

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

А. Я. Карвацький

МЕТОД СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ У ЗАДАЧАХ МЕХАНІКИ СУЦІЛЬНИХ СЕРЕДОВИЩ

**Лабораторний практикум з навчальної ди-
сципліни**

*Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для студентів,
які навчаються за спеціальностями 131 «Прикладна механіка»,
спеціалізаціями «Інжиніринг, комп'ютерне моделювання та проектування об-
ладнання пакування», «Інжиніринг, комп'ютерне моделювання та проектуван-
ня обладнання виробництв полімерних і будівельних матеріалів і виробів»*

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2018

Рецензент:

Коржик М. В., к-т техн. наук, доц.

Відповідальний
редактор

Мікульонок І. О., д-р техн. наук, проф.

*Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського (протокол № 10 від 21.06.2018 р.)
за поданням Вченої ради інженерно-хімічного факультету (протокол № 5 від 29.05.2018 р.)*

Навчальний посібник

Карвацький Антон Янович, д-р техн. наук, проф.

МЕТОД СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ У ЗАДАЧАХ МЕХАНІКИ СУЦІЛЬНИХ СЕРЕДОВИЩ

Лабораторний практикум з навчальної дисципліни

Метод скінченних елементів у задачах механіки суцільних середовищ. Лабораторний практикум з навчальної дисципліни [Електронний ресурс]: навч. посіб. для студ. спеціальностей 131 «Прикладна механіка», 133 «Галузеве машинобудування», спеціалізації «Інжиніринг, комп'ютерне моделювання та проектування обладнання пакування», «Інжиніринг, комп'ютерне моделювання та проектування обладнання виробництв полімерних і будівельних матеріалів і виробів» / А. Я. Карвацький. – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018. – 391 с.

Подано математичні постановки задач механіки суцільних середовищ (МСС) і викладено числові методики їх розв'язання з використанням методу скінченних елементів. Наведено методи розв'язання систем лінійних алгебричних рівнянь. Надано програмні коди Mathcad для розв'язання дво- і тривимірних лінійних задач для виконання лабораторних робіт МСС. Розглянуто приклади побудови геометрії найпростіших об'єктів і генерації розрахункових сіток з використанням вільно відкритого програмного забезпечення Gmsh. Наведено приклади візуалізації скінченно-елементних розв'язків задач МСС у програмі TecPlot.

Для студентів вищих навчальних закладів, які навчаються за спеціальностями «Прикладна механіка» і «Галузеве машинобудування» та інших споріднених спеціальностей: теплоенергетики, будівельної та нафтопереробної галузей промисловості.

УДК 531/534:519.6(075.8)

© А. Я. Карвацький, 2018

© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018

ВСТУП

Навчальна дисципліна «Механіка суцільних середовищ» належить до циклу дисциплін професійної та практичної підготовки. У цій дисципліні розглядаються теоретичні основи дослідження теплового й напружено-деформованого стану (НДС) технологічного обладнання підприємств хімічних виробництв методами математичного моделювання і включають: математичну постановку задач з оцінки теплового стану і НДС промислового обладнання; методи числового дослідження і аналізу НДС та теплового стану промислового обладнання, зокрема, методами скінченних елементів (МСЕ); методи оцінки міцності конструктивних елементів обладнання тощо. Вивчення дисципліни базується на знаннях, отриманих з курсів математики, інформатики, нарисної геометрії, хімії, фізики, термодинаміки, обчислювальної математики та програмування.

Метою дисципліни є формування знань студентів про основи механічного та теплового аналізу стану промислового обладнання хімічних виробництв методами математичного моделювання фізичних процесів.

Предмет дисципліни – дослідження напружено-деформованого стану твердих, рідких і газоподібних тіл під час їх взаємодії між собою та фізичними полями різної фізичної природи – гравітаційними, тепловими, електромагнітними, променевими тощо.

Засвоївши цю дисципліну, фахівець у галузі механіки суцільних середовищ має отримати такі знання:

- про основні поняття, визначення та гіпотези механіки суцільних середовищ (МСС);
- про властивості суцільних середовищ, основні методи та напрямки досліджень різних об'єктів МСС;
- про основи тензорної алгебри;
- про теорію напружень в суцільному середовищі;
- про види напруженого стану суцільного середовища;
- про фізичні рівняння однорідного середовища;
- про теорію деформацій суцільного середовища;
- про закони збереження для суцільного середовища;
- про розв'язуючі рівняння МСС у декартових координатах;
- про рівняння МСС у криволінійних системах координат;
- про стаціонарні й нестаціонарні задачі МСС;

а також уміти:

- застосовувати методи комп'ютерного інжинірингу з використанням спеціального програмного забезпечення для проектування машин та апаратів хімічних виробництв;

- використовувати результати аналізу умов роботи конструкції з врахуванням особливостей технологічних процесів, що проходять в обладнанні, відомих фізичних закономірностей і математичних залежностей для вибору та обґрунтування рівняння стану конструкційних матеріалів і матеріалів, що перебувають на стадії переробки;
- використовувати результати аналізу умов роботи конструкції з врахуванням відомих фізичних та математичних залежностей для вибору математичних моделей фізичних полів і середовищ, що взаємодіють з конструкціями;
- застосовувати розроблені математичні моделі й методи числового аналізу та програмного забезпечення для визначення початкових і граничних умов та схеми навантажень досліджуваної конструкції;
- використовувати результати аналізу дії на конструкції зовнішніх фізичних полів та середовищ із врахуванням відомих рівнянь стану для складання розрахункової моделі конструкції за статичних і динамічних термосилових навантажень;
- застосовувати складені розрахункові моделі конструкції з врахуванням її взаємодії з фізичними полями та середовищами з використанням існуючої довідникової інформації та програмного забезпечення для розробки скінченно-елементної моделі конструкції;
- використовувати скінченно-елементні моделі конструкції із врахуванням рівнянь стану конструкційних матеріалів і спеціалізованого програмного забезпечення для визначення напружено-деформованого стану конструкції за статичних і динамічних термосилових навантажень;

і отримати досвід:

- теоретичних досліджень на основі математичних моделей механіки суцільних середовищ теплового, механічного й гідродинамічного стану машин та апаратів хімічних виробництв;
- виконання проектних і перевірочних розрахунків технологічного обладнання.

У навчальному посібнику, складеному на основі курсу лекцій і лабораторних робіт, який автор читає та проводить на кафедрі хімічного, полімерного та силікатного машинобудування Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», наведено мінімум емпіричних рівнянь і майже немає довідкових даних. Ці відомості, а також безпосередньо моделювання напружено-деформованого та теплового стану різних фізичних об'єктів розглядають під час лабораторних занять, а також виконання студентами курсового проектування конкретного промислового обладнання.

ОСНОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ ТА СКОРОЧЕННЯ

Основні позначення

A –	площа скінченного елемента, м^2 ;
$[B^{(e)}]$ –	матриця похідних функцій форми скінченного елемента за координатами або матриця градієнтів;
C_{ijkl} –	компоненти тензора 4-го рангу пружних констант ізотропного матеріалу, Па;
$[D]$ –	матриця фізичних властивостей матеріалу;
E –	модуль пружності під час розтягу, Па;
$\mathbf{e}_i, \mathbf{e}^k$ –	коваріантний і контраваріантний векторний базис, відповідно;
F^i –	компоненти вектора густини масової сили, Н/кг;
F_s –	запас міцності матеріалу;
$\{F\}$ –	вільний член СЛАР;
$\mathbf{f}$ –	вектор об'ємних сил, наприклад, гравітаційних, Па;
$\{f^{(e)}\}$ –	вектор вільних членів скінченного елемента;
$\{G\}$ –	вектор об'ємних сил скінченного елемента, Н/м ³ ;
$[J]$ –	матриця Якобі;
$[K]$ –	матриця СЛАР;
$[k^{(e)}]$ –	матриця жорсткості скінченного елемента;
$[k_\alpha^{(e)}]$ –	матриця жорсткості скінченного елемента, що пов'язана із зовнішнім конвективним теплообміном;
$[k_\lambda^{(e)}]$ –	матриця жорсткості скінченного елемента, що пов'язана з теплопровідністю;
ℓ –	довжина сторони плоского скінченного елемента, м;
$[N^{(e)}]$ –	матриця функцій форми скінченного елемента;
$\mathbf{n}$ –	вектор зовнішньої нормалі до поверхні тіла;
$\{P\}$ –	вектор-стовпець вузлових сил скінченного елемента, Н;
$\mathbf{p}$ –	вектор зовнішньої сили, Па;
p –	тиск, Па;
p^i –	компоненти вектор зовнішніх зусиль, Па;
$\{p\}$ –	вектор поверхневого навантаження скінченного елемента, Па;
q –	густина теплового потоку, Вт/м ² ;
$\mathbf{q}$ –	вектор густини теплового потоку, Вт/м ² ;
$[q^{(e)}]$ –	матриця складових густини теплового потоку скінченного елемента, Вт/м ² ;
q_v –	густина внутрішнього джерела теплоти, Вт/м ³ ;
r –	радіус, м;

r, z, θ –	циліндричні координати (радіус, апліката та азимутальний кут);
$\bar{r}$ –	радіус центра маси скінченного елемента, м;
S –	площа, м ² ;
T –	абсолютна температура, К;
$\{T^{(e)}\}$ –	вектор температур скінченного елемента, К;
t –	товщина скінченного елемента, м;
$\{U\}$ –	вектор невідомих вузлових значень складових переміщень, м;
u –	компонента швидкості, м/с;
$\mathbf{u}$ –	вектор переміщень, м;
$u^i, i = \overline{1,3}$ –	компоненти вектора переміщень, м;
V –	об'єм, м ³ ;
v –	компонента швидкості, м/с;
w –	вага квадратурної формули Гауса;
X –	компонента об'ємної сили, Н/м ³ ;
x_1, x_2, x_3 –	декартові координати, м;
$\mathbf{x}$ –	радіус-вектор декартової системи координат (для $i = 1, 2$ маємо двовимірну систему координат (x^1, x^2) , а для $i = 1, 2, 3$ – тривимірну (x^1, x^2, x^3)), м;
Y –	компонента об'ємної сили, Н/м ³ ;
Z –	компонента об'ємної сили, Н/м ³ ;
z –	апліката, м;
α –	коефіцієнт тепловіддачі, Вт/(м ² ·К);
β –	коефіцієнт лінійного температурного розширення, К ⁻¹ ;
χ –	повна потенціальна енергія, Дж;
$\chi(T)$ –	функціонал рівняння (2.14);
ΔT –	різниця температур, К;
δ_{ij} –	символ Кронекера;
$\hat{\varepsilon}$ –	тензор сумарних пружних і температурних деформацій 2-го рангу;
$\hat{\varepsilon}^e$ –	тензор пружних деформацій 2-го рангу;
$\hat{\varepsilon}^T$ –	тензор температурних деформацій 2-го рангу;
ε_{ij} –	компоненти тензора деформацій;
λ –	теплопровідність середовища (тіла), Вт/(м·К); коефіцієнт Ламе, Па;
μ –	коефіцієнт Ламе, Па; динамічна в'язкість, Па·с;
ν –	коефіцієнт Пуасона;
π –	число Пі;
ρ –	густина, кг/м ³ ;

$\hat{\sigma}$ –	тензор напружень 2-го рангу, Па;
σ_{eqvM} –	еквівалентне напруження за Мізесом, Па;
$[\sigma_T]$ –	границя плинності матеріалу, Па;
$\sigma_i, i = 1, 2, 3$ –	компоненти вектора головних напружень, Па;
σ^* –	коефіцієнт напруження;
Ω –	розрахункова область;
ξ_i –	вузли квадратурної формули Гауса.

Основні індекси

0 –	стосується початкового стану;
b –	стосується границі тіла;
(e) –	стосується скінченного елемента;
$inlet$ –	стосується вхідного перетину;
n –	стосується нормалі;
su –	стосується поверхні симетрії;
u –	стосується переміщення;
Σ –	стосується сумарного значення;
p –	стосується рідини.

Інші символи

«+», «–» –	означає, відповідно, праворуч і ліворуч від границі Γ ;
$\det$ –	детермінант;
Δ –	оператор Лапласа;
∇ –	оператор Гамільтона;
$\cdot$ –	оператор скалярного добутку векторних величин;
$:$ –	оператор подвійного скалярного добутку;
$\vee$ –	логічне «або».

Основні скорочення

ГУ –	граничні умови;
МСЕ –	метод скінченних елементів;
МСС –	механіка суцільних середовищ;
НДС –	напружено-деформований стан;
ПДС –	плоско-деформований стан;
ПНС –	плоско-напружений стан;
СЕ –	скінченний елемент;
СЛАР –	система лінійних алгебричних рівнянь.

1. МАТЕМАТИЧНЕ ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧ МЕХАНІКИ СУЦІЛЬНИХ СЕРЕДОВИЩ

1.1. Стаціонарна теплопровідність з внутрішнім джерелом теплоти

1.1.1. Плоска і тривимірна задачі

Рівняння лінійної стаціонарної теплопровідності з внутрішнім джерелом теплоти для ізотропного середовища можна записати у вигляді [1, 2]

$$\Delta T(\mathbf{x}) + \frac{q_v}{\lambda} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (1.1)$$

де $\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i$ – радіус-вектор декартової системи координат (для $i=1,2$ маємо двовимірну систему координат (x^1, x^2) , а для $i=1,2,3$ – тривимірну (x^1, x^2, x^3)), м; $\Delta = \nabla^2$ – оператор Лапласа; $\nabla = \mathbf{e}^k \nabla_k \equiv \mathbf{e}^k \frac{\partial}{\partial x^k}$, – оператор Гамільтона (оператор градієнта); $\mathbf{e}_i, \mathbf{e}^k$ – коваріантний і контраваріантний векторний базис, відповідно; T – температура, К; q_v – густина внутрішнього джерела теплоти, Вт/м³; λ – теплопровідність середовища (тіла), Вт/(м·К); Ω – розрахункова область.

У літературі рівняння (1.1) у вигляді $\Delta u - b = 0$ або $\nabla^2 u - b = 0$ (де u – деякий потенціал, b – джерельний член) також отримало назву рівняння Пуассона.

Граничні умови (ГУ) для рівняння (1.1) можуть включати ГУ трьох родів:

- I роду – задана температура на границі тіла T_b

$$T = T_b; \quad (1.2)$$

- II роду – задана нормальна складова вектора густини теплового потоку

$$\mathbf{n} \cdot (-\lambda \nabla T) = q_n, \quad (1.3)$$

де q_n – нормальна складова вектора густини теплового потоку $\mathbf{q} = -\lambda \nabla T$, що визначається законом Фур'є, Вт/м²; $\mathbf{n}$ – вектор зовнішньої нормалі до поверхні тіла;

- III роду – задані конвективні умови теплообміну (закон Ньютона-Ріхмана)

$$\mathbf{n} \cdot (-\lambda \nabla T) = \alpha(T - T_p), \quad (1.4)$$

де α – коефіцієнт тепловіддачі, Вт/(м²·К); T_p – температура оточуючого середовища, К.

Система рівнянь (1.1)–(1.4) є повним формулюванням стаціонарної задачі теплопровідності ізотропного середовища.

1.1.2. Вісесиметрична задача

У вісесиметричних задачах вважається, що можна вибрати циліндричну систему координат, у якій суттєвими аргументами шуканих функцій будуть тільки координати r, z , а кутова координата θ несуттєва. Всі рівняння й формули, що дають рішення, будуть інваріантні відносно поворотів на будь-який кут навколо осі z .

Диференціальне рівняння стаціонарної теплопровідності у разі вісесиметричної геометрії має вигляд [1, 2]

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{q_v}{\lambda} = 0, \quad (1.5)$$

де T – температура, К; r – радіус, м; z – апліката, м; q_v – густина внутрішнього джерела теплоти, Вт/м³; λ – теплопровідність середовища (тіла), Вт/(м·К).

На осі симетрії для $r = 0$ розглядаються адіабатні ГУ (1.6), а на решті границь – ГУ типу (1.2)–(1.4).

$$\frac{\partial T}{\partial r} = 0, \quad (1.6)$$

1.2. Статична пружність і незв'язана термопружність

1.2.1. Задача плоско-деформованого стану

У разі плоско-деформованого стану (ПДС) або плоскої деформації за визначенням маємо [3–5], що

$$\varepsilon_{33} = 0, \quad \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0, \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial u^1}{\partial x^3} = \frac{\partial u^2}{\partial x^3} = u^3 = 0,$$

де ε_{ij} , $i, j = \overline{1,3}$ – компоненти тензора деформацій; u^i , $i = \overline{1,3}$ – компоненти вектора переміщень, м.

Співвідношення закону Гука ізотропного середовища, записані через деформації й переміщення, набувають вигляду

$$\begin{cases} \sigma^{11} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[\varepsilon_{11} + \frac{\nu}{1-\nu} \varepsilon_{22} \right]; \\ \sigma^{22} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[\frac{\nu}{1-\nu} \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} \right]; \\ \sigma^{12} = \frac{E}{2(1+\nu)} \varepsilon_{12}, \end{cases} \quad (1.8)$$

де E – модуль пружності, Па; ν – коефіцієнт Пуасона; $\sigma^{33} = \nu(\sigma^{11} + \sigma^{22})$.

Тензор напружень за плоско-деформованого стану має вигляд

$$\hat{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma^{11} & \sigma^{12} & 0 \\ \sigma^{12} & \sigma^{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^{33} \end{pmatrix}. \quad (1.9)$$

За температурного навантаження, які беруться як початкові (тобто розглядається незв'язана задача термопружності), співвідношення закону Гука для ПДС набувають вигляду

$$\begin{cases} \varepsilon_{11}^e = \varepsilon_{11} - \beta \Delta T \delta_{11}; \\ \varepsilon_{22}^e = \varepsilon_{22} - \beta \Delta T \delta_{22}; \\ \varepsilon_{33}^e = -\beta \Delta T \delta_{33}; \\ \varepsilon_{12}^e = \varepsilon_{12} = \varepsilon_{21}; \end{cases} \quad (1.10)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma^{11} &= \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[\varepsilon_{11}^e + \frac{\nu}{1-\nu} \varepsilon_{22}^e + \frac{\nu}{1-\nu} \varepsilon_{33}^e \right]; \\ \sigma^{22} &= \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[\frac{\nu}{1-\nu} \varepsilon_{11}^e + \varepsilon_{22}^e + \frac{\nu}{1-\nu} \varepsilon_{33}^e \right]; \\ \sigma^{33} &= \nu(\sigma^{11} + \sigma^{22}) + \frac{E(1-\nu)\varepsilon_{33}^e}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left(1 - \frac{2\nu}{1-\nu} \right); \\ \sigma^{12} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \varepsilon_{12}^e, \end{aligned} \right.$$

де β – коефіцієнт лінійного температурного розширення, K^{-1} ; ΔT – перепад температур (температурне навантаження), K ; $\hat{\varepsilon}_0 = \beta \Delta T \delta_{ij}, (ij, 1, 2, 3)$ – тензор початкових температурних деформацій; $\hat{\varepsilon}$ – тензор сумарних пружних і температурних деформацій; $\hat{\varepsilon}^e = \hat{\varepsilon} - \hat{\varepsilon}_0$ або $\hat{\varepsilon}^e = \hat{\varepsilon} - \hat{\varepsilon}^T$ – тензор пружних деформацій; δ_{ij} – символ Кронекера.

У (1.10) і далі температурне навантаження може бути як сталою величиною, так і залежати від координат, тобто отримане із розв’язання задач теплопровідності (див. п. 1.1).

Рівняння рівноваги, записані через напруження, мають вигляд

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \sigma^{11}}{\partial x^1} + \frac{\partial \sigma^{12}}{\partial x^2} + \rho F^1 &= 0; \\ \frac{\partial \sigma^{12}}{\partial x^1} + \frac{\partial \sigma^{22}}{\partial x^2} + \rho F^2 &= 0, \end{aligned} \right. \quad (1.11)$$

де ρ – густина, $кг/м^3$; F^i , $(i=1,2)$ – компоненти вектора густини масової сили, $Н/кг$; ρF^i , $i=1,2$ – компоненти об’ємної сили, $Н/м^3$.

Для замикання системи диференціальних рівнянь плоскодеформованого стану треба до них додати граничні умови. Граничні умови включають умови взаємодії тіла із зовнішнім середовищем на протязі всього процесу, який досліджується (тобто описують актуальний стан середовища). До них відносяться:

- умови типу Неймана (задано зовнішнє зусилля – навантаження тіла)

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma^{11} n_1 + \sigma^{12} n_2 &= p^1; \\ \sigma^{12} n_1 + \sigma^{22} n_2 &= p^2, \end{aligned} \right. \quad (1.12)$$

де n_1, n_2 – компоненти вектора зовнішньої нормалі до поверхні тіла;
 p^1, p^2 – компоненти вектора зовнішніх зусиль, Па;
 – умови Дирихле (задано закріплення тіла, хоча б одній точці поверхні тіла)

$$\begin{cases} u^1 = 0; \\ u^2 = 0, \end{cases} \quad (1.13)$$

де u^1, u^2 – компоненти вектора переміщень, м;
 – умови симетрії в переміщеннях

$$n_1 u^1 + n_2 u^2 = 0. \quad (1.14)$$

Система рівнянь (1.7)–(1.14) є повним формулюванням задачі плоско-деформованого стану ізотропного середовища.

1.2.2. Задача плоско-напруженого стану

У разі плоско-напруженого стану (ПНС) за визначенням беруть [3–5]

$$\sigma^{33} = 0, \quad \sigma^{13} = \sigma^{23} = 0. \quad (1.15)$$

Закон Гука в наближенні ізотропного середовища для складової тензора деформації ε_{33} набуває вигляду

$$\varepsilon_{33} = -\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}), \quad (1.16)$$

а для компонент тензора напружень

$$\begin{cases} \sigma^{11} = \frac{E}{1-\nu^2}[\varepsilon_{11} + \nu\varepsilon_{22}]; \\ \sigma^{22} = \frac{E}{1-\nu^2}[\nu\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}]; \\ \sigma^{12} = \frac{E}{2(1+\nu)}\varepsilon_{12}. \end{cases} \quad (1.17)$$

Тензор напружень за плоско-напруженого стану

$$\hat{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma^{11} & \sigma^{12} \\ \sigma^{12} & \sigma^{22} \end{pmatrix}. \quad (1.18)$$

За температурних навантажень, які беруться як початкові, співвідношення закону Гука ізотропного середовища для ПНС набувають вигляду

$$\begin{cases} \varepsilon_{11}^e = \varepsilon_{11} - \beta \Delta T \delta_{11}; \\ \varepsilon_{22}^e = \varepsilon_{22} - \beta \Delta T \delta_{22}; \\ \varepsilon_{33}^e = \varepsilon_{33}; \\ \varepsilon_{12}^e = \varepsilon_{12} = \varepsilon_{21}; \end{cases} \quad (1.19)$$

$$\begin{cases} \sigma^{11} = \frac{E}{1-\nu^2} [\varepsilon_{11}^e + \nu \varepsilon_{22}^e] \\ \sigma^{22} = \frac{E}{1-\nu^2} [\nu \varepsilon_{11}^e + \varepsilon_{22}^e] \\ \sigma^{12} = \frac{E}{2(1+\nu)} \varepsilon_{12}^e, \end{cases}$$

де β – коефіцієнт лінійного температурного розширення, K^{-1} ; ΔT – перепад температур (температурне навантаження), K ; $\hat{\varepsilon}_0 = \bar{\beta} \Delta T \delta_{ij}, (ij, 1, 2, 3)$ – тензор початкових температурних деформацій; $\hat{\varepsilon}$ – тензор сумарних пружних і температурних деформацій; $\hat{\varepsilon}^e = \hat{\varepsilon} - \hat{\varepsilon}_0$ або $\hat{\varepsilon}^e = \hat{\varepsilon} - \hat{\varepsilon}^T$ – тензор пружних деформацій.

Рівняння рівноваги для задачі плоско-напруженого стану записуються так само як і для задачі плоско деформованого стану (1.11).

Для замикання системи диференціальних рівнянь плоско-напруженого стану треба до них додати граничні умови. Тоді система рівнянь (1.11), (1.15)–(1.17), (1.19) разом з граничними умовами (1.12)–(1.14) є повним формулюванням задачі плоско-напруженого стану середовища.

1.2.3. Вісесиметрична задача

Плоскопаралельні і вісесиметричні рухи є прикладами, коли суттєве значення мають тільки дві геометричні координати.

Багато проблем міцності та руху тіл обертання, наприклад, задачі про труби, баки, спеціальні оболонки та ін. або задачі про поступальний рух рідин та газів всередині тіл обертання вздовж осі симетрії, або їх обертання відносно осі симетрії і багато інших задач, розглядаються в рамках теорії руху суцільних середовищ з осьовою симетрією.

Система диференціальних рівнянь рівноваги для вісесиметричного напруженого стану має вигляд [3, 4]

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma^{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma^{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma^{rr} - \sigma^{\theta\theta}}{r} + \rho F^r = 0; \\ \frac{\partial \sigma^{rz}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma^{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma^{rz}}{r} + \rho F^z = 0, \end{cases} \quad (1.20)$$

де r, z, θ – циліндричні координати (радіус, апліката та азимутальний кут).

Співвідношення закону Гука для ізотропного середовища, записані через деформації, набувають вигляду

$$\begin{cases} \sigma^{rr} = \frac{E}{1+\nu} \left[\frac{\nu}{(1-2\nu)} (\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{zz} + \varepsilon_{\theta\theta}) + \varepsilon_{rr} \right]; \\ \sigma^{zz} = \frac{E}{1+\nu} \left[\frac{\nu}{(1-2\nu)} (\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{zz} + \varepsilon_{\theta\theta}) + \varepsilon_{zz} \right]; \\ \sigma^{\theta\theta} = \frac{E}{1+\nu} \left[\frac{\nu}{(1-2\nu)} (\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{zz} + \varepsilon_{\theta\theta}) + \varepsilon_{\theta\theta} \right]; \\ \sigma^{rz} = \frac{E}{2(1+\nu)} \varepsilon_{rz}, \end{cases} \quad (1.21)$$

де E – модуль пружності, Па; ν – коефіцієнт Пуасона.

Тензор напружень за вісесиметричного напруженого стану

$$\hat{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma^{rr} & \sigma^{rz} & 0 \\ \sigma^{rz} & \sigma^{zz} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^{\theta\theta} \end{pmatrix}. \quad (1.22)$$

За температурних навантажень, які беруться як початкові, співвідношення для пружних деформацій і закону Гука для вісесиметричного напруженого стану набувають вигляду

$$\begin{cases} \varepsilon_{rr}^e = \varepsilon_{rr} - \varepsilon_{rr}^0 = \varepsilon_{rr} - \beta \Delta T \delta_{rr}; \\ \varepsilon_{zz}^e = \varepsilon_{zz} - \varepsilon_{zz}^0 = \varepsilon_{zz} - \beta \Delta T \delta_{zz}; \\ \varepsilon_{\theta\theta}^e = -\varepsilon_{\theta\theta}^0 = -\beta \Delta T \delta_{\theta\theta}; \\ \varepsilon_{rz}^e = \varepsilon_{rz} - 0 = \varepsilon_{rz}; \end{cases} \quad (1.23)$$

$$\begin{cases} \sigma^{rr} = \frac{E}{1+\nu} \left[\frac{\nu}{(1-2\nu)} (\varepsilon_{rr}^e + \varepsilon_{zz}^e + \varepsilon_{\theta\theta}^e) + \varepsilon_{rr}^e \right] - \frac{E\beta\Delta T}{2(1+\nu)}; \\ \sigma^{zz} = \frac{E}{1+\nu} \left[\frac{\nu}{(1-2\nu)} (\varepsilon_{rr}^e + \varepsilon_{zz}^e + \varepsilon_{\theta\theta}^e) + \varepsilon_{zz}^e \right] - \frac{E\beta\Delta T}{2(1+\nu)}; \\ \sigma^{\theta\theta} = \frac{E}{1+\nu} \left[\frac{\nu}{(1-2\nu)} (\varepsilon_{rr}^e + \varepsilon_{zz}^e + \varepsilon_{\theta\theta}^e) + \varepsilon_{\theta\theta}^e \right] - \frac{E\beta\Delta T}{2(1+\nu)}; \\ \sigma^{rz} = \frac{E}{2(1+\nu)} \varepsilon_{rz}, \end{cases}$$

де β – коефіцієнт лінійного температурного розширення, K^{-1} ; ΔT – перепад температур (температурне навантаження), K ; $\hat{\varepsilon}_0 = \beta\Delta T\delta_{ij}$, $(ij, 1, 2, 3)$ – тензор початкових температурних деформацій; $\hat{\varepsilon}$ – тензор сумарних пружних і температурних деформацій; $\hat{\varepsilon}^e = \hat{\varepsilon} - \hat{\varepsilon}_0$ – тензор пружних деформацій.

До граничних умов вісесиметричної задачі відносяться:

- умови на осі симетрії $r = 0$

$$\nabla u^r = 0, \quad (1.24)$$

де ∇ – оператор Гамільтона; u^r – радіальна компонента вектора переміщень;

- умови типу Неймана (задано зовнішнє зусилля – навантаження тіла)

$$\begin{cases} \sigma^{rr} n_r + \sigma^{rz} n_z = p^r; \\ \sigma^{rz} n_r + \sigma^{zz} n_z = p^z, \end{cases} \quad (1.25)$$

де n_r, n_z – компоненти вектора зовнішньої нормалі до поверхні тіла;

p^r, p^z – компоненти вектора зовнішніх зусиль;

- умови Дирихле (задано закріплення тіла по координаті z , хоча б одній точці тіла)

$$u^z = 0, \quad (1.26)$$

де u^z – вертикальна компонента вектора переміщень.

1.2.4. Тривимірна задача напружено-деформованого стану

У загальному разі математичне формулювання задачі статичної пружності (або напружено-деформованого стану) можна представити у векторній фо-

рмі, що включає рівняння руху і рівноваги, геометричне рівняння для тензору малих деформацій та фізичне рівняння у вигляді узагальненого закону Гука [3–5]:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \hat{\sigma} + \mathbf{f} = 0; \\ \hat{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \nabla); \\ \hat{\sigma} = \hat{C}^4 : \hat{\varepsilon}, \end{cases} \quad (1.27)$$

де $\nabla = \frac{\partial}{\partial x_i}, (i = 1, 2, 3)$ – оператор Гамільтона, м^{-1} ; x_1, x_2, x_3 – декартові координати, м ; $\cdot$ – оператор скалярного добутку вектора на тензор; $\hat{\sigma}$ – симетричний тензор)¹ напружень 2-го рангу, Па; $\mathbf{f}$ – вектор об’ємних сил, наприклад, гравітаційних, Па; $\hat{\varepsilon}$ – симетричний тензор 2-го рангу пружних деформацій Коші;

$\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ – вектор переміщень, м ; $\mathbf{u} \nabla \equiv (\nabla \mathbf{u})^T$;

$C_{ijkl} = \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + \lambda\delta_{ij}\delta_{kl}$ – компоненти тензора 4-го рангу пружних властивостей ізотропного матеріалу, що зазвичай справедливо для конструкторських розрахунків, Па; $:$ – оператор подвійного скалярного добутку;

$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$ і $\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ – коефіцієнти Ламе, Па;

E – модуль пружності під час розтягу, Па; ν – коефіцієнт Пуасона;

$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j; \\ 0 & \text{при } i \neq j, \end{cases}$ – символ Кронекера.

У разі термопружної задачі для ізотропного середовища узагальнений закон Гука набуває дещо іншого вигляду

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}(\varepsilon_{ij}^e - \varepsilon_{ij}^T), \quad (1.28)$$

де C^{ijkl} – компоненти тензора 4-го рангу пружності (1.27), Па; ε_{ij}^e – компоненти тензора малих пружних деформацій Коші (1.27); $\varepsilon_{ij}^T = \beta(T - T_0)\delta_{ij}$ – компоненти тензора температурних деформацій; β – коефіцієнт лінійного темпера-

¹ Тензором називається геометрична величина, яка має n^r компонент, де n – розмірність простору, r – ранг тензора, і може бути представлений у вигляді $\hat{\sigma} = \sigma_{ij}$ – тензор 2-го рангу, (тут знак $\wedge$ вказує на те, що це тензор 2-го рангу).

турного розширення матеріалу, K^{-1} ; T_0 і T – початкова і поточна температура тіла, відповідно, K ; δ_{ij} – символ Кронекера.

Для однозначності системи диференціальних рівнянь (1.27) треба лише записати граничні умови. Оскільки задача стаціонарна, то початкові умови не використовуються. Винятком слугує температура при врахуванні температурного навантаження у формулюванні задачі (1.28), яка може бути задана як різниця $T - T_0$ для визначення тензора температурної деформації $\varepsilon_{ij}^T = \beta(T - T_0)\delta_{ij}$.

Запишемо граничні умови для (1.27):

– переміщення або защемлення (хоча б в одній точці на поверхні тіла)

$$\mathbf{u}|_{S_u} = 0, \quad (1.29)$$

де S_u – поверхня (або точка поверхні), на якій задано переміщення;

– симетрії

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}|_{S_{su}} = 0, \quad (1.30)$$

де $\mathbf{n} = n_i$ – вектор нормалі до поверхні; S_{su} – поверхня симетрії тіла;

– зовнішнього зусилля

$$\hat{\sigma} \cdot \mathbf{n}|_{S_p} = \mathbf{p}, \quad (1.31)$$

де $\mathbf{p} = p^i$ – вектор зовнішньої сили, що діє на поверхні S_p , Па;

– зовнішнього тиску

$$(\hat{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n}|_{S_p} = p, \quad (1.32)$$

де p – зовнішній тиск, який задано на поверхні S_p , Па.

Під час розв’язання незв’язаної задачі термопружності спочатку окремо від механічної задачі (1.27)–(1.32) визначається температурне поле $T(\mathbf{x})$ із розв’язання задачі теплопровідності, наприклад, стаціонарної (1.1)–(1.4), а вже потім розв’язується задача статичної пружності. При цьому тензор температурної деформації визначається співвідношенням

$$\varepsilon_{ij}^T = \beta(T(\mathbf{x}) - T_0)\delta_{ij}. \quad (1.33)$$

1.2.5. Співвідношення для визначення запасу міцності конструкції

Запас міцності F_s пластичних матеріалів визначається за формулою [6]

$$F_s = \frac{[\sigma_T]}{\sigma_{\text{eqvM}}}, \quad (1.34)$$

де $[\sigma_T]$ – границя плинності матеріалу, Па;

$\sigma_{\text{eqvM}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{13}^2)}$ – еквівалентне напруження за Мізесом, Па; $\sigma_{ij}, i, j = 1, 2, 3$ – компоненти тензора напружень, Па.

Еквівалентне напруження за Мізесом також можна визначити через головні напруження

$$\sigma_{\text{eqvM}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}, \quad (1.35)$$

де $\sigma_i, i = 1, 2, 3$ ($\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$) – компоненти вектора головних напружень, Па.

Обернена величина до запасу міцності пластичних матеріалів називається коефіцієнтом напруження σ^* і визначається за формулою

$$\sigma^* = \frac{1}{F_s} = \frac{\sigma_{\text{eqvM}}}{[\sigma_T]}. \quad (1.36)$$

Запас міцності F_s крихких матеріалів визначається за формулою

$$F_s = \left[\frac{\sigma_1}{[\sigma_+]} + \frac{\sigma_3}{[\sigma_-]} \right]^{-1}, \quad (1.37)$$

де σ_1, σ_3 – компоненти головних напружень ($\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$), Па; $[\sigma_+], [\sigma_-]$ – відповідно межа міцності на розтяг і стискання, Па.

Обернена величина до запасу міцності крихких матеріалів також називається коефіцієнтом напруження σ^* і визначається за формулою

$$\sigma^* = \frac{\sigma_1}{[\sigma_+]} + \frac{\sigma_3}{[\sigma_-]}, \quad (1.38)$$

Міцність конструкції за розглянутими критеріями забезпечується за умови виконання нерівностей:

$$F_s > 1, \quad (1.39)$$

$$\sigma^* < 1. \quad (1.40)$$

1.3. Стаціонарний рух в'язкої рідини

Спочатку розглянемо випадок плоскої усталеної течії в'язкої нестисливої рідини в каналі без врахування конвективних (інерційних) членів [7]. Невідомими в такій задачі є тиск p (Па) і компоненти швидкості u і v (м/с) у напрямках x і y (м), що зв'язані між собою двома рівняннями рівноваги (рівняннями Стокса, що отримані з рівнянь Нав'є-Стокса [1–3]) та рівнянням нерозривності, яке дає третє співвідношення між цими трьома величинами:

$$\begin{cases} X - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 0; \\ Y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) = 0; \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \end{cases} \quad (1.41)$$

де X, Y – компоненти об'ємної сили, Н/м³; μ – динамічна в'язкість, Па·с.

Запишемо граничні умови для (1.41):

- на твердих стінках каналу задаються умови прилипання для швидкості та нульовий нормальний градієнт тиску

$$\begin{cases} u = 0; \\ v = 0; \\ \mathbf{n} \cdot \nabla p = 0, \end{cases} \quad (1.42)$$

де $\mathbf{n}$ – вектор зовнішньої нормалі до поверхні каналу;

- у вхідному перетині каналу задаються нормальна компонента швидкості рідини та значення тиску

$$\begin{cases} u_n = u_{inlet}; \\ p = p_{inlet}; \end{cases} \quad (1.43)$$

– у відхідному перетині каналу задається нульове значення тиску

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial n} = 0; \\ \frac{\partial v}{\partial n} = 0; \\ p = 0 \vee \frac{\partial p}{\partial n} = 0, \end{cases} \quad (1.44)$$

де $\frac{\partial u}{\partial n}, \frac{\partial v}{\partial n}$ – нормальні похідні компонент швидкості у відхідному перетині, с^{-1} ;

$\frac{\partial p}{\partial n}$ – нормальний градієнт тиску у відхідному перетині, Па/м .

Тепер розглянемо випадок вісесиметричної усталеної течії в'язкої нести-
сливої рідини в циліндричному каналі, який описується системою рівнянь по-
дібною до плоскої течії (1.41):

$$\begin{cases} R - \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\mu r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0; \\ Z - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\mu r \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0; \\ \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \end{cases} \quad (1.45)$$

де R, Z – компоненти об'ємної сили, Н/м^3 ; p – тиск, Па ; r, z – циліндричні
координати, м ; μ – динамічна в'язкість, $\text{Па}\cdot\text{с}$; u, v – компоненти вектора шви-
дкості по радіусу і осі симетрії каналу, відповідно, м/с .

Граничні умови для (1.45) є такими

– на осі симетрії

$$\begin{cases} u = 0; \\ \frac{\partial v}{\partial n} = 0; \\ \frac{\partial p}{\partial n} = 0, \end{cases} \quad (1.46)$$

де $\frac{\partial v}{\partial n}$ – нормальна похідна компоненти швидкості в напрямку осі z , с^{-1} ;

$\frac{\partial p}{\partial n}$ – нормальний градієнт тиску, Па/м .

– решта ГУ аналогічні до (1.41) і включають (1.42)–(1.44).

Запитання для самоконтролю

1. Оператор Гамільтона й Лапласа.
2. Поняття градієнта температури й густини теплового потоку.
3. Властивості ізотропного середовища.
4. Фізичний зміст температури й теплопровідності.
5. Фізичний закон, на якому побудовано вивід рівняння теплопровідності.
6. Граничні умови рівняння теплопровідності.
7. Поняття об'ємної густини джерела теплоти та природа його виникнення.
8. Гіпотези, що використані під час формулювання стаціонарної вісесиметричної задачі теплопровідності.
9. Поняття переміщення, деформації й напруження.
10. Фізичний зміст модуля пружності, модуля зсуву й коефіцієнта Пуасона.
11. Фізичний закон, що зв'язує напруження й деформацію в пружно-лінійному середовищі.
12. Коефіцієнт лінійного температурного розширення та його фізичний зміст.
13. Які граничні значення коефіцієнта Пуасона відповідають абсолютно крихкому та абсолютно пружному середовищам?
14. Визначення тензора.
15. Тензор пружної деформації та його властивості. Геометричне рівняння, за яким цей тензор визначається.
16. Тензор температурної деформації і його властивості.
17. Тензор напружень і його властивості. Вектор зусиль.
18. Фізичний закон, який встановлює зв'язок між тензорами напружень і деформації в пружному середовищі.
19. Вектор об'ємної сили, що діє на середовище. Природа її виникнення.
20. Гіпотези задач ПДС і ПНС.
21. Рівняння рівноваги для задач ПДС і ПНС.
22. Формули, що визначають компоненти тензорів деформацій та напружень задач ПДС і ПНС.

23. Початкові деформації в задачах ПДС і ПНС.
24. Граничні умови плоских задач напружено-деформованого стану.
25. Гіпотези вісесиметричної задачі НДС.
26. Тензори напружень і деформацій та їх компоненти у разі вісесиметричної задачі НДС.
27. Система диференціальних рівнянь рівноваги для вісесиметричного напруженого стану.
28. Граничні умови задачі вісесиметричного напруженого стану.
29. Система рівнянь задачі статичної пружності ізотропного середовища в тривимірному формулюванні. Граничні умови.
30. Узагальнений закон Гука для ізотропного середовища. Тензор 4-го рангу пружних констант.
31. Різниця між записом закону Гука у разі пружної та термopужної задач. Що означає термін незв'язана задача?
32. Вектор головних напружень та його властивості.
33. Формули для визначення еквівалентного напруження за Мізесом.
34. Формули для визначення коефіцієнта напружень і запасу міцності конструкцій, виготовлених з пластичних матеріалів.
35. Формули для визначення коефіцієнта напружень та запасу міцності конструкцій, виготовлених з крихких матеріалів.
36. Рівняння Стокса.
37. Системи рівнянь, що описують усталену плоску та вісесиметричну в'язку течію рідини.
38. Граничні умови усталеного руху в'язкої рідини для плоского та вісесиметричного типів задач.

2. ЧИСЛОВІ МЕТОДИКИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ МЕТОДОМ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

2.1. Система дискретних рівнянь методу скінченних елементів

2.1.1. Екстремальна задача

З точки зору обчислювальної математики основна ідея методу скінченних елементів (МСЕ) полягає в тому, що мінімізація функціоналу варіаційної задачі здійснюється на сукупності функцій, кожна з яких визначена на своїй підобласті (на скінченному елементі) [7–9]. Тобто МСЕ базується на одному із варіаційних методів – методах Рітца, Бубнова [10] і належить до одного із напрямків діакоптики – загального методу дослідження складних систем за допомогою їх розчленування. При цьому довільна розрахункова область розбивається на скінченні елементи (наприклад, на довільні трикутники, чотирикутники, чотиригранники або шестигранники), всередині кожного з яких задаються деякі функції форми, які дають змогу визначити шукану функцію всередині елемента за її значеннями у вузлах, тобто в місцях стиковки скінченних елементів між собою. За координатні функції беруть функції, тотожно рівні нулю всюди, крім одного скінченного елемента, всередині якого вони є функціями форми. За невідомі коефіцієнти функціоналу, що відповідає, наприклад, рівнянню теплопровідності, беруться вузлові значення температури. Мінімізація функціоналу енергії приводить до системи дискретних алгебричних рівнянь.

Як було відзначено вище, під час застосування МСЕ використовується варіаційне формулювання задачі, яке передбачає пошук функціоналу, який відповідає початковій задачі (тобто математично еквівалентного вихідному диференціальному рівнянню), з подальшою його мінімізацією та одержанням системи дискретних рівнянь на відповідній підобласті або скінченному елементі, який є одиницею дискретизації суцільного середовища.

Шуканий функціонал у багатьох задачах механіки суцільного середовища можна інтерпретувати, зв'язуючи його з поняттям дисипації енергії. Ті самі співвідношення для функціоналу можна отримати за допомогою методів зваженої нев'язки або методу Гальоркіна.

Розглянемо основні етапи варіаційного формулювання задачі під час побудови системи дискретних рівнянь МСЕ на прикладі рівняння теплопровідності. Для цього спочатку перепишемо постановку задачі ізотропної теплопровідності (1.1)–(1.4) у тензорному вигляді

$$\frac{\partial}{\partial x^k} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x^k} \right) + q_v = 0, \quad (k = 1, 2, 3). \quad (2.1)$$

Граничні умови I роду (або Дирихле) лишаються незмінними

$$T = T_b, \quad (2.2)$$

а граничні умови II і III родів (типу Неймана) об'єднаємо в одне й запишемо у вигляді

$$n_k \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x^k} \right) + q + \alpha T = 0, \quad (k = 1, 2, 3), \quad (2.3)$$

де n_k – компоненти зовнішньої нормалі до поверхні границі суцільного середовища (тіла);

і додамо адіабатну граничну умову, яка автоматично враховується під час застосування МСЕ

$$n_k \frac{\partial T}{\partial x^k} = 0, \quad (k = 1, 2, 3). \quad (2.4)$$

ГУ (2.3) включають також ГУ (2.4), тому що (2.4) є окремим випадком (2.3).

У разі ортотропного середовища рівняння (2.1) і (2.3) набувають вигляду:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\lambda_{kk} \frac{\partial T}{\partial x^k} \right) + q_v &= 0, \quad (k = 1, 2, 3); \\ n_k \left(\lambda_{kk} \frac{\partial T}{\partial x^k} \right) + q + \alpha T &= 0, \quad (k = 1, 2, 3), \end{aligned}$$

де λ_{kk} – діагональні компоненти матриці теплопровідності ортотропного середовища, Вт/(м·К).

Для одержання шуканого функціоналу визначимо внутрішній добуток для рівняння (2.1). Для цього за вагову функцію беремо температуру T . Для пошуку відповідного функціоналу $\chi(T)$ запишемо інтеграл виду

$$\chi_V(T) = \int_V \left[\frac{\partial}{\partial x^k} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x^k} \right) T + q_v T \right] dV, \quad (k = 1, 2, 3)$$

або

$$\chi_V(T) = \int_V \left[\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_k} \right) T \right] dV + \int_V (q_v T) dV, \quad (k=1,2,3). \quad (2.5)$$

Оскільки в декартовій системі координат контраваріантні й коваріантні компоненти тензорів є еквівалентними, то у функціоналі (2.5) використані коваріантні компоненти.

Відповідно до теореми Ейлера [7, 11], необхідною й достатньою умовою для того щоб в деякій області V інтеграл виду (2.5)

$$\chi_V(T) = \int_V L(x_k, f, f_{x_k}) dV, \quad (k=1,2,3) \quad (2.6)$$

$$\text{де } L = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) T + q_v T, \quad f(x_k) = T, \quad f_{x_i} = \frac{\partial T}{\partial x_i}, \quad \partial f_{x_i} = \frac{\partial^2 T}{\partial x_i^2} \partial x_i = \frac{\partial T}{\partial x_i}, \quad (i=1,2,3);$$

набував мінімального значення, необхідно щоб невідома функція $f(x_k)$ задовольняла диференціальне рівняння

$$\frac{\partial L}{\partial T} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial L}{\partial f_{x_i}} \right), \quad (k=1,2,3) \quad (2.7)$$

у тій самій області за умови, що і $f(x_k)$ в обох умовах задовольняє однакові граничні умови (2.2)–(2.4). Таким чином, рівняння (2.7) є необхідною умовою існування екстремуму функціоналу.

Покажемо, що рівняння (2.6) еквівалентно вимогам до мінімізації функціоналу. Визначимо похідні, що входять у (2.7)

$$\frac{\partial L}{\partial T} = \frac{\partial}{\partial T} \left[\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) T + q_v T \right] = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + q_v, \quad (i=1,2,3), \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial L}{\partial f_{x_i}} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x_i^2} + q_v}{\frac{\partial T}{\partial x_i}} \right] = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} + q_v \frac{\partial x_i}{\partial T} \right] = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + q_v, \quad (i=1,2,3). \quad (2.9)$$

Після підстановки (2.8) і (2.9) у (2.7), отримуємо

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + q_v - \left[\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + q_v \right] = 0, \quad (i = 1, 2, 3), \quad (2.10)$$

що й відповідає теоремі Ейлера.

Перед виконанням мінімізації функціоналу (2.5) треба спочатку виконати інтегрування по частинах кожного з доданків підінтегрального виразу $\int_V \left[\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_k} \right) T \right] dV = \int_V \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_3} \right) \right] T dx_1 dx_2 dx_3$ за відомих формулою [11]

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Почнемо з доданку $\int_V \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_1} \right) T dx_1 dx_2 dx_3$.

Проведемо заміну змінних

$$u = T \rightarrow du = dT = \frac{\partial T}{\partial x_1} dx_1,$$

$$dv = \int_V \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_1} \right) dx_1 dx_2 dx_3 \rightarrow v = \int_S \lambda \frac{\partial T}{\partial x_1} dx_2 dx_3,$$

де S – площа поверхні тіла.

У результаті отримаємо

$$\begin{aligned} \int_V \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_1} \right) T dx_1 dx_2 dx_3 &= \int_S T \lambda \frac{\partial T}{\partial x_1} \Big|_{x_1=A}^{x_1=B} dx_2 dx_3 - \int_V \lambda \frac{\partial T}{\partial x_1} \frac{\partial T}{\partial x_1} dx_1 dx_2 dx_3 = \\ &= \int_S n_{x_1} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_1} \right) T dS - \int_V \frac{1}{2} \lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x_1} \right)^2 dV, \end{aligned}$$

де n_{x_1} – компонента зовнішньої нормалі до поверхні тіла по x_1 ; A, B – границі інтегрування по x_1 .

В останньому виразі перетворення $\int_S T \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x_1=A}^{x_1=B} dx_2 dx_3 = \int_S n_{x_1} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_1} \right) T dS$ відповідає теоремі Остроградського-Гауса $\int_V \nabla^2 \phi dV = \int_S \mathbf{n} \cdot \nabla \phi dS$ [3–5].

Аналогічні перетворення виконаємо для другого і третього доданків, у результаті чого отримаємо

$$\begin{aligned} \int_V \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_2} \right) T dx_1 dx_2 dx_3 &= \int_S T \lambda \frac{\partial T}{\partial x_2} \Big|_{x_2=C}^{x_2=D} dx_1 dx_3 - \int_V \lambda \frac{\partial T}{\partial x_2} \frac{\partial T}{\partial x_2} dx_1 dx_2 dx_3 = \\ &= \int_S n_{x_2} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_2} \right) T dS - \int_V \frac{1}{2} \lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x_2} \right)^2 dV, \\ \int_V \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_3} \right) T dx_1 dx_2 dx_3 &= \int_S T \lambda \frac{\partial T}{\partial x_3} \Big|_{x_3=E}^{x_3=F} dx_1 dx_2 - \int_V \lambda \frac{\partial T}{\partial x_3} \frac{\partial T}{\partial x_3} dx_1 dx_2 dx_3 = \\ &= \int_S n_{x_3} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_3} \right) T dS - \int_V \frac{1}{2} \lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x_3} \right)^2 dV. \end{aligned}$$

Підсумовуючи одержані вирази, в результаті отримуємо

$$\begin{aligned} \int_V \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_3} \right) \right] T dx_1 dx_2 dx_3 &= \int_S n_{x_1} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_1} \right) T dS - \\ &\int_V \frac{1}{2} \lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x_1} \right)^2 dV + \int_S n_{x_2} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_2} \right) T dS - \int_V \frac{1}{2} \lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x_2} \right)^2 dV + \\ &+ \int_S n_{x_3} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_3} \right) T dS - \int_V \frac{1}{2} \lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x_3} \right)^2 dV = \\ &= \int_S n_k \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_k} \right) T dS - \int_V \frac{1}{2} \lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x_k} \right)^2 dV, \quad (k = 1, 2, 3). \end{aligned}$$

З урахуванням q_v функціонал $\chi_V(T)$ для рівняння (2.1) за граничних умов Дирихле або І роду набуває вигляду

$$\chi_V(T) = \int_V \left[\frac{1}{2} \lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x_k} \right)^2 - q_v T \right] dV, \quad (k=1,2,3). \quad (2.11)$$

У (2.11) не враховується поверхневий інтеграл $-\int_S n_k \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_k} \right) T dS$, що має місце тільки за граничних умов типу Неймана.

Для визначення вкладу ГУ (2.3) у функціонал $\chi_V(T)$ розглянемо наступний поверхневий інтеграл

$$\chi_S(T) = \int_S \left[n_{x_k} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_k} \right) + q + \alpha T \right] T dS, \quad (2.12)$$

де S – площа поверхні тіла, на якій задано граничні умови II і III родів.

Остаточно для $\chi_S(T)$ матимемо

$$\chi_S(T) = \int_S \left[n_k \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_k} \right) T + qT + \frac{1}{2} \alpha T^2 \right] dS = \int_S n_k \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_k} \right) T dS + \int_S \left(qT + \frac{1}{2} \alpha T^2 \right) dS. \quad (2.13)$$

Об'єднуючи (2.11) і (2.13) із врахуванням доданка $-\int_S n_k \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_k} \right) T dS$, отримуємо функціонал, що задовольняє вихідну постановку задачі (2.1)–(2.4)

$$\begin{aligned} \chi(T) &= \chi_V(T) + \chi_S(T) = \int_V \left[\frac{1}{2} \lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x_k} \right)^2 - q_v T \right] dV - \\ &- \int_S n_k \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_k} \right) T dS + \int_S n_k \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_k} \right) T dS + \int_S \left(qT + \frac{1}{2} \alpha (T - T_p)^2 \right) dS = \\ &= \int_V \left[\frac{1}{2} \lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x_k} \right)^2 - q_v T \right] dV + \int_S \left(qT + \frac{1}{2} \alpha (T - T_p)^2 \right) dS, \quad (k=1,2,3), \end{aligned} \quad (2.14)$$

де T_p – температура оточуючого середовища, К.

У (2.14) зроблено заміну в ГУ III роду – замість T підставлено різницю температур $(T - T_p)$.

2.1.2. Скінченно-елементна дискретизація

Після виконання дискретизації розрахункової області можна визначити невідому функцію T у кожному скінченному елементі (СЕ), використовуючи функції форми СЕ $[N^{(e)}]$ і вузлові значення температури $\{T^{(e)}\}$ у СЕ. З використанням загальноприйнятих позначень МСЕ функцію T у СЕ можна апроксимувати за допомогою співвідношення виду

$$T = [N_i \quad N_j \quad \dots] \begin{Bmatrix} T_i \\ T_j \\ \vdots \end{Bmatrix} = [N^{(e)}] \{T^{(e)}\} \quad (2.15)$$

де (e) – означає індекс, що належить до скінченного елемента; i, j – номери вузлів СЕ.

Тепер, коли задана функція зміни температури в СЕ (2.15), можна виконати наближену мінімізацію функціоналу (2.14). Для знаходження екстремуму функціоналу треба взяти від (2.14) похідну від підінтегральних функцій за параметром, а саме за вузловими значеннями температури скінченного елемента. У результаті диференціювання (2.14) отримаємо

$$\frac{\partial \chi^{(e)}}{\partial T_i} = \int_{V^{(e)}} \left[\lambda \frac{\partial T}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial T_i} \left(\frac{\partial T}{\partial x_k} \right) - q_v \frac{\partial T}{\partial T_i} \right] dV + \int_{S^{(e)}} \left(q \frac{\partial T}{\partial T_i} + \alpha (T - T_p) \frac{\partial T}{\partial T_i} \right) dS, \quad (k = 1, 2, 3), \quad (2.16)$$

де $V^{(e)}$ – об'єм СЕ, m^3 ; $S^{(e)}$ – поверхня СЕ, на якій задано граничні умови II і III родів, m^2 .

Враховуючи те, що похідні в підінтегральних функціях (2.16) можна виразити через функції форми СЕ та її похідні, запишемо

$$\frac{\partial T}{\partial x_k} = \left[\frac{\partial N_i}{\partial x_k} \right] \{T^{(e)}\} = [B^{(e)}]^T \{T^{(e)}\}, \quad (i = \overline{1, n}, k = 1, 2, 3), \quad (2.17)$$

де n – кількість вузлів у СЕ;

$$\frac{\partial}{\partial T_i} \left(\frac{\partial T}{\partial x_k} \right) = \left[\frac{\partial N_i}{\partial x_k} \right] = [B^{(e)}]^T \{T^{(e)}\}, \quad (i = \overline{1, n}, k = 1, 2, 3), \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial T}{\partial T_i} = [N_i] = [N^{(e)}]^T, \quad (i = \overline{1, n}). \quad (2.19)$$

Враховуючи (2.17)–(2.19), функціонал (2.16) можна записати для одного СЕ у вигляді

$$\frac{\partial \chi^{(e)}}{\partial T_i} = \int_{V^{(e)}} \left[\lambda \left[\frac{\partial N_i}{\partial x_k} \right] \left[\frac{\partial N_j}{\partial x_k} \right] \{T^{(e)}\} - q_v [N_i] \right] dV + \int_{S^{(e)}} (q [N_i] + \alpha ([N_i] \{T^{(e)}\} - T_p) [N_j]) dS = 0, \quad (2.20)$$

$(i, j = \overline{1, n}, k = 1, 2, 3)$

Умова мінімуму функціоналу (2.16) задовольняється, коли $\frac{\partial \chi^{(e)}}{\partial T_i} = 0$, що і було показано у (2.20).

Тепер на підставі (2.20) можна записати систему лінійних алгебричних рівнянь (СЛАР), яка в матричній формі відносно невідомих вузлових значень температур для одного СЕ набуває вигляду

$$[k^{(e)}] \{T^{(e)}\} = \{f^{(e)}\}, \quad (2.21)$$

де $[k^{(e)}]$ – матриця жорсткості скінченного елемента; $\{f^{(e)}\}$ – вектор вільних членів скінченного елемента; $\{T^{(e)}\}$ – вектор температур скінченного елемента; індекс (e) означає, що приведені матриці і вектори відносяться до скінченного елемента з номером e .

У загальному разі матриці $[k^{(e)}]$, $\{f^{(e)}\}$ виражаються такими формулами:

$$[k^{(e)}] = \int_{V^{(e)}} [B]^T [D] [B] dV + \int_{S_2^{(e)}} \alpha [N]^T [N] dS, \quad (2.22)$$

$$\{f^{(e)}\} = - \int_{V^{(e)}} q_v [N]^T dV + \int_{S_1^{(e)}} q [N]^T dS - \int_{S_2^{(e)}} \alpha T_p [N]^T dS, \quad (2.23)$$

де $V^{(e)}$ – об'єм скінченного елемента, m^3 ; $S_1^{(e)}$ – поверхня скінченного елемента, на якій задані ГУ II роду, m^2 ; $S_2^{(e)}$ – поверхня скінченного елемента, на якій задані ГУ III роду, m^2 ; $[N]$ – вектор коефіцієнтів функцій форми скінченного елемента; $[B] = \nabla [N] = \left[\frac{\partial N_i}{\partial x_k} \right]$ – матриця похідних функцій форми за координатами;

також; $[D] = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$ – матриця теплопровідності ізотропного матеріалу (для

ортотропного матеріалу маємо, що $[D] = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{33} \end{bmatrix}$; q_v – густина внутрішнього джерела теплоти, Вт/м³; q – густина теплового потоку, Вт/м²; α – коефіцієнт тепловіддачі, Вт/(м²·К); T_p – температура оточуючого середовища, К.

Для зручності проведення розрахунків матрицю жорсткості СЕ $[k^{(e)}]$ можна розбити на дві матриці (складові), а саме матрицю, яка пов'язана з теплопровідністю $[k_\lambda^{(e)}]$ і матрицю, яка пов'язана із зовнішнім конвективним теплообміном СЕ $[k_\alpha^{(e)}]$

$$[k^{(e)}] = [k_\lambda^{(e)}] + [k_\alpha^{(e)}], \quad (2.24)$$

де $[k_\lambda^{(e)}] = \int_{V^{(e)}} [B]^T [D] [B] dV$ – складова матриці жорсткості, що пов'язана з теплопровідністю; $[k_\alpha^{(e)}] = \int_{S_2^{(e)}} \alpha [N]^T [N] dS$ – складова матриці жорсткості, що пов'язана із зовнішнім конвективним теплообміном.

У МСЕ для всієї розрахункової області, що розбита на E СЕ, глобальна матриця та вектор вільних членів СЛАР, будуються за формулами

$$[K] = \sum_{e=1}^E [k^{(e)}], \quad \{F\} = \sum_{e=1}^E \{f^{(e)}\}, \quad (2.25)$$

де E – кількість СЕ, на які розбито розрахункову область.

З врахуванням (2.25) СЛАР можна записати у векторному вигляді

$$[K]\{T\} = \{F\}, \quad (2.26)$$

де $\{T\}$ – вектор невідомих вузлових значень температури.

2.1.3. Переваги та недоліки МСЕ. Умови збіжності та оцінка точності

Головною перевагою методу скінченних елементів, наприклад, над методом скінченних різниць, є можливість розбиття на скінченні елементи розрахункової області довільної форми і, таким чином, можливості розрахунків фізичних полів у реальних об'єктах із врахуванням їх усіх конструктивних

особливостей.

До інших переваг МСЕ також належать [7]:

- простота дослідження неоднорідних та анізотропних середовищ (зокрема, коли напрямок анізотропії є змінним);
- можливість використання СЕ різної форми та розмірів для апроксимації довільних границь і для дослідження областей із сильною зміною шуканих функцій;
- граничні умови для градієнта вводяться природним чином та з більшою точністю, ніж в методах скінченних різниць;
- точність розв'язання задач можна підвищувати за рахунок використання елементів більш високих порядків без ускладнення граничних умов, чого неможливо домогтися в разі використання скінченно-різницевої апроксимації більш високого порядку.

До основних недоліків МСЕ належить залежність результатів розрахунків від побудови сітки СЕ та труднощі оцінки точності отримуваних числових результатів. Похибки МСЕ пов'язані з такими чинниками:

- похибками дискретизації, що є результатом геометричних відмінностей між границями розрахункової області (тіла) та її СЕ моделі, а також якістю отриманих СЕ в результаті дискретизації (тобто коли СЕ сильно витягнуті і мають кути близькі до 0° або 180°);
- похибками функцій форми, що обумовлюються різницею між точним розв'язком та його представленням через функції форми заданого виду;
- похибками округлення, що пов'язані з кінцевою довжиною розрядної сітки комп'ютера і великою кількістю арифметичних операцій, які виконуються в разі застосування МСЕ.

Оскільки у функціонал (2.16) входить лише перша похідна від T , то під час вибору функцій форми існує тільки потреба в задоволенні умов неперервності функції $T(x_i)$, ($i = 1, 2, 3$) [7]. Окрім того, функції форми $[N^{(e)}]$ мають бути такими, щоб будь-які перші похідні приймали всередині СЕ сталі значення за відповідного задання вузлових $\{T^{(e)}\}$. Тому для розв'язання практичних задач можна використовувати як лінійні, так і криволінійні СЕ з відповідними функціями форми.

Оскільки, МСЕ не дає можливості проведення апіорних оцінок точності розрахунків, то на практиці оцінку точності розрахунків виконують зазвичай за допомогою порівняння з точними або числовими розв'язками задач, отриманими іншими авторами. Також широкого застосування набув метод подвійного перерахунку та побудови графіків збіжності результатів розрахунків до точного розв'язку [12].

2.2. Плоска задача теплопровідності

2.2.1. Трикутні лінійні скінченні елементи

Розглянемо основні співвідношення МСЕ на прикладі трикутного лінійного СЕ (двовимірного симплекс-елемента) [7, 8] (рис. 2.1).

Матриця функцій форми СЕ (рис. 2.1)

$$[N^{(e)}] = \begin{bmatrix} N_i \\ N_j \\ N_k \end{bmatrix}, \quad (2.27)$$

де $N_i = \frac{1}{2A}[a_i + b_i x + c_i y]$ – функція форми у вузлі СЕ з номером i ;

$$\{a\} = \begin{Bmatrix} a_i \\ a_j \\ a_k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_j y_k - x_k y_j \\ x_k y_i - x_i y_k \\ x_i y_j - x_j y_i \end{Bmatrix}, \quad \{b\} = \begin{Bmatrix} b_i \\ b_j \\ b_k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} y_j - y_k \\ y_k - y_i \\ y_i - y_j \end{Bmatrix}, \quad \{c\} = \begin{Bmatrix} c_i \\ c_j \\ c_k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_k - x_j \\ x_i - x_k \\ x_j - x_i \end{Bmatrix} - \text{кое-}$$

фіцієнти функцій форми СЕ; $2A = \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix}$ – подвійна площа СЕ;

$x_i, y_i, i = \overline{1, M}$ – координати вузлів СЕ (вони також є глобальними координатами вузлів розрахункової області)².

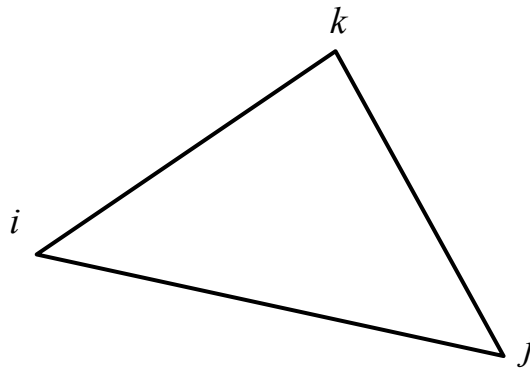


Рис. 2.1. Лінійний трикутний СЕ або двовимірний симплекс-елемент (обхід номерів вузлів здійснюється проти годинникової стрілки): $i = 1, j = 2, k = 3$ – номери вузлів СЕ

² Тут мається на увазі дві системи координат: глобальна, що стосується всієї розрахункової області, яка розбита на E СЕ, і локальна система координат, що стосується тільки певного СЕ. Також, відповідно, використовуються дві нумерації вузлів – глобальна від 1 до N (кількість вузлів у всій розрахунковій області) і локальна – від 1 до $M = 3$.

Матриця градієнтів СЕ

$$[B^{(e)}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_j}{\partial x} & \frac{\partial N_k}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_j}{\partial y} & \frac{\partial N_k}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{bmatrix}. \quad (2.28)$$

Інтеграли, на основі яких складаються рівняння, що визначають СЕ, легко обчислюються, оскільки матриці $[B]$ і $[D]$ містять тільки константи. Об'ємний інтеграл, який представляє складову матриці жорсткості, зв'язану з теплопровідністю, має вигляд

$$[k_\lambda^{(e)}] = \int_V [B]^T [D] [B] dV = [B]^T [D] [B] \int_A t dA = [B]^T [D] [B] t A, \quad (2.29)$$

де $dV = t dA$, м^3 ; t – товщина трикутного СЕ, м ; A – площа СЕ, м^2 ; $[D] = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ – матриця теплопровідності, $\text{Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$.

Поверхневий інтеграл, що пов'язаний із зовнішнім конвективним теплообміном СЕ і є доданком до матриці СЕ визначається співвідношенням

$$[k_\alpha^{(e)}] = \int_{S_2^{(e)}} \alpha [N]^T [N] dS = \int_\ell \alpha [N]^T [N] t d\ell, \quad (2.30)$$

де $dS = t d\ell$, м^2 ; ℓ – довжина сторони СЕ, на якій задано конвективні умови теплообміну, м ; t – товщина СЕ, м .

Для кожної із сторін СЕ, на якій задано конвективні умови, $[k_\alpha^{(e)}]$ є доданком до матриці СЕ. У результаті застосування L -координат (див. А.1) до (2.30) матимемо:

– сторона ij ($N_k = 0$)

$$[k_\alpha^{(e)}] = \int_{\ell_{ij}} \alpha [N]^T [N] t d\ell = \alpha t \int_{\ell_{ij}} \alpha \begin{bmatrix} L_1^2 & L_1 L_2 & 0 \\ L_1 L_2 & L_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} d\ell = \frac{\alpha t \ell_{ij}}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.31)$$

де $\ell_{ij} = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}$, м ;

– сторона jk ($N_i = 0$)

$$[k_{\alpha}^{(e)}] = \int_{\ell_{jk}} \alpha [N]^T [N] t d\ell = \frac{\alpha t \ell_{jk}}{6} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad (2.32)$$

де $\ell_{jk} = \sqrt{(x_k - x_j)^2 + (y_k - y_j)^2}$, м;

– сторона ki ($N_j = 0$)

$$[k_{\alpha}^{(e)}] = \int_{\ell_{ki}} \alpha [N]^T [N] t d\ell = \frac{\alpha t \ell_{ki}}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad (2.33)$$

де $\ell_{ki} = \sqrt{(x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2}$, м.

Інтеграли $\int_{S1} [N]^T q dS$ і $\int_{S2} [N]^T \alpha T_p dS$ записуються в однаковій формі

$$\int_S [N]^T dS = \int_S \begin{Bmatrix} N_i \\ N_j \\ N_k \end{Bmatrix} dS = \int_{\ell} \begin{Bmatrix} N_i \\ N_j \\ N_k \end{Bmatrix} t d\ell. \quad (2.34)$$

Тоді для сторін, де задано конвективні умови, доданки до вільного члена СЕ, застосовуючи L -координати (див. А.1), запишуться у вигляді:

– сторона ij ($N_k = 0$)

$$\int_{\ell_{ij}} \alpha T_p [N]^T t d\ell = \frac{\alpha T_p t \ell_{ij}}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}; \quad (2.35)$$

– сторона jk ($N_i = 0$)

$$\int_{\ell_{jk}} \alpha T_p [N]^T t d\ell = \frac{\alpha T_p t \ell_{jk}}{2} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}; \quad (2.36)$$

– сторона ki ($N_j = 0$)

$$\int_{\ell_{ki}} \alpha T_p [N]^T t d\ell = \frac{\alpha T_p t \ell_{ki}}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}. \quad (2.37)$$

Для сторін, де задано густину теплового потоку, доданки до вільного члена СЕ запишуться у вигляді (див. А.1.):

– сторона ij ($N_k = 0$)

$$\int_{\ell_{ij}} q [N]^T t d\ell = \frac{q t \ell_{ij}}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}; \quad (2.38)$$

– сторона jk ($N_i = 0$)

$$\int_{\ell_{jk}} q [N]^T t d\ell = \frac{q t \ell_{jk}}{2} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}; \quad (2.39)$$

– сторона ki ($N_j = 0$)

$$\int_{\ell_{ki}} q [N]^T t d\ell = \frac{q t \ell_{ki}}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}. \quad (2.40)$$

Об'ємний інтеграл від об'ємних сил (дії внутрішніх джерел теплоти) у двовимірному випадку задачі набуває вигляду $\int_V [N^{(e)}]^T q_v dV = \int_A [N^{(e)}]^T q_v t dA$, ($dV = t dA$), де t – товщина СЕ, м. Підставляючи $[N]^T$ і застосовуючи L -координати (див. А.2), отримаємо

$$\int_A q_v \begin{bmatrix} N_i \\ N_j \\ N_k \end{bmatrix} t dA = \int_A q_v \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix} t dA = \frac{q_v A t}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (2.41)$$

Наразі, всі співвідношення СЕ (2.22), (2.23) є визначеними. Глобальна матриця та вектор вільних членів СЛАР, що стосується всієї розрахункової області, в методі МСЕ будуються за формулами (2.25)

$$[K] = \sum_{e=1}^E [k^{(e)}], \quad \{F\} = \sum_{e=1}^E \{f^{(e)}\}, \quad (2.42)$$

де E – кількість СЕ, на які розбито розрахункову область.

З врахуванням (2.42) СЛАР можна записати у векторному вигляді

$$[K]\{T\} = \{F\}, \quad (2.43)$$

де $\{T\}$ – вектор невідомих вузлових значень температур, K .

За граничних умов Дирихле (або I роду), коли задана температура у вузлах (2.2), наприклад, у вузлі з номером m , СЛАР змінюється таким чином

$$\begin{aligned} K_{mm} &= 1, \quad K_{mj} = 0, \quad j = \overline{1, N}, \quad j \neq m, \quad F_m = K_{mm} T_m; \\ F_j &= F_j - K_{jm} T_m, \quad K_{jm} = 0, \quad j = \overline{1, N}, \quad j \neq m, \end{aligned} \quad (2.44)$$

де m – номер вузла, у якому задана температура; N – кількість глобальних вузлів.

Після розв'язання СЛАР (2.44) отримуємо вузлові значення температур або вектор температур у глобальних вузлах

$$\{T\} \text{ або } T_i, \quad i = \overline{1, N}. \quad (2.45)$$

Розрахунок складових густини теплового потоку в СЕ виконується за законом Фур'є (тут q_x, q_y є константами в кожному трикутному СЕ)

$$[q^{(e)}] = -\lambda [B^{(e)}] \{T^{(e)}\} = -[D] \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_i \\ T_j \\ T_k \end{Bmatrix}. \quad (2.46)$$

Визначення компонент густини теплового потоку в глобальних вузлах розрахункової області через компоненти теплового потоку в СЕ

$$\begin{cases} q_{xj} = \frac{\sum_{e=1}^n q_{xi(j)}^{(e)}}{n}; \\ q_{yj} = \frac{\sum_{e=1}^n q_{yi(j)}^{(e)}}{n}, \end{cases} \quad (2.47)$$

де (e) – номер СЕ; n – кількість елементів, що оточують вузол j ; $i(j)$ – функція, яка визначає локальні номери вузлів СЕ через глобальні.

Визначення сумарної густини теплового потоку в глобальних вузлах виконується за формулою

$$q_{\Sigma j} = \sqrt{(q_{xj})^2 + (q_{yj})^2}, j = \overline{1, N}. \quad (2.48)$$

Способи зміни матриці і вектора СЛАР за ГУ I роду (2.43). На практиці існує два можливі способи перетворення СЛАР МСЕ за наявності ГУ I роду в задачі, що розв'язується. Перший – полягає у зменшенні кількості рівнянь СЛАР на кількість вузлів, у яких задана температура. При цьому виключаються рядки і стовпці глобальної матриці жорсткості $[K]$, що відповідають вузлам із заданими температурами, а до вільного члену $\{F\}$ додаються рядки виключені з $[K]$ помножені на задані вузлові значення температури з протилежним знаком. Перевагою цього способу є зменшення кількості рівнянь СЛАР (зменшується кількість невідомих і, відповідно, розмірність системи рівнянь) на кількість відомих вузлових значень температури, а суттєвим недоліком є те, що треба стискати матрицю і вектор СЛАР, змінюючи при цьому індексацію компонент матриць. У результаті розв'язання такої СЛАР отриманий вектор температур не буде відповідати початковій індексації (нумерації) вузлів. Тобто, треба виконати зворотне перетворення.

Другий спосіб не змінює кількості невідомих СЛАР (2.44) і, відповідно, кількості рівнянь і полягає в наступному: на першому етапі всі коефіцієнти рядків матриці жорсткості $[K]$, що відповідають відомих температурам, прирівнюються нулю, окрім діагональних; далі відповідні компоненти вільного члену $\{F\}$ замінюються на $K_{ii}T_i$, де індекс i відповідає індексам відомих температур (тобто, заданих в ГУ I роду); на другому етапі відбувається виключення стовпців матриці жорсткості $K_{ij}, j \neq i$, що відповідають відомих темпе-

ратурам. Це здійснюється переносом членів $K_{ij}T_j, j \neq i$ у праву частину СЛАР, тобто в $\{F\}$.

Перевагою цього способу є те, що він не змінює індексації невідомих СЛАР, а недоліком те, що не зменшується кількість невідомих системи рівнянь.

Проілюструємо другий спосіб на прикладі з книги *Сегерлінда Л.* [8]. Необхідно перетворити СЛАР, якщо відомо, що $T_1 = 150$ і $T_5 = 40$:

$$\begin{array}{rrrrrrrcl} 55T_1 & -46T_2 & +4T_3 & & & & & = & 500 \\ -46T_1 & +140T_2 & -46T_3 & & & & & = & 2000 \\ 4T_1 & -46T_2 & +110T_3 & -46T_4 & +4T_5 & & & = & 1000 \\ & & -46T_3 & +142T_4 & -46T_5 & & & = & 2000 \\ & & 4T_3 & -46T_4 & +65T_5 & & & = & 900 \end{array}$$

На першому етапі прирівнюємо нулю всі коефіцієнти в 1-му і 5-му рядках, за виключенням діагональних елементів, які лишаються як коефіцієнти при невідомих. Компоненти F_1 і F_5 в $\{F\}$ замінимо відповідно на $K_{11}T_1$ і $K_{55}T_5$. У результаті отримуємо:

$$\begin{array}{rrrrrrrcl} 55T_1 & & & & & & & = & 8250 \\ -46T_1 & +140T_2 & -46T_3 & & & & & = & 2000 \\ 4T_1 & -46T_2 & +110T_3 & -46T_4 & +4T_5 & & & = & 1000 \\ & & -46T_3 & +142T_4 & -46T_5 & & & = & 2000 \\ & & & & +65T_5 & & & = & 2600 \end{array}$$

Другий етап полягає у виключенні стовпців матриці, коефіцієнти яких стоять при T_1 і T_5 . Це здійснюється переносом членів матриці (за винятком діагональних), що містять T_1 і T_5 , у праву частину СЛАР. Наприклад, компонента вектора F_2 стає рівним $2000 + 46T_1$, що дорівнює 8900. Завершуючи другий крок, одержуємо

$$\begin{array}{rrrrrrrcl} 55T_1 & & & & & & & = & 8250 \\ & +140T_2 & -46T_3 & & & & & = & 8900 \\ & -46T_2 & +110T_3 & -46T_4 & & & & = & 240 \\ & & -46T_3 & +142T_4 & & & & = & 3840 \\ & & & & +65T_5 & & & = & 2600 \end{array}$$

Проілюстрована процедура цілковито проста та легко піддається програмуванню.

2.2.2. Чотирикутні лінійні скінченні елементи

Як одиницю дискретизації розрахункової області Ω використаємо лінійний чотирикутний скінченний елемент [8], що наведений на рис. 2.2.

Об'ємні інтеграли виду $\int_{V^{(e)}} [B]^T [D] [B] dV$ і $\int_{V^{(e)}} q_v [N]^T dV$ для СЕ зображеного на рис. 2.2, що входять до (2.22), (2.23), зводяться до поверхневих і визначаються чисельно з використанням квадратурних формул Гауса виду

$$Z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f(\xi_i, \eta_j) w_i w_j, \quad (2.49)$$

де $Z = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\eta d\xi$ – загальний вид запису двократних інтегралів; w – вага квадратурної формули Гауса, $n = 2$ – кількість вузлів.

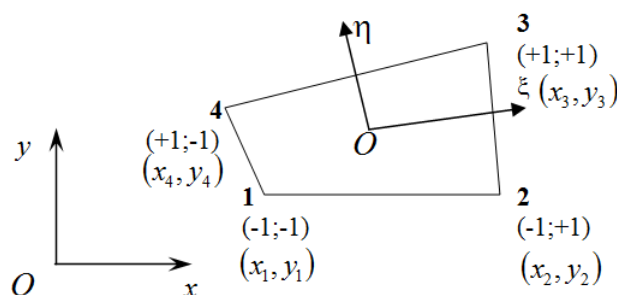


Рис. 2.2. Лінійний чотирикутний скінченний елемент з локальною системою безрозмірних координат (ξ, η) : 1, 2, 3, 4 – номери вузлів елемента; початок безрозмірних координат елемента знаходиться в центрі маси елемента; $(x_i, y_i), i = 1, 2, 3, 4$ – декартові координати вузлів СЕ

Решту інтегралів (2.22), (2.23) для СЕ, наведеного на рис. 2.2, можна визначити аналітично, про що буде показано нижче за текстом.

Отримаємо остаточні формули для визначення чотирикутного СЕ. Відповідно до рис. 2.2 транспонований вектор коефіцієнтів функцій форми скінченного елемента має вигляд

$$[N]^T = \begin{Bmatrix} \frac{(1-\xi)(1-\eta)}{4} \\ \frac{(1+\xi)(1-\eta)}{4} \\ \frac{(1+\xi)(1+\eta)}{4} \\ \frac{(1-\xi)(1+\eta)}{4} \end{Bmatrix}. \quad (2.50)$$

Матриця похідних функцій форми за координатами

$$\begin{aligned} [B] &= \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial y} \end{bmatrix} = [J]^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & \frac{\partial N_3}{\partial \xi} & \frac{\partial N_4}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & \frac{\partial N_3}{\partial \eta} & \frac{\partial N_4}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \\ &= [J]^{-1} \begin{bmatrix} \frac{-(1-\eta)}{4} & \frac{(1-\eta)}{4} & \frac{(1+\eta)}{4} & \frac{-(1+\eta)}{4} \\ \frac{-(1-\xi)}{4} & \frac{-(1+\xi)}{4} & \frac{(1+\xi)}{4} & \frac{(1-\xi)}{4} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (2.51)$$

$$\text{де } [J] = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -(1-\eta) & (1-\eta) & (1+\eta) & -(1+\eta) \\ -(1-\xi) & -(1+\xi) & (1+\xi) & (1-\xi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{bmatrix} - \text{матриця Якобі або якобі-}$$

ан переходу від безрозмірних до розмірних змінних інтегрування; $[J]^{-1}$ – обернена матриця.

Для плоского скінченного елемента (див. рис. 2.2) можна записати, що його об'єм дорівнює

$$dV = t dA, \quad (2.52)$$

де t – товщина СЕ, м; A – площа, м².

Для $t=1$ отримуємо, що складова матриці жорсткості СЕ, яка пов'язана з теплопровідністю, визначається співвідношенням

$$\begin{aligned}
[k_{\lambda}^{(e)}] &= \int_{V^{(e)}} [B]^T [D][B] dV = \int_{A^{(e)}} [B]^T [D][B] dA = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [D][B] \det[J] d\xi d\eta \approx \\
&\approx \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [B(\xi_i, \eta_j)]^T [D][B(\xi_i, \eta_j)] \det[J(\xi_i, \eta_j)] w_i w_j,
\end{aligned} \tag{2.53}$$

$$\text{де } [B(\xi_i, \eta_j)]^T = [J(\xi_i, \eta_j)]^{-1} \begin{bmatrix} \frac{-(1-\eta_i)}{4} & \frac{-(1-\xi_j)}{4} \\ \frac{(1-\eta_i)}{4} & \frac{-(1+\xi_j)}{4} \\ \frac{(1+\eta_i)}{4} & \frac{(1+\xi_j)}{4} \\ \frac{(1+\eta_i)}{4} & \frac{(1-\xi_j)}{4} \end{bmatrix}; \quad \det[J(\xi_i, \eta_j)] = [J(\xi_i, \eta_j)] \quad - \text{де-}$$

термінант матриці Якобі; $[D] = \begin{bmatrix} \lambda_{xx} & 0 \\ 0 & \lambda_{yy} \end{bmatrix}$ – матриця теплопровідності ортотропного матеріалу; ξ_i, η_j – вузли, а w_i, w_j – вага квадратурної формули Гауса.

Розглянемо послідовність операцій для визначення добутку матриць $[B]^T [D][B]$ під час обчислення (2.53):

- 1) Спочатку заповнюється матриця координат елемента $[x \ y]$ розмірністю 4×2 ;
- 2) Потім визначається матриця похідних функцій форми $[B]$ у безрозмірних координатах ξ і η розмірністю 2×4 .
- 3) Обчислюється матриця Якобі $[J]$ розмірністю 2×2 та визначається $\det[J]$.
- 4) Визначається обернена матриця Якобі $[J]^{-1}$.
- 5) Визначається матриця похідних функцій форми в розмірних координатах x і y $[B] = [J]^{-1}[B]$, розмірністю 2×4 .
- 6) Далі знаходиться добуток матриць $[B]^T [D]$. У результаті отримуємо матрицю розмірністю 4×2 .
- 7) Потім знаходимо $([B]^T [D])[B]$ і отримуємо матрицю 4×4 .
- 8) Остання операція полягає в числовому інтегруванні (2.53) за формулою (2.49).

Зважаючи на те, що $dV = t dA$, об'ємний інтеграл $\int_{V(e)} q_v [N]^T dV$, пов'язаний із внутрішнім джерелом, за умови $t = 1$ і $q_v = \text{const}$ перетворюється до виду

$$\begin{aligned} \int_{V(e)} q_v [N]^T dV &= q_v \int_{A(e)} [N]^T dA = q_v \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [N]^T \det[J] d\xi d\eta \approx \\ &\approx q_v \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [N(\xi_i, \eta_j)]^T \det[J(\xi_i, \eta_j)] w_i w_j, \end{aligned} \quad (2.54)$$

$$\text{де } [N(\xi_i, \eta_j)]^T = \begin{Bmatrix} \frac{(1-\xi_i)(1-\eta_j)}{4} \\ \frac{(1+\xi_i)(1-\eta_j)}{4} \\ \frac{(1+\xi_i)(1+\eta_j)}{4} \\ \frac{(1-\xi_i)(1+\eta_j)}{4} \end{Bmatrix}; \quad \det[J(\xi_i, \eta_j)] = [J(\xi_i, \eta_j)] - \text{детермінант матриці Якобі; } \xi_i, \eta_j - \text{вузли, а } w_i, w_j - \text{вага квадратурної формули Гауса.}$$

Далі, для визначення матриць (2.23), необхідно також обчислити поверхневі інтеграли виду

$$\int_{S_2^{(e)}} \alpha [N]^T [N] dS, \quad \int_{S_1^{(e)}} q [N]^T dS \quad \text{і} \quad \int_{S_2^{(e)}} \alpha T_p [N]^T dS. \quad (2.55)$$

Для лінійного СЕ (див. рис. 2.2) інтеграли (2.55) визначаються аналітично. Припустимо, що на другій стороні СЕ (вузли 2 і 3) має місце конвективний теплообмін. Обчислення інтегралів починаємо з визначення функцій форми для $\xi = 1$, що відповідає другій стороні елемента. Відповідно до (2.50) для $\xi = 1$ маємо

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{(1-\xi)(1-\eta)}{4} = 0, \\ N_2 &= \frac{(1+\xi)(1-\eta)}{4} = \frac{1-\eta}{2}, \\ N_3 &= \frac{(1+\xi)(1+\eta)}{4} = \frac{1+\eta}{2}, \\ N_4 &= \frac{(1-\xi)(1+\eta)}{4} = 0. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Тоді добуток $[N]^T[N]$ з урахуванням (2.56) буде дорівнювати

$$[N]^T[N] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ (1-\eta) \\ (1+\eta) \\ 0 \end{bmatrix} \frac{1}{2} [0 \quad (1-\eta) \quad (1+\eta) \quad 0] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1-\eta)^2 & 1-\eta^2 & 0 \\ 0 & 1-\eta^2 & (1+\eta)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.57)$$

У (2.57) ненульові члени тільки ті, що зв'язані зі стороною 2–3 СЕ.

Далі необхідно зв'язати диференціал dS з диференціалом змінної інтегрування $d\eta$. Диференціали dS і $d\eta$ зв'язані між собою співвідношенням

$$dS = t|J|d\eta = |J|d\eta, \quad (2.58)$$

де $t = 1$ – товщина СЕ, м; $|J|$ – якобіан, м.

Якобіан $|J|$ (матриця Якобі) переходу від безрозмірних до розмірних змінних інтегрування в (2.55) визначається на підставі залежності

$$S = \frac{1}{2}(1+\eta)\ell, \quad (2.59)$$

де ℓ – довжина сторони СЕ між вузлами 2 і 3 (див. рис. 2.2). Матриця Якобі для даної одновимірної залежності має вид

$$\frac{dS}{d\eta} = \frac{\ell}{2} = [J]. \quad (2.60)$$

Тобто, має місце рівність $|J| = \frac{\ell}{2}$ і диференціали зв'язані співвідношенням

$$dS = \frac{\ell}{2} d\eta. \quad (2.61)$$

Підстановка виразів (2.57) і (2.61) у першу формулу (2.55) для $\alpha = \text{const}$ дає

$$\left[k_{\alpha}^{(e)}\right]_{2-3} = \alpha_{2-3} \int_{S_2} [N]^T [N] dS = \frac{\alpha_{2-3}}{4} \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1-\eta)^2 & 1-\eta^2 & 0 \\ 0 & 1-\eta^2 & (1+\eta)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{\ell_{23}}{2} d\eta. \quad (2.62)$$

Після інтегрування (2.62) остаточно для сторони 2-3 СЕ отримуємо

$$\left[k_{\alpha}^{(e)}\right]_{2-3} = \alpha_{2-3} \int_{S_2} [N]^T [N] dS = \frac{\alpha_{2-3} \ell_{23}}{6} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.63)$$

Аналогічно для сторони 1-2 СЕ маємо

$$\left[k_{\alpha}^{(e)}\right]_{1-2} = \alpha_{1-2} \int_{S_2} [N]^T [N] dS = \frac{\alpha_{1-2} \ell_{12}}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.64)$$

Для сторони 3-4 СЕ маємо

$$\left[k_{\alpha}^{(e)}\right]_{3-4} = \alpha_{3-4} \int_{S_2} [N]^T [N] dS = \frac{\alpha_{3-4} \ell_{34}}{6} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (2.65)$$

Для сторони 4-1 СЕ маємо

$$\left[k_{\alpha}^{(e)}\right]_{4-1} = \alpha_{4-1} \int_{S_2} [N]^T [N] dS = \frac{\alpha_{4-1} \ell_{34}}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}. \quad (2.66)$$

У результаті складова матриці жорсткості, що пов'язана із зовнішнім конвективним теплообміном СЕ визначається підсумовуванням складових

$$[k_{\alpha}^{(e)}] = [k_{\alpha}^{(e)}]_{1-2} + [k_{\alpha}^{(e)}]_{2-3} + [k_{\alpha}^{(e)}]_{3-4} + [k_{\alpha}^{(e)}]_{4-1}. \quad (2.67)$$

Тепер перейдемо до визначення складових вектора вільних членів СЕ (2.23), що пов'язані із зовнішнім конвективним теплообміном. Використовуючи матрицю функцій форми $[N]^T$ із (2.57) і співвідношення (2.61), знаходимо для сторони 2-3 у разі $\alpha = \text{const}$ і $T_p = \text{const}$

$$(\alpha T_p)_{2-3} \int_{S_2} [N]^T dS = \frac{(\alpha T_p)_{2-3}}{2} \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1-\eta \\ 1+\eta \\ 0 \end{bmatrix} \frac{\ell_{23}}{2} d\eta = \frac{(\alpha T_p)_{2-3} \ell_{23}}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.68)$$

Аналогічно для сторони 1-2 СЕ отримуємо

$$(\alpha T_p)_{1-2} \int_{S_2} [N]^T dS = \frac{(\alpha T_p)_{1-2}}{2} \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} 1-\eta \\ 1+\eta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{\ell_{12}}{2} d\eta = \frac{(\alpha T_p)_{1-2} \ell_{12}}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.69)$$

Для сторони 3-4 СЕ маємо

$$(\alpha T_p)_{3-4} \int_{S_2} [N]^T dS = \frac{(\alpha T_p)_{3-4}}{2} \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1-\eta \\ 1+\eta \end{bmatrix} \frac{\ell_{34}}{2} d\eta = \frac{(\alpha T_p)_{3-4} \ell_{34}}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (2.70)$$

Для сторони 4-1 СЕ маємо

$$(\alpha T_p)_{4-1} \int_{S_2} [N]^T dS = \frac{(\alpha T_p)_{4-1}}{2} \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} 1-\eta \\ 0 \\ 0 \\ 1+\eta \end{bmatrix} \frac{\ell_{41}}{2} d\eta = \frac{(\alpha T_p)_{4-1} \ell_{41}}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (2.71)$$

Останній інтеграл складових вільного члена (2.23) $\int_{S_1^{(e)}} q[N]^T dS$, що пов'язаний із заданою на сторонах СЕ зовнішньою густиною теплового потоку (ГУ II роду), визначається аналогічно попередньому інтегралу $\int_{S_2^{(e)}} \alpha T_p [N]^T dS$ (2.68)–(2.71).

У результаті виконання інтегрування за умови $q = \text{const}$ будемо мати для чотирьох сторін СЕ такі формули

$$q_{1-2} \int_{S_1} [N]^T dS = \frac{q_{1-2} \ell_{12}}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad (2.72)$$

$$q_{2-3} \int_{S_1} [N]^T dS = \frac{q_{2-3} \ell_{23}}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad (2.73)$$

$$q_{3-4} \int_{S_1} [N]^T dS = \frac{q_{3-4} \ell_{34}}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad (2.74)$$

$$q_{4-1} \int_{S_1} [N]^T dS = \frac{q_{4-1} \ell_{41}}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (2.75)$$

На цьому визначення основних співвідношень МСЕ для формування системи дискретних рівнянь або СЛАР лінійної задачі стаціонарної теплопровідності з внутрішнім джерелом теплоти (2.1)–(2.4) закінчено. Не розглянутими лишилися тільки граничні умови I роду (2.2), коли задана температура у вузлах СЕ. Це питання буде обговорено на етапі формування СЛАР.

У підсумку треба зазначити, що для обчислення матриці жорсткості СЕ використовуються співвідношення (2.53), (2.63)–(2.67) і остаточно (2.22), а для вектора вільних членів (2.54), (2.68)–(2.75). При цьому для числового визначення двократних інтегралів (2.53), (2.54) достатньо скористатися 2 вузла-

ми квадратурних формул Гауса (табл. 2.1). Інші інтеграли обчислюються аналітично.

Табл. 2.1. Вузли і вага квадратурних формул Гауса

Кількість вузлів, n	Вузли, ξ_i	Вага, w_i
2	-0,577350269189626	1,0
	+0,577350269189626	1,0
4	-0,86113 63115 94053	0,34785 48451 37454
	-0,33998 10435 84856	0,65214 51548 62546
	-0,33998 10435 84856	0,65214 51548 62546
	-0,86113 63115 94053	0,34785 48451 37454

Наразі, всі співвідношення чотирикутних СЕ плоскої задачі теплопровідності є визначеними. Глобальна матриця та вектор вільних членів СЛАР, що стосується всієї розрахункової області, будуються за формулами (2.25) і СЛАР записується у вигляді (2.26).

За граничних умов Дирихле (або ГУ I роду), коли задана температура у вузлах, СЛАР змінюється аналогічно з (2.44).

Після розв'язання СЛАР типу (2.26) отримуємо вузлові значення температури або вектор температури в глобальних вузлах $\{T\}$.

Розрахунок складових густини теплового потоку в СЕ виконується за законом Фур'є (тут q_x, q_y розраховуються в кожному вузлі чотирикутного СЕ)

$$[q^{(e)}] = -\lambda [B^{(e)}] \{T^{(e)}\} = -[D][J]^{-1} \begin{bmatrix} \frac{-(1-\eta)}{4} & \frac{(1-\eta)}{4} & \frac{(1+\eta)}{4} & \frac{-(1+\eta)}{4} \\ \frac{-(1-\xi)}{4} & \frac{-(1+\xi)}{4} & \frac{(1+\xi)}{4} & \frac{(1-\xi)}{4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{Bmatrix}, \quad (2.76)$$

де $[q^{(e)}]^T = \begin{bmatrix} q_{r1} & q_{r2} & q_{r3} & q_{r4} \\ q_{z1} & q_{z2} & q_{z3} & q_{z4} \end{bmatrix}$ – матриця складових густини теплового потоку чотирикутного СЕ; 1–4 – локальні номери вузлів чотирикутного СЕ.

Визначення компонент густини теплового потоку в глобальних вузлах розрахункової області через компоненти теплового потоку в СЕ відбувається за (2.47).

Визначення сумарної густини теплового потоку в глобальних вузлах виконується за формулою (2.48).

2.3. Вісесиметрична задача теплопровідності

2.3.1. Трикутні лінійні скінченні елементи

Для отримання основних співвідношень МСЕ для вісесиметричної задачі в разі використання лінійних трикутних елементів скористаємося рис. 2.1. Матриця градієнтів визначається аналогічно плоскій задачі [7, 8]

$$[B^{(e)}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial r} & \frac{\partial N_j}{\partial r} & \frac{\partial N_k}{\partial r} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial N_j}{\partial z} & \frac{\partial N_k}{\partial z} \end{bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{bmatrix}, \quad (2.77)$$

де $[N^{(e)}] = \begin{bmatrix} N_i \\ N_j \\ N_k \end{bmatrix}$ – матриця функцій форми СЕ (див. рис. 2.1);

$N_i = \frac{1}{2A} [a_i + b_i r + c_i z]$ – функція форми у вузлі СЕ з номером i ; r, z – цилінд-

ричні координати, м; $\{a\} = \begin{Bmatrix} a_i \\ a_j \\ a_k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r_j z_k - r_k z_j \\ r_k z_i - r_i z_k \\ r_i z_j - r_j z_i \end{Bmatrix}$, $\{b\} = \begin{Bmatrix} b_i \\ b_j \\ b_k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} z_j - z_k \\ z_k - z_i \\ z_i - z_j \end{Bmatrix}$,

$\{c\} = \begin{Bmatrix} c_i \\ c_j \\ c_k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r_k - r_j \\ r_i - r_k \\ r_j - r_i \end{Bmatrix}$ – коефіцієнти функцій форми СЕ; $2A = \begin{vmatrix} 1 & r_i & z_i \\ 1 & r_j & z_j \\ 1 & r_k & z_k \end{vmatrix}$ – по-

двійна площа СЕ, м²; (r_i, z_i) , $i = 1, 2, 3$ – координати (радіус і апліката, відповідно) вузлів СЕ (див. рис. 2.1), м.

Складова матриці жорсткості СЕ, що пов'язана з теплопровідністю, визначається співвідношенням

$$\begin{aligned} [k_\lambda^{(e)}] &= \int_{V^{(e)}} [B]^T [D] [B] dV = 2\pi\bar{r} \int_{A^{(e)}} [B]^T [D] [B] dA = \\ &= 2\pi\bar{r} [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] [B^{(e)}] \end{aligned} \quad (2.78)$$

де $\bar{r} = \frac{r_1 + r_2 + r_3}{4}$ – центр маси по радіусу СЕ, м; $dV^{(e)} = 2\pi\bar{r}dA^{(e)}$ – об'єм вісе-

симетричного СЕ, м³; $[D^{(e)}] = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ – матриця теплопровідності СЕ, Вт/(м·К).

Для кожної із сторін СЕ, на якій задано конвективні умови, матриця $[k_\alpha^{(e)}]$ є доданком до матриці СЕ (2.22). Застосовуючи L -координати до інтегралу (див. А.1), що визначає $[k_\alpha^{(e)}]$, отримуємо:

– сторона ij ($N_k = 0$)

$$\int_{S_{ij}} \alpha_{ij} [N]^T [N] dS = 2\pi\alpha_{ij} \int_{\ell_{ij}} \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1 & L_2 & 0 \end{bmatrix} r d\ell = \frac{2\pi\alpha_{ij}\ell_{ij}}{12} \begin{bmatrix} 3r_i + r_j & r_i + r_j & 0 \\ r_i + r_j & r_i + 3r_j & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.79)$$

де $\ell_{ij} = \sqrt{(r_j - r_i)^2 + (z_j - z_i)^2}$, м;

– сторона jk ($N_i = 0$)

$$\int_{S_{jk}} \alpha_{jk} [N]^T [N] dS = 2\pi\alpha_{jk} \int_{\ell_{jk}} \begin{bmatrix} 0 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & L_2 & L_3 \end{bmatrix} r d\ell = \frac{2\pi\alpha_{jk}\ell_{jk}}{12} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3r_j + r_k & r_j + r_k \\ 0 & r_j + r_k & r_j + 3r_k \end{bmatrix}, \quad (2.80)$$

де $\ell_{jk} = \sqrt{(r_k - r_j)^2 + (z_k - z_j)^2}$, м;

– сторона ki ($N_j = 0$)

$$\int_{S_{ki}} \alpha_{ki} [N]^T [N] dS = 2\pi\alpha_{ki} \int_{\ell_{ki}} \begin{bmatrix} L_1 \\ 0 \\ L_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1 & 0 & L_3 \end{bmatrix} r d\ell = \frac{2\pi\alpha_{ki}\ell_{ki}}{12} \begin{bmatrix} 3r_i + r_k & 0 & r_i + r_k \\ 0 & 0 & 0 \\ r_i + r_k & 0 & r_i + 3r_k \end{bmatrix}, \quad (2.81)$$

де $\ell_{ki} = \sqrt{(r_k - r_i)^2 + (z_k - z_i)^2}$, м.

Інтеграли $\int_{S_1} [N]^T q dS$ і $\int_{S_2} [N]^T \alpha T_p dS$, що входять у (2.23) записуються в однаковій формі

$$\int_S [N]^T dS = \int_S \begin{Bmatrix} N_i \\ N_j \\ N_k \end{Bmatrix} dS = 2\pi \int_{\ell} \begin{Bmatrix} N_i \\ N_j \\ N_k \end{Bmatrix} r d\ell. \quad (2.82)$$

Тоді для сторін, де задано конвективні умови, доданки до вільного члена СЕ, застосовуючи L -координати (див. А.1), запишуться у вигляді:

– сторона ij ($N_k = 0$)

$$\begin{aligned} \int_{S_{ij}} \alpha_{ij} T_p [N]^T dS &= 2\pi \alpha_{ij} T_p \int_{\ell_{ij}} \begin{Bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ 0 \end{Bmatrix} r d\ell = \\ &= 2\pi \alpha_{ij} T_p \int_{\ell_{ij}} \begin{Bmatrix} L_1(r_i L_1 + r_j L_2 + 0) \\ L_2(r_i L_1 + r_j L_2 + 0) \\ 0 \end{Bmatrix} d\ell = \frac{2\pi \alpha_{ij} T_p \ell_{ij}}{6} \begin{Bmatrix} 2r_i + r_j \\ r_i + 2r_j \\ 0 \end{Bmatrix}; \end{aligned} \quad (2.83)$$

– сторона jk ($N_i = 0$)

$$\begin{aligned} \int_{S_{jk}} \alpha_{jk} T_p [N]^T dS &= 2\pi \alpha_{jk} T_p \int_{\ell_{jk}} \begin{Bmatrix} 0 \\ L_2 \\ L_3 \end{Bmatrix} r d\ell = \\ &= 2\pi \alpha_{jk} T_p \int_{\ell_{jk}} \begin{Bmatrix} 0 \\ L_2(0 + r_j L_2 + r_k L_3) \\ L_3(0 + r_j L_2 + r_k L_3) \end{Bmatrix} d\ell = \frac{2\pi \alpha_{jk} T_p \ell_{jk}}{6} \begin{Bmatrix} 0 \\ 2r_j + r_k \\ r_j + 2r_k \end{Bmatrix}; \end{aligned} \quad (2.84)$$

– сторона ki ($N_j = 0$)

$$\begin{aligned} \int_{S_{ki}} \alpha_{ki} T_p [N]^T dS &= 2\pi \alpha_{ki} T_p \int_{\ell_{ki}} \begin{Bmatrix} L_1 \\ 0 \\ L_3 \end{Bmatrix} r d\ell = \\ &= 2\pi \alpha_{ki} T_p \int_{\ell_{ki}} \begin{Bmatrix} L_1(r_i L_1 + 0 + r_k L_3) \\ 0 \\ L_3(r_i L_1 + 0 + r_k L_3) \end{Bmatrix} d\ell = \frac{2\pi \alpha_{ki} T_p \ell_{ki}}{6} \begin{Bmatrix} 2r_i + r_k \\ 0 \\ r_i + 2r_k \end{Bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.85)$$

Для сторін, де задано густину теплового потоку, доданки до вільного члена СЕ запишуться у вигляді (див. А.1):

– сторона ij ($N_k = 0$)

$$\begin{aligned} \int_{S_{ij}} q_{ij} [N]^T dS &= 2\pi q_{ij} \int_{\ell_{ij}} \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ 0 \end{bmatrix} r d\ell = \\ &= 2\pi q_{ij} \int_{\ell_{ij}} \begin{bmatrix} L_1(r_i L_1 + r_j L_2 + 0) \\ L_2(r_i L_1 + r_j L_2 + 0) \\ 0 \end{bmatrix} d\ell = \frac{2\pi q_{ij} \ell_{ij}}{6} \begin{bmatrix} 2r_i + r_j \\ r_i + 2r_j \\ 0 \end{bmatrix}; \end{aligned} \quad (2.86)$$

– сторона jk ($N_i = 0$)

$$\begin{aligned} \int_{S_{jk}} q_{jk} [N]^T dS &= 2\pi q_{jk} \int_{\ell_{jk}} \begin{bmatrix} 0 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix} r d\ell = \\ &= 2\pi q_{jk} \int_{\ell_{jk}} \begin{bmatrix} 0 \\ L_2(0 + r_j L_2 + r_k L_3) \\ L_3(0 + r_j L_2 + r_k L_3) \end{bmatrix} d\ell = \frac{2\pi q_{jk} \ell_{jk}}{6} \begin{bmatrix} 0 \\ 2r_j + r_k \\ r_j + 2r_k \end{bmatrix}; \end{aligned} \quad (2.87)$$

– сторона ki ($N_j = 0$)

$$\begin{aligned} \int_{S_{ki}} q_{ki} [N]^T dS &= 2\pi q_{ki} \int_{\ell_{ki}} \begin{bmatrix} L_1 \\ 0 \\ L_3 \end{bmatrix} r d\ell = \\ &= 2\pi q_{ki} \int_{\ell_{ki}} \begin{bmatrix} L_1(r_i L_1 + 0 + r_k L_3) \\ 0 \\ L_3(r_i L_1 + 0 + r_k L_3) \end{bmatrix} d\ell = \frac{2\pi q_{ki} \ell_{ki}}{6} \begin{bmatrix} 2r_i + r_k \\ 0 \\ r_i + 2r_k \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.88)$$

Об'ємний інтеграл типу (2.23) від об'ємних сил (дії внутрішніх джерел теплоти) у вісесиметричному випадку задачі набуває вигляду (див. А.2)

$$2\pi q_v \int_A \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix} r dA = 2\pi q_v \int_A \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix} r dA = \frac{2\pi q_v A}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_i \\ r_j \\ r_k \end{bmatrix}. \quad (2.89)$$

Наразі, всі співвідношення трикутних СЕ для вісесиметричної задачі теплопровідності є визначеними. Глобальна матриця та вектор вільних членів СЛАР, що стосується усієї розрахункової області, будуються за формулами (2.25) і СЛАР записується у вигляді (2.26).

Після розв'язання СЛАР виду (2.26) визначається вектор невідомих вузлових значень температури $\{T\}$.

За граничних умов Дирихле (або за ГУ I роду), коли задана температура у вузлах, СЛАР змінюється за формулами (2.44).

Після розв'язання СЛАР типу (2.26) отримуємо вузлові значення температури або вектор температури в глобальних вузлах $\{T\}$.

Розрахунок складових густини теплового потоку в СЕ виконується за законом Фур'є за формулою (2.46).

Визначення компонент густини теплового потоку в глобальних вузлах розрахункової області через компоненти теплового потоку в СЕ

$$\begin{cases} q_{rj} = \frac{\sum_{e=1}^n q_{ri(j)}^{(e)}}{n}; \\ q_{zj} = \frac{\sum_{e=1}^n q_{zi(j)}^{(e)}}{n}, \end{cases} \quad (2.90)$$

де (e) – номер СЕ; n – кількість елементів, що оточують вузол j ; $i(j)$ – функція, яка визначає локальні номери вузлів СЕ через глобальні.

