

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
БІЛОЦЕРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ АГРАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ЕКОНОМІЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра вищої математики та фізики

MARLE В МАТЕМАТИЦІ

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК ДЛЯ СТУДЕНТІВ ВИЩИХ
НАВЧАЛЬНИХ ЗАКЛАДІВ III–IV РІВНІВ АКРЕДИТАЦІЇ

Біла Церква
2019

УДК 519.6

Затверджено до друку
радою університету
(Протокол № 15 від 26.12.2017 р.)

Укладач: **Дрозденко В.О.**, канд. фіз.-мат. наук, доцент

Дрозденко В.О. **Maple** в математиці: навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів III та IV рівнів акредитації / В.О. Дрозденко. – Біла Церква, 2019. – 328 с.

Викладено необхідний теоретичний матеріал для роботи з одним із найпопулярніших математичних пакетів символьних обчислень **Maple**. У переважній більшості розділів проілюстровано застосування ПСО **Maple** до розв’язування прикладних та професійно-орієнтованих задач. Структура посібника відповідає нині діючій програмі дисципліни «Вища математика» вищих навчальних закладів III–IV рівнів акредитації.

Розраховано на студентів вищих навчальних закладів, а також викладачів; вчителів та учнів загальноосвітніх шкіл.

Рецензенти: **Непочатенко В. А.**, доцент, докт. фіз.-мат. наук
(Білоцерківський національний аграрний університет)
Працьовитий М. В., професор, докт. фіз.-мат. наук
(Нац. пед. університет ім. М.П.Драгоманова; та
Інститут математика НАН України)

ISBN 978–966–2122–57–2

©БНАУ, 2019

Зміст

Передмова	v
Вступ	vii
Українсько-англійський словник математичних термінів	xi
1 Інтерфейс та довідкова система ПСО Maple 7	1
1.1 Інтерфейс ПСО Maple	1
1.2 Довідкова система	5
1.3 Дво- і тривимірні графіки	7
1.4 Доступ до довідок і прикладів	10
1.4.1 Предметний пошук	13
1.4.2 Математичні бібліотеки Maple	15
2 Числові обчислення	17
2.1 Введення виразів	17
2.2 Операції. Константи. Функції	18
2.3 Завдання для самостійного виконання	24
3 Операції з формулами	26
3.1 Спрощення математичних виразів	26
3.2 Завдання для самостійного виконання	31
4 Рівняння і нерівності	32
4.1 Розв’язування алгебраїчних рівнянь	32

4.2	Розв'язування тригонометричних рівнянь	35
4.3	Розв'язування нерівностей	38
4.4	Розв'язування задач	39
4.5	Завдання для самостійного виконання	45
5	Системи рівнянь та нерівностей	46
5.1	Розв'язування систем рівнянь	46
5.2	Розв'язування систем нерівностей	50
5.3	Розв'язування задач	51
5.4	Завдання для самостійного виконання	54
6	Побудова графіків 2D	56
6.1	Побудова графіків	56
6.2	Побудова областей	69
6.3	Завдання для самостійного виконання	72
7	Комплексні числа	74
7.1	Задання комплексних чисел та дії над ними	74
7.2	Завдання для самостійного виконання	80
8	Матричні і векторні обчислення	81
8.1	Матричні обчислення	81
8.2	Операції з векторами	86
8.3	Пакети linalg та LinearAlgebra	88
8.4	Розв'язування задач	91
8.5	Завдання для самостійного виконання	105
9	Обчислення границь. Суми і ряди	107
9.1	Обчислення границь	107
9.2	Суми і ряди	110
9.3	Побудова графіків періодичних функцій	114
9.4	Завдання для самостійного виконання	118
10	Диференціювання в середовищі Maple	120
10.1	Диференціювання функцій однієї змінної	120
10.2	Диференціювання функцій багатьох змінних	123

10.3	Графічні побудови	126
10.3.1	Дослідження функції та побудова її графіка	127
10.4	Розв'язування задач	132
10.5	Завдання для самостійного виконання	146
11	Побудова графіків 3D	149
11.1	Побудова областей у просторі	159
11.2	Завдання для самостійного виконання	161
12	Інтеграл та його застосування	162
12.1	Невизначені та визначені інтеграли	162
12.2	Кратні інтеграли	166
12.3	Розв'язування задач	169
12.4	Завдання для самостійного виконання	186
13	ДР та системи ДР	189
13.1	Розв'язування диференціальних рівнянь	189
13.2	Розв'язування задач	197
13.3	Завдання для самостійного виконання	204
14	Аналітична геометрія	206
14.1	Геометрія на площині	206
14.2	Криві другого порядку	236
14.3	Геометрія в просторі	248
14.4	Розв'язування задач	253
14.5	Завдання для самостійного виконання	266
15	Елементи теорії ймовірностей і мат. статистики	267
15.1	Елементи комбінаторики	267
15.2	Елементи теорії ймовірностей	270
15.2.1	Інтегральна та диференціальна функції розподілу	270
15.3	Числові характеристики випадкових величин . . .	274
15.3.1	Дискретна випадкова величина	274
15.3.2	Неперервна випадкова величина	276
15.4	Елементи математичної статистики	279

15.4.1 Вибірка. Емпірична функція розподілу. Гістограма	280
15.4.2 Побудова графіка кореляційної таблиці . .	282
15.5 Розв'язання задач	286
15.6 Завдання для самостійного виконання	300

Передмова

Сучасна математична освіта випускника вищого навчального закладу потребує не лише знань курсу дисципліни «Вища математика», а й навиків розв’язування ряду прикладних та професійно-орієнтованих задач із використанням обчислювальної техніки.

Навчальний посібник «**Maple** в математиці» призначений для студентів вищих навчальних закладів, старшокласників і особливо для тих, хто самостійно, без постійної допомоги викладача, вивчає різні пакети символьних обчислень у аспекті застосування їх до вивчення математики і дисциплін фізико-математичного та природничо-наукового профілів.

При написанні посібника автор переслідував наступні цілі.

1. За допомогою цього навчального посібника допомогти студенту (інколи і без допомоги викладача) зрозуміти суть пакета символьних обчислень **Maple**.

2. Зміст посібника узгодити з нині діючою програмою дисципліни «Вища математика».

3. Показати переваги **Maple** при розв’язуванні прикладних та професійно-орієнтованих задач порівняно з традиційними засобами.

4. Дати студентам можливість відчувати комфорт при роботі з **Maple**, отримати естетичне задоволення від формул, графіків та рисунків.

5. За допомогою **Maple** підвищити зацікавленість студентів

до вивчення математики і дисциплін фізико-математичного та природничо-наукового профілів.

Навчальний посібник містить достатню кількість вправ на обчислення та спрощення виразів як у полі дійсних, так і комплексних чисел, розв'язування рівнянь, нерівностей та їх систем, побудову графіків, задач на застосування похідної та інтеграла, матриць і векторів, аналітичної геометрії та інших розділів вищої математики.

Для ілюстрації можливостей **Maple** використані задачі з відомих збірників: «Збірник задач з математики для вступників до вузів» за редакцією М. І. Сканаві, «Збірник задач і вправ з математичного аналізу» Б. П. Демидовича та інші.

Навчальний посібник складається з передмови, вступу, п'ятнадцяти розділів, містить список використаної та рекомендованої літератури.

Автор усвідомлює, що в навчальному посібнику наведені лише основні відомості про можливості ПСО **Maple** і висловлює сподівання, що йому вдалося зацікавити читача представленим пакетом символьних обчислень і викликати бажання до його вивчення і практичного використання.

Навчальний посібник може успішно використовуватися викладачами вищих навчальних закладів I–IV рівнів акредитації, студентами, вчителями та учнями загальноосвітніх шкіл.

Автор висловлює глибоку вдячність професору, завідувачу кафедри вищої математики та фізики Білоцерківського національного аграрного університету, доктору фізико-математичних наук Непочатенку Віктору Андрійовичу, декану фізико-математичного факультету НПУ імені М.П. Драгоманова, доктору фізико-математичних наук Працьовитому Миколі Вікторовичу, викладачу Таращанського ДТЕПК Вергелесу Віталію Миколайовичу та кандидату педагогічних наук Дрозденку Олександровичу за цінні вказівки, зауваження і поради, що сприяли покращенню змісту і якості навчального посібника.

Вступ

Однією з характерних рис двадцять першого століття є впровадження в повсякденне життя високоефективних комп'ютерних технологій. Сьогодні неможливо уявити собі висококваліфікованого вченого, конструктора, інженера, який не використовує **Internet** для одержання найсвіжішої інформації. Комп'ютер, пакети символічних програм наполегливо і безповоротно входять у життя не тільки науково-дослідних установ, університетів, а й у професійні коледжі, школи та родини.

Зараз декілька компаній пропонують потужні і розвинуті пакети комп'ютерних обчислень: **Axyom**, **Derive**, **Gran (1, 2d, 3d)**, **Macsyma**, **Maple**, **Mathematica**, **Matcad**, **Matlab**, **R**, **Reduce**, **SAS**, **S-plus**, **SPSS**, **Statistica** та інші.

Чільне місце серед них посідає **Maple**, який є одним із лідерів універсальних систем і забезпечує користувачу зручне інтелектуальне середовище для математичних досліджень.

Програма розроблена спільно науково-дослідною групою відділу обчислювальної техніки університетів **Waterloo** (штат Онтаріо, Канада, заснованою в грудні 1980 року Кейтом Геддом і Гастоном Гоне) та Вищої технічної школи (ЕТН, Цюрих, Швейцарія).

На сьогодні **Maple** є потужною обчислювальною системою, призначеною для виконання складних проектів.

За допомогою **Maple** успішно виконуються складні алгебраїчні перетворення і спрощення над полем як дійсних, так і комплексних чисел, знаходяться границі, скінченні й нескінченні су-

ми, добутки, інтеграли, розв'язуються в символічному вигляді та чисельно алгебраїчні системи рівнянь і нерівностей, знаходяться корені многочленів, розв'язуються звичайні диференціальні рівняння та їх системи і т. п. У **Maple** включені пакети для розв'язування задач комбінаторики, двомірної і тривимірної евклідової геометрії, теорії груп, лінійної алгебри, булевої логіки, теорії графів, теорії розміщень, теорії чисел, проективної геометрії, лінійної оптимізації, статистики та інші.

Пакет включає розвинуту графічну бібліотеку і мову програмування.

Maple може розв'язувати велику кількість математичних задач, шляхом введення команд, без будь-якого попереднього програмування. **Maple** оперує не тільки наближеними числами, а й точними цілими та раціональними числами. Це дозволяє отримати відповідь із високою точністю.

Навчальний посібник є спробою автора показати застосування **Maple** при вивченні вищої математики студентами ВНЗів. Теми розділів посібника відповідають програмі курсу вищої математики аграрних університетів.

Навчальний посібник складається з передмови, вступу, п'ятнадцяти розділів, містить покажчик та бібліографію.

Перший розділ відведено опису інтерфейсу та довідкової системи ПСО **Maple**.

У другому розділі наведено списки операцій, математичних констант, стандартних математичних функцій, продемонстровано можливість зміни точності представлення чисел, показано виконання чисельних обчислень.

У третьому розділі розглядаються команди спрощення математичних виразів, представлено їх перелік та показано застосування при розв'язуванні вправ.

У четвертому розділі викладені команди розв'язання алгебраїчних і трансцендентних рівнянь та нерівностей на множині дійсних чисел.

П'ятий розділ відведено розв'язуванню лінійних і нелінійних систем рівнянь та нерівностей.

У шостому розділі розглядаються можливості пакета **Maple** до виконання графічних побудов на площині.

Сьомий розділ відведено комплексним числам: проілюстровано задання комплексних чисел у **Maple**, виконання дій над числовими виразами в полі комплексних чисел, показано виділення дійсної і уявної частини комплексного числа та знаходження спряжених виразів.

У восьмому розділі розглянуто деякі команди лінійної алгебри, наведено списки дій над матрицями та векторами, показано застосування цих команд при розв'язанні конкретних задач.

Дев'ятий розділ відведено обчисленню границь, сумуванню та рядам.

У десятому розділі викладено диференціювання функцій з однією та двома змінними в середовищі **Maple**, розглянуто типові прикладні задачі на застосування похідної.

Одинадцятий розділ присвячено побудові графів 3D.

У дванадцятому розділі представлені можливості **Maple** для знаходження невизначених інтегралів, обчислення визначених та кратних інтегралів, наведена достатня кількість прикладів і задач, що ілюструють застосування визначених інтегралів.

У тринадцятому розділі проілюстровано використання пакета **Maple** до розв'язання диференціальних рівнянь та систем рівнянь.

Чотирнадцятий розділ відведений аналітичній геометрії. В ньому розглядається пакет двовимірної евклідової геометрії **geometry** та пакет тривимірної евклідової геометрії **geom3d**. За допомогою задач проілюстровано здатність **Maple** розв'язувати практично будь-яку задачу аналітичної геометрії.

Деякі можливості застосування **Maple** до розв'язання задач комбінаторики, теорії ймовірностей та математичної статистики проілюстровано в п'ятнадцятому розділі посібника.

Навчальний посібник написаний таким чином, щоб читач міг отримати головні відомості про **Maple**, навчитися застосовувати їх до розв'язування задач елементарної та вищої математики, не відволікаючись на детальне вивчення кожної команди. Вивчен-

ня команд **Maple** подається поступово, по ходу вивчення матеріалу в різних розділах посібника.

Автор сподівається, що навчальний посібник допоможе студентам при вивченні дисципліни «Вища математика», сформує навички практичного використання пакета символьних обчислень **Maple** при вивченні інших дисциплін.

Українсько-англійський словник математичних термінів

Абсциса – abscissa
Аргумент – argument
Арифметичний корінь –
arithmetic root
Біквадратне рівняння –
biquadratic equation
Вершина кута –
vertex of an angle
Визначити – evaluate
Виконати дії –
execute operations
Вираз – expression
Від’ємний – negative
Віднімання – subtraction
Відношення – ratio
Відповідь – answer
Відсоток – percent
Вісь абсцис – abscissa axis
Вісь ординат – ordinate axis
Властивість – property
Вправа – exercise

Гіпербола – hyperbola
Гострий кут – aris
Градус – degree
Графік – graph
Двочлен – binomial
Декартові координати –
cartesian coordinates
Десятковий дріб – decimal
Дискримінант – discriminant
Ділене – dividend
Ділення – division
Дільник – divisor
Добуток – product
Довжина – length
Доданок – summand
Додатний – positive
Дріб – fraction
Дробова частина –
fractional part
Дужки – brackets
Залежна змінна –

dependent variable	method of substitution
Заміна – replacement	Многочлен – polynomial
Зведення – reduction	Множник – factor, multiplier
Звичайний дріб – ordinary fraction	Модуль – modulus
Зменшуване – minuend	Наближене значення – approximate value
Змінна – variable	Наприклад – for example
Знайти – find	Наступний – next
Знак – sign	Натуральне число – natural number
Знаменник – denominator	Натуральний степінь – natural power
Зростаюча функція – increasing function	Невід’ємний – non-negative
Інтервал – interval	Непарний – odd
Ірраціональність – irrationality	Неповне квадратне рівняння – partial quadratic equation
Квадратне рівняння – quadratic equation	Неправильний дріб – improper fraction
Квадратний корінь – square root	Нерівність – inequality
Квадратний тричлен – quadratic trinomial	Нескінченний – infinite
Коефіцієнт – coefficient	Нескінченність – infinity
Координата – coordinate	Нестрога нерівність – non-strict inequality
Корені рівняння – equation roots	Обернена пропорційність – inverse proportionality
Корінь – root	Об’єднання – union
Корінь n -го степеня – n -th order root	Область визначення функції – domain of function
Крайній член пропорції – external elements of proportion	Область значень функції – range of function
Кубічний корінь – cubic root	Одночлен – monomial
Кут – angle	Ордината – ordinate
Метод інтервалів – intervals’ method	Основа степеня – power base
Метод підстановки –	Парабола – parabola
	Парна функція – even function

Перевірка – checking	Розкласти на множники –
Перестановка – permutation	factorize
Перетворення – transformation	Симетричний – symmetrical
Периметр – perimeter	Система – system
Період – period	Скінченний – finite
Періодичний дріб –	Скоротити дріб –
periodic fraction	reduce fraction
Підносити до другого	Спадна функція –
(третього) степеня –	decreasing function
raise to the second (third) power	Співвідношення – ratio
Подібні члени – similar terms	Спільний множник –
Показник кореня –	a common factor
roots indicator/order	Спосіб додавання –
Правило – rule	way of adding
Приклад – example	Спосіб підстановки –
Проміжок – interval	way of substitution
Пропорція – proportion	Спростити – simplify
Процент – percent	Спряжений – conjugate
Пряма – straight line	Степенева функція –
Пряма пропорційність –	power function
direct proportionality	Степінь – power
Радикал – radical	Степінь полінома –
Радіус – radius	degree of polynomial
Раціональне число –	Строга нерівність –
rational number	strict inequality
Раціональність – rationality	Сума – sum
Рівність – equality	Таблиця – table
Рівносильність – equivalence	Тотожні перетворення –
Рівняння – equation	identical transformations
Різниця – difference	Тотожність – identity
Розбивають – divide	Точка – point
Розв’язок – solution	Тригонометрична функція –
Розв’язок системи –	trigonometric function
solution of system	Трикутник – triangle
Розклад – expansion	Узагальнений – generalized

Фігурна дужка – brace

Формула – formula

Функція – function

Цифра – digite

Ціла частина – integer part

Ціле число – integer

Чверть – quarter, quadrant

Чисельник – numerator

Числова вісь – number axis

Числова пряма –

numerical line

Штриховка – shading

1

Інтерфейс та довідкова система ПСО Maple 7

1.1 Інтерфейс ПСО Maple

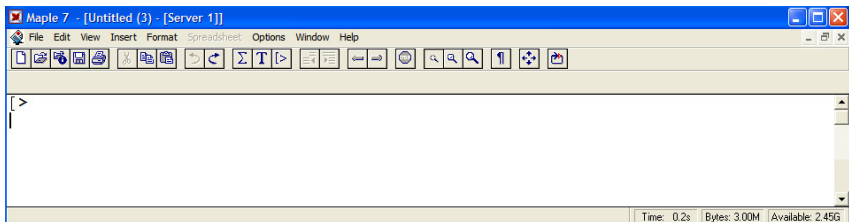


Рис. 1.1. Інтерфейс ПСО Maple

Інтерфейс Maple, як і всі додатки під Windows, має ряд характерних елементів, що показані на рис. 1.1 та перераховані нижче:

- 1) рядок заголовка (зверху);
- 2) рядок головного меню;
- 3) головна панель інструментів;

- 4) контекстна панель інструментів, вид якої залежить від режиму роботи з Maple (на рис.1.1 закрита);
- 5) вікно введення і редагування документів;
- 6) рядок стану (в самому низу вікна).

Найбільш повні можливості управління надає головне меню системи Maple. Воно зазвичай розташоване безпосередньо під рядком заголовка. Меню надає доступ до основних операцій і параметрів користувацького інтерфейсу системи. Нижче наведено перелік меню, доступних при наявності відкритого документа:

1. File — робота з файлами і друком документів;
2. Edit — команди редагування документа і операції з буфером обміну;
3. View — управління видом інтерфейсу користувача;
4. Insert — операції вставки;
5. Format — операції задання форматів;
6. Spreadsheet — операції задання таблиць;
7. Options— задання параметрів;
8. Window— управління вікнами;
9. Help— робота з довідковою системою.

За допомогою команд меню View можливо модифікувати інтерфейс системи Maple. У цьому меню (воно показане на рис. 1.2 у відкритому стані) можна побачити список палітр, *Palettes*, призначених для введення математичних знаків. Встановивши прапорці відповідних палітр, можна вивести їх на екран і перемістити в будь-яке місце. Всі чотири палітри математичних символів представлені на рис. 1.2.

Призначення знаків на палітрах:

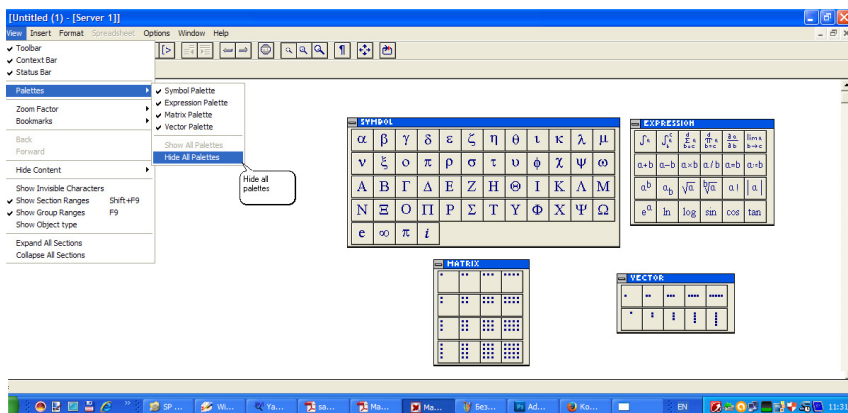


Рис. 1.2. Палітри пакета Maple

- SYMBOL — введення окремих символів (грецьких літер і деяких математичних знаків);
- EXPRESSION— введення шаблонів математичних операторів і операцій;
- MATRIX — введення шаблонів матриць різних розмірів;
- VECTOR — введення шаблонів векторів різних розмірів і типів (вектори-стовпчики чи вектори-рядки).

Ще одні важливі і корисні елементи інтерфейсу — спливаючі підказки. Вони з'являються, якщо навести курсор миші на той чи інший елемент інтерфейсу. На рис. 1.2 показана одна зі спливаючих підказок. Підказки мають вигляд хмарки, що випливає із зазначеного елемента інтерфейсу. Особливо зручні підказки для пояснень призначення кнопок палітр і панелей інструментів.

На рис.1.3 показано призначення кнопок панелі інструментів (Tool Bar). Ці кнопки дублюють найбільш важливі операції головного меню і мають наочні і типові для Windows-додатків позначення. Призначення кнопок та інших деталей інтерфейсу проілюстровано на рис. 1.3.

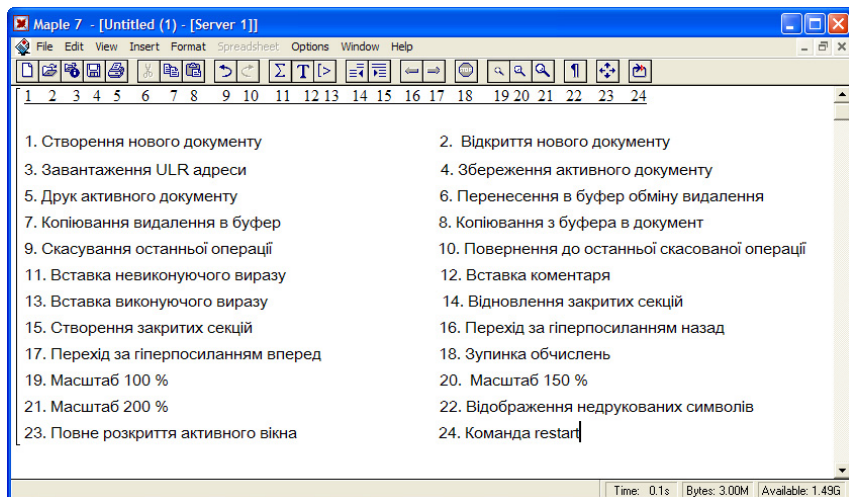


Рис. 1.3. Панель інструментів пакета Maple

При необхідності панелі інструментів можна забрати за допомогою команд меню **View** (див. рис. 1.2).

Корисним засобом для полегшення роботи із форматування текстів, заданням параметрів вхідних математичних виразів і графіків є контекстна панель інструментів. Як впливає з назви, контекстна панель **Context Bar** є контекстно-залежною — її зміст залежить від поточного положення маркера введення або виділення.

Контекстна панель містить такі елементи при введенні тексту коментаря (рис. 1.4):

- списки для задання стилю, шрифту і розміру символів, кнопки для додання напівжирного (**Bold**), похилого (*Italic*) і підкресленого (Underline) написання;
- кнопки для вирівнювання тексту;
- кнопку команди виконання всього документа.

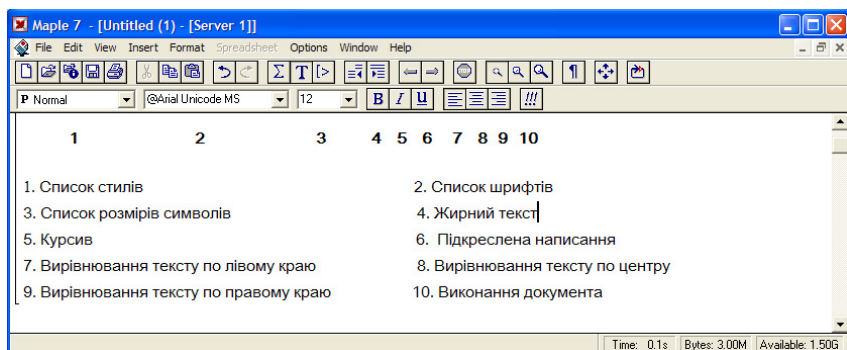


Рис. 1.4. Контекстна панель пакета Maple для тексту-коментаря

1.2 Довідкова система

INTRODUCTION

Команда INTRODUCTION у меню довідки запускає довідкову систему на сторінці вступу (рис. 1.5).

У вступі визначено призначення Maple як системи комп'ютерної алгебри та дається посилання на сайт фірми — розробника системи (www.maplesoft.com). Кладання на гіперпосилання переводить на початкову сторінку web-сервера фірми. На сторінці вступу є також гіперпосилання на навчальний курс (New User's Tour), на сторінки з оглядом нових можливостей Maple і довідки по різних елементах інтерфейсу.

Для визначення шляху подання потрібної довідки слугують 5 вікон-списків. На рис. 1.5 використовується тільки одне вікно, а інші 4 поки порожні. Вибираючи послідовно по елементу з кожного списку, можна знайти відповідну необхідну довідкову інформацію.

Навчальний курс New User's Tour

Команда New User's Tour відкриває вікно курсу, показане на рис. 1.6, із навчання основам користування Maple.

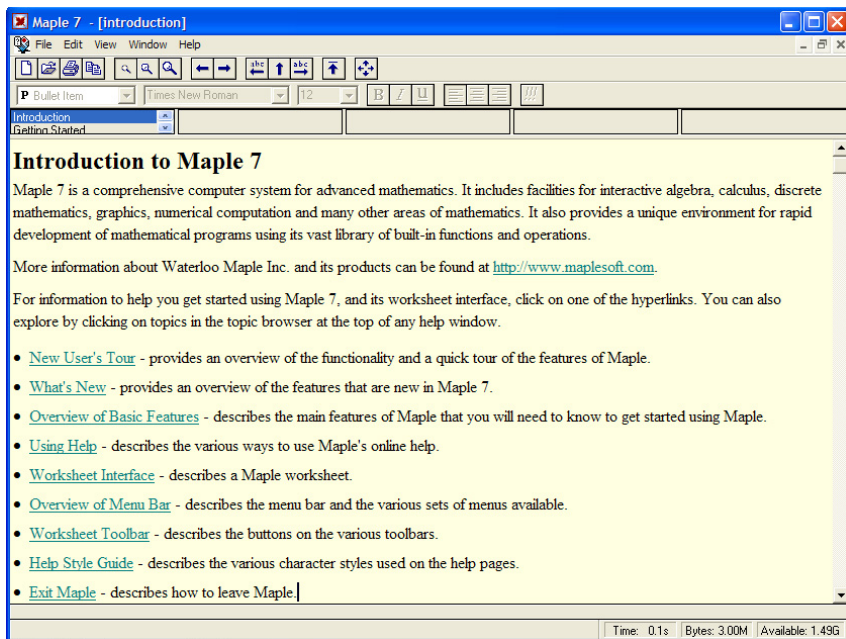


Рис. 1.5. Вікно довідкової системи зі вступом до пакета Maple

Нижче перераховані дванадцять розділів курсу New User's Tour. Найменування розділів є гіперпосиланнями. Для вивчення теми достатньо натиснути на її назві і відкриється відповідний розділ.

- 1). Working Through the New User's Tour — опрацювання туру нового користувача.
- 2). The Worksheet Environment — створення документів.
- 3). Numerical Calculations — числові розрахунки.
- 4). Algebraic Computations — алгебраїчні перетворення.
- 5). Graphics — графіки.
- 6). Calculus — обчислення.
- 7). Differential Equations — диференціальні рівняння.
- 8). Linear Algebra — лінійна алгебра.
- 9). Finance and Statistics — фінанси і статистика.

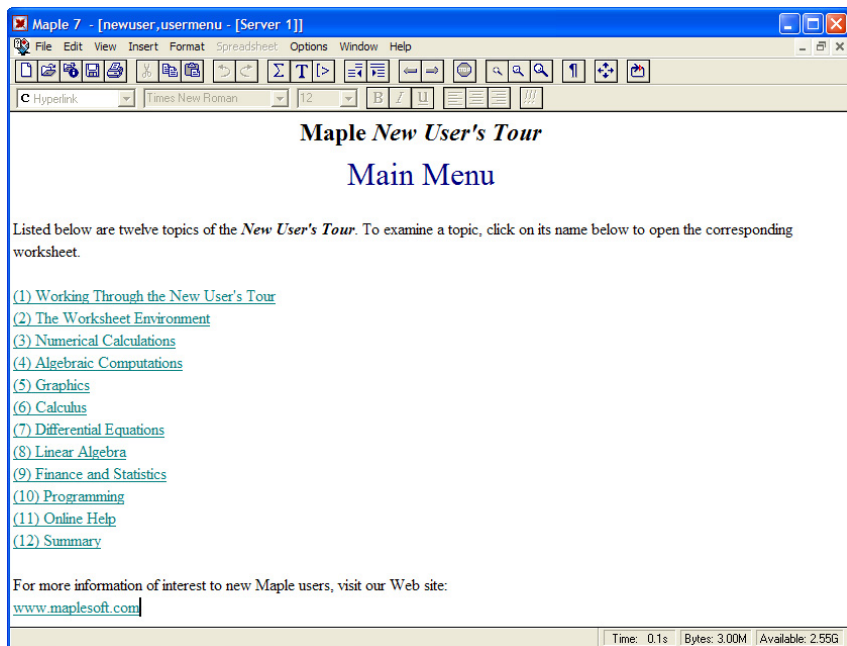


Рис. 1.6. Вікно з перерахуванням розділів навчального курсу пакета Maple

- 10). Programming — програмування.
- 11). Online Help — допомога через Інтернет.
- 12). Summary — висновок.

1.3 Контекстні панелі інструментів для дво- і тривимірних графіків

Двовимірні графіки будуються із заданням ряду параметрів, що визначають загальний стиль графіка. Ці параметри задають колір і стиль ліній графіка, вид координатних осей і т.д. Усі параметри мають значення за замовчуванням — вони і визначають вид графіка, при формуванні якого параметри не вказані.

Поряд із цим ряд параметрів можна змінювати, клацаючи

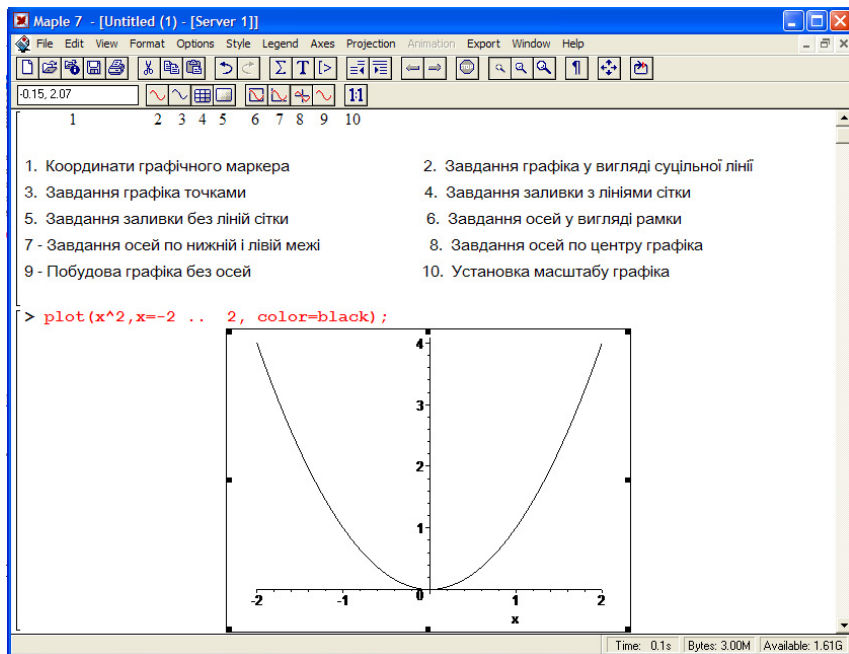


Рис. 1.7. Контекстна панель інструментів для двовимірного графіка

на відповідних кнопках контекстної панелі. На рис. 1.7 показано призначення кнопок контекстної панелі інструментів для редагування параметрів двовимірних графіків. Така панель з'являється, якщо двовимірний графік виділений або на ньому знаходиться маркер вводу.

Дія більшості кнопок цієї форми контекстної панелі досить очевидна. Так, графік на рис. 1.7 побудований суцільною лінією при натисканні кнопки, що задає стиль **Point style**. Крім того, у функції `plot` побудови графіка явно використана опція `color = black`, яка задає чорний колір лінії графіка.

Свій вид контекстної панелі мають і тривимірні графіки. Призначення її елементів представлено на рис. 1.8.

За допомогою контекстної панелі тривимірних графіків мо-

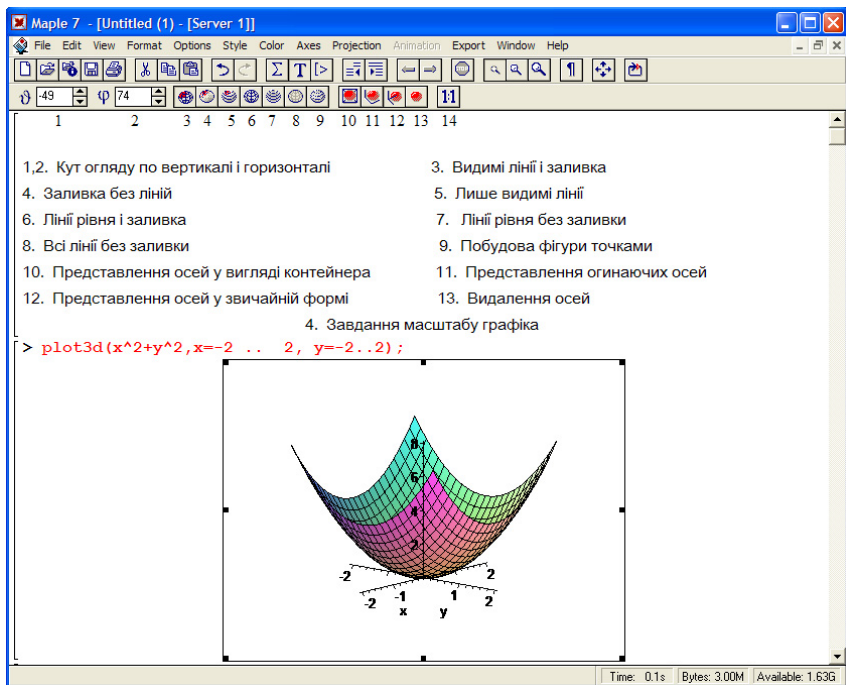


Рис. 1.8. Контекстна панель інструментів для тривимірного графіка

жна задати 7 стилів побудови тривимірних графіків і 4 стилі виведення координатних осей.

Можливі наступні стилі тривимірних графіків (група з семи кнопок у середині панелі): функціональне забарвлення з видимими лініями каркаса, функціональне забарвлення без ліній каркаса, функціональне забарвлення з контурними лініями, кольоровий каркас із видимими лініями, кольорові контурні лінії, кольоровий каркас з усіма (в тому числі невидимими) лініями і поверхня, побудована точками.

Два розташованих зліва лічильники дозволяють задавати потрібний кут огляду, причому Maple відразу ж відображає заданий поворот побудованої фігури. Її також можна обертати ми-

шкою, помістивши покажчик в область графіка і тримаючи натиснутою ліву кнопку. При цьому лічильники будуть відображати, змінюючи при переміщенні миші, кути огляду. Це дуже зручний засіб для спостереження за деталями тривимірних поверхонь і фігур, що будує функція `plot3d`.

1.4 Доступ до довідок і прикладів

У меню **Help** системи **Maple** зосереджені засоби доступу до довідки по всіх функціях системи. Довідки для будь-якої функції можна отримати, просто встановивши на її імені маркер введення і натиснувши клавішу **F1**. На рис. 1.9 показано вікно з початком довідки теми «Інтеграл».

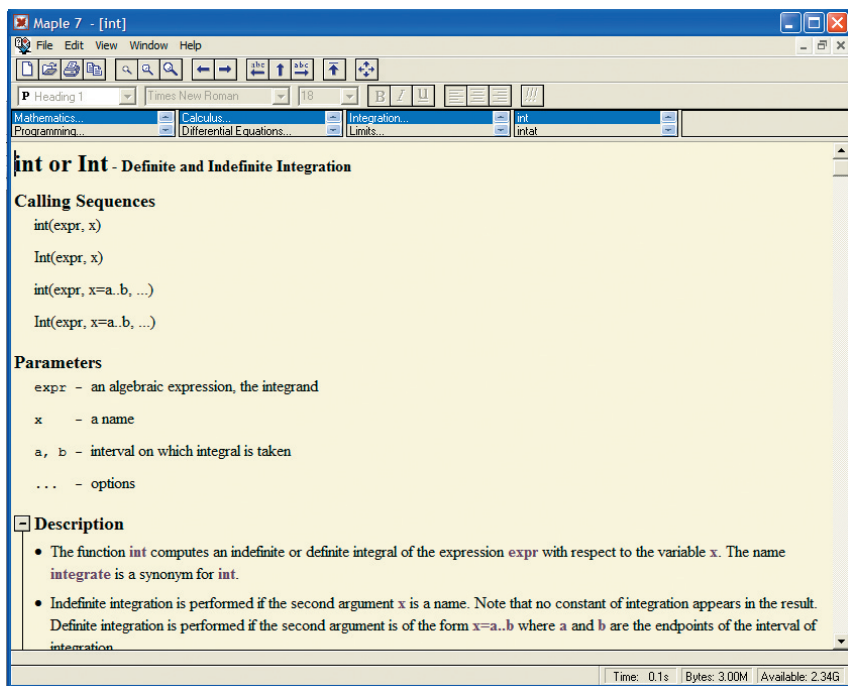


Рис. 1.9. Приклад довідки з теми «Інтеграл»

Як видно із рис. 1.9, вікно довідки містить п'ятиступінчастий контекстний покажчик, що дозволяє послідовно відшукувати потрібний розділ довідки. Коли довідка запрошується по конкретній темі (функції), то відразу з'являється відповідний їй розділ, точніше початок цього розділу.

Приклади з довідкової системи можна модифікувати. Для цього їх потрібно скопіювати в буфер і перенести у вікно документа **Maple**. Також у **Maple** є спеціальний розділ довідки, що дає доступ до прикладів і без їх копіювання. Для здійснення такого доступу у вікні довідки досить вибрати тему **ExampleWorksheets** у першому ж розділі контекстного покажчика. Відкриється вікно (тепер уже документа) з індексним каталогом прикладів (рис. 1.10).

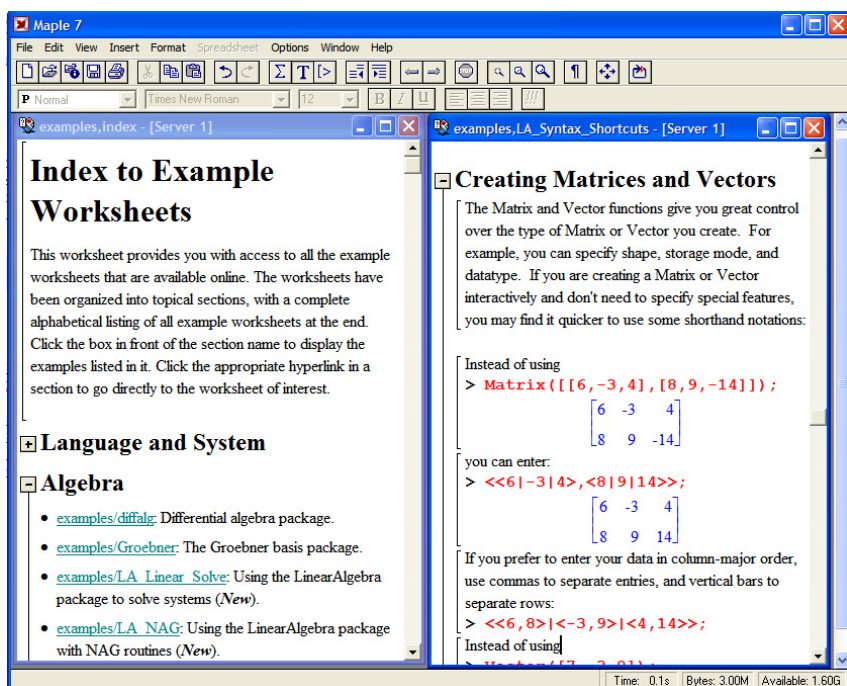


Рис. 1.10. Приклад довідки з теми «Алгебра»

Каталог прикладів дає доступ до величезного числа прикладів застосування **Maple**. Перегляд одного з них (алгебра) показаний на рис. 1.10 справа. Малюнок 1.10 ілюструє також техніку роботи з двома вікнами документів.

Основні команди по роботі з довідковою системою **Maple** зосереджені в меню **Help**, показаному на рис. 1.11. Воно містить

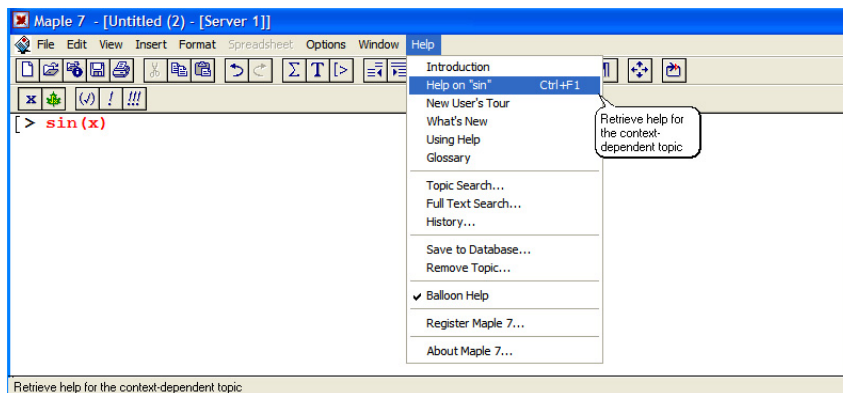


Рис. 1.11. Меню Help

команди, об'єднані в кілька груп.

У першу групу входять наступні команди:

- 1.1. INTRODUCTION — показ початкового розділу довідки (вступ);
- 1.2. HELP ON CONTEXT — висновок оперативної довідки по контексту;
- 1.3. NEW USER'S TOURS — запуск навчальної системи;
- 1.4. WHAT'S NEW — опис нових можливостей системи;
- 1.5. GLOSSARY — висновок покажчика термінів.

Другий розділ містить наступні команди:

- 2.1. TOPIC SEARCH — предметний пошук за заданим зразком;

2.2. FULL TEXT SEARCH — предметний пошук з повним оглядом тексту довідки;

2.3. HISTORY — висновок історії пошуку.

Третій розділ містить дві команди для роботи з базою даних:

3.1. SAVE TO DATABASE — запис даних у базу даних;

3.2. REMOVE TOPIC — відновлення бази даних предметного пошуку шляхом видалення додаткових даних.

Три останні розділи представлені командами:

4. BALLOON HELP — включення спливаючих підказок;

5. REGISTER MAPLE — реєстрація Maple;

6. ABOUT MAPLE — вивід вікна з інформацією про Maple.

1.4.1 Предметний пошук

Команда Topic Search (предметний пошук) — одна з найбільш потужних функцій довідки. Вона виводить вікно пошуку (рис. 1.12), що містить у верхній частині поле для введення зразка. Зразком може бути слово (наприклад, ім'я функції) або навіть частина слова. У вікні під цим полем з'являється список всіх об'єктів Maple, в індекс яких входить заданий зразок (рис. 1.12).

Тепер залишається із заданого списку слів вибрати потрібне, що призведе до появи вікна довідки з інформацією по цьому слову. Іноді індекс по цьому слову матиме кілька посилань на сторінки, що з'явилася, доведеться здійснити уточнення, довідку якого об'єкта отримати.

Вікно предметного пошуку в правій частині має чотири кнопки з наступним призначенням:

1. Search — пошук за зразком;

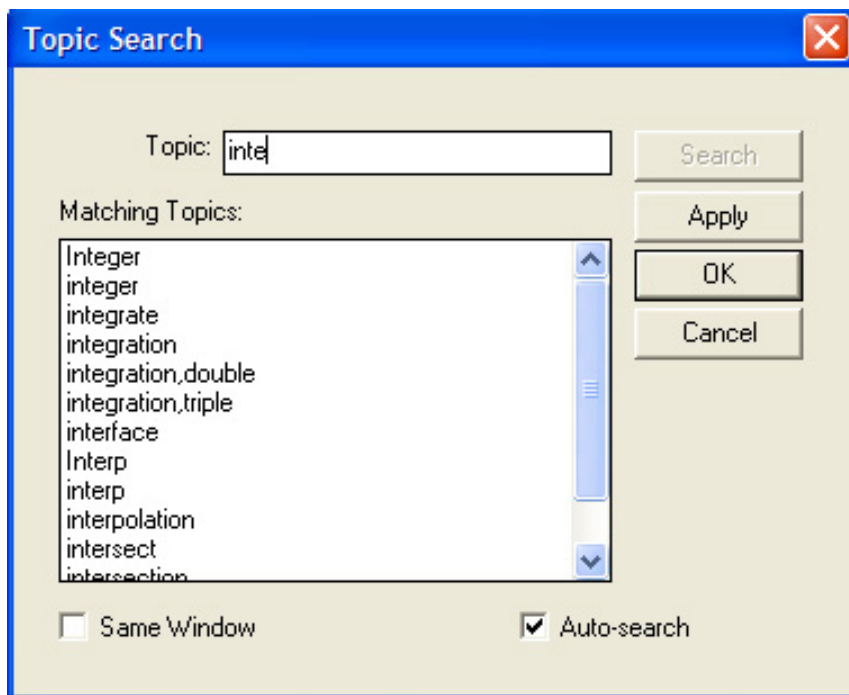


Рис. 1.12. Вікно предметного пошуку

2. **Apply** — висновок вікна обраного розділу довідки при збереженні вікна пошуку;
3. **OK** — закінчення пошуку (виводиться вікно з обраним розділом і зникає вікно пошуку);
4. **Cancel** — закриття вікна пошуку.

Крім того, внизу вікна пошуку є дві кнопки для задання двох параметрів:

- **Same Window** — вивід у те ж вікно (якщо вікно не відкрите на повний екран);

- **Auto-Search** — автоматичний пошук за зразком у міру введення останнього.

1.4.2 Математичні бібліотеки Maple

Бібліотекою (пакедом) зазвичай називають колекцію процедур, призначених для розв’язання певного класу задач. Можливості пакетів аналітичних (символьних) обчислень оцінюють за їх вмінням розв’язувати найрізноманітніші математичні задачі. Крім команд стандартної бібліотеки **Maple** оснащений великою кількістю команд, організованих у пакети, спеціалізованих по темах. У поставці **Maple** існує понад сорок пакетів, у тому числі пакет для розв’язання задач лінійної алгебри, пакет з теорії графів та ін. Цей стандартний набір можна розширювати пакетами, розробленими самим користувачем. Для звернення до команд пакета з ім’ям **package** його потрібно завантажити за допомогою команди **with (package)**.

Наведемо перелік основних бібліотек, що можуть використовуватися студентами:

- 1) **combinat** — комбінаторика;
- 2) **combstruct** — комбінаторні структури;
- 3) **DEtools** — дослідження звичайних диференціальних рівнянь;
- 4) **finance** — фінансова математика;
- 5) **geom3d** — команди тривимірної евклідової геометрії;
- 6) **geometry** — команди двовимірної евклідової геометрії;
- 7) **group** — групи перестановок;
- 8) **linalg** — лінійна алгебра;
- 9) **LinearAlgebra** — пакет для розв’язання задач лінійної алгебри, заснований на нових структурах даних Maple (**rtable** і

module) та використовує алгоритми NAG (Number Algorithm Group);

- 10) **networks** — операції теорії графів;
- 11) **PDEtools** — дослідження рівнянь в частинних похідних;
- 12) **plots** — двовимірна і тривимірна графіка;
- 13) **plottools** — робота з графічними об'єктами;
- 14) **polytools** — операції з поліномами;
- 15) **powseries** — робота з формальними степеневими розкладами;
- 16) **simplex** — лінійна оптимізація;
- 17) **slode** — розв'язання лінійних звичайних диференціальних рівнянь у вигляді формальних рядів;
- 18) **Spread** — команди для роботи з електронними таблицями Maple;
- 19) **stats** — математична статистика;
- 120) **student** — пакет навчальних обчислень;
- 21) **sumtools** — операції зі скінченними і нескінченними сумами.

2

Числові обчислення

2.1 Введення виразів

Розглянемо введення виразів у Maple, можливість зміни точності представлення чисел, наведемо списки операцій, математичних констант та функцій, покажемо вправність Maple при обчисленні числових виразів.

Будь-які введені вирази в Maple повинні закінчуватися символом `:` або `;`. У першому випадку результат не буде виводитися на екран, у другому — буде.

Наприклад,¹

```
> x:=0.3*(2/7):
```

```
> x:=0.3*(2/7);
```

$x := .08571428571$

Для того, щоб округлити вираз, одержаний в символьному вигляді з плаваючою комою, слід використати команду `evalf`.

Наприклад.

```
> f:=16/3;
```

$$f := \frac{16}{3}$$

¹У Maple в десятковому дробі ціла частина відділяється від дробової крапкою, не комою!

```
> evalf(f);
```

```
5.333333333
```

Змінювати точність представлення чисел можна за допомогою глобальної змінної `Digits`.

Наприклад.

Роздрукуємо число π з точністю до 50 знаків:

```
> Digits:=50;
```

```
Digits := 50
```

```
> evalf(Pi);
```

```
3.1415926535897932384626433832795028841971693993751
```

2.2 Список операцій. Математичні константи. Стандартні математичні функції

Список операцій Maple наведено в табл. 2.1.

У таблиці 2.2 виписані основні математичні константи ПСО Maple.

Таблиця 2.3 містить назви стандартних математичних функцій Maple.

Проілюструємо виконання найпростіших операцій за допомогою Maple.

Приклад 2.1. Знайти суму чисел 2,5 і 4,9.

```
> 2.5+4.9;
```

```
7.4
```

Приклад 2.2. Знайти різницю чисел 3,625 і 8,9987.

```
> 3.675-8.9987;
```

```
-5.3137
```

Приклад 2.3. Знайти добуток чисел 5,7866 і -4,8776.

```
> 5.7866*(-4.8776);
```

```
-28.22472016
```

Табл. 2.1. Список операцій

> a+b	додавання
> a-b	віднімання
> a*b	множення
> a/b	частка
> a^b	піднесення до степеня
> a**b	піднесення до степеня
> n!	факторіал
> iquo(a,b)	частка
> irem(a,b)	остача
> isqrt(n)	квадратний корінь (цілочисельне наближення)
> igcd(a,b)	найбільший спільний дільник
> ilcm (a,b)	наменшие спільне кратне
> signum(n)	знак числа
> abs(n)	абсолютне значення числа
> max(a,b)	максимум
> min (a,b)	мінімум

Приклад 2.4. Знайти частку чисел -35 і 7.

> -35/7;

-5

Приклад 2.5. Піднести 3,56 до кубу.

> 3.56^3;

45.118016

Приклад 2.6. Піднести 3,56 до кубу.

> 3.56**3;

45.118016

Приклад 2.7. Обчислити 5!.

```
> 5!;
```

120

Приклад 2.8. Вибрати менше з чисел 33 та 5.

```
> min(33,5);
```

5

Табл. 2.2. Математичні константи

> Pi	число π
> e	число Ейлера, або число Непера (основа натурального логарифма)
> I	уявна одиниця (квадратний корінь з -1)
> infinity	нескінченність
> true	істинно
> false	хибно

Приклад 2.9. Знайти цілу частину частки від ділення 45 на 4.

```
> iquo(45,4);
```

11

Приклад 2.10. Знайти остачу від ділення 40 на 7.

```
> irem(40,7);
```

5

Приклад 2.11. Знайти цілочисельне наближення кореня квадратного з 50.

```
> isqrt(50);
```

7

Приклад 2.12. Знайти найбільший спільний дільник чисел 18 і 12.

```
> igcd(18,12);
```

6

Приклад 2.13. Знайти найменше спільне кратне чисел 24 і 56.

```
> ilcm(24,56);
```

168

Приклад 2.14. Визначити знак числа 25.

```
> signum(25);
```

1

(тобто, число позитивне).

Табл. 2.3. Стандартні математичні функції

Maple	Математичний запис
> exp(x)	e^x
> ln(x) або log(x)	$\ln x$
> log10(x)	$\lg x$
> log[a](x)	$\log_a x$
> sqrt(x)	$\sqrt{x}$
> abs(x)	$ x $
> signum(x)	$\text{signum } x$
> n!	$n!$
> sin(x)	$\sin x$
> cos(x)	$\cos x$
> tan(x)	$\text{tg } x$
> cot(x)	$\text{ctg } x$
> sec(x)	$\sec x$
> csc(x)	$\text{cosec } x$
> arcsin(x)	$\arcsin x$
> arccos(x)	$\arccos x$
> arctan(x)	$\text{arctg } x$
> arccot(x)	$\text{arcctg } x$
> round(x)	округлення до цілого

Приклад 2.15. Визначити знак числа -25 .

```
> signum(-25);
```

-1

(тобто, число негативне)

Приклад 2.16. Знайти модуль $-543,67$.

```
> abs(-543.67);
```

543.67

Приклад 2.17. Знайти модуль $543,67$.

```
> abs(543.67);
```

543.67

Приклад 2.18. Вибрати більше з чисел 45 та 65 .

```
> max(45,65);
```

65

Приклад 2.19. Задати вираз e^3 .

```
> exp(3);
```

e^3

Приклад 2.20. Знайти наближене значення e^3 .

```
> exp(3.);
```

20.08553692

Приклад 2.21. Обчислити $\arccos(\cos(2 \operatorname{arccotg}(\sqrt{2}-1)))$.

```
> arccos(cos(2*arccot(sqrt(2)-1)));
```

$\frac{3}{4}\pi$

Команда `convert`

Для перетворення виразу одного типу в інший тип слугує команда `convert`.

Приклад 2.22. Перетворити число $2,356$ у дріб типу $\frac{a}{b}$.

```
> convert(2.356,fraction);  
589  
250
```

Приклад 2.23. Виконати протилежне перетворення.

```
> convert(589/250,float);  
2.356
```

Приклад 2.24. Перейти від запису числа 25, що записане у десятковій системі числення, до його запису у двійковій системі числення.

```
> convert(25,binary);  
11001
```

Приклад 2.25. Проробити аналогічне з числом $-25,345$.

```
> convert(-25.345,binary);  
-11001.01011
```

Приклад 2.26. Перейти від двійкової форми запису числа 11001 до десяткової.

```
> convert(11001,decimal,binary);  
25
```

Для переведення градусної міри кута в радіанну і радіанної в градусну також використовують команду **convert**.

Приклад 2.27. Подати кут $\frac{\pi}{6}$ радіан у градусній мірі.

```
> convert(Pi/6,degrees);  
30 degrees
```

Приклад 2.28. Подати кут 45° у радіанній мірі.

```
> convert(45*degrees,radians);  
1  
4  $\pi$ 
```

Приклад 2.29. Знайти наближене значення $\sin 37^\circ$.

```
> sin(convert(37*degrees,radians));
      sin  $\left(\frac{37}{180} \pi\right)$ 
> evalf(%);
      .6018150234
```

Приклад 2.30. Обчислити:

$$\frac{(7 - 6,35) : 6,5 + 9,9}{(1,2 : 36 + 1,2 : 0,25 - 1\frac{5}{16}) : \frac{169}{24}} \cdot$$

```
> ((7-6.35)/6.5+9.9)/((1.2/36+1.2/0.25-21/16)/
(169/24));
      20.00000000
> convert(20.0000000,fraction);
      20
```

2.3 Завдання для самостійного виконання

1. Використовуючи глобальну змінну Digits, роздрукувати число e з точністю до 30 знаків.
2. Перетворити число 12,656 у дріб типу $\frac{a}{b}$.
3. Перейти від запису числа 15, що записане у десятковій системі числення, до його запису у двійковій системі числення.
4. Перейти від двійкової форми запису числа 110110 до десяткової.
5. Подати кут $\frac{\pi}{3}$ радіан у градусній мірі.
6. Подати кут 135° у радіанній мірі.
7. Знайти наближене значення $\sin 49^\circ$.

8. Обчислити:

$$1) \left(\frac{3\frac{1}{3}+2,5}{2,5-1\frac{1}{3}} \cdot \frac{4,6-2\frac{1}{3}}{4,6+2\frac{1}{3}} \cdot 5,2 \right) : \left(\frac{0,05}{\frac{1}{7}-0,125} + 5,7 \right);$$

$$2) \cos \frac{\pi}{5} + \cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5} + \cos \frac{6\pi}{5};$$

$$3) \operatorname{tg} \left(\frac{3\pi}{4} - \frac{1}{4} \arcsin \left(-\frac{4}{5} \right) \right);$$

$$4) -\log_2 \log_2 \sqrt{\sqrt[4]{2}}.$$

3

Операції з формулами

3.1 Спрощення математичних виразів

Проілюструємо можливості **Maple** при роботі з формулами, наведемо список команд спрощення математичних виразів та покажемо їх застосування при розв'язуванні вправ.

Для спрощення математичних виразів **Maple** володіє широкими можливостями. Імена команд для проведення математичних перетворень прості і відповідають англійським термінам: факторизація — **factor**, розкриття дужок — **expand**, спрощення виразу — **simplify**, підстановка — **subs** і т. д.

Табл. 3.1. Команди спрощення

Звертання	Призначення
> collect(EX,VAR)	зведення подібних доданків
> combine(EX,VAR)	об'єднання членів
> expand(EX)	розкриття дужок
> factor(EX)	розклад виразу на множники
> normal(RAT)	нормалізація дробу
> simplify(EX,OPT)	спрощення виразу

У командах спрощення використані наступні позначення: EX — вираз; VAR — змінна; RAT — раціональний дріб; OPT — до-

даткові умови.

Розклад виразу EX на множники виконує команда `factor(EX)`.

Приклад 3.1. Розкласти на множники поліном

$$f(x) = x^6 - 4x^4 + x^2 + 6.$$

```
> f:=x^6-4*x^4+x^2+6;
```

$$f := x^6 - 4x^4 + x^2 + 6$$

```
> factor(f);
```

$$(x^2 - 2)(x^2 - 3)(x^2 + 1)$$

Знову звернемося до команди `> factor`, вказавши список допустимих при запису відповіді радикалів.

