

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ ІМЕНІ ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

ВИЩА МАТЕМАТИКА

ЧИСЛОВІ ТА ФУНКЦІОНАЛЬНІ РЯДИ

Навчальний посібник

Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра
за природничими і технічними спеціальностями

Укладачі: О. В. Борисенко, В. В. Листопадова

Електронне мережеве навчальне видання

Київ
КПІ ім. ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО
2023

УДК 517.52

Укладачі: *Борисенко Ольга Володимирівна*, канд. фіз.-мат. наук, доц.
Листопадова Валентина Вікторівна, канд. фіз.-мат. наук, доц.

Рецензент *Вакал Є. С.*, канд. фіз.-мат. наук, доцент, Київський національний
університет імені Тараса Шевченка

Відповідальний
редактор *Горбачук В. М.*, доктор фіз.мат. наук, професор

*Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
(протокол № 2 від 26.10.2023 р.)
за поданням вченої ради Фізико-математичного факультету
(протокол № 9 від 20.09.2023 р.)*

Вища математика. Числові та функціональні ряди [Електронний ресурс] : навч. посіб.
для здобувачів ступеня бакалавра за природничими і технічними спеціальностями / КПІ
ім. Ігоря Сікорського ; уклад.: О. В. Борисенко, В. В. Листопадова. – Електрон. текст. дані
(1 файл). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2023. – 117 с.

У навчальному посібнику викладено необхідний теоретичний матеріал розділу «Числові та
функціональні ряди», наведено велику кількість розв'язаних прикладів, запропоновано
завдання для самостійної роботи. Посібник містить тридцять варіантів індивідуальних
завдань для розрахункової роботи та розгорнутий довідковий матеріал.
Призначений для здобувачів ступеня бакалавра за природничими і технічними
спеціальностями, буде також корисним викладачам для проведення лекційних і практичних
занять.

УДК 517.52

Реєстр. № НП 23/24-123. Обсяг 7,3 авт. арк.

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
проспект Берестейський, 37, м. Київ, 03056
<https://kpi.ua>

Свідectво про внесення до Державного реєстру видавців, виготовлювачів
і розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 5354 від 25.05.2017 р.

© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2023

Вступ

Математична освіта є важливою складовою в системі фундаментальної підготовки фахівця в будь-якій сфері сучасної діяльності. Очевидно, що значну роль при вивченні математики відіграє навчально-методична література, яку використовує в своїй роботі викладач.

Даний навчальний посібник відповідає навчальним програмам з вищої математики для підготовки бакалаврів інженерно-технічних спеціальностей НТУУ «КПІ ім. Ігоря Сікорського» денної та заочної форм навчання і складається з наступних тем: числові ряди, збіжність ряду; основні властивості збіжних числових рядів; достатні ознаки збіжності числових рядів з додатними членами; знакозмінні ряди, абсолютна та умовна збіжності; функціональні ряди, область збіжності, рівномірна збіжність; степеневі ряди, інтервал та радіус збіжності, теорема Абеля; ряди Тейлора і Маклорена; розвинення в ряд основних елементарних функцій; ряди Фур'є. Кожна тема містить необхідний теоретичний матеріал з поданням основних формул, означень та теорем з доведенням, зразки розв'язання типових навчальних прикладів, які можуть бути використані в лекційній та аудиторній роботі, достатню кількість завдань для самостійної аудиторної та домашньої роботи студентів, відповіді до них. В кінці посібника наведено 30 варіантів індивідуальних завдань за вказаними темами у зручному для використання форматі та розгорнутий довідковий матеріал.

Навчальний посібник рекомендований студентам і викладачам технічних спеціальностей вищих навчальних закладів.

Теоретичні питання до розділу «Числові та функціональні ряди»

1. Числові ряди. Частинні суми. Збіжність числових рядів.
2. Основні властивості збіжних числових рядів.
Необхідна ознака збіжності числового ряду.
3. Ознаки порівняння числових рядів з додатними членами.
Збіжність узагальненого гармонічного ряду.
4. Достатні ознаки збіжності числових рядів (ознака Д'Аламбера і радикальна ознака Коші). Інтегральна ознака Коші.
5. Числові ряди (знакозмінні ряди) вигляду

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot a_n$$

Теорема Лейбніца.

6. Ряди з довільними за знаком членами. Абсолютна та умовна збіжність.
7. Функціональні ряди. Область збіжності. Рівномірна збіжність.
Ознака Вейєрштрасса.
8. Степеневі ряди. Означення. Інтервал збіжності, радіус збіжності.
Теорема Абеля.
9. Основні властивості степеневих рядів в області збіжності.
10. Ряди Тейлора і Маклорена.
11. Розклад в ряд Маклорена елементарних функцій:

$$e^x, \operatorname{ch} x, \operatorname{sh} x, \sin x, \cos x.$$

12. Біноміальний ряд.

(Розклад в ряд Маклорена функцій

$$(1+x)^\alpha, \ln(1+x), \ln(1-x), \ln \frac{1+x}{1-x}, \operatorname{arctg} x, \operatorname{arcsin} x).$$

Біном Ньютона.

13. Ряд Фур'є для 2π -періодичних функцій. Теорема Діріхле.

14. Ряд Фур'є для $2l$ -періодичної функції.

Ряди Фур'є для парних і непарних періодичних функцій.

15. Ряд Фур'є для функції, заданої на відрізку $[0; l]$.

1. Числові ряди. Частинні суми. Збіжність числових рядів

Розглянемо числову послідовність $\{a_n\}$: $a_1, a_2, \dots, a_n \dots$.

Означення 1. Вираз вигляду

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

називається **числовим рядом**.

$a_1, a_2, \dots, a_n \dots$ - члени ряду, a_n - n -й член числового ряду, $n=1, 2, 3, \dots$.

Означення 2. Сума скінченного числа n перших членів числового ряду

$a_1 + a_2 + \dots + a_n = S_n$ називається **n -ю частковою сумою ряду**;

Тобто $S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2$, $S_3 = a_1 + a_2 + a_3$ і т. д. - маємо послідовність часткових сум $\{S_n\}$.

Означення 3. Числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ називається **збіжним**, якщо існує скінченна границя

$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$, а $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ називається **сумою ряду**.

Означення 4. Числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ називається **розбіжним** і суми не має, якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ не існує або нескінченна.

Означення 5. Різниця $R_n = S - S_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$ називається **залишком ряду** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Залишок ряду є в свою чергу нескінченним рядом, який отримано з даного ряду відкиданням перших його n членів.

Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається і має суму S , то $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n =$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} (S - S_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} S - \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S - S = 0,$

тобто залишок збіжного ряду при $n \rightarrow \infty$ прямує до нуля.

Приклад 1. Довести (за означенням) збіжність ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5 \cdot 3^n + 2 \cdot 4^n}{12^n}$$

та знайти його суму

Розв'язання. Знайдемо n -у часткову суму ряду

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{5 \cdot 3 + 2 \cdot 4}{12} + \frac{5 \cdot 3^2 + 2 \cdot 4^2}{12^2} + \dots + \frac{5 \cdot 3^n + 2 \cdot 4^n}{12^n} = \\ &= 5 \left(\frac{3}{12} + \left(\frac{3}{12} \right)^2 + \dots + \left(\frac{3}{12} \right)^n \right) + 2 \left(\frac{4}{12} + \left(\frac{4}{12} \right)^2 + \dots + \left(\frac{4}{12} \right)^n \right) = 5 \left(\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4} \right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{4} \right)^n \right) + \\ &+ 2 \left(\frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3} \right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{3} \right)^n \right) = 5 \cdot \frac{\frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{4^n} \right)}{1 - \frac{1}{4}} + 2 \cdot \frac{\frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{3^n} \right)}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{5}{3} \left(1 - \frac{1}{4^n} \right) + 1 - \frac{1}{3^n}. \end{aligned}$$

Використали формулу суми геометричної прогресії $S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$. Знайдемо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{3} \left(1 - \frac{1}{4^n} \right) + 1 - \frac{1}{3^n} \right) = \frac{8}{3}.$$

Отже, заданий ряд збіжний і його сума $S = \frac{8}{3}$.

Найпростішим прикладом числового ряду є геометрична прогресія, для якої n – а часткова сума $S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$. У випадку, коли

$|q| < 1$, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_1 q^n$ буде завжди збіжним, бо $q^n \rightarrow 0$ і $S_n = \frac{b_1}{1-q} = S$.

Якщо $|q| > 1$, то $S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q} \rightarrow \infty$, коли $n \rightarrow \infty$, і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_1 q^n$ буде розбіжним. Якщо $q = 1$, то $S_n = b_1 \cdot n \rightarrow \infty$, коли $n \rightarrow \infty$, і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_1 q^n$ буде розбіжним.

Якщо $q = -1$, то $S_n = \begin{cases} 0, & \text{при } n = 2m \\ b_1, & \text{при } n = 2m + 1 \end{cases}$, $m \in N$. Тобто в цьому випадку

S_n не прямує до єдиного значення S , коли $n \rightarrow \infty$, і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_1 q^n$ буде розбіжним.

Приклад 2. Знайти суму ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 + 8n + 3}.$$

Розв'язання. Оскільки $4n^2 + 8n + 3 = 4\left(n + \frac{1}{2}\right)\left(n + \frac{3}{2}\right) = (2n + 1)(2n + 3)$, то загальний член a_n можна записати у вигляді

$$a_n = \frac{1}{4n^2 + 8n + 3} = \frac{1}{(2n + 1)(2n + 3)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n + 1} - \frac{1}{2n + 3} \right).$$

$$\begin{aligned} \text{Маємо: } S_n &= a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n+3} \right). \end{aligned}$$

$$\text{Тоді за означенням } S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n+3} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

Отже, заданий ряд збіжний і його сума $S = \frac{1}{6}$.

Приклад 3. Знайти суму ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}.$$

Розв'язання. Подаємо загальний член заданого ряду у вигляді

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \cdot \frac{1}{n+2} = \frac{1}{n(n+2)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) - \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Маємо: } S_n &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) - \\
&\quad - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) = \\
&= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} \right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} - \frac{1}{2(n+2)} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n+2} \\
&= \frac{1}{4} + \frac{1}{2(n+2)}.
\end{aligned}$$

$$\text{Тоді } S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2(n+2)} \right) = \frac{1}{4}.$$

Отже, заданий ряд збіжний і його сума $S = \frac{1}{4}$.

2. Основні властивості збіжних числових рядів.

Необхідна ознака збіжності числового ряду

Числовий ряд – це сума нескінченного числа доданків, але збіжні числові ряди задовольняють деяким властивостям, які дозволяють діяти з ними, як із скінченними сумами (деякі властивості розглянемо з доведенням).

Властивість 1. Нехай ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ є збіжним і має суму S , тоді ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n$ також збіжний і має суму $c \cdot S$, де $c = \text{const}$.

■ Нехай G_n – часткова сума ряду $\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n$, а S_n – часткова сума ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Тоді $G_n = c \cdot a_1 + c \cdot a_2 + \dots + c \cdot a_n = c(a_1 + a_2 + \dots + a_n) = c \cdot S_n$, тому $\lim_{n \rightarrow \infty} G_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c \cdot S_n = c \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = c \cdot S$. ■

Властивість 2. Два збіжних ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ з відповідно сумами S і G можна почленно додавати і віднімати, до того, сума ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = S \pm G.$$

■ Дійсно, якщо S_n, G_n, B_n – часткові суми згаданих рядів, то

$$B_n = (a_1 \pm b_1) + (a_2 \pm b_2) + \dots + (a_n \pm b_n) = (a_1 + a_2 + \dots + a_n) \pm (b_1 + b_2 + \dots + b_n) = S_n \pm G_n ; \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n \pm G_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} G_n = S \pm G. \blacksquare$$

Властивість 3. Відкидання сталого числа початкових членів ряду або приєднання на початку його декілька нових членів не впливає на збіжність або розбіжність ряду.

■ Нехай S_n – сума перших n членів ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, C_k – сума k відкинутих членів. При досить великому n всі відкинуті члени містяться в S_n . Позначимо через G_{n-k} суму членів ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, які входять в S_n і не входять в C_k . Тоді $S_n = G_{n-k} + C_k$, де C_k – стале число, не залежне від n . Якщо існує $\lim_{n \rightarrow \infty} G_{n-k}$, то існує і границя $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = C_k + \lim_{n \rightarrow \infty} G_{n-k}$ і навпаки, що доводить справедливість твердження . ■

Властивість 4. (Необхідна умова збіжності ряду)

Загальний член a_n збіжного числового ряду прямує до нуля при необмеженому зростанні n :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Ця умова є необхідною умовою збіжності числового ряду, тобто, коли $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ є розбіжним.

$$\blacksquare a_n = S_n - S_{n-1} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S - S = 0 \blacksquare$$

Зауваження. Оскільки умова $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ є необхідною, а не достатньою, то навіть тоді, коли вона виконана, ряд може бути і розбіжним.

Властивість 5. У збіжному числовому ряді можна довільно групувати члени, не змінюючи їх порядку, при цьому збіжність і сума ряду не змінюється.

Приклад 1. Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{3+7n}.$$

Розв'язання. $a_n = \frac{2n+1}{3+7n}$, тоді $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{3+7n} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+1/n}{3/n+7} = 2/7 \neq 0 \Rightarrow$ ряд розбіжний, бо не виконана необхідна умова збіжності.

Завдання для самостійної роботи 1

Знайти суму n перших членів ряду S_n і суму ряду S :

1. $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{n(n+2)} + \dots$
2. $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + \dots$
3. $\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \dots + \frac{1}{(3n-2)(3n+2)} + \dots$
4. $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} + \dots$
5. $\frac{1}{4} + \frac{1}{10} + \frac{1}{18} + \dots + \frac{1}{n^2 + n - 2} + \dots$
6. $\frac{1}{5} + \frac{1}{21} + \frac{1}{45} + \dots + \frac{1}{4n^2 + 4n - 3} + \dots$
7. $1 + \frac{13}{25} + \frac{35}{125} + \dots + \frac{2^n + 3^n}{5^n} + \dots$
8. $\frac{10}{21} + \frac{58}{121} + \dots + \frac{3^n + 7^n}{21^n}$

Перевірити, чи виконується необхідна ознака збіжності рядів:

9. $\frac{2}{3} + \frac{4}{5} + \frac{6}{7} + \dots + \frac{2n}{2n+1} + \dots$
10. $1 + \frac{3}{4} + \frac{5}{9} + \dots + \frac{2n-1}{n^2} + \dots$

$$11. \frac{1}{1+1^2} + \frac{2}{1+2^2} + \frac{3}{1+3^2} + \dots + \frac{n}{1+n^2} + \dots$$

$$12. \sqrt{2} + \sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{4}{3}} + \dots + \sqrt{\frac{n+1}{n}} + \dots$$

$$13. 5(\sqrt{2}-1) + 7(\sqrt{5}-2) + \dots + (2n+3)(\sqrt{n^2+1}-2) + \dots$$

$$14. \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{3}{5}\right)^4 + \dots + \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n + \dots$$

$$15. \frac{1}{4} + \left(\frac{4}{7}\right)^2 + \left(\frac{7}{10}\right)^3 + \dots + \left(\frac{3n-2}{3n+1}\right)^n + \dots$$

Відповіді:

$$1. S_n = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{n+2} \right); S = \frac{3}{4}.$$

$$2. S_n = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right); S = \frac{1}{2}.$$

$$3. S_n = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{3n+1} \right); S = \frac{1}{3}.$$

$$4. S_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right); S = \frac{1}{4}.$$

$$5. S_n = \frac{1}{3} \left(\frac{11}{6} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right); S = \frac{11}{18}.$$

$$6. S_n = \frac{4}{3} - \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3}; S = \frac{4}{3}.$$

$$7. S_n = \frac{13}{6} - \frac{2}{3} \left(\frac{2}{5} \right)^n - \frac{3}{2} \left(\frac{3}{5} \right)^n; S = \frac{13}{6}.$$

$$8. S_n = \frac{8}{3} - \frac{7}{6} \left(\frac{1}{7} \right)^n - \frac{3}{2} \left(\frac{1}{3} \right)^n; S = \frac{8}{3}.$$

9. Не виконується, ряд розбіжний. 10. Виконується. 11. Виконується.

12. Не виконується, ряд розбіжний. 13. Не виконується, ряд розбіжний.

14. Не виконується, ряд розбіжний. 15. Не виконується, ряд розбіжний.

3. Ознаки порівняння числових рядів з додатними членами

Розглянемо $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, при умові, що $a_n > 0$, $n = 1, 2, 3, \dots$

В цьому випадку $S_{n+1} = S_n + a_{n+1} > S_n$, тобто послідовність частинних сум є зростаючою. Для того, щоб ряд з додатними членами збігався, необхідно і достатньо, щоб послідовність частинних сум цього ряду була обмежена зверху:

$$S_n \leq L = \text{const}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Розглянемо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

який називається **гармонічним**.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ необхідна умова збіжності виконана, але ряд буде розбіжним,

доведемо це.

■ Згадаємо границю $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$, а $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e$. Прологарифмуємо цю нерівність

$n \cdot \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) < 1 \Rightarrow \ln \frac{n+1}{n} < \frac{1}{n} \Rightarrow \ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n}$ і розглянемо цей вираз при $n = 1, 2, 3, \dots$: $\ln 2 - \ln 1 < 1$, $\ln 3 - \ln 2 < \frac{1}{2}$, ... $\ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n}$, якщо додати ці нерівності, будемо мати $\ln(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = S_n$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln(n+1) = \infty \Rightarrow$$

ряд буде розбіжним. ■

Перша теорема порівняння (достатня ознака збіжності ряду).

Розглянемо два ряди

(A): $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ і (B): $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

з додатними членами. Якщо, починаючи з деякого номера $n \geq N$, виконується нерівність $a_n \leq b_n$, то із збіжності ряду (B) випливає збіжність ряду (A), а із розбіжності (A) випливає розбіжність (B).

■ Нехай $a_n \leq b_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), S_n і G_n – частинні суми рядів (A) і (B) відповідно. Якщо ряд (B) збігається, то частинні суми G_n обмежені зверху:

$$G_n \leq L \Rightarrow$$

$S_n \leq G_n \leq L = \text{const}$, що тягне за собою збіжність ряду (A).

Якщо ряд (A) розбігається, то $S_n \rightarrow \infty$ і оскільки $G_n \geq S_n$, то і $G_n \rightarrow \infty$, тобто ряд (B) також розбігається. ■

Приклад 1. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ буде збіжним, бо його члени є меншими

відповідних членів ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$, який є збіжним ($q = \frac{1}{2} < 1$, $\frac{1}{n^n} < \frac{1}{2^n}$).

Приклад 2. Ряд $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots$ буде розбіжним, оскільки його члени, починаючи з другого, більші відповідних членів ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Друга теорема порівняння (достатня ознака збіжності ряду).

Нехай для рядів

(A): $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ і (B): $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, $a_n > 0$, $b_n > 0$, $n = 1, 2, 3, \dots$, існує

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = K.$$

Якщо $0 < K < \infty$, то ряди (A) і (B) збігаються або розбігаються одночасно.

■ Нехай ряд (B) збіжний і існує границя $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = K$, до того $K < \infty$. За

означенням границі: існує $N = N(\varepsilon)$, що при $n > N(\varepsilon)$: $\left| \frac{a_n}{b_n} - K \right| < \varepsilon \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} -$

$K < \varepsilon \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} < K + \varepsilon \Rightarrow a_n < (K + \varepsilon) \cdot b_n$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (K + \varepsilon) \cdot b_n$ буде

збіжним за Властивістю 1, тоді за **Першою теоремою порівняння** буде збіжним і ряд (A).

Якщо ряд (В) розбіжний і $K > 0$, то в цьому випадку обернене відношення $\frac{b_n}{a_n}$ має скінченну границю $\frac{1}{K}$. Ряд (А) повинен бути розбіжним. ■

Приклад 3. Ряд $\frac{1}{1+1^2} + \frac{2}{1+2^2} + \dots + \frac{n}{1+n^2} + \dots$ є розбіжним, оскільки $a_n = \frac{n}{1+n^2} \sim \frac{1}{n} = b_n$, коли $n \rightarrow \infty$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ розбігається (це гармонічний ряд).

(Нагадаємо, що запис $a_n \sim b_n$ означає, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$).

Розглянемо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

- узагальнений гармонічний, де $\alpha = \text{const} > 0$.

Дослідимо його на збіжність.

■ Нехай $\alpha \leq 1$, тоді $\frac{1}{n^{\alpha}} \geq \frac{1}{n}$ і оскільки ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ розбіжний, то за Першою теоремою порівняння ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ також буде розбіжним.

Нехай $\alpha > 1$: подаємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} = 1 + \frac{1}{2^{\alpha}} + \frac{1}{3^{\alpha}} + \dots + \frac{1}{n^{\alpha}}$

$$+ \dots = 1 + \left(\frac{1}{2^{\alpha}} + \frac{1}{3^{\alpha}}\right) + \left(\frac{1}{4^{\alpha}} + \frac{1}{5^{\alpha}} + \frac{1}{6^{\alpha}} + \frac{1}{7^{\alpha}}\right) + \dots \leq$$

|в кожній дужці замінимо всі доданки найбільшим з них|

$$\leq 1 + \left(\frac{1}{2^{\alpha}} + \frac{1}{2^{\alpha}}\right) + \left(\frac{1}{4^{\alpha}} + \frac{1}{4^{\alpha}} + \frac{1}{4^{\alpha}} + \frac{1}{4^{\alpha}}\right) + \dots = 1 + \frac{2}{2^{\alpha}} + \frac{4}{4^{\alpha}} + \dots = 1 + \frac{1}{2^{\alpha-1}} + \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^3 + \dots$$

отримали нескінченну суму геометричної прогресії із знаменником $q =$

$$\frac{1}{2^{\alpha-1}} < 1, \text{ отже, отриманий ряд буде збіжним. } \blacksquare$$

Висновок: Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ при $\alpha > 1$ буде збіжним, при $\alpha \leq 1$ - розбіжним.

Приклад 4. Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{3+5n^2}.$$

Розв'язання. $a_n = \frac{2n}{3+5n^2} \sim \frac{2}{5n} = b_n$. Оскільки $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{5n} = \frac{2}{5} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ розбіжний, то і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{3+5n^2}$ буде розбіжним.

$$(\text{Або: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2n}{3+5n^2}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2}{3+5n^2} = \frac{2}{5} = K > 0).$$

Приклад 5. Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[5]{n^3+3}}{2n-4}.$$

Розв'язання. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^3+3)^{1/5}}{2n-4} : \frac{1}{n^{2/5}} = \frac{1}{2} = K > 0$. ($\frac{2}{5} = 1 - \frac{3}{5}$, як різниця степенів знаменника і чисельника). А оскільки ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2/5}}$ – розбіжний ($\alpha = \frac{2}{5} < 1$), то і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[5]{n^3+3}}{2n-4}$ також буде розбіжним.

