

**Київський національний університет
імені Тараса Шевченка**

**Методичні вказівки та завдання для самостійної роботи
з дисципліни «Методика навчання математики»**

Частина IV «Методика вивчення геометрії»

для студентів спеціальності 014.04 Середня освіта (Математика)
механіко-математичного факультету

**Станжицький О.М., Собчук В.В., Капустян О.В.,
Федоренко Ю.В., Цань В.Б.**

Київ – 2023

Станжицький О.М., Собчук В.В., Капустян О.В., Федоренко Ю.В., Цань В.Б. Методичні вказівки та завдання для самостійної роботи з дисципліни «Методика навчання математики» Частина IV «Методика вивчення геометрії» для студентів спеціальності 014.04 Середня освіта (Математика) механіко-математичного факультету, 2023. – 110 с.

Рецензенти:

Працьовитий М.В., доктор фізико-математичних наук, професор,
академік АН ВШ України,

Радченко В.М., доктор фізико-математичних наук, професор

Рекомендовано до друку

Вченою радою механіко-математичного факультету

протокол № 16 від 28 серпня 2023 р.

У частині IV «Методика вивчення геометрії» методичного посібника для студентів спеціальності 014.04 Середня освіта (Математика) механіко-математичного факультету розглянуто основні геометричні поняття та властивості геометричних об'єктів в порядку їх вивчення у шкільному курсі геометрії згідно навчальних програм. Дано приклади використання властивостей геометричних фігур для розв'язування задач, та побудови рисунків. Запропоновано низку завдань для самостійного розв'язування студентами спеціальності 014.04 Середня освіта (Математика) механіко-математичного факультету.

Зміст

1. Побудова шкільного курсу геометрії	5
1.1 Зміст курсу геометрії базової середньої школи	10
1.2 Історія змістовно-методичних ліній курсу та основні концепції побудови курсу планіметрії	12
1.3 Труднощі при вивченні курсу планіметрії	16
1.5 Методичні особливості паралельних підручників геометрії	20
1.6 Етапи формування основних понять в геометрії	27
2. Пропедевтика геометрії	31
3. Курс математики 5-6 класів	33
3.1. Впровадження концепції “Нова українська школа”	33
3.2. Змістовне наповнення курсу математики геометричними поняттями	40
4. Методика проведення перших уроків геометрії	41
4.1. Вступні зауваження	41
4.2. Формування понять	42
4.3. Ознайомлення з аксіомами і теоремами	46
4.4. Особливості системи задач перших уроків	50
5. Ознаки рівності трикутників	52
5.1. Використання відомих та формування нових понять теми	53
5.2. Доведення теорем	55
5.3. Структура та основні типи теорем в геометрії	59
6. Паралельні прямі. Сума кутів трикутника	63
6.1. Вступні зауваження	63
6.2. Формування понять	63
7. Геометричні побудови	67

7.1. Місце геометричних побудов у програмі і чинних підручниках	67
7.2. Основні побудови. Задачі на побудову	69
7.3. Складніші задачі на побудову	73
8. Многокутники	78
8.1. Про особливості вивчення многокутників у шкільному курсі геометрії	78
8.2. Методика вивчення чотирикутників	80
9. Декартові координати і вектори на площині.....	91
9.1. Декартові координати на площині.....	91
9.2. Пропедевтика введення координатної площини	93
9.3. Метод координат в курсі геометрії	94
9.4 Вектори на площині	99
9.5. Методика введення основних понять теми «Вектори на площині».	101
Список рекомендованої літератури	107

1. Побудова шкільного курсу геометрії

Геометрія в шкільній освіті – не тільки основна математична дисципліна, але і один з найважливіших компонентів загальнолюдської культури. Вона допомагає розуміти закономірності природи, мистецтва, архітектури та інших сфер людської діяльності, сприяє багатогранному розвитку людини.

Більше того, історично і генетично геометричну діяльність можна вважати первинною інтелектуальною діяльністю як людської цивілізації, так і окремого індивідуума. Відтак, *геометрія* – це не лише розділ математики, шкільний предмет, – це, передусім, феномен загальнолюдської культури.

Розвиток геометричного мислення є одним з основних чинників, що забезпечують готовність людини до безперервної освіти і самоосвіти у найрізноманітніших сферах людської діяльності. Однією з цілей навчання цієї дисципліни є всебічний розвиток мислення школярів (логічного, образного, наочно-дійового). Вивчення геометрії є джерелом і засобом розвитку інтелектуальних здібностей людини.

Геометрична компетентність є важливим компонентом загального математичного розвитку та культури особистості. Однією з важливих її компонентів є геометрична інтуїція, яка дозволяє уявляти собі просторові відношення між об'єктами. Іншою властивістю є просторове мислення, яке допомагає аналізувати і розв'язувати геометричні задачі. Третьою властивістю є здібність до *конструктивно-геометричної* діяльності, яка виявляється у вмінні створювати геометричні фігури, побудови і моделі. Ці властивості не ізольовані одна від одної, а утворюють органічний взаємозв'язок, який сприяє розвитку геометричного світогляду.

Відмітивши загальнокультурну значущість геометрії, підкреслимо, що для неї зберігаються всі цілі, що стоять перед вивченням математики на рівні базової середньої освіти. Однак геометрія реалізовує також й специфічні цілі, які відрізняють її від інших математичних дисциплін. Зокрема, геометрія сприяє розвитку логічного мислення, яке базується на доказах та аргументах, та

просторового мислення, яке дозволяє уявляти та моделювати просторові об'єкти та ситуації.

Логічне та критичне мислення. Одним з ключових аспектів математичної освіти учнів є формування логічного мислення, яке базується на засвоєнні ряду логічних понять і операцій. Одним з найпотужніших засобів його розвитку є геометрія.

Курс геометрії базової середньої школи, який охоплює вивчення геометричних фігур на площині, передбачає структурований підхід до вивчення дисципліни. В основу курсу покладено аксіоматичний метод, який дозволяє виводити теореми з деякого набору первинних положень, що не потребують доведення. Аксіоматичний метод є одним з найважливіших досягнень математичної думки, яке формувалося протягом століть. Він забезпечує строгість, логічність і узагальнення геометричних знань, вимагає від учнів дотримання правил логічного мислення, при доведенні теорем та розв'язанні задач формулюючи твердження як логічні наслідки з попередньо відомих.

При відсутності в школі логіки як окремого предмета саме на вчителя математики покладена задача формування в учнів умінь практично користуватися найважливішими поняттями, законами і правилами логіки. Він повинен застосовувати такі методи та прийоми, які сприяють активності, самостійності та критичності учнів.

Одне з ключових завдань навчання геометрії в школі – навчити учнів логічно і послідовно міркувати, аргументувати та доводити твердження, спираючись на беззаперечні факти. Таким чином, вона сприяє розвитку не лише логічного, а й критичного мислення. Небагато випускників шкіл, будуть фаховими математиками, тим більше геометрами. Більше того, можливо в своїй практичній діяльності деяким з них жодного разу не доведеться скористатись теоремою Піфагора. Проте навряд чи знайдеться хоча б один, якому не доведеться використати гнучкі навички, розвинуті під час вивчення геометрії. Саме прагненням розвинути критичне і логічне мислення учнів обумовлюється вимога доводити математичні факти, особливо на початку навчання, приділяючи пильну

увагу до строгості доведень навіть “очевидних” фактів, широкому використанню способу доведення від супротивного з перших уроків вивчення геометрії. Ця концепція добре реалізована у серії підручників [21, 24, 26]. Різностороння робота з кресленнями та задачами на побудову не лише сприяє загальному розумовому розвитку школярів, а й забезпечує перехід від дослідно-індуктивного до дедуктивного мислення, сприяючи розвитку логічної культури.

Таким чином, у процесі навчання математиці логічне та критичне мислення формується і вдосконалюється в учнів, передусім, у ході обґрунтування кроків розв’язку задачі, доведення теорем, формулювання індуктивних та дедуктивних висновків. При цьому одним із завдань вчителя є допомогти учням сформулювати власні висновки та узагальнення на основі самостійного аналізу заданих умов. Розвитку критичного мислення сприяють також завдання на систематизацію геометричних об’єктів за певною ознакою, побудову схем та графіків під час уроків геометрії. Відтак перед вчителем постає проблема добору методів, задач і завдань спрямованих на розвиток логічного та критичного мислення учнів. Для цього йому необхідно мати чітке уявлення про логічну структуру курсу, а також про логічні основи математичних понять і припущень, доведення теорем і розв’язування задач.

Просторове мислення. Специфічною задачею курсу планіметрії є розвиток базового просторового мислення учнів, що передбачає формування у них понять про форми, розміри, положення та взаємозв’язки геометричних фігур. У більшості учнів, які розпочинають вивчення геометрії, воно розвинене досить слабо.

Вважається, що найбільший поступ у формуванні просторового мислення досягається при вивченні стереометрії. Однак, підґрунтя для його розвитку та основні принципи необхідного геометричного мислення в значній мірі активно формуються на етапі вивчення планіметрії.

Крім того, варто зазначити, що елементи просторового мислення формуються ще на рівні початкової освіти. Під час навчання математики та на уроках дизайну і технологій у учнів формуються уміння орієнтуватись на

площині і в просторі, описувати та зображати схематично розміщення, напрямок і рух об'єктів, порівнювати предмети за розміром, розглядати їх як сукупність простих елементів тощо.

У 5 та 6 класі учні пропедевтично ознайомлюються з поняттям об'єму та основними властивостями геометричних тіл в просторі таких як «прямокутний паралелепіпед», «призма», «піраміда», «конус», «циліндр», «куля» тощо.

Особливу роль у формуванні просторового мислення відіграє креслення рисунків. Побудова рисунку допомагає учням краще розуміти відношення між об'єктами, їх форму, розміри та положення; аналізувати геометричні фігури, розбивати їх на елементи, розглядаючи фігуру одночасно як ціле і як сукупність елементарних фігур, що мають власні властивості; перетворювати абстрактні геометричні поняття у конкретні образи, що робить навчання більш доступним та зрозумілим.

Завдання вчителя розвивати уміння учнів виділяти з усіх елементів фігури ті, які можуть бути потрібними для розв'язання відповідних задач, та концентрувати увагу на їх властивостях, що пов'язані з фігурою і можуть бути використані для досягнення необхідного результату.

До задач, що сприяють розвитку просторового мислення, відносяться вправи на побудову фігури за заданими елементами; на геометричні перетворення площини; на проведення геометричних міркувань подумки, не виконуючи побудови. Особливої уваги заслуговують задачі, розв'язок яких вимагає виконання на рисунку допоміжної побудови. Такі задачі розвивають в учнів просторове та логічне мислення, оскільки потрібно уявити об'єкти, яких не видно на рисунку і виділити ті їх властивості, що впливають на фігуру загалом. І, разом з тим, цей тип задач сприяє розвитку стратегічного мислення, що передбачає прорахунок кількох можливих розв'язків задачі, що залежать від вибору побудованого елемента, та вибір оптимального з них.

Під час вивчення геометрії на рівні базової загальної середньої освіти мають бути реалізовані такі специфічні для даного етапу навчання математики освітні завдання:

- *навчальні*: формування в учнів системи знань про плоскі геометричні фігури та об'ємні тіла, їхні властивості, відношення, геометричні перетворення на площині та їхні найпростіші властивості, величини, способи їх вимірювання й обчислення для планіметричних і стереометричних фігур, вміння виділяти і знаходити їх у предметах навколишньої дійсності, розвивати навички користуватись відповідними мірами та вимірювальними інструментами;
- *виховні*: формування в учнів визнання важливості чітких та лаконічних формулювань, поваги до державної мови; усвідомлення важливості правильного використання математичних термінів та їх позначень у навчанні та повсякденному житті, шанобливого ставлення до істини, готовності шукати пояснення та оцінювати правильність аргументів, усвідомлення важливості математики як універсальної мови науки, техніки та технології, готовності критично оцінювати досягнення науково-технічного програму, відкритості до інновацій, позитивного оцінювання та підтримки конструктивних ідей інших, зацікавленості у дотриманні умов екологічної безпеки та сталого розвитку, критичного осмислення інформації та джерел її отримання, усвідомлення важливості ІКТ для ефективного розв'язування математичних задач, налаштованості на логічне обґрунтування позиції без передчасного переходу до висновку, ощадливості, рівного ставлення до інших осіб та відповідальності за спільну справу, усвідомлення взаємозв'язку математики та культури на прикладах живопису, архітектури тощо, розуміння важливості внеску математиків у загальну культуру, відповідальності та ініціативності, впевненості у собі, відповідальності за прийняті рішення, розуміння важливості планування та оцінювання ризиків.
- *корекційно-розвивальні*: формування і корекція просторових уявлень, моторики, мислення, уваги, пам'яті та інших психічних процесів та емоційно-вольових якостей, розширення уявлень і понять про геометричні фігури і тіла;

- *практичні*: формування вміння виконувати найпростіші геометричні побудови за допомогою геометричних інструментів, застосовувати здобуті знання та уміння в навчальних і життєвих ситуаціях, формувати навички вимірювання і побудови геометричних фігур за допомогою відповідних креслярських інструментів, використовувати знання з геометрії під час вирішення суспільно-важливих проблем.

1.1 Зміст курсу геометрії базової середньої школи

В базовій середній школі геометрія вивчається наскрізно починаючи з п'ятого класу. Зокрема, в 5-6 класах, як окремі теми в курсі «Математика», в 7-9 класах, як окремий предмет «Геометрія» або як складова інтегрованого курсу «Математика».

Зміст навчального матеріалу визначається Державним стандартом базової середньої освіти, затвердженими модельними навчальними програмами математичної освітньої галузі або навчальними програмами, що мають відповідний гриф Міністерства освіти і науки України. Перелік і зміст навчальних програм оприлюднюється Міністерством.

Модельні навчальні програми та навчальні програми, що мають відповідний гриф Міністерства освіти і науки України, можуть суттєво відрізнитись за змістом, проте переважна більшість передбачає схожі переліки тем на визначеному періоді навчання. Перед початком навчального року вчитель має проаналізувати наявні модельні навчальні програми відповідного періоду навчання, визначити їх спільні риси і відмінності, та обрати з них ту, за якою працюватиме. Як правило, вчитель обирає навчальну програму на увесь курс навчання 5-6 клас або 7-9 клас.

Наведемо типовий перелік навчальних змістових ліній, що вивчаються на кожному році навчання.

5 клас: «Геометричні фігури і величини». В межах вивчення цієї змістової лінії учні поглиблюють знання з початкової школи про геометричні фігури та знайомляться з новими об'єктами і величинами, а саме:

відрізок, пряма, промінь, координатний промінь, кут та його градусна міра, види кутів, трикутник та його периметр, види трикутників за кутами; прямокутник; квадрат; площа і периметр прямокутника і квадрата; прямокутний паралелепіпед; куб; об'єм прямокутного паралелепіпеда і куба; піраміда.

6 клас: «Геометричні фігури і величини». До змісту вивчення даної лінії входять коло та його довжина, круг та його площа; круговий сектор; циліндр, конус, куля, їх основні властивості та елементи; перпендикулярні й паралельні прямі, їх побудова за допомогою лінійки і косинця; координатна пряма та площина, точки із заданими координатами.

З 7 по 9 клас детально вивчають власне планіметрію. Залежно від освітньої програми навчального закладу, учні можуть вивчати її як частину єдиної навчальної дисципліни «Математика» або як окрему дисципліну «Геометрія». Наведемо типовий перелік навчальних змістових ліній, що вивчаються на кожному році навчання.

7 клас: «Елементарні геометричні фігури та їх властивості», «Взаємне розміщення прямих на площині», «Трикутники. Ознаки рівності трикутників», «Коло і круг. Геометричні побудови»,

8 клас: «Чотирикутники», «Подібність трикутників», «Розв'язування прямокутних трикутників», «Многокутники. Площі многокутників»

9 клас: «Координати і вектори на площині», «Розв'язування трикутників», «Правильні многокутники. Довжина кола, площа круга», , «Геометричні перетворення площини».

Слід зауважити, що програма навчальної дисципліни «Математика», ймовірно передбачає після завершення базової загальної середньої освіти продовження навчання на рівні професійно-технічної освіти, завдяки чому до програми вивчення дисципліни «Математика» внесені окремі теми стереометрії такі як, «Розгортки поверхонь многогранників»(7 клас), «Розгортки поверхонь тіл обертання»(8 клас), «Площі поверхонь многогранників і тіл обертання»(9 клас).

1.2 Історія змістовно-методичних ліній курсу та основні концепції побудови курсу планіметрії

Вивчення планіметрії на рівні базової середньої освіти сконцентовано навколо декількох стрижневих змістовно-методичних ліній: «Геометричні фігури і їх властивості», «Геометричні величини», «Вектори та координати».

Найбільшу гостроту в обговоренні питань змісту курсу планіметрії набуло питання про включення в нього лінії *геометричних перетворень*.

Поняття руху використовував ще Евклід, зокрема рівність фігур він означав за допомогою суміщення, а сферу уявляв як результат обертання півкола навколо діаметра. В той же час він уникав говорити про рухи, тому послідовники вченого також намагалися якомога менше використовувати ці поняття в геометрії. Д. Гільберт побудував геометрію, в якій зовсім не згадувалось поняття руху. Тому в шкільному курсі математики досить довго викладали геометрію, майже не використовуючи цього поняття. Подальший розвиток геометричної науки показав, що нехтувати цим поняттям недоцільно. Виявилось, що воно, як і взагалі геометричні перетворення, у геометрії відіграє важливу роль. Наприкінці XIX – на початку XX ст., в період міжнародного руху за реформу шкільної математичної освіти, Ф. Клейн запропонував зробити геометричні перетворення провідною ідеєю шкільної геометрії. Він поклав дані перетворення в основу означення геометрії, вказуючи на те, що геометрія – це наука, яка вивчає властивості фігур, що зберігаються при перетвореннях деякої групи G перетворень.

В другій половині XX століття були спроби радикальних змін у викладанні геометрії. У 1967-1968 роках комісія з розроблення нового змісту шкільного навчання під керівництвом А.М.Колмогорова запропонувала нову концепцію викладання математики, яка передбачала трансформацію 90% геометричного матеріалу в шкільній математиці. На зміну традиційному матеріалу про кути, трикутники і паралельні прямі пропонували розглядати конгруентність фігур, переміщення, симетрію тощо. Визначними особливостями цієї реформи, що відносяться до змісту планіметрії були:

1. У початковий курс математики включена ґрунтовна пропедевтика геометрії.

2. З метою сучасного трактування основних геометричних об'єктів введені найпростіші теоретико-множинні поняття, операції і символи.
3. Посилена роль аксіоматичного методу, запропонована чітка і суворая система аксіом, посилена логічна складова курсу планіметрії.
4. Провідною ідеєю курсу є геометричні перетворення, зокрема, перетворення площини.
5. Вектори представлені як один з частинних випадків перетворення площини; при подальшому викладі курсу широко використовувався векторний апарат як засіб розв'язування задач і доведення теорем.

Ці ідеї були реалізовані в підручнику геометрії для 6-8-их класів середньої школи під редакцією академіка А. Н. Колмогорова.

Одним з прихильників даного підходу був український математик-педагог І.Ф.Тесленко, який вважав, що широке використання ідей геометричних перетворень в шкільній геометрії має багато позитивного: підвищується її науковий рівень, вноситься в школу ідея змінності, підноситься загальноосвітня роль геометричних знань (формування уявлень, розвиток уяви); використання переміщень фігур полегшує введення елементів векторного числення, формує знання учнів про напрямлені величини, якими користуються техніка і природничі науки.

Один з підходів, що був запропонований пізніше як розвиток “колмогоровської” реформи, передбачав обов'язкове ознайомлення учнів з важливішими математичними структурами: векторні простори – ось що повинно було бути основним у викладанні. Учні повинні були звикати до математичних абстракцій і бути обізнаними з найважливішими математичними структурами. Такий підхід не знайшов широкої підтримки, а концепція загалом не дала очікуваних навчальних результатів. Відтоді це питання вирішене на користь традиційного змісту: геометричні перетворення вивчаються як периферійне питання курсу.

У 80-х роках ХХ століття у школах України в результаті експерименту, який проводився у школах Харківської області, міст Києва та Севастополя, викладання

геометрії у середній школі повернулось до традиційної системи і почало здійснюватись за підручником О.В.Погорелова. В основу викладу геометрії знову було покладено традиційний зміст і аксіоматична побудова. При цьому аксіоматичний виклад починався від початку курсу на базі оригінальної та економної системи аксіом, виклад матеріалу мав строго дедуктивну структуру, а в основу підручника було покладено принцип єдиності теорії та практики, що викликало в учнів вмотивовану потребу аргументувати свої міркування. Перевагою нового підходу було використання наочних та інтуїтивних прийомів, які поєднувалися зі строго науковим викладом матеріалу.

Сучасна концепція навчання планіметрії продовжує спиратись на традиційні принципи, але поступово розвивається шляхом удосконалення методики викладання та підбору завдань і прикладів. Зараз особливо актуальним є практичний аспект математичних знань, тому в навчанні планіметрії надається велике значення прикладним задачам та інтерактивним засобам, які сприяють кращому засвоєнню навчального матеріалу.

Розглядаючи основні змістовно-методичні лінії сучасного курсу планіметрії, зауважимо, що лінія «Геометричні фігури і їх властивості» залишається головною, а лінія «Геометричні величини» з'являється протягом курсу за потреби, доповнюючи основний зміст матеріалу. Їх вивченню присвячений матеріал 7-го класу, значна частина матеріалу 8-го і 9-го класів, а подання матеріалу здебільшого зберігає традиційних характер.

Вектори, які уперше увійшли в курс геометрії вітчизняної школи в середині 70-х років XX століття, отримали загальне визнання внаслідок великої загальноосвітньої значущості і обширних практичних додатків. Переважна більшість навчальних програм передбачає ознайомлення з векторними величинами у 9 класі. Вивчення векторів і координат в шкільному курсі математики дозволяє підготувати випускників до продовження математичної освіти у вищій школі, чим і реалізовує на практиці ідею безперервної математичної освіти.

Починаючи з 2000-х років значна увага при навчанні геометрії зосереджується на застосуванні загальних орієнтирів, алгоритмів та спеціальних схем у процесі формування умінь учнів доводити твердження. Провідними ідеями підручників з геометрії стали єдиність логіки та евристики.

Сучасні підручники та посібники з геометрії за підходами до викладу матеріалу можна умовно поділити на два типи.

Основні пріоритети одних навчальних посібників – розвиток логічного мислення учнів. Як “основна учбова вимога” у них виділяється вимога доводити все, особливо на початку навчання, в тому числі “очевидні факти” (наприклад, пов’язані з відношенням “лежати між”); широко використовується спосіб доведення від супротивного з перших кроків навчання. До цієї категорії належать підручники за авторством О.С. Істера [12] та авторського колективу А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, М.С. Якір [21].

Необхідно зазначити, що підручники планіметрії цієї групи в значній мірі ометодичні, відтак вони є досить складними для самостійного опрацювання учнями програмного матеріалу. Зокрема, підручники Істер О.С. [13] не виправдано групують основні властивості геометричних понять в громіздкі теореми, які важко засвоюються учнями середніх класів. Навіть з точки зору компактності запису такий підхід є не виправданим. Наприклад:

Теорема (ознаки паралелограма). Якщо в чотирикутнику: 1) дві сторони рівні і паралельні, або 2) протилежні сторони попарно рівні, або 3) діагоналі перетинаються і точкою перетину діляться навпіл, або 4) протилежні кути попарно рівні, – то чотирикутник є паралелограмом.

Завдання: дайте характеристику дотримання вимог дидактики при використанні наведеної в прикладі практики подачі матеріалу про властивості математичного об’єкта.

На противагу інший тип навчальних посібників заснований на диференціації змісту й засобів навчання не лише за логічною, але й візуальною основою. Такі посібники поряд з традиційним викладом матеріалу, насичені різноманітними змістово-графічними інтерпретаціями, схемами, візуальними задачами для

застосування на різних етапах навчання геометрії в основній школі. Базовою метою навчання є засвоєння учнями фундаментальних знань про геометричні об'єкти та їх властивості і оволодіння алгоритмами розв'язку задач, тоді як доведення математичних фактів відносять до завдань високого рівня. Такі ідеї реалізовані за співавторства Н.А.Тарасенкової, Є.П.Неліна та авторства колективу А.П. Єршова, В.В. Голобородько, О.Ф. Крижановський.

1.3 Труднощі при вивченні курсу планіметрії

Геометрія – єдина шкільна дисципліна, яка ґрунтується на дедуктивно-аксіоматичній основі і тому висуває підвищені вимоги до рівня розвитку логічного мислення. Планіметрія ґрунтується на аксіомах, теоремах і їх доведеннях, які формують строгу логічну систему. Тому для успішного засвоєння цього розділу геометрії необхідно розвивати логічне мислення, уміння аналізувати, узагальнювати і застосовувати отримані знання.

Як відомо, аксіоматичний метод, який лежить в основі дедуктивно-аксіоматичного викладу геометрії, полягає у наступному:

- I. Виділяється деяке число основних (невизначуваних) понять;
- II. Формулюються основні аксіоми теорії, що описують їх властивості;
- III. Всі інші поняття вводяться за допомогою строгих означень через основні невизначувані або раніше введені поняття;
- IV. Всі інші твердження строго (за допомогою дедуктивних міркувань) доводяться у вигляді теорем.

Вичерпну систематизацію логічних напрямів побудови курсу геометрії було сформульовано Міжнародною комісією з викладання математики на Міланській конференції в 1914 році. Серед них аксіоматичний метод реалізують у певній мірі три напрями:

1. *Формально-логічний.* Характеризується повною відмовою від інтуїції. Курс вивчення геометрії повинен бути повністю аксіоматичним, тобто заснованим на логічних аксіомах та дедуктивних методах. В такому підході великий акцент робиться на математичній строгості та логіці,

окремі концепції виводяться з базових аксіом, а розвиток інтуїтивних уявлень мінімізується на перших етапах навчання. Зважаючи на відділення від пропедевтичного курсу, такий підхід може вимагати від учнів високого рівня абстрактного мислення та логічної обдарованості.

2. *Досвідно-дедуктивний.* Основні поняття і відношення запозичуються з досвіду. Всі інші міркування та етапи побудови здійснюються дедуктивно. В аксіоматичному стилі побудовано лише невеликий фрагмент теорії в старших класах, щоб на цьому матеріалі знайомити учнів з сучасним аксіоматичним методом, а основну частину курсу геометрії подають без розриву між логікою та інтуїцією, на основі практичних прикладів. Таким чином, учні засвоюють сучасний аксіоматичний підхід та одночасно розвивають інтуїтивне розуміння геометрії.
3. *Інтуїтивно-дедуктивний.* В побудові курсу геометрії такого рівня немає необхідності розривати зв'язок між логікою та інтуїцією в процесі навчання геометрії. Замість того, щоб розділяти ці аспекти, потрібно поєднувати їх на різних етапах навчання. При такому підході інтуїтивне розуміння геометричних понять доповнюється логічною обґрунтованістю, що дозволяє учням легше засвоювати складні математичні концепції.