Приклад 3.2. Розкласти на множники поліном

$$f(x) = x^6 - 4x^4 + x^2 + 6.$$

```
> f=factor(f,[sqrt(2),sqrt(3)]);
```

$$x^6 - 4x^4 + x^2 + 6 = (x^2 + 1)(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$$

Команда `factor` забезпечує також скорочення спільних множників чисельника і знаменника алгебраїчного дробу.

Приклад 3.3. Скоротити дріб

$$\frac{x^9 - 1}{x - 1}.$$

```
> f:=(x^9-1)/(x-1);f=factor(f);
```

$$f := \frac{x^9 - 1}{x - 1}$$

$$\frac{x^9 - 1}{x - 1} = (x^2 + x + 1)(x^6 + x^3 + 1)$$

Приклад 3.4. Спростити вираз

$$\frac{p^3 + 4p^2 + 10p + 12}{p^2 + 2p + 6} : \frac{p^3 - p^2 + 2p + 16}{p^3 - 3p^2 + 8p}.$$

```

> f:=((p^3+4*p^2+10*p+12)/p^2+2*p+6))/
((p^3-p^2+2*p+16)/(p^3-3*p^2+8*p));
      f := \frac{(p^3 + 4p^2 + 10p + 12)(p^3 - 3p^2 + 8p)}{(p^2 + 2p + 6)(p^3 - p^2 + 2p + 16)}
> f:=factor(f);
      f := p

```

Команда `simplify` здійснює спрощення виразу.

Приклад 3.5. Спростити вираз

$$\frac{\sin^4 x + \cos^4 x - 1}{\sin^6 x + \cos^6 x - 1}.$$

```

> B:=((sin(x))^4+((cos(x))^4-1))/
((sin(x))^6+((cos(x))^6-1));
      B := \frac{\sin(x)^4 + \cos(x)^4 - 1}{\sin(x)^6 + \cos(x)^6 - 1}
> simplify(B);
      \frac{2}{3}

```

Приклад 3.6. Спростити вираз

$$16 \sin^5 x - 20 \sin^3 x + 5 \sin x - \sin 5x.$$

```

> C:=16*(sin(x))^5-20*(sin(x))^3+5*(sin(x))
-sin(5*x);
      C := 16 \sin(x)^5 - 20 \sin(x)^3 + 5 \sin(x) - \sin(5x)
> simplify(C);
      0

```

Приклад 3.7. Спростити вираз

$$\sqrt{25^{\frac{1}{\log_6 5}} + 49^{\frac{1}{\log_8 7}}}.$$

```

> sqrt(25^(1/log[6](5))+49^(1/log[8](7)));
      \sqrt{25^{\left(\frac{\ln(6)}{\ln(5)}\right)} + 49^{\left(\frac{\ln(8)}{\ln(7)}\right)}}
> simplify(%);

```

10

Для скорочення спільних множників чисельника і знаменника дробу та зведення суми алгебраїчних дробів до спільного знаменника слугує команда нормалізації дробу: `> normal (RAT)`.

Приклад 3.8. Спростити вираз

$$\frac{3(x+2)^2(x-3)^2 - 2(x+2)^3(x-3)}{(x-3)^4}.$$

```
> f:=(3*(x+2)^2*(x-3)^2-(x+2)^3*2*(x-3))/(x-3)^4;
```

$$f := \frac{3(x+2)^2(x-3)^2 - 2(x+2)^3(x-3)}{(x-3)^4}$$

```
> normal(f);
```

$$\frac{(x+2)^2(x-13)}{(x-3)^3}$$

Для поліноміальних виразів EX команда `expand(EX)` розкриває дужки, а дробово-раціональні вирази подає у вигляді суми дробів.

Приклад 3.9. Спростити вираз

$$-3x^2(x^4 + 2x^3 - 4) + 4x(4x^2 + 5x - 8) - (x^2 + 5)(x - 3).$$

```
> f:=-3*x^2*(x^4+2*x^3-4)+4*x*(4*x^2+5*x-8)-(x^2+5)*(x-3);
```

$$f := -3x^2(x^4 + 2x^3 - 4) + 4x(4x^2 + 5x - 8) - (x^2 + 5)(x - 3)$$

```
> f:=expand(f);
```

$$f := -3x^6 - 6x^5 + 35x^2 + 15x^3 - 37x + 15$$

Приклад 3.10. Подати дріб у вигляді суми дробів

$$\frac{x+2}{x+1}.$$

```
> f:=(x+2)/(x+1);
```

$$f := \frac{x+2}{x+1}$$

> f:=expand(f);

$$f := \frac{x}{x+1} + \frac{2}{x+1}$$

Maple автоматично спрощує складні радикали.

Приклад 3.11. Спростити складний радикал

$$A = 2\sqrt{3 + \sqrt{5 - \sqrt{13 + \sqrt{48}}}}$$

> A:=2*sqrt(3+sqrt(5-sqrt(13+sqrt(48))));

$$A := \sqrt{6} + \sqrt{2}$$

Для спрощення виразів, що містять не тільки квадратні корені, а й корені інших степенів використовується команда `radnormal`.

Приклад 3.12. Спростити вираз

$$A = \frac{\sqrt[4]{7\sqrt[3]{54} + 15\sqrt[3]{128}}}{\sqrt[3]{4\sqrt[4]{32} + \sqrt[3]{9\sqrt[4]{162}}}}$$

> A:=(7*(54)^(1/3)+15*(128)^(1/3))^(1/4)/
((4*(32)^(1/4))^(1/3)+(9*(162)^(1/4))^(1/3));

$$A := \frac{(7 \cdot 54^{(1/3)} + 15 \cdot 128^{(1/3)})^{(1/4)}}{4^{(1/3)} 32^{(1/12)} + 9^{(1/3)} 162^{(1/12)}}$$

> A:=radnormal((7*(54)^(1/3)+15*(128)^(1/3))^(1/4)/
((4*(32)^(1/4))^(1/3)+(9*(162)^(1/4))^(1/3)));

$$A := \frac{3}{5}$$

3.2 Завдання для самостійного виконання

1. Розкласти на множники вирази:

1) $x^8 - 16$;

2) $x^2(y - x) + y^2(z - x) + (x - y)$;

3) $x(y^2 - z^2) + y(z^2 - x^2) + z(x^2 - y^2)$.

2. Спростити вирази:

1) $\frac{\sqrt{x-4}\sqrt{x-4}+2}{\sqrt{x+4}\sqrt{x-4}-2}$;

2) $\frac{x^2-1+|x+1|}{|x|\cdot(x-2)}$;

3) $\frac{3-4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha}{3+4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha}$,

4) $\frac{1-\log_5^3 7}{(\log_5 7+\log_7 5+1)\log_5 \frac{5}{7}}$.

3. Подати дріб $\frac{x^2}{x^3-3x+2}$ у вигляді суми елементарних дробів.

4. Спростити складний радикал $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} - \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$.

4

Розв'язування рівнянь і нерівностей в Maple

4.1 Розв'язування алгебраїчних рівнянь

Пакет Maple успішно використовується при розв'язуванні алгебраїчних рівнянь та нерівностей.

Для розв'язування алгебраїчних рівнянь та нерівностей використовується команда `solve`.

Команда `solve` є багатоцільовою і застосовується для аналітичного розв'язання алгебраїчних рівнянь і їх систем, нерівностей і систем нерівностей, функціональних рівнянь, доведення тотожностей.

Команда `solve` має наступний вигляд: `solve (EQN,VAR)`, де EQN — рівняння або система рівнянь, а VAR — змінна або група змінних.

Приклад 4.1. Розв'язати рівняння

$$3x + 7 = 5x - 1.$$

```
> x:=solve(3*x+7=5*x-1,x);  
x := 4
```

Приклад 4.2. Розв'язати рівняння

$$2y^2 + 7y + 3 = 0.$$

> `y:=solve(2*y^2+7*y+3,y);`

$$y := \frac{-1}{2}, -3$$

Приклад 4.3. Розв'язати рівняння

$$\frac{x+5}{x-2} = \frac{5}{x+2} + \frac{28}{x^2-4}.$$

> `x:=solve((x+5)/(x-2)=5/(x+2)+28/(x^2-4),x);`

$$x := -4$$

Приклад 4.4. Розв'язати рівняння

$$\sqrt{2x+1} + 1 = x.$$

> `x:=solve(sqrt(2*x+1)+1=x,x);`

$$x := 4$$

Приклад 4.5. Розв'язати рівняння

$$\sqrt{\sqrt{x-5} + x} = 5.$$

> `x=solve(sqrt(sqrt(x-5)+x)=5,x);`

$$x = 21$$

Приклад 4.6. Розв'язати рівняння

$$|3x + 5| = 1.$$

> `x:=solve(abs(3*x+5)=1,x);`

$$x := \frac{-4}{3}, -2$$

Приклад 4.7. Розв'язати рівняння¹

$$a^2x + (a - 1) = (a + 1)x.$$

¹Maple не розглядає випадок, при яких значеннях параметра a рівняння не має розв'язку.

> solve(a^2*x+(a-1)=(a+1)*x,x);

$$-\frac{a-1}{a^2-a-1}$$

Приклад 4.8. Із формули $F = G \frac{mM}{r^2}$ виразити m через F, M, r, G .

> m:=solve(F=(G*m*M)/r^2,m);

$$m := \frac{F r^2}{G M}$$

Приклад 4.9. Розв'язати рівняння

$$\sqrt{10-x^2} + \sqrt{x^2+3} = 5.$$

> x:=solve(sqrt(10-x^2)+sqrt(x^2+3)=5,x);

$$x := 1, \sqrt{6}, -\sqrt{6}, -1$$

Приклад 4.10. Розв'язати рівняння

$$4x^4 - 16x^3 + 3x^2 + 4x - 1 = 0.$$

> x:=solve(4*x^4-16*x^3+3*x^2+4*x-1=0,x);

$$x := \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, 2 + \sqrt{3}, 2 - \sqrt{3}$$

Наведемо зразки розв'язування складніших нелінійних рівнянь.

Приклад 4.11. Розв'язати рівняння

$$\sqrt{x} + \frac{2x+1}{x+2} = 2.$$

> eqn1:=(sqrt(x)+(2*x+1)/(x+2)=2);

$$eqn1 := \sqrt{x} + \frac{2x+1}{x+2} = 2$$

> x1:=solve(eqn1,x);

$$x1 := 1$$

Приклад 4.12. Розв'язати рівняння

$$|x|^3 + |x-1|^3 = 9.$$

```
> eqn2:=(abs(x)^3+abs(x-1)^3=9);
      eqn2 := |x|^3 + |x - 1|^3 = 9
> x2:=solve(eqn2,x);
      x2 := 2, -1
```

Приклад 4.13. Розв'язати рівняння

$$x^{\frac{4}{5}} - 7x^{-\frac{2}{5}} + 6x^{-1} = 0.$$

```
> eqn3:=(x^(4/5)-7*x^(-2/5)+6*x^(-1)=0);
      eqn3 := x^(4/5) - 7/x^(2/5) + 6/x = 0
> x3:=solve(eqn3,x);
      x3 := 2 2^(2/3), 1
```

Приклад 4.14. Розв'язати рівняння

$$\lg(x+1,5) = -\lg x.$$

```
> eqn4:=(log10(x+1.5)=-log10(x));
      eqn4 := ln(x+1.5)/ln(10) = -ln(x)/ln(10)
> x4:=solve(eqn4,x);
      x4 := .5000000000
```

4.2 Розв'язування тригонометричних рівнянь

При розв'язуванні тригонометричних рівнянь, Maple за командою `solve` знаходить корені, які належать проміжку $[-\pi; \pi]$. Для знаходження всіх розв'язків тригонометричного рівняння використовується команда `>_ EnvAllSolutions := true:.`

Приклад 4.15. Розв'язати рівняння

$$\sin^2 x + 2 \sin x + 1 = 0.$$

```
> eqn5:=sin(x)^2+2*sin(x)+1=0;
```

$$eqn5 := \sin(x)^2 + 2 \sin(x) + 1 = 0$$

```
> x:=solve(eqn5,x);
```

$$x := -\frac{1}{2} \pi, -\frac{1}{2} \pi$$

Розв'яжемо це ж рівняння, використавши команду

```
> _EnvAllSolutions := true:
```

```
> _EnvAllSolutions := true;
```

```
  _EnvAllSolutions := true
```

```
> s:=solve(eqn5,x);
```

$$s := -\frac{1}{2} \pi + 2 \pi _Z1\sim, -\frac{1}{2} \pi + 2 \pi _Z2\sim$$

Приклад 4.16. Розв'язати рівняння

$$\sin^8 2x + \cos^8 2x = \frac{41}{128}$$

```
> eqn6:=sin(2*x)^8+cos(2*x)^8=41/128;
```

$$eqn6 := \sin(2x)^8 + \cos(2x)^8 = \frac{41}{128}$$

```
> s:=solve(eqn6,x);
```

$$\begin{aligned}
s := & \frac{1}{3} \pi + \pi_{-Z3\sim}, -\frac{1}{3} \pi + \pi_{-Z3\sim}, \frac{1}{6} \pi + \pi_{-Z4\sim}, \\
& -\frac{1}{6} \pi + \pi_{-Z4\sim}, -\frac{1}{12} \pi + \pi_{-Z5\sim}, -\frac{5}{12} \pi + \pi_{-Z5\sim}, \\
& \frac{1}{12} \pi + \pi_{-Z6\sim}, \frac{5}{12} \pi + \pi_{-Z6\sim}, \\
& \frac{1}{2} \arctan(\sqrt{2-5I}, \sqrt{2+5I}) + \pi_{-Z7\sim}, \\
& \frac{1}{2} \arctan(-\sqrt{2-5I}, \sqrt{2+5I}) + \pi_{-Z7\sim}, \\
& \frac{1}{2} \arctan(\sqrt{2-5I}, -\sqrt{2+5I}) + \pi_{-Z7\sim}, \\
& \frac{1}{2} \arctan(-\sqrt{2-5I}, -\sqrt{2+5I}) + \pi_{-Z7\sim}, \\
& \frac{1}{2} \arctan(\sqrt{2+5I}, \sqrt{2-5I}) + \pi_{-Z7\sim}, \\
& \frac{1}{2} \arctan(-\sqrt{2+5I}, \sqrt{2-5I}) + \pi_{-Z7\sim}, \\
& \frac{1}{2} \arctan(\sqrt{2+5I}, -\sqrt{2-5I}) + \pi_{-Z7\sim}, \\
& \frac{1}{2} \arctan(-\sqrt{2+5I}, -\sqrt{2-5I}) + \pi_{-Z7\sim}
\end{aligned}$$

Приклад 4.17. Розв'язати рівняння

$$\begin{aligned}
& \sin x = \cos x - 1. \\
> \text{_EnvAllSolutions} := \text{true}; \\
> \text{solve}(\sin(x)=\cos(x)-1, x); \\
& -\frac{1}{2} \pi + 2 \pi_{-Z1\sim}, 2 \pi_{-Z2\sim}
\end{aligned}$$

Maple успішно справляється і з розв'язуванням рівнянь, що містять обернені тригонометричні функції.

Приклад 4.18. Розв'язати рівняння

$$\begin{aligned}
& \arccos x + \arccos \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2}. \\
> \text{eqn1} := \arccos(x) + \arccos(x/2) = \text{Pi}/2;
\end{aligned}$$

$$\text{eqn1} := \arccos(x) + \arccos\left(\frac{1}{2}x\right) = \frac{1}{2}\pi$$

> solve(eqn1,x);

$$x = \frac{2}{5}\sqrt{5}$$

Приклад 4.19. Розв'язати рівняння

$$\arccos(2x) + \arcsin \sqrt{1-x^2} = \frac{4\pi}{3}.$$

> eqn2:= arccos(2*x)+arcsin(sqrt(1-x^2))=4/3*Pi;

$$\text{eqn2} := \arccos(2x) + \arcsin(\sqrt{1-x^2}) = \frac{4}{3}\pi$$

> solve(eqn2,{x});

$$x = -\frac{1}{2}$$

4.3 Розв'язування нерівностей

Наведемо приклади розв'язування нерівностей за допомогою Maple.

Приклад 4.20. Розв'язати нерівність

$$\frac{(x-2)(x-3)}{x(x+1)} \geq 0.$$

> solve((x-2)*(x-3)/(x*(x+1))>=0,x);

$$x < -1, 0 < x, x \leq 2, 3 \leq x$$

Приклад 4.21. Розв'язати нерівність

$$\frac{1}{x+2} < \frac{3}{x-3}.$$

> solve(1/(x+2)<3/(x-3),x);

$$-\frac{9}{2} < x, x < -2, 3 < x$$

Приклад 4.22. Розв'язати нерівність

$$\frac{\sqrt{17-15x-2x^2}}{x+3} > 0.$$

$$> \text{solve}(\text{sqrt}(17-15*x-2*x^2)/(x+3)>0,x);$$

$$-3 < x, x < 1$$

Приклад 4.23. Розв'язати нерівність

$$\log_{1,5} \frac{2x-8}{x-2} < 0.$$

$$> \text{solve}(\log[1.5]((2*x-8)/(x-2))<0,x);$$

$$4. < x, x < 6.$$

Приклад 4.24. Розв'язати нерівність

$$|x^3 - 1| > 1 - x.$$

$$> \text{solve}(\text{abs}(x^3-1)>1-x,x);$$

$$1 < x, x < -1, 0 < x, x < 1$$

4.4 Розв'язування задач

Проілюструємо застосування Maple при розв'язуванні задач на рух, спільну роботу, концентрацію, відсотки.

Задача 4.1. Моторний човен пройшов 36 км за течією і повернувся назад, витративши на весь шлях 5 годин. Швидкість течії річки 3 км/год. Знайти швидкість човна у стоячій воді.

Розв'язання

Нехай швидкість човна у стоячій воді $x \frac{\text{км}}{\text{год}}$, тоді швидкість за течією — $x + 3 \frac{\text{км}}{\text{год}}$, проти течії — $x - 3 \frac{\text{км}}{\text{год}}$.

Час руху за течією $\frac{36}{x+3}$, а проти течії $\frac{36}{x-3}$.

Відповідно до умови задачі маємо рівняння

$$\frac{36}{x+3} + \frac{36}{x-3} = 5.$$

Розв'язавши його, знайдемо швидкість човна у стоячій воді.

> solve(36/(x+3)+36/(x-3)=5,x);

$$-\frac{3}{5}, 15$$

$x = -\frac{3}{5}$ сторонній корінь.

Відповідь: $15 \frac{\text{км}}{\text{год}}$.

Задача 4.2. На виготовлення 99 деталей перший робітник витрачає на 2 години менше, ніж другий робітник на виготовлення 110 таких же деталей. Відомо, що перший робітник за годину виготовляє на 1 деталь більше, ніж другий. Скільки деталей за годину виготовляє другий робітник?

Розв'язання

Позначимо через n — число деталей, які виготовляє за годину другий робітник. Тоді перший робітник за годину виготовляє $n + 1$ деталь. На виготовлення 99 деталей перший робітник витрачає на 2 години менше, ніж другий робітник на виготовлення 110 таких же деталей, звідси маємо:

$$\frac{99}{n+1} + 2 = \frac{110}{n}.$$

> solve(99/(n+1)+2=110/n,n);

$$10, -\frac{11}{2}$$

Таким чином, другий робітник за годину виготовляє 10 деталей.

Відповідь: 10 деталей.

Задача 4.3. Ціна холодильника в магазині щорічно зменшується на одне і те ж число відсотків від попередньої ціни. Визначити, на скільки відсотків щороку зменшувалася ціна холодильника, якщо виставлений на продаж холодильник за 20 000 гривень через два роки був проданий за 15 842 гривні.

Розв'язання

Нехай ціна холодильника щорічно знижувалася на p відсотків. Тоді за два роки вона знизилася на $(1 - 0,01p)^2$, звідки маємо:

$$20\,000(1 - 0,01p)^2 = 15\,842.$$

```
> solve(20000*(1-0.01*p)^2=15842,p);
```

189., 11.

Оскільки $1 - 0,01p > 0$, то $p = 11\%$.

Відповідь: $p = 11\%$.

Задача 4.4. Два майстри, працюючи спільно, можуть пофарбувати приміщення за 18 год швидше, ніж перший майстер, працюючи сам, і за 32 год швидше, ніж другий майстер, працюючи сам. За скільки годин може пофарбувати приміщення кожен майстер, працюючи один?

Розв'язання

Нехай перший майстер виконає всю роботу за x годин, тоді обидва разом можуть виконати за $x - 18$ годин, а другий самостійно може виконати за $x - 18 + 32 = x + 14$ годин. Приймемо, як зазвичай, обсяг роботи за 1. Тоді продуктивність першого майстра дорівнює $\frac{1}{x}$, другого — $\frac{1}{x+14}$, а обох разом — $\frac{1}{x-18}$.

Маємо рівняння:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+14} = \frac{1}{x-18}.$$

```
> solve(1/x+1/(x+14)=1/(x-18),x);
```

42, -6

```
> x+14;
```

$x + 14$

```
> subs( x=42, x+14);
```

56

Відповідь: 42 год, 56 год.

Задача 4.5. У басейн проведені 2 труби (одна подає воду, друга — відводить), причому, через першу трубу басейн наповнюється на 2 години довше, ніж через другу звільняється від води. При наповненому на $1/3$ частину басейну були відкриті обидві труби, і басейн виявився порожнім через 8 годин. За скільки годин перша труба наповнює басейн при закритій другій трубі?

Розв'язання

Нехай перша труба наповнює порожній басейн за x годин, а друга звільняє від води повний за $x - 2$ години. Припустимо, що весь об'єм басейну дорівнює V літрів. За одну годину перша наливає $\frac{V}{x}$ літрів, а друга виливає $\frac{V}{x-2}$ літрів (більше, ніж вливає перша).

За 1 годину з басейну виліється $\frac{V}{x-2} - \frac{V}{x}$ літрів. За 8 годин з басейну виліється $8 \cdot \left(\frac{V}{x-2} - \frac{V}{x} \right)$ літрів, що дорівнює $\frac{1}{3}$ басейну, або $\frac{V}{3}$:

$$8 \cdot \left(\frac{V}{x-2} - \frac{V}{x} \right) = \frac{V}{3}.$$

> solve(8*(V/(x-2)-V/x)=V/3,x);

8, -6

$x = -6$ — сторонній корінь.

Відповідь: 8 год.

Maple зручно використовувати при розв'язуванні фізичних задач.

Задача 4.6. Знайти масу вуглекислого газу CO_2 в балоні об'ємом 40 л при температурі 288^0 K і тиску 4,9 МПа.

Розв'язання

Із рівняння Менделєєва–Клапейрона

$$pV = \frac{m}{M}RT$$

визначаємо масу m :

> eq1:=p*V=m*R*T/M;

$$eq1 := pV = \frac{mRT}{M}$$

> m:=solve(eq1,m);

$$m := \frac{pVM}{RT}$$

За умовою $V = 40 \text{ л} = 40 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$, $T = 288^\circ \text{ К}$, $p = 4,9 \text{ МПа} = 4,9 \cdot 10^6 \text{ Па}$. Молярна маса вуглецю CO_2 : $M = 44 \cdot 10^{-3} \frac{\text{кг}}{\text{Моль}}$, універсальна газова стала R : $R = 8,312 \frac{\text{Дж}}{\text{К.моль}}$. Виконаємо обчислення:

> m:=eval(m, [p=4.9*10^6, V=40*10^(-3), M=44*10^(-3), R=8.31, T=288]);

$$m := 3.603422917$$

Відповідь: 3,6 г.

Задача 4.7. Водолазний дзвін, що містить у початковий момент часу $v = 3$ молі повітря об'ємом $V_1 = 8 \text{ л}$, повільно опускають на дно водойми. При цьому відбувається ізотермічне стиснення повітря до кінцевого об'єму V_2 . Робота, виконана водою при стисненні повітря, визначається виразом $A = \alpha v T \log_2 \frac{V_1}{V_2}$ (Дж), де $\alpha = 5,75$ — стала, а $T = 300 \text{ К}$ — температура повітря. Який об'єм V_2 (у літрах) стане займати повітря, якщо при стисненні газу була виконана робота в 10350 Дж ?

Розв'язання

Задача зводиться до розв'язання рівняння

$$\alpha v T \log_2 \frac{V_1}{V_2} = 10350$$

при заданих значеннях сталої $\alpha = 5,75$, температури повітря $T = 300 \text{ К}$, кількості повітря $v = 3$ молі і об'єму повітря $V_1 = 8 \text{ л}$:

> solve(5.75*3*300*log[2](8/V2)=10350,V2);

2.

Відповідь: 2 л.

Задача 4.8. Водолазний дзвін, що знаходиться у воді, містить $v = 4$ молі повітря при тиску $P_1 = 1,2$ атмосфери, повільно опускається на дно водойми. При цьому відбувається ізотермічне стиснення повітря. Робота, що здійснюється водою при стискуванні повітря, визначається виразом $A = \alpha v T \log_2 \frac{P_2}{P_1}$, (Дж), де $\alpha = 11,5$ — стала, v — кількість молів повітря у дзоні, $T = 300$ К — температура повітря, P_1 (атм) — початковий тиск, P_2 (атм) — кінцевий тиск повітря у дзоні. До якого найбільшого тиску P_2 можна стиснути повітря у дзоні, якщо при стискуванні повітря здійснюється робота не більша, ніж 27 600 Джоулів? Відповідь подайте в атмосферах.

Розв'язання

Задача зводиться до розв'язання нерівності

$$\alpha v T \log_2 \frac{P_2}{P_1} \leq 27\,600$$

при заданих значеннях сталої $\alpha = 11,5$, кількості повітря $v = 4$ молі, температури повітря $T = 300$ К і початкового тиску повітря $P_1 = 1,2$ атмосфери:

```
> solve(11.5*4*300*log[2](p2/1.2)<=27600,{p2});
```

$$\{0. < p2, p2 < 4.800000000\}$$

```
> convert(%,fraction);
```

$$\{0 < p2, p2 < \frac{24}{5}\}$$

Відповідь: 4,8 атмосфери.

4.5 Завдання для самостійного виконання

1. Розв'язати рівняння:

1) $3y - 23 = 7 - 8y$;

2) $3t^2 - 12t + 4 = 2$;

3) $\frac{x^2+x-5}{x} + \frac{3x}{x^2+x-5} + 4 = 0$;

4) $\sqrt{3x+4} + \sqrt{x-4} = 2\sqrt{x}$;

5) $\sqrt[7]{\frac{5-x}{x+3}} + \sqrt[7]{\frac{x+3}{5-x}} = 2$;

6) $|x|^3 + |x-1|^3 = 9$;

7) $\frac{2^x+10}{4} = \frac{9}{2^{x-2}}$;

8) $x^{\lg x} = 1000x^2$;

9) $2\left(\operatorname{tg} \frac{t}{2} - 1\right) = \cos t$.

2. Із формули $F = G \frac{mM}{r^2}$ виразити r через F , M , m , G .

3. Із формули $z = 2a - 4b + 5c$ виразити b через z , a , c .

4. Розв'язати нерівність:

1) $3(5-3x) - 5x + 7 < 2x + 4$;

2) $\frac{(x+1)(x-4)^2}{x+2} \leq 0$;

3) $\frac{1}{x^2-5x+6} \leq \frac{1}{2}$;

4) $\frac{\sqrt{x}-3}{x-2} > 0$;

5) $\sqrt{x+61} < x+5$;

6) $x-3 < \sqrt{x-2}$;

7) $\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{8+x} - 81}{x^2+2x+5} < 0$;

8) $x^{\frac{2x-1}{3-x}} > 1$;

9) $\log_{\frac{1}{3}} \log_{\frac{1}{2}} \frac{x+4}{2x-3} < 0$;

10) $2 \cos x (\cos x - \sqrt{8} \operatorname{tg} x) < 5$.

5

Розв'язування систем рівнянь та нерівностей

5.1 Розв'язування систем рівнянь

За допомогою ПСО Maple можна знаходити розв'язки лінійних і нелінійних систем рівнянь та нерівностей. У цьому розділі розглянемо методику розв'язання систем лінійних і нелінійних рівнянь та нерівностей за допомогою команди `solve`.

Приклад 5.1. Розв'язати систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} 2x + y + z = 7; \\ x + 2y + z = 8; \\ x + y + 2z = 9. \end{cases}$$

```
> eqs1:={2*x+y+z=7, x+2*y+z=8, x+y+2*z=9};  
eqs1 := {2 x + y + z = 7, x + 2 y + z = 8, x + y + 2 z = 9}  
> solve(eqs1,{x,y,z});  
{z = 3, y = 2, x = 1}
```

Приклад 5.2. Розв'язати систему лінійних рівнянь, що містить

параметри:

$$\begin{cases} \frac{a+b}{x+y} + \frac{b+c}{y+z} - \frac{c+a}{z+x} = 1; \\ \frac{a+b}{x+y} - \frac{b+c}{y+z} + \frac{c+a}{z+x} = 1; \\ -\frac{a+b}{x+y} + \frac{b+c}{y+z} + \frac{c+a}{z+x} = 1. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &> \text{eqs2} := \{(a+b)/(x+y) + (b+c)/(y+z) - (c+a)/(z+x) = 1, \\ &\quad (a+b)/(x+y) - (b+c)/(y+z) + (c+a)/(z+x) = 1, \\ &\quad -(a+b)/(x+y) + (b+c)/(y+z) + (c+a)/(z+x) = 1\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{eqs2} &:= \left\{ \frac{a+b}{x+y} + \frac{b+c}{y+z} - \frac{c+a}{z+x} = 1, \frac{a+b}{x+y} - \frac{b+c}{y+z} + \frac{c+a}{z+x} = 1, \right. \\ &\quad \left. -\frac{a+b}{x+y} + \frac{b+c}{y+z} + \frac{c+a}{z+x} = 1 \right\} \end{aligned}$$

$$> \text{solve}(\text{eqs2}, \{x, y, z\});$$

$$\{z = c, y = b, x = a\}$$

Приклад 5.3. Розв'язати систему нелінійних рівнянь:

$$\begin{cases} y^2 - xy = -12; \\ x^2 - xy = 28. \end{cases}$$

$$> \text{eqs3} := \{y^2 - x*y = -12, x^2 - x*y = 28\};$$

$$\text{eqs3} := \{x^2 - xy = 28, y^2 - xy = -12\}$$

$$> \text{solve}(\text{eqs3}, \{x, y\});$$

$$\{y = 3, x = 7\}, \{x = -7, y = -3\}$$

Приклад 5.4. Розв'язати систему нелінійних рівнянь:

$$\begin{cases} x + y + z = 6; \\ x^2 + y^2 + z^2 = 14; \\ x^3 + y^3 + z^3 = 36. \end{cases}$$

$$> \text{eqs4} := \{x+y+z=6, x^2+y^2+z^2=14, x^3+y^3+z^3=36\};$$

$$\text{eqs4} := \{x + y + z = 6, x^3 + y^3 + z^3 = 36, x^2 + y^2 + z^2 = 14\}$$

$$> \text{solve}(\text{eqs4}, \{x, y, z\});$$

$$\begin{aligned} &\{x = 3, z = 2, y = 1\}, \{x = 2, z = 3, y = 1\}, \{x = 3, y = 2, z = 1\}, \\ &\{x = 1, z = 3, y = 2\}, \{x = 2, z = 1, y = 3\}, \{x = 1, z = 2, y = 3\} \end{aligned}$$

Приклад 5.5. Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{4}; \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = \frac{1}{6}. \end{cases}$$

```

> _EnvAllSolutions := true;
      _EnvAllSolutions := true
> eqs5:={x+y=Pi/4,tan(x)*tan(y)=1/6};
      eqs5 := {x + y = 1/4 pi, tan(x) tan(y) = 1/6}
> solve(eqs5,{x,y});

{x = -arctan(1/3) - pi_Z1~ + 1/4 pi, y = arctan(1/3) + pi_Z1~},
{x = -arctan(1/2) - pi_Z1~ + 1/4 pi, y = arctan(1/2) + pi_Z1~}

```

Приклад 5.6. Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} \log_4 x - \log_2 y = 0; \\ x^2 - 2y^2 - 8 = 0. \end{cases}$$

```

> eqs6:={log[4](x)-log[2](y)=0,x^2-2*y^2-8=0};
      eqs6 := {x^2 - 2y^2 - 8 = 0, ln(x)/ln(4) - ln(y)/ln(2) = 0}
> solve(eqs6,{x,y});

```

$$x = e^{\left(\frac{\operatorname{RootOf}\left(2(e^{-Z})^2 - \left(e^{\left(\frac{Z(\ln(4)+2I\pi_{-Z2~})}{\ln(2)+2I\pi_{-Z3~}} \right)} \right)^2 + 8 \right)}{\ln(2)+2I\pi_{-Z3~}} \right) (\ln(4)+2I\pi_{-Z2~})},$$

$$y = e^{\operatorname{RootOf}\left(2(e^{-Z})^2 - \left(e^{\left(\frac{Z(\ln(4)+2I\pi_{-Z2~})}{\ln(2)+2I\pi_{-Z3~}} \right)} \right)^2 + 8 \right)}$$

Maple видав результат у символьному вигляді. Використаши команду `> fsolve`, одержимо остаточний результат:

```
> fsolve(eqs6,{x,y});
      {x = 4.000000000, y = 2.000000000}
> convert(%,fraction);
      {x = 4, y = 2}
```

Приклад 5.7. Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 6; \\ 3^x \cdot 4^y = 12. \end{cases}$$

```
> eqs7:={2^x*3^y=6, 3^x*4^y=12};
      eqs7 := {3^x 4^y = 12, 2^x 3^y = 6}
> solve(eqs7,{x,y});
{y = -\frac{-\ln(2)\ln(12) + \ln(3)\ln(6)}{\ln(2)\ln(4) - \ln(3)^2}, x = \frac{\ln(6)\ln(4) - \ln(3)\ln(12)}{\ln(2)\ln(4) - \ln(3)^2}}
> fsolve(eqs7,{x,y});
      {x = 1.000000000, y = 1.000000000}
> convert(%,fraction);
      {x = 1, y = 1}
```

Приклад 5.8. Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} |x - y| + |x + y| = 4; \\ |x - y| - |x + y| = 2. \end{cases}$$

```
> eqs8:={abs(x-y)+abs(x+y)=4,abs(x-y)-abs(x+y)=2};
      eqs8 := {|-x + y| + |x + y| = 4, |-x + y| - |x + y| = 2}
> solve(eqs8,{x,y});
{x=-1, y=2}, {y=1, x=-2}, {x=2, y=-1}, {x=1, y=-2}
```

Приклад 5.9. Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} |x| + \sqrt{3}|y| = 2; \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

```
> eqs9:={abs(x)+sqrt(3)*abs(y)=2,x^2+y^2=1};
      eqs9 := {|x| + \sqrt{3} |y| = 2, x^2 + y^2 = 1}
```

```
> solve(eqs9,{x,y});
```

$$\left\{x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}\sqrt{3}\right\}, \left\{x = \frac{1}{2}, y = -\frac{1}{2}\sqrt{3}\right\},$$

$$\left\{x = \frac{-1}{2}, y = \frac{1}{2}\sqrt{3}\right\}, \left\{x = \frac{-1}{2}, y = -\frac{1}{2}\sqrt{3}\right\}$$

5.2 Розв'язування систем нерівностей

Приклад 5.10. Розв'язати систему нерівностей:

$$\begin{cases} x^2 + x - 6 \leq 0; \\ (x+1)(x-5) < 0; \\ \frac{1}{x} > \frac{1}{4}. \end{cases}$$

```
> ineqs1:={x^2+x-6<=0,(x+1)*(x-5)<0,1/x>1/4};
```

$$ineqs1 := \{x^2 + x - 6 \leq 0, (x+1)(x-5) < 0, \frac{1}{4} < \frac{1}{x}\}$$

```
> solve(ineqs1,x);
```

$$\{0 < x, x \leq 2\}$$

Приклад 5.11. Розв'язати систему нерівностей:

$$\begin{cases} \sqrt{4x-7} < x; \\ \sqrt{x+5} + \sqrt{5-x} > 4. \end{cases}$$

```
> ineqs2:={sqrt(4*x-7)<x,sqrt(x+5)+sqrt(5-x)>4};
```

$$ineqs2 := \{4 < \sqrt{x+5} + \sqrt{5-x}, \sqrt{4x-7} < x\}$$

```
> solve(ineqs2,x);
```

$$\left\{\frac{7}{4} \leq x, x < 4\right\}$$

Приклад 5.12. Розв'язати систему нерівностей:

$$\begin{cases} |x^2 + 5x| < 6; \\ |x+1| \leq 1. \end{cases}$$

```
> ineqs3:={abs(x^2+5*x)<6,abs(x+1)<=1};
```

$$ineqs3 := \{|x^2 + 5x| < 6, |x+1| \leq 1\}$$

```
> solve(ineqs3,x);
```

$$\{x \leq 0, -2 < x\}$$

Приклад 5.13.

$$\begin{cases} \log_{\frac{1}{2}}(2x-3) > -3; \\ x^2 - 4x > 0. \end{cases}$$

$$> \text{ineqs4} := \{\log[1/2](2*x-3) > -3, x^2 - 4*x > 0\};$$

$$\text{ineqs4} := \{0 < x^2 - 4x, -3 < -\frac{\ln(2x-3)}{\ln(2)}\}$$

$$> \text{solve}(\text{ineqs4}, x);$$

$$\{4 < x, x < \frac{11}{2}\}$$

Приклад 5.14. Розв'язати систему нерівностей:

$$\begin{cases} \frac{1}{2-x} \geq 1; \\ 2 \cdot 4^{2x} \geq 32^x. \end{cases}$$

$$> \text{ineqs5} := \{1/(2-x) \geq 1, 2*4^{(2*x)} \geq 32^x\};$$

$$\text{ineqs5} := \{1 \leq \frac{1}{2-x}, 32^x \leq 2 \cdot 4^{(2x)}\}$$

$$> \text{solve}(\text{ineqs5}, x);$$

$$\{x = 1\}$$

5.3 Розв'язування задач

Задача 5.1. Дві бригади, що склалися з робітників однакової кваліфікації, одночасно почали будувати два однакових будинки. У першій бригаді було 16 робітників, а у другій — 25 робітників. Через 7 днів після початку роботи в першу бригаду перейшли 8 робітників із другої бригади, в результаті чого обидва будинки були побудовані одночасно. Скільки днів знадобилося бригадам, щоб закінчити роботу в новому складі?

Розв'язання

Нехай продуктивність кожного з робітників дорівнює $\frac{1}{x}$ будинку в день, і нехай у новому складі бригади добудовували будинки y днів. Тоді за перші 7 днів роботи бригадами в 16 і 25 осіб було побудовано $\frac{16 \cdot 7}{x}$ і $\frac{25 \cdot 7}{x}$ частин будинків, а за наступні

y днів бригадами в 24 людини і 17 людей були побудовані $\frac{24 \cdot y}{x}$ і $\frac{17 \cdot y}{x}$ частини будинків, що залишилися. Оскільки в результаті були цілком побудовані два будинки, маємо:

$$\begin{cases} \frac{16 \cdot 7}{x} + \frac{24 \cdot y}{x} = 1; \\ \frac{25 \cdot 7}{x} + \frac{17 \cdot y}{x} = 1. \end{cases}$$

> solve({16*7/x+24*y/x=1, 25*7/x+17*y/x=1}, {x,y});

$$\{y = 9, x = 328\}$$

Таким чином, у новому складі бригади працювали 9 днів.

Відповідь: 9 днів.

Задача 5.2. Є дві посудини. Перша містить 30 кг, а друга — 20 кг розчину кислоти різної концентрації. Якщо ці розчини змішати, то вийде розчин, що містить 68% кислоти. Якщо ж змішати рівні маси цих розчинів, то вийде розчин, що містить 70% кислоти. Скільки кілограмів кислоти міститься в першій посудині?

Розв'язання

Нехай концентрація першого розчину кислоти — c_1 , а концентрація другого — c_2 . Якщо змішати ці розчини кислоти, то вийде розчин, що містить 68% кислоти: $30c_1 + 20c_2 = 50 \cdot 0,68$. Якщо ж змішати рівні маси цих розчинів, то вийде розчин, що містить 70% кислоти: $mc_1 + mc_2 = 2m \cdot 0,7$. Розв'яжемо отриману систему рівнянь:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 &= 1,4; \\ 30c_1 + 20c_2 &= 34. \end{cases}$$

> solve({c1+c2=1.4, 30*c1+20*c2=34}, {c1,c2});

$$c2 = .8000000000, c1 = .6000000000$$

> convert(%,fraction);

$$c2 = \frac{4}{5}, c1 = \frac{3}{5}$$

Тому,

$$> \text{ m1}=3/5*30;$$

$$m1 = 18$$

Відповідь: 18 кг.

Задача 5.3. У майстерні працюють три автослюсарі. Авто-слюсарі Сергій і Олександр виконують замовлення за 12 днів, Олександр і Борис виконують це ж замовлення за 10 днів, а Сергій та Борис за 15 днів. За скільки днів виконують це замовлення три автослюсарі, працюючи разом?

Розв'язання

Продуктивність — частина замовлення, виконана за 1 день.

Нехай Сергій виконує замовлення за X днів, Олександр — за Y днів, а Борис — за Z днів.

Відповідно, їх продуктивності будуть $\frac{1}{X}$, $\frac{1}{Y}$, $\frac{1}{Z}$.

Використавши умову, маємо систему:

$$\begin{cases} \frac{1}{X} + \frac{1}{Y} = \frac{1}{12}; \\ \frac{1}{Y} + \frac{1}{Z} = \frac{1}{10}; \\ \frac{1}{X} + \frac{1}{Z} = \frac{1}{15}. \end{cases}$$

$$> \text{ solve}(\{1/x+1/y=1/12, 1/y+1/z=1/10, 1/x+1/z=1/15\}, \{x,y,z\});$$

$$\{z = 24, y = \frac{120}{7}, x = 40\}$$

$$> 1/40+7/120+1/24;$$

$$\frac{1}{8}$$

Отримали, що втрьох за 1 день автослюсарі виконають $1/8$ частину всієї роботи.

Отже, 3 автослюсарі виконають все замовлення за 8 днів.

Відповідь: 8 днів.

Задача 5.4. Три винахідники отримали премію в сумі 1410 гривень, причому другий одержав $\frac{1}{3}$ того, що отримав перший і ще 60 гривень, а третій отримав $\frac{1}{3}$ грошей другого і ще 30 гривень. Яку премію отримав кожен винахідник?

Розв'язання

Нехай перший винахідник одержав x гривень, другий — y гривень, а третій — z гривень. Відповідно до умови задачі маємо систему:

$$\begin{cases} x + y + z = 14100; \\ y = \frac{1}{3}x + 600; \\ z = \frac{1}{3}y + 300. \end{cases}$$

Розв'яжемо її:

> eqs:={x+y+z=14100,y=(1/3)*x+600,z=(1/3)*y+300};

$$eqs := \{x + y + z = 14100, y = \frac{1}{3}x + 600, z = \frac{1}{3}y + 300\}$$

> solve(eqs,{x,y,z});

$$\{z = 1500, x = 9000, y = 3600\}$$

Отже, перший отримав премію в розмірі 9000 гривень, другий — 3600 гривень, третій — 1500 гривень.

Відповідь: 9000 гривень; 3600 гривень; 1500 гривень.

5.4 Завдання для самостійного виконання

1. Розв'язати систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} x - 2y + 4z = 7; \\ 2x + 3y + z = 7; \\ x + y + 3z = 8. \end{cases}$$

2. Розв'язати систему лінійних рівнянь із параметрами:

$$\begin{cases} ax + by + cz = k; \\ a^2x + b^2y + c^2z = k^2; \\ a^3x + b^3y + c^3z = k^3. \end{cases}$$

3. Розв'язати систему нелінійних рівнянь:

$$1) \begin{cases} x^2 + 2y^2 = 17; \\ x^2 - 2xy = -3. \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x + y + \frac{x^2}{y^2} = 7; \\ \frac{(x+y)x^2}{y^2} = 12. \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} \sqrt{\frac{x+1}{x+y}} + \sqrt{\frac{x+y}{x+1}} = 2; \\ \sqrt{\frac{x+1}{y+2}} + \sqrt{\frac{y+2}{x+1}} = 1,5. \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} x^2 + x\sqrt[3]{xy^2} = 32; \\ y^2 + y\sqrt[3]{x^2y} = 162. \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} 4^x - 7 \cdot 2^{x-\frac{y}{2}} = 2^{3-y}; \\ y - x = 3. \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} (x+y)^x = (x-y)^y; \\ \log_2 x - \log_2 y = 1. \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} 3 \operatorname{ctg} x = \operatorname{tg}^3 y; \\ \cos x = \sin 2y. \end{cases}$$

4. Розв'язати систему нерівностей:

$$1) \begin{cases} \frac{x-1}{2} - \frac{2x+3}{3} + \frac{x}{6} < 2 - \frac{x+5}{2}; \\ 1 - \frac{x+5}{8} + \frac{4-x}{2} < 3x - \frac{x+1}{4}. \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \log_{\sqrt{2}}(x-1) < 4; \\ \frac{x}{x-3} + \frac{x-5}{x} < \frac{2x}{3-x}. \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 0,2^{\cos x} \leq 1; \\ \frac{x-1}{2-x} + \frac{1}{2} > 0. \end{cases}$$

6

Побудова графіків 2D

6.1 Побудова графіків

Розглянемо побудову на площині графіків явно та неявно заданих функцій.

Задання областей

Область — це вікно декартової системи координат, у якій будується графік.

Синтаксис задання області:

x = нижня межа .. верхня межа.

Числа, що визначають межі, повинні бути дійсними.

Побудова графіків

Побудова графіків виконується за допомогою команди `plot`.

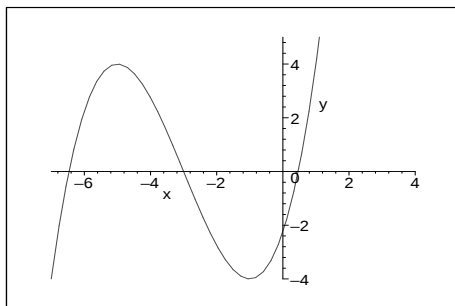
Приклад задання: `plot(f,x=lov..hi,y=lov..hi)`.

Приклад 6.1. Побудувати графік функції

$$y = \frac{1}{4}(x^3 + 9x^2 + 15x - 9).$$

Розв'язання

```
> plot(1/4*(x^3+9*x^2+15*x-9),x=-7..4,y=-4..5);
```



Команда `title` визначає заголовок графіка.

Приклад 6.2. Побудувати графік функції

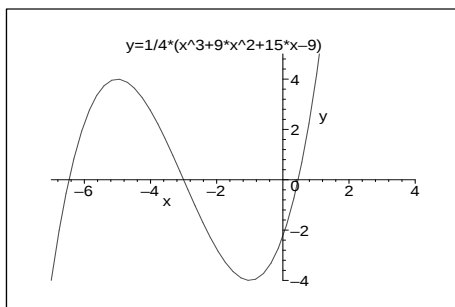
$$y = \frac{1}{4} (x^3 + 9x^2 + 15x - 9) .$$

Над графіком розмістити напис:

$$y = 1/4(x^3 + 9x^2 + 15x - 9)$$

Розв'язання

```
> plot(1/4*(x^3+9*x^2+15*x-9),x=-7..4,y=-4..5,
title="y=1/4*(x^3+9*x^2+15*x-9)");
```



Команда `color=` визначає колір побудови. Maple пропонує значну кількість кольорів: aquamarine black blue navy coral cyan brown gold green gray grey khaki magenta maroon orange pink plum red sienna tan turquoise violet wheat white yellow.

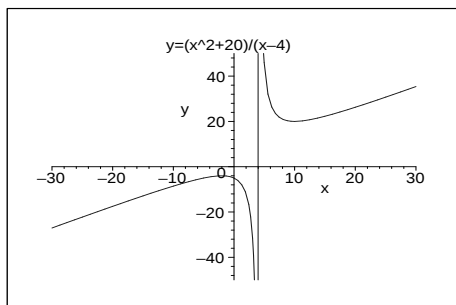
Приклад 6.3. Побудувати графік функції

$$y = \frac{x^2 + 20}{x - 4}.$$

Область задати умовою $x = -30..30, y = -50..50$. Над графіком розмістити напис: $y = (x^2 + 20)/(x - 4)$, побудову графіка виконати у голубому кольорі.

Розв'язання

```
> plot((x^2+20)/(x-4),x=-30..30,y=-50..50,title="
y=(x^2+20)/(x-4)",color=blue);
```

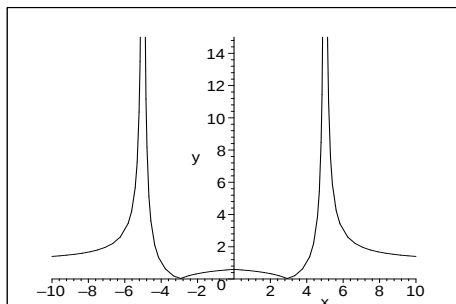


Приклад 6.4. Побудувати графік функції

$$y = \left| \frac{|x| - 3}{|x| - 5} \right|.$$

Розв'язання

```
> plot(abs((abs(x)-3)/(abs(x)-5)),x=-10..10,
y=0..15,color=black);
```



Maple дозволяє будувати декілька графіків на одній координатній площині.

При такій побудові Maple автоматично вибирає різні кольори для побудови графіків функцій.

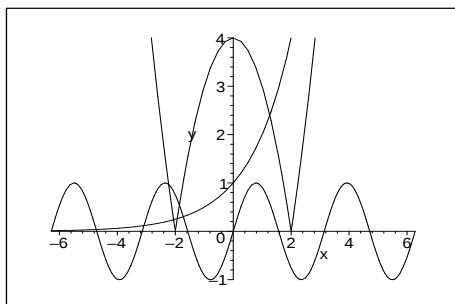
Приклад 6.5. Побудувати графіки функцій:

$$y = \sin 2x; y = 2^x; y = |x^2 - 4|.$$

Область задати умовою $x = -2\pi..2\pi, y = -1..4$.

Розв'язання

```
> plot({sin(2*x), 2^x, abs(x^2-4)}, x=-2*Pi..2*Pi,
y=-1..4, color=black);
```



За допомогою Maple можна будувати графіки функцій, задані параметрично. Для цього потрібно використати команду

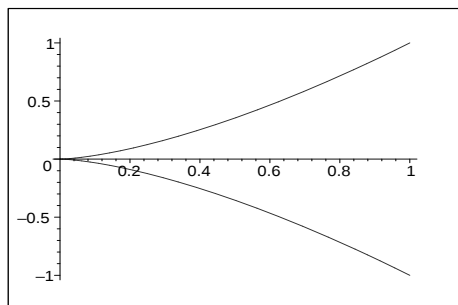
```
plot([x(t), y(t), t=range of t], h, v, options)
```

Проілюструємо побудову графіків параметрично заданих функцій на конкретних прикладах.

Приклад 6.6. Побудувати графік функції
$$\begin{cases} x = t^2; \\ y = t^3, \\ -1 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Розв'язання

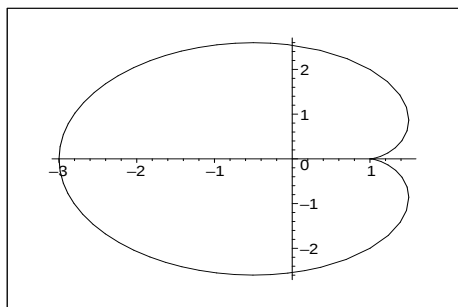
```
> plot([t^2, t^3, t=-1..1], color=navy);
```



Приклад 6.7. Побудувати графік функції
$$\begin{cases} x = 2 \cos t - \cos 2t; \\ y = 2 \sin t - \sin 2t, \\ -\pi \leq t \leq \pi \end{cases}$$
 (кардіоїди).

Розв'язання

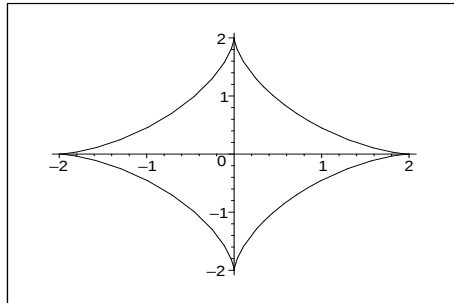
```
> plot([2*cos(t)-cos(2*t),2*sin(t)-sin(2*t),t=-Pi..Pi],
color=black);
```



Приклад 6.8. Побудувати графік функції
$$\begin{cases} x = 2 \cos^3 t; \\ y = 2 \sin^3 t, \\ -\pi \leq t \leq \pi \end{cases}$$
 (астроїди).

Розв'язання

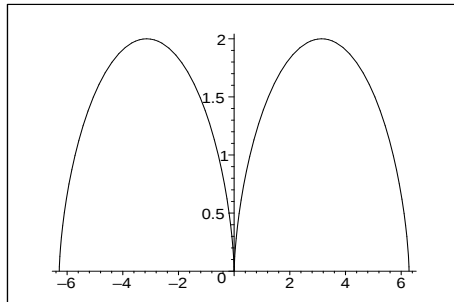
```
> plot([2*(cos(t))^3,2*(sin(t))^3,t=-Pi..Pi],
color=black);
```



Приклад 6.9. Побудувати графік функції $\begin{cases} x = t - \sin t; \\ y = 1 - \cos t, \\ -2\pi \leq t \leq 2\pi \end{cases}$ (циклоїди).

Розв'язання

```
> plot([t-sin(t),1-cos(t),t=-2*Pi..2*Pi],
color=black);
```

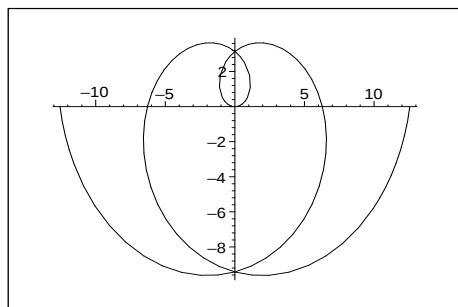


Для побудови графіків функцій, заданих у полярній системі координат, Maple використовує команду: `plot([r(t),theta(t),t=range of t ],h,v,coords=polar)` Побудуємо декілька графіків функцій, заданих у полярній системі координат.

Приклад 6.10. Побудувати графік функції $\rho = 2\varphi$, $-2\pi \leq \varphi \leq 2\pi$ (спіраль Архімеда).

Розв'язання

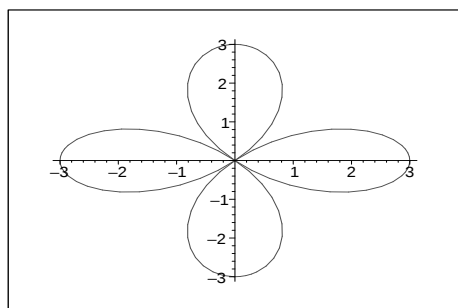
```
> plot([2*t,t,t=-2*Pi..2*Pi],coords=polar,
color=black);
```



Приклад 6.11. Побудувати графік функції $\rho = 3 \cos(2\varphi)$, $-\pi \leq \varphi \leq \pi$ (чотирьохпелюсткової рози).

Розв'язання

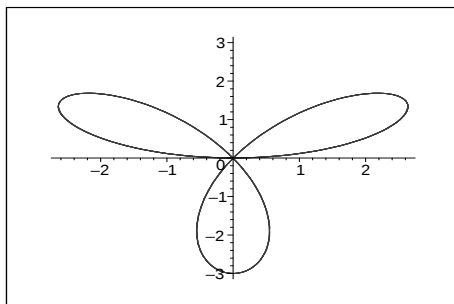
```
> plot([3*cos(2*t)],t,t=-Pi..Pi,coords=polar,
color=brown );
```



Приклад 6.12. Побудувати графік функції $\rho = 3 \sin(3\varphi)$, $-\pi \leq \varphi \leq \pi$ (трьохпелюсткової рози).

Розв'язання

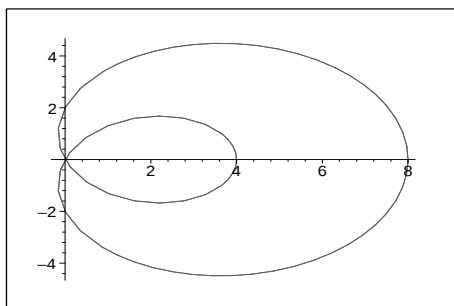
```
> plot([3*sin(3*t)],t,t=-Pi..Pi,coords=polar,
color=violet);
```



Приклад 6.13. Побудувати графік функції $\rho = 2 \cdot (1 + 3 \cos \varphi)$, $-2\pi \leq \varphi \leq 2\pi$ (равлика Паскаля).

Розв'язання

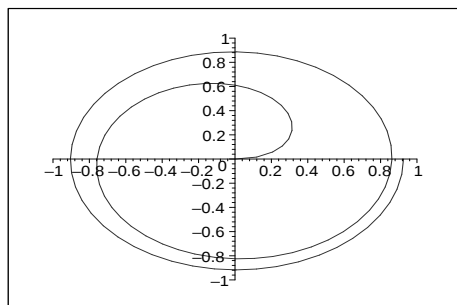
```
> plot([2*(1+3*cos(t)),t,t=-2*Pi..2*Pi],coords=polar,
color=orange);
```



Приклад 6.14. Побудувати графік функції $\rho = \frac{\varphi}{1+\varphi}$, $0 \leq \varphi \leq 4\pi$.

Розв'язання

```
> plot([t/(1+t),t,t=0..4*Pi],-1..1,-1..1,coords=
polar,color=navy);
```



Для побудови графіків кусково заданих функцій у декартовій прямокутній системі координат потрібно визначити процедуру, яка описує кусково задану функцію, а потім просто використати команду `plot`.

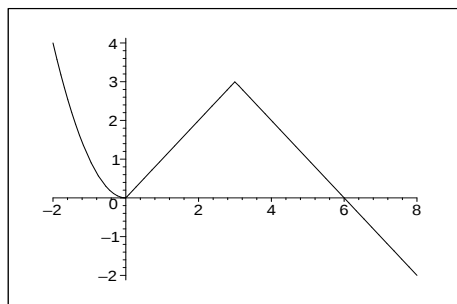
Приклад 6.15. Побудувати графік функції

$$y = \begin{cases} x^2, & \text{при } x < 0; \\ x, & \text{при } 0 \leq x \leq 3; \\ -x + 6, & \text{при } x > 3. \end{cases}$$

Розв'язання

```
> a:=proc(x) if x<0 then x^2 elif (x>0) and
(x<3) then x else -x+6 fiend;
> plot(a,-2..8,color=black);
```

```
a := proc(x) if x < 0 then x^2 elif 0 < x and
x < 3 then x else -x + 6 end ifend proc
```



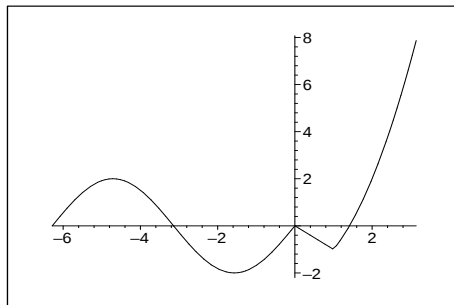
Приклад 6.16. Побудувати графік функції

$$y = \begin{cases} 2 \sin x, & \text{при } x \leq 0; \\ -x, & \text{при } 0 < x \leq 1; \\ x^2 - 2, & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

Розв'язання

```
> b:=proc(x) if x<0 then 2*sin(x) elif x>0)
and (x<1) then -x else x^2-2 fi end;
> plot(b,-2*Pi..Pi,color=black);
```

```
b := proc(x)   if x < 0 then 2 * sin(x) elif 0 < x
and x < 1 then - x else x^2 - 2 end ifend proc
```



Використовуючи бібліотеку `with(plots)`, можна за допомогою команди `implicitplot` будувати графіки неявно заданих функцій.

