n -го порядку.

У третьому розділі розглядаються крайові задачі, метод зведення крайових задач до задач Коші, побудова функції Гріна, інтегрування диференціальних рівнянь за допомогою степеневих рядів.

У четвертому розділі ґрунтовно розглядаються лінійні системи диференціальних рівнянь та методи їх розв'язання.

П'ятий розділ присвячено диференціальним рівнянням з частинними похідними першого порядку та задачам Коші для них.

На початку кожного розділу конспективно наведено короткі теоретичні відомості, детально викладено стандартні методи, які слід застосовувати для інтегрування диференціальних рівнянь.

Для закріплення основних теоретичних положень і навичок розв'язування диференціальних рівнянь у кінці кожного розділу наведено контрольні питання та задачі для самостійного розв'язання. Така структура посібника дозволяє студенту економити час на підготовку до практичних занять, активно самостійно отримувати практичні навички інтегрування диференціальних рівнянь. Для полегшення користування посібником у ньому розміщено предметний покажчик і список рекомендованої літератури.

РОЗДІЛ 1 ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

1.1 Диференціальні рівняння, основні визначення

Визначення. Звичайним диференціальним рівнянням називають будь-яке співвідношення, яке пов'язує незалежну змінну x , невідому функцію $y = f(x)$ та її похідні $y', y'', \dots, y^{(n)}$.

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad \text{або} \quad F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0. \quad (1.1)$$

Визначення. Порядком диференціального рівняння називають найвищий порядок похідної, що входить до рівняння.

Якщо невідома функція залежить лише від однієї змінної, то диференціальне рівняння називають *звичайним*; якщо невідома функція залежить від кількох змінних, тобто невідома функція входить до диференціального рівняння зі своїми частинними похідними, то його називають *рівнянням у частинних похідних*.

Визначення. Загальним розв'язком диференціального рівняння називають функцію

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0, \quad (1.2)$$

яка за будь-яких значень довільних сталих $C_1, C_2, \dots, C_n$ є розв'язком цього рівняння.

Визначення. Співвідношення $\Phi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0$, що неявно задає загальний розв'язок, називають *загальним інтегралом* диференціального рівняння.

Задача Коші для диференціального рівняння n -го порядку полягає у знаходженні розв'язку рівняння, який відповідає умовам $y = y_0, \quad y' = y'_0, \quad y'' = y''_0, \dots, y^{(n-1)} = y^{(n-1)}_0$ при $x = x_0$, де $x_0, y_0, y'_0, \dots, y^{(n-1)}_0$ – задані числа. Ці умови називають *початковими умовами*.

Визначення. Частинним розв'язком диференціального рівняння називають розв'язок, отриманий із загального розв'язку за певних значень довільних сталих $C_1, C_2, \dots, C_n$.

У загальному розв'язку рівняння (1.1) число довільних сталих дорівнює порядку рівняння. Диференціальне рівняння має нескінчену множину частинних розв'язків.

Процес знаходження розв'язку диференціального рівняння називають *інтегруванням рівняння*.

Контрольні питання та завдання

1. Надайте визначення диференціального рівняння.
2. Надайте визначення порядку диференціального рівняння.
3. Надайте визначення загального розв'язку диференціального рівняння.
4. Надайте визначення частинного розв'язку диференціального рівняння.
5. Яку задачу називають задачею Коші?

1.2 Диференціальні рівняння першого порядку

Диференціальне рівняння першого порядку має вигляд: $F(x, y, y') = 0$.

Якщо рівняння розв'язане відносно y' , то його можна записати у вигляді:

$$y' = f(x, y). \quad (1.3)$$

Це рівняння називають рівнянням першого порядку в явній формі.

Визначення. Загальним розв'язком диференціального рівняння першого порядку називають функцію $y = \varphi(x, C)$, що залежить від однієї довільної сталої C та за будь-якого значення C є розв'язком цього рівняння. Співвідношення $\Phi(x, y, C) = 0$, що містить розв'язок у неявному вигляді, називають загальним інтегралом рівняння (1.3). Розв'язок, отриманий із загального розв'язку (загального інтеграла) за певного значення C , називають частинним розв'язком (частинним інтегралом).

Теорема Коші (існування і єдиності розв'язку). Нехай у рівнянні $y' = f(x, y)$ функція $f(x, y)$ та її частинна похідна $\frac{\partial f}{\partial y}$ неперервна в деякій області D на площині Oxy , яка містить точку $M_0(x_0; y_0) \in D$, тоді існує єдиний розв'язок цього рівняння $y = \varphi(x)$, який відповідає умові $y = y_0$ при $x = x_0$.

Із огляду геометрії це означає, що існує і, до того ж, єдина функція $y = \varphi(x)$, графік якої проходить через точку $M_0(x_0; y_0)$.

Визначення. Умову $y|_{x=x_0} = y_0$ або $y(x_0) = y_0$ при $x = x_0$ називають *початковою умовою*, або *умовою Коші*.

Визначення. Задача, у якій потрібно знайти частинний розв'язок диференціального рівняння

$$y' = f(x, y) \text{ за умови } y(x_0) = y_0, \quad (1.4)$$

називають *задачею Коші*.

Із огляду геометрії загальний розв'язок диференціального рівняння першого порядку є сімейством кривих на координатній площині, яке залежить від однієї довільної сталої C . Їх називають *інтегральними кривими* цього диференціального рівняння. Частинному розв'язку відповідає одна крива цього сімейства: функція $y = f(x)$, яка проходить через деяку задану точку $M_0(x_0, y_0)$ площини Oxy .

Точки, у яких порушуються умови теореми Коші, називають *особливими точками*. Через такі точки або взагалі не проходить жодна інтегральна крива, або проходить кілька інтегральних кривих.

Розв'язок, у кожній точці якого порушується єдність розв'язку задачі Коші, називають *особливим*. Особливий розв'язок не може бути отриманий із загального розв'язку за жодного значення довільної сталої C . Особливі розв'язки можуть виявитися серед розв'язків, загублених унаслідок перетворень заданого рівняння під час його інтегрування.

Розв'язати або *проінтегрувати* диференціальне рівняння – означає знайти його загальний розв'язок.

Контрольні питання та завдання

1. Яке рівняння називають диференціальним рівнянням першого порядку?
2. Сформулюйте теорему існування і єдності розв'язку диференціального рівняння першого порядку.
3. Надайте визначення загального і частинного розв'язків диференціального рівняння першого порядку.
4. Надайте визначення загального інтегралу диференціального рівняння.
5. Чи завжди загальний розв'язок диференціального рівняння першого порядку містить усі частинні розв'язки?
6. Який розв'язок називають особливим?

1.3 Диференціальні рівняння з відокремленими змінними

Визначення. Диференціальне рівняння

$$M(x) dx + N(y) dy = 0 \quad (1.5)$$

називають *рівнянням з відокремленими змінними*. У цьому рівнянні біля диференціала dx знаходиться тільки функція від x , а біля dy – тільки функція від y .

Для розв'язання рівняння (1.5) візьмемо інтеграл від обох його частин:

$$\int M(x) dx + \int N(y) dy = C. \quad (1.6)$$

Після обчислення інтегралів отримаємо розв'язок рівняння (1.5) у вигляді загального інтеграла.

Приклад 1.1. Знайти загальний розв'язок рівняння $\cos y dy = 2x dx$.

Розв'язання.

Це рівняння виду (1.5), тому його розв'язок:

$$\int \cos y dy = \int 2x dx \quad \Rightarrow \quad \sin y = x^2 + C \quad \Rightarrow \quad y = \arcsin(x^2 + C).$$

Контрольні питання та завдання

1. Яке диференціальне рівняння називають рівнянням з відокремленими змінними?

2. Розв'язати рівняння:

а) $(x^3 - 1)dx + 2ydy = 0$; б) $\operatorname{tg} x dx + \sin y dy = 0$.

1.4 Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними

Визначення. Диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними має вигляд:

$$M_1(x)N_1(y) dx + M_2(x)N_2(y) dy = 0. \quad (1.7)$$

Воно може бути приведене до рівняння з відокремленими змінними (1.5) унаслідок ділення обох його частин на добуток $N_1(y)M_2(x) \neq 0$:

$$\frac{M_1(x)N_1(y)}{N_1(y)M_2(x)} dx + \frac{M_2(x)N_2(y)}{N_1(y)M_2(x)} dy = 0.$$

Одержали рівняння з відокремленими змінними:

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)} dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)} dy = 0.$$

Почленно інтегруючи, отримаємо загальний інтеграл:

$$\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)} dx + \int \frac{N_2(y)}{N_1(y)} dy = C. \quad (1.8)$$

Унаслідок ділення рівняння на добуток $N_1(y)M_2(x)$ можна втратити деякі розв'язки, отримані з рівняння $N_1(y)M_2(x) = 0$, або можна отримати сторонні. Тому необхідна перевірка.

Приклад 1.2. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$(1+x)y dx + (1-y)x dy = 0.$$

Розв'язання.

Маємо рівняння з відокремлюваними змінними. Поділивши обидві частини рівняння на xy , отримаємо:

$$\frac{(1+x)}{x} dx + \frac{(1-y)}{y} dy = 0, \quad \left(\frac{1}{x} + 1\right) dx + \left(\frac{1}{y} - 1\right) dy = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\int \left(\frac{1}{x} + 1\right) dx + \int \left(\frac{1}{y} - 1\right) dy = C.$$

Інтегруючи, отримаємо: $\ln |x| + x + \ln |y| - y = C$, або $\ln |xy| + x - y = C$.

Це і є загальний інтеграл цього рівняння.

Відокремлюючи змінні, припускали, що $x \neq 0$, $y \neq 0$. Перевірка доводить, що ці значення є розв'язками рівняння. Загальний інтеграл не містить цих розв'язків. Їх ми втратили. Отже, $x = 0$ і $y = 0$ – частинні розв'язки рівняння.

Приклад 1.3. Розв'язати задачу Коші

$$x^2 y \, dx + y^3 x \, dy = 0, \quad y(0) = 1.$$

Розв'язання.

Розділяючи змінні, знаходимо: $x \, dx + y^2 \, dy = 0$. Тепер виконаємо інтегрування:

$$\int x \, dx + \int y^2 \, dy = C, \quad \frac{x^2}{2} + \frac{y^3}{3} = C.$$

Одержали загальний інтеграл вихідного рівняння. Знайдемо загальний розв'язок.

$$\frac{y^3}{3} = C - \frac{x^2}{2}, \quad y = \sqrt[3]{3\left(C - \frac{x^2}{2}\right)}$$

Знайдемо частинний розв'язок, який відповідає початковій умові $y(0) = 1$. Для цього до загального розв'язку підставляємо початкову умову і визначаємо сталу C .

$$1 = \sqrt[3]{3C} \Rightarrow C = \frac{1}{3}.$$

Потім, підставивши її значення до загального розв'язку, отримуємо:

$$y = \sqrt[3]{1 - \frac{3}{2}x^2} \text{ – розв'язок задачі Коші.}$$

Контрольні питання та завдання

1. Яке диференціальне рівняння називають рівнянням з відокремлюваними змінними?

2. Розв'язати рівняння:

$$\text{а) } x^3 y^5 y' + 2x^2 y^4 = 0; \quad \text{б) } (x^2 - 1)y' + 2xy^2 = 0;$$

$$в) (xy + x^3 y)y' = 1 + y^2.$$

3. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння:

$$а) (x^2 + 1)y' + 4xy = 3, \quad y(0) = 0.$$

1.5 Однорідні рівняння першого порядку

Визначення. Функцію $f(x, y)$ називають *однорідною функцією виміру m* (m – будь-яке дійсне число), якщо за будь-якого t має місце тотожність:

$$f(tx, ty) = t^m f(x, y). \quad (1.9)$$

Приклад 1.4. $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$ – однорідна функція першого виміру, тому що $f(tx, ty) = \sqrt[3]{(tx)^3 + (ty)^3} = t \sqrt[3]{x^3 + y^3} = t f(x, y)$.

Приклад 1.5. $f(x, y) = xy - y^2$ – однорідна функція другого виміру, тому що $f(tx, ty) = (tx)(ty) - (ty)^2 = t^2(xy - y^2) = t^2 f(x, y)$.

Приклад 1.6. $f(x, y) = \frac{x}{y}$ – однорідна функція нульового виміру, тому що

$$f(tx, ty) = \frac{tx}{ty} = t^0 \frac{x}{y} = t^0 f(x, y).$$

Визначення. Диференціальне рівняння $M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$ називають *однорідним*, якщо функції, що розташовані при dx і dy , є однорідними одного й того самого виміру.

Однорідне рівняння завжди зводиться до вигляду $y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ і за допомогою заміни змінних

$$\frac{y}{x} = z, \quad (1.10)$$

$$\text{де } z = z(x), \quad y' = z'x + z, \quad \text{або} \quad dy = xdz + zdx \quad (1.11)$$

зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними.

Приклад 1.7. Розв'язати задачу Коші

$$(x + 2y) - xy' = 0, \quad y(1) = 2.$$

Розв'язання.

$$(x + 2y) dx - x dy = 0$$

Перевіримо функції $M(x, y) = x + 2y$ і $N(x, y) = -x$ щодо однорідності.

$$M(tx, ty) = tx + 2ty = t(x + 2y) = tM(x, y)$$

$$N(tx, ty) = -tx = t(-x) = tN(x, y)$$

$M(x, y)$, $N(x, y)$ – однорідні функції першого виміру, отже, рівняння однорідне.

$$\left(1 + 2\frac{y}{x}\right) - y' = 0$$

Проводимо заміну змінних згідно з (1.10), (1.11):

$$\frac{y}{x} = z, \quad y = zx, \quad y' = z'x + z$$

$$1 + 2z - z'x - z = 0, \quad 1 + z - z'x = 0, \quad 1 + z - x\frac{dz}{dx} = 0,$$

$$(1 + z) dx - x dz = 0 \mid \frac{1}{(1 + z)x},$$

$$\frac{dx}{x} - \frac{dz}{1 + z} = 0, \quad \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dz}{1 + z} = C, \quad \ln|x| - \ln|1 + z| = \ln|C_1|,$$

$$\frac{x}{1 + z} = C_1, \quad 1 + z = \frac{x}{C_1}, \quad z = \frac{x}{C_1} - 1, \quad \frac{y}{x} = \frac{x}{C_1} - 1,$$

$$y = \frac{x^2}{C_1} - x \quad \text{– загальний розв'язок.}$$

Знайдемо частинний розв'язок, який відповідає початковій умові

$$y(1) = 2: \quad 2 = \frac{1}{C_1} - 1, \quad C_1 = \frac{1}{3}.$$

$$y = 3x^2 - x \quad \text{– розв'язок задачі Коші.}$$

Контрольні питання та завдання

1. Яке диференціальне рівняння називають однорідним?
2. Яку функцію називають однорідною?

3. Укажіть метод знаходження загального розв'язку однорідного диференціального рівняння першого порядку.

4. Розв'язати рівняння:

а) $(y^2 - 2xy)dx + x^2dy = 0$; б) $(2\sqrt{xy} - x)dy + ydx = 0$;

в) $y^3dx + 2(x^3 - xy^2)dy = 0$; г) $xy' = y \ln \frac{x}{y}$;

д) $y - xy' = x \sec \frac{y}{x}$.

1.6 Рівняння, що зводяться до однорідних

До однорідних рівнянь зводиться рівняння вигляду

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{ax + by + c}\right) \quad (1.12)$$

за допомогою заміни змінних $x = u + \alpha$, $y = v + \beta$ за умови, що

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a & b \end{vmatrix} = a_1b - ab_1 \neq 0, \text{ де } (\alpha, \beta) - \text{точка перетину прямих } a_1x + b_1y + c_1 = 0 \text{ і}$$

$ax + by + c = 0$. Якщо $a_1b - ab_1 = 0$, рівняння (1.12) зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними заміною $z = ax + by$ або $z = ax + by + c$.

Приклад 1.8. Знайти загальний інтеграл рівняння

$$(2x + y + 1)dx + (x + 2y - 1)dy = 0.$$

Розв'язання.

Задане рівняння можна переписати у вигляді $\frac{dy}{dx} = -\frac{2x + y + 1}{x + 2y - 1}$.

Обчислюємо $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$. Уведемо нові змінні u та v такі, що

$$x = u + \alpha, \quad y = v + \beta. \text{ Числа } \alpha \text{ і } \beta \text{ визначаємо із системи рівнянь } \begin{cases} 2\alpha + \beta + 1 = 0, \\ \alpha + 2\beta - 1 = 0, \end{cases}$$

тобто $\alpha = -1$, $\beta = 1$. Отримаємо однорідне рівняння:

$$(2u + v)du + (u + 2v)dv = 0.$$

Робимо заміну $\frac{v}{u} = z$, $v = zu$, $dv = zdu + u dz$. У результаті цієї заміни

одержуємо рівняння з відокремлюваними змінними:

$$(2u + uz)du + (u + 2uz)(udz + zdu) = 0,$$

$$2u(z^2 + z + 1)du + u^2(1 + 2z)dz = 0.$$

Відокремлюючи змінні, отримаємо:

$$\frac{2}{u}du + \frac{1 + 2z}{z^2 + z + 1}dz = 0.$$

Інтегруємо його:

$$2\ln|u| + \ln|z^2 + z + 1| = \ln|C|,$$

або, після потенціювання та повернення до змінних, урахувавши, що $z = \frac{v}{u}$ і

$u = x + 1$ та $v = y - 1$, остаточно отримаємо:

$$u^2(z^2 + z + 1) = C, \quad u^2\left(\frac{v^2}{u^2} + \frac{v}{u} + 1\right) = C, \quad v^2 + vu + u^2 = C,$$

$$(y - 1)^2 + (y - 1)(x + 1) + (x + 1)^2 = C,$$

$$y^2 + x^2 + yx - y + x - 1 = C.$$

Приклад 1.9. Знайти загальний інтеграл рівняння

$$(x + y + 2)dx + (2x + 2y - 1)dy = 0.$$

Розв'язання.

Рівняння можна записати у вигляді $\frac{dy}{dx} = -\frac{x + y + 2}{2x + 2y - 1}$. Оскільки

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0, \text{ заміною } x + y = z, \quad dy = dz - dx \text{ рівняння перетворюється}$$

на рівняння з відокремлюваними змінними:

$$(z + 2)dx + (2z - 1)(dz - dx) = 0,$$

$$(3 - z)dx + (2z - 1)dz = 0.$$

Відокремлюючи змінні та інтегруючи, отримаємо $dx - \frac{2z-1}{3-z} dz = 0$,
 $-2z - 5 \ln|z-3| + x = -C$, або, після повернення до старих змінних:

$$x + 2y + 5 \ln|x+y-3| = C.$$

Контрольні питання та завдання

1. Який вигляд мають диференціальні рівняння, що зводяться до однорідних?

1.7 Лінійне рівняння першого порядку. Підстановка

Бернуллі

Визначення. Лінійним диференціальним рівнянням першого порядку називають рівняння, лінійне відносно невідомої функції y та її похідної y' :

$$y' + P(x)y = Q(x), \quad (1.13)$$

де $P(x)$ і $Q(x)$ – задані неперервні функції від x .

Якщо $Q(x) \equiv 0$, то рівняння (1.13) називають *лінійним однорідним*, якщо $Q(x) \neq 0$, то *лінійним неоднорідним*.

Лінійне однорідне рівняння є рівнянням з відокремлюваними змінними. Його розв'язок можна записати у вигляді:

$$y' + P(x)y = 0, \quad \frac{y'}{y} = -P(x), \quad \frac{dy}{y} = -P(x) dx,$$

$$\ln|y| = -\int P(x) dx + \ln|C| \Rightarrow y = Ce^{-\int P(x) dx}. \quad (1.14)$$

Існує кілька способів розв'язання цього рівняння.

Метод Бернуллі. Шукаємо розв'язок рівняння (1.13) у вигляді добутку двох функцій від x :

$$y = u(x)v(x), \quad (1.15)$$

$$y' = u'v + uv'. \quad (1.16)$$

Підставивши y і y' до (1.13), отримаємо:

$$u'v + uv' + P(x)uv = Q(x) \Rightarrow$$

$$u(v' + P(x)v) + u'v = Q(x). \quad (1.17)$$

Виберемо функцію v такою, щоб вираз у дужках дорівнював нулю:

$$v' + P(x)v = 0, \text{ тоді} \quad (1.18)$$

$$\frac{dv}{dx} + P(x)v = 0, \Rightarrow \frac{dv}{v} + P(x)dx = 0, \quad \ln|v| - \ln|C| = -\int P(x)dx,$$

$$\frac{v}{C} = e^{-\int P(x)dx}, \quad v = C e^{-\int P(x)dx}. \quad (1.19)$$

Оскільки достатньо будь-якого відмінного від нуля розв'язку рівняння (1.15), то як функцію $v(x)$ візьмемо $v = e^{-\int P(x)dx}$ ($C=1$).

Підставляючи знайдену функцію $v(x)$ до (1.17), одержимо рівняння з відокремленими змінними для функції $u(x)$:

$$\frac{du}{dx} = \frac{Q(x)}{v(x)}, \quad du = \frac{Q(x)}{v(x)}dx, \quad u = \int \frac{Q(x)}{v(x)}dx + C.$$

Підставляючи $u(x)$ й $v(x)$ до (1.14), одержуємо загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння у вигляді:

$$y = v(x) \left[\int \frac{Q(x)}{v(x)}dx + C \right] \Rightarrow \\ y = e^{-\int P(x)dx} \left[\int Q(x) e^{\int P(x)dx} dx + C \right]. \quad (1.20)$$

Розв'язок задачі Коші для рівняння (1.20) має вигляд:

$$y = e^{-\int_{x_0}^x P(t)dt} \left[y_0 + \int_{x_0}^x Q(t) e^{\int_{x_0}^t P(t)dt} dt \right]. \quad (1.21)$$

Приклад 1.10. Розв'язати рівняння

$$y' - \frac{2}{x+1}y = (x+1)^3.$$

Розв'язання.

Скориставшись (1.13), (1.14), отримаємо $y = uv$, $y' = u'v + uv'$, тому

$$u'v + uv' - \frac{2}{x+1}uv = (x+1)^3, \quad u \left(v' - \frac{2}{x+1}v \right) + u'v = (x+1)^3.$$

Виберемо функцію v такою, щоб $v' - \frac{2}{x+1} v = 0$, тоді

$$\frac{dv}{dx} - \frac{2v}{x+1} = 0, \quad \frac{dv}{v} - \frac{2dx}{x+1} = 0, \quad \ln |v| - 2 \ln |x+1| = \ln |C|,$$

$$\ln \left| \frac{v}{(x+1)^2} \right| = \ln |C|, \quad v = C(x+1)^2, \quad v = (x+1)^2.$$

$$u'(x+1)^2 = (x+1)^3, \quad u' = x+1, \quad \frac{du}{dx} = x+1, \quad du = (x+1) dx,$$

$$u = \frac{(x+1)^2}{2} + C.$$

Підставляючи u й v , одержуємо загальний розв'язок рівняння:

$$y = \frac{(x+1)^4}{2} + C(x+1)^2.$$

Контрольні питання та завдання

1. Яке диференціальне рівняння першого порядку називають лінійним?
2. Яке рівняння називають лінійним однорідним диференціальним рівнянням першого порядку?
3. Поясніть сутність методу Бернуллі інтегрування лінійного рівняння.
4. Розв'язати рівняння:

$$\text{а) } y' + 2xy = xe^{-x^2}; \quad \text{б) } y' + xy = x^3.$$

1.8 Метод варіації довільної сталої (метод Лагранжа)

Спочатку розв'язуємо відповідне лінійне однорідне рівняння $y' + P(x)y = 0$. Це рівняння з відокремленими змінними, його загальний розв'язок має вигляд:

$$y = Ce^{-\int P(x) dx}.$$

У цьому розв'язку сталу C розглядаємо як невідому функцію від x і добираємо її так, щоб функція

$$y = C(x) e^{-\int P(x) dx} \quad (1.22)$$

відповідала лінійному неоднорідному рівнянню (1.13). Диференціюючи і підставляючи (1.22) до (1.13), отримаємо:

$$\begin{aligned}y' &= C'(x) e^{-\int P(x) dx} - C(x) e^{-\int P(x) dx} P(x), \\C'(x) e^{-\int P(x) dx} - C(x) e^{-\int P(x) dx} P(x) + C(x) e^{-\int P(x) dx} P(x) &= Q(x), \\C'(x) e^{-\int P(x) dx} &= Q(x), \quad C'(x) = Q(x) e^{\int P(x) dx}, \\C(x) &= \int Q(x) e^{\int P(x) dx} dx + C, \\y &= e^{-\int P(x) dx} [\int Q(x) e^{\int P(x) dx} dx + C].\end{aligned}\tag{1.23}$$

Він збігається з розв'язком (1.20), знайденим методом Бернуллі.

Приклад 1.11. Розв'язати методом Лагранжа рівняння

$$y' - \frac{2}{x+1} y = (x+1)^3.$$

Розв'язання.

Спочатку знайдемо загальний розв'язок відповідного лінійного однорідного рівняння:

$$\begin{aligned}y' - \frac{2}{x+1} y = 0 &\Rightarrow \frac{dy}{y} - \frac{2dx}{x+1} = 0 \Rightarrow \ln |y| - 2 \ln |x+1| = \ln |C| \Rightarrow \\ \ln \left| \frac{y}{(x+1)^2} \right| &= \ln |C| \Rightarrow y = C (x+1)^2.\end{aligned}$$

Вважаючи в цьому розв'язку сталу C як невідому функцію змінної x , шукаємо розв'язок лінійного неоднорідного рівняння у вигляді:

$$y = C(x) (x+1)^2, \quad y' = C'(x) (x+1)^2 + 2C(x) (x+1).$$

Підставимо y , y' до вихідного рівняння і з отриманого диференціального рівняння знайдемо функцію $C(x)$:

$$\begin{aligned}C'(x) (x+1)^2 + 2C(x) (x+1) - \frac{2}{x+1} C(x) (x+1)^2 &= (x+1)^3, \\C'(x) &= x+1, \quad C(x) = \int (x+1) dx = \frac{(x+1)^2}{2} + C.\end{aligned}$$

Отже, $y = \frac{(x+1)^4}{2} + C(x+1)^2$ є загальним розв'язком цього лінійного неоднорідного рівняння.

Контрольні питання та завдання

1. Поясніть сутність методу варіації довільної сталої інтегрування лінійного рівняння.

2. Розв'язати рівняння:

а) $y' + \frac{y}{x} = -\frac{1}{x^2}$; б) $y' - \frac{y}{x} = x$.

3. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння:

$$y' - y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}, \quad y(0) = 1.$$

1.9 Рівняння Бернуллі

Визначення. Рівняння вигляду

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n, \quad (1.24)$$

де $n \in \mathbb{R}$, $n \neq 0$, $n \neq 1$, називають *рівнянням Бернуллі*.

Розділимо обидві частини рівняння (1.24) на y^n :

$$y^{-n}y' + P(x)y^{1-n} = Q(x)$$

Уведемо позначення $y^{n-1} = z$, тоді $z' = (1-n)y^{-n}y'$.

$$z' + (1-n)P(x)z = (1-n)Q(x).$$

Отримали лінійне неоднорідне рівняння відносно z . Розв'язавши це рівняння та повертаючись до старих змінних, знайдемо загальний інтеграл рівняння Бернуллі.

Якщо $n > 0$, то $y = 0$ завжди є розв'язком рівняння Бернуллі.

Однак зручніше розв'язок рівняння Бернуллі шукати у вигляді $y = uv$ або застосовувати метод, аналогічний методу варіації довільної сталої, не зводячи його до лінійного рівняння.

Приклад 1.12. Знайти загальний розв'язок рівняння $y' + \frac{2}{x}y = \frac{y^3}{x^3}$.

Розв'язання.

Це рівняння Бернуллі ($n = 3$). Розділимо обидві частини рівняння на y^3 :

$$\frac{y'}{y^3} + \frac{2}{x}y^{-2} = \frac{1}{x^3}.$$

Зробимо заміну змінних $z = y^{-2}$, тоді $z' = -2y^{-3}y'$.

$$-\frac{1}{2} \frac{dz}{dx} + \frac{2}{x}z = \frac{1}{x^3}, \quad \frac{dz}{dx} - \frac{4}{x}z = -\frac{2}{x^3}.$$

Одержали лінійне неоднорідне рівняння. Розв'яжемо відповідне однорідне рівняння:

$$\frac{dz}{dx} - \frac{4}{x}z = 0, \quad \frac{dz}{z} - \frac{4dx}{x} = 0, \quad \ln|z| - 4\ln|x| = \ln|C|,$$

$$\ln \left| \frac{z}{x^4} \right| = \ln|C|, \quad z = Cx^4.$$

Уважаючи в цьому розв'язку сталу C функцією від x , шукаємо розв'язок лінійного неоднорідного рівняння у вигляді:

$$z = C(x)x^4, \quad z' = C'(x)x^4 + 4C(x)x^3.$$

Підставимо в лінійне неоднорідне рівняння z , z' і з отриманого диференціального рівняння знайдемо функцію $C(x)$:

$$C'(x)x^4 + 4C(x)x^3 - \frac{4}{x}C(x)x^4 = -\frac{2}{x^3},$$

$$C'(x) = -\frac{2}{x^7}, \quad C(x) = \frac{2}{6x^6} + C = \frac{1}{3x^6} + C.$$

$$z = \left(\frac{1}{3x^6} + C \right) x^4 = \frac{1}{3x^2} + Cx^4 \quad - \quad \text{загальний розв'язок лінійного}$$

неоднорідного рівняння.

$$\frac{1}{y^2} = \frac{1}{3x^2} + Cx^4, \quad y^2 = \frac{1}{\frac{1}{3x^2} + Cx^4},$$

$y = \pm \sqrt{\frac{3x^2}{1+3Cx^6}}$ – загальний розв’язок рівняння Бернуллі.

Оскільки $n = 3 > 0$, то $y = 0$ – теж розв’язок цього рівняння.

Приклад 1.13. Знайти частинний розв’язок рівняння $y' = \frac{4}{x}y + x\sqrt{y}$, що відповідає початковій умові $y(1) = 4$.

Розв’язання.

Це рівняння Бернуллі ($n = \frac{1}{2}$). Розділимо обидві частини рівняння на $\sqrt{y}$:

$$\frac{y'}{\sqrt{y}} - \frac{4}{x}\sqrt{y} = x.$$

Зробимо заміну змінних $z = \sqrt{y}$, тоді $z' = \frac{1}{2\sqrt{y}}y'$. Отримаємо лінійне неоднорідне рівняння:

$$2z' - \frac{4z}{x} = x, \quad z' - \frac{2z}{x} = \frac{x}{2}.$$

Скористаємося методом Бернуллі, шукатимемо розв’язок у вигляді $z = u(x)v(x)$, де $u(x)$ і $v(x)$ – неперервні функції від x .

Підставимо тепер $z = uv$ і $z' = u'v + uv'$ у останнє рівняння:

$$u'v + uv' - \frac{2uv}{x} = \frac{x}{2}.$$

Для визначення двох невідомих функцій $u(x)$ і $v(x)$ одного рівняння недостатньо. Оскільки одна із функцій, наприклад $v(x)$, може бути вибрана довільно, визначимо її так, щоб коефіцієнт при функції $u(x)$ у виразі

$$u'v + u\left(v' - \frac{2v}{x}\right) = \frac{x}{2}$$

перетворився на нуль, тобто, щоб $v' - \frac{2v}{x} = 0$. Це рівняння з відокремленими змінними, відокремивши які

$$\frac{v'}{v} = \frac{2}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{v} = \frac{2dx}{x}$$

і проінтегрувавши, одержимо:

$$\int \frac{dv}{v} = \int \frac{2dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \ln|v| = 2\ln|x| + \ln|C| \quad \Rightarrow \quad v(x) = x^2.$$

Тут досить знайти який-небудь частинний розв'язок, тому ми прийняли сталу інтегрування $C=1$.

Тепер підставимо функцію $v = x^2$ у рівняння $u'v + u\left(v' - \frac{2v}{x}\right) = \frac{x}{2}$. Знову

отримаємо рівняння з відокремлюваними змінними:

$$u'x^2 = \frac{x}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dx} = \frac{1}{2x},$$

інтегруючи яке, визначимо:

$$\int du = \int \frac{dx}{2x} \quad \Rightarrow \quad u(x) = \frac{1}{2} \ln|x| + C.$$

Отже, $z = u(x)v(x) = \left(\frac{1}{2} \ln|x| + C\right)x^2$.

Виконуючи обернену заміну $z = \sqrt{y}$, отримаємо:

$$\sqrt{y} = \left(\frac{1}{2} \ln|x| + C\right)x^2, \quad \text{або} \quad y = \left(\frac{1}{2} \ln|x| + C\right)^2 x^4.$$

Визначимо довільну сталу C , скориставшись початковою умовою:

$$y(1) = 4 \quad \Rightarrow \quad 4 = \left(\frac{1}{2} \ln 1 + C\right)^2 \quad \Rightarrow \quad C = 2.$$

Підставляючи це значення в загальний розв'язок, знайдемо шуканий частинний розв'язок:

$$y = \left(\frac{1}{2} \ln|x| + 2\right)^2 x^4.$$

Приклад 1.14. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$(x - x^3 \sin y)dy = 2ydx.$$

Розв'язання.

Якщо поділити обидві частини рівняння на ydy , то отримаємо рівняння Бернуллі відносно функції $x(y)$:

$$x - x^3 \sin y = 2yx', \quad x' - \frac{x}{2y} = -\frac{x^3 \sin y}{2y}.$$

Застосуємо метод Бернуллі безпосередньо до заданого рівняння, поклавши

$$x = u(y)v(y) \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dy} = \frac{du}{dy}v + u\frac{dv}{dy}.$$

Тоді

$$\frac{du}{dy}v + u\frac{dv}{dy} - \frac{uv}{2y} = -\frac{u^3v^3 \sin y}{2y}, \quad \frac{du}{dy}v + u\left(\frac{dv}{dy} - \frac{v}{2y}\right) = -\frac{u^3v^3 \sin y}{2y}.$$

Покладемо $\frac{dv}{dy} - \frac{v}{2y} = 0$ і знайдемо функцію $v(y)$:

$$\frac{dv}{dy} = \frac{v}{2y} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dv}{v} = \int \frac{dy}{2y} \quad \Rightarrow \quad \ln|v| = \frac{1}{2}\ln|y| + \ln|C| \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{y}.$$

Потім підставимо функцію $v = \sqrt{y}$ в рівняння

$$\frac{du}{dy}v + u\left(\frac{dv}{dy} - \frac{v}{2y}\right) = -\frac{u^3v^3 \sin y}{2y} \text{ і відокремимо змінні:}$$

$$\frac{du}{dy}\sqrt{y} = -\frac{u^3y\sqrt{y} \sin y}{2y}, \quad \frac{du}{u^3} = -\frac{\sin y}{2}dy.$$

Інтегруючи, знаходимо функцію $u(y)$:

$$-\frac{1}{2u^2} = \frac{1}{2}\cos y + C \quad \Rightarrow \quad u = \pm \sqrt{\frac{1}{-\cos y - 2C}}.$$

Отже, загальний розв'язок рівняння має вигляд:

$$x(y) = u(y)v(y) = \pm \sqrt{\frac{y}{-\cos y - 2C}}.$$

Контрольні питання та завдання

1. Яке рівняння називають рівнянням Бернуллі?
2. Якими методами можна розв'язати рівняння Бернуллі?

3. Розв'язати рівняння:

а) $y' + \frac{y}{x} = -xy^2$; б) $y' + \frac{y}{x} = x^2 y^4$.

1.10 Рівняння Ріккати

Визначення. Рівнянням Ріккати називають рівняння, що має вигляд:

$$y' + P(x)y + Q(x)y^2 = R(x), \quad (1.25)$$

де $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ – задані неперервні функції від x .

У загальному випадку це рівняння не зводиться до квадратур. Але, якщо вдається знайти частинний розв'язок $y_1(x)$ рівняння (1.25), то заміна $y = y_1 + z$

зводить його до рівняння Бернуллі, а заміна $y = y_1 + \frac{1}{z}$ – до лінійного рівняння.

Приклад 1.15. Розв'язати рівняння $x^2 y' - x^2 y^2 + 5xy - 3 = 0$.

Розв'язання.

Це рівняння є рівнянням Ріккати. Його частинний розв'язок має вигляд

$y_1(x) = \frac{1}{x}$. Зробимо заміну змінних $y = \frac{1}{x} + u$, $y' = -\frac{1}{x^2} + u'$. Тоді

$$x^2 \left(u' - \frac{1}{x^2} \right) - x^2 \left(u^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{2u}{x} \right) + 5x \left(u + \frac{1}{x} \right) - 3 = 0,$$

$$x^2 u' - 1 - x^2 u^2 - 1 - 2ux + 5 + 5xu - 3 = 0, \quad x^2 u' + 3xu = x^2 u^2.$$

Це рівняння Бернуллі. Для його інтегрування застосуємо спосіб, аналогічний методу варіації довільної сталої. Спочатку проінтегруємо рівняння $x^2 u' + 3xu = 0$. Розділивши змінні, маємо:

$$\frac{du}{u} = -\frac{3dx}{x}, \quad \ln|u| = -3\ln|x| + \ln|C|, \quad u = \frac{C}{x^3}.$$

Далі шукаємо розв'язок рівняння Бернуллі у вигляді $u = \frac{C(x)}{x^3}$, звідки

$u' = \frac{C'(x)}{x^3} - \frac{3C(x)}{x^4}$. Підставляючи у рівняння u та u' , отримаємо:

$$\frac{C'(x)}{x} - \frac{3C(x)}{x^2} + \frac{3C(x)}{x^2} = \frac{x^2 C^2(x)}{x^6}, \quad C'(x) = \frac{C^2(x)}{x^3},$$

$$\frac{dC(x)}{C^2(x)} = \frac{dx}{x^3}, \quad -\frac{1}{C(x)} = -\frac{1}{2x^2} - C_1, \quad C(x) = \frac{2x^2}{1 + 2C_1 x^2}.$$

Отже, $u = \frac{2}{(1 + Cx^2)x}$. Це загальний розв'язок рівняння Бернуллі. Після

заміни $y = \frac{1}{x} + u$ маємо: $y = \frac{1}{x} + \frac{2}{(1 + Cx^2)x}$, або $y = \frac{Cx^2 + 3}{Cx^3 + x}$.