Приклад 6. Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+7}{3n^2+5n+6}.$$

Розв'язання. Використаємо граничну ознаку порівняння:

$$a_n = \frac{2n+7}{3n^2+5n+6}, \quad b_n = \frac{1}{n}. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+7)n}{3n^2+5n+6} = \frac{2}{3} \neq 0.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ – гармонічний, розбіжний. Отже, заданий ряд теж розбіжний.

Приклад 7. Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n^2}.$$

Розв'язання. Оскільки $a_n = \sin \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n^2} = b_n$, і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ – збіжний (ряд Діріхле, $\alpha = 2 > 1$), то за ознакою порівняння заданий ряд також збіжний.

Приклад 8. Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n^2 + 3}{n^2 + 2}.$$

Розв'язання. $a_n = \ln \frac{n^2+3}{n^2+2} = \ln \left(1 + \frac{1}{n^2+2} \right).$

Візьмемо $b_n = \frac{1}{n^2}$. Тоді $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \ln \frac{n^2+3}{n^2+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n^2+2} \right)^{n^2} =$

$$= \ln \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n^2+2} \right)^{n^2+2} \right)^{\frac{n^2}{n^2+2}} = \ln e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2+2}} = \ln e = 1 \neq 0.$$

Оскільки ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ – збіжний (ряд Діріхле, $\alpha = 2 > 1$), то за граничною ознакою порівняння заданий ряд також збіжний.

4. Достатні ознаки збіжності числових рядів (ознака Д'Аламбера і радикальна ознака Коші). Інтегральна ознака Коші

Ознака Д'Аламбера (Даламбера), (достатня ознака збіжності числових рядів з додатними членами).

Розглянемо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Якщо існує границя

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l,$$

то при $l < 1$ ряд буде збіжним, а при $l > 1$ ряд буде розбіжним.

Якщо $l = 1$, то потрібні подальші дослідження

(тобто дана ознака не дає відповідь на питання про збіжність ряду).

■ 1) Нехай існує $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$, то при $l < 1$ вибираємо число q : $l < q < 1$.

Для $\varepsilon = q - l > 0$ існує номер $N(\varepsilon)$, що при $n \geq N(\varepsilon)$ $\frac{a_{n+1}}{a_n} - l < q - l \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} < q \Rightarrow a_{n+1} < q \cdot a_n \Rightarrow a_{N+1} < q \cdot a_N, a_{N+2} < q^2 \cdot a_N, \dots$ Тоді за Першою теоремою порівняння ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ буде збіжним.

2) Нехай існує границя $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l > 1 \Rightarrow$ при $n \geq N$ $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \Rightarrow a_{n+1} > a_n \Rightarrow$ не виконується необхідна ознака збіжності, тобто ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ буде розбіжним. ■

Радикальна ознака Коші (достатня ознака збіжності числових рядів з додатними членами).

Розглянемо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Якщо існує границя

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = l,$$

то при $l < 1$ ряд буде збіжним, а при $l > 1$ ряд буде розбіжним. Якщо $l = 1$, то потрібні подальші дослідження

(тобто дана ознака не дає відповідь на питання про збіжність ряду).

■ 1) Нехай $l < 1$. Розглянемо число q : $l < q < 1$. З рівності $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = l$ і

означення границі одержимо : $|\sqrt[n]{a_n} - l| < q - l$, починаючи з деякого номера N , тобто при $n \geq N$. Тоді $\sqrt[n]{a_n} < q$ або $a_n < q^n$ для всіх $n \geq N$.

Розглянемо тепер два ряди : $a_1 + a_2 + \dots + a_N + a_{N+1} + a_{N+2} + \dots$ і $q^N + q^{N+1} + q^{N+2} + \dots$. Другий ряд збігається, бо його члени утворюють спадну геометричну прогресію. Члени першого ряду, починаючи з a_N , менші відповідних членів другого ряду. Таким чином, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається за Першою теоремою порівняння.

2) Нехай $l > 1$. Тоді, починаючи з деякого номера $n = N$ будемо мати

$\sqrt[n]{a_n} > 1$ або $a_n > 1$. Але, якщо всі члени розглядуваного ряду, починаючи з a_N , більші за 1, то ряд є розбіжним, оскільки його загальний член не прямує до нуля. ■

Приклад 1. Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{5^n n!}.$$

Розв'язання. Скористаємося ознакою Д'Аламбера. Маємо:

$$a_n = \frac{n^n}{5^n n!}, \quad a_{n+1} = \frac{(n+1)^{n+1}}{5^{n+1} (n+1)!} = \frac{(n+1)^n \cdot (n+1)}{5^n \cdot 5n! (n+1)} = \frac{(n+1)^n}{5^n \cdot 5n!}.$$

$$\text{Тоді } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^n \cdot 5^n \cdot n!}{5^n \cdot 5n! \cdot n^n} = \frac{1}{5} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^n = \frac{1}{5} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = \frac{1}{5} e < 1.$$

Отже, за ознакою д'Аламбера ряд збіжний.

Приклад 2. Дослідити ряд на збіжність

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n-1)}.$$

Розв'язання. Скористаємося ознакою Д'Аламбера.

Маємо:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1) (2n+1) \cdot 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n-1)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n-1) (3n+2) \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{3n+2} = \frac{2}{3} < 1.$$

Отже, за ознакою Д'Аламбера даний ряд збіжний.

Приклад 3. Дослідити ряд на збіжність

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n}{(2n+2)!!}.$$

Розв'язання. Скористаємось ознакою Д'Аламбера.

$$\text{Маємо: } a_{n+1} = \frac{3^{n+1} \cdot (n+1)}{(2(n+1)+2)!!} = \frac{3^n \cdot 3(n+1)}{(2n+4)!!} = \frac{3^n \cdot 3(n+1)}{(2n+2)!!(2n+4)}.$$

$$\text{Тоді } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n \cdot 3(n+1)(2n+2)!!}{(2n+2)!!(2n+4) \cdot 3^n \cdot n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3(n+1)}{(2n+4)n} = 0 < 1.$$

Отже, за ознакою Д'Аламбера ряд збігається.

Приклад 4. Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n}{2n+1} \right)^{\frac{n}{2}}.$$

Розв'язання. Скористаємось радикальною ознакою Коші.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{3n}{2n+1} \right)^{\frac{n}{2}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n}{2n+1} \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}} > 1.$$

Отже, за радикальною ознакою Коші ряд розбігається.

Приклад 5. Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+2}{2n-4} \right)^{n^2}.$$

Розв'язання. Скористаємось радикальною ознакою Коші.

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n+2}{2n-4}\right)^{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+2}{2n-4}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(2n-4)+6}{2n-4}\right)^n = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{6}{2n-4}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{6}{2n-4}\right)^{\frac{2n-4}{6}}\right)^{\frac{6n}{2n-4}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n}{2n-4}} = e^3 > 1.\end{aligned}$$

Отже, за радикальною ознакою Коші ряд розбігається.

Інтегральна ознака Коші.

Розглянемо числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, члени якого додатні і не зростають, тобто

$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots > 0$. Нехай $f(x)$ – така неперервна незростаюча функція, що $f(1)=a_1, f(2)=a_2, \dots, f(n)=a_n, \dots$. Тоді ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається або розбігається одночасно з невласним інтегралом $\int_1^{\infty} f(x)dx$.

Нагадаємо, що $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ збігається при $\alpha > 1$ і розбігається при $\alpha \leq 1$.

Приклад 6. Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1) \ln(n+2)}.$$

Розв'язання. Застосуємо спочатку граничну ознаку порівняння:

$$a_n = \frac{1}{(n-1) \ln(n+2)} \sim \frac{1}{(n+2) \ln(n+2)} = b_n, \quad n \rightarrow \infty.$$

Ряди $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ та $\sum_{n=2}^{\infty} b_n$ одночасно збігаються, або одночасно розбігаються.

Застосуємо до ряду $\sum_{n=2}^{\infty} b_n$ інтегральну ознаку Коші:

$$b_n = f(n), \quad n = 2, 3, \dots \Rightarrow f(x) = \frac{1}{(x+2) \ln(x+2)}.$$

Функція $f(x)$ - неперервна, спадна для $x \geq 2$.

$$\begin{aligned} \int_2^{\infty} \frac{dx}{(x+2) \ln(x+2)} &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_2^b \frac{dx}{(x+2) \ln(x+2)} \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_2^b \frac{dx}{(x+2) \ln(x+2)} = \lim_{b \rightarrow \infty} (\ln |\ln(x+2)|) \Big|_2^b = \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} (\ln \ln(b+2) - \ln \ln 4) = \infty. \end{aligned}$$

Невласний інтеграл розбігається. Тоді ряд $\sum_{n=2}^{\infty} b_n$ розбігається за інтегральною ознакою Коші. Отже, ряд $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ розбігається за другою ознакою (теоремою) порівняння.

Приклад 7. Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(n^2+5) \ln n}.$$

Розв'язання. Застосуємо граничну ознаку порівняння: $a_n = \frac{n}{(n^2+5) \ln n} \sim \frac{1}{n \ln n} =$

$$\begin{aligned} b_n, \quad n \rightarrow \infty. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n}{(n^2+5) \ln n}}{\frac{1}{n \ln n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \ln n}{(n^2+5) \ln n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2+5} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2 \left(1 + \frac{5}{n^2}\right)} = 1. \end{aligned}$$

Ряди $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ та $\sum_{n=2}^{\infty} b_n$ одночасно збігаються, або одночасно розбігаються.

Застосуємо до ряду $\sum_{n=2}^{\infty} b_n$ інтегральну ознаку Коші:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x \ln x}. \quad \text{Функція } f(x) \text{ - неперервна, монотонно спадна при } x \geq 2. \\ \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x} &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_2^b \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_2^b \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \lim_{b \rightarrow \infty} \ln |\ln x| \Big|_2^b = \lim_{b \rightarrow \infty} (\ln \ln b - \ln \ln 2) = \infty. \end{aligned}$$

Невласний інтеграл розбігається. Тоді ряд $\sum_{n=2}^{\infty} b_n$ розбігається за інтегральною ознакою Коші. Отже, ряд $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ розбігається за Другою теоремою порівняння.

Завдання для самостійної роботи 2

Використовуючи ознаки порівняння, дослідити на збіжність наступні ряди:

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}.$$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+n^2}{1+n^3} \right)^2.$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + n}.$$

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n} - \sqrt{n-1}).$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{1+n^2}.$$

$$8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}).$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n-1}.$$

$$9. \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{2^n}.$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 4n + 5}.$$

$$10. \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{\pi}{4n}.$$

Використовуючи ознаку Даламбера, дослідити на збіжність ряди:

$$11. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}.$$

$$16. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{2^n n!}.$$

$$12. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}.$$

$$17. \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin \frac{\pi}{2^n}.$$

$$13. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}.$$

$$18. \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{2^{n+1}}.$$

$$14. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}.$$

$$19. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n-1)}.$$

$$15. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{10^n}.$$

$$20. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (3n-1)}{1 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (4n-3)}.$$

Використовуючи радикальну ознаку Коші, дослідити на збіжність ряди:

$$21. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1} \right)^n.$$

$$23. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n \cdot 2^n}.$$

$$22. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2}.$$

$$24. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2-1}{n^2+1} \right)^{n^2}.$$

$$25. \sum_{n=1}^{\infty} \sin^n \frac{\pi}{2^n}.$$

$$26. \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}^n \frac{1}{n}.$$

Використовуючи радикальну ознаку Коші, дослідити на збіжність ряди:

$$27. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{(2n-3)^2}}.$$

$$30. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+3)}.$$

$$28. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)^3}.$$

$$31. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}.$$

$$29. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{3n+1}}.$$

$$32. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}.$$

Користуючись збіжністю відповідного ряду, доведіть правильність наступних рівностей:

$$33. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n n!}{n^n} = 0.$$

$$35. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{3^n \cdot n!} = 0.$$

$$34. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{n!} = 0.$$

$$36. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0$$

Відповіді:

1. Розбіжний.

2. Збіжний.

3. Розбіжний.

4. Розбіжний.

5. Збіжний.

6. Збіжний.

7. Розбіжний.

8. Збіжний.

9. Збіжний.

10. Розбіжний.

11. Збіжний.

12. Збіжний.

13. Розбіжний.

14. Збіжний.

15. Розбіжний.

16. Збіжний.

17. Збіжний.

18. Збіжний.

19. Збіжний.

20. Збіжний.

21. Збіжний.

22. Збіжний.

23. Розбіжний.

24. Розбіжний.

25. Збіжний.

26. Збіжний.

27. Розбіжний.

28. Збіжний.

29. Розбіжний.

30. Збіжний.

31. Збіжний.

32. Розбіжний.

5. Числові ряди вигляду

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot a_n$$

(знакозмінні ряди) .

Теорема (ознака) Лейбніца

Розглянемо ряд, члени якого по черзі додатні і від'ємні, тобто ряд вигляду $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + (-1)^{n+1} \cdot a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot a_n$, де $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ - додатні числа.

Питання про збіжність таких рядів з'ясовуються за допомогою ознаки Лейбніца.

Теорема (ознака Лейбніца).

Якщо члени ряду $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot a_n$ монотонно спадають

$a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > \dots > 0$ і $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, то заданий ряд буде **збіжним**, сума його S додатна і не перевищуватиме першого члена : $0 < S < a_1$.

■ Розглянемо суму $n = 2m$ перших членів заданого ряду (він називається **рядом Лейбніца**) і напишемо її у вигляді $S_{2m} = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + a_{2m-1} - a_{2m} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \dots + (a_{2m-1} - a_{2m})$. З нерівності $a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > \dots > 0$ випливає, що вирази в дужках додатні , тому $S_{2m} > 0$ і зростає із зростанням m .

Цю ж суму S_{2m} можна переписати так:

$S_{2m} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \dots - (a_{2m-2} - a_{2m-1}) - a_{2m}$. В дужках стоять додатні величини, отже , $S_{2m} < a_1$. Таким чином, частинні суми S_{2m} зростають при збільшенні m і обмежені зверху числом a_1 , тому існує скінченна границя $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2m} = S$, де $0 < S < a_1$.

Далі, $S_{2m+1} = S_{2m} + a_{2m+1}$. Оскільки $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, то і $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2m+1} = 0$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2m+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2m} + \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2m+1} = S + 0 = S.$$

Отже, як сума парного, так і сума непарного числа членів ряду

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot a_n$ наближається до однієї і тієї ж границі S , тобто даний ряд збігається і має суму S , причому $0 < S < a_1$. ■

Зауваження. Легко оцінити похибку, яка виникне, якщо замінити суму S ряду Лейбніца частинною сумою S_n . Залишок ряду $R_n = S - S_n$ представляє собою знакозмінний ряд, сума якого за абсолютним значенням менша першого члена цього ряду, тобто менша від a_{n+1} , першого з відкинутих членів.

Приклад 1. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n}$.

Розв'язання.

Ряд $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} + \dots$ збігається за ознакою Лейбніца, оскільки виконані дві умови: 1) $1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \dots > 0$ і 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

Сума n перших членів ряду $S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ відрізняється від суми ряду S на величину, меншу ніж $\frac{1}{n+1}$.

Приклад 2. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n^{\alpha}}$.

Розв'язання.

Ряд $1 - \frac{1}{2^{\alpha}} + \frac{1}{3^{\alpha}} - \frac{1}{4^{\alpha}} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n^{\alpha}} + \dots$ збігається за ознакою Лейбніца при $\alpha > 0$.

Приклад 3. Знайти суму ряду

$$3 - \frac{1}{3} + \frac{3}{2} - \frac{1}{6} + \frac{3}{4} - \frac{1}{12} + \frac{3}{8} - \frac{1}{24} + \dots$$

Розв'язання. Ряд можна переписати так: $\frac{8}{3} + \frac{8}{6} + \frac{8}{12} + \frac{8}{24} + \dots$, отже маємо геометричну прогресію, знаходимо суму її n доданків

$$S_n = \frac{\frac{8}{3}(1 - (\frac{1}{2})^n)}{1 - \frac{1}{2}} \quad \text{і} \quad S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{16}{3}.$$

6. Ряди з довільними за знаком членами.

Абсолютна та умовна збіжність

Перейдемо до рядів, члени яких є дійсні числа з довільним знаком, назвемо їх **знакозмінними**. Очевидно, що ряди, знаки членів яких змінюються по черзі, є частинним випадком знакозмінних рядів.

Розглянемо знакозмінний ряд

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (1),$$

члени якого є довільні за знаком дійсні числа. З абсолютних величин членів цього ряду складемо ряд $|a_1| + |a_2| + |a_3| + \dots + |a_n| + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \quad (2).$

Теорема. Якщо збігається ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ з абсолютних величин членів знакозмінного ряду, то збігається і знакозмінний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

■ Нехай S_n і G_n – частинні суми рядів (1) і (2) відповідно.

S_n^+ і S_n^- – сума всіх додатних і сума абсолютних величин всіх від'ємних членів ряду (1), що входять в S_n . Тоді $S_n = S_n^+ - S_n^-$, а $G_n = S_n^+ + S_n^-$.

За умовою теореми ряд (2) збігається, тобто існує $\lim_{n \rightarrow \infty} G_n = G$

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n^+ + S_n^-) = G$. Оскільки S_n^+ і S_n^- – додатні зростаючі величини,

менші від G , то вони мають границі $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n^+ = S^+$ і $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n^- = S^-$. Тому існує

границя частинних сум S_n : $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n^+ - S_n^-) = S^+ - S^-$, тобто

знакозмінний ряд (1) збігається. ■

Зауваження. Таким чином, якщо збігається ряд з абсолютних значень членів знакозмінного ряду, то збігається і сам знакозмінний ряд. Обернене твердження в загальному випадку неправильне: існують такі знакозмінні ряди, які самі збігаються, але ряди, складені з абсолютних величин їх членів, розбігаються.

Означення. Знакозмінний **ряд** називається **абсолютно збіжним**, якщо збігається ряд, складений з абсолютних значень його членів.

Якщо ж знакозмінний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається (застосували ознаку Лейбніца), а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ - розбігається, то знакозмінний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ називається **умовно або неабсолютно збіжним**.

Приклад 1. Дослідити ряд на абсолютну збіжність

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}.$$

Розв'язання. Складемо ряд з абсолютних значень його членів, отримаємо гармонічний ряд $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$, який розбігається, а за ознакою Лейбніца ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ є збіжним. Тому заданий

ряд $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} + \dots$ є умовно збіжним,

Приклад 2. Дослідити на абсолютну та умовну збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot 3^n}.$$

Розв'язання. $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot 3^n}$, $|a_n| = \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot 3^n} \right| = \frac{1}{n \cdot 3^n}$.

Дослідимо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ за ознакою Д'Аламбера:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot 3^n}{(n+1)3^{n+1}} = \frac{1}{3} < 1.$$

За ознакою Д'Аламбера ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ - збігається. Отже, даний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається абсолютно.

Приклад 3. Дослідити на абсолютну збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{5n-1}}.$$

Розв'язання. $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{5n-1}}, \quad |a_n| = \frac{1}{\sqrt{5n-1}} \sim \frac{1}{\sqrt{n}} = b_n.$

Застосуємо граничну ознаку порівняння:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n}{5n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n}{n(5-\frac{1}{n})}} = \frac{1}{\sqrt{5}} < \infty.$$

Оскільки ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ - це узагальнений гармонічний ряд, $\alpha = \frac{1}{2} < 1$ - розбіжний, то і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ - теж є розбіжним, тому абсолютної збіжності немає.

Дослідимо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ за ознакою Лейбніца:

$$|a_n| = \frac{1}{\sqrt{5n-1}} > \frac{1}{\sqrt{5n+4}} = |a_{n+1}|, \quad n \in N.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{5n-1}} = 0.$$

Обидві умови ознаки Лейбніца виконуються, тому заданий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається. Оскільки ряд із абсолютних величин розбігається, то заданий ряд збігається умовно.

Приклад 4. Дослідити на абсолютну збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2+5}{3n^2-1}.$$

Розв'язання. $a_n = (-1)^{n+1} \frac{n^2+5}{3n^2-1}, \quad |a_n| = \frac{n^2+5}{3n^2-1}.$

Обчислимо границю:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 5}{3n^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left(1 + \frac{5}{n}\right)}{n^2 \left(3 - \frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{3}.$$

Оскільки $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| \neq 0$, то для заданого ряду не виконується необхідна ознака збіжності числового ряду. Отже, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+5}{3n^2-1}$ розбігається. Перевіримо, чи не буде даний ряд умовно збіжним. За ознакою Лейбніца ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2+5}{3n^2-1}$ буде розбіжним, $(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+5}{3n^2-1} \neq 0)$. Тому робимо остаточний висновок, що заданий ряд є розбіжним.

Наведемо без доведення теореми про властивості абсолютно збіжних і умовно збіжних рядів.

Теорема Коші. Якщо знакозмінний ряд збігається абсолютно, то він залишається абсолютно збіжним при довільній перестановці його членів. При цьому сума ряду не залежить від порядку його членів.

Теорема Римана. Якщо знакозмінний ряд збігається умовно, то яке б не було наперед задане число A , можна так переставити члени цього ряду, щоб сума перетвореного ряду точно дорівнювала A . Більш того, можна так переставити члени умовно збіжного ряду, щоб перетворений ряд виявився розбіжним.

Завдання для самостійної роботи 3

Дослідити на абсолютну та умовну збіжність:

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n \cdot 2^n}$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2n-1}$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n-1)^3}$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+1}{n}$$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n(n+1)}$$

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi n}{3}$$

$$8. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\ln(n+1)}$$

Обчисліть суми рядів з точністю ε . Вкажіть найменшу достатню кількість членів ряду:

$$9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{5n^3}, \quad \varepsilon = 10^{-3}.$$

$$10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n^2+1) \cdot 3^n}, \quad \varepsilon = 10^{-3}.$$

$$11. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^3 \cdot n!}, \quad \varepsilon = 10^{-3}.$$

$$12. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)!}, \quad \varepsilon = 10^{-3}.$$

Відповіді:

- 1.Збігається абсолютно. 2.Збігається умовно. 3.Збігається умовно.
 4.Збігається абсолютно. 5.Розбігаються. 6. Збігається абсолютно.
 7. Розбігаються. 8. Збігається умовно. 9. $S \approx 0.181$, $n=5$.
 10. $S \approx 0.148$, $n=3$. 11. $S \approx 0.944$, $n=3$. 12. $S \approx 1,175$, $n=3$.