Величини q_r, q_z є константами в кожному трикутному СЕ.

Визначення сумарної густини теплового потоку в глобальних вузлах виконується за формулою

$$q_{sumj} = \sqrt{(q_{rj})^2 + (q_{zj})^2}, j = \overline{1, N}. \quad (2.91)$$

2.3.2. Чотирикутні лінійні скінченні елементи

Розглянемо отримання основних співвідношень МСЕ вісесиметричної задачі теплопровідності в разі використання лінійних чотирикутних елементів [7, 8] (див. рис. 2.2).

Вектор функцій форми і градієнтів визначається як

$$[N]^T = \begin{Bmatrix} \frac{(1-\xi)(1-\eta)}{4} \\ \frac{(1+\xi)(1-\eta)}{4} \\ \frac{(1+\xi)(1+\eta)}{4} \\ \frac{(1-\xi)(1+\eta)}{4} \end{Bmatrix}, [B] = [J]^{-1} \begin{bmatrix} \frac{-(1-\eta)}{4} & \frac{(1-\eta)}{4} & \frac{(1+\eta)}{4} & \frac{-(1+\eta)}{4} \\ \frac{-(1-\xi)}{4} & \frac{-(1+\xi)}{4} & \frac{(1+\xi)}{4} & \frac{(1-\xi)}{4} \end{bmatrix}, \quad (2.92)$$

де $[J]^{-1}$ – обернена матриця $[J]$;

$$[J] = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -(1-\eta) & (1-\eta) & (1+\eta) & -(1+\eta) \\ -(1-\xi) & -(1+\xi) & (1+\xi) & (1-\xi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 & z_1 \\ r_2 & z_2 \\ r_3 & z_3 \\ r_4 & z_4 \end{bmatrix} \text{ – матриця Якобі або якобіан}$$

переходу від безрозмірних до розмірних змінних інтегрування; $r_i, z_i, i = \overline{1, M}$ – координати вузлів СЕ, м; M – кількість вузлів у СЕ.

Складова матриці жорсткості СЕ (2.22), що пов'язана з теплопровідністю, визначається співвідношенням

$$\begin{aligned} [k_\lambda^{(e)}] &= \int_{V^{(e)}} [B]^T [D][B] dV = 2\pi\bar{r} \int_{A^{(e)}} [B]^T [D][B] dA = \\ &= 2\pi\bar{r} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [D][B] \det[J] d\xi d\eta, \end{aligned} \quad (2.93)$$

де $\bar{r} = \frac{r_1 + r_2 + r_3 + r_4}{4}$ – центр маси по радіусу СЕ, м; $dV^{(e)} = 2\pi\bar{r}dA^{(e)}$ – об'єм вісесиметричного елемента, м³.

Для визначення (2.93) використовується послідовне числове інтегрування з використанням квадратурних формул Гауса (2.49). При цьому використовується по два вузли для кожного інтегралу (див. табл. 2.1).

Розглянемо визначення частини матриці жорсткості СЕ, що пов'язана з граничними умовами III роду або конвективним теплообміном, коли задано α і T_p на будь-якій стороні СЕ.

Сторона 1-2, $\eta = -1$. Вектор функцій форми

$$[N]^T = \begin{Bmatrix} \frac{(1-\xi)(1-\eta)}{4} \\ \frac{(1+\xi)(1-\eta)}{4} \\ \frac{(1+\xi)(1+\eta)}{4} \\ \frac{(1-\xi)(1+\eta)}{4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{(1-\xi)}{2} \\ \frac{(1+\xi)}{2} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Тоді $r = \frac{(1-\xi)}{2}r_1 + \frac{(1+\xi)}{2}r_2$ і

$$\begin{aligned} \int_{S_{12}} \alpha [N]^T [N] dS &= 2\pi\alpha \int_{\ell_{12}} \begin{bmatrix} rN_1 \\ rN_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} d\ell = \\ &= 2\pi\alpha \int_{\ell_{12}} \begin{bmatrix} \frac{(1-\xi)}{2} \left(\frac{(1-\xi)}{2}r_1 + \frac{(1+\xi)}{2}r_2 \right) \\ \frac{(1+\xi)}{2} \left(\frac{(1-\xi)}{2}r_1 + \frac{(1+\xi)}{2}r_2 \right) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{(1-\xi)}{2} & \frac{(1+\xi)}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} d\ell = \\ &= \frac{2\pi\alpha\ell_{12}}{16} \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} (1-\xi)^2 r_1 + (1-\xi^2)r_2 \\ (1-\xi^2)r_1 + (1+\xi)^2 r_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (1-\xi) & (1+\xi) & 0 & 0 \end{bmatrix} d\xi, \end{aligned} \quad (2.94)$$

де $|J| = \frac{\ell_{12}}{2}$ – якобіан.

Після інтегрування (2.94) остаточно отримуємо

$$\begin{aligned}
\int_{S_{12}} \alpha [N]^T [N] dS &= \frac{2\pi\alpha\ell_{12}}{16} \frac{4}{3} \begin{bmatrix} 3r_1 + r_2 & r_1 + r_2 & 0 & 0 \\ r_1 + r_2 & r_1 + 3r_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \\
&= \frac{\pi\alpha\ell_{12}}{6} \begin{bmatrix} 3r_1 + r_2 & r_1 + r_2 & 0 & 0 \\ r_1 + r_2 & r_1 + 3r_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{2.95}$$

Сторона 2-3, $\xi = 1$. Вектор функцій форми

$$[N]^T = \left\{ \begin{array}{c} \frac{(1-\xi)(1-\eta)}{4} \\ \frac{(1+\xi)(1-\eta)}{4} \\ \frac{(1+\xi)(1+\eta)}{4} \\ \frac{(1-\xi)(1+\eta)}{4} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \frac{(1-\eta)}{2} \\ \frac{(1+\eta)}{2} \\ 0 \end{array} \right\}.$$

Тоді $r = \frac{(1-\eta)}{2}r_2 + \frac{(1+\eta)}{2}r_3$ і

$$\begin{aligned}
\int_{S_{23}} \alpha [N]^T [N] dS &= 2\pi\alpha \int_{\ell_{23}} \begin{bmatrix} 0 \\ rN_2 \\ rN_3 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & N_2 & N_3 & 0 \end{bmatrix} d\ell = \\
&= 2\pi\alpha \int_{\ell_{23}} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{(1-\eta)}{2} \left(\frac{(1-\eta)}{2}r_2 + \frac{(1+\eta)}{2}r_3 \right) \\ \frac{(1+\eta)}{2} \left(\frac{(1-\eta)}{2}r_2 + \frac{(1+\eta)}{2}r_3 \right) \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{(1-\eta)}{2} & \frac{(1+\eta)}{2} & 0 \end{bmatrix} d\ell =
\end{aligned}$$

$$= \frac{2\pi\alpha\ell_{23}}{16} \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} 0 \\ (1-\eta)^2 r_2 + (1-\eta^2) r_3 \\ (1-\eta^2) r_2 + (1+\eta)^2 r_3 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & (1-\eta) & (1+\eta) & 0 \end{bmatrix} d\eta, \quad (2.96)$$

де $|J| = \frac{\ell_{23}}{2}$ – якобіан.

Після інтегрування (2.96) остаточно отримуємо

$$\begin{aligned} \int_{S_{23}} \alpha [N]^T [N] dS &= \frac{2\pi\alpha\ell_{23}}{16} \frac{4}{3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3r_2 + r_3 & r_2 + r_3 & 0 \\ 0 & r_2 + r_3 & r_2 + 3r_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{\pi\alpha\ell_{23}}{6} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3r_2 + r_3 & r_2 + r_3 & 0 \\ 0 & r_2 + r_3 & r_2 + 3r_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.97)$$

Сторона 3-4, $\eta = 1$. Вектор функцій форми

$$[N]^T = \begin{Bmatrix} \frac{(1-\xi)(1-\eta)}{4} \\ \frac{(1+\xi)(1-\eta)}{4} \\ \frac{(1+\xi)(1+\eta)}{4} \\ \frac{(1-\xi)(1+\eta)}{4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{(1+\xi)}{2} \\ \frac{(1-\xi)}{2} \end{Bmatrix}.$$

Тоді $r = \frac{(1+\xi)}{2} r_3 + \frac{(1-\xi)}{2} r_4$ і

$$\begin{aligned}
\int_{S_{34}} \alpha [N]^T [N] dS &= 2\pi\alpha \int_{\ell_{34}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ rN_3 \\ rN_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & N_3 & N_4 \end{bmatrix} d\ell = \\
&= 2\pi\alpha \int_{\ell_{34}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{(1+\xi)}{2} \left(\frac{(1+\xi)}{2} r_3 + \frac{(1-\xi)}{2} r_4 \right) \\ \frac{(1-\xi)}{2} \left(\frac{(1+\xi)}{2} r_3 + \frac{(1-\xi)}{2} r_4 \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{(1+\xi)}{2} & \frac{(1-\xi)}{2} \end{bmatrix} d\ell = \\
&= \frac{2\pi\alpha\ell_{34}}{16} \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ (1+\xi)^2 r_3 + (1-\xi^2) r_4 \\ (1-\xi^2) r_3 + (1-\xi)^2 r_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & (1+\xi) & (1-\xi) \end{bmatrix} d\xi, \tag{2.98}
\end{aligned}$$

де $|J| = \frac{\ell_{34}}{2}$ – якобіан.

Після інтегрування (2.98) остаточно отримуємо

$$\begin{aligned}
\int_{S_{34}} \alpha [N]^T [N] dS &= \frac{2\pi\alpha\ell_{34}}{16} \frac{4}{3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3r_2 + r_4 & r_3 + r_4 \\ 0 & 0 & r_3 + r_4 & r_3 + 3r_4 \end{bmatrix} = \\
&= \frac{\pi\alpha\ell_{34}}{6} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3r_2 + r_4 & r_3 + r_4 \\ 0 & 0 & r_3 + r_4 & r_3 + 3r_4 \end{bmatrix}. \tag{2.99}
\end{aligned}$$

Сторона 4-1, $\xi = -1$. Вектор функцій форми

$$[N]^T = \begin{Bmatrix} \frac{(1-\xi)(1-\eta)}{4} \\ \frac{(1+\xi)(1-\eta)}{4} \\ \frac{(1+\xi)(1+\eta)}{4} \\ \frac{(1-\xi)(1+\eta)}{4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{(1-\eta)}{2} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{(1+\eta)}{2} \end{Bmatrix}.$$

Тоді $r = \frac{(1-\eta)}{2}r_1 + \frac{(1+\eta)}{2}r_4$ і

$$\begin{aligned} \int_{S_{41}} \alpha [N]^T [N] dS &= 2\pi\alpha \int_{\ell_{41}} \begin{bmatrix} rN_1 \\ 0 \\ 0 \\ rN_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_4 \end{bmatrix} d\ell = \\ &= 2\pi\alpha \int_{\ell_{41}} \begin{bmatrix} \frac{(1-\eta)}{2} \left(\frac{(1-\eta)}{2}r_1 + \frac{(1+\eta)}{2}r_4 \right) \\ 0 \\ 0 \\ \frac{(1+\eta)}{2} \left(\frac{(1-\eta)}{2}r_1 + \frac{(1+\eta)}{2}r_4 \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{(1-\eta)}{2} & 0 & 0 & \frac{(1+\eta)}{2} \end{bmatrix} d\ell = \\ &= \frac{2\pi\alpha\ell_{41}}{16} \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} (1-\eta)^2 r_1 + (1-\eta^2)r_4 \\ 0 \\ 0 \\ (1-\eta^2)r_1 + (1+\eta)^2 r_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (1-\eta) & 0 & 0 & (1+\eta) \end{bmatrix} d\eta, \end{aligned} \quad (2.100)$$

де $|J| = \frac{\ell_{41}}{2}$ – якобіан.

Після інтегрування (2.100) остаточно отримуємо

$$\begin{aligned}
\int_{S_{41}} \alpha [N]^T [N] dS &= \frac{2\pi\alpha\ell_{41}}{16} \frac{4}{3} \begin{bmatrix} 3r_1 + r_4 & 0 & 0 & r_1 + r_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ r_1 + r_4 & 0 & 0 & r_1 + 3r_4 \end{bmatrix} = \\
&= \frac{\pi\alpha\ell_{41}}{6} \begin{bmatrix} 3r_1 + r_4 & 0 & 0 & r_1 + r_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ r_1 + r_4 & 0 & 0 & r_1 + 3r_4 \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{2.101}$$

Вектор вільних членів СЕ, що пов'язаний з граничними умовами III роду або конвективним теплообміном, коли задано α і T_p на будь-якій стороні СЕ, визначається за наступними формулами.

Сторона 1-2, $\eta = -1$. Вектор функцій форми

$$[N]^T = \begin{Bmatrix} \frac{(1-\xi)(1-\eta)}{4} \\ \frac{(1+\xi)(1-\eta)}{4} \\ \frac{(1+\xi)(1+\eta)}{4} \\ \frac{(1-\xi)(1+\eta)}{4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{(1-\xi)}{2} \\ \frac{(1+\xi)}{2} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

$$\text{Тоді } r = \frac{(1-\xi)}{2} r_1 + \frac{(1+\xi)}{2} r_2 \text{ і}$$

$$\int_{S_{12}} \alpha T_p [N]^T dS = 2\pi\alpha T_p \int_{\ell_{12}} \begin{bmatrix} rN_1 \\ rN_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} d\ell =$$

$$\begin{aligned}
&= 2\pi\alpha T_p \int_{\ell_{12}} \begin{bmatrix} \frac{(1-\xi)}{2} \left(\frac{(1-\xi)}{2} r_1 + \frac{(1+\xi)}{2} r_2 \right) \\ \frac{(1+\xi)}{2} \left(\frac{(1-\xi)}{2} r_1 + \frac{(1+\xi)}{2} r_2 \right) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} d\ell = \\
&= \frac{2\pi\alpha T_p \ell_{12}}{8} \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} (1-\xi)^2 r_1 + (1-\xi^2) r_2 \\ (1-\xi^2) r_1 + (1+\xi)^2 r_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} d\xi, \tag{2.102}
\end{aligned}$$

де $|J| = \frac{\ell_{12}}{2}$ – якобіан.

Після інтегрування (2.102) маємо

$$\begin{aligned}
\int_{\tilde{S}_{12}} \alpha T_p [N]^T dS &= \frac{2\pi\alpha T_p \ell_{12}}{8} \frac{4}{3} \begin{bmatrix} 2r_1 + r_2 \\ r_1 + 2r_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \\
&= \frac{\pi\alpha T_p \ell_{12}}{3} \begin{bmatrix} 2r_1 + r_2 \\ r_1 + 2r_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{2.103}
\end{aligned}$$

Сторона 2-3, $\xi = 1$. Вектор функцій форми

$$[N]^T = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{(1-\xi)(1-\eta)}{4} \\ \frac{(1+\xi)(1-\eta)}{4} \\ \frac{(1+\xi)(1+\eta)}{4} \\ \frac{(1-\xi)(1+\eta)}{4} \end{bmatrix} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{(1-\eta)}{2} \\ \frac{(1+\eta)}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Тоді $r = \frac{(1-\eta)}{2}r_2 + \frac{(1+\eta)}{2}r_3$ і

$$\begin{aligned}
 \int_{S_{23}} \alpha T_p [N]^T dS &= 2\pi\alpha T_p \int_{\ell_{23}} \begin{bmatrix} 0 \\ rN_2 \\ rN_3 \\ 0 \end{bmatrix} d\ell = \\
 &= 2\pi\alpha T_p \int_{\ell_{23}} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{(1-\eta)}{2} \left(\frac{(1-\eta)}{2}r_2 + \frac{(1+\eta)}{2}r_3 \right) \\ \frac{(1+\eta)}{2} \left(\frac{(1-\eta)}{2}r_2 + \frac{(1+\eta)}{2}r_3 \right) \\ 0 \end{bmatrix} d\ell = \\
 &= \frac{2\pi\alpha T_p \ell_{23}}{8} \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} 0 \\ (1-\eta)^2 r_2 + (1-\eta^2) r_3 \\ (1-\eta^2) r_2 + (1+\eta)^2 r_3 \\ 0 \end{bmatrix} d\eta, \tag{2.104}
 \end{aligned}$$

де $|J| = \frac{\ell_{23}}{2}$ – якобіан.

Після інтегрування (2.104) маємо

$$\begin{aligned}
 \int_{S_{23}} \alpha T_p [N]^T dS &= \frac{2\pi\alpha T_p \ell_{23}}{8} \frac{4}{3} \begin{bmatrix} 0 \\ 2r_2 + r_3 \\ r_2 + 2r_3 \\ 0 \end{bmatrix} = \\
 &= \frac{\pi\alpha T_p \ell_{23}}{3} \begin{bmatrix} 0 \\ 2r_2 + r_3 \\ r_2 + 2r_3 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{2.105}
 \end{aligned}$$

Сторона 3-4, $\eta = 1$. Вектор функцій форми

$$[N]^T = \begin{Bmatrix} \frac{(1-\xi)(1-\eta)}{4} \\ \frac{(1+\xi)(1-\eta)}{4} \\ \frac{(1+\xi)(1+\eta)}{4} \\ \frac{(1-\xi)(1+\eta)}{4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{(1+\xi)}{2} \\ \frac{(1-\xi)}{2} \end{Bmatrix}.$$

Тоді $r = \frac{(1+\xi)}{2}r_3 + \frac{(1-\xi)}{2}r_4$ і

$$\begin{aligned} \int_{S_{34}} \alpha T_p [N]^T dS &= 2\pi\alpha T_p \int_{\ell_{34}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ rN_3 \\ rN_4 \end{bmatrix} d\ell = \\ &= 2\pi\alpha T_p \int_{\ell_{34}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{(1+\xi)}{2} \left(\frac{(1+\xi)}{2}r_3 + \frac{(1-\xi)}{2}r_4 \right) \\ \frac{(1-\xi)}{2} \left(\frac{(1+\xi)}{2}r_3 + \frac{(1-\xi)}{2}r_4 \right) \end{bmatrix} d\ell = \\ &= \frac{2\pi\alpha T_p \ell_{34}}{8} \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ (1+\xi)^2 r_3 + (1-\xi^2)r_4 \\ (1-\xi^2)r_3 + (1-\xi)^2 r_4 \end{bmatrix} d\xi, \end{aligned} \quad (2.106)$$

де $|J| = \frac{\ell_{34}}{2}$ – якобіан.

Після інтегрування (2.106) маємо

$$\int_{S_{34}} \alpha T_p [N]^T dS = \frac{2\pi\alpha T_p \ell_{34}}{8} \frac{4}{3} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2r_3 + r_4 \\ r_3 + 2r_4 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{\pi \alpha T_p \ell_{34}}{3} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2r_3 + r_4 \\ r_3 + 2r_4 \end{bmatrix}. \quad (2.107)$$

Сторона 4-1, $\xi = -1$. Вектор функцій форми

$$[N]^T = \left\{ \begin{array}{c} \frac{(1-\xi)(1-\eta)}{4} \\ \frac{(1+\xi)(1-\eta)}{4} \\ \frac{(1+\xi)(1+\eta)}{4} \\ \frac{(1-\xi)(1+\eta)}{4} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{(1-\eta)}{2} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{(1+\eta)}{2} \end{array} \right\}.$$

$$\text{Тоді } r = \frac{(1-\eta)}{2} r_1 + \frac{(1+\eta)}{2} r_4 \text{ і}$$

$$\begin{aligned} \int_{S_{41}} \alpha T_p [N]^T dS &= 2\pi \alpha T_p \int_{\ell_{41}} \begin{bmatrix} rN_1 \\ 0 \\ 0 \\ rN_4 \end{bmatrix} d\ell = \\ &= 2\pi \alpha T_p \int_{\ell_{41}} \begin{bmatrix} \frac{(1-\eta)}{2} \left(\frac{(1-\eta)}{2} r_1 + \frac{(1+\eta)}{2} r_4 \right) \\ 0 \\ 0 \\ \frac{(1+\eta)}{2} \left(\frac{(1-\eta)}{2} r_1 + \frac{(1+\eta)}{2} r_4 \right) \end{bmatrix} d\ell = \\ &= \frac{2\pi \alpha T_p \ell_{41}}{8} \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} (1-\eta)^2 r_1 + (1-\eta^2) r_4 \\ 0 \\ 0 \\ (1-\eta^2) r_1 + (1+\eta)^2 r_4 \end{bmatrix} d\eta, \end{aligned} \quad (2.108)$$

де $|J| = \frac{\ell_{41}}{2}$ – якобіан.

Після інтегрування (2.108) маємо

$$\begin{aligned} \int_{S_{41}} \alpha T_p [N]^T dS &= \frac{2\pi\alpha T_p \ell_{41}}{8} \frac{4}{3} \begin{bmatrix} 2r_1 + r_4 \\ 0 \\ 0 \\ r_1 + 2r_4 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{\pi\alpha T_p \ell_{41}}{3} \begin{bmatrix} 2r_1 + r_4 \\ 0 \\ 0 \\ r_1 + 2r_4 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.109)$$

Вектор вільних членів СЕ, що пов'язаний з граничними умовами II роду, коли задано густину теплового потоку q на будь-якій стороні СЕ, визначається за наступними формулами.

Сторона 1-2

$$\int_{S_{12}} q [N]^T dS = \frac{\pi q \ell_{12}}{3} \begin{bmatrix} 2r_1 + r_2 \\ r_1 + 2r_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.110)$$

Сторона 2-3

$$\int_{S_{23}} q [N]^T dS = \frac{\pi q \ell_{23}}{3} \begin{bmatrix} 0 \\ 2r_2 + r_3 \\ r_2 + 2r_3 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.111)$$

Сторона 3-4

$$\int_{S_{34}} q [N]^T dS = \frac{\pi q \ell_{34}}{3} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2r_3 + r_4 \\ r_3 + 2r_4 \end{bmatrix}. \quad (2.112)$$

Сторона 4-1

$$\int_{S_{41}} q[N]^T dS = \frac{\pi q \ell_{41}}{3} \begin{bmatrix} 2r_1 + r_4 \\ 0 \\ 0 \\ r_1 + 2r_4 \end{bmatrix}. \quad (2.113)$$

Вектор вільних членів СЕ, що пов'язаний із внутрішнім джерелом теплоти

$$\begin{aligned} \int_V q_v[N] dV &= 2\pi q_v \int_A \begin{bmatrix} rN_1 \\ rN_2 \\ rN_3 \\ rN_4 \end{bmatrix} dA = 2\pi q_v \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{bmatrix} |J| d\xi d\eta = \\ &= 2\pi q_v \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} N_1(N_1r_1 + N_2r_2 + N_3r_3 + N_4r_4) \\ N_2(N_1r_1 + N_2r_2 + N_3r_3 + N_4r_4) \\ N_3(N_1r_1 + N_2r_2 + N_3r_3 + N_4r_4) \\ N_4(N_1r_1 + N_2r_2 + N_3r_3 + N_4r_4) \end{bmatrix} |J| d\xi d\eta, \end{aligned} \quad (2.114)$$

де $dV = 2\pi r dA$.

Для визначення (2.114) також використовується послідовне числове інтегрування з використанням квадратурних формул Гауса (2.49).

Наразі, всі співвідношення чотирикутних СЕ вісесиметричної задачі теплопровідності є визначеними. Глобальна матриця та вектор вільних членів СЛАР, що стосується всієї розрахункової області, будуються за формулами (2.25) і СЛАР записується у вигляді (2.26).

За граничних умов Дирихле (або ГУ I роду), коли задана температура у вузлах, СЛАР змінюється аналогічно з (2.44).

Після розв'язання СЛАР типу (2.26) отримуємо вузлові значення температури або вектор температури в глобальних вузлах $\{T\}$.

Розрахунок складових густини теплового потоку в СЕ виконується за законом Фур'є (тут q_r, q_z розраховуються в кожному вузлі чотирикутного СЕ)

$$[q^{(e)}] = -\lambda[B^{(e)}]\{T^{(e)}\} = -[D][J]^{-1} \begin{bmatrix} \frac{-(1-\eta)}{4} & \frac{(1-\eta)}{4} & \frac{(1+\eta)}{4} & \frac{-(1+\eta)}{4} \\ \frac{-(1-\xi)}{4} & \frac{-(1+\xi)}{4} & \frac{(1+\xi)}{4} & \frac{(1-\xi)}{4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{Bmatrix}, \quad (2.115)$$

де $[q^{(e)}]^T = \begin{bmatrix} q_{r1} & q_{r2} & q_{r3} & q_{r4} \\ q_{z1} & q_{z2} & q_{z3} & q_{z4} \end{bmatrix}$ – матриця складових густини теплового потоку чотирикутного СЕ; 1–4 – локальні номери вузлів чотирикутного СЕ.

Визначення компонент густини теплового потоку в глобальних вузлах розрахункової області через компоненти теплового потоку в СЕ виконується за (2.90).

Визначення сумарної густини теплового потоку в глобальних вузлах виконується за формулою (2.91).

2.4. Тривимірна задача теплопровідності

2.4.1. Чотиригранні лінійні скінченні елементи

Вивід співвідношень для СЕ в тривимірних задачах переносу теплоти аналогічний відповідним процедурам у двовимірному випадку задачі з симплекс-елементом (див. п. 2.2.1). За елемент дискретизації розрахункової області розглянемо тетраедр з чотирма вузлами [7, 8] (рис. 2.3).

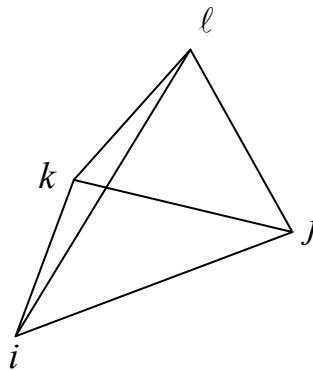


Рис. 2.3. Тривимірний симплекс-елемент з чотирма вузлами – чотиригранник або тетраедр (обхід номерів вузлів здійснюється проти годинникової стрілки): $i = 1, j = 2, k = 3, l = 4$ – номери вузлів СЕ

Функції форми, що відповідають даному елементу, мають вид

$$N_{\gamma} = a_{\gamma} + b_{\gamma}x + c_{\gamma}y + d_{\gamma}z, \quad \gamma = i, j, k, l, \quad (2.116)$$

де константи $a_{\gamma}, b_{\gamma}, c_{\gamma}, d_{\gamma}$ обчислюються з використанням визначників або матричним множенням, як буде показано нижче за текстом.

Запишемо відповідні матриці функцій форми $[N]$ та градієнтів $[B]$ для СЕ, наведеного на рис. 2.3

$$[N] = [N_i \ N_j \ N_k \ N_l], \quad (2.117)$$

$$[B] = \frac{1}{6V} \begin{bmatrix} b_i & b_j & b_k & b_l \\ c_i & c_j & c_k & c_l \\ d_i & d_j & d_k & d_l \end{bmatrix}, \quad (2.118)$$

де $6V = \begin{vmatrix} x_i - x_l & x_j - x_l & x_k - x_l \\ y_i - y_l & y_j - y_l & y_k - y_l \\ z_i - z_l & z_j - z_l & z_k - z_l \end{vmatrix} = |J|$ – якобіан, м^3 ; V – об’єм тетраедного СЕ, м^3 ; $(x_i, y_i, z_i), i=1,2,3,4$ – декартові координати вузлів СЕ (див. рис. 2.3), м ; $(a_i, b_i, c_i, d_i), i=1,2,3,4$ – коефіцієнти (2.117).

Формули для визначення коефіцієнтів a, b, c, d отримуються із визначників циклічною перестановкою індексів 1, 2, 3, 4 (див. рис. 2.3):

– для індексу i , маємо

$$\begin{aligned} a_i &= \begin{bmatrix} x_j & y_j & z_j \\ x_k & y_k & z_k \\ x_\ell & y_\ell & z_\ell \end{bmatrix}, & b_i &= - \begin{bmatrix} 1 & y_j & z_j \\ 1 & y_k & z_k \\ 1 & y_\ell & z_\ell \end{bmatrix}, \\ c_i &= - \begin{bmatrix} x_j & 1 & z_j \\ x_k & 1 & z_k \\ x_\ell & 1 & z_\ell \end{bmatrix}, & d_i &= - \begin{bmatrix} x_j & y_j & 1 \\ x_k & y_k & 1 \\ x_\ell & y_\ell & 1 \end{bmatrix}; \end{aligned} \quad (2.119)$$

– для індексу j , маємо

$$\begin{aligned} a_j &= \begin{bmatrix} x_i & y_i & z_i \\ x_k & y_k & z_k \\ x_\ell & y_\ell & z_\ell \end{bmatrix}, & b_j &= \begin{bmatrix} 1 & y_i & z_i \\ 1 & y_k & z_k \\ 1 & y_\ell & z_\ell \end{bmatrix}, \\ c_j &= \begin{bmatrix} x_i & 1 & z_i \\ x_k & 1 & z_k \\ x_\ell & 1 & z_\ell \end{bmatrix}, & d_j &= \begin{bmatrix} x_i & y_i & 1 \\ x_k & y_k & 1 \\ x_\ell & y_\ell & 1 \end{bmatrix}; \end{aligned} \quad (2.120)$$

– для індексу k , маємо

$$\begin{aligned}
a_k &= \begin{bmatrix} x_i & y_i & z_i \\ x_j & y_j & z_j \\ x_\ell & y_\ell & z_\ell \end{bmatrix}, & b_k &= -\begin{bmatrix} 1 & y_i & z_i \\ 1 & y_j & z_j \\ 1 & y_\ell & z_\ell \end{bmatrix}, \\
c_k &= -\begin{bmatrix} x_i & 1 & z_i \\ x_j & 1 & z_j \\ x_\ell & 1 & z_\ell \end{bmatrix}, & d_k &= -\begin{bmatrix} x_i & y_i & 1 \\ x_j & y_j & 1 \\ x_\ell & y_\ell & 1 \end{bmatrix};
\end{aligned} \tag{2.121}$$

– для індексу ℓ , маємо

$$\begin{aligned}
a_\ell &= \begin{bmatrix} x_i & y_i & z_i \\ x_j & y_j & z_j \\ x_k & y_k & z_k \end{bmatrix}, & b_\ell &= \begin{bmatrix} 1 & y_i & z_i \\ 1 & y_j & z_j \\ 1 & y_k & z_k \end{bmatrix}, \\
c_\ell &= \begin{bmatrix} x_i & 1 & z_i \\ x_j & 1 & z_j \\ x_k & 1 & z_k \end{bmatrix}, & d_\ell &= \begin{bmatrix} x_i & y_i & 1 \\ x_j & y_j & 1 \\ x_k & y_k & 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{2.122}$$

У разі використання тетраедричних СЕ всі співвідношення МСЕ, що входять у (2.22) і (2.23), визначаються аналітично. Розглянемо їх визначення більш детально і почнемо зі складової матриці жорсткості СЕ, що пов'язана із теплопровідністю

$$\begin{aligned}
[k_\lambda^{(e)}] &= \int_V [B]^T [D][B] dV = [B]^T [D][B] \int_V dV = V[B]^T [D][B] = \\
&= \frac{\lambda_{xx}}{36V} \begin{bmatrix} b_i b_i & b_i b_j & b_i b_k & b_i b_\ell \\ b_j b_i & b_j b_j & b_j b_k & b_j b_\ell \\ b_k b_i & b_k b_j & b_k b_k & b_k b_\ell \\ b_\ell b_i & b_\ell b_j & b_\ell b_k & b_\ell b_\ell \end{bmatrix} + \frac{\lambda_{yy}}{36V} \begin{bmatrix} c_i c_i & c_i c_j & c_i c_k & c_i c_\ell \\ c_j c_i & c_j c_j & c_j c_k & c_j c_\ell \\ c_k c_i & c_k c_j & c_k c_k & c_k c_\ell \\ c_\ell c_i & c_\ell c_j & c_\ell c_k & c_\ell c_\ell \end{bmatrix} + \\
&\quad + \frac{\lambda_{zz}}{36V} \begin{bmatrix} d_i d_i & d_i d_j & d_i d_k & d_i d_\ell \\ d_j d_i & d_j d_j & d_j d_k & d_j d_\ell \\ d_k d_i & d_k d_j & d_k d_k & d_k d_\ell \\ d_\ell d_i & d_\ell d_j & d_\ell d_k & d_\ell d_\ell \end{bmatrix},
\end{aligned} \tag{2.123}$$

де $\lambda_{11}, \lambda_{22}, \lambda_{33}$ – компоненти матриці теплопровідності $[D]$ у разі ортотропно-го середовища, Вт/(м·К); V – об’єм тетраедного СЕ, м³; $(a_i, b_i, c_i, d_i), i = 1, 2, 3, 4$ – визначаються за формулами (2.119)–(2.122).

У формулі (2.123) підінтегральний вираз $[B]^T [D] [B]$ не залежить від об’єму і, тому виноситься з-під знаку інтеграла, а $\int_V dV = V$.

Решту інтегралів (2.22), (2.23) також неважко визначити аналітично, якщо скористатися об’ємними L -координатами (див. А.3, А.4) і виконати заміну:

$$L_1 = N_i, \quad L_2 = N_j, \quad L_3 = N_k, \quad L_4 = N_\ell.$$

Інтеграл по поверхні, що пов’язаний із конвекцією (ГУ III роду), і є складовою матриці жорсткості (2.22), (2.24) має чотири випадки, відповідно до кількості трикутних граней тетраедного СЕ (див. рис. 2.3):

– для грані з вершинами ijk – напроти ℓ , визначається з використанням формули (А.3.2)

$$[k_\alpha^{(e)}] = \int_S \alpha [N]^T [N] dS = \frac{\alpha A_{ijk}}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.124)$$

– для грані з вершинами $i\ell j$ – напроти k , отримуємо з використанням (А.3.2)

$$[k_\alpha^{(e)}] = \int_S \alpha [N]^T [N] dS = \frac{\alpha A_{i\ell j}}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad (2.125)$$

– для грані з вершинами $ik\ell$ – напроти j , отримуємо з використанням (А.3.2)

$$[k_{\alpha}^{(e)}] = \int_S \alpha [N]^T [N] dS = \frac{\alpha A_{ik\ell}}{12} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad (2.126)$$

– для грані з вершинами $j\ell k$ – напроти i , отримуємо з використанням (А.3.2)

$$[k_{\alpha}^{(e)}] = \int_S \alpha [N]^T [N] dS = \frac{\alpha A_{j\ell k}}{12} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (2.127)$$

де, наприклад, площа грані тетраедра A_{ijk} визначається як

$$p_1 = \begin{vmatrix} y_i - y_k & z_i - z_k \\ y_j - y_k & z_j - z_k \end{vmatrix}, \quad p_2 = -\begin{vmatrix} x_i - x_k & z_i - z_k \\ x_j - x_k & z_j - z_k \end{vmatrix}, \quad p_3 = \begin{vmatrix} x_i - x_k & y_i - y_k \\ x_j - x_k & y_j - y_k \end{vmatrix},$$

$$2A_{ijk} = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2} = |J|.$$

Інтеграл по поверхні (2.23), що пов'язаний із конвекцією (ГУ III роду) на гранях тетраедного СЕ (див. рис. 2.3), також має чотири випадки і визначається за допомогою формули (А.3.5):

– для грані з вершинами ijk – напроти ℓ , маємо

$$\int_S \alpha T_p [N]^T dS = \alpha T_p \int_S [N]^T dS = \frac{\alpha T_p A_{ijk}}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.128)$$

– для грані з вершинами $i\ell j$ – напроти k

$$\alpha T_p \int_S [N]^T dS = \frac{\alpha T_p A_{i\ell j}}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (2.129)$$

– для грані з вершинами $ik\ell$ – напроти j

$$\alpha T_p \int_S [N]^T dS = \frac{\alpha T_p A_{ik\ell}}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (2.130)$$

– для грані з вершинами $j\ell k$ – напроти i

$$\alpha T_p \int_S [N]^T dS = \frac{\alpha T_p A_{j\ell k}}{3} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (2.131)$$

Інтеграл об'ємного навантаження обумовлений дією внутрішнього джерела теплоти, що входить до (2.23), визначається за допомогою формули (А.4.3)

$$\int_V [N]^T q_V dV = \frac{q_V V}{4} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}. \quad (2.132)$$

Вектор навантаження $\int_S q[N]^T dS$, що також входить до (2.23) і пов'язаний із густиною теплового потоку (ГУ II роду), перетворюється до виду

$$\int_S q[N]^T dS = q \int_S [N]^T dS. \quad (2.133)$$

Для визначення (2.133) застосовуються формули, аналогічні до (2.128)–

(2.131).

Наразі, всі співвідношення тетраедричних СЕ тривимірної задачі теплопровідності є визначеними. Глобальна матриця та вектор вільних членів СЛАР, що стосується всієї розрахункової області, будуються за формулами (2.25) і СЛАР записується у вигляді (2.26).

За граничних умов Дирихле (або ГУ I роду), коли задана температура у вузлах, СЛАР змінюється аналогічно з (2.44).

Після розв'язання СЛАР типу (2.26) отримуємо вузлові значення температури або вектор температури в глобальних вузлах $\{T\}$.

Градiєнти температури знаходяться в кожному елементі-тетраедрі із співвідношення

$$\{\nabla T\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \\ \frac{\partial T}{\partial z} \end{Bmatrix} = [B]\{T\} = \frac{1}{6V} \begin{bmatrix} b_i & b_j & b_k & b_\ell \\ c_i & c_j & c_k & c_\ell \\ d_i & d_j & d_k & d_\ell \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_i \\ T_j \\ T_k \\ T_\ell \end{Bmatrix}, \quad (2.134)$$

а густина теплових потоків для ізотропного середовища за (2.135)

$$\begin{Bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{Bmatrix} = [D][B]\{T\} = - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \frac{1}{6V} \begin{bmatrix} b_i & b_j & b_k & b_\ell \\ c_i & c_j & c_k & c_\ell \\ d_i & d_j & d_k & d_\ell \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_i \\ T_j \\ T_k \\ T_\ell \end{Bmatrix}. \quad (2.135)$$

Визначення компонент густини теплового потоку в глобальних вузлах розрахункової області через компоненти теплового потоку в СЕ

$$\begin{cases} q_{xj} = \frac{\sum_{e=1}^n q_{xi(j)}^{(e)}}{n}; \\ q_{yj} = \frac{\sum_{e=1}^n q_{yi(j)}^{(e)}}{n}; \\ q_{zj} = \frac{\sum_{e=1}^n q_{zi(j)}^{(e)}}{n}. \end{cases} \quad (2.136)$$

де (e) – номер СЕ; n – кількість елементів, що оточують вузол j ; $i(j)$ – функція, яка визначає локальні номери вузлів СЕ через глобальні.

Визначення сумарної густини теплового потоку в глобальних вузлах виконується за формулою

$$q_{\Sigma j} = \sqrt{(q_{xj})^2 + (q_{yj})^2 + (q_{zj})^2}, j = \overline{1, N}. \quad (2.137)$$

2.4.2. Шестигранні лінійні скінченні елементи

Як тривимірний скінченний елемент виберемо восьмивузловий лінійний СЕ [7, 8] або шестигранник, або гексаедр (рис. 2.4).

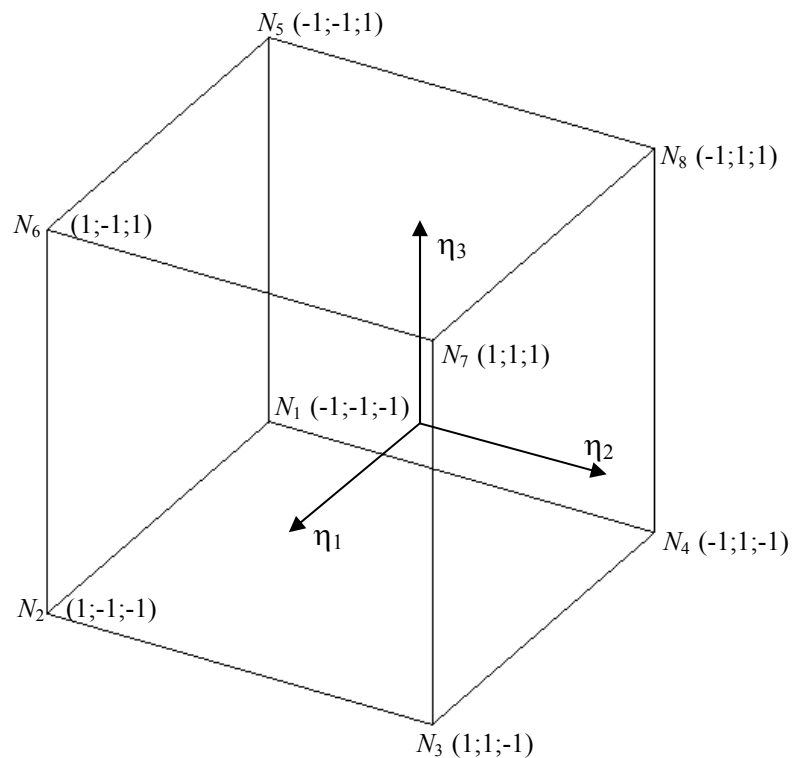


Рис. 2.4. Шестигранний СЕ із 8-а вузлами: $(\eta_1; \eta_2; \eta_3)$ – безрозмірна система ортогональних координат

Вектор коефіцієнтів форми шестигранного СЕ визначається як

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \\ N_5 \\ N_6 \\ N_7 \\ N_8 \end{bmatrix} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} (1-\eta_1)(1-\eta_2)(1-\eta_3) \\ (1+\eta_1)(1-\eta_2)(1-\eta_3) \\ (1+\eta_1)(1+\eta_2)(1-\eta_3) \\ (1-\eta_1)(1+\eta_2)(1-\eta_3) \\ (1-\eta_1)(1-\eta_2)(1+\eta_3) \\ (1+\eta_1)(1-\eta_2)(1+\eta_3) \\ (1+\eta_1)(1+\eta_2)(1+\eta_3) \\ (1-\eta_1)(1+\eta_2)(1+\eta_3) \end{bmatrix} \quad (2.138)$$

Для визначення співвідношень шестигранного СЕ за (2.22) і (2.23), що описуються об'ємними та поверхневими інтегралами, використовуються формули для числового інтегрування виду

$$\begin{aligned} \int_V [B]^T [D][B] dV &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [D][B] \det[J_V] d\eta_1 d\eta_2 d\eta_3 ; \\ \int_V q_v [N]^T dV &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 q_v [N]^T |\det[J_V]| d\eta_1 d\eta_2 d\eta_3 ; \\ \int_{S_1} \alpha [N]^T [N] dS &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \alpha [N]^T [N] \det[J_{S_1}] d\eta_1 d\eta_2 ; \\ \int_{S_1} \alpha T_p [N]^T dS &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \alpha T_p [N]^T |\det[J_{S_1}]| d\eta_1 d\eta_2 ; \\ \int_{S_2} q [N]^T dS &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 q [N]^T |\det[J_{S_2}]| d\eta_1 d\eta_2 . \end{aligned} \quad (2.139)$$

Заміна змінних інтегрування у (2.139) виконується за допомогою відповідного якобіану $dV = |\det[J_V]| d\eta_1 d\eta_2 d\eta_3$, або $dS = |\det[J_S]| d\eta_1 d\eta_2$, або $dS = |\det[J_S]| d\eta_1 d\eta_3$, або $dS = |\det[J_S]| d\eta_2 d\eta_3$.

Для числового визначення інтегралів (2.139) зазвичай послідовно застосовується квадратурна формула Гауса з двома вузлами (див. табл. 2.1)

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [D][B] \det[J_V] d\eta_1 d\eta_2 d\eta_3 &\approx \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 [B]^T [D][B] \det[J_V] w_i w_j w_k ; \\ \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 q_v [N]^T |\det[J_V]| d\eta_1 d\eta_2 d\eta_3 &\approx \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 q_v [N]^T |\det[J_V]| w_i w_j w_k ; \end{aligned} \quad (2.140)$$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \alpha [N]^T [N] \det [J_{S_1}] d\eta_1 d\eta_2 &\approx \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \alpha [N]^T [N] \det [J_{S_1}] w_i w_j ; \\ \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \alpha T_{inv.sp} [N]^T \det [J_{S_1}] d\eta_1 d\eta_2 &\approx \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \alpha T_{inv.sp} [N]^T \det [J_{S_1}] w_i w_j ; \\ \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 q [N]^T \det [J_{S_2}] d\eta_1 d\eta_2 &\approx \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 q [N]^T \det [J_{S_2}] w_i w_j , \end{aligned}$$

де $[B] = [J_V]^{-1} [dN]$ – матриця градієнтів СЕ в розмірних координатах;

$$[dN] = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} -(1-\eta_j)(1-\eta_k) & -(1-\eta_i)(1-\eta_k) & -(1-\eta_i)(1-\eta_j) \\ (1-\eta_j)(1-\eta_k) & -(1+\eta_i)(1-\eta_k) & -(1+\eta_i)(1-\eta_j) \\ (1+\eta_j)(1-\eta_k) & (1+\eta_i)(1-\eta_k) & -(1+\eta_i)(1+\eta_j) \\ -(1+\eta_j)(1-\eta_k) & (1-\eta_i)(1-\eta_k) & -(1-\eta_i)(1+\eta_j) \\ -(1-\eta_j)(1+\eta_k) & -(1-\eta_i)(1+\eta_k) & (1-\eta_i)(1-\eta_j) \\ (1-\eta_j)(1+\eta_k) & -(1+\eta_i)(1+\eta_k) & (1+\eta_i)(1-\eta_j) \\ (1+\eta_j)(1+\eta_k) & (1+\eta_i)(1+\eta_k) & (1+\eta_i)(1+\eta_j) \\ -(1+\eta_j)(1+\eta_k) & (1-\eta_i)(1+\eta_k) & (1-\eta_i)(1+\eta_j) \end{bmatrix} - \text{матриця градієнтів СЕ (див. рис. 2.4) у безрозмірних координатах; } [J_V] = [dN] \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \\ x_5 & y_5 & z_5 \\ x_6 & y_6 & z_6 \\ x_7 & y_7 & z_7 \\ x_8 & y_8 & z_8 \end{bmatrix} -$$

якобінан переходу від безрозмірних до розмірних змінних інтегрування;

$$[D] = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \text{матриця теплопровідності ізотропного матеріалу, Вт/(м·К);}$$

$$[N] = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} (1-\eta_i)(1-\eta_j) \\ (1+\eta_i)(1-\eta_j) \\ (1+\eta_i)(1+\eta_j) \\ (1-\eta_i)(1+\eta_j) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \text{матриця коефіцієнтів форми для сторони 1 СЕ з номе-}$$

рами вузлів 1,2,3,4 (див. рис. 2.4);

$$[dN]_I = \begin{bmatrix} -(1-\eta_j) & (1-\eta_j) & (1+\eta_j) & -(1+\eta_j) \\ -(1-\eta_i) & -(1+\eta_i) & (1+\eta_i) & (1-\eta_i) \end{bmatrix} - \text{матриця градієнтів СЕ в}$$

безрозмірних двовимірних координатах для сторони 1 СЕ;

$$[J_S] = [dN]_I \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{bmatrix} - \text{якобіан переходу від безрозмірної до розмірної}$$

двовимірної системи координат для сторони 1 СЕ; α – коефіцієнт тепловіддачі, Вт/(м²·К); T_p – температура оточуючого середовища, К; q – густина теплового потоку, Вт/м²; $x_i, y_i, z_i, i = \overline{1, N}$ – глобальні координати розрахункової області, м)³.

Наразі, всі співвідношення шестигранних СЕ тривимірної задачі теплопровідності є визначеними. Глобальна матриця та вектор вільних членів СЛАР, що стосується всієї розрахункової області, будуються за формулами (2.25) і СЛАР записується у вигляді (2.26).

За граничних умов Дирихле (або ГУ I роду), коли задана температура у вузлах, СЛАР змінюється аналогічно з (2.44).

Після розв'язання СЛАР типу (2.26) отримуємо вузлові значення температури або вектор температури в глобальних вузлах $\{T\}$.

Розрахунок складових густини теплового потоку у вузлах кожного восьмивузлового СЕ виконується за законом Фур'є

$$[q^{(e)}] = -\lambda [B^{(e)}] \{T^{(e)}\}, \quad (2.141)$$

³ Тут мається на увазі дві системи координат глобальна, що стосується всієї розрахункової області, яка розбита на E СЕ, і локальна система координат, що стосується тільки певного СЕ. Також, відповідно, використовуються дві нумерації вузлів – глобальна від 1 до N (кількість вузлів у всій розрахунковій області) і локальна – від 1 до 8.

де $[B^{(e)}] = [J^{(e)}]^{-1} [dN^{(e)}]$ – матриця градієнтів СЕ в розмірних координатах; $[dN^{(e)}]$ – матриця градієнтів СЕ в безрозмірних координатах (2.140), у якій безрозмірні змінні η_1, η_2, η_3 по черзі набувають значень, що відповідають вуз-

лам СЕ $\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$; $[J^{(e)}]$ – яacobіан переходу від безрозмірної до розмірної

тривимірної системи координат (2.140); $[q^{(e)}] = \begin{bmatrix} q_{x,1}^{(e)} & q_{y,1}^{(e)} & q_{z,1}^{(e)} \\ q_{x,2}^{(e)} & q_{y,2}^{(e)} & q_{z,2}^{(e)} \\ q_{x,3}^{(e)} & q_{y,3}^{(e)} & q_{z,3}^{(e)} \\ q_{x,4}^{(e)} & q_{y,4}^{(e)} & q_{z,4}^{(e)} \\ q_{x,5}^{(e)} & q_{y,5}^{(e)} & q_{z,5}^{(e)} \\ q_{x,6}^{(e)} & q_{y,6}^{(e)} & q_{z,6}^{(e)} \\ q_{x,7}^{(e)} & q_{y,7}^{(e)} & q_{z,7}^{(e)} \\ q_{x,8}^{(e)} & q_{y,8}^{(e)} & q_{z,8}^{(e)} \end{bmatrix}$ – матриця

складових густини теплового потоку у вузлах СЕ (кількість матриць $[q^{(e)}]$ дорівнює E – кількості елементів, на які розбито розрахункову область).

Визначення складових та сумарної густини теплового потоку в глобальних вузлах відбувається за формулами (2.136) і (2.137), відповідно.

2.5. Нелінійні задачі теплопровідності

До цього часу були розглянуті тільки лінійні постановки різноманітних задач теплопровідності та методики їх розв'язання з використанням МСЕ. Але на практиці часто виникають задачі, коли температурною залежністю теплопровідності та коефіцієнта тепловіддачі неможливо знехтувати. У цьому разі ми переходимо до формулювання і розв'язання нелінійної задачі теплопровідності. На відміну від лінійної постановки задачі ізотропної теплопровідності (1.1)–(1.4) (див. п. 1.1.1), формулювання нелінійної задачі дещо відрізняється за формою запису рівняння теплопровідності та граничних умов II і III родів, у яких феноменологічні коефіцієнти залежать від температури [1, 2], тобто

входять до цих рівнянь у неявній формі. При цьому граничні умови I роду лишаються без змін.

Рівняння стаціонарної нелінійної ізотропної теплопровідності з внутрішнім джерелом теплоти можна записати у вигляді

$$\nabla \cdot [\lambda(T) \nabla T] + q_v = 0, \quad (2.142)$$

а рівняння для граничних умов II і III родів набувають вигляду

$$\mathbf{n} \cdot [-\lambda(T) \nabla T] = q_n, \quad (2.143)$$

$\mathbf{n} \cdot [-\lambda(T) \nabla T] = \alpha(T)(T - T_p),$	(2.144)
---	---------

де $\lambda(T)$, $\alpha(T)$ – температурні залежності теплопровідності та коефіцієнта тепловіддачі, відповідно.

Для нелінійної задачі (2.142)–(2.144) з ГУ I роду (1.2) система нелінійних дискретних рівнянь МСЕ типу (2.25), (2.26) може бути записана у вигляді [13]

$$\sum_{e=1}^E \left([k_\lambda^{(e)}] \lambda^{(e)}(T) + [k_\alpha^{(e)}] \alpha(T) \right) \{T\} = - \sum_{e=1}^E \{f^{(e)}\}, \quad (2.145)$$

де E – кількість елементів, на які розбито розрахункову область; T – абсолютна температура, К; $[k_\lambda^{(e)}] = \int_V [B]^T [B] dV$, $[k_\alpha^{(e)}] = \int_{S1} [N]^T [N] dS$ – складові матриці

жорсткості, що пов'язані з теплопровідністю і зовнішнім конвективним теплообміном, відповідно, які обчислюються для $\lambda = \alpha = 1$; $[N]$ – матриця (рядок) коефіцієнтів функцій форми СЕ; $[B] = \nabla \{N\}$;
 $\{f^{(e)}\} = - \int_V q_v^{(e)} [N]^T dV + \int_{S1^{(e)}} q^{(e)} [N]^T dS - T_p \int_{S2^{(e)}} \alpha(T) [N]^T dS$; q_v – густина внутріш-

нього джерела теплоти в елементі, Вт/м³; V – об'єм СЕ, м³; q – густина теплового потоку, Вт/м²; $S1^{(e)}$ – площа грані елемента, на якій задано ГУ II роду, м²; $S2^{(e)}$ – площа грані елемента, на якій задано ГУ III роду, м²; T_p – абсолютна температура оточуючого середовища, К.

Для ряду задач, коли функції $\lambda(T)$ і $\alpha(T)$ є гладкими і диференційованими, ефективним методом розв'язання системи рівнянь (2.145) є лінеаризація за методом Ньютона [12]. Після лінеаризації (2.145) по температурі за методом Ньютона, отримуємо

$$\begin{aligned} \sum_{e=1}^E \left([k_{\lambda}^{(e)}] \left(\frac{\partial \lambda^{(e)}(T^k)}{\partial T} \{T^k\} + \lambda^{(e)}(T^k) \right) + [k_{\alpha}^{(e)}] \left(\frac{\partial \alpha(T^k)}{\partial T^k} \{T^k\} + \alpha(T^k) \right) \right) \{\delta T^{k+1}\} = \\ = - \sum_{e=1}^E \{f^{(e)}\} - \sum_{e=1}^M \left(([k_{\lambda}^{(e)}] \lambda^{(e)}(T^k) + [k_{\alpha}^{(e)}] \alpha(T^k)) \{T^k\} \right), \end{aligned} \quad (2.146)$$

де k – номер ітерації.

Система рівнянь (2.146) на кожній ітерації розв'язується відносно δT^{k+1} . Шукана температура у вузлах розрахункової області визначається із рівняння

$$\{T^{k+1}\} = \{T^k\} + \{\delta T^{k+1}\}, \quad (2.147)$$

Ітераційний цикл розв'язання системи рівнянь (2.146) закінчується в разі виконання нерівності

$$\max |\delta T^{k+1}| < \varepsilon_T, \quad (2.148)$$

де ε_T – задана точність розрахунку температури.

У разі застосування форми запису системи рівнянь типу (2.145) складові матриці жорсткості необхідно обчислювати лише один раз у процесі виконання ітерацій.

Даний алгоритм (2.146)–(2.148) не накладає обмежень на скінченні елементи і тому може бути реалізований з використанням будь-яких СЕ, розглянутих у цьому розділі.

На практиці, часто виникають такі нелінійні задачі, коли в деякому об'ємі співіснують дві фази (наприклад, тверда і рідка – двофазне середовище) з різною теплопровідністю. Температура переходу однієї фази в іншу і, навпаки, є відомою величиною і називається рівноважною температурою фазового переходу першого роду T_m . Тобто, функція теплопровідності за температури фазового переходу зазнає розриву. У таких задачах шуканими величинами є одночасно як поле температури, так і границя розділу фаз. У механіці суцільних середовищ такі задачі дістали назву задач з сильними розривами [3] і, зокрема, стаціонарних задач типу Стефана.

З математичної точки зору запис умов стаціонарної задачі типу Стефана відповідає ГУ абсолютного контакту або ГУ IV роду при наперед невизначеному положенні границі між фазами. При цьому, внаслідок стаціонарності задачі, рух міжфазної границі не відбувається, що свідчить про відсутність масопереносу між фазами та відповідно виділення або поглинання теплоти фазового переходу

$$\begin{cases} \{\mathbf{n} \cdot \mathbf{q}\} = 0; \\ \{T\} = 0, \end{cases} \quad (2.149)$$

де $\{\mathbf{n} \cdot \mathbf{q}\} = \mathbf{n}^- \cdot \mathbf{q}^+ + \mathbf{n}^+ \cdot \mathbf{q}^- = q_n = 0$ – нормальна густина теплового потоку на міжфазній границі дорівнює нулю, тобто функція $\mathbf{q}(\mathbf{x})$ не зазнає розриву на цій границі, Вт/м²; $\mathbf{q}^+ = -\lambda_p \nabla T$, $\mathbf{q}^- = -\lambda_t \nabla T$ – вектори густини теплового потоку на міжфазній границі з боків рідини та твердого тіла, відповідно, Вт/м²; λ_p , λ_t – теплопровідність рідкої та твердої фази, відповідно, Вт/(м·К); $\mathbf{n}$ – нормаль до міжфазної границі; $\{T\} = T^+ - T^- = 0$ – різниця температури на міжфазній границі дорівнює нулю, тобто функція температури від координат є гладкою, К.

Прикладами стаціонарної задачі Стефана можуть слугувати різноманітні гарнісажні процеси, що мають місце в промисловому обладнанні. Наприклад, у сталеплавильних і скловарних печах, алюмінієвих та магнієвих електролізерах тощо.

У разі розв'язання задач з сильними розривами типу Стефана зазвичай виконують перехід від явного формулювання умов на границі (2.149) до узагальненого. Це дає змогу виконати згладжування розривної функції $\lambda(T)$ на деякому інтервалі зміни температури ΔT або інтервалі згладжування [14, 15] (рис. 2.5).

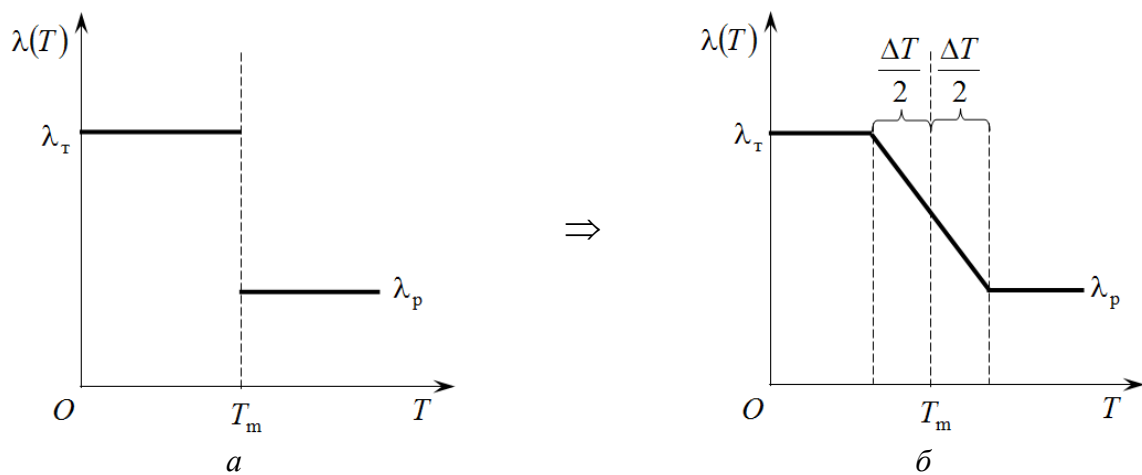


Рис. 2.5. Згладжування розриву функції теплопровідності на границі між фазами:
а – розривна функція $\lambda(T)$; б – згладжена функція $\lambda(T)$

Процедура згладжування теплопровідності на границі між фазами усуває розрив функції $\lambda(T)$, але не ліквідує розриву першої її похідної за темпе-

ратурою $\frac{\partial \lambda(T)}{\partial T}$, що може викликати проблеми зі збіжністю алгоритму (2.146)–(2.148), який побудовано виключно на лінеаризації за методом Ньютона [12].

Тому для розв'язання сильно нелінійних стаціонарних задач типу Стефана в узагальненій постановці, які мають місце під час моделювання теплообміну в плавильних печах з використанням ефективних значень теплопровідності в розплавах (при цьому стрибок теплопровідності під час фазового переходу тверде тіло – рідина може сягати декількох порядків), застосовується метод з прямою підстановкою Кірхгофа [10] з використанням аналітичних співвідношень для визначення середньої інтегральної теплопровідності та її похідної за температурою і лінеаризації за методом Ньютона [13] (див. додаток Б). Застосування прямої підстановки Кірхгофа за наявності фазового переходу зі стрибком теплопровідності дає змогу перейти до інтегральної форми запису коефіцієнтів переносу трансформованого рівняння теплопровідності і, таким чином уникнути розривів у функції похідної середньої інтегральної теплопровідності за температурою $\bar{\lambda}(T) = \frac{1}{T} \int_0^T \lambda(T) dT$, що в результаті забезпечує

гарантовану збіжність під час розв'язання системи лінеаризованих рівнянь. У результаті застосування методики [13] до дискретної системи рівнянь МСЕ типу (2.145), отримуємо

$$\begin{aligned} \sum_{e=1}^E \left[\left[k_{\lambda}^{(e)} \left(\bar{\lambda}^{(e)}(T^k) + \frac{\partial \bar{\lambda}^{(e)}(T^k)}{\partial T} \{T^k\} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \left[k_{\alpha}^{(e)} \left(\frac{\partial \alpha_{ef}(T^k)}{\partial T^k} \{T^k\} + \alpha(T^k) \right) \right] \right] \{ \delta T^{k+1} \} = \right. \\ \left. = - \sum_{e=1}^E \{ f^{(e)} \} - \sum_{e=1}^M \left(\left[k_{\lambda}^{(e)} \right] \{ \varphi^k \} + \left[k_{\alpha}^{(e)} \right] \alpha(T^k) \{ T^k \} \right) \end{aligned} \quad (2.150)$$

де k – номер ітерації; $\bar{\lambda}(T) = \lambda_0 + \frac{\lambda_1 T}{2}$ Вт/(м·К); $\frac{\partial \bar{\lambda}(T)}{\partial T} = \frac{\lambda_1}{2}$, (Вт/(м·К²)) – для $\lambda(T) = \lambda_0 + \lambda_1 T$ – для однорідного середовища з лінійною залежністю від температури, Вт/(м·К); λ_0, λ_1 – коефіцієнти лінійної функції, Вт/(м·К) і Вт/(м·К²), відповідно;

$$\lambda(T) = \begin{cases} \lambda_{\text{т}}, & T < T_{\ell} - \Delta T / 2; \\ \frac{\lambda_{\text{т}} - \lambda_{\text{р}}}{\Delta t} (T - T_{\ell}) + \frac{\lambda_{\text{т}} + \lambda_{\text{р}}}{2}, & T \in \left[T_{\ell} - \frac{\Delta T}{2}; T_{\ell} + \frac{\Delta T}{2} \right]; \\ \lambda_{\text{т}}, & T > T_{\ell} + \Delta T / 2, \end{cases} \quad -$$

згладжена функція теплопровідності для двофазного середовища (див. рис. 2.5), Вт/(м·К); $\lambda_{\text{т}}, \lambda_{\text{р}}$ – теплопровідність твердої та рідкої фаз, відповідно, Вт/(м·К);

$$\bar{\lambda}(T) = \begin{cases} \lambda_{\text{т}}, & T < T_{\text{м}} - \frac{\Delta T}{2}; \\ \lambda_{\text{т}} + \frac{(\lambda_{\text{р}} - \lambda_{\text{т}})}{T} \left[\frac{(T - T_{\text{м}})^2}{2\Delta T} + \frac{(T - T_{\text{м}})}{2} + \frac{\Delta T}{8} \right], & T \in \left[T_{\text{м}} - \frac{\Delta T}{2}; T_{\text{м}} + \frac{\Delta T}{2} \right]; \\ \frac{1}{T} (\lambda_{\text{т}} T_{\text{м}} + \lambda_{\text{р}} (T - T_{\text{м}})), & T > T_{\text{м}} + \frac{\Delta T}{2}, \end{cases} \quad -$$

згладжена функція середньої інтегральної теплопровідності для двофазного середовища, Вт/(м·К);

$$\frac{\partial \bar{\lambda}(T)}{\partial T} = \begin{cases} 0, & T < T_{\text{м}} - \frac{\Delta T}{2}; \\ \frac{(\lambda_{\text{р}} - \lambda_{\text{т}})}{2\Delta T \cdot T^2} \left(T - T_{\text{м}} + \frac{\Delta T}{2} \right) \left(T + T_{\text{м}} - \frac{\Delta T}{2} \right), & T \in \left[T_{\text{м}} - \frac{\Delta T}{2}; T_{\text{м}} + \frac{\Delta T}{2} \right]; \\ \frac{(\lambda_{\text{р}} - \lambda_{\text{т}}) T_{\text{м}}}{T^2}, & T \geq T_{\text{м}} + \frac{\Delta T}{2}, \end{cases} \quad -$$

похідна за температурою від згладженої функції середньої інтегральної теплопровідності для двофазного середовища, Вт/(м·К²); $T_{\text{м}}$ – температура фазового переходу 1-го роду, К; ΔT – інтервал згладжування, К;

$$\varphi = \begin{cases} \lambda_{\text{т}} T, & T < T_{\text{м}} - \frac{\Delta T}{2}; \\ \lambda_{\text{т}} T + \frac{\lambda_{\text{р}} - \lambda_{\text{т}}}{2\Delta T} (T - T_{\text{м}})^2 + \frac{\lambda_{\text{р}} - \lambda_{\text{т}}}{2} (T - T_{\text{м}}) + \frac{\lambda_{\text{р}} - \lambda_{\text{т}}}{8} \Delta T, & T \in \left[T_{\text{м}} - \frac{\Delta T}{2}; T_{\text{м}} + \frac{\Delta T}{2} \right]; \\ \lambda_{\text{т}} T_{\text{м}} + \lambda_{\text{р}} (T - T_{\text{м}}), & T > T_{\text{м}} + \frac{\Delta T}{2}, \end{cases} \quad -$$

потенціал Вт/м; α – коефіцієнт тепловіддачі, Вт/(м²·К).

Шукана температура у вузлах розрахункової області після розв'язання системи лінеаризованих дискретних рівнянь (2.150) визначається із рівняння (2.147). Ітераційний цикл розв'язання стаціонарної задачі типу Стефана закінчується в разі виконання нерівності (2.148).

Наведена методика (2.150), (2.147), (2.148) не накладає обмежень на величину ΔT , тобто теоретично температурний інтервал згладжування може бути як завгодно малою величиною, а різниця між λ_p і λ_t як завгодно великою.

Запитання для самоконтролю

1. Екстремальна задача в МСЕ на прикладі рівняння теплопровідності?
2. Основні етапи варіаційного формулювання задачі під час побудови системи дискретних рівнянь МСЕ на прикладі рівняння теплопровідності.
3. Система дискретних рівнянь МСЕ.
4. Що включає в себе скінченно-елементна дискретизація на прикладі рівняння теплопровідності?
5. Складові матриці жорсткості для задачі теплопровідності.
6. Система дискретних рівнянь для одного СЕ і для всієї розрахункової області.
7. Умови збіжності та оцінка точності МСЕ.
8. Основні визначення для плоских трикутних СЕ.
9. Матриця жорсткості плоского симплекс-елементу. Формули для виконання обчислень.
10. Вектор вільних членів плоского симплекс-елементу. Формули для проведення обчислень.
11. Обчислити значення температури в точці з координатами (2; 1.5), що знаходиться всередині плоского симплекс-елементу з координатами вузлів $i(0;0)$, $j(4;0,5)$, $k(2;5)$, якщо задані вузлові значення $T_i = 340$; $T_j = 334$; $T_k = 346$ К. Виконати рисунок СЕ, що ілюструє дану задачу.
12. Алгоритм перетворення СЛАР МСЕ за граничних умов Дирихле.
13. Формули для обчислення складових густини теплового потоку плоского симплекс-елементу.
14. Визначити лінію рівня, що відповідає температурі 362 К, для плоского симплекс-елементу з координатами вузлів $i(0;0)$, $j(3;1,5)$, $k(1,5;5,5)$, якщо задані вузлові значення $T_i = 360$; $T_j = 354$; $T_k = 366$ К. Виконати рисунок СЕ, що ілюструє дану задачу.
15. Дано плоский симплекс-елемент з координатами вузлів $i(3;3)$, $j(7;0)$, $k(6;4)$, на сторонах якого задані ГУ III роду: $j-k - \alpha_{jk} = 5$ Вт/(м²·К), $T_{air\ jk} = 323$ К, $k-i - \alpha_{ki} = 5$ Вт/(м²·К), $T_{air\ ki} = 313$ К. Теплопровід-

ність матеріалу складає $\lambda = 30 \text{ Вт/(м}^2\cdot\text{К)}$. Необхідно скласти матриці скінченного елемента, припускаючи його товщину рівною $t = 1$.

16. Основні визначення для плоских чотирикутних СЕ.

17. Головні співвідношення для плоских чотирикутних СЕ для розв'язання задачі теплопровідності.

18. Послідовність операцій для визначення добутку матриць $[B]^T [D][B]$ складової матриці жорсткості чотирикутного СЕ.

19. Формули для обчислення складових густини теплового потоку чотирикутного СЕ.

20. Основні визначення для плоских трикутних СЕ вісесиметричної задачі.

21. Головні співвідношення для трикутних СЕ при розв'язанні задачі вісесиметричної теплопровідності.

22. Визначення компонент густини теплового потоку в глобальних вузлах розрахункової області через компоненти теплового потоку в СЕ.

23. Визначення сумарної густини теплового потоку в глобальних вузлах.

24. Основні визначення для плоских чотирикутних СЕ вісесиметричної задачі.

25. Головні співвідношення для чотирикутних СЕ для розв'язання задачі вісесиметричної теплопровідності.

26. Розрахунок складових густини теплового потоку для чотирикутних СЕ для розв'язання вісесиметричної задачі.

27. Основні визначення для тетраедного СЕ.

28. Головні співвідношення для тривимірного симплекс-елемента для розв'язання задачі теплопровідності.

29. L -координати та їх застосування для аналітичного визначення інтегральних співвідношень МСЕ.

30. Градієнт температури та густина теплового потоку тетраедного СЕ для ізотропного середовища.

31. Дано тетраедний СЕ з координатами вузлів: $i(1;2;1)$, $j(0;0;0)$, $k(2;0;0)$, $\ell(1;0;3)$. Знайти функції форми даного СЕ.

32. Основні визначення для шестигранних 8-ми вузлових СЕ.

33. Головні співвідношення для шестигранного СЕ для розв'язання тривимірної задачі теплопровідності.

34. Розрахунок складових густини теплового потоку у вузлах шестигранного восьмивузлового СЕ.

35. Методи розв'язання нелінійних задач з використанням МСЕ.

36. Граничні умови стаціонарної задачі Стефана.

37. У чому полягає узагальнене формулювання задачі стаціонарної Стефана? Інтервал згладжування та його призначення.

38. Для чого застосовується підстановка Кірхгофа та середня інтеграль-

на теплопровідність?

39. Система дискретних рівнянь МСЕ для розв'язання нелінійної стаціонарної задачі теплопровідності з використанням лінеаризації за методом Ньютона.

40. Система дискретних лінеаризованих рівнянь МСЕ для розв'язання стаціонарної задачі типу Стефана.

41. Як впливає на точність числового розв'язання задачі тип СЕ і для чого виконуються подвійний перерахунок?

3. ЧИСЛОВІ МЕТОДИКИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ СТАТИЧНОЇ ПРУЖНОСТІ МЕТОДОМ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

3.1. Методи побудови системи дискретних рівнянь МСЕ задач НДС

3.1.1. Метод переміщень як мінімізація повної потенціальної енергії

Застосування МСЕ до розв'язання задач механіки суцільного середовища передбачає, що дискретизацію розрахункової області на скінченні елементи вже проведено (див. підрозділ 2.1, п. 2.1.2) і матриці функцій форми та градієнтів СЕ визначено.

Принцип віртуальної роботи стверджує [7], що внутрішня віртуальна робота в елементі $\int_V d\{\epsilon\}\{\sigma\}dV$ ⁴ (спричинена внутрішніми силами) дорівнює зовнішній роботі на віртуальних переміщеннях (спричиненій зовнішніми силами) $\left[d\{u\}^e\{P\} + \int_V d\{f\}^T\{G\}dV + \int_S d\{f\}^T\{p\}dS \right]$. Тобто, можна записати

$$\int_V d\{\epsilon\}\{\sigma\}dV - \left[d\{u\}^e\{P\} + \int_V d\{f\}^T\{G\}dV + \int_S d\{f\}^T\{p\}dS \right] = 0, \quad (3.1)$$

де $d\{f\} = [N]d\{u\}^e$ – віртуальні переміщення СЕ, м; $d\{\epsilon\} = [B]d\{u\}^e$ – віртуальні деформації СЕ; $d\{u\}^e$ – віртуальне переміщення у вузлі, м; $[N]$ – матриця функцій форми СЕ; $[B]$ – матриця градієнтів СЕ; $\{\sigma\}$ – напруження СЕ, Па; $\{P\}$ – вектор-стовпець вузлових сил, Н; $\{G\}$ – вектор об'ємних сил, Н/м³; $\{p\}$ – вектор поверхневого навантаження, Па; V – об'єм СЕ, м³; S – поверхня СЕ, м².

Перший член у рівнянні (3.1) відповідає варіації енергії деформації U СЕ, а другий – варіації потенціальної енергії W – зовнішнього навантаження. Тоді рівняння (3.1) можна переписати у вигляді

$$d(U + W) = d(\chi) = 0, \quad (3.2)$$

де χ – повна потенціальна енергія, Дж.

⁴ Тут оператор $d(\)$ є повним диференціалом і означає нескінченно малі (віртуальні) прирощення величин.

Рівняння (3.2) означає, що для забезпечення рівноваги повна потенціальна енергія має набувати стаціонарного значення [7]. Система рівнянь МСЕ типу (3.1) є, по суті, відображенням того, що варіюванням переміщень здійснюється за кінцевим числом (m) параметрів $\{u\}$ і тому ця система може бути записана у вигляді

$$\frac{\partial \chi}{\partial \{u\}} = \left\{ \frac{\partial \chi}{\partial u_k} \right\} = 0, \quad k = \overline{1, m}. \quad (3.3)$$

Можна також показати, що для пружного середовища повна потенціальна енергія не тільки стала, але й мінімальна величина [16]. Таким чином, з фізичної точки зору, під час використання МСЕ відшукується мінімум повної потенціальної енергії середовища серед можливих переміщень заданої форми.

Чим більше степенів свободи має система, тим точніше буде наближений розв'язок, який у наближенні до границі прямує до точного значення, що відповідає істинній рівновазі. Якщо істинна рівновага вимагає абсолютного мінімуму повної потенціальної енергії χ , то наближений розв'язок за допомогою МСЕ завжди буде давати завищене її значення [7]. Таким чином, граничне значення χ завжди може бути оцінено.

Якби функція χ була відома апіорі, то систему рівнянь МСЕ можливо отримати безпосереднім диференціюванням відповідно до (3.3).

Запишемо через прийняті в МСЕ позначення визначальне рівняння теорії пружності, що виражається лінійним законом зв'язку між напруженнями і деформаціями (закон Гука в узагальненій формі)

$$\{\sigma\} = [D](\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_0\}) + \{\sigma_0\}, \quad (3.4)$$

де $[D]$ – матриця пружності, Па; $\{\varepsilon_0\}$ – початкова деформація; $\{\sigma_0\}$ – початкове напруження, Па.

Тепер, підставляючи в (3.1) рівняння (3.4) і виконуючи диференціювання підінтегральних функцій за формулою (3.3), вважаючи, що навантаження не залежать від переміщень, отримуємо

$$\left[\frac{1}{2} \int_V \{\varepsilon\}^T [D] \{\varepsilon\} dV - \int_V \{\varepsilon\}^T [D] \{\varepsilon_0\} dV + \int_V \{\varepsilon\}^T \{\sigma_0\} dV \right] - \left[\{u\}^T \{P\} + \int_V d\{f\}^T \{G\} dV + \int_S d\{f\}^T \{p\} dS \right] = \chi. \quad (3.5)$$

У співвідношенні (3.5) вираз у перших квадратних скобках відповідає U , а в других – W (3.2).

Процедура отримання рівняння (3.5) для розв'язання рівнянь теорії пружності за допомогою МСЕ еквівалентна добре відомому в літературних джерелах як наближений метод Релея-Рітца [7]. Відповідно до цього методу записується вираз для повної енергії і покладається, що форма переміщень залежить від скінченної кількості невідомих параметрів. Потім виводиться система дискретних рівнянь із умови мінімуму повної потенціальної енергії за цими параметрами. Таким чином, МСЕ у викладеному формулюванні (3.5) є еквівалентним до методу Релея-Рітца. Різниця полягає тільки в способі задання переміщень. У методі Рітца переміщення зазвичай задаються функціями, визначеними на області, що приводить відповідно до системи дискретних рівнянь, яка має заповнену, а не розріджену (стрічкову) матрицю коефіцієнтів СЛАР [17, 18]. У методі МСЕ задаються поелементно. Кожний вузловий параметр зв'язаний тільки з прилеглими до цього вузла СЕ, що в результаті призводить до розрідженої матриці СЛАР.

Застосування звичайного методу Рітца обмежується відносно простими геометричними формами розрахункової області, тоді як в МСЕ просту форму повинні мати тільки СЕ. У МСЕ невідомими зазвичай є вузлові переміщення, що допускає просту фізичну інтерпретацію отриманих результатів.

3.1.2. Критерії збіжності задач НДС

Дійсний мінімум потенціальної енергії ніколи не може бути досягнутий у розрахунках за жодної дискретизації, оскільки задання функцій форми обмежує кількість ступенів свободи системи [7].

Для того щоб гарантувати збіжність процесу розрахунків за допомогою МСЕ до точного розв'язку необхідно задовольнити деякі прості вимоги. Наприклад, очевидно, що функція переміщень має якнайточніше описувати істинні переміщення. Неможна вибирати функції, що припускають деформацію СЕ при переміщенні його тільки як жорсткого тіла та ін. Таким чином, відповідно до вище відмічених, функції переміщень мають задовольняти такі критерії:

Критерій 1. Функція переміщень має бути обрана так, щоб унеможливити деформацію СЕ при вузлових переміщеннях, що спричинені його зміщенням як жорсткого тіла.

Критерій 2. Функція переміщень має бути такою, щоб у разі, коли вузлові переміщення відповідають умові сталої деформації, цей стан у дійсності має реалізовуватися в СЕ.

Критерій 3. Функція переміщень має бути такою, щоб деформації на границях між СЕ були скінченними, навіть якщо вони там не визначені.

Цей критерій означає неперервність переміщень на границі між СЕ.

У разі, коли деформації визначалися через першу похідну, як в плоских задачах ПДС, ПНС (див. розділ 1), нерозривною має бути тільки функція переміщення. Однак, коли деформації визначаються другою похідною, як в задачах про пластини та оболонки, тоді вимоги до неперервності накладаються як на функцію переміщень, так і на її першу похідну.

3.1.3. Узагальнене варіаційне формулювання МСЕ

У п. 3.1.2 було показано, що задача визначення поля переміщень у суцільному середовищі зводиться до задачі мінімізації повної потенціальної енергії, яка визначена у вигляді функціонала від переміщень. Також встановлено еквівалентність МСЕ методу наближеної мінімізації функціонала енергії на вузлових переміщеннях [7]. У цьому параграфі буде розглянуто питання отримання системи дискретних рівнянь МСЕ в узагальненому вигляді.

Нехай математична постановка задачі потребує мінімізації функціонала χ в деякій області. Величина χ визначається у вигляді інтегралу по області V і частині границі S , на якій невідома функція $\{\phi\}$ або її похідні, тобто вона має вигляд

$$\chi(\phi) = \int_V f\left(\{\phi\}, \frac{\partial}{\partial x_i}\{\phi\}\right) dV + \int_S g\left(\{\phi\}, \frac{\partial}{\partial x_i}\{\phi\}\right) dS, \quad (i = 1, 2, 3). \quad (3.6)$$

Нехай область, що розглядається, дискретизована на скінченні елементи (підобласті) і нехай шукані функції для кожного СЕ записуються у вигляді

$$\{\phi\} = [N]\{\Phi^{(e)}\} \quad (3.7)$$

де $\{\Phi^{(e)}\}$ вектор, який вміщує вузлові значення функції, що відповідають певному СЕ; $[N]$ – матриця, що визначає залежність функцій форми СЕ від координат.

Для мінімізації функціоналу χ за всіма параметрами $\{\Phi\}$ усієї області необхідно записати систему рівнянь, яка за видом є схожою з (2.20), (3.3)

$$\frac{\partial \chi}{\partial \{\Phi\}} = \left\{ \frac{\partial \chi}{\partial \Phi_i} \right\} = 0, \quad i = \overline{1, N}, \quad (3.8)$$

де N – кількість вузлів у всій області.

Якщо справедливо твердження, що функціонал дорівнює сумі вкладів окремих СЕ, тобто

$$\chi = \sum_{e=1}^E \chi^{(e)}, \quad (3.9)$$

тоді система рівнянь (3.8) набуває вигляду

$$\frac{\partial \chi}{\partial \Phi_i} = \sum_{e=1}^E \frac{\partial \chi^{(e)}}{\partial \Phi_i} = 0, \quad (3.10)$$

де E – кількість СЕ, на які розбито розрахункову область у результаті дискретизації.

У (3.10) виконується підсумовування за всіма СЕ розрахункової області. Таким чином, (3.10) встановлює правило формування глобальної системи дискретних рівнянь.

В окремому разі, коли χ є квадратичним функціоналом від $\{\Phi\}$ та його похідних (див. розділ 2), похідну для СЕ з індексом (e) можна записати у вигляді

$$\frac{\partial \chi^{(e)}}{\partial \{\Phi^{(e)}\}} = [k^{(e)}] \{\Phi^{(e)}\} + \{F^{(e)}\}, \quad (3.11)$$

де $[k^{(e)}]$ – матриця жорсткості СЕ; $\{F^{(e)}\}$ – вектор вільних членів СЕ.

Глобальну систему рівнянь для всієї розрахункової області, що мінімізує функціонал χ , можна записати таким чином

$$\frac{\partial \chi}{\partial \{\Phi\}} = [K] \{\Phi\} + \{F\} = 0, \quad (3.12)$$

де $[K_{ij}] = \sum [k_{k\ell}^{(e)}]$, $(i, j = \overline{1, N})$, $(k, \ell = \overline{1, n})$; N – кількість глобальних вузлів у розрахунковій області; n – кількість вузлів у СЕ; $[F_i] = \sum \{F_k^{(e)}\}$.

3.1.4. Загальні критерії збіжності

Зазвичай під збіжністю результатів числового моделювання, зокрема, отриманих за допомогою МСЕ, можна розуміти таке: за умови нескінченного зменшення розмірів СЕ помилки під час визначення величини χ прямують до нуля. Цей факт іноді дозволяє стверджувати, що розв'язок, отриманий за однієї дискретизації, наперед кращий розв'язку, який отримано за іншої дискрети-

зації. Очевидно, що в сенсі визначення величини χ (3.7) це твердження є справедливим, якщо функція форми першого типу дискретизації включає всі функції форми другого типу дискретизації. Саме такий випадок виникає, коли нова дискретизація отримується наступним діленням більш крупних СЕ (див. розділ 2). Збіжність за χ при цьому буде монотонною [7].

Тепер розглянемо критерії збіжності задач, що отримано в результаті узагальненого варіаційного формулювання і наведено в [7].

Критерій 1. Функції форми СЕ $[N]$ мають бути такими, щоб за відповідного вибору $\{\Phi^{(e)}\}$ і прямуванні розмірів СЕ до нуля можна було отримати будь-які сталі значення $\{\phi\}$ та її похідних, що входять у функціонал χ .

Критерій 2. Функції форми СЕ $[N]$ мають бути вибрані так, щоб $\{\phi\}$ та її похідні, на порядок менші, ніж похідні, що входять у вирази для f і g (3.6), були неперервні на границі між СЕ.

3.1.5. Інші способи формулювання МСЕ

Метод наближеної мінімізації функціоналу є самий розповсюджений спосіб отримання системи дискретних рівнянь МСЕ, але він не є єдино можливим [7]. Наприклад, в перших роботах МСЕ, пов'язаних з будівельною механікою, будувалися виключно фізичні моделі, і, хоч, були певні труднощі щодо обґрунтування збіжності використовуваних методів, досить часто отримували досить пристойні інженерні результати.

Існують інші способи, що дають змогу отримати математичні вирази для співвідношень МСЕ безпосередньо із диференціальних рівнянь вихідної задачі. Переваги таких методів полягають у такому:

1. Немає потреби в пошуку функціонального еквіваленту вихідним диференціальним рівнянням задачі.
2. Можливість розповсюдження цих методів на задачі, для яких шуканий функціонал взагалі не існує або поки що не знайдений.

Розглянемо задачу наближеного розв'язання системи диференціальних рівнянь, яким має задовольняти невідома функція $\{\phi\}$ в області V [7]. Запишемо основні рівняння у вигляді

$$A(\{\phi\}) = 0, \quad (3.13)$$

а граничні умови на границі S як

$$C(\{\phi\}) = 0, \quad (3.14)$$

де A, C – диференціальні оператори.

Якщо пробна функція, що задовольняє граничні умови, записана в зага-

льній формі

$$\{\Phi\}_a = [N]\{\Phi\}, \quad (3.15)$$

де $[N]$ – функція координат; $\{\Phi\}$ – вектор шуканих параметрів.

Тоді в загальному випадку можна записати, що

$$A(\{\Phi\}_a) = R \neq 0. \quad (3.16)$$

Найкращим розв’язком (3.16) буде той, який дає у всіх точках області V найменшу нев’язку R .

Очевидно, цей розв’язок можна отримати, використавши ту обставину, що якщо нев’язка R тотожно дорівнює нулю всюди в області, то

$$\int_V WRdV = 0, \quad (3.17)$$

де W – будь-яка функція координат.

Якщо кількість невідомих параметрів $\{\Phi\}$ дорівнює n , то, обравши n лінійно незалежних функцій W_i , можна записати відповідну систему рівнянь

$$\int_V W_i R dV = \int_V W_i A([N]\{\Phi\}) dV = 0, \quad (3.18)$$

із якої може бути знайдена функція $\{\Phi\}$.

Цей процес називається методом зваженої нев’язки [10] (див. розділ 2), а W_i – ваговою функцією. Вибір різноманітних вагових функцій приводить до різних класичних методів числового аналізу.

Колокації в точці. У цьому разі вважається, що $W_i=1$ у деякій точці i і дорівнює нулю у всій решті точок. При цьому фактично основне диференціальне рівняння задовольняється в n окремих точках розрахункової області.

Колокації в підобласті. У цьому способі вважається, що $W_i=1$ у деякій підобласті і $W_i=0$ на решті області. Це еквівалентно тому, що інтеграл дорівнює нулю в деяких підобластях, кількість яких достатня для того, щоб отримати необхідну кількість рівнянь.

Метод Гальоркина. У цьому разі $W_i = N_i$, тобто як вагова функція обирається функція форми, за допомогою якої апроксимується розв’язок. Цей метод зазвичай призводить до найкращих результатів.

У разі використання в будь-якому із згаданих методів співвідношення

(3.15) , що визначає прийняту апроксимацію, можна виявити основні особливості МСЕ.

По-перше, результуюча система дискретних рівнянь буде мати розрізнену матрицю коефіцієнтів зі стрічковою структурою [17, 18], оскільки вплив кожного параметра розповсюджується тільки на ті елементи, які приймають до вузлової точки, що розглядається.

По-друге інтеграли обчислюються для кожного СЕ, а потім отримані результати підсумовуються при формуванні глобальної матриці та вектора вільних членів СЛАР. Тобто МСЕ належить до одного із напрямків діакоптики – загального методу дослідження складних систем шляхом їх розчленування.

Слід також відмітити недоліки застосування методу зваженої нев'язки. У цьому методі диференціальний оператор A містить похідні більш високих порядків, чим варіаційний функціонал χ . Таким чином, необхідно забезпечити умови неперервності функцій форми більш високого порядку. Ця обставина має важливе значення, оскільки сильно обмежує вибір функцій форми і тим самим може викликати нездоланні труднощі.

3.2. Плоскі задачі ПДС і ПНС

У процесі мінімізації потенціальної енергії пружного тіла (3.3), (3.5) отримуємо інтегральні співвідношення, що входять у систему дискретних рівнянь, яка записана для одного СЕ [7, 8]:

$$[k^{(e)}]\{U\} = \{f^{(e)}\}, \quad (3.19)$$

$$[k^{(e)}] = \int_V [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] [B^{(e)}] dV, \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} \{f^{(e)}\} = \int_V [N^{(e)}]^T \begin{Bmatrix} G_x^{(e)} \\ G_y^{(e)} \\ G_z^{(e)} \end{Bmatrix} dV + \int_V [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] \{\epsilon_0^{(e)}\} dV - \\ - \int_S [N^{(e)}]^T \begin{Bmatrix} p_x^{(e)} \\ p_y^{(e)} \\ p_z^{(e)} \end{Bmatrix} dS + \{P\}, \end{aligned} \quad (3.21)$$

де $[k^{(e)}]$ – матриця жорсткості СЕ, Н/м; $\{U\}$ – вектор переміщень СЕ, м; $\{f^{(e)}\}$ – вектор вільних членів системи рівнянь, Н; $[B^{(e)}]$ – матриця градієнтів СЕ, яка зв'язує деформації й переміщення, м⁻¹; $[D^{(e)}]$ – матриця механічних властивостей, Па; $\{\epsilon_0^{(e)}\}$ – початкова деформація СЕ, що пов'язана з темпера-

турним навантаженням; $[N^{(e)}]$ – матриця функцій форми; $G_x^{(e)} = \rho g_x$, $G_y^{(e)} = \rho g_y$, $G_z^{(e)} = \rho g_z$ – об’ємні сили, Н/м³; $p_x^{(e)}$, $p_y^{(e)}$, $p_z^{(e)}$ – поверхневе навантаження, Н/м²; $\{P\}$ – вектор-стовпець вузлових сил, Н.

Розглянемо основні співвідношення МСЕ на прикладі трикутного СЕ (рис. 3.1).

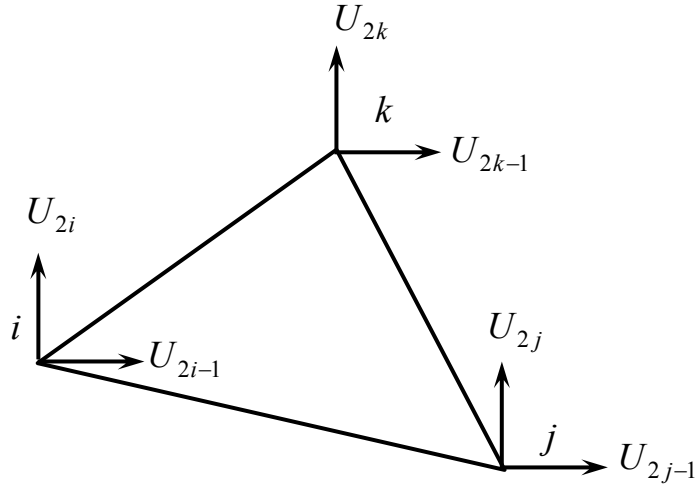


Рис. 3.1. Двовимірний симплекс-елемент або трикутний СЕ: U_{2i} – вектор переміщень

Матриця функцій форми СЕ складається з двох стовпців, що відповідає двом складовим переміщень по x і y

$$[N^{(e)}] = \begin{bmatrix} N_i & 0 \\ 0 & N_i \\ N_j & 0 \\ 0 & N_j \\ N_k & 0 \\ 0 & N_k \end{bmatrix}, \quad (3.22)$$

де $N_i = \frac{1}{2A}[a_i + b_i x + c_i y]$ – функція форми у вузлі СЕ з номером i ;

$$\{a\} = \begin{Bmatrix} a_i \\ a_j \\ a_k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_j y_k - x_k y_j \\ x_k y_i - x_i y_k \\ x_i y_j - x_j y_i \end{Bmatrix}, \quad \{b\} = \begin{Bmatrix} b_i \\ b_j \\ b_k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} y_j - y_k \\ y_k - y_i \\ y_i - y_j \end{Bmatrix}, \quad \{c\} = \begin{Bmatrix} c_i \\ c_j \\ c_k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_k - x_j \\ x_i - x_k \\ x_j - x_i \end{Bmatrix} - \text{кое-}$$

фіцієнти функцій форми СЕ; $2A = \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix}$ – подвійна площа СЕ, м²;

$x_i, y_i, i = \overline{1, M}$ – координати вузлів СЕ (вони також є глобальними координатами вузлів розрахункової області)⁵, м.

Матриця градієнтів СЕ

$$[B^{(e)}] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_k & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_k \\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_k & b_k \end{bmatrix}. \quad (3.23)$$

Інтеграли, на основі яких складаються рівняння, що визначають СЕ, легко обчислюються, оскільки матриці $[B]$ і $[D]$ містять тільки константи. Об'ємний інтеграл, який представляє матрицю жорсткості, має вигляд

$$[k^{(e)}] = \int_V [B]^T [D][B] dV = [B]^T [D][B] \int_A t dA = [B]^T [D][B] t A, \quad (3.24)$$

де $dV = t dA$ – елементарний об'єм, м³; t – товщина трикутного СЕ, м; A – площа СЕ, м²;

$$[D] = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{(1-\nu)} & 0 \\ \frac{\nu}{(1-\nu)} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \text{ – матриця фізичних констант для}$$

$$\text{задачі ПДС, Па; } [D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \text{ – матриця фізичних констант для}$$

задачі ПНС, Па.

⁵ Тут мається на увазі дві системи координат глобальна, що стосується всієї розрахункової області, яка розбита на E СЕ, і локальна система координат, що стосується тільки певного СЕ. Також, відповідно, використовується дві нумерації вузлів – глобальна від 1 до N (кількість вузлів у всій розрахункової області) і локальна – від 1 до $M = 3$.

Об'ємний інтеграл від об'ємних сил (дії гравітації) у двовимірному випадку задачі набуває вигляду $\int_V [N^{(e)}]^T \begin{Bmatrix} \rho g_x \\ \rho g_y \\ \rho g_z \end{Bmatrix} dV = \int_A [N^{(e)}]^T \begin{Bmatrix} \rho g_x \\ \rho g_y \end{Bmatrix} t dA, (dV = t dA),$

де t – товщина СЕ, м. Підставляючи $[N]^T$ (3.22) і застосовуючи L -координати (див. додаток А), отримаємо

$$\int_A \begin{bmatrix} N_i & 0 \\ 0 & N_i \\ N_j & 0 \\ 0 & N_j \\ N_k & 0 \\ 0 & N_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \rho g_x \\ \rho g_y \end{Bmatrix} t dA = \int_A \begin{bmatrix} L_1 & 0 \\ 0 & L_1 \\ L_2 & 0 \\ 0 & L_2 \\ L_3 & 0 \\ 0 & L_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \rho g_x \\ \rho g_y \end{Bmatrix} t dA = \frac{At}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \rho g_x \\ \rho g_y \end{Bmatrix}. \quad (3.25)$$

Інтеграл	від	поверхневих	навантажень
$\int_S [N^{(e)}]^T \begin{Bmatrix} p_x^{(e)} \\ p_y^{(e)} \\ p_z^{(e)} \end{Bmatrix} dS = \int_\ell [N^{(e)}]^T \begin{Bmatrix} p n_x \\ p n_y \end{Bmatrix} t d\ell, (dS = t d\ell, \text{ де } \ell - \text{довжина сторони СЕ})$			

записується окремо для кожної із сторін СЕ. Припустивши, що на стороні між вузлами i і j (див. рис. 3.1) діє рівномірно розподілене навантаження інтенсивністю $p_x = p n_x$ паралельно осі x та інтенсивністю $p_y = p n_y$ паралельно осі y , отримаємо (див. додаток А)

$$\int_{\ell_{ij}} \begin{bmatrix} N_i & 0 \\ 0 & N_i \\ N_j & 0 \\ 0 & N_j \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \end{Bmatrix} t d\ell = \int_{\ell_{ij}} \begin{bmatrix} L_1 & 0 \\ 0 & L_1 \\ L_2 & 0 \\ 0 & L_2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \end{Bmatrix} t d\ell = \frac{t \ell_{ij}}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p n_{xij} \\ p n_{yij} \end{Bmatrix}, \quad (3.26)$$

де $\ell_{ij} = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}$; $n_{xij} = \frac{y_j - y_i}{\ell_{ij}}$, $n_{yij} = -\frac{x_j - x_i}{\ell_{ij}}$ – направляючі косинуси до сторони ij СЕ (див. рис. 3.1).

Аналогічно для сторін jk і ki СЕ будемо мати

$$\int_{\ell_{jk}} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ N_j & 0 \\ 0 & N_j \\ N_k & 0 \\ 0 & N_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \end{Bmatrix} t d\ell = \frac{t\ell_{jk}}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} pn_{xjk} \\ pn_{yjk} \end{Bmatrix}; \quad (3.27)$$

$$\int_{\ell_{ki}} \begin{bmatrix} N_i & 0 \\ 0 & N_i \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ N_k & 0 \\ 0 & N_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \end{Bmatrix} t d\ell = \frac{t\ell_{ki}}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} pn_{xki} \\ pn_{yki} \end{Bmatrix}, \quad (3.28)$$

$$\text{де } \ell_{jk} = \sqrt{(x_k - x_j)^2 + (y_k - y_j)^2}; \quad n_{xjk} = \frac{y_k - y_j}{\ell_{jk}}, \quad n_{yjk} = -\frac{x_k - x_j}{\ell_{jk}};$$

$$\ell_{ki} = \sqrt{(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2}; \quad n_{xki} = \frac{y_i - y_k}{\ell_{ki}}, \quad n_{yki} = -\frac{x_i - x_k}{\ell_{ki}}.$$

Об'ємний інтеграл від початкових деформацій, що пов'язані з температурним навантаженням, $\int_V [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] \{\epsilon_0^{(e)}\} dV = \int_A [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] \{\epsilon_0^{(e)}\} t dA$, ($dV = t dA$).

Для випадку ПДС, маємо

$$\int_A [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] \{\epsilon_0^{(e)}\} t dA = \frac{\beta E \Delta T t}{2(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{Bmatrix} b_i \\ c_i \\ b_j \\ c_j \\ b_k \\ c_k \end{Bmatrix}. \quad (3.29)$$

де $\{\epsilon_0^{(e)}\} = (1 + \nu)\beta\Delta T \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$ – початкова деформація від температурного наванта-

ження; β – коефіцієнт лінійного температурного розширення, K^{-1} ; ΔT – перепад температури (температурне навантаження), K .

Для випадку ПНС маємо

$$\int_A [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] \{\epsilon_0^{(e)}\} dA = \frac{\beta E \Delta T t}{2(1 - \nu)} \begin{Bmatrix} b_i \\ c_i \\ b_j \\ c_j \\ b_k \\ c_k \end{Bmatrix}. \quad (3.30)$$

де $\{\epsilon_0^{(e)}\} = \beta\Delta T \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$ – початкова деформація від температурного навантаження;

β – коефіцієнт лінійного температурного розширення, K^{-1} ; ΔT – перепад температури, K .

Наразі, всі співвідношення СЕ (3.20), (3.21) є визначеними. Глобальна матриця та вектор вільних членів СЛАР, що стосується усієї розрахункової області, в методі МСЕ будуються за формулами аналогічними (2.25)

$$[K] = \sum_{e=1}^E [k^{(e)}], \quad \{F\} = \sum_{e=1}^E \{f^{(e)}\}, \quad (3.31)$$

де E – кількість СЕ, на які розбито розрахункову область у результаті дискретизації.

З урахуванням (3.31) СЛАР можна записати у векторному вигляді (2.26), (3.12)

$$[K]\{U\} = \{F\}, \quad (3.32)$$

де $\{U\}$ – вектор невідомих вузлових значень складових переміщень.

За граничних умов Дирихле, коли задано защемлення у вузлах, наприклад, у вузлі з номером m , СЛАР змінюється аналогічно до (2.44)

$$\begin{aligned} K_{mm} = 1, \quad K_{mi} = 0, \quad i = \overline{1, N}, \quad i \neq m, \quad F_m = 0; \\ F_i = 0, \quad K_{im} = 0, \quad i = \overline{1, N}, \quad i \neq m, \end{aligned} \quad (3.33)$$

Після розв'язання системи дискретних рівнянь (3.32) або СЛАР з врахуванням (3.33) отримуємо вектор переміщень у вузлах $\{U\}$, у який входять дві їх складові $\{U_x\}, \{U_y\}$.

Формування глобальних векторів складових переміщень виконується за формулами

$$U_{xi} = U_{2i-1}; \quad U_{yi} = U_{2i}, \quad i = \overline{1, N}, \quad (3.34)$$

де N – кількість глобальних вузлів розрахункової області.

Визначення глобального вектору сумарних переміщень виконується за формулою

$$U_{sumi} = \sqrt{(U_x)_i^2 + (U_y)_i^2}, \quad i = \overline{1, N}, \quad (3.35)$$

Далі виконується обчислення деформацій та напружень в СЕ розрахункової області. Спочатку визначаються температурні деформації в СЕ. Для задачі ПДС маємо

$$\{\epsilon_0^{(e)}\}^T = \beta \Delta T \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad (3.36)$$

де індекс (e) означає, що величини відносяться до СЕ, а індекс T – до температурних деформацій.

Для задачі ПНС також справедлива формула (3.36), але замість β використовується $\bar{\beta}$ [10].

Далі обчислюються пружні деформації в СЕ з використанням (3.36)

$$\{\epsilon^{(e)}\}^e = \{\epsilon^{(e)}\} - \{\epsilon_0^{(e)}\}^T = [B^{(e)}] \{U^{(e)}\} - \{\epsilon_0^{(e)}\}^T, \quad (3.37)$$

де $[B^{(e)}]$ – матриця градієнтів СЕ (3.23), m^{-1} ; $\{U^{(e)}\}$ – вектор складових перемі-

щень СЕ, m ; $\{\varepsilon^{(e)}\}^e = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ -\varepsilon_0^T \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ -\varepsilon_0^T \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix}$ – вектор (тензор) пружних деформацій

СЕ в задачі ПДС;

$\{\varepsilon^{(e)}\}^e = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix}$ – вектор (тензор) пружних деформацій СЕ в задачі ПНС.

Обчислення пружних напружень в СЕ для задачі ПДС відбувається за формулами

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} = \sigma_{11} &= [D]_{11} \{\varepsilon^{(e)}\}_1^e + [D]_{12} \{\varepsilon^{(e)}\}_2^e + [D]_{13} \{\varepsilon^{(e)}\}_3^e; \\ \sigma_{yy} = \sigma_{22} &= [D]_{21} \{\varepsilon^{(e)}\}_1^e + [D]_{22} \{\varepsilon^{(e)}\}_2^e + [D]_{23} \{\varepsilon^{(e)}\}_3^e; \\ \sigma_{zz} = \sigma_{33} &= \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}) + ([D]_{11} - [D]_{12} - [D]_{21}) \{\varepsilon^{(e)}\}_3^e; \\ \sigma_{xy} = \sigma_{12} &= [D]_{33} \{\varepsilon^{(e)}\}_4^e. \end{aligned} \quad (3.38)$$

У результаті отримуємо вектор напружень в елементах

$$\{\sigma^{(e)}\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix}. \quad (3.39)$$

Обчислення пружних напружень в СЕ для задачі ПНС відбувається за формулами

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} = \sigma_{11} &= [D]_{11} \{\varepsilon^{(e)}\}_1^e + [D]_{12} \{\varepsilon^{(e)}\}_2^e; \\ \sigma_{yy} = \sigma_{22} &= [D]_{21} \{\varepsilon^{(e)}\}_1^e + [D]_{22} \{\varepsilon^{(e)}\}_2^e; \\ \sigma_{zz} = \sigma_{33} &= 0; \\ \sigma_{xy} = \sigma_{12} &= [D]_{33} \{\varepsilon^{(e)}\}_4^e. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Визначення компонент деформацій у глобальних вузлах розрахункової області через компоненти деформацій в СЕ

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{xx\ j} = \frac{\sum_{e=1}^n \varepsilon_{xx\ i(j)}^{(e)}}{n}; \\ \varepsilon_{yy\ j} = \frac{\sum_{e=1}^n \varepsilon_{yy\ i(j)}^{(e)}}{n}; \\ \varepsilon_{zz\ j} = \frac{\sum_{e=1}^n \varepsilon_{zz\ i(j)}^{(e)}}{n}; \\ \varepsilon_{xy\ j} = \frac{\sum_{e=1}^n \varepsilon_{xy\ i(j)}^{(e)}}{n}; \end{array} \right. \quad j = \overline{1, N}, \quad (3.41)$$

де (e) – номер СЕ; n – кількість елементів, що оточують вузол j ; $i(j)$ – функція, яка визначає локальні номери вузлів СЕ через глобальні.

Визначення компонент напружень у глобальних вузлах розрахункової області через компоненти деформацій в СЕ

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xx\ j} = \frac{\sum_{e=1}^n \sigma_{xx\ i(j)}^{(e)}}{n}; \\ \sigma_{yy\ j} = \frac{\sum_{e=1}^n \sigma_{yy\ i(j)}^{(e)}}{n}; \\ \sigma_{zz\ j} = \frac{\sum_{e=1}^n \sigma_{zz\ i(j)}^{(e)}}{n}; \\ \sigma_{xy\ j} = \frac{\sum_{e=1}^n \sigma_{xy\ i(j)}^{(e)}}{n}; \end{array} \right. \quad j = \overline{1, N}, \quad (3.42)$$

де (e) – номер СЕ; n – кількість елементів, що оточують вузол j ; $i(j)$ – функція, яка визначає локальні номери вузлів СЕ через глобальні.

Визначення еквівалентного напруження за Мізесом у глобальних вузлах (див. розділ 1, п. 1.2.5)

$$\sigma_{\text{ekvM } j} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_{xx j} - \sigma_{yy j})^2 + (\sigma_{yy j} - \sigma_{zz j})^2 + (\sigma_{zz j} - \sigma_{xx j})^2 + 6(\sigma_{xy j})^2}, \quad (3.43)$$

$$j = \overline{1, N}.$$

Визначення запасу міцності у глобальних вузлах відбувається за формулою

$$F_{s j} = \frac{[\sigma_T]}{\sigma_{\text{ekvM } j}}, \quad j = \overline{1, N}, \quad (3.44)$$

де $[\sigma_T]$ – границя плинності матеріалу.

Використовуючи методику викладену в цьому підрозділі та в п. 2.2.2 неважко отримати співвідношення МСЕ для чотирикутного СЕ.

3.3. Вісесиметрична задача напруженого стану

За скінченний елемент приймемо трикутний СЕ [7, 8] (див. рис. 2.1).

