МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО

Б.С. Воронцов, І.А. Бочарова

НАРИСНА ГЕОМЕТРІЯ

*Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальній посібник для здобувачів ступеня бакалавра за спеціальностями
галузі знань 13 «Механічна інженерія»*

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2020 р.

Рецензенти: *Саленко О.Ф.*, д-р техн. наук, професор, професор кафедри конструювання машин Національного технічного університету України "Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського"
Несвідомін В.М., д-р техн. наук, професор, професор кафедри нарисної геометрії, комп'ютерної графіки та дизайну Національног університету біоресурсів і природокористування України

Відповідальний редактор *Ванін В.В.*, д-р техн. наук, проф.

Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського (протокол № 4 від 10.12 .2020 р.)
за поданням Вченої ради Механіко-машинобудівничого інституту(протокол № 4 від 23.11.2020 р.)

Електронне мережне навчальне видання

Воронцов Борис Сергійович, д-р техн. наук, проф.
Бочарова Ірина Анатоліївна, канд. техн. наук, доц.

НАРИСНА ГЕОМЕТРІЯ

Нарисна геометрія [Електронний ресурс]: навч. посіб. для студ. за спеціальностями галузі знань 13 «Механічна інженерія» / Б.С. Воронцов, І.А. Бочарова; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електронні текстові дані (1 файл: 14,796 Мбайт). – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2020. – 187 с.

Навчальний посібник написано за програмою курсу «Нарисна геометрія, інженерна та комп'ютерна графіка», затвердженої методичною комісією при Міністерстві освіти і науки України для студентів технічних вузів.

В посібнику докладно викладено теоретичні положення курсу, дається узагальнення методів рішення задач із застосуванням в необхідних випадках аналітичного опису основних графічних операцій. Обсяг та послідовність викладення матеріалу підібрано з урахуванням забезпечення самостійної роботи студентів. Навчальний посібник призначений для студентів всіх форм навчання.

ЗМІСТ

Тема 1. Задачі нарисної геометрії. Методи проеціювання. Комплексне креслення точки

1.1. Основні завдання нарисної геометрії. Умовні позначення.
1.2. Методи проеціювання.
1.3. Проеціювання точки на дві взаємно-перпендикулярні площини.
1.4. Проеціювання точки на три взаємно-перпендикулярні площини.
1.5. Алгоритм побудови комплексного креслення точки за заданими координатами.

1.1. Основні завдання нарисної геометрії. Умовні позначення

Графічні методи дослідження предметів довкілля, притаманні інженерній графіці, широко використовують у багатьох технічних та інших науках, збагачуючи їх наочністю та простотою вирішення. Для інженера передусім необхідні знання про методи зображення і добре розвинена здатність просторового уявлення, оскільки без цього не може бути плідної інженерної діяльності. Ефективне засвоєння сучасного устаткування неможливе без розуміння креслень, схем та інших конструкторських документів. Саме тому серед предметів, які складають основу інженерної освіти, одне з найперших місць посідає нарисна геометрія - перша інженерна дисципліна, що вивчається студентами вищих технічних закладів освіти.

Теоретичні основи нарисної геометрії можна визначити у концентрованому вигляді трьома завданнями:

1. Побудова алгоритмів графічного відображення просторових тривимірних фігур на двовимірній площині (оволодіння здібностями будувати креслення).

Пряме завдання нарисної геометрії - побудувати проекції просторових тривимірних предметів на двовимірній площині за їхніми наявними фігурами.

2. Побудова алгоритмів розкриття геометричних властивостей просторових фігур за їх плоскими зображеннями (оволодіння здібностями читати креслення).

Зворотнє завдання нарисної геометрії - реконструювати форму і розміри предмета в просторі за наявними проекціями фігури.

3. Вивчення способів розв'язання задач на взаємне положення

елементів просторових фігур на двовимірному плоскому кресленні (оволодіння здібностями розв'язувати метричні та позиційні задачі).

Сформульовані задачі свідчать про те, що теоретичні основи нарисної геометрії є своєрідним розділом математики. Тому і базу для вирішення тієї чи іншої проблеми складають певні розділи математики: проективна геометрія, математична логіка, аналітична геометрія та інші.

Геометрія - розділ математики, наука про просторові форми, відношення та їхні узагальнення.

В первинному значенні *геометрія* - наука про *фігури*, взаємне розташування і розміри їхніх частин, а також про перетворення фігур.

Фігура - це сукупність точок, ліній, поверхонь.

Нарисна геометрія - розділ геометрії, що вивчає методи зображення просторових форм на площині або іншій поверхні.

Предмет нарисної геометрії вивчає теоретичні основи візуалізації інформації про геометричні об'єкти, різноманіття геометричних об'єктів простору, відношення між ними та їхніми графічним відображенням на площині. *Завдання цієї науки* - створення оптимальних геометричних форм об'єктів машинобудування, архітектури і будівництва, розробка теорії графічного відображення об'єктів і процесів.

Вивчення *нарисної геометрії* сприяє розвитку просторової уяви і навичок правильного логічного мислення, удосконалюючи нашу здатність подумки створювати уявлення про форму предмета за плоским зображенням, і навпаки, створювати зображення подумки створених образів. Для візуалізації першого завдання нарисної геометрії використовують креслення.

Кресленням називають зображення предмета, побудоване за особливими правилами за допомогою креслярських інструментів в точній залежності від розмірів і положення в просторі відповідних ліній предмета. Креслення повинно не лише визначати форму і розміри предметів, але й бути досить простим і точним в графічному виконанні, допомагати всесторонньо досліджувати предмети та їхні окремі деталі.

Ці вимоги до креслень і призвели до створення теорії зображень, що становить основу нарисної геометрії. Правила побудови зображень засновані на *методі проекцій*. Тому проекційний метод побудови зображень є *основним методом нарисної геометрії*.

Умовні позначення

Для позначення геометричних фігур та їх проекцій, відображення відношень між геометричними фігурами, а також для скороченого запису геометричних положень, алгоритмів розв'язання задач використовується геометрична мова, що подається у вигляді позначень та символів, які застосовуються в курсі математики.

1. Геометрична фігура позначається літерою Φ.

2. Точки, розташовані у просторі, позначаються великими літерами латинського алфавіту або арабськими цифрами:

$A, B, C, D, \dots, K, L, M, \dots$

$1,2,3,4, \dots, 15,16,17, \dots$

3. Лінії, які довільно розташовані відносно до площин проекцій, позначаються малими літерами латинського алфавіту:

$a, b, c, d, \dots, k, l, m, \dots$

Лінії рівня позначаються малими літерами:

h - горизонталь;

f - фронталь;

p - профільна пряма.

Для прямих використовуються також і такі позначення:

(AB) - пряма, що проходить через точки A і B;

$[AB)$ - промінь, який має початок у точці A;

$[AB]$ - відрізок прямої, обмежений точками A і B.

4. Поверхні позначаються великими літерами грецького алфавіту: $\Sigma, \Psi, \Omega, \Delta, \dots$

5. Кути позначаються:

$\angle ABC$ - кут, який має вершину у точці B,

або $\angle\alpha^\circ, \angle\beta^\circ, \angle\gamma^\circ, \dots$

6. Відстані між елементами простору позначаються двома вертикальними лініями:

$|AB|$ - відстань від точки A до точки B (довжина відрізка);

$|Aa|$ - відстань від точки A до лінії a;

$|A\Sigma|$ - відстань від точки A до поверхні Σ;

$|ab|$ - відстань між лініями a і b.

7. Координатні площини проекцій позначаються літерами Π_1, Π_2, Π_3,

де Π_1 - горизонтальна площина проекцій;

$П_2$ - фронтальна площина проекцій;

$П_3$ - профільна площина проекцій.

8. Осі проекцій позначаються літерами x, y, z:

де x - вісь абсцис;

y - вісь ординат;

z - вісь аплікат.

Точка перетину осей проекцій позначається літерою O.

9. Проекції точок, ліній, поверхонь будь-якої геометричної фігури позначаються тими ж літерами (цифрами), що і оригінал з додаванням підрядкового індексу, відповідного до площини проекцій, на якій вони розташовані:

A_1, B_1, C_1,... - горизонтальні проекції точок;

A_2, B_2, C_2,... - фронтальні проекції точок;

A_3, B_3, C_3,... - профільні проекції точок;

a_1, b_1, c_1,... - горизонтальні проекції ліній;

a_2, b_2, c_2,... - фронтальні проекції ліній;

a_3, b_3, c_3,... - профільні проекції ліній;

Σ_1, Ψ_1, Ω_1, … - горизонтальні проекції поверхонь;

Σ_2, Ψ_2, Ω_2, … - фронтальні проекції поверхонь;

Σ_3, Ψ_3, Ω_3, … - профільні проекції поверхонь.

10. Сліди поверхонь позначають літерами:

h^0 - горизонтальний,

f^0 - фронтальний,

p^0 - профільний.

11. Сліди прямих ліній позначаються літерами:

H - горизонтальний слід;

F - фронтальний;

P - профільний.

12. Для визначення положення геометричних елементів, відношення між ними та дій використовують умовні знаки:

// - паралельність;

$\perp$ - перпендикулярність;

= - результат дії;

$\equiv$ - збіг, тотожність;

$\in$ - належність;

$\subset$ - лежить на ...;

$\supset$ - проходить через ... ;

$\cap$ - перетин множин;

$\cup$ - об'єднання множин;

$\Rightarrow$ - логічний наслідок;

$\Leftrightarrow$ - еквівалентність.

1.2. Методи проеціювання

Для побудови зображень предметів на площині в нарисній геометрії використовується *метод проекцій.* Розрізняють два методи:

а) центральне проеціювання;

б) паралельне проеціювання.

Центральне проеціювання

Найбільш загальним є метод центрального проеціювання, оскільки він цілком співпадає з процесом нашого зору, за допомогою якого ми сприймаємо навколишній світ. Тому розглянемо суть центрального проеціювання на прикладі рис.1.1.

Нехай у просторі задана деяка площина проекцій $П_1$ і поза її межами точка S - центр проекцій. Візьмемо також у цьому просторі якісь точки $A, B, C,$..., які слід зобразити на площині $П_1$. Необхідно відразу застерегти, що зображення кожної точки повинне бути певним і єдиним. Тоді, враховуючи те, що через дві точки проходить тільки одна пряма і пряма перетинає площину тільки в одній точці, проеціючими лініями приймемо прямі.

Отже, для побудови проекції A_1 деякої точки A на площині $П_1$ через цю точку A і центр проекцій S проводять проеціювальний промінь $SA \equiv k$ до перетину з площиною проекцій $П_1$ у точці A_1.

При заданому апараті проеціювання - зафіксованому положенні точки S і площини $П_1$, кожна точка простору буде мати єдину і тільки єдину центральну проекцію. *Зворотне твердження* - кожній центральній проекції точки однозначно відповідає точка простору, не має сенсу, оскільки, наприклад, безліч точок A', A'', ... прямої k (рис.1.1) мають одну і ту ж проекцію - A_1.

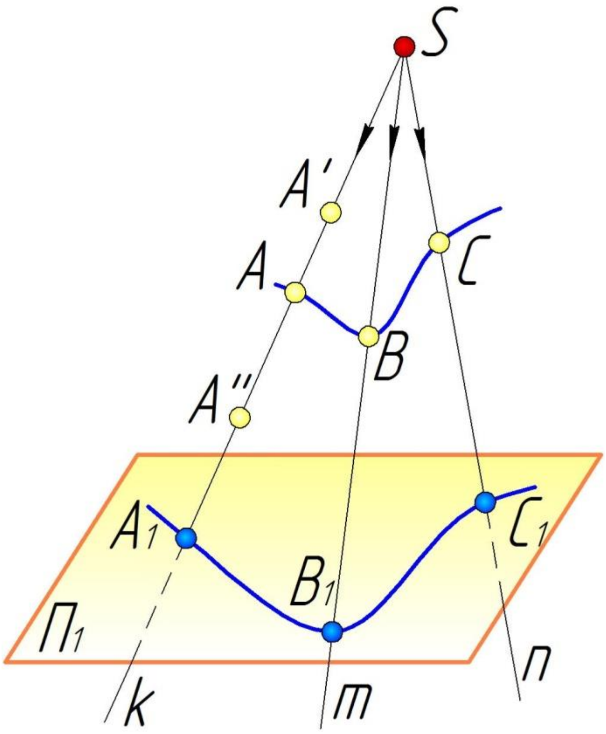


Рис.1.1. Центральне проеціювання

1. Π_1 - площина проекцій.
2. S - центр проекцій.
3. A, B, C - точки об'єкту в просторі.
4. $SA \equiv k$, $SB \equiv m$, $SC \equiv n$ - промені проеціювання.
5. A_1, B_1, C_1– центральні проекції точок A, B, C на площину Π_1 (точки перетину променів k, m, n з площиною проекцій Π_1).

$$AA_1, BB_1, CC_1 \not\perp \Pi_1$$

$$AA_1 \nparallel BB_1 \nparallel CC_1$$

Центральне проеціювання має властивості, які зберігаються при будь-яких перетвореннях. Такі властивості називаються *інваріантами*. Найважливіші з них:

1) Проекція точки, яка не збігається з центром проеціювання, є також точка (рис.1.2):

$$A \to A_1$$

2) Якщо пряма лінія не проходить через центр проеціювання, то її проекція також є пряма лінія (рис.1.2):

$$m(CB) \to m_1\,(C_1B_1)$$

3) Якщо пряма лінія проходить через центр проеціювання, то її проекцією буде точка (рис.1.2):

$$KL \perp \Pi_1 \Rightarrow$$

$$n(KL) \to n_1 \equiv K_1 \equiv L_1$$

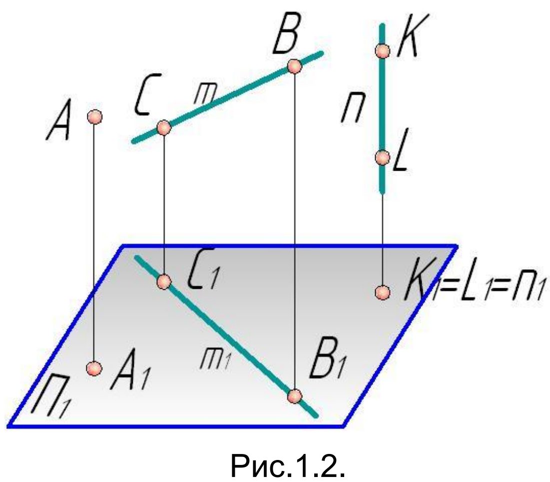


Рис.1.2.

4) Якщо точка належить прямій, то проекція цієї точки належить проекції прямої (рис.1.3):

$$K \in n \Rightarrow K_1 \in n_1$$

5) Точка перетину прямих проецюється в точку перетину їх проекцій (рис.1.3):

$$(A = n \cap m) \Rightarrow (A_1 = n_1 \cap m_1)$$

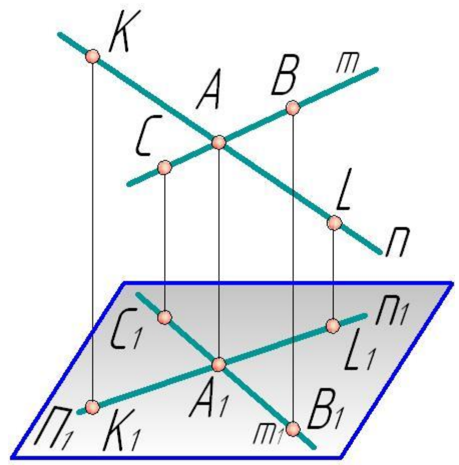


Рис.1.3.

До викладеного слід додати, що центральне проеціювання має також назву *конічного*, оскільки сукупність проеціювальних променів k, m, n ... (рис. 1.1) утворюють конічну поверхню. Центральне проеціювання також називають *перспективним*.

Центральне проеціювання має велику наочність. Його використовують у побудовах перспективи різноманітних споруд, внаслідок чого ці зображення набувають вигляду, дуже близького до нашого сприйняття, але втрачають вимірність. Тому використання його в техніці обмежене.

За принципом центрального проеціювання працюють фотоапарати і кінокамери. Спрощена схема роботи людського ока близька до цього виду проеціювання: роль центру проеціювання виконує оптичний центр кришталика, роль проеціюючих прямих - промені світла; площиною проекцій служить сітківка ока. Тому зображення, побудовані за принципом центрального проеціювання, найбільш наочні та їх широко використовують у своїй роботі художники, архітектори, дизайнери, багато інших фахівців.

Однак, центральні проекції не обернені - неможливо за зображенням повністю уявити геометричні форми предмета.

Паралельне проеціювання

Паралельне проеціювання можна розглядати як окремий випадок центрального, коли центр проеціювання S віддалений у нескінченність, тобто точка S - невласна. У цьому випадку всі проеціювальні промені між собою паралельні. В результаті цього центральне проеціювання перейде у паралельне (рис.1.4), а нескінченно віддалений центр позначатиметься вектором S, паралельно якому мають проводитись всі проеціювальні промені. Апарат паралельного проеціювання повністю визначається положенням площини Π_1 і напрямом проеціювання S.

У загальному випадку, коли проеціювальні промені k, m, n з площиною проекцій Π_1 складають кут $\angle\alpha$, що не дорівнює 90°, паралельне проеціювання називається *косокутним* (рис.1.4):

$$AA_1, BB_1, CC_1 \not\perp \Pi_1$$

$$AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$$

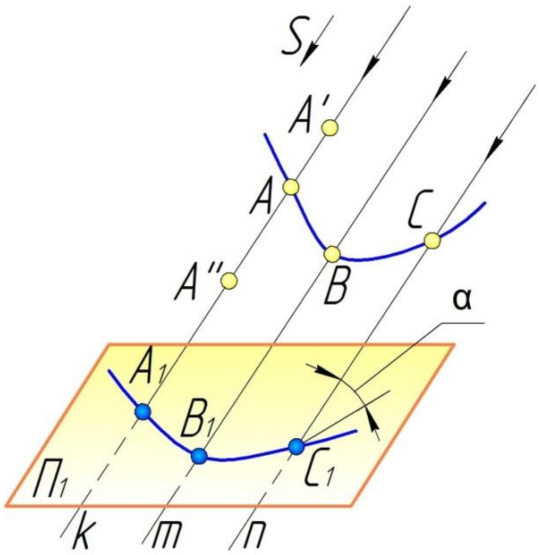


Рис.1.4. Косокутне проеціювання

Якщо кут нахилу проеціюючого променя складає із площиною проекцій 90°, то таке паралельне проеціювання називається *прямокутним* чи *ортогональним* (рис.1.5):

$$AA_1, BB_1, CC_1 \perp \Pi_1$$

$$AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$$

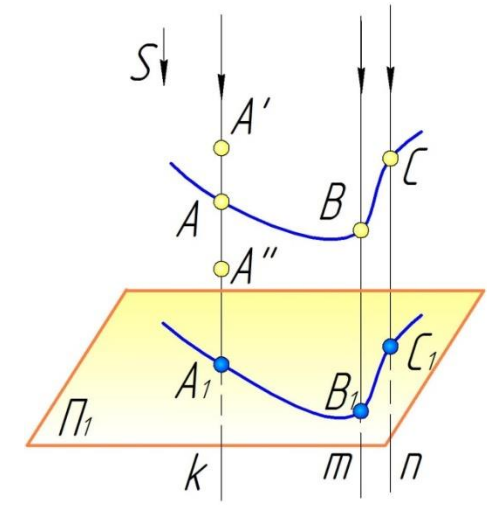


Рис.1.5. Прямокутне (ортогональне) проеціювання

Паралельне проеціювання має також назву *циліндричного*, оскільки сукупність променів k, m, n ... у просторі утворює циліндричну поверхню.

При паралельному проеціюванні зберігаються властивості центрального проеціювання і додаються наступні властивості:

1) Якщо прямі лінії паралельні між собою у просторі, то паралельні й їх проекції (рис.1.6):

$$n(AB) \,//\, m(CK) \Rightarrow$$
$$n_1(A_1B_1) \,//\, m_1(C_1K_1)$$

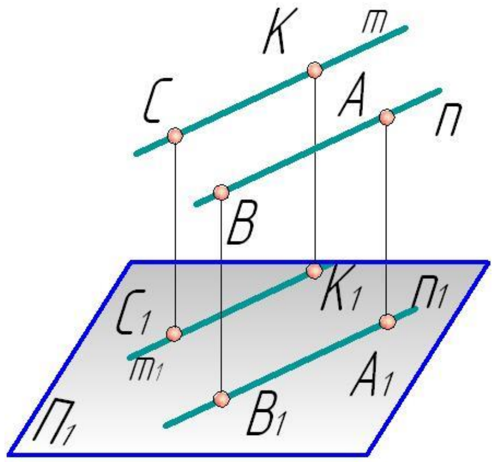


Рис.1.6.

2) Якщо точка C ділить відрізок $[AB]$ у відношенні $m\!:\!n$, то у тому ж відношенні будуть розділені проекції цього відрізка відповідними проекціями точки C:

$$C \in d \Rightarrow C_1 \in d_1$$
$$AC : CB = m : n \Rightarrow$$
$$A_1C_1 : C_1B_1 = m : n$$

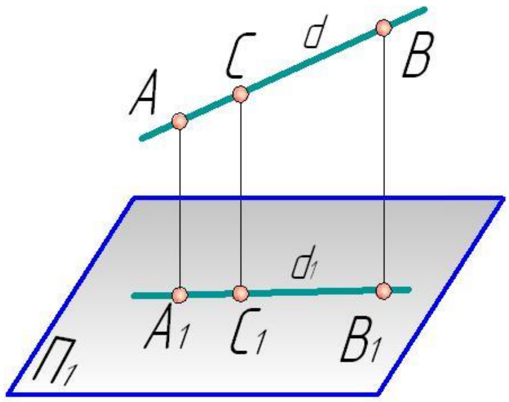


Рис.1.7.

Підкреслимо, що у паралельному проеціюванні, як і при центральному, кожна точка простору, при заданому апараті проеціювання, також має *одну і тільки одну* паралельну проекцію. Але, як і раніше, зворотне твердження не має місця, оскільки безліч точок A, A', A'', ... прямої k (рис.1.4,1.5) мають одну і ту саму проекцію - A_1.

Тому, до проеціювальних зображень у нарисній геометрії пред'являються наступні *основні вимоги*:

1. *Оборотність* - відновлення оригіналу за його проеціювальними зображеннями (кресленням) - можливість визначати форму й розміри об'єкта, його положення й зв'язок з навколишнім середовищем.

2. *Наочність* - креслення повинне створювати просторове уявлення про форму предмета.

3. *Точність* - графічні операції, виконані на кресленні, повинні давати досить точні результати.

4. *Простота* - зображення повинне бути простим у побудові й

повинне допускати однозначний опис об'єкта у вигляді послідовності графічних операцій.

1.3. Проеціювання точки на дві взаємно - перпендикулярні площини проекцій. Утворення комплексного креслення (епюр Монжа)

Як бачимо з викладеного матеріалу, метод проекцій дає змогу повністю будувати зображення. Згідно з цим методом кожній точці тривимірного простору ставиться у відповідність певна точка двовимірного простору (площини). Тому в нарисній геометрії постійно і майже паралельно розв'язуються дві основні задачі (пряма і зворотня). Пряма задача полягає в тому, що за оригіналом за певними правилами знаходять його зображення. Зворотня розв'язує іншу проблему - за заданим зображенням відновити форму, положення оригіналу у просторі, а також розв'язати певну задачу метричного або позиційного характеру. Але зворотню задачу за однією проекцією розв'язати неможливо, тому що одна проекція точки не визначає її положення в просторі і креслення є безповоротним (рис.1.8).

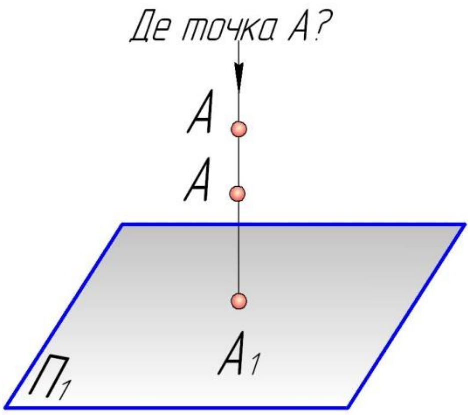


Рис.1.8.

Для отримання зворотнього креслення об'єкт проектують на дві взаємноперпендикулярні площини проекції.

Рис.1.9. Гаспар Монж

Французький вчений Гаспар Монж (1746-1818 рис.1.9) запропонував площини проекцій $П_1$ і $П_2$ розташовувати між собою під прямим кутом і виконувати зображення за методом паралельного ортогонального проекціювання. Виходячи з цього, модель Монжа (рис.1.10) передбачає такий апарат проеціювання, де мають місце дві взаємноперпендикулярні площини проекцій, а проеціювальні промені повинні проводитися перпендикулярно до відповідних площин проекцій. Згідно з цим через точку A проведемо проеціювальні промені: $m \parallel S_1^\infty$ $(m \perp \Pi_1)$ і $n \parallel S_2^\infty$ $(n \perp \Pi_2)$ (рис.1.11).

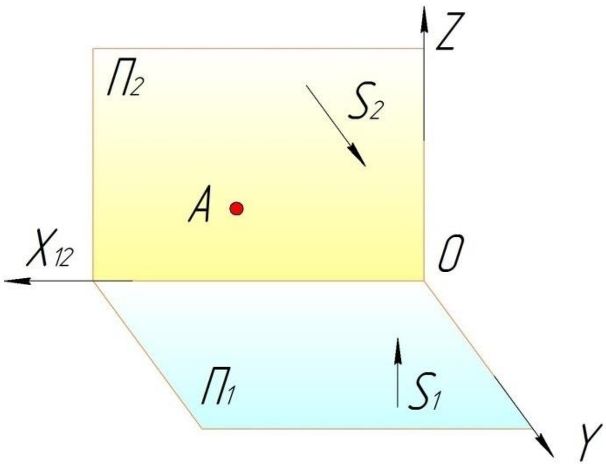


Рис.1.10

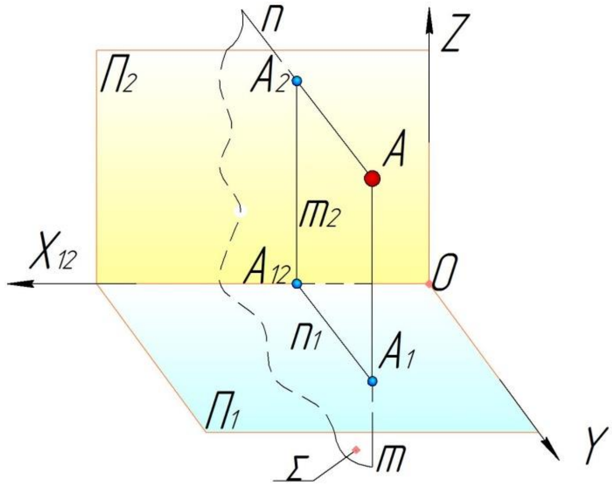


Рис.1.11

Внаслідок цього виникла площина $\Sigma(m \cap n)$, яка однозначно перпендикулярна і до Π_1 і до Π_2 - тому вона їх завжди перетинає (рис.1.11) по прямих лініях $m_2 \perp x_{12}$ і $n_1 \perp x_{12}$. Звідси $A_1 = m \cap n_1$ є точкою перетину проеціювального променя m з площиною проекцій Π_1 і відповідно $A_2 = n \cap m_2$ - променя n з площиною Π_2. Тоді згідно з раніш зробленим визначенням точки A_1 і A_2 є відповідними проекціями точки A, а позначення на рис.1.11 набувають змісту:

Π_1 - горизонтальна площина проекцій;

Π_2 - фронтальна площина проекцій;

x_{12} - вісь проекцій (перетин Π_1 з Π_2);

A – точка, об'єкт проеціювання;

m, n - проеціюючі промені;

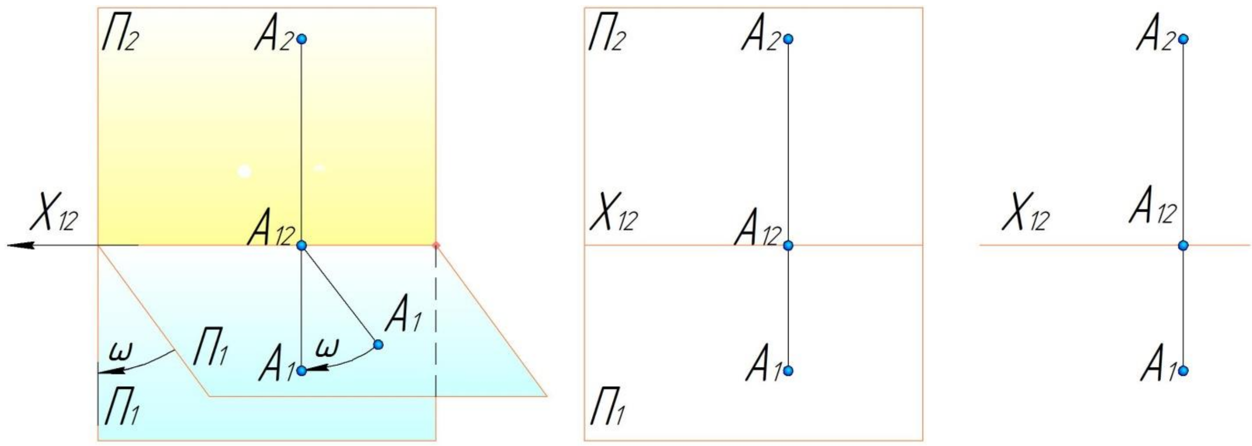
A_1 -горизонтальна проекція точки A;

A_2 - фронтальна проекція точки A;

A_{12} - осьова проекція точки A;

$A_1 A_{12} A_2$ - лінія проекційного зв'язку.

Модель проеціювально-зображувальної системи, яка представлена на рис.1.11 дуже незручна при використанні на практиці, при виконанні досліджень, а також при застосуванні на виробництві. Тому на її основі бажано утворити іншу модель, позбавлену згаданих недоліків. З цією метою після закінчення процесу проеціювання і, таким чином, отримання відповідних проекцій треба точку A, проеціювальні промені m і n, а також площину Σ умовно вилучити, залишивши тільки те, що виникло на площинах проекцій при проеціюванні. В результаті отримаємо модель, подану на рис.1.12,*а*. Далі, обертаючи горизонтальну площину проекцій $П_1$ разом з усіма отриманими на ній зображеннями навколо осі проекцій x_{12} (як це показано стрілочкою ω) до повного збігу її із фронтальною площиною проекцій, матимемо, нарешті, зображення точки A на суміщених площинах проекцій (рис.1.12,*б*). Така плоска модель має назву *комплексного креслення* точки A (або *епюр Монжа*). Оскільки площини проекцій мають нескінченні розміри, стає недоцільним створювати «рамочку». Більше того, позначення площин проекцій $П_1$ і $П_2$ також можна вилучити. В результаті отримаємо комплексне креслення точки A в кінцевому вигляді (рис.1.12,*в*).



а) б) в)

Рис.1.12. Епюр Монжа

Розглядаючи площини проекцій $П_1$ і $П_2$ необмежними в усі боки, можна помітити (рис.1.13), що увесь простір є розділеним на чотири частини, кожна з яких має назву *чверті*. Їх нумерація показана на рис.1.13.

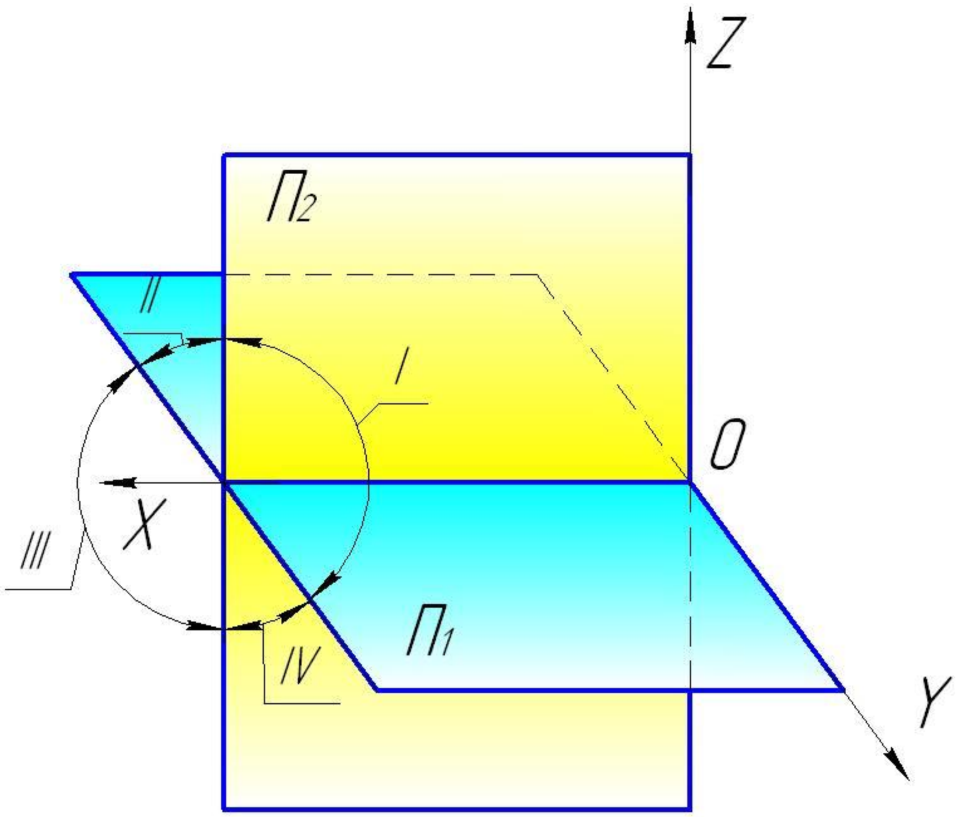
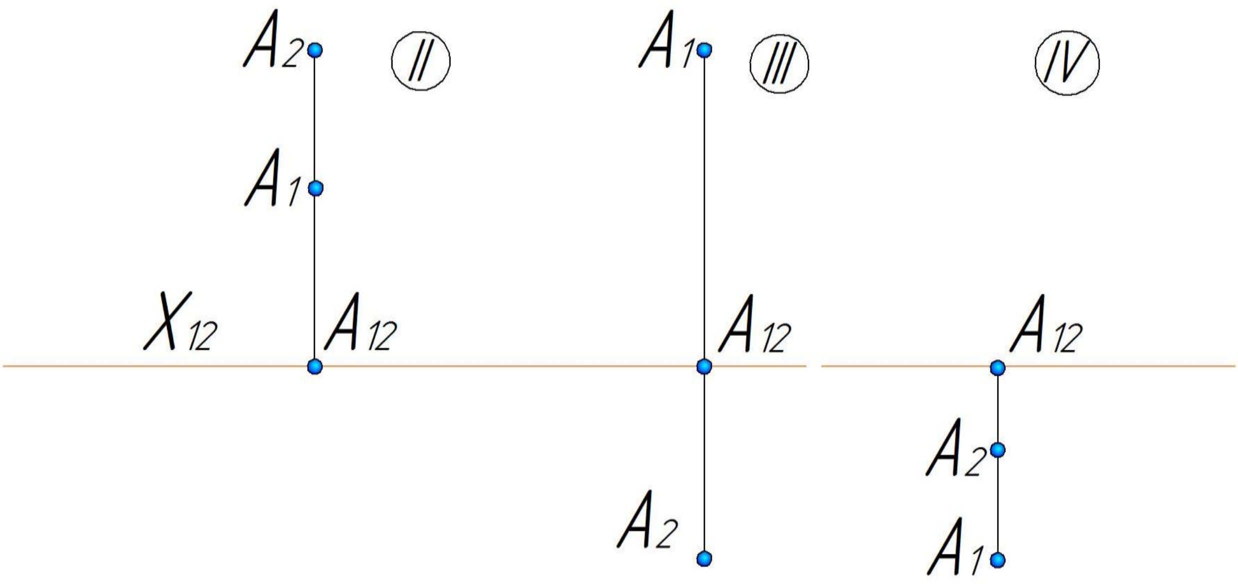


Рис.1.13.

Очевидно, що в залежності від того, в якій чверті розташована точка, проекції її також будуть певним чином розташовані відносно осі проекцій x_{12}. У випадку її розташування в першій чверті (рис.1.11) фронтальна проекція A_2 повинна бути тільки вище осі x_{12} - промінь n перетинатиме фронтальну площину проекцій П$_2$ завжди вище осі x_{12} поки точка A не збіжиться з A_1, тобто це є рубіж переходу від верхніх чвертей (I, II) до нижніх (III, IV). Щодо горизонтальної проекції A_1, то вона має бути розташована нижче осі x_{12}, оскільки передня пола горизонтальної площини проекцій П$_1$, за прийнятим напрямом суміщення, займає саме це місце. Якщо точка розташована у другій чверті, то її фронтальна проекція A_2 буде вище осі x_{12} (верхня чверть). Горизонтальна проекція A_1 може виникнути тільки на задній полі горизонтальної площини проекцій П$_1$. При цьому задня пола горизонтальної площини проекцій П$_1$ при прийнятому напрямі руху (рис.1.12а) займе положення над віссю x_{12}. Тому комплексне креслення точки A матиме у цьому випадку вигляд, представлене на рис.1.14а.



а) б) в)

Рис.1.14.

Звернемо увагу ще на одну важливу річ, притаманну комплексному кресленню точки, незважаючи на те, в якій чверті вона розташована. Із рис.1.15 помічаємо, що $AA_1 \parallel A_2A_{12}$ і $AA_2 \parallel A_1A_{12}$, тому на паралельних прямих паралельними прямими відсікаються рівні відрізки, звідси маємо: $AA_1 = A_2A_{12}$і $AA_2 = A_1A_{12}$.

Останнє приводить до висновку, що для точки, в якій би чверті вона не розташована, виконується умова: *на комплексному кресленні відстань від горизонтальної проекції точки* A_1 до осі x_{12} *завжди дорівнює у просторі відстані від самої точки* A *до фронтальної площини проекцій* П$_2$, а *відстань від фронтальної проекції точки*A_2 *до осі* x_{12} *завжди дорівнює у просторі відстані від самої точки* A *до горизонтальної площини проекцій* П$_1$.

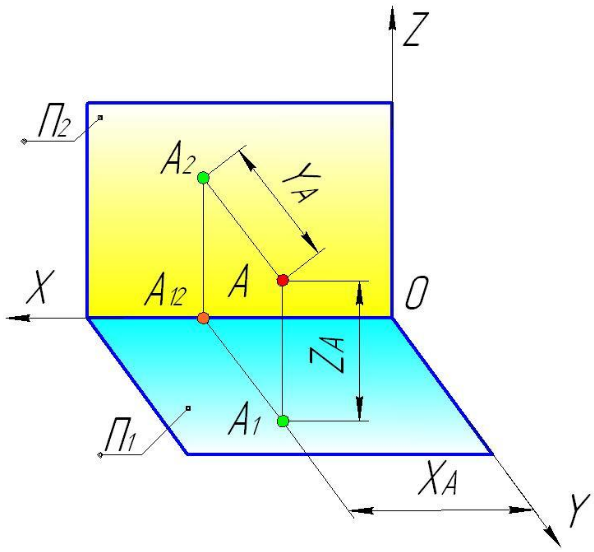


Рис.1.15.

Відзначимо також, що горизонтальна і фронтальна проекції точки завжди знаходяться на одній прямій лінії, перпендикулярній до осі x_{12}, яка має назву *лінії проеційного зв'язку*.

Встановлені закономірності та зроблені висновки вказують на те, що комплексне креслення у двох проекціях метрично визначене, воно дозволяє виявити форму і розміри оригіналу та його положення у просторі. Випливає і механізм розв'язання оберненої задачі. Він полягає в тому, що, по-перше, необхідно подумки повернути горизонтальну площину проекцій $П_1$ у вихідне положення, тобто розташувати її перпендикулярно до фронтальної площини проекцій $П_2$, як це зображено на рис.1.12 а. По-друге, через горизонтальну проекцію A_1 точки A провести пряму лінію $m \perp \Pi_1$, а через фронтальну проекцію A_2 - провести $n \perp \Pi_2$. На перетині ліній m і n отримаємо оригінал - точку A.

1.4. Проеціювання точки на три взаємно - перпендикулярні площини проекцій. Закони проеціювального зв'язку

Креслення, що виконують на двох площинах проекцій, визначають і форму і розміри оригіналу та його положення у просторі. Такі креслення є метрично визначеними (повними). Але в багатьох випадках виконують зображення фігур на трьох площинах проекцій. Внаслідок тривимірності просторової фігури її комплексне креслення стає більш ясним, коли, крім двох основних проекцій, матимемо ще одну, отриману на третій площині проекцій.

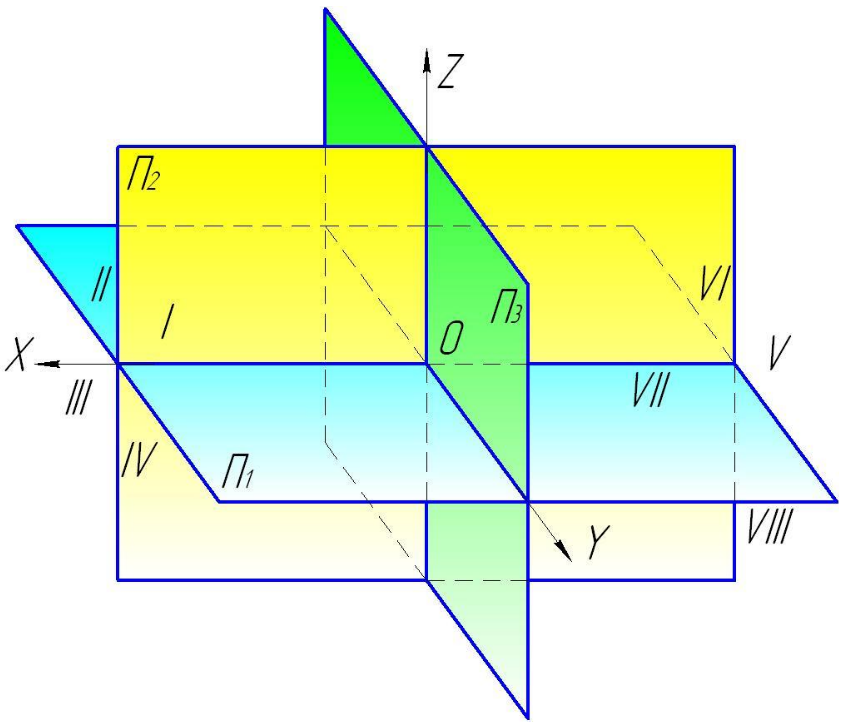


Рис.1.16. Просторова модель трьох
взаємно перпендикулярних площин проекцій

За таку площину проекцій приймають площину, перпендикулярну одночасно і до горизонтальної $П_1$ і до фронтальної $П_2$ площини проекцій. Цю площину називають *профільною площиною* проекції і позначають $П_3$.

На рис.1.16 зображена просторова модель трьох взаємно перпендикулярних площин проекцій $П_1$, $П_2$ і $П_3$ (відповідно – горизонтальна, фронтальна і профільна). При перетині цих площин проекцій утворюються три взаємно перпендикулярні осі проекцій - OX, OY, OZ, та початок координат - точка O.

Проеціювання точки A на три взаємноперпендикулярні площини проекцій $П_1$, $П_2$ і $П_3$ показано на геометричній моделі (рис.1.17).

Для одержання комплексного креслення точки A необхідно (рис.1.17) подумки «вилучити» з моделі всі елементи, що в процесі проеціювання з'явилися у просторі, і залишити тільки ті, які отримали причетність до площин проекцій, звільнившись при цьому від зв'язку між площинами проекцій $П_1$ і $П_3$ по осі Y_{13}.

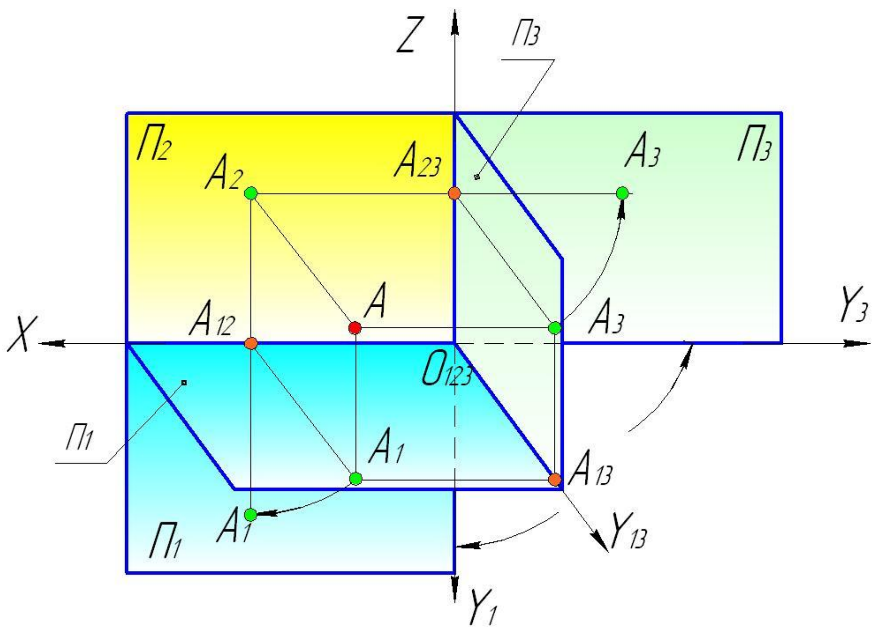


Рис.1.17. Проеціювання точки на три взаємно - перпендикулярні площини проекцій

З цією метою вісь Y_{13} подумки «розрізано» на дві частини уздовж і віднесено Y_1 до $П_1$, а Y_3 - до $П_3$. Внаслідок цього горизонтальна площина проекцій $П_1$ отримала можливість обертатися (за стрілочкою на рис.1.17) навколо осі OX, а профільна площина проекцій $П_3$ - навколо осі

OY_3 (за стрілочкою на рис.1.17). Поворот площин проекцій $П_1$ і $П_3$ разом із усіма зображеннями, що виникли на них, повинен здійснюватися до остаточного їх збігу з фронтальною площиною проекцій $П_2$ (рис.1.18), яку при цьому вважають нерухомою. При суміщенні площин проекцій ламані проекційні зв'язки перетворюються в одну пряму лінію, яка має бути перпендикулярною до відповідної осі проекцій.

Креслення, яке показано на рис.1.18 називається *комплексним кресленням точки* A на трьох площинах проекцій, або *епюром Монжа.*

A_1 - горизонтальна проекція точки А
A_2 - фронтальна проекція точки А
A_3 - профільна проекція точки А
A_{12} - вертикальна лінія зв'язку
A_{23} - горизонтальна лінія зв'язку
A_{1F3} - ламана, горизонтально-вертикальна лінія зв'язку

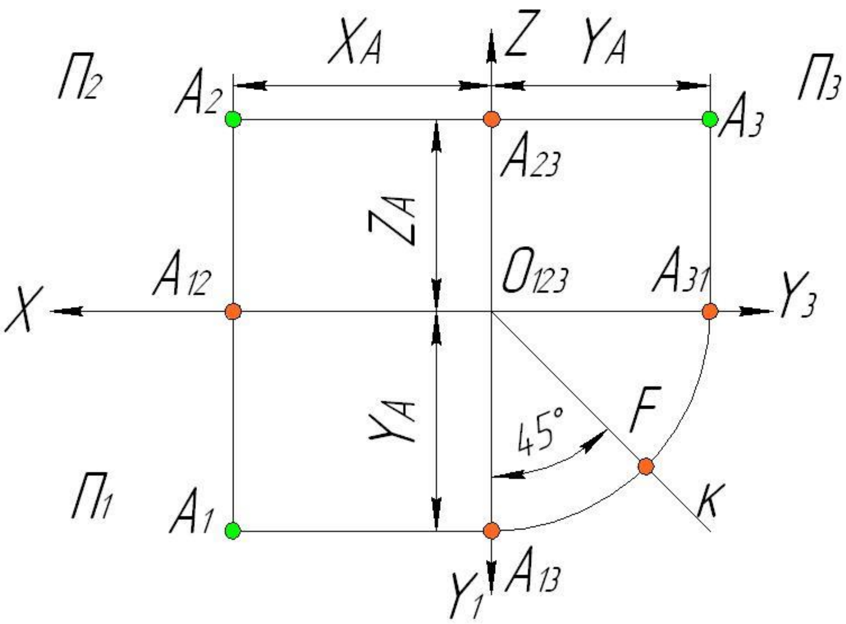


Рис.1.18. Проеціювання точки на площині

Із рис.1.18 випливають три *закони проеціювального зв'язку*.

1) Горизонтальна A_1 і фронтальна A_2 проекції точки A завжди знаходяться на одній прямій лінії проеціювального зв'язку, яка перпендикулярна осі OX: $A_1A_2 \perp OX$.

2) Фронтальна A_2 і профільна A_3 проекції точки А завжди знаходяться на одній прямій лінії проеціювального зв'язку, яка перпендикулярна осі OZ: $A_2A_3 \perp OZ$.

3) Відстань від горизонтальної проекції A_1 точки A до осі OX (A_1A_{12}) дорівнює відстані від профільної проекції A_3 точки A до осі OZ ($A_1A_{12} = A_3A_{23}$): $A_1A_{13} \perp Y_1$; $A_3A_{31} \perp Y_3$.

Для всебічного аналізу отриманих результатів звернемо увагу ще на одну важливу властивість комплексного креслення. Розглядаючи рис. 1.17 помічаємо, що:

✓ відстань від будь-якої точки A до профільної площини проекцій $П_3$ завжди дорівнюватиме відрізку $[AA_3]$, тобто

$[AA_3]$ = $[A_2A_{23}]$ = $[A_{12}0]$ = x - відстань від точки до профільної площини проекцій (*широта*);

✓ відстань від тієї ж точки A до фронтальної площини проекцій $П_2$ дорівнюватиме відрізку $[AA_2]$:

$[AA_2]$ = $[A_1A_{12}]$ = $[A_3A_{23}]$ = $[A_{31}O]$ = y - відстань від точки до фронтальної площини проекцій (*глибина*);

✓ відстань від точки A до горизонтальної площини проекцій $П_1$ дорівнюватиме відрізку $[AA_1]$:

$[AA_1]$ = $[A_2A_{12}]$ = $[A_{23}O]$ = z - відстань від точки до горизонтальної площини проекцій (*висота*).

Таким чином, будь-яка точка простору може бути однозначно задана трьома числами – x, y, z або скорочено $A(x, y, z)$.

Якщо кожну із площин проекцій розглядати нескінченною, то внаслідок їх перетину випливає, що увесь простір розділений на вісім частин (*октантів*). Лінії перетину площин проекцій утворюють декартову координатну систему, а точка перетину осей проекцій — початок координат (точка 0). Нумерація октантів позначено на рис.1.16. У таблиці 1 відповідні знаки при числах x, y та z, які однозначно визначають, до якої частини простору належить об'єкт, що розглядається.

Таблиця 1

Знаки координат в октантах

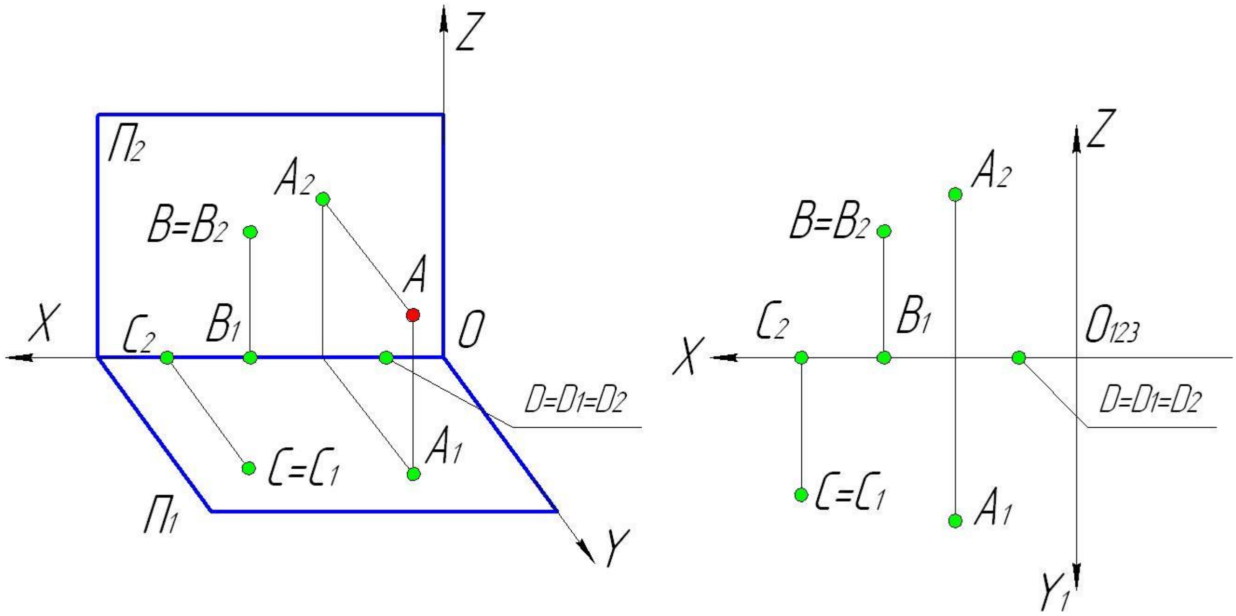
Октант	I	II	III	IV	V	VI	VII	VII
x	+	+	+	+	-	-	-	-
y	+	-	-	+	+	-	-	+
z	+	+	-	-	+	+	-	-

Положення точки відносно площин проекцій (рис.1.19)

1.Положення точки відносно площин проекцій визначається за її проекціями.

2. Точка може належати або не належати площинам проекцій.

3. Точка може належати або не належати осям X, Y, Z.



$$1.\mathrm{A} \notin \Pi_1, \mathrm{A} \notin \Pi_2 \ (\mathrm{X_A}, \mathrm{Y_A}, \mathrm{Z_A} \neq 0).$$

$$2.\mathrm{B} \in \Pi_2 (\mathrm{Y_B} = 0 \Rightarrow \mathrm{B_1} \in \mathrm{X}).$$

$$3.\mathrm{C} \in \Pi_1 (\mathrm{Z_c} = 0 \Rightarrow \mathrm{C_2} \in \mathrm{X}).$$

$$4.\mathrm{D} \in \Pi_1, \mathrm{D} \in \Pi_2 \quad (\mathrm{Y_D} \wedge \mathrm{Z_D} = 0 \Rightarrow \mathrm{D_1} \wedge \mathrm{D_2} \in \mathrm{X}).$$

Рис.1.19.

1.5. Алгоритм побудови комплексного креслення точки за заданими координатами на три площини проекцій

Алгоритмом називається ряд послідовних дій, які необхідно виконати.

Для вирішення певного завдання необхідно мати координати точки. Алгоритм для побудови проекцій точки A (рис.1.20) за координатами $A(x, y, z)$ полягає в наступному:

1. Побудова горизонтальної проекції точки $A_1(x, y_1)$	1.1. На осі OX відкладаємо значення координати X, отримуємо A_{12}. 1.2. На осі OY_1 відкладаємо значення координати Y, отримуємо A_{13}. 1.3. З отриманих точок A_{12} і A_{13} проводимо лінії проеціювального зв'язку перпендикулярно осям OX і OY_1 до їх перетинання. 1.4. В результаті виконаних дій отримуємо горизонтальну проекцію точки $A \to A_1$.
2. Побудова фронтальної проекції точки $A_2(x, z)$	2.1. На осі OX відкладаємо значення координати X, отримуємо A_{12}. 2.2. На осі OZ відкладаємо значення координати Z, отримуємо A_{23} . 2.3. З отриманих точок A_{12} і A_{23} проводимо лінії проеціювального зв'язку перпендикулярно осям OX і OZ до їх перетинання. 2.4. В результаті виконаних дій отримуємо фронтальну проекцію точки $A \to A_2$.
3. Побудова профільної проекції точки $A_3(y_3, z)$	3.1. На осі OZ відкладаємо значення координати Z, отримуємо A_{23}. 3.2. На осі OY_3 відкладаємо значення координати Y, отримуємо A_{31} . 3.3. З отриманих точок A_{23} і A_{31} проводимо лінії проеціювального зв'язку перпендикулярно осям OZ і OY_3 до їх перетинання. 3.4. В результаті виконаних дій отримуємо профільну проекцію точки $A \to A_3$.

де x, y, z – координати точки у просторі.

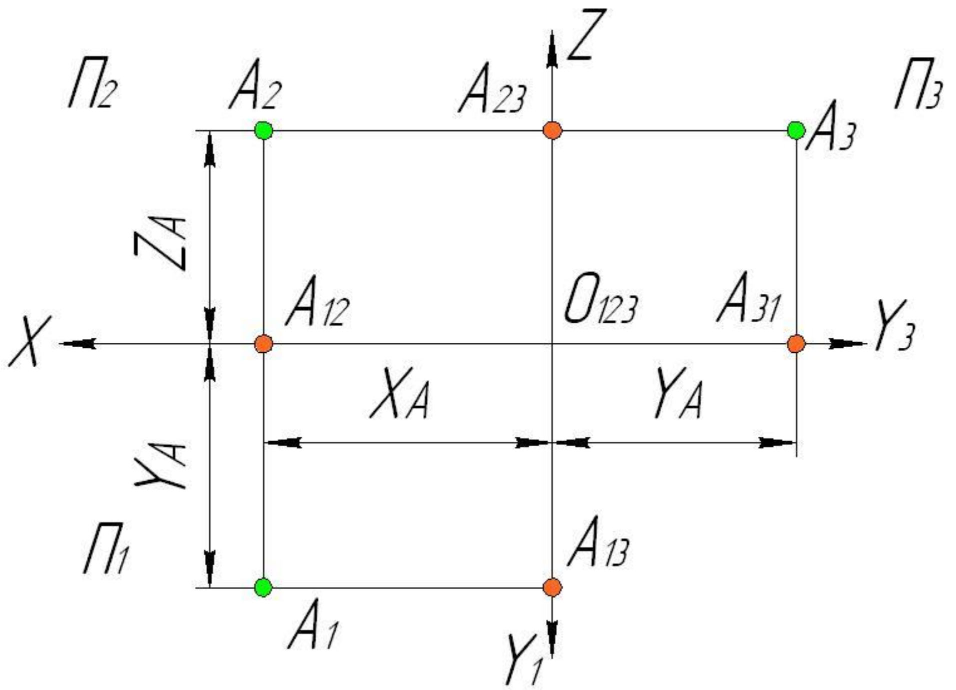


Рис.1.20

Тема 2. Комплексне креслення прямої лінії

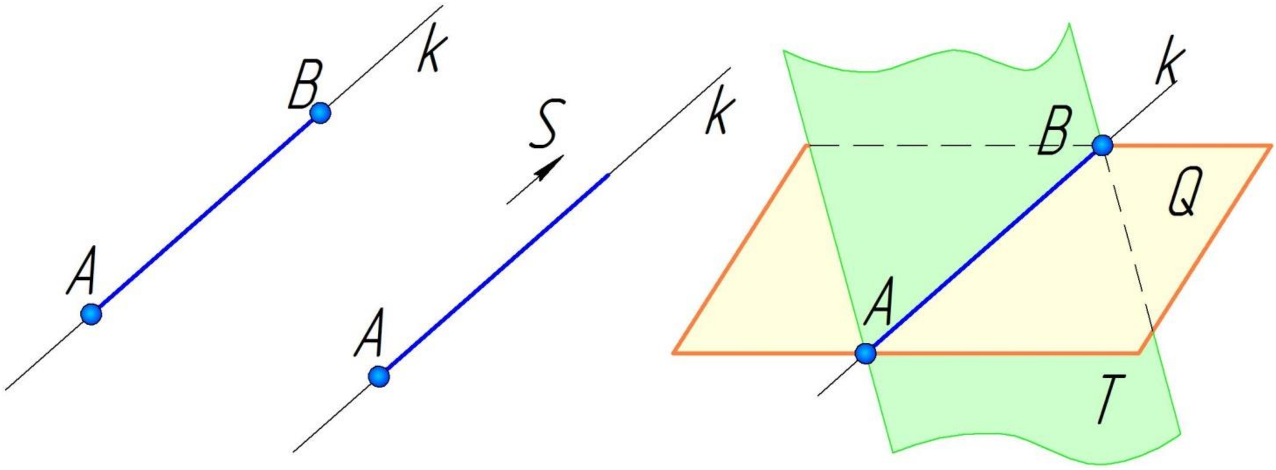
2.1. Визначення та задання прямої лінії в просторі та на комплексному кресленні.
2.2. Положення прямої відносно площин проекцій.
2.3. Визначення натуральної величини відрізку прямої загального вигляду та кутів її нахилу до площин проекцій.
2.4. Проекції плоских кутів.
2.5. Взаємне положення точки і прямої. Ділення відрізка прямої в заданому відношенні.
2.6. Взаємне розташування двох прямих у просторі.
2.7. Сліди прямої лінії.

2.1. Визначення та задання прямої лінії у просторі та на комплексному кресленні

Загалом під прямою слід вважати траєкторію точки, яка в процесі руху не змінює свого напрямку.

Якщо цей рух вважати таким, що йому нема початку і кінця, то для отриманого геометричного образу вводять поняття «*пряма лінія*». Така пряма ще має назву «*нескінченної*», або «*безмежної*». Якщо пряму обмежити двома точками, то її частина між цими точками має назву «*відрізок прямої*».

Щоб задати пряму лінію в просторі, слід задати сукупність таких умов, які б визначали її однозначно. Виходячи з цього, одну й ту саму пряму лінію можна визначити різними елементами. Так, на рис.2.1,*а* пряма лінія k визначається двома точками A і B; на рис. 2.1,*б* - точкою A і напрямком S; на рис.2.1,*в* - як результат перетину двох площин ($k = Q \cap T$). Але будь-який випадок може бути зведений до прямої, що проходить через дві точки. Тому вважають, що *визначником прямої є дві точки*, отже на комплексному кресленні пряма лінія буде визначатися відповідними проекціями цих елементів.



а) б) в)

Рис. 2.1.

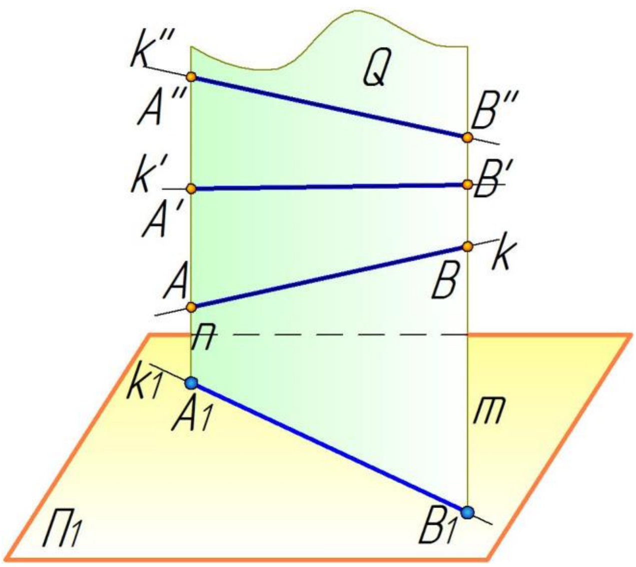


Рис. 2.2.

Так, провівши, наприклад, через дві точки простору A і B (рис.2.2) прямі m і n перпендикулярні до площини проекцій $П_1$, отримаємо проекції A_1 і B_1 як результат перетину цих перпендикулярів з площиною $П_1$. Пряма k_1, що проходить через точки A_1 і B_1, і є відповідною проекцією прямої k.

Проекцію прямої матиме й тоді, коли проведемо перпендикуляри до площини П₁ з двох інших довільних точок прямої k. Сукупність кожної з пар таких перпендикулярів утворює площину Q, яка перпендикулярна до площини Π_1 і перетинається з нею по прямій k_1, що підтверджує отриманий результат.

Розглядаючи аналогічно процес проекціювання на дві взаємно перпендикулярні площини проекцій Π_1 і Π_2 отримаємо відповідно горизонтальну k_1і фронтальну k_2 проекції прямої k (рис. 2.3).

Неважко помітити (рис. 2.2), що *одна проекція прямої не визначає її положення в просторі*. Так, відрізок $[A_1B_1]$ може бути проекцією будь-якого відрізка $[A'B']$ прямої k' чи відрізка $[A''B'']$ прямої k'', розташованих у площині Q. Положення прямої в просторі визначається сукупністю принаймні двох її проекцій. Отже, знаючи положення горизонтальної A_1 і B_1 та фронтальної A_2 і B_2проекцій точок A і B прямої k (рис. 2.3), можна здобути саму пряму k як результат перетину площин Q і T, що утворилися відповідно із проеціювальних променів m і n та a і b.

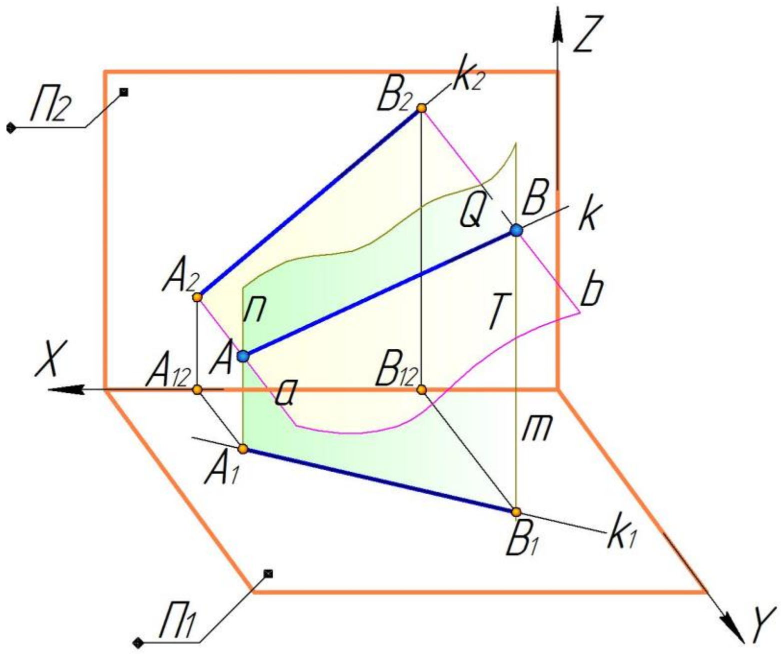


Рис. 2.3.

Видаляючи на рис.2.3 всі просторові побудови й залишаючи тільки те, що одержано внаслідок їх у площинах проекцій, отримаємо комплексне креслення прямої $k(A,B)$, суміщаючи в одну площину Π_1 і Π_2 (рис.2.4).

Нагадаємо одержані назви проекцій:

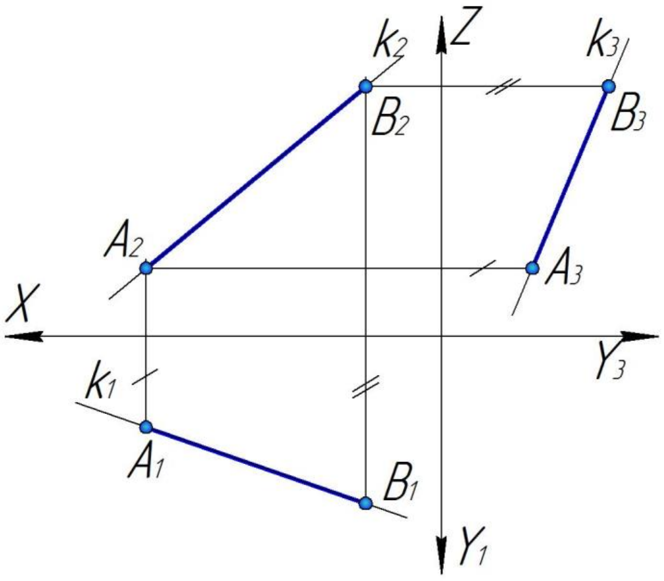


Рис. 2.4.

$k_1([A_1, B_1])$- горизонтальна проекція прямої k (відрізка $[AB]$);

$k_2([A_2, B_2])$- фронтальна проекція прямої k (відрізка $[AB]$);

$k_3([A_3, B_3])$ - профільна проекція прямої k (відрізка $[AB]$). Побудова третьої проекції виконана за допомогою другого і третього законів проекційного зв'язку щодо точок A і B.

Основні властивості прямої лінії виражають такими аксіомами:

1. Через дві точки простору можна провести пряму і до того ж тільки одну.
2. Дві прямі перетинаються лише в одній точці.
3. Пряму лінію можна продовжити в обидві сторони.

Геометрична характеристика прямої:	*Геометричні параметри прямої:*
1. пряма нескінченна; 2. основні елементи прямої - точки.	1. кути нахилу до площин проекцій: α, β, γ; 2. натуральна величина прямої НВ.

Пряму лінію позначають a, b, c, d …; проекції позначають - $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3 \ldots$

2.2. Положення прямої відносно площин проекцій

Залежно від того, як пряма розташована відносно площин проекцій, відрізняють її загальне і окреме положення.

2.2.1. Пряма загального положення

Під *прямою загального положення розуміють* таку довільну пряму лінію, яка *не паралельна* і *не перпендикулярна* жодній із площин проекцій.

Приклад такої прямої наведено на рис.2.4, з якого видно, що жодна із її проекцій не паралельна і не перпендикулярна до жодної із осей проекцій. Тоді відрізок $[AB]$ прямої k на жодну із площин проекцій не відобразиться в натуральну величину, тобто $[A_1B_1]$<$[AB]$, $[A_2B_2]$<$[AB]$ і $[A_3B_3]$<$[AB]$.

Окрім того, *пряма лінія загального положення* має *різні кути* нахилу до площин проекцій.

Під кутом нахилу прямої до площини проекції розуміють такий кут, який утворюється між самою прямою та її відповідною проекцією.

Отже, кут нахилу прямої до *горизонтальної площини* проекцій Π_1 визначають як кут, що утворюється прямою з її горизонтальною проекцією, і позначають літерою α;

- кут нахилу прямої до *фронтальної площини* проекцій - Π_2 - β і
- кут нахилу прямої до *профільної площини* проекцій - Π_3 - γ.

Ці кути в загальному випадку також не відображаються в натуральну величину на жодну із площин проекцій.

2.2.2. Прямі рівня

Прямі окремого положення поділяються на прямі рівня і проеціювальні прямі.

Прямі рівня паралельні тільки одній площині проекцій.

Пряма горизонтального рівня.

Пряму, яка паралельна горизонтальній площині проекцій Π_1, називають *прямою горизонтального рівня або горизонталлю*.

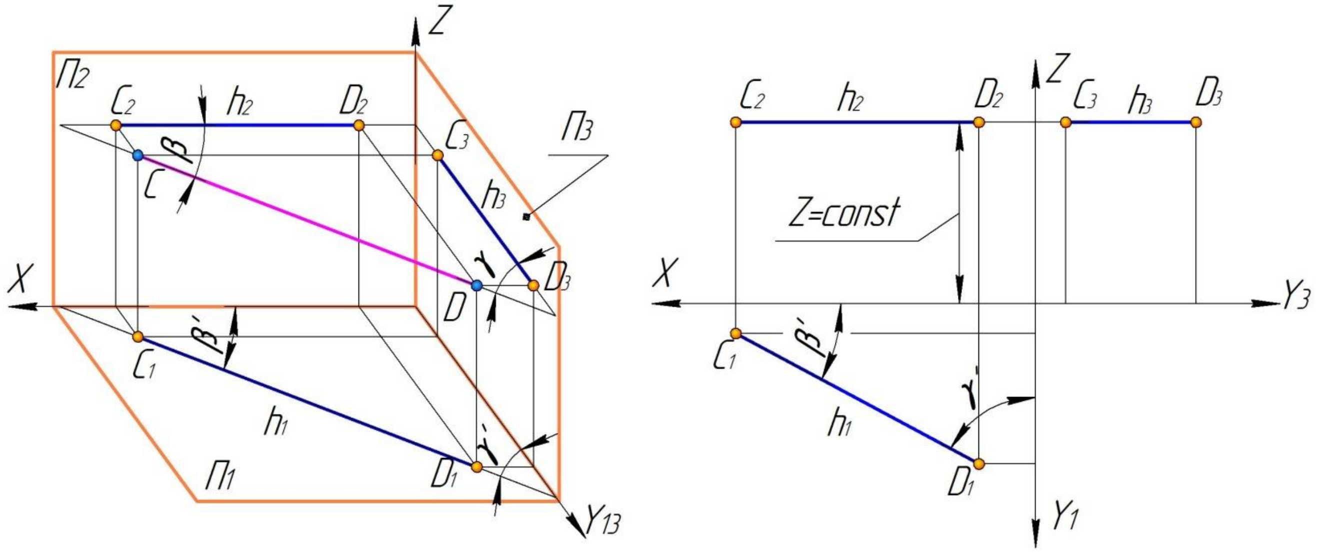
На рис.2.5 представлено комплексне креслення прямої горизонтального рівня CD на три площини проекцій.

Зазвичай пряму горизонтального рівня позначають буквою «h»:

h_1- горизонтальна проекція прямої горизонтального рівня;

h_2 - фронтальна проекція прямої горизонтального рівня;

h_3 - профильна проекція прямої горизонтального рівня.



Різниця координат точок :

$X_C - X_D \neq 0; Y_D - Y_C \neq 0; Z_C - Z_D = 0$

$h_1 - HB$; $h_2 \parallel OX$ (Z = const)

$\alpha = 0; \beta + \gamma = 90^0; \beta$ і $\gamma - HB$

Рис. 2.5. Пряма горизонтального рівня або горизонталь

Оскільки всі точки прямої горизонтального рівня однаково віддалені від горизонтальної площини проекції П$_1$, то:

1. *горизонтальна проекція* прямої горизонтального рівня (C_1D_1) є *натуральною величиною* відрізку CD: $C_1D_1 = h_1 = HB$;

2. *фронтальна проекція* прямої горизонтального рівня (C_2D_2) *паралельна осі* OX: $[C_2D_2 = h_2] \parallel OX$;

3. *профільна проекція* прямої горизонтального рівня (C_3D_3) *паралельна осі* OY: $[C_3D_3 = h_3] \parallel OY$;

4. кут «β» між горизонтальною проекцією горизонталі (C_1D_1) і віссю OX є кутом нахилу відрізку CD до фронтальної площини проекцій П$_2$;

5. кут «γ» між горизонтальною проекцією горизонталі (C_1D_1) і віссю OY - є кутом нахилу відрізку CD до профільної площини проекцій П$_3$.

Пряма фронтального рівня.

Пряму, яка паралельна фронтальній площині проекцій П2, називають *прямою фронтального рівня* або *фронталь*.

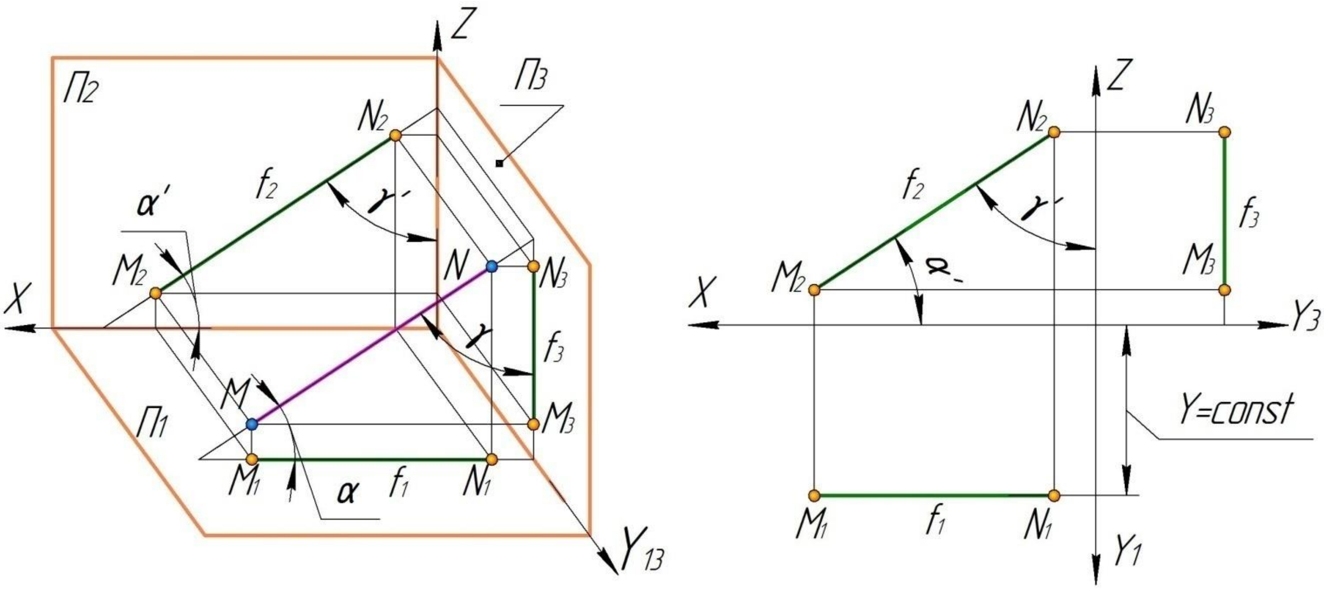
На рис.2.6 представлено комплексне креслення прямої фронтального рівня MN на три площини проекцій.

