

Міністерство освіти і науки
Національний технічний університет України
"Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського"

О.Ю. ШВЕЦЬ
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ ТА ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Навчальний посібник

*Рекомендовано Методичною радою НТУУ КПІ ім. Ігоря Сікорського як
навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра за освітньою
програмою "Комп'ютерне моделювання фізичних процесів
спеціальності 104 "Фізика та астрономія"*

Київ
НТУУ "КПІ"
2022

Рецензент *О.Г. Мазко*, док. фіз.–мат. наук, проф., пр.н.с., І-т математ.
НАН України

Відповідальний редактор *В.С. Герасимчук*, док. фіз.–мат. наук, проф.

*Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
(протокол № 1 від 27.01.2022 р.) за поданням Вченої ради ФМФ (протокол № 01 від
18.01.2022 р.)*

Електронне мережне навчальне видання

Швець Олександр Юрійович, д-р фіз-мат. наук, проф.

Диференціальні та інтегральні рівняння [Електронний ресурс] : навч. посіб. для студ. спеціальності 111 "Комп'ютерне моделювання фізичних процесів" / О.Ю. Швець ; КПІ ім. Ігоря Сікорського. - Електронні текстові дані (1 файл: 1,67 Мбайт). - Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. - 189 с.

У навчальному посібнику викладені основи теорії диференціальних та інтегральних рівнянь. Розглянуті основні типи диференціальних рівнянь першого та вищих порядків. Вивчені нормальні системи диференціальних рівнянь. Викладена теорія лінійних диференціальних рівнянь та лінійних систем диференціальних рівнянь. Особлива увага приділяється застосуванню диференціальних рівнянь у фізиці. Зокрема висвітлені деякі питання теорії коливань та питання стійкості за Ляпуновим стаціонарних станів. Дана класифікація інтегральних рівнянь та сформульовані основні теореми для рівнянь Фредгольма.

Призначена для студентів університетів, що навчаються за спеціальністю "Фізика та астрономія".

О.Ю. Швець, 2022

©КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022

Зміст

1.	Розділ 1	8
1. 1.	Означення диференціального рівняння	8
1. 2.	Приклади застосування диференціальних рівнянь	9
1. 3.	Загальні задачі теорії диференціальних рівнянь	11
1. 4.	Диференціальні рівняння першого порядку	12
1. 5.	Задача Коші	16
1. 6.	Теорема Коші-Пікара	17
1. 7.	Загальний, частинний та особливий розв'язок	20
2.	Розділ 2	23
2. 1.	Рівняння зі змінними, які розділяються	23
2. 2.	Однорідні рівняння	25
2. 3.	Рівняння яке зводиться до однорідного	29
3.	Розділ 3	31
3. 1.	Поняття про лінійне рівняння	31
3. 2.	Побудова загального розв'язку лінійного однорідного рівняння	33
3. 3.	Властивості розв'язків лінійного однорідного рівняння	34
3. 4.	Структура загального розв'язку лінійного неоднорідного рівняння	35
3. 5.	Метод варіації довільної сталої (метод Лагранжа)	37
3. 6.	Метод Ейлера	39
3. 7.	Рівняння Бернуллі	40
4.	Розділ 4	42

4. 1.	Поняття про рівняння у повних диференціалах	42
4. 2.	Ознака рівняння у повних диференціалах. Побудова загального інтегралу	43
4. 3.	Поняття про інтегруючий множник	46
4. 4.	Випадок інтегруючого множника, який залежить тільки від x	47
4. 5.	Випадок інтегруючого множника, який залежить тільки від y	49
4. 6.	Інтегруючий множник і особливі розв'язки	49
5.	Розділ 5	
	Рівняння вищих порядків — 1	51
5. 1.	Основні поняття та означення	51
5. 2.	Умови існування та єдиності розв'язку задачі Коші. . . .	52
5. 3.	Поняття про граничну (крайову) задачу	53
5. 4.	Загальний розв'язок	54
5. 5.	Інші типи розв'язків рівняння n -го порядку	57
5. 6.	Проміжні інтеграли. Перші інтеграли.	58
6.	Розділ 6	
	Рівняння вищих порядків — 2	60
6. 1.	Рівняння, яке утримує тільки незалежну змінну й похідну порядку n	60
6. 2.	Рівняння, яке не утримує шуканої функції та послідовності перших похідних	61
6. 3.	Рівняння, яке не утримує незалежної змінної	63
6. 4.	Рівняння однорідне відносно шуканої функції та її похідних	66
7.	Розділ 7	
	Загальна теорія лінійних диференціальних рівнянь n -го порядку — 1	69
7. 1.	Загальні властивості лінійного рівняння	69

7. 2.	Інваріантність лінійного рівняння	70
7. 3.	Властивості розв'язків лінійного однорідного рівняння n -го порядку	71
7. 4.	Лінійна незалежність функцій	73
8.	Розділ 8	
	Загальна теорія лінійних диференціальних рівнянь n -го поряд- ку — 2	76
8. 1.	Зауваження про необхідні та достатні умови	76
8. 2.	Необхідна умова лінійної залежності n функцій	77
8. 3.	Необхідна та достатня умова лінійної незалежності n розв'язків лінійного однорідного рівняння n -го порядку .	78
8. 4.	Фундаментальна система розв'язків	80
9.	Розділ 9	
	Загальна теорія лінійних диференціальних рівнянь n -го поряд- ку — 3	
	Неоднорідне рівняння	84
9. 1.	Структура загального розв'язку неоднорідного рівняння.	84
9. 2.	Метод варіації довільних сталих. Метод Лагранжа	86
10.	Розділ 10	
	Лінійні диференціальні рівняння n -го порядку з постійними ко- ефіцієнтами — 1	89
10. 1.	Попередні зауваження.	89
10. 2.	Побудова фундаментальної системи розв'язків і загаль- ного розв'язку лінійного однорідного рівняння у випадку різних коренів характеристичного рівняння.	89
10. 3.	Випадок наявності кратних коренів характеристичного рівняння	95
10. 4.	Однорідне лінійне рівняння другого порядку з постій- ними коефіцієнтами.	98

11.	Розділ 11	
	Лінійні диференціальні рівняння n -го порядку з постійними коефіцієнтами — 2	101
11. 1.	Попередні зауваження.	101
11. 2.	Знаходження частинного розв’язку неоднорідного рівняння методом невизначених коефіцієнтів	101
12.	Розділ 12	
	Системи диференціальних рівнянь	109
12. 1.	Нормальні системи диференціальних рівнянь	109
12. 2.	Геометричне та кінематичне тлумачення нормальної системи	110
12. 3.	Задача Коші для нормальної системи диференціальних рівнянь	113
12. 4.	Теорема Коші-Пікара для нормальної системи диференціальних рівнянь	114
12. 5.	Загальний, частинний та особливий розв’язок	115
12. 6.	Зведення рівняння n -го порядку до системи n рівнянь першого порядку	117
13.	Розділ 13	
	Загальна теорія лінійних систем диференціальних рівнянь . . .	119
13. 1.	Однорідні лінійні системи	119
13. 2.	Властивості розв’язків однорідної системи	121
13. 3.	Поняття про лінійну незалежність системи функцій . . .	125
13. 4.	Необхідна та достатня умова лінійної незалежності n розв’язків однорідної лінійної системи n рівнянь	126
13. 5.	Побудова загального розв’язку лінійної однорідної системи рівнянь	127
14.	Розділ 14	
	Лінійні системи диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами	129

14. 1.	Попередні зауваження	129
14. 2.	Побудова фундаментальної системи розв'язків у випадку простих коренів характеристичного рівняння	130
14. 3.	Випадок наявності кратних коренів характеристичного рівняння	143
15.	Розділ 15	
	Стійкість за Ляпуновим	146
15. 1.	Означення стійкості руху (розв'язку) за Ляпуновим . . .	146
15. 2.	Рівняння збуреного руху	149
15. 3.	Фазовий портрет лінійної системи диференціальних рівнянь другого порядку	151
15. 4.	Теореми про стійкість за першим наближенням	166
16.	Розділ 16	
	Елементи теорії коливань	167
16. 1.	Лінійний гармонічний осцилятор	167
16. 2.	Фізичний маятник.	171
16. 3.	Вимушені коливання	175
17.	Розділ 17	
	Інтегральні рівняння	178
17. 1.	Класифікація лінійних інтегральних рівнянь	178
17. 2.	Про лінійні рівняння	179
17. 3.	Рівняння Фредгольма з виродженим ядром	183
17. 4.	Теорема про розв'язуваність. Альтернатива Фредгольма	184
	Бібліографія	189

1. Розділ 1

1. 1. Означення диференціального рівняння

Звичайним диференціальним рівнянням n -го порядку називається співвідношення вигляду

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (1)$$

де F — відома функція своїх аргументів, задана в деякій області; x — незалежна змінна; y — функція змінної x , яку потрібно визначити; $y', y'', \dots, y^{(n)}$ її похідні. При цьому припускається, що $y^{(n)}$ дійсно входить у співвідношення (1). Будь який з інших аргументів функції F може в це співвідношення явно не входити. Інколи звичайне диференціальне рівняння n -го порядку записують у вигляді співвідношення між аргументом x , функцією y та їх диференціалами, але тоді це співвідношення обов'язково повинно бути таким, щоб воно зводилось до вигляду (1).

Будь яка функція, яка визначена разом з відповідними похідними у деякій області, називається розв'язком диференціального рівняння в цій області, якщо вона обертає його в тотожність, яка виконується для всіх точок цієї області.

Зокрема, $y = y(x)$ буде розв'язком рівняння (1) в інтервалі (a, b) , якщо

$$F[x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)] \equiv 0, \quad (a < x < b). \quad (2)$$

Наприклад, диференціальним рівнянням першого порядку буде

$$y' - 2x = 0 \text{ або } y' = 2x \quad (3)$$

З інтегрального числення ми знаємо, що всі функції, які задовольняють рівнянню (3) або, як ми тепер скажемо, всі розв'язки рівняння (3) даються формулою

$$y = x^2 + C \quad (-\infty < x < +\infty), \quad (4)$$

де C — довільна стала. З цієї формули, між іншим, витікає, що рівняння (3)

має не одне, а нескінчену кількість розв'язків. Тобто при кожному конкретному значенні C ми отримаємо свій розв'язок.

Процес знаходження розв'язків називається інтегруванням диференціального рівняння.

До появи диференціальних рівнянь призводять багато задач з механіки, фізики, астрономії й інших природничих наук, а також різноманітні проблеми техніки. Останнім часом почалось широке застосування диференціальних рівнянь для опису проблем хімії, біології, медицини, економіки та соціології.

1. 2. Приклади застосування диференціальних рівнянь

Приклад 1.1. Матеріальна точка рухається по деякій прямій, причому так, що швидкість руху являє собою відому функцію часу $f(t)$. Потрібно знайти закон руху цієї точки, тобто формулу, яка визначає положення точки в залежності від часу.

Приймемо згадану пряму за вісь Ox . Тоді положення точки визначається однією координатою x і задача полягає у тому, щоб виразити x як функцію від t . Приймаючи до уваги механічний зміст першої похідної, ми отримаємо диференціальне рівняння першого порядку:

$$\frac{dx}{dt} = f(t). \quad (5)$$

Припустимо, що $f(t)$ неперервна в інтервалі (a, b) . Тоді, як відомо з інтегрального числення, всі розв'язки рівняння (5) можуть бути визначені за формулою

$$x = \int_{t_0}^t f(t)dt + C, \quad a < t < b, \quad (6)$$

де верхня границя інтеграла — змінна, нижня границя t_0 є деяким фіксованим значенням з інтервалу (a, b) , а C — довільна стала.

Так як у формулу (6) входить довільна стала, то ми не отримаємо певного закону руху точки. Це відповідає відомому факту, що завдання однієї

тільки швидкості не визначає повністю закон руху. Формула (6) утримує ціле сімейство рухів, які володіють однією і тією ж властивістю, яка виражається диференціальним рівнянням (5). Ця властивість полягає у тому, що всі рухи, які визначаються рівнянням (5), мають одну і ту ж швидкість у будь-який (але один і той же) момент часу t .

Виділимо з сімейства рухів (6) той рух, при якому точка, що рухається, займає задане положення x_0 у заданий момент часу t_0 . Тобто знайдемо розв'язок (рух) $x = x(t)$, який задовольняє умові:

$$x = x_0 \text{ при } t = t_0. \quad (7)$$

Число x_0 називається початковим значенням шуканої функції (початковим положенням точки), а t_0 — початковим значенням аргументу (початковим моментом часу). Числа t_0 і x_0 разом взяті називаються початковими даними, а умова (7) — початковою умовою розв'язку (руху). Підставимо в (6) замість t і x відповідно t_0 і x_0 . Отримаємо $x_0 = C$, так що значення довільної сталої C визначається з початкової умови і являє собою у нашому випадку початкове значення шуканої функції. Якщо замінити тепер у (6) сталу C на x_0 , отримаємо шуканий рух:

$$x = \int_{t_0}^t f(t)dt + x_0, \quad a < t < b, \quad (8)$$

Дійсно, рух який визначається за формулою (8), такий що $x = x_0$ при $t = t_0$. Формула (8) виражає цілком певний закон руху точки по осі Ox .

Приклад 1.2. Матеріальна точка рухається по вертикальній прямій від дією сили тяжіння, причому відомі її положення й швидкість у деякий момент часу t_0 . Знайти закон руху.

Прийmemo нашу пряму за вісь Oy . Початок координат помістимо у поверхні Землі, а вісь Oy направимо до гори. Позначимо положення точки та швидкість у момент часу t_0 відповідно через y_0 і v_0 .

Приймаючи до уваги механічний зміст другої похідної, для визначення

положення точки ми отримаємо диференціальне рівняння другого порядку:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g, \quad (9)$$

де g — прискорення сили тяжіння. Наша задача зводиться до відшукування того розв'язку $y = y(t)$ рівняння (9), який задовольняє умовам:

$$y = y_0, \quad \frac{dy}{dt} = v_0 \quad \text{при } t = t_0. \quad (10)$$

Числа t_0 , y_0 і v_0 називаються початковими даними, а умови (10) початковими умовами розв'язку (руху).

Послідовно інтегруючи рівняння (9), отримаємо:

$$\frac{dy}{dt} = -gt + C_1; \quad (11)$$

$$y = -\frac{gt^2}{2} + C_1t + C_2. \quad (12)$$

Формула (12), де C_1 і C_2 — довільні сталі утримує всі розв'язки рівняння (9). Виділимо з цієї формули розв'язок, який задовольняє початковим умовам (10), де для спрощення подальших викладок вважатимемо $t_0 = 0$. Для цього підставимо в (11) і (12) замість величин t , y і $\frac{dy}{dt}$ їх початкові значення 0 , y_0 і v_0 . Отримаємо $C_1 = v_0$, $C_2 = y_0$, так що значення довільних сталих C_1 і C_2 визначаються з початкових умов (10) і являють собою початкові значення шуканої функції та її похідної. Замінюючи тепер у (12) C_1 і C_2 знайденими значеннями, отримаємо:

$$y = -\frac{gt^2}{2} + v_0t + y_0. \quad (13)$$

Ця формула й визначає шуканий закон руху.

1. 3. Загальні задачі теорії диференціальних рівнянь

Основною задачею теорії інтегрування диференціальних рівнянь є знаходження всіх розв'язків даного диференціального рівняння та вивчення властивостей цих розв'язків.

Виключно великий інтерес як для самої теорії диференціальних рівнянь, так і для її численних застосувань представляє задача знаходження чи хоча б доведення існування розв'язку, який задовольняє заданим умовам.

Зауважимо, що саму задачу інтегрування диференціальних рівнянь можна розуміти по-різному. У самій вузькій постановці задачі ставиться на меті вираження шуканих функцій через елементарні. Ця задача, взагалі кажучи, нерозв'язна навіть для самого простого диференціального рівняння $y' = f(x)$, так як не завжди первісна для елементарної функції являє собою теж елементарну функцію. У якості приклада можна привести хоча б рівняння

$$y' = \frac{\sin x}{x}. \quad (14)$$

Дещо ширшою є постановка задачі, при якій рівняння вважається розв'язаним, якщо воно зведено до квадратур (тобто до операцій знаходження невизначених інтегралів). У цьому сенсі рівняння (14) очевидно вирішується. Всі розв'язки цього рівняння утримуються у формулі

$$y = \int \frac{\sin x}{x} dx + C. \quad (15)$$

Тут перший член справа деяка фіксована первісна для функції $\frac{\sin x}{x}$, а C — довільна стала.

Взагалі під символом $\int f(x) dx$ ми будемо розуміти деяку фіксовану первісну, а сталу інтегрування будемо записувати окремо.

У більш загальній постановці шукається правило обчислення значення шуканої функції по заданому значенню аргументу.

1. 4. Диференціальні рівняння першого порядку

Звичайне диференціальне рівняння першого порядку має вигляд

$$F(x, y, y') = 0. \quad (16)$$

Відповідно рівняння, яке можна розв'язати відносно першої похідної має вигляд:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \quad (17)$$

Поряд з цим рівнянням ми завжди будемо розглядати перевернуте рівняння

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x, y)}, \quad (18)$$

використовуючи його в околі тих точок, в яких $f(x, y)$ обертається в нескінченність.

У багатьох випадках виявляється доцільним замість рівнянь (17) і (18) розглядати одне еквівалентне їм диференціальне рівняння

$$dy - f(x, y)dx = 0. \quad (19)$$

Обидві змінні x і y входять у це рівняння рівноправно, і будь яку з них ми можемо прийняти за незалежну змінну.

Множачи обидві частини рівняння (19) на деяку функцію $N(x, y)$, отримаємо більш симетричне рівняння:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0, \quad (20)$$

де $M(x, y) = -f(x, y)N(x, y)$.

Припустимо, що права частина рівняння (17), $f(x, y)$, визначена на деякій підмножині A дійсної площини (x, y) . Функцію $y = y(x)$, визначену в інтервалі (a, b) , ми будемо називати розв'язком рівняння (17) у цьому інтервалі, якщо:

1. Існує похідна $y'(x)$ для всіх значень x з інтервалу (a, b) . (Звідси, до речі, випливає, що розв'язок $y = y(x)$ являє собою функцію, неперервну в усій області визначення).
2. Функція $y = y(x)$ обертає рівняння (17) у тотожність:

$$y'(x) \equiv f[x, y(x)], \quad (21)$$

справедливу для всіх значень x з інтервалу (a, b) .

Зауваження. Розв'язок $y = y(x)$ може бути визначений і в інтервалах вигляду: $[a, b)$, $(a, b]$, $[a, b]$, $(-\infty, b)$, $(-\infty, b]$, $(a, +\infty)$, $[a, +\infty)$, $(-\infty, +\infty)$. Коли розв'язок визначений на інтервалі, замкненому з однієї чи з обох сторін,

то під похідною на кінці інтервалу ми розуміємо відповідну односторонню похідну.

Приклад 1.3. Функція $y = e^{2x} + e^x$ є розв'язком рівняння

$$y' = y + e^{2x} \quad (22)$$

в інтервалі $(-\infty, +\infty)$, так як вона визначена та диференційована у цьому інтервалі, і, підставляючи її в рівняння (22) отримаємо тотожність:

$$2e^{2x} + e^x \equiv e^{2x} + e^x + e^{2x},$$

яка виконується при всіх значеннях x .

Далеко не завжди вдається отримати розв'язок диференціального рівняння в явному вигляді. Крім того, явний запис розв'язку не завжди зручний для його вивчення та використання. Тому при інтегруванні рівняння в багатьох випадках задовольняються отриманням розв'язку в неявному вигляді. Ми будемо казати, що рівняння

$$\Phi(x, y) = 0 \quad (23)$$

визначає в неявній формі розв'язок рівняння (17), якщо воно визначає як неявну функцію від x , $y = y(x)$ і якщо ця функція є розв'язком рівняння (17).

У цьому випадку, покладаючи в (23) $y = y(x)$, диференціюючи отриману тотожність по x і замінюючи $\frac{dy}{dx}$ на $f(x, y)$, прийдемо до рівності

$$\Phi'_x + \Phi'_y f(x, y) = 0, \quad (24)$$

яка повинна виконуватися тотожно на підставі співвідношення (23).

Інколи розв'язок рівняння (17) можна отримати в параметричній формі

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t). \quad (25)$$

Ми будемо казати, що рівняння (25) визначають розв'язок рівняння (17) у параметричній формі в інтервалі (t_0, t_1) , якщо у цьому інтервалі має місце

ТОТОЖНІСТЬ

$$\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \equiv f[\varphi(t), \psi(t)]. \quad (26)$$

Далі розглянемо x і y як прямокутні координати на площині. Тоді розв'язку $y = \varphi(x)$, або $\Phi(x, y) = 0$, або $x = \varphi(t), y = \psi(t)$ рівняння (17),

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

буде відповідати деяка крива, яка називається інтегральною кривою цього рівняння. Інколи сама інтегральна крива називається розв'язком. З'ясуємо геометричний зміст інтегральних кривих.

Будемо припускати, що інтегральні криві, про які йде мова, існують. Умови існування інтегральних кривих ми розглянемо у подальшому.

Припустимо, що права частина рівняння (17) визначена й скінчена в кожній точці деякої області G зміни x і y (рис. 1). Проведемо через кожну точку $M(x, y)$ цієї області одиничний відрізок середина якого лежить у точці $M(x, y)$. Нехай цей відрізок утворює з віссю Ox кут α , тангенс якого дорівнює значенню правої частини рівняння (17) у цій точці, $\tan \alpha = f(x, y)$, причому оба напрямки вказаного відрізка для нас байдужі. Таким чином, можна вважати, що рівняння (17) визначає деяке поле напрямів.

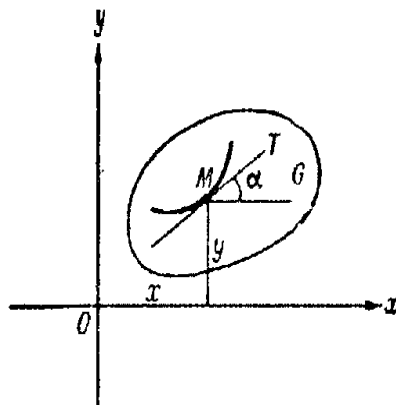


Рис. 1:

Тоді рівняння (17) геометрично стверджує той факт, що напрям дотичної в кожній точці інтегральної кривої збігається з напрямом поля в цій точці.



Augustin Louis Cauchy (Огюстен Луї Коші) (1789-1857)

Ця властивість й виділяє інтегральні криві серед усіх інших кривих.

1. 5. Задача Коші

Однією з найважливіших задач у теорії диференціальних рівнянь є задача, яка носить ім'я знаменитого французького математика Коші. Сформулюємо цю задачу.

Для рівняння (17),

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

задача Коші, або *початкова задача*, ставиться наступним чином: серед усіх розв'язків рівняння (17) знайти такий розв'язок

$$y = y(x), \tag{27}$$

для якого функція $y(x)$ приймає задане числове значення x_0 при заданому числовому значенні незалежної змінної x , тобто

$$y(x_0) = y_0, \tag{28}$$

де x_0 і y_0 — задані числа, так що розв'язок (27) задовольняє умові;

$$y = y_0 \text{ при } x = x_0. \tag{29}$$

При цьому число y_0 називається *початковим значенням шуканої функції*, а число x_0 — *початковим значенням незалежної змінної*. У цілому ж числа x_0 і y_0 називаються *початковими даними* розв'язку (27), а умова (29) — *початковою умовою* цього розв'язку.

Задачу Коші геометрично можна сформулювати так: серед інтегральних кривих рівняння (17) знайти ту, яка проходить через задану точку $M_0(x_0, y_0)$.

Будемо казати, що *задача Коші з початковими умовами (29) має єдиний розв'язок*, якщо існує таке число $h > 0$, що в інтервалі $|x - x_0| \leq h$ визначений розв'язок $y = y(x)$ такий, що $y(x_0) = y_0$ і не існує розв'язку, визначеного в цьому ж інтервалі, який не збігається з розв'язком $y = y(x)$ хоча б у одній точці інтервалу $|x - x_0| \leq h$, відмінній від точки $x = x_0$. У протилежному випадку, тобто коли задача Коші з початковою умовою (29) має не один розв'язок або ж взагалі не має розв'язків, ми будемо говорити, що в точці (x_0, y_0) *порушується єдиність розв'язку задачі Коші*.

Питання про єдиність розв'язку задачі Коші виключно важливе як для самої теорії диференціальних рівнянь, так і для її застосувань. Якщо розв'язок задачі Коші єдиний, то в питаннях природознавства це призводить до того, що ми отримуємо цілком визначений, єдиний закон явища, визначаємий тільки диференціальним рівнянням і початковою умовою.

1. 6. Теорема Коші-Пікара

Поставимо питання; яким умовам достатньо підпорядкувати праву частину рівняння (17) в околі початкових даних x_0, y_0 , щоб через точку (x_0, y_0) проходила одна й тільки одна інтегральна крива цього рівняння. Зараз ми приведемо без доведення основну теорему існування та єдиності для рівняння (17). У подальшому ми сформулюємо цю теорему для більш загального випадку диференціального рівняння n -го порядку.

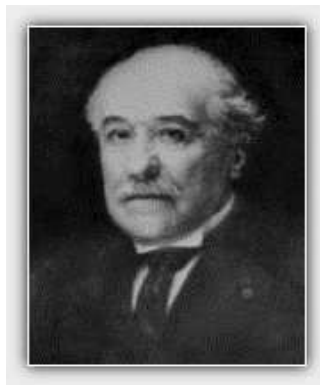
Теорема Коші-Пікара.

Нехай задане рівняння (17),

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

та поставлена початкова умова (29),

$$y = y_0 \text{ при } x = x_0.$$



Charles Emile Picard (Шарль Еміль Пікар (1856-1941))

Припустимо, що функція $f(x, y)$ визначена у деякій замкненій обмеженій області

$$R : |x - x_0| \leq a \quad |y - y_0| \leq b$$

з точкою (x_0, y_0) всередині, де a і b — задані додатні числа (рис. 2).

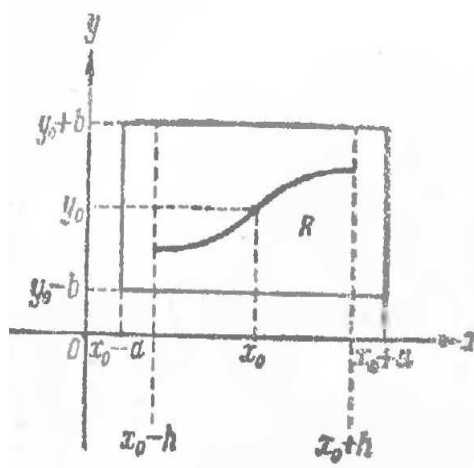


Рис. 2:

Припустимо, що

1. Функція $f(x, y)$ неперервна й обмежена у цій області, тобто

$$|f(x, y)| \leq M, \quad (30)$$

де M — стале додатне число, а (x, y) — будь-яка точка області R ;

2. Функція $f(x, y)$ має обмежену частинну похідну за аргументом y , тобто

$$\left| \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right| \leq K, \quad (31)$$

K — постійне додатне число, а x, y — будь-яка точка області R .

При цих припущеннях рівняння (17) має єдиний розв'язок (27),

$$y = y(x),$$

який задовольняє початковій умові (29). Цей розв'язок визначений і неперервно диференційований у деякому околі початкового значення x_0 , а саме він напевне визначений у інтервалі

$$|x - x_0| \leq h, \quad (32)$$

де h найменше з чисел a і $\frac{b}{M}$,

$$h = \min \left(a, \frac{b}{M} \right). \quad (33)$$

Приклад 1.4. Нехай задане рівняння

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2 \quad (34)$$

і поставлена початкова умова:

$$y = 0 \text{ при } x = 0. \quad (35)$$

Так як права частина рівняння (34) є поліномом від змінних x і y , то очевидно, що умови 1. і 2. теореми Коші-Пікара завжди виконуються. Отже розв'язок рівняння (34) з будь-якими початковими умовами завжди існує і є єдиним. У тому числі існує й єдиний розв'язок який задовольняє початковим даним (35).

Оцінимо існування цього розв'язку. Розглянемо прямокутник R з центром у точці $(0, 0)$

$$R : |x| \leq a, \quad |y| \leq b, \quad (36)$$

причому в якості a і b можна взяти будь-які додатні числа. Будемо мати:

$$M = a^2 + b^2 \quad h = \min \left(a, \frac{b}{a^2 + b^2} \right).$$

Звідси видно, що h залежить від вибору чисел a і b . Зокрема при $a = b = 1$, отримаємо:

$$h = \min \left(1, \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}.$$

Тому рівняння (34) має єдиний розв'язок, напевне визначений в інтервалі $|x| \leq \frac{1}{2}$, який задовольняє умові (35). Причому цей розв'язок неперервно диференційований.

З геометричної точки зору отриманий результат означає, що рівняння (34) має тільки одну інтегральну криву, яка проходить через початок координат, причому ця інтегральна крива є гладкою.

Цей результат набуває особливого значення тому, що як було встановлено рівняння (34) не інтегрується ні в елементарних функціях, ні у квадратах від елементарних функцій. Встановлений факт існування та єдиності розв'язку дає нам підстави спробувати шукати цей розв'язок за допомогою різноманітних наближених методів.

1. 7. Загальний, частинний та особливий розв'язок

Розглянемо диференціальне рівняння (17),

$$y = y_0 \text{ при } x = x_0,$$

у деякій області D на площині (x, y) . Припустимо, що в кожній точці (x, y) області D має місце існування та єдиність розв'язку задачі Коші для рівняння (17). Отже через кожну точку області D проходить одна й тільки одна інтегральна крива рівняння (17). При цьому область D є або всією множиною точок існування та єдиності розв'язку задачі Коші для рівняння (17), або її частина.

Функцію

$$y = \varphi(x, C) \tag{37}$$

визначену в деякій області зміни змінних x і C , яка має неперервну частинну похідну по незалежній змінній x , будемо називати загальним розв'язком

рівняння (17) в області D , якщо рівність (37) вирішується відносно довільної сталої C в області D , тобто

$$C = \psi(x, y) \quad (38)$$

та, якщо функція (37) є розв'язком рівняння (17) в області D при всіх значеннях довільної сталої, знайдених за формулою (38). Простіше кажучи функція (37) визначає сімейство розв'язків рівняння (17), залежне від однієї довільної сталої.

Формула загального розв'язку надає можливість, за рахунок вибору відповідного значення довільної сталої C вирішити будь-яку задачу Коші для рівняння (17) в області D . Дійсно нехай

$$y = y_0 \text{ при } x = x_0.$$

Підставимо у формулу (37) замість x і y початкові дані x_0 і y_0 :

$$y_0 = \varphi(x_0, C). \quad (39)$$

Звідси знайдемо

$$C = \psi(x_0, y_0) \equiv C_0 \quad (40)$$

Підставляючи це значення C у формулу (37), отримаємо:

$$y = \varphi(x, C_0).$$

Це і є шуканий розв'язок.

У багатьох випадках при інтегруванні рівняння (17) ми отримуємо загальний розв'язок у неявному вигляді

$$\Phi(x, y, C) = 0$$

або

$$\psi(x, y) = C.$$

Така форма загального розв'язку рівняння називається загальним інтегралом цього рівняння.

Інколи при інтегруванні рівняння (17) ми отримуємо сімейство інтегральних кривих, яке залежить від одної довільної сталої C , у параметричному вигляді:

$$\begin{aligned}x &= \varphi(t, C), \\y &= \psi(t, C).\end{aligned}\tag{41}$$

Таке сімейство інтегральних кривих ми будемо називати загальним розв'язком рівняння (17) у параметричній формі.

Розв'язок, який отримується з формули загального розв'язку (37) при конкретному значенні довільної сталої C , включаючи $\pm\infty$ називається частинним розв'язком.

Розв'язок, у кожній точці якого порушується єдиність розв'язку задачі Коші називається особливим розв'язком. Геометрично особливому розв'язку відповідає інтегральна крива, яка не утримується в сімействі інтегральних кривих, які утворюють загальний розв'язок (загальний інтеграл). Особливий розв'язок, очевидно, не утримується в формулі загального розв'язку ні при якому числовому значенні довільної сталої C , включаючи $\pm\infty$.

Припустимо, що права частина рівняння (17) визначена і неперервна в деякій області D та має у кожній точці цієї області похідну по y . Тоді, якщо $\frac{\partial f}{\partial y}$ обмежена в області D , то, згідно з теоремою Коші-Пікара, через кожну точку цієї області проходить одна й тільки одна інтегральна крива рівняння (17), отже рівняння (17) не має особливих розв'язків. Тому особливі розв'язки рівняння (17) потрібно шукати тільки серед тих кривих, вздовж яких $\frac{\partial f}{\partial y}$ не обмежена.

Будемо називати криві, вздовж яких $\frac{\partial f}{\partial y}$ не обмежена, кривими підозрілими на особливий розв'язок. Знайшовши таку криву, потрібно, по перше, перевірити, що вона взагалі є інтегральною кривою, та, по друге, переконатися, що у кожній її точці порушується єдиність розв'язку. Тільки при виконанні цих умов крива, підозріла на особливий розв'язок, дійсно буде особливим розв'язком.

2. Розділ 2

2. 1. Рівняння зі змінними, які розділяються

Розглянемо рівняння

$$X(x)dx + Y(y)dy = 0, \quad (42)$$

в якому коефіцієнт при dx залежить тільки від x , а коефіцієнт при dy — тільки від y . Таке рівняння називається рівнянням з розділеними змінними.

Будемо припускати, що функції $X(x)$ і $Y(y)$ неперервні при всіх розглянутих значеннях x і y . Тоді рівняння (42) можемо переписати у наступному вигляді

$$d\left[\int_{x_0}^x X(x)dx + \int_{y_0}^y Y(y)dy\right] = 0. \quad (43)$$

Тому

$$\int_{x_0}^x X(x)dx + \int_{y_0}^y Y(y)dy = C. \quad (44)$$

У формулі (44) можна не записувати границь інтегрування, так як числа, які будуть отримані від підстановки нижніх границь інтегрування, ми можемо включити у довільну сталу C . Тоді отримаємо загальний інтеграл рівняння (42) у вигляді:

$$\int X(x)dx + \int Y(y)dy = C. \quad (45)$$

До рівняння з розділеними змінними легко зводиться рівняння вигляду

$$m(x)n(y)dx + m_1(x)n_1(y)dy = 0, \quad (46)$$

в якому коефіцієнти при dx і dy являють собою добутки функції від x на функцію від y . Таке рівняння називається рівнянням зі змінними, які розділяються. Відносно функцій $m(x), n(y), m_1(x), n_1(y)$, будемо припускати, що вони неперервні при всіх значеннях x і y , які розглядаються.

Якщо помножити обидві частини рівняння (46) на

$$\frac{1}{n(y)m_1(x)}, \quad (47)$$

то отримаємо рівняння з розділеними змінними:

$$\frac{m(x)}{m_1(x)}dx + \frac{n_1(y)}{n(y)}dy = 0 \quad [n(y) = 0, m_1(x) = 0?]. \quad (48)$$

Його загальним інтегралом, й отже, і загальним інтегралом рівняння(46) буде

$$\int \frac{m(x)}{m_1(x)}dx + \int \frac{n_1(y)}{n(y)}dy = C. \quad (49)$$

При розділі змінних ми ділили обидві частини рівняння (46) на $n(y)m_1(x)$. При цьому ми могли втратити розв'язки, які визначаються рівняннями $n(y) = 0$ і $m_1(x) = 0$, які відмічені в формулі (48) в дужках. Справді, якщо b дійсний корінь рівняння $n(y) = 0$, то покладаючи в (46) $y = b$, отримаємо тотожність

$$m(x)n(b)dx + m_1(x)n_1(b)db \equiv 0. \quad (50)$$

Отже, $y = b$ є розв'язком рівняння (46). Аналогічно переконаємося, що $x = a$, де a — корінь рівняння $m_1(x) = 0$ також є розв'язком рівняння (46). Якщо ці розв'язки не входять у сімейство (49), тобто не можуть бути знайдені з (49) при конкретних значеннях C , то вони будуть особливими розв'язками рівняння (46).

З розв'язку $y = b$ ми повинні виключити точку з абсцисою $x = a$, так як у точці $x = a, y = b$ рівняння (46) не визначає нахилу поля y' . З тієї ж причини з розв'язку $x = a$ потрібно виключити точку з ординатою $y = b$.

Таким чином, розв'язки вигляду $y = b(x \neq a)$ і $x = a(y \neq b)$, які примикають у точці $x = a, y = b$ і можуть виявитися особливими. Інших особливих розв'язків немає.

