І. П. Гаркуша, З. П. Мокляк, Ю. О. Буслов

Фізика.
Задачі з розв’язаннями

(Навчальний посібник
для вступників до
вищих навчальних
закладів)

Дніпропетровськ
НГУ
2003

ББК 22.3я72
Г40
УДК 53(075.4)

Фізика. Задачі з розв'язаннями: Навч. посібник **І. П. Гаркуша, З. П. Мокляк, Ю. О. Буслов –** Дніпропетровськ; Національна гірнича академія України, 2003. — 000 с.

Посібник являє собою збірник задач з розв'язаннями з усіх розділів програми курсу фізики для середніх шкіл. Кожному параграфу передують короткі теоретичні відомості та основні формули. Наведені розв'язання біля 450 задач, ще 150 задач дані для самостійного розв'язання.

Може бути рекомендований учням середніх шкіл, ліцеїв, коледжів і гімназій як додатковий матеріал для успішного вивчення фізики, особам, які готуються до вступних іспитів у вузи. Надасть методичну допомогу вчителям фізики середніх загальноосвітніх шкіл. Може бути корисним для студентів педагогічних та інженерно-технічних вищих навчальних закладів.

ISBN 000-0000-00-0

Рецензенти: д-р фіз.-мат. наук, професор А. Ю. Кудзін (Дніпропетровський національний університет) і канд. фіз.-мат. наук, професор. Р. Г. Романец (Придніпровська державна академія будівництва та архітектури).

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України як навчальний посібник для вступників до вищих навчальних закладів (лист №14/18.2 – 081 від 09.06.2003)

ISBN 000-0000-00-0

© Національний гірничий університет, 2003

© І. П. Гаркуша, З.П. Мокляк, Ю. О. Буслов 2003

ЗМІСТ

Передмова 6

Методичні вказівки до розв'язання задач 7

1 розділ. Механіка

1.1. Кінематика. Шлях, переміщення. Середня шляхова швидкість. Відносність руху. Закон додавання швидкостей. Прямолінійний нерівномірний рух. Прискорення. Рівномірний рух по колу. Кутова та лінійна швидкості. Доцентрове прискорення. Вільне падіння. Рух тіла, кинутого вертикально вгору. Рух тіла, кинутого горизонтально. Рух тіла, кинутого під кутом до горизонту. 8

1.2. Основи динаміки. Застосування законів Ньютона до прямолінійного руху тіла. Рух тіла з урахуванням сил тертя. Закон всесвітнього тяжіння. Сила пружності. Закон Гука. Застосування другого закону Ньютона до руху тіла по колу..... 32

1.3. Закони збереження в механіці. Закон збереження імпульсу. Робота. Потужність. Енергія. Закон збереження енергії..... 49

1.4. Статика. Рівновага тіл, що не обертаються. Правило моментів. Центр тяжіння..... 73

1.5. Статика рідин і газів. Тиск рідини на дно і стінку посудини. Закон сполучених посудин. Закон Архімеда..... 87

2 розділ. Молекулярна фізика. Теплові явища

2.1. Основи молекулярно-кінетичної теорії. Ідеальний газ. Маса і розміри молекул. Молекулярно-кінетична теорія. Рівняння стану ідеального газу. Газові закони. Ізопроцеси в газах. Вологість повітря.. Поверхневий натяг. Капілярні явища..... 94

2.2. Теплові явища. Основи термодинаміки. Робота і кількість теплоти. Перший закон термодинаміки. Зміна внутрішньої енергії тіл під час теплообміну. Рівняння теплового балансу. ККД теплового

двигуна..... 114

3 розділ. Електродинаміка

3.1. Електростатика. Взаємодія точкових зарядів. Закон Кулона. Напруженість поля точкового заряду. Принцип суперпозиції. Робота під час переміщення заряду в електричному полі. Потенціал. Зв'язок між напруженістю і напругою. Рух заряджених частинок в електричному полі. Електроємність. Конденсатори. З'єднання конденсаторів. Енергія зарядженого конденсатора. Енергія електричного поля..... 126

3.2. Закони постійного струму. Сила струму. Закон Ома для ділянки кола. Опір провідників. Послідовне і паралельне з'єднання провідників. Амперметр і вольтметр у колі постійного струму. Залежність опору металевих провідників від температури. Закон Ома для повного кола. Робота і потужність струму. З'єднання елементів у батарею. Електричний струм у металах і рідинах..... 156

3.3. Магнітне поле Електромагнітна індукція. Магнітна індукція. Сила Ампера. Магнітне поле прямого струму. Принцип суперпозиції магнітних полів. Магнітний потік. Рух заряджених частинок в електричному і магнітному полях. Сила Лоренца. Електромагнітна індукція. Індуктивність контуру. Самоіндукція..... 181

4 розділ. Коливання і хвилі

4.1. Механічні коливання і хвилі . Кінематика гармонічних коливань. Динаміка гармонічних коливань. Математичний маятник. Коливання вантажу на пружині. Хвилі в пружному середовищі..... 216

4.2. Електромагнітні коливання і хвилі. Коливальний контур. Змінний струм. Ємнісний опір. Індуктивний опір. Послідовне з'єднання *R*,*L* і *C* в колі змінного струму. Потужність змінного струму. Резонанс в електричному колі. Трансформатор. Електромагнітні хвилі..... 230

5 розділ. Оптика

5.1. Геометрична оптика . Відбивання і заломлення світла. Повне відбивання. Лінзи..... 248

5.2.Хвильова оптика. Довжина світлової хвилі в середовищі. Інтерференція світла. Дифракція світла..... 267

6 розділ. Елементи релятивістської та квантової фізики

6.1. Елементи теорії відносності..... 274

6.2. Світлові кванти Фотони. Фотоефект..... 278

6.3. Будова атома. Атом водню за теорією Бора..... 283

6.4. Фізика атомного ядра. Склад атомного ядра. Енергія зв'язку ядра. Радіоактивність. Ядерні реакції..... 287

Додаток. Таблиці фізичних величин 297

ПЕРЕДМОВА

В основу посібника покладені методичні розробки відомого в Україні вчителя Зінаїди Павлівни Мокляк, які віддзеркалюють її багаторічний досвід викладання фізики в школі.

Посібник містить близько 600 задач з усіх розділів курсу фізики для середньої школи, з них біля 450 задач з розв'язаннями. Він укладений відповідно до програми з фізики для середніх загальноосвітніх шкіл і діючих шкільних підручників з фізики. Крім задач, укладених авторами, наведені також задачі з інших джерел, які, на погляд авторів, мають певну методичну цінність.

Посібник складається з шести розділів, що відповідають розділам курсу фізики. Кожний розділ містить декілька параграфів, які поділяються на окремі рубрики. На початку кожного розділу наведені короткі теоретичні відомості і основні формули, що служать для розв'язування задач даного розділу.

Більшість задач відноситься до розряду звичайних шкільних задач – легких і середніх, але наводяться й розв'язання задач підвищеної складності. Біля 150 задач є тренувальними, які можуть використовуватись для самоперевірки, до них наведені лише відповіді. Значна частина задач пропонувалася на вступних іспитах у вузи.

Для зручності користування посібником у випадках нескладних типових задач розв'язання наводяться без пояснень. Такі пояснення читач, який ретельно вивчив теоретичний матеріал, наведе самостійно, або легко знайде у шкільному підручнику. Більш складні задачі супроводжуються докладними поясненнями.

Посібник призначений, в першу чергу, для учнів середніх шкіл, ліцеїв і гімназій як додатковий матеріал для успішного навчання. Він може також використовуватись учнями старших класів шкіл, які самостійно готуються до вступних іспитів у вузи, особами, які займаються самоосвітою. Автори сподіваються, що посібник надасть методичну допомогу вчителям фізики середніх загальноосвітніх шкіл.

Автори висловлюють подяку студенту Національного гірничого університету А. Руссу за допомогу в комп'ютерному наборі посібника.

Методичні вказівки до розв’язання задач

Розв’язання задач є суттєвим елементом вивчення курсу фізики. Без застосування теоретичних знань до практичних задач вивчення курсу фізики не може бути повним.

Розв’язуючи задачі з фізики, треба додержуватися таких правил.

1. Вивчити відповідний **теоретичний матеріал** підручника. Без цього спроби приступити до розв’язання задач є марними і дають змогу, у кращому випадку, одержати формальні відповіді. Ознайомитись з короткими теоретичними відомостями, наведеними в збірнику перед кожною темою.

2. Уважно прочитати **умову задачі,** з’ясувати постановку питання. Як правило, жодне слово в умові задачі не є зайвим. Треба відмітити всі інформативні слова й відобразити інформацію, яку вони несуть, у скороченому запису. Деякі дані, що необхідні для розв’язання задачі, можна одержати з таблиць, вміщених у кінці збірника. Виразити всі дані в СІ. Там, де це можливо, обов’язково виконати **рисунок**, який пояснює фізичний зміст задачі, адже грамотно побудований рисунок є гарантією розв’язання задачі.

3. Установити, які **фізичні явища** лежать в основі задачі. Записати формули, що їх виражають, користуючись тими, що наведені у вступі до розділу. Визначити розв’язок **у загальному** (літерному) **вигляді**. Під час розв’язання задачі треба посилатися на відповідний фізичний закон.

4. Після одержання розв’язку в загальному вигляді слід його **проаналізувати**, для чого переконатися в тому, що одержаний результат має розмірність шуканої величини.

5. Одержати **числову відповідь**, підставивши числа в кінцеву формулу Проміжні значення величин обчислювати не треба. Під час обчислень треба уникнути поширеної помилки, коли за допомогою калькулятора одержують результат з точністю, що значно перевищує точність вихідних даних.

6. Після одержання числового результату потрібно оцінити його **правдоподібність**. Така оцінка іноді допомагає знайти допущену помилку. Наприклад, швидкість частинки не може перевищувати $c = 3 \cdot 10^8$ м/с, заряд частинки не може бути меншим за заряд електрона та ін.

1 розділ

МЕХАНІКа

1.1. кінематика

Основні закони і формули

- **Векторами** називаються величини, що характеризуються числовим значенням і напрямом і додаються за правилом паралелограма. Числове значення вектора зветься його модулем.

Модуль вектора завжди додатний. Проекцією вектора $\vec{A}$ на вісь *Ox* називається величина $A_x = A \cos \varphi$, де A – модуль вектора, φ – кут між напрямом вектора і віссю *Ox*.

- Середня швидкість:

$$<\vec{v}> = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t},$$

де $\Delta\vec{r}$ – переміщення тіла.

- Середня шляхова швидкість:

$$<v> = \frac{s}{t},$$

де s – шлях, пройдений тілом за час t.

- **Прямолінійний рух** вздовж осі *Ox*.

<u>*Рівномірний рух*</u>: прискорення $a = 0$; швидкість постійна $v = v_0$; шлях $s = v_0 t$; координата $x = x_0 + v_0 t$.

<u>*Рівнозмінний рух*</u>: прискорення $\vec{a} = \frac{\vec{v} - \vec{v}_0}{t}$, де $\vec{v}_0$ – початкова швидкість тіла, $\vec{v}$ – швидкість у і момент часу t, t – час, який пройшов після початку руху. $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t$, або у проекціях на координатну вісь *Ox:* $v_x = v_{0x} + a_x t$. Для спрощення запису індекс (x) у подальшому не пишемо. Підкреслимо, що проекції векторів швидкості і прискорення на координатну вісь *Ox* можуть бути як додатними, якщо вектор спрямований вздовж *Ox*, так і від'ємними, якщо вектор спрямований у протилежний осі *Ox* бік.

Швидкість v, шлях s і координата x тіла у будь-який момент часу:

$$v = v_0 + at;$$

$$s = v_0 t + \frac{at^2}{2};$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2};$$

$$v^2 - v_0^{\ 2} = 2as.$$

Під v і a слід розуміти проекції швидкості й прискорення на вісь Ox.

Формула шляху s у випадку рівносповільненого руху є справедливою тільки до моменту припинення руху.

Під час вільного падіння всі тіла рухаються з однаковим постійним прискоренням g = 9,81 м/с^2, направленим по вертикалі униз.

- Закон додавання швидкостей Галілея: швидкість тіла відносно нерухомої системи відліку $\vec{v}$ дорівнює векторній сумі швидкості тіла відносно рухомої системи відліку $\vec{v}'$ та швидкості рухомої системи відносно нерухомої $\vec{u}$

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u}.$$

- **Рівномірний рух точки по колу**. Кутова швидкість:

$$\omega = \frac{\varphi}{t} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu,$$

де φ – кут повороту радіуса, що з'єднує центр кола з точкою, за проміжок часу t, T – період, ν – частота обертання. $T = \frac{1}{\nu}$.

- Лінійна швидкість:

$$v = \frac{2\pi R}{T} = \omega R,$$

де R – радіус кола.

- Доцентрове прискорення:

$$a_{\text{äîö}} = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R = 4\pi^2\nu^2 R = \frac{4\pi^2}{T^2} R.$$

- **Рух тіла, кинутого під кутом α до горизонту** з початковою швидкістю v_0, розглядається як додавання двох рухів: рівномірного у горизонтальному напрямі (вісь Ox) і рівносповільненого у

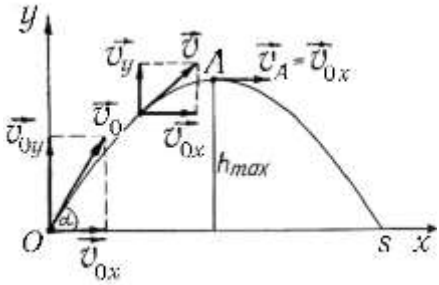
вертикальному напрямі (вісь *Oy*). Прискорення тіла у будь-який час дорівнює *g* і направлено вертикально униз.

Проекції швидкості на напрями координатних осей у будь-який момент часу:

$$v_x = v_{0x} = v_0 \cos \alpha;$$

$$v_y = v_0 \sin \alpha - gt.$$

Модуль вектора швидкості в будь-якій точці траєкторії $v = \sqrt{v_{0x}^2 + v_y^2}$.



Координати тіла:

$$x = v_0 t \cos\alpha,$$

$$y = v_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}.$$

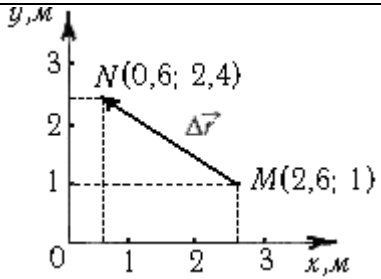
Час підйому на максимальну висоту: $t_{під} = (v_0 \sin \alpha)/g$. Повний час руху (час польоту) тіла: $t_{пол} = 2t_{під} = (2v_0 \sin \alpha)/g$.

Максимальна висота підйому тіла: $h_{max} = (v_0^2 \sin^2 \alpha)/2g$.

Дальність польоту: $s = (v_0^2 \sin 2\alpha)/g$.

Шлях, переміщення

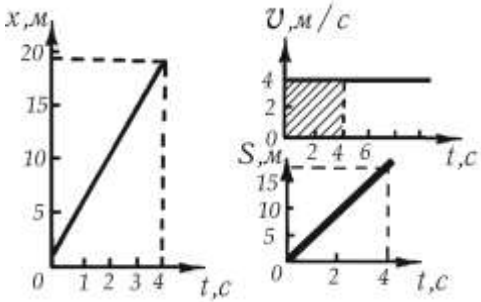
1.1. Частинка, що рухається зі швидкістю $v = 1$ м/с, перемістилася за час $t = 4$ с із точки з координатами ($x_1 = 2{,}6$ м, $y_1 = 1$ м) у точку з координатами ($x_2 = 0{,}6$ м, $y_2 = 2{,}4$ м). Визначити модуль переміщення Δr частинки і шлях, який вона пройшла.

Дано	*Розв'язання*
$x_1 = 2{,}6$ м $y_1 = 1$ м $x_2 = 0{,}6$ м $y_2 = 2{,}4$ м $v = 1$ м/с $t = 4$ с	
Δr =?	

$$(\Delta r)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2,\ s = vt.$$

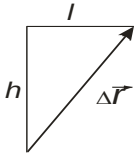
Відповідь: $\Delta r = 2{,}44$ м, $s = 4$ м.

1.2. Накреслити графік залежності координати x, шляху s і швидкості v від часу для точки, яка рухається за законом $x = 2 + 4t$, м. За графіком швидкості знайти шлях точки за $t = 4$ с руху.

Дано	*Розв'язання*
$x = 2 + 4t$ $t_1 = 4$ с	
s_1 = ?	

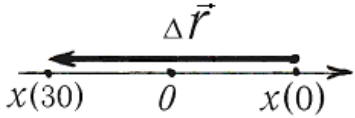
Відповідь: $s_1 = 16$ м.

1.3. Повітряна куля за час $t = 4$ хв піднялася на висоту $h = 800$ м, при цьому була віднесена вітром вбік на відстань $l = 600$ м.
Визначити: а) модуль переміщення Δr кулі відносно точки запуску; б) швидкість v вітру, вважаючи її постійною.

Дано	*Розв'язання*
$t = 4$ хв $= 240$ с $h = 800$ м $l = 600$ м	$\Delta r = \sqrt{h^2 + l^2}$, $v_в = \dfrac{l}{t}$. 
Δr = ? $v_в$ = ?	

Відповідь: $\Delta r = 1000$ м, $v_в = 2{,}5$ м/с.

1.4. Частинка рухається вздовж осі O*x* згідно з рівнянням $x(t) = \alpha \cos(2\pi\, t/T + \alpha)$, де $a = 1$ см; $T = 4$ с; $\alpha = 60°$. Визначити модуль переміщення частинки і пройдений нею шлях за перші $\tau = 30$ с її руху.

Дано	*Розв'язання*
$x(t) = a\cos(\frac{2\pi}{T}t + \alpha)$ $a = 1$ см $T = 4$ с $\alpha = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$ $\tau = 30$ с	 $\Delta r = \lvert x(30) - x(0)\rvert$, $x(0) = a\cos\frac{\pi}{3} = \frac{a}{2}$, $x(30) = a\cos(\pi + \frac{\pi}{3}) = -a\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{a}{2}$,
$\Delta r = ?$ $s = ?$	

$$\Delta r = \left|-\frac{a}{2} - \frac{a}{2}\right| = a.$$

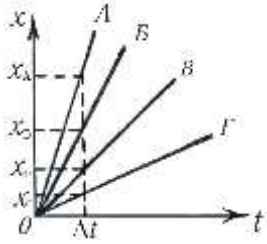
Частинка здійснює гармонічні коливання з амплітудою *a*. За один період коливань вона проходить шлях 4*a*, за *N* періодів s = 4*aN*. За час τ кількість періодів $N = \frac{\tau}{T}$. $s = 4a\frac{\tau}{T}$.

Відповідь: $\Delta r = 1$ см, $s = 30$ см.

Середня шляхова швидкість

1.5. Тіло рухається вздовж осі *Ox*. Серед наведених графіків переміщення вкажіть такий, що відповідає найбільшій швидкості руху тіла.

Розв'язання. Взявши довільний проміжок часу Δt, визначимо координати тіла, що відповідають різним графікам. Видно, що $x_A > x_Б > x_В > \ldots$, тому швидкість тіла, що відповідає графіку "*А*", є найбільшою.



1.6. Першу половину часу свого руху автомобіль мав швидкість v_1

= 30 км/год, а другу половину часу – v_2 = 60 км/год. Визначити середню шляхову швидкість автомобіля

Дано	*Розв'язання*
v_1 = 30 км/год v_2 = 60 км/год $<v>$ = ?	$<v>=\frac{s}{t}=\frac{v_1\frac{t}{2}+v_2\frac{t}{2}}{t}=\frac{v_1+v_2}{2}.$

Відповідь: $\langle v\rangle = 45$ км/год.

1.7. Розв'язати попередню задачу, замінивши в ній словосполучення «половина часу» на «половина шляху».

Дано	*Розв'язання*
v_1 = 30 км/год v_2 = 60 км/год $\langle v\rangle = ?$	$\langle v\rangle=\frac{s}{t}=\frac{s}{t_1+t_2}=\frac{s}{\frac{s}{2v_1}+\frac{s}{2v_2}}=\frac{2v_1v_2}{v_1+v_2}.$

Відповідь: $\langle v\rangle = 40$ км/год.

1.8. За перші дві години велосипедист проїхав 35 км, протягом наступних двох годин він рухався зі швидкістю 12 м/с, потім, зменшивши швидкість до 8 м/с, проїхав ще 20 км. Знайти середню швидкість велосипедиста на цьому шляху.

Відповідь: $<v>$ = 8,37 м/с.

1.9. Першу половину шляху автобус йшов зі швидкістю у η = 8 разів більшою, ніж другу половину. Його середня шляхова швидкість становить $<v>$ = 16 км/год. Визначити швидкості автобуса на першій та другій половинах шляху, вважаючи їх сталими

Відповідь: v_1 = 72 км/год, v_2 = 9 км/год.

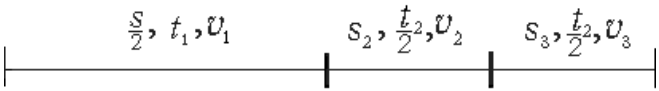
1.10. Частинка рухається вздовж осі *Ox* за законом $x(t) = at + bt^2$, де a = 10 м/с; b = – 1 м/с^2. Визначити середню шляхову швидкість частинки за перші τ = 10 с її руху.

Дано	*Розв'язання*
$x = at + bt^2$ a = 10 м/с b = – 1 м/с^2 $\tau = 10$ с $\langle v\rangle = ?$	Проаналізуємо вираз для координати частинки $x = 10\,t - t^2$. Підставивши час у секундах, переконаємося, що до п'ятої секунди координата зростає і сягає 25 м, потім зменшується і через τ = 10 с від початку руху дорівнює нулеві. Таким чином шлях частинки

становить s = 50 м (25 м у прямому напрямі і 25 м у зворотному), а середня швидкість $< v >= \frac{s}{\tau}$.

Відповідь: $<v>$ = 5 м/с.

1.11. Тіло пройшло половину шляху зі швидкістю v_1 = 6 м/с. Іншу частину шляху воно половину часу рухається зі швидкістю v_2 = 1 м/с, а останню ділянку – зі швидкістю v_3 = 2 м/с. Визначити середню шляхову швидкість $<v>$ тіла.

Дано	*Розв'язання*
$v_1 = 6$ м/с $v_2 = 1$ м/с $v_3 = 2$ м/с $\langle v \rangle = ?$	 На схемі руху для зручності позначені відповідні шляхи, швидкості та часи руху на кожній ділянці.

$$\langle v \rangle = \frac{s}{t_1 + t_2}, \quad t_1 = \frac{s}{2v_1}, \quad s_2 = v_2 \frac{t_2}{2}, \quad s_3 = v_3 \frac{t_2}{2},$$

$$\frac{s_2}{s_3} = \frac{v_2}{v_3}, \quad s_2 = \frac{s}{2} - s_3 = \frac{s}{2} - s_2 \frac{v_3}{v_2}, \quad s_2 = \frac{s}{2(1 + \frac{v_3}{v_2})}, \quad \frac{t_2}{2} = \frac{s_2}{v_2},$$

$$\langle v \rangle = \frac{s}{\frac{s}{2v_1} + 2\frac{s_2}{v_2}} = \frac{2v_1(v_2 + v_3)}{2v_1 + v_2 + v_3}.$$

Відповідь: $\langle v \rangle = 2{,}4$ м/с.

Відносність руху. Закон додавання швидкостей

1.12. Пароплав, що йде від пункту *A* до пункту *B*, має швидкість v_1 = 15 км/год, а на зворотному шляху v_2 = 19 км/год. Визначити швидкість *u* течії та швидкість *v* пароплава відносно води.

Дано	*Розв'язання*
v_1 = 15 км/год v_2 = 19 км/год u = ? v = ?	$v_1 = v - u$, $v_2 = v + u$, $v = \frac{v_1 + v_2}{2}$, $u = \frac{v_2 - v_1}{2}$.

Відповідь: $u = 2$ км/год, $v = 17$ км/год.

1.13. По прямій ділянці шосе рухається колона автомобілів завдовжки l = 3 000 м. Мотоцикліст їде від хвоста колони до її голови і повертається назад до хвоста, витративши на об'їзд колони час t = 400 с. Швидкість колони v = 10 м/с. Визначити швидкість u мотоцикліста.

Дано	*Розв'язання*
l = 3 000 м t = 400 с v = 10 м/с u = ?	$\frac{l}{u-v}+\frac{l}{v+u}=t,\ u^2-15u-100=0,\ u=20$ м/с. ***Відповідь:*** $u=20$ м/с.

1.14. З міста A у місто B з інтервалом t_1 = 10 хв вийшли два електропоїзди, що мають однакові сталі швидкості v_1 = 30 км/год. Назустріч їм з міста B у місто A вийшла дрезина. З якою швидкістю v_2 рухалась дрезина, якщо від її зустрічі з першим електропоїздом до зустрічі з другим минув час t_2 = 4 хв?

Дано	*Розв'язання*
t_1 = 10 хв v_1 = 30 км/год t_2 = 4 хв v_2 = ?	Відстань між електропоїздами $l = v_1t_1$ не змінюється під час руху. Перейдемо у систему відліку, пов'язану з другим електропоїздом. З точки зору спостерігача в цій системі відліку дрезина має швидкість $v_2' = v_1 + v_2$. Відстань

між електропоїздами вона подолає за час $t_2=\frac{l}{v_2'}=\frac{v_1t_1}{v_1+v_2}$. З останнього рівняння $v_2=v_1\left(\frac{t_1}{t_2}-1\right)$.

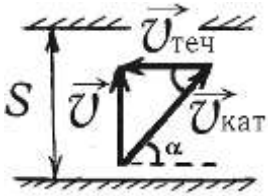
Відповідь: v_2 = 45 км/год.

1.15. По паралельних коліях назустріч один одному рухаються два поїзди. Швидкість першого v_1 = 40 км/год, швидкість другого v_2 = 50 км/год. Довжина першого поїзда l_1 = 900 м. Впродовж якого часу цей поїзд проходитиме повз нерухомого спостерігача у другому поїзді?

Відповідь: $t=36$ с.

1.16. Швидкість катера відносно води $v_{кат}$ = 5 м/с, швидкість течії ріки $v_{теч}$ = 2 м/с. Який курс відносно берега має держати катер, щоб переплисти ріку: найкоротшим шляхом; за найкоротший час?

Дано	*Розв'язання*
$v_{кат} = 5$ м/с $v_{теч} = 2$ м/с $\alpha = ?$	Якщо катер буде рухатись під кутом α до берега, він перепливе річку найкоротшим шляхом.

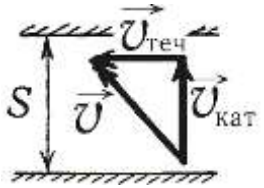


$\cos\alpha = v_{теч}/v_{кат}$, $\cos\alpha = 2/5$,

$\alpha = 66{,}42°$.

Час, потрібний на долання ріки в цьому випадку $t = \dfrac{s}{v} = \dfrac{s}{\sqrt{v_{êàò}^2 - v_{òåч}^2}} = \dfrac{s}{v_{ê}\sqrt{1-\left(\dfrac{v_{òåч}}{v_{êàò}}\right)^2}} = \dfrac{s}{v_{êàò}\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$.

Як видно, час долання ріки залежить від кута α. Час буде найменшим, коли знаменник дробу буде найбільшим, тобто у випадку $\alpha = 90°$. Отже, якщо катер буде держати курс перпендикулярно до берегів, він витратить найменший час, хоч при цьому його знесе за течією.



Відповідь: $\alpha = 66{,}42°$; $\alpha = 90°$.

1.17. Ластівка летить на північ зі швидкістю 17,5 м/с відносно повітря. Під час польоту дме східний вітер зі швидкістю 4 м/с. Якою є швидкість ластівки відносно Землі? Як зміняться координати ластівки відносно спостерігача за 20 хв польоту?

Відповідь: $v = 17{,}95$ м/с, $\Delta x = 4{,}8$ км; $\Delta y = 21$ км.

1.18. Літак летить вздовж прямої з міста *A* у місто *B* і повертається вздовж прямої назад. Швидкість його відносно повітря *v*. Встановити відношення повних часів руху літака для випадків, коли вітер зі швидкістю $u < v$ дме від *A* до *B* та коли з такою ж швидкістю дме перпендикулярно до прямої *AB*.

Відповідь: $t_1/t_2 = 1/\sqrt{1-(u/v)^2}$. В к а з і в к а. У другому випадку швидкість літака *v* відносно повітря має бути направлена так, щоб її сума зі швидкістю повітря *u* була спрямована по лінії

AB.

Прямолінійний нерівномірний рух. Прискорення

1.19. Тіло, рухаючись зі стану спокою рівноприскорено, пройшло шлях s_1 = 180 м за час t_1 = 15 с. Яку відстань s_2 воно пройшло за t_2 = 5 с від початку руху?

Дано	*Розв'язання*
$v_0 = 0$ s_1 = 180 м t_1 = 15 с t_2 = 5 с s_2 = ?	$s_1 = \frac{at_1^2}{2}$, $s_2 = \frac{at_2^2}{2}$, $s_2 = s_1\frac{t_2^2}{t_1^2}$. ***Відповідь:*** s_2 = 20 м.

1.20. Швидкість тіла, що рухається прямолінійно, виражається формулою v = 2,5 + 0,2t м/с. Визначити переміщення тіла за час t = 20 с від початку руху.

Відповідь: s = 90 м.

1.21. Поїзд починає рухатися зі стану спокою, рівномірно збільшуючи свою швидкість. На першому кілометрі вона зросла на 10 м/с. На скільки збільшиться ця швидкість на другому кілометрі?

Дано	*Розв'язання*
$v_0 = 0$ $s_1 = 10^3$ м $(\Delta v)_1 = 10$ м/с $s_2 = 10^3$ м $(\Delta v)_2 = ?$	$(\Delta v)_1 = v_1 - v_0 = v_1$, $v_1^2 - v_0^2 = 2as_1$, $a = \frac{(\Delta v)_1^2}{2s_1}$, $(\Delta v)_2 = v_2 - v_1 = (v_1 + at_2) - v_1 = at_2$, $s_2 = v_1t_2 + \frac{at_2^2}{2}$.

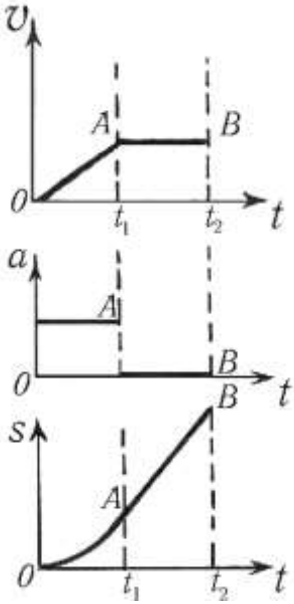
Підставивши числові значення величин, розв'яжемо квадратне рівняння t_2^2 + 400 t_2 – 40 000 = 0, звідки $t_2 = 82$ с.

Тоді $(\Delta v)_2 = 4{,}1$ м/с.

Відповідь: $(\Delta v)_2 = 4{,}1$ м/с.

1.22. За графіком швидкості тіла побудувати графіки прискорення і переміщення.

Розв'язання. На першому етапі ($0 - t_1$) тіло рухається рівноприскорено з прискоренням a_1 = const, на другому етапі ($t_1 - t_2$) рух рівномірний, $a_2 = 0$. Графіком переміщення на першій ділянці є парабола, на другій – пряма лінія.



1.23. Колона завдовжки l починає рухатись вздовж прямої зі сталим прискоренням a. Одночасно зі сталою швидкістю v від хвоста колони до її голови починає бігти собака. За який час t він пережене колону? За якої умови це відбудеться?

Дано	*Розв'язання*
l $v_0 = 0$ a = const v = const	$s = \frac{at^2}{2} + l = vt,\ t^2 - \frac{2v}{a}t + \frac{2l}{a} = 0,$
t = ?	$t = \frac{v}{a}(1 + \sqrt{1 - \frac{2la}{v^2}}).$

Відповідь: $t = \frac{v}{a}(1 + \sqrt{1 - \frac{2la}{v^2}})$, $v > \sqrt{2la}$.

1.24. На змаганнях з гірськолижного спорту спортсмен подолав ділянку спуску завдовжки s = 500 м за t = 40 с, рухаючись з прискоренням a = 0,3 м/с^2. Яку швидкість мав лижник на початку і в кінці спуску?

Відповідь: v_0 = 23,4 км/год, v = 66,6 км/год.

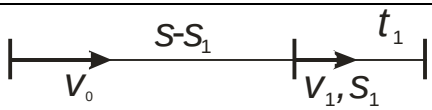
1.25. За п’яту секунду рівносповільненого руху частинка проходить шлях $\Delta s_5 = 5$ м і зупиняється. Який шлях пройшла частинка за третю секунду цього руху?

Дано	*Розв’язання*
$\Delta s_5 = 5$ м $v_5 = 0$ $t_2 = 2$ с $t_3 = 3$ с $t_4 = 4$ с $t_5 = 5$ с $\Delta s_3 = ?$	Шлях, пройдений частинкою за п’яту секунду руху, $\Delta s_5 = s_5 - s_4 = (v_0 t_5 - a t_5^2/2) - (v_0 t_4 - a t_4^2/2) = v_0(t_5 - t_4) - a(t_5^2 - t_4^2)/2$. Швидкість у кінці п’ятої секунди за умовою дорівнює нулю: $v_5 = v_0 - a t_5 = 0$, звідки $v_0 = a t_5$. Тоді $\Delta s_5 = a t_5 (t_5 - t_4) - a(t_5^2 - t_4^2)/2$, звідки $a = 10$ м/с^2, $v_0 = 50$ м/с.

Шлях, пройдений частинкою за третю секунду руху, $\Delta s_3 = s_3 - s_2 = v_0(t_3 - t_2) - a(t_3^2 - t_2^2)/2 = 25$ м.

Відповідь: $\Delta s_3 = 25$ м.

1.26. Під час наближення до платформи поїзд починає гальмувати і зупиняється, пройшовши шлях $s = 75$ м. За останню секунду рівносповільненого руху він пройшов шлях $s_1 = 2{,}25$ м. Визначити початкову швидкість v_0 поїзда.

Дано	*Розв’язання*
$s = 75$ м $s_1 = 2{,}25$ м $t_1 = 1$ с $v = 0$ $v_0 = ?$	 $v^2 - v_0^2 = 2as, a = -\frac{v_0^2}{2s},$

$$v^2 - v_1^2 = 2as_1,\ a = -\frac{v_1^2}{2s_1},$$

$$v_0 = v_1\sqrt{\frac{s}{s_1}},\ s_1 = v_1 t_1 + \frac{a t_1^2}{2} = v_1 t_1 - \frac{v_1^2 t_1^2}{4s_1},\ v_1^2 - 9v_1 + 20{,}25 = 0,$$

$$v_1 = 4{,}5\,\frac{\text{м}}{\text{с}},\ a = -4{,}5\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2},\ v_0 = 25{,}98\,\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Відповідь: $v_0 = 25{,}98$ м/с.

1.27. Хлопчик на санках з’їхав з гори завдовжки $l_1 = 40$ м за час $t_1 = 10$ с, а потім проїхав по горизонтальній ділянці ще $l_2 = 20$ м до

зупинки. Визначити швидкість хлопчика v_1 у кінці гори, прискорення на кожній ділянці, загальний час руху t і середню шляхову швидкість $\langle v \rangle$. Побудувати графік швидкості.

Дано	*Розв'язання*
$v_0 = 0$ $l_1 = 40$ м $t_1 = 10$ с $l_2 = 20$ м $v = 0$	$a_1 = \frac{2l_1}{t_1^2} = 0{,}8\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$, $v_1 = \sqrt{2al_1} = 8\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$, $a_2 = -\frac{v_1^2}{2l_2} = -1{,}6\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$, $l_2 = v_1 t_2 + \frac{a_2 t_2^2}{2}$, $t_2^2 - 10t_2 + 25 = 0$, $t_2 = 5$ с, $t = 15$ с, $\langle v \rangle = \frac{l_1 + l_2}{t} = 4\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$.
$v_1 = ?$ $a_1 = ?$ $a_2 = ?$ $t = ?$ $\langle v \rangle = ?$	***Відповідь:*** $v_1 = 8$ м/с, $a_1 = 0{,}8$ м/с^2, $a_2 = -1{,}6$ м/с^2, $t = 15$ с, $\langle v \rangle = 4$ м/с.

Рівномірний рух по колу. Кутова та лінійна швидкості. Доцентрове прискорення

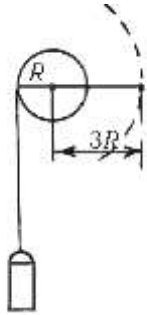
1.28. Колесо діаметра $D = 20$ см робить 300 обертів за 3 хвилини. Визначити період T обертання, кутову ω і лінійну v швидкості точок на ободі колеса.

Дано	*Розв'язання*
$D = 20$ см $= 0{,}2$ м $N = 300$ $t = 3$ хв $= 180$ с	$T = \frac{t}{N}$, $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \frac{N}{t}$,
$T = ?$ $\omega = ?$ $v = ?$	$v = \omega R = 2\pi \frac{N}{t} \frac{D}{2}$.
Відповідь: $T = 0{,}6$ с, $\omega = 10{,}47$ с$^{-1}$, $v = 1{,}05$ м/с.	

1.29. Відстань рукоятки колодязного ворота від осі обертання в 3 рази більше радіуса вала, на який намотується трос. Якою є лінійна швидкість кінця рукоятки, якщо відро рівномірно піднімають з

глибини 10 м за 20 с?

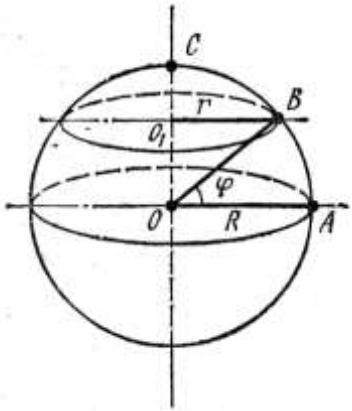
Дано	*Розв'язання*
R $R_1 = 3R$ $h = 10$ м $t = 20$ с $v_1 = ?$	Швидкість підйому відра $v = \frac{h}{t}$ є в той же час лінійною швидкістю точок поверхні вала. Кутова швидкість обертання ω вала ворота і рукоятки є однаковою, тому $\omega = \frac{v}{R} = \frac{v_1}{R_1}$. Лінійна швидкість кінця рукоятки $v_1 = \frac{vR_1}{R} = \frac{hR_1}{tR}$.



Відповідь: $v_1 = 1{,}5$ м/с.

1.30. Якою є лінійна швидкість точок земної поверхні на широті φ = 60° під час добового обертання Землі? Радіус Землі прийняти рівним 6 400 км.

Дано	*Розв'язання*
R = 6 400 км = $6{,}4 \cdot 10^6$ м φ = 60° T = 24 год = 86 400 с $v = ?$	Точка B земної поверхні знаходиться на широті φ. Лінійна швидкість точки $v = \frac{2\pi r}{T}$, де r – радіус кола, що описує точка B. $r = R\cos\varphi$. $v = \frac{2\pi R\cos\varphi}{T}$.



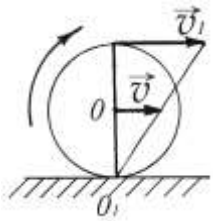
Відповідь: $v = 232{,}5$ м/с.

1.31. Колесо велосипеду радіуса R = 40 см робить n = 100 об/хв. З якою кутовою швидкістю ω обертається колесо? Який шлях s пройде колесо за час t = 5 хв?

Відповідь: $\omega = 10{,}47\ с^{-1}$, $s = 1\ 256$ м.

1.32. Яку лінійну швидкість v_1 мають верхні точки ободу велосипедного колеса, якщо швидкість велосипедиста $v = 20$ км/год?

Дано	*Розв'язання*
$v = 20$ км/год $v_1 = ?$	У кожний момент часу рух колеса можна розглядати, як обертання навколо миттєвого центра обертання O_1. Кутова швидкість обертання є однаковою для центра колеса і верхніх точок $\omega = \frac{v}{R} = \frac{v_1}{2R}$, $v_1 = 2v$.



Відповідь $v_1 = 40$ км/год.

1.33. Лінійна швидкість точок ободу колеса $v = 3$ м/с, а точок, що містяться на $l = 10$ см ближче до осі обертання, $u = 2$ м/с. Визначити частоту n обертання колеса.

Відповідь: $n = 1{,}59\ с^{-1}$.

1.34. Яким є співвідношення між кутовими швидкостями секундної, хвилинної та годинної стрілок годинника?

Відповідь: $\omega_с : \omega_{хв} : \omega_{год} = 720 : 12 : 1$.

1.35. Хвилинна стрілка годинника на 30% довша, ніж годинна. Яке співвідношення лінійних швидкостей кінців цих стрілок?

Відповідь: $\frac{v_{хв}}{v_{год}} = 15{,}6$.

1.36. Поїзд рухається по закругленню завдовжки $l = 400$ м і радіуса $R = 800$ м. Визначити доцентрове прискорення $a_{доц}$ і кутову швидкість ω поїзда, якщо закруглення він проїхав за час $t = 20$ с.

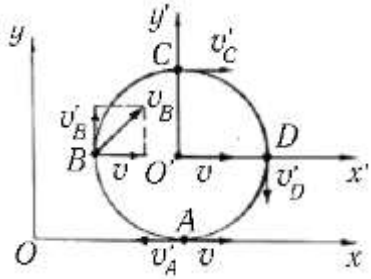
Відповідь: $a_{доц} = 0{,}5\ м/с^2$, $\omega = 0{,}025\ с^{-1}$.

1.37. Колесо парової турбіни обертається з частотою 3 600 об/хв, радіус колеса 1 м. Яким є доцентрове прискорення точки, що міститься на кінці лопаті турбіни? Який шлях пройде ця точка за 1 с?

Відповідь: $a_{доц} = 1{,}42 \cdot 10^5\ м/с^2$, $s = 376{,}8$ м.

1.38. Колесо котиться без проковзування зі швидкістю $v = 2$ м/с по горизонтальній площині. Визначити лінійні швидкості точок *A, B, C, D* колеса.

Дано	*Розв'язання*
v = 2 м/с	Розв'яжемо цю задачу двома способами.
v_A = ? v_B = ? v_C = ? v_D = ?	*Перший спосіб* заснований на законі додавання швидкостей. Зв'яжемо з центром колеса систему відліку $x'O'y'$, що рухається вздовж осі Ox нерухомої системи зі швидкістю $\vec{v}$. З точки зору спостерігача, який знаходиться у цій системі відліку, точки A, B, C, D колеса здійснюють обертальний рух, їх лінійні швидкості v' за модулем однакові і направлені по дотичній до кола: $v_A' = v_B' = v_C' = v_D'$.



З точки зору нерухомого спостерігача, який знаходиться у системі xOy, всі точки колеса беруть участь одночасно у двох рухах: вздовж прямої зі швидкістю v і навколо осі обертання з дотичними швидкостями v'. Швидкості визначених точок у нерухомій системі xOy знаходимо за законом додавання швидкостей, додаючи $\vec{v}'$ та $\vec{v}$ за правилами векторного додавання.

Для точки A маємо

$$\vec{v}_A = \vec{v}'_A + \vec{v}\,.$$

Але, оскільки ковзання відсутнє, точка A є нерухомою в системі xOy, її швидкість має дорівнювати нулю. Звідки одержуємо, що швидкість v'_A за модулем дорівнює v.

Швидкість точки B у нерухомій системі xOy

$$\vec{v}_B = \vec{v}'_B + \vec{v}\,,$$

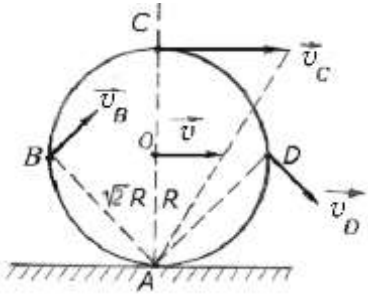
а за модулем $v_B = \sqrt{2}\,v$.

Модулі швидкостей точок A, B, C, D

$$v_A = 0,$$
$$v_B = \sqrt{2}\,v\,,$$
$$v_C = 2v,$$
$$v_D = \sqrt{2}\,v.$$

Другий спосіб. У кожний момент часу рух колеса можна розглядати як обертання навколо миттєвого центра обертання A – нерухомої у даний момент часу точки стикання колеса з площиною.

Кутову швидкість такого обертання знайдемо з того факту, що швидкість центра колеса дорівнює v. Зв'язок між лінійною і кутовою швидкостями: $v = \omega R$, звідки кутова швидкість $\omega = \dfrac{v}{R}$.