Приклад 6.17. Побудувати графік функції

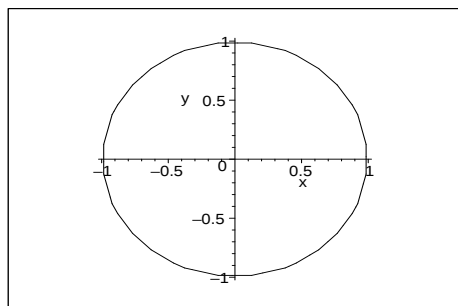
$$x^2 + y^2 = 1.$$

Розв'язання

```
> with(plots):
```

```
Warning, the name changecoords has been redefined
```

```
> implicitplot( { x^2+y^2=1}, x=-Pi..Pi,
y=-Pi..Pi,scaling=CONSTRAINED,color=black);
```

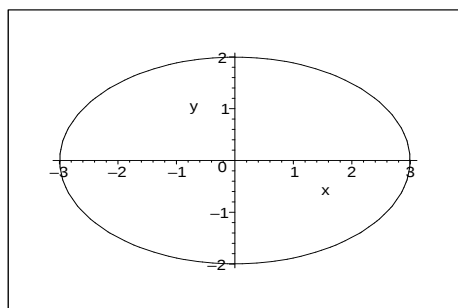


Приклад 6.18. Побудувати графік функції

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

Розв'язання

```
> implicitplot( {x^2/9+y^2/4=1},x=-Pi..Pi,y=-Pi..Pi,
scaling=CONSTRAINED, color=black);
```

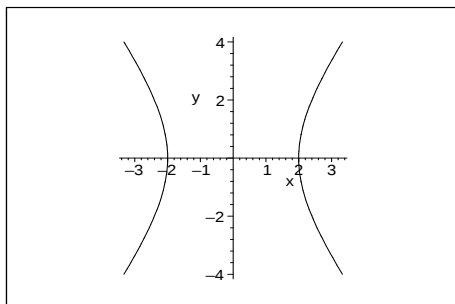


Приклад 6.19. Побудувати графік гіперболи

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1.$$

Розв'язання

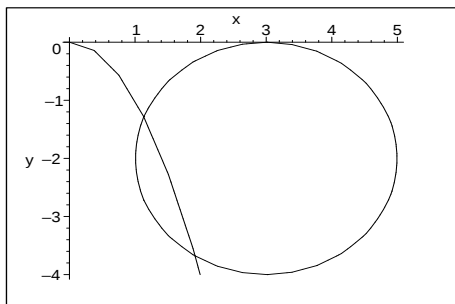
```
> implicitplot( { x^2/4-y^2/9=1}, x=-4..4,
y=-4..4, scaling=CONSTRAINED,color=black);
```



Приклад 6.20. Побудувати в одній системі координат графіки кола $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 4$ та параболу $y = -x^2$.

Розв'язання

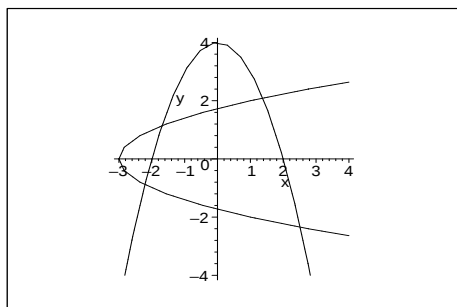
```
> implicitplot({ x-3)^2+(y+2)^2=4,y=-x^2},
x=0..3*Pi, y=-4..0, scaling=CONSTRAINED,
color=black);
```



Приклад 6.21. Побудувати в одній системі координат графіки парабол $y^2 = x^2 + 3$ та $y = -x^2 + 4$.

Розв'язання

```
> implicitplot({ y^2=x+3,y=-x^2+4},
x=-2*Pi..4, y=-4..6,
scaling=CONSTRAINED,color=black);
```

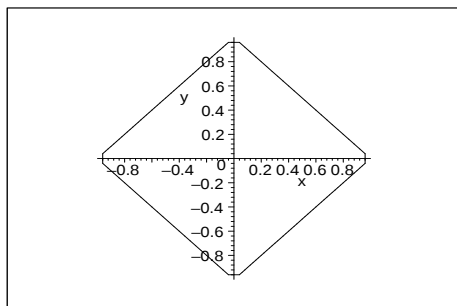


Приклад 6.22. На координатній площині xOy зобразити множину точок $M(x; y)$, координати яких задовольняють умову

$$|x| + |y| = 1.$$

Розв'язання

```
> implicitplot({ abs(x)+abs(y)=1}, x=-1..1,y=-1..1,
scaling=CONSTRAINED,color=black);
```

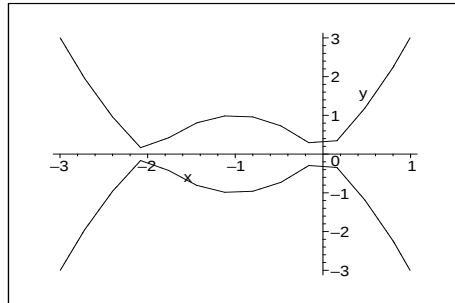


Приклад 6.23. На координатній площині xOy зобразити множину точок $M(x; y)$, координати яких задовольняють умову

$$|y| = |x^2 + 2x|.$$

Розв'язання

```
> implicitplot({ abs(y)=abs(x^2+2*x)}, x=-4..4,
y=-3..3,color=black);
```



6.2 Побудова областей на площині, обмежених заданими кривими

Задача побудови областей на площині виникає при знаходженні площі плоскої фігури за допомогою визначеного інтеграла або при визначенні області інтегрування в подвійному інтегралі. Зазвичай ці області обмежені графіками функцій однієї змінної, тому побудову таких областей в **Maple** можна здійснити за допомогою звичайних команд побудови графіків.

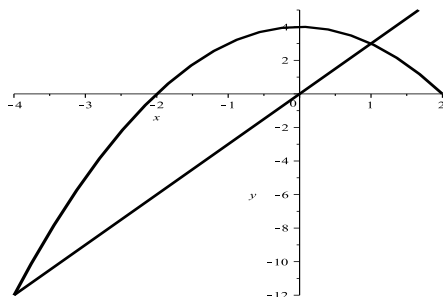
Приклад 6.24. Побудувати область, обмежену кривими $y = 3x$ і $y = 4 - x^2$.

Розв'язання

Будуємо графіки кривих у програмі **Maple**:

```
> with(plots):

> implicitplot([y = 3*x, y = 4-x^2], x = -6 .. 2,
y = -12 .. 5,color = black, thickness = 3);
```



На малюнку область не виділена. Щоб виділити цю область кольором, визначимо функцію двох змінних, яка приймає значення 1 всередині області та -1 — поза цією областю.

Це можна виконати за допомогою функції `piecewise`, яка визначає значення функції залежно від умов, яким повинні задовольняти змінні.

```
> f1 := proc (x, y) options operator,
arrow; piecewise(-4 <= x and x <= 2 and y <= 4-x^2
and 3*x <= y, 1, -1) end proc;
```

Далі задамо виділення кольором тієї частини області на площині, де побудована функція позитивна. Визначимо це виділення в графічний об'єкт `P1`:

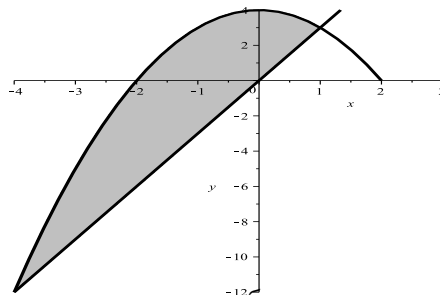
```
> P1 := implicitplot(f1(x, y) >= 0 x = -4 .. 2,
y = -12 .. 4, filledregions = true, coloring =
[grey, white], numpoints = 100000);
```

Графіки кривих задамо як графічний об'єкт `P2`

```
> P2 := implicitplot([y = 3*x, y = 4-x^2],
x = -4 .. 2, y = -12 .. 4, color = black,
thickness = 3);
```

Потім відобразимо всі графічні об'єкти на одному графіку за допомогою функції `display`

```
> display(P1, P2, view = [-4 .. 3, -12 .. 4]);
```



У результаті отримали плоску область, що виділена кольором.

Приклад 6.25. Виділити кольором область на площині, обмежену лініями $x^2 \leq 2y$, $x^2 + y^2 \leq 16$ і $y \leq \frac{2}{x}$.

Розв'язання

Розв'язуємо приклад по аналогії з попереднім.

Завантажуємо пакет графічних функцій:

```
> with(plots):
```

Визначаємо функцію, що приймає для зафарбованої області значення 1, а в інших точках -1 :

```
> f1 := proc (x, y) options operator, arrow;
> piecewise(x^2 <= 2*y and y <= 2/x and x^2+y^2 <=
16, 1, -1) end proc:
```

Створюємо графічний об'єкт зафарбованої області;

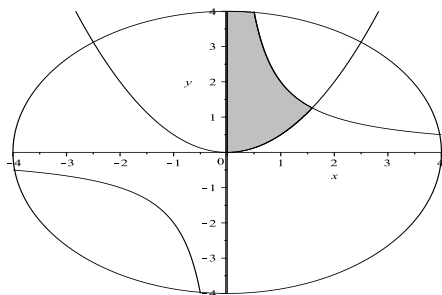
```
> P1 := implicitplot(f1(x, y) >= 0, x = -1 .. 3,
y = -1 .. 5, filledregions = true, coloring = [grey,
white], numpoints = 400000,
view = [-4 .. 4, -4 .. 4]);
```

Створюємо графічний об'єкт граничних ліній:

```
> P2 := implicitplot([x^2 = 2*y, y = 2/x,
x^2+y^2 = 16], x = -4 .. 4, y = -4 .. 4,
numpoints = 100000, color = black);
```

Відображаємо все на одному малюнку:

```
> display(P1, P2);
```



6.3 Завдання для самостійного виконання

1. Побудувати графік явно заданої функції:

1) $y = \frac{2-x^2}{1+x^4};$

2) $y = \sqrt{\frac{x^4+3}{x^2+1}};$

3) $y = \cos x - \frac{1}{2} \cos 2x;$

4) $y = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right);$

5) $y = x + \arctg x;$

6) $y = \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2}.$

2. Побудувати криву, що задана в параметричній формі:

1) $\begin{cases} x = \frac{(t+1)^2}{4}; \\ y = \frac{(t-1)^2}{4}, \end{cases}$

2) $\begin{cases} x = 2t - t^2; \\ y = 3t - t^3, \end{cases}$

3) $\begin{cases} x = \frac{t^2}{t-1}; \\ y = \frac{t}{t^2-1}, \end{cases}$

4) $\begin{cases} x = t + e^{-t}; \\ y = 2t + e^{-2t}, \end{cases}$

5) $\begin{cases} x = 5 \cos 2t; \\ y = 5 \cos 3t, \end{cases}$

6) $\begin{cases} x = \frac{2}{\cos^2 t}; \\ y = 2 \operatorname{tg}^2 t. \end{cases}$

3. Побудувати графік функції, що задана в полярній системі координат $(\varphi; r)$:

1) $r = 2 + 3 \cos \varphi;$

2) $r = 2 \sin 3\varphi;$

3) $r = \frac{2}{\sqrt{\cos 3\varphi}};$

4) $r = \varphi = \arccos \frac{r-1}{r^2}.$

4. У декартовій прямокутній системі координат побудувати графік кусково заданої функції:

$$1) y = \begin{cases} x^2 - 4, & \text{при } x \leq 2; \\ 6 - 2x, & \text{при } x > 2, \end{cases}$$

$$2) y = \begin{cases} x^2 + 2x, & \text{при } x \leq 2; \\ x + 1, & \text{при } x > 2, \end{cases}$$

$$3) y = \begin{cases} -x^2, & \text{при } x < 0; \\ x, & \text{при } 0 \leq x \leq 3; \\ x + 6, & \text{при } x > 3, \end{cases}$$

$$4) y = \begin{cases} \sin x, & \text{при } x < 0; \\ 3x, & \text{при } 0 \leq x \leq 3; \\ x + 6, & \text{при } x > 3. \end{cases}$$

5. Побудувати графік функції, що задана в неявному вигляді:

$$1) x^2 + 2xy - y^2 = 2x; \quad 2) y^2 = 36x;$$

$$3) \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1; \quad 4) 12x^2 - 4y^2 = 49;$$

$$5) \sqrt{x} + \sqrt{y} = 4; \quad 6) x^3 + y^3 = 6xy;$$

$$7) x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 4^{\frac{2}{3}}; \quad 8) \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \ln \sqrt{x^2 + y^2}.$$

7

Комплексні числа

7.1 Задання комплексних чисел та дії над ними

Розглянемо задання комплексних чисел, виконання дій над числовими виразами у полі комплексних чисел, проілюструємо виділення дійсної і уявної частини комплексного числа, покажемо знаходження спряжених виразів.

Комплексні числа задаються за допомогою команди `Complex`. Задамо декілька комплексних чисел.

```
> Complex(5);
```

$$5 I$$

```
> Complex(-2, 3);
```

$$-2 + 3 I$$

```
> Complex(2.0, -3);
```

$$2.0 - 3. I$$

```
> Complex(2+3*I);
```

$$2 + 3 I$$

```
> Complex(-2/3, -3);
```

$$\frac{-2}{3} - 3 I$$

```
> Complex(0,3);
```

$$3I$$

```
> I^2;
```

$$-1$$

Команда `evalc(expr)` у виразі `expr` виділяє дійсну і уявну частини.

Приклад 7.1. У виразі $\sin(3 + 5I)$ виділити дійсну і уявну частини.

```
> evalc(sin(3 + 5*I));
```

$$\sin(3) \cosh(5) + I \cos(3) \sinh(5)$$

За допомогою команди `evalc(conjugate(expr))` Maple знаходить спряжений вираз до виразу `expr`.

Приклад 7.2. Знайти вираз, спряжений до комплексного числа $z = 2 + 3I$.

```
> evalc(conjugate(2+3*I));
```

$$2 - 3I$$

Приклад 7.3. Знайти вираз, спряжений до комплексного числа $z = e^I$.

```
> evalc(conjugate(exp(I)));
```

$$\frac{\cos(1)}{\cos(1)^2 + \sin(1)^2} - \frac{I \sin(1)}{\cos(1)^2 + \sin(1)^2}$$

Виконаємо перевірку:

```
> exp(I)*(cos(1)/(cos(1)^2+sin(1)^2)-  
I*sin(1)/(cos(1)^2+sin(1)^2));
```

$$e^I \left(\frac{\cos(1)}{\cos(1)^2 + \sin(1)^2} - \frac{I \sin(1)}{\cos(1)^2 + \sin(1)^2} \right)$$

```
> evalc(%);
```

$$\frac{\cos(1)^2}{\cos(1)^2 + \sin(1)^2} + \frac{\sin(1)^2}{\cos(1)^2 + \sin(1)^2}$$

```
> simplify(cos(1)^2/(cos(1)^2+sin(1)^2)+  
sin(1)^2/(cos(1)^2+sin(1)^2));
```

1

Команда `abs(expr)` дозволяє знаходити модуль комплексного числа.

Наприклад,

```
> abs(4-3*I);
```

5

Розглянемо декілька прикладів виконання дій на множині комплексних чисел.

Приклад 7.4. Знайти добуток чисел $z_1 = 2 + 2i$ та $z_2 = 4 - 7i$.

```
> (2+2*I)*(4-7*I);
```

$$22 - 6I$$

Приклад 7.5. Виконати дії:

$$\frac{4(1 - i\sqrt{3})}{1 + i\sqrt{3}}.$$

```
> 4*(1-sqrt(3)*I)/(1+sqrt(3)*I);
```

$$4 \frac{1 - I\sqrt{3}}{1 + I\sqrt{3}}$$

```
> evalc(%);
```

$$-2 - 2I\sqrt{3}$$

Приклад 7.6. Виконати дії:

$$\frac{(4 - i)^2}{i^8} - 8(2 - i^{13}).$$

```
> (4-I)^2/I^8-8*(2-I^13);
```

$$-1$$

Приклад 7.7. Перейти до тригонометричної форми запису комплексного числа $4e^{\frac{11\pi}{6}i}$.

```
> 4*exp(11*pi*I/6);
```

$$4e^{(11/6)I\pi}$$

```
> evalc(%);
```

$$4 \cos\left(\frac{11}{6}\pi\right) + 4I \sin\left(\frac{11}{6}\pi\right)$$

Приклад 7.8. Знайти значення функції $f(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 14x + 10$ у точці $x = 1 + i$.

```
> f:=x^4-4*x^3+3*x^2-14*x+10;
      f := x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 14x + 10
> f1:=subs(x=1+I,f);
      f1 := -16 I
```

Наведемо приклади розв'язування рівнянь на множині комплексних чисел.

Приклад 7.9. Розв'язати рівняння $x^2 + x + 1 = 0$.

```
> solve(x^2+x+1=0,x);
      -1/2 + 1/2 I sqrt(3), -1/2 - 1/2 I sqrt(3)
```

Приклад 7.10. Розв'язати рівняння $x^3 = -8$.

```
> solve(x^3=-8);
      -2, 1 + I sqrt(3), 1 - I sqrt(3)
> evalf(%);
      -2., 1. + 1.732050808 I, 1. - 1.732050808 I
```

Приклад 7.11. Розв'язати рівняння $(x+3)^4 + (x+5)^4 = 16$.

```
> x:=solve((x+3)^4+(x+5)^4=16,x);
      x := -3, -5, -4 + I sqrt(7), -4 - I sqrt(7)
```

Приклад 7.12. Розв'язати рівняння $x^3 + x + \sqrt[3]{x^3 + x - 2} = 12$.

```
> solve(x^3+x+(x^3+x-2)^(1/3)=12,x);
      -1 + 2 I, -1 - 2 I, 2
```

Приклад 7.13. Розв'язати рівняння $4x^4 + 16 = 0$.

```
> solve(4*x^4+16=0,x);
      -1 + I, -1 - I, 1 + I, 1 - I
```

Приклад 7.14. Знайти корені $\sqrt[6]{-64}$.

```
> solve(x^6=-64);
```

$$-2I, 2I, -\sqrt{2+2I\sqrt{3}}, \sqrt{2+2I\sqrt{3}}, -\sqrt{2-2I\sqrt{3}}, \sqrt{2-2I\sqrt{3}}$$

Для зображення комплексних чисел на комплексній площині використовується функція `complexplot` пакета `plots`. Для цього необхідно записати комплексне число у квадратних дужках.

Наприклад,

```
> z:=[3+2*I];
```

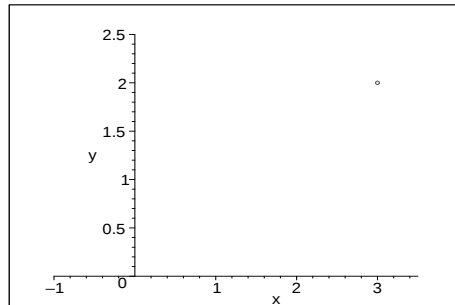
$$z := [3 + 2I]$$

Підключити бібліотеку `plots`

```
> with(plots):
```

Потім за допомогою функції `complexplot[plots]` побудувати точку на комплексній площині

```
> complexplot[plots](z,x=-1..3.5,y=0..2.5,
  style=point, symbol=solidcircle, symbolsize=14);
```



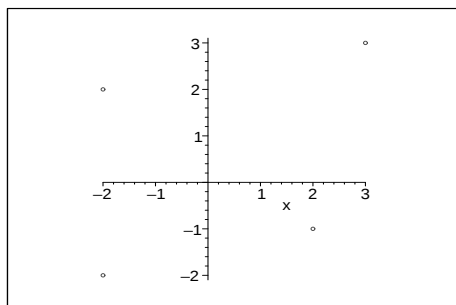
Можливо також зображати на одному малюнку декілька комплексних чисел.

Наприклад, зобразимо на комплексній площині числа $3 + 3i$, $-2 - 2i$, $2 - i$, $-2 + 2i$.

```
> z1:=[3+3*I,-2-2*I,2-I,-2+2*I];
```

$$z1 := [3 + 3I, -2 - 2I, 2 - I, -2 + 2I]$$

```
> complexplot(z1,x=-2..3,style=point,
  symbol=solidcircle, symbolsize=14,scaling=
  constrained);
```



Зобразимо корені рівняння $x^6 = -64$ на комплексній площині.

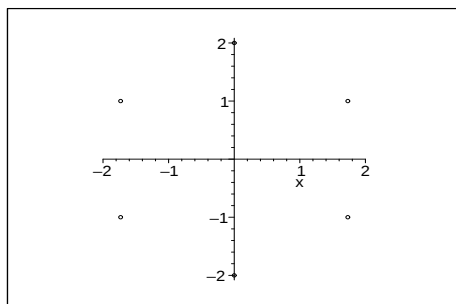
```
> solve(x^6=-64);
```

$$2I, -2I, \sqrt{2-2I\sqrt{3}}, -\sqrt{2-2I\sqrt{3}}, \sqrt{2+2I\sqrt{3}}, \\ -\sqrt{2+2I\sqrt{3}}$$

```
> z2:=[2*I,-2*I,(2-2*I*3^(1/2))^(1/2), \\
-(2-2*I*3^(1/2))^(1/2),(2+2*I*3^(1/2))^(1/2), \\
-(2+2*I*3^(1/2))^(1/2)];
```

$$z2 := [2I, -2I, \sqrt{2-2I\sqrt{3}}, -\sqrt{2-2I\sqrt{3}}, \sqrt{2+2I\sqrt{3}}, \\ -\sqrt{2+2I\sqrt{3}}]$$

```
> complexplot(z2,x=-2..2,style=point, \\
symbol=solidcircle, symbolsize=14, \\
scaling=constrained,color=black);
```



7.2 Завдання для самостійного виконання

- Виконати дії: а) $z_1 + z_2$; б) $z_1 - z_2$; в) $z_1 \cdot z_2$; г) $\frac{z_1}{z_2}$; д) z_1^2 ; е) z_2^3 , де $z_1 = 2 + 5i$, $z_2 = 3 - 2i$
- Виконати дії:
 - $\frac{2\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i} + 3$;
 - $\left(\frac{1}{3}(1-i)^4 + \frac{7-24i}{4-3i} + i\right) \cdot \frac{8}{(1+i)^2}$;
 - $\frac{16i(\sin \frac{\pi}{6} + i \cos \frac{\pi}{6})^2}{(-1+\sqrt{3})^4}$.
- Знайти суму $A = i + i^2 + i^3 + \dots + i^{14} + i^{15}$.
- Дано: $z_1 = -2 + 2\sqrt{3}i$, $z_2 = \cos(-\frac{\pi}{12}) + i \sin(-\frac{\pi}{12})$. Знайти $(z_1 z_2)^6$.
- Знайти вираз, спряжений до комплексного числа $z = 2 - 7i$.
- Знайти число, спряжене до комплексного числа

$$z = \frac{1}{4} \left(\frac{17-31i}{7+i} + \frac{12}{(1+i)^4} \right) + i.$$
- Розв'язати систему рівнянь:
 - $\begin{cases} z_1 + 2z_2 = 1 + i; \\ 3z_1 + iz_2 = 2 - 3i, \end{cases}$
 - $\begin{cases} |z + 1 - i| = |z + i|; \\ |3 + 2i - z| = |z + 1|, \end{cases}$
 - $\begin{cases} \left| \frac{z+2i}{z+4i} \right| = 1; \\ \frac{|z+2i|}{|z-1|} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{cases}$
- Перейти до тригонометричної форми запису комплексного числа $7e^{\frac{17\pi}{6}i}$.
- Зобразити на комплексній площині корені рівняння $x^7 = -128$.

8

Матричні і векторні обчислення

8.1 Матричні обчислення

За допомогою пакета **Maple** можна виконувати всі стандартні операції, визначені в лінійній алгебрі. Вони стають доступними при підключенні до бібліотеки **linalg**. Бібліотека підключається через команду **with** із назвою її імені. В нашому випадку потрібно виконати команду: **with(linalg)**.

Команди для операцій з матрицями вписані в табл. 8.1.

Табл. 8.1. Операції з матрицями

> matrix	задання матриці
> minor	знаходження мінору матриці
> rank	знаходження рангу матриці
> transpose	знаходження транспонованої матриці
> det	обчислення визначника
> inverse	знаходження оберненої матриці
> multipli	знаходження добутку матриць

Задамо матрицю A :

```
> with(linalg):
```

Warning, the protected names norm and trace have been redefined and unprotected

```
> A:=matrix([[1,2,0],[3,2,1],[0,1,2]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Роздрукуємо мінор матриці A , який відповідає елементу другому рядку третього стовпчика:

```
> minor(A,2,3);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Знайдемо ранг матриці A :

```
> rank(A);
```

3

Транспонуємо матрицю A :

```
> AT:=transpose(A);
```

$$AT := \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Знайдемо визначники матриць A та AT :

```
> det(A);
```

-9

```
> det(AT);
```

-9

Знайдемо матрицю, обернену до матриці A :

```
> A1:=inverse(A);
```

$$A1 := \begin{bmatrix} \frac{-1}{3} & \frac{4}{9} & \frac{-2}{9} \\ \frac{2}{3} & \frac{-2}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{-1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{bmatrix}$$

Перемножимо матриці A і $A1$ (для множення матриць використовується оператор $\&*$):

```
> E1:=evalm(A&*A1);
```

$$E1 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Задамо матриці $B1$ і $C1$ та знайдемо їх суму:

```
> B1:=matrix([[2,5,6,1],[-2,-4,4,6],[8,2,3,6]]);
```

$$B1 := \begin{bmatrix} 2 & 5 & 6 & 1 \\ -2 & -4 & 4 & 6 \\ 8 & 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

```
> C1:=matrix([[2,2,2,1],[1,4,6,7],[-1,-4,-5,5]]);
```

$$C1 := \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 6 & 7 \\ -1 & -4 & -5 & 5 \end{bmatrix}$$

```
> D1:=evalm(B1+C1);
```

$$D1 := \begin{bmatrix} 4 & 7 & 8 & 2 \\ -1 & 0 & 10 & 13 \\ 7 & -2 & -2 & 11 \end{bmatrix}$$

Помножимо матрицю $B1$ на три:

```
> B2:=3*B1;
```

$$B2 := 3 B1$$

```
> B2:=evalm(B2);
```

$$B2 := \begin{bmatrix} 6 & 15 & 18 & 3 \\ -6 & -12 & 12 & 18 \\ 24 & 6 & 9 & 18 \end{bmatrix}$$

Обчислення лінійної комбінації двох матриць зі скалярними множниками виконується за допомогою команди `matadd(A1,B1, scalar1,scalar2)`.

Приклад 8.1. Знайти матрицю $3A - 4B$, якщо

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 23 & -8 \\ 0 & 5 & -9 \\ 2 & -8 & 11 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -7 \\ 1 & 4 & -6 \\ 7 & 1 & -8 \end{pmatrix}.$$

```
> with(linalg):
> A1:=matrix([[ -4,23,-8],[0,5,-9],[2,-8,11]]);
```

Warning, the protected names norm and trace have been redefined and unprotected

$$A1 := \begin{bmatrix} -4 & 23 & -8 \\ 0 & 5 & -9 \\ 2 & -8 & 11 \end{bmatrix}$$

```
> B1:=matrix([[4,2,-7],[1,4,-6],[7,1,-8]]);
```

$$B1 := \begin{bmatrix} 4 & 2 & -7 \\ 1 & 4 & -6 \\ 7 & 1 & -8 \end{bmatrix}$$

```
> F1:=matadd(A1,B1,3,-4);
```

$$F1 := \begin{bmatrix} -28 & 61 & 4 \\ -4 & -1 & -3 \\ -22 & -28 & 65 \end{bmatrix}$$

Приклад 8.2. Дано матрицю $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 5 & 4 & 3 \\ 34 & 5 & 43 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 8 & 9 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 0 \\ -5 & -7 & 5 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

Знайти: визначник матриці A , матрицю транспоновану до матриці A , матрицю обернену до матриці A .

Роздрукуємо матрицю A :

```
> with(linalg):
```

Warning, the protected names norm and trace have been redefined and unprotected

```
> A:=matrix([[1,5,5,4,3],[34,5,43,2,5],[1,0,8,9,3],
[2,3,4,1,0],[-5,-7,5,-1,5]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 5 & 5 & 4 & 3 \\ 34 & 5 & 43 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 8 & 9 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 0 \\ -5 & -7 & 5 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

Знайдемо матрицю, транспоновану до матриці A :

```
> AT:=transpose(A);
```

$$AT := \begin{bmatrix} 1 & 34 & 1 & 2 & -5 \\ 5 & 5 & 0 & 3 & -7 \\ 5 & 43 & 8 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 9 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Знайдемо визначник матриці A :

```
> det(A);
```

32543

Знайдемо матрицю, обернену до матриці A :

```
> A1:=inverse(A);
```

$$A1 := \begin{bmatrix} \frac{2697}{32543} & \frac{1249}{32543} & \frac{-352}{32543} & \frac{-12774}{32543} & \frac{-2656}{32543} \\ \frac{505}{4649} & \frac{-54}{4649} & \frac{-290}{4649} & \frac{623}{4649} & \frac{-75}{4649} \\ \frac{-3831}{32543} & \frac{-290}{32543} & \frac{681}{32543} & \frac{11955}{32543} & \frac{2180}{32543} \\ \frac{-675}{32543} & \frac{-204}{32543} & \frac{4070}{32543} & \frac{-2812}{32543} & \frac{-1833}{32543} \\ \frac{11342}{32543} & \frac{969}{32543} & \frac{-3061}{32543} & \frac{-19186}{32543} & \frac{571}{32543} \end{bmatrix}$$

Переконаємося, що матриця A_1 обернена до матриці A , тобто, що добуток цих матриць дає одиничну матрицю:

```
> evalm(A1*A);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

8.2 Операції з векторами

Задамо вектор-стовпець:

> v1:=<1,3,5,6>;

$$v1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Задамо вектор-рядок:

> v2:=<1|3|5|6>;

$$v2 := [1, 3, 5, 6]$$

Задамо вектори-рядки:

> v3:=<4|-2>;

$$v3 := [4, -2]$$

> v4:=<-2|5>;

$$v4 := [-2, 5]$$

Знайдемо лінійну комбінацію векторів $4\vec{v}_3 + 2\vec{v}_4$:

> 4*v3+2*v4;

$$[12, 2]$$

Операція додавання векторів $\vec{v}_1$ та $\vec{v}_2$ неможлива:

> v1+v2;

Error, (in rtable/Sum) invalid arguments

Не можна додавати скаляри і вектори:

> 2+<5|-9|-56>;

Error, (in rtable/Sum) invalid arguments

Знайдемо добуток вектора $\vec{v}_2$ та $\vec{v}_1$:

```
> v2.v1;
```

71

Добутком векторів $\vec{v}_1$ та $\vec{v}_2$ є матриця. Знайдемо її:

```
> v1.v2;
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 6 \\ 3 & 9 & 15 & 18 \\ 5 & 15 & 25 & 30 \\ 6 & 18 & 30 & 36 \end{bmatrix}$$

Приклад 8.3. Знайти характеристичні числа і власні вектори матриці

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

```
> with(linalg):
```

Warning, the protected names norm and trace have been redefined and unprotected

```
> A:=matrix([[4,-1,2],[-1,5,-1],[2,-1,4]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Задамо одиничну матрицю третього порядку з допомогою команди `array`:

```
> E=array(1..3,1..3,identity);
```

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Помножимо матрицю E на число λ :

```
> B:=lambda*(array(1..3,1..3,identity));
```

$$B := \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> B1:=evalm(lambda*array(1..3,1..3,identity));
```

$$B1 := \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Знайдемо матрицю $B_2 = A - B_1$:

```
> B2:=evalm(A-B1);
```

$$B2 := \begin{bmatrix} 4 - \lambda & -1 & 2 \\ -1 & 5 - \lambda & -1 \\ 2 & -1 & 4 - \lambda \end{bmatrix}$$

Обчислимо визначник матриці B_2 :

```
> g:=det(B2);
```

$$g := 56 - 50\lambda + 13\lambda^2 - \lambda^3$$

Розв'яжемо рівняння $\lambda^3 - 13\lambda^2 + 50\lambda - 56 = 0$. Його корені і будуть характеристичними числами.

```
> solve( 56-50*lambda+13*lambda^2-lambda^3=0,
lambda);
```

$$2, 4, 7$$

Знаходимо власні вектори матриці A :

```
> V:=eigenvects(A);
```

$$V := [7, 1, \{[1, -1, 1]\}], [2, 1, \{[1, 0, -1]\}], [4, 1, \{[1, 2, 1]\}]$$

Maple видав відповідь: $\lambda_1 = 2$, $\vec{v}_1 = \vec{i} - \vec{k}$; $\lambda_2 = 7$, $\vec{v}_2 = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$; $\lambda_3 = 4$, $\vec{v}_3 = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$.

8.3 Пакети linalg та LinearAlgebra

Команда `Normalize(U,Euclidean)` пакета `LinearAlgebra` нормалізує вектор U .

Приклад 8.4. Нормалізувати вектор $\vec{u} = (-5; 3; -1)$.

```

> with(LinearAlgebra):
> U := <-5|3|-1>;
      U := [-5, 3, -1]
> U1:=Normalize(<-5|3|-1>,Euclidean);

```

$$U1 := \left[-\frac{1}{7} \sqrt{35}, \frac{3}{35} \sqrt{35}, -\frac{1}{35} \sqrt{35} \right]$$

За допомогою команди `Basis([V1,V2,...,Vk])` пакета `Linear Algebra` можна визначати базис для набору векторів $V1, V2, \dots, V_k$.

Приклад 8.5. Визначити базис для множини векторів:

$$\vec{v}_1 = (1; 0; 0; 2); \vec{v}_2 = (1; -1; 0; 0); \vec{v}_3 = (-1; 1; 0; 1); \\ \vec{v}_4 = (1; 6; 0; 5); \vec{v}_5 = (1; 1; 0; 0).$$

```

> with(LinearAlgebra):
> V1:=<1|0|0|2>;
      V1 := [1, 0, 0, 2]
> V2:=<1|-1|0|0>;
      V2 := [1, -1, 0, 0]
> V3:=<-1|1|0|1>;
      V3 := [-1, 1, 0, 1]
> V4:=<1|6|0|5>;
      V4 := [1, 6, 0, 5]
> V5:=<1|1|0|0>;
      V5 := [1, 1, 0, 0]
> bas:=Basis([V1,V2,V3,V4,V5]);
      bas := [[1, 0, 0, 2], [1, -1, 0, 0], [-1, 1, 0, 1]]

```

Використовуючи пакет `LinearAlgebra`, за допомогою команди `VectorAngle(U, V)`, можна знаходити кут між векторами (U, V) .

Приклад 8.6. Знайти кут між векторами $\vec{u} = (-5; 3; -1)$ та $\vec{v} = (-1; -6; 2)$.

```

> with(LinearAlgebra):
> U := <-5|3|-1>;

```

```

U := [-5, 3, -1]
> V:=-6|-9|3>;
V := [-6, -9, 3]
> VectorAngle(U,V);

```

$$\frac{1}{2} \pi$$

За допомогою команди `innerprod` знаходиться скалярний добуток векторів.

Приклад 8.7. Знайти скалярний добуток векторів $\vec{v}_1 = (1; 5; 3)$ та $\vec{v}_2 = (0; 2; 5)$.

```

> with(linalg):

Warning, the protected names norm and trace have been
redefined and unprotected
> v1:=<1|5|3>;
v1 := [1, 5, 3]
> v2:=<0|2|5>;
v2 := [0, 2, 5]
> innerprod(v1,v2);

```

$$25$$

За допомогою команди `crossprod` знаходиться векторний добуток векторів.

Приклад 8.8. Знайти векторний добуток векторів $\vec{v}_1 = 2\vec{i} + 11\vec{j} - 10\vec{k}$ та $\vec{v}_2 = 3\vec{i} + 6\vec{j} - 2\vec{k}$.

```

> with(linalg):

Warning, the protected names norm and trace have been
redefined and unprotected
> v1:=<2|11|-10>;
v1 := [2, 11, -10]
> v2:=<3|6|-2>;
v2 := [3, 6, -2]
> crossprod(v1,v2);

```

$$[38, -26, -21]$$

Оскільки мішаним добутком $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ упорядкованої трійки векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ називається число, що дорівнює векторному добутку векторів $\vec{a} \times \vec{b}$, помноженому скалярно на вектор $\vec{c}$:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c},$$

то його можна знаходити послідовним виконанням команд **crossprod** та **innerprod**.

Приклад 8.9. Знайти мішаний добуток векторів $\vec{v}_1 = -4\vec{i} - 3\vec{j} - 9\vec{k}$, $\vec{v}_2 = \vec{i} - \vec{k}$, $\vec{v}_3 = -5\vec{i} - 4\vec{j} + 3\vec{k}$.

```
> with(linalg):
```

```
Warning, the protected names norm and trace have been
redefined and unprotected
```

```
> v1:=<-4|-3|-9>;
```

```
v1 := [-4, -3, -9]
```

```
> v2:=<1|0|-1>;
```

```
v2 := [1, 0, -1]
```

```
> v3:=<-5|-4|3>;
```

```
v3 := [-5, -4, 3]
```

```
> v4:=crossprod(v1,v2);
```

```
v4 := [3, -13, 3]
```

```
> innerprod(v4,v3);
```

46

8.4 Розв'язування задач

Задача 8.1. Виконати розрахунок заробітної плати, що припадає на кожне замовлення при виготовленні різних деталей, якщо відомі наступні дані:

а) затрати робочого часу (в годинах) на кожному робочому місці і на кожен виріб задано у вигляді таблиці:

Виріб	Затрати на робочому місці					
	1	2	3	4	5	6
A	2	1	4	3	0	5
B	0	2	3	1	4	0
C	4	2	5	3	0	0

або в матричній формі:

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & 5 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

б) кількість виробів (у штуках) у кожному замовленні задано у вигляді таблиці:

Замовлення	Кількість виробів		
	A	B	C
K	3	7	8
L	0	2	6
M	9	4	5

або в матричній формі:

$$Q = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 8 \\ 0 & 2 & 6 \\ 9 & 4 & 5 \end{pmatrix};$$

в) погодинна заробітна плата (у гривнях) на кожному робочому місці наведена у вигляді таблиці:

Робоче місце	Погодинна заробітна плата
1	103,5
2	142,8
3	253,5
4	167,5
5	142,5
6	127,8

або в матричній формі:

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 103,5 \\ 2 & 142,8 \\ 3 & 253,5 \\ 4 & 167,5 \\ 5 & 142,5 \\ 6 & 127,8 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

Матриця Z задає лінійну залежність між величиною погодинної заробітної плати та затратами робочого часу на кожному робочому місці, матриця P — між затратами робочого часу на кожному робочому місці і випуском виробів, то добуток PZ задає лінійну залежність між випуском виробів і величиною заробітної плати.

Матриця Q визначає кількість виробів у кожному замовленні, тоді добуток $Q(PZ)$ визначає величину заробітної плати, що припадає на виконання кожного замовлення.

Знайдемо матрицю

$$X = Q(PZ),$$

використавши пакет символьних обчислень Maple:

```
> with(linalg):
```

```
Warning, the protected names norm and trace have been
redefined and unprotected
```

```
> P:=matrix([[2,1,4,3,0,5],[0,2,3,1,4,0],
[4,2,5,3,0,0]]);
```

$$P := \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & 5 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> Q:=matrix([[3,7,8],[0,2,6],[9,4,5]]);
```

$$Q := \begin{bmatrix} 3 & 7 & 8 \\ 0 & 2 & 6 \\ 9 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

```
> Z:=matrix([[1,10.35],[2,14.28],[3,25.35],
[4,16.75],[5,14.25],[6,12.78]]);
```

$$Z := \begin{bmatrix} 1 & 10.35 \\ 2 & 14.28 \\ 3 & 25.35 \\ 4 & 16.75 \\ 5 & 14.25 \\ 6 & 12.78 \end{bmatrix}$$

```
> X:=evalm(Q&*P&*Z);
```

$$X := \begin{bmatrix} 713 & 3975.79 \\ 284 & 1838.48 \\ 845 & 4203.01 \end{bmatrix}$$

Таким чином, для виконання замовлення K потрібно на заробітну плату 3975,79 гривень, замовлення L — 1838,48 гривень, замовлення M — 4203,01 гривень.

Задача 8.2. Є три сплави срібла і міді масою 5, 3 і 2 кг. Обчислити пробу кожного злитка, знаючи, що будучи сплавленими попарно, вони дають: перший і другий — сплав 750-ї проби, перший і третій — сплав 780-ї проби, а другий і третій — сплав 852-ї проби.

Розв'язання

Нехай проба першого злитка x , другого — y , третього — z . Тоді срібла в першому злитку $5x$ кг, у другому — $3y$ кг, у третьому — $2z$ кг. Відповідно до умови задачі маємо систему:

$$\begin{cases} 5x + 3y = 750 \cdot (5 + 3); \\ 5x + 2z = 780 \cdot (5 + 2); \\ 3y + 2z = 852 \cdot (3 + 2), \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} 5x + 3y = 6000; \\ 5x + 2z = 5460; \\ 3y + 2z = 4260. \end{cases}$$

Запишемо систему у матричній формі: $AX = B$, де

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 6000 \\ 5460 \\ 4260 \end{pmatrix}. \quad \text{Звідси:}$$

$$X = A^{-1}B.$$

Знаходимо проби злитків x, y, z :

```
> with(linalg):
> A:=matrix([[5,3,0],[5,0,2],[0,3,2]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

```
> det(A);
```

$$-60$$

```
> A1:=inverse(A);
```

$$A1 := \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{-1}{10} \\ \frac{1}{6} & \frac{-1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

```
> B:=matrix([[6000],[5460],[4260]]);
```

$$B := \begin{bmatrix} 6000 \\ 5460 \\ 4260 \end{bmatrix}$$

```
> X:=evalm(A1*B);
```

$$X := \begin{bmatrix} 720 \\ 800 \\ 930 \end{bmatrix}$$

Маємо відповідь: перший злиток 720-ї, другий — 800-ї, третій — 930-ї проби.

Задача 8.3. Улюблений запас їжі для хом'ячків складається із змішування трьох типів корму: *Kay Dee Food*, *Pet Pellets*, *Rodent Chow*. Для правильного харчування тварин потрібно забезпечити щоденний раціон по білках, жирах, вуглеводах. Припустимо, що хом'ячки щоденно вимагають 340 мг білка, 280 мг жиру і 440 мг вуглеводів.

Кількість білків, жирів, вуглеводів у кожному виді кормів визначається наступною таблицею:

Вміст корму	Назва корму		
	Kay Dee Food	Pet Pellets	Rodent Chow
Білки (мг)	10	0	20
Жири (мг)	10	20	10
Вуглеводи (мг)	5	10	30

Скільки грам щоденно потрібно виділяти кожного типу кормів, щоб задовольнити харчові потреби хом'ячка?

Розв'язання

Нехай для раціонального харчування хом'ячка щоденно потрібно виділяти:

x — грам корму Kay Dee Food;

y — грам корму Pet Pellets;

z — грам корму Rodent Chow.

Тоді, відповідно до умови задачі, матимемо систему:

$$\begin{cases} 10x + 0y + 20z = 340; \\ 10x + 20y + 10z = 280; \\ 5x + 10y + 30z = 440. \end{cases}$$

Перепишемо її у матричній формі: $AX = B$, де

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 20 \\ 10 & 20 & 10 \\ 5 & 10 & 30 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 340 \\ 280 \\ 440 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Розв'яжемо матричне рівняння $AX = B$:

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

Використаємо ПСО Maple:

```
> with(linalg):
```

```
Warning, the protected names norm and trace have been
redefined and unprotected
```

```
> A:=matrix([[10,0,20],[10,20,10],[5,10,30]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 10 & 0 & 20 \\ 10 & 20 & 10 \\ 5 & 10 & 30 \end{bmatrix}$$

```
> det(A);
```

$$5000 \neq 0$$

```
> A1:=inverse(A);
```

$$A1 := \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & \frac{1}{25} & \frac{-2}{25} \\ \frac{-1}{20} & \frac{1}{25} & \frac{1}{50} \\ 0 & \frac{-1}{50} & \frac{1}{25} \end{bmatrix}$$

```
> B:=matrix([[340],[280],[440]]);
```

$$B := \begin{bmatrix} 340 \\ 280 \\ 440 \end{bmatrix}$$

```
> X:=evalm(A1*B);
```

$$X := \begin{bmatrix} 10 \\ 3 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Отже, для повноцінного харчування хом'ячка щоденно до харчового раціону потрібно включати 10 г корму Kay Dee Food, 3 г корму Pet Pellets, 12 г корму Rodent Chow.

Задача 8.4. *Зв'язок між контурними струмами задано за допомогою системи лінійних рівнянь:*

$$\begin{cases} 14I_1 & -5I_2 & & = & -10; \\ -5I_1 & +17I_2 & -2I_3 & = & 10; \\ & -2I_2 & +5I_3 & = & -8. \end{cases}$$

Знайдіть ці струми.

Розв'язання

Розв'яжемо систему за допомогою формул Крамера:

$$I_1 = \frac{\Delta_{I_1}}{\Delta}; I_2 = \frac{\Delta_{I_2}}{\Delta}; I_3 = \frac{\Delta_{I_3}}{\Delta},$$

де

$$\Delta = \begin{vmatrix} 14 & -5 & 0 \\ -5 & 17 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{vmatrix}, \quad \Delta_{I_1} = \begin{vmatrix} -10 & -5 & 0 \\ 10 & 17 & -2 \\ -8 & -2 & 5 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_{I_2} = \begin{vmatrix} 14 & -10 & 0 \\ -5 & 10 & -2 \\ 0 & -8 & 5 \end{vmatrix}, \quad \Delta_{I_3} = \begin{vmatrix} 14 & -5 & -10 \\ -5 & 17 & 10 \\ 0 & -2 & -8 \end{vmatrix}.$$

> with(linalg):

Warning, the protected names norm and trace have been redefined and unprotected

> A:=matrix([[14,-5,0],[-5,17,-2],[0,-2,5]]);

$$A := \begin{bmatrix} 14 & -5 & 0 \\ -5 & 17 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

> det(A);

1009

> A1:=matrix([[-10,10,-8],[-5,17,-2],[0,-2,5]]);

$$A1 := \begin{bmatrix} -10 & 10 & -8 \\ -5 & 17 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

> det(A1);

-640

> A2:=matrix([[14,-5,0],[-10,10,-8],[0,-2,5]]);

$$A2 := \begin{bmatrix} 14 & -5 & 0 \\ -10 & 10 & -8 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

> det(A2);

226

> A3:=matrix([[14,-5,0],[-5,17,-2],[-10,10,-8]]);

$$A3 := \begin{bmatrix} 14 & -5 & 0 \\ -5 & 17 & -2 \\ -10 & 10 & -8 \end{bmatrix}$$

> det(A3);

$$-1524$$

> I1:=det(A1)/det(A);

$$I1 = \frac{-640}{1009}$$

> I2:=det(A2)/det(A);

$$I2 := \frac{226}{1009}$$

> I3:=det(A3)/det(A);

$$I3 := \frac{-1524}{1009}$$

Отже, $I_1 = -\frac{640}{1009} A$; $I_2 = \frac{226}{1009} A$; $I_3 = -\frac{1524}{1009} A$.

Задача 8.5. Трикутник ABC задано за допомогою координат його вершин: $A(1; 2; 1)$, $B(3; -1; 7)$, $C(7; 4; -2)$. Обчислити внутрішні кути цього трикутника, переконатися, що цей трикутник рівнобедрений.

Розв'язання

Розглянемо вектори $\vec{v}_1 = \overrightarrow{AB} = (2; -3; 6)$, $\vec{v}_2 = \overrightarrow{AC} = (6; 2; -3)$, $\vec{v}_3 = \overrightarrow{BA} = (-2; 3; -6)$, $\vec{v}_4 = \overrightarrow{BC} = (4; 5; -9)$, $\vec{v}_5 = \overrightarrow{CA} = (-6; -2; 3)$, $\vec{v}_6 = \overrightarrow{CB} = (-4; -5; 9)$. Величину кута A знайдемо як величину кута між векторами $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$, кута B — $\overrightarrow{BC}$ і $\overrightarrow{BA}$, кута C — $\overrightarrow{CA}$ і $\overrightarrow{CB}$:

> with(LinearAlgebra):

> V1 := <2|-3|6>;

$$V1 := [2, -3, 6]$$

> V2:=<6|2|-3>;

$$V2 := [6, 2, -3]$$

> A:=VectorAngle(V1, V2);

```

A := pi - arccos(12/49)
> V3:=-2|3|-6>;
      V3 := [-2, 3, -6]
> V4:=-4|5|-9>;
      V4 := [4, 5, -9]
> B:=VectorAngle(V3, V4);
      B := arccos(1/14*sqrt(122))
> V5:=-6|-2|3>;
      V5 := [-6, -2, 3]
> V6:=-4|-5|9>;
      V6 := [-4, -5, 9]
> C:=VectorAngle(V5, V6);

```

$$C := \arccos\left(\frac{1}{14}\sqrt{122}\right)$$

Одержали: $\angle B = \angle C = \arccos\left(\frac{\sqrt{122}}{14}\right)$. Отже, трикутник ABC — рівнобедрений.

Задача 8.6. Три сили $\vec{F}_1(2; 3; 5)$, $\vec{F}_2(4; -3; 2)$, $\vec{F}_3(1; -4; -2)$ прикладені до однієї точки. Обчислити роботу, яку виконає рівнодійна цих сил, коли точка прикладання, рухаючись прямолінійно, переміститься з точки $A(4; 2; -8)$ у точку $B(3; -2; -5)$.

Розв'язання

Із курсу фізики відомо, що робота A сили $\vec{F}$ при переміщенні матеріальної точки з початку в кінець вектора $\vec{S}$, який утворює з вектором $\vec{F}$ кут α , знаходиться за формулою $A = |\vec{F}| |\vec{S}| \cos \alpha$ або $A = \vec{F} \cdot \vec{S}$. Згідно умови $\vec{S} = \overrightarrow{AB} = (-1; -4; 3)$. Задамо вектори $\vec{F}_1(2; 3; 5)$, $\vec{F}_2(4; -3; 2)$, $\vec{F}_3(1; -4; -2)$ та знайдемо їх рівнодійну

```

> with(linalg):

```

Warning, the protected names norm and trace have been redefined and unprotected

```
> F1:=<2|3|5>;
                                F1 := [2, 3, 5]
> F2:=<4|-3|2>;
                                F2 := [4, -3, 2]
> F3:=<1|4|-2>;
                                F3 := [1, 4, -2]
> F=F1+F2+F3;
                                F = [7, 4, 5]
> F4:= vector(3, [7,4,5]);
                                F4 := [7, 4, 5]
> S:=vector(3, [-1,-4,3]);
                                S := [-1, -4, 3]
> A:=innerprod(F4,S);
                                A := -8
> abs(%);
```

8

Відповідь: 8 Дж.

Задача 8.7. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a} = 8\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}$ та $\vec{b} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$.

Розв'язання

Скористаємося геометричною властивістю векторного добутку: модуль векторного добутку неколінеарних векторів, віднесених до спільного початку, дорівнює площі паралелограма, побудованого на цих векторах.

Задамо вектори $\vec{a} = 8\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}$ і $\vec{b} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ та знайдемо їх векторний добуток:

```
> with(linalg):
```

Warning, the protected names norm and trace have been redefined and unprotected

```
> F1:=<8|4|1>;
```

$$F1 := [8, 4, 1]$$

```
> F2:=<2|-2|1>;
```

$$F2 := [2, -2, 1]$$

```
> B:=crossprod(F1,F2);
```

$$B := [6, -6, -24]$$

Модуль (відстань між початком і кінцем) знайденого вектора дорівнює шуканій площі:

```
> with(student):
```

```
> S:=distance([0,0,0],[6,-6,-24]);
```

$$S := 18\sqrt{2}$$

Відповідь: $18\sqrt{2}$ кв. од.

Задача 8.8. Сила $\vec{F} = (2; -4; 5)$ прикладена до точки $A(4; -2; 3)$. Визначити момент цієї сили відносно точки $C(3; 2; -1)$.

Розв'язання

Момент сили $\vec{F}$, прикладеної в точці A відносно точки C визначається векторним добутком

$$\vec{M} = \overrightarrow{CA} \times \vec{F}.$$

Задамо вектори $\vec{F}_1 = \overrightarrow{CA} = (1; -4; 4)$ і $\vec{F} = (2; -4; 5)$ та знайдемо їх векторний добуток:

```
> with(linalg):
```

Warning, the protected names norm and trace have been redefined and unprotected

```
> F1:=<1|-4|4>;
```

$$F1 := [1, -4, 4]$$

```
> F:=<2|-4|5>;
```

$$F := [2, -4, 5]$$

```
> M:=crossprod(F1,F);
```

$$M := [-4, 3, 4]$$

Задача 8.9. Знайти об'єм паралелепіпеда, побудованого на заданих векторах: $\vec{a} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$.

Розв'язання

Об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, дорівнює модулю мішаного добутку цих векторів

$$V = \left| \vec{a} \vec{b} \vec{c} \right|.$$

Задамо вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ та знайдемо об'єм паралелепіпеда:

```
> with(linalg):
```

Warning, the protected names norm and trace have been redefined and unprotected

```
> a:=<2|2|3>;
```

```
a := [2, 2, 3]
```

```
> b:=<3|1|2>;
```

```
b := [3, 1, 2]
```

```
> c:=<1|3|1>;
```

```
c := [1, 3, 1]
```

```
> d:=crossprod(a,b);
```

```
d := [1, 5, -4]
```

```
> d1:= vector(3, [1,5,-4]);
```

```
d1 := [1, 5, -4]
```

```
> c1:=vector(3, [1,3,1]);
```

```
c1 := [1, 3, 1]
```

```
> innerprod(d1,c1);
```

```
12
```

Відповідь: 12 куб. од.

Задача 8.10. Обчислити об'єм тетраедра, вершини якого знаходяться у точках $A(2; -1; 1)$, $B(5; 5; 4)$, $C(3; 2; -1)$ і $D(4; 1; 3)$

Розв'язання

Об'єм тетраедра, побудованого на векторах $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{AD}$, дорівнює одній шостій об'єму паралелепіпеда, побудованого на цих же векторах.

Модуль мішаного добутку $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$, віднесених до спільного початку:

$$V = \left| \vec{a}\vec{b}\vec{c} \right|.$$

Знайдемо координати векторів $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{AD}$:

$$\overrightarrow{AB} = (3; 6; 3); \overrightarrow{AC} = (1; 3; -2); \overrightarrow{AD} = (2; 2; 2).$$

Знайдемо спочатку векторний добуток $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$, а потім скалярний добуток вектора $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ на вектор $\overrightarrow{AD}$:

```
> restart;
> with(linalg):

Warning, the protected names norm and trace have been
redefined and unprotected

> a:=<3|6|3>;
                                     a := [3, 6, 3]
> b:=<1|3|-2>;
                                     b := [1, 3, -2]
> c:=<1|3|1>;
                                     c := [1, 3, 1]
> d:=crossprod(a,b);
                                     d := [-21, 9, 3]
> V:=dotprod(d, c);
                                     V := 9
```

Отже, об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{AD}$:

$$V_{\text{п.}} = \left| \left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right) \cdot \overrightarrow{AD} \right| = 9.$$

Оскільки об'єм тетраедра, побудованого на векторах $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{AD}$, дорівнює одній шостій об'єму паралелепіпеда, побудованого на цих же векторах, то

$$V_{\text{т}} = \frac{1}{6} \cdot 9 = \frac{3}{2} = 1,5 \text{ (куб.од.)}.$$

Відповідь: 1,5 куб. од.

8.5 Завдання для самостійного виконання

1. Задати матрицю A розмірності 3×3 :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 3 & 9 & 1 \\ 0 & 1 & 12 \end{bmatrix}.$$

а). Роздрукувати мінор матриці A , який відповідає елементу другого рядку другого стовпчика;

б) знайти ранг матриці A ;

в) задати матрицю A^T , транспоновану до матриці A ;

г) знайти визначники матриць A та A^T ;

д) знайти матриці обернені, до матриць A та A^T ;

е) перемножити матриці A та A^T ;

є) знайти суму матриць A та A^T ;

ж) помножити матрицю A на чотири.

2. Знайти матрицю $-4A + 5B$ та добуток матриць A і B , якщо

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -23 & -8 \\ 0 & -5 & -9 \\ 2 & -8 & 11 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 22 & -7 \\ 1 & 4 & -6 \\ 7 & 10 & -8 \end{pmatrix}.$$

3. Задати вектори-рядки $\vec{v}_1 = (1, 3, 5, 6)$ та $\vec{v}_2 = (7, -4, 3, 7)$.

а) Знайти лінійну комбінацію векторів $-5\vec{v}_1 + 4\vec{v}_2$;

- б) знайти добуток вектора $\vec{v}_1$ на вектор $\vec{v}_2$;
в) нормалізувати вектор $\vec{v}_1$.
4. Визначити базис для сукупності векторів: $\vec{v}_1 = (-4; 3; 0; -2)$;
 $\vec{v}_2 = (-1; -1; 3; 0)$; $\vec{v}_3 = (-1; 1; 0; 1)$; $\vec{v}_4 = (1; -6; 0; 5)$;
 $\vec{v}_5 = (1; 1; 9; 0)$.
5. Знайти кут між векторами $\vec{a} = (-7; 3; 1)$ та $\vec{b} = (-1; -6; 12)$.
6. Знайти скалярний добуток векторів $\vec{v}_1 = (-1; 5; -3)$ та $\vec{v}_2 = (0; 12; 7)$.
7. Знайти векторний добуток векторів $\vec{v}_1 = -4\vec{i} + 12\vec{j} - 11\vec{k}$ та $\vec{v}_2 = 4\vec{i} + 8\vec{j} - 2\vec{k}$.
8. Знайти мішаний добуток векторів $\vec{v}_1 = 4\vec{i} - 7\vec{j} - 4\vec{k}$, $\vec{v}_2 = 4\vec{i} - \vec{k}$, $\vec{v}_3 = -5\vec{i} - 4\vec{j} + 10\vec{k}$.

Обчислення границь. Суми і ряди

9.1 Обчислення границь

Maple успішно справляється з обчисленням границі функції в точці, знаходить односторонні границі, границю функції при прямуванні незалежної змінної до нескінченності.

У Maple можна легко задавати ряди та обчислювати їхні суми, розкладати функції в ряди.

Обчислення границь здійснюється за допомогою команди `limit(f,x=)`.

Якщо в команді `limit(f,x=)`, замінити `l` на `L`, то команда `Limit(f,x=)` роздрукує аналітичний запис границі.