Контрольні питання та завдання

1. Яке рівняння називають рівнянням Ріккати?

1.11 Рівняння у повних диференціалах

Визначення. Рівняння

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0, \quad (1.26)$$

у якому ліва частина є повним диференціалом деякої функції $u(x, y)$, називають *рівнянням у повних диференціалах*,

Необхідною і достатньою умовою того, що рівняння (1.26) є рівнянням у повних диференціалах, слугує рівність частинних похідних:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}, \quad (1.27)$$

причому $\frac{\partial M}{\partial y}$ і $\frac{\partial N}{\partial x}$ неперервні функції у деякій області.

Доведемо, що якщо ліва частина рівняння (1.26) є повним диференціалом, то виконується умова (1.27), і якщо виконується умова (1.27), ліва частина рівняння (1.26) є повним диференціалом деякої функції $u(x, y)$, тобто рівняння (1.26) має вигляд:

$$du(x, y) = 0,$$

звідки, інтегруючи, маємо загальний інтеграл $u(x, y) = C$.

Припустимо спочатку, що ліва частина рівняння (1.26) є повний диференціал деякої функції $u(x, y)$, тобто:

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy;$$

тоді

$$M = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad N = \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Диференціюємо перше співвідношення по y , а друге – по x , отримаємо:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}.$$

Якщо функції $M(x, y)$ та $N(x, y)$ неперервні і мають неперервні частинні похідні першого порядку, то на підставі теореми про рівність мішаних похідних отримаємо:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x},$$

тобто рівність (1.27) є необхідною умовою для того, щоб ліва частина рівняння (1.26) була повним диференціалом деякої функції $u(x, y)$.

Покажемо, що ця умова є і достатньою для того, щоб рівняння (1.26) було в повних диференціалах. Дійсно, шукатимемо таку диференційовану функцію $u(x, y)$, щоб

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y),$$

причому умова $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ справджується.

За співвідношенням $\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y)$ знаходимо $u(x, y) = \int_{x_0}^x M(x, y) dx + \varphi(y)$,

де x_0 – абсциса будь-якої точки з області існування розв'язку.

Інтегруючи по x , вважаємо y сталим і тому довільна стала інтегрування може залежати від y . Доберемо функцію $\varphi(y)$ так, щоб виконувалося

співвідношення $\frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y)$. Для цього продиференціюємо обидві частини останньої рівності по y і результат прирівняємо до $N(x, y)$:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \int_{x_0}^x \frac{\partial M}{\partial y} dx + \varphi'(y) = N(x, y);$$

але, за умовою $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ $\int_{x_0}^x \frac{\partial N}{\partial x} dx + \varphi'(y) = N(x, y)$, тобто

$$N(x, y) \Big|_{x_0}^x + \varphi'(y) = N(x, y), \text{ або}$$

$$N(x, y) - N(x_0, y) + \varphi'(y) = N(x, y) .$$

Отже, $\varphi'(y) = N(x_0, y)$. Це диференціальне рівняння відносно невідомої функції $\varphi(y)$. Розв'язавши його, знайдемо:

$$\varphi(y) = \int_{y_0}^y N(x_0, y) dy + C_1.$$

Отже, функція $u(x, y)$ матиме вигляд:

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x M(x, y) dx + \int_{y_0}^y N(x_0, y) dy + C_1.$$

Тут $P(x_0; y_0)$ – довільна точка, в околі якої існує розв'язок диференціального рівняння (1.26).

Прирівнюючи цей вираз до довільної сталої C , одержимо загальний інтеграл рівняння (1.26):

$$\int_{x_0}^x M(x, y) dx + \int_{y_0}^y N(x_0, y) dy = C .$$

Приклад 1.16. Знайти загальний інтеграл рівняння

$$(e^x + y + \sin y)dx + (e^y + x + x \cos y)dy = 0 .$$

Розв'язання.

Переконаємося в тому, що задане рівняння є рівнянням у повних диференціалах.

$$\text{Тут } M(x, y) = e^x + y + \sin y, \quad N(x, y) = e^y + x + x \cos y, \quad \frac{\partial M}{\partial y} = 1 + \cos y,$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 1 + \cos y. \text{ Умова (1.27) виконується. Отже, ліва частина рівняння є повним}$$

диференціалом деякої функції $u(x, y)$, тобто:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x + y + \sin y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = e^y + x + x \cos y.$$

Проінтегруємо перше співвідношення за змінною x , вважаючи y фіксованою. Водночас стала інтегрування може залежати від y , тобто з'являється невідома функція від y :

$$u = \int (e^x + y + \sin y) dx + C(y) = e^x + xy + x \sin y + C(y).$$

Диференціюючи останній вираз за змінною y і підставляючи у друге співвідношення $\frac{\partial u}{\partial y} = e^y + x + x \cos y$, знайдемо спочатку $C'(y)$, а потім і $C(y)$:

$$x + x \cos y + C'(y) = x + x \cos y + e^y \Rightarrow C'(y) = e^y \Rightarrow C(y) = e^y.$$

Отже, шукана функція $u(x, y) = e^x + xy + x \sin y + e^y$, а загальний інтеграл рівняння має вигляд:

$$u(x, y) = C \Rightarrow e^x + xy + x \sin y + e^y = C.$$

Приклад 1.17. Знайти загальний інтеграл рівняння

$$2x \cos^2 y dx + (2y - x^2 \sin 2y) dy = 0.$$

Розв'язання.

Перевіряємо, чи не є це рівняння в повних диференціалах.

$$\text{Тут } M(x, y) = 2x \cos^2 y, \quad N(x, y) = 2y - x^2 \sin 2y,$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -4x \cos y \sin y = -2x \sin 2y, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -2x \sin 2y.$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Отже, умова повного диференціала виконана, тобто задане рівняння є рівнянням у повних диференціалах, а тому:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x \cos^2 y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y - x^2 \sin 2y.$$

Проінтегруємо $\frac{\partial u}{\partial x}$ за x :

$$u = \int 2x \cos^2 y dx + C(y) = x^2 \cos^2 y + C(y).$$

Знайдемо функцію $C(y)$, продиференціювавши останній вираз за y :

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2x^2 \cos y \sin y + C'(y) = -x^2 \sin 2y + C'(y).$$

Отримаємо рівняння:

$$-x^2 \sin 2y + C'(y) = 2y - x^2 \sin 2y,$$

звідки знаходимо $C'(y) = 2y$, тобто $C(y) = y^2$. Отже, загальний інтеграл рівняння має вигляд:

$$x^2 \cos^2 y + y^2 = C.$$

Контрольні питання та завдання

1. Надайте визначення рівняння у повних диференціалах.
2. Яка умова є необхідною та достатньою, щоб диференціальне рівняння першого порядку було рівнянням у повних диференціалах?
3. Знайти загальний інтеграл рівняння:
 - а) $(3x^2 + 6xy)dx + (6x^2y + 4y^3)dy = 0$; б) $e^x dx + (xe^y - 2y)dy = 0$;
 - в) $(y + e^x \sin y)dx + (x + e^x \cos y)dy = 0$; г) $ye^x dx + (y + e^x)dy = 0$.

1.12 Інтегрувальний множник

У деяких випадках, коли рівняння (1.26) не є рівнянням у повних диференціалах, можливо знайти таку функцію $\mu(x, y)$, множення на яку перетворить це рівняння на рівняння в повних диференціалах, тобто, рівняння:

$$\mu M(x, y)dx + \mu N(x, y)dy = 0$$

є рівнянням у повних диференціалах.

Таку функцію $\mu(x, y)$ називають *інтегрувальним множником*. Із визначення інтегрувального множника маємо:

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu M) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu N)$$

$$\text{або } N \frac{\partial \mu}{\partial x} - M \frac{\partial \mu}{\partial y} = \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) \mu,$$

$$\text{звідки } N \frac{\partial \ln \mu}{\partial x} - M \frac{\partial \ln \mu}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}. \quad (1.28)$$

Для знаходження інтегрувального множника отримано рівняння з частинними похідними.

Існують деякі окремі випадки, коли можна порівняно легко знайти розв'язок рівняння (1.26), тобто знайти інтегрувальний множник.

1. Якщо $\mu = \mu(x)$, то $\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0$ й рівняння (1.28) набуває вигляду:

$$\frac{\partial \ln \mu}{\partial x} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}.$$

Для існування інтегрувального множника, який не залежить від змінної y , необхідно й достатньо, щоб права частина рівняння була тільки функцією від x . У такому разі $\ln \mu$ знайдеться квадратурою.

Приклад 1.18. Розв'язати рівняння $(x + y^2)dx - 2xydy = 0$.

Розв'язання.

У такому випадку $M(x, y) = x + y^2$, $N(x, y) = -2xy$. Знайдемо відповідні частинні похідні: $\frac{\partial M}{\partial y} = 2y$, $\frac{\partial N}{\partial x} = -2y$. Ліва частина рівняння не є повним диференціалом. Маємо:

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{2y + 2y}{-2xy} = -\frac{2}{x}.$$

Отже, інтегровальний множник можна знайти за формулою:

$$\frac{\partial \ln \mu}{\partial x} = -\frac{2}{x} \Rightarrow \ln \mu = -2 \ln |x| \Rightarrow \mu = \frac{1}{x^2}.$$

Помножимо вихідне рівняння на $\mu = \frac{1}{x^2}$ та отримаємо рівняння у повних

диференціалах: $\frac{x+y^2}{x^2}dx - 2\frac{xy}{x^2}dy = 0$. Його ліву частину можна подати у

вигляді:

$$\frac{dx}{x} - \frac{2xydy - y^2dx}{x^2} = 0, \quad \text{звідки} \quad d\left(\ln|x| - \frac{y^2}{x}\right) = 0$$

і загальний інтеграл цього рівняння має вигляд: $x = Ce^{-\frac{y^2}{x}}$.

2. Аналогічно, якщо $\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\frac{1}{M}$ є функція тільки y , то рівняння має

інтегровальний множник $\mu = \mu(y)$, що залежить тільки від y .

Приклад 1.19. Розв'язати рівняння $2xy \ln y dx + (x^2 + y^2 \sqrt{y^2 + 1}) dy = 0$.

Розв'язання.

Тут $M(x, y) = 2xy \ln y$, $N(x, y) = x^2 + y^2 \sqrt{y^2 + 1}$. Маємо:

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} = \frac{2x - 2x(\ln y + 1)}{2xy \ln y} = -\frac{1}{y},$$

отже, інтегровальний множник можна знайти з рівняння:

$$\frac{\partial \ln \mu}{\partial y} = -\frac{1}{y}, \quad \mu = \frac{1}{y}.$$

Рівняння $\frac{2xy \ln y}{y} dx + \frac{x^2 + y^2 \sqrt{y^2 + 1}}{y} dy = 0$ є рівнянням у повних

диференціалах. Його можна записати у вигляді:

$$d(x^2 \ln y) + y \sqrt{y^2 + 1} dy = 0, \quad \text{звідки} \quad x^2 \ln y + \frac{1}{3}(y^2 + 1)^{\frac{3}{2}} = C.$$

3. Якщо рівняння (1.26) має інтегрувальний множник вигляду $\mu(x, y) = \mu(\varphi(x, y))$, де $\varphi(x, y)$ – відома функція, то з рівності

$\frac{\partial}{\partial y}(\mu M) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu N)$ легко отримати рівняння:

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N \frac{\partial \varphi}{\partial x} - M \frac{\partial \varphi}{\partial y}}.$$

Приклад 1.20. Розв'язати рівняння

$$(3x + 2y + y^2)dx + (x + 4xy + 5y^2)dy = 0,$$

якщо його інтегрувальний множник має вигляд $\mu = \varphi(x + y^2)$.

Розв'язання.

Якщо $z = x + y^2$, то $\mu = \varphi(z)$, і, отже,

$$\frac{\partial \ln \mu}{\partial x} = \frac{d \ln \mu}{dz} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{d \ln \mu}{dz}, \quad \frac{\partial \ln \mu}{\partial y} = \frac{d \ln \mu}{dz} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{d \ln \mu}{dz} 2y.$$

Рівняння для знаходження інтегрувального множника матиме вигляд:

$$(N - 2My) \frac{d \ln \mu}{dz} = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}, \quad \text{або} \quad \frac{d \ln \mu}{dz} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N - 2My}.$$

Оскільки $M = 3x + 2y + y^2$, $N = x + 4xy + 5y^2$, то $\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N - 2My} = \frac{1}{x + y^2} = \frac{1}{z}$,

і отримуємо $\frac{d \ln \mu}{dz} = \frac{1}{z}$, звідки $\mu = z$, тобто $\mu = x + y^2$. Помножимо задане

рівняння на $\mu = x + y^2$, отримаємо рівняння у повних диференціалах:

$$(3x^2 + 2xy + 4xy^2 + 2y^3 + y^4)dx + (x^2 + 4x^2y + 6xy^2 + 4xy^3 + 5y^4)dy = 0.$$

Загальний інтеграл отриманого рівняння має вигляд:

$$\int_{x_0}^x (3x^2 + 2xy + 4xy^2 + 2y^3 + y^4)dx + \\ + \int_{y_0}^y (x_0^2 + 4x_0^2y + 6x_0y^2 + 4x_0y^3 + 5y^4)dy = C,$$

або $x^3 + x^2y + 2x^2y^2 + 2xy^3 + xy^4 + y^5 = \tilde{C},$

де $\tilde{C} = C + x_0^2y_0 + 2x_0^2y_0^2 + 2x_0y_0^3 + x_0y_0^4 + y_0^5 + x_0^3.$

Після перетворень отримаємо:

$$(x+y)(x+y^2)^2 = \tilde{C}.$$

Контрольні питання та завдання

1. Надайте визначення інтегрувального множника.
2. У якому випадку диференціальне рівняння має інтегрувальний множник $\mu(x)$?
3. У якому випадку диференціальне рівняння має інтегрувальний множник $\mu(y)$?
4. Знайти загальний інтеграл рівняння: $(x^2 - y)dx + (x^2y^2 + x)dy = 0.$

1.13 Рівняння Лагранжа. Рівняння Клеро

Визначення. Рівнянням Лагранжа називають диференціальне рівняння першого порядку, що має вигляд:

$$y = f(y')x + g(y') \quad (1.29)$$

причому $g(y') \neq y'.$

Тут $f(y')$ і $g(y')$ – функції від y' . У диференціальному рівнянні Лагранжа y є лінійною функцією x з коефіцієнтами, що залежать від y' .

Диференціальне рівняння інтегрується за допомогою підстановки:

$$y' = \frac{dy}{dx} = p,$$

де p – параметр. Тоді, замінюючи в рівнянні (1.29) похідну y' на p , отримаємо:

$$y = f(p)x + g(p).$$

Величина p розглядається як допоміжна змінна.

$$dy = xdf(p) + f(p)dx + dg(p) = xf'(p)dp + f(p)dx + g'(p)dp,$$

$$dy = pdx, \quad pdx = f(p)dx + [xf'(p) + g'(p)]dp,$$

звідки $[p - f(p)]dx - [f'(p)x + g'(p)]dp = 0$ й $p - f(p)$:

$$\frac{dx}{dp} - \frac{f'(p)}{p - f(p)}x = \frac{g'(p)}{p - f(p)}.$$

Це лінійне диференціальне рівняння щодо невідомої функції x .

Загальний розв'язок цього диференціального рівняння:

$$x = e^{\int \frac{f'(p)dp}{p - f(p)}} \left[C + \int \frac{g'(p)}{p - f(p)} e^{-\int \frac{f'(p)dp}{p - f(p)}} dp \right].$$

Вилучаємо із загального розв'язку й диференціального рівняння p та отримуємо загальний розв'язок цього диференціального рівняння.

Якщо рівняння $p - f(x) = 0$ має дійсні розв'язки $p = p_i$ ($i = \overline{1, n}$), то, підставляючи їх у диференціальне рівняння (1.29) і враховуючи, що $f(p_i) = p_i$, одержимо:

$$y = p_i x + g(p_i).$$

Ці прямі можуть виявитися особливими розв'язками диференціального рівняння.

Приклад 1.21. Проінтегрувати диференціальне рівняння Лагранжа

$$y = 2xy' - y'^2.$$

Розв'язання.

Якщо $y' = p$, то задане рівняння можна записати у вигляді:

$$y = 2xp - p^2.$$

Оскільки $dy = ydx = pdx$, то

$$dy = 2(pdx + xdp) - 2pdp, \quad \text{або} \quad pdx = 2pdx + (2x - 2p)dp.$$

Звідси

$$pdx + (2x - 2p)dp = 0.$$

Розділивши на pdp , одержуємо лінійне диференціальне рівняння:

$$\frac{dx}{dp} + \frac{2}{p}x = 2.$$

Загальний розв'язок цього рівняння $x = \frac{C}{p^2} + \frac{2}{3}p$.

Підставляючи знайдений загальний розв'язок у задане диференціальне рівняння, отримаємо:

$$y = 2xp - p^2 = 2\left(\frac{C}{p^2} + \frac{2}{3}p\right)p - p^2 = \frac{2C}{p} + \frac{p^2}{3}.$$

Підставляємо $p = 0$ (значення знаменника, за якого перший дріб перетворюється в ∞) у рівність $y = 2xp - p^2$, і отримуємо частинний розв'язок $y = 0$.

Приклад 1.22. Проінтегрувати рівняння $y = 2xy' + \ln y'$

Розв'язання.

Якщо $y' = p$, то $y = 2xp + \ln p$. Диференціюючи, знаходимо:

$$pdx = 2pdx + 2xdp + \frac{dp}{p},$$

звідки $p \frac{dx}{dp} = -2x - \frac{1}{p}$, або $\frac{dx}{dp} = -\frac{2}{p}x - \frac{1}{p^2}$.

Одержимо рівняння першого порядку, лінійне відносно x ; розв'язуємо його та знаходимо:

$$x = \frac{C}{p^2} - \frac{1}{p}.$$

Підставляючи знайдене значення x у вираз для y , одержимо остаточно:

$$x = \frac{C}{p^2} - \frac{1}{p}, \quad y = \ln p + \frac{2C}{p} - 2.$$

Визначення. Рівнянням Клеро називають диференціальне рівняння першого порядку, що має вигляд:

$$y = xy' + g(y'). \quad (1.30)$$

Це диференціальне рівняння є частинним випадком рівняння Лагранжа й відрізняється від останнього тим, що в ньому коефіцієнт при x дорівнює y' , а не функції від y' . Нехай $y' = p$. Тоді рівняння набуде вигляду:

$$y = xp + g(p). \quad (1.31)$$

Виконуючи перетворення, маємо:

$$dy = p dx + x dp + dg(p), \quad p dx = p dx + x dp + g'(p) dp, \quad (x + g'(p)) dp = 0.$$

Рівняння розпадається на два рівняння:

$$dp = 0 \quad \text{і} \quad x + g'(p) = 0.$$

Із рівняння $dp = 0$ отримуємо: $p = C$. Підставляючи це значення в рівняння (1.31), одержуємо загальний розв'язок рівняння Клеро:

$$y = xC + g(C).$$

Особливий розв'язок – це такий розв'язок диференціального рівняння, який не утворюється із загального інтеграла (розв'язку) ні за якого певного значення довільної сталої C .

Рівняння $x + g'(p) = 0$ й рівняння (1.31) утворять систему:

$$\begin{cases} x + g'(p) = 0, \\ y = xp + g(p). \end{cases}$$

Вилучаючи із цієї системи p , знаходимо особливий розв'язок, який являє собою обвідну сім'ї прямих, що утворюють загальний розв'язок.

Приклад 1.23. Проінтегрувати диференціальне рівняння Клеро

$$y = xy' + y'^2.$$

Розв'язання.

Заміняючи в цьому рівнянні похідну y' на C , одержуємо загальний розв'язок $y = xC + C^2$.

Обвідну знаходимо, використовуючи систему:

$$\begin{cases} y = xC + C^2, \\ 0 = x + 2C \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x = -2C, \\ y = -C^2. \end{cases}$$

Із першого рівняння системи знаходимо $C = -\frac{x}{2}$. Підставляючи це

значення в друге рівняння системи, отримуємо особливий розв'язок $y = -\frac{x^2}{4}$,

який графічно являє собою обвідну кривих $y = xC + C^2$.

Інтегральними кривими заданого диференціального рівняння є парабола $y = -\frac{x^2}{4}$ й можливі дотичні до неї.

Приклад 1.24. Проінтегрувати рівняння $y = xy' + \frac{a}{2y'}$ ($a = \text{const}$).

Розв'язання.

Уважаючи $y' = p$, одержуємо $y = xp + \frac{a}{2p}$.

Диференціюючи останнє рівняння й замінюючи dy на pdx , знайдемо:

$$pdx = pdx + xdp - \frac{a}{2p^2} dp, \quad \text{звідки} \quad dp \left(x - \frac{a}{2p^2} \right) = 0.$$

Прирівнюючи до нуля перший множник, одержуємо $dp = 0$, звідки $p = C$

й загальний розв'язок заданого рівняння $y = Cx + \frac{a}{2C}$ є однопараметричною

сім'єю прямих. Прирівнюючи до нуля другий множник, отримаємо $x = \frac{a}{2p^2}$.

Вилучаючи p із цього рівняння й з рівняння $y = xp + \frac{a}{2p}$, одержимо $y^2 = 2ax$ – це теж розв'язок цього рівняння (особливий розв'язок).

Із огляду геометрії крива $y^2 = 2ax$ – це обвідна сім'ї прямих, заданих загальним розв'язком.

Контрольні питання та завдання

1. Яке диференціальне рівняння називають рівнянням Лагранжа?
2. Яке диференціальне рівняння називають рівнянням Клеро?

РОЗДІЛ 2 ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

2.1 Диференціальні рівняння вищих порядків, що допускають зниження порядку

$$\text{Рівняння} \quad y^{(n)} = f(x) \quad (2.1)$$

Розв'язок цього рівняння знаходять послідовним n -кратним інтегруванням:

$$y^{(n)} = f(x),$$

$$y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1 = f_1(x) + C_1,$$

$$y^{(n-2)} = \int [f_1(x) + C_1]dx = f_2(x) + C_1x + C_2,$$

.....

$$y = f_n(x) + \frac{C_1}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{C_2}{(n-2)!}x^{n-2} + \dots + C_{n-1}x + C_n,$$

де $f_n(x) = \int \int \int f(x) dx^n$.
n раз

Урахувавши, що $\frac{C_1}{(n-1)!}$, $\frac{C_2}{(n-2)!}$, ..., є довільні сталі, загальний розв'язок (2.1)

може бути записаний у вигляді:

$$y = f_n(x) + C_1x^{n-1} + C_2x^{n-2} + \dots + C_{n-1}x + C_n.$$

Приклад 2.1. Знайти розв'язок задачі Коші: $y'' = xe^{-x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Розв'язання.

Знайдемо загальний розв'язок послідовним інтегруванням цього рівняння:

$$y' = \int xe^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C_1,$$

$$y = \int [-xe^{-x} - e^{-x} + C_1]dx = xe^{-x} + 2e^{-x} + C_1x + C_2.$$

$$y = (x + 2)e^{-x} + C_1x + C_2.$$

Скористаємося початковими умовами: $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

$$y' = e^{-x} - (x+2)e^{-x} + C_1$$

$$y'(0) = 0: \quad 0 = e^0 - 2e^0 + C_1, \quad C_1 = 1.$$

$$y(0) = 1: \quad 1 = 2e^0 + C_2, \quad C_2 = -1.$$

Отже, шуканий частинний розв'язок має вигляд:

$$y = (x+2)e^{-x} + x - 1.$$

Рівняння $y'' = F(x, y')$ не містить шуканої функції y

Уводимо заміну змінних $y' = z$, $y'' = \frac{dz}{dx}$. Така заміна дозволяє звести це

рівняння до рівняння першого порядку $z' = f(x, z)$.

Приклад 2.2. Розв'язати рівняння $y'' + y' \operatorname{tg} x = \sin 2x$.

Розв'язання.

Це рівняння не містить змінної y . Уважаючи $y' = z$, перетворимо рівняння до вигляду $z' + z \operatorname{tg} x = \sin 2x$. Ми отримали лінійне диференціальне рівняння першого порядку відносно функції z . Інтегруємо його. Уважаючи в рівнянні $z = u v$, $z' = u' v + u v'$, одержимо:

$$u' v + u v' + u v \operatorname{tg} x = \sin 2x, \quad u' v + u (v' + v \operatorname{tg} x) = \sin 2x.$$

Визначаємо v , узявши $v' + v \operatorname{tg} x = 0$, $\frac{dv}{dx} + v \operatorname{tg} x = 0$, $\int \frac{dv}{v} = \int -\frac{\sin x}{\cos x} dx$,

звідки $\ln |v| = \ln |\cos x|$, або $v = \cos x$.

Визначимо $u(x)$:

$$\cos x \frac{du}{dx} = 2 \sin x \cos x, \quad du = 2 \sin x dx \Rightarrow u(x) = -2 \cos x + C_1; \text{ отже,}$$

$$z = -2 \cos^2 x + C_1 \cos x.$$

Повертаючись до змінної y , отримаємо:

$$\frac{dy}{dx} = -2 \cos^2 x + C_1 \cos x, \quad y = -2 \int \cos^2 x dx + \int C_1 \cos x dx + C_2,$$

$$y = -2 \int \frac{1 + \cos 2x}{2} dx + C_1 \sin x + C_2, \quad y = -x - \frac{\sin 2x}{2} + C_1 \sin x + C_2.$$

Диференціальне рівняння $F(y, y', y'') = 0$ не містить незалежної змінної

Це рівняння допускає пониження порядку за допомогою заміни $y' = z(y)$, де $z(y)$ – нова шукана функція, y – нова незалежна змінна. Тоді $y'' = z \frac{dz}{dy}$, або $y'' = zz'$. Отримаємо $F(y, y', y'') = \tilde{F}(y, z, z') = 0$.

Приклад 2.3. Розв'язати рівняння $2yy'' = 1 + y'^2$.

Розв'язання.

Уважаючи $y' = z$, $y'' = z z'$, отримаємо рівняння I порядку відносно невідомих z як функції від y :

$$2y z z' = 1 + z^2.$$

Розділимо змінні й проінтегруємо:

$$\frac{2z}{1+z^2} dz - \frac{dy}{y} = 0 \Rightarrow \ln |1+z^2| - \ln |y| = \ln |C_1| \Rightarrow$$

$$\frac{1+z^2}{y} = C_1 \Rightarrow 1+z^2 = yC_1 \Rightarrow z = \pm \sqrt{yC_1 - 1}.$$

Повертаючись до змінної x , отримаємо:

$$y' = \pm \sqrt{yC_1 - 1}, \quad \pm \frac{dy}{\sqrt{yC_1 - 1}} = dx, \quad \pm \frac{2}{C_1} \sqrt{yC_1 - 1} = x + C_2,$$

$$\pm 2\sqrt{yC_1 - 1} = C_1(x + C_2), \quad 4(yC_1 - 1) = C_1^2(x + C_2)^2,$$

$$4yC_1 = C_1^2(x + C_2)^2 + 4, \quad y = \frac{C_1^2(x + C_2)^2 + 4}{4C_1}.$$

Задача Коші для рівняння другого порядку полягає в розв'язанні рівняння $F(x, y, y', y'') = 0$, яке відповідає початковим умовам $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$. Із огляду геометрії ці умови означають, що з множини інтегральних кривих загального розв'язку рівняння потрібно виділити одну єдину криву, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ і має в цій точці заданий кут нахилу дотичної $y'(x_0) = y'_0$ до додатного напрямку осі Ox .

Приклад 2.4. Знайти розв'язок задачі Коші:

$$y'' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\ln 2}{2}, \quad y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1.$$

Розв'язання.

Спочатку знайдемо загальний розв'язок.

$$y' = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + C, \quad y' = \operatorname{tg} x + C,$$

$$y = \int (\operatorname{tg} x + C) dx \Rightarrow y = -\ln \cos x + Cx + C_1.$$

Підставляємо до загального розв'язку початкові умови та знаходимо C_1 і C :

$$\begin{cases} y = -\ln \cos x + Cx + C_1 \\ y' = \operatorname{tg} x + C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\ln 2}{2} = -\ln \cos \frac{\pi}{4} + C \frac{\pi}{4} + C_1 \\ 1 = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} + C \end{cases} \Rightarrow C = 0.$$

$$\frac{\ln 2}{2} = -\ln \frac{\sqrt{2}}{2} + C_1 \Rightarrow C_1 = 0.$$

Отже, частинний розв'язок задачі після підстановки до загального розв'язку значень C_1 і C має вигляд:

$$y = -\ln \cos x.$$

Рівняння виду $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$, **однорідне щодо** $y, y', y'', \dots, y^{(n)}$

Рівняння зазначеного виду допускає пониження порядку на одиницю із заміною $\frac{y'}{y} = z$, де z – нова невідома функція.

Приклад 2.5. Розв'язати рівняння: $x^2 y y'' - (y - x y')^2 = 0$.

Розв'язання.

Перевіримо, чи є це рівняння однорідним щодо $y, y', y'', \dots, y^{(n)}$.

$$F(x, y, y', y'') = x^2 y y'' - (y - x y')^2,$$

$$F(x, ky, ky', ky'') = x^2 ky ky'' - (ky - x ky')^2 = k^2 (x^2 y y'' - (y - x y')^2)$$

Поділимо обидві частини рівняння на y^2 :

$$x^2 \frac{y''}{y} - \left(1 - x \frac{y'}{y}\right)^2 = 0.$$

Нехай $\frac{y'}{y} = z$, звідки $\frac{y''}{y} - \frac{y'^2}{y^2} = z'$, або $\frac{y''}{y} = z' + z^2$. У результаті

отримаємо рівняння:

$$x^2(z' + z^2) - (1 - xz)^2 = 0, \text{ або } x^2 z' + 2xz = 1, \text{ тобто } z' + \frac{2z}{x} = \frac{1}{x^2}.$$

Отримали лінійне неоднорідне рівняння. Розв'яжемо його методом Бернуллі, тобто знайдемо розв'язок рівняння у вигляді добутку двох функцій від x : $z = u(x)v(x)$. Тоді $z' = u'v + uv'$. Рівняння набуває вигляду:

$$u'v + uv' + 2\frac{uv}{x} = \frac{1}{x^2}, \quad u'v + u\left(v' + 2\frac{v}{x}\right) = \frac{1}{x^2}.$$

Виберемо функцію v такою, щоб дужка в лівій частині рівняння перетворилася на нуль. Унаслідок цього маємо систему двох рівнянь для функцій u і v :

$$\begin{cases} v' + 2\frac{v}{x} = 0, \\ u'v = \frac{1}{x^2} \end{cases}$$

Перше рівняння системи є рівнянням з відокремлюваними змінними.

Розв'яжемо його:

$$v' + 2\frac{v}{x} = 0, \quad \frac{dv}{dx} + 2\frac{v}{x} = 0, \quad , \quad dv + 2\frac{v}{x}dx = 0 \quad \frac{dv}{v} + 2\frac{dx}{x} = 0,$$

$$\int \frac{dv}{v} + 2 \int \frac{dx}{x} = \int 0dC, \quad \ln|v| + 2\ln|x| = \ln|C|, \quad v = \frac{C}{x^2}.$$

Тут досить знайти який-небудь частинний розв'язок, тому беремо сталу інтегрування $C=1$, тобто $v = \frac{1}{x^2}$.

Тепер підставимо функцію $v = \frac{1}{x^2}$ у друге рівняння системи і знову

отримаємо рівняння з відокремлюваними змінними.

$$u' \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2}, \quad u' = 1, \quad \frac{du}{dx} = 1, \quad du = dx, \quad u = \int dx = x + C_1.$$

Підставляючи u й v , одержуємо загальний розв'язок рівняння:

$$z = uv = (x + C_1) \frac{1}{x^2}, \quad \text{або} \quad \frac{y'}{y} = \frac{1}{x} + \frac{C_1}{x^2}$$

Інтегруючи останнє рівняння, отримаємо:

$$\ln |y| = \ln |x| - \frac{C_1}{x} + \ln |C_2|,$$

або

$$y = C_2 x e^{-\frac{C_1}{x}}.$$

Контрольні питання та завдання

1. Наведіть типи рівнянь, порядок яких можна понизити.
2. У якому разі розв'язок диференціального рівняння вищого порядку знаходять безпосереднім інтегруванням?
3. Як понизити порядок рівняння, що не містить шуканої функції y ?
4. Як понизити порядок рівняння, що не містить незалежної змінної x ?
5. Як понизити порядок рівняння однорідного відносно $y, y', y'', \dots, y^{(n)}$?
6. Розв'язати рівняння:

а) $y'' = \sin 3x$;	б) $yy'' - y'^2 = 0$;
в) $y'' + y' \operatorname{tg} x = \sin 2x$;	г) $y''' + 2xy'' = 0$;
д) $x^2 y'' = y'^2$;	є) $x^2 y'' = y'^2$.

2.2 Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

Визначення. Рівняння виду

$$ay'' + by' + cy = 0, \tag{2.2}$$

де a, b, c – сталі, називають *лінійним однорідним диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами*.

Теорема. Якщо $y_1(x)$ і $y_2(x)$ – два лінійно незалежні частинні розв’язки рівняння $ay'' + by' + cy = 0$, $\frac{y_1(x)}{y_2(x)} \neq \text{const}$, то загальний розв’язок цього рівняння:

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x). \quad (2.3)$$

Для визначення частинних розв’язків $y_1(x)$ і $y_2(x)$ рівняння (2.2) складаємо *характеристичне рівняння*:

$$ak^2 + bk + c = 0, \quad (2.4)$$

де k – корінь, який визначають за формулою:

$$k = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, \quad D = b^2 - 4ac.$$

Залежно від коренів характеристичного рівняння (2.4), загальний розв’язок рівняння (2.2) має вигляд:

а) якщо корені рівняння дійсні й різні $k_1 \neq k_2$, то загальний розв’язок $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$; (2.5)

б) якщо корені рівняння дійсні й рівні, тобто $k_1 = k_2 = k$, то загальний розв’язок рівняння (2.2) має вигляд:

$$y = C_1 e^{kx} + C_2 x e^{kx} = e^{kx} (C_1 + C_2 x); \quad (2.6)$$

в) якщо корені рівняння $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ – комплексно спряжені, то загальний розв’язок $y = C_1 e^{\alpha x} \sin \beta x + C_2 e^{\alpha x} \cos \beta x$. (2.7)

Приклад 2.6. Знайти загальний розв’язок рівняння $y'' - 7y' + 6y = 0$.

Розв’язання.

Щоб знайти загальний розв’язок заданого лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами, складемо характеристичне рівняння $k^2 - 7k + 6 = 0$. Знаходимо його корені: $k_1 = 6$, $k_2 = 1$. Оскільки корені дійсні й різні, то загальний розв’язок рівняння має вигляд:

$$y = C_1 e^{6x} + C_2 e^x.$$

Приклад 2.7. Знайти розв'язок задачі Коші: $y'' - 2y' + y = 0$, $y(0) = 4$, $y'(0) = 2$.

Розв'язання.

Характеристичне рівняння, що відповідає заданому однорідному рівнянню, є $k^2 - 2k + 1 = 0$; його корені дійсні й рівні: $k_1 = k_2 = 1$. Отже, загальний розв'язок цього рівняння має вигляд:

$$y = C_1 e^x + C_2 x e^x.$$

Підставимо початкові умови до загального розв'язку і його похідної, отримаємо систему рівнянь відносно C_1 і C_2 :

$$\begin{cases} y' = C_1 e^x + C_2 e^x + C_2 x e^x \\ \begin{cases} 4 = C_1, \\ 2 = C_1 + C_2, \end{cases} \end{cases} \quad \begin{cases} 4 = C_1, \\ -2 = C_2. \end{cases}$$

Звідси розв'язок задачі Коші має вигляд:

$$y = 4e^x - 2xe^x.$$

Приклад 2.8. Знайти загальний розв'язок рівняння $y'' + 2y' + 5y = 0$.

Розв'язання.

Складемо характеристичне рівняння $k^2 + 2k + 5 = 0$; його корені комплексно спряжені: $k_{1,2} = -1 \pm 2i$, а тому шуканий загальний розв'язок заданого рівняння є:

$$y = C_1 e^{-x} \sin 2x + C_2 e^{-x} \cos 2x.$$

Контрольні питання та завдання

1. Яку структуру має загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами?
2. Яке рівняння називають характеристичним?
3. Як побудувати характеристичне рівняння лінійного однорідного рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами?