Приклад 2.1. Знайти розв'язки рівняння

$$x\sqrt{1-y^2}dx + y\sqrt{1-x^2}dy = 0. \quad (51)$$

Помножимо обидві частини рівняння на $\frac{1}{\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-x^2}}$. Отримаємо,

$$\frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{y dy}{\sqrt{1-y^2}} = 0 \quad (\sqrt{1-x^2} = 0 \quad \sqrt{1-y^2} = 0?) \quad (52)$$

Використовуючи формулу (49) знаходимо загальний інтеграл

$$\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} = C \quad (\text{причому } C > 0). \quad (53)$$

Далі досліджуючи вирази у дужках у формулі (49) отримаємо ще розв'язки

$$y = 1 \quad (-1 < x < 1),$$

$$y = -1 \quad (-1 < x < 1),$$

$$x = 1 \quad (-1 < y < 1),$$

$$x = -1 \quad (-1 < y < 1),$$

(54)

Ці розв'язки є особливими, так як вони не отримуються з формули загального інтегралу (53) ні при якому значенні довільної сталої і на кожному з них не виконуються умови теореми Коші-Пікара.

2. 2. Однорідні рівняння

Як відомо з математичного аналізу функція $f(x, y)$ називається однорідною функцією степеня m , якщо при будь-якому t має місце тотожність

$$f(tx, ty) = t^m f(x, y). \quad (55)$$

Розглянемо рівняння

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0, \quad (56)$$

в якому $M(x, y)$ і $N(x, y)$ однорідні функції одного й того ж степеня m , причому m може бути будь-яким дійсним числом. Таке рівняння називається однорідним.

Покладемо в тотожності (55) $t = \frac{1}{x}$. Тоді отримаємо,

$$f\left(1, \frac{y}{x}\right) = \frac{1}{x^m} f(x, y), \quad (57)$$

звідси

$$f(x, y) = x^m f\left(1, \frac{y}{x}\right). \quad (58)$$

Скориставшись формулою (58), ми зможемо переписати рівняння (56) у вигляді

$$\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right). \quad (59)$$

Справді будемо мати

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)} = -\frac{x^m M\left(1, \frac{y}{x}\right)}{x^m N\left(1, \frac{y}{x}\right)} = -\frac{M\left(1, \frac{y}{x}\right)}{N\left(1, \frac{y}{x}\right)} \equiv \varphi\left(\frac{y}{x}\right). \quad (60)$$

Щоб проінтегрувати однорідне рівняння (56), зробимо заміну шуканої функції за формулою

$$y = zx, \quad (61)$$

де z — нова шукана функція від x . Так як $dy = zdx + xdz$, тж будемо мати

$$M(x, zx)dx + N(x, zx)(zdx + xdz) = 0. \quad (62)$$

Але, так як

$$M(x, y) = x^m M\left(1, \frac{y}{x}\right), \quad N(x, y) = x^m N\left(1, \frac{y}{x}\right) \quad (63)$$

то (покладаючи $y = zx$) маємо

$$M(x, zx) = x^m M(1, z), \quad N(x, zx) = x^m N(1, z).$$

Тому рівняння (56) можна переписати так

$$x^m M(1, z)dx + x^m N(1, z)(zdx + xdz) = 0. \quad (64)$$

Після скорочення на x^m і групування, отримаємо

$$[M(1, z) + N(1, z)z]dx + xN(1, z)dz = 0 \quad (x = 0?). \quad (65)$$

Це рівняння зі змінними, які розділяються. Розділимо змінні, помноживши обидві частини рівняння на $\frac{1}{x[M(1, z) + N(1, z)z]}$. Будемо мати

$$\frac{dx}{x} + \frac{N(1, z)dz}{M(1, z) + N(1, z)z} = 0 \quad [x = 0, M(1, z) + N(1, z)z = 0?]. \quad (66)$$

Інтегруючи, знаходимо

$$\ln |x| + \int \frac{N(1, z)dz}{M(1, z) + N(1, z)z} = \ln |C_1|. \quad (67)$$

Відмітимо, що для зручності ми записали довільну сталу інтегрування у вигляді $\ln |C_1|$. Після елементарних перетворень отримаємо:

$$x = Ce^{-\int \frac{N(1, z)dz}{M(1, z) + N(1, z)z}} \quad (C = \pm C_1), \quad (68)$$

так що

$$x = Ce^{\psi(z)}, \quad (69)$$

де

$$\psi(z) = - \int \frac{N(1, z)dz}{M + N(1, z)z}.$$

Замінюючи в (69) z на $\frac{y}{x}$, отримаємо загальний інтеграл рівняння (56) у вигляді:

$$x = Ce^{\psi\left(\frac{y}{x}\right)}.$$

Зазначимо, що при розділенні змінних ми могли загубити розв'язки вигляду $z = a$, де a — корінь рівняння

$$M(1, z) + N(1, z)z = 0.$$

Підставивши ці значення z у формулу (61) знайдемо, що

$$y = ax \quad (x \neq 0)$$

(напівпрямі, які примикають до початку координат) також розв'язки однорідного рівняння. Ці розв'язки можуть утримуватися в формулі загального розв'язку, але можуть бути й особливими. Особливими розв'язками можуть бути також піввісі осі $Oy : x = 0 (y \neq 0)$. Інших особливих розв'язків бути не може.

Приклад 2.2. Знайти всі розв'язки рівняння.

$$y' = \frac{y}{x} + \sin \frac{y}{x}. \quad (70)$$

Це рівняння однорідне, так як для будь-якого t

$$\frac{ty}{tx} + \sin \frac{ty}{tx} = \frac{y}{x} + \sin \frac{y}{x}.$$

Також однорідність цього рівняння очевидна на (підставі (59)), так як його права частина має вигляд $f\left(\frac{y}{x}\right)$. Зробимо заміну невідомої функції

$$y = zx.$$

Тоді,

$$y' = z'x + z.$$

Отже маємо рівняння

$$z'x + z = z + \sin z,$$

або

$$\frac{dz}{dx} = \sin z.$$

Розділимо змінні, помноживши на $\frac{dx}{x \sin z}$. Отримаємо,

$$\frac{dz}{\sin z} = \frac{dx}{x} \quad (\sin z = 0, x = 0?) \quad (71)$$

Інтегруючи будемо мати загальний інтеграл,

$$\ln \left| \tan \frac{z}{2} \right| = \ln |x| + \ln |C_1|.$$

або

$$\tan \frac{z}{2} = Cx \quad (C = \pm C_1).$$

Звідси

$$z = 2 \arctan Cx + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Повертаючись до вихідної змінної y будемо мати загальний розв'язок

$$y = 2x(\arctan Cx + 2k\pi).$$

Далі повернемося до можливих розв'язків залишених у дужках у (71). Зразу зазначимо, що $x = 0$ не може бути розв'язком, так як права частина рівняння (70) не визначена при $x = 0$.

З рівняння $\sin z = 0$ маємо $z = n\pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Звідси

$$y = n\pi x, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Якщо n — парні, то ці розв'язки входять у формулу загального розв'язку при $C = 0$. Якщо ж n — непарні ($n = 2k + 1$), то розв'язки

$$y = \pi(2k + 1)x, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \text{ при цьому } x \neq 0$$

будуть особливими.

2. 3. Рівняння яке зводиться до однорідного

Розглянемо рівняння

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{ax + by + c}\right). \quad (72)$$

Якщо $c_1 = c = 0$, то це рівняння однорідне, так як воно зводиться до вигляду (59). Припустимо, що хоча б одне з чисел c_1, c відмінне від нуля й припустимо ще, що

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a & b \end{vmatrix} \neq 0. \quad (73)$$

Зробимо лінійну заміну обох змінних

$$x = \xi + \alpha,$$

$$y = \eta + \beta.$$

Тоді наше рівняння прийме вигляд

$$\frac{d\eta}{d\xi} = f\left(\frac{a_1\xi + b_1\eta + a_1\alpha + b_1\beta + c_1}{a\xi + b\eta + a\alpha + b\beta + c}\right).$$

Виберемо α і β так, щоб виконувались співвідношення

$$\begin{aligned} a_1\alpha + b_1\beta + c_1 &= 0, \\ a\alpha + b\beta + c &= 0. \end{aligned} \tag{74}$$

Це завжди можна зробити, так як співвідношення (74) є системою лінійних алгебраїчних рівнянь відносно змінних ξ, η . Причому визначник цієї системи відмінний від нуля, тому вона завжди має єдиний розв'язок. Отже, для нових змінних ξ, η , ми отримаємо однорідне рівняння

$$\frac{d\eta}{d\xi} = f\left(\frac{a_1\xi + b_1\eta}{a\xi + b\eta}\right).$$

Інтегруючи це рівняння та повертаючись до вихідних змінних x і y , знайдемо загальний інтеграл рівняння (72).

Якщо ж $\Delta = 0$, то будемо мати, з властивостей визначників, $\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = k$, звідси $a_1 = ka$, $b_1 = kb$. Тому рівняння (72) у цьому випадку можна переписати так:

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{k(ax + by) + c_1}{ax + by + c}\right) \equiv f_1(ax + by).$$

Якщо тепер ввести замість y нову невідому функцію z за формулою

$$z = ax + by,$$

то отримаємо рівняння

$$\frac{dz}{dx} = a + bf_1(z),$$

змінні якого просто розділяються.

3. Розділ 3

3. 1. Поняття про лінійне рівняння

Рівняння вигляду

$$y' + p(x)y = q(x) \quad (75)$$

називається лінійним. Воно утримує шукану функцію y та її похідну y' тільки у першому степені. Відносно функцій $p(x)$ і $q(x)$ будемо припускати, що вони неперервні в інтервалі (a, b) ($a \geq -\infty, b \leq +\infty$).

Якщо у рівнянні (75) функція $q(x)$ тотожно дорівнює нулю в усім інтервалі (a, b) , то це рівняння приймає вигляд

$$y' + p(x)y = 0 \quad (76)$$

і називається однорідним. Його ліва частина є однорідна лінійна функція від y і y' . Рівняння (75), в якому $q(x)$ тотожно не дорівнює нулю називається неоднорідним.

З теореми Коші-Пікара, сформульованій на попередній лекції, слідує, що при зроблених припущеннях відносно $p(x)$ і $q(x)$ рівняння (75) має єдиний розв'язок

$$y = y(x),$$

який задовольняє початковій умові

$$y = y_0 \text{ при } x = x_0,$$

де в якості x_0 можна брати будь-яке число з інтервалу (a, b) , а y_0 можна вибирати довільним чином, тобто через будь-яку точку $M_0(x_0, y_0)$ смуги (рис. 3)

$$a < x < b, \quad -\infty < y < +\infty \quad (77)$$

проходить одна й тільки одна інтегральна крива рівняння (75).

Також можна довести, що лінійне рівняння (75) при зроблених припущеннях не має особливих розв'язків. Таким чином, вся смуга з рис. 3 заповнена

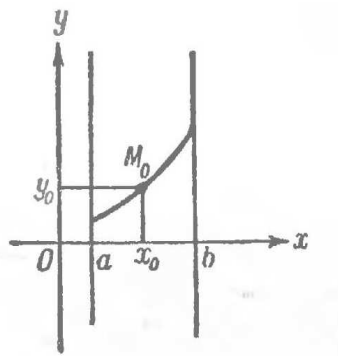


Рис. 3:

гладкими інтегральними кривими рівняння (75), які не перетинаються між собою. Причому кожна інтегральна крива визначена в усьому інтервалі (a, b) й являє собою графік частинного розв'язку.

Перед тим як перейти до інтегрування лінійного рівняння, відмітимо дві загальних властивості цього рівняння.

1. *Лінійне рівняння залишається лінійним при будь-якій заміні незалежної змінної*

$$x = \varphi(t), \quad (78)$$

де $\varphi(t)$ — будь-яка функція від t , визначена й неперервно диференційована в інтервалі (t_0, t_1) , причому $a = \varphi(t_0)$, $b = \varphi(t_1)$, $\varphi'(t) \neq 0$ у всьому інтервалі (t_0, t_1) .

Справді, будемо мати

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{dy}{dt} \frac{1}{\varphi'(t)}. \quad (79)$$

Далі підставимо (78) і (79) в (75). Отримаємо,

$$\frac{dy}{dt} + p[\varphi(t)]\varphi'(t)y = q[\varphi(t)]\varphi'(t).$$

Знову отримали лінійне рівняння, причому його коефіцієнт при y і права частина неперервні в інтервалі (t_0, t_1) .

2. *Лінійне рівняння зберігає свій вигляд при будь-якій лінійній заміні шуканої функції*

$$y = \alpha(x)z + \beta(x),$$

де z — нова невідома функція, а $\alpha(x), \beta(x)$ — довільні неперервно диференційовані функції від x , причому $\alpha(x) \neq 0$ в (a, b) .

Дійсно, так як

$$y' = \alpha'(x)z + \alpha(x)z' + \beta'(x),$$

то після перетворення отримаємо

$$\alpha'(x)z + \alpha(x)z' + \beta'(x) + p(x)[\alpha(x)z + \beta(x)] = q(x)$$

або

$$z' + \frac{\alpha'(x) + p(x)\alpha(x)}{\alpha(x)}z = \frac{q(x) - \beta'(x) - p(x)\beta(x)}{\alpha(x)}.$$

Знову отримали лінійне рівняння, в якого коефіцієнт при шуканій функції й права частина неперервні у (a, b) .

3. 2. Побудова загального розв'язку лінійного однорідного рівняння

Покажемо, що лінійне рівняння завжди інтегрується у квадратурах. Розглянемо спочатку лінійне однорідне рівняння (76),

$$y' + p(x)y = 0,$$

де функція $p(x)$ неперервна в інтервалі (a, b) .

Перепишемо це рівняння у вигляді

$$dy + p(x)ydx = 0.$$

Але ж це рівняння зі змінними, які розділяються. Помноживши на $\frac{1}{y}$ отримаємо:

$$\frac{dy}{y} + p(x)dx = 0 \quad (y \neq 0?)$$

звідси

$$y = Ce^{-\int p(x)dx}, \tag{80}$$

де C — довільна стала.

При розділенні змінних ми могли загубити розв'язок $y = 0$. Але цей розв'язок утримується у формулі (80) при $C = 0$. Отже всі розв'язки рівняння (76) можуть бути знайдені за формулою (80).

Доведемо, що функція (80) є загальним розв'язком рівняння (76) в області (77), тобто у всій області визначення рівняння (76).

Справді, рівняння (80) може бути розв'язано відносно C в області (77), так що маємо

$$C = ye^{\int p(x)dx},$$

де функція справа визначена в області (77). Крім того, по побудові, функція (80) є розв'язком рівняння (76) в інтервалі (a, b) при всіх значеннях довільної сталої C . А це й означає, що функція (80) є загальним розв'язком рівняння (76) в області (77).

Приклад 3.1. Знайти розв'язок рівняння:

$$y' - y \cos x = 0,$$

який задовольняє початковій умові

$$y = 1 \text{ при } x = 0.$$

Розв'язування. Скориставшись формулою (80) отримаємо загальний розв'язок:

$$y = Ce^{\int \cos x dx}, \text{ або } y = Ce^{\sin x}.$$

Підставимо початкові дані у загальний розв'язок. Будемо мати

$$1 = Ce^{\sin 0}.$$

Звідси $C = 1$. Остаточно маємо розв'язок задачі Коші

$$y = e^{\sin x}.$$

3. 3. Властивості розв'язків лінійного однорідного рівняння

Сформулюємо та доведемо дві властивості розв'язків лінійного однорідного рівняння.

1. Якщо y_1 є частинний розв'язок рівняння (76), тобто має місце тотожність

$$y_1' + p(x)y_1 \equiv 0 \quad (a < x < b), \quad (81)$$

то функція

$$y = Cy_1 \quad (82)$$

де C — довільна стала, також є розв'язком цього рівняння.

Дійсно, покладаючи у лівій частині рівняння (76) $y = Cy_1$ і приймаючи до уваги тотожність (81), отримаємо

$$(Cy_1)' + p(x)(Cy_1) = C[y_1' + p(x)y_1] \equiv 0 \quad (a < x < b).$$

Отже, $y = Cy_1$ є розв'язком рівняння (76).

2. Якщо y_1 — ненульовий розв'язок рівняння (76), то формула (82), де C — довільна стала, задає загальний розв'язок рівняння (76) в області (77).

Дійсно рівняння (82) можна розв'язати в області (77) відносно :

$$C = \frac{y}{y_1}$$

й, як було показано вище, функція (82) є розв'язком рівняння (76) при всіх значеннях C . Отже, функція (82) є загальним розв'язком рівняння (76) в області (77).

Таким чином, для побудови загального розв'язку лінійного однорідного рівняння достатньо знайти будь-який один ненульовий частинний розв'язок.

3. 4. Структура загального розв'язку лінійного неоднорідного рівняння

Розглянемо тепер неоднорідне рівняння (75),

$$y' + p(x)y = q(x).$$

Припустимо, що нам відомий деякий розв'язок y_1 цього рівняння, тобто має місце тотожність:

$$y_1' + p(x)y_1 \equiv q(x) \quad (a < x < b). \quad (83)$$

Введемо нову невідому функцію z за формулою

$$y = y_1 + z. \quad (84)$$

Підставляючи (84) у (75), отримаємо:

$$y_1' + z' + p(x)y_1 + p(x)z = q(x). \quad (85)$$

Звідси, згідно з тотожністю (83), отримаємо:

$$z' + p(x)z = 0. \quad (86)$$

Ми отримали для визначення z лінійне однорідне рівняння, ліва частина якого має один і той же вигляд, що й ліва частина рівняння (75).

Рівняння (86) називається лінійним однорідним рівнянням відповідним лінійному неоднорідному рівнянню (75). Загальний розв'язок рівняння (86) має вигляд:

$$z = Ce^{-\int p(x)dx}, \quad (87)$$

де C — довільна стала. Підставляючи знайдене значення у (84), отримаємо

$$y = y_1 + Ce^{-\int p(x)dx}. \quad (88)$$

Всі розв'зки рівняння (75) утримуються у формулі (88). Ця формула надає загальний розв'язок рівняння (75) у смузі

$$a < x < b, \quad -\infty < y < +\infty,$$

тобто в усій області визначення рівняння (75).

Таким чином, ми довели теорему, яка встановлює загальну структуру розв'язку лінійного неоднорідного рівняння.

Теорема 3.1. *Якщо y_1 є частинним розв'язком лінійного рівняння (75),*

$$y' + p(x)y = q(x),$$

то загальний розв'язок цього рівняння може бути знайдений за формулою (84),

$$y = y_1 + z, \quad (89)$$

де

$$z = Ce^{-\int p(x)dx}$$

є загальним розв'язком відповідного лінійного однорідного рівняння (86),

$$z' + p(x)z = 0.$$

З цієї теореми випливає, що знання одного частинного розв'язку неоднорідного рівняння (75) дає можливість отримати загальний розв'язок за допомогою одної квадратури.

3. 5. Метод варіації довільної сталої (метод Лагранжа)



Joseph-Louis Lagrange (Жозеф Луї Лагранж) (1736-1813)

Будемо шукати розв'язок рівняння (75) у тому ж вигляді, що і загальний розв'язок (87) відповідного однорідного рівняння (86), але будемо вважати C не сталою, а деякою неперервно диференційованою функцією від x , тобто покладемо

$$y = C(x)e^{-\int p(x)dx} \quad (90)$$

і виберемо функцію $C(x)$ так, щоб (90) задовольняло рівнянню (75). Підставимо (90) в (75):

$$C'(x)e^{-\int p(x)dx} - C(x)p(x)e^{-\int p(x)dx} + p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x).$$

Звідси:

$$C'(x) = q(x)e^{\int p(x)dx}.$$

Отже

$$C(x) = C + \int q(x)e^{\int p(x)dx},$$

де C — довільна стала. Підставляючи це значення $C(x)$ у формулу (90), отримаємо

$$y = e^{-\int p(x)dx} \left[C + \int q(x)e^{\int p(x)dx} dx \right]. \quad (91)$$

Це і є розв'язок рівняння (75), за побудовою, причому загальний у смузі

$$a < x < b, \quad -\infty < y < +\infty,$$

так як він має структуру (89).

Дійсно, перепишемо (91) у вигляді суми двох доданків

$$y = Ce^{-\int p(x)dx} + e^{-\int p(x)dx} \int q(x)e^{\int p(x)dx} dx. \quad (92)$$

У цьому запису перший доданок є загальним розв'язком відповідного однорідного рівняння (86), а другий є (частинний) розв'язок неоднорідного рівняння (75), тому що він утримується у формулі (92) при $C = 0$.

Приклад 3.2. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$(1 + x^2)y' = 2xy + (1 + x^2)^2.$$

Розв'язування. Перепишемо рівняння у вигляді

$$y' - \frac{2x}{1+x^2}y = 1 + x^2.$$

Отже маємо,

$$p(x) = -\frac{2x}{1+x^2}, \quad q(x) = 1 + x^2.$$

Знайдемо загальний розв'язок, скориставшись формулою (91). Будемо мати,

$$y = e^{\int \frac{2x}{1+x^2}dx} \left(C + \int (1+x^2)e^{-\int \frac{2x}{1+x^2}dx} dx \right).$$

Обчислимо окремо

$$\int \frac{2x}{1+x^2}dx = \int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = \ln(1+x^2),$$

тому $e^{\ln(1+x^2)} = 1 + x^2$. Повертаючись до обчислення загального розв'язку будемо мати:

$$(1 + x^2) \left(C + \int \frac{1 + x^2}{1 + x^2} dx \right) = (1 + x^2)(C + x).$$

3. 6. Метод Ейлера



Leonhard Euler (Леонард Ейлер) (1707-1783)

Розглянемо ще один метод побудови загального розв'язку лінійного неоднорідного рівняння, який був запропонований Ейлером. Помножимо обидві частини рівняння (75) на функцію

$$\mu(x) = e^{\int p(x) dx}. \quad (93)$$

Отримаємо рівняння

$$y' e^{\int p(x) dx} + p(x) y e^{\int p(x) dx} = q(x) e^{\int p(x) dx},$$

в якому ліва частина є точною похідною від функції

$$y e^{\int p(x) dx},$$

так що ми можемо переписати це рівняння у вигляді

$$\left[y e^{\int p(x) dx} \right]' = q(x) e^{\int p(x) dx}.$$

Звідси

$$y e^{\int p(x) dx} = \int q(x) e^{\int p(x) dx} dx + C,$$

отже

$$y = e^{-\int p(x)dx} \left[C + \int q(x) e^{\int p(x)dx} dx \right].$$

Ми отримали той же вигляд загального розв'язку, що й при застосуванні методу Лагранжа.

Функція (93) називається інтегруючим множником методу Ейлера, а викладений метод Ейлера - методом інтегруючого множника.

3. 7. Рівняння Бернуллі



Jakob Bernoulli (Якоб Бернуллі) (1655-1705)

Рівняння вигляду

$$y' + p(x)y = q(x)y^m, \quad (94)$$

де m — будь-яке дійсне число, називається рівнянням Бернуллі (на честь Якоба Бернуллі, який запропонував це рівняння у 1695 році). Будемо припускати, що $m \neq 0$ і $m \neq 1$, так як у цих випадках рівняння Бернуллі вироджується в лінійне. Відносно $p(x)$ і $q(x)$ будемо припускати, що вони неперервні в інтервалі (a, b) .

Рівняння Бернуллі завжди може бути зведено до лінійного рівняння. Справді, перетворимо спочатку праву частину рівняння Бернуллі до вигляду правої частини лінійного рівняння. Для цього поділимо обидві частини рівняння (94) на y^m :

$$y^{-m}y' + p(x)y^{1-m} = q(x) \quad (y^m = 0?). \quad (95)$$

Введемо нову невідому функцію z , поклавши

$$z = y^{1-m}. \quad (96)$$

Тоді

$$z' = (1-m)y^{-m}y'. \quad (97)$$

Помножимо обидві частини рівняння (95) на $1-m$ і виконаємо підстановку (96). Будемо мати,

$$z' + (1-m)p(x)z = (1-m)q(x). \quad (98)$$

Отримали лінійне рівняння відносно нової функції z . Інтегруючи це рівняння й повертаючись до змінної y , отримаємо загальний розв'язок рівняння Бернуллі у вигляді

$$y = \left\{ e^{\int (m-1)p(x)dx} \left[C + \int (1-m)q(x)e^{\int (1-m)p(x)dx} dx \right] \right\}^{\frac{1}{1-m}}. \quad (99)$$

При діленні рівняння (94) на y^m ми могли втратити розв'язок $y = 0$. Це могло трапитися тільки при $m > 0$, так як при $m \leq 0$ функція $y = 0$ не є розв'язком рівняння Бернуллі. Якщо $m > 1$, то розв'язок $y = 0$ утримується в формулі (99) при $C = \infty$ та є частинним. Якщо ж $0 < m < 1$, то розв'язок $y = 0$ є особливим. У кожній точці цього розв'язку порушується єдиність розв'язку задачі Коші.

Приклад 3.4. Знайти розв'язки рівняння

$$y' = \frac{y}{2x} - \frac{1}{2y}.$$

Розв'язування. Перепишемо це рівняння у вигляді

$$y' - \frac{y}{2x} = -\frac{1}{2}y^{-1}.$$

Це рівняння Бернуллі, де $p(x) = -\frac{1}{2x}$, $q(x) = -\frac{1}{2}$, $m = -1$. За формулою (99) отримаємо,

$$y = \left[e^{\int \frac{dx}{x}} \left(C - \int e^{-\int \frac{dx}{x}} dx \right) \right]^{\frac{1}{2}} = [|x|(C - \ln |x|)]^{\frac{1}{2}} = \left[|x| \ln \left| \frac{C_1}{x} \right| \right]^{\frac{1}{2}},$$

де $\ln |C_1| = C$.

Так як $m \leq 0$, то особливих розв'язків немає.

4. Розділ 4

4. 1. Поняття про рівняння у повних диференціалах

У попередніх розділах ми вивчили декілька рівнянь першого порядку, які завжди допускають інтегрування в квадратурах. Зараз ми розглянемо один новий тип таких рівнянь. Цей тип внаслідок того, що до нього зводяться деякі раніше вивчені рівняння, а також багато інших рівнянь, має важливе значення в теорії диференціальних рівнянь.

Отже розглянемо рівняння

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0. \quad (100)$$

Припустимо, що ліва частина цього рівняння є повним диференціалом від деякої функції $U(x, y)$, тобто

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = dU. \quad (101)$$

Відносно функцій M і N будемо припускати, що вони неперервні по обом змінним у деякій області й ні в одній точці не обертаються одночасно в нуль. Тоді рівняння (100) називається рівнянням у повних диференціалах. Це рівняння можна записати так:

$$dU = 0.$$

Тому його загальний інтеграл має вигляд

$$U(x, y) = C.$$

Особливих розв'язків рівняння у повних диференціалах, очевидно, не має.

В якості приклада розглянемо рівняння

$$xdx + ydy = 0.$$

Ліва частина цього рівняння є повним диференціалом функції

$$U = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}.$$

Тому загальний інтеграл цього рівняння має вигляд

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C.$$

4. 2. Ознака рівняння у повних диференціалах. Побудова загального інтегралу

Припустимо, що функції $M(x, y)$ і $N(x, y)$ мають неперервні частинні похідні відповідно по y і по x . Нехай ліва частина рівняння (100) являє собою повний диференціал, тобто

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy \equiv dU \equiv \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy.$$

Це еквівалентно тому, що мають місце тотожності

$$\frac{\partial U}{\partial x} = M(x, y), \quad \frac{\partial U}{\partial y} = N(x, y). \quad (102)$$

Диференціюючи першу з цих тотожностей по y , а другу по x , отримаємо тотожності:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial M}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = \frac{\partial N}{\partial x}. \quad (103)$$

Так як для неперервних функцій змішані похідні не залежать від порядку дифереціювання, то ліві частини отриманих тотожностей рівні між собою.

Отже рівні й праві частини

$$\frac{\partial M}{\partial y} \equiv \frac{\partial N}{\partial x}. \quad (104)$$

Умова (104) є необхідною для того, щоб ліва частина рівняння (100) була повним диференціалом. Покажемо, що ця умова є достатньою. Дійсно нехай умова (104) виконується. Покажемо, що тоді існує функція U , яка задовольняє співвідношенню (101), або, що теж саме, обом рівностям (102).

Будемо виходити з першої з рівностей (102):

$$\frac{\partial U}{\partial x} = M(x, y).$$

Легко переконатися, що йому задовольняє функція

$$U(x, y) = \int_{x_0}^x M(x, y)dx + \varphi(y), \quad (105)$$

де $\varphi(y)$ — довільна функція від y , яку ми будемо вважати диференційованою та виберемо її так, щоб функція (105) задовольняла й другій з рівностей (102), тобто щоб

$$\frac{\partial U}{\partial y} \equiv \frac{\partial}{\partial y} \int_{x_0}^x M(x, y) dx + \varphi'(y) = N(x, y),$$

або, виконавши дифереціювання по y , отримаємо:

$$\int_{x_0}^x \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} dx + \varphi'(y) = N(x, y).$$

Зауважимо, що диференціювання по параметру y під знаком інтегралу законне, так як $M(x, y)$, за припущенням, неперервна по x і y разом з похідною $\frac{\partial M}{\partial y}$. Використовуючи умову (104), перепишемо цю рівність так:

$$\int_{x_0}^x \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} dx + \varphi'(y) = N(x, y).$$

Виконуючи інтегрування, отримаємо:

$$N(x, y)|_{x=x_0}^{x=x} + \varphi'(y) = N(x, y),$$

або

$$N(x, y) - N(x_0, y) + \varphi'(y) = N(x, y).$$

Звідси

$$\varphi'(y) = N(x_0, y),$$

отже,

$$\varphi(y) = \int_{y_0}^y N(x_0, y) dy + C',$$

де C' — вже (на відміну від правої частини (105)) довільна стала. Підставляючи знайдений вираз функції $\varphi(y)$ у формулу (105), отримаємо шукану функцію $U(x, y)$:

$$U(x, y) = \int_{x_0}^x M(x, y_0) dx + \int_{y_0}^y N(x_0, y) dy + C', \quad (106)$$

що й доводить достатність умови (104). Таким чином, *тотожне виконання рівності (104) є необхідною та достатньою ознакою рівняння у повних диференціалах.*

Взявши одну з функцій (106), наприклад, ту в якій $C' = 0$, і прирівняв її довільній сталій C , отримаємо загальний інтеграл рівняння (100) у наступному вигляді

$$\int_{x_0}^x M(x, y) dx + \int_{y_0}^y N(x_0, y) dy = C. \quad (107)$$

Якщо для побудови функції U брати за вихідну другу з рівностей (102), то ми отримаємо для загального інтегралу наступний вираз:

$$\int_{x_0}^x M(x, y_0) dx + \int_{y_0}^y N(x, y) dy = C. \quad (108)$$

У формулах (107) і (108) нижні границі інтегрування x_0 і y_0 можна обирати довільним чином у границях області, яка розглядається, але так, щоб використовувані інтеграли мали сенс. Вдалий вибір x_0 і y_0 у багатьох випадках полегшує задачу інтегрування рівняння.

Приклад 4.1. Знайти загальний інтеграл рівняння

$$xydx + \left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{y} \right) dy = 0, \quad y > 0.$$

Розв'язування.

Маємо $M(x, y) = xy$, $N(x, y) = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{y}$. Звідси

$$\frac{\partial M}{\partial y} = x = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Отже це рівняння у повних диференціалах. Загальний інтеграл знаходимо за формулою (107), поклавши $x_0 = 0$, $y_0 = 1$. Будемо мати

$$\int_0^x xy dx + \int_1^y \frac{1}{y} dy = C.$$

Таким чином, маємо загальний інтеграл

$$\frac{x^2 y}{2} + \ln y = C.$$

Якщо потрібно знайти розв'язок задачі Коші, то найбільш доцільно спочатку знайти загальний інтеграл, а потім визначити конкретне значення довільної сталої C , підставивши початкові дані у загальний інтеграл.

4. 3. Поняття про інтегруючий множник

Ми бачили у попередньому параграфі, що рівняння у повних диференціалах завжди інтегрується в квадратурах. Тому природно виникає питання: чи не можна рівняння не у повних диференціалах звести до рівняння у повних диференціалах? Виявляється, що у багатьох випадках це можна зробити. А саме, вдається знайти функцію $\mu = \mu(x, y)$, після множення на яку рівняння

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (109)$$

перетворюється в рівняння

$$\mu M(x, y)dx + \mu N(x, y)dy = 0 \quad (110)$$

у повних диференціалах

$$\mu M(x, y)dx + \mu N(x, y)dy = dU(x, y).$$

Така функція μ називається інтегруючим множником, а функція $U(x, y)$ — відповідним йому інтегралом рівняння (100). Загальний інтеграл рівняння може бути отриманий за формулою

$$U(x, y) = C.$$

При цьому відносно функцій $M(x, y)$ і $N(x, y)$ ми, як і раніше, будемо припускати, що вони неперервні разом з частинними похідними $\frac{\partial M}{\partial y}$ і $\frac{\partial N}{\partial x}$ у деякій однозв'язній області й у жодній точці цієї області не обертаються одночасно у нуль. Стосовно інтегруючого множника μ будемо вимагати, щоб він не обертався у нуль і мав неперервні частинні похідні першого порядку.

Застосовуючи ознаку повного диференціалу до рівняння (110), знайдемо, інтегруючий множник μ повинен задовольняти рівнянню

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}.$$

Запишемо це рівняння у розгорнутому вигляді

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} M + \mu \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial x} N + \mu \frac{\partial N}{\partial x}$$

або

$$N \frac{\partial \mu}{\partial x} - M \frac{\partial \mu}{\partial y} = \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) \mu. \quad (111)$$

Це — рівняння з частинними похідними першого порядку з невідомою функцією μ .

У загальному випадку задача інтегрування рівняння (111) не легше, ніж задача інтегрування рівняння (109). Але у деяких випадках вдається легко розв'язати рівняння (111) і знайти інтегруючий множник μ рівняння (109).

4. 4. Випадок інтегруючого множника, який залежить тільки від x

Припустимо, що рівняння (100) має інтегруючий множник, який залежить тільки від x , $\mu = \mu(x)$. У цьому випадку $\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0$, так що рівняння (111) приймає вигляд

$$N \frac{d\mu}{dx} = \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) \mu$$

або (у припущенні, що $N \neq 0$)

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}. \quad (112)$$

Тут ліва частина є функцією від x . Тоді й права частина повинна бути функцією тільки від x . Таким чином, для існування інтегруючого множника вигляду $\mu = \mu(x)$ необхідно, щоб

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} \equiv \psi(x). \quad (113)$$

При цьому (112) має вигляд:

$$\frac{\mu'}{\mu} = \psi(x),$$

Звідси

$$\mu = Ce^{\int \psi(x) dx}, \quad (114)$$

так що, якщо існує $\mu = \mu(x)$, то він утримується в формулі (114). Покладаючи, для простоти запису, $C = 1$, отримаємо

$$\mu = e^{\int \psi(x) dx}, \quad (115)$$

Покажемо, що при виконанні умови (113) функція (115) буде інтегруючим множником рівняння (100). Справді, у цьому випадку рівняння (111) прийме вигляд:

$$N \frac{\partial \mu}{\partial x} - M \frac{\partial \mu}{\partial y} = N \psi(x) \mu.$$

Підставимо у це рівняння функцію (115). Будемо мати

$$N e^{\int \psi(x) dx} \psi(x) \equiv N \psi(x) e^{\int \psi(x) dx}.$$

Таким чином, функція (115) є розв'язком цього рівняння у частинних похідних. Отже μ інтегруючий множник рівняння (100).

В якості прикладу знайдемо інтегруючий множник лінійного рівняння

$$y' + p(x)y = q(x).$$

Перепишемо це рівняння у диференціальній формі:

$$[p(x)y - q(x)]dx + dy = 0.$$

Перевіряючи виконання умови (113), маємо:

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} \equiv p(x) \equiv \psi(x).$$

Отже, функція

$$\mu = e^{\int p(x) dx}$$

є інтегруючим множником лінійного рівняння. Ми отримали такий же інтегруючий множник, який раніше був отриманий методом Ейлера.

4. 5. Випадок інтегруючого множника, який залежить тільки від y

Знайдемо умову, при якому інтегруючий множник залежить тільки від y :
 $\mu = \mu(y)$. У цьому випадку рівняння (111) приймає вигляд

$$-M \frac{d\mu}{dy} = \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) \mu,$$

або (якщо $M \neq 0$)

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{-M}.$$

Если

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{-M} \equiv \psi(y),$$

то інтегруючий множник може бути знайдений за формулою

$$\mu = e^{\int \psi(y) dy}. \quad (116)$$

4. 6. Інтегруючий множник і особливі розв'язки

Якщо ми знаємо інтегруючий множник, то можемо знайти не тільки загальний інтеграл рівняння, але також і всі особливі розв'язки. Дійсно, нехай задано рівняння (100),

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0,$$

та відомо, що $\mu = \mu(x, y)$ є його інтегруючий множник, так що

$$\mu(Mdx + Ndy) = dU.$$

Тоді ми маємо:

$$Mdx + Ndy = \frac{1}{\mu} dU.$$

Тому задане рівняння (100) можна переписати так:

$$\frac{1}{\mu} dU = 0.$$

Це рівняння розпадається на два:

$$dU = 0, \quad \frac{1}{\mu} = 0.$$

Перше з них призводить до загального інтегралу $U = C$, а друге може призвести до особливого розв'язку. Таким чином, особливим розв'язком рівняння (100) може бути тільки такий розв'язок, вздовж якого інтегруючий множник обертається у нескінченність.