Функція переміщень. Вузлове переміщення у вісесиметричній задачі визначається двома компонентами

$$\{U_i\} = \begin{Bmatrix} u_i^r \\ u_i^z \end{Bmatrix}, \quad (3.45)$$

де u_i^r – переміщення по радіусу у вузлі i , м; u_i^z – переміщення по висоті у вузлі i , м.

Переміщення СЕ визначається сукупністю вузлових переміщень

$$\{U^{(e)}\} = \begin{Bmatrix} U_i \\ U_j \\ U_k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_i^r \\ u_i^z \\ u_j^r \\ u_j^z \\ u_k^r \\ u_k^z \end{Bmatrix}. \quad (3.46)$$

Поле переміщень визначається співвідношенням

$$\begin{aligned}
\{U\} &= [IN_i \quad IN_j \quad IN_k] \{U^{(e)}\} = \\
&= \left[\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} N_i \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} N_j \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} N_k \right] \begin{Bmatrix} U_i \\ U_j \\ U_k \end{Bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_k & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i^r \\ u_i^z \\ u_j^r \\ u_j^z \\ u_k^r \\ u_k^z \end{Bmatrix}, \tag{3.47}
\end{aligned}$$

де $N_i = \frac{a_i + b_i r + c_i z}{2A}$, $N_j = \frac{a_j + b_j r + c_j z}{2A}$, $N_k = \frac{a_k + b_k r + c_k z}{2A}$ – функції форми
СЕ;

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & r_i & z_i \\ 1 & r_j & z_j \\ 1 & r_k & z_k \end{vmatrix} - \text{площа трикутного СЕ, м}^2; \quad \begin{Bmatrix} a_i \\ a_j \\ a_k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r_j z_k - r_k z_j \\ r_k z_i - r_i z_k \\ r_i z_j - r_j z_i \end{Bmatrix}, \quad (\text{м}^2),$$

$$\begin{Bmatrix} b_i \\ b_j \\ b_k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} z_j - z_k \\ z_k - z_i \\ z_i - z_j \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} c_i \\ c_j \\ c_k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r_k - r_j \\ r_i - r_k \\ r_j - r_i \end{Bmatrix} - \text{вектори коефіцієнтів функцій форми СЕ, м.}$$

Деформація. Вектор деформації виражається через вектор переміщень

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \varepsilon_{rz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u^r}{\partial r} \\ \frac{\partial u^z}{\partial z} \\ \frac{u^r}{r} \\ \frac{\partial u^r}{\partial r} + \frac{\partial u^z}{\partial z} \end{Bmatrix}. \tag{3.48}$$

Використовуючи функції форми СЕ, а саме їх похідні або матрицю градієнтів СЕ, отримуємо

$$\{\varepsilon^{(e)}\} = [B]\{U^{(e)}\}, \quad (3.49)$$

$$\text{де } [B] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_k & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_k \\ \frac{a_i}{r} + b_i + \frac{c_i z}{r} & 0 & \frac{a_j}{r} + b_j + \frac{c_j z}{r} & 0 & \frac{a_k}{r} + b_k + \frac{c_k z}{r} & 0 \\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_k & b_k \end{bmatrix} - \text{матриця}$$

градієнтів, яка для вісесиметричного напруженого стану залежить від r і z , м^{-1} .

Остаточно для вектора деформацій СЕ можна записати співвідношення

$$\{\varepsilon^{(e)}\} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_k & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_k \\ \frac{a_i}{r} + b_i + \frac{c_i z}{r} & 0 & \frac{a_j}{r} + b_j + \frac{c_j z}{r} & 0 & \frac{a_k}{r} + b_k + \frac{c_k z}{r} & 0 \\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_k & b_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i^r \\ u_i^z \\ u_j^r \\ u_j^z \\ u_k^r \\ u_k^z \end{Bmatrix}. \quad (3.50)$$

Початкова деформація (температурна деформація). Виникнення початкової деформації найчастіше пов'язано з тепловим розширенням. Для ізотропного матеріалу будемо мати

$$\{\varepsilon_0\} = \{\varepsilon_0^T\} = \beta \Delta T \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (3.51)$$

де β – коефіцієнт лінійного температурного розширення, К^{-1} ; ΔT – перепад температури (температурне навантаження), К .

Матриця пружності (або матриця фізичних констант матеріалу). Матриця пружності $[D]$ зв'язує тензор (вектор) пружної деформації $\{\varepsilon^e\} = \{\varepsilon\} - \{\varepsilon_0\}$ з тензором (вектором) напружень $\{\sigma\}$

$$\{\sigma\} = [D](\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_0\}) = [D]\{\varepsilon^e\}, \quad (3.52)$$

де $\{\varepsilon\}$ – вектор сумарної пружної $\{\varepsilon^e\}$ і початкової (теплової) $\{\varepsilon_0\} = \{\varepsilon_0^T\}$ деформації.

Ізотропний матеріал. Матриця пружності ізотропного матеріалу в разі вісесиметричної задачі, записана через модуль пружності E і коефіцієнт Пуассона ν , має вигляд

$$[D] = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1+\nu)} \end{bmatrix}. \quad (3.53)$$

Матриця жорсткості СЕ. Якщо врахувати, що об'єм у вісесиметричній задачі береться по кільцевій області, тоді отримаємо

$$[k^{(e)}] = 2\pi \int_A [B]^T [D][B] r dA, \quad (3.54)$$

де $[B]$ – матриця градієнтів СЕ (3.49), що залежить від координат r і z , m^{-1} ; $[D]$ – матриця пружності (3.53), Па; $dV = 2\pi r dA$, m^3 .

Інтеграл (3.54) можна визначити числовим способом з використання квадратурних формул Хамера [10]. Також існує наближений метод, який полягає у визначенні $[B]$ для центру маси СЕ з координатами

$$\bar{r} = \frac{r_i + r_j + r_k}{3}, \quad \bar{z} = \frac{z_i + z_j + z_k}{3}. \quad (3.55)$$

Використовуючи наближення (3.55), остаточно для матриці жорсткості СЕ отримуємо

$$[k^{(e)}] = 2\pi \bar{r} A [\bar{B}]^T [D][\bar{B}], \quad (3.56)$$

$$\text{де } [\bar{B}] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_k & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_k \\ \frac{a_i}{\bar{r}} + b_i + \frac{c_i \bar{z}}{\bar{r}} & 0 & \frac{a_j}{\bar{r}} + b_j + \frac{c_j \bar{z}}{\bar{r}} & 0 & \frac{a_k}{\bar{r}} + b_k + \frac{c_k \bar{z}}{\bar{r}} & 0 \\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_k & b_k \end{bmatrix} - \text{набли-}$$

жена форма запису матриці градієнтів СЕ, м⁻¹; A – площа трикутного СЕ, м².

Вектор навантаження СЕ, пов'язаний з початковими тепловими деформаціями (див. додаток А)

$$\{f_{th}^{(e)}\} = 2\pi \int_A [B]^T [D] \{\varepsilon_0\} r dr dz = \frac{2\pi \bar{r} A E \beta \Delta T [\bar{B}]^T}{(1-2\nu)} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (3.57)$$

Вектор навантаження СЕ, пов'язаний із зусиллям (тиском) p , що заданий на сторонах СЕ. У загальному випадку для будь-якої сторони СЕ можна записати

$$\{f_p^{(e)}\} = -2\pi \int_L [N]^T \begin{Bmatrix} p_r \\ p_z \end{Bmatrix} r d\ell, \quad (3.58)$$

де $p_r = p n_r$, $p_z = p n_z$ – компоненти вектора зусилля, Па; n_r, n_z – компоненти зовнішньої нормалі до сторони СЕ; $dA = 2\pi r d\ell$, м².

Після аналітичного інтегрування (3.58) для сторони СЕ ij (1-2) маємо (див. додаток А)

$$\{f_{p\,ij}^{(e)}\} = \frac{-\pi \ell_{ij}}{3} \begin{Bmatrix} (2r_i + r_j) p n_{r\,ij} \\ (2r_i + r_j) p n_{z\,ij} \\ (r_i + 2r_j) p n_{r\,ij} \\ (r_i + 2r_j) p n_{z\,ij} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (3.59)$$

Для сторони СЕ jk (2-3) маємо

$$\{f_{p\,jk}^{(e)}\} = \frac{-\pi\ell_{jk}}{3} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ (2r_j + r_k)pn_{r\,jk} \\ (2r_j + r_k)pn_{z\,jk} \\ (r_j + 2r_k)pn_{r\,jk} \\ (r_j + 2r_k)pn_{z\,jk} \end{Bmatrix}. \quad (3.60)$$

Для сторони CE ki (3-1) маємо

$$\{f_{p\,ki}^{(e)}\} = \frac{-\pi\ell_{ki}}{3} \begin{Bmatrix} (r_k + 2r_i)pn_{r\,ki} \\ (r_k + 2r_i)pn_{z\,ki} \\ 0 \\ 0 \\ (2r_k + r_i)pn_{r\,ki} \\ (2r_k + r_i)pn_{z\,ki} \end{Bmatrix}. \quad (3.61)$$

У співвідношеннях (3.59)–(3.61) використовуються такі векторні величини:

– вектор довжини сторін CE

$$\begin{Bmatrix} \ell_{ij} \\ \ell_{jk} \\ \ell_{ki} \end{Bmatrix}^{(e)} = \begin{Bmatrix} \sqrt{(r_j - r_i)^2 + (z_j - z_i)^2} \\ \sqrt{(r_k - r_j)^2 + (z_k - z_j)^2} \\ \sqrt{(r_i - r_k)^2 + (z_i - z_k)^2} \end{Bmatrix}. \quad (3.62)$$

– вектори компонент зовнішньої нормалі до сторін CE

$$\begin{Bmatrix} n_{r\,ik} \\ n_{r\,jk} \\ n_{r\,ki} \end{Bmatrix}^{(e)} = \begin{Bmatrix} \frac{z_j - z_i}{\ell_{ij}} \\ \frac{z_k - z_j}{\ell_{jk}} \\ \frac{z_i - z_k}{\ell_{ki}} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} n_{z\,ik} \\ n_{z\,jk} \\ n_{z\,ki} \end{Bmatrix}^{(e)} = \begin{Bmatrix} -\frac{r_j - r_i}{\ell_{ij}} \\ -\frac{r_k - r_j}{\ell_{jk}} \\ -\frac{r_i - r_k}{\ell_{ki}} \end{Bmatrix}. \quad (3.63)$$

Вектор об'ємного навантаження СЕ, пов'язаний із гравітацією. Запишемо інтегральний вираз

$$\{f_G^{(e)}\} = 2\pi \int_A [N]^T \begin{Bmatrix} G_r \\ G_z \end{Bmatrix} r dA, \quad (3.64)$$

де $\begin{Bmatrix} G_r \\ G_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \rho g_r \\ \rho g_z \end{Bmatrix}$ – вектор гравітаційного об'ємного навантаження СЕ, Н/м³;
 ρ – густина, кг/м³.

Після аналітичного інтегрування (3.64), отримуємо (див. додаток А)

$$\{f_G^{(e)}\} = \frac{\pi A}{6} \begin{Bmatrix} (2r_i + r_j + r_k) \rho g_r \\ (2r_i + r_j + r_k) \rho g_z \\ (r_i + 2r_j + r_k) \rho g_r \\ (r_i + 2r_j + r_k) \rho g_z \\ (r_i + r_j + 2r_k) \rho g_r \\ (r_i + r_j + 2r_k) \rho g_z \end{Bmatrix}. \quad (3.65)$$

У результаті вектор вільних членів СЕ визначається співвідношенням

$$\{f^{(e)}\} = \{f_G^{(e)}\} + \{f_{pij}^{(e)}\} + \{f_{pjk}^{(e)}\} + \{f_{pki}^{(e)}\} + \{f_{th}^{(e)}\}. \quad (3.66)$$

Система лінійних алгебричних рівнянь для $E > 1$ скінченних елементів набуває вигляду (3.31)

$$\sum_{e=1}^E ([k^{(e)}] \{U^{(e)}\} - \{f^{(e)}\}) = 0, \quad (3.67)$$

$$\text{де } \{U^{(e)}\} = \begin{Bmatrix} u_i^r \\ u_i^z \\ u_j^r \\ u_j^z \\ u_k^r \\ u_k^z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U_{2i-1} \\ U_{2i} \\ U_{2j-1} \\ U_{2j} \\ U_{2k-1} \\ U_{2k} \end{Bmatrix} \text{ – вектор переміщень СЕ (3.49), м.}$$

За граничних умов Дирихле, коли задано защемлення у вузлах, наприклад, у вузлі з номером m , СЛАР змінюється аналогічно до (2.44), (3.33).

Після розв'язання системи дискретних рівнянь (3.67) або СЛАР із врахуванням защемлення у вузлах, отримуємо вектор переміщень у вузлах $\{U\}$, в який входять дві їх складові $\{U_r\}, \{U_z\}$.

Формування глобальних векторів складових переміщень виконується за формулами

$$U_{ri} = U_{2i-1}; U_{zi} = U_{2i}, \quad i = \overline{1, N}, \quad (3.68)$$

де N – кількість глобальних вузлів розрахункової області.

Визначення глобального вектору сумарних переміщень

$$U_{sumi} = \sqrt{(U_r)_i^2 + (U_z)_i^2}, \quad i = \overline{1, N}, \quad (3.69)$$

Далі виконується обчислення деформацій та напружень в СЕ розрахункової області. Спочатку визначаються температурні деформації в СЕ

$$\{\epsilon_0^{(e)}\}^T = \beta \Delta T \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (3.70)$$

де індекс (e) означає, що величини відносяться до СЕ, а індекс T – до температурних деформацій.

Далі обчислюються пружні деформації в СЕ з використанням (3.70)

$$\{\epsilon^{(e)}\}^e = \{\epsilon^{(e)}\} - \{\epsilon_0^{(e)}\}^T = [B^{(e)}] \{U^{(e)}\} - \{\epsilon_0^{(e)}\}^T, \quad (3.71)$$

де $[B^{(e)}]$ – матриця градієнтів СЕ (3.49), m^{-1} ; $\{U^{(e)}\}$ – вектор складових переміщень СЕ, м;

$$\{\epsilon^{(e)}\}^e = \begin{Bmatrix} \epsilon_{rr} \\ \epsilon_{zz} \\ \epsilon_{\theta\theta} \\ \epsilon_{rz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{12} \end{Bmatrix} - \text{вектор (тензор) пружних деформацій СЕ.}$$

Обчислення пружних напружень у СЕ відбувається за формулами

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr} = \sigma_{11} &= [D]_{11} \{\varepsilon^{(e)}\}_1^e + [D]_{12} \{\varepsilon^{(e)}\}_2^e + [D]_{13} \{\varepsilon^{(e)}\}_3^e; \\
\sigma_{zz} = \sigma_{22} &= [D]_{21} \{\varepsilon^{(e)}\}_1^e + [D]_{22} \{\varepsilon^{(e)}\}_2^e + [D]_{23} \{\varepsilon^{(e)}\}_3^e; \\
\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{33} &= [D]_{31} \{\varepsilon^{(e)}\}_1^e + [D]_{32} \{\varepsilon^{(e)}\}_2^e + [D]_{33} \{\varepsilon^{(e)}\}_3^e; \\
\sigma_{rz} = \sigma_{12} &= [D]_{44} \{\varepsilon^{(e)}\}_4^e.
\end{aligned} \tag{3.72}$$

У результаті отримуємо вектор напружень в елементах

$$\{\sigma^{(e)}\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{rz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix}. \tag{3.73}$$

Визначення компонент деформацій у глобальних вузлах розрахункової області через компоненти деформацій в СЕ

$$\left\{ \begin{aligned} \varepsilon_{rrj} &= \frac{\sum_{e=1}^n \varepsilon_{rr i(j)}^{(e)}}{n}; \\ \varepsilon_{zzj} &= \frac{\sum_{e=1}^n \varepsilon_{zz i(j)}^{(e)}}{n}; \\ \varepsilon_{\theta\theta j} &= \frac{\sum_{e=1}^n \varepsilon_{\theta\theta i(j)}^{(e)}}{n}; \\ \varepsilon_{rzj} &= \frac{\sum_{e=1}^n \varepsilon_{rz i(j)}^{(e)}}{n}; \end{aligned} \right. j = \overline{1, N}, \tag{3.74}$$

де (e) – номер СЕ; n – кількість елементів, що оточують вузол j ; $i(j)$ – функція, яка визначає локальні номери вузлів СЕ через глобальні.

Визначення компонент напружень у глобальних вузлах розрахункової області через компоненти деформацій в СЕ

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{rrj} = \frac{\sum_{e=1}^n \sigma_{rr i(j)}^{(e)}}{n}; \\ \sigma_{zzj} = \frac{\sum_{e=1}^n \sigma_{zz i(j)}^{(e)}}{n}; \\ \sigma_{\theta\theta j} = \frac{\sum_{e=1}^n \sigma_{\theta\theta i(j)}^{(e)}}{n}; \\ \sigma_{rzj} = \frac{\sum_{e=1}^n \sigma_{rz i(j)}^{(e)}}{n}; \end{array} \right. \quad j = \overline{1, N}, \quad (3.75)$$

де (e) – номер СЕ; n – кількість елементів, що оточують вузол j ; $i(j)$ – функція, яка визначає локальні номери вузлів СЕ через глобальні.

Визначення еквівалентного напруження за Мізесом у глобальних вузлах

$$\sigma_{\text{ekvM}j} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_{rrj} - \sigma_{zzj})^2 + (\sigma_{zzj} - \sigma_{\theta\theta j})^2 + (\sigma_{\theta\theta j} - \sigma_{rrj})^2 + 6(\sigma_{rzj})^2}, \quad j = \overline{1, N}. \quad (3.76)$$

Визначення запасу міцності в глобальних вузлах F_{sj} виконується за (3.44).

Використовуючи методику викладену в цьому підрозділі та в п. 2.3.2 неважко отримати співвідношення МСЕ для чотирикутного СЕ.

3.4. Тривимірна задача НДС

Розглянемо основні співвідношення МСЕ на прикладі чотиригранного СЕ [7, 8] (тетраедра) (рис. 3.2).

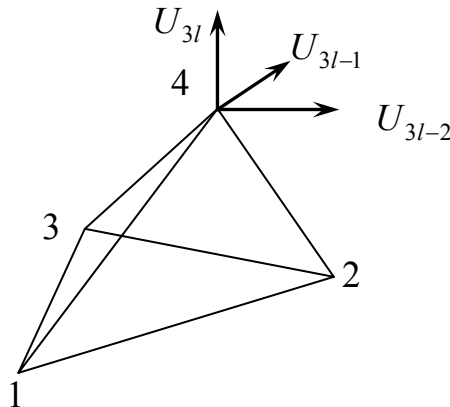


Рис. 3.2. Чотиригранний або тетраедний СЕ:

1,2,3,4 – номери вузлів або i, j, k, l ; $U_{3l}, U_{3l-1}, U_{3l-2}$ – вузлові значення компонент переміщень (тобто для чотирьох вузлів СЕ маємо 12 невідомих)

Матриця функцій форми СЕ складається із трьох стовпців, що відповідає трьом складовим переміщень по x , y і z

$$[N^{(e)}]^T = \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & N_i \\ N_j & 0 & 0 \\ 0 & N_j & 0 \\ 0 & 0 & N_j \\ N_k & 0 & 0 \\ 0 & N_k & 0 \\ 0 & 0 & N_k \\ N_l & 0 & 0 \\ 0 & N_l & 0 \\ 0 & 0 & N_l \end{bmatrix}, \quad (3.77)$$

де $N_i = \frac{1}{6V}[a_i + b_i x + c_i y + d_i z]$ – функція форми у вузлі СЕ із номером i ;

$$V = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i & z_i \\ 1 & x_j & y_j & z_j \\ 1 & x_k & y_k & z_k \\ 1 & x_l & y_l & z_l \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_1 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{bmatrix} \text{ – об'єм тетраедра, м}^3;$$

a_i, b_i, c_i, d_i , $i = \overline{1,4}$ – коефіцієнти, що знаходяться за (2.119)–(2.122).

Три компоненти переміщень u, v, w апроксимуються в середині СЕ співвідношеннями

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = [N^{(e)}] \{U\},$$

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 & N_j & 0 & 0 & N_k & 0 & 0 & N_l & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 & 0 & N_j & 0 & 0 & N_k & 0 & 0 & N_l & 0 \\ 0 & 0 & N_i & 0 & 0 & N_j & 0 & 0 & N_k & 0 & 0 & N_l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{3i-2} \\ U_{3i-1} \\ U_{3i} \\ U_{3j-2} \\ U_{3j-1} \\ U_{3j} \\ U_{3k-2} \\ U_{3k-1} \\ U_{3k} \\ U_{3l-2} \\ U_{3l-1} \\ U_{3l} \end{Bmatrix}. \quad (3.78)$$

Співвідношення між переміщеннями і деформаціями мають вигляд

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \varepsilon_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \varepsilon_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}. \end{aligned} \quad (3.79)$$

Матрицю градієнтів $[B]$ у формулі $\{\varepsilon\} = [B]\{U\}$ неважко отримати диференціюванням (3.78) з використанням співвідношень (3.79) і виразів для $[N]$. У результаті отримуємо

$$[B] = \frac{1}{6V} \begin{bmatrix} b_i & 0 & 0 & b_j & 0 & 0 & b_k & 0 & 0 & b_l & 0 & 0 \\ 0 & c_i & 0 & 0 & c_j & 0 & 0 & c_k & 0 & 0 & c_l & 0 \\ 0 & 0 & d_i & 0 & 0 & d_j & 0 & 0 & d_k & 0 & 0 & d_l \\ c_i & b_i & 0 & c_j & b_j & 0 & c_k & b_k & 0 & c_l & b_l & 0 \\ 0 & d_i & c_i & 0 & d_j & c_j & 0 & d_k & c_k & 0 & d_l & c_l \\ d_i & 0 & b_i & d_j & 0 & b_j & d_k & 0 & b_k & d_l & 0 & b_l \end{bmatrix}. \quad (3.80)$$

Матриця фізичних констант СЕ для ізотропного матеріалу має вигляд

$$[D] = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix}, \quad (3.81)$$

де E – модуль пружності, Па; ν – коефіцієнт Пуассона.

Вектор сумарних деформацій СЕ визначається співвідношенням

$$\{\varepsilon^{(e)}\} = [B^{(e)}]\{U\},$$

$$\{\varepsilon^{(e)}\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} \end{Bmatrix} = \frac{1}{6V} \begin{bmatrix} b_i & 0 & 0 & b_j & 0 & 0 & b_k & 0 & 0 & b_l & 0 & 0 \\ 0 & c_i & 0 & 0 & c_j & 0 & 0 & c_k & 0 & 0 & c_l & 0 \\ 0 & 0 & d_i & 0 & 0 & d_j & 0 & 0 & d_k & 0 & 0 & d_l \\ c_i & b_i & 0 & c_j & b_j & 0 & c_k & b_k & 0 & c_l & b_l & 0 \\ 0 & d_i & c_i & 0 & d_j & c_j & 0 & d_k & c_k & 0 & d_l & c_l \\ d_i & 0 & b_i & d_j & 0 & b_j & d_k & 0 & b_k & d_l & 0 & b_l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{3i-2} \\ U_{3i-1} \\ U_{3i} \\ U_{3j-2} \\ U_{3j-1} \\ U_{3j} \\ U_{3k-2} \\ U_{3k-1} \\ U_{3k} \\ U_{3l-2} \\ U_{3l-1} \\ U_{3l} \end{Bmatrix}. \quad (3.82)$$

Вектор початкових деформацій СЕ, що пов'язаний із температурним навантаженням

$$\{\varepsilon_0\} = \beta \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (3.83)$$

де β – коефіцієнт лінійного термічного розширення, K^{-1} .

Внаслідок того, що матриці $[B]$ і $[D]$ містять тільки константи, матриця жорсткості СЕ визначається дуже просто

$$[k^{(e)}] = \int_V [B]^T [D] [B] dV = [B]^T [D] [B] V, \quad (3.84)$$

де V – об'єм СЕ, m^3 .

Вираз для визначення вектора навантаження СЕ, що пов'язаний із температурним розширенням (другий доданок (3.21)) можна отримати за допомогою аналітичного інтегрування з використанням L -координат (див. додаток А)

$$\{f_{th}^{(e)}\} = \int_V [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] \{\varepsilon_0^{(e)}\} dV = \frac{\beta E \Delta T V}{1 - 2\nu} [B]^T \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (3.85)$$

де E – модуль пружності, Па; ν – коефіцієнт Пуассона; β – коефіцієнт лінійного термічного розширення, K^{-1} .

Формулу для визначення вектора навантаження СЕ, що пов'язаний із зусиллям (тиском, третій доданок (3.21)) на грані СЕ із номером 1 та з номерами вузлів 1,2,3 (див. рис. 3.2)), можна отримати за допомогою аналітичного інтегрування з використанням L -координат (див. додаток А)

$$\begin{aligned} \{f_{p1(123)}^{(e)}\} &= \int_S [N^{(e)}]^T \begin{Bmatrix} p_x^{(e)} \\ p_y^{(e)} \\ p_z^{(e)} \end{Bmatrix} dS = \\ &= \frac{S_1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} p_1 n_{1x} \\ p_1 n_{1y} \\ p_1 n_{1z} \end{Bmatrix}, \end{aligned} \quad (3.86)$$

де S_1 – площа грані 1, м^2 ; p_1 – зусилля (тиск) на грані 1, Па; n_{1x}, n_{1y}, n_{1z} – компоненти вектора направляючих косинусів до зовнішньої нормалі грані 1 СЕ.

У (3.86) і далі значення скалярної величини тиску p_1 береться за нормальне зусилля на грані СЕ, тобто $p = |\mathbf{p}_n|$, а його компоненти отримуються через направляючі косинуси $\mathbf{p}_n = (pn_x, pn_y, pn_z) = pn_x \mathbf{i} + pn_y \mathbf{j} + pn_z \mathbf{k}$, де $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ – одиничні вектори (орти декартової) системи координат.

Вектор навантаження СЕ, що пов'язаний із зусиллям (тиском) на грані СЕ із номером 2 та з номерами вузлів 2,4,3 (див. рис. 3.2)

$$\{f_{p2(243)}^{(e)}\} = \frac{S_2}{3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} p_2 n_{2x} \\ p_2 n_{2y} \\ p_2 n_{2z} \end{Bmatrix}, \quad (3.87)$$

де S_2 – площа грані 2, м^2 ; p_2 – зусилля (тиск) на грані 2, Па; n_{2x}, n_{2y}, n_{2z} – компоненти вектора направляючих косинусів до зовнішньої нормалі грані 2 СЕ.

Вектор навантаження СЕ, що пов'язаний із зусиллям (тиском) на грані СЕ із номером 3 та з номерами вузлів 1,3,4 (див. рис. 3.2)

$$\{f_{p3(134)}^{(e)}\} = \frac{S_3}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} p_3 n_{3x} \\ p_3 n_{3y} \\ p_3 n_{3z} \end{Bmatrix}, \quad (3.88)$$

де S_3 – площа грані 3, м^2 ; p_3 – зусилля (тиск) на грані 3, Па; n_{3x}, n_{3y}, n_{3z} – компоненти вектора направляючих косинусів до зовнішньої нормалі грані 3 СЕ.

Вектор навантаження СЕ, що пов'язаний із зусиллям (тиском) на грані СЕ із номером 4 та з номерами вузлів 1,4,2 (див. рис. 3.2)

$$\{f_{p4(142)}^{(e)}\} = \frac{S_4}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} p_4 n_{4x} \\ p_4 n_{4y} \\ p_4 n_{4z} \end{Bmatrix}, \quad (3.89)$$

де S_4 – площа грані 4, м²; p_4 – зусилля (тиск) на грані 4, Па; n_{4x}, n_{4y}, n_{4z} – компоненти вектора направляючих косинусів до зовнішньої нормалі грані 4 СЕ.

Площа граней СЕ в (3.86)–(3.89) визначається за формулами (див. рис. 3.2):

– для грані 1 СЕ із номерами вузлів 1,2,3

$$S_1 = \frac{\sqrt{g_{1(1)}^2 + g_{2(1)}^2 + g_{3(1)}^2}}{2}, \quad (3.90)$$

$$g_{1(1)} = \begin{vmatrix} y_1 - y_3 & z_1 - z_3 \\ y_2 - y_3 & z_2 - z_3 \end{vmatrix}, \quad g_{2(1)} = -\begin{vmatrix} x_1 - x_3 & z_1 - z_3 \\ x_2 - x_3 & z_2 - z_3 \end{vmatrix}, \quad g_{3(1)} = \begin{vmatrix} x_1 - x_3 & y_1 - y_3 \\ x_2 - x_3 & y_2 - y_3 \end{vmatrix},$$

де x_i, y_i, z_i , $i = 1, 2, 3$ – координати вузлів у вершинах грані 1 СЕ;

– для грані 2 СЕ із номерами вузлів 2,4,3

$$S_2 = \frac{\sqrt{g_{1(2)}^2 + g_{2(2)}^2 + g_{3(2)}^2}}{2}, \quad (3.91)$$

$$g_{1(2)} = \begin{vmatrix} y_2 - y_4 & z_2 - z_4 \\ y_3 - y_4 & z_3 - z_4 \end{vmatrix}, \quad g_{2(2)} = -\begin{vmatrix} x_2 - x_4 & z_2 - z_4 \\ x_3 - x_4 & z_3 - z_4 \end{vmatrix}, \quad g_{3(2)} = \begin{vmatrix} x_2 - x_4 & y_2 - y_4 \\ x_3 - x_4 & y_3 - y_4 \end{vmatrix},$$

де x_i, y_i, z_i , $i = 2, 4, 3$ – координати вузлів у вершинах грані 2 СЕ;

– для грані 3 СЕ із номерами вузлів 1,3,4

$$S_3 = \frac{\sqrt{g_{1(3)}^2 + g_{2(3)}^2 + g_{3(3)}^2}}{2}, \quad (3.92)$$

$$g_{1(3)} = \begin{vmatrix} y_3 - y_4 & z_3 - z_4 \\ y_1 - y_4 & z_1 - z_4 \end{vmatrix}, \quad g_{2(3)} = -\begin{vmatrix} x_3 - x_4 & z_3 - z_4 \\ x_1 - x_4 & z_1 - z_4 \end{vmatrix}, \quad g_{3(3)} = \begin{vmatrix} x_3 - x_4 & y_3 - y_4 \\ x_1 - x_4 & y_1 - y_4 \end{vmatrix},$$

де x_i, y_i, z_i , $i = 1, 3, 4$ – координати вузлів у вершинах грані 3 СЕ;

– для грані 4 СЕ із номерами вузлів 1,4,2

$$S_4 = \frac{\sqrt{g_{1(4)}^2 + g_{2(4)}^2 + g_{3(4)}^2}}{2},$$

$$g_{1(4)} = \begin{vmatrix} y_1 - y_4 & z_1 - z_4 \\ y_2 - y_4 & z_2 - z_4 \end{vmatrix}, \quad g_{2(4)} = -\begin{vmatrix} x_1 - x_4 & z_1 - z_4 \\ x_2 - x_4 & z_2 - z_4 \end{vmatrix}, \quad g_{3(4)} = \begin{vmatrix} x_1 - x_4 & y_1 - y_4 \\ x_2 - x_4 & y_2 - y_4 \end{vmatrix}, \quad (3.93)$$

де $x_i, y_i, z_i, i = 1, 4, 2$ – координати вузлів у вершинах грані 4 СЕ.

Направляючі косинуси до граней СЕ в (3.86)–(3.89) визначаються за формулами (див. рис. 3.2):

– для грані 1 СЕ із номерами вузлів 1,2,3

$$n_{1x} = \frac{g_{1(1)}}{2S_1}, \quad n_{1y} = \frac{g_{2(1)}}{2S_1}, \quad n_{1z} = \frac{g_{3(1)}}{2S_1}; \quad (3.94)$$

– для грані 2 СЕ із номерами вузлів 2,4,3

$$n_{2x} = \frac{g_{1(2)}}{2S_2}, \quad n_{2y} = \frac{g_{2(2)}}{2S_2}, \quad n_{2z} = \frac{g_{3(2)}}{2S_2}; \quad (3.95)$$

– для грані 3 СЕ із номерами вузлів 1,3,4

$$n_{3x} = \frac{g_{1(3)}}{2S_3}, \quad n_{3y} = \frac{g_{2(3)}}{2S_3}, \quad n_{3z} = \frac{g_{3(3)}}{2S_3}; \quad (3.96)$$

– для грані 4 СЕ із номерами вузлів 1,4,2

$$n_{4x} = \frac{g_{1(4)}}{2S_4}, \quad n_{4y} = \frac{g_{2(4)}}{2S_4}, \quad n_{4z} = \frac{g_{3(4)}}{2S_4}. \quad (3.97)$$

Вираз для визначення вектора навантаження СЕ, що пов'язаний із об'ємним зусиллям (гравітацією, перший доданок (3.21)), можна отримати за допомогою аналітичного інтегрування з використанням L -координат (див. додаток А)

$$\begin{aligned}
\{f_v^{(e)}\} &= \int_V [N^{(e)}]^T \begin{Bmatrix} \rho g_x \\ \rho g_y \\ \rho g_z \end{Bmatrix} dV = \\
&= \frac{V}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \rho g_x \\ \rho g_y \\ \rho g_z \end{Bmatrix},
\end{aligned} \tag{3.98}$$

де V – об’єм СЕ, м³; ρ – густина, кг/м³; g_x, g_y, g_z – компоненти вектора прискорення вільного падіння, м/с².

Наразі, всі співвідношення (3.19)–(3.21) тетраедричних СЕ тривимірної задачі НДС є визначеними. Глобальна матриця та вектор вільних членів СЛАР, що стосується всієї розрахункової області, будуються за формулами (3.31) і СЛАР записується у вигляді (3.32).

За граничних умов Дирихле (або заземлення), коли задані нульові переміщення у вузлах, СЛАР змінюється аналогічно з (3.33).

Після розв’язання СЛАР типу (3.32) отримуємо вузлові значення переміщень або вектор переміщень у глобальних вузлах $\{U\}$, у який входять три їх складові $\{U_x\}, \{U_y\}, \{U_z\}$.

Формування глобальних векторів складових переміщень виконується за формулами

$$U_{xi} = U_{3i-2}; U_{yi} = U_{3i-1}; U_{zi} = U_{3i}, \quad i = \overline{1, N}, \tag{3.99}$$

де N – кількість глобальних вузлів розрахункової області.

Визначення глобального вектору сумарних переміщень

$$U_{sum_i} = \sqrt{(U_x)_i^2 + (U_y)_i^2 + (U_z)_i^2}, \quad i = \overline{1, N}, \tag{3.100}$$

Далі виконується обчислення деформацій та напружень в СЕ розрахункової області. Спочатку визначаються температурні деформації в СЕ

$$\{\epsilon_0^{(e)}\}^T = \beta \Delta T \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (3.101)$$

де індекс (e) означає, що величини відносяться до СЕ, а індекс T – до температурних деформацій.

Далі обчислюються компоненти пружних деформацій СЕ

$$\{\epsilon^{(e)}\}^e = \{\epsilon^{(e)}\} - \{\epsilon_0^{(e)}\}^T = [B^{(e)}] \{U^{(e)}\} - \{\epsilon_0^{(e)}\}^T, \quad (3.102)$$

де $[B^{(e)}]$ – матриця градієнтів СЕ (3.80); $\{U^{(e)}\}$ – вектор складових переміщень СЕ;

$$\{\epsilon^{(e)}\}^e = \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \epsilon_{xy} \\ \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{12} \\ \epsilon_{23} \\ \epsilon_{13} \end{Bmatrix} - \text{вектор (тензор) пружних деформацій СЕ.}$$

Обчислення компонент напружень СЕ виконується за формулою

$$\{\sigma\} = [D] \{\epsilon^{(e)}\}^e. \quad (3.103)$$

Визначення компонент деформацій у глобальних вузлах розрахункової області через компоненти деформацій у СЕ

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xxj} &= \frac{\sum_{e=1}^n \frac{\varepsilon_{xxi(j)}^{(e)}}{r_{c-i(j)}}}{\sum_{e=1}^n \frac{1}{r_{c-i(j)}}}; \quad \varepsilon_{yyj} = \frac{\sum_{e=1}^n \frac{\varepsilon_{yyi(j)}^{(e)}}{r_{c-i(j)}}}{\sum_{e=1}^n \frac{1}{r_{c-i(j)}}}; \quad \varepsilon_{zzj} = \frac{\sum_{e=1}^n \frac{\varepsilon_{zzi(j)}^{(e)}}{r_{c-i(j)}}}{\sum_{e=1}^n \frac{1}{r_{c-i(j)}}}; \\
\varepsilon_{xyj} &= \frac{\sum_{e=1}^n \frac{\varepsilon_{xyi(j)}^{(e)}}{r_{c-i(j)}}}{\sum_{e=1}^n \frac{1}{r_{c-i(j)}}}; \quad \varepsilon_{yzj} = \frac{\sum_{e=1}^n \frac{\varepsilon_{yzi(j)}^{(e)}}{r_{c-i(j)}}}{\sum_{e=1}^n \frac{1}{r_{c-i(j)}}}; \quad \varepsilon_{xzz} = \frac{\sum_{e=1}^n \frac{\varepsilon_{xzi(j)}^{(e)}}{r_{c-i(j)}}}{\sum_{e=1}^n \frac{1}{r_{c-i(j)}}}; \quad j = \overline{1, N}
\end{aligned} \tag{3.104}$$

де (e) – номер СЕ; n – кількість елементів, що оточують вузол j ; $i(j)$ – функція, яка визначає локальні номери вузлів СЕ через глобальні; $r_{c-i(j)} = \sqrt{(x_{i(j)} - x_c)^2 + (y_{i(j)} - y_c)^2 + (z_{i(j)} - z_c)^2}$ – відстань між центром маси СЕ та вузлом СЕ, м; $x_c = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)/4$, $y_c = (y_1 + y_2 + y_3 + y_4)/4$, $z_c = (z_1 + z_2 + z_3 + z_4)/4$ – координати центра маси СЕ, які визначаються через координати вузлів СЕ, м.

Визначення компонент напружень у глобальних вузлах розрахункової області через компоненти напружень у СЕ

$$\begin{aligned}
\sigma_{xxj} &= \frac{\sum_{e=1}^n \frac{\sigma_{xxi(j)}^{(e)}}{r_{c-i(j)}}}{\sum_{e=1}^n \frac{1}{r_{c-i(j)}}}; \quad \sigma_{yyj} = \frac{\sum_{e=1}^n \frac{\sigma_{yyi(j)}^{(e)}}{r_{c-i(j)}}}{\sum_{e=1}^n \frac{1}{r_{c-i(j)}}}; \quad \sigma_{zzj} = \frac{\sum_{e=1}^n \frac{\sigma_{zzi(j)}^{(e)}}{r_{c-i(j)}}}{\sum_{e=1}^n \frac{1}{r_{c-i(j)}}}; \\
\sigma_{xyj} &= \frac{\sum_{e=1}^n \frac{\sigma_{xyi(j)}^{(e)}}{r_{c-i(j)}}}{\sum_{e=1}^n \frac{1}{r_{c-i(j)}}}; \quad \sigma_{yzj} = \frac{\sum_{e=1}^n \frac{\sigma_{yzi(j)}^{(e)}}{r_{c-i(j)}}}{\sum_{e=1}^n \frac{1}{r_{c-i(j)}}}; \quad \sigma_{xzz} = \frac{\sum_{e=1}^n \frac{\sigma_{xzi(j)}^{(e)}}{r_{c-i(j)}}}{\sum_{e=1}^n \frac{1}{r_{c-i(j)}}}; \quad j = \overline{1, N}
\end{aligned} \tag{3.105}$$

Визначення еквівалентного напруження за Мізесом у глобальних вузлах

$$\sigma_{ekvMj} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_{xxj} - \sigma_{yyj})^2 + (\sigma_{yyj} - \sigma_{zzj})^2 + (\sigma_{zzj} - \sigma_{xxj})^2 + 6(\sigma_{xyj}^2 + \sigma_{yzj}^2 + \sigma_{xzz}^2)}, \tag{3.106}$$

$j = \overline{1, N}.$

Визначення запасу міцності в глобальних вузлах F_{sj} виконується за (3.44).

Використовуючи методику викладену в цьому підрозділі та в п. 2.4.1 неважко отримати співвідношення МСЕ для восьмивузлового шестигранного СЕ.

3.5. НДС плоскої шарнірно-з'єднаної ферми

Розглянемо одновимірний скінченний елемент, який є також елементом плоскої шарнірно-з'єднаної ферми (рис. 3.3).

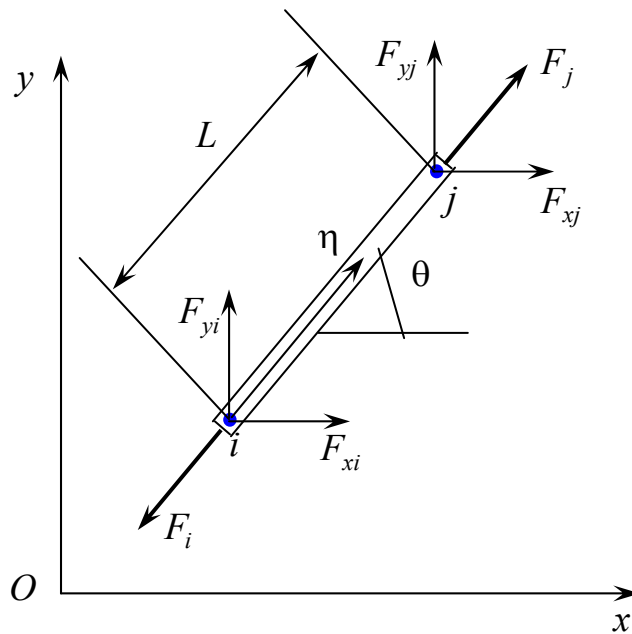


Рис. 3.3. Одновимірний скінченний елемент

Покладемо, що одновимірне пружне тіло орієнтовано вздовж осі η , що нахилений під кутом θ до осі Ox одновимірний СЕ (див. рис. 3.3), буде мати тільки одну компоненту напружень $\sigma_{\eta\eta}$ і відповідну компоненту тензора деформацій $\varepsilon_{\eta\eta}$. Запишемо закон Гука

$$\sigma_{\eta\eta} = E(\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_0\}). \quad (3.107)$$

Формула (3.107) у матричному вигляді записується як $\{\sigma\} = [D](\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_0\})$. Тут $[D] = E$, де E – модуль пружності, Па. Початкову деформацію зв'язують із тепловим розширенням $\beta\Delta T$, де β – коефіцієнт теплового розширення, K^{-1} , а ΔT – різниця температур, К.

Для одновимірного елемента функція переміщення має вид

$$u = N_i\{U_i\} + N_j\{U_j\} = [N]\{U\}, \quad (3.108)$$

де $\{U_i\} = \begin{Bmatrix} U_{xi} \\ U_{yi} \end{Bmatrix}$ і $\{U_j\} = \begin{Bmatrix} U_{xj} \\ U_{yj} \end{Bmatrix}$ – переміщення вузлів i і j в напрямку осі η , м;

$N_i = \left[\left(1 - \frac{\eta}{L}\right) \cos \theta \quad \left(1 - \frac{\eta}{L}\right) \sin \theta \right]$, $N_j = \left[\frac{\eta}{L} \cos \theta \quad \frac{\eta}{L} \sin \theta \right]$ – функції форми одновимірного СЕ під довільним кутом нахилу θ ; $\eta = 0 \dots L$ – поточна довжина СЕ, м; L – довжина СЕ, м.

Тоді можна записати функції переміщення СЕ

$$u = \left[\left(1 - \frac{\eta}{L}\right) \cos \theta \quad \left(1 - \frac{\eta}{L}\right) \sin \theta \quad \frac{\eta}{L} \cos \theta \quad \frac{\eta}{L} \sin \theta \right] \begin{Bmatrix} U_{xi} \\ U_{yi} \\ U_{xj} \\ U_{yj} \end{Bmatrix}. \quad (3.109)$$

Деформація СЕ $\varepsilon_{\eta\eta}$ (див. рис 3.3) пов'язана із переміщенням формулою

$$\varepsilon_{\eta\eta} = \frac{du}{d\eta} = \left[\frac{dN_i}{d\eta} \quad \frac{dN_j}{d\eta} \right] \begin{Bmatrix} U_{xi} \\ U_{yi} \\ U_{xj} \\ U_{yj} \end{Bmatrix}, \quad (3.110)$$

де $\left[\frac{dN_i}{d\eta} \quad \frac{dN_j}{d\eta} \right] = \frac{1}{L} [-\cos \theta \quad -\sin \theta \quad \cos \theta \quad \sin \theta] = [B]$ – матриця градієнтів СЕ, м^{-1} .

Тоді деформація СЕ буде визначатись співвідношенням

$$\varepsilon_{\eta\eta} = [B] \{U\} = \frac{1}{L} [-\cos \theta \quad -\sin \theta \quad \cos \theta \quad \sin \theta] \begin{Bmatrix} U_{xi} \\ U_{yi} \\ U_{xj} \\ U_{yj} \end{Bmatrix}. \quad (3.111)$$

Матриця градієнтів СЕ $[B]$ тепер визначена (3.110), так що можна визначити матрицю жорсткості. Підставляючи $[B]$ і $[D]$ у вираз для $[k^{(e)}]$ і вважаючи, що площа поперечного перерізу СЕ постійна і дорівнює A , отримуємо

$$[k^{(e)}] = \int_V [B]^T [D] [B] dV = \frac{EA}{L^2} \begin{bmatrix} -\cos \theta \\ -\sin \theta \\ \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\cos \theta & -\sin \theta & \cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix} \int_0^L d\eta, \quad (3.112)$$

або

$$[k^{(e)}] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \cos \theta \sin \theta & -\cos^2 \theta & -\cos \theta \sin \theta \\ \cos \theta \sin \theta & \sin^2 \theta & -\cos \theta \sin \theta & -\sin^2 \theta \\ -\cos^2 \theta & -\cos \theta \sin \theta & \cos^2 \theta & \cos \theta \sin \theta \\ -\cos \theta \sin \theta & -\sin^2 \theta & \cos \theta \sin \theta & \sin^2 \theta \end{bmatrix}. \quad (3.113)$$

Інтеграл, що визначає вектор навантаження пов'язаний із тепловим розширенням, записується як

$$-\int_V [B]^T [D] \{\varepsilon_0\} dV = -\frac{\beta EA \Delta T}{L} \begin{Bmatrix} -\cos \theta \\ -\sin \theta \\ \cos \theta \\ \sin \theta \end{Bmatrix} \int_0^L d\eta = -\beta EA \Delta T \begin{Bmatrix} -\cos \theta \\ -\sin \theta \\ \cos \theta \\ \sin \theta \end{Bmatrix}. \quad (3.114)$$

Інтеграл від об'ємних сил має вигляд

$$-\int_V [N]^T \{\rho g_y\} dV = -A \int_0^L \begin{bmatrix} 1 - \frac{\eta}{L} & 0 \\ 0 & 1 - \frac{\eta}{L} \\ \frac{\eta}{L} & 0 \\ 0 & \frac{\eta}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \rho g_x \\ \rho g_y \end{Bmatrix} d\eta = -\frac{AL}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \rho g_x \\ \rho g_y \end{Bmatrix}. \quad (3.115)$$

СЛАР для одного СЕ має вигляд (3.19)

$$[k^{(e)}] \{U\} = \{f^{(e)}\}, \quad (3.116)$$

де $[k^{(e)}]$ – матриця жорсткості СЕ (3.112); $\{U\} = \begin{Bmatrix} U_{x1} \\ U_{y1} \\ U_{x2} \\ U_{y2} \end{Bmatrix}$ – вектор переміщень

СЕ (1 і 2 – локальні номери вузлів СЕ);

$$\{f^{(e)}\} = \frac{AL}{2} \begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \rho g_x \\ \rho g_y \end{Bmatrix} + \beta EA \Delta T \begin{Bmatrix} -\cos \theta \\ -\sin \theta \\ \cos \theta \\ \sin \theta \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ F_{x2} \\ F_{y2} \end{Bmatrix} - \text{вільний член}; \begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ F_{x2} \\ F_{y2} \end{Bmatrix} = \{F\}$$

– вектор вузлових сил СЕ.

Глобальна матриця та вектор вільних членів СЛАР, що стосується усієї ферми, будуються за формулами (3.31) і СЛАР записується у вигляді (3.32).

За граничних умов Дирихле (або защемлення), коли задані нульові переміщення у вузлах, СЛАР змінюється аналогічно з (3.33).

Після розв'язання системи дискретних рівнянь виду (3.32) з врахуванням (3.33) отримуємо вектор переміщень у вузлах $\{U\}$, у який входять дві їх складові $\{U_x\}, \{U_y\}$.

Формування глобальних векторів складових переміщень виконується за формулами

$$U_{xi} = U_{2i-1}; U_{yi} = U_{2i}, \quad i = \overline{1, N}, \quad (3.117)$$

де N – кількість глобальних вузлів розрахункової області.

Визначення глобального вектору сумарних переміщень

$$U_{sumi} = \sqrt{(U_x)_i^2 + (U_y)_i^2}, \quad i = \overline{1, N}. \quad (3.118)$$

Далі виконується обчислення напружень у СЕ, на які розбито ферму

$$\sigma_{\eta 1} = \frac{E}{L} \begin{bmatrix} -\cos^2 \theta & -\sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta & \sin \theta \cos \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{x1} \\ U_{y1} \\ U_{x2} \\ U_{y2} \end{Bmatrix} - \beta E \Delta T \cos \theta; \quad (3.119)$$

$$\sigma_{\eta 2} = \frac{E}{L} \begin{bmatrix} -\sin \theta \cos \theta & -\sin^2 \theta & \sin \theta \cos \theta & \sin^2 \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{x1} \\ U_{y1} \\ U_{x2} \\ U_{y2} \end{Bmatrix} - \beta E \Delta T \sin \theta; \quad (3.120)$$

$$\sigma_{\eta \eta} = \sigma_{\eta 1} \cos \theta + \sigma_{\eta 2} \sin \theta. \quad (3.130)$$

Коефіцієнт напруження σ^* в СЕ можна визначити скориставшись формулою (1.36).

Запитання для самоконтролю

1. Методи побудови системи дискретних рівнянь МСЕ для розв'язання задач напружено-деформованого стану.
2. Застосування методу переміщень як мінімізації повної потенціальної енергії.
3. Критерії збіжності задач НДС.
4. У чому полягає узагальнене варіаційне формулювання МСЕ?
5. Загальні критерії збіжності.
6. Інші способи формулювання МСЕ.
7. Система дискретних рівнянь МСЕ для розв'язання задач статичної пружності та її складові.
8. Матриці функцій форми та градієнтів трикутного СЕ задач ПДС та ПНС.
9. Визначення матриці жорсткості трикутного СЕ.
10. Інтеграл від об'ємних сил трикутного СЕ.
11. Об'ємний інтеграл від початкових деформацій трикутного СЕ задач ПДС та ПНС.
12. Формування СЛАР задач ПДС за граничних умов Дирихле.
13. Формули для обчислення пружної деформації та напружень в СЕ у разі задач ПДС і ПНС.
14. Визначення компонент деформацій та напружень у глобальних вузлах для розв'язання плоских задач НДС.
15. Визначення еквівалентного напруження за Мізесом у глобальних вузлах та запасу міцності для розв'язання плоских задач НДС.
16. Вектор переміщень та деформації трикутного СЕ вісесиметричної задачі напруженого стану.
17. Матриця градієнтів трикутного СЕ вісесиметричної задачі статичної пружності.
18. Матриця пружності ізотропного матеріалу вісесиметричної задачі.

19. Визначення матриці жорсткості трикутного СЕ вісесиметричної задачі напруженого стану.
20. Вектор навантаження трикутного СЕ вісесиметричної задачі статичної пружності, пов'язаний із початковими тепловими деформаціями і тиском.
21. Вектор об'ємного навантаження трикутного СЕ вісесиметричної задачі статичної пружності.
22. Визначення компонент деформацій та напружень у трикутних СЕ вісесиметричної задачі.
23. Визначення компонент деформацій та напружень у глобальних вузлах розрахункової області через компоненти деформацій у трикутних СЕ вісесиметричної задачі.
24. Визначення еквівалентного напруження за Мізесом у глобальних вузлах вісесиметричної задачі статичної пружності.
25. Матриця функцій форми тетраедного СЕ задачі НДС.
26. Матриця градієнтів тетраедного СЕ задачі НДС.
27. Матриця фізичних констант СЕ для ізотропного матеріалу для тривимірного випадку задачі.
28. Визначення вектору сумарних та початкових деформацій тетраедного (чотиригранного) СЕ.
29. Матриця жорсткості тетраедного СЕ тривимірної задачі НДС.
30. Визначення складових вектора навантаження тетраедного СЕ тривимірної задачі НДС.
31. Формули для обчислення компонент початкових і пружних деформацій та напружень тетраедного СЕ.
32. Визначення компонент деформацій та напружень у глобальних вузлах розрахункової області через компоненти деформацій у тетраедному СЕ.
33. Визначення еквівалентного напруження за Мізесом у глобальних вузлах тривимірної задачі.
34. Одновимірний скінченний елемент, як складовий елемент плоскої шарнірно-з'єднаної ферми.
35. Функція переміщення одновимірного СЕ.
36. Вектор деформації та матриця градієнтів одновимірного СЕ.
37. Матриця жорсткості одновимірного СЕ для розв'язання задачі НДС плоскої шарнірно-з'єднаної ферми.
38. Визначення інтегралів, пов'язаних із навантаженням одновимірного СЕ.
39. Формування СЛАР задачі НДС плоскої шарнірно-з'єднаної ферми.
40. Обчислення компонент напружень в одновимірному СЕ.
41. Обчислення коефіцієнта напруження плоскої шарнірно-з'єднаної ферми.

4. ЧИСЛОВА МЕТОДИКА РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ РУХУ В'ЯЗКОЇ РІДИНИ

4.1. Застосування методу зваженої нев'язки для побудови системи дискретних рівнянь МСЕ. Метод Гальоркіна

Введемо деяку вагову функцію $W_i, i = 1, N$. Розглянемо внутрішній добуток на простому прикладі двовимірного рівняння Пуассона (див. підрозділ 2.1) [7, 10]

$$\iint_V W_i \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + C \right] dx dy = 0. \quad (4.1)$$

Виконаємо спочатку інтегрування по частинах виразу $\iint_V W_i \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} dx dy$

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Проведемо заміну змінних

$$u = W \rightarrow du = dW = \frac{\partial W}{\partial x} dx, \quad dv = \iint_V \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dx dy \rightarrow v = \int_S \frac{\partial \phi}{\partial x} dy,$$

Тоді

$$\begin{aligned} \iint_V W_i \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} dx dy &= \int_S W_i \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{x=A}^{x=B} dy - \iint_V \frac{\partial W_i}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} dx dy = \\ &= \int_S W_i \frac{\partial \phi}{\partial x} n_x dS - \iint_V \frac{\partial W_i}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} dx dy, \end{aligned} \quad (4.2)$$

де S – поверхня тіла; n_x – компонента зовнішньої нормалі до поверхні тіла по x ; A, B – границі інтегрування по x .

У (4.2) $\int_S W_i \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{x=A}^{x=B} dy = \int_S W_i \frac{\partial \phi}{\partial x} n_x dS$, що відповідає теоремі Остроградського-Гауса $\int_V \nabla^2 \phi dV = \int_S \mathbf{n} \cdot \nabla \phi dS$ [11].

Тепер виконаємо інтегрування виразу $\iint_V W_i \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} dx dy$ аналогічним чином

$$u = W \rightarrow du = dW = \frac{\partial W}{\partial y} dy, \quad dv = \iint_V \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right) dx dy \rightarrow v = \int_S \frac{\partial \phi}{\partial y} dx,$$

отримаємо

$$\begin{aligned} \iint_V W_i \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} dx dy &= \int_S W_i \frac{\partial \phi}{\partial y} \Big|_{y=C}^{y=D} dx - \iint_V \frac{\partial W_i}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial y} dx dy = \\ &= \int_S W_i \frac{\partial \phi}{\partial y} n_y dS - \iint_V \frac{\partial W_i}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial y} dx dy \end{aligned} \quad (4.3)$$

де S – поверхня тіла; n_y – компонента зовнішньої нормалі до поверхні тіла по y ; C, D – границі інтегрування по y .

Після складання (4.2) і (4.3) із врахуванням C в (4.1) остаточно отримуємо

$$\iint_V \left[\frac{\partial W_i}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial W_i}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial y} - W_i C \right] dx dy - \int_S W_i \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} n_x + \frac{\partial \phi}{\partial y} n_y \right) dS = 0. \quad (4.4)$$

Перший інтеграл у (4.4) не містить вкладу від границь між елементами, якщо функція ϕ неперервна, наприклад задана через функції форми СЕ виду $\phi = [N]\{\phi\}^{(e)}$. Далі необхідно накласти обмеження на вагову функцію W_i .

Для цього можна скористатися методом Гальоркіна, у якому ця функція береться рівною функції форми СЕ [7]

$$W_i = N_i. \quad (4.5)$$

Використовуючи заміну (4.5) отримуємо систему дискретних рівнянь МСЕ безпосередньо із (4.4) не виконуючи при цьому процедури пошуку та мінімізації функціоналу.

Тому для (4.4) можна записати

$$\sum_{e=1}^E \left([k^{(e)}] \{\phi^{(e)}\} + \{f^{(e)}\} \right) - \int_S N_i \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} n_x + \frac{\partial \phi}{\partial y} n_y \right) dS = 0, \quad (4.6)$$

де E – кількість СЕ, на які розбито розрахункову область.

У (4.6) $[k^{(e)}]$ і $\{f^{(e)}\}$ ідентичні виразам, отриманим варіаційним методом для ГУ Дирихле (див. розділи 2 і 3). Інтеграл по S у (4.6) пов'язаний з ГУ типу Неймана.

4.2. Плоска задача усталеної течії в'язкої нестисливої рідини

Запишемо вирази для p, u, v системи рівнянь (1.41) через вузові значення СЕ з використанням відповідних функцій форми

$$p = [N]\{p\}, \quad u = [N]\{u\}, \quad v = [N]\{v\}, \quad (4.7)$$

де $[N]$ – функції форми СЕ, що забезпечують тільки неперервність змінних системи.

Для отримання системи дискретних рівнянь МСЕ застосуємо метод Гальоркіна для кожного рівняння із системи (1.41).

Знайдемо для першого з них внутрішній добуток з використанням вагової функції у вигляді функції форми

$$\int_V N_i \left[X - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \right] dV = 0. \quad (4.8)$$

Інтегруючи по частинах дифузний член (4.8) та виконуючи деякі перетворення в результаті отримуємо

$$\int_V \left[N_i \left(X - \frac{\partial p}{\partial x} \right) - \mu \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} - \mu \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \right] dV + \int_S \mu N_i \left(\frac{\partial u}{\partial x} n_x + \frac{\partial u}{\partial y} n_y \right) dS = 0. \quad (4.9)$$

Після підстановки (4.7) у (4.9), отримуємо

$$\begin{aligned} \int_V \left[-N_i X + N_i \frac{\partial [N]}{\partial x} \{p\} + \mu \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial [N]}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial [N]}{\partial y} \right) \{u\} \right] dV - \\ - \int_S \mu N_i \left(\frac{\partial u}{\partial x} n_x + \frac{\partial u}{\partial y} n_y \right) dS = 0. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Для другого рівняння (1.41), аналогічно отримуємо

$$\int_V \left[-N_i Y + N_i \frac{\partial[N]}{\partial y} \{p\} + \mu \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial[N]}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial[N]}{\partial y} \right) \{v\} \right] dV - \int_S \mu N_i \left(\frac{\partial v}{\partial x} n_x + \frac{\partial v}{\partial y} n_y \right) dS = 0. \quad (4.11)$$

Для третього рівняння (1.41) або рівняння нерозривності, отримуємо

$$\int_V N_i \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dV = \int_V \left[N_i \left(\frac{\partial[N]}{\partial x} \{u\} + \frac{\partial[N]}{\partial y} \{v\} \right) \right] dV = 0. \quad (4.12)$$

Групуємо всі змінні, що відносяться до точок, що розглядаються, у вигляді

$$\{\Phi_i\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ p_i \end{Bmatrix}, \quad (4.13)$$

отримуємо систему дискретних рівнянь для всієї розрахункової області

$$[K]\{\Phi\} = \{F\}, \quad (4.14)$$

де $[K] = \sum_{e=1}^E [k^{(e)}]$; $[k^{(e)}] = \begin{bmatrix} [k]_{11} & [k]_{12} & \dots & [k]_{1M} \\ [k]_{21} & [k]_{22} & \dots & [k]_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [k]_{M1} & [k]_{M2} & \dots & [k]_{MM} \end{bmatrix}$ – матриця жорсткості СЕ;

M – кількість вузлів в СЕ;

$$[k]_{ij} = \int_{V^{(e)}} \mu \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} & 0 & \frac{1}{\mu} N_i \frac{\partial N_j}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} & \frac{1}{\mu} N_i \frac{\partial N_j}{\partial y} \\ \frac{1}{\mu} N_i \frac{\partial N_j}{\partial x} & \frac{1}{\mu} N_i \frac{\partial N_j}{\partial y} & 0 \end{bmatrix} dV, \quad i, j = \overline{1, M};$$

$$\{F\} = \sum_{e=1}^E \{f^{(e)}\}; \quad \{f^{(e)}\} = \{\{f\}_1 \quad \{f\}_2 \quad \dots \quad \{f\}_M\}^T;$$

$$\{f\}_i = \int_{V^{(e)}} N_i \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ 0 \end{Bmatrix} dV + \int_{S^{(e)}} \mu N_i \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} n_x + \frac{\partial u}{\partial y} n_y \\ \frac{\partial v}{\partial x} n_x + \frac{\partial v}{\partial y} n_y \\ 0 \end{Bmatrix} dS - \text{вектор вільних членів СЕ.}$$

Оскільки, відповідно до ГУ (1.44) $\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x} n_x + \frac{\partial u}{\partial y} n_y = 0$ і

$\frac{\partial v}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial x} n_x + \frac{\partial v}{\partial y} n_y = 0$, то і вклад від поверхневого інтегралу в $\{f\}_i$ теж дорівнює нулю.

Визначимо інтеграли, що описують компоненти матриці жорсткості СЕ (4.14) для двох типів лінійних СЕ: трикутних і чотирикутних (див. розділи 2, 3). Спочатку прийнемо, що як СЕ використовуються трикутні лінійні елементи (див. рис. 2.1). Тоді для компонентів $[k]_{ij}$, що містять добутки складових матриці градієнтів СЕ, будемо мати

$$\begin{aligned} [k]_{ij} &= \int_{V^{(e)}} \mu \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) dV = \\ &= \int_A \mu \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) t dA, \quad i, j = \overline{1,3}, \end{aligned} \quad (4.15)$$

де $V = At$ – об'єм СЕ, м³; A – площа СЕ, м²; t – товщина СЕ, м; N_i , $i = \overline{1,3}$ – функції форми трикутного СЕ; $\frac{\partial N_i}{\partial x}$, $\frac{\partial N_i}{\partial y}$, $i = \overline{1,3}$ – компоненти матриці градієнтів трикутного СЕ.

Оскільки в лінійному трикутному СЕ похідні від функцій форми за координатами є сталі величини, то підінтегральний вираз у (4.15) можна винести з під знаку інтеграла. У результаті отримаємо, що

$$[k]_{ij} = At\mu \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right), \quad i, j = \overline{1,3}. \quad (4.16)$$

Для визначення компонент $[k]_{ij}$, що містять добутки складових вектора функцій форми і матриці градієнтів СЕ, скористаємося L -координатами та відповідними формулами для аналітичного визначення інтегралів (див. дода-

ток А). Враховуючи, що для СЕ (див. рис. 2.1) $\frac{\partial N_j}{\partial x}$ і $\frac{\partial N_j}{\partial y}$ є сталими, в результаті отримаємо

$$\begin{aligned} [k]_{ij} &= \int_V \frac{1}{\mu} N_i \frac{\partial N_j}{\partial x} dV = \int_A \frac{1}{\mu} N_i \frac{\partial N_j}{\partial x} t dA = \\ &= \frac{t}{\mu} \frac{\partial N_j}{\partial x} \int_A N_i dA = \frac{At}{3\mu} \frac{\partial N_j}{\partial x}, \quad i, j = \overline{1,3}, \end{aligned} \quad (4.17)$$

$$[k]_{ij} = \int_V \frac{1}{\mu} N_i \frac{\partial N_j}{\partial y} dV = \frac{At}{3\mu} \frac{\partial N_j}{\partial y}, \quad i, j = \overline{1,3}. \quad (4.18)$$

Після підстановки (4.16)–(4.18) у вираз для $[k]_{ij}$, отримуємо

$$[k]_{ij} = \mu At \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} & 0 & \frac{1}{3\mu} \frac{\partial N_j}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} & \frac{1}{3\mu} \frac{\partial N_j}{\partial y} \\ \frac{1}{3\mu} \frac{\partial N_j}{\partial x} & \frac{1}{3\mu} \frac{\partial N_j}{\partial y} & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.19)$$

Для часткового покращення обумовленості глобальної матриці СЛАР (4.14) виконаємо перестановку місцями компонентів v і p у векторі $\{\Phi_i\}$

$$\{\Phi_i\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ p_i \\ v_i \end{Bmatrix}. \quad (4.20)$$

Тоді матриця жорсткості для лінійних трикутних СЕ з трьома ступенями свободи набуває вигляду

$$[k]_{ij} = \mu At \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} & 0 & \frac{1}{3\mu} \frac{\partial N_j}{\partial x} \\ \frac{1}{3\mu} \frac{\partial N_j}{\partial x} & \frac{1}{3\mu} \frac{\partial N_j}{\partial y} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} & \frac{1}{3\mu} \frac{\partial N_j}{\partial y} \end{bmatrix}. \quad (4.21)$$

Для визначення вектора об'ємного навантаження, пов'язаного з гравітацією, також скористаємося L -координатами та відповідними формулами для аналітичного визначення інтегралів (див. додаток А). У результаті отримаємо

$$\begin{aligned} \{f^{(e)}\} &= \int_V [N^{(e)}]^T \begin{Bmatrix} X \\ 0 \\ Y \end{Bmatrix} dV = \int_A [N^{(e)}]^T \begin{Bmatrix} \rho g_x \\ 0 \\ \rho g_y \end{Bmatrix} t dA = \\ &= \frac{At}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \rho g_x \\ 0 \\ \rho g_y \end{Bmatrix}, \end{aligned} \quad (4.22)$$

де $V = At$ – об'єм СЕ, м^3 ; A – площа СЕ, м^2 ; t – товщина СЕ, м ; ρ – густина, кг/м^3 ; g_x, g_y – компоненти вектора прискорення вільного падіння, м/с^2 .

У (4.22) так само як і в (4.21) v і p переставлено місцями.

У разі лінійних чотирикутних СЕ (див. рис. 2.2) для компонентів $[k^{(e)}]$, що містять добутки складових матриці градієнтів СЕ $[B]$ і добутки складових вектора функцій форми $[N]$ і матриці градієнтів $[B]$, матимемо (див. підрозділ 2.2, п. 2.2.2)

$$\begin{aligned} [k^{(e)}] &= \begin{bmatrix} [k]_{11} & [k]_{12} & [k]_{13} & [k]_{14} \\ [k]_{21} & [k]_{22} & [k]_{23} & [k]_{24} \\ [k]_{31} & [k]_{32} & [k]_{33} & [k]_{34} \\ [k]_{41} & [k]_{42} & [k]_{43} & [k]_{44} \end{bmatrix} \\ [k]_{ij} &= \int_{V^{(e)}} \mu \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) dV \approx \\ &\approx t\mu \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \left(\frac{\partial N_i}{\partial x_k} \frac{\partial N_j}{\partial x_k} + \frac{\partial N_i}{\partial y_l} \frac{\partial N_j}{\partial y_l} \right) \det[J(\xi_k, \eta_l)] w_k w_l = \\ &= t\mu \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n (B_{1i} B_{1j} + B_{2i} B_{2j}) \det[J(\xi_k, \eta_l)] w_k w_l, \quad i, j = \overline{1,4}, \\ [k]_{ij} &= \int_V \frac{1}{\mu} N_i \frac{\partial N_j}{\partial x} dV = \int_A \frac{1}{\mu} N_i \frac{\partial N_j}{\partial x} t dA \approx \\ &\approx \frac{t}{\mu} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_i \frac{\partial N_j}{\partial x} \det[J] d\xi d\eta = \frac{t}{\mu} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n N_i B_{1j} \det[J(\xi_k, \eta_l)] w_k w_l, \quad i, j = \overline{1,4}, \end{aligned} \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned}
[k]_{ij} &= \int_V \frac{1}{\mu} N_i \frac{\partial N_j}{\partial y} dV = \int_A \frac{1}{\mu} N_i \frac{\partial N_j}{\partial y} t dA \approx \\
&\approx \frac{t}{\mu} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_i \frac{\partial N_j}{\partial y} \det[J] d\xi d\eta = \frac{t}{\mu} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n N_i B_{2j} \det[J(\xi_k, \eta_l)] w_k w_l, \quad i, j = \overline{1, 4},
\end{aligned} \tag{4.25}$$

$$\text{де } [B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial y} \end{bmatrix} = [J(\xi, \eta)]^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & \frac{\partial N_3}{\partial \xi} & \frac{\partial N_4}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & \frac{\partial N_3}{\partial \eta} & \frac{\partial N_4}{\partial \eta} \end{bmatrix} - \text{матриця}$$

градієнтів СЕ (2.51); $[J(\xi, \eta)]$ – якобіан переходу від безрозмірних до розмірних змінних інтегрування; ξ_k, η_l , $k, l = \overline{1, n}$ – вузли квадратурної формули Гауса; w_k, w_l , $k, l = \overline{1, n}$ – вага квадратурної формули Гауса; $V = At$ – об'єм СЕ, м³; A – площа СЕ, м²; t – товщина СЕ, м.

У результаті матриця жорсткості для лінійних чотирикутних СЕ з трьома ступенями свободи набуває вигляду

$$[k]_{ij} = \mu t \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n (B_{1i} B_{1j} + B_{2i} B_{2j}) [J(\xi_k, \eta_l)] w_k w_l & 0 & \frac{1}{\mu} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n N_i B_{1j} [J(\xi_k, \eta_l)] w_k w_l \\ \frac{1}{\mu} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n N_i B_{1j} [J(\xi_k, \eta_l)] w_k w_l & \frac{1}{\mu} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n N_i B_{2j} [J(\xi_k, \eta_l)] w_k w_l & 0 \\ 0 & \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n (B_{1i} B_{1j} + B_{2i} B_{2j}) [J(\xi_k, \eta_l)] w_k w_l & \frac{1}{\mu} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n N_i B_{2j} [J(\xi_k, \eta_l)] w_k w_l \end{bmatrix}, \tag{4.26}$$

$i, j = \overline{1, 4}.$

Вектор об'ємного навантаження, пов'язаного із гравітацією, для лінійного чотирикутного СЕ з трьома ступенями свободи має вид

$$\begin{aligned}
\{f^{(e)}\} &= \{\{f\}_1 \quad \{f\}_2 \quad \{f\}_3 \quad \{f\}_4\}^T; \\
\{f^{(e)}\} &= \int_V [N^{(e)}]^T \begin{Bmatrix} X \\ 0 \\ Y \end{Bmatrix} dV = \int_A [N^{(e)}]^T \begin{Bmatrix} \rho g_x \\ 0 \\ \rho g_y \end{Bmatrix} t dA = t \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [N^{(e)}]^T \begin{Bmatrix} \rho g_x \\ 0 \\ \rho g_y \end{Bmatrix} \det[J] d\xi d\eta \approx \\
&\approx t \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \rho g_x \\ 0 \\ \rho g_y \end{Bmatrix} [J(\xi_k, \eta_l)] w_k w_l,
\end{aligned} \tag{4.27}$$

де $V = At$ – об'єм СЕ, м³; A – площа СЕ, м²; t – товщина СЕ, м; ρ – густина, кг/м³; g_x, g_y – компоненти вектора прискорення вільного падіння, м/с².

За граничних умов Дирихле, коли задані компоненти швидкості або тиск, СЛАР (4.14) змінюється аналогічно із (3.33).

Як вище зазначалося, СЛАР типу (4.14) має погану обумовленість або характеризується сингулярністю. Тобто детермінант СЛАР прямує до нуля. Тому для одержання фізичних результатів для її розв'язання будемо застосовувати метод спряжених градієнтів [19] (див. підрозділ 5.2) або метод регуляризації за Тихоновим [32].

Після розв'язання СЛАР типу (4.14) отримуємо вузлові значення компонент вектора швидкості і значення тиску в глобальних вузлах $\{\Phi\}$, у який входять три складові $\{u\}, \{v\}, \{p\}$.

Формування глобальних векторів складових переміщень виконується за формулами

$$u_i = \Phi_{3i-2}; \quad v_i = \Phi_{3i-1}; \quad p_i = \Phi_{3i}, \quad i = \overline{1, N}, \quad (4.28)$$

де N – кількість глобальних вузлів розрахункової області.

Визначення глобального вектору сумарної швидкості здійснюється за формулою

$$V_{si} = \sqrt{u_i^2 + v_i^2}, \quad i = \overline{1, N}. \quad (4.29)$$

4.3. Вісесиметрична задача усталеної течії в'язкої нестисливої рідини

Числова методика розв'язання вісесиметричної задачі аналогічна до плоскої. З вихідного формулювання задачі (1.45) з ГУ (1.42), (1.43), (1.46) із використанням методу Гальоркіна так само отримується система дискретних рівнянь типу (4.14). У результаті для матриці жорсткості СЕ, що входить у

$[K] = \sum_{e=1}^E [k^{(e)}]$ (4.14), отримуємо такі співвідношення

$$[k]_{ij} = 2\pi \int_{A^{(e)}} \mu \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial r} \frac{\partial N_j}{\partial r} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} & 0 & \frac{1}{\mu} N_i \frac{\partial N_j}{\partial r} \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} + \frac{\partial N_i}{\partial r} \frac{\partial N_j}{\partial r} & \frac{1}{\mu} N_i \frac{\partial N_j}{\partial z} \\ \frac{1}{\mu} N_i \frac{\partial N_j}{\partial r} & \frac{1}{\mu} N_i \frac{\partial N_j}{\partial z} & 0 \end{bmatrix} r dA \quad (4.30)$$

де μ – динамічна в'язкість, Па·с; r, z – радіус і апліката, відповідно, м; $dV = 2\pi r dA$ – елементарний об'єм вісесиметричного СЕ; A – площа СЕ, м²;

N_i , $i = \overline{1, M}$ – компоненти матриці функцій форми СЕ; $\frac{\partial N_i}{\partial r}, \frac{\partial N_j}{\partial z}$, $i, j = \overline{1, M}$ – компоненти матриці градієнтів СЕ; M – кількість вузлів СЕ.

Для вектора вільних членів СЕ, що входить у $\{F\} = \sum_{e=1}^E \{f^{(e)}\}$ (4.14), отримуємо

$$\{f^{(e)}\} = 2\pi \int_{A^{(e)}} [N^{(e)}]^T \begin{Bmatrix} R \\ Z \\ 0 \end{Bmatrix} r dA. \quad (4.31)$$

Так само як і для плоскої задачі у разі вісесиметричної задачі розглянемо два типи лінійних СЕ для визначення співвідношень (4.30) і (4.31): трикутні і чотирикутні.

У разі застосування трикутних лінійних СЕ (див. рис. 2.1) скористаємося спрощеними формулами для визначення об'ємних інтегралів виду (4.30) і (4.31)

$$\begin{aligned} [k]_{ij} &= 2\pi \int_A \mu \left(\frac{\partial N_i}{\partial r} \frac{\partial N_j}{\partial r} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} \right) r dA = \\ &= 2\pi \bar{r} \int_A \mu \left(\frac{\partial N_i}{\partial r} \frac{\partial N_j}{\partial r} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} \right) dA = \\ &= 2\pi \bar{r} A \mu \left(\frac{\partial N_i}{\partial r} \frac{\partial N_j}{\partial r} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} \right), \quad i, j = \overline{1, 3}, \end{aligned} \quad (4.32)$$

$$\begin{aligned} [k]_{ij} &= 2\pi \int_A \frac{1}{\mu} N_i \frac{\partial N_j}{\partial r} r dA = 2\pi \bar{r} \int_A \frac{1}{\mu} N_i \frac{\partial N_j}{\partial r} dA = \\ &= \frac{2\pi \bar{r}}{\mu} \frac{\partial N_j}{\partial r} \int_A N_i dA = \frac{2\pi \bar{r} A}{3\mu} \frac{\partial N_j}{\partial r}, \quad i, j = \overline{1, 3}, \end{aligned} \quad (4.33)$$

$$[k]_{ij} = 2\pi \int_A \frac{1}{\mu} N_i \frac{\partial N_j}{\partial z} r dA = \frac{2\pi \bar{r} A}{3\mu} \frac{\partial N_j}{\partial z}, \quad i, j = \overline{1, 3}. \quad (4.34)$$

$$\begin{aligned}
\{f^{(e)}\} &= 2\pi \int_A [N^{(e)}]^T \begin{Bmatrix} \rho g_r \\ \rho g_z \\ 0 \end{Bmatrix} r dA = \\
&= \frac{2\pi \bar{r} A}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \rho g_r \\ \rho g_z \\ 0 \end{Bmatrix},
\end{aligned} \tag{4.35}$$

де $\bar{r} = \frac{r_1 + r_2 + r_3}{3}$ – центр маси за радіусом СЕ, м; $dV = 2\pi \bar{r} dA$ – об’єм вісесиметричного СЕ, м³; N_i , $i = \overline{1,3}$ – компоненти матриці функцій форми трикутного СЕ; $\frac{\partial N_i}{\partial r}$, $\frac{\partial N_i}{\partial z}$, $i = \overline{1,3}$ – компоненти матриці градієнтів трикутного СЕ.

Визначення інтегралів (4.33)–(4.35) виконано з використанням L -координат (див. додаток А). Причому в (4.35) у матриці функцій форми враховано три ступені свободи СЕ (4.13).

У разі чотирикутних лінійних СЕ (див. рис. 2.2) для визначення об’ємних інтегралів виду (4.30) і (4.31) використовуються точні співвідношення

$$\begin{aligned}
[k]_{ij} &= 2\pi \mu \int_{A^{(e)}} r \left(\frac{\partial N_i}{\partial r} \frac{\partial N_j}{\partial r} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} \right) dA \approx \\
&\approx 2\pi \mu \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \left(\frac{\partial N_i}{\partial r_k} \frac{\partial N_j}{\partial r_k} + \frac{\partial N_i}{\partial z_l} \frac{\partial N_j}{\partial z_l} \right) \sum_{p=1}^4 \left([N(\xi_k, \eta_l)]_p^T r_p \right) \det[J(\xi_k, \eta_l)] w_k w_l = \\
&= 2\pi \mu \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n (B_{1i} B_{1j} + B_{2i} B_{2j}) \sum_{p=1}^4 \left([N(\xi_k, \eta_l)]_p^T r_p \right) \det[J(\xi_k, \eta_l)] w_k w_l, \quad i, j = \overline{1,4},
\end{aligned} \tag{4.36}$$

$$\begin{aligned}
[k]_{ij} &= 2\pi \int_A \frac{1}{\mu} N_i r \frac{\partial N_j}{\partial r} dA \approx \\
&\approx \frac{2\pi}{\mu} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_i \sum_{p=1}^4 \left([N(\xi_k, \eta_l)]_p^T r_p \right) \frac{\partial N_j}{\partial r} \det[J] d\xi d\eta = \\
&= \frac{2\pi}{\mu} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n N_i \sum_{p=1}^4 \left([N(\xi_k, \eta_l)]_p^T r_p \right) B_{1j} \det[J(\xi_k, \eta_l)] w_k w_l, \quad i, j = \overline{1,4},
\end{aligned} \tag{4.37}$$

$$[k]_{ij} = 2\pi \int_A \frac{1}{\mu} N_i r \frac{\partial N_j}{\partial z} dA \approx$$

$$\approx \frac{2\pi}{\mu} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_i \sum_{p=1}^4 \left([N(\xi_k, \eta_l)]_p^T r_p \right) \frac{\partial N_j}{\partial z} \det[J] d\xi d\eta =$$

$$= \frac{2\pi}{\mu} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n N_i \sum_{p=1}^4 \left([N(\xi_k, \eta_l)]_p^T r_p \right) B_{2j} \det[J(\xi_k, \eta_l)] w_k w_l, \quad i, j = \overline{1, 4},$$

$$\{f^{(e)}\} = 2\pi \int_A [N^{(e)}]^T \begin{Bmatrix} \rho g_r \\ \rho g_z \\ 0 \end{Bmatrix} r dA =$$

$$= 2\pi \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \{N(\xi, \eta) \rho g_q\} \sum_{p=1}^4 \left([N(\xi_k, \eta_l)]_p^T r_p \right) \det[J] d\xi d\eta \approx$$

$$\approx 2\pi \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \{N(\xi, \eta) \rho g_q\} \sum_{p=1}^4 \left([N(\xi_k, \eta_l)]_p^T r_p \right) \det[J(\xi_k, \eta_l)] w_k w_l,$$

де $[B]$ – матриця градієнтів СЕ (2.92); $[J(\xi, \eta)]$ – якобіан переходу від безрозмірних до розмірних змінних інтегрування; $\xi_k, \eta_l, k, l = \overline{1, n}$ – вузли квадратурної формули Гауса; $w_k, w_l, k, l = \overline{1, n}$ – вага квадратурної формули Гауса; A – площа СЕ, м²;

$$\{N(\xi, \eta) \rho g_q\} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & N_4 \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \rho g_r \\ \rho g_z \\ 0 \end{Bmatrix} -$$

добуток матриці функцій форми СЕ з врахуванням трьох ступенів свободи на вектор об'ємної сили.

Подальше перетворення СЛАР та її розв'язок такий самий як і для задачі плоскої течії в'язкої рідини (див. підрозділ 4.2).

Запитання для самоконтролю

1. Об'ємний інтеграл від внутрішнього добутку вагової функції для рівняння Пуассона.

2. Метод Гальоркіна його сутність та переваги над варіаційним формулюванням МСЕ.

3. Покажіть еквівалентність між методом Гальоркіна та варіаційним формулюванням МСЕ на прикладі рівняння Пуассона.

4. Застосування методу Гальоркіна до системи рівнянь Стокса і нерозривності.

5. Визначення основних співвідношень МСЕ для розв'язання плоскої задачі руху в'язкої нестисливої рідини (матриці жорсткості і вектора об'ємного навантаження СЕ).

6. Як змінюється вид матриці функцій форми у разі трьох ступенів свободи СЕ?

7. Визначення основних співвідношень МСЕ для розв'язання вісесиметричної задачі руху в'язкої нестисливої рідини (матриці жорсткості і вектора об'ємного навантаження СЕ).

8. Методи розв'язання СЛАР, що утворюються після дискретизації системи диференціальних рівнянь Стокса та нерозривності.

мимо перше рівняння з третього, четвертого і т.д. рівнянь. Тоді виключаються всі коефіцієнти першого стовпця, що лежать нижче головної діагоналі матриці $\mathbf{A}$. Тобто, $a_{i1} = 0, i = \overline{2, n}$.

Потім за допомогою другого рівняння (2.2) виключимо з третього, четвертого і т.д. рівнянь коефіцієнти другого стовпця ($a_{i2} = 0, i = \overline{3, n}$). Послідовно продовжуючи цей процес, виключимо з матриці $\mathbf{A}$ всі коефіцієнти, що лежать нижче головної діагоналі $\mathbf{A}$.

Загальні формули цього процесу виключення будуть такі. Нехай проведено виключення коефіцієнтів з $k-1$ стовпця. Тоді лишилися такі рівняння з ненульовими елементами нижче головної діагоналі

$$\sum_{j=k}^n a_{ij}^{(k)} x_j = b_i^{(k)}, \quad i = \overline{k, n}. \quad (5.4)$$

Помножимо k -й рядок на коефіцієнт

$$c_{mk} = a_{mk}^{(k)} / a_{kk}^{(k)}, \quad a_{kk}^{(k)} \neq 0, \quad m > k, \quad (5.5)$$

і віднімемо із m -го рядка. Перший ненульовий елемент цього рядка стане нульовим, а інші зміняться за формулами

$$\begin{aligned} a_{mp}^{(k+1)} &= a_{mp}^{(k)} - c_{mk} a_{kp}^{(k)}, \\ b_m^{(k+1)} &= b_m^{(k)} - c_{mk} b_k^{(k)}, \quad k < m, p \leq n. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Виконавши обчислення по (5.6) при всіх вказаних індексах, виключимо елементи k -го стовпця. Таке виключення називається *циклом* процесу, а виконання всіх циклів називається *прямим ходом* виключення Гауса, в результаті якого отримуємо матрицю трикутного виду.

У разі, коли $a_{kk}^{(k)} = 0$, за допомогою перестановки рядків матриці ненульовий елемент переміщається на головну діагональ і обчислення продовжуються.

Зворотний хід методу Гауса виконується за формулами

$$\begin{aligned} x_n &= b_n / a_{nn}, \\ x_i &= \left(b_i - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j \right) / a_{ii}, \quad i = \overline{n-1, 1}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Для розв'язання СЛАР методом виключення Гауса потрібно приблизно

виконати $\frac{2}{3}n^3$ арифметичних дій.

СЛАР із розрідженими матрицями часто зберігають у стрічковому вигляді [17]. У таких випадках також можна застосовувати метод Гауса, а в алгоритмічній його реалізації має враховуватися стрічкова структура матриці [18]. Приклад програмного коду для розв'язання СЛАР з розрідженою стрічковою матрицею, що записана за схемою III [17], наведено в додатку В.

Найбільш важливим окремим випадком методу Гауса є *метод прогонки*, який застосовується до систем із тридіагональною матрицею. Такі системи рівнянь зазвичай записуються в канонічному вигляді

$$\begin{aligned} A_i x_{i-1} - C_i x_i + B_i x_{i+1} &= F_i, \quad i = \overline{1, n}, \\ A_1 &= B_n = 0. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Алгоритм розв'язання системи рівнянь (5.8) складається із прямого та зворотного ходів, як і в методі виключення Гауса.

Прямий хід прогонки:

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= \frac{B_1}{C_1}, \quad \beta_2 = \frac{F_1}{C_1}, \\ \alpha_{i+1} &= \frac{B_i}{C_i - A_i \alpha_i}, \quad \beta_{i+1} = \frac{A_i \beta_i + F_i}{C_i - A_i \alpha_i}, \quad i = 2, 3, \dots, n-1. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Зворотний хід прогонки:

$$x_{n-1} = \beta_n, \quad x_i = \alpha_{i+1} x_{i+1} + \beta_{i+1}, \quad i = n-2, n-3, \dots, 2. \quad (5.10)$$

Кількість арифметичних операцій в методі прогонки складає $9n$.

Умови стійкості методу прогонки:

$$A_i > 0, \quad B_i > 0, \quad C_i \geq A_i + B_i, \quad 2 \leq i \leq n-1.$$

Метод оптимального виключення має ту ж швидкість та потребує стільки ж пам'яті, що і метод Гауса.

Метод облямування практично не відрізняється від методу оптимального виключення і має ті ж самі характеристики.

Метод відображень потребує вдвічі більшої кількості арифметичних дій, чим метод Гауса.

Метод ортогоналізації втричі повільніше методу Гауса. Цей метод має деякі переваги під час розв'язання погано обумовлених систем рівнянь. Але за великих значень n сама ортогоналізації призводить до значної втрати точності розв'язку СЛАР.

Метод Жордана має ту ж саму швидкість, що і метод Гауса. Під час

розв'язання СЛАР він не має жодних переваг, але при оберненні матриці він потребує меншу оперативну пам'ять.

5.2. Загальні характеристики ітераційних методів розв'язання СЛАР

Стационарний метод простих ітерацій базується на приведенні системи рівнянь (5.1) до еквівалентної системи виду

$$\mathbf{x} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{d}. \quad (5.11)$$

Умова збіжності розв'язку $\|\mathbf{C}\| < 1$. Систему рівнянь виду (5.11) можна отримати за допомогою виділення діагональних елементів

$$x_k = \frac{1}{a_{kk}} \left(b_k - \sum_{i \neq k} a_{ki} x_i \right), \quad k = \overline{1, n}. \quad (5.12)$$

У записі (5.12) легко врахувати наявність нулів у матриці $\mathbf{A}$ і при множенні матриці на вектор виконувати підсумовування тільки за ненульовими елементами. У разі використання різних норм матриці достатні умови збіжності ітерацій набувають вигляду

$$\sum_{i \neq k} \left| \frac{a_{ki}}{a_{kk}} \right| < 1 \vee \sum_{k \neq i} \left| \frac{a_{ki}}{a_{kk}} \right| < 1 \vee \sum_k \sum_{i \neq k} \left| \frac{a_{ki}}{a_{kk}} \right|^2 < 1, \quad (5.13)$$

що означає переважання діагональних елементів матриці.

Ітераційний процес *методу Гауса-Зейделя* можна записати у формі

$$x_k^{(s+1)} = \frac{1}{a_{kk}} \left(b_k - \sum_{i=1}^{k-1} a_{ki} x_i^{(s+1)} - \sum_{i=k+1}^n a_{ki} x_i^{(s)} \right), \quad k = \overline{1, n}. \quad (5.14)$$

Розв'язання СЛАР виду (5.1) *методом спряжених градієнтів* рівнозначно розв'язку задачі мінімізації виду

$$\|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|^2 \rightarrow \min \quad (5.15)$$

або еквівалентно

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(\mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{x}, \mathbf{x}) - (\mathbf{A}^T \mathbf{b}, \mathbf{x}) \rightarrow \min. \quad (5.16)$$

Для розв'язання задачі мінімізації (5.16) застосовується наступна ітераційна процедура методу спряжених напрямків [19].

1. Початковий крок ($k = 0$). Початкове наближення $\mathbf{x}_0$ вибирається довільно. Далі обчислюється вектор $\mathbf{p}_0 = \mathbf{J}'(\mathbf{x}_0)$, де

$$\mathbf{J}'(\mathbf{x}_0) = \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{A}^T \mathbf{b}. \quad (5.17)$$

Якщо $\mathbf{p}_0 = 0$, то $\mathbf{x}_0$ є розв'язком СЛАР.

Якщо $\mathbf{p}_0 \neq 0$, тоді покладемо, що

$$\alpha_0 = \frac{|\mathbf{J}'(\mathbf{x}_0)|^2}{|\mathbf{A} \mathbf{p}_0|^2}, \quad \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 - \alpha_0 \mathbf{p}_0, \quad (5.18)$$

де $|\mathbf{J}'(\mathbf{x}_0)| = \sqrt{\sum_{k=1}^n [\mathbf{J}'_k(\mathbf{x}_0)]^2}$; n – порядок СЛАР.

2. Нехай знайдені вектори $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_{k-1}$ і точка $\mathbf{x}_k$, причому $\mathbf{J}'(\mathbf{x}_k) \neq 0$. Припустимо, що

$$\beta_k = \frac{(\mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{p}_{k-1}, \mathbf{J}'(\mathbf{x}_k))}{|\mathbf{A} \mathbf{p}_{k-1}|^2}, \quad (5.19)$$

$$\mathbf{p}_k = \mathbf{J}'(\mathbf{x}_k) - \beta_k \mathbf{p}_{k-1}, \quad (5.20)$$

$$\alpha_k = \frac{|\mathbf{J}'(\mathbf{x}_k)|^2}{|\mathbf{A} \mathbf{p}_k|^2}, \quad (5.21)$$

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \alpha_k \mathbf{p}_k. \quad (5.22)$$

Якщо $\mathbf{J}'(\mathbf{x}_{k+1}) = 0$, то $\mathbf{x}_{k+1}$ – шуканий розв'язок. У протилежному разі покладемо $k = k + 1$ і виконаємо крок 2.

Процес збігається за скінченну кількість кроків, яка не перевищує число n – розмірності задачі.

Зауваження. За поганої обумовленості СЛАР під час практичної реалізації процедури можливо накопичення похибки округлення. Тому необхідно виконати перевірку для точки $\mathbf{x}_n$ рівності $\mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{b} = 0$ і, якщо точність недостатня, то процедуру повторити, беручи точку $\mathbf{x}_n$ за початкову.

Алгоритм розв'язку СЛАР *методом спряжених градієнтів* з врахуванням стрічкової структури матриці можна представити таким чином [2]. Нехай маємо таку систему лінійних рівнянь

$$\mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{d}. \quad (5.23)$$

Причому матриця $\mathbf{C}$ – стрічкова і несиметрична.

Методика розв'язку системи (2.14) базується на CG алгоритмі [19]:

1. Спочатку задаємо початковий вектор розв'язку для $k = 0$, нехай $\mathbf{x}_0 = 0$. Потім знаходимо вектор нев'язок як $\mathbf{p}_0 = \mathbf{J}'(\mathbf{x}_0) = \mathbf{C}^T \mathbf{C} \mathbf{x}_0 - \mathbf{C}^T \mathbf{d}$ для стрічкової матриці, де $\mathbf{C}^T$ – транспонована матриця. в такому разі будемо визначати послідовність векторів нев'язок $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots$ і розв'язків $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots$ і множини чисел β_k і α_k , відповідно нижченаведеним співвідношенням.

2. Алгоритм:

$$2.1. \beta_k = \begin{cases} 0, & \text{if } k = 0; \\ \frac{(\mathbf{C}^T \mathbf{C} \mathbf{p}_{k-1}, \mathbf{J}'(\mathbf{x}_k))}{(\mathbf{C} \mathbf{p}_{k-1}, \mathbf{C} \mathbf{p}_{k-1})} = \frac{(\mathbf{C}^T \mathbf{C} \mathbf{p}_{k-1}, \mathbf{J}'(\mathbf{x}_k))}{|\mathbf{C} \mathbf{p}_{k-1}|^2}, & \text{if } k > 0; \end{cases} \quad (5.24)$$

$$2.2. \mathbf{p}_k = \mathbf{J}'(\mathbf{x}_k) - \beta_k \mathbf{p}_{k-1}; \quad (5.25)$$

$$2.3. \alpha_k = \frac{(\mathbf{J}'(\mathbf{x}_k), \mathbf{J}'(\mathbf{x}_k))}{(\mathbf{C} \mathbf{p}_k, \mathbf{C} \mathbf{p}_k)} = \frac{|\mathbf{J}'(\mathbf{x}_k)|^2}{|\mathbf{C} \mathbf{p}_k|^2}; \quad (5.26)$$

$$2.4. \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \alpha_k \mathbf{p}_k. \quad (5.27)$$

3. Теоретично вектори $\mathbf{x}_k$ і $\mathbf{p}_k$ мають задовольняти умови:

$$\mathbf{p}_k = \mathbf{C}^T \mathbf{C} \mathbf{x}_k - \mathbf{C}^T \mathbf{d}; (\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_k) = 0, \text{ для } i \neq k; \quad (5.28)$$

$$\mathbf{p}_n = 0; \mathbf{x}_n = \mathbf{x}_\infty, \quad (5.29)$$

де $\mathbf{x}_\infty$ – точний розв'язок.

Запитання для самоконтролю

1. Загальні характеристики прямих методів розв'язання СЛАР.
2. Умова сингулярності СЛАР.
3. Метод виключення Гауса. Число арифметичний дій методу.
4. Розріджені матриці СЛАР. Їх запис в стрічковому вигляді.
5. Метод прогонки. Число арифметичний дій методу. Умови збіжності.
6. Загальні характеристики ітераційних методів розв'язання СЛАР.

7. У чому полягає різниця між методами простих ітерацій і Гауса-Зейделя. Умови збіжності цих методів.

8. Метод спряжених градієнтів як метод мінімізації функціоналу. Алгоритм методу на прикладі квадратної матриці СЛАР.

9. Алгоритм методу спряжених градієнтів на прикладі стрічкової матриці СЛАР.

6. ПОБУДОВА ГЕОМЕТРІЇ ТА ДИСКРЕТИЗАЦІЯ РОЗРАХУНКОВОЇ ОБЛАСТІ

Числове моделювання фізичних процесів зазвичай передбачає виконання такої послідовності дій під час побудови й використанні числових моделей:

1. Побудова геометрії розрахункової області.
2. Дискретизація або генерація сітки розрахункової області.
3. Задання початкових та граничних умов.
4. Проведення числового аналізу за розробленою числовою моделлю.
5. Візуалізація результатів числового аналізу.

У цьому розділі будуть розглянуті тільки перші два пункти цієї послідовності.

Побудова геометрії розрахункової області передбачає створення віртуального аналогу фізичного об'єкту, наприклад, за допомогою інструментів будь-якої САД-системи [20].

Дискретизація розрахункової області зводиться до заміни неперервних змінних, що отримуються в результаті побудови геометрії конструкції, яка досліджується, їх дискретними аналогами. При цьому вся розрахункова область розбивається на скінченну кількість комірок-елементів.

Тобто, для реалізації математичної постановки задачі необхідно згенерувати розрахункову сітку у фізичній (геометричній) області, що досліджується. Задача побудови розрахункової сітки полягає в знаходженні відображення, яке переводить вузли сітки із фізичної області в обчислювальну. У теорії дане відображення має бути однозначним і мати згущення в тих областях, де можлива поява великих градієнтів шуканих функцій [21]. Елементами сітки (дискретизації) в одновимірному випадку задачі є відрізки, в двовимірному – трикутники або чотирикутники, а в тривимірному – тетраедри або призми тощо.

Способи апроксимації під час побудови дискретного аналогу вихідних диференціальних рівнянь можуть відрізнятися залежно від обраного методу числового розв'язання задачі [10]. Так, наприклад, в методі скінченних різниць використовується заміна похідних на скінченні різниці, метод скінченних об'ємів виключно ґрунтується на інтегральних законах збереження, а в методі скінченних елементів використовуються функції форми, які задаються окремо для кожної підобласті.

Виходячи із різних методів апроксимації дискретних функцій в різних числових методах розв'язання задач МСС серед розрахункових сіток можна виділити два основних класи:

- структуровані сітки – це сітки, у яких множина сіткових вузлів є упорядкована;
- неструктуровані сітки – сітки із довільним розташуванням вузлів.

Структуровані сітки (рис. 6.1,а) традиційно широко застосовувалися і

застосовуються в обчислювальній математиці. Така сітка представляє собою упорядковану за певними правилами структуру із явно вираженими сітковими напрямками. Переваги структурованих сіток пов'язані саме в збереженні канонічної структури сусідніх для кожного вузла сітки зі збереженням сіткового шаблону. При цьому як розрахункові комірки використовуються прямокутники для двовимірних або паралелепіпеди для тривимірних задач. Частіше за все такі сітки застосовуються в скінченно-різницевих методах або в методах скінченних об'ємів, наприклад, для визначення поля тиску на зміщених у шаховому порядку сітках [22].

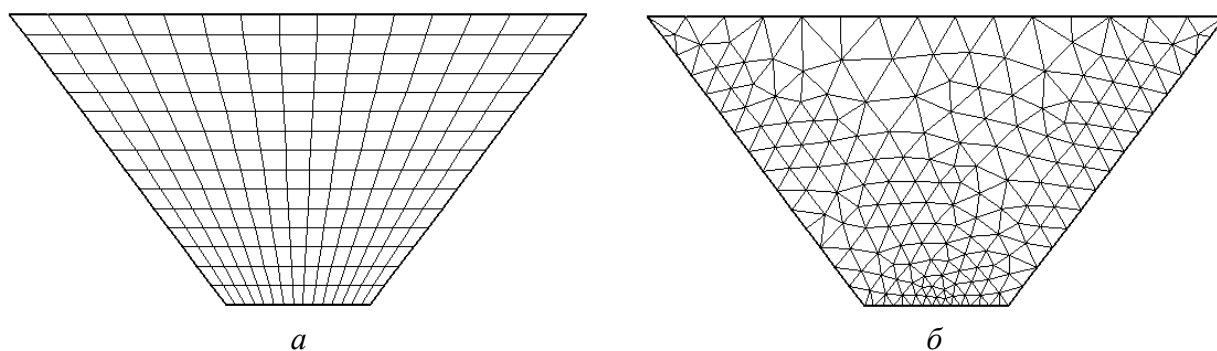


Рис. 6.1. Приклади класів розрахункових сіток:
а – структурована сітка; *б* – неструктурована сітка

Під час побудови регулярних сіток у геометрично складних фізичних об'єктах застосовують перетворення координат для побудови рівномірної розрахункової сітки в перетвореному просторі [23]. Крім того розрахункова математична модель також записується в криволінійних координатах [3].

Характерною особливістю неструктурованих сіток (рис. 6.1, *б*) є довільне розташування вузлів сітки у фізичній області. У цьому разі довільність слід розуміти в тому сенсі, що відсутні сіткові напрями і немає структури сітки, подібної регулярним сіткам. Вузли сітки об'єднуються в багатокутники (плоский випадок задачі) або багатогранники (тривимірний випадок задачі) довільної форми. Зазвичай на площині використовуються трикутні елементи, а в об'ємі – тетраедри. Використовувати більш складні елементи неструктурованих сіток частіше всього немає потреби, але під час розв'язання задач гідродинаміки методом скінченних об'ємів є приклади застосування полігдронів [24].

Постає проблема оптимізації тріангуляції за якимось критеріями. Основний критерій оптимізації полягає в тому, щоб отримані трикутники, з одного боку, були близькими до рівносторонніх (не повинно бути занадто гострих кутів). Це локальний критерій, який стосується одного трикутника. Другий (глобальний) критерій рівномірності сітки і полягає в тому, щоб сусідні трикутники не занадто сильно різнилися за площею. Взагалі таких оцінок запропоновано достатньо багато [25]. Деякі з цих варіантів критеріїв якості елементів не-

структурованих сіток наведено в табл. 6.1 і 6.2 для трикутних і тетраедричних елементів відповідно.

Таблиця 6.1. Деякі критерії оцінки якості трикутних елементів [25]

Критерій	Формула	Інтервал можливих значень	Оптимальне значення
Відношення радіусу описаного кола до радіусу вписаного	$\beta = \frac{R_c}{R_i}$	$[2, +\infty)$	2,0
Відношення довжини найбільшого ребра до радіусу вписаного кола	$\tau = \frac{L_{\max}}{R_i}$	$[2\sqrt{3}, +\infty)$	$2\sqrt{3}$
Відношення радіусу описаного кола до довжини найбільшого ребра	$\omega = \frac{R_c}{L_{\max}}$	$[\sqrt{3}, +\infty)$	$\sqrt{3}$
Відношення довжин найбільшого і найменшого ребер	$\tau = \frac{L_{\max}}{L_{\min}}$	$[1, +\infty)$	1,0
Найбільший кут у трикутнику	$\alpha_{\max}$	$[\pi/3, \pi)$	$\pi/3$

Таблиця 6.2. Деякі критерії оцінки якості тетраедричних елементів [25]

Критерій	Формула	Інтервал можливих значень	Оптимальне значення
Відношення радіусу описаної сфери до радіусу вписаної	$\beta = \frac{R_c}{R_i}$	$[1, +\infty)$	3,0
Відношення довжини найбільшого ребра до радіусу вписаної сфери	$\sigma = \frac{L_{\max}}{R_i}$	$[1, +\infty)$	4,898979...
Відношення радіусу описаної сфери до довжини найбільшого ребра	$\omega = \frac{R_c}{L_{\max}}$	$[\frac{1}{2}, +\infty)$	0,612375...
Відношення куба середнього арифметичного довжин ребер до об'єму тетраедра	$\alpha = \frac{\bar{L}^3}{V}$	$[1, +\infty)$	8,4852816...
Мінімальний тілесний кут	θ	$(0, \pi/2]$	$\pi/2$
Відношення об'єму тетраедра до найбільшого із добутоків довжин трійки ребер, що виходять з однієї вершини	$\eta = \frac{V}{\max_i \left(\prod_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^4 l_{ij} \right)}$	$(0, \sqrt{2}/12]$	$\sqrt{2}/12$

Для побудови неструктурованих сіток найбільшого поширення дістав алгоритм спеціальної тріангуляції, який називається тріангуляцією Делоне [26] і яка має низку оптимальних властивостей. Одна з них полягає в намаганні отримати рівнокутні трикутники. Більш точно відмічена властивість формулюється так: при тріангуляції Делоне максимізується мінімальне значення внутрішніх кутів трикутників. Більш повне обговорення властивостей тріан-

гуляції Делоне та пов'язаних з нею проблем можна знайти в спеціальній літературі [26].

У підсумку треба відмітити, що побудова розрахункових сіток є окремою задачею в разі виконання числового аналізу фізичних полів технологічних процесів та обладнання. Достатньо сказати, що у світі існує значна кількість фірм, які або виключно займаються розробкою, або приділяють значну увагу розробці комерційного програмного забезпечення для автоматичної генерації високоякісних сіток (mesh-генераторів), а саме **ICEM**, **CD-adapco** тощо.

Найбільшого поширення серед вільно відкритих програмних продуктів для автоматичної генерації сіток дістали програми **Gmsh** і **NETGEN** [27, 28]. Ці програмні продукти дають змогу будувати прості геометричні моделі фізичних об'єктів та виконувати генерацію якісних розрахункових сіток, але для побудови числових моделей більш складних об'єктів необхідно попередньо користуватися CAD-системами [20] для створення їх геометрії і записувати відповідні файли конструкції, а вже потім їх читати (завантажувати) у **Gmsh** або **NETGEN** та виконувати генерацію сіток.

Однак, нарівні з існуванням значної кількості програмних продуктів – mesh-генераторів, для виконання дискретизації простих плоских фігур в процесі навчання з метою забезпечення максимальної наочності та отримання певних умінь і досвіду також можна здійснювати генерацію розрахункової сітки в ручному режимі.

6.1. Генерація розрахункової сітки в ручному режимі

Генерацію неструктурованої сітки простої плоскої фігури в ручному режимі можна записати у вигляді наступного алгоритму (рис. 6.2, 6.4):

- побудова ескізу плоскої фігури;
- поділ ліній ескізу на відрізки і отримання граничних вузлів;
- побудова чотирикутних елементів відповідно до виконаного поділу ліній;
- поділ отриманих чотирикутників на трикутники;
- нумерація отриманих вузлів та елементів довільним чином;
- запис у таблицю номерів і координат вузлів;
- запис у таблицю номерів вузлів по елементах (нумерація виконується проти годинникової стрілки) (табл. 6.3, 6.4);
- запис текстового файла результатів дискретизації у форматі обраної програми-viewer;
- перевірка виконаної дискретизації (генерації сітки) за допомогою відповідної програми-viewer.

Для перегляду результатів дискретизації можна користуватися напри-

клад такими програмними продуктами як **Tecplot 360** [29], **Gmsh** [27] або **ParaView** [30].