4. Запишіть вигляд лінійно незалежних розв'язків лінійного однорідного рівняння зі сталими коефіцієнтами, які відповідають парі простих комплексно спряжених коренів $\alpha \pm \beta i$ характеристичного рівняння.

5. Запишіть вигляд лінійно незалежних розв'язків лінійного однорідного рівняння зі сталими коефіцієнтами, які відповідають дійсному кореню кратності m .

6. Знайти загальний розв'язок рівняння:

а) $y'' + 4y' + 3y = 0$;

б) $y'' - 2y' + 2y = 0$;

в) $y'' + 8y' + 16y = 0$;

г) $y'' + 8y' + 25y = 0$.

2.3 Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

Лінійне неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами має вигляд:

$$ay'' + by' + cy = f(x), \quad (2.8)$$

$a, b, c \in \text{const}$, $f(x)$ – задана неперервна функція.

Визначення. Якщо в (2.8) $f(x) = 0$, то рівняння $ay'' + by' + cy = 0$ називають *відповідним однорідним рівнянням*.

Загальний розв'язок Y рівняння (2.8) є сумою будь-якого частинного розв'язку $\bar{y}$ неоднорідного рівняння і загального розв'язку y відповідного однорідного рівняння $ay'' + by' + cy = 0$, тобто:

$$Y = y + \bar{y}. \quad (2.9)$$

Якщо y_1 – частинний розв'язок рівняння $ay'' + by' + cy = f_1(x)$, а y_2 – частинний розв'язок рівняння $ay'' + by' + cy = f_2(x)$, то $y_1 + y_2$ – частинний розв'язок рівняння

$$ay'' + by' + cy = f_1(x) + f_2(x). \quad (2.10)$$

Якщо функція $f(x)$ має спеціальний вигляд, то частинний розв'язок рівняння (2.8) можна знайти методом невизначених коефіцієнтів.

1. Нехай права частина лінійного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами має вигляд $f(x) = e^{\alpha x} P(x)$, де $P(x)$ – многочлен n -го степеня й α не є коренем характеристичного рівняння, то існує частинний розв’язок вигляду $\bar{y} = e^{\alpha x} M(x)$, де $M(x)$ – деякий многочлен n -го степеня:

$$M(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots + A_n x^n.$$

Коефіцієнти A_i визначають із системи алгебраїчних рівнянь методом невизначених коефіцієнтів.

Якщо ж α є коренем характеристичного рівняння кратності k ($k=1$ або $k=2$), то шукаємо частинний розв’язок неоднорідного рівняння у вигляді $\bar{y} = x^k e^{\alpha x} M(x)$.

Зокрема, при $\alpha=0$ права частина – многочлен n -го степеня, та якщо $\alpha=0$ не є коренем характеристичного рівняння, то частинний розв’язок $M(x)$ – є також многочлен того самого степеня. Якщо ж $\alpha=0$ – корінь характеристичного рівняння кратності k , то частинний розв’язок має вигляд: $\bar{y} = x^k M(x)$.

2. Нехай права частина лінійного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами має вигляд:

$$f(x) = e^{\alpha x} [P(x) \sin \beta x + Q(x) \cos \beta x],$$

де $P(x)$ і $Q(x)$ – многочлени (n – найбільший з їх степенів) і $z = \alpha \pm \beta i$ не є коренем характеристичного рівняння, тоді частинний розв’язок неоднорідного рівняння слід шукати у вигляді:

$$\bar{y} = e^{\alpha x} [M(x) \sin \beta x + N(x) \cos \beta x],$$

де $M(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots + A_n x^n$ і $N(x) = B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + \dots + B_n x^n$ – многочлени степеня n . Якщо ж $z = \alpha \pm \beta i$ є коренем характеристичного рівняння, то частинний розв’язок шукають у вигляді:

$$\bar{y} = x e^{\alpha x} [M(x) \sin \beta x + N(x) \cos \beta x].$$

Приклад 2.9. Знайти частинний розв'язок рівняння $y'' - 4y' + 5y = 10x^2 + 4x + 3$, який відповідає початковим умовам $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

Розв'язання.

Розв'яжемо відповідне однорідне рівняння $y'' - 4y' + 5y = 0$. Відповідне характеристичне рівняння $k^2 - 4k + 5 = 0$, а його корені комплексно спряжені: $k_{1,2} = 2 \pm i$, $k_2 = -3$. Загальний розв'язок є $y = C_1 e^{2x} \sin x + C_2 e^{2x} \cos x$.

За виглядом правої частини заданого рівняння доберемо частинний розв'язок неоднорідного рівняння. Оскільки права частина неоднорідного рівняння має вигляд $f(x) = 10x^2 + 4x + 3$ (тобто вигляд $P(x)e^{0x}$), то $M(x) = Ax^2 + Bx + C$, а $\alpha = 0$ не є коренем характеристичного рівняння $k^2 - 4k + 5 = 0$, то частинний розв'язок будемо шукати у вигляді:

$$\bar{y} = Ax^2 + Bx + C.$$

Підставимо цей вираз до заданого рівняння:

$$\bar{y}' = 2Ax + B, \quad \bar{y}'' = 2A.$$

$$2A - 4(2Ax + B) + 5(Ax^2 + Bx + C) = 10x^2 + 4x + 3.$$

Прирівнюючи коефіцієнти з однаковими степенями x зліва і справа, отримаємо систему для визначення коефіцієнтів A , B і C :

$$\begin{matrix} x^2 \\ x^1 \\ x^0 \end{matrix} \begin{cases} 5A = 10, \\ -5A + 5B = 4, \\ 2A - 4B + 5C = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 2, \\ B = 4, \\ C = 3. \end{cases}$$

Отже, $\bar{y} = 2x^2 + 4x + 3$. Загальний розв'язок із (3.25) $Y = y + \bar{y}$ буде:

$$Y = C_1 e^{2x} \sin x + C_2 e^{2x} \cos x + 2x^2 + 4x + 3,$$

$$Y' = 2C_1 e^{2x} \sin x + C_1 e^{2x} \cos x + 2C_2 e^{2x} \cos x - C_2 e^{2x} \sin x + 4x + 4.$$

Підставляючи початкові умови до загального розв'язку і його похідної, одержимо систему рівнянь відносно C_1 і C_2 :

$$\begin{cases} 0 = C_2 + 3, \\ 0 = 2C_2 + C_1 + 4; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2 = -3, \\ C_1 = 2. \end{cases}$$

Звідси розв'язок, який відповідає поставленим початковим умовам, має вигляд:

$$Y = 2e^{2x} \sin x - 3e^{2x} \cos x + 2x^2 + 4x + 3.$$

Приклад 2.10. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' - 5y' + 6y = (2x - 1)e^{3x}.$$

Розв'язання.

Задано лінійне неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами і спеціальним видом правої частини. Відповідне однорідне рівняння: $y'' - 5y' + 6y = 0$. Складемо характеристичне рівняння $k^2 - 5k + 6 = 0$; його корені $k_1 = 2$, $k_2 = 3$. Загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння є $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$.

Права частина рівняння являє собою добуток показникової функції e^{3x} на многочлен першого степеня $P(x) = 2x - 1$, тому $M(x) = Ax + B$, а коефіцієнт 3 у показнику степеня ($\alpha = 3$) збігається з одним з коренів характеристичного рівняння ($m = 1$). Тому частинний розв'язок шукаємо у вигляді:

$$\begin{aligned} \bar{y} &= x(Ax + B)e^{3x}, \quad \bar{y}' = (Ax^2 + Bx)e^{3x}, \\ \bar{y}' &= (2Ax + B)e^{3x} + 3(Ax^2 + Bx)e^{3x}, \\ \bar{y}'' &= 2Ae^{3x} + 3(2Ax + B)e^{3x} + 3(2Ax + B)e^{3x} + 9(Ax^2 + Bx)e^{3x}. \end{aligned}$$

Підставляючи $\bar{y}$, $\bar{y}'$, $\bar{y}''$ до заданого рівняння, отримаємо:

$$\begin{aligned} 2Ae^{3x} + 6(2Ax + B)e^{3x} + 9(Ax^2 + Bx)e^{3x} - 5(2Ax + B)e^{3x} - \\ - 15(Ax^2 + Bx)e^{3x} + 6(Ax^2 + Bx)e^{3x} = (2x - 1)e^{3x} \\ 2Ae^{3x} + (2Ax + B)e^{3x} = (2x - 1)e^{3x}. \end{aligned}$$

Прирівнюючи коефіцієнти за однакових степенів x , отримаємо:

$$\begin{aligned} x^1 & \quad \begin{cases} 2A = 2, \\ 2A + B = -1, \end{cases} \\ x^0 & \end{aligned}$$

звідки $A=1$, $B=-3$. Отже, частинним розв'язком є:

$$\bar{y} = x(x-3)e^{3x},$$

а загальним – $Y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + x(x-3)e^{3x}$.

Приклад 2.11. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння $y'' + 2y' + 5y = 2\sin 2x + 25\cos 2x$.

Розв'язання.

Відповідне однорідне рівняння зводиться до характеристичного рівняння $k^2 + 2k + 5 = 0$, яке має комплексно спряжені корені $k_1 = -1 + 2i$; $k_2 = -1 - 2i$. Тому загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння є:

$$y = C_1 e^{-x} \sin 2x + C_2 e^{-x} \cos 2x = e^{-x}(C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x).$$

Права частина неоднорідного рівняння являє собою алгебраїчну суму добутків многочленів нульового степеня $P(x)=2$ і $Q(x)=21$ на тригонометричні функції $\sin 2x$ і $\cos 2x$. Тому $M(x)=A$, $N(x)=B$. Числа $\alpha \pm \beta i = 0 + 2i$ не є коренями характеристичного рівняння. Отже, частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді:

$$\bar{y} = A \sin 2x + B \cos 2x,$$

де A і B – сталі коефіцієнти, які підлягають визначенню.

Знайдемо

$$\bar{y}' = 2A \cos 2x - 2B \sin 2x, \quad \bar{y}'' = -4A \sin 2x - 4B \cos 2x.$$

Підставляючи $\bar{y}$, $\bar{y}'$, $\bar{y}''$ до заданого рівняння, отримаємо:

$$\begin{aligned} -4A \sin 2x - 4B \cos 2x + 2(2A \cos 2x - 2B \sin 2x) + 5(A \sin 2x + B \cos 2x) = \\ = 2 \sin 2x + 25 \cos 2x, \end{aligned}$$

$$A \sin 2x + B \cos 2x + 4A \cos 2x - 4B \sin 2x = 2 \sin 2x + 25 \cos 2x.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при $\sin 2x$ і $\cos 2x$, одержимо систему двох рівнянь для визначення A і B :

$$\begin{cases} A - 4B = 2, \\ B + 4A = 25, \end{cases} \quad \begin{cases} A = 2 + 4B, \\ B + 4(2 + 4B) = 25, \end{cases} \quad \begin{cases} A = 6, \\ B = 1. \end{cases}$$

Загальний розв'язок цього рівняння $Y = y + \bar{y}$, тобто

$$Y = e^{-x}(C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x) + 6 \sin 2x + \cos 2x.$$

Приклад 2.12. Розв'язати рівняння $y'' + 9y = 12 \cos 3x$.

Розв'язання.

Характеристичне рівняння $k^2 + 9 = 0$ має корені $k_1 = 3i$, $k_2 = -3i$; тому загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд:

$$y = C_1 \sin 3x + C_2 \cos 3x.$$

Права частина заданого неоднорідного рівняння – добуток многочленна нульового степеня $Q(x) = 12$ на функцію $\cos 3x$. Тому $M(x) = A$, $N(x) = B$. Числа $\alpha \pm \beta i = 0 + 3i$ є коренями характеристичного рівняння ($m = 1$). Частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у формі:

$$\bar{y} = x(A \sin 3x + B \cos 3x).$$

$$\text{Тоді } \bar{y}' = A \sin 3x + B \cos 3x + x(3A \cos 3x - 3B \sin 3x),$$

$$\bar{y}'' = 3A \cos 3x - 3B \sin 3x + 3A \cos 3x - 3B \sin 3x + x(-9A \sin 3x - 9B \cos 3x).$$

Після підстановки цих виразів до цього рівняння, отримаємо рівність:

$$6A \cos 3x - 6B \sin 3x + x(-9A \sin 3x - 9B \cos 3x) + \\ + 9x(A \sin 3x + B \cos 3x) = 12 \cos 3x,$$

$$6A \cos 3x - 6B \sin 3x = 12 \cos 3x.$$

Прирівняємо коефіцієнти при $\cos 3x$ і $\sin 3x$ та одержимо систему рівнянь для визначення A і B :

$$\begin{cases} 6A = 12, \\ -6B = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 2, \\ B = 0. \end{cases}$$

Отже, загальний інтеграл цього рівняння:

$$Y = C_1 \sin 3x + C_2 \cos 3x + 2x \sin 3x.$$

Приклад 2.13. Знайти розв'язок задачі Коші: $y'' + 6y' + 10y = 80e^x \cos x$, $y(0) = 4$, $y'(0) = 10$.

Розв'язання.

Характеристичне рівняння має корені $k_1 = -3 + i$, $k_2 = -3 - i$; тому загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд:

$$y = e^{-3x}(C_1 \sin x + C_2 \cos x).$$

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у формі:

$$\bar{y} = e^x(A \sin x + B \cos x).$$

$$\text{Тоді } \bar{y}' = e^x(A \sin x + B \cos x) + e^x(A \cos x - B \sin x),$$

$$\bar{y}'' = e^x(2A \cos x - 2B \sin x).$$

Підставляючи ці вирази для похідних до цього рівняння, скорочуючи на множник e^x і прирівнюючи коефіцієнти при $\cos x$ і $\sin x$, одержуємо систему рівнянь для визначення A і B :

$$\begin{cases} 16A - 8B = 0, \\ 8A + 16B = 80, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 2, \\ B = 4. \end{cases}$$

Отже, загальний інтеграл цього рівняння

$$Y = e^{-3x}(C_1 \sin x + C_2 \cos x) + e^x(2 \sin x + 4 \cos x).$$

Підставляючи початкові умови до загального розв'язку і його похідну, одержимо систему рівнянь відносно C_1 і C_2 .

$$Y' = e^{-3x}(-3C_1 \sin x - 3C_2 \cos x + C_1 \cos x - C_2 \sin x) + e^x(-2 \cos x + 6 \sin x)$$

$$\begin{cases} C_2 + 4 = 4, \\ -3C_2 + C_1 + 6 = 10, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2 = 0, \\ C_1 = 4. \end{cases}$$

Звідси розв'язок, який відповідає поставленню початковим умовам, має вигляд:

$$Y = 4e^{-3x} \sin x + 2e^x(\sin x + 2 \cos x).$$

Контрольні питання та завдання

1. Яке рівняння називають лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами?
2. Яка структура загального розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами?
3. Запишіть частинний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння 2-го порядку для випадків, коли $f(x) = e^{\alpha x} P_n(x)$.

4. Запишіть частинний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння 2-го порядку для випадків, коли $f(x) = e^{\alpha x} [P_n(x) \cos \beta x + Q_m(x) \sin \beta x]$.

5. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

а) $y'' - 4y' + 3y = \cos x$; б) $y'' - 5y' + 6y = 6x^2 + 2x$;

в) $y'' + y' = 2x - 1$; г) $y'' - 8y' + 17y = 10e^{2x}$;

д) $y'' - 4y' + 4y = xe^x$; є) $y'' + 4y' + 5y = \cos 2x$.

6. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння:

а) $y'' - 4y' + 5y = 2x^2 e^x$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 2$;

б) $y'' - 8y' + 16y = e^{4x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$;

в) $y'' - 2y' + y = -12 \cos 2x - 9 \sin 2x$, $y(0) = -2$, $y'(0) = 0$.

2.4 Лінійні однорідні диференціальні рівняння n -го порядку зі сталими коефіцієнтами

Визначення. Лінійне однорідне диференціальне рівняння n -го порядку зі сталими коефіцієнтами має вигляд:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \quad (2.11)$$

де $y^{(n)}$ – похідні, $a_0, a_1, \dots, a_n$ – дійсні числа.

Частинні розв'язки цього рівняння шукають у вигляді:

$$y = e^{kx}, \quad (2.12)$$

де k – дійсне або комплексне число, що підлягає визначенню.

Запишемо похідні

$$y' = k e^{kx}, \quad y'' = k^2 e^{kx} \dots, \dots, \quad y^{(n)} = k^n e^{kx}$$

та підставимо їх у рівняння (2.11):

$$(a_0 k^n + a_1 k^{n-1} + \dots + a_{n-1} k + a_n) e^{kx} = 0. \quad (2.13)$$

Звідки k повинно відповідати рівнянню алгебри:

$$a_0 k^n + a_1 k^{n-1} + \dots + a_{n-1} k + a_n = 0, \quad (2.14)$$

яке називають *характеристичним рівнянням*, а його корені – *характеристичними числами*.

Загальний розв’язок рівняння (2.11) залежить від виду коренів характеристичного рівняння.

Випадок 1. Корені $k_1, k_2, \dots, k_n$ характеристичного рівняння дійсні й різні, тоді загальний розв’язок рівняння (2.11) має вигляд:

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} + \dots + C_n e^{k_n x}. \quad (2.15)$$

Випадок 2. Корені характеристичного рівняння комплексно спряжені, тобто $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$. Тоді в загальному розв’язку рівняння (2.11) їм відповідатимуть два лінійно незалежні розв’язки:

$$y_1 = e^{\alpha x} \sin \beta x, \quad y_2 = e^{\alpha x} \cos \beta x. \quad (2.16)$$

Якщо корені суто уявні $k_{1,2} = \pm \beta i$, то:

$$y_1 = \sin \beta x, \quad y_2 = \cos \beta x. \quad (2.17)$$

Система розв’язків у загальному випадку складається з незалежних розв’язків, відповідних іншим зв’язаним парам комплексних коренів і всім дійсним кореням.

У загальному розв’язку кореням $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ відповідає множина частинних розв’язків:

$$e^{\alpha x} (C_1 \sin \beta x + C_2 \cos \beta x), \quad (2.18)$$

а кореням $k_{1,2} = \pm \beta i$ –

$$C_1 \sin \beta x + C_2 \cos \beta x. \quad (2.19)$$

Випадок 3. Корінь характеристичного рівняння k_1 – дійсний, кратності m . Йому відповідає m лінійно незалежних частинних розв’язків вигляду:

$$y_1 = e^{k_1 x}, \quad y_2 = x e^{k_1 x}, \quad y_k = x^{m-1} e^{k_1 x}. \quad (2.20)$$

У загальному розв’язку цьому кореню відповідає вираз:

$$e^{k_1 x} (C_1 + x C_2 + \dots + C_m x^{m-1}). \quad (2.21)$$

Випадок 4. Якщо $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ – комплексно спряжені корені кратності m , тоді їм відповідають $2m$ незалежних розв’язків:

$$\left. \begin{aligned} e^{\alpha x} \cos \beta x, & \quad x e^{\alpha x} \cos \beta x, \dots, x^{m-1} e^{\alpha x} \cos \beta x \\ e^{\alpha x} \sin \beta x, & \quad x e^{\alpha x} \sin \beta x, \dots, x^{m-1} e^{\alpha x} \sin \beta x \end{aligned} \right\} \quad (2.22)$$

У загальному розв’язку цьому кореню відповідає вираз:

$$e^{\alpha x} [(C_1 + x C_2 + \dots + C_m x^{m-1}) \sin \beta x + (C_1 + x C_2 + \dots + C_m x^{m-1}) \cos \beta x]. \quad (2.23)$$

Якщо $k_{1,2} = \pm \beta i$ корені кратності m , то у загальному розв’язку отримаємо:

$$(C_1 + x C_2 + \dots + C_m x^{m-1}) \sin \beta x + (C_1 + x C_2 + \dots + C_m x^{m-1}) \cos \beta x. \quad (2.24)$$

Таким чином, загальний розв’язок лінійного однорідного рівняння складається з лінійної комбінації перелічених вище частинних випадків.

Приклад 2.14. Розв’язати рівняння $y''' - y'' + 4y' - 4y = 0$

Розв’язання.

Задано лінійне однорідне диференціальне рівняння третього порядку зі сталими коефіцієнтами. Складемо характеристичне рівняння: $k^3 - k^2 + 4k - 4 = 0$. Знайдемо його корені.

$$k^2(k-1) + 4(k-1) = 0, \quad (k-1)(k^2 + 4) = 0,$$

$$k-1=0 \quad \text{або} \quad k^2 + 4 = 0, \quad k_1 = 1, \quad k^2 = -4, \quad k_{2,3} = \pm 2i.$$

Всі корені характеристичного рівняння прості, а тому шуканий загальний розв’язок є:

$$y = C_1 e^x + C_2 \sin 2x + C_3 \cos 2x.$$

Приклад 2.15. Розв’язати рівняння $y''' + y'' - 5y' + 3y = 0$

Розв’язання.

Складемо характеристичне рівняння: $k^3 + k^2 - 5k + 3 = 0$. Знайдемо його корені. Якщо алгебраїчне рівняння має дійсні корені, то вони знаходяться серед дільників вільного члена, тобто це можуть бути числа $\pm 1, \pm 3$. $k_1 = 1$

перетворює це рівняння на тотожність, а тому є його коренем. Поділивши чисельник на знаменник за правилом ділення многочленів, отримаємо

$$(k-1)(k^2+2k-3)=0,$$

Корені квадратного рівняння $k^2+2k-3=0$ можна знайти за теоремою Вієта:

$$k_2=1, \quad k_3=-3$$

Отже, корені характеристичного рівняння – дійсні числа, причому корені k_1 і k_2 – кратні.

Отже, шуканий загальний розв'язок є:

$$y = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 e^{-3x},$$

де C_1, C_2, C_3 – довільні сталі.

Приклад 2.16. Знайти загальний розв'язок рівняння $y^{(V)} + 9y''' = 0$.

Розв'язання.

Складаємо характеристичне рівняння $k^5 + 9k^3 = 0$.

$$k^3(k^2 + 9) = 0$$

Його корені $k_1 = k_2 = k_3 = 0$, $k_4 = 3i$, $k_5 = -3i$.

Загальний розв'язок має вигляд:

$$y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 \sin 3x + C_5 \cos 3x,$$

де C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 – довільні сталі.

Приклад 2.17. Знайти загальний розв'язок рівняння $y^{(IV)} - 6y'' + 9y = 0$.

Розв'язання.

Складаємо характеристичне рівняння $k^4 - 6k^2 + 9 = 0$; його корені дійсні й кратні: $k_1 = \sqrt{3}$, $k_2 = \sqrt{3}$, $k_3 = -\sqrt{3}$, $k_4 = -\sqrt{3}$, тому загальний розв'язок має вигляд:

$$y = C_1 e^{\sqrt{3}x} + C_2 x e^{\sqrt{3}x} + C_3 e^{-\sqrt{3}x} + C_4 x e^{-\sqrt{3}x},$$

де C_1, C_2, C_3, C_4 – довільні сталі.

Приклад 2.18. Знайти загальний розв'язок рівняння $y^{(IV)} + 8y'' + 16y = 0$.

Розв'язання.

Складаємо характеристичне рівняння $k^4 + 8k^2 + 16 = 0$; його корені $k_1 = k_2 = 2i$, $k_3 = k_4 = -2i$. Отже, загальний розв'язок диференціального рівняння має вигляд:

$$y = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x + C_3 x \sin 2x + C_4 x \cos 2x,$$

де C_1, C_2, C_3, C_4 – довільні сталі.

Контрольні питання та завдання

1. Яке рівняння називають лінійним диференціальним рівнянням n -го порядку?
2. Як побудувати характеристичне рівняння лінійного однорідного рівняння n -го порядку зі сталими коефіцієнтами?
3. У якому вигляді слід шукати частинні розв'язки лінійного однорідного диференціального рівняння?
4. Сформулюйте алгоритм Розв'язання лінійного однорідного диференціального рівняння.
5. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:
а) $y''' - y'' + 4y' - 4y = 0$; б) $y^{IV} - 6y'' + 9y = 0$;
г) $y^V - y' = 0$; д) $y''' - 4y'' = 0$.
6. Знайти розв'язок диференціального рівняння, що відповідає заданим початковим умовам:
а) $y''' - y' = 0$, $y(0) = 3$, $y'(0) = -1$, $y''(0) = 1$;
б) $y''' - 2y'' + y' = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = -1$.

2.5 Лінійні неоднорідні рівняння n -го порядку зі сталими коефіцієнтами

Лінійне неоднорідне рівняння n -го порядку зі сталими коефіцієнтами має вигляд:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = f(x), \quad (2.25)$$

де $a_0, a_1, \dots, a_n$ – дійсні числа, $f(x)$ – неперервна функція від x ($f(x) \neq 0$). Загальний розв’язок такого рівняння складається із загального розв’язку відповідного однорідного рівняння і якого-небудь частинного розв’язку неоднорідного рівняння:

$$Y = y + \bar{y}, \quad (2.26)$$

де y – розв’язок однорідного рівняння, $\bar{y}$ – частинний розв’язок неоднорідного рівняння.

Для лінійних неоднорідних рівнянь (2.25), права частина $f(x)$ яких має спеціальний вигляд, частинний розв’язок можна знайти методом невизначених коефіцієнтів за відомим виглядом функції $f(x)$.

Випадок 1. Вільний член $f(x) = P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ – многочлен степеня n .

1.1. Якщо число $k=0$ не є коренем характеристичного рівняння відповідного однорідного рівняння, то частинний розв’язок неоднорідного рівняння записується у вигляді:

$$\bar{y} = M(x),$$

де $M(x)$ – повний многочлен степеня n (тобто того самого степеня, що й заданий) з невизначеними коефіцієнтами.

1.2. Якщо число $k=0$ – корінь характеристичного рівняння кратності m , то:

$$\bar{y} = x^m M(x). \quad (2.27)$$

Випадок 2. Вільний член $f(x) = P(x)e^{\alpha x}$.

2.1. Якщо α не є коренем характеристичного рівняння, то:

$$\bar{y} = M(x)e^{\alpha x}. \quad (2.28)$$

2.2. Якщо α є коренем характеристичного рівняння кратності m , то:

$$\bar{y} = x^m M(x)e^{\alpha x}. \quad (2.29)$$

Випадок 3. Вільний член $f(x)=[P(x)\sin \beta x+Q(x)\cos \beta x]e^{\alpha x}$, де α і β – числа, $P(x)$, $Q(x)$ – многочлени від x (n – найбільший з їх степенів), зокрема, можуть бути сталими числами (один з них може бути нулем).

3.1. Якщо числа $\alpha \pm \beta i$ – не є коренями характеристичного рівняння, то:

$$\overline{y}=[M(x)\sin \beta x+N(x)\cos \beta x]e^{\alpha x}, \quad (2.30)$$

де $M(x)=A_0x^n+A_1x^{n-1}+\dots+A_n$, $N(x)=B_0x^n+B_1x^{n-1}+\dots+B_n$, A_i, B_i ($i=\overline{1, n}$) – коефіцієнти, що підлягають визначенню.

3.2. Якщо числа $\alpha \pm \beta i$ є коренями характеристичного рівняння кратності m , то частинний розв'язок рівняння (2.25) має вигляд:

$$\overline{y}=x^m[M(x)\sin \beta x+N(x)\cos \beta x]e^{\alpha x}. \quad (2.31)$$

Випадок 4. $f(x)=f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)$, де $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ – функції типів, що розглянуті вище. Тоді, якщо $\overline{y}_1$, $\overline{y}_2$, $\overline{y}_3$ – частинні розв'язки, що відповідають функціям $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, то частинний розв'язок усього рівняння (2.25) матиме вигляд:

$$\overline{y}=\overline{y}_1+\overline{y}_2+\overline{y}_3. \quad (2.32)$$

Приклад 2.19. Знайти загальний розв'язок рівняння $y^{IV}+y''=12x^2+x$.

Розв'язання.

Це лінійне неоднорідне диференціальне рівняння четвертого порядку зі сталими коефіцієнтами. Знайдемо спочатку загальний розв'язок у лінійного однорідного рівняння $y^{IV}+y''=0$. Відповідне характеристичне рівняння $k^4+k^2=0$ має корені $k_1=k_2=0$, $k_3=i$, $k_4=-i$, тому загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд:

$$y=C_1+C_2x+C_3\sin x+C_4\cos x,$$

де C_1, C_2, C_3, C_4 – довільні сталі.

Тепер за виглядом правої частини цього неоднорідного рівняння доберемо його частинний розв'язок $\overline{y}$. Права частина заданого рівняння має

вигляд $f(x)=12x^2+x$, тобто, якщо порівняти з видом $f(x)=P(x)$, робимо висновок, що $P(x)=x^2+x$, тому $M(x)=Ax^2+Bx+C$, а $k=0$ є коренем характеристичного рівняння кратності $m=2$, отже, частинний розв'язок неоднорідного рівняння слід шукати у вигляді:

$$\bar{y} = x^2(Ax^2 + Bx + C) = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2.$$

Підставимо цей розв'язок у вихідне рівняння, для чого попередньо обчислимо:

$$\bar{y}' = 4Ax^3 + 3Bx^2 + 2Cx, \quad \bar{y}'' = 12Ax^2 + 6Bx + 2C,$$

$$\bar{y}''' = 24Ax + 6B, \quad \bar{y}^{IV} = 24A.$$

Отримаємо:

$$24A + 12Ax^2 + 6Bx + 2C = 12x^2 + x.$$

Прирівнюючи коефіцієнти з однаковими степенями x в обох частинах останньої рівності, знайдемо невизначені коефіцієнти:

$$x^2: \quad 12A=12, \quad A=1$$

$$x: \quad 6B=1, \quad B=\frac{1}{6}$$

$$x^0: \quad 24A+2C=0, \quad C=-12$$

Тоді частинний розв'язок неоднорідного рівняння набуває вигляду:

$$\bar{y} = x^4 + \frac{1}{6}x^3 - 12x^2.$$

Отже, загальний розв'язок неоднорідного рівняння такий:

$$Y = y + \bar{y} = C_1 + C_2x + C_3 \sin x + C_4 \cos x + x^4 + \frac{1}{6}x^3 - 12x^2.$$

Приклад 2.20. Знайти загальний розв'язок рівняння $y''' + y'' - 2y' = 4e^{2x}$.

Розв'язання.

Це лінійне неоднорідне диференціальне рівняння третього порядку зі сталими коефіцієнтами. Знайдемо спочатку загальний розв'язок у лінійного однорідного рівняння $y''' + y'' - 2y' = 0$. Складемо відповідне характеристичне

рівняння $k^3 + k^2 - 2k = 0$, знайдемо його корені $k_1 = 0$, $k_2 = 1$, $k_3 = -2$, тому загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд:

$$y = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{2x},$$

де C_1, C_2, C_3 – довільні сталі.

Тепер за виглядом правої частини цього неоднорідного рівняння доберемо його частинний розв'язок $\bar{y}$. Права частина заданого рівняння має вигляд $f(x) = 4e^{2x}$, тобто, якщо порівняти з видом $f(x) = P(x)e^{\alpha x}$, робимо висновок, що $P(x) = 4$, тому $M(x) = A$, а $\alpha = 2$ не є коренем характеристичного рівняння, отже, частинний розв'язок неоднорідного рівняння слід шукати у вигляді:

$$\bar{y} = Ae^{2x}.$$

Підставимо цей розв'язок у вихідне рівняння, для чого попередньо обчислимо:

$$\bar{y}' = 2Ae^{2x}, \quad \bar{y}'' = 4Ae^{2x}, \quad \bar{y}''' = 8Ae^{2x}.$$

Отримаємо:

$$8Ae^{2x} + 4Ae^{2x} - 4Ae^{2x} = 4e^{2x}, \quad 8Ae^{2x} = 4e^{2x}, \quad A = \frac{1}{2}.$$

Отже, частинний розв'язок неоднорідного рівняння

$$\bar{y} = \frac{1}{2}e^{2x}.$$

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння матиме вигляд:

$$Y = y + \bar{y} = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{2x} + \frac{1}{2}e^{2x}.$$

Приклад 2.21. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння $y''' + 2y'' + y' = 4(\sin 2x + \cos 2x)$, який відповідає початковим умовам: $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = -1$.

Розв'язання.

Для розв'язання задачі Коші спочатку потрібно знайти загальний розв'язок заданого неоднорідного рівняння, а потім за допомогою початкових умов виділити з нього частинний розв'язок.

Однорідне рівняння, що відповідає заданому неоднорідному рівнянню, має вигляд:

$$y''' + 2y'' + y' = 0.$$

Характеристичне рівняння $k^3 + 2k^2 + k = 0$ має дійсні корені $k_1 = 0$, $k_2 = 1$, $k_3 = 1$, тому загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння матиме вигляд:

$$y = C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 x e^{-x}.$$

Права частина неоднорідного рівняння є $f(x) = 4(\sin 2x + \cos 2x)$, де $P(x) = 4$, $Q(x) = 4$ – многочлени нульового степеня та числа $\alpha \pm \beta i = \pm 2i$ не є коренями характеристичного рівняння, тому частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукатимемо у вигляді:

$$\bar{y} = A \sin 2x + B \cos 2x.$$

Знайдемо похідні від передбачуваного частинного розв'язку $\bar{y}$:

$$\bar{y}' = 2A \cos 2x - 2B \sin 2x, \quad \bar{y}'' = -4A \sin 2x - 4B \cos 2x, \quad \bar{y}''' = -8A \cos 2x + 8B \sin 2x$$

і підставимо їх у задане рівняння:

$$\begin{aligned} & -8A \cos 2x + 8B \sin 2x - 8A \sin 2x - 8B \cos 2x + 2A \cos 2x - \\ & - 2B \sin 2x = 4(\sin 2x + \cos 2x), \end{aligned}$$

$$-6A \cos 2x + 6B \sin 2x - 8A \sin 2x - 8B \cos 2x = 4 \sin 2x + 4 \cos 2x$$

Прирівняємо коефіцієнти при $\sin 2x$ і $\cos 2x$:

$$\sin 2x: \quad 6B - 8A = 4, \quad 3B - 4A = 2, \quad B = -\frac{2}{25}$$

$$\cos 2x: \quad -6A - 8B = 4, \quad 3A + 4B = -2, \quad A = -\frac{16}{25}$$

Отже,

$$\bar{y} = -\frac{16}{25}\sin 2x - \frac{2}{25}\cos 2x.$$

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння:

$$Y = y + \bar{y} = C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 x e^{-x} - \frac{16}{25}\sin 2x - \frac{2}{25}\cos 2x.$$

Щоб відповідати обом початковим умовам, слід знайти першу та другу похідну від загального розв'язку:

$$Y' = -C_2 e^{-x} + C_3 e^{-x} - C_3 x e^{-x} - \frac{32}{25}\cos 2x + \frac{4}{25}\sin 2x,$$

$$Y'' = C_2 e^{-x} + 2C_3 e^{-x} + C_3 x e^{-x} + \frac{64}{25}\sin x + \frac{8}{25}\cos 2x.$$

Підставляючи початкові умови в загальний розв'язок і його похідні, отримаємо систему рівнянь щодо C_1 , C_2 і C_3 .

$$\begin{cases} C_1 + C_2 - \frac{2}{25} = 0, \\ -C_2 + C_3 - \frac{32}{25} = 0, \\ C_2 + 2C_3 + \frac{8}{25} = -1; \end{cases} \quad \begin{cases} C_2 + C_1 = \frac{2}{25}, \\ -C_2 + C_3 = \frac{32}{25}, \\ C_2 + 2C_3 = -\frac{33}{25}; \end{cases} \quad \begin{cases} C_1 = \frac{103}{75}, \\ C_2 = -\frac{97}{75}, \\ C_3 = -\frac{1}{75}. \end{cases}$$

Отже, отримуємо розв'язок задачі Коші:

$$Y = \frac{103}{75} - \frac{97}{75}e^{-x} - \frac{1}{75}xe^{-x} - \frac{16}{25}\sin 2x - \frac{2}{25}\cos 2x.$$

Приклад 2.22. Знайти загальний розв'язок рівняння $y^{IV} + 2y'' + y = 16\sin x$.

Розв'язання.