7. Функціональні ряди. Область збіжності. Рівномірна збіжність. Ознака Вейєрштрасса.

Досі ми розглядали ряди, членами яких були числа. Перейдемо тепер до вивчення **функціональних рядів**, членами яких є функції змінної x :

$$f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x). \quad (*)$$

Нехай функції $f_i(x)$ ($i = 1, 2, 3, \dots, n, \dots$) визначені в деякій області U . Розглянемо певне значення $x_0 \in U$. Підставляючи його замість x в функціональний ряд (*), одержимо **числовий ряд**

$$f_1(x_0) + f_2(x_0) + f_3(x_0) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0). \quad (**)$$

Якщо ряд (**) збігається, то x_0 називається **точкою збіжності** функціонального ряду (*), якщо розбігається – **точкою розбіжності**.

Множина V всіх точок збіжності називається **областю збіжності** функціонального ряду (*).

Позначимо через $S_n(x)$ **частинну суму** функціонального ряду:

$$S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \dots + f_n(x).$$

Якщо при деякому значенні x ряд (*) збігається, то існує границя $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = S(x)$. $S(x)$ називається **сумою** функціонального ряду (*). Різниця між сумою ряду (*) і його частинною сумою називається **залишком** ряду:

$$R_n(x) = S(x) - S_n(x).$$

Залишок функціонального ряду теж є функціональним рядом:

$$R_n(x) = f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \dots + f_{n+p}(x) + \dots. \quad \text{Знайдемо}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (S(x) - S_n(x)) = S(x) - \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = S(x) - S(x) = 0 \quad \text{для}$$

довільного x , що належить області збіжності V . Отже,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0 \quad \text{для } \forall x \in V.$$

Нехай для всіх значень x з області V має місце остання рівність. З означення границі випливає : при фіксованому значенні $x_1 \in V$ для довільного наперед заданого як завгодно малого додатного числа ε знайдеться таке натуральне число N_1 , що для всіх $n \geq N_1$ справджується нерівність $|R_n(x_1)| = |S(x_1) - S_n(x_1)| < \varepsilon$. Якщо взяти інше значення $x_2 \in V$, то одержимо іншу числову послідовність частинних сум: $S_n(x_2)$ і для того ж $\varepsilon > 0$ нерівність $|R_n(x_2)| < \varepsilon$ буде виконана для всіх $n \geq N_2$, де N_2 у загальному випадку не збігається з N_1 . Але x набуває нескінченну множину значень в області збіжності V , тому ми маємо справу з нескінченною множиною послідовностей частинних сум $S_n(x)$. Для кожної з таких послідовностей при заданому значенні $\varepsilon > 0$ існує такий номер $N = N(x, \varepsilon)$, що при $n \geq N$ буде виконуватися нерівність $|R_n(x)| = |S(x) - S_n(x)| < \varepsilon$.

Виникає питання, чи існує такий номер $\bar{N} = \bar{N}(\varepsilon)$, який не залежить від x , щоб при $n \geq \bar{N}$ нерівність $|R_n(x)| = |S(x) - S_n(x)| < \varepsilon$ справджувалася одночасно для всіх $x \in V$. Виявляється, що в одних випадках такий номер $\bar{N}$ існує, в інших – ні.

Означення 1. Функціональний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

називається **рівномірно збіжним** в області V , якщо для довільного як завгодно малого числа $\varepsilon > 0$ існує такий не залежний від x номер $N(\varepsilon)$, що при $n \geq N(\varepsilon)$ нерівність $|R_n(x)| = |S(x) - S_n(x)| < \varepsilon$ справджувалася відразу для всіх $x \in V$.

Означення 2. Функціональний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ **збігається правильно** в деякій області V змінної x , якщо кожний його член $f_n(x)$ за абсолютною величиною не більший, ніж відповідний член a_n збіжного числового ряду

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$ з додатними членами, тобто для всіх $x \in V$ виконуються нерівності

$$|f_1(x)| \leq a_1, |f_2(x)| \leq a_2, \dots, |f_n(x)| \leq a_n, \dots$$

Із означення безпосередньо випливає, що ряд, який правильно збігається в деякій області, абсолютно збігається в усіх точках цієї області.

Приклад 1. Функціональний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ збігається правильно на всій числовій осі, оскільки $\left| \frac{\cos nx}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$ при $n = 1, 2, 3, \dots, x \in (-\infty; +\infty)$, а числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ збігається.

Теорема (Ознака Вейєрштрасса).

Якщо функціональний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ збігається правильно в області збіжності V , то він рівномірно збігається в області V .

■ Якщо функціональний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ збігається правильно в області V , тоді для $\forall x \in V$ виконуються нерівності $|f_n(x)| \leq a_n, n = 1, 2, 3, \dots$, а числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ з додатними членами збігається. Позначимо через G , його суму, тоді $G = G_n + R_n$, де $G_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$, а $R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots$. Оскільки $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ є збіжним, то $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$. Звідки, за означенням границі, випливає, що для довільного як завгодно малого числа $\varepsilon > 0$ існує такий номер $N(\varepsilon)$, що при $n \geq N(\varepsilon)$ виконується нерівність $R_n < \varepsilon$.

Суму $S(x)$ функціонального ряду $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ подаємо у вигляді

$$S(x) = S_n(x) + r_n(x), \text{ де } S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \dots + f_n(x), \text{ а}$$

$$r_n(x) = f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + f_{n+3}(x) + \dots$$

З умов $|f_n(x)| \leq a_n, n = 1, 2, 3, \dots$ випливає, що для $\forall x \in V$:

$|f_{n+1}(x)| \leq a_{n+1}, |f_{n+2}(x)| \leq a_{n+2}, |f_{n+3}(x)| \leq a_{n+3}, \dots$, тому $|r_n(x)| \leq R_n$ для $\forall x \in V$. Отже, з врахуванням попередніх нерівностей при всіх $n \geq N(\varepsilon)$ і для $\forall x \in V$ виконується нерівність $|r_n(x)| < \varepsilon$, тому у відповідності до

означення робимо висновок, що функціональний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ збігається рівномірно в області V . ■

Отже, якщо функціональний ряд збігається правильно в деякій області, області, то він збігається рівномірно в цій області. Обернене твердження в загальному випадку неправильне.

Теорема. (про неперервність суми функціонального ряду)

Якщо функціональний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ рівномірно збігається на відрізку $[a; b]$, а його члени $f_n(x)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) є неперервними функціями на цьому відрізку, то сума $S(x)$ ряду $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ теж буде неперервною функцією при $\forall x \in [a; b]$.

Відмітимо, що вимога рівномірної збіжності функціонального ряду є достатньою, але не є необхідною умовою неперервності його суми. І нерівномірно збіжний ряд може мати неперервну суму.

Теорема. (про почленне інтегрування функціональних рядів)

Якщо функції $f_n(x)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) неперервні на відрізку $[a; b]$, а утворений з них функціональний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ рівномірно збігається на цьому відрізку, тоді інтеграл від суми ряду $S(x)$ дорівнює сумі інтегралів від членів даного ряду.

Теорема. (про почленне диференціювання функціональних рядів)

Нехай функції $f_n(x)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) визначені на відрізку $[a; b]$ і мають неперервні похідні $f'_n(x)$. Якщо на відрізку $[a; b]$ не тільки збігається функціональний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, але і рівномірно збігається ряд, утворений з похідних $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$, то сума останнього ряду дорівнює похідній від суми ряду $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

Приклад 2. Відомо, що $1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x}$, якщо $|x| < 1$.

Показати, що ряд $1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1} + \dots$ збігається правильно на відріжку $[-\rho; \rho]$, де $0 < \rho < 1$ і знайти його суму.

Розв'язання. Якщо $|x| \leq \rho$, де $0 < \rho < 1$, то

$|f'_n(x)| = |nx^{n-1}| = n|x|^{n-1} \leq n\rho^{n-1}$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n\rho^{n-1}$ збігається, оскільки $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)\rho^n}{n\rho^{n-1}} = \rho \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)}{n} = \rho < 1$. Тому ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ збігається правильно на відріжку $[-\rho; \rho]$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ можна почленно диференціювати:

$$(\sum_{n=1}^{\infty} x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} (x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Таким чином, $1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1} + \dots = \frac{1}{(1-x)^2}$, якщо $|x| < 1$.

8. Степеневі ряди. Означення.

Інтервал збіжності, радіус збіжності. Теорема Абеля

Означення 1. Степеневим рядом називається функціональний ряд вигляду

$$c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \dots + c_n(x-a)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n, \quad (1)$$

де a – фіксоване число, числа c_n ($n = 0, 1, 2, 3, \dots$) називаються коефіцієнтами степеневих рядів. Членами цього ряду є функції $f_n(x)$ ($n = 0, 1, 2, 3, \dots$).

Простою заміною $x - a = y$ означений ряд зводиться до форми

$$c_0 + c_1y + c_2y^2 + \dots + c_ny^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} c_ny^n. \quad (2)$$

Надалі будемо розглядати степеневі ряди вигляду (2). Областю збіжності степеневих рядів завжди є деякий інтервал, який, зокрема, може вироджуватися в точку. Це впливає з наступної теореми.

Теорема Абеля.

1) Якщо степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ збігається при деякому значенні $x_0 \neq 0$, то він абсолютно збігається при всіх значеннях x , що задовольняють нерівність $|x| < |x_0|$, тобто при $x \in (-x_0; +x_0)$.

2) Якщо ряд розбігається при деякому значенні $x_1 \neq 0$, то він розбігається при всіх значеннях x , які задовольняють нерівність $|x| > |x_1|$, тобто при $x \in (-\infty; -x_1) \cup (x_1; +\infty)$.

■ 1) Із збіжності числового ряду $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x_0^n$ випливає, що його загальний член $c_n x_0^n$ наближається до нуля при $n \rightarrow \infty$, а отже обмежений: $|c_n x_0^n| \leq M$

($M = \text{const}; n = 0, 1, 2, 3, \dots$). Візьмемо тепер довільне x , для якого $|x| < |x_0|$ і утворимо ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$. Враховуючі останню нерівність, одержимо

$|c_n x^n| = |c_n x_0^n| \cdot \left| \frac{x}{x_0} \right|^n \leq M \cdot \left| \frac{x}{x_0} \right|^n$, ($n = 0, 1, 2, 3, \dots$). Таким чином, члени ряду

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ виявляються не більшими відповідних членів ряду $\sum_{n=0}^{\infty} M \cdot \left| \frac{x}{x_0} \right|^n$.

При $|x| < |x_0|$ останній ряд являє собою збіжну геометричну прогресію, оскільки її знаменник $q = \left| \frac{x}{x_0} \right| < 1$. За Першою теоремою порівняння рядів із додатними членами ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ також збігається, крім того, збігається абсолютно при всіх значеннях x , що задовольняють нерівність $|x| < |x_0|$.

2) Нехай в деякій точці x_1 ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ розбігається. Тоді він буде розбіжним в довільній точці x , для якої $|x| > |x_1|$. Дійсно, якби в деякій точці x , що задовольняє $|x| > |x_1|$, ряд збігався, то на підставі тільки що доведеної першої частини теореми він збігався б і у точці x_1 , оскільки $|x_1| < |x|$. Але це суперечить умові, що в точці x_1 ряд розбігається. Отже, ряд є розбіжним в довільній точці x яка задовольняє нерівність $|x| > |x_1|$. ■

З теореми Абеля випливає, що для кожного степеневого ряду $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ існує таке додатне число R , що при $|x| < R$ ряд абсолютно збігається, а при $|x| > R$ ряд розбігається. Таким чином, областю збіжності степеневого ряду

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ є інтервал $(-R; R)$. Зазначений інтервал $(-R; R)$ називається **інтервалом збіжності** степеневому ряду, $(0 \leq R \leq \infty)$.

На кінцях інтервалу (тобто при $x = -R$ і $x = R$) степеневий ряд може збігатися, а може і розбігатися. Для кожного конкретного степеневому ряду питання про його збіжність на кінцях інтервалу $(-R; R)$ розв'язується окремо. Усередині інтервалу збіжності степеневий ряд збігається абсолютно.

Зауваження. Інтервалом збіжності степеневому ряду $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - a)^n$ буде інтервал $(a - R; a + R)$, симетричний відносно точки $x = a$.

Обчислення радіуса збіжності степеневому ряду

Розглянемо ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ і утворимо ряд із модулів його членів $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n x^n|$. Для визначення збіжності останнього ряду з додатними членами використаємо ознаку Д'Аламбера. Нехай існує границя $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} =$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|c_{n+1}| \cdot |x|^{n+1}}{|c_n| \cdot |x|^n} = |x| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} = L \cdot |x|, \text{ де } L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|}.$$

За ознакою Д'Аламбера ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n x^n|$ збігається (абсолютно), якщо

$L \cdot |x| < 1$, тобто якщо $|x| < \frac{1}{L}$, і розбігається, якщо $L \cdot |x| > 1$, тобто якщо $|x| > \frac{1}{L}$. Звідси випливає, що радіус збіжності степеневому ряду дорівнює $\frac{1}{L}$.

тобто $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|}$.

Якщо застосувати для визначення інтервалу збіжності ознаку Коші, то

дістанемо формулу $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}$.

Приклад 1. Знайти область збіжності степеневому ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

Розв'язання. Заданий ряд є геометричною прогресією із знаменником $q = x$; вона збігається, якщо $|x| < 1$. Таким чином, областю збіжності степеневому ряду $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ є інтервал $(-1; 1)$.

Приклад 2. Знайти область збіжності степеневому ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n}.$$

Розв'язання. Знайдемо радіус збіжності, враховуючі, що $c_n = \frac{1}{n}$:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1. \text{ Тому інтервал збіжності є } (-1; 1).$$

Дослідимо збіжність ряду на кінцях інтервалу збіжності. При $x = 1$ одержимо гармонічний ряд, який розбігається. При $x = -1$ дістанемо знакопереміжний ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, який збігається умовно за ознакою Лейбніца. Отже, областю збіжності даного ряду є проміжок $[-1; 1)$.

Приклад 3. Знайти область збіжності степеневому ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}.$$

Розв'язання. Знайдемо радіус збіжності

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{(n+1)^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} = 1. \text{ При } x = 1 \text{ одержимо узагальнений}$$

гармонічний ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, який збігається, оскільки $\alpha = 2 > 1$. При $x = -1$

одержимо знакопереміжний ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$, який збігається абсолютно.

Отже, областю збіжності даного ряду є проміжок $[-1; 1]$.

Приклад 4. Знайти область збіжності степеневому ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n x^n}{n!}.$$

Розв'язання. $a_n = \frac{4^n}{n!}$, $a_{n+1} = \frac{4^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{4^n \cdot 4}{n!(n+1)}$. Визначимо радіус збіжності ряду за формулою

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n n! (n+1)}{n! 4^n \cdot 4} = \infty.$$

Отже, ряд збігається при $x \in (-\infty; \infty)$.

Приклад 5. Знайти область збіжності степеневого ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} (x-2)^n.$$

Розв'язання. Даний ряд збігається в інтервалі $(x_0 - R; x_0 + R)$, $x_0 = 2$.

Знайдемо радіус збіжності ряду за формулою

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{n}{3^n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{\sqrt[n]{n}} = \left| \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1 \right| = 3.$$

Ряд збігається при $x - 2 \in (-3; 3) \Rightarrow x \in (-1; 5)$. Дослідимо ряд на кінцях інтервалу збіжності.

Для $x = -1$ маємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n$. Він розбігається за ознакою Лейбніца, (не виконується необхідна ознака збіжності числового ряду).

Для $x = 5$ маємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n$. Він теж розбігається, оскільки не виконується необхідна ознака збіжності.

Отже, область збіжності ряду $(-1; 5)$.

Приклад 6. Знайти область збіжності степеневого ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Розв'язання. Заданий ряд — це неповний степеневий ряд, оскільки $a_0 = a_2 = a_4 = \dots = a_{2n} = \dots = 0$, тому не можна використати формули для знаходження радіуса R інтервалу збіжності. Застосуємо ознаку Д'Аламбера:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left| \frac{x^{2n+3}}{2n+3} \right|}{\left| \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{2n+3} \cdot |x^2| = |x^2| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left(2 + \frac{1}{n}\right)}{n \left(2 + \frac{3}{n}\right)} = |x^2|$$

$$= l(x).$$

Ряд збігається абсолютно, якщо $l(x) = |x^2| < 1$, тобто $x \in (-1; 1)$. Дослідимо ряд на кінцях інтервалу. При $x = 1$ маємо ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$. Використаємо граничну ознаку порівняння:

$$a_n = \frac{1}{2n+1} \sim \frac{1}{n} = b_n, \quad n \rightarrow \infty,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < \infty.$$

За граничною ознакою порівняння ряд розбігається.

При $x = -1$ маємо ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$. Він теж розбігається, в силу вище вказаного.

Отже, область збіжності заданого ряду є інтервал $(-1; 1)$.

Приклад 7. Знайти область збіжності ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(1+n^2)x^n}.$$

Розв'язання. Ряд зводиться до степеневого заміною $\frac{1}{x} = t$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1+n^2} \cdot t^n$.

Знайдемо область збіжності ряду відносно змінної t :

$$a_n = \frac{n}{1+n^2}, \quad a_{n+1} = \frac{n+1}{1+(n+1)^2},$$

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n}{1+n^2} \cdot \frac{1+(n+1)^2}{n+1} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n^2+2n+2)}{(n+1)(1+n^2)} = 1.$$

Ряд збігається при $-1 < t < 1$, тобто $-1 < \frac{1}{x} < 1$. Звідки

$x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$ - інтервал збіжності. Дослідимо ряд на кінцях інтервалу. При $x = 1$ маємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1+n^2}$. Він розбігається за граничною ознакою порівняння, оскільки

$$a_n = \frac{n}{1+n^2} \sim \frac{1}{n}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Для $x = -1$ маємо знакозмінний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{1+n^2}$. Він збігається умовно за ознакою Лейбніца.

Отже, область збіжності ряду $(-\infty; -1] \cup (1; +\infty)$.

9. Основні властивості степеневих рядів в області збіжності

Теорема (Правильна збіжність степеневих рядів).

Степеневий ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

збігається правильно на довільному відрізку $[-\rho; \rho]$, який цілком лежить усередині інтервалу збіжності $(-R; R)$.

■ Оскільки за умовою теореми $\rho < R$, то згідно з теоремою Абеля при $x = \rho$ числовий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \rho^n$ збігається абсолютно, тобто збігається числовий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| \rho^n$. Але при $|x| \leq \rho$ члени степеневого ряду $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ не перевищують за абсолютною величиною членів збіжного ряду з додатними членами $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| \rho^n$, тому (на підставі означення про правильну збіжність функціонального ряду) ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ збігається правильно на відрізку $[-\rho; \rho]$, якщо $\rho < R$. ■

Властивість 1. На кожному відрізку, який цілком лежить усередині інтервалу збіжності, сума степеневого ряду є неперервною функцією.

Властивість 2. Якщо межі інтегрування a і b лежать усередині інтервалу збіжності степеневого ряду, то інтеграл від суми ряду дорівнює сумі інтегралів від членів ряду.

Властивість 3. Якщо степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = S(x)$ має інтервал збіжності $(-R; R)$, то ряд $\sum_{n=0}^{\infty} n c_n x^{n-1} = \varphi(x)$, одержаний почленним диференціюванням початкового ряду, має той же інтервал збіжності $(-R; R)$; При цьому $\varphi(x) = S'(x)$, якщо $|x| < R$.

Завдання для самостійної роботи 4.

Знайти область збіжності степеневих рядів:

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} 10^n x^n$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 10^{n-1}}$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} n! x^n$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} x^n$$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)(2n-1)!}$$

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{2^n \cdot n^2}$$

$$8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (x-2)^n}{n^2}$$

$$9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^{3n}}{n^2}$$

$$10. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n^2} \frac{(x+2)^{2n}}{\sqrt{n}}$$

$$11. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} x^n$$

$$12. \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2} x^n$$

Відповіді:

$$1. x \in \left(-\frac{1}{10}; \frac{1}{10}\right).$$

$$2. x \in (-1; 1].$$

$$3. x \in [-10; 10].$$

$$4. x = 0.$$

$$5. x \in \left[-\frac{1}{e}; \frac{1}{e}\right].$$

$$6. x \in (-\infty; +\infty).$$

$$7. x \in [1; 5].$$

$$8. x \in \left[\frac{5}{3}; \frac{7}{3}\right].$$

$$9. x \in [-2; 0].$$

$$10. x \in [-3; -1].$$

$$11. x \in [-1; 1].$$

$$12. x \in \left(-\frac{1}{e}; \frac{1}{e}\right).$$

10. Ряди Тейлора і Маклорена

Нехай в околі точки x_0 функція $y = f(x)$ має похідні будь-якого порядку. Тоді за формулою Тейлора $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$, де

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n,$$

$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$ – залишковий член формули Тейлора у формі Лагранжа, причому $0 < \theta < 1$ (існують інші форми залишкового члена).

Перейдемо у рівності $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$ до границі, коли $n \rightarrow \infty$, тоді $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x) + \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x)$. Для тих x , для яких $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$, маємо

$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x) = f(x)$. Оскільки $P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$ – частинна сума

ряду $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$, то з рівності $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x) = f(x)$, що при

виконанні умови $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$ збігається і його сума дорівнює $f(x)$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$$

Маємо ряд, який називається **рядом Тейлора**.

Таким чином, ряд Тейлора зображає дану функцію $f(x)$ тільки при тих значеннях аргументу x , для яких $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$. При тих значеннях x , для яких ця границя не дорівнює нулю, ряд Тейлора не представляє даної функції, хоч може і збігатися до іншої функції.

Вираз $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$ називається розвиненням (або розкладом) функції $f(x)$ в ряд Тейлора в околі точки x_0

(або за степенями $x - x_0$).

Якщо в останній формулі покласти $x_0 = 0$, то отримаємо **ряд Маклорена** функції $f(x)$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

(тільки при тих значеннях аргументу x , для яких

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1} = 0).$$

Ряди Тейлора і Маклорена є степеневими рядами. Відзначимо, що для кожної елементарної функції існує таке x_0 і таке $R > 0$, що в інтервалі $(x_0 - R; x_0 + R)$ вона розкладається в ряд Тейлора або, якщо $x_0 = 0$, в ряд Маклорена.