Наприклад:

```
> Limit((x+5),x=1);
```

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x + 5)$$

```
> limit(x+5,x=1);
```

6

```
> Limit((x^2-5*x-14)/(2*x^2+x-6),x=2);
```

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x - 14}{2x^2 + x - 6}$$

- > $\text{limit}((x^2-5x-14)/(2x^2+x-6), x=2);$

$$-5$$
- > $\text{Limit}((x^2-5x-14)/(2x^2+x-6), x=-2);$

$$\lim_{x \rightarrow (-2)} \frac{x^2 - 5x - 14}{2x^2 + x - 6}$$
- > $\text{limit}((x^2-5x-14)/(2x^2+x-6), x=-2);$

$$\frac{9}{7}$$
- > $\text{Limit}((x^2-5x-14)/(2x^2+x-6), x=\text{infinity});$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 5x - 14}{2x^2 + x - 6}$$
- > $\text{limit}((x^2-5x-14)/(2x^2+x-6), x=\text{infinity});$

$$\frac{1}{2}$$
- > $\text{Limit}((3x*\tan(2x))/(\sin(3x))^2, x=0);$

$$\lim_{x \rightarrow 0} 3 \frac{x \tan(2x)}{\sin(3x)^2}$$
- > $\text{limit}((3x*\tan(2x))/(\sin(3x))^2, x=0);$

$$\frac{2}{3}$$
- > $\text{Limit}((1-\sqrt{x})/(1-x^{(1/3)}), x=1);$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{1 - x^{(1/3)}}$$
- > $\text{limit}((1-\sqrt{x})/(1-x^{(1/3)}), x=1);$

$$\frac{3}{2}$$
- > $\text{Limit}(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2+x}, x=\text{infinity});$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 + x})$$
- > $\text{limit}(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2+x}, x=\text{infinity});$

$$\frac{1}{2}$$
- > $\text{Limit}(((2x-5)/(2x+1))^{(x-1)}, x=\text{infinity});$

```


$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x-5}{2x+1} \right)^{(x-1)}$$

> limit(((2*x-5)/(2*x+1))^(x-1),x=infinity);

$$e^{(-3)}$$

> Limit(((t-3)/(t+2))^(2*t+1),t=infinity);

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{t-3}{t+2} \right)^{(2t+1)}$$

> limit(((t-3)/(t+2))^(2*t+1),t=infinity);

$$e^{(-10)}$$

> Limit((1-2*x)^(1/x),x=0)=limit((1-2*x)^(1/x),x=0);

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1-2x)^{(\frac{1}{x})} = e^{(-2)}$$


```

У команді `limit(f,x=)` може бути необов'язковий параметр `dir`, який набуває одне із наступних значень: `left` (границя зліва), `right` (границя справа), `real` (дійсний), `complex` (комплексний). Проілюструємо зазначене прикладами.

Приклади:

```

> Limit(x^3/(x^2+x-2),x=1,left)=
limit(x^3/(x^2+x-2),x=1,left);

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{x^3}{x^2 + x - 2} = -\infty$$

> Limit(x^3/(x^2+x-2),x=1,right)=
limit(x^3/(x^2+x-2),x=1,right);

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{x^3}{x^2 + x - 2} = \infty$$

> Limit(1/(1+exp(1/x)),x=0,left)=
limit(1/(1+exp(1/x)),x=0,left);

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{1}{1 + e^{(\frac{1}{x})}} = 1$$

> Limit(1/(1+exp(1/x)),x=0,right)=
limit(1/(1+exp(1/x)),x=0,right);

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{1 + e^{(\frac{1}{x})}} = 0$$

> limit(5*exp(x), x=infinity);

```

```

                                 $\infty$ 
> limit(6*exp(x), x=-infinity);
                                0
> limit(4*exp(x), x=infinity, real);
                                undefined
> limit(1/(x-3), x=3, right);
                                 $\infty$ 
> limit(1/(x-3), x=3, left);
                                 $-\infty$ 
> limit(1/(x-3), x=0);
                                 $-\frac{1}{3}$ 
> limit(1/x, x=0, real);
                                undefined

> limit(1/(x-3), x=2*I, complex);
                                 $\frac{-3}{13} - \frac{2}{13} I$ 
> limit(1/x, x=infinity, real);
                                0
> limit(-x, x=infinity, complex);
                                 $-\infty + \infty I$ 

```

9.2 Суми і ряди

Для операції сумування використовуються команди: `sum(expr, var=var1..var2)` або `Sum(expr, var=var1..var2)`.

Нагадаємо, що при використанні команди, назва якої починається з маленької букви, сумування проводиться одразу, а для виконання `Sum` потрібно додатково дати команду `value`.

У цьому випадку `expr` — вираз, який залежить від змінної сумування `var`, а `var1..var2` — межі сумування. Межі сумування

можуть бути скінченими, нескінченними або відсутніми. У скінчених сумах діапазон сумування може містити як числові, так і символічні значення.

Покажемо застосування даних команд на конкретних прикладах.

Приклад 9.1. Знайти суму n перших членів послідовності

$$\left\{ \frac{2^n + 3^n}{6^n} \right\}.$$

```
> Sum('(2^n+3^n)/6^n', 'n'=1..n);
```

$$\sum_{n=1}^n \frac{2^n + 3^n}{6^n}$$

```
> value(Sum('(2^n+3^n)/6^n', 'n'=1..n));
```

$$-\frac{3}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^{(n+1)} - 2 \left(\frac{1}{2}\right)^{(n+1)} + \frac{3}{2}$$

Наведемо більш наочніше оформлення розв'язання цього прикладу.

Приклад 9.2. Знайти суму n перших членів послідовності

$$\left\{ \frac{2^n + 3^n}{6^n} \right\}.$$

```
> Sum('(2^n+3^n)/6^n', 'n'=1..n)=
```

```
sum('(2^n+3^n)/6^n', 'n'=1..n);
```

$$\sum_{n=1}^n \frac{2^n + 3^n}{6^n} = -\frac{3}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^{(n+1)} - 2 \left(\frac{1}{2}\right)^{(n+1)} + \frac{3}{2}$$

Maple в одному рядку подає умову і відповідь.

Приклад 9.3. Знайти суму n перших членів послідовності

$$\left\{ \frac{1}{n(n+1)(n+2)} \right\}.$$

```
> Sum('(1/(n*(n+1)*(n+2)))', 'n'=1..n)=
```

```
sum('(1/(n*(n+1)*(n+2)))', 'n'=1..n);
```

$$\sum_{n=1}^n \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = -\frac{1}{2} \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{4}$$

Приклад 9.4. Знайти суму n перших членів послідовності

$$\left\{ \operatorname{arctg} \frac{1}{n^2 + n + 1} \right\}.$$

> Sum('arctan(1/(n^2+n+1))', 'n'=1..n)=
sum('arctan(1/(n^2+n+1))', 'n'=1..n);

$$\sum_{n=1}^n \arctan\left(\frac{1}{n^2 + n + 1}\right) = \sum_{n=1}^n \arctan\left(\frac{1}{n^2 + n + 1}\right)$$

Якщо Maple не спроможний знайти суму, то він просто повторює команду сумування, що й спостерігається в попередньому прикладі.

Приклад 9.5. Знайти суму 20 перших членів послідовності $\{n\}$.

> Sum('n', 'n'=1..20)=sum('n', 'n'=1..20);

$$\sum_{n=1}^{20} n = 210$$

Приклад 9.6. Знайти суму членів послідовності $\{n^2\}$ від $n = 5$ до $n = 10$.

> Sum('n^2', 'n'=5..10)=sum('n^2', 'n'=5..10);

$$\sum_{n=5}^{10} n^2 = 355$$

Приклад 9.7. Знайти суму членів послідовності $\{n^3\}$ від $n = a$ до $n = b$.

> Sum('n^3', 'n'=a..b)=sum('n^3', 'n'=a..b);

$$\sum_{n=a}^b n^3 = \frac{1}{4}(b+1)^4 - \frac{1}{2}(b+1)^3 + \frac{1}{4}(b+1)^2 - \frac{1}{4}a^4 + \frac{1}{2}a^3 - \frac{1}{4}a^2$$

Команда Sum може бути використана і при сумуванні рядів. При цьому права межа діапазону змінної сумування позначається infinity.

Приклад 9.8. Знайти суму ряду $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$.

```
> Sum('1/(n^2-1)', 'n'=2..infinity)=
sum('1/(n^2-1)', 'n'=2..infinity);
```

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1} = \frac{3}{4}$$

Приклад 9.9. Знайти суму ряду $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n(n+1)}{n!}$.

```
> Sum('2^n*(n+1)/n!', 'n'=0..infinity)=
sum('2^n*(n+1)/n!', 'n'=0..infinity);
```

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n(n+1)}{n!} = 3e^2$$

Приклад 9.10. Знайти суму ряду $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{2^n n!} x^n$.

```
> Sum('((n^2+1)/(2^n*n!))*x^n',
'n'=0..infinity)=sum('((n^2+1)/(2^n*n!))*x^n',
'n'=0..infinity);
```

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n^2 + 1)x^n}{2^n n!} = e^{(1/2)x} + \frac{1}{2} e^{(1/2)x} x + \frac{1}{4} e^{(1/2)x} x^2$$

Команда **series** (вираз, $x=a$, $[n]$) розкладає в степеневий узагальнений ряд вирази і функції, які задані першим параметром в околі точки $x=a$, якщо другий параметр взяти просто x , то знайдемо розклад виразу в околі точки $x=0$. Третій параметр необов'язковий, він повинен бути цілим додатнім числом, яке визначає порядок утримування членів у розкладі функції.

Приклад 9.11. Розкласти у степеневі ряди функції: $y = e^x$, $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = (1+x)^m$.

```
> series(exp(x),x,10);
```

$$1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + \frac{1}{720}x^6 + \frac{1}{5040}x^7 + \frac{1}{40320}x^8 + \frac{1}{362880}x^9 + O(x^{10})$$

```
> series(sin(x),x,10);
```

```


$$x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7 + \frac{1}{362880}x^9 + O(x^{10})$$

> series(cos(x),x,10);

$$1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6 + \frac{1}{40320}x^8 + O(x^{10})$$

> series((1+x)^m,x,5);

```

$$1 + mx + \frac{1}{2}m(m-1)x^2 + \frac{1}{6}m(m-1)(m-2)x^3 + \frac{1}{24}m(m-1)(m-2)(m-3)x^4 + O(x^5)$$

За допомогою команди **taylor** виконується розклад у ряд Тейлора функції однієї змінної в околі точки $x=a$ по степенях $(x-a)$.

Приклад 9.12. Розкласти у ряд Тейлора в околі точки $x = 1$ функцію $y = e^{-x^2}$.

```
> taylor(exp(-x^2),x=1,7);
```

$$e^{(-1)} - 2e^{(-1)}(x-1) + e^{(-1)}(x-1)^2 + \frac{2}{3}e^{(-1)}(x-1)^3 - \frac{5}{6}e^{(-1)}(x-1)^4 + \frac{1}{15}e^{(-1)}(x-1)^5 + \frac{23}{90}e^{(-1)}(x-1)^6 + O((x-1)^7)$$

Приклад 9.13. Розкласти у ряд Тейлора в околі точки $x = 0$ функцію $y = \frac{x}{1+x-2x^2}$.

```
> taylor(x/(1+x-2*x^2),x=0,10);
```

$$x - x^2 + 3x^3 - 5x^4 + 11x^5 - 21x^6 + 43x^7 - 85x^8 + 171x^9 + O(x^{10})$$

9.3 Побудова графіків періодичних функцій і графіків часткових сум ряду Фур'є

Побудова графіків періодичних функцій, що виражаються через періодичні тригонометричні функції, виконується стан-

дартними методами побудови графіків. Інша справа якщо періодична функція являє собою періодичне поширення на всю числову вісь довільного виразу, заданого на якомусь проміжку. У цьому випадку побудова графіків таких періодичних функцій зводиться до задання функції на цьому проміжку і подальшого поширення графіка цієї функції на всю числову вісь. У результаті виходить послідовність однакових графіків, зміщених на період.

Приклад 9.14. Побудувати графік періодичної функції, заданої умовами:

$$f(x) = \begin{cases} 2, & \text{при } -2 \leq x < -1; \\ -2x, & \text{при } -1 \leq x < 0; \\ x^2, & \text{при } 0 \leq x < 2, \end{cases} \quad \text{період } T = 4.$$

Розв'язання

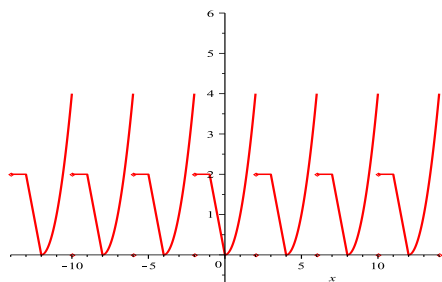
Спочатку задамо функцію на проміжку $[-2; 2)$ за допомогою функції `piecewise`, яка визначає кусково задану функцію:

```
> f := proc (x) options operator,
arrow; piecewise (x < -2, 0, x < -1, 2, x < 0,
-2*x, x < 2, x^2, 0) end proc;
```

Потім задамо значення періоду і визначимо необхідне для відображення число періодичних побудов у вигляді послідовності графіків $P[k]$:

```
> T := 4; -1; for k from -3 to 3 do P[k] :=
plot(f(x+T*k), x = -2-T*k .. 2-T*k, discont =
true, thickness = 2) end do; -1
```

Відобразимо графіки в одному вікні:



Періодичні функції розкладаються в ряд Фур'є за тригонометричною системою функцій. Ряд Фур'є для функцій з періодом $T = 2l$ має вигляд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right), \quad (9.1)$$

де коефіцієнти ряду Фур'є знаходяться за формулами:

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx, \quad (9.2)$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \quad (9.3)$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx. \quad (9.4)$$

Приклад 9.15. Знайти коефіцієнти ряду Фур'є періодичної функції, заданої умовами:

$$f(x) = \begin{cases} 2, & \text{при } -2 \leq x < -1; \\ -2x, & \text{при } -1 \leq x < 0; \\ x^2, & \text{при } 0 \leq x < 2, \end{cases} \quad \text{період } T = 4$$

та побудувати в одному вікні графік функції і часткової суми S_{10} отриманого ряду Фур'є.

Розв'язання

За формулами 9.2–9.4, використовуючи задання функції, знайдемо коефіцієнти ряду Фур'є:

```
> assume(n, integer);
```

```
> a[0] := (1/2)*(int(f(x), x = -2 .. 2));
```

$$a_0 := \frac{17}{6}$$

```
> a[n] := simplify((1/2)*(int(f(x)*cos((1/2)*n*Pi*x),  
x = -2 .. 2)));
```

$$a_n := 4 \frac{\cos(1/2 n \pi) - 1 + 2 (-1)^n}{n^2 \pi^2}$$

```
> b[n] := simplify((1/2)*(int(f(x)*sin((1/2)*n*Pi*x),  
x = -2 .. 2)));
```

$$b_n := 2 \frac{(-1)^{1+n} n^2 \pi^2 - 2 \sin(1/2 n \pi) n \pi - 4 + 4 (-1)^n}{n^3 \pi^3}.$$

Визначимо графічний об'єкт P0 у вигляді послідовності графіків періодичній функції, визначених у попередньому пункті:

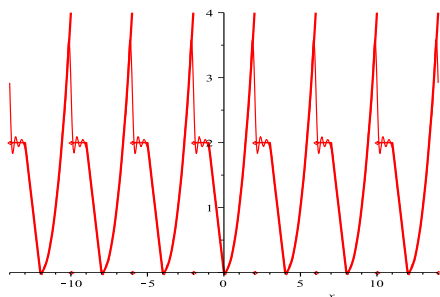
```
> P0 := seq(P[k], k = -3 .. 3):
```

Знаходимо часткову суму S_{10} і будуємо графіки періодичної функції та цієї часткової суми:

```
> S[10] := (1/2)*a[0]+sum(a[n]*cos((1/2)*n*Pi*x)+  
b[n]*sin((1/2)*n*Pi*x), n = 1 .. 10):
```

```
> P1 := plot(S[10], x = -14 .. 14):
```

```
> display(P0, P1);
```



За графіком, часткова сума S_{10} добре апроксимує періодичну функцію далеко від точок розриву. Для точок, близьких до точок розриву, необхідно брати часткові суми з великим числом доданків.

9.4 Завдання для самостійного виконання

1. Знайти границю:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - x - 2)^{20}}{(x^2 - 12x + 16)^{10}};$$

$$6) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}};$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x-2}};$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+\frac{x}{3}} - \sqrt[4]{1+\frac{x}{4}}}{1 - \sqrt{1-\frac{x}{2}}};$$

$$9) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\operatorname{tg}^3 x - 3 \operatorname{tg} x}{\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)};$$

$$10) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2 - x + 1}{2x^2 + x + 1} \right)^{\frac{x^2}{1-x}};$$

$$11) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 - x + 1)}{\ln(x^{10} + x + 1)};$$

$$12) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)};$$

$$13) \lim_{x \rightarrow 2} \operatorname{arctg} \frac{x-4}{(x-2)^2}.$$

2. Знайти суму n перших членів послідовності:

$$1) \left\{ \frac{4^n + 5^n}{8^n} \right\}; \quad 2) \left\{ \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} \right\}; \quad 3) \left\{ \operatorname{arctg} \frac{1}{n^2 + n + 1} \right\}.$$

3. Знайти суму перших ста натуральних чисел.

4. Знайти суму членів послідовності $\{n^3\}$ від $n = 4$ до $n = 14$.

5. Знайти суму членів послідовності $\{n^2\}$ від $n = c$ до $n = d$.

6. Знайти за допомогою Maple, якщо це можливо, суму ряду:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 3^n}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)}; \quad 3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2}; \quad 4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n};$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n}{n+1} \right)^n; \quad 6) \sum_{n=1}^{\infty} \sin^n \left(\frac{\pi}{3n} \right); \quad 7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2 + 3}.$$

7. Знайти розклад функції у степеневий ряд: 1) $y = \ln x$,

$$2) y = \sin^2 x, \quad 3) y = \sqrt[3]{x}, \quad 4) y = \ln \frac{1}{x^2 - 2x + 2}.$$

8. Представити функції, що вказані у завданні 7, рядом Тейлора в околі точки $x = 1$.

10

Диференціювання в середовищі Maple

10.1 Диференціювання функцій однієї змінної

У середовищі Maple можна легко знаходити похідні та диференціали від будь-яких функцій, частинні похідні, похідні вищих порядків, знаходити найбільше і найменше значення функції на відрізку, найбільше і найменше значення функції з двома змінними, розв'язувати задачі лінійного програмування. Для знаходження похідної функції застосовується команда `diff`.

Приклад 10.1. Знайти похідну функції

$$y = \left(5x^2 - 3\sqrt[5]{x^2} - 2\right)^3.$$

```
> y := (5*x^2 - 3*(x^2)^(1/5) - 2)^3;
```

$$y := (5x^2 - 3(x^2)^{(1/5)} - 2)^3$$

```
> diff(y,x);
```

$$3(5x^2 - 3(x^2)^{(1/5)} - 2)^2 \left(10x - \frac{6}{5} \frac{x}{(x^2)^{(4/5)}}\right)$$

Приклад 10.2. Знайти похідну функції

$$y = \frac{2^x + \operatorname{ctg} x}{\sqrt{4 + 2x^3}}.$$

> `y:=(2^x+cot(x))/sqrt(4+2*x^3);`

$$y := \frac{2^x + \cot(x)}{\sqrt{4 + 2x^3}}$$

> `diff(y,x);`

$$\frac{2^x \ln(2) - 1 - \cot(x)^2}{\sqrt{4 + 2x^3}} - \frac{3(2^x + \cot(x))x^2}{(4 + 2x^3)^{3/2}}$$

Приклад 10.3. Знайти похідну функції

$$y = e^{\sin x} \arccos 3x.$$

> `y:=exp(sin(x))*arccos(3*x);`

$$y := e^{\sin(x)} \arccos(3x)$$

> `diff(y,x);`

$$\cos(x) e^{\sin(x)} \arccos(3x) - \frac{3 e^{\sin(x)}}{\sqrt{1 - 9x^2}}$$

Приклад 10.4. Знайти похідну функції

$$y = \operatorname{arctg} \ln 7x.$$

> `y:=arctan(ln(7*x));`

$$y := \arctan(\ln(7x))$$

> `diff(y,x);`

$$\frac{1}{x(1 + \ln(7x)^2)}$$

Приклад 10.5. Знайти похідну функції

$$y = \ln \frac{\sin(8x^4 + 7x^3 + 6)}{\cos(3^{\cos(9x-2)})}.$$

> $y := \ln((\sin(8x^4 + 7x^3 + 6)) / (\cos(3^{(9x-2)})))$;

$$y := \ln\left(\frac{\sin(8x^4 + 7x^3 + 6)}{\cos(3^{(9x-2)})}\right)$$

> $\text{diff}(y, x)$;

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\cos(8x^4 + 7x^3 + 6)(32x^3 + 21x^2)}{\cos(3^{(9x-2)})} \right. \\ & + \frac{9\sin(8x^4 + 7x^3 + 6)\sin(3^{(9x-2)})3^{(9x-2)}\ln(3)}{\cos(3^{(9x-2)})^2} \\ & \left. \cos(3^{(9x-2)}) / \sin(8x^4 + 7x^3 + 6) \right) \end{aligned}$$

Найменше і найбільше значення функції $y = f(x)$ на відрізку $[a; b]$ знаходиться за допомогою команд $\text{minimize}(f(x), x=a..b)$, $\text{maximize}(f(x), x=a..b)$.

Приклад 10.6. Знайти найменше і найбільше значення функції

$$y = \frac{1}{4}(x^3 + 9x^2 + 15x - 9)$$

на відрізку $[-3; 0]$.

> $f := x \rightarrow 1/4*(x^3 + 9x^2 + 15x - 9)$;

$$f := x \rightarrow \frac{1}{4}x^3 + \frac{9}{4}x^2 + \frac{15}{4}x - \frac{9}{4}$$

> $\text{minimize}(f(x), x=-3..0)$;

-4

> $\text{maximize}(f(x), x=-3..0)$;

0

За допомогою параметра `location` можна знаходити локальний максимум чи мінімум.

Приклад 10.7. Знайти найменше і найбільше значення функції

$y = \frac{1}{4}(x^3 + 9x^2 + 15x - 9)$ на відрізку $[-6, 1]$.

> $\text{minimize}(1/4*(x^3 + 9x^2 + 15x - 9), x=-6..1, \text{location})$;

-4, $\{[x = -1], -4\}$

> $\text{maximize}(1/4*(x^3 + 9x^2 + 15x - 9), x=-6..1, \text{location})$;

4, $\{[x = 1], 4\}, \{[x = -5], 4\}$

10.2 Диференціювання функцій багатьох змінних

Приклад 10.8. Знайти похідну по x від функції двох змінних

$$f(x, y) = \cos x \cdot y + \sin y \cdot x.$$

> Ffunction:=cos(x)*y+sin(y)*x;

$$Ffunction := \cos(x) y + \sin(y) x$$

> Diff(Ffunction,x);

$$\frac{\partial}{\partial x} (\cos(x) y + \sin(y) x)$$

> diff(Ffunction,x);

$$-\sin(x) y + \sin(y)$$

Приклад 10.9. Знайти похідну по y від функції

$$f(x, y) = \cos x \cdot y + \sin y \cdot x.$$

> Diff(Ffunction,y);

$$\frac{\partial}{\partial y} (\cos(x) y + \sin(y) x)$$

> diff(Ffunction,y);

$$\cos(x) + \cos(y) x$$

Приклад 10.10. Знайти мішану похідну $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ від функції

$$f(x, y) = \cos x \cdot y + \sin y \cdot x.$$

> Diff(Ffunction,x,y);

$$\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} (\cos(x) y + \sin(y) x)$$

> diff(Ffunction,x,y);

$$-\sin(x) + \cos(y)$$

Для знаходження похідної більш високого порядку достатньо вказати після аргументу диференціювання знак \$ і порядок похідної.

Приклад 10.11. Знайти похідну третього порядку від функції $f(x, y) = \cos x \cdot y + \sin y \cdot x$ по x .

```

> Ffunction:=cos(x)*y+sin(y)*x;
      Ffunction := cos(x) y + sin(y) x
> (Ffunction,x$3);
      cos(x) y + sin(y) x, x, x, x
> diff(Ffunction,x$3);
      sin(x) y

```

Приклад 10.12. Знайти похідну п'ятого порядку від функції $f(x, y) = \cos x \cdot y + \sin y \cdot x$ по y .

```

> Diff(Ffunction,y$5);
      ∂5
      ∂y5 (cos(x) y + sin(y) x)
> diff(Ffunction,y$5);
      cos(y) x

```

Приклад 10.13. Знайти найменше значення функції з двома змінними $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y - 2$.

Розв'язання

```

> minimize(x^2+x*y+y^2-3*x-6*y-2, location);
      -11, [{y = 3, x = 0}, -11]

```

Приклад 10.14. Знайти найбільше значення функції з двома змінними $z = 10xy - 3x^2 - 2y^2 - 26x + 18y - 1$.

Розв'язання

```

> maximize(10*x*y-3*x^2-2*y^2-26*x+18*y-1,
location);
      30, [{y = 2, x = -1}, 30]

```

Приклад 10.15. Знайти найбільше значення функції з двома змінними $z = 2x^2 - xy + 3y^2 - 2x - 11y + 1$.

Розв'язання

```

> maximize(2*x^2-x*y+3*y^2-2*x-11*y+1, location);
∞, [{x = -∞}, ∞], [{x = ∞}, ∞], [{y = -∞}, ∞], [{y = ∞}, ∞]

```

При підключенні бібліотеки `with(simplex)` Maple успішно справляється із задачами лінійного програмування. Команда `minimize(obj,cnsts)` мінімізує функцію `obj` при даних обмеженнях `cnsts`, команда `maximize(obj,cnsts)` максимізує функцію `obj` при даних обмеженнях `cnsts`.

Приклад 10.16. Розв'язати задачу мінімізації цільової функції $L = 3x_1 + 2x_2 + 3x_3$, за умови, що змінні x_1, x_2, x_3 задовольняють систему нерівностей:

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + x_3 \geq 5; \\ 2x_1 - x_2 + x_3 \geq 6; \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 \geq 10; \\ x_1 \geq 0; \\ x_2 \geq 0; \\ x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Розв'язання

```
> with(simplex):
```

Warning, the protected names maximize and minimize have been redefined and unprotected

```
> cnsts:={4*x1+x2+x3>=5,2*x1-x2+x3>=6,
3*x1+4*x2-2*x3>=10,x1>=0,x2>=0,x3>=0};
```

$$cnsts := \{6 \leq 2x_1 - x_2 + x_3, 5 \leq 4x_1 + x_2 + x_3, \\ 10 \leq 3x_1 + 4x_2 - 2x_3, 0 \leq x_1, 0 \leq x_2, 0 \leq x_3\}$$

```
> obj:=3*x1+2*x2+3*x3;
```

$$obj := 3x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

```
> minimize(obj,cnsts);
```

$$\{x_3 = 0, x_1 = \frac{34}{11}, x_2 = \frac{2}{11}\}$$

```
> L:=eval(obj,[x3 = 0, x2 = 2/11, x1 = 34/11]);
```

$$L := \frac{106}{11}$$

Приклад 10.17. Знайти найбільше значення функції $L = 3x_1 + 4x_2 + 2x_3$, при умові, що x_1, x_2, x_3 задовольняють систему нерівностей:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 4; \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 6; \\ x_1 \geq 0; \\ x_2 \geq 0; \\ x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Розв'язання

```
> with(simplex):
```

Warning, the protected names maximize and minimize have been redefined and unprotected

```
> cnsts := {2*x1+x2+x3<=4, x1+2*x2+x3<=6, x1>=0, x2>=0, x3>=0};
```

```
cnsts := {2 x1 + x2 + x3 ≤ 4, x1 + 2 x2 + x3 ≤ 6, 0 ≤ x1, 0 ≤ x2, 0 ≤ x3}
```

```
> obj:=3*x1+4*x2+2*x3;
```

```
obj := 3 x1 + 4 x2 + 2 x3
```

```
> maximize(obj,cnsts);
```

```
{x3 = 0, x2 = 8/3, x1 = 2/3}
```

```
> L:=eval(obj,[x1=2/3,x2=8/3,x3=0]);
```

```
L := 38/3
```

10.3 Графічні побудови при розв'язуванні завдань дисципліни „Математика“

При вивченні дисципліни «Математика» є ряд завдань, прямо або побічно пов'язаних із побудовою графіків функцій та інших геометричних об'єктів. Наприклад, при вивченні розділу «Функції однієї змінної» стандартним завданням є завдання на

дослідження властивостей функцій і побудову їх графіків, у задачах на застосування інтегралів вимагається будувати області інтегрування на площині або в просторі. Такі завдання можна розв'язувати у **Maple**, поєднуючи обчислювальні і графічні можливості програми.

10.3.1 Дослідження функції та побудова її графіка

План дослідження функції та побудова її графіка включає в себе наступні основні пункти:

1. Знайти область визначення функції і визначити її поведінку на межах області визначення; знайти горизонтальні і вертикальні асимптоти.
2. Знайти похилі асимптоти.
3. Знайти інтервали зростання і спадання функції, точки екстремуму та обчислити значення функції в точках екстремуму.
4. Знайти інтервали опуклості та угнутості графіка функції, точки перегину і обчислити значення функції в точках перегину.
5. Побудувати графік функції.

Приклад 10.18. Провести повне дослідження функції $y = \frac{2x^3}{x^2-4}$ та побудувати її графік.

Розв'язання

Будемо розв'язувати наведений приклад у програмі **Maple**.

Визначимо функцію в програмі за допомогою оператора $f:=x \rightarrow f(x)$, де $f(x)$ деякий вираз від змінної x :

```
> restart;  
> f:=x->2*x^3/(x^2-4);
```

$$f := x \rightarrow 2 \frac{x^3}{x^2 - 4}$$

1) Знайдемо точки розриву функції за допомогою команди `discont (f (x), x)`:

```
> discont(f(x), x);
```

$$\{-2, 2\}$$

Таким чином, область визначення функції є об'єднання трьох проміжків $(-\infty; -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty)$.

2) Досліджуємо поведінку функції на межах області визначення за допомогою функції `limit(f(x), x = a)`:

```
> Limit(f(x), x=-infinity)=limit(f(x), x=-infinity);
```

$$\lim_{x \rightarrow (-\infty)} 2 \frac{x^3}{x^2 - 4} = -\infty$$

```
> Limit(f(x), x=-2, left)=limit(f(x), x=-2, left);
```

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^-} 2 \frac{x^3}{x^2 - 4} = -\infty$$

```
> Limit(f(x), x=-2, right)=limit(f(x), x=-2, right);
```

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^+} 2 \frac{x^3}{x^2 - 4} = \infty$$

```
> Limit(f(x), x=2, left)=limit(f(x), x=2, left);
```

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} 2 \frac{x^3}{x^2 - 4} = -\infty$$

```
> Limit(f(x), x=2, right)=limit(f(x), x=2, right);
```

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} 2 \frac{x^3}{x^2 - 4} = \infty$$

```
> Limit(f(x), x=infinity)=limit(f(x), x=infinity);
```

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 2 \frac{x^3}{x^2 - 4} = \infty$$

Отже,

- якщо $x \rightarrow -\infty$, то $y \rightarrow -\infty$;
- якщо $x \rightarrow -2$ зліва, то $y \rightarrow -\infty$;
- якщо $x \rightarrow -2$ справа, то $y \rightarrow +\infty$;
- якщо $x \rightarrow 2$ зліва, то $y \rightarrow -\infty$;

— якщо $x \rightarrow 2$ справа, то $y \rightarrow +\infty$;

— якщо $x \rightarrow +\infty$, то $y \rightarrow +\infty$.

Горизонтальних асимптот немає, вертикальні асимптоти:
 $x = -2$ і $x = 2$.

3) Перевіримо існування похилих асимптот $y = kx + b$, де
 $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$, $b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx)$:

> `k:=limit(f(x)/x,x=-infinity);`

> `b:=limit(f(x)-k*x, x=-infinity);`

$k := 2$

$b := 0$

$y = 2x$ — похила асимптота при $x \rightarrow \pm\infty$.

4) Дослідимо функцію на екстремум і монотонність.

Знайдемо першу похідну:

> `f1:=x->diff(f(x),x); normal(f1(x));`

$f1 := x \rightarrow \text{diff}(f(x), x)$

$$2 \frac{x^2 (x^2 - 12)}{(x^2 - 4)^2}$$

Прирівнюючи похідну до нуля, знайдемо стаціонарні точки функції:

> `z:=[solve(f1(x)=0,x)];`

$z := [0, 0, 2\sqrt{3}, -2\sqrt{3}]$

Усього вийшло три корені, з яких корінь $x = 0$ має кратність 2.

Визначимо зміну знака похідної при переході через критичні точки:

а) корінь $x = 0$:

> `subs(x=z[1]-0.1,f1(x)); subs(x=z[1]+0.1,f1(x));`

-0.01506271945

-0.01506271945

Знак похідної не змінюється, тому $x = 0$ не є точкою екстремуму.

б) корінь $x = -2\sqrt{3}$:

```
> evalf(subs(x=z[4]-0.1,f1(x)));
> evalf(subs(x=z[4]+0.1,f1(x)));
.235751486
-288660406
```

Знак похідної змінюється з $+$ на $-$, тому точка $x = -2\sqrt{3}$ є точкою локального максимуму. Значення функції в цій точці дорівнює:

```
> f(z[4]); evalf(%);
-6√3
-10.39230485
```

в) корінь $x = 2\sqrt{3}$:

```
> evalf(subs(x=z[3]-0.1,f1(x)));
> evalf(subs(x=z[3]+0.1,f1(x)));
-288660406
.235751486
```

Знак похідної змінюється з $-$ на $+$, тому точка $x = 2\sqrt{3}$ є точкою локального мінімуму. Значення функції в цій точці дорівнює:

```
> f(z[3]); evalf(%);
6√3
10.39230485
```

Визначимо інтервали зростання та спадання функції:

```
> solve(f1(x)>0,x);
```

$\text{RealRange}(-\infty, \text{Open}(-2\sqrt{3})),$

$\text{RealRange}(\text{Open}(2\sqrt{3}), \infty)$

на інтервалах $(-\infty, -2\sqrt{3})$ і $(2\sqrt{3}, +\infty)$ функція зростає,

```
> solve(f1(x)<0,x);
```

$\text{RealRange}(\text{Open}(-2\sqrt{3}), \text{Open}(-2)),$

$\text{RealRange}(\text{Open}(-2), \text{Open}(0)),$

$\text{RealRange}(\text{Open}(0), \text{Open}(2)),$

$\text{RealRange}(\text{Open}(2), \text{Open}(2\sqrt{3}))$

на інтервалах $(-2\sqrt{3}, -2)$, $(-2, 2)$ і $(2, 2\sqrt{3})$ функція спадає.

5) Дослідимо функцію на опуклість і перегин.

Знайдемо другу похідну:

```
> f2:=x->diff(f(x),x,x);normal(f2(x));
```

$$f2 := x \rightarrow \text{diff}(f(x), x, x)$$

$$16 \frac{x(x^2 + 12)}{(x^2 - 4)^3}$$

Знайдемо стаціонарні точки функції за другою похідною:

```
> u:=[solve(f2(x)=0,x)];
```

$$u := [0, 2I\sqrt{3}, -2I\sqrt{3}]$$

Одержали (дійсний корінь) стаціонарну точку — $x = 0$.
Перевіримо зміну знака другої похідної при переході через цю точку:

```
> evalf(subs(x=u[1]-0.1,f2(x)));
```

```
> evalf(subs(x=u[1]+0.1,f2(x)));
```

$$.3025131814$$

$$-.3025131814$$

Знак змінюється, отже, точка $x = 0$ є точкою перегину.
Значення функції в точці перегину дорівнює нулю:

```
> f(0);
```

$$0$$

Визначимо інтервали опуклості вниз (угнутості) і опуклості вгору (вигнутості) графіка функції:

```
> solve(f2(x)>0,x);
```

$$\text{RealRange}(\text{Open}(-2), \text{Open}(0)), \text{RealRange}(\text{Open}(2), \infty)$$

на інтервалах $(-2; 0)$ і $(2; +\infty)$ графік функції є опуклим вниз (увігнутим),

```
> solve(f2(x)<0,x);
```

$$\text{RealRange}(-\infty, \text{Open}(-2)), \text{RealRange}(\text{Open}(0), \text{Open}(2))$$

на інтервалах $(-\infty; -2)$ і $(0, 2)$ графік функції є опуклим вгору (опуклим).

6) За даними дослідження будуємо графік функції. Представимо його у вигляді графіка самої функції, графіків асимптот, точок екстремуму та перегину:

```
> restart;
```

```
> with(plots):
```

Warning, the name changecoords has been redefined

```
> f:=x->2*x^3/(x^2-4);
```

$$f := x \rightarrow 2 \frac{x^3}{x^2 - 4}$$

графік функції:

```
> P1:=plot(f(x),x=-10..10,y=-20..20,discont=true,color=red,thickness=2):
```

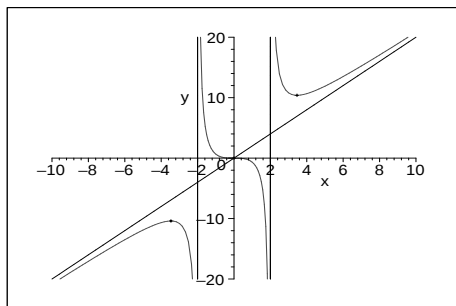
графіки асимптот:

```
> P2:=implicitplot({x=-2,x=2,y=2*x},x=-10..10,y=-20..20,color=black,thickness=1):
```

точки екстремуму та перегину:

```
> P3:=pointplot([[2*sqrt(3),6*sqrt(3)],[-2*sqrt(3),-6*sqrt(3)], [0,0]],symbolsize=15):
```

```
> display(P1,P2,P3);
```



10.4 Розв'язування задач

Проілюструємо використання Maple при розв'язуванні задач.

Задача 10.1. За відомим законом руху матеріальної точки $s(t) = 3t^4 - 2t^3 + t - 1$ знайти її швидкість і прискорення в момент часу $t_0 = 2$ (шлях вимірюється в метрах, час — у секундах).

Розв'язання

```
> s:=3*t^4-2*t^3+t-1;
      s := 3t^4 - 2t^3 + t - 1
> v:=diff(s,t);
      v := 12t^3 - 6t^2 + 1
> eval(12*t^3-6*t^2+1,t=2);
      73
> a:=diff(v,t);
      a := 36t^2 - 12t
> eval(36*t^2-12*t,t=2);
      120
```

Відповідь: $73 \frac{\text{м}}{\text{с}}$; $120 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

Задача 10.2. Маса тонкого прямолінійного неоднорідного стержня розподіляється за законом $m(l) = l^2 + 3l + 2$, де l довжина стержня. Знайти: а) середню лінійну густину стержня, довжина якого 10 см, рахуючи від початку; б) лінійну густину стержня при $l = 10$ см та $l = 3$ см.

Розв'язання

Знайдемо закон зміни густини:

```
> f:=l^2+3*l+2;
      f := l^2 + 3l + 2
> diff(f,l);
      2l + 3
```

Знайдемо лінійну густину на початку стержня

```
> eval(2*l+3,l=0);
```

3

Знайдемо лінійну густину на кінці стержня

```
> eval(2*l+3,l=10);
```

23

Знайдемо середню густину стержня

```
> (3+23)/2;
```

13

Знайдемо лінійну густину при $l = 10$

```
> eval(2*l+3,l=10);
```

23

Знайдемо лінійну густину при $l = 3$

```
> eval(2*l+3,l=3);
```

9

Відповідь: а) $13 \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$; б) $23 \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$; в) $9 \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$.

Задача 10.3. Залежність кількості теплоти Q , отриманої тілом при нагріванні до температури τ визначається законом $Q(\tau) = 0,24\tau^2 + e^{0,4\tau}$. Знайдіть теплоємність c тіла при $\tau = 4^\circ\text{C}$.

Розв'язання

Теплоємність тіла дорівнює похідній від кількості отриманої теплоти. Знайдемо закон зміни теплоємності:

```
> Q:=0.24*t^2+exp(0.4*t);
```

$$Q := .24 t^2 + e^{(.4 t)}$$

```
> diff(Q,t);
```

$$.48 t + .4 e^{(.4 t)}$$

Знайдемо теплоємність тіла при $\tau = 4^\circ\text{C}$:

```
> eval(.48*t+.4*exp(.4*t),t=4);
```

3.901212970

Відповідь: $3,901212970 \frac{\text{Дж}}{\text{К}}$.

Задача 10.4. Кількість електрики у провіднику залежно від часу змінюється за законом $Q(t) = 4t^2 - 2t$ (Кл). Знайти: а)

середню величину струму, що проходить по провіднику за перші дві секунди; б) величину струму в кінці другої та шостої секунди.

Розв'язання

Сила струму дорівнює похідній від кількості електрики. Знаходимо закон зміни сили струму:

```
> Q:=4*t^2-2*t;
```

$$Q := 4t^2 - 2t$$

```
> diff(Q,t);
```

$$8t - 2$$

Знаходимо силу струму в моменти часу $t = 0$ та $t = 2$:

```
> eval(8*t-2,t=0);
```

$$-2$$

```
> eval(8*t-2,t=2);
```

$$14$$

Знаходимо середню величину сили струму протягом перших двох секунд:

```
> (-2+14)/2;
```

$$6$$

Знайдемо величину сили струму в кінці другої секунди:

```
> eval(8*t-2,t=2);
```

$$14$$

Знайдемо величину сили струму в кінці шостої секунди:

```
> eval(8*t-2,t=6);
```

$$46$$

Відповідь: а) 6 А; б) 14 А, 46 А.

Задача 10.5. При молекулярній реакції за час t утворюються молекули, число яких $x(t) = 40(1 - e^{-7t})$. Якому закону підлягає швидкість утворення нової речовини при цій реакції? Знайти швидкість утворення речовини при $t = 0, 2$ с.

Розв'язання

Швидкість хімічної реакції є похідною від кількості речовини, що вступає в хімічну реакцію за час t .

Знаходимо закон швидкості утворення нової речовини:

```
> x:=40*(1-exp(-7*t));
```

$$x := 40 - 40 e^{(-7t)}$$

```
> diff(x,t);
```

$$280 e^{(-7t)}$$

Знайдемо швидкість утворення речовини при $t = 0, 2$ с:

```
> eval(280*exp(-7*t),t=0.2);
```

$$69.04714989$$

Відповідь: $280e^{-7t}$; $69 \frac{\text{молекул}}{\text{секунду}}$.

Задача 10.6. Функція витрат підприємства (у гривнях) має вигляд $V(x) = 0,002x^3 - 0,4x^2 + 30x + 2000$. Знайти маргінальну вартість, як функцію x та обчислити маргінальну вартість, якщо вироблено $x_1 = 100$, $x_2 = 50$, $x_3 = 10$ одиниць продукції.

Розв'язання

Відповідно до економічного змісту похідної для знаходження маргінальної вартості потрібно знайти похідну функції витрат:

```
> V:=0.002*x^3-0.4*x^2+30*x+2000;
```

$$V := .002 x^3 - .4 x^2 + 30 x + 2000$$

тобто:

```
> f:=diff(V,x);
```

$$f := .006 x^2 - .8 x + 30$$

Одержали функцію маргінальної вартості для довільної кількості x виготовленої продукції, коли приріст x зростає на достатньо малу величину.

Знайдемо маргінальну вартість при $x_1 = 100$, $x_2 = 50$, $x_3 = 10$:

```
> eval(f,x=100);
```

```

10.000
> eval(f,x=50);
5.000
> eval(f,x=10);
22.600

```

Відповідь: $0,006x^2 - 8x + 30$; 10 гр; 5 гр; 22 гр. 60 коп.

Задача 10.7. Промислова продукція держави протягом t років, після 1990 року змінювалася, відповідно до закону

$$y = 500 (1 + 215e^{-0,07t})^{-1}.$$

Встановити, в які періоди з 1990 по 2017 роки випуск продукції зростає і в які спадає.

Розв'язання

Зростання і спадання функції на інтервалі визначається знаком її першої похідної.

Знайдемо похідну функції $y = 500 (1 + 215e^{-0,07t})^{-1}$:

```
> y:=500*(1+215*exp(-0.07*t))^-1;
```

$$y := 500 \frac{1}{1 + 215 e^{(-.07 t)}}$$

```
> diff(y,t);
```

$$7525.00 \frac{e^{(-.07 t)}}{(1 + 215 e^{(-.07 t)})^2}$$

Очевидно, при $t \in [1990; 2017]$ похідна додатна. Отже, протягом усього вказаного періоду випуск продукції зростає.

Задача 10.8. Функція пропозиції деякого товару має вигляд

$$s = \frac{20 + 4p^2}{1 + 10p},$$

а функція попиту —

$$q = \frac{25 - p + 4p^2}{1 + 10p}.$$

Визначити ціну рівноваги, еластичність попиту та еластичність пропозиції для цієї ціни.

Розв'язання

Розв'язавши рівняння $\frac{20+4p^2}{1+10p} = \frac{25-p+4p^2}{1+10p}$, знайдемо ціну рівноваги:

```
> eq1:=(20+4*p^2)/(1+10*p)=(25-p+4*p^2)/(1+10*p);
```

$$eq1 := \frac{20 + 4p^2}{1 + 10p} = \frac{25 - p + 4p^2}{1 + 10p}$$

```
> solve(eq1,p);
```

5

Еластичність пропозиції знайдемо за формулою

$$E_p(s) = \frac{p}{s} s' :$$

```
> s:=(20+4*p^2)/(1+10*p);
```

$$s := \frac{20 + 4p^2}{1 + 10p}$$

```
> diff(s,p);
```

$$8 \frac{p}{1 + 10p} - \frac{10(20 + 4p^2)}{(1 + 10p)^2}$$

```
> ep:=p/s*diff(s,p);
```

$$ep := \frac{p(1 + 10p) \left(8 \frac{p}{1 + 10p} - \frac{10(20 + 4p^2)}{(1 + 10p)^2} \right)}{20 + 4p^2}$$

```
> ep:=eval(ep,p=5);
```

$$ep := \frac{35}{51}$$

```
> evalf(ep);
```

.6862745098

За формулою

$$E_p(q) = \frac{p}{q} q'$$

знаходимо еластичність попиту:

```
> q:=(25-p+4*p^2)/(1+10*p);
```

$$q := \frac{25 - p + 4p^2}{1 + 10p}$$

```
> diff(q,p);
```

$$\frac{-1 + 8p}{1 + 10p} - \frac{10(25 - p + 4p^2)}{(1 + 10p)^2}$$

```
> es:=p/q*diff(q,p);
```

$$es := \frac{p(1 + 10p) \left(\frac{-1 + 8p}{1 + 10p} - \frac{10(25 - p + 4p^2)}{(1 + 10p)^2} \right)}{25 - p + 4p^2}$$

```
> es:=eval(es,p=5);
```

$$es := \frac{263}{408}$$

```
> evalf(es);
```

$$.6446078431$$

Відповідь: $p = 5$; $E_p(s(5)) = 0,686$; $E_p(q(5)) = 0,645$.

Задача 10.9. По двох вулицях до перехрестя рухаються два автомобілі зі сталими швидкостями 40 і $50 \frac{\text{км}}{\text{год}}$. Вважаючи, що вулиці перетинаються під прямим кутом, і знаючи, що в деякий момент часу машини знаходяться від перехрестя на відстані 2 і 3 км відповідно, визначте через який проміжок часу відстань між ними стане найменшою.

Розв'язання

Нехай відстань між автомобілями буде найменшою через проміжок часу t . Тоді в момент часу t відстань першого автомобіля до перехрестя буде $2 - 40t$, другого $3 - 50t$, відстань між автомобілями $S(t) = \sqrt{(2 - 40t)^2 + (3 - 50t)^2}$.

Знайдемо критичні точки цієї функції:

```
> s:=sqrt((2-40*t)^2+(3-50*t)^2);
```

$$s := \sqrt{13 - 460t + 4100t^2}$$

```
> f:=diff((sqrt((2-40*t)^2+(3-50*t)^2),t));
```

$$f := \frac{1}{2} \frac{-460 + 8200t}{\sqrt{13 - 460t + 4100t^2}}$$

> solve(f,t);

$$\frac{23}{410}$$

Покажемо, що ця точка буде точкою мінімуму. Для цього знайдемо значення похідної зліва і справа від $x = \frac{23}{410}$:

> eval(f,t=20/410.0);

$$-53.27721420$$

> eval(f,t=26/410.0);

$$53.27721415$$

При переході через точку $x = \frac{23}{410}$ перша похідна змінює знак із мінуса на плюс. Отже, $x = \frac{23}{410}$ є точкою мінімуму функції

$$S(t) = \sqrt{(2 - 40t)^2 + (3 - 50t)^2}.$$

Відповідь: $\frac{23}{410}$ год.

Задача 10.10. Тіло кинуто вертикально вгору із даху поверхні будинку, висота якого 10 м, і далі воно падає до низу. Його висота над поверхнею землі в момент часу t с після кидка задається формулою

$$y = -4,9t^2 + 8t + 10.$$

а) На яку найбільшу висоту від поверхні землі воно віддаляється?

б) З якою швидкістю тіло впаде на землю?

Розв'язання

а) Знайдемо на яку найбільшу висоту від поверхні землі віддаляється тіло:

> maximize(-4.9*t^2+8*t+10,t=-infinity..infinity);

$$13.26530612$$

б) Знайдемо закон зміни швидкості тіла:

> f:=-4.9*t^2+8*t+10;

$$f := -4.9t^2 + 8t + 10$$

```
> diff(f,t);
```

$$-9.8t + 8$$

Розв'яжемо рівняння $-4,9t^2 + 8t + 10 = 0$:

```
> solve(-4.9*t^2+8*t+10=0,t);
```

$$-0.8290321935, 2.461685255$$

Знайдемо з якою швидкістю тіло впаде на землю:

```
> v:=-9.8*t+8;
```

$$v := -9.8t + 8$$

```
> eval(v,t= 2.461685255);
```

$$-16.12451550$$

```
> v:=abs(%);
```

$$v := 16.12451550$$

Відповідь: а) 13,27 м; б) 16,12 $\frac{\text{м}}{\text{с}}$.

Задача 10.11. При експериментальному вивченні фармацевтичних властивостей медикаментів встановлено, що зміна нижнього тиску крові після вживання x мг денної норми пігулок відбувається відповідно до закону:

$$R = 24,2 \left(1 + \frac{x - 13}{\sqrt{x^2 - 26x + 529}} \right) \text{ мм рт.ст.}$$

(міліметрів ртутного стовпа). Визначити чутливість R при $x = 5$, $x = 15$, $x = 35$ мг. Яка з цих доз має найбільший ефект? Визначити найбільш ефективну дозу прийому пігулок, якщо людина, без шкоди для свого здоров'я, протягом доби може вживати від 5 до 35 мг таблеток.

Розв'язання

Чутливість є похідна від тиску. Знайдемо закон зміни чутливості:

```
> R:=24.2*(1+(x-13)/sqrt(x^2-26*x+529));
```

$$R := 24.2 + \frac{24.2(x - 13)}{\sqrt{x^2 - 26x + 529}}$$

```
> H:=diff(R,x);
```

$$H := 24.2 \frac{1}{\sqrt{x^2 - 26x + 529}} - \frac{12.10000000(x - 13)(2x - 26)}{(x^2 - 26x + 529)^{(3/2)}}$$

Обчислюємо чутливість при $x = 5$; $x = 15$; $x = 35$:

```
> eval(H,x=5.0);
.9978587780
> eval(H,x=15.0);
1.254485920
> eval(H,x=35.0);
.3553073542
```

Із порівняння трьох останніх знайдених значень зрозуміло, що найбільший ефект має доза рівна 15 мг.

Виберемо найбільш ефективну дозу пігулок при межах вживання добової норми від 5 мг до 35 мг:

```
> maximize((24.2*1/(sqrt(x^2-26*x+529))
-12.10000000*(x-13)/(x^2-26*x+529)^(3/2)*(2*x-26)),
x=5..35,location);
1.275451990, [{x = 13.}, 1.275451990]}
```

Задача 10.12. Вікно кімнати має периметр 8 м і вигляд прямокутника, який зверху обмежений півколом. Якими повинні бути розміри прямокутника, щоб забезпечити найбільшу освітленість кімнати?

Розв'язання

Нехай основа вікна (рис. 10.1) дорівнює $2x$, тоді радіус півкола, що обмежує вікно, дорівнює x . Позначимо другу сторону прямокутника, що визначає вікно, через y . За умовою периметр вікна дорівнює 8 м. Він складається з двох сторін прямокутника, довжини яких y , однієї сторони — $2x$ та півкола радіуса x , тобто дуги, довжина якої πx . Маємо $2x + 2y + \pi x = 8$, звідси $y = 4 - x - \frac{\pi x}{2}$. Найбільша освітленість кімнати забезпечуватиметься тоді, коли площа вікна буде найбільшою. Площа вікна дорівнює сумі площі прямокутника, сторони якого $2x$ і y , та площі півкруга, радіус якого дорівнює x . Одержуємо: $S(x) = 2x \cdot (4 - x - \frac{\pi x}{2}) + \frac{\pi x^2}{2}$. Залишилося знайти найбільше значення функції $S(x)$ при зміні аргументу $0 < x < 2$.

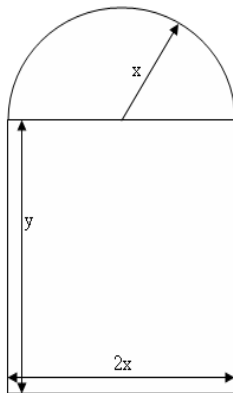


Рис. 10.1. Вікно

```
> maximize((2*x*(4-x-Pi*x/2)+Pi*x^2/2 ,x=0..2,
location));
```

$$16 \frac{4 - \frac{8}{4 + \pi} - \frac{4\pi}{4 + \pi}}{4 + \pi} + \frac{32\pi}{(4 + \pi)^2},$$

$$\left\{ \left[\left\{ x = 8 \frac{1}{4 + \pi} \right\}, 16 \frac{4 - \frac{8}{4 + \pi} - \frac{4\pi}{4 + \pi}}{4 + \pi} + \frac{32\pi}{(4 + \pi)^2} \right] \right\}$$

```
> simplify(16/(4+Pi)*(4-8/(4+Pi)-4*Pi/(4+Pi))+
32*Pi/(4+Pi)^2);
```

$$32 \frac{1}{4 + \pi}$$

При $x = \frac{8}{4+\pi}$ функція набуває найбільшого значення. Знаходимо другу сторону вікна y :

```
> subs(x=8/(4+Pi),4-x-Pi*x/2);
```

$$4 - \frac{8}{4 + \pi} - \frac{4\pi}{4 + \pi}$$

```
> simplify(4-8/(4+Pi)-4*Pi/(4+Pi));
```

$$8 \frac{1}{4 + \pi}$$

Розміри прямокутника повинні бути такими: $\frac{16}{4+\pi}$ на $\frac{8}{4+\pi}$. При цих розмірах площа вікна буде рівною: $S = \frac{32}{4+\pi} \text{ м}^2$, $S \approx 4,48 \text{ м}^2$.

Відповідь: $\frac{16}{4+\pi} \times \frac{8}{4+\pi}$, $S = \frac{32}{4+\pi} \text{ м}^2$, $S \approx 4,48 \text{ м}^2$.

Задача 10.13. Використовуючи x одиниць праці та y одиниць капіталу (тисяч гривень), підприємство виробляє продукцію, загальна вартість V якої (у тисячах гривень) описується законом

$$V = 1440 - 50y - 3x - 2xy + 1,5y^2 + x^2.$$

Знайти кількість одиниць праці та капіталу, при яких підприємство має оптимальну загальну вартість продукції. Чому дорівнює значення оптимальної загальної вартості?

Розв'язання

```
> minimize(1440-50*y-3*x-2*x*y+1.5*y^2+x^2, location);
33.250000, {[y = 53., x = 54.50000000], 33.250000]}
```

Відповідь: $x = \frac{109}{2}$; $y = 53$; $V_{\text{опт}} = 33250$ гривень.

Задача 10.14. Знайти оптимальний план транспортної задачі, якщо матриця перевезень одиниці вантажу має вигляд

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 6 & 7 \\ 3 & 8 & 9 & 10 \\ 8 & 11 & 7 & 12 \end{pmatrix},$$

запаси визначаються матрицею $A = \begin{pmatrix} 450 & 300 & 400 \end{pmatrix}$, потреби — матрицею $B = \begin{pmatrix} 240 & 300 & 295 & 245 \end{pmatrix}$.

Розв'язання

Введемо позначення: x_1 — кількість одиниць вантажу, який буде перевезено з першого складу першому споживачу, x_2 — кількість одиниць вантажу, який буде перевезено з першого складу другому споживачу, x_3 — кількість одиниць вантажу, який

буде перевезено з першого складу третьому споживачу, x_4 — кількість одиниць вантажу, який буде перевезено з першого складу четвертому споживачу; аналогічно y_1, y_2, y_3, y_4 — кількість одиниць вантажу, перевезеного з другого складу, z_1, z_2, z_3, z_4 — кількість одиниць вантажу, перевезеного з третього складу.