Задано лінійне неоднорідне рівняння четвертого порядку. Однорідне рівняння, що відповідає заданому неоднорідному рівнянню, має вигляд:

$$y^{IV} + 2y'' + y = 0.$$

Характеристичне рівняння $k^4 + 2k^2 + 1 = 0$ має кратні комплексно-спряжені корені $k_{1,2} = \pm i$, $k_{3,4} = \pm i$, тому загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння матиме вигляд:

$$y = C_1 \sin x + C_2 \cos x + C_3 x \sin x + C_4 x \cos x.$$

Права частина неоднорідного рівняння – $f(x) = 3 \sin x$. Порівняємо її зі спеціальним видом $f(x) = [P(x) \cos \beta x + Q(x) \sin \beta x] e^{\alpha x}$. Маємо $P(x) = 3$, $Q(x) = 0$ – многочлени нульового степеня, тому $M(x) = A$, $N(x) = B$, числа $\alpha \pm \beta i = \pm i$ є коренями характеристичного рівняння кратності $m = 2$, тому частинний розв’язок неоднорідного рівняння шукатимемо у вигляді:

$$\bar{y} = x^2 (A \sin x + B \cos x).$$

Знайдемо похідні від передбачуваного частинного розв’язку $\bar{y}$:

$$\bar{y}' = 2x(A \sin x + B \cos x) + x^2(A \cos x - B \sin x),$$

$$\begin{aligned} \bar{y}'' &= 2(A \sin x + B \cos x) + 2x(A \cos x - B \sin x) + 2x(A \cos x - B \sin x) + \\ &+ x^2(-A \sin x - B \cos x) = 2(A \sin x + B \cos x) + 4x(A \cos x - B \sin x) + \\ &+ x^2(-A \sin x - B \cos x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{y}''' &= 2A \cos x - 2B \sin x + 4A \cos x - 4B \sin x + 4x(-A \sin x - B \cos x) + \\ &+ 2x(-A \sin x - B \cos x) + x^2(-A \cos x + B \sin x) = 6A \cos x - 6B \sin x + \\ &+ 6x(-A \sin x - B \cos x) + x^2(-A \cos x + B \sin x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{y}^{iv} &= -6A \sin x - 6B \cos x - 6A \sin x - 6B \cos x + 6x(-A \cos x + B \sin x) + \\ &+ 2x(-A \cos x + B \sin x) + x^2(A \sin x + B \cos x) = -12A \sin x - 12B \cos x + \\ &+ 8x(-A \cos x + B \sin x) + x^2(A \sin x + B \cos x) \end{aligned}$$

і підставимо їх у задане рівняння:

$$\begin{aligned} &-12A \sin x - 12B \cos x + 8x(-A \cos x + B \sin x) + x^2(A \sin x + B \cos x) + \\ &+ 4(A \sin x + B \cos x) + 8x(A \cos x - B \sin x) + 2x^2(-A \sin x - B \cos x) + \\ &+ x^2(A \sin x + B \cos x) = 16 \sin x, \end{aligned}$$

$$-8A \cos 2x - 8B \sin 2x = 16 \sin x.$$

Прирівняємо коефіцієнти при $\sin x$ і $\cos x$:

$$\sin x: \quad -8B = 16, \quad B = -2$$

$$\cos x: \quad -8A = 0, \quad A = 0$$

Отже,

$$\bar{y} = -2x^2 \cos x.$$

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння:

$$Y = y + \bar{y} = C_1 \sin x + C_2 \cos x + C_3 x \sin x + C_4 x \cos x - 2x^2 \cos x.$$

Контрольні питання та завдання

1. Яке рівняння називають лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням n -го порядку?
2. Сформулюйте сутність методу варіації довільних сталих відшукування лінійного неоднорідного рівняння n -го порядку.
3. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:
 - а) $y''' + 2y'' + y' = -2e^{-2x}$; б) $y^{IV} + y'' = x^2 + x$.
6. Знайти розв'язок диференціального рівняння, що відповідає заданим початковим умовам:
 - а) $y''' - 2y'' + y' = 4(\sin x + \cos x)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = -1$.

2.6 Метод варіації довільних сталих

Цей метод застосовують для знаходження частинного розв'язку лінійного неоднорідного рівняння n -го порядку як зі змінними, так і зі сталими коефіцієнтами, якщо відомий загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння.

Нехай маємо неоднорідне рівняння (2.25):

$$a_0 y^n + a_1 y^{n-1} + a_2 y^{n-2} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x).$$

Нехай відомий загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n,$$

де y_n – лінійно незалежні розв'язки однорідного рівняння.

Метод Лагранжа полягає в тому, що загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння (2.25) має такий самий вигляд, що і загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння, із тією лише різницею, що

довільні сталі C_n є деякими, поки невідомими функціями від x , які слід добрати так, щоб функція:

$$Y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 + \dots + C_n(x)y_n \quad (2.33)$$

відповідала неоднорідному рівнянню (2.25).

Шукані функції $C_1(x)$, $C_2(x)$, ..., $C_n(x)$ повинні відповідати тільки співвідношенню, що отримане в результаті підстановки функції (2.33) у рівняння (2.25). Тоді для знаходження функцій $C_i(x)$ їх можна підпорядкувати $n-1$ будь-яким довільним умовам.

Щоб отримати найпростішу систему для визначення шуканих функцій $C_i(x)$, обчислимо похідні y' , y'' ... $y^{(n+1)}$ функції (2.33), та підпорядкуємо їх додатковим умовам: уважатимемо рівними нулю сукупність тих членів, що містять $C_i(x)$.

Розглянемо метод для випадку рівняння третього порядку:

$$y''' + a_1y'' + a_2y' + a_3y = f(x). \quad (2.34)$$

Нехай відповідне однорідне рівняння має наступні три лінійно незалежні розв'язки y_1 , y_2 , y_3 , тоді загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння матиме вигляд:

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + C_3y_3.$$

Розглянемо C_1 , C_2 , C_3 як функції від x і спробуємо їх визначити.

$$Y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 + C_3(x)y_3 \quad (2.35)$$

$$Y' = C_1'(x)y_1 + C_1(x)y_1' + C_2'(x)y_2 + C_2(x)y_2' + C_3'(x)y_3 + C_3(x)y_3' \quad (2.36)$$

Накладаємо першу умову:

$$C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 + C_3'(x)y_3 = 0. \quad (2.37)$$

Знайдемо другу похідну:

$$Y'' = C_1'(x)y_1' + C_1(x)y_1'' + C_2'(x)y_2' + C_2(x)y_2'' + C_3'(x)y_3' + C_3(x)y_3'' \quad (2.38)$$

Накладаємо другу умову:

$$C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' + C_3'(x)y_3' = 0. \quad (2.39)$$

Обчислюємо третю похідну:

$$Y''' = C_1'(x)y_1'' + C_1(x)y_1''' + C_2'(x)y_2'' + C_2(x)y_2''' + C_3'(x)y_3'' + C_3(x)y_3''' \quad (2.40)$$

Підставляємо (2.35), (2.36), (2.38), (2.40) в (2.34), ураховуючи умови (2.37), (2.39):

$$\begin{aligned}
& C_1(x)[y_1''' + a_1y_1'' + a_2y_1' + a_3y_1] + C_2(x)[y_2''' + a_1y_2'' + a_2y_2' + a_3y_2] + \\
& + C_3(x)[y_3''' + a_1y_3'' + a_2y_3' + a_3y_3] + C_1'(x)y_1'' + C_2'(x)y_2'' + C_3'(x)y_3'' = f(x) \\
& \begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 + C_3'(x)y_3 = 0, \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' + C_3'(x)y_3' = 0, \\ C_1'(x)y_1'' + C_2'(x)y_2'' + C_3'(x)y_3'' = f(x). \end{cases} \quad (2.41)
\end{aligned}$$

Розв'язавши систему, знаходимо:

$$\begin{aligned} C_1'(x) &= -\frac{(y_2 y_3' - y_2' y_3) f(x)}{W(y_1, y_2, y_3)}, & C_2'(x) &= \frac{(y_1 y_3' - y_1' y_3) f(x)}{W(y_1, y_2, y_3)}, \\ C_3'(x) &= \frac{(y_1 y_2' - y_1' y_2) f(x)}{W(y_1, y_2, y_3)} \Rightarrow \\ C_1(x) &= -\int \frac{(y_2 y_3' - y_2' y_3) f(x) dx}{W(y_1, y_2, y_3)} + C_1, & C_2(x) &= -\int \frac{(y_1 y_3' - y_1' y_3) f(x) dx}{W(y_1, y_2, y_3)} + C_2, \\ C_3(x) &= -\int \frac{(y_1 y_2' - y_1' y_2) f(x) dx}{W(y_1, y_2, y_3)} + C_3, \end{aligned}$$

де $W(y_1, y_2, y_3) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix}$ – визначник Вронського.

Для диференціального рівняння n -го порядку функції $C_1(x), C_2(x), \dots, C_n(x)$ визначають із системи рівнянь:

$$\left\{ \begin{array}{l} C'_1(x)y_1 + C'_2(x)y_2 + ... + C'_n(x)y_n = 0, \\ C'_1(x)y'_1 + C'_2(x)y'_2 + ... + C'_n(x)y'_n = 0, \\ \\ C'_1(x)y_1^{(n-2)} + C'_2(x)y_2^{(n-2)} + ... + C'_n(x)y_n^{(n-2)} = 0, \\ C'_1(x)y_1^{(n-1)} + C'_2(x)y_2^{(n-1)} + ... + C'_n(x)y_n^{(n-1)} = f(x), \end{array} \right.$$

де $f(x)$ – права частина цього рівняння.

Для рівняння другого порядку $y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x)$ відповідна система має вигляд:

$$\begin{cases} C'_1(x)y_1 + C'_2(x)y_2 = 0, \\ C'_1(x)y'_1 + C'_2(x)y'_2 = f(x). \end{cases}$$

Розв'язуючи систему, знайдемо $C'_1(x), C'_2(x)$ як визначені функції від x :

$$C'_1(x) = \varphi_1(x), \quad C'_2(x) = \varphi_2(x).$$

Інтегруючи, отримаємо:

$$C_1(x) = \int \varphi_1(x) dx + \bar{C}_1, \quad C_2(x) = \int \varphi_2(x) dx + \bar{C}_2,$$

де $\bar{C}_1, \bar{C}_2$ – сталі інтегрування.

Підставляючи отримані вирази $C_1(x)$ й $C_2(x)$ у рівність $Y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2$, знайдемо інтеграл, який залежить від двох довільних сталих $\bar{C}_1$ і $\bar{C}_2$, тобто загальний розв'язок неоднорідного рівняння.

Приклад 2.23. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' + 5y' + 6y = \frac{1}{1 + e^{2x}}.$$

Розв'язання.

Задано лінійне неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку, права частина якого не має спеціального вигляду. Застосуємо метод варіації довільних сталих.

Знайдемо спочатку розв'язок відповідного лінійного однорідного рівняння:

$$y'' + 5y' + 6y = 0.$$

Характеристичне рівняння $k^2 + 5k + 6 = 0$ має корені $k_1 = -2$, $k_2 = -3$. Отже, загальний розв'язок однорідного рівняння є:

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x},$$

де C_1, C_2 – довільні сталі.

Будемо шукати загальний розв'язок неоднорідного рівняння у вигляді:

$$y = C_1(x)e^{-2x} + C_2(x)e^{-3x}$$

Функції $C_1(x)$ і $C_2(x)$ потрібно знайти із системи:

$$\begin{cases} C_1'(x)e^{-2x} + C_2'(x)e^{-3x} = 0, \\ -2C_1'(x)e^{-2x} - 3C_2'(x)e^{-3x} = \frac{1}{1+e^{2x}}. \end{cases}$$

Розв'язуємо цю систему. Із першого рівняння виразимо $C_1'(x)$ і, підставивши його у друге рівняння, отримаємо:

$$C_1'(x) = -C_2'(x)e^{-x}, \quad 2C_2'(x)e^{-x}e^{-2x} - 3C_2'(x)e^{-3x} = \frac{1}{1+e^{2x}},$$

$$-C_2'(x)e^{-3x} = \frac{1}{1+e^{2x}}, \quad C_2'(x) = -\frac{e^{3x}}{1+e^{2x}}, \quad C_1'(x) = \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}$$

У результаті інтегрування отримаємо:

$$C_1(x) = \int \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}} dx = \frac{1}{2} \ln|1+e^{2x}| + \bar{C}_1,$$

$$\begin{aligned} C_2(x) &= -\int \frac{e^{3x}}{1+e^{2x}} dx \Bigg|_{\substack{t=e^x \\ dt=e^x dx}} = -\int \frac{t^2}{1+t^2} dx = -\int \frac{t^2+1-1}{1+t^2} dx = \\ &= -\int \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right) dx = -t + \arctgt + \bar{C}_2 = -e^x + \arctge^x + \bar{C}_2. \end{aligned}$$

Отже, загальний розв'язок заданого неоднорідного рівняння:

$$y = \left(\frac{1}{2} \ln|1+e^{2x}| + \bar{C}_1\right)e^{-2x} + (-e^x + \arctge^x + \bar{C}_2)e^{-3x},$$

або

$$y = \bar{C}_1 e^{-2x} + \bar{C}_2 e^{-3x} + \frac{e^{-2x}}{2} \ln|1+e^{2x}| - e^{-2x},$$

де $\bar{C}_1$, і $\bar{C}_2$ – довільні сталі.

Приклад 2.24. Розв'язати рівняння: $y''' + y' = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$

Розв'язання.

За виглядом правої частини рівняння робимо висновок, що метод невизначених коефіцієнтів непридатний. Випишемо відповідне однорідне рівняння та складемо для нього характеристичне рівняння:

$$y''' + y' = 0,$$

$$k^3 + k = 0,$$

$$k(k^2 + 1) = 0,$$

$$k_1 = 0, \quad k_2 = i, \quad k_3 = -i.$$

Отже, загальний розв'язок однорідного рівняння $y = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x$.

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді:

$$y = C_1(x) + C_2(x) \cos x + C_3(x) \sin x. \quad (2.42)$$

Складаємо систему для визначення функцій $C_1(x)$, $C_2(x)$, $C_3(x)$:

$$\begin{cases} C_1'(x) \cdot 1 + C_2'(x) \cos x + C_3'(x) \sin x = 0, \\ C_1'(x) \cdot 0 - C_2'(x) \sin x + C_3'(x) \cos x = 0, \\ C_1'(x) \cdot 0 - C_2'(x) \cos x - C_3'(x) \sin x = \frac{\sin x}{\cos^2 x}. \end{cases}$$

Обчислюємо визначник системи та визначники невідомих:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \cos x & \sin x \\ 0 & -\sin x & \cos x \\ 0 & -\cos x & -\sin x \end{vmatrix} = \sin^2 x + \cos^2 x = 1,$$

$$\Delta C_1' = \begin{vmatrix} 0 & \cos x & \sin x \\ 0 & -\sin x & \cos x \\ \frac{\sin x}{\cos^2 x} & -\cos x & -\sin x \end{vmatrix} = \frac{\sin x}{\cos^2 x},$$

$$\Delta C'_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \sin x \\ 0 & 0 & \cos x \\ 0 & \frac{\sin x}{\cos^2 x} & -\sin x \end{vmatrix} = -\frac{\sin x}{\cos x},$$

$$\Delta C'_3 = \begin{vmatrix} 1 & \cos x & 0 \\ 0 & -\sin x & 0 \\ 0 & -\cos x & \frac{\sin x}{\cos^2 x} \end{vmatrix} = -\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}.$$

Звідки

$$C'_1 = \frac{\sin x}{\cos^2 x} \Rightarrow \frac{dC'}{dx} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} \Rightarrow C_1(x) = \frac{1}{\cos x} + C_1.$$

$$C_2(x) = -\int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \ln|\cos x| + C_2$$

$$C_3(x) = -\int \operatorname{tg}^2 x dx = -\int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} = -\int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int dx = -\operatorname{tg} x + x + C_3$$

Підставляючи отримані значення у формулу (1.73), отримаємо:

$$Y = \frac{1}{\cos x} + C_1 + C_2 \cos x + \cos \ln|\cos x| + C_3 \sin x + (x - \operatorname{tg} x) \sin x$$

$$Y = \underbrace{C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x}_{\text{загальний розв'язок однорідного рівняння}} + \underbrace{\frac{1}{\cos x} + \cos \ln|\cos x| + (x - \operatorname{tg} x) \sin x}_{\text{частинний розв'язок неоднорідного рівняння}}$$

Контрольні питання та завдання

1. Сформулюйте сутність методу варіації довільних сталих відшукування лінійного неоднорідного рівняння n -го порядку.
2. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$\text{а) } y'' + y = \frac{1}{\sqrt{\cos 2x}}; \quad \text{б) } y'' + 4y' = \operatorname{ctg} 2x.$$

РОЗДІЛ 3 КРАЙОВІ ЗАДАЧІ. ІНТЕГРУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЗА ДОПОМОГОЮ РЯДІВ

3.1 Постановка крайових задач

Поряд із задачею Коші для диференціальних рівнянь вищих порядків великий інтерес становлять крайові задачі, у яких умови, що накладаються на шуканий розв'язок, задаються не в одній точці, а на кінцях деякого відрізка $[a; b]$ і шукається розв'язок, визначений всередині цього відрізка. Ці умови називають *крайовими умовами* і полягають у тому, що на обох кінцях відрізка $[a; b]$ задаються значення шуканого розв'язку або значення похідних від шуканого розв'язку, або (у загальному випадку) лінійна комбінація ординат і похідних розв'язку.

Визначення. Задачу знаходження розв'язання диференціального рівняння, що відповідає крайовим умовам, називають *крайовою задачею*.

Крайові задачі можливі для диференціальних рівнянь другого і вищих порядків. Розглянемо диференціальне рівняння n -го порядку ($n \geq 2$):

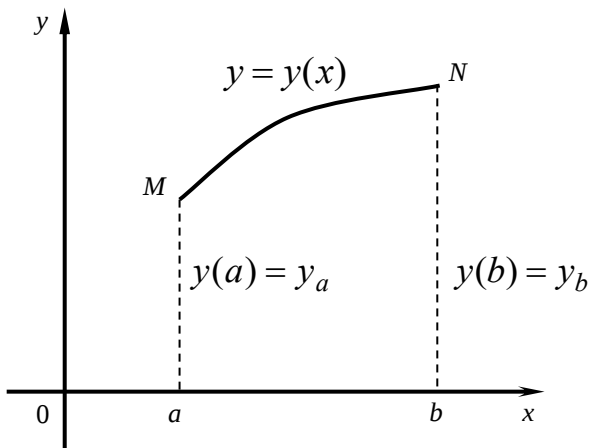
$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0. \quad (3.1)$$

Крайова задача формулюється так: знайти розв'язок $y = y(x)$ диференціального рівняння (3.1), для якого значення його похідних $y_i^{(s)} = y^{(s)}(x_i)$ ($s = 0, 1, 2, \dots, \sigma_i$) у заданій системі точок $x = x_i$ ($i = 1, 2, \dots, k$; $k \geq 2$) відповідають n незалежним між собою крайовим умовам (у загальному випадку нелінійним):

$$R_\nu(y_1, y_1', y_1'', \dots, y_1^{(\sigma_{1\nu})}, \dots, y_k, y_k', y_k'', \dots, y_k^{(\sigma_{k\nu})}) = 0, \quad (\nu = 1, 2, \dots, n). \quad (3.2)$$

Крайова задача (3.1)–(3.2) для диференціального рівняння другого порядку формулюється так: знайти функцію $y = y(x)$, що у відповідь відповідає диференціальному рівнянню другого порядку $y'' = f(x, y, y')$, яка приймає при $x = a$ і $x = b$ ($a < b$) задані значення $y(a) = y_a$, $y(b) = y_b$.

Із огляду геометрії це означає, що треба знайти інтегральну криву цього диференціального рівняння, яка проходить через задані точки $M(a; y_a)$ і $N(b; y_b)$.



Загальна крайова задача (3.1)–(3.2) може:

- а) мати єдиний розв'язок;
- б) мати декілька або нескінченну

множину розв'язків;

в) не мати розв'язків.

Приклад 3.1. Знайти розв'язок диференціального рівняння $y'' + y = 0$, що відповідає крайовим умовам: $y(0) = 1$, $y(\pi/2) = 0$.

Розв'язання.

Знайдемо загальний розв'язок цього рівняння. Складемо характеристичне рівняння: $k^2 + 1 = 0$; його корені $k_{1,2} = \pm i$. Корені характеристичного рівняння комплексно-спряжені, а тому загальний розв'язок має вигляд:

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Підставляючи по чергові крайові умови в загальний розв'язок, знаходимо:

$$\begin{cases} C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 = 1, \\ C_1 \cos(\pi/2) + C_2 \sin(\pi/2) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} C_1 = 1, \\ C_2 = 0. \end{cases}$$

Шуканий загальний розв'язок:

$$y = \cos x \quad (0 \leq x \leq \pi/2).$$

Приклад 3.2. Знайти інтегральну криву диференціального рівняння $y'' + y = 1$, що проходить через точки $(0; 0)$ і $(\pi/2; -1)$.

Розв'язання.

Задано лінійне неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами і спеціальним видом правої частини. Відповідне однорідне рівняння $y'' + y = 0$ має загальний розв'язок $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$.

Частинний розв'язок шукаємо у вигляді: $\bar{y} = A$, $\bar{y}' = 0$, $\bar{y}'' = 0$. Підставляючи $\bar{y}$, $\bar{y}'$, $\bar{y}''$ до заданого рівняння, отримаємо:

$$0 + A = 1, \text{ тобто } A = 1, \bar{y} = 1.$$

Загальний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння:

$$Y = y + \bar{y} = C_1 \sin x + C_2 \cos x + 1.$$

Ураховуючи крайову умову $y(0) = 0$, приходимо до рівняння $1 + C_2 = 0$, і, ураховуючи крайову умову $y(\pi/2) = 1$ – до рівняння $1 + C_1 = -1$.

Розв'язуючи отриману систему двох алгебраїчних рівнянь, отримаємо: $C_1 = -2$ і $C_2 = -1$. Розв'язок цієї крайової задачі має вигляд:

$$y = 1 - 2\sin x - \cos x.$$

Приклад 3.3. Показати, що диференціальне рівняння $y'' - 4y = 0$, яке відповідає крайовим умовам $y(0) = 1$ і $y(\pi) = -1$, має нескінченну множину розв'язків.

Розв'язання.

Дійсно, оскільки загальний розв'язок диференціального рівняння має вигляд:

$$y = C_1 \sin x + C_2 \cos x,$$

то, оскільки крайові умови повинні відповідати загальному розв'язку, отримаємо систему:

$$\begin{cases} C_1 \sin 0 + C_2 \cos 0 = 1, \\ C_1 \sin \pi + C_2 \cos \pi = -1, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} C_2 = 1, \\ C_2 = -1. \end{cases}$$

Тут друге рівняння системи є наслідком першого. Тобто C_1 залишається невизначеною величиною, а $C_2 = 1$. Отже, задача має нескінченну множину розв'язків вигляду:

$$y = C_1 \sin x + \cos x.$$

Не за будь-яких крайових умов існує розв'язок диференціального рівняння, який відповідає цим умовам.

Приклад 3.4. Показати, що диференціальне рівняння $y'' + y = 0$ не має розв'язку, який відповідає крайовим умовам: $y(0) = 0$, $y(2\pi) = 9$.

Розв'язання.

Дійсно, оскільки загальний розв'язок цього диференціального рівняння:

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x,$$

то для того, щоб відповідати заданим крайовим умовам, необхідне одночасне виконання системи рівностей:

$$\begin{cases} y(0) = C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 = 0, \\ y(2\pi) = C_1 \cos(\pi/2) + C_2 \sin(\pi/2) = 9. \end{cases}$$

Проте, ця система суперечлива, тому що з першого рівняння маємо $C_1 = 1$, а з другого – $C_1 = 9$. Отже, немає розв'язку, який відповідає цим крайовим умовам.

3.2 Лінійна крайова задача

Визначення. Крайову задачу називають *лінійною*, якщо диференціальне рівняння і крайові умови лінійні. Скорочено лінійне диференціальне рівняння n -го порядку записують:

$$L(y) = f(x),$$

де

$$L(y) = a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y,$$

причому $a_i(x)$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) і $f(x)$ – відомі неперервні функції на цьому відрізку $[a, b]$. Для простоти припустимо, що в крайові умови входять дві кінцеві абсциси $x_1 = a$ і $x_2 = b$. Такі крайові умови називають *двоточковими*.

Якщо $f(x) = 0$, то диференціальні рівняння *однорідні*, якщо $f(x) \neq 0$ – *неоднорідні*.

Визначення. Крайові умови називають *лінійними*, якщо вони мають вигляд:

$$R_v(y) = \gamma_v \quad (v = 1, 2, \dots, n),$$

де $R_\nu(y) = \sum_{k=0}^{n-1} [\alpha_k^{(\nu)} y^k(a) + \beta_k^{(\nu)} y^k(b)]$ і $\alpha_k^{(\nu)}, \beta_k^{(\nu)}, \gamma_\nu$ – задані сталі, причому

$$\sum_{k=0}^{n-1} (|\alpha_k^{(\nu)}| + |\beta_k^{(\nu)}|) \neq 0.$$

Визначення. Якщо $\gamma_\nu = 0$, то відповідну крайову умову називають *однорідною*, якщо $\gamma_\nu \neq 0$ – *неоднорідною*.

Визначення. Лінійну крайову задачу називають *однорідною*, якщо диференціальне рівняння і крайові умови однорідні. У іншому випадку лінійну крайову задачу називають *неоднорідною*.

3.3 Однорідна крайова задача

Розглянемо однорідну лінійну крайову задачу:

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0, \quad (a \leq x \leq b)$$

з крайовими умовами:

$$\begin{cases} \alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = 0, \\ \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0. \end{cases}$$

Тут $a_0(x) \neq 0$ і $a_0(x), a_1(x), a_2(x)$ – неперервні функції на відрізку $[a, b]$ зміни аргументу x .

Припустимо, що числа $\alpha_1 \neq 0, \beta_1 \neq 0, \alpha_2 \neq 0, \beta_2 \neq 0$. Очевидно, що крайова задача припускає завжди нульовий розв'язок $y(x) \equiv 0$. Знайдемо умову існування ненульових розв'язків однорідної крайової задачі. Ураховуючи, що $y_1(x)$ і $y_2(x)$ лінійно незалежні розв'язки диференціального рівняння, загальний розв'язок має вигляд:

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x).$$

Для виконання крайових умов необхідно, щоб

$$\begin{cases} \alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = 0, \\ \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 [C_1 y_1(a) + C_2 y_2(a)] + \beta_1 [C_1 y_1'(a) + C_2 y_2'(a)] = 0, \\ \alpha_2 [C_1 y_1(b) + C_2 y_2(b)] + \beta_2 [C_1 y_1'(b) + C_2 y_2'(b)] = 0. \end{cases}$$

Групуючи коефіцієнти при C_1 і C_2 , отримаємо:

$$\begin{cases} C_1[\alpha_1 y_1(a) + \beta_1 y_1'(a)] + C_2[\alpha_1 y_2(a) + \beta_1 y_2'(a)] = 0, \\ C_1[\alpha_2 y_1(b) + \beta_2 y_1'(b)] + C_2[\alpha_2 y_2(b) + \beta_2 y_2'(b)] = 0. \end{cases}$$

Уведемо такі скорочення:

$$\begin{cases} C_a(u) = \alpha_1 u(a) + \beta_1 u'(a), \\ C_b(u) = \alpha_2 u(b) + \beta_2 u'(b), \end{cases}$$

де $u = u(x)$ – будь-яка функція x . Очевидно, що тоді система

$$\begin{cases} C_1 C_a(y_1) + C_2 C_a(y_2) = 0, \\ C_1 C_b(y_1) + C_2 C_b(y_2) = 0 \end{cases}$$

має ненульові розв'язки щодо C_1 і C_2 , якщо визначник

$$D = \begin{vmatrix} C_a(y_1) & C_a(y_2) \\ C_b(y_1) & C_b(y_2) \end{vmatrix} = 0.$$

Приклад 3.5. Розв'язати однорідну крайову задачу $y'' - 4y = 0$ при $y(0) = y(1) = 0$.

Розв'язання.

Задано лінійне неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Складемо характеристичне рівняння: $k^2 - 4 = 0$; його корені $k_1 = 2$, $k_2 = -2$. Загальний розв'язок диференціального рівняння має вигляд:

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}.$$

Підставляючи крайові умови, отримаємо систему:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ C_1 e^2 + C_2 e^{-2} = 0. \end{cases}$$

Оскільки визначник

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^2 & e^{-2} \end{vmatrix} = e^{-2} - e^2 = \frac{1}{e^2} - e^2 = \frac{1 - e^4}{e^2} \neq 0,$$

тоді існує тільки нульовий розв'язок $y \equiv 0$, за яким $C_1 = C_2 = 0$.

Приклад 3.6. Розв'язати однорідну крайову задачу $y'' + 4y = 0$ при $y(0) = y(\pi) = 0$.

Розв'язання.

Складемо характеристичне рівняння: $k^2 + 4 = 0$; його корені $k_{1,2} = \pm 2i$. А тому загальний розв'язок диференціального рівняння має вигляд:

$$y = C_1 \sin 2x + \cos 2x.$$

Підставляючи крайові умови, отримаємо:

$$\begin{cases} C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 1 = 0, \\ C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 1 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} C_2 = 0, \\ C_2 = 0, \end{cases}$$

C_1 – будь-яке число.

Тому $y = C_1 \sin 2x$ є розв'язком однорідної крайової задачі для чисел C_1 .

3.4 Неоднорідна крайова задача

Знайти розв'язок диференціального рівняння

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x)$$

за крайовими умовами

$$\begin{cases} \alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = \gamma_1, \\ \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = \gamma_2. \end{cases}$$

Загальний розв'язок диференціального рівняння має вигляд:

$$y = y_0(x) + C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x),$$

де $y_0(x)$ – частинний розв'язок цього неоднорідного диференціального рівняння, $y_1(x)$ і $y_2(x)$ – розв'язок відповідного однорідного диференціального рівняння.

Підставляючи загальний розв'язок в ці крайові умови, маємо систему неоднорідних алгебраїчних рівнянь щодо C_1 і C_2 :

$$\begin{cases} C_1[\alpha_1 y_1(a) + \beta_1 y_1'(a)] + C_2[\alpha_1 y_2(a) + \beta_1 y_2'(a)] = \gamma_1 - [\alpha_1 y_0(a) + \beta_1 y_0'(a)], \\ C_1[\alpha_2 y_1(b) + \beta_2 y_1'(b)] + C_2[\alpha_2 y_2(b) + \beta_2 y_2'(b)] = \gamma_2 - [\alpha_2 y_0(b) + \beta_2 y_0'(b)]. \end{cases}$$

Складаємо визначник системи:

$$D = \begin{vmatrix} \alpha_1 y_1(a) + \beta_1 y_1'(a) & \alpha_1 y_2(a) + \beta_1 y_2'(a) \\ \alpha_2 y_1(b) + \beta_2 y_1'(b) & \alpha_2 y_2(b) + \beta_2 y_2'(b) \end{vmatrix}.$$

Розв'язки C_1 і C_2 неоднорідної системи рівнянь існують, якщо $D \neq 0$.

Приклад 3.7. Розв'язати неоднорідну крайову задачу $y'' + y = \sin x$ при $y(0) = y(1) = 0$.

Розв'язання.

Розв'яжемо відповідне однорідне рівняння: $y'' + y = 0$. Відповідне характеристичне рівняння: $k^2 + 1 = 0$, а його корені комплексно-спряжені: $k_{1,2} = \pm i$. Загальний розв'язок відповідного однорідного диференціального рівняння має вигляд: $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$.

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у формі:

$$\bar{y} = x(A \cos x + B \sin x).$$

Тоді $\bar{y}' = x(-A \sin x + B \cos x) + (A \cos x + B \sin x)$,

$$\bar{y}'' = x(-A \cos x - B \sin x) + 2(-A \sin x + B \cos x).$$

Після підстановки цих виразів до рівняння, маємо рівність:

$$x(-A \cos x - B \sin x) + 2(-A \sin x + B \cos x) + x(A \cos x + B \sin x) = \sin x, \\ -2A \sin x + 2B \cos x = \sin x,$$

Прирівнюючи коефіцієнти при $\cos x$ і $\sin x$, одержуємо систему рівнянь для визначення A і B :

$$\begin{cases} B = 0, \\ -2A = 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = 0, \\ A = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Отже, загальний розв'язок цього рівняння:

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{x}{2} \cos x.$$

Відповідно до заданих крайових умов:

$$\begin{cases} C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0 = 0, \\ C_1 \cos 1 + C_2 \sin 1 = \frac{1}{2} \cos 1. \end{cases}$$

Визначник системи

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \cos 1 & \sin 1 \end{vmatrix} = \sin 1 \neq 0.$$

Шукані розв'язки системи:

$$C_1 = 0, \quad C_2 = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} 1.$$

Тому крайова задача має єдиний розв'язок:

$$y = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} 1 \sin x - \frac{x}{2} \cos x.$$

Приклад 3.8. Розв'язати неоднорідну крайову задачу $y'' + \pi^2 y = 0$ при $y(0) = 1, \quad y(1) = -1$.

Розв'язання.

Загальний розв'язок диференціального рівняння має вигляд:

$$y = C_1 \sin \pi x + C_2 \cos \pi x.$$

Ураховуючи першу крайову умову, отримаємо:

$$y(0) = C_1 \sin 0 + C_2 \cos 0 = 1, \text{ тобто } C_2 = 1.$$

Підставляючи в загальний розв'язок другу крайову умову, отримаємо:

$$y(1) = C_1 \sin \pi + C_2 \cos \pi = -1, \text{ тобто } C_2 = 1.$$

Отже, обидві умови ідентичні й задовольняються при $C_2 = 1$, причому C_1 вибирається довільно.

Тому шуканий розв'язок крайової задачі має вигляд:

$$y = C_1 \sin \pi x + \cos \pi x.$$

3.5 Задача про власні значення

Однорідна крайова задача $L(y) = 0, \quad R_\nu(y) = \gamma_\nu \quad (\nu = 1, 2, \dots, n)$ має завжди нульовий розв'язок $y(x) \equiv 0$. Розглянемо ненульові розв'язки однорідної крайової задачі, які існують не завжди. Тому в диференціальне рівняння або в

крайові умови вводять параметр λ , варіюючи яким можна домогтися, щоб за деяких його значень відповідна крайова задача мала ненульові розв'язки.

Ці значення параметра $\lambda = \lambda_i$ називають *власними* або *характеристичними числами* задачі, а відповідні їм ненульові розв'язки $y_i(x)$ – *власними (характеристичними) функціями* задачі. У результаті приходимо до задачі нового типу – *задачі про власні значення*. Багато лінійних однорідних крайових задач, які зустрічаються у фізичних додатках, включають параметр і мають вигляд:

$$\begin{cases} a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y + \lambda y = 0 & (a \leq x \leq b), \\ \alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = 0, \\ \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0, \end{cases}$$

де λ – незалежний від x параметр; $a_0(x)$, $a_1(x)$, $a_2(x)$ – неперервні функції x на відрізку $[a; b]$, причому $a \neq b$.

Нульові розв'язки $y(x) \equiv 0$ існують для будь-яких значень параметра λ .

Приклад 3.9. Дослідити крайову задачу

$$\begin{cases} y'' + \lambda^2 y = 0, \\ y(0) = 0, \quad y(1) = 0. \end{cases}$$

Розв'язання.

Загальний розв'язок диференціального рівняння має вигляд:

$$y = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x.$$

Оскільки крайові умови повинні задовольняти цьому рівнянню, то

$$\begin{cases} 0 = C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0, \\ 0 = C_1 \cos \lambda + C_2 \sin \lambda. \end{cases}$$

Отже, $C_1 = 0$, $C_2 \sin \lambda = 0$.

Отже, відмінний від нуля розв'язок крайової задачі існує тоді і тільки тоді, коли $\sin \lambda = 0$, тобто при $\lambda = \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \dots$ Отже, ці значення параметра є власними значеннями цієї крайової задачі. Зауважимо, що числа

$$k^2 = \lambda^2 \pi^2 \quad (\lambda = 1, 2, 3, \dots)$$

також є власними значеннями задачі і їм відповідають власні розв'язки

$$y = C_2 \sin \lambda \pi x \quad (\lambda = \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Приклад 3.10. Визначити значення параметра λ , за яких крайова задача $y'' + \lambda y = 0$, $y(a) = 0$ і $y(a + \pi) = 0$ має один, більше ніж один або взагалі не має розв'язків.

Розв'язання. При $\lambda < 0$ загальний розв'язок диференціального рівняння $y'' + \lambda y = 0$ має вигляд:

$$y(x) = C_1 \operatorname{ch} \sqrt{-\lambda} x + C_2 \operatorname{sh} \sqrt{-\lambda} x.$$

Крайові умови $y(a) = y(a + \pi) = 0$ приводять до системи алгебраїчних рівнянь для визначення довільних сталих:

$$\begin{cases} C_1 \operatorname{ch} \sqrt{-\lambda} a + C_2 \operatorname{sh} \sqrt{-\lambda} a = 0, \\ C_1 \operatorname{ch} \sqrt{-\lambda} (a + \pi) + C_2 \operatorname{sh} \sqrt{-\lambda} (a + \pi) = 0. \end{cases}$$

Ця система має єдиний (нульовий) розв'язок $C_1 = C_2 = 0$, якщо визначник системи

$$D(\lambda) = \operatorname{ch} \sqrt{-\lambda} a \operatorname{sh} \sqrt{-\lambda} (a + \pi) - \operatorname{sh} \sqrt{-\lambda} a \operatorname{ch} \sqrt{-\lambda} (a + \pi) = \operatorname{sh} \sqrt{-\lambda} a$$

відмінний від нуля. Тому при $\lambda < 0$ ця крайова задача має єдиний розв'язок

$$y(x) \equiv 0.$$

При $\lambda = 0$ загальний розв'язок диференціального рівняння має вигляд:

$$y(x) = C_1 + C_2 x.$$

Крайові умови $y(a) = y(a + \pi) = 0$ приводять у цьому випадку до системи алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 a = 0, \\ C_1 + C_2 (a + \pi) = 0, \end{cases}$$

звідси $C_1 = C_2 = 0$. Тому при $\lambda = 0$ дана крайова задача так само має розв'язок:

$$y(x) \equiv 0.$$

При $\lambda > 0$ загальний розв'язок диференціального рівняння має вигляд:

$$y(x) = C_1 \cos \sqrt{\lambda} x + C_2 \sin \sqrt{\lambda} x.$$

Крайові умови $y(a) = y(a + \pi) = 0$ приводять до системи алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} C_1 \cos \sqrt{\lambda} a + C_2 \sin \sqrt{\lambda} a = 0, \\ C_1 \cos \sqrt{\lambda} (a + \pi) + C_2 \sin \sqrt{\lambda} (a + \pi) = 0. \end{cases}$$

Визначник цієї системи

$$D(\lambda) = \cos \sqrt{\lambda} a \sin \sqrt{\lambda} (a + \pi) - \sin \sqrt{\lambda} a \cos \sqrt{\lambda} (a + \pi) = \sin \sqrt{\lambda} \pi.$$

Визначник $D(\lambda) \neq 0$, якщо $\sqrt{\lambda}$ не є цілим числом. У цьому випадку задане диференціальне рівняння має єдиний розв'язок $y(x) \equiv 0$.