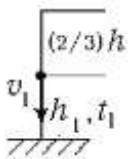
Тоді лінійна швидкість точки B дорівнює $v_B = \omega\cdot(AB)$ і направлена перпендикулярно до відрізку AB. З рисунка випливає, що відрізок $AB = R\sqrt{2}$. Тоді $v_B = \dfrac{v}{R}\, R\sqrt{2} = \sqrt{2}\, v$.

Аналогічно одержимо інші результати.

Відповідь: $v_A = 0$, $v_B = \sqrt{2}\, v = 2{,}83$ м/с, $v_C = 2v = 4$ м/с, $v_D = \sqrt{2}\, v = 2{,}83$ м/с.

Вільне падіння.

1.39. Тіло, що вільно падає, за останню секунду падіння пройшло 1/3 свого шляху. Визначити час t падіння і висоту h, з якої падало тіло.

Дано	*Розв'язання*
$a = g = 9{,}81$ м/с^2 $h_1 = \dfrac{h}{3}$ $t_1 = 1$ с $t = ?$ $h = ?$	 $h_1 = v_1 t_1 + \dfrac{g t_1^2}{2}$, де v_1 – початкова швидкість, з якою тіло проходить останню третину шляху і яку воно набуло, пройшовши шлях $\dfrac{2}{3}h$,

$v_1 = \sqrt{2g\left(\dfrac{2}{3}h\right)}$. Підставляючи та розв'язуючи квадратне рівняння, отримаємо $h = 145{,}8$ м, $t = \sqrt{\dfrac{2h}{g}} = 5{,}45$ с.

Відповідь: $h = 145{,}8$ м, $t = 5{,}45$ с.

1.40. Тіло, що вільно падає, пройшло останні 30 м за час $t_1 = 0{,}5$ с. З якої висоти h падало тіло?

Відповідь: $h = 198{,}75$ м.

1.41. З гелікоптера на висоті $h = 300$ м випав предмет. Через який час предмет досягне землі, якщо гелікоптер: нерухомий; опускається зі швидкістю $v_0 = 5$ м/с; піднімається зі швидкістю $v_0 = 5$ м/с?

Дано	*Розв'язання*
$a = g = 9{,}81$ м/с^2 $h = 300$ м а) $v_0 = 0$ б) $v_0 = 5\,\text{м/с, униз}$ в) $v_0 = 5\,\text{м/с, вгору}$ $t_а = ?$ $t_б = ?$ $t_в = ?$	*а)* $t_а = \sqrt{\dfrac{2h}{g}}$; б) $h = v_0 t_б + \dfrac{g t_б^2}{2}$, розв'язуючи квадратне рівняння, отримаємо $t_б$; в) $t_в = t_{підйому} + t_{спуску} + t_б$,

$t_{підйому} = t_{спуску} = \dfrac{v_0}{g}$, $t_в = \dfrac{2v_0}{g} + t_б$.

Відповідь: $t_а = 7{,}82$ с, $t_б = 7{,}33$ с, $t_в = 8{,}35$ с.

1.42. Тіло падає з висоти $h = 45$ м без початкової швидкості. Визначити середню швидкість $\langle v_1 \rangle$ на останньому відрізку шляху $h_1 = 25$ м.

Дано	*Розв'язання*
$a = g = 9{,}81$ м/с^2 $v_0 = 0$ $h = 45$ м $h_1 = 25$ м $\langle v_1 \rangle = ?$	$t = \sqrt{\dfrac{2h}{g}}$, $t' = \sqrt{\dfrac{2(h - h_1)}{g}}$, $t_1 = t - t' = \sqrt{\dfrac{2h}{g}} - \sqrt{\dfrac{2(h - h_1)}{g}}$, $\langle v_1 \rangle = \dfrac{h_1}{t_1}$

Відповідь: $\langle v_1 \rangle = 24{,}75$ м/с.

Рух тіла, кинутого вертикально вгору

1.43. Тіло кинуто вертикально вгору з початковою швидкістю 30 м/с. На якій висоті і через скільки часу швидкість тіла (за модулем) буде в 3 рази менша, ніж початкова швидкість кидання?

Дано	*Розв'язання*
$a = g = 9{,}81$ м/с^2 $v_0 = 30$ м/с $v_1 = v_0/3 = 10$ м/с $h_1 = ?$ $t_1 = ?$	Для рівносповільненого руху вгору $v_1^2 - v_0^2 = -2gh$, звідки $h = \frac{v_0^2 - v_1^2}{2g} = \frac{v_0^2 - \frac{v_0^2}{9}}{2g} = \frac{4v_0^2}{9g} = 40$м.

З формули швидкості $v_1 = v_0 - gt_1$, знайдемо час руху від землі до точки, де швидкість зменшилась утричі

$$t_1 = \frac{v_0 - v_1}{g} = \frac{v_0 - \frac{v_0}{3}}{g} = \frac{2v_0}{3g} = 2 \text{ с.}$$

Загальний час підйому $t_{під} = \frac{v_0}{g} = 3$ с. Отже з точки, де швидкість становила $\frac{v_0}{3}$, до верхньої точки підйому тіло рухалося ще 1 с.

Під час руху з верхньої точки униз швидкість змінюється за законом $v = gt$. Вільно падаючи, тіло набуде швидкості $\frac{v_0}{3}$ за час t', який визначиться з рівняння $\frac{v_0}{3} = gt'$, $t' = 1$ с.

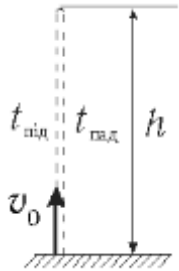
Таким чином, удруге тіло набуде швидкості $\frac{v_0}{3}$ через час

$$t_2 = 2 \text{ с} + 1 \text{ с} + 1 \text{ с} = 4 \text{ с.}$$

Відповідь: $h = 40\text{м}, t_1 = 2\text{с}, t_2 = 4\text{с}$.

1.44. Тіло кинуте вгору зі швидкістю v_0 = 10 м/с. Через який час t воно впаде на землю?

Дано	*Розв'язання*
$a = g = 9{,}81$ м/с^2 $v_0 = 10$ м/с $t = ?$	Час підйому $t_{під} = \dfrac{v_0}{g}$, висота підйому $h = \dfrac{v_0^2}{2g}$. Вільне падіння з висоти h триватиме час $t_{пад}$, який знаходимо з виразу $h = \dfrac{gt_{пад}^2}{2}$,



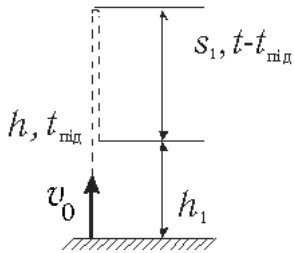
$$t_{пад} = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2}{g}\left(\frac{v_0^2}{2g}\right)} = \frac{v_0}{g}.$$

Таким чином, час підйому дорівнює часові падіння. На землю тіло впаде через час $t = 2t_{під} = 2v_0/g$.

Відповідь: t = 2,04 с.

1.45. Тіло кинуте вертикально вгору зі швидкістю v_0 =14 м/с. На яку висоту h підніметься воно за час t = 2 с? Який шлях s пройде воно за цей час?

Дано	*Розв'язання*
$a = g = 9{,}81$ м/с^2 $v_0 = 14$ м/с $t = 2$ с $h_1 = ?$ $s = ?$	Підйом триває час $t_{під} = \dfrac{v_0}{g} = 1{,}43$ с, за який тіло піднімається на висоту $h = \dfrac{v_0^2}{2g} = 9{,}99$ м, і після зупинки падає вниз протягом часу $t - t_{під}$ = 0,57 с.



Падаючи вниз протягом часу $t - t_{під}$, тіло пройде шлях

$s_1 = \dfrac{g(t - t_{під})^2}{2} = 1{,}59$ м і буде знаходитись на висоті $h_1 = h - s_1$ над первісним рівнем. $h_1 = 8{,}4$ м.

Усього тіло пройшло шлях $s = h + s_1 = 11{,}58$ м.

Відповідь: $h_1 = 8{,}4$ м, $s = 11{,}58$ м.

1.46. Кинутий вертикально вгору камінь піднімається на висоту $h = 10{,}3$ м та падає вниз. Обчислити середню шляхову швидкість каменя.

Відповідь: $\langle v \rangle = 7{,}11$ м/с.

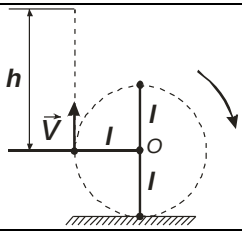
1.47. Тіло кинуте вертикально вгору з башти заввишки $h = 20$ м з початковою швидкістю $v_0 = 3$ м/с. На якій висоті h_1 воно буде через $t_1 = 2$ с після початку руху?

Відповідь: $h = 6{,}25$ м.

1.48. Камінець, який кинули з башти вертикально вгору зі швидкістю $v_0 = 9{,}8$ м/с, впав на землю через час $t = 3$ с. Визначити висоту h башти.

Відповідь: $h = 14{,}7$ м.

1.49. Камінь обертають на нитці завдовжки $l = 0{,}5$ м у вертикальній площині з частотою $n = 3$ об/с. На яку висоту H злетить камінь, якщо нитка обірветься у той момент, коли швидкість каменя буде спрямована вертикально вгору? У найнижчому положенні камінь майже торкається поверхні землі.

Дано	*Розв'язання*
$a = g = 9{,}81$ м/с^2 $n = 3$ с$^{-1}$ $l = 0{,}5$ м $H = ?$	$H = h + l,\ \ h = \dfrac{v^2}{2g},\ \ v = 2\pi n l,$ $H = \left(\dfrac{2\pi^2 n^2 l}{g} + 1\right) l.$ 

Відповідь: $H = 5{,}02$ м.

Рух тіла, кинутого горизонтально

1.50. Камінь, що кинуто горизонтально з висоти $h = 5$ м, впав на відстані $s = 10$ м від місця кидання. Визначити його кінцеву швидкість.

Дано	*Розв'язання*
$a = g = 9{,}81$ м/с^2 $h = 5$ м $s = 10$ м	$v = \sqrt{v_в^2 + v_0^2}$, де $v_в$ – вертикальна, v_0 – горизонтальна складові швидкості.
$v = ?$	$v_в^2 = 2gh,\ h = \frac{gt^2}{2},\ t = \sqrt{\frac{2h}{g}},\ v_0 = \frac{s}{t},$

$$v = \sqrt{2gh + \frac{gs^2}{2h}}.$$

Відповідь: $v = 14$ м/с.

1.51. З башти заввишки $h = 25$ м горизонтально кинуто камінь зі швидкістю $v_0 = 10$ м/с. На якій відстані l від основи башти він впаде на землю?

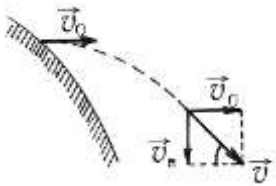
Відповідь: $l = 22{,}58$ м.

1.52. Дальність польоту тіла, що кинуто горизонтально зі швидкістю $v_0 = 10$ м/с, дорівнює висоті кидання. З якої висоти h кинуто тіло?

Відповідь: $h = 20{,}39$ м.

1.53. Камінь кинуто з гори горизонтально зі швидкістю $v_0 = 15$ м/с. Через який час t його швидкість буде направлена під кутом $\alpha = 45°$ до горизонту?

Дано	*Розв'язання*
$a = g = 9{,}81$ м/с^2 $v_0 = 15$ м/с $\alpha = 45°$	У відсутності опору повітря кинуте тіло падає за параболою. Тіло одночасно бере участь у двох рухах
$t = ?$	

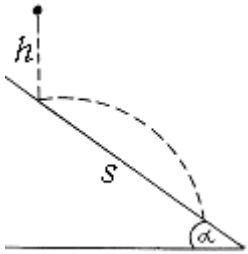


– рівномірному по горизонталі та рівноприскореному по вертикалі. Швидкість $\vec{v}$ тіла у будь-якій точці знаходиться за правилом додавання двох взаємно перпендикулярних векторів $\vec{v} = \vec{v}_в + \vec{v}_0$.

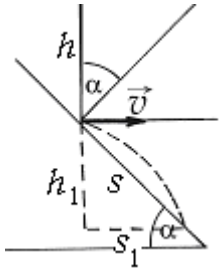
З рисунка видно, що $\operatorname{tg}\alpha = \frac{v_в}{v_0}$, $v_в = gt$. Звідси $t = \frac{v_0 \operatorname{tg}\alpha}{g}$.

Відповідь: $t = 1{,}53$ с.

1.54. Маленька кулька падає з висоти h = 50 см на похилу площину, що утворює кут α = 45° з горизонтом. Визначити відстань s між точками першого і другого ударів кульки об площину. Зіткнення вважати абсолютно пружним.



Дано	*Розв'язання*
$a = g = 9{,}81$ м/с^2 $h = 0{,}5$ м $\alpha = 45°$ $s = ?$	З рисунка випливає, що після відбивання від похилої площини швидкість кульки спрямована горизонтально, а за модулем така ж, як безпосередньо перед ударом о площину – за умовою удар пружний, тобто модуль швидкості не змінюється,



$$v = \sqrt{2gh}\ .$$

Таким чином, маємо задачу про рух кульки, що кинута горизонтально зі швидкістю v.

Позначимо час падіння кульки з висоти h_1 та однаковий з ним час рівномірного горизонтального руху на відстані s_1 через t_1.

$$h_1 = \frac{gt_1^2}{2},\ t_1 = \sqrt{\frac{2h_1}{g}},\ s_1 = vt_1.$$

З рисунка видно, що h_1/s_1 = tg α. Підставивши h_1 та s_1, одержимо $t_1 = \dfrac{2v\ \mathrm{tg}\ \alpha}{g}$. З іншого боку з прямокутного трикутника

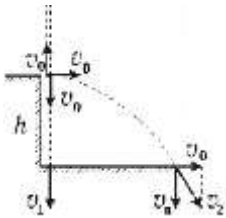
$s = h_1/\sin\alpha$. Після перетворень маємо $s = \dfrac{4htg^2\alpha}{\sin\alpha}$.

Відповідь: s = 2,84 м.

1.55. Два тіла кидають з висоти h = 20 м зі швидкістю v_0 = 15 м/с кожне. Перше тіло кинуте вертикально вгору, друге – горизонтально. З якими швидкостями впадуть тіла на землю? Опором повітря нехтувати.

Дано	*Розв'язання*

$a = g = 9{,}81$ м/с^2 $v_0 = 15$ м/с $h = 20$ м	$v_1^2 - v_0^2 = 2gh$, $v_1 = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$, $v_в^2 = 2gh$,
v_1 =? v_2 =?	



$$v_2 = \sqrt{v_0^2 + v_в^2} = \sqrt{v_0^2 + 2gh}\ .$$

Відповідь: $v_1 = v_2 = 24{,}85$ м/с.

Рух тіла, кинутого під кутом до горизонту

1.56. Кульку кинули під кутом α до горизонту. Визначити цей кут, якщо дальність польоту s дорівнює максимальній висоті підйому h_{max}. Опором повітря нехтувати.

Дано	*Розв'язання*
$s = h_{max}$ α = ?	За умовою задачі $s = h_{max}$, тоді одержимо $\frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$. $\sin^2\alpha = 2 \sin 2\alpha$,

або

$$\sin \alpha (\sin \alpha - 4 \cos \alpha) = 0.$$

Це рівняння при $0 < \alpha < 90°$ має один корінь: $\alpha \approx 76°$.

Відповідь: $\alpha \approx 76°$.

1.57. З якою мінімальною швидкістю слід кинути під кутом $\alpha = 45°$ до горизонту камінь, щоб він досяг висоти $h = 2{,}5$ м?

Відповідь: $v_0 = 9{,}9$ м/с.

1.58. Камінець кинуто під деяким кутом до горизонту. Час польоту $t = 3{,}41$ с. На якій найбільшій висоті h_{max} над площиною горизонту побував камінець? Опором повітря нехтувати.

Відповідь: $h_{max} = 14{,}26$ м.

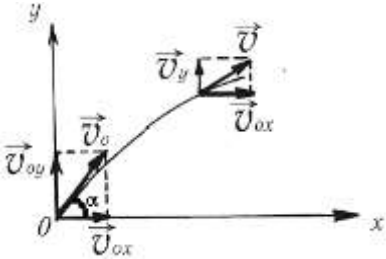
1.59. Максимальна дальність польоту кульки, випущеної з іграшкового пістолета, $s_{max} = 6$ м. На яку максимальну висоту h_{max} підніметься кулька, якщо пістолет з поверхні землі вистрілить вертикально вгору? Опором повітря нехтувати.

Дано	*Розв'язання*

$a = g = 9{,}81$ м/с^2 $s_{max} = 6$ м	$s = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$, $s_{max} = \frac{v_0^2}{g}$, $\alpha = 45°$,
$h_{max} = ?$	$v_0 = \sqrt{g s_{max}}$, $h_{max} = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{s_{max}}{2}$.

Відповідь: $h_{max} = 3$ м.

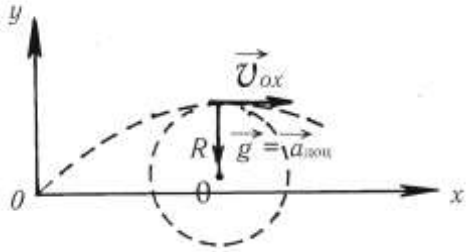
1.60. Снаряд вилетів з гармати зі швидкістю v_0 =200 м/с під кутом $\alpha = 60°$ до горизонту. Через який мінімальний час t вектор швидкості снаряду буде утворювати з горизонтом кут $\alpha_1 = 45°$?

Дано	*Розв'язання*
$a = g = 9{,}81$ м/с^2 $v_0 = 200$ м/с $\alpha = 60°$ $\alpha_1 = 45°$	
$t = ?$	

$$\text{tg}\ \alpha_1 = \frac{v_y}{v_{ox}} = \frac{v_0 \sin\alpha - gt}{v_0 \cos\alpha}, \qquad t = \frac{v_0}{g}(\sin\alpha - \text{tg}\ \alpha_1 \cos\alpha).$$

Відповідь: $t = 7{,}46$ с.

1.61. Тіло кинуте під кутом $\alpha = 45°$ до горизонту зі швидкістю v_0 = 10 м/с. Визначити радіус R кола, яке зливається з траєкторією тіла на малій ділянці поблизу верхньої точки польоту.

Дано	*Розв'язання*
$a = g = 9{,}81$ м/с^2 $\alpha = 45°$ $v_0 = 10$ м/с	
$R = ?$	

$$a_{доц} = \frac{v_{ox}^2}{R} = \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{R}, \quad a_{доц} = g, \quad R = \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{g}.$$

Відповідь: R = 5,1 м.

1.2. Основи динаміки

Основні закони і формули

- I закон Ньютона: існують такі системи відліку, в яких тіло, не піддане зовнішній дії, або зовнішня дія на яке скомпенсована, рухається рівномірно і прямолінійно, або знаходиться в стані спокою.
- II закон Ньютона:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m},$$

де $\vec{a}$ – прискорення, що набуває тіло маси m в інерціальній системі відліку під дією результуючої сили $\vec{F}$.

- Дія тіл одне на одне носить характер взаємодії. Якщо тіло *1* діє на тіло *2* з силою $\vec{F}_{12}$, то тіло *2*, в свою чергу, діє на тіло *1* з силою $\vec{F}_{21}$, причому

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}.$$

(III закон Ньютона). Сили однакові за модулем, направлені протилежно, діють вздовж прямої, що з'єднує тіла, і прикладені до різних тіл.

Сили завжди виникають попарно: будь-якій силі, що прикладена до якогось тіла, можна знайти рівну їй за модулем і протилежну за напрямом силу, яка прикладена до іншого тіла, що взаємодіє з даним. Щоб укласти рівняння руху, перш за все треба визначити, які сили діють на тіло, що розглядається. Для правильного визначення сил, що діють на дане тіло, треба знайти інші тіла, які викликали появу цих сил.

- Сила тертя ковзання лежить у площині стикання тіл, між якими діють сили ковзання, та направлена в бік, протилежний напряму відносної швидкості руху тіл.

$$F_т = \mu N,$$

де N – сила нормального тиску.

- Сила пружності (закон Гука):

$$F_x = -kx,$$

де F_x – проекція пружної сили на вісь Ox, k – жорсткість, x – величина поздовжньої деформації.

Закон Гука для стержня:

$$\sigma = \varepsilon E,$$

де σ – механічне напруження (величина, яка вимірюється модулем сили, що припадає на одиницю площі поперечного перерізу тіла), $\varepsilon = \Delta l/l$ – відносна деформація, E – модуль Юнга (модуль пружності) матеріалу стержня.

- Закон всесвітнього тяжіння: сила гравітаційної взаємодії (сила притягання)

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2},$$

де $G = 6{,}67\cdot10^{-11}$ Н·м^2/кг^2 – гравітаційна стала, m_1, m_2 – маси тіл, що взаємодіють, r – відстань між ними (розмірами тіл нехтують у порівнянні з відстанню між ними).

- Сила тяжіння mg, де g – прискорення вільного падіння,

$$g = G\frac{M_З}{R^2} = 9{,}8 \text{ м/с}^2,$$

де $M_З = 5{,}98\cdot10^{24}$ кг – маса Землі; $R_З = 6{,}37$ Мм – радіус Землі.

- Другий закон Ньютона для тіла, що рухається по колу,

$$F = ma_{доц} = mv^2/R = m\omega^2 R,$$

де F – проекція рівнодіючої всіх сил на напрям до центра кола, $a_{доц}$ – доцентрове прискорення.

Застосування законів Ньютона до прямолінійного руху тіла

1.62. Двигун, який встановлено на човен, що рухається вздовж ріки, розвиває силу тяги $F_1 = 5\cdot10^3$ Н. Одночасно за допомогою канатів човен тягнуть перпендикулярно до берега. Визначити силу T натягу канатів, якщо маса човна $m = 2\,000$ кг, а його прискорення $a = 3{,}2$ м/с^2.

Дано	*Розв'язання*

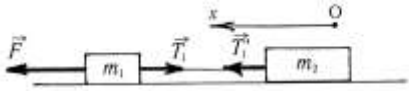
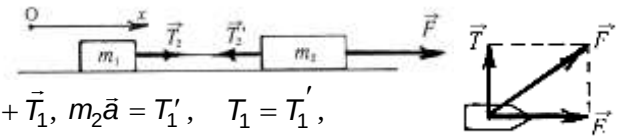
$F_1 = 5\cdot10^3$ Н $m = 2\cdot10^3$ кг $a = 3{,}2$ м/с^2	$m\vec{a} = \vec{F}_1 + \vec{T} = \vec{F}$, $ma = \sqrt{F_1^2 + T^2}$, $T = \sqrt{m^2a^2 - F_1^2}$.
$T = ?$	

Відповідь: $T = 4$ кН.

1.63. Під дією деякої сили візок, рухаючись із стану спокою, пройшов шлях $s_1 = 40$ см. Якщо на візок покласти вантаж маси $m_1 = 0{,}2$ кг, то під дією тієї ж сили за той самий час візок пройде із стану спокою шлях $s_2 = 20$ см. Яка маса візка?

Відповідь: $m = 0{,}2$ кг.

1.64. Два бруски, маси яких $m_1 = 1$ кг та $m_2 = 4$ кг, з'єднані шнуром і знаходяться на гладкій горизонтальній поверхні. З яким прискоренням a вони будуть рухатись, якщо один з них тягнути із силою $F = 10$ Н, яка направлена горизонтально? Чому дорівнює сила T натягу шнура, якщо прикласти силу F до першого бруска? До другого бруска?

Дано	*Розв'язання*
$m_1 = 1$кг $m_2 = 4$кг $F = 10$ Н	
$a = ?$ $T = ?$	

$$m_1\vec{a} = \vec{F} + \vec{T}_1,\ m_2\vec{a} = T_1',\quad T_1 = T_1',$$

Ox:

$$\begin{cases} m_1a = F - T_1, \\ m_2a = T_1. \end{cases}\quad a = \frac{F}{m_1 + m_2},\quad T_1 = \frac{F}{1 + \frac{m_1}{m_2}}.$$

$$m_1\vec{a} = \vec{T}_2,\ m_2\vec{a} = \vec{F} + \vec{T}_2',\ T_2 = T_2',$$

Ox:

$$\begin{cases} m_1a = T_2, \\ m_2a = F - T_2. \end{cases},\quad a = \frac{F}{m_1 + m_2},\quad T_2 = \frac{F}{1 + \frac{m_2}{m_1}}.$$

Відповідь: в обох випадках $a = 2$ м/с^2, $T_1 = 8$ Н, $T_2 = 2$ Н.

1.65. Спортсмен, маса якого 65 кг, плигає з десятиметрової вежі і входить у воду зі швидкістю 13,5 м/с. Визначити середню силу опору повітря.

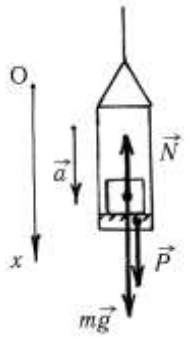
Відповідь: $F_{оп}$ = 45,5 Н.

1.66. При якому прискоренні розірветься трос, що піднімає вантаж маси 500 кг, якщо міцність тросу на розрив 15 кН?

Відповідь: a = 20 м/с^2.

1.67. Ліфт опускається з прискоренням 1 м/с^2. На підлозі ліфта лежить тіло маси 1 кг. Чому дорівнює вага тіла?

Дано	*Розв'язання*
a = 1 м/с^2 m = 1кг P = ?	За визначенням вагою тіла $\vec{P}$ тут є сила, з якою тіло діє на підлогу ліфта. Ця сила за третім законом Ньютона дорівнює за модулем і протилежна за напрямом силі реакції підлоги ліфта $\vec{N}$:



$$\vec{P} = -\vec{N}.$$

Сила реакції $\vec{N}$ є однією з двох сил, що діють на тіло. Іншою є сила тяжіння $m\vec{g}$. За другим законом Ньютона у векторній формі

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}.$$

Проектуємо на вісь *Ox:* $ma = mg - N$.

Звідси $N = m(g - a)$

Вага тіла (за модулем) $P = m(g - a)$.

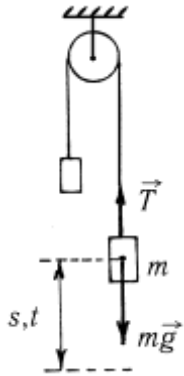
Як бачимо, вага є меншою, ніж сила тяжіння. Зверніть увагу на точку прикладання ваги – до підлоги!

Відповідь: P = 9 Н.

1.68. До нитки, перекинутої через нерухомий блок, підвішено вантажі. Чому дорівнює сила T натягу нитки, якщо один з вантажів

маси m = 3 кг пройшов шлях s = 2 м за час t = 2 с після початку руху?

Дано	*Розв'язання*
m = 3 кг s = 2 м t = 2 с T = ?	$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T}$, 1) Якщо прискорення вантажу спрямоване вниз: $ma = mg - T$,



$$s = \frac{at^2}{2} = \left(g - \frac{T}{m}\right)\frac{t^2}{2},\ T = m\left(g - \frac{2s}{t^2}\right).$$

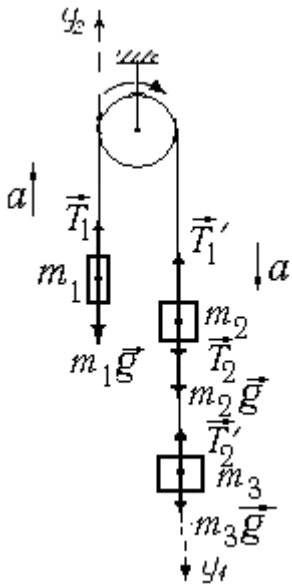
2) Якщо прискорення вантажу спрямоване вгору:

$$ma = T - mg,\ s = \left(\frac{T}{m} - g\right)\frac{t^2}{2},\ T = m\left(g + \frac{2s}{t^2}\right).$$

Відповідь: 1) T = 26,43 Н, 2) T = 32,43 Н.

1.69. З яким прискоренням a будуть рухатись вантажі, зображені на рисунку? Маси вантажів m_1 = 2 кг; m_2 = 1 кг і m_3 = 3 кг. Яка сила натягу ниток? Вважати блок і нитку невагомими, а нитку нерозтяжною.

Дано	*Розв'язання*
m_1 = 2 кг m_2 = 1 кг m_3 = 3 кг a = ? T = ?	Розглянемо сили. що діють на кожний вантаж. До лівого вантажу маси m_1 прикладена сила тяжіння $m_1\vec{g}$ і сила



натягу нитки $\vec{T}_1$. На вантаж маси m_2 діють три сили: натягу $\vec{T}_1'$ з боку вантажу m_1, натягу $\vec{T}_2$ з боку вантажу m_3 і сила тяжіння $m_2\vec{g}$. На вантаж маси m_3 діють сила натягу $\vec{T}_2'$ і сила тяжіння $m_3\vec{g}$. Блок і нитки невагомі, тому за третім законом Ньютона $T_1 = T'_1$, $T_2 = T'_2$ (порівнюються модулі сил). Нитка нерозтяжна, тому прискорення справа і зліва однакові за модулем $a = a'$. Рівняння руху вантажів в проекціях на осі y_1 і y_2 мають вигляд

$$T_1 - m_1g = m_1a,$$

$$T_2 + m_2g - T_1' = m_2a,$$
$$m_3g - T_2' = m_3a. \qquad (1)$$

Щоб визначити прискорення вантажів, додамо праві та ліві частини рівнянь (1). Тоді одержимо

$$a = g\,(m_2 + m_3 - m_1)g/(m_1 + m_2 + m_3).$$

Сили натягу T_1 і T_2 одержимо з першого і третього рівнянь (1)

$$T_1 = m_1(g+a),\ T_2 = m_3(g - a).$$

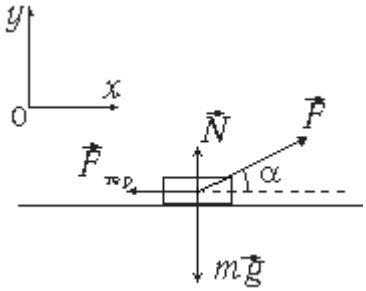
Відповідь: a = 3,27 м/с^2; T_1 = 26,16 Н, T_2 = 19,62 Н.

1.70. Через нерухомий блок перекинута тонка нитка, до кінців якої підвішені вантажі маси m_1 = 1 кг та m_2 = 2 кг. Яку швидкість v матимуть вантажі через t_2 = 2 с після початку їх руху?

Відповідь: v = 6,54 м/с.

Рух тіла з урахуванням сил тертя

1.71. Тягар маси m = 50 кг переміщується по горизонтальній площині під дією сили F = 300 Н, направленій під кутом α = 30° до горизонту. Коефіцієнт тертя вантажу об площину μ = 0,1. Визначити прискорення a вантажу.

Дано	*Розв'язання*
m = 50 кг F = 300 Н $\alpha = 30^\circ$ $\mu = 0{,}1$ a = ?	

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тер}} + m\vec{g}\,,$$

$$Ox: ma = F\cos\alpha - F_{\text{тер}}, \qquad Oy: 0 = F\sin\alpha + N - mg,$$

$$F_{\text{тер}} = \mu N\,,\ F_{\text{тер}} = \mu(mg - F\sin\alpha)\,,\ a = \frac{F(\cos\alpha + \mu\sin\alpha) - \mu mg}{m}.$$

Відповідь: a = 4,52 м/с^2.

1.72. Автобус, маса якого з повним навантаженням становить 15 т, рушає з місця з прискоренням 0,7 м/с^2. Визначити силу тяги, якщо коефіцієнт тертя 0,03.

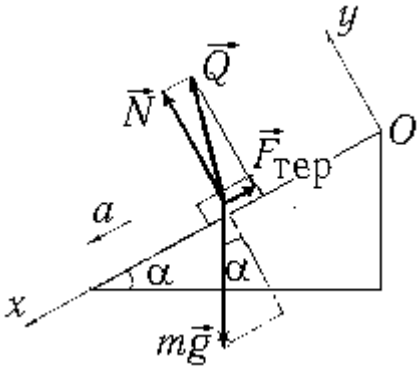
Відповідь: $F_т = 15$ кН.

1.73. Визначити прискорення тіла, що зісковзує з похилої площини з кутом нахилу $\alpha = 30°$ до горизонту. Коефіцієнт тертя $\mu = 0{,}3$.

Дано	*Розв'язання*
$\alpha = 30°$ $\mu = 0{,}3$ $a = ?$	Тіло на похилій площині зазнає дію з боку Землі (яка характеризується силою $m\vec{g}$) і дію з боку площини (яка характеризується силою реакції $\vec{Q}$).

Силу реакції $\vec{Q}$ доцільно розкласти на дві складові – силу нормальної реакції $\vec{N}$ і силу тертя $\vec{F}_{тер}$. Рівняння другого закону Ньютона матиме вигляд

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{Q} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{тер}.$$



На рисунку показані всі сили, що діють на тіло. Сила тяжіння $m\vec{g}$, прикладена до центра мас тіла; сила $\vec{N}$ нормальної реакції похилої площини прикладена до поверхні тіла, що стикається з похилою площиною; сила тертя ковзання $\vec{F}_{тер}$ прикладена до поверхонь, що зізнають тертя. Оскільки розміри тіла тут несуттєві, будемо вважати, що всі сили прикладені в одній точці.

Сила тяжіння $m\vec{g}$ направлена вертикально вниз, сила нормальної реакції $\vec{N}$ – перпендикулярно (нормально) до похилої площини, сила

тертя ковзання $\vec{F}_{тер}$ – паралельно похилій площині і протилежно швидкості руху тіла. Направимо вісь *Ox* системи відліку *xOy* вздовж похилої площини так, щоб її додатний напрям співпадав з напрямом прискорення $\vec{a}$. Визначимо проекції всіх сил на осі *Ox* і *Oy*.

Сила $\vec{N}$ перпендикулярна до осі *Ox*, тому її проекція на цю вісь дорівнює нулю, $N_x = 0$.

Сила $\vec{F}_{тер}$ паралельна осі *Ox*, але її напрям протилежний напряму осі *Ox*, тому проекція сили тертя на вісь *Ox* дорівнює $-F_{тер}$. Проекція сили тяжіння $m\vec{g}$ на вісь *Ox*, як видно з рисунка, становить $mg \sin\alpha$. У відповідності з другим законом Ньютона можна записати

$$ma = mg \sin\alpha - F_{тер}$$

Сила тертя має значення $F_{тер} = \mu N$. Отже

$$ma = mg \sin\alpha - \mu N.$$

Проектуючи всі сили на вісь *Oy* і враховуючи, що прискорення вздовж осі *Oy* дорівнює нулю, запишемо

$$mg \cos\alpha - N = 0.$$

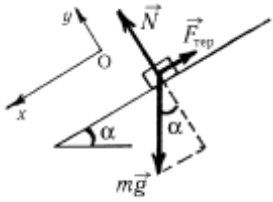
З двох останніх рівнянь знаходимо прискорення тіла

$$a = g(\sin\alpha - \mu \cos\alpha).$$

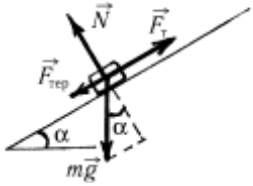
Відповідь: $a = 2{,}45$ м.

1.74. Визначити кут α нахилу площини до горизонту, при якому вантаж переміщується донизу зі сталою швидкістю без прикладання сили тяги, якщо його маса $m = 100$ кг, а коефіцієнт тертя ковзання $\mu = 0{,}15$. Відповісти на це питання у випадку, коли вантаж переміщується вгору під дією сили тяги $F_т = 800$ Н, прикладеної паралельно похилій площині.

Дано	*Розв'язання*
1) $m = 100$ кг $\mu = 0{,}15$ кг $v = \text{const}$ 2) $F_T = 800$ Н	1) $m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{тер} = 0$ *Ox*: $mg\sin\alpha - F_{тер} = 0$, *Oy*: $N - mg\cos\alpha_1 = 0$, $F_{тер} = \mu N$.
$\alpha_1 = ?$ $\alpha_2 = ?$	



$$mg \sin\alpha_1 - \mu(mg \cos\alpha_1) = 0,$$



$tg\alpha_1 = \mu$.

$\alpha_1 = arctg\mu$.

2) $m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{тер} + \vec{F}_т = 0$,

Ox: $mg\sin\alpha_2 + F_{тер} - F_т = 0$,

Oy: $N - mg\cos\alpha = 0$,

$F_{тер} = \mu N$, $\mu\cos\alpha_2 + \sin\alpha_2 = \dfrac{F_т}{mg}$, $\mu\cos\alpha_2 + \sqrt{1-\cos^2\alpha_2} = \dfrac{F_T}{mg}$.

Доцільно позбавитись квадратного кореня та підставити числові значення величин. Позначимо $\cos\alpha_2 = z$, отримаємо квадратне рівняння:

$$1{,}023z^2 - 0{,}245z - 0{,}335 = 0,$$

розв'язуючи яке, знайдемо $\cos\alpha_2 = 0{,}7$.

$$\alpha_2 = \arccos 0{,}7.$$

Відповідь: $\alpha_1 = 8{,}5°$, $\alpha_2 = 45{,}6°$.

1.75. Похила площина, що утворює кут $\alpha = 25°$ з горизонтом, має довжину $l = 2$ м. Тіло, яке рухається рівноприскорено, зісковзнуло з цієї площини за час $t = 2$ с. Визначити коефіцієнт тертя μ тіла об площину.

Відповідь: $\mu = 0{,}36$.

Закон всесвітнього тяжіння

1.76. Порівняти силу $F_{МС}$ притягання Місяця до Сонця і силу $F_{МЗ}$ притягання Місяця до Землі.

Дано	*Розв'язання*
$M_C = 1{,}97\cdot10^{30}$ кг $M_З = 5{,}96\cdot10^{24}$ кг $R_{МЗ} = 384\,440$ км $R_{МС} = 1{,}496\cdot10^8$ км	$F_{МС} = G\dfrac{M_М M_C}{R_{МС}^2}$; $F_{МЗ} = G\dfrac{M_З M_М}{R_{МЗ}^2}$, $\dfrac{F_{МС}}{F_{МЗ}} = \dfrac{M_C}{M_З}\left(\dfrac{R_{МЗ}}{R_{МС}}\right)^2$.
$\dfrac{F_{МС}}{F_{МЗ}} = ?$	

Відповідь: $F_{МС} / F_{МЗ} = 2{,}2$.

1.77. На якій відстані від поверхні Землі сила притягання

космічного корабля до неї у 100 разів менша, ніж на поверхні Землі?

Дано	*Розв'язання*
$n = 100$ $R_З = 6{,}37\cdot10^6$ м	$g_0 = \dfrac{GM_З}{R^2}$, $g = \dfrac{GM_З}{(R+h)^2}$,
$h = ?$	$n = \dfrac{mg_0}{mg} = \left(\dfrac{R+h}{R}\right)^2$, $h = R(\sqrt{n}-1)$.

Відповідь: $h = 9R = 57\,330$ км.

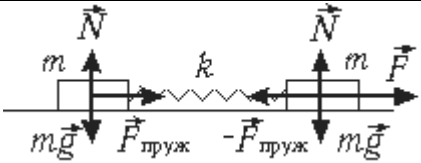
1.78. Визначити прискорення вільного падіння $g_З$ на поверхні нейтронної зірки, якщо її радіус $R = 10$ км, а середня густина речовини $\rho = 5\cdot10^{17}$ кг/м^3.

Дано	*Розв'язання*
$R = 10$ км $= 10^4$ м $\rho = 5\cdot10^{17}$ кг/м^3	$mg_З = G\dfrac{mM}{R^2}$, $M = \dfrac{4}{3}\rho\pi R^3$, $g_З = \dfrac{4\rho\pi RG}{3}$.
$g_З = ?$	

Відповідь: $g_З = 1{,}4\cdot10^{12}$ м/с^2.

Сила пружності. Закон Гука

1.79. Два однакових бруски з'єднані пружиною, жорсткість якої 200 Н/м, і розміщені на гладкій горизонтальній поверхні. На скільки розтягнеться пружина, якщо за один з брусків тягнути з силою 16 Н, яка прикладена вздовж поверхні? Масою пружини нехтувати.

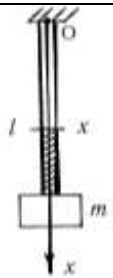
Дано	*Розв'язання*
$m_1 = m_2$ $\alpha = 25°$ $k = 200$ Н/м $F = 16$ Н	
$x = ?$	Ox: $ma = F - F_{пруж}$, $ma = F_{пруж}$. $F_{пруж} = kx$. $2kx = F$. $x = \dfrac{F}{2k}$.

Відповідь: $x = 4$ см.

1.80. До сталевого стержня завдовжки $l = 3$ м та діаметра $d = 2$ см підвішено вантаж маси $m = 2{,}5\cdot10^3$ кг. Визначити напруження σ у

стержні, його відносне ε та абсолютне Δl подовження.

Дано	*Розв'язання*
$l = 3$ м $d = 2$ см $= 2\cdot10^{-2}$ м $m = 2.5\cdot10^{3}$ кг $\rho_{ст} = 7.8\cdot10^{3}$ кг/м^3 $E_{ст} = 2\cdot10^{11}$ Па	Напруження σ у будь-якому перерізі стержня з координатою x створюється вагою вантажу mg та вагою тієї частини стержня, яка знаходиться нижче перерізу
$\sigma = ?$ $\varepsilon = ?$ $\Delta l = ?$	



$$\rho\frac{\pi d^2}{4}(l-x)g\ .$$

$$\sigma(x) = \frac{P}{S} = \frac{m + \rho\frac{\pi d^2}{4}(l-x)}{\frac{\pi d^2}{4}}g.$$

Таким чином, напруження в стержні залежить від координати x. Підставивши числові значення, одержимо

$$\sigma(x) = 7{,}81\cdot10^{7} + 7{,}65(3-x)\cdot10^{4}.$$

Тут σ – у Па, x – у метрах. Середнє значення напруження:

$$\langle\sigma\rangle = \frac{\sigma(0)+\sigma(l)}{2}. \qquad \varepsilon = \frac{\langle\sigma\rangle}{E}, \qquad \Delta l = \varepsilon l.$$

Відповідь: $\sigma(x) = 7{,}81\cdot10^{7} + 7{,}65(3-x)\cdot10^{4}$, x – у метрах, σ – у Па, $\varepsilon = 3{,}91\cdot10^{-4}$, $\Delta l = 1{,}17$ мм.

1.81. На пружині, закріпленій верхнім кінцем, підвішено вантаж, під дією якого пружина видовжується на 6 см. Жорсткість пружини 180 Н/м. Визначити масу вантажу.

Відповідь: $m = 1{,}1$ кг.

1.82. На дроті завдовжки $l = 50$ м та площі поперечного перерізу $S = 2$ мм^2 підвішено вантаж маси $m = 5$ кг, внаслідок чого дріт подовжився на $x = 6$ мм. Визначити модуль Юнга E речовини дроту.

Відповідь: $E = 204$ ГПа.

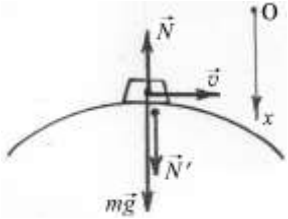
1.83. Свинцевий дріт підвішено вертикально за один з кінців. Яку найбільшу довжину l може мати дріт, не обриваючись під дією власної ваги? Границя міцності свинцю $\sigma_{max.} = 12{,}3$ МПа.

Відповідь: l_{max} = 111 м.

Застосування другого закону Ньютона до руху тіла по колу

1.84. Автомобіль маси m = 5 т рухається по опуклому мосту зі швидкістю v = 36 км/год З якою силою він тисне на середину опуклого мосту, якщо радіус кривизни мосту R = 1,5 м?

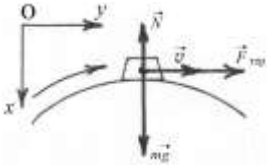
Дано	*Розв'язання*
$m = 5\cdot10^3$ кг v = 36 км/год = 10 м/с R = 150 м $N' = ?$	$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}$, Ox: $ma = mg - N$, $a = \frac{v^2}{R}$, $N = m\left(g - \frac{v^2}{R}\right)$, $N' = N$.



Відповідь: N' = 45,7 кН.

1.85. Автомобіль рухається по опуклому мосту радіуса кривизни R = 40 м. Коефіцієнт тертя ковзання шин об асфальт μ = 0,57. Яке максимальне прискорення a у горизонтальному напрямі може розвити автомобіль у верхній точці мосту, якщо його швидкість у цей момент v = 50,4 км/год?

Дано	*Розв'язання*
R = 40 м μ = 0,57 v = 50,4 км/год = 14 м/с a_{max} = ?	Сила тяги автомобіля виникає внаслідок тертя спокою ведучих коліс об асфальт, і проковзування



настає, коли сила тертя спокою сягає значення μN.

$$m\vec{a} = \vec{N} + m\vec{g} + \vec{F}_{\text{тер}},$$

$$Ox: \quad ma_x = mg - N,\ a_x = a_{доц} = \frac{v^2}{R},$$

$$Oy: \quad ma_y = F_{\text{тер}},$$

$$F_{\text{тер}} = \mu N,\ a_y = \frac{F_{\text{тер}}}{m},\ a_{\max} = a_y = \mu\left(g - \frac{v^2}{R}\right).$$

Відповідь: $a_{\max}$ = 2,8 м/с^2.