А четвертий, *інтуїтивно-експериментальний*, побудовано цілком на емпіричному сприйнятті. Основні поняття і відношення запозичуються з досвіду, а геометричні факти встановлюються експериментально.

Розглянемо можливості використання аксіоматичного методу при навчанні математики на рівні базової загальної середньої освіти та проблеми пов'язані з ними з двох точок зору:

- А. *аксіоматичний метод* – як спосіб побудови шкільного курсу на окремих етапах навчання;
- В. *аксіоматичний метод* – як предмет вивчення на конкретному і відповідному матеріалі.

Розглядаючи *аксіоматичний метод* як *спосіб побудови шкільного курсу*, зауважимо, що виділяють дві основні моделі:

перша – абстрагування теорії від конкретних моделей (*змістова аксіоматика*);

друга – дедуктивна побудова теорії поза всякою інтерпретацією на базі системи аксіом.

При застосуванні другої моделі аксіоми і теореми, що виводяться з них, розглядаються як матеріальне значення висловлювання про об'єкти теорії, а сам логічний висновок передбачається інтуїтивно зрозумілим. Задача аксіоматизації зводиться до дедукції всіх пропозицій теорії з початкових аксіом.

Відомо, що діти краще за все навчаються на власному досвіді, а готовність до системного теоретичного та абстрактного мислення формується лише у старшому шкільному віці (15-18 років). Тому весь курс вивчення геометрії не може бути побудований як абстрактна формальна система поза всякою змістовною інтерпретацією. Вчитель має підвести дітей до створення математичних моделей конкретних ситуацій і на основі отриманого досвіду систематизувавши їх, теоретизувати структури моделей. Цим створюється база для подальшої аксіоматичної систематизації. Таким чином, у школі застосовується лише змістова аксіоматика, оскільки ефективне шкільне навчання засноване виключно на аксіоматичному методі побудувати неможливо.

Відтак під застосуванням аксіоматичного методу розумітимемо дедуктивний розвиток теорії, але не в абстрактній формі, а у вигляді певної моделі, відображаючи лише одну сторону аксіоматичного методу – логічну організацію матеріалу. Отже, при навчанні математики в закладах базової загальної середньої освіти органічним є поєднання інтуїтивних і логічних елементів. Про строгий аксіоматичний курс мова йти не може.

Чи потрібно вивчати аксіоматичний метод як предмет вивчення на конкретному матеріалі?

Оскільки даний метод широко застосовується в математиці, то бажано ознайомити з ним учнів. Розуміння суті методу впливає на розвиток мислення

школярів. Але на якому ж етапі, матеріалі, рівні найкраще організувати навчання?

Сформулюємо деякі передумови для успішного навчання наступні:

- Знання основ математики: Учні повинні мати достатні знання та розуміння основ математики. Без цього важко засвоїти аксіоматичний підхід, оскільки він базується на системі математичних знань, що стає доступною учням у віці 14-15 років.
- Логічне мислення: Аксіоматичний метод вимагає від учнів аналітичного та логічного мислення. Вони повинні бути здатні виділяти логічні зв'язки, розуміти формальні доведення та застосовувати логічні правила. Підготовка до сприйняття матеріалу – ознайомлення з правилами висновку, прикладами дедукції тощо – відбувається з початкових етапів вивчення математики.
- Абстрактне мислення: Аксіоматичний метод у геометрії вимагає від учнів здатність працювати з абстрактними поняттями та об'єктами. Учні повинні бути здатні переходити від конкретних прикладів до узагальнень та абстрактних понять. Як уже було сказано раніше потрібний рівень сформованості такого мислення досягається у старшому шкільному віці.
- Мотивація та інтерес: Учні повинні бути зацікавлені та мотивовані вивчати аксіоматичний підхід. Це допоможе їм більше зосередитись на навчанні та долучитись до процесу вивчення. Тому ознайомлення з цим методом можна проводити у класах з профільним та поглибленим вивченням математики, проте не доцільно включати у базовий курс геометрії.
- Практика та вправи: Викладання аксіоматичного методу потребує багато практичних вправ та додаткових матеріалів, щоб учні могли застосовувати теорію на практиці та закріплювати знання. Ознайомлення можливе на досить простих прикладах. Якщо метою навчання є ознайомлення з аксіоматичним методом як способом мислення, то його варто починати з менш громіздкої аксіоматики ніж геометрична.

Висновок: у межах загальноосвітньої школи неможливо реалізувати формально-логічний принцип побудови курсу геометрії: покласти в основу систему аксіом, а далі будувати викладення дедуктивно, тобто доводити теореми логічно строго, базуючись на аксіомах і раніше доведених фактах. Це можна пояснити тим, що необхідні передумови як для використання самого методу, так і для його вивчення як предмету, формуються у пізньому шкільному віці. У середньому шкільному віці, на який припадає початок вивчення геометрії, більшості учнів притаманний наочно-образний тип мислення. Тому для дитини апеляція до наочної очевидності є цілком природною та виправданою.

1.5 Методичні особливості паралельних підручників геометрії

В цьому класі, коли вводяться початкові геометричні відомості, виклад матеріалу практично в всіх сучасних підручниках не ведеться аксіоматично. Дається лише уявлення про аксіоматичний виклад: роль доказів поступово посилюється, означення стають коректнішими, однак, число тверджень, що приймаються без доведення, і понять, яким не дається строго означення, залишається досить великим.

З огляду на зазначене, в основу підручника “Геометрія 7 клас” [21] покладено *наочно-дедуктивний принцип у поєднанні із частковою аксіоматизацією*.

Вводячи перші поняття автори називають їх основними властивостями геометричних фігур, і лише згодом в п.6 [21] з'являється поняття “аксіома”. Наприклад, на першому ж занятті учні знайомляться з поняттями “точка”, “пряма” і основною властивістю прямої.

О с н о в н а в л а с т и в і с т ь п р я м о ї . Через будь-які дві точки можна провести пряму, і до того ж тільки одну.

Автори підручника [21] деякі аксіоми формують в термінах основних властивостей. Частина аксіом не виділяються спеціальним чином, а просто сформульовані як наочно очевидні твердження. Зокрема, у пп. 2, 3 сформульовано такі аксіоми:

- *для будь-яких двох точок існує єдиний відрізок, для якого ці точки є кінцями;*
- *кожний відрізок має певну довжину;*
- *кожний кут має певну величину.*

Автори спиралися й на деякі інші істинні твердження, прийняті без доведення, тобто по суті на аксіоми, але сформульовані в неявному вигляді. Наприклад, у п. 1, описуючи рисунок 13, фактично використали таку аксіому: *якою б не була пряма, існують точки, які належать цій прямій, і точки, які не належать їй.*

Далі в пункті 6 [21] наведено важливий матеріал про історичні передумови виникнення та розвитку аксіом.

Вивчення аксіом продовжується при вивченні наступних тем. Знання аксіоматики поглиблюється через їх постійне використання в доведенні теорем та задач, які вимагають доведення. Наприклад, в п.13 основна властивість прямих вводиться вже із зазначенням того факту, що вона є аксіомою.

Основна властивість паралельних прямих (аксіома паралельності прямих). Через точку, яка не лежить на даній прямій, проходить тільки одна пряма, паралельна даній.

Теорема 13.2. Якщо дві прямі паралельні третій прямій, то вони паралельні.

При доведенні теореми 13.2. використовується основна властивість прямих.

Автори [21] вважають, що мета вивчення геометрії в школі – це не тільки розвиток логічного мислення та вміння проводити доведення. Авторі підручника ставлять ширшу мету: уточнити уявлення учнівства про елементарні геометричні об'єкти (точка, пряма, промінь, відрізок, кут), ознайомити їх з найважливішими властивостями базових фігур елементарної геометрії (трикутник, коло, чотирикутник тощо), розвинути в них потребу в доведенні, тобто закласти основи дедуктивного й евристичного мислення, а головне — навчити учнів та учениць застосовувати властивості геометричних фігур у процесі розв'язування практичних і теоретичних задач.

У книзі дібрано великий і різноманітний дидактичний матеріал. Проте за один навчальний рік усі задачі розв'язати неможливо, та в цьому й немає потреби. Разом з тим набагато зручніше працювати, коли є значний запас задач. Це дає можливість реалізувати принципи багаторівневої диференціації та індивідуального підходу в навчанні.

У підручнику “Геометрія 7 клас” під редакцією Істера О.С. [12] аналогічно аксіоми спочатку вводяться як властивості геометричних об'єктів:

Яка б не була пряма, існують точки, які їй належать, і точки, які їй не належать.

Через будь-які дві точки можна провести пряму і до того ж тільки одну.

З трьох точок на прямій одна і тільки одна лежить між двома іншими.

Формалізація аксіом дається лише починаючи з 4 параграфу “Аксіоми. Теореми. Означення”.

В підручнику “Геометрія 7” під редакцією Бевз Г.П., Бевз В.Г., Владімірової Н.Г. [4] аксіоми також вводяться як властивості геометричних об'єктів. Сам термін з'являється лише в 7 параграфі при вивченні властивості паралельних прямих, коли учням наводиться твердження, відоме геометрам з давніх давен

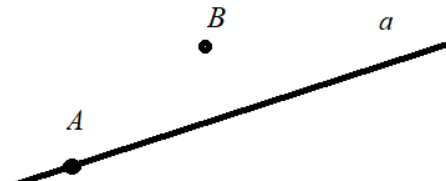
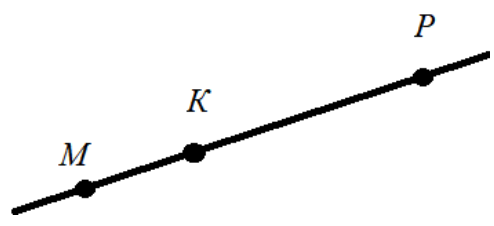
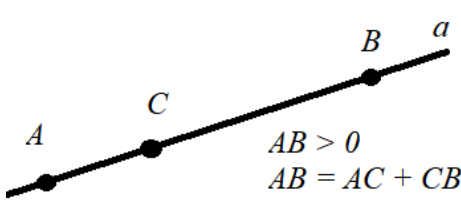
Через точку, яка не лежить на даній прямій, можна провести тільки одну пряму, паралельну даній.

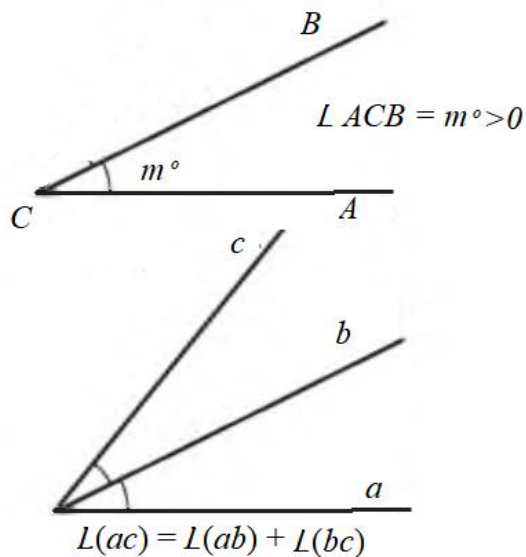
Знання аксіоматики закріплюється у 8 параграфі “Теореми і аксіоми”.

Відтак практично всі автори підручників з геометрії базової загальноосвітньої школи використовують однаковий підхід до введення аксіоматики.

Аксіоми планіметрії

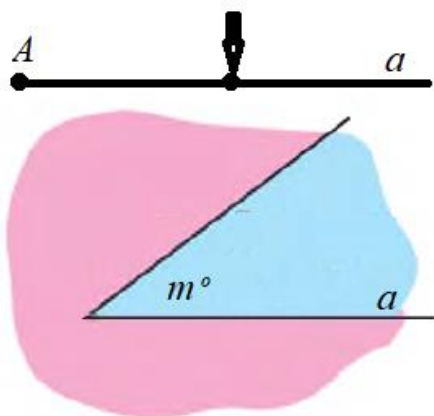
I. Аксіома належності точок і прями

	Хоча яка б не була пряма, існують точки, що належать цій прямій, і точки, що не належать їй. Через будь-які дві точки можна провести пряму, і до того ж тільки одну.
<i>II. Аксиома взаємного розміщення трьох точок прямої</i>	
	З трьох точок на прямій одна і тільки одна лежить між двома іншими.
<i>III. Аксиоми вимірювання відрізків</i>	
 $AB > 0$ $AB = AC + CB$	Кожний відрізок має довжину, більшу від нуля. Довжина відрізка дорівнює сумі частин, на які він розбивається будь-якою точкою.
<i>IV. Аксиома про розбиття площини прямою</i>	
	Пряма розбиває площину на дві півплощини
<i>V. Аксиома вимірювання кутів</i>	



Кожний кут має певну градусну міру, більшу від нуля. Розгорнутий кут дорівнює 180° . Градусна міра кута дорівнює сумі градусних мір кутів, на які він розбивається будь-яким променем, що проходить між його сторонами

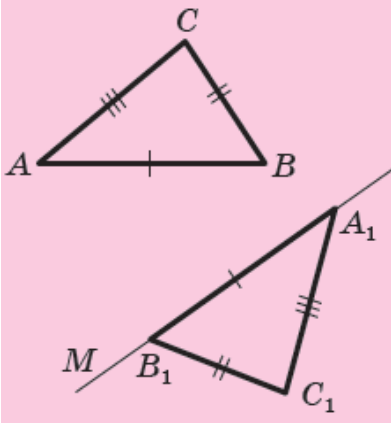
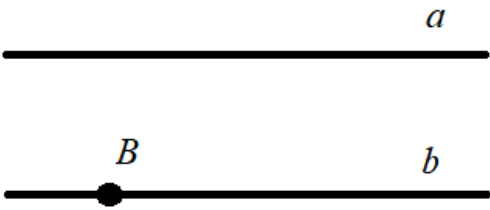
VI. Аксиома відкладання відрізків і прямих



На будь-якій півпрямій від її початкової точки можна відкласти відрізок заданої довжини, і тільки один.

Від будь-якої півпрямої в задану півплощину можна відкласти кут заданої градусної міри, менший від 180° , і тільки один.

VII. Аксиома про існування трикутника, рівного даному

	Хоча б який був трикутник, існує рівний йому трикутник у заданому розташуванні стосовно даної півпрямой.
<i>VIII. Аксиома паралельних</i>	
	Через точку, що не лежить на даній прямій, можна провести на площині не більше як одну пряму, паралельну даній

Ще раз наголосимо, що автори підручників вводять аксіоми через основні властивості фігур і, взагалі кажучи, їх формулювання може відрізнитись.

Загалом в підручниках геометрії є три класи понять:

- *первісні* – які не означаються;
- *ті, що вводяться описово* – без строго означення, на прикладах (геометрична фігура, аксіома, дати означення чому-небудь тощо);
- *поняття, які означаються* за допомогою раніше означених понять.

Так, у підручнику [21] авторами широко практикується застосування описового підходу для означення понять. Наприклад, поняття *трикутник* означається в такий спосіб: “Розглянемо три точки A, B, C , які не лежать на одній прямій. Сполучимо їх відрізками AB, BC, CA . Утворена фігура обмежує частину площини, виділену на рисунку 1.1 зеленим кольором. Цю частину площини разом з відрізками AB, BC і CA називають **трикутником**. Точки A, B, C називають **вершинами трикутника**, а відрізки AB, BC, CA — **сторонами трикутника**”.

Ілюстрація з описом конструктивного підходу до побудови геометричної фігури дозволяють як формувати в учнів навички побудови, так і розвивати образне, логічне мислення.

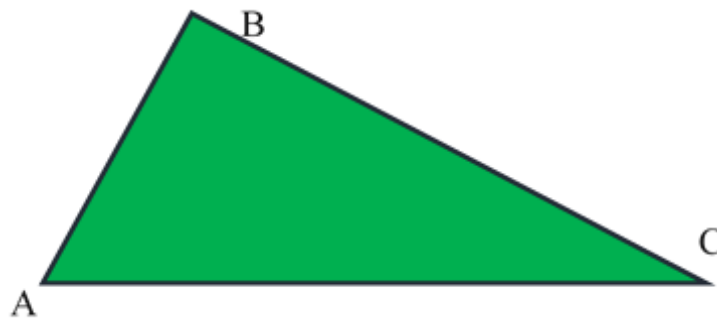


Рис. 1.1. Трикутник.

Означення понять найчастіше сформульовані конструктивно, тобто в означенні вказується спосіб утворення фігури.

Прийняті в підручниках [12, 21] означення відрізка (променя) передбачають включення кінців відрізка і початку променя у відповідні фігури. Це слід мати на увазі, при розв'язуванні задач, коли необхідно спеціально обумовлювати випадки розміщення точок. Наприклад, коли за умовою задачі точку дано на медіані, то слід обумовити, що вона не лежить на стороні і не збігається з вершиною трикутника.

Паралельні прямі означаються окремо в планіметрії:

Означення. Дві прямі називають **паралельними**, якщо вони не перетинаються.

Координати і вектори на площині та геометричні перетворення вводяться радше із загальноосвітньою метою, ніж як апарат для доведення теорем і розв'язування задач.

У сучасних підручниках значно менше місця і уваги, ніж у попередніх роках, приділено геометричним побудовам.

Означення тригонометричних функцій вводиться уже у 8 класі спочатку через відношення сторін в прямокутному трикутнику, а пізніше координатним способом. Апарат тригонометрії застосовується для розв'язування прямокутних і косокутних трикутників.

Кожен з підручників [21], [24], [26] розділено на чотири параграфи, кожен з яких складається з пунктів. У пунктах викладено теоретичний матеріал. Вивчаючи його, особливу увагу слід звертати на текст, який надруковано **жирним**

шрифтом, жирним курсивом і курсивом; так у книзі виділено означення, правила та найважливіші математичні твердження.

Зазвичай виклад теоретичного матеріалу завершується прикладами розв’язування задач. Ці записи можна розглядати як один із можливих зразків оформлення розв’язку. До кожного пункту дібрано задачі для самостійного розв’язування, приступати до яких слід лише після засвоєння теоретичного матеріалу. Серед завдань є як прості й середні за складністю вправи, так і складні задачі (особливо ті, які позначено «зірочкою» (*)).

Кожний пункт завершується рубрикою «Спостерігайте, рисуєте, конструйте, фантазуйте». До неї дібрано задачі, для розв’язування яких потрібні не спеціальні геометричні знання, а лише здоровий глузд, винахідливість і кмітливість. Ці задачі корисні, як вітаміни: вони розвивають «геометричний зір» та інтуїцію.

Крім того, у підручнику наявні сторінки для допитливих, які містять цікаві оповідання з історії геометрії, зокрема про внесок української ученої спільноти в розвиток цієї науки.

1.6 Етапи формування основних понять в геометрії

Передусім, відмітимо варіативний характер методики вивчення курсу планіметрії в закладах загальної середньої освіти. Вчитель має право вибрати один з численних варіантів, залежно від педагогічної ситуації: загального рівня початкових знань учнів, форми навчання, наявних дидактичних та навчальних матеріалів та інструментів, типу класу (звичайний, профільний, фізико-математичний, клас корекції тощо), власних педагогічних пріоритетів.

Розглянемо два варіанти побудови курсу планіметрії для звичайного класу на основі модельних навчальних програм «Геометрія. 7-9 класи» для закладів загальної середньої освіти (наказ Міністерства освіти і науки України від 24.07.2023 р. №883) за авторства Істера О.С. та авторського колективу Бурда М.І., Тарасенкова Н.А., Васильєва Д.В.. Слід зауважити, що означені програми

співпадають за метою і загальними завданнями проте зосереджені на різних підходах до вивчення геометрії.

В основу навчальної програми за авторства Істера О.С. покладена класична методика, згідно якої відбувається поступовий, але досить швидкий, перехід від наочно-інтуїтивного до формально-логічного підходу в три етапи, після чого навчання планіметрії продовжується у традиційному для аксіоматичного методу стилі.

Перший етап. Наочно-інтуїтивний. Зміст найпростіших геометричних фігур (точка, пряма, площина) та основних відношень (належати, лежати між), які стосуються цих фігур, розкривається через їх опис, показ та характеристику на наочно-інтуїтивному рівні. При цьому аксіоми I-III та аксіома V формулюються як початкові положення. Цей етап найкоротший, оскільки триває лише перші тижні навчання у 7-ому класі.

Другий етап. Перехідний. Введення понять аксіома, означення, теорема, умова, висновок та доведення теореми, ознайомлення з основними методами доведення теорем, задачами на побудову. Починаючи з другого етапу усі поняття курсу формулюються як означення, а їх властивості встановлюються шляхом доказових міркувань. Здобувачі освіти мають усвідомити, що під час доведення теорем можна користуватись означеннями, аксіомами і раніше доведеними теоремами. На цьому ж етапі поглиблюються і систематизуються відомості про геометричні величини: довжину і градусну міру кута. Тривалість етапу від 6 місяців до 1 року.

Третій етап. Формально-логічний. На цьому етапі увага зосереджується на розвитку формально-логічного мислення учнів і використанні аксіоматичного методу в доказових міркуваннях. Здобувачі освіти засвоюють строгий апарат аксіом, деяких властивостей фігур, теорем та їх доведень. Викладання на цьому етапі ґрунтуються на строгих математичних міркуваннях, заснованих на аксіомах та логічних прийомах. Особлива увага приділяється побудові геометричних фігур, застосуванню геометричних методів у розв'язанні задач, а також вивченню важливих геометричних відношень. У 7-ому класі вдалим моментом для

переходу на цей етап є тема «Ознаки рівності трикутників», більшість задач якої зосередженні саме на процесі доведення.

Наприкінці курсу планіметрії на заключних уроках можна розглянути аксіоматичний метод як предмет, провівши узагальнення поняття про логічну будову планіметрії, тільки тепер для цього виконані усі необхідні передумови.

Навчальна програма авторського колективу Бурда М.І., Тарасенкова Н.А., Васильєва Д.В. передбачає послаблення аксіоматичної лінії і перенесення акцентів на наочну геометрію. У програмі обрано конструктивний підхід до означення геометричних понять, що спирається або на малюнок, або на побудову геометричної фігури, або на розгляд життєвої ситуації. Вона передбачає переважно діяльнісний підхід до навчання геометрії, що передбачає постійне залучення учнів до навчально-пізнавальної діяльності, формування в учнів певного способу геометричних міркувань та створення ситуацій, які стимулюють самостійні відкриття учнями геометричних фактів. Поняття аксіоми може бути введене як на найпершому уроці, так і згодом, хоча особливої уваги на ньому не акцентують.

Розглянемо етапи пізнавальної діяльності, які передбачає подібний підхід до викладу матеріалу.

Перший етап. Базові поняття. Цей етап передбачає формулювання основних понять та їх властивостей за допомогою опису, малюнків та прикладів. На даному етапі використовують наступні види діяльності:

- розпізнання геометричних фігур на основі опису;
- конструювання геометричних фігур за допомогою дроту, паперу, пластиліну тощо;
- зображення геометричних фігур, зокрема з використанням ІКТ;
- встановлення відношення між фігурами на основі досвіду;
- вимірювання величин за допомогою геометричних інструментів;
- порівняння геометричних об'єктів між собою;
- розв'язування та складання власних задач.

Другий етап. Аналогічне мислення. Передбачає ознайомлення учнів з поняттям аналогії та аналогічним мисленням на прикладах, демонструючи як властивості оточуючих предметів переносяться на геометричні об'єкти, і навпаки. Формування цієї навички сприяє розвитку учнівського творчого потенціалу і здатності застосовувати вивчені математичні знання в нових, нестандартних ситуаціях, та використовувати досвід для здобуття нових геометричних знань, допомагає учням засвоїти загальні підходи до розв'язання задач і переносити їх на інші області математики та наук загалом.

Третій етап. Формалізація. На цьому етапі учні засвоюють систему формальних означень та символів, які дозволяють точно та строго виражати геометричні властивості та стосунки між об'єктами. Вони ознайомлюються з методами логічного доведення теорем, навчаються використовувати різні підходи до розв'язання геометричних задач. Формалізація допомагає учням розробляти аналітичне та критичне мислення, розвивати навички роботи з абстрактними поняттями та символами, що стане основою для подальшого вивчення більш складних геометричних властивостей.

Четвертий етап. Застосування в різних контекстах. На цьому етапі учні мають можливість застосовувати отримані знання та навички в різних практичних ситуаціях і в інших дисциплінах. Вони розв'язують складніші геометричні задачі, зокрема ті, які потребують використання геометричних інструментів та технологій. Також, учні застосовують геометричні знання для аналізу реальних життєвих ситуацій та розв'язання практичних завдань.

П'ятий етап. Рефлексія та узагальнення. На цьому етапі учні аналізують свій досвід, рефлексують над власними геометричними міркуваннями, діями та розв'язаннями задач. Вони вміють узагальнювати знання, роблять висновки про принципові підходи та загальні методи розв'язання задач у геометрії. Учні також здатні аналізувати математичні тексти та докази, оцінюють їхню логічність та точність.

Варто зауважити, що цей цикл повторюється при ознайомленні з новими темами, логічно пов'язуючи вже засвоєні знання з новими концепціями. Такий

поступовий перехід від базових понять до абстрактних теорій дозволяє учням зрозуміти глибинні зв'язки в математичних поняттях та методах. Постійне залучення учнів до активної навчально-пізнавальної діяльності, аналізу та узагальнення власного досвіду сприяє формуванню гнучкого мислення та здатності самостійно вирішувати різноманітні геометричні завдання.

2. Пропедевтика геометрії

Найважливішим завданням курсу математики початкової школи, що стосуються пропедевтики систематичного курсу геометрії, є:

- ознайомлення учнів з основними геометричними величинами та їх вимірюванням (довжин відрізків, площі фігур);
- формування уявлень про деякі геометричні фігури та їх істотні ознаки;
- формування практичних умінь зображати та конструювати геометричні фігури.

Базова програма з математики у початковій школі побудована на компетентнісній основі. Програма структурована за змістовими лініями, визначених новою редакцією Державного стандарту початкової освіти, затвердженого Постановою Кабінету міністрів України від 21 лютого 2018 р. за № 87 (далі Держстандарту), і містить їх деталізацію по роках навчання.

Зміст програми має потенціал для формування у здобувачів таких ключових компетентностей: математичної компетентності, що передбачає виявлення простих математичних залежностей в навколишньому світі, моделювання процесів та ситуацій із застосуванням математичних відношень та вимірювань, усвідомлення ролі математичних знань та вмінь в особистому і суспільному житті людини; компетентності у галузі природничих наук, техніки і технологій, що передбачають формування допитливості, прагнення шукати і пропонувати нові ідеї, самостійно чи в групі спостерігати та досліджувати, формулювати припущення і робити висновки на основі проведених дослідів, пізнавати себе і навколишній світ шляхом спостереження та дослідження; навчання впродовж життя, що передбачає опанування уміннями і навичками, необхідними для

подальшого навчання, організацію власного навчального середовища, отримання нової інформації з метою застосування її для оцінювання навчальних потреб, визначення власних навчальних цілей та способів їх досягнення, навчання працювати самостійно і в групі та інших компетентностей, відповідно до вимог Держстандарту.