Зазвичай пряму фронтального рівня позначають буквою «f»:

f_1 - горизонтальна проекція прямої фронтального рівня;

f_2 - фронтальна проекція прямої фронтального рівня;

f_3 - профильна проекція прямої фронтального рівня.



Різниця координат точок :

$X_M - X_N \neq 0; Y_M - Y_N = 0; Z_N - Z_M \neq 0$

$f_2 - HB$; f_1 ∥ OX (Y - const)

$\beta = 0; \alpha + \gamma = 90^0; \alpha$ і $\gamma - HB$

Рис. 2.6. Пряма фронтального рівня або фронталь

Оскільки всі точки прямої фронтального рівня однаково віддалені від фронтальної площини проекції П2, то:

1. *фронтальна проекція* прямої фронтального рівня (M_2N_2) є *натуральною величиною* відрізку MN: $M_2N_2 = f_2 = HB$;

2. *горизонтальна проекція* прямої фронтального рівня (M_1N_1) *паралельна осі* OX: $[M_1N_1 = f_1] \parallel OX$;

3. *профільна проекція* прямої фронтального рівня (M_3N_3) *паралельна осі* OY: $[M_3N_3 = f_3] \parallel OY$.

4. кут «α» між фронтальною проекцією фронталі (M_2N_2) і віссю OX є кутом нахилу відрізку MN до горизонтальної площини проекцій $П_1$;

5. кут «γ» між фронтальною проекцією фронталі (M_2N_2) і віссю OY - є кутом нахилу відрізку MN до профільної площини проекцій $П_3$.

Пряма профільного рівня.

Пряму, яка паралельна профільній площині проекцій $П_3$, називають *профільною прямою*.

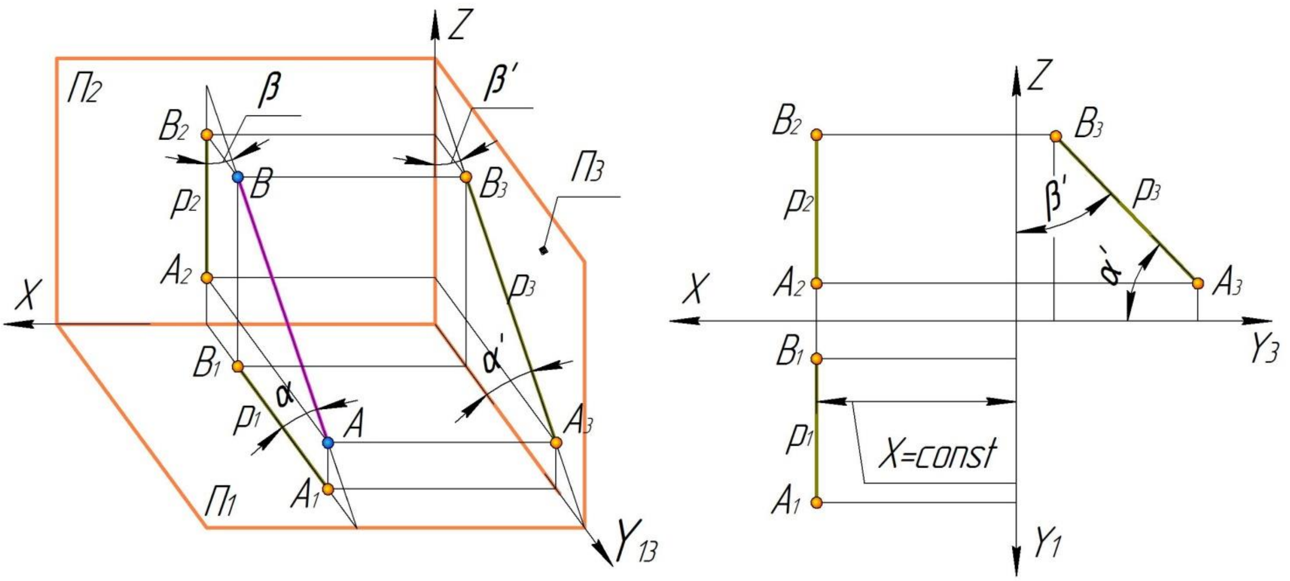
На рис.2.7 представлено комплексне креслення прямої профільного рівня AB на три площини проекцій.

Зазвичай пряму профільного рівня позначають буквою «p»:

p_1- горизонтальна проекція прямої профільного рівня;

p_2 - фронтальна проекція прямої профільного рівня;

p_3 - профільна проекція прямої профільного рівня.



Різниця координат точок :

$X_B - X_A = 0; Y_A - Y_B \neq 0; Z_B - Z_A \neq 0$

$p_3 - HB;\ p_1, p_2 \perp OX$ (X - const)

$\gamma = 0; \alpha + \beta = 90^0; \alpha \text{ і } \beta - HB$

Рис. 2.7. Пряма профільного рівня

Оскільки всі точки прямої профільного рівня однаково віддалені від профільної площини проекції $П_3$, то:

1. *профільна проекція прямої* профільного рівня (A_3B_3) є *натуральною величиною* відрізку AB: $A_3B_3 = p_3 = HB$;

2. *горизонтальна і фронтальна проекції* прямої профільного рівня (A_1B_1 і A_2B_2) *перпендикулярні* осі OX: $[A_1B_1 = p_1] \perp OX$; $[A_2B_2 = p_2] \perp OX$;

3. кут «α» між профільною проекцією прямої профільного рівня (A_3B_3) і віссю OY є кутом нахилу відрізку AB до горизонтальної площини проекцій П$_1$;

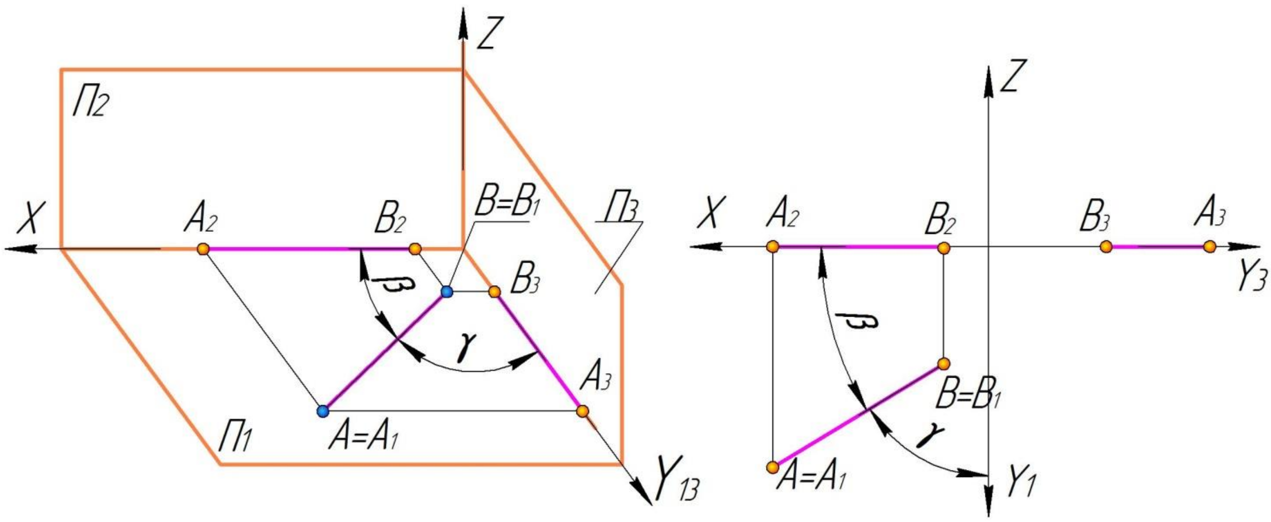
4. кут «β» між профільною проекцією прямої профільного рівня (A_3B_3) і віссю OZ є кутом нахилу відрізку AB до фронтальної площини проекцій П$_2$.

2.2.3. Прямі, розташовані в площинах проекцій

Прямою нульового рівня називають *пряму, яка належить площині проекції.*

Якщо *пряма лежить в площині проекцій*, то проекція прямої на цю площину збігаєьться з самою прямою, а дві інші її проекції лежать на відповідних осях.

На рис.2.8 зображена пряма, яка належить горизонтальній площині проекцій П$_1$ (нульова горизонталь h_0).



$$AB \in \Pi_1: A_1B_1 = |AB|;\ A_2B_2 \in OX;\ A_3B_3 \in OY_3;\ \alpha = 0,\ \gamma + \beta = 90^0$$

Рис. 2.8. Пряма нульового рівня (нульова горизонталь h_0)

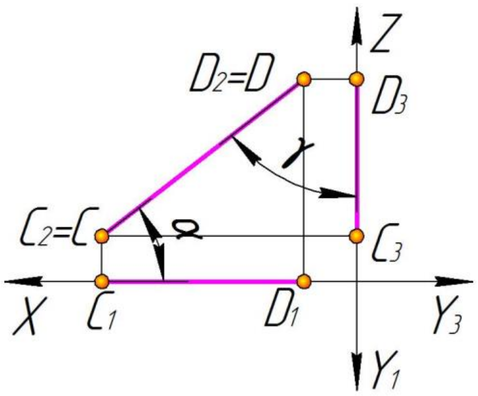


Рис. 2.9. Нульова фронталь

Пряма CD, що належить фронтальній площині проекцій $П_2$ (*нульова фронталь*), зображена на рис. 2.9.

$CD \in П_2$:

$C_2D_2 = |CD|$

$C_1D_1 \in OX$

$C_3D_3 \in OZ$

$\beta = 0, \gamma + \alpha = 90^0$

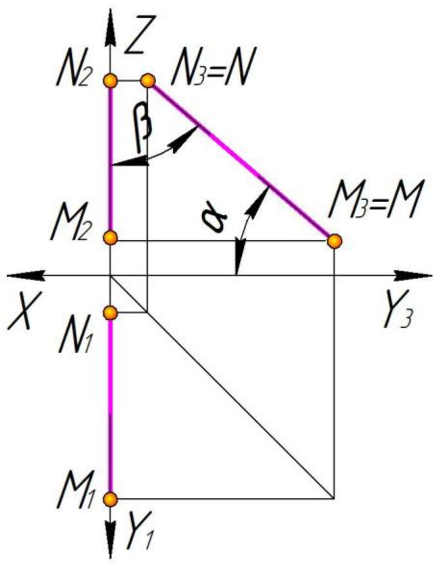


Рис. 2.10. Нульова профільна пряма

Пряма MN, що належить профільній площині проекцій $П_3$ (*нульова профільна пряма*) зображена на рис. 2.10.

$MN \in П_3$:

$M_3N_3 = |MN|$

$M_2N_2 \in OZ$

$M_1N_1 \in OY_1$

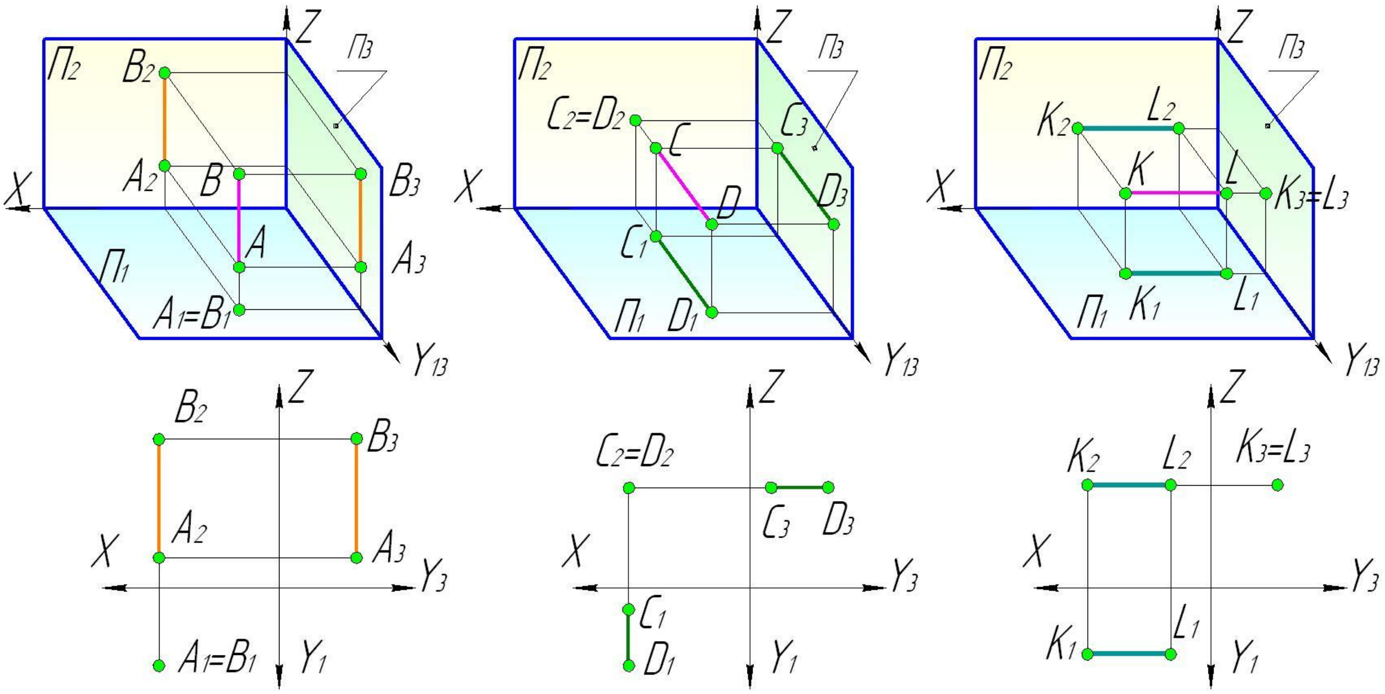
$\gamma = 0, \beta + \alpha = 90^0$

2.2.4. Проеціювальні прямі

Проеціювальні прямі - прямі, перпендикулярні до якої-небудь площини проекцій.

Проеціювальні прямі одночасно паралельні двом площинам проекцій і тому, як наслідок, вони перпендикулярні третій.

Проеціювальна пряма, на площину проекцій, якій вона перпендикулярна, проектується в точку, а на дві інші площини проекцій - у натуральну величину, оскільки вона їм паралельна.



Горизонтально проеціювальна пряма	Фронтально проеціювальна пряма	Профільно проеціювальна пряма
$AB \perp \Pi_1$	$CD \perp \Pi_2$	$KL \perp \Pi_3$
$A_2B_2 = A_3B_3 \perp OX$	$C_1D_1 = C_3D_3 \,//\, OY$	$K_1L_1 = K_2L_2 \,//\, OX$
$A_2B_2 = A_3B_3 = НВ$	$C_1D_1 = C_3D_3 = НВ$	$K_1L_1 = K_2L_2 = НВ$
$\alpha = 90^0; \beta = \gamma = 0^0$	$\beta = 90^0; \alpha = \gamma = 0^0$	$\gamma = 90^0; \beta = \alpha = 0^0$

Рис. 2.11. Проеціювальні прямі

2.3. Визначення натуральної величини відрізку прямої загального вигляду та кутів її нахилу до площин проекцій

Як бачимо з викладеного, для прямої окремого положення не виникає проблем при визначенні на комплексному кресленні натуральної величини її відрізка та кутів нахилу до площин проекцій. Але на практиці часто виникає потреба визначити натуральну величину відрізка прямої загального положення та натуральну величину кутів, які вона складає з площинами проекцій.

Розглянемо рис.2.12, з якого випливає так зване *правило прямокутного трикутника*, яке допоможе вирішити цю проблему.

Візьмемо на прямій k довільні точки A і B, що визначають її відрізок $[AB]$, і побудуємо їхні відповідні проекції A_1,B_1; A_2,B_2. Через точку A

проведемо пряму m, паралельну k_1, а через точку B - пряму n, паралельну k_2.

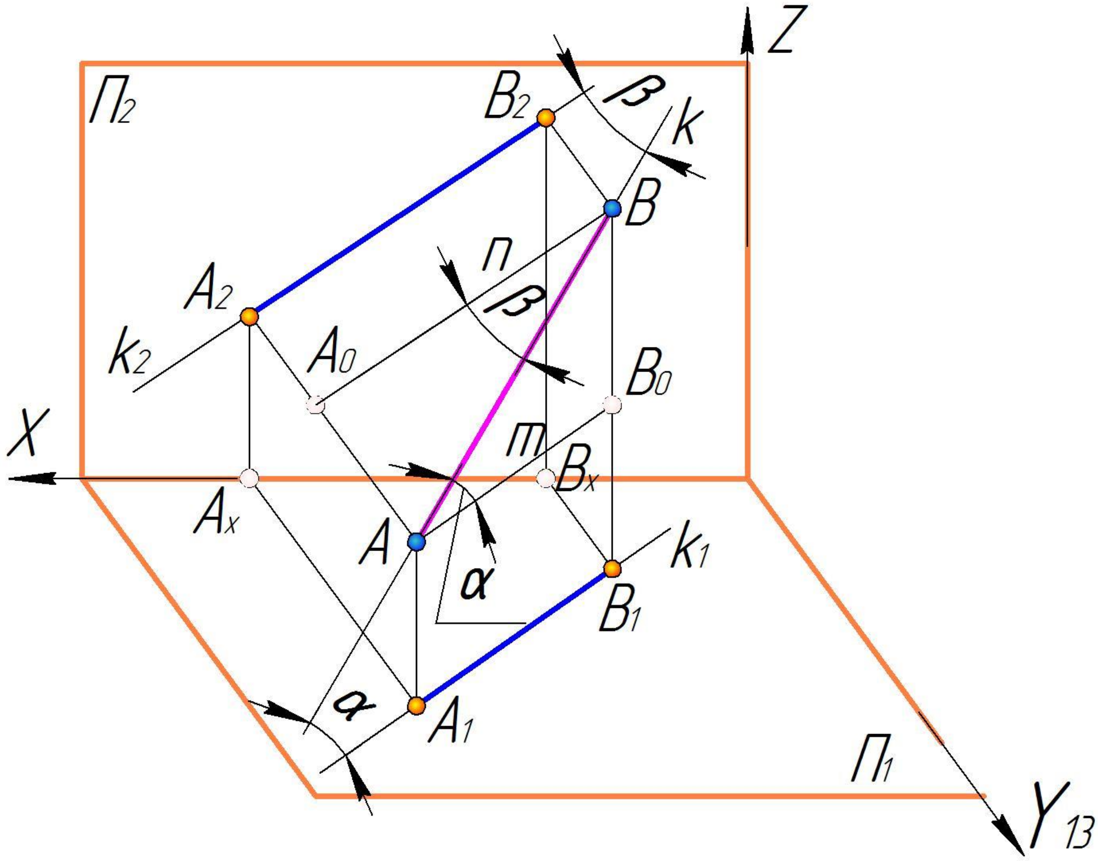


Рис. 2.12.

Дістанемо два прямокутних трикутники $\Delta\,(AB_0B)$ і $\Delta\,(AA_0B)$, у яких $[AB]$ - гіпотенуза (відрізок $[AB]$ - натуральна величина),

$\alpha = \angle BAB_0$ - кут нахилу прямої до горизонтальної площини проекцій $П_1$,

$\beta = \angle ABA_0$ - кут нахилу прямої до фронтальної площини проекцій $П_2$.

Для трикутника $\Delta\,(AB_0B)$ катет $[AB_0]$ дорівнює величині горизонтальної проекції $[A_1B_1]$ відрізка $[AB]$, тобто $[AB_0]$ = $[A_1B_1]$, другий катет $[B_0B]$ дорівнює різниці відстаней від кінців відрізка (точки A і B) до горизонтальної площини проекцій, тобто

$$[BB_1] - [AA_1] = [BB_0] \Leftrightarrow Z_B - Z_A = \Delta_Z.$$

Аналогічні висновки випливають також з розгляду трикутника $\Delta\,(AA_0B)$ щодо кута нахилу β прямої k до фронтальної площини проекцій (щодо кута γ матимемо такі ж висновки), а це дає підставу сформулювати загальне *правило прямокутного трикутника*.

Для визначення *натуральної величини кута нахилу прямої* до певної площини проекцій та *натуральної величини відрізка* цієї прямої потрібно на комплексному кресленні (рис.2.13) *побудувати прямокутний трикутник, у якого один (базовий) катет є проекція відрізка $[AB]$ на тій площині проекцій, відносно якої визначається кут нахилу прямої, а другий - алгебраїчна різниця відстаней від кінців відрізка до тієї ж площини проекцій* (Δ недостатньої координати).

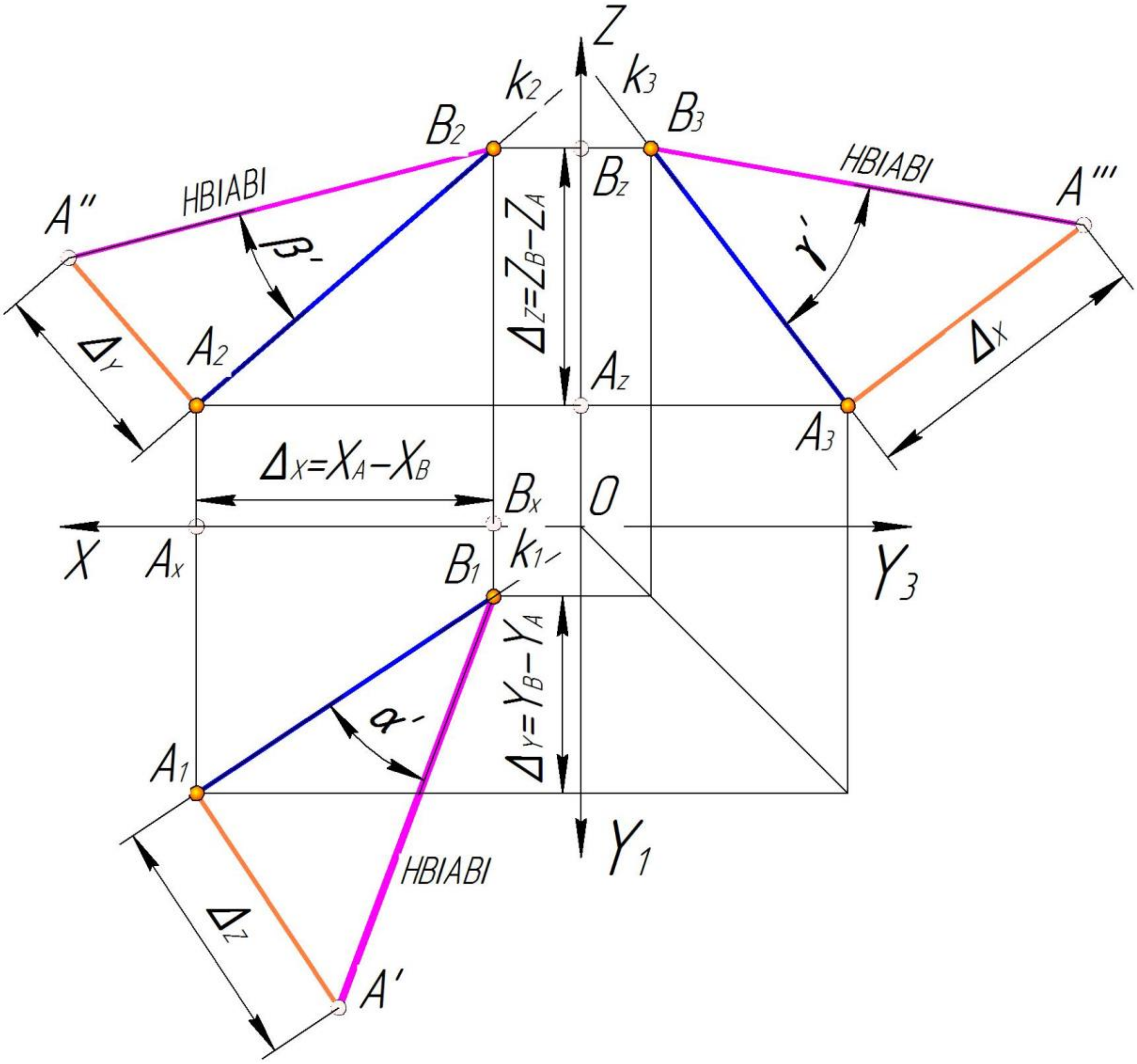


Рис. 2.13. Визначення натуральної величини відрізку прямої загального вигляду

Тоді гіпотенуза такого трикутника дорівнюватиме натуральній величині відрізка $[AB]$ прямої k, а кут між відповідною проекцією цього відрізка та його натуральною величиною також дорівнює натуральній величині кута нахилу прямої до цієї площини проекцій.

Отже, для побудови кута $\alpha' = \alpha$ за базовий катет потрібно прийняти горизонтальну проекцію $[A_1B_1]$ відрізка $[AB]$, другий катет дорівнюватиме відрізку $\Delta_{\mathrm{Z}} = Z_B - Z_A = [B_2 B_x] - [A_2 A_x]$ (рис.2.13); для $\beta' = \beta$- фронтальну проекцію $[A_2 B_2]$, другий катет - $\Delta_{\mathrm{Y}} = \mathrm{Y}_A - Y_B = [A_1 A_x] - [B_1 B_x]$; для $\gamma' = \gamma$- профільну проекцію $[A_3 B_3]$, другий катет - $\Delta_{\mathrm{X}} = \mathrm{X}_A - X_B = [A_X 0] - [B_x 0] = [A_2 A_Z] - [B_2 B_Z]$.

2.4. Проекції плоских кутів

Будь-який лінійний кут проектується на площину проекцій у натуральну величину, якщо його сторони паралельні цій площині.

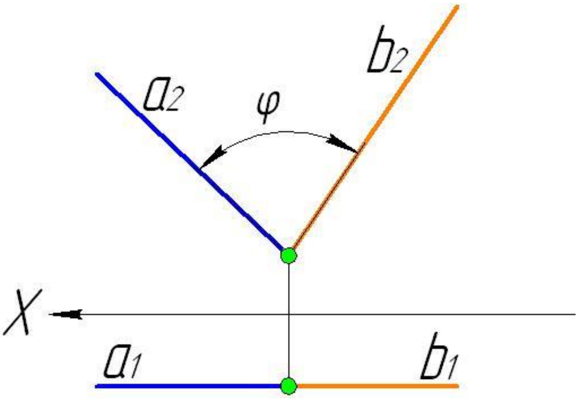


Рис. 2.14

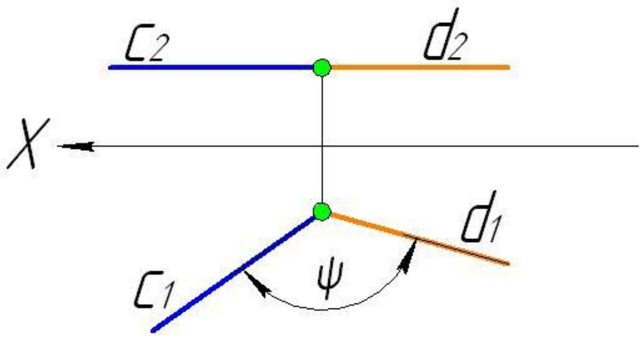
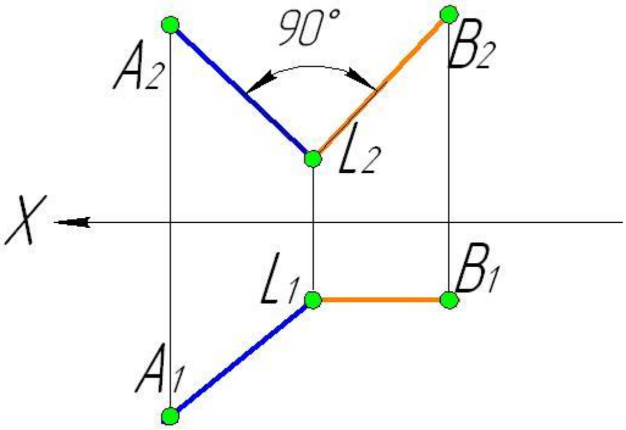


Рис. 2.15

Прямі a і b - прямі фронтального рівня, тому на фронтальну площину проекцій Π_2 проектуються у натуральну величину. Отже, φ – кут між прямими a і b, проектується у натуральну величину на фронтальну площину проекцій Π_2.

Прямі c і d - прямі горизонтального рівня, тому на горизонтальну площину проекцій Π_1 проектуються в натуральну величину. Отже, ψ – кут між прямими c і d проектується в натуральну величину на горизонтальну площину проекцій Π_1.

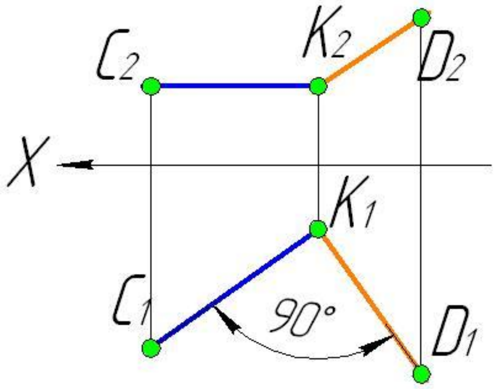
Прямий кут проектується на площину в натуральну величину, якщо хоч би одна з його сторін паралельна площині проекцій, а інша є прямою загального виду.



Проекції прямого кута, одна сторона якого є прямою фронтального рівня

$$f(LB)//\Pi_2 \Rightarrow \angle A_2L_2B_2 = 90^0$$

Рис. 2.16



Проекції прямого кута, одна сторона якого є прямою горизонтального рівня

$$h(CK)//\Pi_1 \Rightarrow \angle C_1K_1D_1 = 90^0$$

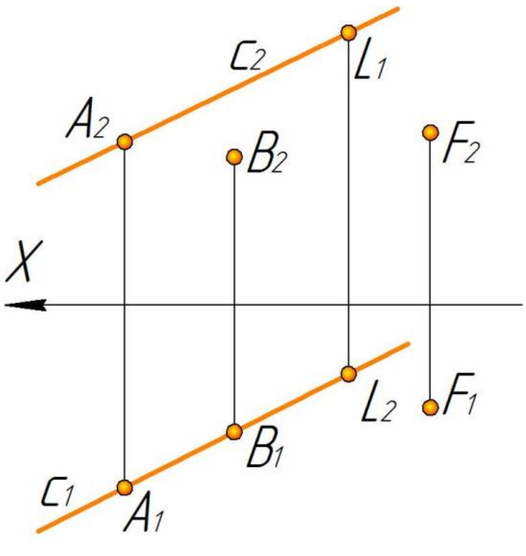
Рис. 2.17

2.5. Взаємне положення точки і прямої. Ділення відрізку прямої в заданому відношенні

Точка відносно прямої може займати два положення: належати цій прямій або знаходитись за її межами.

Якщо точка лежить на прямій лінії, то її проекції лежать на однойменних проекціях цієї прямої і на спільній лінії проекційного зв'язку.

На рис.2.18 зображена точка A, що належить прямій c, бо її проекції A_1 і A_2 розташовані відповідно на горизонтальній c_1 і фронтальній c_2 проекціях прямої.



$$A \in c;\ B \notin c;\ L \notin c;\ F \notin c$$

Рис. 2.18

Коли точка не належить прямій лінії, можливі два варіанти:

1) жодна із проекцій точки, наприклад, точка F не належить відповідній проекції прямої;

2) одна із проекцій точки належить однойменній проекції прямої лінії, друга – ні: $B_1 \in c_1,\ B_2 \notin c_2$.

Ділення відрізку прямої в заданому відношенні

Якщо точка ділить пряму в деякому відношенні, то проекції точки ділять проекції прямої в тому ж відношенні.

На рис. 2.19 показано побудову ділення відрізку AB точкою K у відношенні $AK:KB = 3:2$.

Побудова:

(побудову можна починати з будь-якої площини проекцій $П_1$,$П_2$ або $П_3$, а також з будь-якої точки: A або B):

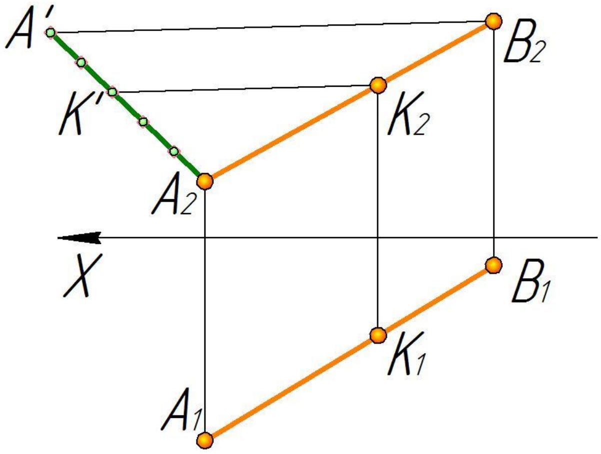


Рис. 2.19

1. з фронтальної проекції точки $A(A_2)$ проводимо довільний промінь;
2. відрізок АВ треба розділити у відношенні $3:2$, отже повинно бути п’ять однакових частин. На довільному промені відкладаємо п’ять довільних, але рівних між собою відрізків. Отримуємо точку A’.
3. з’єднуємо точку A’ з фронтальною проекцією точки $B(B_2)$.
4. відрізок AA’ має п’ять однакових частин. Позначаємо на ньому точку K' (три частини від фронтальної проекції точки $A(A_2)$);
5. з точки K' проводимо лінію $K'K_2 \parallel A'B_2$ – отримуємо фронтальну проекцію точки $K(K_2)$;
6. відповідно до першого закону проекційного зв’язку визначаємо горизонтальну проекцію точку $K(K_1)$;
7. після виконаних дій отримуємо: $A_2K_2:K_2B_2 = 3:2$, $A_1K_1:K_1B_1 = 3:2$.

2.6. Взаємне розташування двох прямих у просторі

Дві прямі лінії одна відносно другої можуть займати у просторі такі принципово відмінні положення: збігатися, бути паралельними, перетинатися, бути мимобіжними.

2.6.1. Прямі, що збігаються

Якщо дві прямі лінії у просторі збігаються, то на комплексному кресленні їх однойменні проекції теж збігаються (рис.2.20). Тобто: $AB = CD \Rightarrow A_1B_1 = C_1D_1;\ A_2B_2 = C_2D_2;\ A_3B_3 = C_3D_3$.

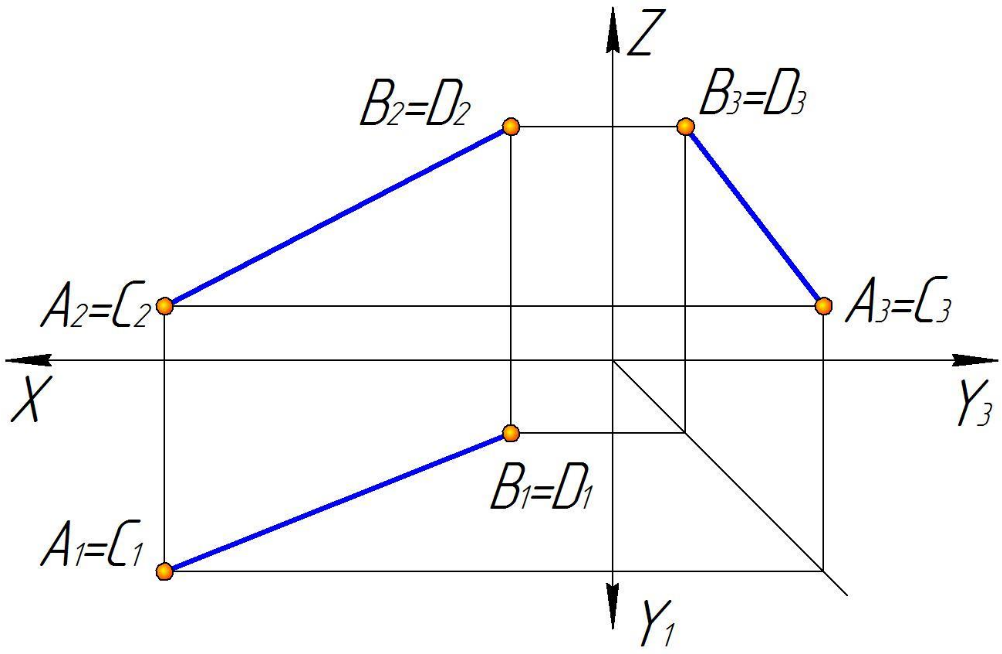
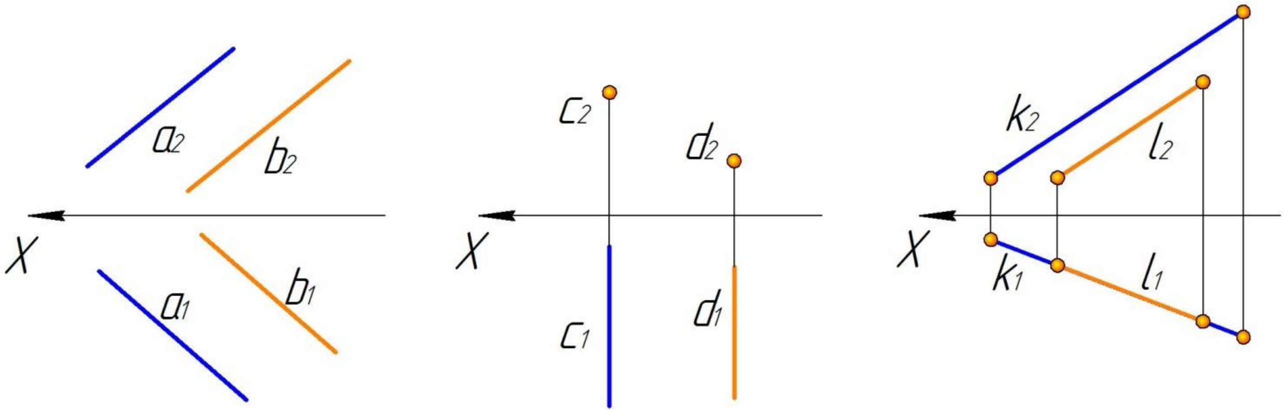


Рис. 2.20

2.6.2. Паралельні прямі

Якщо дві прямі лінії *в просторі паралельні*, то на комплексному кресленні їх однойменні проекції також *взаємно паралельні* (рис.2.21).



$a // b \Rightarrow$ $a_1 // b_1;\ a_2 // b_2$

$c // d \Rightarrow$ $c_1 // d_1;\ c_2 // d_2$

$k // l \Rightarrow$ $k_1 // l_1;\ k_2 // l_2$

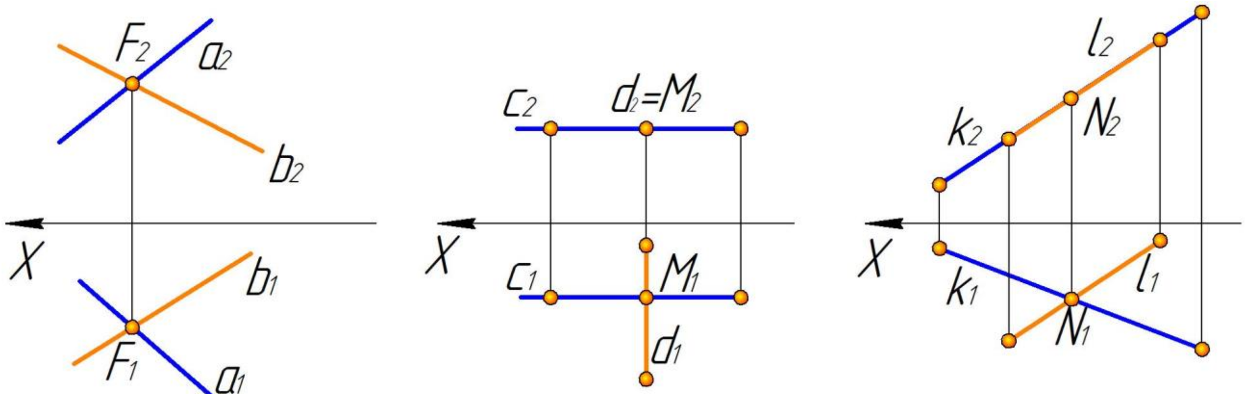
Рис. 2.21

2.6.3. Прямі, що перетинаються

Якщо дві прямі лінії *в просторі перетинаються*, то на комплексному кресленні точки перетину їх однойменних проекцій лежать на одній лінії проекційного зв'язку.

Наприклад, дві прямі лінії a і b у просторі перетинаються в точці F. На комплексному кресленні (рис.2.22,*а*) однойменні проекції прямих також перетинаються у точках F_1 і F_2, які розташовані на одній лінії проекційного зв’язку.

На рис.2.22,*б*) перетинаються дві прямі c і d в точці M; на рис.2.22,*в* – прямі k і l в точці N.



$a \cap b = F \Rightarrow$ $\quad$ $c \cap d = M \Rightarrow$ $\quad$ $k \cap l = N \Rightarrow$

$a_1 \cap b_1 = F_1$ $\quad$ $c_1 \cap d_1 = M_1$ $\quad$ $k_1 \cap l_1 = N_1$

$a_2 \cap b_2 = F_2$ $\quad$ $c_2 \cap d_2 = M_2$ $\quad$ $k_2 \cap l_2 = N_2$

а $\quad$ б $\quad$ в

Рис. 2.22

2.6.4. Мимобіжні прямі

Якщо дві прямі лінії a і b у просторі не паралельні і не перетинаються, тобто не мають спільної точки, то такі прямі називаються *мимобіжними*; на комплексному кресленні точки перетину їх однойменних проекцій не лежать на одній лінії зв'язку.

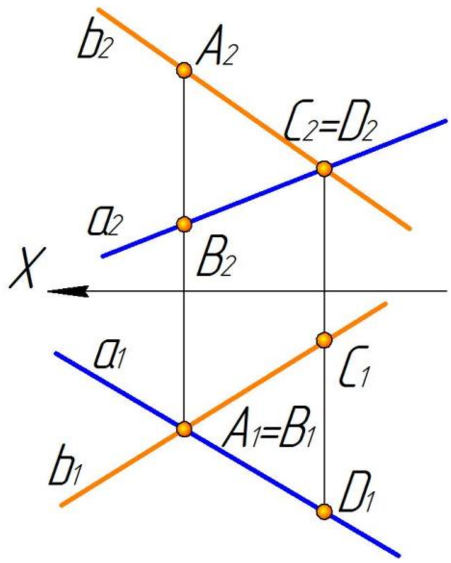


Рис. 2.23

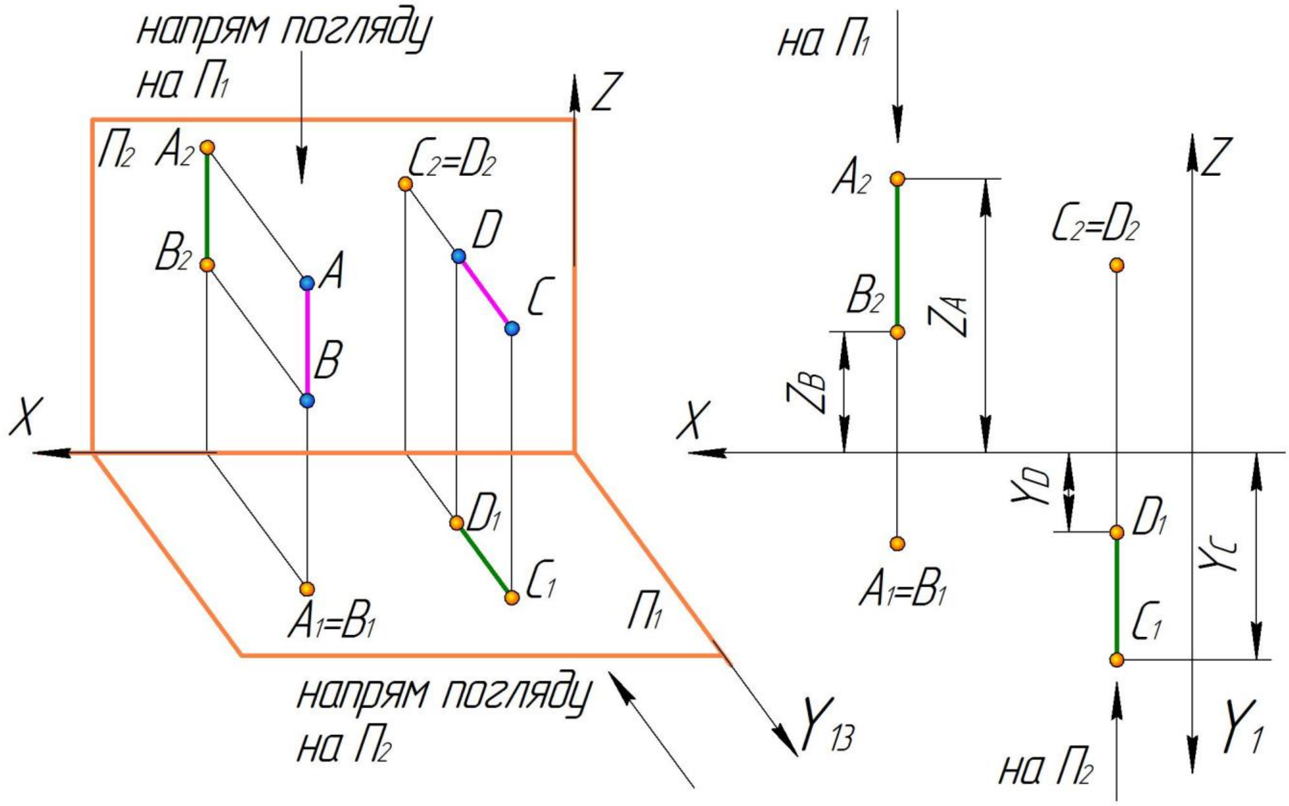
На комплексному кресленні (рис.2.23) зображено мимобіжні прямі a і b. Точки A і B називаються горизонтально - конкуруючими точками; C і D - фронтально - конкуруючими точками.

Для визначення мимобіжних прямих загального положення досить мати тільки дві пари їх однойменних проекцій. У таких випадках по перше, однойменні проекції (принаймні хоч би одна) обов'язково перетинаються, по друге, ці точки перетину не повинні бути розташованими на одній лінії проекційного зв'язку.

2.6.5. Метод конкуруючих точок

Розглянемо рис.2.24,*а*. Точки A і B знаходяться на одному проеціювальному промені відносно горизонтальної площини проекції і проектуються на горизонтальну площину проекцій Π_1 в одну точку. Отже, A і B - горизонтально-конкуруючі точки. Точка A знаходиться «над» точкою B. На комплексному кресленні (рис.2.24,*б*) висота точки A більше за висоту точки B. Тому, на горизонтальній площині проекцій Π_1 точка A буде видима, а точка B – невидима.

Точки C і D знаходяться на одному проеціювальному промені відносно фронтальної площини проекції і проектуються на фронтальну площину проекцій Π_2 в одну точку. Отже, C і D - фронтально-конкуруючі точки. Точка C знаходиться «перед» точкою D. На комплексному кресленні (рис.2.24,*б*) відстань до точки C більше, ніж відстань до точки D. Тому, на фронтальній площині проекцій Π_2 точка C буде видима, а точка D – невидима.



а б

Рис. 2.24. Метод конкуруючих точок

Правило:

1. З двох горизонтально-конкуруючих точок на $П_1$ видно проекцію тієї точки, висота якої більша (координата Z).

2. З двох фронтально-конкуруючих точок на $П_2$ видно проекцію тієї точки, глибина якої більша (координата Y).

3. З двох профільно-конкуруючих точок на $П_3$ видно проекцію тієї точки, широта якої більша (координата X).

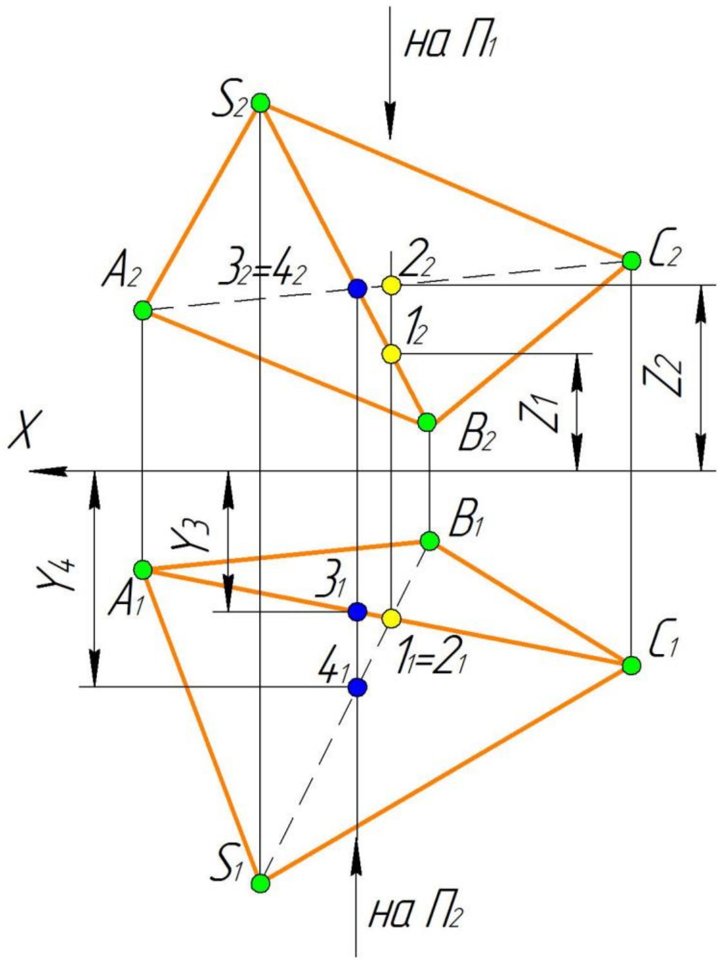


Рис. 2.25

Дано: $SABC$ - піраміда.

Визначити методом конкуруючих точок видимість ребер на $П_1$ і $П_2$ (рис.2.25).

Рішення.

1. Визначимо на горизонтальній площині проекцій видимість ребер AC і SB.

Припустимо, що точка 1 належить прямої SB, а точка 2 – AC:

$1 \in SB \Rightarrow 1_1 \in S_1B_1;$
$1_2 \in S_2B_2.$
$2 \in AC \Rightarrow 2_1 \in A_1C_1;$
$2_2 \in A_2C_2.$

Позначаємо фронтальні проекції точок $1(1_2)$ і $2(2_2)$ на відповідних проекціях ребер.

Висота (z) для точки $2(2_2)$ більше, ніж висота для точки $1(1_2)$. Отже, на горизонтальній площині проекцій видима точка $2(2_1)$. Точка 2 належить ребру AC, тому на горизонтальній площині проекцій ребро AC буде видимим, а ребро SB – невидимим.

2. Визначимо на фронтальній площині проекцій видимість ребер AC і SB.

Припустимо, що точка 3 належить прямої AC, а точка 4 – SB:

$3 \in AC \Rightarrow 3_1 \in A_1C_1;\ 3_2 \in A_2C_2.$

$4 \in SB \Rightarrow 4_1 \in S_1B_1;\ 4_2 \in S_2B_2.$

Позначаємо горизонтальні проекції точок $3(3_1)$ і $4(4_1)$ на відповідних проекціях ребер.

Глибина (y) для точки $4(4_1)$ більше, ніж глибина для точки $3(3_1)$. Отже, на фронтальній площині проекцій видима точка $4(4_1)$. Точка 4 належить ребру SB, тому на фронтальній площині проекцій ребро SB буде видимим, а ребро AC – невидимим.

2.7. Сліди прямої лінії

Серед нескінченних множин точок, що належать прямій лінії, є такі, які за відношенням до площини проекцій займають особливе положення, тобто належать певній площині проекцій. Такі точки виникають як результат перетину прямої лінії із площиною проекцій. У загальному випадку, коли пряма лінія не паралельна і не перпендикулярна жодній з площин проекцій, має відбутися перетин її з кожною із площин проекцій в одній точці (рис.2.26).

Точка перетину прямої лінії з певною площиною проекцій отримала назву слід прямої лінії.

Точка $H(H_1, H_2, H_3)$ перетину прямої лінії l з горизонтальною площиною проекцій $П_1$ має назву *горизонтального сліду* ($AB \cap П_1$);

точка $F(F_1, F_2, F_3)$ перетину прямої l з фронтальною площиною проекцій $П_2$ - *фронтального сліду* ($AB \cap П_2$);

точка $P(P_1, P_2, P_3)$ перетину прямої l з профільною площиною проекцій $П_3$ - *профільного сліду* ($AB \cap П_3$).

Пряма, паралельна одній з площин проекцій має два сліди, а паралельна одночасно двом площинам проекцій - один слід.

Виходячи з того, що кожний слід одночасно відповідає двом умовам (перша - належати прямій, друга - належати певній площині проекцій), можна сформулювати загальне правило, згідно з яким на комплексному кресленні визначалися б його проекції.

Так, оскільки горизонтальний слід H прямої лінії l розташований на горизонтальній площині проекцій $П_1$, його фронтальна проекція H_2 може, з одного боку, мати місце тільки на осі O_x, з другого - на фронтальній проекції l_2 прямої l. Тому спочатку отримаємо цю точку при перетині фронтальної проекції l_2 прямої l з віссю O_x (рис.2.27).

Далі, згідно з першим законом проеціювального зв'язку, через H_2 проведемо перпендикуляр до осі O_x, щоб одержати горизонтальну проекцію H_1 горизонтального сліду прямої.

Проте, згідно з законом належності точки до прямої лінії (взагалі), остаточно дістаємо H_1 на перетині цього перпендикуляра з горизонтальною проекцією l_1 прямої l.

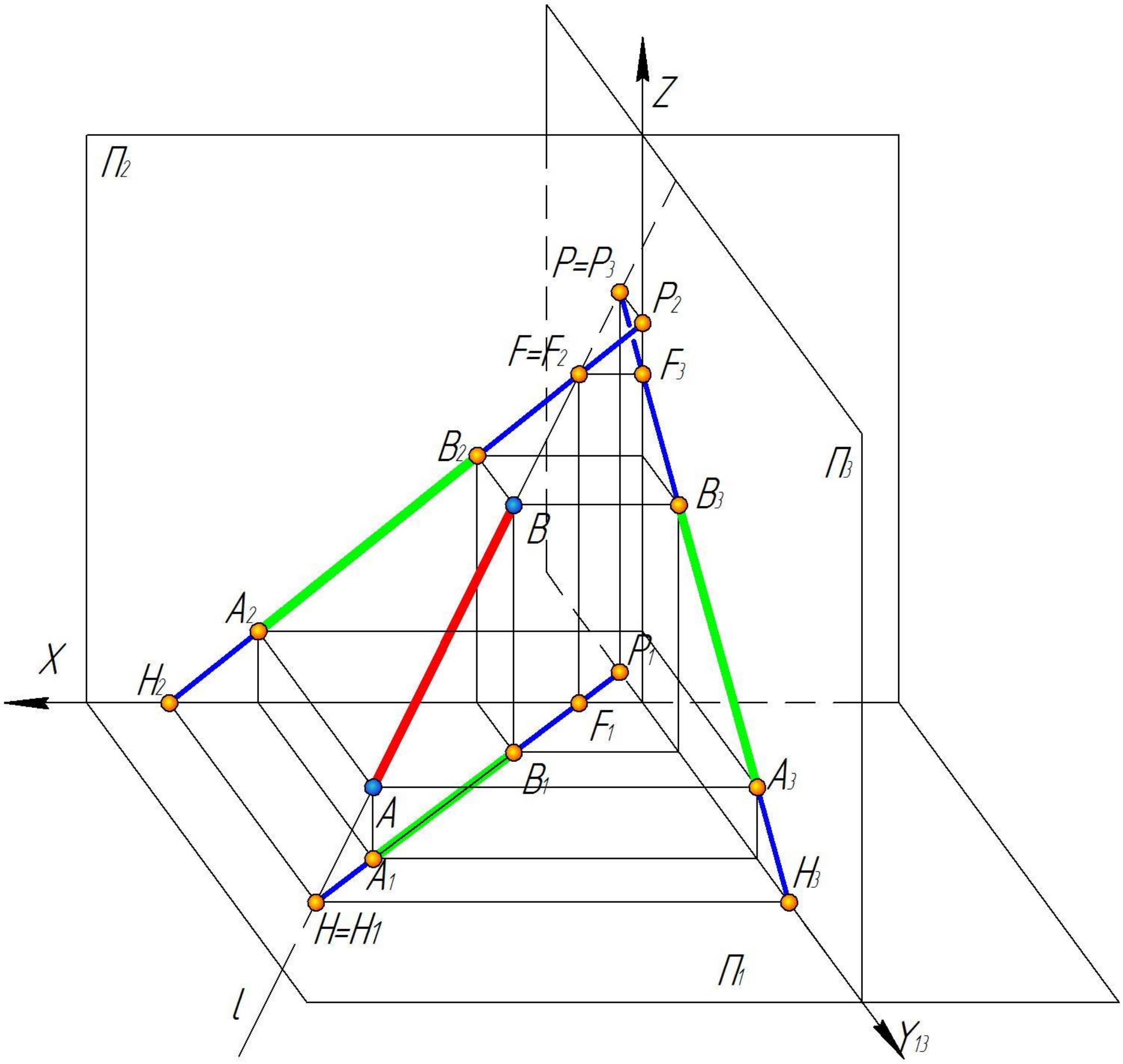


Рис. 2.26

За другим законом проеціювального зв'язку профільна проекція H_3, горизонтального сліду H повинна бути на перпендикулярі до осі O_z, проведеному через H_2 (у даному випадку він збігається з віссю $O_x \equiv O_y$), і одночасно на профільній проекції прямої l_3 (за законом належності). Таким чином, H_3, отримаємо як результат перетину l_3 з віссю O_y.

Аналогічно визначаються проекції фронтального сліду. Але тут спочатку визначається горизонтальна проекція F_1 фронтального сліду F прямої l на перетині горизонтальної проекції прямої l_1 з віссю O_x. Далі в цій точці за першим законом проеціювального зв'язку встановлюємо перпендикуляр до осі O_x і, нарешті, на перетині його з продовженням фронтальної проекції l_2 прямої l за законом належності отримаємо фронтальну проекцію F_2 фронтального сліду F прямої l. Профільну проекцію F_3 фронтального сліду F отримаємо на перетині профільної проекції l_3 прямої l з віссю O_z. При цьому має існувати пряма F_2F_3 перпендикулярна до осі O_z, як лінія проеціювального зв'язку.

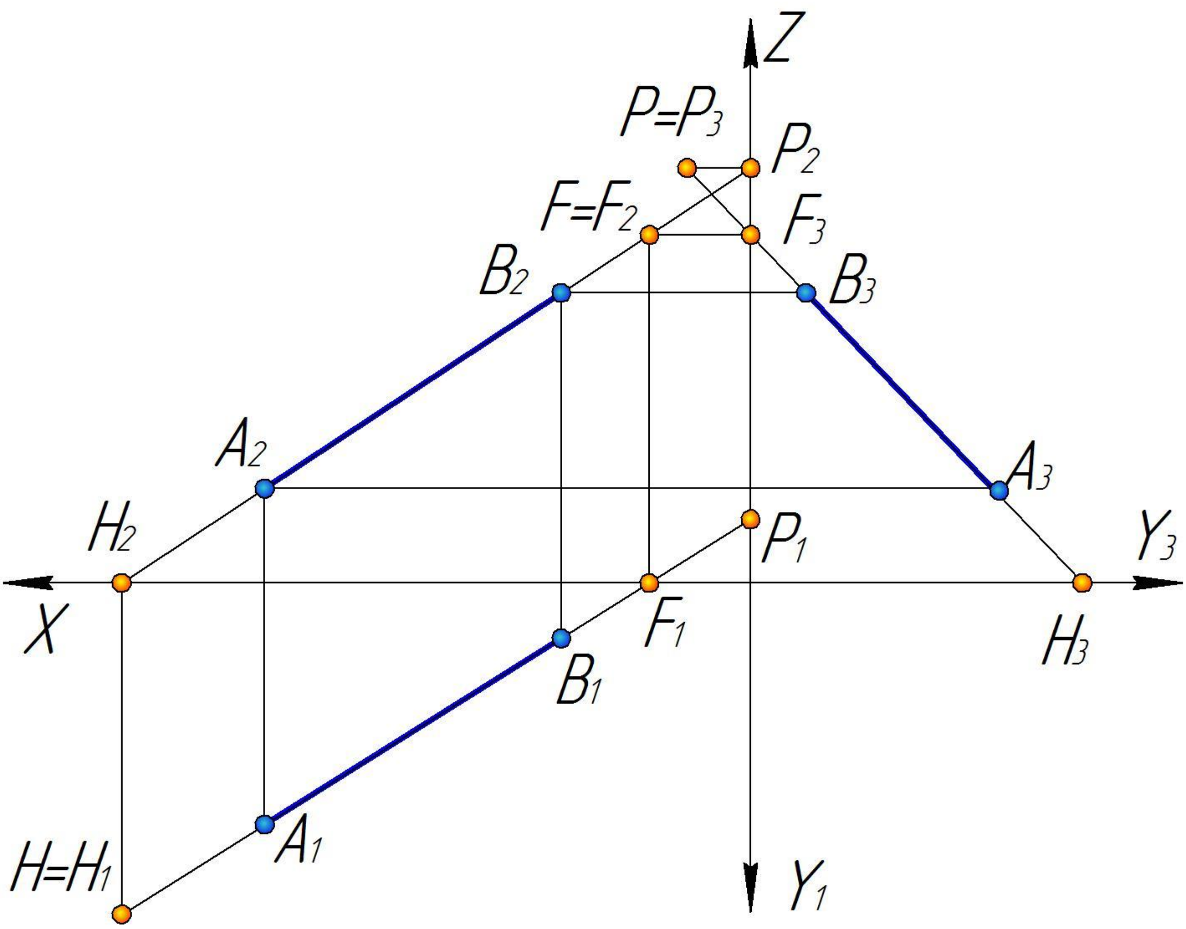


Рис. 2.27

Оскільки профільний слід P прямої l належить профільній площині проекцій П$_3$, то його горизонтальна проекція P_1 знаходиться на перетині горизонтальної проекції l_1 прямої l з віссю O_y, а фронтальна проекція P_2 - на перетині фронтальної проекції l_2 прямої l з віссю O_z. Профільну проекцію P_3, профільного сліду P прямої l отримаємо за допомогою другого закону проеціювального зв'язку і закону належності на перетині профільної проекції l_3 прямої l з перпендикуляром до осі O_z, проведеним через P_2.

Тема 3. Площина

3.1. Задання площини в просторі та на комплексному кресленні

Площина як найпростіша поверхня знаходить широке теоретичне та практичне використання в науці та інженерній практиці. Вона, по-перше, найбільш поширений геометричний об'єкт для виконання на ньому найрізноманітніших зображень, по-друге, складовий елемент переважної більшості фігур навколишнього простору, по-третє, найпростіша поверхня з точки зору отримання її при обробці і, нарешті, площина - могутній інструмент при доведенні різноманітних теорем, при виконанні різних перетворень, побудов і в науково-дослідній діяльності.

З геометричної точки зору площину Σ (рис.3.1) можна подати у вигляді нескінченної множини прямих ліній $a, b, c, d, \ldots$, які проходять у просторі через нерухому точку A і перетинають у точках $B, C, D, E, \ldots$ деяку задану пряму l, що не проходить через цю точку.

Тоді будь-яка пара прямих: a і b, або a і c, або a і d, або c і d, і т.п. - визначає площину Σ. Але кожна з прямих, у свою чергу, визначається двома точками: пряма a - точками A і B, пряма b - точками A і C, пряма c - точками A і D і т.п. Тому в будь-якому випадку у визначенні площини фігурує точка A та якісь дві точки з послідовності $B, C, D, E, \ldots$. Звідси випливає, що *визначником площини є які завгодно три точки, що не лежать на одній прямій лінії*. Наприклад, зображену на рис.3.1 площину Σ можна задати точками A, B, C, або точками A, D, E і т.п.

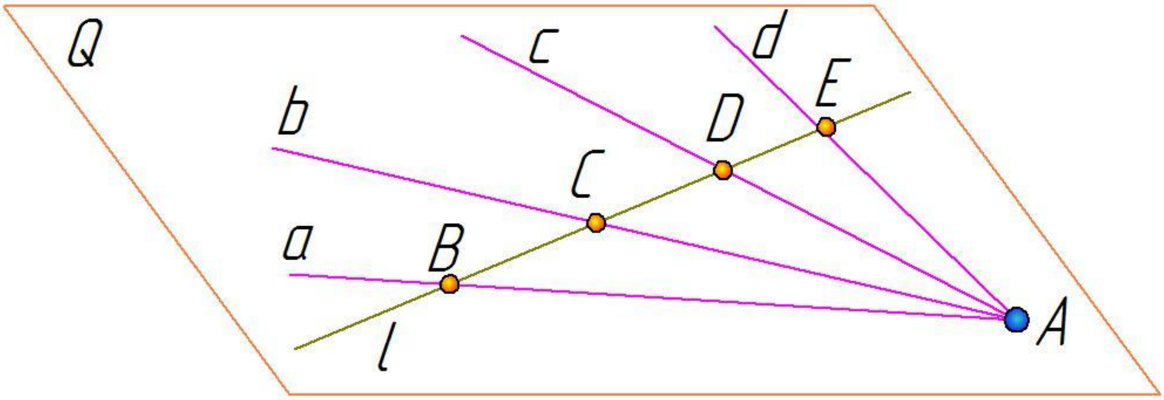


Рис.3.1.

На комплексному кресленні площина, задана трьома точками A, B і C має бути зображена їх відповідними проекціями (рис.3.2).

Такий спосіб завдання площини є основним. Розглянемо можливі варіанти, для цього три точки, якими задана площина, змінимо геометрично еквівалентними елементами.

Перший варіант. Площину Σ можна подати прямою n, що проходить через точки B і C, і точкою A, через яку пряма n не проходить (рис. 3.3,*а*).

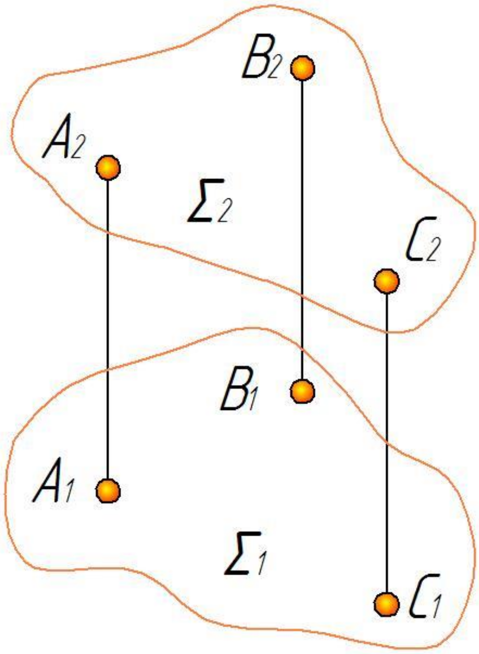
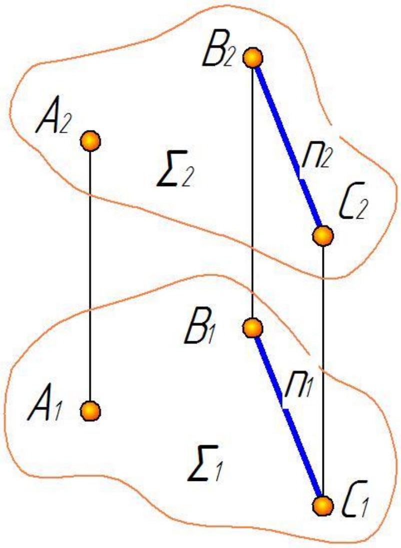


Рис.3.2.

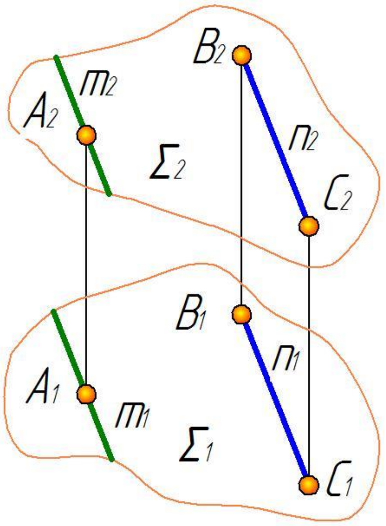
Другий варіант може бути побудований, наприклад, шляхом проведення через точку A прямої m, паралельної прямій n. На рис.3.3,*б* зображене комплексне креслення цієї площини, яка, таким чином, задана двома паралельними прямими - m і n.

Третій варіант. Ту саму площину Σ можна представити двома прямими, що перетинаються. Наприклад, якщо через точки A і B провести пряму m, а через точки B і C - пряму n, то ці прямі перетнуться у точці B і таким чином утворять площину Σ. Комплексне креслення цього варіанту представлене на рис. 3.3,*в*.

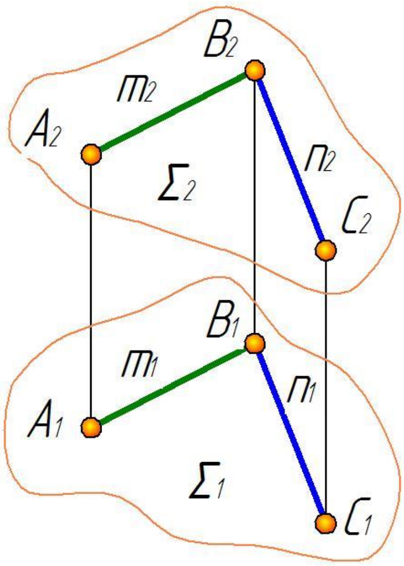
Задану точками A, B і C площину Σ можна також представити будь-якою плоскою фігурою, наприклад, трикутником, колом, гіперболою, еліпсом та ін. На рис.3.3,*г* подано один із прикладів - задання площини Σ чотирикутником $ABCD$.



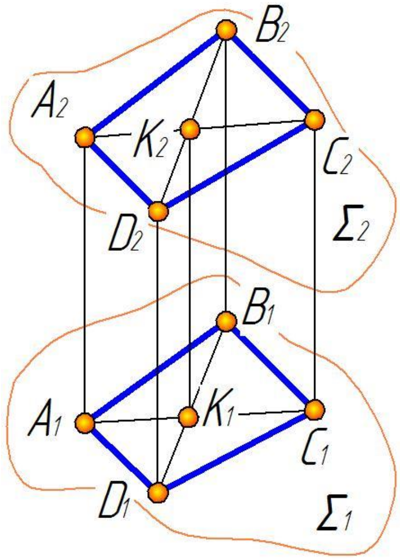
а) прямою і точкою, що не лежить на прямій



б) двома паралельними прямими



в) двома прямими, які перетинаються



г) будь-якою плоскою фігурою

Рис.3.3. Варіанти задання площини

Нарешті, площину Σ можна задати *слідами* h^0, f^0, p^0, *що являють собою прямі лінії, по яких вона перетинає відповідні площини проекцій* (рис.3.4). Відповідно до цього матимемо:

$h^0(h_1^0, h_2^0, h_3^0)$ - горизонтальний слід площини - лінія перетину площини Σ з горизонтальною площиною проекцій Π_1;

$f^0(f_1^0, f_2^0, f_3^0)$ - фронтальний слід площини - лінія перетину площини Σ з фронтальною площиною проекцій П2;

$p^0(p_1^0, p_2^0, p_3^0)$ - профільний слід площини - лінія перетину площини Σ з профільною площиною проекцій П3.

Σ_x, Σ_y і Σ_z - *точки сходу слідів площини* - точки перетину заданої площини з осями проекцій O_x, O_y, O_z.

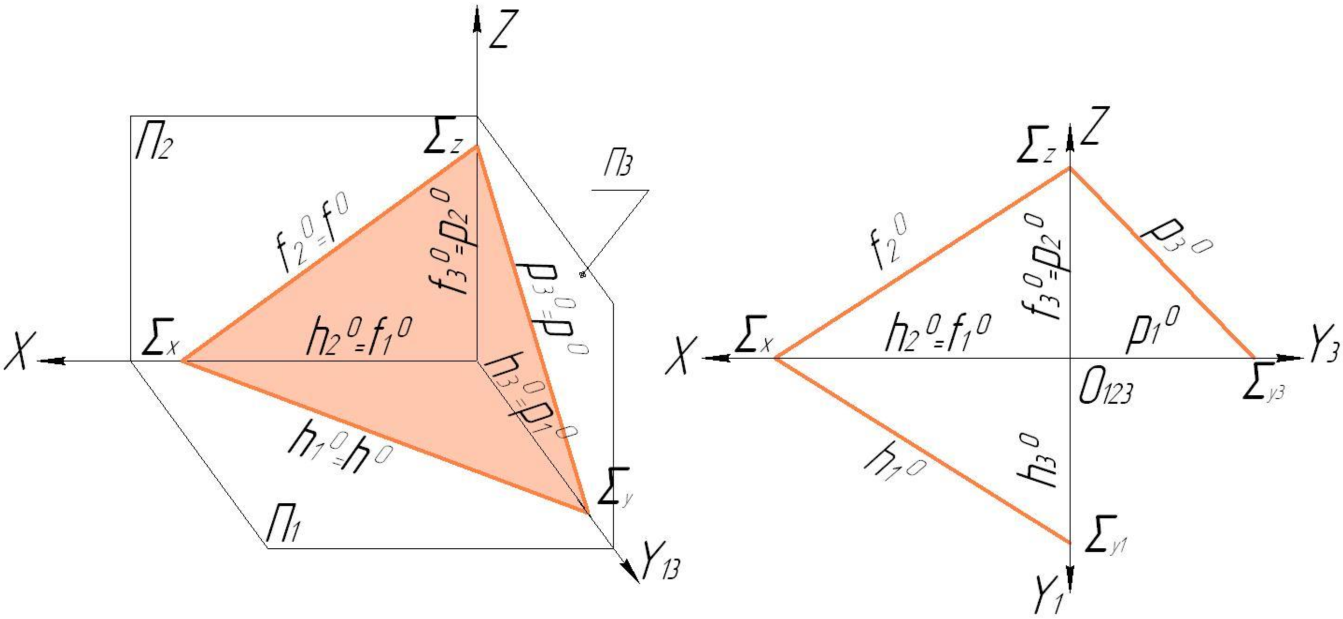


Рис. 3.4. Задання площини слідами

На *комплексному кресленні слід площини* - це пряма, яка належить цій площині Σ і площині проекцій, отже співпадає на кресленні з однойменною проекцією, а інші його проекції лежать на осях.

Горизонтальний слід площини h^0 співпадає з горизонтальною проекцією горизонтального сліду h_1^0 $(h^0 = h_1^0)$, а його інші проекції (фронтальна і профільна) лежатимуть на осях O_x і O_y. Аналогічно $f_2^0 = f^0$, $p_3^0 = p^0$.

Сліди прямих, які належать площині, знаходяться на однойменних слідах цієї площини. Тому, для того, що б визначити сліди площини, треба знайти сліди прямих і з'єднати їх однойменні проекції - це і будуть сліди площини.

Задача. Дано: $\Sigma(a \cap b)$.

Знайти: сліди площини (рис.3.5).

Рішення. 1.Знаходимо горизонтальний і фронтальний слід прямої b (послідовність визначення слідів прямої розглянуто в темі 2). Отримуємо для горизонтального сліду: $H = H_1$, H_2; для фронтального сліду: F_1, $F = F_2$.

2. Аналогічно знаходимо горизонтальні і фронтальні сліди прямої a. Отримуємо для горизонтального сліду: $H' = H'_1$,H'_2; для фронтального сліду: F'_1, $F' = F'_2$.

3. З'єднуємо $(H = H_1) \cup (H' = H'_1)$ отримуємо: $h^0 = h_1^0$;

$(F = F_2) \cup (F' = F'_2)$ отримуємо: $f_2^0 = f^0$.