Відповідно до умови задачі маємо систему обмежень:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + y_1 + z_1 = 240; \\ x_2 + y_2 + z_2 = 300; \\ x_3 + y_3 + z_3 = 295; \\ x_4 + y_4 + z_4 = 245; \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 450; \\ y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \leq 300; \\ z_1 + z_2 + z_3 + z_4 \leq 400; \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0; x_4 \geq 0; \\ y_1 \geq 0; y_2 \geq 0; y_3 \geq 0; y_4 \geq 0; \\ z_1 \geq 0; z_2 \geq 0; z_3 \geq 0; z_4 \geq 0. \end{array} \right.$$

Вартість перевезень визначається функцією $S = 5x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 7x_4 + 3y_1 + 8y_2 + 9y_3 + 10y_4 + 8z_1 + 11z_2 + 7z_3 + 12z_4$. Знаходимо оптимальний план перевезень:

```
> with(simplex):
```

```
Warning, the protected names maximize and minimize have
been redefined and unprotected
```

```
> cnsts:={x1+y1+z1=240,x2+y2+z2=300,x3+y3+z3=295,
x4+y4+z4=245,x1+x2+x3+x4<=450,y1+y2+y3+y4<=300,
z1+z2+z3+z4<=400,x1>=0,x2>=0,x3>=0,x4>=0,y1>=0,
y2>=0,y3>=0,y4>=0,z1>=0,z2>=0,z3>=0,z4>=0};
```

$$\begin{aligned} cnsts := \{ & x_1 + y_1 + z_1 = 240, x_2 + y_2 + z_2 = 300, \\ & x_3 + y_3 + z_3 = 295, x_4 + y_4 + z_4 = 245, \\ & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 450, y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \leq 300, \\ & z_1 + z_2 + z_3 + z_4 \leq 400, 0 \leq x_1, 0 \leq x_2, 0 \leq x_3, \\ & 0 \leq x_4, 0 \leq y_1, 0 \leq y_2, 0 \leq y_3, 0 \leq y_4, 0 \leq z_1, 0 \leq z_2, \\ & 0 \leq z_3, 0 \leq z_4 \} \end{aligned}$$

```
> obj:=5*x1+4*x2+6*x3+7*x4+3*y1+
8*y2+9*y3+10*y4+8*z1+11*z2+7*z3+12*z4;
```

$$\begin{aligned} obj := & 5x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 7x_4 + 3y_1 + 8y_2 + \\ & + 9y_3 + 10y_4 + 8z_1 + 11z_2 + 7z_3 + 12z_4 \end{aligned}$$

```
> minimize(obj,cnsts);
```

$$\{x_3 = 0, x_1 = 0, z_1 = 0, y_2 = 0, z_2 = 0, y_3 = 0, y_4 = 60, \\ z_3 = 295, z_4 = 35, y_1 = 240, x_4 = 150, x_2 = 300\}$$

Знаходимо мінімальне значення цільової функції:

```
> S:=eval(obj,[x1 = 0, x3 = 0, z1 = 0, y2 = 0,
z2 = 0, y3 = 0, y1 =240, z3 = 295, y4 = 60,
x4 = 150, z4 = 35, x2 = 300]);
```

$$S := 6055$$

Відповідь: Оптимальний план перевезень: $x_1 = 0, x_2 = 300, x_3 = 0; y_1 = 240, y_2 = 0, y_3 = 0, y_4 = 60; z_1 = 0, z_2 = 0, z_3 = 295, z_4 = 35. S = 6055.$

10.5 Завдання для самостійного виконання

1. Знайти похідну функції:

1) $y = 2 + x - x^2$, чому дорівнює $y'(0); y'(\frac{1}{2}); y'(1); y'(-10);$

2) $y = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x;$ 3) $y = (x + 1)(x + 2)^2(x + 3)^3;$

4) $y = (1 + nx^m)(1 + mx^n);$ 5) $y = \frac{(1-x)^p}{(1+x)^q};$

6) $y = \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{x}}};$ 7) $y = (2 - x^2) \cos x + 2x \sin x;$

8) $y = \sin(\sin(\sin x));$ 9) $y = e^x (1 + \operatorname{ctg} \frac{x}{2});$

10) $y = \ln \frac{1+x}{1-x} + \frac{\sqrt{k}}{1-k} \ln \frac{1+x\sqrt{k}}{1-x\sqrt{k}};$ 11) $y = -\frac{\cos x}{2\sin^2 x} + \ln \sqrt{\frac{1+\cos x}{\sin x}};$

12) $y = \operatorname{arctg}(x + \sqrt{1+x^2});$ 13) $y = \left(\frac{\arcsin(\sin^2 x)}{\arccos(\cos^2 x)} \right)^{\operatorname{arctg} x};$

14) $y = \arccos \frac{1}{|x|};$ 15) $y = |\sin^3 x|;$ 16) $y = \ln |x|.$

2. Знайти найменше і найбільше значення функції:

- 1) $f(x) = 2^x$ на відрізку $[-1; 5]$;
 - 2) $f(x) = x^2 - 4x + 6$ на відрізку $[-3; 10]$;
 - 3) $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$ на відрізку $[-10; 10]$;
 - 4) $f(x) = x + \frac{1}{x}$ на відрізку $[0,01; 100]$;
 - 5) $f(x) = \sqrt{5 - 4x}$ на відрізку $[-1; 1]$.
3. Знайти частинні похідні функції:
- 1) $\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}$, якщо $u = x \ln(xy)$;
 - 2) $\frac{\partial^6 u}{\partial x^3 \partial y^3}$, якщо $u = x^3 \sin y + y^3 \sin x$;
 - 3) $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$, якщо $u = \operatorname{arctg} \frac{x+y+z-xyz}{1-xy-xz-yz}$;
 - 4) $\frac{\partial^4 u}{\partial x \partial y \partial \xi \partial \eta}$, якщо $u = \ln \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (x-\eta)^2}}$;
 - 5) $\frac{\partial^{m+n} u}{\partial x^m \partial y^n}$, якщо $u = \frac{x+y}{x-y}$.
4. Знайти точки екстремуму функції декількох змінних:
- 1) $z = x^2 - xy + y^2 - 2x + y + 4$;
 - 2) $z = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2 - 7$;
 - 3) $z = e^{2x+2y}(8x^2 - 6xy + 3y^2)$;
 - 4) $z = x^2 + xy + y^2 - 4 \ln x - 10 \ln y$;
 - 5) $u = x^2 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z$.
5. Знайти найбільше значення лінійної форми $L = 2x_1 + 2x_2$, за умови:
- $$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \geq -6; \\ 3x_1 + x_2 \geq 3; \\ x_1 \geq 0; \\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$
6. Мінімізувати лінійну функцію $L = 12x_1 + 4x_2$ при обмеженнях:
- $$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 2; \\ x_1 - x_2 \geq 0; \\ x_1 \geq \frac{1}{2}; \\ x_2 \leq 4. \end{cases}$$

7. Знайти найбільше значення функції $L = 2x_1 + 3x_2 + 3x_3$ при обмеженнях:

$$\begin{cases} x_2 + x_3 \leq 3; \\ x_1 - x_2 \geq 0; \\ x_1 \geq 1; \\ 3x_1 + x_2 \leq 15. \end{cases}$$

8. Знайти найбільше значення функції $L = 3x_1 - 6x_2 + 2x_3$ при обмеженнях:

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 6; \\ x_1 + 4x_2 + 8x_3 \leq 8. \end{cases}$$

9. Провести повне дослідження функції та побудувати її графік:

1) $y = \frac{2-x^2}{1+x^4};$

2) $y = \sqrt{\frac{x^4+3}{x^2+1}};$

3) $y = \cos x - \frac{1}{2} \cos 2x;$

4) $y = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right);$

5) $y = x + \operatorname{arctg} x;$

6) $y = \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2}.$

11

Побудова графіків 3D

При підключенні до бібліотеки `plots`, тобто після виконання команди `with(plots)`, Maple досить просто виконує побудову тривимірних графіків, спроможний виконувати побудову декількох графіків в одній і тій же системі координат.

Побудуємо декілька поверхонь другого порядку.

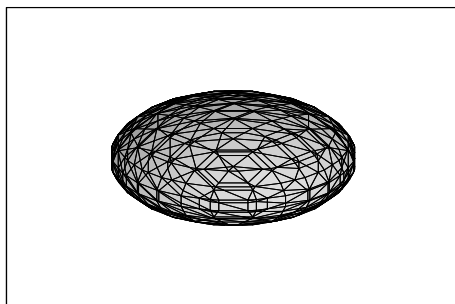
Приклад 11.1. Побудувати еліптичний параболоїд $z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$ при $x \in [-2; 2]$; $y \in [-3; 3]$; $z \in [0; 4]$.

Розв'язання

```
> with(plots):
```

```
Warning, the name changecoords has been redefined
```

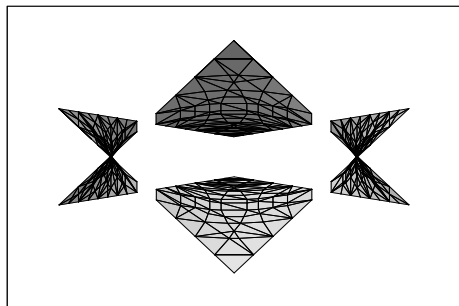
```
> implicitplot3d( x^2/4+y^2/9+z^2/16=1, x=-2..2,  
y=-3..3, z=-4..4);
```



Приклад 11.2. Побудувати гіперболічний параболоїд $z = \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}$ при $x \in [-2; 2]$; $y \in [-3; 3]$; $z \in [0; 4]$.

Розв'язання

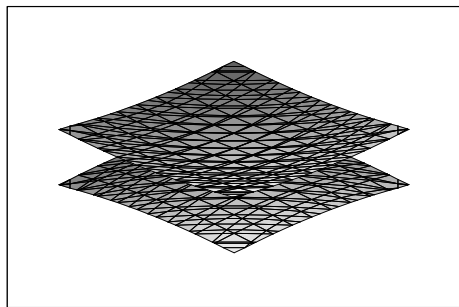
```
> implicitplot3d( x^2/4+y^2/9-z^2/16=1, x=-2..2,
y=-3..3, z=-4..4);
```



Приклад 11.3. Побудувати двопорожнинний гіперболоїд $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} = -1$ при $x \in [-2; 2]$; $y \in [-3; 3]$; $z \in [-4; 4]$.

Розв'язання

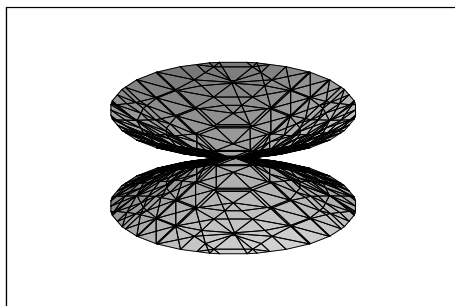
```
> implicitplot3d( x^2/4+y^2/9-z^2/16=-1,
x=-2..2, y=-3..3, z=-12..12);
```



Приклад 11.4. Побудувати конус $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 0$ при $x \in [-2; 2]$; $y \in [-3; 3]$; $z \in [-4; 4]$.

Розв'язання

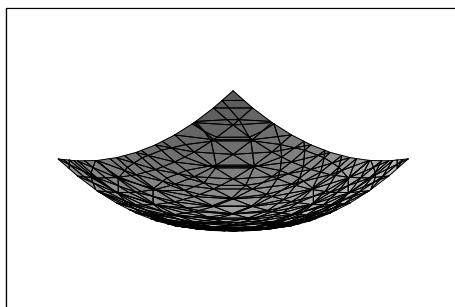
```
> implicitplot3d( x^2/4+y^2/9-z^2/16=0, x=-2..2,
y=-3..3, z=-4..4);
```



Приклад 11.5. Побудувати еліптичний параболоїд $z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$ при $x \in [-2; 2]$; $y \in [-3; 3]$; $z \in [0; 4]$.

Розв'язання

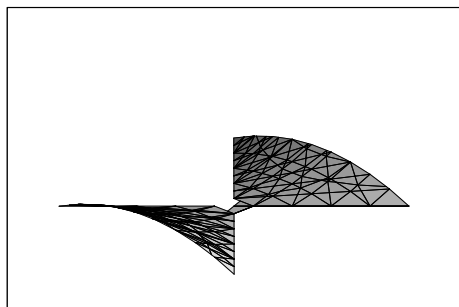
```
> implicitplot3d( z=x^2/4+y^2/9, x=-2..2, y=-3..3,
z=0..4);
```



Приклад 11.6. Побудувати гіперболічний параболоїд $z = \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}$ при $x \in [-2; 2]$; $y \in [-3; 3]$; $z \in [0; 4]$.

Розв'язання

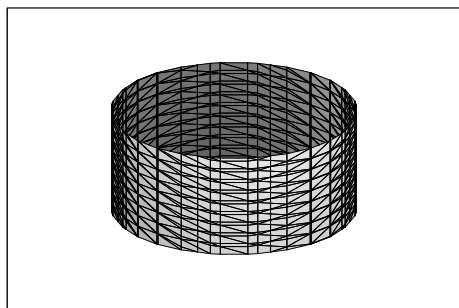
```
> implicitplot3d( z=x^2/4-y^2/9, x=-2..2, y=-3..3,
z=0..4);
```



Приклад 11.7. Побудувати еліптичний циліндр $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ при $x \in [-2; 2]$; $y \in [-3; 3]$; $z \in [-4; 4]$.

Розв'язання

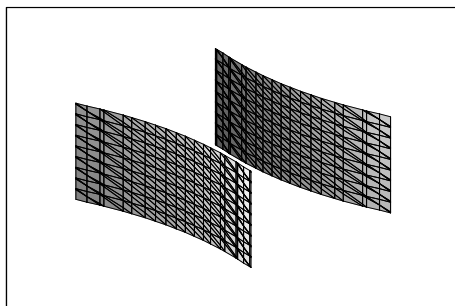
```
> implicitplot3d( x^2/4+y^2/9=1, x=-2..2, y=-3..3,
z=-4..4);
```



Приклад 11.8. Побудувати гіперболічний циліндр $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ при $x \in [-2; 2]$; $y \in [-3; 3]$; $z \in [-4; 4]$.

Розв'язання

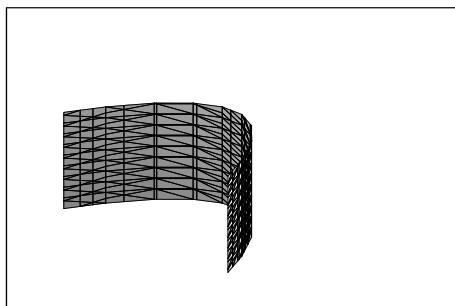
```
> implicitplot3d( x^2/4-y^2/9=1, x=-3..3, y=-2..2,
z=-4..4);
```



Приклад 11.9. Побудувати параболічний циліндр $y^2 = 4x$ при $x \in [-2; 2]$; $y \in [-3; 3]$; $z \in [-4; 4]$.

Розв'язання

```
> implicitplot3d( y^2=4*x, x=-2..2, y=-3..3,
z=-4..4);
```



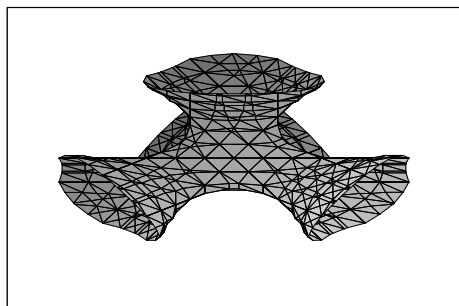
Приклад 11.10. Побудувати поверхню $x^3 + y^3 + z^3 + 1 = (x + y + z + 1)^3$, якщо $x \in [-2; 2]$, $y \in [-2; 2]$, $z \in [-2; 2]$.

Розв'язання

```
> with(plots):
```

Warning, the name changecoords has been redefined

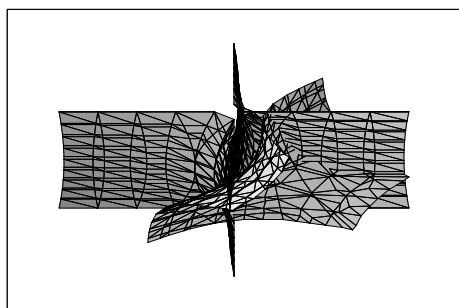
```
> implicitplot3d( x^3+y^3+z^3+1=(x+y+z+1)^3,
x=-2..2, y=-2..2,z=-2..2, grid=[13,13,13]);
```



Приклад 11.11. Побудувати поверхні $x^2 - y^2 + z^2 = 1$ та $y = e^{xz}$ при $x \in [-\pi; \pi]$; $y \in [-\pi; \pi]$; $z \in [-1; 1]$.

Розв'язання

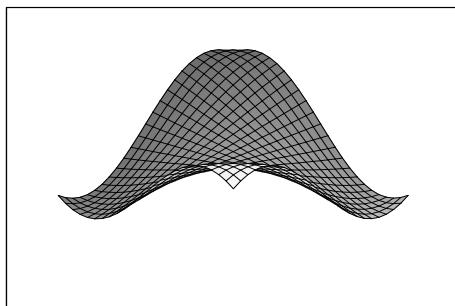
```
> implicitplot3d({x^2-y^2+z^2=1,y=exp(x*z)},
x=-Pi..Pi, y=-Pi..Pi,z=-1..1);
```



Приклад 11.12. Побудувати поверхню $z = \sin(xy)$, при $x \in [-1, 5; 1, 5]$, $y \in [-1, 5; 1, 5]$.

Розв'язання

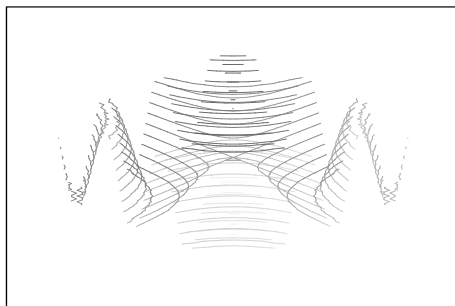
```
> plot3d(sin(x*y),x=-1.5..1.5,y=-1.5..1.5);
```



Приклад 11.13. Побудувати поверхню $z = \sin(xy)$, при $x \in [-\pi; \pi]$, $y \in [-\pi; \pi]$.

Розв'язання

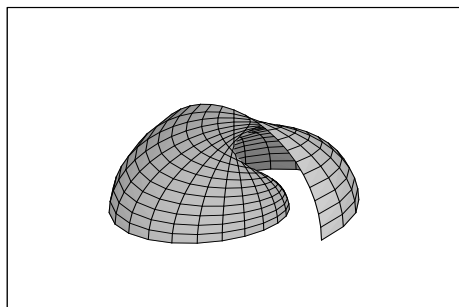
```
> plot3d(sin(x*y),x=-Pi..Pi,y=-Pi..Pi,  
style=contour);
```



Приклад 11.14. Побудувати поверхню $z = x \sin x \cos y$, $z = x \cos x \cos y$, $z = x \sin y$ при $x \in [0; 2\pi]$, $y \in [0; \pi]$.

Розв'язання

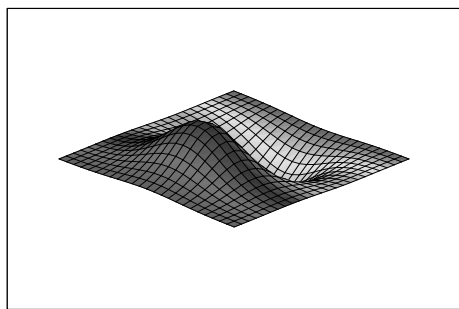
```
> plot3d([x*sin(x)*cos(y),x*cos(x)*cos(y),x*sin(y)],x  
=0..2*Pi,y=0..Pi);
```



Приклад 11.15. Побудувати поверхню $z = x e^{(-x^2 - y^2)}$ при $x \in [-2; 2]$, $y \in [-2; 2]$.

Розв'язання

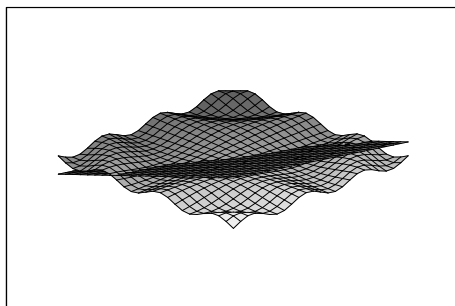
```
> plot3d(x*exp(-x^2-y^2),x=-2..2,y=-2..2,
color=x);
```



Приклад 11.16. Побудувати поверхні $z = \sin(xy)$, $z = x + 2y$ при $x \in [-\pi; \pi]$, $y \in [-\pi; \pi]$.

Розв'язання

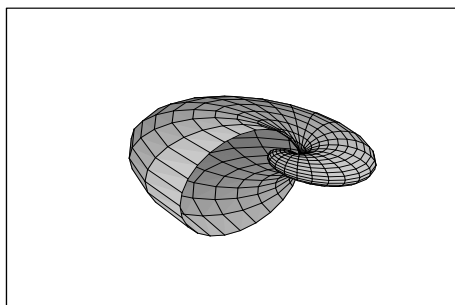
```
> plot3d({sin(x*y), x + 2*y},x=-Pi..Pi,y=-Pi..Pi);
```



Приклад 11.17. Побудувати поверхню $z = 1,3^x \sin y$ при $x \in [-1; 2\pi]$, $y \in [0; \pi]$.

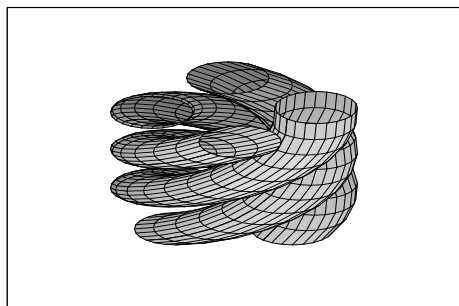
Розв'язання

```
> plot3d((1.3)^x* sin(y),x=-1..2*Pi, y=0..Pi,
coords=spherical, style=patch);
```

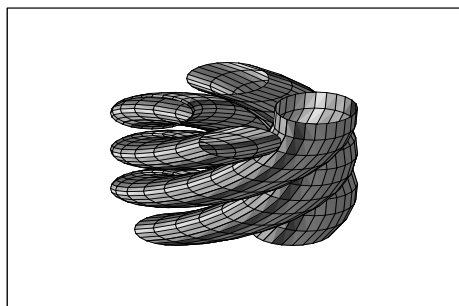


На закінчення цього розділу наведемо приклади ще трьох геометричних об'єктів:

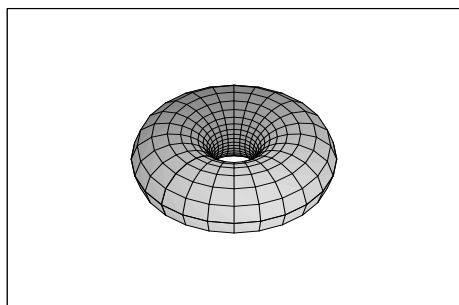
```
> c1:=[cos(x)-2*cos(0.4*y),sin(x)-2*sin(0.4*y),y]:
> c2:= [cos(x)+2*cos(0.4*y),sin(x)+2*sin(0.4*y),y]:
> c3:=[cos(x)+2*sin(0.4*y),sin(x)-2*cos(0.4*y),y]:
> c4:=[cos(x)-2*sin(0.4*y),sin(x)+2*cos(0.4*y),y]:
> plot3d({c1,c2,c3,c4},x=0..2*Pi,y=0..10,grid=[25,
15],style=patch);
```



```
> plot3d({c1,c2,c3,c4}, x=0..2*Pi,y=0..10,
grid=[25,15],style=patch, color=sin(x));
```



```
> plot3d([1,x,y],x=0..2*Pi,y=0..2*Pi,coords=
toroidal(10),scaling=constrained);
```



11.1 Побудова областей у просторі, обмежених заданими поверхнями

Області, або тіла у просторі, обмежені поверхнями, можна будувати, задаючи графіки цих поверхонь.

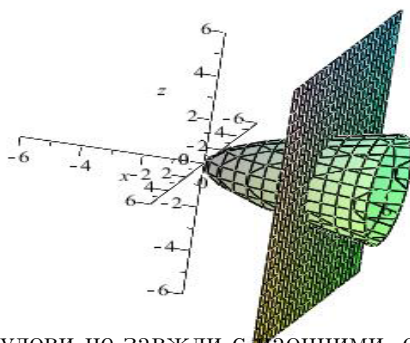
Приклад 11.18. Побудувати область, обмежену параболоїдом $y = x^2 + z^2$ і площиною $y = 4$.

Розв'язання

Будуємо поверхні за допомогою функції `implicitplot3d`:

```
> with(plots):
```

```
> implicitplot3d([x^2+z^2 = y, y = 4],  
x = -6 .. 6, y = -6 .. 6, z = -6 .. 6, axes =  
normal, view = [-6 .. 6, -6 .. 6, -6 .. 6],  
numpoints =10000);
```



Такі побудови не завжди є наочними, оскільки часто потрібні не самі поверхні, а ті контури поверхонь, що обмежують область у просторі. Побудови таких контурів можна домогтися, якщо будувати лінії перетину поверхонь, що обмежують тіло,

з координатними площинами, а також іншими поверхнями, що обмежують тіло. Це можна зробити, задаючи параметрично ці лінії перетину. Побудуємо контури, що обмежують фігуру за допомогою функції `spacecurve`, задаючи параметрично лінії перетину поверхні $y = x^2 + z^2$ із координатними площинами $x = 0$, $z = 0$ та з площиною $y = 4$.

Лінія перетину поверхні $y = x^2 + z^2$ з площиною $x = 0$:

```
> P1 := spacecurve([0, t^2, t], t = -2 .. 2,
color = black, thickness = 2, axes = normal):
```

Лінія перетину поверхні $y = x^2 + z^2$ з площиною $y = 4$:

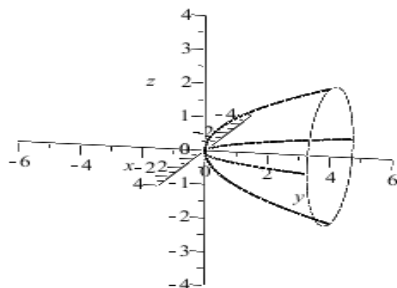
```
> P2 := spacecurve([2*cos(t), 4, 2*sin(t)],
t = 0 .. 2*Pi, color = black, axes = normal):
```

Лінія перетину поверхні $y = x^2 + z^2$ з площиною $z = 0$:

```
> P3 := spacecurve([t, t^2, 0], t = -2 .. 2,
color = black, thickness = 2, axes = normal):
```

Будуємо контури поверхонь, що обмежують область у просторі:

```
> display(P1, P2, P3, view = [-4 .. 4, -6 .. 6,
-4 .. 4], orientation = [15, 75, 1], labels =
[x, y, z]);
```



11.2 Завдання для самостійного виконання

1. Використовуючи бібліотеку `plots`, побудувати поверхню:

- | | |
|--------------------------------------|--|
| 1) $z = x^2$; | 2) $x^2 + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$; |
| 3) $x^2 + z^2 = 1$; | 4) $\frac{x^2}{4} + y^2 - \frac{z^2}{4} = 1$; |
| 5) $z = y^2 - x^2$; | 6) $4x^2 - y^2 + 2z^2 + 4 = 0$; |
| 7) $x^2 + 2y^2 - 6x - y + 10$; | 8) $9x^2 + y^2 - z^2 - 2y + 2z = 0$; |
| 9) $z = -\frac{3y}{x^2 + y^2 + 1}$; | 10) $z = -xye^{-x^2 - y^2}$; |
| 11) $z = \sin(x + y)$; | 12) $z = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$. |

12

Інтеграл та його застосування

12.1 Невизначені та визначені інтеграли

За допомогою пакета символьних обчислень Maple можна знаходити як невизначені, так і визначені інтеграли, подвійні та потрійні інтеграли. Для знаходження інтегралів використовується команда `int`.

Приклад 12.1. Знайти інтеграл $\int \frac{3x-1}{x^2-4x+8} dx$ (приклад інтеграла, що обчислюється за допомогою виділення повного квадрата).

Розв'язання

> Int((3*x-1)/(x^2-4*x+8), x);

$$\int \frac{3x-1}{x^2-4x+8} dx$$

> int((3*x-1)/(x^2-4*x+8), x);

$$\frac{3}{2} \ln(x^2 - 4x + 8) + \frac{5}{2} \arctan\left(\frac{1}{2}x - 1\right)$$

Приклад 12.2. Знайти інтеграл $\int (3x+7) \cos 5x dx$ (приклад інтеграла, що обчислюється за допомогою методу інтегрування частинами).

Розв'язання

> Int((3*x+7)*cos(5*x),x);

$$\int (3x + 7) \cos(5x) dx$$

> int((3*x+7)*cos(5*x),x);

$$\frac{3}{25} \cos(5x) + \frac{3}{5} x \sin(5x) + \frac{7}{5} \sin(5x)$$

Приклад 12.3. Знайти інтеграл $\int \frac{x}{x^3-1} dx$ (приклад інтеграла, що обчислюється за допомогою розкладу раціонального дробу на елементарні раціональні дробі).

Розв'язання

> Int(x/(x^3-1),x);

$$\int \frac{x}{x^3 - 1} dx$$

> int(x/(x^3-1),x);

$$\frac{1}{3} \ln(x-1) - \frac{1}{6} \ln(x^2+x+1) + \frac{1}{3} \sqrt{3} \arctan\left(\frac{1}{3} (2x+1) \sqrt{3}\right)$$

Приклад 12.4. Знайти інтеграл $\int \frac{1}{1+\sqrt{x}+\sqrt{1+x}} dx$.

Розв'язання

> Int(1/(1+sqrt(x)+sqrt(1+x)),x);

$$\int \frac{1}{1 + \sqrt{x} + \sqrt{1+x}} dx$$

> Int(1/(1+sqrt(x)+sqrt(1+x)),x)=
int(1/(1+sqrt(x)+sqrt(1+x)),x);

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{1 + \sqrt{x} + \sqrt{1+x}} dx &= \frac{1}{2} x + \sqrt{x} - \frac{1}{2} \sqrt{x} \sqrt{1+x} - \\ &- \frac{1}{4} \frac{\sqrt{(1+x)x} \ln\left(\frac{1}{2} + x + \sqrt{x^2+x}\right)}{\sqrt{1+x} \sqrt{x}} \end{aligned}$$

Приклад 12.5. Знайти інтеграл $\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

Розв'язання

> Int($x^5/\sqrt{1-x^2}$), x);

$$\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

> Int($x^5/\sqrt{1-x^2}$), x)=int($x^5/\sqrt{1-x^2}$), x);

$$\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\frac{1}{5} x^4 \sqrt{1-x^2} - \frac{4}{15} x^2 \sqrt{1-x^2} - \frac{8}{15} \sqrt{1-x^2}$$

Приклад 12.6. Знайти інтеграл $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x} dx$.

Розв'язання

> Int($\sin(x)^4/\cos(x)^6$), x);

$$\int \frac{\sin(x)^4}{\cos(x)^6} dx$$

> Int($\sin(x)^4/\cos(x)^6$), x)=int($\sin(x)^4/\cos(x)^6$), x);

$$\int \frac{\sin(x)^4}{\cos(x)^6} dx = \frac{1}{5} \frac{\sin(x)^5}{\cos(x)^5}$$

Приклад 12.7. Знайти інтеграл $\int |x| dx$.

Розв'язання

> Int(abs(x)), x);

$$\int |x| dx$$

> Int(abs(x), x)=int(abs(x), x);

$$\int |x| dx = \begin{cases} -\frac{1}{2}x, & x \leq 0; \\ \frac{1}{2}x, & x > 0. \end{cases}$$

Приклад 12.8. Знайти інтеграл $\int e^{-|x|} dx$.

Розв'язання

> Int(exp(-abs(x))), x);

$$\int e^{(-|x|)} dx$$

> Int(exp(-abs(x)),x)=int(exp(-abs(x)),x);

$$\int e^{-|x|} dx = \begin{cases} e^x, & x \leq 0; \\ -e^{-x} + 2, & x > 0. \end{cases}$$

Приклад 12.9. Обчислити визначений інтеграл $\int_0^1 \frac{x^3}{5x^4+1} dx$.

Розв'язання

> Int(x^3/(5*x^4+1),x=0..1);

$$\int_0^1 \frac{x^3}{5x^4+1} dx$$

> int(x^3/(5*x^4+1),x=0..1);

$$\frac{1}{20} \ln(2) + \frac{1}{20} \ln(3)$$

Знайдемо наближення останнього виразу:

> int(x^3/(5*x^4+1.0),x=0..1);
.08958797348

Приклад 12.10. Обчислити визначений інтеграл $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$.

Розв'язання

> Int((sin(x)/x),x=a..b)=int((sin(x)/x),x=a..b);

$$\int_a^b \frac{\sin(x)}{x} dx = \text{Si}(b) - \text{Si}(a)$$

> Int((sin(x)/x),x=0..1.)=int((sin(x)/x),x=0..1.);

$$\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x} dx = .9460830704$$

Приклад 12.11. Обчислити невластний інтеграл $\int_0^{\infty} x e^{-x} dx$.

Розв'язання

> Int(x*exp(-x),x=0..infinity)=int(x*exp(-x),
x=0.. infinity);

$$\int_0^{\infty} x e^{(-x)} dx = 1$$

Приклад 12.12. Обчислити невластний інтеграл $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+6x+12} dx$.

Розв'язання

```
> Int(1/(x^2+6*x+12), x=-infinity..+infinity)=  
int(1/(x^2+6*x+12), x=-infinity..+infinity);
```

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + 6x + 12} dx = \frac{1}{3} \pi \sqrt{3}$$

12.2 Кратні інтеграли

Для обчислення подвійних та потрійних інтегралів потрібно застосувати команду `int` декілька разів. Проілюструємо це на прикладах.

Приклад 12.13. Обчислити подвійний інтеграл

$$\int_{-3}^3 \int_{y^2-4}^5 (x+2y) dx dy.$$

Розв'язання

```
> Int(Int(x+2*y, x=y^2-4..5), y=-3..3)=  
int(int(x+2*y, x=y^2-4..5), y=-3..3);
```

$$\int_{-3}^3 \int_{y^2-4}^5 x + 2y dx dy = \frac{252}{5}$$

Приклад 12.14. Обчислити подвійний інтеграл

$$\int_0^2 \int_0^{\frac{1}{2}x} (x^2 + y^2) dx dy.$$

Розв'язання

```
> Int(Int(x^2+y^2, y=0..x/2), x=0..2)  
=int(int(x^2+y^2, y=0..x/2), x=0..2);
```

$$\int_0^2 \int_0^{1/2 x} x^2 + y^2 dy dx = \frac{13}{6}$$

Приклад 12.15. Обчислити подвійний інтеграл

$$\int_{2,0}^{2,6} \int_{4,0}^{4,4} \frac{1}{xy} dx dy.$$

Розв'язання

```
> Int(Int(1/(x*y), x=4.0..4.4), y=2.0..2.6) =  
int(int(1/(x*y), x=4.0..4.4), y=2.0..2.6);
```

$$\int_{2.0}^{2.6} \int_{4.0}^{4.4} \frac{1}{xy} dx dy = .02500598527$$

Приклад 12.16. Обчислити подвійний інтеграл

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \int_1^2 \rho \sin \varphi d\rho d\varphi.$$

Розв'язання

```
> Int(Int(rho*sin(phi), rho=1..2), phi=0..Pi/2) =  
int(int(rho*sin(phi), rho=1..2), phi=0..Pi/2);
```

$$\int_0^{1/2\pi} \int_1^2 \rho \sin(\phi) d\rho d\phi = \frac{3}{2}$$

Приклад 12.17. Обчислити потрійний інтеграл

$$\int_0^1 \int_0^x \int_0^{\sqrt{x^2+y^2}} z dz dy dx.$$

Розв'язання

```
> Int(Int((Int(z, z=0..sqrt(x^2+y^2))), y=0..x)),  
x=0..1)=int(int((int(z, z=0..sqrt(x^2+y^2))),  
y=0..x), x=0..1);
```

$$\int_0^1 \int_0^x \int_0^{\sqrt{x^2+y^2}} z dz dy dx = \frac{1}{6}$$

Приклад 12.18. Обчислити потрійний інтеграл

$$\int_0^a \int_0^a \int_0^a (x^2 + y^2) z dx dy dz.$$

Розв'язання

```
> Int(Int(Int((x^2+y^2)*z, x=0..a), y=0..a),  
z=0..a);
```

$$\int_0^a \int_0^a \int_0^a (x^2 + y^2) z \, dx \, dy \, dz$$

```
> value(%);
```

$$\frac{1}{3} a^6$$

Приклад 12.19. Обчислити потрійний інтеграл

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/4} \int_0^{4 \cos(\omega)} p^2 \sin \omega \, dp \, d\omega \, dq.$$

Розв'язання

```
> Int(Int(Int(p^2*sin(omega), p=0..4*cos(omega)),  
omega=0..Pi/4), q=0..Pi/2)=int(int(int(p^2*  
sin(omega), p=0..4*cos(omega)), omega=0..Pi/4),  
q=0..Pi/2);
```

$$\int_0^{1/2 \pi} \int_0^{1/4 \pi} \int_0^{4 \cos(\omega)} p^2 \sin(\omega) \, dp \, d\omega \, dq = 2 \pi$$

Приклад 12.20. Обчислити потрійний інтеграл

$$\int_0^R \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \frac{\sin(\theta) \cdot r^2}{r^2 + R^2} \, d\varphi \, d\theta \, dr.$$

Розв'язання

```
> Int(Int(Int(sin(theta)*r^2/(r^2+R^2),  
phi=0..2*Pi), theta=0..Pi/2), r=0..R)=  
int(int(int(sin(theta)*r^2/(r^2+R^2),  
phi=0..2*Pi), theta=0..Pi/2), r=0..R);
```

$$\int_0^R \int_0^{1/2 \pi} \int_0^{2 \pi} \frac{\sin(\theta) r^2}{r^2 + R^2} \, d\phi \, d\theta \, dr = 2 \pi R - \frac{1}{2} \pi^2 R$$

```
> factor(%);
```

$$\int_0^R \int_0^{1/2 \pi} \int_0^{2 \pi} \frac{\sin(\theta) r^2}{r^2 + R^2} \, d\phi \, d\theta \, dr = -\frac{1}{2} \pi R (-4 + \pi)$$

12.3 Розв'язування задач

Проілюструємо використання ПСО Maple при розв'язуванні задач на застосування інтегрального числення.

Задача 12.1. *Швидкість руху матеріальної точки змінюється за законом $V(t) = 4t^2 + 3t - 5 \left(\frac{m}{c}\right)$. Знайти шлях, пройдений точкою за перші 6 секунд від початку руху.*

Розв'язання

Шлях, пройдений точкою при нерівномірному русі по прямій із змінною швидкістю $V = f(t) \geq 0$ за проміжок часу від t_1 до t_2 знаходиться за формулою: $S = \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt$.

Знайдемо пройдений шлях точкою за перші шість секунд руху:

```
> s:=Int(4*t^2+3*t-5,t=0..6);
```

$$s := \int_0^6 4t^2 + 3t - 5 dt$$

```
> s:=int(4*t^2+3*t-5,t=0..6);
```

```
s := 312
```

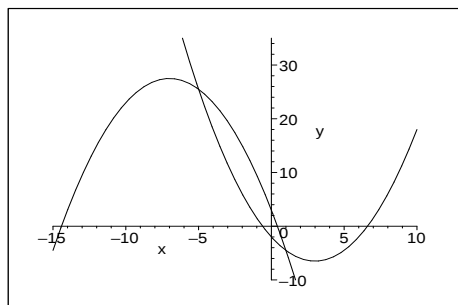
Відповідь: 312 м.

Задача 12.2. *Обчислити площу фігури, що обмежена двома параболою $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x - 2$, $y = -\frac{1}{2}x^2 - 7x + 3$.*

Розв'язання

Побудуємо фігуру, обмежену цими параболою:

```
> plot({1/2*x^2-3*x-2,-1/2*x^2-7*x+3},
x=-15..10,y=-10..35,color=black);
```



Знайдемо абсциси точок перетину цих парабол. Для цього розв'яжемо рівняння: $\frac{1}{2}x^2 - 3x - 2 = -\frac{1}{2}x^2 - 7x + 3$.

```
> solve(1/2*x^2-3*x-2=-1/2*x^2-7*x+3,x);
1, -5
```

І, нарешті, знаходимо площу:

```
> S:=Int((-1/2*x^2-7*x+3)-(1/2*x^2-3*x-2),x=-5..1);
```

$$S := \int_{-5}^1 -x^2 - 4x + 5 dx$$

```
> S:=int((-1/2*x^2-7*x+3)-(1/2*x^2-3*x-2),x=-5..1);
S := 36
```

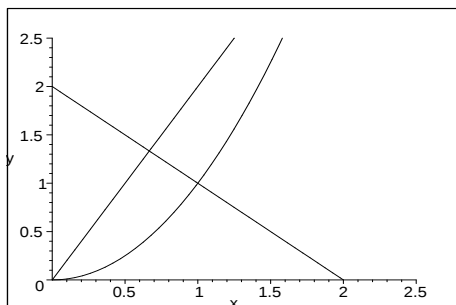
Відповідь: 36 кв. од.

Задача 12.3. Знайти площу фігури, що лежить у першій чверті і обмежена лініями $y = x^2$, $x + y = 2$, $y = 2x$.

Розв'язання

Побудуємо дану фігуру:

```
> plot({x^2,2-x,2*x},x=0..2.5,y=0..2.5,color=black);
```



Знайдемо абсцису точок перетину прямих $y = 2x$ та $x + y = 2$:

```
> solve(2-x=2*x,x);
```

$$\frac{2}{3}$$

Знайдемо абсциси точок перетину прямої $x + y = 2$ і параболи $y = x^2$:

```
> solve(2-x=x^2,x);
```

$$-2, 1$$

Знайдемо площі s_1, s_2, s_3, s_4 , де s_1 — площа, обмежена графіками $y = 2x, y = 0, x = \frac{2}{3}$, s_2 — площа, обмежена графіками $y = 2 - x, y = 0, x = \frac{2}{3}, x = 1$, s_3 — сума площ s_1 і s_2 , s_4 — площа, обмежена графіками $y = x^2, y = 0, x = 1$:

```
> S1:=Int(2*x,x=0..2/3);
```

$$S1 := \int_0^{2/3} 2x \, dx$$

```
> S1:=int(2*x,x=0..2/3);
```

$$S1 := \frac{4}{9}$$

```
> S2:=Int(2-x,x=2/3..1);
```

$$S2 := \int_{2/3}^1 2 - x \, dx$$

```
> S2:=int(2-x,x=2/3..1);
```

$$S2 := \frac{7}{18}$$

> S3:=4/9+7/18;

$$S3 := \frac{5}{6}$$

> S4:=Int(x^2,x=0..1);

$$S4 := \int_0^1 x^2 dx$$

> S4:=int(x^2,x=0..1);

$$S4 := \frac{1}{3}$$

I, нарешті, знаходимо площу фігури:

> S5:=5/6-1/3;

$$S5 := \frac{1}{2}$$

Відповідь: $\frac{1}{2}$ кв. од.

Задача 12.4. Дуга тангенсоїди $y = \operatorname{tg} x$ від точки $O(0;0)$ до точки $A\left(\frac{\pi}{4}; 1\right)$ обертається навколо осі абсцис. Обчисліть площу утвореної поверхні.

Розв'язання

Площа поверхні обертання знаходиться за формулою:

$$Q = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

Знайдемо її:

> f:=tan(x);

$$f := \tan(x)$$

> v:=diff(f,x);

$$v := 1 + \tan(x)^2$$

> Q=2*Pi*Int(tan(x)*sqrt(1+v^2),x=0..Pi/4);

$$Q = 2\pi \int_0^{1/4\pi} \tan(x) \sqrt{1 + (1 + \tan(x)^2)^2} dx$$

> Q=2*Pi*int(tan(x)*sqrt(1+v^2),x=0..Pi/4);

$$Q = 2\pi \left(\frac{1}{2} \sqrt{5} - \frac{1}{2} \operatorname{arctanh}\left(\frac{1}{5} \sqrt{5}\right) - \frac{1}{2} \sqrt{2} + \frac{1}{2} \operatorname{arctanh}\left(\frac{1}{2} \sqrt{2}\right) \right)$$

$$> \text{evalf}(2*\text{Pi}*(1/2*\text{sqrt}(5)-1/2*\text{arctanh}(1/5*\text{sqrt}(5))-1/2*\text{sqrt}(2)+1/2*\text{arctanh}(1/2*\text{sqrt}(2))), 5);$$

$$3.8388$$

Відповідь: $Q = 3,8390$ кв. од.

Задача 12.5. Розміри параболічного дзеркала показано на рисунку 12.1. Знайдіть площу його поверхні.

Розв'язання

Рівняння параболи, зображеної на малюнку, має вигляд $x = k \cdot y^2$. Оскільки парабола проходить через точку $(4; 16)$, то її координати задовольняють рівняння параболи. Підставивши координати точки $(4; 16)$ у рівняння $x = k \cdot y^2$, знайдемо значення коефіцієнта k : $4 = k \cdot 256 \Rightarrow k = \frac{1}{64}$. Отже, парабола має рівняння: $x = \frac{1}{64} \cdot y^2$. Параболічне дзеркало можна розглядати як фігуру, утворену внаслідок обертання дуги $y = 8\sqrt{x}$ ($0 \leq x \leq 4$) навколо осі Ox . Застосовуємо формулу $S = 2\pi \int_a^b y \cdot \sqrt{1 + y_x'^2} dx$.

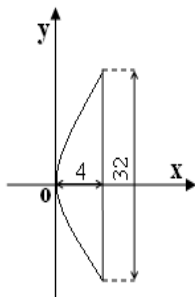


Рис. 12.1. Параболічне дзеркало

$$> S := 2 * \text{Pi} * \text{Int}(8 * \text{sqrt}(x) * \sqrt{1 + (\text{diff}(8 * \text{sqrt}(x), x))^2}, x = 0 \dots 4) = 2 * \text{Pi} * \text{int}(8 * \text{sqrt}(x) * \sqrt{1 + (\text{diff}(8 * \text{sqrt}(x), x))^2}, x = 0 \dots 4);$$

$$S := 2\pi \int_0^4 8\sqrt{x} \sqrt{1 + \frac{16}{x}} dx = 2\pi \left(\frac{640}{3} \sqrt{5} - \frac{1024}{3} \right)$$

```
> S:=evalf(2*Pi*int(8*sqrt(x)*sqrt(1+
(diff(8*sqrt(x),x))^2),x=0..4));
```

$$S := 852.5937008$$

Відповідь: $S = 852,59$ кв.од.

Задача 12.6. Знайти об'єм кулі, що утворена внаслідок обертання навколо осі Ox верхньої частини півкола, яке задане рівнянням $x^2 + y^2 = R^2$.

Розв'язання

Верхня частина кола задається рівнянням $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, x змінюється в межах $-R \leq x \leq R$. Застосовуємо формулу

$$V_x = \pi \int_a^b f^2(x) dx. \text{ Маємо } V = \pi \int_{-R}^R \left(\sqrt{R^2 - x^2} \right)^2 dx.$$

```
> V:=Pi*Int((sqrt(R^2-x^2)^2),x=-R..R)
=Pi*int((sqrt(R^2-x^2)^2),x=-R..R);
```

$$V := \pi \int_{-R}^R R^2 - x^2 dx = \frac{4}{3} \pi R^3$$

```
> V:=4/3*Pi*R^3;
```

$$V := \frac{4}{3} \pi R^3.$$

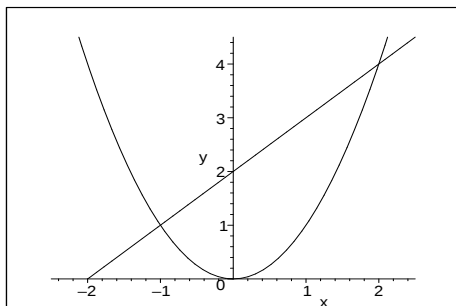
Відповідь: $\frac{4}{3} \pi R^3$.

Задача 12.7. Знайти об'єм тіла, отриманого обертанням навколо осі Ox фігури, що обмежена лініями $y = x^2$, $y = x + 2$.

Розв'язання

Зобразимо дану фігуру:

```
> plot({x^2,x+2},x=-2.5..2.5,y=0..4.5,color=black);
```



Знайдемо абсциси точок перетину параболі і прямої:

> solve(x²=x+2,x);

2, -1

Об'єм тіла знаходимо за формулою:

$$V = \pi \int_{-1}^2 (x+2)^2 dx - \pi \int_{-1}^2 x^4 dx.$$

> V1:=Pi*Int((x+2)^2,x=-1..2);

$$V1 := \pi \int_{-1}^2 (x+2)^2 dx$$

> V1:=Pi*int((x+2)^2,x=-1..2);

$$V1 := 21 \pi$$

> V2:=Pi*Int(x^4,x=-1..2);

$$V2 := \pi \int_{-1}^2 x^4 dx$$

> V2:=Pi*int(x^4,x=-1..2);

$$V2 := \frac{33}{5} \pi$$

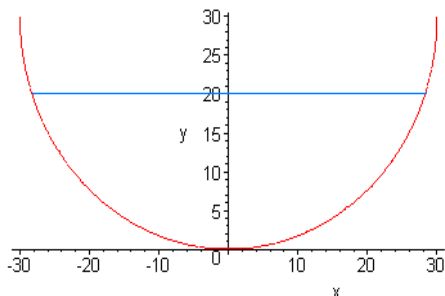
> V:=21*Pi-33/5*Pi;

$$V := \frac{72}{5} \pi$$

Відповідь: $14,4 \pi$ куб. од.

Задача 12.8. Вода частково наповнює напівсферичну чашу, радіус якої 30 см, так, що максимальна висота води у ній рівна 20 см. Знайти об'єм води в чаші.

Розв'язання



Помістимо чашу в прямокутну систему координат так, щоб центр кола, який її визначає, знаходився в точці $(0; 30)$. Рівняння цього кола матиме вигляд: $x^2 + (y - 30)^2 = 30^2$. Звідси $x^2 = 900 - (y - 30)^2$. Застосовуємо формулу $V_y = \pi \int_c^d \varphi^2(y) dy$. Так як $\varphi^2(y) = x^2 = 900 - (y - 30)^2$, а $0 \leq y \leq 20$, то

```
> V:=Pi*Int(900-(y-30)^2,y=0..20)=
Pi*int(900-(y-30)^2,y=0..20);
```

$$V := \pi \int_0^{20} 900 - (y - 30)^2 dy = \frac{28000}{3} \pi$$

```
> V:=evalf(28000/3*Pi);
V := 29321.53144
```

Відповідь: $V = 29321,5 \text{ см}^3$.

Задача 12.9. Знайти довжину дуги параболи $y = \frac{1}{3}x^2$, що міститься між точками $(0, 0)$ і $(3, 3)$.

Розв'язання

Знайдемо похідну функції:

```
> f:=1/3*x^2;
```

$$f := \frac{1}{3}x^2$$

> diff(f,x);

$$\frac{2}{3}x$$

Довжину дуги знайдемо, використавши формулу

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

> l:=Int(sqrt(1+(2/3*x)^2),x=0..3);

$$l := \int_0^3 \frac{1}{3} \sqrt{9 + 4x^2} dx$$

> l:=int(sqrt(1+(2/3*x)^2),x=0..3);

$$l := \frac{3}{2} \sqrt{5} - \frac{3}{4} \ln(-2 + \sqrt{5})$$

> eval(3/2*sqrt(5.0)-3/4*ln(-2+sqrt(5.0)));
4.436828572

Відповідь: 4,4 лін. од.

Задача 12.10. Обчислити роботу, виконану при розтягуванні пружини на 5 см, якщо відомо, що сила, яка необхідна для розтягування пружини, пропорційна видовженню x пружини і, що для видовження пружини на 1 см потрібна сила 2 Н.

Розв'язання

Використаємо закон Гука $F = k \cdot x$.

Згідно з умовою, маємо рівняння $2 = k \cdot 0,01$. Розв'яжемо його:

> solve(2=k*0.01,k);

200.

Підставивши в закон Гука $k = 200$, матимемо $F = 200k$.

Шукану роботу знайдемо за формулою $A = \int_a^b f(x) dx$, припустивши, що $a = 0, b = 0,05, f(x) = 200k$:

```
> A:=Int(200*x,x=0..0.05);
```

$$A := \int_0^{.05} 200 x \, dx$$

```
> A:=int(200*x,x=0..0.05);
```

```
A := .25000000000
```

Відповідь: 0,25 Дж.

Задача 12.11. Знайти центр ваги дуги кола $x^2 + y^2 = 4$, обмеженої точками $A(2;0)$, $B(0;2)$.

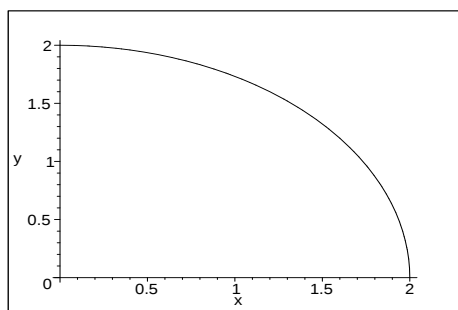
Розв'язання

Зобразимо дану дугу, використавши бібліотеку `with(plots)` та команду `implicitplot`:

```
> with(plots):
```

Warning, the name `changecoords` has been redefined

```
> implicitplot( { x^2+y^2=4}, x=0..2, y=0..2,
color=black);
```



Диференціюємо рівняння кола по x :

```
> f:=x^2+y^2=4;
```

$$f := x^2 + y^2 = 4$$

```
> implicitdiff(f,y,x);
```

$$-\frac{x}{y}$$

Знаходимо диференціал дуги кривої:

$$> \quad dl := \sqrt{1 + (-1*x/y)^2} * dx;$$

$$dl := \sqrt{1 + \frac{x^2}{y^2}} dx$$

Статистичні моменти відносно осей Ox і Oy знаходяться за формулами: $M_x = \int_a^b y dl$, $M_y = \int_a^b x dl$.

Знайдемо їх.

Спочатку знаходимо статистичний момент відносно осі Ox :

$$> \quad Mx := \text{Int}(y * \sqrt{1 + (-1*x/y)^2}, x=0..2);$$

$$Mx := \int_0^2 y \sqrt{1 + \frac{x^2}{y^2}} dx$$

$$> \quad \text{Subs}(y = \sqrt{4 - x^2}, y * \sqrt{1 + (-1*x/y)^2});$$

$$\text{Subs}(y = \sqrt{4 - x^2}, y \sqrt{1 + \frac{x^2}{y^2}})$$

$$> \quad \text{subs}(y = \sqrt{4 - x^2}, y * \sqrt{1 + (-1*x/y)^2});$$

$$\sqrt{4 - x^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{4 - x^2}}$$

$$> \quad Mx := \text{Int}(\sqrt{4 - x^2} * \sqrt{1 + x^2/(4 - x^2)}, x=0..2);$$

$$Mx := \int_0^2 \sqrt{4 - x^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{4 - x^2}} dx$$

$$> \quad Mx := \text{int}(\sqrt{4 - x^2} * \sqrt{1 + x^2/(4 - x^2)}, x=0..2);$$

$$Mx := 4$$

Координати центра ваги дуги плоскої однорідної кривої знаходяться за формулами: $x_C = \frac{M_y}{l}$; $y_C = \frac{M_x}{l}$.

Знаходимо довжину дуги:

$$> \quad l := 2 * \text{Pi} * 2 / 4;$$

$$l := \pi$$

Знаходимо y_C :

$$> \quad y_C := Mx / l;$$

$$Y_C := 4 \frac{1}{\pi}$$

Аналогічно, внаслідок симетрії фігури, знаходиться x_C .

Відповідь: $C\left(\frac{4}{\pi}; \frac{4}{\pi}\right)$.

Задача 12.12. Число товару, що надходить на склад за час t , визначається формулою $f(t) = 5e^t - 2t + 5$. Знайти запас, який утворюється на складі за чотири години, рахуючи від початку прийому товару.

Розв'язання

Запас товару N дорівнює визначеному інтегралу

$$N = \int_0^4 (5e^t - 2t + 5) dt:$$

> N:=Int(5*exp(t)-2*t+5,t=0..4);

$$N := \int_0^4 5e^t - 2t + 5 dt$$

> N:=int(5*exp(t)-2*t+5,t=0..4);

$$N := 5e^4 - 1$$

> eval(N);

$$5e^4 - 1$$

> evalf(%);eval(N);

$$271.9907502$$

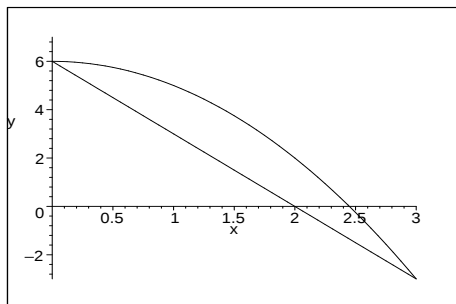
Відповідь: $5e^4 - 1$; 272.

Задача 12.13. Знайти площу фігури, обмеженої лініями $x = 0$, $x = 3$, $y = 6 - 3x$, $y = 6 - x^2$.

Розв'язання

Зобразимо дану фігуру:

> plot({6-3*x,6-x^2},x=0..3,y=-3..7,color=black);



Використовуючи подвійний інтеграл, знайдемо площу цієї фігури:

```
> S:=Int(Int(1,y=6-3*x..6-x^2),x=0..3);
```

$$S := \int_0^3 \int_{6-3x}^{6-x^2} 1 \, dy \, dx$$

```
> S:=Int(Int(1,y=6-3*x..6-x^2),x=0..3)=  
int(int(1,y=6-3*x..6-x^2),x=0..3);
```

$$S := \int_0^3 \int_{6-3x}^{6-x^2} 1 \, dy \, dx = \frac{9}{2}$$

Відповідь: 4,5 кв. од.

Задача 12.14. За допомогою подвійного інтеграла обчислити координати центра ваги фігури, обмеженої заданими лініями (поверхневу густину вважати рівною одиниці):

$$x^2 + 4y^2 = 1, \quad -x + 2y = 1.$$

Розв'язання

Координати центра ваги знаходяться за формулами:

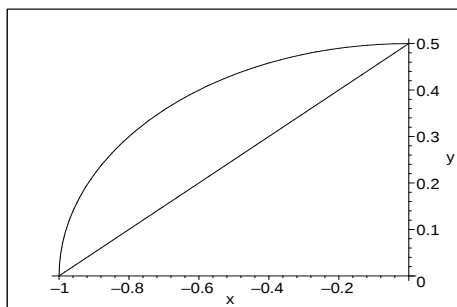
$$\bar{x} = \frac{1}{S} \iint_D x \, dx \, dy, \quad \bar{y} = \frac{1}{S} \iint_D y \, dx \, dy.$$

Зобразимо дану фігуру:

```
> with(plots):
```

Warning, the name changecoords has been redefined

```
> implicitplot( { x^2+4*y^2=1, 2*y-x=1}, x=-1..0,
y=0..0.6,color=black);
```



Знайдемо площу фігури, обмежену лініями $y = \frac{x+1}{2}$, $y = \sqrt{\frac{1-x^2}{4}}$:

```
> S:=Int(Int(1,y=(x+1)/2..sqrt((1-x^2)/4)),x=-1..0);
```

$$S := \int_{-1}^0 \int_{1/2 x + 1/2}^{1/2 \sqrt{1-x^2}} 1 \, dy \, dx$$

```
> S:=int(int(1,y=(x+1)/2..sqrt((1-x^2)/4)),x=-1..0);
```

$$S := -\frac{1}{4} + \frac{1}{8} \pi$$

Обчислимо інтеграл

$$S := \int_{-1}^0 \int_{1/2 x + 1/2}^{1/2 \sqrt{1-x^2}} x \, dy \, dx :$$

```
> int(int(x,y=(x+1)/2..sqrt((1-x^2)/4)),x=-1..0);
```

$$\frac{-1}{12}$$

Обчислимо інтеграл

$$S := \int_{-1}^0 \int_{1/2 x + 1/2}^{1/2 \sqrt{1-x^2}} y \, dy \, dx :$$

```
> int(int(y,y=(x+1)/2..sqrt((1-x^2)/4)),x=-1..0);
```

$$\frac{1}{24}$$

Знаходимо координати центра ваги фігури: ($\bar{x} = a$; $\bar{y} = b$):

```
> a:=1/( -1/4+1/8*Pi)*(-1/12);
```

$$a := -\frac{1}{12} \frac{1}{-\frac{1}{4} + \frac{1}{8}\pi}$$

```
> normal(a);
```

$$-\frac{2}{3} \frac{1}{-2 + \pi}$$

```
> b:=1/( -1/4+1/8*Pi)*(1/24);
```

$$b := \frac{1}{24} \frac{1}{-\frac{1}{4} + \frac{1}{8}\pi}$$

```
> normal(b);
```

$$\frac{1}{3} \frac{1}{-2 + \pi}$$

```
> evalf(a);
```

$$-.5839794642$$

```
> evalf(b);
```

$$.2919897321$$

Відповідь: $\bar{x} = -\frac{2}{3(\pi-2)}$, $\bar{y} = \frac{1}{3(\pi-2)}$, або наближено $\bar{x} \approx -0,58$, $\bar{y} \approx 0,29$.

Задача 12.15. Знайти об'єм трикутної піраміди, обмеженої площинами $x + 2y + z = 2$, $x = 2y$, $x = 0$, $z = 0$.

Розв'язання

Трикутна піраміда, обмежена площинами $x + 2y + z = 2$, $x = 2y$, $x = 0$, $z = 0$, зображена на малюнку 12.2. Область D — трикутник, що визначається прямими $x = 2y$, $x + 2y = 2$, $x = 0$.