Необхідною умовою розвинення функції $f(x)$ в ряд Тейлора в інтервалі $(x_0 - R; x_0 + R)$ є нескінченна диференційованість функції $f(x)$ в околі точки x_0 . Достатньою умовою розвинення функції $f(x)$ в ряд Тейлора є виконання умови $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ для довільного $x \in (x_0 - R; x_0 + R)$.

Приклад 1. Розкласти в ряд Тейлора в околі точки $x = 3$ функцію $y = \frac{1}{x}$, знайти область збіжності.

$$\text{Розв'язання.} \text{ Подаємо } \frac{1}{x} = \frac{1}{(x-3)+3} = \frac{1}{3\left(1+\frac{x-3}{3}\right)} = \frac{1/3}{1-\frac{-(x-3)}{3}} = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{(x-3)}{3} + \frac{(x-3)^2}{3^2} - \frac{(x-3)^3}{3^3} + \dots\right).$$

Застосували формулу суми нескінченно спадної геометричної прогресії із знаменником $q = \frac{-(x-3)}{3}$ при умові, що $\left|\frac{-(x-3)}{3}\right| < 1$. Звідки шукаємо область збіжності: $|-(x-3)| < 3 \Rightarrow -3 < x-3 < 3 \Rightarrow 0 < x < 6 \Rightarrow x \in (0; 6)$.

11. Розклад в ряд Маклорена елементарних функцій: e^x , $ch x$, $sh x$, $\sin x$, $\cos x$

Доведемо спочатку наступне твердження.

Теорема. Якщо функція $f(x)$ на відрізку $[-H; H]$ ($H > 0$) має похідні будь-якого порядку і всі ці похідні при зміні x на зазначеному відрізку обмежені одним і тим же числом L : $|f^{(n)}(x)| \leq L$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), то на всьому відрізку $[-H; H]$ справджується розвинення функції

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \text{ в ряд Маклорена.}$$

■ Розглянемо залишковий член $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1}$, тоді з урахуванням нерівності $|f^{(n)}(x)| \leq L$ одержимо, що при $|x| \leq H$

$$|R_n(x)| = \frac{|f^{(n+1)}(\theta x)|}{(n+1)!} |x|^{n+1} \leq L \cdot \frac{H^{n+1}}{(n+1)!}. \text{ Оскільки ряд } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H^{n+1}}{(n+1)!} \text{ збігається за}$$

ознакою Д'Аламбера (неважко перевірити), то його загальний член прямує

$$\text{до нуля при } n \rightarrow \infty: \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{H^{n+1}}{(n+1)!} = 0 \text{ і тоді } \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0 \text{ для всіх } x, \text{ які}$$

задовольняють нерівність $|x| \leq H$. Отже, справджується розвинення функції

$f(x)$ в ряд Маклорена. ■

1) Розвинення функції $f(x) = e^x$ в ряд Маклорена.

$$\text{Для функції } f(x) = e^x \text{ похідні } f^{(n)}(x) = e^x \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

В будь-якому проміжку $[-H; H]$ вони обмежені по модулю числом $L = e^H$.

$$\text{Підставимо значення } f(0) = e^0 = 1, f^{(n)}(0) = e^0 = 1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \text{ у}$$

формулу $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$, одержимо розвинення e^x в ряд Маклорена

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \quad (1)$$

2) Розвинення функції $f(x) = \mathbf{sh} x$, $f(x) = \mathbf{ch} x$ в ряд Маклорена.

Якщо в формулі (1) замінити x на $(-x)$, то дістанемо

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!}. \quad (2)$$

За означенням гіперболічних функцій $\mathbf{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$; $\mathbf{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

Розвинення цих функцій в ряд Маклорена легко отримати, якщо взяти піврізницю і півсуму рядів (1) та (2):

$$\mathbf{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}. \quad (3)$$

$$\mathbf{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}. \quad (4)$$

Ці розвинення справедливі на всій числовій осі.

3) Розвинення функції $f(x) = \mathbf{sin} x$ в ряд Маклорена.

Знайдемо послідовні похідні від функції $f(x) = \mathbf{sin} x$:

$$f(x) = \mathbf{sin} x; \quad f(0) = 0,$$

$$f'(x) = \mathbf{cos} x = \mathbf{sin}(x + \frac{\pi}{2}); \quad f'(0) = 1,$$

$$f''(x) = -\mathbf{sin} x = \mathbf{sin}(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}); \quad f''(0) = 0,$$

$$f'''(x) = -\mathbf{cos} x = \mathbf{sin}(x + 3 \cdot \frac{\pi}{2}); \quad f'''(0) = -1, \dots,$$

$$f^{(n)}(x) = \mathbf{sin}(x + n \cdot \frac{\pi}{2}); \quad f^{(n)}(0) = \mathbf{sin} \frac{\pi n}{2} = \begin{cases} 0 & \text{при } n = 2m \\ (-1)^m & \text{при } n = 2m + 1 \end{cases}.$$

Всі похідні при $x \in (-\infty; +\infty)$ обмежені по модулю числом $L=1$.

Підставивши значення $f(0) = 0$, $f^{(2m)}(0) = 0$, $f^{(2m+1)}(0) = (-1)^m$ ($m = 0, 1, 2, 3, \dots$) в формулу $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$, дістанемо розвинення функції $f(x) = \sin x$ в ряд Маклорена:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + \frac{(-1)^m \cdot x^{2m+1}}{(2m+1)!} + \dots = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \cdot x^{2m+1}}{(2m+1)!} \quad (5)$$

справедливе на всій числовій осі.

4) Розвинення функції $f(x) = \cos x$ в ряд Маклорена.

Знайдемо послідовні похідні від цієї функції:

$$f(x) = \cos x; \quad f(0) = 1,$$

$$f'(x) = -\sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right); \quad f'(0) = 0,$$

$$f''(x) = -\cos x = \cos\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right); \quad f''(0) = -1,$$

$$f'''(x) = \sin x = \cos\left(x + 3 \cdot \frac{\pi}{2}\right); \quad f'''(0) = 0, \dots,$$

$$f^{(n)}(x) = \cos\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right); \quad f^{(n)}(0) = \cos \frac{\pi n}{2} = \begin{cases} (-1)^m & \text{при } n = 2m \\ 0 & \text{при } n = 2m + 1 \end{cases}.$$

Оскільки $|f^{(n)}(x)| = \left| \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) \right| \leq 1$ при всіх $x \in (-\infty; +\infty)$, то розвинення функції $\cos x$ в ряд Маклорена

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + \frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!} \quad (6)$$

справедливе на всій числовій осі.

Одержані розвинення (1) - (6) можна використовувати для наближеного обчислення функцій e^x , $ch x$, $sh x$, $\sin x$, $\cos x$ та для розкладання в степеневі ряди інших функцій.

Приклад 1. Обчислити $\sin 10^\circ$ з точністю до 10^{-5} .

Розв'язання. Виразимо $\sin 10^\circ$ в радіанах: $\frac{2\pi}{360} \cdot 10 = \frac{\pi}{18} = 0,174533$.

Підставивши $x = \frac{\pi}{18}$ в розвинення (5), дістанемо

$\sin 10^\circ = \sin \frac{\pi}{18} = \frac{\pi}{18} - \frac{1}{3!} \left(\frac{\pi}{18} \right)^3 + \frac{1}{5!} \left(\frac{\pi}{18} \right)^5 - \dots$. Обмежившись першими двома членами, одержимо таку наближену рівність:

$\sin \frac{\pi}{18} \approx \frac{\pi}{18} - \frac{1}{3!} \left(\frac{\pi}{18} \right)^3$. При цьому ми робимо похибку Δ_1 , яка буде по модулю менша ніж перший з відкинутих членів останнього ряду :

$\Delta_1 < \frac{1}{5!} \left(\frac{\pi}{18} \right)^5 < \frac{1}{120} \cdot (0,2)^5 < 4 \cdot 10^{-6} < 10^{-5}$. У формулі $\sin \frac{\pi}{18} \approx \frac{\pi}{18} -$

$\frac{1}{3!} \left(\frac{\pi}{18} \right)^3$ кожний з двох доданків обчислимо з шістьма знаками після коми,

тоді $\sin 10^\circ \approx 0,174533 - 0,000886 = 0,173647$. Округлюючи на один знак, остаточно одержимо $\sin 10^\circ \approx 0,17365$. Похибка буде не більша, ніж

$4 \cdot 10^{-6} + 2 \cdot 0,5 \cdot 10^{-6} + 0,3 \cdot 10^{-6} = 5,3 \cdot 10^{-6} < 10^{-5}$.

Приклад 2. Функцію $f(x) = \sin^2 x$ розвинути в ряд Маклорена.

Розв'язання. Оскільки $\sin^2 x = \frac{1}{2} (1 - \cos 2x)$, то, використовуючи розвинення (6), дістанемо

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} \left(1 - 1 + \frac{(2x)^2}{2!} - \frac{(2x)^4}{4!} + \frac{(2x)^6}{6!} - \dots \right) = \frac{2}{2!} x^2 - \frac{2^3}{4!} x^4 + \frac{2^5}{6!} x^6 - \dots,$$

Розвинення справедливе на всій числовій осі.

Приклад 3. Обчислити інтеграл

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$$

з точністю $\varepsilon = 0,001$

Розв'язання. Використаємо розвинення функції $\sin x$ в ряд Маклорена

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots \quad \text{Звідси маємо}$$

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots$$

Проінтегруємо отриманий ряд почленно

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx &= \left(x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} - \frac{x^7}{7 \cdot 7!} + \dots \right) \Big|_0^1 = 1 - \frac{1}{3 \cdot 3!} + \frac{1}{5 \cdot 5!} - \frac{1}{7 \cdot 7!} + \dots = \\ &= 1 - \frac{1}{18} + \frac{1}{600} - \frac{1}{35280} + \dots \end{aligned}$$

Так як $u_3 = \frac{1}{600} > \varepsilon$, а $u_4 = \frac{1}{35280} < \varepsilon$, то для наближеного обчислення

досить взяти перші три члени ряду

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx = 1 - \frac{1}{18} + \frac{1}{600} \approx 1 - 0,0556 + 0,0017 = 0,9461.$$

12. Біноміальний ряд. (Розклад в ряд Маклорена функцій

$$(1+x)^\alpha, \ln(1+x), \ln(1-x), \ln \frac{1+x}{1-x}, \operatorname{arctg} x, \operatorname{arcsin} x).$$

Біном Ньютона

Розвинемо в ряд Маклорена функцію $f(x) = (1+x)^\alpha$, де α – довільне дійсне число. Знайдемо значення похідних від цієї функції при $x = 0$:

$$f(x) = (1+x)^\alpha; \quad f(0) = 1,$$

$$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}; \quad f'(0) = \alpha,$$

$$f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}; \quad f''(0) = \alpha(\alpha-1), \dots$$

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \dots (\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n};$$

$$f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2) \dots (\alpha - n + 1),$$

$$f^{(n+1)}(x) = \alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2) \dots (\alpha - n)(1 + x)^{\alpha-n-1};$$

Підставивши значення похідних $f^{(n)}(0)$ в ряд Маклорена

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k, \text{ одержимо ряд}$$

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \dots (\alpha-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n} x^n + \dots \quad (B)$$

який називається **біноміальним рядом**, а його коефіцієнти – біноміальними коефіцієнтами. Нескладно за допомогою ознаки Д'Аламбера знайти інтервал збіжності даного ряду: $|x| < 1$ і сума його буде дорівнювати $(1+x)^{\alpha}$ при умові, що $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ для всіх x , які задовольняють нерівність $|x| < 1$.

Якщо показник $\alpha = m$ - цілому додатному числу, то ряд (B) закінчиться на члені $n = m$ і перетвориться у **формулу бінома Ньютона**

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{m(m-1) \dots (m-k+1)}{k!} x^k + \dots + x^m.$$

Її можна записати у вигляді

$$(1+x)^m = 1 + C_m^1 x + C_m^2 x^2 + \dots + C_m^k x^k + \dots + x^m,$$

$$\text{де } C_m^k = \frac{m(m-1) \dots (m-k+1)}{k!} = \frac{m!}{k!(m-k)!}, \text{ причому } C_m^k = C_m^{m-k} \quad (k = 0, 1, 2, 3, \dots).$$

В загальному випадку розвинення (B) розповсюджує формулу бінома Ньютона на випадок будь-якого показника α .

Відзначимо деякі частинні випадки:

$$\text{При } \alpha = -1: \quad \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n \cdot x^n + \dots \quad (I)$$

$$\text{При } \alpha = \frac{1}{2}: \quad \sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2 \cdot 4}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 - \dots \quad (II)$$

$$\text{При } \alpha = -\frac{1}{2}: \quad \frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \dots \quad (\text{III})$$

Інтегруючи рівність (I) у межах від 0 до x (де $|x| < 1$), одержимо

$$\int_0^x \frac{1}{1+t} dt = \int_0^x (1 - t + t^2 - t^3 + \dots + (-1)^n \cdot t^n + \dots) dt \quad \text{або}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots + (-1)^n \cdot \frac{1}{n+1}x^{n+1} + \dots \quad (\text{IV})$$

Це розвинення справедливе у проміжку $(-1; 1]$. При $x = 1$ маємо

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^n \cdot \frac{1}{n+1} + \dots$$

Заміняючи у формулі x на $(-x)$, знайдемо:

$$\ln(1-x) = -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 - \dots - \frac{1}{n+1}x^{n+1} - \dots \quad (\text{V})$$

Віднімаючи від рівності (IV) рівність (V), одержимо

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2(x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \dots + \frac{1}{2n+1}x^{2n+1} + \dots) \quad (\text{VI})$$

Формула (VI) використовується для наближеного обчислення логарифмів (при $|x| < 1$).

Замінімо в формулі (I) x на x^2 , одержимо ряд

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \dots + (-1)^n \cdot x^{2n} + \dots \quad (\text{VII})$$

Якщо рівність (VII) проінтегрувати в межах від 0 до x (при $|x| < 1$), то

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \int_0^x (1 - t^2 + t^4 - t^6 + t^8 - \dots) dt \quad \text{або}$$

$$\arctg x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \dots + (-1)^n \cdot \frac{1}{2n+1}x^{2n+1} + \dots \quad (\text{VIII})$$

Розвинення (VIII) справедливе при $x \in [-1; 1]$.

Якщо в рівності (III) замінити x на $(-x^2)$, одержимо ряд

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^6 + \dots$$

Якщо цю рівність проінтегрувати почленно в межах від 0 до x (при $|x| < 1$), то знайдемо

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^7}{7} + \dots \quad (\text{IX})$$

Розвинення (IX) справедливе при $x \in [-1; 1]$.

Приклад 1. Обчислити $\ln 1,04$ з точністю $\varepsilon = 10^{-5}$.

Розв'язання .

Використаємо розвинення :

$$\ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) = 2 \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots \right), \quad x \in (-1; 1).$$

Похибка цієї формули оцінюється за допомогою нерівності

$$|r_n(x)| \leq 2 \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)(1-x^2)}.$$

За умовою $\frac{1+x}{1-x} = 1,04$, звідси $x = \frac{1}{54}$. Підставимо це значення в ряд.

Одержуємо

$$\ln 1,04 = 2 \left(\frac{1}{51} + \frac{1}{3 \cdot 51^3} + \dots + \frac{1}{5 \cdot 51^5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)51^{2n-1}} + \dots \right)$$

Число членів ряду визначається нерівністю

$$|r_n(x)| \leq \frac{2}{51^{2n+1}(2n+1)(1-\frac{1}{51^2})} < 10^{-5}.$$

Цю нерівність задовольняють $n \geq 1$.

Отже, $\ln 1,04 \approx 2 \cdot \frac{1}{51} = 0,03921$.

Приклад 2. Обчислити значення функції $\sqrt[4]{18}$ з точністю $\varepsilon = 0,001$.

Розв'язання. Маємо $\sqrt[4]{18} = \sqrt[4]{16+2} = 2\sqrt[4]{1+\frac{2}{16}} = 2(1+\frac{1}{8})^{\frac{1}{4}}$.

Скористаємось біноміальним рядом $(1+x)^\alpha =$

$$1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \dots,$$

$$|x| < 1,$$

і підставимо в нього $\alpha = \frac{1}{4}$, $x = \frac{1}{8}$:

$$\sqrt[4]{18} = 2(1+\frac{1}{8})^{\frac{1}{4}} = 2 \left(1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} + \frac{\frac{1}{4}(\frac{1}{4}-1)}{2!} \left(\frac{1}{8}\right)^2 + \frac{\frac{1}{4}(\frac{1}{4}-1)(\frac{1}{4}-2)}{3!} \left(\frac{1}{8}\right)^3 + \dots \right) =$$

$$= 2 \left(1 + \frac{1}{32} - \frac{3}{2048} + \frac{7}{65536} + \dots \right)$$

Так як $u_3 = \frac{3}{2048} \approx 0,0015 > \varepsilon, a \quad u_4 = \frac{7}{65536} \approx 0,0001 < \varepsilon,$

то для наближеного обчислення з заданою точністю досить взяти три члени ряду .

$$\sqrt[4]{18} = 2 \left(1 + \frac{1}{32} - \frac{3}{2048} \right) \approx 2(1 + 0,03125 - 0,0015) = 2,0595.$$

Приклад 3. Нехай треба обчислити інтеграл $\int_0^a e^{-x^2} dx$.

Зауважимо, що первісна функція для функції e^{-x^2} не є елементарною функцією, тому формулою Ньютона-Лейбніца для обчислення цього інтеграла скористатися не можна. Розкладемо підінтегральну функцію в ряд, замінивши в розвиненні (1) функції x на $(-x^2)$:

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots (-1)^m \cdot \frac{1}{m!} x^{2m} + \dots .$$

Інтегруючи обидві частини цієї рівності в межах від 0 до a , одержимо

$$\int_0^a e^{-x^2} dx = \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{2! \cdot 5} - \frac{x^7}{3! \cdot 7} + \dots \right) \Big|_0^a = a - \frac{a^3}{3} + \frac{a^5}{2! \cdot 5} - \frac{a^7}{3! \cdot 7} + \dots$$

Якщо взяти відповідне число членів ряду, то можна обчислити цей інтеграл з будь-якою точністю.

Приклад 4.

Знайти перші чотири члени розкладу в степеневий ряд розв'язку задачі Коші:

$$y' = y^2 + e^x - 2, \quad y(0) = 2.$$

Розв'язання.

Застосуємо метод послідовного диференціювання. Оскільки початкову умову задано в точці $x = 0$, то розвинення розв'язку шукатимемо у вигляді

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

Послідовно диференціюємо диференціальне рівняння за змінною x і підставляємо початкові умови :

$$y(0) = 2, y'(0) = 2^2 + 1 - 2 = 3;$$

$$y''(x) = 2yy' + e^x, y''(0) = 2 \cdot 2 \cdot 3 + 1 = 13;$$

$$y'''(x) = 2(y')^2 + 2yy'' + e^x, y'''(0) = 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 2 \cdot 13 + 1 = 71.$$

$$\text{Отже, } y(x) = 2 + 3x + \frac{13}{2}x^2 + \frac{71}{6}x^3 + \dots$$

Приклад 5.