Звідси отримуємо просте правило знаходження особливих розв'язків:

- 1) знайти лінії, вздовж яких μ обертається у нескінченність;
- 2) перевірити, чи є знайдені лінії інтегральними кривими, тобто чи є вони розв'язками рівняння;
- 3) перевірити, чи утримуються знайдені розв'язки в загальному розв'язку чи ні.

Ті зі знайдених розв'язків, які не утримуються в загальному розв'язку й будуть особливими розв'язками. Якщо виявиться, що μ не обертається в нескінченність (але обертається в нескінченність лише окремих точках), то рівняння не має особливих розв'язків.

Звідси, зокрема, знову отримаємо, що лінійне рівняння $y' + p(x)y = q(x)$, де $p(x)$ — неперервна функція, не має особливих розв'язків, так як його інтегруючий множник (116) не обертається в нескінченність у проміжку неперервності $p(x)$.

5. Розділ 5

Рівняння вищих порядків — 1

5. 1. Основні поняття та означення

Розглянемо звичайне диференціальне рівняння n -го порядку

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0. \quad (117)$$

Також будемо припускати розглядати рівняння, яке розв'язане відносно старшої похідної

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}). \quad (118)$$

Будь-яка функція $y = y(x)$, визначена та неперервно диференційована n разів у інтервалі (a, b) , є розв'язком рівняння (117) у цьому інтервалі, якщо вона обертає рівняння (117) у тотожність

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)) \equiv 0,$$

справедливу при всіх x з інтервалу (a, b) .

Будь-якому розв'язку рівняння (117), так само як і розв'язку рівняння першого порядку, відповідає на площині (x, y) деяка крива, яку, як і раніше, ми будемо називати інтегральною кривою.

Для рівняння (117) *задача Коші* ставиться наступним чином. Серед усіх розв'язків рівняння (117) потрібно знайти розв'язок

$$y = y(x), \quad (119)$$

для якого функція $y(x)$ разом зі своїми похідними до $(n - 1)$ -го порядку включно приймає задані значення $y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ при заданому значенні незалежної змінної x_0 , тобто

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)},$$

де $x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ задані числа, так що розв'язок (119) задовольняє умовам:

$$y = y_0, y' = y'_0, \dots, y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)} \text{ при } x = x_0. \quad (120)$$

Числа $y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ називаються початковими значеннями розв'язку (119), число x_0 — початковим значенням незалежної змінної, числа $x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ разом узяті називаються початковими даними розв'язку (119), а умови (120) — початковими умовами цього розв'язку.

Характерна особливість задачі Коші полягає в тому, що умови, які накладаються на шуканий розв'язок при постановці задачі, задаються при одному й тому ж значенні незалежної змінної.

5. 2. Умови існування та єдиності розв'язку задачі Коші.

Сформулюємо основну теорему існування та єдиності для рівняння (118).

Теорема Коші-Пікара.

Нехай задане рівняння (118)

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}).$$

і поставлені початкові умови (120)

$$y = y_0, y' = y'_0, \dots, y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)} \text{ при } x = x_0.$$

Припустимо, що функція $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ визначена у деякій замкненій обмеженій області

$$R : |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b, |y' - y'_0| \leq b, \dots, |y^{(n-1)} - y_0^{(n-1)}| \leq b$$

з точкою $(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)})$ всередині (a і b — задані додатні числа) й задовольняє в цій області наступним двом умовам:

I. Функція $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ неперервна по всім своїм аргументам і, отже обмежена, тобто

$$|f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})| \leq M, \tag{121}$$

де M — постійне додатне число, а $(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ — будь-яка точка області R ;

II. Функція $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ має обмежені частинні похідні по аргументам $y, y', \dots, y^{(n-1)}$, тобто

$$\left| \frac{\partial f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})}{\partial y^{(l)}} \right| \leq K \quad (l = 0, 1, \dots, n-1; y^{(0)} \equiv y),$$

де K — постійне додатне число, а $(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ — будь-яка точка області R .

При цих припущеннях рівняння (118) має єдиний розв'язок

$$y = y(x),$$

який задовольняє початковим умовам (120). Цей розв'язок напевне визначений і неперервний разом з похідними до порядку n включно в інтервалі

$$|x - x_0| \leq h \tag{122}$$

де

$$h = \min \left\{ a, \frac{b}{\max(M, |y'|, \dots, |y^{(n-1)}|)} \right\}. \tag{123}$$

5. 3. Поняття про граничну (крайову) задачу

Зауважимо, що задача Коші є лише однією з найважливіших задач теорії диференціальних рівнянь, в яких шукається розв'язок, який задовольняє деяким умовам. Іншим, не менш важливим, типом таких задач є граничні (крайові задачі), в яких умови, які накладаються на шуканий розв'язок, задаються не в одній точці, як це має місце в задачі Коші, а на кінцях деякого сегменту $[a, b]$ та шукається розв'язок, визначений середині цього сегменту. Ці умови називаються граничними (крайовими) умовами.

Граничні задачі можуть ставитися, очевидно, лише для рівнянь порядку вище першого, так як у випадку рівняння першого порядку задання значення шуканого розв'язку в одній точці вже визначає, при деяких умовах, інтегральну криву єдиним чином, і ця інтегральна крива може задовольняти граничній умові в іншій точці лише випадково.

Приклад 5.1.

Знайти розв'язок рівняння

$$y'' = 6x, \quad (124)$$

яке задовольняє граничним умовам

$$\begin{aligned} y' &= 0 \text{ при } x = 0, \\ y &= 1 \text{ при } x = 1. \end{aligned} \quad (125)$$

Розв'язування. Послідовно інтегруючи рівняння (124) отримуємо:

$$\begin{aligned} y' &= 3x^2 + C_1, \\ y &= x^3 + C_1x + C_2. \end{aligned} \quad (126)$$

Підставимо сюди граничні умови (125), тобто покладемо у першій з рівностей (126) $x = 0, y' = 0$, а у другій — $x = 1, y = 1$. Отримаємо:

$$\begin{aligned} 0 &= 0 + C_1, \\ 1 &= 1 + C_1 \cdot 1 + C_2. \end{aligned} \quad (127)$$

Звідси $C_1 = 0, C_2 = 0$, так що шуканий розв'язок має вигляд

$$y = x^3.$$

5. 4. Загальний розв'язок

Нехай рівняння (118) задане у деякій області D . В якості області D будемо розглядати область у просторі $(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$, у кожній точці якої має місце існування та єдиність розв'язку задачі Коші для рівняння (118).

Функцію

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n), \quad (128)$$

визначену в деякій області зміни змінних $x, C_1, C_2, \dots, C_n$, яка має частинні похідні по x до порядку n включно, будемо називати *загальним розв'язком*

$$\begin{aligned} y &= \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n), \\ y' &= \varphi'(x, C_1, C_2, \dots, C_n), \\ &\dots\dots\dots \\ y^{(n-1)} &= \varphi^{(n-1)}(x, C_1, C_2, \dots, C_n), \end{aligned} \tag{129}$$
[illegible]

Формула загального розв'язку (128) надає можливість за рахунок вибору відповідних значень довільних сталих $C_1, C_2, \dots, C_n$ розв'язати будь-яку задачу Коші для рівняння (118) в області D , тобто знайти розв'язок рівняння (118), обумовлений початковими даними $x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$, причому $(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)})$ – будь-яка точка з області D .

55

$x, y, y', \dots, y^{(n-1)}$ початкові дані $x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$:

[illegible]

Знайдемо з цієї системи $C_1, C_2, \dots, C_n$:

[illegible]

Підставимо ці значення у формулу загального розв'язку (128). Отримаємо

$$y = \varphi(x, C_1^{(0)}, C_2^{(0)}, \dots, C_n^{(0)}). \quad (133)$$

Це і є шуканий розв'язок. Інших розв'язків з початковими даними $x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ немає.

Інколи у формулі загального розв'язку (128) роль довільних $C_1, C_2, \dots, C_n$ грають початкові значення $x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ шуканої функції y та її перших $n - 1$ похідних $y', \dots, y^{(n-1)}$ при деякому фіксованому значенні x_0 аргументу x , так що формула (128) приймає вигляд

$$y = \varphi(x, x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}). \quad (134)$$

Така форма запису загального розв'язку називається *загальним розв'язком у формі Коші*.

5. 5. Інші типи розв'язків рівняння n -го порядку

У багатьох випадках інтегруючи рівняння (118) ми отримуємо розв'язок у неявному вигляді, не розв'язаному відносно y :

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0. \quad (135)$$

Така форма загального розв'язку рівняння (118) називається *загальним інтегралом* цього рівняння.

Будемо називати співвідношення (135) *загальним розв'язком у неявній формі* або *загальним інтегралом* рівняння (118), якщо це співвідношення визначає загальний розв'язок $\varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$ рівняння (118) в області D .

У деяких випадках знаходження загального розв'язку рівняння (118) в явній або неявній формі представляє великі труднощі. У таких випадках, інтегруючи диференціальне рівняння (118), шукають сімейство інтегральних кривих, яке залежить від n довільних сталих $C_1, C_2, \dots, C_n$ у параметричному вигляді

$$\begin{aligned} x &= \varphi(t, C_1, C_2, \dots, C_n) \\ y &= \psi(t, C_1, C_2, \dots, C_n). \end{aligned} \quad (136)$$

Таке сімейство інтегральних кривих будемо називати *загальним розв'язком* рівняння (118) *у параметричній формі*.

Якщо розв'язок рівняння (118) складається тільки з точок єдиності розв'язку задачі Коші для цього рівняння, то такий розв'язок будемо називати *частинним розв'язком*. Розв'язок, який отриманий з формули загального розв'язку при частинних числових значеннях довільних сталих $C_1, C_2, \dots, C_n$, включаючи $\pm\infty$, буде, очевидно, частинним розв'язком. Вирішуючи задачу Коші за допомогою формули загального розв'язку, ми завжди отримуємо частинний розв'язок.

Розв'язок, у кожній точці якого порушується єдиність розв'язку задачі Коші, будемо називати *особливим розв'язком*.

Рівняння n -го порядку (118) може мати сімейство особливих розв'язків,

яке залежить від довільних сталих, причому число цих сталих може доходити до $n - 1$.

5. 6. Проміжні інтеграли. Перші інтеграли.

Найчастіше, інтегруючи рівняння(118), ми приходимо спочатку до співвідношення, яке утримує довільні сталі й похідні, але порядок старшої похідної менше n :

$$\Phi(x, y', \dots, y^{(n-k)}, C_1, \dots, C_k) = 0 \quad (1 \leq k < n). \quad (137)$$

Таке співвідношення називається *проміжним інтегралом* рівняння(118) або *інтегралом k -го порядку*. Воно є диференціальним рівнянням порядку $n - k$, яке утримує k довільних сталих. У процесі інтегрування рівняння (137) ми введемо ще $n - k$ довільних сталих і отримаємо співвідношення, яке утримує x, y і n довільних сталих, тобто загальний інтеграл рівняння (118).

Якщо проміжний інтеграл має вигляд

$$\Phi_1(x, y', \dots, y^{(n-1)}, C_1) = 0, \quad (138)$$

тобто утримує похідну порядку $n - 1$ і одну довільну сталу, то він називається *першим інтегралом рівняння (118)*.

Якщо відомий один перший інтеграл (138), то інтегрування рівняння (118) зводиться до інтегрування рівняння $(n - 1)$ -го порядку.

Якщо ми маємо два незалежних перших інтеграла:

$$\begin{aligned} \Phi_{11}(x, y', \dots, y^{(n-1)}, C_1) &= 0, \\ \Phi_{12}(x, y', \dots, y^{(n-1)}, C_2) &= 0, \end{aligned} \quad (139)$$

то, виключаючи з цих інтегралів $y^{(n-1)}$, отримаємо проміжний інтеграл вигляду:

$$\Phi_2(x, y', \dots, y^{(n-2)}, C_1, C_2) = 0, \quad (140)$$

так що інтегрування вихідного рівняння зведеться до інтегрування рівняння порядку $n - 2$.

Знання $k(1 \leq k < n)$ незалежних перших інтегралів дозволяє знизити порядок рівняння на k одиниць. Нарешті, якщо ми маємо n незалежних перших інтегралів, то виключаючи з них $y', y'', \dots, y^{(n-1)}$, ми отримаємо:

$$\Phi(x, y', \dots, y^{(n-1)}, C_1, \dots, C_n) = 0,$$

тобто загальний інтеграл.

6. Розділ 6

Рівняння вищих порядків — 2

6. 1. Рівняння, яке утримує тільки незалежну змінну й похідну порядку n

Розглянемо рівняння

$$y^{(n)} = f(x), \quad (141)$$

функція $f(x)$ неперервна в інтервалі (a, b) , тому вона може бути проінтегрована у квадратурах.

Дійсно, так як $y^{(n)} = [y^{(n-1)}]'$, то ми можемо переписати рівняння (141) у вигляді

$$[y^{(n-1)}]' = f(x),$$

звідси:

$$y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1. \quad (142)$$

Продовжуючи процес послідовного інтегрування будемо мати,

$$y^{(n-2)} = \int \int f(x)dx dx + C_1x + C_2. \quad (143)$$

$$y^{(n-3)} = \int \int \int f(x)dx dx dx + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2x + C_3, \quad (144)$$

.....

$$y' = \underbrace{\int \int \dots \int}_{(n-1)\text{-разів}} f(x)dx dx \dots dx + \frac{C_1}{(n-2)!}x^{n-2} + \frac{C_2}{(n-3)!}x^{n-3} + \dots + C_{n-1}, \quad (145)$$

$$y = \underbrace{\int \int \dots \int}_{n\text{-разів}} f(x)dx dx \dots dx + \frac{C_1}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{C_2}{(n-2)!}x^{n-2} + \dots + C_{n-1}x + C_n. \quad (146)$$

Остання формула (146) утримує всі розв'язки рівняння (141) і визначає загальний розв'язок цього рівняння в області

$$a < x < b, -\infty < y < +\infty, -\infty < y' < +\infty, \dots, -\infty < y^{(n-1)} < +\infty. \quad (147)$$

Вона дозволяє знайти розв'язок з будь-якими початковими значеннями, аргументу, шуканої функції та її похідних до $(n-1)$ -го порядку включно:

$$x = x_0, y = y_0, y' = y'_0, y'' = y''_0, \dots, y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}. \quad (148)$$

Приклад 6.1.

Знайти розв'язок задачі Коші

$$y''' = 12x,$$

$$y = 0, y' = 1, y'' = 2 \text{ при } x = 0.$$

Розв'язування

Послідовно інтегруючи у відповідності з формулами (15. 3.) – (146) отримаємо

$$y'' = 6x^2 + C_1,$$

$$y' = 2x^3 + C_1x + C_2,$$

$$y = \frac{1}{2}x^4 + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2x + C_3.$$

Підставляючи початкові дані в ці формули будемо мати,

$$2 = 0 + C_1, C_1 = 2, 1 = 0 + 0 + C_2, C_2 = 1, 0 = 0 + 0 + 0 + C_3, C_3 = 0.$$

Таким чином маємо наступний розв'язок задачі Коші

$$y = \frac{1}{2}x^4 + x^2 + x.$$

6. 2. Рівняння, яке не утримує шуканої функції та послідовності перших похідних

Розглянемо рівняння вигляду:

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1 \leq k < h), \quad (149)$$

причому похідна k -го порядку обов'язково входить у рівняння.

Введемо нову невідому функцію z , поклавши

$$y^{(k)} = z. \quad (150)$$

Тоді рівняння (149) перепишеться так:

$$F(x, z, z', \dots, z^{(n-k)}) = 0. \quad (151)$$

Це рівняння $(n - k)$ -го порядку. Нам вдалося, таким чином, понизити порядок рівняння (149) на k одиниць.

Припустимо, що, вирішуючи отримане рівняння, ми знайдемо його загальний розв'язок

$$z = \omega(x, C_1, \dots, C_{n-k}). \quad (152)$$

Тоді будемо мати:

$$y^{(k)} = \omega(x, C_1, \dots, C_{n-k}). \quad (153)$$

А це рівняння типу (141) побудову розв'язку якого ми розглянули раніше. Інтегруючи це рівняння отримаємо загальний розв'язок:

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n).$$

Приклад 6.2.

Знайти загальний розв'язок рівняння:

$$x^4 y''' + 2x^3 y'' = 1.$$

Розв'язування.

Маємо рівняння типу (149). Тому робимо заміну змінної $y'' = z$. Отримаємо рівняння:

$$x^4 z' + 2x^3 z = 1. \quad (154)$$

Почленно поділимо обидві частини цього рівняння на x^4 . Будемо мати рівняння,

$$z' + \frac{2}{x}z = \frac{1}{x^4}. \quad (155)$$

При діленні на x^4 ми могли втратити можливий розв'язок $x = 0$. Але $x = 0$ взагалі не буде розв'язком рівняння (154).

Рівняння (155) є лінійним рівнянням першого порядку, для якого

$$p(x) = \frac{2}{x}, \quad q(x) = \frac{1}{x^4}.$$

Загальний розв'язок цього рівняння може бути знайдений за формулою

$$z = e^{-\int p(x)dx} \left[C_1 + \int q(x) e^{\int p(x)dx} dx \right].$$

У нашому випадку маємо

$$z = e^{-\int \frac{2}{x} dx} \left[C_1 + \int \frac{1}{x^4} e^{\int \frac{2}{x} dx} dx \right].$$

Після проведення інтегрування отримаємо

$$z = -\frac{1}{x^3} + \frac{C_1}{x^2}.$$

Повертаючись до вихідної змінної y будемо мати рівняння

$$y'' = -\frac{1}{x^3} + \frac{C_1}{x^2}.$$

Це рівняння типу (141). Двічі проводячи інтегрування послідовно отримаємо,

$$y' = \frac{1}{2x^2} - \frac{C_1}{x} + C_2,$$

$$y = -\frac{1}{2x} - C_1 \ln |x| + C_2 x + C_3.$$

Останній вираз і буде загальним розв'язком вихідного рівняння.

6. 3. Рівняння, яке не утримує незалежної змінної

Таке рівняння має вигляд

$$F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0. \quad (156)$$

Введемо нову шукану функцію z за формулою

$$y' = z \quad (157)$$

та прийнемо y за незалежну змінну. Наголосимо, що ми фактично робимо подвійну заміну вводячи й нову функцію, і нову незалежну змінну. Знайдемо вирази $y'', y''', \dots, y^{(n)}$ через функцію z та її похідні по y . Будемо мати:

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{dy'}{dx} = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dy} z, \\ y''' &= \frac{dy''}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dz}{dy} z \right) = \frac{d}{dy} \left(\frac{dz}{dy} z \right) \frac{dy}{dx} = \left[\frac{d^2 z}{dy^2} z + \left(\frac{dz}{dy} \right)^2 \right] z, \\ \dots, y^{(n)} &= \omega \left(z, \frac{dz}{dy}, \frac{d^2 z}{dy^2}, \dots, \frac{d^{(n-1)} z}{dy^{(n-1)}} \right). \end{aligned} \quad (158)$$

Тому рівняння (156) прийме вигляд

$$F \left[y, z, \frac{dz}{dy} z, \dots, \omega \left(z, \frac{dz}{dy}, \frac{d^2 z}{dy^2}, \dots, \frac{d^{(n-1)} z}{dy^{(n-1)}} \right) \right]. \quad (159)$$

Це рівняння порядку $n - 1$. Якщо, вирішуючи його, ми знайдемо загальний розв'язок

$$z = \varphi(y, C_1, C_2, \dots, C_{n-1}), \quad (160)$$

то, повертаючись до шуканої функції y , отримаємо рівняння

$$y' = \varphi(y, C_1, C_2, \dots, C_{n-1}). \quad (161)$$

Після інтегрування отримаємо загальний інтеграл рівняння (156).

Особливі розв'язки рівняння (160) можуть призвести до особливих розв'язків рівняння (156).

Нарешті ми могли загубити розв'язки вигляду $y = \text{const}$, приймаючи y за незалежну змінну. Тому треба покласти у рівнянні (156) $y = b$. Будемо мати

$$F(b, 0, 0, \dots, 0) = 0. \quad (162)$$

Якщо отримане рівняння має дійсні корені $b = b_i$, то рівняння (156) допускає розв'язки вигляду $y = b_i$.

Приклад 6.3.

Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y' y''' - 3y''^2 = 0. \quad (163)$$

Розв'язування.

Рівняння (163) не утримує незалежної змінної. Тому робимо заміни згідно з (157)–(158).

$$y' = z(y), \quad y'' = \frac{dz}{dy}z, \quad y''' = \left[\frac{d^2z}{dy^2}z + \left(\frac{dz}{dy} \right)^2 \right] z.$$

Тоді отримаємо рівняння

$$z \left[z \left(\frac{dz}{dy} \right)^2 + z^2 \frac{d^2z}{dy^2} \right] - 3z^2 \left(\frac{dz}{dy} \right)^2 = 0.$$

Звівши подібні члени та скоротивши на z^2 будемо мати рівняння

$$z \frac{d^2z}{dy^2} - 2 \left(\frac{dz}{dy} \right)^2 = 0.$$

Зауважимо, що при діленні на z^2 ми могли загубити розв'язок

$$z = 0, \text{ або, } y' = 0 \Rightarrow y = c.$$

Так як отримане рівняння не утримує шуканої функції z , то знову робимо заміну

$$\frac{dz}{dy} = w(z), \quad \frac{d^2z}{dy^2} = w \frac{dw}{dz}.$$

Після цієї заміни отримаємо рівняння

$$zw \frac{dw}{dz} - 2w^2 = 0.$$

Розділимо змінні помноживши на $\frac{dz}{w^2z}$. Отримаємо рівняння з розділеними змінними

$$\frac{dw}{w} = 2 \frac{dz}{z}.$$

Звідси маємо розв'язок

$$\ln |w| = \ln z^2 + \ln |C_1|, \text{ або } w = C_1 z.$$

При розділенні змінних ми можемо загубити розв'язок $w = 0$.

Повернемося w до змінної z . Будемо мати

$$\frac{dz}{dy} = C_1 z^2.$$

Звідси

$$\frac{dz}{z^2} = C_1 y.$$

Маємо розв'язок

$$-\frac{1}{z} = C_1 y + C_2.$$

Можливий загублений розв'язок $z = 0$ ми вже розглянули раніше.

Нарешті повернемося до вихідної шуканої функції y . Маємо,

$$-\frac{dx}{dy} = C_1 y + C_2$$

або

$$-dx = (C_1 y + C_2) dy.$$

Звідси отримуємо загальний інтеграл вихідного рівняння.

$$x = -\left(\frac{C_1}{2} y^2 + C_2 y\right) + C_3.$$

Доведіть самостійно, що особливих розв'язків не існує.

6. 4. Рівняння однорідне відносно шуканої функції та її похідних

Розглянемо рівняння

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0. \quad (164)$$

Припустимо, що F є однорідна функція відносно $x, y, y', \dots, y^{(n)}$, тобто при будь-якому t має місце тотожність

$$F(x, ty, ty', \dots, ty^{(n)}) = t^m F(x, y, y', \dots, y^{(n)}). \quad (165)$$

Введемо нову невідому функцію z , поклавши

$$\frac{y'}{y} = z.$$

Тоді:

$$\begin{aligned} y' &= yz, \quad y'' = y'z + yz' = (yz)z + yz' = y(z^2 + z'), \\ y''' &= y(z^3 + 3zz' + z''), \dots, y^{(n)} = y\omega(z, z', \dots, z^{(n-1)}). \end{aligned} \quad (166)$$

Отже рівняння (164) прийме вигляд

$$F[x, y, yz, y(z^2 + z'), \dots, y\omega(z, z', \dots, z^{(n-1)})] = 0. \quad (167)$$

Тепер скористаємося властивістю однорідності функції F . У нашому випадку роль t грає y , тому можемо переписати рівняння (167) так:

$$y^m F[x, 1, z, z^2 + z', \dots, \omega(z, z', \dots, z^{(n-1)})] = 0.$$

Скорочуючи на y^m отримуємо рівняння $(n-1)$ -го порядку з шуканою функцією z .

Якщо ми зможемо знайти загальний розв'язок отриманого рівняння у вигляді

$$z = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_{n-1}),$$

то, замінюючи z на $\frac{y'}{y}$, отримаємо

$$\frac{y'}{y} = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_{n-1}).$$

Звідси,

$$y = C_n e^{\int \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_{n-1}) dx}. \quad (168)$$

Це і є загальний розв'язок рівняння (164).

Зауважимо, що ми робили скорочення y^m . При цьому ми могли загубити розв'язок $y = 0$, якщо $m > 0$. Але розв'язок $y = 0$ утримується у формулі загального розв'язку (168) при $C_n = 0$.

Приклад 6.4.

Знайти розв'язок рівняння

$$xyy'' + x(y')^2 - yy' = 0. \quad (169)$$

Розв'язування.

Очевидно, що рівняння (169) однорідне відносно функції y та її похідних. Тому робимо заміну $\frac{y'}{y} = z$. Далі маємо: $y' = yz$, $y'' = y(z^2 + z')$. Підставляємо ці вирази у рівняння (169),

$$xy^2(z^2 + z') + xy^2z^2 - y^2z = 0.$$

Скорочуючи на xy^2 отримаємо рівняння:

$$z' - \frac{1}{x}z = -2z^2. \quad (170)$$

Рівняння (169) є рівнянням Бернуллі для якого $p(x) = -\frac{1}{x}$, $q(x) = -2$, $m = 2$. Його загальний розв'язок знаходимо за формулою (99). Будемо мати:

$$z = \left[e^{\int -\frac{dx}{x}} \left(C_1 + \int 2e^{\int \frac{dx}{x}} dx \right) \right]^{-1} = \left[\frac{1}{x}(C_1 + x^2) \right]^{-1} = \frac{x}{x^2 + C_1}.$$

Також існує особливий розв'язок $z = 0$. Повертаючись до вихідної функції y маємо рівняння

$$\frac{y'}{y} = \frac{x}{x^2 + C_1}, \quad \text{або} \quad \frac{dy}{y} = \frac{x}{x^2 + C_1} dx.$$

Загальний розв'язок знаходимо за формулою:

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{x}{x^2 + C_1} dx, \quad \text{або} \quad \int d(\ln y) = \frac{1}{2} \int d[\ln(x^2 + C_1)].$$

Звідси маємо загальний розв'язок

$$y = C_2 \sqrt{x^2 + C_1}. \quad (171)$$

Особливому розв'язку $z = 0$ відповідають розв'язки $y = C$. При $C = 0$ розв'язок $y = 0$ утримується у сімействі (171), якщо $C_2 = 0$. А при $C \neq 0$ розв'язки $y = C$ будуть особливими.

7. Розділ 7

Загальна теорія лінійних диференціальних рівнянь n -го порядку — 1

7. 1. Загальні властивості лінійного рівняння

Лінійним диференціальним рівнянням n -го порядку називається рівняння вигляду:

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x). \quad (172)$$

Завжди будемо вважати, що коефіцієнти рівняння (172) $p_1(x), \dots, p_n(x)$ і права частина $f(x)$ задані й неперервні в інтервалі (a, b) . Якщо $f(x) \equiv 0$, то рівняння (172) називається лінійним однорідним. Воно має вигляд:

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0. \quad (173)$$

Якщо ж $f(x) \neq 0$, то рівняння (172) називається лінійним неоднорідним.

У подальшому для скорочення записів введемо у розгляд лінійний диференціальний оператор:

$$L(y) \equiv y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y. \quad (174)$$

Неважко переконатися, що оператор $L(y)$ володіє наступними властивостями:

1. Постійний множник можна виносити за знак оператора:

$$L(ky) = kL(y).$$

2. Оператор від суми двох функцій дорівнює сумі операторів від цих функцій:

$$L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2).$$

Використовуючи оператор (174), ми можемо переписати неоднорідне рівняння (172) у вигляді:

$$L(y) = f(x),$$

а однорідне рівняння (173) — у вигляді:

$$L(y) = 0.$$

7. 2. Інваріантність лінійного рівняння

Лінійне рівняння залишається лінійним при будь-якій заміні довільної сталої. Дійсно, покладемо

$$x = \varphi(t) \quad [t = \psi(x),]$$

де $\varphi(t)$ — будь-яка функція від t , визначена і неперервна разом зі своїми похідними до порядку n включно в інтервалі (a, b) , причому $a = \varphi(t_0)$, $b = \varphi(t_1)$, $\varphi'(t) \neq 0$ в усьому інтервалі (t_0, t_1) . Тоді, як ми встановили при вивченні лінійного рівняння першого порядку:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{\varphi'(t)},$$

так що похідна по x отримується множенням похідної по t на $\frac{1}{\varphi'(t)}$.

Тому:

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right) \cdot \frac{1}{\varphi'(t)} = \frac{d}{dt} \left[\frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{\varphi'(t)} \right] \cdot \frac{1}{\varphi'(t)} = \\ &= \frac{d^2y}{dt^2} \cdot \frac{1}{[\varphi'(t)]^2} - \frac{dy}{dt} \cdot \frac{\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3}, \end{aligned}$$

тобто $\frac{d^2y}{dx^2}$ виражається лінійно та однорідно через $\frac{dy}{dt}$ і $\frac{d^2y}{dt^2}$. Неважко переконатися, що взагалі $\frac{d^k y}{dx^k}$ виразиться у вигляді лінійної однорідної функції від $\frac{dy}{dt}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, ..., $\frac{d^k y}{dt^k}$, коефіцієнти якої неперервні в інтервалі (t_1, t_2) .

Отже, замінюючи у рівнянні (172) похідні по x їх виразами через похідні по t , а x — через $\varphi(t)$ і множачи обидві частини отриманого рівняння на $[\varphi'(t)]^n$, ми прийдемо знову до лінійного рівняння, причому його коефіцієнти й права частина будуть неперервними функціями від t , зокрема вони можуть виявитися постійними, в інтервалі (t_1, t_2) . Зрозуміло, що якщо виконати підстановку $x = \varphi(t)$ в однорідному лінійному рівнянні (173), ми, очевидно, знову отримаємо однорідне лінійне рівняння.

Якщо вдасться знайти загальний розв'язок перетвореного рівняння, то,

покладаючи у цьому розв'язку $t = \psi(x)$, ми отримаємо загальний розв'язок вихідного рівняння.

Також лінійне рівняння залишається лінійним при будь-якій лінійній заміні шуканої функції. Зробимо у вихідному рівнянні (172) лінійну заміну шуканої функції

$$y = \alpha(x)z + \beta(x), \quad (175)$$

де z — нова невідома функція, а $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ — довільні n разів неперервно диференційовані функції від x , причому $\alpha \neq 0$ в інтервалі (a, b) . Тоді:

$$\begin{aligned} y' &= \alpha'z + \alpha z' + \beta', \\ y'' &= \alpha''z + 2\alpha'z' + \alpha z'' + \beta'', \\ &\dots\dots\dots \\ y^{(n)} &= \alpha^{(n)}z + n\alpha^{(n-1)}z' + \frac{n(n-1)}{2!}\alpha^{(n-2)}z'' + \dots + \alpha z^{(n)} + \beta^{(n)}. \end{aligned} \quad (176)$$

Тому, якщо ми виконаємо в рівнянні (172) підстановку (175) і поділимо обидві частини отриманого рівняння на $\alpha(x)$, ми знову прийдемо до рівняння вигляду (172), коефіцієнти та права частина якого будуть неперервними в інтервалі (a, b) .

7. 3. Властивості розв'язків лінійного однорідного рівняння n -го порядку

Розглянемо лінійне однорідне рівняння:

$$L(y) = 0,$$

де $L(y)$ лінійний диференціальний оператор, визначений за формулою (174).

Функцію

$$z(x) = u(x) + iv(x),$$

де $u(x)$ і $v(x)$ — дійсні функції від дійсної змінної x , а i — уявна одиниця ($i^2 = -1$), будемо називати комплексною функцією від дійсної змінної x .

Функції $u(x)$ і $v(x)$ називаються відповідно дійсною та уявною частинами функції $z(x)$.

Комплексна функція від дійсної змінної x

$$y(x) = y_1(x) + iy_2(x) \quad (177)$$

називається комплексним розв'язком лінійного однорідного рівняння (173) в інтервалі (a, b) , якщо підстановка її в рівняння (173) обертає це рівняння у тотожність

$$L[y(x)] = 0 \quad (a < x < b). \quad (178)$$

Покажемо, що *будь-який комплексний розв'язок рівняння (173) породжує два дійсних розв'язки цього зівняння, а саме: якщо комплексна функція $y(x)$ є розв'язком рівняння (173), то її дійсна та уявна частини є дійсними розв'язками цього рівняння.*

Дійсно, нехай функція (177) є розв'язком рівняння (173). Тоді має місце тотожність (178). Використовуючи властивості оператора L отримаємо,

$$L[y(x)] = L[y_1(x) + iy_2(x)] = L[y_1(x)] + iL[y_2(x)].$$

Тому тотожність (178) можна переписати у вигляді

$$L[y_1(x)] + iL[y_2(x)] \equiv 0 \quad (a < x < b).$$

Звідси, на підставі означення рівності комплексних чисел, отримаємо

$$L[y_1(x)] \equiv 0, \quad L[y_2(x)] \equiv 0 \quad (a < x < b)$$

а це і означає, що $y_1(x)$ і $y_2(x)$ є розв'язками рівняння (173) в інтервалі (a, b) .

Доведемо три важливих властивості розв'язків лінійного однорідного рівняння.

1. *Якщо y_1 є розв'язком лінійного однорідного рівняння (173), тобто,*

$$L(y_1) \equiv 0,$$

то функція

$$y = Cy_1,$$

де C — довільна стала, також є розв'язком цього рівняння.

Дійсно, ми маємо:

$$L(Cy_1) = CL(y_1).$$

Але $L(y_1) \equiv 0$, тому $L(Cy_1) \equiv 0$, а це і означає, що Cy_1 є розв'язком рівняння (173).

2. Якщо y_1 і y_2 — розв'язки рівняння (173), то їх сума

$$y_1 + y_2$$

також є розв'язком рівняння (173).

Дійсно ми маємо:

$$L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2).$$

Але

$$L(y_1) \equiv 0, \quad L(y_2) \equiv 0.$$

Тому

$$L(y_1) + L(y_2) \equiv 0,$$

тобто $y_1 + y_2$ — розв'язок рівняння (173).

3. Якщо $y_1, y_2, \dots, y_m$ — розв'язки рівняння (173), то їх лінійна комбінація

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + \dots + C_my_m,$$

де $C_1, C_2, \dots, C_m$ — довільні сталі, також є розв'язком рівняння (173).

Ця властивість випливає з властивостей 1 і 2.

7. 4. Лінійна незалежність функцій

Функції $y_1, y_2, \dots, y_n$ називаються лінійно незалежними в інтервалі (a, b) , якщо між ними не існує співвідношень вигляду

$$\alpha_1y_1 + \alpha_2y_2 + \dots + \alpha_ny_n \equiv 0 \text{ при } a < x < b,$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ — постійні числа, які не дорівнюють нулю одночасно. В протилежному випадку функції $y_1, y_2, \dots, y_n$ називаються лінійно залежними в інтервалі (a, b) .

Для випадку двох функцій y_1 і y_2 поняття лінійної незалежності в інтервалі (a, b) зводиться, очевидно, до того, щоб відношення цих функцій $\frac{y_1}{y_2}$ не було постійним в інтервалі (a, b) ; при цьому мається на увазі, що це відношення визначено в усіх точках інтервалу (a, b) .

Очевидно, що, якщо одна з функцій $y_1, y_2, \dots, y_n$ тотожно дорівнює нулю в інтервалі (a, b) , то ці функції лінійно залежні в інтервалі (a, b) .

Дійсно, нехай, наприклад, $y_1 \equiv 0$ ($a < x < b$). Тоді при будь-якому $\alpha_1 \neq 0$ і при $\alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ буде виконуватися співвідношення (213), а це й означає, що функції $y_1, y_2, \dots, y_n$ лінійно залежні в інтервалі (a, b) .

Наведемо деякі приклади лінійно незалежних функцій.

Приклад 7.1. Функції $y_1 = 1, y_2 = x, \dots, y_n = x^{n-1}$ лінійно незалежні в інтервалі $(-\infty, +\infty)$ та взагалі у будь-якому інтервалі.

Дійсно співвідношення

$$\alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 x + \dots + \alpha_n x^{n-1} = 0,$$

в якому не всі α_i дорівнюють нулю, не може виконуватися тотожно, так як воно є алгебраїчним рівнянням $(n - 1)$ -го порядку, а як відомо з наслідку з основної теореми алгебри, таке рівняння не може мати більше $n - 1$ різних коренів.

Приклад 7.2. Функції $y_1 = e^x, y_2 = e^{-x}$ лінійно незалежні в будь-якому інтервалі, так як співвідношення

$$\alpha_1 e^x + \alpha_2 e^{-x} = 0,$$

де α_1 і α_2 не дорівнюють нулю одночасно, не може бути виконано більш ніж у одній точці. Це випливає з того, що

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^x}{e^{-x}} = e^{2x} \neq \text{const.}$$

Приклад 7.3. Функції $y_1 = \sin x$, $y_2 = \cos x$ лінійно незалежні в будь-якому інтервалі, так як співвідношення

$$\alpha_1 \sin x + \alpha_2 \cos x = 0,$$

де α_1 і α_2 не дорівнюють нулю одночасно, не може виконуватися тотожно в жодному інтервалі.