Реалізація мети і завдань початкового курсу математики здійснюється за такими змістовими лініями: «Числа, дії з числами. Величини», «Геометричні фігури», «Вирази, рівності, нерівності», «Робота з даними», «Математичні задачі і дослідження».

Змістова лінія “Геометричні фігури” націлена на розвиток в учнів просторових уявлень; формування здатності розрізняти геометричні фігури за їх істотними ознаками; формування практичних умінь будувати, креслити, моделювати й конструювати геометричні фігури від руки та за допомогою простих креслярських інструментів. Ця змістова лінія має пропедевтичний характер.

Розглянемо, як реалізується змістова лінія “Геометричні фігури” наповненням геометричного матеріалу в 1 – 4 класах.

У *першому* класі на наочно-інтуїтивному і оперативному рівнях учні виконують побудови, практичні дії з фігурами. Здобувачів освіти ознайомлюють з основними геометричними фігурами точкою, прямою, променем, відрізком та ламаною, їх зображенням, та основними характеристиками. Протягом року учні навчаються розпізнавати та називати плоскі геометричні фігури такі як круг, трикутник, чотирикутник, квадрат, та об’ємні фігури, серед яких куб, піраміда, циліндр, конус та куля. Впроваджуються одиниці довжини – сантиметр, дециметр, метр – та відношення між ними, розглядається поняття «відстань». В учнів формують уміння вимірювати довжини відрізків, будувати відрізок заданої довжини за допомогою лінійки.

У *другому* класі учні продовжують виконувати вимірювання і побудову відрізків, розпізнавати знайомі фігури. Вводяться нові фігури – ламана, багатокутник. Учні вимірюють довжину ламаної, знаходять периметр

багатокутника, вивчають кути багатокутника, прямий кут. Вводяться нові фігури: прямокутник, квадрат, коло і центр кола. Учні навчаються будувати прямокутники і квадрати на папері у клітинку, коло – за допомогою циркуля.

У *третьому* класі впроваджується буквене позначення геометричних фігур. У цьому класі формується вміння будувати прямокутник і квадрат за даними довжинами сторін (по клітинках зошита), коло за допомогою циркуля. Розрізняти та позначати на рисунку елементи геометричних фігур, зокрема і кола. Учні продовжують розв'язувати вправи на знаходження периметра багатокутника. Поряд з плоскими фігурами розглядаються властивості об'ємних фігур. Учні визначають форму і кількість плоских фігур з яких складається їх поверхня, кількість вершин в многограннику тощо.

У *четвертому* класі учні далі ознайомлюються з поняттям площі, вивчають міри площі (квадратний сантиметр, квадратний дециметр, квадратний метр) та переведення з одної одиниці виміру до іншої, визначають площі прямокутників за формулою та інших фігур за допомогою палетки.

Особливістю методики вивчення геометричного матеріалу в початковій школі є широке використання конкретно-індуктивного методу, наочності та практичних дій учнів. На основі наочного ознайомлення з моделями та рисунками учні мають навчитися вільно розпізнавати найпростіші геометричні фігури в предметах, моделях, рисунках, оволодіти навичками побудови та вимірювання. На цьому етапі навчання не передбачено введення означень геометричних фігур, проведення дедуктивних міркувань, крім, можливо, найпростіших дедуктивних висновків.

3. Курс математики 5-6 класів

3.1. Впровадження концепції “Нова українська школа”

Впровадження “Концептуальних засад реформування середньої освіти” в частині всеосяжного трансформування освітнього простору через поглиблення педагогіки партнерства, готовності до інновацій, впровадження нових стандартів

й результатів навчання впливає й на трансформацію підходів до викладання математики в 5 – 6 класах.

Міністерством освіти та науки активно втілюється експеримент, щодо апробації низки розроблених модельних навчальних програм. Розглянемо детально модельну навчальну програму “Математика. 5–6 класи” для закладів загальної середньої освіти (автори Мерзляк А.Г., Номіровський Д.А., Пихтар М.П., Рубльов Б.В., Семенов В.В., Якір М.С.).

Модельна навчальна програма з математики для 5–6 класів закладів загальної середньої освіти побудована відповідно до Закону України «Про повну загальну середню освіту» від 16 січня 2020 року № 463-IX, Державного стандарту базової середньої освіти, затвердженого постановою Кабінету Міністрів України від 30 вересня 2020 року № 898 (далі — Державний стандарт) і Типової освітньої програми для 5–9 класів закладів загальної середньої освіти, затвердженої наказом Міністерства освіти і науки України від 19 лютого 2021 року № 235, та спрямована на реалізацію вимог до обов’язкових результатів навчання, визначених Державним стандартом для математичної освітньої галузі.

Математична освітня галузь є складовою базової середньої освіти, метою якої є розвиток природних здібностей, інтересів, обдарувань учнів, формування компетентностей, необхідних для їх соціалізації та громадянської активності, свідомого вибору подальшого життєвого шляху та самореалізації, продовження навчання на рівні профільної освіти або здобуття професії, виховання відповідального, шанобливого ставлення до родини, суспільства, навколишнього природного середовища, національних та культурних цінностей українського народу.

Випускник/випускниця закладу загальної середньої освіти — це патріот України, у світогляді якого розбудова українського суспільства й економіки та зайняття Україною гідного місця серед світових держав є однією з провідних цінностей.

Метою математичної освітньої галузі є розвиток особистості учня/учениці через формування математичної компетентності у взаємозв’язку з іншими

ключовими компетентностями для успішної освітньої та подальшої професійної діяльності впродовж життя, що передбачає:

- засвоєння системи знань;
- набуття та вдосконалення вміння розв'язувати математичні та практичні задачі;
- розвиток логічного й математичного мислення;
- розуміння можливостей застосування математики в особистому та суспільному житті.

Зважаючи на сучасний стан розвитку суспільства та потреби сьогодення, одним із основних викликів є збереження та подальше підвищення статусу України як провідної світової держави в наукомістких галузях, зокрема в комп'ютерних та інформаційних дисциплінах, авіаційній та космічній галузях; проведення наукових досліджень і технічних розробок на сучасному світовому рівні; розвиток технологічного, економічного й оборонного потенціалу держави; інтенсивний розвиток усіх галузей народного господарства та оновлення виробничої бази на засадах сучасних технологій, автоматизації та роботизації; масова інформатизація та комп'ютеризація. Зазначені виклики можуть бути реалізовані виключно за умови масового набуття підростаючим поколінням компетенцій, що є чільними для професійної орієнтації в науко-містких областях, конструктивного логічного та алгоритмічного мислення, високого рівня технічної грамотності. І провідним інструментом для цього є навчання математики як мови науки, техніки та технологій.

З огляду на це нова українська школа в наш час має сформулювати уявлення про математику як один із провідних інструментів пізнання навколишнього світу та керування ним, про важливість математичних знань і алгоритмічного мислення для самореалізації в сучасному світі на належному фаховому рівні; заохотити учнів/учениць до набуття математичних знань та активного їх застосування. Потрібна докорінна реформа, яка зупинить негативні тенденції і перетворить українську школу на важіль соціальної рівності та згуртованості, економічного розвитку та конкурентоспроможності України у світовій спільноті.

В основу побудови змісту та організації процесу навчання математики в закладах загальної середньої освіти покладено *компетентнісний підхід*, відповідно до якого кінцевим результатом навчання предмета є сформовані предметні та ключові компетентності, зокрема такі, як здатності учня/учениці застосовувати свої знання в навчальних і реальних життєвих ситуаціях, брати повноцінну участь у житті суспільства, нести відповідальність за свої дії.

Метою навчального предмета «Математика», який згідно з Державним стандартом входить до типової освітньої програми для 5–9 класів, є досягнення вищезазначеної мети математичної освітньої галузі, у тому числі формування в учнів/учениць предметної математичної компетентності, що передбачає здатність розвивати й застосовувати математичні знання та методи для розв’язання широкого спектра проблем у повсякденному житті; моделювання процесів та ситуацій із застосуванням математичного апарату; усвідомлення ролі математичних знань і вмінь в особистому та суспільному житті людини.

Програма висуває вимоги до обов’язкових результатів навчання учнів на основі *компетентнісного підходу*.

Формування математичної компетентності підпорядковується реалізації загальних завдань математичної освіти, які полягають у формуванні в учнів/учениць:

- ставлення до математики як до невід’ємної складової загальної культури людини, універсальної мови науки та техніки, ефективного засобу моделювання та дослідження процесів і явищ навколишнього світу, а отже, необхідної умови повноцінного життя людини в сучасному суспільстві;
- математичного мислення та мовлення, необхідного для опису математичних фактів і закономірностей та для створення математичних моделей;
- здатності до логічних міркувань, висновків, алгоритмічного мислення;
- здатності логічно обґрунтовувати та доводити твердження, оцінювати правильність і раціональність розв’язування задач, приймати рішення в умовах неповної, надлишкової, точної та ймовірнісної інформації;

- здатності та потреби застосовувати математичні методи під час розв’язування навчальних і практичних задач, використовувати математичні знання і вміння під час вивчення інших навчальних предметів;
- умінь працювати з підручником, опрацьовувати математичні тексти, шукати й використовувати додаткову навчальну інформацію, критично оцінювати здобуту інформацію та її джерела, виокремлювати головне, аналізувати, робити висновки, використовувати отриману інформацію в особистому житті.

У 5–6 класах закладів загальної середньої освіти мають бути реалізовані такі специфічні для даного етапу навчання математики освітні завдання:

- формування початкових уявлень про залежності між величинами, подання та оброблення наборів даних, графічний спосіб характеристики залежностей між величинами, опису явищ і процесів;
- оволодіння мовою геометрії, розвиток просторових уявлень і уяви;
- формування вміння виконувати найпростіші геометричні побудови за допомогою геометричних інструментів (лінійки з поділками, транспортира, косинця, циркуля та лінійки);
- формування знань про геометричні фігури на площині, їхні властивості, а також умінь застосовувати здобуті знання в навчальних і життєвих ситуаціях;
- формування уявлення про геометричні фігури в просторі та їхні властивості, а також первинних умінь застосовувати їх у навчальних і життєвих ситуаціях;
- формування знань про основні геометричні величини (довжину, площу, об’єм, міру кута), способи їх вимірювання й обчислення для планіметричних і стереометричних фігур, а також умінь застосовувати здобуті знання в навчальних і життєвих ситуаціях;
- вивчення геометричних перетворень на площині та їхніх найпростіших властивостей.

Базові знання, що їх мають набути учні/учениці наприкінці навчання у курсі математики 5–6 класу передбачають знання:

- *методології математики*: математична термінологія і символіка; математичні твердження; метод математичного моделювання;
- *чисел і виразів*: числові множини; натуральні, цілі, раціональні числа, дії із ними та їх порівняння; десяткові дробі, округлення, прикидки; подільність натуральних чисел, відношення, відсотки, пропорції;
- *рівнянь*;
- *геометрії і вимірювання геометричних величин*: первинні геометричні об'єкти (фігури та відношення); базові уявлення про найпростіші геометричні фігури; трикутники, багатокутники; основні геометричні форми: лінії, поверхні, тіла; коло і круг; многогранники і тіла обертання: призма, піраміда, циліндр, конус, куля; вимірювання відрізків та кутів; периметр багатокутника, площа прямокутника; об'єм та площа поверхні прямокутного паралелепіпеда;
- *наочних уявлення про дані, їх представлення та перетворення, діаграм і графіків*;
- *найпростіших елементів комбінаторики*.

Курс математики в 5–6 класах закладів загальної середньої освіти логічно продовжує реалізацію завдань математичної освіти учнів/учениць, розпочату в початковій школі, розширюючи та доповнюючи ці завдання відповідно до вікових і пізнавальних можливостей школярів/школярок.

Зміст математичної освіти в 5–6 класах закладів загальної середньої освіти структурується за такими **змістовими лініями**:

- *числа і дії з ними*;
- *вирази*;
- *рівняння*;
- *відношення і пропорції*;
- *геометричні фігури і величини*;

- *математичні задачі як засіб дослідження реальних життєвих ситуацій та реальних процесів;*

Кожна з них розвивається з урахуванням завдань вивчення математики на відповідному ступені базової середньої освіти.

В частині вивчення змістової лінії “геометричні фігури і величини” курс математики 5–6 класів передбачає розвиток, збагачення та поглиблення знань учнів/учениць уявлень про окремі геометричні фігури на площині та в просторі. Понятійний апарат, обчислювальні алгоритми, графічні уміння та навички, що мають бути сформовані на цьому етапі вивчення курсу, є тим підґрунтям, що забезпечує успішне вивчення в наступному класі геометрії, а також інших навчальних предметів, де застосовуються математичні знання.

Навчальний матеріал, що стосується геометричних фігур, має загалом пропедевтичний характер. Ознайомлення з ним готує здобувачів освіти до свідомого системного вивчення відповідних тем у курсі геометрії. Важливе значення для підготовки учнів/учениць до систематичного вивчення алгебри, геометрії та інших предметів мають початкові відомості про метод координат, які одержують учні/учениці 5–6 класів: зображення чисел на координатній прямій, прямокутна система координат на площині, виконання відповідних побудов, побудова й аналіз окремих графіків залежностей між величинами.

Формуванню математичної та ключових компетентностей сприяє встановлення та реалізація міжпредметних і внутрішньо-предметних зв’язків, а саме: змістово-інформаційних, операційно-діяльнісних і організаційно-методичних. Їх використання посилює пізнавальний інтерес учнів/учениць до навчання та підвищує рівень їхньої загальної культури, створює умови для систематизації навчального матеріалу та формування наукового світогляду. Учні/учениці набувають досвіду застосування знань на практиці та перенесення їх у нові ситуації.

3.2. Змістове наповнення курсу математики геометричними поняттями

На цьому етапі навчання дещо поглиблюють і розширюють знання про відомі учням з початкової школи фігури, а також вводять нові фігури та геометричні поняття. Зокрема, учні продовжують вивчати відрізки та їх вимірювання, але при цьому їхню увагу звертають на те, що відрізок коротший за будь-яку іншу лінію, яка з'єднує його кінці, що довжина відрізка, який складається з кількох частин, дорівнює сумі довжин цих частин. Отже, всі теоретичні факти щодо геометричних величин, сформульовані в курсі геометрії у вигляді аксіом вимірювання, на цьому етапі засвоюються на рівні наочно-дійового мислення.

У п'ятому класі учнів ознайомлюють з новими геометричними фігурами: промінь (як фігура, утворена продовженням відрізка в один бік), пряма (як фігура, утворена продовженням відрізка в обидва боки), розповідають про площину як образ реальних об'єктів (поверхня скла, спокійного водоймища тощо). Безпосередньою побудовою вводять: поняття кута, його видів (прямий, гострий, тупий), одиницю виміру кутів. Формується вміння вимірювати кути транспортиром і будувати кути заданої величини. Учні вже відоме поняття площі, вони вміють обчислювати площу прямокутника, отже, на цьому етапі навчання вводяться формули площі квадрата ($S = a^2$, $S = ab$), нові одиниці площі (гектар, квадратний кілометр). Учні вперше ознайомлюють з геометричним тілом – прямокутним паралелепіпедом, з новою геометричною величиною – об'ємом, його одиницями, вони розв'язують вправи на обчислення об'єму прямокутного паралелепіпеда.

У шостому класі вводять формули довжини кола і площі круга – відомих з початкової школи геометричних фігур. Упроваджується нова фігура – круговий сектор, розширюються знання про круглі геометричні тіла – циліндр, конус, куля.

Важливими для підготовки до вивчення систематичного курсу геометрії є відомості про перпендикулярні і паралельні прямі, про побудову їх за допомогою

лінійки та косинця. На рівні практичних дій (побудови) учнів ознайомлюють з фактами, які стверджуються в курсі геометрії аксіомою паралельності.

На відміну від початкової школи в 5 – 6 класах теоретичний рівень викладу геометричного матеріалу вищий. Окремі поняття вводять на рівні означень (розгорнутий кут, паралельні прямі тощо), здійснюють нескладні дедуктивні міркування. Водночас, як і в початковій школі, при вивченні елементів геометрії мають переважати конкретно-індуктивний метод навчання, широке залучення наочності, практичних вправ учнів з моделями і виконання ними зображень фігур, побудов лінійкою, косинцем, циркулем.

Тому, для ефективного засвоєння планіметричного матеріалу, необхідна достатня підготовка учнів на кожному етапі навчання.

4. Методика проведення перших уроків геометрії.

4.1. Вступні зауваження

До перших уроків геометрії ми відносимо навчальний матеріал, який вводить учнів у геометрію. В підручниках [12], [21] розглянуто первісні поняття геометрії, найпростіші геометричні фігури: відрізок, півпряма, півплощина, кут, трикутник, паралельні і перпендикулярні прямі, формулюються основні властивості геометричних фігур (аксіоми), теореми.

Основна мета перших уроків геометрії – дати поняття про геометрію, систематизувати наочні уявлення про найпростіші геометричні фігури, ввести первісні (неозначувані) поняття і поставити учнів перед потребою ввести означення деяких відомих їм фігур (відрізок, півпряма, півплощина, кут, трикутник, паралельні прямі), розглянути первісні та означувані відношення, сформулювати основні властивості найпростіших фігур і властивості вимірювання відрізків і кутів, які наприкінці теми буде названо аксіомами. На перших уроках також вводяться поняття про теореми, їх доведення. В учнів формується потреба в доведенні нових тверджень за допомогою основних властивостей геометричних фігур і вже доведених тверджень. Вони набувають перших умінь виконувати доведення.

Важливим завданням перших уроків є формування геометричної мови на основі вже відомої і нової для учнів термінології. На початку вивчення ще не ставиться за мету пояснювати учням походження і роль первісних понять та аксіом, ідею аксіоматичної побудови геометрії. Про це можна говорити, закінчуючи вивчення планіметрії або на перших уроках стереометрії, коли на прикладі планіметрії учні вже мають зразок дедуктивної побудови курсу. Проте ідею дедуктивної побудови математики вчитель повинен систематично проводити з перших уроків геометрії, насамперед формуючи потребу означати нові геометричні поняття і доводити нові геометричні твердження на основі вже відомих понять, аксіом і доведених тверджень.

4.2. Формування понять

Щодо первісних, неозначуваних понять планіметрії “точка”, “пряма”, то уявлення про них учні вже повинні мати з попередніх класів. Однак, хоч уявлення про точку походить від реально існуючих об’єктів (місце дотику олівця до паперу, місце перетину двох ліній, тощо), необхідно акцентувати увагу учнів, що в геометрії точка не має розмірів. Так само, хоч уявлення про пряму дає натягнута туга нитка (стрічка), в геометрії пряма не має товщини, кінців і вважається необмежено продовженою.

При формуванні поняття “належить” для точок і прямих на площині потрібно звернути увагу на можливість вживання різних термінів для позначення цього відношення: “точки A і C належать прямій a ”, “точки A і C лежать на прямій a ”, “пряма a проходить через точки A і C ”.

Щодо формування первісного відношення “лежить між” для трьох точок прямої, то необхідно відмежувати сформоване в учнів з життєвої практики поняття “лежить між”. Наприклад, у побуті часто вживають вислови на кшталт “місто Житомир лежить між Києвом і Львовом”, пояснюючи, яким автобусом дістатися до Житомира. Адже, якщо подивитися на карту, то очевидно, що автомобільна траса по якій рухається автобус не є прямою лінією. У цьому разі, з точки зору геометрії, вживання цього терміну неправомірне, оскільки вислів

“*лежить між*” в геометрії використовується для позначення властивості трьох точок, які належать лише прямій.

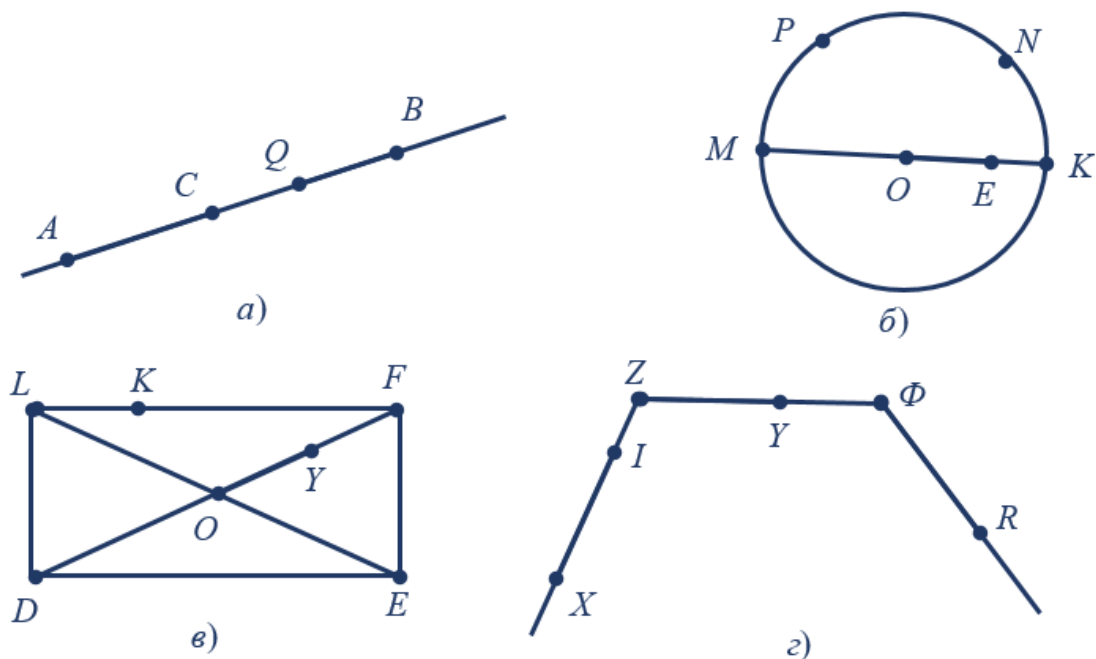


Рис. 4.1. Приклади геометричних фігур.

Якщо учням запропонувати самостійно позначити на прямій точку C , яка лежить між двома даними точками A і B цієї прямої, то котрийсь з учнів може позначити цю точку лише посередині відрізка AB . Треба підкреслити, що це правильно не лише для точки, яка лежить посередині відрізка. Корисно розв’язати усні вправи на підведення під поняття “*лежить між*”, використовуючи різні відомі учням фігури (рис. 4.1). Система запитань може бути такою.

- Чи лежить точка P між точками M і N (рис. 4.1 б)?
- Які точки на рисунку 4.1 а), б) лежить між двома іншими?
- Чи лежить точка F між точками L і E (рис. 4.1 в)? Укажіть на цьому рисунку точки, які лежать між двома іншими.
- Яка точка лежить між двома іншими на рисунку 4.1 г), які точки не мають цієї властивості?

В умовах роботи з підручниками [12], [21] на перших уроках геометрії вводиться більше двадцяти означуваних понять та низка понять, які вводяться шляхом описання, на прикладах (геометрична фігура, аксіома, дати означення

чому-небудь). Переважна більшість цих понять відома учням з попередніх класів, але тепер ставиться завдання сформулювати їх означення. Щодо терміну “означення”, то, на відміну від термінів “аксіома”, “теорема”, його в підручниках не пояснюють. З курсу логіки відомо, що означення – це твердження, в якому перелічуються суттєві властивості поняття. На початку вивчення курсу геометрії з дидактичних міркувань давати таке тлумачення терміну “означення” учням недоцільно. Тому досить обмежитись роз’ясненням на прикладах поняття “означити що-небудь”. Зокрема автори підручника [21] для цього використали такий прийом: якщо треба пояснити зміст якогось поняття (терміну), то використовують *означення*. Наприклад: *годинником* називають прилад для вимірювання часу; *геометрія* — це розділ математики, який вивчає властивості фігур.

Означувані поняття на перших заняттях геометрії можна вводити і конкретно-індуктивним, і абстрактно-дедуктивним методами.

Наприклад, можна підвести учнів до означення відрізка, виділяючи суттєві властивості точок цієї фігури. В цьому разі пояснення вчителя може проводитись у формі евристичної бесіди такого характеру.

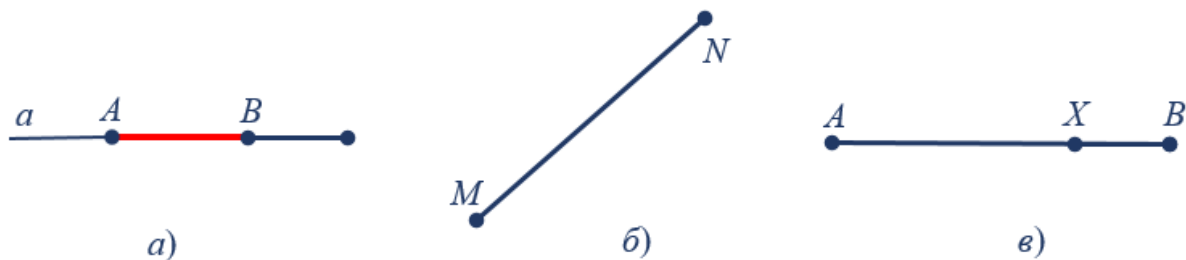


Рис. 4.2. Приклади відрізків.

Учитель.	На рисунку 4.2 а) зображено пряму a, яка проходить через точки A і B. Ці точки обмежують частину прямої a, яку виділено червоним кольором. Таку частину прямої разом з точками A і B називають відрізком, а точки A і B – кінцями цього відрізка.
----------	--

	Для будь-яких двох точок існує <i>єдиний</i> відрізок, для якого ці точки є кінцями, тобто <i>відрізок своїми кінцями задається однозначно</i> . Тому відрізок позначають, називаючи його кінці.
Учитель.	Що зображено на рисунку 4.2 б)?
Учень.	Відрізок MN .
Учитель.	Добре. Загалом відрізок, зображений на рисунку 4.2 б), позначають: MN або NM (читають: “ <i>відрізок MN</i> ” або “ <i>відрізок NM</i> ”).
Учитель.	Що зображено на рисунку 4.2 в)?
Учень.	Відрізок AB .
Учитель.	Яку властивість має точка X стосовно точок A і B ?
Учень.	Точка X лежить між точками A і B .
Учитель.	Вірно. На рисунку 4.2 в) зображено відрізок AB і точку X , яка належить цьому відрізку, проте не збігається із жодним його кінцем. Точку X називають внутрішньою точкою відрізка AB . У такому випадку говорять, що точка X лежить між точками A і B .

І здатні самостійно формулювати означення спираючись на раніше отриманий в молодших класах досвід роботи з геометричними фігурами.