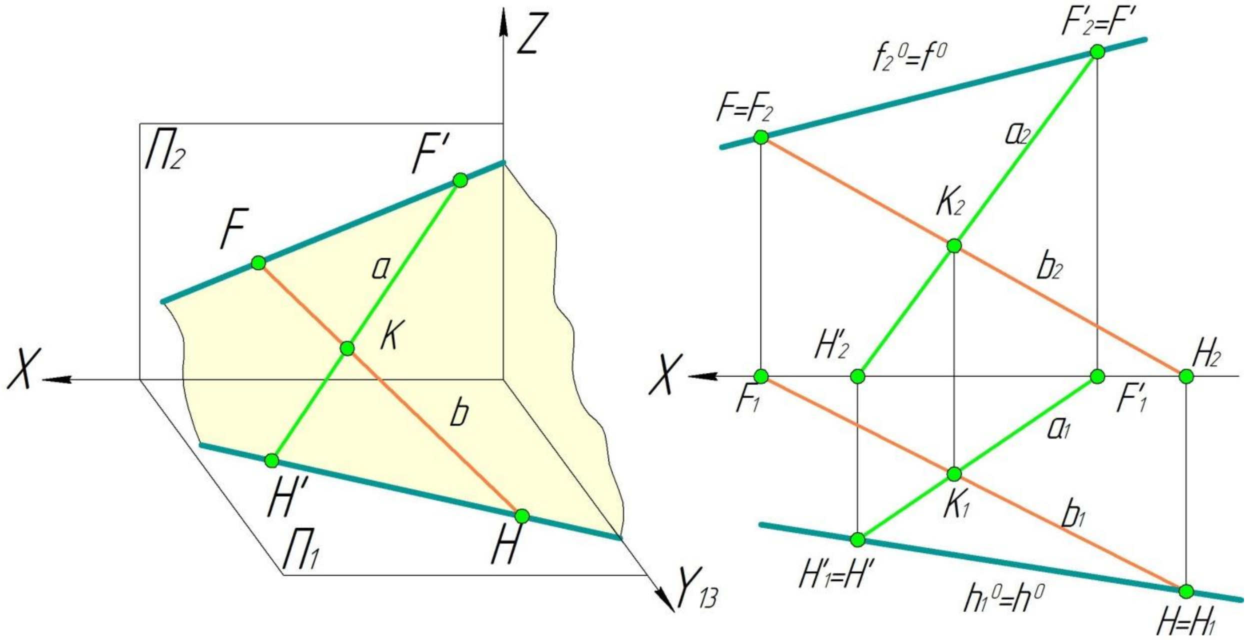


Рис. 3.5

Основні властивості площини виражаються наступними аксіомами:

1. Через будь-які три точки, що не лежать на одній прямій, можна провести площину й до того ж лише одну.

2. Якщо дві точки прямої належать площині, то й кожна точка цієї прямої належить площині.

3. Якщо дві площини мають загальну точку, то вони перетинаються по прямій, яка проходить через цю точку.

4. Чотири точки простору, узяті довільно, можуть не пертиналежати одній площині.

3.2. Положення площини відносно площин проекцій

В ортогональній системі площин проекцій $П_1$,$П_2$,$П_3$ площина Σ може мати будь-яке положення. Але можна виділити тільки три принципово відмінних за такими показниками.

3.2.1. Площина загального положення

Площина загального положення - це площина, не паралельна і не перпендикулярна жодній із площин проекцій. Тому вона утворює з усіма площинами проекцій кути, що відрізняються від 0^0 та 90^0. Позначаються ці кути таким чином: α з $П_1$, β з $П_2$, і γ з $П_3$. Приклад такої площини наведено на рис.3.4.

3.2.2. Площина окремого положення першої групи

Площина окремого положення першої групи – це площина, перпендикулярна тільки одній із площин проекцій.

Площини, які перпендикулярні тільки до однієї з площин проекції називаються *проеціювальними площинами.*

Слід - проекція проеціювальної площини має збиральну властивість: проекції всіх точок, прямих і плоских фігур, які лежать в цій площині, проектуються на відповідний слід – проекцію, тобто збігаються з її слідом (прямою) на цій площині проекцій.

На рис.3.6. зображена горизонтальнопроеціювальна площина Σ.

Точки A, B і C належать площині Σ. Їхні горизонтальні проекції A_1, B_1 і C_1 збігаються з горизонтальним слідом Σ_1 площини Σ.

Відрізок AB належать площині Σ. Також він перпендикулярний до горизонтальної площини проекції $П_1$ і проекціюється на $П_1$ в точку $A_1 \equiv B_1$, яка в свою чергу збігається із слідом $\Sigma_1 \equiv \Sigma$.

Нарешті, будь-яка пряма AC, плоска крива l і будь-яка інша плоска геометрична фігура ABC проеціюється на $П_1$ у вигляді прямої лінії l_1 яка збігається із слідом $\Sigma \equiv \Sigma_1 \equiv l_1$.

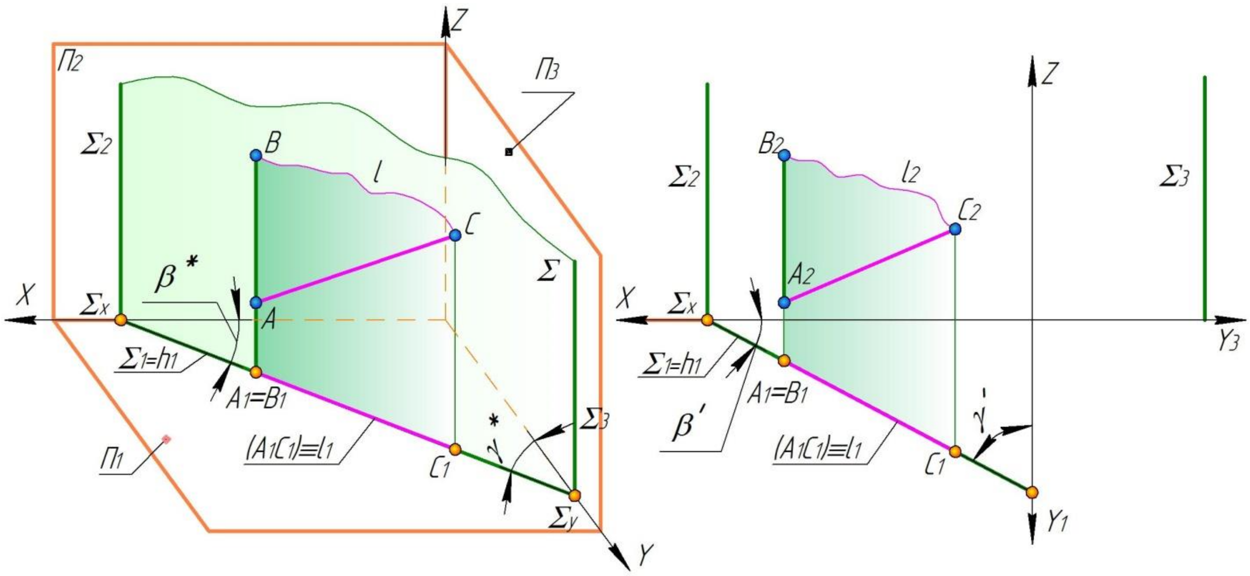


Рис. 3.6. Горизонтальнопроеціювальна площина Σ

Відзначимо також, що кути α, β, γ, які утворилися з відповідними площинами проекцій, набувають також особливого значення. Так, у розглянутому випадку $\alpha = \alpha' = 90^0$, а β і γ мають своїми проекціями відповідно β' і γ' - натуральну величину, тобто $\beta = \beta'$ і $\gamma = \gamma'$.

Отже, всі об'єкти, які розташовані в цій площині, на горизонтальну площину проекцій Π_1 проектуються на слід-проекцію Σ_1, фронтальна проекція горизонтальнопроеціювальної площини Σ_2 буде розташована перпендикулярно до осі OX; профільна проекція горизонтальнопроеціювальної площини Σ_3 буде розташована перпендикулярно до осі OY.

На рис.3.7. зображена фронтальнопроеціювальна площина Δ.

Точки A, B і C належать площині Δ. Їхні фронтальні проекції A_2, B_2 і C_2 збігаються з фронтальним слідом Δ_2 площини Δ.

Відрізок AB належать площині Δ. Також він перпендикулярний до фронтальної площини проекції Π_2 і проеціюється на Π_2 в точку $A_2 \equiv B_2$, яка своєю чергою збігається зі слідом $\Delta_2 \equiv \Delta$.

Будь-яка пряма AC, плоска крива l і будь-яка інша плоска геометрична фігура ABC проеціюється на Π_2 у вигляді прямої лінії l_2 яка збігається із слідом $\Delta \equiv \Delta_2 \equiv l_2$.

Кут, що утворився між площиною Δ і Π_2, є прямим, тобто $\beta = \beta' = 90^0$, а кути α і γ мають своїми проекціями натуральну величину відповідно α' і γ', тобто $\alpha = \alpha'$ і $\gamma = \gamma'$.

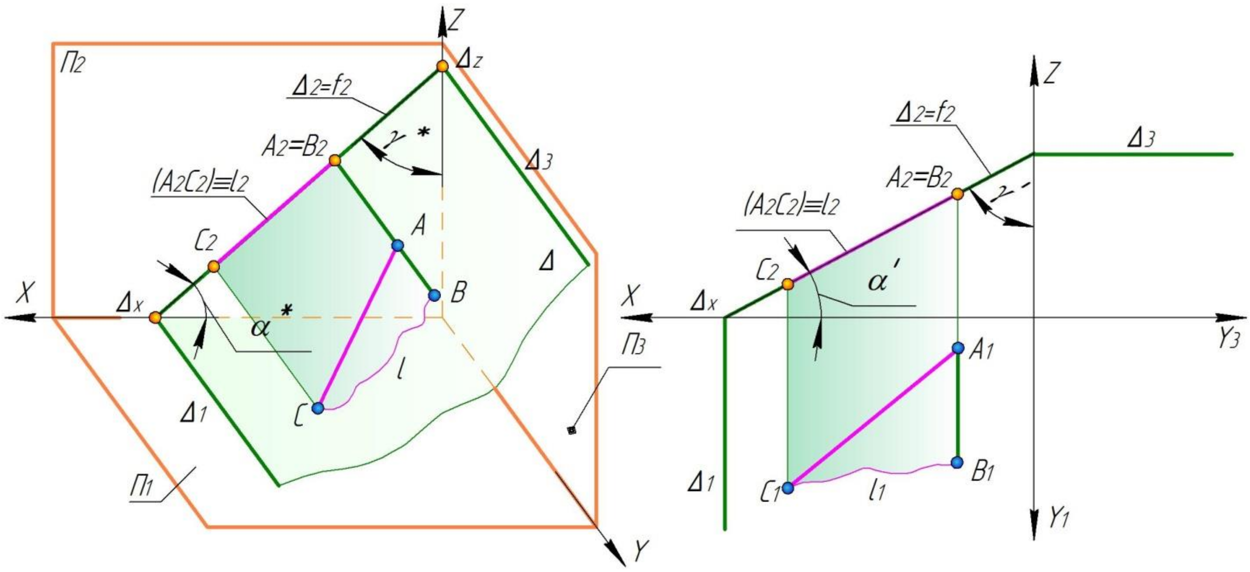


Рис. 3.7. Фронтальнопроеціювальна площина Δ

Отже, всі об'єкти, які розташовані в цій площині, на фронтальну площину проекцій $П_2$ проеціюються на слід-проекцію $Δ_2$, горизонтальна проекція фронтальнопроеціювальної площини $Δ_1$ буде розташована перпендикулярно до осі OX; профільна проекція фронтальнопроеціювальної площини $Δ_3$ буде розташована перпендикулярно до осі OY.

На рис.3.8. зображена профильнопроеціювальна площина Ω.

Всі об'єкти, які розташовані в цій площині, на профильну площину проекцій $П_3$ проеціюються на слід-проекцію $Ω_3$, горизонтальна проекція профильнопроеціювальної площини $Ω_1$ буде розташована перпендикулярно до осі OY; фронтальна проекція профильнопроеціювальної площини $Ω_2$ буде розташована перпендикулярно до осі OZ.

Кут, що утворився між площиною Ω і $П_3$, є прямим, тобто $\gamma = \gamma' = 90^0$, а кути α і β мають своїми проекціями натуральну величину відповідно α' і β', тобто $\alpha = \alpha'$ і $\beta = \beta'$.

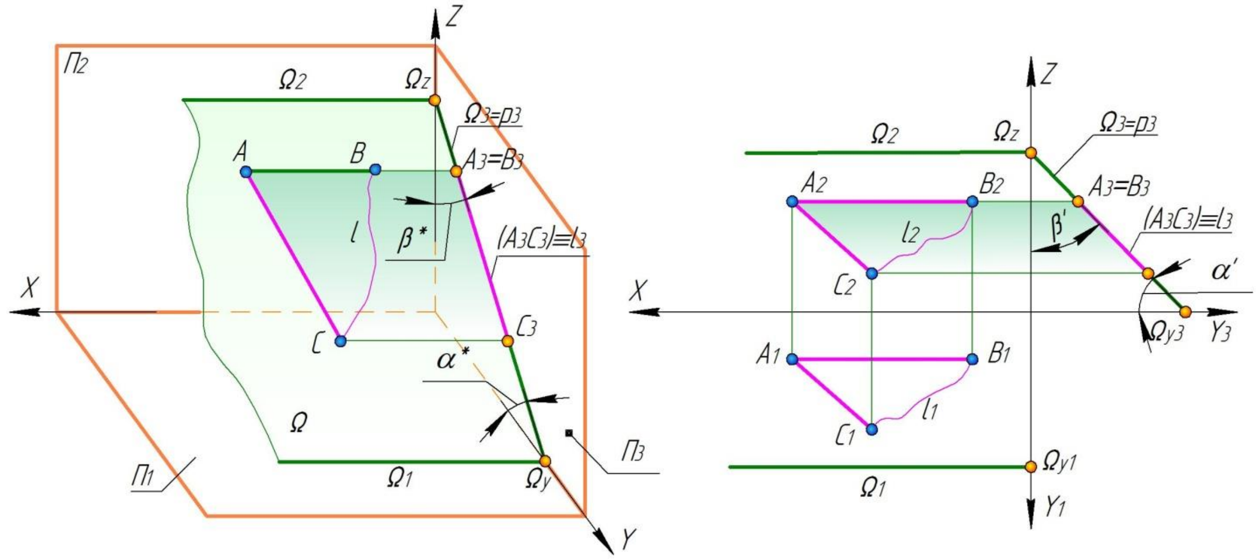


Рис. 3.8. Профильнопроеціювальна площина Ω

Зазвичай прийняте наступне: якщо проеціювальна площина задається слідами, то її задають одним слідом. На рис.3.9. зображено горизонтально - проеціювальну площину Σ.

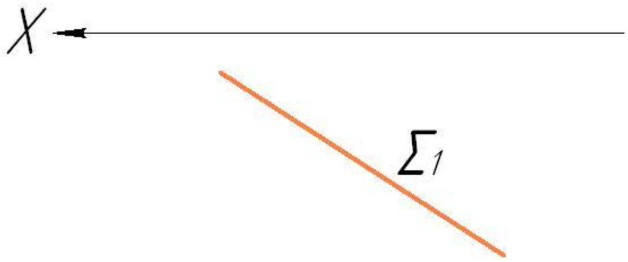


Рис. 3.9

Задача.

Дано: пряма СД. Відповідно задані проекції $С_1Д_1$ і $С_2Д_2$.

Знайти: Заключити пряму СД у фронтально-проектуючу площину $\Sigma \perp П_2$ (рис.3.10).

Рішення: оскільки фронтальна проекція фронтально - проеціювальної площини Σ_2 має збірну властивість, то через фронтальну проекцію прямої $С_2Д_2$ проводимо фронтальну проекцію фронтальнопроеціювальної площини: $\Sigma_2 = С_2Д_2$.

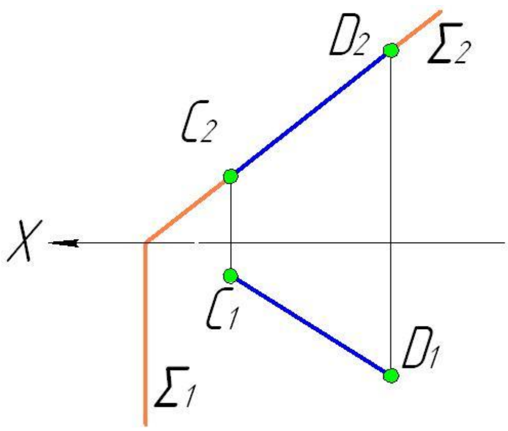


Рис. 3.10

$\Sigma_1 \perp П_1$ - оскільки горизонтальна проекція фронтальнопроецюючої площини буде розташована перпендикулярно до осі OX.

3.2.3. Площина окремого положення другої групи

Площина окремого положення другої групи - це така площина, яка одночасно перпендикулярна до двох площин проекцій. Тоді, як наслідок, вона паралельна третій площині проекцій і тому має назву *площини рівня* (або подвійно-проеціюювальної). У площини такого положення один із її слідів має бути неособливим.

Розглянемо площину горизонтального рівня Σ (рис.3.11), яка задана трикутником ABC.

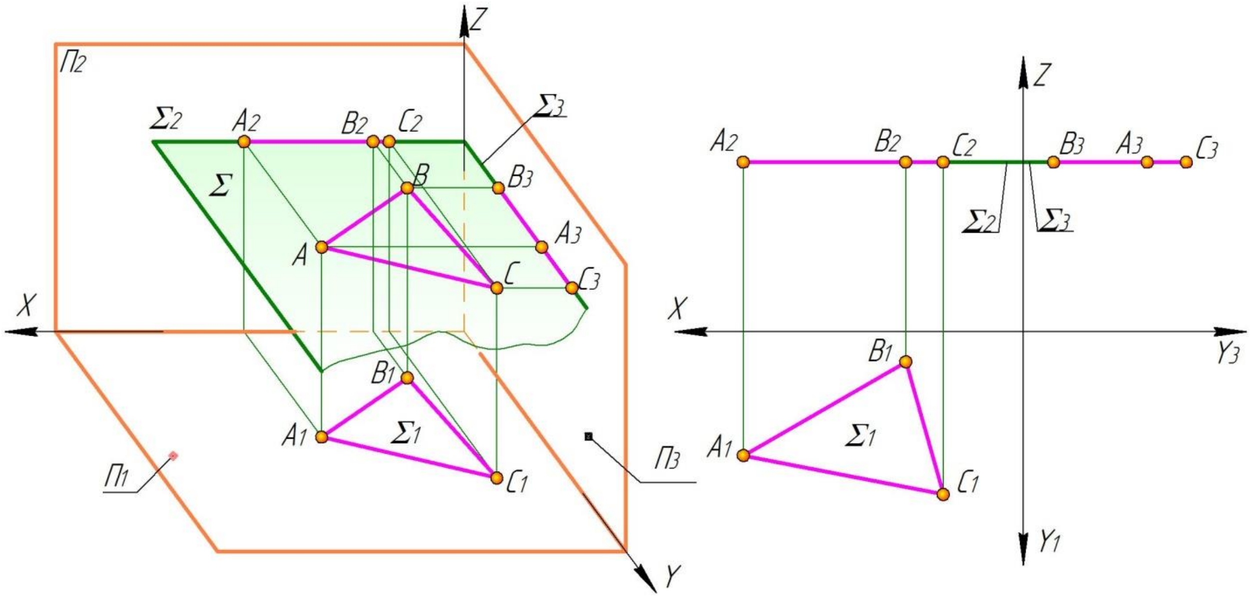


Рис. 3.11. Площина горизонтального рівня Σ

Оскільки площина Σ паралельна горизонтальній площині проекцій $П_1$, то на цю площину вона проецюється у натуральну величину: $\Sigma(ABC) // П_1 \Rightarrow A_1B_1C_1 \cong ABC.$ Фронтальна і профільна проекції слідів площини горизонтального рівня будуть перпендикулярні до осі OZ: $A_2B_2C_2 \perp OZ$; $A_3B_3C_3 \perp OZ$.

На рис.3.12 зображено площину фронтального рівня, яка паралельна фронтальній площині проекцій $П_2$, і проецюється на цю площину у натуральну величину: $\Sigma(ABC) // \Pi_2 \Rightarrow A_2B_2C_2 \cong ABC$. Горизонтальна проекція площини фронтального рівня перпендикулярна осі OY_1: $A_1B_1C_1 \perp OY_1$, профільна проекція площини фронтального рівня перпендикулярна осі OY_3: $A_3B_3C_3 \perp OY_3$.

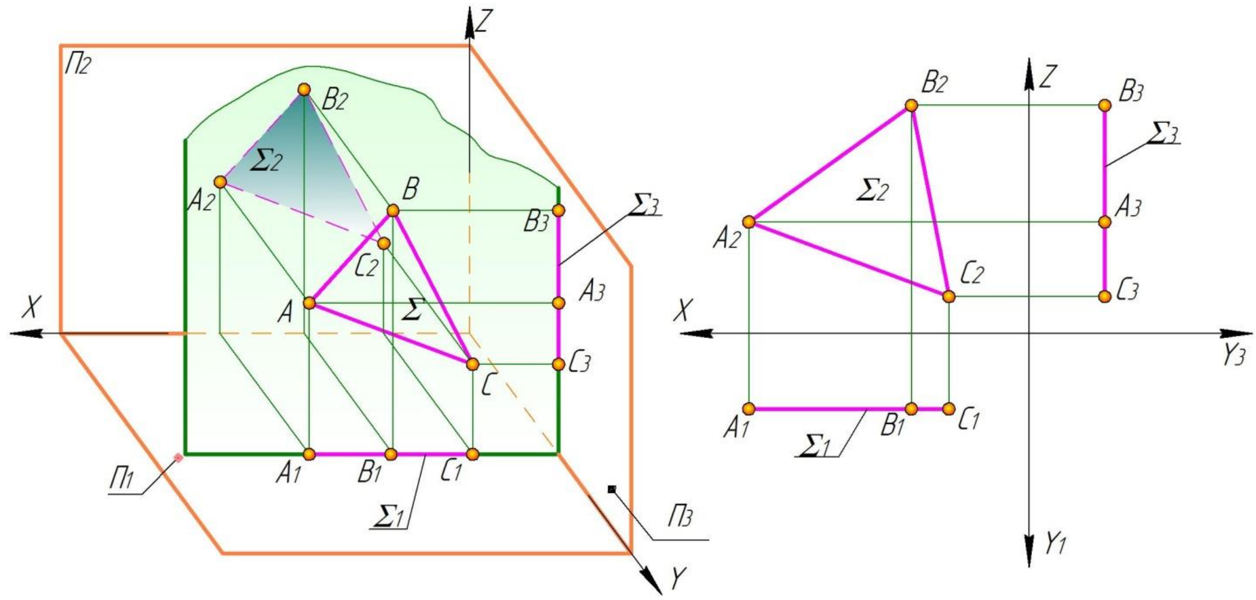


Рис. 3.12. Площина фронтального рівня Σ

На рис. 3.13 зображено площину профільного рівня, яка паралельна профільній площині проекцій П3, і проецюється на цю площину у натуральну величину: $\Sigma(ABC)//\mathit{\Pi}_3 \Rightarrow A_3B_3C_3 \cong ABC$. Горизонтальна і фронтальна проекції площини профільного рівня перпендикулярні осі 0X: $A_1B_1C_1 \perp OX$; $A_2B_2C_2 \perp OX$.

Враховуючи викладе вище визначимо *властивості площин рівня:*

1. будь-яка плоска фігура, яка лежить в площині рівня, проецюється у натуральну величину на ту площину проекцій, відносно якої вона паралельна;

2. сліди проекцій площин рівня мають збірну властивість (2 сліди).

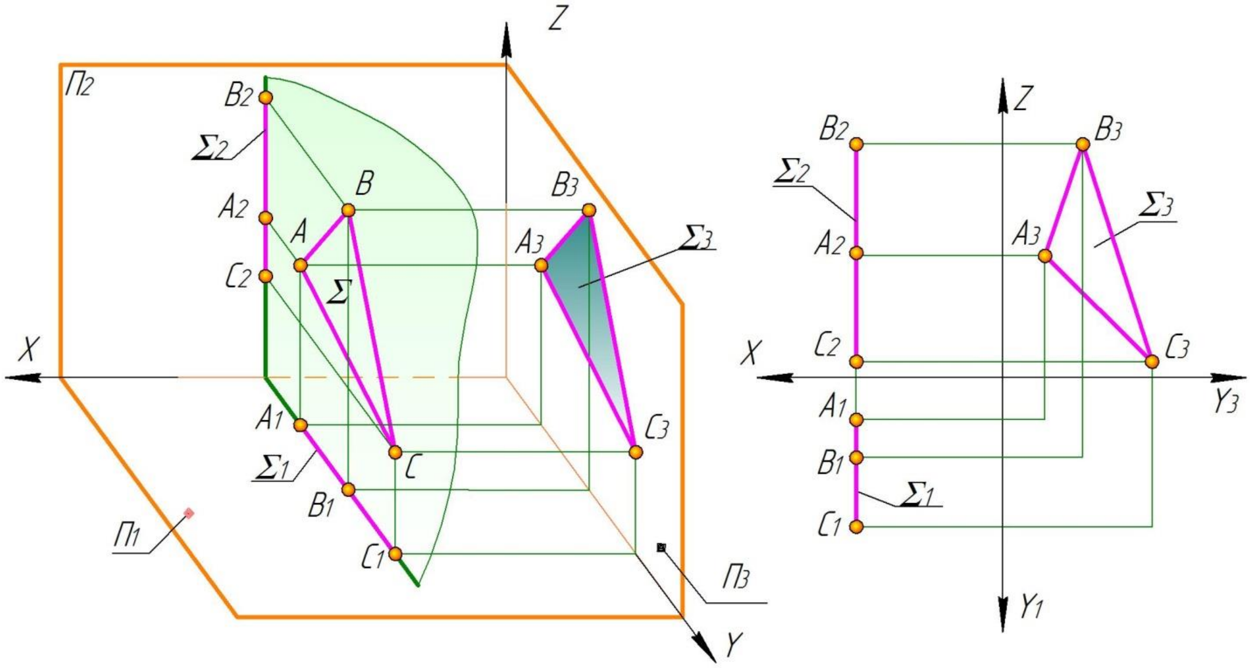


Рис. 3.13. Площина профільного рівня Σ

3.3. Визначення належності точки та прямої до площини

Належність точки та прямої до площини можна визначати на підставі наступних *інваріантів.*

3.3.1. Точка та пряма

Якщо точка належить прямій лінії, то проекції точки належать однойменним проекціям прямої.

Наприклад.

Дано: пряма c, точки A, B, D, L (рис.3.14).

Точка A належить прямій c, оскільки горизонтальна проекція точки $A(A_1)$ належить горизонтальній проекції прямої $c(c_1)$, фронтальна проекція

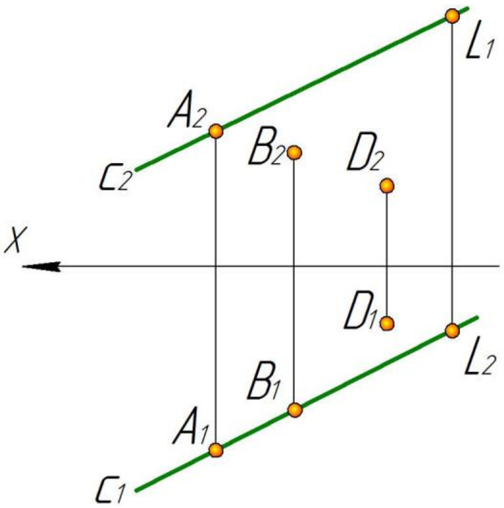


Рис. 3.14

точки $A(A_2)$ належить фронтальній проекції прямої $c(c_2)$: $A_1 \in c_1, A_2 \in c_2 \Rightarrow A \in c$.

Точки B, D і L не належать прямій c:

$B_1 \in c_1, B_2 \notin c_2 \Rightarrow B \notin c$; $L_1 \notin c_1, L_2 \notin c_2 \Rightarrow L \notin c$.

$D_1 \notin c_1, D_2 \notin c_2 \Rightarrow D \notin c$;

3.3.2. Пряма та площина

1. *Пряма лінія належить площині,* якщо вона проходить через дві точки, які належать цій площині.

Наприклад.

Дано: площина задана двома паралельними прямими a і b: $\Delta(\mathrm{a} /\!/ \mathrm{b})$. Пряма k і пряма d (рис.3.15).

Пряма k належить площині $\Delta(\mathrm{a} /\!/ \mathrm{b})$, оскільки дві точки прямої k належать площині:

$C \in \Delta(a /\!/ \mathrm{b})$; $D \in \Delta(a /\!/ \mathrm{b})$; $C \in k, D \in k \Rightarrow k \in \Delta(a /\!/ \mathrm{b})$.

Пряма d не належить площині $\Delta(\mathrm{a} /\!/ \mathrm{b})$, оскільки тільки одна точка прямої d належить площині:

$\mathrm{A} \in \Delta(a /\!/ \mathrm{b})$; $\mathrm{B} \in \Delta(a /\!/ \mathrm{b})$; $\mathrm{A} \in d, \mathrm{B} \notin d \Rightarrow d \notin \Delta(a /\!/ \mathrm{b})$.

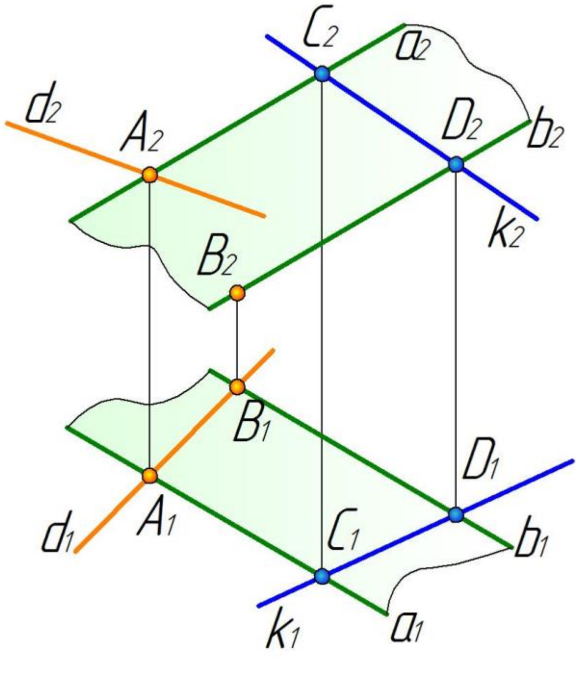


Рис. 3.15

2. *Пряма лінія належить площині*, якщо вона проходить через одну точку площини та паралельна будь-якій прямій цієї площини.

Дано: площина задана двома прямими $\Omega(\mathrm{d}\cap\mathrm{k})$, що перетинаються. Точка $\mathrm{A}\in\Omega(\mathrm{d}\cap\mathrm{k})$ (рис.3.16).

1.Пряма n проходить через точку A, яка належить площині $\Omega(\mathrm{d}\cap\mathrm{k})$:

$n\supset A\in\Omega(\mathrm{d}\cap\mathrm{k})$.

2.Пряма n паралельна прямій k, яка належить площині $\Omega(\mathrm{d}\cap\mathrm{k})$:

$n//k\in\Omega(\mathrm{d}\cap\mathrm{k})$.

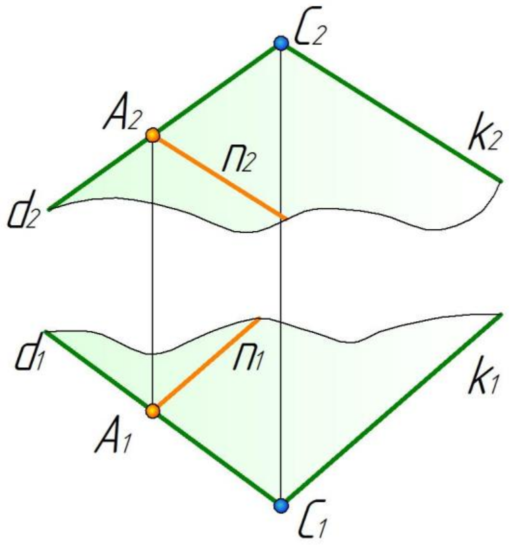


Рис. 3.16

Отже, пряма лінія n належить площині $\Omega(\mathrm{d}\cap\mathrm{k})$: $n\in\Omega(\mathrm{d}\cap\mathrm{k})$.

3.3.3. Точка та площина

Точка належить заданій площині, якщо вона належить якійсь прямій лінії, розташованій у цій площині.

Дано: площина задана двома прямими $T(\mathrm{a}\cap\mathrm{b})$. Пряма лінія k і d, які належать площині $T(\mathrm{a}\cap\mathrm{b})$.

Точка A належить площині $T(\mathrm{a}\cap\mathrm{b})$, оскільки вона належить прямій k, яка належить площині $T(\mathrm{a}\cap\mathrm{b})$ (рис.3.17):

$k\in T(\mathrm{a}\cap\mathrm{b})$; $A\in k\Longrightarrow A\in T(\mathrm{a}\cap\mathrm{b})$.

Точка B не належить площині $T(\mathrm{a}\cap\mathrm{b})$:

$d\in T(\mathrm{a}\cap\mathrm{b})$; $B\notin d\Longrightarrow B\notin T(\mathrm{a}\cap\mathrm{b})$.

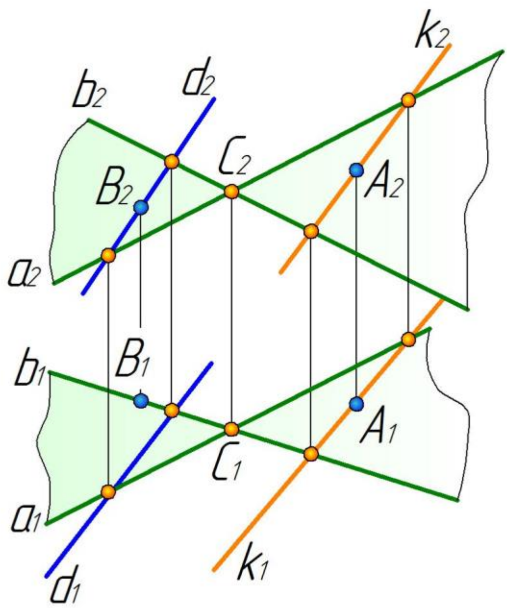


Рис. 3.17

3.4. Особливі (головні) лінії у площині

Серед множини прямих, що належать площині, можна виділити такі, що займають особливе положення відносно площин проекцій. Такі прямі називають *головними лініями площини*. До них відносяться:

1) прямі лінії, паралельні одній із площин проекцій, - це *горизонтальні* $h^0(h_1^0, h_2^0, h_3^0)$, *фронтальні* $f^0(f_1^0, f_2^0, f_3^0)$ і *профільні* прямі $p^0(p_1^0, p_2^0, p_3^0)$;

2*) лінії найбільшого нахилу* площини до відповідної площини проекцій - це *лінії, перпендикулярні або до горизонтальної, або до фронтальної, або до профільної прямої площини*.

3.4.1. Горизонталь

Горизонталлю називається така пряма лінія, яка належить площині та паралельна горизонтальній площині проекції $П_1$ (рис.3.18).

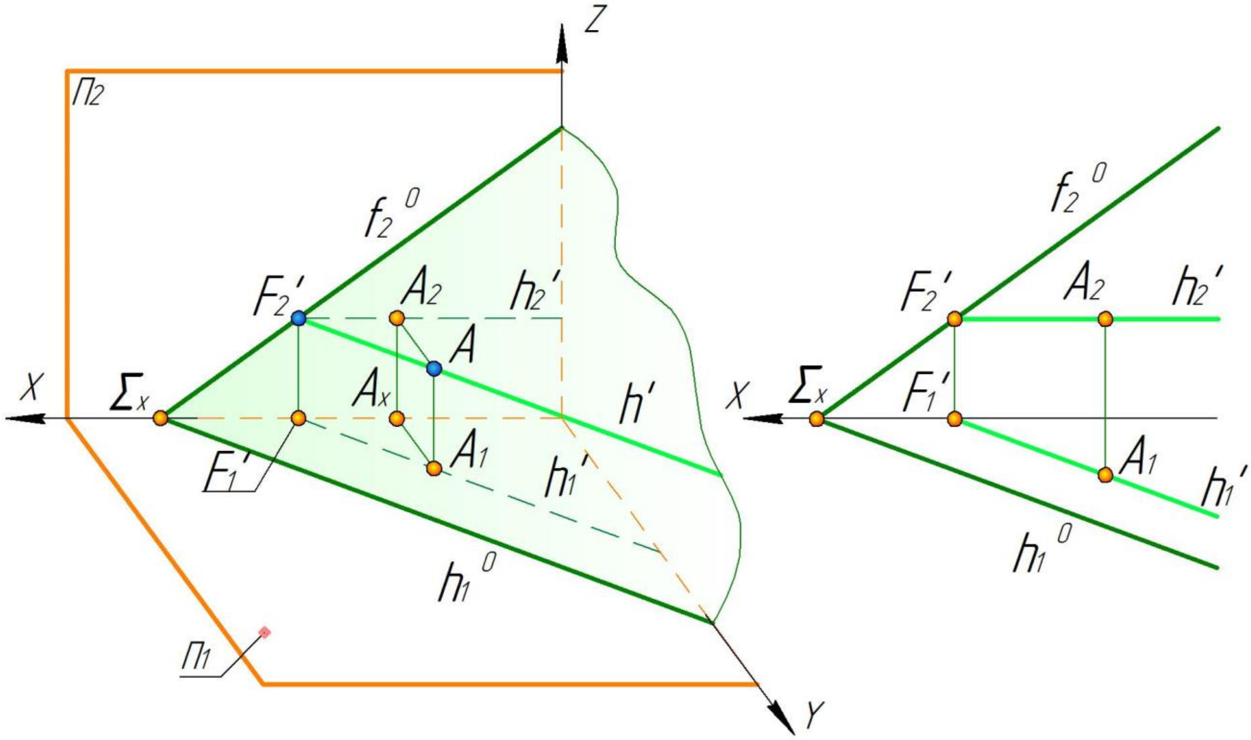


Рис. 3.18

Задача.

Дано: площина загального положення Σ, яка задана трикутником ABC: $\Sigma(\Delta ABC)$.

Знайти: провести в площині $\Sigma(\Delta ABC)$ пряму лінію горизонтального рівня: h//П$_1$.

1. Побудову прямої лінії горизонтального рівня починаємо з побудови її фронтальної проекції h_2. Для цього з фронтальної проекції точки $A(A_2)$ проводимо фронтальну проекцію прямої горизонтального рівня паралельно осі OX (рис.3.19): $A_2\ \alpha\ \ h_2 // OX$.

2. Фронтальна проекція прямої горизонтального рівня h_2 перетинає пряму

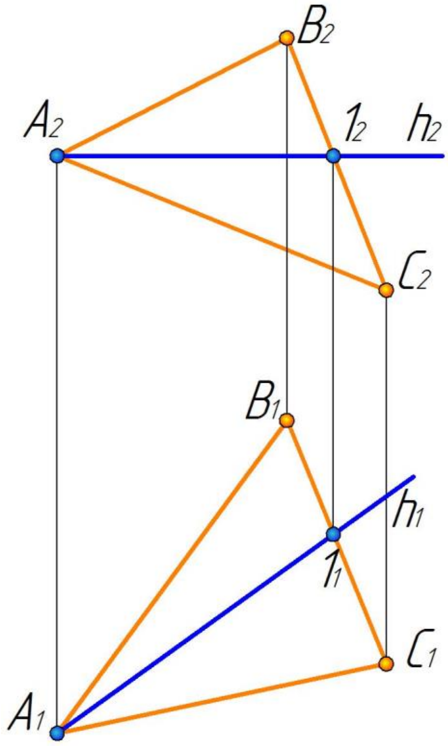


Рис. 3.19

$BC(B_2C_2)$ в точці $1(1_2)$. Враховуючи закон проекційного зв'язку визначаємо горизонтальну проекцію точки $1(1_1)$:

$$1 \in BC \Longrightarrow 1_2 \in B_2\,C_2\ ;\ 1_2 \downarrow 1_1;\ 1_1 \in B_1\,C_1\ .$$

3. З умови належності прямої лінії площині знаходимо горизонтальну проекцію прямої горизонтального рівня: $A_1\ \cup 1_1 = h_1$.

Задача.

Дано: площина Ω задана слідами: $\Omega(h^0 \cap f^0)$.

Знайти: провести в площині $\Omega(h^0 \cap f^0)$ пряму лінію горизонтального рівня: h//П$_1$.

1. Як і в попередньому завданні побудову прямої лінії горизонтального рівня починаємо з побудови її фронтальної проекції h_2.

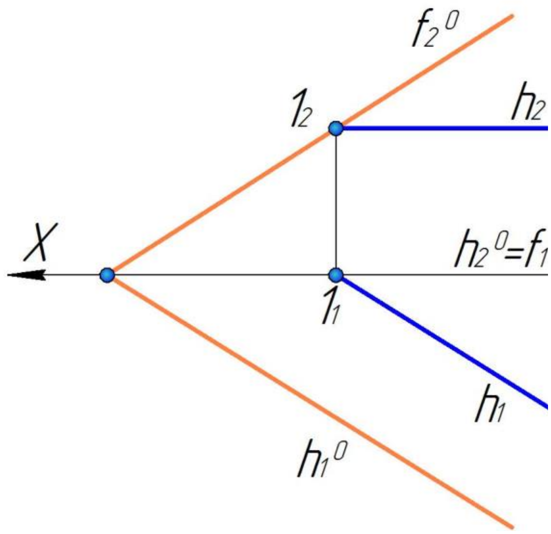


Рис. 3.20

Для цього з довільно узятої фронтальної проекції точки $1(1_2)$ проводимо фронтальну проекцію прямої горизонтального рівня паралельно осі OX (рис.3.20): $1_2\ \alpha\ \ h_2 // OX$.

2. Знаходимо горизонтальну проекцію точки 1:

$1 \in f^0 \Rightarrow 1_2 \in f_2^0$; $1_2 \downarrow 1_1$; $1_1 \in f_1^0$.

3. Горизонтальну проекцію прямої горизонтального рівня h_1 будують з умови, що всі горизонталі площини паралельні між собою, а h_1^0 - це горизонталь нульового рівня (горизонталь, яка лежить в площині проекцій П1) : $1_1 \alpha \; h_1 // h_1^0$.

3.4.2. Фронталь

Фронталлю називається така пряма лінія, яка належить площині та паралельна фронтальній площині проекції П2 (рис.3.21).

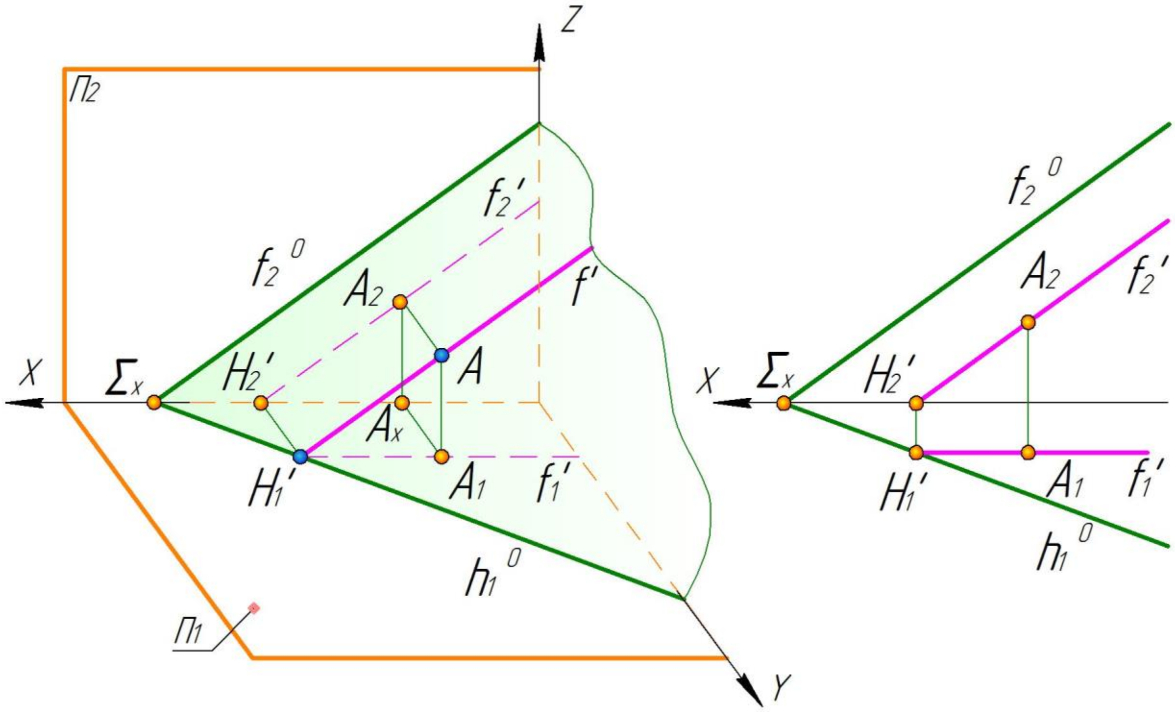


Рис. 3.21

Задача.

Дано: площина загального положення Σ, яка задана трикутником ABC: $\Sigma(\Delta\mathrm{ABC})$.

Знайти: провести в площині $\Sigma(\Delta ABC)$ пряму лінію фронтального рівня: f//П2.

1. Побудову прямої лінії фронтального рівня починаємо з побудови її горизонтальної проекції f_1. Для цього з горизонтальної проекції точки $C(C_1)$ проводимо горизонтальну проекцію прямої фронтального рівня паралельно осі OX (рис.3.22): $C_1 \alpha \;\; f_1 // OX$.

2. Горизонтальна проекція прямої фронтального рівня f_1 перетинає пряму

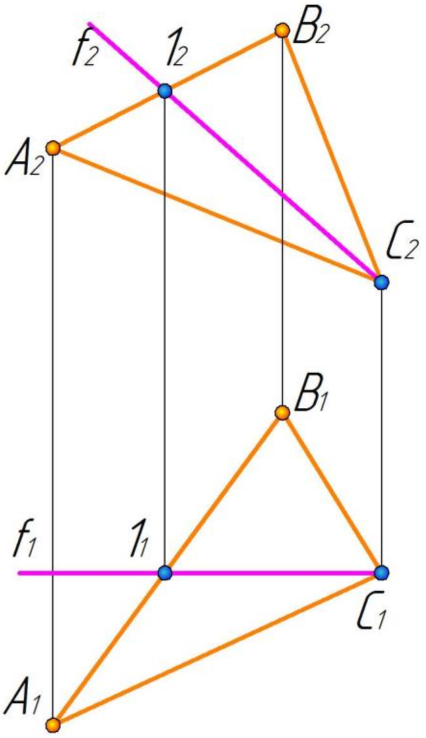


Рис. 3.22

$AB(A_1B_1)$ в точці $1(1_1)$. Враховуючи закон проекційного зв’язку визначаємо фронтальну проекцію точки $1(1_2)$:

$1 \in AB \Rightarrow 1_1 \in A_1B_1;\ 1_1 \uparrow 1_2;\ 1_2 \in A_2B_2$.

3. З умови належності прямої лінії площині знаходимо фронтальну проекцію прямої фронтального рівня: $C_2 \cup 1_2 = f_2$.

Задача.

Дано: площина Ω задана слідами: $\Omega(h^0 \cap f^0)$.

Знайти: провести в площині $\Omega(h^0 \cap f^0)$ пряму лінію фронтального рівня: f//П2.

1. Як і в попередньому завданні побудову прямої лінії фронтального рівня починаємо з побудови її горизонтальної проекції f_1.

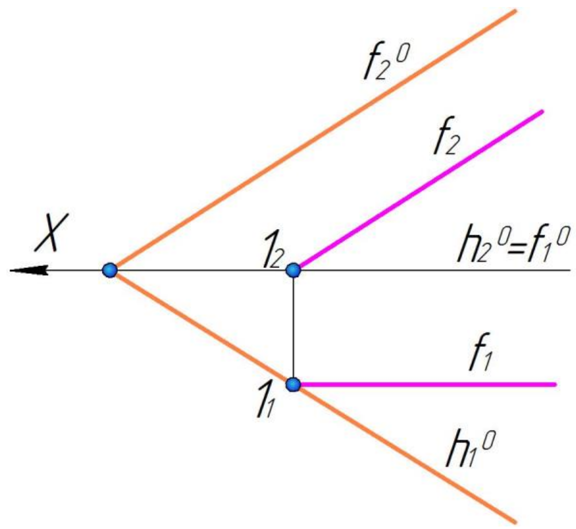


Рис. 3.23

Для цього з довільно узятої горизонтальної проекції точки $1(1_1)$ проводимо горизонтальну проекцію прямої фронтального рівня паралельно осі OX (рис.3.23): $1_1 \alpha \;\; f_1 // OX$.

2. Знаходимо фронтальну проекцію точки 1:

$1 \in h^0 \Longrightarrow 1_1 \in h_1^0;\ 1_1 \uparrow 1_2;\ 1_2 \in h_2^0.$

3. Фронтальну проекцію прямої фронтального рівня f_2 будують з умови, що всі фронталі площини паралельні між собою, а f_2^0 - це фронталь нульового рівня (фронталь, яка лежить в площині проекцій П₂) : 1_2 α $f_2 \not\parallel f_2^0$.

3.4.3. Профільна пряма

Профільною прямою називається така пряма лінія, яка належить площині та паралельна профільній площині проекції $П_3$ (рис.3.24).

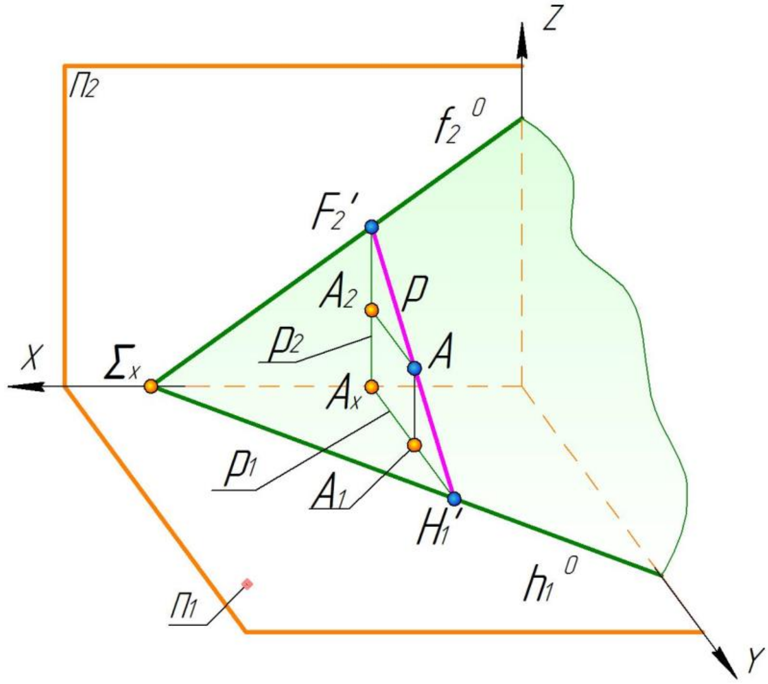


Рис. 3.24

На рис. 3.24 показано побудову прямої профільного рівня в площині, заданій трикутником ABC. Побудову прямої профільного рівня починають з горизонтальної та фронтальної проекцій, оскільки відомо їх напрям: $p_1 \perp OX$, $p_2 \perp OX$ (X = const).

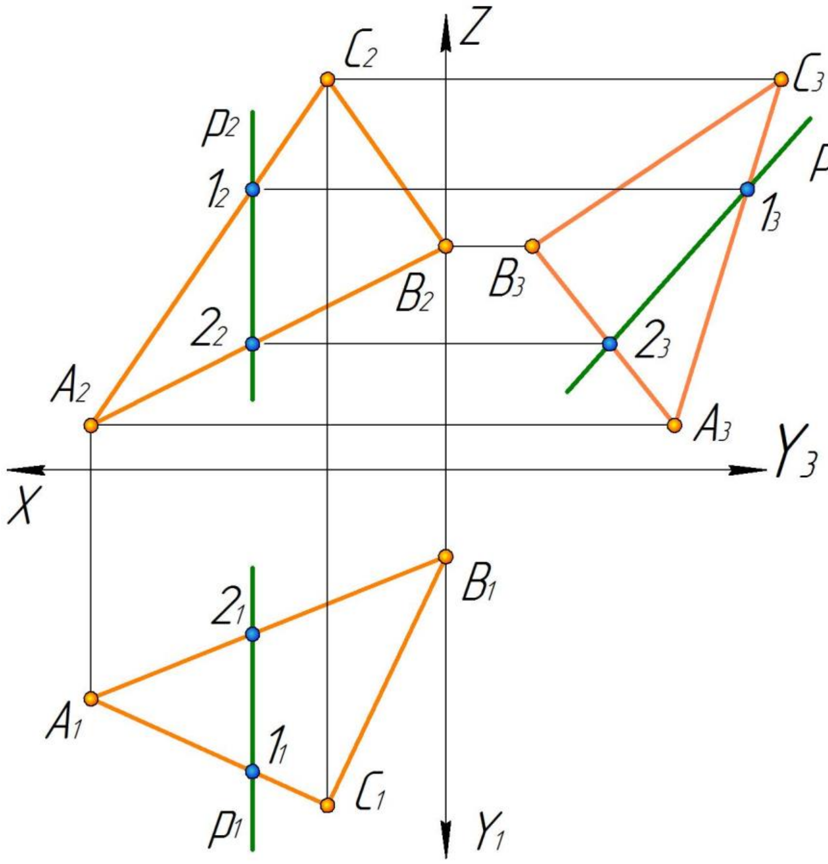


Рис. 3.25

3.4.4. Лінія найбільшого нахилу площини

Лінією найбільшого нахилу площини Σ, до площини проекцій $П_1$, або $П_2$, або $П_3$ зветься така пряма, яка належить площині Σ і перпендикулярна відповідно або горизонталям, або фронталям, або профільним прямим цієї площини (рис.3.26). Ця умова використовується у випадках, коли площина задана не слідами. Якщо площина Σ задана слідами, то замість горизонталі, фронталі чи профільної прямої варто скористатися відповідними слідами.

Лінія найбільшого нахилу використовується для визначення натуральної величини кута нахилу площини Σ до заданої площини проекцій. Для визначення кута нахилу площини Σ до площини проекцій необхідно побудувати натуральну величину лінії найбільшого нахилу. Кут між натуральною величиною лінії найбільшого нахилу та його проекцією на площину проекцій і буде кутом нахилу площини.

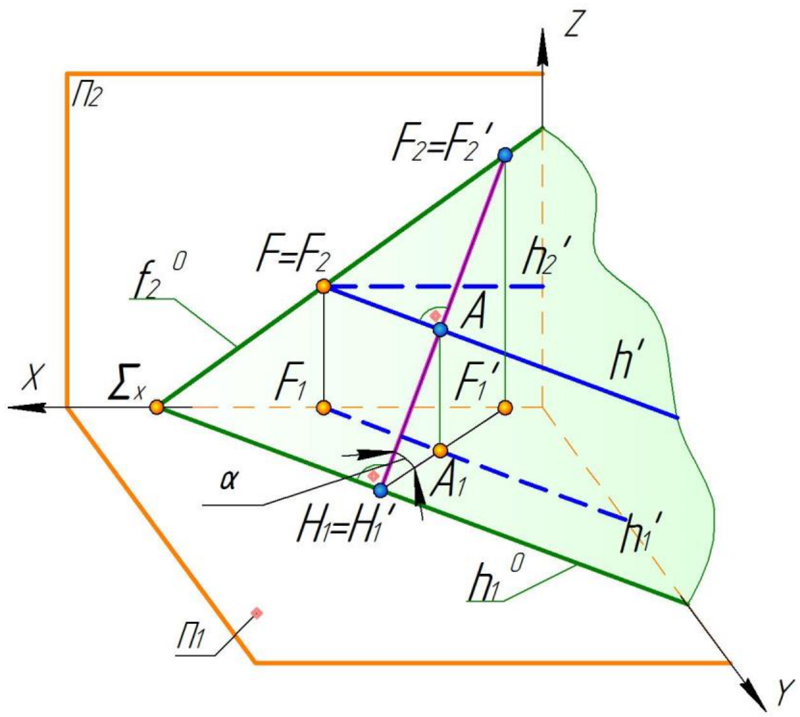


Рис. 3.26

Задача.

Дано: площина Σ задана слідами: $\Sigma(h^0 \cap f^0)$.

Знайти: α - кут нахилу площини $\Sigma(h^0 \cap f^0)$ до горизонтальної площини проекції П$_1$.

Для рішення задачі згадаємо теорему про те, що прямий кут між двома прямими, що перетинаються, проеціюється в натуральну величину на ту площину проекцій, відносно якої хоча б одна з цих прямих паралельна.

1. Отже, для знаходження кута α спочатку будуємо лінію найбільшого кута k (рис.3.27) перпендикулярно до горизонтального сліду h_1^0 (або до горизонталі h').

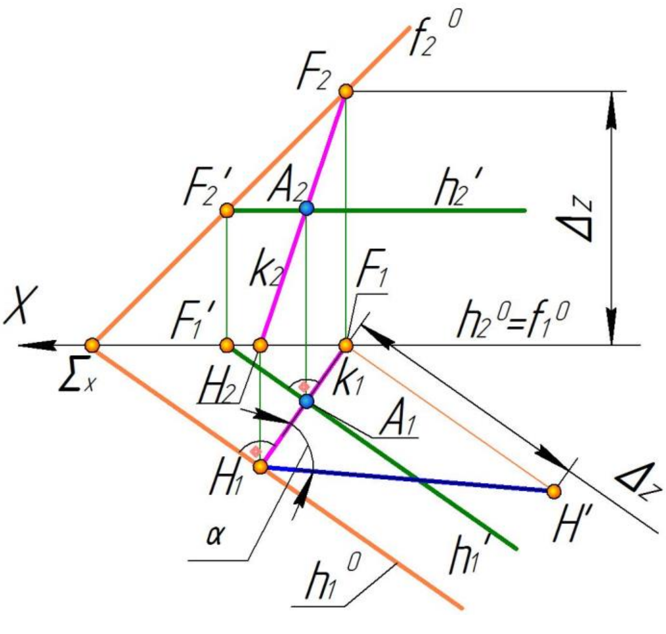


Рис. 3.27

Це означає, що на комплексному кресленні за умовою згаданої теореми її горизонтальна проекція k_1 повинна також бути перпендикулярною до горизонтальної проекції h_1^0 горизонтального сліду h^0 площини Σ (або до горизонтальної проекції h_1' горизонталі h').

$$H_1 \longmapsto k_1 \perp h_1^0 \; (H_1 \longmapsto k_1 \perp h_1')$$

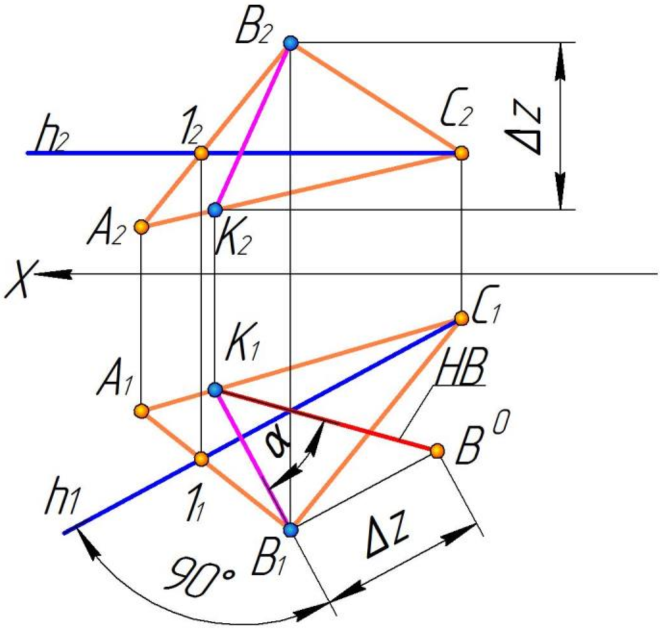
2. Фронтальна проекція лінії найбільшого кута $k(k_2)$ визначається за умовою її належності до площини Σ, тобто горизонтальний слід $H(H_1, H_2)$ і фронтальний слід $F(\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2)$ цієї прямої повинні належати однойменним слідам площини:

$H_1 \in h_1^0$; $H_1 \uparrow H_2$; $H_2 \in h_2^0$.

$F_1 \in f_1^0$; $F_1 \uparrow F_2$; $F_2 \in f_2^0$.

3. Визначаємо натуральну величину відрізка HF. Кут, що утворився між лінією H_1H' і її горизонтальною проекцією H_1F_1, є кут нахилу площини Σ до горизонтальної площини проекцій, тобто кут α.

На рис. 3.28 побудовано кут α нахилу площини $\Sigma(\Delta ABC)$ до площини П$_1$. Для цього побудована лінія скату $B_1K_1 \perp h_1$ і визначена її натуральна величина B_0K_1. Кут α між B_0K_1 і B_1K_1 і буде кутом нахилу площини Σ до площини П$_1$.



$B_1K_1 \perp h_1$

$B_1K_1 \cap A_1C_1 = K_1$

$\Delta Z = Z_B - Z_K = B_1B_0$

$B_1B_0 \perp B_1K_1$

$B_0 \cup K_1 = K_1B_0$ – лінія скату

Рис. 3.28

Тема 4. Визначення властивостей проекцій точки та прямої лінії, що не належать площині

4.1. Можливі випадки взаємного положення прямої та площини.
4.2. Пряма лінія паралельна площині.
4.3.Прямая лінія перетинає площину. Побудова точки «зустрічі» прямої з площиною.
4.4. Окремі випадки перетину прямої з площиною.

4.1. Можливі випадки взаємного положення прямої і площини

Коли пряма не належить площині, виникають задачі, принципово відмінні одна від одної:

1) пряма лінія перетинає площину у невласній точці, тобто вона паралельна площині. Треба визначити умову паралельності прямої до площини засобами комплексного креслення;

2) пряма лінія перетинає площину. Треба визначити точку перетину;

3) пряма лінія перетинає площину під прямим кутом. Треба визначити властивості проекцій такої прямої на комплексному кресленні;

4) пряма лінія перетинає площину під довільним кутом. Визначити величину цього кута.

Тобто перелічені вище задачі полягають у визначенні відповідних властивостей проекцій прямої на комплексному кресленні.

4.2. Пряма лінія паралельна площині

Необхідною і достатньою умовою визначення паралельності прямої l площині Σ є наступне: пряма лінія l паралельна площині Σ, якщо в цій площині знайдеться хоча б одна пряма лінія n, яка була б їй паралельна.

Пряма паралельна площині, якщо вона паралельна будь-якій прямій, що лежить в площині (рис. 4.1).

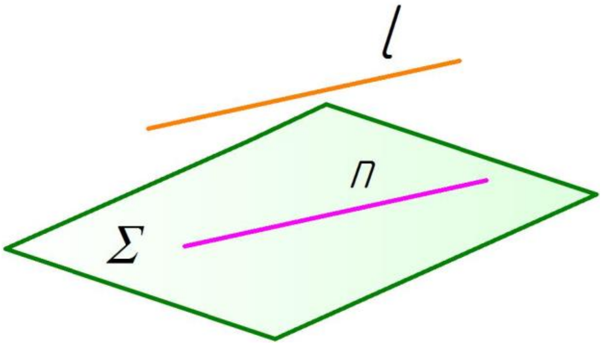


Рис. 4.1

$n \in \Sigma$ - пряма n належить площині Σ

l // n - пряма l паралельна n, отже:

l // Σ - пряма l паралельна площині Σ.

Цей висновок дає підстави дати відповіді на конкретні запитання.

Перше з них - це потреба у перевірці паралельності прямої l площині Σ, (коли обидві якимось чином задані). Для цього досить в площині Σ побудувати довільну пряму n, яка була б паралельна прямій l. Якщо така пряма знайдеться, то отримаємо відповідь: пряма l паралельна площині Σ (l // Σ). Якщо такої прямої у площині Σ не знайдеться, то задана пряма l цю площину перетинає.

Друге запитання полягає у потребі побудови в просторі такої прямої l, яка була б паралельна заданій площині Σ. Розв'язання тут має бути таким. У площині Σ треба спочатку провести пряму n довільно (або за якоюсь умовою), а потім у просторі провести пряму l паралельно n. Тоді пряма l буде паралельною площині Σ.

Пряма лінія паралельна площині окремого положення, якщо її проекція паралельна однойменному сліду-проекції проеціювальної площини.

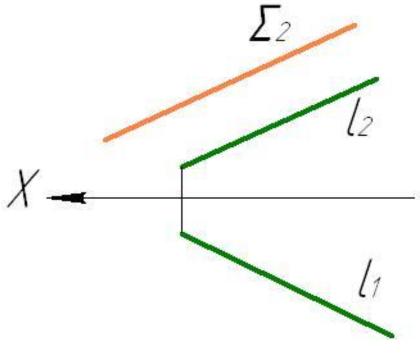


Рис. 4.2

Фронтальна проекція прямої $l(l_2)$ паралельна сліду-проекції фронтально проеціювальної площини $\Sigma \perp \Pi_2$:

$$l_2 \; // \; \Sigma_2$$

Отже, пряма l паралельна фронтально проеціювальної площини Σ:

$$l \; // \; \Sigma$$

Розглянемо приклади побудови прямої лінії, паралельної площини.

Дано: $\Sigma\ (a//b)$, точка A.

Знайти: Через точку A провести пряму m, паралельну площині $\sum$.

Рішення (рис.4.3):

1. У площині загального положення Σ, яка задана двома паралельними прямими a і b, проведемо довільну пряму l, яка належить цій площині: $l \in \Sigma\ (a//b)$:

1.1. $l_1 \cap \Sigma\ (a//b) = 1_1 2_1$.

1.2. $1_1 2_1 \uparrow 1_2 2_2$.

1.3. $1_2 \cup 2_2 = l_2$.

2. Через точку A проводимо пряму m // $\sum$:

2.1. $A_1 \hookrightarrow m_1 \ // \ l_1$.

2.2. $A_2 \hookrightarrow m_2 \ // \ l_2$.

3. $\left.\begin{matrix} m_1 \ // \ l_1 \in \Sigma\ (a//b) \\ m_2 \ // \ l_2 \in \Sigma\ (a//b) \end{matrix}\right\} \Rightarrow m \ // \ \Sigma.$

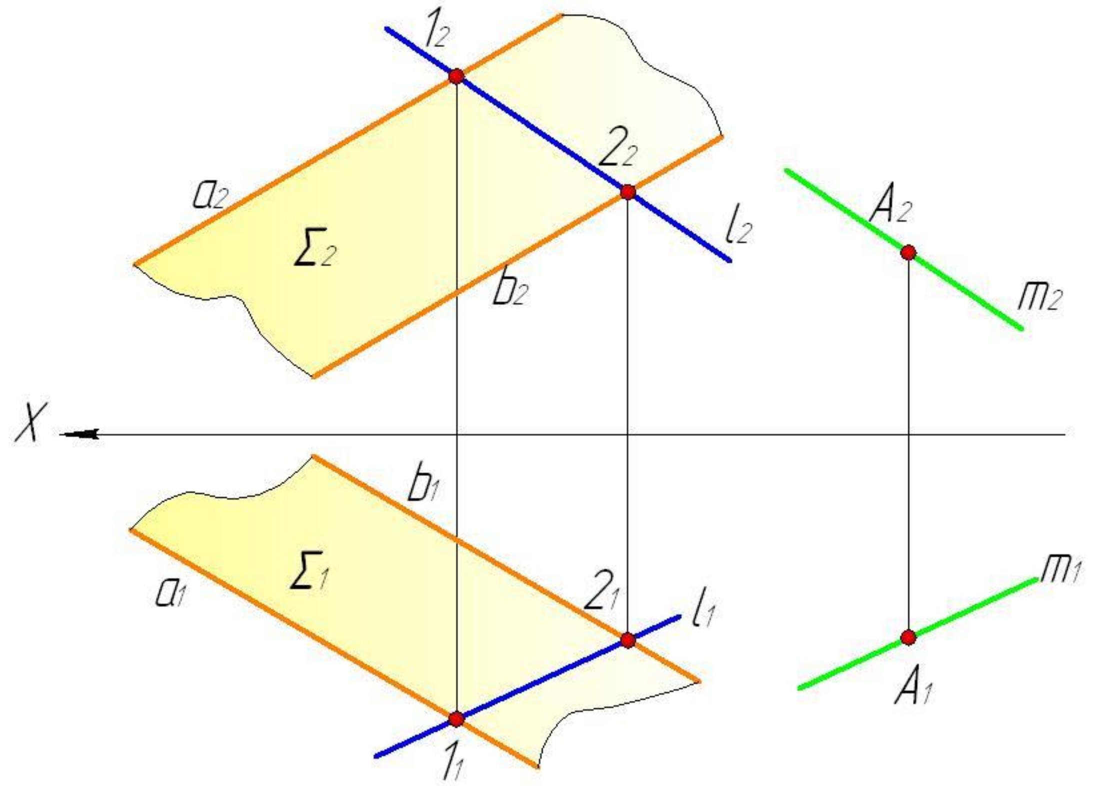


Рис. 4.3

Дано: $\sum (f \cap h)$; точка A.

Знайти: Через точку A провести пряму m, паралельну площині $\sum$.

Рішення (рис.4.4):

1. В площині окремого положення Σ, яка задана слідами h і f, проведемо довільну пряму l, яка належить цій площині: $l \in \Sigma$ $(f \cap h)$:

1.1. $1_2 \in f_2^0 \downarrow 1_1 \in f_1^0$.

1.2. $2_2 \in h_2^0 \downarrow 2_1 \in h_1^0$.

1.3. $1_1 \cup 2_1 = l_1$.

2. Через точку A проводимо пряму m // $\sum$:

2.1. $A_1 \hookrightarrow m_1 \,//\, l_1$.

2.2. $A_2 \hookrightarrow m_2 \,//\, l_2$.

3. $\left.\begin{matrix} m_1 \,//\, l_1 \in \Sigma\,(f \cap h) \\ m_2 \,//\, l_2 \in \Sigma\,(f \cap h) \end{matrix}\right\} \Rightarrow m \,//\, \Sigma.$

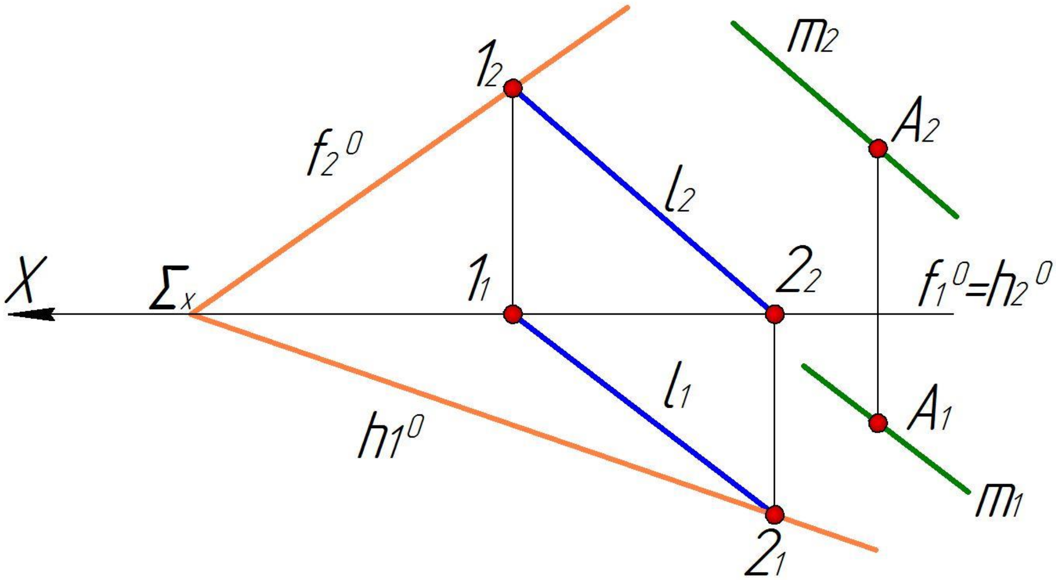


Рис. 4.4

Окремим випадком рішення поставленої задачі може бути побудова прямої фронтального рівня або прямої горизонтального рівня, паралельній площині $\sum$.

На рис.4.5 через точку A проведена пряма фронтального рівня, паралельна площині $\sum$.

Дано: $\sum$ ($f \cap h$); точка A.

Найти: Через точку A провести пряму m, паралельну площині $\sum$.

Рішення (рис.4.5):

1. Через точку A проводимо пряму m // $\sum$:

   1.1. $A_1 \hookrightarrow m_1 // f_1^0$.

   1.2. $A_2 \hookrightarrow m_2 // f_2^0$.

2. $\left.\begin{matrix} m_1 // f_1^0 \in \Sigma\,(f \cap h) \\ m_2 // f_2^0 \in \Sigma\,(f \cap h) \end{matrix}\right\} \Rightarrow m // \Sigma.$

Аналогічним чином через точку A може бути проведена пряма горизонтального рівня h паралельна $\sum$ ($f \cap h$).

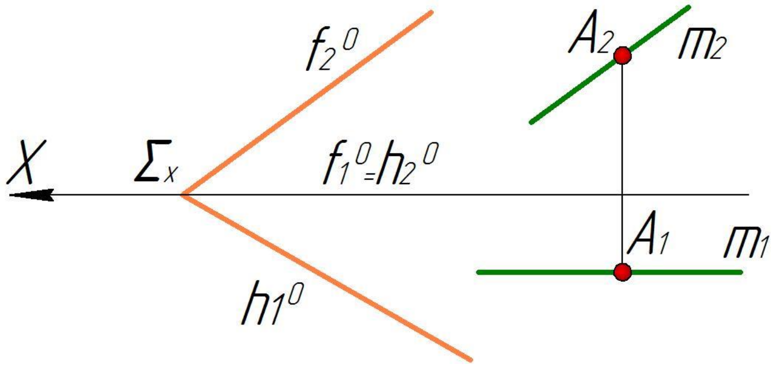


Рис. 4.5

Рішення зворотного завдання: побудова площини $\sum$, яка буде паралельна до заданої прямої l через точку A простору, показано на рис. 4.6.

Дано: пряма l; точка A.

Знайти: Через точку A провести площину $\sum$, яка буде паралельна до заданої прямої l.

Рішення (рис.4.6):

1. Через точку A проводимо пряму a // l:

   1.1. $A_1 \hookrightarrow a_1 // l_1$.

   1.2. $A_2 \hookrightarrow a_2 // l_2$.

2. Через точку A проводимо довільну пряму b:

   2.1. $A_1 \hookrightarrow b_1$.

   2.2. $A_2 \hookrightarrow b_2$.

3. Площина Σ, яка задана двома прямими a і b, які перетинаються, буде паралельна до заданої прямої l.

$$\left.\begin{matrix} a_1 // l_1 \\ a_2 // l_2) \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \ \Sigma(a \cap b)//l.$$

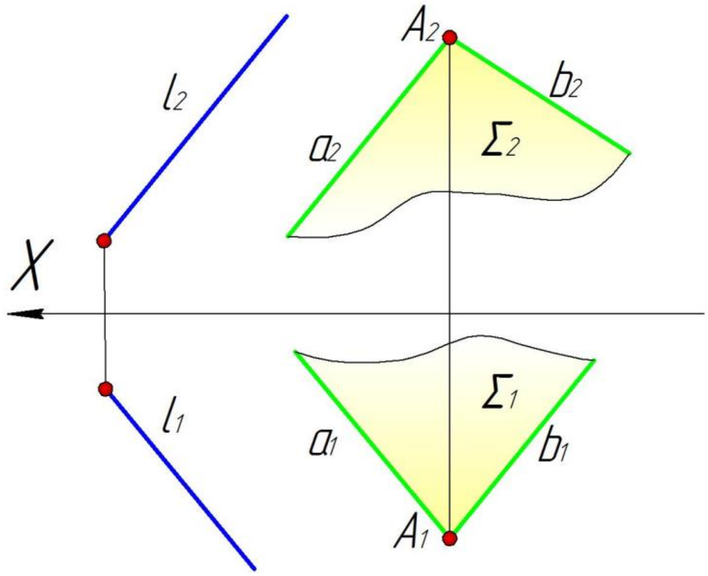


Рис. 4.6

4.3. Пряма, яка перетинається з площиною. Побудова точки перетину (точки зустрічі) прямої з площиною

Побудова точки перетину (точки зустрічі) прямої з площиною (*основне завдання нарисної геометрії*) складається з трьох пунктів (рис. 4.7а).

1. Через задану пряму a проводимо допоміжну площину Δ.

