

О. Г. НИКОЛАЄВ, Т. В. РВАЧОВА, О. І. СОЛОВЬОВ

ФУНКЦІОНАЛЬНИЙ АНАЛІЗ

2020

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний аерокосмічний університет ім. М.Є. Жуковського
"Харківський авіаційний інститут"

О. Г. НІКОЛАЄВ, Т. В. РВАЧОВА, О. І. СОЛОВЙОВ

ФУНКЦІОНАЛЬНИЙ АНАЛІЗ

Навчальний посібник

ХАРКІВ "ХАІ" 2020

УДК 517.98

Ніколаєв О. Г. Функціональний аналіз [Електронний ресурс] : навч. посіб. / О. Г. Ніколаєв, Т. В. Рвачова, О. І. Соловійов. – Харків : Нац. аерокосм. ун-т "Харк. авіац. ін-т", 2020. – 164 с. ISBN

навчальний посібник поєднує в собі як стандартні, так і додаткові розділи курсу функціонального аналізу. Форма подачі матеріалу передбачає можливість їхнього роздільного вивчення. Книга націлена на розвиток у читача навичок самостійної роботи з такими об'єктами, як нескінченновимірні простори, оператори й операторні рівняння. Наведений теоретичний матеріал проілюстрований великою кількістю прикладів. Кожна глава завершується задачами й вправами.

Для студентів технічних вузів, які навчаються за спеціальностями напрямків підготовки "Прикладна математика", "Системний аналіз". Може бути корисною для магістрів, аспірантів і науковців різних спеціальностей, які у своїх дослідженнях мають справу з аналізом математичних моделей, чисельними методами, розробкою алгоритмів та ін.

Іл. 13. Бібліогр.: 17 найм.

Рецензенти: канд фіз.-мат. наук, доц. О.В. Макаричев,
канд фіз.-мат. наук, доц. В. . Афанасьєв

ISBN

© Національний аерокосмічний університет
ім. М.Є. Жуковського
"Харківський авіаційний інститут", 2020
© О. Г. Ніколаєв, Т.В. Рвачова, О.І. Соловійов,
2020

ПЕРЕДМОВА

Прагнення до осмислення з єдиних позицій ряду результатів теорії інтегральних рівнянь було однією зі спонукальних причин, що спричинили виникнення на рубежі XIX-XX століть математичної дисципліни, яка одержала назву "Функціональний аналіз". Об'єднавши в собі загальні принципи математичного аналізу, алгебри й геометрії, на початковому етапі свого розвитку функціональний аналіз був націлений на узагальнення на нескінченновимірний випадок багатьох фактів, відомих для скінченновимірних просторів. Недарма його часто інакше називають нескінченновимірним аналізом. Згодом, розвиваючись за своїми внутрішніми законами, а також адекватно відповідаючи на запити фізики, функціональний аналіз перетворився на величезне дерево, пов'язане своїм корінням і гілками практично з усіма областями сучасної математики. Важливо відзначити, що ще більшою мірою самі ці області мали потребу в його результатах. Тут у першу чергу можна перелічити такі розділи математики, як варіаційне числення, теорія наближення, чисельні методи, диференціальні рівняння та ін. Сьогодні можна констатувати, що сучасний функціональний аналіз став ідеологічною й методологічною основою всієї прикладної математики.

За глибоким переконанням авторів книги, задача дослідження операторних рівнянь відіграє ключову роль у сучасній прикладній математиці через те величезне різноманіття моделей у різних областях людської діяльності, з аналізом яких їй доводиться мати справу. Тому ця книга присвячена цій проблемі в рамках класичного лінійного функціонального аналізу. Через обмежений обсяг у ній розглядаються тільки основні результати, що стосуються просторів, операторів і операторних рівнянь. Навіть у цьому випадку розмір книги довелося б збільшити в кілька разів. Тому було вирішено деякі важливі, але досить об'ємні й складні теми винести в пояснення й доповнення після кожної глави, намітивши їх лише структурно. При першому знайомстві з матеріалом книги ці місця можна пропустити без втрати розуміння загального змісту курсу. У свою чергу, ця додаткова інформація може служити стимулом для більш глибокого вивчення читачем даної дисципліни або окремих її тем із використанням джерел, наведених у списку літератури.

Книга написана на основі курсу лекцій, що читався авторами протягом ряду років студентам Національного аерокосмічного університету ім. М.Є. Жуковського "ХАІ", що навчаються за спеціальностями напрямків підготовки "Прикладна математика" "Системний аналіз". Накопичений досвід показав, що якісне засвоєння

цієї непростой дисципліни пов'язано, як правило, з хорошою попередньою підготовкою за трьома історичними джерелами функціонального аналізу, а також із систематичною самостійною роботою над самим курсом. Для того, щоб додати певної спрямованості цій роботі в тексті книги наведена достатня кількість питань, які ставляться під час викладу матеріалу й покликані допомогти читачеві акцентовано підійти до його вивчення, а також перевірити якість його засвоєння. Крім того, кожна глава забезпечена певним числом задач і вправ, які рекомендовані для самостійної роботи. Особливу увагу читачеві необхідно приділити прикладам, які у великій кількості ілюструють матеріал книги.

При першому знайомстві зі змістом книги деякі наведені в ній питання можуть бути випущені без втрати загального розуміння курсу. Всі вони набрані дрібним шрифтом. Рекомендується, однак, повернутися до них пізніше, при більш глибокому вивченні дисципліни.

Зміст книги певним чином структуровано. Глави розбиті на параграфи з подвійною нумерацією. Перша цифра показує номер глави, друга - номер параграфа в ній. Напівжирним шрифтом виділені назви окремих тем параграфів. Означення й теореми набрані курсивом, їхні заголовки - напівжирним шрифтом і мають потрібну нумерацію: номер глави, номер параграфа, номер теореми або визначення. Таку ж нумерацію мають приклади. Найбільш важливі терміни виділені напівжирним курсивом у тих місцях тексту, де вони вперше введені. Нумерація формул у главах подвійна: номер глави, номер формули. Нумерація малюнків наскрізна по всій книзі.

На закінчення автори вважають своїм приємним обов'язком висловити глибоку вдячність рецензентам книги професорам Особливу подяку автори висловлюють Л.А. Кузьменко за висококваліфіковане літературне редагування книги, а також Н.В. Коваленко й С.В. Корольовій за велику допомогу в її оформленні.

Листопад 2008 р.
Автори

ГЛАВА 1

ПРОСТОРИ

1.1. ТИПИ ПРОСТОРІВ

Більшість задач прикладної математики зводиться до розв'язання різних типів рівнянь (алгебраїчних, диференціальних, інтегральних і т.д.) виду $Ax=y$. Кожне з них задається парою множин X, Y і відображенням $A: X \rightarrow Y$, що діє з множини X у множину Y . Множина Y визначається класом відомих даних задачі, а множина X – класом можливих розв'язків. Звичайно множини X і Y мають певну структуру: алгебраїчну, зокрема, якщо рівняння, що розглядається, є лінійним, і обов'язково метричну, необхідну, наприклад, для оцінки ступеня близькості наближеного розв'язку до точного. Множина, що наділена деякою структурою, називається простором, а відображення з одного простору в інший – оператором. Метрична структура задається спеціальною числовою функцією, яка в залежності від типу простору називається відстанню, нормою або скалярним добутком. Така структура приводить відповідно до метричного, нормованого або евклідового простору. Перша глава присвячується аналізу перерахованих просторів.

Метричний простір. Концепція метричного простору була введена в математику в 1906 р. М. Фреше. Вона виявилась дуже плідною, дозволивши розповсюдити на досить широкий клас об'єктів багато результатів класичного математичного аналізу, що пов'язані з поняттям відстані.

Означення 1.1.1. Відстанню (метрикою) на множині X називається функція $\rho: X \times X \rightarrow R$, яка кожній парі елементів $x, y \in X$ ставить у відповідність невід'ємне число $\rho(x, y)$, що задовольняє наступні умови:

$$1. \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y, \quad (1.1)$$

$$2. \rho(x, y) = \rho(y, x) \quad \forall x, y \in X, \quad (1.2)$$

$$3. \rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y) \quad \forall x, y, z \in X. \quad (1.3)$$

Перераховані умови називаються аксіомами відстані. Їх звичайно називають відповідно аксіомами віддільності, симетрії і трикутника. Геометричний зміст аксіоми трикутника наведений на рис. 1. Безпосереднім наслідком аксіом (1.2), (1.3) є наступна корисна нерівність для відстані

$$|\rho(x, y) - \rho(y, z)| \leq \rho(x, z) \quad \forall x, y, z \in X \quad (1.4)$$

Означення 1.1.2. Множина X із введеною на ньому відстанню ρ називається метричним простором (X, ρ) .

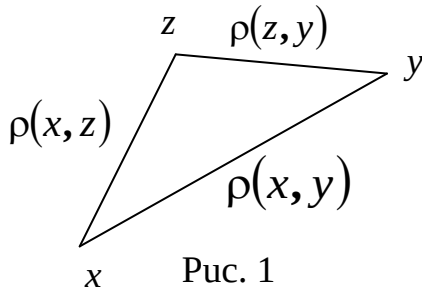


Рис. 1

Елементи метричного простору часто називають точками і замість запису $x \in (X, \rho)$ там, де не виникає непорозуміння, пишуть $x \in X$.

Приклади 1.1.1. 1. Множина R дійсних чисел із відстанню $\rho(x, y) = |x - y|$ між точками x і $y \in$ метричним простором. Аксиома 3 впливає з відомої нерівності для модуля

$$\rho(x, y) = |x - y| = |x - z + z - y| \leq |x - z| + |z - y| = \rho(x, z) + \rho(z, y).$$

Виконання решти аксіом очевидне.

2. Множина R^n упорядкованих наборів з n дійсних чисел із відстанню $\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^n (\xi_k - \eta_k)^2}$ між елементами $x = (\xi_k)_{k=1}^n$ і

$y = (\eta_k)_{k=1}^n \in$ метричним простором. Аксиома трикутника впливає з нерівності Мінковського (1.69), решта – очевидні.

3. Множина s довільних числових послідовностей $\{(\xi_n)_{n=1}^\infty\}$ із відстанню

$$\rho(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|\xi_k - \eta_k|}{1 + |\xi_k - \eta_k|}$$
 між елементами $x = (\xi_n)_{n=1}^\infty$ і $y = (\eta_n)_{n=1}^\infty \in$

метричним простором. Дійсно, зазначимо, що ряд, який входить до метрики $\rho(x, y)$, збігається до деякого невід'ємного числа. Перевіримо аксіому 3, оскільки перші дві аксіоми, очевидно, виконуються.

Розглянемо функцію $f(a) = \frac{a}{1+a}$, $a \in [0, \infty)$. Неважко показати, що вона

монотонно зростає. Нехай $a = |\xi_k - \zeta_k|$, $b = |\zeta_k - \eta_k|$. Тоді

$$|\xi_k - \eta_k| = |\xi_k - \zeta_k + \zeta_k - \eta_k| \leq |\xi_k - \zeta_k| + |\zeta_k - \eta_k| = a + b$$

і з монотонності $f(a)$, $a \in [0, \infty)$ випливає

$$\frac{|\xi_k - \eta_k|}{1 + |\xi_k - \eta_k|} \leq \frac{a + b}{1 + a + b} \leq \frac{a + b + ab}{1 + a + b + ab} \leq \frac{a + b + 2ab}{1 + a + b + ab} = \frac{a}{1 + a} + \frac{b}{1 + b}.$$

Остаточний результат випливає з останньої нерівності після домноження обох її частин на $\frac{1}{2^k}$ і підсумовування по k від 1 до ∞ .

4. Непорожня множина X із відстанню $\rho(x,y)=\begin{cases} 0, & x=y, \\ 1, & x \neq y \end{cases}$ між

елементами x і y є метричним простором (перевірити!). Така метрика називається дискретною.

Нормований простір.

Числова функція, що приводить до поняття нормованого простору, називається нормою. Зазначимо, що в аксіоми норми входять лінійні операції над елементами простору, тому він повинен бути лінійним простором.

Нагадаємо, що множина X називається лінійним простором, якщо на ній введені дві операції: додавання і множення на дійсне (комплексне) число:

$$1. \forall x, y \in X \Rightarrow x + y \in X, \quad (1.5)$$

$$2. \forall \lambda \in R(C), x \in X \Rightarrow \lambda x \in X, \quad (1.6)$$

які задовольняють наступні умови:

$$1. x + y = y + x. \quad (1.7)$$

$$2. (x + y) + z = x + (y + z). \quad (1.8)$$

$$3. \alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x. \quad (1.9)$$

$$4. (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x. \quad (1.10)$$

$$5. \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y. \quad (1.11)$$

$$6. \exists 0 \in V : 0 + x = x \quad \forall x \in X. \quad (1.12)$$

$$7. \forall x \in V \exists (-x) \in X : x + (-x) = 0. \quad (1.13)$$

$$8. \forall x \in X : 1 \cdot x = x. \quad (1.14)$$

Означення 1.1.3. Нормою на лінійному просторі X називається числова функція $\|\cdot\|: X \rightarrow R$, що задовольняє наступні умови:

$$1. \|x\| \geq 0 \quad \forall x \in X, \quad \|x\| = 0 \Rightarrow x = 0. \quad (1.15)$$

$$2. \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \quad \forall x \in X, \forall \lambda \in R(C). \quad (1.16)$$

$$3. \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in X. \quad (1.17)$$

Умови (1.15)–(1.17) називаються аксіомами віддільності, однорідності і трикутника норми (порівняти з аксіомами відстані). Число $\|x\|$ називається нормою елемента $x \in X$.

З аксіоми 3 (нерівність трикутника) випливає важлива властивість норми

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|. \quad (1.18)$$

Означення 1.1.4. Лінійний простір X із введенною на ньому нормою $\|\cdot\|$ називається нормованим простором.

Приклади 1.1.2. 1. Множина R дійсних чисел із нормою $\|x\| = |x|$ є нормованим простором. Аксіома 3 випливає з відомої нерівності для модуля. Виконання решти аксіом очевидне.

2. Лінійний простір обмежених числових послідовностей $\{(\xi_n)_{n=1}^\infty\}$, для яких $\sup_n |\xi_n| < \infty$, з покомпонентними лінійними операціями і нормою $\|x\| = \sup_n |\xi_n|$ елемента $x = (\xi_n)_{n=1}^\infty$ є нормованим простором.

Перші дві аксіоми норми очевидні. Третя аксіома випливає з ланцюжка нерівностей

$$\|x + y\| = \sup_n |\xi_n + \eta_n| \leq \sup_n \{|\xi_n| + |\eta_n|\} \leq \sup_n |\xi_n| + \sup_n |\eta_n| = \|x\| + \|y\|.$$

3. Лінійний простір числових послідовностей $\{(\xi_n)_{n=1}^\infty\}$, які задовольняють умову $\sum_{n=1}^\infty |\xi_n|^p < \infty$, з покомпонентними лінійними

операціями і нормою $\|x\| = \left(\sum_{n=1}^\infty |\xi_n|^p \right)^{1/p}$ елемента $x = (\xi_n)_{n=1}^\infty$ є

нормованим простором. Третя аксіома відстані випливає з нерівності Мінковського, а перші дві перевіряються безпосередньо.

4. Лінійний простір $C[a, b]$ неперервних на відрізку $[a, b]$ функцій із поточковими лінійними операціями і нормою $\|x\| = \max_{t \in [a, b]} |x(t)|$ функції $x(t)$ є нормованим простором. Наведемо обґрунтування аксіоми трикутника

$$\|x + y\| = \max_{t \in [a, b]} |x(t) + y(t)| \leq \max_{t \in [a, b]} |x(t)| + \max_{t \in [a, b]} |y(t)| = \|x\| + \|y\|.$$

5. Лінійний простір функцій $f(x)$, $x \in [a, b]$, для яких $\int_a^b |f(x)|^p dx < \infty$,

з поточковими лінійними операціями і нормою $\|f\| = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$ є нормованим простором. Більш детальний опис простору $L_p[a, b]$ і обґрунтування аксіом норми можна знайти в поясненнях і доповненнях до глави 1.

Зауваження. Нормований простір є окремим випадком метричного простору. Дійсно, кожен нормований простір стає метричним, якщо відстань між елементами x і y задати формулою $\rho(x, y) = \|x - y\|$ (перевірити виконання аксіом відстані).

Однак існують лінійні метричні простори, які не можна зробити нормованими шляхом належного задання в них норми. Умова нормованості лінійного метричного простору наведена в задачі 4 в кінці

глави. Використовуючи її, легко показати, що, наприклад, лінійний метричний простір s усіх числових послідовностей з прикладу 1.1.1 п. 3 не можна зробити нормованим простором.

Евклідів простір. Найбільш зручним у використанні є лінійний простір, у якому введений скалярний добуток. Такий простір має звичну для нас геометрію, тому основні поняття у ньому наочні, а геометрична інтуїція дозволяє передбачати правильні результати.

Означення 1.1.5. Скалярним добутком на дійсному (комплексному) лінійному просторі E (E_c) називається функція, що кожній парі елементів $x, y \in E$ (E_c) ставить у відповідність дійсне (комплексне) число (x, y) , яке задовольняє наступні умови:

$$1) (x, x) \geq 0, \forall x \in E \quad (x, x) = 0 \Rightarrow x = 0. \quad (1.19)$$

$$2) (x, y) = (y, x) \quad \forall x, y \in E \quad ((x, y) = \overline{(y, x)} \quad \forall x, y \in E_c). \quad (1.20)$$

$$3) (\lambda x, y) = \lambda(x, y); \quad \forall x, y \in E, \forall \lambda \in R \quad (\forall x, y \in E_c, \forall \lambda \in C). \quad (1.21)$$

$$4) (x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y) \quad \forall x_1, x_2, y \in E \quad (E_c). \quad (1.22)$$

Умови (1.19)–(1.22) називаються аксіомами віддільності, симетрії (ермітової симетрії), однорідності і дистрибутивності. З останніх трьох аксіом у комплексному просторі випливають напіводнорідність і дистрибутивність скалярного добутку за другим аргументом:

$$(x, \lambda y) = \overline{(\lambda y, x)} = \overline{\lambda(y, x)} = \bar{\lambda} \overline{(y, x)} = \bar{\lambda} (x, y) \quad \forall x, y \in E_c, \forall \lambda \in C, \quad (1.23)$$

$$(x, y_1 + y_2) = \overline{(y_1 + y_2, x)} = \overline{(y_1, x)} + \overline{(y_2, x)} = (x, y_1) + (x, y_2) \quad \forall x_1, x_2, y \in E_c. \quad (1.24)$$

Очевидно, для дійсного простору формули (1.23), (1.24) задають однорідність і дистрибутивність скалярного добутку за другим аргументом.

Означення 1.1.6. Лінійний простір X із введеним на ньому скалярним добутком $(\cdot, \cdot)$ називається евклідовим простором.

Комплексний евклідів простір інакше називається унітарним.

Довільний евклідів простір E є нормованим простором з нормою (перевірити аксіоми норми!)

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}. \quad (1.25)$$

Властивості скалярного добутку.

1. Нерівність Коші–Буняковського

$$|(x, y)| \leq \|x\| \|y\|. \quad (1.26)$$

2. Рівність паралелограма

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2). \quad (1.27)$$

► 1. Встановимо нерівність Коші–Буняковського в найбільш загальному випадку комплексного простору. Зазначимо, що в силу аксіоми 1) при кожному $\lambda \in \mathbb{C}$ вираз

$$\begin{aligned} 0 &\leq (\lambda x - y, \lambda x - y) = (\lambda x, \lambda x) - (\lambda x, y) - (y, \lambda x) + (y, y) = \\ &= |\lambda|^2 (x, x) - \lambda(x, y) - \overline{\lambda} \overline{(x, y)} + (y, y) = |\lambda|^2 \|x\|^2 - \lambda(x, y) - \overline{\lambda} \overline{(x, y)} + \|y\|^2 \end{aligned}$$

є невід'ємним. Підставимо в останню нерівність $\lambda = \frac{(x, y)}{\|x\|^2}$

$$0 \leq \frac{|(x, y)|^2}{\|x\|^4} \|x\|^2 - \frac{|(x, y)|^2}{\|x\|^2} - \frac{|(x, y)|^2}{\|x\|^2} + \|y\|^2 = \frac{\|x\|^2 \|y\|^2 - |(x, y)|^2}{\|x\|^2},$$

звідки випливає нерівність (1.26).

2. З аксіом (1.22), (1.24) і формули для норми випливає

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 &= (x + y, x + y) + (x - y, x - y) = \\ &= (x, x) + (x, y) + (y, x) + (y, y) + (x, x) - (x, y) - (y, x) + (y, y) = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2). \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Зазначимо, що нерівність Коші – Буняковського в дійсному евклідовому просторі дозволяє ввести кут між векторами цього простору за допомогою формули

$$\cos \varphi = \frac{(x, y)}{\|x\| \|y\|}. \quad (1.28)$$

Остання формула робить природним наступне

Означення 1.1.7. Два елементи $x, y \in H$ гільбертового простору H називаються ортогональними (позначення $x \perp y$), якщо їхній скалярний добуток $(x, y) = 0$.

Приклади 1.1.3. 1. Дійсний (комплексний) лінійний простір

R^n (C^n) зі скалярним добутком $(x, y) = \sum_{k=1}^n \xi_k \eta_k$ ($(x, y) = \sum_{k=1}^n \xi_k \overline{\eta_k}$)

елементів $x = (\xi_k)_{k=1}^n, y = (\eta_k)_{k=1}^n \in R^n$ (C^n) є евклідовим простором. Аксіоми 1)-4) перевіряються тривіально.

2. Дійсний лінійний простір l_2 числових послідовностей $\{(\xi_n)_{n=1}^\infty\}$, які задовольняють умову $\sum_{n=1}^\infty |\xi_n|^2 < \infty$, зі скалярним добутком $(x, y) = \sum_{k=1}^\infty \xi_k \eta_k$ елементів $x = (\xi_k)_{k=1}^\infty, y = (\eta_k)_{k=1}^\infty$, є евклідовим простором.

Зазначимо, що ряд, який входить у скалярний добуток, збігається абсолютно, що випливає з нерівності Гельдера. Аксиоми 1)-4) неважко перевірити.

3. Лінійний простір $L_2^c[a, b]$ комплекснозначних функцій $f(x)$ $x \in [a, b]$, для яких $\int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty$, зі скалярним добутком $(f, g) = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx$ елементів $f(x)$ і $g(x)$ є евклідовим простором.

Існування інтеграла в формулі для скалярного добутку впливає з інтегральної нерівності Гельдера (1.68). Аксиоми скалярного добутку впливають із властивостей інтеграла. Зміст комплексного спряження над другим множником під інтегралом стає ясным при перевірці аксіом 1) і 2).

Зауваження. 1. Не кожний нормований простір введенням скалярного добутку можна зробити евклідовим. Очевидно, повинна виконуватись умова $(x, x) = \|x\|^2$. Простий критерій виконання цієї умови в термінах тільки норм елементів наводиться в задачі 6 в кінці глави. З цього критерія, зокрема, випливає, що простори $C[a, b]$, $L_p[a, b]$, l_p ($p \neq 2$) не можна зробити евклідовими. Останній факт пояснює необхідність окремого розгляду нормованих просторів.

2. Як уже відзначалось вище, нормовані і евклідові простори є окремими випадками метричних просторів. Тому основні результати цієї глави будуть формулюватись в термінах метричних просторів. Виняток складають ті факти, які відносяться виключно до нормованих або евклідових просторів.

Ізометрія метричних просторів.

Означення 1.1.8. Нехай (X, ρ_X) і (Y, ρ_Y) – два метричні простори. Бієкція $A: X \leftrightarrow Y$, що зберігає відстань між елементами, тобто $\rho_Y(Ax_1, Ax_2) = \rho_X(x_1, x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in X$, називається ізометрією простору (X, ρ_X) на простір (Y, ρ_Y) .

Неважко перевірити, що якщо відображення $A: X \leftrightarrow Y$ є

ізотетрією, то обернене відображення $A^{-1}: Y \leftrightarrow X$ теж ізотетрія.

Означення 1.1.9. Якщо існує ізотетрія одного метричного простору на інший, то ці простори називаються ізотетричними.

Якщо відволіктися від природи елементів метричного простору, то ізотетричні простори можна ототожити!

Приклад 1.1.4. Метричні простори $L_2[-\pi, \pi]$ і $l_2(-\infty, \infty)$ (складається з усіх послідовностей $(a_n)_{n=-\infty}^{\infty}$, для яких $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$)

ізотетричні. З теорії рядів Фур'є відомо, що ряд Фур'є будь-якої функції з простору $L_2[-\pi, \pi]$ збігається до цієї функції в метриці простору $L_2[-\pi, \pi]$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{inx}, \quad a_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx.$$

Розглянемо відображення A простору $L_2[-\pi, \pi]$ в простір $l_2(-\infty, \infty)$, яке визначається формулою $Af = (a_n)_{n=-\infty}^{\infty}$. В силу рівності Парсеваля

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2$$

відображення A є ізотетрією (чому?).

1.2. ЗБІЖНІСТЬ

Найважливішим поняттям класичного математичного аналізу є поняття границі. Метрична структура дозволяє природним чином ввести в метричному просторі ключове поняття збіжності.

Границя послідовності елементів метричного простору. Нехай (X, ρ) - метричний простір.

Означення 1.2.1. Елемент $x \in (X, \rho)$ називається границею послідовності $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x_n \in (X, \rho)$, якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, x) = 0$. В цьому

випадку кажуть, що послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ збігається до елемента x .

Зазначимо, що стосовно до нормованого простору це означає, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0$.

Приклад 1.2.1. Розглянемо в метричному просторі $C[0,1]$ послідовність $\left\{ \frac{1}{x^2 + n^2} \right\}_{n=1}^{\infty}$. Границя цієї послідовності при $n \rightarrow \infty$ дорівнює 0, оскільки

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho\left(\frac{1}{x^2 + n^2}, 0\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{x \in [0,1]} \left| \frac{1}{x^2 + n^2} \right| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0.$$

Зазначимо, що розглянута послідовність збігається до 0 рівномірно відносно x .

Уточнимо зміст збіжності в деяких метричних просторах, наведених у прикладах 1.1.1, 1.1.2.

У просторі R збіжність є звичайною збіжністю числової послідовності.

У просторі E_n збіжність послідовності $x_k = \left(\xi_i^{(k)}\right)_{i=1}^n$ до елемента $x = \left(\xi_i\right)_{i=1}^n$ рівносильна покоординатній збіжності, тобто

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x \Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \xi_i^{(k)} = \xi_i \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

У просторі m збіжність послідовності $x_k = \left(\xi_n^{(k)}\right)_{n=1}^\infty$ до елемента $x = \left(\xi_n\right)_{n=1}^\infty$ рівносильна покоординатній збіжності, рівномірної за індексом n , тобто

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists k_0(\varepsilon) \in N : k > k_0 \Rightarrow \left| \xi_n^{(k)} - \xi_n \right| < \varepsilon \quad \forall n = 1, 2, \dots$$

У просторі l_p збіжність послідовності $x_k = \left(\xi_n^{(k)}\right)_{n=1}^\infty$ до елемента $x = \left(\xi_n\right)_{n=1}^\infty$ рівносильна виконанню двох умов:

$$1. \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \xi_n^{(k)} = \xi_n \quad \forall n = 1, 2, \dots; \quad (1.29)$$

$$2. \quad \forall \varepsilon > 0 \exists n_0(\varepsilon) \in N : \sum_{n=n_0+1}^\infty \left| \xi_n^{(k)} \right|^p < \varepsilon^p \quad \forall k = 1, 2, \dots \quad (1.30)$$

Дійсно, нехай $x_k \rightarrow x$ в l_p , тобто

$$\forall \varepsilon > 0 \exists k_1(\varepsilon) \in N : k > k_1 \Rightarrow \sum_{n=1}^\infty \left| \xi_n^{(k)} - \xi_n \right|^p < \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^p, \quad \text{звідки випливає, що}$$

$$\left| \xi_n^{(k)} - \xi_n \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n = 1, 2, \dots \quad \text{Остання нерівність означає виконання умови}$$

(1.29). Далі, в силу того, що при кожному k ряд $\sum_{n=1}^\infty \left| \xi_n^{(k)} \right|^p$ збігається,

знайдуться натуральні числа $n_k(\varepsilon)$, для яких $\sum_{n=n_k+1}^\infty \left| \xi_n^{(k)} \right|^p < \varepsilon^p$ для

кожного $k = 1, \dots, k_1$. З тієї ж причини можна обрати натуральне число

m_0 таке, що $\sum_{n=m_0+1}^{\infty} |\xi_n|^p < \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p$. Нехай $n_0 = \max\{m_0, n_1, \dots, n_{k_1}\}$. Тоді при

$k=1, \dots, k_1$ в силу вибору числа n_0 справджується нерівність

$\sum_{n=n_0+1}^{\infty} \left| \xi_n^{(k)} \right|^p < \varepsilon^p$, а при $k > k_1$ із записаного вище означення границі і

нерівності Мінковського випливає оцінка

$$\left(\sum_{n=n_0+1}^{\infty} \left| \xi_n^{(k)} \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \left(\sum_{n=n_0+1}^{\infty} \left| \xi_n^{(k)} - \xi_n \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=n_0+1}^{\infty} |\xi_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon$$

Таким чином, виконується умова (1.30). Перевірка зворотнього наслідку проводиться аналогічно і надається читачеві.

Збіжність у просторі $C[a, b]$ є рівномірної збіжністю. Дійсно, збіжність $x_k \rightarrow x$ у просторі $C[a, b]$ означає, що

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \max_{t \in [a, b]} |x_k(t) - x(t)| = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : n > n_0 \Rightarrow$$

$$\max_{t \in [a, b]} |x_k(t) - x(t)| < \varepsilon \Leftrightarrow |x_k(t) - x(t)| < \varepsilon \quad \forall t \in [a, b].$$

Інакше, це обумовлено тим, що метрика $\rho(x, y) = \max_{t \in [a, b]} |x(t) - y(t)|$ у

просторі $C[a, b]$ є рівномірною (чебишовською).

Збіжність у просторі $L_p[a, b]$ **називається збіжністю в середньому з показником p** .

Зауваження. Одна і та сама послідовність елементів, що розглядається в різних метричних просторах, може поводити себе по-різному у сенсі збіжності.

Приклад 1.2.2. Розглянемо послідовність елементів $x_n = \left(\xi_i^{(n)} \right)_{i=1}^{\infty} = \left\{ \underbrace{\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}}_n, 0, \dots \right\}$. Оскільки $\sup_i \left| \xi_i^{(n)} \right| = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, то $x_n \rightarrow x$ у

просторі m , де $x = \{0, 0, \dots\}$. Ту ж саму послідовність можна розглянути,

як послідовність елементів простору l_1 . При цьому $\rho(x_n, x) = \sum_{i=1}^{\infty} \left| \xi_i^{(n)} \right| = 1$,

тобто послідовність x_n не збігається до елемента x . З умови (1.30) випливає, що послідовність x_n взагалі не має границі у просторі l_1 (чому?).

Властивості границі в метричному просторі.

1. Єдиність границі:

$$x_n, x, y \in X, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = y \Rightarrow x = y. \quad (1.31)$$

2. Обмеженість послідовності, що має границю:

$$x_n \in X, \exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \Rightarrow \forall x_0 \in X \exists C : \rho(x_n, x_0) < C \quad \forall n = 1, 2, \dots \quad (1.32)$$

3. Неперервність відстані:

$$x_n, y_n, x, y \in X, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, y_n) = \rho(x, y). \quad (1.33)$$

Доведемо, наприклад, останню властивість. Використовуючи властивості відстані (1.3), (1.4), запишемо

$$\begin{aligned} |\rho(x_n, y_n) - \rho(x, y)| &= |\rho(x_n, y_n) - \rho(x_n, y) + \rho(x_n, y) - \rho(x, y)| \leq \\ &\leq |\rho(x_n, y_n) - \rho(x_n, y)| + |\rho(x_n, y) - \rho(x, y)| \leq \rho(y_n, y) + \rho(x_n, x) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

Властивості границі в нормованому просторі.

1. Неперервність операції множення на число:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x, \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \lambda \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n x_n = \lambda x. \quad (1.34)$$

2. Неперервність норми:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = \|x\|. \quad (1.35)$$

$$\begin{aligned} \blacktriangleright 1. \quad \|\lambda_n x_n - \lambda x\| &= \|(\lambda_n - \lambda)x_n + \lambda(x_n - x)\| \leq \|(\lambda_n - \lambda)x_n\| + \|\lambda(x_n - x)\| = \\ &= |\lambda_n - \lambda| \|x_n\| + |\lambda| \|x_n - x\| \rightarrow 0 \quad \text{при } \lambda_n \rightarrow \lambda, x_n \rightarrow x. \end{aligned}$$

2. Властивість 2 впливає з нерівності (1.18)

$$\| \|x_n\| - \|x\| \| \leq \|x_n - x\|. \quad \blacktriangleleft$$

Властивості границі в евклідовому просторі.

1. Неперервність скалярного добутку:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) = (x, y). \quad (1.36)$$

$$\blacktriangleright 1. \quad \text{З означення границі } \|y_n - y\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \|x_n - x\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} |(x_n, y_n) - (x, y)| &= |(x_n, y_n) - (x_n, y) + (x_n, y) - (x, y)| = |(x_n, y_n - y) + (x_n - x, y)| \leq \\ &\leq |(x_n, y_n - y)| + |(x_n - x, y)| \leq \|x_n\| \|y_n - y\| + \|x_n - x\| \|y\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Неперервні відображення метричних просторів.

Означення 1.2.2. Нехай (X, ρ_X) і (Y, ρ_Y) – два метричних простори. Відображення $A: X \leftrightarrow Y$ називається неперервним, в точці $x_0 \in X$, якщо $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \rho_X(x, x_0) < \delta \Rightarrow \rho_Y(Ax, Ax_0) < \varepsilon$. Відображення, неперервне в кожній точці простору X називається неперервним у просторі X .

Приклад 1.2.3. Розглянемо відображення $A: C[0,1] \rightarrow C[0,1]$,

$$Ax = \int_0^1 K(u, v) x(v) dv, \quad K(u, v) \in C[0,1] \times [0,1]. \quad \text{Оскільки}$$

$$\begin{aligned} \rho_Y(Ax, Ax_0) &= \max_{u \in [0,1]} \left| \int_0^1 K(u,v)x(v)dv - \int_0^1 K(u,v)x_0(v)dv \right| \leq \max_{u \in [0,1]} \int_0^1 |K(u,v)| |x(v) - x_0(v)| dv \leq \\ &\leq \max_{v \in [0,1]} |x(v) - x_0(v)| \max_{u \in [0,1]} \int_0^1 |K(u,v)| dv = \alpha \rho_X(x, x_0), \quad \alpha = \max_{u \in [0,1]} \int_0^1 |K(u,v)| dv, \end{aligned}$$

то достатньо обрати $\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{\alpha}$, щоб виконувалась умова неперервності відображення для довільної точки $x_0 \in C[0,1]$.

Еквівалентність норм у нормованому просторі. Нехай заданий нормований простір X і дві різні норми $\|\cdot\|_1$ і $\|\cdot\|_2$ у ньому.

Першу норму будемо називати **підпорядкованою** другій нормі, якщо існує додатне число $\beta > 0$ таке, що

$$\|x\|_1 \leq \beta \|x\|_2 \quad \forall x \in X. \quad (1.37)$$

Означення 1.2.3. Дві норми $\|\cdot\|_1$ і $\|\cdot\|_2$ в нормованому просторі X називаються еквівалентними, якщо кожна з них підпорядкована іншій, тобто існують додатні числа α і β такі, що

$$\alpha \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \beta \|x\|_2 \quad \forall x \in X. \quad (1.38)$$

Приклад 1.2.4. В лінійному просторі $R^n = \{x = (\xi_i)_{i=1}^\infty, \xi_i \in R\}$

розглянемо дві норми $\|x\|_1 = \max_i |\xi_i|$ і $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |\xi_i|^2}$. Ці норми еквівалентні, тому що

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |\xi_i|^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n \max_i |\xi_i|^2} \leq \max_i |\xi_i| \sqrt{n} = \sqrt{n} \|x\|_1,$$

$$\|x\|_1 = \max_i |\xi_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n |\xi_i|^2} = \|x\|_2.$$

Зауваження. Еквівалентність норм в нормованому просторі означає, що зі збіжності деякої послідовності елементів за однією нормою випливає збіжність за іншою і навпаки.

Приклад 1.2.5. Розглянемо у просторі $C[a,b]$ дві норми

$$\|x\|_1 = \max_{t \in [a,b]} |x(t)| \quad \text{і} \quad \|x\|_2 = \int_a^b |x(t)| dt.$$

Друга норма підпорядкована першій, оскільки

$$\|x\|_2 = \int_a^b |x(t)| dt \leq \int_a^b \max_{t \in [a,b]} |x(t)| dt \leq \max_{t \in [a,b]} |x(t)| (b-a) = (b-a) \|x\|_1.$$

Однак обернена підпорядкованість неможлива в силу того, що збіжності за цими нормами не рівносильні. Це видно з прикладу 1.3.4, в якому послідовність, фундаментальна за другою нормою, не є такою за першою.

Теорема 1.2.1. У кожному скінченновимірному нормованому просторі будь-які дві норми еквівалентні.

Доведення. Нехай X – скінченновимірний нормований простір, $\{e_k\}_{k=1}^n$ – базис у ньому. Розкладаючи кожний елемент $x \in X$ за

базисом $x = \sum_{k=1}^n \xi_k e_k$, введемо його норму за формулою

$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^n |\xi_k|^2}$. Крім того, нехай у просторі X задана ще одна

довільна норма $\|x\|$. Покажемо, що ці норми еквівалентні, тоді в силу транзитивності будь-які дві норми в цьому просторі будуть еквівалентні. Підпорядкованість норми $\|x\|$ нормі $\|x\|_2$ випливає з наступної оцінки

$$\|x\| = \left\| \sum_{k=1}^n \xi_k e_k \right\| \leq \sum_{k=1}^n \|\xi_k e_k\| \leq \sum_{k=1}^n |\xi_k| \|e_k\| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n |\xi_k|^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n \|e_k\|^2} = \beta \|x\|_2,$$

де $\beta = \sqrt{\sum_{k=1}^n \|e_k\|^2}$. Тут використана нерівність Гельдера (1.67).

Покажемо, що норма $\|x\|_2$, в свою чергу, підпорядкована нормі $\|x\|$.

Для цього розглянемо у просторі R^n замкнену обмежену множину

$\sqrt{\sum_{k=1}^n |\xi_k|^2} = 1$ (одинична сфера) і функцію $\|x\| = \left\| \sum_{k=1}^n \xi_k e_k \right\|$ від n змінних

$\{\xi_k\}_{k=1}^n$ на ній. Ця функція є неперервною у просторі R^n , оскільки для

будь-яких $x^{(i)} = \sum_{k=1}^n \xi_k^{(i)} e_k \quad i=1,2$ виконується нерівність

$$\left| \|x^{(1)}\| - \|x^{(2)}\| \right| \leq \|x^{(1)} - x^{(2)}\| \leq \beta \|x^{(1)} - x^{(2)}\|_2 = \beta \sqrt{\sum_{k=1}^n |\xi_k^{(1)} - \xi_k^{(2)}|^2},$$

причому множник, що стоїть при коефіцієнті β , виражає евклідову відстань між точками простору R^n . З теорії функцій декількох змінних відомо, що неперервна функція на замкненій обмеженій множині простору R^n задовольняє теорему Вейєрштрасса, тобто набуває свого найменшого значення

$$\min_{\|x\|_2=1} \|x\| = \|x_0\| = \alpha > 0.$$

Зазначимо, що для довільного елемента $x \in X$, вектор $\frac{x}{\|x\|_2}$ має в

базисі $\{e_k\}_{k=1}^n$ набір координат $\left\{ \frac{\xi_k}{\|x\|_2} \right\}_{k=1}^n$, який у просторі R^n

належить одиничній сфері. Тому неперервна функція $\|x\|$, розглянута

в точці $\frac{x}{\|x\|_2}$, набуває значення на одиничній сфері в R^n , яке не

менше мінімального значення, тобто

$$\left\| \frac{x}{\|x\|_2} \right\| \geq \alpha \Rightarrow \frac{\|x\|}{\|x\|_2} \geq \alpha \Rightarrow \|x\| \geq \alpha \|x\|_2 \quad \forall x \in X,$$

що доводить підпорядкованість норми $\|x\|_2$ нормі $\|x\|$, а отже, і всю теорему.

1.3. ТОПОЛОГІЯ

В класичному аналізі для надання наочності багатьом результатам використовується геометрична мова околів. Ця ж мова може бути введена і в довільному метричному просторі.

Означення 1.3.1. Відкритою (замкненою) кулею $B_r(x_0)$ ($\bar{B}_r(x_0)$) радіуса r з центром в точці x_0 у метричному просторі (X, ρ) називається множина точок $x \in X$, для яких $\rho(x, x_0) < r$ ($\rho(x, x_0) \leq r$). Околом точки x називається довільна відкрита куля з центром у цій точці.

Враховуючи метрику нормованого простору, під відкритою (замкненою) кулею цього простору з центром в точці x_0 радіуса r розуміють множину точок

$$B_r(x_0) = \{x : \|x - x_0\| < r\} \quad (\bar{B}_r(x_0) = \{x : \|x - x_0\| \leq r\}).$$

Приклад 1.3.1. Замкненою кулею $\bar{B}_1(x_0)$ у просторі $C[0,1]$ є множина усіх неперервних на відрізку $[0,1]$ функцій, графіки яких розташовані в замкненій смузі шириною 2, симетричній відносно лінії $x = x_0(t)$ (рис.2).

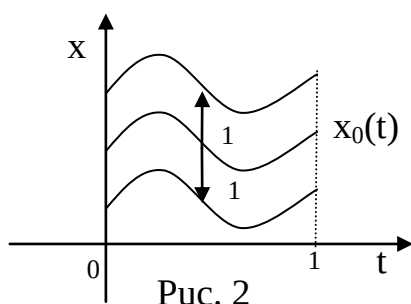


Рис. 2

Відкрита куля часто називається кулею. З означення 1.3.1 безпосередньо отримуємо, що $B_r(x_0) \subseteq \bar{B}_r(x_0)$ і при $r > 0$ $B_r(x_0)$ не порожня (чому?).

Означення 1.3.2. Множина M метричного простору X називається обмеженою, якщо вона міститься в деякій кулі $B_r(x_0) \subset X$.

Кожна точка x по відношенню до довільної множини M метричного простору X може бути внутрішньою, зовнішньою або межевою.

Означення 1.3.3. Точка $x \in X$ називається внутрішньою точкою множини M ($x \in \text{int } M$), якщо вона входить в M разом із деяким своїм оточенням, тобто $\exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subset M$. Точка $x \in X$ називається зовнішньою точкою множини M ($x \in \text{ext } M$), якщо $x \in \text{int}(X \setminus M)$. Точка $x \in X$ називається межевою точкою множини M ($x \in \partial M$), якщо кожен оточення точки x має непорожній перетин як з множиною M , так і з множиною $X \setminus M$.

На рисунку 3 точки x_1 , x_2 і x_3 є відповідно внутрішньою, зовнішньою і межевою точками множини M .

Означення 1.3.4. Множина $M \subset X$ називається відкритою множиною, якщо кожна її точка – внутрішня, тобто $\text{int } M = M$.

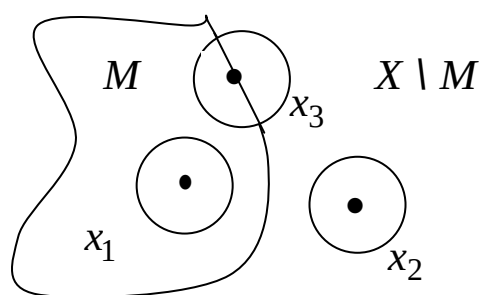


Рис. 3

Приклад 1.3.2. Довільна відкрита куля $B_r(x_0)$ метричного простору (X, ρ) є відкритою множиною.

Дійсно, нехай $x_1 \in B_r(x_0)$ (рис. 4). Доведемо, що $B_{r_1}(x_1) \subset B_r(x_0)$, якщо $r_1 < r - \rho(x_0, x_1)$, тобто кожна точка кулі є його внутрішньою точкою. Нехай $x \in B_{r_1}(x_1)$. Тоді

$$\rho(x, x_1) < r_1 < r - \rho(x_0, x_1).$$

Тепер з аксіоми трикутника і попередньої нерівності випливає, що

$$\rho(x, x_0) \leq \rho(x, x_1) + \rho(x_0, x_1) < r \Rightarrow x \in B_r(x_0),$$

тобто $B_{r_1}(x_1) \subset B_r(x_0)$.

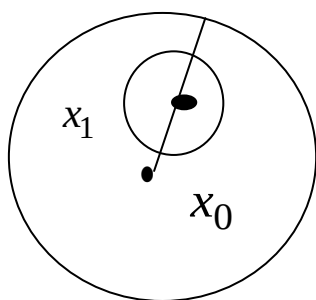


Рис. 4

Означення 1.3.5. Нехай $M \subset X$. Точка $a \in X$ називається граничною точкою множини M , якщо кожен оточення точки a містить щонайменше одну точку множини M , відмінну від a .

Приклад 1.3.3. У просторі m обмежених числових послідовностей точка $a = \{1, 0, 0, \dots\}$ є граничною точкою відкритої кулі $B_1(0)$, оскільки $\forall \varepsilon > 0$ ε -оточу точки a належить точка $\left\{1 - \frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots\right\}$ ($n > \frac{1}{\varepsilon}$) множини $B_1(0)$.

Означення 1.3.6. Множина $\overline{M}$, що отримана приєднанням до множини M усіх його граничних точок, називається замиканням множини M .

Приклад 1.3.4. З означення операції замикання випливає, що не для кожного метричного простору замикання відкритої кулі $B_r(x_0)$ збігається з замкнутою кулею $\overline{B}_r(x_0)$. Дійсно, нехай (X, ρ) - метричний простір із дискретною метрикою $\rho(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y, \\ 1, & x \neq y. \end{cases}$ Відкрита куля $B_1(x_0)$

містить одну точку $\{x_0\}$, а замкнена $\overline{B}_1(x_0)$ - збігається з усім простором X . Точки межі кулі $\{x : \rho(x, x_0) = 1\} \in \overline{B}_1(x_0)$ не є граничними для $B_1(x_0)$, так як розташовані на відстані 1 від кожної точки $B_1(x_0)$. Отже, справедливе строге включення $\overline{B_1(x_0)} \subset \overline{B}_1(x_0)$.

Властивості операції замикання.

$$1. M \subseteq \overline{M}. \quad (1.39)$$

$$2. \overline{M \cup N} = \overline{M} \cup \overline{N}. \quad (1.40)$$

$$3. \overline{(\overline{M})} = \overline{M}. \quad (1.41)$$

Доведемо, наприклад, властивість 3. Нехай x – гранична точка множини $\overline{M}$, що їй не належить. За означенням граничної точки $\forall \varepsilon > 0 \exists \overline{x}_\varepsilon \in \overline{M} : \rho(x, \overline{x}_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2}$. Якщо $\overline{x}_\varepsilon \in M$, то x є граничною точкою множини M і, отже, належить множині $\overline{M}$, що суперечить припущенню. Якщо $\overline{x}_\varepsilon \notin M$, то існує точка $\overline{\overline{x}_\varepsilon} \in M : \rho(\overline{x}_\varepsilon, \overline{\overline{x}_\varepsilon}) < \frac{\varepsilon}{2}$. Тоді з аксіоми трикутника $\rho(x, \overline{\overline{x}_\varepsilon}) \leq \rho(x, \overline{x}_\varepsilon) + \rho(\overline{x}_\varepsilon, \overline{\overline{x}_\varepsilon}) < \varepsilon$, тобто x є граничною точкою множини M , значить $x \in \overline{M}$ (суперечність з початковим припущенням). Таким чином, усі граничні точки множини $\overline{M}$ їй же належать, що доводить співвідношення (1.41).

Означення 1.3.7. Множина M називається замкнутою, якщо $\overline{M} = M$.

Приклад 1.3.5. Замкнена куля $\overline{B}_r(x_0)$ метричного простору (X, ρ) є замкнутою множиною. Дійсно, нехай $\overline{x}$ - гранична точка множини $\overline{B}_r(x_0)$. Якщо $\rho(\overline{x}, x_0) \leq r$, то $\overline{x} \in \overline{B}_r(x_0)$, тобто гранична точка належить самій множині. Випадок $\rho(\overline{x}, x_0) > r$ взагалі неможливий, оскільки тоді $\forall x \in \overline{B}_r(x_0)$ виконується нерівність

$$\rho(x, \overline{x}) > \rho(\overline{x}, x_0) - \rho(x, x_0) > \rho(\overline{x}, x_0) - r = \delta > 0,$$

яка суперечить тому, що $\bar{x}$ - гранична точка множини $\bar{B}_r(x_0)$.

Властивості відкритих і замкнених множин.

1. Метричний простір X є одночасно відкритою і замкнутою множиною.

2. M – відкрита $\Leftrightarrow X \setminus M$ – замкнена.

3. Об'єднання довільного числа і перетин довільного скінченного числа відкритих множин є відкритою множиною.

4. Перетин довільного числа і об'єднання довільного скінченного числа замкнених множин є замкнутою множиною.

Доведемо другу з наведених властивостей. Нехай M – відкрита множина. Розглянемо множину $X \setminus M$. Припустимо, що вона не є замкнутою, тобто існує гранична точка $\bar{x}$ цієї множини, що їй не належить. Тоді

$$\bar{x} \notin X \setminus M \Rightarrow \bar{x} \in M \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(\bar{x}) \subset M \Rightarrow \rho(x, \bar{x}) > \varepsilon \quad \forall x \in X \setminus M.$$

Остання нерівність суперечить тому, що $\bar{x}$ - гранична точка множини $X \setminus M$.

Означення 1.3.8. Система підмножин $\mathfrak{Z}$ множини X називається **топологією** на множині X , якщо виконуються наступні умови: 1) $\emptyset, X \in \mathfrak{Z}$, 2) $\forall X_1, X_2 \in \mathfrak{Z} \Rightarrow X_1 \cap X_2 \in \mathfrak{Z}$, 3) $\forall \{X_\alpha\}_\alpha \subset \mathfrak{Z} \Rightarrow \bigcup_\alpha X_\alpha \in \mathfrak{Z}$.

Означення 1.3.9. Для довільної множини X пара $(X, \mathfrak{Z})$, де $\mathfrak{Z}$ – топологія на множині X , називається **топологічним простором**.

З властивостей відкритих множин випливає, що система усіх відкритих множин метричного простору X породжує на ньому топологію, а сам простір X перетворює у топологічний простір. Обсяг книги не дозволяє більш розгорнуто зупинитися на цьому питанні. Зауважимо, однак, що топологічна мова надає геометричну наочність багатьом результатам. Наприклад, поняття границі послідовності і неперервності відображення цією мовою можна сформулювати наступним чином (чому?).

Означення 1.3.10. Точка $x \in X$ є **границею послідовності** $\{x_n\}_{n=1}^\infty \in X$, якщо в кожному окіл точки x потрапляють усі точки послідовності, починаючи з деякого номера.

Означення 1.3.11. Відображення $f : X \rightarrow Y$ метричного простору X у метричний простір Y **неперервне**, якщо прообраз довільної відкритої множини $B \subset Y$ відкритий в X .

Щільні й ніде не щільні множини.

Означення 1.3.12. Множина M називається щільною в множині G , якщо $\overline{M} \supseteq G$. Множина M називається усюди щільною (у просторі X), якщо $\overline{M} = X$.

Приклади 1.3.6. 1. Множина $Q[0,1]$ раціональних чисел відрізка $[0,1]$ є щільною множиною цього відрізка в метричному просторі R .

2. Множина P усіх многочленів від однієї змінної усюди щільна в метричному просторі $C[a,b]$. Це випливає з теореми Вейєрштрасса, згідно з якою кожна неперервна на відрізку функція як завгодно точно наближається многочленом в рівномірній метриці.