1.86. З якою швидкістю v має рухатися велосипедист по опуклому

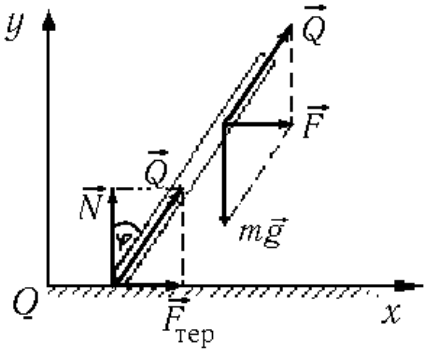
мосту радіуса кривизни R = 120 м, щоб у верхній точці траєкторії тиск на дорогу був у 3 рази менший, ніж під час руху на горизонтальній ділянці?

Відповідь: v = 28 м/с.

1.87. З якою максимальною швидкістю може їхати мотоцикліст по горизонтальній площині, описуючи дугу радіуса R = 100 м, якщо коефіцієнт тертя коліс об асфальт μ = 0,4? На який кут φ від вертикалі він при цьому відхиляється?

Дано	*Розв'язання*
R = 100 м μ = 0,4 v_{max} = ? φ = ?	Мотоцикліст взаємодіє з Землею (сила, що діє з боку Землі – сила тяжіння $m\vec{g}$) та з площиною (сила, що діє з боку площини – сила реакції $\vec{Q}$). Силу реакції $\vec{Q}$ доцільно розкласти на дві

складові – силу нормальної реакції $\vec{N}$ і силу тертя $\vec{F}_{тер}$: $\vec{Q} = \vec{N} + \vec{F}_{тер}$.



Лінія дії сили реакції $\vec{Q}$ має проходити через центр тяжіння мотоцикліста (точку, в якій прикладена сила тяжіння), щоб можна було додати сили $\vec{Q}$ і $m\vec{g}$. Рівнодіюча $\vec{F}$ сили тяжіння $m\vec{g}$ і сили реакції $\vec{Q}$ направлена горизонтально до центра кругової траєкторії мотоцикліста і за другим законом Ньютона надає мотоциклісту доцентрового прискорення $\vec{a}_{доц}$. У векторному запису другий закон Ньютона має вигляд

$m\vec{a}_{доц} = m\vec{g} + \vec{Q}$, або $m\vec{a}_{доц} = m\vec{g} + \vec{F}_{тер} + \vec{N}$

Проектуємо це рівняння на осі Ox і Oy:

$$ma_{доц} = F_{тер},$$
$$-mg + N = 0.$$

Враховуючи, що $F_{тер} = \mu N$, $a_{доц} = v^2/R$, одержимо

$$v = \sqrt{\mu g R}\ .$$

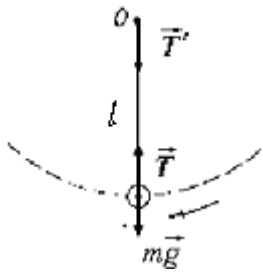
Для визначення кута φ нахилу мотоцикліста з прямокутного трикутника маємо

$$\text{tg}\,\varphi = F_{\text{тер}}/N = \mu\ ;\ \varphi = \text{arctg}\,\mu.$$

Відповідь: v = 20 м/с = 72 км/год, φ = 22°.

1.88. На стрижні завдовжки l = 1 м укріплений вантаж маси m = 0,5 кг. З якою силою діє вантаж на стрижень у нижній точці траєкторії під час обертання його по колу у вертикальній площині з частотою ν = 0,5 с$^{-1}$?

Дано	*Розв'язання*
l = 1 м m = 0,5 кг ν = 0,5 с$^{-1}$	Вантаж взаємодіє з Землею (сила $m\vec{g}$) і зі стрижнем (сила реакції, або зворотної дії на вантаж з боку стрижня,
T' = ?	



$\vec{T}$). Ці обидві сили прикладені до вантажу. Рівні їм за модулем, але протилежно направлені сили, що прикладені до тіл, з якими взаємодіє вантаж, такі: сила ($-m\vec{g}$) – до центра Землі (Земля цього "не відчуває"!) і сила $\vec{T}'$ – до стрижня. Другий закон Ньютона у векторному вигляді: сума сил, прикладених до вантажу, надає йому доцентрового прискорення

$$m\vec{a}_{\text{доц}} = m\vec{g} + \vec{T}\ .$$

Крім того, за третім законом Ньютона

$$\vec{T} = -\vec{T}'\ .$$

Проектуючи ці обидва рівняння на вертикальну вісь, направлену вверх, дійдемо до рівнянь

$$ma_{\text{доц.}} = T - mg;$$

$$T = T'.$$

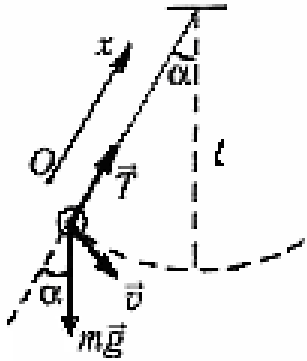
Враховуючи, що $a_{\text{доц}} = \omega^2 l = 4\pi^2\nu^2 l$, з цих рівнянь визначимо

$$T' = m(g + 4\pi^2\nu^2 l).$$

Відповідь: T' = 9,83 Н.

1.89. Куля маси m = 4 кг підвішена на нерозтяжній і невагомій нитці завдовжки l = 1 м і здійснює коливання у вертикальній площині. Встановити силу T натягу нитки в той момент, коли вона утворює з вертикаллю кут α = 60°, а швидкість кулі v = 1,5 м/с.

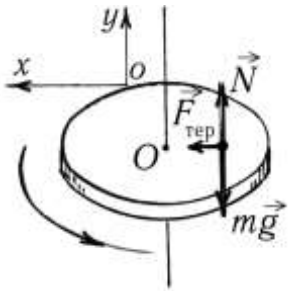
Дано	*Розв'язання*
$m = 4$ кг $l = 1$ м $\alpha = 60°$ $v = 1{,}5$ м/с $T = ?$	$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T}$, *Ox:* $ma = T - mg\cos\alpha$, $a = a_{доц} = \dfrac{v^2}{l}$, $T = m\left(\dfrac{v^2}{l} + g\cos\alpha\right)$.



Відповідь: $T = 28{,}62$ Н.

1.90. Горизонтально розміщений диск обертається навколо вертикальної осі, здійснюючи $n = 15$ обертів за хвилину. Найбільша відстань від осі обертання, на якій може утриматися на диску тіло, $R = 10$ см. Чому дорівнює коефіцієнт тертя μ тіла по диску?

Дано	*Розв'язання*
$n = 15$ хв$^{-1} = 0{,}25$ с$^{-1}$ $R = 10$ см $= 0{,}1$ м $\mu = ?$	$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{тер}$



Ox: $ma = F_{тер}$,

Oy: $0 = N - mg$,

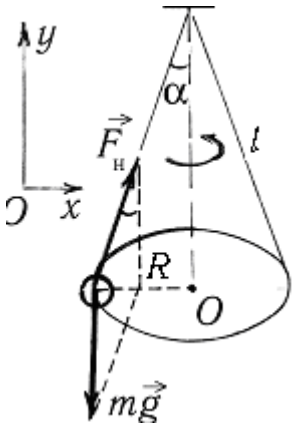
$a = a_{доц} = \dfrac{v^2}{R}$, $F_{тер} = \mu N$,

$v = 2\pi nR$, $\mu = \dfrac{4\pi^2 n^2 R}{g}$.

Відповідь: $\mu = 0{,}025$.

1.91. Тягарець маси $m = 0{,}2$ кг, прив'язаний до нитки завдовжки $l = 1$ м, описує в горизонтальній площині коло радіуса $R = 60$ см (конічний маятник). Визначити кутову швидкість ω, період обертання T тягарця і силу натягу $F_н$ нитки.

Дано	*Розв'язання*
$m = 0{,}2$ кг $l = 1$ м $R = 0{,}6$ м	$m\vec{a} = \vec{F}_н + m\vec{g}$,
$\omega = ?$ $T = ?$ $F_н = ?$	$Ox: ma = F_i \sin\alpha$, $Oy: 0 = F_н \cos\alpha - mg$ $a = a_{доц} = \omega^2 R$, $tg\alpha = \dfrac{\omega^2 R}{g}$,



$$tg\alpha = \frac{R}{\sqrt{l^2 - R^2}},$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g tg\alpha}{R}} = \sqrt{\frac{g}{\sqrt{l^2 - R^2}}},$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{\sqrt{l^2 - R^2}}{g}},$$

$$F_н = \frac{mg}{\cos\alpha} = \frac{mgl}{\sqrt{l^2 - R^2}}.$$

Відповідь: $\omega = 3{,}5$ с$^{-1}$, $T = 1{,}8$ с, $F_н = 2{,}45$ Н.

1.92. Супутник рухається навколо деякої планети по коловій орбіті радіуса $R = 4{,}7\cdot10^9$ м зі швидкістю $v = 10$ км/с. Радіус планети $R_1 = 1{,}5\cdot10^8$ м. Встановити середню густину ρ речовини планети.

Дано	*Розв'язання*
$R_1 = 1{,}5\ 10^8$ м $v = 10$ км/с $= 10^4$ м/с $R = 4{,}7\ 10^9$ м	$ma_{доц} = F_{тяж}$, $m\dfrac{v^2}{R} = G\dfrac{mM}{R^2}$,
$\rho = ?$	$M = \rho\dfrac{4}{3}\pi R_1^3$, $\rho = \dfrac{v^2 R}{\frac{4}{3}\pi R_1^3 G}$.

Відповідь: $\rho = 500$ кг/м^3.

1.93. Обчислити радіус орбіти штучного супутника Землі, у якого період обертання дорівнює земній добі (стаціонарний супутник).

Дано	*Розв'язання*

$T_{суп} = T_З = 24$ год $= 86\,400$ с $M_З = 6\ 10^{24}$ кг	$ma_{доц} = F_{тяж}$, $a_{доц} = \omega^2 R_{суп}$,
$R_{суп} = ?$	$m\omega^2 R_{суп} = G\dfrac{mM_З}{R_{суп}^2}$, $\omega = \dfrac{2\pi}{T_{суп}}$,

$$\left(\frac{2\pi}{T_{суп}}\right)^2 R_{суп} = \frac{GM_З}{R_{суп}^2},\ \ R_{суп} = \sqrt[3]{\frac{GM_З T_{суп}^2}{4\pi^2}}.$$

Відповідь: $R_{суп} = 4{,}22\cdot 10^4$ км.

1.3. Закони збереження в механіці

Основні закони і формули

- Імпульс тіла маси m, що рухається зі швидкістю $\vec{v}$,

$$\vec{p} = m\vec{v}.$$

- Зміна імпульсу тіла, що відбувається під дією постійної сили. прикладеної до тіла,

$$\Delta\vec{p} = m\Delta\vec{v} = \vec{F}\Delta t,$$

де $\Delta\vec{v}$ – зміна швидкості, Δt – час дії сили.

- Закон збереження імпульсу: в замкненій системі векторна сума імпульсів усіх тіл залишається постійною при будь-яких взаємодіях цих тіл:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + ... + m_n\vec{v}_n = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2 + ... + m_n\vec{u}_n,$$

де $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n$ – швидкості тіл до взаємодії, $\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n$ – після взаємодії.

- Робота постійної сили $\vec{F}$ на прямолінійному відрізку шляху s

$$A = Fs\cos\alpha,$$

де α – кут між напрямами сили і переміщення.

- Середня потужність – робота, що виконується за одиницю часу,

$$< N >= \frac{A}{t},$$

або для постійної сили

$$N = F<v>\cos\alpha,$$

де A – робота, виконана за проміжок часу t, F – модуль сили, $<v>$ – модуль середньої швидкості, α – кут між векторами сили $\vec{F}$ і

швидкості $\vec{v}$.

- Кінетична енергія тіла маси m, що рухається зі швидкістю v,

$$E_k = \frac{mv^2}{2}.$$

- Теорема про зв'язок кінетичної енергії і роботи: робота результуючої всіх сил, що діють на тіло, витрачається на **збільшення** кінетичної енергії тіла

$$A_{\text{усіх}} = E_{k2} - E_{k1}.$$

- Потенціальна енергія тіла маси m, що підняте на висоту h відносно нульового рівня відліку потенціальної енергії

$$E_p = mgh.$$

- Потенціальна енергія стиснутої або розтягнутої пружини:

$$E_p = \frac{kx^2}{2},$$

де k – коефіцієнт пружності (жорсткість) пружини, x – абсолютна деформація.

- Робота сил тяжіння або сил пружності, що діють на тіло, дорівнює **зменшенню** потенціальної енергії тіла

$$A_{\text{тяж}} = E_{p1} - E_{p2}.$$

- Закон збереження механічної енергії: сума кінетичної і потенціальної енергій тіл, які утворюють замкнену систему та взаємодіють між собою силами тяжіння і силами пружності, залишається постійною.

$$E_k + E_p = \text{const}.$$

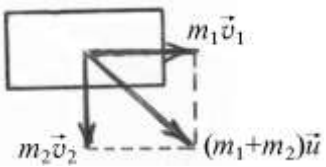
Закон збереження імпульсу

1.94. Снаряд маси m = 8 кг вилітає з гармати зі швидкістю v = 400 м/с. Чому дорівнює середня сила F дії порохових газів, якщо снаряд рухається у стволі час t = 0,004 с?

Дано	*Розв'язання*
m = 8 кг v = 400 м/с t = 0,004 с $\langle F \rangle$ = ?	$\langle F \rangle t = \Delta(mv) = mv$, $\langle F \rangle = \frac{mv}{t}$. ***Відповідь:*** $\langle F \rangle$ = 800 кН.

1.95. На воді зі швидкістю v_1 = 4 км/год вільно переміщується пліт маси m_1 = 150 кг. З берега на пліт стрибає хлопець, маса якого m_2 = 50

кг. Швидкість хлопця v_2 перпендикулярна до швидкості плоту. Після цього швидкість плоту з хлопцем становить u = 5 км/год. Визначити швидкість хлопця v_2.

Дано	*Розв'язання*
m_1 = 150 кг m_2 = 50 кг v_1 = 4 км/год u = 5 км/год	$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 =$ $= (m_1 + m_2)\vec{u}$,  $(m_1 + m_2)^2 u^2 =$ $m_1^2 v_1^2 + m_2^2 v_2^2$,
v_2 = ?	

$$v_2 = \frac{1}{m_2}\sqrt{(m_1 + m_2)^2 u^2 - m_1^2 v_1^2}\ .$$

Відповідь: v_2 = 16 км/год.

1.96. На нерухомій залізничній вантажній платформі маси M = 22 т стоїть слон маси m = 4 т. Якої швидкості v_1 відносно землі набуде платформа, якщо слон піде по ній зі швидкістю v = 2 м/с відносно платформи?

Дано	*Розв'язання*
M = 22 т m = 4 т v = 2 м/с	Швидкість слона відносно землі $u = v - v_1$. За умовою задачі система слон – платформа в початковий момент часу була відносно землі в спокою. Тоді за законом збереження імпульсу
v_1 = ?	

$$Mv_1 - mu = 0,$$

або $$Mv_1 - m(v - v_1) = 0,$$

звідки $$v_1 = \frac{m}{M + m}v\ .$$

Відповідь: v_1 = 0,31 м/с.

1.97. Старовинна гармата, що не має противідкотного пристрою, стріляє ядром під кутом α = 40° до горизонту. Маса ядра m = 10 кг, початкова швидкість його v_1 = 260 м/с. Якою буде швидкість відкоту гармати, якщо її маса M = 500 кг. Тертя не враховувати.

Дано	*Розв'язання*

$\alpha = 40°$ $m = 10$ кг $M = 500$ кг $v_1 = 260$ м/с	У горизонтальному (вісь Ox) напрямі на систему зовнішні сили не діють, і до неї можна застосувати закон збереження проекції імпульсу на цей напрям
$v_2 = ?$	$mv_{1x} - Mv_2 = 0;\quad v_{1x} = v_1 \cos\alpha;$ $$v_2 = \frac{mv_1\cos\alpha}{M}.$$

Відповідь: $v_2 = 4$ м/с.

1.98. Дві залізничні платформи, маси яких $m_1 = 18$ т і $m_2 = 26$ т, рухаються зі швидкостями $v_1 = 0{,}5$ м/с та $v_2 = 0{,}3$ м/с. З якою швидкістю та в якому напрямку будуть рухатись платформи після їх зчеплення, якщо вони рухались: в одному напрямку; назустріч одна одній?

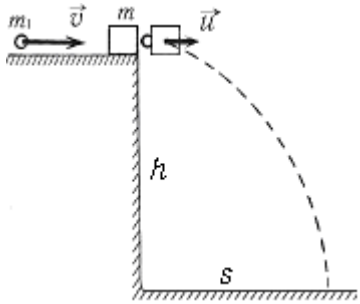
Дано	*Розв'язання*
$m_1 = 1{,}8\cdot10^4$ кг $m_2 = 2{,}6\cdot10^4$ кг $v_1 = 0{,}5$ м/с $v_2 = 0{,}3$ м/с	$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{u},$$ $$\vec{u} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}.$$
$u_1 = ?$ $u_2 = ?$	За додатний напрям осі Ox вибираємо напрям швидкості будь-якої платформи, наприклад, першої. Тоді в проекціях на Ox маємо $$u_1 = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2},\ u_2 = \frac{m_1v_1 - m_2v_2}{m_1 + m_2}.$$

Підстановка чисел дає в обох випадках $u > 0$, тобто в обох випадках рух платформ після зіткнення відбувається в напрямі руху першої платформи.

Відповідь: $u_1 = 0{,}38$ м/с , $u_2 = 0{,}03$ м/с .

1.99. На краю стола заввишки $h = 1{,}2$ м лежить дерев'яний брусок маси $m = 40$ г. У центр бруска влучає кулька маси $m_1 = 10$ г, що рухається горизонтально зі швидкістю $v = 10$ м/с. Кулька застряє в бруску. На якій відстані s від столу по горизонталі брусок упаде на землю?

Дано	*Розв'язання*
h = 1,2 м m = 40 г = 0,04 кг m_1 = 10 г = 0,01 кг v = 10 м/с s = ?	Після влучення кульки брусок буде рухатись



як тіло, що було кинуте горизонтально з початковою швидкістю u, яку знаходимо з закону збереження імпульсу

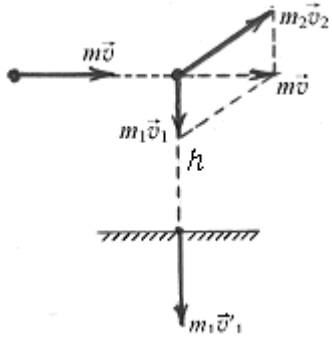
$m_1 v = (m + m_1)u$,

$$u = \frac{m_1}{m + m_1} v,\ t = \sqrt{\frac{2h}{g}},\ s = ut = \frac{m_1 v}{(m + m_1)} \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Відповідь: s = 0,99 м.

1.100. Граната маси m = 1 кг розірвалася на висоті h = 6 м над землею на два уламки. Безпосередньо перед розривом швидкість гранати була спрямована горизонтально і становила v = 10 м/с. Один з уламків маси m_1 = 0,4 кг полетів вертикально вниз і впав на землю зі швидкістю v'_1 = 40 м/с. Чому дорівнював модуль швидкості v_2 другого уламка одразу після розриву?

Дано	*Розв'язання*
m = 1 кг h = 6 м v = 10 м/с m_1 = 0,4 кг m_2 = 0,6 кг v_1' = 40 м/с v_2 = ?	$m\vec{v} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$, $(m_2 v_2)^2 = (m_1 v_1)^2 + (mv)^2$ $(v_1')^2 - (v_1)^2 = 2gh$,



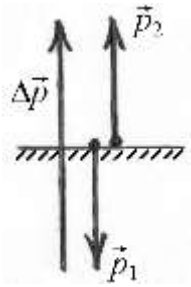
$$(m_2 v_2)^2 = m_1^2\left((v_1')^2 - 2gh\right) + (mv)^2,$$

$$v_2 = \frac{1}{m_2}\sqrt{m_1^2\left((v_1')^2 - 2gh\right) + m^2 v^2}.$$

Відповідь: v_2 = 30,6 м/с.

1.101. Кулька маси m = 50 г вільно падає на горизонтальну площину. В момент удару її швидкість була v = 8 м/с. Визначити приріст імпульсу $\Delta\vec{p}$ кульки під час пружного та непружного ударів.

Дано	*Розв'язання*
m = 50 г = 0,05 кг v_1 = 8 м/с а) $\vec{v}_2 = -\vec{v}_1$ б) v_2 = 0 Δp = ?	а) Під час пружного удару кулька відскакує з такою ж за модулем швидкістю $v_2 = v_1$. Отже модулі імпульсів є рівними $p_1 = p_2$.



На рисунку вказані імпульси кульки до і після відскоку За визначенням приріст імпульсу $\Delta\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$, або $\vec{p}_2 = \vec{p}_1 + \Delta\vec{p}$. Останню рівність розуміють так: треба визначити такий вектор $\Delta\vec{p}$, щоб у разі додавання його з $\vec{p}_1$ отримати $\vec{p}_2$. Всі три вектори лежать на одній прямій (на рисунку для зручності вони дещо зсунуті) і додавати їх нескладно. Очевидно, що $\Delta\vec{p}$ напрямлений вгору, а його модуль дорівнює

$$|\Delta\vec{p}| = \Delta p = 2mv_1.$$

б) Під час непружного зіткнення кулька не відскакує, $\vec{p}_2 = 0$, $\Delta\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = -\vec{p}_1$, за модулем $\Delta p = mv_1$.

Відповідь: а)Δp = 0,8 кг·м/с; б)Δp = 0,4 кг·м/с.

1.102. Футбольний м'яч маси m = 0,4 кг падає вертикально, вдаряється об землю зі швидкістю v = 7 м/с і підстрибує на висоту h = 1,5 м. Визначити приріст імпульсу (за модулем) м'яча під час удару.

Дано	*Розв'язання*
m = 0,4 кг v = 7 м/с h = 1,5 м Δp = ?	$\Delta\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$ (див. задачу 1.101). У проекціях на вертикаль $\Delta p = p_1 + p_2$, $\Delta p = m(v + v_1)$,

v_1 – швидкість, з якою піднімається м'яч після відскоку; якщо h – висота підйому, то $h = \dfrac{v_1^2}{2g}, v_1 = \sqrt{2gh}$.

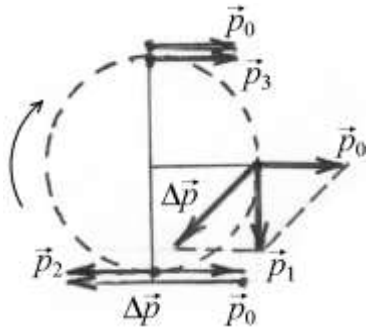
$$\Delta p = m(v + \sqrt{2gh}).$$

Відповідь: Δp = 4,97 кг·м/с.

1.103. Електрон з кінетичною енергією $E_k = 3{,}2\cdot10^{-16}$ Дж (маса

спокою m = 9,1·10^{-31} кг) рухається в бетатроні по колу постійного радіуса. Чому дорівнює зміна імпульсу Δp електрона, якщо він здійснив: а) чверть оберту; б) пів оберту; в) цілий оберт?

Дано	*Розв'язання*
$E_к$ = 3,2 × ×10^{-12} Дж m = 9,1 × ×10^{-31} кг Δp = ?	Позначимо імпульси електрона: початковий $\vec{p}_0$, через чверть оберту $\vec{p}_1$, півоберта $\vec{p}_2$, цілий оберт $\vec{p}_3$ (див. рис.). Всі вони за модулем є рівними $p_0 = p_1 = p_2 = p_3$ і спрямованими всюди за дотичною до кола.



Приростом називається різниця між кінцевим і початковим значеннями.

а) Тоді через чверть оберту $\Delta\vec{p} = \vec{p}_1 - \vec{p}_0$, або $\vec{p}_0 + \Delta\vec{p} = \vec{p}_1$. З рисунка видно, що за модулем $\Delta p = \sqrt{p_0^2 + p_1^2} = p_0\sqrt{2} = mv\sqrt{2}$. Швидкість знайдемо з виразу для кінетичної енергії $E_k = \dfrac{mv^2}{2}$, $v = \sqrt{\dfrac{2E_k}{m}}$,

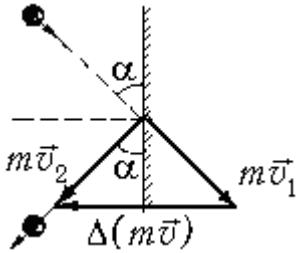
$\Delta p = 2\sqrt{E_k m}$.

б) Через півоберту $\Delta\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_0, \Delta p = 2p_0 = 2\sqrt{2mE_k}$.

в) Через повний оберт $\Delta\vec{p} = \vec{p}_3 - \vec{p}_0 = 0$.

Відповідь: а)Δp = 3,4·10^{-23} кг·м/с; б)Δp = 4,8·10^{-23} кг·м/с; в) Δp = 0.

1.104. Молекула кисню, що летить зі швидкістю v_1= 500 м/с, пружно вдаряється об гладку стінку посудини і відскакує без втрати швидкості. Напрям швидкості молекули утворює кут α = 30° з площиною стінки. Визначити імпульс, який одержала стінка посудини. Маса молекули кисню 5,3·10^{-26} кг.



Дано	*Розв'язання*
$v_1 = v_2 = 500$ м/с $\alpha = 30°$ $m = 5{,}3\cdot10^{-26}$ кг	У процесі удару молекула і стінка діють одна на одну пружними силами. Ці сили за третім законом Ньютона залишаються рівними між собою і протилежно направленими у будь-який момент часу зіткнення. Внутрішні сили взаємодії надають молекулі і стінці рівні за модулем і протилежно спрямовані імпульси. Молекула одержує від стінки деякий імпульс $\Delta(m\vec{v})$, який додається до початкового імпульсу молекули $m\vec{v}_1$ внаслідок чого імпульс молекули дорівнюватиме $m\vec{v}_2$.
$\Delta p = ?$	

$$m\vec{v}_1 + \Delta(m\vec{v}) = m\vec{v}_2 .$$

За законом додавання векторів з урахуванням рівності кутів падіння і відбивання під час пружного зіткнення та рівності модулів імпульсів до і після відбивання визначаємо, що вектор $\Delta(m\vec{v})$ направлений перпендикулярно до стінки. З рисунка видно, що приріст імпульсу молекули $\Delta(m\vec{v})$ за модулем дорівнює

$2\,mv_1 \sin\alpha$.

Стінка, в свою чергу, одержує імпульс за модулем рівний

$2\,mv_1 \sin\alpha$, який спрямований перпендикулярно до стінки, всередину неї.

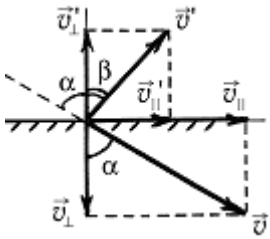
Відповідь: $\Delta p = 2{,}65\cdot10^{-23}$ кг·м/с.

1.105. Молекула маси $m = 2\cdot10^{-26}$ кг, що летіла зі швидкістю v = 600 м/с під кутом $\alpha = 60°$ до площини стінки, відскакує від неї без втрати швидкості. Яка середня сила $\langle F\rangle$ діє на молекулу з боку стінки, якщо час взаємодії t = 1 нс?

Відповідь: $\langle F\rangle = 2{,}08\cdot10^{-14}$ Н.

1.106. Кулька вдаряється об площину під кутом α = 45° до нормалі. Коефіцієнт тертя між кулькою та площиною μ = 0,6. Під яким кутом β кулька відіб'ється від площини, якщо нормальна складова швидкості під час удару не змінюється?

Дано	*Розв'язання*
α = 45° μ = 0,3 β = ?	Зобразимо швидкості кульки до і після удару. Для зручності вони розкладені на складові вздовж площини і перпендикулярно до неї.



За другим законом Ньютона $\vec{F}\Delta t = \Delta(m\vec{v})$.

Горизонтальну складову імпульсу $m\vec{v}_{||}$ змінює сила тертя $\vec{F}_{\text{тер}}$, а вертикальну складову імпульсу $m\vec{v}_\perp$ змінює сила пружності $\vec{F}_{\text{пр}}$.

Тому у проекціях на горизонталь і вертикаль маємо

$$F_{\text{тер}}\Delta t = \Delta(mv_{||}),$$

$$F_{\text{пр}}\Delta t = \Delta(mv_\perp).$$

Сила тертя за модулем $F_{\text{тер}} = \mu F_\perp$, де $F_\perp$ є силою нормального тиску кульки на площину. За модулем вона дорівнює пружній силі $F_{\text{пр}}$, що діє на кульку з боку площини (за третім законом Ньютона дія дорівнює протидії) $F_\perp = F_{\text{пр}}$.

$$\mu F_{\text{пр}}\Delta t = \Delta(mv_{||}), \qquad (*)$$

$$F_{\text{пр}}\Delta t = \Delta(mv_\perp). \qquad (**)$$

Поділимо рівняння (*) на (**)

$$\mu = \frac{\Delta(mv_{||})}{\Delta(mv_\perp)} = \frac{\Delta v_{||}}{\Delta v_\perp}.$$

Тепер знайдемо приріст (від кінцевого значення віднімаємо початкове) кожної складової швидкості. Для перпендикулярної складової

$$\Delta\vec{v}_\perp = \vec{v}_\perp' - \vec{v}_\perp,$$

або, проектуючи на вертикаль та враховуючи, що нормальна до площини складова швидкості за модулем не змінюється,

$$\Delta v_\perp = v_\perp' - (-v_\perp) = 2v_\perp = 2v\cos\alpha.$$

Аналогічно для поздовжньої складової

$$\Delta\vec{v}_{||} = \vec{v}'_{||} - \vec{v}_{||},$$

після проектування на горизонталь отримаємо

$$\Delta v_{||} = v_{||} - v'_{||} = v\sin\alpha - v'_{\perp}\,\mathrm{tg}\,\beta = v\sin\alpha - (v\cos\alpha)\,\mathrm{tg}\,\beta.$$

Тепер можна виразити μ

$$\mu = \frac{v\sin\alpha - (v\cos\alpha)\,\mathrm{tg}\,\beta}{2v\cos\alpha} = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha - \mathrm{tg}\,\beta}{2}.$$

Звідси $\mathrm{tg}\,\beta = \mathrm{tg}\,\alpha - 2\mu$.

Відповідь: $\beta = 21{,}8°$.

Робота. Потужність

1.107. Спортсмен піднімає гирю маси $m = 32$ кг на висоту $h = 2{,}2$ м з прискоренням $a = 5$ м/с^2. Яку роботу він при цьому виконує?

Дано	*Розв'язання*
$h = 2{,}2$ м $m = 32$ кг $a = 5$ м/с^2	$ma = F - mg$; $F = m(a + g)$, $A = F\cdot h = m(a + g)h$.
$A = ?$	***Відповідь:*** $A = 1{,}04$ кДж.

1.108. Підйомний кран піднімає контейнер із цеглою об'ємом $V = 2$ м^3 протягом $t = 40$ с. Яку роботу виконує двигун крана, якщо швидкість підйому $v = 0{,}25$ м/с є постійною, а густина цегли $\rho = 1800$ кг/м^3?

Відповідь: $A = 0{,}35$ МДж.

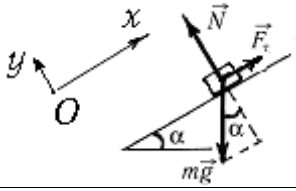
1.109. Яку роботу A виконує сила тяжіння під час одного оберту супутника навколо Землі по коловій орбіті? Опором середовища нехтувати.

Дано	*Розв'язання*
m g	На кожному малому відрізку Δs орбіти $A = mg\,\Delta s\cos\alpha$, $\alpha = 90°$, $A = 0$.
$A = ?$	

Відповідь: $A = 0$.

1.110. Вантаж маси $m = 200$ кг піднімають рівномірно по похилій площині, яка утворює кут $\alpha = 30°$ з горизонтом. Визначити роботу A

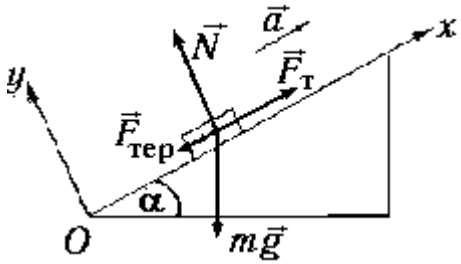
сили тяги на шляху s = 3 м. Тертям нехтувати.

Дано	*Розв'язання*
m = 200 кг α = 30° s = 3 м μ = 0	 $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_т$, $\vec{a} = 0$, $Ox: 0 = -mg\sin\alpha + F_т$, $A = F_т s = mgs\sin\alpha$.
A = ?	

Відповідь: A = 2,94 кДж.

1.111. Визначити роботу A, яку виконує сила тяги по підйому вантажу по похилій площині і середню потужність <N> підйомного пристрою, якщо маса вантажу m = 100 кг, довжина похилої площини l = 2 м, кут її нахилу до горизонту α = 30°, коефіцієнт тертя μ = 0,1, прискорення під час підйому a = 1 м/с^2. Початкова швидкість вантажу дорівнює нулю.

Дано	*Розв'язання*
m = 100 кг l = 2 м α = 30° a = 1 м/с^2 μ = 0,1 v_0 = 0	На вантаж, який рухається по похилій площині, діють сили: тяжіння $m\vec{g}$, нормальної реакції похилої площини $\vec{N}$, тяги з боку підйомного пристрою $\vec{F}_т$, тертя $\vec{F}_{тер}$. Вибираючи напрями координатних осей Ox і Oy вздовж напряму руху вантажу і перпендикулярно до цього напряму та проектуючи на них векторне рівняння другого закону Ньютона
$A_т$ = ?<N> ?	



$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_т + \vec{F}_{тер},$$

маємо

$$Ox:\ ma = -mg\sin\alpha + F_т - F_{тер},$$

$$Oy:\ 0 = -mg\cos\alpha + N.$$

Враховуючи, що $F_{тер.} = \mu N = \mu mg\cos\alpha$, одержимо для сили тяги

$$F_т = m(a + g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)).$$

Робота цієї сили на шляху l

$$A_т = F_т\, l = ml(a + g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)).$$

Середня потужність

$$\langle N\rangle = \frac{A_т}{t}.$$

Час підйому вантажу можна одержати з формули шляху для рівноприскореного руху без початкової швидкості $l = \frac{at^2}{2}$, звідки

$$t = \sqrt{\frac{2l}{a}}.$$

Відповідь: $A_т$ = 1,35 кДж. $\langle N\rangle$ = 675 Вт.

1.112. Поїзд маси m = 600 т рівномірно піднімається на гору з підйомом h = 5 м на кожний s = 1 км шляху. Коефіцієнт тертя μ = 0,002. Визначити потужність N електровоза, якщо швидкість руху v = 36 км/год.

Дано	*Розв'язання*
m = 600 т = $6\cdot10^5$ кг a = 0 h = 5 м s = 10^3 м μ = 0,002 v = 36 км/год = 10 м/с	$N = F_т v$, $F_т = mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$, (див. задачу 1.111) $\sin\alpha = \frac{h}{s}$; $\cos\alpha = \sqrt{1-\frac{h^2}{s^2}}$,
N = ?	$N = mgv(\frac{h}{s} + \mu\sqrt{1-\left(\frac{h}{s}\right)^2})$.

Відповідь: N = 412 кВт.

1.113. Автомобіль маси m = 1 т рухається по горизонтальному шляху з постійною швидкістю v = 60 км/год. Потужність двигуна автомобіля N = 50 кВт. Якою має бути потужність N_1 двигуна, щоб автомобіль рухався на гору з підйомом α = 20° з тією ж швидкістю?

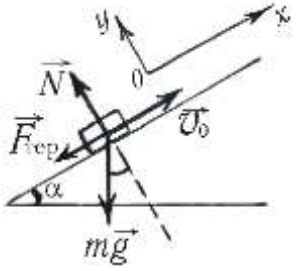
Дано	*Розв'язання*

$m = 10^3$ кг $v = 60$ км/год=16,67 м/с $N = 50$ кВт $= 5\cdot10^4$ Вт $\alpha = 20°$	$N = F_{тер}v = \mu mgv$, $N_1 = F_т\cdot v$, $F_т = mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$ (див. задачу 1.111), $N_1 = N\cos\alpha + mgv\sin\alpha$.
N_1 = ?	

Відповідь: $N_1 = 103$ кВт.

1.114. Плоска шайба маси $m = 0,2$ кг починає ковзати з початковою швидкістю $v_0 = 12$ м/с вгору вздовж похилої площини, що утворює кут $\alpha = 30°$ з горизонтом. Коефіцієнт тертя між шайбою і поверхнею $\mu = 0,3$. Яку роботу A виконують сили тертя протягом $t = 3,5$ с від початку руху?

Дано	*Розв'язання*
$m = 0,2$ кг $v_0 = 12$ м/с $\alpha = 30°$ $\mu = 0,3$ $t = 3,5$ с	Частину часу t_1 шайба рухається вгору до зупинки, іншу частину часу $t_2 = t - t_1$ шайба рухається вниз. Під час руху вгору:
$A_{тер}$ = ?	



$$m\vec{a}_1 = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{тер},$$

$$Ox: ma_1 = -mg\sin\alpha - F_{тер},$$

$$Oy: 0 = -mg\cos\alpha + N,$$

$$F_{тер} = \mu N,\ a_1 = -g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha).$$

Шлях, що проходить шайба вгору до зупинки, $s_1 = v_0t_1 + \dfrac{a_1t_1^2}{2}$, час руху вгору $t_1 = \dfrac{v_0}{|a_1|}$. Робота сили тертя (завжди від'ємна величина) під час руху вгору

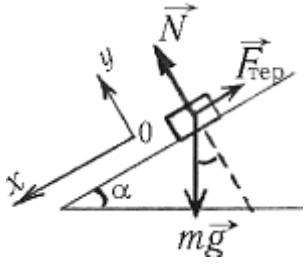
$A^{вгору}_{тер} = F_{тер}s_1\cos 180° = -F_{тер}s_1 = -4,95$ Дж.

Під час руху вниз $m\vec{a}_2 = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{тер}$.

Ox: $ma_2 = mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha$.

$$A^{вниз}_{тер} = F_{тер}s_2\cos 180° =$$

$$= -F_{тер}s_2 = -\mu mgs_2\cos\alpha,$$



$$s_2 = \frac{a_2 t_2^2}{2},\ \grave{A}^{\text{âíèç}}_{\text{òåð}} = -2{,}15 \text{ Дж}.$$

$$A_{\text{тер}} = \grave{A}^{\text{âãîðó}}_{\text{òåð}} + \grave{A}^{\text{âíèç}}_{\text{òåð}} = -7{,}1 \text{ Дж}.$$

Відповідь: $A_{\text{тер}} = -7{,}1$ Дж.

Енергія. Закон збереження енергії

1.115. На якій висоті h опиниться кинуте вертикально вгору тіло маси m = 0,25 кг через t = 3 с. Початкова кінетична енергія тіла E_k = 100 Дж. Опором повітря нехтувати.

Дано	*Розв'язання*
m = 0,25 кг t = 3 с E_k = 100 Дж	$\frac{mv_0^2}{2} = E_k; v_0 = \sqrt{\frac{2E_k}{m}};$
h = ?	$h = v_0 t - \frac{gt^2}{2} = \sqrt{\frac{2E_k}{m}}t - \frac{gt^2}{2}.$

Відповідь: h = 31,4 м.

1.116. Тіло маси m = 1 кг кинули з башти горизонтально зі швидкістю $v_{\text{гор}}$ = 20 м/с. Якою буде кінетична енергія E_k тіла в кінці четвертої секунди руху? Опором повітря нехтувати.

Дано	*Розв'язання*
m = 1 кг $v_{\text{гор}}$ = 20 м/с t = 4 с	$\vec{v} = \vec{v}_{\text{верт}} + \vec{v}_{\text{гор}}$, (див. задачу 1.53) $v^2 = v_{\text{верт}}^2 + v_{\text{гор}}^2$, $v_{\text{верт}} = gt$,
E_k = ?	$E_k = \frac{mv^2}{2},\ E_k = \frac{m}{2}(v_{\text{гор}}^2 + g^2t^2).$

Відповідь: E_k = 0,97 кДж.

1.117. Куля, яка летить зі швидкістю v_0 = 400 м/с, пробиває тонку дошку. Швидкість кулі після вильоту з дошки v = 250 м/с. Яка частина η енергії кулі перейшла в теплоту?

Відповідь: η = 0,61.

1.118. Пластилінова кулька маси m = 80 г рухається зі швидкістю v = 3 м/с і зіштовхується з нерухомою пластиліновою кулькою тієї ж маси. Визначити кількість теплоти Q, що виділилась під час зіткнення.

Дано	*Розв'язання*
$m = 80$ г $= 0{,}08$ кг $v = 3$ м/с	$mv = 2mu$, $u = v/2$,
$Q = ?$	

$$Q = |\Delta E_k| = \frac{mv^2}{2} - \frac{(2m)u^2}{2} = \frac{mv^2}{2}.$$

Відповідь: $Q = 0{,}18$ Дж.

1.119. Шайба, що кинута по поверхні льоду з початковою швидкістю $v_0 = 19{,}6$ м/с, зупинилась через $t = 4$ с. Визначити коефіцієнт тертя μ шайби об лід.

Дано	*Розв'язання*
$v_0 = 19{,}6$ м/с $v = 0$ $t = 4$ с	$\frac{mv_0^2}{2} = \mu mgs$, $s = v_0 t + \frac{at^2}{2}$, $a = -\frac{v_0}{t}$, $s = \frac{v_0 t}{2}$,
$\mu = ?$	$\mu = \frac{v_0}{gt}$.

Відповідь: $\mu = 0{,}5$.

1.120. Тіло, що було кинуто вертикально вниз з висоти $h = 20$ м зі швидкістю $v = 5$ м/с, впало на Землю зі швидкістю $v_1 = 18$ м/с. Яка частина η механічної енергії перейшла в теплоту?

Дано	*Розв'язання*
$v = 5$ м/с $h = 20$ м $v_1 = 18$ м/с	Повна механічна енергія тіла на висоті h $E = mgh + \frac{mv^2}{2}$. У момент падіння на землю
$\eta = \frac{Q}{E} = ?$	$E_1 = \frac{mv_1^2}{2}$, $Q = E - E_1$, $\eta = \frac{Q}{E} = 1 - \frac{v_1^2}{2gh + v^2}$.

Відповідь: $\eta = 0{,}22$.

1.121. Тіло розганяють за допомогою стиснутої пружини. Якою є потенціальна енергія пружини жорсткості $k = 300$ Н/м у той момент, коли вона надає тілу маси $m = 2$ кг прискорення $a = 4$ м/с^2?

Дано	*Розв'язання*

$k = 300$ Н/м $m = 2$ кг $a = 4$ м/с^2	$F = ma$; $F = kx$; $x = \frac{ma}{k}$; $E_p = \frac{kx^2}{2} = \frac{m^2a^2}{2k}$.
$E_p = ?$	

Відповідь: $E_p = 0{,}11$ Дж.

1.122. Яку роботу A треба виконати, щоб збільшити швидкість тіла від $v_1 = 2$ м/с до $v_2 = 6$ м/с на шляху $s = 10$ м? На всьому шляху діє постійна сила тертя $F_{тер} = 2$ Н. Маса тіла $m = 1$ кг.

Дано	*Розв'язання*
$v_1 = 2$ м/с $v_2 = 6$ м/с $s = 10$ м $F_{тер} = 2$ Н $m = 1$ кг	Робота всіх сил, що діють на тіло, дорівнює приростові кінетичної енергії тіла $A_{всіх} = \Delta E_k = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}$.
$A_{зовн} = ?$	Роботу всіх сил представимо як суму робіт зовнішньої сили та сили тертя. Робота сили тертя від'ємна, оскільки напрями сили тертя та переміщення тіла протилежні

$$A_{зовн} + A_{тер} = A_{зовн} - F_{тер}\, s = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}.$$

Звідси $A_{зовн} = F_{тер}s + \frac{m}{2}(v_2^2 - v_1^2)$.

Відповідь: $A_{зовн} = 36$ Дж.

1.123. Літак маси $m = 2$ т, що рухається горизонтально зі швидкістю $v_1 = 50$ м/с на висоті $h = 420$ м, починає знижуватися при вимкненому двигуні і досягає доріжки аеродрому, маючи швидкість $v_2 = 30$ м/с. Визначити роботу сили опору повітря A під час зниження літака.