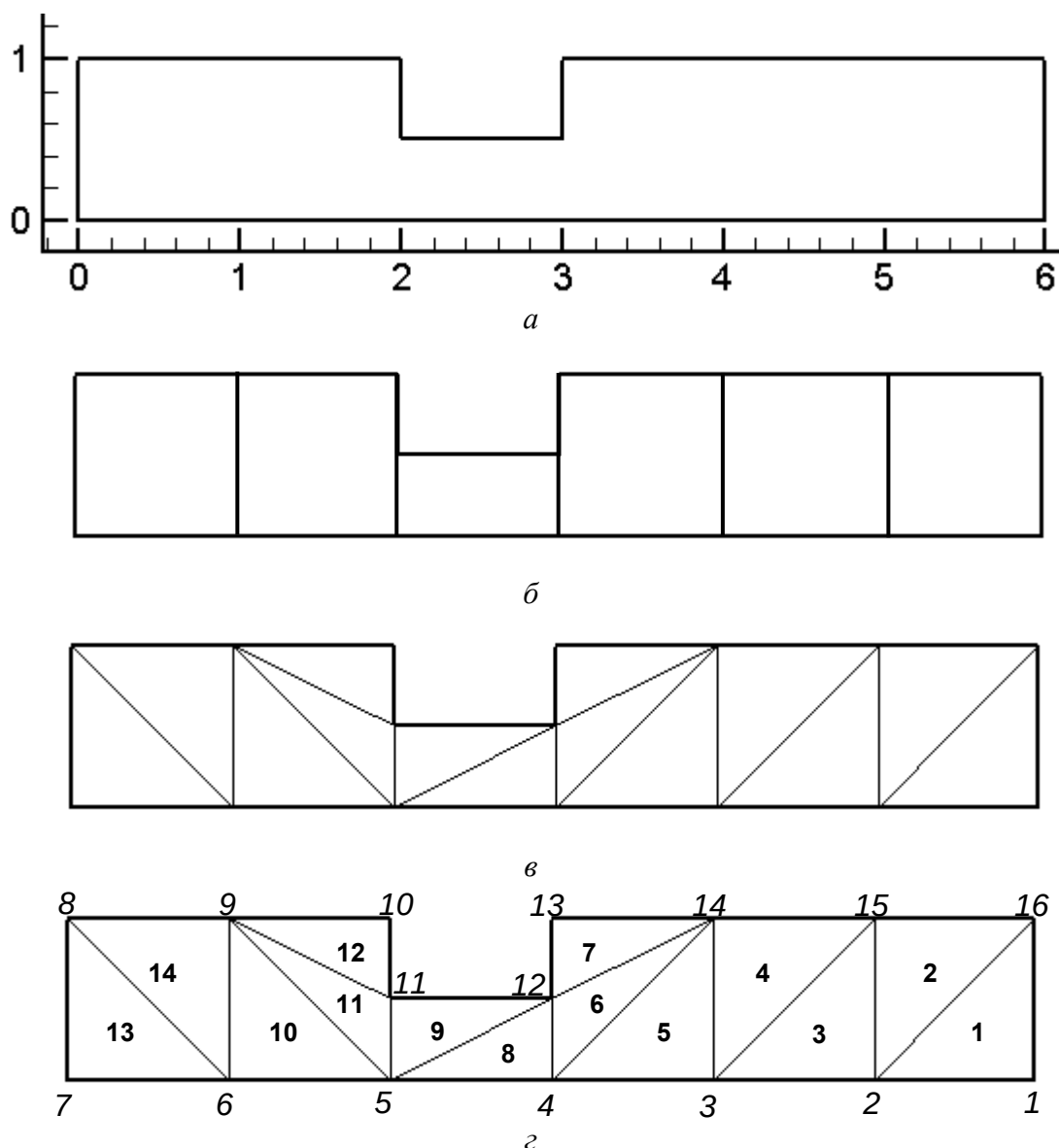


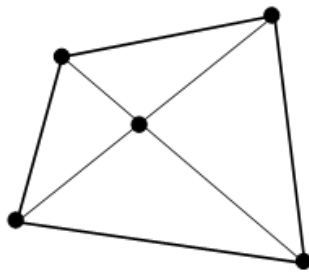
Рис. 6.2. Триангуляція пластини з вирізом в ручному режимі: *a* – ескіз; *б* – поділ ліній ескізу на відрізки і побудова чотирикутників; *в* – поділ чотирикутників на трикутники; *г* – нумерація вузлів та скінченних елементів

Під час виконання дискретизації треба дотримуватися такого правила: скінченні елементи між собою мають стикуватися тільки у вузлах, тобто у вершинах трикутників або чотирикутників (рис. 6.3).

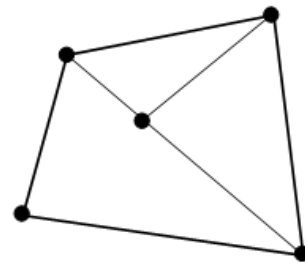
При використанні програми **Tecplot 360** для перегляду результатів триангуляції (див. рис. 6.2) записується спеціальний текстовий файл **2D_Triangle.dat** і дані із табл. 6.3 переносяться в нього, роздруківку (лістинг) якого з описом структури, поясненням використовуваних операторів і правил створення файлу наведено нижче за текстом.

Таблиця 6.3. Результати тріангуляції пластини за рис. 6.2

Номери вузлів і їх координати			Номери СЕ і номери вузлів в СЕ			
№ вузла	$x, \text{ м}$	$y, \text{ м}$	№ СЕ	Вузол 1	Вузол 2	Вузол 3
1	6	0	1	1	2	16
2	5	0	2	2	15	16
3	4	0	3	2	3	15
4	3	0	4	3	14	15
5	2	0	5	3	4	14
6	1	0	6	4	12	14
7	0	0	7	12	13	14
8	0	1	8	4	5	12
9	1	1	9	5	11	12
10	2	1	10	5	6	9
11	2	0,5	11	5	9	11
12	3	0,5	12	11	9	10
13	3	1	13	6	7	8
14	4	1	14	6	8	9
15	5	1				
16	6	1				

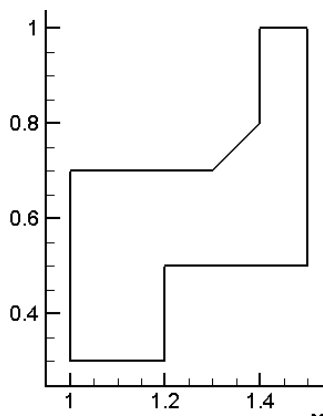


a

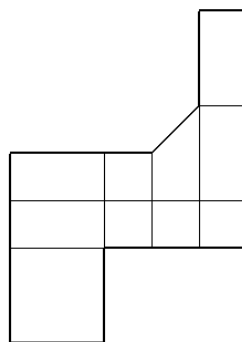


б

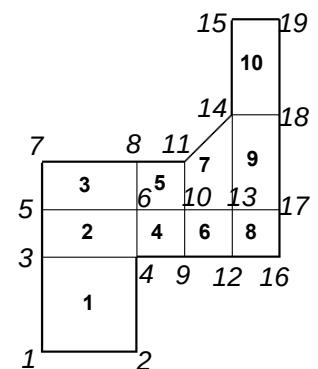
Рис. 6.3. Приклади правильної і неправильної тріангуляція: *a* – правильно (СЕ з'єднуються тільки по своїх вершинах (вузлах)); *б* – не правильно (один вузол лежить на стороні нижнього СЕ)



a



б



в

Рис. 6.4. Дискретизація вісесиметричної фігури чотирикутниками в ручному режимі: *a* – ескіз; *б* – поділ ліній ескізу на відрізки і побудова чотирикутників; *в* – нумерація вузлів і скінченних елементів

Таблиця 6.4. Результати дискретизації чотирикутниками вісесиметричної фігури за рис. 6.4

Номери вузлів і їх координати			Номери СЕ і номери вузлів в СЕ				
№ вузла	x, м	y, м	№ СЕ	Вузол 1	Вузол 2	Вузол 3	Вузол 4
1	1	0,3	1	1	2	4	3
2	1,2	0,3	2	3	4	6	5
3	1	0,5	3	5	6	8	7
4	1,2	0,5	4	4	9	10	6
5	1	0,6	5	6	10	11	8
6	1,2	0,6	6	9	12	13	10
7	1	0,7	7	10	13	14	11
8	1,2	0,7	8	12	16	17	13
9	1,3	0,5	9	13	17	18	14
10	1,3	0,6	10	14	18	19	15
11	1,3	0,7					
12	1,4	0,5					
13	1,4	0,6					
14	1,4	0,8					
15	1,4	1					
16	1,5	0,5					
17	1,5	0,6					
18	1,5	0,8					
19	1,5	1					

Лістинг файла **2D_Triangle.dat** для перегляду результатів триангуляції у програмі **Tecplot 360** (див. табл. 6.3).

```

TITLE = "2D Finite-AREA Data"
VARIABLES="X, m", "Y, m",
ZONE T = "Area", N= 16, E= 14, F=FEPOINT, ET=Triangle
DT=(SINGLE SINGLE)
6 0
5 0
4 0
3 0
2 0
1 0
0 0
0 1
1 1
2 1
2 0.5
3 0.5
3 1
4 1
5 1
6 1
1 2 16
2 15 16

```

2	3	15
3	14	15
3	4	14
4	12	14
12	13	14
4	5	12
5	11	12
5	6	9
5	9	11
11	9	10
6	7	8
6	8	9

Тут **TITLE** – це назва задачі. **VARIABLES** – це величини, які є координатами вузлів **X, Y**. **ZONE T** – це ім'я розрахункової області, **N** – кількість вузлів, **E** – кількість елементів. **F=FEPOINT** – не змінюється і означає, що в програмі задаються вузли СЕ. **ET= Triangle** – тип елементу – трикутний, також не змінюється. **DT=(SINGLE SINGLE)** – вказує на те, що далі будуть вводитися по 2 числа в рядку. Цей оператор не є обов'язковим.

Наступні 16 рядків чисел повністю відповідають рядку **VARIABLES**, тобто 1 і 2-й стовпці відповідають **X, Y**. 16 рядків відповідають 16-и вузлам (**N= 16**). Останні 14 рядків відповідають глобальним номерам вузлів 14-и СЕ (**E= 14**).

Зчитування файлу **2D_Triangle.dat** в програмі **Tecplot 360** здійснюється за допомогою команд: **File→Load Data File(s)...** → вибір у вікні **Tecplot Data Loader→Ok** → вибір файлу **2D_Triangle.dat** → **Открыть→Ok**. Після активації вказаних команд у вікні програми з'являються контури фігури (див. рис. 6.2,а).

Інтерфейс програмного продукту **Tecplot 360** є інтуїтивно зрозумілим і, тому зупинятися детально на алгоритмах роботи з ним немає особливого сенсу. Можна розглянути тільки декілька прикладів. Для візуалізації тріангуляції треба у вертикальному дереві меню активувати рядок **Mesh** (поставити ☒ напроти нього). У результаті отримаєте картинку виду рис. 6.2,в. Для візуалізації номерів вузлів та елементів треба в горизонтальному меню програми вибрати **Plot→Label Points and Cells...** → далі у вікні, що з'явиться, активувати рядок **Show Node Labels** (поставити ☒ напроти нього) для показу номерів вузлів; для показу номерів елементів – активувати рядок **Show Cell Labels**. У результаті отримаєте картинку виду рис. 6.5, яка збігається з рис. 6.2,г.

При використанні програми **Tecplot 360** для перегляду результатів дискретизації чотирикутниками (див. рис. 6.4) записується спеціальний текстовий файл **2D_Quadrilateral.dat** і дані з табл. 6.4 переносяться в нього,

роздруківку (лістинг) якого з поясненням використовуваних операторів і правил створення файлу наведено нижче за текстом.

Лістинг файла **2D_Quadrilateral.dat** для перегляду результатів дискретизації у програмі **Tecplot 360** (див. табл. 6.4).

```

TITLE = "2D Finite-AREA Data"
VARIABLES="X, m", "Y, m",
ZONE T = "Area", N= 19, E= 10, F=FEPOINT, ET= Quadrilateral
DT=(SINGLE SINGLE)
1      0.3
1.2    0.3
1      0.5
1.2    0.5
1      0.6
1.2    0.6
1      0.7
1.2    0.7
1.3    0.5
1.3    0.6
1.3    0.7
1.4    0.5
1.4    0.6
1.4    0.8
1.4    1
1.5    0.5
1.5    0.6
1.5    0.8
1.5    1
1      2      4      3
3      4      6      5
5      6      8      7
4      9     10      6
6     10     11      8
9     12     13     10
10    13     14     11
12    16     17     13
13    17     18     14
14    18     19     15

```

Тут **TITLE** – це назва задачі. **VARIABLES** – це величини, які є координатами вузлів **X, Y**. **ZONE T** – це ім'я розрахункової області, **N** – кількість вузлів, **E** – кількість елементів. **F=FEPOINT** – не змінюється і означає, що в програмі задаються вузли **CE**. **ET= Quadrilateral** – тип елементу – чотирикутний, також не змінюється. **DT=(SINGLE SINGLE)** – вказує на те, що далі будуть вводитися по 2 числа в рядку.

Наступні 19 рядків чисел повністю відповідають рядку **VARIABLES**, тобто 1 і 2-й стовпці відповідають **X, Y**. 19 рядків відповідають 19-и вузлам (**N= 19**). Останні 10 рядків відповідають глобальним номерам вузлів 10-и **CE**

($E = 10$).

У результаті завантаження файлу **2D_Quadrilateral.dat** в **Tecplot 360** та активізації відображення сітки, номерів вузлів та скінченних елементів отримуємо картинку виду рис. 6.6, яка збігається з рис. 6.4,в.

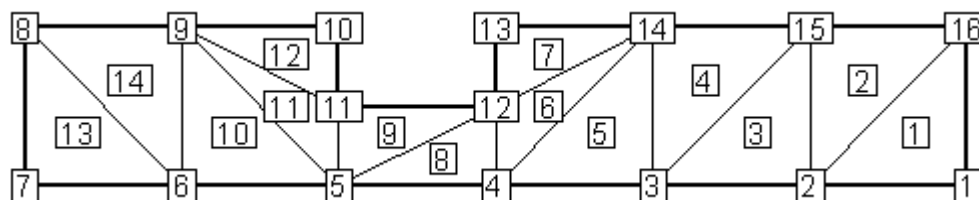


Рис. 6.5. Візуалізація тріангуляції пластини з вирізом в **Tecplot 360**

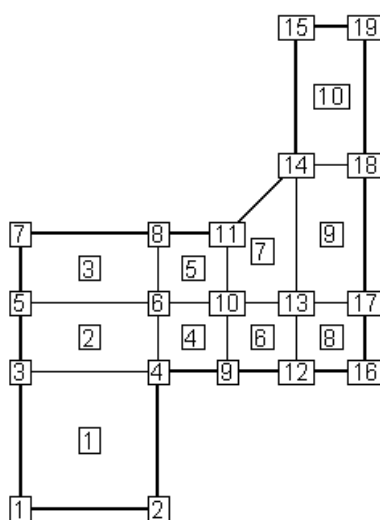


Рис. 6.6. Візуалізація дискретизації вісесиметричної фігури чотирікутними СЕ в **Tecplot 360**

6.2. Програмне забезпечення для дискретизації розрахункової області

Програмний продукт **Gmsh** це автоматичний генератор сіток для двовимірних і тривимірних областей і має простий у користуванні графічний інтерфейс [27]. **Gmsh** складається із чотирьох модулів, які об'єднано в дереві меню: модуля геометрії, генератора сіток, розв'язувача і модуля пост-процесінга. Для запуску **Gmsh** в інтерактивному режимі необхідно натиснути на іконку програми  **gmsh**, або запустити її із провідника.

У **Gmsh** геометрична модель створюється з використання таких примітивів як точки, лінії, поверхні та об'єми. Команди для побудови моделі зберігаються в спеціальному **geo**-файлі. Файл з геометрією також можна створювати та редагувати за допомогою будь-якого текстового редактору, а потім завантажувати, за допомогою команд **File**→**Open**. Файл також можна відреда-

гувати в модулі геометрії (**Geometry**) і вибираючи кнопку **Edit**.

Геометричний модуль в **Gmsh** надає можливості простої CAD-системи і використовує **BRep** зображення (**boundary representation**) для задання геометричних об'єктів. Для визначення геометрії необхідно задати точки (з використанням команди **Point**), потім лінії (з використанням команд **Line**, **Circle**, **Spline...** або за допомогою команди **Extrude** для точки), далі поверхні (з використанням **Plane Surface** або **Ruled Surface** команд, або за допомоги команди **Extrude** для лінії) і, на кінець, задати об'єми (команда **Volume** або команда **Extrude** для поверхні). Усі геометричні примітиви мають свій ідентифікаційний номер, який присвоюється їм під час створення. Також геометричні примітиви можна пересувати й модифікувати за допомогою команд **Translate**, **Rotate**, **Dilate** або **Symmetry**.

Розглянемо базові *геометричні примітиви Gmsh* дещо докладніше:

Точки:

– **Point(id) = {x, y, z, size}**, **Point(id) = {x, y, z}**
команда створення точки. У дужках задається ідентифікаційний номер точки (**id**); у фігурних дужках праворуч від знака = задаються три координати точки в тривимірному евклідовому просторі (**x**, **y**, **z**); останній ідентифікатор задає розмір сітки в околі даної точки (**size**).

Лінії:

– **Line(id) = {pointId1, pointId2}**
команда створення відрізка лінії. У дужках задається ідентифікаційний номер лінії (**id**); у фігурних дужках задаються ідентифікаційні номери початкової і кінцевої точок (**pointId1**, **pointId2**);

– **Circle(id) = {pointId1, pointId2, pointId3}**
команда створення дуги кола (строого меншої π). У дужках задається ідентифікаційний номер (**id**); у фігурних дужках задаються ідентифікаційні номери початкової, центра кола і кінцевої точок дуги (**pointId1**, **pointId2**, **pointId3**);

– **Ellipse(id) = {pointId1, pointId2, pointId3, pointId4}**

команда створення дуги еліпса. У дужках задається ідентифікаційний номер (**id**); у фігурних дужках перші два вирази задають ідентифікаційні номери початкової і центральної точок дуги (**pointId1**, **pointId2**); третій вираз задає ідентифікаційний номер точки, що розташована на головній осі еліпса (**pointId3**); останній вираз задає ідентифікаційний номер кінцевої точки дуги (**pointId4**);

– **Line Loop(id) = {lineId1, lineId2, ..., lineIdN}**
створення замкнутого контуру. У дужках задається ідентифікаційний

номер (**id**); у фігурних дужках задаються ідентифікаційні номери ліній, які об'єднуються в замкнутий контур (**lineId1, lineId2, ..., lineIdN**).

Результат останньої команди не відображається на екрані дисплею.

Поверхні:

– **Plane Surface(id) = {lineLoopId1, lineLoopId2, ..., lineLoopIdN}**

створення плоскої поверхні. У дужках задається ідентифікаційний номер поверхні (**id**); у фігурних дужках задаються ідентифікаційні номери замкнутих ліній (**lineLoopId1, lineLoopId2, ..., lineLoopIdN**). Зовнішні границі поверхні визначає перша замкнута лінія, а решта замкнутих ліній визначає внутрішні границі поверхні (отвори);

– **Ruled Surface(id) = {lineLoopId1, lineLoopId2, ..., lineLoopIdN}**

створення зігнутої поверхні;

– **Surface Loop(id) = {surfaceId1, surfaceId2, ..., surfaceIdN}**

створення контуру поверхонь (замкнута оболонка). У дужках задається ідентифікаційний номер (**id**); у фігурних дужках задаються ідентифікаційні номери поверхонь, які об'єднуються в замкнуту оболонку (**surfaceId1, surfaceId2, ..., surfaceIdN**).

Об'єм:

– **Volume(id) = {surfaceLoopId1, surfaceLoopId2, ..., surfaceLoopIdN}**

створення об'єму. У дужках задається ідентифікаційний номер об'єму (**id**); у фігурних дужках задаються ідентифікаційні номери замкнутих оболонок (**surfaceLoopId1, surfaceLoopId2, ..., surfaceLoopIdN**). Зовнішні границі об'єму визначає перша оболонка, а решта оболонок визначають внутрішні границі об'єму (отвори).

Команди для роботи з геометричними об'єктами

Лінії, поверхні і об'єми також можуть бути створені за допомогою команди **Extrude**:

– **Extrude{x, y, z} {object}**

витагування вздовж вектора (**x, y, z**). У фігурних дужках задається геометричний об'єкт для витягування (точка, лінія або поверхня);

– **Extrude{{x1, y1, z1}, {x2, y2, z2}, angle} {object}**

витагування з поворотом. У фігурних дужках задаються координати лінії, навколо якої здійснюється обертання (**x1, y1, z1**); координати

точки на цій лінії (**x2**, **y2**, **z2**) і кут повороту в радіанах (**angle**);
– **Extrude**{**{x1, y1, z1}**, **{x2, y2, z2}**, **{x3, y3, z3}**,
angle} **{object}**

витагування вздовж лінії з поворотом. У фігурних дужках задаються координати вектора, вздовж якого здійснюється переміщення (**x1**, **y1**, **z1**). Решта змінних мають той самий зміст, що і в другому випадку.

Під час використання команд **Circle**, **Ellipse**, **Extrude** для побудови геометрії фізичних об'єктів у програмі **Gmsh** створюються додаткові точки, які після генерації сітки трансформуються у вузли сітки та записуються в **msh**-файл. Ці вузли не є вузлами скінченно-елементної сітки або вузлами СЕ, тому їх треба обов'язково видаляти за подальшого використання такого **msh**-файла в програмних кодах. Якщо цього не виконати, то матриця СЛАР МСЕ стає сингулярною або втрачає обумовленність, а розв'язок задачі стає нефізичним, якщо його отримати за допомогою методів розв'язання погано обумовлених систем рівнянь [19, 32] (див. підрозділ 5.2). Така операція виконується за допомогою видалення та стискання номерів вузлів і перекодування номерів вузлів СЕ у відповідних списках (див. додатки Д.5, Е.4, Ж).

До геометричних об'єктів можна застосовувати команди перетворення, які можуть бути застосовані як до самих об'єктів, так і до їх копій, які створені з використанням команди **Duplicata**:

– **Rotate**{ **{x1, y1, z1}**, **{x2, y2, z2}**, **angle**}
{object}

поворот геометричного об'єкту (точки, лінії, поверхні або об'єму) на кут **angle**. У фігурних дужках вказується напрям осі обертання (**x1**, **y1**, **z1**) і будь-яка точка на цій осі (**x2**, **y2**, **z2**). Для переміщення не самого елемента, а його копії необхідно використовувати команду **Duplicata**{**object**};

– **Translate**{**x, y, z**} **{object}**

переміщення геометричного об'єкту вздовж вектора (**x**, **y**, **z**);

– **Symmetry**{**A, B, C, D**} **{object}**

переміщення геометричного об'єкту симетрично відносно площини. У фігурних дужках задаються коефіцієнти поверхні (**A**, **B**, **C**, **D**);

– **Dilate**{ **{x, y, z}**, **factor**} **{object}**

збільшення або зменшення геометричного об'єкту відповідно параметру **factor**. У фігурних дужках задається напрям переміщення (**x**, **y**, **z**).

Модуль генерації сітки

Для генерації сітки необхідно в дереві меню зайти в **Mesh** і натиснути на кнопку генерації сітки для заданої розмірності (**1D**, **2D**, **3D**) (рис. 6.7).

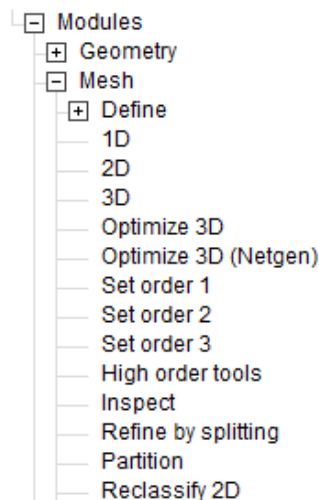


Рис. 6.7. Виконання генерації сітки в програмі **Gmsh**

Дана команда меню генерує розрахункову сітку в області, що задана файлом ***.geo** або імпортом файла ***.IGS**, який створено в іншій CAD-системі. У **Gmsh** також можна виконати згущення сітки за допомогою кнопки **Refine by splitting** (див. рис. 6.7).

Для збереження згенерованої сітки треба скористатися кнопкою **Save** у вертикальному дереві меню або **File→Save Mesh**, або зберегти в іншому форматі вибором кнопок **File→Save As**. За замовченням сітка зберігається у файлі з тим же ім'ям, що і геометрична модель, але у форматі ***.msh**.

Для генерації сіток в **Gmsh** використовуються основні три алгоритми:

1. **MeshAdapt** – власний метод **Gmsh**, який базується на локальній модифікації сітки і застосовується тільки для створення двовимірних сіток;
2. **Delaunay** – метод, заснований на критерії Делоне [26];
3. **Frontal** – метод вичерпання та ін.

Ці алгоритми можуть бути вибрані командою **Tools→Options→Mesh→General**.

Геометричні типи скінченних елементів, які використовуються в **Gmsh** наведені в табл. 6.5.

Таблиця 6.5. Геометричні типи скінченних елементів **Gmsh**

Номер CE	Геометричний тип
1	відрізок лінії (1D)
2	трикутник (2D)
3	чотирикутник (2D)
4	тетраедр (3D)
5	гексаедр (3D)

Структура msh-файла програми Gmsh

Msh-файл складається із секції з інформацією про формат файла (**MeshFormat**) і двох частин, у яких записана інформація про вузли (**Nodes**) і елементи (**Elements**) сітки:

```
$MeshFormat
2.2 0 8
$EndMeshFormat
$Nodes
nNode
iNode x y z
...
$EndNodes
$Elements
nElements
iElements type ntags tags Nodes
...
$EndElements
```

У наведеному прикладі **msh**-файла прийнято такі позначення:

nNodes	—	кількість вузлів сітки,
iNode	—	індекс вузла,
x, y, z	—	координати вузла,
nElements	—	кількість елементів сітки,
iElements	—	індекс елемента,
type	—	геометричний тип елемента (див. табл. 6.5),
nTags	—	кількість тегів,
tags	—	список тегів,
nodes	—	список номерів вузлів, з яких складається елемент.

За замовчуванням, у **msh**-файлі задаються три **tags**: перший вказує номер фізичної сутності, до якої даний елемент належить, другий – геометричну область, третій – номер частини сітки, до якої належить елемент (номер, лінії, або поверхні, або об’єму).

6.3. Приклади застосування Gmsh для генерації розрахункових сіток

Розглянемо застосування програми **Gmsh** для побудови геометрії та генерації розрахункової сітки двовимірного та тривимірного фізичних об’єктів.

Використовуючи команди **Gmsh** (див. підрозділ 6.2) нескладно написати **geo**-файл для побудови геометрії пластини з вирізом.

Лістинг файла **2D.geo** для побудови геометрії пластини включає опе-

ратори та команди:

```
// ініціалізація змінних
x1 = 0;
x2 = 6;
y1 = 0;
y2 = 0.8;
//
x3 = 4;
x4 = 5;
y3 = 0.4;
y4 = 0.6;
// cl1,cl2 - кроки сітки в околі точок
cl1 = 0.5;
cl2 = 0.25;
// точки Point(n) = {x, y, z, cl};
Point(1) = {x1, y1, 0, cl1};
Point(2) = {x2, y1, 0, cl1};
Point(3) = {x2, y2, 0, cl1};
Point(4) = {x1, y2, 0, cl1};
//
Point(5) = {x3, y3, 0, cl2};
Point(6) = {x4, y3, 0, cl2};
Point(7) = {x4, y4, 0, cl2};
Point(8) = {x3, y4, 0, cl2};
// лінії
Line(1) = {1, 2};
Line(2) = {2, 3};
Line(3) = {3, 4};
Line(4) = {4, 1};
//
Line(5) = {5, 6};
Line(6) = {6, 7};
Line(7) = {7, 8};
Line(8) = {8, 5};
// замкнуті контури прямокутників
Line Loop(21) = {1, 2, 3, 4};
Line Loop(22) = {5, 6, 7, 8};
// поверхні
Plane Surface(1) = {21, 22};
// фізичні сутності
Physical Surface(1001) = {1}; // пише тільки трикутні елементи
```

У результаті завантаження **2D.geo** у програму **Gmsh** отримуємо плоску фігуру, зображену на рис. 6.8. (Команди меню **File→Open→2D.geo→Открыть**)



Рис. 6.8. Пластина з вирізом, що побудована за допомогою програми **Gmsh** з використанням файла **2D.geo**

У результаті виконання триангуляції (за допомогою команд меню **Mesh→2D**) отримуємо трикутну сітку виду (рис. 6.9)

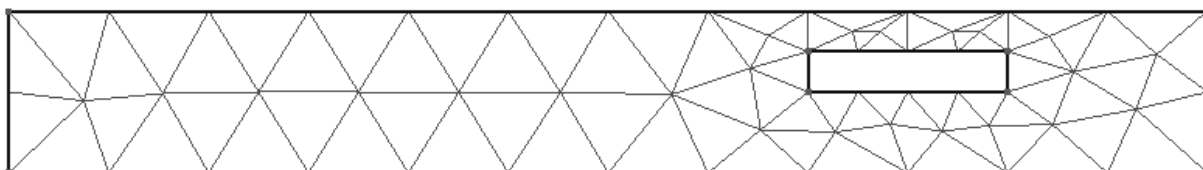


Рис. 6.9. Триангуляція пластини з вирізом у програмі **Gmsh** (61 – вузлів, 84 – СЕ)

Для запису згенерованої сітки (див. рис. 6.9) використовуються команди **File→Save Mesh**.

Аналогічно плоскій фігурі, використовуючи команди **Gmsh** (див. підрозділ 6.2), нескладно написати **geo**-файл для побудови тривимірного об'єкту.

Наприклад, використовуючи ескіз для побудови координат точок (рис. 6.10), лістинг файла **3D.geo** для створення геометрії $\frac{1}{4}$ фланця можна записати так:

```
// ініціалізація змінних
x1 = 0.08;
x2 = 0.08;
x4 = 0.035;
x3 = 0.035; // центр кола
x5 = 0.035;
x6 = 0.057;
x7 = 0.057;
x8 = 0.092;
x9 = 0.1;
x10 = 0.1;
y1 = 0;
y2 = 0.012;
y4 = 0.057;
y3 = 0.012; // центр кола
y5 = 0.08;
y6 = 0.08;
y7 = 0.06458;
```

```

y8 = 0.012;
y9 = 0.012;
y10 = 0;
z1 = 0;
z2 = 0;
z3 = 0;
z4 = 0;
z5 = 0;
z6 = 0;
z7 = 0;
z8 = 0;
z9 = 0;
z10 = 0;
cl = 0.015;
// точки
Point(1) = {x1, y1, z1, cl};
Point(2) = {x2, y2, z2, cl};
Point(3) = {x3, y3, z3, cl};
Point(4) = {x4, y4, z4, cl};
Point(5) = {x5, y5, z5, cl};
Point(6) = {x6, y6, z6, cl};
Point(7) = {x7, y7, z7, cl};
Point(8) = {x8, y8, z8, cl};
Point(9) = {x9, y9, z9, cl};
Point(10) = {x10, y10, z10, cl};
// лінії
Line(1) = {1, 2};
Circle(2) = {2, 3, 4};
Line(3) = {4, 5};
Line(4) = {5, 6};
Line(5) = {6, 7};
Circle(6) = {7, 3, 8};
Line(7) = {8, 9};
Line(8) = {9, 10};
Line(9) = {10, 1};
// замкнутий контур
Line Loop(11) = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9};
// поверхня
Plane Surface(1) = {11};
// витягування з поворотом вздовж осі OY на 90 град
Extrude { {0, 1, 0}, {0, 0.5, 0}, 3.14159/2} { Surface{1}; }

```

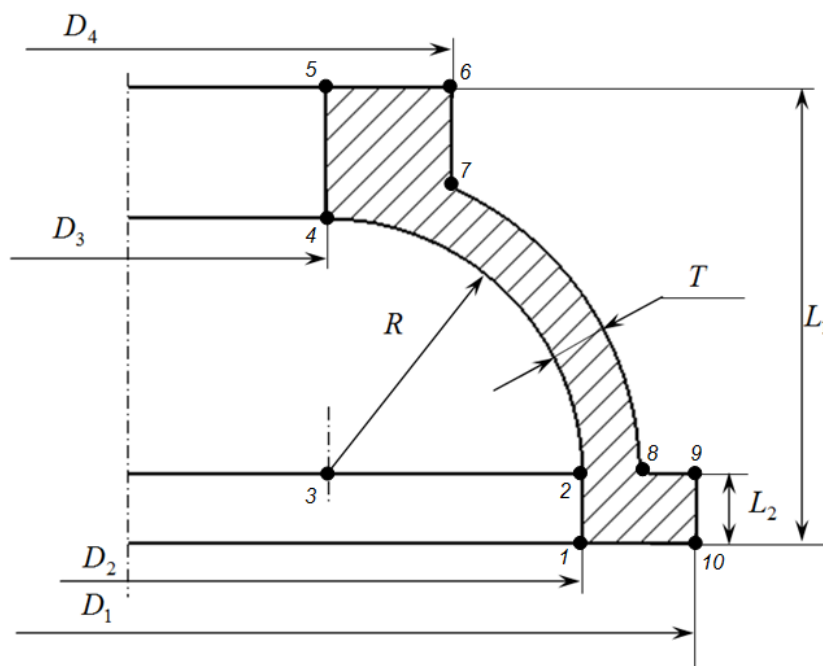


Рис. 6.10. Ескіз фланця з відміченими точками для визначення їх координат

У результаті завантаження **3D.geo** у програму **Gmsh** отримуємо тривимірну фігуру, зображену на рис. 6.11.

Для виконання дискретизації фігури (див. рис. 6.11) необхідно скористатися командами меню **Mesh**→**3D**. У результаті отримуємо тетраедну сітку виду (рис. 6.12).

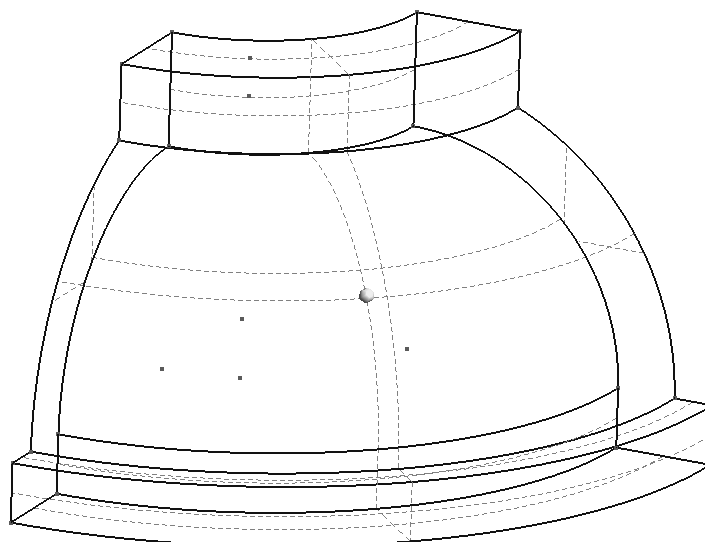


Рис. 6.11. Каркасна модель $\frac{1}{4}$ фланця, що побудована в програмі **Gmsh** з використанням файлу **3D.geo**

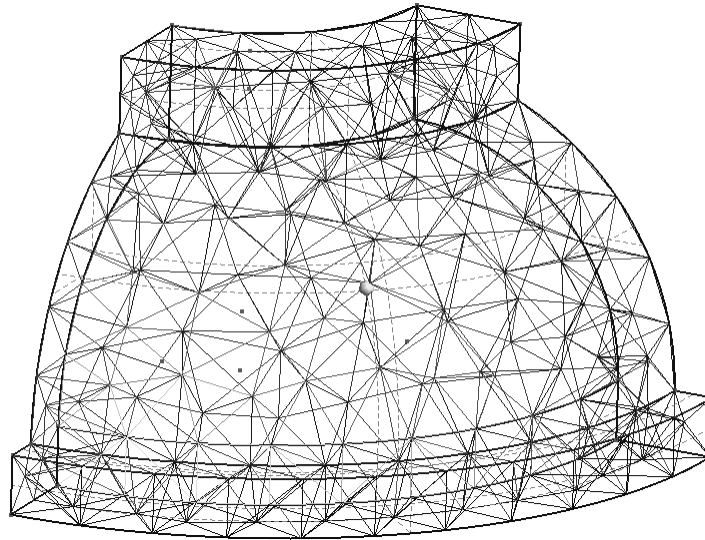


Рис. 6.12. Дискретизація $\frac{1}{4}$ фланця в програмі **Gmsh** (221 – вузол, 587 – тетраедних CE)

Запис згенерованої сітки (див. рис. 6.12) виконується аналогічно до попереднього прикладу.

Запитання для самоконтролю

1. Основні етапи виконання числового моделювання фізичних процесів.
2. У чому полягає сутність дискретизація розрахункової області?
3. Способи апроксимації під час побудови дискретного аналогу вихідних диференціальних рівнянь залежно від обраного числового методу їх розв'язання.
4. Класи розрахункових сіток. Різниця між ними.
5. Характерні особливості неструктурованих сіток.
6. У чому полягає проблема оптимізації триангуляції?
7. Критерії оцінки якості трикутних елементів.
8. Критерії оцінки якості тетраедних елементів.
9. Методи побудови неструктурованих сіток.
10. Програмне забезпечення для автоматичної генерації високоякісних сіток.
11. Алгоритм генерації неструктурованої сітки простої плоскої фігури в ручному режимі.
12. Програмні продукти для перегляду результатів триангуляції.
13. Структура, оператори і правила створення файла програмного забезпечення **Tecplot** для перегляду результатів триангуляції та дискретизації чотирикутниками.
14. Призначення та основна характеристика програмного продукту **Gmsh**.
15. Базові геометричні примітиви **Gmsh**.
16. Команди для роботи з геометричними об'єктами.

17. Генерація сітки та її запис в **Gmsh**.
18. Алгоритми генерації сіток, що використовуються в **Gmsh**.
19. Геометричні типи скінченних елементів, які використовуються в програмі **Gmsh**.
20. Структура **msh**-файла програми **Gmsh**.
21. Структура лістингу файла **2D.geo** для побудови геометрії пластини.
22. Структура лістингу файла **3D.geo** для створення геометрії $\frac{1}{4}$ фланця.

7. ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ СТАЦІОНАРНИХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ТА ВІЗУАЛІЗАЦІЯ РЕЗУЛЬТАТІВ РОЗРАХУНКІВ

7.1. Плоска задача теплопровідності

7.1.1. Трикутні скінченні елементи

Умови задачі теплопровідності наведено на рис. 7.1 і в табл. 7.1, 7.2 [6].

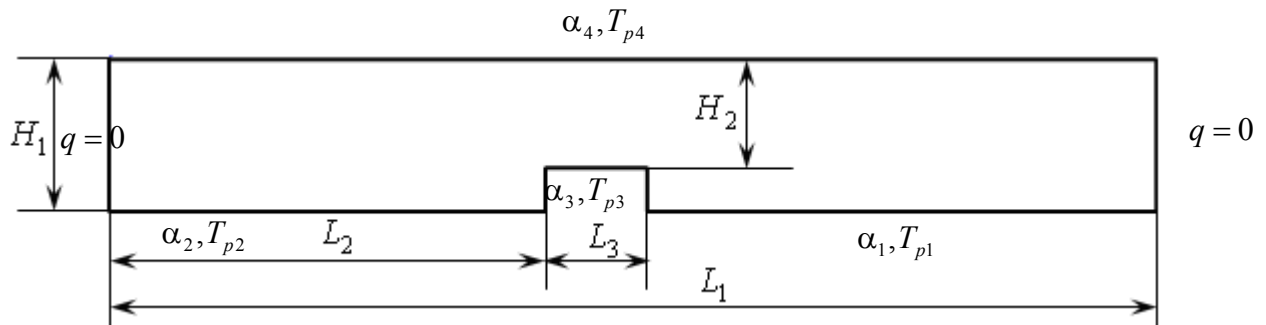


Рис. 7.1. Ескіз консольної балки зі схемою задання граничних умов

Табл. 7.1. Розміри консольної балки

L_1 , м	L_2 , м	L_3 , м	H_1 , м	H_2 , м
10	5	1	1	0,7

Табл. 7.2. Коефіцієнт тепловіддачі та температура рідини на сторонах консольної балки (пластини)

α_1 , Вт/(м ² ·К)	T_{p1} , К	α_2 , Вт/(м ² ·К)	T_{p2} , К	α_3 , Вт/(м ² ·К)	T_{p3} , К	α_4 , Вт/(м ² ·К)	T_{p4} , К
25	400	10	320	35	270	5	350

Фізичні властивості матеріалу консольної балки: теплопровідність – $\lambda = 45$ Вт/(м·К).

Для розв'язання плоскої задачі теплопровідності використовується файл **Lab_T_P_2D.xmcd** (див. Д.1), який є програмним кодом написаним в системі **Mathcad** і який розроблено відповідно до постановки задачі (див. п. 1.1.1) та методики її числового розв'язання з використанням трикутних СЕ (див. п. 2.2.1). Для того, щоб скористатися цим кодом треба спочатку виконати тріангуляцію плоскої фігури – консольної балки (див. рис. 7.1) в ручному режимі (див. підрозділ 6.1) або за допомогою програми **Gmsh** (див. підрозділ 6.3). Виконаємо цю процедуру в ручному режимі. Результат такої тріангуляції за ескізом на рис. 7.1 наведено на рис. 7.2 і в табл. 7.3.

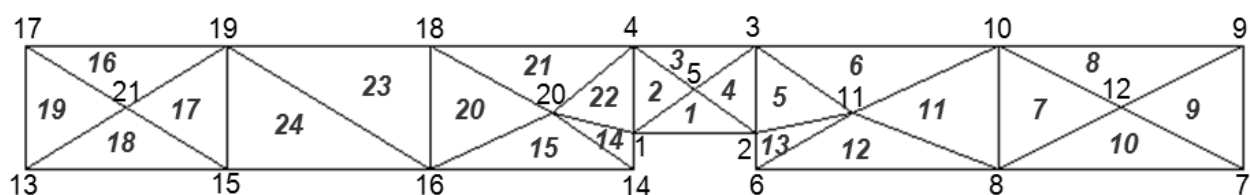


Рис. 7.2. Тріангуляція консольної балки: 1–21 – номери вузлів; 1–24 – номери скінченних трикутних елементів

Табл. 7.3. Номери вузлів в СЕ та їх координати відповідно до рис. 7.2

Номер СЕ та номери 3-х вузлів СЕ				Номер вузла та його координати x, y		
1	2	5	1	1	-5	0,3
2	1	5	4	2	-4	0,3
3	5	3	4	3	-4	1
4	2	3	5	4	-5	1
5	11	3	2	5	-4,5	0,65
6	11	10	3	6	-4	0
7	8	12	10	7	0	0
8	10	12	9	8	-2	0
9	12	7	9	9	0	1
10	8	7	12	10	-2	1
11	10	11	8	11	-3,2	0,46
12	11	6	8	12	-1	0,5
13	2	6	11	13	-10	0
14	20	14	1	14	-5	0
15	20	16	14	15	-8,333	0
16	17	21	19	16	-6,667	0
17	19	21	15	17	-10	1
18	21	13	15	18	-6,667	1
19	17	13	21	19	-8,333	1
20	16	20	18	20	-5,667	0,46
21	20	4	18	21	-9.167	0,5
22	1	4	20			
23	18	19	16			
24	19	15	16			

Далі треба перевірити правильність генерації сітки за допомогою програми-viewer **Tecplot 360**. Для цього необхідно створити текстовий файл **_2D_Tec_T_P.dat**, як це було показано в підрозділі 6.1. У результаті завантаження цього файлу в програму **Tecplot 360** отримуємо візуалізацію тріангуляції (рис. 7.3), яка повністю збігається з рис. 7.2. Тобто впевнились у правильності виконання цієї процедури.

Тепер файл **Lab_T_P_2D.xmcd** можна завантажити в систему **Mathcad** і розпочати роботу з адаптації програмного коду для розв'язання задачі теплопровідності консольної балки.

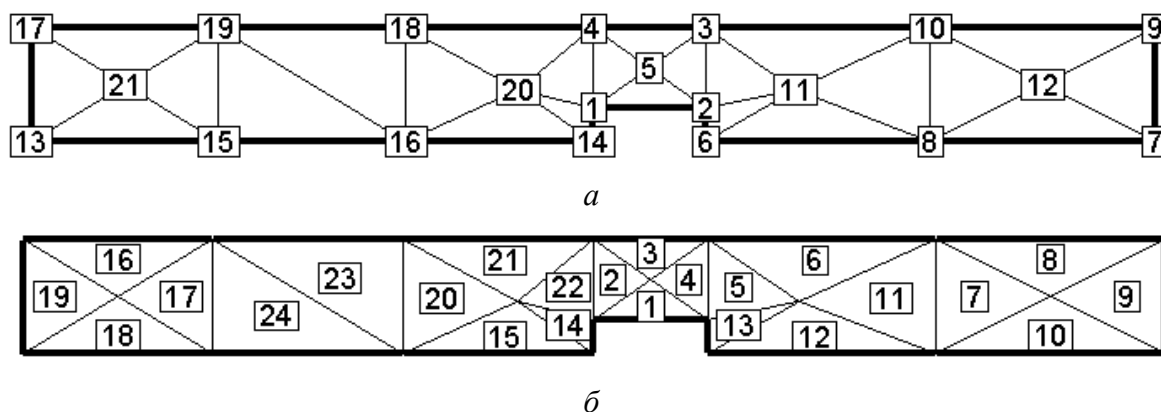


Рис. 7.3. Триангуляція консольної балки в програмі **Tecplot 360**: *a* – номери вузлів; *б* – номери СЕ

Насамперед треба задати матриці координат глобальних вузлів **XYg1** та номерів вузлів в СЕ **E1_nod** відповідно до табл. 7.3.

Далі задаються граничні умови III роду (конвективного типу) відповідно до ескізу (див. рис. 7.1). Для цього змінюється матриця, що відповідає за ГУ III роду – **E1_GU3**. У цій матриці перші 3 стовпці відповідають сторонам СЕ **i-j** (1 сторона), **j-k** (2 сторона), **k-i** (3 сторона), у яких задаються ГУ 3-го роду (компоненти цих стовпців можуть набувати значень – 0 або 3), 4-й – номер СЕ, 5-й, 6-й – значення α і **Tr** на 1-й стороні СЕ, відповідно, 7-й, 8-й – значення α і **Tr** на 2-й стороні СЕ, відповідно, 9-й, 10-й – значення α і **Tr** на 3-й стороні СЕ, відповідно. Оскільки ГУ I і II родів відсутні в задачі, то компоненти стовпців цих матриць, що відповідають за ці граничні умови **Node_GU1** і **E1_GU2**, автоматично задаються нульовими, окрім тих, які пов'язані з номерами вузлів та СЕ.

Потім задаються фізичні властивості – теплопровідність матеріалу балки.

Тепер треба виконати розв'язання задачі теплопровідності шляхом послідовного перегляду файлу **Lab_T_P_2D.xmcd** до місця запису результатів розрахунків фізичних полів. При цьому необхідно з'ясувати основні етапи розв'язання задачі (див. п. 2.2.1): від формування глобальної матриці і вільного члена СЛАР та її розв'язання відносно температури до розрахунку компонентів густини теплового потоку в СЕ і запису результатів розрахунків фізичних полів у файли **...Result_1.dat**, **...NNodes_Elements.dat**.

На підставі даних цих файлів аналогічно до підрозділів 6.1 створюється текстовий файл **2D_Tec_T_P.dat** для перегляду результатів розрахунків фізичних полів у програмі-viewer **Tecplot 360**. Приклад фрагменту лістингу цього файла наведено нижче за текстом.

```
TITLE = "2D Finite-AREA Data"
VARIABLES="X, m", "Y, m", "T, K" , "qx, W/m^2", "qy,
```



```

W/m^2", "qs, W/m^2",
    ZONE T = "Area", N= 21, E= 24, F=FEPOINT, ET=Triangle
-5 0.3 347.49757838816 264.369457330959
-790.272382068019 833.319655251769
-4 0.3 353.092300169464 -557.599296539562
-624.264711658833 837.032499801471
...
2 5 1
1 5 4

```

Тут **TITLE** – назва задачі. **VARIABLES** – це величини, які є координатами вузлів **X,Y** та величини для перегляду **"T, K"**, **"qx, W/m^2"**, **"qy, W/m^2"**, **"qs, W/m^2"** із зазначенням їх розмірності. **ZONE T** – ім'я розрахункової області, **N** – кількість вузлів, **E** – кількість елементів. **F=FEPOINT** – не змінюється. **ET= Triangle** – тип елементу – трикутний, також не змінюється.

Наступний 21 рядок чисел (за кількістю вузлів) повністю відповідають **VARIABLES**. Останні 24 рядки відповідають глобальним номерам вузлів 24 елементів.

Візуалізація результатів розрахунків задачі теплопровідності консольної балки та їх порівняння з числовими даними отриманими за допомогою програмних продуктів **ANSYS**)⁶ наведені на рис. 7.4.

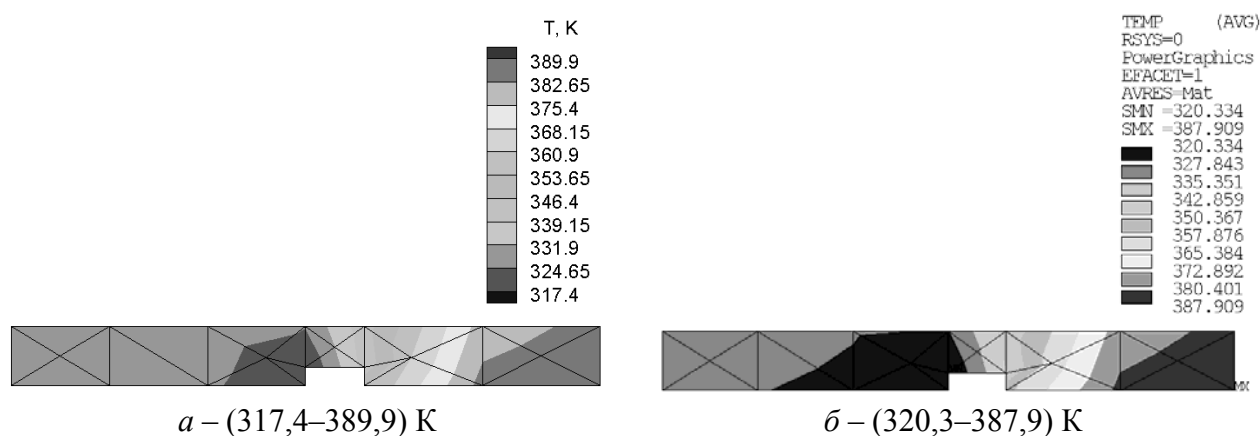


Рис. 7.4. Фізичні поля консольної балки при розв'язанні задачі теплопровідності: *a, в* – код **Lab_T_P_2D.xmcd**; *б, г* – **ANSYS**; *a, б* – абсолютна температура; *в, г* – результуюча густина теплового потоку

⁶ Ліцензійні програмні продукти ANSYS Academic Teaching у 2011–2012 рр., в рамках Договору про використання програмних продуктів ANSYS між ЗАТ «CADFEM-CIS», м. Москва, Російська Федерація і Інженерно-хімічним факультетом (ІХФ) НТУУ «КПІ», м. Київ, Україна, застосовувалися при підготовці студентів на кафедрі хімічного, полімерного та силікатного машинобудування ІХФ для спеціальностей 7.05050315, 8.05050315 – Обладнання хімічних виробництв і підприємств будівельних матеріалів.

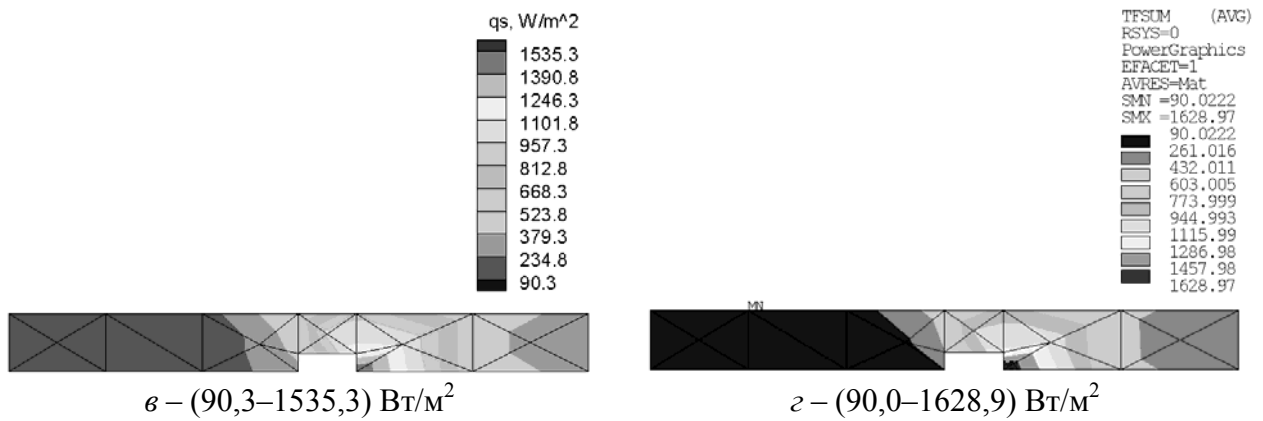


Рис. 7.4: Закінчення. (Див. також с. 172)

З результатів порівняння (див. рис. 7.4) видно, що дані, отримані різними програмами збігаються між собою в межах (0,9–5,7) %.

Визначення глобальних номерів вузлів по лінії здійснюється на підставі ескізу (див. рис. 7.1) та даних розрахунків.

Після запису отриманих номерів вузлів у вектор **nod_P** у коді **Lab_T_P_2D.xmcd** будуються епюри фізичних полів (рис. 7.5).

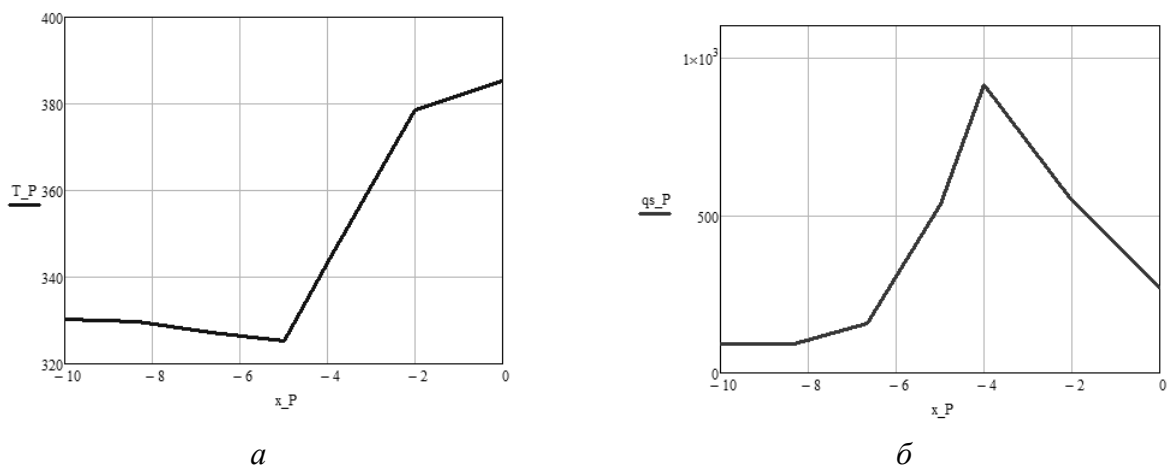


Рис. 7.5. Епюри побудовані в програмі **MathCad**: а – зміна температури; б – зміна результуючої густини теплового потоку

7.1.2. Чотирикутні скінченні елементи

Умови задачі теплопровідності такі самі як і в п. 7.1.1 (див. рис. 7.1, табл. 7.1, 7.2). Для розв'язання плоскої задачі теплопровідності використовується файл **Lab_T_P4_2D.xmcd** (див. Д.2), який є програмним кодом написаним у системі **Mathcad** і який розроблено відповідно до постановки задачі (див. п. 1.1.1) та методики її числового розв'язання з використанням чотирикутних СЕ (див. п. 2.2.2). Для того, щоб скористатися цим кодом треба спочатку виконати дискретизацію плоскої фігури (див. рис. 7.1) в ручному режимі

(див. підрозділ 6.1). Результат такої дискретизації за ескізом на рис. 7.1 наведено на рис. 7.6 і в табл. 7.4.

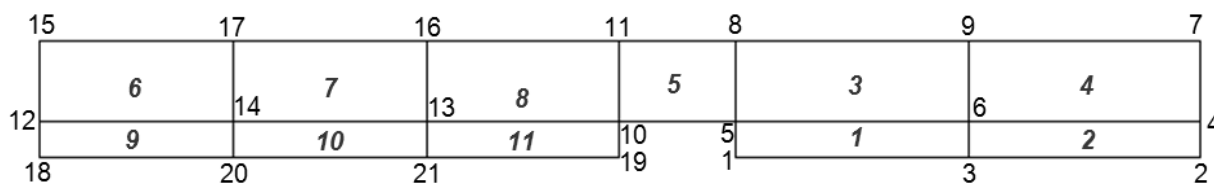


Рис. 7.6. Дискретизація консольної балки: 1–21 – номери вузлів; 1–11 – номери скінченних чотирикутних елементів

Табл. 7.4. Номери вузлів в СЕ та їх координати відповідно до рис. 7.6

Номер СЕ та номери 4-х вузлів СЕ					Номер вузла та його координати x, y	
1	1	3	6	5	1	-4,0 0,0
2	3	2	4	6	2	0,0 0,0
3	5	6	9	8	3	-2,0 0,0
4	6	4	7	9	4	0,0 0,3
5	10	5	8	11	5	-4,0 0,3
6	12	14	17	15	6	-2,0 0,3
7	14	13	16	17	7	0,0 1,0
8	13	10	11	16	8	-4,0 1,0
9	18	20	14	12	9	-2,0 1,0
10	20	21	13	14	10	-5,0 0,3
11	21	19	10	13	11	-5,0 1,0
					12	-10,0 0,3
					13	-6,667 0,3
					14	-8,333 0,3
					15	-10,0 1,0
					16	-6,667 1,0
					17	-8,333 1,0
					18	-10,0 0,0
					19	-5,0 0,0
					20	-8,333 0,0
					21	-6,667 0,0

Далі треба перевірити правильність генерації сітки за допомогою програми-viewer **Tecplot 360**. Для цього необхідно створити текстовий файл **_2D_Tec_Lab_T_P4.dat**, як це було показано в підрозділі 6.1. У результаті завантаження цього файлу в програму **Tecplot 360** отримуємо візуалізацію тріангуляції (рис. 7.7), яка повністю збігається з рис. 7.6. Тобто переконалися в правильності виконання цієї процедури.

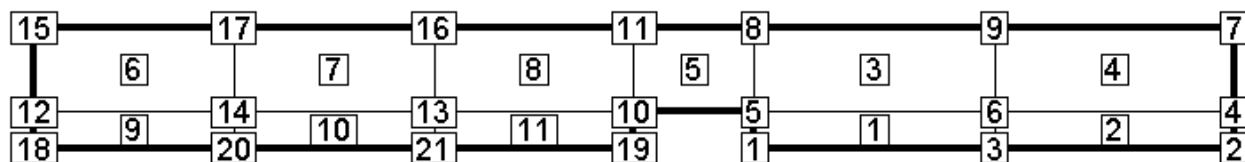


Рис. 7.7. Дискретизація консольної балки чотирикутниками в програмі **Tecplot 360**:
номери СЕ знаходяться в їх центрах

Тепер файл **Lab_T_P4_2D.xmcd** можна завантажити в систему **Mathcad** і розпочати роботу з адаптації програмного коду для розв'язання задачі теплопровідності консольної балки.

Спочатку треба задати матриці координат глобальних вузлів **XYgl** та номерів вузлів в СЕ **E1_nod** відповідно до табл. 7.4.

Далі задаються граничні умови III роду (конвективного типу) відповідно до ескізу (див. рис. 7.1). Для цього змінюється матриця, що відповідає за ГУ III роду – **E1_GU3**. У цій матриці перші 4 стовпці це номери сторін чотирикутного СЕ, у яких може бути задано ГУ 3-го роду (компоненти цих стовпців можуть набувати значень – 0 або 3), 5-й стовпець – номер СЕ, 6-й, 7-й – значення α і **Tr** на 1-й стороні СЕ, відповідно, 8-й, 9-й – значення α і **Tr** на 2-й стороні СЕ, відповідно, 10-й, 11-й – значення α і **Tr** на 3-й стороні СЕ, відповідно, 12-й, 13-й – значення α і **Tr** на 4-й стороні СЕ, відповідно. Оскільки ГУ I і II родів відсутні в задачі, то стовпці матриць, що відповідають за ці граничні умови **Node_GU1** і **E1_GU2**, автоматично задаються нульовими, окрім тих стовпців, які пов'язані з номерами вузлів та СЕ.

Потім задаються фізичні властивості – теплопровідність матеріалу балки.

Тепер треба виконати розв'язання задачі теплопровідності шляхом послідовного перегляду файла **Lab_T_P4_2D.xmcd** до місця запису результатів розрахунків фізичних полів. При цьому необхідно з'ясувати основні етапи розв'язання задачі (див. п. 2.2.2): від формування глобальної матриці і вільного члена СЛАР та її розв'язання відносно температури до розрахунку компонентів густини теплового потоку в СЕ і запису результатів розрахунків фізичних полів у файли **...Result_1.dat**, **...NNodes_Elements.dat**.

На підставі даних цих файлів аналогічно до підрозділу 6.1 і п. 7.1.1 створюється текстовий файл **2D_Tec_T_P4.dat** для перегляду результатів розрахунків фізичних полів у програмі-viewer **Tecplot 360**. Приклад фрагменту лістингу цього файла наведено нижче за текстом.

```
TITLE = "2D Finite-AREA Data"
VARIABLES="X, m", "Y, m", "T, K", "qx, W/m^2", "qy, W/m^2",
"qsum, W/m^2"
ZONE T = "Area", N= 21, E= 11, F=FEPOINT, ET=QUADRILATERAL
```

```

-4    0    352.217414325669    -741.517030750973
1453.68039312337    1631.88056923448
0     0    390.133496531928    -111.594818889832
300.85893034146    320.888609285624
-2    0    385.173726803491    -111.594818889832
214.000782460337    241.34982597195
...
1     3     6     5
3     2     4     6
5     6     9     8

```

Тут, як і в попередніх прикладах (див. підрозділ 6.1 та ін.) **TITLE** – назва задачі. **VARIABLES** – це величини, які є координатами вузлів **X, Y** та величини для перегляду "**T, K**", "**qx, W/m^2**", "**qy, W/m^2**", "**qsum, W/m^2**" із зазначенням їх розмірності. **ZONE T** – ім'я розрахункової області, **N** – кількість вузлів, **E** – кількість елементів. **F=FEPOINT** – не змінюється. **ET= QUADRILATERAL** – тип елемента – чотирикутний, також не змінюється.

Наступний 21 рядок чисел (за кількістю вузлів) повністю відповідають **VARIABLES**. Останні 11 рядків відповідають глобальним номерам вузлів 11 скінчених елементів.

Візуалізація результатів розрахунків задачі теплопровідності консольної балки з використанням чотирикутних СЕ та їх порівняння з числовими даними отриманими за допомогою програмних продуктів **ANSYS** наведені на рис. 7.8.

З результатів порівняння (див. рис. 7.8) видно, що дані, отримані різними програмами збігаються між собою в межах (1–12,9) %.

Визначення глобальних номерів вузлів по лінії здійснюється на підставі ескізу (див. рис. 7.1) і даних розрахунків.

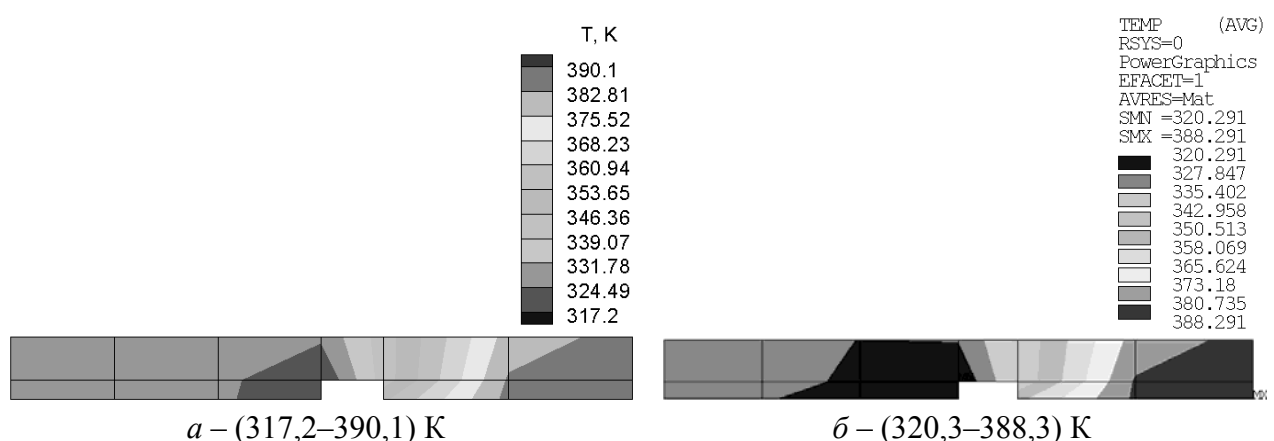
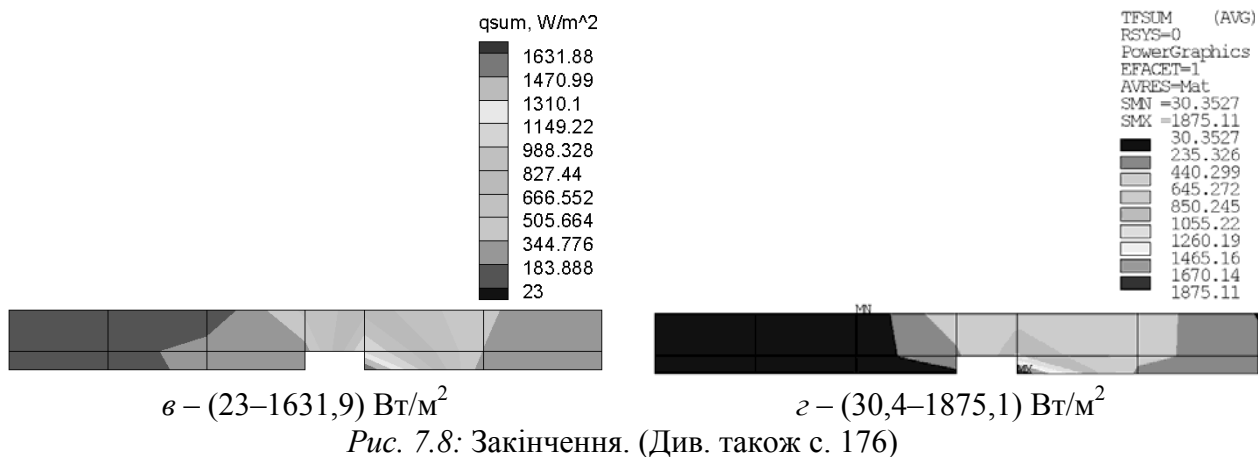


Рис. 7.8. Фізичні поля консольної балки при розв'язанні задачі теплопровідності:

a, в – код **Lab_T_P4_2D.xmcd**; *б, г* – **ANSYS**;

a, б – абсолютна температура; *в, г* – результуюча густина теплового потоку



Після запису отриманих номерів вузлів у вектор **nod_P** у коді **Lab_T_P4_2D.xmcd** будуються епюри фізичних полів (рис. 7.9).

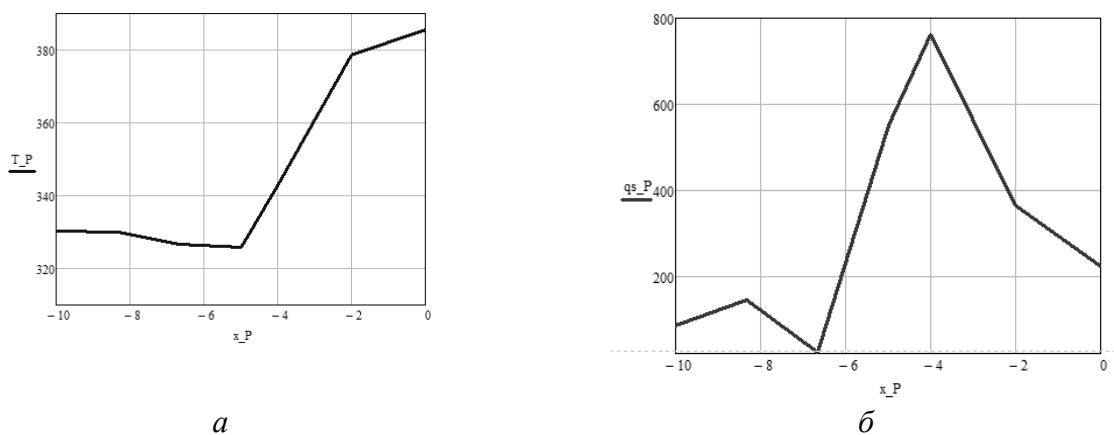


Рис. 7.9. Епюри побудовані в програмі **MathCad**: а – зміна температури; б – зміна результуючої густини теплового потоку

7.2. Вісесиметрична задача теплопровідності

7.2.1. Трикутні скінченні елементи

Умови вісесиметричної задачі теплопровідності наведено на рис. 7.10 і в табл. 7.5, 7.6 [6].

Табл. 7.5. Розміри фланця

D , мм	a , мм	b , мм	c , мм	d , мм	e , мм	f , мм	g , мм	h , мм
200	150	70	35	40	50	20	15	20

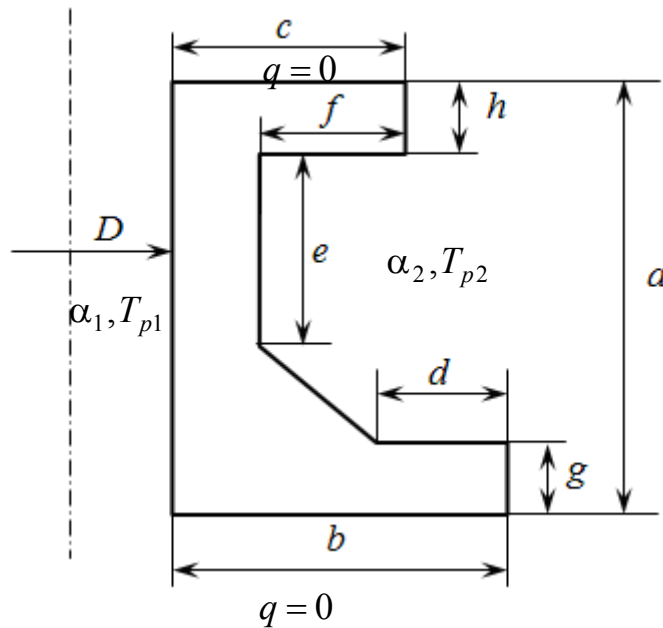


Рис. 7.10. Ескіз фланця зі схемою задання граничних умов

Табл. 7.6. Коефіцієнт тепловіддачі та температура рідини на поверхнях фланця

$\alpha_1, \text{Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$	$T_{p1}, \text{К}$	$\alpha_2, \text{Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$	$T_{p2}, \text{К}$
25	400	10	320

Фізичні властивості матеріалу фланця: теплопровідність – $\lambda = 25 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$.

Для розв’язання вісесиметричної задачі теплопровідності використовується файл **Lab_T_S_2D.xmcd** (див. Д.3), який є програмним кодом написаним в системі **Mathcad** і який розроблено відповідно до постановки задачі (див. п. 1.1.2) та методики її числового розв’язання з використанням трикутних СЕ (див. п. 2.3.1). Для того, щоб скористатися цим кодом треба спочатку виконати тріангуляцію плоскої фігури – фланця (див. рис. 7.1) в ручному режимі (див. підрозділ 6.1) або за допомогою програми **Gmsh** (див. підрозділ 6.3). Виконаємо цю процедуру в ручному режимі. Результат такої тріангуляції за ескізом на рис. 7.10 наведено на рис. 7.11 і в табл. 7.7.

Далі треба перевірити правильність генерації сітки за допомогою програми-viewer **Tecplot 360**. Для цього треба створити текстовий файл **_2D_Tec_T_S.dat**, як це було показано в підрозділі 6.1. У результаті завантаження цього файлу в програму **Tecplot 360** отримуємо візуалізацію тріангуляції (рис. 7.12), яка повністю збігається з рис. 7.11. Тобто впевнились у правильності виконання цієї процедури.

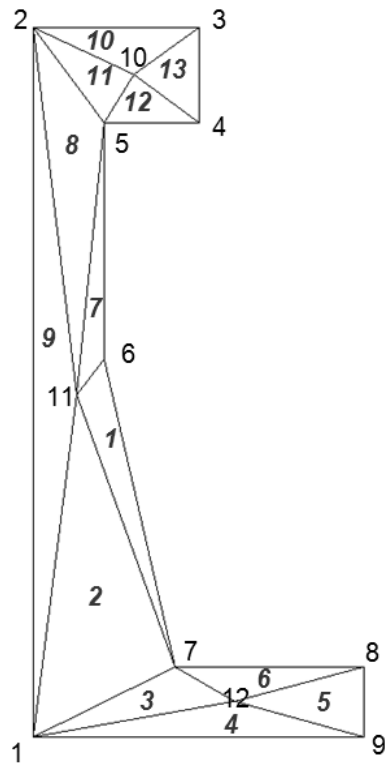


Рис. 7.11. Дискретизація фланця: 1–12 – номери вузлів; 1–13 – номери скінченних трикутних елементів

Табл. 7.7. Номери вузлів в СЕ та їх координати відповідно до рис. 7.10

Номер СЕ та номери 3-х вузлів СЕ				Номер вузла та його координати r, z		
1	11	7	6	1	0,1	0,0
2	1	7	11	2	0,1	0,15
3	12	7	1	3	0,135	0,15
4	12	1	9	4	0,135	0,13
5	8	12	9	5	0,115	0,13
6	8	7	12	6	0,115	0,08
7	11	6	5	7	0,13	0,015
8	2	11	5	8	0,17	0,015
9	2	1	11	9	0,17	0,0
10	10	3	2	10	0,12125	0,14
11	10	2	5	11	0,10914	0,07235
12	4	10	5	12	0,1425	0,0075
13	4	3	1			

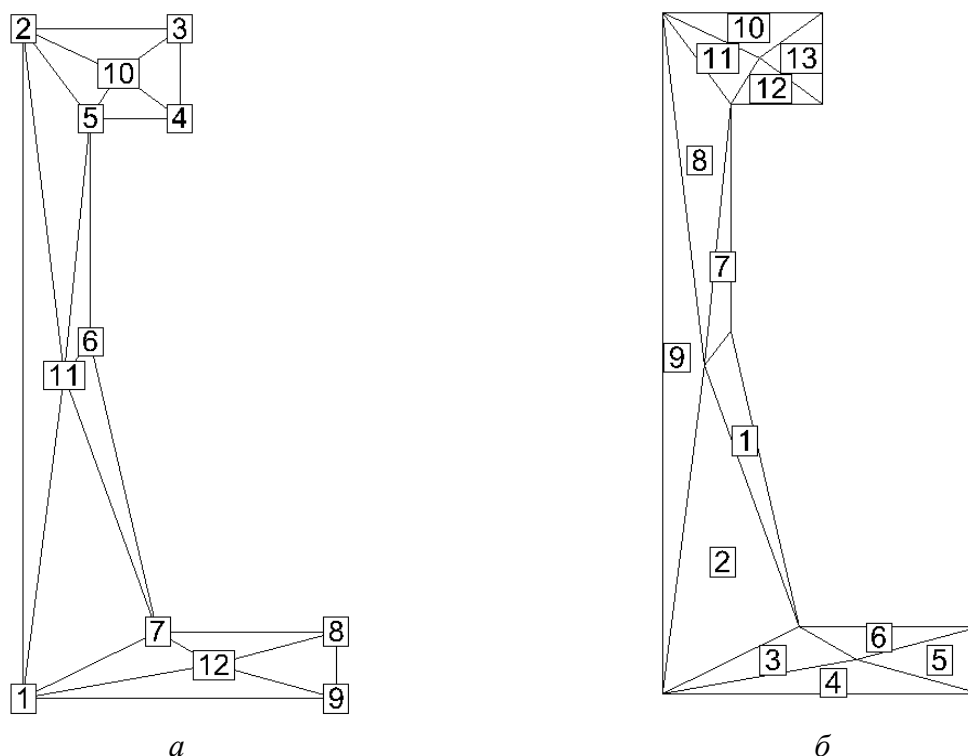


Рис. 7.12. Тріангуляція фланця в програмі **Tecplot 360**: *a* – номери вузлів; *б* – номери CE

Тепер файл **Lab_T_S_2D.xmcd** можна завантажити в систему **Mathcad** і розпочати роботу з адаптації програмного коду для розв'язання задачі теплопровідності фланця у вісесиметричному формулюванні.

Насамперед треба задати матриці координат глобальних вузлів **RZg1** та номерів вузлів в CE **E1_nod** відповідно до табл. 7.7.

Далі задаються граничні умови III роду (конвективного типу) відповідно до ескізу (див. рис. 7.10). Для цього змінюється матриця, що відповідає за ГУ III роду – **E1_GU3**. У цій матриці перші 3 стовпці відповідають сторонам CE **i-j** (1 сторона), **j-k** (2 сторона), **k-i** (3 сторона), у яких задаються ГУ 3-го роду (компоненти цих стовпців можуть набувати значень – 0 або 3), 4-й – номер CE, 5-й, 6-й – значення α і **Tr** на 1-й стороні CE, відповідно, 7-й, 8-й – значення α і **Tr** на 2-й стороні CE, відповідно, 9-й, 10-й – значення α і **Tr** на 3-й стороні CE, відповідно. Оскільки ГУ I і II родів відсутні в задачі, то стовпці матриць, що відповідають за ці граничні умови **Node_GU1** і **E1_GU2**, автоматично задаються нульовими, окрім тих, які пов'язані з номерами вузлів та CE.

Потім задаються фізичні властивості – теплопровідність матеріалу фланця.

Тепер треба виконати розв'язання задачі теплопровідності шляхом послідовного перегляду файла **Lab_T_S_2D.xmcd** до місця запису результатів розрахунків фізичних полів. При цьому необхідно з'ясувати основні етапи

розв'язання задачі (див. п. 2.3.1): від формування глобальної матриці і вільного члена СЛАР та її розв'язання відносно температури до розрахунку компонентів густини теплового потоку в СЕ і запису результатів розрахунків фізичних полів у файли ...\\Result_1.dat, ...\\NNodes_Elements.dat.

На підставі даних цих файлів аналогічно до підрозділів 6.1, 7.1 створюється текстовий файл **2D_Tec_T_S.dat** для перегляду результатів розрахунків фізичних полів у програмі-viewer **Tecplot 360**. Приклад фрагменту лістингу цього файла наведено нижче за текстом.

```
TITLE = "2D Finite-AREA Data"
VARIABLES="R, m", "Z, m", "T, K", "qr, W/m^2", "qz,
W/m^2", "qs, W/m^2",
ZONE T = "Area", N= 12, E= 13, F=FEPOINT, ET=Triangle
0.1 0 367.129859885982 919.353705255417
-365.920683411619 989.49946029055
0.1 0.15 370.180178568564 579.3810850429 -489.66332659165
758.585931265726
...
11 7 6
1 7 11
12 7 1
```

Тут, як і в попередніх прикладах (див. підрозділ 6.1 та ін.) **TITLE** – назва задачі. **VARIABLES** – це величини, які є координатами вузлів **R, Z** та величини для перегляду **"T, K", "qr, W/m^2", "qz, W/m^2", "qs, W/m^2"** із зазначенням їх розмірності. **ZONE T** – ім'я розрахункової області, **N** – кількість вузлів, **E** – кількість елементів. **F=FEPOINT** – не змінюється. **ET= Triangle** – тип елемента – трикутний, також не змінюється.

Наступні 12 рядків чисел (за кількістю вузлів) повністю відповідають **VARIABLES**. Останні 13 рядків відповідають глобальним номерам вузлів 13 скінчених елементів.

Візуалізація результатів розрахунків вісесиметричної задачі теплопровідності фланця з використанням трикутних СЕ та їх порівняння з числовими даними отриманими за допомогою програмних продуктів **ANSYS** наведені на рис. 7.13.

З результатів порівняння (див. рис. 7.13) видно, що мінімальні і максимальні значення даних, отриманих різними програмами збігаються між собою в межах (0,4–0,8) %.

Визначення глобальних номерів вузлів по лінії здійснюється на підставі ескізу (див. рис. 7.10) та даних розрахунків.

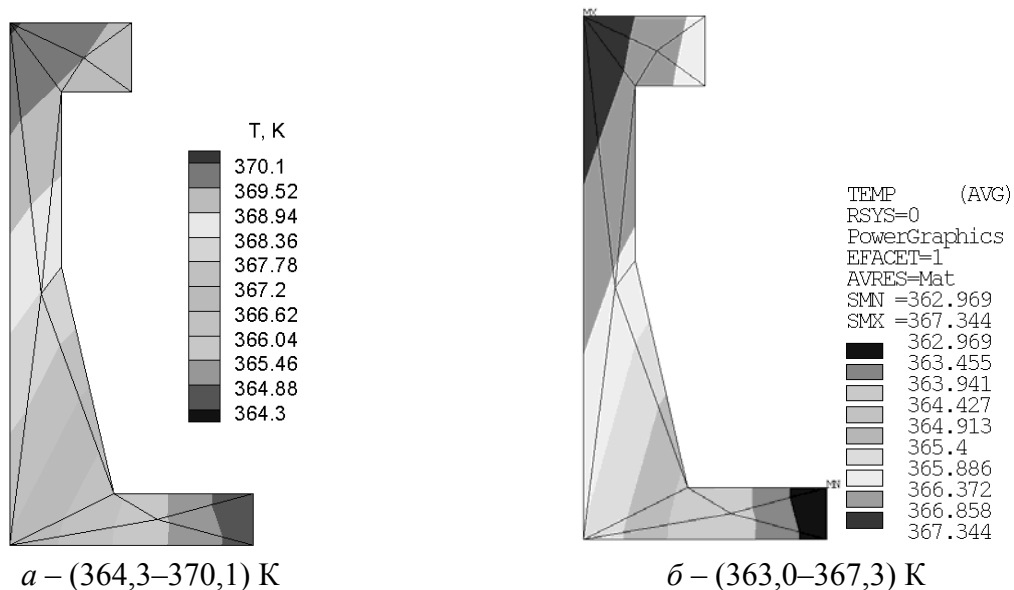


Рис. 7.13. Поля температури фланця під час розв'язання задачі теплопровідності у вісесиметричній постановці: а – код **Lab_T_S_2D.xmcd**; б – **ANSYS**

Після запису отриманих номерів вузлів у вектор **nod_P** у коді **Lab_T_S_2D.xmcd** будуються епюри фізичних полів (рис. 7.14).

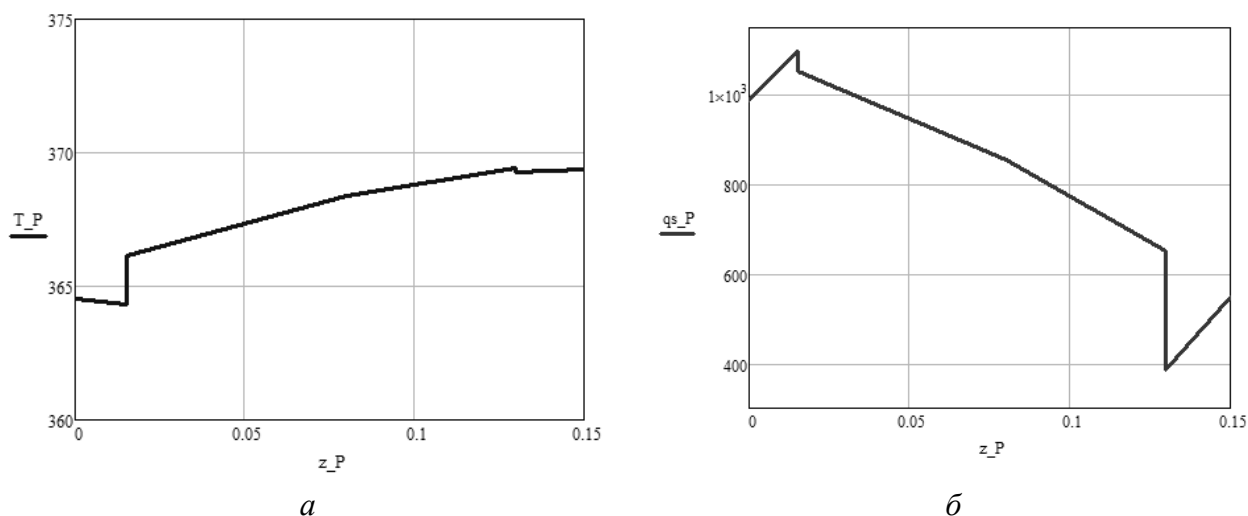


Рис. 7.14. Епюри побудовані в програмі **MathCad**: а – зміна температури; б – зміна результуючої густини теплового потоку

7.2.2. Чотирикутні скінченні елементи

Умови задачі теплопровідності такі ж самі як і в п. 7.2.1 (див. рис. 7.10, табл. 7.5, 7.6). Для розв'язання вісесиметричної задачі теплопровідності використовується файл **Lab_T_S4_2D.xmcd** (див. Д.4), який є програмним кодом написаним в системі **Mathcad** і який розроблено відповідно до постановки задачі (див. п. 1.1.2) та методики її числового розв'язання з використан-

ням чотирикутних СЕ (див. п. 2.3.2).

Зважаючи на достатнє методичне забезпечення (див. розділи 1, 2, 6, 7) та докладно розглянутий приклад вісесиметричної задачі, виконати роботу з адаптації файла **Lab_T_S4_2D.xmcd** для проведення розрахунків за даними задачі пропонується самостійно.

7.3. Тривимірна задача теплопровідності

Умови задачі наведено на рис. 7.15 – 7.17 і в табл. 7.8, 7.9.

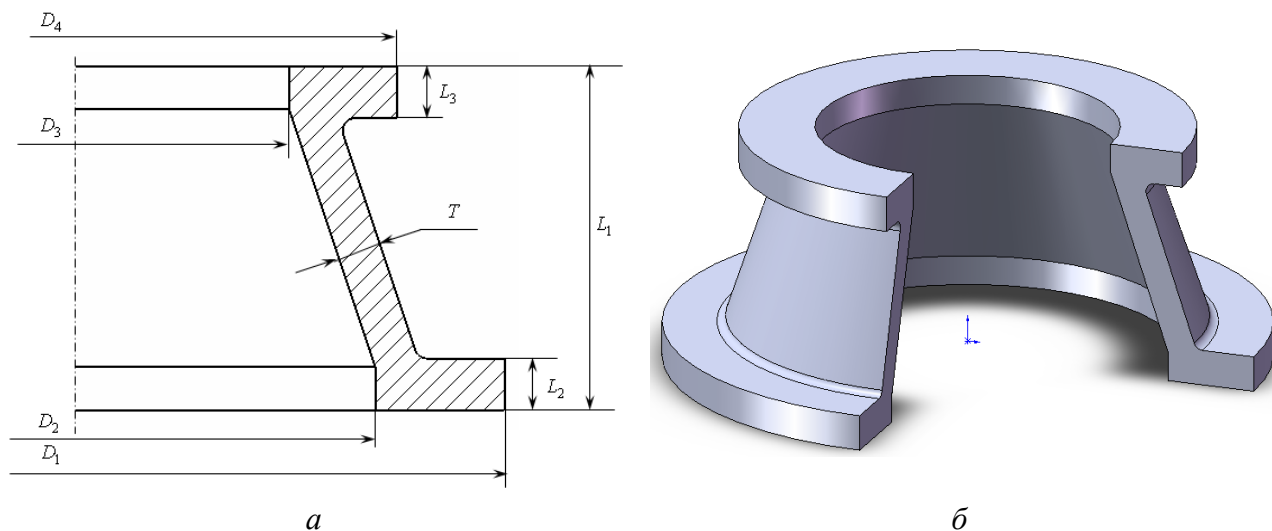


Рис. 7.15. Ескіз і твердотільна модель фланця: *а* – ескіз; *б* – твердотільна модель

Табл. 7.8. Розміри фланця відповідно до ескізу (див. рис. 7.15,а)

D_1 , мм	D_2 , мм	D_3 , мм	D_4 , мм	L_1 , мм	L_2 , мм	L_3 , мм	T , мм
205	145	105	155	85	13	13	10

Фізичні властивості: теплопровідність фланця – $\lambda = 1,5 \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}$.

Табл. 7.9. Коефіцієнт тепловіддачі та температура рідини на сторонах фланця (див. рис. 7.16)

α_1 , Вт/(м ² ·К)	T_{p1} , °С	α_4 , Вт/(м ² ·К)	T_{p4} , °С	α_8 , Вт/(м ² ·К)	T_{p8} , °С	α_9 , Вт/(м ² ·К)	T_{p9} , °С	α_{10} , Вт/(м ² ·К)	T_{p10} , °С
7	15	10	25	15	200	15	200	15	200

Для розв'язання задачі використовується файл **Lab_T_3D.xmcd** (див. Д.5), який є програмним кодом написаним у системі **Mathcad** і який розроблено відповідно до постановки задачі (див. п. 1.1.1) та методики її числового розв'язання (див. п. 2.4.1).

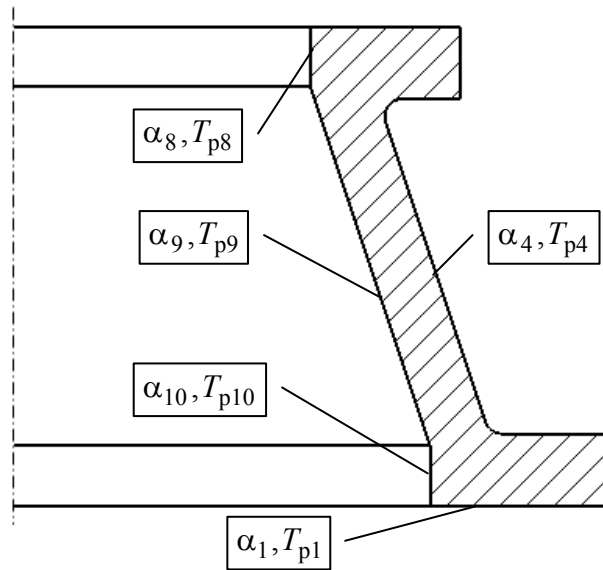


Рис. 7.16. Схема задання граничних умов конвективного типу

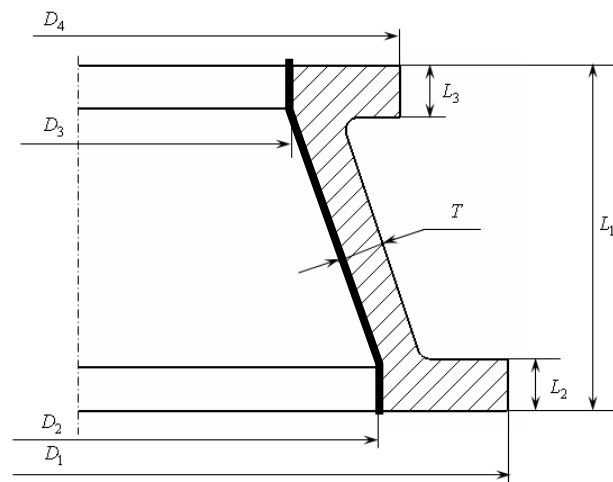


Рис. 7.17. До побудови епюр по лінії

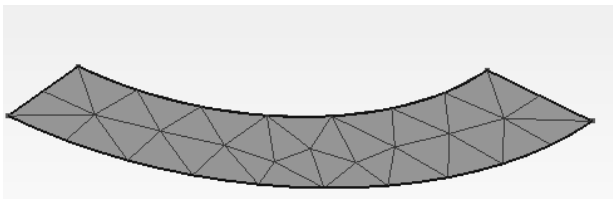
Для того, щоб скористатися цим кодом треба спочатку виконати такі підготовчі дії:

1. Створити текстовий файл **Flan.geo**, використовуючи CAD-інструменти програми **Gmsh** (див. підрозділи 6.2, 6.3 та відповідний лістинг файла **3D.geo**) відповідно до заданих умов задачі (див. рис. 7.15 – 7.17 і в табл. 7.8, 7.9).
2. Завантажити файл у програму **Gmsh**, згенерувати тетраедру сітку та записати її у файлі **Flan.msh** (див. підрозділи 6.2, 6.3).
3. У програмі **Gmsh** визначити номери поверхонь твердотільної моделі фланця для задання граничних умов конвективного типу (III роду) відповідно до рис. 7.16 і табл. 7.9. Для цього треба скористатися та-

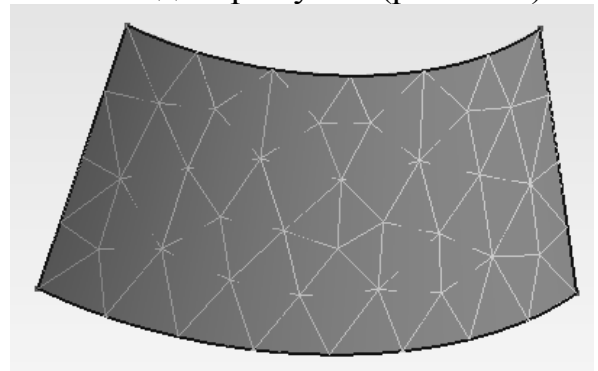
КИМИ командами **Gmsh: Tools→Visibility (або Shift+Ctrl+V)→Tree browser→ Model→ Elementary entities →Surface 1→Apply**



У результаті для поверхонь Surface 1 і Surface 4 і т.д. отримуємо (рис. 7.18)



Surface 1 для задання α_1, T_{p1}
(див. рис. 7.16)



Surface 4 для задання α_4, T_{p4}
(див. рис. 7.16)

Рис. 7.18. До визначення номерів поверхонь твердотільної моделі фланця у програмі **Gmsh**

4. Виконати деяке редагування і перетворення файла **Flan.msh** з метою використання інформації, що міститься в ньому, у програмному коді **Lab_T_3D.xmcd**.

4.1. Спочатку треба створити файл **Gmsh_nodes_flan.dat**, у якому записуються номери вузлів та їх координати. Файл **Gmsh_nodes_flan.dat** створюється із файла **Flan.msh** таким чином. Спершу **Flan.msh** копіюється у файл **Gmsh_nodes_flan.dat**. Далі виконується корегування створеного файла **Gmsh_nodes_flan.dat** у текстовому редакторі. У файлі **Gmsh_nodes_flan.dat** спочатку видаляються перші 5 рядків, а саме такі:

```
$MeshFormat
2.2 0 8
$EndMeshFormat
$Nodes
190
```

(тут 190 – це кількість вузлів, отриманих у результаті дискретизації)

тобто до рядка з номером 1 на його початку, потім рядки до 190 номеру включно лишаються у файлі **Gmsh_nodes_flan.dat**, а рядки, починаючи із

\$EndNodes

видаляються із файла до його кінця.

І останньою операцією редагування цього файла є заміна "крапки" на "кому". Записуємо результат редагування та виходимо з редактора. Приклад фрагменту файла **Gmsh_nodes_flan.dat** наведено нижче за текстом.

```
1 0 -32,782173061 -100
2 100 -32,782173061 0
3 70 -32,782173061 0
4 0 -32,782173061 -70
5 0 -20,782173061 -100
...
```

- 4.2. Далі треба створити файл **Gmsh_elem_flan.dat**, у якому записується інформація про тетраедні скінченні елементи. Файл **Gmsh_elem_flan.dat** також створюється із файла **Flan.msh** аналогічним чином, тобто **Flan.msh** копіюється у файл **Gmsh_elem_flan.dat**. Далі виконується корегування створеного файла **Gmsh_elem_flan.dat** у текстовому редакторі. У файлі **Gmsh_elem_flan.dat** спочатку видаляються перші рядки до рядка:

\$Elements

Потім видаляються рядки до рядка, у якому друге число (2-й стовпець) дорівнює 4 (тут число 4 є ознакою тетраедра). Далі переходимо в кінець файла та видаляємо останній рядок

\$EndElements

Записуємо результат редагування та виходимо із редактора. Приклад фрагменту файла **Gmsh_elem_flan.dat** наведено нижче за текстом.

```
509 4 2 0 1 62 190 147 61
510 4 2 0 1 65 146 181 64
511 4 2 0 1 159 190 183 99
512 4 2 0 1 190 159 183 147
513 4 2 0 1 146 165 174 181
...
```

- 4.3. І на кінець, треба створити файл **El_Area2_Gmsh.dat**. Файл **El_Area2_Gmsh.dat** також створюється із текстового файла **Flan.msh** (який записує програма мешер **Gmsh**) за допомогою копіювання **Flan.msh** у файл **El_Area2_Gmsh.dat**. Далі ви-

конується його редагування таким чином: спочатку видаляються всі рядки до рядка

\$Elements;

потім знов видаляються рядки до рядка, у якому у 2-у стовпці записано 2 (яка є ознакою трикутного елемента на поверхні);

далі всі рядки з 2 у 2-у стовпці рядка лишаються у файлі;

всі рядки, починаючи з рядка, у якому у 2-у стовпці записано 4 (або інша цифра, але не 2) видаляються до кінця файла.

Приклад фрагменту лістингу файла **E1_Area2_Gmsh.dat** наведено нижче за текстом.

```
133 2 2 0 1 37 1 109
134 2 2 0 1 37 109 4
135 2 2 0 1 106 36 35
136 2 2 0 1 104 35 34
```

...

На цьому, всі необхідні файли для програмного коду **Lab_T_3D.xmcd** вже створено. Тепер можна перейти до безпосереднього розв'язання задачі. Для цього в середовищі **Mathcad** треба завантажити файл **Lab_T_3D.xmcd**. Послідовно, переглядаючи лістинг цього файла спочатку підключити інструментами **Mathcad** файли **Gmsh_nodes_flan.dat** і **Gmsh_elem_flan.dat** у разі, якщо ці файли автоматично не були підключені. Після цього, треба дійти до місця лістингу файла **Lab_T_3D.xmcd**, де записуються текстові файли **...\Result_1_msh.dat** і **...\NNodes_Elements.dat** для перегляду тетраедної сітки в програмі **Tecplot 360**. Використовуючи вказані файли, треба створити текстовий файл **gmsh_3D_Tec_T.dat** для перегляду результату дискретизації твердотільної моделі фланця в програмі **Tecplot 360**. Приклад фрагменту лістингу файла **gmsh_3D_Tec_T.dat** наведено нижче за текстом.

```
TITLE = "3D Finite-AREA Data"
VARIABLES="X","Y","Z",
ZONE T = "Area", N= 190, E= 503,
F=FEPOINT, ET=TETRAHEDRON
0 -32.782173061 -100
100 -32.782173061 0
70 -32.782173061 0
0 -32.782173061 -70
...
62 190 147 61
65 146 181 64
159 190 183 99
190 159 183 147
146 165 174 181
...
```


Тут **TITLE** – це назва задачі. **VARIABLES** – це величини, які є координатами вузлів **X, Y, Z**. **ZONE T** – це ім'я розрахункової області, **N** – кількість вузлів, **E** – кількість елементів. **F=FEPOINT** – не змінюється. **ET=TETRAHEDRON** – тип елементу – тетраедр, також не змінюється. Наступні 190 (**N= 190**) рядків чисел повністю відповідають рядку **VARIABLES**, тобто 1, 2, 3-й стовпці є **X, Y, Z**. Після рядків з координатами вузлів слідують глобальні номери вузлів 503 скінченних елементів (**E= 503**).

Далі, переглядаючи файл **Lab_T_3D.xmcd** у системі **Mathcad**, треба також підключити файл **E1_Area2_Gmsh.dat**. Потім треба задати значення коефіцієнтів тепловіддачі і температури оточуючого середовища відповідно до табл. 7.9.

Відтак у файлі **Lab_T_3D.xmcd** треба перейти до задання фізичних властивостей матеріалу фланця і задати його теплопровідність.

Далі треба виконати розв'язання задачі теплопровідності шляхом послідовного перегляду файла **Lab_T_3D.xmcd** до місця запису результатів розрахунків фізичних полів. При цьому з'ясувати основні етапи розв'язання задачі (див. п. 2.4.1): від формування глобальної матриці і вільного члена СЛАР та її розв'язання відносно температури до розрахунку складових вектора густини теплового в СЕ та глобальних вузлах, розрахунку результуючої густини теплового потоку в глобальних вузлах, запис результатів розрахунків фізичних полів у файли **...\Result_1.dat**, **...\NNodes_Elements.dat**. Використовуючи вказані файли, треба створити текстовий файл **gmsh_3D_Tec_T.dat** для перегляду результатів розрахунків фізичних полів у програмі-viewer **Tecplot 360**. Приклад фрагменту лістингу файла **gmsh_3D_Tec_T.dat** наведено нижче за текстом.

```
TITLE = "3D Finite-AREA Data"
VARIABLES="X, m", "Y, m", "Z, m", "T, C", "qx, W/m^2", "qy,
W/m^2", "qz, W/m^2", "qs, W/m^2",
ZONE T = "Area", N= 190, E= 503, F=FEPOINT, ET=TETRAHEDRON
0 -0.032782173061 -0.1 96.0493142510495 17.7761332158355
-326.18565070472 -303.067853968735 445.604301759962
0.1 -0.032782173061 0 96.0252971642928 304.988762636701
-327.828219784066 -21.7275705831052 448.287379194306
0.07 -0.032782173061 0 109.744383820104 1036.39778208066
-556.085776560669 -73.4732956660222 1178.45240836057
...
62 190 147 61
65 146 181 64
159 190 183 99
190 159 183 147
146 165 174 181
```

Тут, як і в файлі **gmsh_3D_Tec_T.dat**, **TITLE** – це назва задачі. **VARIABLES** – це величини, які є координатами вузлів **X,Y,Z** та величини полів для перегляду **T,qx,qy,qz,qs**. **ZONE T** – це ім'я розрахункової області, **N** – кількість вузлів, **E** – кількість елементів. **F=FEPOINT** – не змінюється. **ET=TETRAHEDRON** – тип елементу – тетраедр, також не змінюється.

Візуалізація результатів розрахунків з використанням програмного коду **Lab_T_3D.xmcd** та їх порівняння з числовими даними отриманими за допомогою програмних продуктів **ANSYS** наведені на рис. 7.19.

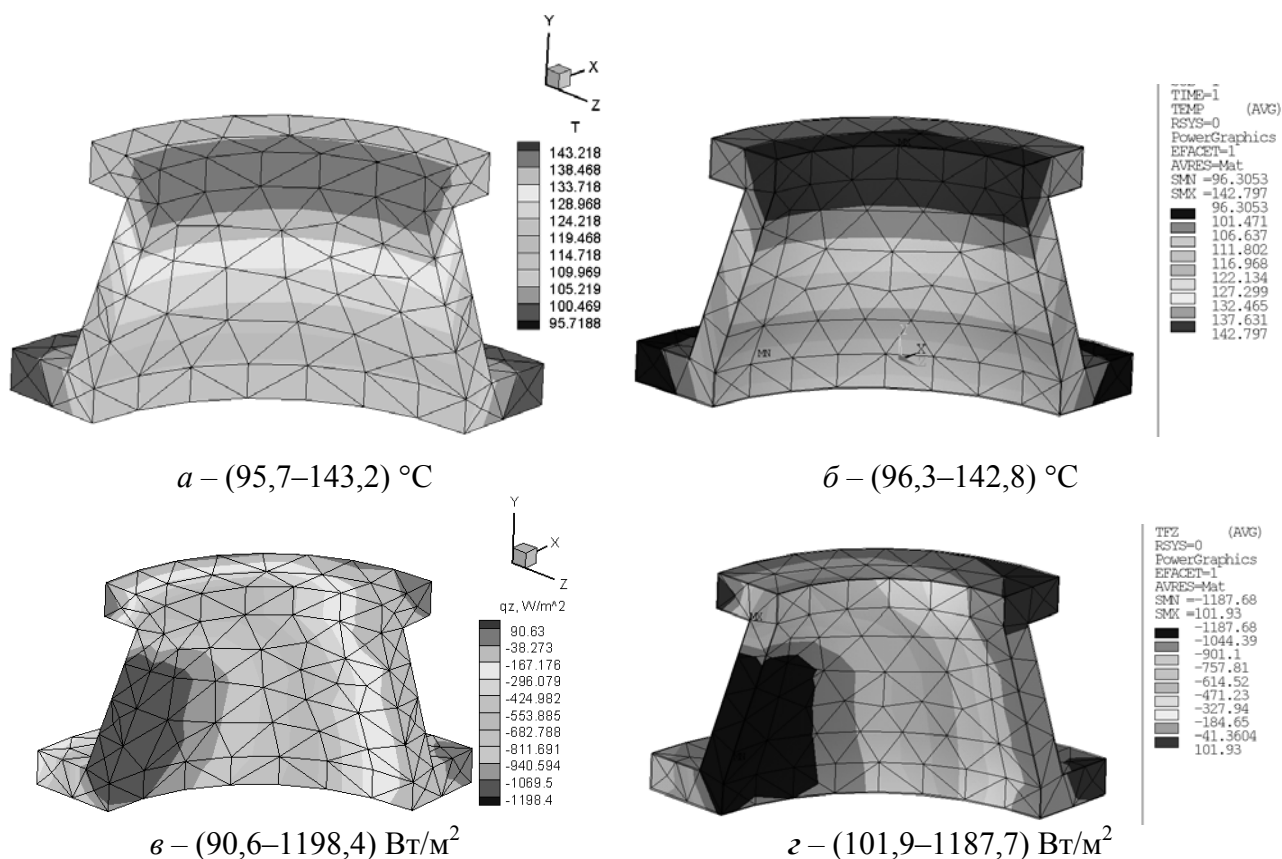


Рис. 7.19. Фізичні поля фланця під час розв'язання тривимірної задачі стаціонарної теплопровідності: а, в – код **Lab_T_3D.xmcd**; б, г – **ANSYS**; а, б – поле температур; в, г – поле складової густини теплового потоку

Як видно із порівняння результатів розрахунків спостерігається збіг між даними отриманими різними програмами на різних розрахункових сітках в межах (0,3–0,9) %.

Для визначення глобальних номерів вузлів по лінії на ескізі фланця (див. рис. 7.17) можна скористатися програмою **Tecplot 360** і файлом **gmsh_3D_Tec_T.dat** або **gmsh_3D_Tec_T_.dat**. Результат цієї дії показано на рис. 7.20.