8. Розділ 8

Загальна теорія лінійних диференціальних рівнянь n -го порядку — 2

8. 1. Зауваження про необхідні та достатні умови

Припустимо сформульовано деяке твердження A . Умова B називається необхідною умовою для твердження A , якщо при невиконанні умови B твердження A напевне не виконується. Якщо ж умова B виконується, то твердження A може як виконуватися, так і не виконуватися.

Умова B називається достатньою умовою для твердження A , якщо при виконанні умови B твердження A завжди виконується. Якщо ж умова B не виконується, то твердження A може як виконуватися, так і не виконуватися.

Теорема яка складається з необхідної та достатньої умови називається критерієм. Фактично така теорема складається з двох теорем, прямої та оберненої. Доводяться критерії за наступною методикою.

Теорема (критерій). *Для того, щоб мало місце твердження A необхідно та достатньо виконання умови B .*

Доведення. Необхідність. Припускаємо, що виконується твердження A і доводимо виконання умови B .

Достатність. Припускаємо, що виконується умова B і доводимо виконання твердження A .

Словесним еквівалентом виразу "необхідно та достатньо" є вираз "тоді й тільки тоді".

8. 2. Необхідна умова лінійної залежності n функцій

Припустимо, що функції $y_1, y_2, \dots, y_n$ мають похідні порядку $n - 1$, й розглянемо визначник:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y'_1 & y'_2 & \dots & y'_n \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}. \quad (179)$$

Цей визначник називається визначником Вронського або вронськианом цих функцій.

Теорема 8.1. *Якщо функції $y_1, y_2, \dots, y_n$ лінійно залежні в інтервалі (a, b) , то їх вронскіан $W(x)$ дорівнює нулю в цьому інтервалі.*

Доведення. Дійсно, згідно з умовами теореми, ми маємо рівність

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_n y_n = 0 \quad (a < x < b),$$

де не всі α_i дорівнюють нулю. Тоді диференціюючи цю тотожність $n-1$ разів, отримаємо

$$\begin{aligned}\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_n y_n &= 0, \\ \alpha_1 y'_1 + \alpha_2 y'_2 + \dots + \alpha_n y'_n &= 0, \\ \\ \alpha_1 y^{(n-1)}_1 + \alpha_2 y^{(n-1)}_2 + \dots + \alpha_n y^{(n-1)}_n &= 0.\end{aligned} \tag{180}$$

Це лінійна алгебраїчна однорідна система рівнянь n -го порядку відносно всіх α_i . Вона має нетривіальний розв'язок при будь-якому значенні x на інтервалі (a, b) . Отже, визначник системи (180), який є визначником Вронського дорівнює нулю у кожній точці інтервалу $a < x < b$.

Зауважимо, що доведена необхідна умова лінійної залежності n функцій $y_1, y_2, \dots, y_n$ не є, взагалі кажучи, достатньою.

8. 3. Необхідна та достатня умова лінійної незалежності n розв'язків лінійного однорідного рівняння n -го порядку

Нехай тепер кожна з функцій $y_1, y_2, \dots, y_n$ є розв'язком лінійного однорідного рівняння n -го порядку. Тоді відносно вронскіана цих функцій має місце теорема.

Теорема 8.2. Якщо функції $y_1, y_2, \dots, y_n$ лінійно незалежні розв'язки рівняння (173), всі коефіцієнти якого неперевні в інтервалі (a, b) , то вронскіан цих розв'язків не дорівнює нулю в жодній точці інтервалу (a, b) .

Доведення. Припустимо протилежне. Нехай $W(x_0) = 0$, причому $a < x_0 < b$. Складемо систему n рівнянь:

$$\begin{aligned} C_1(y_1)_0 + C_2(y_2)_0 + \dots + C_n(y_n)_0 &= 0, \\ C_1(y'_1)_0 + C_2(y'_2)_0 + \dots + C_n(y'_n)_0 &= 0, \\ &\vdots \\ C_1(y^{(n-1)}_1)_0 + C_2(y^{(n-1)}_2)_0 + \dots + C_n(y^{(n-1)}_n)_0 &= 0, \end{aligned} \tag{181}$$

де $(f)_0$ є значенням функції $f(x)$ у точці $x = x_0$, так що, наприклад, $(y_1)_0 = y_1(x_0)$.

Визначник системи (181) дорівнює $W(x_0)$. Так як, за припущенням, $W(x_0) = 0$, то ця система має ненульовий розв'язок:

$$\begin{aligned} C_1 &= C_1^{(0)}, C_2 = C_2^{(0)}, \dots, C_n = C_n^{(0)} \\ C_1^{(0)}(y_1)_0 + C_2^{(0)}(y_2)_0 + \dots + C_n^{(0)}(y_n)_0 &= 0, \\ C_1^{(0)}(y'_1)_0 + C_2^{(0)}(y'_2)_0 + \dots + C_n^{(0)}(y'_n)_0 &= 0, \\ \dots\dots\dots \\ C_1^{(0)}(y_1^{(n-1)})_0 + C_2^{(0)}(y_2^{(n-1)})_0 + \dots + C_n^{(0)}(y_n^{(n-1)})_0 &= 0, \end{aligned} \tag{182}$$

причому не всі $C_i^{(0)}$ дорівнюють нулю.

Складемо тепер лінійну комбінацію розв'язків $y_1, y_2, \dots, y_n$:

$$y = C_1^{(0)}y_1 + C_2^{(0)}y_2 + \dots + C_n^{(0)}y_n. \quad (183)$$

Згідно з третьою властивістю розв'язків лінійного однорідного рівняння, ця комбінація також є розв'язком рівняння (173). Рівності (182) показують, що в точці $x = x_0$ розв'язок (183) обертається в нуль разом зі своїми похідними до $(n - 1)$ -го порядку. Але тоді, на підставі теореми Коші-Пікара, для випадку лінійного однорідного рівняння будемо мати розв'язок $y \equiv 0$. Тобто ми маємо тотожність

$$C_1^{(0)}y_1 + C_2^{(0)}y_2 + \dots + C_n^{(0)}y_n \equiv 0 \quad (a < x < b),$$

у якій не всі $C_i^{(0)}$ дорівнюють нулю. Це означає, що розв'язки $y_1, y_2, \dots, y_n$ є лінійно залежними в інтервалі (a, b) . Отримали протиріччя, яке доводить теорему.

З доведених двох теорем витікає, що *для того, щоб n розв'язків рівняння (173) були лінійно незалежними в інтервалі (a, b) , необхідно та достатньо, щоб вронскіан цих розв'язків не обертався в нуль у жодній точці цього інтервалу.*

Дійсно, якщо розв'язки $y_1, y_2, \dots, y_n$ є лінійно незалежними в інтервалі (a, b) , то $W(x) \neq 0$ в (a, b) . Навпаки, якщо $W(x) \neq 0$ в (a, b) , то розв'язки $y_1, y_2, \dots, y_n$ лінійно незалежні в інтервалі (a, b) , так як у протилежному випадку $W(x)$ дорівнював би нулю в усьому інтервалі (a, b) .

Проте виявляється, що для встановлення лінійної незалежності n розв'язків рівняння (173) достатньо переконатися, що $W(x)$ не обертається в нуль хоча б у одній точці інтервалу (a, b) . Це впливає з двох властивостей вронскіана n розв'язків лінійного однорідного рівняння.

1⁰. *Якщо вронскіан n розв'язків рівняння (173) дорівнює нулю в одній точці $x = x_0$ з інтервалу (a, b) , у якому всі коефіцієнти рівняння (173) неперервні, то він дорівнює нулю в усіх точках цього інтервалу.*

Дійсно, якщо $W(x_0) = 0$, то за тільки що доведеною теоремою функції

$y_1, y_2, \dots, y_n$ лінійно залежні в інтервалі (a, b) . Але тоді, за теоремою 8.1 вронскіан $W(x)$ тотожно дорівнює нулю в усьому інтервалі (a, b) .

2⁰. Якщо вронскіан n розв'язків рівняння (173) відмінний від нуля в одній точці $x = x_0$ з інтервалу (a, b) , то він відмінний від нуля в усіх точках цього інтервалу.

Дійсно, якщо б $W(x)$ обернувся в нуль у деякій точці інтервалу (a, b) , то, за властивістю 1⁰, він дорівнював би нулю в усіх точках інтервалу (a, b) , у тому числі в точці $x = x_0$, що суперечить припущенню.

Таким чином, для лінійної незалежності n розв'язків рівняння (173) в інтервалі (a, b) , у якому всі коефіцієнти рівняння (173) неперевні, необхідно та достатньо, щоб їх вронскіан був відмінний від нуля хоча б у одній точці цього інтервалу.

8. 4. Фундаментальна система розв'язків

Сукупність n розв'язків рівняння (173), визначених та лінійно незалежних в інтервалі (a, b) називається фундаментальною системою розв'язків у цьому інтервалі. З доведеного у попередньому параграфі витікає, що для того щоб система n розв'язків була фундаментальною, необхідно та достатньо, щоб вронскіан цих розв'язків був відмінний від нуля хоча б у одній точці інтервалу неперервності коефіцієнтів рівняння (173). Всі розв'язки, які входять у фундаментальну систему, очевидно, ненульові.

Теорема 8.3. *Якщо коефіцієнти рівняння (173) неперевні в інтервалі (a, b) , то існує фундаментальна система розв'язків визначених у цьому інтервалі. (без доведення)*

Знання фундаментальної системи розв'язків дозволяє побудувати загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння. А саме, має місце наступна теорема.

Основна теорема. *Якщо $y_1, y_2, \dots, y_n$ — фундаментальна система розв'яз-*

ків рівняння (173), то формула

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n, \quad (184)$$

де $C_1, C_2, \dots, C_n$ – довільні сталі числа, визначає загальний розв'язок рівняння (173) в області

$$a < x < b, \quad |y| < +\infty, \quad |y'| < +\infty, \dots, |y^{(n-1)}| < +\infty, \quad (185)$$

тобто в усій області існування рівняння (173).

Доведення. Система, яка складається з рівності (184) та рівностей, отриманих $(n - 1)$ – кратним диференціюванням цієї рівності:

$$\begin{aligned} y &= C_1y_1 + C_2y_2 + \dots + C_ny_n \\ y' &= C_1y'_1 + C_2y'_2 + \dots + C_ny'_n \\ &\vdots \\ y^{(n-1)} &= C_1y_1^{(n-1)} + C_2y_2^{(n-1)} + \dots + C_ny_n^{(n-1)} \end{aligned} \tag{186}$$

може бути розв’язана відносно довільних сталих $C_1, C_2, \dots, C_n$ в області (185). Дійсно, відносно $C_1, C_2, \dots, C_n$ система (185) є лінійною алгебраїчною системою рівнянь, визначник якої $W(x)$ відмінний від нуля, так як $y_1, y_2, \dots, y_n$ — фундаментальна система розв’язків.

Крім того, за третьою властивістю розв'язків лінійного однорідного рівняння, функція (184) є розв'язком рівняння (173) при всіх значеннях довільних сталих $C_1, C_2, \dots, C_n$.

Тому, згідно визначення загального розв'язку рівняння n -го порядку, функція (184) є загальним розв'язком рівняння (173) в області (185). Формула (184) утримує в собі всі розв'язки рівняння (173).

Для знаходження частинного розв'язку, який задовольняє початковим умовам:

$$y = y_0, \quad y' = y'_0, \dots, y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)} \quad \text{при } x = x_0, \quad (187)$$

де $(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)})$ – будь-яка точка області (185), потрібно підставити початкові дані в систему (186). Отримаємо систему:

[illegible]

Система (185) завжди має єдиний розв'язок

$$C_1 = C_1^{(0)}, C_2 = C_2^{(0)}, \dots, C_n = C_n^{(0)},$$

так як її визначник $W(x_0) \neq 0$. Підставляючи ці значення $C_1, C_2, \dots, C_n$ у загальний розв'язок (184) знайдемо:

$$y = C_1^{(0)}y_1 + C_2^{(0)}y_2 + \dots + C_n^{(0)}y_n. \quad (189)$$

Отримали розв'язок задачі Коші з початковими даними (187).

Приклад 8.1. Знайти фундаментальну систему розв’язків та побудувати загальний розв’язок рівняння

$$y'' - y = 0.$$

Враховуючи, що задане лінійне однорідне рівняння другого порядку має достатньо простий вигляд, спробуємо інтуїтивно підібрати його частинні розв'язки. Легко здогадатися, що функція $y_1 = e^x$, буде розв'язком цього рівняння. Також очевидно, що функція $y_2 = e^{-x}$ ще один розв'язок цього рівняння. У прикладі 7.1 ми вже довели, що функції y_1 і y_2 — лінійно незалежні в інтервалі $(-\infty < x < +\infty)$. Отже ці функції утворюють фундаментальну систему розв'язків. Тому, згідно з основною теоремою, формула

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x},$$

де C_1, C_2 – довільні сталі визначає загальний розв'язок рівняння.

Приклад 8.2. Знайти фундаментальну систему розв'язків та побудувати загальний розв'язок рівняння

$$y'' + y = 0.$$

Легко здогадатися, що функції $y_1 = \sin x$ і $y_2 = \cos x$ будуть розв'язками цього рівняння в інтервалі $(-\infty < x < +\infty)$. Доведемо, що ці функції лінійно незалежні, застосовуючи визначник Вронського. Так як $y'_1 = \cos x$, $y'_2 = -\sin x$, то будемо мати такий визначник Вронського:

$$\begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} = -\sin^2 x - \cos^2 x = -1 \neq 0.$$

Отже функції y_1, y_2 — лінійно незалежні. На підставі основної теореми загальний розв'язок рівняння визначається за формулою:

$$y = C_1 \sin x + C_2 \cos x,$$

де C_1, C_2 — довільні сталі.

Теорема 8.4. *Лінійне однорідне рівняння (173) не може мати більше ніж n лінійно незалежних частинних розв'язків.*

Доведення. Дійсно, нехай ми маємо $n + 1$ частинних розв'язків

$$y_1, y_2, \dots, y_n, y_{n+1}.$$

Розглянемо перші n розв'язків. Якщо вони лінійно залежні, то і всі наші $n + 1$ розв'язків лінійно залежні, так як ми будемо мати співвідношення

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_n y_n + 0 \cdot y_{n+1} = 0,$$

де не всі α_i дорівнюють нулю. Якщо ж розв'язки $y_1, y_2, \dots, y_n$ лінійно незалежні, то, згідно з основною теоремою, будь-який розв'язок, у тому числі й y_{n+1} виражається лінійно через $y_1, y_2, \dots, y_n$:

$$y_{n+1} = C_1^{(0)} y_1 + C_2^{(0)} y_2 + \dots + C_n^{(0)} y_n,$$

так що розв'язки $y_1, y_2, \dots, y_n, y_{n+1}$ знову виявляються лінійно залежними.

9. Розділ 9

Загальна теорія лінійних диференціальних рівнянь n -го порядку — 3

Неоднорідне рівняння

9. 1. Структура загального розв'язку неоднорідного рівняння.

Розглянемо тепер неоднорідне рівняння

$$L(y) \equiv y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x). \quad (190)$$

Відносно коефіцієнтів (190) $p_1(x), \dots, p_n(x)$ і правої частини $f(x)$ будемо припускати, що вони неперервні в інтервалі (a, b) .

Припустимо, що для рівняння (190) нам вдалося знайти частинний розв'язок y_1 , так що ми маємо тотожність

$$y_1^{(n)} + p_1(x)y_1^{(n-1)} + p_2(x)y_1^{(n-2)} + \dots + p_{n-1}(x)y_1' + p_n(x)y_1 \equiv f(x), \quad (191)$$

або

$$L(y_1) \equiv f(x). \quad (192)$$

Введемо нову невідому функцію z за формулою

$$y = y_1 + z. \quad (193)$$

Підставляючи функцію (193) в рівняння (190), отримаємо:

$$L(y_1 + z) = f(x).$$

Але $L(y_1 + z) = L(y_1) + L(z)$, так що ми маємо

$$L(y_1) + L(z) = f(x). \quad (194)$$

Звідси, на підставі (192), знаходимо, що z повинна задовольняти рівнянню

$$L(z) = 0 \quad (195)$$

або

$$L(z) \equiv z^{(n)} + p_1(x)z^{(n-1)} + p_2(x)z^{(n-2)} + \dots + p_{n-1}(x)z' + p_n(x)z = 0. \quad (196)$$

Це рівняння називається лінійним однорідним рівнянням n -го порядку, відповідним лінійному неоднорідному рівнянню (190).

Загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння (195) може бути записаний у вигляді

$$z = C_1 z_1 + C_2 z_2 + \dots + C_n z_n, \quad (197)$$

де $z_1, z_2, \dots, z_n$ — деяка фундаментальна система розв'язків цього рівняння, а $C_1, C_2, \dots, C_n$ — довільні сталі.

Підставляючи (197) у (193), отримаємо:

$$y = y_1 + C_1 z_1 + C_2 z_2 + \dots + C_n z_n. \quad (198)$$

Всі розв'язки рівняння (190) утримуються в формулі (198). Ця формула зображує загальний розв'язок рівняння (190) в області

$$a < x < b, \quad |y| < +\infty, \quad |y'| < +\infty, \dots, |y^{(n-1)}| < +\infty. \quad (199)$$

Таким чином, для знаходження загального розв'язку неоднорідного рівняння (190) достатньо знайти будь-який частинний розв'язок цього рівняння й додати до нього загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння (195).

Припустимо, що права частина неоднорідного рівняння (190) є сумою двох доданків, так що це рівняння має вигляд:

$$L(y) = f_1(x) + f_2(x). \quad (200)$$

Припустимо, що y_1 — частинний розв'язок рівняння

$$L(y) = f_1(x),$$

а y_2 — частинний розв'язок рівняння

$$L(y) = f_2(x).$$

Тоді $y_1 + y_2$ є частинним розв'язком рівняння (200)

Дійсно ми маємо

$$L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2).$$

Але так як $L(y_1) \equiv f_1(x)$, $L(y_2) \equiv f_2(x)$, то

$$L(y_1 + y_2) \equiv f_1(x) + f_2(x)$$

тобто $y_1 + y_2$ є частинним розв'язком рівняння (200).

Доведене твердження поширюється й на випадок m доданків у правій частині (200).

9. 2. Метод варіації довільних сталих. Метод Лагранжа

Покажемо, що загальний розв'язок неоднорідного рівняння (190) можна знайти в квадратурах, якщо відомий загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння (195)

Будемо шукати загальний розв'язок рівняння (190) у такому ж вигляді, як і загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння (195), замінюючи довільні сталі деякими неперервно диференційованими функціями від x , тобто покладемо

$$y = C_1(x)z_1 + C_2(x)z_2 + \dots + C_n(x)z_n, \quad (201)$$

$z_1, z_2, \dots, z_n$ — деяка фундаментальна система розв'язків рівняння (195).

Виберемо функції $C_1(x), C_2(x), \dots, C_n(x)$ так, щоб функція y , визначена за формулою (201), була б загальним розв'язком рівняння (190).

Шукані функції $C_1(x), C_2(x), \dots, C_n(x)$ підкоряються тільки одному співвідношенню, яке може бути отримане в результаті підстановки функції (201) у рівняння (190). Тому для визначення цих функцій ми можемо підкорити їх будь-яким $n - 1$ умовам.

Щоб отримати систему для визначення $C_i(x)$ найбільш простою, ми будемо, обчислюючи послідовні похідні $y', \dots, y^{(n-1)}$ від виразу (201), кожного

разу покладати рівною нулю сукупність членів, які утримують $C'_i(x)$. Таким чином ми прийдемо до рівностей

$$\begin{aligned}
y &= C_1(x)z_1 + C_2(x)z_2 + \dots + C_n(x)z_n, \\
y' &= C_1(x)z'_1 + C_2(x)z'_2 + \dots + C_n(x)z'_n + \\
&\quad \underbrace{+C_1'(x)z_1 + C_2'(x)z_2 + \dots + C_n'(x)z_n}_0, \\
y'' &= C_1(x)z''_1 + C_2(x)z''_2 + \dots + C_n(x)z''_n + \\
&\quad \underbrace{+C_1'(x)z'_1 + C_2'(x)z'_2 + \dots + C_n'(x)z'_n}_0, \\
&\dots\dots\dots \\
y^{(n-1)} &= C_1(x)z_1^{(n-1)} + C_2(x)z_2^{(n-1)} + \dots + C_n(x)z_n^{(n-1)} + \\
&\quad \underbrace{+C_1'(x)z_1^{(n-2)} + C_2'(x)z_2^{(n-2)} + \dots + C_n'(x)z_n^{(n-2)}}_0, \\
y^{(n)} &= C_1(x)z_1^{(n)} + C_2(x)z_2^{(n)} + \dots + C_n(x)z_n^{(n)} + \\
&\quad +C_1'(x)z_1^{(n-1)} + C_2'(x)z_2^{(n-1)} + \dots + C_n'(x)z_n^{(n-1)}.
\end{aligned} \tag{202}$$

Підставимо ці значення $y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}, y^{(n)}$ у рівняння (190). Для цього помножимо рівності (202) відповідно на $p_n(x), p_{n-1}(x), p_{n-2}(x), \dots, p_1(x), 1$ додамо почленно та прирівняємо праву частину отриманої рівності правій частини рівняння (190):

$$C_1(x)L(z_1) + C_2(x)L(z_2) + \dots + C_n(x)L(z_n) + \\ + C'_1(x)z_1^{(n-1)} + C'_2(x)z_2^{(n-1)} + \dots + C'_n(x)z_n^{(n-1)} = f(x).$$

Так як $L(z_1) = L(z_2) = \dots = L(z_n) = 0$, то остання рівність перепишеться так:

$$C'_1(x)z_1^{(n-1)} + C'_2(x)z_2^{(n-1)} + \dots + C'_n(x)z_n^{(n-1)} = f(x).$$

Таким чином, для визначення $C'_i(x)$ отримаємо наступну систему рівнянь:

[illegible]

Система (203) є алгебраїчною лінійною неоднорідною системою відносно $C'_i(x)$. Визначник цієї системи збігається з вронскіаном $W(x)$, який відмінний від нуля в усьому інтервалі (a, b) . Розв'язок системи (203) може бути знайдений за формулами Крамера.

$$C'_i(x) = \frac{W_i(x)}{W(x)} \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (204)$$

де $W_i(x)$ — отриманий з $W(x)$ заміною i -го стовпця стовпцем вільних членів системи (203).

З рівностей (204) знаходимо:

$$C_i(x) = \int \frac{W_i(x)}{W(x)} dx + C_i \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

де C_i – довільні сталі.

Підставляючи знайдені значення функцій $C_i(x)$ у формулу (201), отримаємо:

$$y = \sum_{i=1}^n z_i \int \frac{W_i(x)}{W(x)} dx + \sum_{i=1}^n C_1 z_i. \quad (205)$$

Покладаючи тут $C_1 = C_2 = \dots = C_n = 0$, отримаємо частинний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння (190):

$$y_1 = \sum_{i=1}^n z_i \int \frac{W_i(x)}{W(x)} dx, \quad (206)$$

так що (205) можна записати у вигляді (198) і, отже, розв'язок, який визна-чається за формулою (205), є загальним розв'язком рівняння (190) в області (199).

10. Розділ 10

Лінійні диференціальні рівняння n -го порядку з постійними коефіцієнтами — 1

10. 1. Попередні зауваження.

Розглянемо лінійне рівняння n -го порядку:

$$L(y) \equiv y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x), \quad (207)$$

де коефіцієнти $a_1, a_2, \dots, a_n$ — постійні дійсні числа, а $f(x)$ — функція від x , неперервна в інтервалі (a, b) . Зокрема, $f(x)$ може бути постійною в цьому інтервалі.

Як ми встановили на попередній лекції, інтегрування рівняння (207) зводиться до інтегрування відповідного однорідного рівняння. Тому спочатку ми вивчимо питання про побудову загального розв'язку лінійного однорідного рівняння

$$L(y) \equiv y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0. \quad (208)$$

На підставі основної теореми, задача побудови загального розв'язку рівняння (208) буде вирішена, якщо ми знайдемо хоча б одну систему фундаментальних розв'язків. Далі ми покажемо, що фундаментальна система розв'язків рівняння (208) може бути побудована з елементарних функцій.

10. 2. Побудова фундаментальної системи розв'язків і загального розв'язку лінійного однорідного рівняння у випадку різних коренів характеристичного рівняння.

Дотримуючись методу Ейлера будемо шукати частинний розв'язок рівняння (208) у вигляді:

$$y = e^{\lambda x}, \quad (209)$$

де λ — деяке, поки що невизначене, постійне число, яке може бути, як дійсним, так і комплексним.

Підставляючи (209) у праву частину рівняння (208), тобто обчислюючи оператор $L(y)$ від функції $y = e^{\lambda x}$ отримаємо:

$$L(e^{\lambda x}) = (\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n)e^{\lambda x} = P(\lambda)e^{\lambda x}, \quad (210)$$

де

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n. \quad (211)$$

З (210) випливає, що функція $y = e^{\lambda x}$ є розв'язком рівняння (208), тобто $L(e^{\lambda x}) \equiv 0$, тоді і тільки тоді, коли λ є коренем рівняння $P(\lambda) = 0$ або

$$P(\lambda) \equiv \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0. \quad (212)$$

Це рівняння називається *характеристичним рівнянням*, його корені — *характеристичними числами* лінійного однорідного рівняння (208).

Легко побачити, що для складання характеристичного рівняння достатньо замінити в рівнянні (208) похідну k -го порядку через k -тий степінь λ , при цьому, як завжди, домовимося вважати, що похідна нульового порядку від функції є сама функція, так що при складанні характеристичного рівняння потрібно замінювати y на 1.

Припустимо, що всі корені характеристичного рівняння $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ різні та дійсні. Підставляючи їх по чергову у формулу (209), ми знайдемо n дійсних частинних розв'язків рівняння (208):

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, y_2 = e^{\lambda_2 x}, \dots, y_n = e^{\lambda_n x}. \quad (213)$$

Доведемо, що функції $e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \dots, e^{\lambda_n x}$ лінійно незалежні в інтервалі $(-\infty, +\infty)$. Для цього побудуємо й обчислимо вронскіан цих функцій. Будемо мати

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} & \dots & e^{\lambda_n x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} & \dots & \lambda_n e^{\lambda_n x} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 x} & \lambda_2^{n-1} e^{\lambda_2 x} & \dots & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n x} \end{vmatrix} =$$

$$= e^{(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} \neq 0,$$

так як $e^{(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)x} > 0$ при $x \in (-\infty, +\infty)$, а другий множник є визначником Вандермонда, який не дорівнює нулю, коли всі числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ різні.

Давайте переконаємося в цьому для випадку $n = 2$. Будемо мати

$$W(x) = e^{(\lambda_1 + \lambda_2)x} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{vmatrix} = e^{(\lambda_1 + \lambda_2)x} (\lambda_2 - \lambda_1).$$

При будь-якому x , $e^{(\lambda_1 + \lambda_2)x} > 0$. Тому, якщо $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то $W(x) \neq 0$.

Отже вронскіан не дорівнює нулю звідки витікає, що функції $e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \dots, e^{\lambda_n x}$ лінійно незалежні в інтервалі $(-\infty, +\infty)$. Це означає, що розв'язки (213) утворюють фундаментальну систему розв'язків рівняння (208).

Тому, на підставі основної теореми, формула

$$y = \sum_{k=1}^n C_k e^{\lambda_k x}, \quad (214)$$

де $C_1, C_2, \dots, C_n$ — довільні сталі, визначає загальний розв'язок рівняння (208) в області

$$|x| < +\infty, |y| < +\infty, |y'| < +\infty, \dots, |y^{(n-1)}| < +\infty. \quad (215)$$

Припустимо тепер, що всі корені характеристичного рівняння, як і раніше різні, але серед них є комплексні.

Нехай $a + ib$ — комплексний корінь характеристичного рівняння. Тоді характеристичне рівняння має й спряжений корінь $a - ib$, так як всі його коефіцієнти дійсні. Кореню $a + ib$ відповідає, на підставі формули (209) розв'язок

$$y = e^{(a+ib)x}. \quad (216)$$

Цей розв'язок комплексний. На підставі доведеного в параграфі 7.3 дійсна та уявна частина розв'язку (216), тобто функції

$$e^{ax} \cos bx, \quad e^{ax} \sin bx \quad (217)$$

також є розв'язками рівняння (208).

Доведемо, що розв'язки (217) лінійно незалежні. Для цього побудуємо й обчислимо вронскіан цих розв'язків,

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{ax} \cos bx & e^{ax} \sin bx \\ ae^{ax} \cos bx - be^{ax} \sin bx & ae^{ax} \sin bx + be^{ax} \cos bx \end{vmatrix} =$$

$$= e^{ax} \begin{vmatrix} \cos bx & \sin bx \\ a \cos bx - b \sin bx & a \sin bx + b \cos bx \end{vmatrix} = be^{ax} \neq 0 \text{ при } x \in (-\infty, +\infty).$$

Отже розв'язки (217) лінійно незалежні при $x \in (-\infty, +\infty)$.

Аналогічно спряженому кореню $a - ib$ відповідають також два дійсних лінійно незалежних розв'язки

$$e^{ax} \cos bx, \quad -e^{ax} \sin bx.$$

Але перший з цих розв'язків збігається з першим з розв'язків (217), а другий з цих розв'язків і другий з розв'язків (217), очевидно, лінійно залежні, так що спряжений корінь не породжує нових лінійно незалежних частинних розв'язків.

Таким чином, якщо всі корені характеристичного рівняння різні, але серед них є комплексні, то кожному дійсному кореню λ_k відповідає розв'язок $e^{\lambda_k x}$, а кожній комплексно спряженій парі коренів $a \pm ib$, відповідають розв'язки (217). Зокрема, кожній парі спряжених чисто уявних коренів $\pm ib$ відповідають два дійсні лінійно незалежні частинні розв'язки

$$\cos bx, \quad \sin bx.$$

Всього ми отримуємо n дійсних розв'язків вигляду:

$$e^{\lambda_k x}, \quad e^{ax} \cos bx, \quad -e^{ax} \sin bx, \tag{218}$$

які утворюють фундаментальну систему розв'язків, так як ці розв'язки лінійно незалежні в інтервалі $(-\infty, +\infty)$. Зауважимо, що лінійна незалежність цих розв'язків витікає з лінійної незалежності функцій $e^{\lambda_\nu x}$ при різних λ_ν , яку ми вже довели.

За основною теоремою ми отримаємо загальний розв'язок рівняння (208) в області (215) у вигляді лінійної комбінації всіх частинних розв'язків (218) з довільними постійними коефіцієнтами $C_1, C_2, \dots, C_n$. При цьому дійсному кореню λ_k у загальному розв'язку відповідає вираз $C_k e^{\lambda_k x}$, а двом комплексним кореням $a \pm ib$ відповідає вираз вигляду

$$e^{ax}(C_1 \cos bx + C_2 \sin bx).$$

Зокрема двом спряженим чисто уявним кореням $\pm ib$ відповідає вираз вигляду

$$C_1 \cos bx + C_2 \sin bx.$$

Приклад 10.1. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0.$$

Розв'язування. Складаємо характеристичне рівняння

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0.$$

Методом підбору (серед дільників вільного члену 6) знаходимо корені цього рівняння. Маємо $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$. Всі корені дійсні та прості, тому функції

$$e^x, e^{2x}, e^{3x}$$

утворюють фундаментальну систему розв'язків. Загальний розв'язок має вигляд

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x}.$$

Приклад 10.2. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y''' - 3y'' + 2y' = 0.$$

Розв'язування. Складаємо характеристичне рівняння

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda = 0 \text{ або } \lambda(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = 0.$$

Очевидно, що це рівняння також має прості дійсні корені: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$ причому один з цих коренів дорівнює нулю. У цьому випадку фундаментальна система розв'язків має вигляд

$$1, e^x, e^{2x}.$$

Загальний розв'язок буде визначатися за формулою:

$$y = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{2x}.$$

Приклад 10.3. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y''' - y'' + 4y' - 4y = 0.$$

Розв'язування. Складаємо характеристичне рівняння

$$\lambda^3 - \lambda^2 + 4\lambda - 4 = 0.$$

Методом підбору (серед дільників вільного члену -4) знаходимо дійсний корінь $\lambda_1 = 1$. Далі ділимо ліву частину характеристичного рівняння на двучлен $\lambda - 1$ за схемою Хорнера

$$\begin{array}{r} * \quad 1 \quad -1 \quad 4 \quad -4 \\ \quad 1 \quad 1 \quad \quad 0 \quad 4 \quad \quad 0. \end{array}$$

Отримаємо квадратне рівняння

$$\lambda^2 + 4 = 0,$$

яке має чисто уявні корені $\lambda_{2,3} = \pm 2i$. Тому фундаментальну систему розв'язків складають функції

$$e^x, \cos 2x, \sin 2x,$$

а загальний розв'язок буде мати вигляд

$$y = C_1 e^x + C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x.$$

10. 3. Випадок наявності кратних коренів характеристичного рівняння

Нехай λ_1 є кратним коренем характеристичного рівняння (дійсним чи комплексним), так що

$$P(\lambda_1) = P'(\lambda_1) = \dots = P^{(k-1)}(\lambda_1) = 0, \text{ але } P^{(k)}(\lambda_1) \neq 0. \quad (219)$$

Щоб знайти розв'язки, відповідні характеристичному значенню λ_1 , зробимо таким чином. Спочатку продиференціюємо тотожність

$$L(e^{\lambda x}) = P(\lambda_1)e^{\lambda x}$$

m разів по λ , використовуючи при диференціюванні лівої частини формулу

$$\frac{\partial^m}{\partial \lambda^m} L(u) = L\left(\frac{\partial^m u}{\partial \lambda^m}\right) \quad (u = e^{\lambda x}),$$

тобто виконуючи диференціювання по λ під знаком оператора, а при диференціюванні правої частини формулу Лейбниця для m -тої похідної від добутку функцій

$$(uv)^{(m)} = \sum_{j=0}^m C_m^j u^{(j)} v^{(m-j)} \quad (C_m^j = \frac{m!}{(m-j)! \cdot j!}, \quad C_m^0 = 1).$$

Далі, покладаючи $u(\lambda) = P(\lambda)$, $v(\lambda) = e^{\lambda x}$, отримаємо:

$$L(x^m e^{\lambda x}) = \sum_{j=0}^m C_m^j P^{(j)}(\lambda) x^{m-j} e^{\lambda x}.$$

Звідси, на підставі (219), отримаємо:

$$L(x^m e^{\lambda_1 x}) \equiv 0 \quad \text{при } m = 0, 1, 2, \dots, k-1,$$

тобто функції

$$e^{\lambda_1 x}, x e^{\lambda_1 x}, \dots, x^{k-1} e^{\lambda_1 x} \quad (220)$$

є розв'язками рівняння (208).

Можна довести, що функції (220) лінійно незалежні в інтервалі $(-\infty, +\infty)$. Причому, якщо λ_1 є дійсним коренем, то розв'язки (220) також дійсні.

Таким чином, будь-якому дійсному кореню λ_1 кратності k відповідає k дійсних лінійно незалежних розв'язків вигляду (220).

Якщо характеристичне рівняння має комплексний корінь $a + ib$ кратності k , то воно має й спряжений комплексний корінь $a - ib$ кратності k . Згідно з (220), кореню $a + ib$ відповідає k розв'язків:

$$e^{(a+ib)x}, xe^{(a+ib)x}, \dots, x^{k-1}e^{(a+ib)x}.$$

Ці розв'язки комплексні. Виділяючи в цих розв'язках дійсні та уявні частини, отримаємо $2k$ дійсних розв'язків:

$$\begin{aligned} e^{ax} \cos bx, xe^{ax} \cos bx, \dots, x^{k-1}e^{ax} \cos bx, \\ e^{ax} \sin bx, xe^{ax} \sin bx, \dots, x^{k-1}e^{ax} \sin bx, \end{aligned} \quad (221)$$

які лінійно незалежні в інтервалі $(-\infty, +\infty)$.

Легко переконатися, що як і у випадку простого комплексного кореня, спряжений корінь $a - ib$ не породжує нових лінійно незалежних частинних розв'язків.

Таким чином, кожній парі комплексно спряжених коренів кратності k відповідає $2k$ дійсних лінійно незалежних розв'язків вигляду (221).

У загальному випадку, побудувавши дійсні розв'язки, які відповідають всім типам коренів характеристичного рівняння, ми отримаємо фундаментальну систему розв'язків.