Означення 1.3.13. Множина M називається не щільною в кулі B , якщо в цій кулі знайдеться, щонайменше, одна зовнішня точка множини M , тобто $B \cap \text{ext } M \neq \emptyset$. Множина M називається ніде не щільною, якщо вона не щільна в кожній кулі метричного простору X .

Приклади 1.3.7. 1. На рисунку 5 зображена множина M , яка не щільна в кулі B , оскільки цій кулі належить точка x_1 – зовнішня точка множини M .

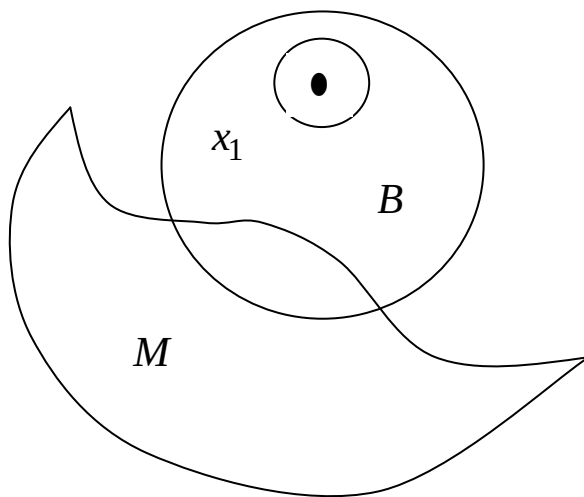


Рис. 5

2. У просторі m обмежених числових послідовностей розглянемо множину c_0 усіх послідовностей, збіжних до нуля. Ця множина ніде не щільна в m . Дійсно, розглянемо довільну кулю $B_r(x_0) \subset m$, де

$x_0 = \{\xi_k\}_{k=1}^{\infty} \in m$. Якщо $x_0 \notin c_0$, то $\exists \varepsilon > 0 : \rho(x_0, x) > \varepsilon \quad \forall x \in c_0$ (чому?), тобто x_0 є зовнішньою точкою множини c_0 . Якщо $x_0 \in c_0$, то оберемо $\varepsilon > 0$ так, щоб $\bar{x} = \{\xi_k + \varepsilon\}_{k=1}^{\infty} \in B_r(x_0)$. В цьому

випадку $\rho(\bar{x}, x) > \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall x \in c_0$ (чому?),

тобто $\bar{x}$ – зовнішня точка множини

c_0 . Отже, кожна куля містить зовнішню точку розглянутої множини.

Зауваження. Ніде не щільна множина сильно “розріджена” в метричному просторі X у тому сенсі, що $\text{ext } M = X$ (чому?).

Канторова множина.

У цьому пункті наводиться приклад множини в метричному просторі R , яка має дивовижні властивості.

В метричному просторі $R[0,1]$ дійсних чисел відрізка $[0,1]$, зі звичайною для дійсної прямої відстанню, розглянемо множину, яка

$$R[0,1] \quad 0 \text{-----} 1$$

$$F_1 \quad \text{-----}$$

$$F_2 \quad - \quad - \quad - \quad -$$

Рис. 6

будується за таким алгоритмом. Розіб'ємо відрізок $[0,1]$ на три рівні

частини точками $\frac{1}{3}$ і $\frac{2}{3}$ і видалимо з

нього інтервал $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$. Множину, що

залишилася, позначимо через $F_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$. З кожним із двох

залишених відрізків зробимо те ж саме, тобто видалимо інтервали $\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$ і $\left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$. Одержимо множину $F_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right]$

(рис. 6). Далі цей процес продовжимо необмежено. Множина $F = \bigcap_{i=1}^{\infty} F_i$

називається **канторовою множиною**. Вкажемо деякі властивості цієї множини:

1. Множина F - замкнена, як перетин замкнених множин.

2. Множина F має міру нуль. Дійсно, міра видалених інтервалів дорівнює сумі $\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \dots = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \dots\right) = 1$.

3. Множина F має потужність континуума. Для доведення цього з'ясуємо структуру чисел, видалених з відрізка $[0,1]$. Оскільки кінці видалених інтервалів належать F і кратні степеням $\frac{1}{3}$, то усі числа відрізка $[0,1]$ зручно представити в позиційній системі зчислення з основою 3, тобто у вигляді $0, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots = \alpha_1 \frac{1}{3} + \alpha_2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \alpha_3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \dots$, де

$\alpha_i = 0, 1, 2$. Після першого кроку видалення разом з інтервалом $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ з відрізка $[0,1]$ вилучаються точки, які в позиційній системі зчислення мають 1 в першому розряді після коми $0,1 \alpha_2 \alpha_3 \dots \in \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$. Після другого кроку видалення вилучаються числа, які мають 1 у другому розряді після коми $0,01 \alpha_2 \alpha_3 \dots \in \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$, $0,21 \alpha_2 \alpha_3 \dots \in \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$. Таким чином, після

усіх кроків вилучення з відрізка $[0,1]$ будуть видалені усі числа, що мають в своєму позиційному записі хоч би в одному розряді 1. Числа, що залишилися, записують у вигляді $0, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots$, де α_i дорівнює 0 або 2. Отже, потужність множини F така ж, як у множини усіх чисел

вигляду $0, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots$, де $\alpha_i = 0$; 1. Однак, остання множина збігається з множиною усіх чисел відрізка $[0,1]$, записаних у двійковій системі зчислення. Це доводить рівність потужностей множини F і відрізка $[0,1]$.

4. Множина F - ніде не щільна в метричному просторі $X = R[0,1]$. Дійсно, кожний інтервал $(\alpha, \beta) \subset [0,1]$ має непорожній перетин із відкритою множиною $X \setminus F$, оскільки в протилежному випадку міра видаленої частини була б менше 1. Тоді існує непорожній інтервал $(\alpha_1, \beta_1) \subset (\alpha, \beta)$, що не містить в собі точок множини F . Останнє означає, що F - ніде не щільна.

Сепарабельні простори.

Означення 1.3.14. Метричний простір X називається сепарабельним, якщо у ньому існує зліченна усюди щільна множина.

Іншими словами, це означає, що у просторі X існує послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, з допомогою елементів якої можна як завгодно близько підійти до довільного елемента простору X . Інакше $\forall x \in X$ і $\forall \varepsilon > 0$ існує елемент послідовності x_{n_0} такий, що $\rho(x, x_{n_0}) < \varepsilon$.

Приклади 1.3.8. 1. Простори R, E_n сепарабельні. В першому випадку зліченною усюди щільною множиною є множина Q раціональних чисел, в другому – множина $Q^n = \{(r_1, r_2, \dots, r_n), r_i \in Q\}$.

2. Простір $C[a,b]$ сепарабельний. Тут зліченною усюди щільною множиною є множина усіх многочленів з раціональними коефіцієнтами.

3. Покажемо, що простір l_p є сепарабельним. В якості зліченної множини X_0 в l_p оберемо множину усіх послідовностей з раціональних чисел, у яких лише скінченне число елементів відмінне від нуля, тобто $X_0 = \{(r_1, r_2, \dots, r_n, 0, 0, \dots), r_i \in Q\}$, причому для кожної послідовності число n набуває, взагалі кажучи, свого значення. Візьмемо довільний елемент $\xi = (\xi_i)_{i=1}^{\infty} \in l_p$, тобто такий, що

$\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p < \infty$. Зі збіжності останнього ряду випливає, що $\forall \varepsilon > 0$

$\sum_{i=n+1}^{\infty} |\xi_i|^p < \frac{\varepsilon^p}{2}$ при достатньо великому n . Оскільки кожне дійсне число ξ_i можна як завгодно точно наблизити раціональним числами r_i , то

$\exists x_0 = (r_1, r_2, \dots, r_n, 0, 0, \dots) \in X_0$, для якого $\sum_{i=1}^n |\xi_i - r_i|^p < \frac{\varepsilon^p}{2}$. Тоді

$$[\rho(\xi, x_0)]^p = \sum_{i=1}^n |\xi_i - r_i|^p + \sum_{i=n+1}^{\infty} |\xi_i|^p < \frac{\varepsilon^p}{2} + \frac{\varepsilon^p}{2} = \varepsilon^p.$$

Приклад несепабельного простору. Простір m не є сепарабельним. Для доведення припустимо протилежне, тобто нехай у просторі m є зліченна усюди щільна множина $\tilde{m}$. Розглянемо в m множину m_0 послідовностей $\xi = (\xi_i)_{i=1}^{\infty}$, для яких кожне ξ_i набуває тільки двох значень: 0 або 1. Це множина має потужність континуума (чому?). Кожну точку x множини $\tilde{m}$ оточимо кулею $B_{\frac{1}{3}}(x)$ радіуса $\frac{1}{3}$. В

силу означення усюди щільної множини об'єднання куль $\bigcup_{x \in \tilde{m}} B_{\frac{1}{3}}(x)$

покриває весь простір m , а значить і множину m_0 . Оскільки покриття містить зліченне число куль і при цьому покриває множину більшої потужності, то, принаймні, в одну кулю потраплять дві різні точки x_1 і x_2 множини m_0 . Але тоді відстань між цими точками менше діаметра кулі, тобто $\rho(x_1, x_2) < \frac{2}{3}$. З іншого боку, відстань між будь-якими двома різними точками множини m_0 дорівнює 1 (чому?). Отримана суперечність доводить сформульоване вище твердження.

1.4. ПОВНОТА

У математичному аналізі важливу роль відіграє ознака Больцано-Коші збіжності числової послідовності, згідно з якою числова послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ збігається тоді і тільки тоді, коли $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0(\varepsilon)$ таке, що при $n, m > n_0 : |x_n - x_m| < \varepsilon$. Достатність цієї ознаки, взагалі кажучи, не має місця для довільного метричного простору в силу того, що точка згущення послідовності може не належати самому простору. Властивість метричного простору, що виключає таку можливість, називається повнотою.

Означення 1.4.1. Послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ елементів метричного простору X називається фундаментальною, якщо $\forall \varepsilon > 0$ знайдеться номер $n_0(\varepsilon)$ такий, що $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$ при $n, m > n_0(\varepsilon)$.

Приклад 1.4.1. Нехай $x = (\xi_k)_{k=1}^{\infty} \in l_p$. Розглянемо послідовність $x_n = (\xi_k^{(n)})_{k=1}^{\infty} \in l_p$, де $\xi_k^{(n)} = \begin{cases} \xi_k, & 1 \leq k \leq n, \\ 0, & k > n. \end{cases}$ При $n \geq m$ відстань

$\rho(x_n, x_m) = \left(\sum_{k=m+1}^n |\xi_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$. Зі збіжності ряду $\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p$ випливає, що $\forall \varepsilon > 0$ знайдеться номер $n_0(\varepsilon)$ такий, що $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$ при $n, m > n_0(\varepsilon)$, тобто послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ є фундаментальною.

Теорема 1.4.1. Якщо послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ збігається до деякої границі x_0 в метричному просторі X , то вона фундаментальна.

Доведення. З означення границі випливає, що $\forall \varepsilon > 0$ знайдеться номер $n_0(\varepsilon)$ такий, що $\rho(x_n, x_0) < \frac{\varepsilon}{2}$ при $n > n_0(\varepsilon)$. Тоді в силу аксіоми трикутника при $n, m > n_0(\varepsilon)$ одержуємо

$$\rho(x_n, x_m) < \rho(x_n, x_0) + \rho(x_m, x_0) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Важливо зауважити, що обернене твердження для довільного метричного простору не вірне. Це підтверджують наступні

Приклади 1.4.2. 1. Простір $R(0,1)$ з метрикою $\rho(x, y) = |x - y|$ не є повним, оскільки фундаментальна послідовність $\left\{ \frac{1}{n} \right\}_{n=1}^{\infty}$ не має границі у просторі $R(0,1)$.

2. Позначимо через l_0 метричний простір числових послідовностей, що мають лише скінченне число членів, відмінних від нуля, з такою ж метрикою, як у просторі l_1 . Нехай $x = (\xi_k)_{k=1}^{\infty} \in l_1$. Розглянемо послідовність $x_n = (\xi_k^{(n)})_{k=1}^{\infty} \in l_0$, де $\xi_k^{(n)} = \begin{cases} \xi_k, & 1 \leq k \leq n, \\ 0, & k > n. \end{cases}$ Ця послідовність фундаментальна, але в метриці простору l_1 вона збігається до елемента $x \notin l_0$, тобто простір l_0 не повний.

3. Нехай $P[a, b]$ простір многочленів будь-якого степеня, заданих на відрізку $[a, b]$. Відстань задається чебишовською метрикою. Для довільної функції $f(x) \in C[a, b]$, відмінної від многочлена, можна вказати послідовність многочленів $\{p_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \in P[a, b]$ збіжну до $f(x)$ у просторі $C[a, b]$. Тоді послідовність $\{p_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна в $P[a, b]$, але в цьому просторі не збігається, тобто простір $P[a, b]$ не повний.

Означення 1.4.2. Якщо в метричному просторі X кожна фундаментальна послідовність збігається до елемента цього ж простору, то простір X називається повним. Повні нормований і

евклідові простори називаються відповідно банаховим і гільбертовим просторами.

Приклади 1.4.3. 1. Простори R , E_n - повні (випливає з теореми Больцано-Коші).

2. Простір m повний. Дійсно, нехай $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in m$ - фундаментальна послідовність. Тоді

$$x_n = \left(\xi_i^{(n)} \right)_{i=1}^{\infty} : \sup_i \left| \xi_i^{(n)} \right| \leq K_n \text{ і } \forall \varepsilon > 0 \exists n_0(\varepsilon) : n, m > n_0 \quad \rho(x_n, x_m) < \varepsilon \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sup_i \left| \xi_i^{(n)} - \xi_i^{(m)} \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left| \xi_i^{(n)} - \xi_i^{(m)} \right| < \varepsilon \quad \forall i \in N.$$

Зафіксуємо довільне число i і розглянемо послідовність $\left(\xi_i^{(n)} \right)_{n=1}^{\infty}$. Ця послідовність є фундаментальною числовою послідовністю, яка, в силу повноти простору R , збігається до числа ξ_i . Перейдемо в нерівності $\left| \xi_i^{(n)} - \xi_i^{(m)} \right| < \varepsilon$ до границі при $m \rightarrow \infty$. Тоді

$\left| \xi_i^{(n)} - \xi_i \right| \leq \varepsilon \quad \forall i \in N, n > n_0$. Остання нерівність рівносильна такій $\sup_i \left| \xi_i^{(n)} - \xi_i \right| \leq \varepsilon \quad n > n_0$, тобто $\rho(x_n, x) \leq \varepsilon$ при $n > n_0$. З іншого боку, справедлива оцінка $\left| \xi_i \right| \leq \left| \xi_i^{(n_0)} - \xi_i \right| + \left| \xi_i^{(n_0)} \right| \leq \varepsilon + K_{n_0}$, яка означає, що послідовність $\left(\xi_i \right)_{i=1}^{\infty} \in m$.

3. Повним є простір l_p . Доведення цього факту аналогічне попередньому.

4. Простір $C[a, b]$ повний. Нехай $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty} \in C[a, b]$ і є фундаментальною послідовністю. Це означає, що

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0(\varepsilon) : n, m > n_0(\varepsilon) : \left| x_n(t) - x_m(t) \right| < \varepsilon \quad \forall t \in [a, b]. \quad (1.42)$$

При кожному фіксованому $t \in [0, 1]$ послідовність $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ є фундаментальною числовою послідовністю, яка в силу теореми Больцано-Коші збігається до функції $x(t)$. Переходячи в нерівності (1.10) до границі при $m \rightarrow \infty$, одержимо, що

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0(\varepsilon) : n > n_0(\varepsilon) : \left| x_n(t) - x(t) \right| < \varepsilon \quad \forall t \in [a, b]. \quad (1.43)$$

Покажемо, що функція $x(t)$ неперервна. З означення неперервності функції в довільній точці $t_0 \in [a, b]$ випливає, що

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon, n) > 0 : |t - t_0| < \delta \Rightarrow \left| x_n(t) - x_n(t_0) \right| < \varepsilon. \quad (1.44)$$

Оберемо довільне число $\varepsilon > 0$ і $n > n_0(\varepsilon)$ з умови (1.43), після чого оберемо δ з умови (1.44). Тоді справедлива оцінка

$$\begin{aligned} |x(t) - x(t_0)| &\leq |x(t) - x_n(t) + x_n(t) - x_n(t_0) + x_n(t_0) - x(t_0)| \leq \\ &\leq |x(t) - x_n(t)| + |x_n(t) - x_n(t_0)| + |x_n(t_0) - x(t_0)| < 3\varepsilon, \end{aligned}$$

яка доводить неперервність функції $x(t)$ в довільній точці відрізка $[a, b]$, тобто $x_n(t) \rightarrow x(t) \in C[a, b]$.

5. Повнота простору $L_p[a, b]$ доводиться в теорії інтеграла Лебега (див. "Пояснення і додатки до глави 1").

Наступне твердження еквівалентне повноті метричного простору.

Принцип вкладених куль.

Теорема 1.4.2. *Необхідною і достатньою умовою повноти метричного простору X є виконання принципу вкладених куль, тобто кожна послідовність вкладених одна в другу замкнених куль у просторі X , радіуси яких прямують до нуля, має єдину спільну точку.*

Доведення. Нехай X - повний метричний простір, в якому є система замкнених вкладених куль

$$\bar{B}_{\varepsilon_1}(a_1) \supset \bar{B}_{\varepsilon_2}(a_2) \supset \dots \supset \bar{B}_{\varepsilon_n}(a_n) \supset \dots, \quad (1.45)$$

для яких $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$.

Розглянемо послідовність їхніх центрів $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. В силу (1.39) $\bar{B}_{\varepsilon_{n+p}}(a_{n+p}) \supset \bar{B}_{\varepsilon_n}(a_n)$, звідки випливає, що $\rho(a_{n+p}, a_n) \leq \varepsilon_n$, тобто послідовність $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ є фундаментальною. Оскільки простір X повний, то існує $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in X$. Очевидно, точка a при кожному $n \in N$ є

граничною точкою послідовності $\{a_k\}_{k=n}^{\infty} \subset \bar{B}_{\varepsilon_n}(a_n)$, а, значить, і замкненої кулі $\bar{B}_{\varepsilon_n}(a_n)$. В цьому випадку

$$a \in \bar{B}_{\varepsilon_n}(a_n) \quad \forall n \in N \Rightarrow a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bar{B}_{\varepsilon_n}(a_n).$$

Доведемо єдиність точки перетину усіх вкладених куль. Нехай існує точка $b \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bar{B}_{\varepsilon_n}(a_n)$ і $b \neq a$. Тоді $\rho(b, a) \leq \rho(b, a_n) + \rho(a_n, a) \leq 2\varepsilon_n$ і, переходячи до границі при $n \rightarrow \infty$, приходимо до суперечності $\rho(b, a) = 0$.

Доведення достатності надається читачеві.

Поповнення метричних просторів.

Очевидними є труднощі, які виникають в неповних метричних просторах при

виконанні операції граничного переходу. У функціональному аналізі розроблена процедура, що дозволяє поповнити неповний метричний простір, зробивши його повним. Процес поповнення нагадує операцію замикання множини і зводиться до приєднання до метричного простору X "нових" елементів $\tilde{x}$. Кожний доданий в результаті поповнення елемент $\tilde{x}$ визначається деякою фундаментальною послідовністю $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in X$, що не має границі в X . Тому він може бути їй зіставлений $\tilde{x} \leftrightarrow \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Але і кожному звичайному елементу $x \in X$ також можна зіставити фундаментальну послідовність $\{x, x, x, \dots\}$ збіжну до нього в X . Для збереження взаємної однозначності при такому зіставленні (різні фундаментальні послідовності можуть мати ту ж саму граничну точку) елементам $\tilde{x}, x, \dots$ треба поставити у відповідність не самі фундаментальні послідовності, а класи еквівалентних (що мають спільну граничну точку) фундаментальних послідовностей з простору X . Множина таких класів $\tilde{X}$ і утворює поповнення метричного простору X . Фактично поповнення простору X зводиться до вкладення його в більш широкий простір $\tilde{X}$ зі збереженням метрики. Наведені міркування дозволяють перейти до строгого означення поповнення метричного простору.

Означення 1.4.3. Повний метричний простір $\tilde{X}$ називається поповненням простору X , якщо в $\tilde{X}$ існує всюди щільний підпростір $\tilde{X}_0$, ізометричний простору X .

Алгоритм поповнення.

Розглянемо множину $\bar{X}$ усіх можливих фундаментальних послідовностей, складених з елементів метричного простору X . Введемо на множині $\bar{X}$ бінарне відношення Ω , вважаючи, що дві послідовності $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ і $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ пов'язані цим відношенням, якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, y_n) = 0$. Неважко перевірити, що відношення Ω є відношенням еквівалентності. Цим відношенням множина $\bar{X}$ розбивається на класи еквівалентних фундаментальних послідовностей. Множину усіх таких класів позначимо через $\tilde{X} = \{\tilde{x}\}$. Задамо на цій множині структуру метричного простору, вводячи відстань між класами за формулою $\rho(\tilde{x}, \tilde{y}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, y_n)$, де $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ - будь-які представники класів $\tilde{x}, \tilde{y}$. Покажемо, що введення відстані таким чином є коректним. Для цього треба довести існування границі $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, y_n)$, незалежність її від представників класів $\tilde{x}, \tilde{y}$ і виконання аксіом метрики.

Існування границі $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, y_n)$ впливає з оцінки

$$|\rho(x_n, y_n) - \rho(x_m, y_m)| \leq \rho(x_n, x_m) + \rho(y_n, y_m),$$

що у свою чергу впливає з аксіом трикутника. Дійсно, в силу фундаментальності послідовностей $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ права частина останньої нерівності може бути зроблена меншою за як завгодно мале додатне числа ε при $n, m > n_0$. Тоді

числова послідовність $\{\rho(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна, що означає її збіжність згідно з теоремою Больцано-Коші.

Нехай $\{\bar{x}_n\}_{n=1}^{\infty}, \{\bar{y}_n\}_{n=1}^{\infty}$ - інші представники класів $\tilde{x}, \tilde{y}$. Переходячи до границі при $n \rightarrow \infty$ в нерівності

$$\rho(x_n, y_n) \leq \rho(x_n, \bar{x}_n) + \rho(\bar{x}_n, \bar{y}_n) + \rho(\bar{y}_n, y_n),$$

одержуємо $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, y_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(\bar{x}_n, \bar{y}_n)$ і одночасно, в силу рівноправності обраних представників, обернену нерівність. Таким чином, $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(\bar{x}_n, \bar{y}_n)$.

Перевірка аксіом відстані надається читачеві.

Нам залишається показати, що метричний простір $\tilde{X}$ задовольняє означення 1.4.3 поповнення метричного простору. Для цього розглянемо множину $\tilde{X}_0 \subset \tilde{X}$ усіх класів еквівалентних фундаментальних послідовностей з X , кожний з яких містить послідовність виду $\{x, x, x, \dots\}$ для деякого $x \in X$. Такі послідовності називаються стаціонарними. Кожен клас $\tilde{x} \in \tilde{X}_0$ містить тільки одну таку послідовність, і кожна послідовність $\{x, x, x, \dots\}$ належить одному класу $\tilde{x} \in \tilde{X}_0$. Таким чином, відображення $Ax = \tilde{x}$, $\{x, x, x, \dots\} \in \tilde{x}$ задає бієкцію $X \leftrightarrow \tilde{X}_0$, яка до того ж є ізометрією, оскільки для довільних $x, y \in X$

$$\rho_{\tilde{X}}(Ax, Ay) = \rho_{\tilde{X}}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_X(x, y) = \rho_X(x, y).$$

Покажемо, що множина $\tilde{X}_0$ щільна у просторі $\tilde{X}$. Нехай $\tilde{x}$ - довільний елемент $\tilde{X}$, а $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ - фундаментальна послідовність з класу $\tilde{x}$. Тоді за довільним $\varepsilon > 0$ знайдеться номер $n_0(\varepsilon)$ такий, що при $n, m > n_0$ відстань $\rho_X(x_n, x_m) < \varepsilon$. Розглянемо стаціонарну послідовність $\{x_m, x_m, x_m, \dots\}$, що належить деякому класу $\tilde{x}_m \in \tilde{X}_0$. Знайдемо відстань від $\tilde{x}_m$ до $\tilde{x}$

$$\rho_{\tilde{X}}(\tilde{x}, \tilde{x}_m) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_X(x_n, x_m) \leq \varepsilon.$$

Останнє означає, що $\tilde{x}$ є граничною точкою $\tilde{X}_0$, тобто $\overline{\tilde{X}_0} = \tilde{X}$.

Залишилось довести, що побудований метричний простір $\tilde{X}$ є повним. Нехай $\{\tilde{x}_n\}_{n=1}^{\infty} \in \tilde{X}$ - фундаментальна послідовність, тобто $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0(\varepsilon) : m > n > n_0 : \rho_{\tilde{X}}(\tilde{x}_n, \tilde{x}_m) < \varepsilon$. Оскільки множина $\tilde{X}_0$ щільна у просторі $\tilde{X}$, то для кожного n існує клас еквівалентних фундаментальних послідовностей $\overline{\tilde{x}_n} \in \tilde{X}_0$, такий, що $\rho_{\tilde{X}}(\tilde{x}_n, \overline{\tilde{x}_n}) < \frac{1}{n}$. Елемент $\overline{\tilde{x}_n} \in \tilde{X}_0$ містить стаціонарну послідовність, яку позначимо через $\{x_n, x_n, x_n, \dots\}$. Покажемо, що послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in X$ фундаментальна. Для цього оцінимо відстань між елементами x_n і x_m

$$\rho_X(x_n, x_m) = \rho_{\tilde{X}}(\overline{\tilde{x}_n}, \overline{\tilde{x}_m}) \leq \rho_{\tilde{X}}(\overline{\tilde{x}_n}, \tilde{x}_n) + \rho_{\tilde{X}}(\tilde{x}_n, \tilde{x}_m) + \rho_X(\tilde{x}_m, \overline{\tilde{x}_m}) < \frac{1}{n} + \varepsilon + \frac{1}{m},$$

тобто $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна в X і як фундаментальна послідовність належить деякому класу $\tilde{x} \in \tilde{X}$. З аксіоми трикутника й означення метрики у просторі $\tilde{X}$ випливає, що

$$\rho_{\tilde{X}}(\tilde{x}_n, \tilde{x}) \leq \rho_{\tilde{X}}(\tilde{x}_n, \overline{\tilde{x}_n}) + \rho_{\tilde{X}}(\overline{\tilde{x}_n}, \tilde{x}) < \frac{1}{n} + \lim_{m \rightarrow \infty} \rho(x_n, x_m) \leq \frac{1}{n} + \varepsilon,$$

тобто $\tilde{x}_n \rightarrow \tilde{x}$ у просторі $\tilde{X}$. Отже, простір $\tilde{X}$ повний.

Приклад 1.3.4. Розглянемо у просторі $CL[-1,1]$ неперервних функцій із метрикою $\rho(x, y) = \int_{-1}^1 |x(t) - y(t)| dt$ послідовність функцій

$$x_n(t) = \begin{cases} 1, & \frac{1}{n} \leq t \leq 1, \\ nt, & -\frac{1}{n} \leq t \leq \frac{1}{n}, \\ -1, & -1 \leq t \leq -\frac{1}{n}. \end{cases} \quad \text{Ця послідовність фундаментальна, оскільки при } m > n$$

$$\rho(x_m, x_n) = \int_{-1}^1 |x_n(t) - x_m(t)| dt = \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} |x_n(t) - x_m(t)| dt \leq \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} dt = \frac{2}{n} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Тут використана оцінка $|x_n(t) - x_m(t)| \leq 1$ при $|t| \leq \frac{1}{n}$. Поточкова границя $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t) = x(t)$, де $x(t) = \text{sign } t \notin CL[-1,1]$. Крім того

$$\int_{-1}^1 |x_n(t) - x(t)| dt = \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} |x_n(t) - x(t)| dt \leq \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} dt = \frac{2}{n} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Отже, простір $CL[-1,1]$ неповний. Його поповнення приводить до простору $L[-1,1]$, інтегровних за Лебегом функцій. Крім неперервних функцій його елементами також є розривні функції, для яких існує інтеграл $\int_{-1}^1 |x(t)| dt$ (див. Пояснення і доповнення до гл. 1).

Ряди в банахових просторах. Розглянемо банахів простір B і послідовність елементів $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset B$.

Означення 1.4.4. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ називається збіжним у просторі B ,

якщо збігається послідовність $S_n = \sum_{k=1}^n x_k$ частинних сум ряду, тобто існує $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$.

Приклад 1.4.5. У просторі l_1 розглянемо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, де

$x_k = \left(\frac{1}{2^{ki}}\right)_{i=1}^{\infty}$. Знайдемо частинну суму ряду

$$S_n = \sum_{k=1}^n x_k = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{ki}}\right)_{i=1}^{\infty} = \left(\frac{2^{ni} - 1}{2^{ni}(2^i - 1)}\right)_{i=1}^{\infty}.$$

Покажемо, що $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$, де $S = \left(\frac{1}{2^i - 1}\right)_{i=1}^{\infty}$. Дійсно,

$$\|S_n - S\| = \sum_{i=1}^{\infty} \left| \frac{2^{ni} - 1}{2^{ni}(2^i - 1)} - \frac{1}{2^i - 1} \right| = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{ni}(2^i - 1)} \leq 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{(n+1)i}} = \frac{2}{2^{(n+1)} - 1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Означення 1.4.5. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ елементів банахового простору називається абсолютно збіжним, якщо збігається числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$.

Теорема 1.4.3. У банаховому просторі будь-який абсолютно збіжний ряд збігається.

Доведення. Покажемо, що послідовність частинних сум ряду фундаментальна. Для цього оцінімо норму

$$\|S_{n+p} - S_n\| = \left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} x_k \right\| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \|x_k\|.$$

Права частина нерівності може бути зроблена меншою від довільного наперед заданого як завгодно малого додатного ε за умови $n > n_0(\varepsilon)$,

що випливає з критерія Коші збіжності числового ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$. Таким

чином, послідовність частинних сум ряду фундаментальна, а отже, збігається в банаховому просторі.

Приклад 1.4.6. Розглянемо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ у просторі $C[0,1]$. Оскільки

$$\left\| \frac{x^n}{n^2} \right\| = \max_{x \in [0,1]} \left| \frac{x^n}{n^2} \right| = \frac{1}{n^2} \quad \text{і числовий ряд } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ збігається, то початковий}$$

ряд збігається абсолютно, а отже, збігається у звичайному сенсі у просторі $C[0,1]$. Зазначимо, що збіжність у просторі $C[0,1]$ фактично є рівномірною збіжністю на відрізку $[0,1]$.

1.5. ПІДПРОСТОРИ

Підпростори відіграють важливу роль у різних проблемах прикладної математики, зокрема, при побудові наближених розв'язків операторних рівнянь. Змістовного сенсу це поняття набуває в нормованих і евклідових просторах, для яких воно і буде викладатися в цьому параграфі.

Означення 1.5.1. Множина L нормованого простору X називається підпростором, якщо вона є лінійним многовидом, замкненим відносно збіжності у просторі X .

Таким чином, $L \subset X$ – підпростір, якщо:

$$1. \forall x_1, x_2 \in L, \forall \lambda_1, \lambda_2 \in R (\in C) \Rightarrow \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in L. \quad (1.46)$$

$$2. x_n \in L, x_n \rightarrow x \Rightarrow x \in L. \quad (1.47)$$

Умова (1.46) є умовою лінійного многовиду, умова (1.47) визначає замкненість множини L відносно збіжності у просторі X .

Приклади 1.5.1. 1. Розглянемо множину $C_0[a, b] = \{x(t) \in C[a, b] : x(a) = x(b) = 0\}$ у просторі неперервних функцій на відрізку $[a, b]$. Ця множина є підпростором $C[a, b]$, оскільки, очевидно, має властивість лінійного многовиду і, крім того, замкнена відносно збіжності в $C[a, b]$

$$\begin{aligned} \{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty} \subset C_0[a, b], x_n \rightarrow x \in C[a, b] &\Rightarrow |x_n(a) - x(a)| + |x_n(b) - x(b)| \leq \\ &\leq 2 \max_{t \in [a, b]} |x_n(t) - x(t)| = 2 \|x_n - x\| \rightarrow 0 \Rightarrow 0 = x_n(a) \rightarrow x(a), 0 = x_n(b) \rightarrow x(b) \Rightarrow \\ &\Rightarrow x(a) = x(b) = 0 \Rightarrow x \in C_0[a, b]. \end{aligned}$$

2. У нормованому просторі m обмежених числових послідовностей розглянемо множину $c_0 = \left\{ x = (\xi_i)_{i=1}^{\infty} : \lim_{i \rightarrow \infty} \xi_i = 0 \right\}$

послідовностей, що прямують до нуля. Ця множина, очевидно, є лінійним многовидом. Перевіримо умову замкненості множини c_0 .

Нехай

$$x_n = (\xi_i^{(n)})_{i=1}^{\infty} \in c_0, x_n \rightarrow x = (\xi_i)_{i=1}^{\infty} \in m \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0(\varepsilon) : n > n_0 \Rightarrow \|x_n - x\| < \varepsilon.$$

Остання нерівність відносно норми означає, що

$$\sup_i |\xi_i^{(n)} - \xi_i| < \varepsilon \quad n > n_0 \Rightarrow |\xi_i^{(n)} - \xi_i| < \varepsilon \quad n > n_0, \forall i \in N.$$

Оскільки при кожному фіксованому $n \in N$ границя $\lim_{i \rightarrow \infty} \xi_i^{(n)} = 0$, то існує

натуральне число i_0 таке, що $|\xi_i^{(n_0+1)}| < \varepsilon$ при $i > i_0$. Тоді

$$|\xi_i| \leq |\xi_i - \xi_i^{(n_0+1)}| + |\xi_i^{(n_0+1)}| < 2\varepsilon \quad i > i_0,$$

отже, $\lim_{i \rightarrow \infty} \xi_i = 0$, тобто $x = (\xi_i)_{i=1}^{\infty} \in c_0$.

3. В гільбертовому просторі l_2 розглянемо множину M елементів $x = (\xi_i)_{i=1}^{\infty}$, для яких $\sum_{i=1}^k \xi_i = 0$, де k – деяке фіксоване натуральне число. Ця множина є підпростором. Дійсно, множина M – лінійний многовид, оскільки $\forall x = (\xi_i)_{i=1}^{\infty}, y = (\eta_i)_{i=1}^{\infty} \in M, \forall \alpha, \beta \in R(C)$

$$\sum_{i=1}^k \xi_i = 0, \sum_{i=1}^k \eta_i = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^k (\alpha \xi_i + \beta \eta_i) = 0 \Rightarrow \alpha x + \beta y \in M.$$

Покажемо замкненість множини M . Нехай $x_n = (\xi_i^{(n)})_{i=1}^{\infty} \in M$ і

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x, x = (\xi_i)_{i=1}^{\infty}. \quad \text{Тоді} \quad \sum_{i=1}^k \xi_i^{(n)} = 0, \quad \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i^{(n)} - \xi_i|^2 \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Переходячи до границі при $n \rightarrow \infty$ в обох частинах нерівності

$$\left| \sum_{i=1}^k \xi_i \right| \leq \left| \sum_{i=1}^k \xi_i - \sum_{i=1}^k \xi_i^{(n)} \right| + \left| \sum_{i=1}^k \xi_i^{(n)} \right| \leq \sum_{i=1}^k |\xi_i - \xi_i^{(n)}| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^k |\xi_i - \xi_i^{(n)}|^2} \sqrt{k} \leq \sqrt{k} \|x - x_n\|,$$

$$\text{дістаємо} \quad \sum_{i=1}^k \xi_i = 0 \Rightarrow x \in M.$$

4. Між тим, множини l_0 і $P[a, b]$, введені в прикладі 1.4.2, є лише лінійними многовидами відповідно просторів l_1 і $C[a, b]$, але не їхніми підпросторами (чому?).

Відстань від вектора до підпростору в нормованому просторі. У тривимірному евклідовому просторі під відстанню від точки до площини розуміють довжину найкоротшого відрізка (перпендикуляра), що з'єднує точку і площину. Це виправдовує наступне означення. Нехай X – нормований простір, L – його підпростір, $x \in X$, але не входить у L (рис. 7).

Означення 1.5.2. Відстанню $\rho(x, L)$ від точки x до підпростору $L \subset X$ називається число $\rho(x, L) = \inf_{u \in L} \|x - u\|$.

Зазначимо, що з означення точної нижньої грані випливає, що число $\rho(x, L)$ задовольняє одночасно дві умови:

$$1. \quad \rho(x, L) \leq \|x - u\| \quad \forall u \in L. \quad (1.48)$$

$$2. \quad \forall r > \rho(x, L) \quad \exists u_r \in L : \|x - u_r\| < r. \quad (1.49)$$

Число $\rho(x, L)$ характеризує величину відхилення вектора x від підпростору L .

Властивість відстані $\rho(x, L)$ до підпростору L .

$$1. x \notin L \Leftrightarrow \rho(x, L) > 0. \quad (1.50)$$

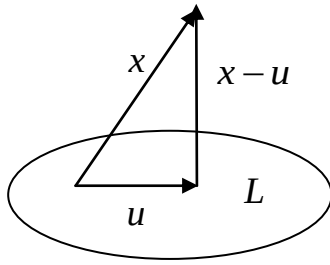


Рис. 7

► Нехай $x \notin L$ і $\rho(x, L) = 0$. Тоді з (1.49)

випливає, що існує $x_n \in L$ таке, що $\|x_n - x\| < \frac{1}{n}$. В

свою чергу, це означає, що $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \in L$,

оскільки L – замкнений многовид. Приходимо до суперечності з умовою. Достатність твердження (1.50) перевіряється тривіально. ◀

Означення 1.5.3. Якщо точна нижня грань $\inf_{u \in L} \|x - u\|$

досягається на деякому елементі $u_0 \in L$, то вектор u_0 називається елементом найкращого наближення до вектора x у підпросторі L .

Приклад 1.5.2. Розглянемо у просторі $C[a, b]$ підпростір $C_0[a, b] = \{x(t) \in C[a, b] : x(a) = x(b) = 0\}$. Відстань від функції $x(t) = 1, t \in [a, b]$ до підпростору $C_0[a, b]$ дорівнює

$$\rho(1, C_0[a, b]) = \inf_{x \in C_0[a, b]} \|1 - x\| = \inf_{x \in C_0[a, b]} \max_{t \in [a, b]} |1 - x(t)| = |1 - x(a)| = 1.$$

В якості елемента найкращого наближення можна, наприклад,

вказати будь-яку з функцій $x_n(t) = \begin{cases} nt, & t \in [0, 1/n], \\ 1, & t \in [1/n, 1 - 1/n], \\ n - nt, & t \in [1 - 1/n, 1] \end{cases} \quad n \geq 2$. Цей

приклад показує, що елемент найкращого наближення в даному випадку не є єдиним.

Задача визначення елемента найкращого наближення може бути повністю розв'язана лише в гільбертовому просторі.

Теорема 1.5.1. Нехай H – гільбертів простір, L – підпростір H . Кожний елемент $x \in H$ єдиним чином можна подати у вигляді

$$x = u_0 + x_\perp, \quad u_0 \in L, x_\perp \perp L. \quad (1.51)$$

Доведення. Якщо $x \in L$, то формула (1.51) справджується при $u_0 = x, x_\perp = 0$. Нехай $x \notin L$, отже $\rho(x, L) = d > 0$. З умов (1.48), (1.49)

випливає, що $\forall n \exists u_n \in L : d \leq \|x - u_n\| < d + \frac{1}{n}$.

Покажемо, що послідовність $\{x - u_n\}_{n=1}^\infty$ фундаментальна. Застосовуючи попередню оцінку до рівності (1.27) для сторін паралелограма $x - u_n$ і $x - u_m$, дістанемо

$$\|(x - u_n) - (x - u_m)\|^2 = 2\|x - u_n\|^2 + 2\|x - u_m\|^2 - \|2x - u_n - u_m\|^2 \leq$$

$$\leq 2\left(d + \frac{1}{n}\right)^2 + 2\left(d + \frac{1}{m}\right)^2 - 4d^2 = \frac{4d}{n} + \frac{4d}{m} + \frac{2}{n^2} + \frac{2}{m^2} \rightarrow 0 \quad (n, m \rightarrow \infty),$$

що доводить фундаментальність послідовності $\{x - u_n\}_{n=1}^{\infty}$. В силу повноти простору H існує $\lim_{n \rightarrow \infty} (x - u_n) = x_{\perp}$. Тоді існує і границя

$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u_0$, причому $x = u_0 + x_{\perp}$. Оскільки підпростір L є замкненим

многовидом, то $u_0 \in L$.

Покажемо, що елемент $x_{\perp}$ є ортогональним до підпростору L , тобто $\forall u \in L : (x_{\perp}, u) = 0$. Перейдемо до границі при $n \rightarrow \infty$ в нерівності

$d \leq \|x - u_n\| < d + \frac{1}{n}$. У результаті дістанемо $\|x_{\perp}\| = d$. Використовуючи

означення точної нижньої грані і те, що $\forall \lambda \in R(C), \forall u \in L \Rightarrow u_0 + \lambda u \in L$, маємо наступну оцінку

$$\|x_{\perp}\| \leq \|x - u_0 - \lambda u\| = \|x_{\perp} - \lambda u\| \quad \forall \lambda \in R(C), \forall u \in L \Rightarrow \|x_{\perp}\|^2 \leq \|x_{\perp} - \lambda u\|^2 \Rightarrow$$

$$\|x_{\perp}\|^2 \leq \|x_{\perp}\|^2 - \overline{\lambda}(x_{\perp}, u) - \lambda \overline{(x_{\perp}, u)} + |\lambda|^2 \|u\|^2 \Rightarrow -\overline{\lambda}(x_{\perp}, u) - \lambda \overline{(x_{\perp}, u)} + |\lambda|^2 \|u\|^2 \geq 0$$

Підставимо $\lambda = \frac{(x_{\perp}, u)}{\|u\|^2}$ в останню нерівність. У результаті

$$\frac{|(x_{\perp}, u)|^2}{\|u\|^2} \leq 0 \Rightarrow (x_{\perp}, u) = 0 \quad \forall u \in L,$$

що доводить ортогональність елемента $x_{\perp}$ до підпростору L .

Покажемо єдиність розкладу (1.51). Припустимо протилежне, тобто що існують принаймні два різних зображення $x = u_1 + x_1 = u_2 + x_2$, $u_i \in L, x_i \perp L, u_1 \neq u_2, x_1 \neq x_2$. Тоді

$$u_1 - u_2 = x_2 - x_1 \Rightarrow (u_1 - u_2, u_1 - u_2) = (u_1 - u_2, x_2 - x_1) = 0 \Rightarrow u_1 = u_2, x_1 = x_2.$$

Тут було враховано те, що $u_1 - u_2 \in L \perp x_2 - x_1$. Таким чином, одержана суперечність остаточно доводить теорему.

Наслідки. 1. Для довільного підпростору L гільбертового простору H ($L \neq H$) існує елемент $x_{\perp} \neq 0$ ортогональний L . Для нього $\rho(x_{\perp}, L) = \|x_{\perp}\|$.

2. Для довільного підпростору L гільбертового простору H ($L \neq H$) і довільного вектора $x \in H$ існує єдиний елемент найкращого наближення вектора x елементами L .

► 1. $L \neq H \Rightarrow \exists x \in H, x \notin L \Rightarrow x = u_0 + x_{\perp}, x_{\perp} \neq 0, x_{\perp} \perp L$.

2. $\rho(x, L) = \|x_{\perp}\| = \|x - u_0\|$, $u_0 \in L \Rightarrow u_0$ – елемент найкращого наближення. ◀

У нормованому просторі розглянута проблема є більш складною. Тут елемент найкращого наближення може не існувати або бути не єдиним. Це пов'язано з тим, що, на відміну від гільбертового простору, геометрія нормованого простору не зовсім "повноцінна". Так, наприклад, в нормованому просторі можна стверджувати лише про існування "майже ортогонального" елемента до будь-якого підпростору (порівняти з наслідком 1).

Теорема 1.5.2. (Ф. Рісс, "Про майже перпендикуляр"). Нехай L – підпростір нормованого простору X , причому $L \neq X$. Для довільного $\varepsilon \in (0;1)$ існує елемент $z_\varepsilon \notin L$ такий, що $\|z_\varepsilon\|=1$ і $\rho(z_\varepsilon, L) > 1 - \varepsilon$ (рис. 8).

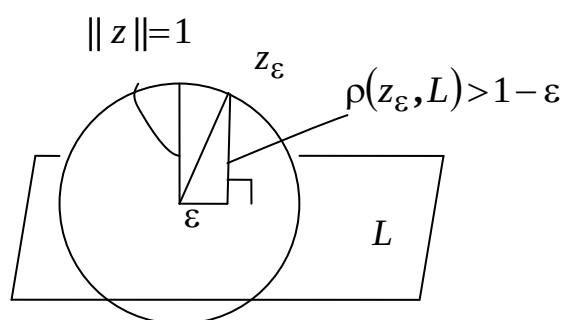


Рис. 8

Доведення. Нехай $x \notin L$. Покладемо $\inf_{u \in L} \|x - u\| = d > 0$ і

візьмемо довільне $\varepsilon \in (0,1)$. З означення точної нижньої грані випливає, що знайдеться $u_\varepsilon \in L$:

$$d \leq \|u_\varepsilon - x\| < \frac{d}{1 - \varepsilon}. \text{ Для елемента}$$

$$z_\varepsilon = \frac{u_\varepsilon - x}{\|u_\varepsilon - x\|} \text{ маємо } \|z_\varepsilon\|=1 \text{ і } z_\varepsilon \notin L.$$

Тоді

$$\|z_\varepsilon - u\| = \left\| \frac{u_\varepsilon - x}{\|u_\varepsilon - x\|} - u \right\| = \frac{\|x - (u_\varepsilon - u\|u_\varepsilon - x\|)\|}{\|u_\varepsilon - x\|} > \frac{d}{\frac{d}{1 - \varepsilon}} = 1 - \varepsilon.$$

Тут було використано то, що $u_\varepsilon - u\|u_\varepsilon - x\| \in L$.

Зазначимо, що існування перпендикуляра до підпростору L означало б наявність елемента $z_\varepsilon : \|z_\varepsilon\|=1, \rho(z_\varepsilon, L)=1$ (див. наслідок 1). Однак довести можна лише існування елемента, близького до перпендикуляра, для якого $\rho(z_\varepsilon, L)$ близьке до одиниці.

Ортогональне доповнення до лінійного многовиду.

Означення 1.5.4. Нехай L – лінійний многовид у гільбертовому просторі H . Сукупність елементів $x \in H$, ортогональних до L , називається ортогональним доповненням до L і позначається $L^\perp$.

Властивості ортогонального доповнення.

$$1. L^\perp - \text{підпростір в } H. \quad (1.52)$$

$$2. \bar{L} \oplus L^\perp = H. \quad (1.53)$$

$$2. \bar{L} = H \Leftrightarrow L^\perp = \{0\}. \quad (1.54)$$

► Твердження (1.52) перевіряється безпосередньо. Властивість (1.53) є лише іншою формою запису теореми 1.5.1. Твердження (1.54) безпосередньо випливає з (1.53). ◀

Зазначимо, що властивість (1.54) є корисним критерієм усюди щільності лінійного многовиду в гільбертовому просторі.

Приклад 1.5.3. У просторі l_2 розглянемо лінійний многовид l_2^0 , що складається з послідовностей, які мають лише скінченне число членів, відмінних від нуля. Вектори $\{e_i\}_{i=1}^\infty, e_i = (\delta_{ik})_{k=1}^\infty$ очевидно належать многовиду l_2^0 . Нехай $x = (\xi_i)_{i=1}^\infty \in (l_2^0)^\perp$. Тоді

$$x \perp e_i \quad \forall i \in N \Rightarrow 0 = (x, e_i) = \sum_{k=1}^\infty \xi_k \delta_{ik} = \xi_i \Rightarrow \xi_i = 0 \quad \forall i \in N \Rightarrow x = 0 \Rightarrow (l_2^0)^\perp = \{0\}.$$

З (1.54) випливає, що $\overline{l_2^0} = l_2$.

1.6. БАЗИСИ

Банахові простори зі зліченим базисом. Нехай B – нескінченновимірний банахів простір.

Означення 1.6.1. Нескінченна система елементів банахового простору називається лінійно незалежною, якщо кожна скінченна її підсистема лінійно незалежна.

Означення 1.6.2. Послідовність $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ елементів простору B називається базисом у цьому просторі, якщо кожний вектор $x \in B$ єдиним чином зображений збіжним рядом

$$x = \sum_{k=1}^\infty \xi_k e_k, \quad \xi_k \in R \quad (\xi_k \in C). \quad (1.55)$$

Числа $(\xi_k)_{k=1}^\infty$ називаються координатами вектора x у базисі $\{e_k\}_{k=1}^\infty$.

З однозначності зображення (1.55) випливає лінійна незалежність системи елементів $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ (чому?).

Приклад 1.6.1. Розглянемо простір l_p і набір елементів $\{e_k\}_{k=1}^\infty, e_k = (\delta_{ki})_{i=1}^\infty$. Покажемо, що вектори $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ утворюють базис

у просторі l_p . Візьмемо довільний вектор $x = (\xi_k)_{k=1}^{\infty} \in l_p \Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p < \infty$. Оскільки

$$\sum_{k=1}^n \xi_k e_k = \sum_{k=1}^n \xi_k (\delta_{ki})_{i=1}^{\infty} = \left(\sum_{k=1}^n \xi_k \delta_{ki} \right)_{i=1}^{\infty} = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, 0, 0, \dots\},$$

то $\|x - \sum_{k=1}^n \xi_k e_k\|^p = \sum_{k=n+1}^{\infty} |\xi_k|^p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ в силу збіжності ряду $\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p$.

Однозначність зображення $x = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k$ очевидна, тобто система

елементів $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ утворює базис.

Ортонормовані системи в гільбертовому просторі.

Означення 1.6.3. Система елементів $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset H$ гільбертового простору H називається ортонормованою системою (ОНС), якщо

$$(x_k, x_j) = \delta_{kj}, \quad k, j = 1, 2, \dots \quad (1.56)$$

Нагадаємо, що δ_{kj} – дельта-символ Кронекера. Рівність (1.56) показує, що будь-які два різних елементи ОНС ортогональні і кожний елемент нормований, тобто $\|x_k\| = 1 \quad \forall k \in N$.

Приклади 1.6.2. 1. У просторі l_2 система елементів $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$, $e_k = (\delta_{ki})_{i=1}^{\infty}$ є ортонормованою системою. Дійсно, $(e_k, e_j) = \sum_{i=1}^{\infty} \delta_{ki} \delta_{ji} = \delta_{kj}$.

2. У гільбертовому просторі $L_2^c[-\pi, \pi]$ система елементів $\{e_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$, $e_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}$ є ортонормованою системою, оскільки

$$(e_k, e_n) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \overline{e^{inx}} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx} e^{-inx} dx = \delta_{kn}.$$

Теорема 1.6.1. У гільбертовому просторі будь-яка ортонормована система лінійно незалежна.

Доведення. Нехай $\{e_{\alpha}\}_{\alpha}$ – деяка ОНС в гільбертовому просторі H , а $\{e_i\}_{i=1}^n$ – довільна її скінченна підсистема ($e_i \neq e_j$, якщо $i \neq j$).

Складемо лінійну комбінацію $\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$ векторів $\{e_i\}_{i=1}^n$ із довільними числовими коефіцієнтами $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ з основного поля гільбертового простору і прирівняємо її до нуля. Тоді після множення обох частин одержаної рівності скалярно на довільний елемент підсистеми e_k , дістанемо

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = 0 \Rightarrow \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i, e_k \right) = 0 \Rightarrow 0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i (e_i, e_k) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \delta_{ik} = \lambda_k \quad \forall k = 1, \dots, n,$$

тобто система $\{e_i\}_{i=1}^n$ є лінійно незалежною.