Так само учні можуть самостійно формулювати відомі їм означення понять “розгорнутий кут”, “паралельні прямі”, “бісектриса кута”. Щодо означення паралельних прямих, то треба підкреслити, що в планіметрії це означення включає лише одну суттєву властивість – “*не перетинатися*”.

Означення таких понять, як “кут”, “трикутник”, “рівні трикутники”, “суміжні кути”, “перпендикуляр до прямої” тощо, доцільніше ввести абстрактно-дедуктивним методом, тобто означення формулює сам учитель, наводить приклади, і учні розв’язують задачі, що закріплюють введені поняття.

Щодо поняття “геометрична фігура”, яке описово вводиться на першому занятті, то, вводячи поняття “геометрична фігура”, доцільно скористатися моделями каркасних (виготовлених з дроту) та плоских трикутника і прямокутника (виготовлених з паперу чи картону), кола і крута, прямокутного

паралелепіпеда, піраміди, кулі, циліндра, конуса. Варто підкреслити, що трикутники, многокутники, коло, круг можуть розміщуватись в одній площині всіма своїми точками, на відміну від паралелепіпеда, кулі, піраміди, циліндра, конуса. Такі фігури називають тілами. Після цього природно ввести поняття планіметрії як розділу геометрії, в якому вивчаються фігури на площині.

4.3. Ознайомлення з аксіомами і теоремами

Слід мати на увазі, що з аксіомами планіметрії на оперативному, практичному рівні учні фактично ознайомились при вивченні курсу математики 1-6 класів. Однак на тому етапі навчання ці властивості найпростіших фігур аксіомами не називалися. Цей термін не вводиться і на перших уроках планіметрії доти, доки учні не ознайомляться з поняттями “*теорема*” і “*доведення*” і не відчують потреби у використанні аксіом для обґрунтування доведень.

Вивчення основних властивостей найпростіших фігур і формулювання кожної властивості доцільно починати з розгляду відповідних фігур і практичних дій учнів: вибір точок на прямій і поза нею, проведення прямої через дві дані точки, вимірювання довжини відрізка і величини кута, проведення через дану точку прямої, паралельної даній. Помічені властивості учні можуть сформулювати самостійно у вигляді тверджень, які пізніше будуть названі аксіомами.

Щодо введення поняття аксіоми як твердження про властивості найпростіших фігур, що домовились прийняти без доведення, то на початку вивчення планіметрії цими відомостями про аксіоми можна обмежитись.

У 10 класі починаючи знайомство зі стереометрією необхідно розширити знання про аксіоми. Причому введення аксіом стереометрії доцільно вводити лише після повторення усіх аксіом планіметрії. Варто також зазначити, що ці твердження домовились приймати без доведення. Залежно від особливостей вибору первісних понять і побудови курсу геометрії за аксіому можна вибрати інше твердження, яке в іншому курсі доводиться. Так, коли теорему про суму

кутів трикутника взяти за аксіому, тоді властивість проведення через точку, яка не належить прямій, лише однієї прямої, паралельної даній можна довести. На цьому етапі навчання вже є можливість пояснити походження і роль первісних понять і аксіом при побудові курсу планіметрії.

Поняття про теорему і доведення вчителю доведеться ввести перед доведенням першої теореми курсу планіметрії про властивість двох прямих, які перетинаються та мають тільки одну спільну точку. Структуру змісту теореми (умова і висновок) теж треба пояснити на прикладі формулювання цієї теореми, бо іншого зразка учні доти не мали. Можна також показати учням зразок скороченого запису умови і висновку теореми за наперед заготовленим рисунком. Треба привчати учнів до культури записів на дошці і в зошиті, а саме: рекомендувати рисунок розміщувати зліва, а скорочений запис змісту теореми (задачі) – справа.

Теорема. *Будь-які дві прямі, що перетинаються, мають тільки одну спільну точку.*



Рис. 4.3. Прямі, що перетинаються.

Дано: прямі a і b перетинаються.

Довести: пряма a перетинає b в одній точці (рис. 4.3).

Доведення: Нехай прямі a і b , що перетинаються, крім спільної

точки A , мають ще одну спільну точку B (рис. 4.3). Тоді через дві точки A і B проходять дві прямі. А це суперечить основній властивості прямої. Отже, припущення про існування другої точки перетину прямих a і b неправильне [21].

Хід доведення першої теореми [21] знайомить учнів зі схемою міркувань від супротивного. Щоб полегшити сприйняття першого для учнів методу доведення, треба не тільки пояснити учням його суть, а дати навчальний алгоритм і критерії доцільності використання. При цьому варто з перших занять, коли використовується даний метод, організовувати на уроці колективне повторення алгоритму на прикладі вже відомих учням доведень.

Деякі вчителі практикують з перших уроків виконання на дошці (а учні – в зошиті) скороченого запису основних етапів доведення. В цьому разі учні під час доведення теореми намагаються за вчителем виконувати скорочений запис у зошиті. Такий методичний прийом вивчення доведень на перших уроках не можна вважати виправданим, оскільки учні не заглиблюються у зміст доведення, а прагнуть лише скорочено записати його. Якщо є потреба в скороченому записі доведення, то доцільніше дати учням на це час після того, як доведення пояснене і закріплене повторним поясненням чи відтворенням одним з учнів.

Одним з дієвих методів вивчення доведень в геометрії є доведення за малюнком або анімацією. Таке вивчення складається з трьох етапів: 1) вчитель проводить доведення покроково фіксуючи головні моменти доведення на рисунку; 2) витерши доведення, але залишивши рисунки або повторно відтворивши анімацію, вчитель пропонує учням колективно відновити доведення; 3) закріплення вивчення доведення, яке може проводитись у вигляді домашнього конспектування, проєктів зі створення ілюстрації доведення тощо.

Необхідно уникати негативних оцінок за нездатність окремих учнів повторити доведення перших теорем наступного уроку, що слідує за тим, на якому ці теореми були вивчені. На рівні обов'язкових навчальних результатів досить зосередитися на вмінні сформулювати теорему, створити відповідне зображення та вказати ключові кроки і твердження, які застосовуються під час доведення.

Задача. Чи може пряма, яка перетинає одну з двох паралельних прямих, не перетинає другу? Поясніть відповідь.

Доведення. Припустімо, що c не перетинає b . Тоді через прямих A проходять дві прямі a і c , які не перетинають b , тобто паралельні b . Однак це суперечить аксіомі паралельних прямих.

Висновок. Припущення невірне. Отже, a має перетнути b .

Теорема. *Через кожну точку прямої можна провести пряму, перпендикулярну до даної, і до того ж тільки одну.*

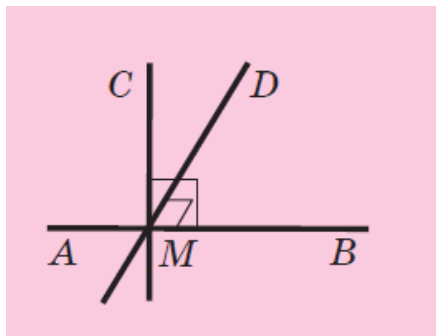


Рис. 4.4. Перпендикулярність прямих.

Доведення. Позначимо на прямій AB довільну точку M . Спочатку покажемо, що через точку M можна провести пряму, перпендикулярну до прямої AB . Відкладемо від променя MB (рис. 4.4) кут CMB , який дорівнює

прямому (це можна зробити за основною властивістю відкладання кутів). Тоді пряма CM перпендикулярна до даної прямої AB .

Припустимо, що через точку M проходить ще одна пряма, відмінна від прямої CM і перпендикулярна до прямої AB . Нехай точка D цієї прямої лежить у тій самій півплощині відносно прямої AB , що й точка C (рис. 4.4). Тоді отримуємо, що від променя MB в одну півплощину відкладено два кути CMB і DMB , які дорівнюють прямому, що суперечить основній властивості відкладання кутів.

Порівнюючи обидва доведення, учні помічають їх суттєві спільні кроки і з допомогою вчителя можуть сформулювати алгоритм методу доведення від супротивного, який варто оформити у вигляді таблиці, і вдаватись до цієї таблиці тоді, коли виникає потреба використати при доведенні метод від супротивного.

Щоб довести твердження методом від супротивного, треба:	
1.	припустити супротивне тому, що треба довести;
2.	користуючись припущенням, відомими аксіомами і доведеними раніше твердженнями, шляхом міркувань дійти висновку, який суперечить або умові твердження, яке доводиться, або відомій аксіомі, або доведеному раніше твердженню, а бо припущенню;
3.	зробити висновок, що припущення неправильне, а правильне те, що треба довести.

Варто дати учням орієнтир можливості застосування методу від супротивного: *неможливість чого-небудь і єдиність чого-небудь в математиці*

завжди доводиться методом від супротивного. Цей методом інколи використовують також при доведенні обернених тверджень.

4.4. Особливості системи задач перших уроків

Система задач, які розв'язуються на початку вивчення геометрії, спрямована насамперед на засвоєння основних властивостей найпростіших фігур, на формування вмінь посилалися на аксіому, теореми й означення при доведенні нових тверджень, розв'язуванні задач на доведення й обчислення, на засвоєння геометричної мови. В цій системі слід віддати значну увагу завданням, пов'язаним з практичними діями учнів, що стосуються проведення прямих ліній, вибору точок, що відповідають певним критеріям, та поясненню за допомогою геометричних термінів властивостей точок, прямих, відрізків та кутів на наведеному малюнку. Завдання, що включають визначення довжин відрізків та кутів у градусах, сприяють розвитку в учнів вмінь вимірювання та побудови відрізків та кутів заданої величини за допомогою лінійки та інших інструментів.

Задача. Точки A , B і C належать одній прямій, $AB = 8$ см, відрізок AC на 2 см довший за відрізок BC . Знайдіть відрізки AC і BC [21].

Розв'язання. В умові не вказано, яким є взаємне розміщення даних точок на прямій. Тому розглянемо три можливих випадки.

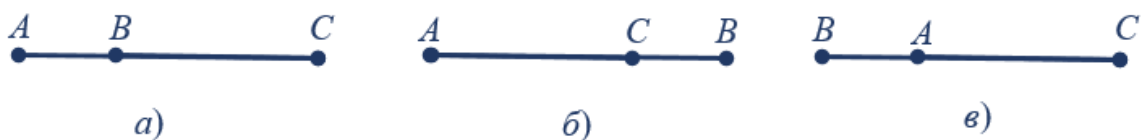


Рис. 4.5. Взаємне розміщення точок на прямій.

1) Точка B – внутрішня точка відрізка AC (рис. 4.5 а)). Тоді відрізок AC довший за відрізок BC на довжину відрізка AB , тобто на 8 см. Це суперечить умові. Отже, такий випадок неможливий.

2) Точка C – внутрішня точка відрізка AB (рис. 4.5 б)). У цьому випадку $AC + BC = AB$. Нехай $BC = x$ см, тоді $AC = (x + 2)$ см. Маємо рівняння:

$$x + 2 + x = 8;$$

$$x = 3.$$

Отже, $BC = 3$ см, $AC = 5$ см.

3) Точка A – внутрішня точка відрізка BC (рис. 4.5 в)). У цьому випадку $AB + AC = BC$ і тоді $AC < BC$. Це суперечить умові. Отже, такий випадок неможливий.

Відповідь: $AC = 5$ см, $BC = 3$ см.

Шкільна практика свідчить про те, що корисними для підготовки до вивчення трьох ознак рівності трикутників є задачі на побудову трикутника за двома сторонами і кутом між ними, за стороною і двома прилеглими кутами, за трьома сторонами. В цьому разі умови задач доцільно пропонувати у такому формулюванні.

На рисунку 4.6 зображено рівні трикутники ABC і $A_1B_1C_1$. Записують: $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$. Ці трикутники можна сумістити так, що вершини A і A_1 , B і B_1 , C і C_1 збігатимуться. Тоді можна записати: $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$, $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $CA = C_1A_1$ [21].

Ті сторони й ті кути, які суміщаються при накладанні рівних трикутників, називають **відповідними сторонами** й **відповідними кутами**. Так, на рисунку 7 сторони AC і A_1C_1 , кути A та A_1 відповідні.

Зазвичай на рисунках рівні сторони позначають однаковою кількістю

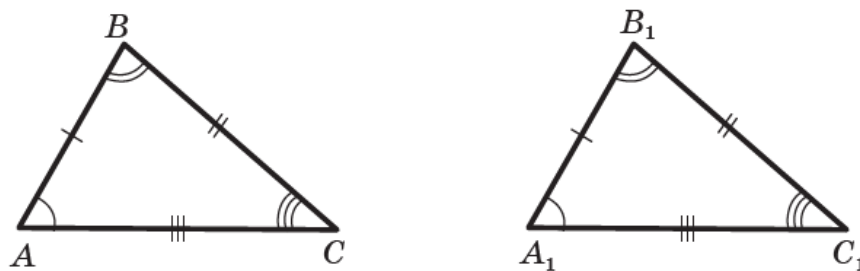


Рис. 4.6. Трикутники ABC і $A_1B_1C_1$.

рисочок, а рівні кути – однаковою кількістю дужок (рис. 4.6).

Зауважимо, що в рівних трикутниках проти відповідних кутів лежать відповідні сторони, і навпаки, проти відповідних сторін лежать відповідні кути.

Виконуючи побудову під керівництвом вчителя, учні переконуються на наочному рівні, що побудований трикутник дорівнює трикутнику ABC .

Задачі для самостійного розв'язання

4.1. Позначте чотири точки так, щоб при проведенні прямої через кожні дві з них на рисунку: 1) утворилася одна пряма; 2) утворилися чотири прямі; 3) утворилися шість прямих. Проведіть ці прямі.

4.2. Як треба розташувати шість точок, щоб вони визначали шість прямих?

4.3. Чи можна провести шість прямих і позначити на них 11 точок так, щоб на кожній прямій було позначено рівно чотири точки?

4.4. Відрізок, довжина якого дорівнює 32 см, поділили на три нерівних відрізки. Відстань між серединами крайніх відрізків дорівнює 18 см. Знайдіть довжину середнього відрізка.

4.5. Точка K належить відрізку CB , довжина якого a см. Знайдіть відстань між серединами відрізків CK і KB .

4.6. На прямій позначено точки P , L і M , причому $PL = 42$ мм, $PM = 3$ см 2 мм, $LM = 0,74$ дм. Яка з точок лежить між двома іншими? Відповідь обґрунтуйте.

4.7. Який кут утворює бісектриса кута 98° з продовженням однієї з його сторін за вершину кута?

4.8. Як, використовуючи шаблон кута, що дорівнює 13° , побудувати кут, який дорівнює 2° ?

4.9. Користуючись косинцем і шаблоном кута, який дорівнює 17° , побудуйте кут, який дорівнює: 1) 5° ; 2) 12° .

4.10. Із вершини кута ABC , який дорівнює 70° , проведено промені BD і BF так, що $BD \perp BA$, $BF \perp BC$, промені BD і BC належать куту ABF . Знайдіть кути DBF і ABF .

5. Ознаки рівності трикутників

Відношення рівності трикутників є окремим випадком відношення рівності фігур. Означення рівності геометричних фігур у шкільному курсі вводиться у зв'язку з вивченням у 9 класі рухів. Означення рівних трикутників і ознаки їх рівності вивчаються у 7 класі на початку курсу, оскільки вони традиційно є

основним аргументом під час доведення теорем і розв'язання задач під час вивчення інших тем.

Основна мета вивчення теми “Рівність трикутників” – ознайомити учнів з ознаками рівності трикутників і навчити застосовувати їх до розв'язання задач. Вміння застосовувати ознаки рівності трикутників треба довести до рівня, що забезпечує учням можливість самостійно розв'язувати задачі, які потребують застосування згаданого апарату. Під час вивчення цієї теми посилюються можливості розвитку логічного мислення, усвідомлення учнями ідеї дедуктивної побудови геометрії. Доведення ознак рівності трикутників вимагає від учнів обґрунтування кожного із тверджень, що складають доведення, шляхом посилення на відповідні аксіоми, означення, уміння застосувати метод від супротивного. Ці доведення не прості для сприйняття всіма учнями, тому було б неправомірним на рівні обов'язкових результатів навчання вимагати від всіх школярів уміння відтворювати доведення. Тут вперше з'являється можливість пояснити учням відмінність між твердженням, яке є *означенням* певних фігур, і твердженнями, які є *ознаками* цих фігур (означення і ознаки рівності трикутників, означення рівнобедреного трикутника і ознака такого трикутника).

5.1. Використання відомих та формування нових понять теми

У зв'язку з вивченням ознак рівності трикутників і пов'язаного з ними навчального матеріалу використовується багато раніше вивчених понять і їх означень; відрізок, довжина відрізка, рівні відрізки, кут, кутова міра, рівні кути, трикутник, рівні трикутники, перпендикуляр, проведений до прямої, та інші. Отже, треба подбати про своєчасну актуалізацію потрібних знань, повторення необхідних означень понять. Особливо уважно слід поставитися до повторення означень рівних трикутників і відповідної символіки. Специфіка підручника [21] – вимагає від учнів уважно ставитись до позначення буквами відповідних сторін і кутів у двох рівних трикутниках.

У цій темі вводяться шість нових понять:

- *рівнобедрений трикутник,*

- *рівносторонній трикутник,*
- *теорема, обернена до даної,*
- *висота трикутника, опущена з даної вершини,*
- *медіана трикутника, проведена з даної вершини.*

Всі зазначені поняття доцільніше ввести абстрактно-дедуктивним методом і проілюструвати конкретними прикладами. Важливо спеціально підкреслити суттєві властивості цих понять і протиставити їм несуттєві.

Наприклад, до означення бісектриси трикутника, проведеної з даної вершини, входять дві суттєві властивості:

- *це – відрізок бісектриси кута трикутника;*
- *він сполучає вершину трикутника з точкою на протилежній стороні.*

Несуттєвим у цьому означенні є вид трикутника, розташування вершин на площині.

В означенні рівнобедреного трикутника є лише одна суттєва ознака – рівність двох сторін. Несуттєвим є розташування цього трикутника на площині. Зокрема, основа рівнобедреного трикутника не обов'язково має бути горизонтальною, як це здебільшого зображено в підручниках.

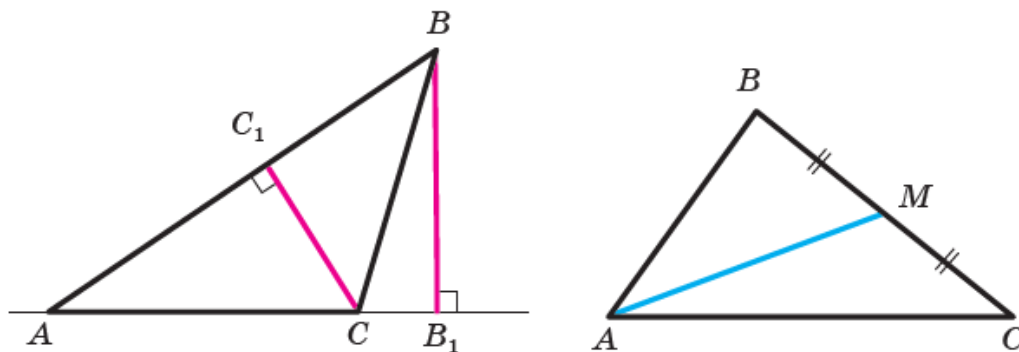


Рис. 5.1. Висота та бісектриса кута трикутника.

Вводячи поняття висоти трикутника, не слід обмежуватися лише формулюванням означення. Учні повинні виконати практичні дії на проведення висот з різних вершин гострокутних, тупокутних і прямокутних трикутників. Треба мати на увазі, що попередній життєвий досвід учнів може гальмувати засвоєння поняття висоти трикутника. Навіть старшокласники припускаються

помилки, вважаючи, що у тупокутного трикутника ABC лише одна висота – відрізок CC_1 (рис. 5.1).

Авторами підручника [21] вводяться індексні позначення. Зокрема часто довжини сторін трикутника, протилежних кутам A, B, C , позначають відповідно a, b, c . Довжини висот позначають h_a, h_b, h_c , медіан – m_a, m_b, m_c , бісектрис – l_a, l_b, l_c . Індекс показує, до якої сторони проведено відрізок (рис. 5.2).

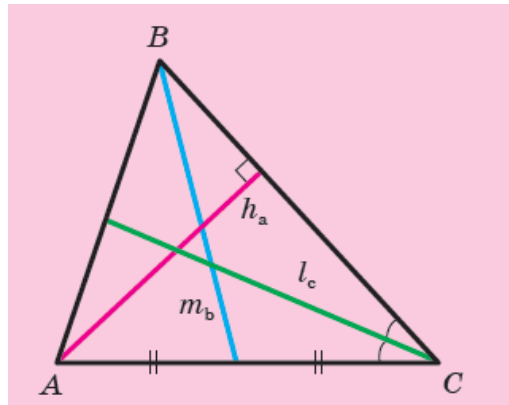


Рис. 5.2. Індексні позначення висоти, медіани та бісектриси кута трикутника.

При введенні поняття оберненої теореми доцільно запропонувати учням сформулювати твердження, обернені до відомих з курсу математики 5-6 класів, і з'ясувати, чи правильні вони (наприклад, твердження, обернене до ознаки подільності числа на 3).

5.2. Доведення теорем

Всі теореми, які вивчаються в цій темі, належать до основних теорем з курсу геометрії, оскільки широко використовуються при доведенні інших теорем та розв'язання задач. Серед них найскладніші для сприйняття учнів – *доведення ознак рівності трикутників*. Перш ніж приступати до вивчення першої ознаки, варто звернути увагу учнів на відміну термінів “*означення*” і “*ознака*” рівності трикутників. Означення відповідає на запитання “*Що це таке?*”, тобто розкриває зміст поняття. *Ознака* – це теорема, в якій вказано найменший набір властивостей або характеристик, за якими можна ідентифікувати або класифікувати об'єкт, відрізняючи його від інших подібних об'єктів.

На початку теми вчитель має звернути увагу учнів, що означення рівних відрізків, рівних кутів і рівних трикутників дуже схожі. Тому доцільно прийняти таке означення рівних фігур.

Означення. Дві фігури називають **р і в н и м и**, якщо їх можна сумістити накладанням.

Доведення першої ознаки рівності трикутників вчитель здійснює у два проходи.

Перший прохід вчитель виконує сам. Його мета – ознайомити учнів зі структурою доведення в цілому. За рисунком вчитель пояснює основну ідею доведення, називає основні твердження, з яких воно складається, без потрібних обґрунтувань.

При виконанні другого проходу доведення відтворюється з необхідними обґрунтуваннями. При цьому вводиться домовленість випускати обґрунтування деяких, найбільш інтуїтивно і наочно зрозумілих тверджень для скорочення доведення. З метою закріплення доведення вчитель ще раз повторює його в скороченому варіанті. Фактично це – доведення, наведене в підручнику [21].

Проілюструємо цей методичний варіант на прикладі вивчення першої ознаки рівності трикутників.

Теорема. (перша ознака рівності трикутників: за двома сторонами та кутом між ними). *Якщо дві сторони та кут між ними одного трикутника дорівнюють відповідно двом сторонам та куту між ними другого трикутника, то такі трикутники рівні.*

Доведення. Розглянемо трикутники ABC і $A_1B_1C_1$, у яких $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $\angle B = \angle B_1$, (рис. 5.3). Доведемо, що $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

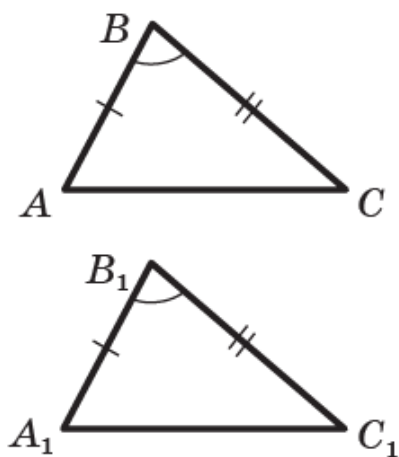


Рис. 5.3. Трикутники ABC і $A_1B_1C_1$.

Накладемо трикутник ABC на трикутник $A_1B_1C_1$, так, щоби промінь BA сумістився з променем B_1A_1 , а промінь BC сумістився з променем B_1C_1 . Це можна зробити, тому що за умовою $\angle B = \angle B_1$.

Оскільки за умовою $BA = B_1A_1$ і $BC = B_1C_1$, то при такому накладанні сторона BA суміститься зі стороною B_1A_1 , а сторона BC – зі стороною B_1C_1 .

Отже, трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ повністю сумістяться, а тому вони рівні.

Вивчення першої ознаки треба завершити розв'язуванням задачі на її застосування. Для кращого розуміння учнями матеріалу слід почати із задач з графічною умовою, оскільки при їх розв'язуванні основна увага приділяється новому поняттю та твердженню, а не інтерпретації тексту.

На наступному уроці учні відтворюють доведення і далі розв'язують задачі на застосування вивченої ознаки.

Теорема. (друга ознака рівності трикутників: за стороною та двома прилеглими до неї кутами). *Якщо сторона та два прилеглих до неї кути одного трикутника дорівнюють відповідно стороні та двом прилеглим до неї кутам другого трикутника, то такі трикутники рівні.*

Другу ознаку можна довести за тією ж схемою. Оскільки доведення повторює міркування доведення першої ознаки рівності трикутників та спирається на означення рівності трикутників, можна організувати учнів на колективний пошук доведення і обґрунтування кожного з тверджень, що входять в доведення.

Варто зауважити, що перед вивченням третьої ознаки рівності трикутників передує вивчення тем “Рівнобедрений трикутник та його властивості” та “Ознаки рівнобедреного трикутника”. Насамперед даються означення *рівнобедреного* та

рівностороннього трикутників. Після чого учні вивчають властивості рівнобедрених трикутників.

Теорема. (властивості рівнобедреного трикутника). *У рівнобедреному трикутнику: 1) кути при основі рівні; 2) бісектриса трикутника, проведена до його основи, є медіаною та висотою трикутника.*

Теорема доводиться використовуючи першу ознаку рівності трикутників. Таким чином продовжується закріплення на практиці вивчених ознак рівності трикутників. З теореми про властивості рівнобедрених трикутників випливає, що:

- 1) *у трикутнику проти рівних сторін лежать рівні кути;*
- 2) *у рівнобедреному трикутнику бісектриса, висота й медіана, проведені до його основи, збігаються;*
- 3) *у рівносторонньому трикутнику всі кути рівні; 4) у рівносторонньому трикутнику бісектриса, висота й медіана, проведені з однієї вершини, збігаються.*

Для закріплення вивчених властивостей рівнобедрених трикутників на наступних уроках необхідно розв'язати комплекс відповідних вправ.

Далі учні вивчають ознаки рівнобедреного трикутника.