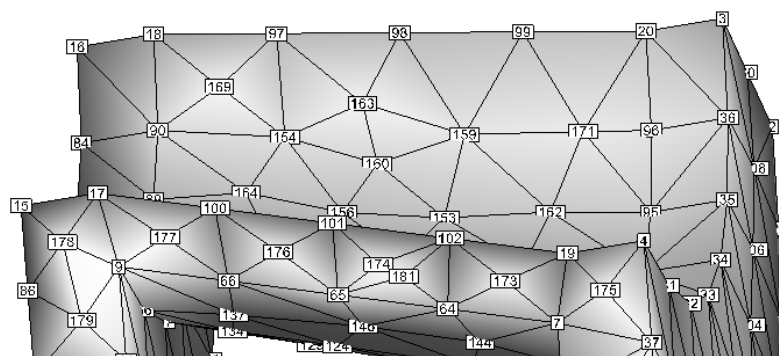


Рис. 7.20. До визначення номерів глобальних вузлів з використанням програми **TecPlot**: номери вузлів по лінії (див. рис. 7.17) 16,18,97,98,99,20,3 – всього 7

Цю операцію можна також виконати за допомоги інструментів програми **Gmsh**.

Після запису у відповідний вектор отриманих номерів вузлів (див. рис. 7.20) у коді **Lab_T_3D.xmcd** можна отримати епюри фізичних полів (рис. 7.21).

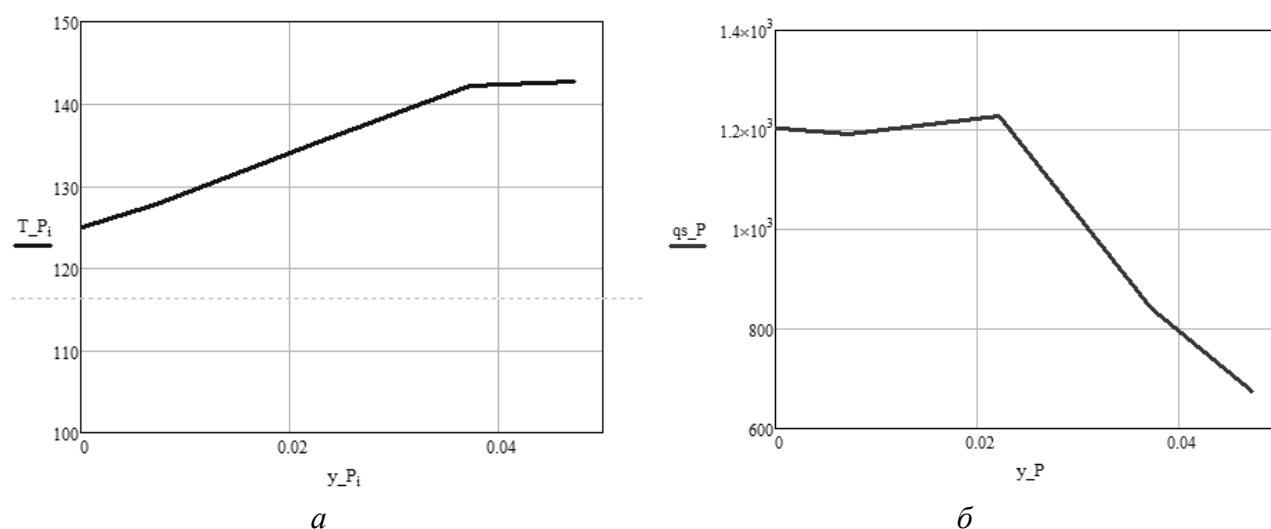


Рис. 7.21. Епюри побудовані в програмі **MathCad**: *a* – зміна температури; *б* – зміна результуючої густини теплового потоку

Запитання для самоконтролю

1. Перелік вихідних даних для розв'язання плоскої задачі теплопровідності консольної балки.
2. Порядок виконання триангуляції плоскої фігури (консольної балки) в ручному режимі.
3. Структура файлу **Tecplot 360** для перевірки правильності триангуляції.

4. Порядок задання граничних умов III роду у файлі **Lab_T_P_2D.xmcd**.

5. Основні етапи розв'язання плоскої задачі теплопровідності та їх аналіз.

6. Структура файлу **Tecplot 360** для візуалізації результатів розрахунків плоскої задачі теплопровідності під час її розв'язання з використанням трикутних СЕ.

7. Різниця між файлами **Mathcad** для розв'язання плоскої задачі теплопровідності чотирикутними та трикутними елементами.

8. Порядок виконання дискретизації плоскої фігури (консольної балки) чотирикутними СЕ в ручному режимі.

9. Структура файлу **Tecplot 360** для візуалізації результатів розрахунків плоскої задачі теплопровідності під час її розв'язання з використанням чотирикутних СЕ.

10. Перелік вихідних даних для розв'язання вісесиметричної задачі теплопровідності фланця.

11. Різниця між файлами **Mathcad** для розв'язання вісесиметричної задачі теплопровідності чотирикутними та трикутними елементами.

12. Вихідні дані для розв'язання стаціонарної тривимірної задачі теплопровідності фланця.

13. Файл програми **Gmsh** для побудови геометрії фланця. Тріангуляція, визначення номерів поверхонь фланця.

14. Особливості задання граничних умов під час розв'язання тривимірної задачі теплопровідності.

15. Структура файлу **Tecplot 360** для візуалізації результатів розрахунків тривимірної задачі теплопровідності.

8. ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ СТАТИЧНОЇ ПРУЖНОСТІ ТА ВІЗУАЛІЗАЦІЯ РЕЗУЛЬТАТІВ РОЗРАХУНКІВ

8.1. Плоскі задачі ПДС і ПНС

Умови задачі ПДС наведено на рис. 8.1 і в табл. 8.1, 8.2 [6].

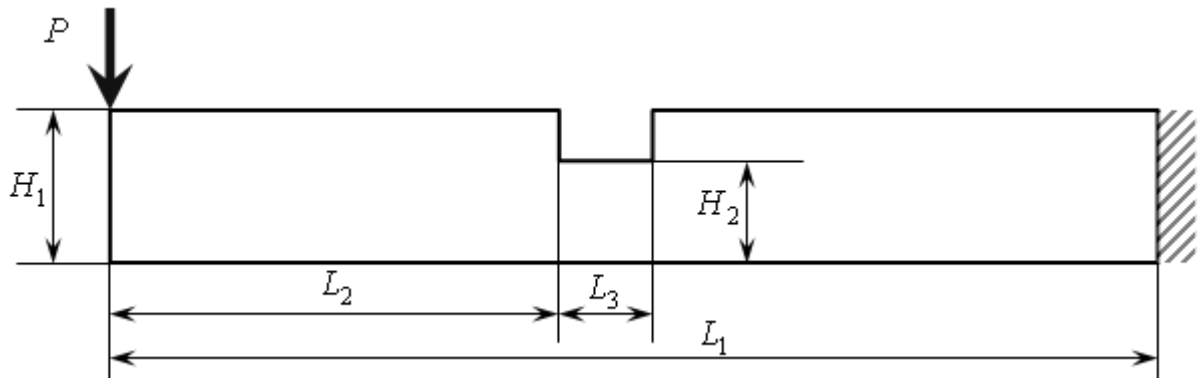


Рис. 8.1. Ескіз консольної балки зі схемою задання граничних умов:

$$\Delta T = 10 \text{ К}, g_y = -9.81 \text{ м/с}^2$$

Табл. 8.1. Розміри, вузлове навантаження та номер матеріалу до ескізу балки (див. рис. 8.1)

Номер матеріалу по табл. 8.2	L_1 , м	L_2 , м	L_3 , м	H_1 , м	H_2 , м	P , Н
1	12	5	1	1	0,1	125

Табл. 8.2. Фізичні властивості матеріалів

Матеріал	Густина ρ , кг/м ³	Модуль пружності E , МПа	Коефіцієнт Пуассона ν	Границя плинності $[\sigma_T]$, МПа	Теплопровідність λ , Вт/(м·К)	КЛТР) ⁷ β , К ⁻¹
1 Лита вуглецева сталь	7800	$2,0 \times 10^5$	0,32	248,2	30	$1,2 \cdot 10^{-5}$

Для розв'язання задачі ПДС використовується файл **Lab_M_PDS_2D.xmcd** (див. Е.1), який є програмним кодом написаним в системі **Mathcad** і який розроблено відповідно до постановки задачі (див. п. 1.2.1) і методики її числового розв'язання (див. підрозділ 3.2). Для того, щоб скористатися цим кодом треба спочатку виконати тріангуляцію плоскої фігури – консольної балки (див. рис. 8.1) у ручному режимі (див.

⁷ КЛТР – коефіцієнт лінійного температурного розширення матеріалу

підрозділ 6.1) або за допомогою програми **Gmsh** (див. підрозділ 6.3). Виконаємо цю процедуру в ручному режимі. Результат такої триангуляції консольної балки за ескізом на рис. 8.1 наведено на рис. 8.2 і в табл. 8.3.

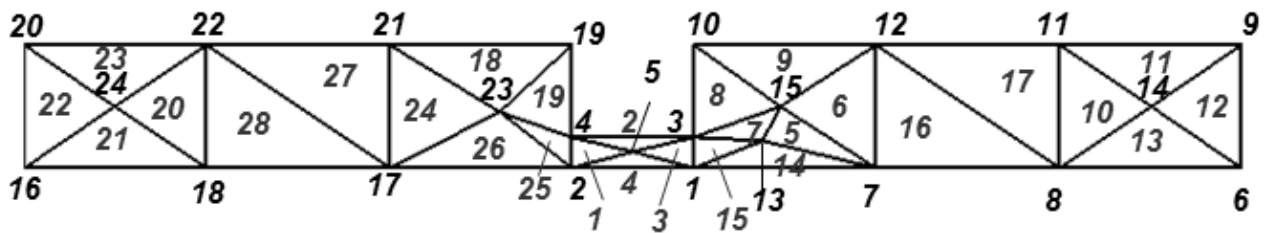


Рис. 8.2. Триангуляція консольної балки: 1–24 номери вузлів; 1–28 номери СЕ

Табл. 8.3. Номери вузлів в СЕ та їх координати відповідно до рис. 8.2

Номер СЕ та номери 3-х вузлів СЕ				Номер вузла та його координати x, y		
1	2	5	4	1	-4.5	0
2	4	5	3	2	-5.5	0
3	5	1	3	3	-4.5	0.25
4	2	1	5	4	-5.5	0.25
5	7	15	13	5	-5	0.125
6	7	12	15	6	0	0
7	13	15	3	7	-3	0
8	15	10	3	8	-1.5	0
9	12	10	15	9	0	1
10	8	14	11	10	-4.5	1
11	11	14	9	11	-1.5	1
12	14	6	9	12	-3	1
13	8	6	14	13	-3.938	0.219
14	13	1	7	14	-0.75	0.5
15	3	1	13	15	-3.788	0.494
16	7	8	12	16	-10	0
17	11	12	8	17	-7	0
18	23	19	21	18	-8.5	0
19	23	4	19	19	-5.5	1
20	22	24	18	20	-10	1
21	18	24	16	21	-7	1
22	24	20	16	22	-8.5	1
23	22	20	24	23	-6.1	0.45
24	17	23	21	24	-9.25	0.5
25	23	2	4			
26	17	2	23			
27	21	22	17			
28	22	18	17			

Далі треба перевірити правильність генерації сітки за допомогою програми-viewer **Tecplot 360**. Для цього необхідно створити текстовий файл

_2D_Tec_Lab_PDS.dat, як це було показано в підрозділі 6.1. У результаті завантаження цього файлу в програму **Tecplot 360** отримуємо візуалізацію тріангуляції (рис. 8.3), яка повністю збігається з рис. 8.2. Тобто впевнились у правильності виконання цієї процедури.

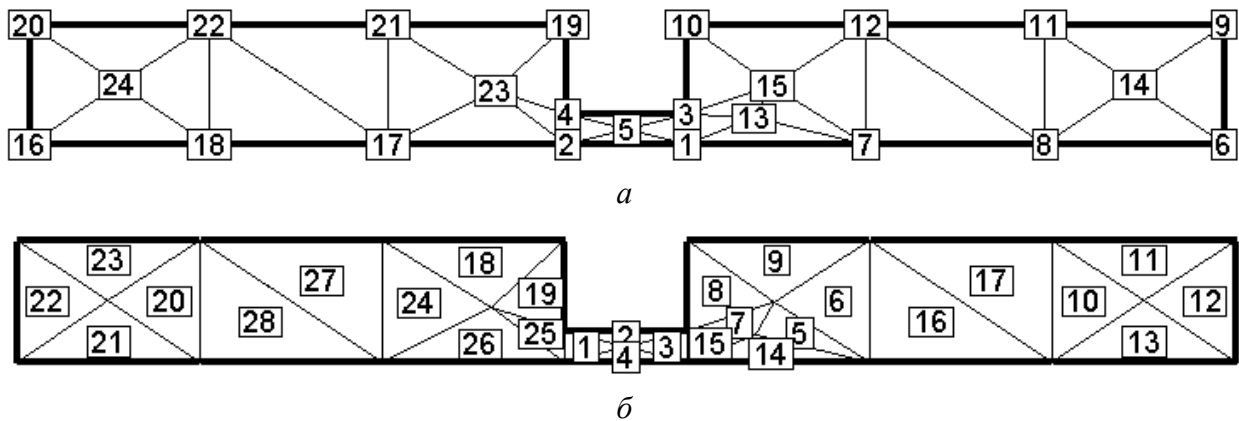


Рис. 8.3. Тріангуляція консольної балки в програмі **Tecplot 360**: *a* – номери вузлів; *б* – номери СЕ

Тепер файл **Lab_M_PDS_2D.xmcd** можна завантажити в систему **Mathcad** і розпочати роботу з адаптації програмного коду для розв'язання задачі НДС консольної балки.

Насамперед треба задати матриці координат глобальних вузлів та номерів вузлів в СЕ відповідно до табл. 8.3.

Далі задається закріплення консольної балки та вузлове навантаження відповідно до її ескізу, схеми навантаження та тріангуляції (див. рис. 8.1–8.3). Для цього змінюються відповідні вектори з номерами вузлів закріплення та вузлового навантаження і його компоненти.

Потім задаються фізичні властивості відповідно до табл. 8.2.

Під час виконання першого розрахунку НДС балки враховуються тільки вузлові навантаження. Для врахування гравітаційного та температурного навантаження в подальших розрахунках в коді **Lab_M_PDS_2D.xmcd** треба задати $g_y = -9,81 \text{ м/с}^2$ та $\Delta T = 10 \text{ К}$, відповідно.

Тепер треба виконати розв'язання задачі НДС шляхом послідовного перегляду файла **Lab_M_PDS_2D.xmcd** до місця запису результатів розрахунків фізичних полів. При цьому необхідно з'ясувати основні етапи розв'язання задачі (див. підрозділ 3.2): від формування глобальної матриці і вільного члена СЛАР та її розв'язання відносно переміщень до формування векторів складових переміщень, розрахунку напружень в СЕ і вузлах та запасу міцності консольної балки (див. п. 1.2.5) і запису результатів розрахунків фізичних полів у файли ...**\Result_1.dat** (дані, що відповідають *недеформованому* ста-

ну), ...**Result_1D.dat** (дані, що відповідають *деформованому* стану), ...**NNodes_Elements.dat**.

На підставі даних цих файлів аналогічно до підрозділів 6.1, 7.1 створюється текстовий файл **2D_Tec_Lab_PDS.dat** для перегляду результатів розрахунків фізичних полів у програмі-viewer **Tecplot 360** для недеформованого та деформованого станів конструкції. Приклад фрагменту лістингу цього файла наведено нижче за текстом.

```

TITLE = "2D Finite-AREA Data"
VARIABLES="X, m", "Y, m", "Ux, m" , "Uy, m", "Us, m", "Sxx,
Pa", "Syy, Pa", "Szz, Pa", "Sxy, Pa", "Sekv, Pa", "Fs"
ZONE T = "Area", N=                24, E=                28, F=FEPOINT,
ET=Triangle
-4.5 0      4.43245766255908e-008      -1.85566001526353e-007
1.9078629147692e-007      -1510.93333158716      479.491529055052
-309.432540759634      442.781400480749      1897.91051894246
115916.950669827
-5.5 0      6.66155235279386e-008      -4.11284763504205e-007
4.16644674351673e-007      -680.959337768513      238.291530921103
-132.800342054223      -700.506715542724      1453.86855896264
151320.419334864
...
2      5      4
4      5      3
5      1      3
...
ZONE T = "Area_D", N=                24, E=                28, F=FEPOINT,
ET=Triangle
-4.4892207437736      -0.0451276386519599 4.43245766255908e-008
-1.85566001526353e-007      1.9078629147692e-007
-1510.93333158716      479.491529055052      -309.432540759634
442.781400480749      1897.91051894246      115916.950669827
-5.48379982728704      -0.100019993090376 6.66155235279386e-008
-4.11284763504205e-007      4.16644674351673e-007
-680.959337768513      238.291530921103      -132.800342054223
-700.506715542724      1453.86855896264      151320.419334864
...
2      5      4
4      5      3
5      1      3
...

```

Тут, як і в інших файлах (див. розділ 7), в основному всі позначення збігаються, за виключенням рядка фізичних величин "**Ux, m**" , "**Uy, m**", "**Us, m**", "**Sxx, Pa**", "**Syy, Pa**", "**Szz, Pa**", "**Sxy, Pa**", "**Sekv, Pa**", "**Fs**" і того, що оператор **ZONE T =** використовується двічі в тексті файла разом із різними іменами ("**Area**" і "**Area_D**") та з числовими значеннями **VARIABLES** і глобальними номерами вузлів в CE. Це зроблено

для реалізації можливості одночасної візуалізації як недеформованого, так і деформованого станів конструкції балки.

Візуалізація результатів розрахунків ПДС консольної балки та їх порівняння з числовими даними отриманими за допомогою програмних продуктів **ANSYS** наведені на рис. 8.4.

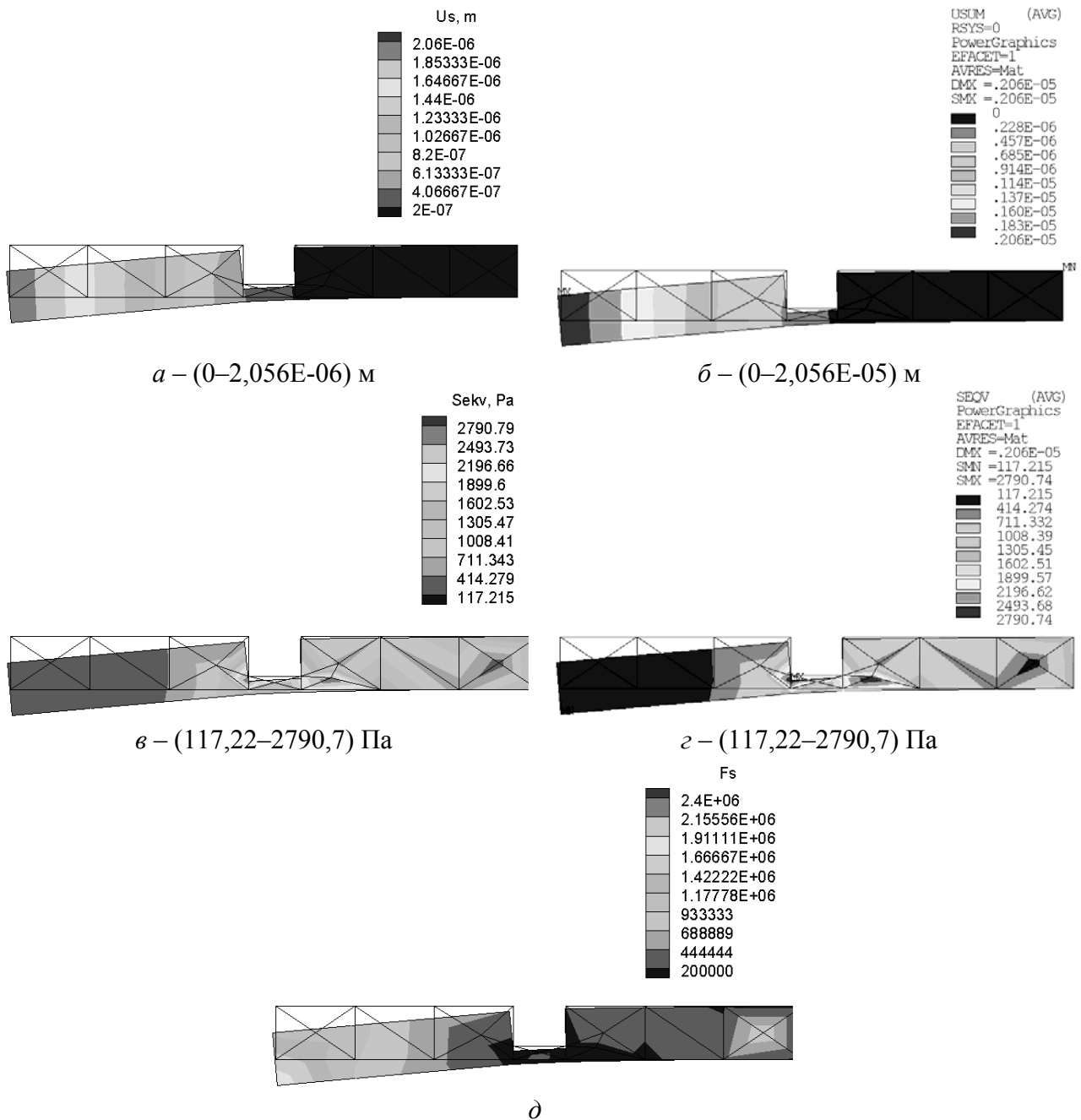


Рис. 8.4. Фізичні поля консольної балки під час розв'язання задачі ПДС: *a, в, δ* – код **Lab_M_PDS_2D.xmcd**; *б, з* – **ANSYS**; *a, б* – сумарні переміщення; *в, з* – еквівалентні напруження за Мізесом; *δ* – запас міцності конструкції

З результатів порівняння (див. рис. 8.4) видно, що дані, отримані різними програмами, але на однакових розрахункових сітках показують повний збіг між собою.

Визначення глобальних номерів вузлів по лінії в небезпечному перетині конструкції здійснюється на підставі ескізу та даних розрахунків (див. рис. 8.1, 8.4).

Після запису отриманих номерів вузлів у відповідні вектори в коді **Lab_M_PDS_2D.xmcd** будуються епюри фізичних полів (рис. 8.5).

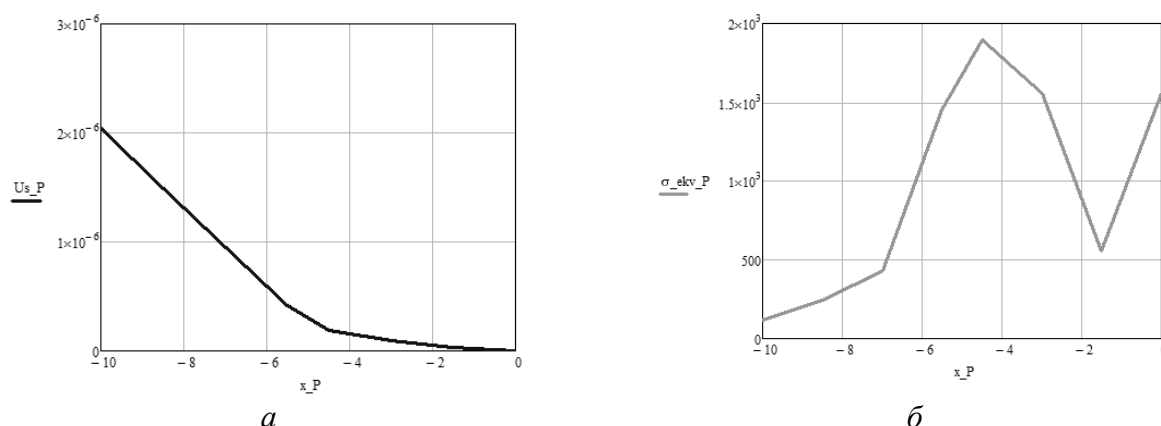


Рис. 8.5. Епюри побудовані в програмі **MathCad**: *a* – зміна сумарних переміщень; *б* – зміна еквівалентних напружень за Мізесом

Для розв’язання задачі ПНС використовується файл **Lab_M_PNS_2D.xmcd** (див. Е.2), який є програмним кодом написаним в системі **Mathcad** і який розроблено відповідно до постановки задачі (див. п. 1.2.2) та методики її числового розв’язання (див. підрозділ 3.2).

Зважаючи на достатнє методичне забезпечення (див. розділи 1, 3, 6) та докладно розглянутий приклад задачі ПДС, який є схожим із задачею ПНС, виконати роботу з адаптації файла **Lab_M_PNS_2D.xmcd** для проведення розрахунків за даними задачі пропонується самостійно.

8.2. Вісесиметрична задача напруженого стану

Умови вісесиметричної задачі наведено на рис. 8.6 і в табл. 8.4, 8.5 [6].

Табл. 8.4. Розміри фланця і значення тиску в його середині (див. рис. 8.6)

Номер матеріалу по табл. 8.5	D , мм	a , мм	b , мм	c , мм	d , мм	e , мм	f , мм	g , мм	h , мм	Тиск p , МПа
11	200	75	30	18	6	20	10	45	30	85

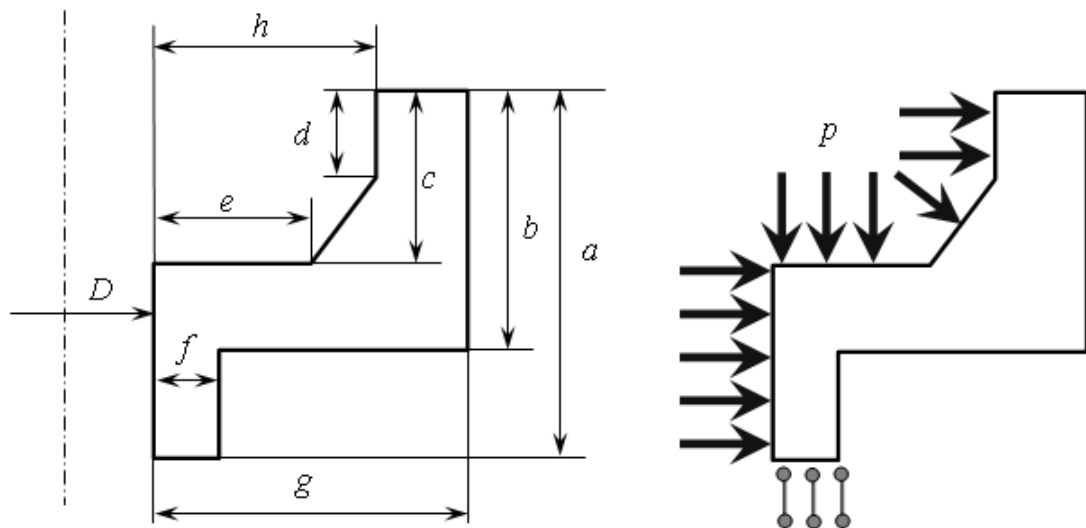


Рис. 8.6. Ескіз фланця і схема закріплення та навантаження: $\Delta T = 10 \text{ K}$, $g_y = -9.81 \text{ м/с}^2$

Табл. 8.5. Фізичні властивості матеріалу фланця та надлишковий тиск в його середині

Матеріал	Густина ρ , кг/м ³	Модуль пружності E , МПа	Коефіцієнт Пуассона ν	Границя плинності $[\sigma_T]$, МПа	Теплопро- відність λ , Вт/(м·К)	КЛТР) ⁸ β , К-1
11 Мідь	8900	$1,1 \times 10^5$	0,37	258,6	390	$2,4 \cdot 10^{-5}$

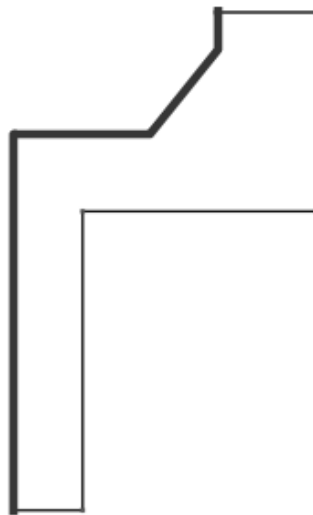


Рис. 8.7. До побудови епюр по лінії в небезпечному перетині конструкції

Для розв'язання вісесиметричної задачі використовується файл **Lab_M_AxiS_2D.xmcd** (див. Е.3), який є програмним кодом написаним в

⁸ КЛТР – коефіцієнт лінійного температурного розширення матеріалу

системі **Mathcad** і який розроблено відповідно до постановки задачі (див. п. 1.2.3) та методики її числового розв’язання (див. підрозділ 3.3). Тріангуляцію розрахункової області для розв’язання цієї задачі здійснено в програмі **Gmsh**. Для цього виконаємо такі операції:

1. Створимо текстовий файл **2D_axisym.geo**, використовуючи **CAD**-інструменти програми **Gmsh** (див. підрозділи 6.2, 6.3 та відповідний лістинг файла **2D.geo**) відповідно до заданих умов задачі (див. рис. 8.6, 8.8 і в табл. 8.4). Лістинг цього файла знаходиться нижче за текстом.
2. Завантажимо цей файл у програму **Gmsh**, згенеруємо трикутну сітку (рис. 8.9) та запишемо її у файлі **2D_axisym.msh** (див. підрозділи 6.2, 6.3).
3. У програмі **Gmsh** визначимо номери ліній моделі фланця для задання граничних умов у вигляді тиску відповідно до рис. 8.6 і табл. 8.4. Для цього треба скористатися такими командами **Gmsh**: **Tools**→**Visibility** або **Shift+Ctrl+V**)→**Tree browser**→**Model**→ **Elementary entities** →**line 1** → **Apply**. У результаті цих дій отримаємо, що лінії, які нас цікавлять, мають номери; 1, 2, 3, 4.
4. Виконаємо, подібно до підрозділу 7.3, деяке редагування і перетворення файла **2D_axisym.msh** з метою використання інформації, що міститься в ньому, у програмному коді **Lab_M_Axis_2D.xmcd**.
 - 4.1. Спочатку створимо файл **Gmsh_nodes_flan.dat**, у якому записуються номери вузлів та їх координати. Файл **Gmsh_nodes_flan.dat** створюється із файла **2D_axisym.msh** копіюванням **2D_axisym.msh** у файл **Gmsh_nodes_flan.dat**. Далі виконується корегування створеного файла **Gmsh_nodes_flan.dat** у текстовому редакторі. У файлі **Gmsh_nodes_flan.dat** спочатку видаляються перші 5 рядків, а саме такі:
\$MeshFormat
2.2 0 8
\$EndMeshFormat
\$Nodes
106
(тут 106 – це кількість вузлів, отриманих у результаті тріангуляції)
тобто до рядка з номером 1 на його початку, потім рядки до 106 номеру включно лишаються у файлі **Gmsh_nodes_flan.dat**, а рядки, починаючи з
\$EndNodes

видаляються із файла до його кінця.

І останньою операцією редагування цього файла є заміна "крапки" на "кому". Записуємо результат редагування та виходимо з редактора. Приклад фрагменту файла **Gmsh_nodes_flan.dat** наведено нижче за текстом.

```
1 100 0 0
2 100 57 0
3 120 57 0
4 130 69 0
5 130 75 0
...
```

- 4.2. Далі треба створити файл **Gmsh_elem_flan.dat**, у якому записується інформація про трикутні скінченні елементи. Файл **Gmsh_elem_flan.dat** також створюється із файла **2D_axisym.msh** аналогічним чином. Тобто **2D_axisym.msh** просто копіюється у файл **Gmsh_elem_flan.dat**. Далі виконується корегування створеного файла **Gmsh_elem_flan.dat**. У файлі **Gmsh_elem_flan.dat** спочатку видаляються перші рядки до рядка:

\$Elements

Потім видаляються рядки до рядка, у якому друге число (2-й стовець) дорівнює 2 (тут число 2 є ознакою трикутника). Далі переходимо в кінець файла та видаляємо останній рядок

\$EndElements

Записуємо результат редагування та виходимо із редактора. Приклад фрагменту файла **Gmsh_elem_flan.dat** наведено нижче за текстом.

```
59 2 2 0 1 91 36 37
60 2 2 0 1 58 36 91
61 2 2 0 1 51 75 58
62 2 2 0 1 46 47 70
63 2 2 0 1 31 78 64
...
```

- 4.3. І на кінець треба створити файл **El_Area2_Gmsh.dat**. Файл **El_Area2_Gmsh.dat** також створюється із текстового файла **2D_axisym.msh** (який записує програма-мешер **Gmsh**) за допомогою його копіювання у файл **El_Area2_Gmsh.dat**. Далі виконується редагування файла **El_Area2_Gmsh.dat** таким чином: спочатку видаляються всі рядки до рядка

\$Elements;

потім знов видаляються рядки до рядка, у якому у 2-у стовпці записано 1 (яка є ознакою лінійного елементу на лінії);

далі всі рядки з 1 у 2-у стовпці рядка лишаються у файлі;
 всі рядки, починаючи з рядка, у якому у 2-у стовпці записано 2
 (або інша цифра, але не 1) видаляються до кінця файла.

Приклад фрагменту лістингу файла **El_Area2_Gmsh.dat** на-
 ведено нижче за текстом.

```
10 1 2 0 1 1 10
11 1 2 0 1 10 11
12 1 2 0 1 11 12
13 1 2 0 1 12 13
14 1 2 0 1 13 14
15 1 2 0 1 14 15
```

...

5. На цьому, всі необхідні файли для програмного коду
Lab_M_Axis_2D.xmcd вже створено.

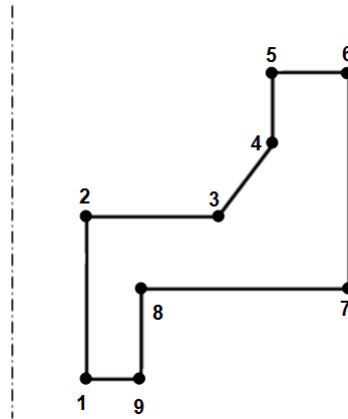


Рис. 8.8. Ескіз фланця з номерами точок для побудови геометрії в програмі **Gmsh**

Лістинг файла **2D_axisym.geo**.

```
// ініціалізація змінних
D=200;
a=75;
b=30;
c=18;
d=6;
e=20;
f=10;
g=45;
h=30;
x1 = D/2;
x2 = D/2;
x3 = D/2+e;
x4 = D/2+h;
x5 = D/2+h;
x6 = D/2+g;
x7 = D/2+g;
```

```

x8 = D/2+f;
x9 = D/2+f;
y1 = 0;
y2 = a-c;
y3 = a-c;
y4 = a-d;
y5 = a;
y6 = a;
y7 = a-b;
y8 = a-b;
y9 = 0;
// cl - кроки сітки в околі точок
cl1 = 5;
// точки Point(n) = {x, y, z, cl};
Point(1) = {x1, y1, 0, cl1};
Point(2) = {x2, y2, 0, cl1};
Point(3) = {x3, y3, 0, cl1};
Point(4) = {x4, y4, 0, cl1};
Point(5) = {x5, y5, 0, cl1};
Point(6) = {x6, y6, 0, cl1};
Point(7) = {x7, y7, 0, cl1};
Point(8) = {x8, y8, 0, cl1};
Point(9) = {x9, y9, 0, cl1};
// лінії
Line(1) = {1, 2};
Line(2) = {2, 3};
Line(3) = {3, 4};
Line(4) = {4, 5};
Line(5) = {5, 6};
Line(6) = {6, 7};
Line(7) = {7, 8};
Line(8) = {8, 9};
Line(9) = {9, 1};
// замкнуті контури ліній
Line Loop(11) = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9};
// поверхні
Plane Surface(1) = {11};

```

Тепер можна перейти до безпосереднього розв'язання задачі. Для цього в середовищі **Mathcad** треба завантажити файл **Lab_M_Axis_2D.xmcd**. Послідовно, переглядаючи лістинг цього файла спочатку підключити інструментами **Mathcad** файли **Gmsh_nodes_flan.dat** і **Gmsh_elem_flan.dat** у разі, якщо ці файли автоматично не були підключені.

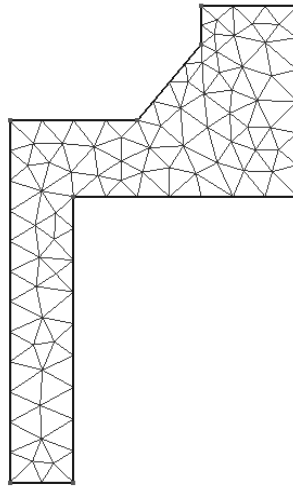


Рис. 8.8. Результат тріангуляції фланця в програмі **Gmsh**: вузлів – 106; скінченних елементів – 161

Далі, переглядаючи файл **Lab_M_Axis_2D.xmcd** у системі **Mathcad** треба також підключити файл **El_Area2_Gmsh.dat**. Потім необхідно задати значення фізичних властивостей матеріалу фланця (див. табл. 8.5).

Далі треба виконати розв’язання задачі напруженого стану шляхом послідовного перегляду файла **Lab_M_Axis_2D.xmcd** до місця запису результатів розрахунків фізичних полів. При цьому з’ясувати основні етапи розв’язання задачі (див. підрозділ 3.3): від формування глобальної матриці і вільного члена СЛАР та її розв’язання відносно переміщень до формування векторів складових переміщень, розрахунку напружень в СЕ та запасу міцності фланця (див. п. 1.2.5) і запису результатів розрахунків фізичних полів у файли **...\Result_1.dat** (дані, що відповідають *недеформованому* стану), **...\Result_1D.dat** (дані, що відповідають *деформованому* стану), **...\NNodes_Elements.dat**.

На підставі даних цих файлів аналогічно до підрозділів 6.1, 7.1 створюється текстовий файл **2D_Tec_M_Axis.dat** для перегляду результатів розрахунків фізичних полів у програмі-viewer **Tecplot 360** для недеформованого та деформованого станів конструкції (див. підрозділ 8.1).

Візуалізація результатів розрахунків напруженого стану фланця та їх порівняння з числовими даними отриманими за допомогою програмних продуктів **ANSYS** наведені на рис. 8.9.

З аналізу результатів порівняння (див. рис. 8.9) витікає, що дані, отримані різними програмами і на різних розрахункових сітках, збігаються між собою в межах (0,7–3,9) %.

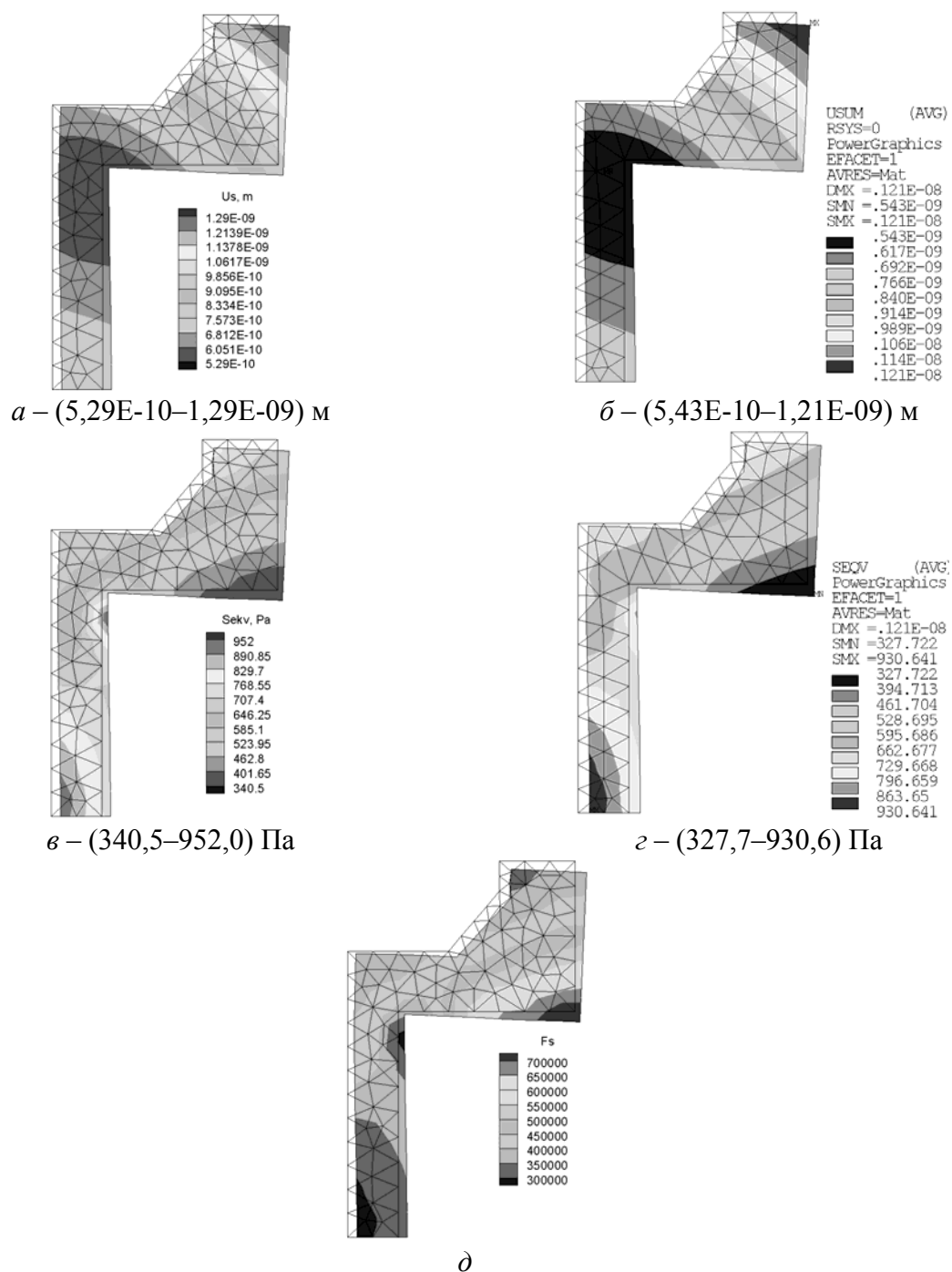


Рис. 8.9. Фізичні поля фланця під час розв'язання вісесиметричної задачі: а, в, д – код **Lab_M_PDS_2D.xmcd**; б, г – **ANSYS**; а, б – сумарні переміщення; в, г – еквівалентні напруження за Мізесом; д – запас міцності конструкції

Визначення глобальних номерів вузлів по лінії в небезпечному перетині конструкції здійснюється на підставі ескізу та даних розрахунків (див. рис. 8.6, 8.7).

Після запису отриманих номерів вузлів у відповідні вектори у коді **Lab_M_Axis_2D.xmcd** будуються епюри фізичних полів (рис. 8.10).

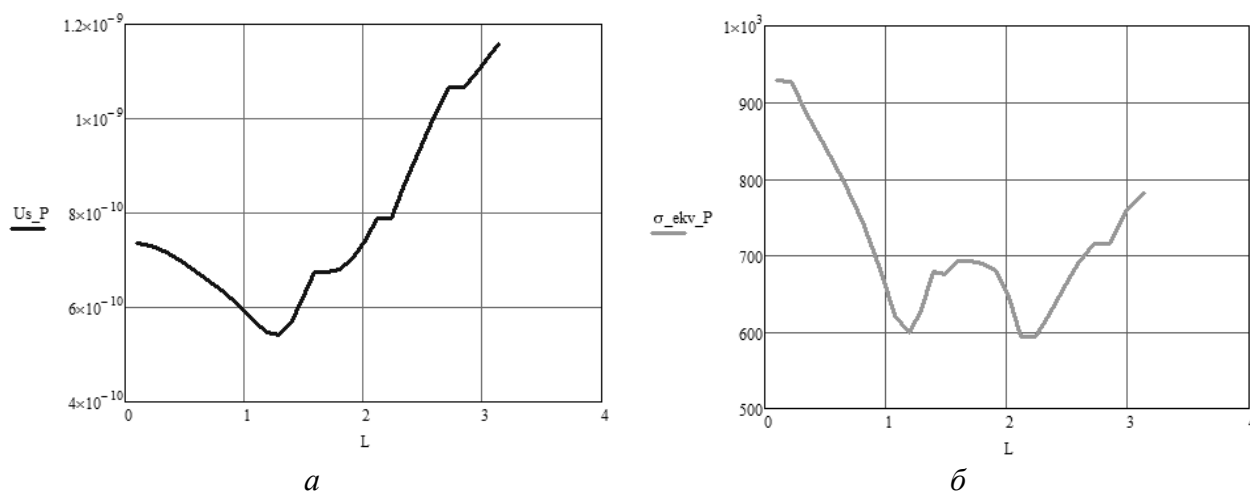


Рис. 8.10. Епюри побудовані в програмі **MathCad**: *a* – зміна сумарних переміщень; *б* – зміна еквівалентних напружень за Мізесом

8.3. Тривимірна задача напружено-деформованого стану

Умови задачі наведено на рис. 8.11–8.14 і в табл. 8.6, 8.7.

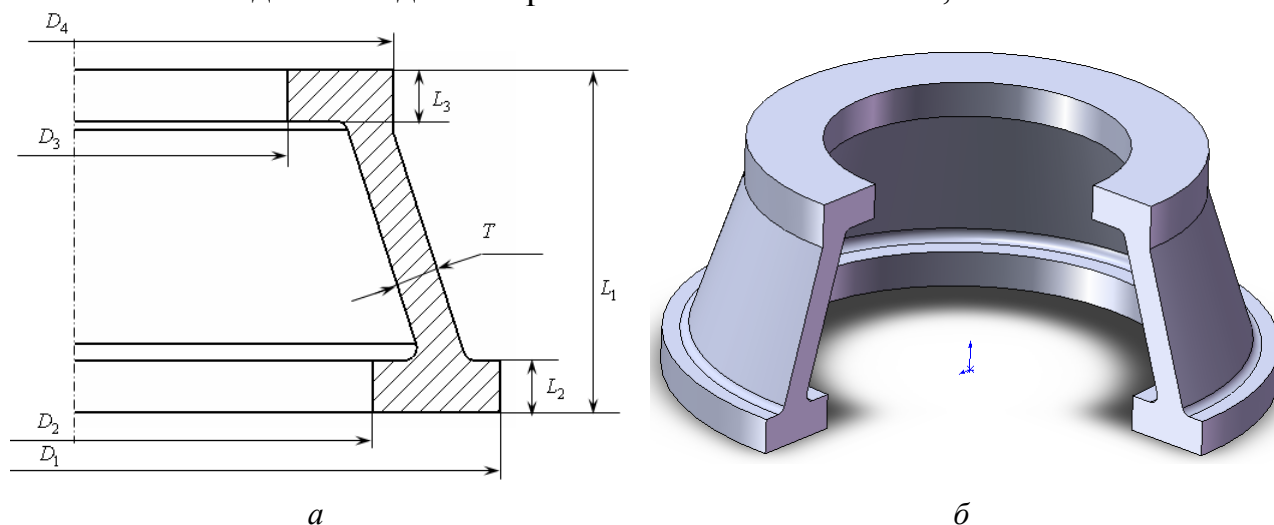


Рис. 8.11. Ескіз і твердотільна модель фланця: *a* – ескіз; *б* – твердотільна модель

Табл. 8.6. Розміри фланця відповідно до ескізу (див. рис. 8.11, *a*), матеріал і тиск

Номер матеріалу по табл. 8.7	D_1 , мм	D_2 , мм	D_3 , мм	D_4 , мм	L_1 , мм	L_2 , мм	L_3 , мм	T , мм	p , Па
8	200	140	100	150	80	12	15	10	100

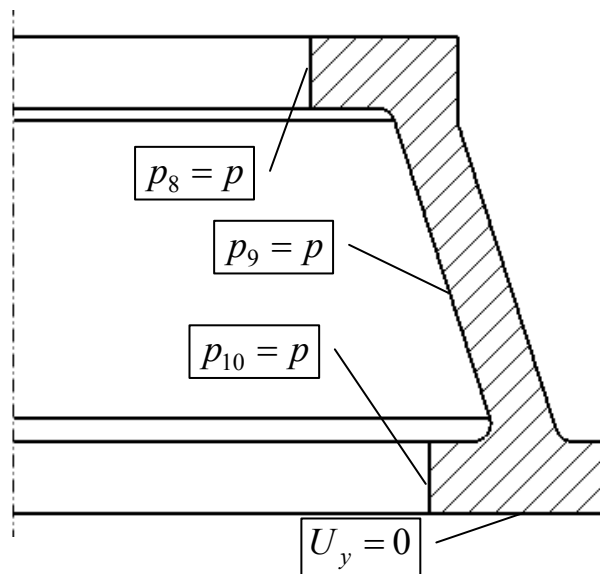


Рис. 8.12. Схема завдання граничних умов: тиску і закріплення

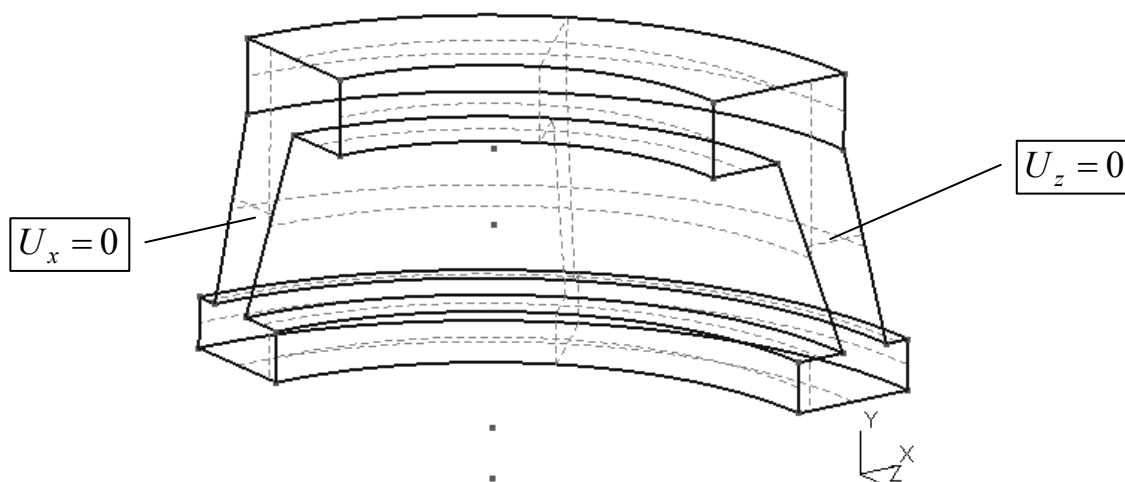


Рис. 8.13. До завдання граничних умов симетрії (або закріплення)

Табл. 8.7. Фізичні властивості матеріалу

Матеріал	Густина ρ , кг/м ³	Модуль пружності E , МПа	Коефіцієнт Пуассона ν	Границя плинності $[\sigma_T]$, МПа	Теплопро- відність λ , Вт/(м·К)	КЛТР) ⁹ β , К ⁻¹
8 Сталь холодно- катана	7800	$2,0 \times 10^5$	0,3	350,0	51,9	$1,17 \cdot 10^{-5}$

⁹ КЛТР – коефіцієнт лінійного температурного розширення матеріалу

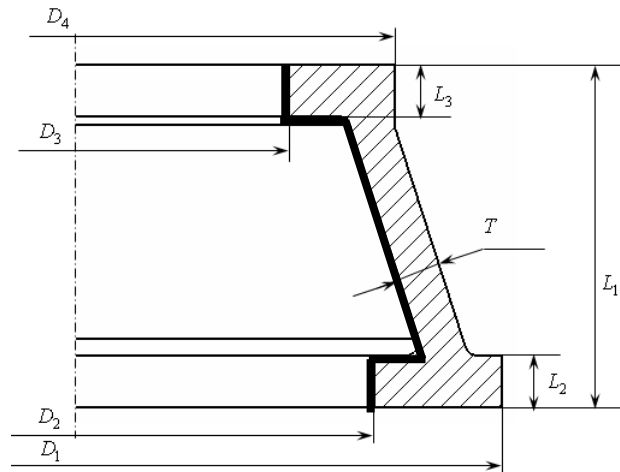


Рис. 8.14. До побудови епюр по лінії в небезпечному перетині конструкції

Для розв'язання задачі використовується файл **Lab_M_3D.xmcd** (див. Е.4), який є програмним кодом написаним в системі **Mathcad** і який розроблено відповідно до постановки задачі (див. п. 1.2.4) та методики її числового розв'язання (див. підрозділ 3.4). Для того, щоб скористатися цим кодом треба спочатку виконати підготовчі операції аналогічні підрозділу 7.3. Вони насамперед стосуються створення текстового файлу **Flan.geo** для програми **Gmsh**, який відповідає ескізу на рис. 8.11,а і табл. 8.6, завантаження цього файлу в **Gmsh** і генерації розрахункової тетраедної сітки та запису її у файл **Flan.msh**, визначення номерів поверхонь твердотільної моделі фланця для задання граничних умов тиску і закріплення (симетрії) відповідно до рис. 8.12 і 8.13 та створення файлів **Gmsh_nodes_flan.dat**, **Gmsh_elem_flan.dat** і **El_Area2_Gmsh.dat**.

Після закінчення виконання вказаних операцій файл **Lab_M_3D.xmcd** завантажується в систему **Mathcad** і розпочинається робота з адаптації програмного коду для розв'язання задачі НДС фланця.

Спершу вводяться фізичні властивості матеріалу за даними табл. 8.7. Далі, як і в файлі **Lab_T_3D.xmcd** (див. підрозділ 7.3), підключаються файли **Gmsh_nodes_flan.dat**, **Gmsh_elem_flan.dat** і **El_Area2_Gmsh.dat** у разі, якщо вони автоматично не підключилися.

Тепер треба виконати розв'язання задачі НДС шляхом послідовного перегляду файла **Lab_M_3D.xmcd** до місця запису результатів розрахунків фізичних полів. При цьому необхідно з'ясувати основні етапи розв'язання задачі (див. підрозділ 3.4): від формування глобальної матриці і вільного члена СЛАР та її розв'язання відносно переміщень до розрахунку компонент тензорів деформації та напружень в СЕ та глобальних вузлах, розрахунку еквівалентних напружень за Мізесом і запасу міцності в глобальних вузлах, запису результатів розрахунків фізичних полів у файли **...Result_1.dat** (дані, що

відповідають *недеформованому* стану), ...**Result_1D.dat** (дані, що відповідають *деформованому* стану), ...**NNodes_Elements.dat**. Під час виконання першого розрахунку НДС фланця враховується тільки навантаження надлишковим тиском його внутрішніх поверхонь. Далі, під час виконання інших розрахунків, додається гравітаційне та температурне навантаження. Для цього в коді **Lab_M_3D.xmcd** передбачено відповідні змінні. Так, наприклад, для врахування гравітаційного навантаження треба замість $g_y = 0$ задати $g_y = -9,81 \text{ м/с}^2$, а для врахування температурного навантаження замість $\Delta T = 0$ задати $\Delta T = 15 \text{ K}$.

На підставі даних цих файлів аналогічно до підрозділу 7.3 створюється текстовий файл **Gmsh_3D_Tec_M.dat** для перегляду результатів розрахунків фізичних полів у програмі-viewer **Tecplot 360** для недеформованого та деформованого станів конструкції. Приклад фрагменту лістингу файла **Gmsh_3D_Tec_M.dat** наведено нижче за текстом.

```

TITLE = "3D Finite-AREA Data"
VARIABLES="X","Y","Z","UX","UY","UZ","Us","SX","SY","SZ",
"Sekv","F",
      ZONE T = "Flan", N=                190, E=                503, F=FEPOINT,
ET=TETRAHEDRON
      0      -0.032782173061      -0.1 0      0      -1.10933806401895e-
010  1.10933806401895e-010      228.044412547467
-9.21924172465752      -4.9013342992098      236.901360489791
      6.75386581441331
      0.1 -0.032782173061      0      1.07186497941181e-010      0      0
1.07186497941181e-010      -5.47857384483294      -8.04652500928744
224.208936278398      232.358960118481      6.88589757495967
...
62      190      147      61
65      146      181      64
159      190      183      99
190      159      183      147
      ZONE T = "Flan_D", N=                190, E=                503, F=FEPOINT,
ET=TETRAHEDRON
      0      -0.032782173061      -0.106403237559586 0      0
-1.10933806401895e-010  1.10933806401895e-010      228.044412547467
-9.21924172465752      -4.9013342992098      236.901360489791
      6.75386581441331
0.106186938245055      -0.032782173061      0      1.07186497941181e-010
      0      0      1.07186497941181e-010      -5.47857384483294
-8.04652500928744  224.208936278398      232.358960118481
      6.88589757495967
...
62      190      147      61
65      146      181      64
159      190      183      99

```

...

Тут, як і в файлі **gmsb_3D_Tec_T_.dat** (див. підрозділ 7.3), в основному всі позначення збігаються, за виключенням рядка фізичних величин **"UX"**, **"UY"**, **"UZ"**, **"Us"**, **"SX"**, **"SY"**, **"SZ"**, **"Sekv"**, **"F"** і того, що оператор **ZONE T** = використовується двічі в тексті файла разом із різними іменами (**"Flan"** і **"Flan_D"**) та з числовими значеннями **VARIABLES** і глобальними номерами вузлів в СЕ. Це зроблено для реалізації можливості одночасної візуалізації як недеформованого, так і деформованого станів конструкції фланця.

Візуалізація результатів розрахунків НДС фланця конструкції, що наведена на рис. 7.15, та їх порівняння з числовими даними отриманими за допомогою програмних продуктів **ANSYS** наведені на рис. 8.15.

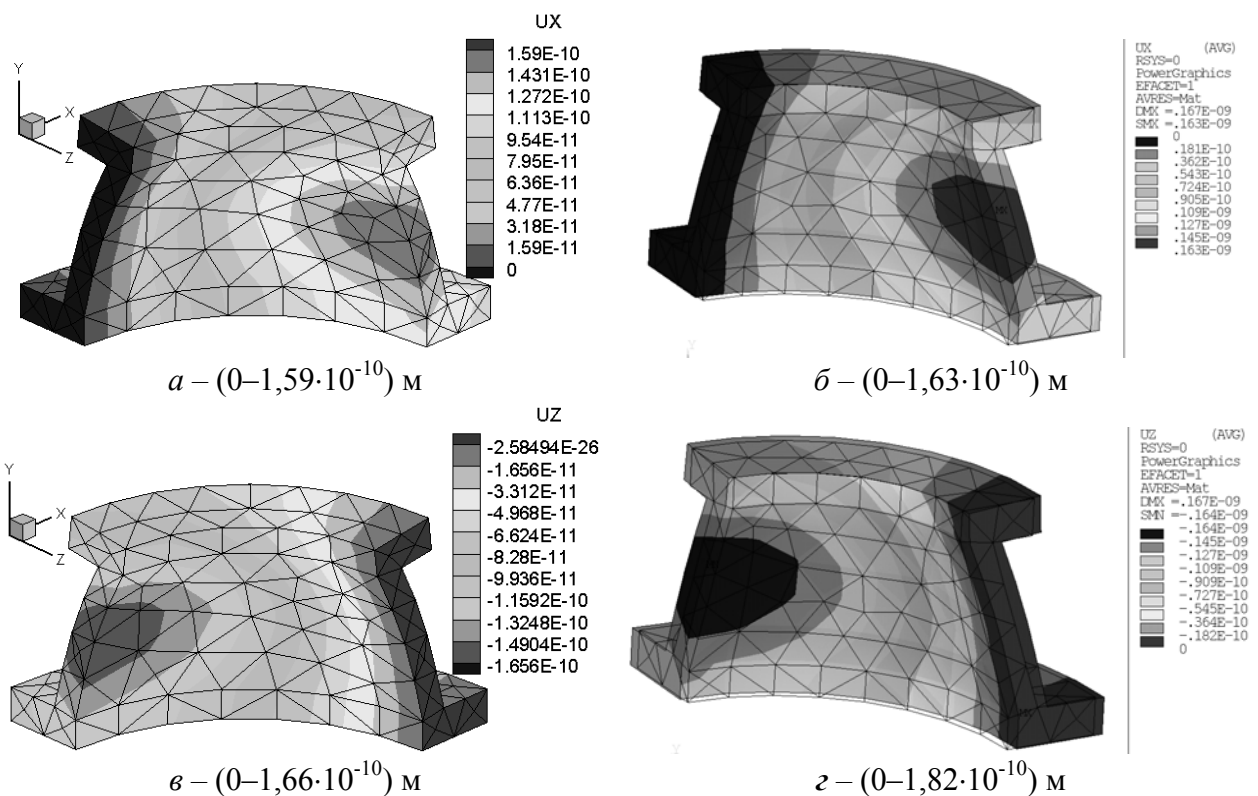


Рис. 8.15. Фізичні поля фланця під час розв'язання тривимірної задачі статичної пружності фланця: *a, в, д, ж* – код **Lab_M_3D.xmcd**; *б, г, е, и* – **ANSYS**; *a-е* – поля переміщень; *ж, и* – поле еквівалентних напружень за Мізесом

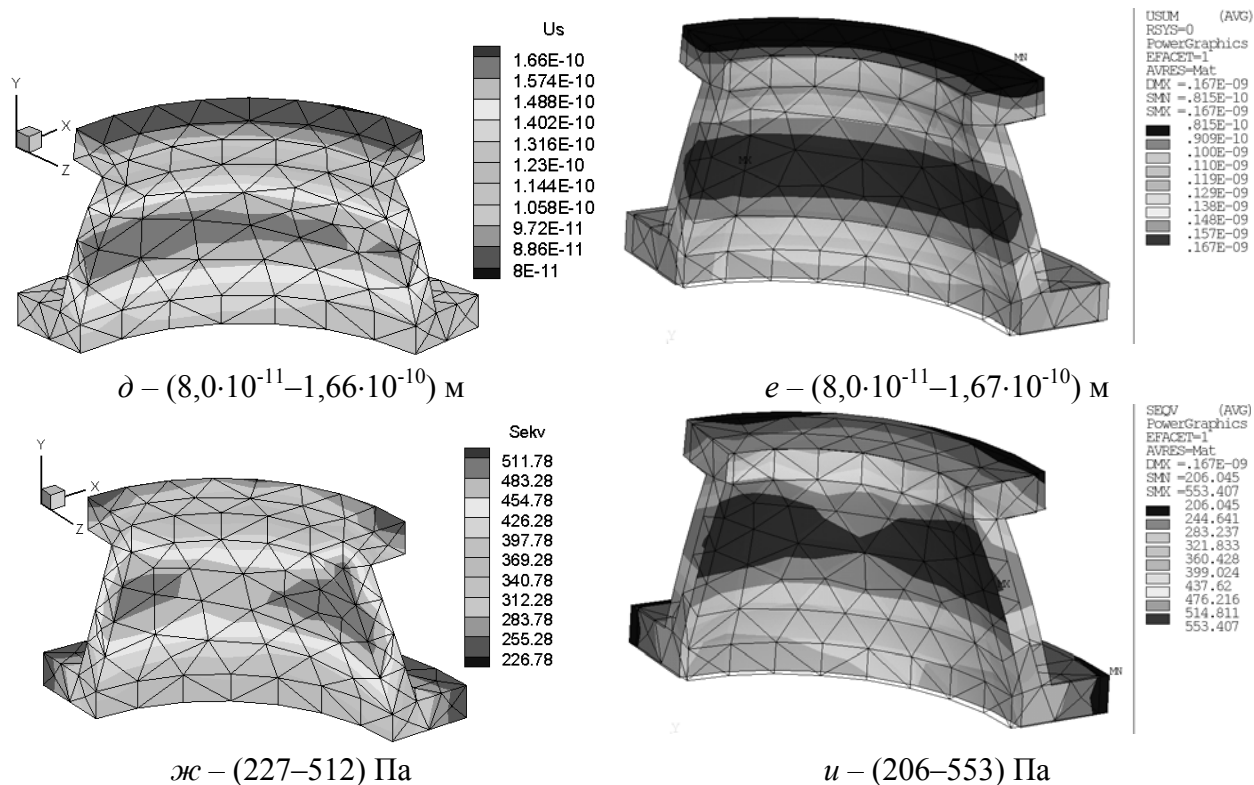


Рис. 8.15: Закінчення. (Див. також с. 209)

З аналізу результатів порівняння (див. рис. 8.15) витікає, що дані, отримані різними програмами і на різних розрахункових сітках, збігаються між собою в межах (7,4–8,8) %.

Визначення глобальних номерів вузлів по лінії в небезпечному перетині конструкції здійснюється аналогічно як у підрозділі 7.3.

Після запису отриманих номерів вузлів (див. рис. 7.20) у відповідний вектор у коді **Lab_M_3D.xmcd** будуються епюри фізичних полів (рис. 8.16).

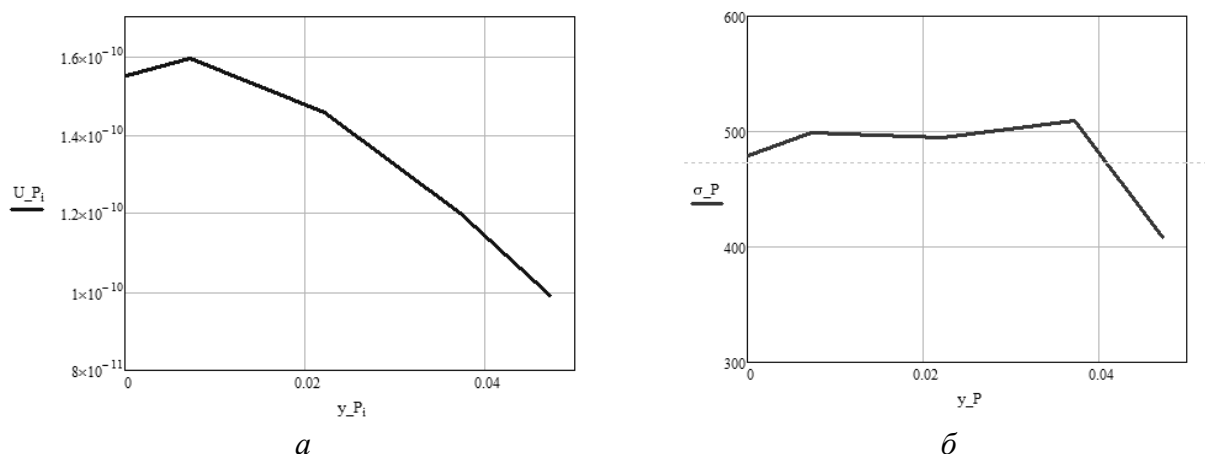


Рис. 8.16. Епюри побудовані в програмі **MathCad**: *a* – зміна сумарних переміщень; *б* – зміна еквівалентних напружень за Мізесом

8.4. НДС плоскої шарнірно-з'єднаної ферми

Умови задачі наведено на рис. 8.17 і в табл. 8.8, 8.9 [31].

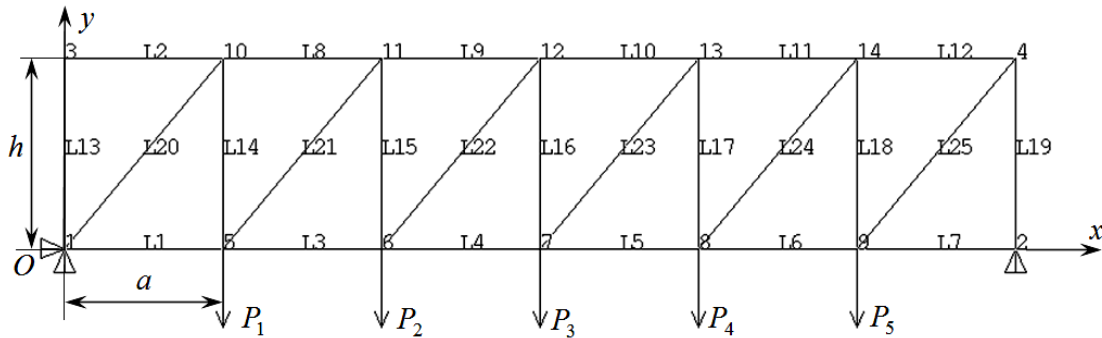


Рис. 8.17. Ескіз ферми зі вказівкою неявних розмірів, номерів складових елементів ферми, номерів шарнірних з'єднань (вузлів), схеми закріплень та навантажень: $\Delta T = 10 \text{ K}$;
 $g_y = -9.81 \text{ м/с}^2$

Табл. 8.8. Розміри ферми, матеріал і навантаження

Номер ма- теріалу з табл. 8.9	a , м	h , м	S , ($\cdot 10^{-3}$) м^2	P_1 , кН	P_2 , кН	P_3 , кН	P_4 , кН	P_5 , кН
5	10	12	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0

Табл. 8.9. Фізичні властивості матеріалу

Матеріал	Густина ρ , кг/м^3	Модуль пружності E , МПа	Коефіцієнт Пуассона ν	Границя плинності $[\sigma_T]$, МПа	Теплопро- відність λ , $\text{Вт/(м}\cdot\text{К)}$	КЛТР) ¹⁰ β , K^{-1}
5 Проста вуглецева сталь	7800	$2,1 \times 10^5$	0,28	220,6	43	$1,3 \cdot 10^{-5}$

Спочатку, відповідно до ескізу ферми (див. рис. 8.17), створюються таблиці двовузлових СЕ (лінійних) (табл. 8.10) для проведення розрахунків за числовою методикою наведеною в підрозділі 3.5 і тривузлових СЕ (трикутних) (табл. 8.11) для перегляду результатів розрахунків у програмі-viewer **Тесplot 360**.

Для розв'язання задачі використовується файл **Lab_Ferma_2D.xmcd** (див. Е.4), який є програмним кодом написаним у системі **Mathcad** і який розроблено відповідно методики її числового розв'язання (див. підрозділ 3.5).

¹⁰ КЛТР – коефіцієнт лінійного температурного розширення матеріалу

Табл. 8.10. Двовузлові елементи ферми відповідно до рис. 8.17

Номери вузлів	Номер СЕ	Номери вузлів	Номер СЕ	Номери вузлів	Номер СЕ
1 2	1	11 12	10	9 14	19
3 4	2	12 13	11	1 4	20
2 5	3	13 14	12	2 10	21
5 6	4	1 3	13	5 11	22
6 7	5	2 4	14	6 12	23
7 8	6	5 10	15	7 13	24
8 9	7	6 11	16	8 14	25
4 10	8	7 12	17		
10 11	9	8 13	18		

Табл. 8.11. Трикутні елементи та координати вузлів відповідно до рис. 8.17

Номер вузла	Номер СЕ	x, м	y, м	Номер вузла
1 2 4	1	0	0	1
1 4 3	2	10	0	2
2 5 10	3	0	12	3
2 10 4	4	10	12	4
5 6 11	5	20	0	5
5 11 10	6	30	0	6
6 7 12	7	40	0	7
6 12 11	8	50	0	8
7 8 13	9	60	0	9
7 13 12	10	20	12	10
8 9 14	11	30	12	11
8 14 13	12	40	12	12
		50	12	13
		60	12	14

Файл **Lab_Ferma_2D.xmcd** завантажується в систему **Mathcad** і розпочинається робота із заповнення матриць глобальних вузлів (див. табл. 8.11) та номерів вузлів двовузлових СЕ (див. табл. 8.10) та зміни векторів, у яких задаються умови закріплення та вузлового навантаження ферми відповідно до рис. 8.17.

Під час виконання першого розрахунку НДС ферми враховуються тільки вузлові навантаження. Для врахування гравітаційного та температурного навантаження в подальших розрахунках в коді **Lab_Ferma_2D.xmcd** треба задати $g_y = -9,81 \text{ м/с}^2$ та $\Delta T = 15 \text{ К}$, відповідно.

Тепер необхідно виконати розв'язання задачі НДС шляхом послідовного перегляду файла **Lab_Ferma_2D.xmcd** до місця запису результатів розрахунків фізичних полів. При цьому необхідно з'ясувати основні етапи

розв'язання задачі (див. підрозділ 3.5): від формування глобальної матриці і вільного члена СЛАР та її розв'язання відносно переміщень до формування векторів складових переміщень, розрахунку напружень в СЕ та коефіцієнта напруження ферми (див. п. 1.2.5) і запису результатів розрахунків фізичних полів у файли **...\Result_1.dat** (дані, що відповідають *недеформованому* стану), **...\Result_1D.dat** (дані, що відповідають *деформованому* стану), **...\NNodes_Elements.dat**.

На підставі даних цих файлів аналогічно до попередніх задач створюється текстовий файл **2D_Tec_LabF.dat** для перегляду недеформованого та деформованого станів конструкції ферми у програмі-viewer **Tecplot 360**.

Приклад лістингу файла **2D_Tec_LabF.dat** наведено нижче за текстом.

```

TITLE = "2D Finite-AREA Data"
VARIABLES="X, m", "Y, m",
ZONE T = "Area", N=          14, E=          12, F=FEPOINT,
ET=Triangle
DT=(SINGLE SINGLE)
0      0
10     0
0      12
10     12
20     0
30     0
40     0
50     0
60     0
20     12
30     12
40     12
50     12
60     12
1      2      4
1      4      3
2      5      10
2      10     4
5      6      11
5      11     10
6      7      12
6      12     11
7      8      13
7      13     12
8      9      14
8      14     13
ZONE T = "Area_D", N=  14, E=  12, F=FEPOINT, ET=Triangle
0      0
10.33947  -2.604317
1.244722  12

```

```

11.244722 9.884519
20.611045 -2.762393
30.814727 -2.467843
40.950515 -1.833823
51.018409 -0.97349
61.018409 0
20.905252 9.13984
30.633677 9.43439
40.429995 10.06841
50.294207 10.928743
60.226313 11.902233
1      2      4
1      4      3
2      5      10
2      10     4
5      6      11
5      11     10
6      7      12
6      12     11
7      8      13
7      13     12
8      9      14
8      14     13

```

Візуалізацію результатів розрахунків плоскої ферми з використанням файла **2D_Tec_LabF.dat** наведено на рис. 8.18.

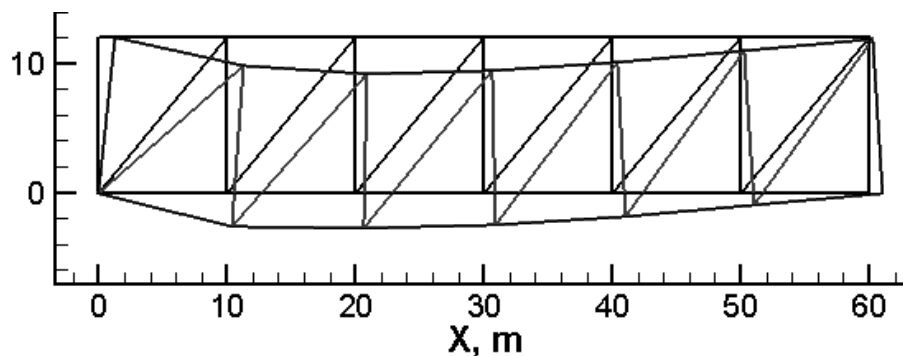


Рис. 8.18. Деформований та недеформований стан плоскої ферми

Порівняння результатів розрахунків напружень з числовими даними отриманими за допомогою програмних продуктів **ANSYS** наведено в табл. 8.12.

З результатів порівняння (див. табл. 8.12) видно, що дані, отримані різними програмами повністю збігаються між собою.

Визначення глобальних номерів вузлів по лініях в небезпечних перетинах конструкції здійснюється на підставі ескізу (див. рис. 8.17).

Табл. 8.12. Порівняння результатів розрахунків напружень по елементах ферми

Вид ПЗ	Номери СЕ ферми					
	1	5	10	15	20	25
σ (Па), Lab_Ferma_2D.xmcd	$6,9444 \cdot 10^5$	$2,7778 \cdot 10^5$	$-4,1667e5$	$-1,6667e5$	$-1,0847 \cdot 10^6$	$2,1695 \cdot 10^5$
σ (Па), ANSYS	$6,9444 \cdot 10^5$	$2,7778 \cdot 10^5$	$-4,1667e5$	$-1,6667e5$	$-1,0847 \cdot 10^6$	$2,1695 \cdot 10^5$

Після запису отриманих номерів вузлів у відповідні вектори в коді **Lab_Ferma_2D.xmcd** будуються епюри фізичних полів (рис. 8.19).

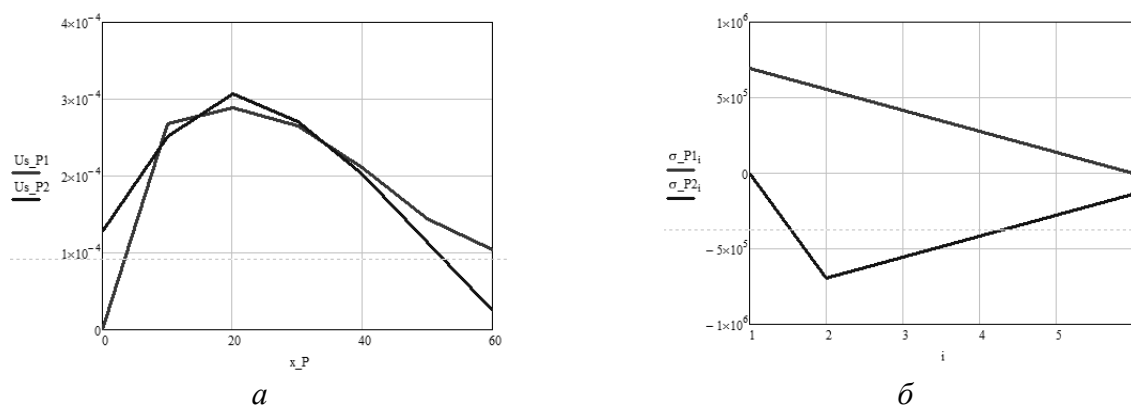


Рис. 8.19. Епюри фізичних величин у небезпечних перетинах конструкції ферми:
а – переміщення, м; б – напруження, Па

Запитання для самоконтролю

1. Перелік вихідних даних для розв'язання задач ПДС і ПНС консольної балки.
2. Порядок виконання триангуляції плоскої фігури (консольної балки) в ручному режимі.
3. Структура файлу **Tecplot 360** для перевірки правильності триангуляції плоскої фігури.
4. Порядок задання граничних умов у файлах **Lab_M_PDS_2D.xmcd** і **Lab_M_PNS_2D.xmcd**.
5. Основні етапи розв'язання задач ПДС і ПНС та їх аналіз.
6. Структура файлу **Tecplot 360** для візуалізації результатів розрахунків задач ПДС і ПНС під час їх розв'язання з використанням трикутних СЕ.
7. Різниця між файлами **Mathcad** для розв'язання задач ПДС і ПНС з використанням трикутних елементів.
8. Перелік вихідних даних для розв'язання вісесиметричної задачі напружено деформованого стану фланця.

9. Файл програми **Gmsh** для побудови двовимірної геометрії фланця. Триангуляція та визначення номерів граничних ліній фланця.
10. Порядок виконання триангуляції двовимірного фланця в програмі **Gmsh**.
11. Порядок створення файлів **Gmsh_nodes_flan.dat**, **Gmsh_elem_flan.dat** і **El_Area2_Gmsh.dat** та їх призначення.
12. Основні етапи розв'язання вісесиметричної задачі напруженого стану та їх аналіз.
13. Вихідні дані для розв'язання тривимірної задачі НДС фланця.
14. Файл програми **Gmsh** для побудови тривимірної геометрії фланця (основні функції **Gmsh**). Триангуляція тетраедрами та визначення номерів поверхонь фланця.
15. Особливості задання граничних умов для розв'язання тривимірної задачі НДС.
16. Структура файла **Tecplot 360** для візуалізації результатів розрахунків тривимірної задачі НДС.
17. Побудова епюр у програмі **MathCad**.
18. Вихідні дані задачі НДС плоскої шарнірно-з'єднаної ферми.
19. Особливості дискретизації та візуалізації задачі НДС ферми.
20. Основні етапи розв'язання задачі НДС плоскої шарнірно-з'єднаної ферми та їх аналіз.

9. ПРИКЛАД РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ УСТАЛЕНОГО РУХУ В'ЯЗКОЇ РІДИНИ

Умови вісесиметричної задачі гідродинаміки головки для екструзії пластмаси наведено на рис. 9.1 і в табл. 9.1 [6].

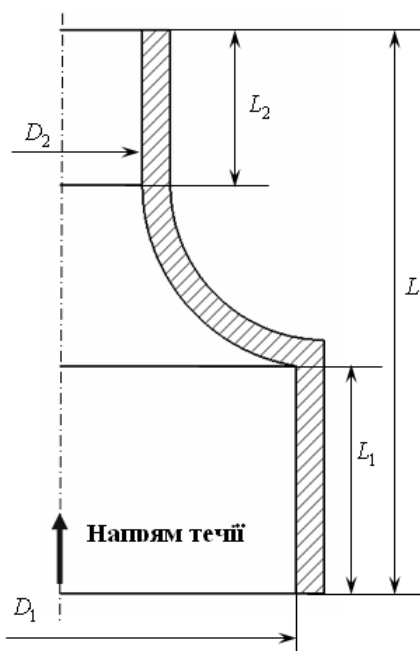


Рис. 9.1. Ескіз екструзійної головки: $g_z = -9.81 \text{ м/с}^2$ – складова прискорення вільного падіння

Табл. 9.1. Розміри головки і значення нормальної складової швидкості на її вході (див. рис. 9.1)

D_1 , мм	D_2 , мм	L , мм	L_1 , мм	L_2 , мм	$V_n = V_z$, м/с
170	90	165	70	55	1,0

Фізичні властивості матеріалу пластмаси: $\mu = 0,045 \text{ Па}\cdot\text{с}$ – динамічна в'язкість; $\rho = 820 \text{ кг/м}^3$ – густина.

Граничні умови для розв'язання задачі: на вході в головку задаються компоненти швидкості – $V_z = 1 \text{ м/с}$ (див. табл. 9.1) і $V_r = 0 \text{ м/с}$ та тиск – $p = 0 \text{ Па}$; на виході – також $p = 0 \text{ Па}$; на стінках головки – умови прилипання $V_r = V_z = 0 \text{ м/с}$; на осі головки – $V_r = 0 \text{ м/с}$.

Для розв'язання вісесиметричної задачі використовується файл **Lab_pipe2_2D.xmcd** (див. Ж), який є програмним кодом написаним в системі **Mathcad** і який розроблено відповідно до постановки задачі (див. п. 1.3) та методики її числового розв'язання (див. підрозділ 4.3). Розрахункова об-

ласть задачі обмежується матеріалом, що знаходиться в головці. Тріангуляцію розрахункової області для розв'язання цієї задачі виконаємо в програмі **Gmsh**. Для цього виконаємо операції аналогічні до підрозділу 8.2.

Лістинг файла для побудови геометрії головки **2D_pipe2.geo** в програмі **Gmsh** наведено нижче за текстом.

```
// ініціалізація змінних
r1_=0.085;
r2_=0.045;
l1=0.07;
l2=0.055;
l =0.165;
r1 = 0;
r2 = r1_;
r3 = r1_;
r4 = r1_; // центр кола
r5 = r2_;
r6 = r2_;
r7 = 0;
z1 = 0;
z2 = 0;
z3 = l1;
z4 = l-l2; // центр кола
z5 = l-l2;
z6 = l;
z7 = l;
// c1 - кроки сітки в околі точок
c11 = 0.0045;
// точки Point(n) = {x, y, z, c1};
Point(1) = {r1, z1, 0, c11};
Point(2) = {r2, z2, 0, c11};
Point(3) = {r3, z3, 0, c11};
Point(4) = {r4, z4, 0, c11};
Point(5) = {r5, z5, 0, c11};
Point(6) = {r6, z6, 0, c11};
Point(7) = {r7, z7, 0, c11};
// лінії
Line(1) = {1, 2};
Line(2) = {2, 3};
Circle(3) = {3, 4, 5};
Line(4) = {5, 6};
Line(5) = {6, 7};
Line(6) = {7, 1};
// замкнуті контури ліній
Line Loop(11) = {1, 2, 3, 4, 5, 6};
// поверхні
Plane Surface(1) = {11};
```

Після запису файла розрахункової сітки **2D_pipe2.msh**, відповідно до методики підрозділу 8.2 отримуємо такі файли: **Gmsh_nodes_pipe.dat** – файл координат вузлів; **Gmsh_elem_pipe.dat** – файл номерів вузлів трикутних СЕ; **E1_Area2_Gmsh_pipe.dat** – файл номерів вузлів одновимірних СЕ по лініях головки.

У програмі **Gmsh** також визначаються номери граничних ліній головки для задання граничних умов відповідно до завдання (див. підрозділ 7.3).

Результат тріангуляції головки показано на рис. 9.2.

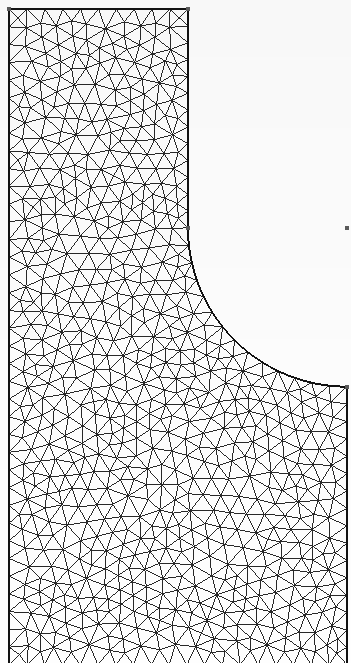


Рис. 9.2. Результат тріангуляції фланця в програмі **Gmsh**: вузлів – 748; скінченних елементів – 1383

Тепер можна перейти до безпосереднього розв’язання задачі. Для цього у середовищі **Mathcad** треба завантажити файл **Lab_pipe2_2D.xmcd**. Послідовно, переглядаючи лістинг цього файла спочатку необхідно підключити інструментами **Mathcad** файли **Gmsh_nodes_pipe.dat**, **Gmsh_elem_pipe.dat** і **E1_Area2_Gmsh_pipe.dat** у разі, якщо ці файли автоматично не були підключені.

Далі перевіряється правильність формування матриць для задання граничних умов задачі по лініях головки відповідно до завдання. Потім треба задати значення фізичних властивостей пластмаси відповідно до завдання.

Тепер можна виконати розв’язання задачі гідродинаміки шляхом послідовного перегляду файла **Lab_pipe2_2D.xmcd** до місця запису результатів розрахунків фізичних полів. При цьому з’ясувати основні етапи розв’язання задачі (див. підрозділ 4.3): від формування глобальної матриці і вільного члена СЛАР та її розв’язання (методом регуляризації за Тихоновим [32] або ме-

тодом спряжених градієнтів [19] (див. підрозділ 5.2 і додаток Г)) відносно компонент вектора швидкості і статичного тиску до формування векторів складових швидкості та тиску і запису результатів розрахунків фізичних полів у файли ...**Result_1.dat**, ...**NNodes_Elements.dat**.

На підставі даних цих файлів аналогічно до попередніх задач створюється текстовий файл **Rez_2D_Tec_Stoks2.dat** для перегляду результатів розрахунків у програмі-viewer **Tecplot 360**. Приклад фрагменту лістингу цього файла наведено нижче за текстом.

```
TITLE = "2D Finite-AREA Data"
VARIABLES="R, m", "Z, m", "Vr, m/s", "Vz, m/s", "Vs, m/s", "p,
Pa",
ZONE T = "Area", N= 748, E= 1383, F=FEPOINT, ET=Triangle
0      0      0      0.999999999999999  0.999999999999999  0
0.085  0      0      0.00333088902845675  0.00333088902845675 -
31.1090335188374
0.085  0.07 0      0      0      -17.2500656935215
0.085  0.11 0      0      0      0
...
666  409  281
720  283  341
161  283  720
230  666  281
608  238  360
...
```

Візуалізацію результатів розрахунків задачі усталеної в'язкої течії рідини в екструзійній головці із використанням файла **Rez_2D_Tec_Stoks2.dat** наведено на рис. 9.3.

Деяка немонотонність результатів розв'язків (див. рис. 9.3), особливо це стосується полів радіальної швидкості і тиску пояснюється сильною сингулярністю матриці СЛАР.

Для подолання відміченого недоліку можна скористатися методом усталення для розв'язання стаціонарної задачі, тобто через розв'язання нестаціонарної задачі [12].

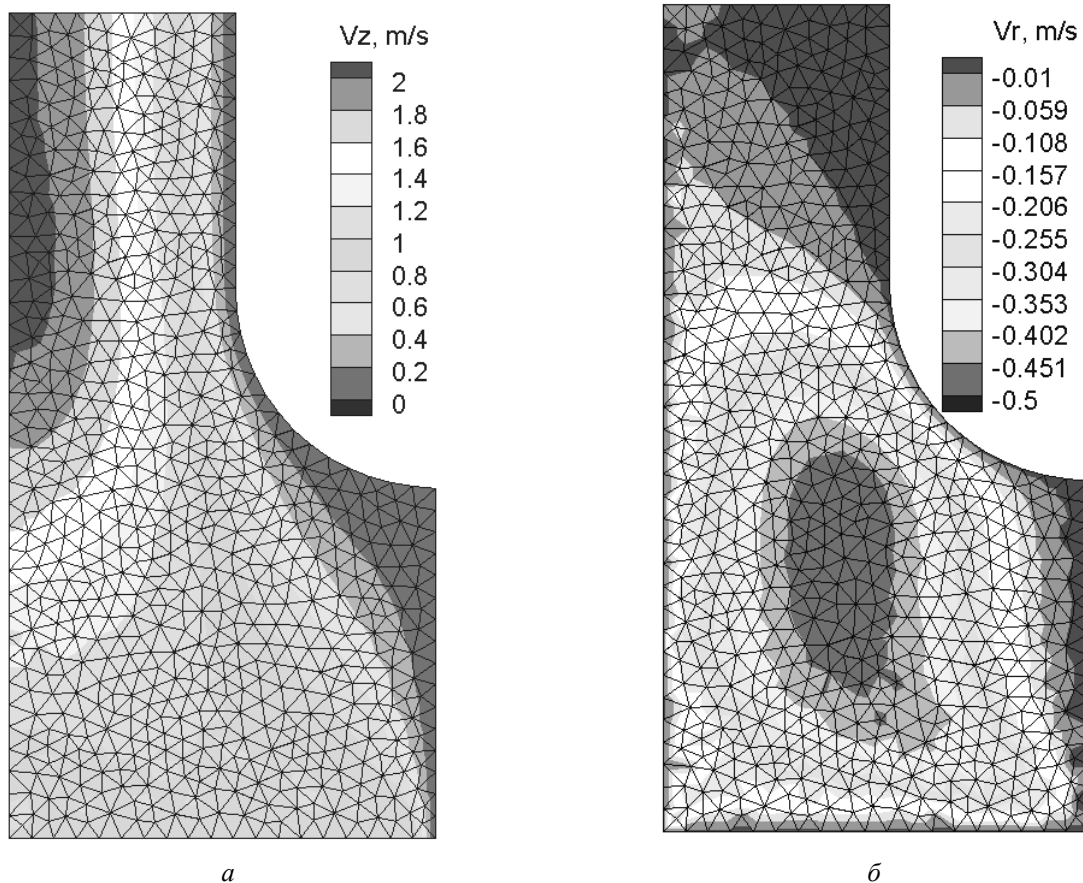


Рис. 9.3. Результати розв'язання задачі усталеної течії в'язкої рідини в наближення рівнянь Стокса: *a* – поле осьової швидкості; *б* – поле радіальної швидкості

Запитання для самоконтролю

1. Перелік вихідних даних для розв'язання задачі усталеної течії в'язкої рідини в екстремальній головці.
2. Порядок створення файла геометрії головки для програми **Gmsh** та виконання тріангуляції плоскої фігури.
3. Формування допоміжних файлів **Gmsh_nodes_pipe.dat**, **Gmsh_elem_pipe.dat** і **El_Area2_Gmsh_pipe.dat** та їх призначення.
4. Граничні умови задачі та порядок їх задання у файлі **Lab_pipe2_2D.xmcd**.
5. Основні етапи розв'язання задачі гідродинаміки та їх аналіз.
6. Структура файла **Tecplot 360** для візуалізації результатів розрахунків задачі усталеної течії в'язкої рідини для її розв'язання з використанням трикутних СЕ.
7. Методи розв'язання систем дискретних рівнянь з погано обумовленими матрицями.

Застосування L -координат для аналітичного визначення інтегралів

А.1. Інтеграл по довжині сторони трикутного скінченного елементу

Обчислення однократних інтегралів (по довжині відрізка) з добутками в підінтегральних функціях можна виконати точно, якщо застосувати L -координати та відповідні інтегральні формули [7, 8, 10, 13] виду

$$I_\ell = \int_\ell L_1^a L_2^b d\ell = \frac{a!b!}{(a+b+1)!} \ell, \quad (\text{A.1.1})$$

Розглянемо інтеграл по площі бічної сторони трикутного СЕ з добутками матриць коефіцієнтів форми виду

$$I_S = \int_S [N]^T [N] dS. \quad (\text{A.1.2})$$

Виконуючи заміни $L_1 = N_i$, $L_2 = N_j$, $L_3 = N_k$ і $dS = t d\ell$ неважко перетворити (А.1.2) до вигляду

$$I_S = \int_S [N]^T [N] dS = \int_{\ell_{ij}} \begin{bmatrix} L_1^2 & L_1 L_2 & L_1 L_3 \\ L_2 L_1 & L_2^2 & L_2 L_3 \\ L_3 L_1 & L_3 L_2 & L_3^2 \end{bmatrix} d\ell = I_\ell, \quad (\text{A.1.3})$$

де $t=1$ – товщина трикутного СЕ, м; ℓ_{ij} – довжина сторони трикутного СЕ між вузлами i і j , м.

Як видно, в (А.1.3) входять два типи добутків у підінтегральних функціях, а саме квадрат L_1^2, L_2^2, L_3^2 та перехресний добуток $L_1 L_2, L_1 L_3, L_2 L_1, \dots$

Використовуючи формулу (А.1.1) до інтегралу від добутку у вигляді квадрату, отримуємо

$$\int_{\ell_{ij}} L_1^2 d\ell = \int_{\ell_{ij}} L_1^2 L_2^0 d\ell = \frac{2!0!}{(2+0+1)!} \ell_{ij} = \frac{2}{6} \ell_{ij}, \quad (\text{A.1.4})$$

і для інтегралу від перехресного добутку будемо мати

$$\int_{\ell_{ij}} L_1 L_2 d\ell = \int_{\ell_{ij}} L_1^1 L_2^1 d\ell = \frac{1!1!}{(1+1+1)!} \ell_{ij} = \frac{1}{6} \ell_{ij}. \quad (\text{A.1.5})$$

Аналогічні вирази неважко отримати для решти інтегралів (A.1.3).

Формулу (A.1.1) можна також застосувати до інтегралів виду $I_S = \int_S [N]^T dS$. Виконуючи аналогічні заміни, що були застосовані при перетворенні (A.1.3), отримуємо

$$I_S = \int_S [N]^T dS = \int_{\ell} \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix} d\ell = I_{\ell}. \quad (\text{A.1.6})$$

Використовуючи формулу (A.1.1) до (A.1.6), знаходимо

$$\int_{\ell_{ij}} L_1 d\ell = \int_{\ell_{ij}} L_1^1 L_1^0 d\ell = \frac{1!0!}{(1+0+1)!} \ell_{ij} = \frac{1}{2} \ell_{ij}. \quad (\text{A.1.7})$$

Решта з двох інтегралів (A.1.6) буде мати той самий результат, що і (A.1.7).

A.2. Інтеграл по площі трикутного скінченного елемента

Обчислення двократних інтегралів (по площі трикутника) з добутками в підінтегральних функціях можна також виконати точно, якщо застосувати L -координати та відповідні інтегральні формули [7, 8, 10, 13] виду

$$\int_A L_1^a L_2^b L_3^c dA = \frac{a!b!c!}{(a+b+c+2)!} 2A. \quad (\text{A.2.1})$$

Інтеграл по об'єму трикутного СЕ, який включає матрицю коефіцієнтів форми

$$I_V = \int_V [N]^T dS, \quad (\text{A.2.2})$$

виконуючи заміни $L_1 = N_i$, $L_2 = N_j$, $L_3 = N_k$ і $dV = d(A \cdot 1) = dA$ неважко пе-

ретворити до вигляду

$$I_V = \int_V [N]^T dS = \int_A \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix} dA = I_A, \quad (\text{A.2.3})$$

де A – площа СЕ, м^2 .

У результаті розкладання (A.2.3) на три інтеграли і, застосовуючи до них формулу (A.2.1) знаходимо, що:

$$\text{для } \int_V L_1 dV = \int_A L_1 dA = \int_A L_1^1 L_2^0 L_3^0 dA = \frac{1!0!0!}{(1+0+0+2)!} 2A = \frac{1! \cdot 2A}{3!} = \frac{2A}{6} = \frac{A}{3},$$

$$\text{для } \int_V L_2 dV = \int_A L_2 dA = \int_A L_1^0 L_2^1 L_3^0 dA = \frac{0!1!0!}{(0+1+0+2)!} 2A = \frac{A}{3},$$

$$\text{для } \int_V L_3 dV = \int_A L_3 dA = \int_A L_1^0 L_2^0 L_3^1 dA = \frac{0!0!1!}{(0+0+1+2)!} 2A = \frac{A}{3}.$$

А.3. Інтеграл по площі грані тетраедного скінченного елемента

Для обчислення таких двократних інтегралів (за площею грані тетраедра) використовується відома формула (A.2.1). Для застосування цієї формули до інтегралу виду $\int_A [N]^T [N] dA$ у підінтегральній функції виконується заміна функцій форми на L -координати. Після чого отримуємо

$$I_A = \int_A [N]^T [N] dA = \int_A \begin{bmatrix} L_1^2 & L_1 L_2 & L_1 L_3 & L_1 L_4 \\ L_2 L_1 & L_2^2 & L_2 L_3 & L_2 L_4 \\ L_3 L_1 & L_3 L_2 & L_3^2 & L_3 L_4 \\ L_4 L_1 & L_4 L_2 & L_4 L_3 & L_4^2 \end{bmatrix} dA, \quad (\text{A.3.1})$$

де A – площа грані тетраедного СЕ, м^2 .

У результаті застосування (A.2.1) до інтегралів (A.3.1) отримуємо

$$\int_A L_1^2 L_2^0 L_3^0 dA = \frac{2!0!0!}{(2+0+0+2)!} 2A = \frac{4}{4!} A = 2 \frac{A}{12}. \quad (\text{A.3.2})$$

$$\int_A L_1^1 L_2^1 L_3^0 dA = \frac{1!1!0!}{(1+1+0+2)!} 2A = \frac{2}{4!} A = \frac{A}{12}. \quad (\text{A.3.3})$$

Аналогічні вирази неважко отримати для решти інтегралів (A.3.1).

Формулу (A.2.1) також можна застосувати до інтегралів виду $I_A = \int_A [N]^T dA$. Виконуючи аналогічні заміни, що були застосовані при перетворенні (A.3.1), отримуємо

$$\int_A [N]^T dA = \int_A \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{bmatrix} dA, \quad (\text{A.3.4})$$

Використовуючи формулу (A.2.1) до (A.3.4), знаходимо

$$\int_A L_1^1 L_2^0 L_3^0 dA = \frac{1!0!0!}{(1+0+0+2)!} 2A = \frac{2}{3!} A = \frac{A}{3}. \quad (\text{A.3.5})$$

Решта з трьох інтегралів (A.3.4) буде мати той самий результат, що і (A.3.5).

A.4. Інтеграл по об'єму тетраедного скінченного елемента

Обчислення трикратних інтегралів (по об'єму тетраедра) можна також виконати точно, якщо застосувати L -координати та відповідні інтегральні формули [7, 8, 10, 13] виду

$$\int_V L_1^a L_2^b L_3^c L_4^d dV = \frac{a!b!c!d!}{(a+b+c+d+3)!} 6V. \quad (\text{A.4.1})$$

де V – об'єм тетраедного СЕ, м^3 .

Для застосування формули (A.4.1) до інтегралу виду $\int_V [N]^T dV$ у підінтегральній функції виконується заміна функцій форми на L -координати. Після чого отримуємо

$$I_V = \int_V [N]^T dV = \int_V \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{bmatrix} dV. \quad (\text{A.4.2})$$

У результаті застосування (A.4.1) до інтегралів (A.4.2) отримуємо

$$\int_V L_1^1 L_2^0 L_3^0 L_4^0 dV = \frac{1!0!0!0!}{(1+0+0+0+3)!} 6V = \frac{6V}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{V}{4}. \quad (\text{A.4.3})$$

Неважко впевнитися, що решта інтегралів (A.4.2) буде мати такий самий результат, що і (A.4.3).

Застосування перетворення Кірхгофа для розв'язання нелінійної задачі теплопровідності з фазовим переходом I роду

Нехай залежність теплопровідності матеріалу від температури змінюється за графіком, наведеним на рис. Б.1.

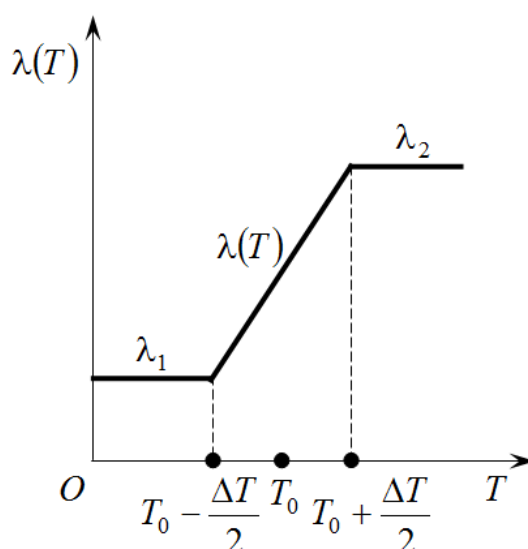


Рис. Б.1. Графік зміни теплопровідності від температури в матеріалі з фазовим переходом 1-го роду: ΔT – інтервал згладжування; T_0 – температура фазового переходу

Аналітичний вираз для $\lambda(T)$ відповідно до рис. Б.1 має вигляд:

$$\lambda(t) = \begin{cases} \lambda_1, & t < t_0 - \frac{\Delta t}{2}; \\ \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\Delta t} (t - t_0) + \frac{\lambda_2 + \lambda_1}{2}, & t \in \left[t_0 - \frac{\Delta t}{2}; t_0 + \frac{\Delta t}{2} \right]; \\ \lambda_2, & t > t_0 + \frac{\Delta t}{2}. \end{cases} \quad (\text{Б.1})$$

Знайдемо пряме перетворення Кірхгофа $\Lambda(T) = \int_0^T \lambda(T) dT$.

Розглянемо три випадки:

$$1. \quad T < T_0 - \frac{\Delta T}{2}.$$

$$\text{Тоді } \Lambda(T) = \int_0^T \lambda_1 dT = \lambda_1 T.$$

$$2. T \in \left[T_0 - \frac{\Delta T}{2}; T_0 + \frac{\Delta T}{2} \right].$$

Тоді будемо мати:

$$\Lambda(T) = \int_0^T \lambda(T) dT = \int_0^{T_0 - \frac{\Delta T}{2}} \lambda(T) dT + \int_{T_0 - \frac{\Delta T}{2}}^T \lambda(T) dT = \lambda_1 \left(T_0 - \frac{\Delta T}{2} \right) + \int_{T_0 - \frac{\Delta T}{2}}^T \left[\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\Delta T} (T - T_0) + \frac{\lambda_2 + \lambda_1}{2} \right] dT =$$

$$\left| \text{заміна } t - \left(t_0 - \frac{\Delta t}{2} \right) = u, (t - t_0) + \frac{\Delta t}{2} = u \Rightarrow (t - t_0) = u - \frac{\Delta t}{2} \right|,$$

тоді

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\Delta T} (T - T_0) + \frac{\lambda_2 + \lambda_1}{2} &= \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\Delta T} \left(u - \frac{\Delta T}{2} \right) + \frac{\lambda_2 + \lambda_1}{2} = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\Delta T} u - \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\Delta T} \frac{\Delta T}{2} + \\ &+ \frac{\lambda_2 + \lambda_1}{2} = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\Delta T} u - \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2} + \frac{\lambda_2 + \lambda_1}{2} = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\Delta T} u - \frac{\lambda_2}{2} + \frac{\lambda_2}{2} + \frac{\lambda_1}{2} + \frac{\lambda_1}{2} = \\ &= \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\Delta T} u + \lambda_1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \lambda_1 \left(T_0 - \frac{\Delta T}{2} \right) + \int_0^{T - \left(T_0 - \frac{\Delta T}{2} \right)} \left[\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\Delta T} u + \lambda_1 \right] du = \\ &= \lambda_1 \left(T_0 - \frac{\Delta T}{2} \right) + \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2\Delta T} \left(T - T_0 + \frac{\Delta T}{2} \right)^2 + \\ &+ \lambda_1 \left(T - T_0 + \frac{\Delta T}{2} \right) = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2\Delta T} \left(T - T_0 + \frac{\Delta T}{2} \right)^2 + \lambda_1 T. \end{aligned} \tag{Б.2}$$

Отже, для $T \in \left[T_0 - \frac{\Delta T}{2}; T_0 + \frac{\Delta T}{2} \right]$ отримуємо

$$\Lambda(T) = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2\Delta T} \left(T - T_0 + \frac{\Delta T}{2} \right)^2 + \lambda_1 T. \tag{Б.3}$$

Перетворимо (Б.2) до виду зручному для знаходження зворотного перетворення Кірхгофа $\Lambda^{-1}(T)$

$$\begin{aligned}\Lambda(T) &= \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2\Delta T} \left[(T - T_0)^2 + (T - T_0)\Delta T + \frac{\Delta T^2}{4} \right] + \lambda_1 T = \\ &= \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2\Delta T} (T - T_0)^2 + \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2} (T - T_0) + \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{8} \Delta T + \lambda_1 T.\end{aligned}\tag{Б.4}$$

3. $T > T_0 + \frac{\Delta T}{2}$:

$$\Lambda(T) = \int_0^T \lambda(T) dT = \int_0^{T_0 + \frac{\Delta T}{2}} \lambda(T) dT + \int_{T_0 + \frac{\Delta T}{2}}^T \lambda(T) dT,$$

з використанням виразу (Б.3) для першого інтегралу, отримуємо

$$\begin{aligned}&= \Lambda\left(T_0 + \frac{\Delta T}{2}\right) + \lambda_2 \left(T - T_0 - \frac{\Delta T}{2}\right) = \lambda_1 \left(T_0 + \frac{\Delta T}{2}\right) + \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2\Delta T} \left(T_0 + \frac{\Delta T}{2} - T_0 + \frac{\Delta T}{2}\right)^2 \\ &+ \lambda_2 (T - T_0) - \lambda_2 \frac{\Delta T}{2} = \lambda_1 T_0 + \lambda_1 \frac{\Delta T}{2} + \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2} \Delta T + \lambda_2 (T - T_0) - \lambda_2 \frac{\Delta T}{2} = \\ &\lambda_1 T_0 + \lambda_1 \frac{\Delta T}{2} + \lambda_2 \frac{\Delta T}{2} - \lambda_1 \frac{\Delta T}{2} + \lambda_2 (T - T_0) - \lambda_2 \frac{\Delta T}{2} = \\ &= \lambda_1 T_0 + \lambda_2 (T - T_0).\end{aligned}$$

Тоді:

$$\Lambda(T) = \begin{cases} \lambda_1 T, & T < T_0 - \frac{\Delta T}{2}; \\ \lambda_1 T + \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2\Delta T} (T - T_0)^2 + \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2} (T - T_0) + \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{8} \Delta T, & T \in \left[T_0 - \frac{\Delta T}{2}; T_0 + \frac{\Delta T}{2}\right]; \\ \lambda_1 T_0 + \lambda_2 (T - T_0), & T > T_0 + \frac{\Delta T}{2}. \end{cases}$$

При цьому $\varphi = \Lambda(T)$ змінюється так:

– на першому інтервалі від 0 до $\lambda_1 T_0 - \lambda_1 \frac{\Delta T}{2}$;

- на другому інтервалі від $\lambda_1 T_0 - \lambda_1 \frac{\Delta T}{2}$ до $\lambda_1 T_0 + \lambda_2 \frac{\Delta T}{2}$;
- на третьому інтервалі від $\lambda_1 T_0 + \lambda_2 \frac{\Delta T}{2}$ до ∞ .