Знайти перші п'ять ненульових членів розкладу в степеневий ряд розв'язку задачі Коші: $y'' - x^2y + 5y = x \sin x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Розв'язання. Застосуємо метод невизначених коефіцієнтів. Розв'язок заданої задачі Коші шукатимемо у вигляді степеневого ряду

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + \dots \quad \text{звідки}$$

$$y' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + 5a_5x^4 + 6a_6x^5 + \dots,$$

$$y'' = 2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2 + 20a_5x^3 + 30a_6x^4 + \dots,$$

$$f(x) = x \sin x = x \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \right) = x^2 - \frac{x^4}{3!} + \frac{x^6}{5!} - \dots$$

Підставимо отримані ряди в задане диференціальне рівняння :

$$\begin{aligned} & 2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2 + 20a_5x^3 + 30a_6x^4 + \dots \\ & - a_1x^2 - 2a_2x^3 - 3a_3x^4 - 4a_4x^5 - 5a_5x^6 - 6a_6x^8 + \dots \\ & + 5a_0 + 5a_1x + 5a_2x^2 + 5a_3x^3 + 5a_4x^4 + 5a_5x^5 + 5a_6x^6 + \dots \\ & = x^2 - \frac{x^4}{3!} + \frac{x^6}{5!} - \dots \end{aligned}$$

Прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях x з лівої і правої частини:

$$x^0 : 2a_2 + 5a_0 = 0, a_0 = y(0) = 0 \Rightarrow a_2 = 0;$$

$$x^1 : 6a_3 + 5a_1 = 0, a_1 = y'(0) = 1 \Rightarrow a_3 = -\frac{5}{6};$$

$$x^2 : 12a_4 - a_1 + 5a_2 = 1, \Rightarrow a_4 = \frac{1}{6};$$

$$x^3 : 20a_5 - 2a_2 + 5a_3 = 0 \Rightarrow a_5 = \frac{5}{24};$$

$$x^4 : 30a_6 - 3a_3 + 5a_4 = -\frac{1}{6} \Rightarrow a_6 = -\frac{7}{60}.$$

Підставимо одержані значення в ряд :

$$\begin{aligned} y(x) &= 0 + x + 0 \cdot x^2 - \frac{5}{6}x^3 + \frac{1}{6}x^4 + \frac{5}{24}x^5 - \frac{7}{60}x^6 + \dots = \\ &= x - \frac{5}{6}x^3 + \frac{1}{6}x^4 + \frac{5}{24}x^5 - \frac{7}{60}x^6 + \dots \end{aligned}$$

Завдання для самостійної роботи 5

Розкласти задані функції по степенях x :

$$1. f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$$

$$2. f(x) = \frac{1 - e^{-x^2}}{x^2}$$

$$3. f(x) = \cos^2 x$$

$$4. f(x) = \sin^2 x$$

$$5. f(x) = \sin \frac{x}{2}$$

$$6. f(x) = x \ln(1 + x^2)$$

$$7. f(x) = \sqrt{1 + x^2}$$

$$8. f(x) = \sqrt[3]{8 - x^3}$$

Відповіді:

$$1. f(x) = 1 + \frac{x}{2!} + \dots + \frac{x^{n-1}}{n!} + \dots, x \in (-\infty; +\infty)$$

$$2. f(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{3!} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-2}}{n!} + \dots, x \in (-\infty; +\infty)$$

$$3. f(x) = 1 - \frac{2x^2}{2!} + \frac{2^3 x^4}{4!} - \frac{2^5 x^6}{6!} + \dots + \frac{(-1)^n 2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!} + \dots, x \in (-\infty; +\infty)$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!}, x \in (-\infty; +\infty)$$

$$5. \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2^{2n-1} (2n+1)!}, x \in (-\infty; +\infty)$$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{n}, x \in (-1; 1)$$

$$7. 1 + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-3) x^{2n}}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n-2) 2n} + \dots, x \in (-\infty; +\infty) \right)$$

$$8. 2 - 2 \left(\frac{1}{3} \left(\frac{x}{2} \right)^3 - \frac{2}{3 \cdot 6} \cdot \left(\frac{x}{2} \right)^6 + \dots + (-1)^{n+1} \frac{2 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (3n-4)}{3^n \cdot n!} \cdot \left(\frac{x}{2} \right)^3 + \dots, x \in (-1; 1) \right)$$

Завдання для самостійної роботи 6

Обчислити визначені інтеграли з точністю до $\varepsilon=0,001$:

$$1. \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arctg x}{x} dx$$

$$2. \int_0^{\frac{1}{10}} \frac{\ln(1+x)}{x} dx$$

$$3. \int_0^1 \sin^2 x dx$$

$$4. \int_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2} dx$$

$$5. \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{1+x^4}$$

$$6. \int_0^{0,8} x^{10} \sin x dx$$

Обчислити наближено значення функцій із вказаною точністю ε :

$$7. \frac{1}{\sqrt[3]{e}}, \quad \varepsilon = 10^{-3}.$$

$$8. \sqrt{e}, \quad \varepsilon = 10^{-3}.$$

$$9. \sin 10^\circ, \quad \varepsilon = 10^{-5}.$$

$$10. \cos 10^\circ, \quad \varepsilon = 10^{-4}.$$

$$11. \arctg \frac{1}{3}, \quad \varepsilon = 10^{-5}.$$

$$12. \ln 1,02, \quad \varepsilon = 10^{-5}.$$

$$13. \sqrt[3]{30}, \quad \varepsilon = 10^{-3}.$$

$$14. \sqrt[5]{250}, \quad \varepsilon = 10^{-3}.$$

Знайти перші чотири ненульові члени розвинення у степеневий ряд

розв'язну задачі Коші:

$$15. y' = x + y^2, y(0) = -1$$

$$16. y' = 3x^2 + 2x + 5y^2, y(1) = -2 \quad 17. y'' = y^2 + \cos x + \sin x, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2$$

$$18. y'' + y = 4 \operatorname{ctg} x, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4, y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4$$

Відповіді:

$$1. 40,87. \quad 2. 0,098. \quad 3. 0,310. \quad 4. 0,245. \quad 5. 0,494.$$

$$6. 0,006. \quad 7. 0,716. \quad 8. 1,649. \quad 9. 0,17365. \quad 10. 0,9848.$$

$$11. 0,321. \quad 12. 0,01980. \quad 13. 3,107. \quad 14. 3,017.$$

$$15. y(x) = -1 + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{4}{6}x^3 + \dots$$

$$16. y(x) = -2 + 25(x-1) - 246(x-1)^2 + \frac{8048}{3}(x-1)^3 + \dots$$

$$17. y(x) = 1 - 2\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 - \frac{5}{6}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3 + \frac{11}{24}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^4 + \dots$$

$$18. y(x) = 4 + 4\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - 2\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^4 + \dots$$

13. Ряд Фур'є для 2п-періодичних функцій.

Теорема Діріхле

Означення 1. **Гармонікою** (або гармонічним коливанням) називають

функцію $\gamma(x) = A \cos(\omega x - \psi)$ (1)

або $\gamma(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$, де $A \geq 0$, $\omega, \varphi, \psi = \frac{\pi}{2} - \varphi$ - сталі. Число A – це амплітуда, ω - частота, ψ – початкова фаза, $T = \frac{2\pi}{\omega}$ - період гармоніки.

Гармоніку $\gamma(x) = A \cos(\omega x - \psi)$ можна зобразити у вигляді

$$\gamma(x) = a \cos \omega x + b \sin \omega x, \quad (2)$$

де $a = A \cos \psi$, $b = A \sin \psi$. І навпаки: від запису (2) можна перейти до (1), якщо покласти $A = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\cos \psi = \frac{a}{A}$, $\sin \psi = \frac{b}{A}$.

Означення 2. **Умовною гармонікою** називають комплексно значну

функцію вигляду $\tilde{\gamma}(x) = C e^{i\omega x} = C(\cos \omega x + i \sin \omega x)$, де ω – дійсна стала (частота), C – комплексна (амплітуда). $T = \frac{2\pi}{\omega}$ - період умовної гармоніки.

Означення 3. **Тригонометричним рядом Фур'є** функції $f(x)$, заданої на відріжку $[-l; l]$, називають функціональний ряд вигляду

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x), \quad (3)$$

де $\omega = \frac{\pi}{l}$, а коефіцієнти a_0, a_n, b_n , що зветься **коефіцієнтами Фур'є**

функції $f(x)$, обчислюються за формулами

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos n\omega x dx, \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin n\omega x dx \quad (4)$$

($n = 1, 2, 3, \dots$).

Теорема Діріхле.

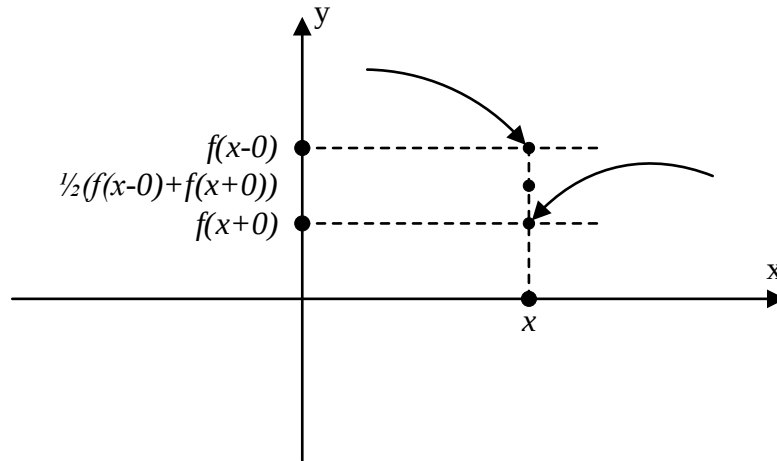
Якщо функція $f(x)$ на відріжку $[-l; l]$ відповідає **умовам Діріхле**:

а) неперервна або має скінченне число точок розриву першого роду,

б) має скінченне число максимумів і мінімумів,

то у всіх точках $x \in (-l; l)$ сума тригонометричного ряду Фур'є дорівнює

$\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$, де $f(x-0)$, $f(x+0)$ – ліва і права границі $f(x)$ в точці x .



Мал. 1

Зокрема, якщо в точці $x \in (-l; l)$ функція $f(x)$ неперервна, то

$$f(x-0) = f(x+0), \quad \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2} = f(x).$$

Таким чином, якщо функція $f(x)$ на $x \in [-l; l]$ відповідає умовам Діріхле, то для $\forall x \in (-l; l)$ має місце рівність

$$\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x), \quad (5)$$

де $\omega = \frac{\pi}{l}$, а коефіцієнти a_0 , a_n , b_n обчислюються за формулами (4).

В точках $x = -l$ і $x = l$ сума тригонометричного ряду Фур'є дорівнює $\frac{f(-l+0)+f(l-0)}{2}$.

Члени ряду у формулі (5) є гармоніками з частотами $\{n\omega\}_{n=0}^{\infty}$. Тому вираз (5) називають розкладанням (або розвиненням) функції $f(x)$ в інтервалі $(-l; l)$ на гармоніки. Оскільки гармоніки мають спільний період

$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2l$, то сума тригонометричного ряду Фур'є (3) є періодичною функцією з періодом $T = 2l$.

Звідси випливає: якщо функція $f(x)$ має період $T = 2l$ і розкладається на відріжку $[-l; l]$ в тригонометричний ряд Фур'є, то сума цього ряду збігається з $f(x)$ на всій числовій осі.

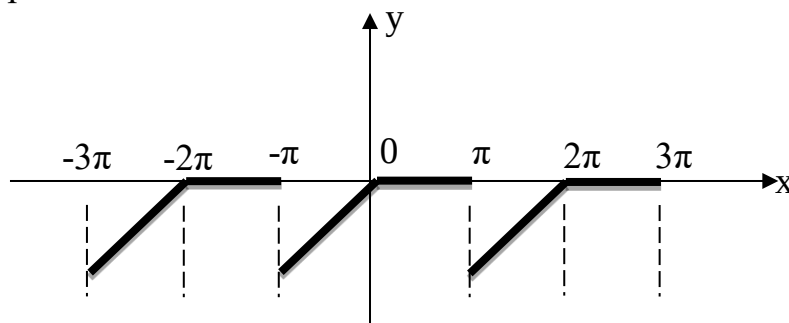
Якщо ж функція $f(x)$ не є періодичною і на відріжку $[-l; l]$ розвинута в тригонометричний ряд Фур'є, то сума цього ряду збігається з $f(x)$ тільки в інтервалі $(-l; l)$, а поза цим інтервалом вона дає періодичне продовження функції $f(x)$.

Приклад 1. Розкласти функцію в ряд Фур'є

$$f(x) = \begin{cases} x, & -\pi \leq x \leq 0, \\ 0, & 0 < x \leq \pi, \end{cases} \quad f(x + 2\pi) = f(x).$$

Розв'язання .

Побудуємо графік заданої функції на відрізках $[-\pi; 0] \cup [0; \pi]$ і продовжимо його періодично на вісь X .



Оскільки функція $f(x)$ - неперервна на $[-\pi; \pi]$, монотонна і обмежена на відрізках $[-\pi; 0] \cup [0; \pi]$, то вона задовольняє умовам теореми Діріхле і її можна розкласти в ряд Фур'є:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad \text{де } a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Обчислимо коефіцієнти ряду Фур'є.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 x dx + \int_0^{\pi} 0 dx \right) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_{-\pi}^0 = -\frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi^2}{2} = -\frac{\pi}{2},$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 x \cos nx dx + \int_0^{\pi} 0 \cos nx dx \right) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 x \cos nx dx =$$

$$\left| \begin{array}{l} u = x, \quad du = dx \\ dv = \cos nx dx \\ v = \frac{1}{n} \sin nx \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\frac{x}{n} \sin nx \Big|_{-\pi}^0 - \int_{-\pi}^0 \frac{1}{n} \sin nx dx \right) = \frac{1}{\pi} \left(0 - 0 + \frac{1}{n} \frac{\cos nx}{n} \Big|_{-\pi}^0 \right) = \frac{1}{\pi n^2} (1 - \cos \pi n) =$$

$$= \frac{1}{\pi n^2} (1 - (-1)^n) = \begin{cases} 0, n \text{ парне} & n = 2k, \\ \frac{2}{\pi (2k-1)^2}, n \text{ непарне} & n = 2k-1; \end{cases}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 x \sin nx dx + \int_0^{\pi} 0 \sin nx dx \right) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 x \sin nx dx = \left| \begin{array}{l} u = x, du = dx \\ dv = \sin nx dx \\ v = -\frac{\cos nx}{n} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(-\frac{x \cos nx}{n} \Big|_{-\pi}^0 + \int_{-\pi}^0 \frac{\cos nx}{n} dx \right) = \frac{1}{\pi} \left(0 - \frac{\pi \cos \pi n}{n} + \frac{1}{n^2} \sin nx \Big|_{-\pi}^0 \right) = -\frac{\cos \pi n}{n} + 0 =$$

$$= -\frac{\cos \pi n}{n} = \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

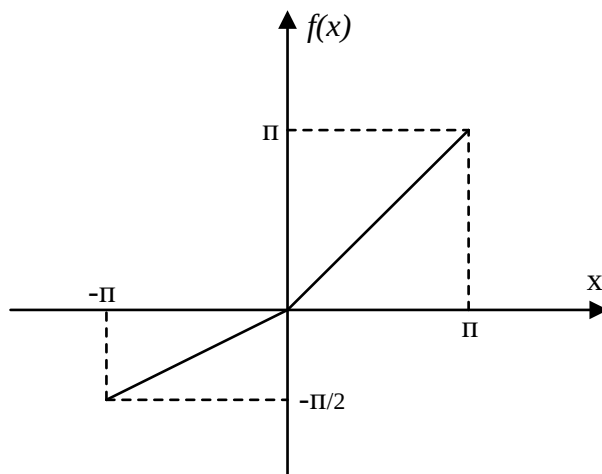
Підставимо обчислені коефіцієнти в ряд Фур'є і одержимо :

$$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi n^2} (1 - (-1)^n) \cos nx + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx = -\frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx. \end{aligned}$$

Приклад 2. Розкласти функцію в тригонометричний ряд Фур'є

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & \text{при } -\pi \leq x < 0, \\ x & \text{при } 0 \leq x \leq \pi, \end{cases}.$$

Розв'язання . Функція $f(x)$ задана на відрізку $[-\pi; \pi]$, де вона відповідає умовам Діріхле.



Мал.2

В нашому випадку $l = \pi$, $\omega = \frac{\pi}{l} = 1$. Обчислимо коефіцієнти Фур'є за формулами (4):

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 \frac{1}{2} x dx + \int_0^{\pi} x dx \right) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{x^2}{4} \Big|_{-\pi}^0 + \frac{x^2}{2} \Big|_0^{\pi} \right) = \\ &= \frac{1}{\pi} \left(-\frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi^2}{2} \right) = \frac{\pi}{4}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos n \omega x dx = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 \frac{1}{2} x \cos n x dx + \int_0^{\pi} x \cos n x dx \right) = \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{2n} \int_{-\pi}^0 x d(\sin n x) + \frac{1}{n} \int_0^{\pi} x d(\sin(n x)) \right). \end{aligned}$$

інтегрування частинами $\int_a^b u(x) dv(x) = u(x)v(x) \Big|_a^b - \int_a^b v(x) du(x)$, маємо:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{2n} \left(x \sin(n x) \Big|_{-\pi}^0 - \int_{-\pi}^0 \sin(n x) dx \right) + \frac{1}{n} \left(x \sin(n x) \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin(n x) dx \right) \right) = \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{2n} \left(0 + \frac{1}{n} \cos n x \Big|_{-\pi}^0 \right) + \frac{1}{n} \left(0 + \frac{1}{n} \cos n x \Big|_0^{\pi} \right) \right) = \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{2n^2} (1 - \cos n \pi) + \frac{1}{n^2} (\cos n \pi - 1) \right) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{2n^2} (1 - \cos n \pi) - \frac{1}{n^2} (1 - \cos n \pi) \right) = \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{2\pi n^2} (1 - \cos n\pi) = -\frac{1}{2\pi n^2} (1 - (-1)^n).$$

Таким чином, $a_n = \begin{cases} 0, & \text{якщо } n = 2m \\ -\frac{1}{\pi n^2}, & \text{якщо } n = 2m - 1, \end{cases} \quad (m = 1, 2, 3, \dots);$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 \frac{1}{2} x \sin(nx) dx + \int_0^{\pi} x \sin(nx) dx \right) = \\ &= \frac{1}{\pi} \left(-\frac{1}{2n} \int_{-\pi}^0 x d(\cos nx) - \frac{1}{n} \int_0^{\pi} x d(\cos(nx)) \right) = \\ &= -\frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{2n} (x \cos nx) \Big|_{-\pi}^0 - \int_{-\pi}^0 \cos(nx) dx \right) + \frac{1}{n} \left(x \cos(nx) \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \cos(nx) dx \right) = \\ &= -\frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{2n} (\pi \cos n\pi) - \frac{1}{n} \sin(nx) \Big|_{-\pi}^0 + \frac{1}{n} (\pi \cos n\pi) - \frac{1}{n} \sin(nx) \Big|_0^{\pi} \right) = \\ &= -\frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{2n} (\pi \cos n\pi - 0) + \frac{1}{n} (\pi \cos n\pi - 0) \right) = \\ &= -\frac{1}{\pi} \cdot \frac{3}{2n} \cdot \pi \cos n\pi = \frac{-3}{2n} (-1)^n = \frac{3}{2n} (-1)^{n+1}. \end{aligned}$$

Отже, коефіцієнти Фур'є функції $f(x)$ мають такі значення:

$$a_0 = \frac{\pi}{4}, \quad a_{2m} = 0, \quad a_{2m-1} = -\frac{1}{\pi(2m-1)^2} \quad (m = 1, 2, 3, \dots),$$

$$b_n = \frac{3}{2n} (-1)^{n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \text{ Якщо підставити їх у формулу (5) і}$$

врахувати, що $\omega = 1$, а $f(x)$ неперервна в довільній точці $x \in (-\pi; \pi)$,

одержимо розвинення

$$f(x) = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(2m-1)x}{(2m-1)^2} + \frac{3}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx),$$

яке справджується для будь-яких $x \in (-\pi; \pi)$.

В точках $x = -\pi$ і $x = \pi$ значення суми тригонометричного ряду Фур'є

$$\text{дорівнює } \frac{f(-\pi-0) + f(\pi+0)}{2} = \frac{1}{2} \left(-\frac{\pi}{2} + \pi \right) = \frac{\pi}{4}.$$

Поза інтервалом $(-\pi; \pi)$ сума ряду Фур'є дає періодичне продовження функції $f(x)$.

14. Ряд Фур'є для $2l$ -періодичної функції.

Ряди Фур'є для парних і непарних періодичних функцій

Якщо на відрізку $[\alpha; \alpha + 2l]$ функція $f(x)$ відповідає умовам Діріхле, то для $\forall x \in (\alpha; \alpha + 2l)$ справджується розвинення (5), де $\omega = \frac{\pi}{l}$, а коефіцієнти a_0 , a_n , b_n обчислюються за формулами:

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{\alpha}^{\alpha+2l} f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{l} \int_{\alpha}^{\alpha+2l} f(x) \cos n\omega x dx,$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{\alpha}^{\alpha+2l} f(x) \sin(n\omega x) dx, \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Нехай на відрізку $[-l; l]$ функція $f(x)$ відповідає умовам Діріхле і для $\forall x \in [-l; l]$ $f(-x) = f(x)$.

Тоді ця **парна** функція розвивається в тригонометричний ряд Фур'є, який містить тільки косинуси:

$$\frac{f(x-0) + f(x+0)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega x, \quad (*)$$

де $\omega = \frac{\pi}{l}$, а коефіцієнти Фур'є визначаються так:

$$a_0 = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) dx, \quad a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos n\omega x dx, \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad b_n = 0$$

(формули випливають із властивостей визначеного інтегралу).

Приклад 1. Функцію $f(x) = \cos x$ розвинути в ряд Фур'є в інтервалі $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$. Використовуючи отримане розвинення, знайти суму ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)(2n+1)}.$$

Розв'язання. Тут $l = \frac{\pi}{2}$, $\omega = \frac{\pi}{l} = 2$. Оскільки $f(x) = \cos x$ парна, то $b_n = 0$ ($n = 1, 2, 3, \dots$); обчислимо a_0 і a_n :

$$a_0 = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) dx = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos x dx = \frac{4}{\pi} \sin(x) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{4}{\pi},$$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos n\omega x dx = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos x \cdot \cos 2nx dx = \\
&= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} (\cos(2n-1)x + \cos(2n+1)x) dx = \\
&= \frac{2}{\pi} \left(\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)} + \frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)} \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{2}{\pi} \left(\frac{\sin(n\pi - \frac{\pi}{2})}{(2n-1)} + \frac{\sin(n\pi + \frac{\pi}{2})}{(2n+1)} \right) = \\
&= \frac{2}{\pi} \left(-\frac{\sin(\frac{\pi}{2} - n\pi)}{(2n-1)} + \frac{\sin(\frac{\pi}{2} + n\pi)}{(2n+1)} \right) = \frac{2}{\pi} \left(-\frac{\cos n\pi}{(2n-1)} + \frac{\cos n\pi}{(2n+1)} \right) = \frac{2\cos n\pi}{\pi} \left(\frac{1}{(2n+1)} - \frac{1}{(2n-1)} \right) = \\
&= \frac{2(-1)^n}{\pi} \cdot \frac{2n-1-2n-1}{(2n+1)(2n-1)} = -\frac{4(-1)^n}{\pi(4n^2-1)} = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{(4n^2-1)}.
\end{aligned}$$

Отже, якщо в (*) підставити $\omega = 2$, $a_0 = \frac{4}{\pi}$, $a_n = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{(4n^2-1)}$ і врахувати неперервність $f(x) = \cos x$, одержимо розвинення

$$\cos x = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(4n^2-1)} \cos 2nx. \quad (**)$$

Оскільки $f\left(-\frac{\pi}{2} + 0\right) = f\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \cos \frac{\pi}{2} = 0$, то значення суми одержаного ряду Фур'є в точках $x = -\frac{\pi}{2}$ і $x = \frac{\pi}{2}$ дорівнює нулю. Тому розвинення (**) справджується для $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Якщо в (**) покласти $x = 0$, знайдемо :

$$1 = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(4n^2-1)} \quad \text{звідки} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(4n^2-1)} = \frac{\pi}{4} \left(1 - \frac{2}{\pi}\right).$$

Таким чином, сума заданого числового ряду дорівнює $\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}$.

Нехай на відрізку $[-l; l]$ задана **непарна** функція $f(x)$, тобто для $\forall x \in [-l; l]$ $f(-x) = -f(x)$ і вона відповідає умовам Діріхле. Тоді $f(x)$ розвивається в тригонометричний ряд Фур'є, який містить тільки синуси:

$$\frac{f(x-0) + f(x+0)}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega x), \quad (***)$$

де $\omega = \frac{\pi}{l}$, а коефіцієнти Фур'є визначаються так:

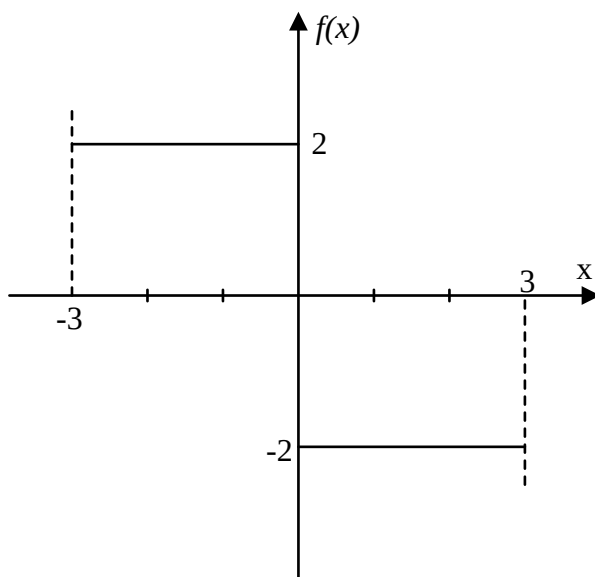
$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin(n\omega x) dx, \quad a_0 = 0, \quad a_n = 0, \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

(формули випливають із властивостей визначеного інтегралу).