Теорема. *Якщо медіана трикутника є його висотою, то цей трикутник рівнобедрений.*

Теорема. *Якщо бісектриса трикутника є його висотою, то цей трикутник рівнобедрений.*

Теорема. *Якщо в трикутнику два кути рівні, то цей трикутник рівнобедрений.*

Остання теорема доводиться методом від супротивного, що сприяє закріпленню умінь учнів використовувати даний метод для доведення геометричних тверджень. Також з цієї теореми випливає, що:

- 1) *у трикутнику проти рівних кутів лежать рівні сторони;*
- 2) *якщо в трикутнику всі кути рівні, то цей трикутник рівносторонній.*

Важливою є ще одна ознака рівнобедрених трикутників.

Теорема. *Якщо медіана трикутника є його бісектрисою, то цей трикутник рівнобедрений.*

При доведенні даної теореми використовується перша ознака рівності трикутників та одна з раніше доведених ознак рівнобедрених трикутників: *Якщо в трикутнику два кути рівні, то цей трикутник рівнобедрений.*

Авторами підручниками [21] запропоновано підбір задач для закріплення отриманих знань ознак рівності трикутників, властивостей та ознак рівнобедрених трикутників.

Після цього учні вивчають третю ознаку рівності трикутників.

Теорема. (третя ознака рівності трикутників). *Якщо три сторони одного трикутника дорівнюють відповідно трьом сторонам другого трикутника, то такі трикутники рівні.*

Доведення третьої ознаки рівності трикутників – найважче для сприймання, тому це доведення вчителю доцільно провести самостійно. Оскільки в структурі доведення використовується спеціальна побудова та властивості рівнобедрених трикутників і, крім того, акцентується увагу на специфіці, яка виникає у тупокутних трикутників. Автори підручника [21] пропонують учням самостійно повторити ідею доведення для цього випадку. Таке завдання варто дати на самостійне опрацювання вдома з обов'язковим відтворенням на наступному уроці. Після цього необхідно розв'язати комплекс вправ на закріплення вивчених ознак рівності трикутників.

5.3. Структура та основні типи теорем в геометрії

Автори підручника [21] виділили окремий параграф для поглиблення розуміння учнів, що таке теорема, які є типи теорем та які є тонкощі в побудові доведень теорем. Вивчаючи геометрію, учні розуміють, що в підручнику з'являється все більше та більше теорем. І це не дивно, адже теорема є фундаментом, на якому ґрунтується увесь комплекс геометричних знань.

Формулювання всіх теорем, які раніше вже були доведені, складаються з двох частин. Першу частину теореми (те, що дано) називають **умовою** теореми, другу частину теореми (те, що потрібно довести) – **висновком** теореми.

Наприклад, у теоремі, що є першою ознакою рівності трикутників, умовою є те, що **дві сторони та кут між ними одного трикутника дорівнюють двом сторонам та куту між ними другого трикутника**, а висновком є **рівність трикутників**.

Вчитель акцентує увагу, що усі відомі учням теореми можна умовно поділити на **теореми-властивості** й **теореми-ознаки**. Наприклад, вони можуть установлювати властивість прямих, що перетинаються, або ж визначати ознаки рівнобедрених трикутників.

Теореми-ознаки вказують на критерії, за якими можна розпізнати фігуру, тобто віднести її до того чи іншого виду (класу).

Так, у теоремах-ознаках рівності трикутників зазначено вимоги, за якими два трикутники можна віднести до класу рівних. Наприклад, вище ми навели теореми, в яких сформульовано властивості, за якими розпізнають рівнобедрений трикутник.

Теореми, які випливають *безпосередньо* з аксіом або інших теорем, називають **теоремами-наслідками**, або просто **наслідками**.

Наприклад, властивість кутів, протилежних рівним сторонам трикутника, є наслідком з теореми (властивості рівнобедрених трикутників): **у рівнобедреному трикутнику кути при основі рівні**.

Якщо в теоремі про властивість серединного перпендикуляра переставити місцями умову й висновок, то отримаємо теорему: **якщо точка рівновіддалена від кінців відрізка, то вона належить серединному перпендикуляру цього відрізка**. Дві теореми, кожен з яких можна отримати з іншої, помінявши місцями умову й висновок, називають **взаємно оберненими**. Якщо яку-небудь із цих теорем назвати прямою, то другу теорему називатимемо **оберненою**.

Переставляючи місцями умову й висновок теореми, треба бути дуже уважними: не завжди можна отримати істинне твердження. Наприклад,

твердження, обернене до теореми про суму суміжних кутів, хибне. Справді, якщо сума якихось двох кутів дорівнює 180° , то зовсім не обов'язково, щоб ці кути були суміжними.

Учням відомо, що справедливність теореми встановлюють шляхом логічних міркувань, тобто доведенням.

Першу теорему підручника [21] було доведено *методом від супротивного*. Назва цього методу фактично відображає його суть. Ході доказу робиться припущення, що висновок теореми неправильний. На підставі цього припущення за допомогою логічних міркувань отримуємо факт, який суперечить основній властивості прямої.

Методом від супротивного було доведено також і ряд інших теорем в [21].

Дуже важливо, щоб доведення теореми було повним, тобто були розглянуті всі можливі випадки. Так, повне доведення третьої ознаки рівності трикутників потребувало розгляду трьох можливих випадків.

Уміння бачити всі тонкощі доведення – найважливіша якість, що формує математичну культуру. Якби, наприклад, під час доведення теореми про властивість серединного перпендикуляра відрізка не розглянули б окремо випадок, коли точка X є серединою відрізка AB , то для цього випадку звернення до трикутників $AХМ$ і $ВХМ$ було б неможливим [21].

Під час доведення останньої з наведених вище ознак рівнобедреного трикутника використовується *прийом додаткової побудови*: рисунок доповнили елементами, про які не йшлося в умові теореми. Цей метод є ключем до розв'язування багатьох задач і доведення ряду теорем. Тому дуже важливо навчитися бачити “*вигідну*” додаткову побудову – таку, яка допоможе отримати потрібний результат.

А як набути такого “геометричного зору”? Запитання непросте, і на нього важко відповісти, даючи конкретні рекомендації. Але все ж таки радимо: по-перше, не бути байдужими до геометрії, а полюбити цей красивий предмет; по-друге, розв'язувати більше задач, щоб розвинути інтуїцію та набути потрібного досвіду. Лише практика є запорукою успішного засвоєння геометрії.

Задачі для самостійного розв'язання

5.1. Через точку M , що належить бісектрисі кута з вершиною в точці O , проведено пряму, яка перпендикулярна до цієї бісектриси. Ця пряма перетинає сторони даного кута в точках A і B . Доведіть, що $AM = MB$.

5.2. Доведіть, що бісектриси рівних трикутників, проведені з вершин відповідних кутів, рівні.

5.3. Доведіть, що в рівних трикутниках медіани, проведені до відповідних сторін, рівні.

5.4. Доведіть рівність двох трикутників за бісектрисою, кутом, з вершини якого проведено цю бісектрису, і кутом, що утворює бісектриса зі стороною, до якої її проведено.

5.5. Доведіть рівність двох трикутників за стороною, медіаною, проведеною до цієї сторони, та кутом між цією стороною та медіаною.

5.6. Використовуючи ознаки рівності трикутників, доведіть ознаку рівності рівнобедрених трикутників за бічною стороною та кутом при вершині.

5.7. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 20 см, а його медіана ділить даний трикутник на два трикутники так, що периметр одного з них на 6 см менший від периметра другого. Знайдіть бічну сторону даного трикутника. Скільки розв'язків має задача?

5.8. Точки M і K належать відповідно бічним сторонам AB і BC рівнобедреного трикутника ABC , $AM = CK$. Відрізки AK і CM перетинаються в точці O . Доведіть, що трикутник AOC рівнобедрений.

5.9. Довжини сторін трикутника, виражені в сантиметрах, дорівнюють трьом послідовним натуральним числам. Знайдіть сторони цього трикутника, якщо одна з його медіан перпендикулярна до однієї з його бісектрис.

5.10. Доведіть рівність двох трикутників за двома сторонами та медіаною, яка проведена до третьої сторони.

6. Паралельні прямі. Сума кутів трикутника

6.1. Вступні зауваження

Теорема про суму кутів трикутника є одним з фундаментальних тверджень, що стосується властивостей трикутників. Разом з тим її введенню передують вивчення ознак паралельності прямих і теорем про властивості кутів, утворених при перетині паралельних прямих січною, – теорем, які застосовуються для доведення інших теорем і розв’язування задач.

Теорема про суму кутів трикутника безпосередньо використовується для доведення властивості зовнішніх кутів трикутника, ознаки рівності прямокутних трикутників і теореми про існування та єдиність перпендикуляра до прямої.

Отже, навчальний матеріал цієї теми доповнює ознаки рівності трикутників важливим теоретичним апаратом для розв’язування задач і доведення інших теорем.

Основна мета вивчення теми – *ознайомити* учнів з теоремою про суму кутів трикутника, ознаками паралельності прямих, оберненими твердженнями та навчити їх застосовувати вивчені теореми до розв’язання задач. Учні повинні знати формулювання всіх теорем, вміти застосовувати їх до розв’язання задач.

Вивчаючи цю тему, треба скористатися нагодою і надалі розвивати логічне мислення учнів. Зокрема, доцільно ще раз підкреслити відмінність між поняттями “*означення паралельних прямих*” і “*ознака паралельних прямих*”, звернути увагу на те, що теорема про властивість кутів, утворених при перетині паралельних прямих січною, є оберненою до ознаки паралельності прямих.

Розглядаючи наслідок з теореми про суму кутів трикутника та теореми про існування і єдиність перпендикуляра до прямої, доцільно залучити учнів до колективного пошуку доведення відповідно до введеного раніше навчального алгоритму методу від супротивного.

6.2. Формування понять

У цій темі на рівні означення вводяться шість нових для учнів понять: внутрішні односторонні і внутрішні різносторонні кути, зовнішній кут

трикутника, гіпотенуза і катети прямокутного трикутника, відстань між паралельними прямими. Два поняття (січна, відповідні кути) вводяться з використанням рисунка.

Введенню означень внутрішніх односторонніх і внутрішніх різносторонніх кутів має передувати ознайомлення з цими кутами на наочному рівні із залученням рисунка. Разом з тим цим не можна обмежуватися, оскільки особливістю підручника [21] є те, що авторами широко використовуються обернені теореми, які характеризують властивості паралельних прямих і кутів, що утворюються при їх перетині січною.

Щоб в учнів не створилось неправильне уявлення про те, що зовнішній кут трикутника завжди більший, ніж внутрішній, суміжний з ним, не можна обмежуватися прикладами зовнішніх кутів лише гострокутного трикутника. Необхідно розглянути також тупокутні трикутники і запропонувати учням позначити всі зовнішні кути таких трикутників.

Теорема. *Сума кутів трикутника дорівнює 180° .*

Теорема доводиться використовуючи побудову (рис. 6.1) після чого доведення зводиться до простої вправи на застосування властивостей кутів, що утворились при перетині паралельних прямих січною.

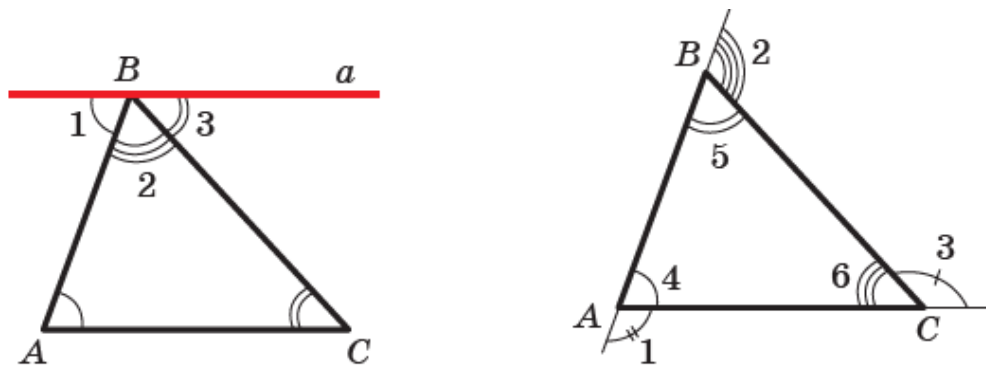


Рис. 6.1. Зовнішні кути трикутника ABC .

Наслідок. *Серед кутів трикутника принаймні два кути гострі.*

Наслідок пропонується довести учням самостійно.

Із цього наслідку випливає, що кут при основі рівнобедреного трикутника завжди є гострим.

Означення. *Зовнішнім кутом* трикутника називають кут, суміжний із кутом цього трикутника.

Для кращого розуміння цього поняття, можна запропонувати учням побудувати трикутник на окремому аркуші паперу і зігнути аркуш по ліній сторони трикутника. Такі прості наочні маніпуляції сприяють формуванню просторового мислення учнів та забезпечують мотивацію та стійкий інтерес до вивчення геометрії.

Теорема. *Зовнішній кут трикутника дорівнює сумі двох кутів трикутника, не суміжних з ним.*

Теорема доводиться використовуючи побудову зовнішніх кутів для кожного з кутів при вершині трикутника та теореми про суму кутів трикутника.

Наслідок. *Зовнішній кут трикутника більший за кожний із кутів трикутника, не суміжних з ним.*

Теорема (нерівність трикутника). *Кожна сторона трикутника менша від суми двох інших його сторін.*

Доведення даної теореми проводиться методом від супротивного.

З останньої теореми випливає, що коли довжина одного з трьох даних відрізків не менша від суми довжин двох інших відрізків, то ці відрізки не можуть слугувати сторонами трикутника.

Вчителю варто зауважити, що згодом буде показано, коли кожний із трьох даних відрізків менший від суми двох інших, то ці відрізки можуть слугувати сторонами трикутника.

Учням відомо, що в трикутнику проти рівних сторін лежать рівні кути, і навпаки, проти рівних кутів лежать рівні сторони. Ці властивості доповнює така теорема.

Теорема. *У трикутнику проти більшої сторони лежить більший кут, і навпаки, проти більшого кута лежить більша сторона.*

Дану теорему можна довести використовуючи метод від супротивного властивість зовнішніх кутів трикутника та ланцюжок міркувань, який базується на нерівності трикутника.

Для наочної ілюстрації можна використати циркуль, запропонувавши учням порівняти відрізки, які утворюється між кінцями циркуля при його розгинанні на різні кути.

Закріпити вивчені властивості потрібно на практиці, розв'язуючи комплекс відповідних задач.

Задачі для самостійного розв'язання

6.1. Скільки можна провести відрізків, які паралельні даній прямій, через точку, що не належить цій прямій?

6.2. Прямі a і b перпендикулярні до прямої c , пряма d перетинає пряму a . Чи перетинає пряма d пряму b ?

6.3. Кут між прямими a і c дорівнює куту між прямими b і c . Чи можна стверджувати, що прямі a і b паралельні?

6.4. Із восьми кутів, утворених при перетині прямих a і b прямою c , чотири кути дорівнюють по 40° , а решта чотири кути — по 140° . Чи можна стверджувати, що прямі a і b паралельні?

6.5. Знайдіть усі кути, утворені при перетині двох паралельних прямих січною, якщо один із них на 24° менший від іншого.

6.6. Пряма, проведена через вершину A трикутника ABC паралельно його протилежній стороні, утворює зі стороною AC кут, який дорівнює куту BAC . Доведіть, що трикутник ABC рівнобедрений.

6.7. Трикутник ABC — рівнобедрений з основою AC . Через довільну точку M його бісектриси BD проведено прямі, які паралельні його сторонам AB і BC та перетинають відрізок AC у точках E та F відповідно. Доведіть, що $DE = DF$.

6.8. Через вершину B трикутника ABC провели пряму, паралельну його бісектрисі AM . Ця пряма перетинає пряму AC у точці K . Доведіть, що трикутник BAK рівнобедрений.

6.9. Доведіть, що бісектриса зовнішнього кута при вершині рівнобедреного трикутника паралельна його основі.

6.10. Одна сторона трикутника дорівнює 2,8 см, а друга – 0,6 см. Знайдіть третю сторону цього трикутника, якщо її довжина, виражена в сантиметрах, дорівнює цілому числу.

7. Геометричні побудови

7.1. Місце геометричних побудов у програмі і чинних підручниках

Геометричні побудови – традиційно одна з провідних змістовних ліній шкільного курсу геометрії. Це викликано тим, що виконувати їх доводиться учням при вивченні всього курсу геометрії і в майбутній практичній діяльності працівникам різних галузей (інженерам-конструкторам, геодезістам, архітекторам, кравцям, столярам, будівельникам та іншим).

Найпростіші геометричні конструкції учні виконують вже у початковій школі та у 5-6 класах. Вони навчаються проводити прямі лінії та відрізки за допомогою лінійки, будувати кола та відрізки заданої величини з використанням циркуля і кути заданої міри застосовуючи транспортир, креслити паралельні прямі лінійкою і косинцем. До початку цього класу учні уже вміють зображати різні геометричні фігури: кути, трикутники, квадрати, прямокутні паралелепіпеди, циліндри, конуси, призми та піраміди.

У систематичному курсі геометрії спеціально виділяються задачі на побудову, які розв’язуються лише за допомогою циркуля і лінійки. Ці задачі мають значну дидактичну цінність, оскільки не тільки формують практичні навички виконання основних побудов, а й розвивають логічне мислення, формують евристичну діяльність.

При побудові фігур у геометрії домовилися дотримуватися таких правил:

- 1. усі побудови виконують тільки за допомогою циркуля та лінійки без поділок;*
- 2. за допомогою лінійки можна через задану точку провести пряму, а також через задані дві точки A і B провести пряму AB ;*
- 3. за допомогою циркуля можна побудувати коло з даним центром і радіусом, що дорівнює заданому відрізку.*

Отже, коли в задачі потрібно побудувати якусь фігуру, то побудову виконують за описаними вище правилами.

Розв'язати задачу на побудову – це означає скласти план (алгоритм) побудови фігури; реалізувати план, виконавши побудову; довести, що отримана фігура є шуканою.

З курсу геометрії ЗВО відомо, що такі задачі розв'язують в чотири етапи:

- *проведення аналізу завдання з метою встановлення зв'язків між основною проблемою та наданими даними, а також знаходження оптимального плану для його вирішення;*
- *виконання плану відповідно до встановлених вказівок – побудова фігури;*
- *здійснення доведення, спрямованого на підтвердження відповідності побудованої фігури умовам задачі;*
- *дослідження, спрямоване на розкриття умов, за яких задача має розв'язок, їх кількість, і можливі варіанти, які вимагають особливого розгляду.*

Щодо кількості розв'язків задачі на побудову, то треба мати на увазі, що це питання розв'язується по-різному залежно від того, маємо справу з позиційними чи з непозиційними задачами. У позиційних задачах указується, як розміщені одні фігури стосовно інших даних фігур. У такому разі шукані побудовані рівні фігури вважаються різними розв'язками. У непозиційних задачах рівні фігури не вважаються різними розв'язками.

У шкільному курсі геометрії неслухно ставити вимогу, щоб учні завжди виконували всі чотири етапи розв'язування задач на побудову. Це обумовлено двома факторами. По-перше, дослідження може бути більш складним, ніж сама побудова, і залишитися незрозумілим більшості учнів, особливо коли в задачі зустрічаються кути. По-друге, навіть у найпростіших задачах на побудову учні можуть розробити план побудови без будь-якого аналізу, і вимога виконання цієї побудови може викликати відторгнення при вирішенні завдання. Недоцільно вимагати від учнів при розв'язуванні кожної задачі виконувати побудову шуканої

фігури, якщо основні побудови вже добре відпрацьовані, а до них зводиться розв'язання будь-якої задачі. Треба врахувати, що місце і вага задач на побудову в сучасному курсі геометрії дещо змінилися порівняно з традиційним курсом у зв'язку зі зменшенням кількості годин, які відводяться нині на вивчення геометрії в школі.

Враховуючи зазначені фактори, при розв'язуванні більшості задач на побудову слід вважати задачу розв'язаною, якщо вказано план побудови шуканої фігури і доведено, що побудована фігура відповідає вимогам задачі. Це не виключає можливості в складніших задачах учити учнів проводити попередній аналіз, а в деяких задачах - виконувати побудову і дослідження, якщо воно доступне учням. Сильнішим учням доцільно пропонувати в класі і під час виконання домашнього завдання при розв'язуванні окремих задач виконувати всі чотири етапи.

Основна мета вивчення геометричних побудов у школі – навчити учнів виконувати основні побудови циркулем і лінійкою та розв'язувати нескладні комбіновані задачі, які зводяться до виконання основних побудов.

7.2. Основні побудови. Задачі на побудову

До основних побудов віднесено п'ять побудов:

- *кута, що дорівнює даному;*
- *поділ відрізка навпіл;*
- *бісектриси даного кута;*
- *перпендикулярної прямої;*
- *трикутника за даними сторонами.*

Перш ніж розпочати вивчення основних побудов, доцільно нагадати учням, що вони вже виконували різні побудови (у тому числі і деякі з основних) циркулем, лінійкою, косинцем, транспортиром, зокрема, будували трикутники за даними елементами. У геометрії особливо цікаві задачі, які розв'язуються лише за допомогою циркуля і лінійки. Використання лише циркуля і лінійки у тих випадках, коли відрізки і кути задано геометрично, підвищує точність побудови.

Насамперед, необхідно з'ясувати і пам'ятати, які геометричні побудови можна виконувати за допомогою кожного з цих двох інструментів. Лінійкою можна лише провести:

- довільну пряму;
- довільну пряму, що проходить через дану точку;
- пряму, що проходить через дві дані точки.

Циркулем можна не лише описати коло з даного центра даним радіусом, зокрема відкласти на даній прямій від даної точки даний відрізок.

При вивченні основних побудов доцільно скористатися алгоритмічним підходом, а саме домогтися від кожного учня засвоєння алгоритму основної побудови.

Учні повинні не тільки знати алгоритм кожної основної побудови, а й уміти застосувати його при розв'язуванні задач на побудову. Наприклад, алгоритм побудови кута, рівного даному, трикутника за двома сторонами і кутом між ними та за стороною і двома кутами.

Розглянемо деякі основні побудови та алгоритми їх виконання.

Побудова відрізка, що дорівнює даному

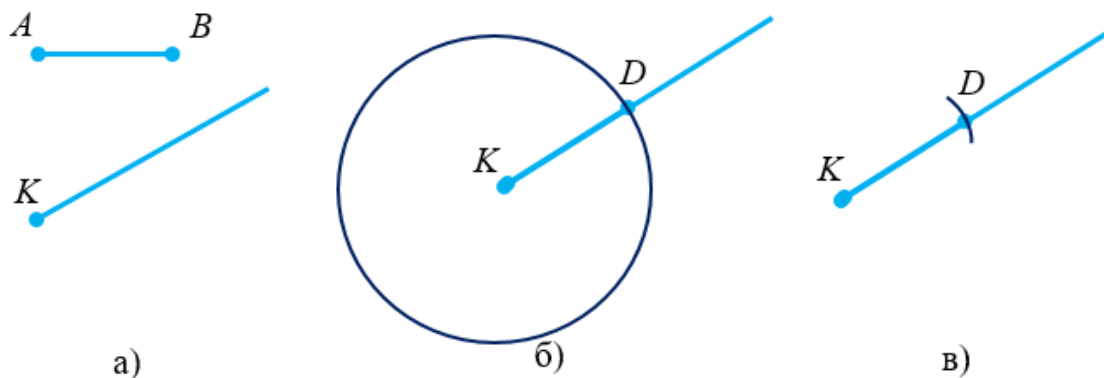


Рис. 7.1. Побудова відрізка, що дорівнює даному.

Задача 1. На даному промені від його початку відкласти відрізок, що дорівнює даному.

Розв'язання. Зобразимо фігури, що дано в умові задачі: відрізок AB і промінь з початком у точці K (рис. 7.1 а)). Побудуємо циркулем коло із центром у точці K ,

радіус якого дорівнює AB (рис. 7.1 б)). Це коло перетне промінь у деякій точці D . Очевидно, що $KD = AB$. Тому KD – шуканий відрізок.

Зауважимо, що замість кола можна було провести ту його частину (деяку дугу), яка б мала перетин з променем (рис. 7.1 в)). Цю дугу ще називають *засічкою*.

Побудова кута, що дорівнює даному



Рис. 7.2. Побудова кута, що дорівнює даному.

Задача 2. Від даного променя відкладіть даний кут.

Розв'язання. Нехай дано кут A і промінь з початком у точці O (рис. 7.2 а)). Треба побудувати кут, що дорівнює куту A , так, щоб одна з його сторін збігалася з даним променем.

- 1) Позначимо на сторонах даного кута A дві довільні точки B і C (рис. 7.2 а)).
- 2) Побудуємо трикутник OKM , що дорівнює трикутнику ABC так, щоб $AB = OK$, $AC = OM$, $BC = KM$ (рис. 7.2 б)).
- 3) Тоді $\angle KOM = \angle BAC$ (як відповідні кути рівних трикутників).
- 4) Отже, $\angle KOM$ – шуканий.

Доведення цього впливає з побудови, бо $\triangle OKM = \triangle ABC$, а тому $\angle KOM = \angle A$.

Побудова бісектриси заданого кута

Задача 3. Побудуйте бісектрису даного кута.

Розв'язання. Нехай дано $\angle A$, потрібно побудувати його бісектрису (рис. 7.3).

- 1) Проведемо дугу кола довільного радіуса із центром у точці A (дуга (1) на рис. 7.3), яка перетинає сторони кута в точках B і C .
- 2) З точок B і C опишемо дуги таким самим радіусом (дуги (2) і (3)) у внутрішній області кута до їх перетину. Отримаємо точку D .
- 3) Проведемо промінь AD . Промінь AD – шукана бісектриса кута A .

Доведення. $\triangle ABD = \triangle ACD$ (за трьома сторонами), тому $\angle BAD = \angle CAD$ (як відповідні кути рівних трикутників), отже, AD – бісектриса кута A .

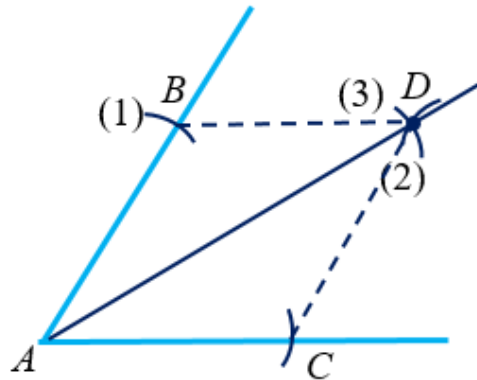


Рис. 7.3. Побудова бісектриси заданого кута.

Поділ даного відрізка навпіл

Задача 4. Поділіть даний відрізок навпіл.

