

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

НА ВЕРСТКУ ГОТОВА

**А. В. Кузьмін
С. В. Денисов**

КОМП'ЮТЕРНА АЛГЕБРА

КУРС ЛЕКЦІЙ ТА ЛАБОРАТОРНИЙ ПРАКТИКУМ

Навчальний посібник



УДК 517.98+515.122(075.8)

П48

Рецензенти:

д-р фіз.-мат. наук, проф. В.А. Стоян,
д-р фіз.-мат. наук, проф. Д.А. Ключин Д.А.

*Рекомендовано до друку вченою радою факультету комп'ютерних
наук та кібернетики
(протокол № 2 від 11 жовтня 2016 року)*

*Ухвалено науково-методичною радою Київського національного уні-
верситету імені Тараса Шевченка*

(протокол № 3-16/17 н. р. від 31 березня 2017 року)

Кузьмін А. В., Денисов С.В.

Комп'ютерна алгебра : Курс лекцій та лабораторний практикум :
навч. посіб / А.В. Кузьмін, С.В. Денисов. – К. : ВПЦ "Київський універ-
ситет", 2017. – 281 с.

Розглянуто базові можливості сучасної системи комп'ютерної алгебри MAPLE. Детально описаний набір функцій аналітичних перетворень і обчислень задач алгебри, класичних задач математичного аналізу та диференціальних рівнянь. Наведені пропроцедури чисельних обчислень. Весь наведений теоретичний матеріал супроводжується великою кількістю прикладів. Лекційний матеріал поєднується з комплексними завданнями для самостійної роботи студентів під час лабораторного практикуму.

Навчальний посібник буде корисним для студентів факультету комп'ютерних наук та кібернетики при вивченні дисципліни комп'ютерна алгебра.

УДК 517.98+515.122(075.8)

ВСТУП

ЛЕКЦІЯ 1

Структура робочого аркуша Maple-програми

Створення секцій і робота з ними

Типи даних та перетворення над ними

Задавання чисел і виконання дій над ними

Цілі числа

Звичайні дроби

Радикали

Дійсні числа с плаваючою точкою

Комплексні числа

Задавання констант

Задавання рядків

Складні типи виразів системи MAPLE

Послідовності виразів

Списки та множини

Спеціальні засоби для роботи із множинними типами

Масиви

Матриці та вектори

ЛЕКЦІЯ 2

Структура виразів і робота з ними

Обмеження на змінні величини

Команди перетворення виразів

Команда спрощення виразів `simplify()`

Команда `assuming` і пакет `Real Domain`

Команди розкриття дужок у виразах `expand()`

Команда `combine` зведення кількох членів виразу до одного

Розкладання поліноміальних виразів на прості множники, функція `factor()`

Команда зведення подібних членів `collect()`

Скорочення алгебраїчного дробу. Команда `normal()`

Перетворення виразів за допомогою підстановок

Перетворення виразів на еквівалентні форми запису. Функція `convert`

ЛЕКЦІЯ 3

Обчислення виразів

Розв'язування задач математичного аналізу за допомогою системи MAPLE

Обчислення границь послідовностей і функцій

Обчислення похідних функцій

Обчислення похідних для функцій, заданих параметрично, і неявно заданих функцій

Обчислення похідних від неявно заданих функцій

Обчислення сум послідовностей функціональних і числових рядів

Обчислення добутків членів послідовностей

Розвинення функцій у ряди

ЛЕКЦІЯ 4

Заміна змінних у диференціальних та інтегральних виразах

Інтегрування функцій

Обчислення невизначених інтегралів

Обчислення визначених інтегралів

Головне значення за Коші для невластних інтегралів

Обчислення подвійних інтегралів

Обчислення потрійних інтегралів

ЛЕКЦІЯ 5

Обчислення криволінійних інтегралів

Поверхневі інтеграли першого та другого роду

Розв'язування рівнянь та нерівностей в системі MAPLE

Основна функція `solve()`

Системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Знаходження коренів багаточленів

Розв'язування систем алгебраїчних рівнянь

Розв'язування тригонометричних рівнянь

Розв'язування рекурентних рівнянь

Розв'язування нерівностей та їхніх систем

Розв'язування звичайних диференціальних рівнянь та їхніх систем

Знаходження розв'язків інтегральних рівнянь

Фредгольма та Вольтерра

ЛЕКЦІЯ 6

Візуалізація обчислень. Побудова двовимірних і тривимірних поверхонь

Побудова двохвимірних графіків, функція plot()

Побудова графіка однієї функції

Графіки функцій з розривами

Керування стилем і кольором ліній двовимірних графіків

Побудова графіків кількох функцій на одному рисунку

Побудова графіка функції, заданої сукупністю точок

Побудова полігонів

Побудова графіків функцій, заданих параметрично, і функцій у полярній системі координат

Побудова тривимірних графіків. Особливості застосування функції plot3d

Побудова поверхонь різними стилями

Побудова поверхонь у різних системах координат

Тороїдальні координати

Зображення поверхонь, заданих у параметричній формі 125

ЛЕКЦІЯ 7

Параметри функції plot3d

Побудова графічних структур

Графічні структури PLOT3D

Додаткові графічні можливості системи MAPLE

Команди пакету plots

Базові засоби програмування в системі Maple

Умовний оператор

Оператори циклу

Оператори переривання та пропускання циклу

Додаткові можливості застосування функцій map і map2 до списків та множин

Процедури та процедури-функції

Локальні та глобальні змінні

ЛЕКЦІЯ 8

Використання окремих спеціальних функцій та ортогональних поліномів

Ортогональні поліноми

Циліндричні функції

Ейлерові інтеграли першого та другого роду

Інтегральні синус і косинус, інтеграл імовірності

Сферичні функції Лежандра першого та другого роду

Гіпергеометрична функція

ЛЕКЦІЯ 9

Створення об'єктів Matrix та Vector

Короткі позначення для матриць і векторів

Функція Matrix()

Функція Vector()

Робота з елементами матриць і векторів

Побудова стандартних матриць

Арифметика матриць і векторів

Множення матриць і векторів

Векторний добуток

Норма вектора

Операція транспонування

Комплексно-спряжене транспонування

Визначник матриці

Мінори

Ранг матриці

Обернена матриця

Перевірка властивостей матриць

Функції від квадратних матриць

Ортогоналізація системи векторів

Типові задачі лінійної алгебри

Власні значення та власні вектори

Розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь

ЛЕКЦІЯ 10

Наближення функцій

Поліноміальна інтерполяція функцій
Сплайнова інтерполяція
Дробово-раціональне рівномірне наближення функцій за алгоритмом Ремеза
Раціональна інтерполяція
Середньоквадратичне наближення за методом найменших квадратів

Числове інтегрування

Чисельне розв'язування нелінійних рівнянь та їх систем

Чисельне розв'язування задач Коші та граничних задач для звичайних диференціальних рівнянь

Знаходження розв'язків задач лінійного програмування

Завдання для самостійного виконання 1

Завдання для самостійного виконання 2

Завдання для самостійного виконання 3

Завдання для самостійного виконання 4

Завдання для самостійного виконання 5

Завдання для самостійного виконання 6

Завдання для самостійного виконання 7

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

ВСТУП

В останні роки показником інтелектуальних можливостей комп'ютерів стали новітні програмні системи символної математики, або комп'ютерної алгебри. Створені для виконання символних перетворень та аналітичних обчислень математичних виразів, ці системи були розвинені до рівня, що дозволяє значно полегшити, а часом і замінити працю математиків, причому як теоретиків, так і тих, що працюють у прикладній галузі. Уже з'явилися математичні відкриття, здійснені за допомогою таких програм. Навряд чи нині є хоча б один важливий науковий проєкт, пов'язаний з математичними дослідженнями, де б не використовувались системи символної математики.

Системи символної математики тривалий час були орієнтовані на великі комп'ютери. З появою персональних комп'ютерів та зростанням їхніх можливостей ці системи були адаптовані до них і доведені до рівня масового комерційного продукту. Зараз на ринку систем символної математики (чи комп'ютерної алгебри) пропонується різноманітний асортимент продукції – від розрахованої "на всіх" системи Mathcad [29–49] до великих комп'ютерних програм, до яких можна віднести "велику трійку": Mathematica [23–28], MATLAB [16–22] і Maple [1–15], що мають тисячі вбудованих функцій і чудові можливості графічної візуалізації обчислень.

Усі ці системи працюють на персональних комп'ютерах, оснащених популярними операційними системами класу Windows, але не тільки на них – є версії під операційні системи Linux, Unix, Mac та ін. Вони також знайомі користувачам великих комп'ютерів і навіть суперкомп'ютерів.

До середнього рівня таких систем належить система Mathcad, що інтенсивно розвивається й має (на довершення до прекрасних засобів чисельних обчислень) придбане за ліцензією у фірми Waterloo Maple Inc. ядро символних обчислень. Ядро системи Maple використовується також у іншій системі – MATLAB, додаючи їй незвичайні для неї риси символної математики.

Система Maple була створена групою вчених під керівництвом Кейта Геддеса (Keith Geddes) і Гастона Гонне (Gaston Gonnet) у 1980 р. в Університеті Ватерлоо (Waterloo), Канада. Спочатку вона була реалізована на великих комп'ютерах і пройшла тривалу апробацію, увібравши в себе велику частину математичних функцій і правил їхніх перетворень, вироблених математикою за сторіччя розвитку. Існують реалізації цієї програми на платформах ПК Macintosh, Unix, Sun.

Maple – система комп'ютерної математики, розрахована на широке коло користувачів. Донедавна її називали системою комп'ютерної алгебри, що вказувало на особливу роль символьних обчислень і перетворень, які здатна здійснювати ця система. Однак така назва звукує сферу застосування системи. Насправді, по-перше, вона може виконувати швидко й ефективно чисельні розрахунки, причому з необмеженою точністю, а по-друге, її можливості виходять далеко за межі алгебри й уже покривають, наприклад, велику частину математичного аналізу.

Система Maple має широку сферу застосування – від моделювання складних фізичних об'єктів, систем і пристроїв до створення художньої графіки (наприклад фракталів). Заслуженою популярністю система Maple користується у ВНЗ – понад 300 найбільших університетів світу взяли її на озброєння, а кількість тільки зареєстрованих користувачів системи давно перевищила мільйон.

Maple – одна з наймогутніших інтегрованих систем символьної математики. Лідерство вона завоювала в гострій конкурентній боротьбі з іншою системою комп'ютерної математики – Mathematica. Кожна з двох систем має особливості, але в цілому вони практично рівноцінні. Однак треба зазначити, що поява нових версій Maple від 15 до 18 означає черговий виток у змаганні цих систем за місце лідера світового ринку. Причому ривок цього разу зробила система Maple.

Нижче наведено порівняння частоти оновлень зазначених систем:

Maple 2016	Mathematica 10.4
------------	------------------

березень 2016	березень 2016
Maple 2015	Mathematica 10.3
березень 2015	жовтень 2015
Maple 18	Mathematica 10
березень 2014	січень 2015
Maple 17	Mathematica 9
13 березня 2013	29 листопада 2012
Maple 15	Mathematica 8.0.1
13 квітня 2011	23 жовтня 2011
Maple 14	Mathematica 8.0
29 квітня 2010	15 листопада 2010
Maple 13	Mathematica 7.0.1
24 квітня 2009	5 березня 2009
Maple 12	Mathematica 7.0
13 травня 2008	18 листопада 2008

Комп'ютерна алгебра вивчає базові можливості системи Maple і прийоми її використання для розв'язання різноманітних прикладних задач.

Система Maple – типова інтегрована система. Вона має такі характеристики:

- вбудоване ядро для перетворення математичних виразів;
- потужну довідкову систему з великою кількістю прикладів;
- чисельний і символьний процесори;
- візуалізацію обчислень, наукову та інженерну графіку;
- бібліотеку вбудованих функцій і додаткових пакетів;
- вбудовану мову програмування.

Отже, Maple може застосовуватися для виконання як класичних, так і прикладних математичних досліджень майже в усіх галузях науки, які використовують математичні моделі, включаючи економіку, фізику, екологію, біологію, соціологію, інже-

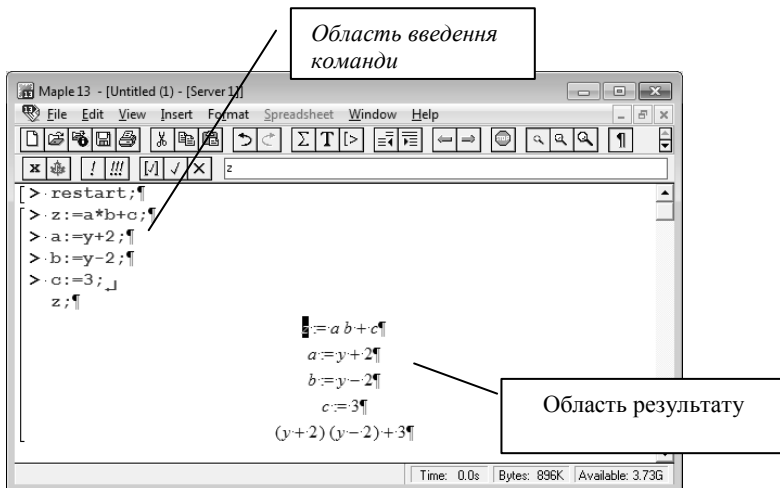
нерні обчислення тощо. Іншими словами, система Maple – це ефективний інструмент для математичного моделювання.

ЛЕКЦІЯ 1

Структура робочого аркуша Maple-програми

Робота в системі Maple – це інтерактивний сеанс, під час якого користувач вводить на робочому аркуші команди й після натискання клавіші <Enter> передає їх на виконання ядру системи. Усі введені команди та відображені результати їх роботи є вмістом робочого аркуша. У кінці сеансу робочий аркуш можна зберегти на жорсткому диску у вигляді файла в одному із запропонованих форматів. При черговому сеансі роботи треба знову відкрити файл і повторно виконати відповідні команди або внести в них деякі корективи.

Оскільки команди й результати їхньої роботи виводяться на одному робочому аркуші, а саме: після кожної команди безпосередньо відображається результат її роботи, то прийнято поділяти робочий аркуш на області введення та виведення команд. У перших користувач вводить свої команди, у других отримує результати їхньої роботи. Вміст областей введення та виведення команд утворює групу обчислень, яка на робочому аркуші ліворуч позначається квадратною дужкою. Група обчислень може містити кілька команд, причому основною властивістю групи є те, що всі її команди та оператори виконуються за одне звернення до ядра системи Maple після натискання клавіші <Enter>:



Для додавання нової групи обчислень необхідно встановити курсор у потрібне місце робочого аркуша, виконати команду **Insert> Execution Group** і обрати одну з двох можливостей: додати групу вище або нижче положення курсору. Після існуючої групи обчислень нова група обчислень утворюється автоматично при натисканні клавіші <Enter>.

Для запису кількох команд в одній області введення необхідно після введення чергової команди натиснути комбінацію клавіш <Shift> + <Enter>. У цьому разі область введення буде містити кілька команд, що йдуть одна за одною, а після них буде йти область виведення послідовності команд. Знак запитання > передує тільки першій команді.

>c:= 1+sin(x);	c := 1 + sin(x)
>d:= 9;	d := 9
>c+d;	10 + sin(x)

Примітка. У кожній таблиці з двома стовпцями в лівому стовпці наведено команду, яку вводить користувач, а в правому – реакцію системи, тобто результат її виконання. Команда в лівій частині може бути зображена або в текстовій формі, або у вигляді рисунка, що залежить від версії програми.

Усі приклади використання групи команд системи MAPLE у тексті надаються в табличній формі: команда записується в лівій комірці таблиці й починається із символу $>$, а в правій комірці наводяться результати її виконання. У зв'язку з тим, що розмір команд і результатів їх виконання мають різну довжину та подаються в графічному форматі, результат виконання команди може переноситись у наступний рядок таблиці. У цьому випадку відповідна комірка лівого та правого стовпчика залишається порожньою. Окремі команди та результати їх виконання наводяться в тексті.

В одному рядку можуть міститися кілька команд, що розділяються між собою позначками ";" або ":". Великі за розміром команди автоматично переносяться системою Maple на наступний рядок, при цьому команда буде виконуватись як така, що міститься в одному рядку.

Команди можна вводити та відображати у формі синтаксису мови Maple (текстовій формі) командою **Insert> Maple Input** або **Insert> 2-D Math**. При цьому команда може відображатися на лістингу у формі, що підлягає виконанню, тобто активній, або у формі, що є пасивною, тобто такою, що не виконується. Ознакою активної форми команди є знак запрошення у вигляді символу $>$ або нахиленого праворуч курсору, що пульсує $/$. Для введення активної команди в стандартній формі синтаксису Maple, яка встановлена в системі Maple за замовчанням, необхідно ввести текст команди одразу після символу запрошення $>$.

Команду, записану в текстовому вигляді, можна перетворити на математичну форму запису. Для цього її треба виділити й виконати команду **Format> Convert To>2-D Math Input**. Також можна перевести команду з активної форми 2-D Math Input в пасивну, виділивши її та застосувавши команду **Format> Convert To>Inert Form**. Для виконання зазначених дій можна скористатися також контекстним меню.

Команда MAPLE	Результат виконання	Форма команди
$>\text{int}(\sin(x), x)$	$-\cos(x)$	<i>Maple Input</i>

$>int(\ln(x^3), x);$	$\ln(x^3) x - 3 x$	2-D Math
$> \int \sin(x) dx$	$-\cos(x)$	2-D Math Input
$> \frac{d}{dx} \ln(\cos(x));$	$\frac{d}{dx} \ln(\cos(x));$	2-D Math Input, пасивна форма

Робочий аркуш може містити текстові коментарі, які дозволяють створювати пояснення до математичних обчислень. Для введення в робочий аркуш текстового коментаря необхідно виконати команду **Insert >Text**, для додавання в коментар математичної формули – записати команду у **2-D Math Input** формі та перевести її в пасивну форму. Приклад відповідного текстового коментаря з математичними формулами:

значення другої похідної від $\sin(x)$ становить

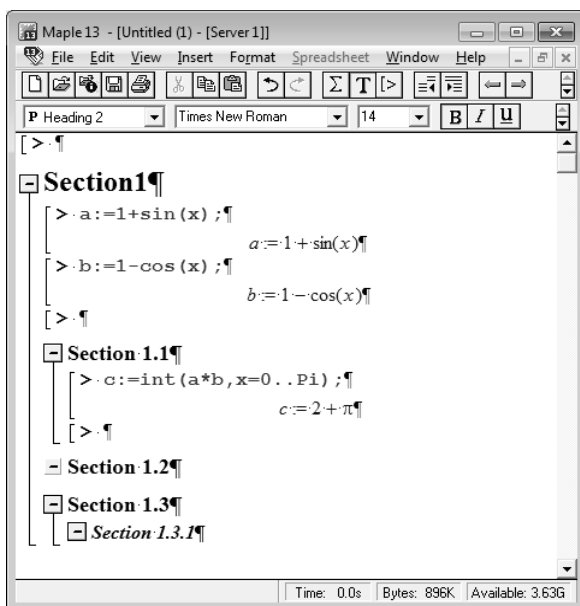
$$\frac{d^2}{dx^2} \sin(x) = -\cos(x).$$

Можна записати команду в математичній формі, безпосередньо використовуючи палітру інструментів **Calculus**. За допомогою панелі **Greek** можна застосовувати літери грецького алфавіту при записі будь-яких математичних виразів (при введенні виразів і команд із клавіатури кожна грецька літера з панелі **Greek** має еквівалентне написання в латинському алфавіті, наприклад грецька літера α записується у вигляді **alpha**). Відповідність літер грецького алфавіту до їхнього латинського напису можна дізнатися, навівши курсор миші на потрібний символ на панелі **Greek**.

Палітра **Constants and symbols** містить велику кількість стандартних позначень різних множин, зокрема натуральних, раціональних, дійсних, комплексних чисел.

Створення секцій і робота з ними

Структурування робочого аркуша в системі Maple здійснюється за рахунок утворення в аркуші ієрархічної деревоподібної структури, аналогічної структурі директорій файлової системи, що складається із секцій, усередині яких можуть міститися інші секції (підсекції). Глибина вкладення секцій не обмежується. Кожна секція вставляється у вигляді кнопки зі знаком + або -, які вказують на те, що секція перебуває у згорнутому стані й може бути розгорнута шляхом натискання на кнопку зі знаком +, або в розгорнутому стані й може бути згорнута шляхом натискання на кнопку -. Для додавання секції необхідно встановити курсор у потрібне місце робочого аркуша та виконати команду **Insert > Section**; для додавання підсекції всередині секції необхідно встановити курсор введення правіше кнопки секції й виконати команду **Insert > Subsection**:



Кожній секції (підсекції) можна дати назву, яка за потреби вводиться безпосередньо після кнопки секції.

Для об'єднання існуючих груп обчислень і текстових коментарів у секцію необхідно виділити їх за допомогою миші та виконати команду **Format > Indent**. Для вилучення груп обчислень і текстових коментарів із секції (ліквідація секції, але не її вмісту) необхідно виконати команду **Format > Outdent**.

Таким чином, концепція секцій і підсекцій дає користувачеві додаткову свободу керування документом і дозволяє створювати електронні документи, зручні для перегляду на комп'ютері.

Типи даних та перетворення над ними

Система MAPLE може виконувати операції з об'єктами різної математичної природи, зокрема числами, константами, рядками символів, змінними, невідомими величинами, виразами, функціями, списками, множинами, масивами, матрицями, векторами тощо.

Задавання чисел і виконання дій над ними

У системі MAPLE можна задавати цілі числа, звичайні дробі, радикали, числа з плаваючою точкою, комплексні числа. Перші три типи чисел дозволяють виконувати над ними точні обчислення без використання заокруглення.

Числа з плаваючою точкою є наближеними, у них кількість значущих цифр обмежена й вони використовуються для апроксимації точних чисел, зокрема дійсних.

Комплексні числа можуть бути як точними, так і наближеними залежно від того, точними або наближеними є їхні дійсна й уявна частини.

Цілі числа

Цілі числа задаються у вигляді послідовностей цифр від 0 до 9. Від'ємні числа задаються зі знаком "-" перед числом. Максимальне ціле число, яке можна задати в системі MAPLE, обмежується лише пам'яттю комп'ютера. Обчислення з цілими числами обмежуються арифметичними діями: додаванням +, відніманням -, множенням *, діленням / та обчисленням факторіала !:

>17-23;	-6
>24/6;	4
>4*7;	28
>15!;	1307674368000

Окрім звичайних арифметичних операцій над цілими числами, можна виконувати деякі команди:

- розкладання цілих чисел на прості множники: **ifactor()** та **ifactors()**;
- обчислення частки двох чисел **iquo(m,n)**;
- обчислення залишку ділення двох чисел **irem(m,n)**;
- перевірка, чи є ціле число простим **isprime(m)**:

>ifactor(34276);	$(2)^2 (11) (19)$
>iquo(49,8);	6
>irem(49,8);	1
>isprime(34277);	<i>false</i>
>isprime(347);	<i>true</i>

Звичайні дроби

Звичайні дроби задаються за допомогою операції ділення двох цілих чисел m/n . У випадку, коли дріб скорочується, система MAPLE здійснює це скорочення й записує результат. Якщо запис результату у вигляді звичайного дроби не дуже зручний, то його можна перетворити на десятковий дріб за допомогою оператора **evalf(m/n,r)**, де параметр **r** задає кількість десят-

кових знаків мантиси. За замовчанням ця кількість становить 10 знаків:

>65/7+2/3;	$\frac{209}{21}$
>evalf(%,3);	9.95

В останньому прикладі символ % у першому аргументі функції **evalf** указує на результати попереднього обчислення.

Радикали

Радикали задаються як результат піднесення в дробовий степінь цілих або дробових чисел, а також обчислення з них квадратного кореня:

>1/4*3**(2/3)*4**(2/5);	$\frac{3^{(2/3)} 4^{(2/5)}}{4}$
-----------------------------------	---------------------------------

Система MAPLE прагне до виконання дій над радикалами точно, наприклад:

>sqrt(3+2*sqrt(2))-sqrt(3-2*sqrt(2));	2
---	---

Дійсні числа з плаваючою точкою

Дійсні числа з плаваючою точкою задаються у вигляді цілої та дробової частин, що розділені між собою десятковою крапкою: 24.3456. Перед числом може бути знак + або -.

Часто числа з плаваючою точкою задаються в експоненціальному вигляді, наприклад 24.347 e-4 або 5.357e5. Частина числа, що стоїть перед знаком *e*, називається мантисою, вона множить на 10 у степені, значення якого розташоване за знаком *e*.

Комплексні числа

Комплексні числа задаються в системі MAPLE у вигляді суми дійсної та уявної частин, яка містить спеціальну константу **I**, наприклад:

<code>>(2/3+3*I);</code>	$\frac{2}{3} + 3I$
-----------------------------	--------------------

Над комплексними числами можна виконувати арифметичні операції +, -, *, /:

<code>>(2/3+2*I)+(1/3-I);</code>	$1 + I$
<code>>(2/3+2*I) - (1/3-I);</code>	$\frac{1}{3} + 3I$
<code>>(2/3+2*I)*(1/3+I);</code>	$-\frac{16}{9} + \frac{4}{3}I$
<code>>(2/3+2*I)/(1/3-I);</code>	$-\frac{8}{5} + \frac{6}{5}I$

Для отримання з комплексного числа його дійсної та уявної частин можна використовувати функції **Re()** та **Im()**. Комплексно-спряжене число можна отримати за допомогою функції **conjugate()**. Модуль і аргумент комплексного числа можна отримати за допомогою функцій **abs()** та **argument()**:

<code>>conjugate(-8/5+6/5*I);</code>	$-\frac{8}{5} - \frac{6}{5}I$
<code>>abs(-8/5+6/5*I);</code>	2
<code>>argument(-8/5+6/5*I);</code>	$-\arctan\left(\frac{3}{4}\right) + \pi$

>Re(-8/5+6/5*I); Im(9-8/5+6/5*I);	$-\frac{8}{5}$ $\frac{6}{5}$
---	------------------------------

Для обчислення над комплексними числами використовується функція **evalc()**:

>evalc(argument(((1/2)^(1/2)- I*(1/2)^(1/2))^(1/4)))	$-\frac{\pi}{16}$
--	-------------------

Задавання констант

Система MAPLE використовує набір загальноприйнятих констант:

false	істина;
true	хиба;
gamma	константа Ейлера;
Pi	число π ;
I	уявна одиниця;
infinity	нескінченність ∞ .

Константи **Pi** та **gamma** можна обчислювати з певною точністю, використовуючи функцію **evalf()**:

>evalf(Pi,7);	3.141593
>evalf(gamma,12);	0.577215664902

Задавання рядків

Система MAPLE дозволяє працювати з рядками – довільним набором символів, який записується в подвійних лапках. Кожний символ у рядку представляє сам себе. Довжина рядка практично не обмежена й може досягати майже 268 млн символів. За допомогою функції **length()** можна обчислити довжину рядка. MAPLE трактує рядок як масив символів, тому є можливість

звернутися як до окремого символу масиву, так і до частини рядка:

<code>>S:= "FRAZA";</code>	<code>S:= "FRAZA"</code>
<code>>length(S);</code>	<code>5</code>
<code>>S[3];</code>	<code>"A"</code>
<code>>"FRAZA"[2..4];</code>	<code>"RAZ"</code>

Для об'єднання двох рядків у єдиний використовується операція конкатенації `||` або функція `cat()`:

<code>>"FRAZA" "235";</code>	<code>"FRAZA235"</code>
<code>>cat("FRAZA", "235");</code>	<code>"FRAZA235"</code>

Змінні в системі MAPLE мають власне ім'я, яке починається з літери. Великі й малі літери в імені змінної відрізняються між собою. Імена змінних не мають містити пробілів, які можна замінити знаком підкреслювання. Для іменування змінних не можна використовувати зарезервовані слова MAPLE та назви констант. При використанні цих слів для іменування змінних система MAPLE повідомляє про помилку. Для того щоб дізнатися про список зарезервованих слів, можна звернутися до довідки системи MAPLE за допомогою оператора `? protect`. Для іменування змінних можна використовувати літери латинського та грецького алфавіту. Символи кирилиці не використовуються.

Вирази у MAPLE є комбінацією імен змінних, чисел, функцій, що з'єднуються між собою знаками допустимих арифметичних операцій.

Якщо вираз використовує змінну, якій не присвоєно жодного числового значення, то така змінна вважається невідомою величиною, а вираз називається символьним. Саме для таких виразів розроблялася система MAPLE. Важливою операцією в MAPLE є операція присвоювання, яка має синтаксис `змінна:=вираз`, наприклад:

$$f1 := \sin(x + y) = \sin(x) \cos(y) + \sin(y) \cos(x) ,$$

$$f2 := \alpha \cdot \beta \cdot \gamma^3 - 3 \cdot \tan(x);$$

За замовчанням кожна змінна MAPLE має тип **symbol**, зображує символічну змінну, а її значенням є її ім'я. При записі виразів система MAPLE дозволяє використовувати дуже багатий набір функцій:

- елементарних: експоненціальна, логарифмічна, квадратний корінь, модуль, знак числа, факторіал, тригонометричні функції, гіперболічні функції, обернені тригонометричні функції;
- спеціальних: функції Бесселя, Дірака, гамма-функції, еліптичні інтеграли тощо.

Для знаходження необхідної функції користувач може використати довідкову систему MAPLE за допомогою команди **?inifunction**;

Для задавання функції користувача та її багаторазового використання можна застосовувати функціональний оператор у вигляді **vars->result**:

$> \text{ff} := x \rightarrow \frac{(\sin(x) + \cos(x))}{x^2};$		$\text{ff} := x \mapsto \frac{\sin(x) + \cos(x)}{x^2}$
$> \text{evalf}(\text{ff}(2));$		0.1232876476
$> \text{ff1} := (x, y) \rightarrow \frac{\sin(x) \cdot \sin(y)}{(\sin(x) + \sin(y))};$		
	$\text{ff1} := (x, y) \mapsto \frac{\sin(x) \sin(y)}{\sin(x) + \sin(y)}$	
$> \text{evalf}(\text{ff1}(2., 3.));$		0.1221610152

Для створення кусково-аналітичних виразів і функцій у системі MAPLE використовується спеціальний оператор **piecewise(cond_1, f_1, cond_2, f_2, ..., cond_n, f_n)**, де **cond_1, cond_2, ..., cond_n** – логічні вирази, **f_1, f_2, ..., f_n, f_other** – вирази, що задають функціональні залежності:

$> \text{piecewise}\left(x^2 + y^2 \leq 1, x^2 + y^2, \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right);$	
	$\begin{cases} x^2 + y^2 & x^2 + y^2 \leq 1 \\ \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{otherwise} \end{cases}$
$> \text{piecewise}(-\text{infinity} < x \text{ and } x \leq 0, x^2, 0 < x, x);$	
	$\begin{cases} x^2 & -\infty < x \leq 0 \\ x & 0 < x \end{cases}$

Для створення функції можна використовувати оператор **unapply** з таким синтаксисом: **ім'я функції:=unapply** (вираз, який містить змінні функції):

$$> f3 := \text{unapply}\left(\frac{\sin(x) \cdot \cos(z)}{1 + z^2}, x, y, z\right);$$

$$> f3 := (x, y, z) \rightarrow \frac{\sin(x) \cdot \cos(z)}{1 + z^2};$$

Maple дає можливість використовувати операцію карінгу (currying), тобто отримувати з функцій нові функції, фіксуючи частину аргументів.

Наприклад, уведемо функцію двох аргументів, виконаємо карінг, отримаємо відповідну функцію одного аргументу:

$> f := (x, y) \rightarrow \left(x + \frac{1}{y}\right)^y;$	$f := (x, y) \mapsto \left(x + \frac{1}{y}\right)^y$
$> g := \text{curry}(f, 1);$	$g := () \mapsto p(1, \text{args})$
$> g(t);$	$\left(1 + \frac{1}{y}\right)^y$

Складні типи виразів системи MAPLE

Крім перелічених вище простих типів даних, система MAPLE ефективно працює зі складними типами даних, до яких належать:

- послідовності виразів;
- списки виразів;
- множини виразів;
- масиви;
- матриці.

Складні типи даних утворюються з простих типів даних за допомогою спеціальних синтаксичних конструкцій.

Послідовності виразів

Послідовність виразів є самостійним базовим об'єктом MAPLE, за допомогою якого будуються інші складні об'єкти. Послідовність виразів, або просто послідовність, – це група виразів, що розділена комами. Базовою властивістю послідовності є збереження порядку наступності виразів. Послідовність може містити вирази, що повторюються, які розташовані в довільному порядку. Послідовність можна вважати сукупністю виразів, перенумерованих натуральними числами, починаючи з одиниці.

Для послідовності її тип має ім'я **exprseq**. Для задавання послідовності застосовують оператор присвоювання, у правій частині якого записана послідовність виразів або в лівій частині – послідовність змінних.

Можна звертатися як до послідовності в цілому, так і до окремих її елементів, указуючи у квадратних дужках поруч з іменем змінної номер елемента послідовності або діапазон її номерів у вигляді **[n..m]**.

Проте присвоїти нове значення елементу послідовності, використовуючи індексну форму її елемента в лівій частині оператора, не можна.

Для задавання великих за довжиною послідовностей використовується оператор **seq** із синтаксисом

>seq(f, i = n..m); >seq(f, i = s),

де **f** – вираз, що залежить від змінної; **i** – змінна, що визначає порядковий номер елемента послідовності; **n, m** – числа, що задають діапазон зміни величини із кроком 1; **s** – може бути списком, множиною, послідовністю, рядком:

>s1:=1,x,x^2,x^3;	$s1 := 1, x, x^2, x^3$
>whattype(s1);	<i>exprseq</i>
>s1[2..4];	x, x^2, x^3
>s1[2]:=y;	<i>invalid assignment (1, x, x^2, x^3)[2]:=y; cannot assign to an expression sequence</i>
>a,b,c,d:=s1;	$a, b, c, d := 1, x, x^2, x^3$
>a;b;c;d;	$1 \ x \ x^2 \ x^3$
>s2:=seq(1/(j^(3/2)),j=1..10);	$s2 := 1, 1/4*2^{(1/2)}, 1/9*3^{(1/2)}, 1/16*4^{(1/2)}, 1/25*5^{(1/2)}, 1/36*6^{(1/2)}, 1/49*7^{(1/2)}, 1/64*8^{(1/2)}, 1/81*9^{(1/2)}, 1/100*10^{(1/2)}$
>s3:=seq(1/i,i=s1);	$s3 := 1, \frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^3}$

Списки та множини

Списком будемо називати впорядковану послідовність виразів, що записується у квадратних дужках. Множиною будемо називати невпорядковану послідовність елементів, записану у фігурних дужках. Якщо в послідовності присутні елементи, що повторюються, то кожен з них є окремим елементом списку й

тим самим елементом у множині. Порядок елементів у списку важливий, список зберігає порядок наступності елементів. За допомогою індексної форми списку можна звернутися до будь-якого його елемента і присвоїти йому нове значення.

При задаванні множини елементів їхній порядок не є важливим і може змінюватися системою MAPLE самостійно. Індексну форму можна використовувати також для вибору відповідного елемента множини, але за її допомогою не можна присвоїти елементу множини нове значення.

Для вибору кількох елементів списку або множини за допомогою індексної форми можна використовувати діапазон, при цьому додатне значення індексу відповідає відліку елементів списку або множини зліва направо, а від’ємне значення – відліку справа наліво. Для задавання всіх елементів списку **S** можна записати індексний вираз **S[1..-1]**, тобто індекс -1 відповідає останньому елементу списку, а індекс -2 – передостанньому елементу списку або множини:

>sp1:=[1,x,x^2,x^3,x^4];	$sp1 := [1, x, x^2, x^3, x^4]$
>sp1[2];	x
>sp1[3..-1];	$[x^2, x^3, x^4]$
>sp1[3]:=y^2;	$sp1_3 := y^2$
>sp1:=sp1;	$sp1 := [1, x, y^2, x^3, x^4]$
>Mn1:={a,b,c,a,b,c,d,f,a};	$Mn1 := \{a, b, c, d, f\}$
>Mn1[2..4];	$\{b, c, d\}$
>Mn1[4];	d
>Mn1[4]:=dd;	<i>cannot reassign the entries in a set</i>

Над множинами можна виконувати теоретико-множинні операції, а саме операції об’єднання множин – **union**, різниці множин – **minus**, перетину множин – **intersect**:

>Mn2:=Mn1 union {e,g};	$Mn2 := \{a, b, c, d, f, e, g\}$
>Mn3:= Mn2 minus {b};	$Mn3 := \{a, c, d, f, e, g\}$
>Mn4:=Mn2 intersect Mn3;	$Mn4 := \{a, c, d, f, e, g\}$

Спеціальні засоби для роботи із множинними типами

Для роботи із множинними типами даних Maple надає досить потужні механізми, використання яких часто дозволяє значно швидше й лаконічніше записати та розв'язати математичну задачу. Серед них можна виділити команди **map**, **map2**, **select**, **remove** та **applyop**.

Розглянемо базові варіанти використання цих команд.

map дозволяє перетворити список або множину, застосувавши функцію до кожного з елементів, наприклад:

> map $\left(x \rightarrow \frac{1}{x}, [1, 2, 3, 4, 5] \right);$	$\left[1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5} \right]$
--	--

Також її можна застосовувати до виразів – у такому варіанті операцію буде виконано для кожного з аргументів:

> map $\left(x \rightarrow \frac{1}{x}, u + v + w \right);$	$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} + \frac{1}{w}$
--	---

Команда **map2** працює аналогічно, але дозволяє використувати функцію двох аргументів:

> map2 $((x, y) \rightarrow x \cdot y, 2, [1, 2, 3, 4]);$	$[2, 4, 6, 8]$
---	----------------

Команди **select** та **remove** дозволяють вибирати зі списків, множин і виразів елементи, які задовольняють потрібні умови. При цьому **select** утворює новий об'єкт із тих елементів, які задовольняють умову (предикат), а **remove** – навпаки, утворює новий об'єкт, відкинувши ті елементи, які задовольняють задану умову. Наприклад, вибрати парні числа зі списку можна так:

> select $(x \rightarrow \text{irem}(x, 2) = 0, [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8]);$

або так:

```
> remove(x → irem(x, 2) ≠ 0, [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8]);
```

Обидва варіанти дадуть вірний результат: **[2, 4, 6, 8]**.

Іноді зручно користуватися комбінацією цих команд – **selectremove**, яка дозволяє відмежувати ті елементи, що задовольняють предикат, від тих, які не задовольняють. Як приклад згенеруємо послідовність із 10 випадкових чисел від нуля до 100 й отримаємо з неї два списки – парних і непарних чисел:

> numbers := seq(irem(rand(), 100), i = 1..10);	
	numbers := 34, 15, 65, 59, 69, 42, 40, 80, 50, 65
> evenNums, oddNums := selectremove(x → irem(x, 2) = 0, [numbers]);	
	evenNums, oddNums := [34, 42, 40, 80, 50], [15, 65, 59, 69, 65]

Варто зауважити, що на результат виконання команди часто впливає тип аргументів. У даному випадку довелося перетворити послідовність чисел, яка була присвоєна змінній **numbers**, на список, узявши її до квадратних дужок – **[numbers]**.

Масиви

Для створення масиву в системі MAPLE необхідно використати оператор **array(границі, список)**. Тут параметр **границі** задає діапазон (діапазони) зміни індексу (індексів) масиву.

Для багатовимірних масивів відповідні діапазони мають задаватися підряд через кому. Параметр **список** призначений для задавання елементів масиву у вигляді вкладених списків із глибиною вкладення, що дорівнює розмірності масиву.

Перший і другий параметри функції **array** є обов'язковими, однак або перший, або другий має бути заданий. Якщо значення елемента масиву не задані функцією **array**, то їх можна присвоїти, використовуючи індексну форму елементів масиву в лівій частині оператора присвоювання. При введенні

імені масиву MAPLE лише повторює його ім'я, але не зображає його елементи.

Для отримання елементів масиву необхідно використати оператор `print(ім'я_масиву)`, який виведе зображення на лістингу MAPLE елементів масиву. Двовимірні масиви з індексами, що починаються з одиниці, зображуються у вигляді матриць:

<code>>MM:=array(1..4,1..4, [[1,2,3,4], [2,3,4,5],[3,4,5,6],[4,5,6,7]]);</code>	$MM := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$
<code>>MM1:=array(1..4,1..4 ,[seq([seq(i+j,i=1..4)],j=1..4)]);</code>	$MM1 := \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$
<code>>MM[2,1];MM;</code>	$2 \text{ } MM$
<code>>MM[3,3]:=100;</code>	$MM_{3,3} := 100$
<code>>print(MM);</code>	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 100 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$
<code>>MM2:=array(1..2,1..2 ,1..2,[[[a,b],[c,d]], [[a1,b1],[c1,d1]]]);</code>	$MM2 := \text{ARRAY}([1..2,1..2,1..2],[(1,1)=a,(1,1,2)=b,(1,2,1)=c,(1,2,2)=d,(2,1,1)=a1,(2,1,2)=b1,(2,2,1)=c1,(2,2,2)=d1])$
<code>>SM:=[seq([seq(m[i,j] ,j=1..3)], i=1..3)];</code>	

	$SM := [[m_{1,1}, m_{1,2}, m_{1,3}], [m_{2,1}, m_{2,2}, m_{2,3}], [m_{3,1}, m_{3,2}, m_{3,3}]]$
--	---

$>MMM:=array(SM);$	$MMM := \begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} \\ m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} \end{bmatrix}$
--------------------	--

Матриці та вектори

При застосуванні функцій пакету LinearAlgebra для розв'язання задач лінійної алгебри використовуються об'єкти системи Maple **Matrix** та **Vector**. Спосіб створення цих об'єктів не відрізняється від способу створення об'єктів типу **array** для двовимірного та одновимірного випадків (додаткові можливості для формування матриць і векторів спеціальної структури будуть розглянуті далі при вивченні пакету LinearAlgebra):

$> M := [\text{seq}([\text{seq}(m[i,j], j = 1..3)], i = 1..3)];$	
$M := [[m_{1,1}, m_{1,2}, m_{1,3}], [m_{2,1}, m_{2,2}, m_{2,3}], [m_{3,1}, m_{3,2}, m_{3,3}]]$	
$> SM := [[m_{1,1}, m_{1,2}, m_{1,3}], [m_{2,1}, m_{2,2}, m_{2,3}], [m_{3,1}, m_{3,2}, m_{3,3}]];$	
	$SM := [[m_{1,1}, m_{1,2}, m_{1,3}], [m_{2,1}, m_{2,2}, m_{2,3}], [m_{3,1}, m_{3,2}, m_{3,3}]]$
$> MM := Matrix(SM);$	$MM := \begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} \\ m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} \end{bmatrix}$

ЛЕКЦІЯ 2

Структура виразів і робота з ними

Часто для виконання певних дій з виразами необхідно виділити з виразу його частину та зробити з нею певні перетворення або замінити її на деякий інший вираз. У таких випадках треба знати структуру виразу й уміти з ним працювати шляхом звернення до будь-якої його частини. Кожен вираз у системі MAPLE можна зобразити у вигляді ієрархічної структури, де кожний об'єкт розділяється на підоб'єкти першого рівня, які, у свою чергу, складаються з підоб'єктів другого рівня і т. д. Процес виділення підоб'єктів триває доти, поки не будуть виділені базові прості елементи MAPLE, такі як цілі та дійсні числа, дроби, змінні величини символічного типу, функції, списки, послідовності, множини, масиви тощо.

Для роботи з виразами використовуються функції:

lhs(egn) – виділяє ліву частину рівності **egn**;

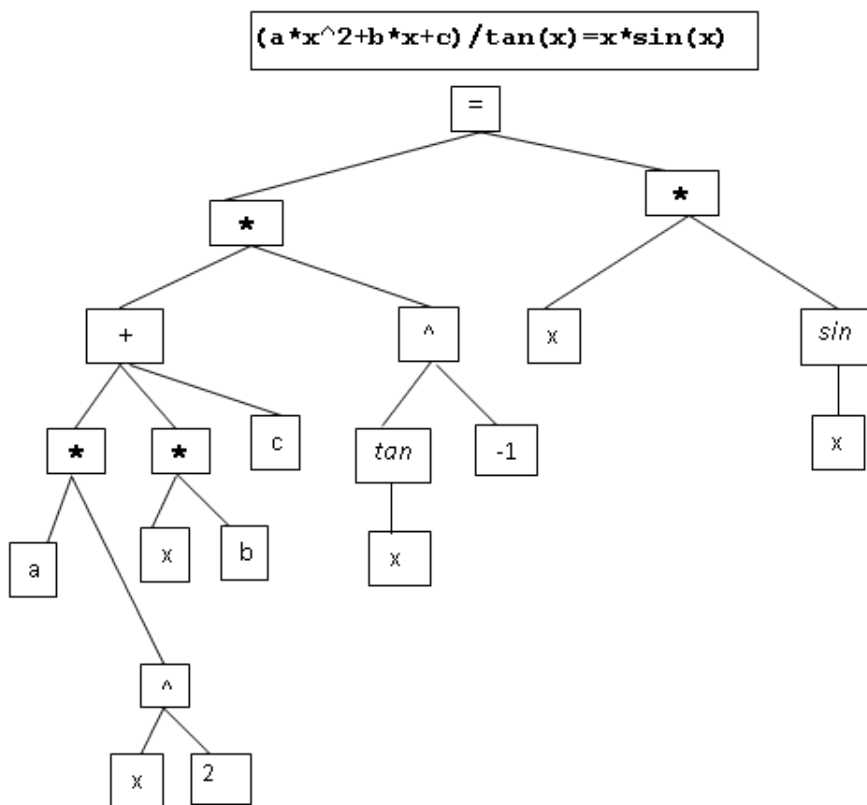
rhs(egn) – виділяє праву частину рівності **egn**;

numer(exp) – виділяє чисельник дробу **exp**;

denom(exp) – виділяє знаменник дробу **exp**;

> eq1 := (a*x^2 + b*x + c) / tan(x) = x*sin(x);	
	eq1 := $\frac{a x^2 + b x + c}{\tan(x)} = x \sin(x)$
> rhs(eq1);	x sin(x)
> lhs(eq1);	$\frac{a x^2 + b x + c}{\tan(x)}$
> numer(lhs(eq1));	a x ² + b x + c
> denom(lhs(eq1));	tan(x)

Структуру будь-якого виразу можна зобразити у вигляді дерева, для якого кінцеві вершини містять змінні, або числові дані різних типів, а проміжні вершини дерева вказують на відповідні операції або функції. Нижче на рисунку наведена деревоподібна структура виразу типу рівності:



Для детального вивчення структури будь-якого виразу використовуються такі функції MAPL:

whattype(exp) – повертає тип виразу **exp**;

op(exp) – повертає список об’єктів першого рівня виразу **exp**;

op(k..n, exp) – повертає список від *k*-го до *n*-го об’єктів першого рівня виразу **exp**;

(op(k, exp)) – повертає *k*-й об’єкт першого рівня виразу **exp**, при **k=0** повертається тип виразу **exp**;

nops(exp) – повертає кількість об’єктів першого рівня у виразі **exp**:

>op(0..nops(eq1), eq1);	$=, x \sin(x), \frac{a x^2 + b x + c}{\tan(x)}$
>eq11:=op(1, eq1);	$eq11 := x \sin(x)$
>eq12:=op(2, eq1);	$eq12 := \frac{a x^2 + b x + c}{\tan(x)}$
>op(0..nops(eq11), eq11);	$*, x, \sin(x)$
>op(0..nops(eq12), eq12);	$*, a x^2 + b x + c, \frac{1}{\tan(x)}$
>eq121:=op(1, eq12);	$eq121 := a x^2 + b x + c$
>op(0..nops(eq121), eq121);	$+, a x^2, b x, c$
>op(1, eq121);	$a x^2$
>op(2, eq12);	$\frac{1}{\tan(x)}$
>op(op(2, eq12));	$\tan(x), -1$
>op(1, op(2, eq12));	$\tan(x)$

В останніх прикладах привертає увагу те, що за потреби дістатися підвиразів достатньо глибокого рівня використання функції **op** у базовому вигляді стає громіздким – важко читати конструкції вигляду **op(3, op(1, op(2, op(1, f))))**. У таких ситуаціях **op** дозволяє альтернативний синтаксис:

op([k, l, m, n...], f).

Тут першим аргументом є список (і тільки список, послідовність недопустима), кожен елемент якого вказує індекс об'єкта відповідного рівня структури виразу, що аналізується, тобто конструкція **op(3, op(1, op(2, op(1, f))))** перетвориться на **op([1, 2, 1, 3], f)**. Наприклад, для отримання коефіцієнта при x у виразі $\frac{y}{x \cos(2x)}$ можна діяти таким чином:

<code>> test := $\frac{y}{x \cdot \cos(2 \cdot x)}$;</code>	<code>test := $\frac{y}{x \cos(2 \ x)}$</code>
<code>> op(test);</code>	<code>y, $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{\cos(2 \ x)}$</code>
<code>> op(3, test);</code>	<code>$\frac{1}{\cos(2 \ x)}$</code>
<code>> op(1, op(3, test));</code>	<code>cos(2 x)</code>
<code>> op(1, op(1, op(3, test)));</code>	<code>2 x</code>
<code>> op(1, op(1, op(1, op(3, test))));</code>	<code>2</code>

Після цього можна записати досить лаконічну команду, яка даватиме потрібний результат: **>op([3, 1, 1, 1], test)**. Якщо ж на останньому рівні треба отримати не один операнд, а кілька, то можна записати команду, де номери операндів записані як діапазон:

>op([3, 1, 1, 1..2], test)
2, x.

Широкі можливості для роботи зі структурою виразів надають розглянуті раніше функції **select**, **remove** та **selectremove**, якщо скомбінувати їх із функцією **has**.

Функція **has** дозволяє перевірити, чи міститься один вираз в іншому, наприклад:

<code>> f := exp(x² + 2 · x · y + y²);</code>	<code>f := e^{x² + 2 x y + y²}</code>
--	---

<code>> has(f, x·y);</code>	<code>true</code>
<code>> has(f, exp(x²));</code>	<code>false</code>

Варто звернути увагу, що ніяких перетворень над виразом не виконується – дерево виразу сканується в тому вигляді, у якому є. Покажемо, яким чином можна виділити з відносно складного добутку ті множники, що залежать від **x**, і ті, що не залежать:

<code>> g := exp(x²)·ln(1+x)·sin(y);</code>	<code>g := e^{x²} ln(1+x) sin(y)</code>
<code>> select(has, g, x);</code>	<code>e^{x²} ln(1+x)</code>
<code>> xPart, yPart := selectremove(has, g, x);</code>	
	<code>xPart, yPart := e^{x²} ln(1+x), sin(y)</code>

Для складніших виразів результат використання аналогічних конструкцій може бути менш очевидним:

<code>> u := $\frac{(x^2+y^2)}{1+y^2} \cdot \frac{\text{sqrt}(x+y)}{\text{sqrt}(x^2+y^2+1)} + \sin(x) \cdot \sin(y);$</code>	
	<code>u := $\frac{(x^2+y^2) \sqrt{x+y}}{(1+y^2) \sqrt{x^2+y^2+1}} + \sin(x) \sin(y)$</code>
<code>> u1 := select(has, u, x²+y²);</code>	
	<code>u1 := $\frac{(x^2+y^2) \sqrt{x+y}}{(1+y^2) \sqrt{x^2+y^2+1}}$</code>
<code>> select(has, u1, x);</code>	<code>$\frac{(x^2+y^2) \sqrt{x+y}}{\sqrt{x^2+y^2+1}}$</code>

Якщо проаналізуємо структуру виразу, використавши функцію **op** і подивившись на вираз **u1** із цього прикладу (команда **op(u1)**), то побачимо, що не містить **x** тут лише один підвираз, який і було відкинуто функцією **select**.

Обмеження на змінні величини

Для виконання різноманітних математичних обчислень і перетворень дуже часто необхідно накладати на відповідні змінні певні обмеження, робити відносно змінних певні припущення про область їхніх значень. У системі MAPLE існує кілька команд, які дозволяють вводити й перевіряти обмеження, накладені на змінні або цілі вирази.

Команда **assume(x, властивість)** накладає на змінну **x** відповідну властивість. Тут **x** є змінною або виразом, що включає цю змінну. Властивість може набувати таких найуживаніших значень:

Властивість	Опис властивості
negative	від'ємні дійсні числа
nonnegative	невід'ємні дійсні числа
positive	додатні дійсні числа
natural	натуральні числа (0, 1, 2, 3...)
posint	цілі, строго більше 0
odd	непарні числа
even	парні числа
complex	комплексні числа
real	дійсні числа
rational	раціональні числа
integer	цілі числа

Пару параметрів (**x, властивість**) можна замінити математичним відношенням, наприклад: **assume(x>0); assume(x>=0)**. Якщо на змінну накладені обмеження, то в результатах перетворень з нею ця змінна виводиться за замовчанням зі знаком (~).

Команда **assume** може мати кілька пар (**x, властивість**) або математичних відношень, наприклад **assume(x>1, x<=2)**.

Нове обмеження, що накладається новою командою **assume()** на змінну, скасовує всі попередні обмеження.

Для послідовного додавання додаткових обмежень у процесі розв'язання задач можна використовувати команду **additionally()** з параметрами, аналогічними параметрам команди **assume**, наприклад **assume (x>=0), additionally(x<=100)**. Таким чином, обмеження, накладені двома останніми операторами, накладають на змінну **x** обмеження **0 <=x<=100**.

За допомогою функції **is()**, яка повертає значення **true** або **false**, можна з'ясувати, задовольняє змінна відповідну властивість або ні:

> assume(x > 5, y < -10); is(x*y < 50);	true
> assume(x > y, y > 0); is(x < 0);	false
> assume((2*i + 2)/2, integer); is(i, integer);	true

Команда **coulditbe(змінна, властивість)** перевіряє, чи є можливим виконання властивості (умови) для відповідної змінної:

> assume(0 ≤ x, y > 0);	
> coulditbe($\frac{x}{y} > 0$);	true
> coulditbe($\frac{x}{y} > 1$);	FAIL

Команди перетворення виразів

Головна перевага системи MAPLE полягає в можливості здійснювати не тільки обчислення над числовими виразами та функціями, але й виконувати символічні обчислення над виразами, які містять змінні величини та функції. Команди перетворення виразів мають такий синтаксис:

команда (пар_1, пар_2, ..., пар_n) ;
або

команда (пар_1, пар_2, ..., пар_n) :.

У першому випадку, коли команда закінчується крапкою з комою, вона виконується й після неї виводиться результат виконання. У другому випадку, коли команда закінчується двокрапкою, вона виконується, але результат не виводиться.

Команда спрощення виразів `simplify()`

Ця команда призначена для здійснення операції спрощення виразів, які включають раціональні, тригонометричні, обернені тригонометричні, логарифмічні та експоненціальні функції.

Команда має кілька форм використання: **`simplify(вираз)`** ; У дужках задається вираз, який треба спростити. Для спрощення окремих типів виразів раціонально застосовувати додаткові параметри команди **`simplify (вираз, n1,n2,...)`** . Тут **`n1`**, **`n2`**, – імена процедур спрощення виразів, а саме:

`exp` – для спрощення функцій з експоненціальними виразами;

`ln` – для спрощення виразів з логарифмами;

`sqrt` – для спрощення виразів із квадратними коренями;

`trig` – для спрощення тригонометричних виразів;

`radical` – для спрощення виразів із дробовими степенями;

`power` – для спрощення виразів зі степенями, експонентами, логарифмами.

Крім того, як параметр процедури **`simplify`** можна використовувати параметр вигляду **`assume=властивість`**, де параметр **`властивість`** може набувати одного з таких значень:

`complex` – комплексна область;

`real` – дійсна область;

`positive` – додатні дійсні числа;

`integer` – цілі числа;

RealRange(a, b) – інтервал (a, b) дійсних чисел.

Команда спрощення дозволяє користувачу задавати власні правила спрощення, які він може задіяти при виконанні спрощення відповідного виразу.

Ці правила задаються в команді **simplify()** другим параметром і мають такий вигляд: {рівність 1, рівність 2,...}.