2. Визначаємо лінію перетину допоміжної площини Δ із заданою Σ:

$$\Delta \cap \Sigma = (12)$$

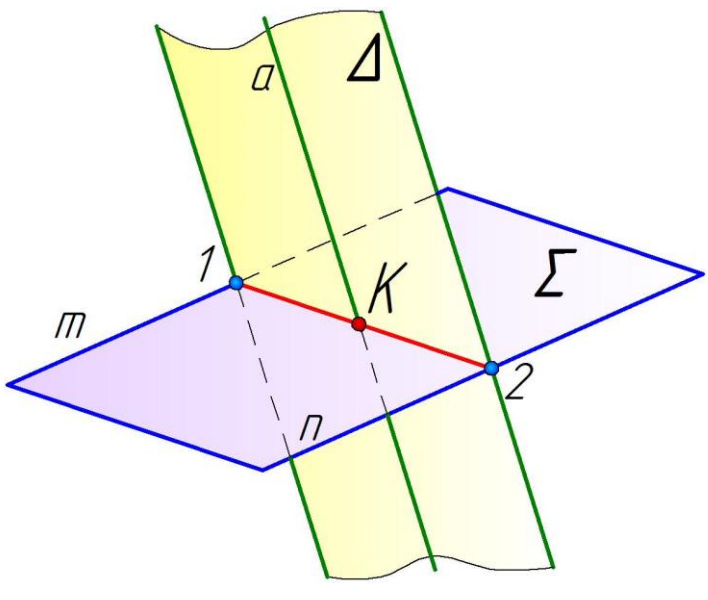


Рис. 4.7

3. Відмічаємо точку перетину K побудованої лінії (12) із заданою прямою a, яка і буде точкою перетину прямої з площиною.

Дано: $\sum(n\ //\ m)$, пряма a.

Знайти: точку K - точку зустрічі прямої a з площиною $\sum(\ n\ //\ m)$.

Рішення (рис.4.8).

1. Пряму a заключимо у фронтальнопроеціювальну площину $\Delta \perp \Pi_2$. Фронтальний слід фронтальнопроеціювальної площини Δ має збиральну властивість, отже він співпадає з фронтальною проекцією прямої $a(a_2)$: $a_2 \subset \Delta \perp \Pi_2 \Rightarrow\ a_2 \equiv \Delta_2$.

2. Визначаємо лінію перетину допоміжної площини Δ із заданою Σ: $\Delta \cap \Sigma = (12)$:

$\Delta_2 \cap \Sigma_2 = 1_2 2_2$.

$1_2 \in n_2 \downarrow 1_1 \in n_1$.

$2_2 \in m_2 \downarrow 2_1 \in m_1$.

$1_1 \cup 2_1$.

3. Відмічаємо точку перетину K побудованої лінії (12) із заданою прямою a, яка і буде точкою перетину прямої з площиною:

$1_1 2_1 \cap a_1 = K_1$.

$K_1 \uparrow\ K_2$.

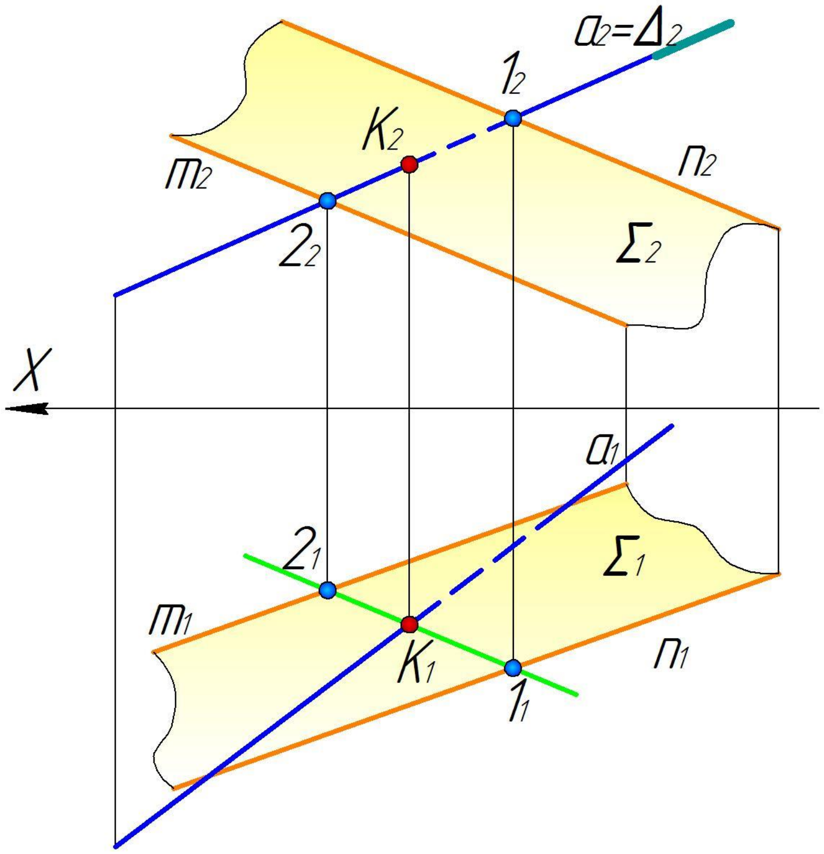


Рис. 4.8

Побудова точки перетину прямої з площиною, заданою слідами.

Дано: $\sum(f \cap h)$, пряма l.

Знайти: точку K - точку зустрічі прямої l з площиною $\sum(f \cap h)$.

Рішення (рис.4.9).

1. Пряму l заключимо у фронтально-проектуючу площину $\Delta \perp \Pi_2$. Фронтальний слід фронтальнопроеціюючої площини Δ має збиральну властивість, отже він співпадає з фронтальною проекцією прямої l (l_2):

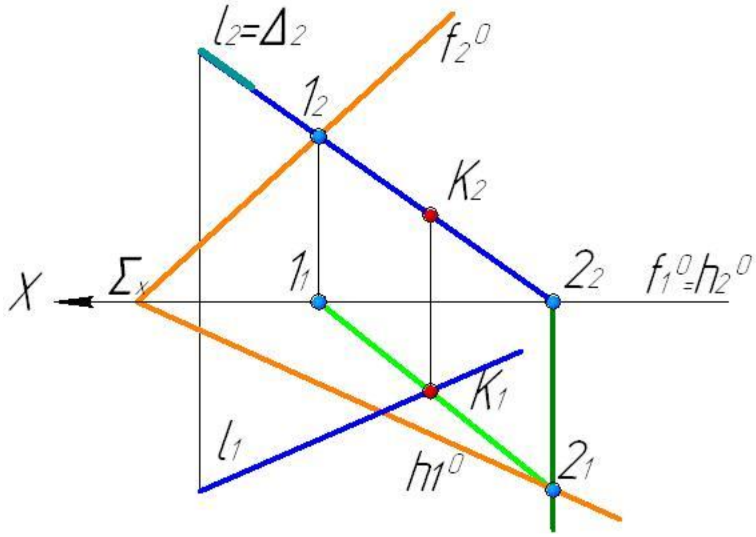


Рис. 4.9

$l_2 \hookrightarrow \Delta \perp \Pi_2 \Rightarrow l_2 \equiv \Delta_2$.

2. Визначаємо лінію перетину допоміжної площини Δ із заданою Σ: $\Delta \cap \Sigma = (12)$:

$\Delta_2 \cap \Sigma_2 = 1_2 2_2$.

$1_2 \in f_2^0 \downarrow 1_1 \in f_1^0$.

$2_2 \in h_2^0 \downarrow 2_1 \in h_1^0$.

$1_1 \cup 2_1$.

3. Відмічаємо точку перетину K побудованої лінії (12) із заданою прямою l, яка і буде точкою перетину прямої з площиною

$1_1 2_1 \cap a_1 = K_1$.

$K_1 \uparrow K_2$.

Слід звернути увагу на те, що якщо початкова площина задана слідами, то для побудови точки зустрічі прямої з площиною обов'язково будуються обидва сліди допоміжної площини.

4.4. Окремі випадки перетину прямої з площиною

Точка перетину прямої з проеціювальною площиною визначається безпосередньо, без допоміжних побудов.

Дано: площина $\sum$, яка задана трикутником CDE, і займає горизонтальнопроеціювальне положення $\sum(\Delta CDE)\perp\Pi_1$, пряма AB.

Знайти: точку K – точку зустрічі прямої AB з площиною $\sum(\Delta CDE)$.

Рішення (рис. 4.10).

У зв'язку з тим, що площина $\sum(\Delta CDE)\perp\Pi_1$ займає горизонтально - проеціювальне положення, її слід-проекція на горизонтальну площину проекцій Π_1 має збиральну властивість, отже точка перетину заданої площини $\sum(\Delta CDE)$ і прямої AB буде розташована на слід-проекції:

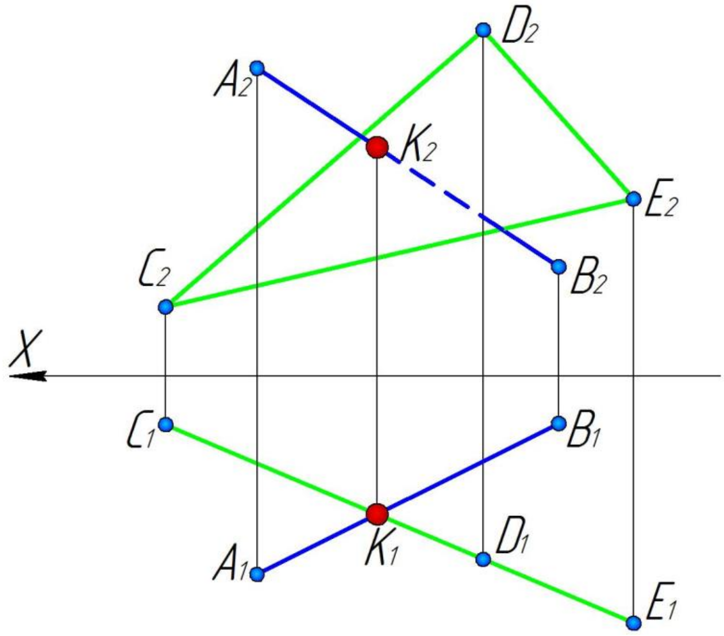


Рис. 4.10

$A_1B_1 \cap C_1D_1E_1 = K_1$.

$K_1 \in A_1B_1 \Rightarrow K_2 \in A_2B_2$.

$K_1 \uparrow K_2$.

Дано: фронтальнопроеціювальна площина Δ ($\Delta\perp\Pi_2$), пряма MN.

Знайти: точку K – точку зустрічі прямої MN з площиною Δ ($\Delta\perp\Pi_2$).

Рішення (рис. 4.11).

Площина Δ ($\Delta\perp\Pi_2$) займає фронтальнопроеціювальне положення, і її слід-проекція на фронтальну площину проекцій Π_2 має збиральну властивість, от же точка перетинання заданої площини Δ та прямої MN буде розташована на слід-проекції:

$M_2N_2 \cap \Delta_2(f_2^0) = K_2$.

$K_2 \in M_2N_2 \Rightarrow K_1 \in M_1N_1$.

$K_2 \downarrow K_1$.

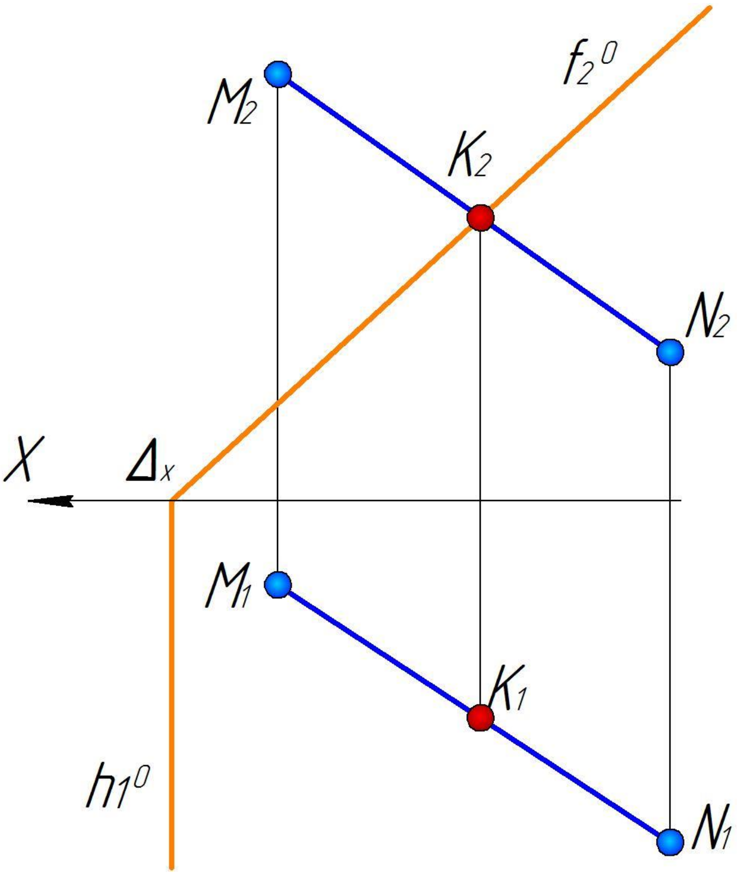


Рис. 4.11

Якщо площина загального вигляду перетинається з проецюючою прямою (рис.4.12), то одна проекція точки перетину (в даному випадку горизонтальна K_1) співпадає з горизонтальною проекцією прямої $l(l_1)$, а друга проекція точки (K_2) знаходиться з умови належності її площини $\sum$.

Розглянемо приклад.

Дано: площина загального вигляду $\sum(\Delta ABC)$, пряма $l \perp \Pi_1$.

Знайти: точку K – точку зустрічі прямої l з площиною $\sum(\Delta ABC)$.

Рішення (рис. 4.12).

Пряма $l \perp \Pi_1$ - горизонтальнопроеціювальна, її горизонтальна проекція l_1 на горизонтальну площину проекцій проектується у точку. Так же в точку проецюються всі точки цієї прямої. Отже, горизонтальна проекція точки $K(K_1)$, точки перетинання прямої з площиною, також співпадуть з горизонтальною проекцією прямої:

$$l_1 \cap \sum(\Delta ABC) = K_1.$$

$$l_1 \equiv K_1.$$

Для визначення фронтальної проекції точки $K(K_2)$, точки перетинання прямої з площиною, спочатку проведемо допоміжну пряму m, яка буде належати площині $\sum(\Delta ABC)$ і проходити через горизонтальну проекцію точки перетинання $K(K_1)$:

$A_1 \cup K_1 = m_1.$

$m_1 \in \sum(\Delta ABC).$

$m_1 \cap B_1C_1 = 1_1.$

$1_1 \uparrow 1_2.$

$A_2 \cup 1_2 = m_2.$

Там де фронтальна проекція прямої $m(m_2)$ перетнеться з фронтальною проекцією прямої $l(l_2)$ буде фронтальна проекція точки $K(K_2)$:

$m_2 \cap l_2 = K_2.$

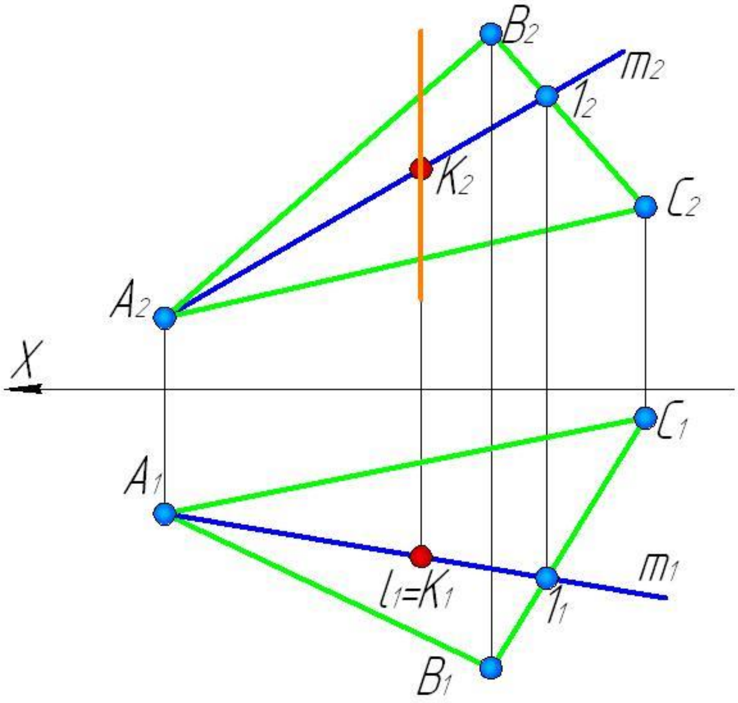


Рис. 4.12

Тема 5. Взаємне положення двох площин

5.1. Площини, які перетинаються.

5.2. Паралельні площини.

5.1. Площини які перетинаються

Будь-які площини відносно одна одної можуть займати такі принципово різні положення: перетинатися й не перетинатися, тобто бути паралельними.

Якщо дві площини перетинаються по прямій, то в цьому разі мають місце три основні задачі. Перша з них полягає у визначенні (побудові) лінії перетину двох площин; друга - у визначенні величини кута між цими площинами, третя - у визначенні їх перпендикулярності, якщо це має місце.

Дві площини перетинаються між собою по прямій лінії. Для її побудови необхідно визначити будь-які дві точки, спільні для цих площин, або одну точку і напрям лінії перетину (перша задача).

На рис. 5.1 схематично представлена методика побудови лінії перетину двох площин Σ і Δ у найбільш загальному вигляді. Тут для знаходження будь-якої однієї із двох точок (наприклад, K) проведена якась довільна січна площина T, яка перетинає площину Σ по прямій $a(12)$, а площину Δ - по прямій $b(34)$. Обидві ці прямі, таким чином, лежать в одній площині T і перетинаються в точці K, а це якраз свідчить про те, що точка K є спільною для заданих площин. Аналогічно за допомогою другої довільної площини W визначається друга точка L, яка також спільна для заданих площин. Пряма лінія, що проходить через точки K і L, є лінією перетину площин Σ і Δ.

У залежності від вихідних даних, тобто від способу задання площин, їх розташування та інших особливостей, можуть мати місце різні варіанти побудови ліній перетину. Нижче розглянемо основні.

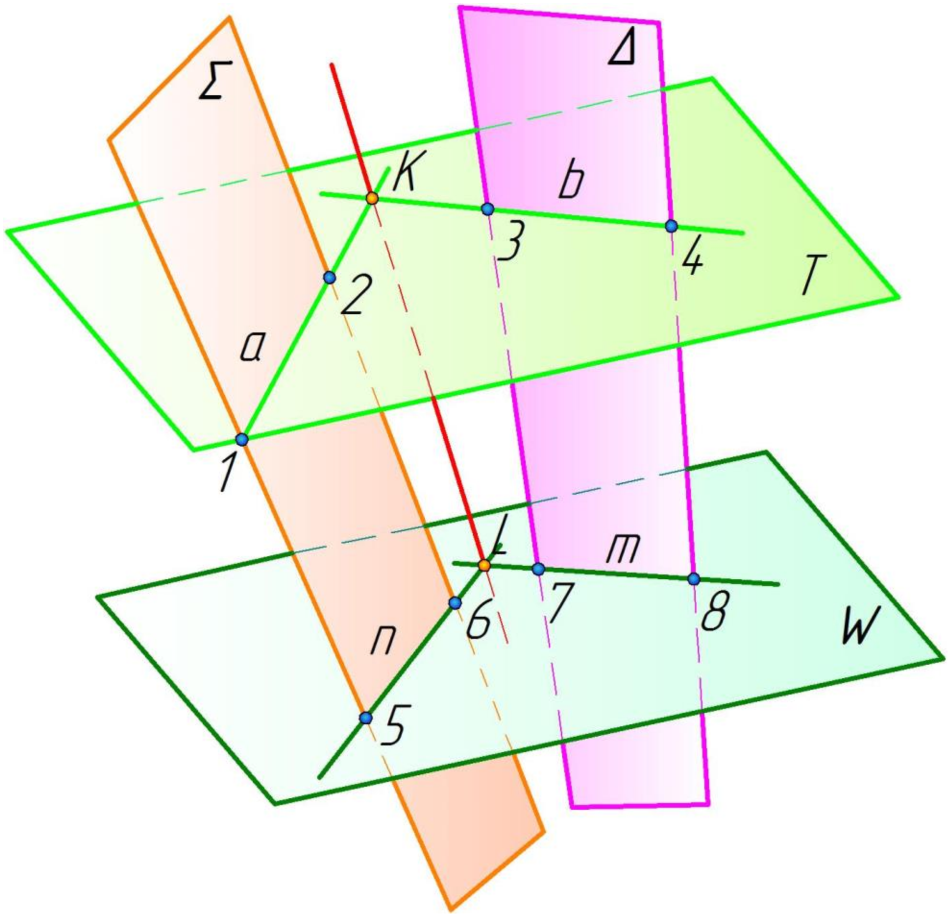


Рис. 5.1

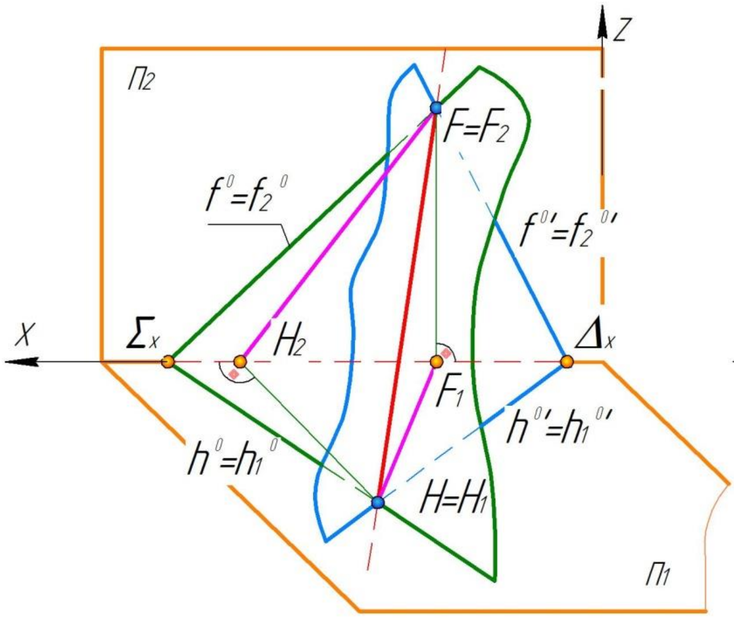
5.1.1. Дві площини задані слідами. При цьому в межах креслення перетинаються обидві пари однойменних слідів

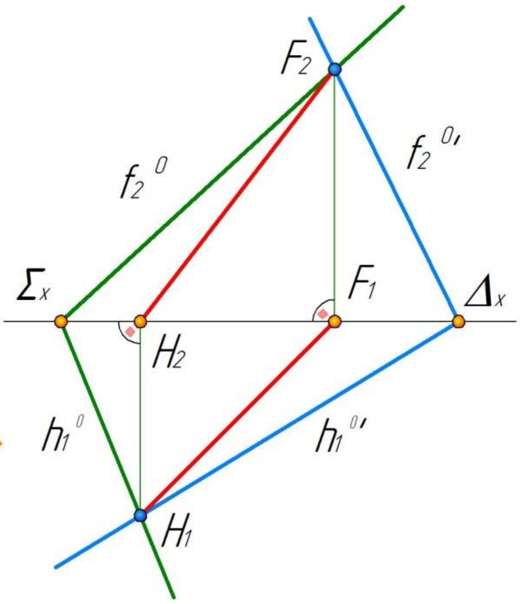
У цьому випадку, спираючись на викладену вище загальну методику, за січні площини (аналоги площин T і W на рис.5.1) доцільно прийняти горизонтальну Π_1 і фронтальну Π_2 площини проекцій. Тоді площини Σ і Δ будуть перетинатися з горизонтальною площиною проекцій Π_1 відповідно по прямих $h^0 = h_1^0$ і $h^{0\prime} = h_1^{0\prime}$, які є горизонтальними слідами заданих площин. Отже, точка K, яка виникла на перетині горизонтальних слідів площин Σ і Δ, є спільною для цих площин і тому через неї пройде лінія KL їх перетину. Другу точку L, спільну для площин Σ і Δ, можна визначити за допомогою фронтальної площини проекцій (аналог площини W на рис.5.1). Обидві отримані точки K і L відповідно горизонтальний і фронтальний сліди лінії перетину площин Σ і Δ. Отже, у даному випадку для побудови лінії перетину заданих площин необхідно визначити її сліди (горизонтальний - H і фронтальний – F) як результат перетину однойменних слідів цих площин.

Переходячи до комплексного креслення, треба подумки «вилучити» всю просторову модель на рис. 5.2*а*, залишивши тільки те, що в процесі побудов було зображене на площинах проекцій, і ці зображення сумістити за правилом утворення комплексного креслення. Результат такого переходу від просторової моделі до комплексного креслення подано на рис. 5.2*б*.

Алгоритм побудов:

1. $f_2^0 \cap f_2^{0\prime} = F_2$;
2. $h_1^0 \cap h_1^{0\prime} = H_1$;
3. $F_2F_1 \cap 0X = F_1$;
4. $H_1H_2 \cap 0X = H_1$;
5. $H_1 \cup F_1 = H_1F_1$;
6. $H_2 \cup F_2 = H_2F_2$;
7. $\Sigma \cap \Delta = HF$.





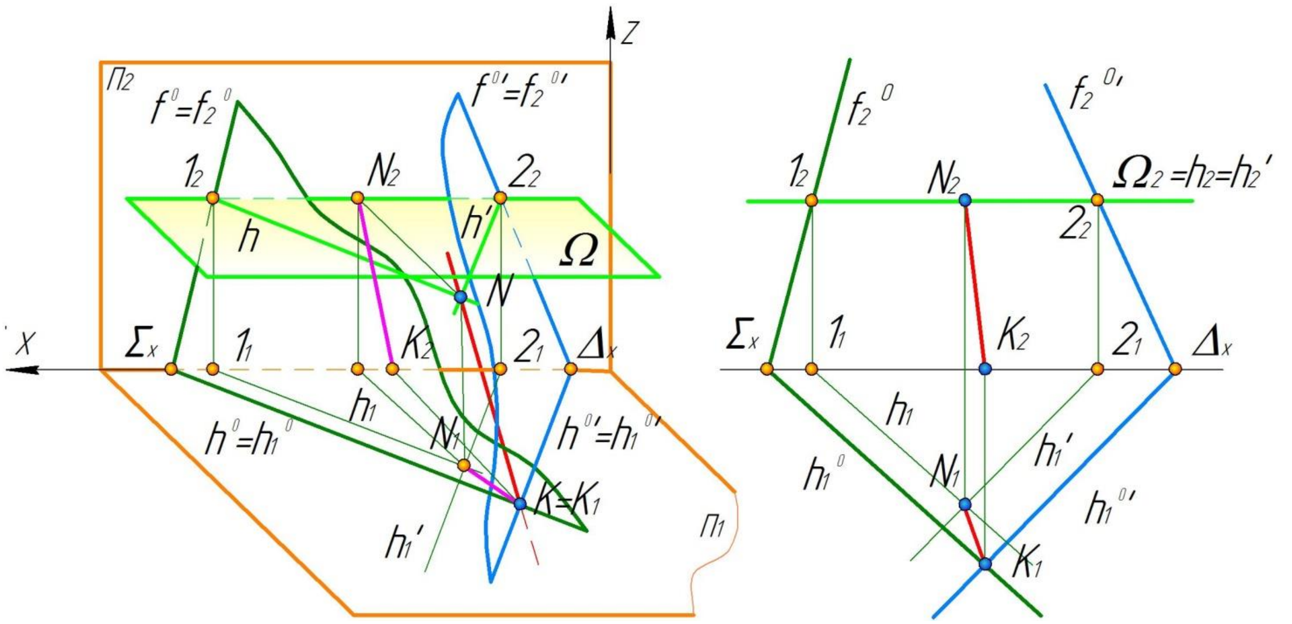
а б

Рис. 5.2

5.1.2. Дві площини задані слідами. При цьому одна пара одноіменних слідів (у даному випадку - це фронтальні сліди $\boldsymbol{f^0} = \boldsymbol{f_2^0}$ і $\boldsymbol{f^{0\prime}} = \boldsymbol{f_2^{0\prime}}$) у межах креслення не перетинається

Як і в попередньому випадку, одна спільна точка K - горизонтальний слід лінії перетину заданих площин - визначається на перетині їх горизонтальних слідів $h^0 = h_1^0$ і $h^{0\prime} = h_1^{0\prime}$, тобто $K = h^0 \cap h^{0\prime}$. Друга точка N, спільна для площин Σ і Δ, може бути визначена за допомогою довільної січної площини Ω (аналог площини W на рис.5.1). Площину Ω доцільно (але не обов'язково) розташувати паралельно горизонтальній площині проекцій $П_1$, оскільки будь-яка лінія, що їй належить, буде також паралельною $П_1$. Це дає підстави стверджувати, що прямі h і h', по яких площина Ω перетинає відповідно площини Σ і Δ, також будуть паралельні $П_1$, тобто вони є горизонталями заданих площин.

Звідси випливає побудова проекцій цих ліній: їх горизонтальні проекції h_1 і h_1', повинні бути паралельними відповідним слідам площин Σ і Δ, а фронтальні проекції h_2 і h_2' збігаються в одну лінію із слідом Ω_2 площини Ω і паралельні осі 0_{x}. Точка N, що виникла на перетині прямих h і h', і є другою спільною точкою для площин Σ і Δ. Тому лінія перетину цих площин пройде через точки $K(K_1K_2)$ і N (N_1N_2).



а б

Рис. 5.3

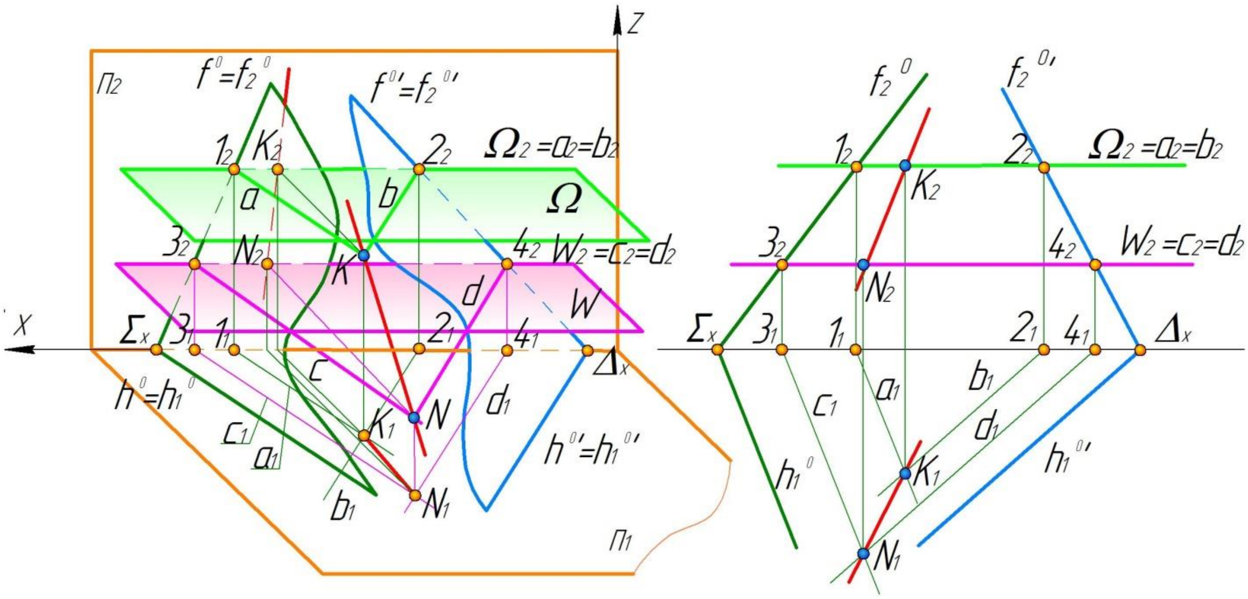
Як і раніше, подумки «вилучаючи» усю просторову модель і залишаючи тільки зображення на площинах проекцій, сумістимо останні за правилом утворення комплексного креслення. Результат цих дій представлено на рис. 5.3*б*.

Алгоритм побудов:

1. $h_1^0 \cap h_1^{0\prime} = K_1$;
2. $K_1 \uparrow K_2$;
3. $\hookrightarrow \Omega$ // Π_1;
4. $\Omega \cap \Sigma = h$: $(\Omega_2 \equiv h_2) \cap f_2^0 = 1_2$;
5. $1_2 \downarrow 1_1$;
6. $1_1 \hookrightarrow h_1 // h_1^0$;
7. $\Omega \cap \Delta = h'$: $(\Delta_2 \equiv h_2') \cap f_2^{0\prime} = 2_2$;
8. $2_2 \downarrow 2_1$;
9. $2_1 \hookrightarrow h_1' // h_1^{0\prime}$;
10. $h_1 \cap h_1' = N_1$;
11. $N_1 \uparrow N_2$
12. $N_1 \cup K_1 = N_1 K_1$;
13. $N_2 \cup K_2 = N_2 K_2$.

5.1.3. Дві площини задані слідами. При цьому обидві пари однойменних слідів у межах креслення не перетинаються

У цьому випадку діє загальне правило (рис. 5.1) про необхідність використання двох січних площин (рис. 5.4*а*). Відносно кожної з них виконуються всі побудови, описані у попередньому випадку. Щодо вибору січних площин, то треба мати на увазі, що з однаковою ефективністю можуть бути використані всі можливі сполучення: обидві площини горизонтального рівня (рис. 5.4*а*); обидві площини фронтального рівня; одна площина горизонтального рівня, а друга — фронтального. Але можуть бути і такі випадки, коли треба використовувати щось інше.



а б

Рис. 5.4

Розглянемо більш детально побудову проекцій лінії перетину площин Σ і Δ у випадку, поданому на рис. 5.4*б*.

Введемо першу січну площину Ω - площину горизонтального рівня (нагадаємо, така площина паралельна Π_1 і перпендикулярна до Π_2 і Π_3, отже фронтальна проекція площини $\Omega(\Omega_2)$ проходить паралельно осі OX).

Площина Ω перетинається з площиною Σ по лінії a, яка проходить через точку 1 і паралельна осі OX, оскільки належить площині горизонтального рівня Ω. Площина Ω перетинається з площиною Δ по лінії b, яка проходить через точку 2 і паралельна осі OX, оскільки належить площині горизонтального рівня Ω.

Прямі a і b (рис. 5.4*а*) належать одній площині Ω, не паралельні і перетинаються у точці K, яка є спільною для обох площин Σ і Δ.

Проводимо другу січну площину W (теж горизонтального рівня).

Площина W перетинається з площиною Σ по лінії c, яка проходить через точку 3 і паралельна осі OX, оскільки належить площині горизонтального рівня W. Площина W перетинається з площиною Δ по лінії d, яка проходить через точку 4 і паралельна осі OX, оскільки належить площині горизонтального рівня W.

Прямі c і d (рис. 5.4*а*) належать одній площині W, не паралельні і перетинаються у точці N, яка є спільною для обох площин Σ і Δ.

Лінія KN - лінія перетину площин Σ і Δ.

Алгоритм побудов:

1. $\hookrightarrow \Omega$ // Π_1, $\Rightarrow \Omega_2$ // OX;
2. $\Sigma \cap \Omega = a$: $f_2^0 \cap (\Omega_2 \equiv a_2) = 1_2$;
3. $1_2 \downarrow 1_1$;
4. $1_1 \hookrightarrow a_1 // h_1^0$;
5. $\Delta \cap \Omega = b$: $f_2^{0\prime} \cap (\Omega_2 \equiv b_2) = 2_2$;
6. $2_2 \downarrow 2_1$;
7. $b_1 // h_1^{0\prime}$;
8. $a_1 \cap b_1 = K_1$;
9. $K_1 \uparrow K_2$;
10. $\hookrightarrow$ W // Π_1, $\Rightarrow \mathrm{W}_2$ // OX;
11. $2_1 \hookrightarrow \Sigma \cap \mathrm{W} = \mathrm{c}$:
    $\mathrm{f}_2^0 \cap (\mathrm{W}_2 \equiv \mathrm{c}_2) = 3_2$;
12. $3_2 \downarrow 3_1$;
13. $3_1 \hookrightarrow c_1 // h_1^0$;
14. $\Delta \cap \mathrm{W} = \mathrm{d}$: $\mathrm{f}_2^{0\prime} \cap (\mathrm{W}_2 \equiv \mathrm{d}_2) = 4_2$;
15. $4_2 \downarrow 4_1$;
16. $4_1 \hookrightarrow \mathrm{d}_1 // \mathrm{h}_1^{0\prime}$;
17. $c_1 \cap d_1 = N_1$;
18. $N_1 \uparrow N_2$;
19. $N_1 \cup K_1 = N_1K_1$;
20. $N_2 \cup K_2 = N_2K_2$.

5.1.4. Задані дві площини: одна $\boldsymbol{\Sigma}$ – прямими, які перетинаються $\boldsymbol{\Sigma(m \cap n)}$, а друга $\boldsymbol{\Delta}$ - двома паралельними прямими $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{b}$, тобто $\boldsymbol{\Delta(a//b)}$

У цьому випадку теж потрібно визначити довільні дві точки, спільні для заданих площин $\Sigma(m \cap n)$ і $\Delta(a//b)$. Скористаємось загальною методикою і введемо дві довільні допоміжні січні площини: Ω і W.

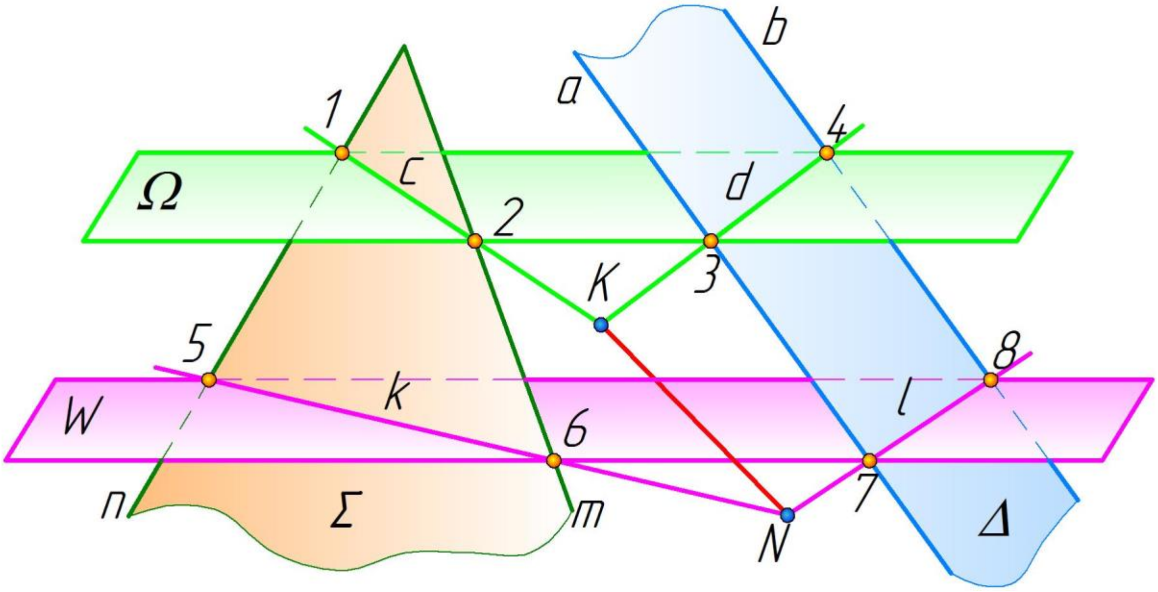


Рис. 5.5

Алгоритм побудов (рис. 5.6):

1. $\hookrightarrow \Omega$ // Π_1, $\Rightarrow$ Ω_2 // OX;
2. $\Sigma(m \cap n) \cap \Omega = c$:
   $\Sigma_2(m_2 \cap n_2) \cap (\Omega_2 \equiv c_2) = 1_2 2_2$;
3. $1_2 2_2 \downarrow (1_1 2_1 \equiv c_1)$;
4. $\Delta(a//b) \cap \Omega = d$:
   $\Delta_2(a_2//b_2) \cap (\Omega_2 \equiv d_2) = 3_2 4_2$;
5. $3_2 4_2 \downarrow (3_1 4_1 \equiv d_1)$;
6. $(1_1 2_1 \equiv c_1) \cap (3_1 4_1 \equiv d_1) = K_1$;
7. $K_1 \uparrow K_2$;
8. $\hookrightarrow W$ // Π_1, $\Rightarrow$ W_2 // OX;
9. $\Sigma(m \cap n) \cap W = k$:
   $\Sigma_2(m_2 \cap n_2) \cap (W_2 \equiv k_2) = 5_2 6_2$;
10. $5_2 6_2 \downarrow (5_1 6_1 \equiv k_1)$;
11. $\Delta(a//b) \cap W = l$:
    $\Delta_2(a_2//b_2) \cap (W_2 \equiv l_2) = 7_2 8_2$;
12. $7_2 8_2 \downarrow (7_1 8_1 \equiv l_1)$;
13. $(5_1 6_1 \equiv k_1) \cap (7_1 8_1 \equiv l_1) = N_1$;
14. $N_1 \uparrow N_2$;
15. $N_1 \cup K_1 = N_1 K_1$;
    $N_2 \cup K_2 = N_2 K_2$.

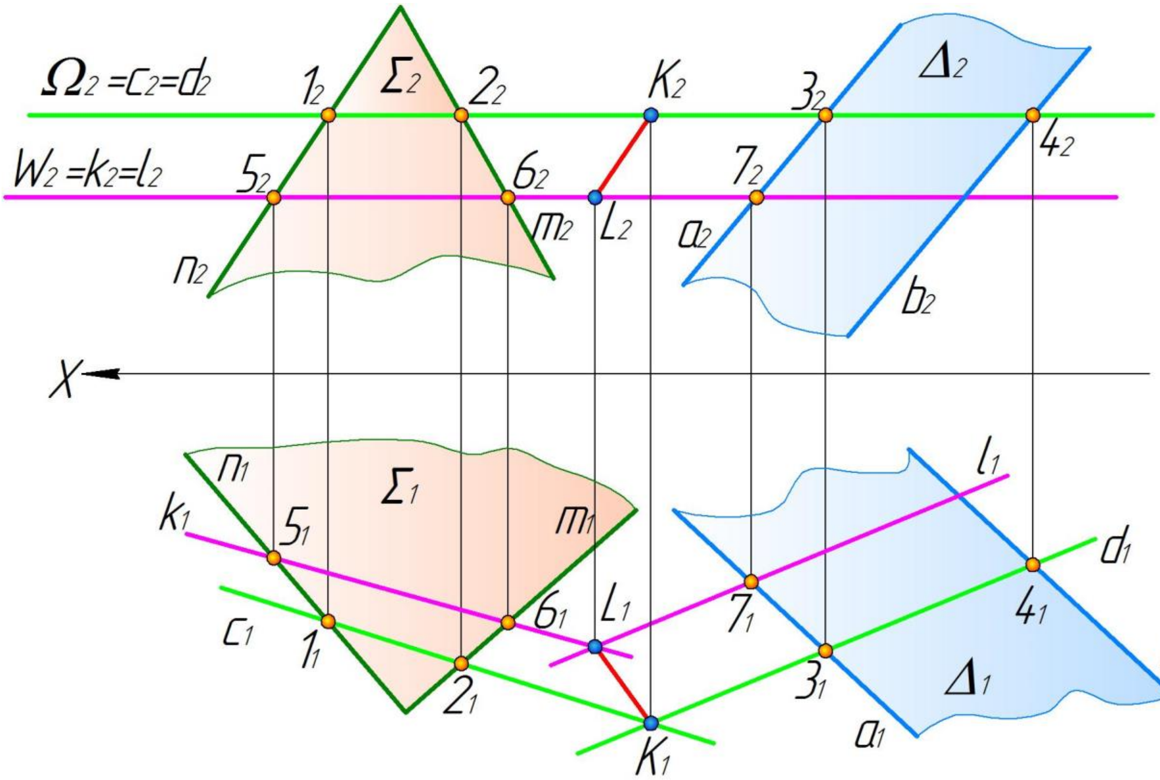


Рис. 5.6

5.1.5. Задані дві площини окремого положення, які перпендикулярні одній площині проекції (окремий випадок)

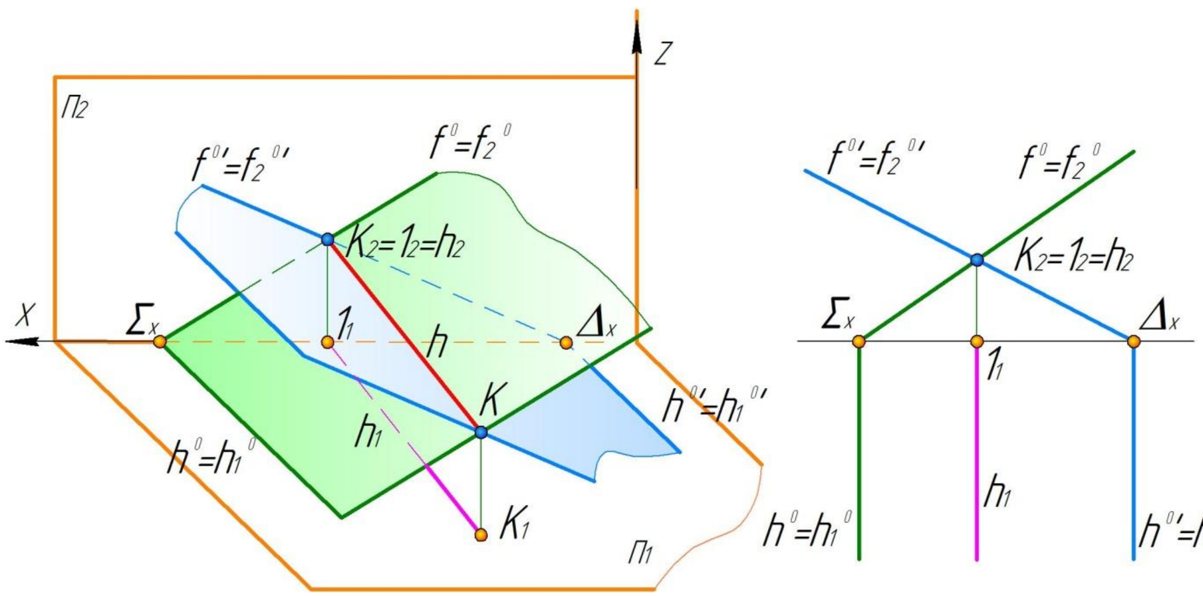


Рис. 5.7

Лінією перетину двох площин окремого положення, які перпендикулярні одній площині проекцій є пряма лінія, яка перпендикулярна тій же площині проекції, а також належить обом площинам.

Задано дві фронтальнопроеціювальні площини (рис. 5.7): $\Sigma \perp \Pi_2$ і $\Delta \perp \Pi_2$. Лінією перетину цих площин буде пряма лінія, яка також перпендикулярна до площини Π_2, отже вона буду паралельна площині проекцій Π_1 і буде прямою горизонтального рівня h.

На рис. 5.8 задано дві горизонтальнопроеціювальні площини: $\Sigma \perp \Pi_1$ і $\Delta \perp \Pi_1$. Лінією перетину цих площин буде пряма лінія, яка також перпендикулярна до площини Π_1, отже вона буду паралельна площині проекцій Π_2 і буде прямою фронтального рівня f.

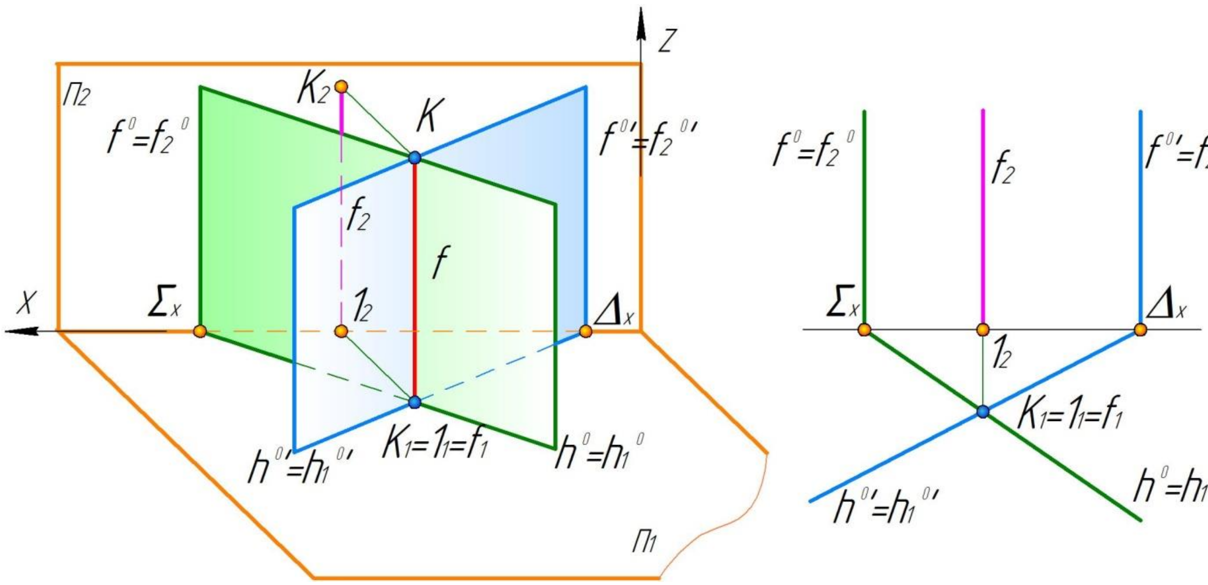


Рис. 5.8

5.1.6. Задані дві площини окремого положення, які перпендикулярні різним площинам проекції (окремий випадок)

Лінія перетину двох площин окремого положення, які перпендикулярні різним площинам проекцій є пряма лінія, яка належить обом площинам і її проекції будуть співпадати з слідами-проекціями заданих площин.

Задано дві проеціювальні площини (рис. 5.9): $\Sigma \perp \Pi_2$ і $\Delta \perp \Pi_1$. Лінією перетину цих площин буде пряма лінія a, її проекції співпадають з проекціями заданих площин: $a_1 \equiv \Delta_1$, $a_2 \equiv \Sigma_2$.

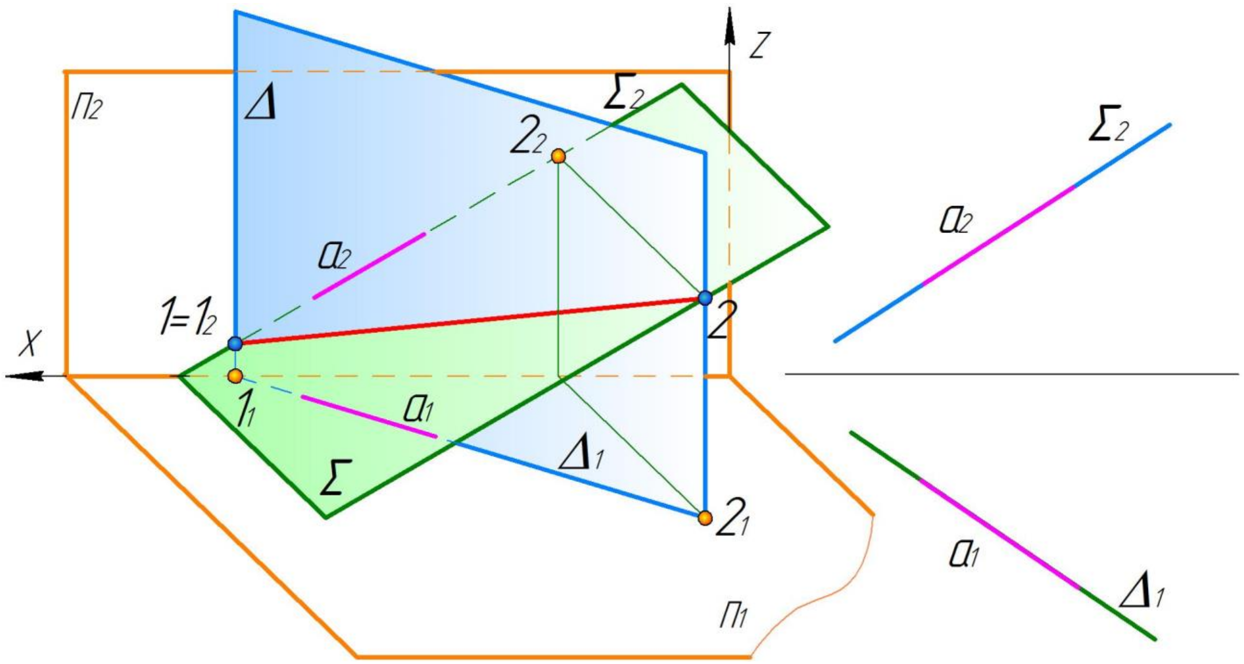


Рис. 5.9

5.1.7. Задані дві площини: одна окремого положення (перпендикулярна площині проекції), друга – загального вигляду (окремі випадки)

Якщо одна з площин перпендикулярна площині проекції, то внаслідок того, що слід-проекція має збиральну властивість, одна проекція лінії перетину співпадає із слідом-проекцією, а друга знаходиться з умови належності точок цієї прямої до іншої площини.

Дано: $\Sigma(a \cap b)$ – площина загального вигляду, $\Delta \perp$ П2 - фронтально проектуюча площина.

Знайти лінію перетину двох площин c.

Оскільки площина Δ фронтальнопроеціювальна, то слід - проекція площини на фронтальну площину проекцій П2 матиме збиральну властивість (рис.5.10).

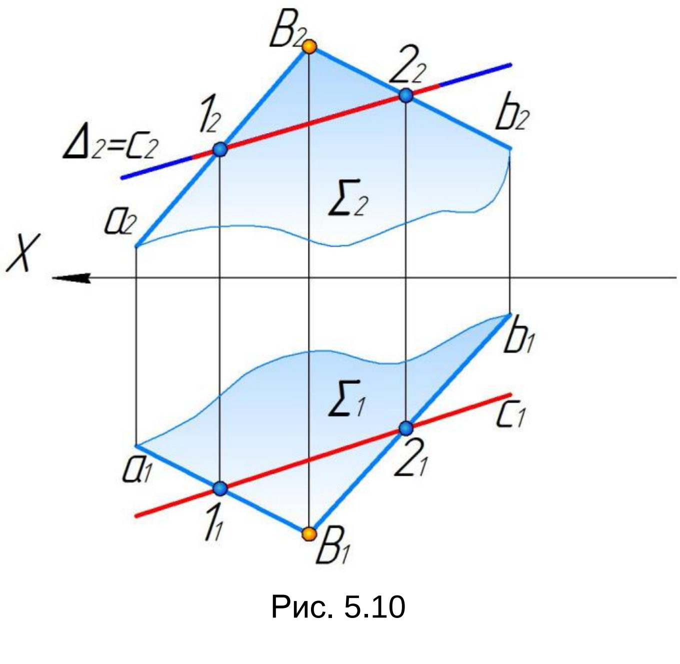


Рис. 5.10

Отже на фронтальній площині проекцій П2 лінія перетину двох площин буде співпадати зі слідом – проекцією заданої площини: $1_2 2_2 \equiv c_2 \equiv \Delta_2$. На горизонтальній площині проекцій П1 лінія перетину двох площин c_1 визначається з умови належності точки - прямої.

Дано: $\Omega(\vartriangle ABC)$ - площина загального вигляду, $\Sigma \perp$П1 - горизонтальнопроеціювальна площина.

Знайти лінію перетину двох площин c.

Оскільки площина Σ горизонтально проеціювальна, то слід - проекція площини на горизонтальну площину проекцій П1 матиме збиральну властивість.

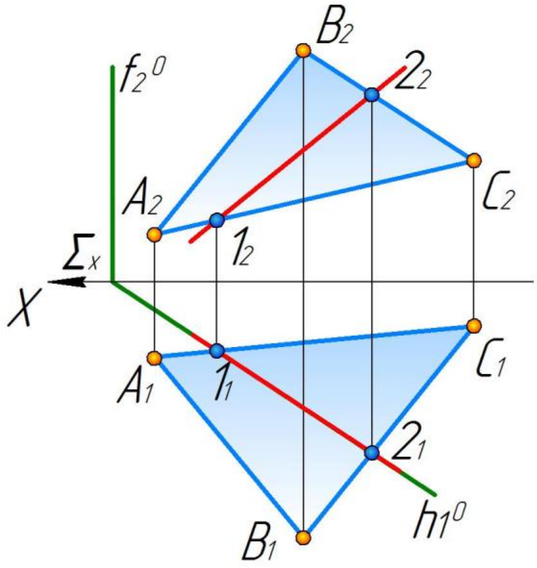


Рис. 5.11

Отже на горизонтальній площині проекцій П1 лінія перетину двох площин буде співпадати зі слідом – проекцією заданої площини: $1_1 2_1 \equiv h_1^0 \equiv \Sigma_1$. На фронтальній площині проекцій П2 лінія перетину двох площин $1_2 2_2$ визначається з умови належності точки – прямої (рис.5.11).

5.1.8. Задані дві площини загального вигляду (окремі випадки)

Дві площини загального вигляду перетинаються по прямій фронтального рівня, якщо паралельні їх фронтальні сліди (рис.5.12).

Дано: $\Sigma(f^0 \cap h^0)$, $\Delta(f^{0\prime} \cap h^{0\prime})$ - площини загального вигляду, при чому: f^0 // $f^{0\prime}$ - їх фронтальні сліди паралельні.

Знайти лінію перетину двох площин.

Рішення:

1. $h_1^0 \cap h_1^{0\prime} = 1_1$;
2. $1_1 \uparrow 1_2$;
3. $1_2 \hookrightarrow f_2$ // f_2^0 // $f_2^{0\prime}$.

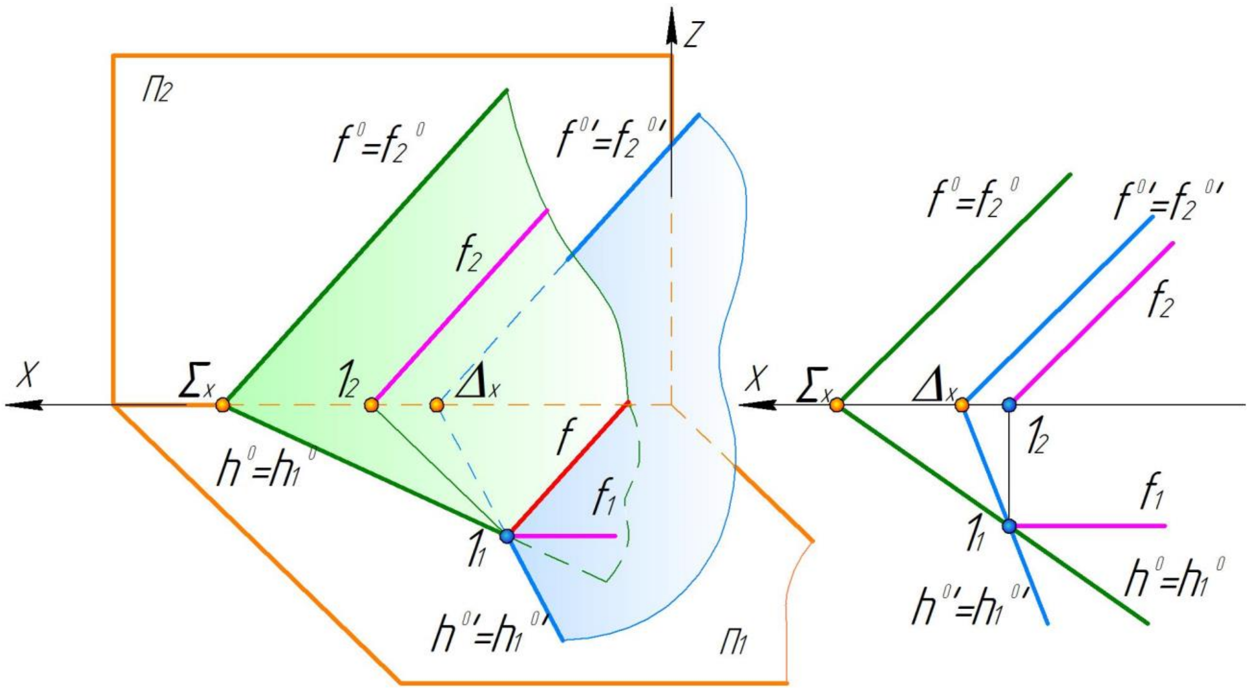


Рис. 5.12

Дві площини загального вигляду перетинаються по прямої горизонтального рівня, якщо паралельні їх горизонтальні сліди (рис.5.13).

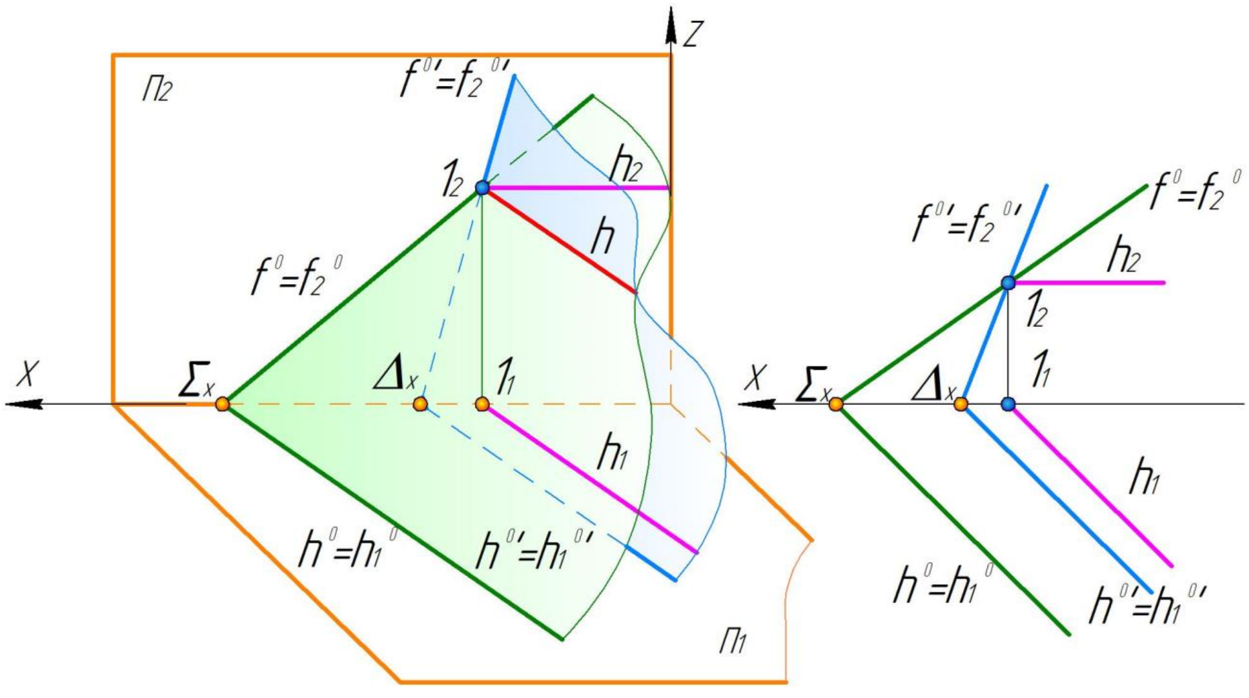


Рис. 5.13

Дано: $\Sigma(f^0 \cap h^0)$, $\Delta(f^{0\prime} \cap h^{0\prime})$ - площини загального вигляду, при чому: h^0 // $h^{0\prime}$ - їх фронтальні сліди паралельні.

Знайти лінію перетину двох площин.

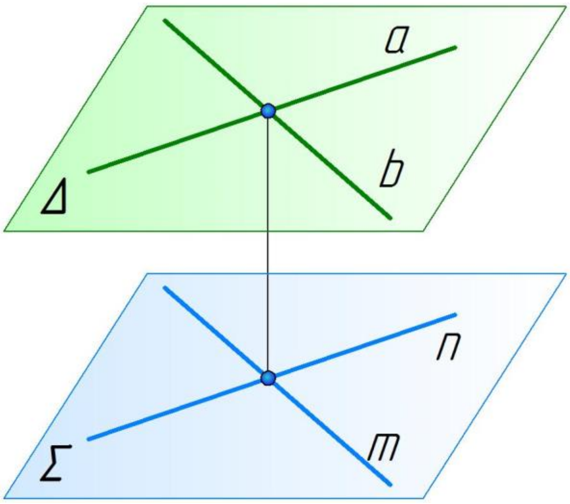
Рішення:

1. $f_2^0 \cap f_2^{0\prime} = 1_2$;
2. $1_2 \downarrow 1_1$;
3. $1_1 \hookrightarrow h_1$ // h_1^0 // $h_1^{0\prime}$.

5.2. Паралельні площини

Вище були розглянуті випадки, коли дві площини перетинаються. Також площині в просторі можуть бути паралельні між собою. Отже.

Дві площини паралельні між собою, якщо дві прямі лінії, які перетинаються, однієї площини відповідно паралельні двом прямим лініям, які також перетинаються, другої площини (рис. 5.14 – просторова модель, 5.15 – на комплексному кресленні).

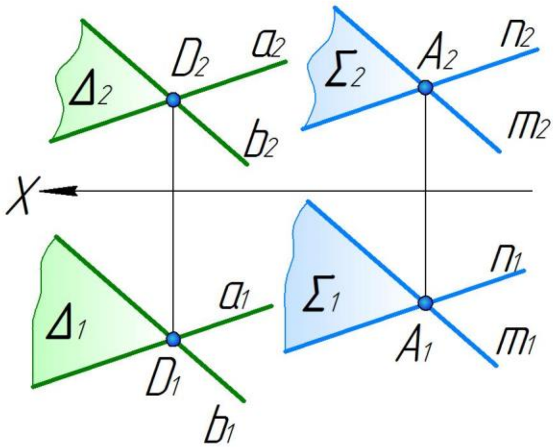


$\Sigma(m \cap n)$, $\Delta(a \cap b)$;

a // n; b // m;

Σ // Δ.

Рис. 5.14



a_1 // n_1; b_1 // m_1;

a_2 // n_2; b_2 // m_2;

Σ // Δ.

Рис. 5.15

На комплексному кресленні дві площини паралельні, якщо:

1) горизонталі та фронталі однієї площини відповідно паралельні горизонталям і фронталям другої площини (рис. 5.16).

$\Sigma(h \cap f)$, $\Delta(h' \cap f')$
$h_1 // f_1$; $h'_1 // f'_1$;
$h_2 // f_2$; $h'_2 // f'_2$;
$\Sigma // \Delta$.

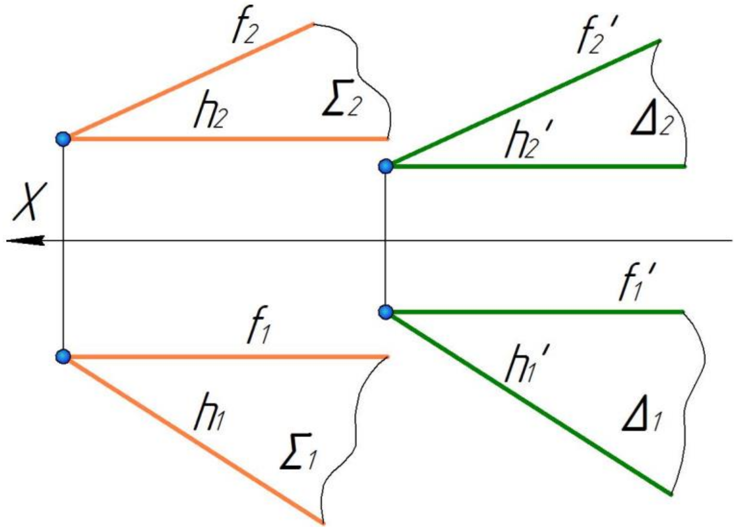


Рис. 5.16

2) однойменні сліди двох площин паралельні між собою (рис. 5.17) - окремий випадок.

$\Sigma(h^0 \cap f^0)$, $\Delta(h^{0\prime} \cap f^{0\prime})$
$h_1^0 // h_1^{0\prime}$; $f_2^0 // f_2^{0\prime}$;
$\Sigma // \Delta$.

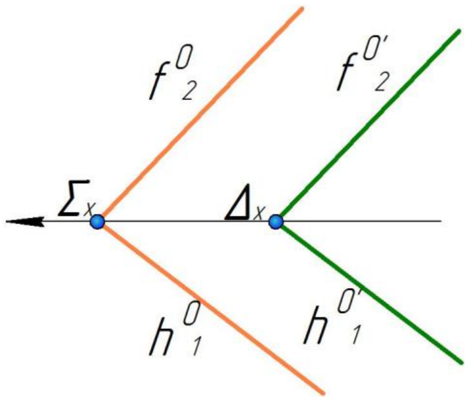


Рис. 5.17

3) площини приватного положення паралельні, якщо їх сліди-проекції паралельні між собою (рис. 5.18).

$\Sigma_2 // \Delta_2$.
$\Sigma // \Delta$.

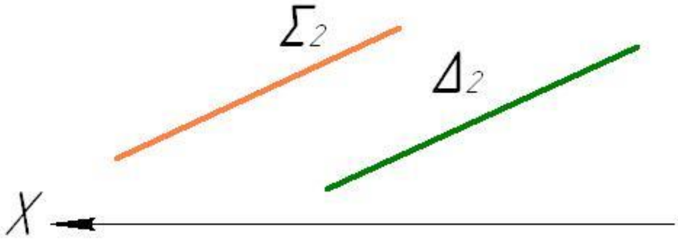


Рис. 5.18

Приклади побудови паралельних площин

Дано: $\Sigma(a // b)$, точка A.

Знайти: Через точку A провести площину $\Omega(m \cap k)$: $\Sigma(a // b) // \Omega(m \cap k)$.

Алгоритм рішення задачі :

1. У площині $\Sigma(a // b)$ будуємо довільну пряму d, яка перетинає прямі a і b.

2. Через точку A проведемо $m // a$: $m_1 // a_1$, $m_2 // a_2$ і

$k // d$: $k_1 // d_1$, $k_2 // d_2$.

3. Отримана площина Ω, утворена двома прямими m і k, які перетинаються в точці A, буде паралельна площині $\Sigma(a // b)$ (рис. 5.19).

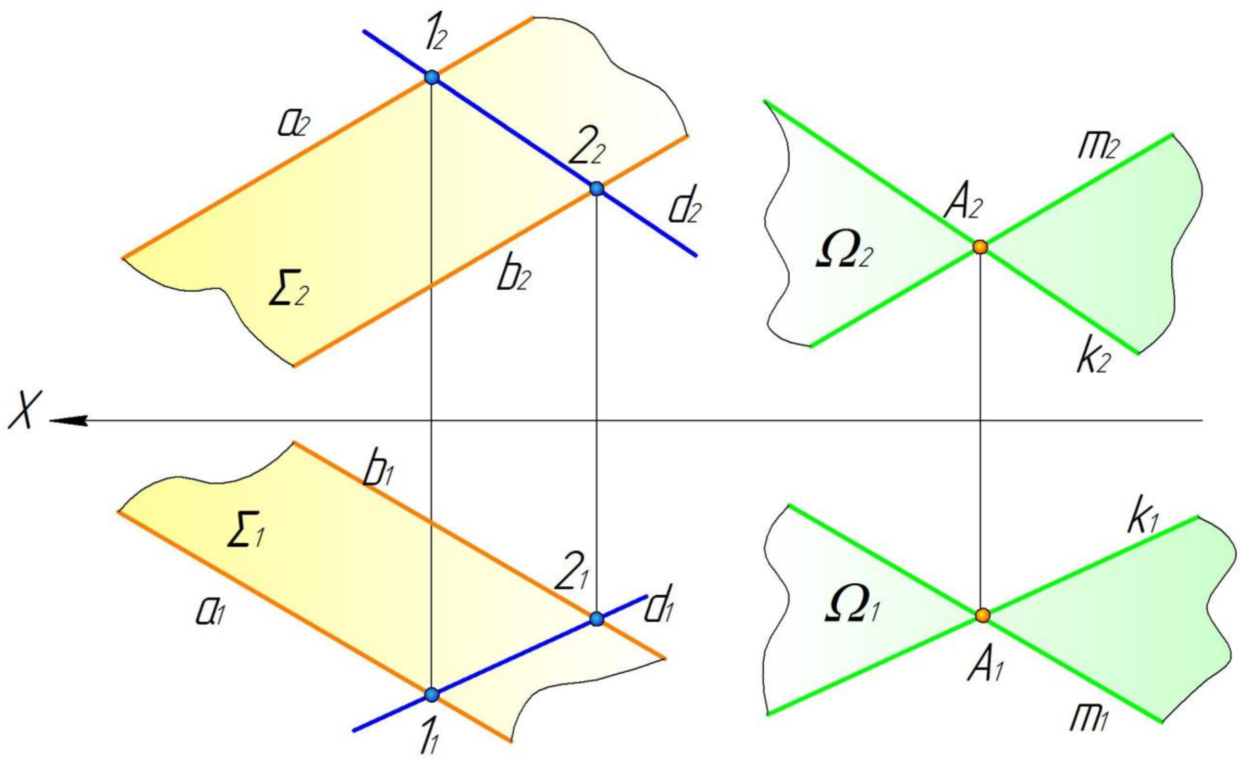


Рис. 5.19

Дано: $\Sigma(h^0 \cap f^0)$, B.

Знайти: Через точку B провести площину, паралельну площині $\Sigma(h^0 \cap f^0)$.

Через точку B проводимо пряму горизонтального рівня h і пряму фронтального рівня f паралельно площини $\Sigma(h^0 \cap f^0)$ (рис. 5.20):

$A_1 \hookrightarrow h_1 \mathbin{/\!/} h_1^0$; $A_1 \hookrightarrow f_1 \mathbin{/\!/} f_1^0$;
$A_2 \hookrightarrow h_2 \mathbin{/\!/} h_2^0$; $A_2 \hookrightarrow f_2 \mathbin{/\!/} f_2^0$.

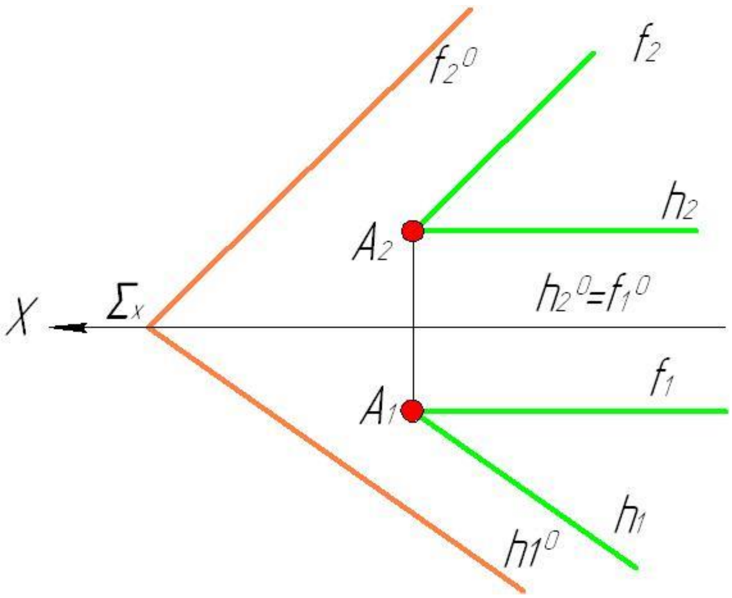


Рис.5.20

Тема 6. Перпендикулярність геометричних елементів

6.1. Перпендикулярність прямої та площини.
6.2. Визначення відстані від точки до площини.
6.3. Взаємно-перпендикулярні площини.
6.4. Взаємно-перпендикулярні прямі.
6.5. Визначення відстані від точки до прямої.
6.6. Визначення відстані між паралельними площинами.
6.7. Побудова проекцій кута між прямою та площиною.

6.1. Перпендикулярність прямої і площини

З курсу стереометрії відомо, що *пряма перпендикулярна* до площини, якщо вона перпендикулярна двом прямим що перетинаються, які належать цій площині. Геометричну модель показано на рис. 6.1.

Через будь-яку точку, яка належить площині, можна провести пряму горизонтального рівня і пряму фронтального рівня. Отже.