Процес ортогоналізації. Будь-яку лінійно незалежну систему $\{x_k\}_{k=1}^\infty$ елементів гільбертового простору H можна перетворити на ортонормовану систему лінійним перетворенням, яке описується наступним алгоритмом. На першому етапі за первісною системою $\{x_k\}_{k=1}^\infty$ будуюмо ортогональну систему $\{f_k\}_{k=1}^\infty$, яка після нормування стає ОНС $\{e_k\}_{k=1}^\infty$. Покладемо $f_1 = x_1$. Кожний наступний елемент f_k дорівнює елементу первісної системи x_k мінус лінійна комбінація вже побудованих елементів ортогональної системи, тобто

$$f_k = x_k - \sum_{i=1}^{k-1} c_{ki} f_i. \quad (1.57)$$

Коефіцієнти c_{ki} лінійної комбінації знаходяться з умови ортогональності вектора f_k до вже побудованих векторів $\{f_i\}_{i=1}^{k-1}$. Після скалярного множення обох частин рівності (1.57) на вектор f_j ($j = 1, \dots, k-1$) і врахування ортогональності дістаємо

$$(f_k, f_j) = (x_k, f_j) - \sum_{i=1}^{k-1} c_{ki} (f_i, f_j) \Rightarrow 0 = (x_k, f_j) - \sum_{i=1}^{k-1} c_{ki} \delta_{ij} (f_i, f_i) = (x_k, f_j) - c_{kj} \|f_j\|^2$$

$$c_{kj} = \frac{(x_k, f_j)}{\|f_j\|^2}. \quad (1.58)$$

Остаточно $e_k = \frac{f_k}{\|f_k\|}$.

Многочлени Лежандра. В якості прикладу на застосування процесу ортогоналізації ортогоналізуємо лінійно незалежну систему многочленів $\{t^k\}_{k=0}^\infty$ в гільбертовому просторі $L_2[-1,1]$. О в результаті

ортогональні многочлени називаються многочленами Лежандра. Використаємо формулу (1.57), однак запишемо її в іншому вигляді

$$x_k = f_k + \sum_{i=1}^{k-1} c_{ki} f_i. \quad (1.59)$$

В наших позначеннях $x_k \equiv t^k$, $f_k \equiv P_k(t)$ – многочлени Лежандра. З формули (1.57) видно, що $P_k(t)$ є многочленом степеня k , а з рівності (1.59), що $P_n(t) \perp t^k$ ($k=1, \dots, n-1$). Запишемо умову ортогональності многочленів у просторі $L_2[-1,1]$, тобто

$$(f_n, x_k) \equiv \int_{-1}^1 P_n(t) t^k dt = 0 \quad (k=1, \dots, n-1). \quad (1.60)$$

Фактично треба знайти многочлен n -ого степеня $P_n(t)$ з умов (1.60). Зазначимо, що многочлен $P_n(t)$ завжди можна подати у вигляді

$$P_n(t) = \frac{d^n}{dt^n} p_{2n}(t), \quad (1.61)$$

де $p_{2n}(t)$ – деякий многочлен степеня $2n$. Підставимо (1.61) в (1.60) і k разів проінтегруємо отриманий інтеграл частинами:

$$t^k \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} p_{2n}(t) \Big|_{-1}^1 - k t^{k-1} \frac{d^{n-2}}{dt^{n-2}} p_{2n}(t) \Big|_{-1}^1 + \dots + (-1)^k k! \frac{d^{n-k-1}}{dt^{n-k-1}} p_{2n}(t) \Big|_{-1}^1 = 0.$$

Щоб остання рівність виконувалося для усіх $k=0, \dots, n-1$ достатньо вимагати, щоб

$$p_{2n}(t) \Big|_{t=\pm 1} = \frac{d}{dt} p_{2n}(t) \Big|_{t=\pm 1} = \dots = \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} p_{2n}(t) \Big|_{t=\pm 1} = 0,$$

тобто точки $t=\pm 1$ мають бути коренями кратності n многочлена $p_{2n}(t)$. Але тоді $p_{2n}(t) = a_n (t+1)^n (t-1)^n = a_n (t^2 - 1)^n$. Підставляючи в (1.61), дістаємо

$$P_n(t) = a_n \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n. \quad (1.62)$$

Старший коефіцієнт a_n можна обрати довільно. В теорії ортогональних многочленів його покладають рівним $a_n = \frac{1}{2^n n!}$. Якщо

вимагати, щоб многочлени $P_n(t)$ були ортонормованими, то

$a_n = \frac{1}{2^n n!} \sqrt{n + \frac{1}{2}}$. Отже, многочлени Лежандра визначаються формулою (1.62).

Ряди Фур'є в гільбертовому просторі. Нехай H – сепарабельний гільбертів простір, $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ – ОНС елементів простору H , $x \in H$.

Означення 1.6.4. Числа $c_k = (x, e_k)$ називаються коефіцієнтами Фур'є елемента x за ОНС $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k$ – рядом Фур'є елемента x , частинна сума $S_n = \sum_{k=1}^n c_k e_k$ – відрізком ряду Фур'є.

Позначимо через $L_n = \text{Lin}\{e_k\}_{k=1}^n$ – лінійну оболонку перших n векторів ОНС $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$. Ця множина містить усі можливі елементи виду $u = \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k$, $\alpha_k \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$ і є n -мірним підпростором у просторі H .

Теорема 1.6.2. (Екстремальна властивість відрізка ряду Фур'є). Квадрат відстані від елемента $x \in H$ до підпростору L_n дорівнює $d_n^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^n |c_k|^2$ і досягається на відрізку ряду Фур'є S_n , тобто. S_n – елемент найкращого наближення елемента x підпростором L_n .

Доведення. Перетворимо квадрат величини відхилення елемента x від елемента $u = \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k \in L_n$, використовуючи співвідношення (1.56)

$$\begin{aligned} \|x - u\|^2 &= \left(x - \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k, x - \sum_{m=1}^n \alpha_m e_m \right) = \|x\|^2 - \sum_{m=1}^n \bar{\alpha}_m c_m - \sum_{k=1}^n \alpha_k \bar{c}_k + \\ &+ \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n \alpha_k \bar{\alpha}_m (e_k, e_m) = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^n |c_k|^2 + \sum_{k=1}^n |c_k - \alpha_k|^2. \end{aligned}$$

Точна нижня грань в обох частинах останньої рівності досягається при виконанні умови $\alpha_k = c_k \quad \forall k = 1, \dots, n$, тобто на елементі

$$u = \sum_{k=1}^n c_k e_k = S_n$$

$$\rho^2(x, L_n) = \inf_{u \in L_n} \|x - u\|^2 = \inf_{\alpha_k} \|x - u\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^n |c_k|^2 = \|x - S_n\|^2.$$

Наслідок. Для довільного елемента $x \in H$ і довільної ОНС $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ справедлива нерівність Бесселя

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \leq \|x\|^2. \quad (1.63)$$

З нерівності (1.63), зокрема, випливає, що $\lim_{k \rightarrow \infty} c_k = 0$.

Повні ОНС. Рівність Парсеваля.

Означення 1.6.5. ОНС елементів $\{e_k\}_{k=1}^{\infty} \in H$ гільбертового простору H називається повною, якщо ряд Фур'є довільного елемента $x \in H$ за цією системою збігається до елемента x у просторі H . Повна ОНС інакше називається ортонормованим базисом.

Приклад 1.6.3. Для довільної функції $x(t) \in L_2^c[-\pi, \pi]$ її ряд Фур'є за тригонометричною системою функцій $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int} \right\}_{n=-\infty}^{\infty}$ має вигляд

$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int}$, де $c_n = \left(x, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int} \right) = \int_{-\pi}^{\pi} x(t) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-int} dt$ – коефіцієнти Фур'є. В теорії рядів Фур'є показується, що цей ряд збігається до функції $x(t)$ в середньому квадратичному, тобто у просторі $L_2^c[-\pi; \pi]$.

Це означає, що система функцій $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int} \right\}_{n=-\infty}^{\infty}$ є повною ОНС у гільбертовому просторі $L_2^c[-\pi; \pi]$.

Теорема 1.6.3. Для того, щоб ОНС елементів $\{e_k\}_{k=1}^{\infty} \in H$ була повною в гільбертовому просторі H , необхідно і достатньо, щоб $\forall x \in H$ виконувалася рівність Парсеваля:

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2. \quad (1.64)$$

Доведення. З доведення теореми 1.6.2 випливає, що $\|x - S_n\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^n |c_k|^2$. Переходячи в цій рівності до границі за умови

$n \rightarrow \infty$, дістаємо $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x - S_n\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2$, або

$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = x \Leftrightarrow \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2$, що доводить теорему.

З означення 1.6.5 і критерію (1.54) безпосередньо випливає

Теорема 1.6.4. ОНС елементів $\{e_k\}_{k=1}^{\infty} \in H$ повна в гільбертовому просторі H тоді і тільки тоді, коли у просторі H не існує елемента, відмінного від нуля, ортогонального до всіх елементів ОНС.

Приклад 1.6.4. Лінійний многовид $CL_2[-1,1]$ неперервних на відрізку $[-1,1]$ функцій усюди щільний у гільбертовому просторі $L_2[-1,1]$ (див. теорему 3 з пояснень і доповнень до глави 1). Лінійний многовид $P[-1,1]$ многочленів усюди щільний у просторі $C[-1,1]$ (теорема Вейєрштрасса про рівномірне наближення неперервної на відрізку функції многочленами) і, в силу підпорядкованості інтегральної норми рівномірній, усюди щільний у просторі $L_2[-1,1]$. Тому для доведення повноти системи многочленів Лежандра $\{P_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ у просторі $L_2[-1,1]$ достатньо показати, що не існує відмінного від тотожного нуля многочлена $q(t)$, ортогонального одночасно до всіх многочленів розглянутої системи на відрізку $[-1,1]$.

Припустимо протилежне, тобто нехай існує многочлен $q(t) = \sum_{k=0}^m a_k t^k$,

відмінний від тотожного нуля, для якого $\int_{-1}^1 q(t) P_n(t) dt = 0 \quad n = 0, 1, \dots, m$

формули (1.59) випливає, що $t^k = \sum_{i=0}^k c_{ki} P_i(t) \quad k = 0, 1, \dots, m$, причому

коефіцієнт $c_{kk} = 1$. Підставимо цей розклад у многочлен $q(t)$

$$q(t) = \sum_{k=0}^m a_k t^k = \sum_{k=0}^m a_k \sum_{i=0}^k c_{ki} P_i(t) = \sum_{i=0}^m P_i(t) \sum_{k=i}^m a_k c_{ki}$$

і запишемо умову ортогональності

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 q(t) P_n(t) dt = 0 \quad n = 0, 1, \dots, m &\Rightarrow \sum_{i=0}^m \int_{-1}^1 P_i(t) P_n(t) dt \sum_{k=i}^m a_k c_{ki} = 0 \quad n = 0, 1, \dots, m \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sum_{i=0}^m \int_{-1}^1 P_i(t) P_n(t) dt \sum_{k=i}^m a_k c_{ki} = 0 \quad n = 0, 1, \dots, m \Rightarrow \sum_{k=n}^m a_k c_{kn} = 0 \quad n = 0, 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Таким чином, коефіцієнти $\{a_k\}_{k=0}^m$ задовольняють однорідну лінійну систему з визначником, відмінним від нуля (чому?). Отже, $a_k = 0 \quad \forall k = 0, \dots, m$, тобто $q(t) \equiv 0$ (суперечність).

Теорема 1.6.5. У кожному сепарабельному гільбертовому просторі існує ортонормований базис.

Доведення. Нехай H – сепарабельний гільбертів простір. Тоді у ньому існує зліченна усюди щільна лінійно незалежна система елементів $\{x_k\}_{k=1}^\infty$. Застосовуючи до цієї системи процес ортогоналізації, дістанемо ОНС $\{e_k\}_{k=1}^\infty$, причому $\text{Lin}\{x_k\}_{k=1}^\infty = \text{Lin}\{e_k\}_{k=1}^\infty$. Отже $\overline{\text{Lin}\{e_k\}_{k=1}^\infty} = \overline{\text{Lin}\{x_k\}_{k=1}^\infty} = H$, тобто система $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ повна у просторі H .

1.7. КОМПАКТНІСТЬ

У класичному математичному аналізі доводиться теорема Больцано-Вейєрштрасса, яка встановлює важливий принцип локальної компактності дійсної осі, згідно з яким із кожної обмеженої числової послідовності можна виділити збіжну підпослідовність. Цей принцип без зміни переноситься на усі скінченновимірні нормовані простори. В нескінченновимірному випадку звичайно відсутня навіть локальна компактність і умови компактності є більш жорсткими, ніж обмеженості.

Означення 1.7.1. Множина K метричного простору X називається компактною в X (в собі), якщо з кожної послідовності елементів цієї множини можна виділити збіжну в X (в K) підпослідовність. Компактний метричний простір називається компактом. Метричний простір називається локально компактним, якщо кожна його обмежена множина компактна.

Приклади 1.7.1. 1. Метричний простір $X = [0, 1]$ з відстанню $\rho(x, y) = |x - y|$ є компактом, що випливає з теореми Больцано-Вейєрштрасса.

2. Простори R і E_n не є компактами, однак локально компактні (впливає з теореми Больцано-Вейєрштрасса).

3. Простір $C[0, 1]$ не є навіть локально компактним, тобто не всяка обмежена множина в цьому просторі є компактною. Дійсно, розглянемо замкнену одиничну кулю $\bar{B}_1(0)$ в $C[0, 1]$ і приналежну їй

послідовність $\{t^n\}_{n=1}^\infty$. Однак ніяка підпослідовність цієї послідовності

не є фундаментальною, тобто збігатись у просторі $C[0,1]$ не може.

Перевіримо це. Досліджуючи на екстремум функцію $t^n - t^{n+p}$ на відрізку $[0,1]$, неважко зрозуміти, що її максимум досягається в точці

$$t = \left(\frac{n}{n+p}\right)^{\frac{1}{p}} \text{ і дорівнює } \max_{t \in [0,1]} |t^n - t^{n+p}| = \left(\frac{n}{n+p}\right)^{\frac{n}{p}} \frac{p}{n+p}.$$

З останньої формули випливає, що при кожному як завгодно великому фіксованому n і $p \rightarrow \infty$ максимум прямує до 1, тобто

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \rho(t^n, t^{n+p}) = 1.$$

4. Простір l_2 також не є локально компактним, оскільки для послідовності $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, $x_k = (\delta_{ik})_{i=1}^{\infty} \in \bar{B}_1(0) \subset l_2$ виконується умова $\rho(x_k, x_m) = \sqrt{2} \quad \forall k \neq m$.

Критерій компактності Хаусдорфа.

Означення 1.7.2. Множина M_{ε} метричного простору X називається ε -мережею для множини $M \subset X$, якщо для кожної точки $x \in M$ знайдеться точка $x_{\varepsilon} \in M_{\varepsilon}$ така, що відстань $\rho(x, x_{\varepsilon}) < \varepsilon$.

Зазначимо, що ε -мережа для множини M має наступний геометричний зміст. Якщо в кожній точці $x_{\varepsilon} \in M_{\varepsilon}$ побудувати кулю $B_{\varepsilon}(x_{\varepsilon})$ радіуса ε з центром в цій точці, то об'єднання одержаних куль покриє множину M , тобто $\bigcup_{x_{\varepsilon} \in M_{\varepsilon}} B_{\varepsilon}(x_{\varepsilon}) \supset M$.

Приклад 1.7.2. Множина Q раціональних чисел є ε -мережею для простору R при кожному як завгодно малому $\varepsilon > 0$.

Теорема 1.7.1. (Ф. Хаусдорф) Для компактності множини K метричного простору X необхідно, а у випадку повноти X і достатньо, щоб для довільного $\varepsilon > 0$ у просторі X існувала скінченна ε -мережа для множини K .

Доведення. Доведемо необхідність умови. Припустимо протилежне, тобто нехай K – компактна множина, $\varepsilon > 0$ – деяке число, для якого не існує ε -мережі для множини K . Нехай x_1 – будь-яка точка з множини K . Оскільки множина $\{x_1\}$ не утворює ε -мережі для множини K , то знайдеться точка $x_2 \in K$ така, що $\rho(x_2, x_1) \geq \varepsilon$. У свою чергу, множина $\{x_1, x_2\}$ також не є ε -мережею для множини K . Отже, знайдеться точка $x_3 \in K$ така, що одночасно $\rho(x_3, x_1) \geq \varepsilon$ і $\rho(x_3, x_2) \geq \varepsilon$. Продовжуючи цей процес, за зліченне число кроків ми

побудуємо послідовність $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ елементів множини K , для яких $\rho(x_k, x_m) \geq \varepsilon \quad \forall k \neq m$. Остання нерівність, однак, суперечить компактності множини K (чому?), тобто вихідне припущення виявилось невірним.

Доведемо обернене твердження. Нехай X – повний метричний простір, в якому для кожного $\varepsilon > 0$ існує скінченна ε –мережа для множини K . Розглянемо послідовність $\varepsilon_n \downarrow 0$. Для кожного ε_n

побудуємо скінченну ε_n –мережу з елементів $\{a_i^{(n)}\}_{i=1}^{k_n}$. Нехай $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ довільна послідовність елементів з множини K . З геометричного сенсу ε_n –мережі випливає, що об'єднання куль $\bigcup_{i=1}^{k_n} B_{\varepsilon_n}(a_i^{(n)})$ радіуса

ε_n з центрами в точках мережі покриває множину K при кожному $n \in \mathbb{N}$, а отже, і точки послідовності $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$. Розглянемо покриття при $n=1$. Оскільки скінченне покриття покриває нескінченну множину $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, то принаймні в одну кулю покриття, наприклад $B_{\varepsilon_1}(a_{i_1}^{(1)})$, потрапить нескінченна частина цієї множини, тобто підпослідовність $\{x_k^{(1)}\}_{k=1}^{\infty}$. Розглянемо покриття при $n=2$. Як і вище, в одну з куль покриття, наприклад $B_{\varepsilon_2}(a_{i_2}^{(2)})$, потрапить нескінченна частина

послідовності $\{x_k^{(1)}\}_{k=1}^{\infty}$, тобто її підпослідовність $\{x_k^{(2)}\}_{k=1}^{\infty}$. Продовжуючи цей процес необмежено, в результаті дістанемо послідовність вкладених нескінченних множин

$$\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \supset \{x_k^{(1)}\}_{k=1}^{\infty} \supset \{x_k^{(2)}\}_{k=1}^{\infty} \supset \dots \supset \{x_k^{(n)}\}_{k=1}^{\infty} \supset \dots,$$

причому $\{x_k^{(n)}\}_{k=1}^{\infty} \subset B_{\varepsilon_n}(a_{i_n}^{(n)})$. Оберемо послідовність елементів

$\{\bar{x}_k\}_{k=1}^{\infty}$ так, що $\bar{x}_n \in \{x_k^{(n)}\}_{k=1}^{\infty}$, причому $\bar{x}_n$ не збігається з елементами $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_{n-1}$. Для елементів такої послідовності виконується умова

$$\begin{aligned} \bar{x}_n \in B_{\varepsilon_n}(a_{i_n}^{(n)}), \quad \bar{x}_{n+p} \in \{x_k^{(n+p)}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{x_k^{(n)}\}_{k=1}^{\infty} \subset B_{\varepsilon_n}(a_{i_n}^{(n)}) \Rightarrow \\ \Rightarrow \rho(\bar{x}_n, \bar{x}_{n+p}) < 2\varepsilon_n, \end{aligned}$$

тобто послідовність $\{\bar{x}_k\}_{k=1}^{\infty}$ – фундаментальна. В силу повноти

простору X існує $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{x}_n = \bar{x} \in X$, отже, з послідовності $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$

вибрана збіжна підпослідовність $\{\bar{x}_k\}_{k=1}^{\infty}$, тобто множина K компактна.

Наслідок. Для того щоб множина K повного метричного простору X була компактною, достатньо, щоб для кожного $\varepsilon > 0$ існувала компактна ε -мережа для множини K .

Доведення. Нехай $K_{\varepsilon/2}$ – компактна $\varepsilon/2$ -мережа для множини K , тобто $\forall x \in K \exists x_1 \in K_{\varepsilon/2} : \rho(x, x_1) < \varepsilon/2$. Згідно з попередньою теоремою, для компакної множини $K_{\varepsilon/2}$ існує скінченна $\varepsilon/2$ -мережа $M_{\varepsilon/2}$, тобто для елемента $x_1 \in K_{\varepsilon/2}$ знайдеться елемент $x_2 \in M_{\varepsilon/2}$ такий, що $\rho(x_1, x_2) < \varepsilon/2$. Тоді $\rho(x, x_2) < \rho(x, x_1) + \rho(x_1, x_2) < \varepsilon$, тобто множина $M_{\varepsilon/2}$ є скінченною ε -мережею для множини K . Отже, в силу теореми Хаусдорфа множина K компактна.

Приклад 1.7.3. Розглянемо множину K елементів $\xi = (\xi_k)_{k=1}^{\infty} \in l_1$, для яких $|\xi_k| \leq \frac{1}{2^k}$. Покажемо, що ця множина компактна. Для цього

задамося довільним $0 < \varepsilon < 1$ і побудуємо для множини K скінченну ε -мережу наступним чином. Спочатку за заданим числом ε

знайдемо таке натуральне m , щоб $\sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \frac{\varepsilon}{2}$. Підсумовуючи

геометричну прогресію, дістаємо, що m повинно задовольняти умову $m > \log_2 \frac{2}{\varepsilon}$. Далі, для кожного натурального k розглянемо відрізок

дійсної осі $|\xi_k| \leq \frac{1}{2^k}$. Розіб'ємо його на 2^{m+1} рівних відрізків точками

$\frac{i_k}{2^{k+m}}$, де i_k пробігає усі цілі числа від -2^m до 2^m . Довжина кожного з

одержаних відрізків поділу дорівнює $\frac{1}{2^{k+m}}$. Отже, кожне дійсне число

$\xi_k : |\xi_k| \leq \frac{1}{2^k}$ потрапить в деякий відрізок поділу і буде знаходитися на

відстані, що не перевищує $\frac{1}{2^{k+m+1}}$ від його найближчого кінця. Тоді

існує ціле число i_k зі вказаного вище діапазону таке, що

$|\xi_k - \frac{i_k}{2^{k+m}}| \leq \frac{1}{2^{k+m+1}} < \frac{1}{2^{k+m}}$. Розглянемо скінченну множину точок

$M_\varepsilon = \{a_{i_1 i_2 \dots i_m}\}_{i_1, i_2, \dots, i_m = -2^m}^{2^m}$ простору l_1 , де

$a_{i_1 i_2 \dots i_m} = \left\{ \frac{i_1}{2^{m+1}}, \frac{i_2}{2^{m+2}}, \dots, \frac{i_m}{2^{2m}}, 0, 0, \dots \right\}$. Множина M_ε є скінченною

ε -мережею для множини K . Дійсно, з одержаної вище оцінки випливає існування послідовності $a_{i_1 i_2 \dots i_m}$ такої, що

$$\rho(\xi, a_{i_1 i_2 \dots i_m}) = \sum_{k=1}^m |\xi_k - \frac{i_k}{2^{k+m}}| + \sum_{k=m+1}^{\infty} |\xi_k| < \sum_{k=1}^m \frac{1}{2^{k+m}} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Компактні в собі множини метричного простору є аналогами замкнених обмежених множин числової прямої. В цьому можна впевнитися, познайомившись із наступними властивостями компактних множин.

Властивості компактних множин.

1. Компактна множина метричного простору обмежена.
2. Компактна в собі множина метричного простору замкнена.
3. Нехай K – компактна в собі множина метричного простору X , $f : K \rightarrow R$ – неперервна числова функція. Тоді $f(x)$ обмежена на K і досягає на цій множині своєї верхньої і нижньої межі (теорема Вейєрштрасса).

4. Компактний метричний простір є сепарабельним.

► 1. Нехай K компактна множина метричного простору X . Тоді існує скінченна множина $M_1 = \{x_k\}_{k=1}^n$, яка є 1-мережею для множини K . За означенням мережі $\forall x \in K \exists x_k \in M_1 : \rho(x, x_k) < 1$. Тоді для кожної точки $a \in X$ і довільного $x \in K$ виконується нерівність $\rho(x, a) \leq \rho(x, x_k) + \rho(x_k, a) < 1 + d$, де $d = \max_{i=1, \dots, n} \rho(x_i, a)$.

4. Розглянемо послідовність $\varepsilon_n \downarrow 0$. Для кожного ε_n побудуємо скінченну ε_n -мережу з елементів $\{a_i^{(n)}\}_{i=1}^{k_n}$. Оскільки об'єднання куль

$\bigcup_{i=1}^{k_n} B_{\varepsilon_n}(a_i^{(n)})$ покриває компактний метричний простір X при кожному

$n \in N$, то зліченною усюди щільною множиною у просторі X є

множина $\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{k_n} a_i^{(n)}$.

Властивість 2 очевидна, а властивість 3 доводиться так само як і для неперервних на відрізку функцій. ◀

Крім загального критерію Хаусдорфа для визначення компактності множин використовуються також окремі критерії в окремих метричних просторах. Наведемо тут відповідний результат тільки для простору неперервних функцій.

Розглянемо простір $C[a, b]$ функцій, неперервних на відрізку $[a, b]$, і деяку множину M цього простору.

Означення 1.7.3. Функції з множини M називаються рівномірно обмеженими, якщо існує така стала $c > 0$, що для всіх функцій $x(t) \in M$ виконується нерівність $|x(t)| \leq c \quad \forall t \in [a, b]$.

Зазначимо, що рівномірна обмеженість функцій множини M рівносильна обмеженості цієї множини в метричному просторі $C[a, b]$ (чому?).

Означення 1.7.4. Функції з множини M називаються рівностепеневно неперервними, якщо для довільного як завгодно малого $\varepsilon > 0$ існує залежне від нього $\delta(\varepsilon) > 0$ таке, що для будь-яких точок $t_1, t_2 \in [a, b]$, таких, що $|t_1 - t_2| < \delta$, виконується нерівність $|x(t_1) - x(t_2)| < \varepsilon$ одночасно для всіх функцій $x(t) \in M$.

Теорема 1.7.2. (Ч. Арцела, Дж. Асколі) Для того щоб множина $M \subset C[a, b]$ була компактною, необхідно і достатньо, щоб функції з M були рівномірно обмежені і рівностепеневно неперервні.

Доведення. Необхідність. Нехай M – компактна множина простору $C[a, b]$. Тоді в силу властивості 1 множина M обмежена, тобто функції з множини M рівномірно обмежені. Покажемо, що вони рівностепеневно неперервні. Оберемо довільне $\varepsilon > 0$ і позначимо через

$M_\varepsilon = \{x_k(t)\}_{k=1}^n$ ε -мережу для множини M . З властивостей

неперервної функції на відрізку відомо, що на цьому відрізку вона рівномірно неперервна. Це означає, що для обраного $\varepsilon > 0$ існує $\delta_k(\varepsilon) > 0$ таке, що для будь-яких точок $t_1, t_2 \in [a, b]$, для яких $|t_1 - t_2| < \delta_k$, виконується нерівність $|x_k(t_1) - x_k(t_2)| < \varepsilon$. Візьмемо $\delta = \min_{k=1, \dots, n} \delta_k$. Тоді при виконанні умови $|t_1 - t_2| < \delta$ нерівність

$|x_k(t_1) - x_k(t_2)| < \varepsilon$ буде справджуватись одночасно для всіх функцій з множини M_ε . Розглянемо довільну функцію $x(t) \in M$. З означення ε -мережі випливає, що $\exists x_i(t) \in M_\varepsilon$ така, що

$$\rho(x, x_i) < \varepsilon \Rightarrow \max_{t \in [a, b]} |x(t) - x_i(t)| < \varepsilon \Rightarrow |x(t) - x_i(t)| < \varepsilon \quad \forall t \in [a, b].$$

Розглянемо довільні точки $t_1, t_2 \in [a, b]$, що задовольняють умову $|t_1 - t_2| < \delta$. Тоді на підставі попередніх оцінок

$$|x(t_1) - x(t_2)| = |x(t_1) - x_i(t_1) + x_i(t_1) - x_i(t_2) + x_i(t_2) - x(t_2)| \leq |x(t_1) - x_i(t_1)| + |x_i(t_1) - x_i(t_2)| + |x_i(t_2) - x(t_2)| < 3\varepsilon,$$

причому нерівність виконується одночасно для усіх функцій $x(t) \in M$. Отже, рівностепенева неперервність доведена.

Достатність. Нехай множина M складається з рівномірно обмежених і рівностепенево неперервних функцій. Доведемо її компактність. Оберемо довільну послідовність $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty} \subset M$.

Покажемо, що з неї можна виділити збіжну підпослідовність. Візьмемо довільне число $\varepsilon > 0$. За властивістю рівностепеневої неперервності функцій з множини M знайдеться число $\delta(\varepsilon) > 0$. За теоремою Больцано-Вейєрштрасса відрізок $[a, b]$ є компактом. Тоді на підставі критерію компактності знайдеться скінченна δ -мережа

$T_\delta = \{t_i\}_{i=1}^k \subset [a, b]$ для цього відрізка. Розглянемо числову

послідовність $\{x_n(t_1)\}_{n=1}^{\infty}$. Вона обмежена (чому?). За теоремою

Больцано-Вейєрштрасса з неї можна обрати збіжну підпослідовність, яку позначимо $\{x_n^{(1)}(t_1)\}_{n=1}^{\infty}$. На тій же підставі з числової послідовності

$\{x_n^{(1)}(t_2)\}_{n=1}^{\infty}$ можна обрати збіжну підпослідовність $\{x_n^{(2)}(t_2)\}_{n=1}^{\infty}$. Через k

кроків отримаємо підпослідовність $\{x_n^{(k)}(t)\}_{n=1}^{\infty}$ первісної послідовності, збіжну в кожній точці множини T_δ . Покажемо, що послідовність

$\{x_n^{(k)}(t)\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна у просторі $C[a, b]$. Для довільного $t \in [a, b]$

знайдеться $t_s \in T_\delta$ таке, що $|t - t_s| < \delta$. Тоді

$$|x_{n+p}^{(k)}(t) - x_n^{(k)}(t)| = |x_{n+p}^{(k)}(t) - x_{n+p}^{(k)}(t_s) + x_{n+p}^{(k)}(t_s) - x_n^{(k)}(t_s) + x_n^{(k)}(t_s) - x_n^{(k)}(t)| \leq$$

$$\leq |x_{n+p}^{(k)}(t) - x_{n+p}^{(k)}(t_s)| + |x_{n+p}^{(k)}(t_s) - x_n^{(k)}(t_s)| + |x_n^{(k)}(t_s) - x_n^{(k)}(t)| \leq 3\varepsilon \quad n > n_0, p \in \mathbb{N}$$

При оцінці першого і третього модуля було використано умову рівностепеневої неперервності функцій з множини M , а при оцінці

другого – збіжність послідовності $\{x_n^{(k)}(t)\}_{n=1}^{\infty}$ у точках множини T_δ .

Остання нерівність означає фундаментальність послідовності

$\{x_n^{(k)}(t)\}_{n=1}^{\infty}$, а значить, в силу повноти простору $C[a, b]$, її збіжність.

Отже, з довільної послідовності $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty} \subset M$ обрана збіжна підпослідовність. Тому множина M компактна.

Зауваження. Не змінюючи суті доведення, можна отримати загальний результат, якщо відрізок $[a, b]$ замінити довільною компактною в собі множиною G довільного метричного простору. В цьому випадку $C(G)$ – простір функцій $x: G \rightarrow R$, неперервних на G .

Приклад 1.7.4. У просторі $C[a, b]$ розглянемо множину функцій $M = \{x(t) \in C^1[a, b], |x'(t)| \leq m, x(a) = 0\}$ неперервно диференційовних, з рівномірно обмеженими похідними і нульовим значенням в точці a .

Кожну функцію $x(t) \in M$ можна подати інтегралом $x(t) = \int_a^t x'(s) ds$, з чого

випливають оцінки

$$|x(t)| = \left| \int_a^t x'(s) ds \right| \leq \int_a^t |x'(s)| ds \leq m(b-a), \quad |x(t_2) - x(t_1)| = \left| \int_{t_1}^{t_2} x'(s) ds \right| \leq m|t_2 - t_1| \quad \forall x \in M$$

які показують, що функції з множини M рівномірно обмежені і рівностепенно неперервні. З теореми 1.7.2 випливає, що ця множина компактна.

Локальна компактність у нормованому просторі.

Теорема 1.7.3. Для того, щоб підпростір L нормованого простору X був локально компактним, необхідно і достатньо, щоб він був скінченновимірним.

Доведення. Припустимо, що підпростір L локально компактний і нескінченновимірний. Розглянемо довільний елемент $x_1 \in L: \|x_1\| = 1$ і одновимірний підпростір $L_1 = \text{Lin}\{x_1\}$. За теоремою 1.5.2 про "майже перпендикуляр" існує елемент $x_2 \in L: \|x_2\| = 1$ такий, що

$$\rho(x_2, L_1) > \frac{1}{2} \Rightarrow \|x_2 - x_1\| > \frac{1}{2}.$$

Позначимо через $L_2 = \text{Lin}\{x_i\}_{i=1}^2$. Повторно застосовуючи теорему про "майже перпендикуляр", упевнюємося в існуванні елемента $x_3 \in L: \|x_3\| = 1$ такого, що

$$\rho(x_3, L_2) > \frac{1}{2} \Rightarrow \|x_3 - x_1\| > \frac{1}{2}, \|x_3 - x_2\| > \frac{1}{2}.$$

Оскільки підпростір L нескінченновимірний, то вказаний процес можна повторювати необмежено. За зліченне число кроків з підпростору L буде виділена послідовність $\{x_k\}_{k=1}^\infty$, що належить одиничній кулі, для елементів якої

$$\|x_k - x_j\| > \frac{1}{2} \quad k \neq j.$$

Остання нерівність означає, що з послідовності $\{x_k\}_{k=1}^\infty$ не можна виділити збіжну підпослідовність, тобто обмежена множина підпростору L не є компактною. Це суперечить локальній

компактності L , тобто підпростір L є скінченновимірним. Обернене твердження доводиться застосуванням теореми Больцано – Вейерштрасса.

ПОЯСНЕННЯ І ДОПОВНЕННЯ ДО ГЛАВИ 1

Нерівність Гельдера. Розглянемо дійсні числа $p > 1$ і $q > 1$, пов'язані співвідношенням

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \quad (1.65)$$

З останньої рівності випливає, що $p - 1 = \frac{1}{q - 1}$, отже, функції $y = x^{p-1}$ і

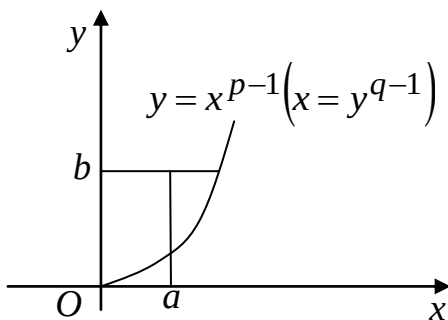


Рис. 9

$x = y^{q-1}$ взаємно обернені. На рис. 9 зображений графік цих функцій. Оберемо довільні додатні числа a і b відповідно на осях координат Ox і Oy . З рисунка видно, що площа прямокутника зі сторонами a і b завжди не перевищує суми площ криволінійних трикутників, обмежених графіком розглянутих функцій, осями координат і лініями $x = a$ і $y = b$. Отже,

$$ab \leq \int_0^a x^{p-1} dx + \int_0^b y^{q-1} dy = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \quad (1.66)$$

Нерівність (1.66) називається нерівністю Юнга.

З нерівності Юнга випливає важлива у функціональному аналізі нерівність Гельдера:

$$\sum_{k=1}^m |\xi_k \eta_k| \leq \left(\sum_{k=1}^m |\xi_k|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^m |\eta_k|^q \right)^{1/q}, \quad (1.67)$$

де $(\xi_k)_{k=1}^m, (\eta_k)_{k=1}^m$ - довільні набори комплексних чисел, $p > 1$ і $q > 1$ що задовольняють співвідношення (1.65). Для доведення достатньо підставити в нерівність Юнга замість чисел a і b вираз

$$a = \frac{|\xi_k|}{\alpha_p}, \quad b = \frac{|\eta_k|}{\beta_q}, \quad \alpha_p = \left(\sum_{k=1}^m |\xi_k|^p \right)^{1/p}, \quad \beta_q = \left(\sum_{k=1}^m |\eta_k|^q \right)^{1/q}$$

і підсумувати обидві частини одержаної нерівності по k від 1 до m . Дійсно,

$$\frac{|\xi_k|}{\alpha_p} \cdot \frac{|\eta_k|}{\beta_q} \leq \frac{|\xi_k|^p}{p\alpha_p^p} + \frac{|\eta_k|^q}{q\beta_q^q} \Rightarrow \sum_{k=1}^m \frac{|\xi_k|}{\alpha_p} \cdot \frac{|\eta_k|}{\beta_q} \leq \sum_{k=1}^m \frac{|\xi_k|^p}{p\alpha_p^p} + \frac{|\eta_k|^q}{q\beta_q^q} =$$

$$\frac{1}{p\alpha_p^p} \sum_{k=1}^m |\xi_k|^p + \frac{1}{q\beta_q^q} \sum_{k=1}^m |\eta_k|^q = \frac{\alpha_p^p}{p\alpha_p^p} + \frac{\beta_q^q}{q\beta_q^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Звідки, $\sum_{k=1}^m |\xi_k| \cdot |\eta_k| \leq \alpha_p \beta_q$.

Зазначимо, що в нерівності Гельдера скінченні суми можна замінити на нескінченні за умови збіжності рядів $\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p < \infty$, $\sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k|^q < \infty$. Існує інтегральний аналог нерівності Гельдера

$$\int_a^b |x(t)y(t)| dt \leq \left(\int_a^b |x(t)|^p dt \right)^{1/p} \left(\int_a^b |y(t)|^q dt \right)^{1/q}, \quad (1.68)$$

який може бути доведений аналогічно.

Нерівність Мінковського. Для довільних наборів комплексних чисел $(\xi_k)_{k=1}^m$ і $(\eta_k)_{k=1}^m$ і дійсного $p > 1$ справджується наступна нерівність:

$$\left(\sum_{k=1}^m |\xi_k + \eta_k|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^m |\xi_k|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^m |\eta_k|^p \right)^{1/p}. \quad (1.69)$$

Використовуючи нерівність трикутника для комплексних чисел $|\xi_k + \eta_k| \leq |\xi_k| + |\eta_k|$, запишемо

$$\sum_{k=1}^m |\xi_k + \eta_k|^p = \sum_{k=1}^m |\xi_k + \eta_k|^{p-1} |\xi_k + \eta_k| \leq \sum_{k=1}^m |\xi_k + \eta_k|^{p-1} |\xi_k| +$$

$$+ \sum_{k=1}^m |\xi_k + \eta_k|^{p-1} |\eta_k|.$$

Кожний із двох одержаних доданків перетворимо за допомогою нерівності Гельдера (використаємо введені вище позначення)

$$\sum_{k=1}^m |\xi_k + \eta_k|^{p-1} |\xi_k| \leq \left(\sum_{k=1}^m |\xi_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^m |\xi_k + \eta_k|^{(p-1)q} \right)^{\frac{1}{q}} = \alpha_p \left(\sum_{k=1}^m |\xi_k + \eta_k|^p \right)^{\frac{1}{q}},$$

$$\sum_{k=1}^m |\xi_k + \eta_k|^{p-1} |\eta_k| \leq \beta_p \left(\sum_{k=1}^m |\xi_k + \eta_k|^p \right)^{\frac{1}{q}}.$$

У результаті

$$\sum_{k=1}^m |\xi_k + \eta_k|^p \leq (\alpha_p + \beta_p) \left(\sum_{k=1}^m |\xi_k + \eta_k|^p \right)^{1/q}.$$

Звідки

$$\left(\sum_{k=1}^m |\xi_k + \eta_k|^p \right)^{1-1/q} \leq (\alpha_p + \beta_p),$$

що доводить потрібний результат, оскільки $1 - \frac{1}{q} = \frac{1}{p}$.

Зазначимо, що, як і нерівність Гельдера, нерівність Мінковського може бути записана для нескінченних сум і інтегралів. Інтегральний варіант має вигляд

$$\left(\int_a^b |x(t) + y(t)|^p dt \right)^{1/p} \leq \left(\int_a^b |x(t)|^p dt \right)^{1/p} + \left(\int_a^b |y(t)|^p dt \right)^{1/p}. \quad (1.70)$$

Інтеграл Лебега. Основними класами функцій, які розглядаються в класичному математичному аналізі, є класи неперервних, неперервно диференційовних, кусково-неперервних функцій. Для цих класів найбільш природним типом інтеграла є інтеграл Рімана. Однак функцій, інтегровних за Ріманом, виявляється недостатньо для того, щоб із них утворити повний метричний простір з інтегральною метрикою, наприклад такою

$\rho(x, y) = \int_a^b |x(t) - y(t)| dt$. Це означає, що можна вказати фундаментальну в

інтегральній метриці послідовність інтегровних за Ріманом функцій, яка не збігається до жодної функції, інтегровної за Ріманом. Таким чином, клас інтегровних за Ріманом функцій є неповним. Процедура поповнення метричного простору, що описана в параграфі 1.4, застосована до простору неперервних

функцій з інтегральною метрикою $\rho(x, y) = \int_a^b |x(t) - y(t)| dt$, приводить до повного

метричного простору функцій, інтегровних за Лебегом на відрізку $[a, b]$. При цьому інтеграл Лебега одержуємо граничним переходом з інтеграла Рімана.

Через обмеженість обсягу книги в цьому пункті лише намічається загальна схема побудови інтеграла Лебега, що базується на ідеї П. Даніеля.

Ключовими в теорії інтеграла Лебега є поняття множини міри нуль, збіжності майже всюди і вимірної функції.

Означення 1. Множина $M \subset [a, b]$ називається множиною міри нуль, якщо для довільного як завгодно малого додатного ε знайдеться система відрізків дійсної осі з сумою довжин меншою від ε , яка покриває множину M .

Приклад 1. Довільна зліченна множина $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ точок дійсної осі має міру нуль, оскільки при кожному натуральному n точку x_n можна покрити відрізком

$\left[x_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}, x_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+2}} \right]$. Тоді сумарна довжина усіх відрізків покриття дорівнює $\frac{\varepsilon}{2}$.

Означення 2. Послідовність функцій $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ називається збіжною до функції $x(t)$ майже всюди (м.в.) на відрізку $[a, b]$ (позначається $x_n(t) \rightarrow x(t)$ (м.в.)), якщо вона збігається до цієї функції в кожній точці відрізка, за винятком, можливо, множини точок міри нуль.

Означення 3. Функція $x(t)$ називається вимірною, якщо вона є границею майже всюди збіжної послідовності неперервних функцій.

Приклад 2. Розглянемо функцію Діріхле $d(t) = \begin{cases} 1, & t \in Q, \\ 0, & t \in R \setminus Q \end{cases}$ і послідовність сталих функцій $x_n(t) = \frac{1}{n}$. На підставі попереднього прикладу можна стверджувати, що $x_n(t) \rightarrow x(t)$ (п.в.) на всій дійсній осі і, отже, функція Діріхле вимірна.

Розглянемо простір неперервних функцій $C[a, b]$. Як відомо, для кожної функції $x \in C[a, b]$ визначений інтеграл Рімана $\int_a^b x(t) dt$. Позначимо через $S[a, b]$ клас функцій, для яких виконується наступна умова: кожна функція $x \in S[a, b]$ є границею майже всюди збіжної неспадної послідовності $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty} \subset C[a, b]$ неперервних функцій, інтеграли від яких обмежені в сукупності, тобто

$$x \in S[a, b] \Leftrightarrow \exists \{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty} \subset C[a, b]: x_n(t) \uparrow x(t) \text{ м.в. на } [a, b] \text{ і } \int_a^b x_n(t) dt \leq C. \quad (1.71)$$

Очевидно, клас $S[a, b]$ ширший за клас неперервних функцій, але вужчий за клас вимірних функцій. Можна довести, що кожна функція $x \in S[a, b]$ майже всюди скінченна.

Означення 4. Інтеграл Лебега для функцій $x \in S[a, b]$ визначається границею

$$(L) \quad \int_a^b x(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b x_n(t) dt. \quad (1.72)$$

Зазначимо, що в силу монотонності і обмеженості послідовності інтегралів в правій частині формули (1.72) ця границя існує. Можна довести коректність такого означення, тобто незалежність інтеграла від вибору послідовності $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty} \subset C[a, b]$.

Означення 5. Функція $x(t)$ називається сумовною (інтегровною за Лебегом) на відрізку $[a, b]$, якщо вона може бути подана у вигляді різниці

$$x(t) = f(t) - g(t), \quad f, g \in S[a, b] \quad (1.73)$$

двох функцій класу $S[a, b]$.

Клас сумовних на відрізку $[a, b]$ функцій звичайно позначають через $L[a, b]$. Можна довести, що множина $L[a, b]$ є лінійним простором, причому разом із кожною функцією $x(t)$ простір $L[a, b]$ містить функцію $|x(t)|$.

Означення 6. Інтегралом Лебега від довільної сумовної функції $x \in L[a, b]$, для якої $x(t) = f(t) - g(t)$, $f, g \in S[a, b]$, називається число

$$(L) \int_a^b x(t) dt = (L) \int_a^b f(t) dt - (L) \int_a^b g(t) dt \quad (1.74)$$

Можна довести коректність цього означення і справедливість для інтеграла Лебега всіх властивостей інтеграла Рімана. У подальшому символ (L) перед інтегралом Лебега випускається.

При з'ясуванні зв'язку між інтегралами Рімана і Лебега корисна наступна

Теорема 1. Кожна функція, інтегровна за Ріманом, є сумовною функцією, і інтеграли Рімана і Лебега для неї збігаються.

Обернений результат, однак, не має місця. В цьому неважко упевнитися на прикладі функції Діріхле (див. вище). Ця функція не інтегровна за Ріманом (чому?), а інтеграл Лебега від неї дорівнює нулю.

Простір $L_p[a, b]$. Множина $L_p[a, b] = \left\{ x(t) : \int_a^b |x(t)|^p dt < \infty \right\} \quad (p \geq 1)$

вимірних функцій, сумовних з p -им степенем на відрізку $[a, b]$, утворює

нормований простір із нормою $\|x\| = \left(\int_a^b |x(t)|^p dt \right)^{1/p}$. Аксиома трикутника

впливає з нерівності Мінковського (1.70). Решта аксіом впливають з властивостей інтеграла.

Важливою для застосувань є наступна

Теорема 2. (Ф. Рісс, Э. Фішер). Нормований простір $L_p[a, b]$ при $p \geq 1$ є банаховим простором.

Зазначимо, що простір $L_1[a, b]$ за складом збігається з простором сумовних функцій $L[a, b]$.

Теорема 3. Нормований простір $CL_p[a, b]$, що складається з усіх

неперервних на відрізку $[a, b]$ функцій з нормою $\|x\| = \left(\int_a^b |x(t)|^p dt \right)^{1/p}$, утворює

всюди щільну множину у просторі $L_p[a, b]$.

Доведення наведемо для простору $L_1[a, b]$. Оскільки кожна функція $x \in L_1[a, b]$ сумовна, то вона зображається у вигляді $x(t) = f(t) - g(t)$, де $f, g \in S[a, b]$. За означенням класу $S[a, b]$ існують послідовності $f_n, g_n \in CL_1[a, b]$: $f_n \uparrow f, g_n \uparrow g$ м.в. на $[a, b]$ і такі, що $\int_a^b f_n(t) dt \uparrow \int_a^b f(t) dt, \int_a^b g_n(t) dt \uparrow \int_a^b g(t) dt$. Тоді

$$\begin{aligned} \|x - f_n + g_n\| &= \|(f - f_n) - (g - g_n)\| \leq \|f - f_n\| + \|g - g_n\| = \int_a^b |f(t) - f_n(t)| dt + \\ &+ \int_a^b |g(t) - g_n(t)| dt = \int_a^b (f(t) - f_n(t)) dt + \int_a^b (g(t) - g_n(t)) dt = \int_a^b f(t) dt - \int_a^b f_n(t) dt + \\ &+ \int_a^b g(t) dt - \int_a^b g_n(t) dt \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

Таким чином, замикання (поповнення) простору $CL_1[a, b]$ в інтегральній метриці $\rho(x, y) = \int_a^b |x(t) - y(t)| dt$ збігається з простором $L_1[a, b]$.

ЗАДАЧІ І ВПРАВИ ДО ГЛАВИ 1

1. На множині N натуральних чисел покладемо $\rho(n, m) = \begin{cases} 0, & n = m \\ 1 + 1/(n + m), & n \neq m \end{cases}$.

Довести, що $\rho(n, m)$ - метрика.

2. Чи можна в лінійному просторі неперервно диференційовних на відріжку $[a, b]$ функцій узяти в якості норми функцію $|x(a)| + \max_{t \in [a, b]} |x'(t)|$?

3. Довести, що для будь-яких елементів $x, y \in X$ нормованого простору виконується нерівність $\|x\| \leq \max\{\|x + y\|, \|x - y\|\}$.

4. Довести, що необхідною і достатньою умовою нормованості лінійного метричного простору X є виконання наступних рівностей:

$$\rho(x, y) = \rho(x - y, 0) \quad \forall x, y \in X, \quad \rho(\lambda x, 0) = |\lambda| \rho(x, 0) \quad \forall x \in X, \forall \lambda \in R(C).$$

5. Показати, що лінійний метричний простір s усіх числових послідовностей з прикладу 1.1.1 (п. 3) не можна зробити нормованим простором.

6. Довести, що для того, щоб лінійний нормований простір E був евклідовим, необхідно і достатньо, щоб для будь-яких двох елементів $x, y \in E$ виконувалася рівність паралелограма (1.27).

7. Перевірити, що скалярний добуток в R^n можна ввести наступним чином:

$$\forall x = (\xi_k)_{k=1}^n, y = (\eta_k)_{k=1}^n \in R^n : (x, y) = \sum_{i,k=1}^n a_{ik} \xi_i \eta_k,$$

де $A = (a_{ik})_{i,k=1}^n$ – довільна додатно визначена матриця.

8. Довести, що в евклідовому просторі $\forall x, y, z$ має місце тотожність Аполлонія: $\|z - x\|^2 + \|z - y\|^2 = \frac{1}{2} \|x - y\|^2 + 2 \left\| z - \frac{x + y}{2} \right\|^2$.

9. Дослідити на збіжність у просторі l_2 послідовність $x_n = \{\underbrace{\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}}_n, 0, 0, \dots\}$

10. Довести, що в нормованому просторі якщо $x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow y$, то $\|x_n - y_n\| \rightarrow \|x - y\|$.

11. Чи збігається у просторі $C[0,1]$ послідовність $x_n(t) = t^n - t^{n+1}$?

12. Довести рівність $\overline{M \cup N} = \overline{M} \cup \overline{N}$.

13. Показати, що $\overline{M \cap N} \neq \overline{M} \cap \overline{N}$. Яка з цих множин містить іншу? Навести приклад.

14. X - метричний простір. Перевірити, що, якщо M - замкнена, то $X \setminus M$ - відкрита.

15. Множини $\{M_\alpha\}_\alpha$ відкриті. Довести, що $\bigcup_\alpha M_\alpha$ відкрите. Чи буде множина $\bigcap_\alpha M_\alpha$ відкритою?

16. Множини $\{M_\alpha\}_\alpha$ замкнені. Довести, що $\bigcap_\alpha M_\alpha$ замкнений. Чи буде множина $\bigcup_\alpha M_\alpha$ замкнутою?

17. Нехай $A \subset X$ довільна множина метричного простору. Межею множини A називається множина ∂A межових точок A . Довести, що ∂A замкнена множина.

18. Нехай $f : X \rightarrow Y$ неперервне відображення. Чи буде образ $f(A)$ замкнутої множини $A \subset X$ замкненим? Якщо так, обґрунтувати, якщо ні, навести контрприклад.