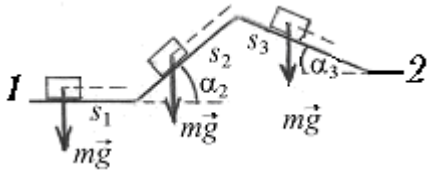
Відповідь: $A = -9{,}84$ МДж.

1.124. Автомобіль маси $m = 1$ т з потужністю двигуна $N = 70$ кВт і коефіцієнтом корисної дії двигуна $\eta = 0{,}7$ рухається з місця. Якої швидкості v набуде автомобіль через час $t = 5$ с?

Дано	*Розв'язання*
$m = 1$ т $= 10^3$ кг $v_0 = 0$ $N = 70$ кВт $= 7\cdot10^4$ Вт $\eta = 0{,}7$ $t = 5$ с	$A = \Delta E_к = \dfrac{mv^2}{2} - \dfrac{mv_0^2}{2}$, $A = \eta Nt$, $\eta Nt = \dfrac{mv^2}{2}$,
$v = ?$	$v = \sqrt{\dfrac{2\eta Nt}{m}}$.

Відповідь: $v = 22{,}14$ м/с.

1.125. Лижник маси $m = 70$ кг пройшов горизонтальний шлях $s_1 = 1$ км, потім на гору з підйомом $\alpha_2 = 30°$ шлях $s_2 = 500$ м, після чого з гори з ухилом $\alpha_3 = 20°$ шлях $s_3 = 600$ м. Чому дорівнює робота сили тяжіння на всьому шляху?

Дано	*Розв'язання*
$m = 70$ кг $s_1 = 1000$ м $\alpha_2 = 30°$ $s_2 = 500$ м $\alpha_3 = 20°$ $s_3 = 730$ м	
$A = ?$	Робота сили тяжіння під час переходу з рівня *1* на рівень *2* дорівнює зменшенню потенціальної енергії тіла $A_{тяж} = E_{p1} - E_{p2}$. Якщо за нульовий рівень відліку потенціальної енергії прийняти рівень *1*, то

$$A_{тяж} = 0 - mgh = -mg(s_2 \sin\alpha_2 - s_3 \sin\alpha_3).$$

Відповідь: $A = -31{,}4$ кДж.

1.126. З похилої площини довжини l і кута нахилу α зі стану спокою зісковзує тіло. Яка швидкість тіла біля основи площини, якщо коефіцієнт тертя між тілом і площиною μ?

Дано	*Розв'язання*
l α μ	На тіло діють сили тяжіння, тертя і нормальної реакції. Робота всіх сил, що діють на тіло, витрачається на збільшення кінетичної енергії тіла
$v = ?$	$A = E_{k2} - E_{k1}$. $A = A_{тяж} + A_{тер} + A_N$.

Роботу кожної сили визначаємо за загальним правилом

як добуток сили на переміщення та на косинус кута між напрямами сили і переміщення.

$$A_{тяж} = mg \cdot l \cdot \cos(90 - \alpha) = mgl \sin \alpha.$$

$A_{тер} = F_{тер} \cdot l \cdot \cos 180° = (\mu mg \cos \alpha) \cdot l \cdot (-1) = -\mu mgl \cos \alpha$ (робота сили тертя від'ємна).

$A_N = 0$, оскільки сила нормальної реакції є перпендикулярною до переміщення.

$E_{k1} = 0$, оскільки на вершині похилої площини тіло знаходилось у стані спокою. $E_{k2} = \dfrac{mv^2}{2}$.

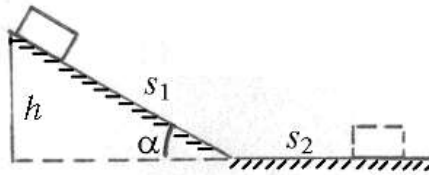
Остаточно маємо $mgl(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) = \dfrac{mv^2}{2}$.

Звідки $v = \sqrt{2gl(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}$.

Відповідь: $v = \sqrt{2gl(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}$.

1.127. Тіло рухається зі стану спокою спочатку вниз по похилій площині, а потім по горизонтальній поверхні до зупинки. Довжина похилої площини s_1, кут її нахилу до горизонту $\alpha = 10°$. Визначити коефіцієнт тертя μ на всьому шляху, якщо тіло проходить по горизонтальній поверхні такий самий шлях s_2, що й по похилій площині. Яку роботу необхідно виконати, щоб втягнути тіло з кінцевої точки знов на вершину похилої площини?

Дано	*Розв'язання*
$\alpha = 10°$ $s_1 = s_2$ $\mu = ?$ $A_{зовн} = ?$	Робота всіх сил, що діють на тіло, витрачається на збільшення кінетичної енергії тіла: $A_{всіх} = E_{k2} - E_{k1} = 0$, оскільки на вершині похилої площини тіло знаходилось у стані спокою, а в кінці горизонтальної ділянки тіло зупинилося.



$$A_{всіх} = A_{тяж} + A_{тер} = mg \cdot s_1 \cdot \cos(90 - \alpha) - \mu mgs_1 \cos \alpha - \mu mg\, s_2 = 0$$

$$mg \cdot s_1 \cdot (\sin \alpha - \mu \cos \alpha - \mu) = 0.$$

Звідки

$$\mu = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}.$$

Щоб відповісти на друге питання, скористуємося зв'язком між роботою сили тяжіння і потенціальною енергією. Під час руху вниз $A_{тяж} = E_{p1} - E_{p2} = mgh$, під час зворотного руху $A'_{тяж} = E_{p2} - E_{p1} = -mgh$.

Під час прямого руху робота всіх сил $A_{1всіх} = A_{тяж} + A_{тер} = 0$, звідки $A_{тер} = -A_{тяж}$.

Під час зворотного руху робота всіх сил $A_{2всіх} = A'_{тяж} + A_{тер} + + A_{зовн} = 0$. Звідки $A_{зовн} = 2mgh$. $h = s_1 \sin\alpha$.

Відповідь: $\mu = 0{,}087$, $A_{зовн} = 2s_1mg\sin\alpha$.

1.128. Тіло маси $m = 2$ кг кинуто з землі під кутом $\alpha = 30°$ до горизонту зі швидкістю $v_0 = 6$ м/с. На якій висоті h його кінетична енергія дорівнюватиме потенціальній? На скільки збільшиться потенціальна енергія тіла, коли воно сягне найвищої точки підйому? Опором повітря нехтувати.

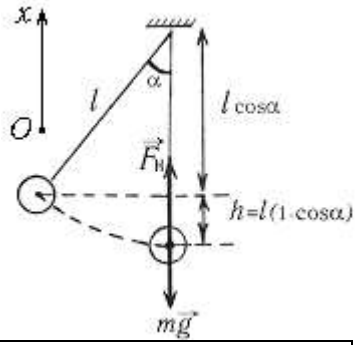
Дано	*Розв'язання*
$m = 2$ кг $\alpha = 30°$ $v_0 = 6$ м/с $E_k = E_p$ $h = ?\ \Delta E_p = ?$	$E_{k0} = \frac{mv_0^2}{2}$; $E_{k0} = E_k + E_p = 2E_p$; $E_p = mgh$; $\frac{mv_0^2}{2} = 2mgh$; $h = \frac{v_0^2}{4g}$, $E_{k0} = E_{k1} + E_{p\max}$; $E_{k1} = \frac{m}{2}(v_0\cos\alpha)^2$;

$$\Delta E_p = E_{p\max} = \frac{m}{2}(v_0^2 - v_0^2\cos^2\alpha) = \frac{m}{2}v_0^2\sin^2\alpha.$$

Відповідь: $h = 92$ см, $\Delta E_p = 9$ Дж.

1.129. Тягар маси $m = 1$ кг прив'язаний до кінця нитки. Його відхиляють на кут $\alpha = 30°$ і відпускають. Визначити силу натягу нитки в момент проходження тягаря через положення рівноваги.

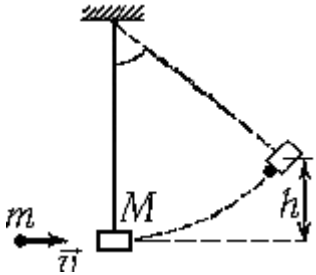
Дано	*Розв'язання*
$m = 1$ кг $\alpha = 30°$ $F_н = ?$	$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}_н$; Ox: $ma = F_н - mg$, $a = a_{доц} = \frac{v^2}{l}$, $mgh = \frac{mv^2}{2}$, $v^2 = 2gh = 2gl(1 - \cos\alpha)$, $F_н = m(g + \frac{v^2}{l}) = mg(3 - 2\cos\alpha)$.



Відповідь: $F_н$ = 12,43 Н.

1.130. Куля маси m=10 г, що летить горизонтально зі швидкістю v = 400 м/с, попадає в брусок маси M = 2 кг, підвішений на нитці, і застряє в ньому. На яку висоту h підніметься брусок?

Дано	*Розв'язання*
$m = 0{,}01$ кг $v = 400$ м/с $M = 2$ кг $h = ?$	При попаданні кулі в брусок механічна енергія кулі частково перетворюється у внутрішню енергію внаслідок тертя й деформації тіл та частково перетворюється в механічну (кінетичну) енергію бруска з кулею. Потім, коли брусок підніметься на найбільшу висоту h, ця кінетична енергія перетворюється в потенціальну енергію бруска з кулею. Закон збереження імпульсу дає змогу знайти швидкість u, з якою починає рухатись брусок разом з кулею в момент, наступний за попаданням кулі. У проекціях на горизонтальну вісь



$$mv = (m + M)u,$$

звідки початкова горизонтальна швидкість бруска з кулею

$$u = mv/(m + M).$$

Стартову кінетичну енергію бруска з кулею прирівнюємо їх потенціальній енергії у крайньому положенні, коли брусок з кулею зупиняються

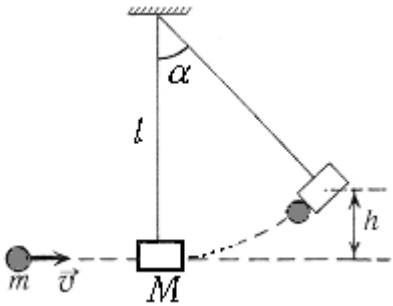
$$\frac{(m+M)u^2}{2} = (m+M)gh.$$

Розв'язуючи сумісно два останніх рівняння, знайдемо

$$h = \frac{v^2}{2g}\left(\frac{m}{m+M}\right)^2.$$

Відповідь: h = 0,2 м.

1.131..Куля, що летить горизонтально зі швидкістю v = 100 м/с, влучає в дерев'яний брусок, підвішений на нитці завдовжки l = 2 м. Після удару брусок разом з кулею відхиляється на деякий кут α. Визначити цей кут, якщо маса кулі m = 10 г, маса бруска M = 1 кг.



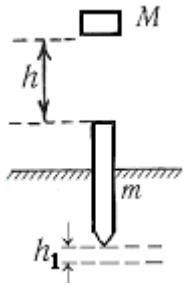
Відповідь: α = 12,8°. В к а з і в к а: скористатися розв'язками задач 1.129 і 1.130.

1.132. За допомогою копра забивають у землю палю маси m = 100 кг. Молот копра маси M = 500 кг падає з висоти h = 1,5 м. Від удару паля вгрузає в землю на глибину h_1 = 5 см. Визначити силу $F_{оп}$ опору землі, вважаючи її постійною, а удар непружним. Встановити коефіцієнт корисної дії η удару. Корисною вважати енергію, яка витрачена на вбивання палі.

Дано	*Розв'язання*

m = 100 кг M = 500 кг h = 1,5 м h_1 = 5 см = 0,05 м	
$F_{оп}$ = ? η = ?	

Застосуємо теорему про зміну кінетичної енергії до другого етапу руху, коли копер разом з палею після зіткнення починають рухатись униз.



Алгебраїчна сума робіт всіх сил дорівнює приросту кінетичної енергії

$$A_{тяж} + A_{оп} = \Delta E_k = E_{k2} - E_{k1};$$

$$E_{k2} = 0,\ E_{k1} = \frac{m+M}{2}u^2$$

$A_{тяж} = (M + m)gh_1$, $A_{оп} = -F_{оп}\ h_1$, робота сили опору є від'ємною, оскільки напрям сили протилежний переміщенню.

$$u = \frac{M}{M+m}v,\ v = \sqrt{2gh},$$

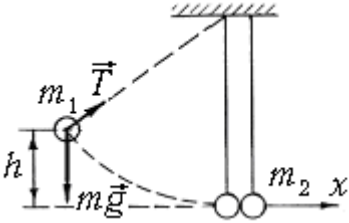
Після підстановки одержимо

$$F_{оп} = (M + m)g + \frac{M^2gh}{h_1(M+m)}.$$

$$E_{кор} = \frac{(M+m)u^2}{2},\ E_{витр} = \frac{Mv^2}{2},\ \eta = \frac{E_{кор}}{E_{витр}} = \frac{M}{M+m}.$$

Відповідь: $F_{оп}$ = 128,51 кН. η = 0,83.

1.133. Дві кулі підвішені на паралельних нитках однакової довжини і стикаються. Маса першої кулі m_1 = 0,2 кг, другої m_2 = 0,1 кг. Першу кулю відхиляють так, що її центр тяжіння піднімається на висоту h = 4,5 см, і відпускають.



Вважаючи удар центральним, визначити, на яку висоту піднімуться кулі після зіткнення, якщо: удар пружний; удар непружний? Що спостерігатиметься під час пружного удару, якщо маси куль однакові?

Дано	*Розв'язання*

$m_1 = 0{,}2$ кг $m_2 = 0{,}1$ кг $h_1 = 4{,}5$ см	Під час *пружного* удару повна механічна енергія тіл зберігається. Спочатку кулі деформуються, кінетична енергія переходить у потенціальну енергію пружної деформації. Потім кулі відштовхують одна одну і відновлюють первісну форму.
$h'_1 = ?$ $h'_2 = ?$	

Після зіткнення кулі піднімаються кожна на різну висоту h'_1 і h'_2. На основі закону збереження механічної енергії запишемо:

$$m_1gh = m_1gh'_1 + m_2gh'_2.$$

Потенціальна енергія відраховується від рівня, на якому знаходилась друга куля перед зіткненням. Зрівнюємо кінетичну енергію куль до і після зіткнення

$$\frac{m_1v_1^2}{2} = \frac{m_1u_1^2}{2} + \frac{m_2u_2^2}{2}.$$

Тут v_1 – швидкість першої кулі до зіткнення, u_1 та u_2 – відповідно першої і другої кулі після зіткнення.

За законом збереження імпульсу

$$m_1\vec{v}_1 = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2,$$

або в проекціях на вісь Ox

$$m_1v_1 = -m_1u_1 + m_2u_2.$$

Розв'язуючи систему рівнянь збереження імпульсу і енергії, визначимо швидкості куль після пружного зіткнення

$$u_1 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}v_1,\ u_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}v_1.$$

Оскільки $h'_1 = \frac{u_1^2}{2g}, h'_2 = \frac{u_2^2}{2g}, v_1^2 = 2gh$, одержимо

$$h'_1 = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)^2 h;\ h'_2 = 4\left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right)^2 h.$$

Якщо маси куль однакові, з наведених формул випливає, що $u_1 = 0$, $u_2 = v_1$, перша куля зупиняється, повністю передавши свій імпульс і енергію другій кулі, друга рухається з тією самою швидкістю, що перша до зіткнення, тобто кулі "обмінюються" швидкостями.

Під час *непружного* удару механічна енергія не зберігається – кінетична енергія куль частково перетворюється у внутрішню

енергію. Після зіткнення кулі злипаються і рухаються разом. На першому етапі здійснюється тільки закон збереження імпульсу

$$m_1v_1 = (m_1 + m_2)u,$$

де u – величина стартової швидкості куль, що злиплися. Після злипання, за рахунок отриманої швидкості u обидві кулі піднімаються на деяку висоту h'_1, на цьому етапі втрат енергії немає і механічна енергія зберігається

$$\frac{(m_1 + m_2)u^2}{2} = (m_1 + m_2)gh'_1$$

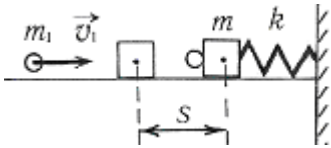
Розв'язуючи систему рівнянь збереження імпульсу і енергії та враховуючи, що $v_1^2 = 2gh$, одержуємо

$$h'_1 = \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right)^2 h.$$

Відповідь: для пружного удару $h'_1 = 0{,}5$ см, $h'_2 = 8$ см; для непружного удару $h'_1 = 2$ см.

1.134. Брусок маси $m = 0{,}5$ кг, що лежить на горизонтальному столі, прикріплений до невагомої пружини жорсткості $k = 180$ Н/м. Інший кінець пружини закріплений на вертикальній стіні. Куля маси $m_1 = 10$ г, що летить горизонтально зі швидкістю $v_1 = 100$ м/с, влучає в брусок і застряє в ньому. Швидкість кулі направлена вздовж осі пружини. У початковий момент часу пружина недеформована. Визначити, яку відстань s пройде брусок до зупинки, якщо коефіцієнт тертя бруска об поверхню $\mu = 0{,}2$.

Дано	*Розв'язання*
$m = 0{,}5$ кг $k = 180$ Н/м $m_1 = 10$ г $= 0{,}01$ кг $v_1 = 100$ м/с $\mu = 0{,}2$	Із закону збереження імпульсу знаходимо стартову швидкість бруска з кулею
$s = ?$	



$$m_1v_1 = (m + m_1)u,\ u = \frac{m_1}{m + m_1}v_1.$$

Алгебраїчна сума робіт всіх сил дорівнює приросту кінетичної енергії

$A_{пруж} + A_{тер} = \Delta E_k = E_{k2} - E_{k1}$; $E_{k2} = 0$, $E_{k1} = \dfrac{m + m_1}{2} u^2$

(роботи сил тяжіння та нормальної реакції дорівнюють нулю).

Як робота сили пружності, так і робота сили тертя є від'ємними, оскільки напрями сил протилежні переміщенню.

$$-\frac{ks^2}{2} - \mu\ (m + m_1)gs = -E_{k1},$$

$$\frac{ks^2}{2} + \mu(m + m_1)gs - \frac{(m + m_1)}{2}\left(\frac{m_1}{m + m_1} v_1\right)^2 = 0\,.$$

Доцільно підставити числові значення величин та після цього розв'язати квадратне рівняння відносно s.

$$90\ s^2 + s - 0{,}98 = 0.$$

Відповідь: $s = 9{,}9$ см.

1.4. Статика

Основні закони і формули

- Умови рівноваги тіла полягають у рівності нулю алгебраїчних сум проекцій сил на координатні осі (перша умова)

$$\sum_i F_{ix} = 0, \quad \sum_i F_{iy} = 0$$

(якщо сили, що діють на тіло, лежать в одній площині, наприклад площині xOy) і алгебраїчної суми моментів всіх прикладених до тіла сил відносно будь-якої нерухомої осі (друга умова)

$$\sum_i M_i = 0\,.$$

- Момент сили відносно осі дорівнює добутку сили F на плече d:

$$M = Fd.$$

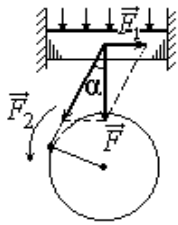
Плече сили – найкоротша відстань від осі обертання до лінії дії сили.

- Моменти сил, що обертають тіло за стрілкою годинника, беруться зі знаком плюс, а проти стрілки годинника – зі знаком мінус. Точка, відносно якої розглядаються моменти сил, довільна. Вибір точки обумовлений зручністю.

Рівновага тіл, що не обертаються

1.135. Встановити силу тиску поршня на стінку циліндра двигуна внутрішнього згоряння, якщо сила тиску газів на поршень 40 кН, а кут, який утворює шатун з віссю циліндра, дорівнює 30°.

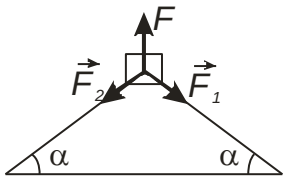
Дано	*Розв'язання*
F = 40 кН α = 30° F_1 = ?	Розкладемо силу тиску газів $\vec{F}$ на складові $\vec{F}_1$ – силу, що діє на стінку циліндра і $\vec{F}_2$ – силу, що діє на шатун. Тоді $F_1 = F \cdot \mathrm{tg}\ \alpha$.



Відповідь: F = 22,8 кН.

1.136. Баржа пришвартована до берега двома канатами. Кожний канат утворює з лінією берега однаковий кут α = 60°. Під дією перпендикулярного до борту вітру кожний канат натягнувся з силою 10 кН. Якою є сила вітру?

Дано	*Розв'язання*
α = 60° $F_1 = F_2$ = 10 кН F = ?	Прикладені до вузла сили зрівноважуються. Тут $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ – сили, що діють з боку канатів *на баржу.* Рівні їм за модулем, але протилежно направлені сили прикладені *до канатів* (сили натягу). Спрямуємо вісь *Ox* управо, вісь *Oy* – уверх. Рівняння рівноваги у проекціях:



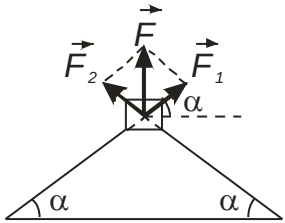
$$F_1\cos\alpha - F_2\cos\alpha = 0,$$

$$F - F_1\sin\alpha - F_2\sin\alpha = 0.$$

Звідки $F = 2F_1\sin\alpha$.

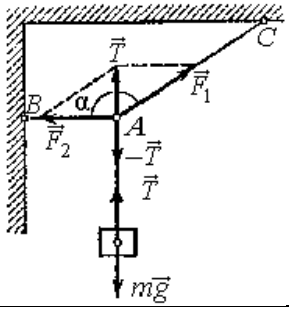
Інший варіант розв'язку. На другому рисунку $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ – сили, що діють *на кожний з канатів*. Додамо сили за правилом паралелограма $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$.

Відповідь така сама $F = 2F_1\sin\alpha$.



Відповідь: *F* = 17,3 кН.

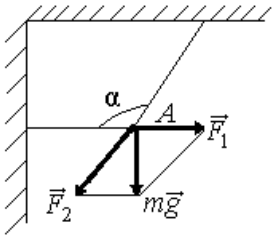
1.137. До кронштейна *BAC* підвішений тягар, маса якого *m* = 10 кг. Визначити сили, що діють на стержні кронштейна, і силу натягу підвісу, якщо кут □α = □□150°.



Дано	*Розв'язання*

m = 10 кг □α = □□150°	До вузла A прикладені сила натягу підвісу ($-\vec{T} = m\vec{g}$) і сили дії *з боку стержнів* (реакції стержнів) $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$. Умова рівноваги вузла A:
F_1 = ? F_2 = ? T = ?	$$m\vec{g} + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0.$$

Спрямуємо вісь Ox управо, вісь Oy – уверх. Рівняння рівноваги у проекціях:



$F_1\cos(\pi - \alpha) - F_2 = 0,$

$F_1\sin(\pi - \alpha) - mg = 0.$

Розв'язуючи систему, визначимо

$$F_1 = mg/\sin\alpha,$$

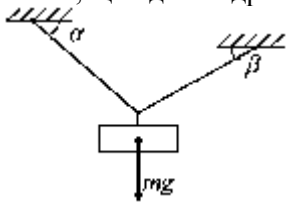
$$F_2 = \square - mg\ \mathrm{ctg}\ \alpha.$$

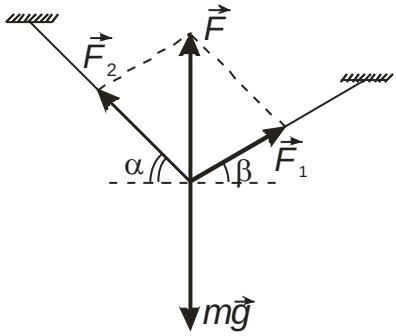
Такі ж за модулем, але протилежно направлені сили прикладені до стержнів.

Інший спосіб (див. другий рисунок). Силу натягу підвісу розкладаємо на дві сили $\vec{F}_1$ і $\vec{F}_2$, що діють *на* відповідні *стержні*.

Відповідь: F_1 = 196,2 Н, F_2 = 169,14 Н, T = 98,1 Н.

1.138. Вантаж маси m = 10 кг висить на тросі так, що один відрізок тросу утворює з горизонталлю кут α = 30°, а інший — β = 45°. Визначити сили натягу відрізків тросу.



Дано	*Розв'язання*
m = 10 кг α = 30° β = 45°	
F_1 = ? F_2 = ?	

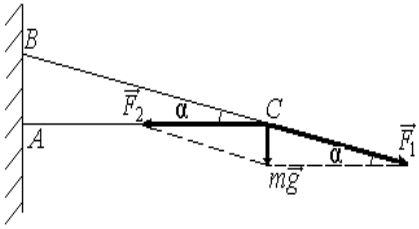
Ox: $F_1\cos\beta - F_2\cos\alpha = 0,$

$$Oy: F_1 \sin\beta + F_2 \sin\alpha - mg = 0,$$

$$F_1 = mg\,(\cos\alpha)/\sin(\alpha+\beta);\ F_2 = mg\,(\cos\beta)/\sin(\alpha+\beta).$$

Відповідь: $F_1 = 87{,}94$ Н, $F_2 = 71{,}80$ Н.

1.139. На кронштейні висить вантаж маси $m = 100$ кг. Визначити сили, з якими деформуються стержні, якщо $AC = 3$ м, $BC = 3{,}9$ м.

Дано	*Розв'язання*
$m = 100$ кг $AC = 3$ м $BC = 3{,}9$ м $F_1 = ?$ $F_2 = ?$	

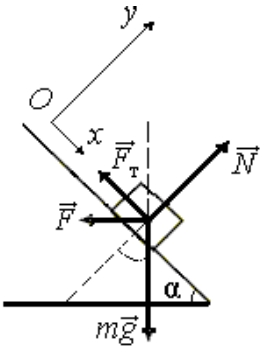
$$F_1 = \frac{mg}{\sin\alpha},\quad F_2 = \frac{mg}{\mathrm{tg}\,\alpha}.$$

$$\cos\alpha = \frac{AC}{BC},$$

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\left(\frac{AC}{BC}\right)^2}.\ tg\,\alpha = \sqrt{\left(\frac{BC}{AC}\right)^2 - 1}.$$

Відповідь: сила $F_1 = 1535{,}28$ Н розтягує BC, сила $F_2 = 1180{,}98$ Н стискує AC.

1.140. З якою мінімальною горизонтальною силою треба тиснути на брусок маси $m = 1$ кг, який лежить на похилій площині з кутом нахилу $\alpha = 45°$, щоб він рухався рівномірно вниз по похилій площині? Коефіцієнт тертя між бруском і похилою площиною $\mu = 0{,}2$.



Дано	*Розв'язання*

m = 1 кг α = 45° μ = 0,2	Брусок рухається рівномірно, якщо сума сил, що діють на нього, дорівнює нулю:
F = ?	

$$\vec{F} + m\vec{g} + \vec{F}_т + \vec{N} = 0.$$

Беручи проекції на осі :

$$Ox: \quad mg \sin\alpha - F\cos\alpha - F_т = 0,$$

$$Oy: \quad -mg\cos\alpha - F\sin\alpha + N = 0,$$

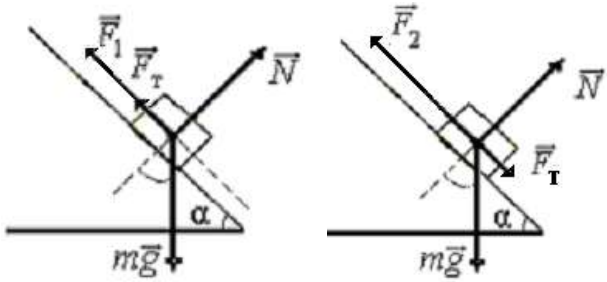
та враховуючи, що $F_т = \mu N$, після перетворень одержимо

$$F = \frac{mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}{(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)} = mg\frac{tg\alpha - \mu}{1 + \mu tg\alpha}.$$

Відповідь: F = 6,54 Н.

1.141. У скільки разів мінімальна сила, що потрібна для утримання тіла на похилій площині, менша за мінімальну силу, яка потрібна, щоб піднімати тіло по похилій площині? Кут нахилу похилої площини до горизонту α, коефіцієнт тертя μ.

Дано	*Розв'язання*
α μ	У разі утримання тіла на похилій площині (зліва)сила тертя допомагає утриманню,
F_1/F_2 = ?	$F_т + F_1 = mg\sin\alpha$,

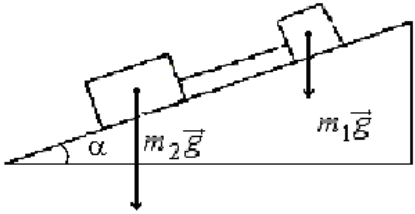


а в разі піднімання (справа) – перешкоджає. Сила, потрібна для піднімання, $F_2 \geq F_т + mg\sin\alpha$, сила тертя $F_т = \mu mg\cos\alpha$,

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha}{mg\sin\alpha + \mu mg\cos\alpha} = \frac{tg\alpha - \mu}{tg\alpha + \mu}.$$

Відповідь: $\frac{F_1}{F_2} = \frac{tg\alpha - \mu}{tg\alpha + \mu}$.

1.142. Два зв'язаних ниткою бруски, маси яких $m_1 = 1$ кг і $m_2 = 2$ кг, лежать на похилій площині. Коефіцієнти тертя між брусками і похилою площиною відповідно $\mu_1 = 0{,}2$ і $\mu_2 = 0{,}1$. При якому куті α нахилу площини бруски почнуть зісковзувати? Чи може кут α бути більшим 45°?



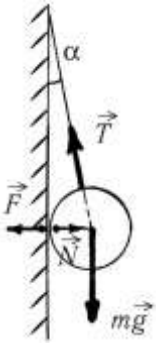
Дано	*Розв'язання*
$m_1 = 1$ кг $m_2 = 2$ кг $\mu_1 = 0{,}2$ $\mu_2 = 0{,}1$ $\alpha = ?$	Бруски почнуть зісковзувати, коли сума проекцій сил, що діють на них, на напрями осей Ox і Oy дорівнюватиме нулю. Після перетворень рівнянь другого закону Ньютона в проекціях одержимо $(m_1 + m_2)g \sin\alpha - (\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2)g \cos\alpha = 0$ Тут враховано, що сили взаємодії брусків є рівними за модулем і протилежно напрямленими за третім законом Ньютона, і їх проекції під час додавання взаємно знищуються. $\alpha = \mathrm{arctg}\,((\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2)/(m_1 + m_2))$.

Відповідь: $\alpha = 7{,}59°$.

1.143. До вертикальної гладенької стінки на мотузці завдовжки $l = 0{,}5$ м підвішено кулю маси $m = 7{,}8$ кг. Чому дорівнює сила натягу T мотузки і сила тиску F кулі на стінку, якщо радіус кулі $R = 6{,}2$ см? Тертям нехтувати.

Дано	*Розв'язання*
$l = 0{,}5$ м $m = 7{,}8$ кг $R = 6{,}2$ см $T = ?$ $F = ?$	На кулю діють: сила тяжіння $m\vec{g}$, сила реакції з боку стінки $\vec{N}$, сила натягу мотузки $\vec{T}$. Оскільки куля не може обертатися, то для її рівноваги достатньо виконання тільки першої умови рівноваги. У проекціях на горизонтальний і вертикальний напрями $N - T\sin\alpha = 0,$ $T\cos\alpha - mg = 0.$

Звідки сила натягу $T = \dfrac{mg}{\cos\alpha}$, сила реакції з боку стінки $N = mg$ tg α. За третім законом Ньютона шукана сила тиску на стінку $\vec{F} = -\vec{N}$, а за модулем $F = N$. З рисунка $\sin\alpha = \dfrac{R}{l+R}$. Тоді



$$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \frac{\sqrt{l^2+2lR}}{l+R},\ tg\alpha = \frac{R}{\sqrt{l^2+2lR}}.$$

$$T = \frac{mg(l+R)}{\sqrt{l^2+2lR}},\ N = \frac{mgR}{\sqrt{l^2+2lR}}.$$

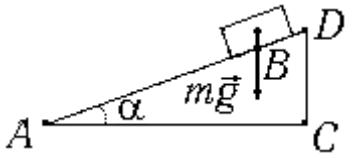
Відповідь: T = 76,9 Н; F = 8,48 Н.

Правило моментів. Центр тяжіння

1.144. На похилій площині з кутом нахилу α = 30° лежить тіло маси m = 1 кг.

AB = 2 м; BD = 1,5 м.

Обчислити моменти сили тяжіння $m\vec{g}$ відносно осей, що проходять через точки A, B, C, D перпендикулярно до площини рисунка.



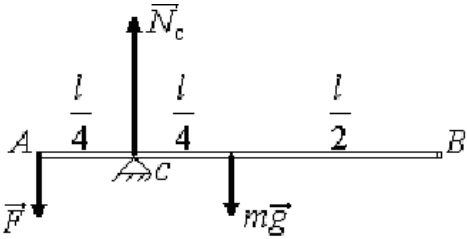
Дано	*Розв'язання*
m = 1 кг α = 30° AB = 2 м BD = 1,5 м	Момент сили за модулем дорівнює добуткові сили на плече. Плече – найкоротша відстань між віссю обертання і лінією дії сили. $M_A = mg\,AB\cos\alpha$, $M_B = 0$, $M_C = M_D = mg\,BD\cos\alpha$.
M_A = ? M_B = ? M_C = ? M_D = ?	

Відповідь: M_A = 16,99 Н·м, M_B = 0, $M_C = M_D$ = 12,74 Н·м.

1.145. Дошка маси m = 10 кг підперта на відстані 1/4 її довжини. Яку силу, перпендикулярну до дошки, потрібно прикласти до її

короткого кінця, щоб утримати дошку в рівновазі? З якою силою буде тиснути дошка на опору?

Дано	*Розв'язання*
$AC = l/4$ $BC = 3l/4$ $m = 10$ кг $F = ?$ $N_C = ?$	Сила тяжіння, що діє на дошку, прикладена до середини дошки.



Перша умова рівноваги: сума сил, що діють на дошку, дорівнює нулю $\vec{N}_C + \vec{F} + m\vec{g} = 0$.

Друга умова: дорівнює нулю сума моментів цих сил відносно будь-якої осі, зокрема відносно осі, що проходить через точку *C*: $-F\frac{l}{4} + mg\frac{l}{4} = 0$. Звідки $F = mg$, $N_C = 2\,mg$.

Відповідь: $F = 98{,}1$ Н, $N_C = 196{,}2$ Н.

1.146. До кінців стержня, маса якого 10 кг і довжина 40 см, підвішені вантажі масами 40 і 10 кг. Де треба підперти стержень, щоб він знаходився в рівновазі?

Відповідь: На відстані 10 см від кінця, до якого підвішено вантаж масою 40 кг.

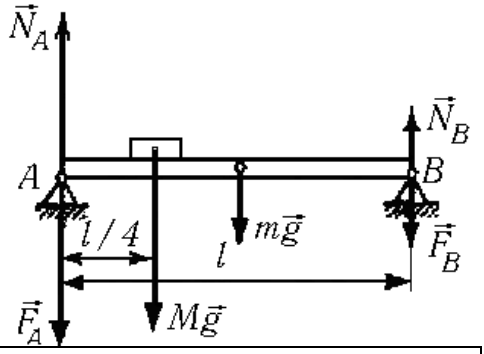
1.147. На кінці стержня завдовжки $l = 30$ см укріплена куля радіуса $r = 6$ см. Де знаходиться центр тяжіння цієї системи, якщо маса стержня вдвічі менше за масу кулі?

Відповідь: На відстані 29 см від вільного кінця стержня.

1.148. 0днорідний стержень завдовжки $l = 1$ м зігнули під прямим кутом і підвісили вільно за вершину кута. Який кут α з вертикаллю утворює більша сторона кута завдовжки $l_1 = 64$ см?

Відповідь: $\alpha = \mathrm{arctg}((l - l_1)^2/l_1^2) = 17{,}56°$. В к а з і в к а. Друга умова рівноваги:
$(mgl_1^2 \sin\alpha)/2l = (mg(l - l_1)^2 \cos\alpha)/2l$.

1.149. Однорідна балка маси m = 50 кг лежить на двох опорах. На відстані $^1/_4$ довжини балки від лівої опори лежить вантаж маси M = 100 кг. Визначити сили тиску балки на опори.



Дано	*Розв'язання*
m = 50 кг $AD = l/4$ M = 100 кг F_A = ? F_B = ?	На балку діють: сила тяжіння $m\vec{g}$, прикладена до середини балки, вага вантажу $\vec{P} = M\vec{g}$ на відстані $\frac{l}{4}$ від опори A (довжина позначена літерою l), сили реакції опор $\vec{N}_A, \vec{N}_B$. Оскільки балка знаходиться у рівновазі, то сума сил, що діють на неї, дорівнює нулю

$$\vec{N}_A + \vec{N}_B + M\vec{g} + m\vec{g} = 0.$$

У проекції на вертикальну вісь одержимо

$$N_A + N_B - Mg - mg = 0.$$

Крім того, сума моментів цих сил відносно будь-якої осі, наприклад тієї, що проходить через точку A перпендикулярно до площини рисунка, також дорівнює нулю

$$-Mg\,{}^l/_4 - mg\,{}^l/_2 + N_B l = 0.$$

Звідси

$$N_B = mg/2 + Mg/4.$$

Тепер знайдемо N_A

$$N_A = Mg + mg - N_B.$$

Сили, що діють на опори з боку балки за третім законом Ньютона $\vec{F}_A = -\vec{N}_A, \vec{F}_B = -\vec{N}_B$, а за модулем $F_A = N_A$, $F_B = N_B$.

Відповідь: F_A = 980 Н, F_B = 490 Н.

1.150. Однорідна балка маси m = 50 кг лежить на двох опорах. На відстані $^1/_3$ довжини балки від лівої опори лежить вантаж маси M_1 = 120 кг і на відстані $^3/_5$ довжини від неї – вантаж маси M_2 = 80 кг. Визначити сили тиску балки на опори.

Дано	*Розв'язання*
m = 50 кг M_1 = 120 кг M_2 = 80 кг	Перша умова рівноваги балки: $F_1 + F_2 = (M_1 + M_2 + m)g$. Друга умова рівноваги балки:
F_1 = ? F_2 = ?	$\frac{mg}{18} + \frac{4F}{15} = \frac{2mg}{9} + \frac{4M_2g}{15}$.

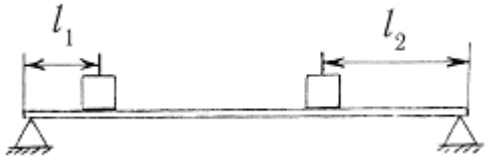
Відповідь:

$$F_1 = (M_1 + \frac{9m}{24})g = 1361{,}14 \text{ Н}, \qquad F_2 = (M_2 + \frac{15m}{24})g = 1091{,}36 \text{ Н}.$$

1.151. Однорідна колода завдовжки l і маси m = 100 кг лежить на двох опорах. Відстань від правого кінця колоди до ближньої опори $\frac{l}{3}$, від лівого – $\frac{l}{4}$. З якими силами тисне колода на кожну з опор? Яку мінімальну силу треба прикласти, щоб підняти колоду за правий кінець?

Відповідь: $F_1 = 2mg/5$ = 392,4 Н; $F_2 = 3mg/5$ = 588,6 Н; $F_{min} = mg/3$ = 327 Н.

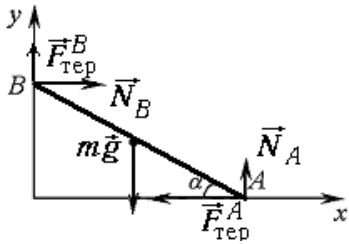
1.152. На рисунку зображено балку, на якій лежать два вантажі маси m_1 = 200 кг кожний. Маса балки m_2 = 2000 кг, її довжина l = 5 м, l_1 = 1 м,. l_2 = 2 м. Визначити сили тиску балки на опори.



Відповідь: $F_1 = g(m_1(l - l_1 + l_2) + m_2l/2)/l$ = 12,16 кН; $F_2 = g(m_1(l + l_1 - l_2) + m_2l/2)/l$ = 11,38 кН.

1.153. Однорідна драбина спирається на вертикальну стіну і горизонтальну підлогу. Коефіцієнти тертя у точках A і B відповідно дорівнюють μ_1 = 0,5, μ_2 = 0,4. Визначити найменший кут α нахилу драбини до горизонту, при якому вона може залишатись у рівновазі.

Дано	*Розв'язання*
$\mu_1 = 0{,}5$ $\mu_2 = 0{,}4$ $\alpha = ?$	На драбину діють сила тяжіння $m\vec{g}$ і сили реакції з боку підлоги і стіни, кожну з яких, як і раніше, розкладаємо на силу нормальної реакції $\vec{N}$ і силу тертя $\vec{F}_{тер}$:



Драбина буде знаходитись у рівновазі, якщо сума проекцій сил на осі *Ox* і *Oy* і сума моментів сил відносно точки *A* дорівнюватимуть нулю. Якщо позначити довжину драбини *l*, умови рівноваги матимуть вигляд:

$$\begin{cases} N_B - F^A_{тер} = 0; \\ N_A + F^B_{тер} - mg = 0; \\ mg\dfrac{l}{2}\cos\alpha - N_B l\sin\alpha - F^B_{тер} l\cos\alpha = 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Беручи до уваги, що

$$F^A_{тер} \le \mu_1 N_A; \qquad (2)$$
$$F^B_{тер} \le \mu_2 N_B.$$

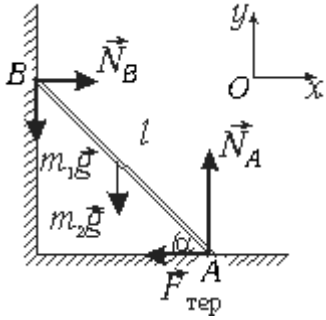
з рівнянь (1) і (2) одержуємо:

$$\operatorname{tg}\alpha \ge \frac{1-\mu_1\mu_2}{2\mu_1} \quad \alpha_{min} = \operatorname{arctg}\frac{1-\mu_1\mu_2}{2\mu_1}.$$

Відповідь: Найменший кут нахилу драбини $\alpha_{min} = 38{,}6°$.

1.154. Драбина стоїть, спираючись верхнім кінцем на гладку стінку, а нижнім – на підлогу. У разі якого кута нахилу драбини до горизонту на неї зможе вилізти людина? Коефіцієнт тертя між

драбиною і підлогою $\mu = 0{,}3$. Маса людини $m_1 = 70$ кг, драбини $m_2 = 10$ кг.

Дано	*Розв'язання*
$\mu = 0{,}3$ $m_1 = 70$ кг $m_2 = 10$ кг	
$\alpha = ?$	

Вважаємо, що людина стоїть на верхній сходинці. Перша умова рівноваги – рівність нулю рівнодіючої всіх прикладених до тіла сил – у проекціях на осі Ox і Oy:

$$N_B - F_{тер} = 0, \qquad N_A - (m_1 + m_2)g = 0.$$

Врахуємо, що $F_{тер} = \mu N_A$. Тоді $N_B = \mu N_A = \mu(m_1 + m_2)g$.

Позначимо довжину драбини l. Друга умова рівноваги– рівність нулю алгебраїчної суми моментів усіх сил відносно точки O:

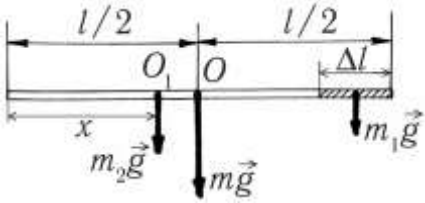
$$-m_1 gl\cos\alpha - m_2 g(l/2)\cos\alpha + N_B\, l\sin\alpha = 0, \qquad \text{або}$$

$$-m_1 gl\cos\alpha - m_2 g(l/2)\cos\alpha + (m_1 + m_2)g\mu l\sin\alpha = 0, \text{ звідки}$$

$$tg\,\alpha = \frac{m_1 + \dfrac{m_2}{2}}{\mu(m_1 + m_2)}.$$

Відповідь: $\alpha \geq \mathrm{arctg}\,((2m_1 + m_2)/(2\mu(m_1 + m_2)) = 72{,}3°$.

1.155. Від однорідного вала відрізали кінець довжиною 40 см. Куди і на скільки переміститься центр тяжіння?

Дано	*Розв'язання*
$\Delta l = 40$ см	
$x = ?$	

Силу тяжіння валу $m\vec{g}$ можна розглядати як суму двох сил: сили тяжіння $m_1\vec{g}$ відрізаної частини і сили тяжіння $m_2\vec{g}$ частини, що залишилася.