Пряма r перпендикулярна площині, якщо її горизонтальна проекція $r(r_1)$ перпендикулярна до горизонтальної проекції прямої горизонтального рівня h_1, а фронтальна проекція прямої $r(r_2)$

перпендикулярна фронтальній проекції прямої фронтального рівня f_2 (рис. 6.2).

$$\mathrm{a} \cap b$$

$$a, b \in \sum$$

$$\begin{cases} r \perp a \\ r \perp b \end{cases} \Rightarrow r \perp \sum$$

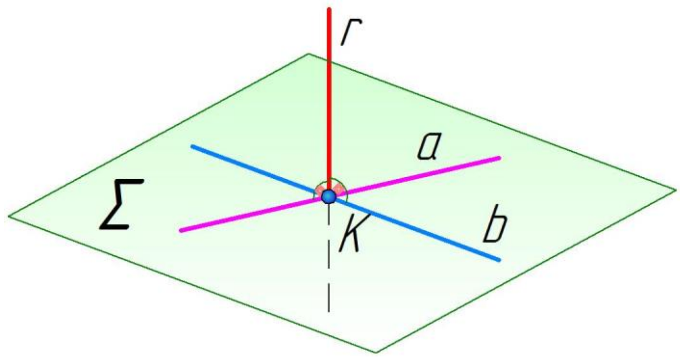


Рис. 6.1

Розглянемо просторову модель на рис. 6.2. В площині, яка задана слідами $\Sigma(h^0 \cap f^0)$, проведемо через точку $K(K \in \Sigma)$, пряму горизонтального рівня h і пряму фронтального рівня f. Через точку $K(K \in \Sigma)$ проведемо пряму r за умови, що вона перпендикулярна площині $\Sigma(h^0 \cap f^0)$.

$$r_1 \perp h_1$$

$$r_2 \perp f_2$$

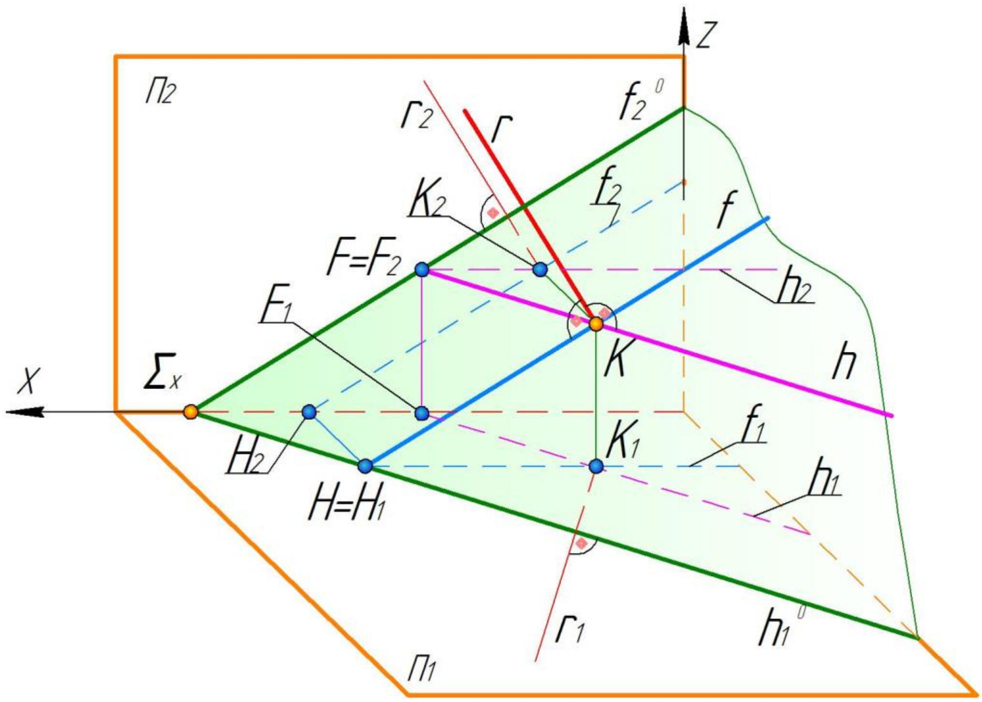


Рис. 6.2.

В результаті ця пряма утворила з прямою горизонтального рівня h і прямою фронтального рівня f прямі кути. Зазначимо, що кожний з цих кутів має один промінь, паралельний відповідній площині проекцій, і тому відобразиться на цю площину проекцій в натуральну величину. В такому випадку r_1 буде перпендикулярний до h_1, а r_2 до f_2. Враховуючи те, що $h_1 // h_1^0$, а $f_2 // f_2^0$, матиме $r_1 \perp h_1^0$, а $r_2 \perp f_2^0$, що і треба було довести.

Для побудови проекцій прямої, яка перпендикуляра до площини, можна використовувати будь-які прямі горизонтального і фронтального рівня, які належать цій площині. У тих випадках, коли площина задана не слідами, необхідно провести в ній довільну горизонталь і довільну фронталь, а потім побудувати проекції перпендикуляра r_1 і r_2 так, щоб вони склали прямі кути відповідно з горизонтальною проекцією h_1 горизонталі h і з фронтальною проекцією f_2 фронталі f.

Дано: $\sum$ (ΔABC) площина загального положення, точка D.

Знайти: Через точку D провести пряму r, перпендикулярну до площини $\sum$ (ΔABC) (рис. 6.3).

Алгоритм побудов:

У зв’язку з тим, що площина $\sum$ (ΔABC) задана не слідами, спочатку необхідно в площині провести пряму горизонтального і пряму фронтального рівня.

1. Побудову прямої горизонтального рівня h почнемо з побудови її фронтальної проекції h_2, так як відомо її напрямок:

$C_2 \hookrightarrow h_2 \,//\, OX$.

$h_2 \cap A_2B_2 = 1_2$.

$1_2 \downarrow 1_1$.

$1_2 1_1 \cap A_1B_1 = 1_1$.

$1_1 \cup C_1 = 1_1C_1 \equiv h_1$.

2. Побудову прямої фронтального рівня f почнемо з побудови її горизонтальної проекції f_1, оскільки як відомо її напрямок: $C_1 \hookrightarrow f_1 \,//\, OX$.

$f_1 \cap A_1B_1 = 2_1 \uparrow 2_2$.

$2_1 2_2 \cap A_2B_2 = 2_2$.

$2_2 \cup C_2 = 2_2C_2 \equiv f_2$.

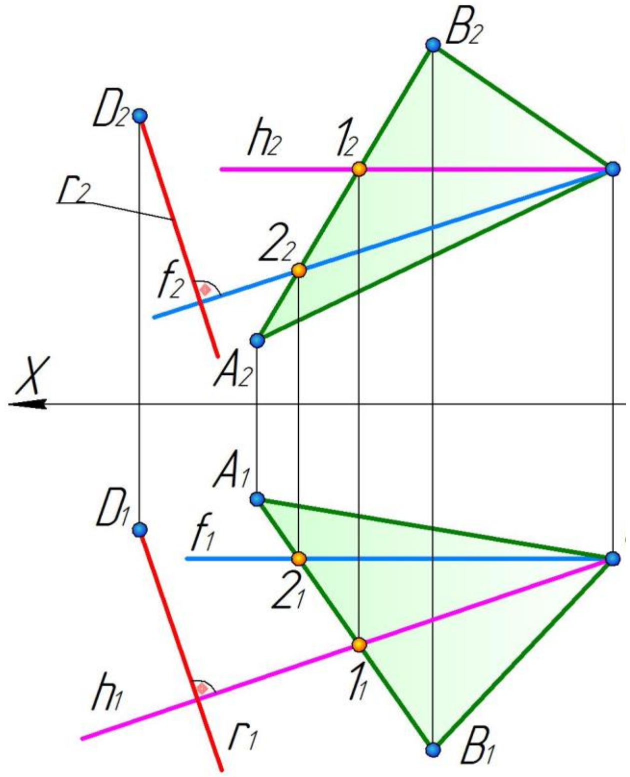


Рис. 6.3

3. Побудова прямої, яка перпендикулярна площині:

$D_1 \hookrightarrow r_1 \perp h_1$; $D_2 \hookrightarrow r_2 \perp f_2$.

Точка зустрічі прямої r з площиною $\sum$ (ΔABC) в завданні не розглядалась.

Окремі випадки.

Якщо площина *задана слідами* $\Sigma(h^0 \cap f^0)$, то *пряма* r *перпендикулярна до площини*, якщо її проекції перпендикулярні однойменним слідам площини (рис. 6.4):

$A_1 \hookrightarrow r_1 \perp h_1^0$.

$A_2 \hookrightarrow r_2 \perp f_2^0$.

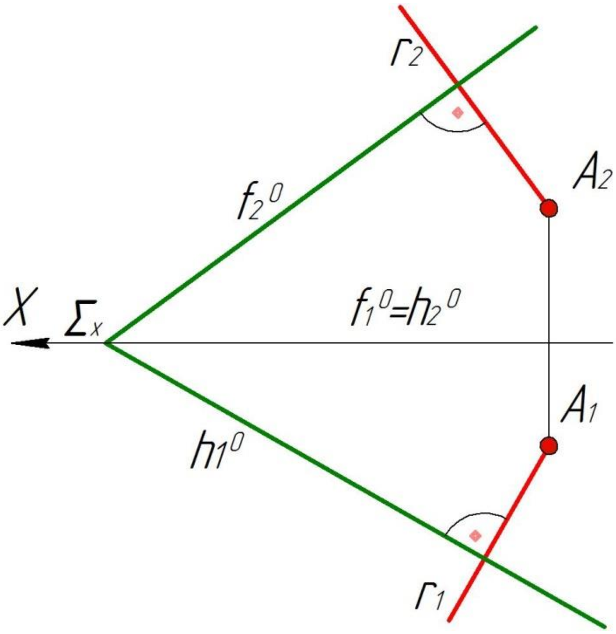


Рис. 6.4.

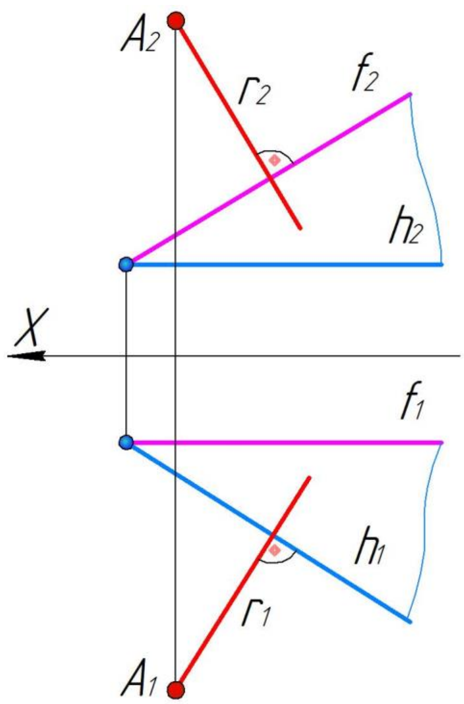


Рис. 6.5.

Якщо площина задана *прямою фронтального рівня і горизонталлю* $\Sigma(h \cap f)$, то *пряма* r *перпендикулярна площині*, якщо її проекції перпендикулярні фронталі і горизонталі (рис. 6.5):

$A_1 \hookrightarrow r_1 \perp h_1$.

$A_2 \hookrightarrow r_2 \perp f_2$.

Пряма, яка перпендикулярна до площини окремого положення, є прямою окремого положення. *Одна її проекція перпендикулярна до сліду-проекції* (рис. 6.6), а *друга - осі проекції.*

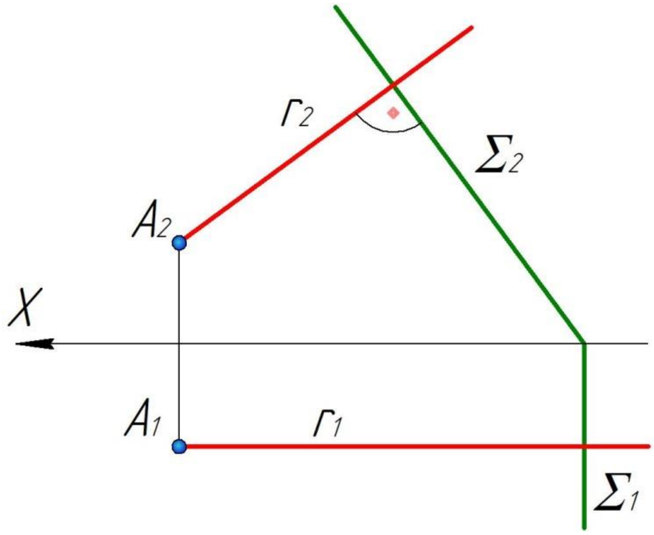


Рис. 6.6.

На рис.6.6. задана площина окремого положення: $\Sigma \perp \Pi_2$ – фронтальнопроеціювальна площина. Для побудови прямої, яка перпендикулярна цій площини, проведемо:

1. $A_1 \hookrightarrow r_1 \perp \Sigma_1$.
2. $A_2 \hookrightarrow r_2 \perp \Sigma_2$.

Часто при рішенні метричних і позиційних завдань виникає необхідність відновлення заданої величини перпендикуляра з точки площини.

Дано: $\Sigma(h \cap f)$ (рис.6.7).

Знайти: Знайти точку K, віддалену від площини $\Sigma(h \cap f)$ на відстань 30 мм.

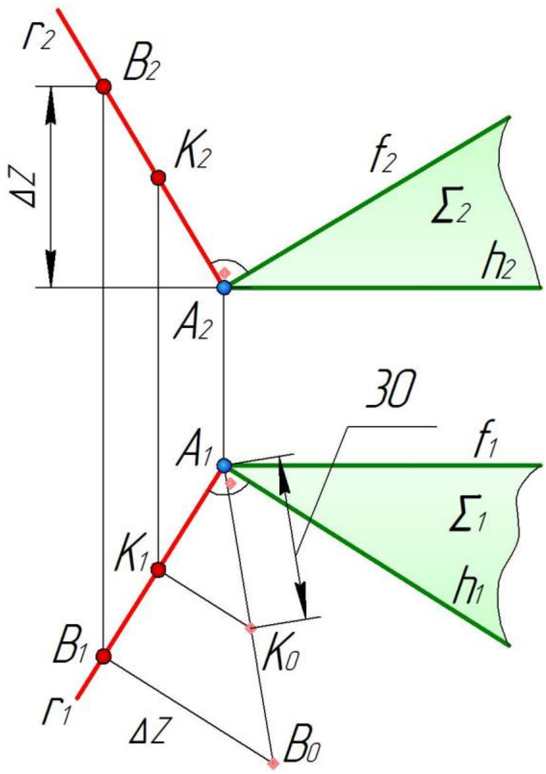
Алгоритм побудов :

1. З точки A, яка належить площині $\Sigma(h \cap f)$ проводимо проекції перпендикуляра r (рис. 6.7):

$A_1 \hookrightarrow r_1 \perp h_1$.

$A_2 \hookrightarrow r_2 \perp f_2$.

2. На проекціях перпендикуляра (r_1 і r_2) візьмемо довільну точку B (B_1 і B_2). Визначимо натуральну величину відрізка $[AB]$ методом прямокутного трикутника (A_1B_0 -



натуральна величина відрізка $[AB]$).

Рис. 6.7

3. Відкладемо на натуральній величині відрізка A_1B_0 задану довжину перпендикуляра (30 мм), а саме A_1K_0 = 30 мм.

4. Зворотним проектуванням будуємо проекції перпендикуляра: $A_1\ K_1$ і $A_2\ K_2$:

Для цього проводимо $K_0K_1 \parallel B_0B_1$.

$K_0K_1 \cap A_1B_1 = K_1$.

$K_1 \uparrow K_2$.

$K_2K_1 \cap A_2B_2 = K_2$.

Дано: $\sum (a \cap b)$, точка A. Точка A належить площині $\sum (a \cap b)$.

Знайти: Відновити перпендикуляр до площини $\sum (a \cap b)$ в точці A, яка належить площині.

Алгоритм побудов:

Для побудови проекцій перпендикуляра r_1 і r_2 необхідно, спочатку, в площині $\sum(a \cap b)$, яка задана двома прямими, які перетинаються, провести пряму горизонтального рівня h і пряму фронтального рівня f (рис.6.8):

1. Побудову прямої горизонтального рівня h почнемо з побудови її фронтальної проекції h_2, оскільки як відомо її напрямок:

1. $\hookrightarrow h_2 \parallel OX$:
2. $h_2 \cap a_2 = 1_2$.
3. $h_2 \cap b_2 = 2_2$.
4. $1_2 \downarrow 1_1$:
5. $1_2 1_1 \cap a_1 = 1_1$.
6. $2_2 \downarrow 2_1$:
7. $2_2 2_1 \cap b_1 = 2_1$.
8. $1_1 \cup 2_1 = h_1$.

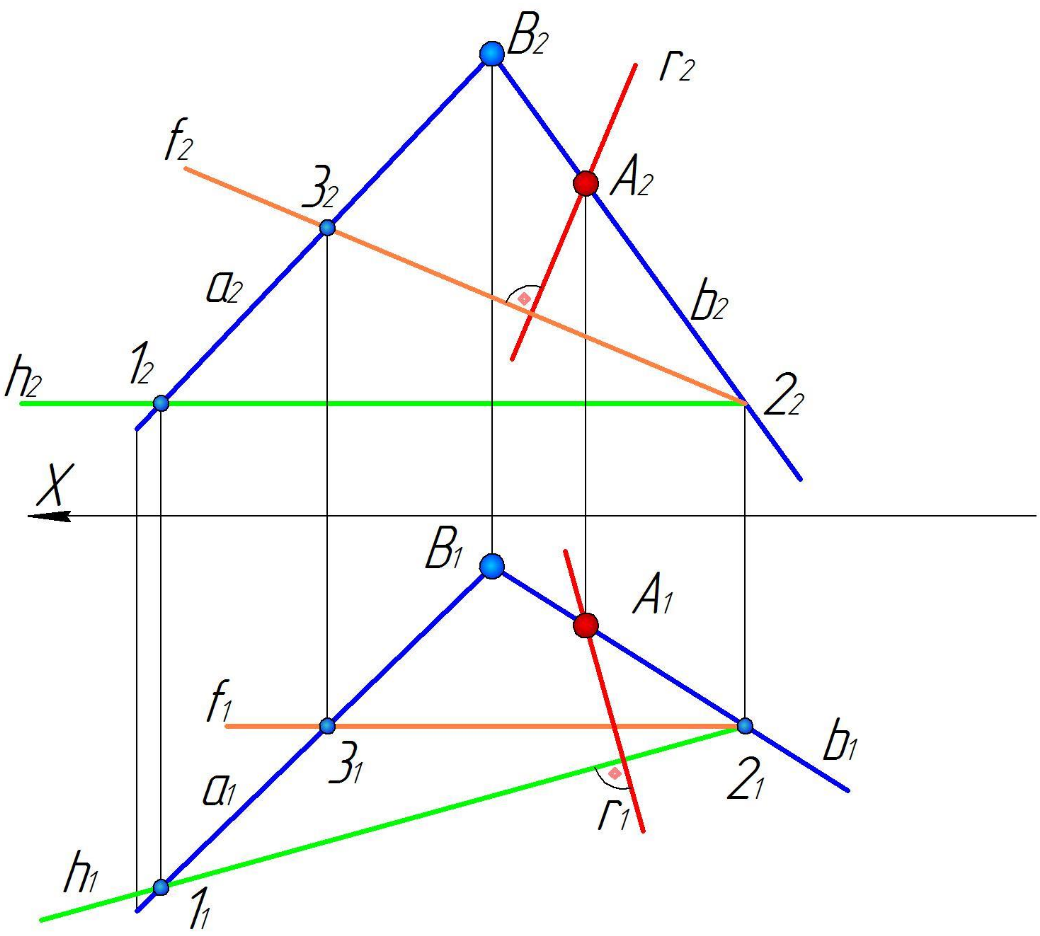


Рис. 6.8.

2. Побудову прямої фронтального рівня f почнемо з побудови її горизонтальної проекції f_1, оскільки відомо її напрямок:

$\hookrightarrow f_1$ // OX:

$f_1 \cap a_1 = 3_1$.

$f_1 \cap b_1 = 2_1$.

$3_1 \uparrow 3_2$:

$3_2 3_1 \cap a_2 = 3_2$.

$3_2 \cup 2_2 = f_2$.

3. Відновлюємо перпендикуляр до площини $\sum (a \cap b)$ в точці A, яка належить площині:

$A_1 \hookrightarrow r_1 \perp h_1$

$A_2 \hookrightarrow r_2 \perp f_2$

Дано: точка A, пряма загального положення b.

Знайти: Через точку A провести площину $\sum$, перпендикулярну до прямої загального положення b.

Для вирішення завдання цілком достатньо через точку A провести дві прямі, кожна з яких була б перпендикулярна до заданої прямої b.

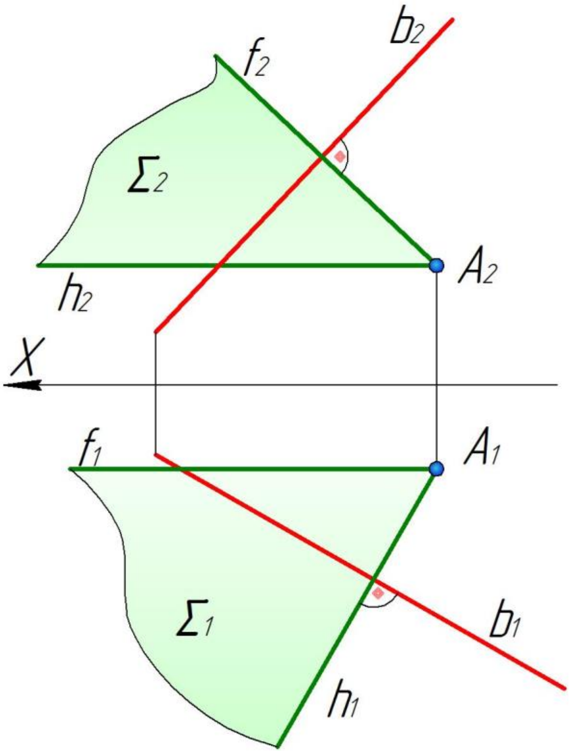


Рис. 6.9

1. Проведемо пряму горизонтального рівня h, яка буде також перпендикулярна до прямої b (рис.6.9):

$$\left.\begin{array}{l} A_1 \hookrightarrow h_1 \perp b_1 \\ A_2 \hookrightarrow h_2 \,//\, OX \end{array}\right\} \Rightarrow h \perp b \,.$$

2. Проведемо пряму фронтального рівня f, яка буде також перпендикулярна до прямої b:

$$\left.\begin{array}{l} A_1 \hookrightarrow f_1 \,//\, OX \\ A_2 \hookrightarrow f_2 \perp b_2 \end{array}\right\} \Rightarrow f \perp b \,.$$

3. Через точку A проводимо площину: $A \hookrightarrow \Sigma(h \cap f)$, яка задана двома прямими, які перетинаються, при чому $h \perp b$ і $f \perp b$, отже: $\Sigma(h \cap f) \perp b$.

Точка перетинання прямої b з площиною $\sum$ в завданні не розглядалась.

6.2. Визначення відстані від точки до площини

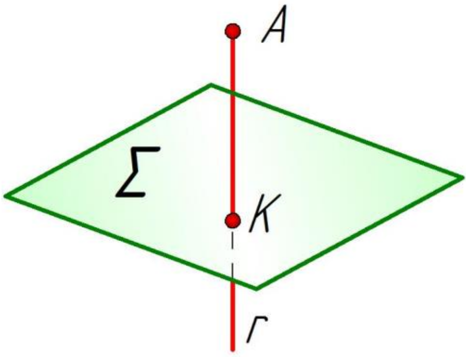


Рис. 6.10

Відстань від точки до площини визначається довжиною відрізку перпендикуляра, опущеного з точки A на площину Σ: AK (рис.6.10).

Порядок рішення цієї задачі складається з трьох етапів:

1) з заданої точки проводиться перпендикуляр до площини (при необхідності спочатку будують пряму лінію горизонтального рівня і фронтального рівня);

2) визначається точка зустрічі перпендикуляра з площиною (вирішується основна задача нарисної геометрії);

3) будується натуральна величина відрізка перпендикуляра методом прямокутного трикутника.

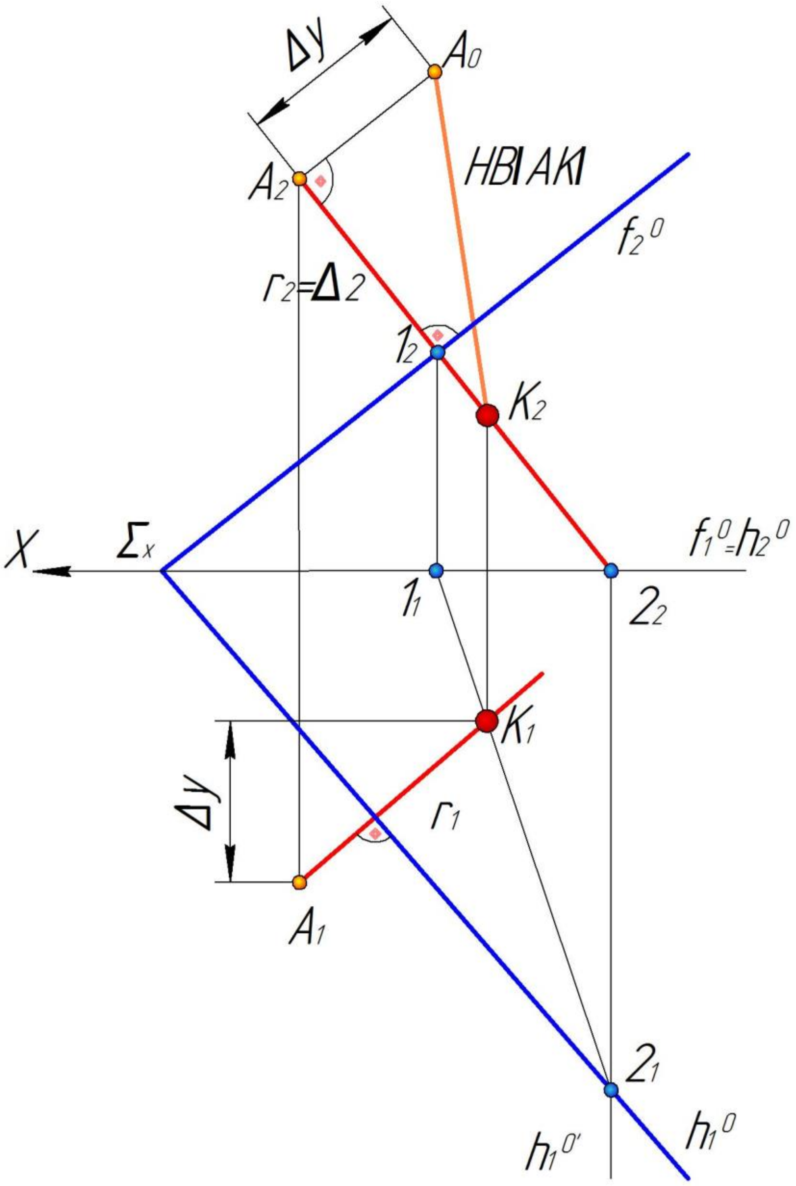


Рис. 6.11

Дано: точка A, площина Σ ($h^0 \cap f^0$).

Знайти: AK – відстань від точки A до площини $\Sigma(h^0 \cap f^0)$.

Алгоритм побудов:

1. З заданої точки A проводимо перпендикуляр до площини (рис.6.11):

$A_1 \hookrightarrow r_1 \perp h_1^0$.

$A_2 \hookrightarrow r_2 \perp f_2^0$.

2. Визначаємо точку зустрічі перпендикуляра з площиною.

2.1. $r_2 \hookrightarrow \Delta \perp \Pi_2$.

$\Delta_2 \equiv r_2$.

2.2. $\Delta_2 \cap \Sigma(h^0 \cap f^0)$=$1_2 2_2$.

$1_2 2_2 \downarrow 1_1 2_1$.

2.3. $1_1 2_1 \cap r_1 = K_1$.

$K_1 \uparrow K_2$.

3. Методом прямокутного трикутника визначаємо натуральну величину відрізка перпендикуляра AK: $A_0 K_2 = HB|AK|$.

Дано: точка A, площина Σ (Δ BCE).

Знайти: AK – відстань від точки A до площини Σ(Δ BCE).

Алгоритм побудов:

1. Для побудови проекцій перпендикуляру r_1 і r_2 необхідно, спочатку, в площині $\sum$(Δ BCE), провести пряму горизонтального рівня h і пряму фронтального рівня f (рис.6.12):

1.1. Побудову прямої горизонтального рівня h почнемо з побудови її фронтальної проекції h_2, оскільки як відомо її напрямок:

$C_2 \hookrightarrow h_2 \,//\, OX$: $h_2 \cap B_2 E_2 = 1_2$.

$1_2 \downarrow 1_1$.

$1_2 1_1 \cap B_1 E_1 = 1_1$.

$1_1 \cup C_1 = h_1$.

1.2. Побудову прямої фронтального рівня f почнемо з побудови її горизонтальної проекції f_1, оскільки відомо її напрямок:

$E_1 \hookrightarrow f_1 \,//\, OX$:

$f_1 \cap B_1 C_1 = 2_1$.

$2_1 \uparrow 2_2$:

$2_2 2_1 \cap B_2 C_2 = 2_2$.

$2_2 \cup E_2 = f_2$.

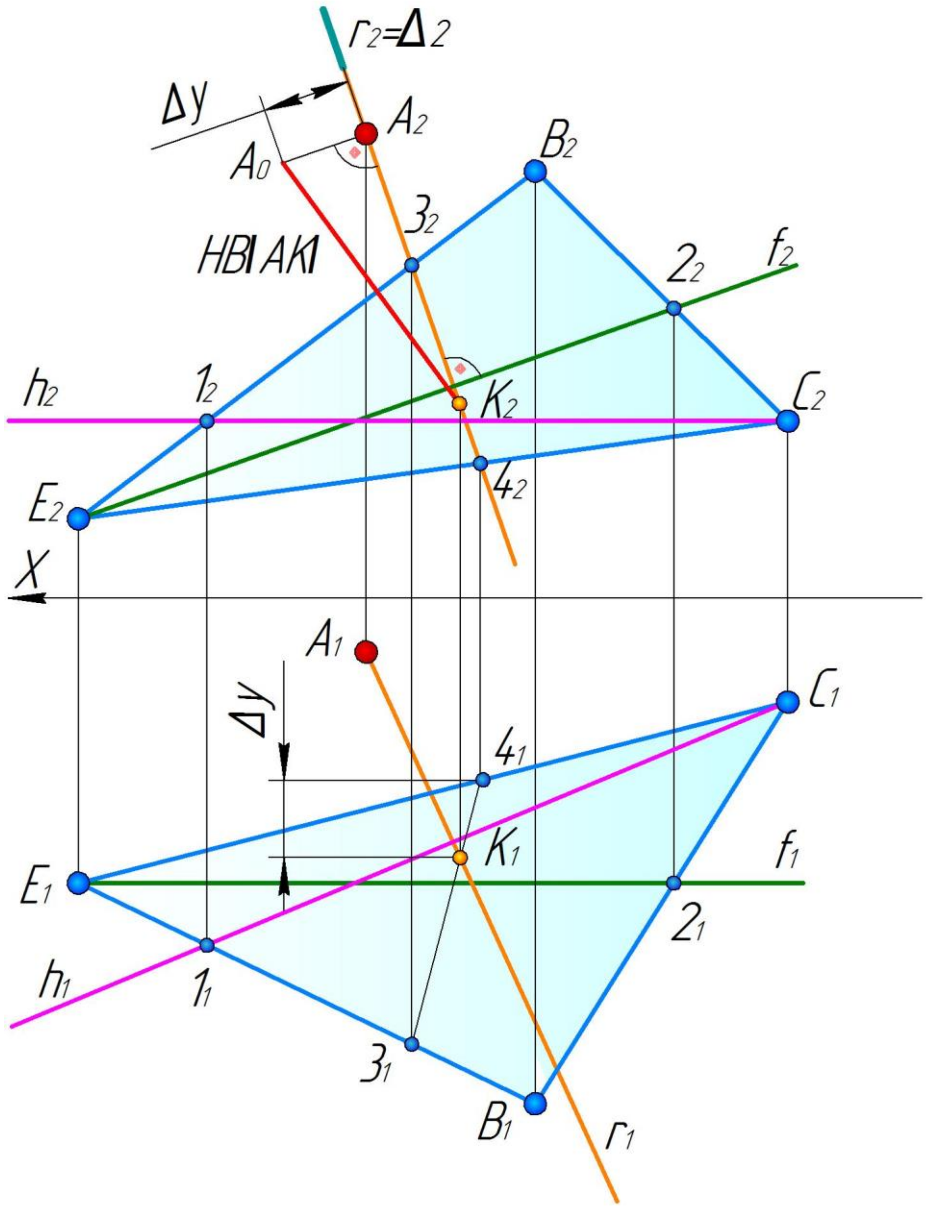


Рис. 6.12

1.3. Відновлюємо перпендикуляр до площини $\Sigma(\Delta\ \mathrm{BCE})$ в точці A, яка належить площині:

$A_1 \hookrightarrow r_1 \perp h_1$

$A_2 \hookrightarrow r_2 \perp f_2$

2. Визначаємо точку зустрічі перпендикуляра з площиною.

2.1. $r_2 \hookrightarrow \Delta \perp \Pi_2$: $\Delta_2 \equiv r_2$

2.2. $\Delta_2 \cap \Sigma(\Delta\ BCE) = 3_2 4_2$

$3_2 4_2 \downarrow 3_1 4_1$

2.3. $3_1 4_1 \cap r_1 = K_1$

$K_1 \uparrow K_2$

3. Методом прямокутного трикутника визначаємо натуральну величину відрізка перпендикуляра AK: $A_0K_2 = HB|AK|$.

Рішення задачі спрощується, якщо площина займає проеціювальне положення. Наприклад, необхідно знайти відстань від точки A до площини $\Sigma \perp \Pi_2$ (рис. 6.13).

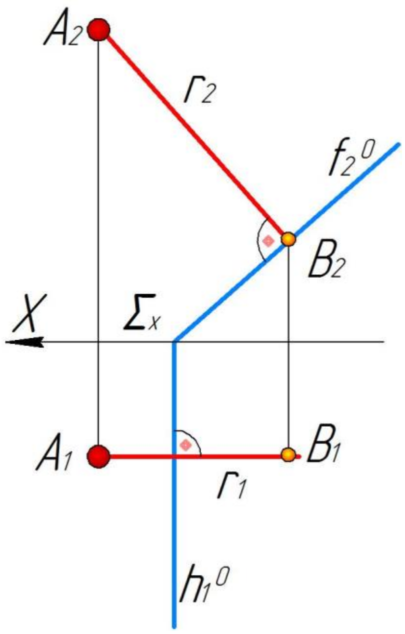


Рис. 6.13

1. Відновлюємо перпендикуляр до площини:

$A_1 \hookrightarrow r_1 \perp h_1^0$.

$A_2 \hookrightarrow r_2 \perp f_2^0$.

2. Визначаємо точку зустрічі перпендикуляра з площиною:

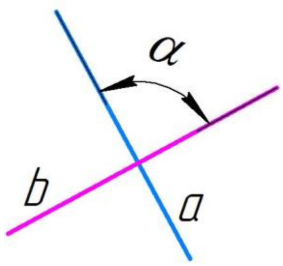
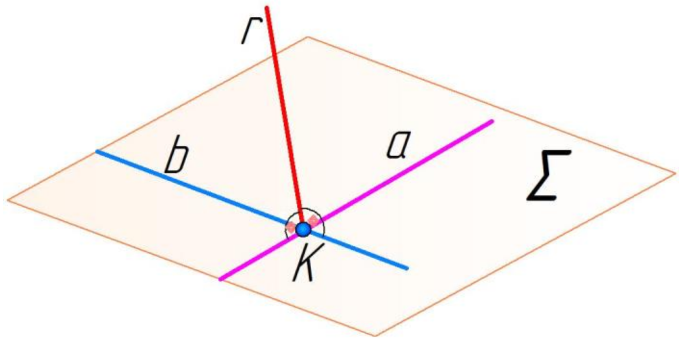
$r_2 \cap f_2^0 = B_2$.

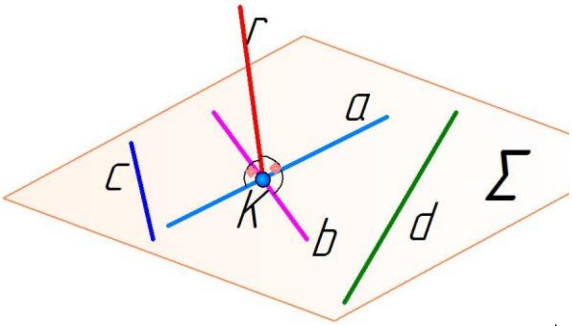
$B_2 \downarrow B_1$ ($B_2 \perp B_1 \parallel OX$; $B_2 \in r_2$; $B_1 \in r_1$).

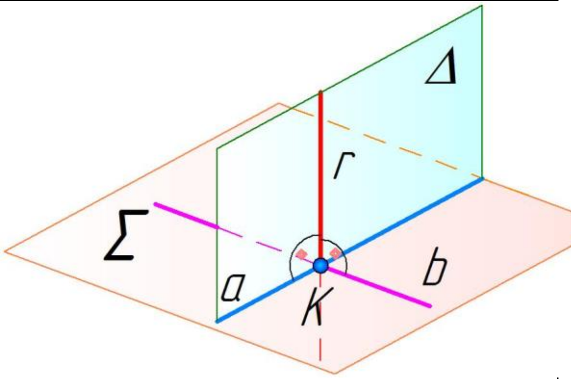
3. AB - пряма фронтального рівня, отже A_2B_2 натуральна величина відрізка прямої AB: $A_2B_2 \equiv |AB|$ - натуральна величина відстані від точки A до площини Σ.

6.3. Взаємно-перпендикулярні площини

Згадаємо ознаки перпендикулярності, відомі зі стереометрії.

Дві прямі називаються взаємно перпендикулярними, якщо кут між ними дорівнює 90^0.	Якщо пряма перпендикулярна до кожної з двох прямих що перетинаються, які належать площині, то ця пряма й площина взаємно перпендикулярні.
 $\angle\alpha = 90^0 \Rightarrow a \perp b$	 $r \perp b \wedge r \perp b$ $\Sigma(a \cap b) \Longrightarrow r \perp \Sigma$
Рис. 6.14	Рис.6.15

<table>
<tr>
<td>Якщо пряма перпендикулярна площині, то вона перпендикулярна до кожної прямої, яка належить цій площині.</td>
<td>Якщо площина проходить через перпендикуляр до іншої площини, то вона перпендикулярна до цієї площини.</td>
</tr>
<tr>
<td>

$r \perp \Sigma \Rightarrow$
$r \perp c \in \Sigma, r \perp d \in \Sigma$</td>
<td>

$\left.\begin{matrix} r \in \Delta \\ r \perp \Sigma \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \Delta \perp \Sigma$</td>
</tr>
<tr>
<td>Рис. 6.16</td>
<td>Рис. 6.17</td>
</tr>
</table>

Через довільну точку простору можна провести незліченну кількість площин, перпендикулярних до цієї площини. Всі ці площини проходитимуть через перпендикуляр до цієї площини, проведений через цю точку.

Алгоритм побудови площини Δ, яка проходитиме через точку K, і перпендикулярна площині Σ наступний:

1) в площині Σ будуємо пряму лінію горизонтального рівня h і пряму лінію фронтального рівня f;

2) з точки K проводимо перпендикуляр r до площини Σ;

3) з точки K проводимо довільну пряму n;

4) дві прямі лінії n і r, які перетинаються, утворять площину $\Delta \perp \Sigma$.

Дано: точка A, площина Σ $(a \cap b)$.

Знайти: Через точку A провести площину Δ, перпендикулярну до площини Σ $(a \cap b)$.

Завдання має безліч рішень (рис.6.18).

1) В площині Σ $(a \cap b)$ будуємо пряму лінію горизонтального рівня h і пряму лінію фронтального рівня f:

$$\hookrightarrow h_2//OX\colon \left.\begin{aligned} h_2 \cap a_2 &= 1_2 \downarrow 1_1 \in a_1 \\ h_2 \cap b_2 &= 2_2 \downarrow 2_1 \in b_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 1_1 \cup 2_1 = h_1 .$$

$$\hookrightarrow f_1//OX\colon \left.\begin{aligned} f_1 \cap a_1 &= 3_1 \uparrow 3_2 \in a_2 \\ f_1 \cap b_1 &= 2_1 \uparrow 2_2 \in b_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 3_2 \cup 2_2 = f_2.$$

2) З точки A проводимо пряму лінію r, яка буде перпендикулярна до площини Σ ($a \cap b$):

$A_1 \hookrightarrow r_1 \perp h_1$.

$A_2 \hookrightarrow r_2 \perp f_2$.

3) З точки A проводимо довільну пряму n:

$A_1 \hookrightarrow n_1$.

$A_2 \hookrightarrow n_2$.

4) Дві прямі лінії n і r, які перетинаються, утворять площину $\Delta \perp \Sigma$.

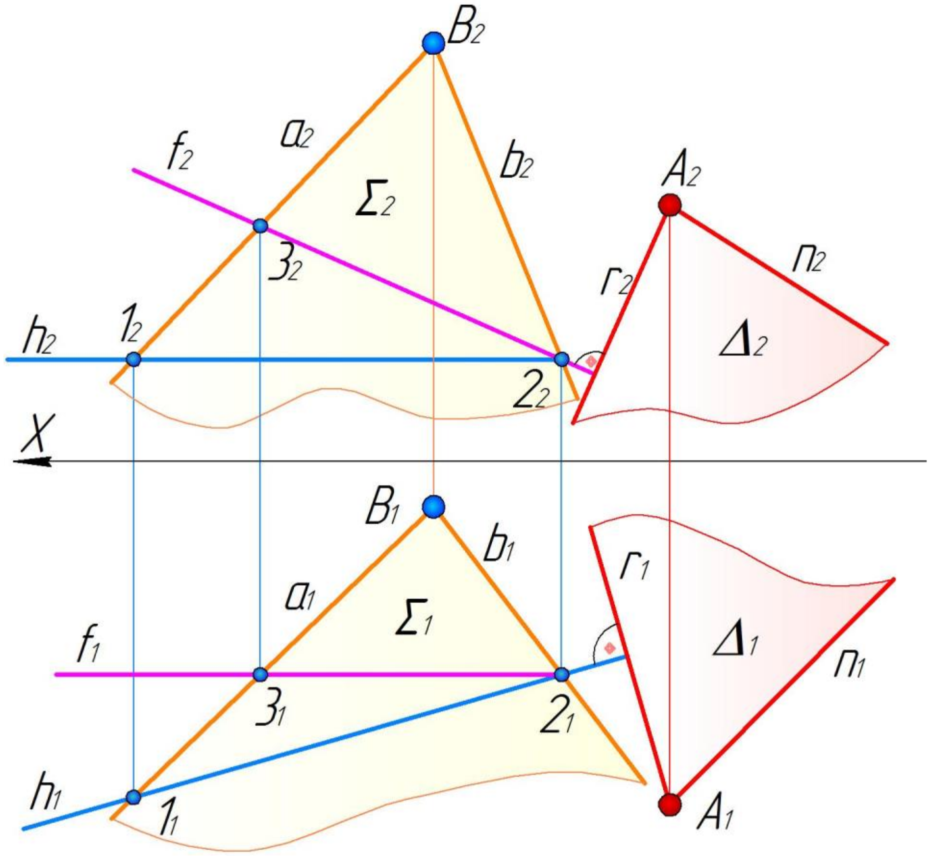


Рис. 6.18

Дано: точка A, площина $\Delta(c \cap d)$.

Знайти: Через точку A провести площину Σ, перпендикулярну до площини $\Delta(c \cap d)$.

Завдання має безліч рішень.

Проведемо площину Σ через пряму, перпендикулярну площині $\Delta(c \cap d)$ (рис. 6.19).

1) З точки A проведемо лінію горизонтального рівня h: її фронтальна проекція h_2 буде паралельна осі OX, а горизонтальну проекцію h_1 проведемо, наприклад, перпендикулярно до горизонтальної проекції прямої d (d_1):

$A_1 \hookrightarrow h_1 \perp d_1$.

$A_2 \hookrightarrow h_2//OX$.

2) З точки A проведемо лінію фронтального рівня f: її горизонтальна проекція f_1 буде паралельна осі OX, а фронтальну проекцію f_2 проведемо перпендикулярно до фронтальної проекції прямої d (d_2):

$A_1 \hookrightarrow f_1//OX$

$A_2 \hookrightarrow f_2 \perp d_2$.

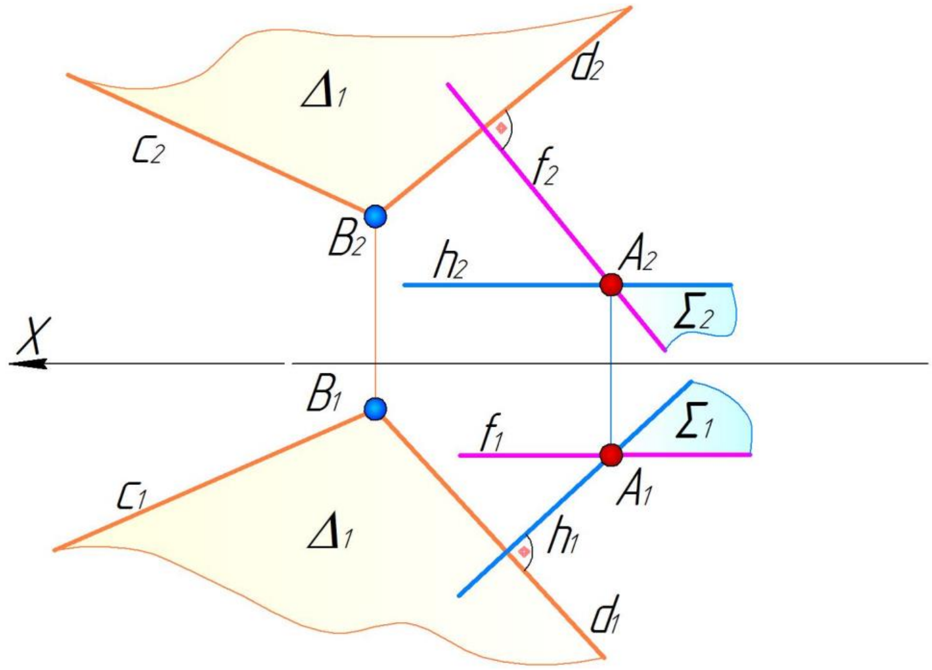


Рис. 6.19

3) Дві прямі лінії h і f, які перетинаються, утворять площину $\Sigma\ (h \cap f)$:

$$\left.\begin{array}{r} A \in \Sigma(h \cap f)\perp d \\ d \in \Delta(c \cap d) \end{array}\right\} \Rightarrow \Sigma(h \cap f)\perp\Delta(c \cap d).$$

6.4. Взаємно-перпендикулярні прямі

Якщо сторони прямого кута є прямими загального положення, то прямий кут на кожну із трьох площин проекцій ($П_1$, $П_2$, $П_3$) проектується з спотворенням.

Тому при побудові проекцій такого кута необхідно виходити з наступних положень:

1. Якщо дві прямі лінії взаємно перпендикулярні, то через кожну з них можна провести площину, перпендикулярну до іншої прямої.

2. Якщо пряма лінія перпендикулярна до площини, то вона перпендикулярна до будь-якої прямої, яка належить площині.

Отже: *побудова взаємно-перпендикулярних прямих загального* *положення зводиться до побудови площини, перпендикулярної до заданої прямої загального положення*.

Дано: n – пряма загального положення.

Знайти: Побудувати довільну пряму d, перпендикулярну до заданої прямої n загального положення.

Завдання має безліч рішень.

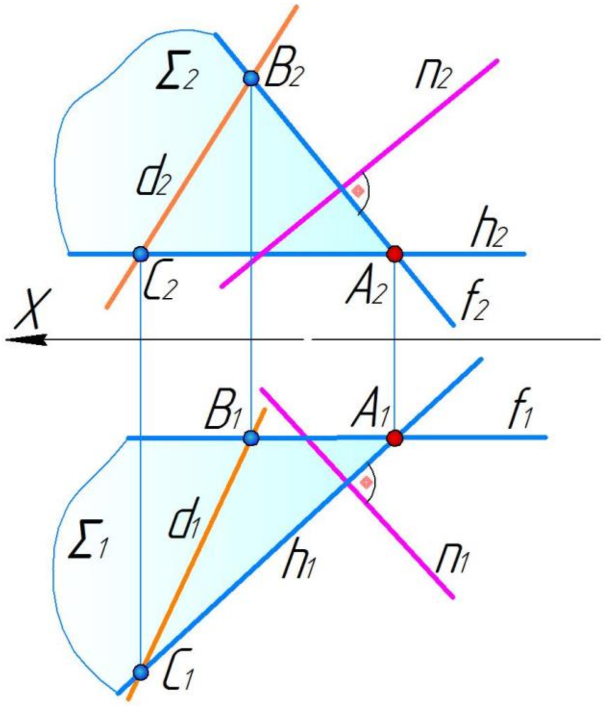


Рис. 6.20

1. Візьмемо точку A – довільна точка в просторі (A_1 , A_2).

2. Через точку A проведемо площину Σ, яка буде перпендикулярна до заданої прямої загального положення n:

2.1. $A_1 \hookrightarrow h_1 \perp n_1$

2.2. $A_2 \hookrightarrow h_2 // OX$

2.3. $A_1 \hookrightarrow f_1 // OX$

2.4. $A_2 \hookrightarrow f_2 \perp n_2$

Отримали: $\Sigma(h \cap f) \perp n$.

3. В площині Σ $(h \cap f)$ візьмемо довільну пряму d. Ця пряма лінія буде перпендикулярна до заданої прямої n загального положення:

$$\left.\begin{matrix} d \in \Sigma(h \cap f) \\ \Sigma(h \cap f) \perp n \end{matrix}\right\} \Rightarrow n \perp d.$$

Дано: d – пряма загального положення, точка A.

Знайти: З точки A опустити перпендикуляр на пряму загального положення d (геометрична модель завдання представлена на рис.6.21).

Аналіз. Шукана пряма n повинна:

1. проходити через точку A і бути перпендикулярною прямій d - цьому відповідає безліч прямих, що утворюють площину $\Phi(h \cap f)$, яка проходить через точку A і перпендикулярну прямій d:

$$\{n: (n \in A \wedge n \perp d)\}d = \Phi(h \cap f).$$

2.проходити через точку A і перетинати пряму d - цьому відповідає безліч прямих, які проходять через точку A і перетинають пряму d. Цією безліччю є площина Ф, яка задана прямою d і точкою A:

$$\{n: (n \in A \wedge n \cap d)\}d = \Phi(A, d).$$

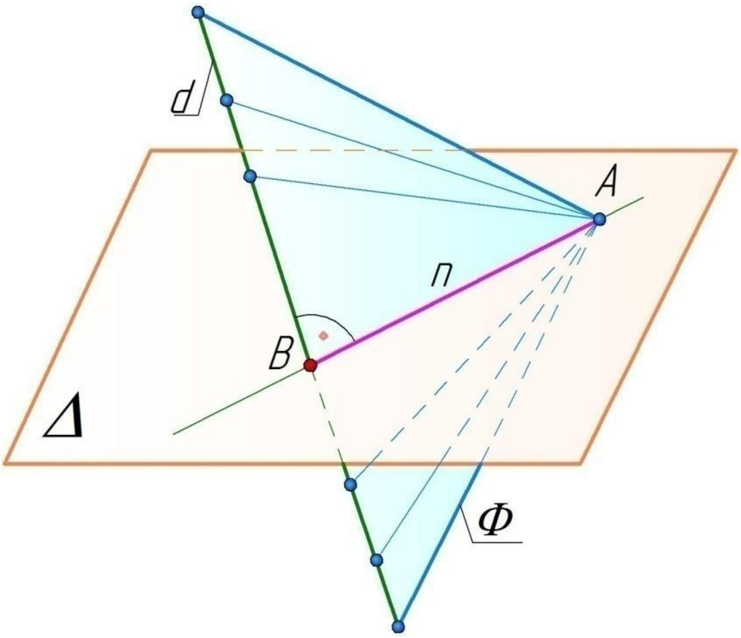


Рис. 6.21

Порядок побудов:

1) через точку A проводимо площину Φ, перпендикулярну прямій d;

2) знаходимо точку B пересічення прямої d з площиною Φ;

3) з'єднуємо точки A і B.

Алгоритм рішення завдання:

1) Через точку A проводимо площину Ф$(h \cap f)$, перпендикулярну до прямої загального положення d (рис. 6.22):

$A_1 \hookrightarrow h_1 \perp d_1.$

$A_2 \hookrightarrow h_2 // OX.$

$A_1 \hookrightarrow f_1 // OX.$

$A_2 \hookrightarrow f_2 \perp d_2.$

Отримали: Ф$(h \cap f) \perp d$.

2) Визначаємо точку B пересічення прямої d з площиною Ф, уклавши її у фронтально-проектуючу площину Δ.

3) З'єднуємо однойменні проекції точок A і B, та отримуємо пряму AB. Пряма AB перпендикулярна до прямої d, бо належить площині Ф$\perp d$.

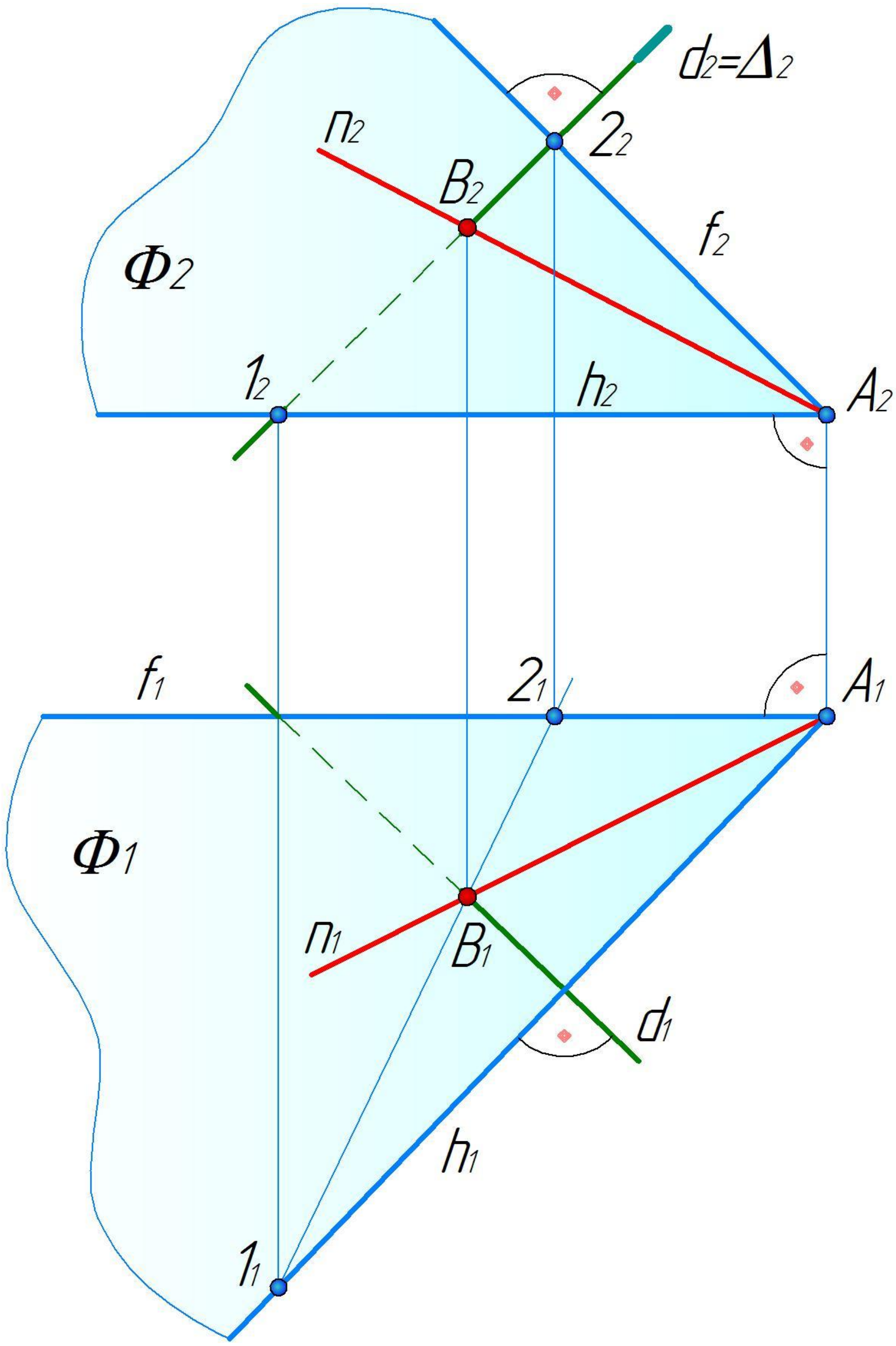


Рис. 6.22

6.5. Визначення відстані від точки до прямої

Дано: d – пряма загального положення, точка A.

Знайти: Відстань від точки A до прямої загального положення d.

Відстань від точки A до прямої d визначається довжиною відрізка перпендикуляра, опущеного з точки на пряму (рис. 6.23).

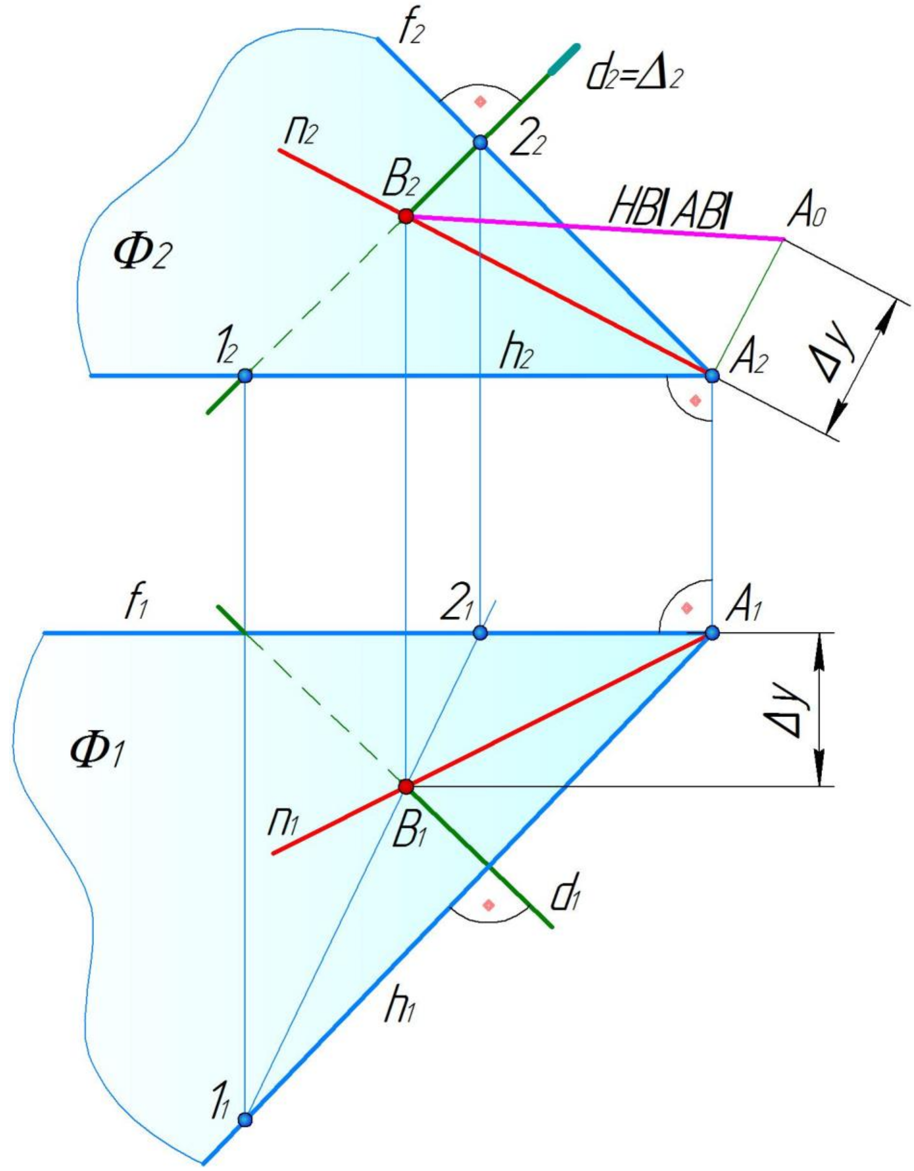


Рис.6.23.

Для вирішення цього завдання необхідно повторити дії, описані вище, а потім визначити методом прямокутного трикутника натуральну величину відрізку. Отже.

1) Через точку A проводимо площину $\Phi(h \cap f)$, перпендикулярну до прямої загального положення d (рис. 6.23):

$A_1 \hookrightarrow h_1 \perp d_1$.

$A_2 \hookrightarrow h_2 // OX$.

$A_1 \hookrightarrow f_1 // OX$.

$A_2 \hookrightarrow f_2 \perp d_2$.

Отримали: $\Phi(h \cap f) \perp d$.

2) Визначаємо точку B пересічення прямої d з площиною Φ, уклавши її у фронтально-проектуючу площину Δ.

3) З’єднуємо однойменні проекції точок A і B, та отримуємо пряму AB. Пряма AB перпендикулярна до прямої d, бо належить площині $\Phi \perp d$.

4) Методом прямокутного трикутника визначаємо натуральну величину відстані від точки A до прямої загального положення d : A_0B_0.

6.6. Визначення відстані між паралельними площинами

На рис. 6.24 показана просторова модель побудови відстані між паралельними площинами Σ і Δ, заданими слідами.

Це завдання доцільно звести до завдання за визначенням відстані від точки до площини. В цьому випадку відстань між площинами визначиться довжиною відрізка перпендикуляра, опущеного з точки, узятої на одній площині, на іншу площину.

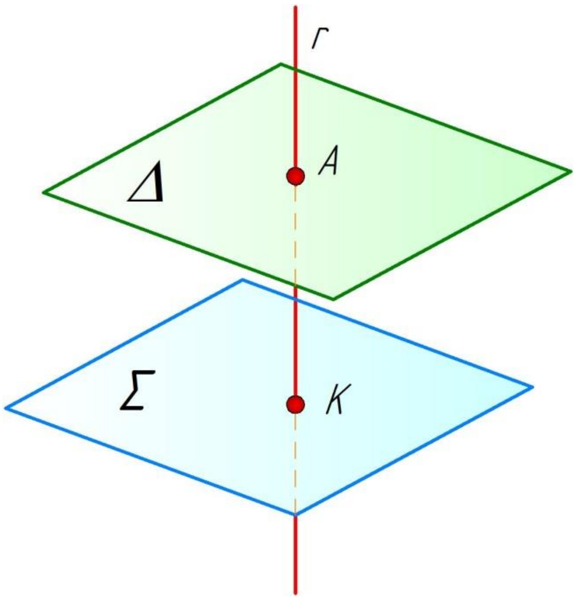


Рис.6.24

Для визначення відстані між площинами в цьому випадку необхідно (рис.6.24):

1) Узяти в одній площині точку, наприклад A.

2) З точки A опустити перпендикуляр r на іншу площину Σ.

3) Визначити точку K перетину перпендикуляра з площиною Σ.

4) Визначити натуральну величину відрізка перпендикуляра AK.

1) Візьмемо в площині Δ точку A:

$A_2 \in f_2^{0\prime}$; $A_2 \downarrow A_1 \in f_1^{0\prime}$.

2) З точки A опустимо перпендикуляр r на площину Σ:

$A_1 \hookrightarrow r_1 \perp h_1^0$.

$A_2 \hookrightarrow r_2 \perp h_2^0$.

3) Визначаємо точку K перетину перпендикуляра з площиною Σ:

$r_2 \hookrightarrow T \perp \Pi_2$.

$T_2 \equiv r_2$.

$T_2 \cap \Sigma(h^0 \cap f^0) = 1_2 2_2$.

$1_2 2_2 \downarrow 1_1 2_1$.

$1_1 2_1 \cap r_1 = K_1$.

$K_1 \uparrow K_2$.

4) Методом прямокутного трикутника визначаємо натуральну величину AK: A_0A_2.

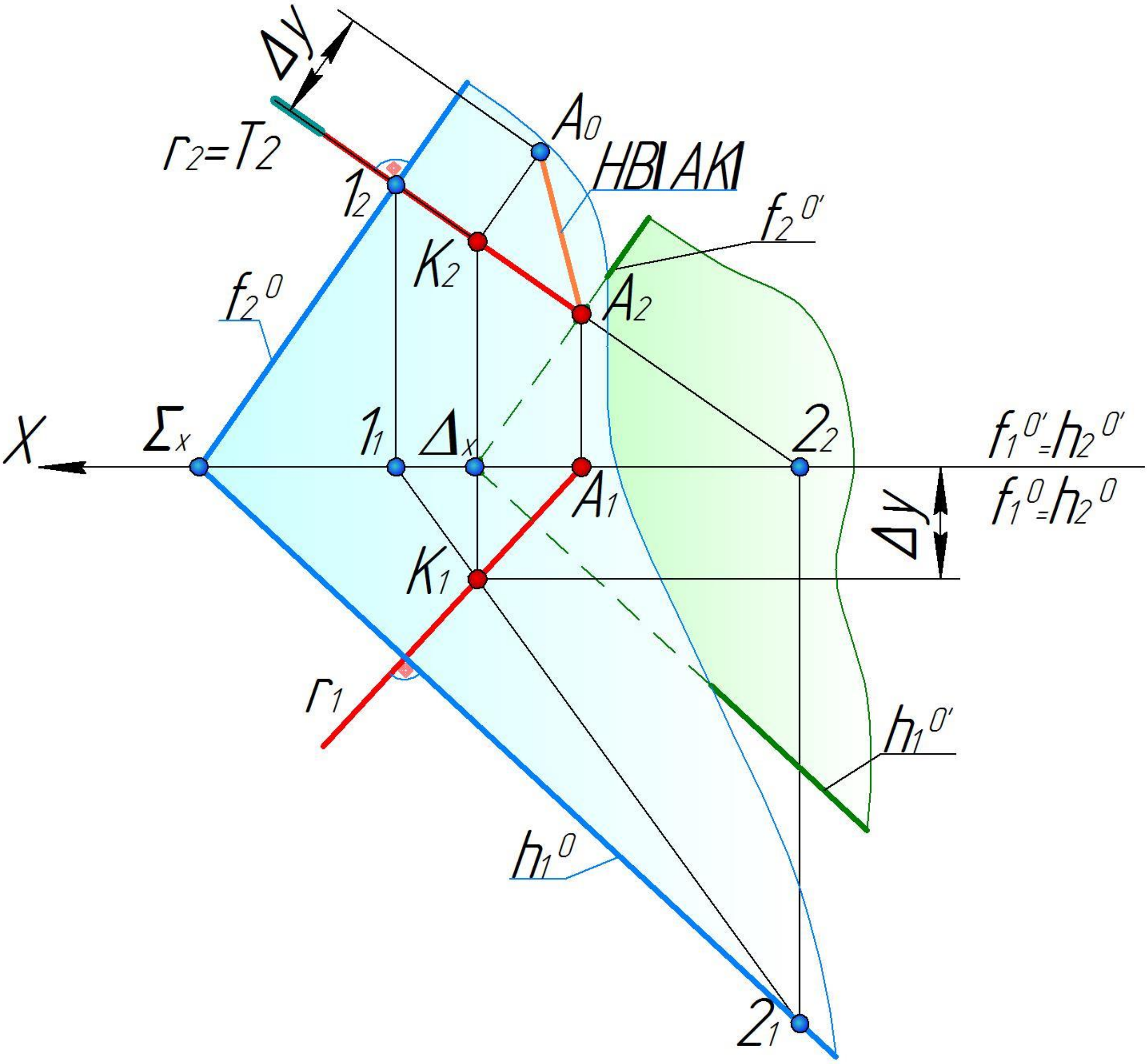


Рис. 6.25

Відстань між проеціювальними площинами визначається без додаткових побудов. На рис. 6.26 показана побудова відстані між фронтальнопроеціюючими площинами Σ і Δ, заданими слідами.

Відрізок перпендикуляра d між фронтальними слідами-проекціями площин Σ та Δ буде величиною відстані між цими площинами.

Тому, зазвичай при визначенні відстані між площинами заздалегідь перетворюють їх на ті, що проеціюють одним із способів перетворення проекцій.

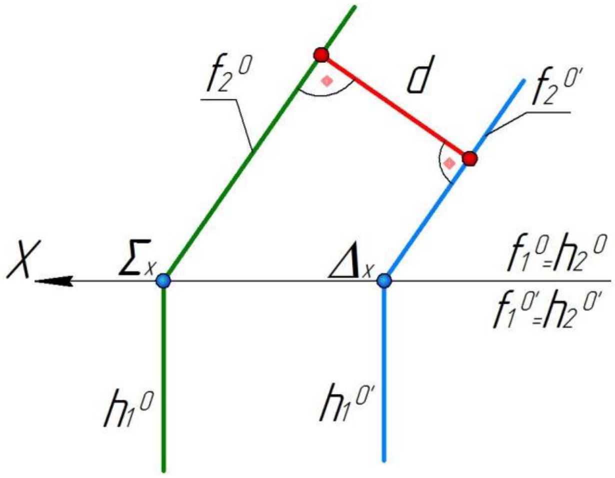


Рис. 6.26

6.7. Побудова проекцій кута між прямою та площиною

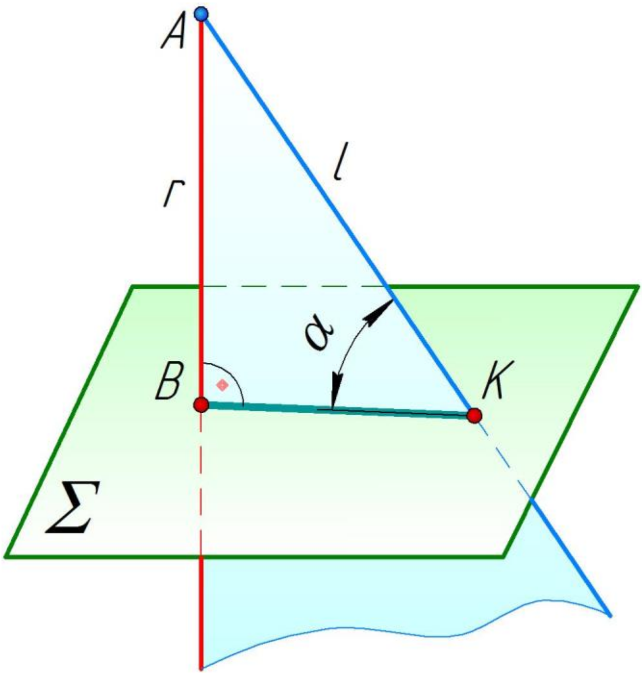


Рис. 6.27

Визначення кута між прямою і площиною зводиться до знаходження кута між двома прямими.

Кутом між прямою і площиною називається кут між цією прямою та її проекцією на цю площину.

Алгоритм рішення задачі показаний на геометричній моделі (рис. 6.27):

1) з точки A довільно узятої на прямій l, опускаємо перпендикуляр r на площину Σ;

2) визначають точку перетину K прямої l з площиною Σ;

3) будуємо точку перетину B перпендикуляра r з площиною Σ;

4) сполучаємо точки B і K (BK - проекція відрізку прямої AK на площину Σ).

$\angle AKB$ і буде шуканим (кутом нахилу прямої l до площини Σ).

Побудова кута між прямою та площиною на комплексному кресленні виконана на рис. 6.28.

Дано: площина загального положення $\Sigma(h \cap f)$, пряма загального положення l.

Знайти: φ – кут між прямою загального положення l та площиною $\Sigma(h \cap f)$.

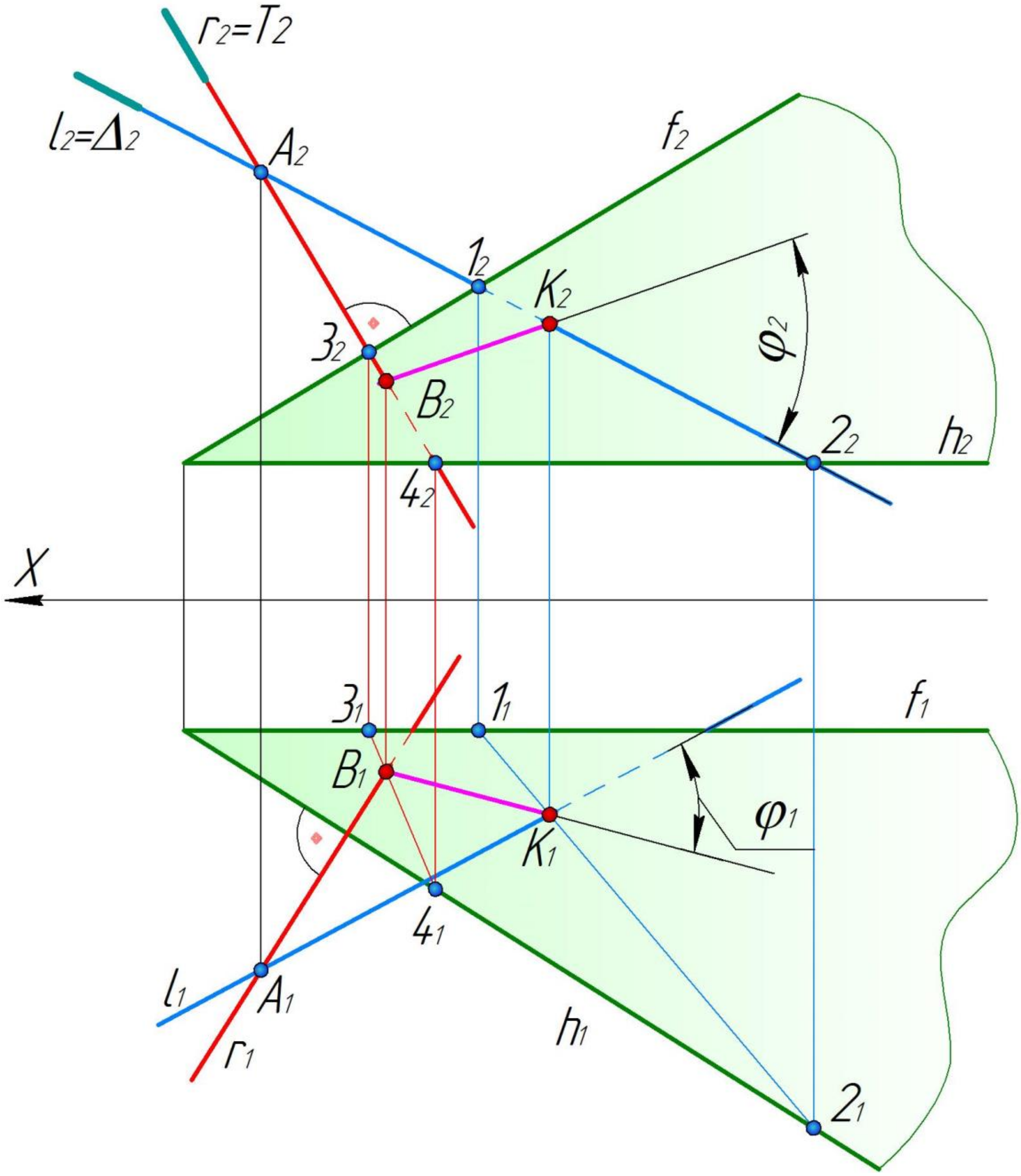


Рис. 6.28

1) з точки A довільно узятої на прямій l, опускаємо перпендикуляр r на площину $\Sigma(h \cap f)$:

$A_1 \hookrightarrow r_1 \perp h_1$.

$A_2 \hookrightarrow r_2 \perp f_2$.

2) визначаємо точку K: перетину прямої l з площиною $\Sigma(h \cap f)$:

$l_2 \hookrightarrow \Delta \perp \Pi_2$.

$\Delta_2 \equiv l_2$.

$\Delta_2 \cap \Sigma(h \cap f)$=$1_2 2_2$.

$1_2 2_2 \downarrow 1_1 2_1$.

$1_1 2_1 \cap l_1 = K_1$.

$K_1 \uparrow K_2$.

3) визначаємо точку B: перетину перпендикуляра r з площиною $\Sigma(h \cap f)$:

$r_2 \hookrightarrow T \perp \Pi_2$.

$T_2 \equiv r_2$.

$T_2 \cap \Sigma(h \cap f)$=$3_2 4_2$.

$3_2 4_2 \downarrow 3_1 4_1$.

$3_1 4_1 \cap r_1 = B_1$.

$B_1 \uparrow B_2$.

4) з'єднуємо точки B і K: $B_1 K_1$ та $B_2 K_2$.

5) позначаємо кут φ між прямою загального положення l і площиною $\Sigma(h \cap f)$:

$\varphi_1 = \angle A_1 K_1 B_1$.

$\varphi_2 = \angle A_2 K_2 B_2$.

Тема 7. Криві лінії і поверхні

7.1. Комплексні креслення кривих ліній
7.2. Комплексні креслення поверхонь. Класифікація
7.3. Багатогранні поверхні. Поняття і визначення
7.4. Криві поверхні. Способи їх завдання
7.5. Загальна класифікація кривих поверхонь
7.6. Лінійчаті поверхні. Основні визначення і поняття
7.7. Поверхні обертання. Основні визначення і поняття

7.1. Комплексні креслення кривих ліній

Основні визначення і поняття

Кривими називаються всі непрямі і неламані лінії. 2 види:

- *плоскі криві*, всі точки яких належать площині;

- *просторові криві* (лінії двоякої кривизни), точки яких не належать одній площині.

Криву лінію можна розглядати як:

а) траєкторію руху точки;

б) лінію перетину поверхні площиною;

в) лінію перетину поверхонь.