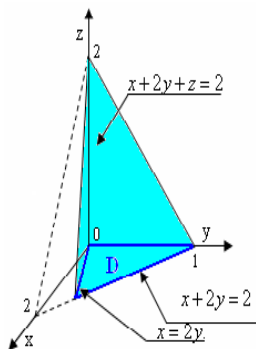


Рис. 12.2. Піраміда

Знайдемо точку перетину прямих $x = 2y$, $x + 2y = 2$:

$$\begin{cases} x = 2y; \\ x + 2y = 2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1; \\ y = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Шуканий об'єм лежить під графіком функції $z = 2 - x - 2y$ і вище області

$$D = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, \frac{x}{2} \leq y \leq 1 - \frac{x}{2} \right\}.$$

Покажемо область D у площині xOy (рис. 12.3).

Для знаходження об'єму застосуємо формулу

$$V = \iint_D f(x, y) dx dy. \quad (12.1)$$

$$V = \iint_D (2 - x - 2y) dS = \int_0^1 \int_{\frac{x}{2}}^{1-\frac{x}{2}} (2 - x - 2y) dy dx :$$

> with (student):

> Doubleint(2-x-2*y,y=x/2..1-x/2,x=0..1);

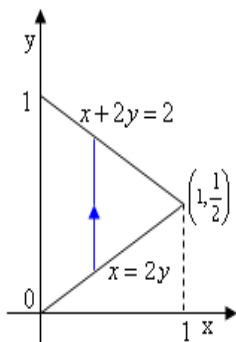


Рис. 12.3. Область D

$$\int_0^1 \int_{1/2x}^{1-1/2x} (2-x-2y) dy dx$$

> evalf(%);

.3333333333

> convert(.3333333333, fraction);

$\frac{1}{3}$

Відповідь: $\frac{1}{3}$ куб. од.

Задача 12.16. Обчислити об'єм тіла, обмеженого заданими поверхнями

$$x^2 + y^2 = 9; x^2 + z^2 = 9$$

і розміщеного в першому октанті.

Розв'язання

Шуканий об'єм дорівнює подвійному інтегралу:

$$V = \int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} \sqrt{9-x^2} dy dx.$$

Отже,

```
> V:=int(int(sqrt(9-x^2),y=0..sqrt(9-x^2)),x=0..3);
V := 18
```

Відповідь: 18 куб. од.

12.4 Завдання для самостійного виконання

1. Знайти невизначений інтеграл:

- 1) $\int x^2(5-x)^4 dx;$
- 2) $\int \frac{\sqrt{x-2}\sqrt[3]{x^2+1}}{\sqrt[4]{x}} dx;$
- 3) $\int \frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x} dx;$
- 4) $\int (1+\sin x+\cos x) dx;$
- 5) $\int \frac{\sqrt[5]{1-2x+x^2}}{1-x} dx;$
- 6) $\int (\sin 5x+\sin 5\alpha) dx;$
- 7) $\int \frac{xdx}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}};$
- 8) $\int \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}} dx;$
- 9) $\int \frac{1}{1-x^2} \ln \frac{1+x}{1-x} dx;$
- 10) $\int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{(1+x^2)^3}};$
- 11) $\int x \arctg(x+1) dx;$
- 12) $\int \sin^2 3x \cdot \sin^2 2x dx;$
- 13) $\int \cos^5 x \cdot \sqrt{\sin x} dx;$
- 14) $\int \sqrt{a^2+x^2} dx;$
- 15) $\int \sin x \cdot \ln(\operatorname{tg} x) dx;$
- 16) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}};$
- 17) $\int \frac{xdx}{x^2-2x\cos\alpha+1};$
- 18) $\int \frac{x^2 dx}{(1+x)(1+x^2)(1+x^3)};$
- 19) $\int \frac{x^2+3x-2}{(x-1)(x^2+x+1)^2} dx;$
- 20) $\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} dx;$
- 21) $\int \frac{(x+1)dx}{(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x+1}};$
- 22) $\int \sqrt[3]{3x-x^2} dx;$
- 23) $\int \frac{dx}{\cos x \sqrt[3]{\sin^2 x}} dx;$
- 24) $\int \frac{dx}{\sin^4 x+\cos^4 x} dx;$
- 25) $\int f(x) dx,$ де $f(x) = \begin{cases} x^2-4, & \text{при } x \leq 2; \\ 6-2x, & \text{при } x > 2. \end{cases}$

2. Обчислити визначений інтеграл:

- 1) $\int_0^{\pi} \sin x dx;$
- 2) $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1+\varepsilon \cos x} dx;$
- 3) $\int_0^1 \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}} dx;$
- 4) $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} dx;$

- 5) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sin 2x \sin 3x dx;$ 6) $\int_0^{\pi} |\cos x| \sqrt{\sin x} dx;$
- 7) $\int_0^{+\infty} \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx;$ 8) $\int_0^{+\infty} \sin x^2 dx;$
- 9) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2};$ 10) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+x+1)^2}.$

3. Обчислити подвійний інтеграл:

- 1) $\int_1^3 \int_{y^2+3}^8 (x+y) dx dy;$ 2) $\int_{-3}^3 \int_{y^2-4}^5 (x+2y) dx dy;$
- 3) $\int_0^{2\pi} \int_0^a r^2 \sin^2 \varphi d\varphi dr;$ 4) $\int_1^2 \int_0^{\pi} y \sin(xy) dx dy;$
- 5) $\int_0^2 \int_0^2 (16 - x^2 - 2y^2) dx dy;$ 6) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x+y) dx dy;$
- 7) $\int_0^{\ln 2} \int_0^{\ln 2} e^{2x-y} dx dy;$ 8) $\int_0^1 \int_0^1 \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2+1}} dx dy.$

4. Обчислити потрійний інтеграл:

- 1) $\int_1^2 \int_0^x \int_0^{1-y} x^3 y^2 z dz dy dx;$
- 2) $\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} z dz dy dx;$
- 3) $\int_0^1 \int_0^z \int_0^y z e^{-y^2} dz dy dx;$
- 4) $\int_{-2}^2 \int_{x^2}^4 \int_{-\sqrt{y-x^2}}^{\sqrt{y-x^2}} \sqrt{x^2+z^2} dz dy dx;$
- 5) $\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-y^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{18-x^2-y^2}} (x^2+y^2+z^2) dz dy dx;$

$$6) \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^2 (x^2 + y^2) dz dy dx;$$

$$7) \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^1 \rho^2 e^{\rho^3} \sin \phi d\rho d\theta d\phi;$$

$$8) \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\cos \phi} \rho^2 \sin \phi d\rho d\theta d\phi.$$

13

Розв'язування диференціальних рівнянь та систем диференціальних рівнянь

13.1 Розв'язування диференціальних рівнянь

Maple дозволяє будувати поля напрямів диференціальних рівнянь та їх систем. Це стає можливим при підключенні до бібліотеки DEtools.

За допомогою пакета символьних обчислень Maple можна розв'язувати диференціальні рівняння та системи диференціальних рівнянь, проводити геометричну візуалізацію розв'язку. Для розв'язування диференціальних рівнянь слугує команда `dsolve`.

Розв'яжемо звичайне диференціальне рівняння $y' = y + 1$:

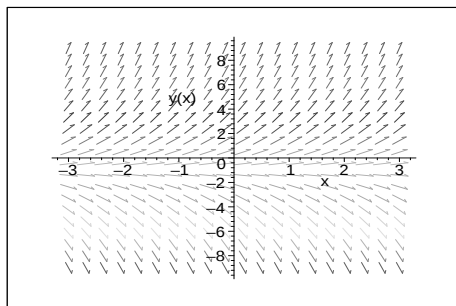
```
> dsolve(diff(y(x),x)-y(x)-1=0,y(x));
```

$$y(x) = -1 + e^x C_1$$

У відповіді присутня довільна константа C_1 .

Побудуємо поле напрямів цього рівняння, використавши команду `dfieldplot`:

```
> with(DEtools):
> dfieldplot(diff(y(x),x)-y(x)-1=0, y(x), x=-3..3,
y=-9..9,color=y+1);
```



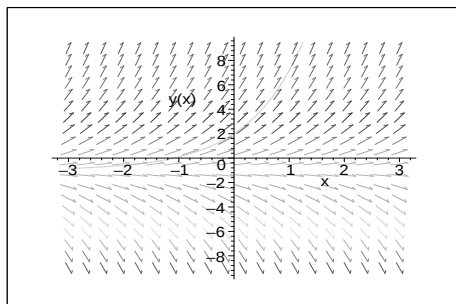
Задамо початкову умову, наприклад, $y(0) = 2$ та знайдемо частинний розв'язок рівняння $y' = y + 1$:

```
> dsolve({diff(y(x),x)-y(x)-1=0,y(0)=2},y(x));
```

$$y(x) = -1 + 3e^x$$

Скористаємося командою `phaseportrait` та побудуємо фазову картинку рівняння $y' = y + 1$, що задовольняє початкову умову $y(0) = 2$:

```
> with(DEtools):
> phaseportrait(diff(y(x),x)-y(x)-1=0, y(x),
x=-3..3,[y(0)=2]], y=-9..9,stepsize=.05,
color=y+1);
```



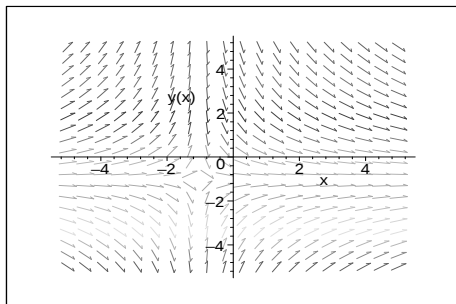
Приклад 13.1. Знайти загальний розв'язок та побудувати поле напрямів диференціального рівняння з відокремлюваними змінними $1 + y' + y + xy' = 0$.

Розв'язання

```
> dsolve(1+diff(y(x),x)+y(x)+x*diff(y(x),x)=0,y(x));
```

$$y(x) = \frac{-x + C_1}{1 + x}$$

```
> dfieldplot(1+diff(y(x),x)+y(x)+x*diff(y(x),x)=0,
y(x),x=-5..5,y=-5..5, color=y);
```



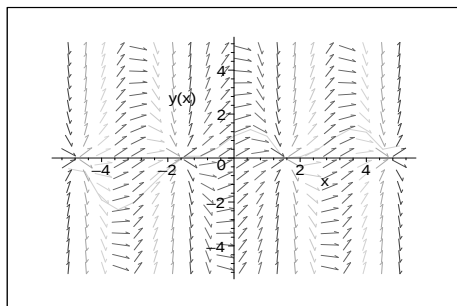
Приклад 13.2. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння першого порядку $y' + y \operatorname{tg} x = \cos^2 x$, побудувати фазову картинку при $y(0) = 1$.

Розв'язання

```
> dsolve(diff(y(x),x)+y(x)*tan(x)=(cos(x))^2,y(x));
```

$$y(x) = \frac{1}{2} \sin(2x) + \cos(x) C_1$$

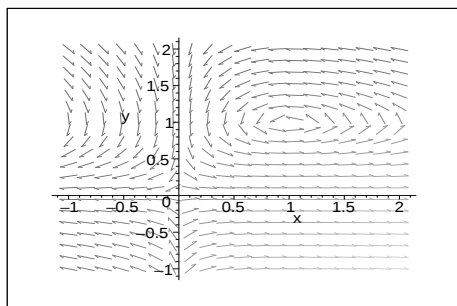
```
> phaseportrait(diff(y(x),x)+y(x)*tan(x)=
(cos(x))^2,y(x),x=-5..5,[[y(0)=1]],
y=-5..5,color=cos(x));
```



Побудуємо поле напрямів моделі Лотка-Вольтера:

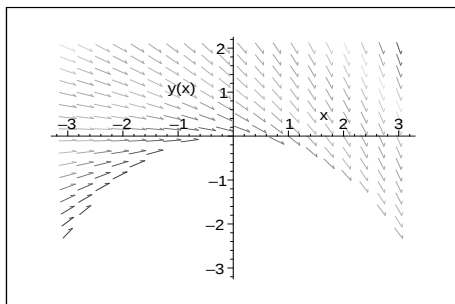
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(1-y); \\ \frac{dy}{dt} = 3y(x-1). \end{cases}$$

```
> with(DEtools):
> dfieldplot([diff(x(t),t)=x(t)*(1-y(t)),
diff(y(t),t)=.3*y(t)*(x(t)-1)],
[x(t),y(t)],t=-2..2,x=-1..2,y=-1..2,
color=[.3*y(t)*(x(t)-1),x(t)*(1-y(t)),1.]);
```



Побудуємо область, яку обмежує поле напрямів диференціального рівняння $y' = \frac{1}{2} \left(-x - \sqrt{x^2 + 4y} \right)$:

```
> dfieldplot(diff(y(x),x)=
1/2*(-x-(x^2+4*y(x))^(1/2)),y(x),x=-3..3,
y=-3..2,color=1/2*(-x-(x^2+4*y)));
```



Розглянемо приклад диференціального рівняння другого порядку $y'' - y = 1$.

Його розв'язок у Maple матиме вигляд:

```
> eval(4000*exp(.6807869986e-2*t),t=5);
> Dsolve(diff(y(x),x$2)-y(x)=1,y(x));
```

$$\text{Dsolve}((\frac{\partial^2}{\partial x^2} y(x)) - y(x) = 1, y(x))$$

```
> dsolve(diff(y(x),x$2)-y(x)=1,y(x));
```

$$y(x) = e^x C_2 + e^{(-x)} C_1 - 1$$

Застосуємо Maple до розв'язування рівняння другого порядку $y'' - 7y' + 10y = 0$ із початковими умовами $y(0) = 2$; $y'(0) = -1$.

```
> de1:=diff(y(t),t$2)-7*diff(y(t),t)+10*y(t)=0;
```

$$de1 := (\frac{\partial^2}{\partial t^2} y(t)) - 7(\frac{\partial}{\partial t} y(t)) + 10y(t) = 0$$

```
> Dsolve({de1,y(0)=2,D(y)(0)=-1},y(t));
```

$$\text{Dsolve}(\{(\frac{\partial^2}{\partial t^2} y(t)) - 7(\frac{\partial}{\partial t} y(t)) + 10y(t) = 0, \\ y(0) = 2, D(y)(0) = -1\}, y(t))$$

```
> dsolve({de1,y(0)=2,D(y)(0)=-1},y(t));
```

$$y(t) = -\frac{5}{3} e^{(5t)} + \frac{11}{3} e^{(2t)}$$

Приклад 13.3. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y'' - 6y' + 9y = 9x^2 - 39x + 65$$

і виділити з нього частковий розв'язок, який задовольняє початкові умови $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$. Побудувати графік знайденої інтегральної кривої.

Розв'язання

```
> de5:=diff(y(x),x$2)-6*diff(y(x),x)+9*y(x)=
9*x^2-39*x+65;
```

$$de5 := \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} y(x)\right) - 6 \left(\frac{\partial}{\partial x} y(x)\right) + 9 y(x) = 9x^2 - 39x + 65$$

```
> Dsolve(de5,y(x));
```

$$Dsolve\left(\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} y(x)\right) - 6 \left(\frac{\partial}{\partial x} y(x)\right) + 9 y(x) = 9x^2 - 39x + 65, y(x)\right)$$

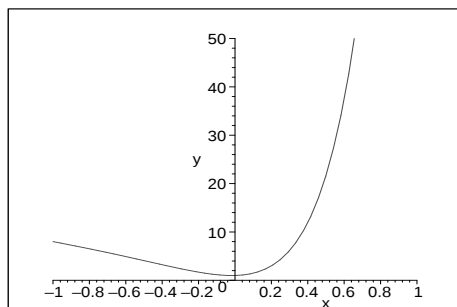
```
> dsolve(de5,y(x));
```

$$y(x) = e^{(3x)} C_2 + e^{(3x)} x C_1 + 5 - 3x + x^2$$

```
> dsolve({de5,y(0)=1,D(y)(0)=1},y(x));
```

$$y(x) = -4e^{(3x)} + 16e^{(3x)} x + 5 - 3x + x^2$$

```
> plot(-4*exp(3*x)+16*exp(3*x)*x+5-3*x+x^2,
x=-1..1,y=0..50);
```



Приклад 13.4. Знайти загальний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами $y'' - y' - 6y = (2x - 1)e^{3x}$.

Розв'язання

```
> de2:=diff(y(x),x$2)-diff(y(x),x)-6*y(x)=(2*x-1)*
exp(3*x);
```

$$de2 := \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} y(x)\right) - \left(\frac{\partial}{\partial x} y(x)\right) - 6 y(x) = (2x - 1)e^{(3x)}$$

```
> Dsolve(de2,y(x));
```

```
Dsolve(( $\frac{\partial^2}{\partial x^2} y(x)$ ) - ( $\frac{\partial}{\partial x} y(x)$ ) - 6 y(x) = (2 x - 1) e^{(3 x)}, y(x))
```

```
> dsolve(de2,y(x));
```

$$y(x) = e^{(3x)} C_2 + e^{(-2x)} C_1 + \frac{1}{25} (5x^2 - 7x) e^{(3x)}$$

Приклад 13.5. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y'' + 4y' + 5y = 2 \cos x - \sin x$ і виділити з нього частковий розв'язок, який задовольняє початкові умови $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$. Побудувати графік знайденої інтегральної кривої.

Розв'язання

```
> de3:=diff(y(x),x$2)+4*diff(y(x),x)+5*y(x)=  
2*cos(x)-sin(x);
```

```
de3 := ( $\frac{\partial^2}{\partial x^2} y(x)$ ) + 4 ( $\frac{\partial}{\partial x} y(x)$ ) + 5 y(x) = 2 cos(x) - sin(x)
```

```
> Dsolve(de3,y(x));
```

```
Dsolve(( $\frac{\partial^2}{\partial x^2} y(x)$ ) + 4 ( $\frac{\partial}{\partial x} y(x)$ ) + 5 y(x) = 2 cos(x) - sin(x), y(x))
```

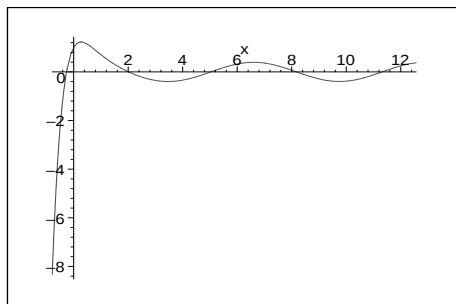
```
> dsolve(de3,y(x));
```

$$y(x) = e^{(-2x)} \sin(x) C_2 + e^{(-2x)} \cos(x) C_1 + \frac{1}{8} \sin(x) + \frac{3}{8} \cos(x)$$

```
> y1:=dsolve({de3,y(0)=1,D(y)(0)=2},y(x));
```

$$y1 := y(x) = \frac{25}{8} e^{(-2x)} \sin(x) + \frac{5}{8} e^{(-2x)} \cos(x) + \frac{1}{8} \sin(x) + \frac{3}{8} \cos(x)$$

```
> plot(25/8*exp(-2*x)*sin(x)+5/8*exp(-2*x)*cos(x)+  
1/8*sin(x)+3/8*cos(x),x=-Pi*4..4*Pi);
```



Приклад 13.6. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y'' - 2y' + y = 3e^x + x + 1$$

і виділити з нього частковий розв'язок, який задовольняє початкові умови $y(0) = 4$, $y'(0) = 2$. Побудувати графік знайденої інтегральної кривої.

Розв'язання

```
> de4:=diff(y(x),x$2)-2*diff(y(x),x)+y(x)=3*exp(x)+x+1;
```

$$de4 := \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} y(x)\right) - 2\left(\frac{\partial}{\partial x} y(x)\right) + y(x) = 3e^x + x + 1$$

```
> Dsolve(de4,y(x));
```

$$Dsolve\left(\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} y(x)\right) - 2\left(\frac{\partial}{\partial x} y(x)\right) + y(x) = 3e^x + x + 1, y(x)\right)$$

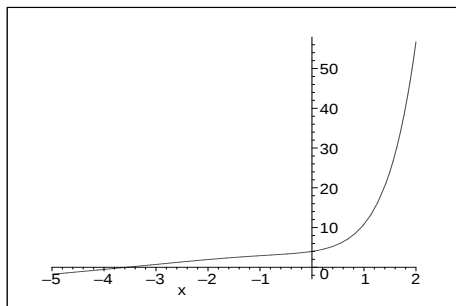
```
> dsolve(de4,y(x));
```

$$y(x) = e^x C_2 + e^x x C_1 + \frac{3}{2} x^2 e^x + x + 3$$

```
> dsolve({de4,y(0)=4,D(y)(0)=2},y(x));
```

$$y(x) = e^x + 3 + \frac{3}{2} x^2 e^x + x$$

```
> plot(exp(x)+3+3/2*x^2*exp(x)+x,x=-5..2);
```



Розв'яжемо систему лінійних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} x'_t = 4x + y - 36t; \\ y'_t = -2x + y - 2e^t, \end{cases}$$

серед знайдених розв'язків виділимо той, що задовольняє умови $x(0) = 0$, $y(0) = 1$.

```
> with(DEtools):
> sys:=diff(x(t),t)=4*x(t)+y(t)-36*t,diff(y(t),t)
=-2*x(t)+y(t)-2*exp(t)
:fcns:={x(t),y(t)};
```

$$fcns := \{x(t), y(t)\}$$

```
> dsolve({sys,x(0)=0,y(0)=1},fcns);
```

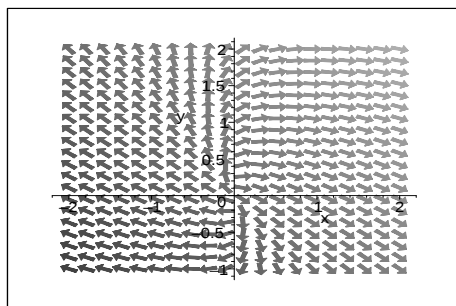
$$x(t) = 10e^{(2t)} - 8e^{(3t)} - 1 + 6t - e^t,$$

$$y(t) = -20e^{(2t)} + 8e^{(3t)} + 10 + 3e^t + 12t$$

Покажемо поле напрямів системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} x'_t = 4x + y; \\ y'_t = -2x + y. \end{cases}$$

```
> dfieldplot([diff(x(t),t)=4*x(t)+y(t),
diff(y(t),t)=-2*x(t)+y(t)], [x(t),y(t)],
t=-2..2,x=-2..2,y=-1..2,arrows=LARGE,
color=[-2*x(t)+y(t),4*x(t)+y(t),.1]);
```



13.2 Розв'язування задач

Задача 13.1. Знайти закон руху тіла по осі Ox , якщо воно почало рухатися з точки $A(6,0)$ зі швидкістю $V = 3t + 2t^2$.

Розв'язання

Відповідно до умови задачі маємо рівняння:

> eqn:=diff(S(t),t)=3*t+2*t^2;

$$eqn := \frac{\partial}{\partial t} S(t) = 3t + 2t^2$$

Розв'яжемо його:

> dsolve(eqn,S(t));

$$S(t) = \frac{2}{3}t^3 + \frac{3}{2}t^2 + C_1$$

Використавши початкову умову, маємо відповідь:

> dsolve({eqn,S(6)=0},S(t));

$$S(t) = \frac{2}{3}t^3 + \frac{3}{2}t^2 - 198$$

Відповідь: $\frac{3}{2}t^2 + \frac{2}{3}t^3 - 198$.

Задача 13.2. Знайти криву, що проходить через точку $(2; 1)$, якщо відомо, що добуток абсциси будь-якої точки кривої на кутівий коефіцієнт дотичної до кривої в цій точці дорівнює подвоєній сумі координат цієї точки.

Розв'язання

Розв'язання цієї задачі зводиться до розв'язування диференціального рівняння $xy' = 2(x + y)$, яке задовольняє початкову умову $y(2) = 1$.

> Dsolve({x*diff(y(x),x)=2*(x+y(x)),y(2)=1},y(x));

Dsolve({x*($\frac{\partial}{\partial x}$ y(x))=2x+2y(x),y(2)=1},y(x))

> dsolve({x*diff(y(x),x)=2*(x+y(x)),y(2)=1},y(x));

$$y(x) = -2x + \frac{5}{4}x^2$$

Відповідь: $y = -2x + \frac{5}{4}x^2$.

Задача 13.3. Прискорення руху машинно-тракторного агрегату рівне $a = \frac{dv}{dt} = \frac{F-P}{m} \left(\frac{m}{c^2} \right)$, F (кН) — сила, що рухає агрегат, P (кН) — сума сил рухові опору, m (кг) — маса агрегату. Знайти закон зміни швидкості агрегату.

Розв'язання

Рух агрегату описується диференціальним рівнянням $\frac{dv}{dt} = \frac{F-P}{m}$. Розв'язавши це рівняння, знайдемо закон руху агрегату:

> Dsolve(diff(v(t),t)=(F-P)/m,v(t));

$$\text{Dsolve}\left(\frac{\partial}{\partial t} v(t) = \frac{F-P}{m}, v(t)\right)$$

> dsolve(diff(v(t),t)=(F-P)/m,v(t));

$$v(t) = -\frac{(-F+P)t}{m} + C_1$$

Відповідь: $v(t) = \frac{(F-P)t}{m} \frac{m}{c}$.

Задача 13.4. Експериментальним шляхом встановлено, що швидкість розпаду радіо в кожен момент часу пропорційна початковій кількості радіо. У початковий момент часу ($t = 0$) було R_0 грам радіо. Знайти формулу для обчислення кількості радіо в будь-який момент часу t . Через скільки років розпадеться половина початкової кількості радіо при умові, що $k = 0,00044$?

Розв'язання

Нехай коефіцієнт пропорційності k відомий ($k > 0$). Позначимо через R кількість радіо, що не розпалася в момент часу t .

Закон зміни кількості радіо описується диференціальним рівнянням:

> restart;

> deqn:=diff(R(t),t)=-k*R(t);

$$\text{deqn} := \frac{\partial}{\partial t} R(t) = -k R(t)$$

Розв'яжемо його:

> dsolve(deqn,R(t));

$$R(t) = C_1 e^{(-k t)}$$

Врахувавши початкову умову $R(0) = R_0$ матимемо:

> dsolve({deqn,R(0)=R0},R(t));

$$R(t) = R_0 e^{(-kt)}$$

Розв'язавши рівняння $\frac{R_0}{2} = R_0 e^{(-kt)}$, знайдемо період піврозпаду радію:

```
> solve(R0/2.0=R0*exp(-k*t),t);
```

$$.6931471806 \frac{1}{k}$$

Якщо $k = 0,00044$, то:

```
> eval(%,k=.00044);
```

$$1575.334502$$

Відповідь: $R(t) = R_0 e^{(-kt)}$; 1575 років.

Задача 13.5. Вітер у лісі втрачає свою швидкість. На нескінченно малому проміжку шляху ця втрата пропорційна швидкості на початку цього проміжку і на довжині проміжку. Знайти швидкість вітру, який пройшов лісом 200 м, знаючи, що до вступу в ліс початкова швидкість вітру $V_0 = 14 \frac{m}{c}$, а після проходження лісом шляху $S = 1$ м швидкість вітру зменшилася на величину $V_1 = 13,8 \frac{m}{c}$.

Розв'язання

Позначимо швидкість вітру на відстані S від початку лісу через V . Втрата швидкості на шляху dS дорівнює dV . Відповідно до умови задачі втрата швидкості вітру $-dV$ пропорційна V і dS . Диференціальне рівняння швидкості вітру має вигляд:

```
> deqn:=diff(v(s),s)=-k*v(s);
```

$$deqn := \frac{\partial}{\partial s} v(s) = -k v(s)$$

Знаходимо закон зміни швидкості вітру:

```
> dsolve(deqn,v(s));
```

$$v(s) = C_1 e^{(-ks)}$$

Врахувавши початкову умову $V(0) = 14$, маємо:

```
> dsolve({deqn,v(0)=14},v(s));
```

$$v(s) = 14 e^{(-ks)}$$

Оскільки $V(1) = 13,8$, то маємо рівняння $13,8 = 14 \cdot e^{-k}$. Розв'яжемо це рівняння і знайдемо коефіцієнт пропорційності k :

```
> solve(13.8=14*exp(-k),k);
.01438873745
```

Отже,

```
> v(s) := 14*exp(-.01438873745*s);
v(s) := 14 e(-0.01438873745 s)
```

Знаходимо швидкість вітру, який пройшов лісом 200 м:

```
> eval(%,s=200);
.7876588924
```

Відповідь: $0,788 \frac{\text{м}}{\text{с}}$.

Задача 13.6. У деякий момент часу рух потягу по горизонтальній ділянці шляху зі швидкістю $25 \frac{\text{м}}{\text{с}}$ були включені гальма. Знайти час гальмування і відстань, пройдену потягом після включення гальм, якщо опір руху дорівнює $0,3$ ваги потягу.

Розв'язання

Згідно з другим законом Ньютона, рух потягу після включення гальм змінюється відповідно до закону:

```
> eqn1:=m*diff(S(t),t$2)=-0.3*m*q;
eqn1 := m (  $\frac{\partial^2}{\partial t^2} S(t)$  ) = - .3 m q
```

Скоротимо ліву і праву частини на m :

```
> eqn2:=diff(S(t), '$'(t,2)) = -.3*q;
eqn2 :=  $\frac{\partial^2}{\partial t^2} S(t)$  = - .3 q
```

Розв'яжемо це диференціальне рівняння:

```
> dsolve(eqn2,S(t));
S(t) = -  $\frac{3}{20} q t^2 + C_1 t + C_2$ 
```

Знайдемо частковий розв'язок цього рівняння, що задовольняє початкові умови $S(0) = 0$, $S'(0) = 25$:

```
> ic:=D(S)(0)=25,S(0)=0:dsolve({eqn2,ic});
```

$$S(t) = -\frac{3}{20} q t^2 + 25 t$$

Знаходимо закон зміни швидкості потягу:

> S:=-3/20*q*t^2+25*t;

$$S := -\frac{3}{20} q t^2 + 25 t$$

> diff(S,t);

$$-\frac{3}{10} q t + 25$$

Визначаємо час гальмування потягу:

> solve(-3/10*q*t+25=0,t);

$$\frac{250}{3} \frac{1}{q}$$

> eval(250/3*1/q,q=9.807);

$$8.497331842$$

Визначаємо гальмівний шлях потягу:

> subs(t=250/3*1/q,-3/20*q*t^2+25*t);

$$\frac{3125}{3} \frac{1}{q}$$

> eval(3125/3*1/q,q=9.807);

$$106.2166480$$

Відповідь: $t \approx 8,5$ с; $s \approx 106$ м.

Задача 13.7. У кімнату, з температурою повітря 20°C , внесли чашку кави з температурою 80°C . За 5 хв температура кави знизилась до 50°C . Через скільки часу температура кави становитиме 40°C ?

Розв'язання

Позначимо через T температуру кави в момент часу t . Швидкість охолодження кави є швидкість зміни функції, що пов'язує T і t , тобто похідна $\frac{dT}{dt}$.

Величина $\frac{dT}{dt}$ пропорційна різниці температур кави в чашці і в середовищі, що її оточує, тобто $k(T - 20^\circ)$, де k коефіцієнт

пропорційності. Отже,

$$\frac{dT}{dt} = k(T - 20^0).$$

Знаходимо функцію $T(t)$:

```
> eqn:=diff(T(t),t)=k(T(t)-20);
```

$$eqn := \frac{\partial}{\partial t} T(t) = k(T(t) - 20)$$

```
> dsolve(eqn,T(t));
```

$$t - \int^{T(t)} \frac{1}{k(a - 20)} da + C_1 = 0$$

Використавши початкову умову $T(0) = 80$, маємо:

```
> dsolve({eqn,T(0)=80},T(t));
```

$$T(t) = \text{RootOf} \left(t - \int_0^T \frac{1}{k(a - 20)} da + \int_0^{80} \frac{1}{k(a - 20)} da \right)$$

Із останньої рівності, використавши умову $T(5) = 50$, знаходимо k :

```
> solve(50 = 20+60*exp(k*5.0),k);
```

$$- .1386294361$$

Тоді функція $T(t)$ набуде вигляду:

```
> T(t):= 20+60*exp(-.1386294361*t);
```

$$T(t) := 20 + 60 e^{(-.1386294361 t)}$$

І, нарешті, знаходимо через який час температура кави становитиме 40°C :

```
> solve(20+60*exp(-.1386294361*t)=40,t);
```

$$7.924812504$$

Відповідь: 7,92 хв.

Задача 13.8. Перші кілька тижнів після народження дитина збільшує вагу пропорційно її вазі. Вага дитини в момент народження 4 кг і 4 кг 400 г через два тижні після народження. Якою буде вага дитини через п'ять днів після народження?

Розв'язання

Позначимо вагу дитини в момент часу t через $B(t)$. Швидкість збільшення ваги дитини є швидкістю зміни функції, що пов'язує $B(t)$ і t , тобто $\frac{dB}{dt}$.

Швидкість зміни ваги пропорційна вазі дитини, тобто kB , де k коефіцієнт пропорційності.

Маємо диференціальне рівняння:

```
> eqn:=diff(B(t),t)=k*B(t);
```

$$eqn := \frac{\partial}{\partial t} B(t) = k B(t)$$

Його загальний розв'язок має вигляд:

```
> dsolve(eqn,B(t));
```

$$B(t) = C_1 e^{(kt)}$$

Частковий розв'язок, що задовольняє умову $B(0) = 4000$ має вигляд:

```
> dsolve({eqn,B(0)=4000},B(t));
```

$$B(t) = 4000 e^{(kt)}$$

Для знаходження k розв'язуємо рівняння:

```
> solve(4000*exp(14*k)=4400.0,k);
```

$$.006807869986$$

Знаходимо закон збільшення ваги дитини:

```
> B(t):=4000*exp(.6807869986e-2*t);
```

$$B(t) := 4000 e^{(.006807869986 t)}$$

Знаходимо вагу дитини через п'ять днів після народження:

```
> eval(4000*exp(.6807869986e-2*t),t=5);
```

$$4138.501272$$

Відповідь: 4 кг 139 гр.

13.3 Завдання для самостійного виконання

1. Використовуючи команду `dsolve`, розв'язати диференціальне рівняння:

- 1) $y' + \sin(x + y) = \sin(x - y)$;
 - 2) $xy' \sin \frac{y}{x} + x = y \sin \frac{y}{x}$
 - 3) $(1 + x^2) \cdot y' + y = \operatorname{arctg} x$;
 - 4) $\sin 2x + 3x^2y + \left(x^3 + \frac{1}{1+x^2}\right) \cdot y' = 0$;
 - 5) $y(y')^2 - (xy + 1)y' + x = 0$;
 - 6) $y - \sin^2 x + x \sin 2x$;
 - 7) $y'' + 2y' - 3y = 0$;
 - 8) $y'' + y' = 2x - 1$;
 - 9) $y'' - 2y' - 8y = 12 \sin 2x - 36 \cos 2x$;
 - 10) $y'' + 4y' + 3y = x + e^{2x}$;
 - 11) $y'' + 36y = 36 + 66x - 36x^3$.
2. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y' + y = e^{\frac{x}{2}\sqrt{y}}$ і виділити із нього частковий розв'язок, що задовольняє початкову умову $y(0) = 1$. Побудувати графік знайденої інтегральної кривої.
3. Розв'язати систему лінійних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} x'_t = z + y - x; \\ y'_t = z + x - y; \\ z'_t = x + y + z. \end{cases}$$

Серед знайдених розв'язків виділити той, що задовольняє умови: $x(0) = 1$, $y(0) = 0$, $z(0) = 0$.

Аналітична геометрія

14.1 Геометрія на площині

У цьому розділі покажемо можливості **Maple** при розв’язуванні задач аналітичної геометрії.

Для розв’язування задач евклідової двовірної геометрії використовується пакет **geometry**. Перед початком роботи пакет отрібно викликати, тобто виконати команду **with(geometry)**.

Латинські букви **x** і **y** використовуються як глобальні змінні для координат точок, а також як змінні у рівняннях прямих та інших ліній. Геометричні об’єкти визначаються загальноприйнятим чином: точка задається своїми координатами (команда **point**); пряма — двома точками або рівнянням (команда **line**); коло (**circle**) — трьома точками, рівнянням, заданням центра і радіуса і т. д.

Ряд команд перевіряє виконання тієї чи іншої умови для геометричного об’єкта. При можливості визначення відповіді результатом є булева константа (**true** — істинно, **false** — хибно); в деяких випадках видаються координати об’єкта, при яких буде виконуватись умова, що перевіряється.

Наведемо ряд команд, опускаючи параметри, якщо їх кількість і призначення слідує з пояснення.

Команди геометрії

areCollinear	перевірка того, чи лежать три точки на одній прямій
areConcurrent	перевірка того, чи проходять три прямі через одну точку
areParallel	перевірка паралельності двох прямих
arePerpendicular	перевірка перпендикулярності двох прямих
areSimilar	перевірка двох трикутників на подібність
areTangent(line,circle)	перевірка того, чи дотикається пряма до кола
concylic	перевірка існування кола, що проходить через чотири точки
IsEquilateral	перевірка трикутника на рівносторонність
IsRight Triangle	перевірка того, чи трикутник прямокутний
IsOnCircle(pt,circle)	перевірка належності точки pt колу circle
IsOnLine(pt,line)	перевірка належності точки pt прямій line
area	знаходження площі заданого об'єкта
bisector(tri,pt,name)	знаходження довжини відрізка від вершини pt до середини протилежної сторони трикутника tri
center(circle)	визначення центра кола, результат присвоюється змінній center_circle
centroid(tri,name)	знаходження центра ваги трикутника

Для багатьох команд результат дії присвоюється змінній з іменем `name`.

Команди геометрії з іменем `name`

<code>circle(name,[pt,expr])</code>	знаходження рівняння кола з центром у точці <code>pt</code> і радіусом <code>expr</code>
<code>circle(name,[pt1,pt2,pt3])</code>	знаходження рівняння кола, яке проходить через три точки
<code>circumcircle(name,tri)</code>	знаходження рівняння кола, яке описане навколо трикутника <code>tri</code>
<code>convexhull</code>	знаходження рівняння кола, яке проходить через три точки із заданої множини точок так, що всі решта точок містяться всередині кола
<code>coordinates(pt)</code>	команда виводить координати точки <code>pt</code>
<code>detailf(arg)</code>	вивід інформації про аргумент, яким може бути точка, пряма, коло
<code>diametr</code>	обчислення діаметра кола, що проходить через задані точки
<code>distance(pt,line)</code>	обчислення відстані між точкою <code>pt</code> і прямою <code>line</code>
<code>ellipse(name,[])</code>	визначення еліпса одним із наступних способів: за п'ятьма точками; за центром і двома півосями; за допомогою рівняння
<code>find_angle</code>	знаходження кута між двома прямими або двома колами
<code>incircle(tri,name)</code>	знаходження кола, вписаного в трикутник <code>tri</code>
<code>inter(line2,line2)</code>	знаходження точки перетину двох прямих

midpoint(pt1,pt2,name)	обчислення координат середини відрізка, що визначається точками pt1,pt2
parallel(pt,line,name)	знаходження прямої, що проходить через точку pt і паралельна прямій line
perpen_bisector(pt1,pt2,name)	знаходження прямої, що проходить через середину відрізка, що визначається точками pt1,pt2 і перпендикулярної до нього
perpendicuiar(pt,line,name)	знаходження прямої, що проходить через точку pt і перпендикулярна до прямої line
projection(pt,line,name)	знаходження проєкції точки pt на пряму line
radius	обчислення радіуса кола
randpoint(line,name)	задання випадкової точки на прямій line
reflect(pt,line,name)	знаходження точки, симетричної точці pt відносно прямої line
sides	обчислення периметра трикутника
symmetric(pt,line,name)	знаходження точки, симетричної точці pt відносно прямої line
tangent(pt,circle,name1,name2)	знаходження двох прямих, які проходять через точку pt і дотикаються до кола circle; результат присвоюється змінним name1, name2
tangentpc(pt,circle,name)	знаходження дотичної до кола circle, що проходить через точку pt

Проілюструємо використання деяких команд геометрії.

Задача 14.1. Дано точки $A(0,0)$, $B(-4;4)$, $C(-3;3)$, $F(12,8)$.
Перевірити колінеарність точок A, B, C та A, B, F .

Розв'язання

```
> with(geometry):
> point(A, 0, 0), point(B, -4, 4), point(C, -3, 3),
point(F, 12, 8);
```

A, B, C, F

```
> AreCollinear(A, B, C);
true
> AreCollinear(A, B, F);
false
```

Відповідь: точки A, B, C колінеарні, точки A, B, F неколінеарні.

Задача 14.2. Перевірити, чи належить точка $A(-1;0)$ колу $x^2 + y^2 = 1$ та колу $(x - 2)^2 + y^2 = 1$.

Розв'язання

```
> with(geometry):
> circle(c1, x^2 + y^2 = 1, [x, y]), circle(c2,
(x-2)^2 + y^2 = 1, [x, y]), point(A, -1, 0);
```

$c1, c2, A$

```
> IsOnCircle(A, c1);
true
> IsOnCircle(A, c2);
false
```

Відповідь: точка A належить колу $x^2 + y^2 = 1$, точка A не належить колу $(x - 2)^2 + y^2 = 1$.

Задача 14.3. Перевірити, чи належать точки $A(1;2)$ та $B(-3;0)$ прямій $2x - 4y = -6$.

Розв'язання

```
> with(geometry):
```

```
> line(l1, 2*x-4*y=-6, [x,y]), point(A, 1, 2),
point(B,-3,0): IsOnLine(A, l1);
                                     true
```

```
> IsOnLine(B, l1);
                                     true
```

Відповідь: обидві точки належать прямій $2x - 4y = -6$.

Задача 14.4. Коло, що проходить через точки $A(-4, 5)$, $B(-2, 7)$, $C(4, -3)$, задано рівнянням $ax^2 + ay^2 + bx + cy + d = 0$. Знайти коефіцієнти a, b, c, d ; радіус кола; координати центра; побудувати дане коло.

Розв'язання

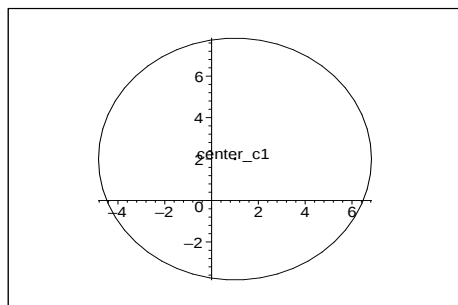
```
> with(geometry):
> circle(c1, [point(A, -4, 5), point(B, -2, 7),
point(C, 4, -3)]);
                                     c1
```

```
> detail(c1);
```

assume that the names of the horizontal and vertical axes are `_x` and `_y`, respectively

```
name of the object : c1\
form of the object : circle2d\
name of the center : center_c1\
coordinates of the center : [1, 2]\
radius of the circle : 34^(1/2)\
equation of the circle :
      _x^2 - 29 + _y^2 - 2 * _x - 4 * _y = 0
```

```
> draw(c1, printtext=true);
```

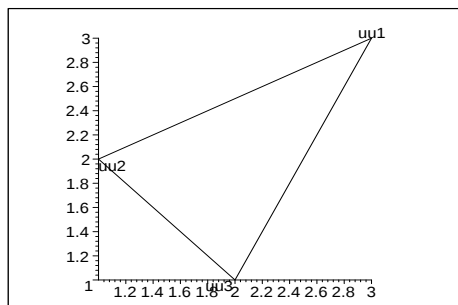


Відповідь: $a = 1$, $b = -2$, $c = -4$, $d = -29$; $(1, 2)$ — координати центра; $R = \sqrt{34}$ — радіус.

Задача 14.5. Знайти координати вершин трикутника, знаючи рівняння його сторін $x - 2y + 3 = 0$, $2x - y - 3 = 0$, $x + y - 3 = 0$. Виконати малюнок.

Розв'язання

```
> with(geometry):
> line(l1,x-2*y+3=0,[x,y]), line(l2,2*x-y-3=0,
[x,y]), line(l3,x+y-3=0,[x,y]);
      l1, l2, l3
> triangle(T1,[l1,l2,l3]):
map(coordinates,DefinedAs(T1));
      [[3, 3], [1, 2], [2, 1]]
> draw(T1,printtext=true);
```



Відповідь: $(3; 3)$, $(1; 2)$, $(2; 1)$.

Розв'яжемо декілька традиційних задач аналітичної геометрії.

Задача 14.6. Знайти площу трикутника ABC , якщо відомі координати його вершин $A(-2; 0)$, $B(2; 4)$, $C(6; 30)$.

Розв'язання

```
> with(geometry):  
> triangle(ABC,[point(A,-2,0),point(B,2,4),  
point(C,6,30)]):  
> area(ABC);
```

44

Відповідь: 44 кв. од.

Задача 14.7. Знайти площу круга, центр якого знаходиться в точці $A(-3; 2)$, а радіус рівний 5.

Розв'язання

```
> with(geometry):  
> circle(c,[point(A,-3,2),5]):  
> area(c);
```

25π

Відповідь: 25π кв. од.

Задача 14.8. Знайти площу еліпса, заданого рівнянням $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Розв'язання

```
> with(geometry):  
> ellipse(e,x^2/16+y^2/9=1,[x,y]);  
  
> area(e);
```

12π

Відповідь: 12π кв. од.

Задача 14.9. Дано трикутник із вершинами $A(1; -1)$, $B(4, 3)$, $C(5, 1)$. Знайти: рівняння висоти, проведеної з вершини A , точку перетину висоти із стороною BC , довжину висоти AH .

Розв'язання

```
> with(geometry):
> triangle(ABC, [point(A,1,-1),point(B,4,3),
point(C,5,1)]):
> altitude(hA1,A,ABC);
                                hA1

> form(hA1);
                                line2d

> detail(hA1);

assume that the names of the horizontal and vertical
axes are _x and _y, respectively

    name of the object : hA1\
    form of the object : line2d\
    equation of the line : 3 - _x + 2 * _y = 0
> altitude(hA2,A,ABC,H);
                                hA2

> form(hA2);
                                segment2d

> detail(hA2);

    name of the object : hA2\
    form of the object : segment2d\
    the two ends of the segment : [[1, -1], [5, 1]]
> DefinedAs(hA2);
                                [A, H]

> point(A,1,-1), point(H1,5,1):
> distance(A,H1);
                                 $\sqrt{20}$ 
```

Відповідь: $AH : -x + 2y + 3$; $H(5; 1)$; $AH = 2\sqrt{5}$.

Задача 14.10. Дано трикутник із вершинами $A(2;3)$, $B(5;7)$, $C(6;5)$. Знайти: рівняння медіани трикутника, проведеної з вершини A та координати точки перетину медіани зі стороною BC . Побудувати малюнок.

Розв'язання

```
> with(geometry):
> triangle(T1, [point(A,2,3), point(B,5,7),
point(C,6,5)]);
```

$T1$

```
> bisector(bA,A,T1);
```

bA

```
> line(l1,[B,C]);
```

$l1$

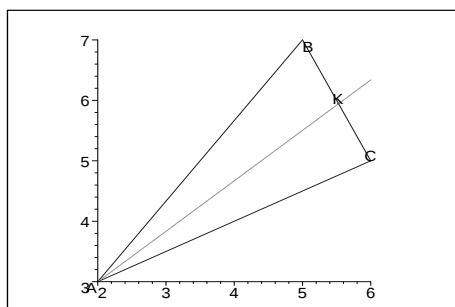
```
> intersection(K,bA,l1);
```

K

```
> coordinates(K);
```

$$\left[10 \frac{\sqrt{5}+3}{5+2\sqrt{5}}, \frac{14\sqrt{5}+25}{5+2\sqrt{5}}\right]$$

```
> draw({T1(color=blue),bA(color=green),
K(color=brown)}, printtext=true);
```



Відповідь: $-10x + (20 + 6\sqrt{5})y - 40 - 10\sqrt{5} = 0$;
 $K\left(10 \frac{\sqrt{5}+3}{5+2\sqrt{5}}; \frac{14\sqrt{5}+25}{5+2\sqrt{5}}\right)$.

Задача 14.11. Чотирикутник $ABCD$ задано координатами його вершин: $A(2; -10)$, $B(5; 0)$, $C(4; -3)$, $D(-2; 6)$. Знайти координати його центра мас.

Розв'язання

```
> with(geometry):
> ps:=[point(A,2,-10), point(B,5,0),
point(C,4,-3), point(D,-2,6)];
                                 $ps := [A, B, C, D]$ 
> centroid(G,ps);
                                 $G$ 
> form(G);
                                 $point2d$ 
> coordinates(G);
                                 $\left[\frac{9}{4}, \frac{-7}{4}\right]$ 
> form(G);
                                 $point2d$ 
> detail(G);
                                 $name\ of\ the\ object : G \backslash$ 
                                 $form\ of\ the\ object : point2d \backslash$ 
                                 $coordinates\ of\ the\ point : [9/4, -7/4]$ 
```

Відповідь: $\left(\frac{9}{4}; -\frac{7}{4}\right)$.

Задача 14.12. Дано координати вершин трикутника ABC : $A(-2; 5)$, $B(4; 2)$, $C(-4; 2)$. Знайти координати центра кола описаного навколо цього трикутника, його радіус, скласти рівняння кола, виконати малюнок.

Розв'язання

```
> with(geometry):
> triangle(T,[point(A,-2,5),point(B,4,2),
point(C,-4,2)]):
> circumcircle(Elc, T, 'centername' = 00);
```

Elc

```
> detail(Elc);
```

assume that the names of the horizontal and vertical axes are `_x` and `_y`, respectively

name of the object: Elc

form of the object: circle2d

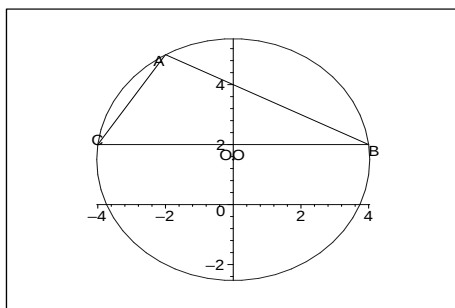
name of the center: OO

coordinates of the center: [0, 3/2]

*radius of the circle: $\frac{1}{4} * 65^{(1/2)} * 4^{(1/2)}$ *

*equation of the circle: $_x^2 - 14 + _y^2 - 3 *_y = 0$*

```
> draw({Elc(color=blue),T},printtext=true);
```



Відповідь: $(0; \frac{3}{2})$; $R = \frac{1}{2}\sqrt{65}$; $x^2 + y^2 - 3y - 14 = 0$.

Задача 14.13. Знайти центр, координати фокусів, довжини осей еліпса $9x^2 + 5y^2 = 45$. Побудувати малюнок.

Розв'язання

```
> with(geometry):
```

```
> _EnvHorizontalName:='x':_EnvVerticalName:='y':
```

```
> ellipse(e1,9*x^2+5*y^2=45):
```

```
> center(e1),coordinates(center(e1));
```

center_e1, [0, 0]

```
> foci(e1), map(coordinates,foci(e1));
```

[foci_1_e1, foci_2_e1], [[0, -2], [0, 2]]

```
> MajorAxis(e1), MinorAxis(e1);
```

$6, 2\sqrt{5}$

```
> detail(e1);
```

name of the object: e1\

form of the object: ellipse2d\

center: [0, 0]\

foci: [[0, -2], [0, 2]]\

length of the major axis: 6\

length of the minor axis: $2 * 5^{1/2}$ \

equation of the ellipse: $9 * x^2 + 5 * y^2 - 45 = 0$

Відповідь: (0;0) — координати центра; (0; -2), (0; 2) — координати фокусів; 6 — довжина великої осі, $2\sqrt{5}$ — довжина малої осі.

Задача 14.14. Знайти центр, фокус, асимптоти гіперболи, заданої рівнянням $9y^2 - 4x^2 = 36$. Побудувати малюнок.

Розв'язання

```
> with(geometry):
```

```
> hyperbola(h1, 9*y^2-4*x^2=36, [x,y]);
```

$h1$

```
> center(h1), coordinates(center(h1));
```

$center_h1, [0, 0]$

```
> foci(h1), map(coordinates, foci(h1));
```

$[foci_1_h1, foci_2_h1], [[0, -\sqrt{13}], [0, \sqrt{13}]]$

```
> vertices(h1), map(coordinates, vertices(h1));
```

$[vertex_1_h1, vertex_2_h1], [[0, -2], [0, 2]]$

```
> asymptotes(h1), map(Equation, asymptotes(h1));
```

$[asymptote_1_h1, asymptote_2_h1], [y + \frac{2}{3}x = 0, y - \frac{2}{3}x = 0]$

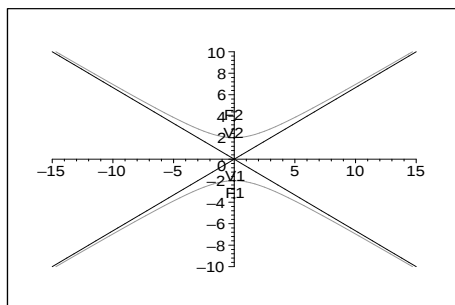
```
> line(l1, y+2/3*x = 0, [x,y]);
```

$l1$

```

> line(l2, y-2/3*x = 0,[x,y]);
      l2
> point(F1,0, -sqrt(13));
      F1
> point(F2,0, sqrt(13));
      F2
> point(V1,0, -2);
      V1
> point(V2,0, 2);
      V2
> draw({l1,l2,F1(color=blue),F2(color=blue),
h1(color=green),V1(color=black),
V2(color=black)},view=[-15..15,-10..10],
printtext=true);

```



Відповідь: $(0; 0)$ — координати центра; $(0; -\sqrt{13})$, $(0; \sqrt{13})$ — координати фокусів; $\pm \frac{2}{3}x$ — рівняння асимптот.

Задача 14.15. *Скласти рівняння гіперболи, для якої пряма $x = -2$ є директрисою, точка $F(1; 0)$ — фокусом, число $\varepsilon = \frac{3}{2}$ — ексцентриситетом. Побудувати малюнок.*

Розв'язання

```

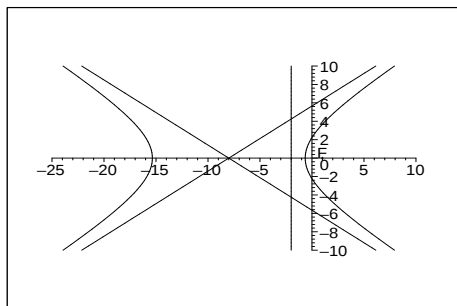
> with(geometry):
> line(l1,x=-2,[x,y]);

```

```

                                l1
> point(F,1,0);
                                F
> e := 3/2;
                                e := 3/2
> hyperbola(h2, ['directrix'=l1, 'focus'=
F, 'eccentricity'=e], [x,y]);
                                h2
> eq := Equation(h2);
                                eq := -1/2 x^2 - 8 x - 5 + y^2 = 0
> asymptotes(h2), map(Equation,asymptotes(h2));
[asymptote_1_h2, asymptote_2_h2],
[1/6 sqrt(3) sqrt(6) x + y + 4/3 sqrt(3) sqrt(6) = 0, -1/6 sqrt(3) sqrt(6) x + y - 4/3 sqrt(3) sqrt(6) = 0]
> line(l2,1/6*sqrt(3)*sqrt(6)*x+y+4/3*sqrt(3)*
sqrt(6) = 0,[x,y]);
                                l2
> line(l3,-1/6*sqrt(3)*sqrt(6)*x+y-4/3*sqrt(3)*
sqrt(6) = 0,[x,y]);
                                l3
> draw({l1(color=black),l2,l3,F(color=blue),
h2(color=black)},view=[-25..10,-10..10],
printtext=true);

```



Відповідь: $-\frac{1}{2}x^2 - 8x + y^2 - 5 = 0$.

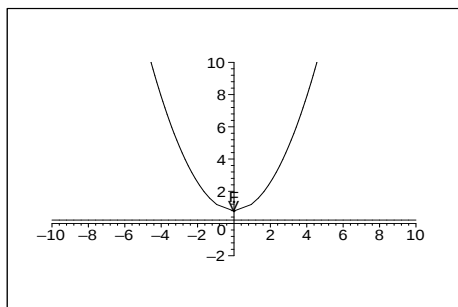
Задача 14.16. *Парабола задана рівнянням $y = 4x^2 - 8x + 7$. Знайти координати її вершини, фокуса, рівняння директриси. Побудувати малюнок.*

Розв'язання

```

> with(geometry):
> parabola(p1,y=4*x^2-8*x+7,[x,y]);
      p1
> vertex(p1);
      vertex_p1
> coordinates(vertex(p1));
      [0, 7/9]
> focus(p1);
      focus_p1
> coordinates(focus(p1));
      [0, 193/144]
> directrix(p1);
      directrix_p1
> Equation(directrix(p1));
      y - 31/144 = 0
> line(l1,y-31/144 = 0,[x,y]);
      l1
> point(V,0,7/9);
      V
> point(F,0,193/144);
      F
> draw({l1(color=black),F(color=blue),
p1(color=black),V(color=black) },
view=[-10..10,-2..10],printtext=true);

```



Відповідь: $(0; \frac{7}{9})$ — вершина; $F(0; \frac{193}{144})$ — фокус; $y = \frac{31}{144}$ — директриса.

Задача 14.17. Знайти рівняння дотичних проведених, до кола $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$ із точки $A(10; 8)$. Побудувати малюнок.

Розв'язання

```
> with(geometry):
```

```
> point(A, 10, 8);
```

A

```
> circle(c, (x+2)^2 + (y-3)^2 = 25, [x, y]);
```

c

```
> TangentLine(obj, A, c, [l1, l2]);
```

$[l1, l2]$

```
> form(l1), Equation(l1);
```

$$\text{line2d, } -\frac{2976}{169} + \frac{1440}{169}x - \frac{1428}{169}y = 0$$

```
> form(l2), Equation(l2);
```

$$\text{line2d, } 96 - 12y = 0$$

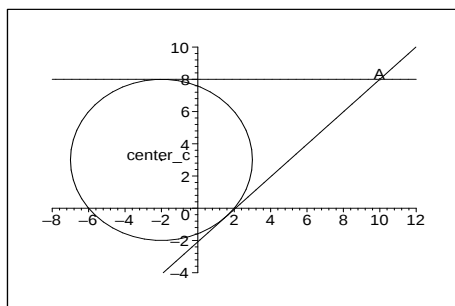
```
> line(l1, -2976/169+1440/169*x-1428/169*y = 0, [x, y]);
```

$l1$

```
> line(l2, 96-12*y = 0, [x, y]);
```

$l2$

```
> draw({l1(color=black),l2(color=black),
A(color=blue), c(color=black)},
view=[-8..12,-4..10],printtext=true);
```



Відповідь: $\frac{1440}{169}x - \frac{1428}{169}y - \frac{2976}{169} = 0$, $y = 8$.

Задача 14.18. Дані координати вершин трикутника ABC : $A(2;3)$, $B(5;7)$, $C(6;5)$. Знайти: 1) довжину сторони AB ; 2) скласти рівняння сторін AB, AC, BC ; 3) внутрішній кут A ; 4) рівняння медіани AM , проведеної з вершини A ; 5) рівняння висоти CH та її довжину; 6) рівняння прямої, яка проходить через точку M і паралельна до сторони AB і точку K перетину її з висотою CH ; 7) рівняння описаного кола, координати його центра, радіус; 8) площу трикутника ABC та круга, що обмежує коло, описане навколо трикутника ABC .