Якщо вставити відрізану частину на попереднє місце, вал, підпертий у точці O – центрі тяжіння, буде знаходитись у рівновазі. Рівняння рівноваги моментів відносно осі, що проходить через центр тяжіння,

$$m_1 g(\frac{l}{2} - \frac{\Delta l}{2}) - m_2 g(\frac{l}{2} - x) = 0.$$

Враховуючи, що $m_1 = \rho S \Delta l, m_2 = \rho S(l - \Delta l)$, де ρ – густина матеріалу валу, S – площа перерізу валу, отримаємо

$$\Delta l(\frac{l}{2} - \frac{\Delta l}{2}) = (l - \Delta l)(\frac{l}{2} - x).$$

Звідки

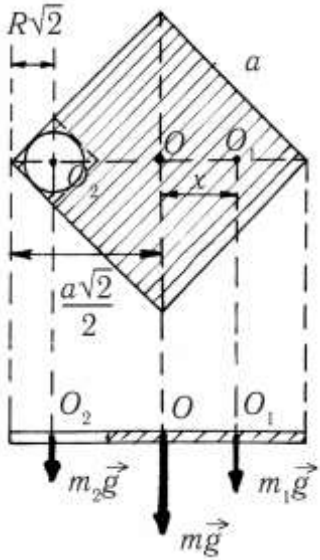
$$x = \frac{l}{2} - \frac{\Delta l}{2}.$$

Отже, центр тяжіння перемістився на $\frac{\Delta l}{2}$ до іншого кінця валу

Відповідь: На 20 см до другого кінця.

1.156. Визначити положення центра тяжіння однорідної квадратної пластини зі стороною a = 12 см, у якій вирізаний круглий отвір радіуса R = 3 см, що майже дотикається до двох суміжних сторін.

Дано	*Розв'язання*
a = 12 см R = 3 см x = ?	Якщо вставити вирізану частину на попереднє місце, то сила тяжіння $m\vec{g}$ пластини буде прикладена в геометричному центрі пластини – центрі тяжіння O. Ця сила є рівнодіючою силою сил тяжіння, що діють на вирізану частину і частину, що залишається. З умови симетрії випливає, що сила тяжіння частини, яка залишається, лежить на діагоналі в деякій точці O_1. З рисунка маємо:



$OO_2 = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} - R\sqrt{2}$. Маси пластинок однакової товщини d:

$$m_1 = a^2\rho d - \pi R^2\rho d =$$
$$\rho d(a^2 - \pi R^2),\ \ m_2 = \pi R^2\rho d,$$

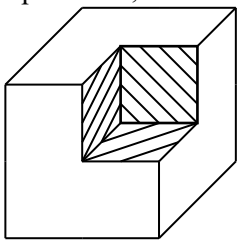
тут ρ – густина матеріалу пластинки. Якщо позначити $OO_1 = x$, то умова рівноваги пластинки – рівності моментів сил тяжіння відносно осі, що проходить через центр тяжіння,

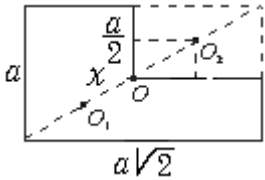
$$\pi R^2\rho dg\sqrt{2}(\frac{a}{2} - R) = \rho dg(a^2 - \pi R^2)x,$$

звідки $$x = \frac{\sqrt{2}\pi R^2(a - 2R)}{2(a^2 - \pi R^2)}.$$

Відповідь: На відстані $x = 1$ см від центра пластини на прямій, що проходить через центр пластини і вирізу.

1.157. Де знаходиться центр тяжіння куба зі стороною a, з якого видалено кубик зі стороною $a/2$?



Дано	*Розв'язання*
a $a/2$ $x = ?$	

Центр тяжіння однорідного куба міститься в точці перетину його діагоналей. Якщо з більшого куба видалити кубик зі стороною $a/2$, то центр тяжіння тіла, що залишається, зміститься по діагоналі, на якій лежить також діагональ видаленого кубика. Розглянемо діагональний переріз великого куба.

Тут O – центр тяжіння великого куба без вирізу, O_1 – центр тяжіння тіла, що зосталося, O_2 – центр тяжіння вирізаного кубика. Якщо вставити видалений кубик на місце, то система буде

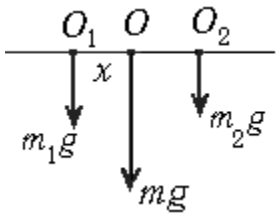
знаходитись у рівновазі відносно осі, що проходить через точку O. Позначимо $OO_1 = x$.

З рисунка випливає

$$OO_2 = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2 + \left(\frac{a}{4}\right)^2} = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

Маси вирізаного кубика та тіла, що зосталося (ρ – густина матеріалу):

$$m_2 = \rho\left(\frac{a}{2}\right)^3, m_1 = \rho\left(a^3 - \left(\frac{a}{2}\right)^3\right).$$



Куб знаходиться в рівновазі відносно осі, що проходить через його центр тяжіння, у разі будь-якого положення куба в просторі. Зручно вибрати таке положення куба, щоб лінія O_1OO_2 була горизонтальною (див. рис).

Запишемо умову рівності моментів сил відносно точки O

$$m_1gx = m_2g(OO_2).$$

Тут x – плече сили тяжіння $m_1\vec{g}$, OO_2 – плече сили тяжіння $m_2\vec{g}$. Підставимо та знайдемо

$$x = \frac{a\sqrt{3}}{28}.$$

Відповідь: на відстані $x = \frac{a\sqrt{3}}{28}$ від центра куба вздовж діагоналі у протилежний від вирізу бік.

1.5. Статика рідин і газів

Основні закони і формули

- Тиск у рідині

$$p = \frac{F}{S},$$

де F – модуль сили, що діє перпендикулярно до деякої площадки, S – її площа.

- Тиск стовпа рідини густиною ρ і висотою h

$$p = \rho g h.$$

Повний тиск у рідині на глибині h (гідростатичний тиск)

$$p = p_0 + \rho g h,$$

де p_0 - атмосферний тиск на відкритій поверхні.

- У сполучених посудинах, заповнених однаковою рідиною, її рівні однакові.

У сполучених посудинах, заповнених різними рідинами, висоти стовпів рідин, відраховані від поверхні стикання рідин, обернено пропорційні густинам рідин.

- Закон Архімеда: на тіло, занурене в рідину (або газ), діє виштовхувальна сила, що направлена вертикально вгору і за модулем дорівнює вазі рідини (газу), яка займає такий самий об'єм, що й занурена частина тіла.

$$F_A = \rho_p g V,$$

де ρ_p – густина рідини, V – об'єм зануреної частини тіла. Сила Архімеда прикладена в центрі тяжіння витисненого об'єму рідини.

Якщо виштовхувальна сила чисельно дорівнює силі тяжіння тіла, зануреного в рідину, то тіло плаває в рідині.

Тиск рідини на дно і стінку посудини

1.158. У відкриту циліндричну посудину налиті ртуть і вода у рівних за масою кількостях. Загальна висота обох шарів рідин h = 29,2 см. Визначити тиск на дно посудини

Дано	*Розв'язання*

$\rho_{рт} = 13{,}6\cdot10^3$ кг/м^3 $\rho_в = 10^3$ кг/м^3 $m_в = m_{рт}$ $h = 29{,}2$ см $= 0{,}292$ м $p = ?$	$p = \rho_{рт}gh_{рт} + \rho_в g(h - h_{рт})$, $m_в = m_{рт}$, $\rho_в V_в = \rho_{рт}V_{рт}$, $\rho_в (h - h_{рт})S = \rho_{рт}h_{рт}S$, $h_{рт} = \dfrac{\rho_в}{\rho_{рт} + \rho_в}h$, $p = \dfrac{2\rho_{рт}\rho_в gh}{\rho_{рт} + \rho_в}$.

Відповідь: $p = 5{,}34$ кПа.

1.159. У пряму циліндричну посудину налито рідину густини ρ_1. У скільки разів зміниться тиск на дно посудини, якщо в неї долити рідини, густина якої $1{,}5\ \rho_1$? Маси рідин однакові

Відповідь: Тиск збільшиться в 2 рази.

1.160. Акваріум, що має форму прямокутного паралелепіпеда, заповнений водою. З якою силою тисне вода на стінку акваріума, довжина якої 0,8 м і висота 0,6 м?

Дано	*Розв'язання*
$l = 0{,}8$ м $h = 0{,}6$ м $F = ?$	Тиск на бічну стінку лінійно зростає від 0 до ρgh, тому для обчислення сили користуємося середнім тиском $\langle p\rangle = \rho gh/2$.

$$F = \langle p\rangle lh, \quad F = \rho glh^2/2.$$

Відповідь: $F = 1{,}41$ кН.

1.161. До якої висоти H треба налити рідину в циліндричну посудину радіуса R, щоб сила, з якою рідина тисне на бічну поверхню посудини, дорівнювала силі тиску на дно?

Відповідь: $H = R$.

1.162. У циліндричну посудину з водою опускають тіло маси m, густина якого менша, ніж густина води. Як при цьому зміниться рівень води в посудині, якщо площа дна посудини S і вода з посудини не виливається?

Дано	*Розв'язання*

m $\rho < \rho_в$ S	Сила тиску на дно посудини $F = Mg$, де M - маса води. Під час опускання в посудину тіла сила тиску збільшується на $\Delta F = mg$. Оскільки густина тіла менша за густину води, тіло плаває у воді і не опускається на дно, рівень води при цьому
Δh = ?	

підвищується. Отже, зміна тиску Δp на дно обумовлена зміною рівня Δh води в посудині: $\Delta p = \rho_в g \Delta h$, де $\rho_в$ – густина води. Разом з тим $\Delta p = \Delta F/S = mg/S$. Тоді $\rho_в g \Delta h = mg/S$. Звідси

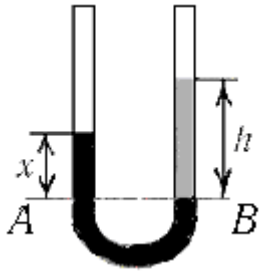
$$\Delta h = m/\rho_в S.$$

Відповідь: $\Delta h = m/\rho_в S$.

Закон сполучених посудин

1.163. У коліна *U*-подібної трубки налили воду, а потім в одне з колін додатково налили олію. Якою буде різниця рівнів води в колінах, якщо висота олії 40 см?

Дано	*Розв'язання*
$\rho_{ол} = 0{,}9 \cdot 10^3$ кг/м^3 $\rho_в = 10^3$ кг/м^3 h = 40 см x = ?	Згідно з законом Паскаля тиск на поверхні одного рівня AB у колінах є однаковим.



$$\rho_{ол} gh = \rho_в gx, \quad x = \frac{\rho_{ол}}{\rho_в} h.$$

Відповідь: x = 36 см

1.164. У сполучені посудини налита ртуть. Потім в одну з посудин наливають олію, а в іншу – воду. Поверхні поділу ртуті з олією і водою у обох посудинах знаходяться на однаковому рівні. Визначити висоту h стовпа води, якщо висота стовпа олії H = 20 см, а її густина $\rho_{ол} = 0{,}9 \cdot 10^3$ кг/м^3.

Відповідь: h = 18 см.

1.165. У сполучені посудини налита ртуть, а поверх неї в одну посудину налитий стовп олії висоти $h_1 = 48$ см ($\rho_1 = 0{,}9 \cdot 10^3$ кг/м^3), а в іншу – стовп гасу висоти $h_2 = 20$ см ($\rho_2 = 0{,}8 \cdot 10^3$ кг/м^3). Визначити різницю рівнів ртуті в обох посудинах.

Дано	*Розв'язання*
$h_1 = 48$ см $\rho_1 = 0{,}9 \cdot 10^3$ кг/м^3 $h_2 = 20$ см $\rho_2 = 0{,}8 \cdot 10^3$ кг/м^3 $x = ?$	$h_1\rho_1 = h_2\rho_2 + \rho_{рт}x, \quad x = \dfrac{h_1\rho_1 - h_2\rho_2}{\rho_{рт}}.$
Відповідь: $x = 2$ см.	

Закон Архімеда

1.166. Надводна частина айсберга має об'єм $V_1 = 500$ м^3. Визначити об'єм V айсберга. Густина льоду $\rho_л = 0{,}92 \cdot 10^3$ кг/м^3, морської води $\rho_в = 1{,}03 \cdot 10^3$ кг/м^3.

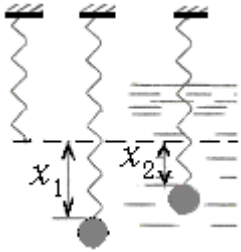
Дано	*Розв'язання*
$\rho_л = 0{,}92 \cdot 10^3$ кг/м^3 $\rho_в = 1{,}03 \cdot 10^3$ кг/м^3 $V_1 = 500$ м^3 $V = ?$	$F_{Арх} = m_л g, \quad \rho_в(V - V_1)g = \rho_л V g$ $V = \dfrac{V_1\rho_в}{\rho_в - \rho_л}.$
Відповідь: $V = 4\,682$ м^3.	

1.167. Аеростат, заповнений воднем, піднімається з Землі з прискоренням $a = 1$ м/с^2. Маса аеростата $m = 700$ кг. Густина повітря $\rho_п = 1{,}29$ кг/м^3, водню $\rho_в = 0{,}09$ кг/м^3. Визначити об'єм аеростата.

Дано	*Розв'язання*
$a = 1$ м/с^2 $m = 700$ кг $\rho_п = 1{,}29$ кг/м^3 $\rho_в = 0{,}09$ кг/м^3 $V = ?$	$Ma = F_{Арх} - Mg,$ $M = m + m_в = m + \rho_в V,$ $F_{Арх} = \rho_п V g,$ $\rho_п V g = (m + \rho_в V)(g + a), \; V = \dfrac{m(g + a)}{\rho_п g - \rho_в(g + a)}.$
Відповідь: $V = 555{,}6$ м^3.	

1.168. Куля підвішена на пружині і занурена у воду. При цьому подовження пружини зменшилося у 3 рази. Визначити густину матеріалу кулі.

Дано	*Розв'язання*
$\rho_в = 10^3$ кг/м^3 $x_1/x_2 = 3$ $\rho = ?$	$mg = kx_1$, $m = \rho V$, $mg = kx_2 + F_{Арх}$, $k(x_1 - x_2) = F_{Арх}$, $F_{Арх} = \rho_в Vg$, $k(x_1 - \frac{x_1}{3}) = \rho_в Vg$, $\rho = \frac{3}{2}\rho_в$.



Відповідь: $\rho = 1\,500$ кг/м^3.

1.169. Колода, довжина якої $l = 3{,}5$ м і діаметр $D = 30$ см, плаває у воді. Яка маса людини, що може стояти на колоді, не замочивши ніг? Густина дерева $\rho = 0{,}7\cdot10^3$ кг/м^3.

Дано	*Розв'язання*
$l = 3{,}5$ м $D = 30$ см $\rho = 0{,}7\cdot10^3$ кг/м^3 $\rho_в = 10^3$ кг/м^3 $m = ?$	$(m + \rho V)g = F_{Арх}$, $V = \frac{\pi D^2}{4} l$, $F_{Арх}, = \rho_в Vg$, $m = (\rho_в - \rho)\frac{\pi D^2}{4} l$.

Відповідь: $m = 74{,}2$ кг.

1.170. Кулька, густина якої $\rho = 2{,}7$ г/см^3 і радіус $R = 2$ см, міститься в посудині з водою. Визначити силу F, з якою кулька тисне на дно посудини.

Дано	*Розв'язання*
$\rho = 2{,}7$ г/см$^3 = 2{,}7\cdot10^3$ кг/м^3 $\rho_в = 10^3$ кг/м^3 $R = 2$ см $= 0{,}02$ м $F = ?$	$F = mg - F_{Арх}$, $m = 4\pi\rho R^3/3$, $F_{Арх} = 4\pi\rho_в gR^3/3$. $F = 4\pi(\rho - \rho_в)gR^3/3$.

Відповідь: $F = 558{,}85$ мН.

1.171. У воді плаває дерев'яний брусок маси $m = 3$ кг. Густина дерева $\rho = 0{,}7\cdot10^3$ кг/м^3. Об'єм зануреної частини бруска становить 1/3 об'єму бруска. Визначити вагу P бруска, що плаває.

Дано	*Розв'язання*

$m = 3$ кг $\rho = 0{,}7\cdot10^3$ кг/м^3 $\rho_в = 10^3$ кг/м^3 $V_{занур} = V/3$ $P = ?$	$P = mg - F_{Арх}$, $F_{Арх} = \rho_в V_{занур} g$, $V = m/\rho$, $P = mg(1 - \frac{1}{3}\frac{\rho_в}{\rho})$. ***Відповідь:*** $P = 15{,}3$ Н.

1.172. Визначити густину ρ однорідного тіла, вага якого в повітрі $P_0 = 2{,}8$ Н, а у воді $P_1 = 1{,}69$ Н. Виштовхувальну силу повітря не враховувати.

Дано	*Розв'язання*
$P_0 = 2{,}8$ Н $P_1 = 1{,}69$ Н $\rho_в = 10^3$ кг/м^3 $\rho = ?$	$F_{Арх} = P_0 - P_1$, $F_{Арх} = \rho_в V g$, $V = \frac{P_0 - P_1}{\rho_в g}$, $P_0 = \rho V g$, $\rho = \frac{P_0}{Vg} = \frac{P_0 \rho_в}{P_0 - P_1}$.

Відповідь: $\rho = 2{,}52\cdot10^3$ кг/м^3.

1.173. Чому дорівнює густина тіла, якщо при повному зануренні в воду його вага зменшилась удвоє у порівнянні з вагою в вакуумі?

Відповідь: $\rho = 2\,000$ кг/м^3.

1.174. У посудині з водою плаває кусок льоду. Як зміниться рівень води, коли лід розтане?

Розв'язання. Умова плавання льоду $m_л g = F_{Арх}$. Нехай V – об'єм куска льоду. $m_л = \rho_л V$, $F_{Арх} = \rho_в V_{занур} g$, де $V_{занур}$ – об'єм зануреної частини куска. Одержимо $\rho_л V = \rho_в V_{занур}$. Маса води, що утвориться під час танення льоду

$$m_в = m_л, \text{ або } \rho_в V_в = \rho_л V = \rho_в V_{занур}.$$

Отже, об'єм води, що утворюється внаслідок танення льоду, дорівнює об'єму зануреної частини куска льоду. Рівень води не зміниться

Відповідь: Не зміниться.

1.175. Вага тіла у повітрі $P_1 = 54$ г, у воді $P_2 = 34$ г, у деякій рідині $P_3 = 38$ г. Визначити густину ρ рідини.

В к а з і в к а. Скористатися розв'язком задачі 1.172.

Відповідь: $\rho = 800$ кг/м^3.

2 розділ

МОЛЕКУЛЯРНА ФІЗИКА. ТЕПЛОВІ ЯВИЩА

2.1 Основи молекулярно-кінетичної теорії. Ідеальний газ

Основні закони і формули

- Кількість молів речовини

$$\nu = \frac{m}{M} = \frac{N}{N_A},$$

де m — маса речовини, M — її молярна маса, N — кількість молекул; N_A — стала Авогадро ($N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$).

Зв'язок між молярною масою M та відносною молекулярною масою M_r

$$M = M_r\, 10^{-3} \text{ (кг/моль)},$$

або

$$M = M_r \text{ (г/моль)},$$

тобто молярна маса, виражена у грамах на моль, чисельно дорівнює відносній молекулярній масі, яка визначається з таблиці Менделєєва.

- Основне рівняння молекулярно-кінетичної теорії ідеального газу

$$p = \frac{1}{3} n m_0 \langle v_{кв} \rangle^2,$$

де p – тиск газу, n – кількість молекул в одиниці об'єму, m_0 – маса молекули, $<v_{кв}>$ – середня квадратична швидкість молекул, кутові дужки означають усереднення, або

$p = \frac{2}{3} n < E_k >$, $\quad < E_k > = \frac{m_0 < v_{кв} >^2}{2}$ – середня кінетична енергія поступального руху молекул.

- Середня квадратична швидкість молекул

$$< v_{кв} > = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}},$$

де T – абсолютна температура газу, $T = (t + 273{,}15)$ К, t – температура за шкалою Цельсію, $k = \frac{R}{N_A} = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К – стала Больцмана.

- Рівняння стану ідеального газу (рівняння Клапейрона):

$$pV = \frac{m}{M} RT,$$

де V – об'єм газу; m – його маса; $R = 8{,}31$ Дж/(моль·К) – газова стала.

- Залежність тиску газу від концентрації його молекул і температури (друга форма запису рівняння стану ідеального газу)

$$p = nkT.$$

- Концентрація молекул для будь-якого агрегатного стану речовини

$$n = \frac{N}{V} = \frac{N_A \rho}{M},$$

де ρ – густина речовини.

- Дослідні газові закони:

а) закон Бойля – Маріотта (ізотермічний процес)

$$pV = const \text{ при } T,\ m = const,$$

або для двох станів газу

$$p_1 V_1 = p_2 V_2;$$

б) закони Гей-Люссака:

1) $\frac{V}{T} = const$ при p, $m = const$,(ізобаричний процес),

або для двох станів газу

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2};$$

2) $\frac{p}{T} = const$ при V, $m = const$,(ізохоричний процес),

або для двох станів

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}.$$

- Абсолютна вологість повітря

$$\rho_a = \frac{m}{V},$$

де m – маса водяної пари, що міститься у повітрі, ρ_a – її густина. Відносна вологість повітря

$$\varphi = \frac{\rho_a}{\rho_н} 100\%,$$

де $\rho_н$ – густина насиченої пари. Параметри стану ненасиченої пари досить точно визначаються з рівняння Клапейрона. Для насиченої пари можна користуватись рівнянням стану у вигляді $\rho_н = pM/RT$. Температура $t_р$, за якої водяна пара у повітрі стає насиченою, називається точкою роси.

$$\rho_a(t) = \rho_H(t_p).$$

Якщо точка роси відома, можна визначити відносну вологість повітря при даній температурі, користуючись таблицею густини (або тиску) насичуючої пари при різних температурах

$$\varphi = \frac{\rho_н(t_р)}{\rho_н(t)} \cdot 100\%.$$

- Поверхневий натяг в рідині:

$$\sigma = \frac{F}{l} \text{ або } \sigma = \frac{\Delta E}{\Delta S},$$

де F – модуль сили поверхневого натягу, l – довжина межі поверхневого шару; ΔE – надлишок енергії поверхневого шару, що дорівнює роботі утворення поверхні плівки площею ΔS.

- Додатковий тиск під опуклою сферичною поверхнею рідини

$$\Delta p = \frac{2\sigma}{R}.$$

- Висота підйому рідини густини ρ в капілярній трубці радіуса r у випадку повного змочування стінок

$$h = \frac{2\sigma}{\rho g r}.$$

- Нормальні умови:

$$p_0 = 1{,}013 \cdot 10^5 \text{ Па},$$
$$T_0 = 273{,}15 \text{ К}.$$

Маса і розміри молекул. Молекулярно-кінетична теорія

2.1. Визначити кількість молів ν і молекул N, які містяться в m = 1 г водню.

Дано	*Розв'язання*
m = 1 г = 10^{-3} кг M = $2\cdot10^{-3}$ кг/моль	$\nu = \frac{m}{M}$, $N = N_A\nu = \frac{N_A m}{M}$.
ν = ? N = ?	

Відповідь: ν = 0,5 молів, $N = 3{,}01\cdot10^{23}$.

2.2. Визначити кількість молекул N у m = 34 г метану CH_4; визначити масу m_0 однієї молекули.

Дано	*Розв'язання*
m = 34 г = $3{,}4\cdot10^{-2}$ кг M = $16\cdot10^{-3}$ кг/моль	$N = \frac{m}{M}N_A$, $m_0 = \frac{M}{N_A}$.
N = ? m_0 = ?	

Відповідь: $N = 1{,}28\cdot10^{24}$, $m_0 = 2{,}66\cdot10^{-26}$ кг.

2.3. Кількість атомів твердого алюмінію в деякому об'ємі $N = 1{,}2\cdot10^{29}$. Визначити цей об'єм, якщо густина алюмінію $\rho = 2{,}7\cdot10^3$ кг/м^3.

Дано	*Розв'язання*
M = $27\cdot10^{-3}$ кг/моль $N = 1{,}2\cdot10^{29}$ $\rho = 2{,}7\cdot10^3$ кг/м^3	$V = \frac{m}{\rho}$, $m = m_0N = \frac{M}{N_A}N$, $V = \frac{MN}{N_A\rho}$.
V = ?	

Відповідь: V = 2 м^3.

2.4. Визначити масу m_0 однієї молекули срібла.

Відповідь: $m_0 = 1{,}79\cdot10^{-25}$ кг.

2.5. У скільки разів маса m_{01} однієї молекули вуглекислого газу CO_2 більша за масу m_{02} однієї молекули аміаку NH_3?

Відповідь: m_{01}/m_{02} = 2,59.

2.6. Скільки молекул N і молів ν міститься у m = 5 кг кисню O_2?

Відповідь: $N = 9{,}4\cdot10^{25}$, ν = 156,25 молів.

2.7. Визначити середню квадратичну швидкість та середню кінетичну енергію поступального руху молекул вуглекислого газу при температурі 100 °С.

Відповідь: $<v_{кв}>$ = 459,7 м/с, $<E_k>$ = 7,72·10^{-21} Дж.

2.8. Визначити концентрацію молекул кисню, якщо його тиск 0,2 МПа, а середня квадратична швидкість молекул 700 м/с.

Відповідь: n = 2,3·10^{25} м$^{-3}$.

2.9. Визначити середню квадратичну швидкість молекул ідеального газу, густина якого під тиском p = 35 кПа становить ρ = 0,3 кг/м^3.

Дано	*Розв'язання*
p = 35 кПа = 3,5·10^4 Па ρ = 0,3 кг/м^3	$p = \frac{1}{3} m_0 n < v_{кв} >^2$, $\rho = m_0 n$,
$<v_{кв}>$ = ?	$p = \frac{1}{3}\rho < v_{кв} >^2$, $< v_{кв} >= \sqrt{\frac{3p}{\rho}}$.

Відповідь: $<v_{кв}>$ = 592 м/с.

2.10. Скільки молекул міститься у 10 г газу за нормальних умов, якщо середня квадратична швидкість його молекул $<v_{кв}>$ = 450 м/с?

Дано	*Розв'язання*
m = 10 г = 10^{-2} кг $<v_{кв}>$ = 450 м/с T = 273 К	$N = \nu N_A = \frac{m}{M} N_A$, $< v_{кв} >= \sqrt{\frac{3RT}{M}}$,
N = ?	$M = \frac{3RT}{< v_{кв} >^2}$, $R = kN_A$,

$$N = \frac{m < v_{кв} >^2}{3kT}.$$

Відповідь: N =1,79·10^{23}.

2.11. Густина газу ρ = 0,01 кг/м^3, середня квадратична швидкість його молекул $<v_{кв}>$ = 480 м/с, концентрація молекул газу n = 10^{23} м$^{-3}$. Визначити температуру газу та середню кінетичну енергію поступального руху його молекул.

Дано *Розв'язання*

$\rho = 0{,}01$ кг/м^3 $\langle v_{кв} \rangle = 480$ м/с $n = 10^{23}$ м$^{-3}$	$$\langle v_{кв} \rangle \sqrt{\frac{3kT}{m_0}}, \qquad m_0 = \frac{\rho}{n},$$
$T = ?$ $\langle E_k \rangle = ?$	$$T = \frac{\rho \langle v_{кв} \rangle^2}{3kn},$$

$$\langle E_k \rangle = \frac{1}{2} m_0 \langle v_{кв} \rangle^2 = \frac{\rho \langle v_{кв} \rangle^2}{2n}.$$

Відповідь: $T = 556{,}5$ К, $\langle E_k \rangle = 1{,}15 \cdot 10^{-20}$ Дж.

Рівняння стану ідеального газу. Газові закони

2.12. Газ при температурі $t_1 = 17°$С і тиску $p_1 = 350$ мм рт. ст. займає об`єм $V_1 = 160$ см$^3$. Визначити об`єм V_0 цієї ж маси газу за нормальних умов.

Дано	*Розв'язання*
$T_1 = 290$ К $p_1 = 350$ мм рт.ст $V_1 = 160$ см^3 $T_0 = 273$ К $p_0 = 760$ мм рт.ст	$$\frac{p_0 V_0}{T_0} = \frac{p_1 V_1}{T_1}, \qquad V_0 = \frac{p_1 V_1 T_0}{p_0 T_1}.$$
$V_0 = ?$	***Відповідь:*** $V_0 = 69{,}36$ см^3.

2.13. Манометр на балоні зі стиснутим газом при температурі $t_1 = 27°$ С показує тиск $p_1 = 9{,}3$ МПа. Який тиск p_2 покаже манометр, якщо температуру знизити до $t_2 = -73°$ С?

Дано	*Розв'язання*
$T_1 = 300$ К $p_1 = 9{,}3$ МПа $T_2 = 200$ К $V = \text{const}$	$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}, \qquad p_2 = \frac{T_2}{T_1} p_1$$
$p_2 = ?$	***Відповідь:*** $p_2 = 6{,}2$ МПа.

2.14. Під яким тиском p знаходиться кисень у балоні, якщо його температура $t° = 27$ °С, а густина $\rho = 6{,}24$ кг/м^3?

Дано *Розв'язання*

$M = 32\cdot10^{-3}$ кг/моль $T = 300$ К $\rho = 6{,}24$ кг/м^3	$pV = \frac{m}{M}RT$, $\rho = \frac{m}{V}$, $p = \rho\frac{RT}{M}$
$p = ?$	***Відповідь:*** $p = 0{,}49$ МПа.

2.15. Об'єм газу при температурі $t_1 = 55$ °С становить $V_1 = 300$ дм^3. Якщо тиск зменшити в три рази, то газ займе об'єм $V_2 = 750$ дм^3 при температурі t_2. Визначити цю температуру.

Дано	*Розв'язання*
$T_1 = 328$ К $V_1 = 300$ дм^3 $\frac{p_2}{p_1} = \frac{1}{3}$ $V_2 = 750$ дм^3	$\frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{p_2V_2}{T_2}$, $T_2 = \frac{p_2V_2T_1}{p_1V_1}$, $t_2 = T_2 - 273$.
$t_2 = ?$	***Відповідь:*** $t_2 = 0{,}3$ °С.

2.16. Визначити концентрацію n та густину ρ чадного газу СО за нормальних умов.

Дано	*Розв'язання*
$\boldsymbol{M = 28\cdot10^{-3}}$ **кг/моль** $p_0 = 1{,}013\cdot10^5$ Па $T_0 = 273$ К	$n = \frac{p_0}{kT_0}$, $p_0V = \frac{m}{M}RT_0$,
$n = ?$ $\rho = ?$	$\rho = \frac{m}{V}$, $\rho = \frac{p_0M}{RT_0}$.

Відповідь: $n = 2{,}69\cdot10^{25}$ м$^{-3}$, $\rho = 1{,}25$ кг/м^3.

2.17. Скільки молекул кисню міститься в об'ємі $V = 2{,}3$ л при температурі $t = 15$ °С і тиску $p = 0{,}11$ МПа?

Дано	*Розв'язання*
$V = 2{,}3$ л $= 2{,}3\cdot10^{-3}$ м^3 $\boldsymbol{T = 288}$ **К** $M = 32\cdot10^{-3}$ кг/моль	$p = nkT$, $n = \frac{p}{kT}$,
$N = ?$	$N = nV = \frac{pV}{kT}$.

Відповідь: $N = 6{,}37\cdot10^{22}$.

2.18. Встановити густину вуглекислого газу CO_2 при температурі $t_1 = 37$ °С і тиску $p_1 = 0{,}2$ МПа. Визначити масу газу, об'єм якого $V = 2{,}5$ м^3, за цих умов.

Відповідь: $\rho = 3{,}42$ кг/м^3, $m = 8{,}55$ кг.

2.19. Якої довжини l вийде ланцюжок із молекул кисню, які знаходяться за нормальних умов в об'ємі $V = 2$ см^3? Діаметр молекул кисню $d = 0{,}3\cdot$нм.

Дано	*Розв'язання*
M = 32·10^{-3} кг/моль $p_0 = 1{,}013\cdot10^5$ Па $T_0 = 273$ К $V = 2$ см$^3 = 2\cdot10^{-6}$ м^3 $d = 0{,}3$ нм $= 0{,}3\cdot10^{-9}$ м	$l = d\cdot N$, $\quad N = nV$, $n = \dfrac{p_0}{kT_0}$, $\quad l = \dfrac{dp_0V}{kT_0}$.
$l = ?$	***Відповідь:*** $l = 1{,}6\cdot10^{10}$ м.

2.20. Балон місткості $V = 200$ л наповнено газом, тиск якого $p = 15$ МПа і температура $t = 30$ °С. Маса балона з газом $m = 70$ кг. З балона викачують газ доти, поки його тиск не зменшиться до значення $p_1 = 9{,}5$ МПа при тій самій температурі. Маса балона з газом при цьому становить $m_1 = 56$ кг. Визначити за цими даними густину ρ_0 газу за нормальних умов. Який це газ?

Дано	*Розв'язання*
$V = 200$ л $= 0{,}2$ м^3 $p = 15$ МПа $= 1{,}5\cdot10^7$П $T = 303$ К $m = 70$ кг $p_1 = 9{,}5$ МПа $=$ $0{,}95\cdot10^7$Па $m_1 = 56$ кг $p_0 = 0{,}1$ МПа $= 10^5$ Па $T_0 = 273$ К	Густина газу при тиску p_0 і температурі T_0 (нормальні умови) $\rho_0 = \dfrac{m}{V} = \dfrac{Mp_0}{RT_0}$. Якщо маса порожнього балона $m_б$, то маса газу в першому і другому випадках буде відповідно $(m - m_б)$ і $(m_1 - m_б)$. Тоді за рівнянням газового стану маємо $pV = \dfrac{m - m_б}{M}RT$, $p_1V = \dfrac{m_1 - m_б}{M}RT$.
$\rho_0 = ?$ $M_г = ?$	

Віднявши від першого рівняння друге, одержимо

$$(p - p_1)V = \frac{m - m_1}{M}RT$$

Звідси

$$\frac{M}{R} = \frac{(m - m_1)T}{(p - p_1)V}.$$

Підставляючи це значення у вираз для ρ_0, дістанемо

$$\rho_0 = \frac{(m - m_1)p_0 T}{(p - p_1)VT_0} = \frac{(70 - 56)\cdot 1{,}01\cdot 10^5 \cdot 303}{(1{,}5 - 0{,}95)\cdot 10^7 \cdot 0{,}2 \cdot 273}\,\text{êã/ì}^3 = 1{,}427\ \text{кг/м}^3.$$

Визначаємо молярну масу цього газу

$$M = \frac{\rho_0 RT_0}{p_0} = \frac{1{,}427\cdot 8{,}31\cdot 273}{1{,}01\cdot 10^5}\,\text{êã/ìîëü} \approx 32\cdot 10^{-3}\ \text{кг/моль}.$$

Відносна молекулярна маса M_r = 32. Цей газ – кисень.

Відповідь: ρ_0 = 1,427 кг/м^3, M_r = 32, кисень.

2.21. У балоні ємності V = 40 л міститься азот при температурі t_1= 57°С і тиску p_1= 0,3·МПа. Частину газу з балона випустили. При цьому тиск не змінився, а температура підвищилася до t_2 = 87°С. Яку масу Δm газу випустили?

Дано	*Розв'язання*
V_1= 40 л = 4·10^{-2} м^3 **M = 28·10^{-3} кг/моль** T_1 = 330 К p_1 = 0,3 МПа = 0,3·10^6 Па p_2= p_1 V = const T_2= 360 К Δm = ?	$p_1V_1 = \frac{m}{M}RT_1$, $p_2V_2 = \frac{m-\Delta m}{M}RT_2$, $p_1 = p_2$, $V_1 = V_2$, $mT_1 = (m - \Delta m)T_2$, $\Delta m = m\frac{(T_2 - T_1)}{T_2}$, $m = \frac{p_1V_1M}{RT_1}$, $\Delta m = \frac{p_1V_1M}{RT_1T_2}(T_2 - T_1) = \frac{p_1V_1M}{R}\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right)$

Відповідь: Δm = 0,01 кг.

2.22. Кисень маси m = 20 г перебуває під тиском p_1 = 0,5 МПа при температурі t_1 = 7 °С. Після нагрівання без зміни тиску газ зайняв об'єм V_2 = 5,8 л. Визначити початковий об'єм V_1 і кінцеву температуру t_2 газу.

Дано *Розв'язання*

m = 20 г = 0, 02 кг **M = 32·10^{-3} кг/моль** p_1 = 0,5 МПа = 5·10^5 Па T_1 = 280 К V_2 = 5,8 л = 5,8·10^{-3} м^3 $p_1 = p_2$	$p_1V_1 = \frac{m}{M}RT_1$, $V_1 = \frac{mRT_1}{p_1M}$, $\frac{V_1}{V_2} = \frac{T_1}{T_2}$, $T_2 = T_1\frac{V_2}{V_1}$, $t_2 = T_2 - 273$.
V_1 = ? t_2 = ?	

Відповідь: V_1 = 2,91 л, t_2 = 285 °С.

Ізопроцеси в газах

2.23. Посудину, яка містить V_1 = 15 л газу під тиском p_1 = 0,6 МПа, з`єднують з пустою посудиною об`ємом V_2 = 3 л. Визначити кінцеве значення тиску p_2. Процес ізотермічний.

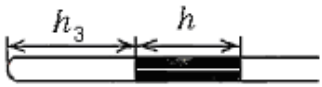
Дано	*Розв'язання*
V_1 = 15 л p_1 = 0,6 МПа V_2 = 3 л T = const	$p_1V_1 = p_2(V_1 + V_2)$, $p_2 = \frac{V_1}{V_1 + V_2}p_1$.
p_2 = ?	***Відповідь:*** p_2 = 0,5 МПа.

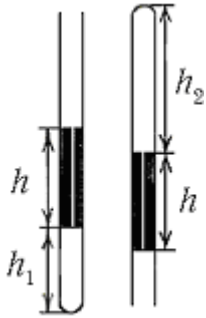
2.24. У запаяній з одного кінця трубці знаходиться повітря, відокремлене від атмосфери стовпчиком ртуті завдовжки h = 10 см. Коли трубка розміщена вертикально відкритим кінцем уверх, довжина повітряного стовпчика у закритому кінці h_1 = 8 см. Якою буде довжина повітряного стовпчика, якщо трубку повернути відкритим кінцем униз? розташувати горизонтально? Атмосферний тиск $p_а$ = 0,101 МПа.

Дано	*Розв'язання*
h = 10 см = 0,1 м ρ = 13,6·10^3 кг/м^3 h_1 = 8 см = 0,08 м $p_а$ = 0,101·10^6 Па	Повітря в трубці зазнає ізотермічного стискування і розширення. Нехай S – поперечний переріз трубки, тоді Sh – об'єм повітря в трубці. За законом Бойля – Маріотта добуток тиску на об'єм даної маси газу при постійній температурі залишається сталим.
h_2 = ? h_3 = ?	

$$(p_a + \rho qh)h_1S = (p_a - \rho qh)h_2S = p_a h_3 S.$$

Тут ρqh – гідростатичний тиск стовпчика ртуті, який у трьох випадках або додається до атмосферного, або віднімається від нього, або не враховується (ртуть не тисне на повітря).





Відповідь: $h_2 = \dfrac{p_a + \rho qh}{p_a - \rho qh} h_1 = 10{,}43$ см, $h_3 = \dfrac{p_a + \rho qh}{p_a} h_1 = 9{,}06$ см.

2.25. Трубка завдовжки h = 40 см запаяна з одного кінця і розміщена вертикально відкритим кінцем уверх. Повітря в трубці закрито стовпчиком ртуті висотою h_1 = 12 см, який доходить до верхнього кінця трубки. Трубку обережно повертають, при цьому частина ртуті виливається. Визначити висоту h_2 стовпчика ртуті, який залишився в трубці. Атмосферний тиск p_a = 0,101 МПа.

Дано	*Розв'язання*
$\boldsymbol{h_1}$ **= 12 см = 0,12 м** $\rho = 13{,}6 \cdot 10^3$ кг/м^3 h = 40 см = 0,4 м p_a = 0,101 МПа = $0{,}101 \cdot 10^6$ Па h_2 = ?	За законом Бойля – Маріотта (див. задачу 2.24) $(p_a + \rho qh_1)(h - h_1)S =$ $(p_a - \rho qh_2)(h - h_2)S.$ Після алгебраїчних перетворень одержимо квадратне рівняння відносно h_2.

Підстановка числових значень дає

$$h_2^2 - 1{,}16\, h_2 + 0{,}06 = 0.$$

З двох коренів цього рівняння зміст має

$$h_2 = 0{,}05 \text{ м}.$$

Відповідь: h_2 = 0,05 м.

2.26. Два балони з'єднані трубкою з краном. Місткості їх відповідно V_1 = 4 л і V_2 = 10 л, а тиск у них p_1 = 43 кПа і p_2 = 86 кПа. Який тиск установиться в балонах у разі відкривання крану? Процес ізотермічний

Дано	*Розв'язання*
$V_1 = 4$ л $= 4\cdot10^{-3}$ м^3 $\mathbf{V_2 = 10}$ **л** $= \mathbf{10^{-2}}$ **м**^{3} $p_1 = 43$ кПа $= 4{,}3\cdot10^4$ Па $p_2 = 86$ кПа $= 8{,}6\cdot10^4$ Па $T_1 = T_2 = T$	$p_1V_1 = \frac{m_1}{M}RT$, $\quad p_2V_2 = \frac{m_2}{M}RT$, $m_1 + m_2 = (p_1V_1 + p_2V_2)\frac{M}{RT}$,
$p = ?$	$p(V_1 + V_2) = \frac{(m_1 + m_2)}{M}RT$,

$$p = \frac{(m_1 + m_2)RT}{M(V_1 + V_2)} = \frac{p_1V_1 + p_2V_2}{V_1 + V_2}.$$

Відповідь: $p = 73{,}7$ кПа.

2.27. Газ маси $m = 18{,}6$ г займає об'єм $V_1 = 3$ л при температурі $t_1 = 54$ °С. Визначити кінцеву густину ρ_2 цього газу, якщо при незмінному тиску його температуру знизили до $t_2 = -55$ °С.

Дано	*Розв'язання*
$\mathbf{m = 18{,}6}$ **г** $= \mathbf{18{,}6\cdot10^{-3}}$ **кг** $V_1 = 3$ л $= 3\cdot10^{-3}$ м^3 $T_1 = 327$ К $p_1 = p_2$ $T_2 = 218$ К	$\rho_2 = \frac{m}{V_2}$, $\quad \frac{V_1}{V_2} = \frac{T_1}{T_2}$, $V_2 = \frac{T_2}{T_1}V_1$, $\quad \rho_2 = \frac{mT_1}{T_2V_1}$
$\rho_2 = ?$	

Відповідь: $\rho_2 = 9{,}3$ кг/м^3.

2.28. Тиск в закритій пробкою пляшці $p_1 = 0{,}35$ МПа при температурі $t_1 = 10$ °С. Площа перерізу пробки $S = 5$ см^2. Щоб витягти пробку, треба прикласти силу $F = 6$ Н. На скільки градусів треба нагріти пляшку, щоб пробка вилетіла?

Дано	*Розв'язання*
$\mathbf{V_1 = V_2}$ $p_1 = 0{,}35$ МПа $= 0{,}35\cdot10^6$ Па $T_1 = 283$ К $S = 5$ см$^2 = 5\cdot10^{-4}$ м^2 $F = 6$ Н	$\Delta T = T_2 - T_1$, $\frac{p_1}{p_2} = \frac{T_1}{T_2}$, $T_2 = \frac{p_2}{p_1}T_1$, $\Delta T = T_1\left(\frac{p_2}{p_1} - 1\right)$, $\quad p_1S + F = p_2S$,
$\Delta T = ?$	$p_2 = p_1 + \frac{F}{S}$, $\quad \Delta T = \frac{T_1F}{p_1S}$.

Відповідь: $\Delta T = 9{,}7$ К.

2.29. Визначити піднімальну силу F наповненої гелієм повітряної кулі, оболонка якої може вільно розтягуватися. Маса гелію $m_г$ = 120 кг. Відносна молекулярна маса повітря $M_п$ = 29, гелію $M_г$ = 4.