Розглянемо приклади використання оператора спрощення виразів.

$> q1 := ((x-a)^2 + x*(x-a) + x^2) / ((x-a)^2 - x*(x-a) + x^2)$		
	$q1 := \frac{(x-a)^2 + x (x-a) + x^2}{(x-a)^2 - x (x-a) + x^2} - \frac{19}{7}$	
$> \text{simplify}(q1);$	$-\frac{2}{7} \frac{-x^2 + x a + 6 a^2}{x^2 - x a + a^2}$	
$> q2 := ((x-a)*\text{sqrt}(x-a) + (x-b)*\text{sqrt}(x-b)) / (\text{sqrt}(x-a) + \text{sqrt}(x-b)) + a + b;$		
	$q2 := \frac{(x-a)^{3/2} + (x-b)^{3/2}}{\sqrt{x-a} + \sqrt{x-b}} + a + b$	
$> \text{simplify}(q2);$	$2 x - \sqrt{x-b} \sqrt{x-a}$	
$> q3 := \log[a](\text{sqrt}(a^2-1)) * (\log[1/a](\text{sqrt}(a^2-1)))^2 / (\log[a^2](a^2-1) * \log[a^{(1/3)}]((a^2-1)^{(1/6)}));$		
	$q3 := \frac{1}{4} \frac{\ln(a^2-1) \ln(a^2)}{\ln\left(\frac{1}{a}\right)^2}$	
$> \text{assume}(a > 0);$		$\frac{1}{2} \frac{\ln(a+1) + \ln(a-1)}{\ln(a)}$
$> \text{simplify}(q3);$		
$> q4 := (1-2*(\cos(v))^2) / (\sin(v) * \cos(v)) + 2*\tan(2*v) + \cot(4*v)-3;$		
	$q4 := \frac{1-2 \cos(v)^2}{\sin(v) \cos(v)} + 2 \tan(2 v) + \cot(4 v) - 3$	
$> q5 := \text{simplify}(q4);$		
	$q5 := -\frac{3}{4} \frac{8 \cos(v)^4 + 8 \sin(v) \cos(v)^3 - 8 \cos(v)^2 - 4 \sin(v) \cos(v) + 1}{(2 \cos(v)^2 - 1) \sin(v) \cos(v)}$	

<code>> combine(q5);</code>	$\frac{-3 \cos(4 v) - 3 \sin(4 v)}{\sin(4 v)}$
<code>> q6 := sin(x) + cos(x)·sin($\frac{x}{2}$)·cos($\frac{x}{2}$);</code>	
	$q6 := \sin(x) + \cos(x) \sin\left(\frac{1}{2} x\right) \cos\left(\frac{1}{2} x\right)$
<code>> simplify(q6);</code>	
	$\sin\left(\frac{1}{2} x\right) \cos\left(\frac{1}{2} x\right) \left(2 \cos\left(\frac{1}{2} x\right)^2 + 1\right)$
<code>> simplify($q6, \left\{2 \cdot \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right) = \sin(x)\right\}$);</code>	
	$\frac{1}{2} \sin(x) (2 + \cos(x))$

Примітка. Тут і далі формат деяких таблиць змінено у зв'язку з великим розміром команд, але, як і раніше, ліві комірки містять команди, а праві – реакцію системи.

Команда `assuming` і пакет `Real Domain`

При спрощенні складних виразів вигляд результату перетворення значною мірою залежить від області значень та області визначення виразів і функцій, що входять до виразу. У зв'язку з цим MAPLE дозволяє будь-які перетворення здійснювати в припущенні виконання деяких властивостей щодо змінних величин, причому самим величинам ці властивості не приписують. Перетворення такого типу здійснюють із використанням функції **`assuming`**, яка має вигляд **вираз або змінна `assuming` властивість**. У результаті перетворення виразу відбудеться в припущенні відповідної властивості:

<code>> e2 := ln($\frac{y^3}{x^2}$) - ln(y) + ln(x);</code>	$e2 := \ln\left(\frac{y^3}{x^2}\right) - \ln(y) + \ln(x)$
<code>> simplify(e2);</code>	$\ln\left(\frac{y^3}{x^2}\right) - \ln(y) + \ln(x)$
<code>> simplify(e2) assuming x::positive, y::positive;</code>	

	$2 \ln(y) - \ln(x)$
<code>> restart;</code>	
<code>> e3 := (-8 a^3)^{$\frac{1}{3}$};</code>	$e3 := (-8 a^3)^{1/3}$
<code>> simplify(e3);</code>	<code>> simplify(e3);</code>
<code>> simplify(e3) assuming a > 0;</code>	
	$a \left(\sqrt{3} + 1 \right)$
<code>> with(RealDomain);</code>	
	[$\Im$, $\Re$, $\wedge$, arccos, arccosh, arccot, arccoth, arccsc, arccsch, arcsec, arcsech, arcsin, arcsinh, arctan, arctanh, cos, cosh, cot, coth, csc, csch, eval, exp, expand, limit, ln, log, sec, sech, signum, simplify, sin, sinh, solve, sqrt, surd, tan, tanh]
<code>> simplify($\left((-8 \cdot a^3)^{\frac{1}{3}} \right)$);</code>	$-2 a$
<code>> is(a ≥ 0);</code>	<code>> is(a ≥ 0);</code>

Команди розкриття дужок у виразах `expand()`

Команда **`expand()`** здійснює розкриття дужок і перетворює добутки на суми в будь-яких алгебраїчних виразах. Ця команда виконується для будь-яких поліномів і частки двох поліномів. У випадку частки двох поліномів команда розкриває дужки в чисельнику й ділить кожний член отриманого виразу на знаменник, який вона не змінює. Крім того, команда **`expand()`** уміє розкривати дужки для більшості математичних функцій: **`sin(x)`**, **`cos(x)`**, **`tg(x)`**, **`ln(x)`**, **`exp(x)`**, **`sh(x)`**, **`ch(x)`** та ін.

Команда **`expand(eq, p1, p2, ...pn)`** може містити параметри, що вказують на виключення, які необхідно зробити при розк-

ритті дужок у виразі **eq**. Параметром може бути як назва функції, так і деякий підвираз виразу **eq**, наприклад:

> assume(a > 0, b > 0);	
> f4 := ln(a^3*b^5*3) + sin(x-y)*cos(x+y);	
	f4 := ln(3 a^3 b^5) + sin(x-y) cos(x+y)
> expand(f4, cos);	
	ln(3) + 3 ln(a~) + 5 ln(b~) + cos(x+y) sin(x) cos(y) - cos(x+y) cos(x) sin(y)
> f1 := sin(x+y)*sin(y+z);	
	f1 := sin(x+y) sin(y+z)
> expand(f1);	
	sin(x) cos(y) sin(y) cos(z) + sin(x) cos(y)^2 sin(z) + cos(x) sin(y)^2 cos(z) + cos(x) sin(y) cos(y) sin(z)
> f2 := (a*x^2+b*x^3)*(b*x^3+3*a*x^2);	
	f2 := (a x^2 + b x^3) (b x^3 + 6 a x)
> expand(f2);	
	a x^5 b + 6 a^2 x^3 + b^2 x^6 + 6 b x^4 a
> f3 := ln(3*a^2*b);	> f3 := ln(3*a^2*b);
> expand(f3);	> expand(f3);
> assume(a > 0, b > 0);	
> expand(f3);	> expand(f3);

Команда **combine** зведення кількох членів виразу до одного

Команда **combine()** зводить кілька членів, поданих сумою, добутком або степенями, до одного члена, використовуючи різноманітні правила, які є фактично оберненими до правил перетворення команди **expand()**. Розглянемо приклади використання команди **expand**:

> g1 := sin(x)*cos(y) + cos(x)*sin(y) + sin^2(x) - $\frac{3}{2}$;	
--	--

	$g1 := \sin(x) \cos(y) + \cos(x) \sin(y) + \sin(x)^2 - \frac{3}{2}$	
> combine(g1);	$\sin(x+y) - 1 - \frac{1}{2} \cos(2x)$	
> assume(x > 0, y > 0)		
> g2 := 2*ln(x) + 3*ln(y);	$g2 := 2 \ln(x) + 3 \ln(y)$	
> combine(g2);	$\ln(x^2 y^3)$	
> g3 := exp(2*x)*exp(y)/exp(z) + 2*sin(x)*cos(x);		
	$g3 := \frac{e^{2x} e^y}{e^z} + 2 \sin(x) \cos(x)$	
> combine(g3);	$e^{2x+y-z} + \sin(2x)$	
> g4 := 2*sin(x)^11 + 3*cos(x)^3 + 15*sin(x);		
	$g4 := 2 \sin(x)^{11} + 3 \cos(x)^3 + 15 \sin(x)$	
> combine(g4);		
	$-\frac{1}{512} \sin(11x) + \frac{11}{512} \sin(9x) - \frac{55}{512} \sin(7x) + \frac{165}{512} \sin(5x)$ $-\frac{165}{256} \sin(3x) + \frac{4071}{256} \sin(x) + \frac{3}{4} \cos(3x)$	

Розкладання поліноміальних виразів на прості множники, функція factor()

Призначення функції **factor()** – розкласти на множники поліном від кількох змінних. Під поліномом у системі MAPLE розуміють вираз, що містить невідомі величини, у яких кожний член має вигляд добутку цілих невід’ємних степенів невідомих величин із числовими або алгебраїчними коефіцієнтами, тобто коефіцієнт може бути цілим, дробовим, числом із плаваючою точкою, комплексним числом або алгебраїчним виразом з іншими змінними. Невідома величина в поліномі може бути зображена викликом деякої функції, аргумент якої є невідомою величиною.

Команда розкладання полінома має вигляд **factor(exp, K)**, де **exp** – вираз, що підлягає розкладанню на множники, а **K** – необов’язковий параметр, який уточнює, над яким полем числових коефіцієнтів воно здійснюється. Цей параметр може набувати значень **real**, **complex**, мати значення одного радикала або списку радикалів:

<code>> h1 := x^3 - 3· x^2·y + 3·x·y^2 - y^3;</code>	$h1 := x^3 - 3 x^2 y + 3 x y^2 - y^3$
<code>> factor(h1);</code>	$(x - y)^3$
<code>> h2 := x^3 + 3;</code>	$h2 := x^3 + 3$
<code>> factor(h2, 3^{1/3});</code>	$(x^2 - x 3^{1/3} + 3^{2/3}) (x + 3^{1/3})$
<code>> factor(h2, real);</code>	
	$(x + 1.442249570) (x^2 - 1.442249570 x + 2.080083822)$
<code>> factor(h2, complex);</code>	
	$(x + 1.442249570) (x - 0.7211247852 + 1.249024766 i)$ $(x - 0.7211247852 - 1.249024766 i)$
<code>> h3 := (x^3 - y^3);</code>	$h3 := x^3 - y^3$
<code>> factor(h3);</code>	$(x - y) (x^2 + x y + y^2)$
<code>> factor(h3, (-3)^{1/2});</code>	
	$-\frac{1}{4} (-2 x - y + y \sqrt{-3}) (2 x + y + y \sqrt{-3}) (x - y)$
<code>> h4 := x^2 + 3^(1/3)·x + 3^(2/3);</code>	
	$h4 := x^2 + x 3^{1/3} + 3^{2/3}$
<code>> factor(h4, {(-3)^{1/2}, 3^{1/3}});</code>	
	$-\frac{1}{4} (2 x + 3^{1/3} + 3^{1/3} \sqrt{-3}) (-3^{1/3} + 3^{1/3} \sqrt{-3} - 2 x)$
<code>> h5 := evalf(h4);</code>	
	$h5 := x^2 + 1.442249570 x + 2.080083823$
<code>> factor(h5, complex);</code>	
	$(x + 0.7211247850 + 1.249024767 i)$

	$(x + 0.7211247850 - 1.249024767 i)$
--	--------------------------------------

Команда зведення подібних членів `collect()`

Команда **`collect()`** працює із узагальненими поліномами кількох змінних – поліномами, у яких невідомими можуть бути функції з аргументами, що є невідомими величинами в MAPLE. Синтаксис цієї команди має три форми:

```
collect(exp, x);
collect(exp, x, form, func);
collect(exp, x, func)
```

Тут **exp** – вираз, у якому необхідно виконати комплектування за степенями невідомих;

x – ім'я невідомої величини, список, множина невідомих величин у випадку полінома кількох змінних або ім'я функції з аргументом;

form має два значення, **recursive** або **distributed**, зміст для багаточленів кількох змінних і впливає на алгоритм зведення подібних членів відносно обраного списку змінних;

func – параметр, що визначає ім'я команди, яка використовується для отриманих коефіцієнтів, зазвичай **`simplify()`** або **`factor()`**:

<code>> s1 := 2*x^3*a^2*y^2 + 3*x^3*y^2*b + 2*x^2*y^3*a^2 + 4*a*x^2*y^3;</code>		
	$s1 := 2 x^3 a^2 y^2 + 3 x^3 y^2 b + 2 x^2 y^3 a^2 + 4 a x^2 y^3$	
<code>> collect(s1, [y, x]);</code>		
	$(2 a^2 + 4 a) x^2 y^3 + (2 a^2 + 3 b) x^3 y^2$	
<code>> collect(s1, [y, x], factor);</code>		
	$(2 a^2 + 3 b) x^3 y^2 + 2 a (a + 2) y^3 x^2$	
<code>> s2 := 2*a*(sin(x))^2 + 3*b^2*(sin(x))^2*x^2 + 15*x^2*sin(x) + 2*c*sin(x);</code>		
	$s2 := 2 a \sin(x)^2 + 3 b^2 \sin(x)^2 x^2 + 15 x^2 \sin(x) + 2 c \sin(x)$	
<code>> collect(s2, sin);</code>		

	$(2 a + 3 b^2 x^2) \sin(x)^2 + (15 x^2 + 2 c) \sin(x)$
--	--

Скорочення алгебраїчного дробу. Команда **normal()**

Призначення команди **normal()** полягає у зведенні виразів, що містять алгебраїчні дробу, до спільного знаменника і спрощення отриманого алгебраїчного дробу шляхом скорочення чисельника і знаменника. Повний вигляд команди **normal()** такий: **normal(f, expanded)**, де **f** – алгебраїчний дріб, а необов’язковий параметр **expanded** указує на те, що після скорочення дробу в чисельнику і знаменнику розкриваються дужки:

<code>> gg1 := 1/(x+1)^2 + 3/(x-1)^2 + 4/((x-1)*(x+1));</code>	
	$gg1 := \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{3}{(x-1)^2} + \frac{4}{(x-1)(x+1)}$
<code>> normal(gg1);</code>	$\frac{4 x (2 x + 1)}{(x + 1)^2 (x - 1)^2}$
<code>> normal(gg1, expanded);</code>	$\frac{8 x^2 + 4 x}{x^4 - 2 x^2 + 1}$
<code>> gg2 := $\frac{\ln(x)}{\sin(x)^2} + \frac{x}{\sin(x)} + \frac{\exp(x)}{\sin(x)^3}$;</code>	
	$gg2 := \frac{\ln(x)}{\sin(x)^2} + \frac{x}{\sin(x)} + \frac{e^x}{\sin(x)^3}$
<code>> normal(gg2);</code>	$\frac{\ln(x) \sin(x) + x \sin(x)^2 + e^x}{\sin(x)^3}$

Перетворення виразів за допомогою підстановок

Для аналітичного перетворення виразів, зокрема для їхнього спрощення, у математиці використовують операцію підстановки, коли замість одних змінних і виразів здійснюється підстано-

вка інших змінних і виразів. У системі MAPLE існують кілька команд, які виконують відповідні функції. До них належать:

- **subs(x=a, exp)** – у виразі **exp** заміняє **x** на **a**.
- **subs(s1,s2...sn, exp)** – у виразі **exp** заміняє одні підвирази на інші, обираючи їх із послідовності, списку або множини **s1,s2...sn**. Кожен елемент списку має вигляд **x=a**. Підстановки виконуються послідовно для випадку, коли **s1,s2...sn** – послідовність або одночасно для випадку, коли **s1,s2...sn** – список або множина.
- **subsop(N1=a1,...,Nk =ak, exp)** – у виразі **exp** заміняє підвираз зі структурним номером **N1** на підвираз **a1...**, зі структурним номером **Nk** – на підвираз **ak**, де структурний номер підвиразу має вигляд **NK=[nk1, nk2,...]** і визначається за допомогою аналізу структури оператором **op(n, exp)**. Усі підстановки виконуються послідовно.
- **algsubs(x=a, exp)** – у виразі **exp** заміняє підвираз **x** на підвираз **a**.

Між командами **subs** і **algsubs**, незважаючи на їхню схожість, є суттєва різниця, яка полягає в такому. Процедура **subs** здійснює заміну підвиразу **x** на підвираз **a** лише у випадку, коли підвираз **x** є елементом структури виразу **exp** довільного рівня. Процедура **algsubs** здійснює заміну підвиразу **x** на підвираз **a** у випадку, коли підвираз **x** входить як алгебраїчний підвираз у вираз **exp**.

Розглянемо приклади застосування різних підстановок:

> restart;	
> q1 := 2*x^3*y + 3*x^2*z + sqrt(x);	
	$q1 := 2 x^3 y + 3 x^2 z + \sqrt{x}$
> algsubs(x^2=y, q1);	$2 y^2 x + 3 z y + \sqrt{x}$
> subs(x^2=y, q1);	$2 x^3 y + 3 z y + \sqrt{x}$
> q2 := $\frac{3 \cdot u^3}{2 \cdot v} + \frac{u}{v}$;	$q2 := \frac{3}{2} \frac{u^3}{v} + \frac{u}{v}$

> subs($\frac{u}{v} = z, q2$);	$\frac{3}{2} \frac{u^3}{v} + z$
> algs subs($\frac{u}{v} = z, q2$);	$\frac{3}{2} z u^2 + z$
> collect(% , z);	$\left(\frac{3}{2} u^2 + 1\right) z$
> subsop(2=z, q2);	$\frac{3}{2} \frac{u^3}{v} + z$
> subsop(1=x, 2=z, q2);	$x + z$
> subsop([1, 2]=z, q2);	$\frac{3}{2} \frac{z}{v} + \frac{u}{v}$
> q3 := op(q2)[1];	$q3 := \frac{3}{2} \frac{u^3}{v}$
> op(q3)[2];	u^3
> q4 := 2*(sin(x))^(1/2)*cos(x) + cos(x)/sin(x);	
	$q4 := 2 \sqrt{\sin(x)} \cos(x) + \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$
> subs(sin(x)=sqrt(1-(cos(x))^2), q4);	
	$2 (1 - \cos(x)^2)^{1/4} \cos(x) + \frac{\cos(x)}{\sqrt{1 - \cos(x)^2}}$
> algs subs(sin(x)=sqrt(1-(cos(x))^2), q4);	
	$2 (1 - \cos(x)^2)^{1/4} \cos(x) + \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$
> algs subs(1/sin(x)=1/sqrt(1-(cos(x))^2), q4);	
	$\frac{\cos(x) (2 \sqrt{\sin(x)} \sqrt{1 - \cos(x)^2} + 1)}{\sqrt{1 - \cos(x)^2}}$
> exp1 := ln(sin(x/y)) + exp(x+z) = x^3*y + cos(y);	
	$exp1 := \ln\left(\sin\left(\frac{x}{y}\right)\right) + e^{x+z} = x^3 y + \cos(y)$
> exp11 := subs(x/y=x+y, exp1);	
	$exp11 := \ln(\sin(x+y)) + e^{x+z} = x^3 y + \cos(y)$
> exp12 := op(1, op(1, op(1, exp11)));	
	$exp12 := \sin(x+y)$
> op(2, op(2, exp1))	
	$\cos(y)$

<code>> subsop([1, 1, 1]=expand(exp12), [2, 2]=convert(op(2, op(2, exp1)), tan), exp1)</code>	
	$\ln(\sin(x) \cos(y) + \cos(x) \sin(y)) + e^{x+z} =$ $x^3 y + \frac{1 - \tan\left(\frac{1}{2} y\right)^2}{1 + \tan\left(\frac{1}{2} y\right)^2}$

Перетворення виразів на еквівалентні форми запису. Функція **convert**

У системі MAPLE є потужна функція **convert(exp, form)**, яка здійснює складні перетворення виразів на інші еквівалентні форми запису. Тут **exp** – вираз, **form** – параметр, який вказує на спосіб перетворення. В останніх версіях системи MAPLE нараховується більше 100 різних параметрів, з описом яких можна ознайомитись у довідковій системі. Нижче наведено лише найпростіші використання команди **convert**:

<code>> q1 := solve(x^4 + 3*x^3 + 4=0, x);</code>	
	<code>q1 := RootOf(_Z^4 + 3 _Z^3 + 4, index=1), RootOf(_Z^4 + 3 _Z^3 + 4, index=2), RootOf(_Z^4 + 3 _Z^3 + 4, index=3), RootOf(_Z^4 + 3 _Z^3 + 4, index=4)</code>
<code>> convert(q1[2], radical);</code>	Результат роботи оператора не наведений у зв'язку з дуже громіздким виразом кореня у вигляді радикалів, до того ж користувач може самостійно його отримати
<code>> convert(sin(x), tan);</code>	$\frac{2 \tan\left(\frac{1}{2} x\right)}{1 + \tan\left(\frac{1}{2} x\right)^2}$
<code>> convert(sin(x), exp);</code>	$-\frac{1}{2} I \left(e^{I x} - e^{-I x} \right)$
<code>> > convert(sinh(x), exp);</code>	$\frac{1}{2} e^x - \frac{1}{2} e^{-x}$

$> \text{convert}\left(\sin\left(\frac{\pi}{12}\right), \text{radical}\right);$	$\frac{1}{4} \sqrt{2} (\sqrt{3} - 1)$
$> f := \frac{(2 \cdot x^4 - 3 \cdot x^3 + 1)}{x^2 + 2 \cdot x - 5};$	$f := \frac{2 x^4 - 3 x^3 + 1}{x^2 + 2 x - 5}$
$> \text{convert}(f, \text{parfrac});$	$x^2 - 7 x + 24 + \frac{121 - 83 x}{x^2 + 2 x - 5}$
$> \text{convert}(3 + 5 \cdot I, \text{polar});$	$\text{polar}\left(\sqrt{34}, \arctan\left(\frac{5}{3}\right)\right)$

ЛЕКЦІЯ 3

Обчислення виразів

У програмі символьних обчислень MAPLE користувач зустрічається з поняттям обчислення символьних імен. Подібна функція відсутня для систем чисельних обчислень. Здебільшого система MAPLE використовує алгоритм повного обчислення символьної змінної, тобто у випадку, коли необхідно обчислити значення символьної змінної, система перевіряє, чи присвоювались цій змінній які-небудь значення. Якщо так, то вони підставляються замість імені змінної та перевіряється, чи містять підставлені значення невідомі змінні. Якщо містять, то перевіряється, чи були присвоювання цим змінним певних значень, якщо ж були, то вони підставляються замість значень змінних. Процес продовжується рекурсивно, поки замість усіх імен не будуть підставлені присвоєні їм значення, або, якщо деяким змінним нічого не присвоювалось, то такі змінні залишаються у виразі як невідомі величини.

Для повного обчислення системою MAPLE значення будь-якої змінної достатньо просто вказати її ім'я або можна використати команду **eval(x)**, де **x** – ім'я відповідної змінної, яку необхідно обчислити.

Правило повного обчислення значення змінних при задаванні імені змінної діє для змінних усіх типів за винятком тих, що

містять масиви, матриці, таблиці та процедури. Для цих змінних діє правило обчислення до значення останнього присвоєного символічного імені. Для виконання повного обчислення такої змінної необхідно явно ініціювати команду **eval(Y)**.

У випадку, коли необхідно обчислити ім'я змінної, не застосовуючи алгоритм повного обчислення її значення, можна використати оператор **evaln(x)**; або той самий результат отримати за допомогою запису імені відповідної змінної в одинарних лапках **'x'**. Указаний оператор можна використовувати для того, щоб анулювати всі попередні присвоювання, здійснені відносно змінної, що дозволить застосовувати її як невідому величину зі значенням, що дорівнює імені змінної.

Продемонструємо на прикладах правило обчислення символічних змінних:

>x:=a*c; c:=b^2+2; a:=(d+e)^3;	x:=a c c:=b²+2 a:=(d+e)³
>x; >eval(x);	(d+e)³ (b²+2) (d+e)³ (b²+2)
>y:=d+e;	y:=d+e
>x*y; >eval(x*y);	(d+e)⁴ (b²+2) (d+e)⁴ (b²+2)
>x/y;	(d+e)² (b²+2)
>evaln(x); >evaln(y);	x y
>x:=evaln(x);	x:=x
>x;	x
>y:='y'; >y;	y:=y y

На практиці в математичних дослідженнях дуже часто виникає задача обчислення значення математичного виразу або функції за конкретних значень змінних величин, що входять до відповідного виразу. Для того щоб зберегти вираз і водночас обчислити його значення за вказаних значень параметрів, можна скористатися оператором **eval(expr, [eq1,eq2,...eqn]);**, де **expr** – математичний вираз, що містить змінні величини, параметри **eq1,eq2,...eqn** – рівності, що задають значення змінним величинам, за яких має бути обчисленим відповідний вираз **expr**:

>g:=2*x^3*y+3*x*y^3+5*x*y;	$g := 2 x^3 y + 3 x y^3 + 5 x y$
>gg:=eval(g, x=1);	$gg := 7 y + 3 y^3$
>gg1:=eval(gg, y=1);	$gg1 := 10$
>eval(g, [x=1, y=1]);	10

Система MAPLE прагне виконати обчислення будь-якої величини точно й за можливості використовує арифметику дробових чисел і радикалів. Якщо при виконанні обчислень результат можна одержати лише у вигляді ірраціонального числа або доцільніше отримувати числа у вигляді звичайних десяткових дробів із заданою кількістю знаків після коми, то для обчислення значення виразу можна застосовувати оператор **evalf(f, n)**, де **f** – вираз, який необхідно обчислити, а **n** – кількість значущих цифр, які використовуються при обчисленнях (за замовчанням **n=10**).

Зверніть увагу на різницю між значеннями однакових виразів, що обчислені за допомогою операторів **eval** та **evalf**:

>f:=x->sin(x)/x;	$f := x \rightarrow \frac{\sin(x)}{x}$
>eval(f(Pi/4));	$\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$

<code>>evalf(f(Pi/4),20);</code>	0.90031631615710606954
<code>>evalf(1/3*x^2+sin(Pi/4)*x+sqrt(3),6);</code>	$0.333333x^2 + 0.707105x + 1.73205$
<code>>eval(1/3*x^2+sin(Pi/4)*x+sqrt(3));</code>	$\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{2}\sqrt{2}x + \sqrt{3}$

Система MAPLE використовує цілу низку функцій, призначених для виконання обчислень виразів:

evalc – для обчислення виразів, що набувають комплексних значень;

evalb – для обчислення виразів, що набувають булевих значень;

evalm – для обчислення матричних виразів;

evalr – для обчислення інтервальних виразів.

Із цими функціями можна ознайомитись за допомогою довідкової служби системи MAPLE.

Розв'язування задач математичного аналізу за допомогою системи MAPLE

Система аналітичних обчислень MAPLE має багатий набір вбудованих функцій, призначених для розв'язування класичних задач математичного аналізу, а саме:

- обчислення границь послідовностей;
- обчислення границь функцій однієї змінної та кількох змінних;
- обчислення похідних функцій однієї змінної та багатьох змінних;
- розкладання функцій за формулами Тейлора та Лорана, розвинення в узагальнені степеневі ряди;
- знаходження невизначених інтегралів;

- обчислення визначених інтегралів;
- обчислення сум і добутків;
- виконання заміни змінних у диференціальних та інтегральних виразах;
- обчислення багатовимірних інтегралів;
- обчислення криволінійних інтегралів;
- обчислення поверхневих інтегралів тощо.

Обчислення границь послідовностей і функцій

Для обчислення границь функцій використовується стандартна функція **limit** або **Limit**; друга функція є пасивною формою. Загальна форма функції **limit** або **Limit** має вигляд

```
limit(f(x),x=a,dir),
Limit(f(x),x=a),
Limit(f(x),x=a,dir),
```

де **f(x)** – алгебраїчний вираз або функція, що залежить від змінної **x**, **a** – точка, у якій обчислюється значення границі, **dir** – параметр, який указує на напрям пошуку границі й набуває значень: **left** – пошук однобічної границі ліворуч, **right** – однобічної границі праворуч, **real** – границі в дійсній області, **complex** – пошук границі в комплексній області. Обчислення границі послідовностей здійснюється за допомогою функції **limit(f(n),n=infinity)**, для змінної **n** можна використати функцію **assume(n, integer)**:

>assume(n, integer);	
>limit((1/n-sin(1/n))*(n^3),n=infinity;	$\frac{1}{6}$
>limit((1+1/n)^(7*n),n=infinity);	e^7
>Limit((1+1/n)^(7*n),n=infinity);	$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{7n}$

<code>>limit(tan(x),x=Pi/2,left);</code>	∞
<code>>Limit(tan(x),x=Pi/2,right);</code>	$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}\pi^+} \tan(x)$
<code>>value(%);</code>	$-\infty$
<code>>limit(((5-x)/(6-x))^(x+2),x=infinity);</code>	e

Обчислення похідних функцій

Для диференціювання функцій у системі MAPLE використовуються стандартні функції

diff(f, x1, x2...xn),

Diff(f, x1, x2...xn),

де **f** – алгебраїчний вираз або функція, які диференціюються, зокрема функція змінних **x1, x2, ..., xn**. Функція **Diff** є пасивною формою.

Слід зауважити, що при використанні функції **diff** або **Diff** результатом обчислення є алгебраїчний вираз, який безпосередньо не може бути обчислений для фіксованих значень аргументів. Для обчислення похідних старших порядків при використанні функцій **diff(f, x1, x2...xn)**, **Diff(f, x1, x2...xn)** можна застосовувати однакові значення аргументів або конструкцію **x\$k**, де **x** – змінна, за якою здійснюється диференціювання, **k** – порядок похідної за змінною **x**, **\$** – спеціальний символ повторення елемента **x** **k** разів.

Другий спосіб обчислення похідних функцій пов'язаний із використанням диференціального оператора **D**, що має вигляд **D(f)** або **D[i](f)**, де **f** – функція, **i** – додатне ціле число, вираз, який має ціле значення, або послідовність цілих чисел, що вказує номери аргументів, за якими здійснюється диференціювання функції. На відміну від функції **diff(f, x1, x2...xn)**, оператор **D[i](f)** після обчислення результату диференціювання одразу продукує функцію відповідної кількості аргументів, що

дозволяє виконати безпосереднє обчислення похідної для будь-якого значення аргументів.

Для перетворення довільного виразу, який залежить від кількох змінних, на функцію цих змінних служить функція **unapply(exp, [s])**, де **exp** – вираз, **[s]** – список змінних нової функції:

>Diff(sin(x)/x,x)=diff(sin(x)/x,x);		$\frac{d}{dx} \left(\frac{\sin(x)}{x} \right) = \frac{\cos(x)}{x} - \frac{\sin(x)}{x^2}$
>diff(sin(x)/x,x\$3;		$-\frac{\cos(x)}{x} + \frac{3 \sin(x)}{x^2} + \frac{6 \cos(x)}{x^3} - \frac{6 \sin(x)}{x^4}$
>diff(sin(x)/x,x,x,x,x);		$-\frac{\cos(x)}{x} + \frac{3 \sin(x)}{x^2} + \frac{6 \cos(x)}{x^3} - \frac{6 \sin(x)}{x^4}$
>g:=sin(x)/x+tan(x);		$g := \frac{\sin(x)}{x} + \tan(x)$
>diff(g,x);	$\frac{\cos(x)}{x} - \frac{\sin(x)}{x^2} + 1 + \tan(x)^2$	
>v:=simplify(diff(x*y/sqrt(1+x^2+y^2),x,x)+diff(x*y/sqrt(1+x^2+y^2),y,y));		$v := -\frac{3 x y (x^2 + y^2 + 2)}{(x^2 + y^2 + 1)^{5/2}}$
>vv:=unapply(v,x,y);		$vv := (x, y) \rightarrow -\frac{3 x y (x^2 + y^2 + 2)}{(x^2 + y^2 + 1)^{5/2}}$
>vv(1,1);		$-\frac{4\sqrt{3}}{9}$
>f:=(x,y,z)->sin(x*y*z);		$f := (x, y, z) \rightarrow \sin(x y z)$
>g1:=D[1,2,2](f);		
	$g1 := (x, y, z) \rightarrow -\cos(x y z) y z^3 x^2 - 2 \sin(x y z) x z^2$	
>g1(1,1,Pi);		$\frac{3}{\pi}$

<code>>D(D(D(arctan)));</code>	$x \rightarrow \frac{8x^2}{(1+x^2)^3} - \frac{2}{(1+x^2)^2}$
-----------------------------------	--

Обчислення похідних для функцій, заданих параметрично, і неявно заданих функцій

Нехай функція однієї змінної задана параметрично, тобто у вигляді

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases},$$

де змінна t є параметром. Похідна функції, заданої параметрично, також задається параметрично й визначається із системи рівнянь

$$\begin{cases} y'_x = y'_t(t) / x'_t(t) \\ x = x(t). \end{cases}$$

Для знаходження першої похідної параметрично заданої функції зручно створити процедуру користувача **Pdiff**, описати параметрично задану функцію та застосувати процедуру **Pdiff** для обчислення першої похідної:

<code>>Pdiff:=proc(y,x) local t; t->diff(y(t),t) /diff(x(t),t) end proc;</code>	<i>Pdiff:=proc(y, x) local t; proc(t) options operator, arrow; diff(y(t), t)/diff(x(t), t) end proc end proc</i>
<code>>x:=t->2*t-t^2;</code>	$x := t \rightarrow 2t - t^2$
<code>>y:=t->3*t-t^3;</code>	$y := t \rightarrow 3t - t^3$
<code>>f:=Pdiff(y,x)(t);</code>	$f := \frac{3-3t^2}{2-2t}$

Для обчислення похідної вищого порядку треба застосувати функцію кілька разів:

<code>>simplify(Pdiff(Pdiff(y, x), x)(t));</code>	$-\frac{3}{4(-1+t)}$
<code>>simplify(Pdiff(unapply(f, t), x)(t));</code>	$-\frac{3}{4(-1+t)}$

Обчислення похідних від неявно заданих функцій

Дуже часто виникає необхідність обчислювати похідні від неявно заданих функцій, тобто таких, що задаються у вигляді одного або кількох рівнянь, які містять як незалежні змінні, так і саму функцію. При задаванні неявної функції слід обов'язково визначити, які змінні є незалежними, а які є функціями. Для обчислення похідних від неявно заданих функцій використовується функція **implicitdiff()**. Вона може мати один з таких форматів виклику:

```
implicitdiff(f, y, x);
implicitdiff(f, y, x1,...,xk);
implicitdiff({f1,...,fm}, {y1,...,yn}, u, x);
implicitdiff({f1,...,fm}, {y1,...,yn}, u,
x1,...,xk);
implicitdiff({f1,...,fm}, {y1,...,yn},
{u1,...,ur}, x);
implicitdiff({f1,...,fm}, {y1,...,yn},
{u1,...,ur}, x1,...,xk);
```

де **f, f1, ..., fm** – алгебраїчні рівняння (одне рівняння), що задають неявну функцію або систему неявних функцій;

y, y1, ..., yn – імена залежної змінної або змінних;

u, u1, ..., ur – імена залежних змінних, похідні від яких будуть знайдені;

x, x1, ..., xk. – імена змінної або змінних, за якими відбуватиметься обчислення похідної; порядок частинної похідної визначається кількістю та іменами змінних.

Такий приклад демонструє обчислення першої та другої похідних від неявно заданої функції однієї змінної:

>f:=sin(x+y)-x*y=0;	f:=sin(x+y)-x y=0
>implicitdiff (f,y,x);	$\frac{y - \cos(x+y)}{\cos(x+y) - x}$
>implicitdiff(f,y,x,x);	
$\frac{(y^2 \sin(x+y) - 2 y \sin(x+y) x + \sin(x+y) x^2 + 2 y \cos(x+y) - 2 x y - 2 \cos(x+y)^2 + 2 \cos(x+y) x) / (\cos(x+y)^3 - 3 \cos(x+y)^2 x + 3 \cos(x+y) x^2 - x^3)}{}$	

Приклад обчислення частинних похідних першого та другого порядку від неявної функції двох змінних:

>g:=z^3+3*x^2*z=2*x*y;	g:=z³+3 x² z=2 x y
>implicitdiff(g,z,x);	$-\frac{2(3xz-y)}{3(z^2+x^2)}$
>implicitdiff(g,z,y);	$\frac{2x}{3(z^2+x^2)}$
>implicitdiff(g,z,y,y);	$-\frac{8zx^2}{9(z^6+3z^4x^2+3z^2x^4+x^6)}$
>implicitdiff(g,z,x,x);	
	$\frac{2(-18z^3x^2+12xz^2y-4zy^2-9z^5+27zx^4-12yx^3)}{9(z^6+3z^4x^2+3z^2x^4+x^6)}$

<code>>implicitdiff(g,z,x,y);</code>	$-\frac{2(-12z^2x^2+4xzy-3z^4+3x^4)}{9(z^6+3z^4x^2+3z^2x^4+x^6)}$
---	---

Приклад знаходження частинних похідних першого та другого порядку від двох неявних функцій двох незалежних змінних $u=u(x, y)$, $v=v(x, y)$, які задані системою рівностей:

<code>>fu:=x*u-y*v=0;</code>	$fu := u \ x - v \ y = 0$
<code>>fv:=y*u+x*v=1;</code>	$fv := u \ y + v \ x = 1$

Приклад обчислення частинних похідних першого порядку від функцій $u=u(x, y)$, $v=v(x, y)$:

<code>>implicitdiff({fu,fv}, {u,v},{u,v},x,notation=Diff);</code>	
	$\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x} u \right)_y = -\frac{u \ x + v \ y}{x^2 + y^2}, \left(\frac{\partial}{\partial x} v \right)_y = \frac{u \ y - v \ x}{x^2 + y^2} \right\}$
<code>>implicitdiff({fu,fv}, {u,v},{u,v},y,notation=Diff);</code>	
	$\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial y} u \right)_x = -\frac{u \ y - v \ x}{x^2 + y^2}, \left(\frac{\partial}{\partial y} v \right)_x = -\frac{u \ x + v \ y}{x^2 + y^2} \right\}$

Приклад обчислення другої змішаної похідної від функцій $u=u(x, y)$, $v=v(x, y)$:

<code>>implicitdiff({fu,fv},{u,v},{u},x,y, notation=Diff);</code>	
	$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} u = \frac{2 (2 \ u \ x \ y - v \ x^2 + v \ y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \right\}$
<code>>implicitdiff({fu,fv},{u,v},{v},x,y, notation=Diff);</code>	
	$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} v = \frac{2 (u \ x^2 - u \ y^2 + 2 \ v \ x \ y)}{x^4 + 2 \ x^2 \ y^2 + y^4} \right\}$

Обчислення сум послідовностей функціональних і числових рядів

Для обчислення сум послідовностей у системі MAPLE існують стандартна функція **sum** та її інертна форма **Sum**. Функції мають такі форми:

sum(f, k), sum(f, k=m..n), sum(f, k=alpfa),
Sum(f, k), Sum(f, k=m..n), Sum(f, k=alpfa).

Тут **f** – функція, що задає члени послідовності, яка залежить від **k**, **k** – індекс підсумовування, **m** та **n** – цілочислові границі зміни індексу підсумовування, **alpfa** – вираз типу **RootOf(z)**. У цьому випадку індекс **k** набуває значення з множини коренів рівняння **z=0**.

Перша форма суми **sum(f, k)** еквівалентна формі **sum(f, k=1..k-1)**.

>sum('k'^3, 'k');	$\frac{1}{4}k^4 - \frac{1}{2}k^3 + \frac{1}{4}k^2$
>sum('k'^3, 'k'=1..'k-1');	$\frac{1}{4}k^4 - \frac{1}{2}k^3 + \frac{1}{4}k^2$
>Sum(-(-1)^k/'k', 'k'=1..infinity)= sum(-(-1)^k/'k', 'k'=1..infinity);	
	$\sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{(-1)^k}{k} \right) = \ln(2)$
>Sum(1/('n'*('n'+1)), 'n'=1..infinity)= >sum(1/('n'*('n'+1)), 'n'=1..infinity);	
	$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n(n+1)} \right) = 1$
>Sum(sin('k'*x)/(2^k), 'k'=1..infinity)= simplify(sum(sin('k'*x)/(2^k), 'k'=1..in finity));	

	$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\sin(kx)}{2^k} \right) = -\frac{2 \sin(x)}{4 \cos(x) - 5}$
<code>>Sum(1/'k', 'k'='m'..'n')=</code> <code>sum(1/'k', 'k'='m'..'n');</code>	$\sum_{k=m}^n \left(\frac{1}{k} \right) = \Psi(n+1) - \Psi(m)$

Слід зауважити, що при обчисленні сум послідовностей необхідно строго дотримуватися прямого (зростаючого) порядку значень індексної змінної суми.

Обчислення добутоків членів послідовностей

Для обчислення добутоків членів послідовності в системі MAPLE використовуються стандартні функції:

product(f,k), product(f,k=m..n), product(f,k=alpfa)
Product(f,k), Product(f,k=m..n), Product(f,k=alpfa)

Параметри функцій **product** мають зміст, аналогічний параметрам функції **sum**:

<code>>Product(('n'^2-4)/('n'^2-1),</code> <code>n=3..infinity)=product(('n'^2-4)/('n'^2-</code> <code>1), n=3..infinity);</code>	
	$\prod_{n=3}^{\infty} \left(\frac{n^2 - 4}{n^2 - 1} \right) = \frac{1}{4}$
<code>>Product((1-</code> <code>x^2/('n'^2*Pi^2)), 'n'=1..infinity)=</code> <code>product((1-x^2/</code> <code>('n'^2*Pi^2)), 'n'=1..infinity);</code>	
	$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2} \right) = \frac{\sin(x)}{x}$
<code>>Product(1-1/'n'^2, 'n'=2..'k')=product(1-</code> <code>1/'n'^2, 'n'=2..'k');</code>	

	$\prod_{n=2}^k \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) = \frac{\Gamma(k) \Gamma(k+2)}{2 \Gamma(k+1)^2}$
>Product(1-1/'n'^2, 'n'=2..infinity)=product(1-1/'n'^2, 'n'=2..infinity);	
	$\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) = \frac{1}{2}$

Слід зауважити, що при обчисленні добутків послідовностей необхідно строго додержуватися прямого (зростаючого) порядку значень індексної змінної суми.

Розвинення функцій у ряди

Для розвинення аналітичних функцій у ряд Тейлора або Маклорена в заданій точці в системі MAPLE застосовуються стандартні функції **taylor()**, **mtaylor()**. Перша функція використовується для функцій однієї змінної, а друга – для функцій багатьох змінних.

Функція **taylor()** має формат **taylor(exp, x=a, n)**, де **exp** – вираз, що залежить від **x**, або функція; **x=a** задає точку, для якої здійснюється розвинення в ряд, **n** – необов'язковий параметр, що задає кількість членів розвинення, яка за його відсутності за замовчанням дорівнює 6.

Функція **mtaylor()** має вигляд **mtaylor(f,v,n)**, де **f** – вираз або функція, що залежить від кількох змінних, **v** – список рівностей вигляду **[x=a, y=b, ...z=c]**, або просто список змінних **[x, y, ...z]**, **n** – необов'язковий параметр, який указує на максимальний сумарний степінь у розвиненні, на якому воно переривається:

>taylor(ln(cos(x)), x, 8);	$-\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{12} x^4 - \frac{1}{45} x^6 + o(x^8)$
--------------------------------------	---

>taylor((sin(x^3)) ^(1/3),x,20);		$x - \frac{1}{18} x^7 - \frac{1}{3240} x^{13} - \frac{53}{1224720} x^{19} + o(x^{25})$
>taylor(x^x- 1,x=1);		
		$x - 1 + (x - 1)^2 + \frac{1}{2} (x - 1)^3 + \frac{1}{3} (x - 1)^4 + \frac{1}{12} (x - 1)^5 + o((x - 1)^6)$
>taylor(sqrt(1+x^2))-x, x=infinity);		$\frac{1}{2} x - \frac{1}{8} x^3 + \frac{1}{16} x^5 + o\left(\frac{1}{x^7}\right)$

Наведемо приклад розвинення в ряд Маклорена функції $\ln(1+x+y)$ з точністю до множників, що містять похідні п'ятого порядку:

>mtaylor(ln(1+x+y),[x,y]);	
	$x + y - \frac{1}{2} x^2 - x y - \frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{3} x^3 + y x^2 + y^2 x + \frac{1}{3} y^3 - \frac{1}{4} x^4 - y x^3 - \frac{3}{2} y^2 x^2 - y^3 x - \frac{1}{4} y^4 + \frac{1}{5} x^5 + y x^4 + 2 y^2 x^3 + 2 y^3 x^2 + y^4 x + \frac{1}{5} y^5$

Розкласти в ряд Тейлора зі збереженням членів до п'ятого порядку включно функцію x^y в околі точки $x=1, y=1$.

>mtaylor(x^y,[x=1,y=1],6);	
	$x + (x - 1) (y - 1) + \frac{1}{2} (y - 1) (x - 1)^2 - \frac{1}{6} (y - 1) (x - 1)^3 + \frac{1}{2} (y - 1)^2 (x - 1)^2 + \frac{1}{12} (y - 1) (x - 1)^4$

Розкладемо в ряд Маклорена функцію $\sqrt{(1-x^2-y^2)}$ з точністю до множників, що містять похідні шостого порядку:

>mtaylor((1-x^2-y^2)^(1/2),[x,y],7);	

$1 - \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} y^2 - \frac{1}{8} x^4 - \frac{1}{4} y^2 x^2 - \frac{1}{8} y^4 - \frac{1}{16} x^6 - \frac{3}{16} y^2 x^4 - \frac{3}{16} y^4 x^2 - \frac{1}{16} y^6$

У випадку, коли є необхідність знайти лише деякі коефіцієнти в розвиненні функції в ряд Тейлора або Маклорена, у системі MAPLE використовується стандартна функція

coef_tay1(exp, var, k),

де **exp** – функція кількох змінних, **var** – рівність вигляду **[x, y...z]=[a, b, ...c]**, що задає точку розвинення функції в ряд, **k** – список, елементами якого є цілі числа **[11, 12, ...ls]**, він фіксує коефіцієнт розвинення.

Приклади обчислень коефіцієнта при $x^2 y^4$ для функції $\sqrt{1-x^2-y^2}$ і коефіцієнта при $(y-1)(x-1)^4$ для функції x^y :

>coef_tay1((1-x^2-y^2)^(1/2), [x,y]=[0,0], [2,4]);	$-\frac{3}{16}$
>coef_tay1(x^y, [x,y]=[1,1], [4,1]);	$\frac{1}{12}$

Для розвинення в ряди функцій в особливих точках, у яких не існують похідні функції, замість рядів Тейлора та Маклорена застосовується загальніше розвинення в узагальнений степеневий ряд, який може містити не тільки цілі додатні степені, а й дробові від'ємні степені та логарифми. Це розвинення можна отримати за допомогою функції **series(expr, egn, n)**, де **expr** – вираз, що розкладається в ряд, **egn** – умова вигляду **x=a** або **x**, що вказує точку, для якої відбувається розвинення, **n** – неов'язковий параметр, що вказує на кількість членів ряду:

>series(x*(tan(x))^3, x=Pi/2, 5);	
---	--

	$-\frac{\frac{1}{2}\pi}{\left(x-\frac{1}{2}\pi\right)^3}-\left(x-\frac{1}{2}\pi\right)^{-2}+\frac{\frac{1}{2}\pi}{x-\frac{1}{2}\pi}+1-\frac{2}{15}\pi\left(x-\frac{1}{2}\pi\right)-\frac{4}{15}\left(x-\frac{1}{2}\pi\right)^2+O\left(\left(x-\frac{1}{2}\pi\right)^3\right)$
	>series(exp(x)/(sin(x)^(1/3)),x=0);
	$\frac{1}{x^{1/3}}+x^{2/3}+\frac{5}{9}x^{5/3}+\frac{2}{9}x^{8/3}+\frac{59}{810}x^{11/3}+\frac{17}{810}x^{14/3}+O(x^{17/3})$
	>series(x^x, x=0, 5);
	$1+\ln(x)x+\frac{1}{2}\ln(x)^2x^2+\frac{1}{6}\ln(x)^3x^3+\frac{1}{24}\ln(x)^4x^4+O(x^5)$
	>taylor(x^x, x=0, 5); <i>does not have a taylor expansion, try series()</i>
	>series((sin(x))^(1/7)/x^(1/2), x=0, 7);
	$\frac{1}{x^{5/14}}-\frac{1}{42}x^{23/14}-\frac{1}{1960}x^{51/14}-\frac{5}{148176}x^{79/14}+O\left(x^{\frac{107}{14}}\right)$

ЛЕКЦІЯ 4

Заміна змінних у диференціальних та інтегральних виразах

У системі MAPLE існує можливість виконувати заміну змінних у диференціальних та інтегральних виразах однієї й багатьох незалежних змінних. Для цього можна використовувати функцію **dchange()** пакету **PDEtools**, яка має вигляд **dchange(tr, expr)**, де **tr** – множина алгебраїчних рівностей, що містять у лівій частині старі незалежні змінні, а в правій – вирази від нових незалежних змінних, **expr** – диференціальний, інтегральний або інтегро-диференціальний вираз, у якому здійс-

нюється заміна змінних. Указані параметри є обов'язковими, функція **dchange()** допускає також розширений перелік параметрів. Зокрема у випадку, коли заміна змінних включає крім незалежних змінних ще й параметри, необхідно третім параметром указати список нових незалежних змінних.

У прикладі для звичайного диференціального рівняння третього порядку введена заміна змінних **z=et**:

>with(PDEtools):	
>assume(z>0);	
>g:=diff(y(z),z\$3)=6*y/z^2;	$g := \frac{d^3}{dz^3} y(z) = \frac{6}{z^2} y$
>simplify(dchange(z=exp(t),g)*exp(3*t));	
	$2 \left(\frac{d}{dt} y(t) \right) - 3 \left(\frac{d^2}{dt^2} y(t) \right) + \frac{d^3}{dt^3} y(t) = 6 e^t y$

У прикладі для лінійного диференціального рівняння в частинних похідних другого порядку з двома незалежними змінними введена заміна змінних $\xi = x + y$, $\eta = x - y$:

>dd:=y*diff(z(x,y),x,x)-x*diff(z(x,y),y,y)=0;	
	$dd := y \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} z(x, y) \right) - x \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} z(x, y) \right) = 0$
>collect(dchange({x=(xi+eta)/2,y=(xi-eta)/2},dd),diff);	
	$- \eta \left(\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} z(\eta, \xi) \right) + 2 \xi \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} z(\eta, \xi) \right) - \eta \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} z(\eta, \xi) \right) = 0$

Перехід до полярної системи координат в операторі Лапласа:

>qq:=diff(u(x,y),x,x)+diff(u(x,y),y,y);	
	$qq := \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(x, y)$
> qq1:=simplify(dchange({x=r*cos(s),y=r*sin(s)},qq));	

	$\text{qq1} := \frac{\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} u(r, s)\right) r^2 + \left(\frac{\partial}{\partial r} u(r, s)\right) r + \frac{\partial^2}{\partial s^2} u(r, s)}{r^2}$
--	---

Заміна змінних в інтегральному виразі:

> assume(t^2<1);	
>int1:=int(ln(sin(x^2)), x=0..Pi/2);	$\text{int1} := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(x^2)) dx$
>simplify(dchange({x=arcsin (t)}, int1));	$\int_0^1 \frac{\ln(\sin(\arcsin(t)^2))}{\sqrt{1-t^2}} dt$

Функція **dchange()** виконує заміну лише незалежних змінних у диференціальних виразах. Однак іноді виникає необхідність зробити заміну змінних у складнішому випадку.

Розглянемо таку задачу: увівши нові змінні, перетворити звичайне диференціальне рівняння

$$y''' - x^2 y'' + xy' - y = 0, \text{ якщо } x = \frac{1}{t}, y = \frac{u}{t}, u = u(t).$$

Для розв'язання задачі запишемо диференціальне рівняння й уведемо нові змінні: незалежну змінну t , залежну змінну $u(t)$ і виконаємо такі обчислення:

>with(PDEtools)	
> eq := diff(z(x), x\$3) - x^2·diff(z(x), x\$2) + x·diff(z(x), x) - z(x);	
	$\text{eq} := \frac{d^3}{dx^3} z(x) - x^2 \left(\frac{d^2}{dx^2} z(x) \right) + x \left(\frac{d}{dx} z(x) \right) - z(x)$
> eq1 := collect(dchange({x = 1/t}, eq), diff);	
	$\text{eq1} := -t^6 \left(\frac{d^3}{dt^3} z(t) \right) + (-6 t^5 - t^2) \left(\frac{d^2}{dt^2} z(t) \right) +$ $(-6 t^4 - 3 t) \left(\frac{d}{dt} z(t) \right) - z(t)$

$> z := t \rightarrow \frac{u(t)}{t};$	$z := t \rightarrow \frac{u(t)}{t}$
$> eq2 := -collect(normal(eq1), diff);$	
$eq2 := \left(\frac{d^3}{dt^3} u(t) \right) t^5 - (-3 t^4 - t) \left(\frac{d^2}{dt^2} u(t) \right) + \frac{d}{dt} u(t)$	

Інтегрування функцій

Обчислення невизначених інтегралів

Невизначені інтеграли в MAPLE обчислюються за допомогою стандартної процедури **int**(**exp**, **x**), яка має також інертну форму **Int**(**exp**, **x**), де **exp** – підінтегральна функція, **x** – змінна інтегрування. Інертна форма процедури інтегрування використовується для символного запису невизначеного інтеграла.

Розглянемо приклади застосування процедур знаходження невизначеного інтеграла:

$> \text{Int}(1/(x^2+1)^{(3/2)}, x) = \text{int}(1/(x^2+1)^{(3/2)}, x);$	$\int \frac{1}{(x^2+1)^{(3/2)}} dx = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$
$> f := x \rightarrow (x^2+5x+4)/(x^4+5x^2+4);$	$f := x \rightarrow \frac{x^2+5x+4}{x^4+5x^2+4}$
$> \text{Int}(f(x), x) = \text{int}(f(x), x);$	
	$\int \frac{x^2+5x+4}{x^4+5x^2+4} dx = \frac{5}{6} \ln(x^2+1) + \arctan(x) - \frac{5}{6} \ln(x^2+4)$

Такий приклад демонструє можливість обчислення невизначеного інтеграла від функцій, що задані за допомогою фігурної дужки:

<pre>>g:=x- >piecewise(x<=0,sin(x),x> 0 and x <=1,x^2,x^3);</pre>	
	$g:=x \rightarrow \text{piecewise}(x \leq 0, \sin(x), 0 < x \text{ and } x \leq 1, x^2, x^3)$
>g(x);	
	$\begin{cases} \sin(x) & x \leq 0 \\ x^2 & 0 < x \text{ and } x \leq 1 \\ x^3 & \text{otherwise} \end{cases}$
>gg:=x->int(g(x),x);	
	$gg:=x \rightarrow \int g(x) dx$
>gg(x);	
	$\begin{cases} -\cos(x) & x \leq 0 \\ \frac{1}{3} x^3 - 1 & x \leq 1 \\ \frac{1}{4} x^4 - \frac{11}{12} & 1 < x \end{cases}$

Приклад обчислення невизначеного інтеграла від функції, що залежить від параметрів:

<pre>>Int(exp(alpha*x)*cos(b*x),x)= combine(int(exp(alpha*x)* cos(b*x),x));</pre>	
	$\int e^{(\alpha x)} \cos(b x) dx = \frac{\alpha e^{(\alpha x)} \cos(b x) + b e^{(\alpha x)} \sin(b x)}{\alpha^2 + b^2}$
>collect(%,exp);	
	$\int e^{(\alpha x)} \cos(b x) dx = \frac{e^{(\alpha x)} (\alpha \cos(b x) + b \sin(b x))}{\alpha^2 + b^2}$

Обчислення визначених інтегралів

Для обчислення визначених інтегралів у системі MAPLE використовується процедура **int()** та її пасивна форма **Int()** з параметрами виклику **int(exp, x=a..b)**, де **exp** – підінтегральна функція, **x** – змінна інтегрування, **a**, **b** – відповідно верхня та нижня межі інтегрування.