Приклад 10.4. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 0.$$

Складаємо характеристичне рівняння

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0 \quad \text{або} \quad (\lambda - 1)^3 = 0.$$

Це рівняння має корінь кратності 3

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1.$$

Фундаментальна система розв'язків складається з трьох функцій:

$$e^x, xe^x, x^2e^x,$$

а загальний розв'язок має вигляд

$$y = C_1e^x + C_2xe^x + C_3x^2e^x.$$

Приклад 10.5. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y^{(5)} - y^{(4)} + 8y''' - 8y'' + 16y' - 16y = 0.$$

Складаємо характеристичне рівняння

$$\lambda^5 - \lambda^4 + 8\lambda^3 - 8\lambda^2 + 16\lambda - 16 = 0.$$

Методом підбору знаходимо корінь $\lambda_1 = 1$. Далі ділимо ліву частину характеристичного рівняння на двучлен $\lambda - 1$ за схемою Хорнера,

$$\begin{array}{r} * \quad 1 \quad -1 \quad 8 \quad -8 \quad 16 \quad -16 \\ 1 \quad 1 \quad \quad 0 \quad 8 \quad \quad 0 \quad 16 \quad \quad 0. \end{array}$$

Отримаємо рівняння

$$\lambda^4 + 8\lambda^2 + 16 = 0 \quad \text{або} \quad (\lambda^2 + 4)^2 = 0.$$

Це рівняння має комплексно спряжену пару коренів кратності 2

$$\lambda_2 = \lambda_3 = 2i, \quad \lambda_4 = \lambda_5 = -2i.$$

Знайденим кореням характеристичного рівняння відповідає фундаментальна система розв'язків

$$e^x, \quad \cos 2x, \quad x \cos 2x, \quad \sin 2x, \quad x \sin 2x.$$

Загальний розв'язок буде мати вигляд

$$y = C_1e^x + C_2 \cos 2x + C_3x \cos 2x + C_4 \sin 2x + C_5x \sin 2x.$$

10. 4. Однорідне лінійне рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами.

Розглянемо випадок лінійного однорідного рівняння другого порядку

$$y'' + py' + qy = 0 \quad (222)$$

з постійними дійсними коефіцієнтами p і q .

У цьому випадку характеристичним рівнянням буде квадратне рівняння:

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0. \quad (223)$$

Розв'язки такого рівняння можуть бути знайдені за формулою:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Якщо $\sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \geq 0$ корені дійсні. Якщо $\sqrt{\frac{p^2}{4} - q} < 0$, то корені комплексні й визначаються за формулою:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm i\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}.$$

У випадку $\sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = 0$ маємо один дійсний корінь $\lambda = -\frac{p}{2}$ кратності 2.

Якщо рівняння (223) має різні дійсні корені λ_1 і λ_2 , то функції

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, \quad y_2 = e^{\lambda_2 x}$$

утворюють фундаментальну систему розв'язків рівняння (222), а його загальним розв'язком буде

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}.$$

Якщо корені характеристичного рівняння комплексно спряжені $\lambda_{1,2} = a \pm ib$, рівняння (222) має фундаментальну систему розв'язків вигляду:

$$y_1 = e^{ax} \cos bx, \quad y_2 = e^{ax} \sin bx, \quad (a \neq 0)$$

або

$$y_1 = \cos bx, \quad y_2 = \sin bx,$$

а його загальним розв'язком буде

$$y = e^{ax}(C_1 \cos bx + C_2 \sin bx) \quad (a \neq 0)$$

або

$$y = C_1 \cos bx + C_2 \sin bx.$$

Нарешті, якщо корені характеристичного рівняння (223) кратні $\lambda_{1,2} = -\frac{p}{2}$, то рівняння (222) має фундаментальну систему розв'язків:

$$y_1 = e^{-\frac{p}{2}x}, \quad y_2 = xe^{-\frac{p}{2}x}.$$

Відповідно загальним розв'язком буде:

$$y = e^{-\frac{p}{2}x}(C_1 + C_2x).$$

Приклад 10.6. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' + y' + y = 0.$$

Складаємо характеристичне рівняння

$$\lambda^2 + \lambda + 1 = 0.$$

Корені характеристичного рівняння комплексно спряжені

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Фундаментальна система розв'язків:

$$y_1 = e^{-\frac{x}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x, \quad y_2 = e^{-\frac{x}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

Будемо мати загальний розв'язок

$$y = e^{-\frac{x}{2}} \left(C_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x \right).$$

Приклад 10.7. Знайти розв'язок задачі Коші

$$y'' + 4y' + 4y = 0,$$

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$$

Складаємо характеристичне рівняння

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0.$$

Корені характеристичного рівняння кратні

$$\lambda_{1,2} = -2.$$

Фундаментальна система розв'язків:

$$y_1 = e^{-2x}, \quad y_2 = xe^{-2x}$$

Будемо мати загальний розв'язок

$$y = e^{-2x}(C_1 + C_2x).$$

Знайдемо похідну загального розв'язку, маємо

$$y' = -2e^{-2x}(C_1 + C_2x) + C_2e^{-2x}.$$

Підставляємо початкові значення в вирази y і y' . Отримаємо систему алгебраїчних рівнянь:

$$C_1 = 1$$

$$-2C_1 + C_2 = 1.$$

Звідси

$$C_1 = 1, \quad C_2 = 3.$$

Таким чином, отримали розв'язок задачі Коші

$$y = e^{-2x}(1 + 3x).$$

11. Розділ 11

Лінійні диференціальні рівняння n -го порядку з постійними коефіцієнтами — 2

11. 1. Попередні зауваження.

Розглянемо тепер неоднорідне лінійне рівняння n -го порядку:

$$L(y) \equiv y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x), \quad (224)$$

де, як і у випадку однорідного рівняння, будемо припускати, що коефіцієнти $a_1, a_2, \dots, a_n$ є постійні дійсні числа. Стосовно функції $f(x)$, яка стоїть у правій частині рівняння (224), будемо припускати, що вона неперервна у деякому інтервалі (a, b) .

На попередній лекції ми навчилися будувати фундаментальну систему розв'язків для однорідного рівняння відповідного рівнянню (224). Тоді ми завжди можемо побудувати загальний розв'язок рівняння (224) у квадратурах, за допомогою метода Лагранжа.

Але у деяких випадках можливо побудувати загальний розв'язок рівняння (224) без застосування квадратур.

11. 2. Знаходження частинного розв'язку неоднорідного рівняння методом невизначених коефіцієнтів

1⁰. Припустимо, що в рівнянні (224) права частина $f(x)$ є добутком полінома на показникову функцію, тобто

$$L(y) \equiv y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = P_m(x) e^{\alpha x}, \quad (225)$$

де

$$P_m(x) = p_0 x^m + p_1 x^{m-1} + \dots + p_{m-1} x + p_m, \quad m \geq 0 \quad (226)$$

поліном з дійсними або комплексними коефіцієнтами (він може бути й постійним числом); а α — постійне число дійсне чи комплексне (зокрема воно

може дорівнювати нулю). При побудові частинного розв'язку рівняння (225) розрізняють два випадки.

І випадок.

α не є коренем характеристичного рівняння відповідного однорідного рівняння. У цьому випадку частинний розв'язок y рівняння (225) належить шукати у вигляді:

$$y = Q_m(x)e^{\alpha x}, \quad (227)$$

де

$$Q_m(x) = q_0x^m + q_1x^{m-1} + \dots + q_{m-1}x + q_m \quad (228)$$

є поліномом m -того степеня з невизначеними коефіцієнтами.

Коефіцієнти полінома $Q_m(x)$ визначаються підстановкою (227) в (225) і прирівнюванням коефіцієнтів при однакових степенях x у лівій та правій частинах отриманої рівності.

Приклад 11.1. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' - 3y' + 2y = (x^2 + x)e^{3x}.$$

Розв'язування. Це лінійне неоднорідне рівняння другого порядку, права частина якого має вигляд (225). Складемо характеристичне рівняння та знайдемо його корені. Маємо

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0.$$

На підставі формул В'єта знаходимо: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$. Загальний розв'язок $y_{з.о.}$ однорідного рівняння буде мати вигляд:

$$y_{з.о.} = C_1e^x + C_2e^{2x}.$$

Тепер знайдемо частинний розв'язок неоднорідного рівняння $y_{ч.н.}$. Шукаємо його у вигляді

$$y_{ч.н.} = (q_0x^2 + q_1x + q_2)e^{3x},$$

так як показник степеня експоненти не збігається з коренями характеристичного рівняння. Потім знаходимо вирази для y' і y'' . Будемо мати

$$\begin{aligned} y' &= (2q_0x + q_1)e^{3x} + 3(q_0x^2 + q_1x + q_2)e^{3x} = \\ &= [3q_0x^2 + (2q_0 + 3q_1)x + q_1 + 3q_2]e^{3x}; \\ y'' &= (6q_0x + 2q_0 + 3q_1)e^{3x} + 3[3q_0x^2 + (2q_0 + 3q_1)x + q_1 + 3q_2]e^{3x} = \\ &= [9q_0x^2 + (12q_0 + 9q_1)x + 2q_0 + 6q_1 + 9q_2]e^{3x}. \end{aligned}$$

Підставляємо вирази для функції та похідних у вихідне рівняння,

$$\begin{aligned} [9q_0x^2 + (12q_0 + 9q_1)x + 2q_0 + 6q_1 + 9q_2]e^{3x} - 3[3q_0x^2 + (2q_0 + 3q_1)x + q_1 + 3q_2]e^{3x} + \\ + 2(q_0x^2 + q_1x + q_2)e^{3x} = (x^2 + x)e^{3x}. \end{aligned}$$

Зведемо подібні члени зліва,

$$[2q_0x^2 + (6q_0 + 2q_1)x + 2q_0 + 3q_1 + 2q_2]e^{3x} = (x^2 + x)e^{3x}.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях поліномів зліва та справа, отримаємо систему лінійних рівнянь

$$2q_0 = 1,$$

$$6q_0 + 2q_1 = 1,$$

$$2q_0 + 3q_1 + 2q_2 = 0.$$

Очевидно, що ця система має розв'язок: $q_0 = \frac{1}{2}$, $q_1 = -1$, $q_2 = 1$. Таким чином, отримали частинний розв'язок неоднорідного рівняння

$$y_{\text{ч.н.}} = \left(\frac{1}{2}x^2 - x + 1\right)e^{3x}.$$

Отже, загальний розв'язок має вигляд

$$y_{\text{з.н.}} = y_{\text{з.о.}} + y_{\text{ч.н.}} = C_1e^x + C_2e^{2x} + \left(\frac{1}{2}x^2 - x + 1\right)e^{3x}.$$

II випадок.

Якщо ж α є кратним коренем кратності $k \geq 1$ характеристичного рівняння відповідного однорідного рівняння, то у цьому випадку частинний розв'язок y рівняння (225) належить шукати у вигляді:

$$y = x^k Q_m(x) e^{\alpha x}. \quad (229)$$

Зауважимо, що кратність $k = 1$ відповідає простому кореню характеристичного рівняння.

Далі повністю повторюємо процедури, застосовані у *випадку I*.

Приклад 11.2. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' - 5y' = -5x^2 + 2x, \quad (\alpha = 0).$$

Розв'язування. Складаємо характеристичне рівняння та знаходимо його корені:

$$\lambda^2 - 5\lambda = 0,$$

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 5.$$

Звідси маємо загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння:

$$y_{\text{з.о.}} = C_1 + C_2 e^{5x}.$$

Так як число 0 є простим коренем однорідного рівняння частинний розв'язок неоднорідного рівняння будемо шукати у вигляді

$$y_{\text{ч.н.}} = x(q_0 x^2 + q_1 x + q_2).$$

Двічі диференціюючи цей вираз і підставляючи отримані похідні в вихідне рівняння, послідовно отримаємо

$$y' = 3q_0 x^2 + 2q_1 x + q_2,$$

$$y'' = 6q_0 x + 2q_1,$$

$$6q_0 x + 2q_1 - 15q_0 x^2 - 10q_1 x - 5q_2 = -5x^2 + 2x.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x будемо мати таку систему лінійних рівнянь

$$-15q_0 = -5,$$

$$6q_0 - 10q_1 = 2,$$

$$2q_1 - 5q_2 = 0.$$

Ця система має розв'язок $q_0 = \frac{1}{3}, q_1 = 0, q_2 = 0$.

Таким чином, загальним розв'язком вихідного рівняння буде:

$$y_{\text{з.н.}} = y_{\text{з.о.}} + y_{\text{ч.н.}} = C_1 + C_2 e^{5x} + \frac{1}{3}x^3.$$

2⁰. Припустимо, що права частина рівняння (224) має вигляд

$$f(x) = e^{ax}[P_m^{(1)}(x) \cos bx + P_m^{(2)}(x) \sin bx], \quad (230)$$

де $P_m^{(1)}$ і $P_m^{(2)}$ — задані поліноми від x степеня, рівного або меншого m , причому хоча б один з них має степінь m . Вони можуть бути й постійними числами. Один з них може тотожно дорівнювати нулю.

Тут також має місце два випадки.

I *випадок*.

Якщо a і b такі, що число $a+ib$ не є коренем характеристичного рівняння, то частинний розв'язок шукається у вигляді:

$$y = e^{ax}[Q_m^{(1)}(x) \cos bx + Q_m^{(2)}(x) \sin bx], \quad (231)$$

де $Q_m^{(1)}$ і $Q_m^{(2)}$ — поліноми m -го степеня з невизначеними коефіцієнтами.

II *випадок*.

Якщо $a+ib$ є k -кратним коренем ($k \geq 1$) характеристичного рівняння, то частинний розв'язок шукається у вигляді:

$$y = x^k e^{ax}[Q_m^{(1)}(x) \cos bx + Q_m^{(2)}(x) \sin bx], \quad (232)$$

де $Q_m^{(1)}$ і $Q_m^{(2)}$ — поліноми m -го степеня з невизначеними коефіцієнтами.

В обох випадках коефіцієнти поліномів $Q_m^{(1)}(x)$ і $Q_m^{(2)}(x)$ визначаються безпосередньою підстановкою частинного розв'язку y у рівняння (224).

Особливо звернемо увагу на те, що частинний розв'язок потрібно шукати у вигляді (231) або (232) також і у тому випадку, коли $P_m^{(1)} \equiv 0$ або $P_m^{(2)} \equiv 0$.

Розглянемо застосування цього методу на деяких прикладах.

Приклад 11.3. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' + y' - 2y = e^x(\cos x - 7 \sin x), \quad (a = 1, b = 1).$$

Розв'язування. Характеристичне рівняння має вигляд

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0.$$

Це рівняння має корені

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2,$$

Звідси маємо загальний розв'язок неоднорідного рівняння:

$$y_{\text{з.о.}} = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}.$$

Число $a + ib = 1 + i$ не є коренем характеристичного рівняння, тому частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді:

$$y_{\text{ч.н.}} = e^x(A \cos x + B \sin x).$$

Двічі диференціюємо цей вираз. Будемо мати

$$y' = e^x[(A + B) \cos x + (B - A) \sin x],$$

$$y'' = e^x(2B \cos x - 2A \sin x).$$

Підставляючи отримані вирази у вихідне рівняння, отримаємо.

$$\begin{aligned} e^x(2B \cos x - 2A \sin x) + e^x[(A + B) \cos x + (B - A) \sin x] - \\ - 2e^x(A \cos x + B \sin x) = e^x(\cos x - 7 \sin x). \end{aligned}$$

Далі зведемо подібні члени, скоротимо на e^x і прирівнюємо коефіцієнти при $\cos x$ і $\sin x$. Отримаємо систему лінійних рівнянь

$$-A + 3B = 1,$$

$$-3A - B = -7.$$

Звідси, $A = 2$, $B = 1$. Отже,

$$y_{\text{ч.н.}} = e^x(2 \cos x + \sin x).$$

Таким чином, маємо загальний розв'язок

$$y_{\text{з.н.}} = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} + e^x(2 \cos x + \sin x)$$

Приклад 11.4. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' + y = 2 \sin x,$$

або

$$y'' + y = e^{0x}(0 \cos x + 2 \sin x)$$

Розв'язування.

У цьому випадку маємо, $a = 0$, $b = 1$. Характеристичне рівняння має вигляд

$$\lambda^2 + 1 = 0.$$

Це рівняння має корені

$$\lambda_{1,2} = \pm i.$$

Звідси маємо загальний розв'язок неоднорідного рівняння:

$$y_{\text{з.о.}} = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Тут число $a + ib = i$ є простим коренем (коренем кратності $k = 1$) характеристичного рівняння. Тому частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді:

$$y_{\text{ч.н.}} = x(A \cos x + B \sin x).$$

Далі маємо,

$$y' = A \cos x + B \sin x + x(-A \sin x + B \cos x),$$

$$y'' = -2A \sin x + 2B \cos x - x(A \sin x + B \cos x).$$

Підставляючи знайдені значення у вихідне рівняння будемо мати

$$-2A \sin x + 2B \cos x = 0 \cos x + 2 \sin x.$$

Звідси, $A = -1$, $B = 0$, $y_{\text{ч.н.}} = -x \cos x$.

Таким чином, маємо загальний розв'язок

$$y_{\text{з.н.}} = C_1 \cos x + C_2 \sin x - x \cos x.$$

12. Розділ 12

Системи диференціальних рівнянь

12. 1. Нормальні системи диференціальних рівнянь

Сукупність співвідношень вигляду:

$$\begin{aligned}\frac{dy_1}{dx} &= f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \frac{dy_2}{dx} &= f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{dy_n}{dx} &= f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n)\end{aligned}\tag{233}$$

називається нормальною системою диференціальних рівнянь n -го порядку. Зазначимо, що порядок системи визначається кількістю рівнянь, які утворюють систему.

Якщо праві частини системи (233) залежать лінійно від функцій $y_1, y_2, \dots, y_n$, тобто якщо система (233) має вигляд

[illegible]

де $p_{kl}(x)$ ($k, l = 1, 2, \dots, n$) і $f_k(x)$ задані функції від x , то вона називається лінійною системою диференціальних рівнянь.

Якщо праві частини системи (233) не залежать явно від незалежної змін-

ної x , тобто вона має вигляд

$$\begin{aligned}\frac{dy_1}{dx} &= f_1(y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \frac{dy_2}{dx} &= f_2(y_1, y_2, \dots, y_n), \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{dy_n}{dx} &= f_n(y_1, y_2, \dots, y_n),\end{aligned}\tag{235}$$

то вона називається автономною системою. Будь-яка сукупність n функцій

$$y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x), \dots, y_n = y_n(x),\tag{236}$$

визначених і неперервно диференційованих у інтервалі (a, b) , називається розв'язком системи (233) у цьому інтервалі, якщо вона обертає всі рівняння системи (233) у тотожності:

$$\begin{aligned}y'_1(x) &\equiv f_1[x, y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)], \\ y'_2(x) &\equiv f_2[x, y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)], \\ &\dots\dots\dots \\ y'_n(x) &\equiv f_n[x, y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)],\end{aligned}$$

справедливі при всіх значеннях x з інтервалу (a, b) .

12. 2. Геометричне та кінематичне тлумачення нормальної системи

При вивченні рівнянь першого порядку, розв'язаних відносно похідної ми відзначали, що таке рівняння задає на площині (x, y) деяке поле напрямів і що напрям дотичної в кожній точці інтегральної кривої збігається з напрямом поля в цій точці. Аналогічне геометричне тлумачення можна надати й нормальній системі n рівнянь (233).

Ця точка називається зображальною (фазовою) точкою. При зміні часу ми отримаємо деяку криву, яка описує рух зображальної точки. Така крива називається фазовою траєкторією, або просто траєкторією. Таким чином, кожному розв'язку системи (237) у фазовому просторі буде відповідати деяка траєкторія. Така візуалізація системи називається кінематичною. Рівняння (237), при кінематичній інтерпретації, не тільки визначають траєкторію як геометричне місце точок, але й показують як відбувається рух зображальної точки по траєкторії. Траєкторія є проекцією розв'язку системи (237), який розташований у просторі $(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$, в простір $(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Розглянемо нормальну автономну систему (праві частини не залежать явно від часу)

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= X_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \dot{x}_2 &= X_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ &\dots\dots\dots \\ \dot{x}_n &= X_n(x_1, x_2, \dots, x_n). \end{aligned} \tag{239}$$

Прирівняємо праві частини системи (237) до нуля. Отже розглянемо систему рівнянь

$$\begin{aligned} X_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0, \\ X_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0, \\ &\dots\dots\dots \\ X_n(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0. \end{aligned} \tag{240}$$

Припустимо, що система рівнянь (240) має розв'язок

$$x_1 = a_1, x_2 = a_2, \dots, x_n = a_n, \tag{241}$$

$a_1, a_2, \dots, a_n$ — деякі сталі числа. Очевидно, що розв'язок (241) також буде розв'язком системи диференціальних рівнянь (240). Такому розв'язку у фазовому просторі відповідає траєкторія, яка складається з однієї точки з коор-

динатами $(a_1, a_2, \dots, a_n)$. Такий розв'язок називається положенням рівноваги (станом рівноваги) системи (240).

В фазовому просторі системи правими частинами рівнянь (240) породжується векторне поле швидкостей, яке співставляє кожній точці $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ вихідний з неї вектор $\mathbf{X}(\mathbf{x})$:

$$\mathbf{X}(\mathbf{x}) = \{X_1(x_1, x_2, \dots, x_n), X_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, X_n(x_1, x_2, \dots, x_n)\}.$$

Модуль цього вектора чисельно дорівнює швидкості руху зображальної точки по фазовій траєкторії. Сам вектор у кожній точці $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ направлений по дотичній до фазової траєкторії. Нормальна автономна система (240), таким чином, може бути записана у векторній формі

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x}), \quad (242)$$

$$\text{де } \dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} X_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ X_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ X_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix} \quad - \text{відповідно}$$

вектори і вектор—функція розмірності n .

12. 3. Задача Коші для нормальної системи диференціальних рівнянь

Для системи рівнянь (233) задача Коші ставиться наступним чином: серед усіх розв'язків системи (233) знайти такий розв'язок

$$y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x), \dots, y_n = y_n(x), \quad (243)$$

якому в функції $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ приймають задані числові значення $y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}$ при заданому числовому значенні x_0 незалежної змінної x :

$$y_1(x_0) = y_1^{(0)}, y_2(x_0) = y_2^{(0)}, \dots, y_n(x_0) = y_n^{(0)}, \quad (244)$$

так що розв'язок (243) задовольняє умовам:

$$y_1 = y_1^{(0)}, y_2 = y_2^{(0)}, \dots, y_n = y_n^{(0)} \text{ при } x = x_0. \quad (245)$$

Числа $y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}$ називаються початковими значеннями розв'язку (243), число x_0 — початковим значенням незалежної змінної x , числа $x_0, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}$ разом взяті називаються початковими даними розв'язку (243), а умови (245) — початковими умовами.

Задачу Коші геометрично можна сформулювати так: серед усіх інтегральних кривих системи (233) знайти ту, яка проходить через задану точку $(x_0, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \dots, y_n^{(0)})$.

12. 4. Теорема Коші-Пікара для нормальної системи диференціальних рівнянь

Теорема. Нехай задана нормальна система

$$\frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n),$$

$$\frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n),$$

.....

$$\frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n),$$

та поставлені початкові умові (245)

$$y_1 = y_1^{(0)}, y_2 = y_2^{(0)}, \dots, y_n = y_n^{(0)} \text{ при } x = x_0.$$

Припустимо, що функції, які розташовані в правих частинах системи, визначені в деякій замкненій обмеженій області R :

$$|x - x_0| \leq a, |y_k - y_k^{(0)}| \leq b \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

з точкою $(x_0, y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \dots, y_n^{(0)})$ всередині (a і b задані додатні числа) і задовольняють цій області наступним двом умовам:

визначених деякій області зміни змінних $x, C_1, C_2, \dots, C_n$, які мають неперервні частинні похідні по x будемо називати загальним розв'язком системи (233) в області D , якщо система (246) може бути розв'язана відносно довільних сталих $C_1, C_2, \dots, C_n$ в області D , так що при будь-яких значеннях $(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$, які належать області D системою (246) визначаються значення $C_1, C_2, \dots, C_n$:

[illegible]

і якщо сукупність n функцій (246) є розв'язком системи (233) при всіх значеннях довільних сталих $C_1, C_2, \dots, C_n$, які знаходяться за формулами (247), коли точка $(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$ пробігає область D .

Формула загального розв'язку (246) дає можливість за рахунок вибору відповідних значень довільних сталих $C_1, C_2, \dots, C_n$ розв'язати будь-яку задачу Коші для системи (233) в області D .

Якщо розв'язок системи (233) складається тільки з точок єдиності розв'язку задачі Коші для цієї системи, то такий розв'язок ми будемо називати частинним розв'язком.

Розв'язок, який отримується з формули загального розв'язку при частинних числових значеннях довільних сталих $C_1, C_2, \dots, C_n$, включаючи $\pm\infty$ буде, очевидно, частинним розв'язком.

Вирішуючи задачу Коші за допомогою формули загального розв'язку завжди отримуємо частинний розв'язок.

Розв'язок системи (233), у кожній точці якого порушується єдиність розв'язку задачі Коші для цієї системи, будемо називати особливим розв'язком.

12. 6. Зведення рівняння n -го порядку до системи n рівнянь першого порядку

Нехай задане рівняння n -го порядку

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}). \quad (248)$$

Позначимо шукану функцію y через y_1 , $y = y_1$ і введемо у розгляд нові функції $y_2, y_3, \dots, y_n$ визначивши їх за допомогою співвідношень

$$y_2 = y', y_3 = y'', \dots, y_n = y^{(n-1)}. \quad (249)$$

На підставі цього вибору нових функцій і даного рівняння будемо мати:

$$y'_1 = y' = y_2, y'_2 = y'' = y_3, \dots, y'_{(n-1)} = y^{(n-1)} = y_n,$$

$$y'_n = y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = f(x, y_1, y_2, \dots, y_n),$$

так що функції $y_1, y_2, \dots, y_n$ задовольняють наступній системі рівнянь:

$$\begin{aligned} y'_1 &= y_2, \\ y'_2 &= y_3, \\ &\dots\dots\dots \\ y'_{(n-1)} &= y_n, \\ y'_n &= f(x, y_1, y_2, \dots, y_n). \end{aligned} \quad (250)$$

Система (250) називається системою нормальних дифференціальних рівнянь, рівносильною рівнянню (248). Можна побудувати й інші нормальні системи еквівалентні рівнянню (248), якщо ввести нові невідомі функції за допомогою співвідношень, відмінних від (249).

Легко помітити, що якщо ми знайшли розв'язок $y_1, y_2, \dots, y_n$ системи (250), то тим самим ми знайшли розв'язок $y = y_1$ рівняння (248) та, навпаки, якщо ми маємо розв'язок y рівняння (248), то тим самим маємо розв'язок $y_1 = y, y_2 = y', \dots, y_n = y^{(n-1)}$ системи (250). Таку ж відповідність ми будемо мати й для задач Коші.

Якщо ми знайшли загальний розв'язок системи (250) в області $D(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$, то тим самим ми знайшли загальний розв'язок рівняння (248) в області $D(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ і, навпаки, так що задача інтегрування рівняння (248) еквівалентна задачі інтегрування системи (250).

13. Розділ 13

Загальна теорія лінійних систем диференціальних рівнянь

13. 1. Однорідні лінійні системи

Розглянемо нормальну систему диференціальних рівнянь вигляду:

$$\begin{aligned} y_1' &= p_{11}(x)y_1 + p_{12}(x)y_2 + \dots + p_{1n}(x)y_n + f_1(x), \\ y_2' &= p_{21}(x)y_1 + p_{22}(x)y_2 + \dots + p_{2n}(x)y_n + f_2(x), \\ &\dots\dots\dots \\ y_n' &= p_{n1}(x)y_1 + p_{n2}(x)y_2 + \dots + p_{nn}(x)y_n + f_n(x). \end{aligned} \tag{251}$$

Це нормальна лінійна система диференціальних рівнянь n -го порядку.

Будемо припускати, що в системі (251) коефіцієнти $p_{kl}(x)$ ($k, l = 1, 2, \dots, n$) і функції $f_k(x)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) неперервні в інтервалі (a, b) . Легко переконалися, що нормальна лінійна система задовольняє всім умовам теореми Коші-Пікара. Отже система (251) має єдиний розв'язок

$$y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x), \dots, y_n = y_n(x),$$

який задовольняє початковим умовам:

$$y_1 = y_1^{(0)}, y_2 = y_2^{(0)}, \dots, y_n = y_n^{(0)} \quad \text{при } x = x_0,$$

де $x = x_0$ — будь-яка точка з інтервалу (a, b) , а початкові значення шуканих функцій, тобто числа $y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}$ можна вибирати довільним чином. Цей розв'язок буде визначений в усьому інтервалі (a, b) , тобто в усьому інтервалі неперервності функцій $p_{kl}(x)$ і $f_k(x)$.

Можна довести, що при зроблених припущеннях відносно функцій $p_{kl}(x)$ і $f_k(x)$ завжди існує загальний розв'язок системи (251) і ця система не має особливих розв'язків.

Якщо всі функції $f_k(x) \equiv 0$ в (a, b) , то система (251) приймає вигляд:

[illegible]

і називається однорідною.

Якщо ж у системі (251) не всі функції $f_k(x)$ тотожно дорівнюють нулю, то така система називається неоднорідною.

Відмітимо дві загальних властивості лінійної системи:

1. Лінійна система (251) залишається лінійною при будь-якій заміні незалежної змінної

$$x = \varphi(t),$$

де $\varphi(t)$ — будь-яка функція від t , визначена та неперервно диференційована в інтервалі (t_0, t_1) , причому $a = \varphi(t_0)$, $b = \varphi(t_1)$, $\varphi'(t) \neq 0$ в усьому інтервалі (t_0, t_1) .

2. Лінійна система (251) залишається лінійною при будь-якому лінійному перетворення невідомих функцій:

[illegible]

де коефіцієнти перетворення a_{ik} є неперервно диференційованими в інтервалі (a, b) функціями від x , причому визначник складений з них, відмінний від нуля в усьому інтервалі (a, b) .

Загальна теорія лінійних диференціальних рівнянь багато в чому аналогічна загальній теорії лінійного диференціального рівняння n -го порядку. Зокрема, як ми далі покажемо, питання побудову загального розв'язку неоднорідної системи зводиться до побудови загального розв'язку однорідної системи.

Введемо поняття про комплексний розв'язок однорідної системи (251).

$$\begin{aligned} y_1(x) &= u_1(x) + iv_1(x), y_2(x) = u_2(x) + iv_2(x), \dots, \\ y_n(x) &= u_n(x) + iv_n(x). \end{aligned} \quad (253)$$

Будемо називати сукупність функцій (253) комплексним розв'язком однорідної системи (252) в інтервалі (a, b) , якщо ці функції обертають всі рівняння системи (252) у тотожності для $a < x < b$, тобто:

121

або

$$\begin{aligned} u'_1 + iv'_1 &\equiv p_{11}(u_1 + iv_1) + p_{12}(u_2 + iv_2) + \dots + p_{1n}(u_n + iv_n), \\ u'_2 + iv'_2 &\equiv p_{21}(u_1 + iv_1) + p_{22}(u_2 + iv_2) + \dots + p_{2n}(u_n + iv_n), \\ &..... \\ u'_n + iv'_n &\equiv p_{n1}(u_1 + iv_1) + p_{n2}(u_2 + iv_2) + \dots + p_{nn}(u_n + iv_n) \end{aligned} \tag{255}$$

Так як два комплексні вирази рівні між собою, тоді й тільки тоді, коли рівні відповідно їх дійсні та уявні частини, то, прирівнюючи в тотожностях (255) дійсні та уявні частини, бачимо, що якщо система (252) має комплексний розв'язок (253), то вона має два дійсних розв'язки

$$u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x),$$

$$v_1(x), v_2(x), \dots, v_n(x),$$

тобто дійсні та уявні частини функцій комплексного розв'язку системи (252) утворюють два дійсних розв'язки цієї системи.

Розв'язки однорідної системи володіють наступними характерними властивостями, аналогічними властивостям розв'язків лінійного однорідного рівняння n -го порядку.

1. ЯКЩО

$$y_1 = \varphi_1(x), y_2 = \varphi_2(x), \dots, y_n = \varphi_n(x) \quad (256)$$

є розв'язком однорідної системи (252), то

$$y_1 = C\varphi_1(x), y_2 = C\varphi_2(x), \dots, y_n = C\varphi_n(x) \quad (257)$$

де C – довільна стала, також буде розв'язком цієї системи рівнянь.

$$\begin{aligned} [C\varphi_1(x)]' &= p_{11}(x)[C\varphi_1(x)] + p_{12}(x)[C\varphi_2(x)] + \dots + p_{1n}(x)[C\varphi_n(x)] \\ [C\varphi_2(x)]' &= p_{21}(x)[C\varphi_1(x)] + p_{22}(x)[C\varphi_2(x)] + \dots + p_{2n}(x)[C\varphi_n(x)] \\ &\vdots \\ [C\varphi_n(x)]' &= p_{n1}(x)[C\varphi_1(x)] + p_{n2}(x)[C\varphi_2(x)] + \dots + p_{nn}(x)[C\varphi_n(x)]. \end{aligned} \quad (258)$$

2. Нехай дано t розв'язків системи (252):

$$\begin{aligned} &y_{11}, y_{12}, \dots, y_{1n}, \\ &y_{21}, y_{22}, \dots, y_{2n}, \\ &\dots\dots\dots \\ &y_{m1}, y_{m2}, \dots, y_{mn}, \end{aligned} \tag{259}$$

Тут перший індекс позначає номер розв'язку, а другий – номер функції. Доведемо, що лінійна комбінація розв'язків (259) з будь-якими постійними коефіцієнтами $C_1, C_2, \dots, C_m$, тобто сукупність функцій

[illegible]

де $C_1, C_2, \dots, C_m$ – будь-які постійні числа також будуть розв’язком системи (252). Зауважимо, що перша функція y_1 є лінійною комбінацією перших функцій з кожного розв’язку; y_2 – комбінацією других функцій, ..., y_n – комбінацією n -х функцій, причому сталі $C_1, C_2, \dots, C_m$ для всіх комбінацій беруться одними і тими же.

Доведемо це твердження. Спочатку введемо скорочений запис деяких систем. Так однорідну систему (252) будемо записувати у вигляді:

$$\frac{dy_k}{dx} = \sum_{l=1}^n p_{kl}(x)y_l \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (261)$$

а систему (260) – у вигляді:

$$y_k = \sum_{i=1}^m C_i y_{ik} \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (262)$$

Тоді, підставляючи (262) в (261), отримаємо:

$$\left(\sum_{i=1}^m C_i y_{ik} \right)' = \sum_{l=1}^n p_{kl}(x) \left(\sum_{i=1}^m C_i y_{il} \right) \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (263)$$

або

$$\sum_{i=1}^m C_i y'_{ik} = \sum_{i=1}^m C_i \sum_{l=1}^n p_{kl}(x)y_{il} \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (264)$$

Так як мають місце тотожності

$$y'_{ik} \equiv \sum_{l=1}^n p_{kl}(x)y_{il} \quad (k = 1, 2, \dots, n; i = 1, 2, \dots, m),$$

які є результатом підстановки i -го розв'язку у систему (261), то рівності (264), отже і рівності (263) виконуються тотожно, що й доводить наше твердження.

Припустимо, що нам відомо n частинних розв'язків системи (252). Природно виникає питання: при якій умові лінійна комбінація цих розв'язків з довільними сталими коефіцієнтами $C_1, C_2, \dots, C_n$ буде визначати загальний розв'язок однорідної системи.

13. 3. Поняття про лінійну незалежність системи функцій

Розглянемо m систем функцій:

$$\begin{aligned} & y_{11}, y_{12}, \dots, y_{1n}, \\ & y_{21}, y_{22}, \dots, y_{2n}, \\ & \dots\dots\dots \\ & y_{m1}, y_{m2}, \dots, y_{mn}. \end{aligned} \tag{265}$$

Ці системи називаються лінійно незалежними в інтервалі (a, b) , якщо не існує чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$, не рівних нулю одночасно, при яких для всього інтервалу (a, b) виконувалися би співвідношення:

$$\begin{aligned} & \alpha_1 y_{11} + \alpha_2 y_{21} + \dots + \alpha_m y_{m1} \equiv 0, \\ & \alpha_1 y_{12} + \alpha_2 y_{22} + \dots + \alpha_m y_{m2} \equiv 0, \\ & \dots\dots\dots \\ & \alpha_1 y_{1n} + \alpha_2 y_{2n} + \dots + \alpha_m y_{mn} \equiv 0 \end{aligned} \tag{266}$$

або

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i y_{ik} \equiv 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n), \tag{267}$$

тобто, якщо будь-які лінійні комбінації функцій кожного стовпця таблиці (265), з одними й тими же для всіх стовпців коефіцієнтами $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$, не дорівнюють нулю в інтервалі (a, b) або, що теж саме, якщо жоден рядок таблиці (265) не є в інтервалі (a, b) лінійною комбінацією всіх інших рядків. У протилежному випадку системи (265) називаються лінійно залежними в (a, b) .

Очевидно, що якщо одна з систем функцій (265) складається з функцій, які тотожно дорівнюють нулю в інтервалі (a, b) , то ці системи функцій лінійно залежні в (a, b) .