Дано	*Розв'язання*
$m_г$ = 120 кг $M_г$ = 4 10^{-3} кг/моль $M_п$ = 29 10^{-3} кг/моль	Піднімальна сила дорівнює різниці між виштовхувальною архімедовою силою $F_{Арх}$ і силою тяжіння гелію маси $m_г$
F = ?	$F = F_{Арх} - m_г g.$

Архімедова сила дорівнює вазі повітря, яке займає такий самий об'єм, що й гелій

$$F_{Арх} = \rho_п V_г g.$$

Виразивши об'єм гелію, як $V_г = \dfrac{m_г}{\rho_г}$, отримаємо

$$F = \rho_п \frac{m_г}{\rho_г} g - m_г g = m_г g\left(\frac{\rho_п}{\rho_г} - 1\right).$$

Вважаємо, що тиск усередині повітряної кулі, заповненої гелієм, дорівнює тискові навколишнього повітря, тоді густину можна виразити з рівняння Клапейрона

$$pV = \frac{m}{M}RT, \qquad \rho = \frac{m}{V} = \frac{pM}{RT}.$$

Тоді $\dfrac{\rho_п}{\rho_г} = \dfrac{M_п}{M_г}$. Остаточно $F = m_г g\left(\dfrac{M_п}{M_г} - 1\right)$.

Відповідь: F = 7,36 кН.

2.30. Автомобільну камеру місткості V = 10 л треба накачати до тиску p = 0,2 МПа. Скільки качань n треба зробити насосом, який при кожному качанні забирає V_1 = 400 см^3 повітря, якщо камера спочатку була: а) пустою; б) заповненою повітрям наполовину; в) повністю заповненою повітрям за нормальних умов? Стискування вважати ізотермічним.

Дано	*Розв'язання*
$V = 10$ л $p = 0{,}2$ МПа $V_1 = 0{,}4$ л $p_а = 0{,}101$ МПа	а) Під час кожного качання в камеру поступає повітря маси m_1, яку можна визначити з рівняння Клапейрона $p_aV_1 = \frac{m_1}{M}RT, \qquad m_1 = \frac{p_aV_1M}{RT},$
$n_1 = ?$ $n_2 = ?$ $n_3 = ?$	де $p_а$ – атмосферний тиск.

Після n_1 качань у камері буде знаходитись повітря маси n_1m_1, для якого знову можна записати рівняння Клапейрона

$$pV = \frac{n_1m_1}{M}RT.$$

Підставивши m_1, знайдемо $n_1 = \frac{pV}{p_aV_1}$.

б) У камері під атмосферним тиском міститься повітря, маса m^* якого знаходиться з рівняння $p_а\frac{V}{2} = \frac{m^*}{M}RT, \quad m^* = \frac{p_aVM}{2RT}$.

Крім того, після n_2 качань додається повітря маси n_2m_1.
Сумарна маса повітря в камері $m^* + n_2m_1$, для якого знов запишемо рівняння Клапейрона

$$pV = \frac{m^* + n_2m_1}{M}RT.$$

Після підстановки m^* та перетворень знайдемо

$$n_2 = \left(\frac{p}{p_a} - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{V}{V_1}\right).$$

в) У камері міститься повітря масою m^{**} під атмосферним тиском

$$p_aV = \frac{m^{**}}{M}RT, \quad m^{**} = \frac{p_aVM}{RT}.$$

Після n_3 качань маса повітря в камері $m^{**} + n_3m_1$
З рівняння Клапейрона

$pV = \frac{m^{**} + n_3m_1}{M}RT$ визначимо $n_3 = \left(\frac{p}{p_a} - 1\right)\frac{V}{V_1}$.

Відповідь: $n_1 = 50$, $n_2 = 37$, $n_3 = 25$.

Вологість повітря

2.31. В об'ємі $V = 5$ м^3 повітря міститься водяна пара маси $m = 80$ г. Визначити абсолютну вологість повітря.

Відповідь: $\rho_a = \dfrac{m}{V} = 16$ г/м^3.

2.32. Температура повітря $t = 25$ °С, відносна вологість $\varphi = 75$ %. Визначити масу водяної пари у 1м^3 повітря.

Дано	*Розв'язання*
$t = 25$ °С $\varphi = 75$ %. $\rho_a = ?$	$\rho_a = \dfrac{\rho_н \varphi}{100\%}$. Густину $\rho_н$ насичуючої водяної пари при $t = 25$ °С знайдемо з таблиці, $\rho_н = 0{,}023$ кг/м^3. Підставивши числові значення, одержимо $\rho_a = 0{,}017$ кг/м^3.

Відповідь: $\rho_a = 0{,}017$ кг/м^3.

2.33. Температура повітря $t_1 = 2$ °С, відносна вологість $\varphi = 60$ %. Чи випаде вночі іній, якщо температура ґрунту знизиться до $t_2 = -3$ °С? Густина насичуючої водяної пари при $t_1 = 2$ °С становить 5,6 г/м^3, а при температурі $t_2 = -3$ °С — 3,81 г/м^3.

Дано	*Розв'язання*
$t_1 = 2$°С $\varphi = 60$ % $t_2 = -3$ °С $\rho_{н1} = 5{,}6$ г/м^3 $\rho_{н2} = 3{,}81$ г/м^3 Чи випаде іній?	$\varphi = \dfrac{\rho_a}{\rho_н} \cdot 100\%$, $\rho_{a1} = \dfrac{\varphi \rho_{н1}}{100\%}$, $\rho_{a1} = 3{,}36$ г/м^3, $\rho_{a1} < \rho_{н2}$, Іній (або роса) випадає, коли абсолютна вологість повітря становиться більшою, ніж густина насичуючої пари за даної температури. У даному випадку іній не випадає.

Відповідь: Ні.

2.34. Відносна вологість повітря $\varphi = 80$ %. Визначити абсолютну вологість ρ_a, якщо густина насичуючої водяної пари $\rho_н = 14{,}5$ г/м^3.

Відповідь: 11,6 г/м^3.

2.35. При температурі $t = 20$ °С відносна вологість повітря $\varphi = 58$ %. При якій максимальній температурі $t_р$ випадає роса? Скористатися таблицею значень густини і тиску насиченої пари при різних температурах.

Дано *Розв'язання*

$t_1 = 20$ °C $\varphi_1 = 58$ % $t_р$=?	При температурі $t_1 = 20$ °C за таблицею густина насичуючої водяної пари $\rho_{н1} = 17{,}3$ г/м^3. Оскільки відносна вологість повітря $\varphi_1 = 58$ %, то маса водяної пари у 1м^3 повітря (абсолютна вологість)

$$\rho_{а1} = \frac{\rho_{н1} \cdot \varphi}{100\%} = 0{,}58 \cdot 17{,}3 = 10{,}03 \text{ г/м}^3.$$

У разі зниження температури цієї маси водяної пари у кубічному метрі повітря вистачає, щоб пара стала насичуючою – ця температура зветься точкою роси $t_р$.. Отже

$$\rho_н(t_р) = \rho_{а1} = 10{,}03 \text{ г/м}^3.$$

За таблицею навпроти значення 10,03 г/м^3 знаходимо температуру 11,5 °C. Це і є точка роси для такої кількості водяної пари.

Відповідь: $t_р = 11{,}5$ °C.

2.36. Яку масу Δm води потрібно випарити в об'ємі $V = 5000$ м^3 повітря, відносна вологість якого $\varphi_1 = 60$ % при температурі $t = 20$ °C, щоб збільшити відносну вологість до $\varphi_2 = 70$ %? Скористатися таблицею значень густини і тиску насиченої пари при різних температурах.

Дано	*Розв'язання*
$V = 5\,000$ м^3 $\varphi_1 = 60$ % $t = 20$ °C $\varphi_2 = 70$ % Δm = ?	$\varphi_1 = \frac{\rho_{а1}}{\rho_{н1}} 100\%$, $\rho_{н1}$ знаходимо за таблицею, $\rho_{н1} = 17{,}3$ г/м^3. За умовою температура залишається сталою, отже і густина насичуючої пари для більшої відносної вологості залишається тією ж самою, але зростає

абсолютна вологість. $\varphi_2 = \frac{\rho_{а2}}{\rho_{н1}} \cdot 100\%$, $\rho_{а2} = \frac{\rho_{н1} \cdot \varphi_2}{100\%}$. Зростання абсолютної вологості

$$\Delta\rho_а = \rho_{а2} - \rho_{а1} = \frac{\rho_{н1}}{100\%}(\varphi_2 - \varphi_1) = 1{,}73 \text{ г/м}^3.$$

Стільки вологи потрібно випарити у кожний кубометр повітря, а у весь об'єм

$$\Delta m = \Delta\rho_а V = 8{,}65 \text{ кг}.$$

Відповідь: $\Delta m = 8{,}65$ кг.

2.37. Температура повітря увечері була $t_1 = 18$°C, відносна

вологість φ = 65 %. Уночі температура повітря знизилась до t_2 = 4 °С. Чи була роса вночі? Якщо була, то скільки водяної пари сконденсувалося з 1м ^{3} повітря? При температурі t_1 густина насичуючої пари $\rho_{1н}$ = 15,4 г/м ^{3}, а при температурі t_2 – $\rho_{2н}$ = 6,4 г/м ^{3}.

Відповідь: Так. Δm = 3,61 г.

2.38. При температурі t_1 =10 °С відносна вологість повітря φ = 80 %. Як зміниться відносна вологість при підвищенні температури до t_2 = 20 °С, якщо кількість пари в повітрі залишається без змін? Густина насичуючої пари при t_1 = 10 °С дорівнює $\rho_{1н}$ = 9,4 г/м ^{3}, при t_2 = 20 °С – $\rho_{2н}$ = 17,3 г/м ^{3}.

Відповідь: φ_2 = 43,5 %.

2.39. У герметично закритій посудині об'ємом V = 10 л міститься водяна пара під тиском p_1=1 МПа при температурі t_1 = 200 °С. Під час охолодження посудини до температури t_2 = 93 °С на її стінках у вигляді роси випала вода масою Δm = 41,5 г. Яким при цьому став тиск p_2 пари?

Дано

V = 10 л = 10^{-2} м^3
p_1 = 1 МПа = 10^6 Па
T_1 = 273 + t_1 = 473 К
M = 18·10^{-3} кг/моль
T_2 = 273 + t_2 = 366 К
Δm = 41,5 г = 0,0415 кг

p_2 = ?

Розв'язання

Вважаємо, що ненасичена водяна пара описується рівнянням Клапейрона

$$p_1V = \frac{m}{M}RT_1,$$

звідки $m = \dfrac{p_1VM}{RT_1} = 0{,}0458$ кг .

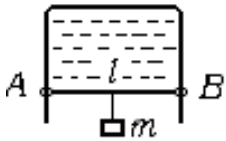
$$p_2V = \frac{m - \Delta m}{M}RT_2,$$

$$p_2 = \frac{(m - \Delta m)RT_2}{MV}.$$

Відповідь: p_2 = 72,66 кПа.

Поверхневий натяг. Капілярні явища

2.40. Вертикальна прямокутна тонка дротяна рамка, одна сторона якої завдовжки l = 3 см є рухомою, опускається в мильний розчин і затягується плівкою рідини. Щоб утримати рухому сторону в рівновазі, до неї підвішують невеликий тягарець маси m = 250 мг. Визначити за цими даними поверхневий натяг σ рідини.



Дано	*Розв'язання*
$l = 3$ см $= 3\cdot10^{-2}$ м $m = 250$ мг $= 2{,}5\cdot10^{-4}$ кг σ = ?	Плівка має дві поверхні, тому довжина межі поверхневого шару становить $2l$. Сила поверхневого натягу $F_{п.н.} = \sigma\cdot 2l$.Умова рівноваги

$mg = 2\sigma l$. Звідки $\sigma = \dfrac{mg}{2l}$.

Відповідь: σ = 40,9 мН/м.

2.41. Визначити роботу A , яку потрібно здійснити , щоб видути мильну бульку діаметра d = 5 см. Поверхневий натяг мильного розчину σ = 40 мН/м. Процес вважати ізотермічним.

Дано	*Розв'язання*
$d = 5$ см $= 5\cdot10^{-2}$ м σ = 40 мН/м $= 4\cdot10^{-2}$ Н/м A = ?	$\sigma = \dfrac{\Delta E}{\Delta S}$, $\Delta E = A$, $A = \sigma\Delta S$, ΔS – загальна площа двох

сферичних поверхонь (зовнішньої і внутрішньої) плівки мильної бульки.

$$\Delta S = 2S,\ S = \pi d^2,\ A = \sigma\cdot 2\pi d^2.$$

Відповідь: A = 0,63 мДж.

2.42. Під час вимірювання поверхневого натягу крапельним методом загальна маса n = 50 краплин спирту, що витікають з капіляра, становить m = 0,35 г. Діаметр шийки краплини в момент відриву d = 1мм. Визначити за цими даними поверхневий натяг σ

спирту.

Дано	*Розв'язання*
$n = 50$ $m = 0{,}35$ г $= 3{,}5\cdot10^{-4}$ кг $d = 1$мм $= 10^{-3}$ м	$\sigma = \dfrac{F}{l}$, $F = \dfrac{mg}{n}$, $l = \pi d$,
$\sigma = ?$	$\sigma = \dfrac{mg}{n\pi d}$.

Відповідь: $\sigma = 21{,}87$ мН/м.

2.43. Скляний капіляр занурений вертикально в гліцерин. Висота стовпчика гліцерину в трубці $h = 20$ мм, діаметр каналу трубки $d = 1$мм, густина гліцерину $\rho = 1{,}26\cdot10^3$ кг/м^3. Визначити поверхневий натяг σ гліцерину.

Дано	*Розв'язання*
$h = 20$ мм $= 2\cdot10^{-2}$ м $d = 1$мм $= 10^{-3}$ м $\rho = 1{,}26\cdot10^3$ кг/м^3	$h = \dfrac{2\sigma}{\rho g r}$, $\sigma = \dfrac{\rho g r h}{2}$.
$\sigma = ?$	

Відповідь: $\sigma = 61{,}8$ мН/м.

2.44. Скляний капіляр занурений вертикально в воду. Висота стовпчика води в трубці $h = 20$ мм. Густина води $\rho = 10^3$ кг/м^3, поверхневий натяг води $\sigma = 73$ мН/м. Визначити діаметр каналу трубки d.

Відповідь: $d = 1{,}49$ мм.

2.45. Капіляр з внутрішнім радіусом $r = 0{,}5$ мм занурений в гліцерин. Визначити масу гліцерину, що піднявся в капілярі. Поверхневий натяг гліцерину $\sigma = 62$ мН/м.

Дано	*Розв'язання*
$r = 0{,}5$ мм $= 5\cdot10^{-4}$м $\sigma = 62$ мН/м $= 6{,}2\cdot10^{-2}$ Н/м	$mg = F_{\text{п.н.}}$, $F_{\text{п.н.}} = \sigma l$, $l = 2\pi r$,
$m = ?$	$m = \dfrac{2\pi r\sigma}{g}$.

Відповідь: $m = 19{,}85$ мг.

2.46. Дві краплини ртуті радіуса $r = 1$ мм кожна зливаються в одну велику краплину. Яка енергія ΔE виділяється при цьому?

Поверхневий натяг ртуті σ = 510 мН/м. Процес вважати ізотермічним.

Дано	*Розв'язання*
r = 1 мм = 10^{-3} м σ = 510 мН/м = 0,51 Н/м ΔE = ?	$S_1 = 4\pi r^2$, $V_1 = \frac{4}{3}\pi r^3$, $V = 2V_1$, $\frac{4}{3}\pi R^3 = 2\frac{4}{3}\pi r^3$,

$$R = \sqrt[3]{2}r\ ,\ S = 4\pi R^2 = 4\pi\sqrt[3]{4}r^2 .$$

Зменшення поверхні під час зливання

$$\Delta S = 2S_1 - S = 8\pi r^2 - 4\pi\sqrt[3]{4}r^2 = 4\pi r^2(2-\sqrt[3]{4}) .$$

Зменшення поверхневої енергії

$$\Delta E = \sigma\Delta S = \sigma 4\pi r^2(2-\sqrt[3]{4}) .$$

Відповідь: ΔE = 2,64 мкДж.

2.47. Повітряна бульбашка діаметра d = 20 мкм міститься у воді біля самої її поверхні. Визначити густину ρ повітря в бульбашці, якщо повітря над поверхнею води знаходиться за нормальних умов. Поверхневий натяг води σ = 73 мН/м , молярна маса повітря М = $29\cdot10^{-3}$ кг/моль.

Дано	*Розв'язання*
d = 20 мкм = $2\cdot10^{-5}$ м σ = 73 мН/м = $73\cdot10^{-3}$ Н/м p_0 = $1{,}01\cdot10^5$ Па T_0 = 273 К М = $29\cdot10^{-3}$ кг/моль ρ = ?	$p = p_0 + \Delta p,\ \Delta\delta = \frac{2\sigma}{r} = \frac{4\sigma}{d}$, $p = p_0 + \frac{4\sigma}{d}$, $pV = \frac{m}{M}RT_0$, $\rho = \frac{m}{V} = \frac{pM}{RT_0} = \frac{(p_0 + \frac{4\sigma}{d})M}{RT_0}$.

Відповідь: ρ =1,48 кг/м^3.

2.48. Тиск повітря всередині мильної бульки на Δp = 100 Па більший за атмосферний. Поверхневий натяг мильного розчину σ = 40 мН/м. Визначити діаметр d бульки.

Відповідь: d = 3,2 мм. В к а з і в к а. Врахувати, що надлишковий тиск утворюється двома сферичними поверхнями.

2.2. Теплові явища. Основи термодинаміки

- Внутрішня енергія одноатомного ідеального газу

$$U = \frac{3}{2}\frac{m}{M}RT = \frac{3}{2}pV,$$

де m – маса газу, M – його молярна маса.

- Робота, що здійснюється газом при ізобарному розширенні

$$A = p(V_2 - V_1) = p\Delta V.$$

- Кількість теплоти, необхідна для нагрівання тіла масою m,

$$Q = cm(T_2 - T_1),$$

де c – питома теплоємність речовини, або

$$Q = \frac{m}{M}C(T_2 - T_1),$$

де C – молярна теплоємність речовини.

- Молярні теплоємності одноатомного ідеального газу у процесах при V = const (C_V) і p = const (C_p)

$$C_V = \frac{3}{2}R, C_p = \frac{5}{2}R,\ C_p = C_V + R.$$

- Кількість теплоти, необхідна для того, щоб розплавити кристалічне тіло, яке знаходиться при температурі плавлення (така ж виділяється під час твердіння)

$$Q_{пл} = \lambda m,$$

де λ – питома теплота плавлення.

- Кількість теплоти, необхідна для перетворення у пару рідини, яка знаходиться при температурі кипіння (така ж виділяється під час конденсації)

$$Q_{пар} = rm,$$

де r – питома теплота пароутворення.

- Кількість теплоти, яка виділяється при згоранні палива

$$Q_{зг} = qm,$$

де q – питома теплота згорання.

- Перший закон термодинаміки: кількість теплоти, яка надана системі, витрачається на зміну її внутрішньої енергії та виконання нею роботи над зовнішніми тілами

$$Q = \Delta U + A.$$

- ККД теплового двигуна

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} \cdot 100\% = \frac{A}{Q_1} \cdot 100\%,$$

де Q_1 – кількість теплоти, отримана робочим тілом від нагрівача, Q_2 – кількість теплоти, віддана холодильнику, A – виконана робота.
Граничне значення ККД теплового двигуна

$$\eta_{max} = \frac{T_1 - T_2}{T_1},$$

де T_1 – температура нагрівача, T_2 – температура холодильника.

Деякі фізичні параметри

- *Питома теплоємність c*

вода $4{,}19 \cdot 10^3$ Дж/(кг·К),
льоду $2{,}09 \cdot 10^3$ Дж/(кг·К).

- *Питома теплота плавлення* λ льоду $3{,}35 \cdot 10^5$ Дж/кг.
- *Питома теплота пароутворення r* води $2{,}26 \cdot 10^6$ Дж/кг.

Робота і кількість теплоти. Перший закон термодинаміки

2.49. На скільки градусів Δt температура води біля підніжжя водоспаду вища, ніж біля його вершині? Висота водоспаду h = 120 м. Вважати, що на нагрівання води витрачається вся її потенціальна енергія.

Дано	*Розв'язання*
h = 120 м $c = 4{,}19 \cdot 10^3$ Дж/(кг·К)	$E_p = Q$, $E_p = mgh$, $Q = cm\Delta t$, $\Delta t = \frac{gh}{c}$.
Δt = ?	

Відповідь: Δt = 0,28 °С.

2.50. Свинцева куля масою m_1 = 20 г, яка летіла зі швидкістю v_1 = 500 м/с, попала у нерухому мідну кулю масою m_2 = 5 кг і прилипла до

неї. На скільки градусів Δt нагріються кулі, якщо вважати, що вся кінетична енергія свинцевої кулі йде на нагрівання?

Дано	*Розв'язання*
$m_1 = 20$ г $= 0{,}02$ кг $v_1 = 500$ м/с $c_1 = 130$ Дж/(кг·К) $m_2 = 5$ кг $c_2 = 390$ Дж/(кг·К) Δt = ?	$E_k = Q$, $\quad E_k = \dfrac{m_1 v_1^2}{2}$, $Q = (c_1 m_1 + c_2 m_2)\,\Delta t$, $\Delta t = \dfrac{m_1 v_1^2}{2(c_1 m_1 + c_2 m_2)}$.

Відповідь: Δt = 1,28 °С.

2.51. Свинцева куля, що летіла зі швидкістю v_1 = 500 м/с, пробила тонку дошку. На скільки градусів Δt нагрілась куля, якщо вона вилетіла з дошки зі швидкістю v_2 = 300 м/с, а на нагрівання кулі пішло η = 50 % теплоти, що виділилася?

Дано	*Розв'язання*
$v_1 = 500$ м/с $v_2 = 300$ м/с $c = 130$ Дж/(кг·К) $\eta = 50\%$ Δt = ?	$\eta \Delta E_k = Q$, $\quad \Delta E_k = \dfrac{m}{2}\left(v_1^2 - v_2^2\right)$, $\eta \dfrac{m}{2}\left(v_1^2 - v_2^2\right) = cm\,\Delta t$, $\Delta t = \dfrac{\eta\left(v_1^2 - v_2^2\right)}{2c}$.

Відповідь: Δt = 307,7 °С.

2.52. Один кіломоль одноатомного газу нагрівається на 100 К при постійному об'ємі. Визначити кількість теплоти Q, яка була надана газу.

Дано	*Розв'язання*
$\Delta T = 100$ К $\nu = 10^3$ моль $V = const$ Q = ?	$Q = \nu C_V \Delta T$, $\quad C_V = \dfrac{3}{2}R$. $Q = \dfrac{3}{2}R\nu\Delta T$.

Відповідь: Q = 1,25 МДж.

2.53. Аеростат об'ємом $V = 5$ м^3 заповнений гелієм під тиском p = 0,1 МПа. Під час нагрівання температура газу в аеростаті піднялась

від t_1 = 27 °С до t_2 = 42 °С. Яку кількість теплоти Q надано газу? Тиск навколишнього повітря нормальний.

Дано	*Розв'язання*
$V = 5$ м^3 $p = 0{,}1$ МПа $= 10^5$ Па $T_1 = 300$ К $T_2 = 315$ К	Оболонка аеростату знаходиться під сталим тиском навколишнього повітря, отже процес нагрівання гелію є ізобарним. Для ізобарного процесу
$Q = ?$	

$$Q = \nu C_p \Delta T, \qquad C_p = \frac{5}{2}R,$$

$$pV = \nu R T_1, \quad \nu = \frac{pV}{RT_1}, \quad \Delta T = T_2 - T_1,$$

$$Q = \frac{5}{2}pV\left(\frac{T_2}{T_1} - 1\right).$$

Відповідь: Q = 62,5 кДж.

2.54. При якому тиску p внутрішня енергія одноатомного ідеального газу в об'ємі $V = 2$ м^3 становить $U = 450$ кДж?

Дано	*Розв'язання*
$V = 2$ м^3 $U = 4{,}5\cdot10^5$ Дж	$U = \frac{3}{2}pV, \qquad p = \frac{2U}{3V}.$
$p = ?$	

Відповідь: p = 150 кПа.

2.55. Під час ізобарного розширення водню масою m = 20 г його об'єм зріс у 2 рази. Початкова температура газу T_1 = 300 К. Визначити роботу A розширення газу, зміну ΔU внутрішньої енергії і кількість теплоти Q, наданої газу.

Дано	*Розв'язання*
$p = const$ $M = 2\cdot10^{-3}$ кг/моль $m = 0{,}02$ кг $\frac{V_2}{V_1} = 2$ $c = 1{,}43\cdot10^4$ Дж/(кг·К) $T_1 = 300$ К	$A = p(V_2 - V_1), \quad V_2 = 2V_1, \quad A = pV_1,$ $pV_1 = \frac{m}{M}RT_1, \qquad A = \frac{m}{M}RT_1,$ $\frac{V_2}{V_1} = \frac{T_2}{T_1}, \quad T_2 = T_1\frac{V_2}{V_1},$ $Q = cm(T_2 - T_1) = cmT_1(\frac{V_2}{V_1} - 1),$
$A = ?\ \Delta U = ?\ Q = ?$	

$$\Delta U = Q - A.$$

Відповідь: A = 24,93 кДж, Q = 85,8 кДж, ΔU = 60,87 кДж.

2.56. Вуглекислий газ CO_2 у кількості чотирьох молів був нагрітий на ΔT = 100 К при постійному тиску. Визначити роботу A розширення, зміну ΔU внутрішньої енергії газу і надану газу кількість теплоти Q.

Дано	*Розв'язання*
$p = const$ $M = 44 \cdot 10^{-3}$ кг/моль ν = 4 молі ΔT = 100 К $c = 0{,}83 \cdot 10^3$ Дж/(кг·К)	$A = p(V_2 - V_1)$, $pV_1 = \nu RT_1$, $pV_2 = \nu RT_2$, $A = p(V_2 - V_1) = \nu R(T_2 - T_1) = \nu R\Delta T$, $Q = cm\Delta T = c\nu M\Delta T$, $\Delta U = Q - A = \nu\Delta T(cM - R)$.
A = ? ΔU = ? Q = ?	

Відповідь: A = 3,32 кДж, Q = 14,61 кДж, ΔU = 11,29 кДж.

2.57. У вертикальному циліндрі під рухомим поршнем міститься кисень масою m = 2 кг. Для підвищення температури кисню на ΔT = 5 К йому було надано Q = 9 160 Дж теплоти. Визначити питому теплоємкість c кисню, роботу A, яку він виконує під час розширення, і збільшення ΔU його внутрішньої енергії.

Дано	*Розв'язання*
m = 2 кг $M = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль ΔT = 5 К Q = 9 160 Дж	$Q = cm\Delta T$, $c = \dfrac{Q}{m\Delta T}$, Під час нагрівання кисень піднімає поршень і, отже, тиск його залишається постійним. Для ізобарного нагрівання
c = ? A = ? ΔU = ?	

$A = p(V_2 - V_1) = \nu R\Delta T$, (див. задачу 2.56), $\nu = \dfrac{m}{M}$. $\Delta U = Q - A$

Відповідь: c = 916 Дж/(кг·К), A = 2,6 кДж, ΔU = 6,56 кДж.

2.58. Під час ізобарного нагрівання m = 12 г гелію він виконує роботу A = 1 кДж. На скільки градусів ΔT змінилася температура газу і яка кількість теплоти Q була йому надана?

Відповідь: ΔT = 40,1 К, Q = 2,5 кДж.

2.59. Кисень масою m = 10 г має початкову температуру T_1 = 370 К. Газ охолоджують при постійному об'ємі так, що його тиск зменшується у n = 3 рази. Потім газ розширюється при постійному

тиску. Температура газу у кінцевому стані дорівнює первісній. Визначити роботу A, виконану газом, та зміну ΔU його внутрішньої енергії.

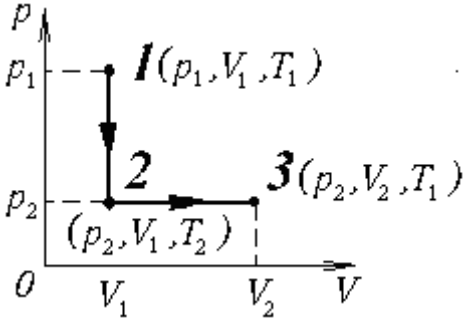
Дано

$m = 10$ г
$M = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль
$T_1 = 370$ К
$1 \to 2$, $V = \text{const}$
$\frac{p_1}{p_2} = n = 3$
$2 \to 3$, $p = \text{const}$
$T_3 = T_1$

$A = ?$ $\Delta U = ?$

Розв'язання

Графіки обох процесів зображені на рисунку.



Запишемо рівняння стану для кожного з трьох станів *1, 2, 3*.

$$\frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{p_2V_1}{T_2} = \frac{p_2V_2}{T_1}.$$

Звідки, з урахуванням того, що $p_1/p_2 = n$, знаходимо, що $V_2 = nV_1$, або

$$\Delta V = V_2 - V_1 = (n-1)V_1.$$

Під час охолодження при постійному об'ємі (процес $1 \to 2$ на рисунку) робота не виконується, $A = 0$, оскільки $\Delta V = 0$. Під час розширення при постійному тиску (процес $2 \to 3$ на рисунку) виконується робота

$$A = p_2\Delta V = p_1V_1\frac{(n-1)}{n} = \frac{m}{M}RT_1\frac{(n-1)}{n} = 641 \text{ Дж}.$$

Оскільки кінцева температура співпадає з початковою, внутрішня енергія не змінюється, $\Delta U = 0$.

Відповідь: $A = 641$ Дж, $\Delta U = 0$.

Зміна внутрішньої енергії тіл під час теплообміну. Рівняння теплового балансу

2.60. Щоб виготовити лід у кімнатному холодильнику потрібен час $\tau_1 = 5$ хв для охолодження води від температури $t_1 = 4^{\circ}$C до

температури t_2 = 0 °С і ще час τ_2 = 1 год 40 хв, щоб перетворити її у лід. Визначити за цими даними питому теплоту λ плавлення льоду.

Дано	*Розв'язання*
τ_1 = 5 хв t_1 = 4° С t_2 = 0° С c_1 = 4,19·10^3 Дж/(кг·К) τ_2 =100 хв	Вважаємо, що кількість теплоти, яку віднімає холодильник у тіла, пропорційна часові охолодження, Q ~ τ. Тоді
λ = ?	

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{\tau_1}{\tau_2}.$$

$$Q_1 = c_1 m(t_1 - t_2), \qquad Q_2 = \lambda m, \qquad \lambda = \frac{c_1(t_1 - t_2)\tau_2}{\tau_1}.$$

Відповідь: λ = 335,2 кДж/кг.

2.61. Змішано m_1 кг води при температурі t_1 = 50 °С і m_2 кг води при температурі t_2 = 0 °С. Температура суміші θ = 20 °С. Визначити відношення m_2/m_1.

Дано	*Розв'язання*
t_1 = 50 °С t_2 = 0 °С θ = 20 °С	$Q_1 = Q_2$, $c_в m_1(t_1 - \theta) = c_в m_2(\theta - t_2)$,
$\frac{m_2}{m_1} = ?$	$\frac{m_2}{m_1} = \frac{t_1 - \theta}{\theta - t_2}$. ***Відповідь:***.$m_2/m_1$ = 1,5.

2.62. Яку кількість теплоти Q необхідно надати льоду маси m_1 = 0,5 кг при температурі t_1 = –21 °С для перетворення його у воду з температурою t_2 = 77 °С?

Дано	*Розв'язання*
m_1 = 0,5 кг $c_л$ = 2,09·10^3 Дж/(кг·К) t_1 = –21 °С $c_в$ = 4,19·10^3 Дж/(кг·К) t_2 = 77 °С λ = 3,35·10^5 Дж/кг	$Q_1 = c_л m_1 (0 - t_1)$, $Q_2 = \lambda m_1$, $Q_3 = c_в m_1 (t_2 - 0)$. $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$,
Q = ?	***Відповідь:*** Q = 350,76 кДж.

2.63. Суміш, яка містить m_1 = 5 кг льоду і m_2 = 10 кг води при температурі t_1 = 0 °С, необхідно нагріти до температури t_2 = 100 °С. Визначити необхідну для цього кількість теплоти Q.

Дано	*Розв'язання*
m_1 = 5 кг λ = 3,35·10^5 Дж/кг m_2 = 10 кг t_1 = 0 °С t_2 = 100 °С $c_в$ = 4,19·10^3 Дж/(кг·К)	$Q = Q_1 + Q_2$, $Q_1 = \lambda m_1$, $Q_2 = c_в(m_1 + m_2)(t_2 - t_1)$. ***Відповідь:*** Q = 7,96 МДж.
Q = ?	

2.64. Ванну місткістю V = 100 л потрібно наповнити водою, яка має температуру θ = 30 °С, використовуючи воду з температурою t_1 = 80 °С і лід з температурою t_2 = –20 °С. Визначити масу $m_л$ льоду, який треба покласти у ванну. Теплоємністю ванни і втратами теплоти нехтувати.

Дано	*Розв'язання*
$\rho_в$ = 10^3 кг/м^3 V = 100 л = 0,1 м^3 $c_в$ = 4,19·10^3 Дж/(кг·К) θ = 30 °С t_1 = 80 °С t_2 = – 20 °С $c_л$ = 2,09·10^3 Дж/(кг·К) λ = 3,35·10^5 Дж/кг	Позначимо кінцеву масу води у ванні m. $m = \rho_в V$. Коли лід розтане, він перетвориться у воду такої самої маси, отже маса води з температурою t_1 = 80 °С, яку потрібно використати, дорівнює $m - m_л$. Рівняння теплового балансу $c_в(m - m_л)(t_1 - \theta) = c_л m_л(0 - t_2) + \lambda m_л + c_в m_л$
$m_л$ = ?	

Після алгебраїчних перетворень одержимо

$$m_л = \frac{c_в \rho_в V(t_1 - \theta)}{c_в t_1 - c_л t_2 + \lambda}.$$

Відповідь: $m_л$ = 29,42 кг.

2.65. У посудину з $m_в$ = 10 кг води при температурі t_1 = 10 °С, поклали кусок льоду, температура якого t_2 = – 50 °С, після чого температура льодяної маси стала дорівнювати θ = – 4 °С. Визначити масу $m_л$ льоду, покладеного в посудину.

Дано	*Розв'язання*
$m_в$ = 10 кг t_1 = 10 °С t_2 = –50 °С θ = –4 °С λ = 3,35·10^5 Дж/кг $c_л$ = 2,09·10^3 Дж/(кг·К) $c_в$ = 4,19·10^3 Дж/(кг·К) $m_л$ = ?	$Q_1 = c_л m_л (\theta - t_2)$, поглинає лід, нагріваючись; $Q_2 = c_в m_в (t_1 - 0)$, віддає вода, охолоджуючись; $Q_3 = \lambda m_в$, віддає вода, твердіючи; $Q_4 = c_л m_в (0 - \theta)$, віддає лід, що утворився з води, охолоджуючись. $Q_1 = Q_2 + Q_3 + Q_4$ $m_л = \frac{c_в t_1 + \lambda - c_л \theta}{c_л(\theta - t_2)} m_в.$

Відповідь: $m_л$ = 40,07 кг.

2.66. Крізь воду пропускають водяну пару, температура якої t = 100 °С. Яку масу m водяної пари необхідно взяти для нагрівання m_1 = 80 кг води від t_1 = 15 °С до t_2 = 40 °С?

Дано	*Розв'язання*
r = 2,26·10^6 Дж/кг t = 100 °С $c_в$ = 4,19·10^3 Дж/(кг·К) m_1= 80 кг t_1 = 15 °С t_2 = 40 °С m = ?	$Q_1 = rm$, виділяється під час конденсації пари; $Q_2 = c_в m(t - t_2)$, виділяється під час охолодження води, що утворилася з пари; $Q_3 = c_в m_1(t_2 - t_1)$, поглинається водою, крізь яку пропускають пару; $Q_1 + Q_2 = Q_3$,

$$m = \frac{c_в(t_2 - t_1)}{r + c_в(t - t_2)} m_1.$$

Відповідь: m = 3,34 кг.

2.67. У теплоізольованій посудині міститься суміш води маси $m_в$ = 500 г і льоду маси $m_л$ = 80 г при температурі t_1 = 0 °С. У посудину подають суху насичену пару маси $m_п$ = 10 г при температурі t_2 = 100 °С. Якою буде температура θ після встановлення теплової рівноваги?

Дано	*Розв'язання*
$m_в$ = 500 г = 0,5 кг $m_л$ = 80 г = 0,08 кг $m_п$ = 10 г = 0,01 кг t_1 = 0° С t_2 = 100° С $\lambda = 3{,}35\cdot10^5$ Дж/кг $c_в = 4{,}19\cdot10^3$ Дж/(кг·К) $r = 2{,}26\cdot10^6$ Дж/кг	$$rm_п + c_в m_п(t_2 - \theta) = = m_л\lambda + m_л c_в(m_в + m_л)(\theta - t_1),$$ $$\theta = \frac{m_п(r + c_в t_2) - \lambda m_л + c_в(m_в + m_л)t_1}{c_в(m_п + m_л + m_в)}$$
θ = ?	***Відповідь:*** θ ≅ 0 °С.

ККД теплового двигуна

2.68. Чому дорівнює ККД η автомашини з двигуном потужністю N = 20 кВт, якщо для надання швидкості v = 72 км/год двигун споживає V = 10 л бензину на шляху s = 100 км? Густина бензину $\rho = 0{,}7\cdot10^3$ кг/м^3, його питома теплота згорання q = 44 МДж/кг.

Дано	*Розв'язання*
$N = 20$ кВт $= 2\cdot10^4$ Вт v = 72 км/год = 20 м/с $V = 10$ л $= 10^{-2}$ м^3 $s = 100$ км $= 10^5$ м $\rho = 0{,}7\cdot10^3$ кг/м^3 q = 44 МДж/кг = $4{,}4\cdot10^7$Дж/кг	$$\eta = \frac{A_{кор}}{A_{витр}}\cdot100\%, \qquad A_{кор} = Fs,$$ $$F = \frac{N}{v}, \quad A_{витр} = Q = qm, \quad m = \rho V,$$ $$\eta = \frac{Ns}{vq\rho V}\cdot100\%.$$
η = ?	

Відповідь: η = 32.5 %.

2.69. Теплова машина виконує за один цикл роботу A = 4,82 кДж і віддає холодильнику кількість теплоти Q_2 = 23,48 кДж. Визначити ККД циклу.

Дано *Розв'язання*

A = 4,82 кДж Q_2 = 23,48 кДж	$\eta = \frac{A}{Q_1} \cdot 100\%$, $Q_1 = A + Q_2$, $\eta = \frac{A}{A + Q_2} \cdot 100\%$
η = ?	

Відповідь: η = 17 %.

2.70. Ідеальна теплова машина, що працює за циклом Карно, за певний час одержала від нагрівача Q_1 = 12 кДж енергії. Температура нагрівача t_1 = 218 °С, холодильника t_2 = 92 °С. Визначити ККД машини, виконану нею роботу A та кількість теплоти Q_2, яка передана холодильнику.

Дано	*Розв'язання*
Q_1 = 12 кДж $T_1 = t_1 + 273$ = 491 К $T_2 = t_2 + 273$ = 365 К	$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \cdot 100\%$, $\eta = \frac{A}{Q_1} \cdot 100\%$,
η = ? A = ? Q_2 = ?	$A = \frac{\eta Q_1}{100\%}$, $Q_2 = Q_1 - A$.

Відповідь: η = 25,7 %, A = 3,08 кДж, Q_2 = 8,92 кДж.

2.71. У парову машину надходить пара, температура якої t_1 = 240 °С. Температура в конденсаторі t_2 = 0 °С. Яку теоретично максимально можливу роботу можна одержати, витративши кількість теплоти Q = 3,8 кДж?

Відповідь: $A = Q_1\left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right) = 1{,}78$ кДж.

2.72. Парова машина потужністю N = 17,8 кВт споживає за одну годину роботи вугілля масою m = 10,1 кг з питомою теплотою згорання q = 33 МДж/кг. Температура котла t_1 = 200 °С, температура холодильника t_2 = 60 °С. Визначити фактичний ККД η машини і порівняти його з ККД η' ідеальної теплової машини, яка працює за циклом Карно з тими ж температурами нагрівача і холодильника

Дано *Розв'язання*

N = 17,8 кВт = $1{,}78\cdot10^4$ Вт t = 1 год = 3600 с m = 10,1 кг q = 33 МДж/кг = $3{,}3\cdot10^7$ Дж/кг $T_1 = 273 + t_1 = 473$ К $T_2 = 273 + t_2 = 333$ К	$\eta = \dfrac{A_{кор}}{Q_{витр}}\cdot 100\%,\qquad A_{кор} = Nt,$ $Q_{витр} = qm,\qquad \eta = \dfrac{Nt}{qm}\cdot 100\%,$ $\eta' = \dfrac{T_1 - T_2}{T_1}\cdot 100\%.$
η = ? η' = ?	

Відповідь: η = 19,23 %, η' = 29,6 %.

2.73. Температура нагрівача ідеальної теплової машини t_1 = 117 °С, а холодильника t_2 = 7 °С. Від нагрівача за час τ = 30 с машина отримує кількість теплоти Q_1 = 1,6 МДж. Обчислити ККД машини, її потужність та кількість теплоти, що віддається холодильнику щосекунди.

Дано	*Розв'язання*
$T_1 = 273 + t_1 = 390$ К $T_2 = 273 + t_2 = 280$ К Q_1 = 1,6 МДж = $1{,}6\cdot10^6$ Дж τ = 30 с	$\eta = \dfrac{T_1 - T_2}{T_1}\cdot 100\%,\ N = \dfrac{A}{\tau} = \dfrac{\eta Q_1}{\tau\cdot 100\%},$ $\eta = (1 - \dfrac{Q_2}{Q_1})\cdot 100\%,$ $Q_2 = Q_1(1 - \dfrac{\eta}{100\%}),$
η = ? N = ? $\dfrac{Q_2}{\tau}$ = ?	

$$\frac{Q_2}{\tau} = \frac{Q_1}{\tau}(1 - \frac{\eta}{100\%}).$$

Відповідь: η = 28,21 %, N = 15,05 кВт, Q_2/τ = 38,29 кВт.

2.74. Холодильник за час τ = 1 год перетворює в лід при температурі 0 °С воду маси m = 3 кг з початковою температурою t = 20 °С. Яку потужність P споживає холодильник від електромережі, якщо він віддає повітрю в кімнаті в одиницю часу енергію Q_τ = 800 Дж/с?

Дано *Розв'язання*

τ = 1 год = 3 600 с t = 20 °С t_0= 0 °С m = 3 кг c = 4,19·10^3 Дж/(кг·К) λ = 3,35·10^5 Дж/кг Q_τ = 800 Дж/с	У холодильних машинах за рахунок зовнішньої роботи теплота від тіла, що охолоджується, передається в навколишнє середовище. З закону збереження енергії випливає, що сума кількості теплоти, яка відбирається в холодильній камері від води під час її охолодження, а потім перетворення в лід, та енергії, отриманої від мережі,
P = ?	

буде дорівнювати кількості теплоти, що передається повітрю в кімнаті

$$cm(t - t_0) + \lambda m + P\tau = Q_\tau\tau,$$

звідки $$P = Q_\tau - m(c(t - t_0) + \lambda))/\tau.$$

Відповідь: P = 451 Вт.

3 розділ

Електродинаміка

3.1. Електростатика

Основні закони і формули

- Сила електростатичної взаємодії між двома зарядженими тілами, розміри яких малі у порівнянні з відстанню r між ними (закон Кулона):

$$F = \frac{|q_1||q_2|}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2} = k\frac{|q_1||q_2|}{\varepsilon r^2},$$

де ε_0 = 8,85·10 $^{-12}$ Ф/м - електрична стала; $|q_1|, |q_2|$ – модулі електричних зарядів тіл, r – відстань між ними, ε – діелектрична проникність середовища, в якому містяться заряди,

$k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ = 9·10^9 Н·м^2/Кл^2.

- Напруженість електричного поля

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0},$$

де $\vec{F}$ – сила, що діє з боку поля на заряд q_0, поміщений у дану точку поля.

- Принцип суперпозиції (накладання) електричних полів: напруженість електричного поля декількох зарядів дорівнює векторній сумі напруженостей полів, що створює кожний з зарядів окремо

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + ... + \vec{E}_n.$$

- Модуль напруженості електричного поля точкового заряду:

$$E = \frac{|q|}{4\pi\varepsilon_0 r^2},$$

де $|q|$ – модуль заряду, що створює поле, r – відстань від заряду до даної точки поля.

- Модуль напруженості електричного поля зарядженої металевої сфери (або кулі) радіуса R: на відстані $r \geq R$ від центра кулі напруженість поля визначається такою самою формулою, що й напруженість поля точкового заряду, вміщеного в центрі сфери; усередині провідної кулі ($r<R$) напруженість поля дорівнює нулю

$$E = \begin{cases} \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}, & \text{якщо } r \geq R \\ 0, & \text{якщо } r < R \end{cases},$$

де q – заряд сфери, r – відстань від точки поля до центра сфери.