Розглянемо приклади обчислення визначених інтегралів:

Int(1/(sin(x)^4+cos(x)^4), x=0..2*Pi) =int(1/(sin(x)^4+cos(x)^4), x=0..2*Pi);	
	$\int_0^{2\pi} \frac{1}{\sin^4(x) + \cos^4(x)} dx = 2\sqrt{2}\pi$
>assume(a>=0);	
>Int(x^2*sqrt(a^2-x^2), x=0..a)= int(x^2*sqrt(a^2-x^2), x=0..a);	
	$\int_0^{a^{\sim}} x^2 \sqrt{a^{\sim 2} - x^2} dx = \frac{1}{16} a^{\sim 4} \pi$
>assume(b<1 and b>0);	
>Int(x*abs(x-b), x=0..1)= >int(x*abs(x-b), x=0..1);	
	$\int_0^1 x x - b^{\sim} dx = -\frac{1}{2} b^{\sim} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} b^{\sim 3}$

Дуже часто виникає потреба в обчисленні невласних інтегралів першого або другого роду. Нагадаємо, що невласними інтегралами першого роду називають визначені інтеграли, у яких

хоча б одна межа інтегрування є нескінченною. Невласними інтегралами другого роду називаються визначені інтеграли, у яких підінтегральна функція принаймні в одній точці інтервалу інтегрування перетворюється на нескінченність.

Розглянемо приклади обчислення невластних інтегралів першого роду:

<code>>Int(1/(x^2+x+1)^2,x=-infinity..infinity)=int(1/(x^2+x+1)^2,x=infinity..infinity);</code>	
	$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + x + 1)^2} dx = \frac{4}{9} \pi \sqrt{3}$
<code>>int(ln(1+x)/x^n,x=0..infinity);</code>	$-\frac{\pi \csc(\pi n)}{-1 + n}$
<code>>Int(x^2*cos(exp(x)),x=0..infinity)=int(x^2*cos(exp(x)),x=0..infinity);</code>	
	$\int_0^{\infty} x^2 \cos(e^x) dx = \int_0^{\infty} x^2 \cos(e^x) dx$

Останній приклад демонструє, що система MAPLE не в змозі виконати аналітичне обчислення інтеграла й тому лише повторює символічну форму запису останнього.

Розглянемо приклади обчислення невластних інтегралів другого роду:

<code>>int(ln(sin(x)),x=0..Pi/2);</code>	$-\frac{1}{2} \pi \ln(2)$
<code>>int(1/(1-cos(2*x)),x=0..Pi/4);</code>	∞

У цьому прикладі підінтегральна функція є необмеженою в точці $x = 0$:

Наступний приклад демонструє, що інтеграл є розбіжним за рахунок сильного зростання підінтегральної функції в точці $x = 0$:

<code>>Int (1/(3-x)^(1/2), x=1..3)= int (1/(3-x)^(1/2), x=1..3);</code>	$\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{3-x}} dx = 2\sqrt{2}$
--	--

Підінтегральна функція необмежено зростає в точці $x = 3$, проте інтеграл набуває скінченного значення.

Головне значення за Коші для невластних інтегралів

Іноді невластний інтеграл від необмеженої функції не існує, але він може існувати в дещо послабленому розумінні, а саме може існувати його головне значення за Коші. Це значення невластного інтеграла можна записати у вигляді

$$v.p. \int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left[\int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x) dx \right].$$

На необмеженому інтервалі теж можна розглядати певне послаблення невластного інтеграла, а саме його головне значення за Коші, яке можна записати у вигляді

$$v.p. \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{-a}^a f(x) dx.$$

Для обчислення головного значення за Коші невластного інтеграла першого або другого роду використовується функція `int(exp, x=a..b, 'CauchyPrincipalValue')`, де параметр `'CauchyPrincipalValue'` указує на необхідність розглядати відповідний невластний інтеграл за його головним значенням за Коші:

<code>>int(cos(x)/x^3, x=-Pi/2..Pi/2, 'CauchyPrincipalValue');</code>	0
--	---

<code>>int(cos(x)/x^3,x=-Pi/2..Pi/2);</code>	<i>undefined</i>
---	------------------

Попередній приклад демонструє, що головне значення інтеграла за Коші дорівнює нулю, але у звичайному розумінні невластний інтеграл не існує.

<code>>int(1/(x^2-3*x+2),x=0..infinity,'CauchyPrincipalValue');</code>	<code>-ln(2)</code>
---	---------------------

Цей приклад демонструє наявність головного значення за Коші невластного інтеграла другого та першого роду одночасно. Як інтеграл другого роду підінтегральна функція має необмежене зростання в точках $x=1$, $x=2$. У звичайному розумінні невластний інтеграл не існує, про що свідчить таке обчислення в системі MAPLE:

<code>>int(1/(x^2-3*x+2),x=0..infinity);</code>	<i>undefined</i>
--	------------------

Обчислення подвійних інтегралів

Для обчислення подвійних інтегралів у системі MAPLE не існує спеціальної процедури, тому обчислення всіх подвійних інтегралів у випадку, коли область інтегрування проста, тобто обмежена контуром першого або другого роду, згідно із загальною теорією зводиться до обчислення повторних інтегралів зі змінними верхніми границями. У випадку, коли область інтегрування складніша, вона зображується у вигляді кількох простих областей.

Розглянемо кілька прикладів обчислення подвійних інтегралів шляхом їх зведення до повторних.

Обчислити подвійний інтеграл $\iint_E (x^2 + y^2) dx dy$ по множині E , обмеженій прямими $y=0$, $x=y$, $x=1$. Такий інтеграл зводиться до повторного одним із способів:

$$\int_0^1 \left(\int_0^x (x^2 + y^2) dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^y (x^2 + y^2) dx \right) dy.$$

>Int (Int ((x^2+y^2), y=0..x), x=0..1)=int (int (x^2+y^2, y=0..x), x=0..1);	$\int_0^1 \int_0^x x^2 + y^2 dy dx = \frac{1}{3}$
>Int (Int (x^2+y^2, x=0..y), y=0..1)=int (int (x^2+y^2, x=0..y), y=0..1);	$\int_0^1 \int_0^y x^2 + y^2 dx dy = \frac{1}{3}$

Обчислити подвійний інтеграл $\iint_E xy dx dy$ по множині E , обмеженій кривими $x + y = 2$, $x^2 + y^2 = 2y$, $x > 0$. Інтеграл зводиться до повторного одним із способів:

$$\int_0^1 \left(\int_{2-x}^{1+\sqrt{1-x^2}} (x y) dy \right) dx = \int_1^2 \left(\int_{2-y}^{\sqrt{-y^2+2y}} (x y) dx \right) dy.$$

>int (int (x*y, y=2-x..1+sqrt(1-x^2)), x=0..1);	$\frac{1}{4}$
>int (int (x*y, x=2-y..sqrt(-y^2+2*y)), y=1..2);	$\frac{1}{4}$

Обчислити подвійний інтеграл $\iint_E y^2 \sqrt{R^2 - x^2} dx dy$, де E – коло радіусом R із центром на початку координат. Інтеграл може бути зведений до повторного

$$\int_{-R}^R dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} y^2 \sqrt{R^2 - x^2} dy,$$

який можна обчислити за допомогою подвійного інтегрування в системі MAPLE:

<code>>int(int(y^2*sqrt(R^2-x^2),y=-sqrt(R^2-x^2)..sqrt(R^2-x^2)),x=-R..R);</code>	$\frac{32}{45}R^5$
---	--------------------

Хоча в системі MAPLE немає спеціалізованої функції обчислення подвійних інтегралів, у пакеті **student** існує функція **Doudleint**, яка має лише нейтральну (пасивну) форму і призначена для запису подвійного інтеграла.

Розглянемо використання цієї функції для обчислення подвійного інтеграла з попереднього прикладу:

<code>>with(student): >D1:=Doubleint(y^2*sqrt(R^2-x^2),y=-sqrt(R^2-x^2)..sqrt(R^2-x^2),x=-R..R);</code>	
	$D1 := \int_{-R}^R \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} y^2 \sqrt{R^2-x^2} dy dx$

Слід зауважити, що порядок наступності змінних у границях інтегрування, а саме **y**, а потім **x**, є дуже важливим для коректного обчислення інтеграла шляхом зведення до повторного за допомогою функції **value(exp)**, де за змінну **exp** беремо подвійний інтеграл **D1**:

<code>>value(D1);</code>	$\frac{32}{45}R^5$
-----------------------------	--------------------

Бачимо, що обчислення значення інтеграла за допомогою функцій **Doudleint** та **value** повністю збігається з попереднім способом обчислення.

>Doubleint(x^3+y^3,x,y,Omega);	$\int \int_{\Omega} x^3 + y^3 \, dx \, dy$
--	--

Цей приклад демонструє можливості функції **Doudleint** лише для символічного запису подвійного інтеграла по деякій області Ω .

Другим досить ефективним методом обчислення подвійних інтегралів є метод заміни змінних інтегрування, який можна виконати за допомогою функції **changevar**. Розглянемо кілька прикладів обчислення подвійного інтеграла з використанням методу заміни змінних.

Обчислити подвійний інтеграл $\iint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy$, де

$$\Omega = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 2ax\}.$$

Ураховуючи вигляд області інтегрування, яка є колом з радіусом a і центром у точці $(a, 0)$, найзручніше ввести полярну систему координат $x = a + r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ з подальшим зведенням до повторного інтеграла.

На першому кроці використовуємо функцію **Doudleint** для символічного запису подвійного інтеграла:

>A:=Doubleint((x^2+y^2),x,y,Omega);	$A := \int \int_{\Omega} x^2 + y^2 \, dx \, dy$
---	---

На другому кроці за допомогою функції **changevar** або вже відомої функції **dchange** робимо заміну змінних у підінтегральному виразі:

>assume(r>=0);	
>AA:=changevar({x=a+r*cos(phi),y=r*sin(phi)},A,[r,phi]);	

	$AA1 := \int \int_{\Omega} r^2 + 2 a r \cos(\phi) + r^3 dr d\phi$
>AA1:=simplify(dchange({x=a+r*cos(phi), y=r*sin(phi)},A,[r,phi]));	
	$AA1 := \int_{-\alpha}^{\beta} \int_{r_{\sim}(\phi)}^{r_{\sim}(\phi)} r (a^2 + 2 a r \cos(\phi) + r^2) dr d\phi$

На третьому кроці виконаємо обчислення подвійного інтеграла шляхом зведення до повторного (наведено два еквівалентні способи обчислення):

>value(eval(AA1,[_alpha=0,_beta=2*Pi,_u[r](phi)=a,_l[r](phi)=0]));	$\frac{3 \pi a^4}{2}$
>value(Doubleint(r*(a^2+2*a*r*cos(phi)+r^2),r=0..a,phi=0..2*Pi));	$\frac{3}{2} a^4 \pi$

Обчислити подвійний інтеграл $\iint_{\Omega} x \sqrt{(x^2 + y^2)} dx dy$, де область

Ω обмежена правою пелюсткою лемніскати

$$\{(x, y) : (x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)\}, x \geq 0.$$

Ураховуючи вигляд області інтегрування, найзручніше ввести полярну систему координат $x = r \cos \phi$, $y = r \sin \phi$ з подальшим зведенням до повторного інтеграла. Результати обчислення інтеграла двома способами наведені нижче:

>B:=Doubleint(x*sqrt(x^2+y^2),x,y,0,omeg a);	$B := \iint_{\Omega} x \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$
--	--

<pre>>BB:=changevar({x=r*cos(phi),y=r*sin(phi)},B,[r,phi]);</pre>	$BB := \iint_{\Omega} r \cos(\phi) r ^2 dr d\phi$	
<pre>>BB1:=simplify(dchange({x=r*cos(phi),y=r*sin(phi)},B,[r,phi]));</pre>		
	$BB1 := \int_{-\alpha}^{\beta} \cos(\phi) \left(\int_{-l(\phi)}^{u(\phi)} r^2 \operatorname{sgn}(r) r dr \right) d\phi$	
<pre>>Omega:=(x^2+y^2)^2=a^2*(x^2-y^2);</pre>	$\Omega := (x^2 + y^2)^2 = a^2 (x^2 - y^2)$	
<pre>>s1:={x=r*cos(phi),y=r*sin(phi)};</pre>		
	$s1 := \{x = r \cos(\phi), y = r \sin(\phi)\}$	
<pre>>simplify(subs(s1,Omega))/r^2;</pre>	$r^2 = a^2 (2 \cos(\phi)^2 - 1)$	
<pre>>simplify(dchange(s1,Omega))/r^2;</pre>	$r^2 = a^2 (2 \cos(\phi)^2 - 1)$	
<pre>>int(int('r'^3*cos(phi),'r'=0..a*sqrt(2*cos(phi)^2-1)),phi=-Pi/4..Pi/4);</pre>		
	$\frac{2\sqrt{2} a^4}{15}$	
<pre>>value(eval(BB1,[_alpha=-Pi/4,_beta=Pi/4,_l[r](phi)=0,_u[r](phi)=a*sqrt(2*cos(phi)^2-1)]));</pre>		
	$\frac{2\sqrt{2} a^4}{15}$	

Обчислення потрійних інтегралів

Для обчислення потрійних інтегралів у системі MAPLE так само, як і для подвійних інтегралів, використовується метод зведення до повторних інтегралів зі змінними межами інтегрування. Крім того, у пакеті **Student[MultivariateCalculus]** існує нейтральна функція **Multiint**, яка використовується для символічного запису тривимірного та двовимірних інтегралів або, у сукупності з функцією **value**, – для їхнього обчислення шляхом зведення до повторного.

Розглянемо кілька прикладів обчислення потрійних інтегралів.

Обчислити потрійний інтеграл
$$\iiint_V \frac{1}{(1+x+y+z)^3} dx dy dz,$$

де V – область, обмежена площинами $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=1$.

Обчислення цього інтеграла зводиться до трикратного повторного інтегрування $\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} \frac{dz}{(1+x+y+z)^3}$, що й підтверджують такі обчислення:

<pre>>Multiint(1/(1+x+y+z)^3, z=0..1-x-y, y=0..1-x, z=0..1)=int(int((int(1/(1+x+y+z)^3, z=0..1-x-y)), y=0..1-x), x=0..1);</pre>	
	$\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} \frac{1}{(1+x+y+z)^3} dz dy dz = -\frac{5}{16} + \frac{1}{2} \ln(2)$

Обчислити тривимірний інтеграл
$$\iiint_V z dx dy dz,$$
 де

$$V = \{(x, y, z) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1, z \geq 0\}.$$

Неважко зрозуміти, що цей інтеграл зводиться до повторного

інтеграла $\int_{-a}^a dx \int_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} dy \int_0^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}} dz$, що реалізовано в таких

обчисленнях операторів MAPLE:

>assume(a>=0);	
>value(Multiint(z, z=0..c*sqrt(1-x^2/a^2-y^2/b^2), y=-b/a*sqrt(a^2-x^2)..b/a*sqrt(a^2-x^2), x=-a..a))	
	$\frac{1}{4} c^2 b a \pi$

Обчислити інтеграл $\iiint_V \frac{xyz}{x^2+y^2} dx dy dz$, де V – тіло, обмежене зверху поверхнею $(x^2+y^2+z^2)^2 = a^2 xy$, а знизу – площиною $z = 0$.

Для обчислення інтеграла введемо сферичні координати та виконаємо обчислення рівняння поверхні:

>v:=(x^2+y^2+z^2)^2=a^2*x*y;	
	$v := (x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2 \ x \ y$
>sfer:={x=r*cos(phi)*sin(theta), y=r*sin(phi)*sin(theta), z=r*cos(theta)};	
	$sfer := \{x=r \cos(\phi) \sin(\theta), y=r \sin(\phi) \sin(\theta), z=r \cos(\theta)\}$
>subs(sfer, v);	
	$(r^2 \cos(\phi)^2 \sin(\theta)^2 + r^2 \sin(\phi)^2 \sin(\theta)^2 + r^2 \cos(\theta)^2)^2 = a^2 r^2 \cos(\phi) \sin(\theta)^2 \sin(\phi)$

<code>>v1:=collect(% ,r^4)*(1/r^2);</code>		
	$v1 := r^2 (\cos(\phi)^2 \sin(\theta)^2 + \sin(\theta)^2 \sin(\phi)^2 + \cos(\theta)^2) a^2 \cos(\phi) \sin(\theta)^2 \sin(\phi)$	
<code>>v2:=simplify(lhs(v1),{cos(phi)^2+sin(phi)^2=1,cos(theta)^2+sin(theta)^2=1})=rhs(v1);</code>		
	$v2 := r^2 = a^2 \cos(\phi) \sin(\theta)^2 \sin(\phi)$	
<code>>vs:=simplify(v2,{cos(phi)*sin(phi)=sin(2*phi)/2});</code>		
	$vs := r^2 = \frac{1}{2} a^2 \sin(\theta)^2 \sin(2 \phi)$	
<code>>with(Student[MultivariateCalculus]):</code>		
<code>>I12:=Multiint(x*y*z/(x^2+y^2),x,y,z,AA);</code>		
	$I12 := \iiint_{AA} \frac{x y z}{x^2 + y^2} dx dy dz$	
<code>>Isfer:=changevar(sfer,I12,[r,phi,theta]);</code>		
	$Isfer := \iiint_{AA} r^3 \cos(\phi) \sin(\phi) \cos(\theta) \sin(\theta) dr d\phi d\theta$	
<code>>Isfer1:=dchange(sfer,I12,[r,phi,theta],simplify);</code>		

$Isfer1 := \int_{-\alpha}^{\beta} \cos(\theta) \sin(\theta) \int_{-\phi(\theta)}^{-u_{\phi}(\theta)} \cos(\phi) \sin(\phi) \int_{-r_{\phi}(\phi, \theta)}^{-u_{r_{\phi}}(\phi, \theta)} r^3 dr d\phi d\theta$	
<pre>>eval(Isfer1,{_alpha=0,_beta=Pi/2,_l[phi](theta)=0,_u[phi](theta)=Pi/2,_l[r](phi,theta)=0,_u[r](phi,theta)=a*sqrt(1/2*sin(theta)^2*sin(2*phi))});</pre>	
$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\theta) \sin(\theta) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\phi) \sin(\phi) \int_0^{1/2 a \sqrt{2} \sqrt{\sin(\theta)^2 \sin(2\phi)}} r^3 dr d\phi d\theta$	
<pre>>value(%);</pre>	$\frac{a^4}{288}$
<pre>>I1:=value(Tripleint(r^3*cos(phi)*sin(phi)*cos(theta)*abs(sin(theta)),r=0..sqrt(1/2*a^2*sin(theta)^2*sin(2*phi)),p=hi=0..Pi/2,theta=0..Pi/2));</pre>	$I1 := \frac{a^4}{288}$

Аналогічно обчислюється інтеграл для інтервалу $\text{phi}=\text{Pi}..3*\text{Pi}/2$.

ЛЕКЦІЯ 5

Обчислення криволінійних інтегралів

Обчислення криволінійних інтегралів у системі MAPLE здійснюється шляхом зведення їх до звичайних визначених інтегралів. Спосіб зведення залежить від типу криволінійного інтеграла (криволінійний інтеграл першого чи другого роду) і способу задавання контуру інтегрування.

Таке зведення можна зробити безпосередньо, використовуючи відповідну формулу математичного аналізу або застосувавши функцію **Lineint()** пакету **student**. Ця функція має кілька форматів використання залежно від способу задання контуру інтегрування, а саме:

```
Lineint(f(x,y), x, y),
Lineint(f(x,y), x=x(t), y=y(t)),
Lineint(f(x,y), x, y =a..b),
Lineint(f(x,y), x=x(t), y=y(t), t=a..b);
Lineint(f(x,y,z), x, y, z).
```

f(x,y), **f(x,y,z)** – підінтегральна функція, **x**, **y**, **z** – аргументи функції, **a**, **b** – нижня та верхня межі інтегрування.

Розглянемо кілька прикладів, з яких буде зрозуміло, як виконувати обчислення криволінійних інтегралів за допомогою функції **Lineint()**.

1. Обчислити $\int_C (x^2 + y^2) ds$, де C – крива $x = a(\cos t + t \sin t)$, $y = a(\sin t - t \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Наведений інтеграл є криволінійним інтегралом першого роду при параметричному способі задання контуру інтегрування.

>assume(a>0);	
>x:=t-> a*(cos(t)+t*sin(t));	
	$x := t \rightarrow a(\cos(t) + t \sin(t))$
>y:=t->a*(sin(t)-t*cos(t));	
	$y := t \rightarrow a(\sin(t) - t \cos(t))$
>Lineint(x(t)^2+y(t)^2,x,y,t=0..2*Pi);	
	$\int_0^{2\pi} (a^2 (\cos(t) + t \sin(t))^2 + a^2 (\sin(t) - t \cos(t))^2)$
>factor(value(%));	$2 a^3 \pi^2 (1 + 2 \pi^2)$

2. Обчислити криволінійний інтеграл першого роду $\int_{\Gamma} x^2 y dl$,

де Γ – чверть еліпса $x^2 + 4y^2 = 4$, $x \geq 0$, $y \geq 0$. Для обчислення інтеграла використовуємо зведення до визначеного інтеграла:

>y:=x->(sqrt(4-x^2))/2;	$y := x \rightarrow \frac{1}{2} \sqrt{4 - x^2}$
>Int(x^2*y(x)*sqrt(1+(diff(y(x),x))^2),x=0..2)= int(x^2*y(x)*sqrt(1+(diff(y(x),x))^2),x=0..2);	
	$\int_0^2 \frac{x^2 \sqrt{4 - x^2} \sqrt{4 + \frac{x^2}{4 - x^2}}}{4} dx = \frac{1}{3} + \frac{8\sqrt{3}}{27} \pi$

Обчислимо цей інтеграл з використанням функції **Lineint**.

>y := x->(sqrt(4-x^2))/2;	$y := x \rightarrow \frac{1}{2} \sqrt{4 - x^2}$
>z := x->x;	$z := x \rightarrow x$
>value(Lineint(z(x)^2*y(x),y,z,x=0..2));	$\frac{8}{27} \sqrt{3} \pi + \frac{1}{3}$

3. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду

$$\int_{\Gamma} \frac{y dx + x dy}{x^2 + y^2}, \quad \Gamma = \{(x, y) : y = x, 1 \leq x \leq 2\} :$$

>x:=y->y;	$x := y \rightarrow y$
>y:=x->x;	$y := x \rightarrow x$
>I1:=Int(y(x)/(x^2+y(x)^2),x=1..2)+ Int(x(y)/(x(y)^2+y^2),y=1..2);	
>value(I1);	$\ln(2)$
	$I1 := \int_1^2 \frac{1}{2x} dx + \int_1^2 \frac{1}{2y} dy$

4. Знайти криволінійний інтеграл другого роду для контуру, заданого параметрично:

$$\int_{\Gamma} x dy - y dx, \Gamma = \{(x, y) : x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t\}.$$

Ураховуючи, що контур інтегрування задано в параметричному вигляді, обчислимо інтеграл за допомогою функції **int()**:

>x:=t->a*(cos(t))^3;	$x := t \rightarrow a \cos(t)^3$
>y:=t->a*(sin(t))^3;	$y := t \rightarrow a \sin(t)^3$
>I2:=Int(x(t)*diff(y(t),t),t=0..2*Pi)- Int(y(t)*diff(x(t),t),t=0..2*Pi);	
$I2 := \int_0^{2\pi} 3 a^2 \cos(t)^4 \sin(t)^2 dt - \int_0^{2\pi} -3 a^2 \sin(t)^4 \cos(t)^2 dt$	
>value(I2);	$\frac{3 \pi a^2}{4}$

5. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду

$$\int_{\Gamma} \frac{xy(ydx - xdy)}{x^2 + y^2} \quad \text{уздовж правої пелюстки лемніскати}$$

$$\rho^2 = a^2 \cos(2\theta):$$

>rho:=phi-> a*sqrt(cos(2*phi));	$\rho := \phi \rightarrow a \sqrt{\cos(2\phi)}$
>x:=phi-> rho(phi)*cos(phi);	$x := \phi \rightarrow \rho(\phi) \cos(\phi)$
>y:=phi-> rho(phi)*sin(phi);	$y := \phi \rightarrow \rho(\phi) \sin(\phi)$
>I3:=simplify(Int(x(phi)*(y(phi))^2/((x(phi))^2+(y(phi))^2)*diff(x(phi),phi),phi=-Pi/4..Pi/4)- Int((x(phi))^2*y(phi)/((x(phi))^2+(y(phi))^2)*diff(y(phi),phi),phi=-Pi/4..Pi/4));	

$I3 := -a^2 \left(\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin(\phi)^3 \cos(\phi) (4 \cos(\phi)^2 - 1) d\phi + \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (4 \cos(\phi)^2 - 3) \cos(\phi)^3 \sin(\phi) d\phi \right)$	
>value(I3);	0

Поверхневі інтеграли першого та другого роду

Обчислення поверхневих інтегралів першого та другого роду в системі MAPLE зводиться фактично до подвійного інтеграла згідно з відповідними формулами математичного аналізу. У свою чергу, подвійні інтеграли зводяться до повторних інтегралів.

Розглянемо приклади обчислення поверхневих інтегралів.

1. Обчислити поверхневий інтеграл першого роду $\iint_S (y^2 z^2 + z^2 x^2 + x^2 y^2) dS$, де S – частина поверхні конуса

$$z^2 = k^2 (x^2 + y^2), \text{ для якої } z \geq 0, x^2 + y^2 \leq 2ax.$$

Ураховуючи спосіб задавання поверхні інтегрування, відповідний поверхневий інтеграл зводиться до подвійного за формулою

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_D f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + z_x'^2(x, y) + z_y'^2(x, y)} dx dy.$$

Розглянемо спосіб обчислення інтеграла засобами системи MAPLE. Запишемо рівняння поверхні:

>z:=(x,y)-> k*sqrt(x^2+y^2);	$z := (x, y) \rightarrow k \sqrt{y^2 + x^2}$
>f:=(x,y)-> simplify((z(x,y)^2*y^2+z(x,y)^2*x^2+x^2*y^2)* sqrt(1+(diff(z(x,y),x))^2+(diff(z(x,y),y))^2)):	
$(2 k^2 y^2 x^2 + k^2 y^4 + k^2 x^4 + x^2 y^2) \sqrt{1 + k^2}$	

Підключимо пакет **>with(student):**

Запишемо подвійний інтеграл по колу з радіусом **a** і центром у точці **(a, 0)**:

>I4:=value(Doubleint(f(x,y),y=-sqrt(2*a*x-x^2)..sqrt(2*a*x-x^2),x=0..2*a));	
	$I4 := \frac{10 k^2 \sqrt{1 + k^2} a^6 \pi}{3} + \frac{7 \sqrt{1 + k^2} a^6 \pi}{24}$
>factor(I4);	$\frac{\sqrt{1 + k^2} a^6 \pi (7 + 80 k^2)}{24}$

2. Обчислити поверхневий інтеграл другого роду $\iint_S y dx dz$, де

S – зовнішня поверхня частини параболоїда $z = x^2 + y^2$, $0 \leq z \leq 2$.

Обчислення відповідного інтеграла зводиться до $\iint_D y(x,z) dx dy$, де D – проекція параболоїда на площину (x, z) , яка

є областю, обмеженою параболою $z = x^2$ та прямою $z = 2$. Обчислення матимуть вигляд

>g:=(x,z)->sqrt(z-x^2);	$g := (x, z) \rightarrow \sqrt{z - x^2}$
>value(2*Doubleint(g(x,z),z=x^2..2,x=-sqrt(2)..sqrt(2)));	2π

Розв'язування рівнянь і нерівностей у системі MAPLE

Основна функція solve()

Для знаходження розв'язку системи алгебраїчних рівнянь можна використовувати стандартну потужну функцію MAPLE **solve**, яка може бути застосована не тільки до лінійних систем рівнянь, а й до окремих нелінійних рівнянь і систем нелінійних

рівнянь. Функція **solve** має формат виклику **solve(eqn,var)** або **solve({eqn1,eqn2,...}, {var1,var2...})**, де **eqn** – рівняння, яке містить змінні, **var**, **{eqn1,eqn2,...}** – система рівнянь, **{var1,var2...}** – множина змінних, відносно яких система розв’язується.

Характер розв’язків можна змінювати за допомогою глобальних системних змінних:

_EnvExplicit при значенні **true** видає розв’язок без використання конструкції **RootOf**;

_EnvAllSolutions при значенні **true** видає всі розв’язки.

Системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Для розв’язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь невисокого порядку можна використовувати функцію **solve**.

Розглянемо кілька прикладів використання функції **solve** для систем лінійних алгебраїчних рівнянь:

>eq1:=2*x+b*y+2*z=3;	<i>eq1 := 2 x + b y + 2 z = 3</i>
>eq2:=c*x+d*y+4*z=2;	<i>eq2 := c x + d y + 4 z = 2</i>
>eq3:=x+2*y+2*z=1;	<i>eq3 := x + 2 y + 2 z = 1</i>
>simplify(solve({eq1,eq2,eq3},{x,y,z}));	
	$\{y = \frac{2(-2+c)}{-2c-d+8-2b+bc}, z = \frac{8-6c-2b+bc+d}{2(-2c-d+8-2b+bc)},$ $x = -\frac{2(-4+d)}{-2c-d+8-2b+bc}\}$

Наведений нижче приклад демонструє можливість знаходження розв’язків неповної системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Розглянемо систему трьох рівнянь із чотирма невідомими:

>eqn:={4*x1+7*x2-x3+3*x4=11, -2*x1+2*x2-6*x3+x4=4, x1-3*x1-5*x2-7*x3+5*x4=8};	
	$eqn := \{-2 x1 + 2 x2 - 6 x3 + x4 = 4, 4 x1 + 7 x2 - x3 + 3 x4 = 11,$ $-2 x1 - 5 x2 - 7 x3 + 5 x4 = 8\}$
>solve(eqn,{x1,x2,x3,x4});	

	$\{x1 = -\frac{27}{158} - \frac{139 x3}{79}, x2 = \frac{56}{79} + \frac{47 x3}{79}, x4 = \frac{177}{79} + \frac{102 x3}{79}, x3 = x3\}$
--	---

Для розв'язання задач лінійної алгебри взагалі та систем лінійних алгебраїчних рівнянь зокрема в системі MAPLE існує спеціальний пакет LinearAlgebra, у якому серед набору функцій є функція **LinearSolve(A, b, method='name_method');**, де **A** – матриця системи рівнянь, **b** – вектор-стовпець, **'name_method'** – один з методів знаходження розв'язків систем рівнянь.

Для використання доступні:

метод LU – декомпозиції (**mehtod='LU'**);

метод QR – декомпозиції (**mehtod='QR'**);

метод декомпозиції Холевського (**mehtod='Cholesky'**);

метод оберненої підстановки (**mehtod='subs'**).

Якщо метод при виклику функції **LinearSolve** не вказаний, то використовується метод обернення матриці $x = A^{-1}b$.

Продемонструємо застосування функції **LinearSolve** для знаходження розв'язку системи лінійних алгебраїчних рівнянь із квадратною матрицею:

>A:=Matrix(4,4,[[1,2,1,4], [2,3,4,5],[3,4,5,6],[4,5,6, 10]]);	$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 10 \end{bmatrix}$
>b:=Vector(4,[1,2,3,Pi]);	$b := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \pi \end{bmatrix}$
>with(LinearAlgebra):	

>x1:=LinearSolve(A,b,method='QR');	$x1 := \begin{bmatrix} -\frac{5}{3} + \frac{2\pi}{3} \\ 4 - \pi \\ 0 \\ -\frac{4}{3} + \frac{\pi}{3} \end{bmatrix}$
--	---

Перевірку розв'язку можна виконати шляхом обчислення його нев'язки:

>rx1:=A.x1-b;	$rx1 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
-------------------------	---

Як бачимо, нев'язка дорівнює нуль-вектору, що свідчить про точне обчислення розв'язку.

Функція **LinearSolve** може обчислювати розв'язки неповних систем рівнянь, у яких кількість рівнянь менша за кількість невідомих, а розв'язок системи рівнянь виражається через вільні системні змінні, кількість яких залежить від рангу матриці. Продемонструємо це на прикладі:

>A1:=Matrix(3,4,[[1,2,1,4],[2,3,4,5],[3,4,5,6]]);	$A1 := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$
>b1:=Vector(3,[1,2,3]);	$b1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$
>x2:=LinearSolve(A1,b1);	$x2 := \begin{bmatrix} 1 + 2_t0_4 \\ -3_t0_4 \\ 0 \\ -t0_4 \end{bmatrix}$

Аналогічним чином функція **LinearSolve** може бути використана для знаходження розв’язку системи лінійних однорідних систем рівнянь із матрицею, визначник якої дорівнює нулю, наприклад:

<code>>A2:=Matrix(4,4,[[1,2,1,4],[2,3,4,5],[3,4,5,6],[1,1,3,1]]);</code>	$A2 := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$
<code>>b2:=Vector(4,[0,0,0,0]);</code>	$b2 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
<code>>x2:=LinearSolve(A2,b2,free='s');</code>	$x2 := \begin{bmatrix} 2 s_4 \\ -3 s_4 \\ 0 \\ s_4 \end{bmatrix}$

Знаходження коренів багаточленів

При використанні процедури **solve** для знаходження коренів багаточленів функція знаходить усі корені багаточлена, які можна записати через радикали, як дійсні, так і комплексні:

<code>>P1:=x->x^4+2*x^3+2*x^2+x+5=0;</code>	$P1 := x \rightarrow x^4 + 2 x^3 + 2 x^2 + x + 5 = 0$
<code>>solve(P1(x),x);</code>	
	$-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{-1+2 I \sqrt{19}}}{2}, -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{-1+2 I \sqrt{19}}}{2}, -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{-1-2 I \sqrt{19}}}{2}, -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{-1-2 I \sqrt{19}}}{2}$

У випадку, коли система MAPLE не в змозі виконати обчислення коренів багаточлена в радикалах або коли представлення в радикалах неможливе, MAPLE використовує для запису розв'язків функцію **RootOf**.

Наведемо приклад використання функцій **solve**, **RootOf** та **evalf** для наближеного обчислення коренів багаточлена:

>P2:=x-> x^5+3*x^3+32=0;	$P2 := x \rightarrow x^5 + 3x^3 + 32 = 0$
>solve(P2(x), x);	
RootOf($_Z^5 + 3_Z^3 + 32$, index = 1), RootOf($_Z^5 + 3_Z^3 + 32$, index = 2), RootOf($_Z^5 + 3_Z^3 + 32$, index = 3), RootOf($_Z^5 + 3_Z^3 + 32$, index = 4), RootOf($_Z^5 + 3_Z^3 + 32$, index = 5)	
>evalf(%);	
1.362408512 + 1.307370837 I, -0.4907275853 + 2.215266865 I, -1.743361853, -0.4907275853 - 2.215266865 I, 1.362408512 - 1.307370837 I	

Розв'язування систем алгебраїчних рівнянь

Функція **solve** може використовуватись для розв'язання не тільки окремих нелінійних рівнянь, а й систем цих рівнянь. Розглянемо такі системи рівнянь і способи їхнього розв'язання в системі MAPLE.

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 7 \\ x^3 y^3 = -8 \end{cases} \quad \begin{cases} y^2 - x = 5 \\ \frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1} = \frac{1}{x} \end{cases}$$

>exp1:=x^3+y^3=7;	$\text{exp1} := x^3 + y^3 = 7$
>exp2:=x^3*y^3=-8;	$\text{exp2} := x^3 y^3 = -8$
>S:=solve({exp1,exp2},{x,y});	

$$\begin{aligned}
S := & \{x = -1, y = 2\}, \{x = 2, y = -1\}, \{x = -1 + \sqrt{3}I, y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}I\sqrt{3}\}, \\
& \{x = -1 - \sqrt{3}I, y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}I\sqrt{3}\}, \{x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}I\sqrt{3}, y = -1 + \sqrt{3}I\}, \\
& \{x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}I\sqrt{3}, y = -1 - \sqrt{3}I\}, \{x = 2, y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}I\sqrt{3}\}, \{x = 2, y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}I\sqrt{3}\}, \\
& \{x = -1, y = -1 + \sqrt{3}I\}, \{x = -1, y = -1 - \sqrt{3}I\}, \{x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}I\sqrt{3}, y = 2\}, \\
& \{x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}I\sqrt{3}, y = 2\}, \{x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}I\sqrt{3}, y = -1 - \sqrt{3}I\}, \\
& \{x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}I\sqrt{3}, y = -1 + \sqrt{3}I\}, \{x = -1 + \sqrt{3}I, y = -1\}, \{x = -1 - \sqrt{3}I, y = -1\}, \\
& \{x = -1 + \sqrt{3}I, y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}I\sqrt{3}\}, \{x = -1 - \sqrt{3}I, y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}I\sqrt{3}\}
\end{aligned}$$

Користувач може виділити будь-який розв'язок, зокрема дійсні розв'язки системи, наприклад:

>S[1];S[2];	$\{x = -1, y = 2\} \quad \{x = 2, y = -1\}$
-----------------------	---

Знайдемо розв'язок системи рівнянь:

>exp3:=y^2-x=5;	$\text{exp3} := y^2 - x = 5$
>exp4:=1/(y-1) - 1/(y+1)=1/x;	$\text{exp4} := \frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1} = \frac{1}{x}$
>S1:=solve({exp3, exp4}, {x, y});	$\{x = 4, y = 3\}, \{x = 4, y = -3\}$

Правильність розв'язку можна перевірити шляхом підстановки за допомогою функції **eval**:

>eval({exp3, exp4}, S1[1]);	$\{5 = 5, \frac{1}{4} = \frac{1}{4}\}$
>eval({exp3, exp4}, S1[2]);	$\{5 = 5, \frac{1}{4} = \frac{1}{4}\}$

Розв'язування тригонометричних рівнянь

Розв'язування тригонометричних рівнянь здійснюється за допомогою звичайної процедури **solve** з урахуванням тієї особливості, що зазвичай тригонометричні рівняння мають зліченну кількість періодичних розв'язків, а процедура **solve** видає лише один корінь рівняння, який лежить на проміжку $[0, 2\pi]$. Для знаходження всіх розв'язків тригонометричного рівняння необхідно задавати значення глобальної змінної **_EnvAllSolutions:=true**:

>solve(sin(x)=sqrt(3)/2,x);	$\frac{\pi}{3}$
>_EnvAllSolutions:=true; >solve sin(x)=sqrt(3)/2,x);	$\frac{1}{3} \pi_{_B1} \sim + \frac{1}{3} \pi + 2 \pi_{_Z1} \sim$
>eq1:=sin(Pi/12+x)+sin(Pi/4-x)=1;	
	$eq1 := \sin\left(\frac{\pi}{12} + x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = 1$
>simplify(solve(eq1,x));	$\frac{1}{12} \pi + 2 \pi_{_Z7} \sim$

У попередніх прикладах **_B1** – булева змінна, що набуває значень 0 та 1, а **_Z1** та **_Z7** – змінні, що набувають будь-яких цілих значень.

Такий приклад демонструє обчислення всіх коренів поліноміального тригонометричного рівняння, серед яких є множина як дійсних, так і уявних коренів:

>eq2:=2*tan(x)^3-2*tan(x)^2+3*tan(x)-3=0;	
---	--

	$eq2 := 2 \tan(x)^3 - 2 \tan(x)^2 + 3 \tan(x) - 3 = 0$
<code>>a:=solve(eq2,x);</code>	$a := \frac{1}{4} \pi, I \operatorname{arctanh}\left(\frac{1}{2} \sqrt{6}\right), \\ -I \operatorname{arctanh}\left(\frac{1}{2} \sqrt{6}\right)$

Після обчислення всіх коренів рівняння можна вибрати лише дійсні корені:

<code>>a[1];</code>	$\frac{1}{4} \pi + \pi_Z25 \sim$
------------------------	-----------------------------------

Розв'язування рекурентних рівнянь

Для розв'язання рекурентних співвідношень у системі MAPLE існує спеціальна функція **rsolve**, яка дозволяє обчислити як загальний, так і частинний розв'язки рекурентного співвідношення. Параметрами функції **rsolve** є множина, яка містить одне рекурентне рівняння або систему рівнянь, і, можливо, початкові дані.

Розглянемо приклади знаходження загального члена послідовності чисел Фібоначчі, які задаються співвідношеннями $f(n+1)=f(n)+f(n-1)$, $f(0)=1$, $f(1)=1$ і рекурентним співвідношенням $g(n+1)=2g(n)-3g(n-1)$, з початковими умовами $g(0)=1$, $g(1)=2$.

Знаходимо розв'язки наведених рекурентних співвідношень у системі MAPLE шляхом таких обчислень:

<code>>ff:=unapply(rsolve({f(n+1)=f(n)+f(n-1),f(0)=1,f(1)=1},f(n)),n);</code>	
	$ff := n \rightarrow \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10}\right) \left(-\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{10}\right) \left(\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2}\right)^n$
<code>>simplify(ff(10));</code>	89

>simplify(ff(20));		10946
>rec1:={g(n+1)=2*g(n)-3*g(n-1), g(0)=1,g(1)=2};		
	$rec1 := \{g(1) = 2, g(0) = 1, g(n+1) = 2g(n) - 3g(n-1)\}$	
>b:=unapply(rsolve(rec1,g),n);		
	$b := n \rightarrow -\frac{3}{4}I\left(-\frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{2}{3}I\right)(1 - \sqrt{2}I)^n + \frac{3}{4}I\left(-\frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{2}{3}I\right)(1 + \sqrt{2}I)^n$	
>simplify(b(100));		690040186407724018900309

У наведеному нижче прикладі розглядається чотиричленне рекурентне співвідношення зі сталими коефіцієнтами:

>REC2:={g(n+1)=2*g(n-2)-g(n),g(0)=1,g(1)=2,g(2)=0};		
	$REC2 := \{g(0) = 1, g(1) = 2, g(2) = 0, g(n+1) = 2g(n-2) - g(n)\}$	
>rsolve(REC2,g);		
	$\left(-\frac{1}{10} - \frac{3}{10}I\right)(-1+I)^n + \left(-\frac{1}{10} + \frac{3}{10}I\right)(-1-I)^n + \frac{6}{5}$	

Приклад знаходження розв'язку неоднорідного двочленного рекурентного співвідношення зі змінними коефіцієнтами:

>REC3:={g(n+1)=(n+1)*g(n)+1/(n+1),g(1)=1};		
	$REC3 := \left\{g(1) = 1, g(n+1) = (n+1)g(n) + \frac{1}{n+1}\right\}$	
>C:=unapply(rsolve(REC3,g(n)),n);		
	$C := n \rightarrow \Gamma(1+n) \left(\sum_{n1=1}^{n-1} \frac{1}{(n1+1)\Gamma(n1+2)} + 1 \right)$	
>evalf(C(12));		0.6312772392 10 ⁹

Знаходження розв'язку для системи двох рекурентних співвідношень:

>REC4:={r(n+1)=2*s(n-1),s(n+1)=2*r(n-		
---------------------------------------	--	--

1), s(0)=1, r(0)=2, s(1)=1, r(1)=2};	
$\text{REC4} := \{r(0)=2, r(1)=2, r(n+1)=2 s(n-1), s(0)=1, s(1)=1, s(n+1)=2 r(n-1)\}$	
>ss:=unapply(rsolve(REC4,{r,s}))[1],n);	
$\text{ss} := n \rightarrow r(n) = -\frac{1}{8} \text{I} (\text{I} \sqrt{2})^n \sqrt{2} + \frac{1}{4} (\text{I} \sqrt{2})^n + \frac{1}{8} \text{I} (-\text{I} \sqrt{2})^n \sqrt{2} +$ $\frac{1}{4} (-\text{I} \sqrt{2})^n - \frac{3}{8} (-\sqrt{2})^n \sqrt{2} + \frac{3}{4} (-\sqrt{2})^n + \frac{3}{8} (\sqrt{2})^n \sqrt{2} + \frac{3}{4} (\sqrt{2})^n$	
>rr:=unapply(rsolve(REC4,{r,s}))[2],n);	
$\text{rr} := n \rightarrow s(n) = \frac{1}{8} \text{I} (\text{I} \sqrt{2})^n \sqrt{2} - \frac{1}{4} (\text{I} \sqrt{2})^n - \frac{1}{8} \text{I} \sqrt{2} (-\text{I} \sqrt{2})^n - \frac{1}{4} (-\text{I} \sqrt{2})^n +$ $\frac{3}{8} (\sqrt{2})^n \sqrt{2} + \frac{3}{4} (\sqrt{2})^n - \frac{3}{8} (-\sqrt{2})^n \sqrt{2} + \frac{3}{4} (-\sqrt{2})^n$	
>ss(10);	s(10) = 64
>rr(10);	r(10) = 32

Розв'язування нерівностей та їхніх систем

У процедурі **solve(ineq,exp)** параметр **ineq** використовується для запису однієї нерівності або системи нерівностей, параметр **exp** – для запису однієї або кількох змінних, відносно яких розв'язується відповідна система нерівностей.

Розглянемо приклади розв'язання нерівностей:

>e:=(x^2-5*x+6)/(x-4)<0;	$e := \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 4} < 0$
>solve(e,x);	
RealRange(-∞, Open(2)), RealRange(Open(3), Open(4))	

У наведеному нижче прикладі конструкція **RealRange(a,b)** еквівалентна заданню відрізка **[a,b]**, конструкція

RealRange(Open(a), b) або **RealRange(a, Open(b))** – заданню відрізка **(a, b]** або **[a, b)**, відповідно:

>ee:=log[x](x^2-4)<1;		$ee := \frac{\ln(x^2 - 4)}{\ln(x)} < 1$
>solve(ee, x);		
	$\text{RealRange}\left(\text{Open}(2), \text{Open}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{17}}{2}\right)\right)$	
>ee1:=abs(x-1)+abs(x+1)<1;		$ee1 := x - 1 + x + 1 < 1$
>solve(abs(y-1)+abs(2*y+1)>3/2, y);		
	$\text{RealRange}\left(\text{Open}\left(\frac{-1}{2}\right), \infty\right), \text{RealRange}\left(-\infty, \text{Open}\left(\frac{-1}{2}\right)\right)$	

Розглянемо приклад розв’язання системи нерівностей відносно однієї змінної:

>ee2:={x^2-5*x+6>=0, abs(x-4)>2};		
	$ee2 := \{2 < x - 4 , 0 \leq x^2 - 5x + 6\}$	
>solve(ee2, x);		$\{6 < x\}, \{x < 2\}$

Розв’язок системи нерівностей отримуємо у вигляді послідовності множин, яку треба розглядати як об’єднання множин: $x \in (-\infty, 2) \cup (6, \infty)$.

Розв’язування звичайних диференціальних рівнянь та їхніх систем

Система MAPLE має досить ефективні засоби знаходження загального розв'язку звичайних диференціальних рівнянь. Вона володіє практично всіма відомими методами інтегрування звичайних диференціальних рівнянь і систем звичайних диференціальних рівнянь. Крім загального розв'язку, MAPLE ефективно знаходить також частинні розв'язки звичайних диференціальних рівнянь, зокрема задач Коші та граничних задач.

Для інтегрування звичайних диференціальних рівнянь MAPLE використовує функцію **dsolve** (**{equ, cond}**, **var**), де **equ** – звичайне диференціальне рівняння (система звичайних диференціальних рівнянь), **cond** – початкові або граничні умови (якщо вони є), **var** – функція або набір функцій, відносно якої (яких) здійснюється пошук розв'язку рівняння.

Розглянемо кілька прикладів застосування функції **dsolve** для знаходження загальних і часткових розв'язків звичайних диференціальних рівнянь.

Знайдемо загальний розв'язок диференціального рівняння Лагранжа $xy'^2 - 2yy' + 4x = 0$:

>eq1:=x*(diff(y(x),x))^2-2*y(x)*diff(y(x),x)+4*x=0;	
	$eq1 := x \left(\frac{d}{dx} y(x) \right)^2 - 2 y(x) \left(\frac{d}{dx} y(x) \right) + 4 x = 0$
>dsolve(eq1,y(x));	
	$y(x) = -2 x, y(x) = 2 x, y(x) = -\frac{1}{2} \left(-\frac{x^2}{C1^2} - 4 \right) - C1$

Слід зазначити, що система MAPLE цілком коректно знайшла розв'язок цього нелінійного рівняння й видала його загальний розв'язок, що залежить від системної змінної **_C1**, яка може набувати довільних значень, відмінних від нуля. Додатково знайдено ще два розв'язки, що не входять до загального розв'язку.

Розглянемо знаходження загального розв'язку рівняння Кле-ро

$$y(x) = x \left(\frac{dy(x)}{dx} \right) + \left(\frac{dy(x)}{dx} \right)^3 :$$

>eq2:=y(x)=x*diff(y(x),x)+(diff(y(x),x))^3;	
	$eq2 := y(x) = \left(\frac{d}{dx} y(x) \right) x + \left(\frac{d}{dx} y(x) \right)^3$
>dsolve(eq2);	
	$y(x) = -\frac{2}{9} \sqrt{-3x} x, y(x) = \frac{2}{9} \sqrt{-3x} x, y(x) = _C1^3 + _C1 x$

Система MAPLE знайшла загальний розв'язок рівняння Клеро і два його особливі розв'язки, які не входять до загального.

Для наведеного нижче рівняння знайдемо розв'язки задачі Коші, що задовольняють також початкову умову $y(2) = 12$:

>cond:=y(2)=12	cond := y(2) = 12
>dsolve([eq2, cond]);	$y(x) = 2x + 8, y(x) = 3\sqrt{2}x^{3/2}$

Розв'язок задачі Коші рівняння Клеро не єдиний і містить три розв'язки, один з яких – пряма з дійсними коефіцієнтами, а два інші є прямими з комплексними коефіцієнтами.

Розглянемо приклади знаходження розв'язку рівняння другого порядку

$$\begin{cases} y'' + 2ay' + y = x^3 & 0 < x < 1 \\ h_1 y'(0) - h_2 y(0) = 0 \\ H_1 y'(1) + H_2 y(1) = 0 \end{cases} :$$

>eq:=diff(y(x),x\$2)+2*a*diff(y(x),x)+y(x)=x^3;	
---	--

	$eq := \frac{d^2}{dx^2} y(x) + 2 a \left(\frac{d}{dx} y(x) \right) + y(x) = x^3$
>ly:=h1*D(y)(0) - h2*y(0)=0, H1*D(y)(1)+H2*y(1)=0;	
	$ly := h1 \ D(y)(0) - h2 \ y(0) = 0, H1 \ D(y)(1) + H2 \ y(1) = 0$

Знайдемо спочатку загальний розв'язок рівняння другого порядку:

>dsolve(eq,y(x));	
	$y(x) = e^{(-a + \sqrt{a^2 - 1}) x} _C2 + e^{(-a - \sqrt{a^2 - 1}) x} _C1 - 48 a^3 + 24 a^2 x + (-6 x^2 + 24) a + x^3 - 6 x$
>assign(dsolve(eq,y(x))):	
>eval(y(x), {x=1, _C1=1, a=1, _C2=1});	$2 e^{(-1)} - 11$

Знайдемо розв'язок граничної задачі при **a=5, h1=0, h2:=1, H1=0, H2=1:**

> eq1 := [eq, ly];	
	$eq1 := \left[\frac{d^2}{dx^2} y(x) + 2 a \left(\frac{d}{dx} y(x) \right) + y(x) = x^3, h1 \ D(y)(0) - h2 \ y(0) = 0, H1 \ D(y)(1) + H2 \ y(1) = 0 \right]$
> assign(dsolve(eq1));	
> eval(y(x), {a=5, h1=0, h2=1, H1=0, H2=1});	
	$\frac{e^{(-5 + \sqrt{24}) x} (5315 - 5880 e^{-5 - \sqrt{24}})}{e^{-5 + \sqrt{24}} - e^{-5 - \sqrt{24}}} + \frac{e^{(-5 - \sqrt{24}) x} (-5315 + 5880 e^{-5 + \sqrt{24}})}{e^{-5 + \sqrt{24}} - e^{-5 - \sqrt{24}}} - 5880 + 594 x - 30 x^2 + x^3$

Розглянемо приклад знаходження розв'язку задачі Коші для системи шести лінійних звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = a_1 y_1, & y_1(0) = 1 \\ \dot{y}_2 = a_3 y_1 + a_1 y_2, & y_2(0) = 1 \\ \dot{y}_3 = a_2 y_3, & y_3(0) = 0.5 \\ \dot{y}_4 = a_4 y_3 + a_2 y_4, & y_4(0) = 0.5 \\ \dot{y}_5 = a_5 y_4 + a_2 y_5, & y_5(0) = 0.5 \\ \dot{y}_6 = a_6 y_5 + a_2 y_6, & y_6(0) = 0.5 \end{cases} :$$

Уведемо списки функцій і параметрів:

<code>>[seq(y[i], i=1..6)];</code>	$[y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6]$
<code>>[seq(a[i], i=1..6)];</code>	$[a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6]$

Запишемо систему диференціальних рівнянь у вигляді послідовності диференціальних рівнянь:

<pre> >eq:=diff(y[1](x),x)=a[1]*y[1](x), diff(y[2](x),x)=a[3]*y[1](x)+a[1]*y[2](x), diff(y[3](x),x)=a[2]*y[3](x), diff(y[4](x),x)=a[4]*y[3](x)+a[2]*y[4](x), diff(y[5](x),x)=a[5]*y[4](x)+a[2]*y[5](x), diff(y[6](x),x)=a[6]*y[5](x)+a[2]*y[6](x); </pre>	
	$\begin{aligned} \text{eq} := \frac{d}{dx} y_1(x) &= a_1 y_1(x), \quad \frac{d}{dx} y_2(x) = a_3 y_1(x) + a_1 y_2(x), \\ \frac{d}{dx} y_3(x) &= a_2 y_3(x), \quad \frac{d}{dx} y_4(x) = a_4 y_3(x) + a_2 y_4(x), \\ \frac{d}{dx} y_5(x) &= a_5 y_4(x) + a_2 y_5(x), \quad \frac{d}{dx} y_6(x) = a_6 y_5(x) \\ &+ a_2 y_6(x) \end{aligned}$

Обчислимо розв'язок задачі Коші.

Задамо початкові умови:

>NU:=y[1](0)=1,y[2](0)=1,y[3](0)=0.5, y[4](0)=0.5,y[5](0)=0.5,y[6](0)=0.5;	
	$NU := y_1(0) = 1, y_2(0) = 1, y_3(0) = 0.5,$ $y_4(0) = 0.5, y_5(0) = 0.5, y_6(0) = 0.5$
>asol:=dsolve([eq,NU]);	
	$asol := \left\{ \begin{aligned} y_1(x) &= e^{a_1 x}, y_2(x) = (a_3 x + 1) e^{a_1 x}, y_3(x) = \frac{e^{a_2 x}}{2}, \\ y_4(x) &= \left(\frac{a_4 x}{2} + \frac{1}{2} \right) e^{a_2 x}, y_5(x) \\ &= \frac{\left(x a_5 + \frac{1}{2} x^2 a_5 a_4 + 1 \right) e^{a_2 x}}{2}, y_6(x) \\ &= \frac{\left(3 x a_6 + \frac{3}{2} x^2 a_6 a_5 + \frac{1}{2} x^3 a_6 a_5 a_4 + 3 \right) e^{a_2 x}}{6} \end{aligned} \right\}$

Знаходження розв'язків інтегральних рівнянь Фредгольма та Вольтерра

MAPLE містить функцію

intsolve(inteq, var, method, order);,

де **inteq** – інтегральне рівняння;

var – невідома функція;

method – назва методу знаходження розв'язку, зокрема
Neumann, Laplace, differentialequation,
eigenfunction;

order – ціле число для методу послідовних наближень
Neumann.