Тоді зворотне перетворення Кірхгофа $T = \Lambda^{-1}(T)$ за умови $\lambda_1 < \lambda_2$ (див. рис. Б. 1) має вигляд:

$$\Lambda^{-1}(T) = \begin{cases} \frac{\varphi}{\lambda_1}, & \varphi < \lambda_1 T_0 - \lambda_1 \frac{\Delta T}{2}; \\ \sqrt{\frac{\lambda_2 \lambda_1 \Delta T^2}{(\lambda_2 - \lambda_1)^2} - \frac{2(\lambda_1 T_0 - \varphi) \Delta T}{\lambda_2 - \lambda_1}} - \frac{(\lambda_2 + \lambda_1) \Delta T}{2(\lambda_2 - \lambda_1)} + T_0, & \varphi \in \left[\lambda_1 T_0 - \lambda_1 \frac{\Delta T}{2}; \lambda_1 T_0 + \lambda_2 \frac{\Delta T}{2} \right]; \\ \frac{\varphi - \lambda_1 T_0}{\lambda_2} + T_0, & \varphi > \lambda_1 T_0 + \lambda_2 \frac{\Delta T}{2}. \end{cases} \quad (\text{Б.5})$$

За умови $\lambda_1 > \lambda_2$ зворотне перетворення Кірхгофа набуває вигляду:

$$\Lambda^{-1}(T) = \begin{cases} \frac{\varphi}{\lambda_1}, & \varphi < \lambda_1 T_0 - \lambda_1 \frac{\Delta T}{2}; \\ -\sqrt{\frac{\lambda_2 \lambda_1 \Delta T^2}{(\lambda_2 - \lambda_1)^2} - \frac{2(\lambda_1 T_0 - \varphi) \Delta T}{\lambda_2 - \lambda_1}} - \frac{(\lambda_2 + \lambda_1) \Delta T}{2(\lambda_2 - \lambda_1)} + T_0, & \varphi \in \left[\lambda_1 T_0 - \lambda_1 \frac{\Delta T}{2}; \lambda_1 T_0 + \lambda_2 \frac{\Delta T}{2} \right]; \\ \frac{\varphi - \lambda_1 T_0}{\lambda_2} + T_0, & \varphi > \lambda_1 T_0 + \lambda_2 \frac{\Delta T}{2}. \end{cases} \quad (\text{Б.6})$$

Описана методика за граничних умов І роду дає змогу безітераційно розв'язувати стаціонарну задачу типу Стефана і може бути застосована не тільки для МСЕ, але і до інших числових методів, наприклад, таких як методи граничних елементів і скінченних різниць.

Приклад програмного коду розв'язання СЛАР зі стрірковою матрицею

Нехай маємо СЛАР із розрідженою матрицею A і вектором вільних членів b виду (програмний код Mathcad)

ORIGIN $\equiv$ 1 Індксація масивів з 1

$$A := \begin{pmatrix} 6 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 3 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 9 & 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 11 & 4 & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 10 & 1 & 0 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 & 9 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 3 & 2 & 15 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 6 & 7 & 16 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 4 & 5 & 17 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$b := \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 6 \\ 7 \\ 5 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$|A| = 1.832 \times 10^9$ детермінант матриці СЛАР

$N := 10$ розмірність СЛАР

$M := 4$ число верхніх (нижніх)код-діагоналей матриці

Ширина стрічки матриці $2M+1$

Схема пакування матриці A - $LD=i+(j-1)*N$, причому $A_{ii} \neq 0$

NE - число елементів A після упаковки

1Створення стріркової матриці з матриці A

Визначення індексів початку і кінця стрічки в рядках A

```
nStartEnd := for j ∈ 1..N
               nStartEndj,1 ← 1 if j ≤ M + 1
               nStartEndj,1 ← nStartEndj-1,1 + 1 otherwise
               nStartEndj,2 ← M + 1 if j = 1
               nStartEndj,2 ← nStartEndj-1,2 + 1 if j > 1 ∧ nStartEndj-1,2 < N
               nStartEndj,2 ← N otherwise
               nStartEnd
```

	1	2
1	1	5
2	1	6
3	1	7
4	1	8
nStartEnd = 5	1	9
6	2	10
7	3	10
8	4	10
9	5	10
10	6	10

Запис матриці A у стрічковому виді VE, коду упаковки LD та пірахунок числа елементів стрічки NE

```

VE_LD_NE:=
  L ← 0
  for j ∈ 1..N
    for i ∈ nStartEndj,1..nStartEndj,2
      L ← L + 1
      VE_LD_NEL,2 ← i + (j - 1) · N
      VE_LD_NEL,1 ← Aj,i
  NE ← L
  VE_LD_NE1,3 ← NE
  VE_LD_NE

```

NE := VE_LD_NE_{1,3} = 70

```

VE:=
  for i ∈ 1..NE
    VEi ← VE_LD_NEi,1
  VE

LD:=
  for i ∈ 1..NE
    LDi ← VE_LD_NEi,2
  LD

```

Ініціалізація векторів

i := 1..NE

IN_i := 0

M2 := M N1 := N - 1

i := 1..N

B_i := b_i

2Метод Гауса для стрічкової матриці VE

Прямий хід

```

X := LJJ ← 1
for J ∈ 1..N1
    JJ ← J + (J - 1) · N
    for L ∈ LJJ..NE
        if LDL = JJ
            LJJ ← L
            break
    INJ ← LJJ
    M2 ← M2 + 1
    M2 ← N if M2 > N
    II ← J + 1
    LIJ ← LJJ + M
    for I ∈ II..M2
        LJK ← LJJ
        IJ ← J + (I - 1) · N
        for L ∈ LIJ..NE
            if LDL = IJ
                LIJ ← L
                break
        R ←  $\frac{VE_{LIJ}}{VE_{LJJ}}$ 
        LIK ← LIJ
        for K ∈ II..M2
            LIK ← LIK + 1
            LJK ← LJK + 1
            VELIK ← VELIK - R · VELJK
        BI ← BI - R · BJ

```

Зворотний хід

```


$$X_N \leftarrow \frac{B_N}{VE_{NE}}$$

M1  $\leftarrow$  N
for J  $\in$  1..N1
    K  $\leftarrow$  N1 - J + 1
    LKK  $\leftarrow$  INK
    LKL  $\leftarrow$  LKK
    S  $\leftarrow$  0
    LL  $\leftarrow$  K + 1
    M1  $\leftarrow$  M1 - 1 if J > M
    for L  $\in$  LL..M1
        LKL  $\leftarrow$  LKL + 1
        S  $\leftarrow$  S + VELKL · XL
    
$$X_K \leftarrow \frac{(B_K - S)}{VE_{LKK}}$$

X

```

3 Розв'язок

X =

	1
1	-0.083
2	0.121
3	-0.263
4	0.345
5	0.716
6	0.433
7	-0.022
8	-0.269
9	1.452·10 ⁻⁵
10	0.234

Перевірка

A · X - b =

	1
1	0
2	0
3	0
4	-0
5	0
6	0
7	0
8	0
9	0
10	0

Приклад програмного коду розв'язання СЛАР з погано обумовленою матрицею методом спряжених градієнтів

Розглянемо СЛАР виду $Ax = b$.

Програмний код Mathcad

ORIGIN≡ 1

Індексація масивів з 1

$$A := \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \quad b := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 4.63 \times 10^{-4} \quad |A| \rightarrow 0$$

$$x0 := b$$

$$J0 := A^T \cdot A \cdot x0 - A^T \cdot b \quad p0 := J0$$

$$\alpha0 := \frac{\sum J0^2}{\sum (A \cdot p0)^2}$$

$$x1 := x0 - \alpha0 \cdot p0$$

Розв'язання задачі за алгоритмом наведеним у підрозділі 5.2

```

xx:= for k ∈ 1..20
    Jk ← AT · A · x1 - AT · b
    βk ←  $\frac{(A^T \cdot A \cdot p0) \cdot Jk}{\sum (A \cdot p0)^2}$ 
    pk ← Jk - βk · p0
    αk ←  $\frac{\sum Jk^2}{\sum (A \cdot pk)^2}$ 
    xk ← x1 - αk · pk
    p0 ← pk
    x1 ← xk
xx ← xk
xx

```

Розв'язок

$$xx = \begin{pmatrix} 27 \\ -192 \\ 210 \end{pmatrix}$$

Перевірка

$$A \cdot xx - b = \begin{pmatrix} -0 \\ 0 \\ -0 \end{pmatrix}$$

Приклади програмних кодів Mathcad для розв'язання стаціонарних задач теплопровідності

Д.1. Плоска задача теплопровідності. Лінійні трикутні СЕ

Програмний код **Lab_T_P_2D.xmcd** розроблено за числовою методикою, що наведена в розділі 2 (див. підрозділ 2.2, п. 2.2.1), та супроводжується необхідними рисунками і коментарями.

Файл Lab_T_P_2D.xmcd

стаціонарна теплопровідність 2D плоска задача

ORIGIN ≡ 1 Індексація масивів з 1

Nnod_gl := 21 кількість глобальних вузлів

nEl := 24 кількість елементів

M := 3 кількість вузлів в елементі

Матриця координат вузлів

XYgl :=

-5.0	0.3
-4.0	0.3
-4.0	1.0
-5.0	1.0
-4.5	0.65
-4.0	0.0
0.0	0.0
-2.0	0.0
0.0	1.0
-2.0	1.0
-3.2	0.46
-1.0	0.5
-10.0	0.0
-5.0	0.0
-8.333	0.0
-6.667	0.0
-10.0	1.0
-6.667	1.0
-8.333	1.0
-5.667	0.46
-9.167	0.5

Матриця номерів вузлів скінченних елементів

El_nod :=

2	5	1	1
1	5	4	2
5	3	4	3
2	3	5	4
11	3	2	5
11	10	3	6
8	12	10	7
10	12	9	8
12	7	9	9
8	7	12	10
10	11	8	11
11	6	8	12
2	6	11	13
20	14	1	14
20	16	14	15
17	21	19	16
19	21	15	17
21	13	15	18
17	13	21	19
16	20	18	20
20	4	18	21
1	4	20	22
18	19	16	23
19	15	16	24

Граничні умови - 1-го роду - не задані, але матриця Node_GU1 формується з нульовими значеннями для забезпечення універсальності коду

$i := 1 \dots \text{Nnod_gl}$

$\text{Node_GU1}_{i,1} := i$ $\text{Node_GU1}_{i,2} := 0$ $\text{Node_GU1}_{i,3} := 0$

Node_GU1 =

	1	2	3
1	1	0	0
2	2	0	0
3	3	0	0
4	4	0	0
5	5	0	0
6	6	0	0
7	7	0	0
8	8	0	0
9	9	0	0
10	10	0	0
11	11	0	0
12	12	0	0
13	13	0	0
14	14	0	0
15	15	0	0
16	16	0	...

Тут в Node_GU1 перший стовпець це глобальні номери вузлів, другий ознака того, що у вузлі задана температура (може бути 0 або 1), 3-й - стовпець - значення температури

Граничні умови - 2-го роду - не задані, але матриця EI_GU2 формується з нульовими значеннями для забезпечення універсальності коду

$i := 1 \dots \text{nEI}$

$\text{EI_GU2}_{i,1} := 0$ $\text{EI_GU2}_{i,2} := 0$ $\text{EI_GU2}_{i,3} := 0$
 $\text{EI_GU2}_{i,4} := i$ $\text{EI_GU2}_{i,5} := 0$ $\text{EI_GU2}_{i,6} := 0$ $\text{EI_GU2}_{i,7} := 0$

EI_GU2 =

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	1	0	0	0
2	0	0	0	2	0	0	0
3	0	0	0	3	0	0	0
4	0	0	0	4	0	0	0
5	0	0	0	5	0	0	0
6	0	0	0	6	0	0	0
7	0	0	0	7	0	0	0
8	0	0	0	8	0	0	0

Тут в EI_GU2 перші 3 стовпці це сторони i-j, j-k, k-i, в яких задано густину теплового потоку q (може бути 0 або 2), 4-й - номер CE, 5-й - значення q на 1-й стороні CE, 6-й - значення q на 2-й стороні CE, 7-й - значення q на 3-й стороні CE,

Граничні умови - 3-го роду

$$\begin{aligned} \alpha 1 &:= 25 & \text{Tr}1 &:= 400 & \alpha 2 &:= 10 & \text{Tr}2 &:= 320 \\ \alpha 3 &:= 35 & \text{Tr}3 &:= 270 & \alpha 4 &:= 5 & \text{Tr}4 &:= 350 \end{aligned}$$

$$\text{El_GU3} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha 3 & \text{Tr}3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 0 & \alpha 4 & \text{Tr}4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 6 & 0 & 0 & \alpha 4 & \text{Tr}4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha 4 & \text{Tr}4 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 10 & \alpha 1 & \text{Tr}1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 11 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 12 & 0 & 0 & \alpha 1 & \text{Tr}1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 14 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 15 & 0 & 0 & \alpha 2 & \text{Tr}2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 16 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha 4 & \text{Tr}4 \\ 0 & 0 & 0 & 17 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 18 & 0 & 0 & \alpha 2 & \text{Tr}2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 19 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 20 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 21 & 0 & 0 & \alpha 4 & \text{Tr}4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 22 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 23 & \alpha 4 & \text{Tr}4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 24 & 0 & 0 & \alpha 2 & \text{Tr}2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Тут в El_GU3 перші 3 стовпці це сторони i-j, j-k, k-i, в яких задано ГУ 3-го роду (може бути 0 або 3), 4-й - номер СЕ, 5-й,6-й - значення α і Tr на 1-й стороні СЕ, відповідно, 7-й,8-й - значення α і Tr на 2-й стороні СЕ, відповідно, 9-й,10-й - значення α і Tr на 3-й стороні СЕ, відповідно,
Властивості:

$$\begin{aligned} \lambda &:= 45 & \text{Вт/(м*К)} & \text{теплопровідність} \\ t &:= 1 & \text{товщина СЕ} \\ qv &:= 0 & \text{Вт/м}^3 & \text{густна внутрішнього джерела теплоти} \end{aligned}$$

Розв'язання задачі

1. Функції

Площа СЕ

$$A(XY) := \frac{1}{2} \cdot \left\| \begin{pmatrix} 1 & XY_{1,1} & XY_{1,2} \\ 1 & XY_{2,1} & XY_{2,2} \\ 1 & XY_{3,1} & XY_{3,2} \end{pmatrix} \right\| \quad 2A = \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix}$$

Вектори для визначення матриці градієнтів

$$b(XY) := \begin{pmatrix} XY_{2,2} - XY_{3,2} \\ XY_{3,2} - XY_{1,2} \\ XY_{1,2} - XY_{2,2} \end{pmatrix} \quad c(XY) := \begin{pmatrix} XY_{3,1} - XY_{2,1} \\ XY_{1,1} - XY_{3,1} \\ XY_{2,1} - XY_{1,1} \end{pmatrix}$$

$$\{b\} = \begin{Bmatrix} b_i \\ b_j \\ b_k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} y_j - y_k \\ y_k - y_i \\ y_i - y_j \end{Bmatrix} \quad \{c\} = \begin{Bmatrix} c_i \\ c_j \\ c_k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_k - x_j \\ x_i - x_k \\ x_j - x_i \end{Bmatrix}$$

Матриця градієнтів

$$B(b, c, A, XY) := \frac{1}{2 \cdot A(XY)} \begin{pmatrix} b(XY)_1 & b(XY)_2 & b(XY)_3 \\ c(XY)_1 & c(XY)_2 & c(XY)_3 \end{pmatrix} \quad [B^{(e)}] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{bmatrix}$$

Матриця теплопровідності

$$D(\lambda) := \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad [D] = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Вектор навантаження CE від q_v

$$f_{qv}(q_v, A, XY) := \frac{q_v \cdot A(XY) \cdot t}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \int_A q_v \begin{bmatrix} N_i \\ N_j \\ N_k \end{bmatrix} t dA = \int_A q_v \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix} t dA = \frac{q_v A t}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Довжина сторін CE

$$L(XY) := \begin{bmatrix} \sqrt{(XY_{2,1} - XY_{1,1})^2 + (XY_{2,2} - XY_{1,2})^2} \\ \sqrt{(XY_{3,1} - XY_{2,1})^2 + (XY_{3,2} - XY_{2,2})^2} \\ \sqrt{(XY_{1,1} - XY_{3,1})^2 + (XY_{1,2} - XY_{3,2})^2} \end{bmatrix}$$

Вектор навантаження CE від ГУ 2-го роду на стороні 1-2 або i-j

$$f_{q_{12}}(XY, L, q) := \frac{q \cdot t \cdot L(XY)_1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \int_{\ell_{ij}} q [N]^T t d\ell = \frac{q t \ell_{ij}}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Вектор навантаження CE від ГУ 2-го роду на стороні 2-3 або j-k

$$f_{q_{23}}(XY, L, q) := \frac{q \cdot t \cdot L(XY)_2}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \int_{\ell_{jk}} q [N]^T t d\ell = \frac{q t \ell_{jk}}{2} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Вектор навантаження CE від ГУ 2-го роду на стороні 3-1 або k-i

$$f_{q_31}(XY, L, q) := \frac{q \cdot t \cdot L(XY)_3}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \int_{\ell_{ki}} q[N]^T t d\ell = \frac{qt\ell_{ki}}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Доданок до матриці CE на стороні 1-2 або i-j, пов'язаний із конвективним теплообміном

$$k_{\alpha_12}(XY, L, \alpha) := \frac{\alpha \cdot t \cdot L(XY)_1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} [k_{\alpha}^{(e)}] = \frac{\alpha t \ell_{ij}}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Доданок до матриці CE на стороні 2-3 або j-k, пов'язаний із конвективним теплообміном

$$k_{\alpha_23}(XY, L, \alpha) := \frac{\alpha \cdot t \cdot L(XY)_2}{6} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} [k_{\alpha}^{(e)}] = \frac{\alpha t \ell_{jk}}{6} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Доданок до матриці CE на стороні 3-1 або k-i, пов'язаний із конвективним теплообміном

$$k_{\alpha_31}(XY, L, \alpha) := \frac{\alpha \cdot t \cdot L(XY)_3}{6} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} [k_{\alpha}^{(e)}] = \frac{\alpha t \ell_{ki}}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Доданок до вільного члена CE на стороні 1-2 або i-j, пов'язаний із конвективним теплообміном

$$f_{\alpha_12}(XY, L, \alpha, T_p) := \frac{\alpha \cdot T_p \cdot t \cdot L(XY)_1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \int_{\ell_{ij}} \alpha T_p [N]^T t d\ell = \frac{\alpha T_p t \ell_{ij}}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Доданок до вільного члена CE на стороні 2-3 або j-k, пов'язаний із конвективним теплообміном

$$f_{\alpha_23}(XY, L, \alpha, T_p) := \frac{\alpha \cdot T_p \cdot t \cdot L(XY)_2}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \int_{\ell_{jk}} \alpha T_p [N]^T t d\ell = \frac{\alpha T_p t \ell_{jk}}{2} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Доданок до вільного члена CE на стороні 3-1 або k-i, пов'язаний із конвективним теплообміном

$$f_{\alpha_31}(XY, L, \alpha, T_p) := \frac{\alpha \cdot T_p \cdot t \cdot L(XY)_3}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \int_{\ell_{ki}} \alpha T_p [N]^T t d\ell = \frac{\alpha T_p t \ell_{ki}}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Обнулення глобальної матриці та вектора вільних членів

i := 1 .. Nnod_gl

$F_i := 0$

j := 1 .. Nnod_gl

$K_{i,j} := 0$

2. Формування глобальної матриці і вектора СПАР та її розв'язання

```

T := for k ∈ 1 .. nEl
    for i ∈ 1 .. M
        j ← El_nodk,i
        XYi,1 ← XYglj,1
        XYi,2 ← XYglj,2
    for i ∈ 1 .. M
        f_Eli ← 0
    k_El ← B(b,c,A,XY)T · D(λ) · B(b,c,A,XY) · A(XY) · t
    for i ∈ 1 .. M
        if i = 1 ∧ El_GU3k,i = 3
            α ← El_GU3k,5
            Tp ← El_GU3k,6
            k_El ← k_El + kα12(XY,L,α)
            f_El ← f_El + fα12(XY,L,α,Tp)
        if i = 2 ∧ El_GU3k,i = 3
            α ← El_GU3k,7
            Tp ← El_GU3k,8
            k_El ← k_El + kα23(XY,L,α)
            f_El ← f_El + fα23(XY,L,α,Tp)
        if i = 3 ∧ El_GU3k,i = 3
            α ← El_GU3k,9
            Tp ← El_GU3k,10
            k_El ← k_El + kα31(XY,L,α)
            f_El ← f_El + fα31(XY,L,α,Tp)
        if i = 1 ∧ El_GU2k,i = 2
            q ← El_GU2k,5
            f_El ← f_El + fq12(XY,L,q)
        if i = 2 ∧ El_GU2k,i = 2
            q ← El_GU2k,6
            f_El ← f_El + fq23(XY,L,q)
        if i = 3 ∧ El_GU2k,i = 2
            q ← El_GU2k,7

```

1. Формування матриці локальних координат вузлів CE

Обнулення вектора вільних членів CE

2. Формування матриці жорсткості CE, пов'язаної з теплопровідністю

3.1. Обчислення матриці і вектора вільних членів CE, пов'язаного із конвективним теплообміном (на стороні 1-2)

3.2. Обчислення матриці і вектора вільних членів CE, пов'язаного із конвективним теплообміном (на стороні 2-3)

3.3. Обчислення матриці і вектора вільних членів CE, пов'язаного із конвективним теплообміном (на стороні 3-1)

3.4. Обчислення вектора вільних членів CE, пов'язаного із тепловим потоком (на стороні 1-2)

3.5. Обчислення вектора вільних членів CE, пов'язаного із тепловим потоком (на стороні 2-3)

```

    f_El ← f_El + fq_3l(XY, L, q)
    f_El ← f_El + f_qv(qv, A, XY)
    for i ∈ 1 .. M
        igl ← El_nodk,i
        F_igl ← F_igl + f_Eli
        for j ∈ 1 .. M
            jgl ← El_nodk,j
            K_igl,jgl ← K_igl,jgl + k_Eli,j
    for m ∈ 1 .. Nnod_gl
        if Node_GU1m,2 = 1
            Tm ← Node_GU1m,3
            for j ∈ 1 .. Nnod_gl
                Fj ← Fj - Kj,m · Tm
                Kj,m ← 0
                Km,j ← 0
    for m ∈ 1 .. Nnod_gl
        if Node_GU1m,2 = 1
            Tm ← Node_GU1m,3
            Km,m ← 1
            Fm ← Km,m · Tm
    T ← Isolve(K, F)
    T

```

3.6. Обчислення вектора вільних членів CE, пов'язаного із тепловим потоком (на стороні 3-1)

3.7. Обчислення вектора вільних членів CE, пов'язаного з об'ємними силами qv

4. Формування глобальної матриці та вектора вільних членів СЛАР

5. Перетворення матриці і вектора вільних членів СЛАР відповідно до ГУ Дирихле

$$K_{mm} = 1, K_{mj} = 0, j = \overline{1, N}, j \neq m, F_m = K_{mm} T_m;$$

$$F_j = F_j - K_{jm} T_m, K_{jm} = 0, j = \overline{1, N}, j \neq m,$$

6. Розв'язання СЛАР - одержання глобального вектора температур {T} задачі або вузлових значень температур

Обчислення компонент густини теплового потоку (qx, qy) по елементах

```

qEl := for k ∈ 1 .. nEl
    for i ∈ 1 .. M
        igl ← El_nodk,i
        T_Eli ← T_igl
    for i ∈ 1 .. M
        j ← El_nodk,i
        XYi,1 ← XYglj,1
        XYi,2 ← XYglj,2
    q_El ← -D(λ) · B(b, c, A, XY) · T_El
    for i ∈ 1 .. 2
        qElk,i ← q_Eli
qEl

```

$$\left[q^{(e)} \right] = -[D] \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_i \\ T_j \\ T_k \end{Bmatrix}$$

Обчислення компонент густини теплового потоку (q_x , q_y , q_{sum}) у вузлах CE

```

q_node := for i ∈ 1 .. Nnod_gl
    k_cout ← 0
    qx ← 0
    qy ← 0
    for k ∈ 1 .. nEl
        for j ∈ 1 .. M
            node ← El_nodk,j
            if node = i
                k_cout ← k_cout + 1
                qx ← qx + qElk,1
                qy ← qy + qElk,2
        if k_cout > 0
            qx ←  $\frac{qx}{k\_cout}$ 
            qy ←  $\frac{qy}{k\_cout}$ 
        q_nodei,1 ← qx
        q_nodei,2 ← qy
        q_nodei,3 ←  $\sqrt{qx^2 + qy^2}$ 
    q_node

```

VARIABLES="X, m", "Y, m", "T, K", "qx, W/(m^2)", "qy, W/(m^2)", "qsum, W/(m^2)"

Формування файлу результатів Result_1

```

Result_1 := for i ∈ 1 .. Nnod_gl
    Result_1i,1 ← XYgli,1
    Result_1i,2 ← XYgli,2
    Result_1i,3 ← Ti
    Result_1i,4 ← q_nodei,1
    Result_1i,5 ← q_nodei,2
    Result_1i,6 ← q_nodei,3
Result_1

```

Запис файлів результатів

E:\Result_1.dat

Result_1

Перезапис номерів вузлів CE

```

El_nod3 := for k ∈ 1 .. nEl
    for j ∈ 1 .. M
        El_nod3k,j ← El_nodk,j
    El_nod3

```

E:\NNodes\Elements.dat

El_nod3

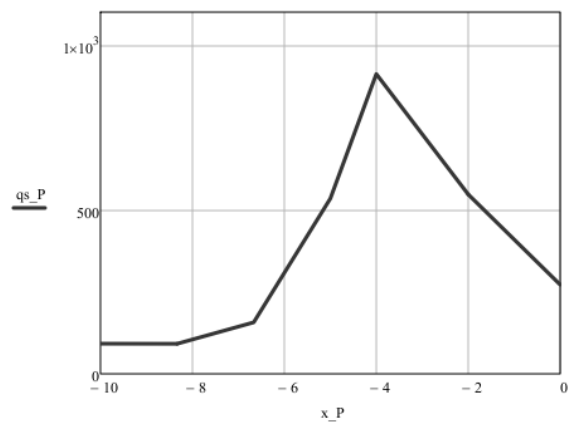
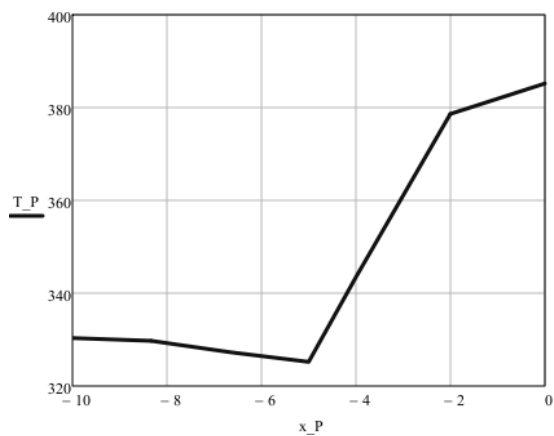
Побудова графіків у вибраних перетинах

$n_P := 7$ Кількість і номери вузлів у перетині

$\text{nod_P} := \begin{pmatrix} 17 \\ 19 \\ 18 \\ 4 \\ 3 \\ 10 \\ 9 \end{pmatrix}$	Координати по X у перетині $y=1$, $0 \leq x \leq -10$	Значення T у перетині $y=1$, $0 \leq x \leq -10$	
	$\text{x_P} := \begin{cases} \text{for } i \in 1 \dots n_P \\ \quad p \leftarrow \text{nod_P}_i \\ \quad x_P_i \leftarrow XYgl_{p,1} \\ \text{x_P} \end{cases}$	$\text{T_P} := \begin{cases} \text{for } i \in 1 \dots n_P \\ \quad p \leftarrow \text{nod_P}_i \\ \quad T_P_i \leftarrow T_p \\ \text{T_P} \end{cases}$	$\text{qs_P} := \begin{cases} \text{for } i \in 1 \dots n_P \\ \quad p \leftarrow \text{nod_P}_i \\ \quad qs_P_i \leftarrow q_node_{p,3} \\ \text{qs_P} \end{cases}$

Епюра (графік) результуючої густини теплового потоку у перетині $y=1$, $0 \leq x \leq -10$

Епюра (графік) температур у перетині $y=1$, $0 \leq x \leq -10$



Д.2. Плоска задача теплопровідності. Лінійні чотирикутні СЕ

Програмний код **Lab_T_P4_2D.xmcd** розроблено за числовою методикою, що наведена в розділі 2 (див. підрозділ 2.2, п. 2.2.2), та супроводжується необхідними рисунками і коментарями.

Файл Lab_T_P4_2D.xmcd

Розв'язання двовимірної стаціонарної задачі теплопровідності з використанням МСЕ з чотирикутними лінійними елементами плоска геометрія

ORIGIN ≡ 1 Індексація масивів з 1

1. Дано:

Nnod_gl := 21 кількість глобальних вузлів

nEl := 11 кількість елементів

Матриця координат вузлів x і y з номерами 1-21

$$XY_{gl} := \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 0 \\ -2 & 0 \\ 0 & 0.3 \\ -4 & 0.3 \\ -2 & 0.3 \\ 0 & 1 \\ -4 & 1 \\ -2 & 1 \\ -5 & 0.3 \\ -5 & 1 \\ -10 & 0.3 \\ -6.667 & 0.3 \\ -8.333 & 0.3 \\ -10 & 1 \\ -6.667 & 1 \\ -8.333 & 1 \\ -10 & 0 \\ -5 & 0 \\ -8.333 & 0 \\ -6.667 & 0 \end{pmatrix}$$

Матриця номерів вузлів скінченних елементів розміром 11x5

$$El_nod := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 6 & 2 \\ 5 & 6 & 9 & 8 & 3 \\ 6 & 4 & 7 & 9 & 4 \\ 10 & 5 & 8 & 11 & 5 \\ 12 & 14 & 17 & 15 & 6 \\ 14 & 13 & 16 & 17 & 7 \\ 13 & 10 & 11 & 16 & 8 \\ 18 & 20 & 14 & 12 & 9 \\ 20 & 21 & 13 & 14 & 10 \\ 21 & 19 & 10 & 13 & 11 \end{pmatrix}$$

Тут 5-й рядок стосується номерів СЕ

Граничні умови - 1-го роду

i := 1 .. Nnod_gl

Node_GU1_{i,1} := i Node_GU1_{i,2} := 0 Node_GU1_{i,3} := 0

Тут в Node_GU1 перший стовпець це глобальні номери вузлів, другий ознака того, що у вузлі задана температура (може бути 0 або 1), 3-й - стовпець - значення температури
Граничні умови - 2-го роду

$$i := 1 \dots nEI$$

$$j := 1 \dots 9$$

$$EI_GU2_{i,j} := 0 \quad EI_GU2_{i,5} := i$$

Тут в EI_GU2 перші 4 стовпці це сторони 1-2, 2-3, 3-4, 4-1, в яких задано густину теплового потоку q (може бути 0 або 2), 5-й - номер СЕ, 6-й - значення q на 1-й стороні СЕ, 7-й - значення q на 2-й стороні СЕ, 8-й - значення q на 3-й стороні СЕ, 9-й - значення q на 4-й стороні СЕ,
Граничні умови - 3-го роду

$$\alpha 1 := 25 \quad Tr1 := 400 \quad \alpha 2 := 10 \quad Tr2 := 320$$

$$\alpha 3 := 35 \quad Tr3 := 270 \quad \alpha 4 := 5 \quad Tr4 := 350$$

$$EI_GU3 := \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & \alpha 1 & Tr1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 2 & \alpha 1 & Tr1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha 4 & Tr4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha 4 & Tr4 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 & 5 & \alpha 3 & Tr3 & 0 & 0 & \alpha 4 & Tr4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha 4 & Tr4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha 4 & Tr4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha 4 & Tr4 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 9 & \alpha 2 & Tr2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 10 & \alpha 2 & Tr2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 11 & \alpha 2 & Tr2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Тут в EI_GU3 перші 4 стовпці це сторони 1-2, 2-3, 3-4, 4-1, в яких задано ГУ 3-го роду (може бути 0 або 3), 5-й - номер СЕ, 6-й,7-й - значення α і Tr на 1-й стороні СЕ, відповідно, 8-й,9-й - значення α і Tr на 2-й стороні СЕ, відповідно, 10-й,11-й - значення α і Tr на 3-й стороні СЕ, відповідно, 12-й,13-й - значення α і Tr на 4-й стороні СЕ, відповідно.

теплопровідність - $\lambda := 45$

густина внутрішнього джерела теплоти - $qv := 0$

2. Розв'язок

Завдання вузлів та ваги квадратурної формули Гауса при n=2

$$n_Gauss := 2$$

$$\eta := \begin{pmatrix} 0.577350269189626 \\ -0.577350269189626 \end{pmatrix} \quad w := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$M := 4$ - кількість вузлів в скінченному елементі

1. Матриці і функції

Матриця (вектор) функцій форми СЕ - [N]

$$N(i,j) := \frac{1}{4} \cdot \left[(1 - \text{eta}_i) \cdot (1 - \text{eta}_j) \quad (1 + \text{eta}_i) \cdot (1 - \text{eta}_j) \quad (1 + \text{eta}_i) \cdot (1 + \text{eta}_j) \quad (1 - \text{eta}_i) \cdot (1 + \text{eta}_j) \right]$$

$$[N]^T = \left\{ \begin{array}{c} \frac{(1 - \xi)(1 - \eta)}{4} \\ \frac{(1 + \xi)(1 - \eta)}{4} \\ \frac{(1 + \xi)(1 + \eta)}{4} \\ \frac{(1 - \xi)(1 + \eta)}{4} \end{array} \right\}$$

Матриця похідних коефіцієнтів форми СЕ по ξ і η - dN

$$dN\xi\eta(i,j) := \frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} -(1 - \text{eta}_i) & (1 - \text{eta}_i) & (1 + \text{eta}_i) & -(1 + \text{eta}_i) \\ -(1 - \text{eta}_j) & -(1 + \text{eta}_j) & (1 + \text{eta}_j) & (1 - \text{eta}_j) \end{bmatrix}$$

Функція для визначення Якобіану [J]

$$J(i,j,XY) := \frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} -(1 - \text{eta}_i) & (1 - \text{eta}_i) & (1 + \text{eta}_i) & -(1 + \text{eta}_i) \\ -(1 - \text{eta}_j) & -(1 + \text{eta}_j) & (1 + \text{eta}_j) & (1 - \text{eta}_j) \end{bmatrix} \cdot XY$$

Функція для визначення детермінанту якобіану detJ

$$\det_J(i,j,XY) := |J(i,j,XY)|$$

Функція для визначення похідних від функцій форми (градієнта) [B] через x,y

$$B(i,j,XY) := J(i,j,XY)^{-1} \cdot dN\xi\eta(i,j)$$

$$[B] = [J]^{-1} \begin{bmatrix} \frac{-(1 - \eta)}{4} & \frac{(1 - \eta)}{4} & \frac{(1 + \eta)}{4} & \frac{-(1 + \eta)}{4} \\ \frac{-(1 - \xi)}{4} & \frac{-(1 + \xi)}{4} & \frac{(1 + \xi)}{4} & \frac{(1 - \xi)}{4} \end{bmatrix}$$

Функція для визначення довжини сторін СЕ

$$L(XY) := \begin{bmatrix} \sqrt{(XY_{2,1} - XY_{1,1})^2 + (XY_{2,2} - XY_{1,2})^2} \\ \sqrt{(XY_{3,1} - XY_{2,1})^2 + (XY_{3,2} - XY_{2,2})^2} \\ \sqrt{(XY_{4,1} - XY_{3,1})^2 + (XY_{4,2} - XY_{3,2})^2} \\ \sqrt{(XY_{1,1} - XY_{4,1})^2 + (XY_{1,2} - XY_{4,2})^2} \end{bmatrix}$$

Матриця теплопровідності CE - D

$$D := \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Функція для визначення добутку матриці [B] на матрицю теплопровідності CE [D]

$$BD(i,j,XY) := B(i,j,XY)^T \cdot D$$

$$BDB(i,j,XY) := BD(i,j,XY) \cdot B(i,j,XY)$$

ГУ 3-го роду на стороні 1-2 CE

$$k_{El\alpha 12}(XY, L, \alpha) := \frac{\alpha \cdot L(XY)_1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad [k_{\alpha}^{(e)}]_{1-2} = \frac{\alpha_{1-2} L_{12}}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$f_{\alpha 12}(XY, L, \alpha, T_p) := \frac{\alpha \cdot T_p \cdot L(XY)_1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\alpha T_p)_{1-2} \int_{S_2} [N]^T dS = \frac{(\alpha T_p)_{1-2} L_{12}}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ГУ 3-го роду на стороні 2-3 CE

$$k_{El\alpha 23}(XY, L, \alpha) := \frac{\alpha \cdot L(XY)_2}{6} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad [k_{\alpha}^{(e)}]_{2-3} = \frac{\alpha_{2-3} L_{23}}{6} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$f_{\alpha 23}(XY, L, \alpha, T_p) := \frac{\alpha \cdot T_p \cdot L(XY)_2}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\alpha T_p)_{2-3} \int_{S_2} [N]^T dS = \frac{(\alpha T_p)_{2-3} L_{23}}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ГУ 3-го роду на стороні 3-4 CE

$$k_{El\alpha 34}(XY, L, \alpha) := \frac{\alpha \cdot L(XY)_3}{6} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad [k_{\alpha}^{(e)}]_{3-4} = \frac{\alpha_{3-4} L_{34}}{6} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$f_{\alpha 34}(XY, L, \alpha, T_p) := \frac{\alpha \cdot T_p \cdot L(XY)_3}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\alpha T_p)_{3-4} \int_{S_2} [N]^T dS = \frac{(\alpha T_p)_{3-4} L_{34}}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ГУ 3-го роду на стороні 4-1 CE

$$k_{\text{El}\alpha 41}(XY, L, \alpha) := \frac{\alpha \cdot L(XY)_4}{6} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad [k_{\alpha}^{(e)}]_{4-1} = \frac{\alpha_{4-1} L_{34}}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$f_{\alpha 41}(XY, L, \alpha, T_p) := \frac{\alpha \cdot T_p \cdot L(XY)_4}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} (\alpha T_p)_{4-1} \int_{S_2} [N]^T dS = \frac{(\alpha T_p)_{4-1} L_{41}}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Вектор навантаження СЕ від ГУ 2-го роду на стороні 1-2 СЕ

$$f_{q12}(XY, L, q) := \frac{q \cdot L(XY)_1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad q_{1-2} \int_{S_1} [N]^T dS = \frac{q_{1-2} L_{12}}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Вектор навантаження СЕ від ГУ 2-го роду на стороні 2-3 СЕ

$$f_{q23}(XY, L, q) := \frac{q \cdot L(XY)_2}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad q_{2-3} \int_{S_1} [N]^T dS = \frac{q_{2-3} L_{23}}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Вектор навантаження СЕ від ГУ 2-го роду на стороні 3-4 СЕ

$$f_{q34}(XY, L, q) := \frac{q \cdot L(XY)_3}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad q_{3-4} \int_{S_1} [N]^T dS = \frac{q_{3-4} L_{34}}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Вектор навантаження СЕ від ГУ 2-го роду на стороні 4-1 СЕ

$$f_{q41}(XY, L, q) := \frac{q \cdot L(XY)_4}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad q_{4-1} \int_{S_1} [N]^T dS = \frac{q_{4-1} L_{41}}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Вектор навантаження СЕ від qv

$$\int_{V(e)} q_v [N]^T dV \approx q_v \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [N(\xi_i, \eta_j)]^T \det[J(\xi_i, \eta_j)] w_i w_j,$$

```

f_qv(qv,XY) := for i ∈ 1..M
    s ← 0
    for ig ∈ 1..n_Gauss
        for jg ∈ 1..n_Gauss
            s ← s + (N(ig,jg)T)i · det_J(ig,jg,XY) · wig · wjg
        f_qvi ← s · qv
    f_qv

```

Обнулення глобальної матриці та вектора вільних членів

```

i := 1..Nnod_gl
Fi := 0

j := 1..Nnod_gl

Ki,j := 0

```

2. Формування глобальної матриці і вектора СЛАР та її розв'язання

```

T := for k ∈ 1..nEl
    for i ∈ 1..M
        j ← El_nodk,i
        XYi,1 ← XYglj,1
        XYi,2 ← XYglj,2
    for i ∈ 1..M
        f_Eli ← 0
        for j ∈ 1..M
            s ← 0
            for ig ∈ 1..n_Gauss
                for jg ∈ 1..n_Gauss
                    s ← s + BDB(ig,jg,XY)i,j · det_J(ig,jg,XY) · wig · wjg
                k_Elαi,j ← s
                k_Elαi,j ← 0
        for i ∈ 1..M
            if i = 1 ∧ El_GU3k,i = 3
                α1 ← El_GU3k,6
                Tp1 ← El_GU3k,7
                k_Elα ← k_Elα + k_Elα12(XY,L,α1)
                f_El ← f_El + f_α12(XY,L,α1,Tp1)
            if i = 2 ∧ El_GU3k,i = 3
                α2 ← El_GU3k,8
                Tp2 ← El_GU3k,9
                k_Elα ← k_Elα + k_Elα23(XY,L,α2)

```

1. Формування матриці локальних координат вузлів СЕ

2. Формування матриці жорсткості СЕ, пов'язаної з теплопровідністю

3.1. Формування матриці жорсткості СЕ, пов'язаної з конвективним теплообміном (сторона 12)

3.2. Формування вектора вільних членів СЕ, пов'язаного з конвективним теплообміном (сторона 12)

3.3. Формування матриці жорсткості СЕ, пов'язаної з конвективним теплообміном (сторона 23)

3.4. Формування вектора вільних членів СЕ, пов'язаного з конвективним теплообміном (сторона 23)

```

    f_El ← f_El + f_α23(XY, L, α_2, Tp_2)
    if i = 3 ∧ El_GU3k,i = 3
        α_3 ← El_GU3k,10
        Tp_3 ← El_GU3k,11
        k_Elα ← k_Elα + k_Elα34(XY, L, α_3)
        f_El ← f_El + f_α34(XY, L, α_3, Tp_3)
    if i = 4 ∧ El_GU3k,i = 3
        α_4 ← El_GU3k,12
        Tp_4 ← El_GU3k,13
        k_Elα ← k_Elα + k_Elα41(XY, L, α_4)
        f_El ← f_El + f_α41(XY, L, α_4, Tp_4)
    if i = 1 ∧ El_GU2k,i = 2
        q_1 ← El_GU2k,6
        f_El ← f_El + f_q12(XY, L, q_1)
    if i = 2 ∧ El_GU2k,i = 2
        q_2 ← El_GU2k,7
        f_El ← f_El + f_q23(XY, L, q_2)
    if i = 3 ∧ El_GU2k,i = 2
        q_3 ← El_GU2k,8
        f_El ← f_El + f_q34(XY, L, q_3)
    if i = 4 ∧ El_GU2k,i = 2
        q_4 ← El_GU2k,9
        f_El ← f_El + f_q41(XY, L, q_4)
    f_El ← f_El + f_qv(qv, XY)
    for i ∈ 1 .. M
        igl ← El_nodk,i
        F_igl ← F_igl + f_Eli
        for j ∈ 1 .. M
            jgl ← El_nodk,j
            K_igl,jgl ← K_igl,jgl + k_Elλi,j + k_Elαi,j
    for m ∈ 1 .. Nnod_gl
        if Node_GU1m,2 = 1
            Tm ← Node_GU1m,3
            for j ∈ 1 .. Nnod_gl
                F_j ← F_j - Kj,m · Tm
                Kj,m ← 0

```

3.5. Формування матриці жорсткості СЕ, пов'язаної з конвективним теплообміном (сторона 34)

3.6. Формування вектора вільних членів СЕ, пов'язаного з конвективним теплообміном (сторона 34)

3.7. Формування матриці жорсткості СЕ, пов'язаної з конвективним теплообміном (сторона 41)

3.8. Формування вектора вільних членів СЕ, пов'язаного з конвективним теплообміном (сторона 41)

3.9. Обчислення вектора вільних членів СЕ, пов'язаного із тепловим потоком (на стороні 12)

3.10. Обчислення вектора вільних членів СЕ, пов'язаного із тепловим потоком (на стороні 23)

3.11. Обчислення вектора вільних членів СЕ, пов'язаного із тепловим потоком (на стороні 23)

3.12. Обчислення вектора вільних членів СЕ, пов'язаного із тепловим потоком (на стороні 23)

4. Розрахунок вектора навантаження СЕ за рахунок qv

5. Формування глобальної матриці та вектора вільних членів СЛАР

6. Перетворення матриці і вектора вільних членів СЛАР відповідно до ГУ Дирихле


```

    Km,j ← 0
  for m ∈ 1 .. Nnod_gl
    if Node_GU1m,2 = 1
      Tm ← Node_GU1m,3
      Km,m ← 1
      Fm ← Km,m · Tm
  T ← lsolve(K,F)
  T

```

7. Розв'язання СЛАР - одержання глобального вектора температур {T} задачі або вузлових значень температур

Визначення номерів CE, що оточують поточний вузол

```

Number_El :=
  for i ∈ 1 .. Nnod_gl
    for k ∈ 1 .. M
      Number_Eli,k ← 0
      kk ← 0
      for j ∈ 1 .. nEl
        for k ∈ 1 .. M
          if El_nodj,k = i
            kk ← kk + 1
            Number_Eli,kk ← j
      Number_El

```

Функція Якобіан $J(\xi, \eta, XY)$

$$J(\xi, \eta, XY) := \frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} -(1-\eta) & (1-\eta) & (1+\eta) & -(1+\eta) \\ -(1-\xi) & -(1+\xi) & (1+\xi) & (1-\xi) \end{bmatrix} \cdot XY$$

Функція градієнту CE у безрозмірних координатах $dN(\xi, \eta)$

$$dN(\xi, \eta) := \frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} -(1-\eta) & (1-\eta) & (1+\eta) & -(1+\eta) \\ -(1-\xi) & -(1+\xi) & (1+\xi) & (1-\xi) \end{bmatrix}$$

Функція градієнту CE у розмірних координатах $dNr_z(\xi, \eta, XY)$

$$dNr_z(\xi, \eta, XY) := J(\xi, \eta, XY)^{-1} \cdot dN(\xi, \eta)$$

$$\eta := \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Вузол 1 - } \xi=-1, \eta=-1 \text{ CE} \\ \text{Вузол 2 - } \xi=1, \eta=-1 \text{ CE} \\ \text{Вузол 3 - } \xi=1, \eta=1 \text{ CE} \\ \text{Вузол 4 - } \xi=-1, \eta=1 \text{ CE} \end{array}$$

Визначення складових густини теплового потоку по СЕ

```

qxy :=
  for k ∈ 1 .. nEl
    for i ∈ 1 .. M
      j ← El_nodk,i
      XYi,1 ← XYglj,1
      XYi,2 ← XYglj,2
    for i ∈ 1 .. M
      j ← El_nodk,i
      t_Eli ← Tj
    for j ∈ 1 .. 2·M
      qxyk,j ← 0
    for j ∈ 1 .. M
      DT ← dNrz(ηj,1, ηj,2, XY) · t_El
      qxyk,j ← -λ · DT1
      qxyk,4+j ← -λ · DT2
  qxy

```

Визначення складової густини теплового потоку qx у глобальних вузлах

```

qx :=
  for i ∈ 1 .. Nnod_gl
    for j ∈ 1 .. 4
      n ← Number_Eli,j
      m ← 0
      s ← 0
      if n > 0
        for k ∈ 1 .. M
          if El_nodn,k = i
            m ← m + 1
            s ← s + qxyn,k
        qxi ←  $\frac{s}{m}$ 
  qx

```

Визначення складової густини теплового потоку q_y у глобальних вузлах

```

qy := for i ∈ 1 .. Nnod_gl
      for j ∈ 1 .. 4
        n ← Number_Eli,j
        m ← 0
        s ← 0
        if n > 0
          for k ∈ 1 .. M
            m ← m + 1 if El_nodn,k = i
            s ← s + qxyn,k+4 if El_nodn,k = i
          qyi ←  $\frac{s}{m}$ 
      qy

```

Визначення q_{sum} по вузлах

```

qsum := for i ∈ 1 .. Nnod_gl
        qsi ←  $\sqrt{(qx_i)^2 + (qy_i)^2}$ 
        qs

```

VARIABLES="X, m", "Y, m", "T, K", "qx, W/(m^2)", "qy, W/(m^2)", "qsum, W/(m^2)"

Формування файлу результатів Result_1

```

Result_1 := for i ∈ 1 .. Nnod_gl      Презапис номерів вузлів CE
            Result_1i,1 ← XYgli,1
            Result_1i,2 ← XYgli,2      El_nod4 := for k ∈ 1 .. nEl
            Result_1i,3 ← Ti              for j ∈ 1 .. M
            Result_1i,4 ← qxi              El_nod4k,j ← El_nodk,j
            Result_1i,5 ← qyi              El_nod4
            Result_1i,6 ← qsumi
            Result_1

```

Запис файлів результатів

E:\Result_1.dat

E:\NNodes\Elements.dat

Result_1

El_nod4

$n_P := 7$ Кількість і номери вузлів у перетині $y=1$

$nod_P := \begin{pmatrix} 15 \\ 17 \\ 16 \\ 11 \\ 8 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix}$

Координати по X
у перетині $y=1$

$x_P := \begin{cases} \text{for } i \in 1 \dots n_P \\ \quad p \leftarrow nod_P_i \\ \quad x_P_i \leftarrow XYgl_{p,1} \end{cases}$
 x_P

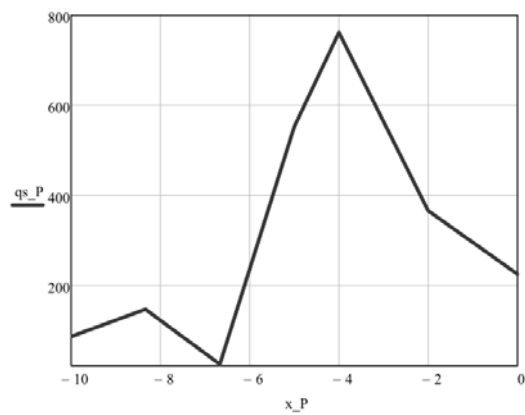
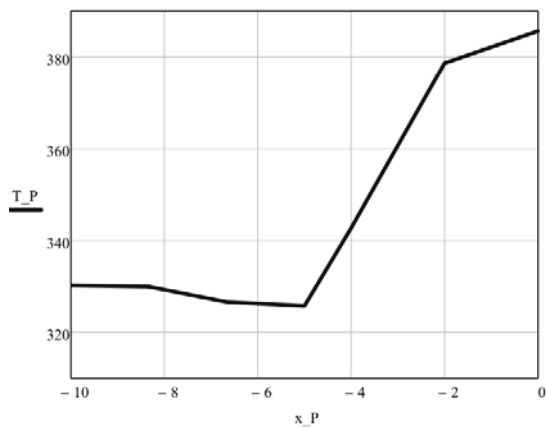
Значення T у перетині $y=1$

$T_P := \begin{cases} \text{for } i \in 1 \dots n_P \\ \quad p \leftarrow nod_P_i \\ \quad T_P_i \leftarrow T_p \end{cases}$
 T_P

Значення qsum у перетині $y=1$

$qs_P := \begin{cases} \text{for } i \in 1 \dots n_P \\ \quad p \leftarrow nod_P_i \\ \quad qs_P_i \leftarrow qsum_p \end{cases}$
 qs_P

Епіюра (графік) температур у перетині $y=1$



Д.3. Вісесиметрична задача теплопровідності. Лінійні трикутні СЕ

Програмний код **Lab_T_S_2D.xmcd** розроблено за числовою методикою, що наведена в розділі 2 (див. підрозділ 2.3, п. 2.3.1), та супроводжується необхідними рисунками і коментарями.

Файл Lab_T_S_2D.xmcd

стаціонарна теплопровідність 2D - Вісесиметрична задача - триангуляція

ORIGIN $\equiv$ 1 Індексація масивів з 1

Nnod_gl := 12 кількість глобальних вузлів

nEl := 13 кількість елементів

M := 3 кількість вузлів в елементі

Координати вузлів

$$RZgl := \begin{pmatrix} 0.1 & 0 \\ 0.1 & 0.15 \\ 0.135 & 0.15 \\ 0.135 & 0.13 \\ 0.115 & 0.13 \\ 0.115 & 0.08 \\ 0.13 & 0.015 \\ 0.17 & 0.015 \\ 0.17 & 0 \\ 0.12125 & 0.14 \\ 0.10914 & 0.07235 \\ 0.1425 & 0.0075 \end{pmatrix}$$

Матриця номерів вузлів скінченних елементів

$$El_nod := \begin{pmatrix} 11 & 7 & 6 & 1 \\ 1 & 7 & 11 & 2 \\ 12 & 7 & 1 & 3 \\ 12 & 1 & 9 & 4 \\ 8 & 12 & 9 & 5 \\ 8 & 7 & 12 & 6 \\ 11 & 6 & 5 & 7 \\ 2 & 11 & 5 & 8 \\ 2 & 1 & 11 & 9 \\ 10 & 3 & 2 & 10 \\ 10 & 2 & 5 & 11 \\ 4 & 10 & 5 & 12 \\ 4 & 3 & 10 & 13 \end{pmatrix}$$

Граничні умови - 1-го роду

$i := 1 \dots \text{Nnod_gl}$

$\text{Node_GU1}_{i,1} := i \quad \text{Node_GU1}_{i,2} := 0 \quad \text{Node_GU1}_{i,3} := 0$

Тут перший стовпець це глобальні номери вузлів, другий ознака того, що у вузлі задана температура (може бути 0 або 1), 3-й - стовпець - значення температури

Граничні умови - 2-го роду

$i := 1 \dots \text{nEl} \quad j := 1 \dots 7$

$\text{El_GU2}_{i,j} := 0 \quad \text{El_GU2}_{i,4} := i$

Тут перші 3 стовпці це сторони i-j, j-k, k-i, в яких задано густину теплового потоку q (може бути 0 або 2), 4-й - номер CE, 5-й - значення q на 1-й стороні CE, 6-й - значення q на 2-й стороні CE, 7-й - значення q на 3-й стороні CE,

Граничні умови - 3-го роду

$\alpha 1 := 25 \quad \text{Tr}1 := 400 \quad \alpha 2 := 10 \quad \text{Tr}2 := 320$

$\text{El_GU3} := \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & \alpha 2 & \text{Tr}2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha 2 & \text{Tr}2 \\ 3 & 0 & 0 & 6 & \alpha 2 & \text{Tr}2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 7 & 0 & 0 & \alpha 2 & \text{Tr}2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 9 & \alpha 1 & \text{Tr}1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 11 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha 2 & \text{Tr}2 \\ 31 & 0 & 0 & 13 & \alpha 2 & \text{Tr}2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Тут перші 3 стовпці це сторони i-j, j-k, k-i, в яких задано ГУ 3-го роду (може бути 0 або 3), 4-й - номер CE, 5-й,6-й - значення α і Tr на 1-й стороні CE, відповідно, 7-й,8-й - значення α і Tr на 2-й стороні CE, відповідно, 9-й,10-й - значення α і Tr на 3-й стороні CE, відповідно, Властивості:

$\lambda := 25 \quad \text{Вт}/(\text{м}^*\text{K})$ теплопровідність

$q_v := 0 \quad \text{Вт}/\text{м}^3$ густна внутрішнього джерела теплоти

Розв'язання задачі

1. Функції

Площа CE

$$A(RZ) := \frac{1}{2} \cdot \left\| \begin{pmatrix} 1 & RZ_{1,1} & RZ_{1,2} \\ 1 & RZ_{2,1} & RZ_{2,2} \\ 1 & RZ_{3,1} & RZ_{3,2} \end{pmatrix} \right\| \quad 2A = \begin{vmatrix} 1 & r_i & z_i \\ 1 & r_j & z_j \\ 1 & r_k & z_k \end{vmatrix}$$

Вектори для визначення матриці градієнтів

$$b(RZ) := \begin{pmatrix} RZ_{2,2} - RZ_{3,2} \\ RZ_{3,2} - RZ_{1,2} \\ RZ_{1,2} - RZ_{2,2} \end{pmatrix} \quad c(RZ) := \begin{pmatrix} RZ_{3,1} - RZ_{2,1} \\ RZ_{1,1} - RZ_{3,1} \\ RZ_{2,1} - RZ_{1,1} \end{pmatrix}$$

$$\{b\} = \begin{Bmatrix} b_i \\ b_j \\ b_k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} z_j - z_k \\ z_k - z_i \\ z_i - z_j \end{Bmatrix} \quad \{c\} = \begin{Bmatrix} c_i \\ c_j \\ c_k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r_k - r_j \\ r_i - r_k \\ r_j - r_i \end{Bmatrix}$$

Матриця градієнтів

$$B(b, c, A, RZ) := \frac{1}{2 \cdot A(RZ)} \cdot \begin{pmatrix} b(RZ)_1 & b(RZ)_2 & b(RZ)_3 \\ c(RZ)_1 & c(RZ)_2 & c(RZ)_3 \end{pmatrix}$$

$$[B^{(e)}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial r} & \frac{\partial N_j}{\partial r} & \frac{\partial N_k}{\partial r} \\ \frac{\partial N_i}{\partial N_j} & \frac{\partial N_j}{\partial N_j} & \frac{\partial N_k}{\partial N_j} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial N_j}{\partial z} & \frac{\partial N_k}{\partial z} \end{bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{bmatrix}$$

Матриця теплопровідності

$$D(\lambda) := \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad [D] = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Вектор навантаження SE від qv

$$f_{qv}(qv, A, RZ) := \frac{2\pi \cdot qv \cdot A(RZ)}{12} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} RZ_{1,1} \\ RZ_{2,1} \\ RZ_{3,1} \end{pmatrix}$$

$$2\pi q_v \int_A \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix} r dA = \frac{2\pi q_v A}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_i \\ R_j \\ R_k \end{bmatrix}$$

Довжина сторін SE

$$L(RZ) := \begin{bmatrix} \sqrt{(RZ_{2,1} - RZ_{1,1})^2 + (RZ_{2,2} - RZ_{1,2})^2} \\ \sqrt{(RZ_{3,1} - RZ_{2,1})^2 + (RZ_{3,2} - RZ_{2,2})^2} \\ \sqrt{(RZ_{1,1} - RZ_{3,1})^2 + (RZ_{1,2} - RZ_{3,2})^2} \end{bmatrix}$$

Вектор навантаження СЕ від ГУ 2-го роду на стороні 1-2 або i-j

$$f_{q_12}(RZ, L, q) := \frac{2\pi \cdot q \cdot L(RZ)_1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 2 \cdot RZ_{1,1} + RZ_{2,1} \\ RZ_{1,1} + 2 \cdot RZ_{2,1} \\ 0 \end{pmatrix} \int_{S_{ij}} q[N]^T dS = \frac{2\pi q \ell_{ij}}{6} \begin{bmatrix} 2R_i + R_j \\ R_i + 2R_j \\ 0 \end{bmatrix}$$

Вектор навантаження СЕ від ГУ 2-го роду на стороні 2-3 або j-k

$$f_{q_23}(RZ, L, q) := \frac{2\pi \cdot q \cdot L(RZ)_2}{6} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 RZ_{2,1} + RZ_{3,1} \\ RZ_{2,1} + 2 \cdot RZ_{3,1} \end{pmatrix} \int_{S_{jk}} q[N]^T dS = \frac{2\pi q \ell_{jk}}{6} \begin{bmatrix} 0 \\ 2R_j + R_k \\ R_j + 2R_k \end{bmatrix}$$

Вектор навантаження СЕ від ГУ 2-го роду на стороні 3-1 або k-i

$$f_{q_31}(RZ, L, q) := \frac{2\pi \cdot q \cdot L(RZ)_3}{6} \cdot \begin{pmatrix} 2 RZ_{1,1} + RZ_{3,1} \\ 0 \\ RZ_{1,1} + 2 \cdot RZ_{3,1} \end{pmatrix} \int_{S_{ki}} q[N]^T dS = \frac{2\pi q \ell_{ki}}{6} \begin{bmatrix} 2R_i + R_k \\ 0 \\ R_i + 2R_k \end{bmatrix}$$

Доданок до матриці СЕ на стороні 1-2 або i-j, пов'язаний із конвективним теплообміном

$$k\alpha_{12}(RZ, L, \alpha) := \frac{2\pi \cdot \alpha \cdot L(RZ)_1}{12} \cdot \begin{pmatrix} 3 \cdot RZ_{1,1} + RZ_{2,1} & RZ_{1,1} + RZ_{2,1} & 0 \\ RZ_{1,1} + RZ_{2,1} & RZ_{1,1} + 3 \cdot RZ_{2,1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\int_{S_{ij}} \alpha[N]^T [N] dS = \frac{2\pi \alpha \ell_{ij}}{12} \begin{bmatrix} 3R_i + R_j & R_i + R_j & 0 \\ R_i + R_j & R_i + 3R_j & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Доданок до матриці СЕ на стороні 2-3 або j-k, пов'язаний із конвективним теплообміном

$$k\alpha_{23}(RZ, L, \alpha) := \frac{2\pi \cdot \alpha \cdot L(RZ)_2}{12} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 \cdot RZ_{2,1} + RZ_{3,1} & RZ_{2,1} + RZ_{3,1} \\ 0 & RZ_{2,1} + RZ_{3,1} & RZ_{2,1} + 3 \cdot RZ_{3,1} \end{pmatrix}$$

$$\int_{S_{jk}} \alpha[N]^T [N] dS = \frac{2\pi \alpha \ell_{jk}}{12} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3R_j + R_k & R_j + R_k \\ 0 & R_j + R_k & R_j + 3R_k \end{bmatrix}$$

Доданок до матриці СЕ на стороні 3-1 або k-i, пов'язаний із конвективним теплообміном

$$k\alpha_{31}(RZ, L, \alpha) := \frac{2\pi \cdot \alpha \cdot L(RZ)_3}{12} \cdot \begin{pmatrix} 3 \cdot RZ_{1,1} + RZ_{3,1} & 0 & RZ_{1,1} + RZ_{3,1} \\ 0 & 0 & 0 \\ RZ_{1,1} + RZ_{3,1} & 0 & RZ_{1,1} + 3 \cdot RZ_{3,1} \end{pmatrix}$$

$$\int_{S_{ki}} \alpha [N]^T [N] dS = \frac{2\pi\alpha\ell_{ki}}{12} \begin{bmatrix} 3R_i + R_k & 0 & R_i + R_k \\ 0 & 0 & 0 \\ R_i + R_k & 0 & R_i + 3R_k \end{bmatrix}$$

Доданок до вільного члена СЕ на стороні 1-2 або i-j, пов'язаний із конвективним теплообміном

$$f\alpha_{12}(RZ, L, \alpha, T_p) := \frac{2\pi\alpha\cdot T_p \cdot L(RZ)_1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 2\cdot RZ_{1,1} + RZ_{2,1} \\ RZ_{1,1} + 2\cdot RZ_{2,1} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\int_{S_{ij}} \alpha T_p [N]^T dS = \frac{2\pi\alpha T_p \ell_{ij}}{6} \begin{bmatrix} 2R_i + R_j \\ R_i + 2R_j \\ 0 \end{bmatrix}$$

Доданок до вільного члена СЕ на стороні 2-3 або j-k, пов'язаний із конвективним теплообміном

$$f\alpha_{23}(RZ, L, \alpha, T_p) := \frac{2\pi\alpha\cdot T_p \cdot L(RZ)_2}{6} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2\cdot RZ_{2,1} + RZ_{3,1} \\ RZ_{2,1} + 2\cdot RZ_{3,1} \end{pmatrix}$$

$$\int_{S_{jk}} \alpha T_p [N]^T dS = \frac{2\pi\alpha T_p \ell_{jk}}{6} \begin{bmatrix} 0 \\ 2R_j + R_k \\ R_j + 2R_k \end{bmatrix}$$

Доданок до вільного члена СЕ на стороні 3-1 або k-i, пов'язаний із конвективним теплообміном

$$f\alpha_{31}(RZ, L, \alpha, T_p) := \frac{2\pi\alpha\cdot T_p \cdot L(RZ)_3}{6} \cdot \begin{pmatrix} 2\cdot RZ_{1,1} + RZ_{3,1} \\ 0 \\ RZ_{1,1} + 2\cdot RZ_{3,1} \end{pmatrix}$$

$$\int_{S_{ki}} \alpha T_p [N]^T dS = \frac{2\pi\alpha T_p \ell_{ki}}{6} \begin{bmatrix} 2R_i + R_k \\ 0 \\ R_i + 2R_k \end{bmatrix}$$

Обнулення глобальної матриці та вектора вільних членів

i := 1 .. Nnod_gl

F_i := 0

j := 1 .. Nnod_gl

K_{i,j} := 0

2. Формування глобальної матриці і вектора СЛАР та її розв'язання

$T :=$	for $k \in 1 \dots nEl$	
	for $i \in 1 \dots M$	1. Формування матриці локальних координат вузлів СЕ
	$j \leftarrow El_nod_{k,i}$	
	$RZ_{i,1} \leftarrow RZgl_{j,1}$	
	$RZ_{i,2} \leftarrow RZgl_{j,2}$	
	for $i \in 1 \dots M$	Обнулення вектора вільних членів СЕ
	$f_El_i \leftarrow 0$	
	$r_- \leftarrow \frac{(RZ_{1,1} + RZ_{2,1} + RZ_{3,1})}{3}$	
	$k_El \leftarrow 2\pi \cdot r_- \cdot B(b,c,A,RZ)^T \cdot D(\lambda) \cdot B(b,c,A,RZ) \cdot A(RZ)$	2. Формування матриці жорсткості СЕ, пов'язаної з теплопровідністю
	for $i \in 1 \dots M$	
	if $i = 1 \wedge El_GU3_{k,i} = 3$	3.1. Обчислення матриці і вектора вільних членів СЕ, пов'язаного із конвективним теплообміном (на стороні 12)
	$\alpha \leftarrow El_GU3_{k,5}$	
	$Tr \leftarrow El_GU3_{k,6}$	
	$k_El \leftarrow k_El + k\alpha_{12}(RZ, L, \alpha)$	
	$f_El \leftarrow f_El + f\alpha_{12}(RZ, L, \alpha, Tr)$	
	if $i = 2 \wedge El_GU3_{k,i} = 3$	3.2. Обчислення матриці і вектора вільних членів СЕ, пов'язаного із конвективним теплообміном (на стороні 23)
	$\alpha \leftarrow El_GU3_{k,7}$	
	$Tr \leftarrow El_GU3_{k,8}$	
	$k_El \leftarrow k_El + k\alpha_{23}(RZ, L, \alpha)$	
	$f_El \leftarrow f_El + f\alpha_{23}(RZ, L, \alpha, Tr)$	
	if $i = 3 \wedge El_GU3_{k,i} = 3$	3.3. Обчислення матриці і вектора вільних членів СЕ, пов'язаного із конвективним теплообміном (на стороні 31)
	$\alpha \leftarrow El_GU3_{k,9}$	
	$Tr \leftarrow El_GU3_{k,10}$	
	$k_El \leftarrow k_El + k\alpha_{31}(RZ, L, \alpha)$	
	$f_El \leftarrow f_El + f\alpha_{31}(RZ, L, \alpha, Tr)$	
	if $i = 1 \wedge El_GU2_{k,i} = 2$	3.4. Обчислення вектора вільних членів СЕ, пов'язаного із тепловим потоком (на стороні 12)
	$q \leftarrow El_GU2_{k,5}$	
	$f_El \leftarrow f_El + fq_{12}(RZ, L, q)$	
	if $i = 2 \wedge El_GU2_{k,i} = 2$	3.5. Обчислення вектора вільних членів СЕ, пов'язаного із тепловим потоком (на стороні 23)
	$q \leftarrow El_GU2_{k,6}$	
	$f_El \leftarrow f_El + fa_{23}(RZ, L, q)$	

```

    if  $i = 3 \wedge El\_GU2_{k,i} = 2$ 
         $q \leftarrow El\_GU2_{k,7}$ 
         $f\_El \leftarrow f\_El + fq\_31(RZ, L, q)$ 
     $f\_El \leftarrow f\_El + f\_qv(qv, A, RZ)$ 
    for  $i \in 1..M$ 
         $igl \leftarrow El\_nod_{k,i}$ 
         $F_{igl} \leftarrow F_{igl} + f\_El_i$ 
        for  $j \in 1..M$ 
             $jgl \leftarrow El\_nod_{k,j}$ 
             $K_{igl,jgl} \leftarrow K_{igl,jgl} + k\_El_{i,j}$ 
    for  $m \in 1..Nnod\_gl$ 
        if  $Node\_GU1_{m,2} = 1$ 
             $Tm \leftarrow Node\_GU1_{m,3}$ 
            for  $j \in 1..Nnod\_gl$ 
                 $F_j \leftarrow F_j - K_{j,m} \cdot Tm$ 
                 $K_{j,m} \leftarrow 0$ 
                 $K_{m,j} \leftarrow 0$ 
    for  $m \in 1..Nnod\_gl$ 
        if  $Node\_GU1_{m,2} = 1$ 
             $Tm \leftarrow Node\_GU1_{m,3}$ 
             $K_{m,m} \leftarrow 1$ 
             $F_m \leftarrow K_{m,m} \cdot Tm$ 
     $T \leftarrow Isolve(K, F)$ 
    T

```

3.6. Обчислення вектора вільних членів СЕ, пов'язаного із тепловим потоком (на стороні 31)

3.7. Обчислення вектора вільних членів СЕ, пов'язаного з об'ємними силами qv

4. Формування глобальної матриці та вектора вільних членів СЛАР

5. Перетворення матриці і вектора вільних членів СЛАР відповідно до ГУ Дирихле

6. Розв'язання СЛАР - одержання глобального вектора температур {T} задачі або вузлових значень температур

Обчислення компонент густини теплового потоку (qr, qz) по елементах

```

qEl := for  $k \in 1..nEl$ 
    for  $i \in 1..M$ 
         $igl \leftarrow El\_nod_{k,i}$ 
         $T\_El_i \leftarrow T_{igl}$ 
        for  $i \in 1..M$ 
             $j \leftarrow El\_nod_{k,i}$ 
             $RZ_{i,1} \leftarrow RZ_{gl,j,1}$ 

```

$$[q^{(e)}] = -[D] \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_i \\ T_j \\ T_k \end{Bmatrix}$$

```

| | | RZi,2 ← RZgl,j,2
| | q_El ← -D(λ)·B(b,c,A,RZ)·T_El
| | for i ∈ 1 .. 2
| | | qElk,i ← q_Eli
| qEl

```

Обчислення компонент густини теплового потоку (q_r, q_z, q_{sum}) у вузлах CE

```

q_node := | for i ∈ 1 .. Nnod_gl
| | k_cout ← 0
| | qx ← 0
| | qy ← 0
| | for k ∈ 1 .. nEl
| | | for j ∈ 1 .. M
| | | | node ← El_nodk,j
| | | | if node = i
| | | | | k_cout ← k_cout + 1
| | | | | qx ← qx + qElk,1
| | | | | qy ← qy + qElk,2
| | | if k_cout > 0
| | | | qx ←  $\frac{qx}{k\_cout}$ 
| | | | qy ←  $\frac{qy}{k\_cout}$ 
| | | q_nodei,1 ← qx
| | | q_nodei,2 ← qy
| | | q_nodei,3 ←  $\sqrt{qx^2 + qy^2}$ 
| q_node

```

VARIABLES="X, m", "Y, m", "T, K", "qx, W/(m^2)", "qy, W/(m^2)", "qsum, W/(m^2)"

Формування файлу результатів Result_1

```

Result_1 := | for i ∈ 1 .. Nnod_gl
| | Result_1i,1 ← RZgl,i,1
| | Result_1i,2 ← RZgl,i,2
| | Result_1i,3 ← Ti

```

Перезапис номерів вузлів CE

```

El_nod3 := | for k ∈ 1 .. nEl
| | for j ∈ 1 .. M

```

$$\begin{array}{|l} \text{Result_1}_{i,4} \leftarrow q_node_{i,1} \\ \text{Result_1}_{i,5} \leftarrow q_node_{i,2} \\ \text{Result_1}_{i,6} \leftarrow q_node_{i,3} \\ \text{Result_1} \end{array}$$

$$\begin{array}{|l} \text{El_nod3}_{k,j} \leftarrow \text{El_nod}_{k,j} \\ \text{El_nod3} \end{array}$$

Запис файлів результатів

E:\Result_1.dat

E:\NNodes\Elements.dat

Result_1

El_nod3

n_P := 7 Кількість і номери вузлів у перетині zmin<=z<=zmax

$$\text{nod_P} := \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 7 \\ 6 \\ 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Значення T у перетині zmin<=z<=zmax

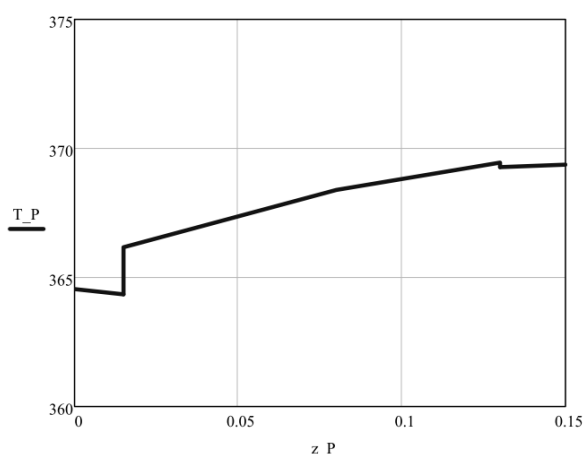
Координати по Z
у перетині zmin<=z<=zmax

$$\begin{array}{|l} \text{T_P} := \text{for } i \in 1 \dots n_P \\ \quad p \leftarrow \text{nod_P}_i \\ \quad T_P_i \leftarrow T_p \\ \text{T_P} \end{array}$$

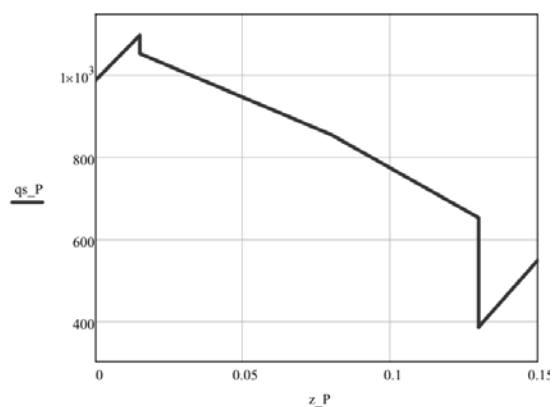
$$\begin{array}{|l} \text{z_P} := \text{for } i \in 1 \dots n_P \\ \quad p \leftarrow \text{nod_P}_i \\ \quad z_P_i \leftarrow RZgl_{p,2} \\ \text{z_P} \end{array}$$

$$\begin{array}{|l} \text{qs_P} := \text{for } i \in 1 \dots n_P \\ \quad p \leftarrow \text{nod_P}_i \\ \quad \text{qs_P}_i \leftarrow q_node_{p,3} \\ \text{qs_P} \end{array}$$

Епюра (графік) температур у перетині zmin<=z<=zmax



Епюра (графік) результуючої густини теплового потоку у перетині zmin<=z<=zmax



Д.4. Вісесиметрична задача теплопровідності. Лінійні чотирикутні СЕ

Програмний код **Lab_T_S4_2D.xmcd** розроблено за числовою методикою, що наведена в розділі 2 (див. підрозділ 2.3, п. 2.3.2), та супроводжується необхідними рисунками і коментарями.

Файл **Lab_T_S4_2D.xmcd**

ORIGIN $\equiv$ 1 Індксація масивів з 1

Розв'язання двовимірної стаціонарної задачі теплопровідності з використанням МСЕ з чотирикутними лінійними елементами циліндрична геометрія

1. Дано:

Nnod_gl := 19 кількість глобальних вузлів

nEl := 10 кількість елементів

теплопровідність - $\lambda := 4$

густина внутрішнього джерела теплоти - $q_v := 0$

граничні умови (ГУ):

сторона 2-3 - ГУ 3 роду $\alpha_1 := 7$ $T_{p1} := 70$

$\alpha_2 := 14$ $T_{p2} := 170$

на решті сторін - ГУ 2 $q := 0$
роду

Густина внутрішнього джерела теплоти $q_v := 0$

Координати вузлів r і z з номерами 1-19

$R := \frac{0.1}{2}$ $a := 0.15$ $b := 0.07$ $c := 0.035$ $d := 0.04$ $e := 0.05$ $f := 0.02$ $g := 0.015$
 $h := 0.02$

$r_1 := R$ $r_2 := R + \frac{(c-f)}{2} = 0.0575$ $r_3 := R + b - d$ $r_4 := R + b$ $r_5 := r_4$

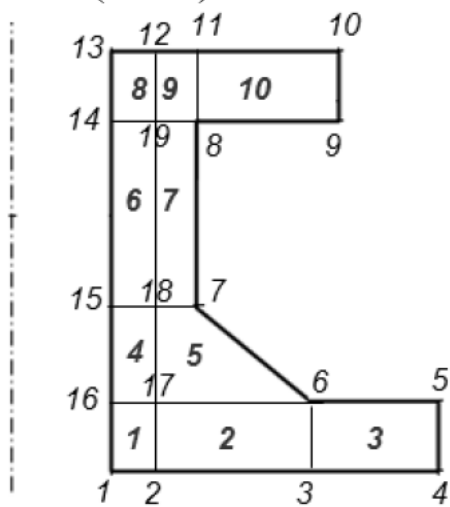
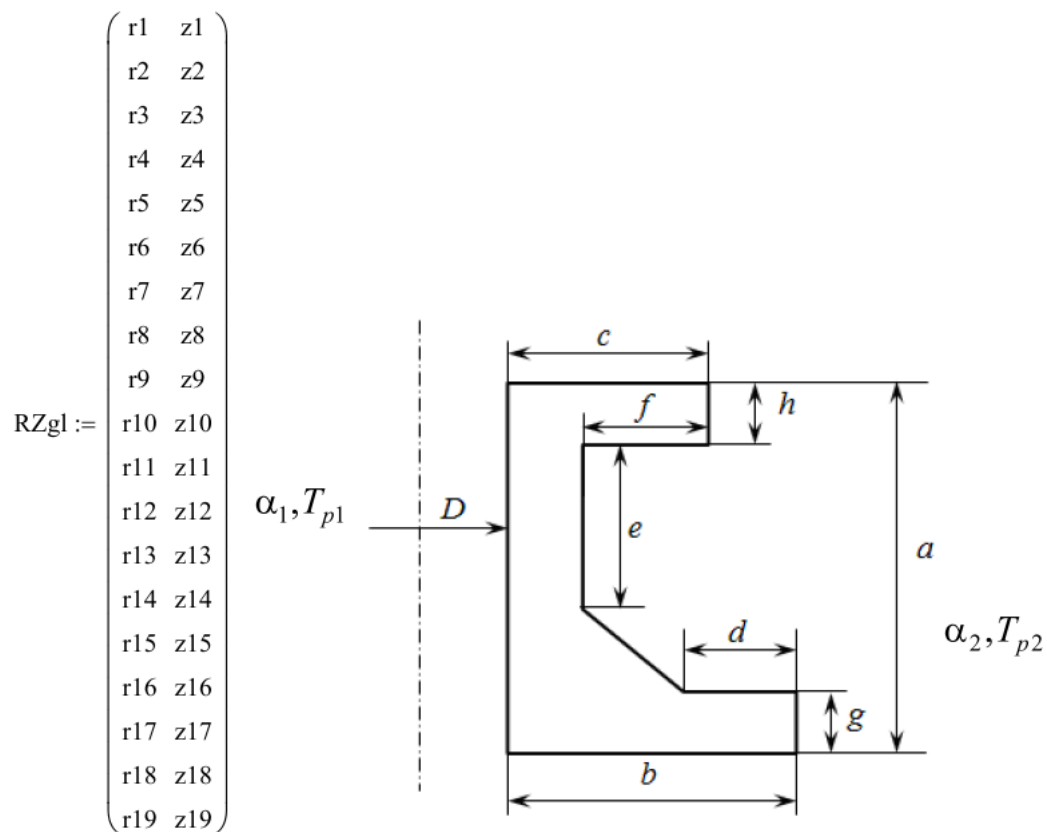
$z_1 := 0$ $z_2 := 0$ $z_3 := 0$ $z_4 := 0$ $z_5 := g$

$r_6 := r_3$ $r_7 := R + c - f$ $r_8 := r_7$ $r_9 := R + c$ $r_{10} := r_9$ $r_{11} := r_8$

$z_6 := g$ $z_7 := a - h - e$ $z_8 := a - h$ $z_9 := z_8$ $z_{10} := a$ $z_{11} := a$

$r_{12} := r_2$ $r_{13} := r_1$ $r_{14} := r_1$ $r_{15} := r_1$ $r_{16} := r_1$ $r_{17} := r_2$ $r_{18} := r_2$ $r_{19} := r_2$

$z_{12} := a$ $z_{13} := a$ $z_{14} := z_8$ $z_{15} := z_7$ $z_{16} := z_6$ $z_{17} := z_6$ $z_{18} := z_7$ $z_{19} := z_8$



1–19 – номери вузлів; 1–10 – номери СЕ

Матриця номерів вузлів скінченних елементів розміром 10x5

$El_nod := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 17 & 16 & 1 \\ 2 & 3 & 6 & 17 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 3 \\ 16 & 17 & 18 & 15 & 4 \\ 17 & 6 & 7 & 18 & 5 \\ 15 & 18 & 19 & 14 & 6 \\ 18 & 7 & 8 & 19 & 7 \\ 14 & 19 & 12 & 13 & 8 \\ 19 & 8 & 11 & 12 & 9 \\ 8 & 9 & 10 & 11 & 10 \end{pmatrix}$

Тут 5-й рядок стосується номерів СЕ

Граничні умови - 1-го роду

$i := 1 \dots \text{Nnod_gl}$

$\text{Node_GU1}_{i,1} := i \quad \text{Node_GU1}_{i,2} := 0 \quad \text{Node_GU1}_{i,3} := 0$

Тут перший стовпець це глобальні номери вузлів, другий ознака того, що у вузлі задана температура (може бути 0 або 1), 3-й - стовпець - значення температури

Граничні умови - 2-го роду

$i := 1 \dots \text{nEI}$

$j := 1 \dots 9$

$\text{EI_GU2}_{i,j} := 0 \quad \text{EI_GU2}_{i,5} := i$

Тут перші 4 стовпці це сторони 1-2, 2-3, 3-4, 4-1, в яких задано густину теплового потоку q (може бути 0 або 2), 5-й - номер СЕ, 6-й - значення q на 1-й стороні СЕ, 7-й - значення q на 2-й стороні СЕ, 8-й - значення q на 3-й стороні СЕ, 9-й - значення q на 4-й стороні СЕ,

Граничні умови 3-го роду

$$\text{EI_GU3} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha 1 & \text{Tr}1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 3 & 0 & 0 & \alpha 2 & \text{Tr}2 & \alpha 2 & \text{Tr}2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha 1 & \text{Tr}1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & \alpha 2 & \text{Tr}2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha 1 & \text{Tr}1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & \alpha 2 & \text{Tr}2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha 1 & \text{Tr}1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 10 & \alpha 2 & \text{Tr}2 & \alpha 2 & \text{Tr}2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Тут перші 4 стовпці це сторони 1-2, 2-3, 3-4, 4-1, в яких задано ГУ 3-го роду (може бути 0 або 3), 5-й - номер СЕ, 6-й, 7-й - значення α і Tr на 1-й стороні СЕ, відповідно, 8-й, 9-й - значення α і Tr на 2-й стороні СЕ, відповідно, 10-й, 11-й - значення α і Tr на 3-й стороні СЕ, відповідно, 12-й, 13-й - значення α і Tr на 4-й стороні СЕ, відповідно.

2. Розв'язок

Завдання вузлів та ваги квадратурної формули Гауса при $n=2$

$n_Gauss := 2$

$$\text{eta} := \begin{pmatrix} 0.577350269189626 \\ -0.577350269189626 \end{pmatrix} \quad w := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$M := 4$ - кількість вузлів в скінченному елементі

1. Матриці і функції

Матриця (вектор) функцій форми СЕ - [N]

$$N(i,j) := \frac{1}{4} \cdot \left[(1 - \text{eta}_i) \cdot (1 - \text{eta}_j) \quad (1 + \text{eta}_i) \cdot (1 - \text{eta}_j) \quad (1 + \text{eta}_i) \cdot (1 + \text{eta}_j) \quad (1 - \text{eta}_i) \cdot (1 + \text{eta}_j) \right]$$

Матриця похідних коефіцієнтів форми СЕ по ξ і η - dN

$$dN\xi\eta(i,j) := \frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} -(1 - \eta_{i,j}) & (1 - \eta_{i,j}) & (1 + \eta_{i,j}) & -(1 + \eta_{i,j}) \\ -(1 - \eta_{j,i}) & -(1 + \eta_{j,i}) & (1 + \eta_{j,i}) & (1 - \eta_{j,i}) \end{bmatrix}$$

Функція для визначення Якобіану [J]

$$J(i,j,RZ) := \frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} -(1 - \eta_{i,j}) & (1 - \eta_{i,j}) & (1 + \eta_{i,j}) & -(1 + \eta_{i,j}) \\ -(1 - \eta_{j,i}) & -(1 + \eta_{j,i}) & (1 + \eta_{j,i}) & (1 - \eta_{j,i}) \end{bmatrix} \cdot RZ$$

Функція для визначення детермінанту якобіану detJ

$$\det_J(i,j,RZ) := |J(i,j,RZ)|$$

Функція для визначення похідних від функцій форми (градієнта) [B] через r,z

$$B(i,j,RZ) := J(i,j,RZ)^{-1} \cdot dN\xi\eta(i,j)$$

Функція для визначення довжини сторін СЕ

$$L(RZ) := \begin{bmatrix} \sqrt{(RZ_{2,1} - RZ_{1,1})^2 + (RZ_{2,2} - RZ_{1,2})^2} \\ \sqrt{(RZ_{3,1} - RZ_{2,1})^2 + (RZ_{3,2} - RZ_{2,2})^2} \\ \sqrt{(RZ_{4,1} - RZ_{3,1})^2 + (RZ_{4,2} - RZ_{3,2})^2} \\ \sqrt{(RZ_{1,1} - RZ_{4,1})^2 + (RZ_{1,2} - RZ_{4,2})^2} \end{bmatrix}$$

Матриця теплопровідності СЕ - D

$$D := \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Функція для визначення добутку матриці [B] на матрицю теплопровідності СЕ [D]

$$BD(i,j,RZ) := B(i,j,RZ)^T \cdot D$$

$$BDB(i,j,RZ) := BD(i,j,RZ) \cdot B(i,j,RZ)$$

ГУ 3-го роду на стороні 1-2 СЕ

$$k_{El\alpha 12}(RZ, L, \alpha) := \frac{\pi \cdot \alpha \cdot L(RZ)_1}{6} \begin{pmatrix} 3 \cdot RZ_{1,1} + RZ_{2,1} & RZ_{1,1} + RZ_{2,1} & 0 & 0 \\ RZ_{1,1} + RZ_{2,1} & RZ_{1,1} + 3 RZ_{2,1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$f_{\alpha 12}(RZ, L, \alpha, T_p) := \frac{\pi \cdot \alpha \cdot T_p \cdot L(RZ)_1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 \cdot RZ_{1,1} + RZ_{2,1} \\ RZ_{1,1} + 2 \cdot RZ_{2,1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ГУ 3-го роду на стороні 2-3 CE

$$k_{El\alpha 23}(RZ, L, \alpha) := \frac{\pi \cdot \alpha \cdot L(RZ)_2}{6} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 \cdot RZ_{2,1} + RZ_{3,1} & RZ_{2,1} + RZ_{3,1} & 0 \\ 0 & RZ_{2,1} + RZ_{3,1} & RZ_{2,1} + 3 RZ_{3,1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$f_{\alpha 23}(RZ, L, \alpha, Tp) := \frac{\pi \cdot \alpha \cdot Tp \cdot L(RZ)_2}{3} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \cdot RZ_{2,1} + RZ_{3,1} \\ RZ_{2,1} + 2 \cdot RZ_{3,1} \\ 0 \end{pmatrix}$$

ГУ 3-го роду на стороні 3-4 CE

$$k_{El\alpha 34}(RZ, L, \alpha) := \frac{\pi \cdot \alpha \cdot L(RZ)_3}{6} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \cdot RZ_{3,1} + RZ_{4,1} & RZ_{3,1} + RZ_{4,1} \\ 0 & 0 & RZ_{3,1} + RZ_{4,1} & RZ_{3,1} + 3 RZ_{4,1} \end{pmatrix}$$

$$f_{\alpha 34}(RZ, L, \alpha, Tp) := \frac{\pi \cdot \alpha \cdot Tp \cdot L(RZ)_3}{3} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \cdot RZ_{3,1} + RZ_{4,1} \\ RZ_{3,1} + 2 \cdot RZ_{4,1} \end{pmatrix}$$

ГУ 3-го роду на стороні 4-1 CE

$$k_{El\alpha 41}(RZ, L, \alpha) := \frac{\pi \cdot \alpha \cdot L(RZ)_4}{6} \begin{pmatrix} 3 \cdot RZ_{1,1} + RZ_{4,1} & 0 & 0 & RZ_{1,1} + RZ_{4,1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ RZ_{1,1} + RZ_{4,1} & 0 & 0 & RZ_{1,1} + 3 RZ_{4,1} \end{pmatrix}$$

$$f_{\alpha 41}(RZ, L, \alpha, Tp) := \frac{\pi \cdot \alpha \cdot Tp \cdot L(RZ)_4}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 \cdot RZ_{1,1} + RZ_{4,1} \\ 0 \\ 0 \\ RZ_{1,1} + 2 \cdot RZ_{4,1} \end{pmatrix}$$

Вектор навантаження CE від ГУ 2-го роду на стороні 1-2 CE

$$f_{q12}(RZ, L, q) := \frac{\pi \cdot q \cdot L(RZ)_1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 \cdot RZ_{1,1} + RZ_{2,1} \\ RZ_{1,1} + 2 \cdot RZ_{2,1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Вектор навантаження СЕ від ГУ 2-го роду на стороні 2-3 СЕ

$$f_{q23}(RZ, L, q) := \frac{\pi \cdot q \cdot L(RZ)_2}{3} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \cdot RZ_{2,1} + RZ_{3,1} \\ RZ_{2,1} + 2 \cdot RZ_{3,1} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Вектор навантаження СЕ від ГУ 2-го роду на стороні 3-4 СЕ

$$f_{q34}(RZ, L, q) := \frac{\pi \cdot q \cdot L(RZ)_3}{3} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \cdot RZ_{3,1} + RZ_{4,1} \\ RZ_{3,1} + 2 \cdot RZ_{4,1} \end{pmatrix}$$

Вектор навантаження СЕ від ГУ 2-го роду на стороні 4-1 СЕ

$$f_{q41}(RZ, L, q) := \frac{\pi \cdot q \cdot L(RZ)_4}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 \cdot RZ_{1,1} + RZ_{4,1} \\ 0 \\ 0 \\ RZ_{1,1} + 2 \cdot RZ_{4,1} \end{pmatrix}$$

Вектор навантаження СЕ від q_v

$$f_{qv}(qv, RZ) := \text{for } i \in 1 \dots M \left\{ \begin{array}{l} s \leftarrow 0 \\ \text{for } ig \in 1 \dots n_Gauss \\ \quad \text{for } jg \in 1 \dots n_Gauss \\ \quad \quad s \leftarrow s + (N(ig, jg)^T)_i \cdot \left[(N(ig, jg)^T)_1 \cdot RZ_{1,1} + (N(ig, jg)^T)_2 \cdot RZ_{2,1} + (N(ig, jg)^T)_3 \right] \\ \quad f_{qv_i} \leftarrow 2 \cdot \pi \cdot s \cdot qv \\ f_{qv} \end{array} \right.$$

Обнулення глобальної матриці та вектора вільних членів

$i := 1 \dots Nnod_gl$

$F_i := 0$

$j := 1 \dots Nnod_gl$

$K_{i,j} := 0$

2. Формування глобальної матриці і вектора СПАР та її розв'язання

```

T := for k ∈ 1 .. nEl
    for i ∈ 1 .. M
        j ← El_nodk,i
        RZi,1 ← RZj,1gl
        RZi,2 ← RZj,2gl
        
$$r_- \leftarrow \frac{RZ_{1,1} + RZ_{2,1} + RZ_{3,1} + RZ_{4,1}}{4}$$

        for i ∈ 1 .. M
            f_Eli ← 0
            for j ∈ 1 .. M
                s ← 0
                for ig ∈ 1 .. n_Gauss
                    for jg ∈ 1 .. n_Gauss
                        
$$s \leftarrow s + \text{BDB}(\text{ig}, \text{jg}, \text{RZ})_{i,j} \cdot \det\_J(\text{ig}, \text{jg}, \text{RZ}) \cdot w_{ig} \cdot w_{jg}$$

                k_Elλi,j ← 2π · s · r_-
                k_Elαi,j ← 0
            for i ∈ 1 .. M
                if i = 1 ∧ El_GU3k,i = 3
                    α_1 ← El_GU3k,6
                    Tp_1 ← El_GU3k,7
                    k_Elα ← k_Elα + k_Elα12(RZ, L, α_1)
                    f_El ← f_El + f_α12(RZ, L, α_1, Tp_1)
                if i = 2 ∧ El_GU3k,i = 3
                    α_2 ← El_GU3k,8
                    Tp_2 ← El_GU3k,9
                    k_Elα ← k_Elα + k_Elα23(RZ, L, α_2)
                    f_El ← f_El + f_α23(RZ, L, α_2, Tp_2)
                if i = 3 ∧ El_GU3k,i = 3
                    α_3 ← El_GU3k,10
                    Tp_3 ← El_GU3k,11
                    k_Elα ← k_Elα + k_Elα34(RZ, L, α_3)
                    f_El ← f_El + f_α34(RZ, L, α_3, Tp_3)

```

```

| | | if i = 4 ∧ El_GU3k,i = 3
| | |   | α4 ← El_GU3k,12
| | |   | Tp4 ← El_GU3k,13
| | |   | k_Elα ← k_Elα + k_Elα41(RZ, L, α4)
| | |   | f_El ← f_El + f_α41(RZ, L, α4, Tp4)
| | | if i = 1 ∧ El_GU2k,i = 2
| | |   | q1 ← El_GU2k,6
| | |   | f_El ← f_El + f_q12(RZ, L, q1)
| | | if i = 2 ∧ El_GU2k,i = 2
| | |   | q2 ← El_GU2k,7
| | |   | f_El ← f_El + f_q23(RZ, L, q2)
| | | if i = 3 ∧ El_GU2k,i = 2
| | |   | q3 ← El_GU2k,8
| | |   | f_El ← f_El + f_q34(RZ, L, q3)
| | | if i = 4 ∧ El_GU2k,i = 2
| | |   | q4 ← El_GU2k,9
| | |   | f_El ← f_El + f_q41(RZ, L, q4)
| | f_El ← f_El + f_qv(qv, RZ)
| | for i ∈ 1 .. M
| |   | igl ← El_nodk,i
| |   | Figl ← Figl + f_Eli
| |   | for j ∈ 1 .. M
| |   |   | jgl ← El_nodk,j
| |   |   | Kigl,jgl ← Kigl,jgl + k_Elλi,j + k_Elαi,j
| | for m ∈ 1 .. Nnod_gl
| |   | if Node_GU1m,2 = 1
| |   |   | Tm ← Node_GU1m,3
| |   |   | for j ∈ 1 .. Nnod_gl
| |   |   |   | Fj ← Fj - Kj,m · Tm
| |   |   |   | Kj,m ← 0
| |   |   |   | Km,j ← 0

```

```

for m ∈ 1 .. Nnod_gl
  if Node_GU1m,2 = 1
    Tm ← Node_GU1m,3
    for j ∈ 1 .. Nnod_gl
      Fj ← Fj - Kj,m · Tm
      Kj,m ← 0
      Km,j ← 0
    for m ∈ 1 .. Nnod_gl
      if Node_GU1m,2 = 1
        Tm ← Node_GU1m,3
        Km,m ← 1
        Fm ← Km,m · Tm
    T ← lsolve(K, F)
  T

```

Визначення номерів СЕ, що оточують поточний вузол

```

Number_El := for i ∈ 1 .. Nnod_gl
  for k ∈ 1 .. M
    Number_Eli,k ← 0
  kk ← 0
  for j ∈ 1 .. nEl
    for k ∈ 1 .. M
      if El_nodj,k = i
        kk ← kk + 1
        Number_Eli,kk ← j
    Number_El

```

Функція Якобіан $J(\xi, \eta, RZ)$

$$J(\xi, \eta, RZ) := \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -(1 - \eta) & (1 - \eta) & (1 + \eta) & -(1 + \eta) \\ -(1 - \xi) & -(1 + \xi) & (1 + \xi) & (1 - \xi) \end{bmatrix} \cdot RZ$$

Функція градієнту СЕ у безрозмірних координатах $dN(\xi, \eta)$

$$dN(\xi, \eta) := \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -(1 - \eta) & (1 - \eta) & (1 + \eta) & -(1 + \eta) \\ -(1 - \xi) & -(1 + \xi) & (1 + \xi) & (1 - \xi) \end{bmatrix}$$

Функція градієнту СЕ у розмірних координатах $dNr_z(\xi, \eta, RZ)$

$$dNr_z(\xi, \eta, RZ) := J(\xi, \eta, RZ)^{-1} \cdot dN(\xi, \eta)$$

$$\eta := \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{Вузол 1 - } \xi=-1, \eta=-1 \text{ CE} \\ \text{Вузол 2 - } \xi=1, \eta=-1 \text{ CE} \\ \text{Вузол 3 - } \xi=1, \eta=1 \text{ CE} \\ \text{Вузол 4 - } \xi=-1, \eta=1 \text{ CE} \end{array}$$

Визначення складових густини теплового потоку по CE

```
qrz :=
  for k ∈ 1 .. nEl
    for i ∈ 1 .. M
      j ← El_nodk,i
      RZi,1 ← RZgl,j,1
      RZi,2 ← RZgl,j,2
      for i ∈ 1 .. M
        j ← El_nodk,i
        t_Eli ← Tj
      for j ∈ 1 .. 2·M
        qrzk,j ← 0
      for j ∈ 1 .. M
        DT ← dNrz(ηj,1, ηj,2, RZ) · t_El
        qrzk,j ← -λ · DT1
        qrzk,4+j ← -λ · DT2
    qrz
```

Визначення складової густини теплового потоку q_r у глобальних вузлах

```
qr :=
  for i ∈ 1 .. Nnodgl
    for j ∈ 1 .. 4
      n ← Number_Eli,j
      m ← 0
      s ← 0
      if n > 0
        for k ∈ 1 .. M
          if El_nodn,k = i
            m ← m + 1
            s ← s + qrzn,k
        qr,i ←  $\frac{s}{m}$ 
    qr
```

Визначення складової густини теплового потоку qz у глобальних вузлах

```

qz := for i ∈ 1 .. Nnod_gl
      for j ∈ 1 .. 4
        n ← Number_Eli,j
        m ← 0
        s ← 0
        if n > 0
          for k ∈ 1 .. M
            m ← m + 1 if El_nodn,k = i
            s ← s + qrn,k+4 if El_nodn,k = i
          qzi ←  $\frac{s}{m}$ 
      qz

```

Визначення qsum по вузлах

```

qsum := for i ∈ 1 .. Nnod_gl
        qsi ←  $\sqrt{(qr_i)^2 + (qz_i)^2}$ 
      qs

```

VARIABLES="R, m", "Z, m", "T, K", "qr, W/(m^2)", "qz, W/(m^2)", "qsum, W/(m^2)"

Формування файлу результатів Result_1

<pre> Result_1 := for i ∈ 1 .. Nnod_gl Result_1_{i,1} ← RZgl_{i,1} Result_1_{i,2} ← RZgl_{i,2} Result_1_{i,3} ← T_i Result_1_{i,4} ← qr_i Result_1_{i,5} ← qz_i Result_1_{i,6} ← qsum_i Result_1 </pre>	Перезапис номерів вузлів CE <pre> El_nod4 := for k ∈ 1 .. nEl for j ∈ 1 .. M El_nod4_{k,j} ← El_nod_{k,j} El_nod4 </pre>
---	---

Запис файлів результатів

E:\Result_1.dat E:\NNodes\Elements.dat

Result_1 El_nod4

Д.5. Тривимірна задача теплопровідності. Лінійні тетраедні СЕ

Програмний код **Lab_T_3D.xmcd** розроблено за числовою методикою, що наведена в розділі 2 (див. підрозділ 2.4, п. 2.4.1), та супроводжується необхідними рисунками і коментарями.

Файл **Lab_T_3D.xmcd**

стаціонарна теплопровідність 3D задача

ORIGIN = 1 Індексація масивів з 1

M := 4 кількість вузлів в тетраедному скінченному елементі

В коді видаляються зайві вузли, що пише програма Gmsh у файл *.msh при побудові 3D геометрії інструментами Gmsh, наприклад, Extrude
Зчитування номерів і координат вузлів дискретизованої в програмі Gmsh моделі фланця з файлу Gmsh_nodes_flan.dat

Файл Gmsh_nodes_flan.dat створюється із файлу Flan1.msh таким чином.
Спочатку Flan1.msh копіюється в файл Gmsh_nodes_flan.dat. Далі виконується корегування створеного файлу Gmsh_nodes_flan.dat у текстовому редакторі.
У файлі Gmsh_nodes_flan.dat спочатку видаляються перші 5 рядків, а саме такі:

\$MeshFormat

2.2 0 8

\$EndMeshFormat

\$Nodes

190

(тут 190 - це кількість вузлів, отриманих в результаті дискретизації)
тобто до рядка з номером 1 на його початку,
потім рядки до 190 номеру лишаються у файлі Gmsh_nodes_flan.dat, а рядки, починаючи з

\$EndNodes

видаляються із файлу до його кінця.

І останньою операцією редагування файлу є заміна "крапки" на "кому".

Записуємо результат редагування та виходимо з редактора.

Зчитування файлу Gmsh_nodes_flan.dat в матрицю

Gmsh_nodes

Gmsh_nodes :=

Gmsh_nodes_flan.dat

Визначення кількості рядків в матриці Gmsh_nodes

Nnod_gl := rows(Gmsh_nodes) = 190 кількість глобальних вузлів

Зчитування номерів елементів + ін. і номерів вузлів по елементах дискретизованої в програмі Gmsh моделі фланця з файлу Gmsh_elem_flan.dat

Файл Gmsh_elem_flan.dat створюється із файлу Flan1.msh таким чином.

Спочатку Flan1.msh копіюється в файл Gmsh_elem_flan.dat. Далі виконується корегування створеного файлу Gmsh_elem_flan.dat у текстовому редакторі.

У файлі Gmsh_elem_flan.dat спочатку видаляються перші рядки до рядка:

\$Elements.

Потім видаляються рядки до рядка, у якому друге число (2-й стовпець) дорівнює 4 (число 4 є ознакою тетраедра).

Далі переходимо в кінець файлу та видаляємо останній рядок

\$EndElements

Записуємо результат редагування та виходимо з редактора.

Зчитування файлу Gmsh_elem_flan.dat в матрицю

Gmsh_elem

Gmsh_elem :=

Gmsh_elem_flan.dat

Визначення кількості рядків в матриці

Gmsh_elem

nEl := rows(Gmsh_elem) = 487

кількість скінчених елементів

Запис глобальних вузлів дискретизованої моделі фланця у матрицю El_nod

```
El_nod := || for i ∈ 1 .. nEl
            | El_nodi,1 ← Gmsh_elemi,6
            | El_nodi,2 ← Gmsh_elemi,7
            | El_nodi,3 ← Gmsh_elemi,8
            | El_nodi,4 ← Gmsh_elemi,9
            | El_nod
```

Функція яка визначає номери вузлів (точок) які не є вузлами розрахункової сітки (тобто не використовуються в CE), а виникають при побудові 3D геометрії в програмі Gmsh за допомогою команди Extrude.

```
Nod_Del := || L ← 0
            | for i ∈ 1 .. Nnod_gl
            |   pL ← 0
            |   for j ∈ 1 .. nEl
            |     for k ∈ 1 .. 4
            |       pL ← 1 if El_nodj,k = i
            |     if pL = 0
            |       L ← L + 1
            |       Nod_DelL ← i
            | Nod_Del
```

$N_Del := \text{rows}(\text{Nod_Del}) = 4$ Кількість зайвих вузлів, що не використовуються в СЕ

Сортування

$$\text{Nod_Del} := \begin{cases} \text{sort}(\text{Nod_Del}) & \text{if } N_Del > 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Видалення вузлів або стискання номерів вузлів, що не використовуються в розрахунковій сітці

```
Gmsh_nodes :=
  for i ∈ 1 .. N_Del
    if N_Del > 0
      n ← Nod_Del1
      if n < Nnod_gl
        for j ∈ n + 1 .. Nnod_gl
          for k ∈ 1 .. M
            Gmsh_nodesj-1,k ← Gmsh_nodesj,k
          for k ∈ i + 1 .. N_Del      if i < N_Del
            Nod_Delk ← Nod_Delk - 1
        Gmsh_nodes
```

$Nnod_gl := Nnod_gl - N_Del = 186$

Запис глобальних вузлів дискретизованої моделі фланця у матрицю XYZgl

```
XYZgl :=
  for i ∈ 1 .. Nnod_gl
    XYZgli,1 ← Gmsh_nodesi,2
    XYZgli,2 ← Gmsh_nodesi,3
    XYZgli,3 ← Gmsh_nodesi,4
  XYZgl
```

Перекодування номерів вузлів по тетраедних елементах

```
El_nod :=
  for j ∈ 1 .. nEl
    for k ∈ 1 .. 4
      ik ← El_nodj,k
      for i ∈ 1 .. Nnod_gl
        if ik = Gmsh_nodesi,1
          i1 ← i
          break
      El_nodj,k ← i1
    El_nod
```

Запис тетраедної сітки для перегляду в TecPlot

Вивід координат вузлів та номерів вузлів по елементах-тетраедрах для перегляду в програмі Tecplot

Result_1_msh.dat

NNodes_Elements.dat

XYZgl

El_nod

Зчитування даних Gmsh про триангуляцію поверхонь тіла із файлу El_Area2_Gmsh.dat

Файл El_Area2_Gmsh.dat створюється із текстового файлу Flan1.msh (який записує програма мешер Gmsh) за допомогою копіювання Flan1.msh у El_Area2_Gmsh.dat.