19. Довести, що для неперервності відображення $f : X \rightarrow Y$ необхідно і достатньо, щоб для довільної множини $A \subset X$: $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

20. Довести, що для неперервності відображення $f : X \rightarrow Y$ необхідно і достатньо, щоб прообраз довільної відкритої множини $B \subset Y$ був відкритим в X .

21. Довести, що множина послідовностей зі скінченним числом відмінних від нуля елементів щільна у просторі l_2 .

22. Довести, що доповнення до ніде не щільної множини усюди щільне. Чи справджується обернене твердження?

23. Нехай f неперервне відображення простору X на простір Y , A - усюди щільна множина в X . Довести, що $f(A)$ - усюди щільна в Y .

24. Довести повноту простору l_p .

25. На лінійному просторі X задані дві еквівалентні норми, і в одній з них X - банахів простір. Довести, що X є банаховим простором і в другій нормі.

26. Послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ метричного простору задовольняє умову $\rho(x_n, x_{n+1}) < \frac{1}{n}$. Чи буде ця послідовність фундаментальною? Чи буде вона компактною?

27. Довести компактність множини $\left\{ x = (\xi_n)_{n=1}^{\infty} \in l_2 : |\xi_n| \leq \frac{1}{n} \right\}$.

28. Довести в $C[0,1]$ компактність множини функцій виду $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{x+n^2}$,

де $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ - числова послідовність, для якої $|a_n| \leq 1$.

29. Нехай $A: X \leftrightarrow Y$ - ізометрія. Показати, що $A^{-1}: Y \leftrightarrow X$ - ізометрія.

30. Довести, що множина A нормованого простору є обмеженою тоді і тільки тоді, коли для кожної послідовності $x_n \in A$ і кожної послідовності $\lambda_n \in \mathbb{R}$, що збігається до нуля, послідовність $\lambda_n x_n$ прямує до нуля.

31. Нехай $x_n \in X$ - фундаментальна послідовність і деяка її підпослідовність збігається. Довести, що і послідовність x_n збігається.

32. Чи буде лінійний многовид підпростором в: а) скінченновимірному, б) нескінченновимірному нормованому просторі?

33. Нехай $x_1, x_2, \dots, x_n$ - ортогональна система в гільбертовому просторі

H , $x = \sum_{k=1}^n x_k$. Довести, що $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^n \|x_k\|^2$ (теорема Піфагора).

34. Методом інтегрування частинами перевірити, що у просторі $L_2[-1,1]$

$$\|P_n\|^2 \equiv \int_{-1}^1 [P_n(t)]^2 dt = \frac{2}{2n+1}, \text{ де } P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1).$$

35. Розкласти функцію $f(t) = t^3 - t^2 + 1$ в ряд за многочленами Лежандра.

36. В евклідовому просторі неперервних на півосі $[0, \infty)$ функцій $x(t)$ таких, що $\int_0^{\infty} |x(t)|^2 e^{-t} dt < \infty$, скалярний добуток заданий формулою $(x, y) = \int_0^{\infty} x(t)y(t)e^{-t} dt$. Ортогоналізувати систему $\{1, t, t^2\}$.

ГЛАВА 2

ОПЕРАТОРИ

2.1. ЛІНІЙНІ ФУНКЦІОНАЛИ

Лінійні функціонали є найпростішим типом лінійних операторів, заданих на нормованих просторах. Як і у випадку скінченновимірних просторів, вони відіграють важливу роль при аналізі операторних рівнянь $Ax = y$ в нескінченновимірних нормованих просторах, зводячи його до вивчення властивостей розв'язків спряжених рівнянь $A^* f = 0$.

При цьому спряжений оператор A^* в такому рівнянні діє в просторах функціоналів (спряжених просторах).

Означення лінійного функціоналу. Нехай X – дійсний нормований простір.

Означення 2.1.1. Довільне відображення $f : X \rightarrow R$ називається функціоналом на нормованому просторі X .

Значення функціоналу f на елементі $x \in X$ будемо позначати $f(x)$ або (f, x) .

Означення 2.1.2. Функціонал $f(x)$ на дійсному нормованому просторі X називається **лінійним**, якщо

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in X, \forall \lambda_1, \lambda_2 \in R. \quad (2.1)$$

Приклади 2.1.1. 1. Норма $\|x\|$ є функціоналом на кожному нормованому просторі. Цей функціонал не є лінійним (чому?).

2. На просторі $X = C[0;1]$ можна розглянути інтегральний функціонал $f(x) = \int_0^1 x(t) dt$. 3 властивостей інтеграла впливає лінійність цього функціоналу.

3. На довільному гільбертовому просторі H числова функція $f(x) = (x, y)$ при фіксованому $y \in H$ є лінійним функціоналом.

Іноді треба розглядати функціонали, задані не на всьому нормованому просторі X , а тільки на деякій його підмножині. В цьому випадку область визначення функціоналу позначається $D(f)$. При цьому завжди припускається, що множина $D(f)$ є лінійним многовидом у просторі X .

Означення 2.1.3. Функціонал $f(x)$ називається **неперервним** в точці $x_0 \in X$, якщо для кожної послідовності $x_n \in X$, збіжної до елемента x_0 , виконується умова $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$. Функціонал, неперервний у кожній точці простору X , називається **неперервним** у просторі X .

Приклад 2.1.2. Нехай $X = C[0;1]$ і $f(x) = \int_0^1 x(t)dt$. Функціонал $f(x)$ є неперервним функціоналом у просторі $C[0;1]$, оскільки $\forall x_0 \in C[0;1]$ і послідовності $x_n \in C[0;1]: x_n \rightarrow x_0$ виконується

$$|f(x_n) - f(x_0)| = \left| \int_0^1 [x_n(t) - x_0(t)] dt \right| \leq \int_0^1 |x_n(t) - x_0(t)| dt \leq \max_{t \in [0,1]} |x_n(t) - x_0(t)| \int_0^1 dt \leq \|x_n - x_0\| \rightarrow 0.$$

Означення 2.1.4. Лінійний функціонал $f(x)$ називається **обмеженим**, якщо існує стала $C > 0$ така, що

$$|f(x)| \leq C \|x\| \quad \forall x \in X. \quad (2.2)$$

З формули (2.2) випливає, що обмеженість лінійного функціоналу $f(x)$ рівносильна обмеженості числової функції $f(x)$ на одиничній кулі $\|x\| \leq 1$ (чому?).

Приклад 2.1.3. У просторі $C[0;1]$ лінійний функціонал $f(x) = x(0)$ є обмеженим, оскільки $|f(x)| = |x(0)| \leq \max_{t \in [0,1]} |x(t)| = \|x\|$.

Зауваження. Іноді кажуть про обмеженість функціоналу на лінійному многовиді $L \subset X$. В цьому випадку формула (2.2) повинна виконуватись $\forall x \in L$.

Теорема 2.1.1. Лінійний функціонал на нормованому просторі X є обмеженим тоді і тільки тоді, коли на цьому просторі він неперервний.

Доведення. Необхідність. Нехай функціонал $f(x)$ обмежений у просторі X і для довільного елемента $x_0 \in X$ існує послідовність $x_n \in X: x_n \rightarrow x_0$. Тоді

$$|f(x_n) - f(x_0)| = |f(x_n - x_0)| \leq C \|x_n - x_0\| \rightarrow 0.$$

Останнє співвідношення означає неперервність функціоналу в довільній точці простору X .

Достатність. Нехай функціонал $f(x)$ неперервний у просторі X . Припустимо, що він є необмеженим. Тоді існує послідовність $x_n \in X$,

для якої $|f(x_n)| > n \|x_n\|$. В силу лінійності функціоналу останню нерівність можна переписати у вигляді $\left| f\left(\frac{x_n}{n \|x_n\|}\right) \right| > 1$. При цьому

$\left\| \frac{x_n}{n \|x_n\|} \right\| = \frac{1}{n} \rightarrow 0$, і, користуючись неперервністю функціоналу, дістаємо

$\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{x_n}{n \|x_n\|}\right) = f(0) = 0$, що суперечить попередній нерівності.

Норма функціоналу. Розглянемо обмежений лінійний функціонал $f(x)$ на нормованому просторі X . За означенням обмеженості функціоналу для нього справедлива нерівність (2.2).

Означення 2.1.5. Точна нижня грань сталих C , для яких справедлива нерівність (2.2), називається **нормою функціоналу** $f(x)$ і позначається $\|f\|$.

Таким чином, норма функціоналу одночасно задовольняє дві умови:

$$|f(x)| \leq \|f\| \|x\| \quad \forall x \in X, \quad (2.3)$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists x_\varepsilon \in X : |f(x_\varepsilon)| > (\|f\| - \varepsilon) \|x_\varepsilon\|. \quad (2.4)$$

Теорема 2.1.2. Норма обмеженого функціоналу $f(x)$ може бути обчислена за однією з наступних формул:

$$\|f\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{\|x\| \leq 1} |f(x)|. \quad (2.5)$$

Доведення. З нерівності (2.3) випливає, що

$$\|f\| \geq \frac{|f(x)|}{\|x\|} \quad \forall x \neq 0 \Rightarrow \|f\| \geq \sup_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|}. \quad (2.6)$$

Нерівність (2.4) приводить до оцінки

$$\frac{|f(x_\varepsilon)|}{\|x_\varepsilon\|} > \|f\| - \varepsilon \Rightarrow \sup_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|} > \|f\| - \varepsilon$$

і, зважаючи на довільність числа ε , до протилежної нерівності

$$\sup_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|} \geq \|f\|, \quad (2.7)$$

що доводить першу з двох формул (2.5). Тепер доведемо другу формулу. Зазначимо, що для кожного $x: \|x\| \leq 1$

$$|f(x)| \leq \|f\| \|x\| \leq \|f\|. \quad (2.8)$$

В свою чергу, з першої формули (2.5) випливає

$$\|f\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{x \neq 0} \left| f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right| = \sup_{\|x\|=1} |f(x)| \leq \sup_{\|x\| \leq 1} |f(x)|. \quad (2.9)$$

Одночасне виконання (2.8) і (2.9) означає, що $\|f\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |f(x)|$.

Приклад 2.1.3. Знайдемо норму функціоналу $f(x) = \int_0^1 x(t) dt$,

заданого на просторі $X = C[0;1]$. Оскільки

$$|f(x)| = \left| \int_0^1 x(t) dt \right| \leq \int_0^1 |x(t)| dt \leq \max_{t \in [0,1]} |x(t)| \int_0^1 dt = \|x\|,$$

то $\|f\| \leq 1$. Однак якщо розглянути значення функціоналу на функції $x_0(t) \equiv 1$, то $f(x_0) = 1 = \|x_0\|$. Тоді

$$\|f\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|} \geq \frac{|f(x_0)|}{\|x_0\|} = 1.$$

Порівнюючи дві протилежні нерівності, дістанемо $\|f\| = 1$.

Спряжений простір. Нехай заданий дійсний нормований простір X . Розглянемо множину X^* лінійних обмежених функціоналів, заданих на просторі X . На цій множині введемо лінійні операції за формулою

$$(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(x) = \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) \quad \forall f_i \in X^*, \forall \lambda_i \in \mathbb{R}. \quad (2.10)$$

Тоді множина X^* стає лінійним простором (чому?).

Задамо у просторі X^* норми елементів за формулою (2.5). Можна показати (доведіть!), що усі властивості норми така числова функція має. Таким чином, простір X^* стає нормованим простором.

Означення 2.1.6. Нормований простір X^* називається **спряженим до простору X** .

Приклад 2.1.4. Розглянемо нормований простір l_1 . Покажемо, що $l_1^* = l_\infty$. Оберемо у просторі l_1 базис $\{e_k\}_{k=1}^\infty$, де $e_k = (\delta_{ki})_{i=1}^\infty$. Кожний елемент $x = (\xi_k)_{k=1}^\infty \in l_1$ однозначно зображений у вигляді збіжного ряду $x = \sum_{k=1}^\infty \xi_k e_k$ (див. приклад 1.6.1).

Нехай $f \in l_1^*$, тобто є лінійним обмеженим функціоналом на просторі l_1 . Позначимо $f(e_k) = f_k$. Тоді $|f_k| = |f(e_k)| \leq \|f\| \|e_k\| = \|f\|$, звідки випливає, що $\{f_k\}_{k=1}^\infty \in l_\infty$. Використовуючи лінійність функціоналу, можна записати $f\left(\sum_{k=1}^n \xi_k e_k\right) = \sum_{k=1}^n \xi_k f_k$. Перехід до границі при $n \rightarrow \infty$ в останній рівності з урахуванням неперервності функціоналу $f(x)$ і абсолютної збіжності ряду $\sum_{k=1}^\infty \xi_k f_k$ приводить до представлення функціоналу у вигляді

$$f(x) = \sum_{k=1}^\infty \xi_k f_k. \quad (2.11)$$

Таким чином, кожному елементу $f \in l_1^*$ однозначно зіставлений елемент $\tilde{f} = (f_k)_{k=1}^\infty \in l_\infty$ і, навпаки, кожній послідовності $\tilde{f} = (f_k)_{k=1}^\infty \in l_\infty$ зіставлений лінійний обмежений функціонал $f(x) = \sum_{k=1}^\infty \xi_k f_k \in l_1^*$. Отже, встановлена бієкція, а насправді –

ізоморфізм (чому?) $\varphi: l_1^* \leftrightarrow l_\infty$, що діє за правилом $\varphi(f) = \tilde{f}$. Цей ізоморфізм є ізометрією, оскільки

$$|f(x)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k| \|f_k\| \leq \sup_k |f_k| \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i| \Rightarrow \|f\|_{l_1^*} \leq \|\tilde{f}\|_{l_\infty},$$

$$|f_k| \leq \|f\|_{l_1^*} \Rightarrow \|\tilde{f}\|_{l_\infty} \leq \|f\|_{l_1^*},$$

тобто $\|\tilde{f}\|_{l_\infty} = \|f\|_{l_1^*}$. Останнє означає, що простори l_1^* і l_∞ можна отождествити.

Теорема 2.1.3. Для довільного нормованого простору X спряжений простір X^* повний.

Доведення. У просторі X^* розглянемо довільну фундаментальну послідовність $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, тобто таку, для якої $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0(\varepsilon): n, m > n_0 \Rightarrow \|f_n - f_m\| < \varepsilon$. Покажемо, що вона збігається в цьому просторі. Оскільки при кожному фіксованому $x \in X$ $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\| \|x\| < \varepsilon \|x\|$ при $n, m > n_0$, то числова послідовність $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ – фундаментальна і в силу теореми Больцано – Коші збігається до деякого числа $f(x)$. Числова функція $f(x)$ є лінійним функціоналом (чому?), причому цей функціонал обмежений. Це випливає з того, що фундаментальна послідовність завжди обмежена, і тому існує $C > 0: \|f_n\| \leq C$. Записавши означення обмеженості для функціоналу f_n

$$|f_n(x)| \leq \|f_n\| \|x\| \leq C \|x\|$$

і переходячи до границі в останній нерівності при $n \rightarrow \infty$, дістаємо $|f(x)| \leq C \|x\|$. Ще раз скористаємося наведеною вище нерівністю $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \|x\|$ $n, m > n_0$, з якої після граничного переходу по $m \rightarrow \infty$ приходимо до оцінки $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \|x\|$ $n > n_0$. Тоді

$$\|f_n - f\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|f_n(x) - f(x)|}{\|x\|} \leq \varepsilon, \quad n > n_0.$$

Зважаючи на довільність ε , маємо $f_n \rightarrow f$, тобто послідовність $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ збігається, а значить, простір X^* є повним.

Загальний вигляд функціоналів у деяких просторах. З прикладу 2.1.4 випливає, що кожний лінійний обмежений функціонал у просторі l_1 однозначно визначається послідовністю $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \in l_{\infty}$, а його значення на довільному елементі $x = (\xi_k)_{k=1}^{\infty} \in l_1$ задається формулою (2.11)

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k f_k.$$

Таким чином, ця формула задає загальний вигляд функціоналу у просторі l_1 .

Міркування, аналогічне наведеному в прикладі 2.1.4, приводить до загального вигляду функціоналу у просторі l_p ($p > 1$), а саме: для довільного функціоналу $f \in l_p^*$ існує єдина послідовність $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \in l_q$ така, що значення функціоналу на довільному елементі $x = (\xi_k)_{k=1}^{\infty} \in l_p$ задається формулою

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k f_k. \quad (2.12)$$

Зазначимо, що абсолютна збіжність ряду в останній рівності впливає з нерівності Гельдера. Крім того, можна показати, що

$$\|f\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |f_k|^q \right)^{1/q}, \text{ тобто } l_p^* = l_q \quad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \right).$$

Прийmemo без доведення наступний результат. Загальний вигляд лінійного обмеженого функціоналу в просторі $L_p[a, b]$ ($p > 1$) задається формулою

$$f(x) = \int_a^b \tilde{f}(t)x(t)dt, \quad (2.13)$$

де $\tilde{f}(t) \in L_q[a, b]$, причому $\|f\| = \left(\int_a^b |\tilde{f}(t)|^q dt \right)^{1/q}$. З формули (2.13)

випливає, що $L_p^*[a, b] = L_q[a, b]$.

Теорема 2.1.4. (Ф. Рісс, загальний вигляд функціоналу в гільбертовому просторі). Нехай H – гільбертів простір. Для кожного лінійного обмеженого функціоналу $f(x)$, заданого на просторі H , існує єдиний елемент $y \in H$ такий, що

$$f(x) = (x, y), \quad (2.14)$$

причому $\|f\| = \|y\|$.

Доведення. В гільбертовому просторі H розглянемо множину елементів $L \equiv N(f) = \{x \in H : f(x) = 0\}$. Неважко показати, що ця множина є підпростором у просторі H (чому?). Він називається ядром функціоналу $f(x)$. Як було показано в попередній главі (див. (1.53)), гільбертів простір H розкладається в ортогональну суму підпросторів $H = L \oplus L^\perp$. Очевидно, що якщо

$$L^\perp = \{0\} \Leftrightarrow L = H \Leftrightarrow f(x) = 0 \quad \forall x \in H \Leftrightarrow f = 0.$$

В цьому випадку формула (2.14) справджується при $y = 0$.

Нехай тепер $L^\perp \neq \{0\}$. Розглянемо дію функціоналу $f(x)$ на елементах підпростору $L^\perp$. Відображення $f : L^\perp \rightarrow R$ є ізоморфізмом. Дійсно, з існування елемента $z_\perp \neq 0, z_\perp \in L^\perp$ випливає, що $\forall \alpha \in R \quad \exists \lambda = \frac{\alpha}{f(z_\perp)} : f(\lambda z_\perp) = \alpha$, тобто відображення f є сюр'єкцією.

Крім того, відображення f ін'єктивне, оскільки $\forall x_1, x_2 \in L^\perp$ з рівності $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f(x_1 - x_2) = 0$ або $x_1 - x_2 \in L$ і одночасно $x_1 - x_2 \in L^\perp$.

Тоді $x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$. Таким чином, відображення f є бієкцією. Неважко також перевірити, що воно зберігає лінійні операції (довести!). Ізоморфізм просторів $L^\perp$ і R означає, що $\dim L^\perp = 1$, тобто $L^\perp = \text{Lin}\{z_\perp\}$. Представимо довільний елемент x у вигляді $x = x_0 + x_\perp$, $x_0 \in L, x_\perp \in L^\perp$. Використовуючи попередні міркування, можна записати $x_\perp = \lambda z_\perp$, $\lambda = \frac{(x_\perp, z_\perp)}{\|z_\perp\|^2} = \frac{(x, z_\perp)}{\|z_\perp\|^2}$. Тоді

$$f(x) = f(x_\perp) = f(\lambda z_\perp) = \lambda f(z_\perp) = \frac{(x, z_\perp)}{\|z_\perp\|^2} f(z_\perp) = \left(x, \frac{z_\perp}{\|z_\perp\|^2} f(z_\perp) \right).$$

Позначаючи $\frac{z_\perp}{\|z_\perp\|^2} f(z_\perp) = y$, одержуємо формулу (2.14).

Знайдемо норму функціоналу f . З формули (2.14) і нерівності Коші випливає, що $|f(x)| = |(x, y)| \leq \|x\| \|y\| \Rightarrow \|f\| \leq \|y\|$. З іншого боку, $|f(y)| = |(y, y)| = \|y\|^2 \Rightarrow \frac{|f(y)|}{\|y\|} = \|y\| \Rightarrow \|f\| \geq \|y\|$. Отже, $\|f\| = \|y\|$.

Єдиність зображення (2.14) перевіряється тривіально.

Наслідок. Формула (2.14) задає ізометрію просторів H^* і H , тому

$$H^* = H. \quad (2.15)$$

Приклад 2.1.5. Формули (2.12), (2.13) при $p=2$ є ілюстрацією попередньої теореми.

Приклад 2.1.6. Розглянемо граничну задачу

$$\begin{cases} -u'' = p(x), & x \in [a, b], \\ u(a) = u(b) = 0. \end{cases} \quad (2.16)$$

Нехай $p(x) \in C[a, b]$. Функція $u \in C^2[a, b]$, що задовольняє систему (2.16), називається класичним розв'язком розглянутої граничної

задачі. При цьому $\forall v(x) \in C_0^1[a, b]$, де $C_0^1[a, b] = \{x(t) \in C^1[a, b] : x(a) = x(b) = 0\}$, справедлива рівність

$$-\int_a^b u'' v dx = \int_a^b u' v' dx = \int_a^b p(x) v dx.$$

Нехай тепер $p \in L_2[a, b]$. Розглянемо евклідов простір $W_{2,0}^1[a, b] = \left\{ u : \int_a^b |u'(t)|^2 dt < \infty, u(a) = u(b) = 0 \right\}$ зі скалярним добутком

$$(u, v) = \int_a^b u'(t) v'(t) dt.$$

Можна показати, що цей простір є гільбертовим.

Узагальненим розв'язком граничної задачі (2.16) називається така функція $u \in W_{2,0}^1[a, b]$, що для кожної функції $v \in W_{2,0}^1[a, b]$ виконується рівність $\int_a^b u' v' dx = \int_a^b p v dx$.

Інтеграл $\int_a^b p v dx$ задає лінійний обмежений функціонал на просторі $W_{2,0}^1[a, b]$. Дійсно, оскільки

$$\int_a^b |v|^2 dx = \int_a^b \left| \int_a^x v'(t) dt \right|^2 dx \leq \int_a^b \left(\int_a^x |v'(t)| dt \right)^2 dx \leq \int_a^b (b-a) \|v\|_{W_{2,0}^1}^2 dx = (b-a)^2 \|v\|_{W_{2,0}^1}^2,$$

то справедлива оцінка

$$\left| \int_a^b p v dx \right| \leq \left(\int_a^b |p(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_a^b |v(x)|^2 dx \right)^{1/2} \leq \|p\|_{L_2} (b-a) \|v\|_{W_{2,0}^1},$$

що показує обмеженість розглянутого функціоналу. Тоді за теоремою Ф. Рісса існує єдина функція $u \in W_{2,0}^1[a, b]$ така, що

$\int_a^b p v dx = (u, v)_{W_{2,0}^1} \equiv \int_a^b u' v' dx$. Таким чином, доведені існування і єдиність узагальненого розв'язку граничної задачі (2.16).

Ядро функціоналу. Нехай X – нормований простір, $f \in X^*$.

Означення 2.1.7. *Ядром функціоналу f називається множина $N(f) \subset X$, для елементів x якої виконується рівність $f(x) = 0$.*

Елементарно перевіряється, що ядро $N(f)$ є підпростором простору X .

Приклад 2.1.7. В евклідовому просторі R_n розглянемо лінійний обмежений функціонал $f \neq 0$. За теоремою Рісса він може бути представлений у вигляді

$$f(x) = \sum_{k=1}^n f_k \xi_k,$$

де $x = (\xi_k)_{k=1}^n$, $f_k = f(e_k)$, $e_k = (\delta_{ki})_{i=1}^n$. Ядро цього функціоналу

$$N(f) = \left\{ x \in R_n : \sum_{k=1}^n f_k \xi_k = 0 \right\}.$$

З геометрії n -вимірного евклідового простору відомо, що ядро $N(f)$ є $(n-1)$ -вимірним підпростором (площиною, що проходить через початок координат).

Нехай $x_0 \notin N(f)$. Розглянемо клас суміжності $x_0 + N(f)$ простору R_n по ядру $N(f)$ або, іншими словами, зсув підпростору $N(f)$ на вектор x_0 . Такий клас суміжності називається гіперплощиною у просторі R_n . З означення ядра випливає, що рівняння такої гіперплощини має вигляд $f(x) = f(x_0)$, а кожної іншої, паралельної даній, – $f(x) = C$. Факторпростір $R_n / N(f)$ складається з різних суміжних класів $\{x_0 + N(f)\}$ із заданими на них лінійними операціями. Неважко помітити, що

$$R_n / N(f) = \text{Lin}\{x_0 + N(f)\} = \{\lambda x_0 + N(f), \lambda \in R\}.$$

Дійсно, для довільного елемента $x \in X$ можна вказати число $\lambda \in R$ таке, що $x - \lambda x_0 \in N(f)$. Достатньо в якості λ обрати число $\lambda = f(x) / f(x_0)$ (перевірити!). Таким чином, кожний елемент $x \in X$ потрапляє в суміжний клас $x \in \lambda x_0 + N(f)$. Наслідком цього є той факт, що

$$\dim(R_n / N(f)) \equiv \text{codim } N(f) = 1.$$

Зауважимо, що остання формула залишається справедливою для довільного нормованого простору X .

В довільному нормованому просторі X кожний підпростір корозмірності 1 називається площиною, а його зсув на деякий вектор – **гіперплощиною**. Таким чином, рівняння $f(x) = f(x_0)$, $f \in X^*$ задає деяку гіперплощину у просторі X .

Теорема Хана – Банаха. В багатьох проблемах функціонального аналізу з'являється необхідність продовження лінійного обмеженого функціоналу, заданого на лінійному многовиді нормованого простору, на увесь простір зі збереженням норми. Ключовим результатом в цій проблемі є наступна

Теорема 2.1.5 (Г. Хан, З. Банах). Нехай на лінійному многовиді $D(f) \subset X$ дійсного нормованого простору X заданий лінійний обмежений функціонал f . Тоді існує функціонал $\tilde{f} \in X^*$ такий, що:

$$1. \tilde{f}(x) = f(x) \forall x \in D(f). \quad (2.17)$$

$$2. \|\tilde{f}\| = \|f\|. \quad (2.18)$$

Функціонал $\tilde{f}$ називається продовженням функціоналу f на простір X .

Таким чином, усякий лінійний обмежений функціонал, заданий на деякому лінійному многовиді нормованого простору, можна продовжити на весь простір зі збереженням норми.

Доведення. 1. Нехай $\overline{D(f)} = X$. Тоді для довільного $x \in X$ існує послідовність $x_n \in D(f)$, збіжна до елемента x . Згідно з теоремою 1.4.1 ця послідовність фундаментальна, тобто $\|x_{n+p} - x_n\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ і довільному натуральному p . Ту ж властивість має і числова послідовність $f(x_n)$, оскільки

$$|f(x_{n+p}) - f(x_n)| = |f(x_{n+p} - x_n)| \leq \|f\| \|x_{n+p} - x_n\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

За теоремою Больцано – Коші існує $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$, яку позначимо $\tilde{f}(x)$.

Таким чином, на просторі X визначений функціонал $\tilde{f}(x)$. Цей функціонал є лінійним і обмеженим. Покажемо це. Нехай $x, y \in X$. Тоді існують послідовності $x_n, y_n \in D(f)$: $x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow y$. Використовуючи означення функціоналу $\tilde{f}(x)$, дістанемо

$$\tilde{f}(\alpha x + \beta y) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(\alpha x_n + \beta y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} [\alpha f(x_n) + \beta f(y_n)] = \alpha \tilde{f}(x) + \beta \tilde{f}(y),$$

$$|f(x_n)| \leq \|f\| \|x_n\| \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |f(x_n)| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|f\| \|x_n\| \Rightarrow \tilde{f}(x) \leq \|f\| \|x\|.$$

З останньої нерівності випливає оцінка $\|\tilde{f}\| \leq \|f\|$. Однак означення норми функціоналу $\tilde{f}(x)$ приводить до протилежної нерівності

$$\|\tilde{f}\| = \sup_{x \in X, x \neq 0} \frac{|\tilde{f}(x)|}{\|x\|} \geq \sup_{x \in D(f), x \neq 0} \frac{|\tilde{f}(x)|}{\|x\|} = \sup_{x \in D(f), x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \|f\|.$$

Одночасне виконання двох протилежних нерівностей означає, що $\|\tilde{f}\| = \|f\|$. Зазначимо також, що для елементів $x \in D(f)$, обираючи $x_n = x$, одержуємо $\tilde{f}(x) = f(x)$. Таким чином, теорема доведена. Наведений в цьому пункті алгоритм продовження функціоналу називається **продовженням за неперервністю**.

2. Тепер нехай $\overline{D(f)} \neq X$. Доведення теореми за цієї умови проведемо тільки для випадку сепарабельного нормованого простору. Нехай $x_1 \notin \overline{D(f)}$. Розглянемо лінійний многовид $L_1 = \{x + \lambda x_1, x \in D(f), \lambda \in \mathbb{R}\}$. Зазначимо, що кожний елемент L_1 може бути однозначно представлений у вигляді $x + \lambda x_1$. В протилежному випадку для деяких $\bar{x}, \tilde{x} \in D(f)$ виконувалася б рівність $\bar{x} + \lambda_1 x_1 = \tilde{x} + \lambda_2 x_1$ за умови $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Але тоді $x_1 = \frac{\bar{x} - \tilde{x}}{\lambda_2 - \lambda_1} \in D(f)$, що суперечить вибору елемента x_1 .

На першому кроці доведення продовжимо функціонал на лінійний многовид L_1 . Позначимо це продовження через $\tilde{f}$. В силу лінійності функціоналу $\tilde{f}$ і означення продовження функціоналу має виконуватись умова $\tilde{f}(x + \lambda x_1) = \tilde{f}(x) + \lambda \tilde{f}(x_1) = f(x) + \lambda \tilde{f}(x_1) = f(x) + \lambda c$, де $x \in D(f)$, а $c = \tilde{f}(x_1)$ – деяке число. Покажемо, що значення c можна обрати так, щоб норма функціоналу при продовженні не збільшилась. Для цього будемо вимагати, щоб

$$\begin{aligned} |f(x) + \lambda c| &= |\tilde{f}(x + \lambda x_1)| \leq \|f\| \|x + \lambda x_1\| \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -f(x) - \|f\| \|x + \lambda x_1\| &\leq \lambda c \leq -f(x) + \|f\| \|x + \lambda x_1\|. \end{aligned}$$

Остання нерівність виконується, якщо

$$-f(\tilde{x}) - \|f\| \|\tilde{x} + x_1\| \leq c \leq -f(\bar{x}) + \|f\| \|\bar{x} + x_1\| \quad \forall \bar{x}, \tilde{x} \in D(f). \quad (2.19)$$

Щоб таке число c існувало, необхідно, щоб при будь-яких $\bar{x}, \tilde{x} \in D(f)$ ліва частина нерівності (2.19) не перевищувала правої частини, тобто

$$-f(\tilde{x}) - \|f\| \|\tilde{x} + x_1\| \leq -f(\bar{x}) + \|f\| \|\bar{x} + x_1\| \quad \forall \bar{x}, \tilde{x} \in D(f) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(\bar{x}) - f(\tilde{x}) \leq \|f\| (\|\bar{x} + x_1\| + \|\tilde{x} + x_1\|) \quad \forall \bar{x}, \tilde{x} \in D(f).$$

Остання ж нерівність випливає з обмеженості функціоналу f і нерівності трикутника:

$$f(\bar{x}) - f(\tilde{x}) = f(\bar{x} - \tilde{x}) \leq \|f\| \|\bar{x} - \tilde{x}\| \leq \|f\| (\|\bar{x} + x_1\| + \|\tilde{x} + x_1\|).$$

Таким чином, показане існування числа c такого, що

$$\sup_{\tilde{x} \in D(f)} \{-f(\tilde{x}) - \|f\| \|\tilde{x} + x_1\|\} \leq c \leq \inf_{\bar{x} \in D(f)} \{-f(\bar{x}) + \|f\| \|\bar{x} + x_1\|\} \quad (2.20)$$

і для якого виконується умова обмеженості функціоналу $\tilde{f}$ на многовиді L_1 : $|\tilde{f}(x + \lambda x_1)| \leq \|f\| \|x + \lambda x_1\| \quad \forall x \in D(f), \forall \lambda \in R$, причому $\|\tilde{f}\| \leq \|f\|$. Протилежна оцінка випливає з означення норми функціоналу

$$\|\tilde{f}\| = \sup_{x \in L_1} \frac{|\tilde{f}(x)|}{\|x\|} \geq \sup_{x \in L} \frac{|\tilde{f}(x)|}{\|x\|} = \|f\|.$$

Таким чином, $\|\tilde{f}\| = \|f\|$, тобто функціонал f продовжений на многовид L_1 без збільшення норми. Оскільки вихідний нормований простір X сепарабельний, то, повторюючи вказаний вище процес, за не більше ніж зліченне число кроків функціонал f буде продовжений

без збільшення норми на лінійний многовид $\bigcup_{k=1}^{\infty} L_k$, усюди щільний у просторі X . Тут використані позначення $L_k = \{x + \lambda x_k, x \in L_{k-1}, \lambda \in R\}$, $x_k \notin \overline{L_{k-1}}$, $L_0 = D(f)$. Остаточний результат дістанемо продовженням функціоналу за неперервністю з многовиду $\bigcup_{k=1}^{\infty} L_k$ на увесь простір способом, що описаний в пункті 1.

Наслідок 1. Нехай $x_0 \in X, x_0 \neq 0$. Тоді існує $f \in X^*$, для якого $\|f\|=1, f(x_0)=\|x_0\|$.

Доведення. Розглянемо лінійний многовид $L=\{tx_0, t \in \mathbb{R}\}$. Задамо на ньому лінійний функціонал $f(tx_0)=t\|x_0\|$. Тоді $f(x_0)=\|x_0\|$. Крім того, $|f(tx_0)|=|t|\|x_0\|=\|tx_0\|$ і, отже, $\frac{|f(tx_0)|}{\|tx_0\|}=1 \quad \forall t \neq 0$, тобто $\|f\|=1$. За теоремою Хана – Банаха функціонал f можна продовжити на увесь простір зі збереженням норми.

Геометричний зміст. Розглянемо у просторі X гіперплощину, задану рівнянням $f(x)=f(x_0)=\|x_0\|$. Очевидно, що вона проходить через точку x_0 , і для точок гіперплощини справджується умова

$$\|x_0\|=f(x) \leq \|f\| \|x\| = \|x\|,$$

тобто вони знаходяться на відстані, не меншій від $\|x_0\|$, від точки 0 . Така гіперплощина називається **опорною** до замкненої кулі $\bar{B}_{\|x_0\|}(0)$ у просторі X (рис. 10). Таким чином, наслідок 1 стверджує, що через кожну точку, що лежить на поверхні довільної замкненої кулі з центром в точці 0 в нормованому просторі, можна провести опорну гіперплощину до цієї кулі.

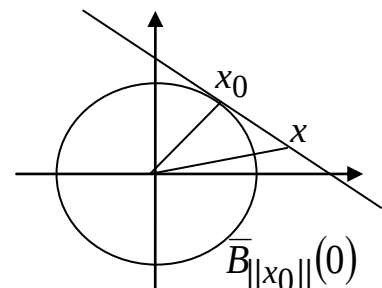


Рис. 10

Наслідок 2. З наслідку 1 випливає важливий висновок: якщо рівність $f(x_0)=0$ справджується $\forall f \in X^*$, то $x_0=0$ (чому?).

Наслідок 3. Нехай у нормованому просторі X заданий лінійний многовид L , для якого $\bar{L} \neq X$. Нехай $x_0 \notin \bar{L}$ і $\rho(x_0, \bar{L})=d$. Тоді існує функціонал $f \in X^*$, для якого:

$$1. f(x)=0 \quad \forall x \in L. \quad (2.21)$$

$$2. f(x_0)=1. \quad (2.22)$$

$$3. \|f\|=\frac{1}{d}. \quad (2.23)$$

Доведення. Розглянемо лінійний многовид $\{x+tx_0, x \in L, t \in \mathbb{R}\}$. Задамо функціонал f на цьому многовиді формулою $f(x+tx_0)=t$. Неважко перевірити, що такий функціонал лінійний. Для нього, очевидно, виконуються умови (2.21), (2.22). Крім того, з означення відстані від вектора до підпростору випливає, що $\forall x \in L, \forall t \neq 0$

виконується нерівність $\left\| \frac{x}{t} + x_0 \right\| \geq d \Rightarrow \|x + tx_0\| \geq |t|d$, тобто $|f(x + tx_0)| = |t| \leq \frac{\|x + tx_0\|}{d}$. Тоді $\|f\| \leq \frac{1}{d}$. З рівності $\rho(x_0, \bar{L}) = d$ також випливає, що існує елемент $x_n \in L$, для якого $\|x_0 - x_n\| \leq d + \frac{1}{n}$. Переходячи до границі при $n \rightarrow \infty$ в нерівності

$$1 = f(x_0 - x_n) \leq \|f\| \|x_0 - x_n\| \leq \|f\| \left(d + \frac{1}{n} \right),$$

дістаємо $\|f\|d \geq 1$, тобто $\|f\| \geq \frac{1}{d}$. Порівнюючи дві протилежні нерівності, приходимо до формули $\|f\| = \frac{1}{d}$.

Геометричний сенс. В теоремі 1.5.2 було доведено існування "майже перпендикуляра" до довільного підпростору L нормованого простору X ($L \neq X$). Розглядаючи пару просторів X, X^* на підставі наслідку 3, можна казати про існування "перпендикуляра" з простору X^* до підпростору L .

Наслідок 4. Лінійний многовид L нормованого простору X є усяди щільним у просторі X тоді і тільки тоді, коли не існує функціоналу $f \in X^*, f \neq 0$, для якого $f(x) = 0 \quad \forall x \in L$.

Доведення. Це твердження узагальнює формулу (1.54) на випадок нормованого простору.

Нехай $\bar{L} = X$ і $\exists f \in X^*, f \neq 0: f(x) = 0 \quad \forall x \in L$. Але тоді в силу неперервності функціоналу f буде виконуватись рівність $f(x) = 0 \quad \forall x \in X$, тобто функціонал f буде дорівнювати нулю (суперечність з вихідною умовою).

Нехай не існує функціоналу $f \in X^*, f \neq 0: f(x) = 0 \quad \forall x \in L$ і $\bar{L} \neq X$. Однак це припущення суперечить наслідку 3, тому є невірним.

Приклад 2.1.8. Розглянемо простір R_2 з нормою елемента $x = (\xi_1, \xi_2), \xi_i \in R$, що дорівнює $\|x\| = |\xi_1| + |\xi_2|$. Нехай на підпросторі $L_1 = \{\alpha e_1, \alpha \in R\}, e_1 = (-1, 1)$ заданий функціонал $f(\alpha e_1) = \alpha$. Очевидно, що він лінійний. Рівності $|f(\alpha e_1)| = |\alpha| = \frac{|\alpha| \|e_1\|}{\|e_1\|} = \frac{1}{2} |\alpha| \|e_1\|$ показують,

що $\|f\|_{L_1} = 1/2$. Продовжимо цей функціонал на увесь простір R_2 зі збереженням норми. Для цього оберемо вектор $e_2 = (1, 1) \notin L_1$ і побудуємо продовження $\tilde{f}$ функціоналу f на лінійний многовид $\{\alpha e_1 + \lambda e_2, \alpha, \lambda \in R\}$, яке збігається з простором R_2 . Покладемо $\tilde{f}(\alpha e_1 + \lambda e_2) = \alpha + \lambda c$, де $c = \tilde{f}(e_2)$. Покажемо, що число c можна обрати так, щоб норма функціоналу $\tilde{f}$ не змінилась. Для цього, згідно з доведенням теореми Хана – Банаха, його необхідно обрати з умови (2.20), яка в розглянутій задачі має вигляд

$$\sup_{\alpha \in R} \left\{ -\alpha - \frac{1}{2}(|\alpha - \lambda| + |\alpha + \lambda|) \right\} \leq c \leq \inf_{\alpha \in R} \left\{ -\alpha + \frac{1}{2}(|\alpha - \lambda| + |\alpha + \lambda|) \right\}.$$

При цьому число c не повинно залежати від параметра λ . Обчислення точних верхньої і нижньої граней з попередньої нерівності показує, що вони дорівнюють 0. Тому для c дістанемо єдине значення $c = 0$. Таким чином, ми одержали єдине продовження функціоналу f на весь простір з збереженням норми, що має вигляд $\tilde{f}(\alpha e_1 + \lambda e_2) = \alpha$. Зазначимо, що в загальному випадку продовження функціоналу не є єдиним.

Рефлексивність. Нехай X – нормований простір, а X^* – спряжений до нього простір. Можна розглянути простір X^{**} , спряжений до простору X^* , тобто нормований простір лінійних обмежених функціоналів над простором X^* . Зіставимо кожному $x \in X$ функціонал $\bar{x}(f)$, заданий на просторі X^* за формулою $\bar{x}(f) = f(x) \quad \forall f \in X^*$. Цей функціонал є лінійним і обмеженим, тобто $\bar{x} \in X^{**}$. Дійсно, $\forall f_1, f_2 \in X^*, \forall \lambda_1, \lambda_2 \in R$

$$\bar{x}(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(x) = \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) = \lambda_1 \bar{x}(f_1) + \lambda_2 \bar{x}(f_2),$$

$$|\bar{x}(f)| = |f(x)| \leq \|f\| \|x\| \quad \forall f \in X^* \Rightarrow \|\bar{x}\| \leq \|x\|.$$

Протилежну нерівність одержимо з наслідку 1 теореми Хана – Банаха, згідно з яким існує функціонал $f \in X^*$ з нормою $\|f\| = 1$ такий, що $f(x) = \|x\|$. Тоді $|\bar{x}(f)| = |f(x)| = \|x\| \Rightarrow \|\bar{x}\| = \sup_{\|f\| \leq 1} |\bar{x}(f)| \geq \|x\|$. Таким

чином, $\|\bar{x}\| = \|x\|$. Отже, відображення $J: X \rightarrow X^{**}$, що діє за формулою $Jx = \bar{x}$, є **ізотричним вкладенням** простору X у простір X^{**} . При цьому можна ототожнити простори X і JX . Тоді $X \subseteq X^{**}$.

Означення 2.1.8. Якщо $JX = X^{**}$, то простір X називається **рефлексивним простором**.

Приклад 2.1.9. Формули (2.12), (2.13) показують, що при $p > 1$ $l_p^{**} = l_p$, $L_p^{**} = L_p$, тобто простори l_p і L_p є рефлексивними просторами. В той же час у прикладі 2.1.4. одержана рівність $l_1^* = l_\infty$, причому аналогічними міркуваннями можна довести формулу $c_0^* = l_1$. Тут c_0 – нормований простір послідовностей, збіжних до нуля, з нормою з простору l_∞ . Таким чином, $c_0^{**} = l_\infty$ і, отже, простір c_0 не є рефлексивним.

Ортогональне доповнення до множини. У нормованому просторі X можна ввести поняття ортогонального доповнення до довільної множини M .

Означення 2.1.9. Множина $M^\perp = \{f \in X^* : f(x) = 0 \ \forall x \in M\}$ називається **ортогональним доповненням (анулятором) множини M** .

Зазначимо, що на відміну від гільбертового простору ортогональне доповнення в нормованому просторі є частиною іншого простору. Крім того, множина $M^\perp$ завжди є підпростором у просторі X^* (показати!).

Аналогічно вводиться ортогональне доповнення ${}^\perp F = \{x \in X : f(x) = 0 \ \forall f \in F\}$ множини $F \subset X^*$.

Приклад 2.1.10. У просторі l_1 розглянемо множину $M = \left\{x = (\xi_i)_{i=1}^\infty : \sum_{i=1}^n \xi_i = 0\right\}$. З формули (2.11) випливає, що

$$M^\perp = \left\{f = (f_i)_{i=1}^\infty \in l_\infty : \sum_{i=2}^n (f_i - f_1)\xi_i + \sum_{i=n+1}^\infty f_i \xi_i = 0 \ \forall (\xi_i)_{i=2}^\infty \in l_1\right\}.$$

Довільність послідовності $(\xi_i)_{i=2}^\infty \in l_1$ означає, що

$$M^\perp = \text{Lin}\{f\}, \quad f = (f_i)_{i=1}^\infty, \quad f_i = \begin{cases} 1, & 1 \leq i \leq n, \\ 0, & i > n. \end{cases}$$

2.2. ЛІНІЙНІ ОПЕРАТОРИ

Аналіз операторних рівнянь пов'язаний із вивченням властивостей їх операторів. В цій книзі розглядаються тільки лінійні оператори, вивчаються їх загальні властивості і деякі їх спеціальні класи.

Лінійні оператори в нормованих просторах. Розглянемо нормовані простори X і Y .

Означення 2.2.1. Відображення $A: D(A) \rightarrow Y$, яке кожному елементу $x \in D(A) \subset X$ ставить у відповідність елемент $y \in Y$, називається оператором, що діє з простору X в простір Y . Множина $D(A)$ тих $x \in X$, на яких визначений оператор A , називається його областю визначення, множина $R(A) = \{y \in Y : y = Ax, x \in D(A)\}$ – образом оператора A .

Для запису оператора A використовується позначення $y = Ax$.

Означення 2.2.2. Оператор A називається **лінійним**, якщо його область визначення $D(A)$ є лінійним многовидом у просторі X і виконуються наступні умови:

$$1. A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2 \quad \forall x_1, x_2 \in D(A) \text{ (адитивність)}. \quad (2.23)$$

$$2. A(\lambda x) = \lambda Ax \quad \forall x \in D(A), \lambda \in R(C) \text{ (однорідність)}. \quad (2.24)$$

Неважко зрозуміти, що образ лінійного оператора є лінійним многовидом у просторі Y . Якщо $D(A) = X$, то кажуть, що оператор заданий на просторі X . Якщо $Y = X$, то кажуть, що оператор діє у просторі X .

Приклади 2.2.1. 1. Розглянемо **матричний оператор** A , заданий на просторі l_p формулою $y = Ax$, $x = (\xi_i)_{i=1}^{\infty}$, $y = (\eta_i)_{i=1}^{\infty}$,

$\eta_i = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \xi_j$, де a_{ij} – задані числа. Покажемо, що за умови

$\sum_{i,j=1}^{\infty} |a_{ij}|^q < \infty$ оператор $A: l_p \rightarrow l_q$ і є лінійним оператором.

Використовуючи нерівність Гельдера, можна записати

$$|\eta_i| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij} \xi_j| \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^q \right)^{1/q} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p \right)^{1/p} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|y\|_{l_q} \leq \left(\sum_{i,j=1}^{\infty} |a_{ij}|^q \right)^{1/q} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p \right)^{1/p} = \left(\sum_{i,j=1}^{\infty} |a_{ij}|^q \right)^{1/q} \|x\|_{l_p}. \quad (2.25)$$

Таким чином, оператор A відображає простір l_p в простір l_q . Умови (2.23), (2.24) перевіряються тривіально.

2. **Інтегральний оператор** $y = Ax$, $Ax = \int_0^1 k(u,v)x(v)dv$,

$k(u,v) \in C[0,1] \times [0,1]$ очевидно діє у просторі $C[0,1]$. Функція $k(u,v)$ називається ядром інтегрального оператора. Зазначимо, що цей термін не має ніякого відношення до загального поняття ядра оператора, а закріпився за інтегральними операторами історично. Лінійність оператора впливає з лінійності інтеграла.

Неперервні і обмежені оператори в нормованих просторах.

Означення неперервного оператора фактично було дано вище в параграфі 1.2. Там же було показано, що інтегральний оператор з прикладу 2.2.1 є неперервним.

Означення 2.2.3. Оператор A , заданий на нормованому просторі X , називається **обмеженим**, якщо існує число $C > 0$ таке, що

$$\|Ax\| \leq C \|x\| \quad \forall x \in X. \quad (2.26)$$

З означення 2.2.3 випливає, що обмежений оператор переводить кожную обмежену множину простору X в обмежену множину простору Y . Вірно і обернене твердження (перевірити!).

Приклади 2.2.2. 1. Формула (2.25) показує, що лінійний оператор, заданий в прикладі 2.2.1 п. 1, є обмеженим оператором,

причому в якості константи C можна обрати число $C^q = \sum_{i,j=1}^{\infty} |a_{ij}|^q$.

2. Інтегральний оператор з прикладу 2.2.1 також є обмеженим, оскільки

$$\begin{aligned} \|Ax\| &= \max_{u \in [0,1]} \left| \int_0^1 k(u,v)x(v)dv \right| \leq \max_{u \in [0,1]} \int_0^1 |k(u,v)x(v)| dv \leq \\ &\leq \max_{u \in [0,1]} \int_0^1 |k(u,v)| dv \max_{v \in [0,1]} |x(v)| = C \|x\|, \quad C = \max_{u \in [0,1]} \int_0^1 |k(u,v)| dv. \end{aligned}$$

Наступна теорема доводиться так само, як теорема 2.1.1 (доведення надається читачеві).

Теорема 2.2.1. Для того щоб лінійний оператор був неперервним, необхідно і достатньо, щоб він був обмеженим.

Норма оператора. Нехай A – лінійний обмежений оператор, заданий на нормованому просторі X . Тоді для нього виконується нерівність (2.26).

Означення 2.2.4. Точна нижня грань сталих C , для яких виконується нерівність (2.26), називається **нормою оператора** A і позначається $\|A\|$.

З означення точної нижньої межі випливає, що норма обмеженого оператора підлягає таким умовам:

$$1. \|Ax\| \leq \|A\| \|x\| \quad \forall x \in X. \quad (2.27)$$

$$2. \forall \varepsilon > 0 \exists x_\varepsilon \in X : \|Ax_\varepsilon\| > (\|A\| - \varepsilon) \|x_\varepsilon\|. \quad (2.28)$$

Наступна теорема доводиться так само, як і теорема 2.1.2 (доведення надається читачеві).

Теорема 2.2.2. Норма обмеженого оператора A може бути обчислена за однією з наступних формул:

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|. \quad (2.29)$$

Приклад 2.2.3. Розглянемо оператор A , заданий у просторі l_∞ формулою $y = Ax$, $x = (\xi_i)_{i=1}^\infty$, $y = (\eta_i)_{i=1}^\infty$, $\eta_i = \sum_{j=1}^\infty a_{ij} \xi_j$, де a_{ij} – задані

числа. Покажемо, що за умови $\sup_i \sum_{j=1}^\infty |a_{ij}| < \infty$ оператор A є лінійним

обмеженим оператором у просторі l_∞ . Обмеженість оператора A випливає з нерівності

$$|\eta_i| \leq \sum_{j=1}^\infty |a_{ij} \xi_j| \leq \sup_j |\xi_j| \sum_{j=1}^\infty |a_{ij}| \Rightarrow \|y\|_{l_\infty} \leq \alpha \|x\|_{l_\infty}, \quad \alpha = \sup_i \sum_{j=1}^\infty |a_{ij}|. \quad (2.30)$$

З означення точної верхньої межі випливає, що

$\forall \varepsilon > 0 \exists k : \sum_{j=1}^\infty |a_{kj}| > \alpha - \varepsilon$. Під дією оператора A елемент

$$\bar{x} = (\text{sign } a_{kj})_{j=1}^\infty \in l_\infty \text{ перетворюється на елемент } A\bar{x} = \left(\sum_{j=1}^\infty a_{ij} \text{sign } a_{kj} \right)_{i=1}^\infty.$$

Тоді, враховуючи, що $\|\bar{x}\| = 1$, дістаємо оцінку

$$\|A\bar{x}\| = \sup_i \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \operatorname{sign} a_{kj} \geq \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj} \operatorname{sign} a_{kj} = \sum_{j=1}^{\infty} |a_{kj}| > \alpha - \varepsilon = (\alpha - \varepsilon) \|\bar{x}\|. \quad (2.31)$$

Порівняння (2.30), (2.31) з (2.27), (2.28) приводить до рівності $\|A\| = \alpha$.