Розглянемо інтегральне рівняння Фредгольма другого роду

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 (xy + x^2 y^2) \varphi(y) dy + x^2$$

та знайдемо його розв'язок засобами MAPLE:

>eq:=z(x)=a*int((x*y+x^2*y^2)*z(y),y=-1..1)+x^2;	
	$eq := z(x) = a \left(\int_{-1}^1 (x y + x^2 y^2) z(y) dy \right) + x^2$
intsolve(eq,z(x));	$z(x) = x^2 - \frac{2 a x^2}{2 a - 5}$

Розглянемо однорідне рівняння Фредгольма другого роду при значенні параметра $\lambda = \frac{5}{2}$, яке збігається з характеристичним числом інтегрального оператора:

>eq2:=z(x)=5/2*int((x*y+x^2*y^2)*z(y),y=-1..1);	
	$eq2 := z(x) = \frac{5}{2} \int_{-1}^1 (x y + x^2 y^2) z(y) dy$
> intsolve(eq2,z(x));	
	$z(x) = _C1 x^2$

Шукана функція є власною функцією інтегрального оператора, що відповідає числу $\lambda = \frac{5}{2}$.

Знайдемо розв'язок рівняння Вольтерра

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^x (xy + x^2 y^2) \varphi(y) dy + x^3 :$$

>eq2:=z(x)=a*int((x*y+x^2*y^2)*z(y),y=-1..x)+x^3;	
	$eq2 := z(x) = a \left(\int_{-1}^x (x^2 y^2 + x y) z(y) dy \right) + x^3$

>intsolve(eq2,z(x));	
$z(x) = x^3 - \frac{4}{3} \frac{(a x^9 + 10 a x^6 + 9 a x^5 - 30 x^6 - 9 a x^4 - 10 a x^3 - a + 30) a x^2}{a^2 x^8 + 16 a^2 x^5 + 30 a^2 x^4 - 48 a x^5 + 16 a^2 x^3 - 80 a x^3 + a^2 - 128 a + 240}$	
$+ \frac{2}{5} \frac{a (a x^{10} - 25 a x^6 - 48 a x^5 - 25 a x^4 + 120 x^5 + a + 120) x}{a^2 x^8 + 16 a^2 x^5 + 30 a^2 x^4 - 48 a x^5 + 16 a^2 x^3 - 80 a x^3 + a^2 - 128 a + 240}$	

Наведене нижче інтегральне рівняння Фредгольма першого роду не має розв'язку, і при спробі його розв'язати MAPLE виводить порожній рядок:

>eq3:=int((x*y+x^2*y^2)*z(y),y=0..1)=sin(x);

Розглянемо неоднорідне рівняння Фредгольма другого роду з довільним вільним членом $f(x)$:

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 (xy^2 + x^2y + x^2y^2) \varphi(y) dy + f(x)$$

> eq4 := f(x) + λ·int((x·y^2 + y·x^2 + x^2·y^2)·f(y), y=0..1) + d(x);	
$eq4 := f(x) + \lambda \left(\int_0^1 (x^2 y^2 + x^2 y + x y^2) f(y) dy \right) + d(x)$	
> intsolve(eq4, f(x));	
$f(x) = \int_0^1 \left(\frac{20 x^2 (-12 \lambda y (y+1) - 3 \lambda^2 y (y+1) + 7 \lambda^2 y^2)}{\lambda^2 - 168 \lambda - 240} - \frac{12 x (-4 \lambda^2 y (y+1) + 20 \lambda y^2 + 9 \lambda^2 y^2)}{\lambda^2 - 168 \lambda - 240} \right) d(y) dy - d(x)$	
> solve(λ^2 - 168 λ - 240 = 0, λ);	$84 + 8 \sqrt{114}, 84 - 8 \sqrt{114}$

ЛЕКЦІЯ 6

Візуалізація обчислень. Побудова двовимірних і тривимірних поверхонь

Система MAPLE містить функції для побудови графічних об'єктів. Це, у першу чергу, функція для побудови двовимірних графіків **plot()** та функція для побудови тривимірних графіків **plot3d**. Для візуалізації складніших математичних об'єктів у системі MAPLE існують спеціальні математичні пакети, які включають додаткові графічні функції.

Побудова двовимірних графіків, функція plot()

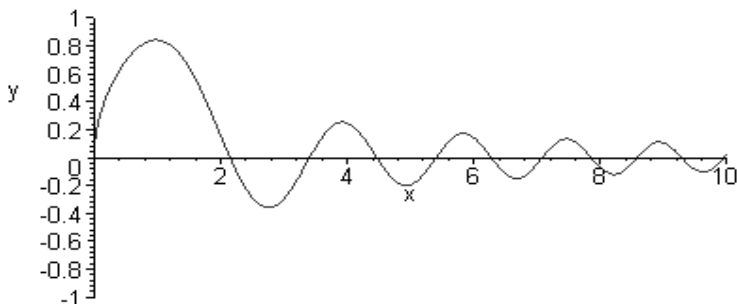
Для побудови двовимірних графіків у системі MAPLE використовується функція **plot(f, h, v)**, **plot(f, h, v, o)**, де **f** – функція (або список функцій), яку потрібно візуалізувати, **h** – рівність, що задає змінну та інтервал її зміни, **v** – необов'язковий параметр із заданням області зміни функції, **o** – параметр або набір параметрів, що задає стиль побудови графіків (товщину, колір, тип кривих, мітки тощо).

Побудова графіка однієї функції

При побудові графіка однієї функції за допомогою функції **plot()** вона задається у вигляді виразу на місці параметра **f**, задається область зміни незалежної та, можливо, залежної змінної.

Розглянемо приклад побудови графіка:

```
>plot(sin(x^(3/2))/x,x=0..10,y=-1..1);
```



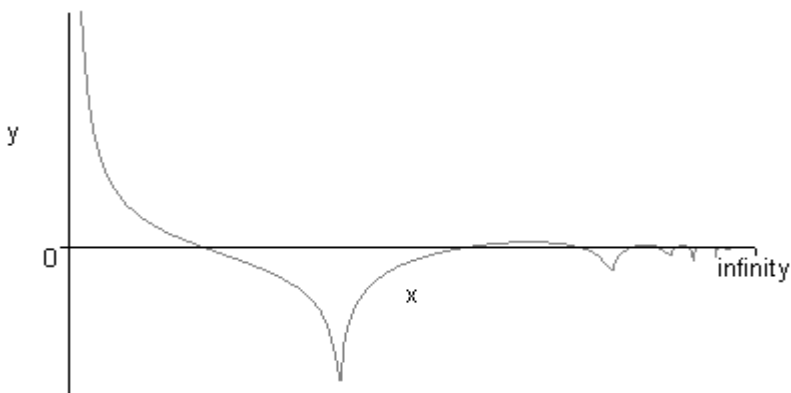
Примітка. Усі приклади використання команд системи MAPLE, результатами виконання яких є графічні об'єкти, подаються безпосередньо в тексті. Команда починається із символу `>`, одразу за командою наводиться сам графічний об'єкт.

Для керування діапазоном задання незалежної та залежної змінних застосовуються параметри **h** та **v**, які задаються у вигляді **var=expr1..expr2**, де **var** – ім'я змінної, а **expr1** та **expr2** – верхня й нижня межі їхньої зміни. У розглянутому прикладі діапазон має вигляд **x=0..10, y=-1..1**.

При побудові графіка функції на нескінченному проміжку в діапазоні змінної може з'явитися константа **infinity** та **-infinity**.

Розглянемо приклад побудови графіка:

```
>plot(ln(1+cos(x))/x,x=0..infinity,y=-3..5);
```

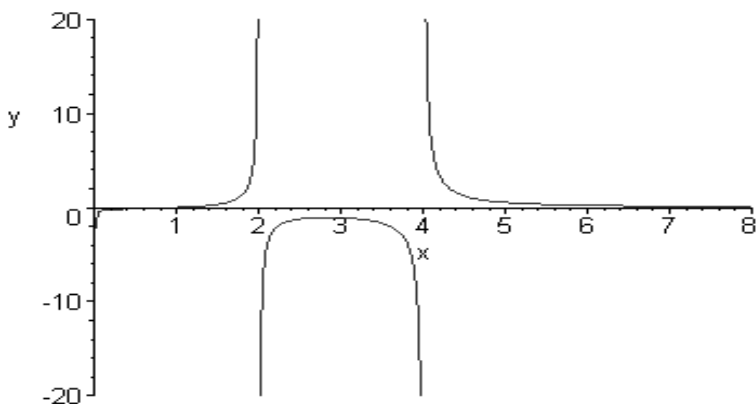


Графіки функцій з розривами

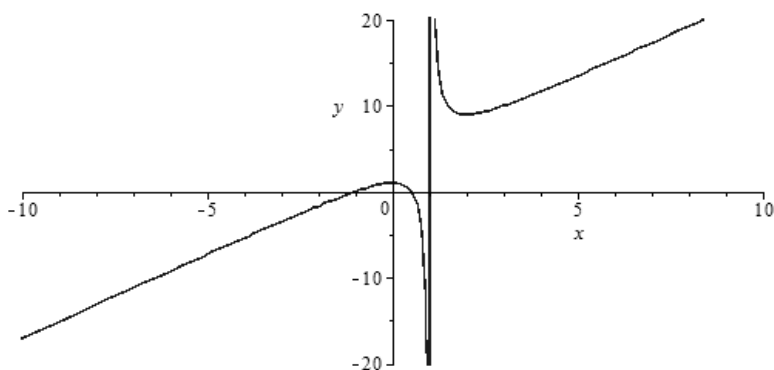
Для функцій з розривами другого роду, коли значення функції прямує до нескінченності при підході до точки розриву, система MAPLE будує графік зазвичай із зображенням вертикальних асимптот, похилі асимптоти при цьому не зображуються. Для скасування зображення вертикальних асимптот на графіку таких функцій використовують додатковий параметр **discont=true**.

Розглянемо два приклади побудови графіків функцій з точками розриву другого роду:

```
>plot(ln(x)/(x-2)/(x-4), x=0..8, y=-20..20, discont=true);
```



```
> plot(2*x + 3 + 2/(x-1), x=-10..10, y=-20..20);
```



Керування стилем і кольором ліній двовимірних графіків

Графік у системі MAPLE можна задавати за допомогою ліній або точок, для чого застосовують параметр **style**, який може набувати значення **point** або **line** (використовується за замовчанням), що відповідає стилю виведення графіка у вигляді су-

цільної лінії або окремих точок. При виведенні графіка у вигляді окремих точок для задання типу точки використовується параметр **symbol**, який може набувати таких значень:

- CROSS – хрест;
- POINT – крапка;
- DIAMONT – ромб;
- CIRCLE – коло;
- BOX – квадрат.

Для задання кольору ліній або символів використовується параметр **color**, який може набувати значень:

- red** – червоний;
- green** – зелений;
- blue** – блакитний;
- black** – чорний;
- white** – білий;
- khaki** – хакі;
- gold** – золотистий;
- orange** – оранжевий;
- violet** – фіолетовий;
- yellow** – жовтий.

Для визначення розміру символів відображення графіка використовується параметр **symbolsize=n**, який не впливає на розмір символів, якщо його значення **symbol=point**.

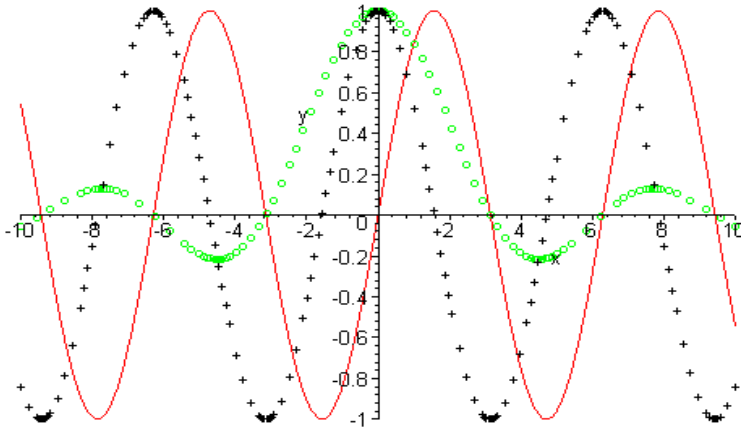
Для керування виглядом ліній зображення графіків можна застосовувати параметр **thickness=n**, що задає товщину, де **n** – ціле число, і параметр **linestyle=L**, де **L** набуває одного з можливих значень **solid**, **dot**, **dash**, **dashdot**, **longdash**, **spacedash**, **spacedot** або цифрового значення від 1 до 7.

Побудова графіків кількох функцій на одному рисунку

При побудові графіків кількох функцій на одному рисунку необхідно першим параметром функції **plot** задати список функцій (виразів) і встановити для них спільні інтервали зміни залежної та незалежної змінних. Для кращого розпізнавання окремих графіків при їх зображенні можна використати різні стилі символів і різні кольори.

Розглянемо приклад побудови трьох графіків на одному рисунку, для зображення яких застосуємо такі стилі: лінії – для першого й точки – для другого та третього графіків. Для зображення точками другого та третього графіків візьмемо символи "хрест" та "коло". Кожний графік буде відображено на листингу MAPLE окремих кольором: червоним, чорним і зеленим, відповідно.

```
>plot([sin(x), cos(x), sin(x)/x], x=-10..10, y=-1..1, color=[red, black, green], style=[line, point, point], symbol=[CROSS, CIRCLE]);
```



Побудова графіка функції, заданої сукупністю точок

Досить часто виникає потреба побудувати графік функції, що задана в табличній формі, тобто у вигляді сукупності окремих

точок. Така сукупність точок може задаватися списком координат незалежної змінної та значень функції в цих точках. При побудові графіка відповідної функції список значень аргументу та функції передається як перший параметр функції **plot**.

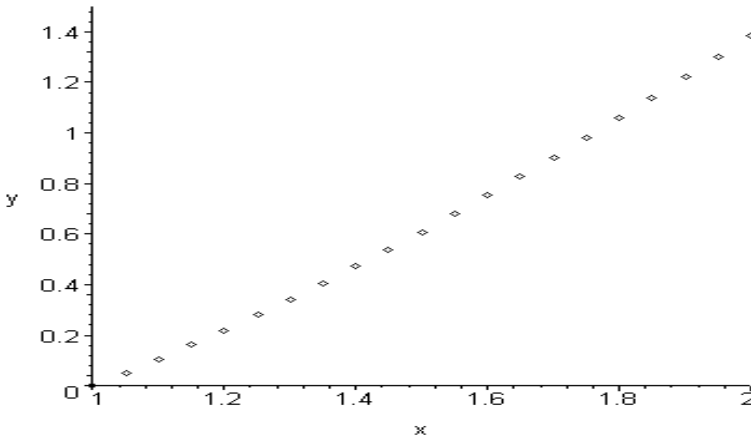
Розглянемо приклад побудови деякої функції, заданої набором точок.

Сформуємо відповідний список значень для функції $x \ln x$ на проміжку від 1 до 2 із кроком 0.05:

```
>FF:= [seq([1+i*0.05, (1+i*0.05)*ln(1+i*0.05)], i=0..20)]:
```

Побудуємо графік функції, використовуючи стиль виведення – точка і блакитний колір зображення:

```
>plot(FF, x=1..2, y=0..1.5, style=point, color=blue);
```



Побудова полігонів

Функцію **plot** можна використовувати для побудови графіків не тільки функцій, а й різноманітних полігонів, заданих сукупністю окремих точок.

Розглянемо приклад побудови п'ятикутника за координатами його вершин. Задамо координати вершин п'ятикутника та прямі, що з'єднують відповідні вершини:

```

>A1:=[0,0]: B1:=[1,0]: C1:=[2,1]: D1:=[1,2]:
E1:=[0,2]:
>ab:=[A1,B1]:bc:=[B1,C1]:cd:=[C1,D1]:e:=[D1,E1]:ea:
=[E1,A1]:

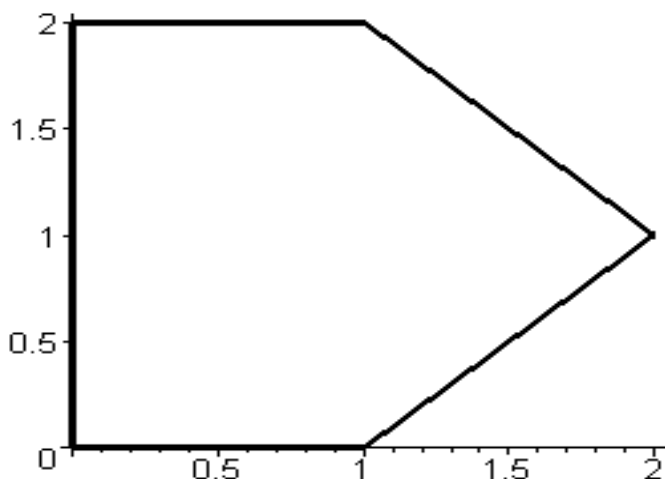
```

Зобразимо п'ятикутник у вигляді полігона, виберемо параметр товщини лінії, що дорівнює 3:

```

>plot([ab,bc,cd,de,ea],color=black,thickness=3);

```

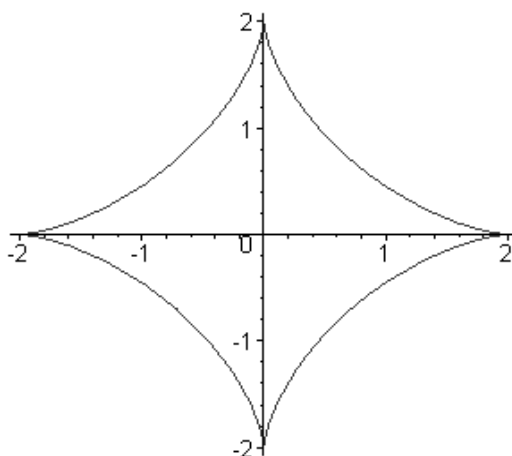
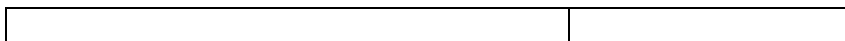


Побудова графіків функцій, заданих параметрично, і функцій у полярній системі координат

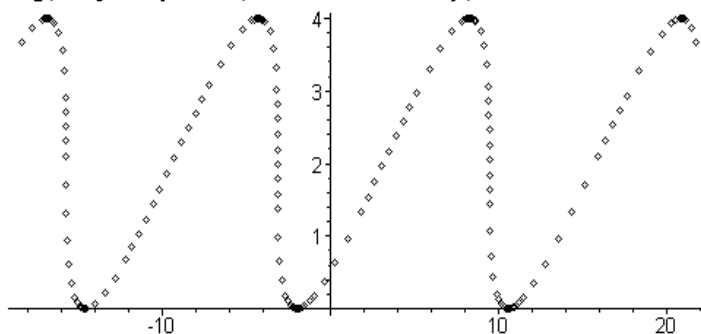
У багатьох випадках функція може задаватися в параметричному вигляді, а саме $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$. При цьому значення параметра $t \in [t_0, t_1]$.

Розглянемо приклади побудови графіків для функцій, заданих параметрично:

<code>>a:=2;</code>	<code>a := 2</code>
<code>>plot([a*cos(t)^3,a*sin(t)^3,t=-Pi..Pi]);</code>	



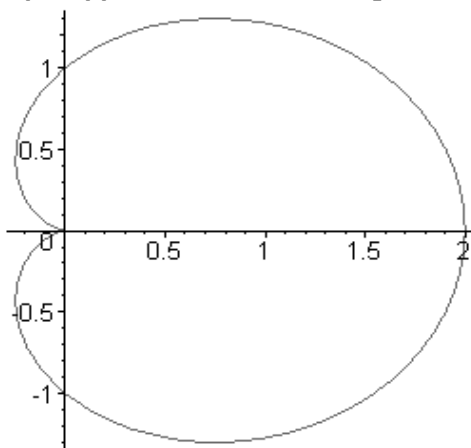
```
>plot([a*(t-cos(t)),a*(1-cos(t)),t=-  
10..10],style=point, color=black);
```



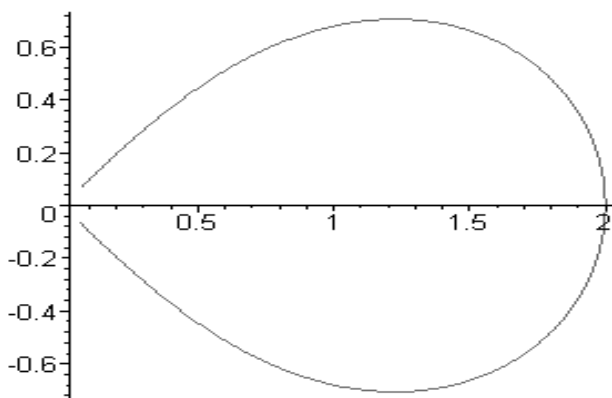
Для побудови графіків функцій у полярній системі координат використовується функція **plot** із додатковим параметром **coords=polar**. Розглянемо приклади побудови графіків функцій у полярній системі координат. Побудуємо на першому гра-

фіку карбоїду, на другому – праву пелюстку лемніскати та спіраль Архімеда – на третьому:

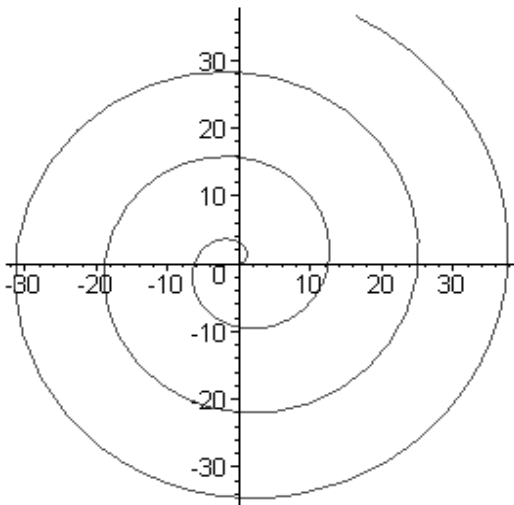
```
>plot([(1+cos(Phi)),Phi,Phi=0..2*Pi],coords=polar);
```



```
>plot([a*sqrt(cos(2*Phi)),Phi,Phi=-Pi/4..Pi/4],
coords=polar);
```



```
>plot([a*Phi,Phi,Phi=0..20],coords=polar);
```



Побудова тривимірних графіків. Особливості застосування функції **plot3d**

Тривимірними графіками називають графіки поверхонь, які можна задавати в одному з виглядів:

$$z = z(x, y), \quad y = y(x, z), \quad x = x(y, z).$$

Цей спосіб називається явним. Існує також параметричний спосіб, коли визначаються три функції (координати в одній з доступних систем координат у тривимірному просторі) $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$ від двох параметрів u , v . Крім того, для задавання поверхні можна використовувати криволінійні ортогональні системи координат: циліндричні, сферичні, параболічні, еліптичні тощо.

Для побудови графіків тривимірних поверхонь у системі MAPLE існує вбудована функція **plot3d**, яка може бути використана в одному з форматів:

```
>plot3d(expr1, x=a..b, y=c..d, p);
>plot3d([exprf, exprg, exprh], u=a..b, v=c..d, p),
```

де **ep_{r1}** – вираз, що задає поверхню від змінних **x**, **y** у явному вигляді. **ep_{rf}**, **ep_{rg}**, **ep_{rh}** – вирази, що задають рівняння поверхні в параметричній формі від змінних **u**, **v**. Параметри **a**, **b**, **c**, **d** – верхня та нижня межі зміни незалежних змінних, **p** – набір керуючих параметрів.

Побудова поверхонь різними стилями

При побудові поверхонь MAPLE пропонує користувачу цілу низку можливостей для надання графіку потрібних властивостей. Користувач може безпосередньо задавати такі параметри, як **style**, **color**, **axes**, надаючи їм відповідні значення. Водночас при активізації графічного об'єкта за допомогою миші у вікні лістингу MAPLE користувач має можливість за допомогою пунктів головного меню **STYLE**, **COLOR**, **AXES** обирати потрібні йому значення параметрів.

Побудова поверхонь у різних системах координат

Система MAPLE дозволяє будувати поверхні, які задані в найбільш поширених і відомих криволінійних системах координат: циліндричній, сферичній, еліпсоїдальній, тороїдальній та ін. Для задавання системи координат користувачу необхідно присвоїти параметру **coords** відповідне значення:

spherical – сферичні;

cylindrical – циліндричні;

toroidal – тороїдальні;

ellipsoidal – еліпсоїдальні

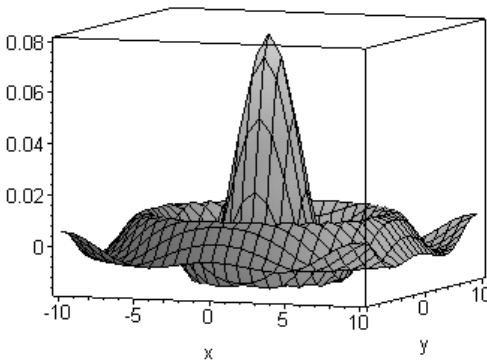
або будь-які інші доступні в системі значення параметра **coords**.

Розглянемо приклади побудови поверхонь за допомогою функції **plot3d**.

Перший приклад демонструє побудову поверхні в прямокутній системі координат, рівняння поверхні задається у явному вигляді співвідношенням

$$z = \frac{\sin(\sqrt{x^2 + y^2})}{4\pi\sqrt{x^2 + y^2}};$$

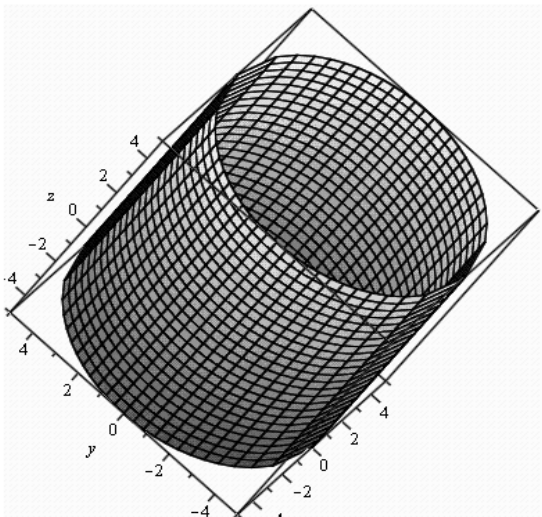
```
>plot3d(sin(sqrt(x^2+y^2))/(4*Pi*sqrt(x^2+y^2)),  
x=-10..10,y=-10..10);
```



Рівняння циліндра в прямокутних координатах:

$$x = \pm\sqrt{R^2 - y^2}, y = -R, R; z = 0, H.$$

```
> plot3d({sqrt(25 - y^2), -sqrt(25 - y^2)}, y=-5..5, z=-5..5);
```

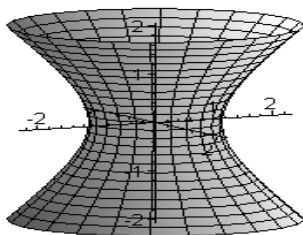


Приклад побудови поверхні в циліндричній системі координат, яка задається рівнянням $r = r(\phi, z)$.

Рівняння поверхні задається співвідношенням

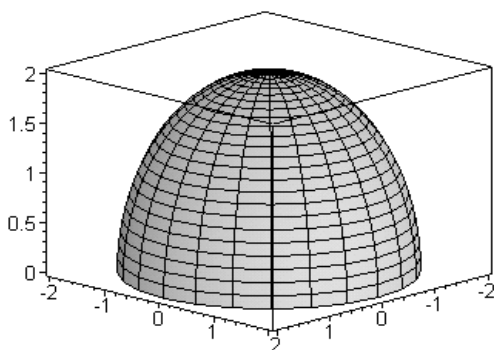
$$r = \sqrt{1+z^2}, \quad -2 \leq z \leq 2, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi.$$

```
>plot3d(sqrt(1+z^2),Phi=0..2*Pi,z=-2..2,  
coords=cylindrical);
```

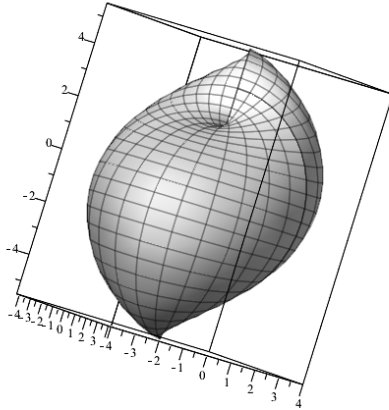


Приклад використання сферичної системи координат для побудови верхньої півсфери радіусом 2 (перший графік) і поверхні мушлі (другий графік) у сферичних координатах:

```
>plot3d(2,t=0..2*Pi,f=0..Pi/2,coords=spherical);
```

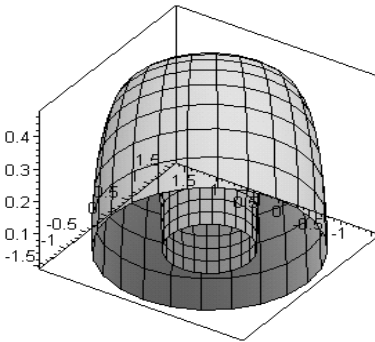


```
> plot3d(4+1.5*sin(t)*cos(f), t=0..2*Pi, f=0..Pi,  
  coords=spherical);
```



Приклад використання тороїдальної системи координат для зображення верхньої частини тора:

```
>plot3d(1.5,t=0..Pi,z=0..2*Pi,coords=toroidal);
```



Тороїдальні координати

Числа σ, τ, φ зв'язані з декартовими координатами x, y, z співвідношеннями

$$x = \frac{a \, sh \tau}{ch \tau - \cos \sigma} \cos \varphi, \quad y = \frac{a \, sh \tau}{ch \tau - \cos \sigma} \sin \varphi,$$

$$z = \frac{a \sin \sigma}{ch \tau - \cos \sigma}, \quad \text{де } -\pi \leq \sigma \leq \pi, \quad 0 \leq \tau < \infty, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

Координатні поверхні: $\sigma = \text{const}$ – сфери з центром $(0, 0, a \cdot ch \sigma)$ і радіусом $\frac{a}{|\sin \sigma|}$; $\tau = \text{const}$ – тори із осевим колом у площині Oxy , центром у початку координат і радіусом $a \cdot ch \tau$ та колом поперечного перерізу з радіусом $\frac{a}{sh \tau}$; $\varphi = \text{const}$ – півплощина $\frac{y}{x} = \text{tg} \varphi$.

При використанні криволінійних координат слід урахувати, що MAPLE завжди буде зображати стандартну поверхню, інтерпретуючи змінні згідно з їхнім розташуванням в операторі **plot3d**. Наприклад, у сферичних координатах стандартна поверхня має вигляд $\rho = f(\varphi, \theta)$, циліндричних – $\rho = f(\varphi, z)$, тороїдальних – $\tau = f(\varphi, \sigma)$. Саме таку послідовність інтервалів зміни незалежних змінних слід зберігати в операторі **plot3d**.

Поверхня тора в параметричній системі координат має вигляд

$$x = (R + r \cos \varphi) \cos \psi, \quad \varphi = 0..2\pi,$$

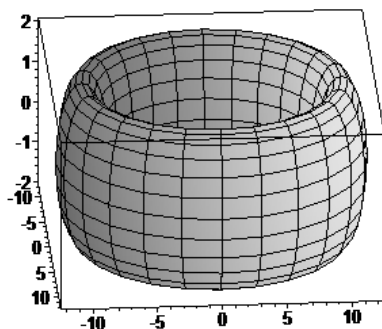
$$y = (R + r \cos \varphi) \sin \psi, \quad \psi = 0..2\pi,$$

$$z = r \sin \varphi,$$

де R – радіус осі обертання, r – радіус утворюючого кола.

Зобразимо тор в параметричному вигляді:

```
>plot3d([(2+cos(a))*cos(b), (2+cos(a))*sin(b), sin(a)], a=0..2*Pi, b=0..2*Pi);
```



У декартових координатах рівняння поверхні тора має вигляд

$$\left(x^2 + y^2 + z^2 + R^2 - r^2\right)^2 - 4R^2(x^2 + y^2) = 0.$$

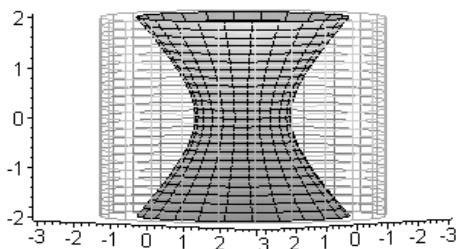
Аналогічно функції двовимірної графіки функція **plot3d** має можливість розміщувати на одному графіку кілька поверхонь із використанням різних стилів їх зображення.

Наведемо приклад зображення в циліндричній системі координат двох поверхонь:

$$r = \sqrt{1 + z^2}, \quad r = 3, \quad -2 \leq z \leq 2, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Тут для зображення поверхонь застосовуються різні стилі, зокрема **line**, **patch**:

```
>plot3d([sqrt(1+z^2),3],Phi=0..2*Pi,z=-2..2,coords=cylindrical, style= [patch,line]);
```



Зображення поверхонь, заданих у параметричній формі

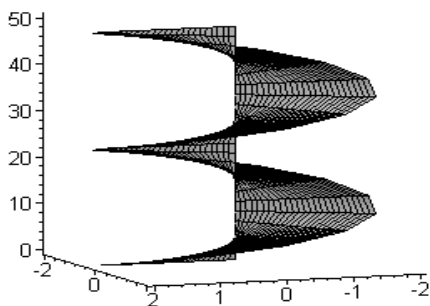
Для зображення поверхонь, заданих у параметричній формі, у системі MAPLE використовується така форма виклику функції: **plot3d([exprf, exprg, exprh], u=a..b, v=c..d, p)**. Для цієї форми необхідно задати функціональні залежності **exprf, exprg, exprh** як функції параметрів **u, v**.

Розглянемо приклади зображення поверхонь у параметричній формі.

У першому прикладі зобразимо поверхню гелікоїда, що задається за допомогою співвідношень

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = 4\varphi, \quad 0 < r < 2, \quad 0 < \varphi < 4\pi.$$

```
>plot3d([r*cos(phi), r*sin(phi), 4*phi], r=0..2, phi=0.  
.4*Pi);
```

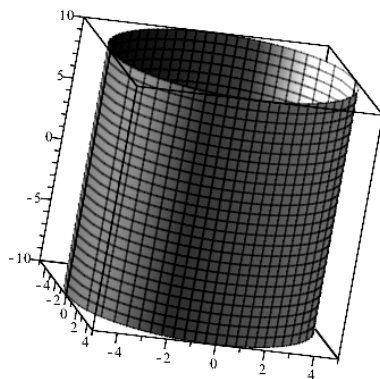


Другий приклад демонструє зображення параметрично заданого циліндра, параметрична форма якого має вигляд

$$x = (b + a \cos \psi) \cos \varphi, \quad y = (b + a \cos \psi) \sin \varphi, \quad z = a \sin \psi,$$

$$0 < \varphi < 2\pi, \quad 0 < \psi < 2\pi.$$

```
> plot3d( {[sqrt(25 - u^2), u, v], [-sqrt(25 - u^2), u, v]}, u
          = -5..5, v = -10..10);
```



При побудові графіків поверхонь у криволінійних системах координат іноді, окрім існуючого в системі MAPLE набору систем координат, про які можна дізнатися за допомогою команди **?coords**, виникає необхідність використовувати власну систему координат. Для цього можна скористатися командою

```
addcoords(namecoords, [u,v,w], [x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)]);
```

Тут **Namecoords** – назва системи координат; **u, v, w** – назви координат; **x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)** – зв'язок із декартовими координатами.

Розглянемо нову систему координат (модифікація циліндричної системи), яка дозволяє будувати стандартну поверхню, задану співвідношенням $z = f(r, \theta)$, на що вказує послідовність змінних у другому параметрі функції **addcoords**.

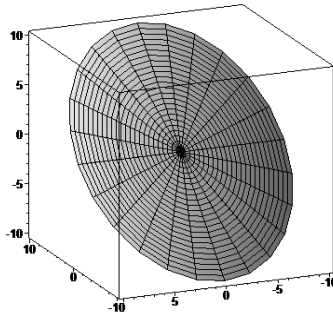
```
>addcoords(z_cylindrical, [z,r,theta],  
[r*cos(theta), r*sin(theta), z]);
```

Побудуємо поверхні, задані співвідношенням **r*cos(theta)** у двох різних системах координат: **z_cylindrical** та **cylindrical**:

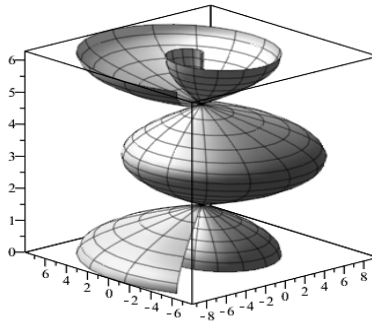
```
>plot3d(r*cos(theta), r=0..10, theta=0..2*Pi, coord  
s=z_cylindrical, title='z_cylindrical', orientation=  
[-132, 71], axes=BOXED);
```

```
>plot3d(r*cos(theta), r=0..10, theta=0..2*Pi, coord  
s=cylindrical, orientation=[100, 71], axes=NONE);
```

z_cylindrical



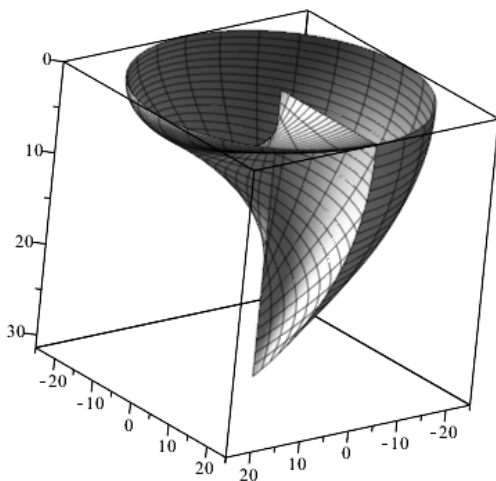
cylindrical



Очевидно, що графік другої поверхні насправді зображує поверхню $r = f(\phi, z)$, незважаючи на невідповідні позначення в першому параметрі функції **plot3d**, а саме: параметр r має зміст кута ϕ циліндричної системи координат, а змінна θ — зміст циліндричної координати z .

Приклад параметричного задавання поверхні з використанням криволінійних (тут циліндричних) координат. Перший параметр такої функції є списком виразів, які задають залежність циліндричних координат r, ϕ, z від параметрів x, y :

```
>plot3d([ 25 - y^2, x, y·x], x = 0 ..2·Pi, y = 0 ..5, coords = cylindrical)
```



ЛЕКЦІЯ 7

Параметри функції plot3d

Для керування виглядом поверхні функція **plot3d** може містити додаткові необов'язкові параметри:

grid=[m,n] – визначає щільність прямокутної рівномірної сітки значень незалежних змінних відображуваної функції, на якій обчислюються її значення для побудови поверхні, **m, n** – цілі числа, за замовчанням **m=n=25**.

style= – визначає, як буде зображена поверхня.

Допустимі значення:

POINT – точками;

HIDDEN – каркасна модель із видаленням невидимих ліній;

PATCH – зафарбована поверхня з лініями сітки;

LINE – каркасна модель без видалення невидимих ліній.

axes= – визначає тип відображуваних осей (NORMAL, BOXED, FRAME, NONE).

shading= – визначає схему зафарбовування при відображенні поверхні. Допустимі значення: XYZ, XY, Z, ZGRAYSCALE.

title= ' ' – визначає рядок заголовка.

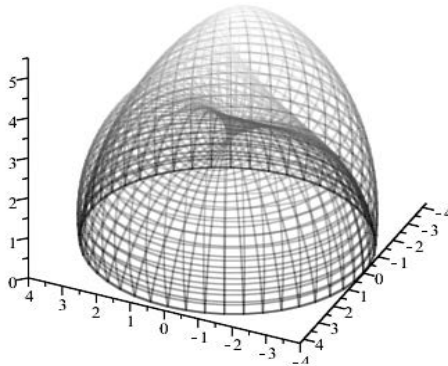
orientation=[a,b] – задає кути у сферичній системі координат, напрямок, з якого користувач дивиться на поверхню.

scaling= – задає масштаб, у якому відображається поверхня. Набуває значень CONSTRAINED, UNCONSTRAINED.

З повним переліком параметрів можна ознайомитись за допомогою довідкової системи MAPLE.

Розглянемо приклад використання параметрів для керування зовнішнім виглядом поверхні.

```
> plot3d( 4 + 1.5 * sin(t) * cos(f), t = 0 .. 2 * Pi, f = -  $\frac{\text{Pi}}{2}$  ..  $\frac{\text{Pi}}{2}$ , coords = spherical, title = Графік поверхні, style = LINE, axes = frame, shading = ZGRAYSCALE, orientation = [115, 55], scaling = UNCONSTRAINED );
```



Побудова графічних структур

У системі MAPLE існують функції ядра PLOT, PLOT3D, які дозволяють будувати графічні структури. Кожний об'єкт структури може зображувати точку, ламану, полігон, напис тощо, які позиціонуються із заданою точністю в обраній системі координат. Функції PLOT, PLOT3D одночасно є даними, які описують графічні об'єкти. Їх можна подати у вигляді файлів, а після відкриття файлів – у вигляді графіків.

Основними об'єктами структури є:

- **POINTS**($[x_1, y_1], \dots, [x_n, y_n]$) – точки із заданими координатами;

- **CURVES**($[[x_{11}, y_{11}], \dots, [x_{1n}, y_{1n}]] \dots [x_m, y_m, 1], \dots, [x_{mn}, y_{mn}]]$) – криві (ламані) по заданих точках;

- **POLYGONS**($[x_{11}, y_{11}], \dots, [x_{1n}, y_{1n}] \dots [x_m, y_m, 1], \dots, [x_{mn}, y_{mn}]$) – замкнені області, полігони (багатокутники), остання точка збігається з першою;

- **TEXT** (**[x,y], 'string', horizontal, vertical**) – текстова інформація '**string**', позиціонована в точці з координатами $[x, y]$ з вертикальним або горизонтальним розміщенням тексту.

Графічні структури PLOT3D

Серед графічних структур PLOT3D є ті самі структури **POINT**, **CURVES**, **POLIGON**, **TEXT** із додаванням третьої координати. Крім того, існують специфічні тривимірні структури:

GRID(a..b, c..d, listlist) – поверхня над частиною координатної площини, обмеженої відрізками $[a,b]$, $[c,d]$ за даними, заданими списком

`listlist = [[z11...z1n], [z21...z2n], [zm1...zmn]].`

Цей список задає координату z для точок рівномірної сітки.

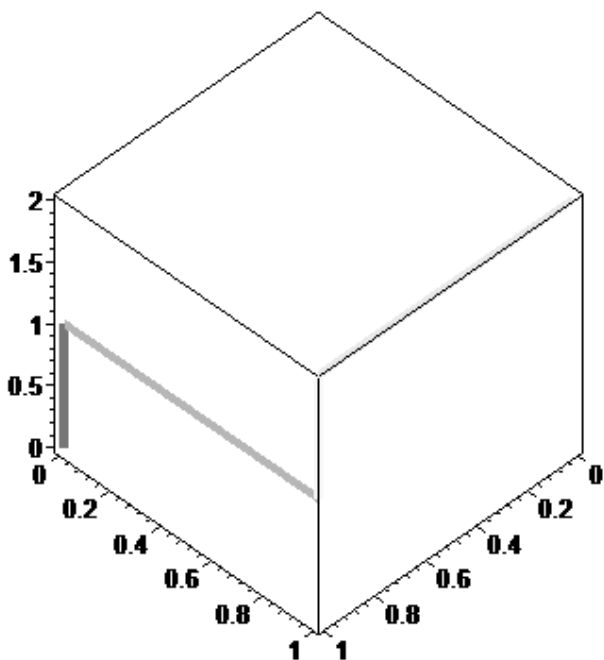
MESH (listlist) – поверхні в тривимірному просторі за даними змінної `listlist`, яка задає повний списочний склад трьох координат функції: `listlist = [[[x11,y11,z11],...[x1n,y1n,z1n]],`
`[[x21,y21,z21],...[x2n,y2n,z2n]],...`

`[[xm1,ym1,zm1],...[xmn,ymn,zmn]]].`

Далі розглянемо приклади використання різних структур.

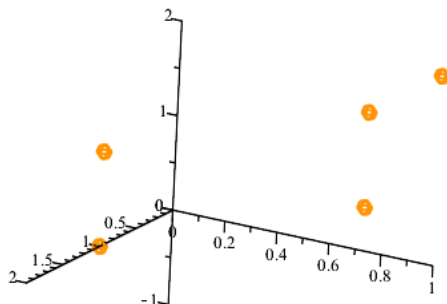
Побудова ламаної лінії в тривимірному просторі

```
>PLOT3D(CURVES([[1,0,0],[1,0,1],[1,1,1],[1,1,2],[0,1,2]],  
THICKNESS(5));
```



Побудова точок у просторі

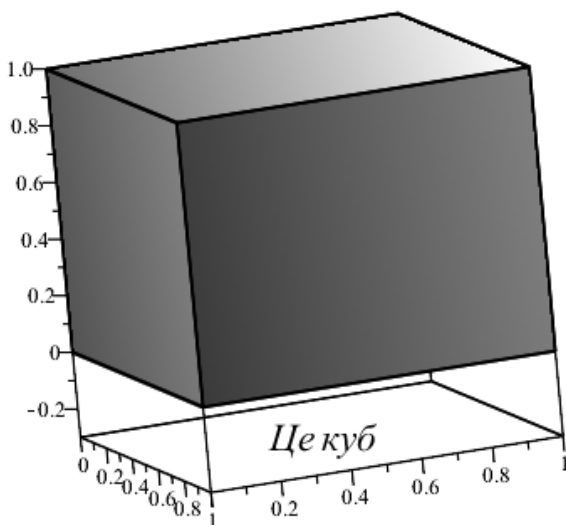
```
> PLOT3D(POINTS([[1, 0, 0], [1, 0, 1], [1, 1, 1],  
[1, 1, 2], [0, 1, 2]]), SYMBOL(CIRCLE, 24),  
COLOR(RGB, 1, .5, 0), AXES(NORMAL), TEXT([2, 0, -  
1], "П'ять точок у просторі", FONT(TIMES, ROMAN,  
14), COLOR(RGB, 1, 0,
```



П'ять точок у просторі

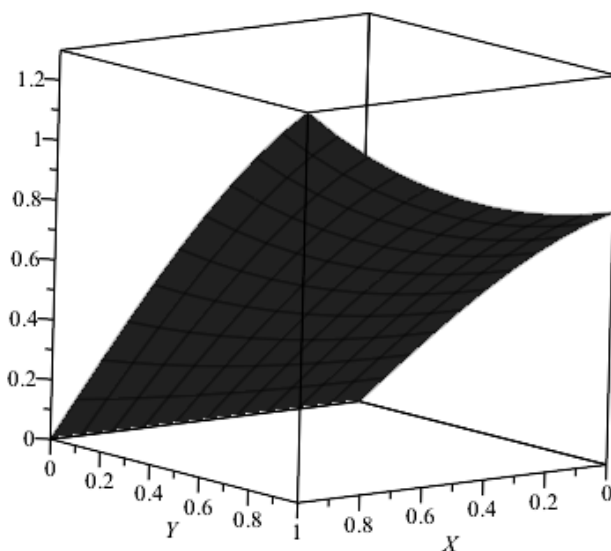
Побудова графічної структури POLYGONS, TEXT

```
> PLOT3D(POLYGONS([[0, 0, 0], [1, 0, 0], [1, 1, 0], [0, 1, 0]],
[[0, 0, 0], [0, 1, 0], [0, 1, 1], [0, 0, 1]],
[[1, 0, 0], [1, 1, 0], [1, 1, 1], [1, 0, 1]],
[[0, 0, 0], [1, 0, 0], [1, 0, 1], [0, 0, 1]],
[[0, 1, 0], [1, 1, 0], [1, 1, 1], [0, 1, 1]],
[[0, 0, 1], [1, 0, 1], [1, 1, 1], [0, 1, 1]]), TEXT([0.5, 0.5, -0.3], 'Це куб', FONT(TIMES,
ROMAN, 18)));
```



Побудова поверхні на рівномірній сітці

```
> z := [seq([seq(evalf(sin(i/10)*cosh(j/10)), i=0..10)], j=0..10)];
> PLOT3D(GRID(0..1, 0..1, z), AXESLABELS(X, Y, Z), ORIENTATION(140, 30),
  AXES(BOXED), COLOR(1, 0, 0.5));
```



Побудова поверхні на нерівномірній сітці

Задаємо сім'ю кривих:

<code>>y1:=x->1/2*x+2;</code>	$y1 := x \rightarrow \frac{1}{2} x + 2$
<code>>x1:=[0,2,3,4];</code>	$x1 := [0, 2, 3, 4]$
<code>>y2:=x->1/3*x+2;</code>	$y2 := x \rightarrow \frac{1}{3} x + 2$
<code>>x2:=[0,1,2.5,4];</code>	$x2 := [0, 1, 2.5, 4]$
<code>>y3:=x->0</code>	$y3 := x \rightarrow 0$
<code>>x3:=[1,2,3,3.5];</code>	$x3 := [1, 2, 3, 3.5]$

```
>f:=(x,y)->sin(x^2+y^2);
```

```
f := (x, y) → sin(x2 + y2)
```

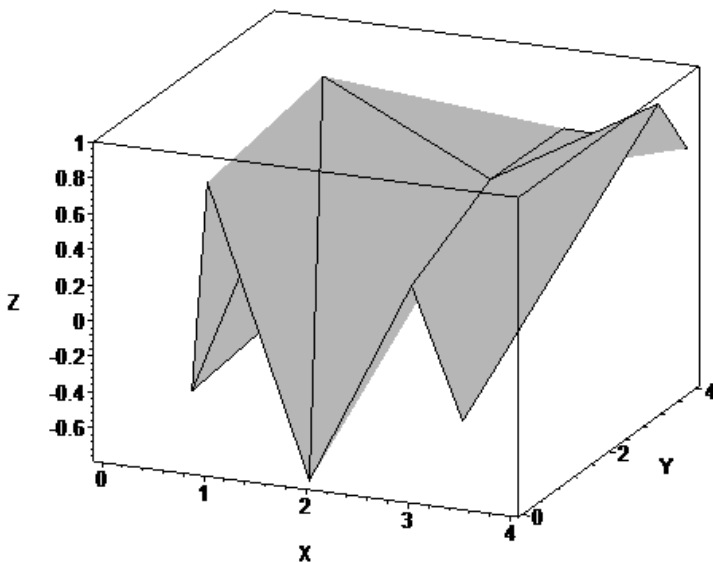
Будуємо криволінійну сітку та обчислюємо значення функції в точках сітки:

```
>gg:=[[evalf(seq([x1[i],y1(x1[i]),f(x1[i],y1(x1[i]))],i=1..4))],[evalf(seq([x2[i],y2(x1[i]),f(x2[i],y2(x1[i]))],i=1..4))],[evalf(seq([x3[i],y3(x1[i]),f(x3[i],y3(x1[i]))],i=1..4))]]:
```

Відображаємо графічно поверхню на нерівномірній сітці:

```
>plot3d(mesh(gg),axeslabels(x,y,z),color(rgb,0,1,0));
```

Будуємо графік функції на сітці:



Додаткові графічні можливості системи MAPLE

Додаткові графічні можливості системи MAPLE можна отримати, використовуючи такі функції графічного пакету **plots**:

```
>with(plots);
```

```
[animate, animate3d, animatecurve, arrow, changecoords, complexplot,  
complexplot3d, conformal, conformal3d, contourplot, contourplot3d,  
coordplot, coordplot3d, densityplot, display, dualaxisplot, fieldplot,  
fieldplot3d, gradplot, gradplot3d, implicitplot, implicitplot3d, inequal,  
interactive, interactiveparams, intersectplot, listcontplot,  
listcontplot3d, listdensityplot, listplot, listplot3d, loglogplot,  
logplot, matrixplot, multiple, odeplot, pareto, plotcompare, pointplot,  
pointplot3d, polarplot, polygonplot, polygonplot3d, polyhedra_supported,  
polyhedraplot, rootlocus, semilogplot, setcolors, setoptions,  
setoptions3d, spacecurve, sparsematrixplot, surfdata, textplot,  
textplot3d, tubeplot]
```

Команди пакету plots

plots – дуже потужний пакет двовимірної та тривимірної графіки, налічує більше 50 функцій.

Продемонструємо на прикладах можливості лише деяких функцій цього пакету:

animate – створює анімацію двовимірних графіків функцій;

animate3d – створює анімацію тривимірних графіків функцій;

complexplot3d – побудова графіків у комплексній площині;

contourplot3d – побудова графіків поверхні у вигляді ізогіпсів (ліній рівної висоти);

coordplot3d – зображення стандартних поверхонь для криволінійних координат;

cylinderplot – побудова графіків поверхні в циліндричній системі координат;

display – зображення сукупності графіків для списку графічних об'єктів на площині;

display3d – зображення сукупності графіків для списку графічних об'єктів у тривимірному просторі;

fieldplot – побудова графіків векторного поля на площині;

fieldplot3d – побудова графіків векторного поля в просторі;

gradplot – побудова графіків векторного поля градієнта функції двох змінних;

gradplot3d – побудова графіків векторного поля градієнта функції трьох змінних;

implicitplot3d – побудова графіків поверхні неявно заданої функції;

oderlot – побудова графіків чисельного розв'язку звичайного диференціального рівняння;

spacecurve – побудова тривимірних кривих;

sphereplot – побудова графіків поверхні у сферичних координатах;

textplot (textplot3d) – виведення тексту на задане місце;

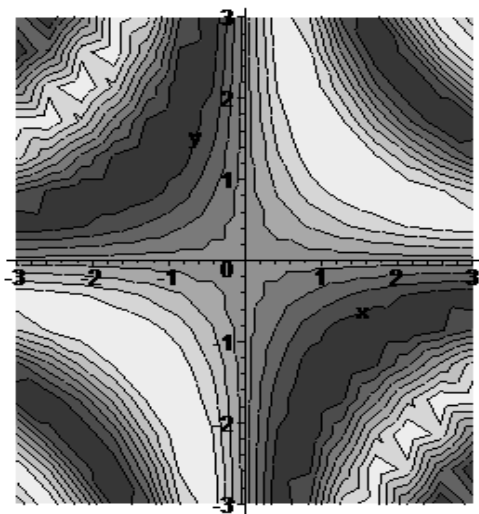
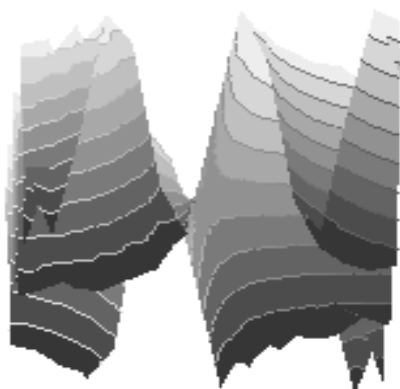
tuberplot – побудова тривимірних графіків типу труби.

Розглянемо приклади використання команд пакету **plots** для побудови різних графічних об'єктів.

Команди **contourplot** та **contourplot3d**

```
>contourplot3d(sin(x*y), x=-3..3, y=-3..3,  
grid=[15,15], filled=true);  
>contourplot(sin(x*y), x=-3..3, y=-3..3,  
grid=[15,15], filled=true);
```

Отримаємо графіки ліній рівня для заданої функції в тривимірному та двовимірному випадках.



Команди `tubeplot` та `display3d`

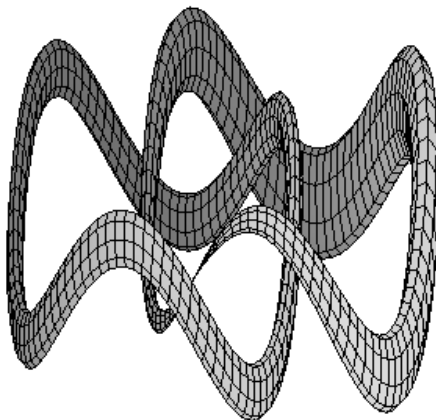
```
>N:=15: k:=3.^(1/2):
>knot1:=tubeplot([1+k*cos(t),k*sin(t),.3*sin(3*t)],
t=0..2*Pi,numpoints=100,radius=.1):
```

```

>knot2:=tubeplot([-
1/2+k*cos(t),k/2+k*sin(t),.3*sin(3*t)],
t=0..2*Pi,numpoints=100,radius=.2*sin(t/2)):
>display3d({knot1,knot2});

```

Отримаємо графічне зображення двох трубчастих поверхонь.