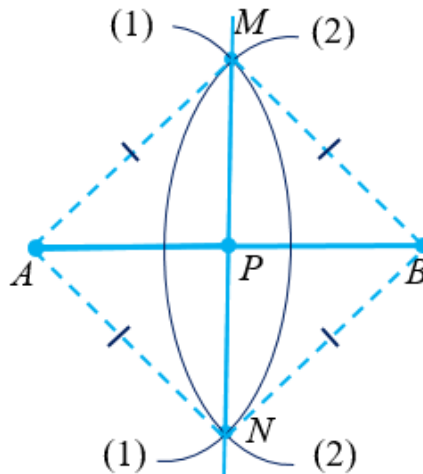


Рис. 7.4. Поділ даного відрізка навпіл.

Розв'язання. Нехай AB – даний відрізок, який треба поділити навпіл, тобто побудувати його середину.

- 1) З точки A радіусом циркуля, більшим за половину відрізка AB , опишемо дугу (1) (рис. 7.4).

2) З точки B таким самим радіусом циркуля опишемо дугу (2) до перетину з дугою (1) у точках M і N .

3) Через точки M і N проведемо пряму MN . Пряма MN перетинає відрізок AB в точці P . P – шукана точка.

Доведення. $\triangle AMN = \triangle BMN$ (за трьома сторонами). Тому $\angle AMP = \angle BMP$, а MP – бісектриса рівнобедреного трикутника AMB з основою AB , тому вона є також медіаною. Отже, P – середина AB .

Зауважимо, що пряма MN є серединним перпендикуляром до відрізка AB .

Варто зазначити, що в підручниках [12] та [21] підібрано необхідний набір вправ для вироблення навичок розв'язувати задачі на побудову.

Необхідно підкреслити, що у задачах на побудову для задання умов задачі (наприклад, довжини відрізка чи градусної міри кута) необхідно використовувати лінійку з поділками і транспортир, а для розв'язування задачі – лише лінійку без поділок і циркуль.

Для поглиблення навичок розв'язувати задачі на побудову в позакласній роботі, на факультативах та гуртках варто використовувати задачі з [8].

7.3. Складніші задачі на побудову

Навчання учнів розв'язування складніших задач на побудову має бути спрямоване передусім на оволодіння методами розв'язування таких задач, на розвиток продуктивного мислення учнів. У шкільному курсі основними методами розв'язування таких задач на побудову є: метод геометричних місць, методи геометричних перетворень (симетрії, повороту, паралельного перенесення, гомотетії), алгебраїчний метод.

Вводячи означення геометричного місця точок (фігура, яка складається з усіх точок площини, що мають певну властивість) необхідно звернути увагу учнів на взаємно однозначну відповідність між наявністю заданої властивості у точки та належністю цієї точки шуканій фігурі. Тобто зауважити, що:

- всі точки такої фігури мають згадану властивість;

- якщо певна точка площини має згадану властивість, то ця точка належить даній фігурі.

При ознайомленні учнів з методом геометричних місць доцільно використати алгоритмічний підхід, а саме на прикладах розв'язування двох задач, виділити навчальний алгоритм методу.

Щоб розв'язувати задачу методом геометричних місць, треба:

- з'ясувати, до знаходження якої точки (точок) зводиться розв'язання задачі і які дві вимоги ця точка має задовольнити;
- відкинути одну з вимог задачі і побудувати геометричне місце точок, що задовольняють другу вимогу;
- відкинути другу вимогу і побудувати геометричне місце точок, що задовольняють першу вимогу;
- позначити шукану точку як перетин побудованих геометричних місць.

Під час розв'язування задач на побудову в наступних класах треба звернути увагу учнів на інші можливі методи. Зокрема, при вивченні геометричних перетворень варто дати учням правило-орієнтир використання окремих видів перетворень до розв'язування задач на побудову.

Для **методу осової симетрії** це правило може бути таким.

1. Припустити, що задача розв'язана. Обрати певну симетрію стосовно або даної прямої, або прямої, яку легко побудувати. Замінити один з даних елементів симетричним щодо обраної осі симетрії.
2. Розв'язати задачу стосовно побудованого симетричного елемента і решти даних. Цим самим задача зведеться або до відомої, або до простішої задачі.
3. Від допоміжної задачі перейти до заданої шляхом оберненого перетворення симетрії.

Правила-орієнтири **методів перенесення і повороту** схожі.

1. Припустити, що задача розв'язана. Один із даних елементів перенести паралельно собі в певному напрямку на задану відстань (або повернути

навколо даної точки на даний кут). Результатом такого перетворення буде допоміжна фігура, яку можна побудувати за даними задачі.

2. Побудувати допоміжну фігуру й оберненим паралельним перенесенням (поворотом) виконати побудову шуканої фігури.
3. Застосування цього правила-орієнтира варто проілюструвати розв'язанням таких задач.

Задача 5. Побудуйте трикутник за трьома даними його сторонами.

Розв'язання. Нехай дано три відрізки, довжини яких дорівнюють a , b , c (рис. 7.5 а)). Треба побудувати трикутник ABC , у якому $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$.

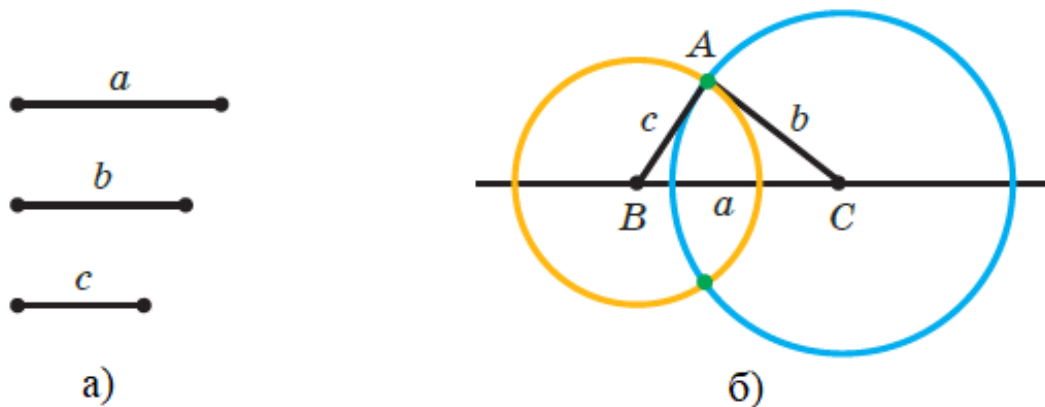


Рис. 7.5. Побудова трикутника за трьома сторонами.

Проведемо довільну пряму. За допомогою циркуля відкладемо на ній відрізок BC , який дорівнює a (рис. 7.5 б)). Задача звелася до побудови третьої вершини трикутника, точки A .

Скористаємося тим, що точка A має одразу дві властивості:

- 1) належить геометричному місцю точок, віддалених від точки B на відстань c , тобто колу радіуса c із центром у точці B (на рисунку 7.5 б) це “жовте коло”);
- 2) належить геометричному місцю точок, віддалених від точки C на відстань b , тобто колу радіуса b із центром у точці C (на рисунку 7.5 б) це “синє коло”).

За точку A можна взяти будь-яку з двох “зелених точок”, що утворилися.

Отриманий трикутник ABC є шуканим, оскільки в ньому $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$.

З описаної побудови випливає, що коли кожний із трьох даних відрізків менший від суми двох інших, то ці відрізки можуть слугувати сторонами трикутника.

Задача 6. Побудуйте фігуру, усі точки якої належать даному куту, рівновіддалені від його сторін і знаходяться на заданій відстані a від його вершини.

Розв'язання. Шукані точки належать одразу двом геометричним місцям точок: бісектрисі даного кута та колу із центром у вершині кута й радіусом, який дорівнює a .

Побудуємо бісектрису кута й указане коло (рис. 7.6 а)). Їхнім перетином є шукана точка X .

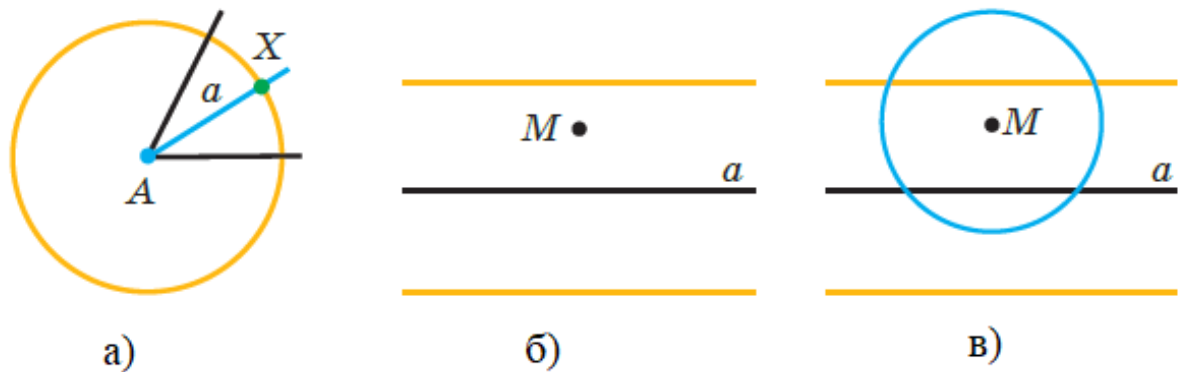


Рис. 7.6. Ілюстрації побудови ГМТ задач 6 і 7.

Задача 7. Побудуйте центр кола даного радіуса R , яке проходить через дану точку M і дотикається до даної прямої a .

Розв'язання. Оскільки коло дотикається до прямої a , то його центр знаходиться на відстані R від цієї прямої. Геометричним місцем точок, віддалених від даної прямої на дану відстань, є дві паралельні прямі. Отже, центр кола треба шукати на “жовтих прямих” (рис. 7.6 б)).

Геометричним місцем точок, які є центрами кіл радіуса R , що проходять через точку M , є коло радіуса R із центром у точці M (на рисунку 7.6 в)) це “синє коло”). Тому за центр шуканого кола можна взяти будь-яку з точок перетину “синього кола” з однією із “жовтих прямих” (рис. 7.6 в)).

Запропонуйте учням самостійно виконати побудову для випадку, коли дана точка належить даній прямій.

Задача 8. Побудуйте трикутник за стороною, медіаною, проведеною до цієї сторони, і радіусом описаного кола.

Розв'язання. Побудуємо коло даного радіуса й проведемо хорду AB , яка дорівнює стороні шуканого трикутника. Тоді кінці хорди є двома вершинами шуканого трикутника. Зрозуміло, що третя вершина належить одночасно побудованому колу (“жовте коло”) та колу із центром у точці O , яка є серединою хорди AB , і радіусом, який дорівнює даній медіані (“синє коло”). Кожний із трикутників ABC_1 і ABC_2 (рис. 7.7) є шуканим. Оскільки ці трикутники рівні, то задача має єдиний розв'язок.

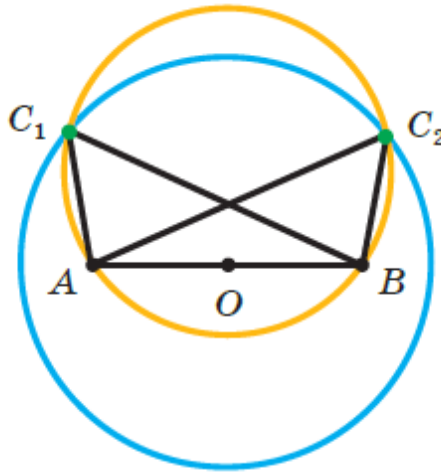


Рис. 7.7. Побудова трикутника за стороною і медіаною.

Задачі для самостійного розв'язання

7.1. Поділіть даний відрізок на чотири рівні частини.

7.2. Через дану точку, що належить куту, проведіть пряму, яка відтинає на сторонах кута рівні відрізки.

7.3. Побудуйте коло, яке дотикається до сторін даного кута, причому до однієї з них – у даній точці.

7.4. Побудуйте коло, центром якого є дана точка на стороні даного гострого кута та яке відтинає на другій стороні кута відрізок даної довжини.

7.5. Побудуйте трикутник за стороною, прилеглим до неї кутом і бісектрисою трикутника, проведеною з вершини цього кута.

7.6. Побудуйте трикутник за стороною, медіаною, проведеною до однієї з двох інших сторін, і кутом між даною стороною та медіаною.

7.7. Побудуйте прямокутний трикутник за катетом і радіусом вписаного кола.

7.8. Побудуйте трикутник за двома сторонами та висотою, проведеною до однієї із цих сторін. Скільки розв'язків може мати задача?

7.9. Побудуйте трикутник за радіусом вписаного кола та відрізками, на які точка дотику вписаного кола ділить одну зі сторін.

7.10. Побудуйте трикутник за стороною, прилеглим до неї кутом і радіусом вписаного кола.

7.11. Побудуйте коло даного радіуса, центр якого належить даній прямій, так, щоб це коло проходило через дану точку.

7.12. Побудуйте рівнобедрений трикутник за бічною стороною та медіаною, проведеною до бічної сторони.

7.13. На даному колі побудуйте точку, яка рівновіддалена від двох даних прямих, що перетинаються. Скільки розв'язків може мати задача?

7.14. Дано дві паралельні прямі та січну. Побудуйте коло, яке дотикається до цих трьох прямих.

7.15. Три прямі попарно перетинаються та не проходять через одну точку. Побудуйте точку, рівновіддалену від усіх трьох прямих. Скільки розв'язків має задача?

8. Многокутники

8.1. Про особливості вивчення многокутників у шкільному курсі геометрії

Відповідно до чинної програми і паралельних підручників геометрії вивчення многокутників відбувається у кілька етапів. У початковій школі і 5-6 класах на наочно-інтуїтивному рівні учні ознайомлюються з прямокутником,

квадратом, трикутником, довільним багатокутником, підраховують кількість сторін і вершин у них, розв'язують вправи на знаходження периметра багатокутника та площі прямокутника. Отже, на цьому етапі навчання багатокутники в основному виступають, як дидактичний засіб вивчення арифметичного матеріалу, метричної системи мір.

У 7-9 класах ті самі багатокутники вже є об'єктами вивчення. Насамперед, ґрунтовно вивчається на початку курсу в 7 класі трикутник, як одна з основних фігур курсу планіметрії. Його властивості часто використовується при вивченні багатокутників та інших плоских фігур. Спочатку вивчаються ознаки рівності трикутників, які разом з ознаками паралельності є основним аргументом під час доведення теорем і розв'язування задач. Далі вивчення трикутників триває протягом усього курсу планіметрії (у 8 класі – “Подібність трикутників”, “Розв'язування прямокутних трикутників”, в 9 класі – “Розв'язування трикутників”).

Чотирикутники, їх окремі види – це велика перша тема курсу планіметрії 8 класу. Під час її вивчення є багато можливостей для розвитку логічного мислення учнів, використання вивченого навчального матеріалу до розв'язування різноманітних задач, у тому числі практичного змісту, оволодіння методами розв'язування задач і доведення теорем.

Тема “Правильні багатокутники” завершує в курсі планіметрії вивчення різних видів багатокутників.

З чотирикутниками і багатокутниками доводиться мати справу і при вивченні питань вимірювання геометричних величин в планіметрії (площі фігур), геометричних перетворень, векторів, декартових координат на площині.

Засвоєння властивостей різних видів багатокутників має велике значення і для реалізації зв'язків наступності, оскільки в курсі стереометрії вивчення многогранників і тіл обертання, питань вимірювання площ поверхонь і об'ємів спирається на відомості про багатокутники.

Основна мета вивчення чотирикутників і багатокутників у курсі планіметрії – забезпечити засвоєння учнями суттєвих ознак і властивостей

окремих видів чотирикутників, правильних багатокутників і навчити застосовувати здобуті знання до розв'язування різних видів задач. Дана тематика створює сприятливі умови для розвитку логічного мислення учнів.

Ідея дедуктивної побудови геометрії яскраво ілюструється при введенні означень різних видів чотирикутників, причому, як правило, шляхом вказівки роду і видової відмінності. Це створює умови для формування вміння проводити класифікацію чотирикутників і показує структурні зв'язки між поняттями.

Багато властивостей багатокутників учні мають можливість встановити самостійно, аналізуючи наочний матеріал і виконуючи безпосередні вимірювання. Разом з тим виникає природна потреба довести помічені властивості.

Оскільки більшість теорем теми не складні для доведення і прямо спираються на вивчені ознаки рівності трикутників і паралельності прямих, то є можливість організувати самостійний пошук доведень і подальшого формування умінь проводити правильні обґрунтування, доказові міркування.

8.2. Методика вивчення чотирикутників

У навчально-методичній літературі поняття чотирикутника і багатокутника трактуються по-різному. В окремих курсах **чотирикутники** означаються як *фігури, що складаються із чотирьох точок і чотирьох відрізків, які послідовно їх сполучають. При цьому жодні три з цих точок не лежать на одній прямій, а відрізки, які їх сполучають не мають жодних спільних точок, крім даних* [13].

Автори підручника [24] розглядають фігуру, яка складається з чотирьох точок A, B, C, D і чотирьох відрізків AB, BC, CD, DA таких, що ніякі два сусідніх відрізки не лежать на одній прямій і ніякі два несусідніх відрізки не мають спільних точок.

Фігура, утворена цими відрізками, обмежує частину площини, яку разом з відрізками AB, BC, CD і DA називають **чотирикутником**. Точки A, B, C, D називають **вершинами чотирикутника**, а відрізки AB, BC, CD, DA – **сторонами чотирикутника**.

Відтак чинні паралельні підручники використовують підходи, які узгоджені з трактуванням цих понять у підручниках математики 1-5 класів.

Існують різні методичні підходи до введення поняття чотирикутника. Можна спочатку ввести означення многокутника, а чотирикутник розглянути як окремий вид многокутника.

Пізніше в 8 класі при вивченні теми “Многокутники. Площі многокутників” спочатку вводяться означення *многокутника*, яка складається з відрізків при чому таких, що *сусідні (суміжні) відрізки* не лежать на одній прямій, а *несусідні (несуміжні) відрізки* не мають спільних точок [13].

При введенні поняття чотирикутника доцільно використати наочний посібник – модель чотирикутника, виготовленого з кольорового паперу або дроту. На цьому ж етапі навчання вводиться поняття неопуклого чотирикутника.

На уроці, де вводиться поняття чотирикутника, учні повинні засвоїти елементи чотирикутника (*вершини, сторони, сусідні сторони, протилежні вершини, протилежні сторони, діагоналі*) і відповідну термінологію, навчитись зображати чотирикутники і позначати точками їхні вершини. Учні повинні вміти вказувати вершини і сторони зображеного чотирикутника.

Для учнів може виявитись цікавою умова, яка визначає довільний чотирикутник, тобто забезпечує можливість його побудувати циркулем і лінійкою. Дехто з учнів може вважати, що коли довільний трикутник визначається трьома елементами, з яких хоча б одним має бути лінійним, то чотирикутник – чотирма. Треба показати, що це не так. Справді, довільний чотирикутник можна розбити діагоналлю на два трикутники. Один з них визначається (може бути побудований) трьома елементами, принаймні один з яких має бути лінійним. Для того щоб був визначений (побудований) другий трикутник, необхідно задати ще два елементи, оскільки один елемент у трикутників спільний.

Зупинимось коротко на особливостях вивчення теми «Паралелограм. Властивості паралелограма». У підручнику [25] дано означення.

Означення. *Паралелограмом називають чотирикутник, у якого кожні дві протилежні сторони паралельні.*

При ознайомленні учнів з даним означенням варто зауважити, що означення паралелограма містить одну з його основних властивостей. Після чого перейти до розгляду властивостей паралелограма.

Оскільки доведення властивостей паралелограма переважно спирається на рівність трикутників, то важливо розпочати цей блок матеріалу з повторення ознак рівності трикутників.

Теорема. *Протилежні сторони паралелограма рівні.*

Доведення. На рисунку 8.1 зображено паралелограм $ABCD$. Доведемо, що $AB = CD$ і $BC = AD$.

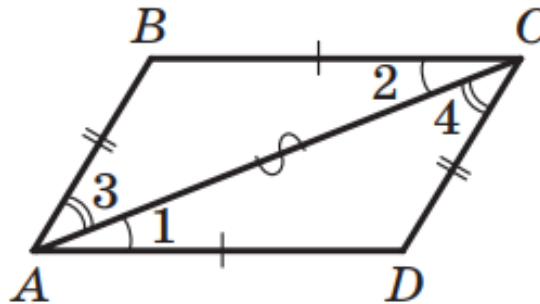


Рис. 8.1. Паралелограм $ABCD$.

Проведемо діагональ AC . Доведемо, що трикутники $\triangle ABC$ і $\triangle CDA$ рівні (рис. 17). У цих трикутниках сторона AC — спільна, кути 1 і 2 рівні як різносторонні при паралельних прямих BC і AD та січній AC , кути 3 і 4 рівні як різносторонні при паралельних прямих AB і CD та січній AC . Отже, трикутники $\triangle ABC$ і $\triangle CDA$ рівні за другою ознакою рівності трикутників. Звідси $AB = CD$ і $BC = AD$.

Теорема. *Протилежні кути паралелограма рівні.*

Теорема. *Діагоналі паралелограма точкою перетину діляться навпіл.*

Зауважимо, що усі властивості у [25] доводяться.

Означення. *Висотою паралелограма називають перпендикуляр, опущений з будь-якої точки прямої, яка містить сторону паралелограма, на пряму, що містить протилежну сторону.*

Важливо щоб учні розуміли, що висота паралелограма, а відтак і будь-якого чотирикутника може бути побудована в різний спосіб.

На рисунку 18 кожний із відрізків AF , QE , BM , PN , CK є висотою паралелограма $ABCD$.

Із курсу геометрії 7 класу учні знають, що всі точки однієї з двох паралельних прямих рівновіддалені від другої прямої. Тому $AF = QE$ і $BM = PN = CK$. Говорять, що **висоти** BM , CK , PN **проведено** до сторін BC і AD , а висоти AF , QE — до сторін AB і CD .

Оскільки учням переважно складно розуміти висоту, яка не має спільних точок з паралелограмом, то у задачах варто проводити висоту з вершини паралелограма. Якщо розв'язок задачі потребує проведення висоти в іншій точці, то можна показати, що чотирикутник утворений двома висотами і продовженнями сторін паралелограма є прямокутником. Наприклад, $MBPN$ або $KCPN$ на рисунку 8.2.

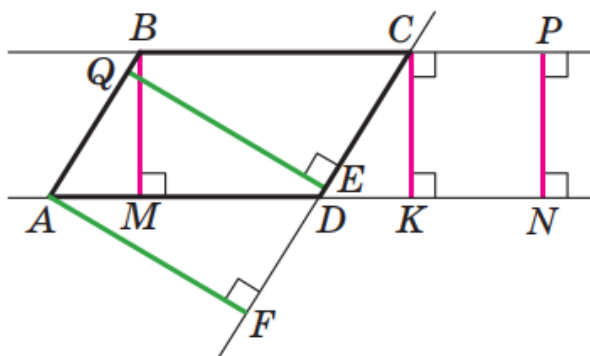


Рис. 8.2. Побудова висот паралелограма.

Варто зауважити, що крім сформульованих у вигляді теорем властивостей учні поступово мають вивчити й інші властивості паралелограма, які у класах з поглибленим вивченням математики можна розглянути як задачі на доведення.

- **Сума кутів паралелограма дорівнює 360° .**
- **Сума кутів паралелограма прилеглих до будь-якої сторони дорівнює 180° .**
- **Кожна діагональ ділить паралелограма на два рівних трикутника.**
- **Дві діагональ ділять паралелограм на дві пари рівних трикутників.**

- *Діагоналі паралелограма перетинаються і точкою перетину розділяють одна одну навпіл.*
- *Точка перетину діагоналей є центром симетрії паралелограма.*
- *Сума квадратів діагоналей паралелограма дорівнює сумі квадратів його сторін.*

Означення паралелограма дає змогу розпізнати його серед чотирикутників, проте є й інші інструменти такі як ознаки паралелограма.

Вивчення ознак паралелограма варто розпочати з нагадування, чим теореми-властивості відрізняються від ознак. Можна звернутись до досвіду учнів отриманого під час вивчення рівності трикутників.

Загальноприйнято в методиці навчання математики ознаками називати твердження (теореми або задачі на доведення), за допомогою яких можна встановити, що певний об'єкт (наприклад, чотирикутник) належить до певного класу об'єктів (наприклад, прямокутників). Отже, *ознака* — це прикмета, за якою впізнають фігуру. Разом з тим в означенні будь-якого поняття вказано його загальні суттєві властивості. Водночас сукупність загальних суттєвих властивих понять, згаданих в означенні, також дають ознаку поняття. Тому доцільно після введення означення кожного виду чотирикутників робити два висновки щодо його властивостей і ознак, які впливають безпосередньо з означення.

Тож формулюємо основні ознаки у вигляді теорем.

Теорема. *Якщо в чотирикутнику кожні дві протилежні сторони рівні, то цей чотирикутник — паралелограм.*

Доведення. На рисунку 8.3 зображено чотирикутник $ABCD$, у якому $AB = CD$ і $BC = AD$. Доведемо, що чотирикутник $ABCD$ — паралелограм.

Проведемо діагональ AC . Трикутники $\triangle ABC$ і $\triangle CDA$ рівні за третьою ознакою рівності трикутників. Звідси $\angle 1 = \angle 3$.

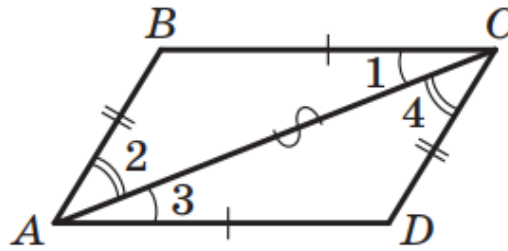


Рис. 8.3. Паралелограм $ABCD$.

і $\angle 2 = \angle 4$. Кути $\angle 1$ і $\angle 3$ є різносторонніми при прямих BC і AD та січній AC . Отже, $BC \parallel AD$. Аналогічно з рівності $\angle 2 = \angle 4$ випливає, що $AB \parallel CD$.

Отже, у чотирикутнику $ABCD$ кожні дві протилежні сторони паралельні, а тому цей чотирикутник — паралелограм.

Теорема. *Якщо в чотирикутнику дві протилежні сторони рівні та паралельні, то цей чотирикутник — паралелограм.*

Теорема. *Якщо в чотирикутнику діагоналі точкою перетину діляться навпіл, то цей чотирикутник є паралелограмом.*

Учням варто знати й інші ознаки паралелограмів. Учням з високим рівнем володінням математикою можна запропонувати довести їх самостійно. При цьому вчитель виконує роль наставника, лише підводячи учнів до необхідних тверджень і кроків.

Чотирикутник $ABCD$ буде паралелограмом, якщо виконується хоча б одна з наступних умов:

- i. *в чотирикутнику протилежні сторони попарно рівні;*
- ii. *в чотирикутнику протилежні кути попарно рівні;*
- iii. *сума кутів чотирикутника прилеглих до будь-якої сторони дорівнює 180° ;*
- iv. *в чотирикутнику сума квадратів діагоналей дорівнює сумі квадратів його сторін.*

Зазначимо, що на особливу увагу заслуговує питання щодо засвоєння учнями ознак і властивостей різних видів чотирикутників.