Дійсно, нехай, наприклад,

$$y_{11} \equiv 0, y_{12} \equiv 0, \dots, y_{1n} \equiv 0 \text{ B } (a, b).$$

Тоді при будь-якому $\alpha_1 \neq 0$ і при $\alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_n = 0$ будуть виконуватися співвідношення (266) в інтервалі (a, b) , а це й означає, що системи функцій (265) лінійно залежні в (a, b) .

Також зауважимо, що якщо розглядати елементи кожного рядка таблиці (265) як складові деякого вектора в n -вимірному просторі, то дане вище означення лінійної незалежності функцій (265) буде нічим іншим, як відомим означенням лінійної незалежності m векторів.

13. 4. Необхідна та достатня умова лінійної незалежності n розв'язків однорідної лінійної системи n рівнянь

Нехай ми маємо n систем функцій:

$$\begin{aligned} & y_{11}, y_{12}, \dots, y_{1n}, \\ & y_{21}, y_{22}, \dots, y_{2n}, \\ & \dots\dots\dots \\ & y_{n1}, y_{n2}, \dots, y_{nn}. \end{aligned} \tag{268}$$

Введемо у розгляд визначник

$$\begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{vmatrix} \quad (269)$$

Цей визначник називається визначником Вронського або вронскианом для систем функцій (268).

Припустимо, що кожна з систем функцій (268) є розв'язком системи (252). Може бути сформульована теорема.

Теорема. Для лінійної незалежності n розв'язків системи (252) в інтервалі неперервності її коефіцієнтів необхідно та достатньо, щоб вронскіан цих розв'язків був відмінний від нуля хоча б у одній точці такого інтервалу.

Доведення такої теореми аналогічно доведенню теорем, які ми розглядали при вивченні лінійного однорідного рівняння n -го порядку.

13. 5. Побудова загального розв'язку лінійної однорідної системи рівнянь

Сукупність n розв'язків однорідної системи (252), визначених і лінійно незалежних у інтервалі (a, b) , називається фундаментальною системою розв'язків. З попередньої теореми випливає, що система n розв'язків буде фундаментальною системою розв'язків у інтервалі (a, b) тоді й тільки тоді, коли вронскіан цих розв'язків був відмінний від нуля хоча б у одній точці інтервалу (a, b) .

Існує нескінченна кількість фундаментальних систем розв’язків. Спробуйте переконатися у цьому самостійно.

Основна теорема для однорідних систем. Якщо

$$\begin{aligned} &y_{11}, y_{12}, \dots, y_{1n}, \\ &y_{21}, y_{22}, \dots, y_{2n}, \\ &\dots\dots\dots \\ &y_{n1}, y_{n2}, \dots, y_{nn}. \end{aligned} \tag{270}$$

є фундаментальною системою розв'язків однорідної лінійної системи (252)

в інтервалі (a, b) , то формули

[illegible]

де $C_1, C_2, \dots, C_n$ – довільні сталі визначають загальний розв'язок системи (252) в області

$$a < x < b, \quad |y_k| < +\infty \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (272)$$

тобто в усій області задання системи (252).

Дійсно систему (271) можна розв'язати відносно довільних сталих $C_1, C_2, \dots, C_n$ в області (272), так як (271), відносно цих сталих, є лінійною алгебраїчною системою рівнянь. А визначник цієї системи, який дорівнює $W(x)$, відмінний від нуля, так як (270) є фундаментальною системою розв'язків.

Крім того, за другою властивістю розв'язків лінійної однорідної системи сукупність функцій (271) є розв'язком системи (252) при всіх значеннях довільних сталих $C_1, C_2, \dots, C_n$.

Тому, згідно з означенням загального розв'язку нормальної системи диференціальних рівнянь, який ми визначили у пункті 12.5, сукупність функцій (271) є загальним розв'язком системи (252) в області (272).

Формула (271) утримує в собі всі розв'язки системи (252).

14. Розділ 14

Лінійні системи диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами

14. 1. Попередні зауваження

Розглянемо лінійну систему рівнянь:

[illegible]

де коефіцієнти a_{kl} ($k, l = 1, 2, \dots, n$) – постійні дійсні числа, а $f_k(x)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) – функції від x неперервні в інтервалі (a, b) .

Застосовуючи загальну теорію лінійних систем рівнянь, яку ми вивчали у попередньому розділі, ми покажемо, що система (273) завжди може бути проінтегрована, або у елементарних функціях, або у квадратурах.

Так як інтегрування неоднорідної лінійної системи зводиться до інтегрування відповідної однорідної системи, то розглянемо спочатку питання про побудову загального розв'язку однорідної системи:

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n, \\ y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n, \\ &\dots\dots\dots \\ y_n' &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \dots + a_{nn}y_n. \end{aligned} \tag{274}$$

14. 2. Побудова фундаментальної системи розв'язків у випадку простих коренів характеристичного рівняння

На підставі основної теореми, для побудови загального розв'язку системи (274) достатньо побудувати хоча б одну фундаментальну систему розв'язків.

За аналогією з однорідним лінійним рівнянням з постійними коефіцієнтами будемо шукати частинний розв'язок системи (274) у вигляді

$$y_1 = \gamma_1 e^{\lambda x}, y_2 = \gamma_2 e^{\lambda x}, \dots, y_n = \gamma_n e^{\lambda x}, \quad (275)$$

де $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ і λ – деякі постійні числа, причому числа $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ не дорівнюють нулю одночасно, так як у такому випадку ми б отримали очевидний нульовий розв'язок. Але нульовий розв'язок не може входити у склад фундаментальної системи розв'язків.

Звернемо особливу увагу на те, що число λ ми беремо однаковим для всіх функцій, які утворюють розв'язок.

Підставимо функції (275) у систему (274), скоротимо на $e^{\lambda x}$ і перенесемо всі члени вправо. Тоді для визначення чисел γ_k отримаємо лінійну систему алгебраїчних рівнянь:

[illegible]

Нам потрібно знайти ненульовий розв'язок системи(276). Але такий розв'язок існує лише у тому випадку, коли визначник системи дорівнює нулю, тобто

КОЛИ

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (277)$$

Рівняння (277) називається характеристичним рівнянням системи (274), його корені – характеристичними числами, а визначник $\Delta(\lambda)$ – характеристичним визначником.

Розглянемо спочатку випадок, коли всі характеристичні числа різні. Можна довести, що у цьому випадку система рівнянь

$$\begin{aligned}(a_{11} - \lambda_i)\gamma_1 + a_{12}\gamma_2 + \dots + a_{1n}\gamma_n &= 0, \\ a_{21}\gamma_1 + (a_{22} - \lambda_i)\gamma_2 + \dots + a_{2n}\gamma_n &= 0, \\ &\vdots \\ a_{n1}\gamma_1 + a_{n2}\gamma_2 + \dots + (a_{nn} - \lambda_i)\gamma_n &= 0,\end{aligned}\tag{278}$$

яка утворюється з системи (276) після заміни в ній λ на λ_i має ненульовий розв'язок, який визначається з точністю до довільного множника пропорційності A_i :

$$\gamma_{i1} = A_i m_{i1}, \gamma_{i2} = A_i m_{i2}, \dots, \gamma_{in} = A_i m_{in} \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (279)$$

Фіксуючи в формулах (279) множник A_i , ми отримаємо визначений розв'язок системи (278).

Підставляючи тепер у (275) замість λ послідовно характеристичні числа λ_i , а вместо $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ — відповідні їм розв'язки системи (278), визначені

Цей розв'язок комплексний. Виділяючи у ньому дійсну та уявну частину, ми отримаємо два дійсні розв'язки. Ці розв'язки будуть лінійно незалежними. Комплексно спряжений корінь $a - ib$ нових дійсних лінійно незалежних розв'язків не породжує.

Таким чином, якщо всі корені характеристичного рівняння є різними та дійсними, то кожному з них відповідає дійсний частинний розв'язок. Якщо всі корені характеристичного рівняння різні, але серед них є комплексні, то останні завжди входять комплексно спряженими парами. Кожній комплексно спряженій парі відповідають два дійсних лінійно незалежних розв'язки. Всього ми отримаємо n дійсних лінійно незалежних, в інтервалі $(-\infty, +\infty)$ розв'язків, які утворюють фундаментальну систему розв'язків.

Загальний розв'язок системи (274) в області (282) являє собою лінійні комбінації побудованих n дійсних лінійно незалежних частинних розв'язків з довільними постійними коефіцієнтами.

Приклад 14.1.

Знайти загальний розв'язок системи рівнянь

$$y' = 5y + 4z,$$

$$z' = 4y + 5z.$$

Розв'язування.

Складаємо характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 5 - \lambda & 4 \\ 4 & 5 - \lambda \end{vmatrix} = (5 - \lambda)^2 - 16 = \lambda^2 - 10\lambda + 9 = 0.$$

Характеристичне рівняння є квадратним рівнянням. На підставі формул В'єта маємо корені цього рівняння

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 9.$$

Корені характеристичного рівняння дійсні та різні. Побудуємо фундаментальну систему розв'язків, яка складається з двох лінійно незалежних

розв'язків. Коефіцієнти γ_{11}, γ_{12} першого фундаментального розв'язку знаходяться з системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$(5 - \lambda_1)\gamma_{11} + 4\gamma_{12} = 0;$$

$$4\gamma_{11} + (5 - \lambda_1)\gamma_{12} = 0,$$

тобто

$$4\gamma_{11} + 4\gamma_{12} = 0;$$

$$4\gamma_{11} + 4\gamma_{12} = 0.$$

Отримана система лінійних алгебраїчних рівнянь складається з двох однакових рівнянь. Тому ми розглядаємо тільки одне рівняння

$$4\gamma_{11} + 4\gamma_{12} = 0.$$

Покладаючи $\gamma_{11} = 1$, знаходимо $\gamma_{12} = -1$

Таким чином, кореню характеристичного рівняння $\lambda_1 = 1$ відповідає розв'язок

$$y_1 = \gamma_{11}e^x, \quad z_1 = \gamma_{12}e^x,$$

тобто

$$y_1 = e^x, \quad z_1 = -e^x.$$

Аналогічно коефіцієнти γ_{21}, γ_{22} першого фундаментального розв'язку знаходяться з системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$(5 - \lambda_2)\gamma_{21} + 4\gamma_{22} = 0;$$

$$4\gamma_{21} + (5 - \lambda_2)\gamma_{22} = 0,$$

тобто

$$-4\gamma_{21} + 4\gamma_{22} = 0;$$

$$4\gamma_{21} - 4\gamma_{22} = 0.$$

Отримані рівняння системи лінійно залежні, так як друге рівняння збігається з першим з точністю до постійного множника (-1) , тому одне з цих рівнянь можна відкинути й розглядати тільки одне рівняння, наприклад

$$-4\gamma_{21} + 4\gamma_{22} = 0.$$

Покладаючи $\gamma_{21} = 1$, знаходимо $\gamma_{22} = 1$

Таким чином, кореню характеристичного рівняння $\lambda_2 = 9$ відповідає розв'язок

$$y_2 = \gamma_{21}e^{9x}, \quad z_2 = \gamma_{22}e^{9x},$$

тобто

$$y_2 = e^{9x}, \quad z_2 = e^{9x}.$$

Ми отримали фундаментальну систему розв'язків:

$$y_1 = e^x, \quad z_1 = -e^x,$$

$$y_2 = e^{9x}, \quad z_2 = e^{9x}.$$

Тому лінійна комбінація, по стовпцям, визначає загальний розв'язок системи:

$$y = C_1e^x + C_2e^{9x},$$

$$z = -C_1e^x + C_2e^{9x}.$$

Приклад 14.2.

Знайти загальний розв'язок системи рівнянь

$$y' = 2y - z,$$

$$z' = y + 2z.$$

Розв'язування.

Складаємо характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 2 - \lambda & -1 \\ 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)^2 + 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0.$$

Характеристичне рівняння є зведеним квадратним рівнянням вигляду:

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0.$$

Його корені визначаються за формулою:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

У нашому випадку маємо корені:

$$\lambda_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4 - 5} = 2 \pm i.$$

Отже маємо комплексно спряжену пару коренів. Побудуємо фундаментальну систему розв'язків. Кореню $\lambda_1 = 2 + i$ відповідає комплексний розв'язок

$$y = \gamma_{11}e^{(2+i)x}, \quad z = \gamma_{12}e^{(2+i)x}.$$

яка складається з двох лінійно незалежних розв'язків. Коефіцієнти γ_{11}, γ_{12} цього розв'язку знаходяться з системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$-i\gamma_{11} - \gamma_{12} = 0;$$

$$\gamma_{11} - i\gamma_{12} = 0,$$

Друге рівняння цієї системи збігається з першим з точністю до постійного множника $(-i)$. Тому ми розглядаємо тільки перше рівняння, відкидаючи друге. Маємо

$$-i\gamma_{11} - \gamma_{12} = 0.$$

Звідси, покладаючи $\gamma_{11} = 1$, знаходимо $\gamma_{12} = -i$, так що шуканим розв'язком буде

$$y = e^{(2+i)x}, \quad z = -ie^{(2+i)x}.$$

Цей розв'язок комплексний. Виділимо дійсну та уявну частину за формулою Ейлера

$$e^{(a+ib)x} = e^{ax}(\cos bx + i \sin bx).$$

Будемо мати,

$$y = e^{(2+i)x} = e^{2x}(\cos x + i \sin x),$$

$$z = -ie^{(2+i)x} = -ie^{2x}(\cos x + i \sin x) = e^{2x}(\sin x - i \cos x).$$

Ми отримали систему двох дійсних розв'язків:

$$y_1 = e^{2x} \cos x, \quad z_1 = e^{2x} \sin x,$$

$$y_2 = e^{2x} \sin x, \quad z_2 = -e^{2x} \cos x.$$

(283)

Так як, другий корінь характеристичного рівняння $\lambda_2 = 2 - i$ нових лінійно незалежних розв'язків не породжує, то система (283) і буде фундаментальною системою розв'язків

Тому лінійна комбінація, по стовпцям, визначає загальний розв'язок вихідної системи диференціальних рівнянь:

$$y = e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x),$$

$$z = e^{2x}(C_1 \sin x - C_2 \cos x).$$

Приклад 14.3.

Знайти загальний розв'язок системи рівнянь

$$x' = 3x - y + z,$$

$$y' = -x + 5y - z,$$

$$z' = x - y + 3z$$

Зауважимо, що у цій системі x, y, z є невідомими функціями, а за незалежну змінну приймаємо t .

Розв'язування.

Складаємо характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 3 - \lambda & -1 & 1 \\ -1 & 5 - \lambda & -1 \\ 1 & -1 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Розкриваючи характеристичний визначник за формулою трикутника отримаємо (можна використовувати матричний онлайн калькулятор [matrixcalc](#)),

$$-\lambda^3 + 11\lambda^2 - 36\lambda + 36 = 0,$$

або, помноживши на -1 , остаточно отримаємо кубічне характеристичне рівняння

$$\lambda^3 - 11\lambda^2 + 36\lambda - 36 = 0.$$

Якщо це рівняння має цілі корені, то на підставі формул В'єта, вони будуть дільниками вільного члена -36 . Легко переконатися, що $\lambda_1 = 2$ буде коренем рівняння. Далі ділимо ліву частину рівняння на двучлен $\lambda - 2$ за схемою Хорнера. Будемо мати

$$\begin{array}{r} * \quad 1 \quad -11 \quad 36 \quad -36 \\ \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \quad 1 \quad -9 \quad 18 \quad 0. \\ \end{array}$$

Наявність нуля в останньому рядку цієї таблиці свідчить, що ділення виконалося націло. Отже ми отримаємо

$$(\lambda - 2)(\lambda^2 - 9\lambda + 18) = 0.$$

Звідси, на підставі формул В'єта, маємо ще два корені характеристичного рівняння:

$$\lambda_2 = 3, \lambda_3 = 6.$$

Знайдемо спочатку частинний розв'язок

$$x_1 = \gamma_{11}e^{2t}, \quad y_1 = \gamma_{12}e^{2t}, \quad z_1 = \gamma_{13}e^{2t}, \quad (284)$$

відповідний кореню $\lambda_1 = 2$. Для знаходження коефіцієнтів $\gamma_{11}, \gamma_{12}, \gamma_{13}$ будемо мати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\gamma_{11} - \gamma_{12} + \gamma_{13} = 0,$$

$$-\gamma_{11} + 3\gamma_{12} - \gamma_{13} = 0,$$

$$\gamma_{11} - \gamma_{12} + \gamma_{13} = 0.$$

Знайдемо розв'язки методом Гаусса. Додамо до другого рівняння, перше рівняння, а третє рівняння зразу відкинемо, так як воно збігається з першим. Будемо мати

$$\gamma_{11} - \gamma_{12} + \gamma_{13} = 0,$$

$$2\gamma_{12} = 0.$$

З другого рівняння зразу маємо $\gamma_{12} = 0$. Покладаючи у першому рівнянні $\gamma_{11} = 1$, отримаємо $\gamma_{13} = -1$. Підставляючи ці значення у (284) отримаємо

перший розв'язок фундаментальної системи

$$x_1 = e^{2t}, \quad y_1 = 0, \quad z_1 = -e^{2t}.$$

Кореню характеристичного рівняння $\lambda_2 = 3$ буде відповідати розв'язок

$$x_2 = \gamma_{21}e^{3t}, \quad y_2 = \gamma_{22}e^{3t}, \quad z_2 = \gamma_{23}e^{3t}. \quad (285)$$

Для знаходження коефіцієнтів $\gamma_{21}, \gamma_{22}, \gamma_{23}$ будемо мати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$-\gamma_{22} + \gamma_{23} = 0,$$

$$-\gamma_{21} + 2\gamma_{22} - \gamma_{23} = 0,$$

$$\gamma_{21} - \gamma_{22} = 0.$$

Знайдемо розв'язки методом Гаусса. Додамо до третього рівняння друге, а потім поміняємо місцями перше та друге рівняння.

$$-\gamma_{21} + 2\gamma_{22} - \gamma_{23} = 0,$$

$$-\gamma_{22} + \gamma_{23} = 0,$$

$$\gamma_{22} - \gamma_{23} = 0.$$

Третє рівняння збігається з другим з точністю до множника -1 , тому його можна відкинути. Після цього, покладаючи у другому рівнянні $\gamma_{22} = 1$ знайдемо, що $\gamma_{23} = 1$. Далі, з першого рівняння, знайдемо, що $\gamma_{21} = 1$.

Таким чином, ми побудували другий фундаментальний розв'язок

$$x_2 = e^{3t}, \quad y_2 = e^{3t}, \quad z_2 = e^{3t}.$$

Третій фундаментальний розв'язок побудуйте самостійно. Легко перекоонатися, що він дорівнює

$$x_3 = e^{6t}, \quad y_3 = -2e^{6t}, \quad z_3 = e^{6t}.$$

Тапер ми можемо записати загальний розв'язок вихідної системи диференціальних рівнянь, утворюючи лінійні комбінації за стовпцями фундамен-

тальної системи рівнянь:

$$x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t} + C_3 e^{6t},$$

$$y = C_2 e^{3t} - 2C_3 e^{6t},$$

$$z = -C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t} + C_3 e^{6t}.$$

Приклад 14.4.

Знайти загальний розв'язок системи лінійних диференціальних рівнянь:

$$\dot{x} = 2x - 2y;$$

$$\dot{y} = y + z;$$

$$\dot{z} = -x + 2z.$$

Розв'язування. Складемо характеристичне рівняння системи та знайдемо його корені. Маємо,

$$\begin{vmatrix} 2 - \lambda & -2 & 0 \\ 0 & 1 - \lambda & 1 \\ -1 & 0 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)(2 - \lambda)^2 + 2 = 0.$$

Або

$$\lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 6 = 0.$$

Методом підбору знаходимо корінь $\lambda_1 = 3$. Далі, за схемою Хорнера, ділимо ліву частину характеристичного рівняння на $\lambda - 3$. Отримаємо

$$* \begin{array}{r} 1 \\ -5 \\ 8 \\ -6 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \end{array}.$$

Ще два корені характеристичного рівняння будуть коренями квадратного рівняння

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0,$$

звідси

$$\lambda_{2,3} = 1 \pm i.$$

Таким чином, маємо один дійсний корінь та комплексно спряжену пару коренів.

Побудуємо фундаментальний розв'язок відповідний кореню $\lambda_1 = 3$. Позначимо через $\gamma_{11}, \gamma_{12}, \gamma_{13}$ - коефіцієнти цього розв'язку. Вони знаходяться з матричного рівняння

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{11} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

або у вигляді системи рівнянь

$$-\gamma_{11} - 2\gamma_{12} = 0$$

$$-2\gamma_{12} + \gamma_{13} = 0$$

$$-\gamma_{11} - \gamma_{13} = 0.$$

З третього рівняння знаходимо $-\gamma_{11} = \gamma_{13}$ і підставляємо у перше рівняння. Отримаємо два однакових рівняння

$$-2\gamma_{12} + \gamma_{13} = 0$$

$$-2\gamma_{12} + \gamma_{13} = 0.$$

Звідси $2\gamma_{12} = \gamma_{13}$. Тепер покладаємо $\gamma_{12} = 1$ й записуємо розв'язок $\gamma_{11} = -2, \gamma_{12} = 1, \gamma_{13} = 2$. Перший фундаментальний розв'язок системи (142) буде мати вигляд

$$x_1 = -2e^{3t}, \quad y_1 = e^{3t}, \quad z_1 = 2e^{3t}.$$

Тепер знайдемо фундаментальний розв'язок відповідний кореню $\lambda_2 = 1 + i$. Позначимо коефіцієнти цього розв'язку через $\gamma_{21}, \gamma_{22}, \gamma_{23}$. Маємо

$$\begin{pmatrix} 1-i & -2 & 0 \\ 0 & -i & 1 \\ -1 & 0 & 1-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{21} \\ \gamma_{22} \\ \gamma_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

або

$$(1 - i)\gamma_{21} - 2\gamma_{22} = 0$$

$$-i\gamma_{22} + \gamma_{23} = 0$$

$$-\gamma_{21} + (1 - i)\gamma_{23} = 0.$$

З третього рівняння знаходимо $\gamma_{21} = (1 - i)\gamma_{23}$ і підставляємо це значення у перше рівняння. Після такої підстановки перші два рівняння будуть мати вигляд

$$-2\gamma_{22} - 2i\gamma_{23} = 0$$

$$-i\gamma_{22} + \gamma_{23} = 0.$$

Ці рівняння збігаються з точністю до постійного множника $\frac{i}{2}$. Відкидаючи перше рівняння отримаємо,

$$-i\gamma_{22} + \gamma_{23} = 0.$$

Звідси $\gamma_{23} = i\gamma_{22}$. Покладаємо $\gamma_{22} = 1$ і записуємо розв'язок алгебраїчної системи

$$\gamma_{21} = 1 + i, \gamma_{22} = 1, \gamma_{23} = i.$$

Далі записуємо другий фундаментальний розв'язок у комплексному вигляді

$$x_2 = (1 + i)e^{(1+i)t}, \quad y_2 = e^{(1+i)t}, \quad z_2 = ie^{(1+i)t}.$$

Дійсна та уявна частина розв'язку x_2, y_2, z_2 також утворюють фундаментальні розв'язки. Ці розв'язки можна взяти в якості другого й третього фундаментальних розв'язків вихідної системи. Зауважимо, що корінь $\lambda_3 = 1 - i$ нових лінійно незалежних фундаментальних розв'язків не породжує. Отже зробимо необхідні перетворення

$$\begin{aligned} x_2 &= (1 + i)e^{(1+i)t} = (1 + i)e^t(\cos t + i \sin t) = \\ &= e^t(\cos t + i \sin t + i \cos t - \sin t) = e^t[(\cos t - \sin t) + i(\sin t + \cos t)]; \\ y_2 &= e^{(1+i)t} = e^t(\cos t + i \sin t); \end{aligned}$$

$$z_2 = ie^{(1+i)t} = ie^t(\cos t + i \sin t) = e^t(-\sin t + i \cos t).$$

Враховуючи отримане записуємо ще два фундаментальні розв'язки

$$x_2 = e^t(\cos t - \sin t), \quad y_2 = e^t \cos t, \quad z_2 = -e^t \sin t.$$

і

$$x_3 = e^t(\sin t + \cos t), \quad y_3 = e^t \sin t, \quad z_3 = e^t \cos t.$$

Таким чином, будемо мати загальний розв'язок вихідної системи диференціальних рівнянь:

$$x = -2C_1 e^{3t} + C_2 e^t(\cos t - \sin t) + C_3 e^t(\sin t + \cos t);$$

$$y = C_1 e^{3t} + C_2 e^t \cos t + C_3 e^t \sin t;$$

$$z = 2C_1 e^{3t} - C_2 e^t \sin t + C_3 e^t \cos t.$$

де C_1, C_2, C_3 — довільні сталі.

14. 3. Випадок наявності кратних коренів характеристичного рівняння

Припустимо, що серед коренів характеристичного рівняння є кратні. У цьому випадку задача побудови системи фундаментальних розв'язків суттєво ускладнюється. Розберемо шляхи побудови загального розв'язку на деяких конкретних прикладах.

Приклад 14.5.

Знайти розв'язок системи

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 3x - y; \\ \dot{y} &= x + y. \end{aligned} \tag{286}$$

$$x(0) = 0, \quad y(0) = 1.$$

Розв'язування

Складаємо характеристичне рівняння системи:

$$\begin{vmatrix} 3 - \lambda & -1 \\ 1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0.$$

Очевидно, що характеристичне рівняння має кратний корінь (кратності 2) $\lambda = 2$. Ми не знаємо як будувати загальний розв'язок для системи лінійних рівнянь, але знаємо як будується загальний розв'язок для одного лінійного рівняння n -го порядку. Тому зведемо систему двох рівнянь до одного рівняння другого порядку.

Диференціюємо перше рівняння

$$\ddot{x} = 3\dot{x} - \dot{y}.$$

Далі підставляємо в цю формулу значення $\dot{x}, \dot{y}$ з системи (286)

$$\ddot{x} = 3(3x - y) - x - y = 8x - 4y.$$

Тепер замість y підставимо його вираз з першого рівняння системи

$$\ddot{x} = 8x - 4(3x - \dot{x}) = -4x + 4\dot{x}.$$

Таким чином, замість системи (286) отримали одне лінійне рівняння другого порядку

$$\ddot{x} - 4\dot{x} + 4x = 0.$$

Його характеристичне рівняння має вигляд

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0.$$

Тобто, це характеристичне рівняння збігається з характеристичним рівнянням системи. Для рівняння другого порядку має випадок кратного кореня. Тому загальний розв'язок отриманого рівняння можна записати у вигляді:

$$x = C_1 e^{2t} + C_2 t e^{2t}.$$

З першого рівняння системи (286) виражаємо y через x і $\dot{x}$ і знаходимо розв'язок за змінною y . Маємо

$$\dot{x} = C_1 e^{2t} + C_2 e^{2t} + 2C_2 t e^{2t},$$

$$\begin{aligned}
y = 3x - \dot{x} &= 3C_1e^{2t} + 3C_2te^{2t} - 2C_1e^{2t} - C_2e^{2t} - 2C_2te^{2t} \\
&= C_1e^{2t} + C_2(t-1)e^{-2t}.
\end{aligned}$$

Таким чином, за допомогою зведення системи до одного рівняння ми отримали загальний розв'язок системи у випадку кратних коренів характеристичного рівняння:

$$\begin{aligned}
x &= C_1e^{2t} + C_2te^{2t}, \\
y &= C_1e^{2t} + C_2(t-1)e^{-2t}.
\end{aligned}$$

Тепер знайдемо розв'язок задачі Коші. Підставимо початкові дані у загальний розв'язок. Отримаємо систему алгебраїчних рівнянь

$$\begin{aligned}
C_1 &= 0; \\
C_1 - C_2 &= 1.
\end{aligned} \tag{287}$$

Звідси $C_1 = 0, C_2 = -1$. Таким чином, розв'язок задачі Коші має вигляд:

$$\begin{aligned}
x &= -te^{2t}, \\
y &= (1-t)e^{2t}.
\end{aligned} \tag{288}$$

Запропонований метод зведення лінійної системи до рівняння більш високого порядку називається методом виключення.

15. Розділ 15

Стійкість за Ляпуновим

15. 1. Означення стійкості руху (розв'язку) за Ляпуновим

Розглянемо нормальну систему диференціальних рівнянь n -го порядку:

[illegible]

де $y_1, y_2, \dots, y_n$ невідомі функції, t — час, а через y_k ($k = 1, 2, \dots, n$) позначені похідні за часом. Завжди будемо припускати, що система (289) задовольняє умовам теореми існування та єдиності розв'язку задачі Коші.

Розглянемо деякий, цілком визначений, розв'язок системи

$$y_1 = f_1(t), y_2 = f_2(t), \dots, y_n = f_n(t), \quad (290)$$

який задовольняє умовам

$$y_{10} = f_1(t_0), y_{20} = f_2(t_0), \dots, y_{n0} = f_n(t_0). \quad (291)$$

Цьому розв'язку відповідає деякий рух системи, який ми будемо називати незбуреним рухом. Змінимо умови (291) надав початковим значенням змінних невеликі за модулем прирости $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$, а саме при

$$t = t_0, y_1 = f_1(t_0) + \varepsilon_1, y_2 = f_2(t_0) + \varepsilon_2, \dots, y_n = f_n(t_0) + \varepsilon_n. \quad (292)$$

Рух системи, який відповідає зміненню початковим умовам (292) називається збуреним рухом, а величини $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ — збуреннями.

Позначимо значення змінних y_j у збуреному русі через $y_j(t)$, а у незбуреному русі — $f_j(t)$ через і складемо різницю між ними

$$x_j = y_j(t) - f_j(t); \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (293)$$

Змінні x_j називаються відхиленнями або варіаціями величин y_j . Якщо всі варіації дорівнюють нулю, тобто

$$x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0, \quad (294)$$

то збурений рух $y_j(t)$ буде співпадати з незбуреним рухом $f_j(t)$. Отже незбуреному руху відповідають нульові значення змінних x_j . У фазовому просторі $x_1, x_2, \dots, x_n$ незбуреному руху буде відповідати нерухома точка (положення рівноваги) яка розташована в початку координат. Відповідно збуреному руху в фазовому просторі $x_1, x_2, \dots, x_n$ буде відповідати рух по деякій траєкторії.

Введемо у розгляд наступні вектори

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{pmatrix}, \dot{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \dot{y}_n \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}, \mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n(t_0) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} Y_1(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ Y_2(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \cdot \\ \cdot \\ Y_n(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{pmatrix}.$$

Тоді систему рівнянь (289) можна записати у векторному вигляді

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{Y}(t, \mathbf{y}) \quad (295)$$

Відхилення збуреного руху від незбуреного буде визначатися вектором $\mathbf{x}$.

Зауважимо, що згідно з визначенням збуреного руху та формулам (292), (293)

$$x_{0j} = x_j(t_0) = \varepsilon_j; \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (296)$$

Означення стійкості за Ляпуновим. Якщо для будь-якого, як завгодно малого, числа $\varepsilon > 0$ можна знайти число $\delta > 0$, що при всіх збуреннях

$\mathbf{x}_0$, які задовольняють умові

$$\|\mathbf{x}_0\| < \delta \quad (297)$$

і при всіх $t \geq t_0$ буде виконуватися умова

$$\|\mathbf{x}\| < \varepsilon, \quad (298)$$

то незбурений рух стійкий. Якщо ж хоча б для одного збуреного руху при виконанні умови (297) не виконується умова (298), то незбурений рух — нестійкий. Зауважимо, що

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}.$$



Олександр Михайлович Ляпунов (1857-1918)

Геометрично це визначення означає наступне. Розглянемо сферу $\|\mathbf{x}\| = \varepsilon$. Виберемо радіус ε цієї сфери достатньо малим. Якщо рух стійкий, то для цієї сфери (сфери ε) повинна знайтись інша сфера $\|\mathbf{x}\| = \delta$, радіуса δ (сфера δ), яка має наступну властивість. Траєкторія збуреного руху, яка стартує з будь-якої точки M_0 , яка лежить всередині сфери δ , в подальшому завжди залишається всередині сфери ε . Якщо ж незбурений рух нестійкий, то хоча б одна траєкторія, яка починається в точці M_0 з плином часу перетне сферу ε з середини назовні при будь-якому, як завгодно близькому положенні точки M_0 до початку координат.

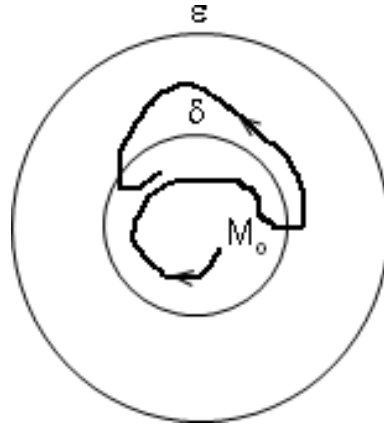


Рис. 4: Стійкий незбурений рух.

Практично стійкість даного незбуреного руху означає, що, при достатньо малих початкових збуреннях, збурений рух буде як завгодно мало відрізнятися від незбуреного руху. Якщо ж незбурений рух нестійкий, то збурений рух буде відходити від нього, якими б малими не були початкові збурення.

Якщо незбурений рух стійкий і при цьому виконується умова

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\mathbf{x}\| = 0, \quad (299)$$

то незбурений рух називається асимптотично стійким. Зауважимо, що однієї граничної умови (299) недостатньо для асимптотичної стійкості — необхідно, щоб крім цієї умови рух був би стійким.

15. 2. Рівняння збуреного руху

У тих випадках, коли відомий загальний розв’язок диференціальних рівнянь (289), можливо безпосередньо визначити значення змінних $y_j(t)$ у збуреному русі, склавши варіації $x_j = y_j(t) - f_j(t)$ і, дослідивши їх, вирішити питання про стійкість незбуреного руху $f_j(t)$.

Але у переважній більшості випадків загальний розв’язок системи (289) невідомий, тому цей метод практично не може бути використаний. Тому необхідна розробка спеціальних методів дослідження стійкості.

Для виводу рівнянь збуреного руху знайдемо з рівності (293) змінні $y_j(t)$

$$y_j(t) = f_j(t) + x_j(t).$$

Підставимо ці значення $y_j(t)$ в систему (289). Отримаємо

$$\dot{f}_j + \dot{x}_j = Y_j(t, f_1 + x_1, f_2 + x_2, \dots, f_n + x_n), \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Розкладемо праві частини цих рівнянь у ряди Тейлора за ступенями x_j

$$\dot{f}_j + \dot{x}_j = Y_j(t, f_1, \dots, f_n) + \frac{\partial Y_j(t, f_1, \dots, f_n)}{\partial x_1} x_1 + \dots + \frac{\partial Y_j(t, f_1, \dots, f_n)}{\partial x_n} x_n + X_j^*,$$

де X_j^* — сукупність членів, які залежать від варіацій x_j у ступені вищому ніж перший. Функції $f_j(t)$ повинні задовольняти системі (289), тобто

$$\dot{f}_j = Y_j(t, f_1, f_2, \dots, f_n), \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Тоді отримаємо наступну систему рівнянь

$$\dot{x}_j = a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \dots + a_{jn}x_n + X_j^*, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (300)$$

де коефіцієнти a_{jk} дорівнюють

$$a_{jk} = \frac{\partial Y_j(t, f_1, f_2, \dots, f_n)}{\partial x_k}. \quad (301)$$

Рівняння (300) називаються диференціальними рівняннями збуреного руху або системою рівнянь у варіаціях. У загальному випадку коефіцієнти a_{jk} будуть функціями від часу t , зокрема вони можуть бути постійними.

Якщо в цих рівняннях відкинути члени X_j^* , то після цього отримаємо рівняння

$$\dot{x}_j = a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \dots + a_{jn}x_n, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (302)$$

які називаються рівняннями першого наближення.

Рівняннями першого наближення в багатьох випадках дають вірну відповідь на питання про стійкість руху, але в деяких випадках висновок, який можна отримати з цих наближених рівнянь невірно відповідає на питання про стійкість руху.

15. 3. Фазовий портрет лінійної системи диференціальних рівнянь другого порядку

Позначимо через x_1, x_2 функції від часу t , які визначають стан деякого об'єкту чи процесу. Припустимо, що об'єкт може бути описаний за допомогою лінійної однорідної системи диференціальних рівнянь другого порядку:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2; \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2, \end{aligned} \tag{303}$$

де a_{11}, a_{12}, a_{21} і a_{22} — задані дійсні числа.

Складемо характеристичне рівняння цієї системи

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

або

$$\lambda^2 + \sigma\lambda + \Delta = 0, \tag{304}$$

де $\sigma = -(a_{11} + a_{22})$, $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Знайдемо положення рівноваги цієї системи. Прирівнюючи нулю її праві частини отримаємо

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= 0; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= 0. \end{aligned} \tag{305}$$

Припустимо, що детермінант лінійної алгебраїчної системи (305) не дорівнює нулю, тобто

$$\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0.$$

Тоді система (305) має єдиний розв'язок $x_1 = 0, x_2 = 0$. Цей розв'язок буде єдиним положенням рівноваги системи диференціальних рівнянь (303).