Команди `cylinderplot`, `display`

```

>pp1:=cylinderplot(1+0.5*z,t=0..2*Pi,z=0..3,
orientation=[45,70],style=patch):

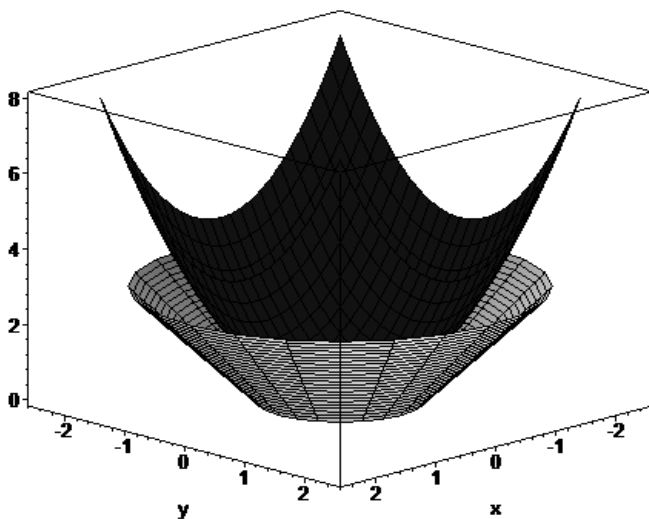
```

```

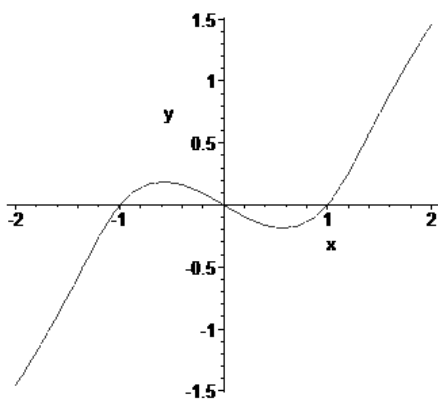
>pp2:=plot3d(x^2+y^2,x=-2..2,y=-2..2,color=blue):
>display({pp2,pp1});

```

Отримаємо графічні зображення поверхні конуса та параболоїда.

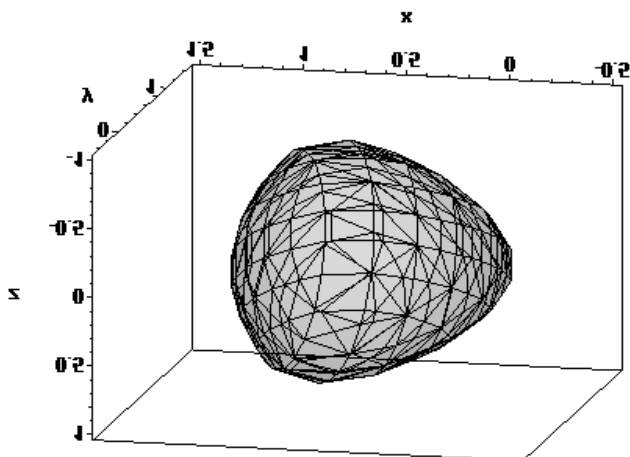


Команди `implicitplot`, `implicitplot3d`
`>implicitplot(x^3-y^3=x+2*y, x=-2..2,y=-2..2);`
 Отримаємо графічне зображення неявно заданої функції.



```
>implicitplot3d(x^4+y^2+z^2-x-y=0,x=-0.5..1.5,y=-0.5..1.5,z=-1..1);
```

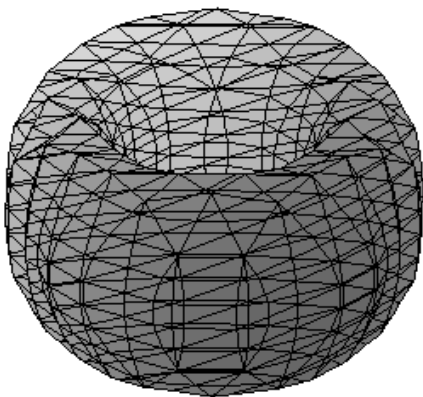
Отримаємо графічне зображення поверхні, заданої неявно.



Зображення поверхні тора за допомогою неявно заданої функції

```
>implicitplot3d((x^2+y^2+z^2+25-4)^2-100*(x^2+y^2)=0,x=-7..7,y=-7..7,z=-2..2);
```

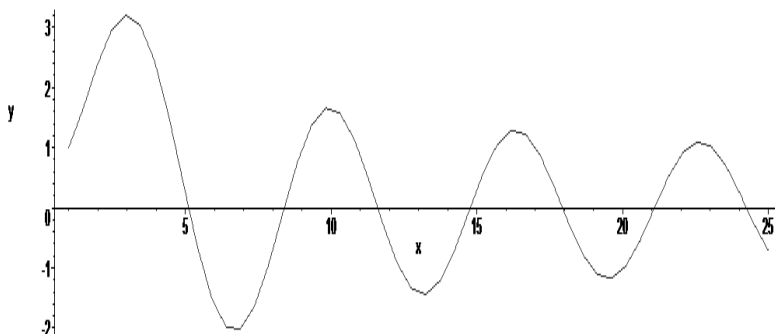
Отримаємо графічне зображення поверхні тора, заданого неявним рівнянням.



Команда odeplot

>g:=2;		$g := 2$
>eq11:={x^2*diff(y(x),x,x)+x*diff(y(x),x)+(x^2-g^2)*y(x)=0,y(1)=1.,D(y)(1)=1.};		
	$\text{eq11} := \left\{ x^2 \left(\frac{d^2}{dx^2} y(x) \right) + x \left(\frac{d}{dx} y(x) \right) + (-g^2 + x^2) y(x) = 0, \right. \\ \left. y(1) = 1., D(y)(1) = 1. \right\}$	
>ss:=dsolve(eq11,num	ss := proc(x_rkf45) ... end proc	
eric);		
>odeplot(ss,[x,y(x)],x=1..25);		

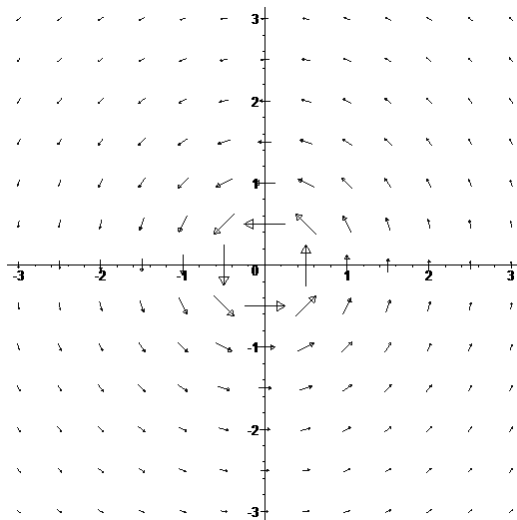
У результаті отримаємо графік розв'язку задачі Коші для звичайного диференціального рівняння.



Команда fieldplot

<code>>vx:=(x,y)->-y/(x^2+y^2);</code>	$vx := (x, y) \rightarrow -\frac{y}{x^2 + y^2}$
<code>>vy:=(x,y)->x/(x^2+y^2);</code>	$vy := (x, y) \rightarrow \frac{x}{x^2 + y^2}$
<code>>fieldplot([vx,vy],x=-3..3,y=-3..3, arrows=SLIM, grid=[13,13],color=blue);</code>	

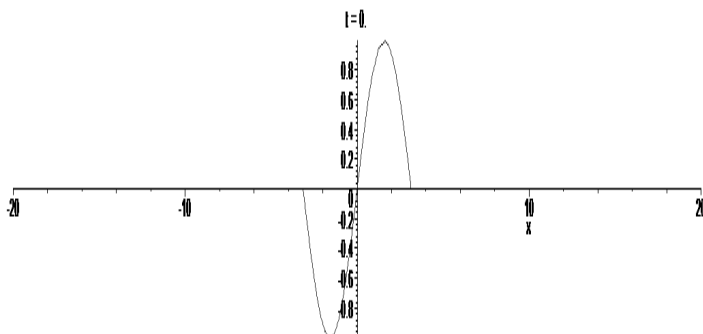
Отримуємо графічне зображення двовимірного векторного поля.



Команда animate

<code>>f:=x->piecewise(abs(x)<Pi, sin(x),0);</code>	
	$f := x \rightarrow \text{piecewise}(x < \pi, \sin(x), 0)$
<code>>ff:=(x,t)->(f(x-2*t)+f(x+2*t))/2;</code>	
	$ff := (x, t) \rightarrow \frac{1}{2} f(x - 2t) + \frac{1}{2} f(x + 2t)$
<code>>animate(plot,[ff(x,t),</code>	<code>x=-</code>
<code>20..20], t=0..10);</code>	

У результаті на лістингу MAPLE можна спостерігати анімацію такого графіка:



Базові засоби програмування в системі Maple

Умовний оператор

Для створення умовних конструкцій у системі Maple використовується оператор **if**. Синтаксис цього оператора має загальноприйнятий у мовах програмування вигляд:

```
if <Логічний вираз 1> then <Послідовність операторів 1> | elif <Логічний вираз 2> then <Послідовність операторів 2> | | else <Послідовність операторів n+1> | fi:
```

Семантика оператора має такий зміст: якщо <Логічний вираз 1> має значення "істина", то виконується <Послідовність операторів 1> до першого **elif**; якщо це значення хибне, то перевіряється <Логічний вираз 2>, і якщо його значення є істиною, то виконується <Послідовність операторів 2>; якщо значення <Логічний вираз 2> хибне, то виконується <Послідовність операторів n+1>. Блоків **elif** може бути скільки завгодно, логічні вирази, що їм відповідають, послідовно перевіряються й виконується відповідна група операторів у випадку, коли логічний вираз набуває значення "істина". За до-

помогою вертикальних рисок | | указуються ті елементи конструкції **if**, які можуть бути пропущені.

Наведемо приклад використання умовного оператора для обчислення значення функції:

```
>x:=2.5;  
>if x <0 then f(x):=0  
  elif (x>=0 and x<1)then f(x):=x  
  elif (x>=1 and x<2) then f(x):=1  
  elif x>=2 and x< 3 then f(x):=1+(x-2)  
  elif x>=3 and x<4 then f(x):=3  
  else f(x):=3+(x-4)  
fi;  
  
f(2.5):=1.5
```

Оператори циклу

Для організації повторних обчислень у системі Maple існують оператори циклу. Синтаксис оператора циклу має вигляд:

```
for <ім'я змінної 1> from <вираз 1> |to <вираз 2>| |by <вираз 3>| do <Набір операторів > od;
```

Тут <ім'я змінної 1> – ім'я змінної керування циклом;

<вираз 1>, <вираз 2>, <вираз 3> – вирази, що задають початкове значення, кінцеве значення та крок зміни змінної <ім'я змінної 1>.

Якщо складова циклу **by** <вираз 3> відсутня, то крок зміни змінної керування дорівнює +1.

Наведений оператор циклу буде виконуватись доти, поки <змінна 1> не перевищить значення <вираз 2>; якщо конструкція **to** <вираз 2> відсутня, то цикл буде виконуватись нескінченну кількість разів і для його припинення необхідні додаткові дії.

Цикл можна перервати за допомогою додаткової конструкції **while** <вираз 4>. Синтаксис такого циклу має вигляд:

```
for <ім'я змінної 1> from <вираз 1> |to <вираз 2>| |by <вираз 3>| while <умова 1> do <Набір операторів > od;
```

Цикл буде виконуватись до тих пір, поки **<ім'я змінної 1>** **< вираз 2>**, і завершить роботу, як тільки **<умова 1>** стане хибною.

Існує ще одна форма оператора циклу з конструкцією **in**, який має такий синтаксис:

```
for <ім'я змінної 1> |in <список значень>|
|while <умова 1> do <Набір операторів> od;
```

Цей список виконуватиметься доти, поки не вичерпається **<список значень>** і поки виконується умова **<умова 1>**.

У Maple існує також спрощена конструкція циклу:

```
while <умова 1> do <Набір операторів> od;
```

Тут набір операторів буде виконуватись доти, поки є істинною **<умова 1>**.

Розглянемо приклад використання оператора циклу для знаходження суми з додатковою умовою:

```
>s:=0;
>for i from 1 to 10000 by 2 while s<1.05 do
s:=s+1/(i^3) od: evalf(s);i;
1.050075546 13
```

Оператори переривання та пропускавання циклу

Іноді виникає потреба пропустити окреме значення змінної циклу. Для цього існує оператор **next**.

Приклад використання оператора **next** у складі операторів **if - fi**:

```
>for i in [1,2,5,7,9,11] do if i=7 then next
else k[i]:=i^2; print(k[i]) fi od;
1 4 25 81 121
```

Оператор **break** перериває виконання фрагмента програми або циклу. Його дію пояснює такий приклад:

```
>for i in [1,2,5,7,9,11] do if i=7 then break
else k[i]:=i^2; print(k[i]) fi od;
1 4 25
```

Додаткові можливості застосування функцій **map** і **map2** до списків та множин

Часто виникає потреба виконати деяку операцію або обчислити функцію стосовно кожного елемента списку або множини. Окрім застосування оператора циклу, система Maple надає можливість використання спеціальних команд:

map (функція або команда, список або множина [, **пар1**, **пар2**, ..., **парN**]);

map2 (функція або команда, **пар1**, список або множина [, **пар2**, ..., **парN**]);

Команда **map** дозволяє застосувати функцію або команду, що вказана першим параметром, до всіх елементів списку або множини, що вказана другим параметром; при цьому елементи списку або множини є першим параметром функції або команди. Якщо функція або команда потребує додаткових аргументів, то вони вказуються після списку або множини у вигляді **пар1**, **пар2**, ..., **парN**. Результатом роботи команди **map** є відповідно список або множина.

>map(diff, [sin(x), cos(x), x^2], x\$2);	
	$[-\sin(x), -\cos(x), 2]$
>map(cos, [x, y, z, v, w]);	
	$[\cos(x), \cos(y), \cos(z), \cos(v), \cos(w)]$
>map(int, [seq(x^2*sin(k*x), k=1..10)], x=0..2*Pi);	
	$\left[-4\pi^2, -2\pi^2, -\frac{4}{3}\pi^2, -\pi^2, -\frac{4}{5}\pi^2, -\frac{2}{3}\pi^2, -\frac{4}{7}\pi^2, \right. \\ \left. -\frac{1}{2}\pi^2, -\frac{4}{9}\pi^2, -\frac{2}{5}\pi^2 \right]$

Команда **map2** дозволяє застосувати функцію або команду, що вказана першою, до виразу, що вказаний у вигляді **пар1**. Як другий параметр функції або команди використовуються елементи

нти списку або множини, як можливі додаткові параметри – **пар2**, ..., **парN**. Команда **map2** повертає список або множину.

>f:=(x,y,z)->x^y+z;	
	f := (x, y, z) → x^y + z
>map2(f,x,[1,2,3,4,5,6],sqrt(x));	
	[$x + \sqrt{x}$, $x^2 + \sqrt{x}$, $x^3 + \sqrt{x}$, $x^4 + \sqrt{x}$, $x^5 + \sqrt{x}$, $x^6 + \sqrt{x}$]
>map2(diff,sin(x*y*z)/(x*y),[x,y,z]);	
	$\left[\frac{\cos(xyz)z}{x} - \frac{\sin(xyz)}{x^2y}, \frac{\cos(xyz)z}{y} - \frac{\sin(xyz)}{xy^2}, \cos(xyz) \right]$

Процедури та процедури-функції

Мова програмування Maple так само, як мови програмування високого рівня, має конструкції, що називаються процедурами. Процедурою називають самостійний модуль програми, призначений для виконання якоїсь відокремленої сукупності операцій. Процедура є найважливішим елементом структурного програмування й використовується для розширення існуючих можливостей системи Maple.

Найпростіша форма процедури має такий вигляд:

name:=proc (Параметри)

Тіло процедури

end;

name – ім'я процедури. Параметри процедури задаються у вигляді списку змінних, наприклад **proc (x, y, z)**. При цьому списки формальних і фактичних параметрів мають відповідати один одному в тому розумінні, що однакові місця в них мають займати змінні одного типу.

Розглянемо приклад процедури, яка обчислює коефіцієнти Фур'є заданого порядку для заданої функції:

<pre> >kcoef:=proc(f,k,ks1,kc1) ks1:=(int(f(x)*sin(k*x),x=0..2*Pi)/ int((sin(k*x))^2,x=0..2*Pi)): >kc1:=(int(f(x)*cos(k*x),x=0..2*Pi)/ int((cos(k*x))^2,x=0..2*Pi)): end proc; </pre>	
<pre> kcoef:=proc(f,k,ks1,kc1) ks1:=int(f(x)*sin(k*x),x=0..2*Pi)/int(sin(k*x) ^2,x=0..2*Pi); kc1:=int(f(x)*cos(k*x),x=0..2*Pi)/int(cos(k*x) ^2,x=0..2*Pi) end proc </pre>	

Звернення до відповідної процедури має вигляд:

>g:=x->x^7: #Задання фу- нкції	
>ks:='ks';kc:='kc':	
>kcoef(g,8,ks,kc):# Звер- нення до процедури	
>ks;kc; #Виведення значень коефіцієнтів Фур'є	
	$\frac{\frac{315}{65536} \pi - \frac{105}{512} \pi^3 + \frac{21}{8} \pi^5 - 16 \pi^7}{\pi}$
	$\frac{7 \pi^6 + \frac{315}{8192} \pi^2 - \frac{105}{128} \pi^4}{\pi}$

Локальні та глобальні змінні

Змінні, що застосовуються в процедурі, можуть бути або локальними, або глобальними щодо неї. Усі змінні, визначені поза тілом процедури, є відносно неї глобальними. Процедура може використовувати та змінювати їхні значення, причому змінні значення будуть доступними й поза тілом процедури. Усі змінні, які визначені й застосовуються лише в тілі процедури, є локальними, а їхні імена можна використовувати для визначення поза тілом процедури без жодних обмежень.

У системі Maple існує алгоритм, що автоматично визначає, яка зі змінних є локальною, а яка глобальною; водночас існує можливість явного оголошення глобальних і локальних змінних за допомогою операторів

```
local L1, L2, ... . Ln;
```

```
global G1, G2, ... Gm;
```

Якщо в процедурі немає ніяких оголошень локальних і глобальних змінних, то в Maple діє таке правило для визначення того, що змінна є локальною:

- змінна з'являється в лівій частині оператора присвоювання;
- змінна є змінною параметра циклу **for** або індексною змінною операторів **seq()**, **add()**; якщо жодне з правил не можна застосувати до деякої змінної, то вона вважається глобальною.

Локальні змінні відрізняються від глобальних також за алгоритмом їх обчислення. Для глобальних змінних застосовується правило повного обчислення, тобто якщо у вираз, що попередньо був присвоєний змінній, входила невідома величина, якій потім було надано деяке значення, то це значення підставляється в попередній вираз до повного обчислення глобальної змінної, поки обчислення не дійде до невідомих величин або числових значень.

Локальні змінні в процедурах не обчислюються згідно з правилом повного обчислення. Для них Maple застосовує правило обчислення точно на один рівень, тобто якщо при визначенні

локальної змінної використовувалась невідома величина, якій пізніше було присвоєне значення, то цей факт не береться до уваги.

ЛЕКЦІЯ 8

Використання окремих спеціальних функцій та ортогональних поліномів

При розв'язуванні звичайних диференціальних рівнянь дуже часто розв'язки не можуть бути знайдені у вигляді суперпозиції елементарних функцій, тому в математиці крім елементарних функцій використовують вищі трансцендентні функції (інша назва – спеціальні функції). Більшість таких функцій є особливими розв'язками звичайного диференціального рівняння другого порядку вигляду

$$\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dy}{dx} \right] - q(x)y = 0,$$

де коефіцієнти $p(x)$ обертаються на нуль в одній або кількох точках проміжку зміни x .

Ортогональні поліноми

Класичні ортогональні поліноми $p_n(x)$, $n = 0 \dots \infty$, ортогональні на відрізку (a, b) з ваговим множником $\rho(x)$, задовольняють диференціальне рівняння

$$\sigma(x)p_n''(x) + \tau(x)p_n'(x) + \lambda_n p_n(x) = 0,$$

де $\lambda_n = -n[\tau'(x) + 0.5(n-1)\sigma''(x)]$,

$\tau(x)$ – поліном першого степеня,

$\sigma(x)$ залежно від типу інтервалу (a, b) має вигляд

$$\sigma(x) = \begin{cases} (x-a)(b-x), & a \neq -\infty, b \neq \infty; \\ (x-a), & a \neq -\infty, b = \infty; \\ (b-x), & a = -\infty, b \neq \infty; \\ 1, & a = -\infty, b = \infty, \end{cases}$$

при цьому вага $\rho(x)$ задовольняє диференціальне рівняння $[\sigma(x)\rho(x)]' = \tau(x)\rho(x)$. Залежно від значень a, b для $\rho(x)$ мають місце такі значення:

$$\rho(x) = \begin{cases} (x-a)^\alpha (b-x)^\beta, & \alpha = -\frac{\tau(b)}{b-a} - 1, \beta = \frac{\tau(a)}{b-a} - 1, a \neq -\infty, b \neq \infty; \\ (x-a)^\alpha e^{x\tau'}(x), & \alpha = \tau(a) - 1, a \neq -\infty, b = \infty; \\ (b-x)^\alpha e^{-x\tau'}(x), & \alpha = -\tau(b) - 1, a = -\infty, b \neq \infty; \\ e^{\int \tau(x)dx}, & a = -\infty, b = \infty. \end{cases}$$

Наведемо таблицю для основних характеристик найпоширеніших класичних ортогональних поліномів Якобі, Лагерра, Ерміта:

(a, b)	$\rho(x)$	$\sigma(x)$	$\tau(x)$	$p_n(x)$
$(-1, 1)$	$(1-x)^\alpha (1+x)^\beta$	$1-x^2$	$-(\alpha+\beta+2)x + \beta - \alpha$	$P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ Якобі
$(0, \infty)$	$e^{-x} x^\alpha$	x	$-x + \alpha + 1$	$L_n^\alpha(x)$ Лагерра
$(-\infty, \infty)$	e^{-x^2}	1	$-2x$	$H_n(x)$ Ерміта

Важливими частинними випадками поліномів Якобі є:

- поліноми Лежандра $P_n(x)$, $(\alpha = \beta = 0)$;
- поліноми Чебишова першого та другого роду

$$T_n(x), \quad (\alpha = \beta = -\frac{1}{2}), \quad U_n(x), \quad (\alpha = \beta = \frac{1}{2});$$

- поліноми Гегенбауера (ультрасферичні)
- $C_n^\lambda(x)$, $(\alpha = \beta = \lambda - \frac{1}{2})$.

Для виклику в системі Maple ортогональних поліномів необхідно підключити пакет за допомогою команди **with(orthopoly)** та скористатися іменами функцій, що їм відповідають:

- $G(n, a, x)$ – поліноми Гегенбауера;
- $H(n, x)$ – поліноми Ерміта;
- $L(n, a, x)$ – поліноми Лагерра;
- $P(n, x)$ – поліноми Лежандра;
- $P(n, a, b, x)$ – поліноми Якобі;
- $T(n, x)$ – поліноми Чебишова першого роду;
- $U(n, x)$ – поліноми Чебишова другого роду.

Розглянемо приклади використання ортогональних поліномів.

Обчислення полінома Чебишова першого роду з першого по п'ятий степінь включно:

>with(orthopoly);	[G, H, L, P, T, U]
>map(T, [1, 2, 3, 4, 5], x);	
	$[x, -1 + 2x^2, 4x^3 - 3x, 1 + 8x^4 - 8x^2, 16x^5 - 20x^3 + 5x]$

Обчислення коренів полінома Ерміта п'ятого степеня:

>solve(H(5, x), x);	
	$0, -\frac{\sqrt{10+2\sqrt{10}}}{2}, \frac{\sqrt{10+2\sqrt{10}}}{2}, -\frac{\sqrt{10-2\sqrt{10}}}{2}, \frac{\sqrt{10-2\sqrt{10}}}{2}$

Обчислення полінома Чебишова другого роду з другого по п'ятий степінь включно:

>map(U, [2, 3, 4, 5], x);	
	$[4x^2 - 1, 8x^3 - 4x, 16x^4 - 12x^2 + 1, 32x^5 - 32x^3 + 6x]$

Перевірка умов ортогональності для поліномів Чебишова другого роду:

<code>>int(U(5,x)*U(5,x)*sqrt(1-x^2),x=-1..1)</code>	$\frac{\pi}{2}$
<code>>int(U(5,x)*U(7,x)*sqrt(1-x^2),x=-1..1);</code>	0

Перевірка умов ортогональності для поліномів Лежандра та Лягерра:

<code>>(int(P(3,x)*P(10,x),x=-1..1));</code>	0
<code>>(int(L(10,1,x)*x^7*exp(-x)*x,x=0..infinity));</code>	0

Формування функції, що є лінійною комбінацією поліномів Лежандра, та обчислення значення цієї функції в точці 0.5:

<code>>s:=x->sum(i*P(i,x),i=0..5);</code>	$s := x \rightarrow \sum_{i=0}^5 i P(i, x)$
<code>>s(0.5);</code>	-1.769531250

Для роботи з ортогональними поліномами та їхніми рядами існує пакет **OrthogonalSeries**, функції якого підключаються за допомогою команди

<code>>with(OrthogonalSeries);</code>	
Add, ApplyOperator, ChangeBasis, Coefficients, ConvertToSum, Copy, Create, Degree, Derivate, DerivativeRepresentation, Evaluate, GetInfo, Multiply, PolynomialMultiply, ScalarMultiply, SimplifyCoefficients, Truncate	

Розглянемо окремі функції цього пакету. Слід зауважити, що використання пакету **OrthogonalSeries** вимагає від користувача застосування повного імені відповідного ортогонального полінома, що є доступним безпосередньо в ядрі системи Maple:

GegenbauerC (n, a, x) – поліноми Гегенбауера;

HermiteH (n, x) – поліноми Ерміта;

LaguerreL (n, a, x) – поліноми Лагерра;

JacobiP (n, a, b, x) – поліноми Якобі;
 ChebyshevT (n, x) – поліноми Чебишова першого роду;
 ChebyshevU (n, x) – поліноми Чебишова другого роду.

Функція **Create(a, F)**; призначена для створення ряду з ортогональних поліномів, ім'я яких указане другим параметром, а коефіцієнти при них – першим параметром. Залежно від першого параметра сума може бути як скінченною, так і нескінченною.

>S:=(Create({1/n!, n=1..infinity}, ChebyshevU(n, x)));	
	$S := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{ChebyshevU}(n, x)}{n!}$
>V1:=Create({[1=2, 2=4, 3=10]}, ChebyshevT(n, x));	
	$V1 := 2 \text{ChebyshevT}(1, x) + 4 \text{ChebyshevT}(2, x) + 10 \text{ChebyshevT}(3, x)$
>Create({2^n, n=0..10, [11=1, 12=3]}, JacobiP(n, 0, 0, x));	
	$\text{JacobiP}(11, 0, 0, x) + 3 \text{JacobiP}(12, 0, 0, x) + \sum_{n=0}^{10} 2^n \text{JacobiP}(n, 0, 0, x)$

Функція **Evaluate** дозволяє обчислити значення утвореної оператором **Create** зваженої суми ортогональних поліномів у вигляді полінома відповідної змінної або числове значення, якщо задане значення аргументу.

>Evaluate(V1);	$40 x^3 + 8 x^2 - 28 x - 4$
>Evaluate(V1, x=1);	16
>evalf(Evaluate(S, 1));	
	Error, (in OrthogonalSeries:-Evaluate) infinite number of terms

Зауважимо, що у випадку нескінченної суми команда **Evaluate** не обчислює значення суми й видає про це повідомлення.

Команда **ChangeBasis(P, R1, R2,..., Rn)**, де **P** – поліном n змінних, **R1, R2, Rn** – ортогональні поліноми від змінних полінома **P**, дозволяє зобразити поліном **P** у базисі ортогональних поліномів **R1, R2, ...Rn**.

>P1:=10*x^7+2*x^5+6;	
	$P1 := 10 x^7 + 2 x^5 + 6$
>ChangeBasis(P1,ChebyshevT(n,x));	
	$6 \text{ChebyshevT}(0, x) + \frac{215}{32} \text{ChebyshevT}(1, x) + \frac{125}{32} \text{ChebyshevT}(3, x) + \frac{39}{32} \text{ChebyshevT}(5, x) + \frac{5}{32} \text{ChebyshevT}(7, x)$
>ChangeBasis(P1,JacobiP(n,0,0,x));	
	$6 \text{JacobiP}(0, 0, 0, x) + \frac{88}{21} \text{JacobiP}(1, 0, 0, x) + \frac{508}{99} \text{JacobiP}(3, 0, 0, x) + \frac{1888}{819} \text{JacobiP}(5, 0, 0, x) + \frac{160}{429} \text{JacobiP}(7, 0, 0, x)$
>P2:=3*x^5*y^5+2*x^2*y+3*x+y+5;	
	$P2 := 3 x^5 y^5 + 2 x^2 y + 3 x + y + 5$
>ChangeBasis(P2,ChebyshevT(n,x),ChebyshevT(m,y));	
	$5 \text{ChebyshevT}(0, x) \text{ChebyshevT}(0, y) + 2 \text{ChebyshevT}(0, x) \text{ChebyshevT}(1, y) + 3 \text{ChebyshevT}(1, x) \text{ChebyshevT}(0, y) + \frac{15}{8} \text{ChebyshevT}(1, x) \text{ChebyshevT}(1, y) + \text{ChebyshevT}(2, x) \text{ChebyshevT}(1, y) + \frac{15}{16} \text{ChebyshevT}(3, x) \text{ChebyshevT}(1, y) + \frac{3}{16} \text{ChebyshevT}(5, x) \text{ChebyshevT}(1, y)$

Функція **Coefficients** дозволяє обчислити коефіцієнт (множник) при ортогональному поліномі відповідного степеня:

>Coefficients(S,k);	$\frac{1}{k!}$
>Coefficients(V1,3);	10

Команда **ApplyOperator** дозволяє застосувати диференціальний оператор з поліноміальними коефіцієнтами до функціонального ряду ортогональних поліномів:

>ss:=Create({[5=1]}, HermiteH(n, x));	
	ss := HermiteH(5, x)
>ApplyOperator([x*dx^2, [dx, x]], ss);	
	240 HermiteH(2, x) + 40 HermiteH(4, x)
>Evaluate(%);	
	640 x⁴ - 960 x²

Приклад застосування диференціального оператора $x \frac{d^2}{dx^2}$ до полінома Ерміта п'ятого степеня та обчислення результату у вигляді полінома:

>S:=(Create({1/n!, n=1..infinity}, HermiteH(n, x)));	
	$S := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{HermiteH}(n, x)}{n!}$
>S2:=SimplifyCoefficients(ApplyOperator([(x^2+2*x+1)*dx, [dx, x]], S), simplify);	
	$S2 := 6 \text{HermiteH}(0, x) + 11 \text{HermiteH}(1, x) + \frac{17}{2} \text{HermiteH}(2, x) + \sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{1}{2} n^2 + \frac{7}{2} n + 9 \right) \text{HermiteH}(n, x)$

Наведемо приклад застосування оператора $(x^2 + 2x + 1) \frac{d}{dx}$ до ряду ортогональних поліномів Ерміта з подальшим застосуванням до результату функції **SimplifyCoefficients**, яка дозволяє виконати спрощення коефіцієнтів результуючого полінома. Останній параметр функції **SimplifyCoefficients**

simplify вказує на те, що до коефіцієнтів полінома застосовується алгоритм зведення подібних і скорочення дробів. Окрім параметра **simplify**, команда **SimplifyCoefficient** допускає використання параметрів **expand**, **factor**, **normal**.

Функція **Multiply(S1, S2)** дозволяє знайти добуток скінченної суми ортогональних поліномів $S1$ і, можливо, нескінченного ряду ортогональних поліномів $S2$ і подати результат у базисі ортогональних поліномів функціонального ряду $S2$.

>P1:=10*x^7+2*x^5+6;		P1 := 10 x⁷ + 2 x⁵
>S1:=ChangeBasis(P1, ChebyshevT(n, x));		
	$S1 := 6 \text{ChebyshevT}(0, x) + \frac{215}{32} \text{ChebyshevT}(1, x) + \frac{125}{32} \text{ChebyshevT}(3, x) + \frac{39}{32} \text{ChebyshevT}(5, x) + \frac{5}{32} \text{ChebyshevT}(7, x)$	
>SimplifyCoefficients(Multiply(S1,S2),simplify);		
	$\begin{aligned} & \frac{51421}{4} \text{HermiteH}(0, x) + \frac{136143}{4} \text{HermiteH}(1, x) + 44289 \text{HermiteH}(2, x) \\ & + \frac{1775141}{48} \text{HermiteH}(3, x) + \frac{725299}{32} \text{HermiteH}(4, x) + \frac{3427837}{320} \text{HermiteH}(5, x) \\ & + \frac{5919563}{1440} \text{HermiteH}(6, x) + \frac{5849093}{4480} \text{HermiteH}(7, x) + \frac{18944581}{53760} \text{HermiteH}(8, \\ & x) + \frac{237425099}{2903040} \text{HermiteH}(9, x) + \sum_{n=10}^{\infty} \frac{1}{128} \frac{1}{n!} ((5n^9 - 70n^8 + 1074n^7 \\ & - 5052n^6 + 37677n^5 - 22710n^4 + 380156n^3 + 676184n^2 + 1704272n + 1683296) \\ & \text{HermiteH}(n, x)) \end{aligned}$	

Команда **PolynomialMultiply(p, S)** дозволяє знайти добуток полінома p та функціонального ряду ортогональних поліномів S і подати результат у термінах ортогональних поліномів S .

>ss:=Create({[5=1]},HermiteH(n,x));	
---	--

	<code>ss := HermiteH(5, x)</code>
	<code>>PolynomialMultiply(x^2+2*x+1, ss);</code>
	$20 \text{HermiteH}(3, x) + 10 \text{HermiteH}(4, x) + \frac{13}{2} \text{HermiteH}(5, x) + \text{HermiteH}(6, x) + \frac{1}{4} \text{HermiteH}(7, x)$

Функція **Add(S1, S2, a, b)** знаходить лінійну комбінацію функціональних рядів ортогональних поліномів S1, S2 із множниками a, b. Функціональні ряди **S1, S2** мають бути записані за однаковими системами ортогональних поліномів.

<code>>S:=(Create({1/n!, n=1..infinity}, HermiteH(n,x)));</code>	$S := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{HermiteH}(n, x)}{n!}$
<code>>R1:=Create({[1=2, 2=3, 5=6]}, HermiteH(n,x));</code>	
	$R1 := 2 \text{HermiteH}(1, x) + 3 \text{HermiteH}(2, x) + 6 \text{HermiteH}(5, x)$
<code>>Add(S, R1, 2, 3);</code>	
	$6 \text{HermiteH}(1, x) + 9 \text{HermiteH}(2, x) + 18 \text{HermiteH}(5, x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \text{HermiteH}(n, x)}{n!}$

З іншими функціями пакету **OrthogonalSeries** можна ознайомитись, використовуючи довідку.

Циліндричні функції

Важливим класом спеціальних функцій є циліндричні функції дійсного аргументу, або функції Бесселя, які визначаються як лінійно незалежні розв'язки звичайного диференціального рівняння другого порядку

$$U'' + \frac{1}{z}U' + \left(1 - \frac{v^2}{z^2}\right)U = 0, \quad (1)$$

у якому z – комплексна змінна, ν – комплексний параметр.

Перший лінійно незалежний розв’язок цього звичайного диференціального рівняння (функція Бесселя першого роду, ν -го порядку) визначається у вигляді степеневого ряду:

$$J_{\nu}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu}}{k! \Gamma(k+\nu+1)}, |z| < \infty, |\arg z| < \pi.$$

Другий лінійно незалежний розв’язок (функція Бесселя другого роду, ν -го порядку) для нецілих ν визначається у вигляді

$$Y_{\nu}(z) = \frac{J_{\nu}(z) \cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(z)}{\sin(\nu\pi)}, |z| < \infty, |\arg z| < \pi,$$

а для цілих ν – у вигляді

$$Y_n(z) = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\partial J_{\nu}(z)}{\partial \nu} \right]_{\nu=n} - (-1)^n \left[\frac{\partial J_{-\nu}(z)}{\partial \nu} \right].$$

Таким чином, загальний розв’язок диференціального рівняння (1) можна записати у вигляді

$$U_{\nu}(z) = C_1 J_{\nu}(z) + C_2 Y_{\nu}(z).$$

Наступний приклад демонструє знаходження розв’язку звичайного диференціального рівняння у вигляді лінійної комбінації функцій Бесселя першого та другого роду й зображення функцій Бесселя порядку 0.5 у вигляді степеневого ряду зі збереженням членів не вище x^{10} .

>eq1_Cilindric:=diff(U(x),x\$2)+1/x* diff(U(x),x)+(1-nu^2/x^2)*U(x)=0;	
	$eq1_Cilindric := \frac{d^2}{dx^2} U(x) + \frac{\frac{d}{dx} U(x)}{x} + (-\nu^2 + 1) U(x) = 0$
>dsolve(eq1_Cilindric);	
	$U(x) = _C1 BesselJ\left(0, \sqrt{-\nu^2 + 1} x\right) + _C2 BesselY\left(0, \sqrt{-\nu^2 + 1} x\right)$
>series(BesselJ(1/2,x),x,10);	

	$\frac{\sqrt{2} \sqrt{x}}{\sqrt{\pi}} - \frac{1}{6} \frac{\sqrt{2} x^{5/2}}{\sqrt{\pi}} + \frac{1}{120} \frac{\sqrt{2} x^{9/2}}{\sqrt{\pi}} - \frac{1}{5040} \frac{\sqrt{2} x^{13/2}}{\sqrt{\pi}} + \frac{1}{362880} \frac{\sqrt{2} x^{17/2}}{\sqrt{\pi}} + o(x^{21/2})$
>series(Bessely(1/2,x),x,10);	
	$-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi} \sqrt{x}} + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2} x^{3/2}}{\sqrt{\pi}} - \frac{1}{24} \frac{\sqrt{2} x^{7/2}}{\sqrt{\pi}} + \frac{1}{720} \frac{\sqrt{2} x^{11/2}}{\sqrt{\pi}} - \frac{1}{40320} \frac{\sqrt{2} x^{15/2}}{\sqrt{\pi}} + o(x^{19/2})$

Система Maple містить вбудовані функції, що надають можливість знаходити нулі функцій Бесселя першого та другого роду довільного порядку:

BesselJZeros(v,n), BesselJZeros(v,n1..n2), BesselyZeros(v,n), BesselyZeros(v,n1..n2),

Параметр **n** задає порядковий номер нуля функції Бесселя, параметри **n1, n2** – нижню та верхню межі номерів нулів, параметр **v** – порядок функції Бесселя.

>BesselJZeros(1/2,1..10);	
	$\pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, 5\pi, 6\pi, 7\pi, 8\pi, 9\pi, 10\pi$
>BesselJZeros(1/4, 1..10);	
	$\text{BesselJZeros}\left(\frac{1}{4}, 1..10\right)$
>evalf(BesselJZeros(1/4,1..10));	
	2.780887724, 5.906142699, 9.042383664, 12.18134153, 15.32136983, 18.46192725, 21.60278445, 24.74382780, 27.88499460, 31.02624748
>BesselyZeros(1/2,1..10);	
	$\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi, \frac{7}{2}\pi, \frac{9}{2}\pi, \frac{11}{2}\pi, \frac{13}{2}\pi, \frac{15}{2}\pi, \frac{17}{2}\pi, \frac{19}{2}\pi$

Циліндричні функції уявного аргументу є лінійно незалежними розв'язками звичайного диференціального рівняння дру-

того порядку:

$$U'' + \frac{1}{x}U' - \left(1 + \frac{v^2}{x^2}\right)U = 0, \quad 0 < x < \infty. \quad (2)$$

Останнє переходить у рівняння (1), якщо зробити заміну незалежної змінної $z = ix$. Один з лінійно незалежних розв'язків рівняння (2) може бути зображений у вигляді степеневого ряду

$$I_v(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+v}}{k! \Gamma(k+v+1)}, \quad 0 < x < \infty.$$

Ця функція називається функцією Бесселя уявного аргументу v -го порядку першого роду. Другий лінійно незалежний розв'язок рівняння (2) – функцію Бесселя другого роду уявного аргументу v -го порядку (функцію Макдональда) – визначають для нецілих v у вигляді

$$K_v(x) = \pi \frac{I_{-v}(x) - I_v(x)}{2 \sin(v\pi)}, \quad v \neq n,$$

для випадку цілих v – у вигляді

$$K_n(x) = \frac{(-1)^n}{2} \left[\left(\frac{\partial I_{-v}}{\partial v} \right)_{v=n} - \left(\frac{\partial I_v}{\partial v} \right)_{v=n} \right].$$

Таким чином, загальний розв'язок рівняння (2) може бути записаний у вигляді $U_v(x) = C_1 I_v(x) + C_2 K_v(x)$.

>eq2_Cilindric:=diff(U(x),x\$2)+1/x*diff(U(x),x)-(1+nu^2/x^2)*U(x)=0;	
	$eq2_Cilindric := \frac{d^2}{dx^2} U(x) + \frac{\frac{d}{dx} U(x)}{x} - \left(1 + \frac{v^2}{x^2}\right) U(x) = 0$
>dsolve(eq2_Cilindric);	
	$U(x) = _C1 \text{BesselI}(v, x) + _C2 \text{BesselK}(v, x)$
>series(BesselI(1/2,x),x,8)	
	$\frac{\sqrt{2}\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}} + \frac{1}{6} \frac{\sqrt{2}x^{5/2}}{\sqrt{\pi}} + \frac{1}{120} \frac{\sqrt{2}x^{9/2}}{\sqrt{\pi}} + \frac{1}{5040} \frac{\sqrt{2}x^{13/2}}{\sqrt{\pi}} + o(x^{17/2})$

>series(BesselK(1/2,x),x,8);	
	$\frac{1}{2} \frac{\sqrt{2} \sqrt{\pi}}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2} \sqrt{2} \sqrt{\pi} \sqrt{x} + \frac{1}{4} \sqrt{2} \sqrt{\pi} x^{3/2} - \frac{1}{12} \sqrt{2} \sqrt{\pi} x^{5/2}$ $+ \frac{1}{48} \sqrt{2} \sqrt{\pi} x^{7/2} - \frac{1}{240} \sqrt{2} \sqrt{\pi} x^{9/2} + \frac{1}{1440} \sqrt{2} \sqrt{\pi} x^{11/2}$ $- \frac{1}{10080} \sqrt{2} \sqrt{\pi} x^{13/2} + o(x^{15/2})$

Ейлерові інтеграли першого та другого роду

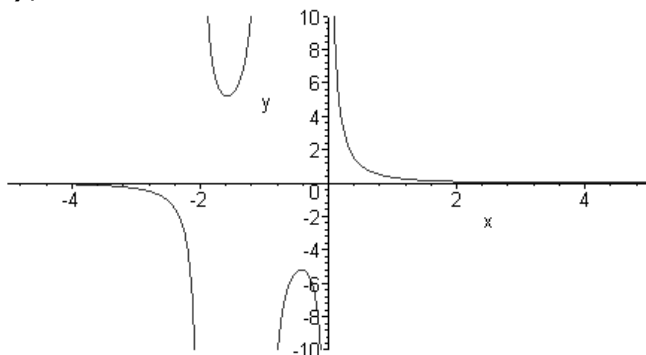
Інтеграли $B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$ та $\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$ нази-

вають ейлеровими інтегралами першого та другого роду, однак частіше – бета- та гамма-функцією, відповідно.

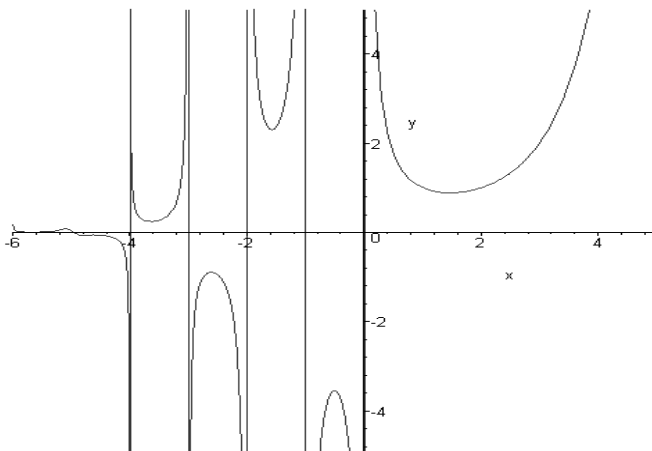
Система Maple дозволяє звертатися до цих функцій для їх обчислення, застосування в різноманітних виразах і будувати їхні графіки:

>Beta(2,5.2);	0.03101736973
>GAMMA(3.2);	2.423965480

>plot(Beta(x,3),x=-5..5,y=-10..10,discont = true);



> plot(GAMMA(x),x=-6..5,y=-5..5);



>convert(Beta(x,y), GAMMA); $\frac{\Gamma(x) \Gamma(y)}{\Gamma(y+x)}$

Останній приклад демонструє формулу, що виражає бета-функцію через гамма-функцію.

Інтегральні синус і косинус, інтеграл імовірності

Інтегральним синусом і косинусом називають відповідно інтеграли:

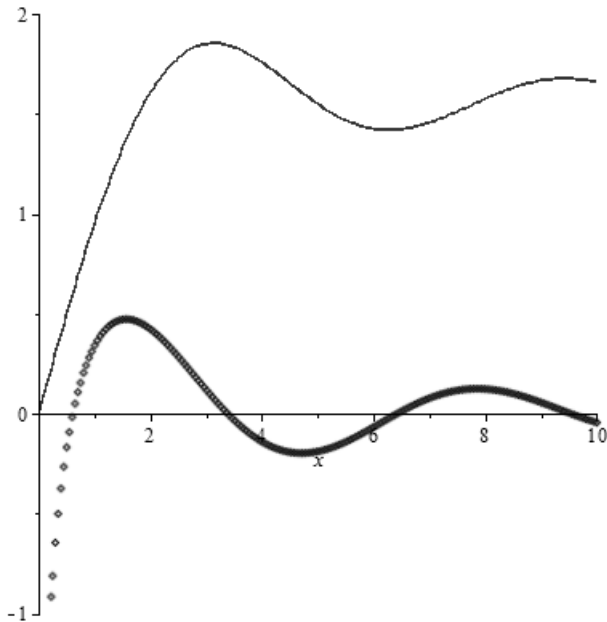
$$Si(x) = \int_0^x \frac{\sin(t)}{t} dt,$$

$$Ci(x) = -\int_x^\infty \frac{\cos(t)}{t} dt.$$

Із цими функціями можна здійснювати різні обчислення та будувати їхні графіки.

>evalf(Si(Pi));	1.851937052
>evalf(Ci(Pi/2));	0.4720006514

>plot([Si(x), Ci(x)], x=0..10, color=[red, blue], style=[line, point]);

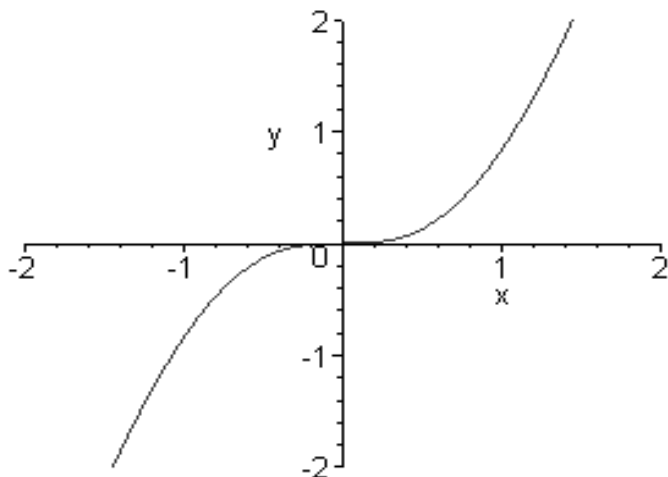


Інтегралом імовірності в математиці називають функцію, яка за будь-якого комплексного значення змінної z обчислюється за формулою

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

У системі Maple ця функція може бути викликана за допомогою імені **erf(x)**:

```
erf(3.)+erf(0.25);           1.276304300
>plot(x^2*erf(x), x=-2..2, y=-2..2);
```



<code>>series(erf(x), x=0, 10);</code>	
	$\frac{2}{\sqrt{\pi}} x - \frac{2}{3\sqrt{\pi}} x^3 + \frac{1}{5\sqrt{\pi}} x^5 - \frac{1}{21\sqrt{\pi}} x^7 + \frac{1}{108\sqrt{\pi}} x^9 + o(x^{10})$
<code>>diff(erf(x), x);</code>	$\frac{2 e^{(-x^2)}}{\sqrt{\pi}}$

Сферичні функції Лежандра першого та другого роду

Узагальненням ортогональних поліномів Лежандра $\text{LegandreP}(n, x)$, що були розглянуті вище, є сферичні функції Лежандра першого та другого роду, які є двома лінійно незалежними розв'язками звичайного диференціального рівняння

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + v(v+1)y = 0,$$

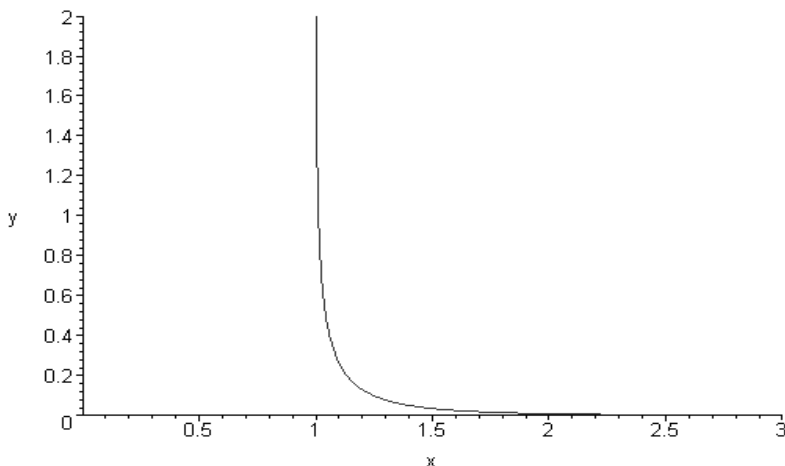
v – числовий параметр.

Загальний розв'язок цього рівняння можна записати у вигляді $y(x) = c_1 P_\nu(x) + c_2 Q_\nu(x)$, де $P_\nu(x)$ та $Q_\nu(x)$ – сферичні функції Лежандра першого та другого роду.

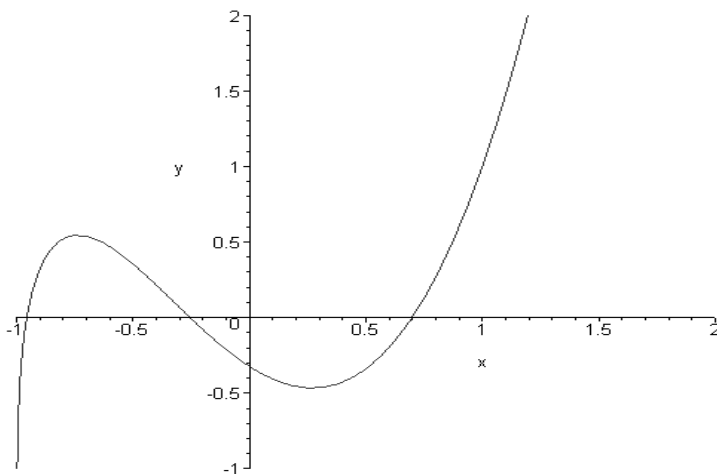
У системі Maple сферичні функції Лежандра можна викликати за допомогою їхніх імен **LegendreP(ν, x)** та **LegendreQ(ν, x)**.

Імена сферичних функцій Лежандра можуть використовуватись у будь-яких виразах та операторах, зокрема при обчисленні значень функції та побудові її графіків:

```
>evalf(LegendreQ(2.5,1.5));
0.03621096718
>plot(LegendreQ(2.5,x),x=0..3,y=0..2);
```



```
>evalf(LegendreP(2.5,1.5));
4.177619139
>plot(LegendreP(2.5,x),x=-1..2,y=-1..2);
```



Гіпергеометрична функція

Найзагальнішою трансцендентною функцією, за допомогою якої можна записати розв'язок звичайного диференціального рівняння другого порядку вигляду $\sigma(x)y'' + \tau(x)y' + \lambda y = 0$, де $\sigma(x)$, $\tau(x)$, λ – відповідно довільні поліноми не вище другого та першого степенів і комплексний параметр, є гіпергеометрична функція.

Гіпергеометрична функція $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ може бути визначена як обмежений розв'язок звичайного диференціального рівняння другого порядку $x(1-x)y'' + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x]y' - \alpha\beta y = 0$ і зображена у вигляді степеневого ряду

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{(\gamma)_n} \frac{x^n}{n!},$$

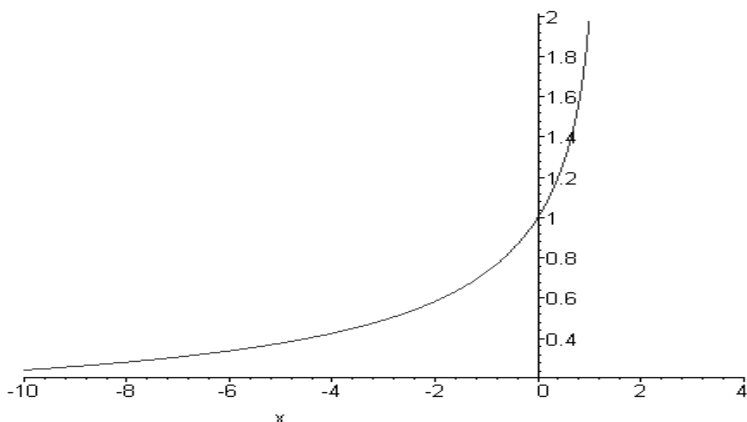
де $(\alpha)_n = \alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)$.

У системі Maple гіпергеометричну функцію можна викликати за допомогою її імені *hypergeom*($[\alpha, \beta]$, $[\gamma]$, x) і використовувати в будь-яких математичних виразах. Наведений нижче при-

клад демонструє знаходження розв'язку звичайного диференціального рівняння другого порядку, його запис за допомогою гіпергеометричної функції та обчислення розв'язку в точці:

>eqhipergeom:=x*(x-1)*diff(U(x),x\$2)+(2*x-1.3)*diff(U(x),x)+0.25*U(x)=0;	
	$\text{eqhipergeom}:=x(x-1)U''(x)+(2x-1.3)U'(x)+0.25U(x)=0$
F:=unapply(op(2,dsolve([eqhipergeom, U(0)=1])),x);	
	$F:=x \rightarrow \text{hypergeom}\left(\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], \left[\frac{13}{10}\right], x\right)$
evalf(F(1));	1.980805992

>series(hypergeom([a,b],[c],x),x=0);	
	$1 + \frac{a b}{c} x + \frac{1}{2} \frac{a b (a+1) (b+1)}{c (c+1)} x^2$ $+ \frac{1}{6} \frac{a b (a+1) (b+1) (a+2) (b+2)}{c (c+1) (c+2)} x^3$ $+ \frac{1}{24} \frac{a b (a+1) (b+1) (a+2) (b+2) (a+3) (b+3)}{c (c+1) (c+2) (c+3)} x^4$ $+ \frac{1}{120} \frac{1}{c (c+1) (c+2) (c+3) (c+4)} (a b (a+1) (b+1) (a+2) (b+2) (a+3) (b+3) (a+4) (b+4)) x^5 + O(x^6)$
>plot(hypergeom([1,2],[5],x),x=-10..4);	



Приклад демонструє відрізок степеневого ряду, у який розкладається гіпергеометрична функція, і побудову графіка гіпергеометричної функції за заданих значень параметрів.