- Діелектрична проникність:

$$\varepsilon = \frac{E_0}{E},$$

де E_0 – модуль напруженості електричного поля у вакуумі, E - напруженість електричного поля, яке створене цією ж системою зарядів в однорідному діелектрику.

- Потенціал електричного поля:

$$\varphi = \frac{W_p}{q},$$

де W_p – потенціальна енергія заряду q у точці поля, де розміщується заряд.

- Потенціал поля точкового заряду q на відстані r від нього (за умови, що $\varphi = 0$ у неснінченності)

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}.$$

- Робота, що виконується під час переміщення заряду q з точки з потенціалом φ_1 у точку з потенціалом φ_2 :

$$A = qU = q(\varphi_1 - \varphi_2),$$

де $U = \varphi_1 - \varphi_2$ – різниця потенціалів (напруга) між цими точками.

- За принципом суперпозиції потенціал довільної точки поля декількох зарядів $q_1, q_2, \ldots, q_n$ дорівнює алгебраїчній сумі потенціалів, що створюються кожним зарядом окремо:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n.$$

- Зв'язок між модулем вектора напруженості та різницею потенціалів для однорідного електростатичного поля:

$$E = \frac{U}{d},$$

де d – відстань між двома точками вздовж лінії напруженості, яким відповідає різниця потенціалів U.

- Електроємність відокремленого провідника:

$$C = \frac{q}{\varphi},$$

де q – заряд провідника, φ – його потенціал.

- Електроємність відокремленої провідної сфери (або кулі) радіуса R, що міститься в середовищі з діелектричною проникністю ε

$$C = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R.$$

- Електроємність конденсатора:

$$C = \frac{q}{U},$$

де q – модуль заряду на кожній з обкладок, U – різниця потенціалів між ними.

- Електроємність плоского конденсатора:

$$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d},$$

де ε – діелектрична проникність діелектрика, що заповнює простір між обкладками конденсатора, S – площа кожної обкладки, d – відстань між ними.

- Загальна ємність конденсаторів, з'єднаних:

паралельно:

$$C = C_1 + C_2 + \ldots + C_n,$$

послідовно:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots + \frac{1}{C_m},$$

де $C_1, C_2, \ldots, C_n$ - ємності конденсаторів, які утворюють батарею.

- Енергія зарядженого конденсатора:

$$W = \frac{qU}{2} = \frac{q^2}{2C} = \frac{CU^2}{2},$$

де q – заряд конденсатора, U – напруга між його обкладками, C – електроємність конденсатора.

- Енергія електричного поля, що припадає на одиницю об'єму (об'ємна густина енергії):

$$w = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2},$$

де ε – діелектрична проникність діелектрика, в якому створюється поле, E – напруженість поля.

• Основні фізичні сталі

- елементарний заряд $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл,
- маса спокою електрона $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг,
- питомий заряд електрона $e/m = 1{,}76 \cdot 10^{11}$ Кл/кг,
- електрична стала $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м,
- $k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \cdot 10^9$ м/Ф.

Взаємодія точкових зарядів. Закон Кулона

3.1. В елементарній теорії атома водню вважають, що електрон обертається навколо ядра – протона – по коловій орбіті. Визначити силу взаємодії електрона з ядром, вважаючи, що радіус орбіти r = $0{,}5\cdot10^{-10}$ м. Заряд протона + e.

Відповідь: F = 92,16 нН.

3.2. Як зміниться сила взаємодії двох точкових зарядів при 2-кратному зростанні відстані між ними?

Відповідь: Зменшиться у чотири рази.

3.3. Дві частинки, що мають однакові негативні електричні заряди, відштовхуються у повітрі із силою F = 0,9 Н. Визначити кількість надлишкових електронів у кожній частинці, якщо відстань між ними r = 8 см.

Дано	*Розв'язання*
$\lvert q_1\rvert = \lvert q_2\rvert$ $F = 0{,}9$ Н $\varepsilon = 1$ $r = 8$ см $= 8\cdot10^{-2}$ м $e = 1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл $N = ?$	$F = \dfrac{k\lvert q_1\rvert^2}{r^2}$, $\lvert q_1\rvert = r\sqrt{\dfrac{F}{k}}$, $N = \dfrac{\lvert q_1\rvert}{e} = \dfrac{r}{e}\sqrt{\dfrac{F}{k}}$.

Відповідь: : $N = 5\cdot10^{12}$.

3.4. Два електричних заряди притягуються один до одного у гасі з силою F_1 = 7,8 Н. З якою силою вони будуть притягуватись, якщо їх помістити у воду на відстань, у 2 рази меншу, ніж у гасі?

Дано	*Розв'язання*
$F_1 = 7{,}8$ Н $\varepsilon_1 = 2{,}1$ $r_2 = \dfrac{r_1}{2}$ $\varepsilon_2 = 81$ $F_2 = ?$	$F_1 = \dfrac{kq_1q_2}{\varepsilon_1 r_1^2}$, $F_2 = \dfrac{kq_1q_2}{\varepsilon_2 r_2^2}$, $\dfrac{F_2}{F_1} = \dfrac{\varepsilon_1 r_1^2}{\varepsilon_2 r_2^2}$,

$$F_2 = F_1 \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2.$$

Відповідь: F_2 = 0,81 Н.

3.5. Дві однакові металеві кульки заряджені так, що заряд однієї з них у 5 разів більший заряду другої. Кульки привели в контакт у повітрі і розсунули на попередню відстань. У скільки разів змінилася (за модулем) сила взаємодії, якщо кульки були заряджені однойменно? Різнойменно?

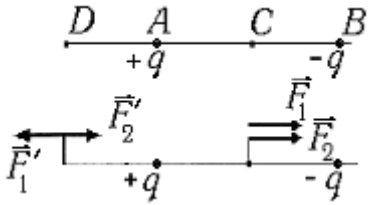
Дано	*Розв'язання*
$q_1 = 5\,q$ $q_2 = q$ $r = r'$ $\varepsilon = 1$ F'/F = ?	Через те, що кульки однакові, під час контакту їх заряди стануть однаковими $q_1' = q_2' = \frac{q_1 + q_2}{2} = 3q.$ $F = k\frac{5q^2}{r^2}$; $F' = k\frac{9q^2}{r^2}$; $\frac{F'}{F} = 1{,}8$.

Якщо кульки заряджені різнойменно $\left|\, q_1' \,\right| = \left|\, q_2' \,\right| = \left|\, \frac{q_1 + q_2}{2} \,\right| = 2q$;

$F' = k\frac{4q^2}{r^2}$; $\frac{F'}{F} = \frac{4}{5} = 0{,}8.$

Відповідь: F'/F =1,8; 0,8.

3.6. У поле зарядів + q і – q вміщують заряд $q/2$ спочатку в точку C, а потім в точку D. Порівняти сили (за модулем), що діють на цей заряд, якщо $|DA| = |AC| = |CB| = a$.

Дано	*Розв'язання*
+ q – q $q/2$ $DA\| = \|AC\| = \|CB\| = a$. F_C/F_D = ?	

Якщо заряд вміщують у точку C, то сума сил (за модулем):

$$F_C = F_1 + F_2,$$

де F_1 – сила, що діє на заряд $q/2$ з боку заряду $-q$; F_2 – з боку заряду $+q$.

$$F_1 = F_2 = k\frac{q\frac{q}{2}}{a^2};\ .F_C = 2k\frac{q^2}{2a^2} = \frac{kq^2}{a^2}.$$

Якщо заряд вміщують у точку *D*,:то сума сил (за модулем):

$$F_D = F'_1 - F'_2$$

де F'_1 –сила, що діє з боку заряду $+q$; F'_2 – з боку заряду $-q$.

$$F'_1 = k\frac{q^2}{2a^2};\ F'_2 = k\frac{q^2}{18a^2};$$

$$F_D = F'_1 - F'_2 = k\frac{q^2}{2a^2} - k\frac{q^2}{18a^2} = \frac{4kq^2}{9a^2}; \qquad \frac{F_C}{F_D} = \frac{9}{4} = 2{,}25.$$

Відповідь: У точці *C* сила взаємодії є в 2,25 разів більшою.

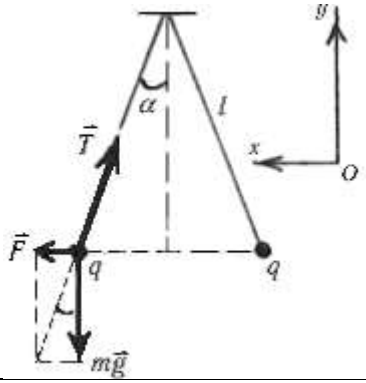
3.7. Дві маленькі кульки підвішені в повітрі на непровідних нитках в одній точці. Довжини ниток $l_1 = l_2 = l = 20$ см, маси кульок $m_1 = m_2 = m = 10$ г. Кулькам надано однакового заряду, після чого нитки розійшлись на кут $2\alpha = 60°$. Який заряд надано кожній кульці?

Дано	*Розв'язання*
$l = 20$ см $= 0{,}2$ м $m = 10$ г $= 0{,}01$ кг $2\alpha = 60°$	$m\vec{g} + \vec{T} + \vec{F} = 0,$ Ox: $F - T\sin\alpha = 0,$ Oy: $T\cos\alpha - mg = 0,$
$q = ?$	

$$tg\alpha = \frac{F}{mg},$$

$$F = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0(2l\sin\alpha)^2},$$

$$q = 4l\sin\alpha\sqrt{\pi\varepsilon_0 mg\ tg\ \alpha}.$$



Відповідь: $q = 0{,}5$ мкКл.

3.8. Заряджена металева кулька підвішена на шовковій нитці. Маса кульки $m = 2$ г. Під час включення однорідного горизонтального електричного поля нитка відхиляється від вертикалі на кут $\alpha = 45°$.

Визначити заряд q кульки, якщо модуль напруженості електричного поля E = 10 кВ/м.

Відповідь: q = 1,96 мкКл.

3.9. Маленька кулька масою m = 0,3 г підвішена на тонкій шовковій нитці і має заряд $q_1 = 3\cdot10^{-7}$ Кл. На яку відстань знизу до неї слід піднести другу кульку з однойменним зарядом $q_2 = 5\cdot10^{-8}$ Кл, щоб натяг нитки став удвоє меншим?

Відповідь x = 0,3 м.

Напруженість поля точкового заряду. Принцип суперпозиції

3.10. У деякій точці поля на заряд q_0 = 0,1 мкКл у вакуумі діє сила F = 4 мН. Визначити напруженість поля в цій точці та визначити заряд, який створює поле, якщо точка віддалена від заряду на відстань r = 0,3 м.

Дано	*Розв'язання*
$F = 4$ мН $= 4\cdot10^{-3}$ Н $q_0 = 0{,}1$ мкКл $= 0{,}1\cdot10^{-6}$ Кл $r = 0{,}3$ м	$E = \dfrac{F}{q_0}$, $E = k\dfrac{q}{r^2}$,
E = ? q = ?	$q = \dfrac{r^2F}{kq_0}$.

Відповідь: E = 40 кВ/м, q = 0,4 мкКл.

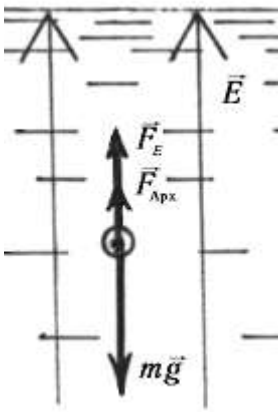
3.11. З яким прискоренням рухається електрон в полі з напруженістю E = 10 кВ/м?

Відповідь: $a = 1{,}76\cdot10^{15}$ м/с^2.

3.12. Кулька, маса якої m = 0,18 г, заряджена позитивно і знаходиться в рівновазі у рідкому діелектрику густини ρ_1 = 900 кг/м^3. Густина речовини кульки $\rho = 1{,}8\cdot10^3$ кг/м^3. У діелектрику створене однорідне електричне поле напруженості E = 45 кВ/м, лінії напруженості якого направлені вертикально вгору. Визначити заряд кульки q.

Дано	*Розв'язання*

m = 0,18 г = $0{,}18\cdot10^{-3}$ кг ρ_1 = 900 кг/м^3 $\rho = 1{,}8\cdot10^3$ кг/м^3 E = 45 кВ/м = $4{,}5\cdot10^4$ В/м	$m\vec{g} + \vec{F} + \vec{F}_{Арх} = 0$; $F + F_{Арх} = mg$, $F = qE$, $F_{Арх} = \rho_1 Vg = \rho_1 \dfrac{m}{\rho} g$, $q = \dfrac{mg}{E}\left(1 - \dfrac{\rho_1}{\rho}\right)$.
Q = ?	

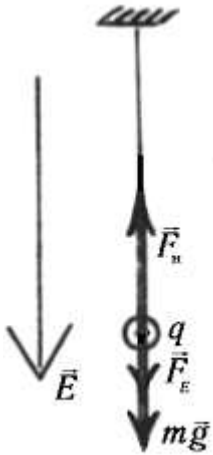


Відповідь: q = 19,6 нКл.

3.13. Математичний маятник являє собою кульку масою m = 10 г, яка підвішена на непровідній нитці l завдовжки. Як зміниться період коливань маятника, якщо надати кульці заряд q = ± 3 мкКл та помістити її в однорідне електричне поле з напруженістю E = 4 кВ/м, направлене вертикально донизу?

Дано	*Розв'язання*
m = 10 г = 0,01 кг q = ± 3 мкКл = $\pm 3\cdot10^{-6}$ Кл E = 4 кВ/м = $4\cdot10^3$ В/м	У випадку позитивного заряду
$\dfrac{\Delta T}{T_0}$ = ?	$T_1 = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g + \dfrac{qE}{m}}}$

У випадку негативного заряду $T_2 = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g - \dfrac{qE}{m}}}$ У відсутності електричного поля $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$.



Відносна зміна періоду коливань у першому випадку

$$\frac{\Delta T}{T_0} = \frac{T_0 - T_1}{T_0} = 1 - \frac{T_1}{T_0} = 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{qE}{mg}}},$$

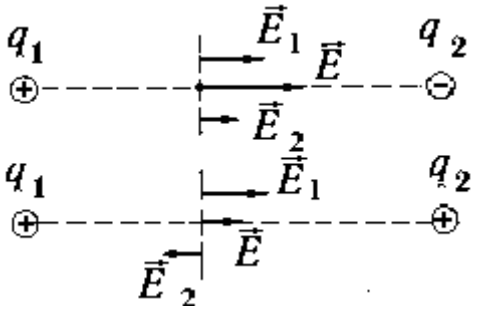
у другому випадку

$$\frac{\Delta T}{T_0} = \frac{T_2 - T_0}{T_0} = \frac{T_2}{T_0} - 1 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{qE}{mg}}} - 1.$$

Відповідь: 1) $\frac{\Delta T}{T_0}$ = 0,06; 2) $\frac{\Delta T}{T_0}$ = 0,07.

3.14. Два точкових заряди q_1 = 4 нКл і q_2 = –2 нКл розміщено на відстані l = 60 см один від одного. Визначити напруженість E поля у точці, яка лежить посередині між зарядами. Чому дорівнює напруженість, якщо другий заряд позитивний?

Дано	*Розв'язання*
q_1 = 4 нКл = $4\cdot10^{-9}$ Кл q_2 = – 2 нКл = $-2\cdot10^{-9}$ Кл l = 60 см = 0,6 м	Нехай у точці простору, яка лежить на середині відрізку, що з'єднує заряди, створюються електричні поля кожним із зарядів відповідно $\vec{E}_1, \vec{E}_2$. (на рисунку вектори, що прикладені в одній точці, для зручності дещо розсунуті).
E = ?	



Результуюча напруженість поля в цій точці

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2.$$

Оскільки обидва вектори направлені вздовж прямої в один бік, векторну суму замінюємо скалярною

$$E = E_1 + E_2.$$

Напруженості електричних полів, що створюються (у вакуумі) першим і другим зарядами, відповідно,

$$E_1 = k\frac{|q_1|}{(l/2)^2}; \qquad E_2 = k\frac{|q_2|}{(l/2)^2}.$$

Тоді

$$E = \frac{k}{(l/2)^2}(|q_1| + |q_2|)$$

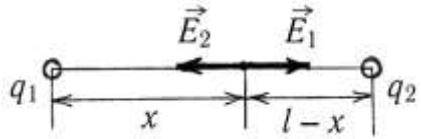
У другому випадку, який зображено на нижній частині рисунка, вектори напруженостей направлені у протилежні боки, тому

$$E = E_1 - E_2.$$

$$E = \frac{k}{(l/2)^2}(|q_1| - |q_2|).$$

Відповідь: E = 0,6 кВ/м, E = 0,2 кВ/м.

3.15. Два заряди q_1 = + 8 нКл та q_2 = + 6 нКл розміщені на відстані l = 10 см один від одного. Визначити на прямій, що з'єднує ці заряди, точку, в якій напруженість поля, яке створюється цими зарядами, дорівнює нулю.

Дано	*Розв'язання*
q_1 = 8 нКл = $8\cdot10^{-9}$Кл q_2 = 6 нКл = $6\cdot10^{-9}$Кл l = 10 см = 0,1 м E = 0	
x = ?	За принципом суперпозиції

напруженість результуючого поля в шуканій точці

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = 0.$$

Отже, напруженості полів, що створюються кожним зарядом, однакові за модулем і спрямовані протилежно.

$$E_1 = E_2, \qquad k\frac{q_1}{x^2} = k\frac{q_2}{(l-x)^2},$$

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{x^2}{(l-x)^2}, \qquad \left(1 - \frac{q_2}{q_1}\right)x^2 - 2xl + l^2 = 0.$$

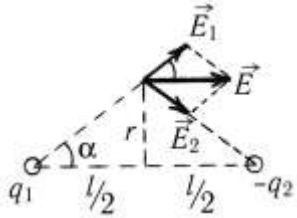
Для визначення x розв'язуємо квадратне рівняння.

Відповідь: На відстані x = 5,36 см від більшого заряду.

3.16. Визначити напруженість E електростатичного поля в точці, яка міститься на прямій, що з'єднує заряди q_1 = 10 нКл і q_2 = – 8 нКл, на відстані r = 8 см від негативного заряду. Відстань між зарядами l = 20 см.

Відповідь: 1) Якщо точка знаходиться поміж зарядами: E = 17,5 кВ/м, 2) якщо точка знаходиться поза зарядами E = 10,1 кВ/м.

3.17. Два заряди q_1 = 8 нКл та q_2 = – 8 нКл віддалені один від одного на відстань l = 8 см у вакуумі. Визначити напруженість поля E, яке утворюється цими зарядами, в точці, розміщеній на перпендикулярі до прямої, що з'єднує заряди, на відстані r = 3 см від її середини.

Дано	*Розв'язання*
q_1 = 8 нКл = $8\cdot10^{-9}$Кл q_2 = – 8 нКл = – $8\cdot10^{-9}$Кл r = 3 см = 0,03 м l = 8 см = 0,08 м ε = 1	
E = ?	

Сумарне електричне поле, що створюється обома зарядами, за принципом суперпозиції:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 .$$

На рисунку вектор $\vec{E}_1$ напрямлений від заряду q_1, оскільки цей заряд позитивний, вектор $\vec{E}_2$ напрямлений в бік заряду q_2, оскільки цей заряд негативний. Результуючий вектор співпадає за величиною і напрямом з діагоналлю паралелограма, що побудований на векторах, які додаються.

За умовою задачі

$$\left|\vec{E}_1\right| = \left|\vec{E}_2\right| = k\frac{q_1}{\left(r^2 + \left(l/2\right)^2\right)}$$

Таким чином, векторний паралелограм є ромбом, діагональ якого можна визначити як

$$E = 2\left|E_1\right|\cos\alpha .$$

З іншого трикутника $$\cos\alpha = \frac{\left(l/2\right)}{\sqrt{r^2 + \left(l/2\right)^2}} .$$

Тоді $$E = k\frac{q_1 l}{\left(r^2 + (l/2)^2\right)^{3/2}}.$$

Відповідь: E = 46,1 кВ/м.

3.18. У двох вершинах рівнобічного трикутника зі стороною a = 0,1 м розміщено заряди $q_1 = +10^{-4}$ Кл та $q_2 = -10^{-4}$ Кл. Встановити значення напруженості в третій вершині.

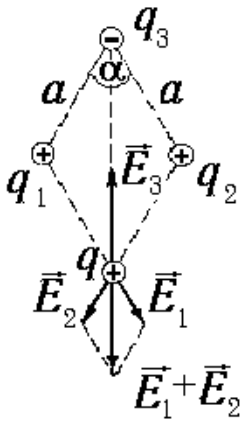
Відповідь: $E = 9 \cdot 10^7$ В/м.

3.19. У трьох вершинах ромба зі стороною a = 5 см та кутом α = 60° розміщені точкові заряди $q_1 = q_2$ = 2,5 нКл, q_3 = – 3 нКл, як показано на рисунку. Визначити силу F, яка діє на заряд q = 2 нКл, що міститься у четвертій вершині ромба.

Дано	*Розв'язання*
A = 5 см = $5\cdot10^{-2}$м α = 60° $q_1 = q_2$ = 2,5 нКл = $2{,}5\cdot10^{-9}$ Кл q_3 = – 3 нКл = $-3\cdot10^{-9}$ Кл q = 2 нКл = $2\cdot10^{-9}$ Кл F = ?	Сила $\vec{F}$, з якою поле діє на точковий заряд q, поміщений у деяку точку поля, $\vec{F} = q\vec{E}$, де $\vec{E}$ – напруженість результуючого поля в точці спостереження. Її можна визначити

за допомогою принципу суперпозиції:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3,$$



де $\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3$ – напруженості полів, які створені відповідними зарядами q_1, q_2, q_3. Напрями векторів указані на рисунку. Для модулів векторів $\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3$ маємо:

$$E_1 = E_2 = k\frac{q_1}{a^2}, \qquad E_3 = k\frac{|q_3|}{r^2},$$

де $r = 2a\cos\alpha/2$ – діагональ ромба.

Спочатку визначимо суму векторів $\vec{E}_1 + \vec{E}_2$. Оскільки заряди q_1 та q_2 рівні, а відстані від цих зарядів до четвертої вершини ромба однакові, вектор $\vec{E}_1 + \vec{E}_2$ буде перпендикулярним до прямої, яка з'єднує заряди q_1, q_2 і антипаралельним вектору $\vec{E}_3$. Модуль вектора $\vec{E}_1 + \vec{E}_2$ знаходиться як довжина діагоналі нижнього ромба на рисунку. Тому маємо:

$$\left|\vec{E}_1 + \vec{E}_2\right| = 2E_1\cos\frac{\alpha}{2} = 2kq_1(\cos\frac{\alpha}{2})/a^2.$$

Модуль результуючої напруженості

$$E = k\frac{1}{a^2}\left|2q_1\cos(\alpha/2) - \frac{|q_3|}{4\cos^2(\alpha/2)}\right|.$$

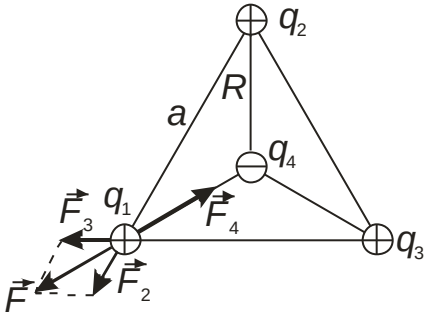
Для модуля сили F одержуємо:

$$F = qE = k\frac{q}{a^2}\left|2q_1\cos(\alpha/2) - \frac{|q_3|}{4\cos^2(\alpha/2)}\right| = 24 \text{ мкН}.$$

Відповідь: $F = 24$ мкН.

3.20. У вершинах рівностороннього трикутника із стороною a розміщено однакові точкові заряди $q = 3$ нКл. Який заряд q_1 треба помістити в центрі трикутника, щоб сила, яка діє на кожний заряд. дорівнювала нулю?

Дано	*Розв'язання*
$q_1 = q_2 = q_3 = q$ $= 3$ нКл $= 3\cdot10^{-9}$ Кл $\sum\vec{F}_i = 0$	
$q_4 = ?$	



Всі три заряди, розміщені у вершинах трикутника, знаходяться в однакових умовах. Тому розглянемо умову рівноваги будь-якого заряду, наприклад q_1. На нього діють сили з боку зарядів q_2, q_3, q_4.

$$\vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = 0.$$

$$F_2 = F_3 = k\frac{q^2}{a^2}, \quad F_4 = k\frac{qq_4}{R^2}. \quad \cos\alpha = \frac{a}{2R}, \quad R = \frac{a}{2\cos\alpha},$$

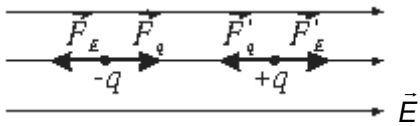
$$F = 2F_2\cos\alpha = k\frac{2q^2}{a^2}\cos\alpha,$$

$$F_4 = k\frac{qq_4}{a^2}4\cos^2\alpha, \quad \vec{F} = -\vec{F}_4, \quad F = F_4, \quad \alpha = 30°,$$

$$q_4 = \frac{q}{2\cos\alpha} = \frac{q}{\sqrt{3}}.$$

Відповідь: $q_4 = -1{,}73$ нКл.

3.21. Два електричних заряди протилежного знаку та однакової величини розміщені в однорідному електричному полі у вакуумі на прямій, яка паралельна лініям напруженості поля. Модулі зарядів $|q| = 20$ мкКл, модуль напруженості поля $E = 5$ МВ/м. Якою має бути відстань між зарядами, щоб вони перебували у рівновазі?

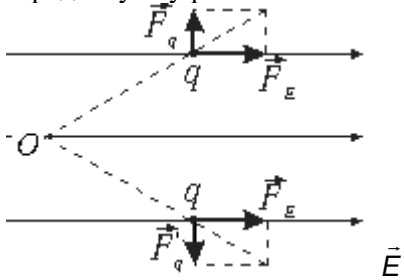
Дано	*Розв'язання*
$\lvert q\rvert = 20$ мкКл $= 2\cdot10^{-5}$ Кл $E = 5$ МВ/м $= 5\cdot10^{6}$ м	
$l = ?$	

На кожний із зарядів діють дві сили: з боку зовнішнього поля $\vec{F}_E$ та з боку іншого заряду $\vec{F}_q$. Умова рівноваги $F_E = F_q$.

$$F_E = qE, \quad F_q = k\frac{q^2}{l^2}, \text{ звідси } l = \sqrt{k\frac{q}{E}}.$$

Відповідь: l = 19 см.

3.22. Два однакових позитивних заряди розміщені в однорідному електричному полі на прямій, яка перпендикулярна до ліній напруженості поля. Чи можна розмістити додатковий заряд на цій прямій, щоб система зарядів була у рівновазі?



Див. розв’язання задачі 3.21. Якщо в точку O вмістити негативний заряд, то можна досягти рівноваги (нестійкої). Але ця точка не лежить на прямій, що з’єднує заряди q.

Відповідь: Ні.

3.23. Чи можуть лінії напруженості перетинатися? стикатися?

Розв’язання. Орієнтована в бік лінії напруженості дотична у кожній точці лінії співпадає з напрямом вектора $\vec{E}$. Якщо лінії напруженості перетинаються, в точці перетину будуть існувати дві дотичних, тобто напрям поля стає невизначеним. Тому лінії напруженості не стикаються і не перетинаються.

Відповідь: Ні.

Робота під час переміщення заряду в електричному полі. Потенціал. Зв’язок між напруженістю і напругою

3.24. Робота під час переміщення заряду $q = 2\cdot10^{-7}$ Кл із нескінченності в деяку точку електростатичного поля $A = 8\cdot10^{-4}$ Дж. Визначити потенціал поля в цій точці.

Відповідь: φ = 4 кВ.

3.25. Дві точки лежать на відстані r_1 = 0,15 м та r_2 = 0,2 м від точкового заряду $q = 10^{-7}$ Кл. Визначити різницю потенціалів U між цими точками.

Відповідь: U = 1 500 В.

3.26. Потенціал електричного поля зменшується в напрямі знизу вгору. Куди спрямований вектор напруженості поля?

Розв'язання. Лінії напруженості електричного поля починаються на позитивних зарядах (високий потенціал) і закінчуються на негативних (низький потенціал). Отже, вектор напруженості, що є дотичним до лінії напруженості, спрямований тут також знизу вгору.

Відповідь: Знизу вгору.

3.27. Визначити потенціальну енергію електрона в точці поля, в якій потенціал поля φ = 100 В.

Відповідь: $W_п = -1{,}6\cdot10^{-17}$ Дж = – 100 еВ.

3.28. Два заряди по 40 нКл кожний знаходяться на відстані r_1 = 80 см один від одного. Яку роботу A треба виконати, щоб зблизити їх до відстані r_2 = 10 см?

Дано	*Розв'язання*
$q_1 = q_2$ = 40 нКл = $4\cdot10^{-8}$ Кл r_1 = 80 см = 0,8 м r_2 = 10 см = 0,1 м A = ?	Нехай другий заряд переміщується в полі, створеному першим. Робота сил поля $A = q_2(\varphi_1 - \varphi_2)$, тут φ_1 та φ_2 – потенціали, що створюється першим зарядом у точках, де міститься другий.

$A = q_2\left(k\frac{q_1}{r_1} - k\frac{q_1}{r_2}\right)$. Оскільки $r_2 < r_1$, ця робота є від'ємною. Це пояснюється тим, що напрями сили взаємодії (відштовхування) і переміщення (зближення) протилежні.

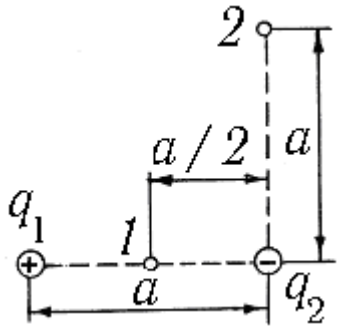
Що ж до роботи зовнішніх сил, то вона є такою ж за модулем, але додатною.

Відповідь: A = 126 мкДж.

3.29. Електричне поле створюється двома зарядами q_1= 4 мкКл і q_2 = –2 мкКл, які містяться на відстані a = 10 см один від одного. Визначити роботу A сил поля під час переміщення заряду q = 50 нКл з точки *1* у точку *2* поля.

Дано	*Розв'язання*

q_1= 4 мкКл = $4\cdot10^{-6}$ Кл
q_2 = –2 мкКл = $-2\cdot10^{-6}$ Кл
a = 10 см = 0,1 м
q = 50 нКл = $5\cdot10^{-8}$ Кл
A = ?



$$A=q(\varphi_1-\varphi_2).$$

Для визначення потенціалів φ_1 і φ_2 точок *1* і *2* поля застосуємо принцип суперпозиції електричних полів: потенціал електричного поля, створеного двома зарядами у деякій точці, дорівнює алгебраїчній сумі потенціалів, які створюються окремими зарядами q_1 і q_2. Тоді

$$\varphi_1 = kq_1/(a/2) + kq_2/(a/2) = 2k(q_1+q_2)/a;$$
$$\varphi_2 = kq_1/(a\sqrt{2}) + kq_2/a = k(q_1/\sqrt{2}+q_2)/a.$$

Після перетворень остаточно маємо

$$A = kq(q_1(2-\frac{1}{\sqrt{2}}) + q_2)/a$$

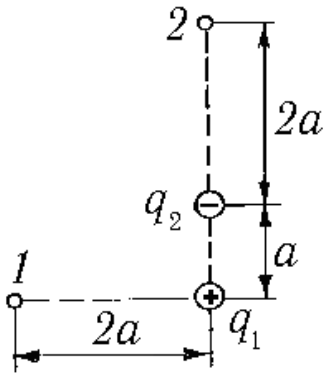
У розрахунках потенціалів знаки зарядів ураховуються автоматично, тобто в останню формулу треба підставити $q_2 = -2\cdot10^{-6}$ Кл.

Відповідь: A = 14,27мДж.

3.30. Заряд q_1 = 0,1 нКл віддалений від заряду q_2 = 0,2 нКл на відстань r = 2 м. Чому дорівнює потенціал поля у середині відрізка, який сполучає заряди ?

Відповідь: φ = 2,7 В

3.31. Електричне поле створюється двома зарядами q_1 = 2 мкКл і q_2 = –2 мкКл, які містяться на відстані a = 0,1 м один від одного. Визначити роботу A сил поля під час переміщення заряду q = 0,5 мкКл з точки *1* у точку *2* поля.



Відповідь: A = 198 мДж.

3.32. Електрон вилітає з точки, потенціал якої φ_1 = 600 В зі швидкістю $v_1 = 1{,}2\cdot10^7$ м/с у напрямі ліній напруженості поля. Визначити потенціал φ_2 точки поля, в якій електрон буде загальмований.

Дано	*Розв'язання*
$q_e = -e =$ $= -1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл $m = 9{,}1\cdot10^{-31}$ кг φ_1 = 600 В $v_1 = 1{,}2\cdot10^7$ м/с $v_2 = 0$	Робота сил електричного поля $A = q_e(\varphi_1 - \varphi_2)$ дорівнює приросту кінетичної енергії $\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = -\frac{mv_1^2}{2}$.
φ_2 = ?	Звідки $\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{mv_1^2}{2q_e}$.

Відповідь: φ_2 = 191 В..

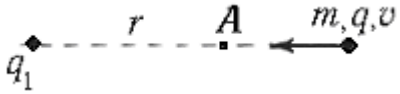
3.33. Електрон під дією електричного поля збільшив свою швидкість від 10 до 30 Мм/с. Визначити різницю потенціалів між початковою і кінцевою точками переміщення.

Відповідь: $\varphi_1 - \varphi_2$ = – 2,27 кВ.

3.34. З ядра атома радію зі швидкістю v = 20·Мм/с вилітає α-частинка ($m = 6{,}7\cdot10^{-27}$ кг, $q = 3{,}2\cdot10^{-19}$ Кл). Яка різниця потенціалів потрібна для того, щоб загальмувати α-частинку?.

Відповідь: $\Delta\varphi$ = 4,16·МВ.

3.35. До закріпленої частинки, заряд якої q_1 = 2 нКл, з нескінченності зі швидкістю v = 0,1 м/с наближується заряджена частинка, маса якої m = 40 мг і заряд q = 1 нКл. На яку найменшу відстань r вони зблизяться?

Дано	*Розв'язання*
m = 40 мг = $4\cdot10^{-5}$ кг q = 1 нКл = 10^{-9} Кл v = 0,1 м/с q_1 = 2 нКл = $2\cdot10^{-9}$ Кл	 У точці A нерухомий заряд створює електричне поле з потенціалом
r = ?	

$$\varphi_A = k\frac{q_1}{r}.$$

Тоді потенціальна енергія взаємодії зарядів у цій точці

$$W_p = q\varphi_A = \frac{kqq_1}{r}.$$

Потенціальна енергія рухомої частинки у нескінченності дорівнює нулю. За законом збереження енергії в момент зупинки

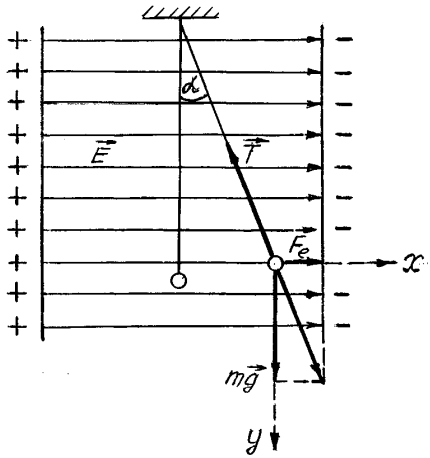
рухомої частинки в точці *A* початкова кінетична енергія переходить у потенціальну енергію кулонівського відштовхування

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{kqq_1}{r}, \; r = \frac{2kqq_1}{mv^2}.$$

Відповідь: $r = 9$ см.

3.36. Між двома вертикальними пластинами, відстань між якими $d = 0{,}5$ см, у повітрі на непровідній нитці висить заряджена кулька масою $m = 0{,}1$ г. Після того, як на пластини була подана різниця потенціалів $U = 10^4$ В, нитка з кулькою відхилилась на кут $\alpha = 15°$ від вертикалі. Визначити заряд q кульки.

Дано	*Розв'язання*
$d = 0{,}5$ см $= 5\cdot10^{-3}$ м $m = 0{,}1$ г $= 10^{-4}$ кг $U = 10^4$ В $\alpha = 15°$	
$Q = ?$	



На заряджену кульку в електричному полі діють: сила тяжіння $m\vec{g}$, сила з боку електричного поля $\vec{F} = q\vec{E}$, де $\vec{E}$ – напруженість поля, q – заряд кульки, та сила натягу нитки $\vec{T}$. Кулька знаходиться у рівновазі, якщо

$$\vec{F} + \vec{T} + m\vec{g} = 0.$$

Запишемо це рівняння у проекціях на вибрані напрями осей *Ox* і *Oy*:

на вісь *Ox*: $F - T\sin\alpha = 0$,

на вісь *Oy*: $mg - T\cos\alpha = 0$.

Розв'язуючи одержані рівняння відносно $\sin\alpha$ та $\cos\alpha$ та беручи їх відношення, маємо

$$tg\alpha = \frac{F}{mg}.$$

Беручи до уваги, що $F = Eq$ та $E = \frac{U}{d}$ для однорідного поля, одержуємо

$$F = \frac{U}{d}q, \qquad \frac{U}{d}q = mgtg\alpha,$$

звідки знаходимо

$$q = \frac{dmgtg\alpha}{U} = 0{,}13 \text{ нКл}.$$

Відповідь: $q = 0{,}13$ нКл.

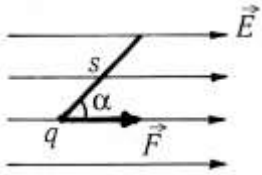
3.37. Між розміщеними горизонтально пластинами плоского повітряного конденсатора перебуває в рівновазі пилинка, маса якої $m = 10^{-12}$ кг і заряд $q = -5\cdot10^{-16}$ Кл. Визначити різницю потенціалів між пластинами, якщо відстань між ними $d = 10^{-2}$ м.

Відповідь: $U = 200$ В.

3.38. Визначити різницю потенціалів між двома точками однорідного електростатичного поля, які лежать на лінії напруженості на відстані $d = 10$ см одна від одної, якщо напруженість поля $E = 2$ В/м.

Відповідь: $U = 0{,}2$ В.

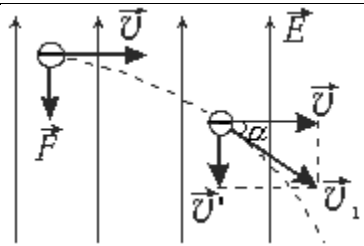
3.39. В однорідному полі напруженістю $E = 60$ кВ/м перемістили заряд $q = 5$ нКл. Вектор переміщення за модулем $s = 20$ см і утворює кут $\alpha = 60°$ з напрямом лінії напруженості. Визначити роботу поля A, зміну потенціальної енергії взаємодії заряду й поля $\Delta W_п$ і напругу U між початковою та кінцевою точками переміщення.

Дано	*Розв'язання*
$E = 60$ кВ/м $= 6\cdot10^4$ В/м $q = 5$ нКл $= 5\cdot10^{-9}$ Кл $l = 20$ см $= 0{,}2$ м $\alpha = 60°$	$A = Fs\cos\alpha$; $F = qE$; $A = -\Delta W_p$; $E = \frac{U}{s\cos\alpha}$; $U = Es\cos\alpha$. 
$A = ?$ $\Delta W_п = ?$ $U = ?$	

Відповідь: $A = 30$ мкДж; $\Delta W_p = -30\cdot$мкДж; $U = 6\cdot$кВ.

Рух заряджених частинок в електричному полі

3.40. Електрон влітає в однорідне електричне поле напруженості E = 10 кВ/м, напрямлене вертикально вгору. Визначити абсолютне значення і напрям швидкості електрона v_1 через проміжок часу t = 2 нс, якщо його початкова швидкість v = 8 Мм/с направлена горизонтально.

Дано	*Розв'язання*
$m = 9{,}1\cdot10^{-31}$ кг $e = 1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл E = 10 кВ/м = 10^4 В/м v = 8 Мм/с = $8\cdot10^6$ м/с t = 2 нс = $2\cdot10^{-9}$ с	
v_1 = ? α = ?	

На електрон, який має негативний заряд $-e$, з боку поля діє спрямована вниз проти поля сила, що за модулем становить $F = Ee$. Така сила надає електронові прискорення, яке за другим законом Ньютона $a = \frac{F}{m} = \frac{eE}{m}$. Прискоренням вільного падіння g у порівнянні з цим прискоренням нехтуємо.

У полі електрон здійснює одночасно два рухи: перпендикулярно до поля з постійною (бо сили в цьому напрямі немає) початковою швидкістю v і проти поля вниз з прискоренням a. Ця задача є подібною до задачі про рух тіла, кинутого горизонтально в полі тяжіння. Абсолютне значення швидкості v_1 знайдемо з прямокутного паралелограма, за правилом якого додаються вектори $\vec{v}$ та $\vec{v}'$. Тут $\vec{v}'$ – вертикальна складова швидкості, яку набуває електрон за час t,

$$v' = at = \frac{eE}{m}t, \quad v_1 = \sqrt{v^2 + (v')^2} = \sqrt{v^2 + \left(\frac{eE}{m}t\right)^2}.$$

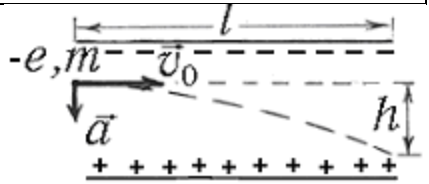
Для визначення напряму вектора $\vec{v}_1$ встановимо тангенс кута α

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{v'}{v} = \frac{eEt}{vm}, \qquad \alpha = \mathrm{arctg}\,\frac{eEt}{vm} = \mathrm{arctg}\ 0{,}44 = 23°45'.$$

Швидкість $\vec{v}_1$ утворює кут 90° + α з напрямом поля $\vec{E}$.

Відповідь: v = 8,74 Мм/с, під кутом 113°45′′ до напряму поля.

3.41. Електрон влітає у простір між горизонтально розміщеними пластинами плоского повітряного конденсатора зі швидкістю v_0 = 60 км/с, яка паралельна пластинам конденсатора. Довжина пластин у напрямі польоту l = 5 см. За час прольоту крізь конденсатор електрон зміщується у вертикальному напрямі на відстань h = 2 мм. Чому дорівнює напруженість E електричного поля в конденсаторі?

Дано	*Розв'язання*
v_0 = 60 км/с = $6\cdot10^4$ м/с l = 5 см = 0,05 м h = 2 мм = 0,002 м e = $1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл m = $9{,}1\cdot10^{-31}$ кг	
E = ?	

$$h = \frac{at^2}{2}, \qquad t = \frac{l}{v_0},$$

$$a = \frac{F + mg}{m}, \qquad F = eE.$$

$$a = \frac{eE}{m} + g \approx \frac{eE}{m}, \; E = \frac{2mv_0^2 h}{el^2}.$$

Відповідь: E = 0,03 В/м.

3.42. Електрон, що набув швидкості під дією напруги U_1 = 5·кВ, влітає у простір між пластинами плоского конденсатора на однаковій відстані від кожної пластини. Швидкість електрона направлена паралельно пластинам. Яку найменшу напругу U слід прикласти до конденсатора, щоб електрон не вилетів з нього, якщо довжина пластин у напрямі польоту l = 5 см, відстань між пластинами d = 1 см?

Дано	*Розв'язання*
U_1 = 5 кВ = $5\cdot10^3$ В l = 5 см = $5\cdot10^{-2}$ м d = 1 см = 10^{-2} м	$U = Ed, \qquad E = \frac{mv_0^2 d}{el^2}$ (див. задачу 3.41), $\frac{mv_0^2}{2} = eU_1, \qquad U = 2U_1\left(\frac{d}{l}\right)^2.$
U = ?	

Відповідь: U = 400 В.

3.43. Вузький пучок електронів у вакуумі пролітає крізь плоский конденсатор паралельно його пластинам та попадає

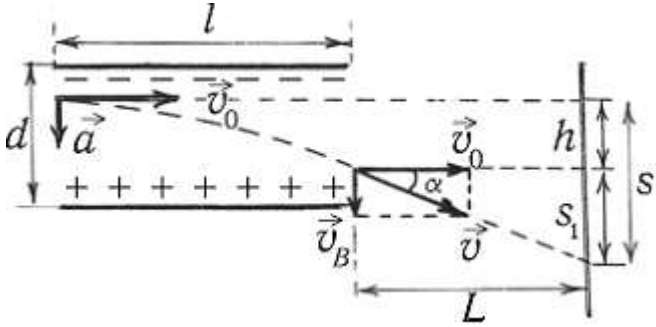
на екран. Екран розміщений на відстані L = 50 см від кінця конденсатора. У разі прикладення до пластин напруги U = 50 В точка, в яку попадають електрони на екрані, зміщується на s = 21 мм. Відстань між пластинами конденсатора d = 18 мм, їх довжина l = 6 см. Визначити швидкість електронів у пучку.