Якщо $\sqrt{\lambda}$ є цілим числом, тобто λ є одним із чисел 1, 4, 9, 16, 25, наприклад, $\lambda = \lambda_k = k^2$, то тоді $\sin \sqrt{\lambda} (a + \pi)$ і $\cos \sqrt{\lambda} (a + \pi)$ відрізняються від $\sin \sqrt{\lambda} a$ і $\cos \sqrt{\lambda} a$ тільки на множник $(-1)^k$ і друге рівняння системи аналогічно першому рівнянню системи. Тому в цьому випадку є тільки одне рівняння для визначення довільних сталих:

$$C_1 \cos ka + C_2 \sin ka = 0.$$

Якщо $C_1 = -A \sin ka$, то $C_2 = A \cos ka$ і загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y(x) = C_1 \cos ka + C_2 \sin ka$$

приводиться до вигляду

$$y(x) = A \sin k(x - a),$$

де A – довільна стала.

Отже, ця крайова задача має єдиний розв'язок тоді і тільки тоді, коли λ не є одним із цілих чисел 1, 4, 9, 16, ... Це розв'язок $y(x) \equiv 0$.

Якщо ж $\lambda = \lambda_k = k^2$ ($k = 1, 2, 3, \dots$), то задача має нескінченну множину розв'язків:

$$y(x) = A \sin k(x - a),$$

де A – довільна стала.

Приклади показують, як розв'язуються крайові задачі у випадку, якщо загальний розв'язок диференціального рівняння може бути знайдений безпосередньо. Проте це не завжди можливо виконати.

3.6 Задача Штурма – Ліувілля

Приклад 3.11. Знайти такі значення параметра λ , за яких існують ненульові розв'язки диференціального рівняння $y'' + \lambda y = 0$, які відповідають крайовим умовам $y(0) = 0$, $y(l) = 0$.

Розв'язання.

Складемо характеристичне рівняння: $k^2 + \lambda = 0$. Його корені $k_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda}$.

Отже, загальний розв'язок:

$$y = C_1 \cos \sqrt{\lambda}x + C_2 \sin \sqrt{\lambda}x.$$

Ураховуючи крайові умови $y(0) = 0$, $y(l) = 0$, отримаємо:

$$\begin{cases} C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0 = 0, \\ C_1 \cos \sqrt{\lambda}l + C_2 \sin \sqrt{\lambda}l = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} C_1 = 0, \\ C_2 \sin \sqrt{\lambda}l = 0. \end{cases}$$

Уважаємо $C_2 \neq 0$, в іншому випадку $y(x) = 0$. Тому $\sin \sqrt{\lambda}l = 0$, звідки $\sqrt{\lambda}l = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

$$\sqrt{\lambda} = \frac{k\pi}{l}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Отже, ненульові розв'язки задачі можливі при

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{l} \right)^2, \quad k = 1, 2, 3, \dots, n.$$

Цим ненульовим значенням відповідають ненульові розв'язки задачі Штурма – Ліувілля:

$$y_k(x) = \sin \frac{k\pi}{l}x.$$

Приклад 3.12. Знайти такі значення параметра λ , за яких існують ненульові розв'язки диференціального рівняння $y'' + \lambda y = 0$, які відповідають крайовим умовам $y(0) = 0$, $y'(l) = 0$.

Розв'язання.

Складемо характеристичне рівняння: $k^2 + \lambda = 0$. Його корені $k_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda}$.

Отже, загальний розв'язок:

$$y = C_1 \cos \sqrt{\lambda} x + C_2 \sin \sqrt{\lambda} x.$$

Ураховуючи крайові умови $y(0) = 0$, $y'(l) = 0$, отримаємо:

$$\begin{cases} C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0 = 0, \\ -\sqrt{\lambda} C_1 \sin \sqrt{\lambda} l + \sqrt{\lambda} C_2 \cos \sqrt{\lambda} l = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} C_1 = 0, \\ \sqrt{\lambda} C_2 \cos \sqrt{\lambda} l = 0. \end{cases}$$

Уважаємо $C_2 \neq 0$, у іншому випадку $y(x) = 0$. Тому $\cos \sqrt{\lambda} l = 0$, звідки $\sqrt{\lambda} l = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

$$\sqrt{\lambda} = \frac{\pi/2 + k\pi}{l}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Отже, ненульові розв'язки задачі можливі при

$$\lambda_k = \left(\frac{\pi/2 + k\pi}{l} \right)^2, \quad k = 1, 2, 3, \dots, n.$$

Цим ненульовим значенням відповідають ненульові розв'язки задачі Штурма – Ліувілля:

$$y_k(x) = C_2 \sin \left(\frac{\pi/2 + k\pi}{l} \right) x.$$

3.7 Метод зведення крайових задач до задач Коші

Для розв'язання лінійних крайових задач часто буває корисний такий прийом. Якщо дано лінійне диференціальне рівняння $L(y) = f(x)$ із двома крайовими умовами, накладеними на $y(x)$ і її похідні в двох точках $x = a$ і $x = b$, то розв'язок крайової задачі є:

$$y = y_0(x) + \alpha u(x) + \beta v(x), \quad (3.3)$$

де функції $y_0(x)$, $u(x)$, $v(x)$ знаходяться відповідно з трьох задач Коші:

$$\begin{aligned} L(y) &= f(x), \quad y(a) = y'(a) = 0; \\ L(y) &= 0, \quad y(a) = 1, \quad y'(a) = 0; \\ L(y) &= 0, \quad y(a) = 0, \quad y'(a) = 1. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Підставляючи задані крайові умови в (3.3), одержуємо систему двох рівнянь для визначення коефіцієнтів α і β .

Приклад 3.13. Розв'язати крайову задачу $xy'' - y' = \frac{3}{x^2}$, $y(1) = y'(1)$,

$$3y(2) - 2y'(2) = 3.$$

Розв'язання.

На прикладі цієї крайової задачі проілюструємо метод зведення крайових задач до задач Коші. Шукаємо розв'язок зазначеної крайової задачі у вигляді: $y = y_0(x) + \alpha u(x) + \beta v(x)$, де функції $y_0(x)$, $u(x)$, $v(x)$ відповідно розв'язки таких задач Коші:

$$\begin{aligned} xy'' - y' &= \frac{3}{x^2}, \quad y(1) = y'(1) = 0; \\ xy'' - y' &= 0, \quad y(1) = 1, y'(1) = 0; \\ xy'' - y' &= 0, \quad y(1) = 0, y'(1) = 1. \end{aligned}$$

Розв'яжемо першу задачу Коші: $xy'' - y' = \frac{3}{x^2}$, $y(1) = y'(1) = 0$.

Маємо диференціальне рівняння другого порядку, що не містить шуканої функції y . Порядок такого рівняння можна понизити, якщо позначити $y' = z$, $y'' = z'$. Отримаємо:

$$xz' - z = \frac{3}{x^2} \Big| \cdot \frac{1}{x}, \quad z' - \frac{z}{x} = \frac{3}{x^3}.$$

Маємо лінійне диференціальне рівняння. Застосуємо метод Бернуллі, тобто будемо шукати розв'язок рівняння у вигляді добутку двох функцій від x . Тоді $z' = u'v + uv'$. Рівняння набуває вигляду:

$$u'v + uv' - \frac{uv}{x} = \frac{3}{x^3}, \quad u'v + u\left(v' - \frac{v}{x}\right) = \frac{3}{x^3}.$$

Доберемо функцію v такою, щоб дужка в лівій частині рівняння перетворилася на нуль. Це приводить до системи двох рівнянь для функцій u і v :

$$\begin{cases} v' - \frac{v}{x} = 0, \\ u'v = \frac{3}{x^3}. \end{cases}$$

Перше рівняння системи є рівнянням з відокремлюваними змінними. Розв'яжемо його.

$$v' - \frac{v}{x} = 0, \quad \frac{dv}{dx} - \frac{v}{x} = 0, \quad \frac{dv}{v} - \frac{dx}{x} = 0, \quad \int \frac{dv}{v} - \int \frac{dx}{x} = \int 0 dC, \\ \ln|v| - \ln|x| = \ln|C|, \quad v = Cx.$$

Тут досить знайти який-небудь частинний розв'язок, тому беремо сталу інтегрування $C=1$, тобто $v=x$.

Тепер підставимо функцію $v=x$ у друге рівняння системи і знову отримаємо рівняння з відокремлюваними змінними.

$$u'x = \frac{3}{x^3}, \quad u' = \frac{3}{x^4}, \quad u = \int \frac{3}{x^4} dx = -\frac{1}{x^3} + C_1.$$

Підставляючи u і v , одержуємо: $z = \left(-\frac{1}{x^3} + C_1\right)x$.

Оскільки $y' = z$, то $y' = \left(-\frac{1}{x^3} + C_1\right)x = -\frac{1}{x^2} + C_1x$, звідки отримаємо

загальний розв'язок першої задачі Коші:

$$y = \int \left(-\frac{1}{x^2} + C_1x\right) dx = \frac{1}{x} + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2.$$

Знайдемо частинний розв'язок, який відповідає початковим умовам $y(1) = y'(1) = 0$:

$$\begin{cases} 0 = 1 + C_1 \frac{1}{2} + C_2, \\ 0 = -1 + C_1; \end{cases} \quad \begin{cases} C_2 = -\frac{3}{2}, \\ C_1 = 1. \end{cases}$$

Отже, $y_0(x) = \frac{1}{x} + \frac{x^2}{2} - \frac{3}{2}$.

Знайдемо розв'язок другої задачі Коші: $xy'' - y' = 0$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$.

Знайдемо загальний розв'язок рівняння $xy'' - y' = 0$. Якщо $y' = z$, $y'' = z'$, отримаємо:

$$xz' - z = 0, \quad x \frac{dz}{dx} - z = 0, \quad \frac{dz}{x} - \frac{dx}{x} = 0, \quad \int \frac{dz}{x} - \int \frac{dx}{x} = \int 0 dC,$$

$$\ln|z| - \ln|x| = \ln|C|, \quad z = C_1 x.$$

Оскільки $y' = z$, то $y' = C_1 x$, $y = \int C_1 x dx = C_1 \frac{x^2}{2} + C_2$.

Знайдемо частинний розв'язок, який задовольняє початковим умовам $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$.

$$\begin{cases} 1 = C_1 \frac{1}{2} + C_2, \\ 0 = C_1 \cdot 1; \end{cases} \quad \begin{cases} C_2 = 1, \\ C_1 = 0. \end{cases}$$

А тому $u(x) = 1$.

Знайдемо розв'язок третьої задачі Коші: $xy'' - y' = 0$, $y(1) = 0$, $y'(1) = 1$.

$y = C_1 \frac{x^2}{2} + C_2$ – загальний розв'язок рівняння. Підставимо початкові

умови:

$$\begin{cases} 0 = C_1 \frac{1}{2} + C_2, \\ 1 = C_1 \cdot 1; \end{cases} \quad \begin{cases} C_2 = -\frac{1}{2}, \\ C_1 = 1. \end{cases}$$

А тому $v(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}$.

Доберемо у виразі

$$y = \frac{1}{2}(x^2 - 3) + \frac{1}{x} + \alpha + \frac{\beta}{2}(x^2 - 1),$$

коефіцієнти α і β так, щоб цей вираз відповідав крайовим умовам $y(1) = y'(1)$, $3y(2) - 2y'(2) = 3$.

$$y' = x - \frac{1}{x^2} + \beta x.$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(1-3) + \frac{1}{1} + \alpha + \frac{\beta}{2}(1-1) = 1 - \frac{1}{1^2} + \beta, \\ \frac{3}{2}(4-3) + \frac{3}{2} + 3\alpha + \frac{3\beta}{2}(4-1) - 4 + \frac{1}{2} - 4\beta = 3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = \beta, \\ \frac{3}{2} + \frac{3}{2} + 3\alpha + \frac{9\beta}{2} - \frac{7}{2} - 4\beta = 3; \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = \beta, \\ \frac{7\beta}{2} = \frac{7}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = 1, \\ \beta = 1. \end{cases}$$

Отже, шуканий розв'язок має вигляд:

$$y = \frac{1}{2}(x^2 - 3) + \frac{1}{x} + 1 + \frac{1}{2}(x^2 - 1) = x^2 + \frac{1}{x} - 1.$$

3.8 Функція Гріна

Визначення. Функцією Гріна крайової задачі:

$$\begin{cases} a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x) & (a \leq x \leq b), \end{cases} \quad (3.5)$$

$$\begin{cases} \alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = 0, & \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0 \end{cases} \quad (3.6)$$

називають функцію $G(x, s)$, яка визначена при $x \in [a, b]$, $s \in (a, b)$ і при кожному фіксованому $s \in (a, b)$ відповідає властивостям:

1) при $x \neq s$ функція $G(x, s)$ відповідає рівнянню

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0; \quad (3.7)$$

2) при $x = a$ і $x = b$ функція $G(x, s)$ неперервна по x , а її похідна по x має

розрив першого роду зі стрибком, що дорівнює $\frac{1}{a_0(x)}$, тобто

$$G(s+0, s) = G(s-0, s), \quad G'_x(s+0, s) - G'_x(s-0, s) = \frac{1}{a_0(x)}. \quad (3.8)$$

Щоб знайти функцію Гріна крайової задачі (3.5)–(3.6), потрібно знайти два розв'язки $y_1(x)$ і $y_2(x)$ (відмінні від $y(x) \equiv 0$) рівняння (3.7), які відповідають відповідно першій і другій з крайових умов (3.6).

Якщо $y_1(x)$ не відповідає одночасно обом крайовим умовам, то функція Гріна $G(x, s)$ існує і її можна шукати у вигляді:

$$G(x, s) = \begin{cases} \varphi(s)y_1(x) & \text{при } a \leq x \leq s, \\ \psi(s)y_2(x) & \text{при } s \leq x \leq b, \end{cases} \quad (3.9)$$

де функції $\varphi(s)$ і $\psi(s)$ добираються так, щоб функція відповідала умовам (3.8), тобто щоб

$$\psi(s)y_2(x) = \varphi(s)y_1(x), \quad \psi(s)y_2'(s) - \varphi(s)y_1'(s) = \frac{1}{a_0(s)}. \quad (3.10)$$

Якщо знайдена функція Гріна $G(x, s)$, то розв'язок крайової задачі (3.5)–(3.6) виражають рівнянням:

$$y(x) = \int_a^b G(x, s)f(s)ds. \quad (3.11)$$

Приклад 3.14. Побудувати функцію Гріна для крайової задачі $y'' = f(x)$, $y(0) = y(1) = 0$.

Розв'язання.

Знайдемо загальний розв'язок рівняння $y'' = 0$:

$$y' = C_1, \quad y = \int C_1 dx = C_1 x + C_2.$$

Знайдемо розв'язок, що відповідає умові $y(0) = 0$:

$$0 = C_1 \cdot 0 + C_2, \quad C_2 = 0.$$

Можна взяти, наприклад, розв'язок $y_1(x) = x$, а за другої крайової умови $y(1) = 0$ отримуємо:

$$0 = C_1 \cdot 1 + C_2, \quad C_2 = -C_1,$$

а тому, як $y_2(x)$ можна взяти $y_2(x) = 1 - x$.

Функцію Гріна для вказаної крайової задачі шукаємо у вигляді:

$$G(x, s) = \begin{cases} \varphi(s)x & \text{при } 0 \leq x \leq s, \\ \psi(s)(1 - x) & \text{при } s \leq x \leq 1, \end{cases}$$

де функції $\varphi(s)$ і $\psi(s)$ визначають з умов $\psi(s)(1 - s) = \varphi(s)s$, $-\psi(s) - \varphi(s) = 1$.

Звідси

$$\begin{aligned}\psi(s) &= -1 - \varphi(s), \quad (-1 - \varphi(s))(1-s) = \varphi(s)s, \quad s-1 - \varphi(s)(1-s) = \varphi(s)s, \\ \varphi(s)(1-s) + \varphi(s)s &= s-1, \quad \varphi(s) = s-1, \quad \psi(s) = -1-s+1 = -s.\end{aligned}$$

Отже, шукана функція Гріна має вигляд:

$$G(x, s) = \begin{cases} (s-1)x & \text{при } 0 \leq x \leq s, \\ -s(1-x) & \text{при } s \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Побудувавши функцію Гріна $G(x, s)$, запишемо розв'язок крайової задачі:

$$y(x) = \int_0^1 G(x, s) f(s) ds = x \int_0^x (s-1) f(s) ds - (1-x) \int_x^1 s f(s) ds.$$

Приклад 3.15. Побудувати функцію Гріна для крайової задачі $y'' - y = f(x)$, $y(x)$ обмежений, якщо $x \in (-\infty; +\infty)$.

Розв'язання.

Задано лінійне неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Знайдемо загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння $y'' - y = 0$. Складемо характеристичне рівняння: $k^2 - 1 = 0$; його корені $k_1 = 1$, $k_2 = -1$. А тому загальний розв'язок рівняння має вигляд:

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^x.$$

Розв'язок $y_1(x) = e^x$ обмежений, якщо $x \rightarrow -\infty$, а $y_2(x) = e^{-x}$ обмежений, якщо $x \rightarrow +\infty$, тому функцію Гріна вказаної крайової задачі шукаємо у вигляді:

$$G(x, s) = \begin{cases} \varphi(s)e^x, & \text{якщо } -\infty \leq x \leq s, \\ \psi(s)e^{-x}, & \text{якщо } s \leq x \leq +\infty. \end{cases}$$

де функції $\varphi(s)$ і $\psi(s)$ визначаємо з умов:

$$\psi(s)e^{-s} = \varphi(s)e^s, \quad -\psi(s)e^{-s} = \varphi(s)e^s + 1.$$

Звідси $\varphi(s) = -\frac{1}{2}e^{-s}$, $\psi(s) = -\frac{1}{2}e^s$. Отже, шукана функція Гріна цієї

крайової задачі:

$$G(x, s) = \begin{cases} -\frac{1}{2}e^{-s}e^x, & \text{якщо } -\infty \leq x \leq s, \\ -\frac{1}{2}e^s e^{-x}, & \end{cases}$$

якщо $s \leq x \leq +\infty$.

Приклад 3.16. Побудувати функцію Гріна для крайової задачі $y'' = f(x)$,
 $y(-1) = y(1) = 0$, $-1 \leq x \leq 1$.

Розв'язання.

Загальний розв'язок рівняння $y'' = 0$ є $y = C_1 + C_2 x$. Знайдемо розв'язок, що відповідає умові $y(-1) = 0$:

$$0 = C_1 + C_2(-1), \quad C_1 = C_2.$$

Можна взяти, наприклад, розв'язок $y_1(x) = 1 + x$, а за другої крайової умови $y(1) = 0$ отримуємо:

$$0 = C_1 + C_2 \cdot 1, \quad C_2 = -C_1,$$

а тому, як $y_2(x)$ можна взяти $y_2(x) = 1 - x$.

Функцію Гріна для вказаної крайової задачі шукаємо у вигляді:

$$G(x, s) = \begin{cases} \varphi(s)(1+x) & \text{при } -1 \leq x \leq s, \\ \psi(s)(1-x) & \text{при } s \leq x \leq 1, \end{cases}$$

де функції $\varphi(s)$ і $\psi(s)$ визначаються з умов:

$$\psi(s)(1-s) = \varphi(s)(1+s), \quad -\psi(s) - \varphi(s) = 0.$$

$$\begin{aligned} \psi(s) &= \varphi(s) \frac{1+s}{1-s}, \quad -\varphi(s) \frac{1+s}{1-s} - \varphi(s) = 1, \quad -\varphi(s) \left(\frac{1+s}{1-s} + 1 \right) = 1, \\ -\varphi(s) \frac{2}{1-s} &= 1, \quad \varphi(s) = -\frac{1-s}{2}, \quad \psi(s) = -\frac{1+s}{2}. \end{aligned}$$

Отже, шукана функція Гріна має вигляд:

$$G(x, s) = \begin{cases} -\frac{1}{2}(1-s)(1+x) & \text{при } -1 \leq x \leq s, \\ -\frac{1}{2}(1+s)(1-x) & \text{при } s \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Побудувавши функцію Гріна $G(x, s)$, запишемо розв'язок крайової задачі:

$$y(s) = \int_{-1}^1 G(x, s) f(s) ds = -\frac{1+x}{2} \int_{-1}^x (1-s) f(s) ds - \frac{1-x}{2} \int_x^1 (1+s) f(s) ds.$$

Контрольні питання та завдання

1. Що таке крайові умови, крайова задача для звичайного диференціального рівняння? Який вигляд мають крайові умови для лінійного диференціального рівняння другого порядку?
2. Чим відрізняються неоднорідні крайові умови від однорідних? Чому, розглядаючи крайову задачу, можна обмежитись однорідними крайовими умовами?
3. Яку функцію називають розв'язком крайової задачі для лінійного диференціального рівняння другого порядку?
4. Коли розв'язок крайової задачі для лінійного диференціального рівняння другого порядку існує та єдиний, не існує, існує, але не єдиний?
5. Що таке функція Гріна крайової задачі? Яке її значення у побудові розв'язку неоднорідної крайової задачі? Коли існує єдина функція Гріна крайової задачі? Як можна побудувати функцію Гріна?
6. Що називають крайовою задачею? Що таке власні значення, власні функції такої задачі? Як формулюється задача Штурма – Ліувілля?
7. Знайти інтегральну криву диференціального рівняння $y'' + y = 1$, що проходить через точки $(0; 0)$ і $(\pi/2; -1)$.
8. Визначити значення параметра λ , за яких крайова задача $y'' + \lambda y = 0$, $y(a) = 0$ і $y(a + \pi) = 0$ має один, більше, ніж один, або взагалі не має розв'язків.
9. Розв'язати однорідну крайову задачу $y'' + 4y = 0$ за умови $y(0) = y(\pi) = 0$.
10. Розв'язати однорідну крайову задачу $y'' + \pi^2 y = 0$ за умови $y(0) = 1$, $y(1) = -1$.

3.9 Інтегрування диференціальних рівнянь за допомогою степеневих та узагальнених степеневих рядів

Розв'язання лінійного диференціального рівняння вище першого порядку зі змінними коефіцієнтами не завжди виражається через елементарні функції, і інтегрування такого рівняння рідко приводиться до квадратур.

Найпоширенішим прийомом інтегрування зазначених рівнянь є надання шуканого розв'язку у вигляді степеневого ряду. Розглянемо рівняння другого порядку:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \quad (3.12)$$

Припустимо, що коефіцієнти $p(x)$ і $q(x)$ рівняння (3.12) є аналітичними функціями на інтервалі $|x - x_0| < a$, тобто розкладаються у степеневі ряди:

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n (x - x_0)^n, \quad q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n (x - x_0)^n,$$

які збігаються, якщо $|x - x_0| < a$.

Теорема. Якщо функції $p(x)$ й $q(x)$ – аналітичні за умови $|x - x_0| < a$, то всякий розв'язок $y = y(x)$ рівняння (3.12) є аналітичним за умови $|x - x_0| < a$, тобто розкладається у степеневий ряд:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x - x_0)^n, \quad (3.13)$$

збіжний за умови $|x - x_0| < a$.

Невизначені коефіцієнти C_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) знаходять підстановкою ряду у рівняння та прирівнюванням коефіцієнтів біля однакових степенів різниці $(x - x_0)$ в обох частинах отриманої рівності. Якщо вдається знайти всі коефіцієнти, то отриманий ряд визначає розв'язок у всій області збіжності.

У тих випадках, коли для рівняння $y' = f(x, y)$ потрібно розв'язати задачу Коші з початковою умовою $y(x_0) = y_0$, то розв'язок можна шукати за допомогою ряду Тейлора:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n,$$

де $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$, а надалі похідні $y^{(n)}(x_0)$ знаходять послідовним диференціюванням заданого рівняння й підстановкою в результат диференціювання замість $x, y, y', \dots$ значень x_0, y_0, y'_0 всіх інших знайдених наступних похідних. Аналогічно за допомогою ряду Тейлора можна інтегрувати й рівняння вищих порядків.

Приклад 3.17. Проінтегрувати рівняння $y'' - x^2 y = 0$.

Розв'язання.

Будемо шукати розв'язок цього рівняння у вигляді ряду:

$$y = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \dots + C_n x^n + \dots$$

Підставляючи y й y'' у шукане рівняння, знаходимо:

$$[2 \cdot 1 C_2 + 3 \cdot 2 C_3 x + 4 \cdot 3 C_4 x^2 + \dots + (n+2)(n+1) C_{n+2} x^n + \dots] - \\ - x^2 [C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \dots + C_n x^n + \dots] = 0.$$

Згрупуємо члени з однаковими степенями x :

$$2 \cdot 1 C_2 + 3 \cdot 2 C_3 x + \sum_{n=0}^{\infty} [(n+4)(n+3) C_{n+4} - C_n] x^{n+2} \equiv 0.$$

Прирівнюючи до нуля всі коефіцієнти отриманої рівності, знаходимо:

$$C_2 = C_3 = 0; \quad C_{n+4} = \frac{C_n}{(n+4)(n+3)} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

Останнє співвідношення дозволяє знайти послідовно всі коефіцієнти шуканого розкладання (C_0 і C_1 залишаються довільними й виконують функцію довільних сталих інтегрування):

$$C_{4k} = \frac{C_0}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (4k-1)4k}; \quad C_{4k+1} = \frac{C_1}{4 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 9 \cdot \dots \cdot 4k(4k+1)}; \\ C_{4k+2} = C_{4k+3} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots)$$

Отже,

$$y = C_0 + C_1 x + C_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{4k}}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (4k-1)4k} + C_1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{4k+1}}{4 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 9 \cdot \dots \cdot 4k(4k+1)}.$$

Отримані ряди збігаються на всій числовій осі й визначають два лінійно незалежні частинні розв'язки заданого рівняння.

Приклад 3.18. Розв'язати рівняння $y'' + xy = 0$.

Розв'язання.

Шукаємо розв'язок рівняння у вигляді ряду:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n.$$

Двічі продиференціювавши цей ряд і підставивши в задане рівняння, маємо:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)C_n x^{n-2} + x \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = 0.$$

Прирівнюючи до нуля коефіцієнти біля однакових степенів x , отримаємо систему рівнянь для визначення C_n :

$$2 \cdot 1 C_2 = 0, \quad 3 \cdot 2 C_3 + C_0 = 0, \quad 4 \cdot 3 C_4 + C_1 = 0, \dots, \quad n(n-1)C_n + C_{n-3} = 0 \dots$$

$$C_n = -\frac{C_{n+3}}{n(n-1)}.$$

Із цих рівнянь знаходимо:

$$C_2 = 0, \quad C_{n+3} = -\frac{C_n}{(n+2)(n+3)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Якщо $C_0 = 1$, $C_1 = 0$, тоді відмінними від нуля будуть тільки коефіцієнти C_{3m} . Маємо:

$$C_{3m+1} = -\frac{C_{3m}}{(3m+2)(3m+3)}, \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

звідки

$$C_{3m} = \frac{(-1)^m}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (3m-1)3m}, \quad m = 1, 2, \dots$$

Побудовано один розв'язок рівняння:

$$y_1(x) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{3m}}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (3m-1)3m}.$$

Другий розв'язок, лінійно незалежний зі знайденим, отримаємо, узявши $C_0 = 0$, $C_1 = 1$. Тоді відмінними від нуля будуть тільки коефіцієнти C_{3m+1} :

$$C_{3m+4} = -\frac{C_{3m+1}}{(3m+3)(3m+4)}, \quad m=0,1,2,\dots$$

Звідси

$$C_1 = 1, \quad C_{3m+1} = \frac{(-1)^m}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot \dots \cdot 3m(3m+1)}, \quad m=1,2,\dots,$$

отже,

$$y_2(x) = x + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{3m+1}}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot \dots \cdot 3m(3m+1)}.$$

Ряди, що представляють $y_1(x)$ і $y_2(x)$, збігаються за будь-яких значень x та є аналітичними функціями. Усі розв'язки виражаються рівнянням $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$, де C_1, C_2 – довільні сталі:

$$y = C_1 \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{3m}}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (3m-1)3m} \right) + C_2 \left(x + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{3m+1}}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot \dots \cdot 3m(3m+1)} \right).$$

Приклад 3.19. За допомогою ряду Тейлора знайти наближений розв'язок задачі Коші: $y' = x^2 + y^2$, $y(0) = 1$, узявши перших шість членів розкладання, відмінних від нуля.

Розв'язання.

Із початкових умов знаходимо: $y'(0) = 0^2 + 1^2 = 1$. Диференціюючи це рівняння, послідовно отримаємо:

$$y'' = 2x + 2yy', \quad y''' = 2 + 2y'^2 + 2yy'', \quad y^{IV} = 6yy'' + 2yy''', \\ y^V = 6y''^2 + 8y'y''' + 2yy^{IV}.$$

Узявши $x = 0$ та використовуючи значення $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$, послідовно знаходимо $y''(0) = 2$, $y'''(0) = 8$, $y^{IV}(0) = 28$, $y^V(0) = 144$. Шуканий розв'язок має вигляд:

$$y = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{2x^2}{2!} + \frac{8x^3}{3!} + \frac{28x^4}{4!} + \frac{144x^5}{5!} + \dots$$

Приклад 3.20. Знайти чотири перші (відмінні від нуля) члени розкладання задачі Коші: $y'' = x + y^2$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Розв'язання.

Диференціюючи рівняння $y'' = x + y^2$, отримаємо:

$$y''' = 1 + 2yy', \quad y^{IV} = 2yy'' + 2y'^2, \quad y^V = 2yy''' + 6y'y'',$$

$$y^VI = 2yy^{IV} + 8y'y''' + 6y''^2.$$

Якщо $x = 0$, отримаємо: $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 0$, $y'''(0) = 1$, $y^{IV}(0) = 2$, $y^V(0) = 0$, $y^VI(0) = 16$.

Розв'язок має вигляд:

$$y = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{2x^4}{4!} + \frac{16x^6}{6!} + \dots = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{12} + \frac{x^6}{45} + \dots$$

3.10 Рівняння Бесселя

Визначення. Лінійне диференціальне рівняння зі змінними коефіцієнтами, що має вигляд:

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \lambda^2)y = 0 \quad (\lambda = \text{const}), \quad (3.14)$$

називають рівнянням Бесселя (до цього ж виду зводиться рівняння $x^2 y'' + xy' + (mx^2 - \lambda^2)y = 0$ заміною $mx = \xi$).

Розв'язок рівняння (3.14) будемо шукати у вигляді узагальненого степеневого ряду, тобто добутку деякого степеня x на степеневий ряд:

$$y = x^r (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{r+k} \quad (3.15)$$

$$y' = \sum_{k=0}^{\infty} (r+k) a_k x^{r+k-1},$$

$$y'' = \sum_{k=0}^{\infty} (r+k)(r+k-1) a_k x^{r+k-2}.$$

Отримані степеневі ряди збігаються для всіх значень x , що легко встановлюється за ознакою Даламбера. Розв'язки $y_1(x)$ і $y_2(x)$ лінійно незалежні, оскільки їх частка не є сталою.

Визначення. Розв'язок $y_1(x)$, помножений на сталу $a_0 = \frac{1}{2^\lambda \Gamma(\lambda + 1)}$, називають *функцією Бесселя* (або *циліндричною функцією*) *порядку λ першого роду* і позначають символом $J_\lambda(x)$. Розв'язок $y_2(x)$ позначають $J_{-\lambda}(x)$.

Отже, загальний розв'язок рівняння (3.15) при λ , що не дорівнює цілому числу, має вигляд:

$$y(x) = C_1 J_\lambda(x) + C_2 J_{-\lambda}(x),$$

де C_1 і C_2 – довільні сталі величини.

Гамма-функцію визначають невласним інтегралом:

$$\Gamma(\lambda) = \int_0^\infty e^{-x} x^{\lambda-1} dx \quad (\lambda > 0).$$

Якщо λ дорівнює половині непарного числа, функцію Бесселя виражають через елементарні функції, оскільки в цьому випадку гамма-функція, що входить у визначення функції Бесселя:

$$\begin{aligned} J_\lambda(x) &= \frac{1}{2^\lambda \Gamma(\lambda + 1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{\lambda+2k}}{4^k k! (\lambda + 1)(\lambda + 2) \dots (\lambda + k)} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(\lambda + k + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\lambda+2k}, \end{aligned}$$

(добуток $(\lambda + 1)(\lambda + 2) \dots (\lambda + k) \Gamma(\lambda + 1)$ замінений, відповідно до властивості гамма-функції, на $\Gamma(\lambda + k + 1)$), набуває таких значень:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty e^{-x} x^{-1/2} dx = 2 \int_0^\infty e^{-t^2} dt = 2 \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi};$$

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \Gamma\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \sqrt{\pi};$$

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \Gamma\left(1 + \frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\pi};$$

$$\Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \Gamma\left(1 + \frac{5}{2}\right) = \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\pi}, \dots$$

Функцію Бесселя J_λ , якщо $\lambda = n$ (натуральному), можна записати так:

$$J_\lambda(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(n+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}.$$

Для від'ємного і цілого λ частинні розв'язки не виражаються функцією Бесселя першого роду і їх варто шукати у формі:

$$K_n(x) = J_n(x) \ln x + x^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k.$$

Підставляючи цей вираз у рівняння (3.14), визначимо коефіцієнти b_k .

Визначення. Функцію $K_n(x)$, помножену на деяку сталу, називають *функцією Бесселя n -го порядку другого роду*.

Приклад 3.21. Знайти функцію Бесселя, якщо $\lambda = 0$.

Розв'язання.

Скориставшись рівністю:

$$J_\lambda(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(\lambda+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\lambda},$$

якщо $\lambda = 0$, отримаємо:

$$\begin{aligned} J_0(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{4^k k! k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{4^k (k!)^2} = \\ &= 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{4^2 (1 \cdot 2)^2} - \frac{x^6}{4^3 (1 \cdot 2 \cdot 3)^2} + \dots \end{aligned}$$

Приклад 3.22. Розв'язати рівняння $x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0$.

Розв'язання.

Оскільки $\lambda = \frac{1}{2}$, то загальний розв'язок рівняння має вигляд:

$$y = C_1 J_{1/2}(x) + C_2 J_{-1/2}(x),$$

де

$$J_{1/2} = \frac{1}{2^{1/2} \Gamma(3/2)} x^{1/2} \left[1 - \frac{x^2}{2 \cdot 3} + \frac{x^4}{2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5} - \frac{x^6}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} + \dots \right] =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{x}} \left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \right] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}.$$

Аналогічно одержимо: $J_{-1/2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}$. Отже, загальний розв'язок:

$$y = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} (C_1 \sin x + C_2 \cos x).$$

Приклад 3.23. Розв'язати рівняння $y'' + \frac{y'}{x} + \left(1 - \frac{1}{9x^2}\right)y = 0$.

Розв'язання.

Запишемо рівняння у вигляді:

$$x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{9}\right)y = 0.$$

Це рівняння є рівнянням Бесселя ($\lambda = 1/3$), тому його загальним розв'язком є:

$$y = C_1 J_{1/3}(x) + C_2 J_{-1/3}(x).$$

Приклад 3.24. Розв'язати рівняння $x^2 y'' + xy' + \left(4x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0$.

Розв'язання.

Нехай $2x = t$. Тоді $\frac{dy}{dx} = 2 \frac{dy}{dt}$, $\frac{d^2 y}{dx^2} = 4 \frac{d^2 y}{dt^2}$ і рівняння перетвориться на рівняння Бесселя:

$$t^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + t \frac{dy}{dt} + \left(t^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0.$$

Звідси:

$$y = C_1 J_{1/2}(t) + C_2 J_{-1/2}(t),$$

$$y = C_1 J_{1/2}(2x) + C_2 J_{-1/2}(2x).$$

Приклад 3.25. Розв'язати рівняння $x^2 y'' + xy' + 4(x^4 - 2)y = 0$.

Розв'язання.