Зробимо в системі (303) заміну змінних

$$\begin{aligned} z_1 &= b_{11}x_1 + b_{12}x_2; \\ z_2 &= b_{21}x_1 + b_{22}x_2, \end{aligned} \quad (306)$$

де z_1, z_2 — нові невідомі функції, b_{11}, b_{12}, b_{21} і b_{22} — деякі постійні дійсні числа, причому $\Delta_1 = b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21} \neq 0$. Ця заміна переводить окіл положення рівноваги $x_1 = 0, x_2 = 0$ в окіл положення рівноваги $z_1 = 0, z_2 = 0$.

Можна довести, що за допомогою заміни (306) система рівнянь (303) може бути приведена до вигляду:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \lambda_1 z_1; \\ \dot{z}_2 &= \lambda_2 z_2, \end{aligned} \quad (307)$$

де λ_1, λ_2 — деякі постійні, не обов'язково дійсні, числа.

Такий вигляд до якого зводиться вихідна система (303) називається канонічним. У канонічному вигляді система розщеплюється на два незалежних рівняння, для яких елементарно знаходимо загальний розв'язок

$$z_1 = C_1 e^{\lambda_1 t}, \quad z_2 = C_2 e^{\lambda_2 t}. \quad (308)$$

Побудуємо траєкторії розв'язків (308) на фазовій площині (z_1, z_2) . Для цього виключимо t з формул (308). Будемо мати

$$e^{\lambda_1 t} = \frac{z_1}{C_1}. \quad \text{Звідси} \quad \lambda_1 t = \ln \left| \frac{z_1}{C_1} \right| \quad \text{і} \quad t = \frac{1}{\lambda_1} \ln \left| \frac{z_1}{C_1} \right|.$$

Тепер підставимо отримане значення t у другу формулу (308),

$$z_2 = C_2 e^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \ln \left| \frac{z_1}{C_1} \right|} = C_2 e^{\ln \left| \frac{z_1}{C_1} \right|^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}} = \frac{C_2}{|C_1|^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}} |z_1|^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}.$$

Позначивши через $C = \frac{C_2}{|C_1|^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}}$ отримаємо рівняння траєкторій системи (307) на фазовій площині у вигляді

$$z_2 = C z_1^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}. \quad (309)$$

Зауважимо, що модуль у правій частині формули (309) можна завжди відкинути на підставі довільності C .

Далі розглянемо наступні можливі випадки.

1. Нехай $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ або $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$. Тобто обидва корені характеристичного рівняння або додатні, або від'ємні. Позначимо через $k = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$. Очевидно, що $k > 0$. Рівняння фазових траєкторій приймає вигляд

$$z_2 = C z_1^k, \quad k > 0. \quad (310)$$

Це рівняння визначає сімейство парабол, які проходять через початок координат фазової площини. Але, і це виключно важливо, траєкторіями розв'язків системи будуть тільки окремі частини цих парабол. Найбільш наочно це видно з формул (308). Кожному розв'язку системи (307) відповідають цілком визначені значення сталих C_1, C_2 . Нехай $C_1 = 0, C_2 = 0$. Ці значення відповідають розв'язку $z_1 = 0, z_2 = 0$, тобто положенню рівноваги системи (307). Траєкторією цього положення рівноваги буде точка — початок координат на фазовій площині (z_1, z_2) . Отже, надалі з усіх парабол сімейства (310) потрібно виключити точку $(0, 0)$. Далі нехай $C_1 = 0, C_2 > 0$ або $C_1 = 0, C_2 < 0$. З формул (308) витікає, що в цьому випадку отримаємо, при всіх $t > 0$, $z_1 = 0, z_2 > 0$ або $z_1 = 0, z_2 < 0$. Траєкторіями розв'язків системи будуть відповідно додатна та від'ємна частини осі Oz_2 . Аналогічно при $C_1 > 0$ ($C_1 < 0$), $C_2 = 0$ отримаємо ще дві траєкторії, додатну та від'ємну частини осі Oz_1 . Якщо ж $C_1 > 0, C_2 > 0$, то $z_1 > 0, z_2 > 0$, тому з парабол сімейства (310) в цьому випадку треба взяти тільки гілки розташовані в першому квадранті площини z_1, z_2 . Аналогічно при $C_1 < 0, C_2 > 0$; $C_1 < 0, C_2 < 0$; $C_1 > 0, C_2 < 0$ з парабол сімейства (310) треба взяти тільки гілки розташовані, відповідно, в другому, третьому й четвертому квадрантах. Причому скрізь виключається початок координат.

З'ясуємо напрямок руху зображальної точки по цим траєкторіям. Якщо $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$, то з (308) випливає, що $\lim_{t \rightarrow +\infty} z_1(t) = 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} z_2(t) = 0$. Тобто всі траєкторії входять у початок координат фазового простору при $t \rightarrow +\infty$.

На підставі геометричного означення стійкості за Ляпуновим, положення рівноваги $z_1 = 0, z_2 = 0$ буде асимптотично стійким. Воно називається стійким вузлом. На рис. 5а зображений фазовий портрет системи, де стрілочками показаний напрям руху по траєкторіям. Якщо ж $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$, то з (308)

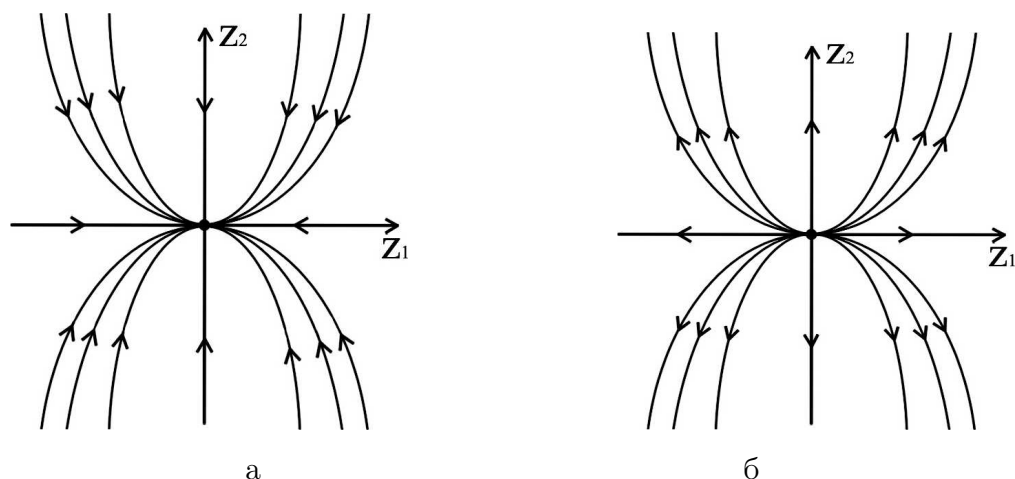


Рис. 5: Стійкий вузол (а); нестійкий вузол (б).

випливає, що $\lim_{t \rightarrow +\infty} z_1(t) = \infty, \lim_{t \rightarrow +\infty} z_2(t) = \infty$. Тобто всі траєкторії виходять з початку координат фазового простору й прямують до нескінченності при $t \rightarrow +\infty$. На підставі геометричного означення стійкості за Ляпуновим, положення рівноваги $z_1 = 0, z_2 = 0$ буде нестійким. Воно називається нестійким вузлом. На рис. 5б зображений нестійкий вузол, де стрілочками показаний напрям руху по траєкторіям.

2. Тепер розглянемо випадок, коли $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$ або $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$. Тобто один з коренів характеристичного рівняння додатний, а інший — від’ємний. Повторюючи перетворення пункту 1, отримаємо рівняння фазових траєкторій

$$z_2 = C z_1^{-k}, \quad k > 0. \quad (311)$$

Сімейство (311) це сімейство гіпербол. Траєкторіями системи (307) будуть гілки гіпербол, розташовані в одному з квадрантів фазової площини (z_1, z_2) . Крім того, траєкторіями будуть сама точка $(z_1 = 0, z_2 = 0)$ і від’ємні та додатні частини координатних осей Oz_1, Oz_2 . Визначимо напрямок руху зображальної точки по траєкторіям для випадку $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$. З формули загаль-

ного розв'язку (308) отримаємо $\lim_{t \rightarrow +\infty} z_1(t) = \infty$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} z_2(t) = 0$, $z_1 \neq 0$, $z_2 \neq 0$. При $z_1 = 0$, $z_2 \neq 0$, маємо $\lim_{t \rightarrow +\infty} z_2(t) = 0$. А при $z_1 \neq 0$, $z_2 = 0$, маємо $\lim_{t \rightarrow +\infty} z_1(t) = \infty$.

Зображальна точка по фазовій траєкторії спочатку буде наближатися до положення рівноваги ($z_1 = 0$, $z_2 = 0$), а потім почне віддалятися від нього. По вісі Oz_2 зображальна точка наближається, а по вісі Oz_1 — віддаляється від положення рівноваги. Розташування траєкторій і напрям руху на них приведений на рис. 6а.

Легко переконатися, що для випадку $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 > 0$ фазовий портрет системи має вигляд зображений на рис. 6б. У цьому випадку зображальна точка наближається до положення рівноваги по вісі Oz_1 і віддаляється від нього по вісі Oz_2 .

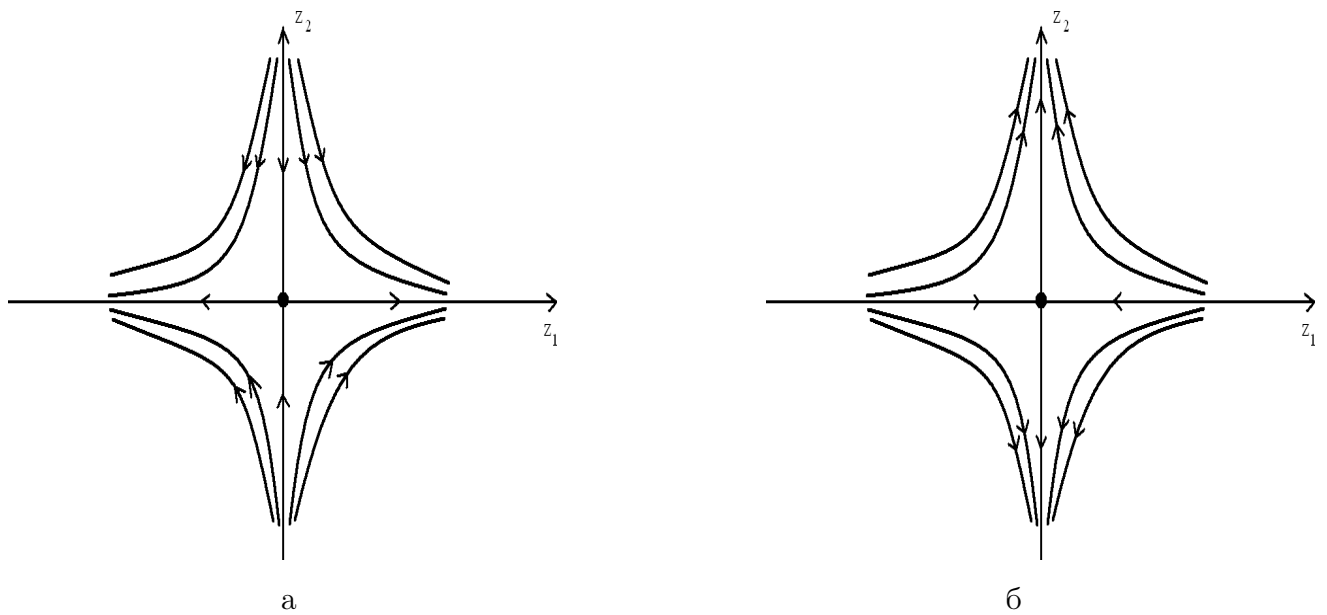


Рис. 6: Сідло.

Положення рівноваги типу зображених на рис. 6 називається сідлом. Воно завжди нестійке. Виключно важливу роль тут грають траєкторії $z_1 = 0$, $z_2 > 0$; $z_1 = 0$, $z_2 < 0$; $z_1 > 0$, $z_2 = 0$; $z_1 < 0$, $z_2 = 0$ (від'ємні та додатні частини координатних осей Oz_1 , Oz_2). Ці траєкторії називаються сепаратрисами (вусами) сідла.

3. Розглянемо випадок кратних коренів характеристичного рівняння

$$\lambda^2 + \sigma\lambda + \Delta = 0.$$

У цьому випадку $\frac{\sigma^2}{4} = \Delta$ і $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{a_{11} + a_{22}}{2}$. Припустимо, що $\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$. Випадок, коли $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ розглянемо пізніше. Далі можливі два випадки.

3.1. У цьому вихідна система може бути зведена до вигляду:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \lambda_1 z_1; \\ \dot{z}_2 &= z_1 + \lambda_1 z_2. \end{aligned} \tag{312}$$

Так як $\lambda_1 \neq 0$, то система (312) має єдине положення рівноваги $z_1 = 0, z_2 = 0$, яке відповідає єдиному положенню рівноваги $x_1 = 0, x_2 = 0$ вихідної системи (303).

Загальний розв'язок системи (312) має вигляд

$$z_1 = C_1 e^{\lambda_1 t}, \quad z_2 = e^{\lambda_1 t} (C_2 + C_1 t). \tag{313}$$

Рівняння траєкторій системи (312) на фазовій площині має вигляд:

$$z_2 = C z_1 + \frac{z_1 \ln |z_1|}{\lambda_1}, \quad \text{причому } z_1 \neq 0. \tag{314}$$

Графік однієї з ліній, які утворюють сімейство (314) наведений на рис. 7.

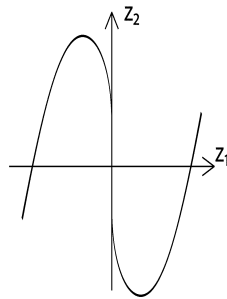


Рис. 7: Траєкторії виродженого вузла.

З формул (313) випливає, що кожна така лінія складається з трьох траєкторій, одна з яких це точка — початок координат. Дві інші траєкторії це

криві, симетричні відносно початку координат, розташовані, відповідно, в лівій та правій напівплощині. Також траєкторіями системи будуть відповідно додатна та від'ємна частини осі Oz_2 . А вісь Oz_1 не утворює траєкторій.

З'ясуємо як буде рухатися зображальна точка по траєкторіям. При $\lambda_1 > 0$, отримаємо з (313),

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} z_1(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} C_1 e^{\lambda_1 t} = \infty; \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} z_2(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} C_1 e^{\lambda_1 t} (C_2 + C_1 t) = \infty.$$

Відповідно, при $\lambda_1 < 0$ будемо мати,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} C_1 e^{\lambda_1 t} = 0; \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} C_1 e^{\lambda_1 t} (C_2 + C_1 t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{C_2 + C_1 t}{e^{-\lambda_1 t}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{C_1}{-\lambda_1 e^{-\lambda_1 t}} = 0.$$

Звідси витікає, що положення рівноваги $z_1 = 0, z_2 = 0$ буде асимптотично стійким при $\lambda_1 < 0$ і — нестійким при $\lambda_1 > 0$. Положення рівноваги такого типу називається виродженим вузлом, відповідно стійким і нестійким. На рис. 8а зображений стійкий вироджений вузол, по траєкторіям якого зображальна точка прямує до початку координат.

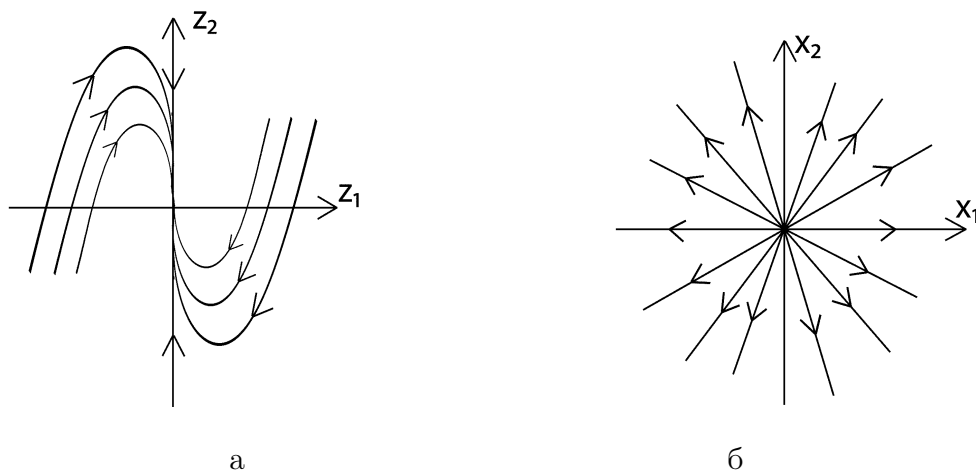


Рис. 8: Стійкий вироджений вузол (а); нестійкий дикритичний вузол (б).

3.2. Цей випадок має місце, коли $a_{11} = a_{22}, a_{12} = a_{21} = 0$. Позначимо через $a = a_{11} = a_{22}$. Тоді вихідна система (303) має вигляд

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= ax_1; \\ \dot{x}_2 &= ax_2. \end{aligned} \tag{315}$$

Очевидно, що загальний розв'язок такої системи може бути знайдений за формулами

$$x_1 = C_1 e^{at}, \quad x_2 = C_2 e^{at}. \quad (316)$$

Поділивши x_2 на x_1 отримаємо $\frac{x_2}{x_1} = \frac{C_2}{C_1}$, або

$$x_2 = C x_1, \quad x_1 \neq 0, \quad (317)$$

де $C = \frac{C_2}{C_1}$.

Траєкторіями системи, в цьому випадку, будуть напівпрямі $x_2 = C x_1$, розташовані в одному з квадрантів фазової площини, в тому числі і піввісі Ox_1 і Ox_2 . Те, що траєкторіями будуть піввісі витікає Ox_1 з (316) при $C_1 \neq 0, C_2 = 0$, а для Ox_2 з (316) при $C_1 = 0, C_2 \neq 0$. Зрозуміло, що траєкторією положення рівноваги буде точка $(0, 0)$.

Якщо $a > 0$, то $\lim_{t \rightarrow +\infty} x_1(t) = \infty, \lim_{t \rightarrow +\infty} x_2(t) = \infty$. Відповідно при $a < 0$ будемо мати $\lim_{t \rightarrow +\infty} x_1(t) = 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} x_2(t) = 0$. Отже, зображальна точка траєкторій прямує до положення рівноваги при $a < 0$ і як завгодно далеко відходить від нього при $a > 0$. У першому випадку положення рівноваги буде асимптотично стійким, а в другому — нестійким. Таке положення рівноваги називається, відповідно стійким або нестійким дикритичним вузлом. На рис. 8б зображений нестійкий дикритичний вузол.

4. Тепер розглянемо випадок, коли корені λ_1, λ_2 характеристичного рівняння комплексні, але не чисто уявні, $\lambda_1 = p + iq, \lambda_2 = p - iq, p \neq 0$. Зробивши заміну (306) отримаємо систему рівнянь

$$\dot{z}_1 = (p + iq)z_1;$$

$$\dot{z}_2 = (p - iq)z_2.$$

Для того, щоб мати справу з дійсними змінними зробимо ще одну заміну

$$z_1 = u - iv; \quad z_2 = u + iv,$$

де $u(t), v(t)$ – дійсні функції від дійсної змінної t . Будемо мати,

$$\dot{u} - i\dot{v} = (p + iq)(u - iv) = pu - ipv + iqu + qv;$$

$$\dot{u} + i\dot{v} = (p - iq)(u + iv) = pu + ipv - iqu + qv.$$

Спочатку додамо ці рівняння й поділимо на два. Потім від другого віднімемо перше й поділимо на $2i$. Отримаємо,

$$\dot{u} = pu + qv; \tag{318}$$

$$\dot{v} = -qu + pv.$$

Далі перейдемо до полярних координат, вважаючи, що полюс збігається з початком декартових координат u, v , а полярна вісь з віссю Ou ,

$$u = \rho \cos \varphi, \quad v = \rho \sin \varphi.$$

Так як,

$$\dot{u} = \dot{\rho} \cos \varphi - \dot{\varphi} \rho \sin \varphi; \quad \dot{v} = \dot{\rho} \sin \varphi + \dot{\varphi} \rho \cos \varphi, \tag{319}$$

то підставляючи (319) в (318) отримаємо,

$$\dot{\rho} \cos \varphi - \dot{\varphi} \rho \sin \varphi = p \rho \cos \varphi + q \rho \sin \varphi; \tag{320}$$

$$\dot{\rho} \sin \varphi + \dot{\varphi} \rho \cos \varphi = -q \rho \cos \varphi + p \rho \sin \varphi.$$

Розв'яжемо систему (320) відносно $\dot{\rho}, \dot{\varphi}$, застосувавши формули Крамера. Обчислимо відповідні визначники,

$$\dot{\rho} = \frac{\begin{vmatrix} p \rho \cos \varphi + q \rho \sin \varphi & -\rho \sin \varphi \\ -q \rho \cos \varphi + p \rho \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{vmatrix}} = \frac{1}{\rho} (p \rho^2 \cos^2 \varphi + q \rho^2 \sin \varphi \cos \varphi -$$

$$-q \rho^2 \sin \varphi \cos \varphi + p \rho^2 \sin^2 \varphi) = \frac{1}{\rho} p \rho^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = p \rho;$$

$$\dot{\varphi} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \cos \varphi & p \rho \cos \varphi + q \rho \sin \varphi \\ \sin \varphi & -q \rho \cos \varphi + p \rho \sin \varphi \end{vmatrix} = \frac{1}{\rho} [-q \rho (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) +$$

$$+p\rho(\sin \varphi \cos \varphi - \sin \varphi \cos \varphi)] = -q.$$

Таким чином отримали систему диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned}\dot{\rho} &= p\rho; \\ \dot{\varphi} &= -q.\end{aligned}\tag{321}$$

Загальний розв'язок цієї системи визначається за формулами

$$\rho = C_1 e^{pt}, \quad \varphi = -qt + C_2.\tag{322}$$

Виключаючи t з формул (322) отримаємо, $t = \frac{C_2 - \varphi}{q}$. Звідси $\rho = C_1 e^{\frac{p}{q}(C_2 - \varphi)}$. Позначимо через $k = -\frac{p}{q}$, а через $C = C_1 e^{\frac{C_2 p}{q}}$. Тоді будемо мати

$$\rho = C e^{k\varphi}.\tag{323}$$

Рівняння (323) визначає сімейство логарифмічних спіралей на полярній площині. Положенням рівноваги тут буде полюс, який відповідає початку координат на площині (u, v) . На площині (u, v) будемо мати тіж самі логарифмічні спіралі. Як видно з першої з формул (322), зображальна точка при $t \rightarrow +\infty$ прямує до полюса (до положення рівноваги $u = 0, v = 0$), якщо $p < 0$ і як завгодно віддаляється від полюса при $p > 0$. У першому випадку положення рівноваги буде асимптотично стійким, а в другому — нестійким. Положення рівноваги такого типу називається фокусом, відповідно стійким і нестійким. На рис. 9 зображені, відповідно, стійкий і нестійкий фокуси. Фазовий портрет вихідної системи (303) буде топологічно еквівалентним фазовим портретам, наведеним на рис. 9.

Тепер припустимо, що дійсні частини комплексно—спряжених коренів характеристичного рівняння дорівнюють нулю, $p = 0$, тобто корені чисто уявні. Тоді, з (323) отримаємо наступне рівняння фазових траєкторій, $\rho = C$. Це концентричні кола, які оточують полюс ($u = 0, v = 0$). Всі траєкторії замкнені. Вони відповідають періодичному розв'язку системи (318),

$$u = C_1 \cos \varphi, \quad v = C_1 \sin \varphi, \quad \text{де } \varphi = -qt + C_2.$$

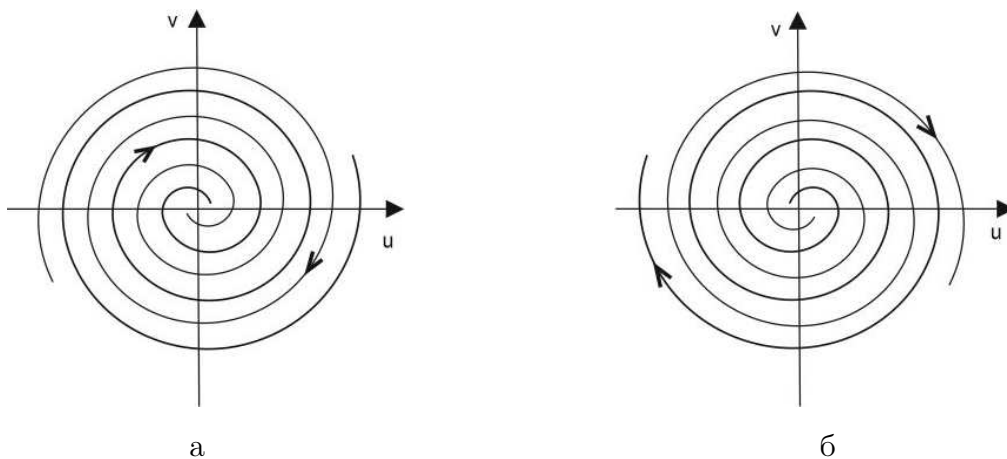


Рис. 9: Стійкий фокус (а); нестійкий фокус (б).

Фазові траєкторії не наближаються, але і не віддаляються від положення рівноваги, яке буде стійким, але не асимптотично. Фазовий портрет має вигляд зображений на рис. 10.

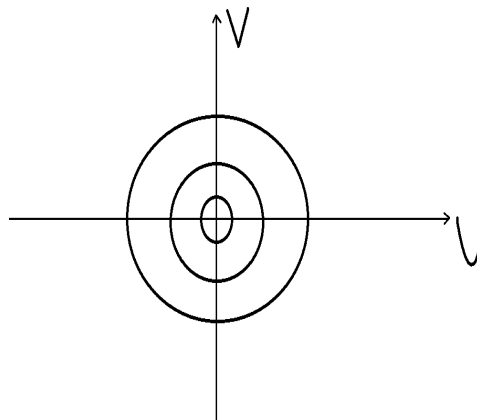


Рис. 10: Центр.

Таке положення рівноваги називається центром. Напрямок руху по траєкторіям визначається знаком q , але цей напрям, у даному випадку, не має суттєвого значення для визначення стійкості положення рівноваги.

Поза нашим дослідженням залишились випадки кратних нульових коренів характеристичного рівняння. У цих випадках виникають інші типи положень рівноваги, але положення рівноваги типу вузол, сідло, фокус і центр головним чином зустрічаються в прикладних задачах, зокрема в фізичних задачах.

Таким чином, ми встановили існування наступних типів положень рівноваги:

1. Вузол.

1.1. Стійкий вузол, $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0$, $\sigma = -(a_{11} + a_{22}) > 0$, $\frac{\sigma^2}{4} > \Delta$.

Корені характеристичного рівняння різні й від'ємні.

1.2. Нестійкий вузол, $\Delta > 0$, $\sigma < 0$, $\frac{\sigma^2}{4} > \Delta$. Корені характеристичного рівняння різні й додатні.

1.3. Стійкий вироджений вузол $\Delta > 0$, $\sigma > 0$, $\frac{\sigma^2}{4} = \Delta$. Кратний від'ємний корінь характеристичного рівняння $\lambda = -\frac{\sigma}{2}$.

1.4. Нестійкий вироджений вузол $\Delta > 0$, $\sigma < 0$, $\frac{\sigma^2}{4} = \Delta$. Кратний додатний корінь характеристичного рівняння $\lambda = -\frac{\sigma}{2}$.

1.5. Стійкий дикритичний вузол $\Delta > 0$, $\sigma > 0$, $\frac{\sigma^2}{4} = \Delta$, $a_{11} = a_{22} < 0$. Кратний від'ємний корінь характеристичного рівняння $\lambda = a_{11}$.

1.6. Нестійкий дикритичний вузол $\Delta > 0$, $\sigma < 0$, $\frac{\sigma^2}{4} = \Delta$, $a_{11} = a_{22} > 0$. Кратний додатний корінь характеристичного рівняння $\lambda = a_{11}$.

2. Сідло.

$\Delta < 0$, корені характеристичного рівняння дійсні й різних знаків. Сідло завжди нестійке.

3. Фокус.

3.1. Стійкий фокус $\Delta > 0$, $\sigma > 0$, $\frac{\sigma^2}{4} < \Delta$. Корені характеристичного рівняння комплексно спряжені.

3.2. Нестійкий фокус $\Delta > 0$, $\sigma < 0$, $\frac{\sigma^2}{4} < \Delta$. Корені характеристичного рівняння комплексно спряжені.

4. Центр.

$\Delta > 0$, $\sigma = 0$. Корені характеристичного рівняння чисто уявні. Центр завжди стійкий, але не асимптотично.

$\sigma - \Delta$ діаграма стійкості.

Наочне геометричне зображення розташування положень рівноваги різних типів надає $\sigma - \Delta$ діаграма стійкості. На рис. 11 наведена така діаграма на якій позначені області існування положень рівноваги різних типів. Нагадаємо, що σ і Δ це коефіцієнти характеристичного рівняння системи (303). Парабола на цьому рисунку задається рівнянням $\Delta = \frac{\sigma^2}{4}$.

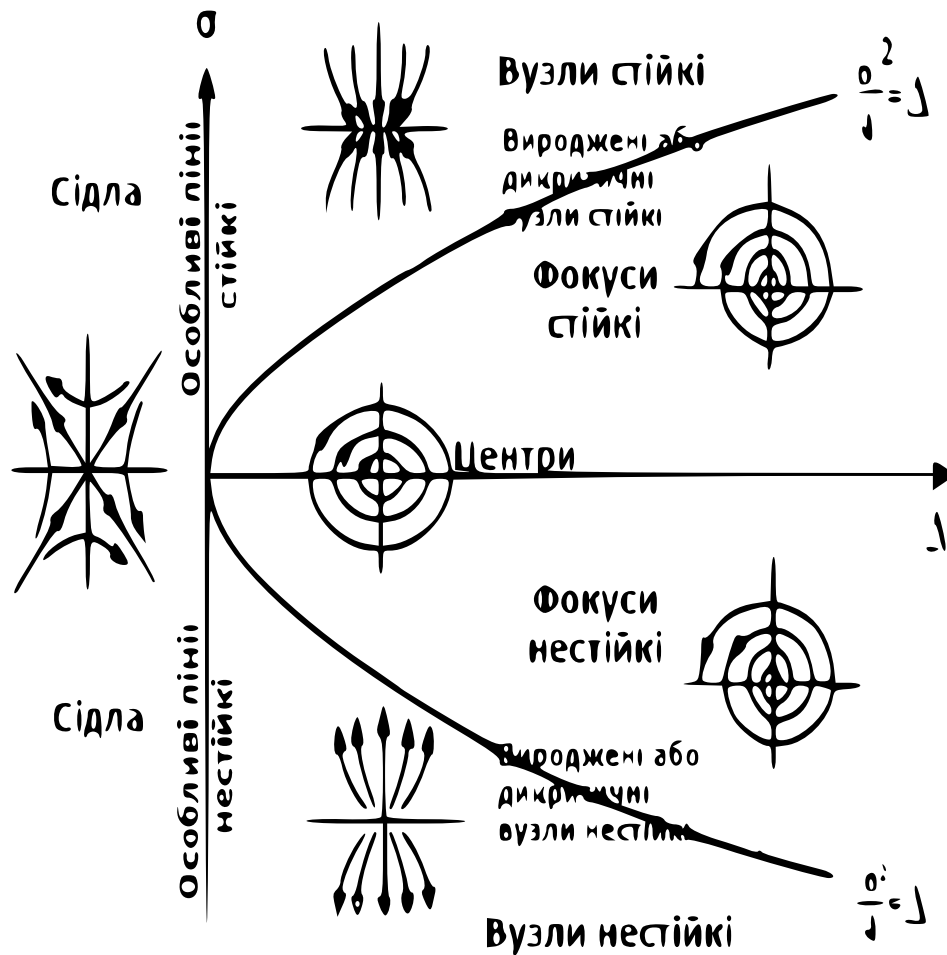


Рис. 11: $\sigma - \Delta$ діаграма стійкості

Вперше геометрична візуалізація всіх траєкторій лінійної системи диференціальних рівнянь другого порядку та класифікація типів положень рівноваги була зроблена великим французьким вченим Анрі Пуанкаре в 1889 році.

Розглянемо застосування викладеної ідентифікації типів положень рівноваги на деяких конкретних прикладах.



Jules Henri Poincaré (Жюль Анри Пуанкаре (1854-1912))

Приклад 15.1.

Задана система диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x + 2y; \\ \dot{y} &= 5x - 2y.\end{aligned}\tag{324}$$

Знайти положення рівноваги та визначити їх тип.

Розв'язування.

Обчислимо визначник правої частини системи. Маємо

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -12 < 0.$$

Звідси випливає, що система рівнянь (324) єдине положення рівноваги $x = 0, y = 0$, яке на підставі $\sigma - \Delta$ діаграми стійкості буде сідлом. Зауважимо, що з'ясувати кількість положень рівноваги і визначити тип єдиного положення рівноваги нам вдалося навіть без знаходження коренів характеристичного рівняння.

Приклад 15.2.

Задана система диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x - 4y; \\ \dot{y} &= 2x - 2y.\end{aligned}\tag{325}$$

Знайти положення рівноваги та визначити їх тип.

Розв'язування.

Обчислимо визначник правої частини системи. Маємо

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 6 > 0.$$

Звідси можемо стверджувати, що система рівнянь (325) єдине положення рівноваги $x = 0, y = 0$. Для ідентифікації типу цього положення рівноваги знайдемо значення $\sigma = -(1 - 2) = 1 > 0$. Так як $\frac{\sigma^2}{4} < \Delta$, то на підставі $\sigma - \Delta$ діаграми стійкості положення рівноваги буде стійким фокусом. Знову підкреслимо, що ідентифікацію типу положення рівноваги ми зробили навіть не знаходячи корені характеристичного рівняння.

Приклад 15.3.

Підібрати значення параметрів a, b так, щоб положення рівноваги системи диференціальних рівнянь

$$\dot{x} = ax + by;$$

$$\dot{y} = x - y.$$

було центром.

Розв'язування.

Знайдемо величини Δ та σ . Маємо

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -a - b,$$

$\sigma = 1 - a$. Положення рівноваги буде центром, якщо $\Delta > 0$ і $\sigma = 0$. Звідси очевидно, що $a = 1$ і $b < -1$.

15. 4. Теореми про стійкість за першим наближенням

Теорема про асимптотичну стійкість. *Якщо дійсні частини всіх коренів характеристичного рівняння системи першого наближення від'ємні, то незбурений рух асимптотично стійкий незалежно від членів вище першого порядку малості.*

Теорема про нестійкість. *Якщо серед коренів характеристичного рівняння системи першого наближення знайдеться хоча б один з додатною дійсною частиною, то незбурений рух нестійкий незалежно від членів вище першого порядку малості.*

Ці теореми повністю вирішують задачу про стійкість незбуреного руху в двох випадках:

- 1) дійсні частини всіх коренів характеристичного рівняння від'ємні;
- 2) дійсна частина хоча б одного кореня додатна.

Якщо ж дійсні частини деяких коренів дорівнюють нулю (зокрема всі корені мають нульові дійсні частини), а дійсні частини всіх інших коренів від'ємні, то для визначення стійкості руху недостатньо лише рівнянь першого наближення. В цих випадках необхідно розглядати вплив нелінійних членів. Такі випадки називаються критичними.

16. Розділ 16

Елементи теорії коливань

16. 1. Лінійний гармонічний осцилятор

Коливання вантажу постійної маси на пружині, маятника, заряду в електричному контурі, а також еволюція в часі багатьох систем у фізиці, хімії, біології та інших науках при певних припущеннях можна описати одним і тим же диференціальним рівнянням, яке в теорії коливань виступає в якості основної моделі. Ця модель називається лінійним гармонічним осцилятором.

Зазначимо, що коливання бувають вільними та вимушеними. Вільні коливання це коливання в системі під дією внутрішніх тіл після того, як система виведена з положення рівноваги. Вимушені коливання це коливання, що відбуваються під впливом зовнішніх сил.

Рівняння вільних коливань гармонічного осцилятора має вигляд:

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + a^2x = 0, \quad (326)$$

Зокрема у випадку коливань вантажу на пружині через x позначено відхилення центру мас вантажу від початку координат O координатної осі Ox . Параметр a пропорційний масі вантажу ($a > 0$). Параметр b визначає спротив середовища в якому рухається вантаж. З фізичних міркувань очевидно, що $b \geq 0$. Якщо відхилити вантаж у той чи інший бік і відпустити, то він почне коливання.