>convert (LegendreP(2, x), hypergeom);	
	$\text{hypergeom}\left([-2, 3], [1], \frac{1}{2} - \frac{x}{2}\right)$
>convert (BesselJ(3, x), hypergeom);	
	$\frac{1}{48} x^3 \text{hypergeom}\left([], [4], -\frac{x^2}{4}\right)$

Приклад демонструє можливості команди **convert** системи Maple з перетворення різних спеціальних функцій через гіпергеометричну функцію.

ЛЕКЦІЯ 9

У системі Maple існують кілька пакетів, призначених для розв'язування задач лінійної алгебри. Одним з них є потужний пакет LinearAlgebra, який нараховує більше 100 функцій. Підключення пакету здійснюється командою, яка надає доступ до його функцій:

>with(LinearAlgebra);

`&x`, Add, Adjoint, BackwardSubstitute, BandMatrix, Basis, BezoutMatrix, BidiagonalForm, BilinearForm, CharacteristicMatrix, CharacteristicPolynomial, Column, ColumnDimension, ColumnOperation, ColumnSpace, CompanionMatrix, ConditionNumber, ConstantMatrix, ConstantVector, Copy, CreatePermutation, CrossProduct, DeleteColumn, DeleteRow, Determinant, Diagonal, DiagonalMatrix, Dimension, Dimensions, DotProduct, EigenConditionNumbers, Eigenvalues, Eigenvectors, Equal, ForwardSubstitute, FrobeniusForm, GaussianElimination, GenerateEquations, GenerateMatrix, Generic, GetResultDataType, GetResultShape, GivensRotationMatrix, GramSchmidt, HankelMatrix, HermiteForm, HermitianTranspose, HessenbergForm, HilbertMatrix, HouseholderMatrix, IdentityMatrix, IntersectionBasis, IsDefinite, IsOrthogonal, IsSimilar, IsUnitary, JordanBlockMatrix, JordanForm, KroneckerProduct, LA_Main, LUdecomposition, LeastSquares, LinearSolve, LyapunovSolve, Map, Map2, MatrixAdd, MatrixExponential, MatrixFunction, MatrixInverse, MatrixMatrixMultiply, MatrixNorm, MatrixPower, MatrixScalarMultiply, MatrixVectorMultiply, MinimalPolynomial, Minor, Modular, Multiply, NoUserValue, Norm, Normalize, NullSpace, OuterProductMatrix, Permanent, Pivot, PopovForm, QRdecomposition, RandomMatrix, RandomVector, Rank, RationalCanonicalForm, ReducedRowEchelonForm, Row, RowDimension, RowOperation, RowSpace, ScalarMatrix, ScalarMultiply, ScalarVector, SchurForm, SingularValues, SmithForm, StronglyConnectedBlocks, SubMatrix, SubVector, SumBasis, SylvesterMatrix, SylvesterSolve, ToeplitzMatrix, Trace, Transpose, TridiagonalForm, UnitVector, VandermondeMatrix, VectorAdd, VectorAngle, VectorMatrixMultiply, VectorNorm, VectorScalarMultiply, ZeroMatrix, ZeroVector, Zip

Створення об'єктів Matrix та Vector

Усі функції пакету застосовуються до об'єктів типу Matrix та Vector.

Матриці та вектори в LinearAlgebra створюють за допомогою відповідно команд **Matrix()** та **Vector()** або коротких позначень.

Короткі позначення для матриць і векторів

Для того щоб задати матрицю або вектор, можна використовувати трикутні дужки "<" та ">". При цьому запис вигляду **<a, b, c>** означає, що структура даних організовується за рядками, а **<a|b|c>** – за стовпцями. Наприклад:

><1, 2>;	$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$
><1 2 3>;	$[1, 2, 3]$
><<1, 2, 3> <4, 5, 6>>;	$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$
><<1 2 3>, <4 5 6>>;	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

Функція Matrix()

Команда **Matrix()** має синтаксис

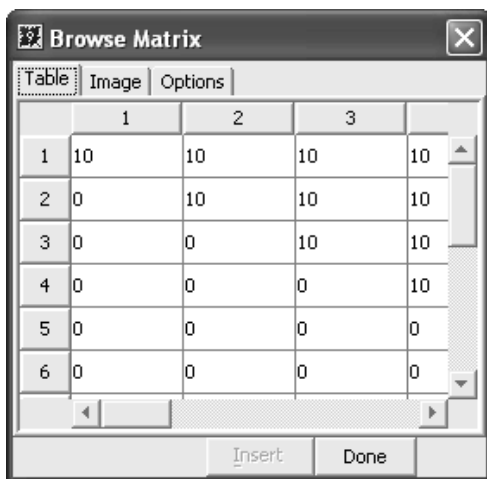
Matrix(r, c, init, ro, sym, sc, sh, st, o, dt, f, a);

Тут **r, c** – розмірність матриці за рядками та стовпцями. У випадку квадратної матриці параметр **c** можна опустити. За замовчанням Maple повністю виводить на екран лише матриці, розміри яких не перевищують 10×10 . Більші матриці виводяться в такому вигляді:

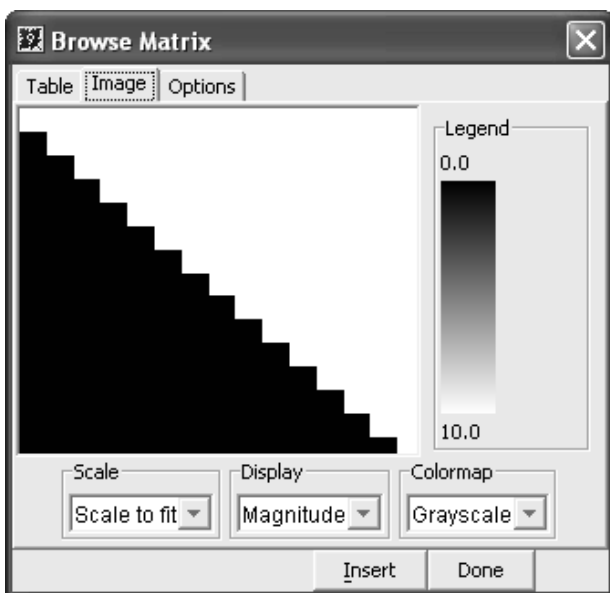
```
>Matrix(15,15,10,shape=triangular[upper]);
```

```
15 x 15 Matrix  
Data Type: anything  
Storage: triangular[upper]  
Order: Fortran_order
```

Для їх перегляду потрібно двічі клацнути мишкою на отриманому об'єкті. У результаті відкриється вікно Browse Matrix, за допомогою якого можна переглянути елементи матриці (на вкладці Table),



а також її структуру (на вкладці Image):



Максимальні розміри матриць, які безпосередньо виводяться на екран, можна змінити за допомогою команди **interface(rtablesize = MaxValue)**

Елементи матриці можна задати за допомогою параметра **init**. Якщо він опущений, то матриця заповнюється нулями, наприклад:

>Matrix(2);	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
>Matrix(2,3);	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Параметр **init** можна задати кількома способами. Це може бути процедура або функція, яка кожній парі індексів ставить у відповідність деякий об'єкт типу **algebraic**, **table**, **array**,

Array або **Matrix**; множину рівностей вигляду $(i, j) = \text{value}$, за допомогою яких можна явно вказати елементи матриці з відповідними індексами; об'єкт **Vector** для діагональної матриці; список **list** елементів або список списків, за допомогою яких перераховано елементи матриці. В останньому випадку порядок перерахунку задається параметром **sc**.

Розглянемо приклади:

<code>>mA:=Matrix(2,2,(i,j)->i+2*j);</code>	$mA := \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$
<code>>Matrix(3,3,mA);</code>	$\begin{bmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 4 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
<code>>Matrix(3,3,{(2,3)=10,(3,2)=100});</code>	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \\ 0 & 100 & 0 \end{bmatrix}$

Параметр **ro** – це рівність вигляду **readonly=true** (або **false**), яка забороняє (або дозволяє) зміну елементів матриці.

Параметр **sym** вигляду **symbol=name** задає символ для позначення елементів матриці:

<code>>mB:=Matrix(2,2,readonly=true , symbol=b);</code>	$mB := \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{bmatrix}$
<code>>mB[1,1]:=0;</code>	Error, cannot assign to a read-only Matrix

Параметр **sc** використовується, коли **init** є списком. Він має вигляд **scan=name** або **scan=list**. Значеннями параметра **scan** можуть бути службові слова:

rectangular,
triangular[upper],

```

triangular[lower],
Hessenberg[upper],
Hessenberg[lower],
band[m,n],
band[m],
diagonal.

```

Додатково у списку **scan** може задаватись порядок заповнення матриці: **rows** – за рядками, **columns** – за стовпцями, **diagonals** – за діагоналями.

Параметр **scan=rectangular** означає, що значення списку списків **init** заповнюють матрицю як прямокутну, починаючи з верхнього лівого елемента. Заповнення може відбуватися за рядками (за замовчанням) або стовпцями. Якщо розміри матриці більші за прямокутник, заданий параметром **init**, то залишкові елементи заповнюються нулями:

>Matrix(2,2,[[1,2],[3,4]],scan=[rectangular,rows]);	$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$
>Matrix(3,4,[[1,2],[3,4]],scan=[rectangular,columns]);	$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Параметр **scan=triangular[upper]** означає, що значення списку списків **init** заповнюють матрицю як верхню трикутну, починаючи з верхнього лівого елемента. При цьому перший елемент кожного списку всередині **init** лежить на діагоналі. Заповнення може відбуватися за рядками (за замовчанням) або стовпцями. Якщо матриця не вичерпується параметром **init**, то залишкові елементи заповнюються нулями. Параметр **scan=triangular[lower]** працює так само.

<code>>Matrix(3,3,[[1,2,3],[4,5],[6]], scan=[triangular[upper],rows]);</code>	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$
<code>>Matrix(3,3,[[1],[2,3],[4,5,6]], scan=[triangular[upper],columns]);</code>	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$
<code>>Matrix(3,3,[[1],[2,3],[4,5,6]], scan=[triangular[lower],rows]);</code>	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$
<code>>Matrix(3,3,[[1,2,3],[4,5],[6]], scan=[triangular[lower],columns]);</code>	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$

Параметр **scan=Hessenberg[upper]** означає, що значення списку списків **init** заповнюють матрицю як гейзенбергову, тобто як верхню трикутну з піддіагоналлю. При цьому останній елемент кожного списку всередині **init** лежить на піддіагоналі. Заповнення може відбуватися за рядками (за замовчанням) або стовпцями. Якщо матриця не вичерпується параметром **init**, то залишкові елементи заповнюються нулями. Параметр **scan=Hessenberg[lower]** працює так само.

<code>>Matrix(4,4,[[1,2,3,4], [5,6,7,8],[9,10,11],[12,13]], scan=[Hessenberg[upper] ,rows]);</code>	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 9 & 10 & 11 \\ 0 & 0 & 12 & 13 \end{bmatrix}$
<code>>Matrix(4,4,[[1,2],[3,4,5], [6,7,8,9],[10,11,12,13]], scan=[Hessenberg[upper] ,columns]);</code>	$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & 10 \\ 2 & 4 & 7 & 11 \\ 0 & 5 & 8 & 12 \\ 0 & 0 & 9 & 13 \end{bmatrix}$
<code>>Matrix(4,4,[[1,2],[3,4,5], [6,7,8,9],[10,11,12,13]], scan=[Hessenberg[lower] ,rows]);</code>	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 0 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 & 13 \end{bmatrix}$
<code>>Matrix(4,4,[[1,2,3,4],[5,6,7,8], [9,10,11],[12,13]], scan=[Hessenberg[lower] ,columns]);</code>	$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 9 & 0 \\ 3 & 7 & 10 & 12 \\ 4 & 8 & 11 & 13 \end{bmatrix}$

Параметр **scan=band[m,n]** означає, що значення списку списків **init** заповнюють матрицю як $(m+n+1)$ -діагональну. При цьому під головною діагоналлю розташовані m піддіагоналей, а над нею – n наддіагоналей. За замовчанням заповнення здійснюється за діагоналями, починаючи з найнижчої. Також заповнення може відбуватися за рядками або стовпцями. Якщо матриця не вичерпується параметром **init**, то залишкові елементи заповнюються нулями. Параметр **scan=band[m]** еквівалентний **scan=band[m,m]**, а **scan=diagonal** – **scan=band[0]**.

<code>>Matrix(4,4,[[1,2,3],[4,5,6,7],[8,9,10],[11,12]],scan=[band[1,2],diagonals]);</code>	$\begin{bmatrix} 4 & 8 & 11 & 0 \\ 1 & 5 & 9 & 12 \\ 0 & 2 & 6 & 10 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \end{bmatrix}$
<code>>Matrix(4,4,[[1,2,3],[4,5,6,7],[8,9,10],[11,12]],scan=[band[1,2],rows]);</code>	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 8 & 9 & 10 \\ 0 & 0 & 11 & 12 \end{bmatrix}$
<code>>Matrix(4,4,[[1,2],[3,4,5],[6,7,8,9],[10,11,12]],scan=[band[1,2],columns]);</code>	$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & 0 \\ 2 & 4 & 7 & 10 \\ 0 & 5 & 8 & 11 \\ 0 & 0 & 9 & 12 \end{bmatrix}$

<code>>Matrix(4,4,[[1,2],[3,4,5],[6,7,8,9],[10,11,12]],scan=[band[2,1],diagonals]);</code>	$\begin{bmatrix} 6 & 10 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 11 & 0 \\ 1 & 4 & 8 & 12 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \end{bmatrix}$
<code>>Matrix(4,4,[[1,2,3],[4,5,6,7],[8,9,10]],scan=band[1]);</code>	$\begin{bmatrix} 4 & 8 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 9 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 10 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \end{bmatrix}$

Функція Vector()

Команда **Vector()** має синтаксис

Vector[o](d,init,ro,sym,sh,st,dt,f,a,o)

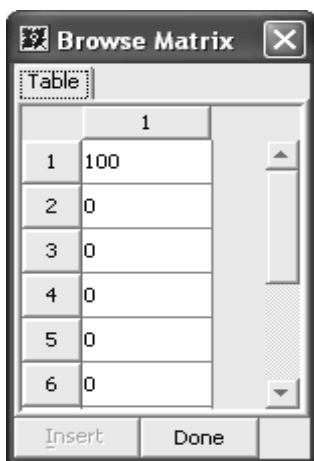
Тут **[o]** – параметр вигляду **[row]** або **[column]**, який задає відповідно вектор-рядок або вектор-стовпець. Орієнтацію вектора також можна задати за допомогою параметра **o**, який записується **orientation=row** або **orientation=column**. Зауважимо, що у випадку наявності обох параметрів перевага віддається **[o]**. За замовчанням використовується орієнтація за стовпцями.

Параметр **d** – це невід’ємне ціле число, яке задає розмірність вектора. За замовчанням Maple безпосередньо виводить лише вектори, розмірність яких не більше 10.

```
>Vector(11, shape=scalar[1,100]);
```

```
11 Vector[column]
Data Type: anything
Storage: empty
Order: Fortran_order
```

Для перегляду елементів великих векторів потрібно викликати вікно Browse Matrix:



Решта параметрів подібні до відповідних у конструкторі **Matrix()**, тому наведемо лише відмінності. Зокрема, **init** не може бути матрицею або двовимірним списком, список списків зчитується як один рядок. Параметр **sh** вигляду **shape=name** або **shape=list** допускає такі вбудовані індексні функції: **constant**, **scalar**, **unit**, **zero**.

Розглянемо приклади:

>Vector([1,2]);	$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$
>Vector[row](5, {2=10, 4=100});	$[0, 10, 0, 100, 0]$
Vector[row](5, {2=10, 4=100}, fill=-1);	$[-1, 10, -1, 100, -1]$
>Vector[row](6, shape=constant[2]);	$[2, 2, 2, 2, 2, 2]$
>Vector[row](5, shape=unit[3]);	$[0, 0, 1, 0, 0]$
>Vector[row](5, shape=scalar[2, 10]);	$[0, 10, 0, 0, 0]$
>vZ:=Vector(2, shape=zero, readonly=true);	$vZ := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
>vZ[1]:=1;	Error, cannot assign to a read-only Vector
>Vector[row](6, i->x^i);	$\begin{matrix} & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ [x, & x, & x, & x, & x, & x] \end{matrix}$
>Vector(2, symbol=u);	$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$

Робота з елементами матриць і векторів

Для виділення елементів матриць і векторів використовують команди відповідно $M[L_1, L_2]$ та $V[L]$. Тут M – матриця, V –

вектор, L , L_1, L_2 – цілі індекси або списки цілих індексів. При цьому допускаються діапазони індексів вигляду $i..j$, від’ємні індекси (-1 означає останній індекс, -2 – передостанній і т. д.).

Якщо L – єдиний індекс, то $V[L]$ повертає відповідну координату вектора як число. Якщо L – список, то результатом $V[L]$ буде вектор, який складається з відповідних координат вектора V .

Для випадку матриці, якщо L_1, L_2 – обидва індекси, то результатом буде (L_1, L_2) – елемент матриці. Якщо один параметр – індекс, а інший – список, то отримаємо вектор. Якщо обидва параметри є списками, то результатом буде матриця.

Для роботи з частиною матриці можна використовувати функцію пакету **SubMatrix(A, r, c)**, де **A** – ім’я матриці, **r, c** – списки цілих індексів номерів рядків і стовпців.

Розглянемо приклади:

<code>> A := Matrix([[2, 3, 5, 6, 8], [3, 5, 8, 9, 12], [7, 2, 9, 2, 1], [3, 5, 8, 0, 4], [3, 5, 7, 3, 2]]);</code>		
	$A := \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & 6 & 8 \\ 3 & 5 & 8 & 9 & 12 \\ 7 & 2 & 9 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 8 & 0 & 4 \\ 3 & 5 & 7 & 3 & 2 \end{bmatrix}$	
<code>> A1 := A[[2..4, 5], [1, 3]];</code>	$A1 := \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 7 & 9 \\ 3 & 8 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$	
<code>> SubMatrix(A, [1, 3, 5], [1..5]);</code>	$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & 6 & 8 \\ 7 & 2 & 9 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 7 & 3 & 2 \end{bmatrix}$	

Функції **Row(A, L)**, **Column(A, L)**, **Diagonal(A, L)** дозволяють виділити з матриці A відповідні рядки або стовпці, що задаються параметром L , який є списком цілих індексів. Результатом буде список векторів-рядків і векторів-стовпців матриці або діагоналей у формі стовпців.

<code>> Row(A, [3..5]);</code>	$\begin{bmatrix} 7 & 2 & 9 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 5 & 8 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 & 3 & 2 \end{bmatrix}$
<code>> Column(A, [3..5]);</code>	$\begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 9 \\ 8 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 8 \\ 12 \\ 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$
<code>> C := Diagonal(A, [-1, 0, 1]);</code>	$C := \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 8 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 9 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$
<code>> C[2];</code>	$\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 9 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

Функції **DeleteColumn(A, L)**, **DeleteRow(A, L)** видаляють із матриці A рядки або стовпці, які визначає параметр L – список цілих чисел.

Побудова стандартних матриць

Пакет **LinearAlgebra** містить функції для побудови матриць базових форм, а саме: **BandMatrix()**, **ConstantMatrix()**, **ConstantVector()**, **DiagonalMatrix()**, **IdentityMatrix()**, **JordanBlockMatrix()**,

`ScalarMatrix()`, `ScalarVector()`, `UnitVector()`,
`ZeroMatrix()`, `ZeroVector()`.

Арифметика матриць і векторів

Множення матриць і векторів

Над матрицями та векторами можна виконувати операцію некомутативного множення. У Maple воно задається символом `"."`. Нагадаємо, що необхідною умовою при такому множенні двох об'єктів (матриць або векторів) є рівність кількості стовпців першого об'єкта і рядків другого. Для того щоб відрізнити оператор `"."` від десяткової крапки, прийнято обрамляти його символами пробілу.

Для некомутативного множення в пакеті `LinearAlgebra` є ще кілька функцій, а саме:

`MatrixMatrixMultiply(A,B,ip)` – для множення матриці `A` на матрицю `B`;

`MatrixVectorMultiply(A,U)`– матриці `A` на вектор `U`;

`VectorMatrixMultiply(V,A,outputoptions=list)`– вектора `V` на матрицю `A`;

`MatrixScalarMultiply(A,s,ip)`– скаляра `s` на матрицю `A`;

`VectorScalarMultiply(V,s,ip)`– скаляра `s` на вектор `V`;

`ScalarMultiply(A,s,ip)`– скаляра `s` на матрицю або вектор `A`;

`OuterProductMatrix(U,V,cpt)`– вектора-стовпця `U` на вектор-рядок `V`.

$\triangleright U := \langle 2, 4, 6, 9, 3 \rangle;$	$U :=$	<table><tr><td>2</td></tr><tr><td>4</td></tr><tr><td>6</td></tr><tr><td>9</td></tr><tr><td>3</td></tr></table>	2	4	6	9	3	
2								
4								
6								
9								
3								

<code>> v := <a, b, c, d>;</code>	$v := \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$
<code>> OuterProductMatrix(U, V);</code>	$\begin{bmatrix} 2 & a & 2 & b & 2 & c & 2 & d \\ 4 & a & 4 & b & 4 & c & 4 & d \\ 6 & a & 6 & b & 6 & c & 6 & d \\ 9 & a & 9 & b & 9 & c & 9 & d \\ 3 & a & 3 & b & 3 & c & 3 & d \end{bmatrix}$

Крім того, є функція `Multiply()`, яка узагальнює всі перелічені випадки. Її синтаксис **`Multiply(A,B,ip)`**.

Векторний добуток

Для обчислення векторного добутку тривимірних векторів пакет `LinearAlgebra` пропонує функцію **`CrossProduct()`**. Її синтаксис **`CrossProduct(U,V)`**.

Тут **`U`**, **`V`** – тривимірні вектори. Якщо вони обидва є векторами-рядками, то таким само буде й результат, інакше результатом буде вектор-стовпець.

Аналогом функції **`CrossProduct()`** є операція **`&x`**, яка теж доступна з пакету `LinearAlgebra`.

Розглянемо приклади:

<code>>vV:=Vector[row]([1,2,3]);</code>	$vV := [1, 2, 3]$
<code>>vU:=Vector[row]([2,4,6]);</code>	$vU := [2, 4, 6]$
<code>>CrossProduct(vV,vU);</code>	$[0, 0, 0]$
<code>>vW:=Vector([3,-1,5]);</code>	$vW := \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$
<code>>CrossProduct(vV,vW);</code>	$\begin{bmatrix} 13 \\ 4 \\ -7 \end{bmatrix}$
<code>>vV &x vW;</code>	$\begin{bmatrix} 13 \\ 4 \\ -7 \end{bmatrix}$

Норма вектора

У пакеті LinearAlgebra є функція **VectorNorm()**, за допомогою якої можна обчислити p -норму вектора. Нагадаємо, що p -норма визначена для значень p від 1 до нескінченності. Розглядувана функція має синтаксис

VectorNorm(V, p, conj) .

Тут **V** – вектор, **p** визначає норму. Maple не забороняє використовувати значення p між 0 і 1, хоча в цьому випадку відбувається обчислення не p -норми, а p -відстані від вектора до початку координат.

Випадок $p=2$ називається також Frobenius або Euclidean.

Випадок $p = \infty$ задається константою **infinity**. Нескінченність-норма обчислюється також, якщо значення p опущено.

Аналогічно **VectorNorm()** працює функція **Norm()**.

Розглянемо приклади:

<code>>v_a:=Vector[row]([x,y]);</code>	$v_a := [x, y]$
<code>>VectorNorm(v_a,2);</code>	$\sqrt{ x ^2 + y ^2}$
<code>>VectorNorm(v_a, Frobenius);</code>	$\sqrt{ x ^2 + y ^2}$
<code>>VectorNorm(v_a, Euclidean);</code>	$\sqrt{ x ^2 + y ^2}$
<code>>VectorNorm(v_a,2, conjugate=false);</code>	$\sqrt{x^2 + y^2}$
<code>>VectorNorm(v_a,10);</code>	$(x ^{10} + y ^{10})^{(1/10)}$

<code>>VectorNorm(v_a, infinity);</code>	$\max(x , y)$
<code>>VectorNorm(v_a);</code>	$\max(x , y)$
<code>>Norm(v_a, infinity);</code>	$\max(x , y)$
<code>>VectorNorm(Vector([1, -2+I, I, 5, 8-I]), 0.25);</code>	6.403248671

Операція транспонування

Пакет LinearAlgebra дозволяє швидко знайти транспоновану матрицю за допомогою функції **Transpose()**. Її синтаксис

Transpose(A, ip, outputoptions=list).

Тут **A** – матриця, яку потрібно транспонувати.

<code>>mA:=Matrix([[1,3,5],[2,4,6]]);</code>	$mA := \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$
<code>>Transpose(mA);</code>	$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$

Комплексно-спряжене транспонування

Для виконання цієї операції використовують функцію **HermitianTranspose()**. Її синтаксис

HermitianTranspose(A, ip, outputoptions=list).

Тут **A** – матриця, яку потрібно транспонувати.

>mC:=<<1+I 2+10*I>, <3 4-100*I>>;	$mC := \begin{bmatrix} 1+I & 2+10I \\ 3 & 4-100I \end{bmatrix}$
>HermitianTranspose(mC, inplace=true):	
>mC;	$\begin{bmatrix} 1-I & 3 \\ 2-10I & 4+100I \end{bmatrix}$

Визначник матриці

Для знаходження визначника квадратної матриці призначена функція **Determinant()**. Її синтаксис

Determinant(A, method=value).

Тут **A** – матриця, другий параметр задає метод обчислення визначника. Не вдаючись у деталі, зауважимо, що, наприклад, метод **integer** призначений для обчислення визначника цілочислової матриці, **rational** – матриці з раціональними елементами, **float** видасть результат у дійсній формі, **modular[m]** обчислює визначник за модулем числа **m**.

Розглянемо приклади:

<pre>>mA:=Matrix([[1,1/2,1/3], [1/4,0,1],[3,1/7,1/13]]);</pre>	$mA := \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & 0 & 1 \\ 3 & \frac{1}{7} & \frac{1}{13} \end{bmatrix}$
---	--

>Determinant(mA);	$\frac{2969}{2184}$
>Determinant(mA,method=float);	1.359432235
>mB:=<<10 3>,<-2 5>;	$mB := \begin{bmatrix} 10 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$
>Determinant(mB);	56
>Determinant(mB,method=modular[5]);	1

Мінори

У пакеті LinearAlgebra є також функція **Minor()** для обчислення мінорів матриці. Її синтаксис

Minor(A, r, c, output=value, method=value, outputoptions=list).

Ця функція для заданої матриці *A* вилучає *r*-й рядок та *c*-й стовпець і залежно від значення **matrix** чи **determinant** параметра **output** повертає відповідно матрицю чи значення мінору.

Розглянемо приклади:

<code>>mA:=Matrix([[5,1,2],[-3,9,2],[1,-1,7]]);</code>	$mA := \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -3 & 9 & 2 \\ 1 & -1 & 7 \end{bmatrix}$
<code>>Minor(mA,2,2,output=matrix);</code>	$\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$
<code>>Minor(mA,2,2,output=determinant);</code>	33
<code>>Minor(mA,2,2,output=determinant,method=modular[3]);</code>	0

Ранг матриці

Для обчислення рангу матриці M призначена функція **Rank(M)**;

Наприклад:

<code>>mA:=Matrix(3,[1,2,3],scan=diagonal);</code>	$mA := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$
<code>>Rank(mA);</code>	3
<code>>mB:=Matrix(3,fill=10);</code>	$mB := \begin{bmatrix} 10 & 10 & 10 \\ 10 & 10 & 10 \\ 10 & 10 & 10 \end{bmatrix}$
<code>>Rank(mB);</code>	1
<code>>mB[1,1]:=100;</code>	$mB_{1,1} := 100$
<code>>Rank(mB);</code>	2

Обернена матриця

Для знаходження оберненої матриці в пакеті LinearAlgebra передбачено потужну функцію **MatrixInverse**. Її параметрами є матриця, для якої потрібно знайти обернену, метод пошуку та його опції, список властивостей матриці результату та ін. Детальніше про це можна прочитати у довідці та спеціальній літературі.

За замовчанням, якщо матриця A (параметр функції) є квадратною й невиродженою, то треба шукати її обернену A^{-1} . Якщо матриця прямокутна або задано метод **pseudo**, то шукаємо інверсну матрицю, тобто матрицю X , яка задовольняє рівність $AXA=A$ та $XAX=X$, при цьому матриці AX та XA мають бути ермітовими.

Щодо допустимих методів, то для цілочислової матриці доцільно використовувати метод **integer**, для раціонально числової – **univar**, для трикутної – **subs**.

Розглянемо приклади:

<code>> B1 := B([1, 2], [1, 2]);</code>	$B1 := \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$
<code>> MatrixInverse(B1);</code>	$\begin{bmatrix} \frac{d}{a d - b c} & -\frac{b}{a d - b c} \\ -\frac{c}{a d - b c} & \frac{a}{a d - b c} \end{bmatrix}$
<code>> MatrixInverse(B);</code>	

$$\begin{aligned}
& \left[\left[(a^2 e^2 + a^2 d^2 - c^2 b d - c^2 e) / (a^2 e^2 + a^2 d^2 - 2 a c b d \right. \right. \\
& \quad - 2 a c^2 e - 2 b d c e + c^4 + e^2 b^2 + b^2 c^2 + d^2 c^2), \\
& \quad - (a b d + a c e - c b^2 - c^3) / (a^2 e^2 + a^2 d^2 \\
& \quad - 2 a c b d - 2 a c^2 e - 2 b d c e + c^4 + e^2 b^2 \\
& \quad + b^2 c^2 + d^2 c^2) \Big], \\
& \quad \left[- (c d a + d c e - c^2 b - b e^2) / (a^2 e^2 + a^2 d^2 \right. \\
& \quad - 2 a c b d - 2 a c^2 e - 2 b d c e + c^4 + e^2 b^2 \\
& \quad + b^2 c^2 + d^2 c^2), (d a^2 - b c a + d c^2 - b c e) / \\
& \quad (a^2 e^2 + a^2 d^2 - 2 a c b d - 2 a c^2 e - 2 b d c e + c^4 \\
& \quad + e^2 b^2 + b^2 c^2 + d^2 c^2) \Big], \\
& \quad \left[- (a c e - c d^2 + e b d - c^3) / (a^2 e^2 + a^2 d^2 \right. \\
& \quad - 2 a c b d - 2 a c^2 e - 2 b d c e + c^4 + e^2 b^2 \\
& \quad + b^2 c^2 + d^2 c^2), (e a^2 - c^2 a - c b d + e b^2) / \\
& \quad (a^2 e^2 + a^2 d^2 - 2 a c b d - 2 a c^2 e - 2 b d c e + c^4 \\
& \quad + e^2 b^2 + b^2 c^2 + d^2 c^2) \Big] \Big]
\end{aligned}$$

<code>>MatrixInverse(%);</code>	$\begin{bmatrix} \frac{d}{ad-bc} & -\frac{b}{ad-bc} \\ -\frac{c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{bmatrix}$
<code>>MatrixInverse(%);</code>	$\begin{bmatrix} \frac{d}{ad-bc} & -\frac{b}{ad-bc} \\ -\frac{c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{bmatrix}$
<code>>mA:=Matrix([[1,2,3,4],[2,0,3,0],[3,0,0,1],[4,1,0,0]]);</code>	$mA := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

<code>>mAinv:=MatrixInverse(mA, method=integer);</code>	$mA_{inv} := \begin{bmatrix} -\frac{1}{21} & \frac{1}{21} & \frac{4}{21} & \frac{2}{21} \\ \frac{4}{21} & -\frac{4}{21} & -\frac{16}{21} & \frac{13}{21} \\ \frac{2}{63} & \frac{19}{63} & -\frac{8}{63} & -\frac{4}{63} \\ \frac{1}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \end{bmatrix}$
<code>>mA.mAinv; ;</code>	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
<code>>mB:=Matrix([[1,2,3],[4,5,6],[5,7,9]]);</code>	$mB := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 9 \end{bmatrix}$
<code>>MatrixInverse(mB);</code>	Error, (in MatrixInverse) singular matrix
<code>>mX:=MatrixInverse(mB, method=pseudo);</code>	$mX := \begin{bmatrix} -\frac{7}{9} & \frac{11}{18} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{9} & \frac{1}{9} & 0 \\ \frac{5}{9} & -\frac{7}{18} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$

<code>>mB.mX.mB=mB;</code>	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 9 \end{bmatrix}$
<code>>mX.mB.mX=mX;</code>	$\begin{bmatrix} -\frac{7}{9} & \frac{11}{18} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{9} & \frac{1}{9} & 0 \\ \frac{5}{9} & -\frac{7}{18} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{7}{9} & \frac{11}{18} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{9} & \frac{1}{9} & 0 \\ \frac{5}{9} & -\frac{7}{18} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$
<code>>mB.mX;</code>	$\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$
<code>>mX.mB;</code>	$\begin{bmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{5}{6} \end{bmatrix}$
<code>>mC:=Matrix([[1,10,100], [0,2,2000], [0,0,3]]);</code>	$mC := \begin{bmatrix} 1 & 10 & 100 \\ 0 & 2 & 2000 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

<code>>mCinv:=MatrixInverse(mC,method=subs);</code>	$mCinv := \begin{bmatrix} 1 & -5 & 3300 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1000}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$
<code>>mC.mCinv;</code>	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Перевірка властивостей матриць

У пакеті LinearAlgebra існує кілька функцій, які дозволяють здійснювати перевірку властивостей матриці:

IsDefinite(A,q) – перевіряє матрицю A на знаковизначеність;

IsOrthogonal(A, M) – перевіряє матрицю A на ортогональність;

Issimilar(A,B) – перевіряє подібність матриць A та B .

Функції від квадратних матриць

Якщо $f(x)$ – аналітична функція, то має сенс вираз $f(A)$, де A – квадратна матриця. Під $f(A)$ розуміють підстановку A в степеневий ряд функції f . Пакет LinearAlgebra містить функцію **MatrixFunction()**, яка виконує цю процедуру. Крім того, є дві часткові форми цієї функції: **MatrixPower()** для обчислення степеневі функції від матриці та **MatrixExponential()** для обчислення e^A . Синтаксис цих функцій:

MatrixFunction(A,F,x,outputoptions=list)

MatrixPower(A,n,outputoptions=list)

MatrixExponential(A,outputoptions=list)

Тут **A** – квадратна матриця, **F** – вираз, який задає функцію **f**, **x** позначає аргумент функції **F**, **n** – степінь, до якого потрібно піднести матрицю **A**.

Розглянемо приклади:

>mA:=Matrix([[-5, - 2],[21,8]]);	$mA := \begin{bmatrix} -5 & -2 \\ 21 & 8 \end{bmatrix}$
>MatrixFunction(mA,ln(x),x) ;	$\begin{bmatrix} 7 \ln(1) - 6 \ln(2) & -2 \ln(2) + 2 \ln(1) \\ 21 \ln(2) - 21 \ln(1) & -6 \ln(1) + 7 \ln(2) \end{bmatrix}$
>MatrixFunction(mA,f(x),x);	$\begin{bmatrix} 7 f(1) - 6 f(2) & -2 f(2) + 2 f(1) \\ 21 f(2) - 21 f(1) & -6 f(1) + 7 f(2) \end{bmatrix}$

<code>>MatrixFunction(mA,x^2,x);</code>	$\begin{bmatrix} -5 & -2 \\ 21 & 8 \end{bmatrix}^2$
<code>>%;</code>	$\begin{bmatrix} -17 & -6 \\ 63 & 22 \end{bmatrix}$
<code>>mA. mA;</code>	$\begin{bmatrix} -17 & -6 \\ 63 & 22 \end{bmatrix}$
<code>>MatrixPower(mA,10);</code>	$\begin{bmatrix} -6137 & -2046 \\ 21483 & 7162 \end{bmatrix}$
<code>>MatrixFunction(mA,x^10,x);</code>	$\begin{bmatrix} -5 & -2 \\ 21 & 8 \end{bmatrix}^{10}$
<code>%;</code>	$\begin{bmatrix} -6137 & -2046 \\ 21483 & 7162 \end{bmatrix}$
<code>>MatrixFunction(mA,exp(x),x);</code>	$\begin{bmatrix} 7e^{-6}e^2 & -2e^2+2e^2 \\ 21e^{-21}e^2 & -6e^2+7e^2 \end{bmatrix}$
<code>>MatrixExponential(mA);</code>	$\begin{bmatrix} 7e^{-6}e^2 & -2e^2+2e^2 \\ 21e^{-21}e^2 & -6e^2+7e^2 \end{bmatrix}$

Ортогоналізація системи векторів

Під час розгляду евклідового (унітарного) лінійного простору, породженого деякою системою векторів, природно поставити задачу опису цього простору в термінах ортонормованої або хоча б ортогональної системи векторів. Процедура переходу від системи довільних твірних векторів до ортогональної бази простору в алгебрі називають ортогоналізацією такої системи. Відомий алгоритм Грама – Шмідта, який дозволяє ортогоналізувати

задану систему векторів. У пакеті LinearAlgebra цей алгоритм реалізовано за допомогою функції **GramSchmidt()**. Її синтаксис **GramSchmidt(V, conjugate=value, normalized=value, outputoptions=list)**.

Тут **V** – список векторів або множина векторів, які породжують лінійний простір. Усі вектори у **V** повинні мати однакові розмірність та орієнтацію.

Якщо **V** – список, то результат теж повертається у вигляді списку, інакше – у вигляді множини векторів ортогональної бази.

Кількість векторів результату може бути меншою за вхідну. Таке трапляється у випадку лінійної залежності вхідних векторів.

Якщо **conjugate=false**, то припускається, що заданий простір евклідовий, тобто в обчисленнях використовується дійсний скалярний добуток. За замовчанням застосовується **conjugate=true**, у цьому випадку припускається унітарність простору, тобто використовується комплексний скалярний добуток.

Якщо вказано **normalized=true** (за замовчанням значення цього параметра **false**), то результатом буде ортонормована база.

Наприклад:

<code>>vA1:=Vector[row]([1,0,-1,2]);</code>	$vA1 := [1, 0, -1, 2]$
<code>>vA2:=Vector[row]([-1,-2,1,0]);</code>	$vA2 := [-1, -2, 1, 0]$
<code>>vA3:=Vector[row]([2,2,-2,2]);</code>	$vA3 := [2, 2, -2, 2]$
<code>>GramSchmidt([vA1,vA2,vA3]);</code>	$\left[[1, 0, -1, 2], \left[\frac{-2}{3}, -2, \frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right] \right]$
<code>>ortA:=GramSchmidt({vA1,vA2,vA3},normalized=true);</code>	
	$ortA := \left\{ \left[\frac{1}{6}\sqrt{3}, -\frac{1}{6}\sqrt{3}, -\frac{1}{6}\sqrt{3}, \frac{1}{2}\sqrt{3} \right], \left[-\frac{1}{6}\sqrt{6}, -\frac{1}{3}\sqrt{6}, \frac{1}{6}\sqrt{6}, 0 \right] \right\}$

Типові задачі лінійної алгебри

Власні значення та власні вектори

Нагадаємо, що власне значення лінійного оператора A – це таке число λ , що $Ax = \lambda x$ для деякого ненульового вектора x , який називають власним вектором, що відповідає λ . Для знаходження власних значень використовують характеристичну матрицю $A - \lambda E$, визначник якої дорівнює нулю лише для власних значень λ . Цю матрицю можна обчислити, застосувавши функцію

CharacteristicMatrix(A,lambda,outputoptions=list).

Тут **A** – задана матриця, **lambda** – змінна, параметр характеристичної матриці, **outputoptions=list** задає додаткові опції **readonly**, **shape**, **storage**, **order**, **datatype** або **attributes**, які описано в пункті "Функція **Matrix()**".

Розглянемо приклади:

<code>>A:= Matrix([[-2,1,2], [3, -1,0],[4,3,5]]);</code>	$A := \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 5 \end{bmatrix}$
<code>>A_ch:=CharacteristicMa trix(A,lambda);</code>	$A_{ch} := \begin{bmatrix} -\lambda - 2 & 1 & 2 \\ 3 & -\lambda - 1 & 0 \\ 4 & 3 & -\lambda + 5 \end{bmatrix}$
<code>>A_ch_pol:=Determinant(A_ch);</code>	$A_{ch_pol} := -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 24\lambda + 21$
<code>>solve(A_ch_pol=0,lambda);</code>	$-1, \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{93}, \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{93}$

Останні дві команди обчислюють відповідно характеристичний багаточлен, тобто визначник характеристичної матриці, і власні значення матриці A як його корені.

Характеристичний багаточлен також можна обчислити, використовуючи безпосередньо функцію **CharacteristicPolynomial()**. Її синтаксис **CharacteristicPolynomial(A,x)**.

Тут A – матриця оператора, x – змінна характеристичного багаточлена.

Продовжуючи попередній приклад, маємо:

`>A_ch_pol1:=CharacteristicPolynomial(A,lambda);`

$A_{ch_pol1} := \lambda^3 - 2\lambda^2 - 24\lambda - 21$

Як бачимо, дана функція шукає характеристичний поліном зі старшим коефіцієнтом, що дорівнює 1.

Також у пакеті LinearAlgebra є функції для безпосереднього обчислення власних значень і векторів – **Eigenvalues()** та **Eigenvectors()**. Синтаксис першої з них

Eigenvalues(A,implicit,output=obj,outputoptions=1ist).

Тут A – матриця оператора, необов'язковий параметр **implicit** обчислює власні значення в неявній формі **RootOf**,

параметр **output** указує, як вивести результат. Можливі значення параметра: **output**: 'Vector', 'Vector[row]', 'Vector[column]' і 'list'.

Продовжуючи попередні обчислення, отримаємо:

>Eigenvalues(A,output='list');	$\left[-1, \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{93}, \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{93} \right]$
>Eigenvalues(A,implicit,output='Vector[column]');	
	$\begin{bmatrix} -1 \\ \text{RootOf_Z}^2 - 3_Z - 21, index = 1) \\ \text{RootOf_Z}^2 - 3_Z - 21, index = 2) \end{bmatrix}$

Синтаксис функції **Eigenvectors()** подібний до **Eigenvalues** **Eigenvalues(A,implicit,output=obj, outputoptions=list)**.

Уточнення тут вимагає лише параметр **output=obj**. За замовчанням функція повертає результат у вигляді вектора власних значень і матриці, стовпці якої формують відповідні власні вектори. Якщо значення параметра **output='list'**, то результати виводяться у вигляді списку векторів, перша координата яких формується власним значенням, друга – розмірністю власного підпростору, а третя – відповідними до власного значення векторами. Значення **'values'** чи **'vectors'** означають, що потрібно виводити власні значення або вектори. Наприклад:

>B:=Matrix([[-235, -357, -204, -357], [189, 359, 252, 441], [-45, -105, -142, -105], [-45, -105, -60, -187]]);	$B := \begin{bmatrix} -235 & -357 & -204 & -357 \\ 189 & 359 & 252 & 441 \\ -45 & -105 & -142 & -105 \\ -45 & -105 & -60 & -187 \end{bmatrix}$
>Eigenvectors(B);	$\begin{bmatrix} -82 \\ -82 \\ -82 \\ 41 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{7}{3} & -\frac{4}{3} & -\frac{7}{3} & \frac{17}{5} \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{21}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь

Для розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь $AX=B$ існує функція **LinearSolve(A,B, method = name, free = name);**

A – прямокутна або квадратна матриця;

B – прямокутна матриця або вектор-стовпець;

method – метод знаходження розв'язку системи рівнянь;

free – ім'я вільної змінної, якщо розв'язок не єдиний.

>A:=Matrix(2,2,[[2,3],[4,7]]);	$A := \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$
>B:=Matrix(2,2,[[3,7],[1,8]]);	$B := \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}$
>C:=LinearSolve(A,B);	$C := \begin{bmatrix} 9 & \frac{25}{2} \\ -5 & -6 \end{bmatrix}$
>A1:=Matrix(2,2,[[2,4],[4,7]]);	$A1 := \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$

>C1:=LinearSolve(A1,B,method=QR);	$C1 := \begin{bmatrix} \frac{-17}{2} & \frac{-17}{2} \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$
---	--

ЛЕКЦІЯ 10

Наближення функцій

Проблема наближення функцій полягає в заміні функції, яка обчислюється досить складно або задана в окремих точках, на простішу функцію, при цьому норма різниці між ними має бути цюнайменша.

Поліноміальна інтерполяція функцій

Якщо деяка функція задана таблично, тобто у вигляді масивів X , Y однакової розмірності $\{X(i), Y(i), i=1, N\}$, то існує можливість побудови аналітичної функції у вигляді полінома $N-1$ -го степеня. У системі Maple існує активна форма вбудованої функції **interp(X,Y, x)** або її пасивна форма **Interp(X,Y, x)**. Параметри X , Y – списки, що задають масив значень аргументів і масив значень функцій, x – ім'я змінної, яка вказує на аргумент інтерполяційного полінома.

>f1:=x-> (2*x+1)/((x^2+2*x+1)^2);	$f1 := x \mapsto \frac{2x+1}{(x^2+2x+1)^2}$
>spx:=evalf([seq(i*Pi/4/10, i=0..10)]);	

	$\mathbf{spx} := [0., 0.07853981635, 0.1570796327, 0.2356194490,$ $0.3141592654, 0.3926990818, 0.4712388981,$ $0.5497787144, 0.6283185308, 0.7068583472,$ $0.7853981635]$
> $\mathbf{spy} := \mathbf{map}(f1, \mathbf{spx});$	
	$\mathbf{spy} := [1.000000000, 0.8551031742, 0.7331536571,$ $0.6311669592, 0.5459430729, 0.4745761698,$ $0.4145942442, 0.3639560905, 0.3209994255,$ $0.2843782471, 0.2530039700]$
> $\mathbf{Int_pol} := \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{interp}(\mathbf{spx}, \mathbf{spy}, \mathbf{x});$	
	$\mathbf{Int_pol} := \mathbf{x} \mapsto \mathbf{interp}(\mathbf{spx}, \mathbf{spy}, \mathbf{x})$
> $\mathbf{Int_pol}(\mathbf{x});$	
	$-1.410129845\mathbf{x}^{10} + 6.870951225\mathbf{x}^9 - 15.19170886\mathbf{x}^8$ $+ 20.29164809\mathbf{x}^7 - 18.31379063\mathbf{x}^6 + 11.56293290\mathbf{x}^5$ $- 4.580301922\mathbf{x}^4 - 0.0461013942\mathbf{x}^3 + 2.002850952\mathbf{x}^2$ $- 2.000073559\mathbf{x} + 1$

Приклад демонструє побудову інтерполяційного полінома 10-го степеня для функції, заданої аналітично на інтервалі $[0, \frac{\pi}{4}]$. У змінних **spx**, **spy** обчислюються масиви значень аргументу та функції. Змінна **Int_pol** призначена для задавання інтерполяційного полінома, вигляд якого демонструє останній оператор прикладу.

Сплайнова інтерполяція

Сплайнова інтерполяція призначена для наближення таблично заданої функції у вигляді кусково-поліноміальної функції на

кожному з елементарних інтервалів. У вузлах мають виконуватись певні умови гладкості сплайну залежно від степеня поліномів. У системі Maple для виконання сплайн-апроксимації використовується вбудована функція **spline(X,Y,v,d)**. Тут **X, Y, v** мають той самий зміст, що й у попередній функції. Параметр **d** задає порядок сплайну й може набувати цифрових значень 1, 2, 3, 4 або символьних значень **linear**, **quadratic**, **cubic**, **quartic**, що відповідає сплайнам лінійним, квадратичним, кубічним або поліномам четвертого порядку, відповідно.

>Sp_1:=x->spline(spx, spy, x, 1);	
	$Sp_1 := x \mapsto spline(spx, spy, x, 1)$
>map(Sp_1, [0.1, 0.2, 0.3, 0.4]);	
	0.8217817435, 0.6774200590, 0.5613073513, 0.4690003591
>Sp_3:=x->spline(spx, spy, x, 3);	
	$Sp_3 := x \mapsto spline(spx, spy, x, 3)$
>Sp_1(x);	
	$1 - 1.844883685\ x \quad x < 0.07853981635$ $0.9770526911 - 1.552709476\ x \quad x < 0.1570796327$ $0.9371270528 - 1.298534969\ x \quad x < 0.2356194490$ $0.8868386176 - 1.085104221\ x \quad x < 0.3141592654$ $0.8314106843 - 0.9086716314\ x \quad x < 0.3926990818$ $0.7744857980 - 0.7637135968\ x \quad x < 0.4712388981$ $0.7184231675 - 0.6447449980\ x \quad x < 0.5497787144$ $0.6646527455 - 0.5469412455\ x \quad x < 0.6283185308$ $0.6139688531 - 0.4662753248\ x \quad x < 0.7068583472$ $0.5667467407 - 0.3994697031\ x \quad otherwise$

Приклад демонструє наближення функції за даними таблиці попереднього прикладу за допомогою лінійних і кубічних сплайнів. Лінійний сплайн зображений у вигляді кусково-лінійної функції.

Дробово-раціональне рівномірне наближення функцій за алгоритмом Ремеза

У пакеті **numapprox** існує функція **remez(w, f, a, b, m, n, crit, 'maxerror')**, яка призначена для побудови рівномірного наближення функцій у дробово-раціональному вигляді. Параметри цієї функції мають такий зміст:

w – функція аргументу x , $w(x) > 0$, $x \in [a, b]$, яка використовується для обчислення відхилення $\max_{x \in [a, b]} w(x) |f(x) - r(x)|$ між функціями $f(x)$ і дробово-раціональним наближенням, функцією $r(x)$. Найпоширенішими випадками функції $w(x)$ є $w(x) = 1$ для випадку абсолютної похибки та $w(x) = \frac{1}{|f(x)|}$ – для випадку відносної похибки. Тут:

f – наближувана функція;

a, b – відрізок, на якому здійснюється наближення;

m, n – степені поліномів чисельника та знаменника;

crit – масив точок розмірністю $m + n + 2$, що належать інтервалу $[a, b]$, у яких реалізується максимальне відхилення;

'maxerror' – ім'я вихідної змінної, якій присвоюється значення найбільшого відхилення на відрізку $[a, b]$.

> w := x → 1; f := x → exp(x);		w := x → 1 f := x → e^x
> crit := array(1..6, [0, 0.5, 0.7, 0.8, 1.2, 1.5]);		
	crit := [0 0.5 0.7 0.8 1.2 1.5]	
> ff := remez(w, f, 0, 2, 3, 1, crit, 'maxerror');		
	ff := x → $\frac{1.241133453 + (1.009150366 + (0.3493997133 + 0.1183993851 x) x)}{1.241587757 - 0.2415877571 x}$	
> maxerror;		0.0003659249721

Приклад демонструє наближення функції e^x на відрізку $[0, 2]$ у вигляді відношення поліномів третього та першого степенів.

Рациональна інтерполяція

У пакеті **CurveFitting** існує функція **RationalInterpolation(xdata, ydata, x, opts)**, яка дозволяє побудувати дробово-раціональну інтерполюючу функцію. Призначення параметрів функції CurveFitting:

xdata – список раціональних значень аргументів розмірністю $n+1$;

ydata – список раціональних значень функцій розмірністю $n+1$;

x – незалежна змінна інтерполюючої функції або числове значення, у якому обчислюється інтерполююча функція;

opts – параметр, який може мати вигляд $\text{degrees}=[d1, d2]$, де $n \geq d1 + d2$.

<pre>>f2:=x- >(2*x+1)/sin((x^2+2*x+1)^2);</pre>	
	$f2 := x \rightarrow \frac{2x+1}{\sin((x^2+2x+1)^2)}$
<pre>>spx:=convert(evalf([seq(i*Pi/4/1 0,i=0..10)]),rational);</pre>	
	$spx := \left[0, \frac{13008}{165623}, \frac{26087}{166075}, \frac{12866}{54605}, \frac{52174}{166075}, \frac{13221}{33667}, \frac{25945}{55057}, \frac{26087}{47450}, \frac{104348}{166075}, \frac{13079}{18503}, \frac{26087}{33215} \right]$
<pre>>spy:=convert(evalf(map(f2,spx)), rational);</pre>	
	$spy := \left[\frac{46717}{39311}, \frac{12783}{10787}, \frac{73037}{54217}, \frac{51709}{25471}, \frac{106999}{10405}, \frac{-53285}{17353}, \frac{-111139}{57194}, \frac{-181613}{42565}, \frac{101403}{30526}, \frac{59376}{19823}, \frac{-47120}{12309} \right]$
<pre>>with(CurveFitting):</pre>	

>evalf(RationalInterpolation(spx, spy, 0.4, degrees=[5,4]));	-2.793889501
>evalf(f2(0.4));	-2.794062219

Приклад демонструє обчислення наближеного значення функції $f_2(x)$ за допомогою дробово-раціональної інтерполуючої функції в точці $x=0.4$ і порівняння цього значення з точним значенням функції в цій точці.

Середньоквадратичне наближення за методом найменших квадратів

У пакеті **CurveFitting** існує процедура, яка дозволяє за заданою множиною точок побудувати функцію найкращого середньоквадратичного наближення на заданій множині точок. Середньоквадратичне наближення будують у вигляді узагальненого полінома за деякою системою лінійно незалежних функцій. Функція **LeastSquares(xdate, ydate, x, curve= f, weight=s)** має такі параметри:

xdate, ydate – списки або масиви точок однакової розмірності незалежної змінної та значення функції, відповідно;

x – незалежна змінна, відносно якої записується функція найкращого середньоквадратичного наближення;

f – функція аргументу **x**, що містить деякий набір параметрів;

s – список або масив вагових множників однакової розмірності із **xdate, ydate**, який урахує точність вимірювання значення функції.

Приклад демонструє побудову найкращого полінома середньоквадратичного наближення п'ятого степеня у вигляді лінійної комбінації поліномів Ерміта. Значення параметрів **spx, spy** взяті з прикладу з підрозділу "Поліноміальна інтерполяція функцій".

> Hermit_5 := sum(a[n]*HermiteH(n, x), n=0..5);	
---	--

$\text{Hermit_5} := a_0 \text{ HermiteH}(0, x) + a_1 \text{ HermiteH}(1, x) + a_2 \text{ HermiteH}(2, x) \\ + a_3 \text{ HermiteH}(3, x) + a_4 \text{ HermiteH}(4, x) + a_5 \text{ HermiteH}(5, x)$	
> LeastSquares (spx, spy, x, curve=Hermit_5);	
$2.27663095035300 - 1.84570182039782 \text{ HermiteH}(1, x) \\ + 0.733475882406300 \text{ HermiteH}(2, x) - 0.118806861218075 \text{ HermiteH}(3, x) \\ + 0.0158619626956497 \text{ HermiteH}(4, x) + 0.00213983282387837 \text{ HermiteH}(5, x)$	

Чисельне інтегрування

Система Maple прагне виконати аналітичне обчислення заданого інтеграла навіть тоді, коли його значення виражається через спеціальні функції, і записує його явний вигляд. У випадку, коли визначений інтеграл не може бути обчислений точно, система Maple надає користувачеві можливість виконати наближене (чисельне) інтегрування. У випадку застосування чисельних процедур інтегрування головна процедура **int()** або **Int()** сама стає параметром процедури **evalf()**. При цьому використовується таке правило. Якщо параметром процедури **evalf()** є процедура **int()**, то спочатку система намагається виконати точне аналітичне обчислення; якщо ж це неможливо, то виконується чисельне обчислення. Якщо використовується неактивна форма процедури інтегрування **Int()**, то одразу відбувається наближене обчислення відповідного інтеграла.

Процедура обчислення інтеграла **int()** або **Int()** окрім стандартних параметрів, які застосовуються при аналітичному обчисленні визначених інтегралів **int(f(x), x=a..b)**, використовує додаткові необов'язкові параметри **int(f(x), x=a..b, необов'язкові параметри)**.