Розглянемо лінійний многовид L у нормованому просторі X .

Означення 2.2.5. Лінійний оператор A з областю визначення $D(A) \supset L$ називається **обмеженим на многовиді L** , якщо існує число $C > 0$ таке, що

$$\|Ax\| \leq C \|x\| \quad \forall x \in L. \quad (2.32)$$

Число $\|A\|_L = \sup_{x \in L, x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$ називається **нормою оператора на лінійному многовиді L** .

Теорема 2.2.3. Лінійний обмежений оператор A_0 , заданий на лінійному многовиді L , усюди щільному в нормованому просторі X , і такий, що набуває значень у банаховому просторі Y , може бути продовжений на увесь простір зі збереженням норми, тобто існує лінійний обмежений оператор A ($D(A) = X$) такий, що:

$$1. Ax = A_0x \quad \forall x \in L. \quad (2.33)$$

$$2. \|A\| = \|A_0\|_L. \quad (2.34)$$

Доведення. Оскільки за умовою $\bar{L} = X$, то $\forall x \in X$ існує $x_n \in L$: $\|x_n - x\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Тоді послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ є фундаментальною, а отже, і послідовність $\{A_0x_n\}_{n=1}^{\infty}$ також фундаментальна. Дійсно, з обмеженості оператора A_0 на многовиді L випливає, що $\|A_0x_n - A_0x_m\| \leq \|A_0\|_L \|x_n - x_m\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Зважаючи на те, що простір Y є банаховим, $\exists y \in Y: A_0x_n \rightarrow y$. Визначимо оператор A на довільному елементі $x \in X$ формулою $Ax = y$. Це означення є коректним, оскільки для кожної іншої послідовності $\bar{x}_n \in L$ і збіжної до x , буде виконуватись умова $\|x_n - \bar{x}_n\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, звідки $\|A_0x_n - A_0\bar{x}_n\| \rightarrow 0$. Таким чином, $A_0\bar{x}_n \rightarrow y$, тобто оператор A визначений на елементах простору X однозначно.

Якщо $x \in L$, то, покладаючи $x_n = x$, одержуємо $Ax = \lim_{n \rightarrow \infty} A_0x_n = A_0x$. Неважко довести, що оператор A лінійний (перевірити!).

З обмеженості оператора A_0 на многовиді L випливає, що

$\|A_0 x_n\| \leq \|A_0\|_L \|x_n\|$, звідки граничним переходом по $n \rightarrow \infty$ одержуємо нерівність $\|Ax\| \leq \|A_0\|_L \|x\| \quad \forall x \in X$, тобто $\|A\| \leq \|A_0\|_L$. З іншого боку,

$$\|A_0\|_L = \sup_{x \in L, x \neq 0} \frac{\|A_0 x\|}{\|x\|} = \sup_{x \in L, x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \|A\|.$$

Таким чином, $\|A\| = \|A_0\|_L$ і теорема доведена.

Вказаний процес продовження оператора називається **продовженням** його за **неперервністю** (пор. з лінійним функціоналом). Продовження обмеженого оператора з довільного лінійного многовиду на увесь нормований простір зі збереженням норми можливе тільки для деякого вузького класу нормованих просторів. Однак це питання виходить за рамки цієї книги.

Зауваження. Попередня теорема показує, що **необмежений** лінійний оператор на нормованому просторі X повинен бути необмеженим на кожному лінійному многовиді, усюди щільному в просторі X .

Існування необмежених операторів ілюструє наступний

Приклад 2.2.4. У просторі $C[0, \pi]$ розглянемо оператор диференціювання $Ax = x'$ з усюди щільною областю визначення $D(A)$, що складається з усіх неперервно диференційовних функцій на відрізку $[0, \pi]$. Цей оператор є необмеженим, оскільки переводить обмежену послідовність $\{\sin nx\}_{n=1}^{\infty} \subset D(A)$ в необмежену, тому що

$$\|A \sin nx\| = \|n \cos nx\| = n \rightarrow \infty \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Нормований простір лінійних обмежених операторів. Множина $\mathfrak{R}(X, Y)$ лінійних обмежених операторів, визначених на всьому нормованому просторі X зі значеннями в нормованому просторі Y , є нормованим простором (перевірити!), якщо лінійні операції на цій множині задані наступним чином:

$$1. (A+B)x = Ax + Bx \quad \forall A, B \in \mathfrak{R}(X, Y), \forall x \in X, \quad (2.35)$$

$$2. (\lambda A)x = \lambda Ax \quad \forall A \in \mathfrak{R}(X, Y), \forall x \in X, \forall \lambda \in R(C), \quad (2.36)$$

а норма елемента визначена формулою (2.29).

В подальшому замість позначення $\mathfrak{R}(X, X)$ будемо писати $\mathfrak{R}(X)$.

Аналогічно теоремі 2.1.3 доводиться наступна

Теорема 2.2.4. Якщо простір Y – банахів, то і простір $\mathfrak{R}(X, Y)$ також банахів.

Збіжність послідовності елементів у просторі $\mathfrak{R}(X, Y)$ розуміємо як у довільному нормованому просторі, тобто $A_n \in \mathfrak{R}(X, Y), A_n \rightarrow A \in \mathfrak{R}(X, Y) \Leftrightarrow \|A_n - A\| \rightarrow 0$. Така збіжність

послідовності операторів називається **рівномірною**. Використаний тут термін обумовлений тим фактом, що збіжність послідовності операторів $A_n \in \mathfrak{R}(X, Y)$ за нормою у просторі $\mathfrak{R}(X, Y)$ рівносильна рівномірній відносно $x \in \bar{B}_1(0)$ збіжності послідовності $A_n x$. Дійсно, зі збіжності послідовності $A_n \in \mathfrak{R}(X, Y)$ до оператора $A \in \mathfrak{R}(X, Y)$ випливає, що $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0(\varepsilon): n > n_0 \Rightarrow \|A_n - A\| < \varepsilon$, звідки

$$\|A_n x - Ax\| \leq \|A_n - A\| \|x\| \leq \|A_n - A\| < \varepsilon \quad \forall x \in \bar{B}_1(0),$$

тобто послідовність $A_n x$ збігається рівномірно в кулі $\|x\| \leq 1$. Навпаки, якщо $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0(\varepsilon): n > n_0 \Rightarrow \|A_n x - Ax\| < \varepsilon \quad \forall x \in \bar{B}_1(0)$, то

$$\|A_n - A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|A_n x - Ax\| \leq \varepsilon,$$

що означає збіжність $A_n \rightarrow A$ у просторі $\mathfrak{R}(X, Y)$.

Приклади 2.2.5. 1. Розглянемо оператор $A \in \mathfrak{R}(l_2)$, що діє за формулою $y = Ax$, де $\eta_i = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} \xi_k$, $y = (\eta_i)_{i=1}^{\infty}$, $x = (\xi_i)_{i=1}^{\infty}$,

$\sum_{i,k=1}^{\infty} |a_{ik}|^2 < \infty$. Назвемо послідовність операторів $A_n \in \mathfrak{R}(l_2)$, для яких

$$A_n x = \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}^{(n)} \xi_k \right)_{i=1}^{\infty}, \quad a_{ik}^{(n)} = \begin{cases} a_{ik}, & 1 \leq i, k \leq n, \\ 0, & i \vee k > n, \end{cases} \quad \text{операторами редукції для}$$

оператора A . Послідовність $A_n \rightarrow A$ рівномірно. Останнє твердження випливає з оцінки норми різниці цих операторів, подібної до наведеної в формулі (2.25)

$$\begin{aligned} \|A_n - A\|^2 &\leq \sum_{i,k=1}^{\infty} |a_{ik}^{(n)} - a_{ik}|^2 = \sum_{i=n+1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik}|^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_{ik}|^2 \leq \\ &\leq \sum_{i=n+1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik}|^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_{ik}|^2 \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

2. Розглянемо інтегральний оператор $A \in \mathfrak{R}(L_2[0, \pi])$, заданий формулою $Ax = \int_0^{\pi} k(u, v) x(v) dv$, з дійсним неперервним ядром. Подамо функцію $k(u, v)$ рядом Фур'є

$$k(u, v) = \sum_{m=1}^{\infty} \psi_m(u) \sin mv, \quad \psi_m(u) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} k(u, v) \sin mv dv.$$

Відомо, що часткова сума цього ряду $k_n(u, v) = \sum_{m=1}^n \psi_m(u) \sin mv$ збігається до функції $k(u, v)$ в просторі $L_2[0, \pi]$. Розглянемо послідовність інтегральних операторів $A_n x = \int_0^{\pi} k_n(u, v) x(v) dv$. Покажемо рівномірну збіжність $A_n \rightarrow A$. Оскільки

$$\|A_n x - Ax\|^2 = \int_0^{\pi} \left| \int_0^{\pi} [k_n(u, v) - k(u, v)] x(v) dv \right|^2 du \leq \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} |k_n(u, v) - k(u, v)|^2 dv du \|x\|^2,$$

$$\text{то } \|A_n - A\|^2 \leq \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} |k_n(u, v) - k(u, v)|^2 dv du = \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} |k(u, v)|^2 dv du - \frac{\pi}{2} \sum_{m=1}^n \int_0^{\pi} |\psi_m(u)|^2 du.$$

Тоді з рівності Парсеваля $\int_0^{\pi} |k(u, v)|^2 dv = \frac{\pi}{2} \sum_{m=1}^{\infty} |\psi_m(u)|^2$ одержуємо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n - A\| = 0.$$

Зазначимо, що ядра інтегральних операторів, що мають структуру $\sum_{m=1}^n \psi_m(u) \phi_m(v)$, називаються **виродженими ядрами**. Таким чином, наведений приклад показує можливість рівномірної апроксимації з довільним ступенем точності інтегрального оператора операторами з виродженими ядрами.

Крім рівномірної збіжності у просторі $\mathfrak{R}(X, Y)$ є інший тип збіжності, що називається сильною (поточною) збіжністю.

Означення 2.2.6. Послідовність операторів $A_n \in \mathfrak{R}(X, Y)$ називається **сильно збіжною** до оператора $A \in \mathfrak{R}(X, Y)$ (позначається $A_n \xrightarrow{s} A$), якщо $\|A_n x - Ax\| \rightarrow 0 \quad \forall x \in X$ при $n \rightarrow \infty$.

Зауважимо, що з рівномірної збіжності випливає сильна збіжність (чому?). Обернене твердження, однак, не вірне. Ілюстрацією цього факту у наступний приклад.

Приклад 2.2.6. Під нормованим простором $C(-\infty, \infty)$ будемо розуміти лінійний простір усіх неперервних і обмежених на числовій

осі функцій з нормою $\|x\| = \sup_{t \in (-\infty, \infty)} |x(t)|$. Так само, як і в прикладі 1.4.3

можна показати, що цей простір є банаховим простором. Розглянемо

сімейство операторів $A_\alpha p = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(t)\alpha}{(x-t)^2 + \alpha^2} dt$, діючих у просторі

$C(-\infty, \infty)$. Покажемо, що $A_\alpha \xrightarrow{s} I$ при $\alpha \downarrow 0$, де I – тотожний оператор,

тобто $\|A_\alpha p - p\| \rightarrow 0$ при $\alpha \downarrow 0$ для кожної функції $p \in C(-\infty, \infty)$.

Перетворимо вираз

$$\|A_\alpha p - p\| = \sup_{x \in (-\infty, \infty)} \left| \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(t)\alpha}{(x-t)^2 + \alpha^2} dt - p(x) \right| = \sup_{x \in (-\infty, \infty)} \left| \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[p(t) - p(x)]\alpha}{(x-t)^2 + \alpha^2} dt \right|.$$

З означення неперервності функції $p(t)$ випливає, що

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 : |t - x| < \delta \Rightarrow |p(t) - p(x)| < \varepsilon.$$

Розіб'ємо інтеграл $\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|p(t) - p(x)|\alpha}{(x-t)^2 + \alpha^2} dt$ на три інтеграли $\int_{-\infty}^{x-\delta} + \int_{x-\delta}^{x+\delta} + \int_{x+\delta}^{\infty}$.

Сума першого і останнього з них не перевищує $2\|p\|[\pi - 2\arctg(\delta/\alpha)]$.

Другий інтеграл можна оцінити так:

$$\frac{1}{\pi} \int_{x-\delta}^{x+\delta} \frac{|p(t) - p(x)|\alpha}{(x-t)^2 + \alpha^2} dt < \varepsilon \frac{1}{\pi} \int_{x-\delta}^{x+\delta} \frac{\alpha}{(x-t)^2 + \alpha^2} dt = \varepsilon \frac{2}{\pi} \arctg \frac{\delta}{\alpha} < \varepsilon.$$

Тоді $\lim_{\alpha \downarrow 0} \|A_\alpha p - p\| \leq \varepsilon$ і, зважаючи на довільність ε , $\lim_{\alpha \downarrow 0} \|A_\alpha p - p\| = 0$.

Таким чином, доведена поточкова збіжність $A_\alpha \xrightarrow{s} I$ при $\alpha \downarrow 0$. Однак

рівномірної збіжності тут немає. Це випливає з того, що $\|A_\alpha p - p\| \rightarrow 0$ нерівномірно відносно $p \in \bar{B}_1(0)$. Дійсно,

$$\|A_\alpha p - p\| = \sup_{x \in (-\infty, \infty)} \left| \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[p(t) - p(x)]\alpha}{(x-t)^2 + \alpha^2} dt \right| \geq \left| \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[p(t) - p(a)]\alpha}{(a-t)^2 + \alpha^2} dt \right|.$$

Оберемо функцію $p_\beta(t) = \min\{|t - a|^\beta, 1\}$ ($\beta > 0$). Очевидно, що $p_\beta \in \bar{B}_1(0) \subset C(-\infty, \infty)$ і $p_\beta(a) = 0$. Тоді

$$\|A_\alpha p_\beta - p_\beta\| \geq \left| \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p_\beta(t)\alpha}{(a-t)^2 + \alpha^2} dt \right| \geq \frac{1}{\pi} \int_{a+\alpha}^{\infty} \frac{p_\beta(t)\alpha}{(a-t)^2 + \alpha^2} dt \geq \alpha^\beta \frac{\pi}{4}.$$

Оскільки $\forall \alpha > 0 \exists \beta > 0 : \alpha^\beta > \frac{1}{2}$, то збіжність $\|A_\alpha p - p\| \rightarrow 0$ не може бути рівномірною.

Принцип рівномірної обмеженості.

Теорема 2.2.5 (З. Банах, Г. Штейнгауз). Якщо послідовність операторів $A_n \in \mathfrak{R}(X, Y)$ в кожній точці банахового простору X обмежена, тобто $\forall x \in X \exists C_x > 0 : \|A_n x\| \leq C_x$, то послідовність норм операторів $\|A_n\|$ обмежена.

Доведення. Перш за все, Зазначимо, що якщо послідовність $A_n \in \mathfrak{R}(X, Y)$ рівномірно обмежена в деякій кулі $\bar{B}_r(x_0)$, тобто $\exists C > 0 : \|A_n x\| \leq C \forall x \in \bar{B}_r(x_0)$, то послідовність норм $\|A_n\|$ обмежена. Дійсно, нехай $\bar{x}$ – довільний елемент простору X . Тоді точка $\bar{x}r/\|\bar{x}\| + x_0 \in \bar{B}_r(x_0)$. Використовуючи рівномірну обмеженість послідовності A_n в кулі $\bar{B}_r(x_0)$, запишемо

$$\begin{aligned} C \geq \|A_n \left(\frac{\bar{x}}{\|\bar{x}\|} r + x_0 \right)\| &\geq \|A_n \frac{\bar{x}}{\|\bar{x}\|} r\| - \|A_n x_0\| \Rightarrow \|A_n \frac{\bar{x}}{\|\bar{x}\|} r\| \leq C + \|A_n x_0\| \leq 2C \Rightarrow \\ &\Rightarrow \|A_n \bar{x}\| \leq \frac{2C}{r} \|\bar{x}\| \quad \forall \bar{x} \in X \Rightarrow \|A_n\| \leq \frac{2C}{r}. \end{aligned}$$

Тепер доведемо теорему, припускаючи, що послідовність $\|A_n\|$ не обмежена. В силу попереднього послідовність A_n не обмежена в довільній кулі $\bar{B}_{r_0}(x_0)$, тобто існує елемент $x_1 \in B_{r_0}(x_0)$ і номер n_1 такі, що $\|A_{n_1} x_1\| > 1$. Неперервність оператора A_{n_1} забезпечує виконання нерівності $\|A_{n_1} x\| > 1$ в деякій кулі $\bar{B}_{r_1}(x_1) \subset \bar{B}_{r_0}(x_0)$. Повторюючи наведені вище міркування для кулі $\bar{B}_{r_1}(x_1)$, знайдемо елемент $x_2 \in B_{r_1}(x_1)$, номер $n_2 > n_1$ і кулю $\bar{B}_{r_2}(x_2) \subset \bar{B}_{r_1}(x_1)$ такі, що $\|A_{n_2} x\| > 2 \quad \forall x \in \bar{B}_{r_2}(x_2)$. Продовжимо описаний процес до нескінченності. При це на k -м кроці одержимо $\|A_{n_k} x\| > k \quad \forall x \in \bar{B}_{r_k}(x_k), \quad \bar{B}_{r_k}(x_k) \subset \bar{B}_{r_{k-1}}(x_{k-1}), \quad n_k > n_{k-1}$. Без обмеження загальності можна вважати, що $r_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. З принципу вкладених куль випливає, що існує точка $\bar{x} \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \bar{B}_{r_k}(x_k)$. Для неї виконується нерівність $\|A_{n_k} \bar{x}\| > k \quad \forall k \in \mathbb{N}$, яке суперечить обмеженості послідовності $A_n \bar{x}$. Тим самим припущення про

необмеженість послідовності норм $\|A_n\|$ виявилось невірним, а твердження теореми – доведеним.

Наслідок. Нехай $A_n \in \mathfrak{R}(X, Y)$, X – банахів простір, $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} A_n x = Ax \quad \forall x \in X$. Тоді $A \in \mathfrak{R}(X, Y)$.

При з'ясуванні сильної збіжності послідовності операторів корисна наступна

Теорема 2.2.6. Для того щоб послідовність операторів $A_n \in \mathfrak{R}(X, Y)$ сильно збігалася до оператора $A \in \mathfrak{R}(X, Y)$ (X – банахів простір), необхідно і достатньо, щоб:

$$1. \exists C > 0 : \|A_n\| \leq C \quad \forall n \in N. \quad (2.37)$$

$$2. A_n x \rightarrow Ax \quad \forall x \in L \subset X, \quad \overline{\text{Lin}(L)} = X. \quad (2.38)$$

Приклад 2.2.7. При чисельному розв'язанні інтегральних рівнянь часто використовується заміна інтеграла квадратурною формулою,

тим самим інтегральний оператор $Ax = \int_a^b k(u, v)x(v)dv$ апроксимується

послідовністю операторів $A_n x = \sum_{i=1}^n w_i^{(n)} k(u, v_i^{(n)}) x(v_i^{(n)})$, де $v_i^{(n)}, w_i^{(n)}$ –

відповідно вузли і ваги квадратурної формули. Тут треба мати на увазі, що послідовність операторів A_n збігається до оператора A поточно, але не рівномірно. Покажемо це в найпростішому випадку

інтегрального функціоналу $f(x) = \int_a^b x(t)dt$, $x \in C[a, b]$. Тоді апроксимуюча

послідовність функціоналів має вигляд $f_n(x) = \sum_{i=1}^n w_i^{(n)} x(v_i^{(n)})$. Для

визначеності будемо використовувати квадратурну формулу Гаусса. Ця формула є точною для усіх многочленів степеня, що не перевищує n . Тому умова (2.38) буде виконуватись для лінійного многовиду всіх многочленів, який, як відомо, усюди щільний у просторі $C[a, b]$. Точність квадратурної формули на многочлені $x(t) \equiv 1$ означає, що

$$\sum_{i=1}^n w_i^{(n)} = b - a \quad \forall n \in N, \text{ звідки}$$

$$|f_n(x)| \leq \sum_{i=1}^n w_i^{(n)} |x(v_i^{(n)})| \leq (b-a) \|x\| \Rightarrow \|f_n\| \leq (b-a).$$

Таким чином, виконані умови теореми 2.2.6, отже, послідовність f_n поточно збігається до функціонала f . Щоб показати відсутність тут рівномірної збіжності, розглянемо послідовність невід'ємних неперервних функцій $x_n(t)$, для яких $x_n(v_i^{(n)}) = 0$ $i=1, \dots, n$; $n \in N$,

$$\|x_n\| = 2 \quad \text{і} \quad \int_a^b x_n(t) dt = b-a. \quad \text{Наприклад, в якості } x_n(t) \text{ можна обрати}$$

кусково-лінійні функції. Тоді $f_n(x_n) = 0 \quad \forall n \in N$, а $f(x_n) = b-a \quad \forall n \in N$.

Якщо б послідовність f_n рівномірно збігалася до функціонала f , то $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0(\varepsilon): n > n_0 \Rightarrow \|f - f_n\| < \varepsilon$. Тоді

$$|f(x_n) - f_n(x_n)| < \|f - f_n\| \|x_n\| < 2\varepsilon \quad n > n_0,$$

в той час як $|f(x_n) - f_n(x_n)| = b-a$. Отримана суперечність доводить відсутність у розглянутому прикладі рівномірної збіжності.

Добуток операторів. Розглянемо два оператори $A \in \mathfrak{R}(X, Y)$ і $B \in \mathfrak{R}(Y, Z)$.

Означення 2.2.7. Добутком BA цих операторів називається оператор, визначений на всьому просторі X зі значеннями у просторі Z , що діє за формулою

$$(BA)x = B(Ax) \quad \forall x \in X. \quad (2.39)$$

Легко помітити, що якщо $A \in \mathfrak{R}(X, Y)$ і $B \in \mathfrak{R}(Y, Z)$, то $BA \in \mathfrak{R}(X, Z)$, тобто є обмеженим оператором, причому

$$\|BA\| \leq \|B\| \|A\|. \quad (2.40)$$

Дійсно, $\|(BA)x\| = \|B(Ax)\| \leq \|B\| \|Ax\| \leq \|B\| \|A\| \|x\| \quad \forall x \in X$, звідки випливає (2.40).

Розглянемо нормований простір $\mathfrak{R}(X)$ лінійних обмежених операторів, що діють у просторі X . В силу попереднього означення на цьому просторі визначена також операція множення елементів, яка підлягає наступним умовам ($A_i \in \mathfrak{R}(X)$, $\lambda \in R(C)$): 1) $(A_1 A_2) A_3 = A_1 (A_2 A_3)$, 2) $\lambda(A_1 A_2) = (\lambda A_1) A_2$, 3) $(A_1 + A_2) A_3 = A_1 A_3 + A_2 A_3$, 4) $A_3(A_1 + A_2) = A_3 A_1 + A_3 A_2$.

Означення 2.2.8. Лінійне простір з операцією множення елементів, що підлягає перерахованим вище умовам, називається алгеброю. Алгебра, на якій задані норми елементів, що задовольняють умову (2.40), називається нормованою алгеброю.

Якщо ця алгебра повна відносно введеної в ній норми, то така алгебра називається **банаховою**.

Таким чином, якщо X – банахів простір, то $\mathfrak{R}(X)$ – банахова алгебра. Зазначимо також, що ця алгебра має одиницю, роль якої відіграє тотожний оператор I , що діє за формулою $Ix = x \quad \forall x \in X$.

Обернені оператори. Нехай X, Y – лінійні простори. Розглянемо лінійний оператор $A: X \rightarrow Y$ з областю визначення $D(A) = X$ і образом $R(A) \subseteq Y$.

Означення 2.2.9. Оператор A називається **ін'єктивним** оператором, якщо з рівності $Ax_1 = Ax_2$ випливає, що $x_1 = x_2$.

Таким чином, ін'єктивність оператора A означає, що $\forall y \in R(A)$ існує єдиний прообраз $x \in X : Ax = y$ (рис. 11).

Означення 2.2.10. Оператор A називається **сюр'єктивним** оператором, якщо $R(A) = Y$.

Сюр'єктивність оператора A означає, що кожний $y \in Y$ має, щонайменше, один прообраз $x \in X : Ax = y$ (рис. 12).

З точки зору розв'язання операторного рівняння $Ax = y$

сюр'єктивність оператора A означає існування розв'язку цього рівняння $\forall y \in Y$ (можливо, не єдиного), а ін'єктивність оператора A – неможливість існування більше одного розв'язку.

Приклади 2.2.8. Розглянемо оператор диференціювання $A = \frac{d}{dt} : C^1[a, b] \rightarrow C[a, b]$, що діє за формулою $y(t) = \frac{dx}{dt}$, $x \in C^1[a, b]$. Цей оператор сюр'єктивний, але не ін'єктивний. Дійсно, $\forall y \in C[a, b]$ існує

прообраз $x(t) = \int_a^t y(s) ds$. Однак

з рівності $\frac{dx_1}{dt} = \frac{dx_2}{dt}$ не випливає, що $x_1 = x_2$.

Означення 2.2.11.

Ядром лінійного оператора

A називається множина $N(A) = \{x \in D(A) : Ax = 0\}$.

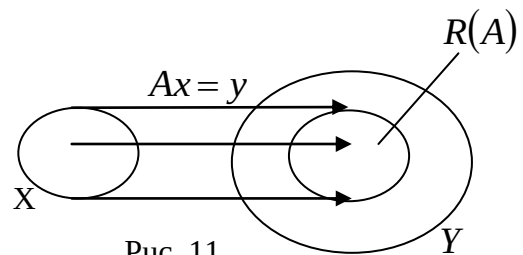


Рис. 11

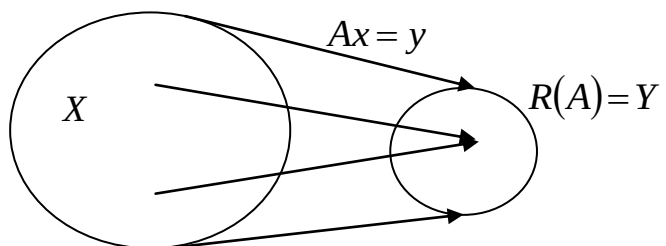


Рис. 12

Неважко зрозуміти, що ядро $N(A)$ є лінійним многовидом у просторі X , а у випадку $A \in \mathfrak{R}(X, Y)$ – підпростором.

Теорема 2.2.7. *Лінійний оператор A є ін'єктивним оператором тоді і тільки тоді, коли $N(A) = \{0\}$.*

Доведення. 1. Нехай оператор A ін'єктивний і x_1 – довільний елемент $N(A)$. Тоді $Ax_1 = A0 = 0$, звідки $x_1 = 0$.

2. Нехай $N(A) = \{0\}$ і $Ax_1 = Ax_2$. Тоді $A(x_1 - x_2) = 0 \Rightarrow x_1 - x_2 \in N(A) = \{0\} \Rightarrow x_1 = x_2$.

Означення 2.2.12. Оператор $A: X \rightarrow Y$ називається **бієктивним оператором**, якщо він одночасно є ін'єктивним і сюр'єктивним оператором.

З означень 2.2.10, 2.2.11 випливає, що бієктивний оператор взаємно однозначно відображає простір X на простір Y . Зазначимо, що кожний ін'єктивний оператор A бієктивно відображає простір X на свій образ $R(A)$.

Приклад 2.2.9. Нехай $p(t)$ – неперервна на відрізку $[a, b]$ функція, що не приймає значення 0. Оператор A множення на функцію $p(t)$ у просторі $C[a, b]$, що діє за формулою $Ax = p(t)x(t)$, бієктивно відображає простір $C[a, b]$ на себе (чому?).

Означення 2.2.13. Нехай оператор $A: X \rightarrow Y$ бієктивний. Оператор $A^{-1}: Y \rightarrow X$, що ставить у відповідність кожному елементу $Ax \in Y$ елемент $x \in X$, називається **оберненим оператором до оператора A** .

З цього означення випливає, що $A^{-1}(Ax) = x \quad \forall x \in X$ (рис. 13),

тобто $A^{-1}A = I_X$, де I_X – тотожний оператор у просторі X . Справджується також рівність $AA^{-1} = I_Y$ (чому?).

Зауважимо, що для ін'єктивного оператора $A: D(A) \rightarrow R(A)$ існує обернений оператор $A^{-1}: R(A) \rightarrow D(A)$.

Доведення наступної теореми

надається читачеві.

Теорема 2.2.8 Оператор A^{-1} , обернений до лінійного оператора A , є лінійним оператором.

Тепер розглянемо лінійний оператор A , що діє з нормованого

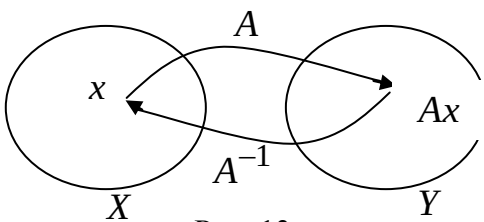


Рис. 13

простору X в нормований простір Y .

Означення 2.2.14. Оператор $A: X \rightarrow Y$ називається **неперервно оборотним**, якщо оператор A бієктивний і $A^{-1} \in \mathfrak{R}(Y, X)$.

Теорема 2.2.9. Оператор A неперервно оборотний тоді і тільки тоді, коли $R(A) = Y$ та існує число $m > 0$ таке, що

$$\|Ax\| \geq m\|x\| \quad \forall x \in X. \quad (2.41)$$

Доведення. 1. Нехай оператор A неперервно оборотний. Тоді з означення 2.2.14 випливає, що $R(A) = Y$ та існує число $C > 0$ таке, що $\|A^{-1}y\| \leq C\|y\| \quad \forall y \in Y$. Позначимо $A^{-1}y = x$, звідки $y = Ax$. Підставляючи ці позначення в попередню нерівність, одержуємо $\|x\| \leq C\|Ax\| \quad \forall x \in X \Rightarrow \|Ax\| \geq m\|x\| \quad \forall x \in X$, де $m = 1/C$.

2. Нехай $R(A) = Y$ і $\|Ax\| \geq m\|x\| \quad \forall x \in X$. Перша умова означає, що оператор A сюр'єктивний. З другої умови випливає, що якщо $x \in N(A)$, то $Ax = 0$, і з нерівності для норм випливає, що $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$, тобто $N(A) = \{0\}$. Тоді в силу теореми 2.2.7 оператор A також ін'єктивний, а отже, і бієктивний. В цьому випадку існує обернений оператор $A^{-1}: Y \rightarrow X$. Його обмеженість випливає з нерівності $\|Ax\| \geq m\|x\| \quad \forall x \in X$, яка, як ми бачили вище, рівносильна нерівності $\|A^{-1}y\| \leq C\|y\| \quad \forall y \in Y$.

Приклад 2.2.10. Розглянемо оператор $A: C[0;1] \rightarrow C[0;1]$, що діє за формулою $Ax = x(t) - \int_0^1 tsx(s)ds = y(t)$. Покажемо, що він неперервно оборотний. З формули, що задає оператор, випливає, що $\forall y \in C[a,b]$ його прообраз може мати тільки вигляд $x(t) = y(t) + Ct$, де $C = \int_0^1 sx(s)ds$.

Знайдемо таке число C , щоб $Ax = y$. Подіавши оператором A на елемент x , одержуємо

$$Ax = A(y + Ct) = Ay + CA t = y(t) - \int_0^1 tsy(s)ds + Ct - C \int_0^1 ts^2 ds = y(t) - \int_0^1 tsy(s)ds + \frac{2}{3}Ct.$$

Останній вираз буде збігатися з елементом y , якщо $C = \frac{3}{2} \int_0^1 sy(s)ds$.

Таким чином, кожному $y \in C[a, b]$ відповідає єдиний прообраз

$$x(t) = y(t) + \frac{3}{2} \int_0^1 t s y(s) ds.$$

Отже, явно побудований обернений оператор

$$x = A^{-1}y = y(t) + \frac{3}{2} \int_0^1 t s y(s) ds.$$

В силу оцінки

$$\|A^{-1}y\| \leq \|y\| + \frac{3}{2} \left\| \int_0^1 t s y(s) ds \right\| \leq \|y\| + \frac{3}{2} \|y\| \int_0^1 s ds = \frac{7}{4} \|y\|$$

робимо висновок, що оператор A неперервно оборотний, причому $\|A^{-1}\| \leq 7/4$.

Аналогічний результат можна отримати безпосередньо з оператора A на підставі теореми 2.2.9 з допомогою оцінки

$$\|Ax\| \geq \|x\| - \left\| \int_0^1 t s x(s) ds \right\| \geq \|x\| - \|x\| \int_0^1 s ds = \frac{1}{2} \|x\|,$$

звідки, зрештою, виходить менш точна оцінка для норми оберненого оператора $\|A^{-1}\| \leq 2$.

При з'ясуванні неперервної оборотності оператора корисна наступна

Теорема 2.2.10. Нехай $A \in \mathfrak{R}(X)$ і $\|A\| < 1$. Тоді оператор $(I - A)^{-1} \in \mathfrak{R}(X)$, причому $\|(I - A)^{-1}\| \leq (1 - \|A\|)^{-1}$.

Доведення. Розглянемо у просторі $\mathfrak{R}(X)$ ряд $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$. Оскільки

$\|A^k\| \leq \|A\|^k$ і за умовою $\|A\| < 1$, то ряд збігається абсолютно.

Позначимо його суму через S . Нехай $S_n = \sum_{k=0}^n A^k$, тоді $S_n \rightarrow S$.

Перейдемо до границі при $n \rightarrow \infty$ в співвідношеннях

$$(I - A)S_n = S_n(I - A) = I - A^{n+1}, \quad \|S_n\| \leq \sum_{k=0}^n \|A\|^k = (1 - \|A\|^{n+1}) (1 - \|A\|)^{-1},$$

враховуючи, що $A^{n+1} \rightarrow 0$. В результаті одержуємо $(I - A)S = S(I - A) = I$, $\|S\| \leq (1 - \|A\|)^{-1}$, тобто $S = (I - A)^{-1}$ і $\|(I - A)^{-1}\| \leq (1 - \|A\|)^{-1}$.

Приклад 2.2.11. Розглянемо інтегральний оператор $A: C[0,1] \rightarrow C[0,1]$, що діє за формулою $Ax = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2+s^2} x(s) ds$. Його норма $\|A\| < 1$, оскільки

$$\|A\| = \max_{t \in [0,1]} \int_0^1 \frac{1}{1+t^2+s^2} ds = \max_{t \in [0,1]} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{\pi}{4} < 1.$$

Використовуючи попередню теорему, можна стверджувати неперервну оборотність оператора $I - A$ і записати $(I - A)^{-1}y$ у вигляді ряду

$$(I - A)^{-1}y = y(t) + \int_0^1 \frac{1}{1+t^2+s^2} y(s) ds + \int_0^1 \frac{1}{1+t^2+p^2} \int_0^1 \frac{1}{1+p^2+s^2} y(s) ds dp + \dots$$

Теорема 2.2.11 (З. Банах). Обмежений лінійний оператор, що бієктивно відображає банахів простір X на банахів простір Y , неперервно оборотний.

Теорема Банаха грає фундаментальну роль в функціональному аналізі, однак її доведення виходить за рамки цієї книги.

Приклад 2.2.12. Розглянемо оператор $A: C[a,b] \rightarrow \tilde{C}^1[a,b]$, що діє за формулою $Ax = \int_a^t x(s) ds = y(t)$. Тут через $\tilde{C}^1[a,b]$ позначено

нормований простір неперервно диференційовних на відрізку $[a,b]$ функцій $x(t)$, для яких $x(a) = 0$ і $\|x\| = \max_{t \in [a,b]} |x'(t)|$. Так само, як і в

прикладі 1.4.3, можна довести його повноту. Оператор A бієктивний. Для обґрунтування цього факту Зазначимо, що $N(A) = \{0\}$ і кожную

функцію $y(t) \in \tilde{C}^1[a,b]$ можна представити у вигляді $y(t) = \int_a^t y'(s) ds$, де

$y'(t) \in C[a,b]$, тобто оператор A одночасно ін'єктивний і сюр'єктивний. Оператор A також обмежений, оскільки

$$\|Ax\|_{\tilde{C}^1[a,b]} = \max_{t \in [a,b]} \left| \frac{d}{dt} \int_a^t x(s) ds \right| = \max_{t \in [a,b]} |x(t)| = \|x\|_{C[a,b]}.$$

За теоремою Банаха обернений оператор $A^{-1}: \tilde{C}^1[a,b] \rightarrow C[a,b]$, що діє за формулою $A^{-1}y = y'(t) = x(t)$, обмежений. В цьому, зрештою,

можна впевнитися безпосередньо:

$$\|A^{-1}y\|_{C[a,b]} = \|y'(t)\|_{C[a,b]} = \max_{t \in [a,b]} |y'(t)| = \|y\|_{\tilde{C}^1[a,b]}.$$

Зауважимо, що оператор A в цьому прикладі фактично є ізометричним оператором.

Зауваження. Порівняння наведеного прикладу з прикладом 2.2.4 показує, що властивість обмеженості оператора істотно залежить від того, в яких просторах він діє.

Корисна наступна

Теорема 2.2.12. Якщо оператори $A \in \mathfrak{R}(X, Y)$ і $B \in \mathfrak{R}(Y, Z)$ неперервно оборотні, то оператор BA неперервно оборотний, причому $(BA)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$.

Спряжений оператор. Нехай $A \in \mathfrak{R}(X, Y)$. Розглянемо довільний елемент f спряженого простору Y^* . Нагадаємо, що це лінійний обмежений функціонал, заданий на просторі Y . На просторі X побудуємо функціонал $g(x) \equiv f(Ax)$. Упевнимися, що він є лінійним і обмеженим, тобто $g \in X^*$. Лінійність функціоналу g випливає з лінійності функціоналу f і оператора A , а обмеженість – з оцінки

$$|g(x)| = |f(Ax)| \leq \|f\| \|Ax\| \leq \|f\| \|A\| \|x\| \quad \forall x \in X, \forall f \in Y^*. \quad (2.42)$$

При цьому $\|g\| \leq \|f\| \|A\|$. Таким чином, формула $g(x) \equiv f(Ax)$ кожному елементу $f \in Y^*$ зіставляє певний елемент $g \in X^*$, тобто задає оператор $A^*: Y^* \rightarrow X^*$ такий, що $A^*f = g$.

Означення 2.2.15. Оператор $A^*: Y^* \rightarrow X^*$, визначений формулою

$$(A^*f)(x) = f(Ax) \quad \forall x \in X, \forall f \in Y^*, \quad (2.43)$$

називається **спряженим оператором до оператора A** .

Приклад 2.2.13. Розглянемо дійсний матричний оператор A :

$l_p \rightarrow l_q$, що діє за формулою $y = Ax$: $\eta_i = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} x_k$, де $x = (\xi_i)_{i=1}^{\infty} \in l_p$,

$y = (\eta_i)_{i=1}^{\infty} \in l_q$, $\sum_{i,k=1}^{\infty} |a_{ik}|^q < \infty$. Знайдемо оператор $A^*: l_q^* = l_p \rightarrow l_p^* = l_q$.

Оберемо довільний елемент $f = (f_i)_{i=1}^{\infty} \in l_p$ і скористаємося

формулою (2.12) загального вигляду функціоналу у просторі l_p . В результаті

$$f(Ax) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i \eta_i = \sum_{i=1}^{\infty} f_i \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} x_k = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \sum_{i=1}^{\infty} f_i a_{ik} = \sum_{k=1}^{\infty} x_k g_k ,$$

де $g_k = \sum_{i=1}^{\infty} a_{ki}^T f_i$. Абсолютна збіжність рядів в останній рівності

впливає з нерівності Гельдера. Таким чином, спряжений оператор задається формулою $A^* f = g$, де $g_k = \sum_{i=1}^{\infty} a_{ki}^T f_i$, $g = (g_k)_{k=1}^{\infty} \in l_q$. Отже,

спряжений оператор до матричного оператора $A = (a_{ik})_{i,k=1}^{\infty}$ задається транспонованою матрицею.

Теорема 2.2.13. Якщо $A \in \mathfrak{R}(X, Y)$, то $A^* \in \mathfrak{R}(Y^*, X^*)$ і $\|A^*\| = \|A\|$.

Доведення. 1. Покажемо, що оператор A^* лінійний. Нехай

$$A^* f_i = g_i \quad (i=1,2) \Rightarrow f_i(Ax) = g_i(x). \quad \text{Тоді} \quad \sum_{i=1}^2 \lambda_i g_i(x) = \sum_{i=1}^2 \lambda_i f_i(Ax) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\sum_{i=1}^2 \lambda_i g_i \right)(x) = \left(\sum_{i=1}^2 \lambda_i f_i \right)(Ax). \quad \text{Використовуючи означення спряженого}$$

$$\text{оператора, одержуємо} \quad A^* \left(\sum_{i=1}^2 \lambda_i f_i \right) = \sum_{i=1}^2 \lambda_i g_i = \sum_{i=1}^2 \lambda_i A^* f_i, \quad \text{що доводить}$$

лінійність оператора A^* .

2. Обмеженість оператора A^* впливає з формули (2.42), оскільки $\|A^* f\| = \|g\| \leq \|A\| \|f\|$, при цьому $\|A^*\| \leq \|A\|$. Протилежна нерівність впливає з наслідку 1 до теореми 2.1.5, згідно з яким існує функціонал $f \in Y^*$ з нормою $\|f\|=1$ такий, що $f(Ax) = \|Ax\| \quad \forall x \in X$. Тоді

$$\|Ax\| = f(Ax) = (A^* f)(x) \leq \|A^*\| \|f\| \|x\| = \|A^*\| \|x\| \quad \forall x \in X,$$

звідки $\|A\| \leq \|A^*\|$. Таким чином, $\|A^*\| = \|A\|$.

Теорема 2.2.14. Якщо $A \in \mathfrak{R}(X, Y)$ і $A^{-1} \in \mathfrak{R}(Y, X)$, то $(A^*)^{-1} \in \mathfrak{R}(X^*, Y^*)$, причому $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

Доведення негайно впливає зі співвідношень $A^{-1}A = I_X$, $AA^{-1} = I_Y$ після переходу в них до спряжених рівностей.

Спряжений оператор в гільбертовому просторі. Нехай H – гільбертів простір, оператор $A \in \mathfrak{R}(H)$. Розглянемо функціонал (Ax, f) , заданий на елементах $x \in H$ при фіксованому елементі $f \in H$. З властивостей скалярного добутку випливає, що цей функціонал є лінійним і обмеженим. Тоді за теоремою Рісса існує єдиний елемент $g \in H$ такий, що $(Ax, f) = (x, g) \quad \forall x \in H$. Згідно з означенням 2.2.15, оператор A^* , що діє за формулою $A^*f = g$, є спряженим оператором к оператору A в гільбертовому просторі H . Ключова формула (2.43), що задає цей оператор, у даному випадку має вигляд

$$(Ax, f) = (x, A^*f) \quad \forall x, f \in H. \quad (2.44)$$

Приклад 2.2.14. Розглянемо в гільбертовому просторі $L_2[a, b]$ інтегральний оператор A , заданий формулою

$$y = Ax, \quad y(u) = \int_a^b k(u, v)x(v)dv, \quad \int_a^b \int_a^b |k(u, v)|^2 dudv < \infty.$$

Остання умова забезпечує належність оператора A простору $\mathfrak{R}(L_2[a, b])$. Дійсно,

$$\|Ax\| = \left(\int_0^\pi \left| \int_0^\pi k(u, v)x(v)dv \right|^2 du \right)^{1/2} \leq \left(\int_0^\pi \int_0^\pi |k(u, v)|^2 dvdu \right)^{1/2} \|x\|.$$

Перетворимо скалярний добуток:

$$(Ax, f) = \int_a^b f(u) \int_a^b k(u, v)x(v)dvdu = \int_a^b x(v) \int_a^b k(u, v)f(u)dudv = (x, A^*f),$$

де $(A^*f)(v) = \int_a^b k(u, v)f(u)du$. Таким чином, у даному прикладі спряжений оператор є інтегральним із транспонованим ядром.

Наведемо властивості спряженого оператора в гільбертовому просторі, що безпосередньо впливають з його означення:

$$1. \quad A^{**} = A. \quad (2.45)$$

$$2. \quad (A + B)^* = A^* + B^*. \quad (2.46)$$

$$3. \quad (\lambda A)^* = \bar{\lambda} A^*. \quad (2.47)$$

$$4. (AB)^* = B^* A^*. \quad (2.48)$$

Для прикладу доведемо рівність (2.45). З означення оператора, спряженого до оператора A^* , одержуємо $(A^* x, f) = (x, A^{**} f)$. З іншого боку,

$$(A^* x, f) = \overline{(f, A^* x)} = \overline{(Af, x)} = (x, Af), \quad \text{звідки}$$

$$(x, A^{**} f) = (x, Af) \quad \forall x, f \in H \Rightarrow A^{**} = A.$$

Для дослідження операторних рівнянь в гільбертових просторах важливі наступні співвідношення між ядрами і образами спряжених операторів:

$$R(A^*)^\perp = N(A), \quad N(A^*)^\perp = \overline{R(A)}. \quad (2.49)$$

Доведемо, наприклад, першу з наведених формул. Вона випливає з логічного ланцюжка

$$\bar{x} \in N(A) \Leftrightarrow A\bar{x} = 0 \Leftrightarrow 0 = (A\bar{x}, y) = (\bar{x}, A^* y) \quad \forall y \in H \Leftrightarrow \bar{x} \perp R(A^*) \Leftrightarrow \bar{x} \in R(A^*)^\perp.$$

Другу формулу (2.49) одержуємо з першої заміною $A \leftrightarrow A^*$ і переходом до ортогональних доповнень з урахуванням співвідношення (1.53).

Зауваження. 1. Деяка "нерівноправність" формул (2.49) пов'язана з тим, що ядро обмеженого оператора є підпростором, у той час як його образ може не бути замкнутою множиною.

2. Формули (2.49) можна записати у вигляді ортогонального розкладу простора H (див. (1.53))

$$H = N(A) \oplus \overline{R(A^*)} = N(A^*) \oplus \overline{R(A)}. \quad (2.50)$$

3. Формули, подібні до співвідношень (2.49), можна записати для спряжених операторів, що діють у нормованих просторах. Нехай $A \in \mathfrak{R}(X, Y)$. Тоді

$${}^\perp N(A^*) = \overline{R(A)}, \quad N(A^*) = R(A)^\perp, \quad N(A) = R(A^*)^\perp \cap X. \quad (2.51)$$

Приклад 2.2.15. Покажемо на прикладі, що образ обмеженого оператора може не бути замкнутою множиною. Розглянемо оператор $A \in \mathfrak{R}(l_2)$, що відноситься до класу діагональних операторів і діє за

формулою $Ax = \left(\frac{\xi_i}{i} \right)_{i=1}^\infty$, $x = (\xi_i)_{i=1}^\infty \in l_2$ (покажіть його обмеженість).

Оберемо послідовність $x_n = \left(\frac{ni}{i^2 + ni} \right)_{i=1}^\infty \in l_2$. Тоді послідовність

$Ax_n \in R(A)$ і збігається до елемента $y = \left(\frac{1}{i}\right)_{i=1}^{\infty}$. Дійсно,

$$\|Ax_n - y\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \left| \frac{n}{i^2 + ni} - \frac{1}{i} \right|^2 \right)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(i+n)^2} \right)^{1/2} = \left(\sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{i^2} \right)^{1/2} \rightarrow 0 \quad n \rightarrow \infty.$$

Однак очевидно, що елемент $y \notin R(A)$. Отже, образ $R(A)$ не замкнений. Зазначимо також, що в це прикладі $N(A) = \{0\}$, тому формула (2.50) має вигляд $H = \overline{R(A)}$.

Означення 2.2.16. Оператор $A \in \mathfrak{R}(H)$ називається **самоспряженим (ермітовим)**, якщо $A^* = A$.

З формули (2.44) випливає, що оператор A є самоспряженим, якщо для нього виконується співвідношення

$$(Ax, f) = (x, Af) \quad \forall x, f \in H, \quad (2.52)$$

тобто такий оператор можна перекидати з одного множника на інший в скалярному добутку.

Інтегральний оператор прикладу 2.2.12 з симетричним ядром $k(u, v) = k(v, u)$ і діагональний оператор прикладу 2.2.13 є самоспряженими операторами.

Характерною особливістю самоспряженого оператора є те, що в комплексному гільбертовому просторі квадратичний функціонал (Ax, x) , пов'язаний з оператором A , набуває тільки дійсних значень, оскільки з формули (2.52) і властивостей скалярного добутку випливає, що $(Ax, x) = (x, Ax) = \overline{(Ax, x)}$.

Теорема 2.2.15. Нехай $A \in \mathfrak{R}(H)$ і $A^* = A$. Тоді норму оператора A можна обчислити за формулою

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |(Ax, x)|. \quad (2.53)$$

Доведення. Позначимо $\sup_{\|x\| \leq 1} |(Ax, x)|$ через C_A . З оцінки

квадратичного функціоналу $|(Ax, x)| \leq \|Ax\| \|x\| \leq \|A\| \|x\|^2 \quad \forall x \in H$ випливає, що $C_A \leq \|A\|$. Щоб одержати протилежну нерівність, Зазначимо, що для будь-яких $x, y \in H$ справедлива тотожність

$$\begin{aligned} (A(x+y), x+y) - (A(x-y), x-y) &= 2(Ax, y) + 2(Ay, x) = 2(Ax, y) + 2(y, Ax) = \\ &= 2(Ax, y) + 2\overline{(Ax, y)} = 4 \operatorname{Re}(Ax, y). \end{aligned}$$

Тоді з використанням рівності паралелограма одержуємо

$$4|\operatorname{Re}(Ax, y)| \leq |(A(x+y), x+y)| + |(A(x-y), x-y)| \leq C_A(\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2) = 2C_A(\|x\|^2 + \|y\|^2),$$

звідки при $\|x\|, \|y\| \leq 1$ випливає, що $|\operatorname{Re}(Ax, y)| \leq C_A$. Підставимо в цю нерівність $y = \frac{Ax}{\|Ax\|}$. У результаті приходимо до оцінки

$$\|Ax\| \leq C_A \quad \forall x: \|x\| \leq 1, \text{ звідки } \|A\| \leq C_A.$$

Так само, як і в скінченновимірному випадку, важлива властивість самоспряженого оператора в гільбертовому просторі пов'язана з поняттям інваріантного підпростору. Нагадаємо, що підпростір $L \subset H$ називається **інваріантним підпростором** оператора A , якщо $AL \subset L$.

Теорема 2.2.16. Нехай $A \in \mathfrak{R}(H)$, $A^* = A$. Тоді якщо підпростір $L \subset H$ є інваріантним, то ту ж властивість має і ортогональне доповнення до нього $L^\perp$.

Доведення. Розглянемо довільні елементи $x \in L, y \in L^\perp$. З умови $AL \subset L$ випливає, що

$$0 = (Ax, y) = (x, Ay) \Rightarrow Ay \perp L \Rightarrow Ay \in L^\perp \quad \forall y \in L^\perp \Rightarrow AL^\perp \subset L^\perp.$$

Наслідок. З формули (2.50) і останньої теореми випливає, що для самоспряженого оператора A справедливий розклад простору H в ортогональну суму інваріантних підпросторів

$$H = N(A) \oplus \overline{R(A)}. \quad (2.54)$$

Означення 2.2.17. Самоспряжений оператор $A \in \mathfrak{R}(H)$ називається **невід'ємним**, якщо

$$(Ax, x) \geq 0 \quad \forall x \in H. \quad (2.55)$$

і **додатним**, якщо додатково до (2.55) з $(Ax, x) = 0 \Rightarrow x = 0$.

Приклад 2.2.16. Оператор $A \in \mathfrak{R}(L_2[0, 1])$ множення на незалежну змінну, що діє за формулою $Ax = tx(t)$, є позитивним, оскільки

$$(Ax, x) = \int_0^1 t |x(t)|^2 dt \geq 0 \quad \forall x \in L_2[0, 1].$$

Для невід'ємного оператора A виконується нерівність

$$|(Ax, y)| \leq \sqrt{(Ax, x)} \sqrt{(Ay, y)} \quad \forall x, y \in H, \quad (2.56)$$

яку можна довести так само, як і нерівність Коші (1.26).