Далі виконується редагування файлу El_Area2_Gmsh.dat таким чином:

спочатку видаляються всі рядки до рядка

\$Elements;

потім знов видаляються рядки до рядка, у якому у 2-у стовпці записано 2 (яка є ознакою трикутного елемента на поверхні);

далі всі рядки з 2 у 2-у стовпці рядка лишаються у файлі;

всі рядки, починаючи з рядка, у якому у 2-у стовпці записана 4 (або інша цифра, але не 2) видаляються до кінця файлу.

Area2_nod_El :=

El_Area2_msh.dat

N_Area2 := rows(Area2_nod_El) = 368 Кількість рядків в матриці

Перекодування номерів вузлів по трикутних елементах на поверхнях

```
Area2_nod_El :=
  for j ∈ 1 .. N_Area2
    for k ∈ 6 .. 8
      ik ← Area2_nod_Elj,k
      for i ∈ 1 .. Nnod_gl
        if ik = Gmsh_nodesi,1
          i1 ← i
          break
        Area2_nod_Elj,k ← i1
      Area2_nod_El
```

З торця фланця ГУ III роду задані на поверхні 1

Зовні фланця ГУ III роду задані на поверхні 4

Всередині фланця ГУ III роду задані на поверхнях 8,9,10

Тобто з матриці Area2_nod_El треба отримати інформацію про трикутні СЕ на поверхнях 1, 4, 8, 9, 10. Ця інформація включає номери глобальних вузлів.

1.1. Визначення номерів глобальних вузлів трикутних елементів поверхні

№ 1 з матриці Area2_nod_El

функція

```
El_nod_(k) := | row ← 0
               | for i ∈ 1..N_Area2
               |   j ← Area2_nod_Eli,5
               |   if j = k
               |     row ← row + 1
               |     for l ∈ 1..3
               |       El_nodrow,l ← Area2_nod_Eli,5+l
               | El_nod
```

El_nod1 := El_nod_(1) тут 1 це номер поверхні

N_El_side1 := rows(El_nod1) = 37 кількість трикутних елементів на поверхні 1

1.2. Запис номерів вузлів елементів на стороні № 1 у вектор (без повторення однакових номерів)

функція

```
Nod_side(N_El_side, El_nod) := | k ← 0
                                | for i ∈ 1..N_El_side
                                |   if i = 1
                                |     for j ∈ 1..3
                                |       Nod_side-k+j ← El_nodi,j
                                |     k ← k + 3
                                |   if i > 1
                                |     for j ∈ 1..3
                                |       n ← El_nodi,j
                                |       j0 ← -1
```


10.2. Запис номерів вузлів елементів на стороні № 10 у вектор (без повторення однакових номерів)

$Nod_side10 := Nod_side(N_El_side10, El_nod10)$

$n_s10 := rows(Nod_side10) = 16$

Тепер ці дані треба зв'язати зі сторонами тетраедричних СЕ
функція, яка встановлює зв'язок поверхневих трикутників з номерами тетраедричних СЕ та номерами їх сторін та записує відповідні коефіцієнти конвективних умов

```
BC3_Side(El_nod_, N_El_side,  $\alpha$ , Tp) :=
  n  $\leftarrow$  0
  for i  $\in$  1 .. N_El_side
    e1  $\leftarrow$  El_nod_i,1
    e2  $\leftarrow$  El_nod_i,2
    e3  $\leftarrow$  El_nod_i,3
    for j  $\in$  1 .. nEl
      el1  $\leftarrow$  El_nod_j,1
      el2  $\leftarrow$  El_nod_j,2
      el3  $\leftarrow$  El_nod_j,3
      el4  $\leftarrow$  El_nod_j,4
      if (el1 = e1  $\vee$  el1 = e2  $\vee$  el1 = e3)  $\wedge$  (el2 = e1  $\vee$  el2 = e2  $\vee$  el2 = e3)  $\wedge$  (el3 = e1  $\vee$  el3 = e2  $\vee$  el3 = e3)
        n  $\leftarrow$  n + 1
        BC3n,1  $\leftarrow$  j
        BC3n,2  $\leftarrow$  1
        BC3n,3  $\leftarrow$   $\alpha$ 
        BC3n,4  $\leftarrow$  Tp
        break
      if (el2 = e1  $\vee$  el2 = e2  $\vee$  el2 = e3)  $\wedge$  (el3 = e1  $\vee$  el3 = e2  $\vee$  el3 = e3)  $\wedge$  (el4 = e1  $\vee$  el4 = e2  $\vee$  el4 = e3)
        n  $\leftarrow$  n + 1
        BC3n,1  $\leftarrow$  j
        BC3n,2  $\leftarrow$  2
        BC3n,3  $\leftarrow$   $\alpha$ 
        BC3n,4  $\leftarrow$  Tp
        break
      if (el1 = e1  $\vee$  el1 = e2  $\vee$  el1 = e3)  $\wedge$  (el3 = e1  $\vee$  el3 = e2  $\vee$  el3 = e3)  $\wedge$  (el4 = e1  $\vee$  el4 = e2  $\vee$  el4 = e3)
        n  $\leftarrow$  n + 1
        BC3n,1  $\leftarrow$  j
        BC3n,2  $\leftarrow$  3
        BC3n,3  $\leftarrow$   $\alpha$ 
        BC3n,4  $\leftarrow$  Tp
        break
```

```

      if (el1 = e1 ∨ el1 = e2 ∨ el1 = e3) ∧ (el2 = e1 ∨ el2 = e2 ∨ el2 = e3) ∧ (el4 = e1 ∨ el4 = e2 ∨ el4 = e3)
      |
      |   n ← n + 1
      |   BC3n,1 ← j
      |   BC3n,2 ← 4
      |   BC3n,3 ← α
      |   BC3n,4 ← Tr
      |   break
      |
      |   p ← 0
      |
      |   f ← 0
      |
      | BC3

```

Задання граничних умов III роду на сторонах фланця

Сторони фланця з номерами 1, 4, 8, 9, 10, на яких Задані граничні умови III роду

Сторона № 1 - торець

$\alpha_1 := 7$ $Tr_1 := 15$

$BC3_Side1 := BC3_Side(El_nod1, N_El_side1, \alpha_1, Tr_1)$

Сторона № 4 - зовнішня сторона

$\alpha_4 := 10$ $Tr_4 := 25$

$BC3_Side4 := BC3_Side(El_nod4, N_El_side4, \alpha_4, Tr_4)$

Сторона № 8 - внутрішня сторона 1

$\alpha_8 := 15$ $Tr_8 := 200$

$BC3_Side8 := BC3_Side(El_nod8, N_El_side8, \alpha_8, Tr_8)$

Сторона № 9 - внутрішня сторона 2

$\alpha_9 := 15$ $Tr_9 := 200$

$BC3_Side9 := BC3_Side(El_nod9, N_El_side9, \alpha_9, Tr_9)$

Сторона № 10 - внутрішня сторона 3

$\alpha_{10} := 15$ $Tr_{10} := 200$

$BC3_Side_{10} := BC3_Side(El_nod_{10}, N_El_side_{10}, \alpha_{10}, Tr_{10})$

Формування глобальної матриці El_BC3 для ГУ III роду по елементах

В матриці El_BC3 перші 4 стовпці це сторони тетраедра ijk (1), jkl (2), ikl (3), ijl (4), в яких задано ГУ 3-го роду (може бути 0 або 3), 5-й - номер SE, 6-й, 7-й - значення α і Tr на 1-й стороні SE, відповідно, 8-й, 9-й - значення α і Tr на 2-й стороні SE, відповідно, 10-й, 11-й - значення α і Tr на 3-й стороні SE, відповідно, 12-й, 13-й - значення α і Tr на 4-й стороні SE, відповідно,


```

El_BC3 := for el ∈ 1 .. nEl
| El_BC3el,5 ← el
| for j ∈ 1 .. N_El_side1
| | if BC3_Side1j,1 = el
| | | if BC3_Side1j,2 = 1
| | | | El_BC3el,1 ← 3
| | | | El_BC3el,6 ← α1
| | | | El_BC3el,7 ← Tp1
| | | if BC3_Side1j,2 = 2
| | | | El_BC3el,2 ← 3
| | | | El_BC3el,8 ← α1
| | | | El_BC3el,9 ← Tp1
| | | if BC3_Side1j,2 = 3
| | | | El_BC3el,3 ← 3
| | | | El_BC3el,10 ← α1
| | | | El_BC3el,11 ← Tp1
| | | if BC3_Side1j,2 = 4
| | | | El_BC3el,4 ← 3
| | | | El_BC3el,12 ← α1
| | | | El_BC3el,13 ← Tp1
| | for j ∈ 1 .. N_El_side4
| | | if BC3_Side4j,1 = el
| | | | if BC3_Side4j,2 = 1
| | | | | El_BC3el,1 ← 3
| | | | | El_BC3el,6 ← α4
| | | | | El_BC3el,7 ← Tp4
| | | | if BC3_Side4j,2 = 2
| | | | | El_BC3el,2 ← 3
| | | | | El_BC3el,8 ← α4
| | | | | El_BC3el,9 ← Tp4
| | | | if BC3_Side4j,2 = 3

```

```

    El_BC3el,4 ← 3
    El_BC3el,12 ← α4
    El_BC3el,13 ← Tp4
  for j ∈ 1 .. N_El_side8
    if BC3_Side8j,1 = el
      if BC3_Side8j,2 = 1
        El_BC3el,1 ← 3
        El_BC3el,6 ← α8
        El_BC3el,7 ← Tp8
      if BC3_Side8j,2 = 2
        El_BC3el,2 ← 3
        El_BC3el,8 ← α8
        El_BC3el,9 ← Tp8
      if BC3_Side8j,2 = 3
        El_BC3el,3 ← 3
        El_BC3el,10 ← α8
        El_BC3el,11 ← Tp8
      if BC3_Side8j,2 = 4
        El_BC3el,4 ← 3
        El_BC3el,12 ← α8
        El_BC3el,13 ← Tp8
  for j ∈ 1 .. N_El_side9
    if BC3_Side9j,1 = el
      if BC3_Side9j,2 = 1
        El_BC3el,1 ← 3
        El_BC3el,6 ← α9
        El_BC3el,7 ← Tp9
      if BC3_Side9j,2 = 2
        El_BC3el,2 ← 3
        El_BC3el,8 ← α9

```

```

| | | El_BC3el,9 ← Tp9
| | | if BC3_Side9j,2 = 3
| | | | El_BC3el,3 ← 3
| | | | El_BC3el,10 ← α9
| | | | El_BC3el,11 ← Tp9
| | | if BC3_Side9j,2 = 4
| | | | El_BC3el,4 ← 3
| | | | El_BC3el,12 ← α9
| | | | El_BC3el,13 ← Tp9
| | | for j ∈ 1 .. N_El_side10
| | | | if BC3_Side10j,1 = el
| | | | | if BC3_Side10j,2 = 1
| | | | | | El_BC3el,1 ← 3
| | | | | | El_BC3el,6 ← α10
| | | | | | El_BC3el,7 ← Tp10
| | | | | if BC3_Side10j,2 = 2
| | | | | | El_BC3el,2 ← 3
| | | | | | El_BC3el,8 ← α10
| | | | | | El_BC3el,9 ← Tp10
| | | | | if BC3_Side10j,2 = 3
| | | | | | El_BC3el,3 ← 3
| | | | | | El_BC3el,10 ← α10
| | | | | | El_BC3el,11 ← Tp10
| | | | | if BC3_Side10j,2 = 4
| | | | | | El_BC3el,4 ← 3
| | | | | | El_BC3el,12 ← α10
| | | | | | El_BC3el,13 ← Tp10
| | | El_BC3

```

Фізичні властивості

$\lambda := 1.5$ Вт/(м*К) - теплопровідність матеріалу фланця

Густина внутрішнього джерела теплоти в матеріалі фланця

$qv := 0$ Вт/м³

Розв'язання задачі

1. Функції

Об'єм CE

$$V(XYZ) := \frac{1}{6} \cdot \left| \begin{pmatrix} 1 & XYZ_{1,1} & XYZ_{1,2} & XYZ_{1,3} \\ 1 & XYZ_{2,1} & XYZ_{2,2} & XYZ_{2,3} \\ 1 & XYZ_{3,1} & XYZ_{3,2} & XYZ_{3,3} \\ 1 & XYZ_{4,1} & XYZ_{4,2} & XYZ_{4,3} \end{pmatrix} \right|$$

Вектори для визначення матриці градієнтів

$$a(XYZ, i) := \begin{cases} \begin{vmatrix} XYZ_{2,1} & XYZ_{2,2} & XYZ_{2,3} \\ XYZ_{3,1} & XYZ_{3,2} & XYZ_{3,3} \\ XYZ_{4,1} & XYZ_{4,2} & XYZ_{4,3} \end{vmatrix} & \text{if } i = 1 \\ \begin{vmatrix} XYZ_{1,1} & XYZ_{1,2} & XYZ_{1,3} \\ XYZ_{3,1} & XYZ_{3,2} & XYZ_{3,3} \\ XYZ_{4,1} & XYZ_{4,2} & XYZ_{4,3} \end{vmatrix} & \text{if } i = 2 \\ \begin{vmatrix} XYZ_{1,1} & XYZ_{1,2} & XYZ_{1,3} \\ XYZ_{2,1} & XYZ_{2,2} & XYZ_{2,3} \\ XYZ_{4,1} & XYZ_{4,2} & XYZ_{4,3} \end{vmatrix} & \text{if } i = 3 \\ \begin{vmatrix} XYZ_{1,1} & XYZ_{1,2} & XYZ_{1,3} \\ XYZ_{3,1} & XYZ_{3,2} & XYZ_{3,3} \\ XYZ_{3,1} & XYZ_{3,2} & XYZ_{3,3} \end{vmatrix} & \text{if } i = 4 \end{cases}$$

$$b(XYZ, i) := \begin{cases} - \begin{vmatrix} 1 & XYZ_{2,2} & XYZ_{2,3} \\ 1 & XYZ_{3,2} & XYZ_{3,3} \\ 1 & XYZ_{4,2} & XYZ_{4,3} \end{vmatrix} & \text{if } i = 1 \\ \begin{vmatrix} 1 & XYZ_{1,2} & XYZ_{1,3} \\ 1 & XYZ_{3,2} & XYZ_{3,3} \\ 1 & XYZ_{4,2} & XYZ_{4,3} \end{vmatrix} & \text{if } i = 2 \\ - \begin{vmatrix} 1 & XYZ_{1,2} & XYZ_{1,3} \\ 1 & XYZ_{2,2} & XYZ_{2,3} \\ 1 & XYZ_{4,2} & XYZ_{4,3} \end{vmatrix} & \text{if } i = 3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
& \left| \begin{pmatrix} 1 & XYZ_{1,2} & XYZ_{1,3} \\ 1 & XYZ_{2,2} & XYZ_{2,3} \\ 1 & XYZ_{3,2} & XYZ_{3,3} \end{pmatrix} \right| \quad \text{if } i = 4 \\
c(XYZ, i) &:= - \left| \begin{pmatrix} XYZ_{2,1} & 1 & XYZ_{2,3} \\ XYZ_{3,1} & 1 & XYZ_{3,3} \\ XYZ_{4,1} & 1 & XYZ_{4,3} \end{pmatrix} \right| \quad \text{if } i = 1 \\
& \left| \begin{pmatrix} XYZ_{1,1} & 1 & XYZ_{1,3} \\ XYZ_{3,1} & 1 & XYZ_{3,3} \\ XYZ_{4,1} & 1 & XYZ_{4,3} \end{pmatrix} \right| \quad \text{if } i = 2 \\
& - \left| \begin{pmatrix} XYZ_{1,1} & 1 & XYZ_{1,3} \\ XYZ_{2,1} & 1 & XYZ_{2,3} \\ XYZ_{4,1} & 1 & XYZ_{4,3} \end{pmatrix} \right| \quad \text{if } i = 3 \\
& \left| \begin{pmatrix} XYZ_{1,1} & 1 & XYZ_{1,3} \\ XYZ_{2,1} & 1 & XYZ_{2,3} \\ XYZ_{3,1} & 1 & XYZ_{3,3} \end{pmatrix} \right| \quad \text{if } i = 4 \\
d(XYZ, i) &:= - \left| \begin{pmatrix} XYZ_{2,1} & XYZ_{2,2} & 1 \\ XYZ_{3,1} & XYZ_{3,2} & 1 \\ XYZ_{4,1} & XYZ_{4,2} & 1 \end{pmatrix} \right| \quad \text{if } i = 1 \\
& \left| \begin{pmatrix} XYZ_{1,1} & XYZ_{1,2} & 1 \\ XYZ_{3,1} & XYZ_{3,2} & 1 \\ XYZ_{4,1} & XYZ_{4,2} & 1 \end{pmatrix} \right| \quad \text{if } i = 2 \\
& - \left| \begin{pmatrix} XYZ_{1,1} & XYZ_{1,2} & 1 \\ XYZ_{2,1} & XYZ_{2,2} & 1 \\ XYZ_{4,1} & XYZ_{4,2} & 1 \end{pmatrix} \right| \quad \text{if } i = 3 \\
& \left| \begin{pmatrix} XYZ_{1,1} & XYZ_{1,2} & 1 \\ XYZ_{2,1} & XYZ_{2,2} & 1 \\ XYZ_{3,1} & XYZ_{3,2} & 1 \end{pmatrix} \right| \quad \text{if } i = 4
\end{aligned}$$

Матриця градієнтів СЕ

$$B(XYZ) := \frac{1}{6 \cdot V(XYZ)} \begin{pmatrix} b(XYZ, 1) & b(XYZ, 2) & b(XYZ, 3) & b(XYZ, 4) \\ c(XYZ, 1) & c(XYZ, 2) & c(XYZ, 3) & c(XYZ, 4) \\ d(XYZ, 1) & d(XYZ, 2) & d(XYZ, 3) & d(XYZ, 4) \end{pmatrix}$$

Матриця теплопровідності ізотропного середовища

$$D(\lambda) := \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Площа граней CE

$$S(XYZ, is) := \begin{cases} \text{if } is = 1 \\ \quad \begin{cases} i \leftarrow 1 \\ j \leftarrow 2 \\ k \leftarrow 3 \end{cases} \\ \text{if } is = 2 \\ \quad \begin{cases} i \leftarrow 2 \\ j \leftarrow 3 \\ k \leftarrow 4 \end{cases} \\ \text{if } is = 3 \\ \quad \begin{cases} i \leftarrow 1 \\ j \leftarrow 3 \\ k \leftarrow 4 \end{cases} \\ \text{if } is = 4 \\ \quad \begin{cases} i \leftarrow 1 \\ j \leftarrow 2 \\ k \leftarrow 4 \end{cases} \\ g1 \leftarrow \begin{vmatrix} XYZ_{i,2} - XYZ_{k,2} & XYZ_{i,3} - XYZ_{k,3} \\ XYZ_{j,2} - XYZ_{k,2} & XYZ_{j,3} - XYZ_{k,3} \end{vmatrix} \\ g2 \leftarrow - \begin{vmatrix} XYZ_{i,1} - XYZ_{k,1} & XYZ_{i,3} - XYZ_{k,3} \\ XYZ_{j,1} - XYZ_{k,1} & XYZ_{j,3} - XYZ_{k,3} \end{vmatrix} \\ g3 \leftarrow \begin{vmatrix} XYZ_{i,1} - XYZ_{k,1} & XYZ_{i,2} - XYZ_{k,2} \\ XYZ_{j,1} - XYZ_{k,1} & XYZ_{j,2} - XYZ_{k,2} \end{vmatrix} \\ \frac{\sqrt{g1^2 + g2^2 + g3^2}}{2} \end{cases}$$

Навантаження CE за рахунок внутрішніх джерел теплоти

$$f_{qv}(qv, V, XYZ) := \frac{qv \cdot V(XYZ)}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \int_V [N]^T q_V dV = \frac{q_V V}{4} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Граничні умови III роду - додаток до матриці жорсткості на стороні ijk - 123 - сторона 1

$$k\alpha_{123}(XYZ, S, \alpha) := \frac{\alpha \cdot S(XYZ, 1)}{12} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \left[k_{\alpha}^{(e)} \right] = \int_S \alpha [N]^T [N] dS = \frac{\alpha A_{ijk}}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Граничні умови III роду - додаток до матриці жорсткості на стороні jkl - 234 - сторона 2

$$k\alpha_{234}(XYZ, S, \alpha) := \frac{\alpha \cdot S(XYZ, 2)}{12} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \left[k_{\alpha}^{(e)} \right] = \int_S \alpha [N]^T [N] dS = \frac{\alpha A_{jkl}}{12} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Граничні умови III роду - додаток до матриці жорсткості на стороні ikl - 134 - сторона 3

$$k\alpha_{134}(XYZ, S, \alpha) := \frac{\alpha \cdot S(XYZ, 3)}{12} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \left[k_{\alpha}^{(e)} \right] = \int_S \alpha [N]^T [N] dS = \frac{\alpha A_{ikl}}{12} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Граничні умови III роду - додаток до матриці жорсткості на стороні ijl - 124 - сторона 4

$$k\alpha_{124}(XYZ, S, \alpha) := \frac{\alpha \cdot S(XYZ, 4)}{12} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \left[k_{\alpha}^{(e)} \right] = \int_S \alpha [N]^T [N] dS = \frac{\alpha A_{ijl}}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Граничні умови III роду - додаток до **вільного члена** на стороні ijk - 123 - сторона 1

$$f\alpha_{123}(XYZ, S, \alpha, T_p) := \frac{\alpha \cdot T_p \cdot S(XYZ, 1)}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \int_S \alpha T_p [N]^T dS = \frac{\alpha T_p A_{ijk}}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Граничні умови III роду - додаток до **вільного члена** на стороні jkl - 234 - сторона 2

$$f\alpha_{234}(XYZ, S, \alpha, T_p) := \frac{\alpha \cdot T_p \cdot S(XYZ, 2)}{3} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \int_S \alpha T_p [N]^T dS = \frac{\alpha T_p A_{jkl}}{3} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Граничні умови III роду - додаток до **вільного члена** на стороні ikl - 134 - сторона 3

$$f\alpha_{134}(XYZ, S, \alpha, T_p) := \frac{\alpha \cdot T_p \cdot S(XYZ, 3)}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \int_S \alpha T_p [N]^T dS = \frac{\alpha T_p A_{ikl}}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Граничні умови III роду - додаток до **вільного члена** на стороні ijl - 124 - сторона 4

$$f\alpha_{124}(XYZ, S, \alpha, T_p) := \frac{\alpha \cdot T_p \cdot S(XYZ, 4)}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \alpha T_p \int_S [N]^T dS = \frac{\alpha T_p A_{ij\ell}}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Обнулення глобальної матриці та вектора вільних членів

i := 1 .. Nnod_gl

F_i := 0

j := 1 .. Nnod_gl

K_{i,j} := 0

2. Формування глобальної матриці і вектора СЛАР та її розв'язання

T := for k ∈ 1 .. nEl

for i ∈ 1 .. M

j ← El_nod_{k,i}

XYZ_{i,1} ← XYZ_{gl,j,1}

XYZ_{i,2} ← XYZ_{gl,j,2}

XYZ_{i,3} ← XYZ_{gl,j,3}

for i ∈ 1 .. M

f_{El_i} ← 0

k_{El} ← B(XYZ)^T · D(λ) · B(XYZ) · V(XYZ)

for i ∈ 1 .. M

if i = 1 ∧ El_BC3_{k,i} = 3

α ← El_BC3_{k,6}

Tp ← El_BC3_{k,7}

k_{El} ← k_{El} + kα₁₂₃(XYZ, S, α)

f_{El} ← f_{El} + fα₁₂₃(XYZ, S, α, Tp)

if i = 2 ∧ El_BC3_{k,i} = 3

α ← El_BC3_{k,8}

Tp ← El_BC3_{k,9}

k_{El} ← k_{El} + kα₂₃₄(XYZ, S, α)

f_{El} ← f_{El} + fα₂₃₄(XYZ, S, α, Tp)

if i = 3 ∧ El_BC3_{k,i} = 3

α ← El_BC3_{k,10}

1. Формування матриці локальних координат вузлів CE

Обнулення вектора вільних членів CE

2. Обчислення матриці жорсткості CE, пов'язаної з теплопровідністю

3.1. Обчислення матриці і вектора вільних членів CE, пов'язаного із конвективним теплообміном (на стороні 1 з локальними номерами вузлів тетраедра 123)

3.2. Обчислення матриці і вектора вільних членів CE, пов'язаного із конвективним теплообміном (на стороні 2 з локальними номерами вузлів тетраедра 234)


```

| | | Tp ← El_BC3k,11
| | | k_El ← k_El + kα134(XYZ, S, α)
| | | f_El ← f_El + fα134(XYZ, S, α, Tp)
| | if i = 4 ∧ El_BC3k,i = 3
| | | α ← El_BC3k,12
| | | Tp ← El_BC3k,13
| | | k_El ← k_El + kα124(XYZ, S, α)
| | | f_El ← f_El + fα124(XYZ, S, α, Tp)
| f_El ← f_El + f_qv(qv, V, XYZ)
| for i ∈ 1 .. M
| | | igl ← El_nodk,i
| | | Figl ← Figl + f_Eli
| | | for j ∈ 1 .. M
| | | | jgl ← El_nodk,j
| | | | Kigl,jgl ← Kigl,jgl + k_Eli,j
| T ← lsolve(K, F)
| T

```

3.3. Обчислення матриці і вектора вільних членів CE, пов'язаного із конвективним теплообміном (на стороні 3 з локальними номерами вузлів тетраедра 134)

3.4. Обчислення матриці і вектора вільних членів CE, пов'язаного із конвективним теплообміном (на стороні 4 з локальними номерами вузлів тетраедра 124)

3.5. Обчислення вектора вільних членів CE, пов'язаного з об'ємним навантаженням qv

4. Формування глобальної матриці та вектора вільних членів СЛАР

5. Розв'язання СЛАР - одержання глобального вектора температур {T} задачі або вузлових значень температур

Обчислення компонент густини теплового потоку (qx, qy, qz) по елементах

```

qEl := for k ∈ 1 .. nEl
| for i ∈ 1 .. M
| | | igl ← El_nodk,i
| | | T_Eli ← Tigl
| | for i ∈ 1 .. M
| | | j ← El_nodk,i
| | | XYZi,1 ← XYZgl,j,1
| | | XYZi,2 ← XYZgl,j,2
| | | XYZi,3 ← XYZgl,j,3
| | q_El ← -D(λ)·B(XYZ)·T_El
| | for i ∈ 1 .. 3
| | | qElk,i ← q_Eli
| qEl

```

Обчислення компонент густини теплового потоку (q_x, q_y, q_sum) у вузлах CE

```

q_node := for i ∈ 1 .. Nnod_gl
    k_cout ← 0
    qx ← 0
    qy ← 0
    qz ← 0
    for k ∈ 1 .. nEl
        for j ∈ 1 .. M
            node ← El_nodk,j
            if node = i
                k_cout ← k_cout + 1
                qx ← qx + qElk,1
                qy ← qy + qElk,2
                qz ← qz + qElk,3
            if k_cout > 0
                qx ←  $\frac{qx}{k\_cout}$ 
                qy ←  $\frac{qy}{k\_cout}$ 
                qz ←  $\frac{qz}{k\_cout}$ 
            q_nodei,1 ← qx
            q_nodei,2 ← qy
            q_nodei,3 ← qz
            q_nodei,4 ←  $\sqrt{qx^2 + qy^2 + qz^2}$ 
    q_node

```

VARIABLES="X, m", "Y, m", "Z, m", "T, C", "qx, W/m^2", "qy, W/m^2", "qz, W/m^2", "qs, W/m^2",

Формування файлу результатів Result_1

```

Result_1 := for i ∈ 1 .. Nnod_gl
    Result_1i,1 ← XYZgli,1
    Result_1i,2 ← XYZgli,2
    Result_1i,3 ← XYZgli,3
    Result_1i,4 ← Ti
    Result_1i,5 ← q_nodei,1
    Result_1i,6 ← q_nodei,2

```

Перезапис номерів вузлів CE

```

El_nod3 := for k ∈ 1 .. nEl
    for j ∈ 1 .. M
        El_nod3k,j ← El_nodk,j
    El_nod3

```

```

Result_1_i,7 ← q_node_i,3
Result_1_i,8 ← q_node_i,4
Result_1

```

Запис файлів результатів

E:\Result_1.dat

E:\NNodes\Elements.dat

Result_1

El_nod3

Побудова графіків у вибраних перетинах

n_P := 7 Кількість і номери вузлів по лінії

nod_P :=

3
20
99
98
97
18
16

Координати по Y по лінії

```

y_P := for i ∈ 1 .. n_P
        p ← nod_P_i
        y_P_i ← XYZgl_p,2
y_P

```

Значення T по лінії

```

T_P := for i ∈ 1 .. n_P
        p ← nod_P_i
        T_P_i ← T_p
T_P

```

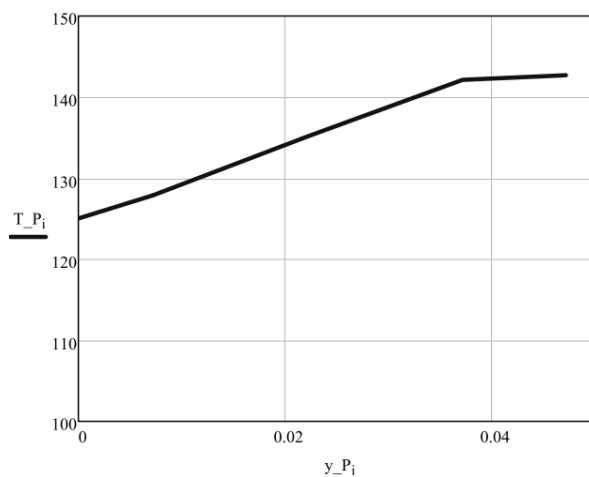
Значення qs по лінії

```

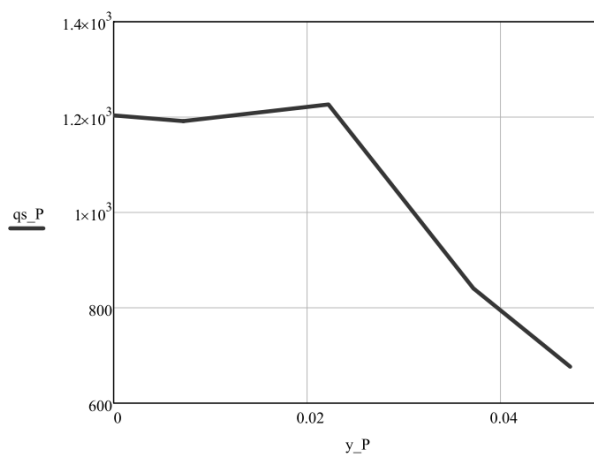
qs_P := for i ∈ 1 .. n_P
         p ← nod_P_i
         qs_P_i ← q_node_p,4
qs_P

```

Епюра (графік) температур по лінії



Епюра (графік) результуючої густини теплового потоку по лінії



Приклади програмних кодів Mathcad для розв'язання задач статичної пружності

Е.1. Задача ПДС. Лінійні трикутні СЕ

Програмний код **Lab_M_PDS_2D.xmcd** розроблено за числовою методикою, що наведена в розділі 3 (див. підрозділ 3.2), та супроводжується необхідними рисунками і коментарями.

Файл Lab_M_PDS_2D.xmcd

задача ПДС - навантаження силове (сила у вузлі)

ORIGIN ≡ 1 Індексація масивів з 1

Nnod_gl := 24 кількість глобальних вузлів

nEl := 28 кількість елементів

M := 3 кількість вузлів в елементі

Матриця координат вузлів

$$XY_{gl} := \begin{pmatrix} -4.5 & 0 \\ -5.5 & 0 \\ -4.5 & 0.25 \\ -5.5 & 0.25 \\ -5 & 0.125 \\ 0 & 0 \\ -3 & 0 \\ -1.5 & 0 \\ 0 & 1 \\ -4.5 & 1 \\ -1.5 & 1 \\ -3 & 1 \\ -3.938 & 0.219 \\ -0.75 & 0.5 \\ -3.788 & 0.494 \\ -10 & 0 \\ -7 & 0 \\ -8.5 & 0 \\ -5.5 & 1 \\ -10 & 1 \\ -7 & 1 \\ -8.5 & 1 \\ -6.1 & 0.45 \\ -9.25 & 0.5 \end{pmatrix}$$

Матриця номерів вузлів скінченних елементів

$$\text{El_nod} := \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 & 1 \\ 4 & 5 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 5 & 4 \\ 7 & 15 & 13 & 5 \\ 7 & 12 & 15 & 6 \\ 13 & 15 & 3 & 7 \\ 15 & 10 & 3 & 8 \\ 12 & 10 & 15 & 9 \\ 8 & 14 & 11 & 10 \\ 11 & 14 & 9 & 11 \\ 14 & 6 & 9 & 12 \\ 8 & 6 & 14 & 13 \\ 13 & 1 & 7 & 14 \\ 3 & 1 & 13 & 15 \\ 7 & 8 & 12 & 16 \\ 11 & 12 & 8 & 17 \\ 23 & 19 & 21 & 18 \\ 23 & 4 & 19 & 19 \\ 22 & 24 & 18 & 20 \\ 18 & 24 & 16 & 21 \\ 24 & 20 & 16 & 22 \\ 22 & 20 & 24 & 23 \\ 17 & 23 & 21 & 24 \\ 23 & 2 & 4 & 25 \\ 17 & 2 & 23 & 26 \\ 21 & 22 & 17 & 27 \\ 22 & 18 & 17 & 28 \end{pmatrix}$$

Граничні умови - зусилля (тиск)

$$i := 1 \dots nEl$$

$$j := 1 \dots 4$$

$$El_GU_{i,j} := 0 \quad El_GU_{i,4} := i$$

Тут 4-й стовпець означає номер СЕ,
який додано для зручності задання ГУ

Закріплення $nNodeU0 := 2$ кількість вузлів, в яких задані нульові переміщення

$Nod_U0 := \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}$ номери вузлів, у яких $U_x=0$ і $U_y=0$

Властивості: **тип задачі ПДС**

$E := 2 \cdot 10^{11}$ Па модуль пружності

$\nu := 0.3$ коефіцієнт Пуассона

$\beta := 7 \cdot 10^{-6}$ К⁻¹ КЛТР

$\rho := 7800$ kg/m³ густина

$\sigma_T := 220 \cdot 10^6$ Па межа текучості матеріалу

навантаження

$p := 0$ N/m² зусилля (тиск)

$\Delta T := 0$ К температурне навантаження

$t := 1$ m товщина СЕ

$g_x := 0$ $g_y := 0$ m/s² складові прискорення вільного падіння

Сила у вузлі $F_y := -100$ N $node_F := 20$ номер вузла, в якому задані

$$F_{xy} := \begin{pmatrix} 0 \\ F_y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -100 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Розв'язання задачі

1. Функції

Площа СЕ

$$A(XY) := \frac{1}{2} \cdot \left\| \begin{pmatrix} 1 & XY_{1,1} & XY_{1,2} \\ 1 & XY_{2,1} & XY_{2,2} \\ 1 & XY_{3,1} & XY_{3,2} \end{pmatrix} \right\|$$

Вектори для визначення матриці градієнтів

$$b(XY) := \begin{pmatrix} XY_{2,2} - XY_{3,2} \\ XY_{3,2} - XY_{1,2} \\ XY_{1,2} - XY_{2,2} \end{pmatrix} \quad c(XY) := \begin{pmatrix} XY_{3,1} - XY_{2,1} \\ XY_{1,1} - XY_{3,1} \\ XY_{2,1} - XY_{1,1} \end{pmatrix}$$

Матриця градієнтів

$$B(XY) := \frac{1}{2 \cdot A(XY)} \cdot \begin{pmatrix} b(XY)_1 & 0 & b(XY)_2 & 0 & b(XY)_3 & 0 \\ 0 & c(XY)_1 & 0 & c(XY)_2 & 0 & c(XY)_3 \\ c(XY)_1 & b(XY)_1 & c(XY)_2 & b(XY)_2 & c(XY)_3 & b(XY)_3 \end{pmatrix}$$

Матриця пружних констант

$$D(E, \nu) := \frac{E \cdot (1 - \nu)}{(1 + \nu) \cdot (1 - 2 \cdot \nu)} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1 - \nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1 - \nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - 2\nu}{2 \cdot (1 - \nu)} \end{bmatrix}$$

Вектор навантаження CE від теплового розширення

$$f_{th}(XY, E, \nu, \beta) := \frac{\beta \cdot E \cdot \Delta T \cdot t}{2 \cdot (1 + \nu) \cdot (1 - 2 \cdot \nu)} \cdot \begin{pmatrix} b(XY)_1 \\ c(XY)_1 \\ b(XY)_2 \\ c(XY)_2 \\ b(XY)_3 \\ c(XY)_3 \end{pmatrix}$$

Довжина сторін CE

$$L(XY) := \begin{bmatrix} \sqrt{(XY_{2,1} - XY_{1,1})^2 + (XY_{2,2} - XY_{1,2})^2} \\ \sqrt{(XY_{3,1} - XY_{2,1})^2 + (XY_{3,2} - XY_{2,2})^2} \\ \sqrt{(XY_{1,1} - XY_{3,1})^2 + (XY_{1,2} - XY_{3,2})^2} \end{bmatrix}$$

Направляючі косинуси до сторін CE

$$n_x(L, XY) := \begin{bmatrix} \frac{(XY_{2,2} - XY_{1,2})}{L(XY)_1} \\ \frac{(XY_{3,2} - XY_{2,2})}{L(XY)_2} \\ \frac{(XY_{1,2} - XY_{3,2})}{L(XY)_3} \end{bmatrix} \quad n_y(L, XY) := \begin{bmatrix} \frac{-(XY_{2,1} - XY_{1,1})}{L(XY)_1} \\ \frac{-(XY_{3,1} - XY_{2,1})}{L(XY)_2} \\ \frac{-(XY_{1,1} - XY_{3,1})}{L(XY)_3} \end{bmatrix}$$

Зусилля (тиск) на стороні 2-3 CE

$$f_{p23}(XY, nx, ny, p) := \frac{-L(XY)_2 \cdot t}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p \cdot nx(L, XY)_2 \\ p \cdot ny(L, XY)_2 \end{pmatrix}$$

Зусилля (тиск) на стороні 1-2 CE

$$f_{p12}(XY, nx, ny, p) := \frac{-L(XY)_1 \cdot t}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p \cdot nx(L, XY)_1 \\ p \cdot ny(L, XY)_1 \end{pmatrix}$$

Зусилля (тиск) на стороні 3-1 CE

$$f_{p31}(XY, nx, ny, p) := \frac{-L(XY)_3 \cdot t}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p \cdot nx(L, XY)_3 \\ p \cdot ny(L, XY)_3 \end{pmatrix}$$

Об'ємне навантження на CE (об'ємні сили гравітації)

$$f_v(XY, gx, gy) := \frac{A(XY) \cdot t}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} gx \cdot \rho \\ gy \cdot \rho \end{pmatrix}$$

Обнулення глобальної матриці та вектора вільних членів

$i := 1 \dots 2 \cdot \text{Nnod_gl}$

$F_i := 0$

$j := 1 \dots 2 \cdot \text{Nnod_gl}$

$K_{i,j} := 0$

2. Формування глобальної матриці і вектора СПАР та її розв'язання


```

U := for k ∈ 1 .. nEl
    for i ∈ 1 .. M
        j ← El_nodk,i
        XYi,1 ← XYglj,1
        XYi,2 ← XYglj,2
    for i ∈ 1 .. 2·M
        f_Eli ← 0
    k_El ← B(XY)T·D(E,ν)·B(XY)·A(XY)·t
    for i ∈ 1 .. M
        f_El ← f_El + f_p12(XY,nx,ny,p) if i = 1 ∧ El_GUk,i = 2
        f_El ← f_El + f_p23(XY,nx,ny,p) if i = 2 ∧ El_GUk,i = 2
        f_El ← f_El + f_p31(XY,nx,ny,p) if i = 3 ∧ El_GUk,i = 2
    f_El ← f_El + f_v(XY,gx,gy) + (1 + ν)·f_th(XY,E,ν,β)
    for i ∈ 1 .. M
        igl ← El_nodk,i·2
        ii ← i·2
        Figl-1 ← Figl-1 + f_Elii-1
        Figl ← Figl + f_Elii
        for j ∈ 1 .. M
            jgl ← El_nodk,j·2
            jj ← j·2
            Kigl-1,jgl-1 ← Kigl-1,jgl-1 + k_Elii-1,jj-1
            Kigl-1,jgl ← Kigl-1,jgl + k_Elii-1,jj
            Kigl,jgl-1 ← Kigl,jgl-1 + k_Elii,jj-1
            Kigl,jgl ← Kigl,jgl + k_Elii,jj
    ig ← node_F·2
    Fig-1 ← Fig-1 + Fxy1
    Fig ← Fig + Fxy2
    for j ∈ 1 .. nNodeU0
        n0 ← Nod_U0j
        for i ∈ 1 .. 2·Nnod_gl

```

1. Формування матриці локальних координат вузлів CE

Обнулення вектора вільних членів CE

2. Формування матриці жорсткості CE

3.1. Обчислення вектора вільних членів CE, пов'язаного з зусиллям (тиском на сторонах 12, 23, 31)

3.2. Обчислення вектора вільних членів CE, пов'язаного з об'ємними силами і температурним навантаженням (для ПДС множник (1+ν))

4. Формування глобальної матриці та вектора вільних членів СЛАР

Задання дії сили у вузлі

5. Перетворення матриці і вектора вільних членів СЛАР відповідно до ГУ Дирихле (защемленням)

6. Розв'язання СЛАР - одержання глобального вектора переміщень $\{U\}$ задачі або вузлових значень переміщень

$$\text{Usum} := \begin{cases} \text{for } i \in 1 \dots \text{Nnod_gl} \\ \quad \text{Usum}_i \leftarrow \sqrt{(Ux_i)^2 + (Uy_i)^2} \\ \text{Usum} \end{cases}$$

$U_x := \begin{array}{ l} \text{for } i \in 1 \dots N_{\text{nod_gl}} \\ \quad U_{x_i} \leftarrow U_{2 \cdot i - 1} \\ U_x \end{array}$	$U_y := \begin{array}{ l} \text{for } i \in 1 \dots N_{\text{nod_gl}} \\ \quad U_{y_i} \leftarrow U_{2 \cdot i} \\ U_y \end{array}$
--	--

$$\begin{aligned} \varepsilon &:= \text{for } k \in 1 \dots nEL \\ &\quad \text{for } i \in 1 \dots M \\ &\quad \quad igl \leftarrow EL_nod_{k,i} \cdot 2 \\ &\quad \quad ii \leftarrow i \cdot 2 \\ &\quad \quad U_EL_{ii-1} \leftarrow U_{igl-1} \\ &\quad \quad U_EL_{ii} \leftarrow U_{igl} \\ &\quad \text{for } i \in 1 \dots M \\ &\quad \quad j \leftarrow EL_nod_{k,i} \\ &\quad \quad XY_{i,1} \leftarrow XY_{gl,j,1} \\ &\quad \quad XY_{i,2} \leftarrow XY_{gl,j,2} \\ &\quad \varepsilon_EL \leftarrow B(XY) \cdot U_EL \\ &\quad \text{for } i \in 1 \dots 3 \\ &\quad \quad \varepsilon_{k,i} \leftarrow \varepsilon_EL_i \\ &\quad \varepsilon_{k,3} \leftarrow 0 \\ &\quad \varepsilon_{k,4} \leftarrow \varepsilon_EL_3 \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{array} \right\} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_k & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_k \\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_k & b_k \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} U_{2i-1} \\ U_{2i} \\ U_{2j-1} \\ U_{2j} \\ U_{2k-1} \\ U_{2k} \end{array} \right\}$$

Обчислення компонент теплової деформації (ϵ_{Txx} , ϵ_{Tyy} , ϵ_{Tzz}) по елементах

```

 $\epsilon_T :=$  | for  $k \in 1 \dots nEl$ 
          | |  $\epsilon_{T\_El} \leftarrow \beta \cdot \Delta T \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 
          | |
          | | for  $i \in 1 \dots 3$ 
          | |    $\epsilon_{T_{k,i}} \leftarrow \epsilon_{T\_El_i}$ 
          |  $\epsilon_T$ 

```

Обчислення компонент пружної (еластичної) деформації (ϵ_{e_xx} , ϵ_{e_yy} , ϵ_{e_zz} , ϵ_{e_xy}) по елементах

```

 $\epsilon_e :=$  | for  $k \in 1 \dots nEl$ 
          | | for  $i \in 1 \dots M$ 
          | | |  $igl \leftarrow El\_nod_{k,i} \cdot 2$ 
          | | |  $ii \leftarrow i \cdot 2$ 
          | | |  $U\_El_{ii-1} \leftarrow U_{igl-1}$ 
          | | |  $U\_El_{ii} \leftarrow U_{igl}$ 
          | | for  $i \in 1 \dots M$ 
          | | |  $j \leftarrow El\_nod_{k,i}$ 
          | | |  $XY_{i,1} \leftarrow XY_{gl_j,1}$ 
          | | |  $XY_{i,2} \leftarrow XY_{gl_j,2}$ 
          | |
          | |  $\epsilon_{e\_El} \leftarrow B(XY) \cdot U\_El - \begin{bmatrix} \beta \cdot \Delta T \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{bmatrix}$ 
          | |
          | | for  $i \in 1 \dots 3$ 
          | | |  $\epsilon_{e_{k,i}} \leftarrow \epsilon_{e\_El_i}$ 
          | | |  $\epsilon_{e_{k,3}} \leftarrow -\epsilon_{T_{k,3}}$ 
          | | |  $\epsilon_{e_{k,4}} \leftarrow \epsilon_{e\_El_3}$ 
          |  $\epsilon_e$ 

```

Обчислення компонент пружних напружень (σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz} , σ_{xy}) по елементах

```

 $\sigma :=$  | for  $k \in 1 \dots nEl$ 
          | |  $\sigma_{\_El_1} \leftarrow D(E, \nu)_{1,1} \cdot \epsilon_{e_{k,1}} + D(E, \nu)_{1,2} \cdot \epsilon_{e_{k,2}} + D(E, \nu)_{1,2} \cdot \epsilon_{e_{k,3}}$ 
          | |  $\sigma_{\_El_2} \leftarrow D(E, \nu)_{2,1} \cdot \epsilon_{e_{k,1}} + D(E, \nu)_{2,2} \cdot \epsilon_{e_{k,2}} + D(E, \nu)_{2,1} \cdot \epsilon_{e_{k,3}}$ 
          |

```

```

|  $\sigma_{k,1} \leftarrow \sigma_{El_1}$ 
|  $\sigma_{k,2} \leftarrow \sigma_{El_2}$ 
|  $\sigma_{El_1} \leftarrow D(E, \nu)_{1,1} \cdot \epsilon_{k,1} + D(E, \nu)_{1,2} \cdot \epsilon_{k,2}$ 
|  $\sigma_{El_2} \leftarrow D(E, \nu)_{2,1} \cdot \epsilon_{k,1} + D(E, \nu)_{2,2} \cdot \epsilon_{k,2}$ 
|  $\sigma_{k,3} \leftarrow \nu \cdot (\sigma_{El_1} + \sigma_{El_2}) + D(E, \nu)_{1,1} \cdot \epsilon_{k,3}$ 
|  $\sigma_{k,4} \leftarrow D(E, \nu)_{3,3} \cdot \epsilon_{k,4}$ 
|  $\sigma$ 

```

Обчислення компонент пружної і теплової деформації (ϵ_{xx} , ϵ_{yy} , ϵ_{zz} , ϵ_{xy}) у вузлах

```

 $\epsilon_{node} :=$  | for  $i \in 1 \dots Nnod\_gl$ 
| |  $k\_cout \leftarrow 0$ 
| |  $\epsilon_{xx} \leftarrow 0$ 
| |  $\epsilon_{yy} \leftarrow 0$ 
| |  $\epsilon_{zz} \leftarrow 0$ 
| |  $\epsilon_{xy} \leftarrow 0$ 
| | for  $k \in 1 \dots nEl$ 
| | | for  $j \in 1 \dots M$ 
| | | |  $node \leftarrow El\_nod_{k,j}$ 
| | | | if  $node = i$ 
| | | | |  $k\_cout \leftarrow k\_cout + 1$ 
| | | | |  $\epsilon_{xx} \leftarrow \epsilon_{xx} + \epsilon_{k,1}$ 
| | | | |  $\epsilon_{yy} \leftarrow \epsilon_{yy} + \epsilon_{k,2}$ 
| | | | |  $\epsilon_{zz} \leftarrow \epsilon_{zz} + \epsilon_{k,3}$ 
| | | | |  $\epsilon_{xy} \leftarrow \epsilon_{xy} + \epsilon_{k,4}$ 
| | | if  $k\_cout > 0$ 
| | | |  $\epsilon_{xx} \leftarrow \frac{\epsilon_{xx}}{k\_cout}$ 
| | | |  $\epsilon_{yy} \leftarrow \frac{\epsilon_{yy}}{k\_cout}$ 
| | | |  $\epsilon_{zz} \leftarrow \frac{\epsilon_{zz}}{k\_cout}$ 
| | | |  $\epsilon_{xy} \leftarrow \frac{\epsilon_{xy}}{k\_cout}$ 
| | |  $\epsilon_{node}_{i,1} \leftarrow \epsilon_{xx}$ 
| | |  $\epsilon_{node}_{i,2} \leftarrow \epsilon_{yy}$ 
| | |  $\epsilon_{node}_{i,3} \leftarrow \epsilon_{zz}$ 
| | |  $\epsilon_{node}_{i,4} \leftarrow \epsilon_{xy}$ 
|  $\epsilon_{node}$ 

```

Обчислення компонент напружень (σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz} , σ_{xy}) у вузлах CE

```

 $\sigma_{node} :=$  for  $i \in 1 \dots Nnod\_gl$ 
     $k\_cout \leftarrow 0$ 
     $\sigma_{xx} \leftarrow 0$ 
     $\sigma_{yy} \leftarrow 0$ 
     $\sigma_{zz} \leftarrow 0$ 
     $\sigma_{xy} \leftarrow 0$ 
    for  $k \in 1 \dots nEl$ 
        for  $j \in 1 \dots M$ 
             $node \leftarrow El\_nod_{k,j}$ 
            if  $node = i$ 
                 $k\_cout \leftarrow k\_cout + 1$ 
                 $\sigma_{xx} \leftarrow \sigma_{xx} + \sigma_{k,1}$ 
                 $\sigma_{yy} \leftarrow \sigma_{yy} + \sigma_{k,2}$ 
                 $\sigma_{zz} \leftarrow \sigma_{zz} + \sigma_{k,3}$ 
                 $\sigma_{xy} \leftarrow \sigma_{xy} + \sigma_{k,4}$ 
            if  $k\_cout > 0$ 
                 $\sigma_{xx} \leftarrow \frac{\sigma_{xx}}{k\_cout}$ 
                 $\sigma_{yy} \leftarrow \frac{\sigma_{yy}}{k\_cout}$ 
                 $\sigma_{zz} \leftarrow \frac{\sigma_{zz}}{k\_cout}$ 
                 $\sigma_{xy} \leftarrow \frac{\sigma_{xy}}{k\_cout}$ 
             $\sigma_{node,i,1} \leftarrow \sigma_{xx}$ 
             $\sigma_{node,i,2} \leftarrow \sigma_{yy}$ 
             $\sigma_{node,i,3} \leftarrow \sigma_{zz}$ 
             $\sigma_{node,i,4} \leftarrow \sigma_{xy}$ 
     $\sigma_{node}$ 

```

Визначення коефіцієнта збільшення деформації за $Usum$ (приймаємо, що макс. деформація повинна становити 5% від найбільшого розміру конструкції по x або по y)

```

 $k_{xy} :=$  for  $i \in 1 \dots Nnod\_gl$ 
     $X_{-i} \leftarrow XYgl_{i,1}$ 
    for  $i \in 1 \dots Nnod\_gl$ 
         $Y_{-i} \leftarrow XYgl_{i,2}$ 
     $\Delta x \leftarrow \max(X_{-}) - \min(X_{-})$ 

```

$$\begin{aligned}
& \Delta y \leftarrow \max(Y_{_}) - \min(Y_{_}) \\
& \Delta U_s \leftarrow \max(U_{sum}) - \min(U_{sum}) \\
& \Delta x_{xy} \leftarrow \Delta x \\
& \Delta x_{xy} \leftarrow \Delta y \text{ if } \Delta y > \Delta x \\
& k_{xy} \leftarrow \frac{\Delta x_{xy}}{\Delta U_s} \cdot \frac{5}{100}
\end{aligned}$$

Визначення деформованого стану конструкції

$$k_{xy} = 243189 \quad \text{коефіцієнт збільшення деформації}$$

$$\begin{aligned}
XYgl_D := & \text{for } i \in 1 \dots Nnod_gl \\
& \left| \begin{aligned}
& XYgl_D_{i,1} \leftarrow XYgl_{i,1} + Ux_i \cdot k_{xy} \\
& XYgl_D_{i,2} \leftarrow XYgl_{i,2} + Uy_i \cdot k_{xy}
\end{aligned} \right. \\
& XYgl_D
\end{aligned}$$

Визначення еквівалентного напруження за Мізесом σ_{ekv_n} у вузлах СЕ

$$\begin{aligned}
\sigma_{ekv_n} := & \text{for } i \in 1 \dots Nnod_gl \\
& \left| \begin{aligned}
& \sigma_1 \leftarrow (\sigma_{node_{i,1}} - \sigma_{node_{i,2}})^2 \\
& \sigma_2 \leftarrow (\sigma_{node_{i,2}} - \sigma_{node_{i,3}})^2 \\
& \sigma_3 \leftarrow (\sigma_{node_{i,3}} - \sigma_{node_{i,1}})^2 \\
& \sigma_{ekv_n_i} \leftarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + 6 \cdot (\sigma_{node_{i,4}})^2}
\end{aligned} \right. \\
& \sigma_{ekv_n}
\end{aligned}$$

Визначення запасу міцності конструкції F_s у вузлах СЕ

$$\begin{aligned}
F_{s_n} := & \text{for } i \in 1 \dots Nnod_gl \\
& \left| \begin{aligned}
& F_{s_n_i} \leftarrow \frac{\sigma T}{\sigma_{ekv_n_i}}
\end{aligned} \right. \\
& F_{s_n}
\end{aligned}$$

VARIABLES="X, m", "Y, m", "Ux, m", "Uy, m", "Us, m", "Sxx, Pa", "Syy, Pa", "Szz, Pa", "Sxy, Pa", "Sekv, Pa", "Fs"

Формування файлу результатів Result 1 недеформований стан

$$\begin{aligned}
Result_1 := & \text{for } i \in 1 \dots Nnod_gl \\
& \left| \begin{aligned}
& Result_1_{i,1} \leftarrow XYgl_{i,1} \\
& Result_1_{i,2} \leftarrow XYgl_{i,2} \\
& Result_1_{i,3} \leftarrow Ux_i \\
& Result_1_{i,4} \leftarrow Uy_i \\
& Result_1_{i,5} \leftarrow Usum_i \\
& Result_1_{i,6} \leftarrow \sigma_{node_{i,1}}
\end{aligned} \right.
\end{aligned}$$

```

Result_1,7 ← σ_node,2
Result_1,8 ← σ_node,3
Result_1,9 ← σ_node,4
Result_1,10 ← σ_ekv_n,
Result_1,11 ← Fs_n,
Result_1

```

Формування файлу результатів Result_1D деформований стан

```

Result_1D := for i ∈ 1..Nnod_gl
               XYgl_D,1 ← XYgl_D,1
               XYgl_D,2 ← XYgl_D,2
               Ux,1 ← Ux,1
               Uy,1 ← Uy,1
               Usum,1 ← Usum,1
               σ_node,1 ← σ_node,1
               σ_node,2 ← σ_node,2
               σ_node,3 ← σ_node,3
               σ_node,4 ← σ_node,4
               σ_ekv_n,1 ← σ_ekv_n,1
               Fs_n,1 ← Fs_n,1
               El_nod3 := for k ∈ 1..nEl
                           for j ∈ 1..M
                               El_nod3,k,j ← El_nod,k,j
                           El_nod3
Result_1D

```

Запис файлів результатів

E:\Result_1.dat

E:\Result_1D.dat

E:\NNodes_Elements.dat

Result_1

Result_1D

El_nod3

Побудова графіків у небезпечних перетинах

$n_P := 8$ Кількість і номери вузлів у небезпечному перетині $y=0, -10 \leq x \leq 0$

$$nod_P := \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 7 \\ 1 \\ 2 \\ 17 \\ 18 \\ 16 \end{pmatrix}$$

Координати по X у небезпечному перетині $y=0, -10 \leq x \leq 0$ Значення $Usum$ у небезпечному перетині $y=0, -10 \leq x \leq 0$

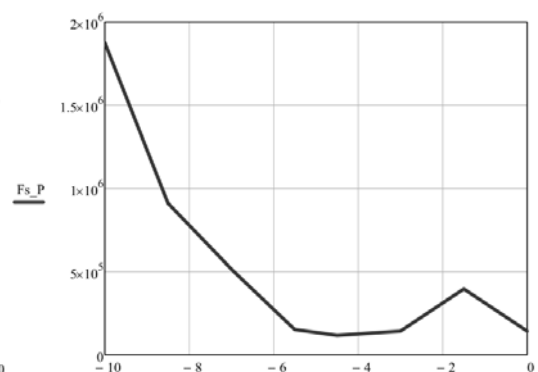
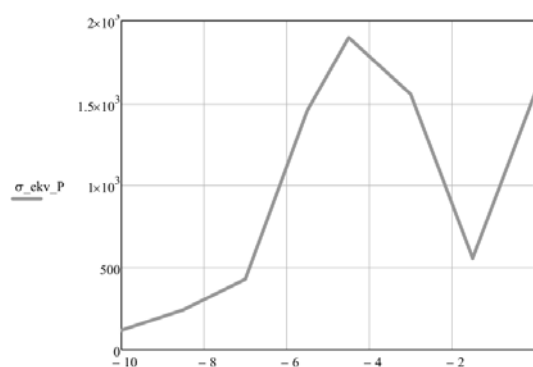
$$x_P := \begin{cases} \text{for } i \in 1 \dots n_P \\ \quad p \leftarrow nod_P_i \\ \quad x_P_i \leftarrow XYgl_{p,1} \\ x_P \end{cases} \quad U_{s_P} := \begin{cases} \text{for } i \in 1 \dots n_P \\ \quad p \leftarrow nod_P_i \\ \quad U_{s_P_i} \leftarrow Usum_p \\ U_{s_P} \end{cases}$$

Значення еквівалентних напружень за Мізесом σ_ekv у небезпечному перетині $y=0, -10 \leq x \leq 0$

$$\sigma_ekv_P := \begin{cases} \text{for } i \in 1 \dots n_P \\ \quad p \leftarrow nod_P_i \\ \quad \sigma_ekv_P_i \leftarrow \sigma_ekv_n_p \\ \sigma_ekv_P \end{cases}$$

Значення запасу міцності F_s у небезпечному перетині $y=0, -10 \leq x \leq 0$

$$F_{s_P} := \begin{cases} \text{for } i \in 1 \dots n_P \\ \quad p \leftarrow nod_P_i \\ \quad F_{s_P_i} \leftarrow F_{s_n_p} \\ F_{s_P} \end{cases}$$



Е.2. Задача ПНС. Лінійні трикутні СЕ

Програмний код **Lab_M_PNS_2D.xmcd** розроблено за числовою методикою, що наведена в розділі 3 (див. підрозділ 3.2). Зважаючи на те, що даний програмний код багато в чому повторює код **Lab_M_PDS_2D.xmcd**, тому наведемо тільки відмінні його фрагменти (функції).

Файл **Lab_M_PNS_2D.xmcd** (фрагменти)

Матриця пружних констант ПНС

$$D(E, \nu) := \frac{E}{1 - \nu^2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu}{2} \end{pmatrix}$$

Вектор навантаження СЕ від теплового розширення ПНС

$$f_{th}(XY, E, \nu, \beta) := \frac{\beta \cdot E \cdot \Delta T \cdot t}{2 \cdot (1 - \nu)} \cdot \begin{pmatrix} b(XY)_1 \\ c(XY)_1 \\ b(XY)_2 \\ c(XY)_2 \\ b(XY)_3 \\ c(XY)_3 \end{pmatrix}$$

2. Формування глобальної матриці і вектора СЛАР та її розв'язання

```

U :=
  for k ∈ 1 .. nEl
    for i ∈ 1 .. M
      j ← El_nodk,i
      XYi,1 ← XYglj,1
      XYi,2 ← XYglj,2
    for i ∈ 1 .. 2 · M
      f_Eli ← 0
    k_El ← B(XY)T · D(E, ν) · B(XY) · A(XY) · t
    for i ∈ 1 .. M
      f_El ← f_El + f_p12(XY, nx, ny, p) if i = 1 ∧ El_GUk,i = 2
      f_El ← f_El + f_p23(XY, nx, ny, p) if i = 2 ∧ El_GUk,i = 2
      f_El ← f_El + f_p31(XY, nx, ny, p) if i = 3 ∧ El_GUk,i = 2

```

```

f_El ← f_El + f_v(XY, gx, gy) + f_th(XY, E, ν, β)
for i ∈ 1 .. M
    igl ← El_nodk,i · 2
    ii ← i · 2
    Figl-1 ← Figl-1 + f_Elii-1
    Figl ← Figl + f_Elii
    for j ∈ 1 .. M
        jgl ← El_nodk,j · 2
        jj ← j · 2
        Kigl-1,jgl-1 ← Kigl-1,jgl-1 + k_Elii-1,jj-1
        Kigl-1,jgl ← Kigl-1,jgl + k_Elii-1,jj
        Kigl,jgl-1 ← Kigl,jgl-1 + k_Elii,jj-1
        Kigl,jgl ← Kigl,jgl + k_Elii,jj
ig ← node_F · 2
Fig-1 ← Fig-1 + Fxy1
Fig ← Fig + Fxy2
for j ∈ 1 .. nNodeU0
    n0 ← Nod_U0j
    for i ∈ 1 .. 2 · Nnod_gl
        K2n0-1,i ← 0
        K2n0,i ← 0
        Ki,2n0-1 ← 0
        Ki,2n0 ← 0
        K2n0-1,2n0-1 ← 1
        K2n0,2n0 ← 1
        F2n0-1 ← 0
        F2n0 ← 0
U ← Isolve(K, F)
U

```

Обчислення компонент пружної і теплової деформації (ϵ_{xx} , ϵ_{yy} , ϵ_{zz} , ϵ_{xy}) по елементах ПНС

```

 $\epsilon :=$  for  $k \in 1 \dots nEl$ 
    for  $i \in 1 \dots M$ 
         $igl \leftarrow El\_nod_{k,i} \cdot 2$ 
         $ii \leftarrow i \cdot 2$ 
         $U\_El_{ii-1} \leftarrow U_{igl-1}$ 
         $U\_El_{ii} \leftarrow U_{igl}$ 
    for  $i \in 1 \dots M$ 
         $j \leftarrow El\_nod_{k,i}$ 
         $XY_{i,1} \leftarrow XY_{gl,j,1}$ 
         $XY_{i,2} \leftarrow XY_{gl,j,2}$ 
     $\epsilon\_El \leftarrow B(XY) \cdot U\_El$ 
    for  $i \in 1 \dots 3$ 
         $\epsilon_{k,i} \leftarrow \epsilon\_El_i$ 
     $\epsilon_{k,4} \leftarrow \epsilon_{k,3}$ 
     $\epsilon_{k,3} \leftarrow \frac{-\nu}{1-\nu} \cdot (\epsilon_{k,1} + \epsilon_{k,2})$ 
 $\epsilon$ 

```

Обчислення компонент пружної (еластичної) деформації (ϵ_{xx} , ϵ_{yy} , ϵ_{zz} , ϵ_{xy}) по елементах ПНС

```

 $\epsilon e :=$  for  $k \in 1 \dots nEl$ 
    for  $i \in 1 \dots M$ 
         $igl \leftarrow El\_nod_{k,i} \cdot 2$ 
         $ii \leftarrow i \cdot 2$ 
         $U\_El_{ii-1} \leftarrow U_{igl-1}$ 
         $U\_El_{ii} \leftarrow U_{igl}$ 
    for  $i \in 1 \dots M$ 
         $j \leftarrow El\_nod_{k,i}$ 
         $XY_{i,1} \leftarrow XY_{gl,j,1}$ 
         $XY_{i,2} \leftarrow XY_{gl,j,2}$ 
     $\epsilon e\_El \leftarrow B(XY) \cdot U\_El - \beta \cdot \Delta T \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 

```

```

|   | for i ∈ 1 .. 3
|   |   εek,i ← εeEli
|   | εek,4 ← εek,3
|   | εek,3 ←  $\frac{-\nu}{1-\nu} \cdot (\varepsilon_{k,1} + \varepsilon_{k,2})$ 
|   |
|   |
| εe

```

Обчислення компонент пружних напружень (σ_{xx}, σ_{yy}, σ_{zz}, σ_{xy}) по елементах ПНС

```

σ := | for k ∈ 1 .. nEl
|   | σEl1 ← D(E,ν)1,1 · εek,1 + D(E,ν)1,2 · εek,2
|   | σEl2 ← D(E,ν)2,1 · εek,1 + D(E,ν)2,2 · εek,2
|   | σEl4 ← D(E,ν)3,3 · εek,4
|   | σk,1 ← σEl1
|   | σk,2 ← σEl2
|   | σk,3 ← 0
|   | σk,4 ← σEl4
|   |
|   |
| σ

```

Е.3. Вісесиметрична задача напруженого стану. Лінійні трикутні СЕ

Програмний код **Lab_M_Axis_2D.xmcd** розроблено за числовою методикою, що наведена в розділі 3 (див. підрозділ 3.3), та супроводжується необхідними рисунками і коментарями.

Файл Lab_M_Axis_2D.xmcd

Осесиметрична задача - навантаження - тиск

ORIGIN $\equiv$ 1 Індексація масивів з 1

M := 3 кількість вузлів в елементі

Зчитування номерів і координат вузлів дискретизованої в програмі Gmsh моделі фланця з файлу Gmsh_nodes_flan.dat

Файл Gmsh_nodes_flan.dat створюється із файлу 2D_axisym.msh таким чином.

Спочатку 2D_axisym.msh копіюється в файл Gmsh_nodes_flan.dat. Далі виконується корегування створеного файлу Gmsh_nodes_flan.dat у текстовому редакторі.

У файлі Gmsh_nodes_flan.dat спочатку видаляються перші 5 рядків, а саме такі:

\$MeshFormat

2.2 0 8

\$EndMeshFormat

\$Nodes

106

(тут 106 - це кількість вузлів, отриманих в результаті дискретизації)

тобто до рядка з номером 1 на його початку,

потім рядки до 106 номеру включно лишаються у файлі Gmsh_nodes_flan.dat, а рядки, починаючи з

\$EndNodes

видаляються із файлу до його кінця.

І останньою операцією редагування файлу є заміна "крапки" на "кому".

Записуємо результат редагування та виходимо з редактора.

Зчитування файлу Gmsh_nodes_flan.dat в матрицю

Gmsh_nodes

Gmsh_nodes :=

E:\Gmsh_nodes_flan.dat

Визначення кількості рядків в матриці Gmsh_nodes

Nnod_gl := rows(Gmsh_nodes) = 106 кількість глобальних вузлів

Запис глобальних вузлів дискретизованої моделі фланця у матрицю RZgl

$$\text{RZgl} := \begin{array}{|l} \text{for } i \in 1 \dots \text{Nnod_gl} \\ \quad \text{RZgl}_{i,1} \leftarrow \text{Gmsh_nodes}_{i,2} \\ \quad \text{RZgl}_{i,2} \leftarrow \text{Gmsh_nodes}_{i,3} \\ \text{RZgl} \end{array}$$

$\text{RZgl} := \frac{\text{RZgl}}{1000}$ перехід в метри

Зчитування номерів елементів + ін. і номерів вузлів по елементах дискретизованої в програмі Gmsh моделі фланця з файлу Gmsh_elem_flan.dat

Файл Gmsh_elem_flan.dat створюється із файлу 2D_axisym.msh таким чином. Спочатку 2D_axisym.msh копіюється в файл Gmsh_elem_flan.dat. Далі виконується корегування створеного файлу Gmsh_elem_flan.dat у текстовому редакторі. У файлі Gmsh_elem_flan.dat спочатку видаляються перші рядки до рядка:

\$Elements.

Потім видаляються рядки до рядка, у якому друге число (2-й стовпець) дорівнює 2 (число 2 є ознакою тетраедра).

Далі переходимо в кінець файлу та видаляємо останній рядок

\$EndElements

Записуємо результат редагування та виходимо з редактора.

Зчитування файлу Gmsh_elem_flan.dat в матрицю
Gmsh_elem

Gmsh_elem :=
E:\Gmsh_elem_flan.dat

Визначення кількості рядків в матриці
Gmsh_elem

nEl := rows(Gmsh_elem) = 161 кількість скінчених елементів

Запис глобальних вузлів дискретизованої моделі фланця у матрицю El_nod

Увага! Програма Gmsh записує номери вузлів по трикутних CE за годинниковою стрілкою, а треба проти. Тому, щоб це виправити, в El_nod пеставлено порядок індексів 1,2,3 на 1,3,2.

$$\text{El_nod} := \begin{array}{|l} \text{for } i \in 1 \dots \text{nEl} \\ \quad \text{El_nod}_{i,1} \leftarrow \text{Gmsh_elem}_{i,6} \\ \quad \text{El_nod}_{i,3} \leftarrow \text{Gmsh_elem}_{i,7} \\ \quad \text{El_nod}_{i,2} \leftarrow \text{Gmsh_elem}_{i,8} \\ \text{El_nod} \end{array}$$

Запис тетраедної сітки для перегляду в TecPlot

Вивід координат вузлів та номерів вузлів по елементах-тетраедрах для перегляду в програмі Tecplot

E:\Result\msh.dat

E:\NNodes\Elements.dat

RZgl

El_nod

Зчитування даних Gmsh про триангуляцію поверхонь тіла із файлу El_Area2_Gmsh.dat

Файл El_Area2_Gmsh.dat створюється із текстового файлу 2D_axisym.msh (який записує програма мешер Gmsh) за допомогою копіювання 2D_axisym.msh у El_Area2_Gmsh.dat.

Далі виконується редагування файлу El_Area2_Gmsh.dat таким чином:

спочатку видаляються всі рядки до рядка

\$Elements;

потім знов видаляються рядки до рядка, у якому у 2-у стовпці записано 1 (яка є ознакою лінійного елемента на лінії);

далі всі рядки з 1 у 2-у стовпці рядка лишаються у файлі;

всі рядки, починаючи з рядка, у якому у 2-у стовпці записана 2 (або інша цифра, але не 1) видаляються до кінця файлу.

Area2_nod_El :=

E:\El_Area2_Gmsh.dat

N_Area2 := rows(Area2_nod_El) = 49 Кількість рядків в матриці

На нижньому торці фланця ГУ заземлення по координаті z ($U_z=0$) - поверхня №9 - визначено в програмі Gmsh

На внутрішніх сторонах фланця №1,2,3,4 - задається тиск

Тобто з матриці Area2_nod_El треба отримати інформацію про лінійні CE на лініях 9. Ця інформація включає номери глобальних вузлів.

1.1. Визначення номерів глобальних вузлів лінійних елементів лінії №1

з матриці Area2_nod_El

функція

```
El_nod_(k) :=
  row ← 0
  for i ∈ 1 .. N_Area2
    j ← Area2_nod_Eli,5
    if j = k
      row ← row + 1
      for l ∈ 1 .. 2
        El_nodrow,l ← Area2_nod_Eli,5+l
  El_nod
```

El_nod1 := El_nod (1) тут 1 це номер поверхні

N_El_side1 := rows(El_nod1) = 12 кількість лінійних елементів на лінії 1

1.2. Запис номерів вузлів елементів на стороні № 1 у вектор (без повторення однакових номерів)

функція

```

Nod_side(N_El_side, El_nod) :=
    k ← 0
    for i ∈ 1 .. N_El_side
        if i = 1
            for j ∈ 1 .. 2
                Nod_side_{k+j} ← El_nod_{1,j}
                k ← k + 2
        if i > 1
            for j ∈ 1 .. 2
                n ← El_nod_{i,j}
                j0 ← -1
                for l ∈ 1 .. k
                    j0 ← 0 if Nod_side_{l} = n
                if j0 = -1
                    k ← k + 1
                    Nod_side_{k} ← n
            p ← 0
    Nod_side_

```

Nod_side1 := Nod_side(N_El_side1, El_nod1) на лінії №1 задано тиск p

n_s1 := rows(Nod_side1) = 13

2.1 Визначення номерів глобальних вузлів лінійних елементів лінії № 2 з матриці Area2_nod_El

El_nod2 := El_nod_(2) тут 2 це номер лінії

N_El_side2 := rows(El_nod2) = 4 кількість лінійних елементів на лінії 2

2.2. Запис номерів вузлів елементів на лінії № 2 у вектор (без повторення однакових номерів)

Nod_side2 := Nod_side(N_El_side2, El_nod2) на лінії №2 задано тиск p

n_s2 := rows(Nod_side2) = 5

3.1 Визначення номерів глобальних вузлів лінійних елементів лінії № 3 з матриці Area2_nod_El

El_nod3 := El_nod_(3) тут 3 це номер лінії

N_El_side3 := rows(El_nod3) = 4

3.2. Запис номерів вузлів елементів на лінії № 3 у вектор (без повторення однакових номерів)

$Nod_side3 := Nod_side(N_El_side3, El_nod3)$ на лінії №3 задано тиск p

$n_s3 := rows(Nod_side3) = 5$

4.1 Визначення номерів глобальних вузлів лінійних елементів лінії № 4 з матриці $Area2_nod_El$

$El_nod4 := El_nod_ (4)$ тут 4 це номер лінії

$N_El_side4 := rows(El_nod4) = 2$

4.2. Запис номерів вузлів елементів на лінії № 4 у вектор (без повторення однакових номерів)

$Nod_side4 := Nod_side(N_El_side4, El_nod4)$ на лінії №4 задано тиск p

$n_s4 := rows(Nod_side4) = 3$

9.1 Визначення номерів глобальних вузлів лінійних елементів лінії № 9 з матриці $Area2_nod_El$

$El_nod9 := El_nod_ (9)$ тут 9 це номер лінії

$N_El_side9 := rows(El_nod9) = 2$

9.2. Запис номерів вузлів елементів на лінії № 9 у вектор (без повторення однакових номерів)

$Nod_side9 := Nod_side(N_El_side9, El_nod9)$ на лінії №9 задано защемлення $U_z=0$, або ГУ Дирихле

$n_s9 := rows(Nod_side9) = 3$

Тепер ці дані треба зв'язати зі сторонами трикутних СЕ

функція, яка встановлює зв'язок лінійних СЕ з номерами трикутних СЕ та номерами їх сторін

```
BC2_Side(El_nod_, N_El_side) := || n ← 0
                                || for i ∈ 1 .. N_El_side
                                ||   e1 ← El_nod_{-i, 1}
                                ||   e2 ← El_nod_{-i, 2}
                                ||   for j ∈ 1 .. nEl
                                ||     e11 ← El_nod_{j, 1}
                                ||     e12 ← El_nod_{j, 2}
                                ||     e13 ← El_nod_{j, 3}
```

```

||| if (el1 = e1 ∨ el1 = e2) ∧ (el2 = e1 ∨ el2 = e2)
|||   n ← n + 1
|||   BC2n,1 ← j
|||   BC2n,2 ← 1
|||   break
||| if (el2 = e1 ∨ el2 = e2) ∧ (el3 = e1 ∨ el3 = e2)
|||   n ← n + 1
|||   BC2n,1 ← j
|||   BC2n,2 ← 2
|||   break
||| if (el1 = e1 ∨ el1 = e2) ∧ (el3 = e1 ∨ el3 = e2)
|||   n ← n + 1
|||   BC2n,1 ← j
|||   BC2n,2 ← 3
|||   break
||| z ← 0
||| f ← 0
|| BC2

```

Задання граничних умов тиску на сторонах фланця

Сторони фланця з номерами 1, 2, 3, 4 на яких задані граничні умови - тиск

Сторона № 1 - внутрішня сторона фланця

BC2_Side1 := BC2_Side(EI_nod1, N_EI_side1)

Сторона № 2 - внутрішня сторона фланця

BC2_Side2 := BC2_Side(EI_nod2, N_EI_side2)

$$BC2_Side2 = \begin{pmatrix} 90 & 3 \\ 106 & 3 \\ 24 & 3 \\ 92 & 1 \end{pmatrix}$$

Сторона № 3 - внутрішня сторона фланця

BC2_Side3 := BC2_Side(EI_nod3, N_EI_side3)

Сторона № 4 - внутрішня сторона фланця

BC2_Side4 := BC2_Side(EI_nod4, N_EI_side4)

$$BC2_Side4 = \begin{pmatrix} 116 & 3 \\ 117 & 1 \end{pmatrix}$$

Формування глобальної матриці El_BC2 для ГУ II роду по елементах

В матриці El_BC2 перші 3 стовпці це сторони трикутника ij (1), jk (2), ki (3), в яких задано ГУ 2-го роду (може бути 0 або 2), 4-й - номер СЕ

```
El_BC2 :=
  for el ∈ 1 .. nEl
    El_BC2el,4 ← el
    for j ∈ 1 .. N_El_side1
      if BC2_Side1j,1 = el
        El_BC2el,1 ← 2 if BC2_Side1j,2 = 1
        El_BC2el,2 ← 2 if BC2_Side1j,2 = 2
        El_BC2el,3 ← 2 if BC2_Side1j,2 = 3
    for j ∈ 1 .. N_El_side2
      if BC2_Side2j,1 = el
        El_BC2el,1 ← 2 if BC2_Side2j,2 = 1
        El_BC2el,2 ← 2 if BC2_Side2j,2 = 2
        El_BC2el,3 ← 2 if BC2_Side2j,2 = 3
    for j ∈ 1 .. N_El_side3
      if BC2_Side3j,1 = el
        El_BC2el,1 ← 2 if BC2_Side3j,2 = 1
        El_BC2el,2 ← 2 if BC2_Side3j,2 = 2
        El_BC2el,3 ← 2 if BC2_Side3j,2 = 3
    for j ∈ 1 .. N_El_side4
      if BC2_Side4j,1 = el
        El_BC2el,1 ← 2 if BC2_Side4j,2 = 1
        El_BC2el,2 ← 2 if BC2_Side4j,2 = 2
        El_BC2el,3 ← 2 if BC2_Side4j,2 = 3
  El_BC2
```

Фізичні властивості: матеріал мідь

$$E := 1.1 \cdot 10^{11} \text{ Па} \quad \text{модуль пружності}$$

$$\nu := 0.37 \quad \text{коефіцієнт Пуассона}$$

$$\beta := 2.4 \cdot 10^{-5} \text{ К}^{-1} \quad \text{КЛТР}$$

$$\rho := 8900 \text{ кг/м}^3 \quad \text{густина}$$

$$\sigma_T := 258.6 \cdot 10^6 \text{ Па} \quad \text{межа текучості матеріалу}$$

Навантаження

$$p := 85 \text{ Па} \quad \text{тиск}$$

$$\Delta T := 0 \text{ К} \quad \text{температурне навантаження}$$

$$g_x := 0 \quad g_z := 0 \quad \text{складові прискорення вільного падіння}$$

Розв'язання задачі

1. Функції

Площа CE

$$A(RZ) := \frac{1}{2} \cdot \left\| \begin{pmatrix} 1 & RZ_{1,1} & RZ_{1,2} \\ 1 & RZ_{2,1} & RZ_{2,2} \\ 1 & RZ_{3,1} & RZ_{3,2} \end{pmatrix} \right\|$$

Вектори для визначення матриці градієнтів

$$b(RZ) := \begin{pmatrix} RZ_{2,2} - RZ_{3,2} \\ RZ_{3,2} - RZ_{1,2} \\ RZ_{1,2} - RZ_{2,2} \end{pmatrix} \quad c(RZ) := \begin{pmatrix} RZ_{3,1} - RZ_{2,1} \\ RZ_{1,1} - RZ_{3,1} \\ RZ_{2,1} - RZ_{1,1} \end{pmatrix}$$

$$a(RZ) := \begin{pmatrix} RZ_{2,1} \cdot RZ_{3,2} - RZ_{3,1} \cdot RZ_{2,2} \\ RZ_{3,1} \cdot RZ_{1,2} - RZ_{1,1} \cdot RZ_{3,2} \\ RZ_{1,1} \cdot RZ_{2,2} - RZ_{2,1} \cdot RZ_{1,2} \end{pmatrix}$$

$$r_{-}(RZ) := \frac{RZ_{1,1} + RZ_{2,1} + RZ_{3,1}}{3}$$

$$z_{-}(RZ) := \frac{RZ_{1,2} + RZ_{2,2} + RZ_{3,2}}{3}$$

Матриця градієнтів

$$B(r_-, z_-, RZ) := \frac{1}{2 \cdot A(RZ)} \cdot \begin{pmatrix} b(RZ)_1 & 0 & b(RZ)_2 & 0 & b(RZ)_3 & 0 \\ 0 & c(RZ)_1 & 0 & c(RZ)_2 & 0 & c(RZ)_3 \\ \frac{a(RZ)_1}{r_-(RZ)} + b(RZ)_1 + c(RZ)_1 \cdot \frac{z_-(RZ)}{r_-(RZ)} & 0 & \frac{a(RZ)_2}{r_-(RZ)} + b(RZ)_2 + c(RZ)_2 \cdot \frac{z_-(RZ)}{r_-(RZ)} & 0 & \frac{a(RZ)_3}{r_-(RZ)} + b(RZ)_3 + c(RZ)_3 \cdot \frac{z_-(RZ)}{r_-(RZ)} & 0 \\ c(RZ)_1 & b(RZ)_1 & c(RZ)_2 & b(RZ)_2 & c(RZ)_3 & b(RZ)_3 \end{pmatrix}$$

Матриця пружних констант

$$D(E, \nu) := \frac{E \cdot (1 - \nu)}{(1 + \nu) \cdot (1 - 2 \cdot \nu)} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1 - \nu} & \frac{\nu}{1 - \nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1 - \nu} & 1 & \frac{\nu}{1 - \nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1 - \nu} & \frac{\nu}{1 - \nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1 - 2\nu}{2 \cdot (1 - \nu)} \end{bmatrix}$$

Вектор навантаження СЕ від теплового розширення

$$f_{th}(RZ, E, \nu, \beta) := \frac{2 \cdot \pi \cdot r_-(RZ) \cdot A(RZ) \cdot \beta \cdot E \cdot \Delta T \cdot B(r_-, z_-, RZ)^T}{(1 - 2 \cdot \nu)} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Довжина сторін СЕ

$$L(RZ) := \begin{bmatrix} \sqrt{(RZ_{2,1} - RZ_{1,1})^2 + (RZ_{2,2} - RZ_{1,2})^2} \\ \sqrt{(RZ_{3,1} - RZ_{2,1})^2 + (RZ_{3,2} - RZ_{2,2})^2} \\ \sqrt{(RZ_{1,1} - RZ_{3,1})^2 + (RZ_{1,2} - RZ_{3,2})^2} \end{bmatrix}$$

Направляючі косинуси до сторін СЕ

$$nr(L, RZ) := \begin{bmatrix} \frac{(RZ_{2,2} - RZ_{1,2})}{L(RZ)_1} \\ \frac{(RZ_{3,2} - RZ_{2,2})}{L(RZ)_2} \\ \frac{(RZ_{1,2} - RZ_{3,2})}{L(RZ)_3} \end{bmatrix} \quad nz(L, RZ) := \begin{bmatrix} \frac{-(RZ_{2,1} - RZ_{1,1})}{L(RZ)_1} \\ \frac{-(RZ_{3,1} - RZ_{2,1})}{L(RZ)_2} \\ \frac{-(RZ_{1,1} - RZ_{3,1})}{L(RZ)_3} \end{bmatrix}$$

Зусилля (тиск) на стороні 2-3 CE

$$f_{p23}(RZ, nx, ny, p) := \frac{-2 \cdot \pi \cdot L(RZ)_2}{6} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ (2 \cdot RZ_{2,1} + RZ_{3,1}) \cdot (p \cdot nr(L, RZ)_2) \\ (2 \cdot RZ_{2,1} + RZ_{3,1}) \cdot (p \cdot nz(L, RZ)_2) \\ (RZ_{2,1} + 2 \cdot RZ_{3,1}) \cdot (p \cdot nr(L, RZ)_2) \\ (RZ_{2,1} + 2 \cdot RZ_{3,1}) \cdot (p \cdot nz(L, RZ)_2) \end{bmatrix}$$

Зусилля (тиск) на стороні 1-2 CE

$$f_{p12}(RZ, nx, ny, p) := \frac{-2 \cdot \pi \cdot L(RZ)_1}{6} \cdot \begin{bmatrix} (2 \cdot RZ_{1,1} + RZ_{2,1}) \cdot (p \cdot nr(L, RZ)_1) \\ (2 \cdot RZ_{1,1} + RZ_{2,1}) \cdot (p \cdot nz(L, RZ)_1) \\ (RZ_{1,1} + 2 \cdot RZ_{2,1}) \cdot (p \cdot nr(L, RZ)_1) \\ (RZ_{1,1} + 2 \cdot RZ_{2,1}) \cdot (p \cdot nz(L, RZ)_1) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Зусилля (тиск) на стороні 3-1 CE

$$f_{p31}(RZ, nx, ny, p) := \frac{-2 \cdot \pi \cdot L(RZ)_3}{6} \cdot \begin{bmatrix} (RZ_{3,1} + 2 \cdot RZ_{1,1}) \cdot (p \cdot nr(L, RZ)_3) \\ (RZ_{3,1} + 2 \cdot RZ_{1,1}) \cdot (p \cdot nz(L, RZ)_3) \\ 0 \\ 0 \\ (2 \cdot RZ_{3,1} + RZ_{1,1}) \cdot (p \cdot nr(L, RZ)_3) \\ (2 \cdot RZ_{3,1} + RZ_{1,1}) \cdot (p \cdot nz(L, RZ)_3) \end{bmatrix}$$

Об'ємне навантження на CE (об'ємні сили гравітації)

$$f_v(RZ, gr, gz) := \frac{2 \cdot \pi \cdot A(RZ)}{12} \cdot \begin{bmatrix} (2 \cdot RZ_{1,1} + RZ_{2,1} + RZ_{3,1}) \cdot (gr \cdot \rho) \\ (2 \cdot RZ_{1,1} + RZ_{2,1} + RZ_{3,1}) \cdot (gz \cdot \rho) \\ (RZ_{1,1} + 2 \cdot RZ_{2,1} + RZ_{3,1}) \cdot (gr \cdot \rho) \\ (RZ_{1,1} + 2 \cdot RZ_{2,1} + RZ_{3,1}) \cdot (gz \cdot \rho) \\ (RZ_{1,1} + RZ_{2,1} + 2 \cdot RZ_{3,1}) \cdot (gr \cdot \rho) \\ (RZ_{1,1} + RZ_{2,1} + 2 \cdot RZ_{3,1}) \cdot (gz \cdot \rho) \end{bmatrix}$$

Обнулення глобальної матриці та вектора вільних членів

$i := 1 \dots 2 \cdot Nnod_gl$

$F_i := 0$

$j := 1 \dots 2 \cdot Nnod_gl$

$K_{i,j} := 0$

2. Формування глобальної матриці і вектора СПАР та її розв'язання

```

U := for k ∈ 1 .. nEl
    for i ∈ 1 .. M
        j ← El_nodk,i
        RZi,1 ← RZglj,1
        RZi,2 ← RZglj,2
    for i ∈ 1 .. 2·M
        f_Eli ← 0
    k_El ← 2·π·r-(RZ)·(B(r-,z-,RZ)T·D(E,ν)·B(r-,z-,RZ)·A(RZ))
    for i ∈ 1 .. M
        f_El ← f_El + f_p12(RZ,nr,nz,p) if i = 1 ∧ El_BC2k,i = 2
        f_El ← f_El + f_p23(RZ,nr,nz,p) if i = 2 ∧ El_BC2k,i = 2
        f_El ← f_El + f_p31(RZ,nr,nz,p) if i = 3 ∧ El_BC2k,i = 2
    f_El ← f_El + f_v(RZ,gr,gz) + f_th(RZ,E,ν,β)
    for i ∈ 1 .. M
        igl ← El_nodk,i·2
        ii ← i·2
        Figl-1 ← Figl-1 + f_Elii-1
        Figl ← Figl + f_Elii
        for j ∈ 1 .. M
            jgl ← El_nodk,j·2
            jj ← j·2
            Kigl-1,jgl-1 ← Kigl-1,jgl-1 + k_Elii-1,jj-1
            Kigl-1,jgl ← Kigl-1,jgl + k_Elii-1,jj
            Kigl,jgl-1 ← Kigl,jgl-1 + k_Elii,jj-1
            Kigl,jgl ← Kigl,jgl + k_Elii,jj
    for j ∈ 1 .. n_s9
        n0 ← Nod_side9j
        for i ∈ 1 .. 2·Nnod_gl
            K2-n0,i ← 0
            K1,2-n0 ← 0
        K2-n0,2-n0 ← 1

```

```

|   || F2,n0 ← 0
|   U ← lsolve(K,F)
|   U

```

Визначення векторів переміщень Ur і Uz у вузлах

```

Ur := || for i ∈ 1 .. Nnod_gl
|      Uri ← U2,i-1
|      Ur
Uz := || for i ∈ 1 .. Nnod_gl
|      Uzi ← U2,i
|      Uz

```

Визначення вектору сумарних переміщень Usum у вузлах

```

Usum := || for i ∈ 1 .. Nnod_gl
|          Usumi ← √(Uri)2 + (Uzi)2
|          Usum

```

Обчислення компонент пружної і теплової деформації (ε_{rr}, ε_{zz}, ε_{rz}, ε_{θθ}) по елементах

```

ε := || for k ∈ 1 .. nEl
|      || for i ∈ 1 .. M
|      |   || igl ← El_nodk,i·2
|      |   || ii ← i·2
|      |   || U_Elii-1 ← Uigl-1
|      |   || U_Elii ← Uigl
|      |   for j ∈ 1 .. M
|      |   |   || j ← El_nodk,i
|      |   |   || RZi,1 ← RZj,1
|      |   |   || RZi,2 ← RZj,2
|      |   ε_El ← B(r-,z-,RZ)·U_El
|      |   for i ∈ 1 .. 4
|      |   |   εk,i ← ε_Eli
|      ε

```


Обчислення компонент теплової деформації (ϵ_{Trr} , ϵ_{Tzz} , $\epsilon_{T\theta\theta}$) по елементах

```

 $\epsilon_T :=$  | for  $k \in 1 \dots nEl$ 
          |
          |  $\epsilon_{T\_El} \leftarrow \beta \cdot \Delta T \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 
          |
          | for  $i \in 1 \dots 4$ 
          |    $\epsilon_{T_{k,i}} \leftarrow \epsilon_{T\_El_i}$ 
          |
          |  $\epsilon_T$ 

```

Обчислення компонент пружної (еластичної) деформації (ϵ_{e_rr} , ϵ_{e_zz} , $\epsilon_{e_r\theta}$, ϵ_{e_rz}) по елементах

```

 $\epsilon_e :=$  | for  $k \in 1 \dots nEl$ 
          |
          | for  $i \in 1 \dots M$ 
          |    $igl \leftarrow El\_nod_{k,i} \cdot 2$ 
          |    $ii \leftarrow i \cdot 2$ 
          |    $U\_El_{ii-1} \leftarrow U_{igl-1}$ 
          |    $U\_El_{ii} \leftarrow U_{igl}$ 
          |
          | for  $i \in 1 \dots M$ 
          |    $j \leftarrow El\_nod_{k,i}$ 
          |    $RZ_{i,1} \leftarrow RZ_{gl_j,1}$ 
          |    $RZ_{i,2} \leftarrow RZ_{gl_j,2}$ 
          |
          |  $\epsilon_{e\_El} \leftarrow B(r\_ , z\_ , RZ) \cdot U\_El - \beta \cdot \Delta T \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 
          |
          | for  $i \in 1 \dots 4$ 
          |    $\epsilon_{e_{k,i}} \leftarrow \epsilon_{e\_El_i}$ 
          |
          |  $\epsilon_e$ 

```

Обчислення компонент пружних напружень (σ_{rr} , σ_{zz} , $\sigma_{\theta\theta}$, σ_{rz}) по елементах

```

σ := for k ∈ 1 .. nEl
    σk,1 ← D(E,ν)1,1·εk,1 + D(E,ν)1,2·εk,2 + D(E,ν)1,3·εk,3
    σk,2 ← D(E,ν)2,1·εk,1 + D(E,ν)2,2·εk,2 + D(E,ν)2,3·εk,3
    σk,3 ← D(E,ν)3,1·εk,1 + D(E,ν)3,2·εk,2 + D(E,ν)3,3·εk,3
    σk,4 ← D(E,ν)4,4·εk,4
σ

```

Обчислення компонент пружної і теплової деформації (ϵ_{rr} , ϵ_{zz} , $\epsilon_{\theta\theta}$, ϵ_{rz}) у вузлах

```

ε_node := for i ∈ 1 .. Nnod_gl
    k_cout ← 0
    εrr ← 0
    εzz ← 0
    εθθ ← 0
    εrz ← 0
    for k ∈ 1 .. nEl
        for j ∈ 1 .. M
            node ← El_nodk,j
            if node = i
                k_cout ← k_cout + 1
                εrr ← εrr + εk,1
                εzz ← εzz + εk,2
                εθθ ← εθθ + εk,3
                εrz ← εrz + εk,4
            if k_cout > 0
                εrr ←  $\frac{\epsilon_{rr}}{k\_cout}$ 
                εzz ←  $\frac{\epsilon_{zz}}{k\_cout}$ 
                εθθ ←  $\frac{\epsilon_{\theta\theta}}{k\_cout}$ 
                εrz ←  $\frac{\epsilon_{rz}}{k\_cout}$ 

```

```

|  $\varepsilon_{\text{node}_{i,1}} \leftarrow \varepsilon_{rr}$ 
|  $\varepsilon_{\text{node}_{i,2}} \leftarrow \varepsilon_{zz}$ 
|  $\varepsilon_{\text{node}_{i,3}} \leftarrow \varepsilon_{\theta\theta}$ 
|  $\varepsilon_{\text{node}_{i,4}} \leftarrow \varepsilon_{rz}$ 
|  $\varepsilon_{\text{node}}$ 

```

Обчислення компонент напружень (σ_{rr} , σ_{zz} , $\sigma_{\theta\theta}$, σ_{rz}) у вузлах CE

```

 $\sigma_{\text{node}} :=$  for  $i \in 1 \dots \text{Nnod\_gl}$ 
|  $k\_count \leftarrow 0$ 
|  $\sigma_{rr} \leftarrow 0$ 
|  $\sigma_{zz} \leftarrow 0$ 
|  $\sigma_{\theta\theta} \leftarrow 0$ 
|  $\sigma_{rz} \leftarrow 0$ 
| for  $k \in 1 \dots \text{nEl}$ 
|   for  $j \in 1 \dots M$ 
|      $\text{node} \leftarrow \text{El\_nod}_{k,j}$ 
|     if  $\text{node} = i$ 
|        $k\_count \leftarrow k\_count + 1$ 
|        $\sigma_{rr} \leftarrow \sigma_{rr} + \sigma_{k,1}$ 
|        $\sigma_{zz} \leftarrow \sigma_{zz} + \sigma_{k,2}$ 
|        $\sigma_{\theta\theta} \leftarrow \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{k,3}$ 
|        $\sigma_{rz} \leftarrow \sigma_{rz} + \sigma_{k,4}$ 
|   if  $k\_count > 0$ 
|      $\sigma_{rr} \leftarrow \frac{\sigma_{rr}}{k\_count}$ 
|      $\sigma_{zz} \leftarrow \frac{\sigma_{zz}}{k\_count}$ 
|      $\sigma_{\theta\theta} \leftarrow \frac{\sigma_{\theta\theta}}{k\_count}$ 
|      $\sigma_{rz} \leftarrow \frac{\sigma_{rz}}{k\_count}$ 
|    $\sigma_{\text{node}_{i,1}} \leftarrow \sigma_{rr}$ 
|    $\sigma_{\text{node}_{i,2}} \leftarrow \sigma_{zz}$ 

```

$$\left\| \begin{array}{l} \sigma_{\text{node}_{i,3}} \leftarrow \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{\text{node}_{i,4}} \leftarrow \sigma_{rz} \end{array} \right\| \sigma_{\text{node}}$$

Визначення коефіцієнта збільшення деформації за Usum (приймаємо, що макс. деформація повинна становити 2.5% від найбільшого розміру конструкції по r або по z)

$$k_{rz} := \left\| \begin{array}{l} \text{for } i \in 1 \dots \text{Nnod_gl} \\ \quad R_{-i} \leftarrow RZgl_{i,1} \\ \text{for } i \in 1 \dots \text{Nnod_gl} \\ \quad Z_{-i} \leftarrow RZgl_{i,2} \\ \Delta R \leftarrow \max(R_{-}) - \min(R_{-}) \\ \Delta Z \leftarrow \max(Z_{-}) - \min(Z_{-}) \\ \Delta Us \leftarrow \max(Usum) - \min(Usum) \\ \Delta RZ \leftarrow \Delta R \\ \Delta RZ \leftarrow \Delta Z \text{ if } \Delta Z > \Delta R \\ k_{rz} \leftarrow \frac{\Delta RZ}{\Delta Us} \cdot \frac{2.5}{100} \end{array} \right\|$$

Визначення деформованого стану конструкції

$$k_{rz} = 2461311 \quad \text{коефіцієнт збільшення деформації}$$

$$RZgl_D := \left\| \begin{array}{l} \text{for } i \in 1 \dots \text{Nnod_gl} \\ \quad \left\| \begin{array}{l} RZgl_D_{i,1} \leftarrow RZgl_{i,1} + U_{r_i} \cdot k_{rz} \\ RZgl_D_{i,2} \leftarrow RZgl_{i,2} + U_{z_i} \cdot k_{rz} \end{array} \right\| \\ RZgl_D \end{array} \right\|$$

Визначення еквівалентного напруження за Мізесом σ_{ekv_n} у вузлах СЕ

$$\sigma_{ekv_n} := \left\| \begin{array}{l} \text{for } i \in 1 \dots \text{Nnod_gl} \\ \quad \left\| \begin{array}{l} \sigma 1 \leftarrow (\sigma_{\text{node}_{i,1}} - \sigma_{\text{node}_{i,2}})^2 \\ \sigma 2 \leftarrow (\sigma_{\text{node}_{i,2}} - \sigma_{\text{node}_{i,3}})^2 \\ \sigma 3 \leftarrow (\sigma_{\text{node}_{i,3}} - \sigma_{\text{node}_{i,1}})^2 \\ \sigma_{ekv_n_i} \leftarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{\sigma 1 + \sigma 2 + \sigma 3 + 6 \cdot (\sigma_{\text{node}_{i,4}})^2} \end{array} \right\| \end{array} \right\|$$

σ_{ekv_n}

Визначення запасу міцності конструкції Fs у вузлах CE

```

Fs_n := | for i ∈ 1 .. Nnod_gl
        |   Fs_n_i ←  $\frac{\sigma T}{\sigma_{ekv\_n_i}}$ 
        | Fs_n

```

VARIABLES="R, m", "Z, m", "Ur, m", "Uz, m", "Us, m", "Srr, Pa", "Szz, Pa", "S33, Pa", "Srz, Pa", "Sekv, Pa", "Fs"

Формування файлу результатів Result_1 недеформований стан

```

Result_1 := | for i ∈ 1 .. Nnod_gl
            |   Result_1_i,1 ← RZgl_i,1
            |   Result_1_i,2 ← RZgl_i,2
            |   Result_1_i,3 ← Ur_i
            |   Result_1_i,4 ← Uz_i
            |   Result_1_i,5 ← Usum_i
            |   Result_1_i,6 ←  $\sigma_{node\_i,1}$ 
            |   Result_1_i,7 ←  $\sigma_{node\_i,2}$ 
            |   Result_1_i,8 ←  $\sigma_{node\_i,3}$ 
            |   Result_1_i,9 ←  $\sigma_{node\_i,4}$ 
            |   Result_1_i,10 ←  $\sigma_{ekv\_n_i}$ 
            |   Result_1_i,11 ← Fs_n_i
            | Result_1

```

Формування файлу результатів Result_1D деформований стан

```

Result_1D := | for i ∈ 1 .. Nnod_gl
              |   Result_1D_i,1 ← RZgl_D_i,1
              |   Result_1D_i,2 ← RZgl_D_i,2
              |   Result_1D_i,3 ← Ur_i
              |   Result_1D_i,4 ← Uz_i
              |   Result_1D_i,5 ← Usum_i
              |
              |   El_nod3 := | for k ∈ 1 .. nEl
                              |   for j ∈ 1 .. M
                              |       El_nod3_k,j ← El_nod_k,j
                              |   El_nod3

```

```

Result_1Di,6 ← σnodei,1
Result_1Di,7 ← σnodei,2
Result_1Di,8 ← σnodei,3
Result_1Di,9 ← σnodei,4
Result_1Di,10 ← σekvni
Result_1Di,11 ← Fsni
Result_1D

```

Запис файлів результатів

E:\Result_1.dat E:\Result_1D.dat E:\NNodesElements.dat

Result_1 Result_1D El_nod3

Побудова графіків у небезпечних перетинах

Номери вузлів у небезпечному перетині (лінії 1,2,3,4, де діє тиск)

```

nod_P := k ← 0
for i ∈ 1 .. n_s1
    k ← k + 1
    nod_Pk ← Nod_side1i
for i ∈ 1 .. n_s2
    k ← k + 1
    nod_Pk ← Nod_side2i
for i ∈ 1 .. n_s3
    k ← k + 1
    nod_Pk ← Nod_side3i
for i ∈ 1 .. n_s4
    k ← k + 1
    nod_Pk ← Nod_side4i
nod_P

```

Кількість і номери вузлів у небезпечному перетині (лінії 1,2,3,4, де діє тиск)

$n_P := \text{rows}(\text{nod_P}) = 26$

Лінійні координати по лінії 1,2,3,4

$$L := \left| \begin{array}{l} L_1 \leftarrow \text{RZgl}_{1,1} \\ \text{for } i \in 2 \dots n_P \\ \quad L_i \leftarrow L_{i-1} + \sqrt{(\text{RZgl}_{i,1})^2 + (\text{RZgl}_{i,2})^2} \\ L \end{array} \right.$$

Значення U_{sum} у небезпечному перетині

$$U_{s_P} := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 1 \dots n_P \\ \quad p \leftarrow \text{nod_P}_i \\ \quad U_{s_P}_i \leftarrow U_{\text{sum}_p} \\ U_{s_P} \end{array} \right.$$

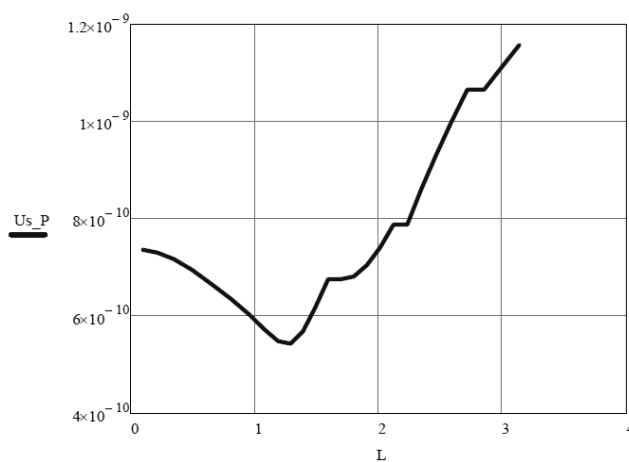
Значення еквівалентних напружень за Мізесом σ_{ekv} у небезпечному перетині

$$\sigma_{\text{ekv_P}} := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 1 \dots n_P \\ \quad p \leftarrow \text{nod_P}_i \\ \quad \sigma_{\text{ekv_P}}_i \leftarrow \sigma_{\text{ekv}_p} \\ \sigma_{\text{ekv_P}} \end{array} \right.$$

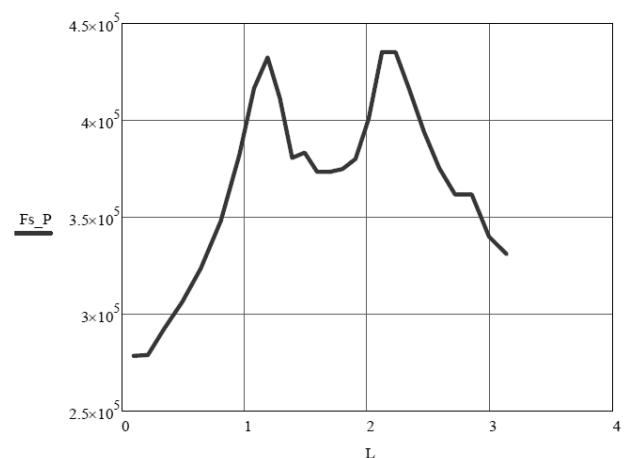
Значення запасу міцності F_s у небезпечному перетині

$$F_{s_P} := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 1 \dots n_P \\ \quad p \leftarrow \text{nod_P}_i \\ \quad F_{s_P}_i \leftarrow F_{s_p} \\ F_{s_P} \end{array} \right.$$

Епюра (графік) сумарних переміщень у небезпечному перетині



Епюра (графік) запасу міцності у небезпечному перетині



Е.4. Тривимірна задача НДС. Лінійні тетраедні СЕ

Програмний код **Lab_M_3D.xmcd** розроблено за числовою методикою, що наведена в розділі 3 (див. підрозділ 3.4), та супроводжується необхідними рисунками і коментарями.