Необов'язкові параметри процедури **int** мають такий зміст:

digits=n	n – ціле додатне число, яке задає кількість вірних цифр у результаті обчислення інтеграла
-----------------	---

epsilon = ε	ε – дійсне число, яке задає відносну похибку обчислення результату. Ці два параметри зв'язані між собою співвідношенням $\varepsilon = 0.5 \cdot 10^{1-n}$
method = назва методу	назва методу – набуває значення назви методу наближеного обчислення інтеграла. Назва методу може вказуватися й без посилання на значення параметра method

У системі MAPLE доступні такі методи інтегрування:

method = _CCquad – Clenshaw-Curtis – квадратурний метод;

method = _Dexp – адаптивний метод подвійного показника;

method = _Gquad – адаптивний метод Гаусса;

method = _Sinc – адаптивний sinc-метод квадратур;

method = _NCrule – адаптивний метод Ньютона – Котеса
"quanc8";

method = _d01ajc – адаптивний 10-точковий метод Гаусса, застосовується для скінченних інтервалів інтегрування;

method = _d01akc – адаптивний 30-точковий метод Гаусса, застосовується для скінченних інтервалів інтегрування із осцилюючими підінтегральними функціями;

method = _d01amc – метод обчислення інтегралів з нескінченними межами інтегрування.

При чисельному обчисленні багатовимірних інтегралів у багатовимірних паралелепіпедах можна використовувати спеціальну форму процедури **Int()** у поєднанні з процедурою **evalf()**, **evalf(Int(f, [x1=a1..b1, x2=a2..b2, ..., xn=an..bn]))**. У цьому випадку система Maple надає можливість використання чисельних методів обчислення багатовимірних інтегралів:

method=_cuhre – метод обчислення багатовимірних інтегралів у паралелепіпедах скінченного розміру з розмірністю від 2 до 15, що базується на алгоритмі ACM TOMS Algorithm 698;

method=_метод Монте-Карло обчислення багатовимірних інтегралів, дає невисоку відносну похибку обчислення.

Для чисельного обчислення багатовимірних інтегралів можна також використовувати стандартний підхід – зведення багатовимірних інтегралів до повторних.

Наведемо приклади чисельного обчислення одновимірних інтегралів:

<code>>evalf(Int(exp(-x^5)/(x^3+1),x=0..1));</code>	0.7543143320
<code>>evalf(Int(sin(x)/(x^2+1),x=0..infinity,digits=20));</code>	0.64676112277913007155
<code>>evalf(Int(sin(x)*ln(x+1)*exp(-x^3),x=0..infinity));</code>	0.2090363674
<code>>e1:= 1/GAMMA(x)^2:</code>	
<code>>Int(e1,x=0..2)=evalf(Int(e1,x=0..2,digits=14,method=_d01ajc));</code>	$\int_0^2 \frac{1}{\Gamma(x)^2} dx = 1.5630430689991$

Приклад демонструє обчислення багатовимірного інтеграла методом Монте-Карло:

<code>>f:=(x,y,z,u)->piecewise(x^2+y^2+z^2+u^2<1,1/(x^3+y^3+z^3+u^3+1),0);</code>	
$f := (x, y, z, u) \rightarrow \text{piecewise}\left(x^2 + y^2 + z^2 + u^2 < 1, \frac{1}{x^3 + y^3 + z^3 + u^3 + 1}, 0\right)$	
<code>>evalf(Int(f(x,y,z,u),[x=-1..1,y=-1..1,z=-1..1,u=-1..1],method=_MonteCarlo,digits=3));</code>	5.95

Чисельне розв’язування нелінійних рівнянь та їхніх систем

Для знаходження чисельного розв'язку нелінійних рівнянь і систем рівнянь система Maple використовує базову процедуру **fsolve(eqns, vars, options)**. Тут

eqns – одне рівняння або система рівнянь, що задається у вигляді множини;

vars – змінна або множина змінних, відносно яких здійснюється знаходження розв'язку;

options – набір додаткових необов'язкових опцій, які можуть включати значення, наведені в таблиці:

avoid	avoid = {список рівностей} . Список рівностей визначає ті значення змінної, які слід ігнорувати при пошуку розв'язків
complex	якщо ця опція вказана, то пошук розв'язків буде відбуватися на множині комплексних чисел
fulldigits	опція дозволяє підтримувати високу точність заокруглення при проміжних розрахунках
maxsols	maxsols=n – ця опція використовується при роботі з поліномами, <i>n</i> зазначає кількість коренів, які необхідно обчислити. За корені обираються найменші
interval	{x=a...b, y=c...d, ...z=l...s} – опція задає паралелепіпед, якому має належати розв'язок системи рівнянь

Продемонструємо на прикладах можливості використання процедури **fsolve** для обчислення розв'язків систем рівнянь:

> eq1 := {sin(2*x-y)-1.2*x=0.4, 0.8*x^2+1.5*y^2=1}	
eq1 := {0.8 x²+1.5 y²=1, sin(2 x-y)-1.2 x=0.4}	
> fsolve(eq1, {x, y}, fulldigits);	
{x=0.4912379505, y=-0.7334613013}	
> eq2 := {3*x^2+3/2*y^2+z^2-5=0, 6*x*y*z-x+5*y+3*z=0, -y*z-1=0};	

$eq2 := \left\{ 3x^2 + \frac{3}{2}y^2 + z^2 - 5 = 0, 5xz - yz - 1 = 0, 6xyz - x + 5y + 3z = 0 \right\}$	
$> fsolve(eq2, \{x, y, z\});$	
	$\{x = -1.284457050, y = -0.1297565120, z = -0.1589186226\}$

Продемонструємо приклад знаходження чисельного розв'язку для одного трансцендентного рівняння:

$> eq3 := \tan(x) = (x^2 - 1)/x;$	
	$eq3 := \tan(x) = \frac{x^2 - 1}{x}$
$> fsolve(eq3, x, \{x = \pi/2..3*\pi/2\});$	4.481749781

Такі приклади ілюструють знаходження коренів поліномів:

$> with(orthopoly);$	$[G, H, L, P, T, U]$
$> eq5 := T(7, x);$	
	$eq5 := 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x$
$> fsolve(eq5, x, maxsols=5);$	
	$-0.9749279122, -0.7818314825, -0.4338837391, 0., 0.4338837391$
$> eq4 := 5*x^7 + 3*x^4 - 25;$	
	$eq4 := 5x^7 + 3x^4 - 25$
$> fsolve(eq4, x, maxsols=3);$	1.206786284
$> fsolve(eq4, x, maxsols=3, complex);$	
	$-0.233415374108972 - 1.20237421433849I, -0.233415374108972 + 1.20237421433849I, 1.20678628398718$

Чисельне розв'язування задач Коші та граничних задач для звичайних диференціальних рівнянь

Чисельне розв'язування задач Коші для систем звичайних диференціальних рівнянь у системі Maple здійснюється за допомогою процедури

dsolve(odesys, numeric, [method=namemethod], vars, options).

У цій процедурі параметр **odesys** задає у вигляді множини диференціальне рівняння або систему звичайних диференціальних рівнянь і додаткові умови (початкові або граничні).

Параметр **numeric** указує, що задача Коші, або гранична задача, буде розв'язуватись чисельно.

Параметр **namemethod** (необов'язковий) набуває значень, що задають метод чисельного розв'язання задачі:

bvp – застосовується при розв'язанні граничних задач і використовує метод трапецій **bvp[trapdefer]** або метод середньої точки **bvp[middefer]**, або покращений метод трапецій **bvp[traprich]**, або покращений метод середньої точки **bvp[midrich]**;

classical – використовуються класичні методи Рунге – Кутта першого – четвертого порядку точності;

rkf45 – використовується метод Рунге – Кутта – Фелберга четвертого – п'ятого порядку точності;

lsode – використовуються процедури для інтегрування жорстких систем диференціальних рівнянь на базі методу Адамса;

gear – використовується метод простої інтерполяції.

Параметр **options** задає додаткові параметри чисельного розв'язування:

range = numeric..numeric – діапазон інтегрування для граничних задач;

abserr = numeric – абсолютна точність інтегрування на кроці при інтегруванні задачі Коші або оцінка абсолютної похибки розв'язку для граничної задачі;

relerr = numeric – відносна точність інтегрування на кроці при інтегруванні задачі Коші та оцінка відносної похибки розв'язку для граничної задачі.

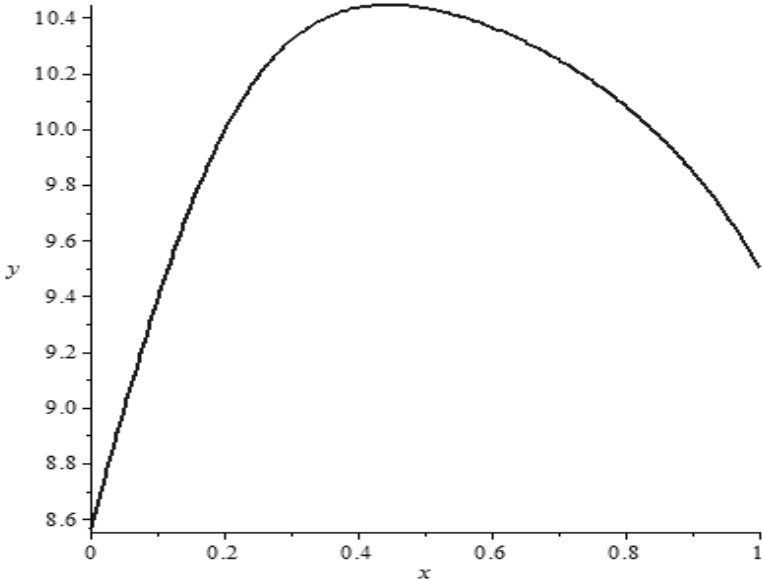
Параметр **vars** (необов'язковий) задає у вигляді множини залежні змінні системи диференціальних рівнянь.

Розглянемо приклад застосування процедури **dsolve** до знаходження розв'язку граничної задачі для звичайного диференціального рівняння другого порядку:

>a:=10;k:=1;h1:=1;h2:=1;H1:=2;H2:=1; f:=x->10*cos(Pi*x);		
	$a := 10 \quad k := 1 \quad h1 := 1 \quad h2 := 1 \quad H1 := 2 \quad H2 := 1 \quad f := x \rightarrow 10 \cos(\pi x)$	
>eq:=diff(y(x),x\$2)+a*sin(k*Pi*x)* diff(y(x),x)+y(x)=f(x);		
	$eq := \frac{d^2}{dx^2} y(x) + 10 \sin(\pi x) \left(\frac{d}{dx} y(x) \right) + y(x) = 10 \cos(\pi x)$	
>ly:=h1*D(y)(0)- h2*y(0)=0,H1*D(y)(1)+H2*y(1)=1;		
	$ly := D(y)(0) - y(0) = 0, \quad 2 D(y)(1) + y(1) = 1$	
>nsol:=dsolve([eq,ly],y(x),range=0..1,numeric,abserr=1.0E-8);		
	$nsol := \text{proc}(x \text{ } bvp) \dots \text{end proc}$	
>seq([i*0.1,op(2,nsol(i*0.1))],i=0..10);		
	$[0., y(x) = 8.56340856206107], [0.1, y(x) = 9.38222958731456], [0.2, y(x) = 9.98961288200047], [0.3, y(x) = 10.3177704832926], [0.4, y(x) = 10.4354440213653], [0.5, y(x) = 10.4330459877077], [0.6, y(x) = 10.3644030670557], [0.7, y(x) = 10.2483527136564], [0.8, y(x) = 10.0824556006397], [0.9, y(x) = 9.84800766007461], [1.0, y(x) = 9.50269067330178]$	

За допомогою графічного пакету **plots** побудуємо графік розв'язку:

```
>with(plots):  
>odeplot(nsol);
```



Розглянемо приклад знаходження чисельних розв'язків для системи шести звичайних диференціальних рівнянь із додатковими умовами Коші, або граничними умовами.

Визначимо залежні змінні системи рівнянь:

```
>[seq(y[i],i=1..6)]; [y1, y2, y3, y4, y5, y6]
```

Задамо список параметрів системи рівнянь:

```
>a:=[-1, -0.001, 1, 1, 2, 3]; a := [-1, -0.001, 1, 1, 2, 3]
```

Задамо систему диференціальних рівнянь першого порядку (шість рівнянь):

```
>eq:=diff(y[1](x),x)=a[1]*(y[1](x))^2+y[2](x),diff(y[2](x),x)=a[3]*y[1](x)*y[2](x)+a[1]*y[2](x),  
diff(y[3](x),x)=a[2]*y[3](x),  
diff(y[4](x),x)=a[4]*y[3](x)+a[2]*y[4](x),
```

$$\begin{aligned} \text{diff}(y[5](x), x) &= a[5] * y[4](x) + a[2] * y[5](x), \\ \text{diff}(y[6](x), x) &= a[6] * y[5](x) + a[2] * y[6](x); \\ \text{eq} &:= \frac{d}{dx} y_1(x) = -y_1(x)^2 + y_2(x), \frac{d}{dx} y_2(x) = y_1(x) y_2(x) - y_2(x), \frac{d}{dx} y_3(x) = \\ &-0.001 y_3(x), \frac{d}{dx} y_4(x) = y_3(x) - 0.001 y_4(x), \frac{d}{dx} y_5(x) = 2 y_4(x) - 0.001 y_5(x), \\ &\frac{d}{dx} y_6(x) = 3 y_5(x) - 0.001 y_6(x) \end{aligned}$$

Задамо початкові умови:

$$\begin{aligned} >\text{NU} := y[1](0) = 1, y[2](0) = 2, y[3](0) = 0.5, y[4](0) = 0.5 \\ &, y[5](0) = 0.5, y[6](0) = 0.5; \\ \text{NU} &:= y_1(0) = 1, y_2(0) = 2, y_3(0) = 0.5, y_4(0) = 0.5, y_5(0) = 0.5, y_6(0) = 0.5 \end{aligned}$$

Задамо граничні умови:

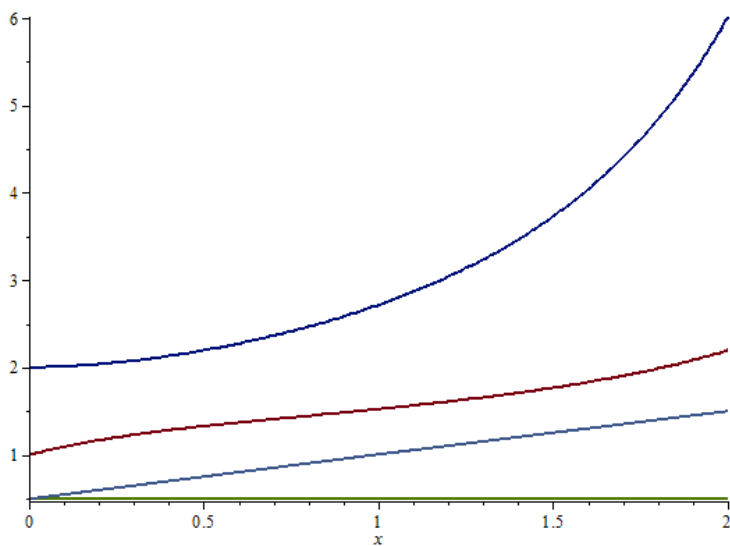
$$\begin{aligned} >\text{KU} := y[1](0) = 1, y[2](0) = 1, y[3](0) = 0.5, y[4](0) = 0.5 \\ &y[5](2) = 10, y[6](0) = 0.5; \\ \text{KU} &:= y_1(0) = 1, y_2(0) = 1, y_3(0) = 0.5, y_4(0) = 0.5, y_5(2) = 10, y_6(0) = 0.5 \end{aligned}$$

Спроба обчислення аналітичного розв'язку задачі Коші та граничної задачі не дає результату:

<code>>asol:=dsolve([eq,NU]);</code>	<code>asol :=</code>
<code>>asol_G:=dsolve([eq,KU]);</code>	<code>asol_G :=</code>

Обчислення чисельного розв'язку задачі Коші методами Рунге – Кутта, Адамса – Бешфорда та методом розвинення в ряд Тейлора. Побудова графіка окремих компонент розв'язку

<code>>nsol1:=dsolve({eq,NU}, func, range=0..2, numeric, method=rkf45);</code>	
	<code>nsol1:=proc(x rkf45) ... end proc</code>
<code>>odeplot(nsol1, [[x,y[1](x)], [x,y[2](x)], [x,y[3](x)], [x,y[4](x)]]);</code>	



<code>>nsol2:=dsolve({eq,NU},func,numeric ,method=classical[adambash]);</code>	
	<code>nsol2:=proc(x_classical) ... end proc</code>
<code>>nsol3:=dsolve({eq,NU},func,numeric ,method=taylorseries);</code>	
	<code>nsol3:=proc(x_taylorseries) ... end proc</code>

Обчислення розв'язку граничної задачі:

<code>>nsol1_G:=dsolve({eq,KU},func,range =0..2,numeric);</code>	
	<code>nsol1_G:=proc(x_bvp) ... end proc</code>
<code>>nsol1(1);</code>	

	$\left[\begin{aligned} &x=1., y_1(x)=1.52201751410571, y_2(x)=2.71564498615483, y_3(x) \\ &=0.499500249916687, y_4(x)=0.999000499833375, y_5(x) \\ &=1.99800099966675, y_6(x)=3.99600199933351 \end{aligned} \right]$
>nsol2(1);	
	$\left[\begin{aligned} &x=1., y_1(x)=1.52201717928033, y_2(x)=2.71564521219204, y_3(x) \\ &=0.499500249916687, y_4(x)=0.999000499833375, y_5(x) \\ &=1.99800099966675, y_6(x)=3.99600199933349 \end{aligned} \right]$
>nsol3(1);	
	$\left[\begin{aligned} &x=1., y_1(x)=1.52201717851275, y_2(x)=2.71564520812148, y_3(x) \\ &=0.499500249916687, y_4(x)=0.999000499833375, y_5(x) \\ &=1.99800099966675, y_6(x)=3.99600199933350 \end{aligned} \right]$
>nsol1_G(1);	
	$\left[\begin{aligned} &x=1., y_1(x)=1.00000000000000, y_2(x)=1.00000000000000, y_3(x) \\ &=0.499500249916687, y_4(x)=0.999000499833375, y_5(x) \\ &=7.51250375208349, y_6(x)=20.5395102556669 \end{aligned} \right]$

Знаходження розв'язків задач лінійного програмування

Для знаходження розв'язків задач лінійного програмування в системі Maple існує пакет **simplex**, який підключається за допомогою стандартного оператора **>with(simplex);** Система MAPLE генерує попередження про перевизначення двох стандартних функцій **maximize** та **minimize** (функції з такими самими назвами існують у ядрі системи Maple) і повідомляє про всі доступні функції пакету:

Warning, the protected names maximize and minimize have been redefined and unprotected

basis, convexhull, cterm, define_zero, display, dual, feasible, maximize, minimize, pivot, pivoteqn, pivotvar, ratio, setup, standardize

Головними функціями пакету **simplex** є функції **maximize** та **minimize**, які призначені для знаходження оптимального розв'язку задачі лінійного програмування. Виклик цих функцій здійснюється в таких формах:

maximize(цф, мло, тз), minimize(цф, мло, тз)

цф – цільова функція, яка задається у вигляді деякого лінійного виразу;

мло – множина лінійних нерівностей стандартного вигляду;

тз – тип ведучих змінних (необов'язковий параметр), який може набувати значення **NONNEGATIVE** – невід'ємні (за замовчанням), **UNRESTRICTED** – обмежень на знак ведучих змінних не накладається.

Результати своєї роботи процедури **maximize** та **minimize** повертають у вигляді множини рівнянь за їхніми ведучими змінними, на яких цільова функція досягає максимального або мінімального значення. У випадку відсутності оптимального розв'язку повертається порожня множина, а у випадку необмеженого розв'язку – **NULL**.

Розглянемо приклад знаходження розв'язку задачі лінійного програмування:

$$4x + 5y + 9z + 11u \rightarrow \max \quad \begin{cases} x + y + z + u \leq 15 \\ 7x + 5y + 3z + 2u \leq 80 \\ 3x + 5y + 10z + 15u \leq 60 \end{cases}$$

>a:=4*x+5*y+9*z+11*u;		
	a := 2 x - 3 y - 3 z	
>L:={x+y+z+u<=15, 7*x+5*y+3*z+2*u<=80, 3*x+5*y+10*z+15*u<=60};		
	L := {x+y+z+u ≤ 15, 7 x+5 y+3 z+2 u ≤ 80, 3 x+5 y+10 z+15 u ≤ 60}	
>b:=evalf(maximize(a, L, NONNEGATIVE));		

	$b := \{y = 0., u = 0., z = 2.950819672, x = 10.16393443\}$
>evalf(subs(% , a));	
	67.21311477

Функція **dual**(ЦФ, МЛЮ, Y) повертає спряжену (двоїсту) лінійну задачу до задачі, заданої параметрами функції **dual** ЦФ, МЛЮ. Параметр Y задає ім'я, яке буде присвоєне змінним спряженої задачі.

Розглянемо приклад застосування функції **dual** при побудові двоїстої задачі для задачі лінійного програмування з попереднього прикладу:

>f:=dual(a, L, w);

$15 w_1 + 80 w_2 + 60 w_3, \{4 \leq w_1 + 7 w_2 + 3 w_3, 5 \leq w_1 + 5 w_2 + 5 w_3,$

$11 \leq w_1 + 2 w_2 + 15 w_3, 9 \leq w_1 + 3 w_2 + 10 w_3\}$

Знайдемо розв'язок двоїстої задачі лінійного програмування та обчислимо значення цільової функції:

>d:=minimize(f[1], (f[2]), NONNEGATIVE);	
	$d := \{w_2 = \frac{13}{61}, w_3 = \frac{51}{61}, w_1 = 0\}$
>evalf(subs(% , f[1]));	
	67.21311475

Використана функція **standardize** дозволяє звести лінійні обмеження, що записані у вигляді лінійних нерівностей або рівностей, до стандартного вигляду:

>standardize(f[2]);

$\{-w_1 - 7 w_2 - 3 w_3 \leq -4, -w_1 - 3 w_2 - 10 w_3 \leq -9, -w_1 - 5 w_2 - 5 w_3 \leq -5,$

$-w_1 - 2 w_2 - 15 w_3 \leq -11\}$

Завдання для самостійного виконання 1

1. Для заданих цілих чисел m, n, k та N :

- визначити, які з них є простими;
- складені цілі числа розкласти на прості множники;
- знайти цілу частину від операції ділення m на k ;

- знайти залишок від операції ділення m на k ;
- утворити дробу m/n n/k і знайти суму та різницю цих дробів;
- обчислити наближений десятковий вигляд дробу m/n , який містить п'ять знаків після коми;
- вивести мантису та степінь числа $m*n/k$, заданого в експоненційному вигляді;
- обчислити N -й знак після коми десятичного зображення числа m/n (один з варіантів – можна використати команди `evalf`, `or` та `item`).

1.1) $m=3647, n=24567, k=347, N=10$;

1.2) $m=459, n=4591, k=34567, N=100$;

1.3) $m=4153, n=45683, k=23798, N=25$;

1.4) $m=574, n=35671, k=76452, N=50$;

1.5) $m=341, n=4573, k=56737, N=20$.

2. Для заданих комплексних чисел z_1 і z_2 :

- знайти їх суму та різницю;
- знайти їх добуток і частку;
- знайти модуль та аргумент числа z_1 ;
- порахувати y_2 – комплексно-спряжене число – до z_2 ;
- перевірити рівність: $|z_2|^2 - y_2 * z_2 = 0$.

2.1) $z_1 = 2 + 3i, z_2 = 4 - 2i$;

2.2) $z_1 = 1 + 2i, z_2 = 3 - i$;

2.3) $z_1 = 3 + 3i, z_2 = 2 - 2i$;

2.4) $z_1 = 5 + 4i, z_2 = 4 + 6i$;

2.5) $z_1 = 1/2 + 3i, z_2 = 1 - 2i$.

3. Виконайте такі операції з рядками:

- задайте три рядкові константи: ваше прізвище, ім'я та по батькові, записані латинськими літерами;
- визначте кількість символів у кожній з цих констант;
- об'єднавши ці константи, створіть один рядок, що містить ваше ім'я, по батькові та прізвище;

- створіть із попереднього рядка новий, який об'єднує літери попереднього рядка, починаючи з третьої до шостої включно, і три передостанні літери;

- використовуючи три рядки з першого пункту, створіть рядкову константу, яка містить ваші ініціали, розділені крапками (П.І.Б.);

- використовуючи рядок, що містить ваше ім'я, створіть рядок, який містить його i -ту з початку та j -ту з кінця літери та дві крапки між ними (наприклад: "O.p" для $i=1, j=1$ та імені Олександр);

- знайдіть N -й знак числа x , записавши послідовність його цифр як рядок.

3.1) $x=e, N=100, i=1, j=1$;

3.2) $x=Pi, N=100, i=2, j=2$;

3.3) $x=e, N=25, i=1, j=2$;

3.4) $x=Pi, N=20, i=2, j=1$;

3.5) $x=e, N=20, i=3, j=1$.

4. Задати функцію:

4.1) $f(x) = \sqrt{x} + \sin^2(\lg(2^x + 1))$;

4.2) $f(x) = \frac{\arctg(x^2 + 3^{-x})}{\cos^2(\ln(x + \sqrt[3]{x}))}$;

4.3) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} + \lg(\sin^2 \frac{1}{x} - \sqrt{x})$;

4.4) $f(x) = \arcsin(x \ln x) + \sin^2 \frac{2^x}{x}$;

4.5) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - \sin 2x} + \lg^2(3^{2x} - x)$.

5. Задати функцію:

$$5.1) f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}(x), & -\infty < x < -1 \\ \frac{\pi x}{4}, & -1 \leq x \leq 1 \\ \operatorname{arctg}(x), & 1 < x < \infty \end{cases};$$

$$5.2) f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}(x), & -\infty < x < -1 \\ \frac{\pi x}{4}, & -1 \leq x \leq 1 \\ \operatorname{arctg}(x), & 1 < x < \infty \end{cases};$$

$$5.3) f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x}, & -\infty < x < 0 \\ \sin(x), & 0 \leq x \leq \pi; \\ \ln\left(\frac{x}{\pi}\right), & \pi < x < \infty \end{cases};$$

$$5.4) f(x) = \begin{cases} \cos(x), & -\infty < x < -\pi \\ 1 - \left| \frac{x}{\pi} \right|, & -\pi \leq x \leq \pi; \\ \cos(x), & \pi < x < \infty \end{cases};$$

$$5.5) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x + 0.5\pi}, & -\infty < x < -\pi/2 \\ \operatorname{tg}(x), & -\pi/2 < x < \pi/2 \\ \frac{1}{x - 0.5\pi}, & \pi/2 < x < \infty \end{cases}.$$

6. Утворити послідовність елементів (виразів):

$$6.1) \frac{\sin(x)}{x}, \frac{\sin(2x)}{2x}, \frac{\sin(3x)}{3x}, \dots, \frac{\sin(nx)}{nx}, \dots;$$

$$6.2) \frac{\cos(x)}{3x}, \frac{\cos(2x)}{5x}, \frac{\cos(3x)}{7x}, \dots, \frac{\cos(nx)}{(2n+1)x}, \dots;$$

$$6.3) \frac{\sin(x)}{x}, \frac{\sin(2x)}{2x^2}, \frac{\sin(3x)}{3x^3}, \dots, \frac{\sin(nx)}{nx^n}, \dots;$$

$$6.4) \frac{\cos(x^1)}{3x}, \frac{\cos(2x^2)}{5x^2}, \frac{\cos(3x^3)}{7x^3}, \dots, \frac{\cos(nx^n)}{(2n+1)x^n}, \dots;$$

$$6.5) \frac{\cos(x)}{\sin(3x)}, \frac{\cos(2x)}{\sin(5x)}, \frac{\cos(3x)}{\sin(7x)}, \dots, \frac{\cos(nx)}{\sin((2n+1)x)}, \dots;$$

7. З послідовності, яку створено в попередньому завданні:

- використовуючи `select` та `has`, вибрати елементи, які містять як операнд цифру "2";
- вибрати елементи, де числовий коефіцієнт при x усередині тригонометричної функції в чисельнику ділиться націло на ваш номер варіанта.

8. На базі послідовностей із п. 6:

- утворити список із 12 елементів, починаючи з номера, що відповідає номеру вашого варіанта;
- обчислити суму другого, сьомого та дев'ятого елементів списку;
- знайти відношення п'ятого та дев'ятого елементів списку, знайдене значення додати в кінець списку.

9. Використовуючи команди для роботи з послідовностями та списками:

- утворити числову послідовність $(x_i) \ i=1 \dots N$;
- на базі цієї послідовності утворити нову послідовність (y_i) , де другий і передостанній елементи замінити на обернені;
- просумувати частки відповідних елементів послідовностей $(x_1/y_1 + x_2/y_2 + \dots + x_N/y_N)$ (для підсумовування можна скористатись командою `add`);

- пересвідчитись, що обраний вами спосіб виконання завдання дозволяє змінити N (наприклад, збільшити його вдвічі), і отримати результат для нових послідовностей, не змінюючи більше нічого в тексті команд.

9.1) $N=10, x_i=1/i^2$;

9.2) $N=8, x_i=i^2$;

9.3) $N=7, x_i=1/(i+1)$;

9.4) $N=6, x_i=i/(i^2+1)$;

9.5) $N=10, x_i=1/i$.

10. Використовуючи команди для роботи з послідовностями та списками:

- згенерувати послідовність N випадкових цілих чисел від p до q ;

- отримати з цієї послідовності два списки – простих і складених чисел;

- на основі списку складених чисел отримати список, що складається із сум простих множників для кожного з цих чисел.

Зауваження та рекомендації:

- для генерування випадкових чисел можна використати команду `rand`;

- для розкладання на множники може бути зручніше використовувати команду `ifactors` (повертає список);

- сумою простих множників числа називається така, де кількість появ в суммі кожного з множників дорівнює його степеню в розкладі, наприклад: $168=2^3 * 3 * 7$, і сума множників буде $2*3+3+7=16$.

10.1) $N=10; p=5, q=150$;

10.2) $N=15; p=100, q=200$;

10.3) $N=10; p=200, q=1000$;

10.4) $N=15; p=1, q=90$;

10.5) $N=10; p=500, q=1000$.

11. Утворити множини елементів. Побудувати множини, які є об'єднанням, перетином і різницею першої та другої множини.

11.1) $\{x, y, z, u, w, v\}, \{y, t, s, z, v\}$;

$$11.2) \{m, n, y, j, u, w, l\}, \{y, r, s, z, v\};$$

$$11.3) \{a, b, g, r, p, q\}, \{y, g, s, p, v\};$$

$$11.4) \{o, p, g, u, h, v\}, \{y, t, o, g, v\};$$

$$11.5) \{r, n, d, j, u, w, l\}, \{w, r, s, r, v\}.$$

12. Задати матрицю $A=[a_{i,j}]$ $\begin{matrix} i=1,n \\ j=1,m \end{matrix}$ розмірністю $m*n$:

$$12.1) A=[a_{i,j}] = \frac{i^3}{j} \quad \begin{matrix} i=1,4, \\ j=1,5, \end{matrix}$$

$$12.2) A=[a_{i,j}] = \frac{i-j}{i+j} \quad \begin{matrix} i=1,4, \\ j=1,3, \end{matrix}$$

$$12.3) A=[a_{i,j}] = \frac{i}{i+j} \quad \begin{matrix} i=1,3, \\ j=1,5, \end{matrix}$$

$$12.4) A=[a_{i,j}] = \frac{i^2}{i^2+j^2} \quad \begin{matrix} i=1,5, \\ j=1,3, \end{matrix}$$

$$12.5) A=[a_{i,j}] = \frac{ij^2}{(i+j)^3} \quad \begin{matrix} i=1,3 \\ j=1,4. \end{matrix}$$

13. Задати символну матрицю $M=[m_{i,j}]$ $i=1, n$ $j=1, m$, розмірність якої збігається з розмірністю матриці в попередньому завданні. Присвоїти елементу її другого стовпця та третього рядка значення такого елемента з попереднього завдання.

14. Використовуючи операції перетворення виразів, довести або спростувати такі алгебраїчні тотожності:

$$14.1) (xy + 2x - y + 1)(xy - y + 1) = (1 + x^2)y^2 + 2(x - y)(1 + xy) + 1;$$

$$14.2) (a + b + c)^3 - a^3 - b^3 - c^3 = 3(b + c)(c + a)(a + b);$$

$$14.3) (a + b + c)(b^2 - bc - ab - ac + a^2 + c^2) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc;$$

$$14.4) \frac{(y+x)(x+z)(z+y) + xyz}{(x+y+z)} = (xz + yz + xy);$$

$$14.5) \frac{xyz(x^3 + y^3 + z^3) - y^3z^3 - x^3y^3 - z^3x^3}{(yx - z^2)} = (x^2 - yz)(zx - y^2).$$

15. Спростити вирази:

$$15.1) \frac{x^2 + \frac{1}{x}}{x + \frac{1}{x} - 1};$$

$$15.2) \frac{x - \frac{x-1}{x+1}}{1 + \frac{x(x-1)}{x+1}};$$

$$15.3) \frac{\frac{1-x}{1-x-x^2} + \frac{1+x}{1+x+x^2}}{\frac{1+x}{1+x+x^2} - \frac{1-x-x^2}{1-x-x^2}};$$

$$15.4) \frac{\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + 1\right)\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)^2}{\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} - \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)};$$

$$15.5) \frac{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc}{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2}.$$

16. Довести або спростувати умовні тотожності:

$$16.1) m_1 + m_2 + m_3 = m_1 m_2 m_3,$$

$$\text{якщо } m_1 = \frac{a+b}{a-b}, m_2 = \frac{c+d}{c-d}, m_3 = \frac{ac-bd}{ad+bc};$$

$$16.2) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

$$\text{якщо } \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \quad \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0;$$

$$16.3) \frac{a^2 + (a-c)^2}{b^2 + (b-c)^2} = \frac{a-c}{b-c},$$

якщо $a^2 + b^2 = (a+b-c)^2$;

$$16.4) \frac{a}{b^3-1} - \frac{b}{a^3-1} = \frac{2(b-a)}{a^2b^2+3},$$

якщо $a+b=1$;

$$16.5) \left(\frac{y-z}{x} + \frac{z-x}{y} + \frac{x-y}{z} \right) \left(\frac{x}{y-z} + \frac{y}{z-x} + \frac{z}{x-y} \right) = 9,$$

якщо $x+y+z=0$.

17. За допомогою аналізу структури виразів присвоїти змінній **struct** значення виділеного у фігурних дужках виразу:

$$17.1) \frac{\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + 1\right) \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)^2}{\left\{ \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} \right\} - \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)};$$

$$17.2) \frac{\frac{1-x}{1-x-x^2} + \frac{1+x}{\{1+x+x^2\}}}{\frac{1+x}{1+x+x^2} - \frac{1-x}{1-x+x^2}};$$

$$17.3) (xy + 2x - y + 1)(xy - y + 1) = \\ = (1 + x^2)y^2 + 2(x - y)\{(1 + xy)\} + 1;$$

$$17.4) \frac{xyz(x^3 + y^3 + z^3) - \{y^3z^3\} - x^3y^3 - z^3x^3}{(yx - z^2)} =$$

$$= (x^2 - yz)(zx - y^2);$$

$$17.5) \frac{a}{b^3-1} - \frac{b}{\{a^3-1\}} = \frac{2(b-a)}{a^2b^2+3}.$$

18. Ураховуючи область визначення функцій, виконати спрощення таких виразів:

$$18.1) \frac{\log_a \sqrt{a^2 - 1} \log_{\frac{1}{a}} \sqrt{a^2 - 1}}{\log_{a^2} \sqrt{a^2 - 1} \log_a^{1/3} \sqrt{a^2 - 1}};$$

$$18.2) a^{\frac{2}{\log_a b} + 1} b - 2a^{\log_a b + 1} b^{\log_b a + 1} + ab^{\frac{2}{\log_a b} + 1};$$

$$18.3) (\log_b a + \log_a b + 2)(\log_a b - \log_{ab} b) \log_b a - 1;$$

$$18.4) \frac{1 - \log_a^3 b}{(\log_a b + \log_b a + 1) \log_a \frac{a}{b}};$$

$$18.5) \lg \frac{(m+n)^2}{a} + \lg \frac{ab}{m^2 - n^2} + \lg \frac{m-n}{b}.$$

19. Довести або спростувати тригонометричні тотожності:

$$19.1) \frac{1 + \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \operatorname{tg}(\pi/4 + \alpha);$$

$$19.2) \frac{\sin \alpha + 2 \sin 3\alpha + \sin 5\alpha}{\sin 3\alpha + 2 \sin 5\alpha + \sin 7\alpha} = \frac{\sin 3\alpha}{\sin 5\alpha};$$

$$19.3) 4 \cos\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) \sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) = \frac{\sin 3\alpha}{\sin \alpha};$$

$$19.4) \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + 2 \sin \alpha \sin \beta \cos(\alpha + \beta) = \sin^2(\alpha + \beta);$$

$$19.5) \frac{\cos 4\alpha \operatorname{tg} 2\alpha - \sin 4\alpha}{\cos 4\alpha \operatorname{ctg} 2\alpha + \sin 4\alpha} = -\operatorname{tg}^2 2\alpha.$$

Завдання для самостійного виконання 2

1. Обчислити границі послідовностей:

$$1.1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2} \right); \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n};$$

$$1.2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{2}{n} + \frac{3}{n} \dots + \frac{(-1)^{n-1}n}{n} \right); \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!};$$

$$1.3) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1^2}{n^3} + \frac{3^2}{n^3} + \dots + \frac{(2n-1)^2}{n^3} \right); \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n} \quad a > 1;$$

$$1.4) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \dots + \frac{(2n-1)}{2^n} \right); \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_a n}{n} \quad a > 1;$$

$$1.5) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n-1)} \right); \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!}.$$

2. Обчислити границі функцій:

$$2.1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos ax}{\ln \sin bx}; \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x^{1-x}};$$

$$2.2) \lim_{x \rightarrow 0} \ln \frac{nx + \sqrt{1-n^2x^2}}{x + \sqrt{1-x^2}}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}};$$

$$2.3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(nx + \sqrt{1-n^2x^2})}{\ln(x + \sqrt{1-x^2})}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}};$$

$$2.4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{\sin ax - \sin bx}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\pi} \arccos x \right)^{\frac{1}{x}};$$

$$2.5) \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1+2^x) \ln\left(1+\frac{3}{x}\right); \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{arctg} x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}.$$

3. Обчислити вираз, який містить похідні вказаного порядку від функції однієї змінної:

$$3.1) f(x) = \frac{y^{(7)}(x)}{y^{(5)}(x)}, \quad y(x) = \frac{x^2}{1-x};$$

$$3.2) f(x) = \frac{y^{(17)}(x)y^{(12)}(x)}{y^{(10)}(x)}, \quad y(x) = x^2 e^{2x};$$

$$3.3) f(x) = \frac{y^{(20)}(x)}{y^{(15)}(x) + y^{(10)}(x)}, \quad y(x) = x^2 \sin 2x;$$

$$3.4) f(x) = \frac{y^{(4)}(x) + y^{(2)}(x)}{y^{(1)}(x)}, \quad y(x) = e^x \cos x;$$

$$3.5) f(x) = \frac{y^{(9)}(x) + y^3(x)}{y^{(6)}(x)}, \quad y(x) = \frac{e^x}{x}.$$

4. Перевірити такі рівності з частинними похідними:

$$4.1) x^2 \frac{\partial z}{\partial x} - xy \frac{\partial z}{\partial y} + y^2 = 0, \quad z = \frac{y^2}{3x} + \phi(xy);$$

$$4.2) x \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha y \frac{\partial u}{\partial y} + \beta z \frac{\partial u}{\partial z} = nu, \quad u = x^n \phi\left(\frac{y}{x^\alpha}, \frac{z}{x^\beta}\right);$$

$$4.3) y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0, \quad z = \phi(x^2 + y^2);$$

$$4.4) x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = u + \frac{xy}{z}, \quad u = \frac{xy}{z} \ln x + x \phi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right);$$

$$4.5) (x^2 - y^2) \frac{\partial z}{\partial x} + xy \frac{\partial z}{\partial y} = xyz, \quad z = e^y \phi\left(y e^{\frac{x^2}{2y^2}}\right).$$

5. Від параметрично заданих функцій знайти y''_{x^2}, y'''_{x^3} :

$$5.1) x = \frac{2}{\sin t}, \quad y = \operatorname{ctg} t, \quad t \in (0, \pi/2);$$

$$5.2) x = \operatorname{arctg} t, \quad y = \ln(1+t^2), \quad t = (-\infty; +\infty);$$

$$5.3) x = e^t, y = t^3, t \in (-\infty; +\infty);$$

$$5.4) x = \frac{1}{\cos t}, y = \operatorname{tg} t, t \in (0; \pi/2);$$

$$5.5) x = \cos t + t \sin t, y = \sin t - t \cos t, t \in [0; 2\pi].$$

6. Визначити функцію $v(x, y)$ двох змінних, яка дорівнює

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \text{ та обчислити її в точці } (x, y) = (1, 1):$$

$$6.1) u = \ln(x + y^2);$$

$$6.2) u = \operatorname{arctg} \frac{x}{y};$$

$$6.3) u = \operatorname{arctg} \frac{x - y}{1 - xy};$$

$$6.4) u = \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

$$6.5) u = \operatorname{tg} \frac{x^2}{y}.$$

7. Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ для неявної функції, заданої системою

співвідношень:

$$7.1) \begin{cases} x = u + v \\ y = u - v; \\ z = uv \end{cases}$$

$$7.2) \begin{cases} x = u + v \\ y = u^2 + v^2; \\ z = u^3 + v^3 \end{cases}$$

$$7.3) \begin{cases} x = u \cos v \\ y = u \sin v; \\ z = kv \end{cases}$$

$$7.4) \begin{cases} x = \frac{u^2 + v^2}{2} \\ y = \frac{u^2 - v^2}{2} \\ z = uv \end{cases}; \quad 7.5) \begin{cases} x = u + v \\ y = u - v \\ z = u^2 v^2 \end{cases}$$

Тут u, v, z є залежними, а x та y – незалежними.

8. Показати, що вказана функція задовольняє диференціальне рівняння в частинних похідних:

$$8.1) u = e^x (x \cos y - y \sin y), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0;$$

$$8.2) u = \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0;$$

$$8.3) u = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{0.5}}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0;$$

$$8.4) u = \frac{y}{y^2 - a^2 x^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2};$$

$$8.5) u = \ln(e^x \cdot e^y), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)^2 = 0.$$

9. Перейти в диференціальних виразах до полярних координат $x = \rho \cos \phi$, $y = \rho \sin \phi$:

$$9.1) x \frac{\partial z}{\partial y} - y \frac{\partial z}{\partial x} = w;$$

$$9.2) x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = w;$$

$$9.3) \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 = w;$$

$$9.4) x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = w;$$

$$9.5) y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - (x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y}) = w.$$

10. Обчислити суму ряду:

$$10.1) \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots;$$

$$10.2) \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + \dots;$$

$$10.3) \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} + \dots;$$

$$10.4) \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{n(n+3)} + \dots;$$

$$10.5) \frac{1}{1 \cdot 7} + \frac{1}{3 \cdot 9} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+5)} + \dots$$

11. Дослідити збіжність рядів і, якщо це можливо, обчислити їхню суму точно або наближено:

$$11.1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n!)}{n^{\alpha}}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin^2 n}{n}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n - \ln n};$$

$$11.2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(2 + \frac{1}{n})^n}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+100}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2};$$

$$11.3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \ln^2(n+1)}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n} + (-1)^n}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}};$$

$$11.4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln \frac{n+1}{n-1}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \ln^n x;$$

$$11.5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt[4]{n^5}}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n - \ln n}; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}.$$

12. Розкласти функцію в ряд Маклорена:

12.1) $\frac{x}{e^x - 1}$ до члена з x^4 ;

12.2) $\sqrt[3]{\sin x^3}$ до члена з x^{12} ;

12.3) $\ln(\cos x)$ до члена з x^6 ;

12.4) $\ln \frac{\sin x}{x}$ до члена з x^7 ;

12.5) $\sin(\sin x)$ до члена з x^5 .

13. Розкласти в ряд Тейлора в точці $x=0, y=0$ функцію двох змінних:

13.1) $f(x, y) = (1+x)^m (1+y)^n$;

13.2) $f(x, y) = e^x \sin y$;

13.3) $f(x, y) = e^x \cos y$;

13.4) $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$;

13.5) $f(x, y) = \ln(1+x) \ln(1+y)$.

14. Обчислити невизначені інтеграли:

14.1) $\int \frac{x dx}{(5-3x^2)^7}$; $\int \frac{(2x+5)dx}{(x^3-x^2+2x-2)}$; $\int x \arcsin 2x dx$;

14.2) $\int (x^2+5x) \ln x dx$; $\int \frac{dx}{(2\cos^2 x + 3\sin^2 x)}$; $\int \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}$;

14.3) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt[6]{7-x^2}}$; $\int \frac{(3x^2-4)dx}{(x+7)(x^2-2x+1)}$; $\int \operatorname{tg}^4 2x dx$;

14.4) $\int \frac{(8-x)dx}{\sqrt{x^2+4x+8}}$; $\int \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x}{2}} dx$; $\int \frac{x^4-1}{x^3+4x} dx$;

14.5) $\int (8x-1) \sin 2x dx$; $\int \sin^3 2x dx$; $\int \frac{(x^2-2x)dx}{x^3+6x^2+9x}$.

15. Обчислити визначені інтеграли:

$$\begin{aligned}
 15.1) \quad & \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x dx}{\sin^2 x}; \quad \int_1^{\infty} \frac{x dx}{\sqrt{x^6 + 2}}; \quad \int_0^1 \frac{e^x}{\sin \frac{x}{2}} dx; \\
 15.2) \quad & \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} 4x \operatorname{tg}^2 x dx; \quad \int_0^{\infty} e^{-4x} \cos 2x dx; \quad \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} \frac{1}{1 + \cos x} dx; \\
 15.3) \quad & \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \cos x}{\sin^2 x} dx; \quad \int_1^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx; \quad \int_{-1}^{2.5} \frac{dx}{x^2 - 5x + 6}; \\
 15.4) \quad & \int_0^{0.2} x e^{5x} dx; \quad \int_1^{\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^2} dx; \quad \int_{-2}^2 \frac{dx}{x^2 - 1}; \\
 15.5) \quad & \int_0^2 \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} dx; \quad \int_0^{\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx; \quad \int_0^2 \frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}} dx.
 \end{aligned}$$

16. Обчислити подвійний інтеграл:

16.1) $\iint_{\Omega} (x+y) dx dy$, де область Ω обмежена кривою

$$x^2 + y^2 = x + y;$$

16.2) $\iint_{\Omega} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}} dx dy$, де область Ω обмежена еліпсом

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1;$$

16.3) $\iint_{\Omega} (x+y) dx dy$, де область Ω обмежена кривою

$$y^2 = 2x, x+y=4, x+y=12;$$

16.4) $\iint_{\Omega} xy dx dy$, де область Ω обмежена кривою

$$x y = 1, \quad x + y = \frac{5}{2};$$

16.5) $\iint_{\Omega} \frac{x^2}{y^2} dx dy$, де область Ω обмежена прямими

$$x = 2, \quad y = x \quad \text{та гіперболою } xy = 1.$$

17. Обчислити потрійний інтеграл по множині E , обмежений такими поверхнями:

$$17.1) \iiint_E (x + yz) dx dy dz, \quad x = 0, y = 0, z = 0, x = 2, y = 4, x + y + z = 8;$$

$$17.2) \iiint_E xy \sqrt{z} dx dy dz, \quad z = 0, z = y, y = x^2, y = 1;$$

$$17.3) \iiint_E xyz dx dy dz, \quad y = x^2, x = y^2, z = xy, z = 0;$$

$$17.4) \iiint_E (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz, \quad 3(x^2 + y^2) + z^2 = 3a^2;$$

$$17.5) \iiint_E (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz; \quad x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \quad y^2 + z^2 = x^2, x \geq 0.$$

18. Обчислити криволінійний інтеграл першого роду:

$$18.1) \int_{\Gamma} (x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}}) dl, \quad \Gamma = \{(x, y) : x = a \cos t, y = a \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi\};$$

$$18.2) \int_{\Gamma} (x + y) dl, \quad \Gamma = \{(x, y) : x = a \cos t, y = a \sin t, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}\};$$

$$18.3) \int_{\Gamma} \sqrt{x^2 + y^2} dl, \\ \Gamma = \{(x, y) : x = a(\cos t + t \sin t), y = a(\sin t - t \cos t), 0 \leq t \leq 2\pi\};$$

$$18.4) \int_{\Gamma} x^2 dl, \Gamma - \text{верхня половина кола } x^2 + y^2 = 4;$$

$$18.5) \int_{\Gamma} \frac{dl}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \Gamma - \text{відрізок прямої } 2y - x + 4 = 0$$

від точки А(0,-2) до точки В(4,0).