Проектори. Важливим класом невід'ємних операторів є оператори ортогонального проектування.

Означення 2.2.18. Самоспряжений оператор $P \in \mathfrak{R}(H)$, для якого $P^2 = P$, називається **проектором**.

Зазначимо, що разом з оператором P властивість проєктора має і оператор $I - P$. Дійсно, $(I - P)^2 = I - 2P + P^2 = I - 2P + P = I - P$.

Для $\forall x \in H$ справедливе очевидне представлення $x = Px + (I - P)x$, причому $R(P) \perp R(I - P)$. Останнє твердження випливає з рівності $(Px, (I - P)y) = (P(I - P)x, y) = ((P - P^2)x, y) = ((P - P)x, y) = 0$. Таким чином, для проєктора P справедлива формула

$$H = R(P) \oplus R(I - P),$$

з якої, зокрема, випливає, що $R(P) = N(I - P)$, тобто образ проєктора є підпростором. На цей підпростір оператор P і здійснює проєкування.

Приклад 2.2.17. У просторі l_2 оператор $P(\xi_i)_{i=1}^\infty = (\xi_1, \dots, \xi_n, 0, \dots)$ є оператором ортогонального проєкування на підпростір $L = \text{Lin}\{e_i\}_{i=1}^n, e_i = (\delta_{ik})_{k=1}^\infty$.

Лінійні цілком неперервні (компактні) оператори. Клас операторів, розглянутих в цьому пункті, за своїми властивостями найбільш близький до операторів в скінченновимірних просторах. При цьому він достатньо змістовний, оскільки включає в себе ряд інтегральних і нескінченних матричних операторів, які виникають при дослідженні граничних задач для диференціальних рівнянь.

Нехай X, Y – нормовані простори.

Означення 2.2.19. Оператор $A \in \mathfrak{R}(X, Y)$ називається **цілком неперервним (компактним) оператором**, якщо кожна обмежену множину простору X він переводить в компакту множину простору Y .

У подальшому будемо позначати клас цілком неперервних операторів $A: X \rightarrow Y$ через $\mathfrak{R}_0(X, Y)$. Очевидно, що $\mathfrak{R}_0(X, Y) \subseteq \mathfrak{R}(X, Y)$. Зазначимо, що існують обмежені оператори, які не є цілком неперервними, зокрема тотожній оператор I в нескінченновимірному просторі X (чому?).

Зазначимо, що в означенні 2.2.19 довільну обмежену множину простору X можна замінити замкнутою одиничною кулею $\bar{B}_1(0) \subset X$ (чому?).

Приклад 2.2.18. У просторі $C[0, 1]$ розглянемо інтегральний оператор $y = Ax$, $Ax = \int_0^1 k(u, v)x(v)dv$, з неперервним ядром

$k(u,v) \in C[0,1] \times [0,1]$. Цей оператор є цілком неперервним. Для обґрунтування цього покажемо, що множина $A\bar{B}_1(0)$ компактна у просторі $C[0,1]$. При цьому використаємо критерій компактності Арцела – Асколі (теорема 1.7.2). Обмеженість множини $A\bar{B}_1(0)$ випливає з обмеженості оператора A (див. приклад 2.2.2). Покажемо, що функції з множини $A\bar{B}_1(0)$ рівностепенно неперервні. Нехай $y \in A\bar{B}_1(0)$. Тоді

$$\begin{aligned} |y(u_1) - y(u_2)| &= \left| \int_0^1 [k(u_1, v) - k(u_2, v)] x(v) dv \right| \leq \int_0^1 |k(u_1, v) - k(u_2, v)| |x(v)| dv \leq \\ &\leq \int_0^1 |k(u_1, v) - k(u_2, v)| dv \|x\| \leq \int_0^1 |k(u_1, v) - k(u_2, v)| dv. \end{aligned} \quad (2.57)$$

Оскільки функція $\int_0^1 |k(u, v)| dv$ неперервна на відрізку $[0,1]$, то вона рівномірно неперервна, тобто

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall u_1, u_2 \in [0,1] : |u_1 - u_2| < \delta \Rightarrow \int_0^1 |k(u_1, v) - k(u_2, v)| dv < \varepsilon.$$

Тому з оцінки (2.57) випливає нерівність $|y(u_1) - y(u_2)| < \varepsilon \quad \forall y \in A\bar{B}_1(0)$, яке доводить рівностепену неперервність множини $A\bar{B}_1(0)$, а отже, і її компактність.

Теорема 2.2.17. Множина $\mathfrak{R}_0(X, Y)$ є підпростором у просторі $A \in \mathfrak{R}(X, Y)$.

Доведення. 1. Покажемо, що множина $\mathfrak{R}_0(X, Y)$ є лінійним многовидом. Нехай $A_1, A_2 \in \mathfrak{R}_0(X, Y)$, $\lambda_1, \lambda_2 \in R(C)$, $A = \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2$. Розглянемо довільну послідовність $y_n \in A\bar{B}_1(0)$. Тоді $\exists x_n \in \bar{B}_1(0) : Ax_n = y_n$. Оскільки оператор A_1 цілком неперервний, то з послідовності $\{A_1 x_n\}_{n=1}^\infty$ можна виділити збіжну підпослідовність $\{A_1 x'_n\}_{n=1}^\infty$. Аналогічно з послідовності $\{A_2 x'_n\}_{n=1}^\infty$ можна виділити збіжну підпослідовність $\{A_2 x''_n\}_{n=1}^\infty$. Тоді послідовність $y''_n = Ax''_n$ буде збігатися, що означає компактність множини $A\bar{B}_1(0)$, а отже, компактність оператора A .

2. Покажемо, що множина $\mathfrak{R}_0(X, Y)$ є замкнутою. Нехай

послідовність $A_n \in \mathfrak{R}_0(X, Y)$ і $A_n \rightarrow A$ у просторі $\mathfrak{R}(X, Y)$. Тоді $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0(\varepsilon)$ таке, що при $n > n_0$ виконується нерівність $\|A_n x - Ax\| \leq \|A_n - A\| < \varepsilon \quad \forall x \in \overline{B}_1(0)$. З означення цілком неперервного оператора випливає, що множина $A_n \overline{B}_1(0)$ – компактна, але тоді, в силу останньої нерівності, вона є компактною ε -мережею для множини $A \overline{B}_1(0)$ при кожному $\varepsilon > 0$. За наслідком теореми 1.7.1 множина $A \overline{B}_1(0)$ – компактна, тому $A \in \mathfrak{R}_0(X, Y)$ і многовид $\mathfrak{R}_0(X, Y)$ замкнений.

З теореми випливає, що обмежений оператор, який з будь-яким ступенем точності рівномірно апроксимується цілком неперервними операторами, є цілком неперервним.

Теорема 2.2.18. *Якщо хоч би один з просторів X або Y скінченновимірний, то $\mathfrak{R}_0(X, Y) = \mathfrak{R}(X, Y)$.*

Доведення. 1. Нехай $A \in \mathfrak{R}(X, Y)$, простір Y скінченновимірний, а M – довільна обмежена множина у просторі X . Тоді множина AM обмежена у просторі Y і, отже, за теоремою Больцано – Вейерштрасса компактна. Тому $A \in \mathfrak{R}_0(X, Y)$.

2. Нехай $A \in \mathfrak{R}(X, Y)$, X – скінченновимірний простір. Тоді $R(A)$ – скінченновимірний підпростір у просторі Y і з попереднього $A \in \mathfrak{R}_0(X, Y)$.

Приклад 2.2.19. Матричний і інтегральний оператори з прикладу 2.2.5 є цілком неперервними операторами, оскільки з довільним ступенем точності рівномірно апроксимуються відповідно матричними операторами редукції і інтегральними операторами з виродженими ядрами. При цьому апроксимуючі оператори є цілком неперервними в силу того, що їхні образи скінченновимірні.

Читачеві надається можливість самостійно довести наступний результат.

Теорема 2.2.19. *Нехай $A \in \mathfrak{R}(X, Y)$, $B \in \mathfrak{R}(Y, Z)$. Якщо хоч би один з цих операторів цілком неперервний, то оператор $BA \in \mathfrak{R}_0(X, Y)$.*

Наслідок. Якщо оператор $A \in \mathfrak{R}_0(X, Y)$ і існує обернений оператор A^{-1} , то він не обмежений.

Приклад 2.2.20. З прикладу 1.7.4 випливає, що оператор $(Ax)(t) = \int_0^t x(s) ds = y(t)$ є цілком неперервним у просторі $C[0;1]$. Тоді

обернений оператор $A^{-1}y = y'$ не обмежений.

Теорема 2.2.20. Якщо оператор $A \in \mathfrak{R}_0(X, Y)$, то спряжений оператор $A^* \in \mathfrak{R}_0(Y^*, X^*)$.

Доведення. Позначимо через B і S відповідно замкнені одиничні кулі в просторах X і Y^* . Для довільної послідовності $g_n \in A^*S$ її прообраз в кулі S позначимо через f_n , тобто $f_n \in S$, $g_n = A^* f_n$. Множина AB є компактною замкнутою множиною. На множині AB функції послідовності $f_n(y)$ рівномірно обмежені, оскільки $\|f_n(y)\| \leq \|f_n\| \|y\| \leq \|y\| \|A\|$, і рівностепенно неперервні зважаючи на нерівності $\|f_n(y_1) - f_n(y_2)\| = \|f_n(y_1 - y_2)\| \leq \|f_n\| \|y_1 - y_2\| \leq \|y_1 - y_2\|$. Враховуючи зауваження до теореми Арцела – Асколі, робимо висновок про існування підпослідовності $f_{n_k}(y)$, збіжної до функції $f_0(y)$, $f_0 \in Y^*$ рівномірно на множині AB . Останнє твердження рівносильне тому, що підпослідовність

$$g_{n_k}(x) = f_{n_k}(Ax) \rightarrow f_0(Ax) = g_0(x), \quad g_0 \in X^*$$

рівномірно по $x \in B$. Отже, підпослідовність $g_{n_k} \rightarrow g_0$ у просторі X^* .

Тому множина A^*S є компактною, а оператор A^* – цілком неперервним.

2.3. СПЕКТР

При аналізі лінійних операторних рівнянь $(\lambda I - A)x = y$ у скінченновимірних просторах основоположну роль грає вивчення спектра оператора A , тобто повного набору його власних значень. Спектр оператора в нескінченновимірному просторі має більш складну структуру і може складатися не тільки з власних значень. Однак інформація про нього як і раніше важлива при аналізі лінійних операторних рівнянь.

Спектр лінійного обмеженого оператора. Розглянемо комплексний банахів простір X і оператор $A \in \mathfrak{R}(X)$.

Означення 2.3.1. Множина $\rho(A)$ усіх комплексних чисел, для яких $(\lambda I - A)^{-1} \in \mathfrak{R}(X)$, називається **резольвентною множиною** оператора A , число $\lambda \in \rho(A)$ – **регулярною точкою** оператора A , а оператор $R_\lambda(A) = (\lambda I - A)^{-1}$ при $\lambda \in \rho(A)$ – **резольвентою** оператора A .

Вивчимо структуру резольвентної множини обмеженого оператора.

Теорема 2.3.1. Резольвентна множина обмеженого оператора A відкрита.

Доведення. Нехай точка $\lambda_0 \in \rho(A)$. В цьому випадку з означення 2.3.1 випливає, що оператор $(\lambda_0 I - A)^{-1} \in \mathfrak{R}(X)$. Перетворимо оператор $\lambda I - A$:

$$\lambda I - A = (\lambda_0 I - A) - (\lambda_0 - \lambda)I = (\lambda_0 I - A)[I - (\lambda_0 - \lambda)R_{\lambda_0}(A)].$$

З теорем 2.2.10, 2.2.12 випливає, що оператор $\lambda I - A$ неперервно оборотний, якщо $\|(\lambda - \lambda_0)R_{\lambda_0}(A)\| < 1$, звідки $|\lambda - \lambda_0| < \|R_{\lambda_0}(A)\|^{-1}$, тобто разом з точкою λ_0 до резольвентної множини $\rho(A)$ в комплексній площині належить круг радіуса $\|R_{\lambda_0}(A)\|^{-1}$. Це означає, що $\rho(A)$ – відкрита множина.

Попутно з теореми 2.2.10 випливає розвинення резольвенти в степеневий ряд

$$R_\lambda(A) = \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^k [R_{\lambda_0}(A)]^{k+1}, \quad (2.58)$$

що збігається в крузі $|\lambda - \lambda_0| < \|R_{\lambda_0}(A)\|^{-1}$.

Наслідок. Резольвента $R_\lambda(A)$ неперервна по λ в області $\rho(A)$.

Теорема 2.3.2. Область $\Omega = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| > \|A\|\}$ є підмножиною резольвентної множини $\rho(A)$.

Доведення. В силу теореми 2.2.10 в кожній точці множини Ω оператор $\lambda I - A$ є неперервно оборотним. Дійсно, зважаючи на те, що за умови $|\lambda| > \|A\|$ абсолютно збігається операторний ряд $\lambda^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda^{-1} A)^k$, резольвента оператора A може бути представлена в точках області Ω розвиненням

$$R_\lambda(A) = (\lambda I - A)^{-1} = \lambda^{-1} (I - \lambda^{-1} A)^{-1} = \lambda^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda^{-1} A)^k, \quad (2.59)$$

причому $\|R_\lambda(A)\| \leq |\lambda|^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} |\lambda|^{-k} \|A\|^k = \frac{1}{|\lambda| - \|A\|}$.

Означення 2.3.2. Доповнення $\sigma(A)$ в комплексній площині до множини $\rho(A)$ називається **спектром** оператора A .

З двох попередніх теорем випливає, що спектр $\sigma(A)$ лінійного обмеженого оператора є замкненою множиною, причому $\sigma(A) \subset \{\lambda : |\lambda| \leq \|A\|\}$.

Приналежність числа λ спектру обмеженого оператора A означає для оператора $\lambda I - A$ відсутність неперервної оборотності. Враховуючи теорему Банаха про обмежений оператор, це можливо тільки за умови, що оператор $\lambda I - A$ не є бієктивним, тобто для нього не виконуються умови ін'єктивності або сюр'єктивності. Вказана обставина приводить до розбиття спектра оператора на три неперетинних множини $\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A) \cup \sigma_r(A)$.

Означення 2.3.3. Комплексне число λ називається **власним значенням** оператора A , якщо оператор $\lambda I - A$ не ін'єктивний, тобто рівняння $(\lambda I - A)u = 0$ має ненульовий розв'язок. Усі такі розв'язки називаються **власними векторами** оператора A , що відповідають власному значенню λ . Підпростір $V_\lambda = N(\lambda I - A)$ називається **власним підпростором** оператора A , що відповідає власному значенню λ . Множина $\sigma_p(A)$ усіх власних значень оператора A називається **точковим спектром** оператора A .

Означення 2.3.4. Множини $\sigma_c(A)$ і $\sigma_r(A)$ тих $\lambda \in \sigma(A)$, для яких оператор $\lambda I - A$ ін'єктивний, а його образ $R(\lambda I - A)$ щільний або

не щільний у просторі X , називаються відповідно неперервним і залишковим спектром оператора A .

Приклади 2.3.1. 1. У просторі l_p розглянемо діагональний оператор $Ax = A(\xi_i)_{i=1}^\infty = (\alpha_i \xi_i)_{i=1}^\infty$, для якого $\sup_i |\alpha_i| < \infty$. Нерівність

$$\|Ax\|^p = \sum_{i=1}^\infty |\alpha_i \xi_i|^p \leq \sup_i |\alpha_i|^p \sum_{i=1}^\infty |\xi_i|^p = \sup_i |\alpha_i|^p \|x\|^p \quad \text{показує, що}$$

$A \in \mathfrak{R}(l_p)$. Оператор $(\lambda I - A)^{-1}$ діє за формулою $(\lambda I - A)^{-1}(\eta_i)_{i=1}^\infty = (\eta_i / (\lambda - \alpha_i))_{i=1}^\infty$. Цей оператор визначений і

обмежений за умови $\lambda \notin \Omega = \overline{\{\alpha_i\}_{i=1}^\infty}$. Дійсно, при виконанні останньої умови робимо висновок, що $\inf_i |\lambda - \alpha_i| \geq \delta > 0$, звідки

$$\|(\lambda I - A)^{-1}y\|^p = \sum_{i=1}^\infty |\eta_i / (\lambda - \alpha_i)|^p \leq \frac{1}{\delta^p} \sum_{i=1}^\infty |\eta_i|^p = \frac{1}{\delta^p} \|y\|^p.$$

Якщо $\lambda = \alpha_i$, то $N(\lambda I - A) \neq \{0\}$, тобто α_i є власним значенням оператора A . Відповідний йому власний підпростір $V_{\alpha_i} = N(\alpha_i I - A)$ збігається з замиканням лінійної оболонки $\text{Lin}\{e_j, j: \alpha_j = \alpha_i\}$, де $e_j = (\delta_{ji})_{i=1}^\infty$. Таким чином, $\sigma_p(A) = \{\alpha_i\}_{i=1}^\infty$. Граничні точки множини $\sigma_p(A)$, які йому не належать, утворюють неперервний спектр $\sigma_c(A)$ оператора A . Дійсно, нехай $\lambda_0 \in \Omega \setminus \sigma_p(A)$. Тоді існує підпослідовність α_{i_k} така, що $|\lambda_0 - \alpha_{i_k}| < k^{-1}$. При цьому

$$\|(\lambda_0 I - A)^{-1}y\|^p = \sum_{i=1}^\infty |\eta_i / (\lambda_0 - \alpha_i)|^p \geq \sum_{k=1}^\infty |\eta_{i_k} / (\lambda_0 - \alpha_{i_k})|^p \geq \sum_{k=1}^\infty |k \eta_{i_k}|^p.$$

Одержана оцінка показує, що оператор $(\lambda_0 I - A)^{-1}$ визначений не на всьому просторі l_p , тобто $R(\lambda_0 I - A) \neq l_p$. Однак $\overline{R(\lambda_0 I - A)} = l_p$, оскільки лінійний многовид $R(\lambda_0 I - A)$ містить у собі щільну в просторі l_p множину числових послідовностей зі скінченним числом членів, відмінних від нуля. Таким чином, $\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A) = \Omega$.

2. У просторі $C[a, b]$ розглянемо оператор $Ax = \int_a^t x(s)ds$. Нехай функція $x \in N(\lambda I - A)$, тобто задовольняє рівняння $\int_a^t x(s)ds = \lambda x(t)$, яке рівносильне до задачі Коші $\lambda x'(t) - x(t) = 0$, $x(a) = 0$. Ця задача має тільки нульовий розв'язок, отже, $N(\lambda I - A) = \{0\}$, звідки $\sigma_p(A) = \emptyset$. Подібні міркування дозволяють при $\lambda \neq 0$ явно побудувати оператор $(\lambda I - A)^{-1}$:

$$(\lambda I - A)^{-1}y = \lambda^{-1}y(t) + \lambda^{-2} \int_a^t e^{\frac{t-s}{\lambda}} y(s)ds \quad \forall y \in C[a, b],$$

що дає обґрунтування сюр'єктивності оператора $\lambda I - A$. Отже, єдиною можливою точкою спектра $\sigma(A)$ є число $\lambda = 0$. Дослідимо, до якого типу спектра належить ця точка. Для цього зазначимо, що на підставі результату прикладу 2.2.12 оператор $(\lambda I - A)_{\lambda=0} = -A: C[a, b] \leftrightarrow \tilde{C}^1[a, b]$, причому підпростір $\tilde{C}^1[a, b]$ нещільний у просторі $C[a, b]$ (чому?). Тоді $\sigma(A) = \sigma_r(A) = \{0\}$.

3. У просторі $C[0, 1]$ розглянемо оператор множення на незалежну змінну $Ax = tx(t)$. Оператор $\lambda I - A$, очевидно, неперервно оборотний за умови $\lambda \notin [0, 1]$. Для точок λ з відрізка $[0, 1]$ образ оператора $\lambda I - A$ уже не збігається зі всім простором, більш того, $\overline{R(\lambda I - A)} \neq C[0, 1]$, оскільки кожна функція $y \in \overline{R(\lambda I - A)}$ обертається на нуль в точці $t = \lambda$. Таким чином, $\sigma(A) = \sigma_r(A) = [0, 1]$.

Цікаво зауважити, що той же оператор, розглянутий у просторі $L_2[0, 1]$, має тільки неперервний спектр $\sigma(A) = \sigma_c(A) = [0, 1]$ (чому?).

Аналітична теорія спектра оператора пов'язана із властивостями його резольвенти в комплексній λ -площині.

Теорема 2.3.3. Для оператора $A \in \mathfrak{R}(X)$ його резольвента $R_\lambda(A)$ є аналітичною функцією параметра λ в області $\rho(A)$.

Доведення. Перш за все, одержимо важливу тотожність Гільберта для резольвенти. Для цього домножимо обидві частини рівності

$$(\lambda I - A)[R_\lambda(A) - R_{\lambda_0}(A)](\lambda_0 I - A) = (\lambda_0 I - A) - (\lambda I - A) = (\lambda_0 - \lambda)I$$

зліва на $R_\lambda(A)$ і справа на $R_{\lambda_0}(A)$. В результаті дістанемо

$$R_\lambda(A) - R_{\lambda_0}(A) = (\lambda_0 - \lambda)R_\lambda(A)R_{\lambda_0}(A). \quad (2.60)$$

З формули (2.60) випливає диференційовність функції $R_\lambda(A)$ за параметром λ в кожній точці області $\rho(A)$. Дійсно,

$$dR_\lambda(A)/d\lambda = \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} (R_\lambda(A) - R_{\lambda_0}(A))/(\lambda - \lambda_0) = -[R_{\lambda_0}(A)]^2 \quad \lambda_0 \in \rho(A), \quad (2.61)$$

що доводить теорему.

Теорема 2.3.3. показує, що спектр обмеженого оператора збігається з особливими точками його резольвенти.

Наслідок. Спектр обмеженого оператора не порожній.

Дійсно, з теореми 2.3.2 випливає, що резольвента обмеженого оператора не має особливості в нескінченно далекій точці. Якщо при цьому вона є аналітичною функцією у всій комплексній площині, то за теоремою Ліувілля вона не залежить від λ , що неможливо.

Зазначимо, що формули (2.58), (2.59) є наслідками аналітичних властивостей функції $R_\lambda(A)$. Перша з них являє собою розвинення резольвенти в ряд Тейлора в околі регулярної точки (отримайте з неї формулу для $d^k R_\lambda(A)/d\lambda^k$), друга – в ряд Лорана в околі нескінченно далекої точки.

Приклад 2.3.2. Розглянемо оператор A з прикладу 2.3.1 п. 2. Застосуємо формулу (2.59) для зображення його резольвенти в явному вигляді. Для цього використаємо формулу Діріхле

$$A^k x = \int_a^t \frac{(t-s)^{k-1}}{(k-1)!} x(s) ds, \quad (2.62)$$

з якої випливає, що

$$\begin{aligned} R_\lambda(A)x &= \lambda^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda^{-1}A)^k x = \lambda^{-1}x + \lambda^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda^{-1}A)^k x = \\ &= \lambda^{-1}x + \lambda^{-2} \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^t \frac{(t-s)^{k-1}}{\lambda^{k-1}(k-1)!} x(s) ds = \lambda^{-1}x + \lambda^{-2} \int_a^t e^{\frac{t-s}{\lambda}} x(s) ds. \end{aligned}$$

Висновок про розташування спектра обмеженого оператора A в замкненому крузі $\bar{B}_{\|A\|}(0)$ комплексної площини часто не досить точно визначає його локалізацію. Більш точною характеристикою локалізації спектра є спектральний радіус оператора.

Означення 2.3.5. *Спектральним радіусом оператора*

$A \in \mathfrak{R}(X)$ називається число

$$r_{\sigma}(A) = \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|. \quad (2.63)$$

З означень 2.3.2 і 2.3.5 випливає, що спектр обмеженого оператора A розташований в замкненому крузі $|\lambda| \leq r_{\sigma}(A)$, причому на колі $|\lambda| = r_{\sigma}(A)$ обов'язково є, принаймні, одна точка множини $\sigma(A)$.

Наведемо без доведення наступний результат.

Теорема 2.3.4. Для оператора $A \in \mathfrak{R}(X)$

$$r_{\sigma}(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|A^n\|^{1/n}. \quad (2.64)$$

Приклад 2.3.3. Ще раз звернемося до оператора з прикладу 2.3.1. Обчислимо його спектральний радіус, використовуючи формули (2.62), (2.64):

$$\|A^k\| = \max_{t \in [a, b]} \int_a^t \frac{(t-s)^{k-1}}{(k-1)!} ds = \frac{(b-a)^k}{k!} \Rightarrow r_{\sigma}(A) = \lim_{k \rightarrow \infty} \|A^k\|^{1/k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{b-a}{(k!)^{1/k}}.$$

Враховуючи формулу Стірлінга $k! \sim \sqrt{2\pi k} k^k e^{-k}$ ($k \rightarrow \infty$), остаточно одержуємо $r_{\sigma}(A) = 0$. Звідси негайно випливає, що $\sigma(A) = \{0\}$. В той же час включення $\sigma(A) \subseteq \overline{B}_{\|A\|}(0)$ приводить до доволі приблизної оцінки меж спектра $\sigma(A) \subseteq \{\lambda : |\lambda| \leq b-a\}$.

Спектр цілком неперервного оператора. Спектр цілком неперервного оператора за своїми властивостями близький до спектра оператора в скінченновимірному просторі.

Теорема 2.3.5. Для оператора $A \in \mathfrak{R}_0(X)$ розмірність власного підпростору V_{λ} , відповідного власному значенню $\lambda \neq 0$, скінченна.

Доведення. Розглянемо одиничну кулю $B = B_1(0) \cap V_{\lambda}$ в підпросторі V_{λ} . На підставі рівності $AB = \lambda B$ і компактності множини AB маємо компактність множини B . Тоді за теоремою 1.7.3 підпростір V_{λ} скінченновимірний.

Теорема 2.3.6. Спектр цілком неперервного оператора $A \in \mathfrak{R}_0(X)$ складається з не більше ніж зліченної множини точок, що не мають граничних точок, відмінних від нуля. Кожне число $\lambda \in \sigma(A)$, $\lambda \neq 0$ є власним значенням оператора A . Для нескінченновимірного простору X точка $\lambda = 0$ належить спектру $\sigma(A)$ і може відноситися до будь-якого з трьох вказаних вище типів.

Доведення. Доведемо першу частину теореми. Припустимо

протилежне, тобто нехай існує послідовність відмінних від нуля власних значень λ_n , збіжна до точки $\lambda \neq 0$. Тоді знайдеться додатне число δ таке, що $|\lambda_n| > \delta \quad \forall n \in N$. Нехай $v_n \in X$ – послідовність лінійно незалежних власних векторів, що відповідають власним значенням λ_n . Позначимо через V_n лінійну оболонку $\text{Lin}\{v_i\}_{i=1}^n$ перших n власних векторів. За теоремою 1.5.2 існує послідовність елементів $u_n \in V_n : \|u_n\| = 1, \rho(u_n, V_{n-1}) > 1/2$. Зазначимо, що на підставі рівності

$$(A - \lambda_n I) \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i v_i - \lambda_n \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^{n-1} (\lambda_n - \lambda_i) \alpha_i v_i \quad \forall \alpha_i \in C$$

має місце включення $(A - \lambda_n I)V_n \subset V_{n-1} \quad \forall n = 2, 3, \dots$. Тоді при $m < n$ елемент $\{A(\lambda_m^{-1} u_m) - \lambda_n^{-1}(Au_n - \lambda_n u_n)\} \in V_{n-1}$ і з означення відстані від вектора до підпростору випливає, що $\|A(\lambda_n^{-1} u_n) - A(\lambda_m^{-1} u_m)\| = \|u_n - \{A(\lambda_m^{-1} u_m) - \lambda_n^{-1}(Au_n - \lambda_n u_n)\}\| \geq \inf_{x \in V_{n-1}} \|u_n - x\| = \rho(u_n, V_{n-1}) > 1/2$.

Остання нерівність означає, що жодна підпослідовність послідовності $A(\lambda_n^{-1} u_n)$ не може бути фундаментальною. Це суперечить компактності оператора A , оскільки множина $\lambda_n^{-1} u_n$ обмежена: $\|\lambda_n^{-1} u_n\| \leq 1/\delta$. Таким чином, перша частина теореми доведена.

Доведемо друге твердження теореми. Для цього покажемо, що підпростір $R(\lambda I - A)$ замкнений для $\lambda \neq 0$, що не є власним значенням оператора A . Розглянемо довільну послідовність $y_n \in R(\lambda I - A)$, збіжну до елемента y . Покажемо, що $y \in R(\lambda I - A)$. Оберемо $x_n : (\lambda I - A)x_n = y_n$.

1. Розглянемо випадок обмеженості послідовності x_n . Тоді Ax_n – компактна, тобто існує підпослідовність x'_n така, що $Ax'_n \rightarrow u$. Отже, $\lambda x'_n = (\lambda I - A)x'_n + Ax'_n \rightarrow y + u$, звідки в силу неперервності оператора A дістаємо $(\lambda I - A)\lambda x'_n \rightarrow (\lambda I - A)(y + u) = \lambda y$. Останнє означає, що $y \in R(\lambda I - A)$.

2. Нехай послідовність x_n не обмежена. Без обмеження загальності можна вважати, що $\|x_n\| \rightarrow \infty$. Позначимо $u_n = \frac{x_n}{\|x_n\|}$.

Послідовність $(\lambda I - A)u_n = \frac{(\lambda I - A)x_n}{\|x_n\|}$ прямує до нуля, оскільки

чисельник обмежений, а знаменник прямує до нескінченності. Повторюючи для послідовності u_n міркування п. 1, приходимо до того, що існує підпослідовність $u'_n : Au'_n \rightarrow w, (\lambda I - A)u'_n \rightarrow 0$ і $\lambda u'_n \rightarrow w$. Тоді $(\lambda I - A)\lambda u'_n \rightarrow (\lambda I - A)w = 0, w \neq 0$. Останнє суперечить тому, що число λ не є власним значенням оператора A . Таким чином, твердження доведене.

Остаточнo, останнє твердження теореми впливає з того, що при $\lambda = 0$ оператор $\lambda I - A$ або має ненульове ядро, або його образ $R(A)$ не замкнений. Дійсно, якщо образ $R(A)$ є підпростором і $N(A) = \{0\}$, то в силу теореми Банаха існує обмежений обернений оператор $A^{-1} : R(A) \leftrightarrow X$, причому $A^{-1}A = I_X$ і $A^{-1}A$ компактний, чого одночасно бути не може (чому?). Теорема доведена.

Приклад 2.3.4. Прослідкуємо на прикладі, що у випадку нескінченновимірного простору X точка $\lambda = 0$ може належати будь-якому з трьох вказаних вище типів спектрів оператора. Використаємо результат прикладу 2.3.1. Описаний у ньому діагональний оператор

за умови $\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^2 < \infty$ є цілком неперервним і при деякому $\alpha_i = 0$ має

власне значення $\lambda = 0$. Якщо усі $\alpha_i \neq 0$, то точка $0 \in \sigma_c(A)$. Нарешті, для інтегрального оператора, описаного в п. 2, точка $0 \in \sigma_r(A)$.

Спектр самоспряженого оператора. Нехай H – комплексний гільбертів простір, $A \in \mathfrak{R}(H), A^* = A$.

Теорема 2.3.7. Спектр самоспряженого оператора розташований на дійсній осі.

Доведення. Покажемо, що для самоспряженого оператора A справджується нерівність

$$\|(\lambda I - A)x\| \geq |\operatorname{Im} \lambda| \|x\| \quad \forall x \in H. \quad (2.65)$$

Вона впливає з перетворення $(\lambda = \alpha + i\beta)$

$$\begin{aligned} \|(\lambda I - A)x\|^2 &= \|(\alpha I - A)x + i\beta x, (\alpha I - A)x + i\beta x\| = \|(\alpha I - A)x, (\alpha I - A)x\| + \\ &+ i\beta(x, (\alpha I - A)x) - i\beta((\alpha I - A)x, x) + |\beta|^2 \|x\|^2 = \|(\alpha I - A)x\|^2 + |\beta|^2 \|x\|^2 \geq |\beta|^2 \|x\|^2. \end{aligned}$$

Нехай $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$. Тоді з нерівності (2.65) дістаємо, що $N(\bar{\lambda}I - A) = \{0\}$, оскільки

$\forall x \in N(\bar{\lambda}I - A): \|(\bar{\lambda}I - A)x\| = 0 \geq \operatorname{Im} \bar{\lambda} \|x\| \Rightarrow x = 0.$

Запишемо ортогональний розклад простору H (2.50) для оператора $\bar{\lambda}I - A$

$$N(\bar{\lambda}I - A) \oplus \overline{R(\lambda I - A)} = H,$$

звідки $\overline{R(\lambda I - A)} = H$. Покажемо, що множина $R(\lambda I - A)$ замкнена. Розглянемо довільну послідовність $(\lambda I - A)x_n \in R(\lambda I - A)$, що збігається до елемента $y \in H$. Ця послідовність фундаментальна, але тоді в силу нерівності (2.65) фундаментальною є послідовність x_n . Дійсно,

$$\|x_n - x_m\| \leq \operatorname{Im} \lambda^{-1} \|(\lambda I - A)x_n - (\lambda I - A)x_m\| < \varepsilon \quad \forall n, m > n_0(\varepsilon).$$

З повноти простору H випливає, що $x_n \rightarrow x$, і тоді для неперервного оператора $\lambda I - A$ границя послідовності $(\lambda I - A)x_n$ дорівнює $(\lambda I - A)x = y$. Остання рівність означає, що $y \in R(\lambda I - A)$, тобто множина $R(\lambda I - A)$ замкнена, отже, $R(\lambda I - A) = H$. Таким чином, за теоремою 2.2.9 оператор $\lambda I - A$ неперервно оборотний, тобто $\lambda \in \rho(A)$.

Теорема 2.3.8. Спектр самоспряженого оператора належить відрізку $[m_A, M_A]$, де $m_A = \inf_{\|x\|=1} (Ax, x)$, $M_A = \sup_{\|x\|=1} (Ax, x)$, причому кінці

відрізка є точками спектра.

Доведення. Нехай $\lambda = M_A + \varepsilon$, де ε – довільне додатне число. Покажемо, що таке число $\lambda \in \rho(A)$. Перетворивши вираз $((\lambda I - A)x, x)$ і враховуючи, що $(Ax, x) \leq M_A \quad \forall x \in H$, дістаємо

$$((\lambda I - A)x, x) = (M_A + \varepsilon)\|x\|^2 - (Ax, x) \geq \varepsilon\|x\|^2.$$

З іншого боку, $\|(\lambda I - A)x\| \|x\| \geq |((\lambda I - A)x, x)|$, отже, $\|(\lambda I - A)x\| \geq \varepsilon \|x\|$.

Повторюючи міркування, наведені в доведенні попередньої теореми, можна показати, що $\lambda \in \rho(A)$ тоді і тільки тоді, коли нерівність $\|(\lambda I - A)x\| \geq \varepsilon \|x\|$ виконується для деякого додатного ε і усіх $x \in H$. Тоді $\lambda = M_A + \varepsilon \in \rho(A) \quad \forall \varepsilon > 0$. Аналогічно одержуємо, що $\lambda = m_A - \varepsilon \in \rho(A) \quad \forall \varepsilon > 0$, звідки випливає, що $\sigma(A) \subset [m_A, M_A]$.

Доведемо, що точка $\lambda = M_A \in \sigma(A)$. З означення точної верхньої межі випливає, що існує послідовність $x_n \in H$ така, що $\|x_n\| = 1$, $(Ax_n, x_n) \rightarrow M_A$ або $((M_A I - A)x_n, x_n) \rightarrow 0$. Оскільки оператор $M_A I - A$ є невід'ємним (чому?), то для нього справджується

нерівність (2.56)

$$|((M_A I - A)x_n, y)| \leq \sqrt{((M_A I - A)x_n, x_n)} \sqrt{((M_A I - A)y, y)}.$$

Підставивши в нього $y = (M_A I - A)x_n$, дістанемо

$$\begin{aligned} \|(M_A I - A)x_n\|^2 &\leq \sqrt{((M_A I - A)x_n, x_n)} \sqrt{((M_A I - A)^2 x_n, (M_A I - A)x_n)} \leq \\ &\leq \sqrt{((M_A I - A)x_n, x_n)} \|M_A I - A\|^{3/2} \|x_n\| = \sqrt{((M_A I - A)x_n, x_n)} \|M_A I - A\|^{3/2} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Останнє означає, що точка $\lambda = M_A \in \sigma(A)$, оскільки для неї не може виконуватись нерівність $\|(\lambda I - A)x\| \geq \varepsilon \|x\|$ для деякого додатного ε і усіх $x \in H$. Аналогічно доводиться, що $\lambda = m_A \in \sigma(A)$.

Наслідки. 1. Спектральний радіус самоспряженого оператора $A \in \mathfrak{R}(H)$ дорівнює

$$r_\sigma(A) = \max(|m_A|, |M_A|). \quad (2.66)$$

2. Точка λ є точкою спектра самоспряженого оператора $A \in \mathfrak{R}(H)$ тоді і тільки тоді, коли

$$\exists x_n \in H : \|x_n\| = 1, \|(\lambda I - A)x_n\| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty). \quad (2.67)$$

Приклад 2.3.5. Оператор $A \in \mathfrak{R}(L_2[0, 1])$ множення на незалежну змінну з прикладу 2.2.16 має спектр $\sigma(A) \subset [0, 1]$, оскільки

$$m_A = \inf_{\|x\|=1} \int_0^1 t |x(t)|^2 dt = 0, \quad M_A = \sup_{\|x\|=1} \int_0^1 t |x(t)|^2 dt = \sup_{\|x\|=1} \int_0^1 |x(t)|^2 dt = 1.$$

Враховуючи зауваження до прикладу 2.3.1 п. 3, насправді дістаємо рівність $\sigma(A) = [0, 1]$.

Нехай $\{\lambda_i\}$ – будь-який набір власних значень самоспряженого оператора $A \in \mathfrak{R}(H)$, а L – замикання лінійної оболонки усіх власних векторів, що відповідають власним значенням $\{\lambda_i\}$. Підпростір L , очевидно, інваріантний. Тоді за теоремою 2.2.16 ортогональне доповнення $L^\perp$ також є інваріантним підпростором. На підставі (1.53) кожний елемент $x \in H$ можна єдиним чином представити у вигляді $x = x_0 + x_\perp$, $x_0 \in L$, $x_\perp \in L^\perp$. При цьому

$$Ax = Ax_0 + Ax_\perp \quad Ax_0 \in L, \quad Ax_\perp \in L^\perp. \quad \text{Позначимо} \quad Ax = A_0 x \quad \forall x \in L,$$

$Ax = A_1 x \quad \forall x \in L^\perp$. Оператори A_0 і A_1 діють відповідно в просторах L і $L^\perp$ і називаються звуженнями оператора A на ці простори. Як і оператор A , вони є самоспряженими операторами. В цьому випадку кажуть, що оператор A розкладений в ортогональну суму операторів

A_0 і A_1 : $A = A_0 \oplus A_1$.

Теорема 2.3.9. Нехай самоспряжений оператор A розкладений в ортогональну суму операторів A_0 і A_1 . Тоді

$$\sigma(A) = \sigma(A_0) \cup \sigma(A_1). \quad (2.68)$$

Доведення. Нехай $\lambda \in \sigma(A_0)$. На підставі умови (2.67) $\exists x_n \in L : \|x_n\|=1, \|(\lambda I - A_0)x_n\| \rightarrow 0 \ (n \rightarrow \infty)$, але тоді $\|(\lambda I - A)x_n\| = \|(\lambda I - A_0)x_n\| \rightarrow 0 \ (n \rightarrow \infty)$, тобто $\lambda \in \sigma(A)$. Аналогічно доводиться, що $\lambda \in \sigma(A_1) \Rightarrow \lambda \in \sigma(A)$ і обернений наслідок $\lambda \in \sigma(A) \Rightarrow \lambda \in \sigma(A_0) \cup \sigma(A_1)$.

Наслідок. Власні вектори самоспряженого оператора, що відповідають різним власним значенням, ортогональні.

Спектр цілком неперервного самоспряженого оператора.

Теорема 2.3.10. (Д. Гільберт, Э. Шмідт). Нехай H – сепарабельний гільбертів простір. Спектр цілком неперервного самоспряженого оператора $A \in \mathfrak{R}(H)$ – чисто точковий, тобто складається тільки з власних значень $\{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$ оператора A . У просторі H існує ортонормований базис $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ з власних векторів оператора A , причому справедливі розвинення

$$A = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i P_i, \quad R_{\lambda}(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{P_i}{\lambda - \lambda_i} \quad \lambda \in \rho(A), \quad (2.69)$$

де оператор P_i задається рівністю $P_i x = (x, e_i) e_i$ і є оператором проектування на підпростір $\text{Lin}\{e_i\}$.

Доведення. 1. Спочатку покажемо, що кожний цілком неперервний самоспряжений оператор $A \in \mathfrak{R}(H)$ має, принаймні, одне власне значення. Нехай $A \neq 0$. Тоді хоча б одне з чисел m_A, M_A відмінне від нуля. З теорем 2.3.6, 2.3.8 випливає, що таке число є власним значенням оператора A . Якщо $A = 0$, то $\lambda = 0$ – його власне значення.

2. Замикання лінійної оболонки усіх власних векторів оператора A позначимо через L . Як було показано вище, оператор A розкладається в ортогональну суму операторів A_0 і A_1 , які є його звуженнями на підпростори L і $L^{\perp}$, причому $\sigma(A) = \sigma(A_0) \cup \sigma(A_1)$. Спектр $\sigma(A_1)$ не містить власних значень, оскільки відповідні до них власні вектори повинні одночасно належати підпросторам L і $L^{\perp}$, що

неможливо. Однак у відповідності з пунктом 1 оператор A_1 має, принаймні, одне власне значення. Вказана суперечність розв'язується умовою $L^\perp = \{0\}$. Тоді $\sigma(A_1) = \emptyset$, $\sigma(A) = \sigma(A_0)$ – чисто точковий спектр.

3. Нехай $\{\lambda_i\}_{i=1}^\infty$ – власні значення оператора A , записані з урахуванням кратності, а $\{e_i\}_{i=1}^\infty$ – відповідні ортонормовані власні вектори. З теореми 2.3.6 випливає, що в нескінченновимірному просторі H послідовність $\lambda_i \rightarrow 0$. На підставі попереднього пункту дістаємо, що $\overline{\text{Lin}\{e_i\}_{i=1}^\infty} = H$, тобто $\forall x \in H : x = \sum_{i=1}^\infty \xi_i e_i$ $\xi_i \in \mathbb{R}(C)$. Тоді

$$Ax = \sum_{i=1}^\infty \lambda_i \xi_i e_i = \sum_{i=1}^\infty \lambda_i (x, e_i) e_i. \quad \text{Вводячи оператори } P_i \text{ формулою}$$

$$P_i x = (x, e_i) e_i \quad \forall x \in H, \text{ дістаємо } Ax = \sum_{i=1}^\infty \lambda_i P_i x. \text{ Зазначимо, що оператор}$$

P_i є ортопроектором на підпростір $\text{Lin}\{e_i\}$. Справедливі наступні

властивості операторів: $P_i : P_i P_k = \delta_{ik} P_i$, $\sum_{i=1}^\infty P_i = I$ (перевірити!). Тоді

друга з формул (2.69) випливає з ланцюжка рівностей

$$(\lambda I - A) \sum_{i=1}^\infty \frac{P_i}{\lambda - \lambda_i} = \sum_{k=1}^\infty (\lambda - \lambda_k) P_k \sum_{i=1}^\infty \frac{P_i}{\lambda - \lambda_i} = \sum_{i,k=1}^\infty \frac{(\lambda - \lambda_k) P_k \delta_{ki}}{\lambda - \lambda_i} = \sum_{k=1}^\infty P_k = I$$

і аналогічно $\sum_{i=1}^\infty \frac{P_i}{\lambda - \lambda_i} (\lambda I - A) = I \quad \lambda \in \rho(A)$.

Зазначимо, що перша формула (2.69) називається **спектральним розкладенням** оператора A .

Наслідок. Нехай $\{\lambda_i\}_{i=1}^\infty$ – розташовані в порядку спадання модуля власні значення, $\{e_i\}_{i=1}^\infty$ – відповідні власні вектори самоспряженого компактного оператора A . Тоді

$$r_\sigma(A) = \|A\| = |\lambda_1|. \quad (2.70)$$

Приклад 2.3.6. У застосуваннях часто зустрічається межеваа **задача Штурма – Ліувілля**

$Lx \equiv -x''(t) + q(t)x(t) = \lambda x(t) \quad t \in [a_1, a_2], \quad l_i x \equiv x(a_i) \cos \alpha_i + x'(a_i) \sin \alpha_i = 0, \quad i = 1, 2,$
де функція $q(t) \in C[a_1, a_2]$, а числа $\alpha_i \in \mathbb{R}$ – довільні. Згідно з

постановкою цієї задачі потрібно знайти двічі неперервно диференційовну функцію $x(t) \neq 0$, яка задовольняє наведене вище рівняння і межові умови. За самою постановкою ця задача є спектральною для диференціального оператора L з областю визначення $D(L) = \{x \in C^2[a, b] : l_1 x = l_2 x = 0\}$. Для зручності, пов'язаної з використанням гільбертового простору, будемо розглядати цей оператор у просторі $L_2[a_1, a_2]$ зі щільною у ньому областю визначення $D(L)$. Оператор L є необмеженим оператором у просторі $L_2[a_1, a_2]$ (чому?), тому безпосереднє застосування до нього описаної вище техніки неможливо. Перейдемо до оберненого оператора L^{-1} , який, як побачимо нижче, є цілком неперервним. Будемо вважати, що число $\lambda = 0$ не є власним значенням оператора L . Вивчимо неоднорідну межу задачу

$$Lx = f(t) \quad t \in [a_1, a_2], \quad l_i x = 0 \quad i = 1, 2, \quad f(t) \in C[a_1, a_2]. \quad (2.71)$$

Зазначимо, що в теорії звичайних диференціальних рівнянь розв'язок цієї задачі виражається за допомогою **функції Гріна** $G(t, s)$ у вигляді

$$x(t) = \int_{a_1}^{a_2} G(t, s) f(s) ds. \quad \text{Нехай } u(x), v(x) \text{ — розв'язки рівняння}$$

$$Lx = 0 \quad t \in [a_1, a_2], \text{ які підлягають умовам}$$

$$u(a_1) = \sin \alpha_1, u'(a_1) = -\cos \alpha_1; \quad v(a_2) = \sin \alpha_2, v'(a_2) = -\cos \alpha_2.$$

Тоді функція Гріна будується через функції $u(x), v(x)$ за формулою

$$G_\lambda(t, s) = \begin{cases} u(t)v(s)/\omega, & t \leq s, \\ u(s)v(t)/\omega, & t \geq s, \end{cases}$$

де $\omega = W\{u, v\}$ — визначник Вронського функцій $u(x), v(x)$. Вигляд функції $G(t, s)$ дозволяє стверджувати, що це неперервна в квадраті $[a_1, a_2] \times [a_1, a_2]$ симетрична функція. Таким чином, кожній функції $f(t) \in C[a_1, a_2]$ ставиться у відповідність єдиний розв'язок $x(t) = \int_{a_1}^{a_2} G(t, s) f(s) ds$ межуваної задачі (2.71). Отже, існує обернений

оператор $L^{-1} f = \int_{a_1}^{a_2} G(t, s) f(s) ds$ з областю визначення

$D(L^{-1}) = C[a_1, a_2]$, щільною у просторі $L_2[a_1, a_2]$. Цей оператор можна продовжити за неперервністю на увесь простір $L_2[a_1, a_2]$. В силу властивостей функції $G(t, s)$ оператор L^{-1} є цілком неперервним самоспряженим оператором у просторі $L_2[a_1, a_2]$. Згідно з теоремою

2.3.10 він має дійсний чисто точковий спектр, складений із власних значень $\{\mu_i\}_{i=1}^{\infty}$, які можуть згущатися до точки $\mu=0$. Позначивши відповідні ортонормовані власні функції через $\{u_i(t)\}_{i=1}^{\infty}$, маємо $\mu_i u_i(t) = \int_{a_1}^{a_2} G(t,s) u_i(s) ds$ $i \in N$. Виходячи з властивостей функції Гріна можна показати, що $u_i(t) \in D(L)$ і є власною функцією оператора L , відповідною власному значенню $\lambda_i = \mu_i^{-1}$. Справедливий і обернений наслідок, тобто кожна власна функція оператора L , відповідна власному значенню λ_i , є власною функцією оператора L^{-1} , відповідною власному значенню $\mu_i = \lambda_i^{-1}$. Більш тонкий аналіз показує, що розглянуті спектральні задачі еквівалентні. Зважаючи на те, що система власних функцій $\{u_i(t)\}_{i=1}^{\infty}$ утворює ортонормований базис у просторі $L_2[a_1, a_2]$, будь-яку функцію $f(s) \in L_2[a_1, a_2]$ можна розкласти у збіжний в цьому просторі ряд $f(s) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i u_i(s)$, $f_i = \int_{a_1}^{a_2} f(s) u_i(s) ds$. Тоді

$$\begin{aligned} L^{-1} f &= \int_{a_1}^{a_2} G(t,s) f(s) ds = \sum_{i=1}^{\infty} f_i \int_{a_1}^{a_2} G(t,s) u_i(s) ds = \sum_{i=1}^{\infty} f_i \mu_i u_i(s) = \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i u_i(t) \int_{a_1}^{a_2} f(s) u_i(s) ds = \int_{a_1}^{a_2} f(s) \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i u_i(t) u_i(s) ds \quad \forall f \in L_2[a_1, a_2]. \end{aligned}$$

Порівнюючи обидві частини одержаної рівності, приходимо до відомого розв'язання функції Гріна межевої задачі (2.71) за власними функціями оператора Штурма – Ліувілля

$$G(t,s) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^{-1} u_i(t) u_i(s). \quad (2.72)$$

Зокрема, для прикладу, межева задача Штурма – Ліувілля

$$-x''(t) = \lambda x(t) \quad t \in [0, 1], \quad x(0) - x'(0) = 0, \quad x(1) + x'(1) = 0$$

має чисто точковий додатний спектр, що збігається з ненульовими коренями характеристичного рівняння $tg \sqrt{\lambda} = 2\sqrt{\lambda}/(\lambda - 1)$. Можна дістати асимптотичну формулу для власних значень при великих λ , а саме: $\sqrt{\lambda_n} = n\pi + 2/n\pi + O(1/n^3)$. Ортонормована система власних функцій має вигляд $u_n(x) = \sqrt{2/(\lambda_n + 2)} (\sin \sqrt{\lambda_n} x + \sqrt{\lambda_n} \cos \sqrt{\lambda_n} x)$.

ПОЯСНЕННЯ І ДОПОВНЕННЯ ДО ГЛАВИ 2

Замкнені оператори. У главі 2 розглядалися тільки обмежені оператори. Однак приклад 2.3.6 показав необхідність вивчення необмежених операторів. У цьому пункті буде розглянутий важливий для застосувань клас необмежених операторів, які називаються замкненими.

Означення 1. Лінійний оператор A з областю визначення $D(A)$ називається **замкненим**, якщо $\forall x_n \in D(A)$ і такої, що $x_n \rightarrow x$ і $Ax_n \rightarrow y$ вірно, що $x \in D(A)$ і $Ax = y$.

Таким чином, замкненість оператора можна розуміти як деяке послаблення поняття неперервності, в силу якого $x_n \rightarrow x \Rightarrow Ax_n \rightarrow Ax$. Тому оператор $A \in \mathcal{R}(X, Y)$ замкнений.