Розрізняють закономірні (аналітичні) і незакономірні (графічні) лінії. *Закономірні* криві лінії діляться на алгебраїчні, визначенні алгебраїчними рівняннями (еліпс та ін.), визначенні трансцендентними рівняннями (синусоїда, циклоїда, спіраль Архімеда та ін.).

Порядок плоскої кривої лінії (з геометричної точки зору) дорівнює максимальному числу точок перетину її з прямою лінією.

Порядок просторової кривої лінії (з геометричної точки зору) дорівнює максимальному числу точок перетину її з довільною площиною.

Нарисна геометрія вивчає криві лінії за їхніми проекціями на комплексному кресленні. Побудова проекцій кривої лінії зводиться до побудови проекцій ряду її точок. У загальному випадку проекції кривої лінії є також кривими лініями. Крива лінія визначається двома своїми проекціями.

Січна, дотична і нормаль до кривих ліній

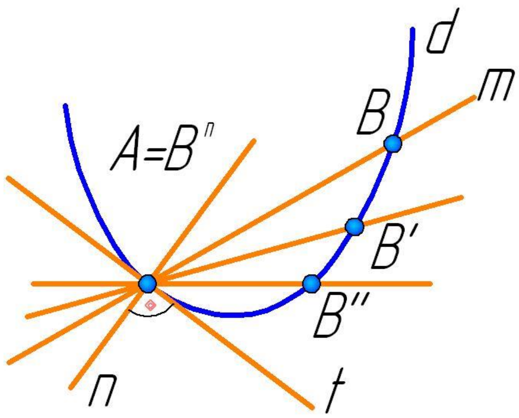


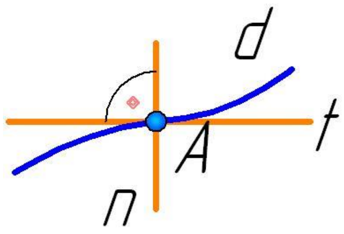
Рис.7.1

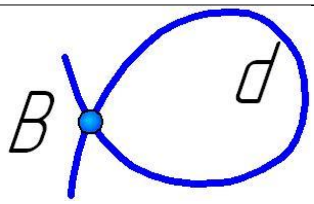
Січна - пряма m, що перетинає криву лінію d в двох і більше точках.

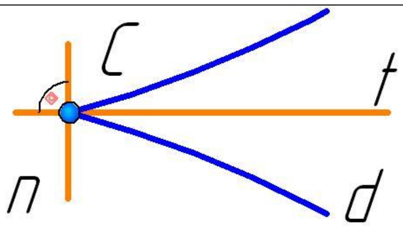
Дотична - пряма t в точці A, до якої прагне січна m(AB), коли точка B залишаючись на лінії d, прагне до A.

Нормаль - пряма n, що перпендикулярна до дотичної t і проходить через точку дотику A.

Особливі точки кривих ліній

<table>
<tr>
<td>

а)</td>
<td>Точка перегину А, в якій крива переходить на іншу сторону дотичної t .</td>
</tr>
<tr>
<td>

б)</td>
<td>Вузол або подвійна точка В, в якій крива перетинає сама себе.</td>
</tr>
<tr>
<td>

в)
Рис.7.2</td>
<td>Точка повернення С, в якій обидві гілки кривої мають загальну дотичну</td>
</tr>
</table>

Комплексні креслення плоских кривих другого порядку

До плоских кривих ліній відносяться коло, еліпс, парабола, гіпербола і інші (Рис.7.3).

До просторових кривих відносяться циліндрична і конічна гвинтові лінії, спіраль Архімеда і ряд незакономірних кривих ліній, які не описуються рівнянням.

Із закономірних просторових кривих найбільше застосування мають гвинтові лінії, зокрема - *циліндрична гвинтова лінія.*

ЦГЛ – це просторова крива, яка описується точкою, що здійснює рівномірно-поступальний рух по твірній циліндра обертання, і яка у свою чергу обертається навколо його осі з постійною кутовою швидкістю (рис.7.4).

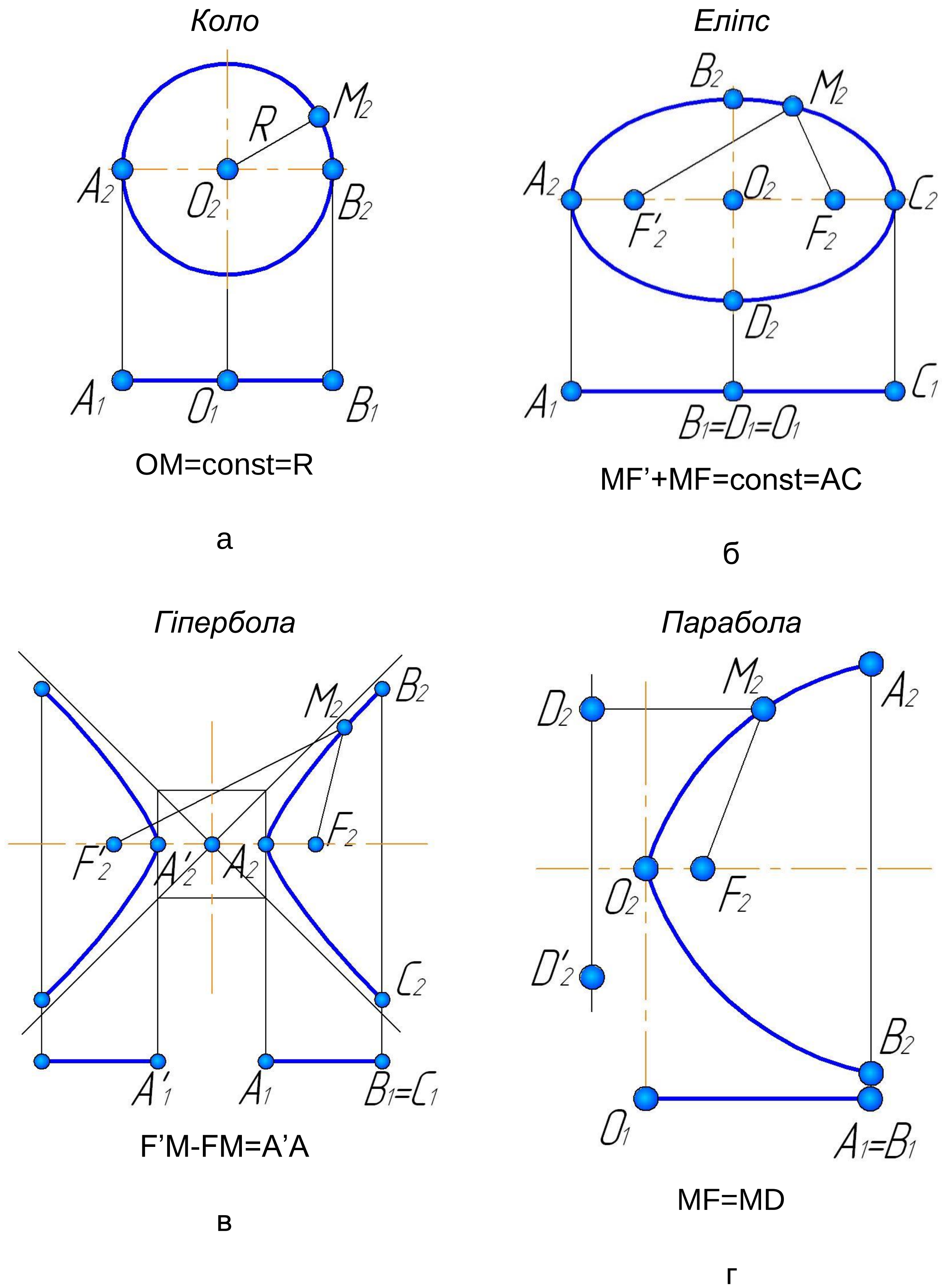
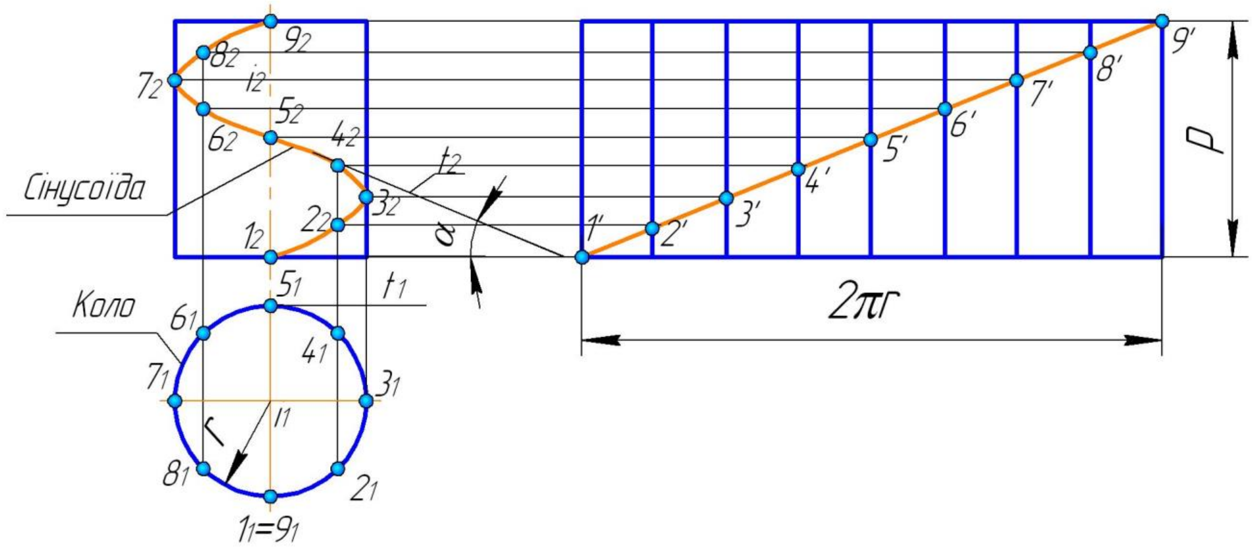

Коло
R
M2
A2
O2
B2
A1
O1
B1
OM=const=R
а
Еліпс
B2
M2
A2
O2
C2
F'2
F2
D2
A1
C1
B1=D1=O1
MF'+MF=const=AC
б
Гіпербола
M2
B2
F2
F'2
A'2
A2
C2
A'1
A1
B1=C1
F'M-FM=A'A
в
Парабола
M2
A2
D2
O2
F2
D'2
B2
O1
A1=B1
MF=MD
г

Рис.7.3



p – крок гвинтової лінії

α - кут підйому гвинтової лінії

t – дотична до будь якої точки лінії

Рис.7.4.

Величина "p" переміщення точки гвинтової лінії у напрямі осі, що відповідає одному повному оберту її навколо осі, називається *кроком гвинтової лінії.*

Для побудови гвинтової лінії коло її горизонтальної проекції розділене на 8 рівних частин. На таке ж число рівних частин ділиться і її крок "p". Через точки ділення кола проводять вертикальні лінії зв'язку. Через відповідні точки ділення кроку проводять горизонтальні лінії. Точки перетину відповідних ліній визначить фронтальну проекцію циліндричної гвинтової лінії.

7.2. Комплексні креслення поверхонь. Класифікація

Поверхня - сукупність всіх послідовних положень лінії, що переміщається в просторі за певним законом.

Всі поверхні можна розділити на плоскі (площини), багатогранні і криві. *Простою* поверхнею є площина.

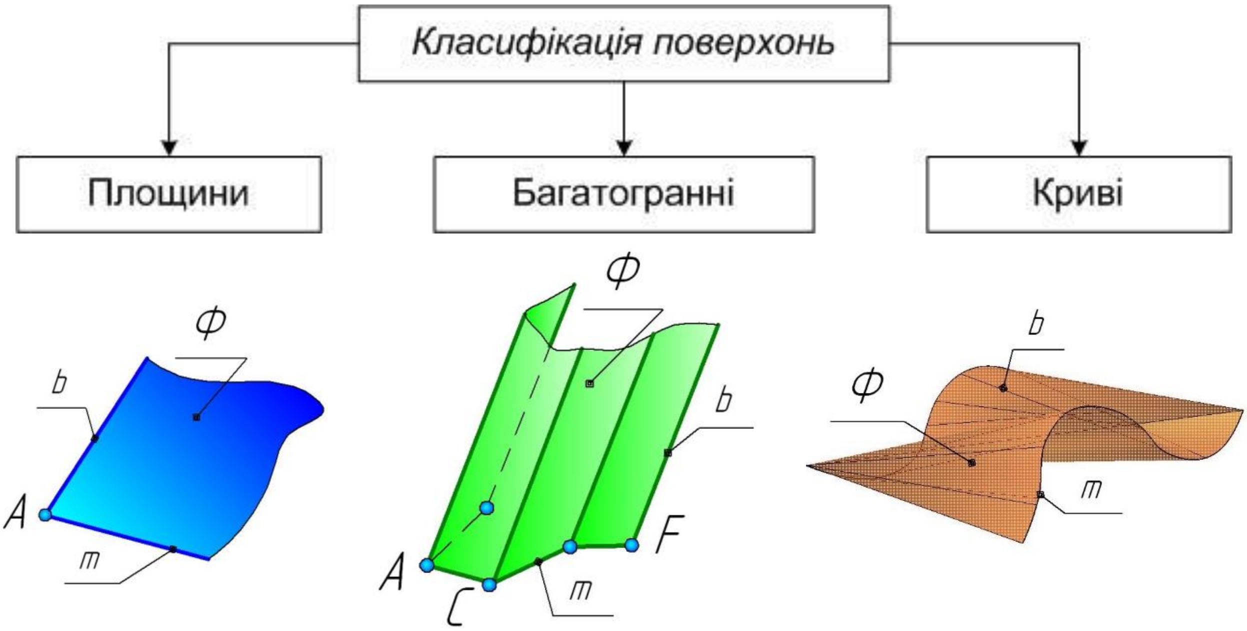


Рис. 7.5

7.3. Багатогранні поверхні. Поняття і визначення

Поверхня називається *багатогранною*, якщо утворена частинами попарно пересічних площин (граней).

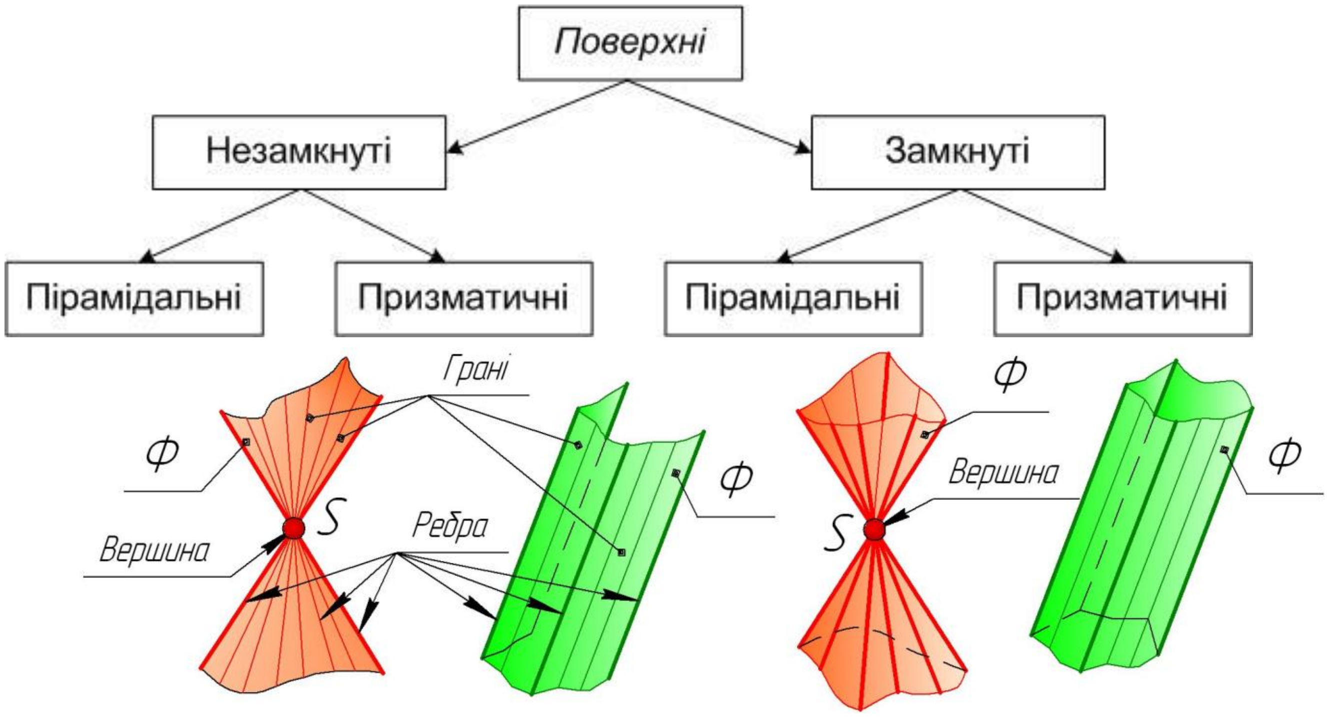


Рис.7.6

Грані - відсіки площин, що утворюють багатогранну поверхню.

Ребра - лінії перетину суміжних граней.

Вершини - точки перетину не менше чим трьох граней.

Многогранники. Поняття і визначення

Геометричні тіла обмежені з усіх боків плоскими багатокутниками, називаються *многогранниками.*

Якщо всі грані многогранника розташовані по одну сторону площини будь-якої його грані, многогранник називається *опуклим.*

Сукупність всіх ребер і вершин многогранника називається *сіткою многогранника.*

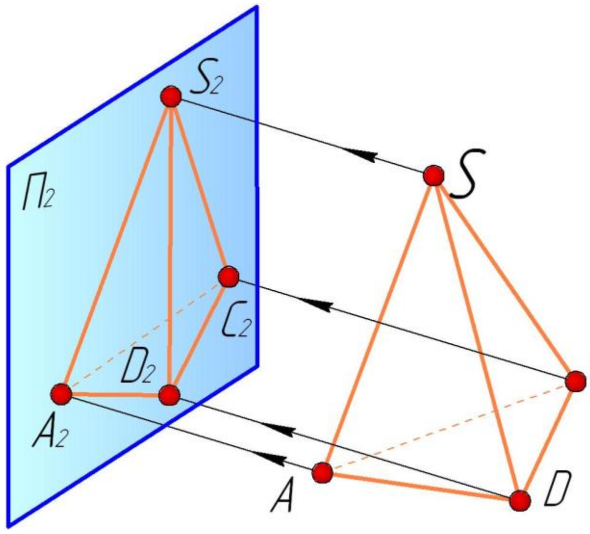


Рис. 7.7

Побудова проекцій многогранника на площинах $П_1$, $П_2$ і $П_3$ зводиться до побудови проекцій його сітки.

Проектуючі промені, торкаючись поверхні многогранника утворюють на площинах проекцій лінію його контуру.

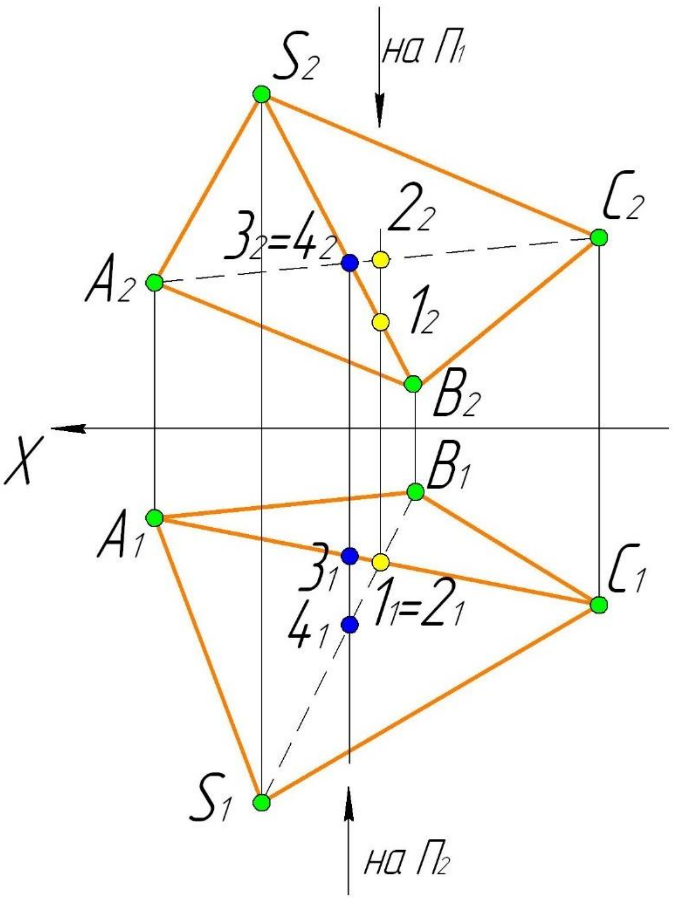


Рис.7.8

Нарис проекції многогранника

Для більшої наочності комплексного креслення на ньому будують крайній контур поверхні, що відображує проекції її найбільш характерних ліній і точок, яке називають *нарисом.*

$S_2A_2B_2C_2S_2$ нарис фронтальної проекції піраміди.

$S_1A_1B_1C_1S_1$ нарис горизонтальної проекції піраміди.

Властивості:

1. Нарис проекції є межею, що відділяє проекцію поверхні від іншої частини площини проекцій.

2. Нарис проекції поверхні завжди видимий.

3. Жодна точка поверхні не повинна мати своєї проекції за межами нарису.

4. Видимість проекцій ліній усередині нарису визначають по конкуруючих точках.

Приналежність точки і лінії поверхні многогранника

Якщо поверхня многогранника на комплексному кресленні задана повно, то в будь-якому місці цієї поверхні можна побудувати точку або лінію.

Правила:

1. *Точка* належить поверхні многогранника, якщо вона належить лінії, що належить поверхні многогранника.

2. *Лінія* належить поверхні многогранника, якщо всі точки цієї лінії належать поверхні многогранника.

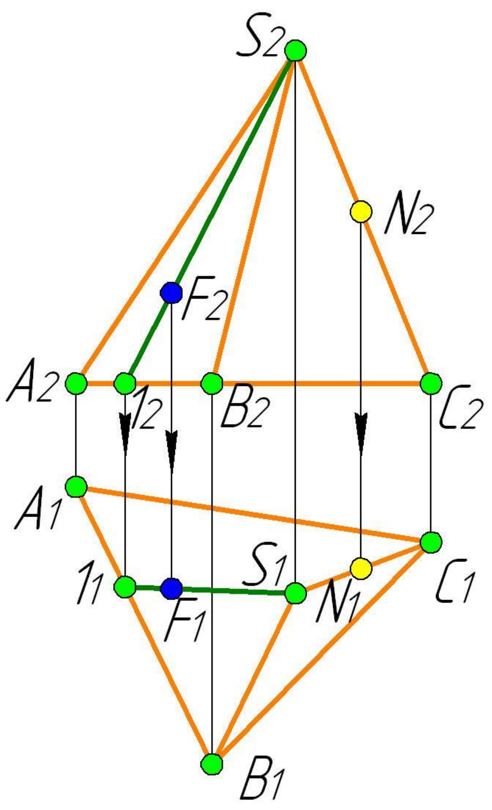


Рис 7.9

Дано: SABC піраміда.

F_2 фронтальна проекція точки F, яка належить площині (ASB).

Знайти: горизонтальну проекцію точки F.

Побудова бракуючої горизонтальної проекції точки F:

1. Через вершину піраміди S (S_2) і задану фронтальну проекцію точки F (F_2), яка належить площині ($A_2S_2B_2$) проводимо лінію S_21_2.

2. Знаходимо горизонтальну проекцію лінії $S_21_2 \downarrow S_11_1$.

3. Визначаємо бракуючу горизонтальну проекцію точки F (F_1) по приналежності до прямої S_11_1.

7.4. Криві поверхні. Способи їх завдання

У нарисній геометрії поверхня розглядається як геометричний образ, отриманий рухом деякої лінії в просторі.

Відомі три способи завдання кривих поверхонь :

Аналітичний	**Каркасний**	**Кінематичний**
поверхня задається за допомогою рівнянь аналітичної геометрії	поверхня задається сукупністю деякої кількості ліній (каркас)	поверхня задається деякою лінією, що переміщається в просторі

Нарисна геометрія вивчає *кінематичні способи* побудови і завдання поверхонь:

1. кожна крива поверхня розглядається як сукупність послідовних положень утворюючої лінії b, яка переміщається в просторі за певним законом;

2. утворююча лінія b при русі може залишатися незмінною або змінювати свою форму;

3. закон переміщення утворюючої лінії b задається за допомогою направляючих ліній m, n, k і алгоритму переміщення b по направляючим.

Визначник поверхні

При кінематичному способі утворення поверхні мається на увазі, що поверхня Ф буде задана (визначена), якщо у будь-який момент переміщення утворюючої b, будуть відомі її положення і форма.

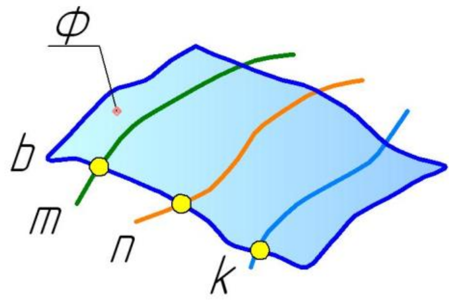
Криву поверхню на кресленні зручно задавати її визначником.

Визначник поверхні - сукупність умов, необхідних і достатніх для завдання поверхні в просторі.

Визначник поверхні $\Phi\{\Gamma\}[A]$ складається з двох частин:

1. *геометрична частина* $\{\Gamma\}$- сукупність геометричних фігур, за допомогою яких утворюється поверхня;

2. *алгоритмічна частина* [A] - алгоритм формування поверхні з фігур, що входять в геометричну частину.



$\Phi\{m, n, k, b\}[A]$

Рис 7.10

Поверхня вважається заданою однозначно, якщо задані три направляючі m, n, k.

Приналежність точки і лінії кривої поверхні

Якщо крива поверхня на комплексному кресленні задана повно, то в будь-якому місці цієї поверхні можна побудувати точку або лінію.

Правила:

1. *Точка належить* кривій поверхні, якщо вона належить лінії, яка належить цій поверхні.

2. *Лінія належить* кривій поверхні, якщо всі точки цієї лінії належать кривій поверхні.

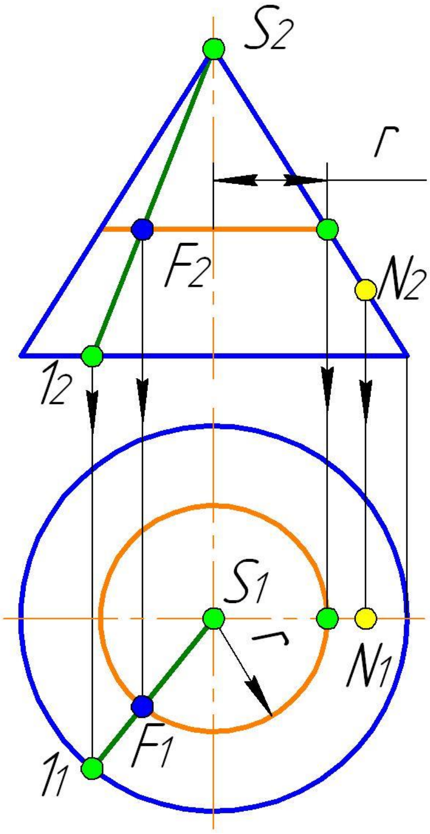


Рис 7.11

Дано: Конус. F_2 фронтальна проекція точки F.

Знайти: горизонтальну проекцію точки F.

Побудова бракуючої горизонтальної проекції точки F(перший спосіб):

1. Через вершину конуса $S(S_2)$ і задану фронтальну проекцію точки F (F_2) проводимо лінію S_21_2.

2. Знаходимо горизонтальну проекцію лінії $S_21_2 \downarrow S_11_1$.

3. Визначаємо бракуючу горизонтальну проекцію точки F (F_1) по приналежності до прямої S_11_1.

Другий спосіб:

1. Через задану видиму проекцію F_2 точки F проводять площину горизонтального рівня.
2. Площина горизонтального рівня перетинає конус по колу, радіуса r. Знаходимо на площині $П_1$ горизонтальну проекцію кола.
3. Визначаємо бракуючу проекцію F_1 точки F по приналежності до площині горизонтального рівня.

7.5. Загальна класифікація кривих поверхонь

Криві поверхні в загальному випадку можна класифікувати:

1. за способом утворювання;
2. за способом завдання.

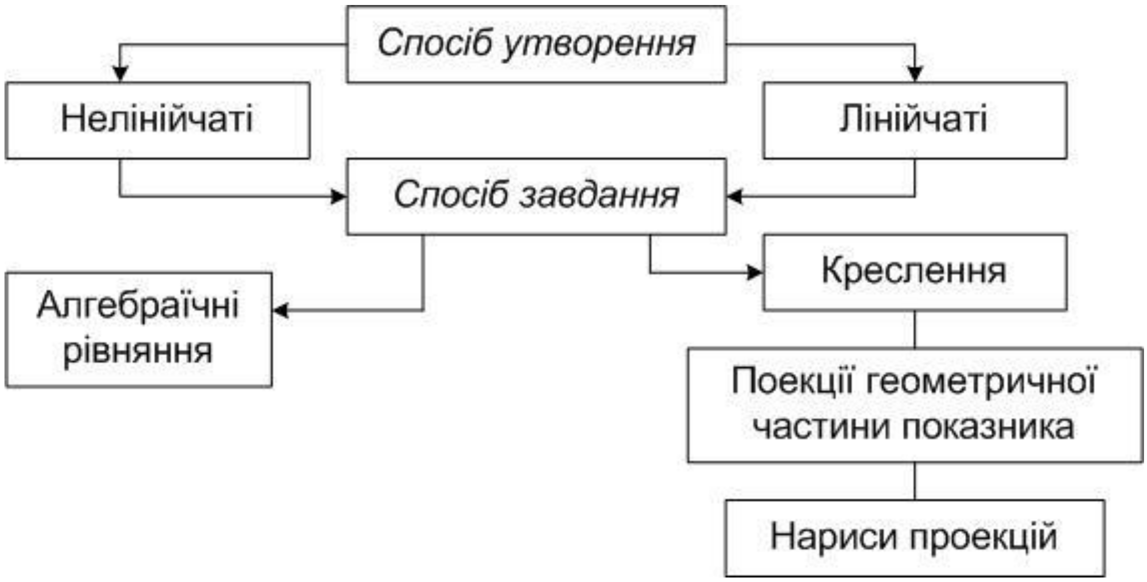


Рис.7.12

7.6. Лінійчаті поверхні. Основні визначення і поняття

Поверхня називається лінійчатою, якщо вона може бути утворена переміщенням прямої лінії.

Через будь-яку точку лінійчатої поверхні можна провести хоч би одну пряму, що цілком належить поверхні. Безліч таких прямих представляє безперервний каркас лінійчатої поверхні.

Рис.7.13

Лінійчаті поверхні підрозділяються на розгортанні і нерозгортанні.

7.6.1. Лінійчаті поверхні, що розгортаються

Розгортанні поверхні - це поверхні, які після їх розрізу по утворюючій можуть бути поєднані з площиною без розривів і складок (гранні, циліндричні, конічні поверхні):

1. Поверхня називається такою, що розгортається, якщо вона шляхом вигинання може бути поєднана з площиною без складок і розривів.
2. Всі багатогранні поверхні є такими, що розгортаються.
3. Криві поверхні є такими, що розгортаються, якщо мають ребро повернення.

До таких поверхонь відносяться:

1. торси;
2. циліндричні поверхні;
3. конічні поверхні.

Поверхні з ребром повернення (торсові)

Торсом називається поверхня Ф, якщо вона утворюється безперервним рухом прямолінійної утворюючої b, яка торкається в усіх своїх положеннях деякої просторової кривої лінії m.

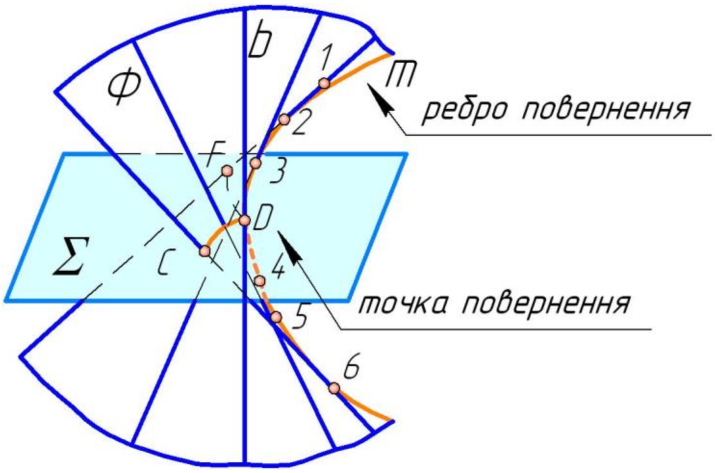


Рис.7.14.

[A] - безперервне перекочування b по m.

Крива m - межа між двома порожнинами торсу :

$\Sigma \cap \Phi = CDF$ - крива

DF $\rightarrow$ на задній частині

CD $\rightarrow$ на передній частині

Якщо ребро повернення m вироджується у власну або в невласну точку простору, то утворюючі торсу, проходячи через неї, утворюють конічну або циліндричну поверхні загального вигляду.

Циліндрична і конічна поверхні - приватні види торсу.

Циліндричні поверхні

Циліндричною називається поверхня Ф, утворена рухом прямої лінії b, яка ковзає по деякій нерухомій замкнутій або незамкнутій кривій - направляючій m, залишаючись при цьому паралельною своєму початковому положенню.

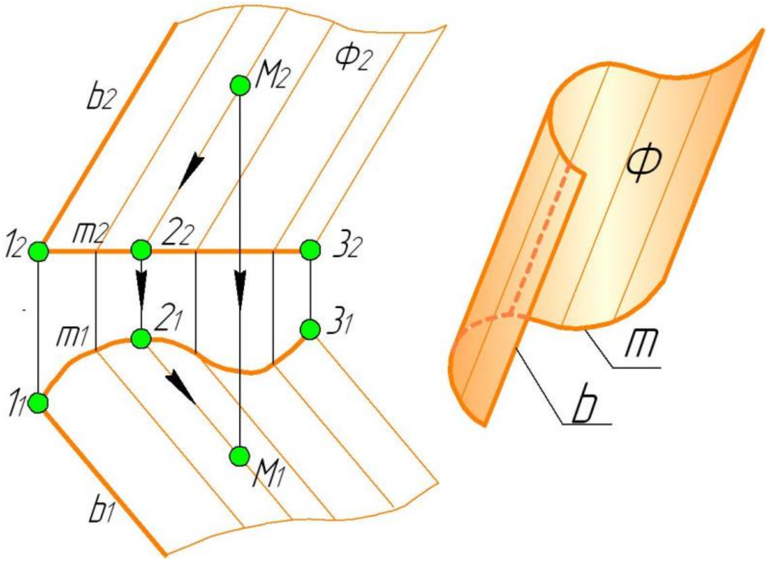


Рис.7.15.

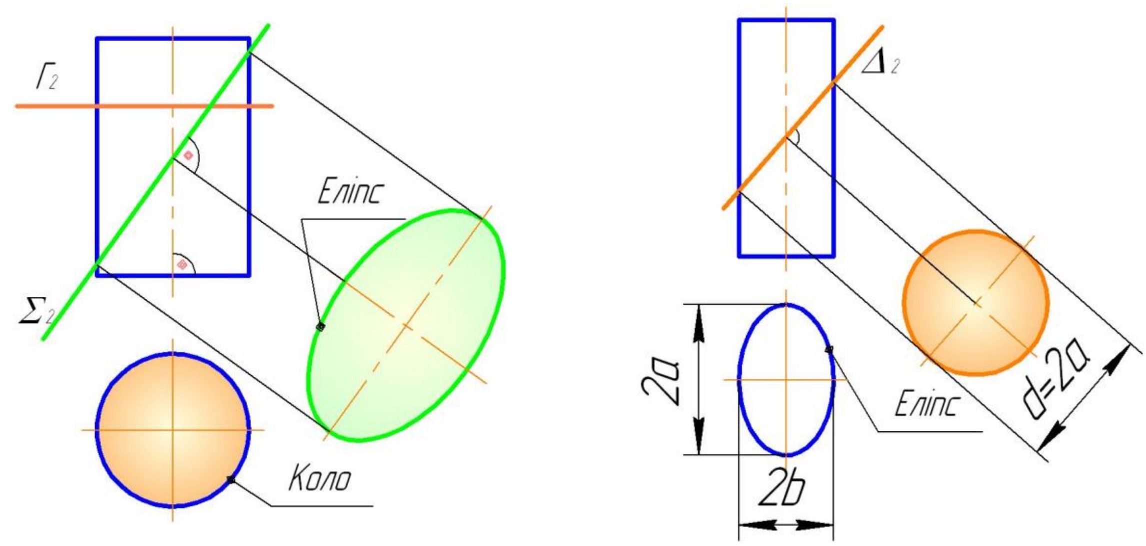
[A] - безперервне ковзання b по m, причому b паралельно початковому положенню.

Якщо напрямна m є кривою 2-го порядку, то циліндрична поверхня Ф буде 2-го порядку.

Частина замкнутої циліндричної поверхні між двома паралельними перерізами називається *циліндром*, а фігури перерізу - його підставами.

Переріз площиною перпендикулярний утворюючій називається *нормальним*.

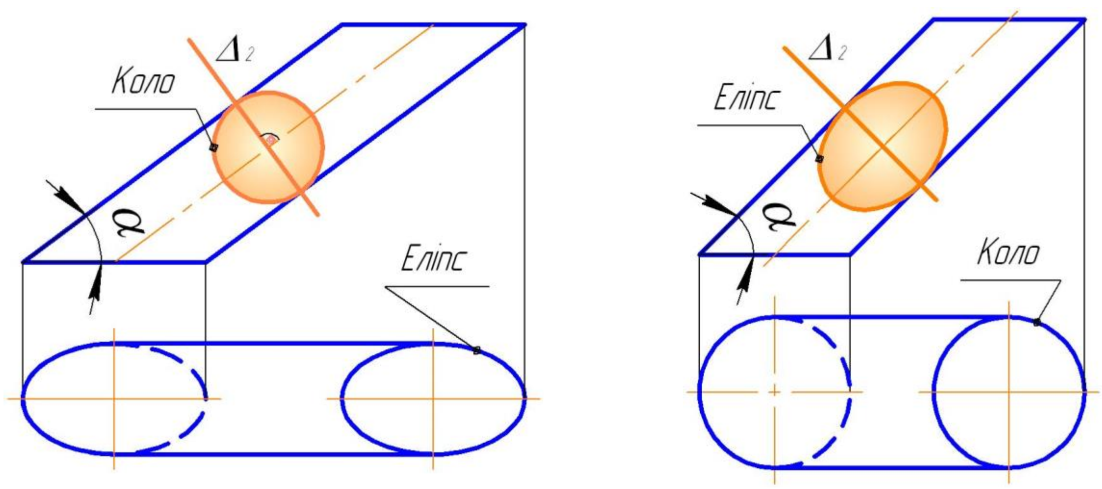
Прямий круговий циліндр Прямий еліптичний циліндр



а б

Нахилений круговий циліндр Нахилений еліптичний циліндр

Рис. 7.16



в г

Рис.7.16

Конічні поверхні

Конічною називається поверхня Ф, утворена рухом прямої лінії b, яка ковзає по деякій нерухомій замкнутій або незамкнутій кривій - направляючій m і проходить в усіх своїх положеннях через нерухому точку простору S.

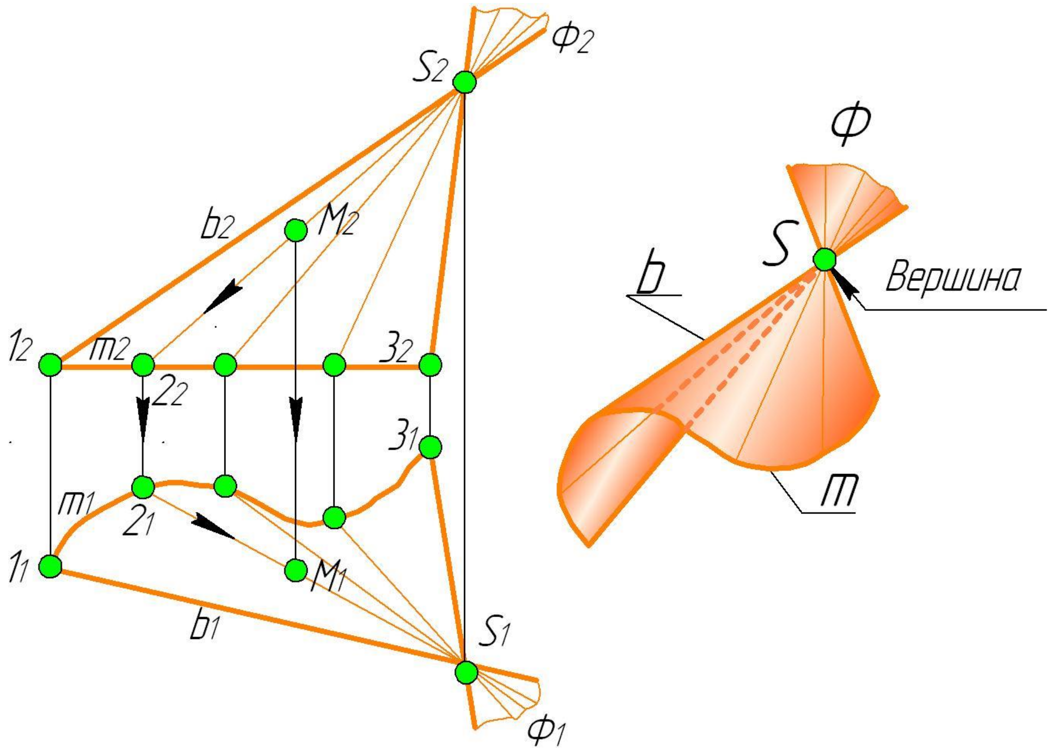


Рис. 7.17

[A] - безперервне ковзання b по m, причому b проходить через точку S.

Вершина S ділить поверхню Ф на дві частини.

Якщо напрямна m є кривою 2-го порядку, то конічна поверхня Ф буде також 2-го порядку.

Частина замкнутої конічної поверхні, обмеженої вершиною і якою-небудь площиною, яка перетинає всі прямі, які її утворюють, називається *конусом*, а фігура перерізу - його *основою.*

7.6.2. Нерозгортані лінійчаті поверхні

Поверхні, що не розгортаються - це поверхні, які не можуть бути поєднані з площиною без наявності розривів і складок (циліндроїди, коноїди, коса площина та ін.)

Лінійчаті поверхні, *що не розгортаються,* в загальному випадку утворюються переміщенням прямолінійної утворюючої b по трьох направляючих лініях m, n, k, які однозначно задають закон її переміщення.

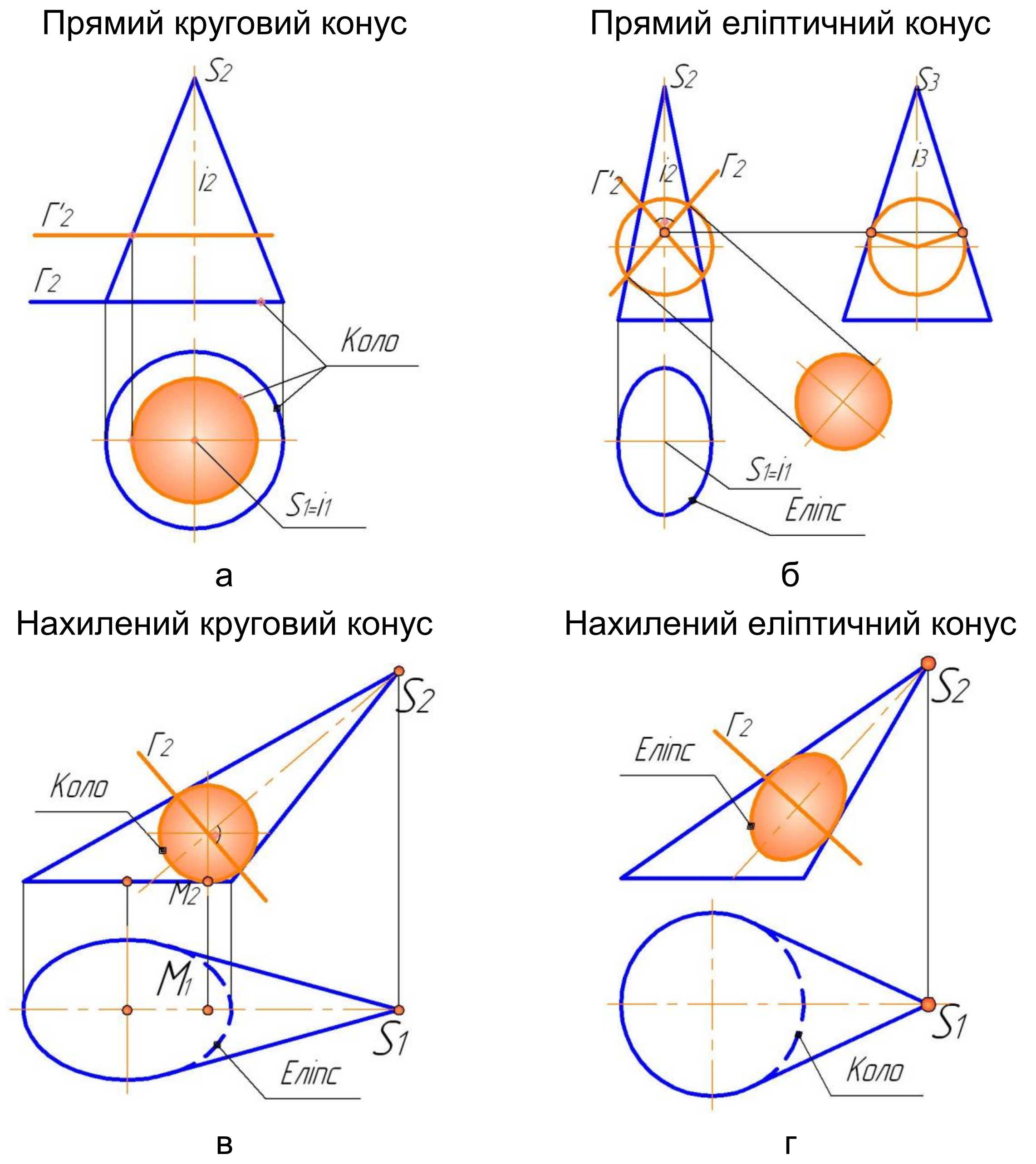


Рис. 7.18

Направляючі m, n, k, можуть бути кривими "~" і прямими "-".

До них відносяться:

1) прямий циліндроїд;

2) прямий коноїд;

3) коса площина;

4) гвинтових поверхні (гелікоїди).

Характерна ознака поверхонь, що не розгортаються - схрещування суміжних утворюючих. *Лінійчата поверхня*, що не розгортається, може бути однозначно визначена двома направними і площиною паралелізму.

Площиною паралелізму називають площину, по відношенню до якої твірна в будь-якому положенні залишається їй паралельною.

Прямий циліндроїд

Прямим циліндроїдом називається поверхня Ф, утворена рухом прямої лінії b, що ковзає по двох криволінійним направляючим m і n, які не належать одній площині, і яка залишається в усіх своїх положеннях паралельної деякій заданій площині паралелізму Σ.

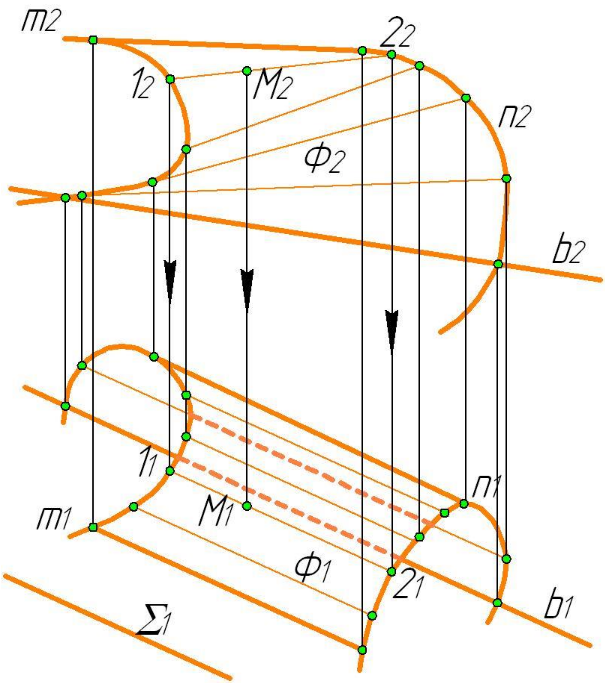
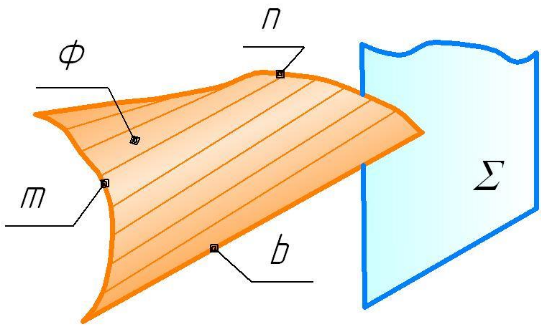


Рис.7.19.

[A] - безперервне ковзання b по m і n, причому $b \cap m,\ b \cap n,\ b // \Sigma$



площину паралелізму Σ розташовують на кресленні $\perp$ однієї з площин проекцій $П_1$, $П_2$ або $П_3$.

Прямий коноїд

Прямим коноїдом називається поверхня Ф, утворена рухом прямої лінії (b - утворююча), яка ковзає по двом направляючим m і n, одна з яких (m) - крива, а друга (n) - пряма, і що залишається в усіх своїх положеннях паралельної деякій площині паралелізму Σ. Якщо $n \perp \Sigma$, коноїд називається двічі прямим.

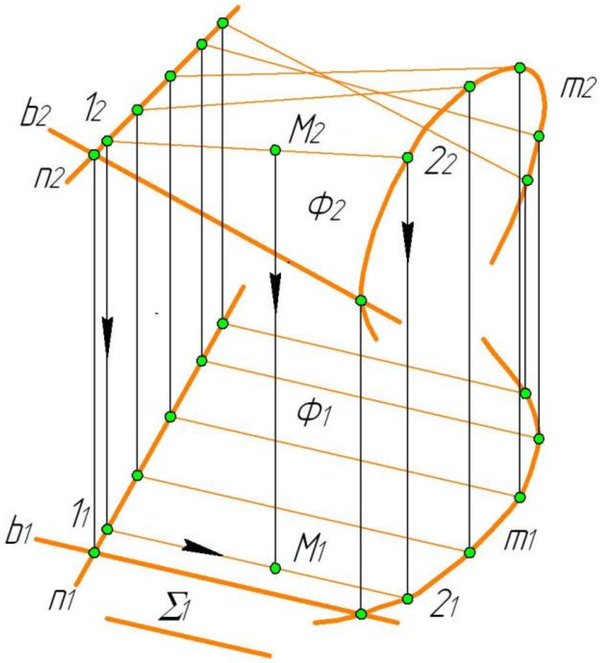
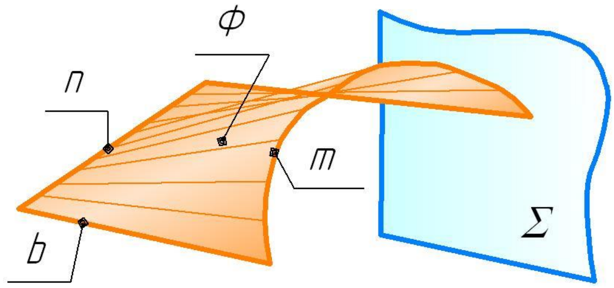


Рис.7.20.

[A] - безперервне ковзання b по m i n, причому $b \cap m$, $b \cap n$, $b // \Sigma$.



площину паралелізму Σ розташовують на кресленні $\perp$ однієї з площин проекцій$П_1$, $П_2$ або $П_3$.

Коса площина (гіперболічний параболоїд)

Косою площиною називається поверхня Φ, утворена рухом прямої лінії (b - утворююча), що ковзає по двох прямих m і n, які схрещуються, і залишається в усіх своїх положеннях паралельної деякій площині паралелізму Σ.

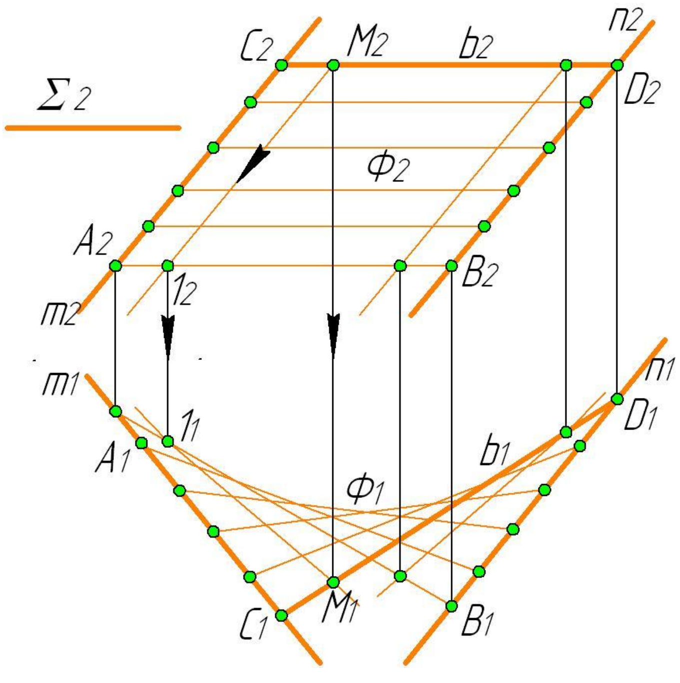
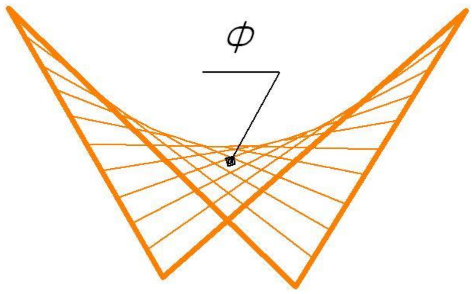


Рис.7.21

[A] - безперервне ковзання b по m i n, причому $b \cap m$, $b \cap n$, $b // \Sigma$.

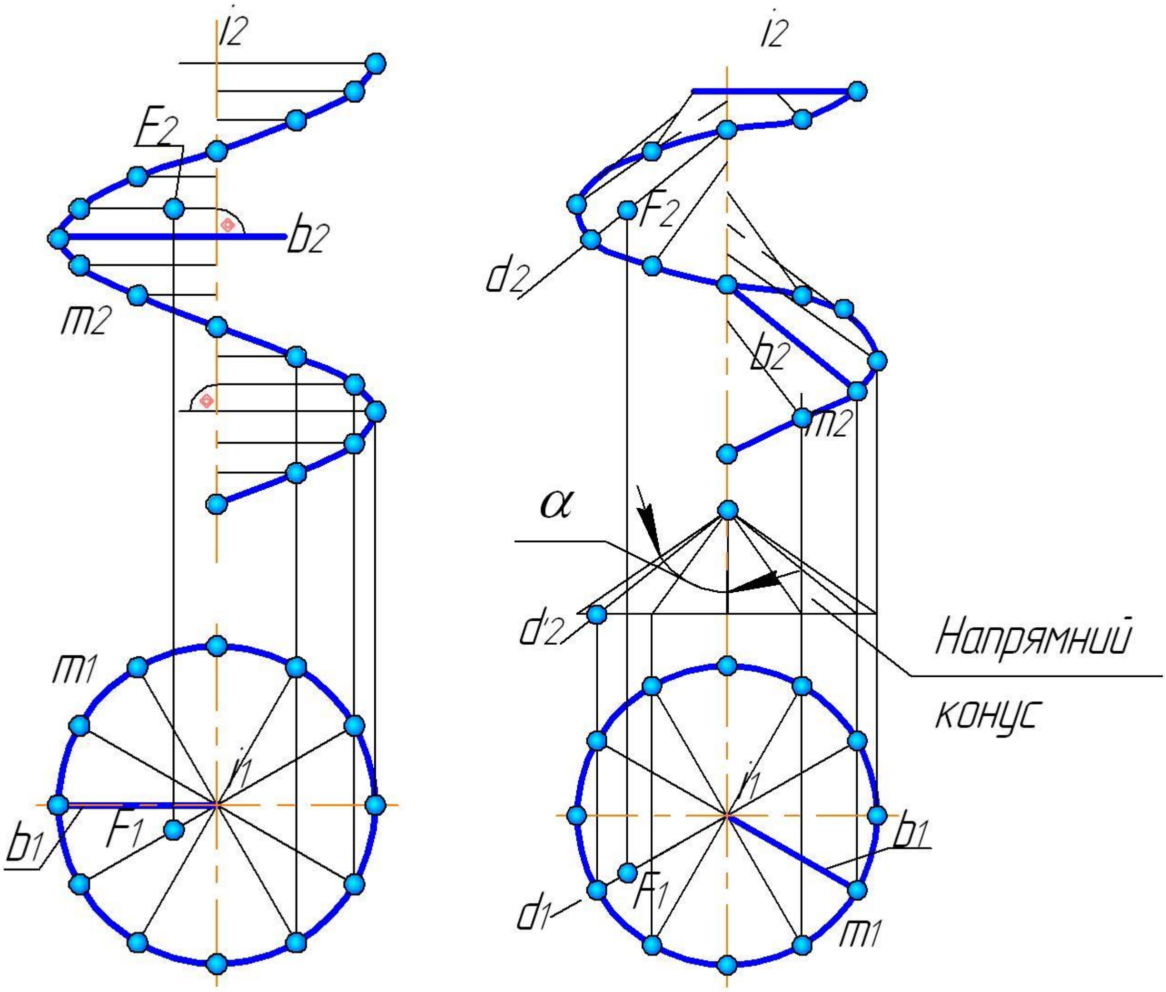


за площину паралелізму Σ на кресленні зручно прийняти одну з площин проекцій$П_1$, $П_2$ або $П_3$.

Гвинтові поверхні (гелікоїди)

Лінійчаті гвинтові поверхні (гелікоїди) утворюються рухом прямої лінії, яка ковзає по двом направним: одна - гвинтова лінія m, а інша - її вісь i.

Прямий гелікоїд | Нахилений гелікоїд



$b \cap i = \angle\alpha$

$\angle\alpha = 90^0$

$b \cap i = \angle\alpha$

$\angle\alpha \neq 90^0$

Рис.7.22

7.7. Поверхні обертання. Основні визначення і поняття

Поверхня Ф, яка отримується обертанням утворюючої лінії b навколо деякої нерухомої прямої i (осі), називається *поверхнею обертання.*

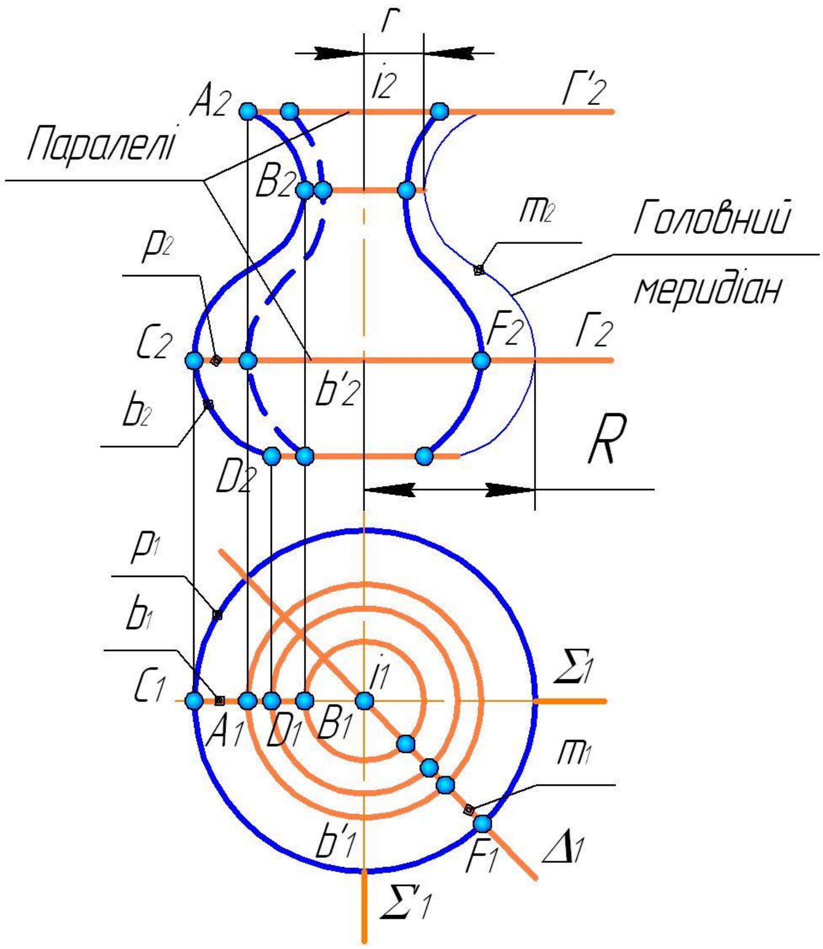


Рис.7.23

[A] - безперервне обертання b навкруги i.

Утворююча лінія b може бути:

1. прямою;

2. плоскою або просторовою кривою.

При обертанні в площинах $\Gamma j \perp i$ точки A, B, ... $\subset$ b описують кола - паралелі p_j:

а) паралель найбільшого радіусу R - *екватор*;

б) паралель найменшого радіусу r - *горло*.

Лінія *m* перетину поверхні Ф з площиною Δ, яка проходить через вісь *i* - *меридіан*.

Меридіани b і b', отримувані при перетині Ф площиною рівня Σ и Σ', називаються *головним і профільним*.

7.7.1. Поверхні, які утворюються обертанням прямою (лінійчаті поверхні обертання 2-го порядку)

Циліндр

Побудова проекції точки, що належить поверхні, виконується за допомогою паралелі *p* або прямолінійною утворюючою d, які проходять через неї.

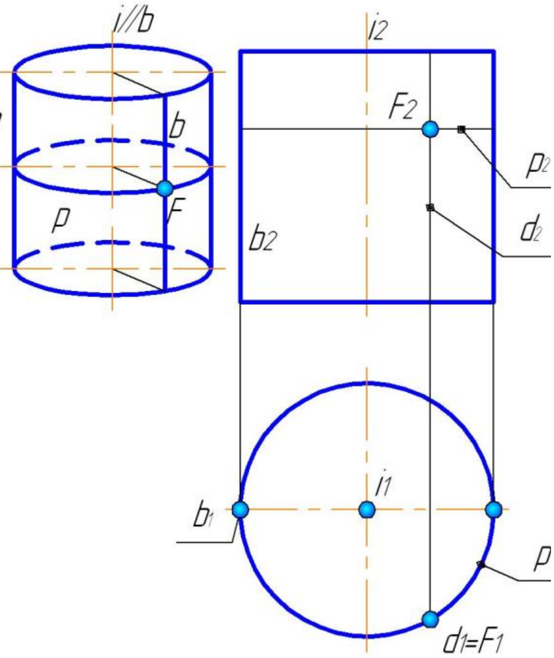
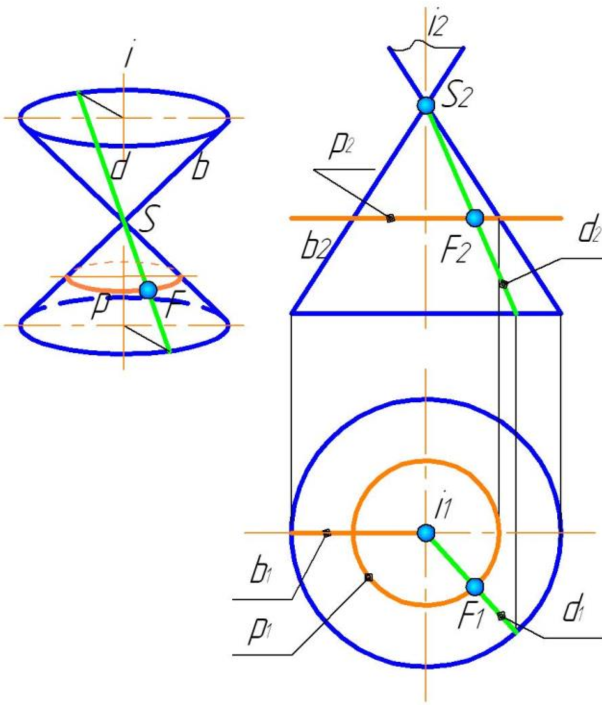


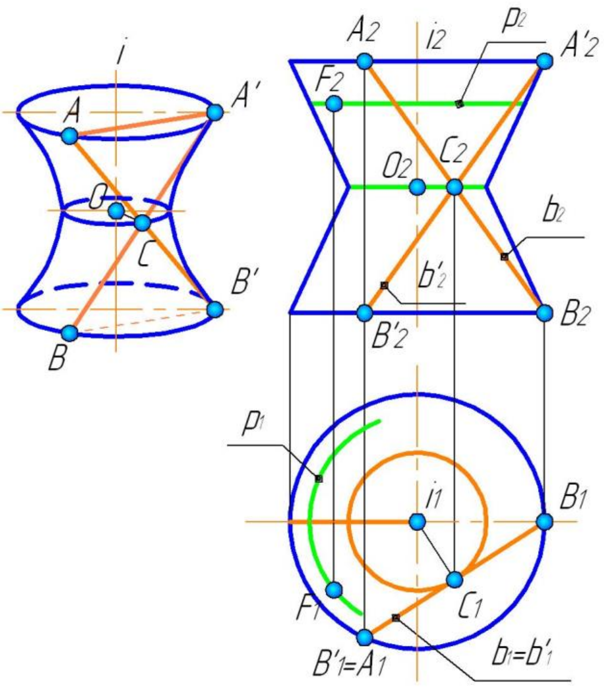
Рис.7.24 а)

Конус

Однополий гіперболоїд



б)



в)

Рис.7.24

7.7.2. Поверхні, які утворюються обертанням кривих 2-го порядку навколо їх осей

До таких поверхонь належать:

1. сфера; 2. еліпсоїд обертання; 3. параболоїд обертання; 4. однополий гіперболоїд обертання; 5. двополий гіперболоїд обертання.

Побудова проекції точки, що належить поверхні, виконується за допомогою паралелі p або меридіани m, що проходять через неї.

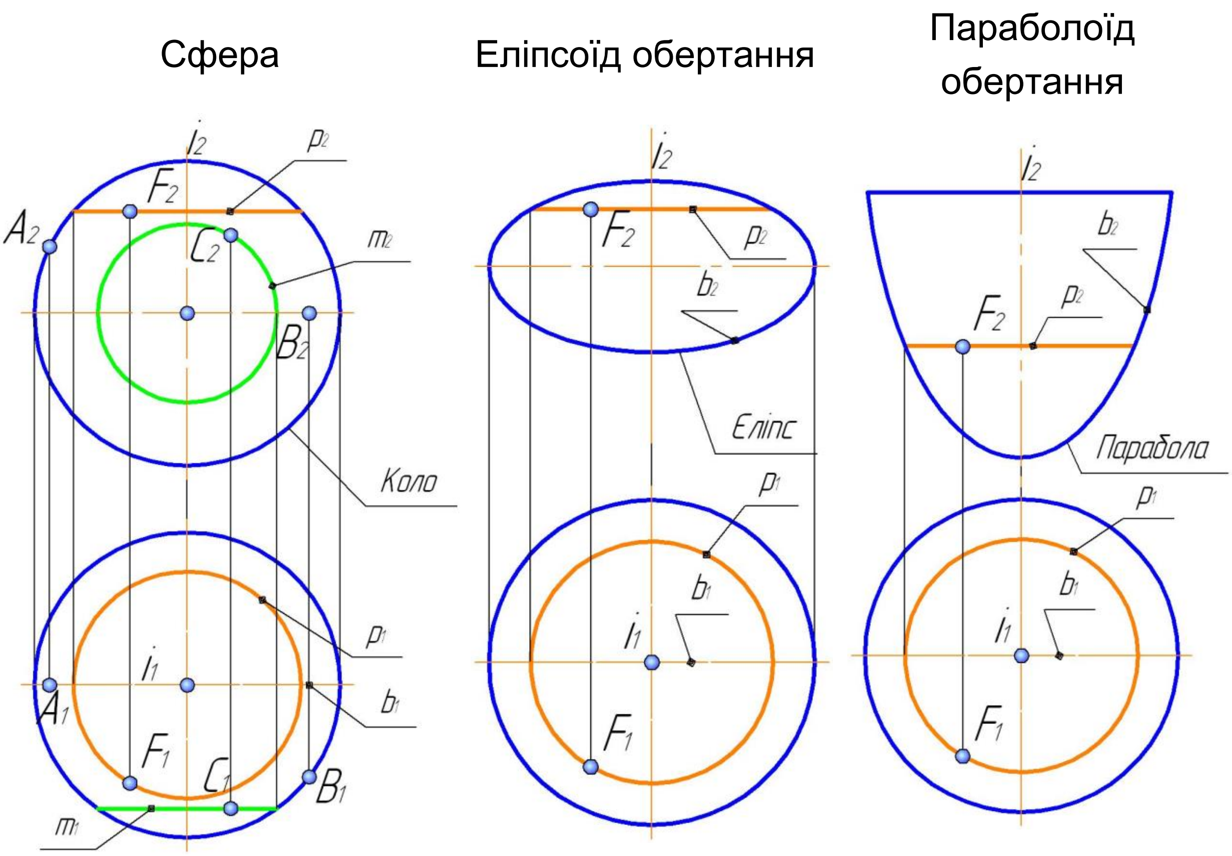


Рис.7.24

Тема 8. Переріз тіл площиною

8.1. Методи рішення завдань

Для побудови лінії перетину поверхні площиною в загальному випадку використовується метод посередників.

1. Вводять допоміжну січну площину Δ (рис. 8.1) так, щоб вона перетинала задану поверхню "Ф" і площину "Σ" по простих лініях (коло, пряма або ламана лінія).

2. Будують лінію перетину поверхні площиною.

3. Будують пряму лінію перетину заданої площини Σ і допоміжної Δ.

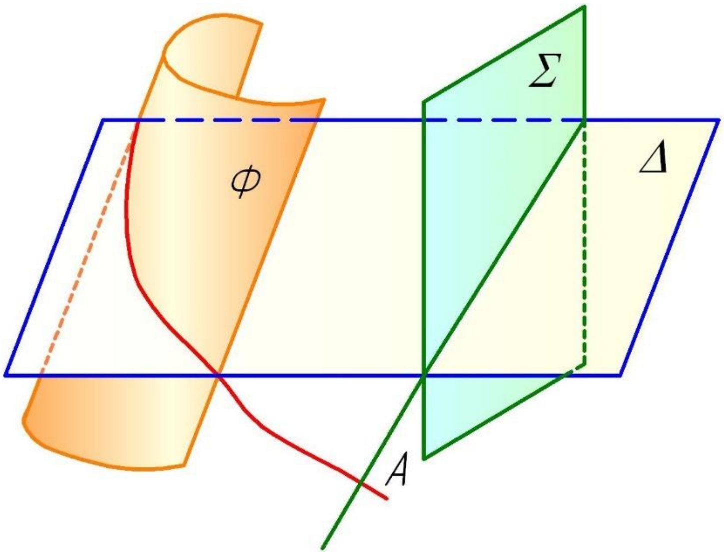


Рис. 8.1

4. Визначають точку А перетину побудованих ліній.

5. Вводять наступні допоміжні площини-посередники, виконують ті ж операції, що і з площиною Δ, і отримують необхідну кількість точок перетину поверхні площиною. Необхідна кількість цих точок визначається у кожному конкретному випадку.

6. Сполучають отримані точки між собою і отримують лінію перерізу поверхні площиною.

7. Визначають видимість побудованої лінії перерізу.

8.2. Переріз граних поверхонь площиною загального виду

Рішення задачі побудови лінії перетину поверхні многогранника з площиною зводиться в находженні вершин або сторін ломаної.

Рис. 8.2

Метод ребер

Завдання 1. Побудувати лінію перетину 3$^{-х}$ граної піраміди SABC з площиною загального виду Σ.

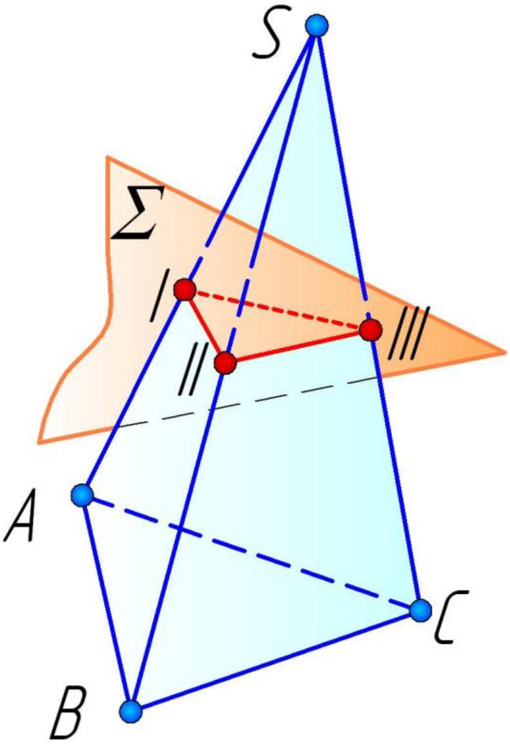


Рис. 8.3

Аналіз.

1. Лінією перетину 3$^{-х}$ граної піраміди SABC з площиною загального виду Σ буде плоский замкнений багатогранник.

На геометричній моделі (рис.8.3) показано, що побудова лінії перетину зводиться до побудови 3$^{-х}$ точок (I-II-III). Оскільки ребро граної поверхні - це пряма лінія, то завдання зведеться до побудови точки перетину прямої з площиною.

2. Проекції ліній перетинання на площинах $П_1$ і $П_2$ нам не відомі, тому застосуємо метод допоміжних січних площин.

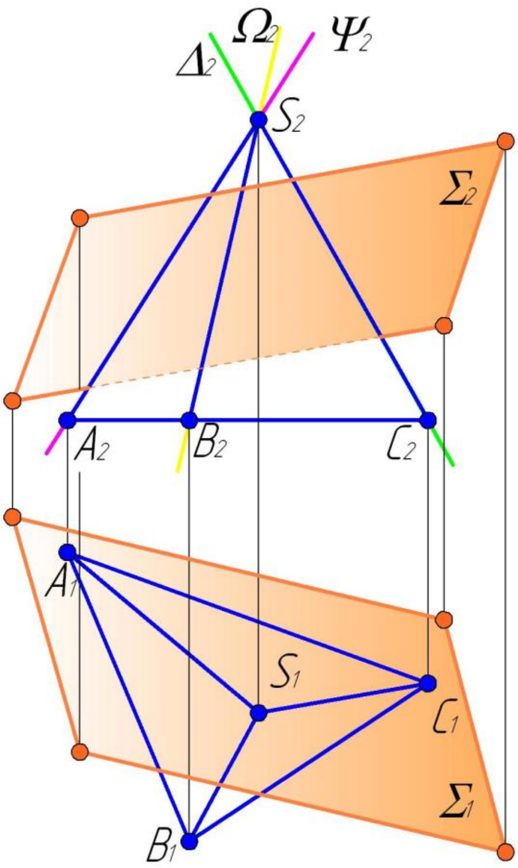


Рис. 8.4

Через ребра SA, SB і SC піраміди SABC проведемо допоміжні січні площини $\Delta, \Omega, \Psi \perp \prod_2$ (рис.8.4.)

Побудова:

1. Через ребро SA проводимо фронтально проектуючу площину Ψ (рис.9.5): $A_2S_2 \equiv \Psi_2$.

2. Фронтально проектуюча площина Ψ перетинається з площиною загального виду Σ по прямій k: $\Psi_2 \cap \Sigma_2 = 1_2 2_2 = k_2$.

3. Визначаємо горизонтальну проекцію прямої 1-2 ($1_1 2_1 = k_1$).

4. Горизонтальна проекція прямої $1_1 2_1 = k_1$ перетинається з горизонтальною проекцією ребра A_1S_1 в точці I_1, яка є точкою лінії перерізу.

5. По лінії проекційного зв'язку визначаємо фронтальну проекцію точки I_2 на A_2S_2 .

6. Аналогічно визначаємо горизонтальні и фронтальні вершини II і III, для цього проводимо через ребра SB і SC фронтально проектуючи площини $\Delta \perp \prod_2$ і $\Omega \perp \prod_2$.