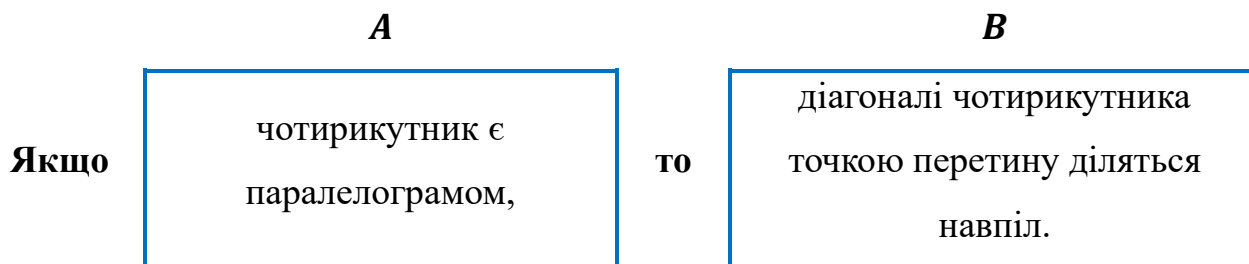
Із курсу геометрії 7 класу учням відомо, що більшість теорем складається з двох частин: умови (те, що дано) і висновку (те, що треба довести).

У 8 класі необхідно приділяти особливу увагу розумінню змісту теорем, та підходів до формулювань.

Якщо твердження, що виражає умову, позначити літерою **A**, а твердження, що виражає висновок, — літерою **B**, то формулювання теореми можна зобразити такою схемою:

якщо A, то B.

Наприклад, одну з вищенаведених можна сформулювати так:



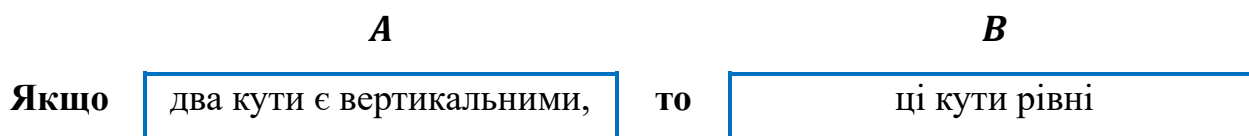
Тоді обернену їй теорему можна сформулювати таким способом:



Часто в повсякденному житті у своїх висловлюваннях ми користуємося словами «**необхідно**», «**достатньо**». Учням варто навести кілька прикладів.

- Для того щоб уміти розв'язувати задачі, необхідно знати теореми.
- Якщо ви на математичній олімпіаді правильно розв'язали всі запропоновані задачі, то цього достатньо для того, щоби посісти перше місце.

Уживання слів «необхідно» і «достатньо» тісно пов'язане з теоремами. Варто розглянути приклад теореми:



У цій теоремі твердження **A** є достатньою умовою для твердження **B**, тобто для того, щоб два кути були рівними, *достатньо*, щоб вони були вертикальними.

У цій самій теоремі твердження ***V*** є ***необхідною умовою*** для твердження ***A***, тобто для того, щоб два кути були вертикальними, *необхідно*, щоб вони були рівними.

Зазначимо, що твердження ***V*** не є достатньою умовою для твердження ***A***. Справді, якщо два кути рівні, то це зовсім не означає, що вони вертикальні. Отже, у будь-якій теоремі виду **якщо *A*, то *V*** твердження ***A*** є достатнім для твердження ***V***, а твердження ***V*** — необхідним для твердження ***A***.

Якщо справедлива не тільки теорема

якщо *A*, то *V*,

але й обернена теорема

якщо *V*, то *A*,

то ***A*** є ***необхідною і достатньою*** умовою для ***V***, а ***V*** — ***необхідною і достатньою*** умовою для ***A***.

Для закріплення варто запропонувати учням сформулювати ознаки паралелограма як твердження обернені до властивостей паралелограма, і навпаки. Наприклад, розглянуті теореми є взаємно оберненими. Мовою «необхідно — достатньо» цей факт можна сформулювати одним із двох способів:

- ***для того щоб чотирикутник був паралелограмом, необхідно і достатньо, щоб його діагоналі точкою перетину ділилися навпіл;***
- ***для того щоб діагоналі чотирикутника точкою перетину ділилися навпіл, необхідно і достатньо, щоб цей чотирикутник був паралелограмом.***

Наголосимо, що коли в теоремі є слова «необхідно і достатньо», то вона об'єднує дві теореми: пряму й обернену (прямою теоремою може бути будь-яка з двох теорем, тоді друга буде оберненою). Отже, доведення такої теореми має складатися з двох частин: доведень прямої та оберненої теорем. Теорему, яка об'єднує пряму та обернену теореми, називають ***критерієм***.

Іноді замість «необхідно і достатньо» говорять «тоді й тільки тоді». Наприклад, взаємно розглянуті обернені теореми можна об'єднати в такий критерій:

чотирикутник є паралелограмом тоді й тільки тоді, коли кожні дві його протилежні сторони рівні.

Важливо, щоб в учнів уже з 8 класу формувались компетенції математично грамотного підходу до формулювань теорем та розуміння підходів до їх доведень.

Наступним кроком у вивченні паралелограмів є вивчення окремих їх видів, властивостей і ознак притаманних кожному з них. Перед вивченням цієї теми варто нагадати учням, що раніше вони уже зустрічались з видами фігур, які є частковим випадком інших видів. Наприклад, рівносторонній трикутник є частковим випадком рівнобедреного трикутника, а останній, в свою чергу, є одним із видів звичайного трикутника. При цьому важливо звернути увагу на те, що фігура, яка є частковим випадком іншої фігури, має всі властивості загальної фігури, але також має додаткові особливі властивості, які виокремлюють її. У такому контексті вивчаються прямокутник, ромб та квадрат, їх властивості та ознаки. Всім чотирикутникам, які належать до множини паралелограмів, притаманні властивості паралелограма, тобто родового поняття. Разом з тим певний вид паралелограмів має свої властивості, причому такі властивості притаманні не кожному паралелограму. Наприклад, у ромба діагоналі взаємно перпендикулярні, а у прямокутника – рівні. Властивості окремих видів чотирикутників формують у вигляді спеціальних тверджень.

Для полегшення сприйняття, можна провести певну аналогію між видами паралелограмів та їх властивостями зауваживши, що ромб – це рівносторонній паралелограм, прямокутник – рівнокутний паралелограм, а квадрат можна називати як рівностороннім прямокутником, так і ромбом з рівними кутами.

Після вивчення означень і властивостей всіх видів чотирикутників доцільно дати учням їх класифікацію у вигляді кругів Ейлера (рис. 8.4).

Означення всіх видів чотирикутників вводиться однаково. Зокрема, паралелограм і трапеція протиставляються один одному. ***Трапеція*** означається як *чотирикутник, у якого лише дві сторони паралельні, а дві інші не паралельні* [13].

Цікавим є історичний підхід до означення трапеції. Зокрема, у своїй праці “Начала” Евклід під терміном “*трапеція*” розумів будь-який чотирикутник, який

не є паралелограмом. Більшість математиків середньовіччя використовувала термін “трапеція” з тим самим змістом. І лише у XVIII столітті було введено діюче нині означення.

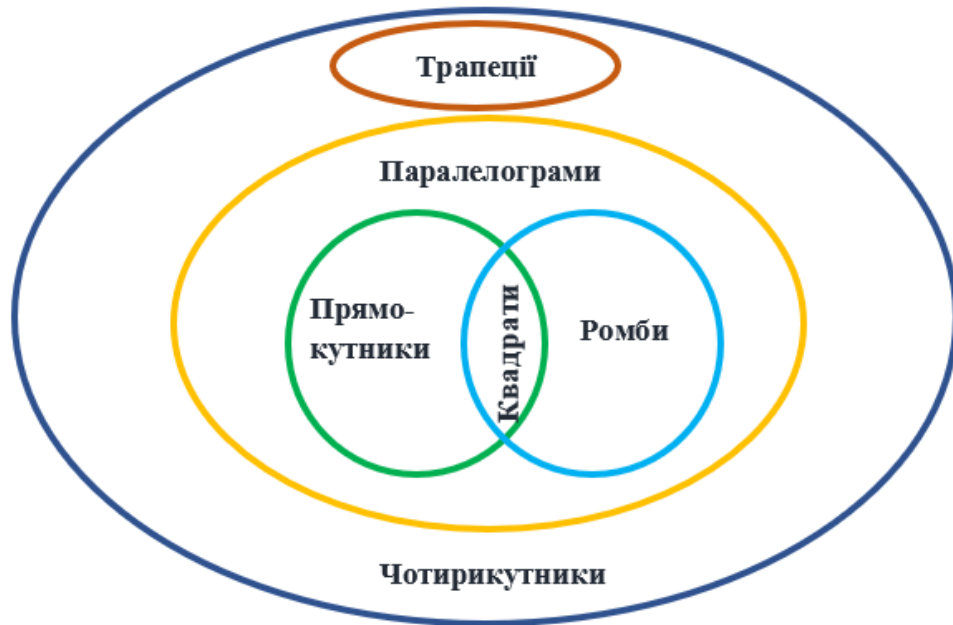


Рис. 8.4. Класифікація чотирикутників.

При вивченні трапеції важливо привертати увагу учнів до того, що чотирикутник, при кожній з двох паралельних сторін якого утворились гострий і тупий кути, сума яких не дорівнює 180° , також є трапецією (рис. 8.5).

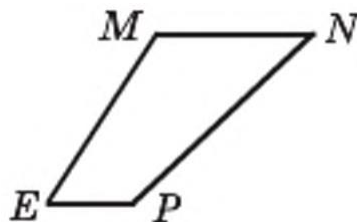


Рис. 8.5. Трапеція з гострим і тупим кутом при основі.

Задачі для самостійного розв’язання

8.1. Знайдіть діагональ чотирикутника, якщо його периметр дорівнює 80 см, а периметри трикутників, на які ця діагональ розбиває даний чотирикутник, дорівнюють 36 см і 64 см.

8.2. Побудуйте чотирикутник за його сторонами та одним із кутів.

- 8.3.** Побудуйте чотирикутник за трьома сторонами та двома діагоналями.
- 8.4.** Один із кутів паралелограма дорівнює 45° . Висота паралелограма, проведена з вершини тупого кута, дорівнює 3 см і ділить сторону паралелограма навпіл. Знайдіть цю сторону паралелограма та кути, які утворює діагональ, що сполучає вершини тупих кутів, зі сторонами паралелограма.
- 8.5.** Доведіть, що вершини B і D паралелограма $ABCD$ рівновіддалені від прямої AC .
- 8.6.** Бісектриса гострого кута паралелограма ділить його сторону у відношенні 3:5, рахуючи від вершини тупого кута. Знайдіть сторони паралелограма, якщо його периметр дорівнює 66 см.
- 8.7.** Точка перетину бісектрис двох сусідніх кутів паралелограма належить його стороні. Знайдіть відношення сусідніх сторін паралелограма.
- 8.8.** Бісектриси кутів A і C паралелограма $ABCD$ перетинають його діагональ BD у точках E і F відповідно. Доведіть, що чотирикутник $AECF$ — паралелограм.
- 8.9.** Периметр прямокутника $ABCD$ дорівнює 30 см. Бісектриси кутів A і D перетинаються в точці M , яка належить стороні BC . Знайдіть сторони прямокутника.
- 8.10.** Доведіть, що коли діагоналі паралелограма утворюють рівні кути з однією з його сторін, то цей паралелограм є прямокутником.
- 8.11.** Доведіть, що бісектриси кутів паралелограма, у якого сусідні сторони не рівні, перетинаючись, утворюють прямокутник.
- 8.12.** Бісектриси кутів A і B паралелограма $ABCD$ перетинають його сторони BC і AD у точках F і E відповідно. Визначте вид чотирикутника $ABFE$.
- 8.13.** Побудуйте ромб за діагоналлю та протилежним їй кутом ромба.
- 8.14.** Через вершини квадрата проведено прямі, паралельні його діагоналям. Доведіть, що точки перетину цих прямих є вершинами квадрата.
- 8.15.** Доведіть, що коли діагоналі паралелограма рівні та перпендикулярні, то цей паралелограм є квадратом.

8.16. Через довільну точку, яка належить квадрату, проведено дві перпендикулярні прямі, кожна з яких перетинає дві протилежні сторони квадрата. Доведіть, що відрізки цих прямих, які належать квадрату, рівні.

8.17. Сума діагоналей чотирикутника дорівнює 28 см. Знайдіть периметр чотирикутника, вершини якого є серединами сторін даного чотирикутника.

8.18. Середня лінія рівностороннього трикутника зі стороною 6 см розбиває його на трикутник і чотирикутник. Визначте вид чотирикутника та знайдіть його периметр.

8.19. За якої умови висота рівнобічної трапеції дорівнює половині різниці основ?

8.20. Діагональ прямокутної трапеції розбиває її на два трикутники, один з яких є рівностороннім зі стороною a . Знайдіть середню лінію трапеції.

9. Декартові координати і вектори на площині

9.1. Декартові координати на площині

Метод координат — це спосіб визначення положення точки, фігури або тіла за допомогою чисел або інших символів. Числа, за допомогою яких визначається положення точки, називають її координатами.

Прямокутні координати вживались в геометрії з давніх-давен. Зокрема, Аполлоній Пергський (бл. 262 – бл. 190 до н.е.) за допомогою них визначав і досліджував, щоправда, в геометричній термінології, еліпс, параболу, гіперболу. Вперше ідеї методу координат систематично виклали за допомогою невід’ємних чисел П’єр Ферма (1601 – 1655) і Рене Декарт. Ісаак Ньютон ввів від’ємні координати, а Готфрід Вільгельм Лейбніц — термін “*координати*”.

Перевага методу координат перед синтетичним методом, за якого безпосередньо розглядаються фігури і кожна задача потребує особливого підходу, в його алгоритмічності. Справді, за допомогою методу координат будь-яка геометрична задача зводиться до алгебраїчної, а алгебраїчні задачі лише алгоритмізуються.

У наш час багато хто із фахівців використовує знання і вміння, здобуті при вивченні методу координат у школі. Лікар будує графік температури хворого, економіст — графік зміни випуску продукції на виробництві, фізик за допомогою графіків у певній системі координат досліджує фізичні явища і таке інше. У математиці широко послуговуються не тільки прямокутною декартовою системою координат, а й іншими системами: сферичними, циліндричними, еліптичними та іншими. Метод координат є основним методом дослідження властивостей геометричних фігур в аналітичній геометрії.

Із введенням методу координат до шкільного курсу геометрії розширюється набір аналітичних методів. До таких методів крім методу рівнянь в алгебрі належать векторний метод і метод, що спирається на використання тригонометричних функцій. Координатний метод спрощує розв’язання багатьох геометричних задач, доведення теорем, дає можливість спростити виклад теоретичного матеріалу, що стосується векторів, тригонометричних функцій тощо. Метод координат дає змогу встановити тісні зв’язки з алгеброю, фізикою, географією, астрономією, застосовувати сучасні ЕОМ не тільки до розв’язування обчислювальних задач, а й до розв’язування геометричних задач, дослідження геометричних об’єктів, співвідношень, графічних завдань.

Метод координат пронизує весь курс вивчення математики на рівні базової середньої освіти починаючи з 6 класу. Відповідно до чинної програми вперше поняття “координата точки на прямій”, “прямокутна система координат на площині”. У курсі алгебри 7-9 класу здобуті знання і вміння застосовуються при побудові графіків функцій, графічному розв’язуванні рівнянь, нерівностей та їх систем. У курсі геометрії 9 класу знову передбачені вивчення декартових координат і застосування методу координат до дослідження властивостей геометричних фігур і означення тригонометричних функцій кута від 0° до 180° , вивчення функцій. Також 9 класі вперше вводяться поняття вектора та рівняння фігури, вивчаються перетворення площини.

Основна мета вивчення декартових координат в школі — сформулювати поняття про координати точки на прямій і площині, вміння знаходити точку за її

координатами і розв'язувати обернену задачу, знаходити відстань між двома точками і координати середини відрізка, застосовувати метод координат при розв'язуванні найпростіших задач і наступному вивченні курсу математики та суміжних предметів.

9.2. Пропедевтика введення координатної площини

Вивчення декартових координат у 5-6 класах. Підготовча робота до введення координатної площини починається вже у 5 класі, де вводиться поняття “числовий промінь” і показується, як зображуються на ньому натуральні числа.

У 6 класі для зображення додатних і від’ємних чисел вводиться числова вісь. Учні повинні усвідомити, що положення точки A на прямій цілком визначається одним числом, яке називається координатою точки і позначається $A(3)$, $B(7,8)$, $M(x)$. Варто звернути увагу учнів на те, що одним числом визначають положення точки не лише на прямій. Наприклад, положення супутника на траєкторії, по якій він рухається навколо Землі, визначається числом, що дорівнює відстані, яку він подолав від певної точки траєкторії; положення рухомого транспорту на залізниці чи автостраді можна визначити за номером кілометрового стовпа, який допоможе визначити відстань від певного пункту.

Після введення поняття координатної площини (на прикладі залу кінотеатру) корисно навести інші приклади застосування системи координат. Наприклад: географічна карта (за допомогою широти і довготи визначається положення будь-якого населеного пункту), шахова дошка (положення фігури визначається за допомогою двох символів — малої літери латинського алфавіту і цифри). Використання двох символів для позначення положення шахової фігури на дошці (наприклад, король $a2$) дає можливість транслювати хід шахових змагань з будь-якого міста земної кулі.

Наголошуємо, що починаючи з 6 класу, треба в усіх шкільних предметах дотримуватися однакової термінології і символіки.

9.3. Метод координат в курсі геометрії

Вивчення у 9 класі теми “Декартові координати на площині” треба починати з повторення і зведення в систему цих умінь і знань, які учні вже мають з попередніх класів. Це можна зробити за такою системою запитань і завдань.

1. *Що таке координатна площина?*
2. *Чим визначається положення точки на координатній площині?*
3. *Як називаються координати точки на координатній площині?*
4. *Як символічно записується точка, задана своїми координатами на площині?*
5. *Позначити на координатній площині точки $M(2,5)$, $N(-1,2)$, $P(-3,-2)$?*
6. *Записати точки за їх координатами, які позначені на координатній площині?*
7. *Навести приклади застосування координат?*
8. *Що називають графіком функції? Яка різниця між графіком функції та графіком рівняння?*
9. *Що є графіком лінійної функції? Коли графік лінійної функції паралельний осі абсцис?*
- 10.* *Що є графіком лінійного рівняння? Чи може бути графік лінійного рівняння паралельний осі ординат? Коли?*

З курсів математики 6 класу та алгебри 7-8 класів учні знайомі з елементарними властивостями координат на осі та на площині, властивостями графіків деяких елементарних функцій і правилами їх побудови у прямокутній системі координат. В курсі геометрії 9 класу декартова система координат вивчається на більш високому рівні і в широкому застосуванні. Поряд з вивченням *рівнянь фігур у декартовій системі координат*, зокрема, *рівнянь кола та прямої*, на цьому етапі координати стають інструментом для визначення *синуса, косинуса та тангенса кута від 0° до 180° , довжин відрізків*, кінці яких визначені координатами, взаємного розташування точок на координатній площині і фігур. Програма поглибленого вивчення геометрії додатково передбачає знайомство з геометричними перетвореннями фігур на площині. Це дає учням можливість застосовувати координатний метод як інструмент для

вивчення геометрії і її аналітичного дослідження. У дев'ятому класі учні вперше зустрічаються з *векторами*, вивчають їх властивості та способи використання для розв'язування задач.

Вивчення теми, як правило, розпочинають з виведення формули відстані між двома точками на координатній площині, використовуючи теорему Піфагора. Варто звернути увагу учнів на те, чому трикутник ABC (рис.9.1) є прямокутним. Це пояснюється тим, що система координат на координатній площині є

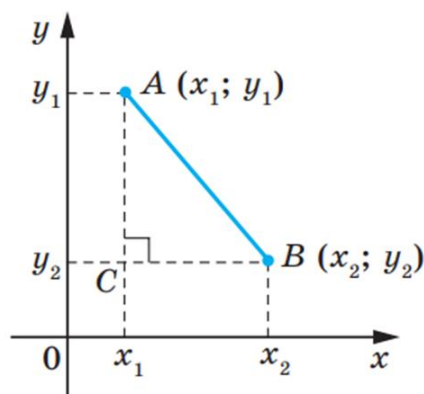


Рис. 9.1. Довжина відрізка AB не паралельного жодній з осей координат.

прямокутною, і, відповідно, будь-які дві прямі, які паралельні осям координат, перпендикулярні одна одній. Також варто нагадати учням, що дві точки, що лежать на прямій, яка паралельна осі абсцис мають однакову ординату, а дві точки, що лежать на прямій паралельній осі ординат – однакову абсцису.

Поряд з відстанню між точками докладніше досліджуються властивості координат точки, яка належить заданому відрізку, що розглядаються в контексті відношення, у якому вона поділяє відрізок. Таким чином, учням стають доступні деякі типи задач на знаходження точок координатної площини із заданими властивостями. Перед розв'язуванням даного типу задач, залежно від рівня класу, варто пояснити або повторити з учнями ідею методу геометричних місць точок (ГМТ).

Наступним вводять означення рівняння фігури, зауважуючи на схожості і ключових відмінностях між даним означенням і означенням графіка функції: для графіка функції кожному значенню x може відповідати лише не більш ніж одне значення y , тоді як для рівняння фігури така умова не вимагається.

Означення. Рівнянням фігури F , заданої на площині xu , називають рівняння з двома змінними x і y , яке має такі властивості:

1) якщо точка належить фігурі F , то її координати є розв'язком даного рівняння;

2) будь-який розв'язок $(x; y)$ даного рівняння є координатами точки, яка належить фігурі F .

Якщо дане рівняння є рівнянням фігури F , то цю фігуру можна розглядати як геометричне місце точок (ГМТ), координати яких задовольняють дане рівняння [26].

Користуючись цими міркуваннями і опираючись на поняття відстані між двома точками заданими координатами, виводиться рівняння кола радіуса R із центром у точці $A(a; b)$.

Теорема. Рівняння кола радіуса R із центром у точці $A(a; b)$ має вигляд

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2.$$

Правильним є і таке твердження: будь-яке рівняння виду $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$, де a, b і R — деякі числа, причому $R > 0$, є рівнянням кола радіуса R із центром у точці з координатами $(a; b)$.

Далі розглянемо особливості ознайомлення учнів з рівняннями прямих у декартовій системі координат. Зауважимо, що нижче наведений спосіб вивчення даної теми, передбачає, що учні ще не знайомі з поняттям вектора, тому виведення загального рівняння прямої через вектор нормалі є недоступним і вчитель має опиратись на поняття і властивості об'єктів, якими учні володіють.

Таким чином, при введенні загального рівняння прямої треба спиратися на відомі з курсу алгебри 7 класу поняття *рівняння з двома невідомими, лінійного рівняння з двома невідомими* $ax + by = c$. Учні повинні пригадати, що графіком такого рівняння може бути пряма (за умови, що хоча б один з коефіцієнтів a або b не дорівнює нулю), вся координатна площина при $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$ і порожня множина точок за $a = 0$, $b = 0$, $c \neq 0$.

У курсі геометрії ставиться мета довести, що будь-яка пряма в декартових координатах x і y має рівняння вигляду $ax + by + c = 0$. Потрібно, щоб учні

розуміли, що відоме їм з курсу алгебри лінійне рівняння $ax + by = c$ принципово не відрізняється від рівняння $ax + by + c = 0$.

Теорема. *Рівняння прямої має вигляд*

$$ax + by = c$$

де a, b і c — деякі числа, причому a і b не дорівнюють нулю одночасно.

Є правильним і таке твердження: *будь-яке рівняння вигляду $ax + by = c$, де a, b і c — деякі числа, причому a і b не дорівнюють нулю одночасно, є рівнянням прямої.*

Рівняння прямої вивчається досить детально. Узагальнити отримані знання варто систематизувавши вивчене у таблиці:

Рівняння	Значення a, b і c	Графік
$ax + by = c$	$b \neq 0, a$ і c — будь-які	Невертикальна пряма
	$b = 0, a \neq 0, c$ — будь-яке	Вертикальна пряма
	$a = b = c = 0$	Уся координатна площина
	$a = b = 0, c \neq 0$	—

Наступним кроком у вивченні прямих на координатній площині є перетворення загального рівняння прямої у знайоме учням з 7 класу рівняння прямої з *кутовим коефіцієнтом* та узагальнення його властивостей. Учні мають розуміти обмеження і переваги використання даного типу рівняння. Оскільки, з одного боку, лінійна функція $y = kx + b$ описує лише невертикальні прямі, а з іншого, можливість використання кута між прямою і віссю абсцис та менша кількість параметрів рівняння дозволяють більш ефективно використовувати такий вигляд у деяких типах задач.

Для цього необхідно показати, що прямі $y = kx$ та $y = kx + b$, де $b \neq 0$, паралельні. Точки $O(0; 0)$ і $C(1; k)$ належать прямій $y = kx$, а точки $A(0; b)$ і $B(1; k + b)$ належать прямій $y = kx + b$ (рис. 9.2).

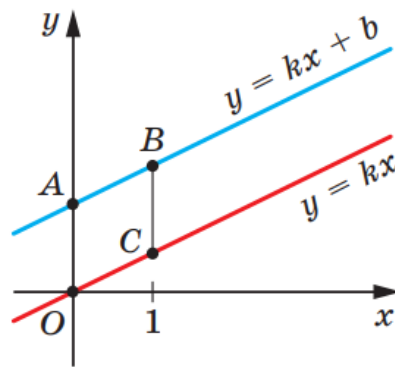


Рис. 9.2. Прямі $y = kx$ і $y = kx + b$.

Легко переконатися, що середини діагоналей AC і OB чотирикутника $OABC$ збігаються. Отже, чотирикутник $OABC$ — паралелограм. Звідси $AB \parallel OC$. Тепер можна зробити такий висновок:

якщо $k_1 = k_2$ і $b_1 \neq b_2$, то прямі $y = k_1x + b_1$ і $y = k_2x + b_2$ паралельні.