Якщо $x^2 = t$, то

$$\frac{dy}{dx} = 2x \frac{dy}{dt}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2} 4x^2 + 2 \frac{dy}{dt} = 4t \frac{d^2y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt}.$$

Підставивши ці вирази в задане рівняння, отримаємо:

$$4t^2 \frac{d^2y}{dt^2} + 2t \frac{dy}{dt} + 2t \frac{dy}{dt} + 4(t^2 - 2)y = 0,$$

або

$$t^2 \frac{d^2y}{dt^2} + t \frac{dy}{dt} + (t^2 - 2)y = 0.$$

Це рівняння Бесселя з параметром $\lambda = \sqrt{2}$. Його розв'язок $y = C_1 J_{\sqrt{2}}(t) + C_2 J_{-\sqrt{2}}(t)$. Отже, розв'язком заданого рівняння є:

$$y = C_1 J_{\sqrt{2}}(x^2) + C_2 J_{-\sqrt{2}}(x^2).$$

Контрольні питання та завдання

1. Як знайти загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння другого порядку за допомогою степеневих рядів?
2. У якому випадку розв'язок лінійного однорідного рівняння потрібно шукати у вигляді узагальненого степеневого ряду?
3. Який загальний вигляд має рівняння Бесселя?
4. Коли рівняння Бесселя можна звести до рівняння зі сталими коефіцієнтами? За допомогою якої заміни це можна зробити?
5. За допомогою степеневих рядів проінтегрувати рівняння $y'' + xy = 0$.
6. Знайти загальний розв'язок рівняння $xy'' + 2y' + xy = 0$.
7. Знайти п'ять перших членів розкладання у степеневий ряд розв'язків диференціальних рівнянь, що відповідають заданим початковим умовам:

а) $y' = 2 \cos x - xy^2$, $y(0) = 1$;

б) $y' = x^2 + y^2$, $y(0) = 1$;

в) $y'' = -2xy$, $y(0) = y'(0) = 1$;

г) $y'' = y \cos x + x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

8. Розв'язати рівняння Бесселя:

$$\text{a)} \quad x^2 y'' + xy' + (x^2 - \frac{1}{4})y = 0;$$

$$\text{б)} \quad x^2 y'' + xy' + (x^2 - \frac{9}{4})y = 0;$$

$$\text{в)} \quad x^2 y'' + xy' + (x^2 - \frac{4}{9})y = 0;$$

$$\text{г)} \quad y'' + \frac{1}{x}y' + \frac{1}{9}y = 0;$$

$$\text{д)} \quad y'' + \frac{1}{x}y' + 4y = 0;$$

$$\text{е)} \quad xy'' + \frac{1}{2}y' + \frac{1}{4}y = 0.$$

РОЗДІЛ 4 СИСТЕМИ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

4.1 Основні поняття систем диференціальних рівнянь

Визначення. Систему k диференціальних рівнянь, яка зв'язує незалежну змінну x і k функцій $y_1(x), y_2(x), \dots, y_k(x)$, розв'язану відносно старших похідних цих функцій $y_1^{(p_1)}(x), y_2^{(p_2)}(x), \dots, y_k^{(p_k)}(x)$, називають *канонічною системою* диференціальних рівнянь порядку n , $n = p_1 + p_2 + \dots + p_k$. Така система має вигляд:

[illegible]

Нехай $k = n$ і $p_1 = p_2 = \dots = p_n = 1$, тобто система рівнянь складається з n диференціальних рівнянь першого порядку.

Визначення. Систему вигляду:

[illegible]

называют *нормальной системой*. Число n называют її *порядком*.

Визначення. Розв'язком системи (4.2) на інтервалі $a < x < b$ називають сукупність функцій

$$y_1(x)=\varphi_1(x), \quad y_2(x)=\varphi_2(x), \dots, \quad y_n(x)=\varphi_n(x),$$

неперервно диференційованих на (a,b) і таких, що перетворюють рівняння системи (4.2) на тотожності.

Задача Коші для нормальної системи (4.2) полягає в тому, щоб знайти розв'язок системи (4.2), який відповідає початковим умовам:

$$y_1(x_0) = y_1^{(0)}, \quad y_2(x_0) = y_2^{(0)}, \quad \dots, \quad y_n(x_0) = y_n^{(0)}, \quad (4.3)$$

де $x_0, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}$ – задані числа.

Із огляду геометрії задача Коші для системи диференціальних рівнянь (4.2) з початковими умовами (4.3) означає знаходження серед усіх інтегральних кривих системи такої, що задовольняє початковим значенням $(x_0, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \dots, y_n^{(0)})$.

Теорема Пікара (існування й єдиності розв’язку задачі Коші для системи (4.2)). Нехай дана нормальна система (4.2) і задані початкові умови (4.3). Припустимо, що функції у правих частинах системи (4.2) визначені в деякій замкнутій обмеженій області D :

$$|x - x_0| \leq a, \quad |y_k - y_k^{(0)}| \leq b \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

із початковими умовами $(x_0, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \dots, y_n^{(0)})$ усередині області і відповідають у цій області таким умовам:

1) функції $f_k(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$ неперервні по усіх своїх аргументах і, отже, обмежені, тобто:

$$|f_k(x, y_1, y_2, \dots, y_n)| \leq M \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

де M – стале додатне число.

2) функції $f_k(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$ мають обмежені частинні похідні по аргументах $y_1, y_2, \dots, y_n$, тобто:

$$\left| \frac{\partial f_k(x, y_1, y_2, \dots, y_n)}{\partial y_l} \right| \leq K \quad (k, l = 1, 2, \dots, n),$$

де K – стале додатне число.

За цих передумов система диференціальних рівнянь (4.2) має єдиний розв’язок:

$$y_1 = y_1(x), \quad y_2 = y_2(x), \quad \dots, \quad y_n = y_n(x),$$

Що відповідає початковим умовам (4.3).

Теорема Пікара встановлює достатні умови проходження через задану точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ однієї і тільки однієї гладкої інтегральної кривої системи (4.2).

Визначення. Загальним розв'язком системи (4.2) називають сукупність n функцій

$$y_i = y_i(x, C_1, \dots, C_n), \quad i = \overline{1, n}, \quad (4.4)$$

які залежать від незалежної змінної x і n довільних сталих та за будь-яких припустимих значень $C_1, \dots, C_n$ перетворюють рівняння системи (4.2) на тотожності і для будь-яких початкових умов (4.3) існують такі числа $C_i = C_i^0$, що функції $y_i = y_i(x, C_1^0, \dots, C_n^0)$, $(i = \overline{1, n})$ задовольняють ці умови.

Визначення. Розв'язки, які отримують з загального розв'язку за конкретних значень $C_1, \dots, C_n$, називають *частинними розв'язками*.

Якщо внаслідок інтегрування системи (4.2) утворюється сімейство інтегральних кривих, визначених у вигляді, не розв'язаному щодо довільних сталих або шуканих функцій, то таке сімейство також називають *загальним інтегралом системи*.

Диференціальне рівняння n -го порядку

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (4.5)$$

можна звести до нормальної системи (4.2). І навпаки, система (4.2) в багатьох випадках зводиться до одного диференціального рівняння n -го порядку.

На цьому ґрунтується метод виключення для розв'язання нормальної системи диференціальних рівнянь (4.2), згідно з яким ця система зводиться до одного диференціального рівняння n -го порядку вигляду (4.5), яке розв'язується загальними методами.

Контрольні питання та завдання

1. Надайте визначення канонічної системи звичайних диференціальних рівнянь.
2. Надайте визначення нормальної системи звичайних диференціальних рівнянь.

3. Що називають порядком нормальної системи?
4. Надайте визначення розв'язку нормальної системи диференціальних рівнянь.
5. Сформулюйте теорему Пікара.
6. Що називають загальним розв'язком нормальної системи?
7. Що називають частинним розв'язком нормальної системи?
8. Сформулюйте задачу Коші для нормальної системи диференціальних рівнянь.

4.2 Симетрична форма системи диференціальних рівнянь

Визначення. Систему

$$\frac{dx_1}{dF_1(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \frac{dx_2}{dF_2(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \dots = \frac{dx_n}{dF_n(x_1, x_2, \dots, x_n)} \quad (4.6)$$

називають *системою диференціальних рівнянь у симетричній формі*.

Якщо в точці $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ хоча б один зі знаменників $F_1, F_2, \dots, F_n$ не дорівнює нулю, то в околі цієї точки систему (4.6) замінюють нормальною системою $n-1$ диференціальних рівнянь. Дійсно, якщо, наприклад, $F_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \neq 0$, то система (4.6) еквівалентна системі диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dx_n} = \frac{F_1}{F_n}, \\ \frac{dx_2}{dx_n} = \frac{F_2}{F_n}, \\ \dots \\ \frac{dx_{n-1}}{dx_n} = \frac{F_{n-1}}{F_n}. \end{cases} \quad (4.7)$$

Нормальну систему диференціальних рівнянь (4.2) можна записати також у симетричній формі:

$$\frac{dy_1}{f_1} = \frac{dy_2}{f_2} = \dots = \frac{dy_n}{f_n} = \frac{dx}{1}. \quad (4.8)$$

Фізичний зміст нормальної системи. Нехай незалежна змінна t – це час, а система, наприклад, двох диференціальних рівнянь має вигляд:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f_1(t, x, y), \\ \frac{dy}{dt} = f_2(t, x, y) \end{cases} \quad (4.9)$$

Розв'язком $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ цієї системи є деяка інтегральна крива в площині xOy з фіксованою декартовою прямокутною системою координат. Площину xOy називають *фазовою площиною*, а криву $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ – *фазовою траєкторією* системи (4.9). Саму систему (4.9) називають *динамічною системою*. Якщо в правій частині рівнянь системи (4.9) час t не входить явно, то таку динамічну систему називають *автономною (стаціонарною)*.

Динамічна система визначає поле швидкостей точки, яка рухається, у будь-який момент часу t . Розв'язок $x = x(t)$, $y = y(t)$ динамічної системи – це рівняння руху точки, які визначають положення точки, яка рухається, у будь-який момент часу t .

Початкові умови задають положення точки в початковий момент:

$$x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0.$$

Рівняння руху визначають також і траєкторію руху, будучи рівняннями цієї кривої в параметричній формі.

Контрольні питання та завдання

1. Запишіть нормальну систему диференціальних рівнянь у симетричній формі.
2. У чому полягає фізичний зміст нормальної системи?

4.3 Послідовне інтегрування

Інтегрування системи n диференціальних рівнянь першого порядку, що містять тільки одну невідому функцію виду:

(4.10)

Інтегрування системи диференціальних рівнянь виду:

(4.11)

Приклад 4.1. Знайти розв'язок системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x, \\ \frac{dy}{dt} = x + y. \end{cases}$$

Проінтегруємо перше диференціальне рівняння системи:

$$\frac{dx}{dt} = x, \quad \frac{dx}{x} = dt, \quad \int \frac{dx}{x} = \int dt, \quad \ln|x| = t + \ln|C_1|, \quad x = C_1 e^t.$$

$$\frac{dy}{dt} = C_1 e^t + y, \quad \frac{dy}{dt} - y = C_1 e^t.$$

Маємо лінійне диференціальне рівняння. Застосуємо метод Бернуллі, тобто будемо шукати розв'язок рівняння у вигляді добутку двох функцій від x : $y = u(x) v(x)$. Тоді $y' = u' v + u v'$. Рівняння набуває вигляду:

$$u' v + u v' - u v = C_1 e^t, \quad u' v + u (v' - v) = C_1 e^t.$$

Виберемо функцію v такою, щоб $v' - v = 0$. Це приводить до системи двох рівнянь для функцій u і v :

$$\begin{cases} v' - v = 0, \\ u' v = C_1 e^t. \end{cases}$$

Перше рівняння системи є рівнянням з відокремлюваними змінними. Розв'яжемо його.

$$\frac{dv}{dt} - v = 0 \quad \Bigg| \frac{dt}{v}, \quad \frac{dv}{v} - dt = 0, \quad \int \frac{dv}{v} - \int dt = \int 0 dC,$$

$$\ln |v| - t = \ln |C|, \quad v = C e^t.$$

Тут досить знайти який-небудь частинний розв'язок, тому приймаємо сталу інтегрування $C = 1$, тобто $v = e^t$.

Тепер підставимо функцію $v = e^t$ у друге рівняння системи і знову отримаємо рівняння з відокремлюваними змінними.

$$u' e^t = C_1 e^t, \quad u' = C_1, \quad u = C_1 t + C_2.$$

Підставляючи u й v , одержуємо загальний розв'язок рівняння:

$$y = (C_1 t + C_2) e^t.$$

Отже, розв'язок системи:

$$\begin{cases} y = (C_1 t + C_2) e^t, \\ x = C_1 e^t. \end{cases}$$

Контрольні питання та завдання

1. У чому суть методу послідовного інтегрування?

4.4 Метод вилучення

Нормальні системи диференціальних рівнянь можна проінтегрувати, якщо попередньо звести цю систему n -го порядку до одного диференціального рівняння n -го порядку з однією невідомою функцією або до декількох таких рівнянь, причому сума їхніх порядків дорівнює n .

Таке зведення досягається послідовним диференціюванням одного з рівнянь системи і вилученням усіх невідомих функцій, крім однієї. Тому такий прийом інтегрування називають *методом вилучення*.

Приклад 4.2. Розв'язати задачу Коші для системи

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y, \\ \frac{dy}{dt} = -4x + 4y \end{cases}$$

за умови, що $x(0)=1$, $y(0)=11$.

Розв'язання.

Для того, щоб знайти частинний розв'язок системи диференціальних рівнянь, необхідно спочатку знайти її загальний розв'язок, а потім домагатися, щоб він відповідав початковим умовам.

Із першого рівняння системи виразимо y :

$$y = -x' + x.$$

Підставимо це значення y в друге рівняння системи.

$$y' = -x'' + x'$$

$$-x'' + x' = -4x - 4x' + 4x, \quad x'' - 5x' = 0.$$

Одержали лінійне однорідне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами відносно функції $x(t)$. Відповідне характеристичне рівняння $k^2 - 5k = 0$ має корені $k_1 = 0$, $k_2 = 5$. Отже, загальний розв'язок для $x(t)$ запишеться у вигляді:

$$x = C_1 + C_2 e^{5t}.$$

Загальний розв'язок для $y(t)$ знаходимо з першого рівняння системи:

$$x' = 5C_2 e^{5t},$$

$$y = -5C_2 e^{5t} + C_1 + C_2 e^{5t} = C_1 - 4C_2 e^{5t}.$$

Сукупність двох знайдених функцій є загальним розв'язком заданої системи:

$$\begin{cases} x = C_1 + C_2 e^{5t}, \\ y = C_1 - 4C_2 e^{5t}. \end{cases}$$

Тепер скористаємося початковими умовами для знаходження довільних сталих:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1, \\ C_1 - 4C_2 = 11, \end{cases} \quad \begin{cases} C_1 = 3, \\ C_2 = -2. \end{cases}$$

Підставляючи знайдені значення C_1 і C_2 у загальний розв'язок системи, матимемо її частинний розв'язок:

$$\begin{cases} x = 3 - 2C_2 e^{5t}, \\ y = 3 + 8C_2 e^{5t}. \end{cases}$$

Приклад 4.3. Пройнтегрувати методом вилучення систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = y - 2z, \\ \frac{dz}{dx} = y - z. \end{cases}$$

Розв'язання.

З другого рівняння цієї системи виразимо y :

$$y = \frac{dz}{dx} + z.$$

Диференціюючи цю рівність по x і підставляючи результат у перше рівняння системи, одержимо диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами відносно функції $z(x)$:

$$\frac{d^2 z}{dx^2} + \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dx} + z - 2z, \quad \frac{d^2 z}{dx^2} + z = 0.$$

Складаємо відповідне характеристичне рівняння: $k^2 + 1 = 0$. Його корені комплексні: $k_1 = i$, $k_2 = -i$. Отже, загальний розв'язок запишеться у вигляді:

$$z = C_1 \sin x + C_2 \cos x.$$

Знаходимо загальний розв'язок для $y(x)$:

$$\frac{dz}{dx} = C_1 \cos x - C_2 \sin x,$$

$$\begin{aligned} y = \frac{dz}{dx} + z &= C_1 \cos x - C_2 \sin x + C_1 \sin x + C_2 \cos x = \\ &= (C_1 - C_2) \sin x + (C_1 + C_2) \cos x. \end{aligned}$$

Сукупність двох знайдених функцій є загальним розв'язком заданої системи:

$$\begin{cases} y = (C_1 - C_2) \sin x + (C_1 + C_2) \cos x, \\ z = C_1 \sin x + C_2 \cos x. \end{cases}$$

Приклад 4.4. Розв'язати задачу Коші для системи

$$\frac{dx}{dt} = 4x - y, \quad \frac{dy}{dt} = x + 2y, \quad x(0) = 0, \quad y(0) = 1.$$

Розв'язання.

Для того, щоб знайти частинний розв'язок системи диференціальних рівнянь, необхідно спочатку знайти її загальний розв'язок, а потім домагатися, щоб він відповідав початковим умовам.

Із першого рівняння системи виразимо y :

$$y = -x' + 4x.$$

Підставимо це значення y в друге рівняння системи.

$$y' = -x'' + 4x'$$

$$-x'' + 4x' = x - 2x' + 8x, \quad x'' - 6x' + 9x = 0.$$

Одержали лінійне однорідне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами відносно функції $x(t)$. Відповідне характеристичне рівняння $k^2 - 6k + 9 = 0$ має корені $k_1 = k_2 = 3$. Отже, загальний розв'язок для $x(t)$ запишеться у вигляді:

$$x = C_1 e^{3t} + C_2 t e^{3t}.$$

Загальний розв'язок для $y(t)$ знаходимо з першого рівняння:

$$x' = 3C_1 e^{3t} + C_2 e^{3t} + 3C_2 t e^{3t},$$

$$y = -3C_1 e^{3t} - C_2 e^{3t} - 3C_2 t e^{3t} + 4C_1 e^{3t} + 4C_2 t e^{3t},$$

$$y = C_1 e^{3t} - C_2 e^{3t} + C_2 t e^{3t}.$$

Знайдені функції $x(t)$ і $y(t)$ слугують загальним розв'язком заданої системи:

$$\begin{cases} x = C_1 e^{3t} + C_2 t e^{3t}, \\ y = C_1 e^{3t} - C_2 e^{3t} + C_2 t e^{3t}. \end{cases}$$

Скористаємося початковими умовами для визначення довільних сталих:

$$\begin{cases} 0 = C_1, \\ 1 = C_1 - C_2. \end{cases} \quad \begin{cases} C_1 = 0, \\ C_2 = -1. \end{cases}$$

Отже, частинним розв'язком диференціального рівняння, який відповідає початковим умовам, є

$$\begin{cases} x = -t e^{3t}, \\ y = e^{3t} - t e^{3t}. \end{cases}$$

Приклад 4.5. Розв'язати систему $\frac{dx}{dt} = z - y$, $\frac{dy}{dt} = z$, $\frac{dz}{dt} = z - x$.

Розв'язання.

Продиференціювавши перше з рівнянь системи, отримаємо:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{dz}{dt} - \frac{dy}{dt} = z - x - z = -x.$$

Отримали диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Його характеристичне рівняння $k^2 + 1 = 0$ має два комплексно спряжені корені $k_{1,2} = \pm i$, тому загальний розв'язок буде: $x = C_1 \sin t + C_2 \cos t$. Із

третього рівняння системи $\frac{dz}{dt} - z = -C_1 \sin t - C_2 \cos t$. Отримали лінійне

неоднорідне рівняння першого порядку. Розв'яжемо його методом Лагранжа.

Знайдемо розв'язок відповідного однорідного рівняння $\frac{dz}{dt} - z = 0$.

$$\frac{dz}{z} - dt = 0, \quad \int \frac{dz}{z} - \int dt = C_3, \quad \ln|z| - t = C_3, \quad z = C_3 e^t.$$

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння будемо шукати у вигляді $z = C_3(t)e^t$, $z' = C_3'(t)e^t + C_3(t)e^t$. Після підстановки до рівняння, отримаємо:

$$C_3'(t)e^t = -C_1 \sin t - C_2 \cos t,$$

$$C_3'(t) = -C_1 e^{-t} \sin t - C_2 e^{-t} \cos t,$$

$$C_3(t) = -\int C_1 e^{-t} \sin t dt - \int C_2 e^{-t} \cos t dt = \frac{C_1 - C_2}{2} \sin t + \frac{C_1 + C_2}{2} \cos t.$$

$$\text{Отже, } z = C_3 e^t + \frac{C_1 - C_2}{2} \sin t + \frac{C_1 + C_2}{2} \cos t.$$

Із першого рівняння системи:

$$y = z - \frac{dx}{dt} = C_3 e^t + \frac{C_1 - C_2}{2} \sin t + \frac{C_1 + C_2}{2} \cos t - C_1 \cos t + C_2 \sin t,$$

$$\text{або } y = z - \frac{dx}{dt} = C_3 e^t + \frac{C_1 + C_2}{2} \sin t + \frac{C_2 - C_1}{2} \cos t.$$

Отже, сукупність трьох знайдених функцій є загальним розв'язком заданої системи:

$$\begin{cases} x = C_1 \sin t + C_2 \cos t, \\ y = z - \frac{dx}{dt} = C_3 e^t + \frac{C_1 + C_2}{2} \sin t + \frac{C_2 - C_1}{2} \cos t, \\ z = C_3 e^t + \frac{C_1 - C_2}{2} \sin t + \frac{C_1 + C_2}{2} \cos t. \end{cases}$$

Контрольні питання та завдання

1. У чому полягає метод вилучення під час розв'язання систем диференціальних рівнянь?

2. Розв'язати задані лінійні однорідні системи диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами, використовуючи метод вилучення:

$$\text{a) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - y, \\ \frac{dy}{dt} = 4x + 6y; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = -2x + 3y. \end{cases}$$

4.5 Знаходження комбінацій, що інтегруються

Цей метод інтегрування системи диференціальних рівнянь

$$\frac{dx_k}{dt} = f_k(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (4.11)$$

полягає у тому, що за допомогою арифметичних операцій (додавання, віднімання, добутку, частки) із рівнянь системи (4.11) утворюють так звані комбінації, що достатньо просто інтегруються, тобто рівняння виду:

$$F\left(t, u, \frac{du}{dt}\right) = 0,$$

де u — деяка функція від шуканих функцій $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$. Кожна комбінація, що інтегрується, дає один перший інтеграл. Якщо знайдено n незалежних перших інтегралів системи (4.11), то її інтегрування закінчено; якщо ж знайдено m незалежних перших інтегралів, де $m < n$, то система (4.11) зводиться до системи з меншою кількістю невідомих функцій.

Приклад 4.6. Проінтегрувати систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = x. \end{cases}$$

Розв'язання.

Складаючи почленно рівняння системи, знаходимо першу комбінацію, що інтегрується:

$$\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = y + x,$$

звідки

$$\frac{d(x+y)}{dt} = x+y, \text{ або } \frac{d(x+y)}{x+y} = dt.$$

У результаті інтегрування отриманого диференціального рівняння отримаємо:

$$\ln(x+y) = t + C.$$

Потенціюючи, отримаємо:

$$x+y = e^{C+t} = e^C e^t = C_1 e^t,$$

звідки

$$\frac{x+y}{e^t} = C_1. \quad (4.12)$$

Почленно віднімаючи з першого рівняння системи друге, знаходимо другу комбінацію, що інтегрується:

$$\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} = y - x = -(x-y),$$

звідки

$$\frac{d(x-y)}{dt} = -(x-y), \quad \text{або} \quad \frac{d(x-y)}{x-y} = -dt.$$

Інтегруючи, знаходимо:

$$\ln(x-y) = -t + C,$$

або, після потенціювання:

$$x-y = e^{C-t} = e^C e^{-t} = C_2 e^{-t},$$

звідки

$$\frac{x-y}{e^{-t}} = C_2. \quad (4.13)$$

З співвідношень (4.12) і (4.13) визначаємо розв'язок цієї системи:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(C_1 e^t + C_2 e^{-t}), \\ y = \frac{1}{2}(C_1 e^t - C_2 e^{-t}). \end{cases}$$

Приклад 4.7. Проінтегрувати систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = -x. \end{cases}$$

Розв'язання.

Помножимо почленно рівняння цієї системи відповідно на x і y . Тоді

$$\begin{cases} x \frac{dx}{dt} = xy, \\ y \frac{dy}{dt} = -xy. \end{cases}$$

Складаючи отримані рівняння, знаходимо комбінацію, що інтегрується:

$$x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} = 0,$$

звідки

$$x dx + y dy = 0.$$

Після інтегрування отримаємо:

$$x^2 + y^2 = 2C.$$

Замінюючи $2C = C_1^2$, отримаємо перший інтеграл:

$$x^2 + y^2 = C_1^2. \quad (4.14)$$

Розв'язуючи цю рівність щодо y й обмежувшись його додатними значеннями, отримаємо:

$$y = \sqrt{C_1^2 - x^2}.$$

Отримане значення y підставляємо в перше рівняння цієї системи, тоді:

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{C_1^2 - x^2}.$$

Відокремлюючи змінні, отримаємо:

$$\frac{dx}{\sqrt{C_1^2 - x^2}} = dt,$$

і в результаті інтегрування отримаємо:

$$\arcsin \frac{x}{C_1} = t + C_2,$$

або перший інтеграл системи:

$$\arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = t + C_2. \quad (4.15)$$

Перші інтеграли (4.14) і (4.15) незалежні і їхня сукупність утворить загальний інтеграл цієї системи.

Приклад 4.8. Проінтегрувати систему диференціальних рівнянь, записану в симетричній формі

$$\frac{dx}{y} = -\frac{dy}{x} = \frac{dz}{y^2 - x^2}.$$

Розв'язання.

Оскільки $\frac{dx}{y} = -\frac{dy}{x}$, то $x dx = -y dy$ і комбінація, що інтегрується:

$$x dx + y dy = 0.$$

Інтегруючи отримане диференціальне рівняння, знаходимо перший інтеграл:

$$x^2 + y^2 = C_1.$$

Із другого рівняння $\frac{dx}{y} = \frac{dz}{y^2 - x^2}$, маємо:

$$(y^2 - x^2) dx = y dz, \quad \text{або} \quad y^2 dx - x^2 dx - y dz = 0.$$

Скорочуючи на y , отримаємо:

$$y dx - \frac{x^2}{y} dx - dz = 0. \quad (4.16)$$

Ураховуючи те, що $-\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x}$, отримаємо:

$$\frac{x}{y} dx = dy. \quad (4.17)$$

Підставимо співвідношення (4.17) у рівність (4.16):

$$ydx + xdy - dz = 0;$$

друга комбінація, що інтегрується, набуває вигляду:

$$d(xy) - dz = 0, \text{ або } d(xy - z) = 0,$$

звідки

$$xy - z = C_2.$$

Контрольні питання та завдання

1. Сформулюйте суть методу інтегрованих комбінацій розв'язання нормальної системи.

2. Розв'язати систему диференціальних рівнянь $\frac{dx}{y+z} = \frac{dy}{x+z} = \frac{dz}{x+y}$,

використовуючи метод знаходження інтегрованих комбінацій.

4.6 Метод Даламбера

Лінійні системи диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами зручно розв'язувати методом комбінацій, що інтегруються. Для побудови комбінацій, що інтегруються, існує метод Даламбера, який засновується на безпосередньому інтегруванні.

1. *Випадок системи двох рівнянь.* Нехай дана система

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_1x + b_1y + F_1(t), \\ \frac{dy}{dt} = a_2x + b_2y + F_2(t). \end{cases} \quad (4.18)$$

Позначимо через λ множник, на який потрібно помножити друге рівняння, щоб одержати комбінацію, що інтегрується:

$$\frac{d(x + \lambda y)}{dt} = (a_1 + \lambda a_2)x + (b_1 + \lambda b_2)y + F_1(t) + \lambda F_2(t). \quad (4.19)$$

Ціль буде досягнута, якщо:

$$(b_1 + \lambda b_2) = \lambda(a_1 + \lambda a_2),$$

або

$$a_2\lambda^2 + (a_1 - b_2)\lambda - b_1 = 0. \quad (4.20)$$

Тоді маємо таку комбінацію, що інтегрується ($U = x + \lambda y$):

$$\frac{dU}{(a_1 + \lambda a_2)U + F_1(t) + \lambda F_2(t)} = dt. \quad (4.21)$$

Рівняння (4.21) є лінійним диференціальним рівнянням першого порядку.

Нехай загальний інтеграл рівняння (4.21):

$$U = x + \lambda y = \Phi(t, \lambda, C). \quad (4.22)$$

Можливі такі варіанти: а) корені квадратного рівняння (4.20) дійсні й різні. Тоді маємо два інтеграли системи (4.18):

$$\begin{cases} x + \lambda_1 y = \Phi(t, \lambda, C_1), \\ x + \lambda_2 y = \Phi(t, \lambda, C_2). \end{cases} \quad (4.23)$$

б) корені квадратного рівняння (4.20) комплексні ($\lambda = \alpha \pm \beta i$).

Прирівнюючи дійсні й уявні складові обох частин рівняння

$$x + (\alpha \pm \beta i)y = \Phi(t, \alpha \pm \beta i, A + Bi), \quad (4.24)$$

також одержимо два інтеграли. Тут A і B – довільні сталі.

в) корені квадратного рівняння (4.20) кратні ($\lambda_1 = \lambda_2$). У цьому випадку одержуємо тільки один інтеграл, що дозволяє звести задану систему до інтегрування одного лінійного рівняння з однією невідомою функцією.

2. Випадок системи трьох рівнянь. Нехай дана система

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_1 x + b_1 y + c_1 z + F_1(t), \\ \frac{dy}{dt} = a_2 x + b_2 y + c_2 z + F_2(t), \\ \frac{dz}{dt} = a_3 x + b_3 y + c_3 z + F_3(t). \end{cases} \quad (4.25)$$

Помножимо друге рівняння на λ , третє на μ і, додаючи отримані результати, отримаємо:

$$\begin{aligned} \frac{d(x + \lambda y + \mu z)}{dt} = & (a_1 + a_2 \lambda + a_3 \mu)x + (b_1 + b_2 \lambda + b_3 \mu)y + (c_1 + c_2 \lambda + c_3 \mu)z + \\ & + F_1(t) + \lambda F_2(t) + \mu F_3(t). \end{aligned}$$

Доберемо λ і μ так, щоб отримати рівності:

$$\begin{cases} b_1 + b_2\lambda + b_3\mu = (a_1 + a_2\lambda + a_3\mu)\lambda, \\ c_1 + c_2\lambda + c_3\mu = (a_1 + a_2\lambda + a_3\mu)\mu. \end{cases} \quad (4.26)$$

Уводимо підстановку $U = x + \lambda y + \mu z$ й одержуємо лінійне диференціальне рівняння першого порядку:

$$\frac{dU}{(a_1 + a_2\lambda + a_3\mu)U + F_1(t) + \lambda F_2(t) + \mu F_3(t)} = dt. \quad (4.27)$$

Нехай загальний розв'язок цього рівняння має вигляд:

$$U = \Phi(t, \lambda, \mu, C). \quad (4.28)$$

Визначаємо λ і μ . Для цього запишемо систему (4.26) у вигляді:

$$\frac{a_1 + a_2\lambda + a_3\mu}{1} = \frac{b_1 + b_2\lambda + b_3\mu}{\lambda} = \frac{c_1 + c_2\lambda + c_3\mu}{\mu} = s.$$

Звідси

$$\begin{cases} a_2\lambda + a_3\mu = s - a_1, \\ (b_2 - s)\lambda + b_3\mu = -b_1, \\ c_2\lambda + (c_3 - s)\mu = -c_1. \end{cases} \quad (4.29)$$

Запишемо умову спільності системи (4.29):

$$\begin{vmatrix} a_2 & a_3 & a_1 - s \\ b_2 - s & b_3 & b_1 \\ c_2 & c_3 - s & c_1 \end{vmatrix} = 0. \quad (4.30)$$

Це кубічне рівняння щодо s .

Розрізняють три випадки:

а) серед коренів рівняння (4.30) немає рівних ($s_1 \neq s_2 \neq s_3$). Визначимо для кожного кореня системи (4.29) відповідно значення для λ і μ (тобто λ_1, μ_1 ; λ_2, μ_2 ; λ_3, μ_3), а потім з рівняння (4.28) знайдемо всі три інтеграли;

б) серед коренів є два рівних. У цьому випадку шукаємо лише два інтеграли системи. Для одержання остаточного результату варто проінтегрувати ще одне рівняння;

в) три рівні корені. Тоді шукається лише один інтеграл; тому інтегрування буде зводитися до системи двох рівнянь.

Приклад 4.9. Проінтегрувати методом Даламбера систему лінійних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 6x - y, \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 2y. \end{cases}$$

Розв'язання.

Помножимо друге рівняння системи на λ і складемо з першим. Тоді

$$\frac{dx}{dt} + \lambda \frac{dy}{dt} = (6 + 3\lambda)x + (-1 + 2\lambda)y,$$

або

$$\frac{d(x + \lambda y)}{dt} = (6 + 3\lambda)x + (2\lambda - 1)y.$$

Комбінація, що інтегрується, буде отримана, якщо:

$$2\lambda - 1 = \lambda(6 + 3\lambda),$$

або

$$3\lambda^2 + 4\lambda + 1 = 0.$$

Розв'язуючи це квадратне рівняння, отримаємо $\lambda_1 = -\frac{1}{3}$, $\lambda_2 = -1$. У

першому випадку комбінація, що інтегрується, набуває вигляду:

$$U_1 = x - \frac{1}{3}y \quad \text{і} \quad \frac{d(x - \frac{1}{3}y)}{(6 + 3\lambda)(x - \frac{1}{3}y)} = dt,$$

звідки

$$\frac{d(x - \frac{1}{3}y)}{5(x - \frac{1}{3}y)} = dt.$$

Інтегруючи це диференціальне рівняння, отримаємо:

$$\frac{1}{5} \ln(x - \frac{1}{3}y) = t + C, \quad \text{або} \quad \ln(x - \frac{1}{3}y) = 5(t + C).$$

Тоді маємо

$$x - \frac{1}{3}y = e^{5t+5C} = e^{5C} e^{5t}, \quad 3x - y = 3e^{5C} e^{5t},$$

$$(3x - y)e^{-5t} = C_1.$$

При $\lambda_2 = -1$ комбінація, що інтегрується, має вигляд:

$$U_2 = x - y \quad \text{і} \quad \frac{d(x - y)}{(6 + 3(-1))(x - y)} = dt,$$

звідки

$$\frac{d(x - y)}{3(x - y)} = dt.$$

Інтегруючи це диференціальне рівняння, отримаємо:

$$\frac{1}{3} \ln(x - y) = t + C, \quad \text{або} \quad \ln(x - y) = 3(t + C),$$

$$x - y = e^{3t+3C} = e^{3C} e^{3t},$$

$$(x - y)e^{-3t} = C_2.$$

Отже, загальний інтеграл системи має вигляд:

$$\begin{cases} (3x - y)e^{-5t} = C_1, \\ (x - y)e^{-3t} = C_2. \end{cases}$$

Приклад 4.10. Розв'язати методом Даламбера систему лінійних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5x + 4y + e^t, \\ \frac{dy}{dt} = 4x + 5y + 1. \end{cases}$$

Розв'язання.

$$\frac{dx}{dt} + \lambda \frac{dy}{dt} = (5 + 4\lambda)x + (4 + 5\lambda)y + e^t + \lambda,$$

$$\frac{d(x + \lambda y)}{dt} = (5 + 4\lambda)x + (4 + 5\lambda)y + e^t + \lambda.$$

Комбінація, що інтегрується, буде отримана, якщо $4 + 5\lambda = \lambda(5 + 4\lambda)$,

звідки $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$.

Для $\lambda_1 = 1$ отримаємо:

$$U_1 = x + y \quad \text{і} \quad \frac{d(x+y)}{9(x+y) + e^t + 1} = dt,$$

$$x + y = C_1 e^{9t} - \frac{1}{8} e^t - \frac{1}{9}.$$

Для $\lambda_2 = -1$ аналогічно отримаємо:

$$x - y = C_2 e^t + t e^t + 1.$$

Отже, маємо два перші незалежні інтеграли системи:

$$\begin{cases} \left(x + y + \frac{1}{8} e^t + \frac{1}{9} \right) e^{-9t} = C_1, \\ \left(x - y - t e^t - 1 \right) e^{-t} = C_2. \end{cases}$$

Контрольні питання та завдання

1. Сформулюйте суть методу Даламбера розв'язання нормальної системи.

4.7 Метод Ейлера

Побудова фундаментальної системи розв'язків однорідної лінійної системи диференціальних рівнянь

$$\frac{dy_k}{dx} = \sum_{i=1}^n a_{ki} y_i \quad (4.31)$$

виконується *методом Ейлера*.

Систему лінійних однорідних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами можна записати у матричному вигляді:

$$y' = Ay,$$

де $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ – n -вимірний вектор, A – квадратна матриця розміру $n \times n$.

Розв'язок системи (4.31) шукаємо у вигляді:

$$y_1 = \beta_1 e^{\lambda x}, \quad y_2 = \beta_2 e^{\lambda x}, \quad \dots, \quad y_n = \beta_n e^{\lambda x}, \quad (4.32)$$

де $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, \lambda$ – сталі числа, які підлягають визначенню, причому хоча б одне з них має бути відмінним від нуля.

Знаходимо похідні розв'язків (4.32):

$$\frac{dy_1}{dx} = \lambda \beta_1 e^{\lambda x}, \quad \frac{dy_2}{dx} = \lambda \beta_2 e^{\lambda x}, \dots, \quad \frac{dy_n}{dx} = \lambda \beta_n e^{\lambda x} \dots \quad (4.33)$$

Підставляючи значення (4.32) і (4.33) у систему (4.31), отримаємо:

[illegible]

Для того, щоб отримана однорідна лінійна система алгебраїчних рівнянь мала відмінні від нуля розв'язки щодо β_i , необхідно і достатньо зажадати рівності нулю її визначника, тобто щоб λ було коренем рівняння:

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (4.35)$$

Рівняння (4.35) є рівняння n -го степеня щодо λ і називається *характеристичним рівнянням*, а його корені – *характеристичними (власними) числами системи*.