В коді видаляються зайві вузли, що пише програма Gmsh у файл *.msh при побудові 3D геометрії інструментами Gmsh, наприклад, Extrude
Файл Lab_M_3D.xmcd

статична пружність 3D задача

ORIGIN $\equiv$ 1 Індксація масивів з 1

Фізичні властивості

$E := 2 \cdot 10^{11}$ Па модуль пружності

$\nu := 0.3$ коефіцієнт Пуассона

$\beta := 1.3 \cdot 10^{-6}$ К⁻¹ КЛТР

$\rho := 7800$ kg/m³ густина

$\sigma_T := 350 \cdot 10^6$ Па межа текучості матеріалу

Навантаження

$p := 100$ Па тиск

$\Delta T := 0$ К температурне навантаження

$g_x := 0$ $g_y := 0$ $g_z := 0$ складові прискорення вільного падіння

$M := 4$ кількість вузлів в тетраедному скінченному елементі

Зчитування номерів і координат вузлів дискретизованої в програмі Gmsh моделі фланця з файлу Gmsh_nodes_flan.dat

Файл Gmsh_nodes_flan.dat створюється із файлу Flan1.msh таким чином.

Спочатку Flan1.msh копіюється в файл Gmsh_nodes_flan.dat. Далі виконується корегування створеного файлу Gmsh_nodes_flan.dat у текстовому редакторі.

У файлі Gmsh_nodes_flan.dat спочатку видаляються перші 5 рядків, а саме такі:

\$MeshFormat

2.2 0 8

\$EndMeshFormat

\$Nodes

190

(тут 190 - це кількість вузлів, отриманих в результаті дискретизації)
тобто до рядка з номером 1 на його початку,
потім рядки до 190 номеру лишаються у файлі Gmsh_nodes_flan.dat, а рядки,
починаючи з

\$EndNodes

видаляються із файлу до його кінця.

І останньою операцією редагування файлу є заміна "крапки" на "кому".

Записуємо результат редагування та виходимо з редактора.

Зчитування файлу Gmsh_nodes_flan.dat в матрицю

Gmsh_nodes

```
Gmsh_nodes :=  
Gmsh_nodes_flan.dat
```

Визначення кількості рядків в матриці Gmsh_nodes

```
Nnod_gl := rows(Gmsh_nodes) = 190      кількість глобальних вузлів
```

Зчитування номерів елементів + ін. і номерів вузлів по елементах дискретизованої в програмі Gmsh моделі фланця з файлу Gmsh_elem_flan.dat

Файл Gmsh_elem_flan.dat створюється із файлу Flan1.msh таким чином.

Спочатку Flan1.msh копіюється в файл Gmsh_elem_flan.dat. Далі виконується корегування створеного файлу Gmsh_elem_flan.dat у текстовому редакторі.

У файлі Gmsh_elem_flan.dat спочатку видаляються перші рядки до рядка:

\$Elements.

Потім видаляються рядки до рядка, у якому друге число (2-й стовпець) дорівнює 4 (число 4 є ознакою тетраедра).

Далі переходимо в кінець файлу та видаляємо останній рядок

\$EndElements

Записуємо результат редагування та виходимо з редактора.

Зчитування файлу Gmsh_elem_flan.dat в матрицю

Gmsh_elem

```
Gmsh_elem :=  
Gmsh_elem_flan.dat
```

Визначення кількості рядків в матриці

Gmsh_elem

```
nEl := rows(Gmsh_elem) = 487      кількість скінчених елементів
```

Запис глобальних вузлів дискретизованої моделі фланця у матрицю El_nod

```

El_nod := || for i ∈ 1 .. nEl
           | El_nodi,1 ← Gmsh_elemi,6
           | El_nodi,2 ← Gmsh_elemi,7
           | El_nodi,3 ← Gmsh_elemi,8
           | El_nodi,4 ← Gmsh_elemi,9
           || El_nod

```

Функція яка визначає номери вузлів (точок) які не є вузлами розрахункової сітки (тобто не використовуються в CE), а виникають при побудові 3D геометрії в програмі Gmsh за допомогою команди Extrude.

```

Nod_Del := || L ← 0
           || for i ∈ 1 .. Nnod_gl
           || | pL ← 0
           || | for j ∈ 1 .. nEl
           || | | for k ∈ 1 .. 4
           || | | | pL ← 1 if El_nodj,k = i
           || | if pL = 0
           || | | L ← L + 1
           || | | Nod_DelL ← i
           || Nod_Del

```

N_Del := rows(Nod_Del) = 4 Кількість зайвих вузлів, що не використовуються в CE

Сортування

```

Nod_Del := || sort(Nod_Del) if N_Del > 0
           || 0 otherwise

```

Видалення вузлів або стискання номерів вузлів, що не використовуються в розрахунковій сітці

```

Gmsh_nodes := || for i ∈ 1 .. N_Del
                 || | if N_Del > 0
                 || | | n ← Nod_Deli
                 || | | if n < Nnod_gl
                 || | | | for j ∈ n + 1 .. Nnod_gl
                 || | | | | for k ∈ 1 .. M
                 || | | | | Gmsh_nodesj-1,k ← Gmsh_nodesj,k
                 || | | | for k ∈ i + 1 .. N_Del if i < N_Del
                 || | | | | Nod_Delk ← Nod_Delk - 1
                 || Gmsh_nodes

```

$Nnod_gl := Nnod_gl - N_Del = 186$

Запис глобальних вузлів дискретизованої моделі фланця у матрицю XYZgl

```
XYZgl :=
  for i ∈ 1 .. Nnod_gl
    XYZgli,1 ← Gmsh_nodesi,2
    XYZgli,2 ← Gmsh_nodesi,3
    XYZgli,3 ← Gmsh_nodesi,4
  XYZgl
```

Перекодування номерів вузлів по тетраедричних елементах

```
El_nod :=
  for j ∈ 1 .. nEl
    for k ∈ 1 .. 4
      ik ← El_nodj,k
      for i ∈ 1 .. Nnod_gl
        if ik = Gmsh_nodesi,1
          i1 ← i
          break
      El_nodj,k ← i1
    El_nod
```

Запис тетраедричної сітки для перегляду в TecPlot

Вивід координат вузлів та номерів вузлів по елементах-тетраедрах для перегляду в програмі Tecplot

Result_1_msh.dat

NNodes_elements.dat

XYZgl

El_nod

Зчитування даних Gmsh про триангуляцію поверхонь тіла із файлу El_Area2_Gmsh.dat

Файл El_Area2_Gmsh.dat створюється із текстового файлу Flan1.msh (який записує програма мешер Gmsh) за допомогою копіювання Flan1.msh у El_Area2_Gmsh.dat.

Далі виконується редагування файлу El_Area2_Gmsh.dat таким чином:

спочатку видаляються всі рядки до рядка

\$Elements;

потім знов видаляються рядки до рядка, у якому у 2-у стовпці записано 2 (яка є ознакою

трикутного елементу на поверхні);

далі всі рядки з 2 у 2-у стовпці рядка лишаються у файлі;

всі рядки, починаючи з рядка, у якому у 2-у стовпці записана 4 (або інша цифра, але не 2) видаляються до кінця файлу.

Area2_nod_El :=

El_Area2_Gmsh.dat

N_Area2 := rows(Area2_nod_El) = 368 Кількість рядків в матриці

Перекодування номерів вузлів по трикутних елементах на поверхнях

```
Area2_nod_El :=
  for j ∈ 1 .. N_Area2
    for k ∈ 6 .. 8
      ik ← Area2_nod_Elj,k
      for i ∈ 1 .. Nnod_gl
        if ik = Gmsh_nodesi,1
          i1 ← i
          break
      Area2_nod_Elj,k ← i1
  Area2_nod_El
```

На торці фланця ГУ заземлення по координаті
у ($U_y=0$) - поверхня №1 - визначено в програмі
Gmsh

На осях симетрії №11 - $U_x=0$ і №12 - $U_z=0$

На внутрішніх сторонах фланця №8,9,10 - задається тиск

Тобто з матриці Area2_nod_El треба отримати інформацію про трикутні СЕ на поверхнях
1, 11, 12. Ця інформація включає номери глобальних вузлів.

1.1. Визначення номерів глобальних вузлів трикутних елементів поверхні № 1 з матриці Area2_nod_El

функція

```

El_nod_(k) :=
  row ← 0
  for i ∈ 1 .. N_Area2
    j ← Area2_nod_Eli,5
    if j = k
      row ← row + 1
      for l ∈ 1 .. 3
        El_nodrow,1 ← Area2_nod_Eli,5+1
  El_nod

```

El_nod1 := El_nod (1) тут 1 це номер поверхні

N_El_side1 := rows(El_nod1) = 37 кількість трикутних елементів на поверхні 1

1.2. Запис номерів вузлів елементів на стороні № 1 у вектор (без повторення однакових номерів)

функція

```

Nod_side(N_El_side, El_nod) :=
  k ← 0
  for i ∈ 1 .. N_El_side
    if i = 1
      for j ∈ 1 .. 3
        Nod_side-k+j ← El_nodi,j
      k ← k + 3
    if i > 1
      for j ∈ 1 .. 3
        n ← El_nodi,j
        j0 ← -1
        for l ∈ 1 .. k
          j0 ← 0 if Nod_side-l = n

```

```

||| ||| ||| ||| if j0 = -1
||| ||| ||| ||| k ← k + 1
||| ||| ||| ||| Nod_side_k ← n
||| ||| ||| ||| p ← 0
||| ||| ||| ||| Nod_side_

```

Nod_side1 := Nod_side(N_El_side1, El_nod1) Uy=0

n_s1 := rows(Nod_side1) = 30

8.1 Визначення номерів глобальних вузлів трикутних елементів поверхні № 8 з матриці Area2_nod_El

El_nod8 := El_nod_(8) тут 8 це номер поверхні

N_El_side8 := rows(El_nod8) = 10 кількість трикутних елементів на поверхні 8

8.2. Запис номерів вузлів елементів на стороні № 8 у вектор (без повторення однакових номерів)

Nod_side8 := Nod_side(N_El_side8, El_nod8)

n_s8 := rows(Nod_side8) = 12

9.1 Визначення номерів глобальних вузлів трикутних елементів поверхні № 9 з матриці Area2_nod_El

El_nod9 := El_nod_(9) тут 9 це номер поверхні

N_El_side9 := rows(El_nod9) = 58 кількість трикутних елементів на поверхні 9

9.2. Запис номерів вузлів елементів на стороні № 9 у вектор (без повторення однакових номерів)

Nod_side9 := Nod_side(N_El_side9, El_nod9)

n_s9 := rows(Nod_side9) = 40

10.1 Визначення номерів глобальних вузлів трикутних елементів поверхні № 10 з матриці Area2_nod_El

El_nod10 := El_nod_(10) тут 10 це номер поверхні

N_El_side10 := rows(El_nod10) = 14 кількість трикутних елементів на поверхні 10

10.2. Запис номерів вузлів елементів на стороні № 10 у вектор (без повторення однакових номерів)

Nod_side10 := Nod_side(N_El_side10, El_nod10)

n_s10 := rows(Nod_side10) = 16

11.1 Визначення номерів глобальних вузлів трикутних елементів поверхні № 11 з матриці Area2_nod_El

El_nod11 := El_nod_(11)

тут 11 це номер поверхні

N_El_side11 := rows(El_nod11) = 35

кількість трикутних елементів на поверхні 11

11.2. Запис номерів вузлів елементів на стороні № 11 у вектор (без повторення однакових номерів)

Nod_side11 := Nod_side(N_El_side11, El_nod11)

n_s11 := rows(Nod_side11) = 28

12.1 Визначення номерів глобальних вузлів трикутних елементів поверхні № 12 з матриці Area2_nod_El

El_nod12 := El_nod_(12)

тут 12 це номер поверхні

N_El_side12 := rows(El_nod12) = 35

кількість трикутних елементів на поверхні 12

12.2. Запис номерів вузлів елементів на стороні № 12 у вектор (без повторення однакових номерів)

Nod_side12 := Nod_side(N_El_side12, El_nod12)

n_s12 := rows(Nod_side12) = 28

Тепер ці дані треба зв'язати зі сторонами тетраедричних СЕ

функція, яка встановлює зв'язок поверхневих трикутників з номерами тетраедричних СЕ та номерами їх сторін

```
BC2_Side(El_nod_, N_El_side) :=
  n ← 0
  for i ∈ 1..N_El_side
    e1 ← El_nod_-,1
    e2 ← El_nod_-,2
    e3 ← El_nod_-,3
    for j ∈ 1..nEl
      e11 ← El_nod_-,1
      e12 ← El_nod_-,2
      e13 ← El_nod_-,3
      e14 ← El_nod_-,4
      if (e11 = e1 ∨ e11 = e2 ∨ e11 = e3) ∧ (e12 = e1 ∨ e12 = e2 ∨ e12 = e3) ∧ (e13 = e1 ∨ e13 = e2 ∨ e13 = e3)
        n ← n + 1
        BC2_n,1 ← j
        BC2_n,2 ← 1
        break
      if (e12 = e1 ∨ e12 = e2 ∨ e12 = e3) ∧ (e13 = e1 ∨ e13 = e2 ∨ e13 = e3) ∧ (e14 = e1 ∨ e14 = e2 ∨ e14 = e3)
        n ← n + 1
        BC2_n,1 ← j
        BC2_n,2 ← 2
        break
      if (e11 = e1 ∨ e11 = e2 ∨ e11 = e3) ∧ (e13 = e1 ∨ e13 = e2 ∨ e13 = e3) ∧ (e14 = e1 ∨ e14 = e2 ∨ e14 = e3)
```

```

      | | | | n ← n + 1
      | | | | BC2n,1 ← j
      | | | | BC2n,2 ← 3
      | | | | break
      | | | | if (e1 = e1 ∨ e1 = e2 ∨ e1 = e3) ∧ (e2 = e1 ∨ e2 = e2 ∨ e2 = e3) ∧ (e4 = e1 ∨ e4 = e2 ∨ e4 = e3)
      | | | | | n ← n + 1
      | | | | | BC2n,1 ← j
      | | | | | BC2n,2 ← 4
      | | | | | break
      | | | | z ← 0
      | | | f ← 0
      | BC2

```

Задання граничних умов тиску на сторонах фланця

Сторони фланця з номерами 8, 9, 10, на яких задані граничні умови - тиск

Сторона № 8 - внутрішня сторона фланця

BC2_Side8 := BC2_Side(EI_nod8, N_EI_side8)

Сторона № 9 - внутрішня сторона фланця

BC2_Side9 := BC2_Side(EI_nod9, N_EI_side9)

Сторона № 10 - внутрішня сторона фланця

BC2_Side10 := BC2_Side(EI_nod10, N_EI_side10)

Формування глобальної матриці EI_BC2 для ГУ II роду по елементах

В матриці EI_BC2 перші 4 стовпці це сторони тетраедра ijk (1), jkl (2), ikl (3), ijl (4), в яких задано ГУ 2-го роду (може бути 0 або 2), 5-й - номер CE

```

EI_BC2 := for el ∈ 1 .. nEI
           | EI_BC2el,5 ← el
           | for j ∈ 1 .. N_EI_side8
           | | if BC2_Side8j,1 = el
           | | | EI_BC2el,1 ← 2 if BC2_Side8j,2 = 1
           | | | EI_BC2el,2 ← 2 if BC2_Side8j,2 = 2
           | | | EI_BC2el,3 ← 2 if BC2_Side8j,2 = 3
           | | | EI_BC2el,4 ← 2 if BC2_Side8j,2 = 4
           | | for j ∈ 1 .. N_EI_side9
           | | | if BC2_Side9j,1 = el
           | | | | EI_BC2el,1 ← 2 if BC2_Side9j,2 = 1
           | | | | EI_BC2el,2 ← 2 if BC2_Side9j,2 = 2

```



```

    El_BC2el,3 ← 2 if BC2_Side9j,2 = 3
    El_BC2el,4 ← 2 if BC2_Side9j,2 = 4
  for j ∈ 1 .. N_El_side10
    if BC2_Side10j,1 = el
      El_BC2el,1 ← 2 if BC2_Side10j,2 = 1
      El_BC2el,2 ← 2 if BC2_Side10j,2 = 2
      El_BC2el,3 ← 2 if BC2_Side10j,2 = 3
      El_BC2el,4 ← 2 if BC2_Side10j,2 = 4
  El_BC2

```

Розв'язання задачі

1. Функції

Об'єм CE

$$V(XYZ) := \frac{1}{6} \cdot \left\| \begin{pmatrix} 1 & XYZ_{1,1} & XYZ_{1,2} & XYZ_{1,3} \\ 1 & XYZ_{2,1} & XYZ_{2,2} & XYZ_{2,3} \\ 1 & XYZ_{3,1} & XYZ_{3,2} & XYZ_{3,3} \\ 1 & XYZ_{4,1} & XYZ_{4,2} & XYZ_{4,3} \end{pmatrix} \right\|$$

Вектори для визначення матриці градієнтів

$$a(XYZ, i) := \left\| \begin{pmatrix} XYZ_{2,1} & XYZ_{2,2} & XYZ_{2,3} \\ XYZ_{3,1} & XYZ_{3,2} & XYZ_{3,3} \\ XYZ_{4,1} & XYZ_{4,2} & XYZ_{4,3} \end{pmatrix} \right\| \text{ if } i = 1$$

$$\left\| \begin{pmatrix} XYZ_{1,1} & XYZ_{1,2} & XYZ_{1,3} \\ XYZ_{3,1} & XYZ_{3,2} & XYZ_{3,3} \\ XYZ_{4,1} & XYZ_{4,2} & XYZ_{4,3} \end{pmatrix} \right\| \text{ if } i = 2$$

$$\left\| \begin{pmatrix} XYZ_{1,1} & XYZ_{1,2} & XYZ_{1,3} \\ XYZ_{2,1} & XYZ_{2,2} & XYZ_{2,3} \\ XYZ_{4,1} & XYZ_{4,2} & XYZ_{4,3} \end{pmatrix} \right\| \text{ if } i = 3$$

$$\begin{aligned}
& \left\| \begin{pmatrix} \text{XYZ}_{1,1} & \text{XYZ}_{1,2} & \text{XYZ}_{1,3} \\ \text{XYZ}_{3,1} & \text{XYZ}_{3,2} & \text{XYZ}_{3,3} \\ \text{XYZ}_{3,1} & \text{XYZ}_{3,2} & \text{XYZ}_{3,3} \end{pmatrix} \right\| \quad \text{if } i = 4 \\
\\
b(\text{XYZ}, i) := & \left\| \begin{pmatrix} 1 & \text{XYZ}_{2,2} & \text{XYZ}_{2,3} \\ 1 & \text{XYZ}_{3,2} & \text{XYZ}_{3,3} \\ 1 & \text{XYZ}_{4,2} & \text{XYZ}_{4,3} \end{pmatrix} \right\| \quad \text{if } i = 1 \\
& \left\| \begin{pmatrix} 1 & \text{XYZ}_{1,2} & \text{XYZ}_{1,3} \\ 1 & \text{XYZ}_{3,2} & \text{XYZ}_{3,3} \\ 1 & \text{XYZ}_{4,2} & \text{XYZ}_{4,3} \end{pmatrix} \right\| \quad \text{if } i = 2 \\
& \left\| \begin{pmatrix} 1 & \text{XYZ}_{1,2} & \text{XYZ}_{1,3} \\ 1 & \text{XYZ}_{2,2} & \text{XYZ}_{2,3} \\ 1 & \text{XYZ}_{4,2} & \text{XYZ}_{4,3} \end{pmatrix} \right\| \quad \text{if } i = 3 \\
& \left\| \begin{pmatrix} 1 & \text{XYZ}_{1,2} & \text{XYZ}_{1,3} \\ 1 & \text{XYZ}_{2,2} & \text{XYZ}_{2,3} \\ 1 & \text{XYZ}_{3,2} & \text{XYZ}_{3,3} \end{pmatrix} \right\| \quad \text{if } i = 4 \\
\\
c(\text{XYZ}, i) := & \left\| \begin{pmatrix} \text{XYZ}_{2,1} & 1 & \text{XYZ}_{2,3} \\ \text{XYZ}_{3,1} & 1 & \text{XYZ}_{3,3} \\ \text{XYZ}_{4,1} & 1 & \text{XYZ}_{4,3} \end{pmatrix} \right\| \quad \text{if } i = 1 \\
& \left\| \begin{pmatrix} \text{XYZ}_{1,1} & 1 & \text{XYZ}_{1,3} \\ \text{XYZ}_{3,1} & 1 & \text{XYZ}_{3,3} \\ \text{XYZ}_{4,1} & 1 & \text{XYZ}_{4,3} \end{pmatrix} \right\| \quad \text{if } i = 2 \\
& \left\| \begin{pmatrix} \text{XYZ}_{1,1} & 1 & \text{XYZ}_{1,3} \\ \text{XYZ}_{2,1} & 1 & \text{XYZ}_{2,3} \\ \text{XYZ}_{4,1} & 1 & \text{XYZ}_{4,3} \end{pmatrix} \right\| \quad \text{if } i = 3
\end{aligned}$$

$$d(XYZ, i) := \begin{cases} \left| \begin{pmatrix} XYZ_{1,1} & 1 & XYZ_{1,3} \\ XYZ_{2,1} & 1 & XYZ_{2,3} \\ XYZ_{3,1} & 1 & XYZ_{3,3} \end{pmatrix} \right| & \text{if } i = 4 \\ - \begin{pmatrix} XYZ_{2,1} & XYZ_{2,2} & 1 \\ XYZ_{3,1} & XYZ_{3,2} & 1 \\ XYZ_{4,1} & XYZ_{4,2} & 1 \end{pmatrix} & \text{if } i = 1 \\ \begin{pmatrix} XYZ_{1,1} & XYZ_{1,2} & 1 \\ XYZ_{3,1} & XYZ_{3,2} & 1 \\ XYZ_{4,1} & XYZ_{4,2} & 1 \end{pmatrix} & \text{if } i = 2 \\ - \begin{pmatrix} XYZ_{1,1} & XYZ_{1,2} & 1 \\ XYZ_{2,1} & XYZ_{2,2} & 1 \\ XYZ_{4,1} & XYZ_{4,2} & 1 \end{pmatrix} & \text{if } i = 3 \\ \begin{pmatrix} XYZ_{1,1} & XYZ_{1,2} & 1 \\ XYZ_{2,1} & XYZ_{2,2} & 1 \\ XYZ_{3,1} & XYZ_{3,2} & 1 \end{pmatrix} & \text{if } i = 4 \end{cases}$$

Матриця градієнтів СЕ

$$B(XYZ) := \frac{1}{6 \cdot V(XYZ)} \cdot \begin{pmatrix} b(XYZ, 1) & 0 & 0 & b(XYZ, 2) & 0 & 0 & b(XYZ, 3) & 0 & 0 & b(XYZ, 4) & 0 & 0 \\ 0 & c(XYZ, 1) & 0 & 0 & c(XYZ, 2) & 0 & 0 & c(XYZ, 3) & 0 & 0 & c(XYZ, 4) & 0 \\ 0 & 0 & d(XYZ, 1) & 0 & 0 & d(XYZ, 2) & 0 & 0 & d(XYZ, 3) & 0 & 0 & d(XYZ, 4) \\ c(XYZ, 1) & b(XYZ, 1) & 0 & c(XYZ, 2) & b(XYZ, 2) & 0 & c(XYZ, 3) & b(XYZ, 3) & 0 & c(XYZ, 4) & b(XYZ, 4) & 0 \\ 0 & d(XYZ, 1) & c(XYZ, 1) & 0 & d(XYZ, 2) & c(XYZ, 2) & 0 & d(XYZ, 3) & c(XYZ, 3) & 0 & d(XYZ, 4) & c(XYZ, 4) \\ d(XYZ, 1) & 0 & b(XYZ, 1) & d(XYZ, 2) & 0 & b(XYZ, 2) & d(XYZ, 3) & 0 & b(XYZ, 3) & d(XYZ, 4) & 0 & b(XYZ, 4) \end{pmatrix}$$

Матрица пружних констант

$$D(E, \nu) := \frac{E \cdot (1 - \nu)}{(1 + \nu) \cdot (1 - 2 \cdot \nu)} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1 - \nu} & \frac{\nu}{1 - \nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1 - \nu} & 1 & \frac{\nu}{1 - \nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1 - \nu} & \frac{\nu}{1 - \nu} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1 - 2 \cdot \nu}{2 \cdot (1 - \nu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1 - 2 \cdot \nu}{2 \cdot (1 - \nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1 - 2 \cdot \nu}{2 \cdot (1 - \nu)} \end{bmatrix}$$

Площа граней CE

$$S(XYZ, is) := \begin{cases} \text{if } is = 1 \\ \quad \begin{cases} i \leftarrow 1 \\ j \leftarrow 2 \\ k \leftarrow 3 \end{cases} \\ \text{if } is = 2 \\ \quad \begin{cases} i \leftarrow 2 \\ j \leftarrow 4 \\ k \leftarrow 3 \end{cases} \\ \text{if } is = 3 \\ \quad \begin{cases} i \leftarrow 1 \\ j \leftarrow 3 \\ k \leftarrow 4 \end{cases} \\ \text{if } is = 4 \\ \quad \begin{cases} i \leftarrow 1 \\ j \leftarrow 4 \\ k \leftarrow 2 \end{cases} \\ g1 \leftarrow \left| \begin{pmatrix} XYZ_{i,2} - XYZ_{k,2} & XYZ_{i,3} - XYZ_{k,3} \\ XYZ_{j,2} - XYZ_{k,2} & XYZ_{j,3} - XYZ_{k,3} \end{pmatrix} \right| \end{cases}$$

$$\begin{aligned} g2 &\leftarrow - \begin{vmatrix} XYZ_{i,1} - XYZ_{k,1} & XYZ_{i,3} - XYZ_{k,3} \\ XYZ_{j,1} - XYZ_{k,1} & XYZ_{j,3} - XYZ_{k,3} \end{vmatrix} \\ g3 &\leftarrow \begin{vmatrix} XYZ_{i,1} - XYZ_{k,1} & XYZ_{i,2} - XYZ_{k,2} \\ XYZ_{j,1} - XYZ_{k,1} & XYZ_{j,2} - XYZ_{k,2} \end{vmatrix} \\ &\frac{\sqrt{g1^2 + g2^2 + g3^2}}{2} \end{aligned}$$

Направляючі косинуси до граней СЕ
Для правильності знаків компонент нормалі,
тут обов'язковий обхід вузлів граней тетраедра
проти годинникової стрілки, якщо дивитися із
середини тетраедного СЕ

$$\begin{aligned} n(XYZ, is) := & \begin{cases} \text{if } is = 1 \\ \quad \begin{vmatrix} i \leftarrow 1 \\ j \leftarrow 2 \\ k \leftarrow 3 \end{vmatrix} \\ \text{if } is = 2 \\ \quad \begin{vmatrix} i \leftarrow 2 \\ j \leftarrow 4 \\ k \leftarrow 3 \end{vmatrix} \\ \text{if } is = 3 \\ \quad \begin{vmatrix} i \leftarrow 1 \\ j \leftarrow 3 \\ k \leftarrow 4 \end{vmatrix} \\ \text{if } is = 4 \\ \quad \begin{vmatrix} i \leftarrow 1 \\ j \leftarrow 4 \\ k \leftarrow 2 \end{vmatrix} \\ g1 \leftarrow \begin{vmatrix} XYZ_{i,2} - XYZ_{k,2} & XYZ_{i,3} - XYZ_{k,3} \\ XYZ_{j,2} - XYZ_{k,2} & XYZ_{j,3} - XYZ_{k,3} \end{vmatrix} \\ g2 \leftarrow - \begin{vmatrix} XYZ_{i,1} - XYZ_{k,1} & XYZ_{i,3} - XYZ_{k,3} \\ XYZ_{j,1} - XYZ_{k,1} & XYZ_{j,3} - XYZ_{k,3} \end{vmatrix} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 g3 &\leftarrow \left| \begin{pmatrix} XYZ_{i,1} - XYZ_{k,1} & XYZ_{i,2} - XYZ_{k,2} \\ XYZ_{j,1} - XYZ_{k,1} & XYZ_{j,2} - XYZ_{k,2} \end{pmatrix} \right| \\
 S &\leftarrow \sqrt{g1^2 + g2^2 + g3^2} \\
 &\begin{pmatrix} \frac{g1}{S} \\ \frac{g2}{S} \\ \frac{g3}{S} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Вектор навантаження СЕ від теплового розширення

$$f_{th}(XYZ, E, \nu, \beta) := \frac{\beta \cdot E \cdot \Delta T \cdot V(XYZ)}{1 - 2 \cdot \nu} \cdot B(XYZ)^T \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Об'ємне навантаження на СЕ (сила гравітації)

$$f_v(XYZ, g_x, g_y, g_z) := \frac{V(XYZ)}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \rho \cdot g_x \\ \rho \cdot g_y \\ \rho \cdot g_z \end{pmatrix}$$

Зусилля (тиск) на грані 1 CE - вузли 1,2,3

$$f_{p1_123}(XYZ, p) := \frac{S(XYZ, 1)}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p \cdot n(XYZ, 1)_1 \\ p \cdot n(XYZ, 1)_2 \\ p \cdot n(XYZ, 1)_3 \end{pmatrix}$$

Зусилля (тиск) на грані 2 CE - вузли 2,3,4

$$f_{p2_234}(XYZ, p) := \frac{S(XYZ, 2)}{3} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p \cdot n(XYZ, 2)_1 \\ p \cdot n(XYZ, 2)_2 \\ p \cdot n(XYZ, 2)_3 \end{pmatrix}$$

Зусилля (тиск) на грані 3 CE - вузли 1,3,4

$$f_{p3_134}(XYZ, p) := \frac{S(XYZ, 3)}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p \cdot n(XYZ, 3)_1 \\ p \cdot n(XYZ, 3)_2 \\ p \cdot n(XYZ, 3)_3 \end{pmatrix}$$

Зусилля (тиск) на грані 4 CE - вузли 1,2,4

$$f_{p4_124}(XYZ, p) := \frac{S(XYZ, 4)}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p \cdot n(XYZ, 4)_1 \\ p \cdot n(XYZ, 4)_2 \\ p \cdot n(XYZ, 4)_3 \end{pmatrix}$$

Обнулення глобальної матриці та вектора вільних членів

$i := 1 \dots 3Nnod_gl$

$F_i := 0$

$j := 1 \dots 3Nnod_gl$

$K_{i,j} := 0$

2. Формування глобальної матриці і вектора СЛАР та її розв'язання

```

U := for k ∈ 1 .. nEl
    for i ∈ 1 .. M
        j ← El_nodk,i
        XYZi,1 ← XYZgl,j,1
        XYZi,2 ← XYZgl,j,2
        XYZi,3 ← XYZgl,j,3
    for i ∈ 1 .. 3M
        f_Eli ← 0
    k_El ← B(XYZ)T · D(E, ν) · B(XYZ) · V(XYZ)
    for i ∈ 1 .. M
        f_El ← f_El + f_p1_123(XYZ, p) if i = 1 ∧ El_BC2k,i = 2
        f_El ← f_El + f_p2_234(XYZ, p) if i = 2 ∧ El_BC2k,i = 2
        f_El ← f_El + f_p3_134(XYZ, p) if i = 3 ∧ El_BC2k,i = 2
        f_El ← f_El + f_p4_124(XYZ, p) if i = 4 ∧ El_BC2k,i = 2
    f_El ← f_El + f_v(XYZ, gx, gy, gz) + f_th(XYZ, E, ν, β)
    for i ∈ 1 .. M
        ig ← El_nodk,i
        ig1 ← ig · 3
        ii ← i · 3
        Fig1-2 ← Fig1-2 + f_Elii-2
        Fig1-1 ← Fig1-1 + f_Elii-1
        Fig1 ← Fig1 + f_Elii
        for j ∈ 1 .. M
            jgl ← El_nodk,j · 3
            jj ← j · 3
            Kig1-2,jgl-2 ← Kig1-2,jgl-2 + k_Elii-2,jj-2

```

```

| | | Kig1-2,jgl-1 ← Kig1-2,jgl-1 + kElii-2,jj-1
| | | Kig1-2,jgl ← Kig1-2,jgl + kElii-2,jj
| | | Kig1-1,jgl-2 ← Kig1-1,jgl-2 + kElii-1,jj-2
| | | Kig1-1,jgl-1 ← Kig1-1,jgl-1 + kElii-1,jj-1
| | | Kig1-1,jgl ← Kig1-1,jgl + kElii-1,jj
| | | Kig1,jgl-2 ← Kig1,jgl-2 + kElii,jj-2
| | | Kig1,jgl-1 ← Kig1,jgl-1 + kElii,jj-1
| | | Kig1,jgl ← Kig1,jgl + kElii,jj
| | for j ∈ 1 .. ns1
| | | ny ← Nodside1j
| | | for i ∈ 1 .. 3·Nnodgl
| | | | K3·ny-1,i ← 0
| | | | Ki,3·ny-1 ← 0
| | | K3·ny-1,3·ny-1 ← 1
| | | F3·ny-1 ← 0
| | for j ∈ 1 .. ns11
| | | nx ← Nodside11j
| | | for i ∈ 1 .. 3·Nnodgl
| | | | K3·nx-2,i ← 0
| | | | Ki,3·nx-2 ← 0
| | | K3·nx-2,3·nx-2 ← 1
| | | F3·nx-2 ← 0
| | for j ∈ 1 .. ns12
| | | nz ← Nodside12j
| | | for i ∈ 1 .. 3·Nnodgl
| | | | K3·nz,i ← 0

```

```

| | | | Ki,3·nz ← 0
| | | | K3·nz,3·nz ← 1
| | | | F3·nz ← 0
| U ← lsolve(K,F)
| U

```

Визначення векторів переміщень U_x , U_y , U_z у вузлах

```

Ux := | for i ∈ 1 .. Nnod_gl
      | Uxi ← U3·i-2
      | Ux
Uy := | for i ∈ 1 .. Nnod_gl
      | Uyi ← U3·i-1
      | Uy
Uz := | for i ∈ 1 .. Nnod_gl
      | Uzi ← U3·i
      | Uz

```

Визначення вектору сумарних переміщень U_{sum} у вузлах

```

Usum := | for i ∈ 1 .. Nnod_gl
        | Usumi ←  $\sqrt{(Ux_i)^2 + (Uy_i)^2 + (Uz_i)^2}$ 
        | Usum

```

**Обчислення компонент пружної і теплової деформації
(ϵ_{xx} , ϵ_{yy} , ϵ_{zz} , ϵ_{xy} , ϵ_{yz} , ϵ_{xz}) по елементах**

```

ε := | for k ∈ 1 .. nEl
    | for i ∈ 1 .. M
    | | igl ← El_nodk,i·3
    | | ii ← i·3
    | | U_Elii-2 ← Uigl-2
    | | U_Elii-1 ← Uigl-1
    | | U_Elii ← Uigl
    | for i ∈ 1 .. M
    | | j ← El_nodk,i
    | | XYZi,1 ← XYZgl,j,1
    | | XYZi,2 ← XYZgl,j,2

```

```

||| XYZi,3 ← XYZgl,j,3
| εEl ← B(XYZ)·UEl
| for i ∈ 1..6
|   εk,i ← εEl,i
| ε

```

Обчислення компонент теплової деформації (ε_{Txx}, ε_{Tyy}, ε_{Tzz}) по елементах

```

εT := | for k ∈ 1..nEl
|   |||
|   |||  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 
|   εT_El ← β·ΔT·
|   for i ∈ 1..6
|     εTk,i ← εT_El,i
|   εT

```

Обчислення компонент пружної (еластичної) деформації (ε_{xx}, ε_{yy}, ε_{zz}, ε_{xy}, ε_{yz}, ε_{xz}) по елементах

```

εe := | for k ∈ 1..nEl
|   | for i ∈ 1..M
|   |   | igl ← El_nodk,i·3
|   |   | ii ← i·3
|   |   | UElii-2 ← Uigl-2
|   |   | UElii-1 ← Uigl-1
|   |   | UElii ← Uigl
|   |   | for i ∈ 1..M
|   |   |   | j ← El_nodk,i
|   |   |   | XYZi,1 ← XYZgl,j,1
|   |   |   | XYZi,2 ← XYZgl,j,2

```

```

|| XYZi,3 ← XYZgl,j,3
||
|| εeEI ← B(XYZ)·UEI - β·ΔT·
||                                     [ 1 ]
||                                     [ 1 ]
||                                     [ 1 ]
||                                     [ 0 ]
||                                     [ 0 ]
||                                     [ 0 ]
||
|| for i ∈ 1..6
||   εek,i ← εeEI,i
||
εe

```

Обчислення компонент пружних напружень (σ_{xx}, σ_{yy}, σ_{zz}, σ_{xy}, σ_{yz}, σ_{xz}) по елементах

```

σ := | for k ∈ 1..nEl
||   for i ∈ 1..6
||     εi ← εek,i
||   σe ← D(E,ν)·ε
||   for i ∈ 1..6
||     σk,i ← σei
||
σ

```

Обчислення компонент пружної і теплової деформації (ε_{xx}, ε_{yy}, ε_{zz}, ε_{xy}, ε_{yz}, ε_{xz}) у вузлах

```

ε_node := | for i ∈ 1..Nnod_gl
||   k_cout ← 0
||   rΣ ← 0
||   εxx ← 0
||   εyy ← 0
||   εzz ← 0
||   εxy ← 0
||   εyz ← 0
||   εxz ← 0
||   for k ∈ 1..nEl
||     || for il ∈ 1..M

```

```

j ← El_nodk,i1
XYZi1,1 ← XYZglj,1
XYZi1,2 ← XYZglj,2
XYZi1,3 ← XYZglj,3
x_c ←  $\frac{XYZ_{1,1} + XYZ_{2,1} + XYZ_{3,1} + XYZ_{4,1}}{4}$ 
y_c ←  $\frac{XYZ_{1,2} + XYZ_{2,2} + XYZ_{3,2} + XYZ_{4,2}}{4}$ 
z_c ←  $\frac{XYZ_{1,2} + XYZ_{2,2} + XYZ_{3,3} + XYZ_{4,3}}{4}$ 
for j ∈ 1 .. M
  node ← El_nodk,j
  if node = i
    r ←  $\sqrt{(XYZgl_{i,1} - x_c)^2 + (XYZgl_{i,2} - y_c)^2 + (XYZgl_{i,3} - z_c)^2}$ 
    k_cout ← k_cout + 1
    rΣ ← rΣ +  $\frac{1}{r}$ 
    εxx ← εxx +  $\frac{\epsilon_{k,1}}{r}$ 
    εyy ← εyy +  $\frac{\epsilon_{k,2}}{r}$ 
    εzz ← εzz +  $\frac{\epsilon_{k,3}}{r}$ 
    εxy ← εxy +  $\frac{\epsilon_{k,4}}{r}$ 
    εyz ← εyz +  $\frac{\epsilon_{k,5}}{r}$ 
    εxz ← εxz +  $\frac{\epsilon_{k,6}}{r}$ 

```

```

if k_cout > 0
     $\epsilon_{xx} \leftarrow \frac{\epsilon_{xx}}{r\Sigma}$ 
     $\epsilon_{yy} \leftarrow \frac{\epsilon_{yy}}{r\Sigma}$ 
     $\epsilon_{zz} \leftarrow \frac{\epsilon_{zz}}{r\Sigma}$ 
     $\epsilon_{xy} \leftarrow \frac{\epsilon_{xy}}{r\Sigma}$ 
     $\epsilon_{yz} \leftarrow \frac{\epsilon_{yz}}{r\Sigma}$ 
     $\epsilon_{xz} \leftarrow \frac{\epsilon_{xz}}{r\Sigma}$ 
     $\epsilon_{\text{node}_{i,1}} \leftarrow \epsilon_{xx}$ 
     $\epsilon_{\text{node}_{i,2}} \leftarrow \epsilon_{yy}$ 
     $\epsilon_{\text{node}_{i,3}} \leftarrow \epsilon_{zz}$ 
     $\epsilon_{\text{node}_{i,4}} \leftarrow \epsilon_{xy}$ 
     $\epsilon_{\text{node}_{i,5}} \leftarrow \epsilon_{yz}$ 
     $\epsilon_{\text{node}_{i,6}} \leftarrow \epsilon_{xz}$ 
 $\epsilon_{\text{node}}$ 

```

Обчислення компонент напружень (σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz} , σ_{xy} , σ_{yz} , σ_{xz}) у вузлах CE

```

 $\sigma_{\text{node}} :=$  for i ∈ 1 .. Nnod_gl
    k_cout ← 0
     $r\Sigma \leftarrow 0$ 
     $\sigma_{xx} \leftarrow 0$ 
     $\sigma_{yy} \leftarrow 0$ 
     $\sigma_{zz} \leftarrow 0$ 
     $\sigma_{xy} \leftarrow 0$ 
     $\sigma_{yz} \leftarrow 0$ 
     $\sigma_{xz} \leftarrow 0$ 

```

```

for k ∈ 1 .. nEl
  for i1 ∈ 1 .. M
    j ← El_nodk,i1
    XYZi1,1 ← XYZglj,1
    XYZi1,2 ← XYZglj,2
    XYZi1,3 ← XYZglj,3
    x_c ←  $\frac{XYZ_{1,1} + XYZ_{2,1} + XYZ_{3,1} + XYZ_{4,1}}{4}$ 
    y_c ←  $\frac{XYZ_{1,2} + XYZ_{2,2} + XYZ_{3,2} + XYZ_{4,2}}{4}$ 
    z_c ←  $\frac{XYZ_{1,2} + XYZ_{2,2} + XYZ_{3,3} + XYZ_{4,3}}{4}$ 
    for j ∈ 1 .. M
      node ← El_nodk,j
      if node = i
        r ←  $\sqrt{(XYZgl_{i,1} - x_c)^2 + (XYZgl_{i,2} - y_c)^2 + (XYZgl_{i,3} - z_c)^2}$ 
        k_cout ← k_cout + 1
        rΣ ← rΣ +  $\frac{1}{r}$ 
        σxx ← σxx +  $\frac{\sigma_{k,1}}{r}$ 
        σyy ← σyy +  $\frac{\sigma_{k,2}}{r}$ 
        σzz ← σzz +  $\frac{\sigma_{k,3}}{r}$ 
        σxy ← σxy +  $\frac{\sigma_{k,4}}{r}$ 
        σyz ← σyz +  $\frac{\sigma_{k,5}}{r}$ 

```



```

||| ||| ||| |||  $\sigma_{xz} \leftarrow \sigma_{xz} + \frac{\sigma_{k,6}}{r}$ 
|||
||| if k_cout > 0
|||    $\sigma_{xx} \leftarrow \frac{\sigma_{xx}}{r\Sigma}$ 
|||    $\sigma_{yy} \leftarrow \frac{\sigma_{yy}}{r\Sigma}$ 
|||    $\sigma_{zz} \leftarrow \frac{\sigma_{zz}}{r\Sigma}$ 
|||    $\sigma_{xy} \leftarrow \frac{\sigma_{xy}}{r\Sigma}$ 
|||    $\sigma_{yz} \leftarrow \frac{\sigma_{yz}}{r\Sigma}$ 
|||    $\sigma_{xz} \leftarrow \frac{\sigma_{xz}}{r\Sigma}$ 
|||
|||  $\sigma_{node_{i,1}} \leftarrow \sigma_{xx}$ 
|||  $\sigma_{node_{i,2}} \leftarrow \sigma_{yy}$ 
|||  $\sigma_{node_{i,3}} \leftarrow \sigma_{zz}$ 
|||  $\sigma_{node_{i,4}} \leftarrow \sigma_{xy}$ 
|||  $\sigma_{node_{i,5}} \leftarrow \sigma_{yz}$ 
|||  $\sigma_{node_{i,6}} \leftarrow \sigma_{xz}$ 
|||
|||  $\sigma_{node}$ 

```

Визначення коефіцієнта збільшення деформації за Usun (приймаємо, що макс. деформація повинна становити 5% від найбільшого розміру конструкції по x, або по y, або по z)

```

k_xyz := || for i ∈ 1 .. Nnod_gl
||          $X_{-i} \leftarrow XYZ_{gl_{i,1}}$ 
||         for i ∈ 1 .. Nnod_gl
||            $Y_{-i} \leftarrow XYZ_{gl_{i,2}}$ 

```

```

for i ∈ 1 .. Nnod_gl
  Z-i ← XYZgli,3
  Δx ← ||max(X-)| - |min(X-)||
  Δy ← ||max(Y-)| - |min(Y-)||
  Δz ← ||max(Z-)| - |min(Z-)||
  ΔUs ← ||max(Usum)| - |min(Usum)||
  Δxyz ← Δx
  Δxyz ← Δy if Δy > Δxyz
  Δxyz ← Δz if Δz > Δxyz
  kxyz ←  $\frac{\Delta xyz}{\Delta Us} \cdot \frac{5}{100}$ 

```

Визначення деформованого стану конструкції

k_{xyz} = 57721246 коефіцієнт збільшення деформації

```

XYZgl_D := for i ∈ 1 .. Nnod_gl
  XYZgl_Di,1 ← XYZgli,1 + Uxi·kxyz
  XYZgl_Di,2 ← XYZgli,2 + Uyi·kxyz
  XYZgl_Di,3 ← XYZgli,3 + Uzi·kxyz
XYZgl_D

```

Визначення еквівалентного напруження за Мізесом σ_{ekv_n} у вузлах СЕ

```

σekv_n := for i ∈ 1 .. Nnod_gl
  s1 ← (σnodei,1 - σnodei,2)2
  s2 ← (σnodei,2 - σnodei,3)2
  s3 ← (σnodei,3 - σnodei,1)2
  s4 ← 6·[(σnodei,4)2 + (σnodei,5)2 + (σnodei,6)2]
  σekv_ni ←  $\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{s1 + s2 + s3 + s4}$ 
σekv_n

```

Визначення запасу міцності конструкції F_s у вузлах СЕ

```

Fs_n :=
  for i ∈ 1 .. Nnod_gl
    Fs_n_i ←  $\frac{\sigma T}{\sigma_{ekv\_n_i}}$ 
  Fs_n

```

Формування файлу результатів Result_1 недеформований стан

```

Result_1 :=
  for i ∈ 1 .. Nnod_gl
    Result_1_i,1 ← XYZgl_i,1
    Result_1_i,2 ← XYZgl_i,2
    Result_1_i,3 ← XYZgl_i,3
    Result_1_i,4 ← Ux_i
    Result_1_i,5 ← Uy_i
    Result_1_i,6 ← Uz_i
    Result_1_i,7 ← Usum_i
    Result_1_i,8 ←  $\sigma_{node\_i,1}$ 
    Result_1_i,9 ←  $\sigma_{node\_i,2}$ 
    Result_1_i,10 ←  $\sigma_{node\_i,3}$ 
    Result_1_i,11 ←  $\sigma_{ekv\_n_i}$ 
    Result_1_i,12 ← Fs_n_i
  Result_1

```

Формування файлу результатів Result_1D деформований стан

```

Result_1D :=
  for i ∈ 1 .. Nnod_gl
    Result_1D_i,1 ← XYZgl_D_i,1
    Result_1D_i,2 ← XYZgl_D_i,2
    Result_1D_i,3 ← XYZgl_D_i,3
    Result_1D_i,4 ← Ux_i
    Result_1D_i,5 ← Uy_i
    Result_1D_i,6 ← Uz_i

```

Перезапис номерів вузлів СЕ
(видаляємо 4-й рядок, в якому
записано номери СЕ)

```

El_nod3 :=
  for k ∈ 1 .. nEl
    for j ∈ 1 .. M
      El_nod3_k,j ← El_nod_k,j
    El_nod3

```

	$\text{Result_1D}_{i,7} \leftarrow \text{Usum}_i$
	$\text{Result_1D}_{i,8} \leftarrow \sigma_{\text{node}_{i,1}}$
	$\text{Result_1D}_{i,9} \leftarrow \sigma_{\text{node}_{i,2}}$
	$\text{Result_1D}_{i,10} \leftarrow \sigma_{\text{node}_{i,3}}$
	$\text{Result_1D}_{i,11} \leftarrow \sigma_{\text{ekv}_n}_i$
	$\text{Result_1D}_{i,12} \leftarrow \text{Fs}_n_i$
Result_1D	

Запис файлів результатів

E:\Result_1.dat E:\Result_1D.dat E:\NNodesElements.dat

Result_1

Result_1D

El_nod3

Побудова графіків у вибраних перетинах

n_P := 7 Кількість і номери вузлів по лінії

nod_P :=

3
20
99
98
97
18
16

Координати по Y по лінії

y_P :=	for i ∈ 1..n_P
	p ← nod_P _i
	y_P _i ← XYZgl _{p,2}
	y_P

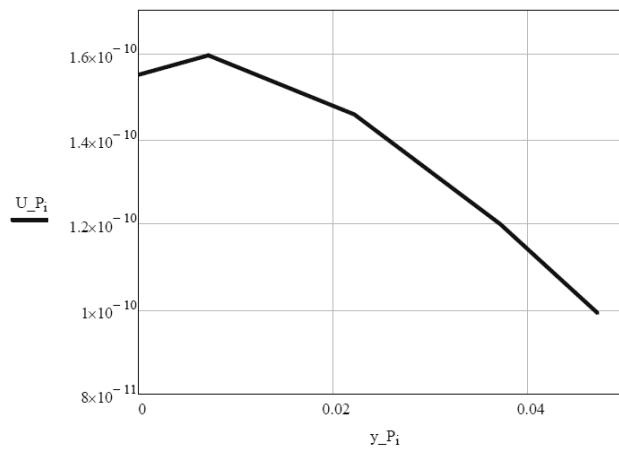
Значення Usum по лінії

U_P :=	for i ∈ 1..n_P
	p ← nod_P _i
	U_P _i ← Usum _p
	U_P

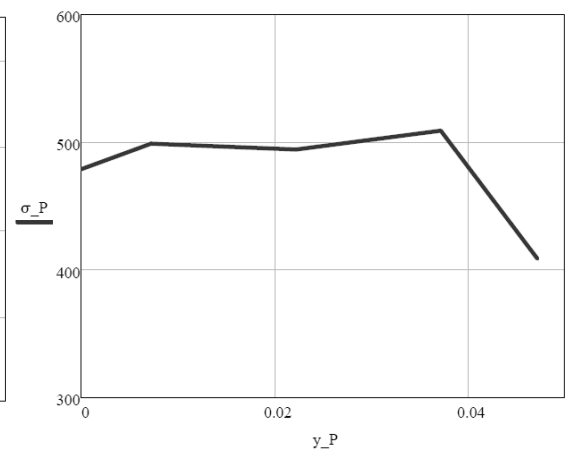
Значення σ_{ekv} по лінії

σ_P :=	for i ∈ 1..n_P
	p ← nod_P _i
	σ_P _i ← σ _{ekv_n} _p
	σ_P

Епюра (графік) сумарних переміщень по лінії



Епюра (графік) результуючої густини теплового потоку по лінії



Е.5. НДС плоскої шарнірно-з'єднаної ферми. Лінійні двовузлові СЕ

Програмний код **Lab_Ferma_2D.xmcd** розроблено за числовою методикою, що наведена в розділі 3 (див. підрозділ 3.5), та супроводжується необхідними рисунками і коментарями.

Файл Lab_M_Axis_2D.xmcd

Ферма плоска шарнірно з'єднана

ORIGIN $\equiv$ 1 Індксація масивів з 1

Фізичні властивості матеріалу ферми:

$E := 2 \cdot 10^{11}$ Па - модуль пружності

$\rho := 7800$ kg/m³ густина

$\beta := 1.3 \cdot 10^{-5}$ 1/K КЛТР

$\sigma_T := 220 \cdot 10^6$ Ра межа текучості матеріалу

$A := 1.0 \cdot 10^{-3}$ м² - площа поперечного перерізу елемента

Nnod gl := 14 кількість глобальних вузлів

nEl := 25 кількість елементів

M := 2 кількість вузлів в елементі

Координати вузлів

$$XYgl := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 10 & 0 & 2 \\ 0 & 12 & 3 \\ 10 & 12 & 4 \\ 20 & 0 & 5 \\ 30 & 0 & 6 \\ 40 & 0 & 7 \\ 50 & 0 & 8 \\ 60 & 0 & 9 \\ 20 & 12 & 10 \\ 30 & 12 & 11 \\ 40 & 12 & 12 \\ 50 & 12 & 13 \\ 60 & 12 & 14 \end{pmatrix}$$

Номери вузлів по СЕ

Для візуалізації через трикутники

$$El_nod := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \\ 5 & 6 & 4 \\ 6 & 7 & 5 \\ 7 & 8 & 6 \\ 8 & 9 & 7 \\ 4 & 10 & 8 \\ 10 & 11 & 9 \\ 11 & 12 & 10 \\ 12 & 13 & 11 \\ 13 & 14 & 12 \\ 1 & 3 & 13 \\ 2 & 4 & 14 \\ 5 & 10 & 15 \\ 6 & 11 & 16 \\ 7 & 12 & 17 \\ 8 & 13 & 18 \\ 9 & 14 & 19 \\ 1 & 4 & 20 \\ 2 & 10 & 21 \\ 5 & 11 & 22 \\ 6 & 12 & 23 \\ 7 & 13 & 24 \\ 8 & 14 & 25 \end{pmatrix}$$

$$El_n := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 10 & 3 \\ 2 & 10 & 4 & 4 \\ 5 & 6 & 11 & 5 \\ 5 & 11 & 10 & 6 \\ 6 & 7 & 12 & 7 \\ 6 & 12 & 11 & 8 \\ 7 & 8 & 13 & 9 \\ 7 & 13 & 12 & 10 \\ 8 & 9 & 14 & 11 \\ 8 & 14 & 13 & 12 \end{pmatrix}$$

Перевірка візуальна (програмної немає):

Нумерація вузлів по СЕ в [El_nod] повинна бути такою, що виконувалася нервність $x_2 \geq x_1$, тут індекси 1 і 2 локальні номери вузлів у СЕ

Навантаження:

Складові прискорення вільного падіння

$$g_x := 0 \quad \text{m/s}^2$$

$$g_y := 0 \quad \text{m/s}^2$$

Температурне навантаження

$$\Delta T := 0 \quad \text{K}$$

Граничні умови

Закріплення $n_{\text{NodeU0}} := 2$ кількість вузлів, в яких задані нульові переміщення

$$\text{Nod_U0} := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 9 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{номери вузлів, у яких } U_x=0 \text{ і } U_y=0$$

Тут 1-й стовпець означає номер вузла,

2-й - ознака $U_x=0$ при 1 і

3-й - ознака $U_y=0$ при 1

Вузлова сила

Сила у вузлі $F_y := -1000 \quad \text{N}$ $n_F := 5$ кількість вузлів, в яких можуть бути задані сили

$$\text{node_F} := \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \text{номери вузлів, в яких можуть бути задані сили}$$

$$F_{xy} := \begin{pmatrix} 0 & F_y \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{складові сили по вузлах}$$

Довжина SE

$$L := \begin{array}{|l} \text{for } k \in 1 \dots n_{\text{El}} \\ \quad \text{for } i \in 1 \dots M \\ \quad \quad j \leftarrow \text{El_nod}_{k,i} \\ \quad \quad XY_{i,1} \leftarrow XY_{j,1}^{\text{gl}} \\ \quad \quad XY_{i,2} \leftarrow XY_{j,2}^{\text{gl}} \\ \quad L_k \leftarrow \sqrt{(XY_{2,1} - XY_{1,1})^2 + (XY_{2,2} - XY_{1,2})^2} \end{array}$$

L

Кути нахилу **CE** у рад

```

θ := || for k ∈ 1 .. nEl
      ||   for i ∈ 1 .. M
      ||     | j ← El_nodk,i
      ||     | XYi,1 ← XYgl,j,1
      ||     | XYi,2 ← XYgl,j,2
      ||     | θk ← asin( ( (XY2,2 - XY1,2) / Lk ) ) · 1
      ||   θ

```

Матриця жорсткості **CE**

$$K_e(\theta, L) := \frac{E \cdot A}{L} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\theta)^2 & \sin(\theta) \cdot \cos(\theta) & -\cos(\theta)^2 & -\sin(\theta) \cdot \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \cdot \cos(\theta) & \sin(\theta)^2 & -\sin(\theta) \cdot \cos(\theta) & -\sin(\theta)^2 \\ -\cos(\theta)^2 & -\sin(\theta) \cdot \cos(\theta) & \cos(\theta)^2 & \sin(\theta) \cdot \cos(\theta) \\ -\sin(\theta) \cdot \cos(\theta) & -\sin(\theta)^2 & \sin(\theta) \cdot \cos(\theta) & \sin(\theta)^2 \end{pmatrix}$$

Об'ємне навантаження за рахунок гравітації

$$f_v(\theta, L) := \rho \cdot \frac{A \cdot L}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g_x \\ g_y \end{pmatrix}$$

Температурне навантаження

$$f_{th}(\theta, L) := \beta \cdot E \cdot A \cdot \Delta T \cdot \begin{pmatrix} -\cos(\theta) \\ -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}$$

Обнулення глобальної матриці та вектора вільних членів

$i := 1 \dots 2 \cdot \text{Nnod_gl}$

$F_i := 0$

$j := 1 \dots 2 \cdot \text{Nnod_gl}$

$K_{i,j} := 0$

**Формування глобальної матриці і
вектора СЛАР та її розв'язання**

```

U := for k ∈ 1 .. nEl
    || k_El ← Ke(θk, Lk)
    || f_El ← f_v(θk, Lk) + f_th(θk, Lk)
    for i ∈ 1 .. M
        || igl ← El_nodk,i · 2
        || ii ← i · 2
        || Figl-1 ← Figl-1 + f_Elii-1
        || Figl ← Figl + f_Elii
        for j ∈ 1 .. M
            || jgl ← El_nodk,j · 2
            || jj ← j · 2
            || Kigl-1,jgl-1 ← Kigl-1,jgl-1 + k_Elii-1,jj-1
            || Kigl-1,jgl ← Kigl-1,jgl + k_Elii-1,jj
            || Kigl,jgl-1 ← Kigl,jgl-1 + k_Elii,jj-1
            || Kigl,jgl ← Kigl,jgl + k_Elii,jj
    for i ∈ 1 .. n_F
        || ig ← node_Fi · 2
        || Fig-1 ← Fig-1 + Fxyi,1
        || Fig ← Fig + Fxyi,2

```

```

for j ∈ 1 .. nNodeU0
  n0 ← Nod_U0j,1
  for i ∈ 1 .. 2 · Nnod_gl
    if Nod_U0j,2 = 1
      K2·n0-1,i ← 0
      Ki,2·n0-1 ← 0
    if Nod_U0j,3 = 1
      K2·n0,i ← 0
      Ki,2·n0 ← 0
    if Nod_U0j,2 = 1
      K2·n0-1,2·n0-1 ← 1
      F2·n0-1 ← 0
    if Nod_U0i,3 = 1
      K2·n0,2·n0 ← 1
      F2·n0 ← 0
  U ← lsolve(K,F)
  U

```

Визначення векторів переміщень U_x і U_y у вузлах

$U_x :=$

$$\begin{cases} \text{for } i \in 1 \dots Nnod_gl \\ U_{x,i} \leftarrow U_{2i-1} \\ U_x \end{cases}$$

$U_y :=$

$$\begin{cases} \text{for } i \in 1 \dots Nnod_gl \\ U_{y,i} \leftarrow U_{2i} \\ U_y \end{cases}$$

Визначення вектору сумарних переміщень U_{sum} у вузлах

$$U_{sum} := \begin{cases} \text{for } i \in 1 \dots N_{nod_gl} \\ U_{sum_i} \leftarrow \sqrt{(U_{x_i})^2 + (U_{y_i})^2} \\ U_{sum} \end{cases}$$

Реакції опор ферми

$$K := \begin{cases} \text{for } k \in 1 \dots nEl \\ \begin{cases} \text{for } i \in 1 \dots 2 \cdot M \\ f_{El_i} \leftarrow 0 \\ k_{El} \leftarrow Ke(\theta_k, L_k) \\ \text{for } i \in 1 \dots M \\ \begin{cases} i_{gl} \leftarrow El_nod_{k,i} \cdot 2 \\ ii \leftarrow i \cdot 2 \\ F_{igl-1} \leftarrow F_{igl-1} + f_{El_ii-1} \\ F_{igl} \leftarrow F_{igl} + f_{El_ii} \\ \text{for } j \in 1 \dots M \\ \begin{cases} j_{gl} \leftarrow El_nod_{k,j} \cdot 2 \\ jj \leftarrow j \cdot 2 \\ K_{igl-1,j_{gl}-1} \leftarrow K_{igl-1,j_{gl}-1} + k_{El_ii-1,jj-1} \\ K_{igl-1,j_{gl}} \leftarrow K_{igl-1,j_{gl}} + k_{El_ii-1,jj} \\ K_{igl,j_{gl}-1} \leftarrow K_{igl,j_{gl}-1} + k_{El_ii,jj-1} \\ K_{igl,j_{gl}} \leftarrow K_{igl,j_{gl}} + k_{El_ii,jj} \end{cases} \end{cases} \end{cases} \\ K \end{cases}$$

$$R := K \cdot U$$

Визначення векторів сил F_x і F_y (реакцій) у вузлах

$$R_x := \begin{cases} \text{for } i \in 1 \dots N_{nod_gl} \\ R_{x_i} \leftarrow R_{2i-1} \\ R_x \end{cases} \quad R_y := \begin{cases} \text{for } i \in 1 \dots N_{nod_gl} \\ R_{y_i} \leftarrow R_{2i} \\ R_y \end{cases}$$

Визначення коефіцієнта збільшення деформації за U_{sum} (приймаємо, що макс. деформація повинна становити 5% від найбільшого розміру конструкції по x або по y)

```

k_xy := | for i ∈ 1 .. Nnod_gl
        |   X-i ← XYgli,1
        |   for i ∈ 1 .. Nnod_gl
        |     Y-i ← XYgli,2
        |   Δx ← max(X-) – min(X-)
        |   Δy ← max(Y-) – min(Y-)
        |   ΔUs ← max(Usum) – min(Usum)
        |   Δxy ← Δx
        |   Δxy ← Δy if Δy > Δx
        |   k_xy ←  $\frac{\Delta xy}{\Delta Us} \cdot \frac{5}{100}$ 

```

Визначення деформованого стану конструкції

$k_{xy} = 9777$ коефіцієнт збільшення деформації

```

XYgl_D := | for i ∈ 1 .. Nnod_gl
           |   | XYgl_Di,1 ← XYgli,1 + Uxi · k_xy
           |   | XYgl_Di,2 ← XYgli,2 + Uyi · k_xy
           |   XYgl_D

```

Результуючі напруження по СЕ

```

σ-el := | for k ∈ 1 .. nEl
        |   i1 ← El-nodk,1
        |   i2 ← El-nodk,2
        |   σk,1 ←  $\frac{E}{L_k} \cdot \begin{pmatrix} -\cos(\theta_k)^2 & -\sin(\theta_k) \cdot \cos(\theta_k) & \cos(\theta_k)^2 & \sin(\theta_k) \cdot \cos(\theta_k) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_{x_{i1}} \\ U_{y_{i1}} \\ U_{x_{i2}} \\ U_{y_{i2}} \end{pmatrix} - \beta \cdot E \cdot \Delta T \cdot \cos(\theta_k)$ 

```

$$\left\| \begin{array}{l} \sigma_{k,2} \leftarrow \frac{E}{L_k} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(\theta_k) \cdot \cos(\theta_k) & -\sin(\theta_k)^2 & \sin(\theta_k) \cdot \cos(\theta_k) & \sin(\theta_k)^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_{x_{i1}} \\ U_{y_{i1}} \\ U_{x_{i2}} \\ U_{y_{i2}} \end{pmatrix} - \beta \cdot E \cdot \Delta T \cdot \sin(\theta_k) \\ \sigma_{-k} \leftarrow \sigma_{k,1} \cdot \cos(\theta_k) + \sigma_{k,2} \cdot \sin(\theta_k) \end{array} \right\| \sigma_{-}$$

Побудова графіків у небезпечних перетинах

$n_P := 7$ Кількість і номери вузлів у небезпечних перетинах

$$\text{nod_P1} := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\text{nod_P2} := \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \\ 13 \\ 14 \end{pmatrix}$$

Координати по X
у небезпечному перетині

Значення U_{sum} у небезпечному
перетині (нижня частина ферми)

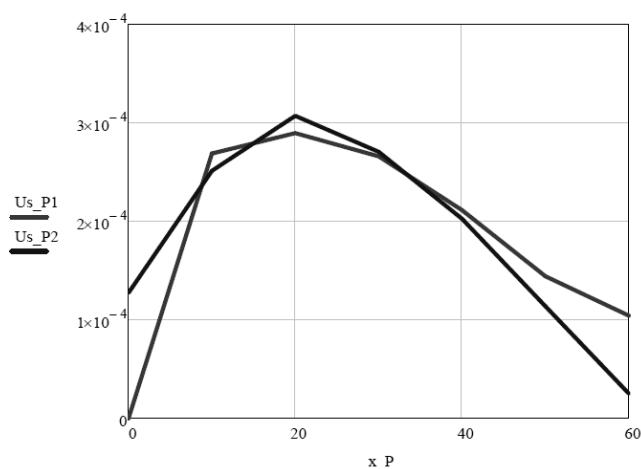
Значення U_{sum} у небезпечному
перетині (верхня частина ферми)

$$x_P := \left\| \begin{array}{l} \text{for } i \in 1..n_P \\ \quad p \leftarrow \text{nod_P1}_i \\ \quad x_P_i \leftarrow XYgl_{p,1} \end{array} \right\| x_P$$

$$Us_P1 := \left\| \begin{array}{l} \text{for } i \in 1..n_P \\ \quad p \leftarrow \text{nod_P1}_i \\ \quad Us_P_i \leftarrow U_{sum}_p \end{array} \right\| Us_P$$

$$Us_P2 := \left\| \begin{array}{l} \text{for } i \in 1..n_P \\ \quad p \leftarrow \text{nod_P2}_i \\ \quad Us_P_i \leftarrow U_{sum}_p \end{array} \right\| Us_P$$

Епюра (графік) сумарних переміщень у небезпечних перетинах
(нижня та верхня частини ферми)



Напруження в елементах

$n_P := 6$ Кількість і номери СЕ у небезпечних перетинах

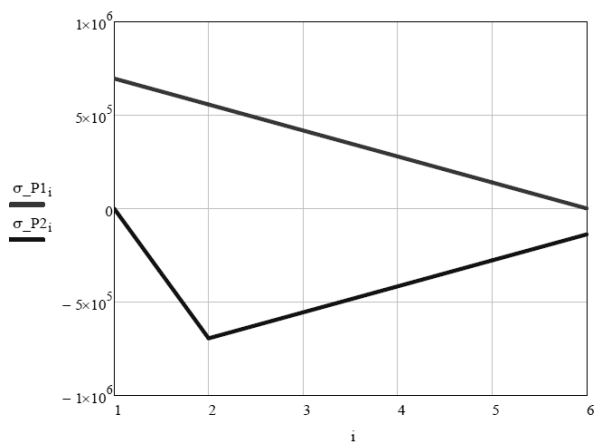
$$El_P1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} \quad El_P2 := \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_P1 := \begin{array}{|l} \text{for } i \in 1..n_P \\ \quad p \leftarrow El_P1_i \\ \quad \sigma_P_i \leftarrow \sigma_el_p \\ \sigma_P \end{array}$$

$$\sigma_P2 := \begin{array}{|l} \text{for } i \in 1..n_P \\ \quad p \leftarrow El_P2_i \\ \quad \sigma_P_i \leftarrow \sigma_el_p \\ \sigma_P \end{array}$$

$i := 1..n_P$

Епюра результуючих напружень у небезпечних перетинах по елементах (нижня та верхня частини ферми)



Визначення коефіцієнту напруження ферми у СЕ

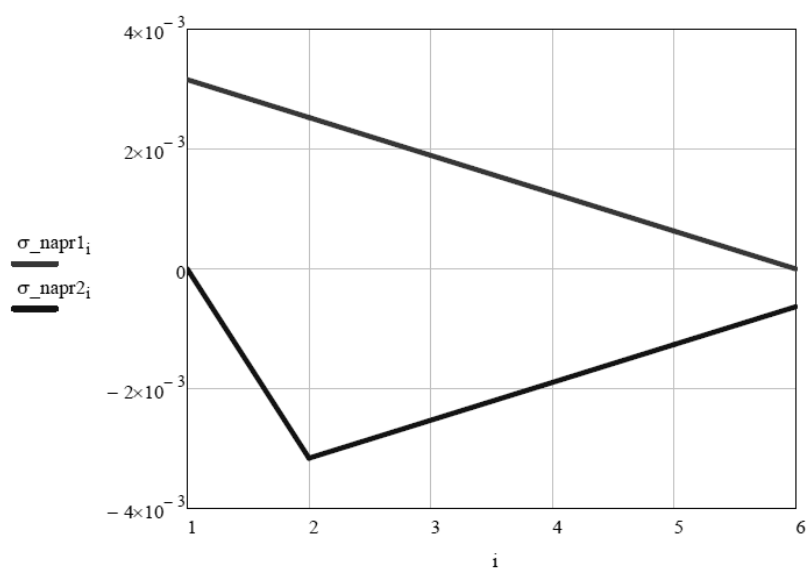
$$\sigma_napr := \begin{array}{|l} \text{for } i \in 1..nEl \\ \quad \sigma_napr_i \leftarrow \frac{\sigma_el_i}{\sigma T} \\ \sigma_napr \end{array}$$

$$\sigma_napr1 := \begin{array}{|l} \text{for } i \in 1..n_P \\ \quad p \leftarrow El_P1_i \\ \quad \sigma_P_i \leftarrow \sigma_napr_p \\ \sigma_P \end{array}$$

$$\sigma_napr2 := \begin{array}{|l} \text{for } i \in 1..n_P \\ \quad p \leftarrow El_P2_i \\ \quad \sigma_P_i \leftarrow \sigma_napr_p \\ \sigma_P \end{array}$$

$i := 1 \dots n_P$

Епюра коефіцієнта напруження ферми у небезпечних перетинах по елементах
(нижня та верхня частини ферми)



Приклад програмного коду Mathcad для розв'язання задачі усталеної течії в'язкої нестисливої рідини. Лінійні трикутні СЕ

Програмний код **Lab_pipe2_2D.xmcd** розроблено за числовою методикою, що наведена в розділі 4 (див. підрозділ 4.3), та супроводжується необхідними коментарями.

Файл **Lab_pipe2_2D.xmcd**

усталений рух вязкої рідини вісесиметрична задача
- вісь симетрії горизонтальна

В кодi видаляються зайві вузли, що пише програма Gmsh у файл *.msh при побудові 2D геометрії інструментами Gmsh, наприклад, Circle

ORIGIN $\equiv$ 1 Індexсація масивів з 1
M := 3 кількість вузлів в елементі

Зчитування номерів і координат вузлів дискретизованої в програмі Gmsh моделі фланця з файлу Gmsh_nodes_pipe.dat

Файл Gmsh_nodes_flan.dat створюється із файлу 2D_pipe2.msh таким чином. Спочатку 2D_pipe2.msh копіюється в файл Gmsh_nodes_pipe.dat. Далі виконується корегування створеного файлу Gmsh_nodes_pipe.dat у текстовому редакторі. У файлі Gmsh_nodes_pipe.dat спочатку видаляються перші 5 рядків, а саме такі:

\$MeshFormat

2.2 0 8

\$EndMeshFormat

\$Nodes

791

(тут 791 - це кількість вузлів, отриманих в результаті дискретизації)

тобто до рядка з номером 1 на його початку,

потім рядки до 791 номеру включно лишаються у файлі Gmsh_nodes_pipe.dat, а рядки, починаючи з

\$EndNodes

видаляються із файлу до його кінця.

І останньою операцією редагування файлу є заміна "крапки" на "кому".

Записуємо результат редагування та виходимо з редактора.

Зчитування файлу Gmsh_nodes_pipe.dat в матрицю Gmsh_nodes

Gmsh_nodes :=

Gmsh_nodes_{pipe}.dat

Визначення кількості рядків в матриці Gmsh_nodes

Nnod_gl := rows(Gmsh_nodes) = 748 кількість глобальних вузлів

Зчитування номерів елементів + ін. і номерів вузлів по елементах дискретизованої в програмі Gmsh моделі фланця з файлу Gmsh_elem_pipe.dat

Файл Gmsh_elem_pipe.dat створюється із файлу 2D_pipe2.msh таким чином.

Спочатку 2D_pipe2.msh копіюється в файл Gmsh_elem_pipe.dat. Далі виконується корегування створеного файлу Gmsh_elem_pipe.dat у текстовому редакторі.

У файлі Gmsh_elem_pipe.dat спочатку видаляються перші рядки до рядка:

\$Elements.

Потім видаляються рядки до рядка, у якому друге число (2-й стовпець) дорівнює 2 (число 2 є ознакою тетраедра).

Далі переходимо в кінець файлу та видаляємо останній рядок

\$EndElements

Записуємо результат редагування та виходимо з редактора.

Зчитування файлу Gmsh_elem_pipe.dat в матрицю Gmsh_elem

Gmsh_elem :=

Gmsh_elem_pipe.dat

Визначення кількості рядків в матриці

Gmsh_elem

nEl := rows(Gmsh_elem) = 1383

кількість скінчених елементів

Запис глобальних вузлів дискретизованої моделі фланця у матрицю El_nod

Увага! Програма Gmsh записує номери вузлів по трикутних CE за годинниковою стрілкою,

а треба проти. Тому, щоб це виправити, в El_nod пеставлено порядок індексів 1,2,3 на 1 3 2

```
El_nod := | for i ∈ 1 .. nEl
           | | El_nodi,1 ← Gmsh_elemi,6
           | | El_nodi,3 ← Gmsh_elemi,7
           | | El_nodi,2 ← Gmsh_elemi,8
           | El_nod
```

Функція яка визначає номери вузлів (точок) які не є вузлами розрахункової сітки (тобто не використовуються в CE), а виникають при побудові 3D геометрії в програмі Gmsh за допомогою команди Extrude.

```
Nod_Del := | L ← 0
           | for i ∈ 1 .. Nnod_gl
           | | pL ← 0
           | | for j ∈ 1 .. nEl
           | | | for k ∈ 1 .. 3
           | | | | pL ← 1 if El_nodj,k = i
           | | if pL = 0
           | | | L ← L + 1
           | | | Nod_DelL ← i
           | Nod_Del
```

Nod_Del = (4)

N_Del := rows(Nod_Del) = 1 Кількість зайвих вузлів, що не використовуються в СЕ

Сортування

Nod_Del := $\begin{cases} \text{sort}(\text{Nod_Del}) & \text{if } N_Del > 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$

Nod_Del = (4)

Видалення вузлів або стискання номерів вузлів, що не використовуються в розрахунковій сітці

```
Gmsh_nodes :=
  for i ∈ 1 .. N_Del
    if N_Del > 0
      n ← Nod_Deli
      if n < Nnod_gl
        for j ∈ n + 1 .. Nnod_gl
          for k ∈ 1 .. M
            Gmsh_nodesj-1,k ← Gmsh_nodesj,k
          for k ∈ i + 1 .. N_Del      if i < N_Del
            Nod_Delk ← Nod_Delk - 1
        Gmsh_nodes
```

Nnod_gl := Nnod_gl - N_Del = 747

Запис глобальних вузлів дискретизованої моделі фланця у матрицю RZgl

```
RZgl :=
  for i ∈ 1 .. Nnod_gl
    RZgli,1 ← Gmsh_nodesi,2
    RZgli,2 ← Gmsh_nodesi,3
  RZgl
```

Перекодування номерів вузлів по трикутних елементах

```

El_nod :=
  for j ∈ 1 .. nEl
    for k ∈ 1 .. 3
      ik ← El_nodj,k
      for i ∈ 1 .. Nnod_gl
        if ik = Gmsh_nodesi,1
          i1 ← i
          break
      El_nodj,k ← i1
    El_nod

```

Зчитування даних Gmsh про триангуляцію поверхонь тіла із файлу
El_Area2_Gmsh_pipe.dat

Файл El_Area2_Gmsh_pipe.dat створюється із текстового файлу 2D_pipe2.msh (який записує програма мешер Gmsh) за допомогою копіювання 2D_pipe2.msh у El_Area2_Gmsh_pipe.dat.

Далі виконується редагування файлу El_Area2_Gmsh_pipe.dat таким чином: спочатку видаляються всі рядки до рядка

\$Elements;

потім знов видаляються рядки до рядка, у якому у 2-у стовпці записано 1 (яка є ознакою лінійного елемента на лінії);

далі всі рядки з 1 у 2-у стовпці рядка лишаються у файлі;

всі рядки, починаючи з рядка, у якому у 2-у стовпці записана 2 (або інша цифра, але не 1) видаляються до кінця файлу.

```

Area2_nod_El :=
  El_Area2_Gmsh_pipe.dat

```

```

N_Area2 := rows(Area2_nod_El) = 109

```

Перекодування номерів вузлів по двохвузлових елементах на лініях

Кількість рядків в матриці

```

Area2_nod_El :=
  for j ∈ 1 .. N_Area2
    for k ∈ 6 .. 7
      ik ← Area2_nod_Elj,k
      for i ∈ 1 .. Nnod_gl
        if ik = Gmsh_nodesi,1
          i1 ← i
          break
      Area2_nod_Elj,k ← i1
    Area2_nod_El

```

Лінії 1-5 - визначення номерів вузлів

1.1. Визначення номерів глобальних вузлів лінійних елементів лінії №1 з матриці Area2_nod_El

функція

```

El_nod_(k) :=
  row ← 0
  for i ∈ 1 .. N_Area2
    j ← Area2_nod_Eli,5
    if j = k
      row ← row + 1
      for l ∈ 1 .. 2
        El_nodrow,l ← Area2_nod_Eli,5+l
  El_nod

```

El_nod1 := El_nod (1) тут 1 це номер поверхні

N_El_side1 := rows(El_nod1) = 19 кількість лінійних елементів на лінії 1

1.2. Запис номерів вузлів елементів на стороні № 1 у вектор (без повторення однакових номерів)

функція

```

Nod_side(N_El_side, El_nod) :=
  k ← 0
  for i ∈ 1 .. N_El_side
    if i = 1
      for j ∈ 1 .. 2
        Nod_side-k+j ← El_nodi,j
      k ← k + 2
    if i > 1
      for j ∈ 1 .. 2
        n ← El_nodi,j
        j0 ← -1
        for l ∈ 1 .. k
          j0 ← 0 if Nod_side-l = n
        if j0 = -1
          k ← k + 1
          Nod_side-k ← n
      p ← 0
  Nod_side_

```

Nod_side1 := Nod_side(N_El_side1, El_nod1) на лінії №1 задано тиск p
 n_s1 := rows(Nod_side1) = 20
 1 - лінія - inlet

2.1 Визначення номерів глобальних вузлів лінійних елементів лінії № 2
з матриці Area2_nod_El

El_nod2 := El_nod_(2)
 N_El_side2 := rows(El_nod2) = 16 тут 2 це номер лінії

2.2. Запис номерів вузлів елементів на лінії № 2 у вектор (без повторення однакових номерів)

Nod_side2 := Nod_side(N_El_side2, El_nod2)
 n_s2 := rows(Nod_side2) = 17

2 - лінія - wall вертикальна - прилипання

3.1 Визначення номерів глобальних вузлів лінійних елементів лінії № 3
з матриці Area2_nod_El

El_nod3 := El_nod_(3)
 N_El_side3 := rows(El_nod3) = 14

3.2. Запис номерів вузлів елементів на лінії № 3 у вектор (без повторення однакових номерів)

Nod_side3 := Nod_side(N_El_side3, El_nod3)
 n_s3 := rows(Nod_side3) = 15
 3 - лінія - wall коло - прилипання

4.1 Визначення номерів глобальних вузлів лінійних елементів лінії № 4
з матриці Area2_nod_El

El_nod4 := El_nod_(4)
 N_El_side4 := rows(El_nod4) = 13

4.2. Запис номерів вузлів елементів на лінії № 4 у вектор (без повторення однакових номерів)

Nod_side4 := Nod_side(N_El_side4, El_nod4)
 n_s4 := rows(Nod_side4) = 14
 4 - лінія wall вертикальна - прилипання

5.1 Визначення номерів глобальних вузлів лінійних елементів лінії № 5
з матриці Area2_nod_El

El_nod5 := El_nod_(5)
 N_El_side5 := rows(El_nod5) = 10

5.2. Запис номерів вузлів елементів на лінії № 5 у вектор (без повторення однакових номерів)

Nod_side5 := Nod_side(N_El_side5, El_nod5)
 n_s5 := rows(Nod_side5) = 11
 5 - лінія outlet

6.1 Визначення номерів глобальних вузлів лінійних елементів лінії № 6 з матриці Area2_nod_El

$El_nod6 := El_nod_ (6)$

$N_El_side6 := rows(El_nod6) = 37$

6.2. Запис номерів вузлів елементів на лінії № 6 у вектор (без повторення однакових номерів)

$Nod_side6 := Nod_side(N_El_side6, El_nod6)$

$n_s6 := rows(Nod_side6) = 38$

6 - лінія axis - вісь симетрії

Граничні умови - 1-го роду для швидкості на вході $v_z := 1 \quad m/s$

$N_nod_InletVn := n_s1 = 20$ Кількість вузлів на вході

$Num_nod_Inlet :=$

for $i \in 1 .. N_nod_InletVn - 1$
$Num_nod_Inlet_{i,1} \leftarrow Nod_side1_i$
$Num_nod_Inlet_{i,2} \leftarrow 0$
$Num_nod_Inlet_{i,3} \leftarrow v_z$
Num_nod_Inlet

 $N_nod_InletVn := N_nod_InletVn - 1 = 19$

Граничні умови - 1-го роду для тиску на вході

$N_nod_InletP := n_s1 = 20$ Кількість вузлів на вході

$Pin := 0 \quad Pa$

$Num_nod_InletP :=$

for $i \in 1 .. n_s1 - 1$
$Num_nod_InletP_{i,1} \leftarrow Nod_side1_i$
$Num_nod_InletP_{i,2} \leftarrow Pin$
Num_nod_InletP

 $N_nod_InletP := N_nod_InletP - 1 = 19$

Граничні умови - 1-го роду для тиску на виході

$N_nod_OutletP := n_s5 = 11$ Кількість вузлів на виході

$Pout := 0$

$Num_nod_OutletP :=$

for $i \in 2 .. n_s5$
$Num_nod_OutletP_{i-1,1} \leftarrow Nod_side5_i$
$Num_nod_OutletP_{i-1,2} \leftarrow Pout$
$Num_nod_OutletP$

 $N_nod_OutletP := N_nod_OutletP - 1 = 10$

Граничні умови - 1-го роду для швидкості на тінці - умови прилипання на гор. і нах.

$$N_nod_wall := n_s2 + n_s3 + n_s4 = 46$$

$$Num_nod_wall := \begin{cases} \text{for } i \in 1..n_s2 \\ \quad Num_nod_wall_i \leftarrow Nod_side2_i \\ \text{for } i \in 2..n_s3 \\ \quad Num_nod_wall_{n_s2+i-1} \leftarrow Nod_side3_i \\ \text{for } i \in 2..n_s4 \\ \quad Num_nod_wall_{n_s2+n_s3+i-2} \leftarrow Nod_side4_i \\ Num_nod_wall \end{cases}$$

$$N_nod_wall := N_nod_wall - 2 = 44$$

Вісь симетрії лінії 6

$$N_nod_axis := n_s6 = 38$$

$$Num_nod_axis := \begin{cases} \text{for } i \in 2..n_s6 - 1 \\ \quad N_nod_axis_{i-1} \leftarrow Nod_side6_i \\ N_nod_axis \end{cases}$$

$$N_nod_axis := N_nod_axis - 2 = 36$$

Фізичні властивості:

$$\begin{array}{lll} \mu := 0.045 & \text{Pa*s} & \text{динамічна вязкість} \\ \rho := 820 & \text{kg/m}^3 & \text{густина} \\ gz := 0 & gr := 0 & \end{array}$$

1. Функції

Площа CE

$$A(RZ) := \frac{1}{2} \cdot \left\| \begin{pmatrix} 1 & RZ_{1,1} & RZ_{1,2} \\ 1 & RZ_{2,1} & RZ_{2,2} \\ 1 & RZ_{3,1} & RZ_{3,2} \end{pmatrix} \right\|$$

Вектори для визначення матриці градієнтів

$$b(RZ) := \begin{pmatrix} RZ_{2,2} - RZ_{3,2} \\ RZ_{3,2} - RZ_{1,2} \\ RZ_{1,2} - RZ_{2,2} \end{pmatrix} \quad c(RZ) := \begin{pmatrix} RZ_{3,1} - RZ_{2,1} \\ RZ_{1,1} - RZ_{3,1} \\ RZ_{2,1} - RZ_{1,1} \end{pmatrix}$$

$$r_ (RZ) := \frac{RZ_{1,1} + RZ_{2,1} + RZ_{3,1}}{3}$$

$$dNdr(RZ) := \frac{b(RZ)}{2 \cdot A(RZ)} \quad dNdz(RZ) := \frac{c(RZ)}{2 \cdot A(RZ)}$$

Матриця жорсткості CE

$$k_{El}(i,j,RZ) := 2 \cdot \pi \cdot r_{-}(RZ) \cdot A(RZ) \cdot \mu \begin{pmatrix} dNdr(RZ)_i \cdot dNdr(RZ)_j + dNdz(RZ)_i \cdot dNdz(RZ)_j & 0 & \frac{dNdr(RZ)_j}{3 \cdot \mu} \\ 0 & dNdr(RZ)_i \cdot dNdr(RZ)_j + dNdz(RZ)_i \cdot dNdz(RZ)_j & \frac{dNdz(RZ)_j}{3 \cdot \mu} \\ \frac{dNdr(RZ)_j}{3 \cdot \mu} & \frac{dNdz(RZ)_j}{3 \cdot \mu} & 0 \end{pmatrix}$$

Вектор гравітаційного навантаження

$$fRZ(RZ) := \frac{2 \cdot \pi \cdot r_{-}(RZ) A(RZ)}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} \rho \cdot gz \\ 0 \\ \rho \cdot gr \end{pmatrix}$$

Обнулення глобальної матриці та вектора вільних членів

M1 := 3 кількість ступенів свободи -
невідомих у вузлі

i := 1 .. Nnod_gl · M1

F_i := 0

j := 1 .. Nnod_gl · M1 + 1

K_{i,j} := 0

Формування матриці тавектора вільних членів СЛАР

```
VrzP :=
  for k ∈ 1 .. nEl
    for i ∈ 1 .. M
      j ← El_nodk,i
      RZi,1 ← RZglj,1
      RZi,2 ← RZglj,2
    for i ∈ 1 .. M1 M
      f_Eli ← fRZ(RZ)i
    for i ∈ 1 .. M
      for j ∈ 1 .. M
        Kei,j ← k_El(1,1,RZ)i,j
        Kei,M+j ← k_El(1,2,RZ)i,j
        Kei,2M+j ← k_El(1,3,RZ)i,j
        KeM+i,j ← k_El(2,1,RZ)i,j
        KeM+i,M+j ← k_El(2,2,RZ)i,j
        KeM+i,2M+j ← k_El(2,3,RZ)i,j
```

```

      Ke2M+i,j ← k_El(3,1,RZ)i,j
      Ke2M+i,M+j ← k_El(3,2,RZ)i,j
      Ke2M+i,2M+j ← k_El(3,3,RZ)i,j
    for i ∈ 1 .. M
      igl ← El_nodk,i · M1
      ii ← i · M1
      Figl-2 ← Figl-2 + f_Elii-2
      Figl-1 ← Figl-1 + f_Elii-1
    Figl ← Figl + f_Elii
    for j ∈ 1 .. M
      jgl ← El_nodk,j · M1
      jj ← j · M1
      Kigl-2,jgl-2 ← Kigl-2,jgl-2 + Keii-2,jj-2
      Kigl-2,jgl-1 ← Kigl-2,jgl-1 + Keii-2,jj-1
      Kigl-2,jgl ← Kigl-2,jgl + Keii-2,jj
      Kigl-1,jgl-2 ← Kigl-1,jgl-2 + Keii-1,jj-2
      Kigl-1,jgl-1 ← Kigl-1,jgl-1 + Keii-1,jj-1
      Kigl-1,jgl ← Kigl-1,jgl + Keii-1,jj
      Kigl,jgl-2 ← Kigl,jgl-2 + Keii,jj-2
      Kigl,jgl-1 ← Kigl,jgl-1 + Keii,jj-1
      Kigl,jgl ← Kigl,jgl + Keii,jj
    lkk ← 0
    for i ∈ 1 .. N_nod_InletP
      p0 ← Num_nod_InletPi,1
      Pinlet ← Num_nod_InletPi,2
      for j ∈ 1 .. Nnod_gl · M1
        K3·p0,j ← 0
        Kj,3·p0 ← 0
      K3p0,3p0 ← 1
      F3·p0 ← K3p0,3p0 · Pinlet
    for i ∈ 1 .. N_nod_OutletP
      p0 ← Num_nod_OutletPi,1

```

```

    for j ∈ 1 .. Nnod_gl·M1
        | K3·p0,j ← 0
        | Kj,3·p0 ← 0
    K3·p0,3·p0 ← 1
    F3·p0 ← 0
for i ∈ 1 .. N_nod_axis
    | v0 ← Num_nod_axisi
    for j ∈ 1 .. Nnod_gl·M1
        | K3·v0-2,j ← 0
        | Kj,3·v0-2 ← 0
    K3·v0-2,3·v0-2 ← 1
    F3·v0-2 ← 0
for i ∈ 1 .. N_nod_InletVn
    | vn ← Num_nod_Inleti,1
    | Vr ← Num_nod_Inleti,2
    | Vz ← Num_nod_Inleti,3
    for j ∈ 1 .. Nnod_gl·M1
        | Fj ← Fj - Kj,3vn-2·Vr
        | Fj ← Fj - Kj,3vn-1·Vz
        | Kj,3vn-2 ← 0
        | Kj,3vn-1 ← 0
        | K3·vn-2,j ← 0
        | K3·vn-1,j ← 0
for i ∈ 1 .. N_nod_InletVn
    | vn ← Num_nod_Inleti,1
    | Vr ← Num_nod_Inleti,2
    | Vz ← Num_nod_Inleti,3
    K3vn-2,3vn-2 ← 1
    K3vn-1,3vn-1 ← 1
    F3·vn-2 ← K3vn-2,3vn-2·Vr
    F3·vn-1 ← K3vn-1,3vn-1·Vz

```

```

for i ∈ 1 .. Nnod_gl·M1
    Ki, Nnod_gl·M1+1 ← Fi
for i ∈ 1 .. N_nod_wall
    v0 ← Num_nod_walli
    for j ∈ 1 .. Nnod_gl·3
        K3·v0-2, j ← 0
        K3·v0-1, j ← 0
        Kj, 3·v0-2 ← 0
        Kj, 3·v0-1 ← 0
        K3·v0-2, 3·v0-2 ← 1
        K3·v0-1, 3·v0-1 ← 1
        F3·v0-2 ← 0
        F3·v0-1 ← 0
    VrzP ← K
VrzP

```

Перезапис

$i := 1 \dots Nnod_gl \cdot M1$

$b_i := VrzP_{i, Nnod_gl \cdot M1 + 1}$

$j := 1 \dots Nnod_gl \cdot M1$

$A1_{i,j} := VrzP_{i,j}$

Отримання симетричної матриці СЛАР

$AT := A1^T$

$ATA := AT \cdot A1$

Почастковий розв'язок СЛАР

$x0 := b$

Регуляризація за Тихоновим

$g(\lambda) := \text{lsolve}(ATA + \lambda \cdot \text{identity}(Nnod_gl \cdot M1), AT \cdot b)$

Розв'язок

$VzrP := g(10^{-14})$

Перезапис векторів складових швидкості та тиск у вузлах сітки

$$\begin{array}{l}
 Vz := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 1 \dots Nnod_gl \\ Vz_i \leftarrow VzrP_{i-3-1} \\ Vz \end{array} \right. \\
 Vr := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 1 \dots Nnod_gl \\ Vr_i \leftarrow VzrP_{i-3-2} \\ Vr \end{array} \right. \\
 p := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 1 \dots Nnod_ \\ p_i \leftarrow VzrP_{i-3} \\ p \end{array} \right.
 \end{array}$$

Формування файлу результатів Result_1

$$\begin{array}{l}
 Result_1 := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 1 \dots Nnod_gl \\ Result_1_{i,1} \leftarrow RZgl_{i,1} \\ Result_1_{i,2} \leftarrow RZgl_{i,2} \\ Result_1_{i,3} \leftarrow Vr_i \\ Result_1_{i,4} \leftarrow Vz_i \\ Result_1_{i,5} \leftarrow \sqrt{(Vr_i)^2 + (Vz_i)^2} \\ Result_1_{i,6} \leftarrow p_i \end{array} \right. \\
 Result_1
 \end{array}$$

Запис файлів результатів

E:\Result_1.dat

E:\NNodes\Elements.dat

Result_1

El_nod

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНИХ ДЖЕРЕЛ ІНФОРМАЦІЇ

1. Исаченко В. П. Теплопередача : учебник для вузов / В. П. Исаченко, В. А. Осипова, А. С. Сукомел. — М. : Энергоиздат, 1981. — 416 с.
2. Карвацький А. Я. Моделювання енергозберігаючих регламентів промислового обладнання : навч. посіб. — К. : НТУУ «КПІ», 2014. — 234 с.
3. Седов Л. И. Механика сплошной среды : монография / Л. И. Седов. — М. : Наука, 1973. — Т.1,2. — 584, 492 с.
4. Мейз Дж. Теория и задачи механики сплошных сред / Дж. Мейз ; пер. с англ. В. И. Свешниковой ; под ред. М. Е. Еглит. — М. : Мир. — 1974. — 319 с.
5. Механіка суцільних середовищ-1. Механіка суцільних середовищ в інженерних розрахунках : текст лекцій для студентів спеціальності 7(8).05050315 «Обладнання хімічних виробництв і підприємств будівельних матеріалів» / уклад.: О.С. Сахаров, А. Я. Карвацький. — К. : НТУУ «КПІ», 2013. — 231 с.
Режим доступу: <http://ela.kpi.ua/handle/123456789/4161>.
6. Метод. вказівки до виконання завдань з лабораторних робіт з дисципліни «Механіка суцільних середовищ-1», для студентів спеціальності 7(8).05050315 «Обладнання хімічних виробництв і підприємств будівельних матеріалів» / уклад.: О. С. Сахаров, А. Я. Карвацький, С. В. Лелека, Т. В. Лазарєв. — К. : НТУУ «КПІ», 2013. — 125 с.
Режим доступу: <http://library.kpi.ua:8080/handle/123456789/2500>.
7. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике / О. Зенкевич ; пер. с англ. ; под ред. Б. Е. Победри. — М. : Мир, 1975. — 541 с.
8. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов / Л. Сегерлинд ; пер. с англ. А. А. Шестакова ; под ред. Б. Е. Победри. — М. : Мир, 1979. — 392 с.
9. Стренг Г. Теория метода конечных элементов / Г. Стренг, Дж. Фикс ; пер. с англ. В. И. Агошкова, В. А. Василенко, В. В. Шайдурова ; под ред. Г. И. Марчука. — М. : Мир, 1977. — 350 с.
10. Бреббия К. Методы граничных элементов / К. Бреббия, Ж. Теллес, Л. Вроубел ; пер. с англ. Л. Г. Корнейчука ; под ред. Э. И. Григолюка. — М. : Мир, 1987. — 524 с.
11. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. — М. : Наука, 1984. — 831 с.
12. Калиткин Н. Н. Численные методы : учеб. пособие. — М. : Наука. Физматгиз, 1978. — 512 с.
13. Числове моделювання теплоелектричного стану алюмінієвих електролізерів / Є. М. Панов, А. Я. Карвацький, С. В. Лелека, І. В. Пулінець // Вісник НТУУ «КПІ». Хімічна інженерія, екологія та ресурсозбереження : зб. наук. праць. — 2009. — № 2(4). — С. 59—65.
14. Самарский А. А. Экономическая схема сквозного счета для многомерной задачи Стефана / А. А. Самарский, В. Д. Моисеенко // Журнал выч. матема-

тики и мат. физики. — 1965. — Т. 5, № 3. — С. 816—827.

15. Будак Б. М. Разностный метод со сглаживанием коэффициентов для решения задачи Стефана / Б. М. Будак, Е. И. Соловьева, А. Б. Успенский // Журнал выч. математики и мат. физики. — 1965. — Т. 5, № 5. — С. 828—840.

16. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности / Васидзу К. ; пер. с англ. В. В. Кобелева, А. П. Сейраняна ; под ред. Н. В. Баничука. — М. : Мир, 1987. — 542 с.

17. Тьюарсон Р. Разреженные матрицы / Р. Тьюарсон ; пер. с англ. — М. : Мир, 1977. — 190 с.

18. Джордж А. Численное решение больших разреженных систем уравнений / А. Джордж, Дж. Лю ; пер. с англ. Х. Д. Икрамова. — М. : Мир, 1984. — 334 с.

19. Уилкинсон Р. Справочник алгоритмов на языке АЛГОЛ. Линейная алгебра / Р. Уилкинсон ; пер. с англ. ; под ред. Ю. И. Топчиева. — М : Машиностроение, 1976. — 389 с.

20. Прохоренко В. П. SolidWorks. Практическое руководство / В. П. Прохоренко. — М. : ООО Бином-Пресс, 2004. — 448 с.

21. Лаборатория численного моделирования. Обзор программ (триангуляторов, решателей, постпроцессоров), технологий, методов.

Режим доступа : <http://numlab.blogspot.com/2011/06/gmsh-3d.html>.

22. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости / С. Патанкар. ; пер. с англ. В. Д. Виленского. — М. : Энергоатомиздат, 1984. — 153 с.

23. Андерсон Д. Вычислительная гидродинамика и теплообмен : в 2-х т. / Д. Андерсон, Дж. Тинненхилл, Р. Плетчер ; пер. с англ. под ред. С. В. Сенина, Е. Ю. Шельмана. — М. : Мир, 1990. — Т. 1. — 1990. — 384 с. — Т. 2. — 1990. — 392 с.

24. ANSYS, Inc. ANSYS FLUENT User's Guide Documentation.

Режим доступа: <http://www.ansys.com>.

25. Щеглов И. А. Дискретизация сложных двумерных и трехмерных областей для решения задач математического моделирования : автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. техн. наук : спец. 05.13.18 – «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» / И. А. Щеглов. — М., 2010. — 18 с.

26. Скворцов А. В. Триангуляция Делоне и её применение / А. В. Скворцов. — Томск: Изд-во Томского университета, 2002. — 128 с.

27. Gmsh: a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities.

Режим доступа: <http://geuz.org/gmsh/>.

28. NETGEN is an automatic 3d tetrahedral mesh generator.

Режим доступа: <http://sourceforge.net/projects/netgen-mesher/>.

29. Tecplot. Master the view.
Режим доступа: <http://www.tecplot.com/>
30. ParaView.
Режим доступа: <http://www.paraview.org/>.
31. Применение системы ANSYS к решению задач механики сплошной среды. Практическое руководство / под. ред. проф. А. К. Любимова. — Н. Новгород : Изд-во Нижегородского госуниверситета, 2006. — 227 с.
32. Тихонов А. Н. О некорректных задачах линейной алгебры и устойчивом методе их решения / А. Н. Тихонов // Доклады АН СССР. — 1965. — Т. 163, № 3. — С. 591—594.

ЗМІСТ

ВСТУП	3
ОСНОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ ТА СКОРОЧЕННЯ	5
1. МАТЕМАТИЧНЕ ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧ МЕХАНІКИ СУЦІЛЬНИХ СЕРЕДОВИЩ	8
1.1. Стаціонарна теплопровідність з внутрішнім джерелом теплоти.....	8
1.1.1. Плоска і тривимірна задачі	8
1.1.2. Вісесиметрична задача.....	9
1.2. Статична пружність і незв'язана термopужність	9
1.2.1. Задача плоско-деформованого стану	9
1.2.2. Задача плоско-напруженого стану	12
1.2.3. Вісесиметрична задача.....	13
1.2.4. Тривимірна задача напружено-деформованого стану	15
1.2.5. Співвідношення для визначення запасу міцності конструкції	18
1.3. Стаціонарний рух в'язкої рідини	19
Запитання для самоконтролю	21
2. ЧИСЛОВІ МЕТОДИКИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ МЕТОДОМ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ	23
2.1. Система дискретних рівнянь методу скінченних елементів	23
2.1.1. Екстремальна задача	23
2.1.2. Скінченно-елементна дискретизація	29
2.1.3. Переваги та недоліки МСЕ. Умови збіжності та оцінка точності	31
2.2. Плоска задача теплопровідності	33
2.2.1. Трикутні лінійні скінченні елементи	33
2.2.2. Чотирикутні лінійні скінченні елементи	40
2.3. Вісесиметрична задача теплопровідності	49
2.3.1. Трикутні лінійні скінченні елементи	49
2.3.2. Чотирикутні лінійні скінченні елементи	53
2.4. Тривимірна задача теплопровідності	67
2.4.1. Чотиригранні лінійні скінченні елементи	67
2.4.2. Шестигранні лінійні скінченні елементи	74
2.5. Нелінійні задачі теплопровідності	78
Запитання для самоконтролю	84
3. ЧИСЛОВІ МЕТОДИКИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ СТАТИЧНОЇ ПРУЖНОСТІ МЕТОДОМ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ.....	87
3.1. Методи побудови системи дискретних рівнянь МСЕ задач НДС	87
3.1.1. Метод переміщень як мінімізація повної потенціальної енергії	87
3.1.2. Критерії збіжності задач НДС	89
3.1.3. Узагальнене варіаційне формулювання МСЕ	90
3.1.4. Загальні критерії збіжності	91
3.1.5. Інші способи формулювання МСЕ	92
3.2. Плоскі задачі НДС і ПНС	94
3.3. Вісесиметрична задача напруженого стану	103
3.4. Тривимірна задача НДС	112
3.5. НДС плоскої шарнірно-з'єднаної ферми	123
Запитання для самоконтролю	127
4. ЧИСЛОВА МЕТОДИКА РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ РУХУ В'ЯЗКОЇ РІДИНИ	129

4.1. Застосування методу зваженої нев'язки для побудови системи дискретних рівнянь МСЕ. Метод Гальоркіна	129
4.2. Плоска задача усталеної течії в'язкої нестисливої рідини	131
4.3. Вісесиметрична задача усталеної течії в'язкої нестисливої рідини	137
Запитання для самоконтролю	140
5. МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМ ДИСКРЕТНИХ РІВНЯНЬ	142
5.1. Загальні характеристики прямих методів розв'язання СЛАР	142
5.2. Загальні характеристики ітераційних методів розв'язання СЛАР	145
Запитання для самоконтролю	147
6. ПОБУДОВА ГЕОМЕТРІЇ ТА ДИСКРЕТИЗАЦІЯ РОЗРАХУНКОВОЇ ОБЛАСТІ	149
6.1. Генерація розрахункової сітки в ручному режимі	152
6.2. Програмне забезпечення для дискретизації розрахункової області	158
6.3. Приклади застосування Gmsh для генерації розрахункових сіток	163
Запитання для самоконтролю	168
7. ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ СТАЦІОНАРНИХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ТА ВІЗУАЛІЗАЦІЯ РЕЗУЛЬТАТІВ РОЗРАХУНКІВ	170
7.1. Плоска задача теплопровідності	170
7.1.1. Трикутні скінченні елементи	170
7.1.2. Чотирикутні скінченні елементи	174
7.2. Вісесиметрична задача теплопровідності	178
7.2.1. Трикутні скінченні елементи	178
7.2.2. Чотирикутні скінченні елементи	183
7.3. Тривимірна задача теплопровідності	184
Запитання для самоконтролю	191
8. ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ СТАТИЧНОЇ ПРУЖНОСТІ ТА ВІЗУАЛІЗАЦІЯ РЕЗУЛЬТАТІВ РОЗРАХУНКІВ	193
8.1. Плоскі задачі ПДС і ПНС	193
8.2. Вісесиметрична задача напруженого стану	198
8.3. Тривимірна задача напружено-деформованого стану	206
8.4. НДС плоскої шарнірно-з'єднаної ферми	212
Запитання для самоконтролю	216
9. ПРИКЛАД РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ УСТАЛЕНОГО РУХУ В'ЯЗКОЇ РІДИНИ	218
Запитання для самоконтролю	222
Додаток А. Застосування L -координат для аналітичного визначення інтегралів	223
А.1. Інтеграл по довжині сторони трикутного скінченного елемента	223
А.2. Інтеграл по площі трикутного скінченного елемента	224
А.3. Інтеграл по площі грані тетраедного скінченного елемента	225
А.4. Інтеграл по об'єму тетраедного скінченного елемента	226
Додаток Б. Застосування перетворення Кірхгофа для розв'язання нелінійної задачі теплопровідності з фазовим переходом I роду	228
Додаток В. Приклад програмного коду розв'язання СЛАР зі стрічковою матрицею	232
Додаток Г. Приклад програмного коду розв'язання СЛАР з погано обумовленою матрицею методом спряжених градієнтів	236
Додаток Д. Приклади програмних кодів Mathcad для розв'язання стаціонарних задач теплового стану	237
Д.1. Плоска задача теплопровідності. Лінійні трикутні СЕ	237
Д.2. Плоска задача теплопровідності. Лінійні чотирикутні СЕ	246
Д.3. Вісесиметрична задача теплопровідності. Лінійні трикутні СЕ	257

Д.4. Вісесиметрична задача теплопровідності. Лінійні чотирикутні СЕ	266
Д.5. Тривимірна задача теплопровідності. Лінійні тетраедні СЕ	277
Додаток Е. Приклади програмних кодів Mathcad для розв'язання задач статичної пружності	296
Е.1. Задача ПДС. Лінійні трикутні СЕ	296
Е.2. Задача ПНС. Лінійні трикутні СЕ	309
Е.3. Вісесиметрична задача напруженого стану. Лінійні трикутні СЕ	313
Е.4. Тривимірна задача НДС. Лінійні тетраедні СЕ	332
Е.5. НДС плоскої шарнірно-з'єднаної ферми. Лінійні двовузлові СЕ	362
Додаток Ж. Приклад програмного коду Mathcad для розв'язання задачі усталеної течії в'язкої нестисливої рідини. Лінійні трикутні СЕ	373
СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНИХ ДЖЕРЕЛ ІНФОРМАЦІЇ	386

Навчальне видання

Карвацький Антон Янович

**МЕТОД СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ У ЗАДАЧАХ
МЕХАНІКИ СУЦІЛЬНИХ СЕРЕДОВИЩ**

Лабораторний практикум з навчальної дисципліни

Навчальний посібник

В авторській редакції