7. З'єднавши побудовані точки з урахуванням їх видимості, отримують лінію I-II-III перетину піраміди SABC площиною $\sum$:

Лінія $I - II \subset ASB$, $II - III \subset BSC$ і $III - I \subset ASC$

8. На Π_2 грані ASB і BSC видимі, от же і $I - II$ і $II - III$ також видимі.

9. На Π_1 грані ASB, ASC і BSC видимі, от же і лінія I-II-III – видима.

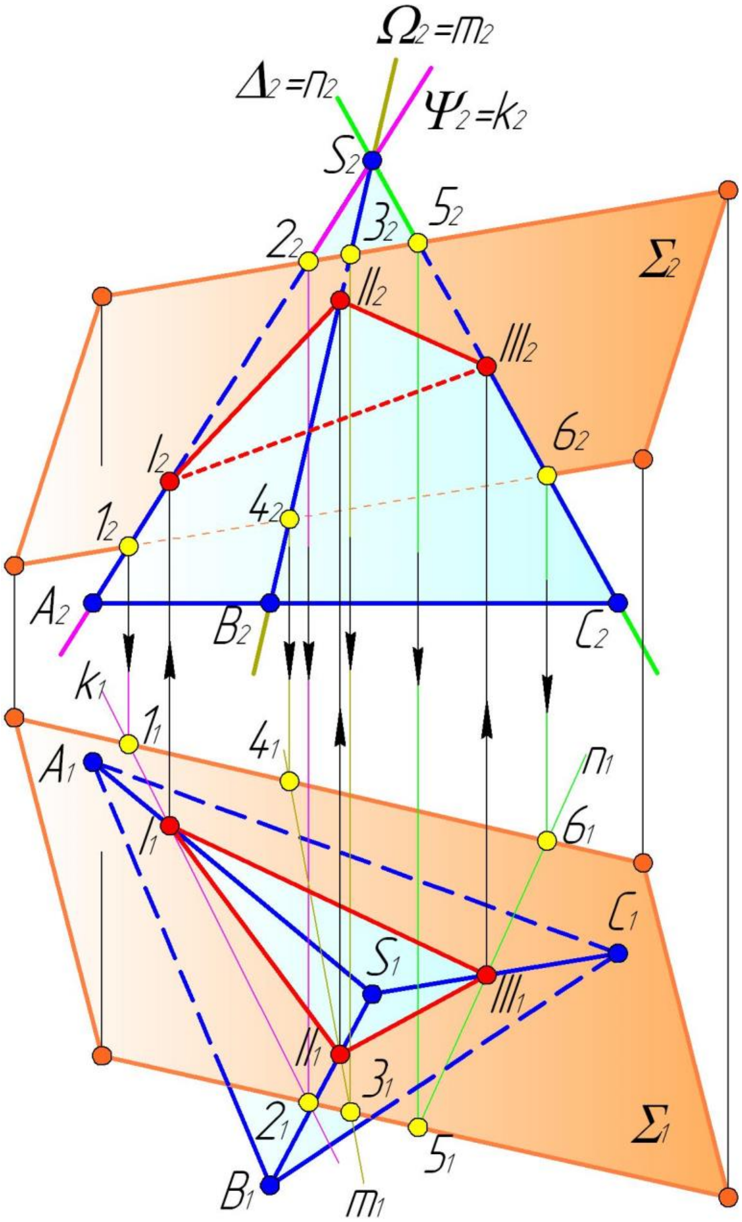


Рис. 8.5

Метод граней

Завдання 2. Задана $4^{-х}$ грана пряма призма АВСДА'В'С'Д', що займає горизонтально-проектуюче положення, яка перетинається площиною загального виду $\Omega(h \cap f)$. Необхідно побудувати лінію перетину призми площиною Ω.

Перший спосіб (рис. 8.6).

1. Через грань АВА'В' проведемо горизонтально-проектуючу площину Δ. У зв'язку з тим, що грань АВА'В' призми займає горизонтально-проектуюче положення, вона проектується у лінію, яка співпадає з горизонтальним слідом горизонтально-проектучої площини $\Delta(\Delta_1)$.

2. Горизонтально-проектуюча площина Δ перетнеться з площиною загального виду Ω(h⌒f) по лінії 12($\Delta_1 \cap \Omega_1 = 1_1 2_1$). Знаходимо фронтальну проекцію лінії $1_2 2_2$ за ознакою належності точці прямої.

3. Отримуємо: $1_2 2_2 \cap A_2 A'_2 = I_2$, $1_2 2_2 \cap B_2 B'_2 = II_2$.

4. Через грань CDC'D' проведемо горизонтально-проектуючу площину Σ, та виконаємо дії пунктів 1-3. Отримуємо: $3_2 4_2 \cap D_2 D'_2 = III_2$, $3_2 4_2 \cap C_2 C'_2 = IV_2$.

5. З'єднавши між собою з урахуванням видимості точки I_2-II_2-III_2-IV_2 отримуємо замкнуту лінію фронтальної проекції перерізу призми площиною Ω(h⌒f). Горизонтальна проекція лінії перерізу призми площиною Ω(h⌒f) співпадає з горизонтальною проекцією основи призми ($A_1 B_1 C_1 Д_1$).

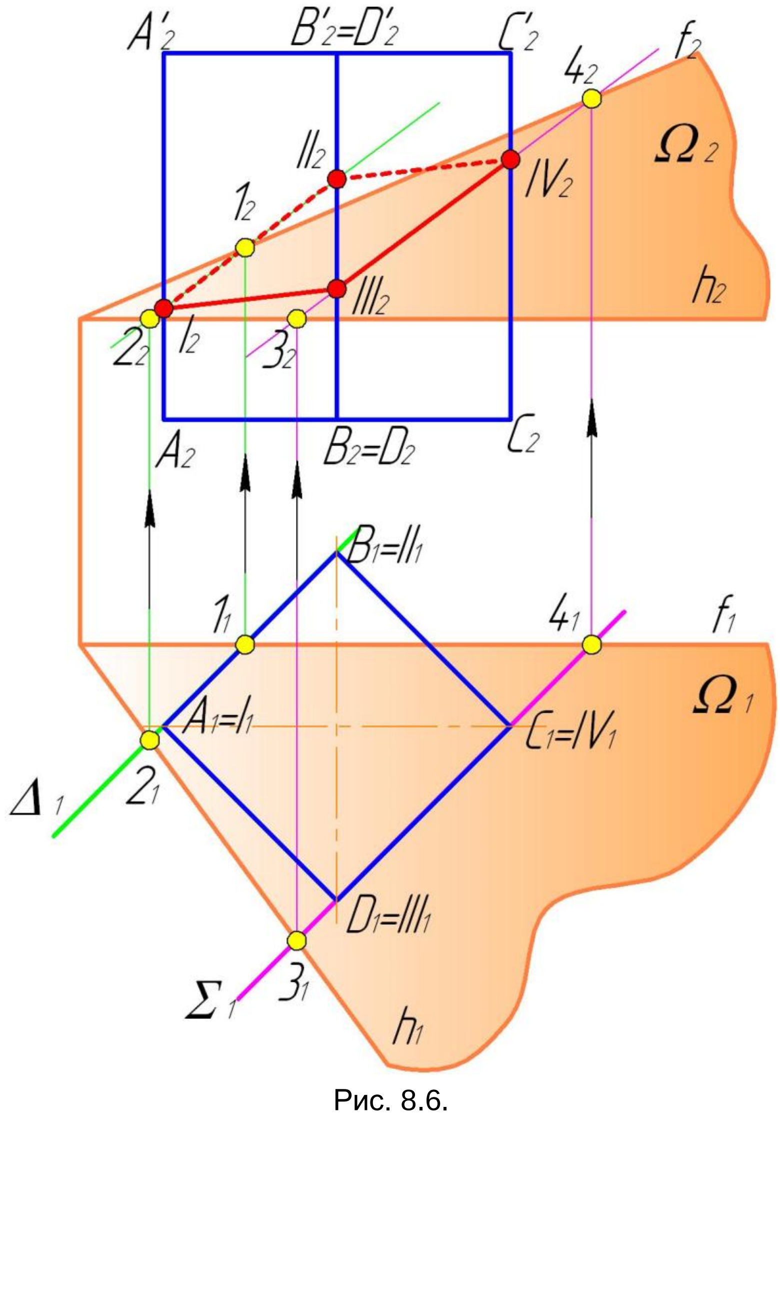


Рис. 8.6.

Другий спосіб (рис. 8.7).

Цю ж задачу можна вирішувати за допомогою метода ребер, розглянутого раніше.

1. Через ребро BB' проведемо площину $\Delta // \Pi_2$. Площина фронтального рівня Δ перетинається з площиною загального виду Ω ($h \cap f$) по фронталі f'(f'$_1$).

2. Будуємо фронтальну проекцію прямої фронтального рівня f'$_2$.

3. $f_2' \cap B_2B_2' = II_2$.

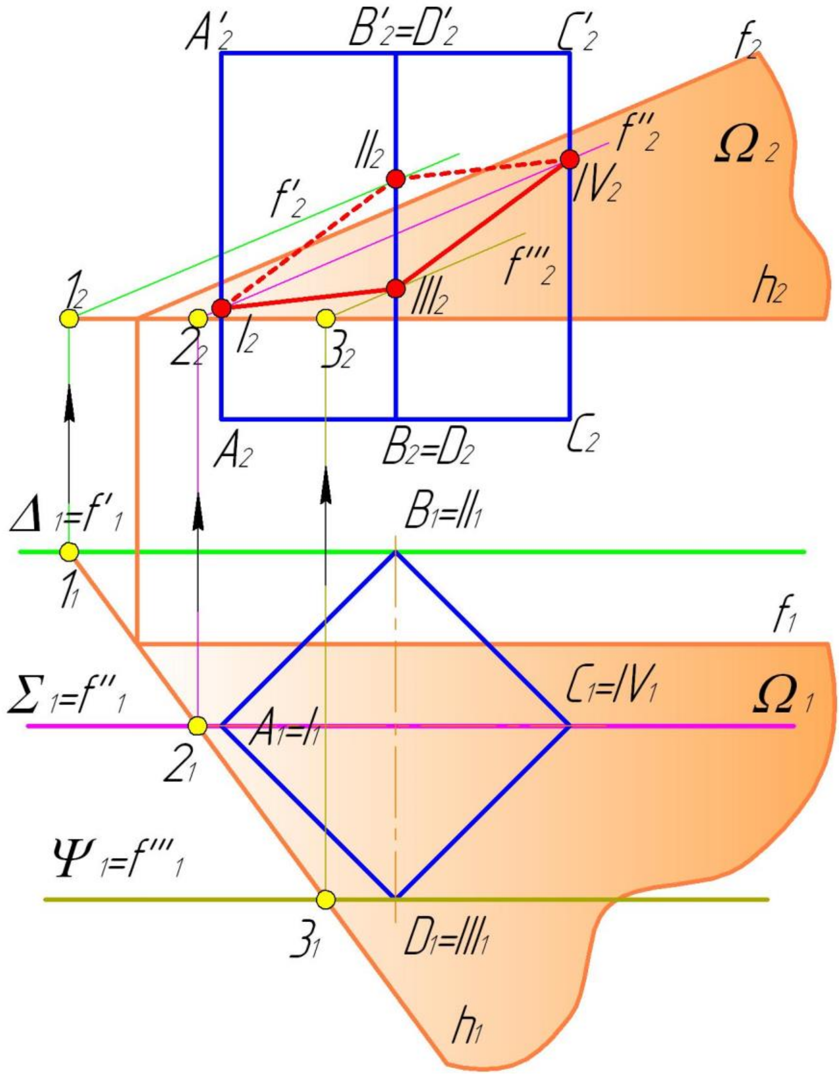


Рис. 8.7

4. Через ребро AA' і CC' проведемо площину $\Sigma // \Pi_2$. Площина фронтального рівня Σ перетинається з площиною загального виду Ω ($h \cap f$) по фронталі f''(f''$_1$). Повторюємо пункти 2-3 та отримуємо: $f_2'' \cap A_2A_2' = I_2$ і $f_2'' \cap C_2C_2' = IV_2$.

5. Через ребро DD' проведемо площину $\Psi // \Pi_2$. Площина

фронтального рівня Ψ перетинається з площиною загального виду Ω (h⌒f) по фронталі f'''(f'''₁). Повторюємо пункти 2-3 та отримуємо: $f_2''' \cap D_2 D_2' = II_2$

6. З'єднавши між собою з урахуванням видимості точки I_2-II_2-III_2-IV_2 отримуємо замкнуту лінію фронтальної проекції перерізу призми площиною Ω(h⌒f). Горизонтальна проекція лінії перерізу призми площиною Ω(h⌒f) співпадає з горизонтальною проекцією основи призми ($А_1В_1С_1Д_1$).

8.3. Перетин граних поверхонь проектуючими площинами

Переріз граних поверхонь проектуючими площинами робиться без додаткових побудов - за допомогою ліній проекційного зв'язку, оскільки сліди-проекції проектуючих площин мають збиральну властивість.

Завдання 3. Побудувати лінію перетину $3^{-х}$ граної піраміди SABC з фронтально проектуючою площиною Σ.

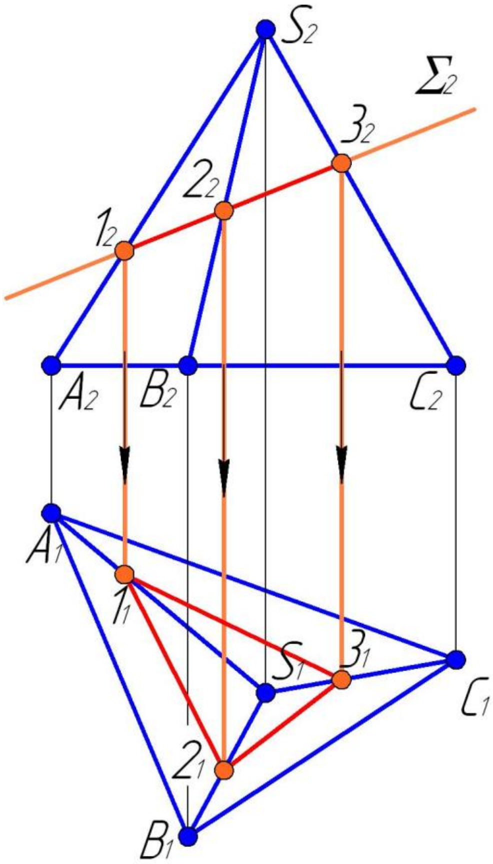


Рис. 8.8

Аналіз

1. У зв'язку з тим, що площина Σ перетинає три ребра піраміди SABC, то лінія перетинання – плоский замкнений трикутник.

2. Фронтальна проекція лінії перетинання співпадає з проекцією площини Σ_2 у зоні накладення проекцій (ламана $1_2 2_2 3_2 1_2$).

Побудова

1. Визначаємо горизонтальні проекції вершин ламаної 1_1 2_1 3_1 по належності проекціям ребер S_1A_1, S_1B_1 і S_1C_1.

2. З'єднуємо горизонтальні проекції вершин ламаної 1_1 2_1 3_1 відрізками прямих.

Завдання 4. Побудувати лінію перетину 3-х граної піраміди SABC з трьома проектуючими площинами Ω, Σ і $\Delta(\Omega // \Pi_1,\ \Sigma // \Pi_3,\ \Delta \perp \Pi_2)$.

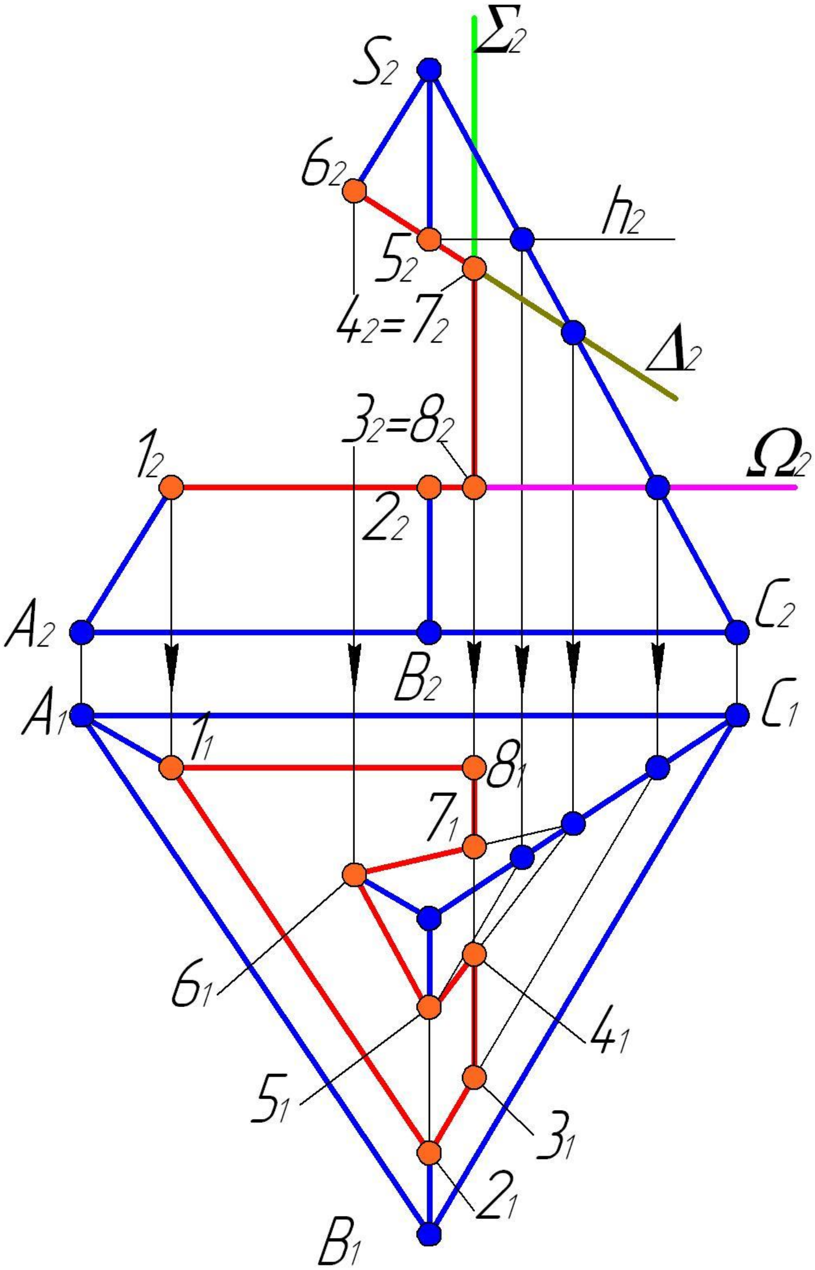


Рис. 8.9

Аналіз

1. Ω, Σ і $\Delta \cap$ SABC по плоским замкненим лініям, з частин яких утворюється просторова ломана.

2. Фронтальна проекція лінії перетинання співпадає з проекцією площини Ω_2, Σ_2 і Δ_2 у зоні накладення проекцій (ламана $1_2 2_2 3_2 4_2 5_2 6_2 7_2 8_2 1_2$).

Побудова

1. Визначаємо горизонтальні проекції вершин ламаної $1_1, 2_1 \ldots 8_1, 1_1$ з умови приналежності точки поверхні піраміди.
2. З'єднуємо горизонтальні проекції вершин ламаної $1_1\ 2_1\ 3_1 \ldots 8_1 1_1$ відрізками прямих.

8.4. Переріз криволінійних поверхонь площинами загального виду

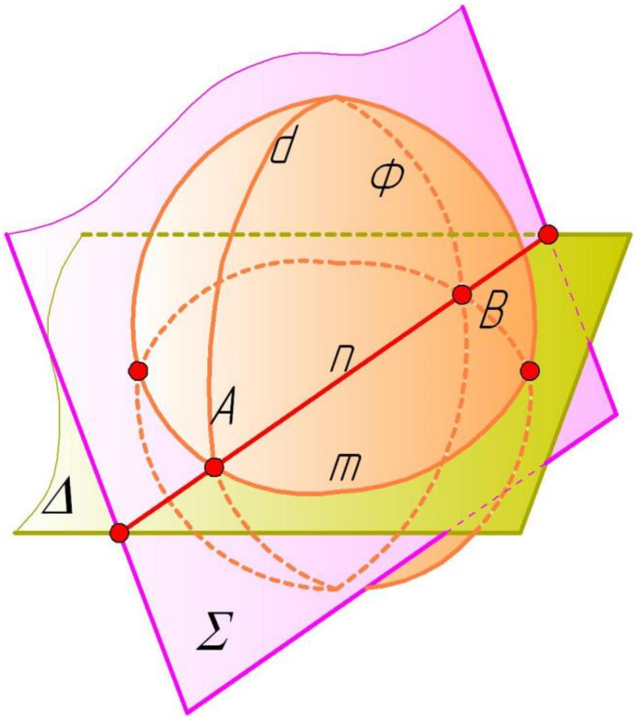


Рис. 8.10

Загальні положення

1. Лінія d перетинання кривої поверхні Ф з площиною Σ в загальному випадку це плоска крива другого порядку.
2. Побудова лінії d зводиться к побудові опорних точок та проміжних точок використовуючи метод допоміжних поверхонь.
3. Допоміжні поверхні (наприклад Δ) повинні перетинати поверхню Ф по лінії m, проекції якої мають бути графічно простими (пряма, коло).

Побудова перерізів криволінійних поверхонь площиною робиться аналогічно побудові перерізів граних поверхонь з використанням площин-посередників. Особливість перерізу кривих поверхонь полягає в тому, що в цьому випадку побудову починають з визначення особливих (опорних) точок (точок на нарисі поверхні, вищих і нижчих, найбільш видалених і найбільш близьких до спостерігача).

Завдання 5. Дано: конус та площина загального виду $\Sigma(f^0 \cap h^0)$ рис. 8.11. Знайти лінію перерізу конуса площиною загального виду $\Sigma(f^0 \cap h^0)$.

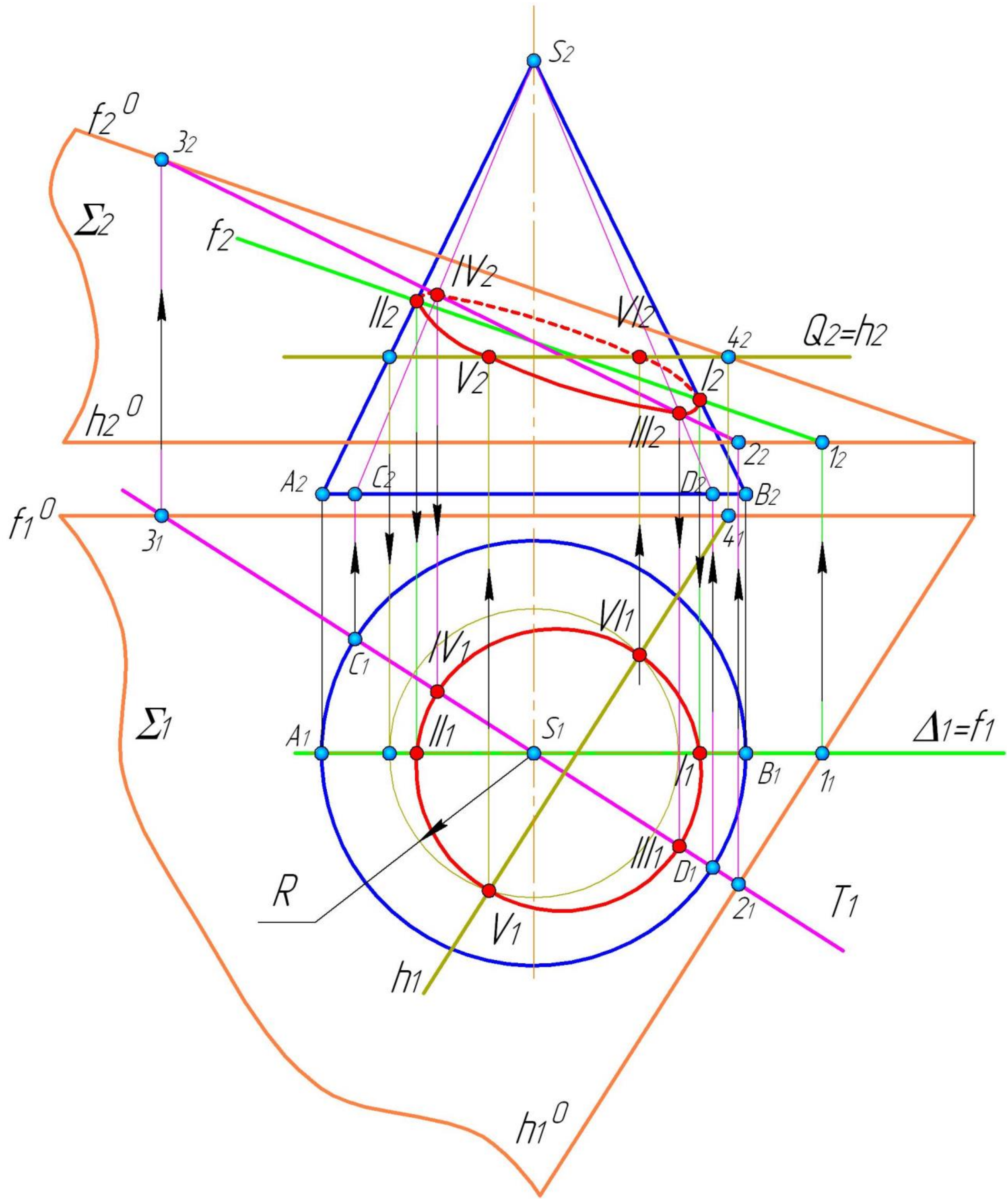

S2
f2 0
32
Σ2
f2
IV2
II2
VI2
42
Q2=h2
V2
I2
h2 0
III2
22
12
A2
C2
D2
B2
f1 0
31
41
VI1
IV1
C1
Σ1
A1
II1
S1
Δ1=f1
I1
B1
11
III1
R
D1
21
T1
V1
h1
h1 0

Рис. 8.11

Алгоритм графічних побудов

Для побудови точок перерізу на нарисі конуса вводять площину-посередник Δ, яка // П2 і проходить через вершину конуса S. Ця площина перетне конус по нарису (трикутнику ASB), а з площиною "Σ" перетинається по фронтали f. Ця фронталь перетинається з нарисом конуса на $П_2$ в точках I і II.	1. Через $S_1 \alpha \ \Delta_1 // \Pi_2$ 2. $\Delta_1 \mathrm{I}$ $конус = \Delta(A_1S_1B_1) \uparrow \Delta(A_2S_2B_2)$ $\Delta_1 \mathrm{I}$ $\Sigma(h \cap f) = f_1 \uparrow f_2$ 3. $\Delta(A_2S_2B_2) \mathrm{I}$ $f_2 = I_2II_2 \downarrow I_1II_1$
Для побудови вищої і нижчої точок фігури перерізу проводять через горизонтальну проекцію вершини конуса горизонтально-проектуючу площину T_1, перпендикулярно до горизонтального сліду площини Σ. Ця площина перетне конус по трикутнику CSD, а площине Σ - по лінії 23. Ця лінія перетне трикутник CSD в точках III (нижча точка перерізу) і IV (вища точка перерізу).	4. Через $S_1 \alpha \ T_1 \perp \Pi_1; T_1 \perp h_1^0$ 5. $T_1 \mathrm{I}$ $конус = \Delta(C_1S_1D_1) \uparrow \Delta(C_2S_2D_2)$ $T_1 \mathrm{I}$ $\Sigma(h \cap f) = 2_13_1 \uparrow 2_23_2$ 6. $\Delta(C_2S_2D_2) \mathrm{I}$ $2_23_2 = III_2IV_2 \downarrow III_1IV_1$
Для побудови додаткових точок фігури перерізу можна використовувати площину горизонтального рівня Q, яка перетинає конус по колу радіусу R, а з площиною Σ	7. Проводимо $Q_2 // \Pi_1$ 8. $Q_2 \mathrm{I}$ $конус = коло(\mathrm{R})$ $Q_2 \mathrm{I}$ $\Sigma(h \cap f) = h_2 \downarrow h_1$ 9. коло I $h_1 = V_1VI_1 \uparrow V_2VI_2$

перетинається по горизонталі h. Горизонталь перетинає на $П_1$ коло радіусу R в точках V_1 і VI_1, що належать фігурі перерізу. По лініях проекційного зв'язку визначаємо фронтальні проекції точок V_2 і VI_2.	
З'єднавши отримані точки з урахуванням видимості плавними кривими отримуємо горизонтальну і фронтальну проекції еліпса I-II-III-IV-V-VI: фігуру перерізу конуса площиною Σ.	10. $I_2II_2III_2IV_2V_2VI_2$ - фронтальна проекція еліпса 11. $I_1II_1III_1IV_1V_1VI_1$ - горизонтальна проекція еліпса.

Завдання 6. Дано: прямий круговий циліндр та площина загального виду $\Sigma(f^0 \cap h^0)$ рис. 8.14. Знайти лінію перерізу циліндра площиною загального виду $\Sigma(f^0 \cap h^0)$.

Алгоритм графічних побудов

При пересіченні циліндра площиною загального виду у перерізі можемо отримати еліпс повний або зрізаний. Для перевірки: перетинає площина загального виду $\Sigma(f^0 \cap h^0)$ верхню та нижню основу циліндра - вводимо додаткові площини – посередники $K // \Pi_1$ та $M // \Pi_1$.	
Для побудови точок перерізу на нарисі циліндра вводять площину-посередник Δ, яка // П2 і проходить через вісь циліндра. Ця площина перетне циліндр по нарису, а з площиною "Σ" перетинається по фронталі f. Ця фронталь перетинається з нарисом цилінда на $П_2$ в точках I і II.	1. Через вісь циліндра проводимо $\Delta_1 // \Pi_2$ 2. Δ_1 I цил-др=нарис цил-дра Δ_1 I $\Sigma(h \cap f) = f_1 \uparrow f_2$ 3. нарис цил-дра I $f_2 = I_2II_2 \downarrow I_1II_1$

Для побудови вищої і нижчої точок фігури перерізу проводять через вісь циліндра горизонтально-проектуючу площину T_1, перпендикулярно до горизонтального сліду площини Σ. Ця площина перетне циліндр по прямокутнику, а площину Σ - по лінії 45. Ця лінія перетне прямокутник на $П_2$ в точках III (нижча точка перерізу) і IV (вища точка перерізу).	4. Через вісь циліндра проводимо $T_1 \perp \Pi_1; T_1 \perp h_1^0$ 5. T_1 I цил-др=прямокутник T_1 I $\Sigma(h^0 \cap f^0) = 4_1 5_1 \uparrow 4_2 5_2$ 6. $\text{пр} - \text{ник}$ I $4_2 5_2 = III_2 IV_2 \downarrow III_1 IV_1$
Для побудови додаткових опорних точок - найближчої і найбільш видаленої введемо дві фронтальні площини Q і Ω, та отримуємо найближчу точку V і найвіддаленішу VI.	
З'єднавши отримані точки з урахуванням видимості плавними кривими отримуємо горизонтальну і фронтальну проекції еліпса I-II-III-IV-V-VI.	7. $I_2 II_2 III_2 IV_2 V_2 VI_2$ - фронтальна проекція еліпса 8. $I_1 II_1 III_1 IV_1 V_1 VI_1$ - горизонтальна проекція еліпса.

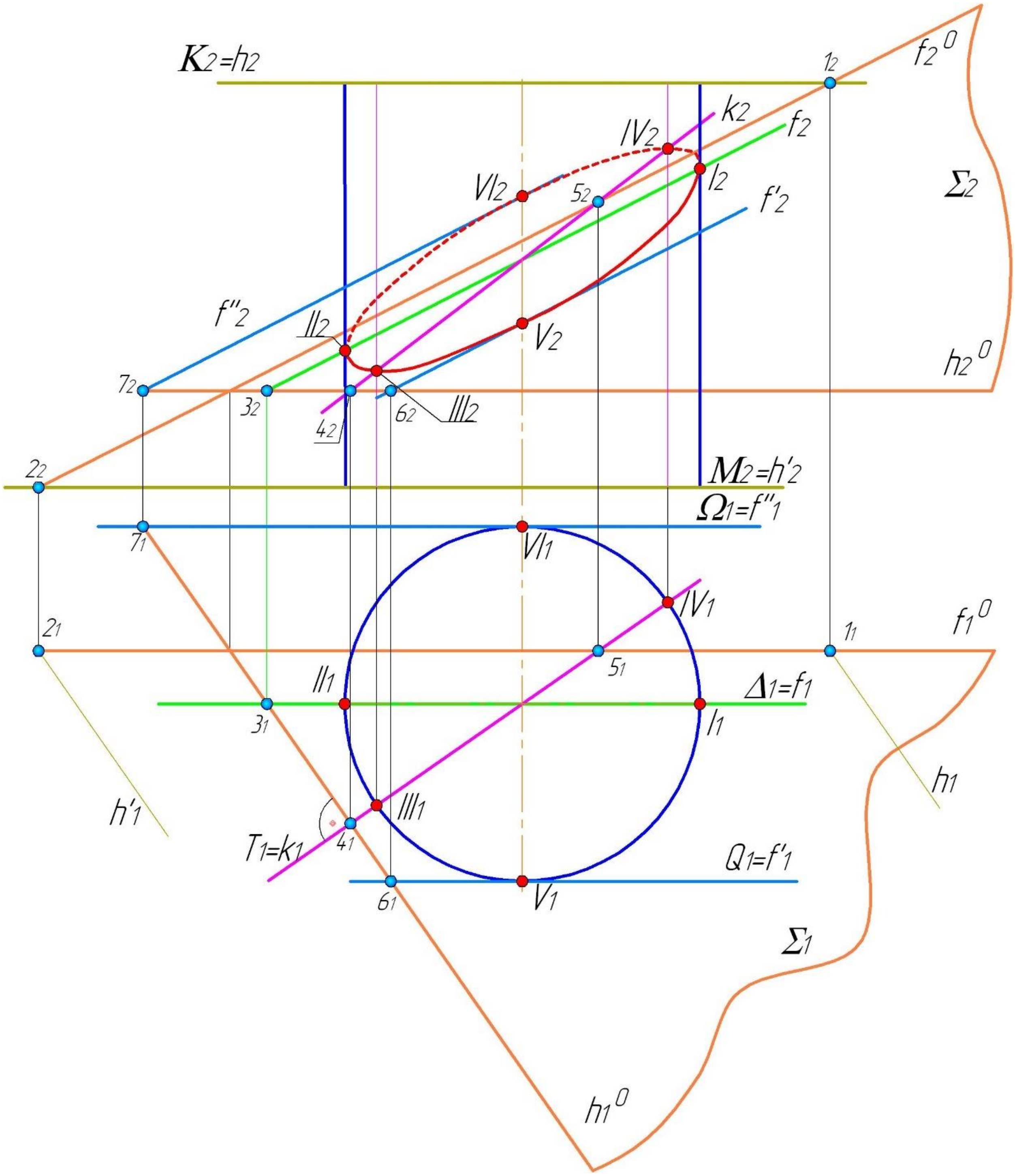

K2=h2
12
f2 0
k2
IV2
f2
Σ2
VI2
52
I2
f'2
f''2
II2
V2
h2 0
72
32
42
62
III2
22
M2=h'2
Ω1=f''1
71
VI1
IV1
21
51
11
f1 0
II1
Δ1=f1
31
I1
h1
h'1
III1
T1=k1
41
Q1=f'1
61
V1
Σ1
h1 0

Рис. 8.12

8.5. Переріз криволінійних поверхонь проектуючими площинами

Побудова перерізів тіл площинами значно спрощується, якщо площини проектуючи.

Перетинання циліндра площиною

При перетинанні циліндра обертання з площиною можна отримати: 1) коло, 2) еліпс 3) прямокутник.

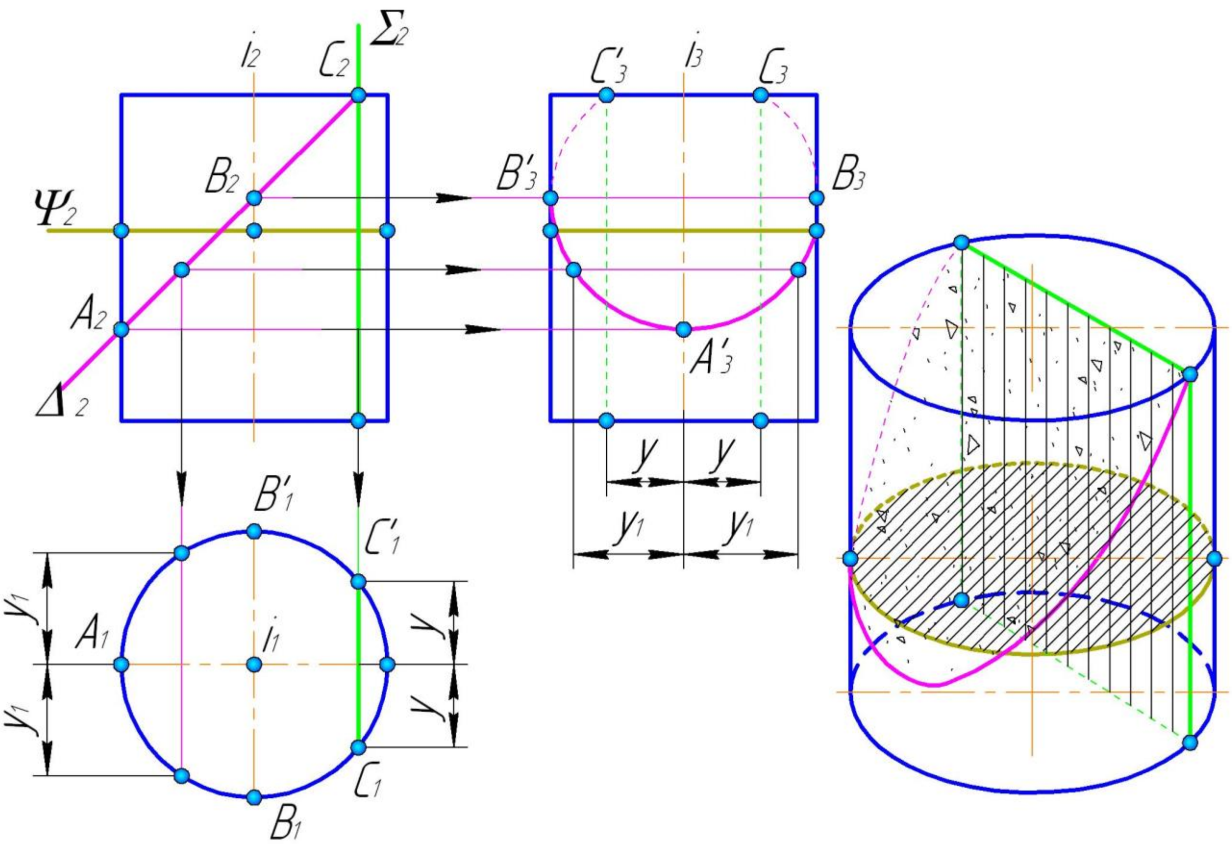
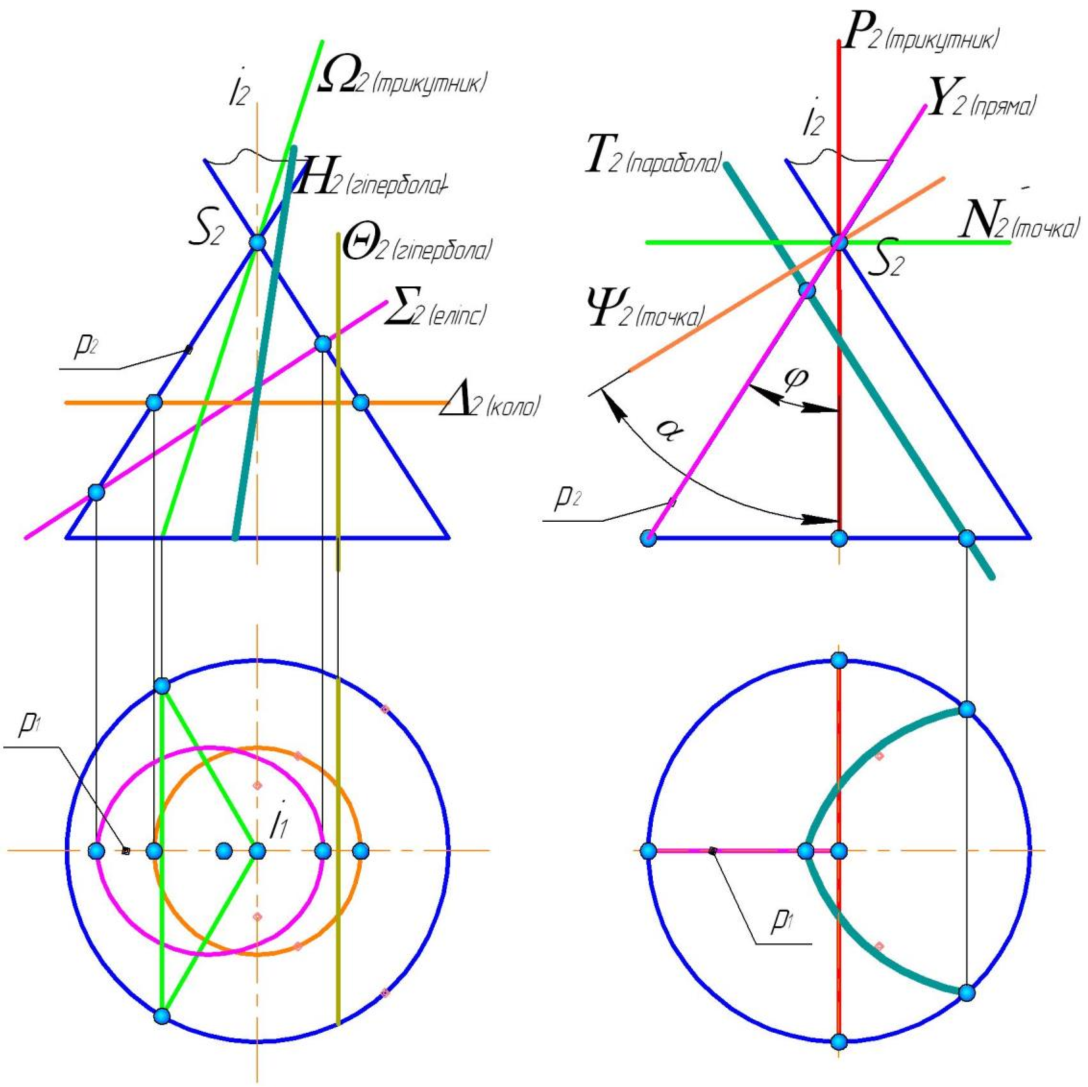


Рис. 8.13

Перетинання конуса площиною

При перетинанні циліндра обертання з площиною можна отримати: 1) коло, 2) еліпс 3) параболу 4) гіперболу 5) трикутник 6) точку.



α - кут між площиною та віссю *i*

φ - кут нахилу твірної конуса *p* к вісі *i*

Рис. 8.14

Випадки	Площина не перетинає вершину S	Площина перетинає вершину S
$\alpha > \varphi$	Σ - еліпс	Ψ - точка
$\alpha = \varphi$	T - парабола	Y - подвійна пряма
$\alpha < \varphi$	H - гіпербола	Ω - дві прямі
$\alpha = 0^0$	Θ - гіпербола	P - подвійна пряма
$\alpha = 90^0$	Δ - коло	N - точка

Побудувати лінію d перетину поверхні Ф конуса обертання з фронтально проектуючою площиною $\Sigma(\alpha > \varphi)$.

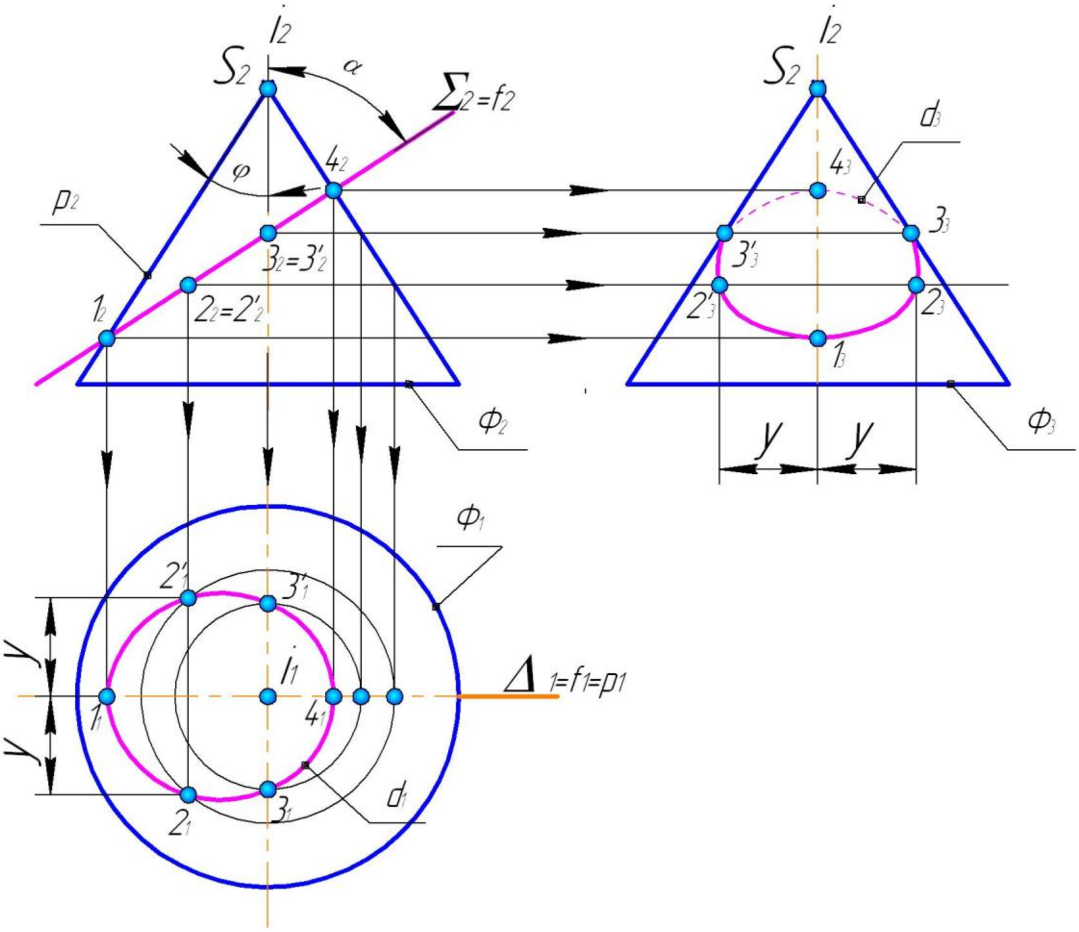


Рис. 8.15

Тема 9. Перетин прямої з поверхнею

9.1. Алгоритм рішення задачі побудови точок перетину прямої з поверхнею в загальному випадку

9.2. Побудова точок перетину прямої з поверхнею багатогранника

9.3. Побудова точок перетину прямої з поверхнею за допомогою площин загального стану

9.4. Побудова точок перетину прямої з поверхнею прямого кругового конуса

9.5. Окремі випадки перетину прямої з поверхнею

9.1. Алгоритм рішення задачі побудови точок перетину прямої з поверхнею в загальному випадку

Загальні положення:

1. Число точок перетину відповідає порядку заданої поверхні Ф.
2. У основу побудов покладений спосіб допоміжних поверхонь.
3. В якості допоміжних поверхонь зазвичай вибирають площини, які проходять через задану пряму n.
4. Площина Σ повинна перетинати поверхню Ф по лінії d, проекції якої були б графічно простими (дуга кола, пряма).
5. Видимість проекцій прямої n визначають по видимості проекцій поверхні.

Тому, в загальному випадку побудова точок перетину (проникнення) прямої з поверхнею складається з 4-х етапів:

1. Пряму "n" заключаємо у площину - посередник "Σ" (рис.9.1).
2. Будуємо лінію перерізу заданої поверхні "Ф" з площиною-посередником "Σ".
3. Відмічають точки перетину "M" і "N" побудованій лінії перерізу із заданою прямою.
4. Визначаємо видимість ділянок прямої.

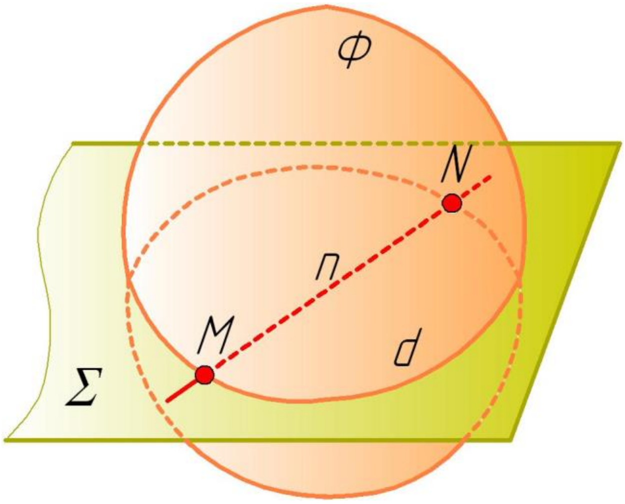


Рис. 9.1

9.2. Побудова точок перетину прямої з поверхнею багатогранника

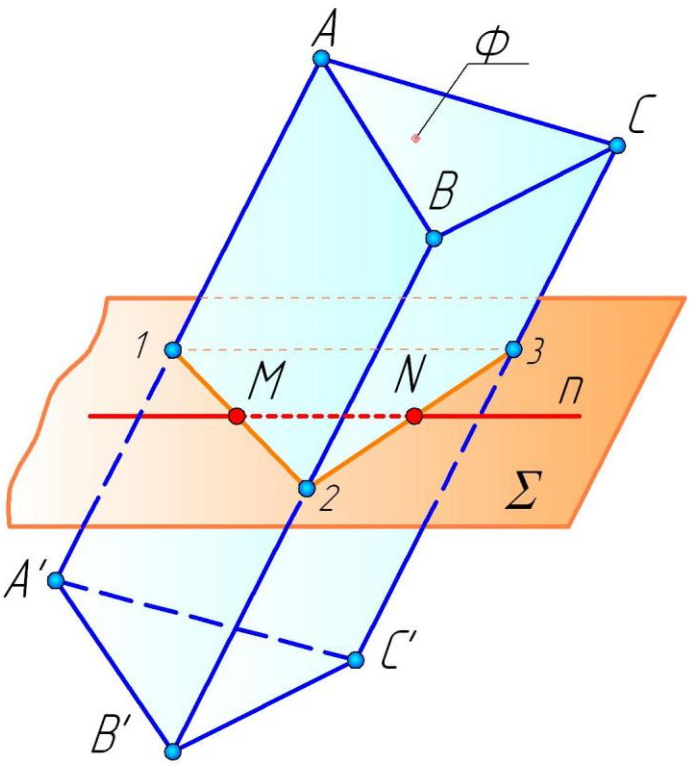


Рис. 9.2

Побудову здійснюють по алгоритму розглянутому вище: площина-посередник "Σ" проходить через пряму n і перетне багатогранник по плоскій замкнутій ламаній лінії 1231. Шукані точки M і N є результат перетину лінії 1231 з прямою n.

Алгоритм:

1. $\Sigma \supset n$, Σ- проектуюча площина;

2. $\Sigma \cap \Phi = (1-2-3-1)$;

3. $M = (1-2-3-1) \cap n = \Phi$;

$N = (1-2-3-1) \cap n = \Phi$.

Завдання 1.

Дано: похила призма ABCA'B'C' і пряма загального виду n.

Визначити: точки M і N перетину прямої загального виду n з поверхнею Ф (похилою призмою ABCA'B'C') (рис.9.3).

Побудова.

1. Заключаємо пряму загального виду n у фронтально-проектуючу площину Σ.

2. Фронтально-проектуюча площина Σ перетне похилу призму ABCA'B'C' по трикутнику 1-2-3-1.

3. Визначаємо горизонтальні проекції точок 1-2-3 по признаку належності точки прямої 1_1-2_1-3_1.

4. Там де трикутник 1_1-2_1-3_1-1_1 перетинається з прямою n отримуємо горизонтальні проекції точок M і N (M_1 і N_1).

5. Визначаємо фронтальні проекції точок M і N (M_2 і N_2).

6. Видимість ділянок прямої.

Алгоритм:

1. $\Sigma \perp \Pi_2$, $\Sigma_2 \supset n_2$.
2. $\Sigma_2 \cap A_2A'_2 = 1_2$.
3. $\Sigma_2 \cap C_2C'_2 = 2_2$.
4. $\Sigma_2 \cap B_2B'_2 = 3_2$.
5. $1_2 \downarrow 1_1$ $\cap$ з ребром $A_1A'_1 = 1_1$.
6. $2_2 \downarrow 2_1$ $\cap$ з ребром $C_1C'_1 = 2_1$.
7. $3_2 \downarrow 3_1$ $\cap$ з ребром $B_1B'_1 = 3_1$.
8. $1_1 \cup 2_1 \cup 3_1 = 1_1 - 2_1 - 3_1$.
9. $n_1 \cap 1_1 - 3_1 = M_1$.
10. $n_1 \cap 2_1 - 3_1 = N_1$.
11. $M_1 \uparrow M_2 \cap n_2 = M_2$.
12. $N_1 \uparrow N_2 \cap n_2 = N_2$.

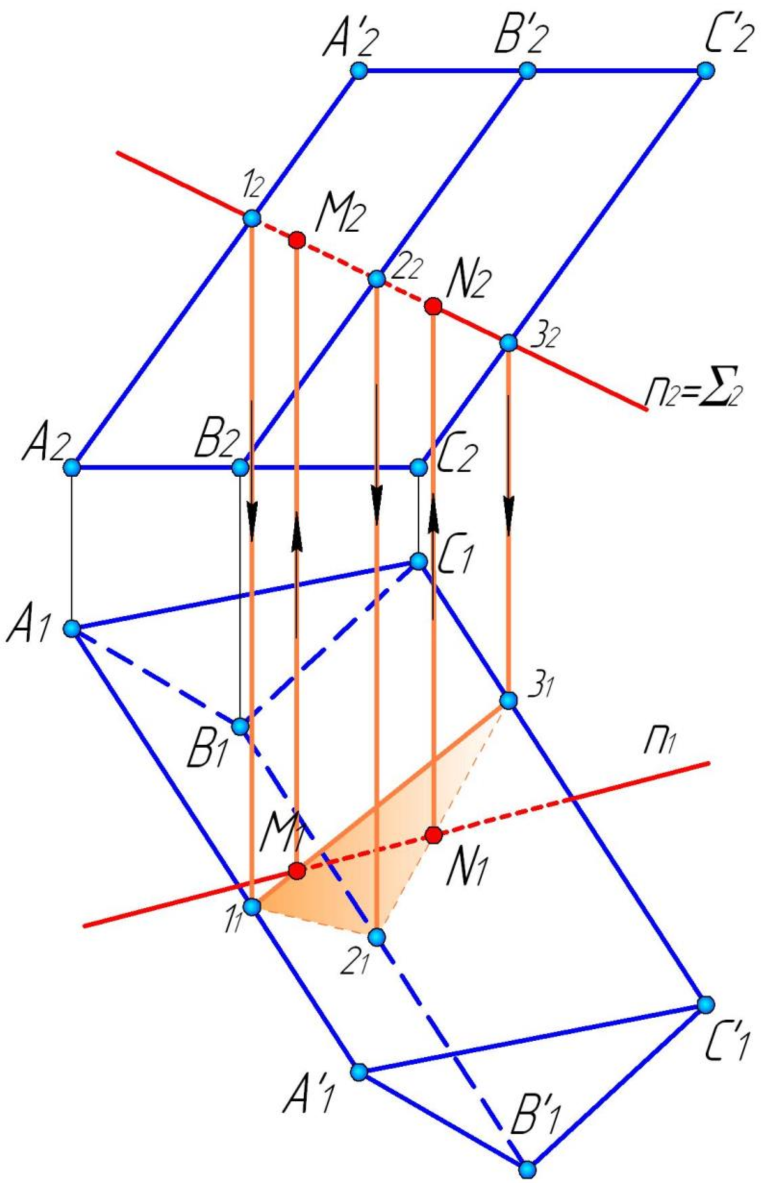


Рис. 9.3

Завдання 2.

Дано: піраміда SABC і пряма загального виду n.

Визначити точки M і N перетину прямої загального виду n з поверхнею Ф піраміди SABC.

Побудова (перший спосіб).

1. Через горизонтальну проекцію прямої n проводимо горизонтально - проектуючу площину $\Sigma \perp \Pi_1$.

2. Горизонтально - проектуюча площина Σ перетне піраміду SABC по трикутнику 1-2-3. Визначаємо горизонтальну проекцію ламаної:

$\Sigma_1 \cap \Phi_1 = (1_1 2_1 3_1 1_1)$.

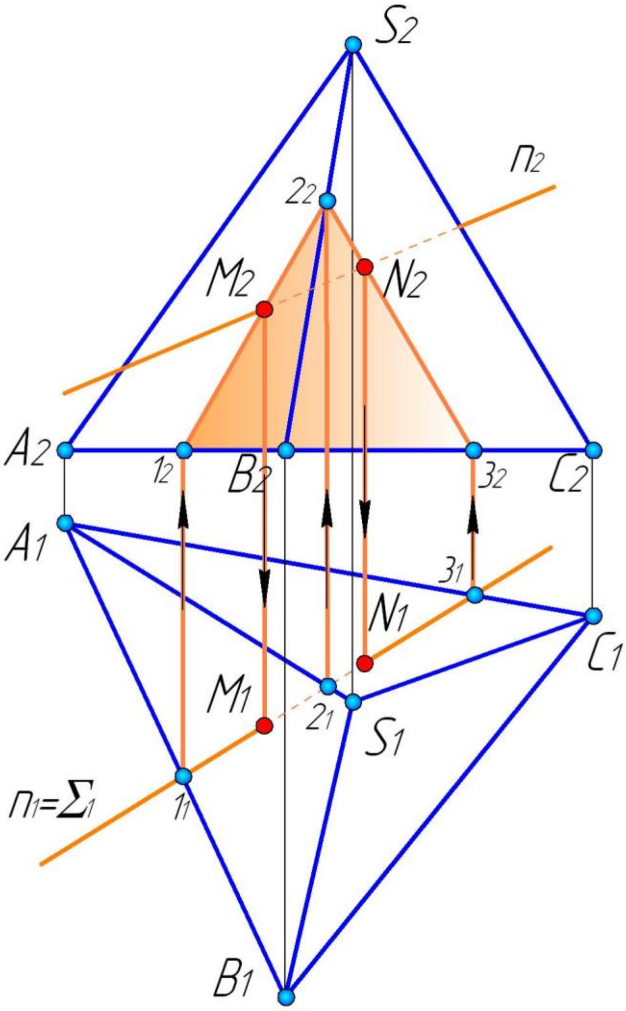


Рис. 9.4

3. Визначаємо фронтальні проекції вершин ламаної:

$1_1 \in A_1B_1 \to 1_1 \uparrow 1_2 \in A_2B_2$;

$2_1 \in A_1S_1 \to 2_1 \uparrow 2_2 \in A_2S_2$;

$3_1 \in A_1C_1 \to 3_1 \uparrow 3_2 \in A_2C_2$.

4. Будуємо фронтальну проекцію ламаної :

$1_2 \to 2_2 \to 3_2 \to 1_2$.

5. Визначаємо фронтальні проекції шуканих точок : $1_2 2_2 \cap n_2 = M_2$; $2_2\, 3_2 \cap n_2 = N_2$

6. Визначаємо горизонтальні проекції точок: $M_2 \downarrow M_1 \subset n_1$; $N_2 \downarrow N_1 \subset n_1$.

7. Визначаємо видимість проекцій прямої n по видимості проекцій граней піраміди.

Цю ж саму задачу можна вирішити, якщо провести через пряму n фронтально - проектуючу площину. Ця побудова представлена на рис. 9.5.

Побудова (другий спосіб).

1. Через фронтальну проекцію прямої n проводимо фронтально - проектуючу площину $\Sigma \perp П_2$.

2. Фронтально - проектуюча площина Σ перетне піраміду SABC по трикутнику 1-2-3. Визначаємо фронтальну проекцію ламаної:

$\Sigma_2 \cap \Phi_2 = (1_2 2_2 3_2 1_2)$.

3. Визначаємо горизонтальні проекції вершин ламаної:

$1_2 \in A_2S_2 \to 1_2 \downarrow 1_1 \in A_1S_1$; $2_2 \in B_2S_2 \to 2_2 \downarrow 2_1 \in B_1S_1$;

$3_2 \in C_2S_2 \to 3_2 \downarrow 3_1 \in C_1S_1$.

4. Будуємо горизонтальну проекцію ламаної: $1_1 \to 2_1 \to 3_1 \to 1_1$.

5. Визначаємо горизонтальні проекції шуканих точок: $1_1 2_1 \cap n_1 = M_1$; $1_1 3_1 \cap n_1 = N_1$

6. Визначаємо фронтальні проекції точок: $M_1 \uparrow M_2 \subset n_2$; $N_1 \uparrow N_2 \subset n_2$.

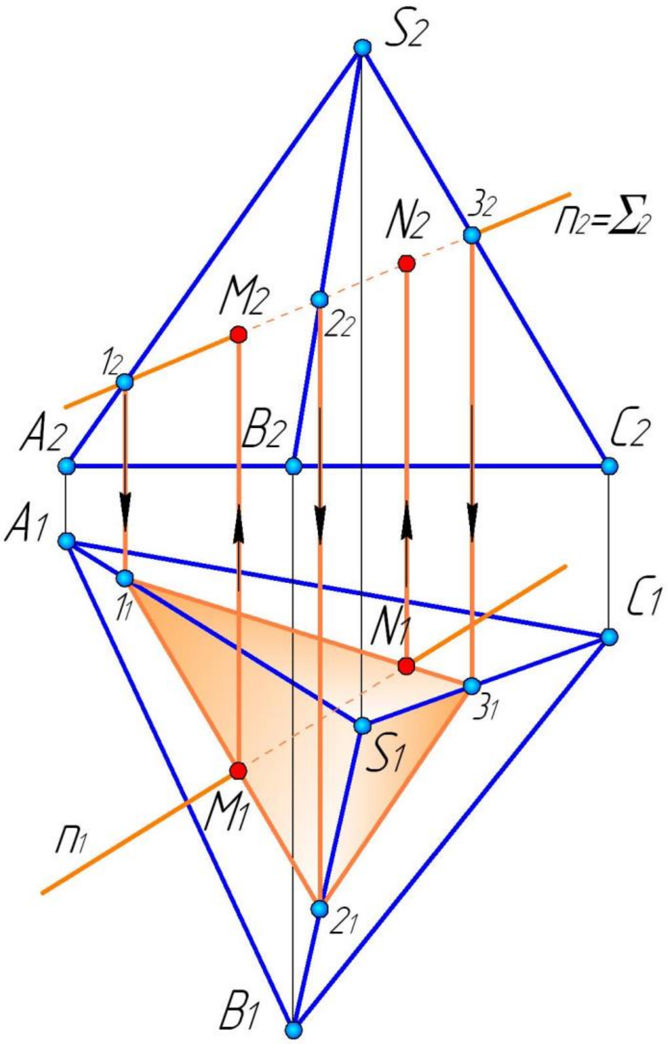


Рис. 9.5

9.3. Побудова точок перетину прямої з поверхнею за допомогою площин загального виду

На рис. 9.6. представлена геометрична модель рішення задачі за визначенням точок перетину прямої АВ з поверхнею похилого циліндра. Через пряму АВ необхідно провести площину, яка перетинала б циліндр утворюючим прямим. Таку площину можна побудувати узявши на прямій АВ довільну точку С і провівши через неї пряму "m" яка буде паралельна утворюючим циліндра. Прямі АВ і " m " утворюють площину "Δ", яка перетне циліндр по прямокутнику I-I′-II-II′.

Для його побудови визначають слід площини H_1H_1', який і перетинає циліндр по утворюючим. При перетинанні прямої АВ з прямокутником I-I′-II-II′ отримаємо точки K і L, які і є точками проникнення цієї прямої і циліндра.

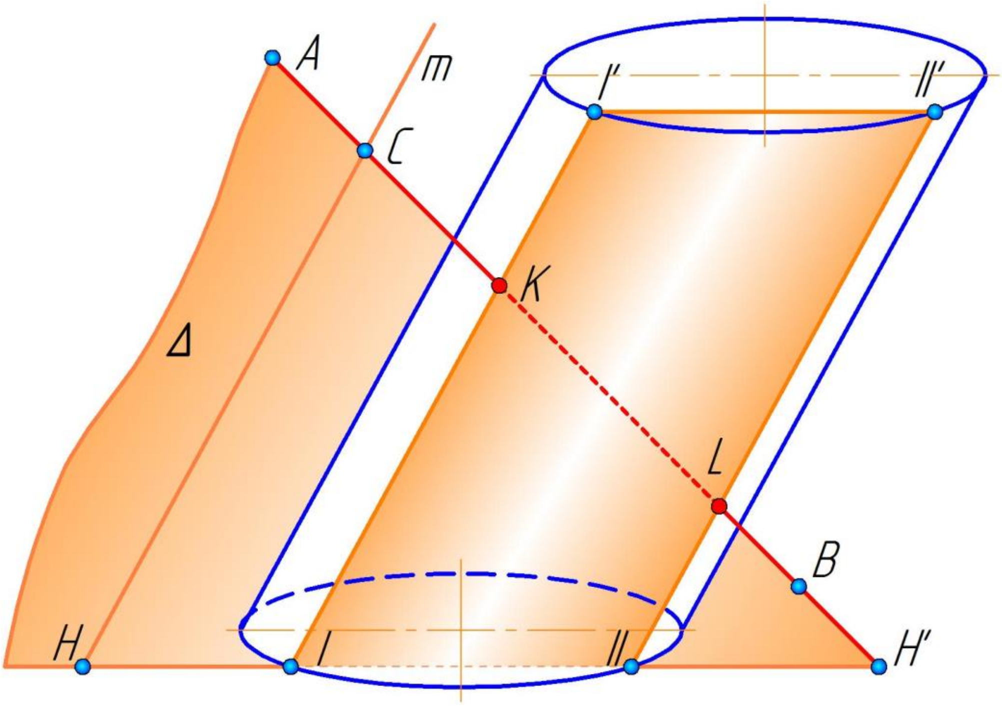


Рис. 9.6

Рішення описаної задачі на комплексному кресленні показане на рис. 9.7.

Побудова.

1. "С" - довільна взята точка на прямої АВ: $C_1 \in A_1B_1,\ C_2 \in A_2B_2$.

2. Через точку С проведемо пряму "m" паралельно утворюючим циліндра.

3. Пряма " m " і "АВ" утворять площину Δ загального виду. Знайдемо горизонтальні сліди площини H_1H_1'.

4. Горизонтальний слід площини H_1H_1' перетинає основу циліндра в точках I_1 і II_1.

5. Через точки I_1 і II_1 проводимо прямі паралельно утворючим і отримуємо прямокутник I_1-II_1-I'_1-II'_1. Утворююча $I_1I'_1$ перетинає пряму A_1B_1 в точці K_1, утворююча $II_1II'_1$ перетинає пряму A_1B_1 в точці K_1.

6. Знаходимо фронтальні проекції точок $K_1 \uparrow K_2$ і $L_1 \uparrow L_2$.

7. Визначаємо видимість ділянок прямої.

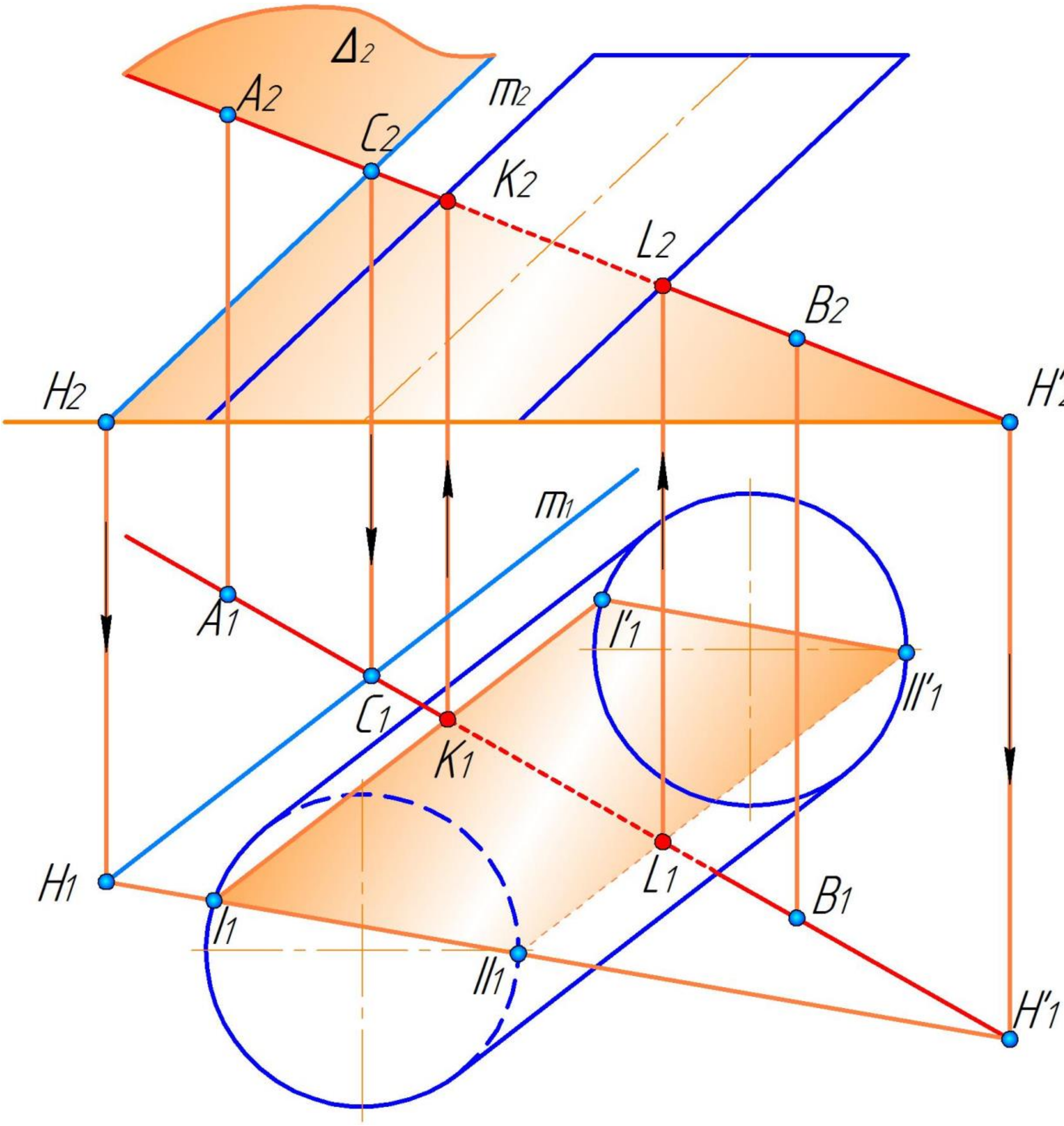


Рис. 9.7

9.4. Побудова точок перетину прямої з поверхнею прямого кругового конуса

На рис. 9.8 представлений конус, який перетинається прямою загального виду "АВ".

Для того, щоб знайти точки перетинання прямої АВ з конусом, треба пряму АВ заключити у площину загального положення. Для цього візьмемо на прямій дві довільні точки 1 і 2, та проведемо загальну площину Δ через дві пересічні прямі: 1S і 2S, при чому пряма АВ належить цієї площини. Площина загального виду Δ перетинає конус по трикутнику I-S-II.

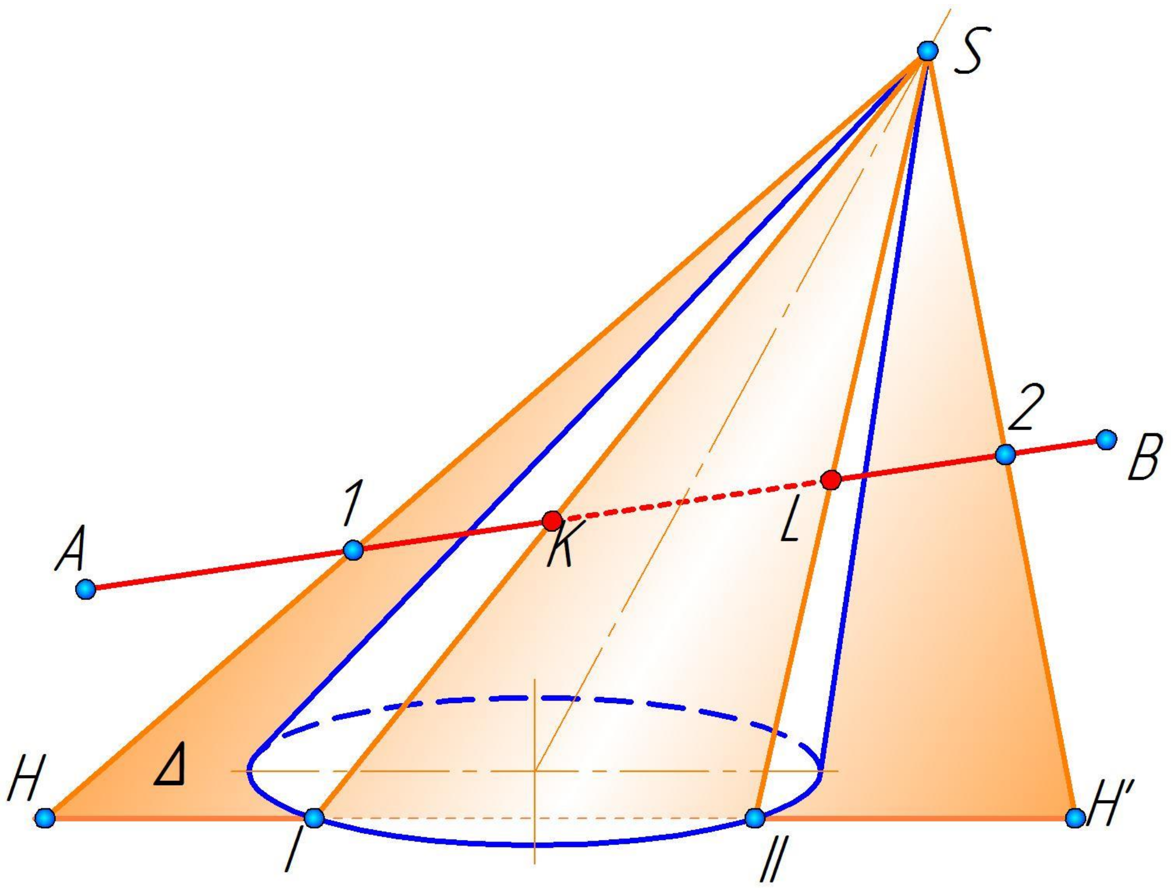


Рис. 9.8

Щоб побудувати цей трикутник необхідно побудувати сліди прямих "1S " і "2S ", а по них - горизонтальний слід площини "Δ" - H_1H_1'. Слід площини Δ перетинає основу конуса в точках I і II. З'єднавши ці точки з горизонтальною проекцією вершини конуса ми і отримаємо трикутник перерізу $I_1S_1II_1$. Трикутник перетне пряму АВ в точках K_1 і L_1, які і є точками перетину прямої "АВ" з конусом.

Рішення описаної задачі на комплексному кресленні показане на рис. 9.9. Побудова.

1. На фронтальній проекції прямої АВ візьмемо дві довільні точки 1 і 2: $1_2 \in A_2B_2$, $2_2 \in A_2B_2$, та знайдемо їх горизонтальні проекції: $1_1 \in A_1B_1$, $2_1 \in A_1B_1$.