Приклад 2. Розвинути в тригонометричний ряд Фур'є функцію

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{при } x \in [-3; 0) \\ -2 & \text{при } x \in [0; 3] \end{cases}.$$

Розв'язання. В нашому випадку $l = 3$, $\omega = \frac{\pi}{l} = \frac{\pi}{3}$.



Мал.3

Оскільки функція $f(x)$ непарна, то коефіцієнти Фур'є $a_0 = 0$, $a_n = 0$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), знаходимо коефіцієнт $b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin(n\omega x) dx =$

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} \int_0^3 (-2) \sin \frac{n\pi x}{3} dx &= -\frac{4}{3} \int_0^3 \sin \frac{n\pi x}{3} dx = \frac{4}{3} \frac{3}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{3} \Big|_0^3 = \frac{4}{n\pi} (\cos n\pi - 1) = \\ &= \frac{4}{n\pi} ((-1)^n - 1) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } n = 2m \\ -\frac{8}{n\pi}, & \text{якщо } n = 2m - 1, \end{cases} \quad (m = 1, 2, 3, \dots); \end{aligned}$$

Таким чином, $b_{2m} = 0$, $b_{2m-1} = -\frac{8}{(2m-1)\pi}$, ($m = 1, 2, 3, \dots$).

Якщо підставити ці значення в формулу (**), то одержимо шукане розвинення:

$$\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2} = -\frac{8}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2m-1} \sin \frac{(2m-1)\pi x}{3}.$$

Сума тригонометричного ряду Фур'є збігається з функцією $f(x)$ для всіх x , що належать інтервалам $(-3; 0)$ і $(0; 3)$. В точці $x = 0$ сума ряду дорівнює

$$\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2} = \frac{2+(-2)}{2} = 0.$$

15. Ряд Фур'є для функції, заданої на відрізку $[0; l]$.

Якщо функція $f(x)$ задана тільки на відрізку $[0; l]$ і задовольняє там умовам Діріхле, то, побудувавши парне продовження $f(x)$ на $[-l; 0)$ (мал.А) і розклавши одержану парну функцію за формулою

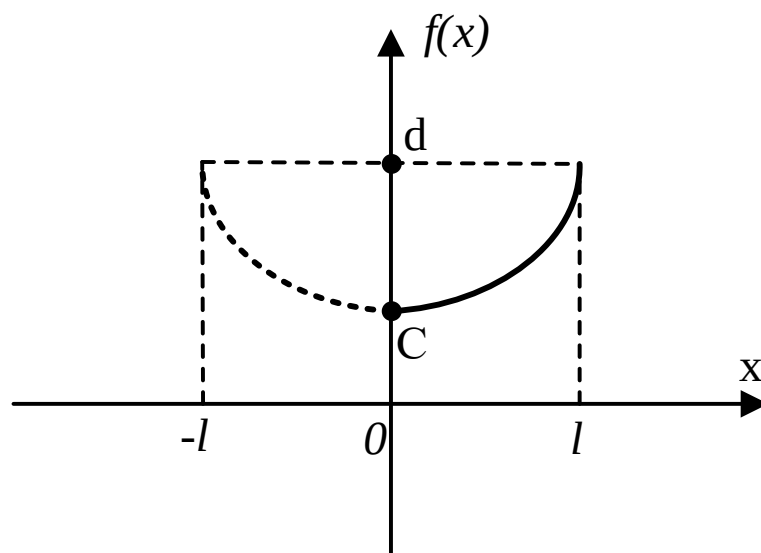
$$\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega x$$

з коефіцієнтами $a_0 = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) dx$, $a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos n\omega x dx$,

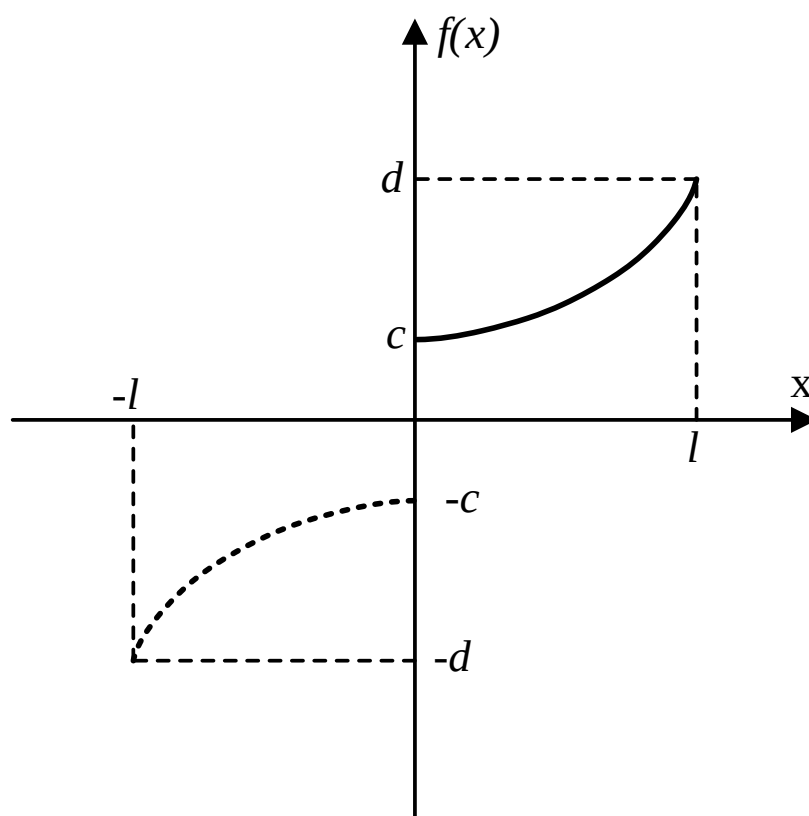
($n = 1, 2, 3, \dots$), матимемо розвинення функції $f(x)$ в інтервалі $(0; l)$ в ряд Фур'є, що містить тільки косинуси. Аналогічно, якщо побудувати непарне продовження функції $f(x)$ на $[-l; 0)$ (мал.В)) і застосувати формули

$$\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega x),$$

$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin(n\omega x) dx$, ($n = 1, 2, 3, \dots$), то одержимо розвинення функції $f(x)$ в інтервалі $(0; l)$ в ряд Фур'є, що містить тільки синуси.



(мал.А)

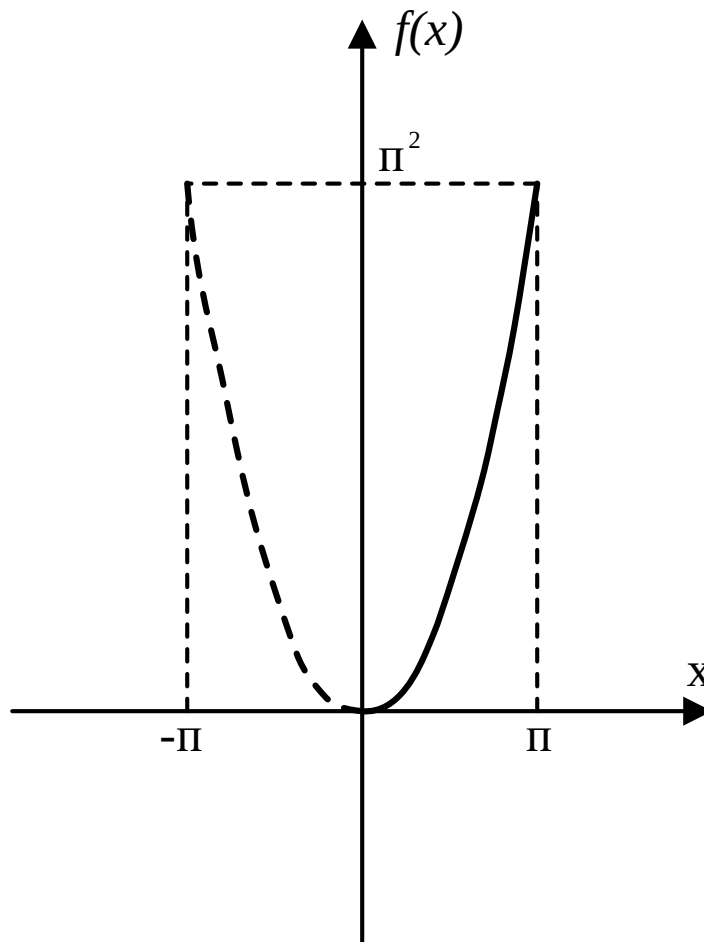


(мал.В)

Приклад 1. Функцію $f(x) = x^2$, $x \in [0; \pi]$ розвинути в тригонометричний ряд Фур'є: 1) за косинусами; 2) за синусами;

Розв'язання. Функція задана на відрізку $[0; l]$, де $l = \pi$; $\omega = \frac{\pi}{l} = 1$.

1) Побудуємо парне продовження функції на проміжок $[-\pi; 0]$



і обчислимо коефіцієнти Фур'є:

$$a_0 = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x^2 dx = \frac{2}{3} \pi^2,$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x^2 \cos nx dx = \frac{2}{n\pi} \int_0^\pi x^2 d(\sin nx) = \\ &= \frac{2}{n\pi} (x^2 \sin(nx)) \Big|_0^\pi - 2 \int_0^\pi x \sin(nx) dx = \frac{2}{n\pi} (0 - 2 \int_0^\pi x \sin(nx) dx) = \\ &= -\frac{4}{n\pi} \int_0^\pi x \sin(nx) dx = \frac{4}{n^2\pi} \int_0^\pi x d(\cos nx) = \frac{4}{n^2\pi} (x \cos nx \Big|_0^\pi - \int_0^\pi \cos nx dx) = \end{aligned}$$

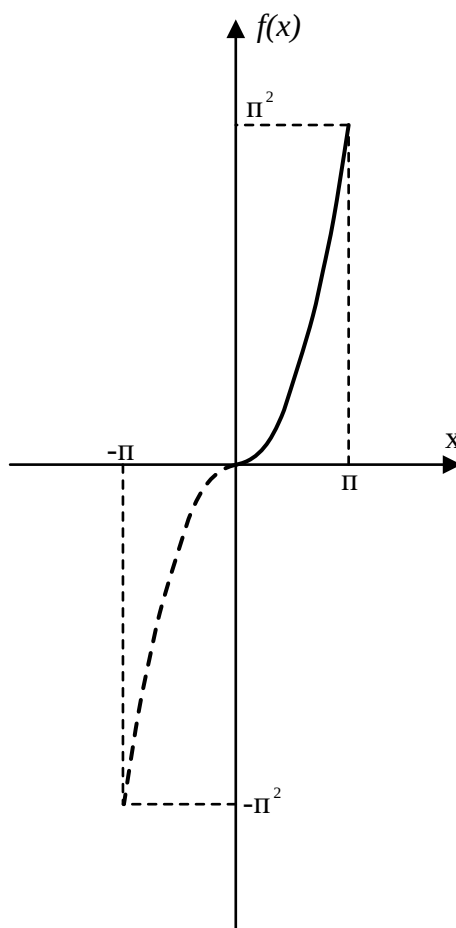
$$= \frac{4}{n^2\pi} (\pi \cos n\pi - \frac{1}{n} \sin(n\pi)|_0^\pi) = \frac{4}{n^2\pi} (\pi(-1)^n - 0) = \frac{4(-1)^n}{n^2}.$$

І остаточно маємо:

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx, \quad x \in [0; \pi].$$

Зауважимо, що на проміжку $[-\pi; 0)$ сума одержанного ряду Фур'є теж дорівнює x^2 .

2) Побудуємо непарне продовження функції $f(x) = x^2$ на проміжок $[-\pi; 0)$, а потім одержану непарну функцію розвинемо в ряд Фур'є



$$\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega x). \text{ Обчислюємо коефіцієнт } b_n$$

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin(n\omega x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x^2 \sin nx dx = - \frac{2}{n\pi} \int_0^\pi x^2 d(\cos nx) =$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{2}{n\pi} (x^2 \cos(nx)|_0^\pi - 2 \int_0^\pi x \cos(nx) dx) = \\
&= -\frac{2}{n\pi} \left(\pi^2 \cos n\pi - \frac{2}{n} \int_0^\pi x d(\sin(nx)) \right) = \\
&= -\frac{2}{n\pi} \left(\pi^2 (-1)^n - \frac{2}{n} (x \sin(nx))|_0^\pi - \int_0^\pi \sin(nx) dx \right) = \\
&= -\frac{2}{n\pi} \left(\pi^2 (-1)^n - \frac{2}{n} (0 + \frac{1}{n} \cos(nx)|_0^\pi) \right) = \\
&= -\frac{2}{n\pi} \left(\pi^2 (-1)^n - \frac{2}{n^2} (\cos n\pi - 1) \right) = \\
&= -\frac{2}{n\pi} \left(\pi^2 (-1)^n - \frac{2}{n^2} (-1)^n + \frac{2}{n^2} \right) = \\
&= -\frac{2}{n\pi} \left(\pi^2 (-1)^n + \frac{2}{n^2} (1 - (-1)^n) \right) = \\
&= \frac{2\pi(-1)^{n+1}}{n} - \frac{4}{\pi n^3} (1 - (-1)^n) = \begin{cases} \frac{2\pi(-1)^{n+1}}{n}, & \text{якщо } n = 2m \\ \frac{2\pi(-1)^{n+1}}{n} - \frac{8}{\pi n^3}, & \text{якщо } n = 2m - 1 \end{cases},
\end{aligned}$$

$(m = 1, 2, 3, \dots)$; Таким чином,

$$b_{2m} = -\frac{\pi}{m}, \quad b_{2m-1} = \frac{2\pi}{2m-1} - \frac{8}{\pi(2m-1)^3}, \quad (m = 1, 2, 3, \dots). \text{ Одержимо}$$

$$\begin{aligned}
x^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx) = \sum_{m=1}^{\infty} b_{2m} \sin(2mx) + \sum_{m=1}^{\infty} b_{2m-1} \sin(2m-1)x = \\
&= -\pi \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(2mx)}{m} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{2\pi}{2m-1} - \frac{8}{\pi(2m-1)^3} \right) \sin(2m-1)x = \\
&= -2\pi \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(2mx)}{2m} + 2\pi \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(2m-1)x}{2m-1} - \frac{8}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(2m-1)x}{(2m-1)^3} \Rightarrow \\
x^2 &= 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \sin(nx)}{n} - \frac{8}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(2m-1)x}{(2m-1)^3}
\end{aligned}$$

Це розвинення справджується для $\forall x \in [0; \pi)$.

Завдання для самостійної роботи 7

1. Функцію $f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}$ розкласти в ряд на інтервалі $(0;\pi)$ за косинусам.
2. Функцію $f(x) = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}x$ розкласти в ряд на інтервалі $(0;\pi)$ за синусам.
3. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x) = \begin{cases} 6, \text{ якщо } 0 < x < 2, \\ 3x, \text{ якщо } 2 < x < 4. \end{cases}$
4. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x) = \begin{cases} 2, \text{ якщо } -\pi < x < 0, \\ 1, \text{ якщо } 0 < x < \pi. \end{cases}$
5. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x) = x^2$ на відрізку $[-\pi;\pi]$.
6. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x) = \frac{\pi-x}{2}$ на інтервалі $(-\pi;\pi)$.
7. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x) = \frac{x}{2}$ в інтервалі $(0; 2\pi)$.
8. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x) = 2x - 3$ в інтервалі $(-3;3)$.
9. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x) = |x| - 1$ в інтервалі $(-2;2)$.
10. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } -3 < x < 0, \\ -2, \text{ якщо } 0 < x < 0. \end{cases}$
11. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } -2 < x < 0, \\ x, \text{ якщо } 0 < x < 2. \end{cases}$
12. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x) = \begin{cases} x, \text{ якщо } x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right), \\ \frac{\pi}{2}, \text{ якщо } x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right). \end{cases}$

Відповіді:

$$1. \quad f(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}.$$

$$2. \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}.$$

$$f(x) = \frac{15}{2} + \frac{12}{\pi^2} \left(\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) + \frac{1}{9} \cos\left(\frac{3\pi x}{2}\right) + \frac{1}{25} \cos\left(\frac{5\pi x}{2}\right) + \dots \right) -$$

$$3. \quad -\frac{6}{\pi} \left(\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) + \frac{1}{2} \sin\left(\frac{2\pi x}{2}\right) + \frac{1}{3} \sin\left(\frac{3\pi x}{2}\right) + \dots \right), \quad S(2) = 6.$$

$$4. \quad f(x) = \frac{3}{2} + \frac{2}{\pi} \left(\frac{\sin(x)}{1} + \frac{\sin(3x)}{3} + \frac{\sin(5x)}{5} + \dots + \frac{\sin((2n-1)x)}{2n-1} + \dots \right).$$

$$5. \quad f(x) = \frac{\pi^2}{3} - 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \sin(nx)}{n^2}.$$

$$6. \quad f(x) = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \sin(nx).$$

$$7. \quad f(x) = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}.$$

$$8. \quad f(x) = -3 + \frac{12}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin\left(\frac{\pi n x}{3}\right).$$

$$9. \quad f(x) = -\frac{8}{\pi^2} \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)x}{1^2} + \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)3x}{3^2} + \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)5x}{5^2} + \dots \right).$$

$$10. \quad f(x) = -\frac{1}{2} - \frac{6}{\pi} \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)x}{1} + \frac{\sin(\pi x)}{3} + \frac{\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)x}{5} + \dots \right).$$

$$11. \quad f(x) = -\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \cos\left(\frac{\pi n x}{2}\right) - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin\left(\frac{\pi n x}{2}\right).$$

$$12. \text{ a) } f(x) = \frac{3\pi}{8} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(\cos\left(\frac{\pi n x}{2}\right) - 1 \right) \cos(nx);$$

$$\text{б) } f(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) + \frac{(-1)^{n+1} \pi}{2n} \right) \sin(nx).$$

Завдання для типової розрахункової роботи

Варіант 1

1. Знайти суму ряду:

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{4}{n(n-1)(n-2)}.$$

2. Дослідити на збіжність ряд:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{\sqrt{n(n^2+1)}}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n \cdot n!}{n^n}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+n}{n} \right)^{\frac{n}{2}}.$$

3. Дослідити ряд на абсолютну або умовну збіжність:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^3}{(n+1)!}.$$

4. Знайти інтервал збіжності степеневого ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} x^n.$$

5. Обчислити інтеграл з точністю $\varepsilon = 0,001$:

$$\int_0^{0,1} \cos(10x^2) dx.$$

6. Застосовуючи відповідні степеневі ряди, обчислити з точністю ε значення функції: $\cos 545^\circ$; $\varepsilon = 10^{-5}$.

7. Знайти перші три ненульові члени розкладу в степеневий ряд розв'язку задачі Коші:

$$y' = xy^2 + 1, y(0) = 2.$$

8. Розкласти функцію в ряд Фур'є на заданому інтервалі:

$$y = \begin{cases} -x, & -\pi < x \leq 0, \\ 0, & 0 < x < \pi, \end{cases} \quad x \in (-\pi, \pi).$$

Варіант 2

1. Знайти суму ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{12}{36n^2 - 12n - 35}.$$

2. Дослідити на збіжність ряд:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{\sqrt[3]{n^2}}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2n)!}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{n^2}}{n^{n^2} \cdot 3^n}.$$

3. Дослідити ряд на абсолютну або умовну збіжність:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 - \cos \frac{1}{\sqrt{n}} \right).$$

4. Знайти інтервал збіжності степеневого ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2^n(n^2+1)} x^n.$$

5. Обчислити інтеграл з точністю $\varepsilon = 0,001$:

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[4]{256+x^3}}.$$

6. Застосовуючи відповідні степеневі ряди, обчислити з точністю

ε значення функції: $\sqrt[4]{15}, \varepsilon = 10^{-4}$.

7. Знайти перші три ненульові члени розкладу в степеневий ряд розв'язку задачі Коші:

$$y' = \cos x + y^2; y(0) = 1.$$

8. Розкласти функцію в ряд Фур'є на заданому інтервалі:

$$y = \begin{cases} x & 0 < x \leq 1, \\ 2-x & 1 < x < 2, \end{cases} \quad x \in (0,2), \quad \text{по косинусам.}$$

Варіант 3

1. Знайти суму ряду:

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{3n+1}{(n-1)n(n+1)}.$$

2. Дослідити на збіжність ряд:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} n^3 \operatorname{tg}^5 \frac{\pi}{\sqrt{n^3}}; \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{10^n}; \quad в) \sum_{n=1}^{\infty} \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{n}{n+1} \right) \right]^n.$$

3. Дослідити ряд на абсолютну або умовну збіжність:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{1}{n} \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{n}.$$

4. Знайти інтервал збіжності степеневого ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{(n+1)^n} x^n.$$

5. Обчислити інтеграл з точністю $\varepsilon = 0,001$:

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{64+x^5}}.$$

6. Застосовуючи відповідні степеневі ряди, обчислити з точністю ε значення

$$\text{функції: } \operatorname{arctg} \frac{1}{57}, \quad \varepsilon = 10^{-5}.$$

7. Знайти перші три ненульові члени розкладу в степеневий ряд розв'язку

$$\text{задачі Коші: } y'' + \frac{y}{x} - x^2 y = 4, \quad y(1) = y'(1) = 1.$$

8. Розкласти функцію в ряд Фур'є на заданому інтервалі:

$$y = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0, \\ 1, & 0 < x < \pi, \end{cases} \quad x \in (-\pi; 0) \cup (0; \pi).$$

Варіант 4

1. Знайти суму ряду:

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{8}{16n^2 + 8n - 15}.$$

2. Дослідити на збіжність ряд:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{3^n}; \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \cdot \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n^2}; \quad в) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2n\sqrt{\ln(3n-1)}}.$$

3. Дослідити ряд на абсолютну або умовну збіжність:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln \left(1 + \frac{1}{n^2} \right).$$

4. Знайти інтервал збіжності степеневого ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n.$$

5. Обчислити інтеграл з точністю $\varepsilon = 0,001$:

$$\int_0^{0,3} \frac{\ln(1+x)}{x} dx.$$

6. Застосовуючи відповідні степеневі ряди, обчислити з точністю ε значення функції: $\cos 0,4$, $\varepsilon = 10^{-3}$.