19. Обчислити криволінійний інтеграл другого роду:

$$\int_{\Gamma} ydx + 2xdy,$$

$$19.1) \Gamma - \text{контур ромба зі сторонами } \frac{x}{3} + \frac{y}{2} = \pm 1, \frac{x}{3} - \frac{y}{2} = \pm 1;$$

$$19.2) \int_{\Gamma} \frac{x}{x^2 + y^2} dx - \frac{y}{x^2 + y^2} dy, \Gamma = \{(x, y) : x^2 + y^2 = r^2\};$$

$$19.3) \int_{\Gamma} xdy - ydx, \Gamma = \{(x, y) : x = \frac{3at}{1+t^3}, y = \frac{3at^2}{1+t^3}, t \in [0; +\infty)\};$$

$$19.4) \int_{\Gamma} xdy - ydx,$$

$$\Gamma = \{(x, y) : x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), t \in [0; 2\pi]\};$$

$$19.5) \int_{\Gamma} xdy - ydx, \Gamma = \{(x, y) : x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t, t \in [0; 2\pi]\}.$$

20. Обчислити поверхневий інтеграл першого роду:

$$20.1) \iint_S \frac{1}{(1+x+z)^2}, S - \text{частина площини } x+y+z=1,$$

розміщена у першому октанті;

$$20.2) \iint_S (x^2 + y^2) dS, S - \text{поверхня сфери } x^2 + y^2 + z^2 = a^2;$$

$$20.3) \iint_S (x+y+z) dS,$$

$$S - \text{частина поверхні сфери } x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x \geq 0;$$

$$20.4) \iint_S (x^2 + y^2) dS, S - \text{частина поверхні } x^2 + y^2 = z^2, z \leq 1;$$

$$20.5) \iint_S \sqrt{x^2 + y^2} dS,$$

$$S - \text{бічна поверхня конуса } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 0, 0 \leq z \leq b.$$

21. Обчислити поверхневий інтеграл другого роду:

$$21.1) \iint_S z dx dy, S - \text{зовнішня поверхня еліпсоїда}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1;$$

$$21.2) \iint_S \frac{dx dy}{z}, S - \text{зовнішня поверхня сфери } x^2 + y^2 + z^2 = 1;$$

$$21.3) \iint_S x^2 dy dz, S - \text{зовнішня поверхня частини параболоїда}$$

$$z = \frac{H}{R^2}(x^2 + y^2), x \geq 0, y \geq 0, z \leq H;$$

$$21.4) \iint_S y dx dz, S - \text{зовнішня поверхня частини параболоїда}$$

$$z = x^2 + y^2, 0 \leq z \leq 2;$$

$$21.5) \iint_S (z - x) dx dz, S - \text{внутрішня поверхня частини конуса}$$

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}, 0 \leq z \leq 2.$$

Завдання для самостійного виконання 3

1. Знайти вектор, що є розв'язком неповної системи лінійних алгебраїчних рівнянь $A\bar{x} = \bar{b}$, довжина якого дорівнює одиниці. Здійснити перевірку знайденого розв'язку шляхом підстановки.

$$2.1) A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & -5 & 0 \\ 3 & -2 & -2 & -5 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix};$$

$$2.2) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & -4 & 3 \\ 4 & -7 & -18 & 11 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -13 \end{pmatrix};$$

$$2.3) A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 6 & -3 & 2 & 4 & 5 \\ 6 & -3 & 4 & 8 & 13 \\ 4 & -2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix};$$

$$2.4) A = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 5 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 9 & 6 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix};$$

$$2.5) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & 5 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & 8 & -3 & 9 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

2. Знайти всі розв'язки рівняння у явному вигляді (у вигляді дійсних або комплексних чисел):

$$2.1) x \sin x + 2x^2 + x^7 = 0;$$

$$2.2) x^8 - x^3 + x - 2 = 0;$$

$$2.3) x^{10} - x^3 - 1 = 0;$$

$$2.4) x^6 e^x - x^5 - 1 = 0;$$

$$2.5) x^{10} - 1 = 0.$$

3. Знайти раціональні корені багаточлена:

$$3.1) 6x^5 + 37x^4 - 52x^3 - 104x^2 + 102x - 21;$$

$$3.2) 8x^5 + 18x^4 - 41x^3 - 51x^2 + 51x - 9;$$

$$3.3) 24x^5 + 10x^4 - x^3 - 19x^2 - 5x + 6;$$

$$3.4) 2x^4 + 7x^3 - 8x^2 - 14x + 8;$$

$$3.5) 2x^4 - 11x^3 + x^2 + 22x - 10.$$

4. Знайти розв'язки системи алгебраїчних рівнянь:

$$4.1) \begin{cases} x^{-1} + y^{-1} = 5 \\ x^{-2} + y^{-2} = 13 \end{cases};$$

$$4.2) \begin{cases} x + y = 5 \\ \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{13}{6} \end{cases};$$

$$4.3) \begin{cases} y^2 - xy = -12 \\ x^2 - xy = 28 \end{cases};$$

$$4.4) \begin{cases} u^2 + uv = 15 \\ v^2 + uv = 10 \end{cases};$$

$$4.5) \begin{cases} x^3 + y^3 = 9 \\ xy = 2 \end{cases}.$$

5. Знайти дійсні розв'язки рівняння:

$$5.1) \sin 2x = \cos x \cos 2x;$$

$$5.2) 2\sin^2 x + 3\cos x = 0;$$

$$5.3) x^2 \sin x + \sin x + x^2 \cos x + \cos x = 0;$$

$$5.4) x^2 \cos 2x = 2\sin^2 x - 1;$$

$$5.5) \sin^2 2x + \cos x \sin x + \sin 3x = 0.$$

6. Знайти розв'язок рекурентного рівняння із заданими початковими умовами та обчислити 20-й і 50-й члени рекурентної послідовності:

$$6.1) f(n+1) = -4f(n) - 7f(n-1) + 0.5n, f(0) = 1, f(1) = -2;$$

$$6.2) 2f(n+1) = -3f(n) - 4f(n-1) + 0.25n, f(0) = 2, f(1) = -1;$$

$$6.3) f(n+1) = -5f(n) - 7f(n-1) - n, f(0) = 3, f(1) = -2;$$

$$6.4) f(n+1) = -4f(n) - 5f(n-1) + n^2, f(0) = 0, f(1) = -2;$$

$$6.5) f(n+1) = -4f(n) - 7f(n-1) + 0.5n, f(0) = 1, f(1) = -2.$$

7. Знайти розв'язки нерівності:

$$7.1) x(x-2) > 2 - 3x^2;$$

$$7.2) x(2-x) \leq 5 - 4x^2;$$

$$7.3) 2(x-3)(1-2x) > 6;$$

$$7.4) (2-x)(3-x) \leq 2;$$

$$7.5) (3-2x)(1-2x) > 6.$$

8. Знайти розв'язки системи нерівностей:

$$8.1) \begin{cases} (x-2)(x-3)(x-5) > 0 \\ |x+1| - |x-5| > 1 \end{cases};$$

$$8.2) \begin{cases} (x+3)(x-3)(x-15) < 0 \\ |x+6| - |x-3| > 3 \end{cases};$$

$$8.3) \begin{cases} (x+5)(x-8)(x+1) > 0 \\ |x+6| - |x-4| > 6 \end{cases};$$

$$8.4) \begin{cases} (x-12)(x+3)(x-10) > 0 \\ |x+3| - |x-15| > 10 \end{cases};$$

$$8.5) \begin{cases} (x+4)(x-13)(x+5) > 0 \\ |x+11| - |x-1| > 2 \end{cases}.$$

9. Знайти загальний розв'язок звичайного диференціального рівняння:

$$9.1) 2x^3 y' = y(2x^2 - y^2);$$

$$9.2) xy y' = y^2 + 2x^2;$$

$$9.3) (x^2 + y^2) - xy y' = 0;$$

$$9.4) y' = \frac{y}{x} + \cos \frac{y}{x};$$

$$9.5) y' = \frac{x^2 + 3xy - y^2}{3x^2 - 2xy}.$$

10. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$10.1) (1 - x^2 y) dx + x^2 (y - x) dy = 0;$$

$$10.2) (x^2 + y^2) dx - x dy = 0;$$

$$10.3) (2x^2 y + 2y + 5) dx + (2x^3 + 2x) dy = 0;$$

$$10.4) \frac{y}{x} dx + (y^3 - \ln x) dy = 0;$$

$$10.5) (2xy^2 - 3y^3) dx + (7 - 3xy^2) dy = 0.$$

11. Знайти загальний розв'язок системи звичайних диференціальних рівнянь:

$$11.1) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + z - y \\ \frac{dy}{dt} = x + y - z; \\ \frac{dz}{dt} = 2x - y \end{cases}$$

$$11.2) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - y + z \\ \frac{dy}{dt} = x + 2y - z; \\ \frac{dz}{dt} = x - y + 2z \end{cases}$$

$$11.3) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - z - y \\ \frac{dy}{dt} = x + y \\ \frac{dz}{dt} = 3x + z \end{cases} ;$$

$$11.4) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + 2z - y \\ \frac{dy}{dt} = x + 2z \\ \frac{dz}{dt} = y - 2x - z \end{cases} ;$$

$$11.5) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - z - y \\ \frac{dy}{dt} = 3x - 2y - 3z \\ \frac{dz}{dt} = 2z - x + y \end{cases}.$$

12. Знайти розв'язок задачі Коші для звичайного диференціального рівняння другого порядку:

$$12.1) y'' + 3y' = \frac{9e^{3x}}{1+e^{3x}}, \quad y(0) = \ln 4, \quad y'(0) = 3(1 - \ln 2);$$

$$12.2) y'' + 4y = 8 \operatorname{ctg} 2x, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 5, \quad y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4;$$

$$12.3) y'' - 9y' + 18y = \frac{9e^{3x}}{1+e^{-3x}}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0;$$

$$12.4) y'' + 6y' + 8y = \frac{4e^{-2x}}{2+e^{2x}}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0;$$

$$12.5) y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{3 + e^{-x}}, \quad y(0) = 1 + 8 \ln 2, \quad y'(0) = 14 \ln 2.$$

13. Знайти розв'язок граничної задачі для звичайного диференціального рівняння другого порядку

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 2a \frac{dy}{dx} + by = f(x), \quad h_1 y(0) - h_2 y'(0) = 0, \quad H_1 y(1) + H_2 y'(1) = 0:$$

$$13.1) a = 1, b = -2, \quad h_1 = 1, h_2 = 1, H_1 = 1, H_2 = 0, \quad f(x) = x(1 - x);$$

$$13.2) a = 2, b = -3, \quad h_1 = 0, h_2 = 2,$$

$$H_1 = 0, H_2 = 2, \quad f(x) = \frac{1}{2} x^2 (1 - x);$$

$$13.3) a = -2, b = 3, \quad h_1 = 1, h_2 = 2, H_1 = 1,$$

$$H_2 = 2, \quad f(x) = \sin(x)(1 - x);$$

$$13.4) a = 4, b = -1, \quad h_1 = 1, h_2 = 2, H_1 = 3,$$

$$H_2 = 2, \quad f(x) = \frac{1}{2} x^2 \sin(1 - x);$$

$$13.5) a = 5, b = -2, \quad h_1 = 0, h_2 = 1, H_1 = 0,$$

$$H_2 = 1, \quad f(x) = \frac{1}{2} x^2 \sin^2(1 - x).$$

14. Знайти розв'язок граничної задачі для системи звичайних диференціальних рівнянь:

$$14.1) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - z - y + 2t^2 \\ \frac{dy}{dt} = 3x - 2y - 3z - \sin t \\ \frac{dz}{dt} = 2z - x + y \\ x(0) = 1, y(0) = 1, z(1) = 1 \end{cases};$$

$$14.2) \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = 2x + 2z - y \\ \frac{dy}{dt} = x + 2z + 3t^2 \\ \frac{dz}{dt} = y - 2x - z - \cos t \\ x(0) = 1, y(1) = 2, z(1) = 1 \end{array} \right. ;$$

$$14.3) \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = x + z - y - 2t^2 + t \\ \frac{dy}{dt} = x + y - z \\ \frac{dz}{dt} = 2x - y + \sin t \\ x(0) = 0, y(0) = 1, z(1) = 2 \end{array} \right. ;$$

$$14.4) \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = x - z - y + (t-1)^2 \\ \frac{dy}{dt} = x + y \\ \frac{dz}{dt} = 3x + z + \sin t^2 \\ x(1) = 1, y(0) = 0, z(1) = 2 \end{array} \right. ;$$

$$14.5) \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = 2x - y + z + \sin t \\ \frac{dy}{dt} = x + 2y - z \\ \frac{dz}{dt} = x - y + 2z + \frac{t^2}{2} + 1 \\ x(1) = 2, y(1) = 0, z(0) = 1 \end{array} \right. .$$

15. Знайти функцію $\varphi(x)$, яка задовольняє інтегральне рівняння:

$$15.1) \varphi(x) = \int_{-1}^1 (x^2 + y^2) \varphi(y) dy + x^2;$$

$$15.2) \varphi(x) = \int_0^1 (x \sin y) \varphi(y) dy + 1;$$

$$15.3) \varphi(x) = \int_{-1}^1 (x^2 \sin y) \varphi(y) dy + x^3;$$

$$15.4) \varphi(x) = \int_0^1 e^{x+y} \varphi(y) dy + \sin x;$$

$$15.5) \varphi(x) = \int_{-1}^1 \varphi(y) \cos xy dy + x.$$

Завдання для самостійного виконання 4

1. На одному полі побудувати графіки трьох функцій з використанням різних стилів їх зображення, різних символів і кольорів:

$$1.1) f(x) = \ln(\sqrt{x^2 + 1} - |x|), \quad f(x) = x \operatorname{arctg} |x|, \quad f(x) = \sqrt{\frac{(1+x)^2}{|x|}};$$

$$1.2) f(x) = |x| \operatorname{arctg} x, \quad f(x) = \ln(\sqrt{x^2 + 1} + |x|), \quad f(x) = \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2};$$

$$1.3) f(x) = \frac{\ln x^2}{\sqrt{|x|}}, \quad f(x) = \sqrt{|1 - e^{-x^2}|}, \quad f(x) = |x - \operatorname{arctg} x|;$$

$$1.4) f(x) = |x - 3|\sqrt{x}, \quad f(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}, \quad f(x) = \frac{e^x}{|1+x|};$$

$$1.5) f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}, \quad f(x) = x \ln |x|, \quad f(x) = \ln \cos x.$$

2. На одному полі побудувати графіки функцій, деякі з яких задані явно, а деякі – неявно (наприклад, вираз $x=3$ задає неявну функцію, графіком якої є відповідна вертикальна пряма).

$$2.1) y = x \sin x, \quad x = \pi, \quad x = -\pi;$$

$$2.2) y = x \cos x, \quad x = \frac{\pi}{2}, \quad x = -\frac{\pi}{2};$$

$$2.3) y = \frac{\sin x}{x}, \quad x^2 + y^2 = \pi^2;$$

$$2.4) y = \ln x, \quad |x| + |y| = 1;$$

$$2.5) y = |\ln(x-1)|, \quad x = 1.$$

3. Побудувати графік функції, що задана параметрично:

$$3.1) x = \cos^3 t, \quad y = \sin^3 t, \quad t \in [0, \pi];$$

$$3.2) x = 2 \cos t, \quad y = 5 \sin t, \quad t \in [0, \pi];$$

$$3.3) x = t - \sin t, \quad y = 1 - \cos t, \quad t \in [0, 2\pi];$$

$$3.4) x = 1 + \cos t, \quad y = 1 + \sin t, \quad t \in [0, \pi];$$

$$3.5) x = e^t \cos t, \quad y = e^t \sin t, \quad t \in [0, 2\pi].$$

4. На одному полі побудувати графіки функцій, заданих у полярній системі координат, використати для їхнього зображення лінії різного кольору та різної товщини:

$$4.1) \rho^2 = a^2 \cos 2\theta, \quad r = 3 + 2 \cos 2\theta;$$

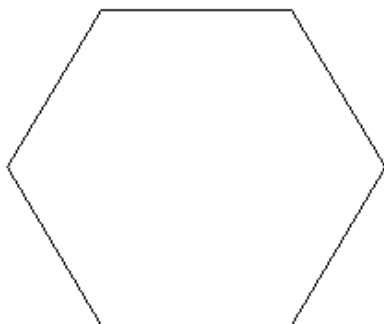
$$4.2) \rho = a \sin 3\theta, \quad \rho = 2(1 + \cos \theta);$$

$$4.3) \rho = a \sqrt{\cos 2\theta}, \quad \theta \in [0, \pi/4], \quad \rho = e^{2\theta}, \quad \theta \in [0, 3];$$

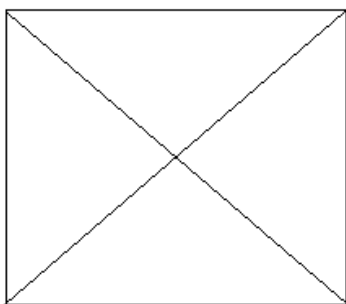
$$4.4) \rho = 2(1 + \cos^2 \frac{\theta}{2}), \quad \rho = e^{-\theta}, \quad \theta \in [0, \pi];$$

$$4.5) \rho = 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}, \quad \rho = 4 \cos^2 \frac{\theta}{2} - \cos \theta.$$

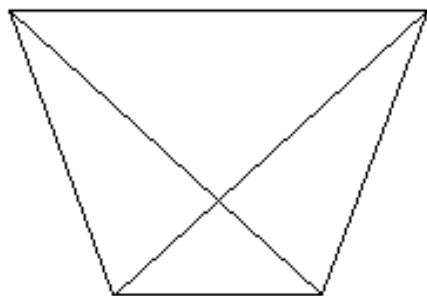
5. Зобразити у вигляді полігона такі фігури:



5.1)



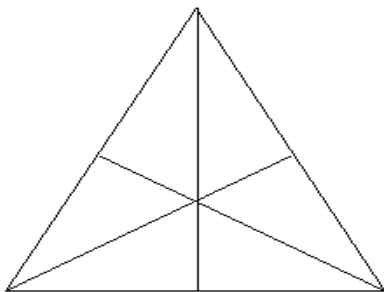
5.2)



5.3)



5.4)



5.5)

Завдання 5.1 та 5.4 бажано виконувати з використанням зв'язку між прямокутною та полярною системами координат.

6. За допомогою функції **plot3d** побудувати такі поверхні, використовуючи прямокутну систему координат і різні стилі зображення частин поверхні:

6.1) поверхню циліндра з радіусом основи 2 та висотою 4, усередині якого лежить конус із радіусом основи 1 і висотою 4; площина нижньої основи циліндра й конуса збігаються;

6.2) поверхню нижньої півсфери радіусом 2, на верхньому перерізі якої розміщений циліндр із радіусом основи 2 та висотою 1;

6.3) поверхню циліндра з радіусом основи 2 та висотою 4, усередині якого лежить конус із радіусом основи 1 і висотою 4; площина верхньої основи циліндра та конуса збігаються;

6.4) поверхню усіченого конуса з радіусом нижньої основи 2, верхньої основи 4 та висотою 2; на нижній основі циліндра лежить верхня півсфера з радіусом основи 2;

6.5) поверхню параболоїда обертання з вершиною внизу, висотою 4 та радіусом найбільшого кола 2, усередині якого розташований конус, вершина якого збігається з вершиною параболоїда висотою 4 й радіусом верхньої основи 2.

7. Виконати підготовчий етап для знаходження об'ємів тіл, обмежених заданими поверхнями. Для цього потрібно наочно відобразити відповідну частину простору (яка містить тіло або його частину) так, щоб можна було зрозуміти, у яких межах і по якій координаті буде здійснюватися інтегрування (один з підходів – використати команду **implicitplot3d**).

$$7.1) \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} = 1, z = \frac{1}{2}x, z = 0;$$

$$7.2) x^2 + y^2 + z^2 = 4, x^2 + y^2 = 2x;$$

$$7.3) x + y + z^2 = 1, x = 0, y = 0, z = 0;$$

$$7.4) z = \frac{x^2}{4} + y^2, z = 1;$$

$$7.5) (z-1)^2 = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4}, z = 0.$$

8. Використовуючи сферичну систему координат, побудувати поверхні, що задаються рівняннями:

$$8.1) (x^2 + y^2 + z^2)^2 = x^2 + y^2, \quad z > 0;$$

$$8.2) (x^2 + y^2 + z^2)^2 = x^2 + y^2 - z^2, \quad x > 0;$$

$$8.3) (x^2 + y^2)^2 + z^4 = 1, \quad z > 0;$$

$$8.4) (x^2 + y^2 + z^2)^2 = \frac{z^2}{x^2 + y^2}, \quad z > 0;$$

$$8.5) (x^2 + y^2 + z^2)^2 = x, \quad z > 0.$$

9. Використовуючи циліндричну систему координат, побудувати поверхні:

$$9.1) (z-1)^2 = x^2 + y^2, \quad 1 < z < 3;$$

$$9.2) (x^2 + y^2)^2 + z^4 = 1, \quad z < 0;$$

$$9.3) 2z = 4 - x^2 - y^2;$$

$$9.4) x^2 + y^2 + z^2 = 2z, \quad 0 < z < 1;$$

$$9.5) (x^2 + y^2 + z^2)^2 = x^2 + y^2, \quad 0 < z < 1/2.$$

10. Побудувати поверхні в параметричній системі координат, використовуючи узагальнену сферичну систему координат для параметризації, якщо рівняння поверхні записане в прямокутній системі координат.

Узагальнена сферична система координат має вигляд

$$x = ar \cos \phi \sin \theta;$$

$$y = br \sin \phi \sin \theta;$$

$$z = cr \cos \theta.$$

Рівняння поверхні в прямокутній системі координат:

$$10.1) \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right)^2 = \frac{x}{h},$$

де a, b, c, h – додатні числові параметри;

$$10.2) \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right)^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2},$$

a, b, c – додатні числові параметри;

$$10.3) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^4}{c^4} = 1,$$

a, b, c – додатні числові параметри;

$$10.4) \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right)^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2},$$

a, b, c – додатні числові параметри;

$$10.5. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} + 1, \quad a, b, c \text{ – додатні числові параметри.}$$

11. Маючи функцію $y(x, t)$, що залежить від просторової змінної x та часової змінної t , показати анімований відносно t графік цієї функції.

$$11.1) \quad y(x, t) = \sin(x - t) \sin(\sqrt{t}), \quad x \in [-10, 10], t \in [0, 20];$$

$$11.2) \quad y(x, t) = x \cos\left(x \frac{t}{7}\right), \quad x \in [-10, 10], t \in [0, 20];$$

$$11.3) \quad x^3 + y^3 - txy = 0, \quad x \in [-5, 5], y \in [-5, 5], t \in [0, 10]$$

(функцію задано неявно);

$$11.4) \quad (x + y)^3 - 3t(x - y) = 0, \quad x \in [-5, 5], y \in [-5, 5], t \in [0, 10]$$

(функцію задано неявно);

$$11.5) \quad (x + y)^3 - 3t(xy^2) = 0, \quad x \in [-5, 5], y \in [-5, 5], t \in [0, 10]$$

(функцію задано неявно).

Завдання до самостійного виконання 5

1. Обчислити суму коренів ортогональних поліномів і побудувати графіки цих поліномів:

1.1) Чебишова шостого степеня першого роду;

1.2) Чебишова сьомого степеня другого роду;

1.3) Ерміта п'ятого степеня;

1.4) Лежандра сьомого степеня;

1.5) Лагера шостого степеня з параметром $\alpha = 1$.

2. Написати процедуру, яка перевіряє попарну ортогональність системи функцій відносно зваженого скалярного добутку в

просторі $L_{2[a, b]}$ з вагою p $\left(\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) g(x) p(x) dx \right)$. Процедура

має приймати як параметри список функцій, межі проміжку

та вагову функцію й видавати числову матрицю відповідних скалярних добутків. Використовуючи цю процедуру, перевірити ортогональність заданої системи з N функцій (для ортогональної системи всі елементи матриці, окрім діагональних, мають дорівнювати нулю):

2.1) поліномів Чебишова першого роду на проміжку $[-1,1]$,
 $N=4$, $p = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

2.2) поліномів Чебишова другого роду на проміжку $[-1,1]$,
 $N=5$, $p = \sqrt{1-x^2}$;

2.3) поліномів Ерміта на проміжку $(-\infty, \infty)$, $N=4$, $p = e^{-x^2}$;

2.4) поліномів Лежандра на проміжку $[-1,1]$, $N=6$, $p=1$;

2.5) поліномів Лагера з параметром $a=0$ на проміжку $(0, \infty)$,
 $N=6$, $p = e^{-x}$.

3. Заданий поліном зобразити в базисі вказаних ортогональних поліномів і застосувати до результату диференціальний оператор L :

3.1) $5x^6 - 3x^2 + 2x - 1$ за поліномами Ерміта, $L = x^2 \frac{d}{dx} + x$;

3.2) $7x^8 + 4x^5 - x^3 + x$ за поліномами Лежандра,

$$L = x \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d}{dx};$$

3.3) $5x^6 + 4x^5 - 6x^2 + 1$ за поліномами Чебишова другого роду,

$$L = x \frac{d^2}{dx^2} + x \frac{d}{dx};$$

3.4) $5x^6 - 3x^2 + 2x - 1$ за поліномами Лагера з,

$$\alpha = 2; L = x^2 \frac{d^2}{dx^2};$$

3.5) $7x^8 + 4x^5 - x^3 + x$ за поліномами Чебишова першого роду,

$$L = x^3 \frac{d^2}{dx^2}.$$

4. Побудувати два поліноми (степеня не вище $N-1$) найкращого середньоквадратичного наближення в просторі $L_2[a, b]$ до функцій $f_1(x) = x^5 - x + 3$ та $f_2(x) = x^5 - x + 3 + \sin(5x)$, використовуючи ортогональні поліноми. Для кожного з них зобразити на одному рисунку графік вхідної функції та побудованого полінома.

Схема побудови. Розглянемо функції вигляду

$$g(x) = \sum_{i=0}^{N-1} c_i \phi_i(x), \text{ де } \phi_i(x) \text{ — поліном степеня } i \text{ (тип поліномів}$$

згідно з варіантом завдання), а c_i — невідомі дійсні числа. Неважко довести, що елементом найкращого наближення для функції $f(x)$ серед таких функцій буде та, де $c_i, i=0..N-1$ є розв'язками

$$\text{системи лінійних рівнянь } c_i \sum_{j=0}^{N-1} \langle \phi_j, \phi_i \rangle = \langle f, \phi_i \rangle, i=0..N-1.$$

У нашому випадку функції $\phi_i, i=1..N-1$ попарно ортогональні, тобто $\langle \phi_j, \phi_i \rangle = 0 \forall i \neq j$, і СЛАР вироджується в систему рівностей $c_i \langle \phi_i, \phi_i \rangle = \langle f, \phi_i \rangle, i=0..N-1$, з якої можна безпосередньо обчислити c_i .

Нагадаємо, що для того, щоб відповідні поліноми були ортогональними, треба використовувати зважений варіант скалярного

$$\text{добутку в } L_2[a, b], \text{ а саме } \langle u, v \rangle = \int_a^b u(x)v(x)\rho(x)dx, \text{ де ваговий}$$

множник $\rho(x)$ визначений для кожного з типів ортогональних поліномів.

Варіанти:

4.1) $N=6$, поліноми Чебишова другого роду,

$$[-1,1], \rho(x) = \sqrt{1-x^2};$$

4.2) $N=6$, поліноми Чебишова першого роду,

$$[-1,1], \rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

4.3) $N=7$, поліноми Лагера з параметром $a=0$, проміжок $-(0, +\infty)$, $\rho(x) = e^{-x}$;

4.4) $N=6$, поліноми Ерміта на проміжку $(-\infty, \infty)$, $\rho = e^{-x^2}$;

4.5) $N=7$, поліноми Лежандра на проміжку $[-1,1]$, $\rho = 1$.

5. Розкласти задану функцію $f(x)$ на проміжку $[0, l]$ в узагальнений ряд Фур'є за функціями Бесселя $J_\nu(\frac{\mu_n}{l}x)$ вигляду

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_k J_\nu(\frac{\mu_n}{l}x), \text{ де } a_k = \frac{\int_0^l f(x) J_\nu(\frac{\mu_n}{l}x) x dx}{\int_0^l (J_\nu(\frac{\mu_n}{l}x))^2 x dx}, \mu_n - n\text{-й за номером}$$

додатний корінь функції Бесселя $J_\nu(x)$. Знайти перші N членів ряду. Вивести графіки N – часткової суми ряду Фур'є та вказаної функції.

$$5.1) f(x) = \sin(\frac{\pi x}{l})x^3, \nu = 3, N = 5, l = 2;$$

$$5.2) f(x) = \cos(\frac{\pi x}{l})x^2, \nu = 1, N = 6, l = 4;$$

$$5.3) f(x) = \ln(1 + \frac{x}{l})x^3, \nu = 4, N = 4, l = 2;$$

$$5.4) f(x) = \operatorname{tg}(\frac{\pi x}{4l})(x-l)^2, \nu = 3, N = 5, l = 2;$$

$$5.5) f(x) = \ln(1 + (\frac{x}{l})^3)(x-l), \nu = 2, N = 5, l = 1.$$

6. Знайти обмежений розв'язок звичайного диференціального рівняння $\frac{d}{dx}((1-x^2)\frac{dy}{dx}) + n(n+1)y = 0$, $-1 < x < 1$, $y(1) < \infty$ такий, що $y(1) = 1$:

6.1) $n = 6$;

6.2) $n = 8$;

6.3) $n = 7$;

6.4) $n = 5$;

6.5) $n = 10$.

7. Знайти розв'язок диференціального рівняння (задачі Коші)

$$\frac{d}{dx}((1-x^2)\frac{dy}{dx}) + (\eta(\eta+1) - \frac{\mu^2}{(1-x^2)})y = 0, \quad -1 < x < 1:$$

7.1) $\eta = \frac{5}{3}$, $\mu = \frac{7}{4}$, $y(0) = 1$, $\frac{dy(0)}{dx} = 0$;

7.2) $\eta = \frac{7}{2}$, $\mu = \frac{5}{4}$, $y(0) = 0$, $\frac{dy(0)}{dx} = 1$;

7.3) $\eta = \frac{7}{2}$, $\mu = \frac{6}{7}$, $y(0.5) = 0$, $\frac{dy(0.5)}{dx} = 0.5$;

7.4) $\eta = \frac{9}{2}$, $\mu = \frac{11}{7}$, $y(0.3) = 0$, $\frac{dy(0.3)}{dx} = 0.9$;

7.5) $\eta = \frac{13}{6}$, $\mu = \frac{12}{7}$, $y(0.4) = 0$, $\frac{dy(0.4)}{dx} = 0.7$.

8. Знайти розв'язок диференціального рівняння $\frac{d}{dx}(e^{-x^2}\frac{dy}{dx}) + 2ne^{-x^2}y(x) = 0$ такий, що при $x \rightarrow \infty$ зростає не швидше x^s , де s – довільне додатне число. Порівняти цей розв'язок з поліномами Ерміта:

8.1) $n = 4$;

8.2) $n = 6$;

8.3) $n = 7$;

8.4) $n = 5$;

8.5) $n=9$.

9. Знайти розв'язок диференціального рівняння $\frac{d}{dx}(xe^{-x} \frac{dy}{dx}) + ne^{-x} y(x) = 0$ такий, що при $x \rightarrow \infty$ зростає не швидше x^s , де s – довільне додатне число, і задовольняє умову $y(0) < \infty$:

9.1) $n=6$;

9.2) $n=4$;

9.3) $n=5$;

9.4) $n=9$;

9.5) $n=7$.

10. Використовуючи твірну функцію $\Phi(x, t)$ для відповідного класу ортогональних поліномів, зобразити її у вигляді степеневого ряду за змінною t вигляду $\Phi(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n P_n(x)$. Переві-

рити, що коефіцієнт при t^n збігається з відповідним ортогональним поліномом n степеня змінної x .

10.1) Обчислити $P_{10}(x)$ для твірної функції $\Phi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}}$ поліномів Лежандра $P_n(x)$.

10.2) Обчислити $L_{12}^2(x)$ для твірної функції $\Phi(x, t) = (1-t)^{-3} e^{-\frac{xt}{1-t}}$ поліномів Лагера $L_n^2(x)$.

10.3) Обчислити $H_9(x)$ для твірної функції $\Phi(x, t) = e^{-2xt-t^2}$ поліномів Ерміта $H_n(x)$.

10.4) Обчислити $T_9(x)$ для твірної функції $\Phi(x, t) = (1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}} (1-x+(1-2xt+t^2)^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} (1+x+(1-2xt+t^2)^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}$ поліномів Чебишова $T_n(x)$.

10.5) Обчислити $U_9(x)$ для твірної функції

$$\Phi(x, t) =$$

$$= (1 - 2xt + t^2)^{-\frac{1}{2}} (1 - x + (1 - 2xt + t^2)^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}} (1 + x + (1 - 2xt + t^2)^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}}$$

поліномів Чебишова $U_n(x)$.

Завдання для самостійного виконання 6

1. Створити квадратну матрицю розмірністю N , у якій позадіагональні елементи з індексами (i, j) мають значення $f(i, j)$, а діагональні елементи з індексами (i, i) мають значення $g(i)$:

1.1) $N=3$, $f(i, j) = 1/(i+j)$, $g(i) = 4$;

1.2) $N=4$, $f(i, j) = 1/\ln(i+j+1)$, $g(i) = 2 \cdot i$;

1.3) $N=5$, $f(i, j) = i \cdot j / 10$, $g(i) = i + 5$;

1.4) $N=3$, $f(i, j) = \sin(i+j)$, $g(i) = 2 \cdot i$;

1.5) $N=4$, $f(i, j) = 1/(i+j)$, $g(i) = 5/(i+i)$.

2. Створити квадратну матрицю відповідного розміру, верхня трикутна частина якої ініціалізується на базі списку:

2.1) $[1, 2, 3]$, $[1.5, 2.5]$, $[3]$;

2.2) $[4, 2, 0]$, $[3, 1]$, $[5]$;

2.3) $[1/2, 1/3, 1/4]$, $[1/5, 1/6]$, $[1/7]$;

2.4) $[5, 4, 3]$, $[2, 1]$, $[1]$;

2.5) $[1, 1, 1]$, $[1, 1]$, $[1]$.

3. Ініціалізувати дійсну $2k+1$ -діагональну матрицю розміром $N \times N$ так, щоб ненульові елементи в рядку набували значення відповідно $a_1, a_2, \dots, a_{2k+1}$:

а) реалізувати найпростішим шляхом;

б) реалізувати таким чином, щоб можна було змінювати лише розмірність матриці (параметр N) і отримувати аналогічну матрицю нової розмірності без зміни будь-яких інших параметрів:

3.1) $a_1 = 1$, $a_2 = 4$, $a_3 = 2$; $N = 5$, $k = 1$;

3.2) $a_1 = 5$, $a_2 = 1$, $a_3 = 3$; $N = 4$, $k = 1$;

3.3) $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_3 = 1$; $N = 5$, $k = 1$;

3.4) $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3; N = 6, k = 1;$

3.5) $a_1 = 3, a_2 = 2, a_3 = 1; N = 4, k = 1.$

4. Створити вектор-стовпчик та вектор-рядок розмірністю N з елементами $v[i] = f(i)$:

4.1) $f(i) = i * 2, N = 9;$

4.2) $f(i) = i^2, N = 6;$

4.3) $f(i) = i/3, N = 11;$

4.4) $f(i) = i + i/2, N = 9;$

4.5) $f(i) = i, N = 5.$

5. Знайти норму L_p для заданого значення *значення* p для вектора із завдання 4:

5.1) $p = 2;$

5.2) $p = 3;$

5.3) $p = \infty;$

5.4) $p = 10;$

5.5) $p = 1.$

6. Для двох векторів a та b із простору R^3 :

- знайти їхній скалярний добуток;
- знайти вектор $c = a \times b$ (векторний добуток);
- знайти кут між векторами a та c (рекомендація: див. функцію VectorAngle);
- побудувати вектор $d = (x, y, z)$ так, щоб він був ортогональним до вектора b ;
- зобразити вектори a, b, c та d (рекомендація: використати функцію arrow з пакету plots):

6.1) $a = (1, 2, 3), b = (2, 1, 2), y = 3, z = 1;$

6.2) $a = (2, 2, 2), b = (3, 2, 1), y = 1, z = 1;$

6.3) $a = (1, 0, 0), b = (0, 1, 0), y = 2, z = 1;$

6.4) $a = (1, 2, 1), b = (3, 1, 2), y = 3, z = 3;$

6.5) $a = (1, 1, 3), b = (1, 1, 2), y = 1, z = 2.$

7. Довести такі властивості, коли A, B, C – матриці 3×3 , x, y, z – вектори розмірністю 3, а u, v, w – скаляри:

7.1) $(A+B)*C = AC+BC;$

7.2) $Ax = x_1*A[1]+x_2*A[2]+x_3*A[3];$

7.3) $(u+v)A = uA+vA;$

$$7.4) (A+B)(C+D)=AC+AD+BC+BD;$$

$$7.5) A(x+y)=Ax+Ay.$$

8. Для заданої матриці A знайти, який вектор-рядок має мінімальну довжину, а який – максимальну (у класичному евклідовому просторі):

$$8.1) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad 8.2) \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -5 \end{pmatrix}; \quad 8.3) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$8.4) \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}; \quad 8.5) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

9. Створити символну квадратну матрицю A розмірністю N і вектори відповідної довжини $B=(b_{ij})$ та $X=(x_{ij})$.

Знайти (в символному вигляді) визначник матриці та обернену матрицю. Перевірити, що вона дійсно є оберненою.

Відобразити розгорнутий вигляд запису системи лінійних рівнянь $A*X=B$ ($a_{11}*x_1+\dots+a_{1n}*x_n=b_1$ і т. д.)

Продемонструвати варіант методу Гаусса для системи $A*X=B$ у символному вигляді (рекомендація: записати розширену матрицю системи, звести до діагонального вигляду за допомогою `ReducedRowEchelonForm`, виділити розв'язок як відповідний стовпчик отриманої матриці). Показати, що отриманий вектор дійсно є розв'язком системи.

9.1) $N=3$, символ елемента матриці – a ;

9.2) $N=2$, символ елемента матриці – u ;

9.3) $N=3$, символ елемента матриці – v ;

9.4) $N=2$, символ елемента матриці – w ;

9.5) $N=3$, символ елемента матриці – p .

10. Ортогоналізувати матрицю A . Перевірити властивість ортогональності отриманих векторів-рядків. Розкласти за цими векторами заданий вектор b :

$$10.1) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, b = (1, 2, 3);$$

$$10.2) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, b = (3, 2, 1);$$

$$10.3) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, b = (1, 1, 3);$$

$$10.4) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 7 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, b = (1, 0, 1);$$

$$10.5) A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, b = (2, 2, 3).$$

11. Перевірити матрицю A на симетричність, ортогональність і додатну визначеність:

а) з використанням будь-яких функцій;

б) без використання функцій IsDefinite, IsOrthogonal (використати критерій Сільвестра).

Пересвідчитись, що результати збігаються.

$$11.1) A = [[1, 2], [2, 1]];$$

$$11.2) A = [[1, 2, 3], [2, 1, 2], [3, 2, 1]];$$

$$11.3) A = [[1, 0, 1], [0, 1, 1], [1, 1, 1]];$$

$$11.4) A = [[10, 1], [1, 10]];$$

$$11.5) A = [[2, 1, 1], [1, 2, 0], [1, 2, 2]].$$

12. Знайти ранг матриці A . Навести приклад модифікації (бажано якнайменшої кількості) елементів матриці, яка призведе до зміни рангу.

$$12.1) A = [[1, 2], [2, 1]];$$

$$12.2) A = [[1, 2, 3], [2, 1, 2], [3, 2, 1]];$$

$$12.3) A = [[1, 0, 1], [0, 1, 1], [1, 1, 1]];$$

$$12.4) A = [[10, 1], [1, 10]];$$

$$12.5) A = [[2, 1, 1], [1, 2, 0], [1, 2, 2]].$$

13. Довести, що визначник матриці Вандермонда розмірності n для точок $[x_1, x_2, \dots, x_n]$ дорівнює добутку попарних різниць цих точок (у символічному вигляді).

Маючи на вході вектори X та Y , що задають таблицю з n точок (x_i, y_i) , побудувати поліном степеня $n-1$, який проходить через ці точки. Зобразити на одному рисунку формулу та графік отриманого полінома, а також вхідні точки. Рекомендація: скласти систему лінійних рівнянь відносно коефіцієнтів шуканого полінома. Матриця системи – це матриця Вандермонда для точок x_i . Вектор правої частини – вектор значень y_i . Розв'язок системи – вектор коефіцієнтів a_i при степенях полінома, що проходить через задані точки.

Приклад-пояснення. Задано точки $(x_1=1, y_1=2)$, $(x_2=2, y_2=5)$, $(x_3=3, y_3=10)$. Вважатимемо, що на вході є два вектори – $X=(1, 2, 3)$ та $Y=(2, 5, 10)$. Точок три, отже, поліном матиме степінь 2 (загальний вигляд – $P(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2$).

Нам потрібно, щоб він пройшов через задані точки, отже, запишемо це у вигляді системи трьох рівнянь

$$P(x_1)=y_1; P(x_2)=y_2; P(x_3)=y_3:$$

$$\begin{cases} a_1 + 1 \cdot a_2 + 1^2 a_3 = 2 \\ a_1 + 2 \cdot a_2 + 2^2 a_3 = 5 \\ a_1 + 3 \cdot a_2 + 3^2 a_3 = 10 \end{cases}$$

Розв'язавши систему, отримаємо вектор $(1, 0, 1)$, тобто $a_1=1$, $a_2=0$, $a_3=1$, і шуканий поліном матиме вигляд $P(x)=1+x^2$.

$$13.1) n=5, X=(-2, -1, 0, 1, 2), Y=(y_i), y_i=\sin(xi);$$

$$13.2) n=7, X=(-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3), Y=(y_i), y_i=\cos(xi);$$

$$13.3) n=5, X=(-2, -1, 0, 1, 2), Y=(y_i), y_i=xi^2-2\cos(xi);$$

$$13.4) n=7, X=(-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3), Y=(y_i), y_i=x+\sin(xi);$$

$$13.5) n=7, X=(-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3), Y=(y_i), y_i=2-\sin(xi).$$

14. Побудувати поліном найкращого середньоквадратичного наближення степеня M за вхідними даними задачі 13. Зобразити його формулу та графік, також відобразивши точки, за якими його побудовано (на відміну від задачі 13, цей поліном не обов'язково проходить через точки).

14.1) $M = 2$;

14.2) $M = 3$;

14.3) $M = 2$;

14.4) $M = 3$;

14.5) $M = 3$.

15. Один з базових алгоритмів ранжування (обчислення важливості) веб-сторінок має назву PageRank. У спрощеному випадку він виходить із того, що найважливішою є сторінка, на якій веб-сервер може опинитися з найбільшою ймовірністю в результаті переходу по посиланнях між сторінками. Обчислення такої ймовірності на k -му кроці зводиться до піднесення матриці переходів M до відповідного степеня.

Завдання: для наведеного веб-графа обчислити ймовірності знаходження користувача на кожному з вузлів після 10 кроків мережею. Вважати початкову ймовірність знаходження користувача в будь-якому з вузлів однаковою й такою, що дорівнює $1/n$, де n – кількість вузлів.

Приклад-пояснення. Нехай маємо веб-граф із трьох сторінок:



Тоді матриця переходів матиме вигляд

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

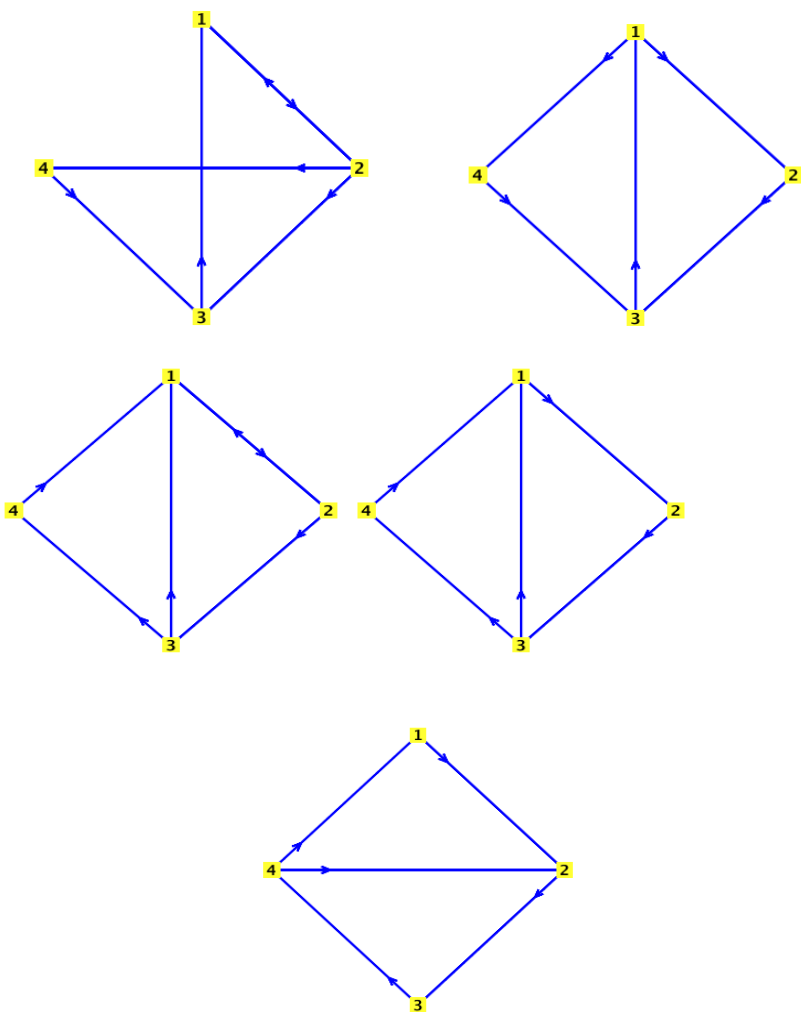
Тут перший рядок відповідає сторінці А – на неї посилається лише сторінка С, а зі сторінки С виходить лише одне посилання, тому вона всю свою вагу "віддає" сторінці А (елемент матриці $[1,3]$ дорівнює 1).

Другий рядок відповідає сторінці В. На неї посилається сторінка А, яка має два вихідні посилання, отже, кожне з них має вагу $1/2$.

Третій рядок – сторінка С, на яку посилаються сторінки А (елемент матриці $[3,1]$) і В (елемент матриці $[3,2]$).

Спочатку вектор імовірностей знаходження користувача на цих сторінках має вигляд $X_0 = (1/3, 1/3, 1/3)$. Після першого кроку ймовірність набуває значення $X_1 = M * X_0$, після другого – $X_2 = M * X_1 = M^2 * X_0$ тощо.

Варіанти графів (1–5):



16. Знайти ранжування веб-сторінок у задачі 15 (ранг відповідної сторінки – це компонента власного вектора матриці M , який відповідає власному значенню 1).

Завдання для самостійного виконання 7

1. Побудувати інтерполяційний поліном $L_n(x)$ для заданої функції, зобразити графіки функції та полінома на одному рисунку різними кольорами, а також виконати такі додаткові дослідження:

1.1) $Erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-z^2} dz$ на проміжку $[0.45; 0.50]$ за рівновіддаленими вузлами $n=5$, $n=10$. Обчислити $L_5(0.4555)$, $L_5(0.4756)$.

1.2) $f(x) = \frac{1}{1+40x^2}$, $-1 \leq x \leq 1$ у точках:

а) рівновіддалених вузлів;

б) вузлів, що є нулями полінома Чебишова першого роду, $n=5$.

1.3) $f(x) = \frac{\sin^2(\pi x)e^x}{x}$, $0 < x \leq 2$, $f(0)=0$ за системою рівновіддалених вузлів, $n=11$, $n=21$. Обчислити значення інтерполяційного багаточлена в точках, що лежать посередині між вузлами інтерполяції, порівняти ці значення з точним значенням функції.

1.4) $f(x) = \text{Sinc}(5x)$, $-2 \leq x \leq 2$,

де $\text{Sinc}(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ за системою рівновіддалених вузлів,

$n=11$, $n=21$. Обчислити значення інтерполяційного багаточлена в точках, що лежать посередині між вузлами інтерполяції, порівняти ці значення з точним значенням функції.

1.5) $f(x) = e^{-\omega^2 x^2}$, $-1 \leq x \leq 1$, $\omega = \overline{1,4}$ за системою вузлів, що є нулями полінома Чебишова першого роду, $n=11$, $n=20$.

2. Побудувати лінійний і кубічний сплайни, що інтерполюють значення функції $f(x)$ із попереднього завдання, зобразити їх на одному рисунку з функцією $f(x)$.

3. Побудувати дробово-раціональний інтерполянт (ступінь чисельника n , ступінь знаменника m) до заданої функції, обравши на заданому проміжку потрібну кількість рівномірно розподілених точок для інтерполяції. Побудувати графіки функції та інтерполянта на одному рисунку.

3.1) $f(x) = \arctg x, x \in [-1, 1], n = 3, m = 4;$

3.2) $f(x) = \sqrt[3]{x}, x \in [-1, 1], n = 2, m = 3;$

3.3) $f(x) = \sin(x), x \in [0, 2\pi], n = 3, m = 4;$

3.4) $f(x) = x \sin(x), x \in [-\pi, \pi], n = 2, m = 3;$

3.5) $f(x) = \sqrt{x}, x \in [0, 1], n = 2, m = 3.$

4. Для заданої функції побудувати поліном найкращого рівномірного наближення третього степеня та знайти відхилення. Зобразити графік функції та полінома на одному рисунку.

4.1) $f(x) = 3x^4 - 2x^2 + x + 1, x \in [0, 1];$

4.2) $f(x) = x^4 - 2, x \in [0, 1];$

4.3) $f(x) = 2x^4, x \in [-1, 1];$

4.4) $f(x) = 5x^4 + x - 4, x \in [2, 5];$

4.5) $f(x) = x^4, x \in [0, 1].$

5. На заданій множині точок, використовуючи рівномірну сітку на відрізку $[-1, 1]$, побудувати багаточлен найкращого середньоквадратичного наближення за вказаною системою ортогональних поліномів. Зобразити графік функції та побудованого полінома на одному рисунку.

5.1) $f(x) = x^2 \sin(\pi x), x_i = -1 + ih, i = \overline{0..N}, h = \frac{2}{N},$ за поліномами Чебишова першого роду.

5.2) $f(x) = x \cos(\pi x)$, $x_i = -1 + ih$, $i = \overline{0..N}$, $h = \frac{2}{N}$, за поліномами Чебишова другого роду.

5.3) $f(x) = x \operatorname{arctg}(x)$, $x_i = -1 + ih$, $i = \overline{0..N}$, $h = \frac{2}{N}$, за поліномами Лежандра.

5.4) $f(x) = \operatorname{arctg}(x^3)$, $x_i = -1 + ih$, $i = \overline{0..N}$, $h = \frac{2}{N}$, за поліномами Гегенбауера з $\lambda = \frac{3}{2}$.

5.5) $f(x) = x \operatorname{tg}(x)$, $x_i = -1 + ih$, $i = \overline{0..N}$, $h = \frac{2}{N}$, за поліномами Лежандра.

6. Використовуючи процедури чисельного інтегрування, експериментальним шляхом обрати метод для обчислення матриці та обчислити її з п'ятьма правильними знаками після десяткової крапки.

$$a_{i,j} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 K(x,y) \phi_i(y) \phi_j(x) \rho(x) dx \quad i, j = \overline{1..n} \quad \text{для заданого ядра}$$

$K(x,y)$, заданої системи функцій $\phi_i(x)$, $i = \overline{1..n}$, і вагової функції $\rho(x) \geq 0$.

Варіант	$K(x,y)$	$\phi_i(x)$	$\rho(x)$
6.1)	$\sin(\sqrt{x^2 + y^2})$	$T_i(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
6.2)	$\ln(1+x^2y^2)$	$U_i(x)$	$\sqrt{1-x^2}$
6.3)	$\operatorname{tg}(\frac{x^2+y^2}{2})$	$P_i(x)$	1

6.4)	$\arctg(1-x^2 -$	$G_i^{(2)}(x)$	$(1-x^2)^{\frac{3}{2}}$
6.5)	$\frac{xy}{(1+x^2y^2)}$	$T_i(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

7. Чисельно розв'язати систему нелінійних рівнянь. Зобразити графіки функцій, з яких складається система, і знайдений розв'язок на одному рисунку (розв'язок можна зобразити як перетин двох прямих):

$$\begin{aligned}
 7.1) & \begin{cases} \sin(x) - y = 0.4 \\ 0.8x^2 + 1.5y^2 = 1 \end{cases}; & 7.2) & \begin{cases} \sin(x-y) - y = 0 \\ y^2 - x\sin(x) + x = 0.5 \end{cases}; \\
 7.3) & \begin{cases} \sin(x)\sqrt{x} - y = 1 \\ y - x\sin(x) + x = 0.5 \end{cases}; & 7.4) & \begin{cases} \sin(x)\ln(x) - 1.33y = 1 \\ 0.17y^2 - \sin(x) = 0.5 \end{cases}; \\
 7.5) & \begin{cases} \arctg(x)\ln(x) - 1.33y = 1 \\ 0.17y^2 - \sin(y-x) + x = 0.5 \end{cases}.
 \end{aligned}$$

8. Знайти розв'язок задачі лінійного програмування. Зобразити на одному рисунку всі обмеження (використати функцію `inequal`), цільову функцію (якщо цільовою функцією є $L(x, y)$, то потрібно зобразити графік неявної функції $L(x, y)=0$) і розв'язок:

$$\begin{aligned}
 8.1) & \begin{cases} x + 3y \rightarrow \max \\ x + y \leq 1 \\ 3x + y \geq -1 \\ x - y \leq 2 \end{cases}; & 8.2) & \begin{cases} 5x - y \rightarrow \max \\ x + y \leq 1 \\ 3x + y \geq -1 \\ x - y \leq 2 \end{cases};
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{lcl}
 8.3) \left\{ \begin{array}{l} x - y \rightarrow \max \\ x - y \leq 1 \\ 3x + y \geq -1 \\ x - y \geq -2 \\ x \leq 2 \end{array} \right. ; & & 8.4) \left\{ \begin{array}{l} x + y \rightarrow \max \\ x - y \leq 1 \\ 3x + y \geq -1 \\ x - y \geq -2 \\ x \leq 6 - 3y \end{array} \right. ; \\
 8.5) \left\{ \begin{array}{l} y - x \rightarrow \max \\ x - y \leq 1 \\ 3x + y \geq -1 \\ x - y \geq -2 \\ x \leq 6 - 3y \end{array} \right. . & &
 \end{array}$$

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

Maple

1. Аладьев В. Эффективная работа в Maple 6 и 7 / В. Аладьев. – М. : Лаборатория базовых знаний, 2002.
2. Аладьев В. Maple 6. Решение математических, статистических и инженерно-физических задач / В. Аладьев, М. Богдявичюс. – М. : Лаборатория базовых знаний, 2001.
3. Аладьев В. Автоматизированное рабочее место математика / В. Аладьев, М. Шишаков. – М. : Лаборатория базовых знаний, 2000.
4. Васильев А. Maple 8 : самоучитель / А. Васильев. – М. : Диалектика ; Вильямс, 2003.

5. Говорухин В. Введение в Maple. Математический пакет для всех / В. Говорухин, В. Цибулин. – М. : Мир, 1997.
6. Говорухин В. Компьютер в математическом исследовании: Maple, MATLAB, LaTeX / В. Говорухин, В. Цибулин. – СПб. : Питер, 2001.
7. Голоскоков Д. Уравнения математической физики. Решение задач в системе Maple / Д. Голоскоков. – СПб. : Питер, 2004.
8. Дьяконов В. Компьютерная математика. Теория и практика / В. Дьяконов. – М. : Нолидж, 2000.
9. Дьяконов В. Maple 8 в математике, физике и образовании / В. Дьяконов. – М. : СОЛОН-Пресс, 2003.
10. Дьяконов В. Maple 9 в математике, физике и образовании / В. Дьяконов. – М. : СОЛОН-Пресс, 2004.
11. Кирсанов М. Решебник. Теоретическая механика / М. Кирсанов. – М. : Физматлит, 2002.
12. Матросов А. Maple 6. Решение задач высшей математики и механики / А. Матросов. – СПб. : БХВ-Петербург, 2001.
13. Очков В. Физические и экономические величины в MathCAD и Maple / В. Очков. – М. : Финансы и статистика, 2002.
14. Прохоров Г. Пакет символьных вычислений Maple / Г. Прохоров, М. Леденев, В. Колбеев. – М. : Петит, 1997.
15. Сдвижков О. А. Математика на компьютере: Maple 8 / О. А. Сдвижков. – М. : СОЛОН-Пресс, 2003.

MATLAB

16. Ануфриев И. MATLAB 7.0 в подлиннике / И. Ануфриев, А. Смирнов, Е. Смирнова. – М. : Новая техн. книга, 2005.
17. Гульятев А. Визуальное моделирование в среде MATLAB : учеб. курс / А. Гульятев. – СПб. : Питер, 2000.
18. Дьяконов В. MATLAB : учеб. курс / В. Дьяконов. – СПб. : Питер, 2000.

19. Дьяконов В. Математические пакеты расширения MATLAB : спец. справочник / В. Дьяконов, В. Круглов. – СПб. : Питер, 2001.

20. Дьяконов В. MATLAB 6 + Simulink 5 в математике и моделировании / В. Дьяконов. – М. : СОЛОН-Пресс, 2003.

21. Потемник В. Система MATLAB / В. Потемник. – М. : Диалог-МИФИ, 1997.

22. Потемник В. MATLAB 5 для студента / В. Потемник. – М. : Диалог-МИФИ, 1998.

Mathematica

23. Аладьев В. Введение в среду пакета Mathematica 2.2 / В. Аладьев, М. Шишаков. – М. : Филинь, 1997.

24. Воробьев Е. Введение в систему Mathematica / Е. Воробьев. – М. : Финансы и статистика, 1998.

25. Дьяконов В. Mathematica 4.0 с пакетами расширений / В. Дьяконов. – М. : Нолидж, 2000.

26. Дьяконов В. Mathematica 4.1/4.2/5.0 в математических и научно-технических расчетах / В. Дьяконов. – М. : СОЛОН-Пресс, 2004.

27. Капустина Т. Компьютерная система Mathematica 3.0 для пользователя / Т. Капустина. М. : СОЛОН-Пресс, 1999.

28. Шмидский Я. К. Mathematica 5 : самоучитель / Я. К. Шмидский. – М. : Диалектика, 2004.

Mathcad

29. Бидасюк Ю. Mathsoft MathCAD 11 : самоучитель / Ю. Бидасюк. – М. : Диалектика, 2004.

30. Гурский Д. Вычисления в Mathcad / Д. Гурский. – М. : Новое знание, 2003.

31. Дьяконов В. Mathcad 8-12 для всех / В. Дьяконов. – М. : СОЛОН-Пресс, 2005.

32. Дьяконов В. Энциклопедия Mathcad 2001 и Mathcad 11 / В. Дьяконов. – М. : СОЛОН-Пресс, 2004.

33. Ивановский Р. Компьютерные технологии в науке. Практика применения систем Mathcad Pro / Р. Ивановский. – М. : Высш. шк., 2003.
34. Измайлов Г. Информатика. Пакет Mathcad : лаб. практикум / Г. Измайлов. – СПб. : СПбГТУ, 2001.
35. Каганов В. Компьютерные вычисления в средах Excel и Mathcad / В. Каганов. – М. : Горячая линия-Телеком, 2003.
36. Каганов В. Радиотехника + компьютер + Mathcad / В. Каганов. – М. : Горячая линия-Телеком, 2001.
37. Кирьянов Д. Mathcad 12 в подлиннике (+CD-ROM) / Д. Кирьянов. – СПб. : БХВ-Петербург, 2004.
38. Кирьянов Д. Самоучитель Mathcad 12 / Д. Кирьянов. – СПб. : БХВ-Петербург, 2004.
39. Математика для экономистов на базе Mathcad / А. Кузнецов, О. Мельников, В. Новиков, А. Черняк. – СПб. : БХВ-Петербург, 2003.
40. Макаров Е. Инженерные расчеты в MathCAD : учеб. курс / Е. Макаров. – СПб. : Питер, 2003.
41. Очков В. Mathcad 12 для студентов и инженеров / В. Очков. – СПб. : БХВ-Петербург, 2005.
42. Плис А. Mathcad : мат. практикум для инженеров и экономистов / А. Плис, Н. Сливина. – М. : Финансы и статистика, 2003.
43. Поршневу С. Компьютерное моделирование физических процессов с использованием пакета Mathcad : учеб. пособие / С. Поршневу. – М. : Горячая линия-Телеком, 2002.
44. Салманов О. Математические методы в экономике с применением средств Excel и MathCAD / О. Салманов. – М. : Нолидж.
45. Сдвижков О. MathCAD-2000. Введение в компьютерную математику / О. Сдвижков. – М. : ИД "Дашков и Ко", 2002.
46. Семененко М. Математическое моделирование в MathCad / М. Семененко. – М : Альтекс-А, 2003.
47. Солодов А. Mathcad. Дифференциальные модели / А. Солодов, В. Очков. – М. : МЭИ, 2002.

48. Херхагер М. Mathcad 2000. Полное руководство / М. Херхагер, Х. Партолль. – К. : ВНУ-Киев, 2000.

49. Черняк А. Высшая математика на базе Mathcad : общий курс / А. Черняк, Ж. Черняк, Ю. Доманова. – СПб. : БХВ-Петербург, 2004.

Математическое моделирование

50. Дьяконов В. Компьютерная математика. Теория и практика / В. Дьяконов. – М. : Нолидж, 2000.

51. Дьяконов В. VisSim +Mathcad + MATLAB. Визуальное математическое моделирование / В. Дьяконов. – М. : СОЛОН-Пресс, 2004.

52. Семененко М. Введение в математическое моделирование / М. Семененко. – М. : СОЛОН-Пресс, 2002.

53. Тан К. Символьный C ++: Введение в компьютерную алгебру с использованием объектно-ориентированного программирования / К. Тан. – М. : Мир, 2001.

54. Тарасевич Ю. Информационные технологии в математике / Ю. Тарасевич. – М. : СОЛОН-Пресс, 2003.

55. Тарасевич Ю. Математическое и компьютерное моделирование : вводный курс / Ю. Тарасевич. – М. : Едиториал-УРСС, 2001.

Навчальне видання

**А. В. Кузьмін
С. В. Денисов**

КОМП'ЮТЕРНА АЛГЕБРА

КУРС ЛЕКЦІЙ ТА ЛАБОРАТОРНИЙ ПРАКТИКУМ

Навчальний посібник

Редактор *Н. Земляна*

Оригінал-макет виготовлено ВПЦ "Київський університет"



Формат 60x84^{1/16}. Ум. друк. арк. 8,02. Наклад 100. Зам. № 217-8240.
Гарнітура Times New Roman. Папір офсетний. Друк офсетний. Вид. № К7.
Підписано до друку 30.05.17

Видавець і виготовлювач

ВПЦ "Київський університет",

б-р Т. Шевченка, 14, м. Київ, 01601

☎ (38044) 239 32 22; (38044) 239 31 72; тел./факс (38044) 239 31 28

e-mail: vpc@univ.kiev.ua

<http://vpc.univ.kiev.ua>

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 1103 від 31.10.02