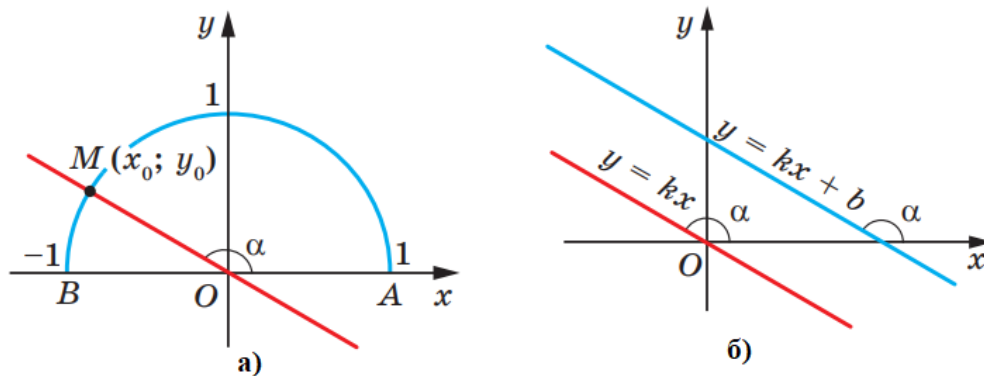


Рис. 9.3. Кут перетину прямих з додатним напрямом осі Ox .

Нехай пряма $y = kx$ перетинає одиничне півколо в точці $M(x_0; y_0)$ (рис. 9.3 а)). Кут $\angle AOM$ називають **кутом між даною прямою та додатним напрямом осі абсцис**.

Якщо пряма $y = kx$ збігається з віссю абсцис, то кут між цією прямою та додатним напрямом осі абсцис вважають рівним 0° .

Якщо пряма $y = kx$ утворює з додатним напрямом осі абсцис кут α , то вважають, що й пряма $y = kx + b$, яка паралельна прямій $y = kx$, також утворює кут α з додатним напрямом осі абсцис (рис. 9.3 б)).

Прості міркування дозволяють прийти до висновку, що для прямої $y = kx + b$ отримуємо:

$$k = \operatorname{tg} \alpha,$$

де α — кут, який утворює ця пряма з додатним напрямом осі абсцис. Тому коефіцієнт k називають *кутовим коефіцієнтом цієї прямої* [26].

Окремо відзначимо, що введення означень $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ будь-якого кута від 0 до 180° потребує мотивації. Однак спочатку треба пригадати означення синуса, косинуса і тангенса гострого кута через відношення сторін у прямокутному трикутнику. Запроваджені раніше означення дали можливість розв'язувати прямокутні трикутники. Проте в геометрії, фізиці, геодезії, техніці та інших галузях доводиться розв'язувати і косокутні трикутники, де кути можуть змінюватися від 0 до 180° . У зв'язку з цим виникає потреба означити тригонометричні функції і для таких кутів. Виявляється, що це зручно зробити за допомогою декартових координат. Один з прикладів такого застосування ми й проілюстрували вище.

Поняття *кутового коефіцієнта прямої* також важливе, з погляду перспективних зв'язків з поняттям геометричного змісту похідної, яке вводиться у 10 класі.

Повертаючись до вивчення рівнянь фігур на координатній площині, перед розв'язуванням задач на взаємне розташування фігур на площині варто нагадати учням відомі з курсу алгебри 7 класу властивості систем двох лінійних рівнянь з двома невідомими, означення розв'язку системи і графічний спосіб їх розв'язання. Необхідно підвести учнів до висновку, що для знаходження координат точки перетину прямих необхідно розв'язати систему їх рівнянь.

Також слід звернути увагу учнів на те, що за наявності рівняння прямої, аналогічним чином можна знайти точки її перетину і з іншими фігурами, заданими рівняннями, та й взагалі визначити взаємне розташування будь-яких фігур, заданих рівняннями на площині.

9.4 Вектори на площині

Ідея вектора — одна з фундаментальних ідей сучасної математичної науки та її застосувань. На векторній основі зараз будуються лінійна алгебра,

аналітична і диференціальна геометрія, теорія багатовимірних просторів. Вектори широко застосовуються в сучасній фізиці, технічних науках. Тому природно, що в 50-х роках ХХ ст. на початку всесвітнього руху за реформу шкільної математичної освіти у всіх розвинутих країнах була висловлена однастайна думка — впровадити ідею вектора в шкільну математику. При цьому пропонувалися два підходи.

Крайні модерністи (Жан Дьєдонне, Люсьєн Фелікс, Густав Шоке) наполягали на тому, щоб зробити ідею вектора базисною ідеєю шкільного курсу і, зокрема, курс геометрії будувати на основі ідеї векторного простору, наприклад, використовуючи аксіоматику Вейля.

У колишній УРСР дотримувались поміркованого підходу і пропонували не розглядати ідею вектора як базисну і не будувати навіть певний розділ геометрії на векторній основі. Разом з тим передбачалось ввести поняття вектора і необхідний апарат векторної алгебри із загальноосвітньою метою і послуговуватися ними лише для розв’язування найпростіших стандартних задач. Безперечно, в старших класах фізико-математичного профілю, спеціалізованих школах і класах з поглибленим вивченням математики, а також, на факультативах векторний метод вивчається та застосовується більш широко.

У навчально-методичній літературі трапляються різні означення вільних векторів. Вектори трактуються, як:

- *напрявлений відрізок прямої евклідового простору, в якого один кінець (точка A) називається початком вектора, а другий кінець (точка B) — кінцем вектора;*
- *впорядкована пара точок;*
- *клас еквівалентних напрямлених відрізків;*
- *паралельне перенесення;*
- *впорядкована пара, трійка, ..., n -чисел.*

Множини об’єктів, що відповідають цим трактуванням, ізоморфні одна одній. Кожне з наведених трактувань є інтерпретацією більш загального абстрактного поняття вільного вектора, означення якого формулюється в

теоретичних курсах геометрії: будь-яку множину об'єктів, що задовольняє перші вісім аксіом системи Вейля, називають множиною векторів, а будь-який елемент цієї множини — вектором. У школі з дидактичних міркувань звичайно розглядають одну з інтерпретацій.

9.5. Методика введення основних понять теми «Вектори на площині».

З метою мотивації запровадження поняття “вектор” доцільно нагадати учням, що з поняттям векторних величин вони стикалися і раніше, в 7 класі, під час вивчення курсу фізики. Величини, які визначаються не тільки числовим значенням, але й напрямом, називають *векторними величинами* або *векторами*. Сила, переміщення, швидкість, прискорення, вага — приклади векторних величин. На рисунках силу зображують у вигляді відрізка прямої із стрілкою на кінці, яка вказує напрям.

Термін «*вектор*» уперше з'явився в 1845 р., його ввів у вжиток ірландський математик і астроном Вільям Ровен Гамільтон.

Взагалі поняття вектора в геометрії вводиться як математична абстракція об'єктів, які характеризуються величиною і напрямом на відміну від скалярних величин, які характеризуються лише числом. Проте не будь-яка величина, яка характеризується модулем і числовим значенням є вектором.

У темі, присвяченій векторам на площині, вводиться значна кількість нових для учнів понять — абсолютна величина (або модуль вектора), нульовий вектор, рівні вектори, координати вектора, кут між ненульовими векторами та інші.

Класична для сьогодення методика викладання векторів передбачає знайомство з вектором на основі знань про координати. Таким чином, абстрактні і у деякій мірі незвичні вектори, отримують зв'язок з попереднім досвідом учнів. Викладений в підручнику [26] теоретичний матеріал, що стосується обґрунтування векторів за допомогою координат, вигідно відрізняється чіткістю, простотою дій над векторами. Водночас достатньо геометричних ілюстрацій, які розвивали б просторові уявлення і увагу, вправ на побудову. Одним з найважливіших для подальшого викладу теоретичного матеріалу є поняття про

координати вектора. Не можна обмежуватися лише формальним введенням означення цього поняття. Доцільно мотивувати потребу в ньому, дати учням наочне уявлення про координати вектора на координатній площині. Розглянемо один з можливих методичних варіантів впровадження поняття координати вектора.

Учитель звертає увагу учнів на те, що сьогодні на уроці вони ознайомляться з важливим для них поняттям — координати вектора. Координати вектора, як і координати точки, дають можливість визначити положення вектора на координатній площині. Координати вектора дадуть змогу робити дії (операції) над векторами, доводити їхні властивості і застосовувати до розв’язання задач, а також встановити зв’язок між теоретичними закономірностями в розміщенні векторів і арифметичними закономірностями між їхніми координатами, напрямом.

Теорема. *Якщо точки $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$ відповідно є початком і кінцем вектора $\vec{a}$, то числа $x_2 - x_1$ і $y_2 - y_1$ дорівнюють відповідно першій і другій координатам вектора $\vec{a}$.*

Із формули відстані між двома точками випливає, що коли вектор $\vec{a}$ має координати $(a_1; a_2)$, то

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}.$$

Далі учні знайомляться з правилами додавання та віднімання векторів. Матеріал обов’язково потрібно подавати з відповідними візуалізаціями операцій додавання векторів (рис. 9.4 а)) та віднімання (рис. 9.4 б)). Важливо, щоб учні засвоїли, у яких геометричних ситуаціях ефективніше працює кожне з двох правил додавання векторів (правила трикутника та правила паралелограма). Поняття різниці векторів зазвичай засвоюється учнями більш складно, для полегшення сприйняття ефективно навчити учнів виконувати віднімання способом додавання протилежного вектора: $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$.

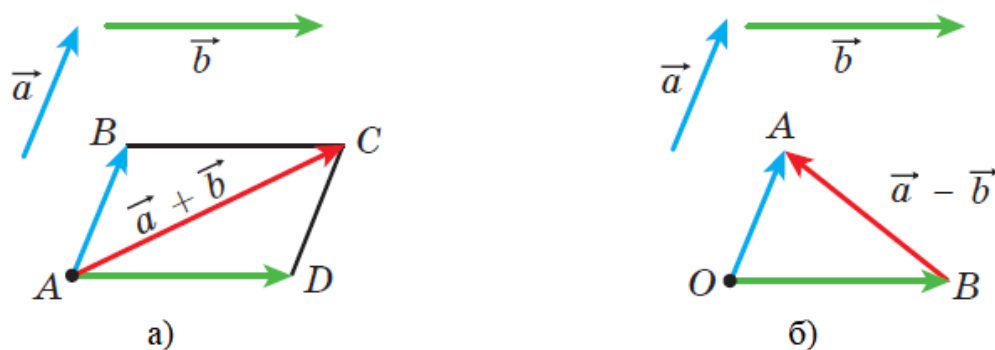


Рис. 9.4. Додавання та віднімання векторів.

При цьому варто акцентувати увагу на міжпредметних зв'язках, наприклад використанні векторів у фізиці де часто доводиться додавати вектори, відкладені від однієї точки. Так, якщо до тіла прикладено сили $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$ (рис. 9.5), то рівнодійна цих сил дорівнює сумі $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$ [26].

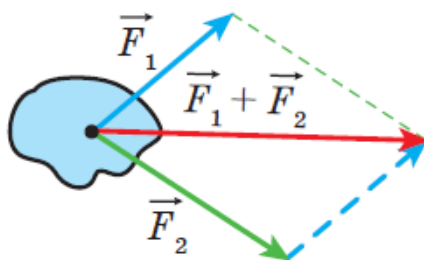


Рис. 9.5. Знаходження рівнодійної сил $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$.

Наступною важливою операцією над векторами є множення вектора на число. Зазвичай, ця операція сприймається учнями легше, якщо її вивченню передують вправи на додавання кількох однакових векторів. Множення вектора на число важливе не лише як самостійне правило, а й як важливий етап підготовки учнів до задач на *розклад вектора за базисом* та *дослідження векторів на колінеарність*. З огляду на останнє, особливу увагу учнів слід звернути, що при множенні вектора на від'ємне число його напрямок змінюється на протилежний.

Після вивчення властивостей векторів потрібно закріпити знання розв'язуючи вправи.

Приклад. Нехай M — точка перетину медіан трикутника $\triangle ABC$ і X — довільна точка (рис. 9.6 а)). Доведіть, що

$$\overrightarrow{XM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC}).$$

Розв'язання. Нехай точка K — середина відрізка AC . Маємо: $BM:MK = 2:1$.

Тоді, можна записати:

$$\overrightarrow{XM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{XB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{XK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{XB} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XC}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC})$$

Варто довести векторну рівність, яка пов'язує дві чудові точки трикутника.

Теорема. Якщо точка H — ортоцентр трикутника $\triangle ABC$, а точка O — центр його описаного кола, то

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.$$

Доведення. Для прямокутного трикутника рівність $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ є очевидною.

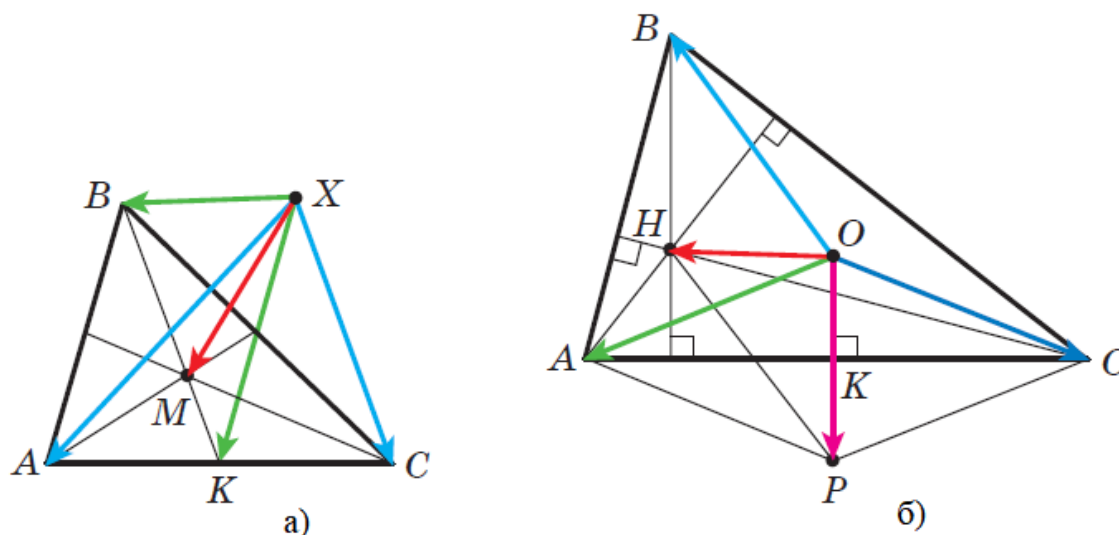


Рис. 9.6. Чудові точки трикутника.

Нехай трикутник ABC не є прямокутним. Опустимо з точки O перпендикуляр OK на сторону AC трикутника ABC (рис. 9.6 б)). У курсі геометрії 8 класу було доведено, що $BH = 2OK$.

На промені OK позначимо точку P таку, що $OK = KP$. Тоді $BH = OP$. Оскільки $BH \parallel OP$, то чотирикутник $HBO P$ — паралелограм.

За правилом паралелограма $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OP}$.

Оскільки точка K є серединою відрізка AC , то в чотирикутнику $AOCР$ діагоналі точкою перетину діляться навпіл. Отже, цей чотирикутник — паралелограм. Звідси $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$.

$$\text{Маємо: } \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} \text{ [26].}$$

Звернемося до векторної рівності

$$\overrightarrow{XM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XC}).$$

де M — точка перетину медіан трикутника ABC . Оскільки X — довільна точка, то рівність залишається правильною, якщо за точку X вибрати точку O — центр описаного кола трикутника ABC .

$$\text{Маємо: } 3\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.$$

Беручи до уваги рівність

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC},$$

отримуємо: $3\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH}$. Ця рівність означає, що точки O , M і H лежать на одній прямій, яку називають **прямою Ейлера**. Варто зазначити, що цю чудову властивість було доведено в підручнику 8 класу [24], але в інший спосіб.

Із курсу фізики учні знають, що коли під впливом постійної сили $\vec{F}$ тіло перемістилося з точки A в точку B (рис. 9.7) то виконана механічна робота дорівнює $|\vec{F}||\overrightarrow{AB}| \cos \varphi$, де $\varphi = \angle(\vec{F}; \overrightarrow{AB})$.

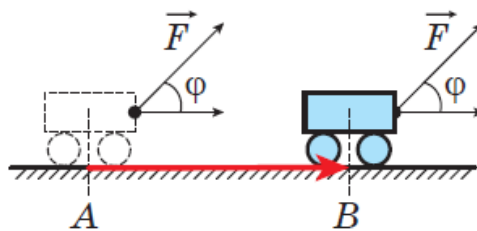


Рис. 9.7. Ілюстрація переміщення тіла під дією сили $\vec{F}$.

Власне це спонукає ввести ще одну дію над векторами.

Означення. *Скалярним добутком двох векторів називають добуток їхніх модулів і косинуса кута між ними.*

Для мотивації пізнавальної діяльності варто зосередити увагу учнів на задачах, які розв’язуються через скалярний добуток векторів: знаходження кута

між векторами та швидко визначення перпендикулярності векторів. Для закріплення теми можна продемонструвати учням, або запропонувати до розв'язання, залежно від рівня класу, доведення уже відомої їй теореми косинусів за допомогою векторного методу.

Вивчення теми «Скалярний добуток векторів», в свою чергу, розширить знання учнів про вектори та дії над ними та дозволить поглибити розуміння даної тематики у прикладних застосуваннях як у геометрії так і на уроках фізики.

Задачі для самостійного розв'язання

9.1. Доведіть, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами в точках $A(-2; 8)$, $B(3; -3)$, $C(6; 2)$ і $D(1; 13)$ є паралелограмом.

9.2. Доведіть, що трикутник з вершинами в точках $A(2; 7)$, $B(-1; 4)$ і $C(1; 2)$ є прямокутним.

9.3. Доведіть, що точки $M(-4; 5)$, $N(-10; 7)$ і $K(8; 1)$ лежать на одній прямій, та вкажіть, яка з них лежить між двома іншими.

9.4. Доведіть, що дане рівняння є рівнянням кола, і вкажіть координати центра та радіус R цього кола: $x^2 + y^2 + 16y + 60 = 0$.

9.5. Складіть рівняння кола, радіус якого дорівнює 5 та яке проходить через точки $C(-1; 5)$ і $D(6; 4)$.

9.6. Складіть рівняння кола, яке дотикається до координатних осей і прямої $x = 2$.

9.7. Точки $A(-6; -1)$, $B(1; 2)$ і $C(-5; -8)$ — вершини трикутника ABC . Складіть рівняння прямої, яка містить медіану AK трикутника.

9.8. Доведіть, що коло $(x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 9$ і пряма $x + y = 7$ перетинаються, та знайдіть координати точок їхнього перетину.

9.9. Складіть рівняння геометричного місця центрів кіл, які проходять через точки $A(1; -7)$ і $B(-3; 5)$.

9.10. Складіть рівняння прямої, яка проходить через точку $A(2; 6)$ та утворює з додатним напрямом осі абсцис кут 60° .

9.11. Складіть рівняння прямої, яка паралельна прямій $y = 4x + 2$ і перетинає пряму $y = -8x + 9$ у точці, що належить осі ординат.

9.12. Накресліть трикутник ABC і позначте точку M — середину сторони BC . Від точки M відкладіть вектор, рівний вектору $\overrightarrow{AM}$, а від точки B — вектор, рівний вектору $\overrightarrow{AC}$. Доведіть, що кінці побудованих векторів збігаються.

9.13. Відомо, що вектори $\vec{b}$ і $\vec{c}$ неколінеарні. Вектор $\vec{a}$ колінеарний кожному з векторів $\vec{b}$ і $\vec{c}$. Доведіть, що вектор $\vec{a}$ є нульовим.

9.14. Модуль вектора $\vec{a}$ дорівнює 10. Його перша координата на 2 більша за другу. Знайдіть координати вектора $\vec{a}$.

9.15. Точки $A(2; 5)$ і $B(7; 5)$ — вершини прямокутника $ABCD$. Модуль вектора $\overrightarrow{BD}$ дорівнює 13. Знайдіть координати точок C і D .

9.16. Відкладіть від однієї точки три вектори, модулі яких рівні, так, щоб сума двох із них дорівнювала третьому вектору.

9.17. Відкладіть від однієї точки три вектори, модулі яких рівні, так, щоб їхня сума дорівнювала нуль-вектору.

9.18. Чи може бути нульовим вектором сума трьох векторів, модулі яких дорівнюють: 5; 2; 3.

9.19. Дано дві точки A і B . Знайдіть геометричне місце точок X таких, що $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BX}| = |\overrightarrow{AB}|$.

9.20. Весляр із точки A переправляється через річку завширшки 240 м зі сталою власною швидкістю, спрямовуючи ніс човна перпендикулярно до протилежного берега. Через 4 хв човен причалює до протилежного берега в точці C , розташованій нижче за течією від точки A на 48 м. Знайдіть швидкість течії та швидкість човна відносно берегів річки.

Список рекомендованої літератури

1. Антоненко М.І. Розв'язування геометричних задач: книжка для вчителя. К.: Ра. шк. 1991.

2. Бевз Г. П. Методика викладання математики: навч. посіб. – 3-тє вид., перероб. і допов. К.: Вища шк., 1989.
3. Бевз Г.П, Бевз В.Г, Васильєва Д.В., Владімірова Н.Г. Математика: підруч. для 5 кл. закладів загальної середньої освіти К.: Освіта. 2022.
4. Бевз Г., Бевз В., Владімірова Н. Геометрія: підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закл. К.: Відродження. 2015.
5. Бевз Г., Бевз В., Владімірова Н. Геометрія: підруч. для 8 кл. закл. заг. середньої освіти – видання 2 перероблене К.: Освіта. 2021.
6. Бевз Г., Бевз В., Владімірова Н. Геометрія: підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. К.: Освіта. 2017.
7. Боравльов А.П., Левчук І.Г. Аналіз у розв’язуванні задач на побудову: навч. посіб. К.: Вища шк., 2002.
8. Бурда М.І. Розв’язування задач на побудову в 6-8 класах. Київ, Україна: Радянська школа, 1986.
9. Вишенский В. А., Карташов М.В., Михайловский В.И., Ядренко М.И. Сборник задач Киевских математических олимпиад. К.: Изд-во при Киевском ун-те, 1984.
10. Істер О. С. Математика. 5 кл.: підруч. для закл. заг. серед. освіти. 2-ге видання доопрацьоване, К.: Генеза. 2018.
11. Істер О. С. Математика: підруч для 6 кл. загальноосвіт. навч. закл. К.: Генеза. 2014.
12. Істер О. С. Геометрія: підруч для 7 кл. загальноосвіт. навч. закл. К.: Освіта. 2015.
13. Істер О. С. Геометрія: підруч для 8 кл. закл. заг. серед. освіти - 2-ге вид. переробл. К.: Генеза. 2021.
14. Істер О. С. Геометрія: підруч для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. К.: Генеза. 2017.
15. Збірник тестових завдань з математики для абітурієнтів / В.І.Беспальчук, А.В.Прус, І.А.Сверчевська та ін.; Під. ред. В.В.Михайленка. – Житомир: ЖДТУ, 2005.
16. Кушнір А. Побудова трикутника. Енциклопедія розв’язування задач. Київ, Україна: Либідь, 1994.

- 17.Лейфура В. М., Мітельман І. М., Радченко В. М., Ясінський В. М. Математичні олімпіади школярів України: 1991-2000 рр. – навч.-метод. Посібник. К.: Техніка, 2003.
- 18.Ленчук І.Г., Система навчання майбутнього вчителя конструктивної геометрії. Житомир, Україна: ЖДУ імені І. Франка, 2011
- 19.Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С. Математика. підручник для 5 класу закладів загальної середньої освіти. Х.: Гімназія, 2022.
- 20.Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С. Математика: підруч. для 6 кл. загальноосвіт. Навч. закладів. Х.: Гімназія, 2014.
- 21.Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С. Геометрія: підруч. для 7 кл. закладів заг. серед. освіти. – 2-ге вид., переробл. Х.: Гімназія, 2020.
- 22.Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С. Геометрія. Пропедевтика поглибленого вивчення: навч. посіб. для 7 кл. з поглибленим вивченням математики. Х.: Гімназія, 2015.
- 23.Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Рабінович Ю.М., Якір М.С. Геометрія. 7 кл. Самостійні і контрольні роботи. Пропедевтика поглибленого вивчення. Х.: Гімназія, 2015.
- 24.Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С. Геометрія: підруч. для 8 кл. закладів заг. серед. освіти. – 2-ге видання, перероблене. Х.: Гімназія, 2021.
- 25.Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С. Геометрія: підручник для 8 кл. з поглибленим вивченням математики закладів загальної середньої освіти. Х.: Гімназія, 2021.
- 26.Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С. Геометрія: підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів. Х.: Гімназія, 2021.
- 27.Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С. Геометрія для загальноосвітніх навчальних закладів з поглибленим вивченням математики: підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів. Х.: Гімназія, 2017.
- 28.Моторіна В. Г. Інноваційні підходи до навчання математики : навчальний посібник. Харків : ХНПУ імені Г. С. Сковороди, Скорпіон, 2008.
- 29.Модельні навчальні програми для 5-9 класів нової української школи (запроваджуються поетапно з 2022 року). Математика 5-6 класи. URL: [https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-](https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni)

[programi/modelni-navchalni-programi-dlya-5-9-klasiv-novoyi-ukrayinskoyi-shkoli-zaprovadzhuyutsya-poetapno-z-2022-roku](https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/programi/modelni-navchalni-programi-dlya-5-9-klasiv-novoyi-ukrayinskoyi-shkoli-zaprovadzhuyutsya-poetapno-z-2022-roku)

30. Навчальні програми для 6-9 класів (Державний стандарт базової і повної загальної середньої освіти, 2011 рік). Математика. 5-9 класи. URL: <https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/programi/programi-navchalni-programi-5-9-klas>
31. Навчальні програми для 8-9 класів з поглибленим вивченням окремих предметів за новим Державним стандартом базової і повної загальної середньої освіти. Математика (Алгебра. Геометрія) URL: <https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/programi/programi-navchalni-programi-5-9-klas>
32. Недялкова К. В. Загальна методика навчання математики : практичний курс. Одеса : ТОВ «Рекламсервіс», 2014.
33. Пометун О.І., Пироженко Л.В. Сучасний урок. Інтерактивні технології навчання: Наук. - метод. пос. К.: Вид-во А.С.К., 2003.
34. Романюк В.Я., Дутко Л.І. Технології інтерактивного навчання на уроках математики. Львів: Тріада плюс, 2004.
35. Сарана О. А., Семенець С. П. Нестандартні геометричні задачі: навч.-метод. посіб. Житомир: ЖДУ ім. І. Франка, 2007.
36. Семенець С. П. Методика навчання математики (підготовлено на основі концепції розвивальної освіти): навчальний посібник. Житомир : Вид-во ЖДУ ім. І. Франка, 2009.
37. Слепкань З.І. Методика навчання математики : підручник. 2-е вид., допов. і перероб. К. : Вища школа, 2006.
38. Слепкань З.І. Психолого-педагогічні та методичні основи розвивального навчання математики. Тернопіль : Підручники і посібники, 2006.
39. Тарасенкова Н. А. Використання знаково-символічних засобів у навчанні математики : монографія. Черкаси : Відлуння-Плюс, 2002.
40. Ушаков Р. П. Повторювальний курс математики: Навчальний посібник. К.: Техніка, 2003. – 416 с.