7. Знайти перші три ненульові члени розкладу в степеневий ряд розв'язку задачі Коші:

$$y' = x + x^2 y, \quad y(0) = 1.$$

8. Розкласти функцію в ряд Фур'є на заданому інтервалі:

$$y = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, \\ 0, & 1 < x < \pi, \end{cases} \quad x \in (0; \pi), \text{ по синусах.}$$

Варіант 5

1. Знайти суму ряду:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n^2 - 1)}.$$

2. Дослідити на збіжність ряд:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n^2 + 2}{n^2 + 1}; \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!!}; \quad в) \sum_{n=1}^{\infty} 3^n \sin \frac{n}{4^n}.$$

3. Дослідити ряд на абсолютну або умовну збіжність:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin 3^n}{3^n}.$$

4. Знайти інтервал збіжності степеневого ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!(2n-1)}.$$

5. Обчислити інтеграл з точністю $\varepsilon = 0,001$:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{8+x^4}}.$$

6. Застосовуючи відповідні степеневі ряди, обчислити з точністю ε значення функції: $\sqrt[3]{28}$, $\varepsilon = 10^{-4}$.

7. Знайти перші три ненульові члени розкладу в степеневий ряд розв'язку задачі Коші:

$$y' = x + x^2 - y^2, \quad y(0) = 5.$$

8. Розкласти функцію в ряд Фур'є на заданому інтервалі:

$$y = \begin{cases} -1, & -\pi < x < 1, \\ 1, & 0 < x < \pi, \end{cases} \quad x \in (-\pi; 0) \cup (0; \pi).$$

Варіант 6

1. Знайти суму ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{9n^2 - 3n - 2}.$$

2. Дослідити на збіжність ряд:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{1}{n-1} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt[3]{n-1}}; \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}; \quad в) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-2}{3n+1} \right)^n.$$

3. Дослідити ряд на абсолютну або умовну збіжність:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + \sin^2 n}.$$

4. Знайти інтервал збіжності степеневого ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n + \sqrt{n}}.$$

5. Обчислити інтеграл з точністю $\varepsilon = 0,001$:

$$\int_0^{0,5} \cos(4x^2) dx.$$

6. Застосовуючи відповідні степеневі ряди, обчислити з точністю ε значення

$$\text{функції: } \operatorname{arctg} \frac{1}{3}, \quad \varepsilon = 10^{-3}.$$

7. Знайти перші три ненульові члени розкладу в степеневий ряд розв'язку задачі Коші:

$$y'' + 2y^2 - 3xy + e^x = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = -1.$$

8. Розкласти функцію в ряд Фур'є на заданому інтервалі:

$$y = |x|, \quad x \in (-1; 1).$$

Варіант 7

1. Знайти суму ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+6}{n(n+1)(n+2)}.$$

2. Дослідити на збіжність ряд:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(1+n)}; \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}; \quad в) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(3^n + 1)(2n)!}.$$

3. Дослідити ряд на абсолютну або умовну збіжність:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{\pi}{2^n}.$$

4. Знайти інтервал збіжності степеневого ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^n}{(2n)!} x^n.$$

5. Обчислити інтеграл з точністю $\varepsilon = 0,001$:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{16+x^3}}.$$

6. Застосовуючи відповідні степеневі ряди, обчислити з точністю ε значення функції:

$$\sqrt[3]{1.05}, \quad \varepsilon = 10^{-5}.$$

7. Знайти перші три ненульові члени розкладу в степеневий ряд розв'язку задачі Коші:

$$y' = xy + e^{-y}, \quad y(0) = 0.$$

8. Розкласти функцію в ряд Фур'є на заданому інтервалі:

$$y = 2x, \quad x \in (-1; 1).$$

Варіант 8

1. Знайти суму ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{12}{36n^2 + 12n - 35}.$$

2. Дослідити на збіжність ряд:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} n(e^{\frac{1}{n}} - 1)^2; \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+2)!}{3n+5} \cdot \frac{1}{2^n}; \quad в) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)^n}{(2n)^{n+1}}.$$

3. Дослідити ряд на абсолютну або умовну збіжність:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + \cos(2/\sqrt{n+4})}.$$

4. Знайти інтервал збіжності степеневого ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n.$$

5. Обчислити інтеграл з точністю $\varepsilon = 0,001$:

$$\int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^2}}.$$

6. Застосовуючи відповідні степеневі ряди, обчислити з точністю ε значення функції: $\ln \sqrt{1.03}$, $\varepsilon = 10^{-4}$.

7. Знайти перші три ненульові члени розкладу в степеневий ряд розв'язку задачі Коші:

$$y' = \sin x + 0,5y^2, \quad y(0) = 1.$$

8. Розкласти функцію в ряд Фур'є на заданому інтервалі:

$$y = 3x + 1, \quad x \in (0; 2); \quad \text{по косинусах}.$$

Варіант 9

1. Знайти суму ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+4}{n(n+1)(n+2)}.$$

2. Дослідити на збіжність ряд:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}{n}; \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(\ln n)^n}; \quad в) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot (3n-2)}{7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot (2n+5)}.$$

3. Дослідити ряд на абсолютну або умовну збіжність:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin(n\sqrt{n})}{n\sqrt{n}}.$$

4. Знайти інтервал збіжності степеневого ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{\sqrt{n}} x^n}{\sqrt{n^2+1}}.$$

5. Обчислити інтеграл з точністю $\varepsilon = 0,001$:

$$\int_0^{0,1} \sin(10x^2) dx.$$

6. Застосовуючи відповідні степеневі ряди, обчислити з точністю ε значення функції: $\sqrt{230}$, $\varepsilon = 10^{-3}$.

7. Знайти перші три ненульові члени розкладу в степеневий ряд розв'язку задачі Коші:

$$y'' = -xy, \quad y(0) = 1, y'(0) = 0.$$

8. Розкласти функцію в ряд Фур'є на заданому інтервалі:

$$y = 3x, \quad x \in (-\pi; \pi).$$

Варіант 10

1. Знайти суму ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{49n^2 - 35n - 6}.$$

2. Дослідити на збіжність ряд:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}; \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^{\frac{3}{2}}}; \quad в) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n-1} \sqrt{n^2 + 5}}{(n-1)!}.$$

3. Дослідити ряд на абсолютну або умовну збіжність:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)2^{2n+1}}.$$

4. Знайти інтервал збіжності степеневого ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{n \cdot 9^n}.$$

5. Обчислити інтеграл з точністю $\varepsilon = 0,001$:

$$\int_0^{0,1} e^{-2x^2} dx.$$

6. Застосовуючи відповідні степеневі ряди, обчислити з точністю ε значення функції: $\ln 1,2$, $\varepsilon = 10^{-3}$.

7. Знайти перші три ненульові члени розкладу в степеневий ряд розв'язку задачі Коші: $y' = -3x - y^3$, $y(0) = 1$.

8. Розкласти функцію в ряд Фур'є на заданому інтервалі:

$$y = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, \\ 0, & 1 < x < \pi, \end{cases} \quad x \in (0;1) \cup (1;\pi), \text{ по косинусах.}$$

Варіант 11

1. Знайти суму ряду:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{5n-2}{(n-1)n(n+2)}.$$

2. Дослідити на збіжність ряд:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right); \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n \cdot n!}{(2n+2)!!}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{3n-1}{4n+2}\right)^{2n}.$$

3. Дослідити ряд на абсолютну або умовну збіжність:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \operatorname{tg} \frac{\pi}{4\sqrt{n}}}{\sqrt{5n-1}}.$$

4. Знайти інтервал збіжності степеневого ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^{2n-1}}{2n \cdot 4^n}.$$

5. Обчислити інтеграл з точністю $\varepsilon = 0,001$:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{27+x^2}}.$$

6. Застосовуючи відповідні степеневі ряди, обчислити з точністю ε значення функції: $\sin 0,5$; $\varepsilon = 10^{-3}$.

7. Знайти перші три ненульові члени розкладу в степеневий ряд розв'язку задачі Коші:

$$y' = \sin(xy), \quad y(0) = 1.$$

8. Розкласти функцію в ряд Фур'є на заданому інтервалі:

$$y = x^2, \quad x \in (0; \pi), \quad \text{по синусах.}$$

Варіант 12

1. Знайти суму ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{25n^{2+5n-6}}.$$

2. Дослідити на збіжність ряд:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^4 - 1}}; \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{m-1}}{(m-1)!}; \quad в) \sum_n \left(\frac{2n}{4n+3} \right)^{n^2}.$$

3. Дослідити ряд на абсолютну або умовну збіжність:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{\sqrt{n^3}}.$$

4. Знайти інтервал збіжності степеневого ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{x^n}.$$

5. Обчислити інтеграл з точністю $\varepsilon = 0,001$:

$$\int_0^{0,5} \arctg x^2 dx.$$

6. Застосовуючи відповідні степеневі ряди, обчислити з точністю ε значення функції: $\sqrt{e}$, $\varepsilon = 10^{-3}$.

7. Знайти перші три ненульові члени розкладу в степеневий ряд розв'язку задачі Коші:

$$y' = x^2 + y^2, \quad y(0) = 2.$$

8. Розкласти функцію в ряд Фур'є на заданому інтервалі:

$$y = 2 - x, \quad x \in (0;1), \text{ по синусах.}$$

Варіант 13

1. Знайти суму ряду:

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n-4}{n(n-1)(n-2)}.$$

2. Дослідити на збіжність ряд:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cdot 7 \cdot 10 \cdot \dots \cdot (3n+1)}{2^n \cdot (2n-1)}; \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} \sin^n \frac{\pi}{2n}; \quad в) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(n^2+5) \ln n}.$$

3. Дослідити ряд на абсолютну або умовну збіжність:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+3)}{\ln(n+4)}.$$

4. Знайти інтервал збіжності степеневого ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n! x^n}.$$

5. Обчислити інтеграл з точністю $\varepsilon = 0,001$:

$$\int_0^1 \sin x^2 dx.$$

6. Застосовуючи відповідні степеневі ряди, обчислити з точністю ε значення функції: $\ln 9$, $\varepsilon = 10^{-3}$.

7. Знайти перші три ненульові члени розкладу в степеневий ряд розв'язку задачі Коші:

$$y'' = xy' - y + 1, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

8. Розкласти функцію в ряд Фур'є на заданому інтервалі:

$$y = 5x + 2, \quad x \in (-\pi; \pi).$$

Варіант 14

1. Знайти суму ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{16n^2 - 8n - 15}.$$

2. Дослідити на збіжність ряд:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+2n); \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{4^n (n+2)!}; \quad в) \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{2n}{3n+5} \right)^n.$$

3. Дослідити ряд на абсолютну або умовну збіжність:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n-1}{3n}.$$

4. Знайти інтервал збіжності степеневого ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{4^n x^{2n}}.$$

5. Обчислити інтеграл з точністю $\varepsilon = 0,001$:

$$\int_0^{0,5} \frac{\ln(1+x^2)}{x} dx.$$

6. Застосовуючи відповідні степеневі ряди, обчислити з точністю ε значення функції: $\sqrt[5]{30}$, $\varepsilon = 10^{-3}$.

7. Знайти перші три ненульові члени розкладу в степеневий ряд розв'язку задачі Коші:

$$y' = y \sin x, \quad y(0) = 1.$$

8. Розкласти функцію в ряд Фур'є на заданому інтервалі:

$$y = 5x + 2, \quad x \in (-1; 1).$$

Варіант 15

1. Знайти суму ряду:

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{8n-10}{(n-1)(n+1)(n-2)}.$$

2. Дослідити на збіжність ряд:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n + 3^n}; \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n^2-1} \cdot n}{3^{n^2}}; \quad в) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n+2)!}.$$

3. Дослідити ряд на абсолютну або умовну збіжність:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)(3/2)^n}.$$

4. Знайти інтервал збіжності степеневого ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 3^n (x-5)^n}.$$

5. Обчислити інтеграл з точністю $\varepsilon = 0,001$:

$$\int_0^{0,5} x e^{-x^3} dx.$$

6. Застосовуючи відповідні степеневі ряди, обчислити з точністю ε значення

$$\text{функції: } \operatorname{arctg} \frac{1}{18}, \quad \varepsilon = 10^{-4}.$$

7. Знайти перші три ненульові члени розкладу в степеневий ряд розв'язку

$$\text{задачі Коші: } y' = y e^x, \quad y(0) = 2.$$

8. Розкласти функцію в ряд Фур'є на заданому інтервалі:

$$y = \begin{cases} x, & 0 < x \leq 1, \\ 2 - x, & 1 < x < 2 \end{cases} \quad x \in (0; 2), \text{ по синусах.}$$

Варіант 16

1. Знайти суму ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{9n^2 + 3n - 20}.$$

2. Дослідити на збіжність ряд:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{n} \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{n^3}; \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{(n+1)!}; \quad в) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2}.$$

3. Дослідити ряд на абсолютну або умовну збіжність:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n+2)2^{2n}}.$$

4. Знайти інтервал збіжності степеневого ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+1}}{x^n}.$$

5. Обчислити інтеграл з точністю $\varepsilon = 0,001$:

$$\int_0^{0,1} \frac{1 - e^{-2x}}{x} dx.$$

6. Застосовуючи відповідні степеневі ряди, обчислити з точністю ε значення функції: $\sqrt[3]{e}$, $\varepsilon = 10^{-4}$.

7. Знайти перші три ненульові члени розкладу в степеневий ряд розв'язку задачі Коші:

$$y'' = xy^2 - y', \quad y(0) = 2, y'(0) = 1.$$

8. Розкласти функцію в ряд Фур'є на заданому інтервалі:

$$y = \begin{cases} x, & 0 < x \leq 1, \\ 1, & 1 < x < \pi \end{cases} \quad x \in (0; \pi), \text{ по косинусах.}$$

Варіант 17

1. Знайти суму ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+2}{n(n+1)(n+2)}.$$

2. Дослідити на збіжність ряд:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+3}} \left(e^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1 \right); \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n-1)}; \quad в) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2+1}{3n^2-1} \right)^n.$$

3. Дослідити ряд на абсолютну або умовну збіжність:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2}.$$

4. Знайти інтервал збіжності степеневого ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n}.$$

5. Обчислити інтеграл з точністю $\varepsilon = 0,001$:

$$\int_0^{0,5} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx.$$

6. Застосовуючи відповідні степеневі ряди, обчислити з точністю ε значення функції: $\cos 0,1$, $\varepsilon = 10^{-5}$.

7. Знайти перші три ненульові члени розкладу в степеневий ряд розв'язку задачі Коші:

$$y' = 2e^y + xy, \quad y(0) = 0.$$

8. Розкласти функцію в ряд Фур'є на заданому інтервалі:

$$y = 1 - \frac{x}{2}, \quad x \in (-\pi; \pi).$$

Варіант 18

1. Знайти суму ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{4n^2 + 4n - 3}.$$

2. Дослідити на збіжність ряд:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}; \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(2n)!!]^2}{4n!!}; \quad в) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}.$$

3. Дослідити ряд на абсолютну або умовну збіжність:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{tg} \frac{1}{n}.$$

4. Знайти інтервал збіжності степеневого ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{(2n-1)3^n}.$$

5. Обчислити інтеграл з точністю $\varepsilon = 0,001$:

$$\int_0^1 \frac{\ln\left(1 + \frac{x}{5}\right)}{x} dx.$$

6. Застосовуючи відповідні степеневі ряди, обчислити з точністю ε значення

$$\text{функції: } \arcsin \frac{1}{8}, \quad \varepsilon = 10^{-3}.$$

7. Знайти перші три ненульові члени розкладу в степеневий ряд розв'язку

$$\text{задачі Коші: } y' = e^x + xy, \quad y(0) = 0.$$

8. Розкласти функцію в ряд Фур'є на заданому інтервалі:

$$y = x^2, \quad x \in (0; \pi), \quad \text{по косинусах.}$$

Варіант 19

1. Знайти суму ряду:

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{5n-2}{(n-1)n(n+2)}.$$

2. Дослідити на збіжність ряд:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+n}{1+n^2}; \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+5}{n!} \sin \frac{2}{3^n}; \quad в) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\left(2 + \frac{1}{n}\right)^n}.$$

3. Дослідити ряд на абсолютну або умовну збіжність:

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln(2n)}.$$

4. Знайти інтервал збіжності степеневого ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{x}{2}\right)^n.$$

5. Обчислити інтеграл з точністю $\varepsilon = 0,001$:

$$\int_0^{0,1} e^{-8x^2} dx.$$

6. Застосовуючи відповідні степеневі ряди, обчислити з точністю ε значення функції: $\cos 375^\circ$, $\varepsilon = 10^{-5}$.

7. Знайти перші три ненульові члени розкладу в степеневий ряд розв'язку задачі Коші: $y'' = x \sin y'$, $y(1) = 0, y'(1) = \frac{\pi}{2}$.

8. Розкласти функцію в ряд Фур'є на заданому інтервалі:

$$y = 3x + 1, \quad x \in (0; 2), \quad \text{по синусах.}$$

Варіант 20

1. Знайти суму ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{36n^2 - 24n - 5}.$$

2. Дослідити на збіжність ряд:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}}; \quad б) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n \cdot \sqrt[3]{n^2}}{(n+1)!}; \quad в) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^{n^2}.$$

3. Дослідити ряд на абсолютну або умовну збіжність:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n!}.$$

4. Знайти інтервал збіжності степеневого ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n^2}.$$

5. Обчислити інтеграл з точністю $\varepsilon = 0,001$:

$$\int_0^1 \cos x^2 dx.$$

6. Застосовуючи відповідні степеневі ряди, обчислити з точністю ε значення функції: $\ln 1,2$, $\varepsilon = 10^{-4}$.

7. Знайти перші три ненульові члени розкладу в степеневий ряд розв'язку задачі Коші:

$$y' = 1 + x^2 + y^3, \quad y(0) = -2.$$

8. Розкласти функцію в ряд Фур'є на заданому інтервалі:

$$y = x, \quad x \in (0;1).$$

Варіант №21

1. Знайти суму ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-2}{n(n+1)(n+2)}.$$

2. Дослідити на збіжність ряд:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} n^3 \operatorname{tg}^5 \frac{\pi}{n}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!(n+3)!}{[(n+2)!]^3}; \quad \text{в) } \sum_{n=2}^{\infty} n \left(\frac{3n-1}{4n+2} \right)^{2n}.$$

3. Дослідити ряд на абсолютну або умовну збіжність:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n-1}{3n}.$$

4. Знайти інтервал збіжності степеневого ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{(2n-1)2^n}.$$

5. Обчислити інтеграл з точністю до 0,001:

$$\int_0^{0,5} \frac{1-\cos x}{x} dx.$$

6. Застосувавши відповідні степеневі ряди, обчислити з точністю ε значення функції:

$$\arcsin \frac{1}{4}, \varepsilon = 10^{-3}.$$

7. Знайдіть перші чотири ненульові члени розкладу в степеневий ряд розв'язку задачі Коші:

$$y'' = x + y \cos y', y(0) = 1, y'(0) = \frac{\pi}{3}.$$

8. Розкласти функцію в ряд Фур'є на заданому інтервалі:

$$y = x^2, \quad x \in (-\pi; \pi).$$

Варіант №22

1. Знайти суму ряду:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n - 2}.$$

2. Дослідити на збіжність ряд:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)! - (n-1)!}{n^3}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \left(\frac{2n}{3n+1} \right)^n \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n^2}; \quad \text{в) } \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n-3} \right)^{n^2}.$$

3. Дослідити ряд на абсолютну або умовну збіжність:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^{\frac{3}{2}}}.$$

4. Знайти інтервал збіжності степеневого ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{\ln^n(n+1)}.$$

5. Обчислити інтеграл з точністю до 0,001:

$$\int_0^{0,1} \frac{\ln(1+4x)}{x} dx.$$

6. Застосувавши відповідні степеневі ряди, обчислити з точністю ε значення функції:

$$\ln(1,06), \varepsilon = 10^{-5}.$$

7. Знайдіть перші чотири ненульові члени розкладу в степеневий ряд розв'язку задачі Коші:

$$y' = 2e^y - xy, y(0) = 0.$$

8. Розкласти функцію в ряд Фур'є на заданому інтервалі:

$$y = 2x - 1, \quad x \in (0; \pi), \quad \text{по синусах.}$$

Варіант №23

1. Знайти суму ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)(n+3)}.$$

2. Дослідити на збіжність ряд:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!}{[(2n+2)!!]^2}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{3n+1}\right)^n \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}; \quad \text{в) } \sum_{n=3}^{\infty} \frac{n}{(n^2-3)\ln^2 n}.$$

3. Дослідити ряд на абсолютну або умовну збіжність:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^3}{3^n}.$$

4. Знайти інтервал збіжності степеневого ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{\sqrt{n}}.$$

5. Обчислити інтеграл з точністю до 0,001:

$$\int_0^1 \sqrt[3]{x} \cos x dx.$$

6. Застосувавши відповідні степеневі ряди, обчислити з точністю ε значення функції:

$$\sqrt[3]{9}, \varepsilon = 10^{-3}.$$

7. Знайдіть перші чотири ненульові члени розкладу в степеневий ряд розв'язку задачі Коші:

$$y' = e^x + y, y(0) = 4.$$

8. Розкласти функцію в ряд Фур'є на заданому інтервалі:

$$y = 2x, \quad x \in (0; \pi), \quad \text{по косинусах.}$$

Варіант №24

1. Знайти суму ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{9n^2 + 3n - 2}.$$

2. Дослідити на збіжність ряд:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\alpha}{n}, (0 < \alpha < \pi);$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^{4n}}{(2n)!!};$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{n+1} \right)^{n^2}.$

3. Дослідити ряд на абсолютну або умовну збіжність:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{3n}{4n+1} \right)^n.$$

4. Знайти інтервал збіжності степеневого ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(5n)! x^n}.$$

5. Обчислити інтеграл з точністю до 0,001:

$$\int_0^{0,5} e^{-0,16x^2} dx.$$

6. Застосувавши відповідні степеневі ряди, обчислити з точністю ε значення функції:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{30}}, \quad \varepsilon = 10^{-3}.$$

7. Знайдіть перші чотири ненульові члени розкладу в степеневий ряд розв'язку задачі Коші:

$$y' = x^2 - y^2, y(0) = 1.$$

8. Розкласти функцію в ряд Фур'є на заданому інтервалі:

$$y = x - 1, \quad x \in (0; 1).$$

Варіант №25

1. Знайти суму ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+3)}.$$

2. Дослідити на збіжність ряд:

$$\text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}{n!};$$

$$\text{б)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2}{3n^2 + 5} \right)^n;$$

$$\text{в)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{(n^3 + 1) \ln n}.$$

3. Дослідити ряд на абсолютну або умовну збіжність:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{tg} \frac{2}{n}.$$

4. Знайти інтервал збіжності степеневого ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{\sqrt{(3n-2)2^n}}.$$

5. Обчислити інтеграл з точністю до 0,001:

$$\int_0^{0,25} \ln(1 + \sqrt{x}) dx.$$

6. Застосувавши відповідні степеневі ряди, обчислити з точністю ε значення функції: $\lg 3, \varepsilon = 10^{-4}$.