Розв'язання

```
> with(geometry):
> _EnvHorizontalName:=x: _EnvVerticalName:=y:
> point(A,2,3),point(B,5,7),point(C,6,5);
line(l1,[A,B]);line(l2,[A,C]);line(l3,[B,C]);
```

A, B, C

$l1$

$l2$

$l3$

```
> triangle(T1,[A,B,C]);
```

$T1$

```

> distance(A,B);

$$\sqrt{25}$$

> Equation(l1);

$$-1 - 4x + 3y = 0$$

> Equation(l2);

$$-8 - 2x + 4y = 0$$

> Equation(l3);

$$-17 + 2x + y = 0$$

> FindAngle(l1, l2);

$$\arctan\left(\frac{1}{2}\right)$$

> triangle(ABC,[point(A,2,3),point(B,5,7),
point(C,6,5)]):
> median(mA,A,ABC);

$$mA$$

> Equation(mA);

$$-\frac{9}{2} - 3x + \frac{7}{2}y = 0$$

> intersection(M,mA,l3);

$$M$$

> coordinates(M);

$$\left[\frac{11}{2}, 6\right]$$

> PerpendicularLine(lp,C,l1);

$$lp$$

> Equation(lp);

$$-38 + 3x + 4y = 0$$

> intersection(H, l1, lp);

$$H$$

> coordinates(H);

$$\left[\frac{22}{5}, \frac{31}{5}\right]$$


```

```

> distance(C,H);

$$\sqrt{4}$$

> ParallelLine(l4, M, l1);

$$l_4$$

> Equation(l4);

$$4 - 4x + 3y = 0$$

> intersection(K, l4, lp);

$$K$$

> coordinates(K);

$$[\frac{26}{5}, \frac{28}{5}]$$

> circumcircle(Elc, T1, 'centername' = OO);
> detail(Elc);

$$Elc$$

name of the object : Elc\
form of the object : circle2d\
name of the center : OO\
coordinates of the center : [7/2, 5]\
radius of the circle : 1/4 * 25^(1/2) * 4^(1/2)\
equation of the circle : x^2 + 31 + y^2 - 7 * x -
-10 * y = 0
> area(T1);

$$5$$

> area(Elc);

$$\frac{25}{4} \pi$$

> draw({Elc(color=blue),T1(color=black),mA(color=
black), lp(color=black), l4(color=black),
H(color=blue), K(color=blue), M(color=blue)},
printtext=true);

```


Знайдемо рівняння прямої, яка проходить через точку C і перпендикулярна до AB :

```
> PerpendicularLine(l2,C,l1);
```

$l2$

```
> Equation(l2);
```

$$-147 + 12x + 9y = 0$$

Знайдемо координати точки входу дороги в автостраду:

```
> intersection(D,l1,l2);
```

D

```
> coordinates(D);
```

$$\left[\frac{29}{5}, \frac{43}{5} \right]$$

Знайдемо довжину дороги CD :

```
> distance(C,D);
```

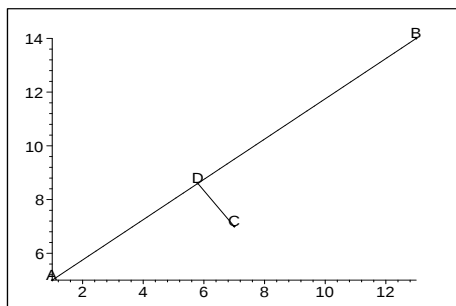
$$\sqrt{4}$$

```
> segment(CD,[C,D]);
```

CD

Зображаємо малюнок:

```
> draw({l1,CD(color=black),A,B,C,D(color=
blue)},printtext=true,axes=NORMAL);
```



Відповідь: $D\left(\frac{29}{5}; \frac{43}{5}\right)$, 2 км.

Задача 14.20. *Необхідно відновити межі квадратної ділянки землі за трьома стовпами, що збереглися: одним у центрі ділянки і по одному — на двох протилежних сторонах. Складіть рівняння прямих, що обмежують межі ділянки, якщо координати стовпів на плані: $M(1;6)$ — у центрі, $A(5;9)$, $B(3;0)$ — на сторонах. Зобразіть ділянку на малюнку.*

Розв'язання

Точки A і B за умовою задачі лежать на паралельних сторонах квадрата. Прямі, яким належать ці сторони, мають рівні кутові коефіцієнти $k_1 = k_2 = k$. Рівняння цих прямих: $y - 9 = k(x - 5)$ та $y = k(x - 3)$.

Відхилення точки M від цих прямих рівні за величиною, але протилежні за знаком:

$$\frac{k - 6 + 9 - 5k}{\sqrt{k^2 + 1}} = -\frac{k - 6 - 3k}{\sqrt{k^2 + 1}}.$$

Знаходимо коефіцієнт k :

```
> with(geometry):
> _EnvHorizontalName:= 'x': _EnvVerticalName:='y':
> eq1:=(k-6+9-5*k)/sqrt(k^2+1)=
> -(k-6-3*k)/sqrt(k^2+1);
```

$$eq1 := \frac{-4k + 3}{\sqrt{k^2 + 1}} = -\frac{-2k - 6}{\sqrt{k^2 + 1}}$$

```
> solve(eq1,k);
```

$$\frac{-1}{2}$$

Запишемо рівняння прямих, на яких лежать точки A і B :
 $l1 := x + 2y - 23 = 0$ і $l2 := x + 2y - 3 = 0$. Кутовий коефіцієнт k_3 діагоналі знайдемо з умови:

$$\frac{k_3 - \left(-\frac{1}{2}\right)}{1 + k_3 \left(-\frac{1}{2}\right)} = \operatorname{tg} 45^\circ = 1.$$

```
> eq2:=(k-(-0.5))/(1+k*(-0.5))=1;
```

$$eq2 := \frac{k + .5}{1 - .5k} = 1$$

```
> solve(eq2,k);
```

```
.3333333333
```

Рівняння діагоналі можна записати так:

$$l3 := y - 6 = \frac{1}{3}(x - 1), \text{ або } l3 := x - 3y + 17 = 0.$$

Знаходимо точки перетину діагоналі квадрата зі знайденими раніше його сторонами:

```
> restart;
```

```
> with(geometry):
```

```
> _EnvHorizontalName:=x:_EnvVerticalName:=y:
```

```
> line(l1,x+2*y-23=0);line(l2,x+2*y-3=0);
```

```
line(l3,x-3*y+17=0);
```

$l1$

$l2$

$l3$

```
> point(A,5,9);
```

A

```
> point(B,3,0);
```

B

```
> point(M,1,6);
```

M

```
> intersection(C,l1,l3);
```

C

```
> coordinates(C);
```

$[7, 8]$

```
> intersection(D,l2,l3);
```

D

```
> coordinates(D);
```

$[-5, 4]$

Знайдемо рівняння сторони квадрата BC :

```
> line(l4,[B,C]);
```

$$l_4$$

```
> Equation(14);
```

$$24 - 8x + 4y = 0$$

Знайдемо рівняння прямої, яка проходить через точку D і паралельна стороні BC :

```
> ParallelLine(15,D,14);
```

$$l_5$$

```
> Equation(15);
```

$$-56 - 8x + 4y = 0$$

Знайдемо координати четвертої вершини квадрата — точки E :

```
> intersection(E,l1,l5);
```

$$E$$

```
> coordinates(E);
```

$$[-1, 12]$$

Задамо відрізки BC , BD , DE , CE :

```
> segment(BC,[B,C]);
```

$$BC$$

```
> segment(BD,[B,D]);
```

$$BD$$

```
> segment(DE,[D,E]);
```

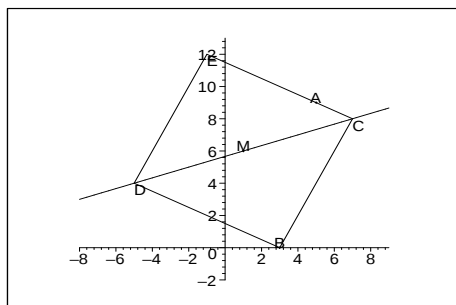
$$DE$$

```
> segment(CE,[C,E]);
```

$$CE$$

Зобразимо дану ділянку на плані місцевості:

```
> draw({l3(color=black),BC(color=black),
BD(color=black),DE(color=black),
CE(color=black),A,M,B}, printtext=true,
axes=NORMAL);
```



Задача 14.21. На прямолінійному відрізку залізниці розташовано станції A і B , відстань між якими дорівнює 200 км. Від заводу N йдуть прямі автомагістралі NA і NB , причому $NB < NA$. Вантаж із заводу N на станцію A можна транспортувати або по магістралі NB , а звідти залізницею (перший шлях), або безпосередньо по автомагістралі NA (другий шлях). При цьому тарифи (вартість перевезень однієї тони вантажу на один кілометр) залізницею і автотранспортом становлять відповідно 10 гривень і 20 гривень, а розвантаження однієї тони коштує 40 гривень. Визначити зону впливу станції B , тобто множину точок, із яких дешевше доставити вантаж у A першим шляхом, ніж другим. Побудувати малюнок.

Розв'язання

Знайдемо множину точок $M(x, y)$, для яких вартість доставки вантажу першим шляхом дорівнює вартості доставки вантажу другим шляхом. Позначимо $MA = r_1$, $MB = r_2$, тоді, якщо

$$> \quad m := 10;$$

$$m := 10$$

$$> \quad n := 20;$$

$$n := 20$$

$$> \quad k := 40;$$

$$k := 40$$

$$> \quad l := 200;$$

$$l := 200,$$

то

$$> \text{ s1:=r2*n+200*m+k};$$

$$s1 := 20 r2 + 2040$$

вартість перевезення вантажу першим шляхом, а

$$> \text{ s2:=r1*n};$$

$$s2 := 20 r1$$

вартість перевезення вантажу другим шляхом.

$$> \text{ s1=s2};$$

$$20 r2 + 2040 = 20 r1$$

Звідси, $r_2 - r_1 = -102$ є величина стала.

Отже, множиною точок, у яких $S_1 = S_2$, є права вітка гіперболи, фокуси якої знаходяться в точках $A(-100; 0)$ та $B(100; 0)$.

$$> \text{ a:=abs(-2040/20/2)};$$

$$a := 51$$

Запишемо координати вершин $C(-51; 0)$ та $D(51; 0)$.

Складемо рівняння гіперболи:

$$> \text{ with(geometry)}:$$

$$> \text{ point(B,100,0)};$$

B

$$> \text{ point(A,-100,0)};$$

A

$$> \text{ point(D,51,0)};$$

D

$$> \text{ point(C,-51,0)};$$

C

$$> \text{ hyperbola(h1,['vertices'=[D,C], 'foci'=[A,B]],$$

$$[x,y]):$$

$$> \text{ Equation(h1)};$$

$$-118384 x^2 + 307916784 + 41616 y^2 = 0$$

$$> \text{ detail(h1)};$$

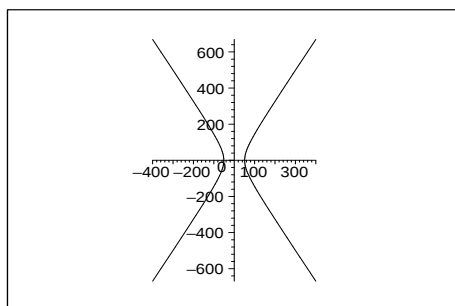
```

name of the object : h1\
form of the object : hyperbola2d\
center : [0, 0]\
foci : [[-100, 0], [100, 0]]\
vertices : [[-51, 0], [51, 0]]\
the asymptotes : [y + 7/51 * 151^(1/2) * x = 0,}
y - 7/51 * 151^(1/2) * x = 0]\
equation of the hyperbola : -118384 * x^2 + 307916784 +
+41616 * y^2 = 0

```

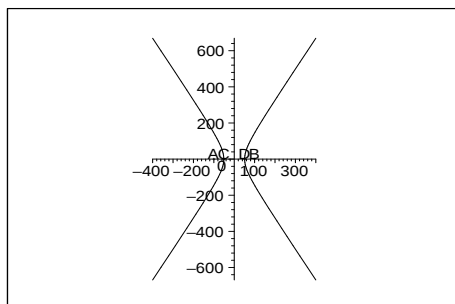
Побудуємо графік гіперболи:

```
> draw(h1,color=black);
```



Покажемо на ньому фокуси та вершини:

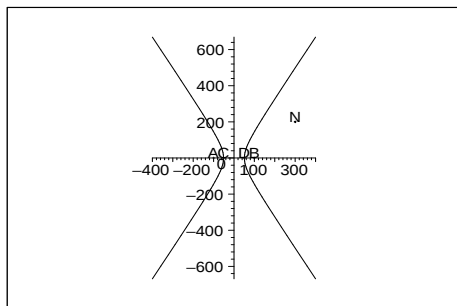
```
> draw({h1(color=black),A,B,C(color=blue),
D(color=blue)},printtext=true);
```



Зафіксуємо точку N , що лежить справа від вітки гіперболи і покажемо її на площині:

```
> point(N,300,200);

                                     N
> draw({h1(color=black),A,B,C(color=blue),
D(color=blue),N(color=black)},printtext=
true,axes=normal);
```

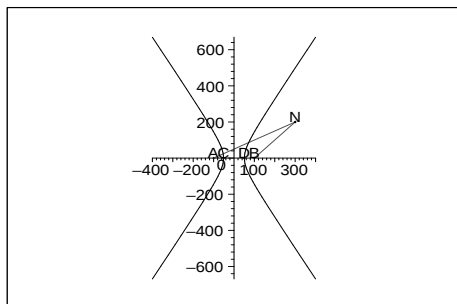


Сполучимо точку N із фокусами A і B :

```
> dsegment(dsg1,N,A);

                                     dsg1
> dsegment(dsg2,N,B);

                                     dsg2
> draw({h1(color=black),A,B,C(color=blue),
D(color=blue),N(color=black),dsg1, dsg2},
printtext=true,axes=normal);
```



Виберемо будь-яку точку, наприклад M , на гіперболі і з'єднаємо її з фокусами:

```
> point(M,300,500);
```

M

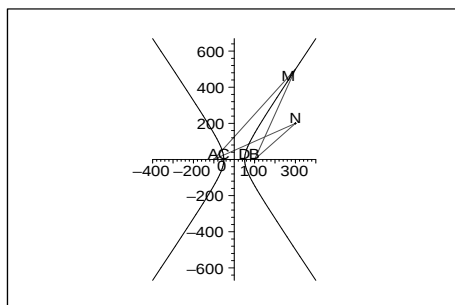
```
> dsegment(dsg3,M,A);
```

$dsg3$

```
> dsegment(dsg4,M,B);
```

$dsg4$

```
> draw({h1(color=black),A,B,C(color=blue),
D(color=blue),N(color=black),dsg1,dsg2,
dsg3(color=brown),dsg4(color=brown)},
printtext=true,axes=normal);
```



І, нарешті, побудуємо асимптоти:

```
> _EnvHorizontalName:= x:_EnvVerticalName:=y:
```

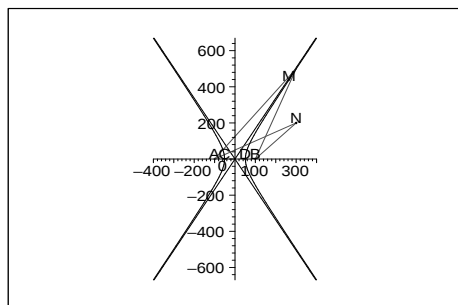
```
> line(l1,7/51*sqrt(151)*x+y=0);
```

$l1$

```
> line(l2,-7/51*sqrt(151)*x+y=0);
```

$l2$

```
> draw({h1(color=black),A,B,C(color=blue),
D(color=blue),N(color=black),dsg1,dsg2,dsg3
(color=brown),dsg4(color=brown),l1(color=
black),l2(color=black)},printtext=true,
axes=normal);
```



Для точок площини, що лежать справа від правої вітки гіперболи $S_1 < S_2$, тобто вигіднішим є перший шлях, а для точок, які лежать зліва — другий.

Отже, права вітка гіперболи обмежує зону впливу станції B , а ліва — станції A .

14.2 Зведення рівняння кривих другого порядку до канонічного виду та побудова їх графіків

Крива другого порядку в довільній декартовій прямокутній системі координат задається рівнянням

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \quad (14.1)$$

в якому A , B і C одночасно не рівні 0.

Рівняння (14.1) однозначно визначається списком коефіцієнтів

$$[A, B, C, D, E, F] \quad (14.2)$$

Алгебраїчно існує рівно дев'ять типів кривих другого порядку, канонічні рівняння яких наводяться у таблиці нижче.

Ці канонічні рівняння можуть бути отримані ортонормованою заміною координат $(x; y)$ у вихідному рівнянні (14.1).

Таблиця різних типів кривих другого порядку			
Назва кривої	Канонічне рівняння	Обмеження на кут повороту системи координат	Додатково при опції «detail» повертаються
Еліпс (якщо $a = b$, то коло)	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a \geq b > 0$	$-\frac{\pi}{2} < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$	Фокусна відстань, ексцентриситет, координати фокусів, рівняння директрис, рівняння великої і малої осей
Гіпербола	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, a \geq b > 0$	$-\frac{\pi}{2} < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$	Фокусна відстань, ексцентриситет, координати фокусів, рівняння директрис, рівняння асимптот, рівняння дійсної та уявної осей
Уявний еліпс	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1, a \geq b > 0$	$-\frac{\pi}{2} < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$	
Дві прями, що перетинаються	$a^2 x^2 - y^2 = 0, a > 0$	$0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$	Рівняння цих прямих, кут між цими прямими

Дві узяті прямі, що перетинаються	$a^2x^2 + y^2 = 0, a > 0$	$0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$	Рівняння цих прямих
Парабола	$y^2 = 2px, p > 0$	$0 < \alpha \leq 2\pi$	Параметр параболі, координати фокуса, рівняння осі, рівняння директриси
Дві паралельні прямі	$y^2 - b^2 = 0, b > 0$	$-\frac{\pi}{2} < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$	Рівняння цих прямих, відстань між ними, рівняння лінії центрів
Дві узяті паралельні прямі	$y^2 + b^2 = 0, b > 0$	$-\frac{\pi}{2} < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$	Рівняння цих прямих, рівняння лінії центрів
Дві прямі, що співпадають	$y^2 = 0$	$-\frac{\pi}{2} < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$	Рівняння цієї прямої

Для зведення рівнянь кривих другого порядку до канонічного виду та побудови їх графіків засобами Maple використовуємо процедуру QuadricCurveAnalysis, детальний опис якої можна знайти на сайті <http://www.exponenta.ru/>.

Роботу QuadricCurveAnalysis проілюструємо на конкретних прикладах.

Приклад 14.1. Дослідити криву другого порядку

$$5x^2 + 4xy + 8y^2 + 8x + 28y + 5 = 0$$

та побудувати її графік.

> QuadricCurveAnalysis([5,2,8,4,14,5],detail);

> Рівняння заданої кривої в координатах (x, y):

$$5x^2 + 4xy + 8y^2 + 8x + 28y + 5 = 0$$

> Власні вектори відповідної квадратичної форми:

$$v_1 = [1, 2], v_2 = [-2, 1]$$

> Відповідні власні числа:

$$\lambda_1 = 9, \lambda_2 = 4$$

> Тип кривої: еліпс;

> Канонічне рівняння:

$$\frac{x'^2}{\left(\frac{2\sqrt{11}}{3}\right)^2} + \frac{y'^2}{\left(\frac{4\sqrt{11}}{9}\right)^2} = 1$$

> Фокусна відстань:

$$c = \frac{2\sqrt{55}}{9}$$

> Ексцентриситет еліпса:

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

> Координати фокусів у старій системі координат (x,y):

$$F_1 \left(-\frac{4\sqrt{5}\sqrt{55}}{45} - \frac{1}{9}, \frac{2\sqrt{5}\sqrt{55}}{45} - \frac{31}{18} \right),$$

$$F_2 \left(\frac{4\sqrt{5}\sqrt{55}}{45} - \frac{1}{9}, -\frac{2\sqrt{5}\sqrt{55}}{45} - \frac{31}{18} \right)$$

> Рівняння відповідних директрис у старій системі координат (x,y):

$$\frac{2\sqrt{5}x}{5} - \frac{\sqrt{5}y}{5} - \frac{3\sqrt{5}}{10} + \frac{2\sqrt{55}}{5} = 0,$$

$$\frac{2\sqrt{5}x}{5} - \frac{\sqrt{5}y}{5} - \frac{3\sqrt{5}}{10} - \frac{2\sqrt{55}}{5} = 0$$

> Рівняння великої і малої осей еліпса:

$$-\frac{\sqrt{5}x}{5} - \frac{2\sqrt{5}y}{5} - \frac{32\sqrt{5}}{45} = 0, \quad \frac{2\sqrt{5}x}{5} - \frac{\sqrt{5}y}{5} - \frac{3\sqrt{5}}{10} = 0$$

> Зв'язок старих і нових координат:

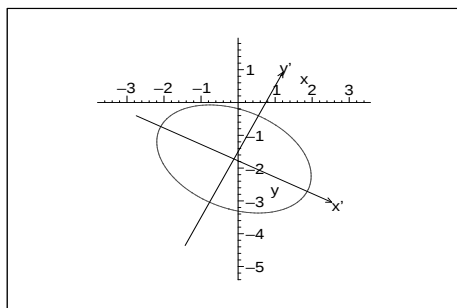
$$x = \frac{2\sqrt{5}x'}{5} + \frac{\sqrt{5}y'}{5} - \frac{1}{9}$$

$$y = -\frac{\sqrt{5}x'}{5} + \frac{2\sqrt{5}y'}{5} - \frac{31}{18}$$

> Кут повороту нової системи координат відносно старої:

$$\alpha = -\arctan\left(\frac{1}{2}\right)$$

> Графік кривої в системах координат (x,y) і (x',y'):



Приклад 14.2. Дослідити криву другого порядку

$$\frac{1}{4}x^2 - 1 - \frac{1}{9}y^2 - x + \frac{2}{3}y = 0$$

та побудувати її графік.

> QuadricCurveAnalysis([1/4,0,-1/9,-1/2,1/3,-1], detail);

> Рівняння заданої кривої в координатах (x, y):

$$\frac{1}{4}x^2 - 1 - \frac{1}{9}y^2 - x + \frac{2}{3}y = 0$$

> Тип кривої: гіпербола;

> Канонічне рівняння:

$$\frac{x'^2}{2^2} - \frac{y'^2}{3^2} = 1$$

> Фокусна відстань:

$$c = \sqrt{13}$$

> Ексцентриситет гіперболи:

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{13}}{2}$$

> Координати фокусів у старій системі координат (x,y):

$$F_1(2 - \sqrt{13}, 3), F_2(2 + \sqrt{13}, 3)$$

> Рівняння директрис у старій системі координат:

$$x = -\frac{4\sqrt{13}}{13} + 2, \quad x = \frac{4\sqrt{13}}{13} + 2$$

> Рівняння асимптот:

$$\frac{3x}{2} + y - 6 = 0, \quad -\frac{3x}{2} + y = 0$$

> Рівняння дійсної і уявної осей гіперболи:

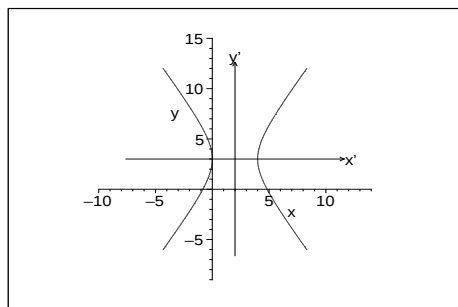
$$y = 3, \quad x = 2$$

> Зв'язок старих і нових координат:

$$x = x' + 2$$

$$y = y' + 3$$

> Графік кривої в системах координат (x,y) і (x',y'):



Приклад 14.3. Дослідити криву другого порядку

$$x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0$$

та побудувати її графік.

> `QuadricCurveAnalysis([1,-1,1,-5,-3,25],detail);`

> Рівняння заданої кривої в координатах (x, y):

$$x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0$$

> Власні вектори відповідної квадратичної форми:

$$v_1 = [1, 1], v_2 = [-1, 1]$$

> Відповідні власні числа:

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2$$

> Тип кривої: парабола;

> Канонічне рівняння:

$$y'^2 = 4\sqrt{2}x'$$

> Параметр параболи:

$$p = 2\sqrt{2}$$

> Координати фокуса у вихідній системі координат (x,y):

$$F(3, 2)$$

> Рівняння осі параболи у вихідній системі координат (x,y):

$$\frac{\sqrt{2}x}{2} - \frac{\sqrt{2}y}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

> Рівняння директриси параболи у вихідній системі координат (x, y) :

$$\frac{\sqrt{2}x}{2} + \frac{\sqrt{2}y}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

> Зв'язок старих і нових координат:

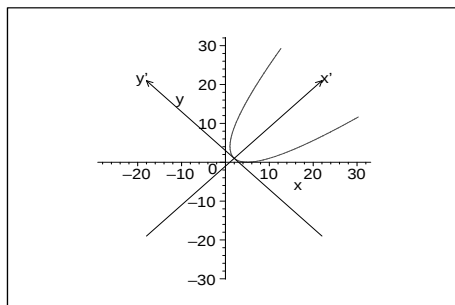
$$x = \frac{\sqrt{2}x'}{2} - \frac{\sqrt{2}y'}{2} + 2$$

$$y = \frac{\sqrt{2}x'}{2} + \frac{\sqrt{2}y'}{2} + 1$$

> Кут повороту нової системи координат відносно старої в радіанах:

$$\alpha = \frac{\pi}{4}$$

> Графік заданої кривої:



Приклад 14.4. Дослідити криву другого порядку

$$25x^2 + 10xy + y^2 - 1 = 0$$

та побудувати її графік.

> `QuadricCurveAnalysis([25,5,1,0,0,-1],detail);`

> Рівняння заданої кривої в координатах (x, y) :

$$25x^2 + 10xy + y^2 - 1 = 0$$

> Власні вектори відповідної квадратичної форми:

$$v_1 = [-5, -1], v_2 = [1, -5]$$

- > Відповідні власні числа:

$$\lambda_1 = 26, \lambda_2 = 0$$

- > Тип кривої: дві паралельні прямі;

- > Канонічне рівняння:

$$y'^2 - \left(\frac{\sqrt{26}}{26} \right)^2 = 0$$

- > Рівняння цих прямих у координатах (x, y) :

$$5x + y + 1 = 0$$

$$5x + y - 1 = 0$$

- > Відстань між цими прямими:

$$d = \frac{\sqrt{26}}{13}$$

- > Рівняння лінії центрів:

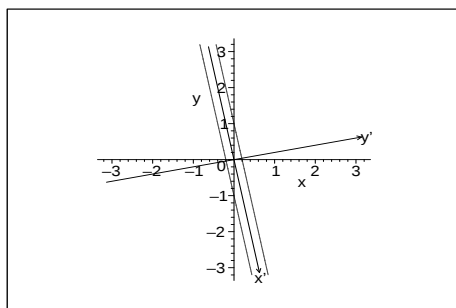
$$25x + 5y = 0$$

- > Зв'язок старих і нових координат:

$$x = \frac{\sqrt{26} x'}{26} + \frac{5\sqrt{26} y'}{26}$$

$$y = -\frac{5\sqrt{26} x'}{26} + \frac{\sqrt{26} y'}{26}$$

- > Кут повороту нової системи координат відносно старої:



$$\alpha = -\arctan(5).$$

Приклад 14.5. Дослідити криву другого порядку

$$x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 2y + 1 = 0$$

та побудувати її графік.

> QuadricCurveAnalysis([1,1,1,1,1,1],detail);

> Рівняння заданої криві в координатах (x, y):

$$x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 2y + 1 = 0$$

> Власні вектори відповідної квадратичної форми:

$$v_1 = [1, -1], v_2 = [1, 1]$$

> Відповідні власні числа:

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2$$

> Тип кривої: дві прямі, що збігаються;

> Канонічне рівняння:

$$y'^2 = 0$$

> Рівняння цієї прямої в координатах (x,y):

$$x + y + 1 = 0$$

> Зв'язок старих і нових координат:

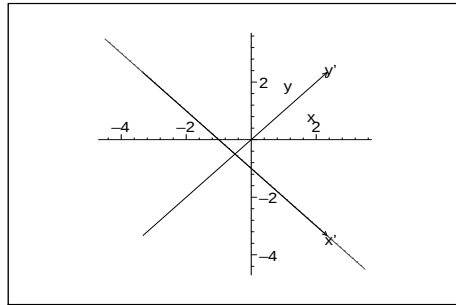
$$x = \frac{\sqrt{2}x'}{2} + \frac{\sqrt{2}y'}{2} - \frac{1}{2}$$

$$y = -\frac{\sqrt{2}x'}{2} + \frac{\sqrt{2}y'}{2} - \frac{1}{2}$$

> Кут повороту нової системи координат відносно старої:

$$\alpha = -\frac{\pi}{4}$$

> Графік кривої в системах координат (x,y) і (x',y'):



Приклад 14.6. Дослідити криву другого порядку

$$8x^2 - 18xy + 9y^2 + 2x - 1 = 0$$

та побудувати її графік.

> `QuadricCurveAnalysis([8,-9,9,1,0,-1],detail);`

> Рівняння заданої кривої в координатах (x, y):

$$8x^2 - 18xy + 9y^2 + 2x - 1 = 0$$

> Власні вектори відповідної квадратичної форми:

$$v_1 = \left[-\frac{1}{18} + \frac{5\sqrt{13}}{18}, -1 \right], v_2 = \left[\frac{1}{18} + \frac{5\sqrt{13}}{18}, 1 \right]$$

> Відповідні власні числа:

$$\lambda_1 = \frac{17}{2} + \frac{5\sqrt{13}}{2}, \lambda_2 = \frac{17}{2} - \frac{5\sqrt{13}}{2}$$

> Тип кривої: вироджений випадок (дві прямі, що перетинаються);

> Рівняння цих прямих у координатах (x,y):

$$-\frac{4x}{3} + y + \frac{1}{3} = 0$$

$$-\frac{2x}{3} + y - \frac{1}{3} = 0$$

> Кут між цими прямими в радіанах:

$$\phi = \arccos\left(\frac{17\sqrt{13}}{65}\right)$$

> Канонічне рівняння:

$$\left(\frac{6}{17+5\sqrt{13}}\right)^2 x'^2 - y'^2 = 0$$

> Зв'язок старих і нових координат:

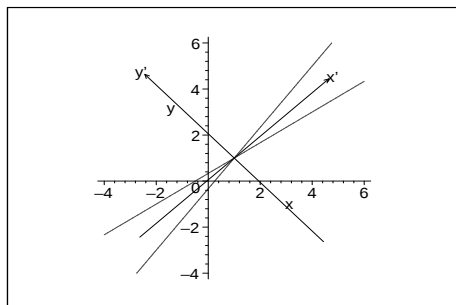
$$x = \frac{(1+5\sqrt{13})x'}{\sqrt{650+10\sqrt{13}}} - \frac{(-1+5\sqrt{13})y'}{\sqrt{650-10\sqrt{13}}} + 1$$

$$y = \frac{18x'}{\sqrt{650+10\sqrt{13}}} + \frac{18y'}{\sqrt{650-10\sqrt{13}}} + 1$$

> Кут повороту нової системи координат відносно старої:

$$\alpha = \arctan\left(-\frac{1}{18} + \frac{5\sqrt{13}}{18}\right)$$

> Графік кривої в системах координат (x, y) і (x', y') :



14.3 Геометрія в просторі

Команди пакета трьохмірної геометрії подібні до пакетів команд двомірної геометрії.

Для визначення точки, прямої, площини, сфери застосовуються функції `point3d`, `line3d`, `plane3d`, `sphere`. У пакеті `geom3d` ідентифікатори `x`, `y`, `z` і `t` використовуються глобально для визначення координат точок, а також у рівняннях прямих, площин, сфер та інших об'єктів.

Команди перевірки геометричних умов

<code>AreCollinear</code>	перевірка належності трьох точок одній прямій
<code>AreConcurrent</code>	перевірка умови проходження трьох прямих через одну точку
<code>AreParallel</code>	перевірка паралельності двох прямих
<code>ArePerpendicular</code>	перевірка перпендикулярності двох прямих
<code>AreSimilar</code>	перевірка двох трикутників на подібність
<code>AreTangent</code>	перевірка умови дотику прямої до сфери
<code>complanar</code>	перевірка належності чотирьох точок одній площині
<code>onPlane(pt3d,plane)</code>	перевірка належності точки <code>pt3d</code> площині <code>plane</code>
<code>onSphere(pt3d,sphere)</code>	перевірка належності точки <code>pt3d</code> сфері <code>sphere</code>

Команди стереометрії з іменем `name`

angle	обчислення меншого кута між двома прямими
area	обчислення площі трикутника
centr	обчислення центра сфери
coordinates	видача координат точки
distance	обчислення відстані між двома точками
inter	обчислення точки перетину двох прямих
midpoint	знаходження прямої, що проходить через дві точки
parallel(pt3d,plane,name)	знаходження площини, що проходить через точку <code>pt3d</code> і паралельна площині <code>plane</code>
perpendikuiar(pt3d,plane,name)	знаходження площини, що проходить через точку <code>pt3d</code> і перпендикулярна площині <code>plane</code>
projection	знаходження проекції точки або прямої на площину
radius	обчислення радіуса сфери
reflect(pt3d,plane,name)	знаходження точки, симетричної точці <code>pt3d</code> відносно площини <code>plane</code>
sphere(name,[pt3d,expr])	визначення сфери з центром у точці <code>pt3d</code> і радіусом <code>expr</code>
symmetric(pt3d,plane,name)	знаходження точки, симетричної точці <code>pt3d</code> відносно площини <code>plane</code>
tangent(pt3d,sphere,name)	знаходження площини дотичної, до сфери <code>sphere</code> , проведеної через точку <code>pt3d</code>
tetrahedron	задання тетраедра за чотирма його вершинами
triangle3d	задання трикутника за трьома його вершинами
volume	обчислення об'єму

Проілюструємо результати виконання деяких команд пакета `geom3d`.

Приклад 14.7. *Перевіримо колінеарність точок: $A(0; 5; 0)$, $B(0; 14; 0)$, $C(0; -40; 0)$.*

Розв'язання

```
> with(geom3d):
> point(A,0,5,0), point(B,0,14,0),
point(C,0,-40,0);
```

A, B, C

```
> AreCollinear(A,B,C);
```

$true$

Отже, вказані точки лежать на одній прямій.

Приклад 14.8. *Дано точки $A(0; 0; 0)$, $B(0; 0; 1)$, $C(0; 1; 0)$, $D(1; 0; 0)$. Переконайтеся, що прямі AB , AC , AD перетинаються в одній точці.*

Розв'язання

```
> point(A,[0,0,0]),point(B,[0,0,1]),
point(C,[0,1,0]),point(D,[1,0,0]);
```

A, B, C, D

```
> line(AB,[A,B]); line(AC,[A,C]); line(AD,[A,D]);
```

AB

AC

AD

```
> AreConcurrent(AB, AC, AD);
```

$true$

Отже, прямі AB , AC , AD перетинаються в одній точці.

Приклад 14.9. *Чи паралельні площини $-4x + 2y + 5z - 8 = 0$, $x + 4y - 8z + 7 = 0$?*

Розв'язання

```
> with(geom3d):
```

Warning, the name polar has been redefined

```

> plane(pp1, -4*x+2*y+5*z-8, [x,y,z]);
      pp1
> plane(pp2, x+4*y-8*z+7, [x,y,z]);
      pp2
> AreParallel(pp1, pp2);
      false

```

Площини $-4x + 2y + 5z - 8 = 0$, $x + 4y - 8z + 7$ не паралельні.

Приклад 14.10. Трикутник задано координатами його вершин: $A(0; 0; 0)$, $B(2; 0; 0)$, $C(1; 3; 0)$. Знайти площу цього трикутника.

```

Розв'язання
> triangle(ABC, [point(A,0,0,0), point(B,2,0,0),
point(C,1,3,0)]);
      ABC
> area(ABC);
      3

```

Відповідь: 3 кв. од.

Приклад 14.11. Дано точки: A з координатами $(2; 8; -1)$ та M з координатами $(u; v; z)$. Записати їхні координати у Maple.

```

Розв'язання
> point(A, 2, 8, -1), point(M, u, v, z);
      A, M
> coordinates(A);
      [2, 8, -1]
> coordinates(M);
      [u, v, z]

```

Приклад 14.12. Задати сферу $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ та знайти її радіус.

Розв'язання

```
> sphere(s,x^2+y^2+z^2=2,[x,y,z]);
```

 s

```
> radius(s);
```

 $\sqrt{2}$ Відповідь: $x^2 + y^2 + z^2 = 2, \sqrt{2}$.

Приклад 14.13. Дано три точки: $A(0;0;0)$, $B(1;1;1)$, $C(1;0;2)$. Задати трикутник ABC .

Розв'язання

```
> point(A,0,0,0),point(B,1,1,1),point(C,1,0,2);
```

 A, B, C

```
> triangle(T1,[A,B,C]);
```

 $T1$

Приклад 14.14. Знайти відстань від точки $A(6;6;-1)$ до прямої $x = 2 + t$, $y = 1 + 2t$, $z = -3 - t$.

Розв'язання

```
> point(A,6,6,-1), line(1,[2+t,1+2*t,-3-t],t);
```

 A, l

```
> distance(A,l);
```

 $\frac{1}{2} \sqrt{14} \sqrt{6}$ Відповідь: $\sqrt{21}$.

Приклад 14.15. Дано площину $x + 2y + z = 6$ і пряму, що проходить через точки $A(1;-1;3)$, $B(2;-1;4)$. Знайти проекцію цієї прямої на площину. Деталізувати одержану інформацію.

Розв'язання

```
> line(1,[point(o,1,-1,3),[2,-1,4]]);
```

```
> plane(p,x+2*y+z=6,[x,y,z]);
```

 l p

```
> projection(l1,l,p);
```

l1

```
> detail(l1);
```

Warning, assume that the parameter in the parametric equations is `_t`

Warning, assuming that the names of the axes are `_x`, `_y`, and `_z`

name of the object: l1

form of the object: line3d

equation of the line:

$$\begin{aligned} [_x &= 5/3 + 4/3 * _t, _y = 1/3 - 7/3 * _t, \\ _z &= 11/3 + 10/3 * _t] \end{aligned}$$

14.4 Розв'язування задач

Наведемо приклади застосування пакета `geom3d` до розв'язування задач.

Задача 14.22. *Знайти площу поверхні правильного двадцятигранника, центр якого знаходиться в точці $O(1; 4; 8)$, а радіус описаної сфери дорівнює 3. Побудувати даний двадцятигранник.*

Розв'язання

```
> with(geom3d):
```

Warning, the name `polar` has been redefined

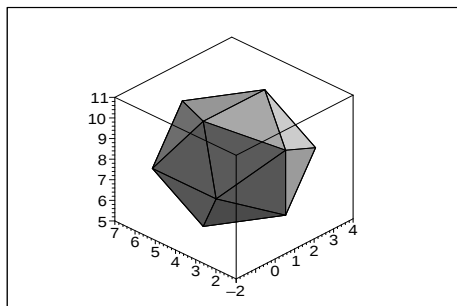
```
> icosahedron(ico,point(o,1,4,8),3);
```

ico

```
> area(ico);
```

$$36 \frac{\sqrt{3} \sqrt{5}}{\frac{1}{2} \sqrt{5} + \frac{1}{2}}$$

```
> draw(ico,style=patch,lightmodel=light4,
orientation=[-136,56]);
```



Відповідь: $18\sqrt{15}(\sqrt{15} - 1)$ кв. од.

Задача 14.23. Трикутник ABC задано координатами його вершин $A(0; 0; 1)$, $B(2; 3; 5)$, $C(6; 2; 3)$. Знайти площу трикутника. Побудувати малюнок.

Розв'язання

```
> with(geom3d):
```

Warning, the name polar has been redefined

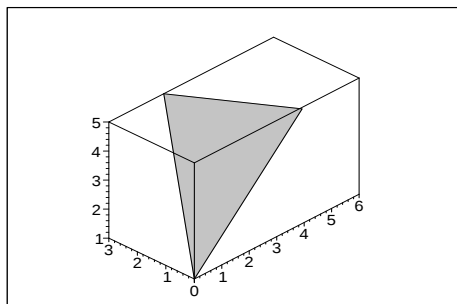
```
> triangle(T1, [point(A,0,0,1), point(B,2,3,5),
point(C,6,2,3)]);
```

$T1$

```
> area(T1);
```

$5\sqrt{6}$

```
> draw(T1,style=patch,lightmodel=light4,
orientation=[-136,56]);
```



Відповідь: $5\sqrt{6}$ кв. од.

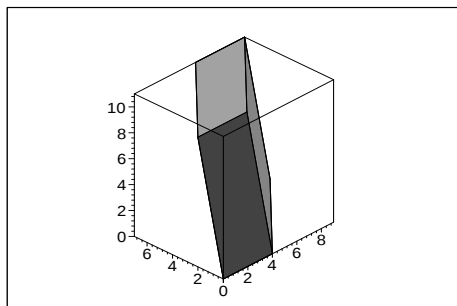
Задача 14.24. Дано чотири точки $A(0;0;0)$, $B(4;0;0)$, $C(5;5;1)$, $D(0;2;10)$. Точка A з'єднана з точками B, C, D . Відрізки AB, AC, AD визначають паралелепіпед. Знайдіть його вершини та зобразіть на малюнку.

Розв'язання

```
> with(geom3d):

Warning, the name polar has been redefined
> point(A,0,0,0), point(B,4,0,0),
point(C,5,5,1), point(D,0,2,10);
      A, B, C, D
> dsegment(d1,[A,B]), dsegment(d2,[A,C]),
dsegment(d3,[A,D]);
      d1, d2, d3
> parallelepiped(pp,[d1,d2,d3]);
      pp
> detail(pp);

name of the object : pp
form of the object : parallelepiped3d
the 6 parallelogram faces of the object :
[[[0, 0, 0], [4, 0, 0], [9, 5, 1], [5, 5, 1]], [[0, 2, 10],
[4, 2, 10], [9, 7, 11], [5, 7, 11]]][[0, 0, 0], [4, 0, 0],
[4, 2, 10],[0, 2, 10]], [[4, 0, 0], [9, 5, 1],[9, 7, 11],
[4, 2, 10]], [[5, 5, 1], [9, 5, 1],[9, 7, 11],[5, 7, 11]],
[[0, 0, 0], [5, 5, 1],[5, 7, 11], [0, 2, 10]]]
coordinates of the 8 vertices : [[0, 0, 0], [4, 0, 0],
[5, 5, 1], [9, 5, 1], [0, 2, 10], [4, 2, 10],[5, 7, 11],
[9, 7, 11]]
> draw(pp,style=patch,lightmodel=light1,
orientation=[-136,56]);
```



Задача 14.25. Центр правильного тетраедра знаходиться в точці $O(2; 4; 6)$, радіус описаної навколо нього сфери дорівнює 3. Знайти його площу поверхні та об'єм. Побудувати тетраедр.

Розв'язання

```
> with(geom3d):
```

Warning, the name polar has been redefined

```
> tetrahedron(t, point(o, 2, 4, 6), 3);
```

t

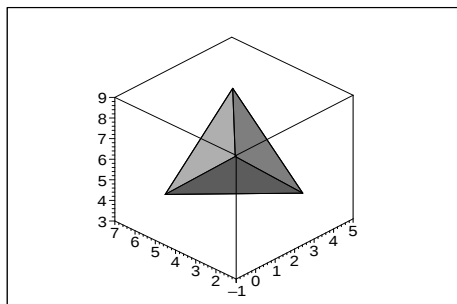
```
> area(t);
```

$$24\sqrt{3}$$

```
> volume(t);
```

$$8\sqrt{3}$$

```
> draw(t, style=patch, lightmodel=light1,
orientation=[-136, 56]);
```



Відповідь: $S = 24\sqrt{3}$, $V = 8\sqrt{3}$.

Задача 14.26. *Центр сфери знаходиться в точці з координатами $(2, 2, 2)$, її радіус рівний 4. Центр тетраедра знаходиться в точці з координатами $(0; 0; -15)$, радіус описаної навколо нього сфери дорівнює 7. Площина проходить через центр сфери радіуса 4 і перпендикулярна до вектора $(0, 0, 1)$. Центр ікосаедрона знаходиться в точці $(16, 16, 16)$, а радіус описаної навколо нього сфери дорівнює 6. Скласти рівняння сфери з центром у точці $(2, 2, 2)$ радіуса 4. Знайти координати вершин тетраедра. Скласти рівняння площини. Виконати малюнок, на якому показати вказані у задачі геометричні фігури.*

Розв'язання

```
> with(geom3d):
> sphere(sphr, [point(osphr, 2, 2, 2), 4]);
      sphr
> tetrahedron(tet, point(otet, 0, 0, -15), 7);
      tet
> plane(pln, [osphr, [0, 0, 1]]);
      pln
> detail(sphr);
```

Warning, assume that the name of the axes are `_x`,
`_y` and `_z`

```
name of the object : sphr
form of the object : sphere3d
name of the center : osphr
coordinates of the center : [2, 2, 2]
radius of the sphere : 4
surface area of the sphere : 64 * Pi
volume of the sphere : 256/3 * Pi
equation of the sphere : _x^2 + _y^2 + _z^2 - 4 -
4 * _x - 4 * _y - 4 * _z = 0
```

```
> detail(tet);
```

```

name of the object : tet
form of the object : tetrahedron3d
name of the center : otet
coordinates of the center : [0, 0, -15]
radius of the center : 7
the 4 equilateral triangular faces of the object :
[[[7/3 * 3^(1/2), 7/3 * 3^(1/2), 7/3 * 3^(1/2) - 15],
[7/3 * 3^(1/2), 7/3 * 3^(1/2), -7/3 * 3^(1/2) - 15],
[-7/3 * 3^(1/2), 7/3 * 3^(1/2), -7/3 * 3^(1/2) - 15]],
[[7/3 * 3^(1/2), 7/3 * 3^(1/2), 7/3 * 3^(1/2) - 15],
[-7/3 * 3^(1/2), -7/3 * 3^(1/2), 7/3 * 3^(1/2) - 15],
[7/3 * 3^(1/2), -7/3 * 3^(1/2), -7/3 * 3^(1/2) - 15]],
[[7/3 * 3^(1/2), 7/3 * 3^(1/2), 7/3 * 3^(1/2) - 15],
[-7/3 * 3^(1/2), 7/3 * 3^(1/2), -7/3 * 3^(1/2) - 15],
[-7/3 * 3^(1/2), -7/3 * 3^(1/2), 7/3 * 3^(1/2) - 15]],

```

```

[[7/3 * 3^(1/2), -7/3 * 3^(1/2), -7/3 * 3^(1/2) - 15],
[-7/3 * 3^(1/2), 7/3 * 3^(1/2), 7/3 * 3^(1/2) - 15],
[-7/3 * 3^(1/2), 7/3 * 3^(1/2), -7/3 * 3^(1/2) - 15]]]

```

```
coordinates of the 4 vertices :
```

```

[[7/3 * 3^(1/2), 7/3 * 3^(1/2), 7/3 * 3^(1/2) - 15],
[7/3 * 3^(1/2), -7/3 * 3^(1/2), -7/3 * 3^(1/2) - 15],
[-7/3 * 3^(1/2), 7/3 * 3^(1/2), -7/3 * 3^(1/2) - 15],
[-7/3 * 3^(1/2), -7/3 * 3^(1/2), 7/3 * 3^(1/2) - 15]]

```

```
> detail(pln);
```

```

Warning, assuming that the names of the axes
are _x, _y and _z

```

```

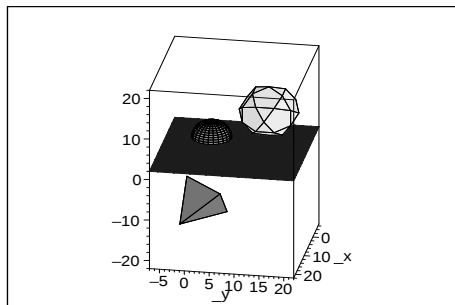
name of the object : pln
form of the object : plane3d
equation of the plane : -2 + _z = 0

```

```
> icosidodecahedron(t, point(o, 16, 16, 16), 6);
```

t

```
> draw({sphr,t,tet,pln(color=blue,style=
PATCHNOGRID)},orientation=[10,65]);
```



Задача 14.27. *Скласти рівняння сфери, вписаної в тетраедр, який визначається рівняннями граней:*

$$x + 1 = 0, \quad y + 2 = 0, \quad z + 1 = 0, \quad x + y + z - 2\sqrt{3} - 2 = 0.$$

Обчислити площу повної поверхні даного тетраедра, його об'єм. Знайти центр описаної навколо тетраедра сфери, її радіус. Написати рівняння сфери і знайти її об'єм. Зобразити тетраедр, вписану та описану сфери в даний прямокутний декартовій системі координат.

Розв'язання

Підключимося до бібліотеки `geom3d`.

```
> with(geom3d):
```

Warning, the name `polar` has been redefined

Задамо площини $x + 1 = 0$, $y + 2 = 0$, $z + 1 = 0$, $x + y + z - 2\sqrt{3} - 2 = 0$:

```
> plane(p1,x=-1,[x,y,z]);plane(p2,y=-2,[x,y,z]);
plane(p3,z=-1,[x,y,z]);
plane(p4,x+y+z-2*sqrt(3)-2=0,[x,y,z]);
```

p1

p2

p3

p4

Задамо тетраедр, що визначають ці площини:

```
> _EnvXName := 'x': _EnvYName := 'y':
   _EnvZName := 'z':
> gtetrahedron(T2, [p1, p2, p3, p4]);
```

T2

Прочитаємо координати його вершин:

```
> detail(T2);
```

name of the object : T2

form of the object : gtetrahedron3d

the 4 vertices :

$[[[-1, -2, -1], [-1, -2, 2 * 3^{(1/2)} + 5],$

$[-1, 4 + 2 * 3^{(1/2)}, -1]], [[-1, -2, -1],$

$[-1, -2, 2 * 3^{(1/2)} + 5], [2 * 3^{(1/2)} + 5, -2, -1]],$

$[[[-1, -2, -1], [-1, 4 + 2 * 3^{(1/2)}, -1],$

$[2 * 3^{(1/2)} + 5, -2, -1]],$

$[[[-1, -2, 2 * 3^{(1/2)} + 5], [-1, 4 + 2 *$

$3^{(1/2)}, -1], [2 * 3^{(1/2)} + 5, -2, -1]]]$

Позначимо вершини тетраедра точками B_1, B_2, B_3, B_4 ,
тоді:

```
> point(B1, -1, -2, -1);
```

B1

```
> point(B2, -1, -2, 2*3^(1/2)+5);
```

B2

```
> point(B3, -1, 4+2*3^(1/2), -1);
```

B3

```
> point(B4, 2*3^(1/2)+5, -2, -1);
```

B4

Центр вписаної в тетраедр сфери буде знаходитися в одній із точок, що рівновіддалена від усіх його граней. Задамо точку $O(a, b, c)$:

```
> point(0, a, b, c);
```

О

Знайдемо відстань від точки $O(a, b, c)$ до кожної з чотирьох площин:

> d1:=distance(0,p1);

$$d1 := |a + 1|$$

> d2:=distance(0,p2);

$$d2 := |2 + b|$$

> d3:=distance(0,p3);

$$d3 := |1 + c|$$

> d4:=distance(0,p4);

$$d4 := \frac{1}{3} |a + b + c - 2\sqrt{3} - 2| \sqrt{3}$$

Для знаходження a, b, c складаємо та розв'язуємо систему:

$$\begin{cases} |a + 1| = |b + 2|; \\ |a + 1| = |c + 1|; \\ |a + 1| = \frac{\sqrt{3}}{3} |a + b + c - 2\sqrt{3} - 2|. \end{cases}$$

> solve({ abs(a+1)= abs(2+b),abs(a+1)=
abs(1+c),abs(a+1)=1/3*abs(a+b+c-2*sqrt(3)-2)*
sqrt(3)},{a,b,c});

$$\{a = 3 + 2\sqrt{3}, b = 2 + 2\sqrt{3}, c = 3 + 2\sqrt{3}\},$$

$$\{a = 1, c = 1, b = 0\},$$

$$\{b = -2 + 2\sqrt{3}, c = -1 + 2\sqrt{3}, a = -1 - 2\sqrt{3}\},$$

$$\{b = -2 + 2\sqrt{3}, a = -1 + 2\sqrt{3}, c = -1 - 2\sqrt{3}\},$$

$$\{a = -4\sqrt{3} - 7, c = -4\sqrt{3} - 7, b = 4 + 4\sqrt{3}\},$$

$$\{c = -1 + 2\sqrt{3}, b = -2\sqrt{3} - 2, a = -1 + 2\sqrt{3}\},$$

$$\{c = 4\sqrt{3} + 5, a = -4\sqrt{3} - 7, b = -4\sqrt{3} - 8\},$$

$$\{b = -4\sqrt{3} - 8, a = 4\sqrt{3} + 5, c = -4\sqrt{3} - 7\}$$

Одержали вісім точок, кожна з яких знаходиться на однаковій відстані від площин: $x + 1 = 0$, $y + 2 = 0$, $z + 1 = 0$, $x + y + z - 2\sqrt{3} - 2 = 0$:

```
> point(A1, 3+2*sqrt(3), 2+2*sqrt(3),
3+2*sqrt(3));
```

$A1$

```
> point(A2, 1, 0, 1 );
```

$A2$

```
> point(A3, -1+2*sqrt(3), -2+2*sqrt(3),
-1-2*sqrt(3));
```

$A3$

```
> point(A4, -1+2*sqrt(3), -2*sqrt(3)-2,
-1+2*sqrt(3));
```

$A4$

```
> point(A5, 5+4*sqrt(3), -8-4*sqrt(3), -7-4*sqrt(3));
```

$A5$

```
> point(A6, -1-2*sqrt(3), -2+2*sqrt(3),
-2+2*sqrt(3));
```

$A6$

```
> point(A7, -7-4*sqrt(3), 4+4*sqrt(3), -7-4*sqrt(3));
```

$A7$

```
> point(A8, -7-4*sqrt(3), -8-4*sqrt(3),
5+4*sqrt(3) );
```

$A8$

Маючи координати вершин тетраедра, легко встановлюємо, що лише точка $A_2(1, 0, 1)$ розміщена всередині тетраедра. Отже, центром вписаної сфери є точка $A_2(1, 0, 1)$. Радіус сфери дорівнює відстані від точки $A_2(1, 0, 1)$ до будь-якої з площин, що містять грані тетраедра. Знайдемо його як відстань від точки $A_2(1, 0, 1)$ до площини $x + 1 = 0$:

```
> distance(A2, p1);
```

2

Записуємо рівняння шуканої вписаної сфери:

$$(x - 1)^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 4.$$

Задамо сферу в пакеті символьних обчислень Maple:

```
> sphere(s, (x-1)^2+y^2+(z-1)^2=4, [x,y,z],
'centername'=A2);
```

s

```
> center(s);
```

A2

Знайдемо площу поверхні тетраедра, як суму площ трикутників $B_1B_2B_3$, $B_1B_2B_4$, $B_1B_3B_4$, $B_2B_3B_4$.

Знаходимо площу кожного з трикутників $B_1B_2B_3$, $B_1B_2B_4$, $B_1B_3B_4$, $B_2B_3B_4$:

```
> triangle(B1B2B3, [point(B1,-1, -2, -1),
point(B2,-1, -2, 2*3^(1/2)+5), point(B3,-1,
+2*3^(1/2), -1)]);
```

 $B1B2B3$

```
> area(B1B2B3);
```

$$\frac{1}{2} (2\sqrt{3} + 6)^2$$

```
> triangle(B1B2B4, [point(B1,-1, -2, -1),
point(B2,-1, -2, 2*3^(1/2)+5),
point(B4,2*3^(1/2)+5, -2, -1)]);
```

 $B1B2B4$

```
> area(B1B2B4);
```

$$\frac{1}{2} (2\sqrt{3} + 6)^2$$

```
> triangle(B1B3B4, [point(B1,-1, -2, -1),
point(B3,-1, 4+2*3^(1/2), -1),
point(B4,2*3^(1/2)+5, -2, -1)]);
```

 $B1B3B4$

```
> area(B1B3B4);
```

$$\frac{1}{2} (2\sqrt{3} + 6)^2$$

```
> triangle(B2B3B4,
[point(B2,-1, -2, 2*3^(1/2)+5),
point(B3,-1,4+2*3^(1/2), -1),
point(B4,2*3^(1/2)+5, -2, -1)]);
```

 $B2B3B4$

```
> area(B2B3B4);
```

$$\frac{1}{2} \sqrt{2(2\sqrt{3}+6)^2(-6-2\sqrt{3})^2 + (2\sqrt{3}+6)^4}$$

```
> S:=1/2*(2*sqrt(3)+6)^2+
1/2*(2*sqrt(3)+6)^2+1/2*(2*sqrt(3)+6)^2+
1/2*sqrt(2*(2*sqrt(3)+6)^2*
(-6-2*sqrt(3))^2+(2*sqrt(3)+6)^4);
```

$$S := \frac{3}{2} (2\sqrt{3} + 6)^2 + \frac{1}{2} \sqrt{2(2\sqrt{3} + 6)^2(-6 - 2\sqrt{3})^2 + (2\sqrt{3} + 6)^4}$$

Знаходимо площу повної поверхні тетраедра:

```
> S:=1/2*(2*sqrt(3.)+6)^2+1/2*(2*sqrt(3.)+
6)^2+1/2*(2*sqrt(3.)+6)^2+1/2
*sqrt(2*(2*sqrt(3.)+6)^2*
(-6-2*sqrt(3.))^2+(2*sqrt(3.)+6)^4);
```

$$S := 211.9230485$$

Знайдемо об'єм тетраедра:

```
> V1:=volume(T2);
```

$$V1 := \frac{5}{3} \sqrt{3} + \frac{1}{3} (2\sqrt{3} + 5) (4 + 2\sqrt{3}) + \frac{1}{3} (2\sqrt{3} + 5)^2 + \frac{13}{3} + \frac{1}{6} (2\sqrt{3} + 5)^2 (4 + 2\sqrt{3})$$

Знайдемо наближене значення об'єму:

```
> V1:=evalf(%);
```

$$V1 := 141.2820324$$

Задамо описану сферу як сферу, яка проходить через точки B_1, B_2, B_3, B_4 , і знайдемо координати її центра, радіус, рівняння та об'єм:

```
> sphere(s1, [B1, B2, B3, B4], ['x', 'y', 'z']);
```

$s1$

```
> coordinates(center(s1)) ;
```

$$\left[-\frac{1}{2} \frac{-1824\sqrt{3} - 3168}{432 + 240\sqrt{3}}, -\frac{1}{2} \frac{-1344\sqrt{3} - 2304}{432 + 240\sqrt{3}}, -\frac{1}{2} \frac{-1824\sqrt{3} - 3168}{432 + 240\sqrt{3}} \right]$$

```
> radius(s1);
```

$$\frac{1}{2} \sqrt{2 \frac{(-1824\sqrt{3} - 3168)^2}{(432 + 240\sqrt{3})^2} + \frac{(-1344\sqrt{3} - 2304)^2}{(432 + 240\sqrt{3})^2} - \frac{4(-13536 - 7776\sqrt{3})}{432 + 240\sqrt{3}}}$$

> Equation(s1);

$$x^2 + y^2 + z^2 + \frac{(-1824\sqrt{3} - 3168)x}{432 + 240\sqrt{3}} + \frac{(-1344\sqrt{3} - 2304)y}{432 + 240\sqrt{3}} + \frac{(-1824\sqrt{3} - 3168)z}{432 + 240\sqrt{3}} + \frac{-13536 - 7776\sqrt{3}}{432 + 240\sqrt{3}} = 0$$

> V2:=volume(s1);

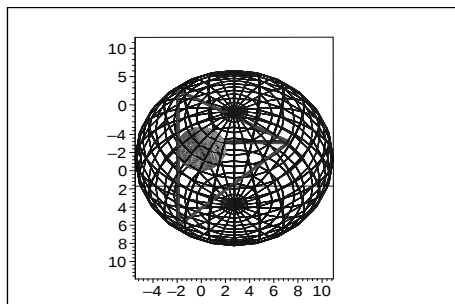
$$V2 := \frac{1}{6} \pi \left(2 \frac{(-1824\sqrt{3} - 3168)^2}{(432 + 240\sqrt{3})^2} + \frac{(-1344\sqrt{3} - 2304)^2}{(432 + 240\sqrt{3})^2} - \frac{4(-13536 - 7776\sqrt{3})}{432 + 240\sqrt{3}} \right)^{(3/2)}$$

> V2:=evalf(%);

$$V2 := 2306.315342$$

Зобразимо одержаний тетраедр, вписану та описану сфери в прямокутній декартовій системі координат:

```
> draw([T2(color=red),s(color=green),
s1(color=blue)],cutout=7.5/8,light
model=light4,orientation=[0,32]);
```



14.5 Завдання для самостійного виконання

1. Знайти відстань між точками $M_1(4; 6; 1)$ та $M_2(2; 1; -1)$, а також координати точки M , що поділяє відрізок M_1M_2 у відношенні $\frac{1}{2}$.
2. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(2; -3)$:
 - а) паралельно осі Ox ;
 - б) паралельно осі Oy ;
 - в) перпендикулярно до прямої $x - 3y - 7$.
3. Знайти кут між прямими $3x - 4y + 2 = 0$ та $\frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{3}$.
4. Знайти відстань між прямими $2x - 3y + 2 = 0$ та $6x - 9y + 21 = 0$.
5. Визначити та побудувати лінію, що задана рівнянням $2x^2 + y^2 - 8x + 6y + 1 = 0$.
6. Визначити точки перетину прямої $3x - 4y - 12 = 0$ і параболу $y^2 = -9x$.
7. Скласти рівняння площини, що проходить через задані точки $M_1(1; 6; 4)$, $M_2(2; 1; -3)$, $M_3(5; -2; 3)$.
8. Скласти рівняння прямої, що проходить через задані точки $M_1(2; 0; -3)$ та $M_2(-3; 2; -1)$.
9. Знайти точку перетину прямої $\frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-4}{2}$ та площини $2x + y + z - 8 = 0$.
10. Визначити вид поверхні, що описується рівнянням $z^2 + 2z - 4x + 1 = 0$ та побудувати її.
11. Визначити координати центра та радіус сфери $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 4 = 0$, побудувати малюнок.