Випадок 1. Усі n коренів $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ характеристичного рівняння дійсні й різні числа. Уважаючи в системі (4.34) $\lambda = \lambda_i$ ($i=1, 2, \dots, n$), отримаємо систему:

(4.36)

Підставляючи ці значення та $\lambda = \lambda_i$ у співвідношення (4.32), одержуємо розв'язок однорідної системи (4.31), що відповідає кореню λ_i :

$$y_{i1} = \beta_{i1} e^{\lambda_i x}, \quad y_{i2} = \beta_{i2} e^{\lambda_i x}, \dots, \quad y_{in} = \beta_{in} e^{\lambda_i x} \dots$$

Будуємо розв'язки, що відповідають усім кореням $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. У цьому випадку фундаментальна система розв'язків:

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_{11}e^{\lambda_1x}, \beta_{12}e^{\lambda_1x}, ..., \beta_{1n}e^{\lambda_1x}, \\ \beta_{21}e^{\lambda_2x}, \beta_{22}e^{\lambda_2x}, ..., \beta_{2n}e^{\lambda_2x}, \\ \\ \beta_{n1}e^{\lambda_nx}, \beta_{n2}e^{\lambda_nx}, ..., \beta_{nn}e^{\lambda_nx}. \end{array} \right.$$

Загальний розв'язок системи (4.31) має вигляд:

$$y_k = \sum_{i=1}^n C_i \beta_{ik} e^{\lambda_i x}.$$

Випадок 2. Корені $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ характеристичного рівняння різні, причому серед них є комплексні. Нехай $a \pm ib$ – комплексні корені характеристичного рівняння. Будуємо розв’язок виду (4.32), що відповідає кореню $a + bi$:

$$y_1 = (\beta_1^{(1)} + \beta_1^{(2)}i)e^{(a+bi)x}, \quad y_2 = (\beta_2^{(1)} + \beta_2^{(2)}i)e^{(a+bi)x}, \dots, \\ y_n = (\beta_n^{(1)} + \beta_n^{(2)}i)e^{(a+bi)x} \dots \quad (4.37)$$

Відокремлюючи дійсні й уявні частини, одержуємо два дійсні лінійно незалежні частинні розв'язки однорідної системи:

$$\begin{aligned} y_{11} &= e^{ax}(\beta_1^{(1)} \cos bx - \beta_1^{(2)} \sin bx), \\ y_{12} &= e^{ax}(\beta_2^{(1)} \cos bx - \beta_2^{(2)} \sin bx), \dots, \\ y_{1n} &= e^{ax}(\beta_n^{(1)} \cos bx - \beta_n^{(2)} \sin bx). \end{aligned} \quad (4.38)$$

Дійсні розв'язки, що відповідають спряженому кореню $a - bi$, будуть лінійно залежні з розв'язками (4.38). Отже, парі спряжених комплексних коренів $a \pm bi$ відповідають два дійсні лінійно незалежні частинних розв'язки вигляду (4.38).

Будуємо частинні розв'язки для всіх пар комплексних спряжених коренів і всіх дійсних коренів. Загальний розв'язок однорідної системи надається лінійною комбінацією побудованих лінійно незалежних частинних з довільними сталими коефіцієнтами.

Випадок 3. Серед коренів $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ є кратні. Кореню λ_1 кратності k відповідає розв'язок виду

$$y_1 = Q_1(x)e^{\lambda_1 x}, \quad y_2 = Q_2(x)e^{\lambda_1 x}, \quad \dots, \quad y_n = Q_n(x)e^{\lambda_1 x},$$

де $Q_1(x), Q_2(x), \dots, Q_n(x)$ – многочлени x степеня не вище k . Ці многочлени, в окремому випадку, можуть вироджуватися у сталі числа. Серед коефіцієнтів цих многочленів k будуть довільними, інші ж виражаються через них. Одному з довільних коефіцієнтів надаємо по черзі значення, що дорівнює одиниці, а іншим – що дорівнює нулю. Унаслідок цього будуємо k лінійно незалежних частинних розв'язків. Якщо λ_1 – дійсне число, то частинні розв'язки теж дійсні. Якщо λ_1 – комплексний корінь, що дорівнює $a + bi$, то спряжений йому корінь $a - bi$ є також коренем характеристичного рівняння кратності k . Знаходимо k лінійно незалежних комплексних частинних розв'язків, які відповідають кореню $a + bi$. Відокремлюючи в них дійсні й уявні частини, одержуємо $2k$ лінійно незалежних дійсних частинних розв'язків. Розв'язки для кореня $a - bi$ лінійно залежні з розв'язками для кореня $a + bi$.

Приклад 4.11. Знайти методом Ейлера частинний розв'язок лінійної системи диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 6x + y, \\ \frac{dy}{dt} = 5x + 2y. \end{cases}$$

Розв'язання.

Розв'язок заданої системи шукаємо методом Ейлера у вигляді:

$$x = \beta_1 e^{\lambda t}, \quad y = \beta_2 e^{\lambda t}.$$

Складаємо відповідне характеристичне рівняння:

$$\begin{vmatrix} 6 - \lambda & 1 \\ 5 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

або $(6 - \lambda)(2 - \lambda) - 5 = 0$, звідки $\lambda^2 - 8\lambda + 7 = 0$.

Корені характеристичного рівняння дійсні й різні: $\lambda_1 = 7$, $\lambda_2 = 1$.

Для знаходження чисел β_1 та β_2 отримаємо таку систему:

$$\begin{cases} (6 - \lambda)\beta_1 + \beta_2 = 0, \\ 5\beta_1 + (2 - \lambda)\beta_2 = 0. \end{cases}$$

Побудуємо частинний розв'язок, що відповідає кореню $\lambda_1 = 7$.

$$\begin{cases} (6 - 7)\beta_1 + \beta_2 = 0, \\ 5\beta_1 + (2 - 7)\beta_2 = 0. \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} -\beta_1 + \beta_2 = 0, \\ 5\beta_1 - 5\beta_2 = 0. \end{cases}$$

Система складається з лінійно залежних рівнянь, тому зводиться до рівняння: $\beta_1 - \beta_2 = 0$. Отже, одне із шуканих чисел β_1 або β_2 можна вибрати довільно. Нехай $\beta_1 = 1$, тоді $\beta_2 = 1$.

Отже, характеристичному числу $\lambda_1 = 7$ відповідає частинний розв'язок:

$$x_1 = 1 \cdot e^{7t} = e^{7t}, \quad y_1 = 1 \cdot e^{7t} = e^{7t}.$$

Знайдемо частинний розв'язок, що відповідає характеристичному числу $\lambda_2 = 1$. Числа β_1 і β_2 знаходимо із системи:

$$\begin{cases} (6 - 1)\beta_1 + \beta_2 = 0, \\ 5\beta_1 + (2 - 1)\beta_2 = 0. \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} 5\beta_1 + \beta_2 = 0, \\ 5\beta_1 + \beta_2 = 0. \end{cases}$$

Ця система зводиться до одного рівняння: $5\beta_1 + \beta_2 = 0$. Нехай $\beta_1 = 1$, тоді $\beta_2 = -5$.

Отже, характеристичному числу $\lambda_2 = 1$ відповідає частинний розв'язок:

$$x_2 = 1 \cdot e^t = e^t, \quad y_2 = -5e^t.$$

Загальний розв'язок системи має вигляд:

$$x = C_1 x_1 + C_2 x_2 = C_1 e^{7t} + C_2 e^t,$$

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^{7t} - 5C_2 e^t.$$

Приклад 4.12. Знайти методом Ейлера загальний розв'язок лінійної системи диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = 2y - 5z, \\ \frac{dz}{dx} = 5x - 6y. \end{cases}$$

Розв'язання.

Відповідне характеристичне рівняння:

$$\begin{vmatrix} 2 - \lambda & -5 \\ 5 & -6 - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$(2 - \lambda)(-6 - \lambda) + 25 = 0, \quad \lambda^2 + 4\lambda + 13 = 0.$$

Корені характеристичного рівняння комплексні: $\lambda_1 = -2 + 3i$, $\lambda_2 = -2 - 3i$.

Частинний розв'язок, що відповідає характеристичному числу $\lambda_1 = -2 + 3i$, шукаємо у вигляді:

$$y = \beta_1 e^{(-2+3i)x}, \quad z = \beta_2 e^{(-2+3i)x}.$$

Числа β_1 і β_2 визначаємо із системи:

$$\begin{cases} (2 + 2 - 3i)\beta_1 - 5\beta_2 = 0, \\ 5\beta_1 + (-6 + 2 - 3i)\beta_2 = 0, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} (4 - 3i)\beta_1 - 5\beta_2 = 0, \\ 5\beta_1 + (-4 - 3i)\beta_2 = 0. \end{cases}$$

Якщо друге рівняння системи помножити на $4 - 3i$, то система набуває вигляду:

$$\begin{cases} (4 - 3i)\beta_1 - 5\beta_2 = 0, \\ 5(4 - 3i)\beta_1 - 25\beta_2 = 0. \end{cases}$$

тобто зводиться до одного рівняння $(4 - 3i)\beta_1 - 5\beta_2 = 0$.

Нехай $\beta_1 = 1$, тоді $\beta_2 = \frac{4}{5} - \frac{3}{5}i$. Частинний розв'язок має вигляд:

$$y = e^{(-2+3i)x} = e^{-2x}(\cos 3x + i \sin 3x),$$

$$\begin{aligned}
z &= \left(\frac{4}{5} - \frac{3}{5}i\right) e^{(-2+3i)x} = e^{-2x} \left(\frac{4}{5} - \frac{3}{5}i\right) e^{3xi} = e^{-2x} \left(\frac{4}{5} - \frac{3}{5}i\right) (\cos 3x + i \sin 3x) = \\
&= e^{-2x} \left(\frac{4}{5} \cos 3x + \frac{4}{5}i \sin 3x - \frac{3}{5}i \cos 3x + \frac{3}{5} \sin 3x\right) = \\
&= e^{-2x} \left(\frac{4}{5} \cos 3x + \frac{3}{5} \sin 3x + i \left(\frac{4}{5} \sin 3x - \frac{3}{5} \cos 3x\right)\right).
\end{aligned}$$

Відокремлюючи дійсні й уявні частини, одержуємо два дійсні лінійно незалежні частинні розв'язки:

$$\begin{cases} y_1 = e^{-2x} \cos 3x, & z_1 = e^{-2x} \left(\frac{4}{5} \cos 3x + \frac{3}{5} \sin 3x\right), \\ y_2 = e^{-2x} \sin 3x, & z_2 = e^{-2x} \left(\frac{4}{5} \sin 3x - \frac{3}{5} \cos 3x\right). \end{cases}$$

Загальний розв'язок системи є лінійною комбінацією побудованих лінійно незалежних розв'язків:

$$\begin{cases} y = e^{-2x} (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x), \\ z = e^{-2x} \left(C_1 \left(\frac{4}{5} \cos 3x + \frac{3}{5} \sin 3x\right) + C_2 \left(\frac{4}{5} \sin 3x - \frac{3}{5} \cos 3x\right) \right). \end{cases}$$

Приклад 4.13. Знайти методом Ейлера розв'язок лінійної системи диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5x - y - 4z, \\ \frac{dy}{dt} = -12x + 5y + 12z, \\ \frac{dz}{dt} = 10x - 3y - 9z. \end{cases}$$

Розв'язання.

Складаємо відповідне характеристичне рівняння:

$$\begin{vmatrix} 5 - \lambda & -1 & -4 \\ -12 & 5 - \lambda & 12 \\ 10 & -3 & -9 - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$\text{або } \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 = 0.$$

Корені характеристичного рівняння дійсні й кратні: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$.

Частинний розв'язок, що відповідає простому характеристичному числу $\lambda_1 = -1$, шукаємо у вигляді:

$$x = \beta_1 e^{-t}, \quad y = \beta_2 e^{-t}, \quad z = \beta_3 e^{-t}.$$

Числа β_1 , β_2 , β_3 знаходимо із системи:

$$\begin{cases} (5+1)\beta_1 - \beta_2 - 4\beta_3 = 0, \\ -12\beta_1 + (5+1)\beta_2 + 12\beta_3 = 0, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} 6\beta_1 - \beta_2 - 4\beta_3 = 0, \\ -12\beta_1 + 6\beta_2 + 12\beta_3 = 0, \end{cases}$$
$$\begin{cases} 6\beta_1 - \beta_2 - 4\beta_3 = 0, \\ 2\beta_1 - \beta_2 - 2\beta_3 = 0. \end{cases}$$

Нехай $\beta_1 = 1$. Тоді система набуде вигляду:

$$\begin{cases} \beta_2 + 4\beta_3 = 6, \\ \beta_2 + 2\beta_3 = 2, \end{cases}$$

звідки $\beta_3 = 2$, $\beta_2 = -2$.

Шуканий частинний розв'язок:

$$x = e^{-t}, \quad y = -2e^{-t}, \quad z = 2e^{-t}.$$

Побудуємо два лінійно незалежні частинні розв'язки, що відповідають кратному характеристичному числу $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$. Відповідно до (8.8), маємо:

$$x = (A_1 t + A_2) e^t, \quad y = (B_1 t + B_2) e^t, \quad z = (C_1 t + C_2) e^t.$$

Коефіцієнти A_1 , A_2 , B_1 , B_2 , C_1 і C_2 знаходимо, підставляючи цей розв'язок у задану систему диференціальних рівнянь. Тоді, після групування і скорочення на e^t , отримаємо:

$$\begin{cases} A_1 t + A_1 + A_2 = (-4A_1 + 2B_1 + 5C_1)t - 4A_2 + 2B_2 + 5C_2, \\ B_1 t + B_1 + B_2 = (-6A_1 - B_1 - 6C_1)t + 6A_2 - B_2 - 6C_2, \\ C_1 t + C_1 + C_2 = (-8A_1 + 3B_1 + 9C_1)t - 8A_2 + 3B_2 + 9C_2. \end{cases}$$

Прирівнюючи коефіцієнти біля незалежної змінної t і вільні члени, отримаємо:

$$\begin{cases} -5A_1 + 2B_1 + 5C_1 = 0, \\ -6A_1 - 2B_1 - 6C_1 = 0, \\ -8A_1 + 3B_1 + 8C_1 = 0 \\ -5A_2 + 2B_2 + 5C_2 = A_1, \\ 6A_2 - 2B_2 - 6C_2 = B_1, \\ -8A_2 + 3B_2 + 8C_2 = C_1. \end{cases}$$

Розв'язуючи систему, знаходимо:

$$A_1 = C_1, \quad A_2 = C_1 + C_2, \quad B_1 = 0, \quad B_2 = 3C_1,$$

де C_1, C_2 – довільні сталі. Шуканий розв'язок має вигляд:

$$x = (C_2t + C_2 + C_3)e^t, \quad y = 3C_2e^t, \quad z = (C_2t + C_3)e^t.$$

Лінійно незалежні частинні розв'язки можуть бути записані у вигляді:

$$\begin{cases} x_2 = (t+1)e^t, & y_2 = 3e^t, & z_2 = te^t, \\ x_3 = e^t, & y_3 = 0, & z_3 = e^t. \end{cases}$$

Загальний розв'язок системи є лінійною комбінацією незалежних частинних розв'язків:

$$\begin{cases} x = C_1e^{-t} + (C_2t + C_2 + C_3)e^t, \\ y = -2C_1e^{-t} + 3C_2e^t, \\ z = 2C_1e^{-t} + (C_2t + C_3)e^t. \end{cases}$$

Приклад 4.14. Знайти загальний розв'язок лінійної неоднорідної системи диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = y - 2z + 7, \\ \frac{dz}{dx} = y - z + 4. \end{cases}$$

Розв'язання.

Попередньо проінтегруємо методом Ейлера відповідну однорідну систему:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = y - 2z, \\ \frac{dz}{dx} = y - z. \end{cases}$$

Складаємо і розв'яжемо відповідне характеристичне рівняння:

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & -2 \\ 1 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

або $\lambda^2 + 1 = 0$.

Корені характеристичного рівняння комплексні: $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$.

Частинний розв'язок, що відповідає кореню $\lambda_1 = i$, шукаємо у вигляді:

$$y = \beta_1 e^{ix}, \quad z = \beta_2 e^{ix}.$$

Числа β_1 і β_2 визначаємо із системи:

$$\begin{cases} (1 - \lambda_1)\beta_1 - 2\beta_2 = 0, \\ \beta_1 - (1 - \lambda_1)\beta_2 = 0. \end{cases}$$

Підставляючи значення $\lambda_1 = i$, отримаємо:

$$\begin{cases} (1 - i)\beta_1 - 2\beta_2 = 0, \\ \beta_1 - (1 + i)\beta_2 = 0. \end{cases}$$

Помноживши друге рівняння цієї системи на $(1 - i)$, отримаємо:

$$\begin{cases} (1 - i)\beta_1 - 2\beta_2 = 0, \\ (1 - i)\beta_1 - 2\beta_2 = 0. \end{cases}$$

Нехай $\beta_1 = 2$, тоді $\beta_2 = 1 - i$. Частинний розв'язок матиме вигляд:

$$y = 2e^{ix}, \quad z = (1 - i)e^{ix}.$$

Застосовуючи формулу Ейлера $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$, надамо частинний розв'язок у вигляді:

$$y = 2e^{i\varphi} = 2(\cos \varphi + i \sin \varphi) = 2 \cos x + i 2 \sin x,$$

$$\begin{aligned} z &= (1 - i)e^{ix} = \cos x + i \sin x - i(\cos x + i \sin x) = \\ &= \cos x + \sin x + i(\sin x - \cos x). \end{aligned}$$

Відокремлюючи дійсні й уявні частини, одержуємо два дійсні лінійно незалежні частинні розв'язки:

$$\begin{cases} y_1 = 2 \cos x, & z_1 = \cos x + \sin x, \\ y_2 = 2 \sin x, & z_2 = \sin x - \cos x. \end{cases}$$

Загальний розв'язок однорідної системи є лінійною комбінацією лінійно незалежних частинних розв'язків:

$$\begin{cases} y = 2C_1 \cos x + 2C_2 \sin x, \\ z = (C_1 - C_2) \cos x + (C_1 + C_2) \sin x. \end{cases}$$

Частинний розв'язок заданої системи шукаємо у вигляді:

$$y_1 = A, \quad z_1 = B.$$

Диференціюючи частинний розв'язок за змінною x , отримаємо:

$$y_1' = 0, \quad z_1' = 0.$$

Підставляючи частинний розв'язок і його похідну в задану систему, отримаємо:

$$\begin{cases} 0 = A - 2B + 7, \\ 0 = A - B + 4, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} 2B - A = 7, \\ B - A = 4. \end{cases}$$

Розв'язуючи систему, знаходимо $A = -1$, $B = 3$. Частинний розв'язок має вигляд:

$$y_1 = -1, \quad z_1 = 3.$$

Загальний розв'язок заданої неоднорідної лінійної системи:

$$\begin{cases} y = 2(C_1 \cos x + C_2 \sin x) - 1, \\ z = (C_1 - C_2) \cos x + (C_1 + C_2) \sin x + 3. \end{cases}$$

Контрольні питання та завдання

1. Запишіть у матричному вигляді однорідну систему диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.
2. У якому вигляді шукають розв'язок однорідної лінійної системи диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами згідно з методом Ейлера?

3. Запишіть вигляд загального розв'язку лінійної однорідної системи диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами, якщо характеристичні числа є дійсні та різні.

4. Запишіть вигляд розв'язку лінійної системи диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами, який відповідає характеристичному числу кратності m .

5. Як знайти лінійно незалежні дійсні розв'язки лінійної однорідної системи диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами у разі, якщо власне число є комплексним?

6. Розв'язати методом Ейлера системи диференціальних рівнянь:

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 8x_2 - x_1, \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1 + x_2; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x + y, \\ \frac{dy}{dt} = -4x - y. \end{cases}$$

4.8 Метод Лагранжа

Загальний розв'язок неоднорідної системи диференціальних рівнянь можна побудувати *методом варіації довільних сталих (методом Лагранжа)*, за фундаментальною системою розв'язків відповідної однорідної системи. Метод полягає в побудові розв'язку у вигляді:

$$y_k = \sum_{i=1}^n C_i(x) z_{ik}, \quad (4.39)$$

де $C_i(x)$ – деякі неперервно диференційовані функції x . Ці функції визначають із системи:

$$\sum_{i=1}^n C'_i(x) z_{ik} = f_k(x).$$

Розв'язуємо цю систему як алгебраїчну щодо $C'_i(x)$:

$$C'_i(x) = \varphi_i(x) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

звідки:

$$\frac{dC_i(x)}{dx} = \varphi_i(x).$$

Інтегруючи ці диференціальні рівняння, знаходимо усі шукані функції:

$$C_i(x) = \int \varphi_i(x) dx + C_i.$$

Підставляючи знайдені функції в рівняння (4.39), одержуємо загальний розв'язок системи:

$$y_k = \sum_{i=1}^n z_{ik} \int \varphi_i(x) dx + \sum_{i=1}^n C_i z_{ik}.$$

Приклад 4.15. Знайти загальний розв'язок лінійної неоднорідної системи диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = -xy + z + 1, \\ \frac{dz}{dx} = (1 - x^2)y + xz + \cos x. \end{cases}$$

Розв'язання.

Ця система є лінійною неоднорідною. Для розв'язання скористаємося методом варіації довільних сталих.

Запишемо відповідну однорідну систему:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = -xy + z, \\ \frac{dz}{dx} = (1 - x^2)y + xz. \end{cases}$$

Зводимо цю систему до одного рівняння другого порядку:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -y - x \frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dx}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = -y - x \frac{dy}{dx} + (1 - x^2)y + xz.$$

Із першого рівняння системи $z = \frac{dy}{dx} + xy$, а тому

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -y - x \frac{dy}{dx} + (1 - x^2)y + x \frac{dy}{dx} + x^2 y.$$

Остаточно $\frac{d^2 y}{dx^2} = 0$. Інтегруючи це рівняння, отримаємо: $y = C_1 x + C_2$.

Знаходимо $z = C_1 + x(C_1 x + C_2)$, або $z = C_1(1 + x^2) + C_2 x$.

Загальний розв'язок неоднорідної системи шукаємо методом варіації

довільних сталих у вигляді:

$$\begin{cases} y = C_1(x)x + C_2(x), \\ z = C_1(x)(1+x^2) + C_2(x)x. \end{cases}$$

Потім знаходимо:

$$\begin{cases} y' = C_1'(x)x + C_1(x) + C_2'(x), \\ z' = C_1'(x)(1+x^2) + 2xC_1(x) + C_2'(x)x + C_2(x). \end{cases}$$

Отримані функції y , z , y' , z' підставимо в задану систему. Після елементарних перетворень перше рівняння системи зводиться до $C_1'(x)x + C_2'(x) = 1$, друге рівняння системи – $C_1'(x)(1+x^2) + C_2'(x)x = \cos x$. Отже, для визначення функцій $C_1'(x)$, $C_2'(x)$ отримали систему:

$$\begin{cases} C_1'(x)x + C_2'(x) = 1, \\ C_1'(x)(1+x^2) + C_2'(x)x = \cos x. \end{cases}$$

Розв'язуємо її відносно $C_1'(x)$ та $C_2'(x)$, отримуємо:

$$\begin{cases} C_1'(x) = \cos x - 1, \\ C_2'(x) = 1 + x^2 - x \cos x. \end{cases}$$

Після інтегрування, отримаємо:

$$C_1(x) = \sin x - \frac{x^2}{2} + C_1, \quad C_2(x) = x + \frac{x^3}{3} - x \sin x - \cos x + C_2.$$

Отже, загальний розв'язок заданої неоднорідної системи:

$$\begin{cases} y = x - \frac{x^3}{6} + C_1x - \cos x + C_2, \\ z = \sin x - x \cos x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{6} + C_1(1+x^2) + C_2x. \end{cases}$$

Контрольні питання та завдання

1. Поясніть суть методу Лагранжа.

2. Знайти загальний розв'язок лінійної неоднорідної системи

диференціальних рівнянь методом Лагранжа
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x - 5y + 4t + 1, \\ \frac{dy}{dt} = x - 2y + t. \end{cases}$$

РОЗДІЛ 5 ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

5.1 Основні поняття

Визначення. Співвідношення між незалежними змінними $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega$ невідомою функцією $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega$ та її частинними похідними довільного порядку $\frac{\partial^n u}{\partial x_i^m \partial x_j^k}$, $m + k = n$ називають диференціальним рівнянням з частинними похідними.

Визначення. Рівняння, що має вигляд

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}) = 0, \quad (5.1)$$

де $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega$ – невідома функція, називають диференціальним рівнянням з частинними похідними 1-го порядку.

У загальному випадку це нелінійне рівняння.

Визначення. Диференційовану функцію $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ називають розв'язком рівняння (5.1), якщо внаслідок підстановки вона перетворює його на тотожність.

Визначення. Якщо $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – розв'язок рівняння (5.1), то поверхню $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n) = C$ у просторі змінних $(x_i, u) \in \Omega$ називають інтегральною поверхнею рівняння (5.1).

Визначення. Якщо рівняння (5.1) лінійне відносно частинних похідних, але нелінійне відносно невідомої функції $u(\vec{x})$, $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, то таке рівняння називають квазілінійним:

$$\sum_{i=1}^n a_i(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \frac{\partial u}{\partial x_i} = b(x_1, x_2, \dots, x_n, u). \quad (5.2)$$

Визначення. Якщо у рівнянні (5.2) коефіцієнти $a_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ не залежать від шуканої функції, то таке рівняння називають напівлінійним:

$$\sum_{i=1}^n a_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_i} = b(x_1, x_2, \dots, x_n, u).$$

Якщо у рівнянні (5.2) функції $a_i(x_1, x_2, \dots, x_n, u)$ розглядати як компоненти вектора $\vec{a}(x_1, x_2, \dots, x_n, u) = \{a_i(x_1, x_2, \dots, x_n, u)\}$, а частинні похідні як компоненти вектора $gradu = \nabla u = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\}$, то його можна записати у вигляді скалярного добутку $(\vec{a}, \vec{\nabla} u) = b$, або

$$\left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}, \vec{\nabla} u \right) = \frac{b}{|\vec{a}|}. \quad (5.3)$$

Вираз, що стоїть у лівій частині формули (5.3) – це похідна функції $u(x_i)$ за напрямом вектора $\vec{a}(x_1, x_2, \dots, x_n, u) = \{a_i(x_1, x_2, \dots, x_n, u)\}$, $\frac{\partial u}{\partial a} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \cos \alpha_i$. Тому розв'язками рівняння (5.2) будуть функції $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$, похідна яких у кожній точці $M_0 = u(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ має вигляд та напрям:

$$\frac{\vec{b}(\vec{x}, u(\vec{x}))}{|\vec{a}|}.$$

Визначення. Якщо у рівнянні (5.2) права частина дорівнює нулю, то таке рівняння називають *квазілінійним однорідним*:

$$\sum_{i=1}^n a_i(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0, \quad (5.4)$$

а якщо у ньому функції a_i не залежать від u – *лінійним однорідним рівнянням першого порядку*:

$$\sum_{i=1}^n a_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0. \quad (5.5)$$

5.2 Метод характеристик. Характеристики та їх геометричний зміст

Розглянемо напівлінійне рівняння з двома невідомими:

$$a(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} = c(x, y, u), \quad (5.6)$$

де $a, b, c \in C^1$ – неперервні функції своїх аргументів у деякій області Ω , що віджповідають у ній умові $a^2 + b^2 \neq 0$. Воно лінійне відносно частинних похідних, але нелінійне відносно невідомої функції $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Рівняння (5.6) можна розглядати як похідну за напрямком

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta$$

деякого змінного вектора. Функції

$a(x, y, u), b(x, y, u), c(x, y, u) \in \Omega$ визначають поле напрямків у просторі $(x, y, u) \in \Omega$. У кожній фіксованій точці цього простору ми маємо напрям, для

якого напрямні косинуси пропорційні функціям

$a(x, y, u), b(x, y, u), c(x, y, u)$. Це поле напрямків визначає сім'ю кривих, для

яких будь-яка лінія має у кожній своїй точці дотичну, що збігається з напрямком поля у цій точці. Це означає, що розв'язок рівняння (5.6) визначає

інтегральну поверхню $u = u(x, y)$, яка у кожній своїй точці $P(x, y, u)$ має

дотичну площину, напрямні косинуси якої $\frac{\partial u}{\partial x} = p$ і $\frac{\partial u}{\partial y} = q$ пов'язані лінійним

рівнянням:

$$ap + bq = c \quad (5.7)$$

та пропорційні функціям $a(x, y, u), b(x, y, u), c(x, y, u)$.

Згідно з рівнянням (5.7), дотичні площини усіх інтегральних поверхонь, що проходять через точку $P_0(x_0, y_0, u_0)$ належать одному і тому самому пучку площин, вісь яких у довільній точці P визначається співвідношеннями:

$$dx : dy : du = a : b : c \Rightarrow \frac{dx}{a(x, y, u)} = \frac{dy}{b(x, y, u)} = \frac{du}{c(x, y, u)}. \quad (5.8)$$

Такі пучки та їх осі називають *пучками і осями Монжа*. Напрямний вектор, що проходить через точку P та належить осі Монжа, називають *характеристичним лінійним елементом*. Напрямки осей Монжа утворює у

просторі Ω поле напрямків, які визначають інтегральні криві, що є розв'язком системи звичайних диференціальних рівнянь (5.8). Їх називають *характеристичними кривими* диференціального рівняння (5.6).

Нехай $u = u(x, y)$ – розв'язок рівняння (5.6) – поверхня у деякій області Ω , а $x(s), y(s)$ – криві на цій поверхні, s – параметр. Тоді їх диференціальні рівняння для визначення поверхні мають такий вигляд:

$$\frac{dx}{ds} = a(x, y, u), \quad \frac{dy}{ds} = b(x, y, u), \quad \frac{du}{ds} = c(x, y, u) \quad (5.9)$$

Визначення. Систему (5.9) називають *характеристичною системою* рівняння (5.8), а лінії, що нею визначаються, називають *характеристичними* або *характеристиками* рівняння (5.8).

Проекції характеристичних кривих на площину xOy іноді називають *характеристичними проєкціями*.

Зауваження. Параметр s на характеристиці рівняння (5.6) визначають з точністю до довільної сталої.

Із огляду геометрії інтегрування диференціального рівняння з частинними похідними (5.6) означає знаходження такої поверхні, дотичні площини до якої у кожній звичайній точці належить пучку Монжа, або у кожній своїй звичайній точці мають напрямок осі Монжа своїм дотичним напрямком. Отже, будь-яка поверхня $u = u(x, y)$, утворена сім'єю характеристичних кривих, що залежать від одного параметра, є інтегральною поверхнею диференціального рівняння з частинними похідними. Метод розв'язання рівняння з частинними похідними, що полягає у зведенні рівняння (5.2), (5.6) до систем (5.8), (5.9), називають *методом характеристик*.

Оскільки розв'язок системи (5.8) однозначно визначається початковими значеннями x, y, u при $s = 0$, то застосовують такі теореми.

Теорема 5.1. Якщо $u = u(x, y) = C$ є інтеграл системи (5.8), то функція $u = u(x, y)$ відповідає рівнянню (5.6).

Справедлива обернена теорема.

Теорема 5.2. Якщо $u = u(x, y)$ є розв'язок рівняння (5.6), то $u = u(x, y) = C$ є інтеграл або загальний розв'язок системи (5.8).

Висновок. Теореми стверджують, що будь-яка інтегральна поверхня рівняння (5.2), (5.6) утворена сім'єю характеристик.

Алгоритм знаходження загального розв'язку напівлінійного рівняння (5.6).

1. Скласти та розв'язати систему звичайних диференціальних рівнянь (5.8) або (5.9). Якщо немає особливої потреби, параметр s можемо не вводити.

2. Виписати загальний розв'язок рівняння (5.6). Ним буде функція $\phi = F(\phi_1, \phi_2)$, або $\Phi(C_1, C_2)$, де ϕ_1, ϕ_2 – два лінійно незалежні інтеграли системи (5.8) або (5.9).

5.3 Загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння з частинними похідними

Розглянемо однорідне рівняння (5.5). Його інтегрування полягає у розв'язанні системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx_1}{a_1(\vec{x})} = \frac{dx_2}{a_2(\vec{x})} = \dots = \frac{dx_n}{a_n(\vec{x})}, \quad (5.10)$$

де $a_i(\vec{x}) = a_i(x_1, x_2, \dots)$.

Визначивши всі інтеграли системи (5.10), отримаємо $n-1$ розв'язок, що містить $n-1$ довільну сталу C_i , $i = 1 \div n$. Знайшовши з цих розв'язків значення C_i , $i = 1 \div n$, отримаємо $n-1$ лінійно незалежну функцію:

$$u_1(\vec{x}) = C_1, \quad u_2(\vec{x}) = C_2, \quad \dots, \quad u_{n-1}(\vec{x}) = C_{n-1}. \quad (5.11)$$

До цього розв'язку можна додати ще один природний розв'язок $u_n = C_n$.

Теорема 5.3. Будь-який розв'язок системи (5.10) є розв'язком однорідного рівняння (5.5), і навпаки: всякий розв'язок однорідного рівняння (5.5) є розв'язком системи (5.10).

Теорема 5.4. Однорідне рівняння (5.5) та рівняння (5.10) мають $n-1$ лінійно незалежних розв'язків, а всі інші розв'язки можна записати у вигляді

$$u = \varphi(u_1, u_2, \dots, u_{n-1}) \quad (5.12)$$

Висновок. Розв'язок $u = \varphi(u_1, u_2, \dots, u_{n-1})$, де φ – довільна функція є загальним розв'язком або інтегралом однорідної системи.

Звідси алгоритм інтегрування однорідного рівняння.

1. Скласти систему звичайних диференціальних рівнянь (5.10) та знайти її розв'язок.

2. Отримані розв'язки системи (5.10) записати у вигляді (5.12) $u = \varphi(u_1, u_2, \dots, u_n)$, або у вигляді $u = F(C_1, C_2, \dots, C_n)$.

Зауваження 1. Загальний розв'язок звичайного диференціального рівняння містить довільні сталі, а розв'язок рівняння з частинними похідними – довільні функції.

Зауваження 2. Це правило зберігається і коли однорідне рівняння містить шукану функцію u . Тоді до розв'язків (5.11) додається ще один – $u = C_n$.

Для однорідного рівняння з частинними похідними з двома невідомими

$$a(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (5.13)$$

маємо відповідне звичайне диференціальне рівняння:

$$\frac{dx}{a(x, y)} = \frac{dy}{b(x, y)}.$$

Якщо це рівняння має аналітичний розв'язок, то його можна записати у вигляді $u_1(x, y) = C_1$, а загальний інтеграл у вигляді:

$$u = \varphi(u_1) \quad (5.14)$$

Приєднавши до (5.14) очевидний розв'язок $u = C_2$, визначимо сім'ю інтегральних поверхонь рівняння (5.13) у вигляді $u = F(C_1, C_2)$.

Приклад 5.1. Знайти загальний інтеграл $y \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

Розв'язання.

Згідно алгоритму, складаємо рівняння:

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x} \Rightarrow xdx - ydy = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = C_1, \text{ або } x^2 - y^2 = C_1.$$

Приєднуємо $u = C_2$. Тоді загальний інтеграл записуємо у вигляді $z = F(C_1, C_2)$

або $z = \varphi(x^2 - y^2 - C_1, C_2)$, або $z = \varphi(x^2 - y^2)$, якщо покласти $C_1 = C_2 = 0$.

Приклад 5.2. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$\frac{x}{y} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + (1 - y^2) \frac{\partial \varphi}{\partial y} + (a - yz) \frac{\partial \varphi}{\partial z} + (b - yu) \frac{\partial \varphi}{\partial u} = 0.$$

Розв'язання.