Запишемо лінійне рівняння (326) в еквівалентній формі нормальної системи рівнянь. Покладемо $\dot{x} = y$. Тоді $\ddot{x} = \dot{y}$ й отримаємо таку систему рівнянь

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y; \\ \dot{y} &= -a^2x - 2by. \end{aligned} \quad (327)$$

Знайдемо положення рівноваги системи (327). Вони визначаються з на-

ступної системи алгебраїчних рівнянь

$$\begin{aligned}y &= 0; \\ -a^2x - 2by &= 0.\end{aligned}\tag{328}$$

Ця система має єдиний розв'язок $x = 0, y = 0$, який буде єдиним положенням рівноваги. До речі, єдиність положення рівноваги при коливаннях вантажу на пружині може бути доведена з фізичного аналізу коливального процесу. З'ясуємо всі можливі типи цього положення рівноваги, на підставі класифікації введених на попередній лекції.

У нашому випадку

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -a^2 & -2b \end{vmatrix} = a^2 > 0, \quad \sigma = 2b.\tag{329}$$

Можна стверджувати, що положення рівноваги буде або вузлом, або фокусом, або центром. Розглянемо всі можливі випадки.

Випадок 1.

Нехай $b = 0$ тобто спротив середовища не враховується, наприклад, при коливаннях у вакуумі. Тоді, на підставі $\sigma - \Delta$ діаграми стійкості, положення рівноваги $x = 0, y = 0$ буде центром. Коливання з початком у будь-якій точці $x_0 \neq 0$ будуть періодичними. Для доведення цього достатньо розглянути рівняння (326), яке при $b = 0$ набуває вигляду

$$\ddot{x} + a^2x = 0.\tag{330}$$

Маємо характеристичне рівняння

$$\lambda^2 + a^2 = 0, a > 0.$$

Та його корені $\lambda_{1,2} = \pm ia$. Тому загальний розв'язок рівняння (326) буде мати вигляд

$$x = C_1 \cos at + C_2 \sin at,\tag{331}$$

де C_1, C_2 — довільні сталі.

Таким чином коливання вантажу будуть періодичними з частотою a і періодом $\frac{2\pi}{a}$.

Випадок 2.

Далі нехай $b > 0$ і $b < a$. Тоді, враховуючи (329) отримаємо

$$\sigma > 0, \frac{\sigma^2}{4} - \Delta = b^2 - a^2 < 0.$$

Отже, на підставі σ - Δ діаграми стійкості, положення рівноваги $x = 0, y = 0$ буде стійким фокусом. Доведемо, що при початковому значенні $x_0 \neq 0$ коливання вантажу будуть згасливими. Для цього розглянемо рівняння (326)

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + a^2x = 0. \quad (332)$$

Маємо характеристичне рівняння

$$\lambda^2 + 2b\lambda + a^2 = 0 \quad (333)$$

та його корені

$$\lambda_{1,2} = -b \pm \sqrt{b^2 - a^2}.$$

Так як $b < a$, то корені будуть комплексними. Запишемо ці корені у алгебраїчній формі

$$\lambda_{1,2} = -b \pm i\sqrt{a^2 - b^2}. \quad (334)$$

Звідси маємо загальний розв'язок (326)

$$x = e^{-bt}(C_1 \cos \sqrt{a^2 - b^2}t + C_2 \sin \sqrt{a^2 - b^2}t), \quad (335)$$

де C_1, C_2 — довільні сталі. Так як $b > 0$, то

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-bt}(C_1 \cos \sqrt{a^2 - b^2}t + C_2 \sin \sqrt{a^2 - b^2}t) = 0$$

Отже коливання вантажу будуть згасливими.

Випадок 3.

Нехай $b > 0, b = a$. Тоді $\sigma > 0, \frac{\sigma^2}{4} = \Delta$. Відповідні коефіцієнти системи (327) дорівнюють $a_{11} = 0 \neq a_{22} = -2b$. Положення рівноваги буде стійким

виродженим вузлом. З'ясуємо тип коливань вантажу в цьому випадку. Для цього розглянемо вихідне рівняння (326), яке буде мати вигляд

$$\ddot{x} + 2a\dot{x} + a^2x = 0. \quad (336)$$

Так як $b = a$, то з (334) маємо корені характеристичного рівняння

$$\lambda_{1,2} = -a.$$

Тобто маємо кратний корінь. Загальний розв'язок буде мати вигляд

$$x = e^{-at}(C_1 + C_2t), \quad (337)$$

де C_1, C_2 — довільні сталі. Так як $a > 0$, то

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-at}(C_1 + C_2t) = 0.$$

Тому коливання будуть згасливими, але, на відміну від попереднього випадку, відсутні осциляції розв'язку відносно осі абсцис.

Випадок 4.

Нехай $b > 0, b > a$. У цьому випадку будемо мати

$$\sigma > 0, \frac{\sigma^2}{4} - \Delta = b^2 - a^2 > 0.$$

На підставі $\sigma - \Delta$ діаграми стійкості положення рівноваги $x = 0, y = 0$ буде стійким вузлом. Враховуючи дослідження проведені у випадку 2 отримаємо такі корені характеристичного рівняння

$$\lambda_{1,2} = -b \pm \sqrt{b^2 - a^2}. \quad (338)$$

Так як $b > 0, b > a$, то у цьому випадку маємо дійсні та від'ємні корені. Загальний розв'язок рівняння (326) можна записати у вигляді

$$x = C_1 e^{(-b + \sqrt{b^2 - a^2})t} + C_2 e^{(-b - \sqrt{b^2 - a^2})t}. \quad (339)$$

Очевидно, що у цьому випадку

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} [C_1 e^{(-b + \sqrt{b^2 - a^2})t} + C_2 e^{(-b - \sqrt{b^2 - a^2})t}] = 0.$$

Як і в попередньому випадку 3 всі розв'язки, які починаються в точці $x_0 \neq 0$, будуть згасливими та неколивними.

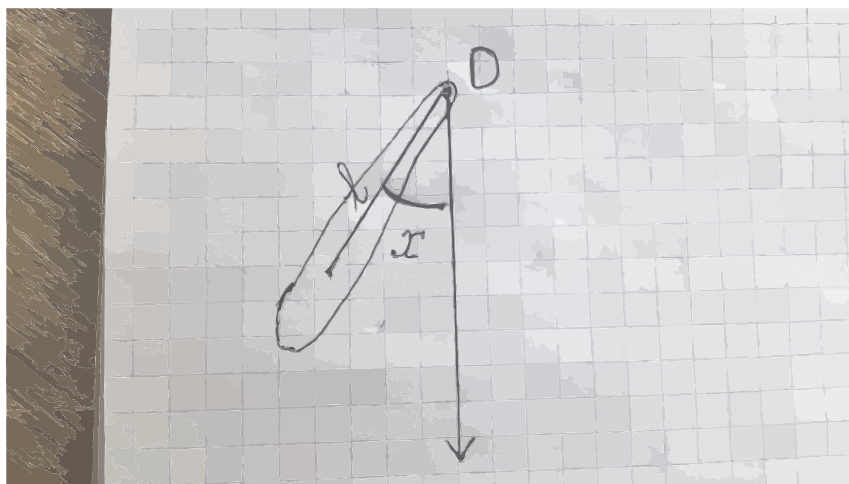
Випадок 2 має місце при малому спротиву середовища. Вантаж виконує згасливі коливання, по чергово переходячи з лівої (правої) сторони від початку координат на праву (ліву).

Випадки 3 і 4 мають місце при великому спротиві середовища. Вантаж повільно наближається до положення рівноваги тільки з однієї з сторін. З якої сторони конкретно залежить від початкової умови.

Як ми вже відмічали раніше, коефіцієнт спротиву середовища $b \geq 0$. Самостійно, в якості домашнього завдання, проведіть ідентифікацію типу положення рівноваги $x = 0, y = 0$ системи (327) у випадках $b < 0, a > 0$. Наголошуємо, що ці випадки не мають фізичного сенсу для нашої задачі. Тим не менше можливі математичні дослідження типів положення рівноваги.

16. 2. Фізичний маятник.

Під фізичним маятником розуміють тверде тіло, яке вільно обертається у вибраній площині навколо деякої точки підвісу як показано на рисунку. У якості



узагальненої координати x виберемо відхилення маятника від вертикалі. Тоді рівняння вільних коливань маятника можна записати у вигляді

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + \omega^2 \sin x = 0, \quad (340)$$

де b — коефіцієнт спротиву середовища в якому відбуваються коливання маятника. Зауважимо, що завжди $b \geq 0$, причому $b = 0$ у випадку відсутності спротиву середовища; ω — власна частота коливань маятника $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$; g — прискорення сили тяжіння; l — зведена довжина маятника (відстань від точки підвісу до центру мас).

Якщо розглядати тільки малі відхилення маятника від вертикалі, то можна покласти $\sin x \approx x$ і рівняння маятника перетвориться в рівняння лінійного осцилятора, яке ми досліджували на початку цієї лекції.

Зробимо в рівнянні(340) заміну змінної $\dot{x} = y$. Враховуючи, що $\ddot{x} = \dot{y}$ отримаємо таку систему рівнянь

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y; \\ \dot{y} &= -\omega^2 \sin x - 2by.\end{aligned}\tag{341}$$

Знайдемо положення рівноваги системи (341), прирівнюючи нулю її праві частини. Будемо мати

$$\begin{aligned}y &= 0; \\ -\omega^2 \sin x - 2by &= 0.\end{aligned}\tag{342}$$

Звідси

$$-\omega^2 \sin x = 0 \Rightarrow x = n\pi, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Таким чином система (341) має нескінчену кількість положень рівноваги. Для змінної y будь-якому положенні рівноваги $y = 0$. Але, так як функція $\sin x$ періодична з періодом 2π , то достатньо дослідити тільки положення рівноваги, які задовольняють по змінній x умові $0 \leq x < 2\pi$. На цьому проміжку ми маємо два положення рівноваги

$$x = 0, y = 0 \text{ і } x = \pi, y = 0.$$

Фізично це нижнє та верхнє положення рівноваги маятника. Властивості та тип цих положень рівноваги будуть повторюватися для відхилень кратних 2π .

Розглянемо нижнє положення рівноваги $x = 0, y = 0$. Складемо рівняння першого наближення. Для цього, на підставі викладеного у параграфі 15.2, потрібно знайти значення частинних похідних праві частини системи (341) у точці $(0, 0)$. Позначимо відповідні праві частини через

$$P(x, y) = y, \quad Q(x, y) = -\omega^2 \sin x - 2by.$$

Знайдемо відповідні частинні похідні

$$P'_x(x, y) = 0, \quad P'_y(x, y) = 1.$$

Ці похідні взагалі не залежать від x та y . У свою чергу

$$Q'_x(x, y) = -\omega^2 \cos x, \quad Q'_y(x, y) = -2b. \quad (343)$$

Отже, для нижнього положення рівноваги будемо мати таку систему рівнянь першого наближення

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= \tilde{y}; \\ \dot{\tilde{y}} &= -\omega^2 \tilde{x} - 2b\tilde{y}, \end{aligned} \quad (344)$$

де через $\tilde{x}, \tilde{y}$ позначені варіації змінних x і y . Звідси

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2b \end{vmatrix} = \omega^2 > 0, \quad \sigma = 2b \geq 0.$$

Спочатку розглянемо випадок $b > 0$. Тоді нижнє положення рівноваги, на підставі $\sigma - \Delta$ діаграми стійкості, при

$$\frac{\sigma^2}{4} \geq \Delta$$

буде стійким вузлом, а при

$$\frac{\sigma^2}{4} < \Delta$$

стійким фокусом. Так як $b > 0$ і $\omega > 0$, то при $b \geq \omega$ маємо стійкий вузол, а при $b < \omega$ — стійкий фокус. Отже вузол при відносно великому, а фокус — при відносно малому спротиву середовища. Знайти точний аналітичний запис

коливань маятника ми не можемо, так як система (341) є нелінійною. Але, враховуючи що коливання маятника відбуваються в околі нижнього положення рівноваги, ми поклавши у (341) $\sin x \approx x$ зведемо нелінійне рівняння маятника до лінійного рівняння гармонічного осцилятора. Причому таке наближене рівняння достатньо точно описує коливання маятника при малих відхиленнях від вертикалі. Тому, як ми раніше встановили для лінійного осцилятора, коливання маятника навколо нижнього положення рівноваги будуть згасливими при будь-яких додатних значеннях коефіцієнта спротиву b . Але у випадку відносно великих коефіцієнтах спротиву маятник буде наближатися до нижнього положення рівноваги тільки зліва (справа) від вертикалі. Розташування маятника зліва або справа від вертикалі буде залежати від початкового відхилення маятника. У випадку відносно малого коефіцієнта спротиву коливання маятника також згасають, але при цьому він послідовно буде переходити з лівої (правої) сторони від вертикалі на праву (ліву) з поступовим згасанням амплітуди цих коливань.

Тепер розглянемо випадок $b = 0$, тобто спротив середовища відсутній. Тоді, як було встановлено при вивченні лінійного осцилятора (рівняння якого достатньо точно апроксимує рівняння коливань маятника в околі нижнього положення рівноваги), коливання маятника будуть періодичними з частотою ω і періодом $\frac{2\pi}{\omega}$. Амплітуда таких коливань буде залежати виключно від кута початкового відхилення маятника. Нижнє положення рівноваги буде стійким (центр), але не асимптотично стійким.

Далі розглянемо верхнє положення рівноваги $x = \pi, y = 0$. У цьому випадку маємо, на підставі (343)

$$P'_x(\pi, 0) = 0, \quad P'_y(\pi, 0) = 1.$$

$$Q'_x(\pi, 0) = \omega^2, \quad Q'_y(\pi, 0) = -2b.$$

Тоді отримаємо систему рівнянь першого наближення

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}} &= \tilde{y}; \\ \dot{\tilde{y}} &= \omega^2 \tilde{x} - 2b\tilde{y}.\end{aligned}\tag{345}$$

Тоді, отримаємо

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \omega^2 & -2b \end{vmatrix} = -\omega^2 < 0.$$

Тобто верхнє положення рівноваги на підставі $\sigma - \Delta$ діаграми буде сідлом. Воно завжди нестійке, причому як при наявності, так і при відсутності спротиву середовища.

16. 3. Вимушені коливання

Нехай точка підвісу маятника збуджується за верткаллю зовнішньою гармонічною силою $M \sin \beta t$, де M — постійна величина. Тоді рівняння коливань маятника може бути записане у вигляді:

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + \omega^2 \sin x = M \sin \beta t.\tag{346}$$

Будемо розглядати тільки випадок відсутності спротиву середовища, тобто $b = 0$. Також припустимо, що відбуваються малі, за амплітудою, коливання маятника навколо нижнього положення рівноваги. Тоді рівняння (346) може бути зведено до рівняння лінійного осцилятора

$$\ddot{x} + \omega^2 x = M \sin \beta t.\tag{347}$$

Знайдемо розв'язок цього рівняння за допомогою метода невизначених коефіцієнтів. Характеристичне рівняння в цьому випадку має вигляд

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0.$$

Звідси маємо два чисто уявних корені $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$ і загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння

$$x_{\text{з.о.}} = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t.$$

Далі треба розглянути два випадки:

1. Якщо $\beta \neq \omega$, то частинний розв'язок рівняння (347) шукаємо у вигляді

$$x_{\text{ч.н.}} = A \cos \beta t + B \sin \beta t.$$

Звідси

$$x'_{\text{ч.н.}} = -A\beta \sin \beta t + B\beta \cos \beta t,$$

$$x''_{\text{ч.н.}} = -A\beta^2 \cos \beta t - B\beta^2 \sin \beta t.$$

Підставимо значення $x_{\text{ч.н.}}$, $x''_{\text{ч.н.}}$ у рівняння (347), отримаємо

$$-A\beta^2 \cos \beta t - B\beta^2 \sin \beta t + \omega^2(A \cos \beta t + B \sin \beta t) = M \sin \beta t.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при $\cos \beta t$ і $\sin \beta t$ в обох частинах рівняння, отримаємо систему алгебраїчних рівнянь

$$A(\omega^2 - \beta^2) = 0,$$

$$B(\omega^2 - \beta^2) = M \sin \beta t.$$

Звідси маємо

$$A = 0, \quad B = \frac{M}{\omega^2 - \beta^2}.$$

Таким чином, отримали частинний розв'язок

$$x_{\text{ч.н.}} = \frac{M}{\omega^2 - \beta^2} \sin \beta t$$

і загальний розв'язок рівняння (347)

$$x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + \frac{M}{\omega^2 - \beta^2} \sin \beta t.$$

2. Нехай $\beta = \omega$. В цьому випадку число $i\beta$ є простим коренем характеристичного рівняння, тому частинний розв'язок неоднорідного рівняння будемо шукати у вигляді

$$x_{\text{ч.н.}} = t(A \cos \beta t + B \sin \beta t).$$

Послідовно будемо мати

$$x'_{\text{ч.н.}} = A \cos \beta t + B \sin \beta t + t(-A\beta \sin \beta t + B\beta \cos \beta t),$$

$$x''_{\text{ч.н.}} = 2(-A\beta \sin \beta t + B\beta \cos \beta t) + t(-A\beta^2 \cos \beta t - B\beta^2 \sin \beta t)$$

Підставляючи значення $x_{\text{ч.н.}}$, $x''_{\text{ч.н.}}$ у рівняння (347), отримаємо

$$2(-A\beta \sin \beta t + B\beta \cos \beta t) + t(-A\beta^2 \cos \beta t - B\beta^2 \sin \beta t) + \omega^2 t(A \cos \beta t + B \sin \beta t) = M \sin \beta t.$$

Враховуючи що $\beta = \omega$, після скорочень будемо мати

$$-2A\beta \sin \beta t + 2B\beta \cos \beta t = M \sin \beta t.$$

Звідси для визначення коефіцієнтів A і B отримаємо систему

$$-2A\beta = M \sin \beta t,$$

$$2B\beta = 0.$$

Отже, $A = -\frac{M}{2\beta}$, $B = 0$.

Таким чином, отримали частинний розв'язок

$$x_{\text{ч.н.}} = -\frac{M}{2\beta} t \sin \beta t$$

і загальний розв'язок рівняння (347)

$$x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t - \frac{M}{2\beta} t \sin \beta t$$

або

$$x = C \sin(\beta t + \varphi) - \frac{M}{2\beta} t \sin \beta t. \quad (348)$$

В останній формулі довільними сталими будуть амплітуда власних коливань — C та фаза власних коливань — φ . Другий член цієї формули є добутком часу t на періодичну функцію. В астрономії такий член отримав назву вікового члену.

Формула (348) показує, що у випадку $\beta = \omega$ ми маємо коливання, амплітуда яких необмежено зростає. Це явище називається резонансом між частотою власних коливань маятника і частотою зовнішньої сили.

17. Розділ 17

Інтегральні рівняння

17. 1. Класифікація лінійних інтегральних рівнянь

Розглянемо на площині змінних квадрат

$$Q = \{(\tau, t); a \leq t \leq b, a \leq \tau \leq b\},$$

який у подальшому будемо називати основним квадратом. Нехай у Q визначена функція $K(t, \tau)$. Рівняння вигляду

$$y(t) = \int_a^b K(t, \tau)y(\tau)d\tau + f(t), \quad (349)$$

де $y(t)$ —шукана функція, $f(t)$ —задана на відрізку $[a, b]$ функція, називається інтегральним рівнянням Фредгольма другого роду, а рівняння

$$\int_a^b K(t, \tau)y(\tau)d\tau = f(t) \quad (350)$$

—інтегральним рівнянням Фредгольма першого роду.

Функція $K(t, \tau)$ називається ядром інтегрального рівняння, а функція $f(t)$ —вільним членом рівняння.

Якщо ядро $K(t, \tau)$ має спеціальний вигляд

$$K(t, \tau) = \begin{cases} k(t, \tau), & a \leq \tau \leq t \\ 0, & t < \tau \leq b \end{cases}$$

то рівняння (349) і (350) приймають вигляд

$$y(t) = \int_a^t k(t, \tau)y(\tau)d\tau + f(t), \quad (351)$$

$$\int_a^t k(t, \tau)y(\tau)d\tau = f(t) \quad (352)$$

і називаються інтегральними рівняннями Вольтерри другого та першого роду відповідно. Функція називається ядром інтегрального рівняння Вольтерри. Рівняння Вольтерри є частинним випадком рівняння Фредгольма.

У подальшому ми будемо вивчати тільки інтегральні рівняння другого роду.

Запишемо введені інтегральні рівняння у вигляді з параметром:

$$y(t) = \mu \int_a^b K(t, \tau) y(\tau) d\tau + f(t), \quad (353)$$

інтегральне рівняння Фредгольма другого роду с параметром;

$$y(t) = \mu \int_a^t k(t, \tau) y(\tau) d\tau + f(t), \quad (354)$$

інтегральне рівняння Вольтерри другого роду с параметром.

Якщо вільний член $f(t)$ у рівнянні (353) (відповідно (354)) відсутній, тобто $f(t) \equiv 0$, то рівняння називається однорідним, у протилежному випадку — неоднорідним.

Надалі будемо припускати, що функція $f(t)$ неперервна на відрізку $[a, b]$, ядро $K(t, \tau)$ неперервно в Q , ядро $k(t, \tau)$ неперервно у трикутнику $q = \{(t, \tau); a \leq t \leq b, a \leq \tau\}$, а параметр μ дійсний.

Розв'язком інтегрального рівняння називається неперервна на відрізку $[a, b]$ функція, яка при підстановці у рівняння обертає його в тотожність.

17. 2. Про лінійні рівняння

Як ми переконались при вивченні лінійних диференціальних рівнянь таким рівнянням притаманні деякі прості властивості. Для виявлення таких властивостей стосовно інтегральних перейдемо до більш компактного запису інтегральних рівнянь.

Позначимо через $C[a, b]$ простір неперервних на відрізку $[a, b]$ функцій. Елементи цього простору будемо позначати через $x, y, z, \dots (x = x(t), y = y(t), z = z(t), \dots, t \in [a, b])$

Яка б не була функція $y = y(t) \in C[a, b]$, інтеграл

$$\int_a^b K(t, \tau)y(\tau)d\tau \quad (355)$$

являє собою неперервну на $[a, b]$ функцію. Позначимо цю функцію $z(t)$. Отже, за допомогою дій, вказаних у виразі (355), кожній функції $y(t) \in C[a, b]$ ставиться у відповідність деяка (цілком визначена) функція $z(t)$. Запишемо цю відповідність у вигляді $\mathbf{K}y = z$ й будемо називати $\mathbf{K}$ інтегральним оператором. За цим означенням

$$\mathbf{K}y(t) = \int_a^b K(t, \tau)y(\tau)d\tau. \quad (356)$$

Можна побачити, що оператор $\mathbf{K}$ володіє властивостями:

1. $\mathbf{K}(cy) = c\mathbf{K}(y)$ (однорідність);
2. $\mathbf{K}(x + y) = \mathbf{K}x + \mathbf{K}y$ (дистрибутивність).

Тут c — число, $x = x(t), y = y(t)$ — неперервні функції, задані на $[a, b]$. Обидві ці властивості суміщаються в одному запису

$$\mathbf{K}(\alpha x + \beta y) = \alpha \mathbf{K}x + \beta \mathbf{K}y$$

і називаються лінійністю.

У цих позначеннях рівняння (353) запишеться у вигляді

$$y = \mu \mathbf{K}y + f. \quad (357)$$

Якщо ввести одиничний оператор $\mathbf{I}$ рівністю $\mathbf{I}y = y$, то рівняння перепишеться наступним чином:

$$\mathbf{L}y = f, \quad (358)$$

де

$$\mathbf{L} = \mathbf{I} - \mu \mathbf{K} \quad (359)$$

— лінійний оператор у $C[a, b]$. Рівняння (358) (отже і вихідне інтегральне рівняння (353)) називається лінійним на підставі того, що шукана функція

піддається дії лінійного оператора. Функцію f при цьому називають правою частиною рівняння.

Поряд з рівнянням (358) розглянемо відповідне однорідне рівняння

$$\mathbf{L}y = 0. \quad (360)$$

Перерахуємо ті властивості рівнянь (358), (360), які випливають з їх лінійності.

Властивість 1. *Однорідне рівняння (360) завжди має розв'язок.*

Дійсно, це рівняння має принаймі тривіальний розв'язок $y(t) = 0, \in [a, b]$.

Рівняння (360) може мати й нетривіальні розв'язки. Доведення існування нетривіальних розв'язків вимагає проведення спеціальних досліджень у кожному конкретному випадку. Але, якщо такі розв'язки існують, то їх лінійна комбінація також буде розв'язком, тобто має місце

Властивість 2. *Розв'язки лінійного рівняння (360) утворюють лінійний простір.*

Запишемо рівняння (360) у вигляді

$$y = \mu \mathbf{K}y. \quad (361)$$

Ті значення параметра μ , при яких рівняння (361) має нетривіальні розв'язки, називаються характеристичними значеннями ядра $K(t, \tau)$ (оператора K). Якщо μ_0 — характеристичне значення оператора K , а $\varphi_0(t)$ — відповідний йому нетривіальний розв'язок рівняння (361), φ_0 називається власною функцією ядра $K(t, \tau)$ (оператора K), відповідною власному значенню μ_0 . На підставі властивості 2 лінійна комбінація власних функцій, відповідних власному значенню μ_0 , знову є власною функцією, відповідною характеристичному значенню μ_0 (при умові, що вона тотожно не дорівнює нулю). Максимальне число лінійно незалежних власних функцій, відповідних характеристичному значенню μ_0 , називається кратністю s характеристичного значення μ_0 . Тобто число s є розмірністю лінійного простору розв'язків рівняння $y = \mu_0 \mathbf{K}y$. Якщо $s = 1$, то характеристичне значення μ_0 називається простим, при $s > 1$ — кратним. Значення μ , яке не є простим, будемо називати регулярним.

Тепер розглянемо неоднорідне рівняння (358). Має місце

Властивість 3. *Якщо розв'язок рівняння (358) існує, то він буде єдиним, тоді й тільки тоді, коли відповідне однорідне рівняння (360) має лише тривіальний розв'язок.*

Доведення. Нехай $u(t)$ — розв'язок, існування якого ми припустили.

Необхідність. Нехай розв'язок $u(t)$ єдиний. Якщо припустити, що однорідне рівняння (360) має нетривіальний розв'язок $\varphi(t)$, то функція $u(t) + \varphi(t)$ буде розв'язком неоднорідного рівняння, відмінним від $u(t)$. Отримали протиріччя. Отже нетривіальних розв'язків однорідного рівняння (360) не існує.

Достатність. Нехай однорідне рівняння (360) має лише тривіальний розв'язок. Припустимо, що рівняння (358) поряд $u(t)$ має розв'язок $v(t)$. Тоді функція $\varphi(t) = v(t) - u(t)$ була б нетривіальним розв'язком рівняння (360), що суперечить припущенню. Отже, розв'язок $u(t)$ єдиний.

Властивість 4. *Якщо кратність s характеристичного значення μ_0 скінченна, то загальний розв'язок однорідного рівняння*

$$y(t) = \mu_0 \int_a^b K(t, \tau) y(\tau) d\tau \quad (362)$$

має вигляд

$$\varphi(t) = c_1 \varphi_1(t) + c_2 \varphi_2(t) + \dots + c_s \varphi_s(t),$$

де $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_s(t)$ — лінійно незалежні функції ядра K , відповідні характеристичному значенню μ_0 .

Якщо при цьому неоднорідне рівняння

$$y(t) = \mu_0 \int_a^b K(t, \tau) y(\tau) d\tau + f(t) \quad (363)$$

має розв'язок, наприклад, $Y(t)$, то його загальний розв'язок можна подати у вигляді

$$y(t) = Y(t) + \varphi(t),$$

тобто складається з загального розв'язку однорідного рівняння (362) та будь-якого частинного розв'язку неоднорідного рівняння.

Зауважимо, що все сказане дослівно повторюється й для рівнянь Вольтерри.

17. 3. Рівняння Фредгольма з виродженим ядром

Нехай задане інтегральне рівняння Фредгольма

$$y(t) = f(t) + \mu \int_a^b K(t, \tau) y(\tau) d\tau, \quad \mu \neq 0, \quad (364)$$

ядро якого зображується у вигляді

$$K(t, \tau) = \sum_{j=1}^n \alpha_j(t) \beta_j(\tau). \quad (365)$$

Таке ядро будемо називати виродженим. Будемо припускати, що функції $\alpha_j, \beta_j, j = 1, 2, \dots, n$ неперервні на $[a, b]$. Також будемо припускати, що як система $\{\alpha_j\}_1^n$, так і система $\{\beta_j\}_1^n$ складаються з лінійних незалежних на функцій.

За допомогою (365) рівняння (364) перепишеться у вигляді

$$y(t) = f(t) + \mu \sum_{j=1}^n y_j \alpha_j(t), \quad (366)$$

де через y_j позначені величини

$$y_j = \int_a^b y(\tau) \beta_j(\tau) d\tau. \quad (367)$$

Припустимо, що розв'язок рівняння (364) існує. Тоді, якщо $y(t)$ розв'язок, рівність (366) перетворюються в тотожність (як і рівність (364)). Помножимо (366) на $\beta_i(t)$ і проінтегруємо на проміжку $[a, b]$. Будемо мати тотожності

$$y_i = f_i + \mu \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} y_j, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (368)$$

де

$$f_j = \int_a^b f(t)\beta_i(t)dt, \quad \alpha_{ij} = \int_a^b \beta_i\alpha_j(t)(t)dt.$$

Таким чином, розв'язок $y(t)$ рівняння (364) породжує розв'язок $y_1, y_2, \dots, y_n$ алгебраїчної системи (368).

Якщо ж навпаки, відомий розв'язок розв'язок $y_1, y_2, \dots, y_n$ алгебраїчної системи (368), то можна довести, що функція $y(t)$ побудована за формулою (366) буде розв'язком рівняння (364). Тобто має місце

Теорема 17.1. *Інтегральне рівняння (364) і система рівнянь (368) еквівалентні у тому сенсі, що кожному розв'язку $y(t)$ рівняння (364) відповідає один й тільки один розв'язок системи (368) і навпаки. Ця відповідність між розв'язками здійснюється за формулою (366).*

Ядро $K(t, \tau)$ називається простим, якщо воно або неперервно в Q , або неперервно q і обертається в нуль у $Q - q$. Має місце

Теорема 17.2. *Для того щоб інтегральне рівняння з простим ядром $K(t, \tau)$ і вільним членом $f \in C[a, b]$:*

$$y(t) = \mu \int_a^b K(t, \tau)y(\tau)d\tau + f(t) \quad (369)$$

має єдиний розв'язок, необхідно та достатньо, щоб відповідне однорідне рівняння

$$y(t) = \mu \int_a^b K(t, \tau)y(\tau)d\tau \quad (370)$$

має лише тривіальний розв'язок.

17. 4. Теорема про розв'язуваність. Альтернатива Фредгольма

Розглянемо інтегральне рівняння

$$z(t) = \mu \int_a^b K(\tau, t)z(\tau)d\tau + g(t). \quad (371)$$

Це рівняння називається транспонованим інтегральним рівнянням. Воно відповідає "транспонованому" ядру

$$K^T(t, \tau) = K(\tau, t),$$

в якому змінні помінялися ролями. Рівняння (371) в операторній формі будемо записувати у вигляді

$$z = \mu \mathbf{K}^T z + g,$$

де оператор $\mathbf{K}^T$ визначається за формулою

$$\mathbf{K}^T z = \int_a^b K^T(t, \tau) z(\tau) d\tau.$$

Будемо називати функції $x(t), y(t)$, неперервні на відрізку $[a, b]$, ортогональними, якщо

$$\int_a^b x(t)y(t)dt = 0,$$

при цьому припускається, що жодна з функцій не обертається тотожно в нуль.

Теорема 17.3 (про розв'язуваність).

1. Для того щоб інтегральне рівняння

$$y(t) = \mu \int_a^b K(t, \tau)y(\tau)d\tau + f(t) \quad (372)$$

($K \in C(Q), f \in C[a, b]$) мало розв'язок у $C[a, b]$ необхідно та достатньо, щоб функція $f(t)$ була ортогональною до всіх розв'язків відповідного однорідного транспонованого рівняння

$$z(t) = \mu \int_a^b K(\tau, t)z(\tau)d\tau. \quad (373)$$

2. Якщо ця умова виконана, то загальний розв'язок рівняння (372) може бути записаний у вигляді

$$y(t) = \varphi(t) + Y(t),$$

де $\varphi(t)$ — загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння

$$y(t) = \mu \int_a^b K(t, \tau) y(\tau) d\tau \quad (374)$$

а $Y(t)$ — деякий частинний розв'язок рівняння (372).

3. Рівняння (373) і (374) мають при цьому однакове скінчене число лінійно незалежних розв'язків, і загальний розв'язок кожного з них виходить у вигляді відповідної лінійної комбінації. Таким чином, якщо вказане число дорівнює s і $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_s$ — згадані лінійно незалежні розв'язки рівняння (374), то його загальний розв'язок має вигляд

$$\varphi(t) = \sum_{i=1}^s \alpha_i \varphi_i(t).$$

Наведемо ще альтернативне формулювання попередньої теореми.

Альтернатива Фредгольма. Для інтегрального рівняння

$$y(t) = \mu \int_a^b K(t, \tau) y(\tau) d\tau + f(t) \quad (375)$$

надаються дві взаємовиключні можливості:

1. Або μ не є характеристичним значенням ядра $K(t, \tau)$, і тоді рівняння (375) (також і його транспоноване рівняння

$$z(t) = \mu \int_a^b K(\tau, t) z(\tau) d\tau + g(t).) \quad (376)$$

має один і тільки один розв'язок при будь-якій правій частині $f(t) \in C[a, b]$ (відповідно $g(t) \in C[a, b]$). При цьому відповідні однорідні рівняння

$$y = \mu \mathbf{K} y, \quad z = \mu \mathbf{K}^T z$$

мають лише тривіальні розв'язки.

2. Або μ є характеристичним значенням ядра $K(t, \tau)$. У цьому випадку рівняння (375) має розв'язки тоді й тільки тоді, коли функція f ортогональна до всіх розв'язків відповідного однорідного транспонованого рівняння

$$z(t) = \mu \int_a^b K(\tau, t) z(\tau) d\tau.$$

При цьому рівняння

$$y = \mu \mathbf{K} y, \quad z = \mu \mathbf{K}^T z$$

мають однакове й при тому скінчене число лінійно незалежних розв'язків і загальний розв'язок рівняння (375) складається з загального розв'язку відповідного однорідного рівняння та деякого частинного розв'язку неоднорідного рівняння.

Приклад 17.1

Знайти розв'язок інтегрального рівняння

$$y(t) = 2 - 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t - 2\tau) y(\tau) d\tau. \quad (377)$$

Маємо інтегральне рівняння з виродженим ядром. Перепишемо це рівняння у вигляді

$$y(t) = 2 - 3 \sin t \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2\tau) y(\tau) d\tau + 3 \cos t \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2\tau) y(\tau) d\tau. \quad (378)$$

Введемо позначення

$$M = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2\tau) y(\tau) d\tau, \quad N = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2\tau) y(\tau) d\tau. \quad (379)$$

Тоді

$$y(t) = 2 - 3M \sin t + 3N \cos t. \quad (380)$$

Підставимо вираз (380) у рівняння (378). Отримаємо,

$$2 - 3M \sin t + 3N \cos t = 2 - 3 \sin t \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2\tau)(2 - 3M \sin \tau + 3N \cos \tau) d\tau + \\ + 3 \cos t \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2\tau)(2 - 3M \sin \tau + 3N \cos \tau) d\tau.$$

Для обчислення визначених інтегралів застосуємо онлайн-калькулятор

$$\textit{https} : // \textit{math24.biz/integral_def}$$

Будемо мати

$$-3M \sin t + 3N \cos t = -3(M + N) \sin t + 3(2 - 2M + 2N) \cos t.$$

Далі прирівнюємо вирази при $\sin t$ і $\cos t$. Отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно виразів M і N

$$M = M + N,$$

$$N = 2 - 2M + 2N.$$

Звідси маємо $N = 0$, $M = 1$. Підставляючи ці значення у вираз (380) отримаємо розв'язок інтегрального рівняння,

$$y(t) = 2 - 3 \sin t.$$

Бібліографія

- [1] Матвеев Н.М. *Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений*, М.:Высшая школа, 1967, 564с.
- [2] Самойленко А.М., Перестюк М.О., Парасюк І.О. *Дифференціальні рівняння*, Київ:Либідь, 2003, 599с.
- [3] Швець О.Ю. *Динамічні системи*, Київ, НТУУ КПІ, 2021, 345с.
- [4] Герасимчук В.С., Васильченко Г.С., Кравцов В.І *математика. Повний курс у прикладах і задачах. Невизначений, визначений та невластні інтеграли. Звичайні дифференціальні рівняння. Прикладні задачі*. Навч. посіб., Вид. 2-е, випр., К.: Книги України ЛТД, 2014, 470 с.
- [5] Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк Н.А. *Дифференциальные уравнения: примеры и задачи*, М.:Высшая школа, 1989, 383с.
- [6] *Сборник задач по математике для втузов. Специальные разделы математического анализа*. Под редакцией Ефимова А.В., Демидовича Б.П. М.:Наука, 1986, 366с.
- [7] Лизоркин П.И. *Курс дифференциальных и интегральных уравнений с дополнительными главами анализа*, М.:Наука, 1981, 384с.