7. Знайдіть перші чотири ненульові члени розкладу в степеневий ряд розв'язку задачі Коші:

$$y'' = yy' - x^2, y(0) = y'(0) = 1.$$

8. Розкласти функцію в ряд Фур'є на заданому інтервалі:

$$y = \begin{cases} x, & 0 < x \leq 1 \\ 1, & 1 < x < \pi \end{cases}, \quad x \in (0; \pi), \text{ по синусах.}$$

Варіант №26

1. Знайти суму ряду:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{4n^2 + 8n + 3}.$$

2. Дослідити на збіжність ряд:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{101 \cdot 102 \cdot \dots \cdot (100 + 2^{n-1})}{(2n)!!}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{2^n} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n^2}; \quad \text{в) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2n-1) \ln(n+1)}.$$

3. Дослідити ряд на абсолютну або умовну збіжність:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^4 \sqrt{n+1}}.$$

4. Знайти інтервал збіжності степеневого ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{n!}.$$

5. Обчислити інтеграл з точністю до 0,001:

$$\int_0^{0,2} \frac{1 - e^{-\frac{x}{2}}}{x} dx.$$

6. Застосувавши відповідні степеневі ряди, обчислити з точністю ε значення функції:

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{10}, \varepsilon = 10^{-5}.$$

7. Знайдіть перші чотири ненульові члени розкладу в степеневий ряд розв'язку задачі Коші:

$$y' = y^2 - x, y(0) = 1.$$

8. Розкласти функцію в ряд Фур'є на заданому інтервалі:

$$y = 1 - \frac{x}{2}, \quad x \in (0; \pi), \quad \text{по косинусах.}$$

Варіант №27

1. Знайти суму ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n+3}{n(n+1)(n+3)}.$$

2. Дослідити на збіжність ряд:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(2n+1)!}{(3n)!}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{3n+1} \right)^{\frac{n}{2}}.$$

3. Дослідити ряд на абсолютну або умовну збіжність:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{n}{3n+2} \right)^n.$$

4. Знайти інтервал збіжності степеневого ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-1)^n}{2n-1}.$$

5. Обчислити інтеграл з точністю до 0,001:

$$\int_0^{0.1} \cos(10x^2) dx.$$

6. Застосувавши відповідні степеневі ряди, обчислити з точністю ε значення функції:

$$\sin 15^\circ, \varepsilon = 10^{-5}.$$

7. Знайдіть перші чотири ненульові члени розкладу в степеневий ряд розв'язку задачі Коші:

$$y'' + y \cos x = 0, y(0) = 1, y'(0) = 0.$$

8. Розкласти функцію в ряд Фур'є на заданому інтервалі:

$$y = 5x, \quad x \in (0;1), \quad \text{по косинусах.}$$

Варіант №28

1. Знайти суму ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{9n^2 + 6n - 8}.$$

2. Дослідити на збіжність ряд:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n^2+1} \right)^2;$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}};$$

$$\text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n}{3n+1} \right)^{2n+1}.$$

3. Дослідити ряд на абсолютну або умовну збіжність:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+2}{2^n}.$$

4. Знайти інтервал збіжності степеневого ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{(2n-1)^2 \sqrt{3^n}}.$$

5. Обчислити інтеграл з точністю до 0,001:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{125+x^2}}.$$

6. Застосувавши відповідні степеневі ряди, обчислити з точністю ε значення функції:

$$\cos 0,5, \varepsilon = 10^{-3}.$$

7. Знайдіть перші чотири ненульові члени розкладу в степеневий ряд розв'язку задачі Коші:

$$y' = \cos(xy), y(0) = 1.$$

8. Розкласти функцію в ряд Фур'є на заданому інтервалі:

$$y = \begin{cases} 1, & -1 < x < 0 \\ 3, & 0 < x < 1 \end{cases}, \quad x \in (-1; 0) \cup (0; 1).$$

Варіант №29

1. Знайти суму ряду:

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{4-5n}{n(n-1)(n-2)}.$$

2. Дослідити на збіжність ряд:

а) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)\ln n};$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n!}{n^n}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\left(2 + \frac{1}{n}\right)^n}.$

3. Дослідити ряд на абсолютну або умовну збіжність:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n}.$$

4. Знайти інтервал збіжності степеневого ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n \cdot 4^{n-1}}.$$

5. Обчислити інтеграл з точністю до 0,001:

$$\int_0^{0,5} \frac{\sin x^2}{x^2} dx.$$

6. Застосувавши відповідні степеневі ряди, обчислити з точністю ε значення функції:

$$\sqrt[4]{19}, \varepsilon = 10^{-3}.$$

7. Знайдіть перші чотири ненульові члени розкладу в степеневий ряд розв'язку задачі Коші:

$$y' = 2x + \cos y, y(0) = 0.$$

8. Розкласти функцію в ряд Фур'є на заданому інтервалі:

$$y = |x|, x \in (-\pi; \pi).$$

Варіант №30

1. Знайти суму ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{9n^2 + 12n - 5}.$$

2. Дослідити на збіжність ряд:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{\frac{1}{n^2}} - 1 \right);$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{n^n};$$

$$\text{в) } \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n-3} \right)^{n^2}.$$

3. Дослідити ряд на абсолютну або умовну збіжність:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2}{\left(3 + \frac{1}{n} \right)^n}.$$

4. Знайти інтервал збіжності степеневого ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n n}.$$

5. Обчислити інтеграл з точністю до 0,001:

$$\int_0^{0,5} \sqrt{1+x^3} dx.$$

6. Застосувавши відповідні степеневі ряди, обчислити з точністю ε значення функції:

$$\frac{1}{\sqrt[4]{e}}, \varepsilon = 10^{-4}.$$

7. Знайдіть перші чотири ненульові члени розкладу в степеневий ряд розв'язку задачі Коші:

$$y' = e^x + y^2, y(0) = 0.$$

8. Розкласти функцію в ряд Фур'є на заданому інтервалі:

$$y = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}, \quad x \in (0; \pi), \quad \text{по косинусам.}$$

Додатки

1.0 Допоміжні відомості

$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_0 n^l + a_1 n^{l-1} + \dots + a_l}{b_0 n^m + b_1 n^{m-1} + \dots + b_m} = \begin{cases} 0, & l < m, \\ \frac{a_0}{b_0}, & l = m, \\ \infty, & l > m, \end{cases}$	
$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e;$	$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1, \quad a > 0;$
Таблиця еквівалентностей ($u(x) \rightarrow 0$, коли $x \rightarrow x_0$)	
$\sin u(x) \sim u(x);$ $\operatorname{tg} u(x) \sim u(x);$ $1 - \cos u(x) \sim \frac{u^2(x)}{2};$ $\arcsin u(x) \sim u(x);$	$\operatorname{arctg} u(x) \sim u(x);$ $e^{u(x)} - 1 \sim u(x);$ $\ln(1 + u(x)) \sim u(x);$ $(1 + u(x))^\mu - 1 \sim \mu u(x)$
Факторіал	$n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n, \quad 0! = 1;$ $(n+1)! = n!(n+1);$ $n! = (n-1)!n$
Подвійний факторіал	$(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1);$ $(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n = 2^n n!$
Сума геометричної прогресії з першим членом b_0 та знаменником q	$S_n = \sum_{k=1}^n b_0 q^{k-1} = b_0 \frac{q^n - 1}{q - 1}$
Стірлінгова формула	$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n, \quad n \rightarrow \infty$

Додатки

1.1 Числові ряди

Числовий ряд. Нехай задано числову послідовність $\{a_n\}$. Числовим рядом називають вираз $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$ $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ – члени ряду; $a_n = f(n)$ – n-й загальний член ряду; $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k$ – n -а частинна сума ряду; $R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$ – n -й залишок числового ряду.	
Збіжність числового ряду. Числовий ряд називається збіжним, якщо послідовність частинних сум $\{S_n\}$ збігається до деякого числа S, яке називається сумою ряду і пишуть $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$	
Ознаки збіжності рядів. Необхідна умова збіжності ряду. Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається, то $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$ Достатня ознака розбіжності ряду. Якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ розбігається. Критерії збіжності рядів. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збіжний тоді і лише тоді, коли збіжний довільний його залишок.	Властивості збіжних рядів. Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається до суми S, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c a_n$, де $c \in R$, збігається до суми cS. Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ та ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ збігаються до сум S_1 та S_2, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ збігається до суми $S_1 \pm S_2$. Переставляння, відкидання або приєднання скінченної кількості членів ряду не впливає на його збіжність(розбіжність).

Додатки

1.2 Ряди з додатними членами

Перша ознака порівняння(у формі нерівності). Якщо задано два ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ з невід'ємними членами і для всіх n виконано нерівність $a_n \leq b_n$, то: 1) Із збіжності $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ випливає збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. 2) Із розбіжності $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ випливає розбіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.	Друга ознака порівняння(гранична). Якщо задано два ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ з додатними членами і існує $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = c \neq 0$, то ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ одночасно збігаються або одночасно розбігаються.
Для порівняння часто використовують ряди:	
Геометричний ряд	$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} - \begin{cases} \text{збіжний, } q < 1, \\ \text{розбіжний, } q \geq 1 \end{cases}$
Гармонічний ряд	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ – розбіжний
Ряд Діріхле (узагальнено гармонічний)	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} - \begin{cases} \text{збіжний, } \alpha > 1 \\ \text{розбіжний, } \alpha \leq 1 \end{cases}$
Д'Аламберова ознака. Якщо для ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ з додатними членами існує $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$, то: 1) Для $L < 1$ ряд збігається; 2) Для $L > 1$ ряд розбігається; 3) Для $L = 1$ ряд потребує додаткового дослідження.	Радикальна ознака Коші. Якщо для ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ з додатними членами існує $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = L$, то: 1) Для $L < 1$ ряд збігається; 2) Для $L > 1$ ряд розбігається; 3) Для $L = 1$ ряд потребує додаткового дослідження.

Інтегральна ознака Коші. Нехай члени

ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ мають вигляд $a_n = f(n)$,

починаються з $n = k \in \mathbb{N}$,

де $f(n)$ — неперервна, невід’ємна,

спадна функція на проміжку $[k; +\infty)$.

Тоді ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається (розбігається) тоді і

лише тоді, коли збігається (розбігається)

інтеграл

$$\int_k^{\infty} f(x) dx.$$

Додатки

1.3 Знакозмінні ряди

Знакозмінний ряд. Числовий ряд, який містить нескінчену кількість додатних і нескінчену кількість від’ємних членів називають знакозмінним.	Знакопереміжний ряд. Числовий ряд, знаки членів якого строго чередуються називають переміжним.
Абсолютна та умовна збіжність ряду. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ називають абсолютно збіжним, якщо збігається ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n $, та умовно збіжним, якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається, проте ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n $ розбігається.	Якщо збігається ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n $, утворений з модулів членів знакозмінного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, то збігається і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
Ознака Лейбніца. Нехай задано переміжний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$, де $a_n > 0$, $(n \in N)$. Якщо: 1) $a_n \geq a_{n+1}, n \in N$; 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ То цей ряд збігається. Сума його не перевищує першого члена ($S \leq a_1$) і $ R \leq a_{n+1} \quad \forall n \in N$.	
Схема дослідження переміжного ряду на збіжність. Досліджують ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ на абсолютну збіжність, вивчаючи ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n $. Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n $ збігається, то кажуть, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається абсолютно. Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n $ розбігається, то застосовують до ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ Лейбніцову ознаку або достатню ознаку розбіжності. Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається, то кажуть, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається умовно. Інакше — ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ розбігається.	

Додатки

1.4 Степеневі ряди

Степеневий ряд. Степеневим рядом за степенями $(x - x_0)$ (ступеневим рядом з центром в точці x_0) називають функціональний ряд вигляду $c_0 + c_1(x - x_0) + \dots + c_n(x - x_0)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n$	
Теорема Абеля. Якщо степеневий ряд збігається в точці x_1, то він абсолютно збігається в кожній точці x, для якої $x < x_1$; Якщо степеневий ряд розбігається в точці x_2, то він розбігається скрізь, де $x > x_2$.	Наслідок. Степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ абсолютно збігається на деякому інтервалі $(-R; R)$, який називають інтервалом збіжності, число R — радіус збіжності.
Інтервал збіжності степеневому ряду $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n$	$ x - x_0 < R \Leftrightarrow (x_0 - R; x_0 + R)$
Формула Коші-Адамара	$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left \frac{c_n}{c_{n+1}} \right = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{ c_n }}$
Властивості степеневих рядів. Сума $S(x)$ степеневому ряду $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ є неперервною функцією в інтервалі збіжності $(-R; R)$. Степеневі ряди $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ та $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, з радіусами збіжності R_1 та R_2 можна почленно додавати і віднімати. Радіус збіжності суми і різниці не менше, ніж найменше з чисел R_1 та R_2. Степеневий ряд усередині інтервалу збіжності можна почленно диференціювати: $\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n x^{n-1}, \quad x \in (-R; R)$ Степеневий ряд можна почленно інтегрувати на кожному відрізку, який міститься всередині інтервалу збіжності: $\int_{\alpha}^x \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{t^{n+1}}{n+1} \Big _{\alpha}^x,$ $-R < \alpha < x < R$	

Додатки

1.5 Розвинення функції у степеневий ряд (Тейлорові ряди)

Тейлорів ряд. Нехай функція $f(x)$ в деякому околі точки x_0 має похідні всіх порядків. Степеневий ряд:

$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

Називають Тейлоровим рядом функції $f(x)$ з центром в точці x_0 .

1.6 Тейлорові розвинення елементарних функцій з центром в точці $x=0$.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in R$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in R$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in R$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in R$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in R$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \dots, \quad |x| < 1$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad |x| < 1$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^n x^n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^n, \quad |x| < 1$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad x \in (-1; 1]$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad x \in [-1; 1]$$

Додатки

1.7 Ряди Фур'є

Тригонометричний ряд Фур'є. Тригонометричним рядом Фур'є T -

періодичної, інтегральної функції $f(x)$ на відрізку $\left[-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}\right]$ називають ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega_1 x) + b_n \sin(n\omega_1 x)), \quad \omega_1 = \frac{2\pi}{T},$$

Коефіцієнти якого визначають за формулами:

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) dx; \quad a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cos(n\omega_1 x) dx; \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \sin(n\omega_1 x) dx$$

Теорема Діріхле. Якщо T -періодична функція $f(x)$ справджує умови

Діріхле на відрізку $\left[-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}\right]$ тобто

функція $f(x)$ на цьому відрізку:

- 1) Кусково-неперервна;
- 2) Кусково-монотонна;
- 3) Обмежена,

То її ряд Фур'є збігається в кожній точці відрізка.

Його сума:

$$1) \quad S(x) = f(x), \text{ якщо } x \in \left(-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}\right) \text{ і}$$

є точкою неперервності функції $f(x)$.

$$2) \quad S\left(-\frac{T}{2}\right) = S\left(\frac{T}{2}\right) = \frac{1}{2} \left(f\left(-\frac{T}{2} + 0\right) + f\left(\frac{T}{2} + 0\right) \right),$$

якщо $x \in \left(-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}\right)$ і є точкою

розриву функції $f(x)$.

Додатки

1.8 Різні форми ряду Фур'є

Ряд Фур'є для Т-періодичної функції f , $x \in \left(-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}\right)$, $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$.
$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega_1 x) + b_n \sin(n\omega_1 x)),$ $a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) dx; \quad a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cos(n\omega_1 x) dx; \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \sin(n\omega_1 x) dx$
Ряд Фур'є для Т-періодичної парної функції f :
$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_1 x),$ $a_0 = 2 \cdot \frac{2}{T} \int_0^{T/2} f(x) dx; \quad a_n = 2 \cdot \frac{2}{T} \int_0^{T/2} f(x) \cos(n\omega_1 x) dx; \quad b_n = 0$
Ряд Фур'є для Т-періодичної непарної функції f :
$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega_1 x),$ $a_0 = a_n = 0; \quad b_n = 2 \cdot \frac{2}{T} \int_0^{T/2} f(x) \sin(n\omega_1 x) dx$
Ряд Фур'є для Т-періодичної парної функції, графік якої симетричний щодо точки $A(0; c)$
$f(x) \sim c + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega_1 x)$ $a_0 = 2c; a_n = 0; b_n = 2 \cdot \frac{2}{T} \int_0^{T/2} [f(x) - c] \sin(n\omega_1 x) dx, \quad n \in N$

Використана та рекомендована література

1. Дубовик В.П. Вища математика: навч. посіб / В. П. Дубовик, І. І. Юрик. – К.: Ігнатекс-Україна, 2013. – 648 с.
2. Дубовик В.П. Вища математика: Збірник задач: навч. посіб. / В. П. Дубовик, І. І. Юрик, І. П. Вовкодав та ін. – К.: Ігнатекс-Україна, 2011. – 480 с.
3. Грималюк В.П. Вища математика: У 2 ч.: навч. посіб. / Грималюк В.П., Кухарчук М.М., Ясінський В.В. – К.: Віпол, 2004. – Ч. 2. – 400 с.
4. Герасимчук В. С. Вища математика. Повний курс у прикладах і задачах: навч. посіб.: Кратні, криволінійні та поверхневі інтеграли. Елементи теорії поля. Ряди. Прикладні задачі/ В.С. Герасимчук, Г. С. Васильченко, В. І. Кравцов. – Київ : Книги України ЛТД, 2009. – 400 с.
5. Денисюк В.П. Вища математика. Модульна технологія навчання. Навч. посібник (у 4 частинах). Ч.2 / В.П.Денисюк, В.К. Репета. – К: Книжк. вид-во Нац. авіац. ун-ту, 2005. – 276 с.
6. Бойко О. Вища математика: базовий підручник для студентів вищих навчальних закладів / О. Бойко, О. Черняк, В. Пономаренко та ін. – Х.: Фоліо, 2014. – 669 с.
7. Вища математика: Навч.-метод. посібник для самост. вивч. дисц. / К. Г. Валєєв, І. А. Джалладова, О. І. Лютий та ін. – К.: КНЕУ, 2002. – 606 с.
8. Зайцев Є. П. Вища математика: інтегральне числення функцій однієї та багатьох змінних, звичайні диференціальні рівняння, ряди: навч. посіб. / Є. П. Зайцев. – К.: Алерта, 2018. – 608 с.
9. Клепко В. Ю. Вища математика в прикладах і задачах: навчальний посібник / В.Ю.Клепко, В.Л. Голець. – К.: Центр навчальної літератури, 2019. – 594 с.
10. Овчинников П. П. Вища математика: підручник. У 2 ч. Ч. 2. Диференціальні рівняння. Операційне числення. Ряди та їх застосування. Стійкість за Ляпуновим. Рівняння математичної фізики. Оптимізація і керування. Теорія ймовірностей. Числові методи / П. П. Овчинников, Ф. П. Яремчук, В. М. Михайленко. – К. : Техніка, 2004. – 792 с.
11. Соколенко О. І. Вища математика: Підручник / О. І. Соколенко. – К.: Видав. центр «Академія», 2002. – 432 с.

Зміст

Вступ.....	3
ТЕОРЕТИЧНІ ПИТАННЯ ДО РОЗДІЛУ «ЧИСЛОВІ ТА ФУНКЦІОНАЛЬНІ РЯДИ»	4
1. Числові ряди. Частинні суми. Збіжність числових рядів	6
2. Основні властивості збіжних числових рядів.	
НЕОБХІДНА ОЗНАКА ЗБІЖНОСТІ ЧИСЛОВОГО РЯДУ	9
Завдання для самостійної роботи 1	11
3. Ознаки порівняння числових рядів з додатними членами	13
4. Достатні ознаки збіжності числових рядів (ознака Д'АЛАМБЕРА І РАДИКАЛЬНА ОЗНАКА КОШІ). ІНТЕГРАЛЬНА ОЗНАКА КОШІ	17
Завдання для самостійної роботи 2	23
5. Числові знакозмінні ряди $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot a_n$.	
ТЕОРЕМА (ОЗНАКА) ЛЕЙБНІЦА.....	25
6. Ряди з довільними за знаком членами.	
АБСОЛЮТНА ТА УМОВНА ЗБІЖНІСТЬ	27
Завдання для самостійної роботи 3	30
7. Функціональні ряди. Область збіжності.	
РІВНОМІРНА ЗБІЖНІСТЬ. ОЗНАКА ВЕЙЄРШТРАССА.....	32
8. Степеневі ряди. Означення.	
ІНТЕРВАЛ ЗБІЖНОСТІ, РАДІУС ЗБІЖНОСТІ. ТЕОРЕМА АБЕЛЯ	36
9. Основні властивості степеневих рядів в області збіжності.....	42
Завдання для самостійної роботи 4	43
10. Ряди ТЕЙЛОРА І МАКЛОРЕНА	44
11. Розклад в ряд МАКЛОРЕНА ЕЛЕМЕНТАРНИХ ФУНКЦІЙ:	
$e^x, ch x, sh x, sin x, cos x$	46
12. БІНОМІАЛЬНИЙ РЯД. (Розклад в ряд МАКЛОРЕНА ФУНКЦІЙ	
$(1 + x)^\alpha, ln(1 + x), ln(1 - x), ln \frac{1+x}{1-x}, arctgx, arcsinx$).	

БІНОМ НЬЮТОНА	50
ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ 5	57
ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ 6	58
13. Ряд Фур'є для 2π -періодичних функцій.	
ТЕОРЕМА ДІРІХЛЕ.....	60
14. Ряд Фур'є для $2L$ -періодичної функції.	
Ряди Фур'є для парних і непарних періодичних функцій.....	66
15. Ряд Фур'є для функції, заданої на відрізку $[0; l]$	69
ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ 7	74
ЗАВДАННЯ ДЛЯ ТИПОВОЇ РОЗРАХУНКОВОЇ РОБОТИ	76
Додатки. Допоміжні відомості	106
СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ТА РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ	115