Складаємо систему звичайних диференціальних рівнянь, відповідну заданому рівнянню:

$$\frac{dx}{\frac{x}{y}} = \frac{dy}{1 - y^2} = \frac{dz}{a - yz} = \frac{du}{b - yu} \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y(1 - y^2)} = \frac{dz}{y(a - yz)} = \frac{du}{y(b - yu)} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y(1 - y^2)}, \\ \frac{dy}{y(1 - y^2)} = \frac{dz}{y(a - yz)}, \\ \frac{dy}{y(1 - y^2)} = \frac{du}{y(b - yu)}. \end{array} \right.$$

Шукаємо розв'язок кожного рівняння отриманої системи окремо.

$$5.2.1. \quad \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y(1 - y^2)} \Rightarrow \int \frac{dx}{x} = \int \frac{dy}{y(1 - y^2)} + \ln C_1$$

$$\Rightarrow \ln|x| = \int \frac{(1 - y^2 + y^2)dy}{y(1 - y^2)} + \ln C_1 \Rightarrow \ln|x| = \ln|y| - \frac{1}{2} \ln|1 - y^2| + \ln C_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x\sqrt{1 - y^2}}{y} = C_1.$$

$$5.2.2. \quad \frac{dy}{y(1 - y^2)} = \frac{dz}{y(a - yz)}$$

Уважаючи, що $y \neq 0$, отримаємо:

$$(a - yz)dy = (1 - y^2)dz \Rightarrow (1 - y^2)\frac{dz}{dy} + yz - a = 0.$$

Це лінійне диференціальне рівняння першого порядку. Розв'яжемо його, застосувавши підстановку Бернуллі.

$$\begin{aligned} \text{Нахай } z = t(y)v(y) &\Rightarrow z' = t'v + v't \Rightarrow \\ &\Rightarrow (1 - y^2)(t'v + v't) - ytv - a = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (1 - y^2)t'v + t[(1 - y^2)v' - yv] - a = 0. \end{aligned}$$

$$\text{Знайдемо функцію } v \text{ за умови } (1 - y^2)v' - yv = 0 \Rightarrow v = \sqrt{1 - y^2}.$$

Підставляємо значення для v в рівняння:

$$(1 - y^2)^{3/2}t' - a = 0 \Rightarrow \frac{dt}{dy} = \frac{a}{(1 - y^2)^{3/2}} \Rightarrow dt = \frac{ady}{(1 - y^2)^{3/2}} \Rightarrow$$

$$t = a \int \frac{dy}{(1 - y^2)^{3/2}} + C_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{(1 - y^2)^{3/2}} = \left| \begin{matrix} y = \sin w \\ dy = \cos w dw \end{matrix} \right| = \int \frac{\cos w dw}{\cos^3 w} = \int \frac{dw}{\cos^2 w} = \operatorname{tg} w = \operatorname{tg} \arcsin y.$$

$$\text{Отже, маємо: } z = (a \operatorname{tg} \arcsin y + C_2) \sqrt{1 - y^2}.$$

Скориставшись співвідношенням між оберненими тригонометричними функціями $\arcsin y = \operatorname{arctg} \frac{y}{\sqrt{1 - y^2}}$ та $\operatorname{tg} \operatorname{arctg} \frac{y}{\sqrt{1 - y^2}} = \frac{y}{\sqrt{1 - y^2}}$, отримаємо:

$$z = ay + C_2 \sqrt{1 - y^2} \Rightarrow C_2 = \frac{z - ay}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

$$5.2.3. \frac{dy}{y(1 - y^2)} = \frac{du}{y(b - yu)}.$$

Візьмемо $y \neq 0$ та помножимо обидві частини рівняння на y :

$$\frac{dy}{1 - y^2} = \frac{du}{b - yu} \Rightarrow (1 - y^2) \frac{du}{dy} + yu - b = 0.$$

Це лінійне диференціальне рівняння першого порядку. Розв'язуючи його, як і попереднє, отримаємо розв'язок у вигляді:

$$C_3 = \frac{u - by}{\sqrt{1 - y^2}}; \quad u = by + C_3 \sqrt{1 - y^2}.$$

Отже, загальний розв'язок рівняння можна записати у вигляді:

$$\varphi = F(C_1, C_2, C_3) = F\left(\frac{x}{y} \sqrt{1 - y^2}, \frac{z - ay}{\sqrt{1 - y^2}}, \frac{u - by}{\sqrt{1 - y^2}}\right).$$

Приклад 5.3. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$\cos y \frac{\partial z}{\partial x} + \cos x \frac{\partial z}{\partial y} = \cos x \cos y.$$

Розв'язання.

$$\text{Складемо систему рівнянь: } \frac{dx}{\cos y} = \frac{dy}{\cos x} = \frac{dz}{\cos x \cos y}.$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{\cos y} = \frac{dy}{\cos x} & \Rightarrow \cos x dx = \cos y dy \\ \frac{dx}{\cos y} = \frac{dz}{\cos x \cos y}, \quad \cos x \neq 0, \quad \cos y \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin x = \sin y + C_1, \\ \sin x = z - C_2. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Отже,} \quad C_1 &= \sin x - \sin y, \\ C_2 &= z - \sin x. \end{aligned}$$

Звідси загальний розв'язок системи можна записати у вигляді:

$$F(C_1, C_2) = F(\sin x - \sin y, z - \sin x), \text{ або } z = \sin x + F(\sin x - \sin y).$$

5.4 Задача Коші

Як і звичайне, диференціальне рівняння, рівняння з частинними похідними має нескінченну множину розв'язків. Задача визначення розв'язку для рівнянь (5.2), (5.6) з додаванням початкових умов дозволяє знайти єдиний розв'язок. На відміну від початкової умови для звичайного диференціального рівняння, де задається значення функції в точці, для рівняння з частинними похідними необхідно знайти інтегральну поверхню рівняння (5.2), (5.6) яка проходить через задану криву l у просторі (x, y, u) :

$$u(x, y)|_l = f(x, y).$$

Задача Коші для рівняння (5.2), (5.6) зазвичай розуміється як задача визначення інтегральної поверхні, що проходить через задану лінію l .

Нехай рівняння лінії l задано параметрично $x_0 = x_0(t)$, $y_0 = y_0(t)$, $u_0 = u_0(t)$, $(t_0 \leq t \leq t_1)$. Приймаючи координати точок кривої l як початкові умови для $s = 0$ отримаємо розв'язок системи (5.9) у вигляді:

$$x = x(s, x_0, y_0, u_0), y = y(s, x_0, y_0, u_0), u = u(s, x_0, y_0, u_0), \text{ або для } s \rightarrow 0$$

$$x = x(s, t), y = y(s, t), u = u(s, t). \quad (5.15)$$

Із огляду геометрії розв'язання задачі Коші означає, що через кожну точку кривої l проходить характеристична або інтегральна крива системи (5.9). Унаслідок цього утворюється сім'я характеристичних кривих, які залежать ще й від параметра t $x(s, t)$, $y(s, t)$, $u(s, t)$. Якщо з перших двох функцій можна визначити s і t через x і y , то ці криві утворюють поверхню $u(x, y)$. Достатньою умовою для цього є така умова:

$$\frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial s} \neq 0. \quad (5.16)$$

Із огляду геометрії умова (5.16) означає, що тангенціальні та характеристичні напрямки у кожній точці кривої повинні мати різні проєкції на площині x, y .

Якщо уздовж кривої l $\Delta = \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial s} = 0$, то для того, щоб задача Коші мала розв'язки, крива l повинна сама бути характеристикою. Якщо крива характеристика, то через неї, як через початкову криву, проходить не одна, а нескінченна множина інтегральних поверхонь, які перетинаються по кривій l .

Теорема 5.5. Якщо праві частини системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dy_k}{dx} = f_k(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \quad (k=1, \dots, n) \quad (5.17)$$

є неперервні функції своїх аргументів в області $\Omega = \{|x-a| \leq A, |y_k - b_k| \leq B\}$ і, якщо крім того, в області Ω існують неперервні частинні похідні $\frac{\partial f_k}{\partial y_k}$, то існує єдиний розв'язок системи (5.9), (5.10), визначений початковими умовами $y_k = \varphi(x_0, y_1^\circ, \dots, y_n^\circ)$, які знаходяться всередині області Ω .

Теорема 5.6. Якщо на початковій кривій l всюди $\Delta \neq 0$, то задача Коші має один і тільки один розв'язок. Якщо ж уздовж кривої l $\Delta = 0$ усюди, то для того, щоб задача Коші мала розв'язок, крива l повинна бути характеристичною кривою.

У цьому випадку задача Коші має нескінченну множину розв'язків.

Для рівняння з двома незалежними змінними ставиться одна початкова умова, а якщо змінних більше, то $n-1$.

Приклад 5.4. Знайти розв'язок задачі Коші

$$-x \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{u}{2y} \frac{\partial u}{\partial y} = u \quad (y > 0) \quad (5.18)$$

$$u(x, y)|_{x+y=1} = y. \quad (5.19)$$

Розв'язання.

Вибравши на кривій $y = t$ у якості параметра, отримаємо наступну задачу у просторі змінних x, y, u :

$$x = 1 - t, \quad y = t, \quad u = t \quad (5.20)$$

Характеристична система, що відповідає рівнянню (5.18), має вигляд:

$$\frac{dx}{ds} = -x, \quad \frac{dy}{ds} = \frac{u}{2y}, \quad \frac{du}{ds} = u \Rightarrow \frac{dx}{x} = -ds \Rightarrow \ln x - \ln C_1 = -s \Rightarrow x = C_1 e^{-s},$$

$$\frac{du}{ds} = u \Rightarrow u = C_2 e^s,$$

$$\frac{dy}{ds} = \frac{u}{2y} \Rightarrow 2y dy = u ds \Rightarrow y^2 = us + C_3 \Rightarrow y = \sqrt{C_2 e^s + C_3}.$$

Отже, розв'язок характеристичної системи має вигляд:

$$x = C_1 e^{-s}, \quad y = \sqrt{C_2 e^s + C_3}, \quad u = C_2 e^s. \quad (5.21)$$

Інтегральна поверхня, що дає розв'язок задачі Коші (5.18),(5.19), утворена кусками характеристик для $s = 0$, що проходять через криву (5.21). Узявши у рівняннях (5.21) $s = 0$ та використавши (5.20), отримаємо:

$$C_1 = 1 - t, \quad \sqrt{C_2 + C_3} = t, \quad C_2 = t \Rightarrow C_3 = t^2 - 1.$$

Підставляючи отримані значення C_1, C_2, C_3 в (5.21), отримаємо розв'язок задачі Коші (5.18), (5.19) у параметричній формі:

$$x = (1 - t)e^{-s}, \quad y = \sqrt{te^s + t^2} - t, \quad u = te^s. \quad (5.22)$$

Вилучивши з (5.22) параметри s та t , отримаємо інтегральну поверхню у просторі:

$$\begin{cases} ux = (1 - t)t \Rightarrow t^2 - t = -ux \\ e^s = \frac{u}{t} \end{cases} \Rightarrow y = \sqrt{u - ux} \Rightarrow u = \frac{y^2}{1 - x}.$$

Перевірка.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y^2}{(1 - x)^2} \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2y}{1 - x} \Rightarrow \frac{-xy^2}{(1 - x)^2} + \frac{2y^2}{2(1 - x)^2} = \frac{y^2(1 - x)}{(1 - x)^2} = u.$$

Приклад 5.5. Знайти загальний розв'язок рівняння та функцію $u(x, y)$ таку, щоб вона пройшла через прямі $x = 2; y = z$

$$xz \frac{\partial u}{\partial x} + yz \frac{\partial u}{\partial y} - (x^2 + y^2) \frac{\partial u}{\partial z} = 0. \quad (5.23)$$

Розв'язання.

Як і у попередньому прикладі, складаємо систему звичайних диференціальних рівнянь:

$$\frac{dx}{xz} = \frac{dy}{yz} = \frac{dz}{-(x^2 + y^2)} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dx}{xz} = \frac{dy}{yz}, \\ \frac{dx}{xz} = \frac{dz}{-(x^2 + y^2)}. \end{cases}$$

$$\text{Із першого рівняння системи } \ln y - \ln x = \ln C_1 \Rightarrow \frac{y}{x} = C_1 \Rightarrow y = C_1 x.$$

Підставляємо отримане значення для y у друге рівняння системи:

$$\frac{dx}{xz} = \frac{dz}{-(C_1^2 x^2 + x^2)} \Rightarrow \frac{x^2(C_1^2 + 1)dx}{x} = -zdz \Rightarrow$$

$$(C_1^2 + 1)xdx = -zdz \Rightarrow (C_1 + 1)\frac{x^2}{2} = -\frac{z^2}{2} + C_2.$$

Скориставшись розв'язком першого рівняння системи, отримаємо:

$$C_2 = (C_1^2 + 1)x^2 + z^2 \Rightarrow C_2 = C_1^2 x^2 + x^2 + z^2 \Rightarrow C_2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Знайдено два лінійно незалежні інтеграли рівняння (5.23):

$$y = C_1 x \quad \text{та} \quad C_2 = y^2 + x^2 + z^2. \quad (5.24)$$

Перший з них визначає сім'ю площин, що проходять через вісь Oz , а другий – сім'ю сфер із центром у початку координат. Отже, інтегральними лініями рівняння (5.23) є сім'я кіл, що утворилася після перетинання площин і сфер. Загальний розв'язок рівняння можна записати у вигляді:

$$u = F(C_1, C_2) = F\left(\frac{y}{x}, x^2 + y^2 + z^2\right),$$

де F – довільна функція своїх аргументів.

Знайдемо функцію F так, щоб вона пройшла через прямі $x=2$; $y=z$. Для цього вилючимо x, y, z з рівнянь, скориставшись першим співвідношенням з (5.24). Із першого рівняння маємо: $x=2$, $y=2C_1$, $z=2C_1$. Підставивши отримані значення у друге рівняння співвідношення (5.24), отримаємо:

$$x^2 + y^2 + z^2 = C_2 \Rightarrow 4 + 4C_1^2 + 2C_1^2 = C_2 \Rightarrow F(C_1, C_2) = 4 + 6C_1^2 - C_2.$$

Підставляючи в останній вираз замість C_1 та C_2 значення (5.24), отримаємо частинний розв'язок у вигляді:

$$u = 4 + 6\frac{y^2}{x^2} - (x^2 + y^2 + z^2).$$

Перевірка. Знаходимо частинні похідні функції

$$u = 4 + 6\frac{y^2}{x^2} - (x^2 + y^2 + z^2):$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -12 \frac{y^2}{x^3} - 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 12 \frac{y}{x^2} - 2y, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = -2z.$$

Підставивши отримані вирази у рівняння (5.23), отримаємо тотожність:

$$-xy \left(12 \frac{y^2}{x^3} + 2x \right) + yz \left(12 \frac{y}{x^2} - 2y \right) + 2z(x^2 + y^2) \equiv 0.$$

У додатках часто зустрічаються *задачі Коші для квазілінійного рівняння*

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + \sum_{i=1}^n a_i(\tau, x_i, u) \frac{\partial u}{\partial x_i} = b(\tau, x_i, u), \quad (5.25)$$

$$u(0, x_i) = u_0, \quad (5.26)$$

де τ розглядається як час, а умова (5.26) – початкова функція на гіперплощині змінних (τ, x_i, u) . Рівнянню (5.25) відповідає характеристична система:

$$\frac{d\tau}{ds} = 1, \quad \frac{dx_i}{ds} = a_i(\tau, x_i, u), \quad \frac{du}{ds} = b(\tau, x_i, u). \quad (5.27)$$

Її необхідно розв’язувати з початковими умовами:

$$\tau(0) = 0, \quad x_i(0) = s_i, \quad u(0) = u_0(s_i). \quad (5.28)$$

Із першого рівняння системи (5.27) та початкової умови $\tau(0) = 0$ знаходимо $\tau = s$ та розв’язуємо інші рівняння системи.

5.5 Задача Коші для нелінійних рівнянь

Розглянемо задачу Коші для нелінійного рівняння (5.1)

$$F(x_1, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}) = 0, \quad (5.29)$$

де $F(x_1, \dots, x_n, u, p_1, \dots, p_n)$, $p_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$ функція класу C^2 , визначена на деякій відкритій множині у просторі змінних $x_1, \dots, x_n, u, p_1, \dots, p_n$ з початковою умовою:

$$u(\xi(\tau_1, \dots, \tau_{n-1})) = u_0(\tau_1, \dots, \tau_{n-1}). \quad (5.30)$$

Тут $x = \xi(\tau_1, \dots, \tau_{n-1})$ – деяка $n-1$ мірна неперервна поверхня C^2 без самоперетину, а $u_0(\tau_1, \dots, \tau_{n-1}) \in C^2$ – неперервна двічі диференційована функція, визначена на поверхні S .

Визначення. Поверхню S називають *регулярною* класу C^1 , якщо функції $p_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$ у будь-якій точці цієї поверхні.

Нехай функція $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ класу C^2 є розв'язком задачі Коші (5.29), (5.30). Підставивши її в (5.29), отримаємо тотожність. Продиференціюємо її за змінними x_i :

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial u} p_i + \sum_{j=1}^n \frac{\partial F}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial x_i} = 0 \quad (i=1, \dots, n). \quad (5.31)$$

Оскільки $\frac{\partial p_j}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial p_i}{\partial x_j}$, рівність (5.31) можна записати у вигляді:

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial u} p_i + \sum_{j=1}^n \frac{\partial F}{\partial p_j} \frac{\partial p_i}{\partial x_j} = 0 \quad (i=1, \dots, n).$$

Із цих рівнянь видно, що функції p_i відповідають системам квазілінійних рівнянь з «однаковою головною частиною»:

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial F}{\partial p_j} \frac{\partial p_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{\partial F}{\partial u} p_i \quad (i=1, \dots, n). \quad (5.32)$$

Розглянемо розв'язок $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ уздовж траєкторій системи диференціальних рівнянь

$$\frac{dp_j}{d\tau} = \frac{\partial F}{\partial p_j} \quad (j=1, \dots, n). \quad (5.33)$$

Рівняння (5.32) у цьому випадку можна записати у вигляді:

$$\frac{dp_i}{d\tau} = -\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{\partial F}{\partial u} p_i \quad (i=1, \dots, n). \quad (5.34)$$

Скориставшись співвідношенням (5.33), обчислимо:

$$\frac{du}{d\tau} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{dx_k}{d\tau} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial F}{\partial p_k} p_k. \quad (5.35)$$

Отже, якщо $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – розв’язок задачі Коші (5.29), (5.30), то уздовж будь-якої траєкторії системи рівнянь (5.33) функції $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ та $p_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$ ($i = 1, \dots, n$) відповідатимуть умовам (5.34) та (5.36).

Визначення. Систему з $2n+1$ звичайних диференціальних рівнянь (5.33), (5.34) та (5.35) називають *характеристичною системою рівняння* (5.29), а її траєкторії у просторі змінних (x_i, u, p_i) – *характеристиками* цього рівняння.

Розглянемо спосіб знаходження розв’язку задачі Коші (5.29), (5.30). Уважаючи, що $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – розв’язок цієї задачі Коші, і диференціюючи (5.30) по τ_k ($k = 1, \dots, n-1$), отримаємо:

$$\sum_{k=1}^n p_i \frac{\partial \xi_i}{\partial \tau_k} = \frac{\partial u_0}{\partial \tau_k} \quad (5.36)$$

Оскільки функція $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – розв’язок задачі Коші (5.29) (5.30), то $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ і p_i повинні відповідати рівнянню:

$$F(\xi(\tau_1, \dots, \tau_{n-1}), u_0(\tau_1, \dots, \tau_{n-1}), p_1, \dots, p_n) = 0 \quad (5.37)$$

Припустимо, що

$$p_i = \eta_i(\tau_1, \dots, \tau_{n-1}) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (5.38)$$

неперервний розв’язок системи рівнянь (5.36), (5.37), для якого на поверхні S визначник Δ відмінний від нуля:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial p_1} & \dots & \frac{\partial F}{\partial p_n} \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial \tau_1} & \dots & \frac{\partial \xi_n}{\partial \tau_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial \tau_{n-1}} & \dots & \frac{\partial \xi_n}{\partial \tau_{n-1}} \end{vmatrix} \neq 0 \quad (5.39)$$

Якщо $\Delta \neq 0$, то розв'язуємо задачу Коші для характеристичної системи (5.33) – (5.35) з такими початковими умовами:

$$\begin{aligned} x_i|_{\tau=0} &= \xi_i(\tau_1, \dots, \tau_{n-1}) \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad u|_{\tau=0} = u_0(\tau_1, \dots, \tau_{n-1}), \\ p_j|_{\tau=0} &= \eta_j(\tau_1, \dots, \tau_{n-1}) \quad (j=1, 2, \dots, n). \end{aligned}$$

Розв'язок цієї задачі існує, єдиний та має вигляд:

$$\begin{aligned} x_i &= x_i(\tau_1, \dots, \tau_{n-1}) \quad (i=1, 2, \dots, n), \\ u &= u(\tau_1, \dots, \tau_{n-1}), \\ p_j &= p_j(\tau_1, \dots, \tau_{n-1}) \quad (j=1, 2, \dots, n). \end{aligned} \quad (5.40)$$

Перші дві групи рівнянь з (5.40) визначають розв'язок задачі Коші (5.29), (5.30) (заданий параметрично) у деякому околі на поверхні $S \in \Omega$, і цей розв'язок єдиний, якщо вибрані функції $\eta_i(\tau_1, \dots, \tau_{n-1})$.

Зауваження.

1. Система рівнянь (5.35), (5.36) розв'язується неоднозначно відносно $p_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$, тому і задача Коші (5.29), (5.30) може мати більше, ніж один розв'язок.

2. У додатках часто зустрічається задача Коші для нелінійного рівняння вигляду $\frac{\partial u}{\partial t} + \varphi\left(t, x, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0$ з початковою умовою $u(0, x) = u_0(x)$.

У цьому випадку рівняння (5.36), (5.37) мають вигляд:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, x) = \frac{\partial u_0}{\partial x}(x),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(0, x) + \varphi(0, x, u_0(x), \frac{\partial u}{\partial x}(0, x)) = 0.$$

Очевидно, що ці рівняння розв'язуються однозначно відносно $\frac{\partial u}{\partial t}(0, x)$

та $\frac{\partial u}{\partial x}(0, x)$, і тому розв'язок цієї задачі Коші єдиний. Якщо функція φ не

залежить від u , то розв'язок нелінійного рівняння $\frac{\partial u}{\partial t} + \varphi\left(t, x, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0$

зведеться до розв'язку деякого квазілінійного рівняння. Насправді, функція

$v = \frac{\partial u}{\partial x}$ відповідає квазілінійному рівнянню:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \varphi'_{u,x}(t, x, v) \frac{\partial v}{\partial x} + \varphi'_x(t, x, \frac{\partial u}{\partial x}) = 0.$$

Приклад 5.6. Розв'язати задачу Коші для рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - 1 = 0, \quad (5.41)$$

$$u(0, x) = \frac{1}{2} \alpha x^2, \quad (\alpha \geq 0). \quad (5.42)$$

Розв'язання.

Нехай $t = \tau$. Позначаючи $\frac{\partial u}{\partial t} = p$, $\frac{\partial u}{\partial x} = q$, отримаємо характеристичну систему, що відповідає рівнянню (5.41) (маємо п'ять невідомих, об'єднаних у п'ять рівнянь):

$$\frac{dt}{d\tau} = p, \quad \frac{dx}{d\tau} = q, \quad \frac{dp}{d\tau} = 0, \quad \frac{dq}{d\tau} = 0, \quad \frac{du}{d\tau} = p + q^2. \quad (5.43)$$

Поверхня S у такому випадку – це площина $t = 0$. Її рівняння можна записати у вигляді $t = 0$, $x = \tau_1$, де τ_1 – параметр.

Початкові умови для p і q мають такий вигляд (див. (5.36), (5.37)):

$$q|_{\tau=0} = \frac{\partial u}{\partial \tau_1}(0, \tau_1) = \alpha \tau_1,$$

$$p|_{\tau=0} = 1 - \frac{1}{2} \alpha^2 (\tau_1)^2.$$

Отже, для системи рівнянь (5.43) потрібно розв'язувати задачу Коші з початковими умовами:

$$t|_{\tau=0} = 0, \quad x|_{\tau=0} = \tau_1, \quad p|_{\tau=0} = 1 - \frac{1}{2} \alpha^2 (\tau_1)^2, \quad q|_{\tau=0} = \alpha \tau_1, \quad u|_{\tau=0} = \frac{\alpha (\tau_1)^2}{2}. \quad (5.44)$$

Інтегруючи цю систему, отримуємо:

$$t = \tau + C_1, \quad x = C_4 \tau + C_2, \quad p = C_3, \quad q = C_4, \quad u = (C_3 + C_4^2) \tau + C_5,$$

звідки, внаслідок (5.44):

$$C_1 = 0, \quad C_2 = \tau_1, \quad C_3 = 1 - \frac{1}{2} \alpha^2 (\tau_1)^2, \quad C_4 = \alpha \tau_1, \quad C_5 = \frac{\alpha (\tau_1)^2}{2}.$$

Розв'язок задачі Коші (5.41), (5.42) можна записати у вигляді:

$$\begin{aligned} t &= \tau, \\ x &= \tau_1 (\alpha \tau + 1), \\ u &= \left[1 + \frac{1}{2} \alpha^2 (\tau_1)^2 \right] \tau + \frac{\alpha}{2} (\tau_1)^2. \end{aligned} \quad (5.45)$$

Вилучаючи з рівнянь (5.45) параметри τ і τ_1 , отримаємо:

$$u = t + \frac{\alpha}{2} \frac{x^2}{\alpha t + 1}. \quad (5.46)$$

Унаслідок безпосередньої підстановки легко переконатися, що (5.46) – це розв'язок задачі Коші (5.41), (5.42).

Зазначимо, що цей розв'язок визначений у напівплощині $t > -\frac{1}{\alpha}$ ($\alpha > 0$).

При $t < -\frac{1}{\alpha}$ маємо також розв'язок рівняння (5.41), але він не віжповідає початковій умові (5.42), оскільки область визначення цього рівняння не містить пряму $t = 0$.

Контрольні питання

1. Який вигляд має однорідне диференціальне рівняння першого порядку з частинними похідними?

2. Який вигляд має характеристичне рівняння для рівняння першого порядку з частинними похідними?

3. Що таке загальний та частинний розв'язок рівняння першого порядку з частинними похідними?

4. Як знайти розв'язок задачі Коші для рівняння першого порядку з частинними похідними?

5. У чому полягає задача інтегрування рівняння з частинними похідними?

6. Чим відрізняється загальний розв'язок звичайного диференціального рівняння від загального розв'язку диференціального рівняння з частинними похідними?

7. У чому полягає задача Коші для диференціального рівняння з частинними похідними першого порядку?

8. Як формулюються умови для знаходження єдиного розв'язку задачі Коші для диференціального рівняння з частинними похідними першого порядку?

9. Знайти загальний розв'язок рівняння першого порядку з частинними похідними:

$$9.1 \quad x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z - x^2 - y^2;$$

$$9.2 \quad xz^4 \frac{\partial z}{\partial x} + yz^4 \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 y^2;$$

$$9.3 \quad z - x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = a \sqrt{x^2 + y^2 + z^2};$$

$$9.4 \quad (y^2 + z^2 - x^2) \frac{\partial z}{\partial x} - 2xy \frac{\partial z}{\partial y} + 2xz = 0;$$

$$9.5 \quad (xy^3 - 2x^4) \frac{\partial z}{\partial x} + (2y^4 - x^3 y) \frac{\partial z}{\partial y} = 9z(x^3 - y^3);$$

$$9.6 \quad (x^3 + 3xy^2) \frac{\partial z}{\partial x} + 2y^3 \frac{\partial z}{\partial y} - 2y^2 z = 0;$$

$$9.7 \quad (x^2 - y^2) \frac{\partial z}{\partial x} + xy \frac{\partial z}{\partial y} = xyz;$$

$$9.8 \quad (y + x) \frac{\partial z}{\partial x} + (y - x) \frac{\partial z}{\partial y} = z;$$

$$9.9 \quad (x + y) \left(1 + \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \right) + z \frac{\partial z}{\partial x} = 0;$$

$$9.10 \quad (z + y - x) \frac{\partial z}{\partial x} + (z + x - y) \frac{\partial z}{\partial y} = x + y + z.$$

10. Як знайти частинний розв'язок рівняння першого порядку з частинними похідними?

11. Знайти поверхню, яка відповідає рівнянню $xz \frac{\partial z}{\partial x} + yz \frac{\partial z}{\partial y} + xy = 0$ і проходить через криву $z = h$, $xy = C^2$.

12. Знайти поверхню, яка відповідає рівнянню $xy \frac{\partial z}{\partial x} - y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = x$ і проходить через криву $x = a$, $yz = \frac{a^2 + 2}{2a}$.

13. Знайти поверхню, яка відповідає рівнянню $(x^2 + y^2) \frac{\partial z}{\partial x} + 2xy \frac{\partial z}{\partial y} = xz$ і проходить через криву $x = a$, $y^2 + z^2 = a^2$.

14. Знайти поверхню, яка відповідає рівнянню $\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y - x}{z}$ і проходить через криву $x = 1$, $z = y^2$.

15. Знайти поверхню, яка відповідає рівнянню $2xz \frac{\partial z}{\partial x} + 2yz \frac{\partial z}{\partial y} = z^2 - x^2 - y^2$ і проходить через криву $x + y + z = 0$, $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

16. Знайти поверхню, яка відповідає рівнянню

$$x(x^2 + y^2) \frac{\partial z}{\partial x} + 2y^2 \left(x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} - z \right) = 0 \quad \text{і} \quad \text{проходить через криву}$$

$$z = C, \quad x^2 + y^2 = R^2.$$

17. Знайти рівняння поверхонь, які мають властивість: дотична площина у довільній точці M перетинає вісь Oz у точці N , такій, що відношення $\frac{ON}{OM}$ стає та дорівнює K . Знайти поверхню, яка проходить через гвинтову лінію на круговому прямому циліндрі з віссю Oz .

18. Знайти поверхні, для яких дотична площина у довільній точці M перетинає вісь Oz у точці N , рівновіддаленій від початку координат O і точки M .

19. Знайти поверхні, на яких слід нормалі у точці M на площині xOy рівновіддалений від початку координат O і точки M .

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

- Власні числа, 81
Гамма-функція, 100
Диференціальне рівняння, 5
— — Бернуллі, 19
— — Бесселя, 98
— — вищого порядку, що допускає зниження порядку, 38
— — звичайне, 5
— — з відокремленими змінними, 8
— — з відокремлюваними змінними, 9
Диференціальне рівняння з частинними похідними, 139
— — — — квазілінійне, 139
— — — — напівлінійне, 139
— — — — лінійне, 140
— — Клеро, 35
— — Лагранжа, 33
— — лінійне, 15
— — — однорідне зі сталими коефіцієнтами, 43, 53
— — — неоднорідне зі сталими коефіцієнтами, 46, 57
— — однорідне, 11
— — Ріккати, 24
— — у повних диференціалах, 25
— — у частинних похідних, 5
— — що зводяться до однорідних, 13
Задача Коші, 5, 7
— — для нормальної системи, 104
— — про власні значення, 81
— — Штурма-Ліувілля, 84
Інтеграл диференціального рівняння, — — — загальний, 5
— — — частинний, 6
Інтегральна крива, 7
Інтегральна поверхня, 139
Інтегрувальний множник, 30
Крайові умови, 72
— — двоточкові, 75
— — лінійні, 75
— — однорідні, 76
— — неоднорідні, 76
Крайова задача, 72
— — лінійна, 75
— — однорідна, 76
— — неоднорідна, 76, 78
- Метод Бернуллі, 15
— варіації довільної сталої, 17, 65, 136
— вилучення, 111
— Даламбера, 120
— Ейлера, 125
— зведення крайових задач до задач Коші, 85,
— інтегрованих комбінацій, 116
— Лагранжа, 17, 136
— характеристик, 142
- Особлива точка, 7
Особливий розв'язок, 7
Порядок диференціального рівняння, 5
— системи диференціальних рівнянь, 104
Послідовне інтегрування, 108
Початкові умови, 5, 7
Пучки Монжа, 142
Розв'язок диференціального рівняння
— — — загальний, 5
— — — частинний, 6
Розв'язок диференціального рівняння з частинними похідними, 139
— системи звичайних диференціальних рівнянь, 104
— — — — загальний, 106
— — — — частинний, 106
Симетрична форма системи диференціальних рівнянь, 107
Система нормальна, 104
— динамічна, 108
— автономна, 108
Система звичайних диференціальних рівнянь канонічна, 104
Теорема Коші, 7
— Пікара, 105
Умова Коші, 7
Фазова площина, 108
— траєкторія, 108
Функція Бесселя, 99, 101
— Гріна, 89
— однорідна, 11
Характеристичне рівняння, 44, 126
— число, 54, 126

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Самойленко А. М., Перестюк М. О., Парасюк І. О. Диференціальні рівняння: підручник. 2-ге видання, перероб. і доповн. Київ: Либідь, 2003. 600 с.
2. Гой Т. П., Махней О. В. Диференціальні рівняння: навчальний посібник. 2-ге вид., випр. та доп. Тернопіль: Навчальна книга–Богдан, 214. 360 с.
3. Маринець К. В. Диференціальні рівняння першого порядку та методи їх інтегрування. Частина І: навч. посіб. Ужгород: Вид-во УжНУ «Говерла», 2015. 83 с.
4. Маринець К. В. Диференціальні рівняння вищих порядків. Системи диференціальних рівнянь першого порядку. Частина ІІ: навч. посіб. Ужгород: УжНУ, 2017. 99 с.
5. Головатий Ю. Д., Кирилич В. М., Лавренюк С. П. Диференціальні рівняння: навч. посібник. Львів: ЛНУ імені Івана Франка, 2011. 407 с.
6. Тевяшев А. Д., Колосова С. В. Диференціальні рівняння у прикладах і задачах: навчальний посібник. Харків: ХНУРЕ, 2004. 280 с.
7. Тевяшев А. Д. Вища математика у прикладах і задачах. Частина ІІІ. Диференціальні рівняння. Ряди. Функції комплексної змінної. Київ: Кондор, 2006. 243 с.
8. Вища математика: Збірник задач Ч. 2 / А. Д. Тевяшев та ін. Харків, 2010. 266 с.
9. Зайцев Є. П. Вища математика (Інтегральне числення функцій однієї та багатьох змінних, звичайні диференціальні рівняння, ряди): навчальний посібник. Київ: Алерта, 2018. 608 с.
10. Герасимчук В. С., Васильченко Г. С., Кравцов В. І. Вища математика. Повний курс у прикладах та задачах. Невизначений, визначений та невластні інтеграли. Звичайні диференціальні рівняння. Прикладні задачі: навчальний посібник. Київ: Книги України ЛТД, 2010. 470 с.

11. Пріщенко О. П., Черногор Т. Т. Диференціальні рівняння та їх застосування. Харків: НТУ «ХП», 2017. 88 с.
12. Перестюк М. О., Парасюк І. О. Диференціальні рівняння: підручник. Київ: Либідь, 2003. 600 с.
13. Затула Н. І., Левковська Т. А. Вища математика. Модуль 5. Диференціальні рівняння: навч. посібник. Київ: Книжкове вид-во НАУ, 2007. 144 с.
14. Овчинников П. П., Михайленко В. М. Вища математика: підручник. У 2 ч. Ч. 2: Диференціальні рівняння. Операційне числення. Ряди і їх застосування. Стійкість за Ляпуновим. Рівняння математичної фізики. Оптимізіція і керування. Теорія ймовірностей. Числові методи. Київ: Техніка, 2004. 792 с.
15. Ластівка І. О., Безверхий О. І., Кудзіновська І. П. Вища математика: навч. посібник. Київ: НАУ, 2018. 452 с.
16. Лавренюк С. П. Курс диференціальних рівнянь. Львів: Вид. техн. літ-ри, 1997. 216 с.
17. Кулініч Г. Л., Таран С. Ю. Вища математика. Книга 2. Київ: Либідь, 2003. 368 с.
18. Ляшенко В. П. Вища математика: навчальний посібник / В. П. Ляшенко, Т. А. Набок. Кременчук, 2008. 223 с.

ЗМІСТ

ВСТУП.....	3
РОЗДІЛ 1 ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ.....	5
1.1 Диференціальні рівняння, основні визначення.....	5
1.2 Диференціальні рівняння першого порядку.....	6
1.3 Диференціальні рівняння з відокремленими змінними.....	8
1.4 Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними.....	9
1.5 Однорідні рівняння першого порядку.....	11
1.6 Рівняння, що зводяться до однорідних.....	13
1.7 Лінійне рівняння першого порядку. Підстановка Бернуллі.....	15
1.8 Метод варіації довільної сталої (метод Лагранжа).....	17
1.9 Рівняння Бернуллі.....	19
1.10 Рівняння Ріккаті.....	24
1.11 Рівняння у повних диференціалах.....	25
1.12 Інтегрувальний множник.....	29
1.13 Рівняння Лагранжа. Рівняння Клеро.....	33
РОЗДІЛ 2 ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ.....	38
2.1 Диференціальні рівняння вищих порядків, що допускають зниження порядку.....	38
2.2 Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами.....	43
2.3 Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами.....	46
2.4 Лінійні однорідні диференціальні рівняння n -го порядку зі сталими коефіцієнтами.....	53
2.5 Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння n -го порядку зі сталими коефіцієнтами.....	57
2.6 Метод варіації довільних сталих.....	65

РОЗДІЛ 3 КРАЙОВІ ЗАДАЧІ. ІНТЕГРУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЗА ДОПОМОГОЮ РЯДІВ.....	72
3.1 Постановка крайових задач.....	72
3.2 Лінійна крайова задача.....	75
3.3 Однорідна крайова задача.....	76
3.4 Неоднорідна крайова задача.....	78
3.5 Задача про власні значення.....	80
3.6 Задача Штурма-Ліувілля.....	84
3.7 Метод зведення крайових задач до задач Коші.....	85
3.8 Функція Гріна.....	89
3.9 Інтегрування диференціальних рівнянь за допомогою степеневих та узагальнених степеневих рядів.....	93
3.10 Рівняння Бесселя.....	98
РОЗДІЛ 4 СИСТЕМИ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ.....	104
4.1 Основні поняття систем диференціальних рівнянь.....	104
4.2 Симетрична форма системи диференціальних рівнянь.....	107
4.3 Послідовне інтегрування.....	108
4.4 Метод виключення.....	111
4.5 Знаходження комбінацій, що інтегруються.....	116
4.6 Метод Даламбера.....	120
4.7 Метод Ейлера.....	125
4.8 Метод Лагранжа.....	136
РОЗДІЛ 5 ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ.....	140
5.1 Основні поняття.....	140
5.2 Метод характеристик. Характеристики та їх геометричний зміст...	141
5.3 Загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння з частинними похідними.....	143
5.4 Задача Коші.....	148
5.5 Задача Коші для нелінійних рівнянь.....	152

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК.....	162
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ.....	163