15

Елементи теорії ймовірностей і математичної статистики

15.1 Елементи комбінаторики

Для розв'язування комбінаторних задач Maple містить спеціальну бібліотеку `combinat`.

При виклику пакета виводиться список його функцій:

```
> with(combinat);
```

```
Warning, the protected name Chi has been redefined and  
unprotected
```

```
[Chi, bell, binomial, cartprod, character, choose, composition,  
conjpart, decodepart, encodepart, fibonacci, firstpart, graycode,  
inttovec, lastpart, multinomial, nextpart, numbbcomb, numbbcomp,  
numbbpart, numbbperm, partition, permute, powerset, prevpart,  
randcomb, randpart, randperm, stirling1, stirling2, subsets,  
vectoint]
```

Використання деяких із цих команд розглянемо на конкретних прикладах.

Задамо простір елементарних подій Ω :

```
> Omega:=[a,b,c,d,e];
```

$$\Omega := [a, b, c, d, e]$$

За допомогою команди **choose** побудуємо алгебру елементарних подій U :

```
> U:=combinat[choose](Omega);
```

```
U := [[], [a], [b], [a, b], [c], [a, c], [b, c], [a, b, c], [d], [a, d], [b, d],
[a, b, d], [c, d], [a, c, d], [b, c, d], [a, b, c, d], [e], [a, e], [b, e],
[a, b, e], [c, e], [a, c, e], [b, c, e], [a, b, c, e], [d, e], [a, d, e],
[b, d, e], [a, b, d, e], [c, d, e], [a, c, d, e], [b, c, d, e], [a, b, c, d, e]]
```

Використавши команду **numbcomb**, обчислимо число n елементів у множині U :

```
> n:=combinat[numbcomb](Omega);
```

$$n := 32$$

Усякий встановлений у скінченній множині порядок називається *перестановкою* його елементів.

Число всіх перестановок із n елементів позначають P_n і обчислюють за формулою

$$P_n = n!. \quad (15.1)$$

За роботу з перестановками відповідає команда **permute**.

Випишемо всі можливі перестановки з множини $[a, b, c]$:

```
> P:=combinat[permute]([a,b,c]);
```

```
P := [[a, b, c], [a, c, b], [b, a, c], [b, c, a], [c, a, b], [c, b, a]]
```

Знайдемо кількість всіх можливих перестановок з трьох елементів за допомогою команди **numbperm**:

```
> combinat[numbperm](3);
```

$$6$$

Нехай є скінченна множина, що складається із n елементів. Кожна її впорядкована підмножина, що складається із m елементів, називається *розміщенням* із n елементів по m елементів.

Число розміщень із n елементів по m позначають A_n^m і знаходять за формулою

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}. \quad (15.2)$$

Команда `permute` відповідає і за роботу з розміщеннями.

Складемо розміщення з елементів $[a, b, c, d]$ по 2:

```
> combinat[permute]([a,b,c,d],2);
```

```
[[a, b], [a, c], [a, d], [b, a], [b, c], [b, d], [c, a], [c, b], [c, d], [d, a], [d, b], [d, c]];
```

Обчислимо кількість розміщень із 4 елементів по 2:

```
> combinat[numbperm](4, 2);
```

12

Нехай ϵ скінченна множина, що складається із n елементів. Кожна її підмножина, що складається із m елементів, називається *сполученням* із n елементів по m елементів.

Число сполучень із n елементів по m позначають C_n^m і знаходять за формулою

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}. \quad (15.3)$$

Обчислення числа сполучень (біноміальних коефіцієнтів) здійснюється за допомогою команди `binomial`.

Наприклад:

```
> with(combinat):
```

```
> binomial(6, 2);
```

15

```
> binomial(16, 8);
```

12870

Обчислимо число сполучень із n елементів по 3 і розкладемо одержаний результат в ряд:

```
> with(combinat):
```

```
> binomial(n, 3);
```

$$\text{binomial}(n, 3)$$

> `expand(%)`;

$$\frac{1}{6}n^3 - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n$$

Виразимо число сполучень із n елементів по 3 через факторіали:

> `convert(binomial(n,3),factorial)`;

$$\frac{1}{6} \frac{n!}{(n-3)!}$$

15.2 Елементи теорії ймовірностей

Ймовірністю події A називається відношення числа m рівноможливих елементарних подій, що сприяють появі події A , до числа всі можливих елементарних подій:

$$P(A) = \frac{m}{n}. \quad (15.4)$$

15.2.1 Інтегральна та диференціальна функції розподілу

Законом розподілу дискретної випадкової величини називають відповідність між можливими значеннями випадкової величини та їх ймовірностями; його можна задати за допомогою таблиці, аналітично і графічно.

При табличному законі розподілу дискретної випадкової величини перший рядок таблиці містить можливі значення, а другий — їх ймовірності:

X	x_1	x_2	$\dots$	x_n
p	p_1	p_2	$\dots$	p_n

Причому сума елементів другого рядка таблиці задовольняє умову $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$.

Інтегральною функцією розподілу $F(x)$ або інтегральним законом розподілу випадкової величини X називається ймовірність

$P(X < x)$ події, яка полягає в тому, що випадкова величина X прийняла значення менше ніж x :

$$P(X < x) = F(x).$$

Приклад 15.1. Дано ряд розподілу випадкової величини X у вигляді матриці:

```
> matrix([[-4, -2, 0, 2, 4],
[0.1, 0.2, 0.2, 0.4, 0.1]]);
```

$$\begin{bmatrix} -4 & -2 & 0 & 2 & 4 \\ .1 & .2 & .2 & .4 & .1 \end{bmatrix}$$

Побудувати функцію розподілу випадкової величини X , обчислити ймовірність попадання випадкової величини X в інтервал $[-2; 4]$.

Розв'язання

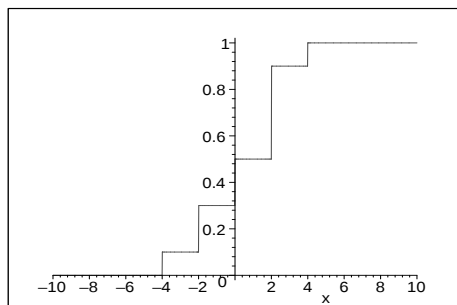
Задамо аналітичний запис функції розподілу випадкової величини:

```
> F:=piecewise(x<-4,0,x>=-4 and x<-2,0.1,x>=-2
and x<0,0.3,x>=0 and x<2,0.5,x>=2 and x<4,0.9,
x>=4,1);
```

$$F := \begin{cases} 0 & x < -4 & (15.5a) \\ .1 & -4 \leq x \text{ and } x < -2 & (15.5b) \\ .3 & -2 \leq x \text{ and } x < 0 & (15.5c) \\ .5 & 0 \leq x \text{ and } x < 2 & (15.5d) \\ .9 & 2 \leq x \text{ and } x < 4 & (15.5e) \\ 1 & 4 \leq x & (15.5f) \end{cases}$$

Побудуємо графік функції розподілу:

```
> plot(F(x),x);
```



Щоб обчислити ймовірність того, що випадкова величина прийме значення з інтервалу $[-2; 4]$, задамо функцію $F(x)$ як процедуру-функцію:

```
> F:=x->piecewise(x<-4,0,x>=-2 and
x<-2,0.1,x>=-2 and x<0,0.3,x>=0
and x<2,0.5,x>=2 and x<4,0.9,x>=4,1);
```

$$F := x \rightarrow \text{piecewise}(x < -4, 0, -2 \leq x \text{ and } x < -2, .1, \\ -2 \leq x \text{ and } x < 0, .3, 0 \leq x \text{ and } x < 2, .5, \\ 2 \leq x \text{ and } x < 4, .9, 4 \leq x, 1)$$

Скористаємося формулою $P(a \leq x < b) = F(b) - F(a)$ і отримаємо шукану ймовірність:

```
> p:=F(4)-F(-2);
p := .7
```

Відповідь: 0,7.

Диференціальною функцією $f(x)$ розподілу, або щільністю ймовірностей називають першу похідну від інтегральної функції:

$$f(x) = F'(x). \quad (15.6)$$

Приклад 15.2. Випадкова величина X задана функцією розподілу:

```
> F:='F':F:=piecewise(x<=0,0,
x>0 and x<=Pi,1/2*(1-cos(x)),x>Pi,1);
```

$$F := \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{1}{2} \cdot (1 - \cos x) & 0 < x \text{ and } x \leq \pi \\ 1 & x > \pi \end{cases} \quad \begin{matrix} (15.7a) \\ (15.7b) \\ (15.7c) \end{matrix}$$

Знайти щільність ймовірності $f(x)$, побудувати графіки $F(x)$ і $f(x)$, обчислити ймовірність попадання випадкової величини в інтервал $(1; 2.5)$.

Розв'язання

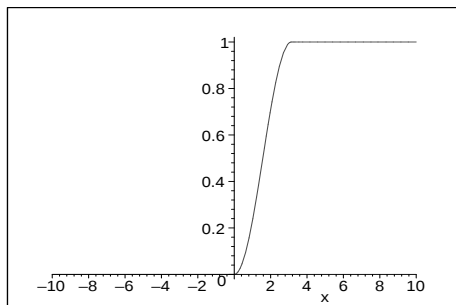
Знайдемо щільність ймовірності випадкової величини ξ :

```
> f:=diff(F, x);
```

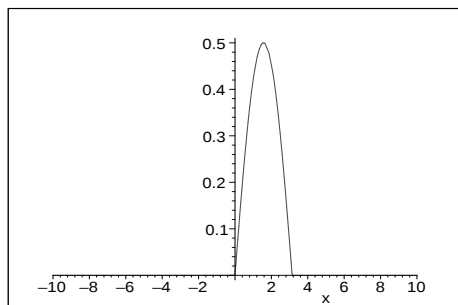
$$f := \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{1}{2} \cdot \sin x & 0 < x \text{ and } x \leq \pi \\ 0 & x > \pi \end{cases} \quad \begin{matrix} (15.8a) \\ (15.8b) \\ (15.8c) \end{matrix}$$

Побудуємо графіки функцій $F(x)$ і $f(x)$:

```
> plot(F,x);
```



```
> plot(f,x);
```



Обчислимо ймовірність попадання випадкової величини X в інтервал $(1; 2.5)$, для цього перетворимо функцію $F(x)$ у функцію-процедуру:

```
> F:=unapply(F,x);
F := x -> piecewise(x ≤ 0, 0, -x < 0 and x - π ≤ 0,
    1/2 - 1/2 cos(x), π < x, 1)
Тоді шукана ймовірність дорівнює:
> F(2.5)-F(1);
.4006 + 1/2 cos(1)
> evalf(%);
.6708
```

Відповідь: 0,6708.

15.3 Числові характеристики випадкових величин

15.3.1 Дискретна випадкова величина

Математичним сподіванням дискретної випадкової величини називається сума добутків усіх її можливих значень на їх імовірності:

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n, \quad (15.9)$$

або

$$M(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i. \quad (15.10)$$

Імовірнісний зміст математичного сподівання: *математичне сподівання наближено дорівнює середньому арифметичному спостережуваних значень випадкової величини:*

$$\bar{X} \approx M(X). \quad (15.11)$$

Дисперсією $D(X)$ випадкової величини X називається математичне сподівання квадрата різниці між випадковою величиною X і її математичним сподіванням:

$$D(X) = M(X - M(X))^2. \quad (15.12)$$

Для обчислення дисперсії зручніше користуватися наступною теоремою.

Теорема 15.1. *Дисперсія дорівнює різниці між математичним сподіванням квадрата випадкової величини X і квадратом її математичного сподівання:*

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2. \quad (15.13)$$

Дисперсія характеризує міру розсіювання випадкової величини X навколо її математичного сподівання $M(X)$.

Середнім квадратичним відхиленням випадкової величини X називається квадратний корінь із дисперсії:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}. \quad (15.14)$$

Задача 15.1. *Число α -частинок, що досягають лічильника в деякому досліді, є випадковою величиною ξ , розподіленою за наступним законом:*

ξ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p	.021	.081	.156	.201	.195	.151	.097	.054	.026	.011	.007

Знайти:

а) математичне сподівання частинок, що досягають лічильника;

б) ймовірність того, що число частинок, що досягли лічильника, не менше 4;

в) дисперсію ξ .

Розв'язання

Задамо матрицю:

```
> R:=matrix([[xi, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8,9, 10],
[p, .21e-1,.81e-1, .156, .201, .195, .151, .97e-1,
.54e-1,.26e-1, .11e-1, .7e-2]]);
```

$$R := \begin{bmatrix} \xi & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ p & .021 & .081 & .156 & .201 & .195 & .151 & .097 & .054 & .026 & .011 & .007 \end{bmatrix}$$

а) Обчислимо математичне сподівання $M(\xi) = \nu_1$:

```
> nu[1]:=sum(R[1,i]*R[2,i], i=2..11);
```

$$\nu_1 := 3.798$$

б) Знайдемо ймовірність того, що число частинок, що досягли лічильника, не менше 4:

```
> P(xi>=4):=sum(R[2,i], i=6..11);
```

$$P(4 \leq \xi) := .534$$

в) Знайдемо дисперсію $D(\xi) = \mu_2$:

```
> mu[2]:=sum((R[1,i]-nu[1])^2*R[2,i], i=2..11);
```

$$\mu_2 := 3.576$$

Відповідь: $M(\xi) = 3,798$; $P(4 \leq \xi) = 0,534$; $D(\xi) = 3,576$.

15.3.2 Неперервна випадкова величина

Випадкова величина X називається *неперервною*, якщо її функція розподілу $F(x)$ неперервна на $(-\infty; +\infty)$. Множиною значень неперервної випадкової величини є скінченний або нескінченний проміжок.

Математичним сподіванням неперервної випадкової величини X , можливі значення якої належать відрізка $[a; b]$, назива-

ють визначений інтеграл:

$$M(X) = \int_a^b x f(x) dx, \quad (15.15)$$

якщо ж можливі значення належать всій осі Ox , то:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx.$$

Дисперсією неперервної випадкової величини X називають математичне сподівання квадрата її відхилення.

Якщо можливі значення x належать відрізьку $[a; b]$, то:

$$D(X) = \int_a^b [x - M(X)]^2 f(x) dx, \quad (15.16)$$

якщо ж можливі значення належать всій осі Ox , то:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - M(X)]^2 f(x) dx.$$

Середнім квадратичним відхиленням неперервної випадкової величини X називається квадратний корінь із дисперсії:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}. \quad (15.17)$$

Приклад 15.3. Знайти математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення випадкової величини X , що задана інтегральною функцією розподілу

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0; \\ x & \text{при } 0 < x \leq 1; \\ 1 & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

Побудувати графіки інтегральної та диференціальної функцій розподілу (щільності).

Розв'язання

Задамо інтегральну функцію розподілу:

```
> F(x):=piecewise(x<=0,0,x>0 and x<=1,x,x>1,1);
```

$$F(x) := \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ x & 0 < x \text{ and } x \leq 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases} \quad (15.18a)$$

$$(15.18b)$$

$$(15.18c)$$

Знайдемо диференціальну функцію розподілу:

```
> f(x):=diff(F(x), x);
```

$$f(x) := \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \text{undefined} & 0 = x \\ 1 & x < 1 \\ \text{undefined} & 1 = x \\ 0 & x > 1 \end{cases} \quad (15.19a)$$

$$(15.19b)$$

$$(15.19c)$$

$$(15.19d)$$

$$(15.19e)$$

Обчислимо математичне сподівання $M(X)$:

```
> M(X):=int(x*1,x=0..1);
```

$$M(X) := \frac{1}{2}$$

Знайдемо дисперсію $D(X)$:

```
> D(X):=int((x-M(X))^2*1,x=0..1);
```

$$D(X) := \frac{1}{12}$$

Знайдемо середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)$:

```
> sigma(x):=sqrt(%);
```

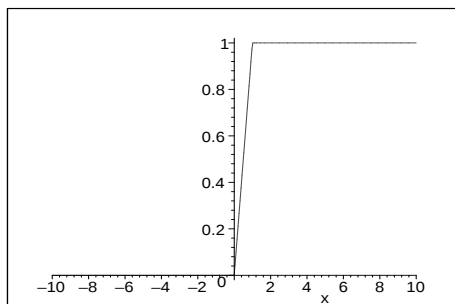
$$\sigma(X) := \frac{1}{6} \sqrt{3}$$

```
> sigma(X):=evalf(%);
```

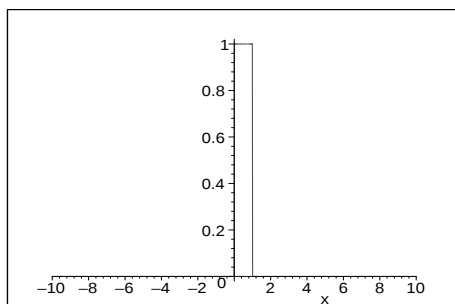
$$\sigma(X) := .2887$$

Побудуємо графіки функцій $F(x)$ і $f(x)$:

```
> plot(F(x),x);
```



```
> plot(f(x),x);
```



Відповідь: $M(X) = \frac{1}{2}$; $D(X) = \frac{1}{12}$; $\sigma(X) = \frac{1}{6}\sqrt{3}$.

15.4 Елементи математичної статистики

Для проведення статистичних розрахунків Maple містить бібліотеку **stats**. До неї входять команди для обробки і проведення статистичного аналізу даних, також містяться функції генерації випадкових чисел і чисельного обчислення статистичних розподілів.

На відміну від інших спеціалізованих пакетів, цей пакет складний, тобто він містить підпакети, які у свою чергу містять команди.

Пакет **stats** містить наступні підпакети:

anova — дисперсійний аналіз;

describe — описові статистики;

fit — лінійна регресія;

importdata — призначений для імпортування даних із файла;

random — генератори випадкових чисел, що відповідають заданим розподілам;

statevalf — чисельне обчислення розподілів;

statplots — команди побудови графіків;

transform — команди перетворення даних.

15.4.1 Вибірка. Емпірична функція розподілу. Гістограма

Використання деяких команд пакета **stats** розглянемо на наступному прикладі.

Приклад 15.4. Записати вибірку 2, 5, 3, 7, 10, 5, 7, 5, 2, 5, 10, 4, 2, 7, 2, 7, 7, 4, 2, 4 у вигляді:

- а) варіаційного ряду;
- б) статистичного ряду.

Розв'язання

Підключимо бібліотеку **stats** і представимо вибірку у вигляді варіаційного ряду:

```
> with(stats);
[anova, describe, fit, importdata, random, statevalf, statplots, transform]
> data:=[2,5,3,7,10,5,7,5,2,5,10,4,2,7,2,7,7,4,
2,4];
data := [2, 5, 3, 7, 10, 5, 7, 5, 2, 5, 10, 4, 2, 7, 2, 7, 7, 4, 2, 4]
> data1:=transform[statsort](data);
data1 := [2, 2, 2, 2, 2, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 7, 7, 7, 7, 7, 10, 10]
Отримаємо статистичний ряд:
> data2:=transform[tally](data1);
data2 := [Weight(2, 5), 3, Weight(4, 3), Weight(5, 4), Weight(7, 5), Weight(10, 2)]
```

Представимо його у вигляді статистичного ряду, в якому другий ряд представлений відносними частотами:

```
> data3:=transform[scaleweight[1/describe[count]
(data2)]](data2);
```

```
data3 := [Weight(2, 1/4), Weight(3, 1/20), Weight(4, 3/20),
Weight(5, 1/5), Weight(7, 1/4), Weight(10, 1/10)]
```

Подамо частоти у накопичувальному порядку:

```
> data4:=transform[cumulativefrequency](data2);
data4 := [5, 6, 9, 13, 18, 20]
```

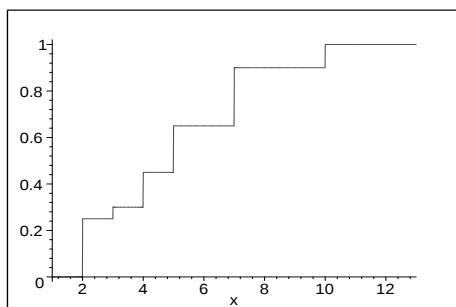
Складемо емпіричну функцію розподілу:

```
> F(x):=piecewise(x<2,0,x<2 and x<=3,5/20,
x>3 and x<=4,6/20, x>4 and x<=5,9/20,
x>5 and x<=7,13/20,x>7 and x<=10,18/20,
x>10,1);
```

$$F(x) := \begin{cases} 0, & \text{for } x < 2; \\ \frac{1}{4}, & \text{for } -x < -2 \text{ and } x - 3 \leq 0; \\ \frac{3}{10}, & \text{for } -x < -3 \text{ and } x - 4 \leq 0; \\ \frac{9}{20}, & \text{for } -x < -4 \text{ and } x - 5 \leq 0; \\ \frac{13}{20}, & \text{for } -x < -5 \text{ and } x - 7 \leq 0; \\ \frac{9}{10}, & \text{for } -x < -7 \text{ and } x - 10 \leq 0; \\ 1, & \text{for } 10 < x. \end{cases}$$

Побудуємо графік емпіричної функції розподілу:

```
> plot(F(x),x=1..13);
```

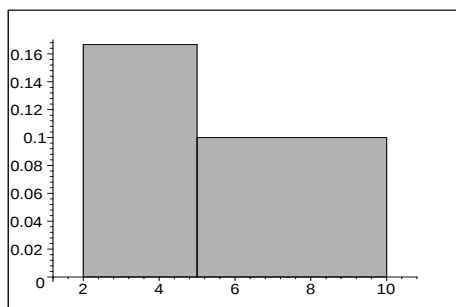


Побудуємо гістограму вибірки:

```

> with(stats[statplots]):
> data:=[2,5,3,7,10,5,7,5,2,5,10,4,2,7,2,7,7,4,2,4 ];
> data1:=transform[statsort](data);
data := [2, 5, 3, 7, 10, 5, 7, 5, 2, 5, 10, 4, 2, 7, 2, 7, 7, 4, 2, 4]
data1 := [2, 2, 2, 2, 2, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 7, 7, 7, 7, 7, 10, 10]
> histogram(data1, color=cyan);

```



15.4.2 Побудова графіка кореляційної таблиці

При вивченні теорії ймовірностей і математичної статистики розглядають задачу графічної побудови даних кореляційної таблиці двовимірної випадкової величини і графіка, визначення за цією таблицею лінії регресії.

Ця задача є стандартною задачею, що розглядається при вивченні математичної статистики. Проілюструємо її розв'язання засобами Maple.

Задача 15.2. Дана кореляційна таблиця значень ознак X і Y . Побудувати на площині значення двовимірної випадкової величини $Z = (X, Y)$, що задані в таблиці, вказавши частоти цих значень. Знайти і побудувати лінію прямої регресії Y на X .

X Y	10	20	30	40	50	60	n_y
15	5	7	—	—	—	—	12
25	—	20	23	—	—	—	43
35	—	—	30	47	2	—	79
45	—	—	10	11	20	6	47
55	—	—	—	9	7	3	19
n_x	5	27	63	67	29	9	$n = 200$

Розв'язання

Виконаємо обчислення і проведемо побудову в пакеті Maple.

1) Задаємо точність обчислень:

```
> restart;
```

```
> Digits := 4;
```

2) Вводимо значення складових X і Y двовимірної випадкової величини $Z = (X, Y)$:

```
> X:=vector[row]([10,20,30,40,50,60]);
      X := [10, 20, 30, 40, 50, 60]
```

```
> Y:=vector[row]([15,25,35,45,55]);
      Y := [15, 25, 35, 45, 55]
```

3) Визначаємо число значень складових двовимірної випадкової величини:

```
> with(linalg):n:=vectdim(X);m:=vectdim(Y);
```

Warning, the protected names norm and trace have been redefined and unprotected

```
n := 6
```

```
m := 5
```

4) Заповнюємо матрицю частот (по рядках):

```
> nxy:=matrix(m,n,[5,7,0,0,0,0,0,20,23,0,0,0,0,0,
30,47,2,0,0,0,10,11,20,6,0,0,0,9,7,3]);
```

$$n_{xy} := \begin{bmatrix} 5 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 23 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 30 & 47 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 11 & 20 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 7 & 3 \end{bmatrix}$$

5) Знайдемо окремі частоти значень складових:

```
> f:=(i)->sum('nxy[i,k]', 'k'=1..n):
> g:=(k)->sum('nxy[i,k]', 'i'=1..m):
> ny:=vector[row](m,f); nx:=vector[row](n,g);
      ny := [12, 43, 79, 47, 19]
      nx := [5, 27, 63, 67, 29, 9]
```

6) Знайдемо об'єм вибірки:

```
> N:=sum('nx[i]', 'i'=1..n); N1:=
sum('ny[i]', 'i'=1..m);
      N := 200
      N1 := 200
```

7) Обчислимо вибірккові середні складових X і Y :

```
> xv:=sum(' (X[k]*nx[k])/N', 'k'=1..n):
> yv:=sum(' (Y[k]*ny[k])/N', 'k'=1..m):
> 'xv'=evalf(xv); 'yv'=evalf(yv);
      xv = 35.75
      yv = 35.90
```

8) Обчислимо вибірккові середні квадратичні відхилення:

```
> sx:=sqrt(sum(' (X[k]-xv)^2*nx[k]/N', 'k'=1..n)):
> sy:=sqrt(sum(' (Y[k]-yv)^2*ny[k]/N', 'k'=1..m)):
> 'sx'=evalf(sx); 'sy'=evalf(sy);
      sx = 11.06
      sy = 10.31
```

9) Знайдемо вибіркковий коефіцієнт лінійної кореляції:

```
> rv:=(sum(sum('nxy[i,k]*X[k]*Y[i]', 'i'=1..m),
'k'=1..n)-N*xv*yv)/(N*sx*sy): 'rv'=evalf(rv);
      rv = .7748
```

10) Складемо рівняння лінійних регресій Y на X і X на Y :

```
> y[x]:=rv*(sy/sx)*(x-xv)+yv;
> x[y]:=rv*(sx/sy)*(y-yv)+xv;
```

$$y_x := \frac{7066}{9795}x + \frac{99031}{9795}$$

$$x_y := \frac{17665}{21238}y + \frac{125085}{21238}$$

11) Складемо список пар спостережуваних значень:

```
> A:=[]:
> for i from 1 to n do for j from 1 to m do if
nxy[j,i]<>0 then A:=[op(A),[X[i],Y[j]]];
> PQ[nops(A)]:=nxy[j,i]; fi; od; od;

> PP:= [seq([op(1,A[i]),op(2,A[i])],i=1..nops(A))];

PP := [[10, 15], [20, 15], [20, 25], [30, 25], [30, 35], [30, 45],
[40, 35], [40, 45], [40, 55], [50, 35], [50, 45], [50, 55], [60, 45],
[60, 55]]
```

12) Будуємо графіки значень, частот, лінію регресії Y на X :

```
> with(plots):

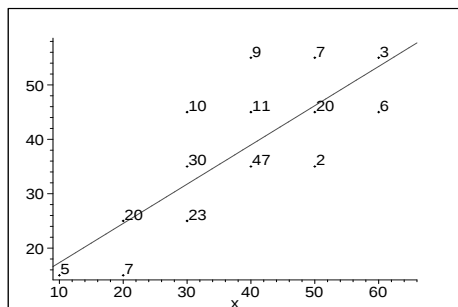
Warning, the name changecoords has been redefined

> T:=pointplot(PP):

> for k from 1 to nops(PP) do
TP[k]:=textplot([op(1,PP[k])+0.2,op(2,PP[k])+0.2,
PQ[k]],align={ABOVE,RIGHT});od:

> TT:=plot(y[x],x=X[1]-X[1]*0.1..X[n]+X[n]*0.1):

> plots[display](T,TT,seq(TP[k],k=1..nops(PP)));
> print('Вибірковесредне': 'x[В] '=evalf(xv), 'y[В] '=
evalf(yv));
> print('стандартневідхилення', :s[x] '=evalf(sx),
's[y] '=evalf(sy));
> print('рівняння регресії': 'y[x] '=evalf(y[x]));
> print('коефіцієнт кореляції': 'r[В] '=evalf(rv));
```



Вибіркове середнє : $x_v = 35.75$, $y_v = 35.90$;

стандартнє відхилення : $s_x = 11.06$, $s_y = 10.31$;

рівняння регресії : $y_x = .7214x + 10.11$;

коефіцієнт кореляції : $r_v = .7748$.

15.5 Розв'язання задач

Задача 15.3. Скількома способами можна розмістити 15 гостей на 15 місцях за святковим столом?

Розв'язання

За умовою задачі дано множину, яка складається з 15 елементів і яку потрібно розташувати у певній послідовності.

Шукане число дорівнює числу перестановок з 15 елементів:

```
> P[15]:=combinat[numbperm](15);
      P15 := 1307674368000
```

Відповідь: 1307674368000.

Задача 15.4. Колектив невеликої фірми нараховує 30 працівників. Директор фірми вирішив преміювати трьох із них. Випадково записують впорядковані трійки прізвищ працівників, що не повторюються. Перший працівник одержує премію в розмірі 100 \$, другий – 75 \$, третій – 50 \$. Скільки способів має директор для преміювання працюючих?

Розв'язання

Число працівників рівне 30. Потрібно знайти число розміщень із 30 по 3:

```
> combinat[numbperm](30, 3);
24360
```

Відповідь: 24360.

Задача 15.5. *Скільки всього ігор мають провести 15 команд в одному чемпіонаті?*

Розв'язання

Оскільки гра будь-якої команди A з командою B співпадає з грою команди B з командою A , то кожна гра є сполученням з 15 по 2. Отже, шукане число всіх ігор дорівнює числу сполучень із 15 по 2:

```
> binomial(15, 2);
105
```

Відповідь: 105.

Задача 15.6. *Знайти ймовірність події $A = \{\text{виграш найбільшої суми при грі в лото по 1 картці}\}$, якщо для цього необхідно вгадати 5 із 36 чисел.*

Розв'язання

При наявності одного квитка є одна сприятлива для A елементарна подія $= \{\text{всі 5 чисел вгадані правильно}\}$, тобто $m = 1$. Число n всіх елементарних подій дорівнює числу всіх рівноможливих груп із 5 чисел, що відрізняються хоча б одним числом, тобто $n = C_{36}^5$.

$$P(A) = \frac{1}{C_{36}^5}$$

```
> P(A):=1/binomial(36, 5);
```

$$P(A) := \frac{1}{376992}$$

Відповідь: $P(A) = \frac{1}{376992}$.

Задача 15.7. *Серед 100 електроламп 5 зіпсованих. Яка ймовірність того, що взяті навмання три лампи будуть справними?*

Розв'язання

Зі 100 електроламп 3 лампи можна взяти $n = C_{100}^3$ способами. Три справні лампи із загальної кількості 95 можна відібрати $m = C_{95}^3$ способами. Отже, шукана ймовірність дорівнює

$$P(A) = \frac{C_{95}^3}{C_{100}^3} :$$

```
> P(A):=binomial(95, 3)/binomial(100., 3);
```

$$P(A) := .8559$$

Відповідь: $P(A) = 0,8559$.

Задача 15.8. *Група з 20 студентів, серед яких 6 відмінників, довільно розбивається на дві рівні підгрупи. Знайти ймовірність того, що чотири відмінники будуть у першій підгрупі.*

Розв'язання

Позначимо подію A — у першій підгрупі чотири відмінники.

При відборі 10 студентів у першу підгрупу послідовність відбору не береться до уваги, тому загальне число n випадків у такій моделі дорівнює числу різних комбінацій з 20 по 10:

$$n = C_{20}^{10}$$

```
> n:=binomial(20, 10);
```

$$n := 184756$$

Серед знайденого числа способів комплектування першої підгрупи знайдемо число варіантів m , що сприяють події A . Це такі варіанти, у яких 4 студенти взяті серед 6 відмінників, а решта 6 — серед 14 студентів, що не вчать на відмінно. Число m знайдемо за комбінаторним принципом добутку

$$m = C_6^4 C_{14}^6 :$$

```
> m:=binomial(6, 4)*binomial(14, 6);
      m := 45045
```

Тоді ймовірність попадання чотирьох відмінників у першу підгрупу обчислюємо за класичною формулою

$$P(A) = \frac{m}{n} :$$

```
> P(A):=m/n;
      P(A) :=  $\frac{315}{1292}$ 
> evalf(%);
      .2438
```

Отже, ймовірність попадання чотирьох відмінників у першу підгрупу

$$P(A) \approx 0,2438.$$

Задача 15.9. *Схожість насіння становить 95 %. Знайти ймовірність того, що з 10 посіяних насінин зійде рівно 8 насінин.*

Розв'язання

Маємо справу з повторними незалежними випробуваннями. Використаємо формулу Бернуллі:

```
> with(combinat):

Warning, the protected name Chi has been redefined
and unprotected

> binomial(n, m);
      binomial(n, m)
> convert(binomial(n,m),factorial);
       $\frac{n!}{m!(n-m)!}$ 
> P[n](m):=convert(binomial(n,m),factorial)
      *p^m*q^(n-m);
```

$$P_n(m) := \frac{n! p^m q^{(n-m)}}{m! (n-m)!}$$

Оскільки схожість насіння 95 %, то $p = \frac{95\%}{100\%} = 0,95$, звідси $q = 1 - p = 1 - 0,95 = 0,05$. За умовою $n = 10$, $m = 8$.

Підставляючи в

$$P_n(m) := \frac{n! p^m q^{(n-m)}}{m! (n-m)!}$$

значення p , q , n , m матимемо:

```
> Digits:=4;

                               Digits := 4
> subs( n=10, m=8,p=0.95, q=0.05,
> convert(binomial(n,m),factorial)*p^m*q^(n-m) );
                               .001658  $\frac{10!}{8! 2!}$ 
> eval(%);
                               .07461
> P[10](8):=.7461e-1;
                               P10(8) := .07461
```

Відповідь: $P_{10}(8) = 0,07461$.

Задача 15.10. Фермерське господарство зібрало 950 кг помідорів, із них 800 кг першого ґатунку. Овочевий магазин закупив і випадковим чином відібрав 400 кг помідорів. Знайти імовірність того, що в закупленій партії буде не менше 350 кг помідорів першого ґатунку.

Розв'язання

Застосуємо інтегральну теорему Лапласа

$$P_n(k_1, k_2) \approx \Phi(x'') - \Phi(x')$$

де

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx, \quad x' = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x'' = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

Дано: $p = 0,8421$, $q = 0,1579$, $n = 400$, $k \geq 350$, тобто $k_1 = 350$, $k_2 = 400$, тоді

```
> with(combinat):
```

```
> x:='x':
```

```
> Digits:=4;
```

$$Digits := 4$$

```
> x1:=(350-400*0.8421)/sqrt(400*0.8421*0.1579);
```

$$x1 := 1.810$$

```
> x2:=(400-400*0.8421)/sqrt(400*0.8421*0.1579);
```

$$x2 := 8.665$$

Знаходимо імовірність того, що в закупленій партії буде не менше 350 кг помідорів першого ґатунку:

```
> P:=1/sqrt(2*Pi)*int(exp(-t^2/2),t=-infinity..x2)
-1/sqrt(2*Pi)*int(exp(-t^2/2),t=-infinity..x1);
```

$$P := .044 \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}$$

```
> evalf(P);
```

$$.03509$$

Отже, з імовірністю 0,03509 можна стверджувати, що в закупленій партії буде не менше 350 кг помідорів першого ґатунку.

Задача 15.11. У дикоростучої суниці червоне забарвлення ягід домінує над розовим; ця ознака передається у спадок. У деякій популяції суниці ймовірність зустріти рослину з червоними ягодами дорівнює 0,7. Яка ймовірність того, що серед відібраних випадковим чином 8-ми рослин цієї популяції червоні ягоди будуть мати:

а) 6 рослин;

б) не менше шести рослин?

Розв'язання

У кожному випробуванні може з'явитися або не з'явитися подія A , яка полягає в тому, що у рослини суниці будуть червоні ягоди. Загальне число випробувань $n = 8$, випробування

є незалежними. Ймовірність появи події A в кожному з восьми випробувань є сталою і дорівнює $p = 0,7$, ймовірність не появи події A в кожному випробуванні дорівнює $q = 1 - p = 0,3$.

а) Позначимо подію: B — рівно 6 рослин з восьми відібраних матимуть червоні ягоди. Число випробувань, в яких очікується поява події A , дорівнює $m_1 = 6$.

Шукану ймовірність $P(B) = P_8(6)$ знайдемо за формулою Бернуллі:

```
> with(combinat):
```

```
Warning, the protected name Chi has been redefined
and unprotected
```

```
> Digits := 4:
```

```
> binomial(n, m);
```

$$\text{binomial}(n, m)$$

```
> convert(binomial(n,m),factorial);
```

$$\frac{n!}{m!(n-m)!}$$

```
> P[n](m):=convert(binomial(n,m),factorial)
*p^m*q^(n-m);
```

$$P_n(m) := \frac{n! p^m q^{(n-m)}}{m! (n-m)!}$$

Підставляючи в

$$P_n(m) := \frac{n! p^m q^{(n-m)}}{m! (n-m)!}$$

значення p , q , n , m матимемо:

```
> subs( n=8, m=6,p=0.7, q=0.3,
convert(binomial(n,m),factorial)*p^m*q^(n-m));
```

$$.01058 \frac{8!}{6! 2!}$$

```
> evalc(%);
```

$$.2962$$

б) Позначимо подію: C — не менше шести рослин із восьми відібраних матимуть червоні ягоди.

Розглянемо події, що сприяють настанню події C : C_1 , C_2 , C_3 — червоні ягоди будуть мати, відповідно, 6 рослин, 7 рослин, 8 рослин з 8 відібраних. C_1 , C_2 , C_3 — несумісні події, причому подія C_1 дорівнює події A , яка розглянута в пункті а) задачі.

Подія C полягає в тому, що червоні ягоди будуть мати або 6, або 7, або 8 рослин. Це означає, що подія C являє собою суму подій C_1 , C_2 і C_3 : $C = C_1 + C_2 + C_3$. Ймовірність події C знайдемо за теоремою додавання ймовірностей несумісних подій при $n = 3$:

$$P(C) = P(C_1) + P(C_2) + P(C_3). \quad (15.20)$$

Ймовірність $P(C_1) \approx 0,2965$. Ймовірності $P(C_2)$ і $P(C_3)$ знайдемо за формулою Бернуллі при значеннях m , відповідно рівних $m_1 = 7$ і $m_2 = 8$:

```
> P(C[1]) := .2962;
```

```
P(C1) := .2962
```

```
> subs( n=8, m=7, p=0.7, q=0.3,
convert(binomial(n,m),factorial)*p^m*q^(n-m));
```

```
.02470  $\frac{8!}{7!1!}$ 
```

```
> evalc(%);
```

```
.1976
```

```
> P(C[2]) := .1976;
```

```
P(C2) := .1976
```

```
> subs( n=8, m=8, p=0.7, q=0.3,
convert(binomial(n,m),factorial)*p^m*q^(n-m));
```

```
.05765  $\frac{1}{0!}$ 
```

```
> evalc(%);
```

```
.05765
```

```
> P(C[3]) := .5765e-1;
```

```
P(C3) := .05765
```

Підставивши значення $P(C_1)$, $P(C_2)$ і $P(C_3)$ у рівність (15.20), отримаємо

```
> P(C) = P(C[1]) + P(C[2]) + P(C[3]);
```

$$P(C) = .5518$$

Відповідь: а) 0,2962; б) 0,5518.

Задача 15.12. При схрещуванні двох кормових сортів люпину в другому поколінні теоретично очікуваним відношенням алкалоїдних рослин до безалкалоїдних є відношення 9:7. Знайти ймовірність того, що серед отриманих 150 гібридних рослин половина рослин будуть алкалоїдними.

Розв'язання

Випробування полягає у перевірці однієї рослини люпину. Загальне число незалежних випробувань дорівнює $n = 150$. У кожному випробуванні може відбутися або не відбутися подія A — поява алкалоїдної рослини люпину. Skorиставшись класичним визначенням ймовірності події, отримаємо, що ймовірність настання події A в кожному випробуванні дорівнює $p = \frac{9}{16} = 0,5625$. Ймовірність події $\bar{A}$ дорівнює $q = \frac{7}{16} = 0,4375$. Число m появ події A дорівнює 75. Потрібно знайти $P_{150}(75)$.

Число n випробувань велике, тому для визначення $P_{150}(75)$ застосуємо асимптотичну формулу Лапласа (15.21):

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x), \text{ де } \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}, x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} \quad (15.21)$$

Проведемо обчислення:

```
> x:=(m-n*p)/sqrt(n*p*q);
      x := -1.544
> f(x):=1/sqrt(2*Pi)*exp(-x^2/2);
      f(-1.544) := .1518  $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}$ 
> P[n](m):=f(x)/sqrt(n*p*q);
      P150(75) := .02498  $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}$ 
> evalf(%);
      .01992
```

Відповідь: 0,01992.

Задача 15.13. Дослідне поле засіяне насінням костриці без-остой. На одній з ділянок цього поля в травостой міститься 0,4% бур'янів — конюшини білої і різнотрав'я. Яка ймовірність того, що серед 125 рослин цієї ділянки, відібраних випадковим чином, є

- а) рівно 3 засмічених;
- б) не більше трьох засмічених?

Розв'язання

а) Випробування полягає у перевірці однієї рослини. Загальне число незалежних випробувань $n = 125$. У кожному випробуванні може з'явитися або не з'явитися подія A , яка полягає в тому, що відібрана рослина — бур'ян. Ймовірність $p = 0,004$ настання події A в кожному випробуванні дуже мала, причому $\lambda = np = 125 \cdot 0,004 = 0,5 < 10$, тому ймовірності $P_n(m)$ знайдемо за формулою Пуассона (15.22):

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda}, \quad \text{де } \lambda = np \quad (15.22)$$

> Digits := 4;

> P[n](m) := lambda^m * exp(1)^(-lambda) / m!;

$$P_n(m) := \frac{\lambda^m (e)^{(-\lambda)}}{m!}$$

> subs(m=3, lambda=0.5, lambda^m * exp(1)^(-lambda) / m!);

$$.125 \frac{1}{(e)^{.5} 3!}$$

> convert(.125 * 1 / (exp(1)^.5 * 3!), factorial);

$$.02083 \frac{1}{(e)^{.5}}$$

> evalf(%);

$$.01264$$

> P[125](3) := .1264e-1;

$$P_{125}(3) := .01264$$

б) Число появ події A знаходиться в інтервалі $0 \leq m \leq 3$, потрібно знайти ймовірність попадання числа m у цей інтервал, тобто $P(0 \leq m \leq 3)$ при $n = 125$ і $\lambda = np = 0,5$. Шукану ймовірність знайдемо, застосувавши формулу Пуассона і теорему додавання ймовірностей несумісних подій:

$$P(0 \leq m \leq 3) = P_{125}(0) + P_{125}(1) + P_{125}(2) + P_{125}(3).$$

Проведемо обчислення:

```
> Digits := 4;

> subs(m=0,lambda=0.5,lambda^m*exp(1)^(-lambda)/m!);
      1
    ---
  (e)^.5 0!
> evalf(%);
      .6066
> P[125](0) := .6066;
      P125(0) := .6066
> subs(m=1,lambda=0.5,lambda^m*exp(1)^(-lambda)/m!);
      .5
    ---
  (e)^.5 1!
> evalf(%);
      .3033
> P[125](1) := .3033;
      P125(1) := .3033
> subs(m=2,lambda=0.5,lambda^m*exp(1)^(-lambda)/m!);
      .25
    ---
  (e)^.5 2!
> evalf(%);
      .07582
> P[125](2) := .7582e-1;
      P125(2) := .07582
```

> P[125](3) := .1264e-1;

$$P_{125}(3) := .01264$$

> P := P[125](0) + P[125](1) + P[125](2) + P[125](3);

$$P := .9983$$

Відповідь: а) 0,01264; б) 0,9983.

Задача 15.14. Під час механізованого збирання картоплі пошкоджується у середньому 10% бульб. Знайти ймовірність того, що у випадковій вибірці з 200 бульб картоплі пошкоджено від 15 до 50 бульб.

Розв'язання

З умови випливає, що ймовірність пошкодження картоплини $p = 0,1$, ймовірність протилежної події $q = 1 - p = 0,9$. Число незалежних випробувань $n = 200$. Потрібно знайти ймовірність того, що $m_1 \leq m \leq m_2$, де $m_1 = 15$, $m_2 = 50$. Оскільки $n = 200$ — досить велике число, то шукану ймовірність знайдемо наближено за формулою (15.23):

$$P(m_1 \leq m \leq m_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \text{ де } x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}, x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}} \quad (15.23)$$

Проведемо обчислення:

> Digits := 4;

> x2 := (50 - 200*0.1)/sqrt(200*0.1*0.9);

$$x2 := 7.071$$

> x1 := (15 - 200*0.1)/sqrt(200*0.1*0.9);

$$x1 := -1.178$$

> P := 1/sqrt(2*Pi)*int(exp(-t^2/2), t=-infinity..x2)
-1/sqrt(2*Pi)*int(exp(-t^2/2), t=-infinity..x1);

$$P := 1.104 \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}$$

> P := evalf(P);

$$P := .8804$$

Відповідь: 0,8804.

Задача 15.15. Фермер утримує 15 корів, серед яких у 5 надойі більші, ніж по 4500 л молока на рік. Випадковим чином відібрані 3 корови, що належать цьому фермеру. Знайти закон розподілу випадкової величини X — числа корів із високими надоями серед відібраних.

Розв'язання

Випадкова величина X — число корів серед відібраних із продуктивністю більше, ніж по 4500 л молока на рік. Ця величина в результаті випробування може прийняти одне з таких можливих значень: $x_1 = 0$; $x_2 = 1$; $x_3 = 2$; $x_4 = 3$. Ймовірності можливих значень величини X знайдемо за формулою

$$P(X = r) = \frac{C_k^r \cdot C_{N-k}^{l-r}}{C_N^l}.$$

У цій задачі $N = 15$ — загальна кількість корів у фермера, $k = 5$ — загальне число корів із високими надоями, $l = 3$ — число відібраних корів, r — число корів серед трьох відібраних із високими надоями. Шукані ймовірності можливих значень X рівні:

```
> restart;
> p[0]:=binomial(5, 0)*binomial(10, 3)
/binomial(15, 3);
```

$$p_0 := \frac{24}{91}$$

```
> p[1]:=binomial(5, 1)*binomial(10, 2)
/binomial(15, 3);
```

$$p_1 := \frac{45}{91}$$

```
> p[2]:=binomial(5, 2)*binomial(10, 1)
/binomial(15, 3);
```

$$p_2 := \frac{20}{91}$$

```
> p[3]:=binomial(5, 3)*binomial(10, 0)
/binomial(15, 3);
```

$$p_3 := \frac{2}{91}$$

Цей закон розподілу називається гіпергеометричним.

Розглянута випадкова величина X має наступний ряд розподілу:

```
> R:=matrix([[x[i],0,1,2,3],
[p[i],24/91,45/91,20/91,2/91]]);
```

$$R := \begin{bmatrix} x_i & 0 & 1 & 2 & 3 \\ p_i & \frac{24}{91} & \frac{45}{91} & \frac{20}{91} & \frac{2}{91} \end{bmatrix}$$

Задача 15.16. Ймовірність включення двигуна з однієї спроби стала і дорівнює p . Скласти ряд розподілу випадкової величини X — числа включень двигуна при одній спробі. Знайти математичне сподівання і дисперсію X .

Розв'язання

Випробування полягає у спробі включити двигун. У випробуванні може відбутися або не відбутися подія A — включення двигуна. Ймовірність настання події A в одному випробуванні дорівнює p ; ймовірність протилежної події $\bar{A}$ — двигун не буде включений, дорівнює $q = 1 - p$. Розглянута випадкова величина X в результаті випробування може прийняти одне з таких двох можливих значень: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$. Ймовірності цих значень відповідно рівні q і p .

Випадкова величина X має наступний ряд розподілу:

```
> R:=matrix([[x[i], 0, 1], [p[i], q, p]]);
```

$$R := \begin{bmatrix} x_i & 0 & 1 \\ p_i & q & p \end{bmatrix}$$

Математичне сподівання $M(X) = \nu$ і дисперсія $D(X) = \mu$ величини X рівні:

```
> nu[1]:=sum(R[1,i]*R[2,i], i=2..3);
```

$$\nu_1 := p$$

```
> mu[2]:=sum((R[1,i]-nu[1])^2*R[2,i], i=2..3);
```

$$\mu_2 := p^2 q + (1 - p)^2 p$$

```

> subs( q=1-p, p^2*q+(1-p)^2*p);
      p^2 (1 - p) + (1 - p)^2 p
> simplify(%);
      -p^2 + p

```

Відповідь: $M(X) = p$; $D(X) = -p^2 + p$.

15.6 Завдання для самостійного виконання

1. Обчислити значення виразу:

- 1) $\frac{10!-8!}{89}$; 2) $6! \cdot (7! - 3!)$; 3) $A_7^3 + A_6^3 + A_5^3$;
 4) $\frac{A_6^5 + A_6^4}{A_6^3}$; 5) $C_6^4 + C_{16}^{14}$; 6) $\frac{C_6^5 + A_6^4}{C_6^3}$.

2. Випадкова величина X задана функцією розподілу

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0; \\ \frac{3}{4} \cdot (1 - \cos x), & \text{при } 0 < x \leq \pi; \\ 1, & \text{при } x > \pi. \end{cases}$$

Знайти: щільність ймовірності $f(x)$; побудувати графіки $F(x)$ і $f(x)$; обчислити ймовірність потрапляння випадкової величини в інтервал $(0,5; 3,5)$.

3. Випадкова величина X задана диференціальною функцією розподілу

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0; \\ \frac{1}{2} \sin x, & \text{при } 0 < x \leq \pi; \\ 0, & \text{при } x > \pi. \end{cases}$$

Знайти: інтегральну функцію $F(x)$; побудувати графіки $F(x)$ і $f(x)$; обчислити ймовірність потрапляння випадкової величини в інтервал $(0; \frac{\pi}{4})$.

4. Випадкова величина задана законом розподілу

X	0,1	2	10	20
p	0,4	0,2	0,15	0,25.

Знайти: математичне сподівання; дисперсію; середнє квадратичне відхилення цієї величини.

5. Знайти математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення випадкової величини X , що задана інтегральною функцією розподілу

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq -2; \\ \frac{x}{4} + \frac{1}{2}, & \text{при } -2 < x \leq 2; \\ 1, & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

Побудувати графіки інтегральної та диференціальної функцій розподілу (щільності).

6. Записати вибірку 3, 5, 3, 7, 10, 5, 7, 5, 2, 3, 5, 10, 4, 2, 7, 2, 4, 7, 7, 4, 2, 5, 4 у вигляді варіаційного та статистичного рядів, складіть емпіричну функцію розподілу, побудуйте графік емпіричної функції розподілу, побудуйте гістограму вибірки.
7. Дана кореляційна таблиця значень ознак X і Y .

X	10	20	30	40	n_y
Y					
0,4	5	—	7	14	26
0,6	—	2	6	4	12
0,8	3	19	—	—	22
n_x	8	21	13	18	$n = 60$

Побудувати на площині значення двовимірної випадкової величини $Z = (X, Y)$, що задані в таблиці, вказавши частоти цих значень. Знайти і побудувати лінію прямої регресії Y на X .

Бібліографія

- [1] *Дюженкова Л.І.* Вища математика. Приклади і задачі: посібник. / Л.І. Дюженкова, О.Ю. Дюженкова, Г.О. Михалін. – К. : Академія, 2002. – 624 с.
- [2] *Дьяконов В.П.* Maple 8 в математике, физике и образовании / В.П. Дьяконов. – М. : СОЛОН–Пресс, 2003. – 656 с.
- [3] Збірник задач з математики для вступників до вузів: Пер. з рос. / В.К. Єгєєв, В.В. Зайцев, Б.А. Кордемський та ін.; [За ред. М.І. Сканаві]. – К. : Онікс, 2005. – 608 с.: іл.
- [4] Образовательный математический сайт [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://www.exponenta.ru/>. – Загл. з екрану.
- [5] Офіційна сторінка Maple на сайті компанії розробника [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://www.maplesoft.com/company/> – Загл. з екрану.
- [6] *Триус Ю.В.* Комп'ютерно-орієнтовані методичні системи навчання математичних дисциплін / Ю.В. Триус. – Черкаси : Брама–Україна, 2005. – 400 с.
- [7] *Шкіль М.І.* Вища математика. Кн. 1./ М.І. Шкіль, Т.В. Колеснік, В.М. Котлова. – К. : Либідь, 1994. – 279 с.
- [8] *Stewart Calculus. Fifth edition* / James Stewart. Thomson brooks / Cole, 2003. – 1170 p.

Показчик

- Digits** — команда точності представлення чисел, 18
- Edit** — команди редагування документа і операції з буфером обміну, 2
- Expression** — введення шаблонів математичних операторів і операцій, 3
- File** — робота з файлами і друком документів, 2
- Format** — операції задання форматів, 2
- Help** — робота з довідковою системою, 2
- Insert** — операції вставки, 2
- Matrix** — введення шаблонів матриць різних розмірів, 3
- New User's Tour** — команда навчання основам користування Maple, 5
- Options** — задання параметрів, 2
- Palettes** — список палітр, призначених для введення математичних знаків, 2
- QuadricCurveAnalysis** — дослідження кривих другого порядку, 238
- Spreadsheet** — операції задання таблиць, 2
- Symbol** — введення окремих символів (грецьких літер і деяких математичних знаків), 3
- Topic Search** — предметний пошук, 13
- VectorAngle** — команда знаходження кута між двома векторами, 89
- Vector** — введення шаблонів векторів різних розмірів і типів, 3
- View** — управління видом інтерфейсу користувача, 2
- Window** — управління вікнами, 2
- Геометрія в просторі, 248
- Інтерфейс Maple, 1
- Команди геометрії з іменем `name`, 208
- Команди перевірки геометричних умов, 248
- Команди стереометрії з іменем

- name, 248
- Команди геометрії, 207
- Команди спрощення, 26
- Кратні інтеграли, 166
- Математичні константи, 20
- Операції з матрицями, 81
- Операції з векторами, 86
- Побудова графіків 3D, 149
- Стандартні математичні функції, 21
- binomial — команда обчислення числа сполучень, 269
- color — команда визначення кольору побудови, 57
- complexplot — команда зображення комплексних чисел, 78
- complex — команда задання комплексних чисел, 74
- convert — команда перетворення виразу одного типу в інший тип, 22
- crossprod — команда знаходження векторного добутку, 90
- dfieldplot — команда побудови поля напрямів ДР рівняння, 190
- diff — команда для знаходження похідної функції, 120
- dsolve — команда розв'язування диф. рівнянь, 189
- evalf — команда округлення виразу, 17
- expand — розкриття дужок, 26
- factor — розклад на множники, 26
- implicitplot — команда побудови графіків неявно заданих функцій, 65
- innerprod — команда знаходження скалярного добутку векторів, 90
- int — команда для знаходження інтегралів, 162
- limit — команда обчислення границь, 107
- linalg, LinearAlgebra, 88
- maximize(f(x), x=a..b) — найбільше значення функції на відрізьку, 122
- minimize(f(x), x=a..b) — найменше значення функції на відрізьку, 122
- numbcomb — команда обчислення числа елементів множини, 268
- numbperm — команда знаходження числа перестановок, 268
- plot — команда побудови графіків, 56
- series — команда розкладу в степеневий узагальнений ряд, 113
- simplify — спрощення виразу, 26
- solve — команда розв'язування алгебраїчних рівнянь, нерівностей та їхніх систем, 32

- subs — підстановка, 26
- sum — команда сумування, 110
- taylor — команда розкладу в ряд
Тейлора, 114
- with (package) — математичні бі-
бліотеки, 15
- with(combinat) — бібліотека за-
дач комбінаторики, 267
- with(geom3d) — бібліотека сте-
реометрії, 248
- with(geometry) — бібліотека ана-
літичної геометрії, 206
- with(simplex) — бібліотека задач
лінійного програмуван-
ня, 125
- with(stats) — бібліотека матема-
тичної статистики, 279
- www.maplesoft.com — сайт фір-
ми — розробника систе-
ми, 5

Навчальне видання

Maple в математиці

Дрозденко Віталій Олександрович

Здано до складання 18.10.2019. Підписано до друку 19.10.2019.
Формат 60 * 84¹/₁₆. Ум. друк. арк. 19,07. Тираж 100. Зам. 6926.
РВвідділ, Сектор оперативної поліграфії БНАУ
09117, Біла Церква, Соборна пл., 8, тел. 33-11-01