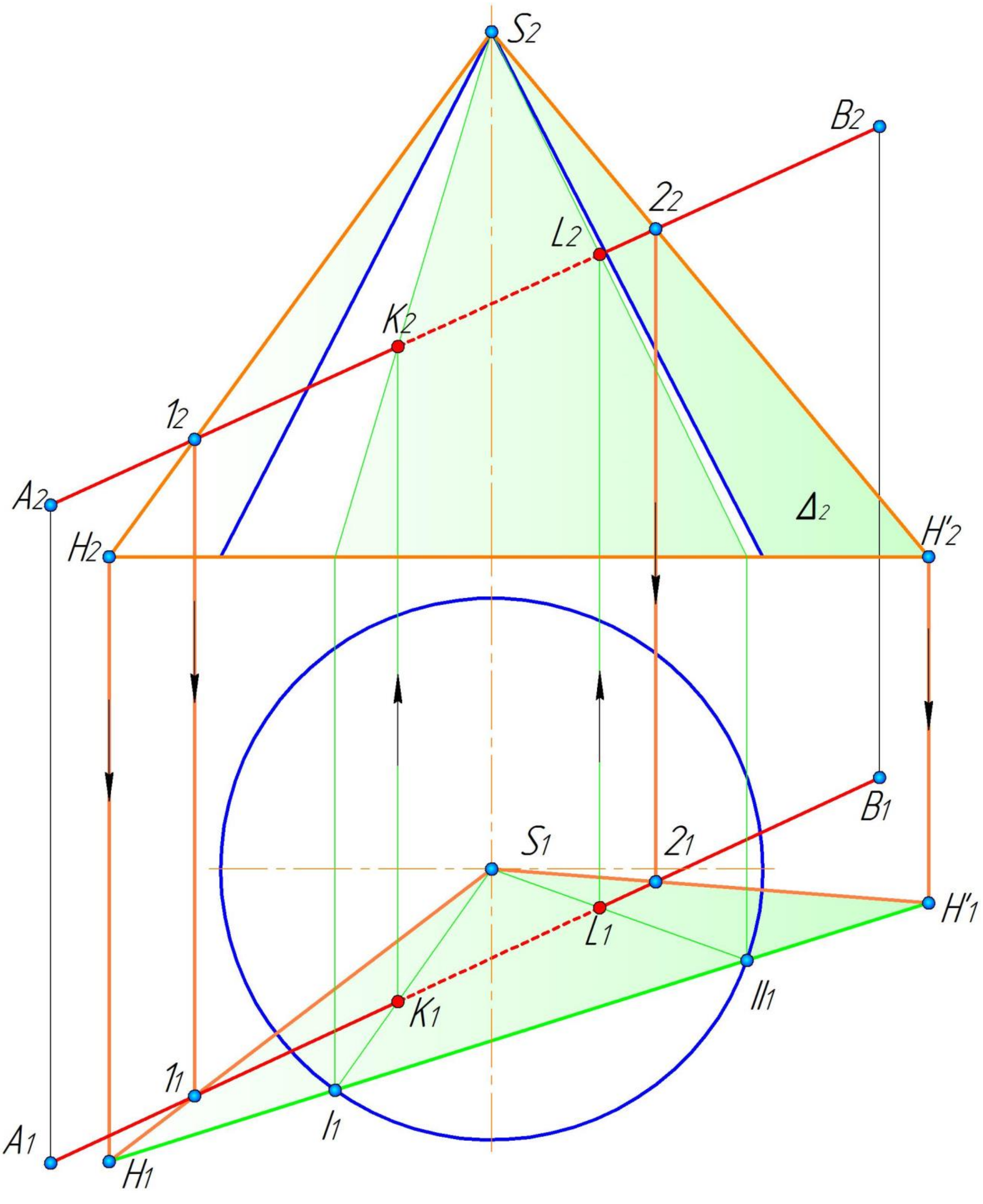


Рис. 9.9

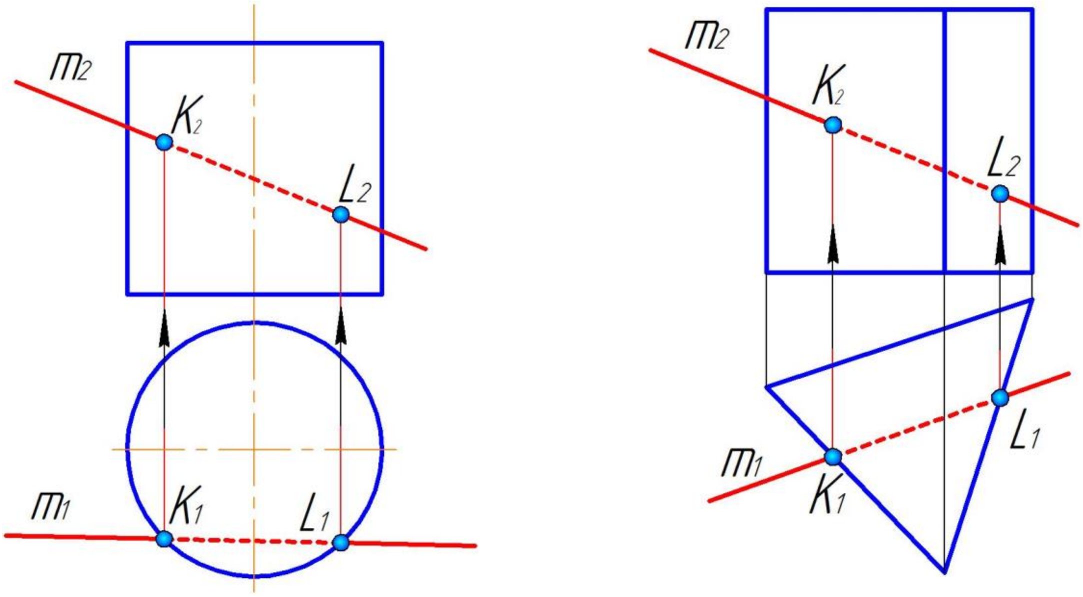
1. Через прямі 1_2S_2 і 2_2 S_2 проведемо площину загального виду Δ.
2. Знайдемо сліди площини: $H_2 \downarrow H_1$, $H'_2 \downarrow H'_1$.
3. З'єднаємо горизонтальні проекції H_1 і H_1'. Пряма H_1H_1' перетинає основу конуса в точках I_1 і II_1, з'єднаємо їх з вершиною S.
4. $I_1S_1 \cap A_1B_1 = K_1 \uparrow K_2$, $II_1S_1 \cap A_1B_1 = L_1 \uparrow L_2$

9.5. Окремі випадки перетину прямої з поверхнею

Якщо поверхня проектуючи і перетинається з прямою загального виду, то точки перетину визначаються без додаткових побудов. У цих випадках проекції точок проникнення лежать на перетині сліду-проекції поверхні з однойменною проекцією прямої.

На рис. 9.10 показана побудова точок перетину прямої "m" з горизонтально проектуючим циліндром і призмою.

K і L - точки перетину прямої "m" з поверхнею циліндра (9.10, а) і призми 9.10, б).



а б

Рис. 9.10

На рис. 9.11 показаний приклад побудови точок перетину горизонтально-проектуючої прямої "m" з поверхнею загального виду (конусом). В цьому випадку горизонтальна проекція точки перетину K_1 прямої "m" з конусом співпадає з горизонтальним слідом m_1 прямої, а фронтальна проекція точки перетину визначається з умови приналежності її поверхні (в даному випадку за допомогою утворюючої конуса 1_1S_1).

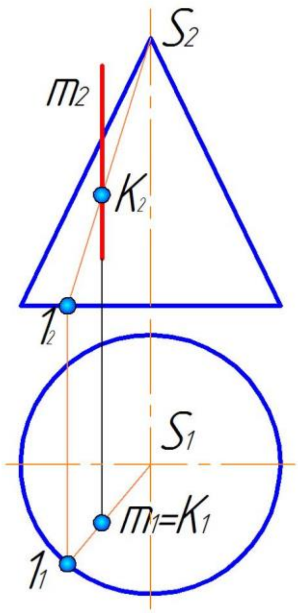


Рис. 9.11

Тема 10. Розгортки поверхонь

10.1. Поняття і визначення

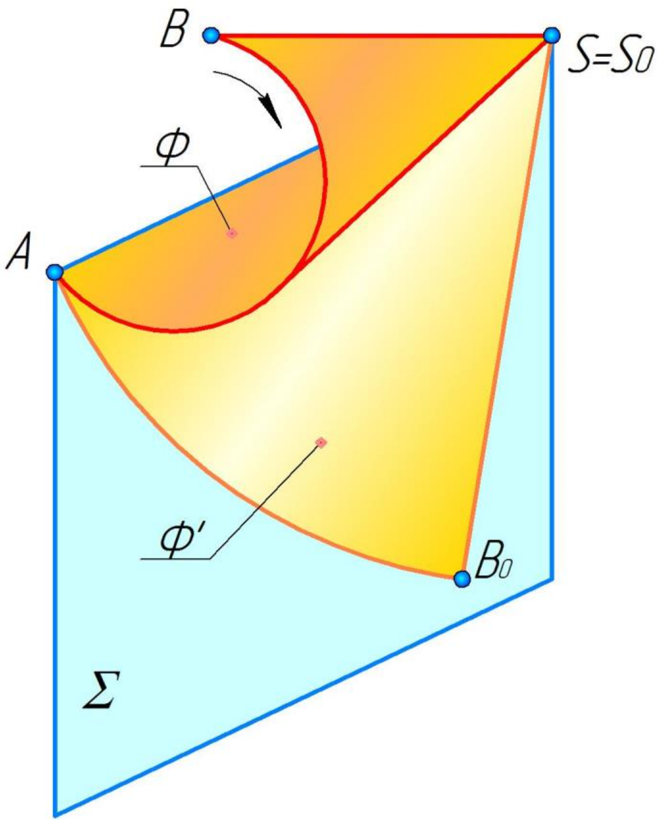


Рис. 10.1

Повна розгортка поверхні – це плоска фігура, яка складається з розгортки бічної поверхні і приставлених до неї підстав.

Розгортка бічної поверхні – це плоска фігура Ф', отримана в результаті поєднання поверхні Ф з площиною Σ без складок і розривів.

Прийняті допущення: поверхня - гнучка плівка, нерозтяжна і нестискувана.

Види поверхонь :

1) поверхні які розгортаються;

2) поверхні які не розгортаються.

Поверхні, що розгортаються, поєднуються з площиною без утворення складок і розривів. Це *багатогранні поверхні* і *криві лінійчаті поверхні* з ребром повернення : торси, конічні і циліндричні.

Властивості:

1) Кожній точці (фігурі) на поверхні відповідає точка (фігура) на розгортці і навпаки.

2) Довжини двох відповідних ліній поверхні і її розгортки дорівнюють між собою, слідством чого являється: замкнута лінія на поверхні і відповідна їй лінія на розгортці обмежують однакову площу.

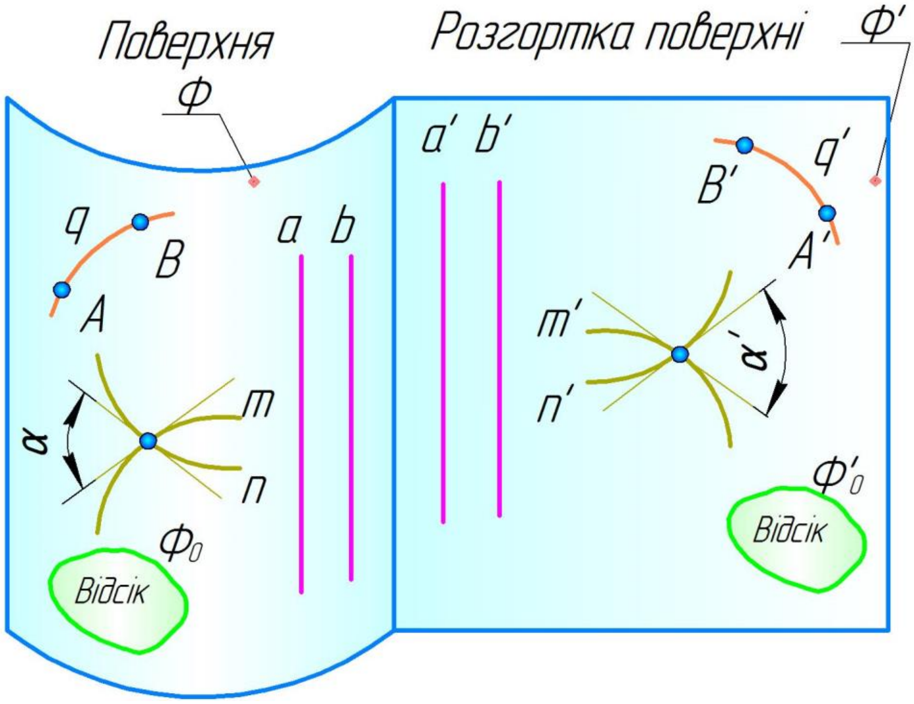


Рис. 10.2

3) Кут між лініями на поверхні дорівнює куту між відповідними їм лініями на розгортці.

4) Розгортка зберігає рівність:

а) відстаней між точками;

б) кутів між лініями;

в) площин фігур.

Крім того, слід зазначити також:

1) прямій на поверхні відповідає також пряма;

2) паралельним прямим на поверхні відповідають також паралельні прямі на розгортці.

Загальні способи побудови розгорток бічної поверхні

I. Спосіб нормальних перерізів

Застосовується (в основному) для побудови розгорток бічної поверхні призм загального виду (рис.10.3).

1) Поверхню Ф перетинають площиною Σ ($\Sigma \perp$ бічним ребрам AK, BL,..).

2) Визначають довжини відрізків 1-2, 2-3, 3-4 лінії перерізу m $\mathrm{m}\left\{\mathrm{m}=\Phi\cap\Sigma\right\}$.

3) Лінію перерізу m розгортають в пряму 1_0-4_0.

4) Від точок 1_0, 2_0, 3_0, 4_0 відкладають $\perp$ 1_04_0 відрізків A_0K_0=AK...

5) Будують розгортку Ф', сполучаючи точки A_0,B_0,C_0,D_0 і K_0,L_0,M_0,N_0.

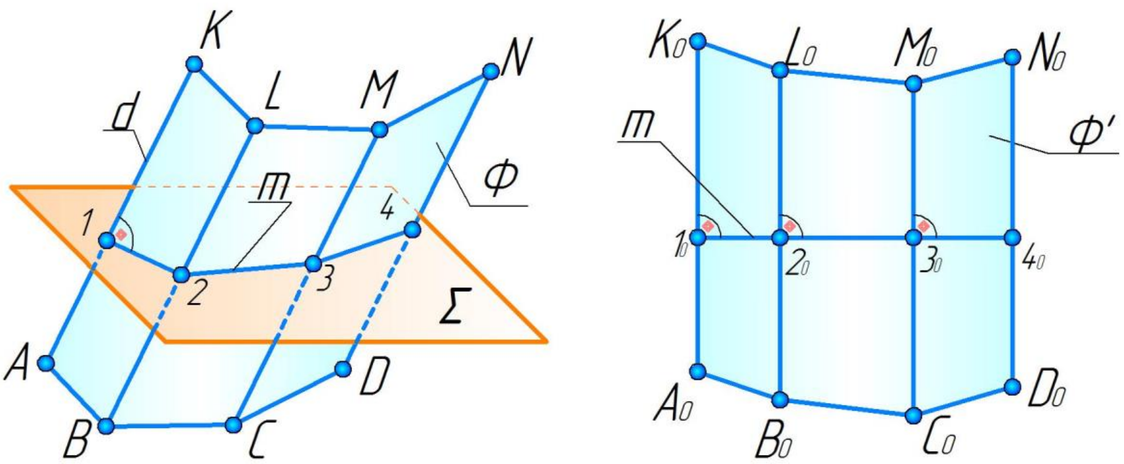


Рис. 10.3

II. Спосіб розкочування

Застосовується для побудови розгорток бічної поверхні призм, у яких:

1) основа паралельна якої-небудь однієї площини проекцій;

2) ребра паралельні іншій площині проекцій.

Використовується 1) приватне положення ребер; 2) теорема про проектування прямого кута.

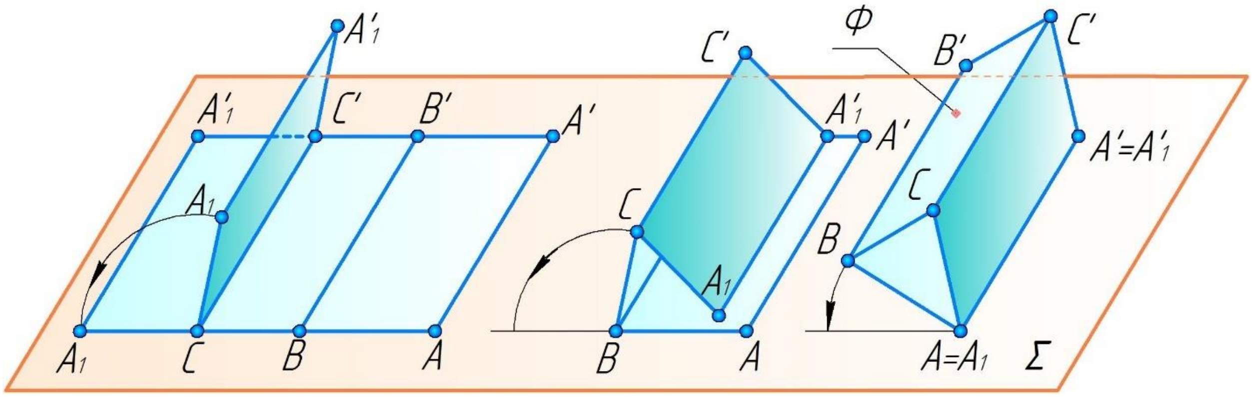


Рис. 10.4

Полягає в послідовному поєднанні бічних граней з площиною креслення шляхом повороту їх навколо відповідних ребер призми. При цьому кінці A, B, C... ребер перемішаються в площинах, перпендикулярних до цих ребер, а самі ребра будуть осями обертання точок.

III. Спосіб тріангуляції

Застосовується (в основному) для побудови розгорток бічних поверхонь кривих поверхонь загального виду, що розгортаються.

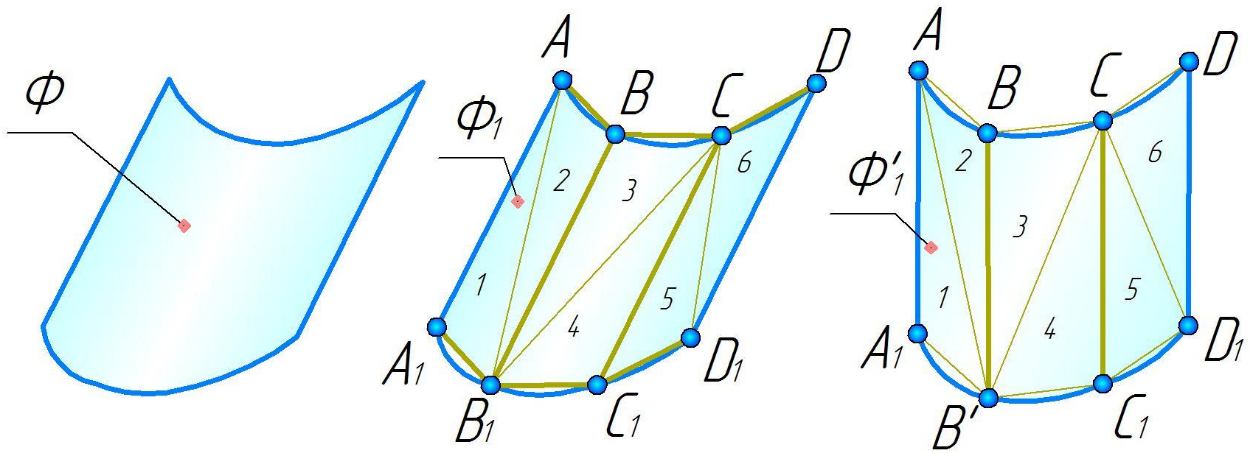


Рис. 10.5

1) Криву поверхню Ф замінюють вписаною (чи описаною) багатогранною поверхнею $Ф_1$ (у разі потреби - з трикутними гранями 1,2,3,...).

2) Одним із способів перетворення комплексного креслення визначають натуральні величини усіх граней багатогранної поверхні $Ф_1$.

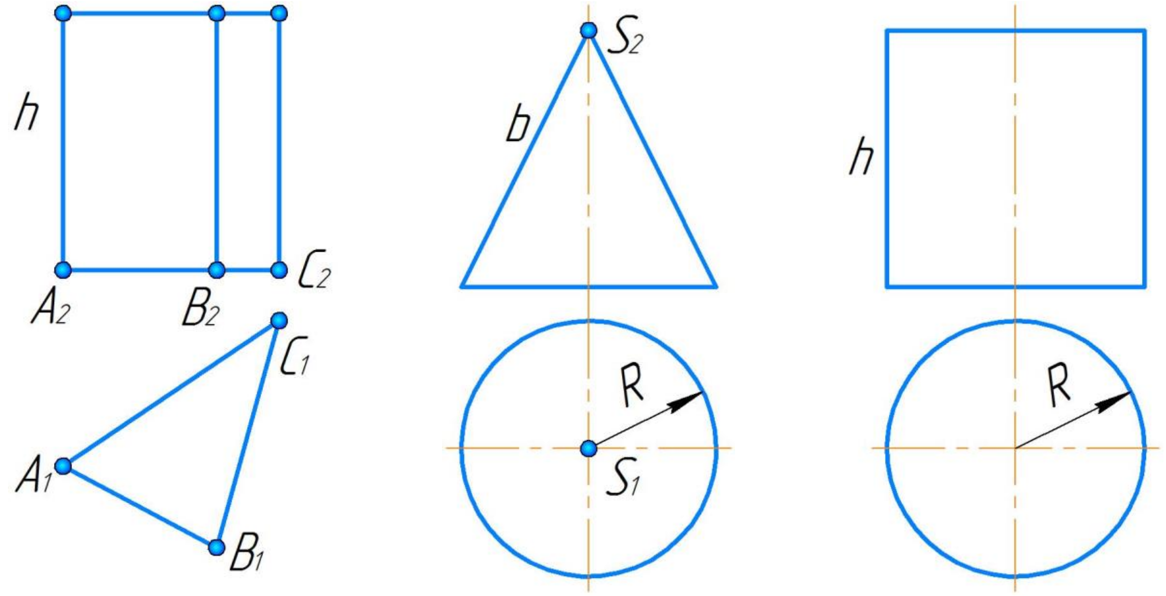
3) Будують розгортку $Ф_1^{'}$ поверхні $Ф_1$, послідовно поєднуючи натуральні величини граней на площині креслення.

4) Ламаних лінії A-B-C, .. на розгортці $Ф_1^{'}$ багатогранної поверхні $Ф_1$ замінюють плавною кривою, яка проходить через ті ж точки A, B, C.

IV. Графоаналітичний спосіб

Застосовується для побудови розгорток прямих кругових конусів і циліндрів обертання, а також призм, бічні грані яких проектуючі площини.

Призма	Конус	Циліндр



розгортка - прямокутник	розгортка - сектор	розгортка - прямокутник
висота =h ширина = AB + BC + AC	радіус = b центр, кут $\alpha = R \cdot 360^0 / b$	висота =h ширина =2πR

Рис. 10.6

10.2. Розгортка граних поверхонь

Розгортка многогранника є плоскою фігурою, отриманою при поєднанні усіх його граней з площиною.

Розгортання поверхні многогранників полягає в послідовному викреслюванні в площині креслення його граней у натуральну величину в тому порядку, в якому ці грані розташовані в просторі.

Побудова розгортки

Побудова істинних величин граней багатогранника з попереднім визначенням істинних величин його бічних ребер і сторін основи

Використовують різноманітні способи перетворення комплексного креслення

Вибір способу залежить

Від виду багатогранника: піраміда або призма

Від расположення багатогранника відносно площин проекцій

Приклад. Побудувати розгортку Ф' трикутної призми Ф графоаналітичним способом (бічні грані призми $\perp$ $П_1$).

Побудова:

1. Будуємо прямокутник: висота = h ; довжина = d.

2. Приєднуємо основи: ABC і A'B'C'.

На рис. 10.8 представлена побудова прямої $3^{-х}$ граної призми ABC з наскрізним циліндричним отвором діаметром "d".

Розгортка граної призми є прямокутник ширина якого дорівнює висоті призми "l", а довжина равна сумі натуральних довжин 3-х сторін її основи (A_1B_1, B_1C_1, C_1A_1). Для отримання повної розгортки призми до її грані AC докреслені верхні і нижні підстави призми.

Для нанесення фігури отвору на розгортку на фронтальній проекції призми проведені допоміжні лінії L_2L_2', M_2M_2', N_2N_2', K_2K_2', які перетинають отвір в певних точках ($3_2,4_2,5_2,6_2,7_2,8_2$). Проекції цих прямих спроектовані в точки на основу призми ($3_1,4_1,\ldots,8_1$, $3'_1,4'_1,\ldots,8'_1$). Використовуючи ці точки будують додаткові лінії на розгортці, і на них наносять точки, відповідно до їх висот на фронтальній проекції.

Виконавши вказані побудови отримаємо фігуру отвору у вигляді замкнутої кривої лінії на гранях призми АВ і ВС.

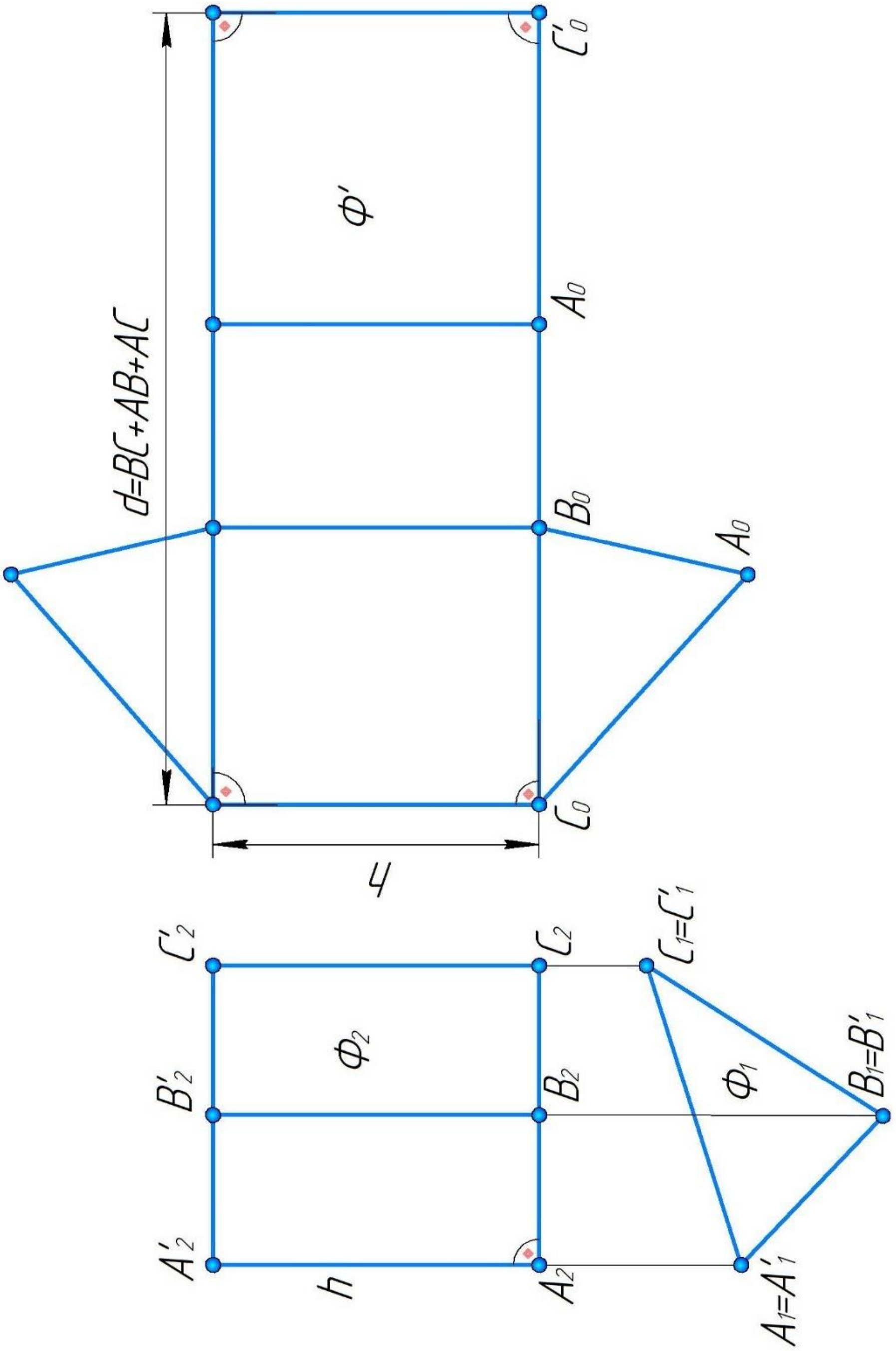


Рис. 10.7

На грані АС отвір проектується у вигляді кола діаметром "d", оскільки на цю грань отвір проектується у натуральну величину.

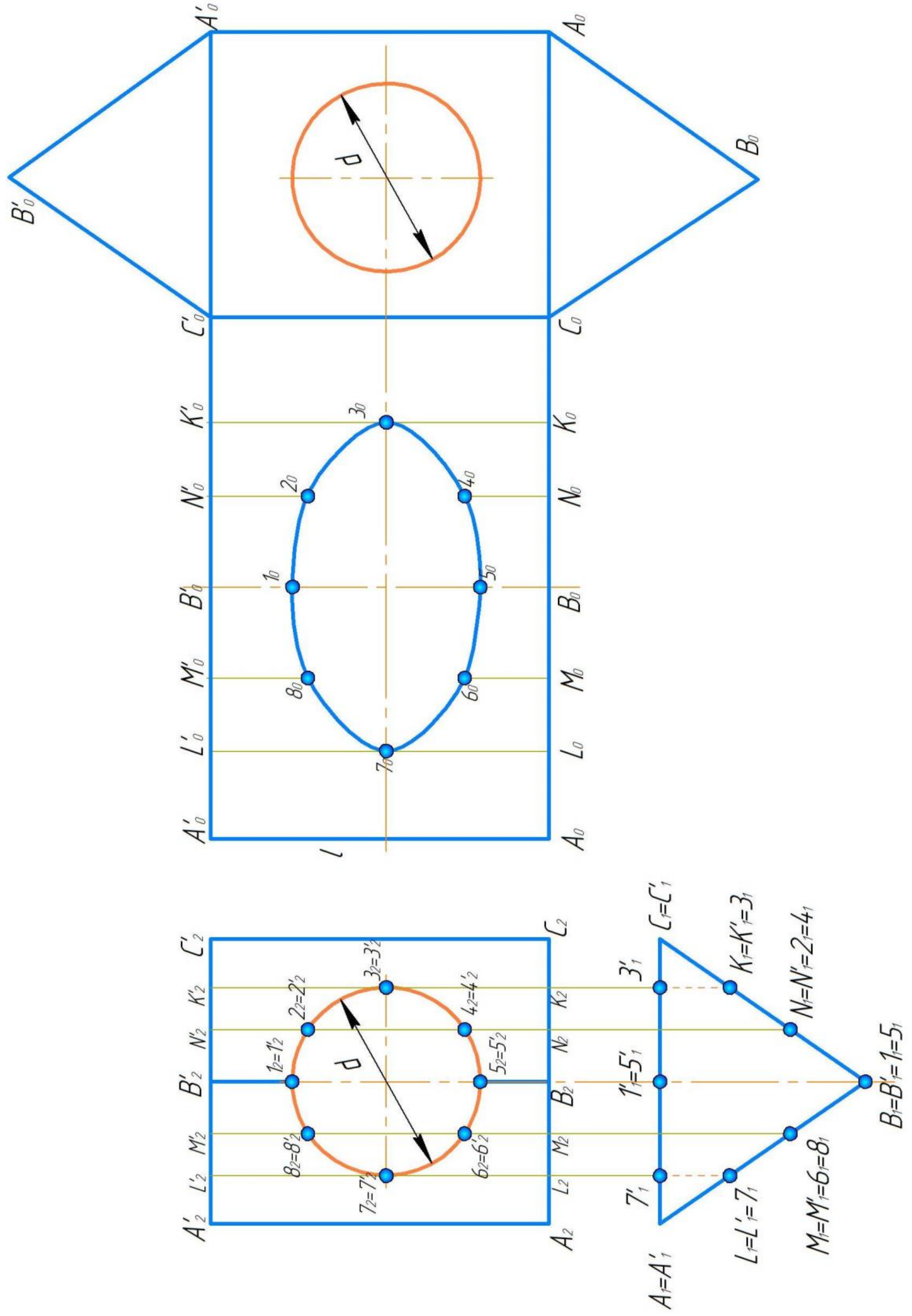


Рис. 10.8

Розгортка похилої призми

Побудова розгортки похилої призми ускладнюється тим, що натуральні величини відстаней між ребрами кожної бічної грані визначити по кресленню безпосередньо не можна. Для побудови розгортки похилої призми необхідно заздалегідь визначити натуральну величину нормального перерізу призми. Сторони цього перерізу і будуть висотами паралелограмів з яких складається призма. Цей спосіб розгортки називається *спосіб нормального перерізу*. Застосування цього способу (методу) показане на рис.10.9 для побудови розгортки похилої триграннoї призми.

Приклад. Побудувати розгортку Ф' призми Ф способом нормальних перерізів.

Аналіз: 1) бічні ребра // $П_2$ і проектуються на $П_2$ без спотворення;

2) сторони основи - горизонталі, проектуються на $П_1$ у натуральну величину;

3) висоти бокових граней невідомі.

Побудова.

Побудову розгортки розпочинають з проведення площини $\sum$ перпендикулярно фронтальним проекціям ребер призми ($\sum_2 \perp A_2K_2 \wedge B_2L_2 \wedge C_2M_2$). В результаті отримують фронтальну проекцію $1_22_23_2$ перерізу призми площиною $\sum_2$.

Для побудови розгортки призми необхідно знати натуральні величини ребер призми і перерізу 1-2-3. Оскільки горизонтальні проекції ребер призми розташовані паралельно осі "х", це означає, що вони паралельні площині $П_2$ і відображаються на неї у натуральну величину, тобто: $A_2K_2 = |AK|$, $B_2L_2 = |BL|$, $C_2M_2 = |CM|$.

Проводимо вісь проекцій X_{24} // Σ і визначаємо істинну величину нормального перерізу 1-2-3.

Оскільки бічні ребра призми паралельні між собою, а сторони нормального перерізу їм перпендикулярні, то вони розгорнуться в одну пряму лінію.

Для побудови розгортки на вільному полі креслення проводимо пряму "m". Від довільно узятої на прямій відкладемо відрізки 1-2, 2-3 і 3-1 рівних натуральним величинам перерізів 1-2-3. Через точки 1, 2, 3, 1 проводимо прямі, перпендикулярні до прямої m і відкладемо на них відрізки, довжина яких дорівнює натуральним величинам відповідних бічних ребер A_2K_2, B_2L_2 , C_2M_2. Причому, вгору від лінії "m" відкладаємо відстань від площини $\sum$ до верхньої основи $K_2L_2M_2$ призми, а вниз - відстань від $\sum_2$ до нижньої основи призми $A_2B_2C_2$.

Приєднавши до розгортки бічної поверхні призми обидві її основи отримуємо повну розгортку призми.

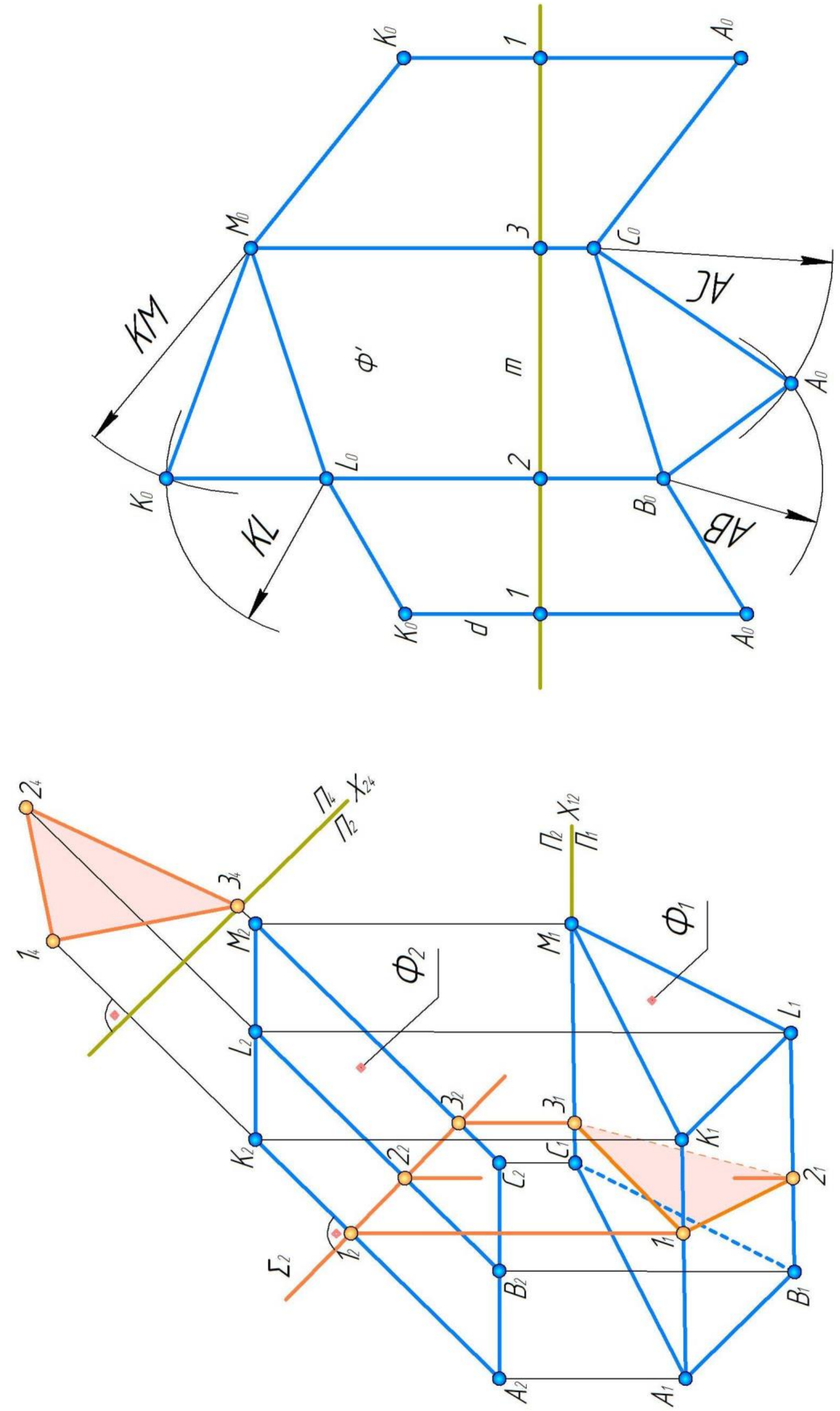


Рис. 10.9

Розгортка похилої призми способом розкочування

Приклад. Побудувати розгортку Ф' призми Ф способом розкочування.

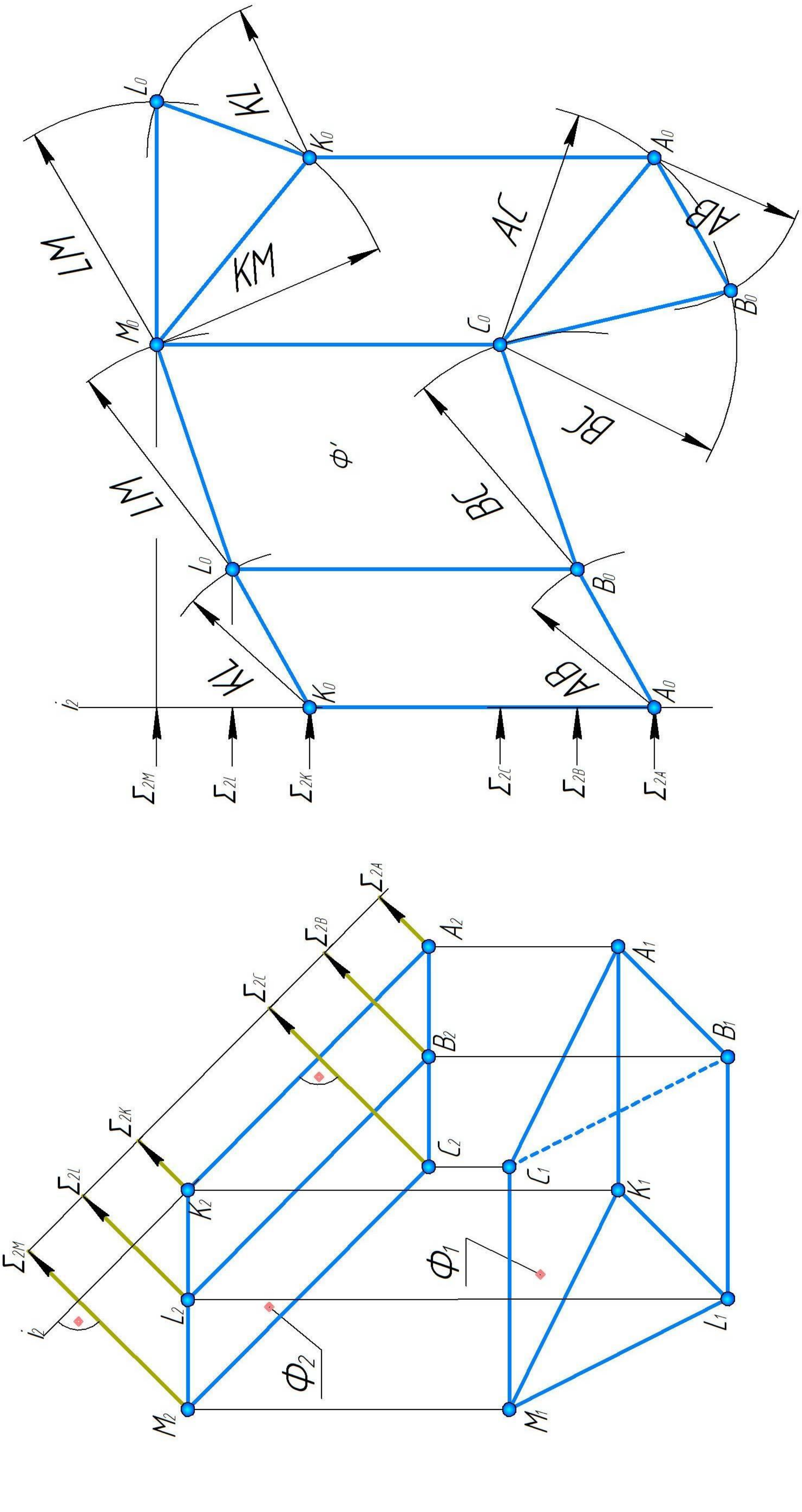

L0
K0
M0
KL
LM
KM
A0
B0
C0
AC
AB
BC
Φ'
i2
Σ2M
Σ2L
Σ2K
Σ2C
Σ2B
Σ2A
A2
B2
C2
K2
L2
M2
A1
B1
C1
K1
L1
M1
Φ1
Φ2

Рис. 10.10

Аналіз:

1) бічні ребра // $П_2$ і проектуються на $П_2$ у натуральну величину;

2) сторони основи - горизонталі, проектуються на $П_1$ без спотворення;

3) при розкочуванні:

- кінці ребер A,B,C... переміщатимуться в площинах до цих ребер (у цьому прикладі);

- ребра AK,BL, CM - осі обертання точок;

- $\Sigma_{2A} \perp A_2K_2, \Sigma_{2B} \perp B_2L_2$... (по теоремі про проектування прямого кута) і $\Sigma_{2A} \supset A_2, \Sigma_{2B} \supset B_2$.

Алгоритм: розкочування проводимо через ребро AK.

Розгортка піраміди

Побудова розгортки бічної поверхні піраміди зводиться до послідовної побудови ряду трикутників (по трьох їх сторонах), кожен з яких дорівнює натуральній величині відповідної бічної грані піраміди.

Приклад. Побудувати розгортку Ф' похилої трикутної піраміди Ф.

Аналіз:

1. грані піраміди – трикутники;

2. сторони основи AB, BC, AC - прямі горизонтального рівня, отже на $П_1$ проектуються у натуральну величину AB=|AB|, BC=|BC|, AC=|AC|;

3. ребра SA, SB, SC - прямі загального виду, довжини = ?.

Побудова.

Побудову розгортки тригранної піраміди SABC розпочинаємо з визначення натуральної величини бічних ребер обертанням їх навколо осі, яка буде розташована перпендикулярно до $П_1$ і проходить через вершину "S" піраміди до положення, паралельного площині $П_2$, на яку бічні ребра спроектуються у натуральну величину. Сторони AB, BC і AC основи піраміди у натуральну величину проектуються на площину $П_1$ (рис.10.11).

Далі будуємо кожну бічну грань як трикутник по трьох сторонах (рис.10.12). Для цього з довільно узятої точки S_0 проводимо пряму і відкладаємо на відрізок рівний н.в. AS (A'_2S_2) і отримуємо точку A_0 на розгортці. Двома зарубками: з точки A_0 рівною A_1B_1 і з точки S_0 рівної н.в. ребра SB ($S_2B'_2$) будуємо точку B_0 і отримуємо трикутник $A_0B_0S_0$, рівний натуральній величині грані SAB. Аналогічно будуємо на розгортці

$\Delta S_0B_0C_0$ рівний н.в.SBC і $\Delta S_0C_0A_0$ рівний н.в. грані SCA і отримуємо розгортку бічної поверхні піраміди SABC.

Для побудови на розгортці точки 1, заданою її фронтальною проекцією 1_2, необхідно провести через неї і вершину піраміди S_2 допоміжну пряму S_2K_2 і побудувати її горизонтальну проекцію S_1K_1 і визначити горизонтальну проекцію 1_1, яка розташована на цій прямій. Потім визначити н.в. SK, таким же самим способом, як і ребер піраміди і нанести пряму SK на розгортку, а потім і точку K_0 на ній (заздалегідь визначити її положення на $S_2K'_2$.

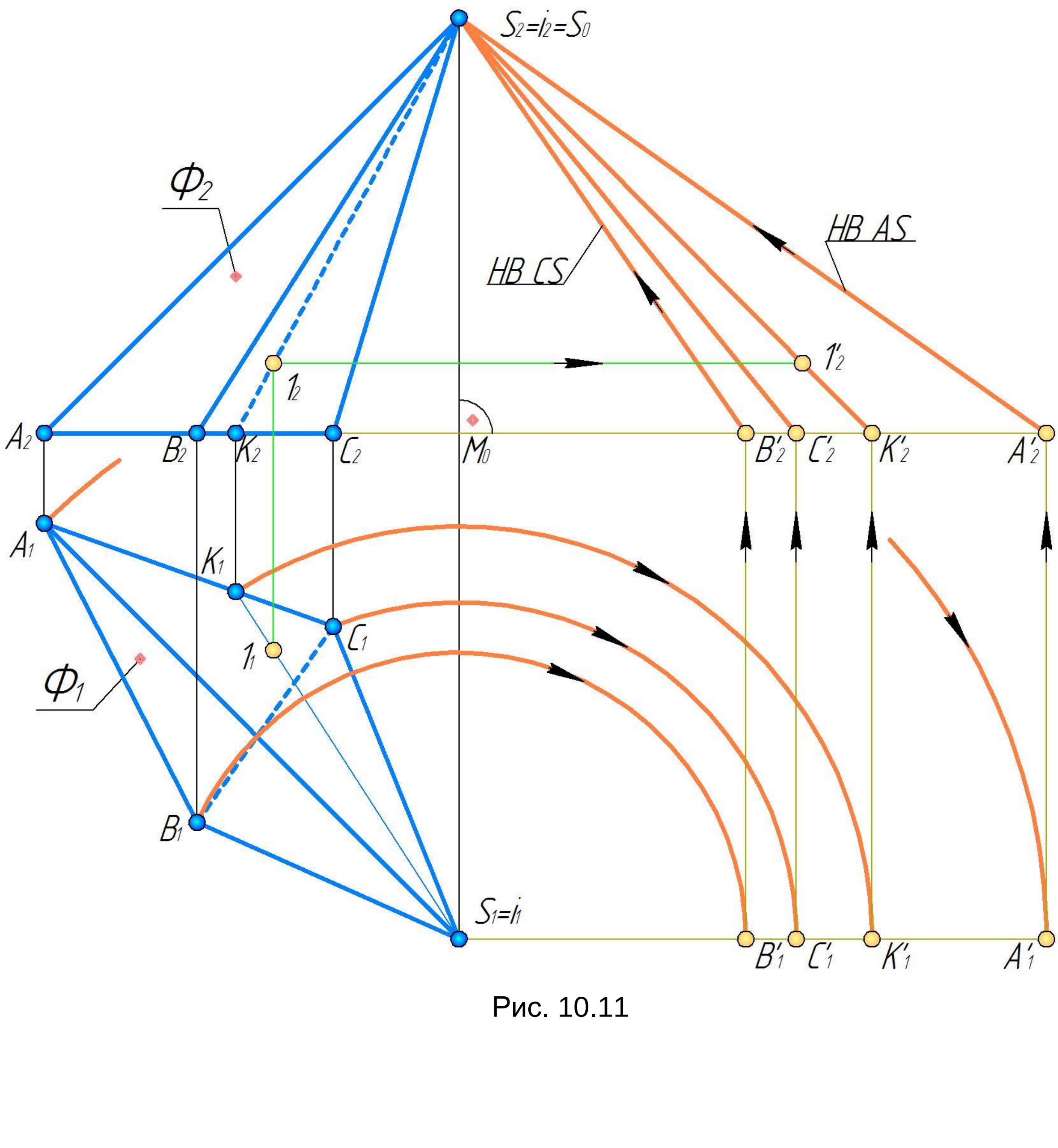


Рис. 10.11

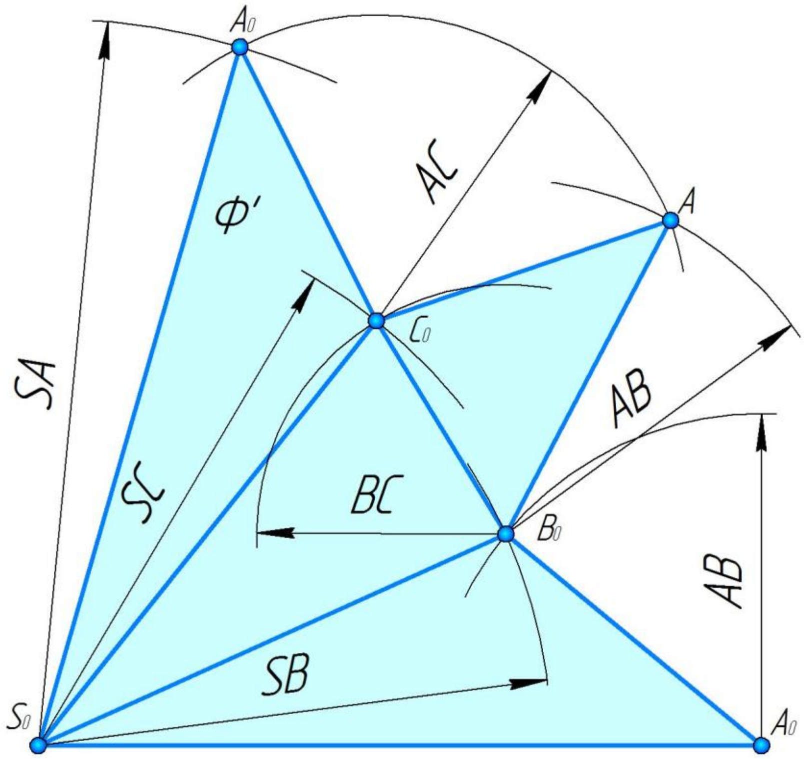


Рис. 10.12

11.3. Розгортки кривих поверхонь

Розгортка прямого кругового циліндра

Розгортка бічної поверхні *прямого кругового циліндра* радіусу R є прямокутник довжиною 2πR і висотою, рівній висоті циліндра "h" (рис.10.13). Для отримання повної розгортки треба до прямокутника докреслити 2 кола, діаметри яких рівні діаметру основи циліндра.

Приклад. Побудувати розгортку Ф′ прямого кругового циліндра обертання Ф графоаналітичним способом (твірна циліндра ⊥ $П_1$).

Побудова:

1.Будуємо прямокутник: висота=h, довжина=l.

2.Приєднуємо основи: A і B, (A=B).

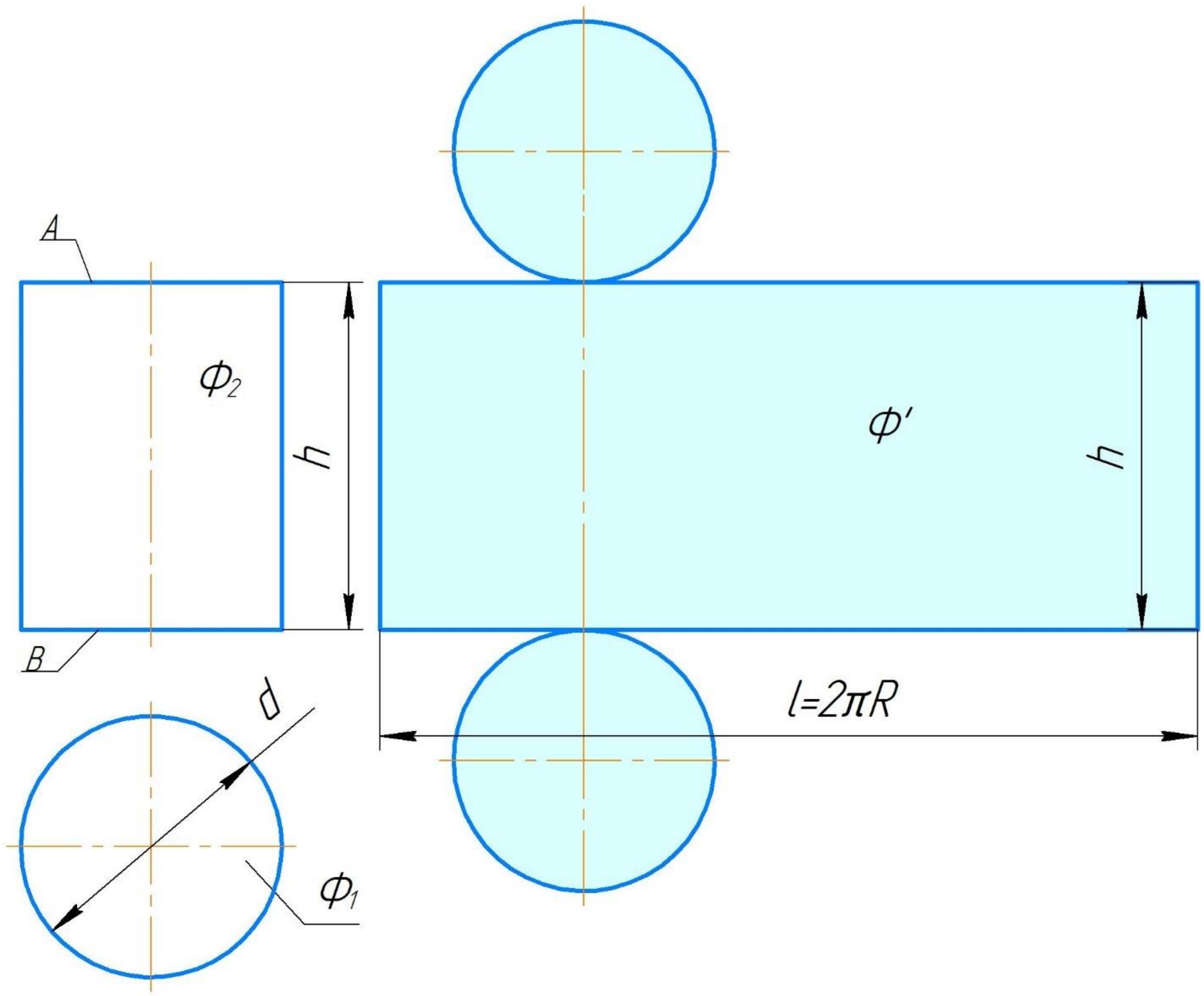


Рис. 10.13

Розгортка прямого кругового конуса

Розгортка *прямого конуса* з радіусом основи R і твірною l. Після розрізу прямого конуса по твірній l та поєднання його з площиною отримуємо сектор з кутом "α" між крайніми лініями розгортки,які будуть рівними натуральній величині твірних конуса (рис.10.14).

Приклад. Побудувати розгортку Ф’ прямого кругового конуса обертання Ф графоаналітичним способом.

Побудова.

1.Будуємо круговий сектор: радіусом = d; центральний кут $\alpha = \frac{360 \cdot R}{l}$.

2.Приєднуємо основу А.

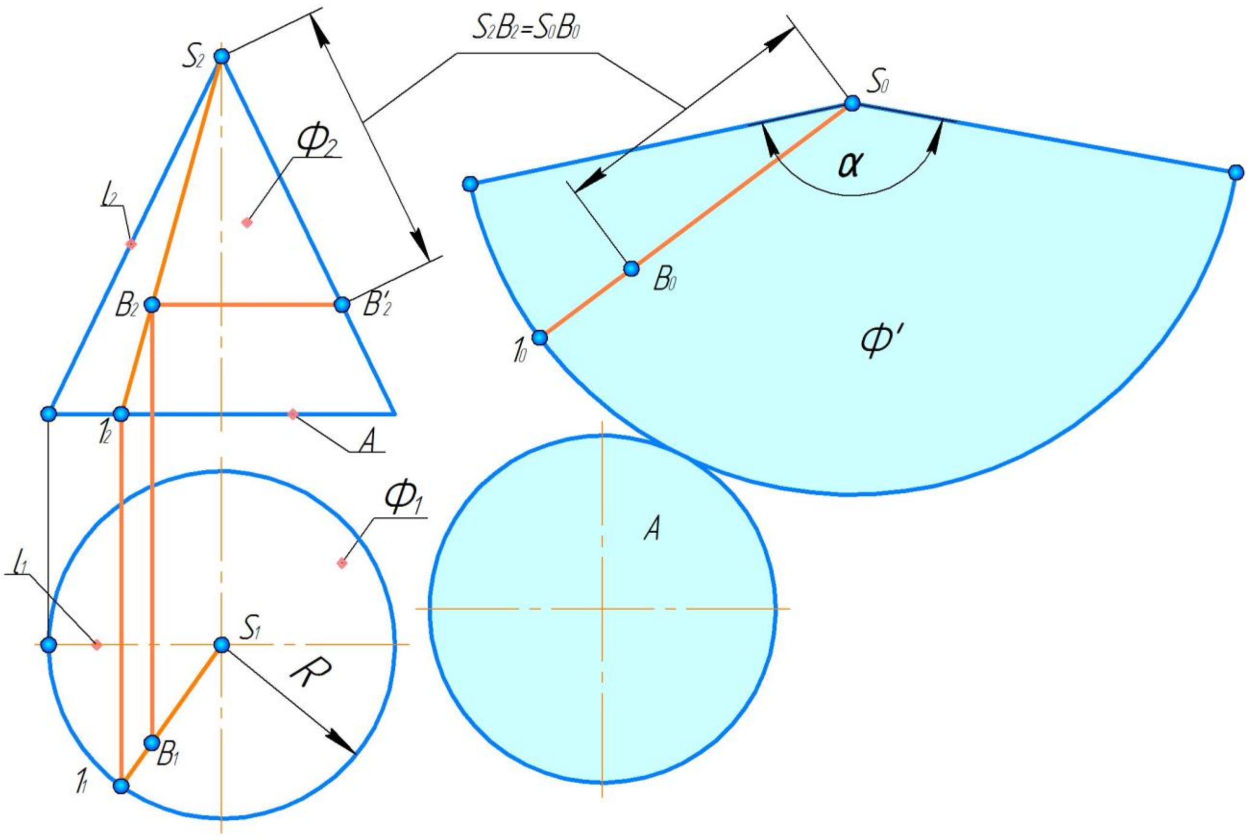


Рис. 10.14

Для побудови точки B, яка належить поверхні конуса і задана її фронтальною проекцією B_2, проводять через неї і вершину конуса S_2 твірну S_21_2, і потім проектують точку на н.в. твірної "l", в точку B'_2. Потім будують на розгортці твірну S_01_0 і наносять на неї точку B_0.

Для отримання повної розгортки конуса до нього докреслюють основу конуса радіусу R.

Розгортка похилого конуса

Побудова розгортки бічної поверхні похилого конуса робиться аналогічно побудові розгортки похилої піраміди.

Приклад. Побудувати розгортку Ф' еліптичного конусу Ф способом тріангуляції.

Для побудови розгортки конус апроксимують похилою пірамідою і робиться її розгортка. На рис. 10.15 основа конуса розбита на 10 рівних частин. Точки розбиття сполучені відрізками прямих (1_1-2_1, 2_1-3_1 і так далі), які утворюють основу піраміди. Потім проводять ребра піраміди 1S, 2S, 3S і так далі і визначають їх натуральні величини методом обертання навколо горизонтально-проектуючої осі (i=S).

Маючи натуральні величини будуємо розгортку, як і на рис. 10.16.

Точки розгортки сполучаємо плавній кривою і отримуємо розгортку бічної поверхні конуса. Докреслюють до неї основу (коло радіусом R) і отримуємо повну розгортку.

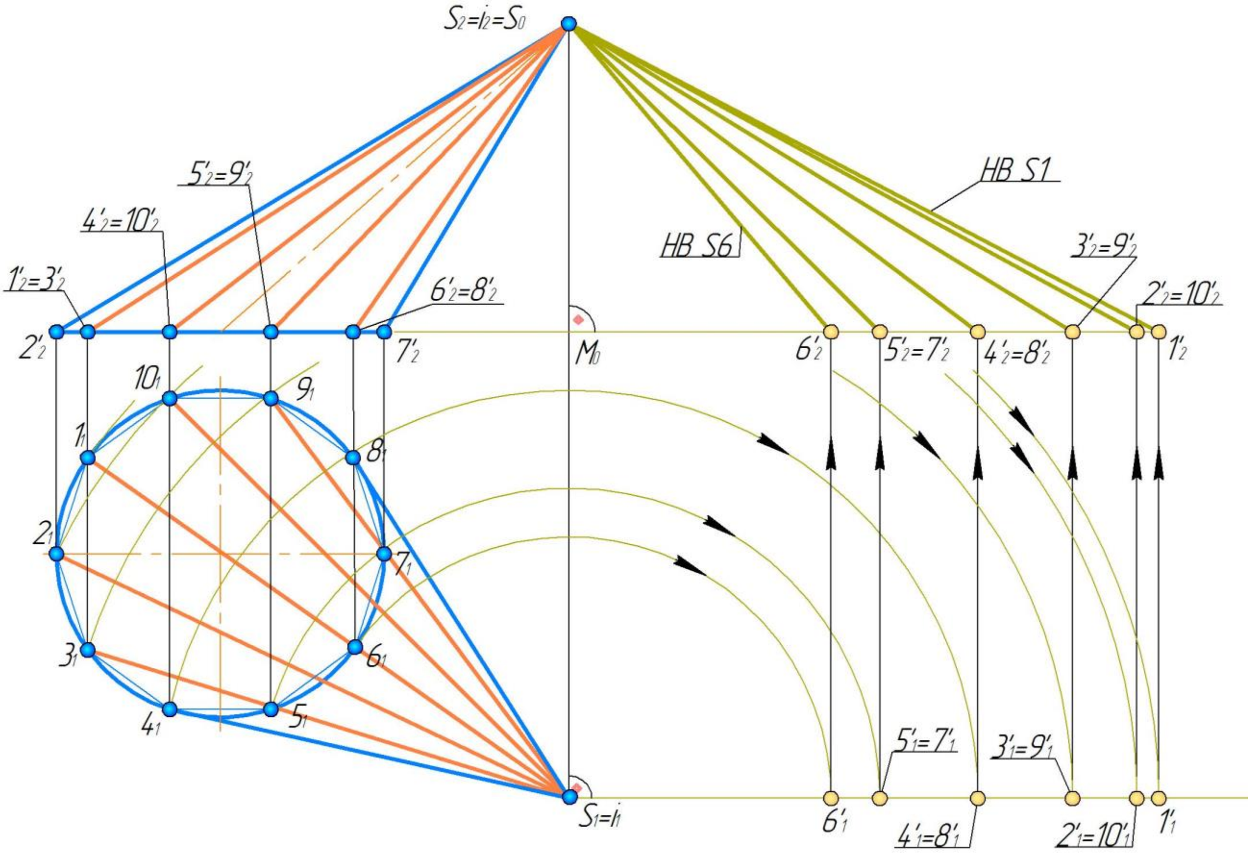


Рис.10.15

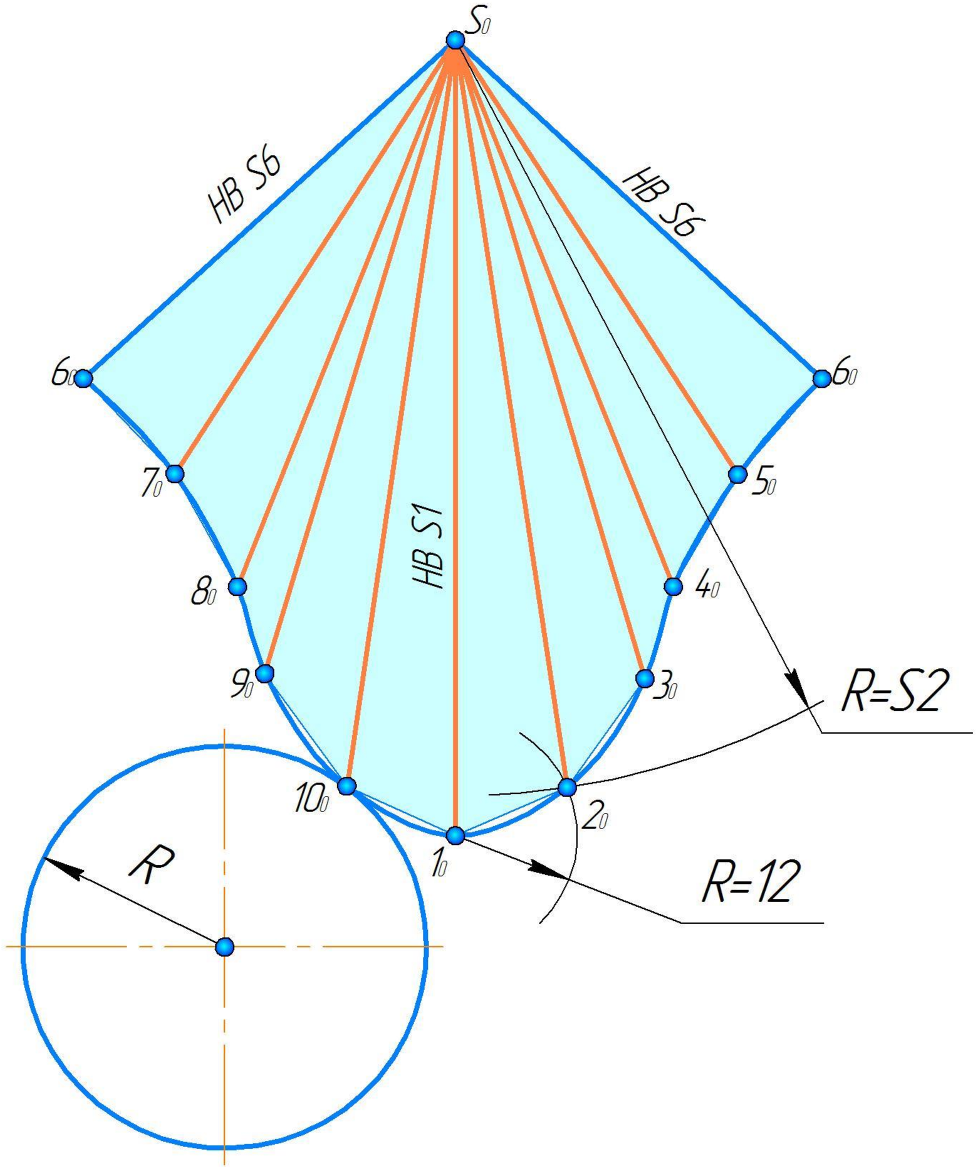


Рис.10.16

Розгортка похилого циліндра

Побудова бічної поверхні похилого циліндра способом розкочування показана на рис.10.17. Спочатку циліндр апроксимують призмою, визначають натуральні величини її ребер і виконують розгортку цієї призми. Точки на розгортці сполучають плавній кривій і отримують наближену розгортку бічної поверхні похилого циліндра.

Приклад. Побудувати розгортку Ф’ похилого циліндра Ф способом нормального перерізу.

Впишемо у Ф 12-ти вугільну призму.

Аналіз: 1.Бічні ребра паралельні $П_2$ і проектуються на $П_2$ без спотворення.

2. Сторони основи - горизонталі, проектуються на $П_1$ у натуральну величину.

Алгоритм. Перетнемо призму площиною $\Sigma \perp П_2$ і застосуємо спосіб заміни площин проекцій.

Побудова:

1.проводимо вісь проекція x_{12}

2.проводимо площину $\Sigma \perp$ ребрам призми

3.проводимо вісь проекцій x_{24} II Σ

4.визначаємо істинну величину нормального перерізу 1-4-7-10.

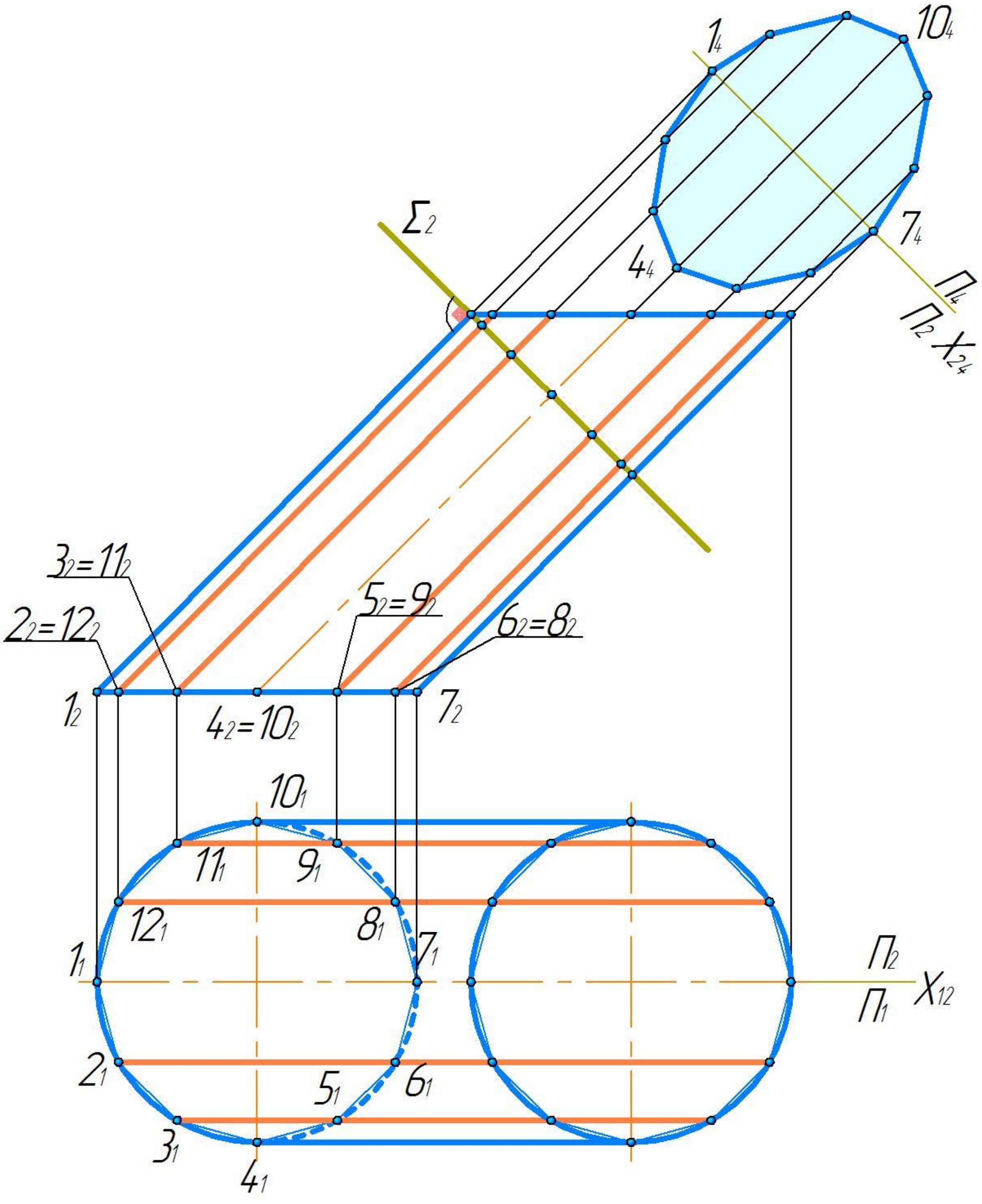


Рис.10.17

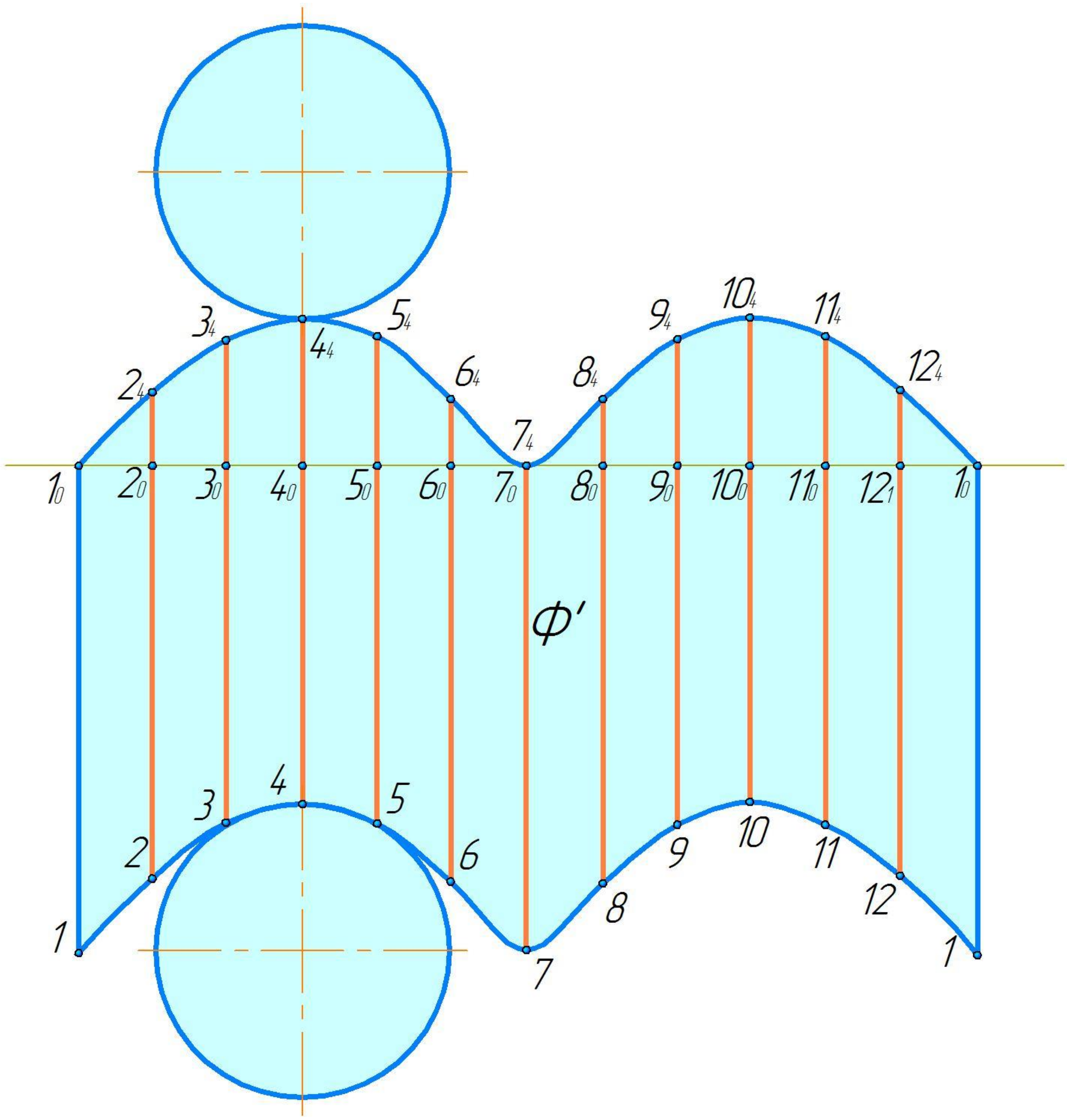


Рис.10.18

Список додаткової літератури

1. Бубенников О.В. Нарисна геометрія – М.: Высшая школа, 1985.– 288 с.

2. Бубенников О.В. Нарисна геометрія – завдання та вправи, – М.: Высшая школа. 1981. – 296 с.

3. Ванін В.В.,Перевертун В.В., Надкернична Т.М., Власюк Г.Г. Інженерна графіка – К.: Видавнича група BHV,2009 – 400 с.

4. Гордон В.О., Семенцов-Огієвський М.О. Курс нарисної геометрії. – М.: Наука. 1988. – 272 с.

5. Інженерна та комп'ютерна графіка : підручник для студ. вищих закладів освіти / В.Є. Михайленко, В. В. Ванін, С. М. Ковальов ; за ред. В. Є. Михайленка. — 3-є вид. — К. : Каравела, 2003. — 340 с.