Приклад 1. Як було показано в прикладі 2.2.4 оператор $A: C[a, b] \rightarrow C[a, b]$, $Ax = x'(t)$ з областю визначення $D(A) = C^1[a, b]$ не обмежений. Однак цей оператор є замкненим. Нехай $x_n \in D(A)$, $x_n \rightarrow x$, $x'_n \rightarrow y$. З останнього граничного переходу випливає, що $y \in C[a, b]$ і $\int_a^t x'_n(s) ds \rightarrow \int_a^t y(s) ds$. З іншого боку, $\int_a^t x'_n(s) ds = x_n(t) - x_n(a) \rightarrow x(t) - x(a)$. Тоді $x(t) - x(a) = \int_a^t y(s) ds$, тобто $x(t) \in D(A)$ і $x'(t) = y(t) = Ax$.

Графік оператора. Нехай X, Y - нормовані простори, $X \times Y$ - їх декартовий добуток, тобто множина впорядкованих пар $\{(x, y), x \in X, y \in Y\}$. Задамо лінійні операції на множині $X \times Y$ за правилом $\lambda_1(x_1, y_1) + \lambda_2(x_2, y_2) = (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2)$, після чого воно перетворюється на лінійний простір.

Задамо $\|(x, y)\|_{X \times Y} = \|x\|_X + \|y\|_Y$. Тоді $X \times Y$ стає нормованим простором. Збіжність послідовності $(x_n, y_n) \rightarrow (x, y)$ у просторі $X \times Y$ еквівалентна збіжності кожної послідовності в своєму просторі, оскільки $\|(x_n, y_n) - (x, y)\|_{X \times Y} \rightarrow 0 \Leftrightarrow \|(x_n - x, y_n - y)\|_{X \times Y} = \|x_n - x\|_X + \|y_n - y\|_Y \rightarrow 0$.

Означення 2. Підмножина $G(A) = \{(x, Ax), x \in D(A)\}$ простору $X \times Y$ називається **графіком** оператора A .

Очевидно, множина $G(A)$ є лінійним многовидом у просторі $X \times Y$.

Теорема 1. Оператор A замкнений тоді і тільки тоді, коли замкнений його графік $G(A)$ у просторі $X \times Y$.

Доведення. 1. Нехай A – замкнений оператор, $(x_n, Ax_n) \in G(A)$ і $(x_n, Ax_n) \rightarrow (x, y) \Rightarrow x_n \rightarrow x, Ax_n \rightarrow y \Rightarrow x \in D(A), y = Ax$, тобто $(x, y) \in G(A)$, отже, $G(A)$ – замкнена множина.

2. $G(A)$ – замкнена множина. Тоді якщо $(x_n, Ax_n) \rightarrow (x, y)$, то $(x, y) \in G(A)$, тобто $x \in D(A), y = Ax$, отже, оператор A замкнений.

Таким чином, для замкнутого оператора і тільки для нього графік є підпростором у просторі $X \times Y$.

Наслідок. Якщо A замкнений і A^{-1} існує, то A^{-1} теж замкнений.

Дійсно, графік $G(A^{-1}) = \{(y, A^{-1}y) \mid y \in R(A)\} = \{(Ax, x) \mid x \in D(A)\}$ замкнений.

Приклад 2. Діагональний оператор A прикладу 2.3.1 п. 1 за умов $\alpha_i \neq 0 \ \forall i \in \mathbb{N}$, $\lim_{i \rightarrow \infty} |\alpha_i| = \infty$ є необмеженим у просторі l_p , однак має обмежений обернений оператор. Тому оператор A замкнений.

Теорема Банаха про замкнений оператор. Нехай A – замкнений лінійний оператор, визначений усюди в банаховому просторі X зі значеннями в банаховому просторі Y . Тоді оператор A обмежений.

Наслідок. Нехай A – замкнений оператор, що відображає взаємно однозначно банахів простір X на банахів простір Y . Тоді оператор A^{-1} обмежений.

Норма графіка оператора. Вивчення замкнених операторів можна звести до вивчення обмежених операторів.

Нехай A – замкнений лінійний оператор зі щільною областю визначення $D(A)$ в банаховому просторі X і зі значеннями в банаховому просторі Y . Введемо на $D(A)$ нову норму $\|x\|_A = \|x\|_X + \|Ax\|_Y$, яка називається **нормою графіка** оператора A . Лінійний многовид $D(A)$ з новою нормою $\|x\|_A$ перетворюється на нормований простір X_A .

Теорема 2. Простір X_A є банаховим.

Доведення. Нехай послідовність $x_n \in X_A$ фундаментальна. Тоді $\|x_n - x_m\|_X + \|Ax_n - Ax_m\|_Y \rightarrow 0 \quad n, m \rightarrow \infty$, звідки $\|x_n - x_m\|_X \rightarrow 0$ і $\|Ax_n - Ax_m\|_Y \rightarrow 0 \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \in X, \lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n = y \in Y$. В силу замкненості оператора A дістаємо, що $x \in X_A, y = Ax$. Тоді $\|x_n - x\|_A = \|x_n - x\|_X + \|Ax_n - Ax\|_Y \rightarrow 0$, тобто простір X_A – повний.

Зауваження. Якщо розглянути оператор $A: X_A \rightarrow Y$, то $\|Ax\|_Y \leq \|x\|_X + \|Ax\|_Y = \|x\|_A$, тобто A – обмежений оператор.

Замикальність оператора. Нехай A – лінійний оператор, визначений на $D(A) \subset X$ зі значеннями в Y . Кажуть, що оператор A **допускає замикання**, якщо його можна розширити до замкнутого оператора A_1 . Для цього додамо до

області визначення $D(A)$ усі такі $x \in X$, для яких $\exists x_n \in D(A)$ такі, що $x_n \rightarrow x$ і $Ax_n \rightarrow y$. Отриману множину позначимо через $D(A_1)$. Очевидно, що вона є лінійним многовидом. Покладемо для доданих елементів x $A_1x = y$, а для $x \in D(A)$ – $A_1x = Ax$. Таке визначення буде коректним, якщо з умов $x_n \rightarrow 0$, $Ax_n \rightarrow y$ буде випливати, що $y = 0$.

Приклад 3. Нехай $A: L_2[-1;1] \rightarrow L_2[-1;1]$, $Ax = x'(t)$, $D(A)$ – лінійний многовид неперервно диференційовних функцій, щільний у просторі $L_2[-1;1]$. Тоді оператор A не є замкненим. Дійсно, розглянемо послідовність $x_n(t) = \begin{cases} 2|t|, & |t| \in [1/n, 1], \\ nt^2 + n^{-1}, & |t| \leq 1/n. \end{cases}$ Для неї $x_n(t) \in D(A)$, $x_n(t) \rightarrow |t|$, $x'_n(t) \rightarrow 2\text{sign}(t)$, але при цьому $|t| \notin D(A)$.

Однак оператор A допускає замикання. Нехай $x_n \in D(A)$ $x_n \rightarrow 0$, $x'_n \rightarrow y$ і $D_0(A) = \{u \in D(A) : u(-1) = u(1) = 0\}$. Переходячи до границі у формулі інтегрування частинами $\int_{-1}^1 x'_n u dt = - \int_{-1}^1 x_n u' dt \quad \forall u \in D_0(A)$, дістаємо рівність

$\int_{-1}^1 y u dt = 0$, справедливу у щільному в просторі $L_2[-1;1]$ лінійному многовиді $D_0(A)$, звідки $y = 0$. Таким чином, оператор A допускає замикання. Уточнимо,

які елементи додаються до області визначення $D(A)$ в результаті замикання оператора A і як на них діє оператор A_1 . Нехай $x_n \rightarrow x$, $x'_n \rightarrow y$ у просторі $L_2[-1;1]$. Тоді, повторюючи описану вище процедуру, дістаємо

$\int_{-1}^1 x(t) u'(t) dt = - \int_{-1}^1 y(t) u(t) dt \quad \forall u \in D_0(A)$. Функція $y(t) \in L_2[-1,1]$, яка підлягає

наведеному інтегральному співвідношенню, називається **узагальненою похідною** функції $x(t) \in L_2[-1,1]$ (за узагальненою похідною ми зберігаємо звичайне позначення похідної). Таким чином, до $D(A)$ додаються такі функції $x(t) \in L_2[-1,1]$, для яких існують $x'(t) \in L_2[-1,1]$. Оператор A_1 , одержаний шляхом замкнення оператора A , є оператором звичайної похідної. При цьому на елементи з множини $D(A)$ він діє як звичайний оператор диференціювання. Лінійний многовид $D(A_1)$ з нормою $\|x\|_{W_2^1} = \|x\|_{L_2} + \|x'\|_{L_2}$ стає нормованим

простором, який позначається $W_2^1[-1,1]$. Норма в цьому просторі є ніщо інше, як норма графіка оператора узагальненої похідної. Тому W_2^1 – банахів простір. *

Повертаючись до наведеної вище функції $x(t) = |t|$, робимо висновок, що її узагальнена похідна $x'(t) = \text{sign}(t)$.

Однобічні оборотні оператори. Нехай оператор $A \in \mathfrak{R}(X, Y)$, де X і Y – нормовані простори.

Означення 3. Оператор $A_l^{-1} \in \mathfrak{R}(Y, X)$ ($A_r^{-1} \in \mathfrak{R}(Y, X)$) називається **лівим (правим) оберненим оператором до оператора A** , якщо $A_l^{-1}A = I_X$ ($AA_r^{-1} = I_Y$).

Приклад 4. Розглянемо у просторі l_2 оператор A , що діє за формулою $A(\xi_i)_{i=1}^\infty = (0, \xi_1, \xi_2, \dots)$. Цей оператор має лівий обернений $A_l^{-1}(\xi_i)_{i=1}^\infty = (\xi_{i+1})_{i=1}^\infty$. Дійсно,

$$(A_l^{-1}A)(\xi_i)_{i=1}^\infty = A_l^{-1}(A(\xi_i)_{i=1}^\infty) = A_l^{-1}(0, \xi_1, \xi_2, \dots) = (\xi_i)_{i=1}^\infty.$$

У свою чергу, оператор A є правим оберненим до оператора A_l^{-1} .

Пропонуємо читачеві довести наступне твердження.

Теорема 3. Оператор $A \in \mathfrak{R}(X, Y)$ є оборотним зліва (справа) тоді і тільки тоді, коли він ін'єктивний (сюр'єктивний).

ЗАДАЧІ І ВПРАВИ ДО ГЛАВИ 2

1. Знайти норму функціонала $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k / 2^k$, $(\xi_k)_{k=1}^\infty \in l_\infty$.
2. Знайти норму функціонала $f(x) = \int_0^1 x(t)dt - \int_{-1}^0 x(t)dt$ у просторі $C[0,1]$.
3. Довести, що $l_p^* = l_q$ ($1/p + 1/q = 1$).
4. Продовжити функціонал $f(\lambda e) = \lambda$, $e = (1, 1, 1)$ з лінійного многовиду $\text{Lin}\{e\}$ на весь простір R_3 зі збереженням норми.
5. Обчислити норму оператора $Ax = \int_0^1 \sin \pi(t-s)x(s)ds$ у просторі $C[0,1]$.
6. Показати, що норма оператора проектування дорівнює 1.
7. Знайти спряжений до оператора $A(\xi_i)_{i=1}^\infty = (0, \dots, 0, \xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \dots)$ в l_1 .

* Простір W_2^1 насправді є гільбертовим зі скалярним добутком $(x, y)_{W_2^1} = (x, y)_{L_2} + (x', y')_{L_2}$. Норма, індукована скалярним добутком, дещо відрізняється від наведеної в тексті. Однак ця відмінність не принципова, оскільки обидві норми еквівалентні.

8. Для яких λ існує обернений до оператора $A: C_0^2[0,1] \rightarrow C[0,1]$, $Ax = d^2x/dt^2 + \lambda x$? Знайти його.
9. При яких λ існує обернений до оператора $Ax = \int_0^t x(s)ds + \lambda x(t)$ у просторі $C[0,1]$? Знайти його.
10. Нехай $A(\xi_i)_{i=1}^\infty = (\xi_{i+1})_{i=1}^\infty$ в l_p . Знайти $\sigma_p(A), \sigma_C(A), \sigma_r(A)$.
11. Довести, що обернений оператор до самоспряженого оператора є самоспряженим.
12. Нехай λ_1 – найбільше за модулем власне значення самоспряженого і цілком неперервного оператора A . Довести, що $|\lambda_1| = \|A\|$.
13. Для оператора $A(\xi_i)_{i=1}^\infty = (0, \xi_1, \xi_2, \dots)$ в l_2 знайти $\sigma_p(A), \sigma_C(A), \sigma_r(A)$.
14. Довести, що якщо оператор A оборотний, то $\sigma(A^{-1}) = 1/\sigma(A)$.
15. Знайти інваріантні підпростори оператора $Ax = tx(t)$ в $L_2[0,1]$.
16. Знайти інваріантні підпростори оператора $Ax = \int_0^t x(s)ds$ в $L_2[0,1]$.
17. Якщо для оператора $A \in \mathfrak{R}(H) \forall x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow y \Rightarrow (Ax_n, y_n) \rightarrow (Ax, y)$, то оператор A цілком неперервний. Довести це твердження.
18. Перевірити, що оператор диференціювання $A = d/dt : C^1[0,1] \rightarrow C[0,1]$ має правий обернений оператор, але не має лівого оберненого.
19. З'ясувати чи має оператор $A(\xi_i)_{i=1}^\infty = (\xi_{i+1})_{i=1}^\infty$ у просторі l_2 лівий або правий обернені оператори.
20. Довести, що якщо оператор A не обмежений, то оператор A^* замкнений.
21. Довести, що визначений на всьому гільбертовому просторі замкнений лінійний оператор обмежений.
22. Довести, що якщо оператор T лінійний і замкнений, $\overline{D(T)} = H$, то оператор $A = (I + T^*T)^{-1}$ є додатним з нормою $\|A\| \leq 1$.
23. Дослідити послідовність операторів $A_n(\xi_i)_{i=1}^\infty = (\xi_1, \dots, \xi_n, 0, \dots)$ на сильну і рівномірну збіжність у просторі l_p .
24. Нехай оператор P є проектором у гільбертовому просторі H . Виразити його резольвенту $R_\lambda(P)$ явно через оператор P . Знайти $\sigma_p(P)$.
25. Знайти спряжений до оператора $A(\xi_i)_{i=1}^\infty = (\xi_1, \dots, \xi_n, 0, \dots)$ у просторі l_p .

ГЛАВА 3

РІВНЯННЯ

3.1. РІВНЯННЯ ЗІ СТИСКАЮЧИМ ОПЕРАТОРОМ

У даній главі вивчається низка загальних підходів до аналізу лінійних операторних рівнянь, а також деякі спеціальні класи таких рівнянь.

Принцип стискаючих операторів. Один з ефективних підходів до побудови наближених розв'язків операторних рівнянь пов'язаний з класом ітераційних методів. Найпростіший з них базується на принципі стискаючих операторів.

Означення 3.1.1. Нехай (X, ρ) – метричний простір. Оператор $A: X \rightarrow X$, визначений на всьому просторі X , називається **стискаючим оператором**, якщо існує число $\alpha \in (0, 1)$ таке, що

$$\rho(Ax, Ay) \leq \alpha \rho(x, y) \quad \forall x, y \in X. \quad (3.1)$$

Приклад 3.1.1. Оператор $A: C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$ з прикладу 2.2.11 є стискаючим оператором, оскільки

$$\rho(Ax, Ay) = \|Ax - Ay\| \leq \|A\| \|x - y\| = \alpha \rho(x, y) \quad \forall x, y \in X, \quad \alpha \leq \pi/4.$$

Теорема 3.1.1. У повному метричному просторі X стискаючий оператор A має єдину нерухому точку, тобто існує єдина точка $\bar{x} \in X: A\bar{x} = \bar{x}$.

Доведення. Оберемо довільний елемент $x_0 \in X$. Побудуємо послідовність $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ за правилом $x_n = Ax_{n-1}$, $n = 1, 2, \dots$. Покажемо, що ця послідовність фундаментальна у просторі X . З умови стисливості оператора A одержуємо

$$\rho(x_{n+1}, x_n) = \rho(Ax_n, Ax_{n-1}) \leq \alpha \rho(x_n, x_{n-1}) \leq \alpha^2 \rho(x_{n-1}, x_{n-2}) \leq \dots \leq \alpha^n \rho(x_1, x_0).$$

З допомогою останньої нерівності оцінимо відстань між елементами x_{n+p} і x_n :

$$\begin{aligned} \rho(x_{n+p}, x_n) &\leq \rho(x_{n+p}, x_{n+p-1}) + \rho(x_{n+p-1}, x_{n+p-2}) + \dots + \rho(x_{n+1}, x_n) \leq \\ &\leq \alpha^{n+p-1} \rho(x_1, x_0) + \alpha^{n+p-2} \rho(x_1, x_0) + \dots + \alpha^n \rho(x_1, x_0) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} \rho(x_1, x_0). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Тоді $\rho(x_{n+p}, x_n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, тобто послідовність x_n фундаментальна. В силу повноти простору X можемо зробити висновок, що $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x}$. Перейдемо до границі при $n \rightarrow \infty$ у

нерівності

$$\rho(A\bar{x}, x_n) \leq \rho(A\bar{x}, Ax_{n-1}) \leq \alpha \rho(\bar{x}, x_{n-1}).$$

Користуючись неперервністю відстані, одержуємо $\rho(A\bar{x}, \bar{x}) = 0 \Rightarrow A\bar{x} = \bar{x}$.

Доведемо єдиність нерухомої точки. Припустимо, що існують принаймні дві такі точки $\bar{x} \neq \bar{y}$. Тоді $\rho(\bar{x}, \bar{y}) = \rho(A\bar{x}, A\bar{y}) \leq \alpha \rho(\bar{x}, \bar{y}) \Rightarrow \rho(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \Rightarrow \bar{x} = \bar{y}$ (суперечність).

Наслідок. Справедлива оцінка

$$\rho(\bar{x}, x_n) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} \rho(x_1, x_0). \quad (3.3)$$

Оцінка (3.3) одержується з нерівності (3.2) після переходу до границі при $p \rightarrow \infty$.

Теорема 3.1.1 фактично стверджує, що рівняння $Ax = x$ зі стискаючим оператором у повному метричному просторі X має єдиний розв'язок; n -е наближення до точного розв'язку можна знайти за методом ітерацій за формулою $x_n = Ax_{n-1}$ $n=1,2,\dots$, відправляючись від довільної точки метричного простору x_0 . При цьому погрішність цього наближення визначається формулою (3.3).

Приклади 3.1.2. 1. Розглянемо у просторі l_2 нескінченну систему лінійних алгебраїчних рівнянь (НСЛАР)

$$x_i = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} x_j + b_i \quad i=1,2,\dots \quad (3.4)$$

При виконанні умов $\sum_{i,j=1}^{\infty} |a_{ij}|^2 = \alpha^2 < 1$, $\sum_{i=1}^{\infty} |b_i|^2 < \infty$ оператор A , що

задається формулою $y = Ax$, $y_i = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} x_j + b_i$ $i=1,2,\dots$, $x = (x_i)_{i=1}^{\infty}$,

$y = (y_i)_{i=1}^{\infty}$, є стискаючим оператором у просторі l_2 . Дійсно, формула (2.25) при $p=q=2$ показує, що оператор A визначений на всьому просторі l_2 і діє в цьому просторі. Крім того, вона дає оцінку відстані

$$\rho(Ax_1, Ax_2)^2 = \|Ax_1 - Ax_2\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \left| \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} (x_i^{(1)} - x_i^{(2)}) \right|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{\infty} |a_{ij}|^2 \sum_{j=1}^{\infty} |x_i^{(1)} - x_i^{(2)}|^2,$$

звідки $\rho(Ax_1, Ax_2) \leq \alpha \rho(x_1, x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in l_2$.

Згідно з принципом стискаючих операторів НСЛАР (3.4) має єдиний розв'язок у просторі l_2 .

В окремому випадку розглянемо систему

$$x_i = \frac{3}{\pi^2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{ij} x_j + \frac{1}{2i}, \quad i=1,2,\dots$$

Для неї $\alpha = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{\infty} |a_{ij}|^2} = \frac{3}{\pi^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2}} = \frac{3}{\pi^2} \frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{2} < 1$, тобто оператор

є стискаючим. Побудуємо наближений розв'язок. Оберемо нульове наближення $x_i^{(0)} = 1/(2i)$, $i=1,2,\dots$ Тоді

$$x_i^{(1)} = \frac{3}{\pi^2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{ij} x_j^{(0)} + \frac{1}{2i} = \frac{3}{2i\pi^2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} + \frac{1}{2i} = \frac{3}{4i}, \quad x_i^{(2)} = \frac{7}{8i}, \quad x_i^{(3)} = \frac{15}{16i}, \quad i=1,2,\dots$$

Пrawdopodobно припустити, що точний розв'язок має вигляд $\bar{x} = (1/i)_{i=1}^{\infty}$, у справедливості чого неважко переконатися прямою підстановкою. Формула (3.3) у цій задачі дає оцінку

$$\rho(\bar{x}, x^{(n)}) \leq \frac{\pi}{2\sqrt{6}} \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

2. Розглянемо у просторі $L_2[a,b]$ **інтегральне рівняння Фредгольма 2-го роду**

$$x(t) = \lambda \int_a^b k(t,s)x(s)ds + f(t).$$

Тут ядро $k(t,s)$ і права частина $f(t)$ задані, λ – числовий параметр.

З'ясуємо, за яких умов оператор $Ax = \lambda \int_a^b k(t,s)x(s)ds + f(t)$ є стискаючим оператором у просторі $L_2[a,b]$. Оцінимо $\rho(Ax_1, Ax_2)$:

$$\rho^2(Ax_1, Ax_2) = \|Ax_1 - Ax_2\|^2 = \lambda^2 \int_a^b \left| \int_a^b k(t,s)(x_1(s) - x_2(s))ds \right|^2 dt \leq$$

$$\leq \lambda^2 \int_a^b \int_a^b |k(t,s)|^2 ds dt \int_a^b |x_1(s) - x_2(s)|^2 ds = \alpha^2 \rho^2(x_1, x_2),$$

де $\alpha^2 = \lambda^2 \int_a^b \int_a^b |k(t,s)|^2 ds dt$. Тоді оцінка $|\lambda|^2 < \int_a^b \int_a^b |k(t,s)|^2 ds dt$ є умовою

стисливості оператора A . За цієї умови інтегральне рівняння має

єдиний розв'язок у просторі $L_2[a,b]$, який може бути знайдений ітераційним методом.

Для прикладу розглянемо інтегральне рівняння

$$x(t) = \lambda \int_0^1 t s x(s) ds + \frac{t}{2} \quad t \in [0,1].$$

Умова стисливості має вигляд $|\lambda|^2 \int_0^1 \int_0^1 t^2 s^2 ds dt < 1 \Rightarrow |\lambda| < 3$. Знайдемо

розв'язок методом ітерацій. Нехай $x_0(t) = \frac{t}{2}$. Тоді

$$x_1(t) = \lambda \int_0^1 t s x_0(s) ds + \frac{t}{2} = \left(\frac{\lambda}{3} + 1\right) \frac{t}{2}, \quad x_2(t) = \left(\frac{\lambda^2}{9} + \frac{\lambda}{3} + 1\right) \frac{t}{2}, \quad x_3(t) = \left(\frac{\lambda^3}{27} + \frac{\lambda^2}{9} + \frac{\lambda}{3} + 1\right) \frac{t}{2}, \dots$$

Можна перевірити, що функція $\bar{x}(t) = \frac{t}{2} \sum_{i=0}^{\infty} (\lambda/3)^i = \frac{t}{2} \frac{3}{3-\lambda}$ є точним

розв'язком розглядуваного рівняння.

Зауваження. 1. Розглянуті в прикладах оператори є нелінійними, в той час як самі рівняння лінійні. Достоїнством наведеного підходу є те, що він може застосовуватися і до деяких нелінійних рівнянь. Наприклад, у просторі $C[0,1]$ нелінійне інтегральне рівняння

$$x(t) = \int_0^1 \frac{x(s)}{1+t^2+s^2+x^2(s)} ds + f(t) \quad t \in [0,1]$$

містить стискаючий оператор $Ax = \int_0^1 \frac{x(s)}{1+t^2+s^2+x^2(s)} ds + f(t)$

(показати!), для якого справедлива теорема 3.1.1.

2. Для лінійних рівнянь в нормованих просторах принцип стискаючих операторів еквівалентний до теореми 2.2.10.

3.2. РІВНЯННЯ З КОМПАКТНИМ ОПЕРАТОРОМ

У цьому параграфі вивчаються операторні рівняння з цілком неперервним оператором у банаховому просторі. За історично усталеною термінологією, що прийшла з теорії інтегральних рівнянь, операторні рівняння вигляду $Ax = y$ і $(I - A)x = y$ з цілком неперервним оператором A називаються відповідно **рівняннями першого і другого роду**. Ми приділимо основну увагу розгляду операторних рівнянь другого роду. Це пов'язано з тим, що за виконання певних умов оператор $I - A$ неперервно оборотний, тому задача визначення наближеного розв'язку рівняння $(I - A)x = y$ є коректною. З іншого боку, як було встановлено в параграфі 2.2, оператор A не може мати обмеженого оберненого оператора, зважаючи на що безпосередній пошук наближеного розв'язку рівняння $Ax = y$ є некоректною задачею. Ключом до дослідження операторних рівнянь другого роду є **теорія Пісса – Шаудера**.

Усі наведені нижче теореми сформульовані і справедливі для довільного банахового простору X . Однак для спрощення вони доведені для випадку гільбертового простору X .

Теорема 3.2.1. Нехай $A \in \mathcal{R}_0(X)$. Тоді $R(I - A)$ і $R(I - A^*)$ – підпростори у просторі X .

Доведення. Покажемо, наприклад, що $R(I - A)$ є підпростором. Нехай послідовність $y_n \in R(I - A)$ і $y_n \rightarrow y_0$. Треба показати, що $y_0 \in R(I - A)$. З означення образу оператора випливає, що існує $x_n \in N(I - A)^\perp$, для якого $(I - A)x_n = y_n$. Спочатку припустимо, що послідовність x_n є обмеженою. Тоді послідовність Ax_n є компактною, тобто існує підпослідовність $x'_n : Ax'_n \rightarrow x_0$. Отже, $x'_n = Ax'_n + y'_n \rightarrow x_0 + y_0 \Rightarrow (I - A)x'_n \rightarrow (I - A)(x_0 + y_0) = y_0$. Таким чином, $y_0 \in R(I - A)$. Нехай тепер послідовність x_n не обмежена. Без обмеження загальності можемо вважати, що $\|x_n\| \rightarrow \infty$. Розглянемо послідовність $u_n = x_n \|x_n\|^{-1}$, що є обмеженою. Для неї існує підпослідовність $u'_n : Au'_n \rightarrow u_0$. Тоді

$(I - A)u'_n = \|x'_n\|^{-1} (I - A)x'_n \rightarrow 0 \Rightarrow u'_n \rightarrow u_0 \Rightarrow (I - A)u_0 = 0$. Останнє означає, що $u_0 \in N(I - A)$, але одночасно, як границя послідовності $x'_n \|x'_n\|^{-1} \in N(I - A)^\perp$, $u_0 \in N(I - A)^\perp$. Отже, $u_0 = 0$, що неможливо,

оскільки $1 = \|u'_n\| \rightarrow \|u_0\|$.

Теорема 3.2.2 (перша теорема Фредгольма). Нехай $A \in \mathfrak{K}_0(X)$. Наступні твердження є еквівалентними:

1. Рівняння $(I - A)x = y$ розв'язне $\forall y \in X$.
2. Рівняння $(I - A)x = 0$ має тільки нульовий розв'язок.
3. Рівняння $(I - A^*)g = f$ розв'язне $\forall f \in X^*$.
4. Рівняння $(I - A^*)g = 0$ має тільки нульовий розв'язок.

Якщо виконується одна з умов 1 – 4, оператори $I - A$, $I - A^*$ неперервно оборотні.

Доведення. Нехай рівняння $(I - A)x = y$ розв'язне $\forall y \in X$, тобто $R(I - A) = X$. Тоді зі співвідношення (2.50) випливає, що $N(I - A^*) = \{0\}$. В силу теореми 2.3.6 останнє означає, що точка $\lambda = 1 \in \rho(A^*)$, тобто оператор $I - A^*$ неперервно оборотний. Крім того, $\lambda = 1 \in \rho(A)$, отже, і оператор $I - A$ неперервно оборотний, що завершує доведення.

Теорема 3.2.3 (друга теорема Фредгольма). Нехай $A \in \mathfrak{K}_0(X)$. Тоді $\dim N(I - A) = \dim N(I - A^*)$.

Доведення. У теоремі 2.3.6 доведена скінченновимірність ядер $N(I - A)$, $N(I - A^*)$. Припустимо, що $\dim N(I - A) = n < m = \dim N(I - A^*)$. Нехай $\{e_i\}_{i=1}^n$ – ортонормований базис у $N(I - A)$, а $\{f_i\}_{i=1}^n$ – ортонормований базис у $N(I - A^*)$. Розглянемо оператор $\tilde{A}$, що визначається формулою $\tilde{A}x = Ax + \sum_{i=1}^n (x, e_i) f_i$. Оператор $\tilde{A}$ – цілком неперервний як сума цілком неперервного і скінченновимірного операторів. Доведемо, що $N(I - \tilde{A}) = \{0\}$. Дійсно, нехай $x \in N(I - \tilde{A}) \Rightarrow (I - \tilde{A})x = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow (I - A)x = \sum_{i=1}^n (x, e_i) f_i \Rightarrow \left((I - A)x, \sum_{i=1}^n (x, e_i) f_i \right) = \sum_{i=1}^n |(x, e_i)|^2 = \left(x, (I - A^*) \sum_{i=1}^n (x, e_i) f_i \right) = 0,$$

тобто $(x, e_i) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$, звідки одночасно $x \in N(I - A)$ і $x \in N(I - A)^\perp$. Останнє можливо тільки, якщо $x = 0$, тобто $N(I - \tilde{A}) = \{0\}$. Тоді оператор $I - \tilde{A}$ неперервно оборотний, отже, $R(I - \tilde{A}) = X$. Це означає,

що $\forall y \in X \exists x : (I - \tilde{A})x = y \Leftrightarrow (I - A)x = y + \sum_{i=1}^n (x, e_i) f_i$. Таким чином,

$R(I - A) = \{y + \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i, y \in X\}$, а значить, підпростір $N(I - A^*) = R(I - A)^\perp$

повинен бути ортогональним принаймні до векторів $\{f_i\}_{i=n+1}^\infty$. Але тоді $\dim N(I - A^*) \leq n$, що суперечить вихідному припущенню. Так само приходимо до суперечності, припустивши, що $n > m$. Таким чином, розмірності ядер $N(I - A)$, $N(I - A^*)$ збігаються і теорема доведена.

Теорема 3.2.4 (третя теорема Фредгольма). Нехай $A \in \mathfrak{R}_0(X)$. Для того, щоб рівняння $(I - A)x = y$ мало хоча б один розв'язок, необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова $(g, y) = 0 \forall g \in N(I - A^*)$.

Доведення. Твердження теореми негайно випливає з формули (2.50) і теореми 3.2.1.

Загальний результат трьох теорем Фредгольма іноді об'єднують в **альтернативу Фредгольма**:

Або оператор $I - A$ неперервно оборотний і, отже, рівняння $(I - A)x = y$ має єдине розв'язок $x = (I - A)^{-1}y \forall y \in X$, або рівняння $(I - A)x = y$ має розв'язок тоді і тільки тоді, коли $y \perp N(I - A^*)$. В цьому випадку загальний розв'язок набуває вигляду $x = x_0 + \sum_{i=1}^n C_i e_i$, де x_0 –

частинний розв'язок неоднорідного рівняння, $\{e_i\}_{i=1}^n$ – базис у ядрі $N(I - A)$, $\{C_i\}_{i=1}^n$ – довільні сталі.

Приклад 3.2.1. Розглянемо інтегральне рівняння $x(t) - \int_0^\pi k(t, s)x(s)ds = y(t)$, $x, y \in L_2[0, \pi]$ з симетричним неперервним ядром $k(t, s) = \frac{1}{\pi} \sum_{i=0}^\infty \frac{\cos(it)\cos(is)}{i^2 + 1}$. Дослідимо однорідне рівняння

$x(t) - \int_0^\pi k(t, s)x(s)ds = 0$. Після підстановки ядра під інтеграл і почленного

інтегрування ряду одержуємо
$$x(t) = \frac{1}{\pi} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\cos(it)}{i^2 + 1} \int_0^{\pi} \cos(is) x(s) ds.$$

Позначимо $\int_0^{\pi} \cos(is) x(s) ds = C_i$. Помножимо обидві частини розвинення функції $x(t)$ на $\cos(kt)$ і проінтегруємо їх у проміжку від 0 до π . В результаті дістаємо співвідношення для визначення сталих C_k :

$C_k = (1/2) C_k (k^2 + 1)^{-1} (1 + \delta_{k0})$ $k=0,1,\dots$, з яких випливає, що C_0 можна обрати довільною, а $C_i = 0 \quad \forall i \in \mathbb{N}$. Таким чином, розглянутий інтегральний оператор A має єдине власне значення $\lambda = 1$. Відповідний власний підпростір є одновимірним і складається зі сталих функцій. Це означає, що оператор $I - A$ не є неперервно оборотним і згідно з альтернативою Фредгольма вихідне інтегральне рівняння є розв'язним не за будь-якої правої частини. Умовою його розв'язності є ортогональність правої частини y до ядра $N(I - A^*)$,

тобто рівність $\int_0^{\pi} y(s) ds = 0$. За цієї умови розв'язок вихідного рівняння

може бути записаний у формі
$$x(t) = C_0 + \int_0^{\pi} \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\cos(it) \cos(is)}{i^2} y(s) ds + y(t),$$

де C_0 – довільна стала.

Приклад 3.2.2. У роботі [17] при визначенні електростатичного поля незамкненого сферичного провідника і провідної площини було одержане інтегральне рівняння вигляду

$$\varphi(t) + \int_0^{\beta} k(t,s) \varphi(s) ds = f(t) \quad t \in [0, \beta], \quad f(t) = u_0 \frac{2}{\pi} \cos \frac{t}{2},$$

$$k(t,s) = -\frac{2}{\pi} \sum_{m,n=0}^{\infty} (-1)^{m+n} \frac{(m+n)!}{m!n!} \left(\frac{a}{2h}\right)^{m+n+1} \cos\left(m + \frac{1}{2}\right)t \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)t.$$

Це інтегральне рівняння другого роду з симетричним неперервним ядром за умови $a/h \in (0, 1)$. Дійсно, подвійний ряд, що задає ядро інтегрального рівняння, мажорується числовим рядом

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(m+n)!}{m!n!} \left(\frac{a}{2h}\right)^{m+n+1} = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{a}{2h}\right)^{m+1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(m+n)!}{m!n!} \left(\frac{a}{2h}\right)^n = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{a}{2h-a}\right)^{m+1},$$

що збігається за умови $a/h \in (0, 1)$. При з'ясуванні питання про розв'язність інтегрального рівняння істотно використовується його еквівалентність до вихідної межової задачі для рівняння Лапласа. Тоді в силу теореми єдиності розв'язку цієї межової задачі однорідному інтегральному рівнянню відповідає нульовий розв'язок межової задачі, а отже, нульовий розв'язок інтегрального рівняння. В цьому випадку з першої теореми Фредгольма випливає однозначна розв'язність розглядуваного інтегрального рівняння у просторі $L_2[0, \beta]$ за будь-якої правої частини з цього простору.

Інтегральне рівняння можна розв'язувати чисельно або заміною інтеграла квадратурною формулою і переходом до системи лінійних алгебраїчних рівнянь, або за умови $a/h < 1 - \beta/\pi$ методом послідовних наближень, оскільки в цьому випадку інтегральний оператор є стискаючим (показати!). При малому параметрі a/h , виділяючи головні члени розв'язку, одержуємо

$$\varphi(t) = 2\pi^{-1}u_0 \cos(t/2) + u_0\pi^{-2} \cos(t/2)(\beta + \sin \beta)(a/h) + \dots$$

Оцінка погрішності наближеного розв'язку операторного рівняння. При чисельному розв'язуванні операторного рівняння $(I - A)x = y$, $A \in \mathfrak{R}_0(X)$ часто потрібно замінити оператор A на його апроксимацію A_ε , для якого $\|A - A_\varepsilon\| < \varepsilon$. Крім того, права частина рівняння часто відома тільки наближено, як y_δ , причому $\|y - y_\delta\| < \delta$. Таким чином, замість вихідного рівняння розв'язується рівняння $(I - A_\varepsilon)x = y_\delta$. Природно поставити наступні питання: 1) за яких умов з неперервної оборотності оператора $I - A_\varepsilon$ випливає неперервна оборотність оператора $I - A$? 2) наскільки відрізняються один від одного розв'язки x і $x_{\varepsilon, \delta}$ наведених рівнянь у випадку, коли їх оператори неперервно оборотні? Відмітимо, що вихідна задача вважається коректною, якщо $\lim_{(\varepsilon, \delta) \rightarrow 0} x_{\varepsilon, \delta} = x$.

Відповідь на перше питання дає

Теорема 3.2.5. Нехай оператори $A, A_\varepsilon \in \mathfrak{R}_0(X)$, $(I - A_\varepsilon)^{-1} \in \mathfrak{R}(X)$ і виконується умова $\alpha = \|A - A_\varepsilon\| \|(I - A_\varepsilon)^{-1}\| < 1$. Тоді $(I - A)^{-1} \in \mathfrak{R}(X)$, причому

$$(I - A)^{-1} = (I - A_\varepsilon)^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} (A - A_\varepsilon)^k \left[(I - A_\varepsilon)^{-1} \right]^k, \quad (3.5)$$

$$\|(I - A)^{-1}\| \leq \|(I - A_\varepsilon)^{-1}\| (1 - \alpha)^{-1}, \quad (3.6)$$

$$\|(I - A)^{-1} - (I - A_\varepsilon)^{-1}\| \leq \|(I - A)^{-1}\| \|A - A_\varepsilon\| \|(I - A_\varepsilon)^{-1}\|. \quad (3.7)$$

Доведення. Для простоти введемо позначення $B = I - A$, $B_\varepsilon = I - A_\varepsilon$. Тоді $A - A_\varepsilon = B_\varepsilon - B$. Перетворимо вираз

$$B = B_\varepsilon + (B - B_\varepsilon) = \left[I + (B - B_\varepsilon)B_\varepsilon^{-1} \right] B_\varepsilon,$$

звідки $B^{-1} = B_\varepsilon^{-1} \left[I + (B - B_\varepsilon)B_\varepsilon^{-1} \right]^{-1}$. Для другого операторного множника справедливі умови теореми 2.2.10, тому його можна подати у вигляді ряду $\sum_{k=0}^{\infty} (B_\varepsilon - B)^k (B_\varepsilon^{-1})^k$. Після підстановки цього ряду в

оператор B^{-1} приходимо до формули (3.5). Аналогічно доводяться формули (3.6), (3.7).

Таким чином, при малій величині $\|A - A_\varepsilon\|$ оператори A і A_ε одночасно неперервно оборотні.

Введемо характеристику лінійного оператора, яка впливає на точність наближеного розв'язку операторного рівняння.

Означення 3.2.1. Нехай оператор $B \in \mathfrak{R}(X)$ неперервно оборотний. **Числом обумовленості** цього оператора називається число

$$\chi(B) = \|B\| \|B^{-1}\|. \quad (3.8)$$

З нерівності $1 = \|BB^{-1}\| \leq \|B\| \|B^{-1}\|$ випливає, що число $\chi(B) \geq 1$. Нижче буде показано, що чим ближче це число до 1, тим точнішим буде наближений розв'язок при заданих відхиленнях $\|B - B_\varepsilon\|$, $\|y - y_\delta\|$.

Далі будемо користуватися позначеннями, наведеними в доведенні теореми 3.2.5.

Теорема 3.2.6. Нехай для довільного $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ оператори $A, A_\varepsilon \in \mathfrak{R}_0(X)$, $(I - A_\varepsilon)^{-1} \in \mathfrak{R}(X)$, виконується умова $\alpha = \|A - A_\varepsilon\| \|(I - A_\varepsilon)^{-1}\| < 1$ і існують границі $A_\varepsilon \rightarrow A$ ($\varepsilon \rightarrow 0$), $y_\delta \rightarrow y$ ($\delta \rightarrow 0$). Тоді, якщо x і $x_{\varepsilon, \delta}$ – розв'язки рівнянь $(I - A)x = y$ і $(I - A_\varepsilon)x = y_\delta$, то $\lim_{(\varepsilon, \delta) \rightarrow 0} x_{\varepsilon, \delta} = x$, причому

$$\frac{\|x - x_{\varepsilon, \delta}\|}{\|x_{\varepsilon, \delta}\|} \leq \Delta_{\varepsilon} \frac{\chi^2(B_{\varepsilon})}{1 - \Delta_{\varepsilon} \chi(B_{\varepsilon})} + \omega_{\delta} \frac{\chi(B_{\varepsilon})}{1 - \Delta_{\varepsilon} \chi(B_{\varepsilon})}, \quad (3.9)$$

де $\Delta_{\varepsilon} = \|B - B_{\varepsilon}\| \|B_{\varepsilon}\|^{-1}$, $\omega_{\delta} = \|y - y_{\delta}\| \|y_{\delta}\|^{-1}$.

Доведення. Оскільки x і $x_{\varepsilon, \delta}$ – розв’язки рівнянь $(I - A)x = y$ і $(I - A_{\varepsilon})x = y_{\delta}$, то $x = B^{-1}y$, $x_{\varepsilon, \delta} = B_{\varepsilon}^{-1}y_{\delta}$. Тоді, враховуючи формулу (3.7), дістаємо

$$\begin{aligned} \|x - x_{\varepsilon, \delta}\| &= \|B^{-1}y - B_{\varepsilon}^{-1}y_{\delta}\| = \|(B^{-1} - B_{\varepsilon}^{-1})y_{\delta} + B^{-1}(y - y_{\delta})\| \leq \|B^{-1} - B_{\varepsilon}^{-1}\| \|y_{\delta}\| + \\ &+ \|B^{-1}\| \|y - y_{\delta}\| \leq \|B - B_{\varepsilon}\| \|B^{-1}\| \|B_{\varepsilon}^{-1}\| \|y_{\delta}\| + \|B^{-1}\| \|y - y_{\delta}\|. \end{aligned}$$

Зважаючи на те, що $B_{\varepsilon} x_{\varepsilon, \delta} = y_{\delta}$, справедлива оцінка $\|y_{\delta}\| = \|B_{\varepsilon} x_{\varepsilon, \delta}\| \leq \|B_{\varepsilon}\| \|x_{\varepsilon, \delta}\|$, з якої випливає нерівність

$$\|x - x_{\varepsilon, \delta}\| \|x_{\varepsilon, \delta}\|^{-1} \leq \|B - B_{\varepsilon}\| \|B^{-1}\| \|B_{\varepsilon}^{-1}\| \|B_{\varepsilon}\| + \|B^{-1}\| \|B_{\varepsilon}\| \|y - y_{\delta}\| \|y_{\delta}\|^{-1}.$$

Підставляючи в останню формулу оцінку (3.6) і враховуючи рівність (3.8), дістаємо формулу (3.9).

Зазначимо, що таким же чином може бути доведена формула

$$\frac{\|x - x_{\varepsilon, \delta}\|}{\|x\|} \leq \tilde{\Delta}_{\varepsilon} \frac{\chi^2(B)}{1 - \tilde{\Delta}_{\varepsilon} \chi(B)} + \tilde{\omega}_{\delta} \frac{\chi(B)}{1 - \tilde{\Delta}_{\varepsilon} \chi(B)}, \quad \tilde{\Delta}_{\varepsilon} = \frac{\|B - B_{\varepsilon}\|}{\|B\|}, \quad \tilde{\omega}_{\delta} = \frac{\|y - y_{\delta}\|}{\|y\|},$$

з якої випливає, що $\lim_{(\varepsilon, \delta) \rightarrow 0} x_{\varepsilon, \delta} = x$.

Таким чином, наведена теорема формулює умови, за яких операторне рівняння коректно розв’язне і дає оцінку відносної погрішності наближеного розв’язку.

Приклад 3.2.3. Розглянемо нескінченну систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$x_i = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} x_k + f_i \quad i = 1, 2, \dots \quad (3.10)$$

за умов $\sum_{i,k=1}^{\infty} |a_{ik}|^2 < \infty$, $\sum_{i=1}^{\infty} |f_i|^2 < \infty$. Ця система є операторним

рівнянням другого роду $(I - A)x = f$, де $Ax = \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} x_k \right)_{i=1}^{\infty}$,

$x = (x_i)_{i=1}^{\infty}$, $f = (f_i)_{i=1}^{\infty}$. Припустимо, що система (3.10) однозначно розв’язна у просторі l_2 . Будемо шукати її наближений розв’язок

методом редукції, для чого у відповідності з прикладом 2.2.5 введемо для оператора A послідовність операторів редукції $A_n \in \mathfrak{R}(l_2)$,

$$A_n x = \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}^{(n)} x_k \right)_{i=1}^{\infty}, \quad a_{ik}^{(n)} = \begin{cases} a_{ik}, & 1 \leq i, k \leq n, \\ 0, & i \vee k > n. \end{cases} \quad \text{Нехай}$$

$$f^{(n)} = \left(f_i^{(n)} \right)_{i=1}^{\infty}, f_i^{(n)} = \begin{cases} f_i, & i \leq n, \\ 0, & i > n. \end{cases}, \quad x^{(n)} = \left(x_i^{(n)} \right)_{i=1}^{\infty}, x_i^{(n)} = \begin{cases} x_i, & i \leq n, \\ 0, & i > n. \end{cases} \quad \text{у}$$

зазначеному прикладі було показано, що послідовність $A_n \rightarrow A$ рівномірно, причому

$$\|A_n - A\|^2 \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik}|^2 + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_{ik}|^2.$$

Зважаючи на збіжність наведених рядів можна вказати $n_1(\varepsilon)$ таке, що $\|A_n - A\| \leq \varepsilon$ при кожному $\varepsilon > 0$. Аналогічно $\forall \delta > 0 \exists n_2(\delta): n > n_2 \Rightarrow \Rightarrow \sum_{i=n+1}^{\infty} |f_i|^2 < \delta^2$. Тоді при $n > \max\{n_1, n_2\}$ редукована система

$$x_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k + f_i \quad i=1,2,\dots,n \text{ задовольняє умови теореми 3.2.6. Отже,}$$

при $n \rightarrow \infty$ розв'язок $x^{(n)}$ редукованої системи буде збігатися до точного розв'язку вихідної системи.

В якості конкретного прикладу ще раз звернемося до задачі визначення електростатичного поля незамкненого сферичного провідника і провідної площини, наведеної в прикладі 3.2.2. Якщо розхил сферичного провідника дорівнює $\beta = \pi$, то незамкнений провідник перетворюється на замкнену сферу. В цьому випадку задача зводиться вже до нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$x_m = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{m+k} \frac{(m+k)!}{m!k!} \left(\frac{a}{2h} \right)^{m+k+1} x_k + u_0 \delta_{m0} \quad m=0,1,\dots$$

Для одержання її наближеного розв'язку застосуємо метод редукції з оператором

$$A_1 x = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_{ik}^{(1)} x_k \right)_{i=0}^{\infty}, \quad a_{ik}^{(1)} = \begin{cases} a_{ik}, & 0 \leq i, k \leq 1, \\ 0, & i \vee k > 1, \end{cases} \quad a_{ik} = (-1)^{i+k} \frac{(i+k)!}{i!k!} \left(\frac{a}{2h} \right)^{i+k+1}.$$

Візьмемо $a/h = 0,5$. При цьому якість апроксимації характеризується

оцінкою

$$\|A_1 - A\|^2 \leq 2 \sum_{i=2}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} |a_{ik}|^2 \leq 2 \sum_{i=2}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} |a_{ik}| \right)^2 = 2 \sum_{i=2}^{\infty} \left(\frac{1}{9} \right)^{i+1} = \frac{1}{18}.$$

Редукована система має вигляд $B_1(x_0 \ x_1)^* = (u_0 \ 0)^*$, де $B_1 = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/16 \\ 1/16 & 31/32 \end{pmatrix}$. Розв'язок цієї системи – $x^{(1)} = \frac{8}{185} u_0 \begin{pmatrix} 31 \\ -2 \end{pmatrix}$. Оцінимо

його точність за формулою (3.9). Для цього обчислимо число обумовленості $\chi(B_1)$. Оскільки матриця B_1 – симетрична, то $\|B_1\| = (55 + \sqrt{65})/64 \approx 1$ – максимальне за модулем власне значення матриці B_1 . Аналогічно $\|B_1^{-1}\| = 4(55 + \sqrt{65})/185 \approx 1,36$. Таким чином, $\chi(B_1) < 1,35$, тобто оператор B_1 є добре обумовленим. Крім того, $\Delta_1 = \|B - B_1\| \|B_1\|^{-1} \approx 1/18$, $\omega_8 = 0$. Тоді відносна погрішність наближеного розв'язку $x^{(1)}$ складає 11%. Зазначимо, що при відносному розмірі розташування провідників $a/h = 1/3$ відносна погрішність буде дорівнювати 2%.

На закінчення коротко зупинимось на чисельному розв'язуванні інтегрального рівняння другого роду шляхом заміни інтеграла квадратурною формулою.

Розглянемо рівняння

$$\varphi(t) + \int_a^b k(t,s)\varphi(s)ds = f(t) \quad t \in [a,b]$$

з ядром $k(t,s) \in C[a,b] \times [a,b]$ і правою частиною $f(t) \in C[a,b]$. Один з варіантів чисельного розв'язування цього рівняння пов'язаний з заміною інтеграла квадратурною формулою. У результаті одержуємо систему алгебраїчних рівнянь

$$\varphi(t_i^{(n)}) + \sum_{k=1}^n k(t_i^{(n)}, t_k^{(n)}) w_k^{(n)} \varphi(t_k^{(n)}) = f(t_i^{(n)}), \quad i = 1, \dots, n,$$

де $\{t_i^{(n)}\}_{i=1}^n$ – вузли, а $w_k^{(n)}$ – ваги квадратурної формули. Як було показано в прикладі 2.2.7, послідовність апроксимуючих операторів в цьому випадку не збігається рівномірно до вихідного інтегрального оператора. Тому застосувати до цієї задачі теорему 3.2.6 неможливо. Наведемо без доведення теорему, яка обґрунтовує збіжність наближеного розв'язку

$$\varphi_n(t) = - \sum_{k=1}^n k(t, t_k^{(n)}) w_k^{(n)} \varphi(t_k^{(n)}) + f(t) \quad t \in [a, b]$$

до точного. Покладемо $A_n \varphi = \sum_{k=1}^n k(t, t_k^{(n)}) w_k^{(n)} \varphi(t_k^{(n)})$, $A \varphi = \int_a^b k(t, s) \varphi(s) ds$.

Теорема 3.2.7. Нехай $\{t_i^{(n)}\}_{i=1}^n$ – рівномірні вузли, а $w_k^{(n)}$ – додатні ваги квадратурної формули, $k(t, s) \in C[a, b] \times [a, b]$. Якщо оператор $(I - A)^{-1} \in \mathcal{R}(C[a, b])$, то при достатньо великому n оператор $(I - A_n)^{-1} \in \mathcal{R}(C[a, b])$ і послідовність $(I - A_n)^{-1}$ сильно збігається до оператора $(I - A)^{-1}$.

3.3. РІВНЯННЯ З ДОДАТНО ВИЗНАЧЕНИМ ОПЕРАТОРОМ

У цьому параграфі вивчаються операторні рівняння з одним класом необмежених операторів у гільбертовому просторі. Це так звані додатно визначені оператори. Далі буде показано, що операторне рівняння $Ax = y$ з додатно визначеним оператором A завжди має єдиний розв'язок, що розуміється, можливо, в деякому узагальненому сенсі. Додатно визначені оператори знаходять широке застосування при розв'язанні багатьох технічних задач.

Нехай A – лінійний оператор зі щільною областю визначення $D(A)$, що діє в гільбертовому просторі H .

Означення 3.3.1. Оператор A називається **симетричним**, якщо

$$(Ax, y) = (x, Ay) \quad \forall x, y \in D(A). \quad (3.11)$$

Таким чином, симетричний оператор узагальнює означення 2.2.16 самоспряженого оператора.

Приклад 3.3.1. У просторі $L_2[0,1]$ оператор $Ax = -d^2x/dt^2$ зі щільною областю визначення $D(A) = \{x \in C^2[0,1], x(0) = x(1) = 0\}$ є симетричним оператором, оскільки $\forall x, y \in D(A)$

$$(Ax, y) = -\int_0^1 x''(t)y(t)dt = -x'(t)y(t)\Big|_0^1 + \int_0^1 x'(t)y'(t)dt = x(t)y'(t)\Big|_0^1 - \int_0^1 x(t)y''(t)dt = (x, Ay).$$

Означення 3.3.2. Симетричний оператор A називається додатно визначеним, якщо існує додатне число c таке, що

$$(Ax, x) \geq c(x, x) \quad \forall x \in D(A). \quad (3.12)$$

Приклад 3.3.2. Оператор з прикладу 3.3.1 є додатно визначеним. Дійсно, будь-яку функцію з області визначення $D(A)$

можна подати у вигляді $x(t) = \int_0^t x'(s)ds$, звідки випливає, що

$$|x(t)|^2 \leq \left(\int_0^t |x'(s)| ds \right)^2 \leq \int_0^t ds \int_0^t |x'(s)|^2 ds \leq \int_0^1 |x'(s)|^2 ds \Rightarrow \int_0^1 |x(s)|^2 ds \leq \int_0^1 |x'(s)|^2 ds.$$

$$\text{Тоді } (Ax, x) = \int_0^1 |x'(t)|^2 dt \geq \int_0^1 |x(t)|^2 dt = \|x\|^2 \quad \forall x \in D(A).$$

Очевидно, що якщо оператор $A \in \mathfrak{R}(H)$ і є додатно визначеним, то він є додатним у сенсі означення 2.2.17. Обернене твердження, взагалі кажучи, є невірним.

Приклад 3.3.3. Оператор $A \in \mathfrak{R}(L_2[0,1])$ множення на незалежну змінну з прикладу 2.2.16 є додатним, але не додатно визначеним. Для доведення цього достатньо показати, що існує послідовність $x_n \in L_2[0,1]: \|x_n\| = 1$, для якого $(Ax_n, x_n) \rightarrow 0$. В якості такої

$$\text{послідовності можна обрати наступну: } x_n(t) = \begin{cases} \sqrt{2n - 2n^2 t}, & t \in [0, 1/n], \\ 0, & t \in [1/n, 1]. \end{cases}$$

Для неї виконуються умови $x_n \in L_2[0,1], \|x_n\| = 1, (Ax_n, x_n) = 1/(3n) \rightarrow 0$.

Енергетичний простір додатно визначеного оператора. Нехай A – додатно визначений оператор з областю визначення $D(A)$, що діє в гільбертовому просторі H . На лінійному многовиді $D(A)$ введемо новий скалярний добуток

$$[x, y]_A = (Ax, y) \quad \forall x, y \in D(A). \quad (3.13)$$

Неважко показати, що числова функція (3.13) задовольняє всі аксіоми

скалярного добутку (перевірити!).

Скалярний добуток (3.13) породжує нову норму

$$\|x\|_A = \sqrt{[x, x]_A} \quad \forall x \in D(A), \quad (3.14)$$

яка називається **енергетичною нормою**.

Лінійний многовид $D(A)$ зі скалярним добутком (3.13) є евклідовим простором, який, взагалі кажучи, не повний.

Означення 3.3.3. Поповнення простору $D(A)$ за енергетичною нормою називається **енергетичним простором** оператора A і позначається через H_A .

Введення терміна "енергетичний простір" пояснюється тим, що для багатьох фізичних систем, описаних операторним рівнянням $Ax = y$ з додатно визначеним оператором A , вираз $(Ax, x) \equiv \|x\|_A^2$ пропорціональний енергії системи.

Приклад 3.3.4. Розглянемо пружну струну, закріплену в точках $x=0$ і $x=1$. При малих відхиленнях $u(x)$ струни від положення рівноваги робота внутрішніх сил по подовженню елемента струни dx під дією сили натягу T_0 дорівнює

$$dW = T_0(dl - dx) = T_0\left(\sqrt{1 + [u'(x)]^2} - 1\right)dx \approx \frac{T_0}{2}[u'(x)]^2 dx. \quad \text{Відповідно для}$$

всієї струни робота $W = \frac{T_0}{2} \int_0^1 [u'(x)]^2 dx$ і збігається з потенціальною

енергією деформації струни U . Враховуючи приклад 3.3.2, можна записати $U = \frac{T_0}{2}(Au, u) = \frac{T_0}{2}\|u\|_A^2$, $Au = -d^2u/dx^2$.

Розглянемо два гільбертових простори $H_1 \subset H_2$ зі скалярними добутками $(\cdot, \cdot)_1$ і $(\cdot, \cdot)_2$ відповідно.

Означення 3.3.4. Оператор $J: H_1 \rightarrow H_2$, що ставить у відповідність кожному вектору $x \in H_1$ цей же вектор як елемент простору H_2 , тобто $\forall x \in H_1 \quad Jx = x \in H_2$, називається **оператором вкладення** простору H_1 у простір H_2 .

Теорема 3.3.1. Оператор $J: H_A \rightarrow H$ вкладення простору H_A в простір H обмежений.

Доведення. При доведенні теореми ключовим фактом є нерівність між звичайною і енергетичною нормами, яка безпосередньо впливає з додатної визначеності оператора A

$$\|x\| \leq \|x\|_A / \sqrt{c} \quad \forall x \in D(A). \quad (3.15)$$

Розглянемо довільний елемент $x \in H_A$. Оскільки простір H_A одержаний поповненням лінійного многовиду $D(A)$ за енергетичною нормою, то існує фундаментальна послідовність $x_n \in D(A)$ така, що $\|x_n - x\|_A \rightarrow 0$. В силу оцінки (3.15) ця послідовність фундаментальна у просторі H . Тоді існує елемент $\bar{x} \in H$ такий, що $\|x_n - \bar{x}\| \rightarrow 0$. Зіставимо елементу $x \in H_A$ елемент $Jx = \bar{x} \in H$. Таке зіставлення не залежить від вибору фундаментальної послідовності, збіжної до елемента $x \in H_A$. Дійсно, нехай $y_n \in D(A)$ – інша фундаментальна послідовність, збіжна до елемента x в енергетичному просторі, причому $\|y_n - \bar{y}\| \rightarrow 0$. Тоді $\bar{x} = \bar{y}$, оскільки

$$\|\bar{x} - \bar{y}\| \leq \|\bar{x} - x_n\| + \|x_n - y_n\| + \|y_n - \bar{y}\| \leq \|\bar{x} - x_n\| + \frac{1}{\sqrt{c}} \|x_n - y_n\|_A + \|y_n - \bar{y}\| \rightarrow 0.$$

Оператор J зберігає лінійні операції є ін'єктивним. Перше твердження перевіряється тривіально, покажемо друге. Нехай $Jx = 0$, $x \in H_A$. Тоді існує фундаментальна послідовність $z_n \in D(A)$ така, що $\|z_n - x\|_A \rightarrow 0$ і $\|z_n\| \rightarrow 0$. В силу неперервності скалярного добутку

$$[x, y]_A \leftarrow [z_n, y]_A = (Az_n, y) = (z_n, Ay) \rightarrow 0 \quad \forall y \in D(A),$$

тобто $[x, y]_A = 0$ для довільного y , належного щільному многовиду $D(A)$. Отже, $x = 0$.

На закінчення зазначимо, що кожний елемент $x \in D(A) \subset H_A$ оператор J переводить в той же елемент $x \in H$ (чому?). Додані при поповненні елементи $x \in H_A$ можна ототожнити з елементами $Jx = \bar{x} \in H$. В силу нерівності (3.15) на лінійному многовиді $D(A)$ оператор J обмежений: $\|x\| = \|Jx\| \leq \|x\|_A / \sqrt{c} \quad \forall x \in D(A)$. Продовжуючи його за неперервністю на увесь простір H_A зі збереженням норми згідно з теоремою 2.2.3, завершимо доведення твердження теореми.

Наслідки. 1. Нерівність (3.15) розповсюджується на увесь простір H_A .

2. Справедлива рівність $\overline{H_A} = H$.

Приклад 3.3.5. Розглянемо у просторі $L_2[0,1]$ оператор $Ax = -d^2x/dt^2$ з областю визначення $D(A) = \{x \in C^2[0,1], x(0) = x(1) = 0\}$. Як

було показано в прикладах 3.3.1 і 3.3.2, оператор A є додатно визначеним і $[x, y]_A = (Ax, y) = \int_0^1 x'(t)y'(t)dt$, $x, y \in D(A)$. Вивчимо склад енергетичного простору оператора A , одержаного поповненням $D(A)$ за нормою $\|x\|_A^2 = \int_0^1 |x'(t)|^2 dt$. Перш за все, упевнимися, що в простір H_A входять ті і тільки ті елементи $x \in L_2[0, 1]$, для яких існує послідовність $x_n \in D(A)$ така, що $\|x_n - x\|_{L_2} \rightarrow 0$ і $\|x'_n - y\|_{L_2} \rightarrow 0$ для деякої функції $y \in L_2[0, 1]$. Дійсно, дотримуючись схеми доведення теореми 3.3.1, робимо висновок, що

$$\forall x \in H_A \exists x_n \in D(A): \|x_n - x\|_A \rightarrow 0 \Rightarrow \|x_n - x\|_{L_2} \rightarrow 0, \|x_n - x_m\|_A \rightarrow 0 \Rightarrow \|x_n - x\|_{L_2} \rightarrow 0, \|x'_n - x'_m\|_{L_2} \rightarrow 0 \Rightarrow \exists y \in L_2[0, 1]: \|x_n - x\|_{L_2} \rightarrow 0, \|x'_n - y\|_{L_2} \rightarrow 0.$$

Аналогічно доводиться обернене твердження.

Тепер покажемо, що простір H_A складається з функцій, що дорівнюють нулю на кінцях відрізка $[0, 1]$ і мають на ньому узагальнену похідну у сенсі означення, наведеного в прикладі 3 пояснень і доповнень до глави 2.

Нехай $x \in H_A$. Тоді, як уже було доведено, $\exists x_n \in D(A): \|x_n - x\|_{L_2} \rightarrow 0$ і $\|x'_n - y\|_{L_2} \rightarrow 0$. Перш за все, зазначимо, що функція $y \in L_2[0, 1]$ є сумовною функцією, що впливає з оцінки $\int_0^1 |y(s)| ds \leq \sqrt{\int_0^1 |y(s)|^2 ds}$, одержаної з нерівності Гельдера. Перейдемо до границі при $n \rightarrow \infty$ в рівності $x_n(t) = \int_0^t x'_n(s)ds$. Користуючись неперервністю скалярного добутку, приходимо до формули $x(t) = \int_0^t y(s)ds$, звідки випливає, що $x(t)$ – абсолютно неперервна функція і $x(0) = 0$. Аналогічно граничним переходом доводимо, що $x(1) = \int_0^1 y(s)ds = 0$.

Для доведення другої частини твердження запишемо формулу інтегрування частинами $\int_0^1 x'_n u dt = -\int_0^1 x_n u' dt$ для довільної функції $u \in C_0^1[0, 1]$ і перейдемо в цій рівності до границі при $n \rightarrow \infty$. Користуючись неперервністю скалярного добутку, дістаємо $\int_0^1 y u dt = -\int_0^1 x u' dt \quad \forall u \in C_0^1[0, 1]$, тобто функція $y \in L_2[0, 1]$ є узагальненою похідною функції $x \in L_2[0, 1]$.

Доведемо обернене твердження. Нехай функція $x \in L_2[0, 1]$ має узагальнену похідну $x' = y \in L_2[0, 1]$ і обертається в нуль на кінцях відрізка $[0, 1]$. Тоді справджується рівність $\int_0^1 y u dt = -\int_0^1 x u' dt \quad \forall u \in C_0^1[0, 1]$. В силу щільності

лінійного многовиду $C^1[0,1]$ у просторі $L_2[0,1]$ робимо висновок, що $\exists y_n \in C^1[0,1]: y_n \rightarrow y$ ($L_2[0,1]$). Покладемо $x_n(t) = \int_0^t y_n(s) ds$. Очевидно, що $x_n \in C^2[0,1]$. Запишемо наведену вище інтегральну рівність для функції $x_n - x$:

$$\int_0^1 (y_n - y) u dt = - \int_0^1 (x_n - x) u' dt \quad \forall u \in C_0^1[0,1].$$

Переходячи у ній до границі при $n \rightarrow \infty$, дістанемо $\int_0^1 (x_n - x) v dt \rightarrow 0 \quad \forall v \in C^2[0,1]$. Неважко перевірити, що для послідовності $x_n - x$ виконані усі умови теореми 2.2.6. Тоді $\|x_n - x\| \rightarrow 0$ і граничним переходом дістаємо рівність $x(t) = \int_0^t y(s) ds$, звідки випливає, що функція $x(t)$

абсолютно неперервна і $\int_0^1 y(s) ds = 0$. Залишилось показати, що послідовність y_n може бути обрана так, щоб $x_n(0) = x_n(1) = 0$. Перша рівність відразу випливає з означення $x_n(t)$, друга – еквівалентна умові $\int_0^1 y_n(s) ds = 0$. Якщо вона не виконується, то в наведеному доведенні послідовність y_n можна замінити послідовністю $y_n - \lambda \rightarrow y$ ($\lambda \in R$). Тоді $x_n - \lambda t \rightarrow x$. Позначимо $\lambda_n = \int_0^1 y_n(s) ds$. При $n \rightarrow \infty$ послідовність $\lambda_n \rightarrow \int_0^1 y(s) ds + \lambda = \lambda$, тому $\tilde{y}_n(t) \equiv y_n(t) - \lambda_n = y_n(t) - \lambda + (\lambda - \lambda_n) \rightarrow y(t)$ і $\tilde{x}_n(t) \equiv x_n(t) - \lambda_n t = x_n(t) - \lambda t + (\lambda - \lambda_n)t \rightarrow x(t)$ у просторі $L_2[0,1]$. При цьому $\tilde{x}_n \in D(A)$ і $\tilde{x}'_n = \tilde{y}_n$, тобто згідно з доведеним вище $x \in H_A$.

Таким чином, енергетичний простір H_A в цьому прикладі збігається з гільбертовим простором $W_{2,0}^1[0,1]$, введеним у прикладі 2.1.6. Зазначимо, що крім двох еквівалентних інтерпретацій елементів простору $W_{2,0}^1[0,1]$ з наведеного доведення випливає третя інтерпретація, а саме: функції з простору $W_{2,0}^1[0,1]$ обертаються в нуль на кінцях відрізка $[0,1]$, абсолютно неперервні і їхні похідні належать простору $L_2[0,1]$.

Узагальнений розв'язок рівняння з додатно визначеним оператором. Розглянемо додатно визначений оператор A зі щільною областю визначення $D(A)$, який діє в дійсному гільбертовому просторі H .

Означення 3.3.5. Квадратичний функціонал

$$E_{A,f}(x) = (Ax, x) - 2(f, x), \quad (3.16)$$

де $f \in H$, називається **функціоналом енергії** оператора A .

Область визначення $D(E)$ збігається з множиною $D(A)$.

Приклад 3.3.6. Повернемося до задачі, розглянутої в прикладі 3.3.4. Якщо струна знаходиться в статичному положенні під дією розподіленого навантаження з лінійною щільністю $q(x)$, то потенціальна енергія деформації струни дорівнює $U = \frac{T_0}{2}(Au, u) - (q, u) = \frac{T_0}{2}E_{A, f}(u)$, $f = \frac{q}{T_0}$, тобто пропорційна функціоналу енергії $E(u)$ оператора A .

Теорема 3.3.2. Рівняння $Ax = f$ має єдиний розв'язок $x_0 \in D(A)$ тоді і тільки тоді, коли функціонал енергії $E_{A, f}(x)$ досягає на елементі x_0 мінімального значення на множині $D(E)$.

Доведення. Необхідність. Нехай рівняння $Ax = f$ має розв'язок $x_0 \in D(A)$. Тоді $Ax_0 = f$. Перетворимо функціонал енергії оператора A :

$$\begin{aligned} E_{A, f}(x) &= (Ax, x) - 2(f, x) = (Ax, x) - 2(Ax_0, x) = (A(x - x_0), x) - (Ax_0, x) + (Ax_0, x_0) - (Ax_0, x_0) = \\ &= (A(x - x_0), x - x_0) - (Ax_0, x_0). \end{aligned}$$

З цієї формули і додатної визначеності оператора A випливає, що $E_{A, f}(x) \geq -(Ax_0, x_0)$, причому найменшого значення функціонал $E_{A, f}(x)$ набуває на елементі $x_0 \in D(A)$.

Достатність. Нехай функціонал $E_{A, f}(x)$ набуває на елементі $x_0 \in D(A)$ свого найменшого значення. Тоді $\forall x \in D(A)$ і $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ виконується нерівність $E_{A, f}(x_0 + \lambda x) \geq E_{A, f}(x_0)$. Тому числова функція $F(\lambda) = E_{A, f}(x_0 + \lambda x) = (Ax_0, x_0) + 2\lambda(Ax_0, x) + \lambda^2(Ax, x) - 2(f, x_0) - 2\lambda(f, x)$ має мінімальне значення в точці $\lambda = 0$. З необхідної умови мінімуму випливає, що

$$F'(\lambda)|_{\lambda=0} = 2(Ax_0, x) - 2(f, x) = 0 \Rightarrow (Ax_0 - f, x) = 0.$$

Остання рівність виконується на щільній у просторі H множині $D(A)$. Тому $Ax_0 - f = 0$, тобто x_0 є розв'язком рівняння $Ax = f$. Єдиність розв'язку неважко отримати з додатної визначеності оператора A .

Теорема 3.3.3. Для додатно визначеного оператора A існує єдиний елемент $x_0 \in H_A$, на якому функціонал енергії $E_{A, f}(x)$ оператора A досягає мінімального значення у просторі H_A .

Доведення. Запишемо значення функціоналу енергії оператора

А на довільному елементі $x \in H_A$ через енергетичну норму цього елемента $E_{A,f}(x) = \|x\|_A^2 - 2(f, x)$. Лінійний функціонал (f, x) $x \in H_A$ обмежений на енергетичному просторі, оскільки $|(f, x)| \leq \|f\| \|x\| \leq \|f\| \|x\|_A / \sqrt{c} \quad \forall x \in H_A$. Тоді за теоремою Рисса 2.1.4 існує єдиний елемент $x_0 \in H_A$, для якого $(f, x) = [x_0, x]_A$. Підставляючи цю рівність в функціонал енергії, дістанемо

$$E_{A,f}(x) = \|x\|_A^2 - 2[x_0, x]_A = [x - x_0, x]_A - [x_0, x]_A = [x - x_0, x - x_0]_A - [x_0, x_0]_A.$$

Очевидно, що

$$\min_{x \in H_A} E_{A,f}(x) = \min_{x \in H_A} \{ \|x - x_0\|_A - \|x_0\|_A \} = -\|x_0\|_A$$

і досягається на елементі $x_0 \in H_A$.

Означення 3.3.6. Елемент $x_0 \in H_A$, що мінімізує функціонал енергії $E_{A,f}(x)$, називається **узагальненим розв'язком** рівняння $Ax = f$.

Приклад 3.3.7. Узагальнений розв'язок граничної задачі, введений в прикладі 2.1.6, збігається з узагальненим розв'язком з означення 3.3.6 рівняння $Ax = p$ з оператором $Ax = -d^2x/dt^2$, що має область визначення $D(A) = \{x \in C^2[0, 1], x(a) = x(b) = 0\}$ і діючим у просторі $L_2[a, b]$. Дійсно, мінімум функціоналу енергії $E_{A,p}(x) = (x', x') - 2(p, x) = (x', x') - 2[x_0, x]_A$ досягається на елементі $x_0 \in H_A$ такому, що $(p, x) = [x_0, x]_A = (x'_0, x') \quad \forall x \in H_A$. Залишається зауважити, що згідно з прикладом 3.3.5 простір $H_A = W_{2,0}^1[a, b]$.

Розширення за Фрідріхсом додатно визначеного оператора.

Розглянемо додатно визначений оператор A зі щільною областю визначення $D(A)$, який діє в дійсному гільбертовому просторі H . При доведенні теореми 3.3.3 була одержана формула

$$(f, x) = [x_0, x]_A \quad \forall x \in H_A, \quad (3.17)$$

в силу якої кожному елементу $f \in H$ ставиться у відповідність єдиний елемент $x_0 \in H_A$, на якому функціонал енергії $E_{A,f}(x)$ досягає мінімального значення.

Таким чином, на всьому просторі H заданий оператор $\tilde{A}^{-1} : H \rightarrow H$, що діє за правилом $\tilde{A}^{-1}f = x_0$. Тоді формулу (3.17) можна переписати у вигляді

$$(f, x) = [\tilde{A}^{-1}f, x]_A \quad \forall x \in H_A, \forall f \in H. \quad (3.18)$$

Зазначимо, що оператор $\tilde{A}^{-1}$ є лінійним і обмеженим. Перше твердження очевидне, доведемо друге. З формули, що задає оператор $\tilde{A}^{-1}$, випливає, що

$$\|x_0\|_A^2 = (f, x_0) \leq \|f\| \|x_0\| \leq \|f\| \|x_0\|_A / \sqrt{c} \Rightarrow \|x_0\|_A \leq \|f\| / \sqrt{c}.$$

Остання нерівність означає, що $\|\tilde{A}^{-1}f\| \leq \|\tilde{A}^{-1}f\|_A / \sqrt{c} = \|x_0\|_A / \sqrt{c} \leq \|f\| / c \quad \forall f \in H$, тобто оператор $\tilde{A}^{-1}$ обмежений.

Оператор $\tilde{A}^{-1}$ є самоспряженим, оскільки

$$(\tilde{A}^{-1}f, u) = (u, \tilde{A}^{-1}f) = [\tilde{A}^{-1}u, \tilde{A}^{-1}f]_A = [\tilde{A}^{-1}f, \tilde{A}^{-1}u]_A = (f, \tilde{A}^{-1}u) \quad \forall f, u \in H.$$

З формули (3.18) випливає, що оператор $\tilde{A}^{-1}$ ін'єктивний (чому?). Тому існує обернений оператор $\tilde{A}: H \rightarrow H$ з областю визначення $D(\tilde{A}) \subset H_A$ і образом $R(\tilde{A}) = H$. При цьому

$$(\tilde{A}x_0, x) = [x_0, x]_A \quad \forall x_0 \in D(\tilde{A}), \forall x \in H_A. \quad (3.19)$$

Властивості оператора $\tilde{A}$.

1. Оператор $\tilde{A}$ додатно визначений.
2. $D(A) \subset D(\tilde{A})$, $\tilde{A}x_0 = Ax_0 \quad \forall x_0 \in D(A)$.
3. $H_{\tilde{A}} = H_A$.

Доведемо властивості 1 і 2. Вони безпосередньо випливають з формули (3.19):

$$(\tilde{A}x_0, x) = [x_0, x]_A = [x, x_0]_A = (\tilde{A}x, x_0) = (x_0, \tilde{A}x) \quad \forall x_0, x \in D(\tilde{A}),$$

$$(\tilde{A}x, x) = [x, x]_A = \|x\|_A^2 \geq c \|x\|^2 \quad \forall x \in D(\tilde{A}),$$

$$(\tilde{A}x_0, x) = [x_0, x]_A = (Ax_0, x) \quad \forall x_0 \in D(A), \forall x \in H_A \Rightarrow \tilde{A}x_0 = Ax_0 \quad \forall x_0 \in D(A).$$

З властивостей оператора $\tilde{A}$ робимо висновок, що він є додатно визначеним розширенням оператора A .

Означення 3.3.7. Оператор $\tilde{A}$ називається розширенням оператора A за Фридрихсом.

Зауваження. Доцільність введення розширення додатно визначеного оператора за Фрідріхсом випливає з того, що операторне рівняння $\tilde{A}x = f$ має єдиний звичайний розв'язок при будь-якій правій частині $f \in H$. Останнє твердження випливає з того, що оператор $\tilde{A}$ ін'єктивний (випливає з додатної визначеності) і сюр'єктивний, оскільки $R(\tilde{A}) = H$.

Приклади 3.3.8. 1. Розглянемо оператор граничної задачі з прикладу 2.1.6. Це диференціальний оператор $Ax = -d^2x/dt^2$, що має область визначення $D(A) = \{x \in C^2[0, 1], x(a) = x(b) = 0\}$ і діє у просторі $L_2[a, b]$. З прикладу 3.3.7

впливає, що $\tilde{A}x_0 = p$ у тому і тільки в тому випадку, якщо для довільної функції $x \in C_0^1[a, b]$ справджується рівність $(p, x) = (\tilde{A}x_0, x) = [x_0, x]_A = (x'_0, x')$. Однак співвідношення $(p, x) = (x'_0, x') \forall x \in C_0^1[a, b]$ означає, що функція $-p(t)$ є узагальненою похідною функції $x'_0(t)$ або узагальненою похідною функції $x_0(t)$ другого порядку. Тоді, дотримуючись прикладу 3.3.5, можна зробити висновок, що область визначення $D(\tilde{A})$ складається з функцій $x_0(t)$, які задовольняють наступні умови: їхні перші похідні $x'_0(t)$ абсолютно неперервні, другі похідні $x''_0(t) \in L_2[a, b]$, а самі функції обертаються в нуль на кінцях відрізка $[a, b]$. Розширення за Фрідріхсом $\tilde{A}$ оператора A являє собою оператор узагальненої другої похідної.

2. Подібний підхід можна застосувати до граничної задачі більш загального виду (2.71) з прикладу 2.3.6 у припущенні, що функція $q(t) \geq 0 \forall t \in [a_1, a_2]$, а права частина $f(t) \in L_2[a_1, a_2]$. Для простоти граничні умови можна обрати такими: $x(a_1) = x(a_2) = 0$. Пропонуємо читачеві описати розширення за Фрідріхсом оператора L і область визначення $D(\tilde{L})$.

Метод Рітца. Наближений розв'язок операторного рівняння $Ax = f$ з додатно визначеним оператором A в гільбертовому просторі H звичайно будується у вигляді послідовності $x_n \in H_A$, збіжної до елемента x_0 , на якому функціонал енергії $E_{A,f}(x)$ досягає мінімального значення. Така послідовність називається мінімізуючою. В цьому пункті опишемо метод побудови мінімізуючої послідовності, який називається методом Рітца.

Нехай H – сепарабельний гільбертів простір, $\{u_k\}_{k=1}^\infty \subset H_A$ – базис у просторі H . Мінімізуючу послідовність $x_n \in H_A$ будемо

шукати у вигляді $x_n = \sum_{k=1}^n c_k u_k$, де числа c_k потребують визначення.

Знайдемо їх з умови мінімуму функції n змінних

$$E(c_1, c_2, \dots, c_n) = E_{A,f}(x_n) = \|x_n\|_A^2 - 2(f, x_n) = \sum_{k,m=1}^n c_k c_m [u_k, u_m]_A - 2 \sum_{k=1}^n c_k (f, u_k).$$

Запишемо необхідну умова екстремуму

$$\partial E / \partial c_i = 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^n [u_i, u_k]_A c_k = (f, u_i) \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.20)$$

Система (3.20) може бути записана в матричній формі $GC = F$, де

матриця системи $G = ([u_i, u_k]_A)_{i,k=1}^n$ є матрицею Грама системи базисних елементів $\{u_k\}_{k=1}^n$, $C = (c_i)_{i=1}^n$ – стовпець невідомих, $F = ((f, u_i))_{i=1}^n$ – стовпець правих частин. Оскільки система елементів $\{u_k\}_{k=1}^n$ лінійно незалежна, то $\det G > 0$, отже, $\exists G^{-1}$. Тоді $C = G^{-1}F$ і $x_n = \sum_{k=1}^n c_k u_k = U^* G^{-1} F$, де $U = (u_k)_{k=1}^n$ – стовпець базисних елементів.

Теорема 3.3.4. *Мінімізуюча послідовність $x_n = \sum_{k=1}^n c_k u_k$*

збігається до узагальненого розв'язку $x_0 \in H_A$ операторного рівняння $Ax = f$ з додатно визначеним оператором A в сепарабельному гільбертовому просторі H .

Доведення. Нехай $x_0 \in H_A$ – узагальнений розв'язок операторного рівняння $Ax = f$, підпростір $L_n = \text{Lin}(u_k)_{k=1}^n$. З означення

базису випливає, що існує послідовність $\tilde{x}_n = \sum_{k=1}^n a_k u_k$, яка збігається

до елемента x_0 у просторі H_A . Систему (3.20) можна перетворити наступним чином за допомогою формули (3.17):

$$\sum_{k=1}^n [u_i, u_k]_A c_k = (f, u_i) = [x_0, u_i]_A \Rightarrow \left[\sum_{k=1}^n c_k u_k - x_0, u_i \right]_A = 0 \quad i = 1, \dots, n \Rightarrow x_n - x_0 \perp L_n.$$

Враховуючи останню умову, обчислюємо значення функціонала енергії на елементі $\tilde{x}_n$:

$$E_{A,f}(\tilde{x}_n) = \| \tilde{x}_n - x_0 \|_A^2 - \| x_0 \|_A^2 = \| (\tilde{x}_n - x_n) + (x_n - x_0) \|_A^2 - \| x_0 \|_A^2 = \| \tilde{x}_n - x_n \|_A^2 + \| x_n - x_0 \|_A^2 - \| x_0 \|_A^2 \geq \| x_n - x_0 \|_A^2 - \| x_0 \|_A^2 = E_{A,f}(x_n).$$

Таким чином, $E_{A,f}(\tilde{x}_n) \geq E_{A,f}(x_n) \geq -\|x_0\|_A^2$ і $\|\tilde{x}_n - x_0\|_A^2 \geq \|x_n - x_0\|_A^2$. Переходячи в цих нерівностях до границі при $n \rightarrow \infty$ і користуючись тим, що $\|\tilde{x}_n - x_0\|_A^2 \rightarrow 0$, одержуємо, що $\|x_n - x_0\|_A^2 \rightarrow 0$, $E_{A,f}(x_n) \rightarrow -\|x_0\|_A^2$.

Приклад 3.3.9. Розглянемо граничну задачу

$$-x''(t) - x(t) = t \quad t \in [0, 1], \quad x(0) = x(1) = 0.$$

Оператор задачі $Ax = -x'' - x$ з областю визначення

$D(A) = \{x \in C^2[0,1], x(0)=x(1)=0\}$ є додатно визначеним у просторі $L_2[0,1]$. Це випливає з того, що $(Ax, x) = \|x'\|^2 - \|x\|^2 \geq \|x\|^2$, оскільки $\|x'\|^2 \geq 2\|x\|^2$. З прикладу 3.3.5 робимо висновок, що $H_A = W_{2,0}^1[0,1]$

Застосуємо до операторного рівняння $Ax = f$, $f \equiv t$ метод Рунца. Оберемо $n=2$, $u_1(t) = t(1-t)$, $u_2(t) = t^2(1-t)$. Неважко обчислити матрицю Грама для обраної системи $G = \begin{pmatrix} 3/10 & 3/20 \\ 3/20 & 13/105 \end{pmatrix}$ і стовпець правих частин

$F = (1/12 \quad 1/20)^*$. Розв'язок системи дає наступне наближення до точного розв'язку: $x_2(t) = t(1-t)(71/369 + 7t/41)$. Наведемо порівняння наближеного розв'язку x_2 з точним розв'язком $x_0 = \sin t / \sin 1 - t$ в деяких точках відрізка $[0,1]$.

Маємо $x_2(0,25) = 0,044$, $x_0(0,25) = 0,044$, $x_2(0,5) = 0,069$, $x_0(0,5) = 0,070$, $x_2(0,75) = 0,060$, $x_0(0,75) = 0,060$.

ПОЯСНЕННЯ І ДОПОВНЕННЯ ДО ГЛАВИ 3

Деякі класи рівнянь в банахових просторах. В цьому пункті будуть розглянуті рівняння, оператори яких задовольняють деякі з властивостей, сформульованих у теоремах 3.2.1 – 3.2.4 для операторних рівнянь другого роду.

Розглянемо операторне рівняння $Ax = f$ в банаховому просторі X . Будемо припускати, що лінійний оператор A , заданий на щільному у просторі X лінійному многовиді $D(A)$, що набуває значень у банаховому просторі Y , є замкненим.

Означення 1. Оператор A називається **нормально розв'язним**, якщо його образ $R(A)$ є підпростором у просторі Y .

Приклади 1. 1. Як випливає з теореми 3.2.1, оператори $I - A$ і $I - A^*$ за умови, що оператор A цілком неперервний, є нормально розв'язними.

2. У просторі l_2 розглянемо оператор, що діє за формулою $A(\xi_i)_{i=1}^\infty = (\eta_i)_{i=1}^\infty$, $\eta_{i+1} = i\xi_i$ $i=1,2,\dots$, $\eta_1 = 0$. Область визначення $D(A)$

містить тільки послідовності $(\xi_i)_{i=1}^\infty$, для яких $\sum_{i=1}^\infty i^2 |\xi_i|^2 < \infty$. Перевіримо

замкненість цього оператора. Нехай при $n \rightarrow \infty$ збігаються послідовності $(\xi_i^{(n)})_{i=1}^\infty \rightarrow (\xi_i^{(0)})_{i=1}^\infty$ і $A(\xi_i^{(n)})_{i=1}^\infty = ((i-1)\xi_{i-1}^{(n)})_{i=1}^\infty \rightarrow (\eta_i^{(0)})_{i=1}^\infty$. Оскільки збіжність у просторі l_2 тягне за собою покомпонентну збіжність (див. приклад 1.2.1), то

$\xi_i^{(n)} \rightarrow \xi_i^{(0)}, (i-1)\xi_{i-1}^{(0)} = \eta_i^{(0)} \quad i \in N$. Тоді $\sum_{i=1}^{\infty} i^2 |\xi_i^{(0)}|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\eta_{i+1}|^2 < \infty$,

$A(\xi_i^{(0)})_{i=1}^{\infty} = (\eta_i^{(0)})_{i=1}^{\infty}$, тобто для оператора A виконуються умови замкненості.

Образ оператора A є підпростором $R(A) = \{e_1\}^{\perp}, e_1 = (\delta_{1i})_{i=1}^{\infty}$. Дійсно, $\forall x \in D(A): Ax \perp e_1$ і $\forall (\eta_i)_{i=1}^{\infty} \perp e_1 \exists (\xi_i)_{i=1}^{\infty} \in D(A), \xi_i = \eta_{i+1}/i: A(\xi_i)_{i=1}^{\infty} = (\eta_i)_{i=1}^{\infty}$.

Теорема 1. Нехай оператор A , що діє з банахова простору X в банахів простір Y , нормально розв'язний. Тоді рівняння $Ax = y$ має розв'язок тоді і тільки тоді, коли $y \perp N(A^*)$.

Доведення теореми негайно випливає з формули (2.51).

Означення 2. Нормально розв'язний оператор A називається **нетеровим**, якщо підпростори $N(A)$ і $N(A^*)$ скінченновимірні. Число $\text{ind}(A) = \dim N(A) - \dim N(A^*)$ називається **індексом оператора** A . Оператор з нульовим індексом називається **фредгольмовим**.

Приклади 2. 1. Розглянемо у просторі l_p оператор A , що діє за формулою $A(\xi_i)_{i=1}^{\infty} = (\xi_{i+1})_{i=1}^{\infty}$. Ядро оператора збігається з підпростором $N(A) = \text{Lin}\{e_1\}, e_i = (\delta_{ik})_{k=1}^{\infty}$. Знайдемо спряжений оператор A^* до оператора A . Нехай $f = (f_i)_{i=1}^{\infty} \in l_q$. Тоді

$$f(A(\xi_i)_{i=1}^{\infty}) = f((\xi_{i+1})_{i=1}^{\infty}) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i \xi_{i+1} = \sum_{i=2}^{\infty} f_{i-1} \xi_i = (A^* f)((\xi_i)_{i=1}^{\infty}),$$

звідки $A^*(f_i)_{i=1}^{\infty} = \{0, f_1, f_2, \dots\}$. З останньої формули знаходимо ядро $N(A^*) = \{0\}$. Таким чином, оператор A є нетеровим і його індекс дорівнює $\text{ind}(A) = 1$.

2. З теорем 3.2.1, 2.3.6 і 3.2.3 випливає, що оператор $I - A$ з цілком неперервним оператором A є фредгольмовим, оскільки його індекс дорівнює нулю.

Означення 3. Нехай лінійний замкнений оператор $A: X \rightarrow Y$ має щільну область визначення $D(A)$. **Лівим (правим) регуляризатором** оператора A називається оператор $R_l \in \mathfrak{R}(Y, X)$ ($R_r \in \mathfrak{R}(Y, X)$) такий, що

$$R_l A = I_X + T_X \quad (A R_r = I_Y + T_Y),$$

де оператор $T_X \in \mathfrak{R}_0(X)$ ($T_Y \in \mathfrak{R}_0(Y)$) є цілком неперервним у просторі X (Y).

Приклад 3. Розглянемо у просторі l_2 оператор A , що діє за формулою

$A(\xi_i)_{i=1}^{\infty} = (\xi_i + (i-1)\xi_{i-1})_{i=1}^{\infty}$. Лівим регуляризатором оператора A , наприклад, є оператор $R_l(\eta_i)_{i=1}^{\infty} = (\eta_{i+1}/i)_{i=1}^{\infty}$. Дійсно,

$$(R_l A)(\xi_i)_{i=1}^{\infty} = (\xi_{i+1}/i + \xi_i)_{i=1}^{\infty} = (I + T)(\xi_i)_{i=1}^{\infty}, \quad T(\xi_i)_{i=1}^{\infty} = (\xi_{i+1}/i)_{i=1}^{\infty}.$$

причому оператор T цілком неперервний.

Теорема 2. Якщо у замкнутого оператора $A: X \rightarrow Y$ зі щільною областю визначення існують лівий R_l і правий R_r регуляризатори, то цей оператор нетерів.

Доведення. Випустимо доведення нормальної розв'язності оператора A , а доведемо лише скінченність його індексу. Для цього зазначимо, що $N(A) \subset N(R_l A) = N(I_X + T_X) \Rightarrow \dim N(A) \leq \dim N(I_X + T_X) < \infty$. Оскільки

оператор R_r^* є лівим регуляризатором оператора A^* (чому?), то, міркуючи аналогічно, дістанемо $\dim N(A^*) < \infty$. Таким чином, індекс оператора A скінченний.

Неважко перевірити, що оператор R_l , введений в прикладі 3, є двостороннім регуляризатором, в силу чого оператор A в цьому прикладі нетеровий.

Клас нетерових операторів грає важливу роль у прикладній математиці. Це пов'язано з тим, що, будучи достатньо широким класом (до нього відносяться інтегральні оператори Фредгольма і сингулярні інтегральні оператори, оператори еліптичних граничних задач та ін.), він при цьому до кінця досліджений і дозволяє сформулювати для рівняння з таким оператором умови розв'язності, що нагадують умови розв'язності системи лінійних рівнянь з різним числом рівнянь і невідомих. Наведемо тут основний результат для рівнянь з нетеровим оператором, що впливає з попередніх розглядів.

Теорема 3 (Ф. Нетер). Рівняння $Ax = y$ з нетеровим оператором A розв'язне при довільній правій частині тоді і тільки тоді, коли рівняння $A^* f = 0$ має тільки тривіальний розв'язок. Якщо рівняння $A^* f = 0$ має нетривіальний розв'язок, то рівняння $Ax = y$ розв'язне за умови ортогональності його правої частини розв'язкам однорідного спряженого рівняння. Число лінійно незалежних розв'язків однорідних рівнянь $Ax = 0$ і $A^* f = 0$ скінченне.

ЗАДАЧІ І ВПРАВИ ДО ГЛАВИ 3

1. При якому λ інтегральний оператор в рівнянні $x(t) = \lambda \int_0^1 \cos \pi(t-s)x(s)ds + 1$ є стискаючим у просторі а) $C[0,1]$ в) $L_2[0,1]$.

Знайти наближений розв'язок при $\lambda = 1/2$ з точністю до 0,01.

2. Показати, що якщо $\sup_j \sum_{i=1}^{\infty} |a_{ij}| < 1$, то нескінченна система лінійних алгебраїчних рівнянь $x_i = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} x_j + b_i \quad i=1,2,\dots$ має єдиний розв'язок $x = (x_i)_{i=1}^{\infty} \in l_1$ при $\forall b = (b_i)_{i=1}^{\infty} \in l_1$.
3. При якому λ до нелінійного рівняння $x(t) = \lambda \int_0^1 \sqrt{x^2(s) + t^2 + s^2} ds = f(t)$ можна застосувати принцип стискаючих операторів у просторі $C[0,1]$?
4. Показати, що інтегральний оператор $Ax = \int_0^1 x(s) / (1 + t^2 + s^2 + x^2(s)) ds$ є стискаючим у просторі $C[0,1]$.
5. У просторі $C[0,1]$ розв'язати інтегральне рівняння $x(t) - \lambda \int_0^1 k(t,s)x(s)ds = 1$, якщо $k(t,s) = \begin{cases} s(t-1), & t \leq s, \\ t(s-1), & t > s. \end{cases}$
6. У просторі $C[0,\pi]$ розв'язати інтегральне рівняння $x(t) = \lambda \int_0^1 \cos(2t+s)x(s)ds + \sin t$.
7. З допомогою функції Гріна записати інтегральне рівняння граничної задачі $-x'' + \lambda x = f(t)$, $x(0) + x'(0) = 0$, $x(1) = 0$.
8. У просторі $C[0,1]$ знайти характеристичні числа і власні функції інтегрального рівняння $x(t) - \lambda \int_0^1 k(t,s)x(s)ds = 0$, якщо $k(t,s) = \begin{cases} s, & s \leq t, \\ t, & t \leq s. \end{cases}$
9. Для нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь $x_m = \sum_{k=0}^{\infty} q^{m+k} x_k + \delta_{m0}$, $m=0,1,\dots$ за умови $q \in (0,1)$ упевнитися в можливості застосування метода редукції. Знайти наближений розв'язок при $n=2$. Порівняти його з точним розв'язком.
10. Методом Рітца розв'язати граничну задачу $x^{IV} + x = t$, $x(0) = x(1) = 0$, $x'(0) = x'(1) = 0$. Обрати дві базисні функції $u_k(t) = (1-t)^2 t^{k+1}$, $k=1,2$.

11. Знайти індекс оператора $A = i \frac{d}{dt}$ у просторі $L_2[0, 1]$, якщо $D(A) = W_{2,0}^1[0, 1]$.
12. Показати, що якщо $A, B \in \mathfrak{R}(X)$, то $\text{ind}(AB) = \text{ind}(BA) = \text{ind}(A) + \text{ind}(B)$.

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. Березанский Ю.М. Функциональный анализ / Ю.М. Березанский, Г.Ф. Ус, З.Г. Шефтель – К. Выща шк., 1990.
2. Вулих Б.З. Введение в функциональный анализ / Б.З. Вулих – М.: Наука, 1967.
3. Колмогоров А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин – М.: Наука, 1989.
4. Люстерник Л.А. Элементы функционального анализа / Л.А. Люстерник Л.А., В.И. Соболев – М.: Наука, 1965.
5. Треногин В.А. Функциональный анализ / В.А. Треногин – М.: Наука, 1980.
6. Коллатц Л. Функциональный анализ и вычислительная математика / Л. Коллатц – М.: Мир, 1969.
7. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Функциональный анализ – Т. 1. / М. Рид, Б. Саймон – М.: Мир, 1977.
8. Иосида К. Функциональный анализ / К. Иосида – М.: Мир, 1967.
9. Хатсон В. Приложения функционального анализа и теории операторов / В. Хатсон В., Дж. Пим – М.: Мир, 1983.
10. Канторович Л.В. Функциональный анализ / Л.В. Канторович, Г.П. Акилов – М.: Наука, 1984.
11. Михлин С.Г. Линейные уравнения в частных производных / С.Г. Михлин – М.: Высш. шк., 1977.
12. Curtain R.F. Functional Analysis in Modern Applied Mathematics / R.F. Curtain, A.J. Pritchard – Academic Press, 1977.
13. Треногин В.А. Задачи и упражнения по функциональному анализу / В.А. Треногин, Б.М. Писаревский, Т.С. Соболева – М.: Наука, 1984.
14. Городецкий В.В. Методы решения задач по функциональному анализу / В.В. Городецкий, Н.И. Нагибида, П.П. Настасиев – К.: Выща шк., 1990.
15. Антоневиц А.Б. Задачи и упражнения по функциональному анализу / А.Б. Антоневиц, П.Н. Князев, Я.В. Рядыно – Минск: ВШ, 1978.
16. Кириллов А.А., Гвишиани А.Д. Теоремы и задачи функционального анализа / А.А. Кириллов, А.Д. Гвишиани – М.: Наука, 1988.
17. Проценко В.С. Электростатическое поле незамкнутой сферической оболочки, расположенной между двумя параллельными проводящими плоскостями / В.С. Проценко, А.Г. Николаев // ЖТФ. – 1983. – Т. 53 – № 3. – С. 423 –427.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

Алгебра банахова 96
Алгоритм поповнення МП 32
Альтернатива Фредгольма 138

Базис
— нормованого простору 42
— ортонормований 47

Відстань 5
Власне значення оператора 113
Власний підпростір 113
Власний вектор оператора 113

Гіперплощина 77
— опорна 81
Границя послідовності в МП 13
— властивості 15
Графік оператора 127

Добуток операторів 96

Енергетична норма 147
Енергетичний простір 146
Енергія струни 147

Задача Штурма – Ліувілля 124
—, функція Гріна 125
Замикання множини 21
—, властивості 22
Збіжність квадратурної формули 95
Збіжність майже всюди 61
Збіжність операторів
— рівномірна 90
— сильна 92
Збіжність у МП, НП 13

Ізометричне вкладення просторів 83
Ізометрія МП 12
Інваріантний підпростір 107
Індекс оператора 158
Інтеграл Лебега 60
Інтегральне рівняння Фредгольма
— другого роду 134
— першого роду 136

Компакт 49
Компактність 49
— локальна 49, 57
—, критерій Хаусдорфа 50
Куля
— відкрита 19
— замкнена 19

Лінійна незалежність у НП 41
Лінійний многовид 36

Метод Рітца 155
Метрика 5
— дискретна 7
Многочлени Лежандра 44
Множина
— усюди щільна 23
— опукла 65
— замкнена 22
—, властивості 22
— канторова 25
— компактна 49
—, властивості 53
— міри 0 61
— нещільна 24
— ніде не щільна 24
— обмежена в МП 20
— відкрита 20
— щільна 23

Неперервне відображення МП 16
Неперервність рівностепенева 55
Нерівність
— Бесселя 46
— Гельдера 58
— Коші 10
— Мінковського 59
— трикутника 8
— Юнга 58
Норма графіка 128

Обмеженість рівномірна 54
Оператор
— бієктивний 98
— вкладення 148
— додатно визначений 146
—, узагальнений розв'язок рівняння 151
—, розширення за Фрідріхсом 153
— додатний 107
— замкнений 127
— ін'єктивний 96
— інтегральний 86
— з виродженим ядром 92
— компактний 108
— лінійний 85
— матричний 85
— множення на змінну 107
— невід'ємний 107
— необмежений 89
— неперервно оборотний 98
— нетерів 158
— нормально розв'язний 157
— обернений 98
— лівий 130

- — правий 130
- обмежений 86
- — на лінійному многовиді 88
- —, норма 87
- , продовження за неперервністю 89
- самоспряжений 106
- —, норма 105
- симетричний 145
- спряжений 102
- стискаючий 132
- — в ГП 104
- — до цілком неперервного 111
- сюр'єктивний 97
- фредгольмів 158
- цілком неперервний 108
- що допускає замикання 128
- Ортогональне доповнення в ГП 41
- Ортогональне доповнення в НП 84
- Ортогональність 11
- Ортонормована система 42
- повна 46
- , ряд Фур'є 45
- , —, екстремальна властивість 46
- , —, коефіцієнти Фур'є 45

Підпростір 36

- $C_0[a, b]$ 36
- C_0 36, 84
- , відстань від вектора 37
- , елемент найкращого наближення 38
- Послідовність фундаментальна 28
- Похибка розв'язку рівняння 140
- Принцип вкладених куль 31
- Принцип рівномірної обмеженості 93
- Принцип стискаючих операторів 132
- Проектор 108
- Простір
- банахів 29
- гільбертів 29
- евклідів 9
- лінійних обмежених операторів 89
- метричний 5
- — повний 29
- нормований 7
- сепарабельний 26
- спряжений 69
- топологічний 23
- $C[a, b]$ 8
- $C^k[a, b]$ 8
- l_p 8
- l_∞ 8
- $L_p[a, b]$ 9, 62
- s 6
- W_2^1 130

- $W_{2,0}^1$ 75

Процес ортогоналізації 43

- Рівність паралелограма 10
- Рівність Парсеваля 46
- Регуляризатор
- лівий 158
- правий 158
- Регулярна точка оператора 112
- Резольвента 112
- Резольвентна множина 112
- Рефлексивність НП 83
- Ряд у банаховому просторі 34
- , абсолютна збіжність 35

- Скалярний добуток 9
- Спектр оператора 113
- залишковий 113
- неперервний 113
- точковий 113
- Спектральне розкладення 124
- Спектральний радіус оператора 117
- самоспряженого — 121
- — цілком неперервного — 124

Теорема

- Арцела – Асколі 55
- Банаха про обмежений оператор 101
- — про замкнений оператор 128
- Гільберта – Шмідта 122
- Рісса про "майже перпендикуляр" 40
- Фредгольма
- — перша 137
- — друга 137
- — третя 138
- Хана – Банаха 77
- —, наслідки 80

Теорія Рісса – Шаудера 136

Топологія 23

Точка

- внутрішня 20
- зовнішня 20
- межова 20

Узагальнена похідна 129

Узагальнений розв'язок межової задачі 75

Функціонал

- енергії 151
- лінійний 66
- неперервний 67
- обмежений 67
- —, норма 68
- —, загальний вигляд в ГП 73
- —, загальний вигляд в НП 72
- , ядро 76

Функція

- абсолютно неперервна 63
- вимірна 61
- Гріна 125
- Діріхле 61
- сумовна 62

Число обумовленості оператора 141

ЗМІСТ

1. Простори	5
1.1. Типи просторів	5
1.2. Збіжність	13
1.3. Топологія	19
1.4. Повнота	28
1.5. Підпростори.....	36
1.6. Базис.....	41
1.7. Компактність.....	49
Пояснення і доповнення до глави 1	58
Задачі і вправи до глави 1	63
2. Оператори.....	66
2.1. Лінійні функціонали.....	66
2.2. Лінійні оператори.....	85
2.3. Спектр.....	112
Пояснення і доповнення до глави 2.....	126
Задачі і вправи до глави 2.....	130
3. Рівняння	132
3.1. Рівняння зі стискаючим оператором.....	132
3.2. Рівняння з компактним оператором.....	136
3.3. Рівняння з додатно визначеним оператором	145
Пояснення й доповнення до глави 3.....	157
Задачі й вправи до глави 3.....	159
Бібліографічний список	161
Предметний покажчик	162
Зміст	164

**Ніколаєв Олексій Георгійович,
Рвачова Тетяна Володимирівна,
Соловйов Олександр Іванович**

ФУНКЦІОНАЛЬНИЙ АНАЛІЗ

Редактор Л.А. Кузьменко

Зв. план, 2020

Електронне видання

Формат 60x84 1/8. Пап. офс. № 2. Офс. др.

Умов. др. ар.

Навч.-др. ар.

Т. 100 екз.

Замовлення

Ціна вільна

Національний аерокосмічний університет ім. М.Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут»

61070, Харків-70, вул. Чкалова, 17

<http://www.khai.edu>

Видавничий центр «ХАі»

61070, Харків-70, вул. Чкалова, 17

izdat@khai.edu