Дано	*Розв'язання*
L = 50 см = 0,5 м U = 50 В s = 21 мм = 0,021 м d = 18 мм = 0,018 м l = 6 см = 0,06 м v_0 = ?	Під час руху $\left(t = \frac{l}{v_0}\right)$ електронів між пластинами конденсатора на них діє з боку електричного поля сила $F = Ee$, яка надає прискорення $a = Ee/m$. За рахунок цієї сили на момент вильоту з конденсатора електрон набуває вертикальної складової швидкості

$$v_в = at = \frac{Ee}{m}\frac{l}{v_0}$$

, або, підставивши $E = U/d$, одержимо

$$v_в = \frac{U}{d}\frac{el}{mv_0}.$$



При цьому електрон зміщується по вертикалі на

$$h = \frac{at^2}{2} = \frac{Uel^2}{2dmv_0^2}.$$

Після вильоту з конденсатора електрон рухається зі сталою швидкістю v вздовж прямої. Напрям руху визначається кутом α. З рисунка tg α = $v_в/v_0$, або $\operatorname{tg}\alpha = \frac{Uel}{dmv_0^2}$. Зміщення s точки на екрані обумовлене зміщенням h під час руху всередині конденсатора та зміщенням s_1 під час руху від конденсатора до екрана,

$s = h + s_1$. З рисунка $s_1 = L$ tg α. Отже

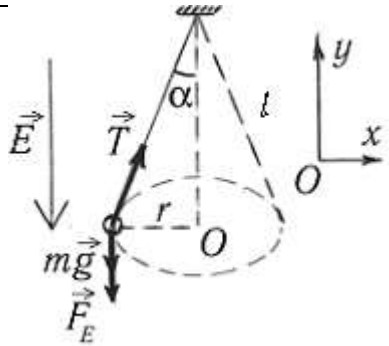
$$s = \frac{Uel^2}{2dmv_0^2} + L\frac{Uel}{dmv_0^2} = \frac{Uel}{dmv_0^2}(L + \frac{l}{2}).$$

Остаточно маємо

$$v_0 = \sqrt{\frac{eUl(L + \frac{l}{2})}{smd}}.$$

Відповідь: v_0 = 27,2 Мм/с.

3.44. Кулька, маса якої m = 2 г та заряд q = 2,5 нКл, підвішена на нитці і описує коло в горизонтальній площині. Який кут з вертикаллю утворює нитка, якщо у разі включення однорідного електричного поля напруженості E = 20 кВ/м, направленого вертикально донизу, частота обертання кульки становить ν = 1 Гц? Довжина нитки l = 30 см.

Дано	*Розв'язання*
$m = 2$ г $= 2\cdot10^{-3}$ кг $q = 2{,}5$ нКл $= 2{,}5\cdot10^{-9}$ Кл $\nu = 1$ Гц $l = 30$ см $= 0{,}3$ м $E = 20$ кВ/м $= 2\cdot10^{4}$ В/м	
α = ?	

$$m\vec{g} + \vec{F}_E + \vec{T} = m\vec{a}_{доц},$$

Ox: $\quad T\sin\alpha = m\omega^2 r$

Oy: $\quad T\cos\alpha - mg - F_E = 0$,

$\omega = 2\pi\nu$, $\quad r = l\sin\alpha$, $\quad T = 4\pi^2\nu^2 ml$, $\quad F_E = qE$,

$$\cos\alpha = \frac{mg + qE}{T} = \frac{mg + qE}{4\pi^2\nu^2 ml}.$$

Відповідь: $\alpha = 33°48'$.

Електроємність. Конденсатори

3.45. Плоский повітряний конденсатор зарядили за допомогою джерела з напругою $U = 300$ В і від'єднали від джерела. Якою стане напруга U_1 між пластинами, якщо відстань між ними збільшити від початкової $d = 0{,}2$ мм до $d_1 = 0{,}7$ мм, а простір між пластинами заповнити діелектриком з діелектричною проникністю $\varepsilon = 7$.

Дано	*Розв'язання*
$\varepsilon = 1$ $U = 300$ В $d = 0{,}2$ мм $d_1 = 0{,}7$ мм $\varepsilon_1 = 7$	$C = \frac{q}{U}$, $C_1 = \frac{q}{U_1}$, $U_1 = \frac{C}{C_1}U$, $C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}$, $C_1 = \frac{\varepsilon_1\varepsilon_0 S}{d_1}$, $U_1 = \frac{\varepsilon d_1}{\varepsilon_1 d}U$.
$U_1 = ?$	

Відповідь: $U_1 = 150$ В.

3.46. Між вертикальними пластинами плоского повітряного конденсатора підвішено на непровідній нитці маленьку кульку з зарядом $q = 98$ нКл. Який заряд q_1 треба надати пластинам конденсатора, щоб кулька відхилилась на кут $\alpha = 45°$. Маса кульки $m = 0{,}05$ г, електроємність конденсатора $C = 0{,}36$ нФ, відстань між його обкладками $d_1 = 5$ см.

Відповідь: $q_1 = 90$ нКл. В к а з і в к а: див. розв'язання задачі 3.36.

3.47. Дві однакові заряджені провідні кульки, які розміщені одна від одної на відстані $a = 25$ см (між центрами), взаємодіють з силою $F = 1$ мкН. До якого потенціалу заряджені кульки, якщо їх діаметри $d = 1$ см? Взаємною ємністю кульок нехтувати.

Дано	*Розв'язання*
$a = 25$ см $= 0{,}25$ м $F = 1$ мкН $= 10^{-6}$ Н $d = 1$ см $= 0{,}01$ м	За законом Кулона сила взаємодії двох однаково заряджених кульок
$\varphi = ?$	$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{a^2}$, звідки заряд кожної кульки $q = a\sqrt{4\pi\varepsilon_0 F}$.

Електроємність провідника за визначенням $C = \frac{q}{\varphi}$. Електроємність провідної кульки у вакуумі $C = 4\pi\varepsilon_0 R$. Тоді потенціал φ кожної з кульок

$$\varphi = \frac{q}{C} = \frac{a\sqrt{4\pi\varepsilon_0 F}}{4\pi\varepsilon_0\left(\frac{d}{2}\right)} = \frac{a}{d}\sqrt{\frac{F}{\pi\varepsilon_0}}.$$

Відповідь: φ = 4 742 В.

3.48. Є суцільна металева куля та металева сферична поверхня однакового радіуса. Чи однакові у них електроємності?

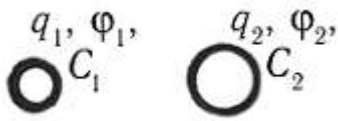
Дано	*Розв'язання*
$R_1 = R_2$	Оскільки заряд розподіляється по поверхні провідних тіл, ємність суцільної металевої кулі така ж, як і сфери.
$C_1 / C_2 = ?$	

Відповідь: Однакові.

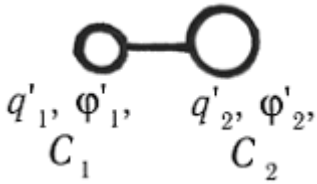
3.49. Ємність тіла людини приблизно C = 30 пФ. Якого радіуса провідна куля має таку саму ємність?

Відповідь: R = 27·см.

3.50. Дві провідні кульки з радіусами R_1 = 5 см та R_2 = 20 см мають заряди q_1 = 30 мкКл та q_2 = 60 мкКл. Як зміняться заряди кульок, якщо їх з'єднати провідником з ємністю, значно меншою, ніж ємність кульок?

Дано	*Розв'язання*
R_1 = 5 см R_2 = 20 см q_1 = 30 мкКл q_2 = 60 мкКл	Після з'єднання провідних кульок провідником 
$q'_1 = ?$ $q'_2 = ?$	

частина заряду з кулі з більшим потенціалом перейде на кулю з меншим потенціалом, доки їх потенціали не зрівняються, $\varphi'_1 = \varphi'_2$, але ємності залишаються тими самими. Запишемо вирази для кожної ємності після з'єднання куль



$$C_1 = \frac{q_1'}{\varphi_1'}, \qquad C_2 = \frac{q_2'}{\varphi_2'} = \frac{(q_1 + q_2) - q_1'}{\varphi_2'}.$$

Тут враховано, що повний заряд обох куль зберігається $q_1 + q_2 = q_1' + q_2'$. Визначимо відношення ємностей, підставивши їх вирази $C_1 = 4\pi\varepsilon_0 R_1$ та $C_2 = 4\pi\varepsilon_0 R_2$, $\frac{C_1}{C_2} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{q_1'}{(q_1 + q_2) - q_1'}$.

Розв'язуючи це рівняння відносно q'_1, знайдемо $q_1' = \frac{q_1 + q_2}{1 + (R_2 / R_1)}$.

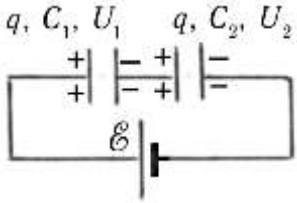
Відповідно, $q_2' = (q_1 + q_2) - q_1' = \frac{q_1 + q_2}{1 + (R_1 / R_2)}$.

Відповідь: q'_1 = 18 мкКл, q'_2 = 72 мкКл.

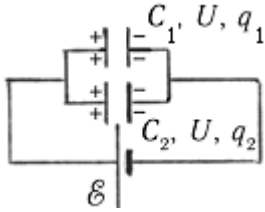
З'єднання конденсаторів. Енергія зарядженого конденсатора. Енергія електричного поля

3.51. До джерела з ЕРС ε = 300 В підключено два плоских конденсатори ємностей C_1 = 2 пФ та C_2 = 3 пФ. Визначити заряд q і напругу U на обкладках у випадках послідовного і паралельного з'єднань конденсаторів.

Дано	*Розв'язання*
ε = 300 В C_1 = 2 пФ = $2\cdot10^{-12}$ Ф C_2 = 3 пФ = $3\cdot10^{-12}$ Ф	У разі послідовного з'єднання конденсаторів ліва пластина першого конденсатора отримає від джерела заряд $+q$. На правій пластині того ж конденсатора наведеться внаслідок явища електростатичної індукції заряд $-q$, а на лівій пластині другого конденсатора — заряд $+q$ і т.д. Отже, заряди q на обох конденсаторах будуть однаковими. Прикладена ЕРС ε дорівнює сумі напруг на кожному конденсаторі
q = ? U = ?	



$$\varepsilon = U_1 + U_2,\ U_1 = \frac{q}{C_1},\ U_2 = \frac{q}{C_2}.$$



Тоді $\varepsilon = q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)$, звідки знаходимо заряд q і напруги U_1 і U_2.

У разі паралельного з'єднання напруга на кожному з конденсаторів є однаковою, $U = \varepsilon$, тоді заряди на кожному з конденсаторів

$$q_1 = C_1U, \qquad q_2 = C_2U.$$

Відповідь: У разі послідовного з'єднання q = 0,36 нКл, U_1 = 180 В, U_2 = 120 В. У разі паралельного з'єднання $U_1 = U_2$ = 300 В, q_1 = 0,6 нКл, q_2 = 0,9 нКл.

3.52. Конденсатор ємності C_1 = 2 мкФ заряджають до напруги U_1 = 110 В, після чого його замикають на незаряджений конден- сатор невідомої ємності. Визначити ємність другого конденсатора, якщо після замикання на ньому встановилась напруга U_2 = 44 В. Яка кількість теплоти виділяється внаслідок замикання?

Дано	*Розв'язання*
C_1 = 2 мкФ = $2\cdot10^{-6}$ Ф U_1 = 110 В U_2 = 44 В C_2 = ? Q = ?	Після замикання утворюється батарея з двох паралельно з'єднаних конденсаторів. Тому напруга на кожному буде однаковою U_2. Заряд першого конденсатора до замикання $q_1 = C_1U_1$ розподіляється між обома конденсаторами

$$q_1 = q'_1 + q'_2; \quad q'_1 = C_1U_2, \quad q'_2 = C_2U_2,$$

або $C_1U_1 = C_1U_2 + C_2U_2$, звідки $C_2 = C_1\left(\frac{U_1}{U_2} - 1\right)$. Енергія до з'єднання

$$W = \frac{C_1U_1^2}{2},$$ після з'єднання $$W' = \frac{(C_1 + C_2)U_2^2}{2}.$$ Звідси

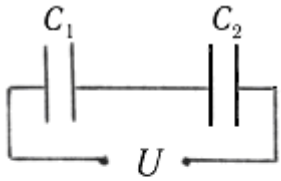
$$Q = W - W' = \frac{C_1U_1(U_1 - U_2)}{2}.$$

Відповідь: C_1 = 3 мкФ, Q = 7, 26 мДж.

3.53. Паперовий конденсатор ємності C_1 = 5 мкФ та повітряний конденсатор ємності C_2 = 0,2 мкФ з'єднані послідовно та підключені до джерела постійної напруги U = 200 В. Потім другий конденсатор

заповнюється гасом. Який заряд Δq пройде по електричному колу? Діелектрична проникність гасу ε = 2,1.

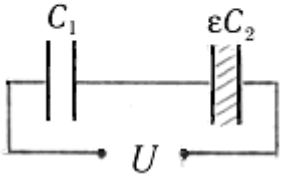
Дано	*Розв'язання*
$C_1 = 5\cdot10^{-6}$ Ф $C_2 = 2\cdot10^{-7}$ Ф $U = 200$ В ε = 2,1	$C = \dfrac{C_1C_2}{C_1 + C_2}$. $q = CU = \dfrac{C_1C_2}{C_1 + C_2}U$
Δq = ?	



$C'_2 = \varepsilon C_2$

$$C' = \frac{C_1C'_2}{C_1 + C'_2} = \frac{\varepsilon C_1C_2}{C_1 + \varepsilon C_2}.$$

$$q' = C'U = \frac{C_1\varepsilon C_2}{C_1 + \varepsilon C_2}U.$$

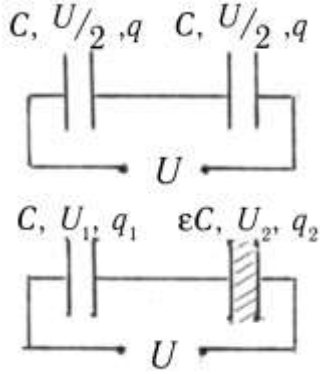


$$\Delta q = q' - q = \frac{C_1^2C_2(\varepsilon - 1)}{(C_1 + C_2)(C_1 + \varepsilon C_2)}U.$$

Відповідь: Δq = 35 мкКл

3.54. Два однакових плоских повітряних конденсатори з'єднані послідовно та підключені до джерела постійної напруги. Потім другий конденсатор заповнюється діелектриком з діелектричною проникністю ε = 9. Як при цьому зміниться напруженість електричного поля в цих конденсаторах?

Дано	*Розв'язання*
$C_1 = C_2 = C$ ε = 9	До заповнення напруга на кожному з конденсаторів однакова і
E_1/E = ? E_2/E = ?	



становить $U/2$, а напруженість поля E в кожному з конденсаторів $E = \dfrac{U}{2d}$, де d – відстань між пластинами.

Після заповнення другого конденсатора діелектриком від джерела напруги в батарею конденсаторів натікає додатковий

заряд (див. розв'язання 3.53).Заряд q_1 на кожному з конденсаторі, як і раніше, однаковий, але інший. Оскільки в ε разів збільшується ємність другого конденсатора, то змінюється і напруга на кожному з них

$$U_1 = \frac{q_1}{C},\ U_2 = \frac{q_1}{\varepsilon C},\ \frac{U_1}{U_2} = \varepsilon.$$

Але, як і раніше, $U_1 + U_2 = U$. З останніх двох рівнянь визначимо

$$U_1 = \frac{\varepsilon}{\varepsilon + 1}U, \qquad U_2 = \frac{1}{\varepsilon + 1}U.$$

Напруженості електричних полів у конденсаторах

$$E_1 = \frac{U_1}{d}, \qquad E_2 = \frac{U_2}{d}.$$

Зміна напруженостей $\frac{E_1}{E} = \frac{2U_1}{U} = \frac{2\varepsilon}{\varepsilon + 1}$, $\frac{E_2}{E} = \frac{2U_2}{U} = \frac{2}{\varepsilon + 1}$.

***Відповідь*:** У першому зросте в 1,8 разів, у другому зменшиться у 0,2 рази.

3.55. Як зміниться енергія зарядженого та від'єднаного від джерела напруги повітряного конденсатора, якщо простір між його обкладками заповнити діелектриком з діелектричною проникністю ε = 2?

Дано	*Розв'язання*
$\varepsilon_1 = 1$ $q_1 = q_2$ $\varepsilon_2 = 2$	$W_1 = \frac{q_1^2}{2C},\ W_2 = \frac{q_2^2}{2C_2},\ \frac{C_1}{C_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\ \ \frac{W_2}{W_1} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}.$
$\frac{W_2}{W_1} = ?$	***Відповідь:***, $W_2/W_1 = 1/2$, зменшиться вдвічі.

3.56. Напруженість електричного поля плоского конденсатора $E = 10^2$ В/м, його ємність $C = 0{,}8$ мкФ. Визначити енергію конденсатора, якщо відстань між його обкладками $d = 2$ мм.

Відповідь: $W = 16$ нДж.

3.57. Як зміниться енергія зарядженого та від'єднаного від джерела напруги плоского повітряного конденсатора, якщо збільшити відстань між його пластинами?

Дано	*Розв'язання*
$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$ $q_1 = q_2$ $d_2 > d_1$	$W_1 = \frac{q_1^2}{2C_1}$, $W_2 = \frac{q_1^2}{2C_2}$, $\frac{W_2}{W_1} = \frac{C_1}{C_2}$, $C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}$,
$\frac{W_2}{W_1} = ?$	$\frac{C_1}{C_2} = \frac{d_2}{d_1}$, $\frac{W_2}{W_1} = \frac{d_2}{d_1} > 1.$

Відповідь: Збільшиться за рахунок роботи зовнішніх сил.

3.58. Батарея з $n = 5$ послідовно з'єднаних конденсаторів ємністю $C = 5$ мкФ кожний підтримується при постійній напрузі $U = 6\cdot10^4$ В. Діелектрик в одному з конденсаторів пробивається. Як при цьому змінюється енергія батареї? Визначити також роботу джерела напруги.

Дано	*Розв'язання*
$n = 5$ $C = 5$ мкФ $= 5\cdot10^{-6}$ Ф $U = 6\cdot10^4$ В	$C_1 = \frac{C}{n}$, $W_1 = \frac{C_1U^2}{2} = \frac{CU^2}{2n}$,
$W_2 - W_1 = ?$ $A_{дж} = ?$	$C_2 = \frac{C}{n-1}$, $W_2 = \frac{C_2U^2}{2} = \frac{CU^2}{2(n-1)}$,

$$W_2 - W_1 = \frac{CU^2}{2n(n-1)},\ q_1 = C_1U = \frac{C}{n}U,\ q_2 = C_2U = \frac{C}{n-1}U,$$

$$\Delta q = q_2 - q_1 = \frac{CU}{n(n-1)},\ A_{дж} = \Delta qU = \frac{CU^2}{n(n-1)}.$$

Відповідь: $W_2 - W_1 = 450$ Дж, $A_{дж} = 900$ Дж.

3.2. Закони постійного струму

Основні закони і формули

- Сила постійного струму:

$$I = \frac{q}{t},$$

де q – заряд, що переноситься через поперечний переріз провідника за час t.

- Закон Ома для ділянки кола:

$$I = \frac{U}{R},$$

де I – сила струму в ділянці, R – опір ділянки, U – напруга, прикладена до ділянки.

- Опір провідника завдовжки l із сталою площею поперечного перерізу S

$$R = \rho \frac{l}{S},$$

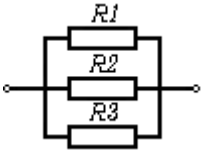
де ρ – питомий опір матеріалу провідника.

- Загальний опір R провідників:

при *послідовному* з'єднанні

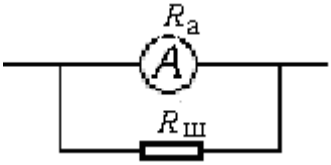
$$R = R_1 + R_2 + R_3,$$

при *паралельному* з'єднанні



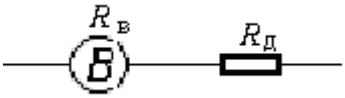
$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}.$$

- **Опір шунта**



$$R_ш = R_а/(n - 1);$$

і додатковий опір



$$R_{дод} = R_в(n - 1),$$

при яких границі вимірювання збільшуються в *n* разів, тут $R_а$ і $R_в$ – опори амперметра і вольтметра.

- Електрорушійна сила (ЕРС) джерела струму

$$\varepsilon = \frac{A_{\text{стор}}}{q},$$

де $A_{\text{стор}}$ – робота сторонніх сил по переміщенню заряду q вздовж контуру.

- Закон Ома для повного кола

$$I = \frac{\varepsilon}{R + r},$$

де I – сила струму в колі, ε – ЕРС джерела струму, R – опір зовнішньої ділянки кола, r – внутрішній опір джерела струму.

- Робота постійного струму за час t

$$A = IUt = I^2Rt = \frac{U^2}{R}t.$$

- Потужність струму:

$$P = IU = I^2R = U^2/R.$$

- **Кількість теплоти, яка виділяється у провіднику під час проходження струму (закон Джоуля – Ленца)**

$$\Delta Q = I^2R\Delta t.$$

- Повна потужність джерела струму з ЕРС ε

$$P_0 = I^2(R+r) = I\varepsilon = \varepsilon^2/(R+r).$$

- Корисна потужність джерела струму (та, що виділяється у зовнішній ділянці кола)

$$P_{\text{кор}} = P_0 - I^2 r = I(\varepsilon - Ir) = IU = \varepsilon^2R/(R+r)^2.$$

Максимальна корисна потужність розвивається у випадку $R = r$.

- Коефіцієнт корисної дії (ККД) джерела струму

$$\eta = \frac{P_{кор}}{P_0} = \frac{U}{\varepsilon} = \frac{R}{R + r},$$

де $U = (\varepsilon - Ir)$ – напруга на затискачах джерела.

- Залежність питомого опору провідника від температури

$$\rho_1 = \rho_0(1 + \alpha t_1), \quad \rho_2 = \rho_1(1 + \alpha(t_2 - t_1)),$$

де ρ_0, ρ_1, ρ_2– питомі опори при температурах 0°C, t_1, t_2, α – температурний коефіцієнт опору.

- Сила електричного струму в металах

$$I = ne\langle v\rangle S,$$

де n – кількість електронів провідності в одиниці об'єму, $\langle v\rangle$– середня швидкість впорядкованого руху електронів, e – абсолютна величина заряду електрона, S – площа поперечного перерізу провідника.

- Об'єднаний закон електролізу

$$\Delta m = \frac{IM\Delta t}{|e|N_A n} = kI\Delta t,$$

де Δm – маса речовини, яка виділилася на електроді за час Δt при проходженні через розчин електроліту постійного струму силою I, M – молярна маса цієї речовини, n – валентність іонів, що осідають на електроді; k – електрохімічний еквівалент даної речовини.

Стала Фарадея: $F = |e|N_A \approx 9{,}65\cdot 10^4$ Кл/моль, де $|e|$ – модуль елементарного заряду, N_A – стала Авогадро.

- У разі послідовного з'єднання джерел з ЕРС ε_1, ε_2,..., ε_n і внутрішніми опорами $r_1, r_2, \ldots, r_n$, відповідно, одержуємо батарею з ЕРС $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + ... + \varepsilon_n$ і внутрішнім опором $r = r_1 + r_2 + \ldots + r_n$.
- У разі паралельного з'єднання джерел з ЕРС ε_1, ε_2,..., ε_n і внутрішніми опорами $r_1, r_2, \ldots, r_n$, відповідно, одержуємо батарею з ЕРС

$$\varepsilon = \frac{\dfrac{\varepsilon_1}{r_1} + \dfrac{\varepsilon_2}{r_2} + \ldots + \dfrac{\varepsilon_n}{r_n}}{\dfrac{1}{r_1} + \dfrac{1}{r_2} + \ldots + \dfrac{1}{r_n}}$$

і внутрішнім опором

$$r = \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \ldots + \frac{1}{r_n}\right)^{-1}.$$

Сила струму

3.59. Скільки електронів проходить через поперечний переріз провідника за час t =1 с при силі струму I = 1 А?

Дано	*Розв'язання*
I = 1А t = 1 с	$$n = \frac{q}{e} = \frac{It}{e}.$$
n = ?	***Відповідь:*** $n = 6.25 \cdot 10^{18}$.

3.60. Конденсатор ємності C = 100 мкФ заряджається до напруги U = 500 В за час t = 0,5 с. Яким є середнє значення сили зарядного струму $\langle I \rangle$?

Дано	*Розв'язання*
C = 100 мкФ = 10^{-4} Ф U = 500 В t = 0,5 с	$q = CU$; $\langle I \rangle = \frac{q}{t} = \frac{CU}{t}$.
$\langle I \rangle$ =?	***Відповідь:*** $\langle I \rangle$ = 0,1 А.

3.61. За теорією Бора електрон в атомі водню обертається по колу навколо ядра і утримується на орбіті за рахунок кулонівського притягання до ядра – протона. Визначити, який струм створює електрон, якщо радіус орбіти r = 53 пм.

Дано	*Розв'язання*
$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл. $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг r = 53 пм = $5{,}3 \cdot 10^{-11}$ м	$I = e\nu$, $\nu = \frac{1}{T}$, $T = \frac{2\pi r}{v}$, $ma_{доц} = F$, $m\frac{v^2}{r} = k\frac{e^2}{r^2}$, $v = \sqrt{\frac{ke^2}{rm}}$, $I = \frac{e}{2\pi r}\sqrt{\frac{ke^2}{rm}}$.
I =?	
Відповідь: I = 1 мА.	

Закон Ома для ділянки кола

3.62. При напрузі U = 100 В сила струму в резисторі становить I = 5 А. Якою буде сила струму I_1 у резисторі, якщо напругу на ньому збільшити на ΔU = 10 В?

Дано	*Розв'язання*

U =100 В I = 5 А ΔU = 10 В	$I_1 = \frac{U_1}{R}$, $R = \frac{U}{I}$,
I_1 =?	$I_1 = \frac{U + \Delta U}{U} I$.

Відповідь: I_1 = 5,5А **.**

3.63. На цоколі електричної лампи написано 6,3 В; 0,22 А. Чому дорівнює опір R спіралі цієї лампи? Яку потужність P вона споживає?

Дано	*Розв'язання*
U =6,3 В I = 0,22 А	$R = \frac{U}{I}$, $P = IU$
R = ? P = ?	***Відповідь:*** R = 28,6 Ом, P = 1,39 Вт.

Опір провідників. Послідовне і паралельне з'єднання провідників

3.64. Визначити опір R мідного дроту маси m = 4 кг і діаметра d = 1,4 мм.

Дано	*Розв'язання*
m = 4 кг d = 1,4 мм = $1{,}4 \cdot 10^{-3}$ м D = 8,9 10^3 кг/м^3 ρ = 17 нОм·м = $1{,}7 \cdot 10^{-8}$ Ом·м	$R = \rho \frac{l}{S}$, $S = \frac{\pi d^2}{4}$, $m = DV = DSl$, $R = \rho \frac{1}{S}\frac{m}{DS} = \frac{16\rho m}{\pi^2 D d^4}$.
R = ?	

Відповідь: R = 3,3 Ом.

3.65. Котушка з мідного дроту має опір R = 10,8 Ом. Маса мідного дроту m= 3.41 кг. Якої довжини l і якого діаметра d дріт?

Відповідь: l = 493 м, d = 1 мм.

3.66. Три однакові провідники з'єднані послідовно і мають загальний опір R_1 = 9 Ом. Який опір R_2 можна одержати, якщо з'єднати їх паралельно?

Дано	*Розв'язання*
R_1 = 9 Ом	Нехай r – опір кожного з провідників. Тоді
R_2 = ?	$R_1 = 3r$, $R_2 = r/3 = R_1/9$ = 1 Ом.

Відповідь: R_2 =1 Ом.

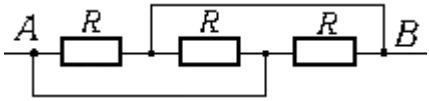
3.67. 1) Які опори можна дістати шляхом з'єднання двох резисторів, якщо опір кожного з них R = 3 Ом? 2) На скільки частин n

треба розрізати провідник опором R_1 = 98 Ом, щоб при паралельному з'єднанні отриманих кусків провідника опір становив R_2 = 2 Ом?

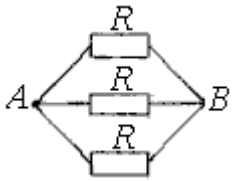
Дано	*Розв'язання*
R = 3 Ом R_1 = 98 Ом R_2 = 2 Ом $R_{парал}$ = ? $R_{посл}$ = ? n = ?	1) $R_{парал} = \frac{R}{2}$, $R_{посл} = 2R$. 2) $R_2 = \frac{(R_1/\ n)}{n} = \frac{R_1}{n^2}$, $n = \sqrt{\frac{R_1}{R_2}}$.

Відповідь: 1) $R_{парал}$ = 1,5 Ом, $R_{посл}$ = 6 Ом; 2) n = 7.

3.68. Визначити опір R_1 ділянки кола між точками A і B.



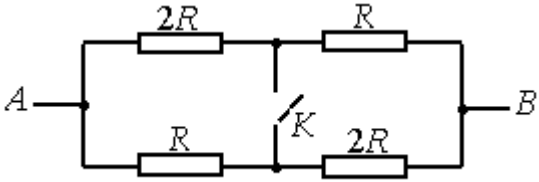
Розв'язання Деякі точки схеми з'єднані провідниками, опором яких нехтують, отже потенціали цих точок є однаковими. Тоді схему заміняємо іншою еквівалентною



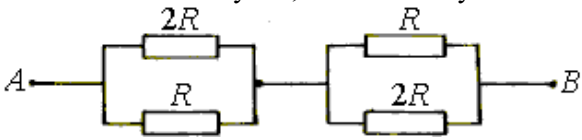
Загальний опір становить $\frac{R}{3}$.

Відповідь: $R_1 = R/3$.

3.69. Коли ключ K замкнутий, опір між точками A і B схеми R_1 = 80 Ом. Визначити опір R_2 між цими точками, коли ключ розімкнутий.

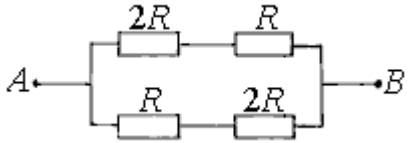


Дано	*Розв'язання*
R_1 = 80 Ом R_2 = ?	Коли ключ замкнутий, маємо схему



Її повний опір $\frac{2R}{3}+\frac{2R}{3}=\frac{4R}{3}=R_1$, звідки $R=\frac{3}{4}R_1=60$ Ом

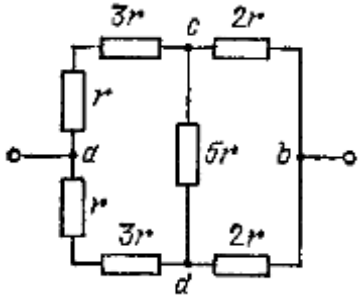
Коли ключ розімкнутий, маємо схему



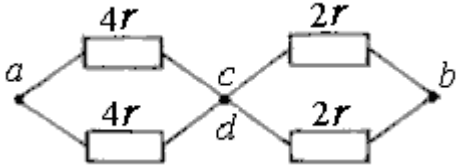
Її повний опір $\frac{3R}{2}=R_2$.

Відповідь: $R_2 = 90$ Ом.

3.70. Визначити опір R кола, зображеного на рисунку.



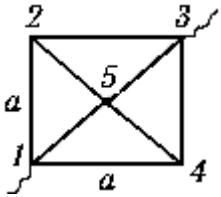
Розв'язання. З симетрії схеми випливає, що струм у точці *a* розділяється на два однакових струми. Падіння потенціалу на ділянках *ac* та *ad* є однаковим, отже потенціали точок *c* і *d* однакові, тому струм між ними не проходить. Цю ланку схеми можна вилучити, тоді одержимо схему,



загальний опір якої $2r+r=3r$.

Відповідь: $R = 3\,r$.

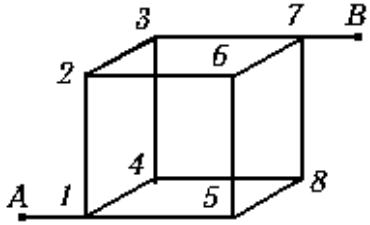
3.71. Визначити опір R дротяної фігури, зображеної на рисунку. Дріт мідний, діаметра d = 0,5 мм. Довжина сторони квадрата a = 10 см.



Дано	*Розв'язання*
a = 10 см = 0,1 м d = 0,5 мм = $5\cdot10^{-4}$ м $\rho = 1{,}7\cdot10^{-8}$ Ом·м	З симетрії задачі випливає, що потенціали точок *2* і *4* є рівними, отже по провіднику $2 \to 4$ струм не проходить і його можна вилучити. Опір схеми, яка зостається, $R = \sqrt{2}a\rho/(\frac{\pi d^2}{4}(\sqrt{2}+1))$.
R = ?	

Відповідь: R = 5 мОм.

3.72. З однорідного дроту спаяний каркас у формі куба. Кожне ребро куба має опір *r*.



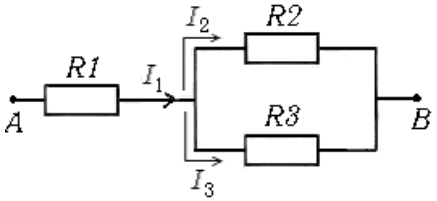
Визначити опір *R* між двома вершинами *A* і *B*, що лежать на кінцях просторової діагоналі куба.

Дано	*Розв'язання*
r	З симетрії задачі та рівності опорів ребер куба випливає, що струм у точці *A* рівномірно розгалужується по трьох вітках. Падіння потенціалу на них однакове, тому потенціали точок *2, 4* і *5* співпадають. Відповідно, співпадають і потенціали точок *6, 8* і *3*. У кожній з цих точок струм знову розгалужується по двох ребрах з однаковими опорами. Якщо з'єднати між собою точки рівного потенціалу провідниками, опором яких можна нехтувати, то опір кола не зміниться. При цьому отримаємо еквівалентну схему з трьох послідовних ділянок по три, шість і три паралельних опорів *r* у кожній.
R = ?	

Загальний опір $R = \frac{r}{3} + \frac{r}{6} + \frac{r}{3} = \frac{5r}{3}$.

Відповідь: $R = 5r/3$.

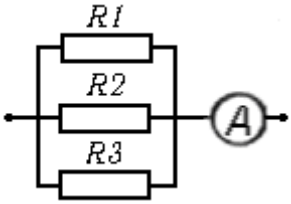
3.73. У схемі на рисунку $R_1 = 30$ Ом, $R_2 = 20$ Ом, $R_3 = 40$ Ом. Напруга між точками А і В $U = 65$ В. Визначити силу струму, що проходить крізь кожний опір.



Дано	*Розв'язання*
$R_1 = 30$ Ом, $R_2 = 20$ Ом, $R_3 = 40$ Ом. $U = 65$ В	$R_{заг} = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}$, $I_1 = \frac{U}{R_{заг}}$, $I_1 = I_2 + I_3$, $I_2R_2 = I_3R_3$, $I_2 = \frac{I_1}{1 + \frac{R_2}{R_3}}$, $I_3 = I_1 - I_2$.
$I_1 = ?$ $I_2 = ?$ $I_3 = ?$	

Відповідь: $I_1 = 1{,}5$ А, $I_2 = 1$ А, $I_3 = 0{,}5$ А.

3.74. У схемі на рисунку амперметр вказує силу струму $I = 0{,}8$ А. Сила струму крізь резистор R_1 дорівнює $I_1 = 0{,}1$ А. Опори $R_2 = 20$ Ом, $R_3 = 15$ Ом. Визначити опір R_1, а також сили струмів I_2 та I_3, що проходять крізь опори R_2 і R_3.



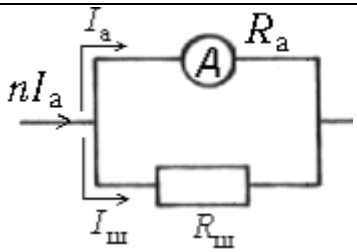
Дано	*Розв'язання*
$I = 0{,}8$ А. $I_1 = 0{,}1$ А $R_2 = 20$ Ом $R_3 = 15$ Ом	$I = I_1 + I_2 + I_3$, $I - I_1 = I_2 + I_3$, $I_2R_2 = I_3R_3$, $I_3 = I_2 \frac{R_2}{R_3}$,
$R_1 = ?$ $I_2 = ?$ $I_3 = ?$	$I - I_1 = I_2(1 + \frac{R_2}{R_3})$, $I_2 = \frac{I - I_1}{(1 + \frac{R_2}{R_3})}$,

$$R_1 = \frac{I_2}{I_1} R_2 .$$

Відповідь: $R_1 = 60$ Ом, $I_2 = 0{,}3$ А, $I_3 = 0{,}4$ А.

Амперметр і вольтметр у колі постійного струму

3.75. Опір амперметра $R_а$. = 0,048 Ом. Який опір $R_ш$ і як потрібно увімкнути з амперметром, щоб збільшити межі вимірювання амперметра в n = 5 разів?

Дано	*Розв'язання*
$R_а$. = 0,048 Ом n = 5	
$R_ш$ = ?	

Амперметр розрахований на певний струм $I_а$. За допомогою шунта можна вимірювати струм у нерозгалуженому колі, що є більшим у n разів, тобто $nI_а$. Тоді частина струму має проходити крізь шунт

$$I_ш = nI_а - I_а = (n-1)I_а.$$

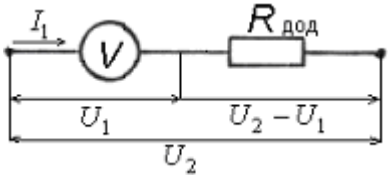
Для паралельного з'єднання $I_а R_а = I_ш R_ш$, звідки $R_ш = \dfrac{R_а}{n-1}$.

Відповідь: $R_ш$ = 0,012 Ом.

3.76. Паралельно амперметру, опір якого $R_а$. = 0,14 Ом, включений опір $R_ш$ = 0,02 Ом. Визначити величину струму I в колі, якщо амперметр показує $I_а$ = 5 А.

Відповідь: I = 40 А.

3.77. Вольтметр розрахований на вимірювання максимальної напруги U_1 = 40 В, при цьому через нього проходить струм I_1 = 0,01 А. Який додатковий опір $R_{дод}$ і як його треба приєднати до вольтметра, щоб ним можна було вимірювати напругу до U_2 = 120 В?

Дано	*Розв'язання*
U_1 = 40 В I_1 = 0,01 А U_2 = 120 В	Додатковий опір під'єднують послідовно з 
$R_{дод}$ = ?	

вольтметром.

У такому випадку струм I_1, на який розрахований вимірювальний прилад, не змінюється, але частина U_2 напруги, що вимірюється, падає на додатковому опорі.

$$U_2 = U_1 + U_{дод}, \qquad U_{дод} = U_2 - U_1.$$

Нехай треба вимірювати напругу у n разів більшу, ніж та, на яку розрахований вольтметр, $U_2 = nU_1$.

Тоді $$U_{дод} = nU_1 - U_1 = (n-1)U_1.$$

Якщо врахувати, що опір вольтметра $R_в = \dfrac{U_1}{I_1}$, одержимо в загальному випадку $R_{дод} = (n-1)R_в$. , або в данному разі

$$R_{дод} = \frac{U_2 - U_1}{I_1}.$$

Відповідь: $R_{дод}$ = 8 кОм.

3.78. Електровимірювальний прилад високої чутливості (гальванометр) має опір 200 Ом. При силі струму 100 мкА стрілка гальванометра відхиляється на всю шкалу. Який шунт треба підключити до гальванометра, щоб його можна було використовувати як міліамперметр для вимірювання струму до 10 мА? Який додатковий опір треба підключити, щоб прилад можна було використовувати як вольтметр для вимірювання напруги до 2 В?

Відповідь: $R_ш$ = 2,02 Ом, $R_д$ = 19,8 кОм.

Залежність опору металевих провідників від температури

3.79. Обмотка котушки з мідного дроту має опір R_1= 10 Ом при температурі t_1 = 20°С. Під час пропускання струму опір обмотки став дорівнювати R_2 = 12,2 Ом. До якої температури t_2 розігрілася обмотка? Температурний коефіцієнт опору міді $\alpha = 4{,}15\cdot10^{-3}$ К$^{-1}$.

Дано	*Розв'язання*
R_1 = 10 Ом t_1 = 20° С R_2 = 12,2 Ом $\alpha = 4{,}15\cdot10^{-3}$ К$^{-1}$	$R_2 = R_1(1+\alpha(t_2 - t_1))$ $t_2 - t_1 = \dfrac{R_2 - R_1}{\alpha R_1}, \quad t_2 = t_1 + \dfrac{R_2 - R_1}{\alpha R_1}.$
t_2 = ?	***Відповідь:*** t_2 = 73 °С.

3.80. Визначити температуру t_1 вольфрамової нитки лампочки, якщо при вмиканні в мережу з напругою U = 220 В по нитці проходить струм I = 0,68 А. При температурі t= 20 °С опір нитки R = 36 Ом. Температурний коефіцієнт опору вольфраму $\alpha = 4{,}6\cdot10^{-3}\,\text{К}^{-1}$.

Відповідь: t_2 = 1 756 °С.

Закон Ома для повного кола

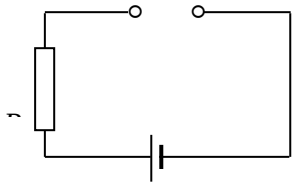
3.81. Джерело струму має ЕРС ε = 1,5 В і внутрішній опір r, який у η = 15 разів менше зовнішнього опору R. Визначити напругу U на затискачах джерела.

Дано	*Розв'язання*
ε = 1,5 В η = R/r = 15 U = ?	$U = \varepsilon - Ir,\quad I = \dfrac{\varepsilon}{R+r},\quad U = \dfrac{\varepsilon R}{R+r} = .$ $= \dfrac{\varepsilon(R/r)}{1+(R/r)} = \dfrac{\varepsilon\eta}{1+\eta}.$

Відповідь: U = 1,4 В.

3.82. Акумулятор з ЕРС ε = 12 В підключено для зарядки до зарядного пристрою, який має напругу U = 15 В. Внутрішній опір акумулятора r = 0,1 Ом. Який додатковий опір необхідно включити у коло, щоб сила зарядного струму була I = 5 А?

Дано	*Розв'язання*
ε = 12 В U = 15 В r = 0,1 Ом I = 5 А R = ?	Сила струму в електричному колі зарядки визначається сумісною дією зарядного пристрою і акумулятора. Усередині акумулятора струм іде від позитивного полюса до негативного. Повний струм є різницею $I = \dfrac{U}{r+R} - \dfrac{\varepsilon}{r+R} = \dfrac{U-\varepsilon}{r+R},$ звідки знаходимо R.



Відповідь: R = 0,5 Ом.

3.83. До джерела струму, що має ЕРС ε = 11 В і внутрішній опір r = 1 Ом, приєднали паралельно сполучені резистори R_1 = 2 Ом і R_2 = 3 Ом. Визначити силу струму I в колі.

***Відповідь*:** I = 5 А.

3.84. Якщо до джерела струму приєднати опір R_1 = 10 Ом, струм у колі буде I_1 = 3 А, а якщо приєднати опір R_2 = 20 Ом, то I_2 = 1,6 А. Визначити ЕРС ε та внутрішній опір r джерела.

***Відповідь*:** ε = 34,29 В, r = 1,4 Ом.

Робота і потужність струму

3.85. Електродвигун, увімкнутий у мережу з напругою U = 120 В, споживає струм I = 15 А. Визначити потужність P, яку споживає двигун, і його ККД, якщо опір двигуна R = 1 Ом.

Дано	*Розв'язання*
U = 120 В I = 15 А R = 1 Ом. P = ? η = ?	Повна потужність, яку споживає двигун, $P = IU$. На нагрівання його обмоток витрачається потужність $P_1 = I^2R$. Корисна потужність $P_{кор} = P - P_1 = I(U - IR)$. ККД двигуна $\eta = \frac{P_{кор}}{P} = \frac{U - IR}{U}$.

Відповідь: P = 1,8 кВт, η = 0,88.

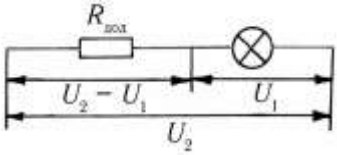
3.86. Як зміниться кількість теплоти, що виділяє електроплитка, якщо її спіраль укоротити в k разів?

Дано	*Розв'язання*
l_1 $l_2 = l_1/k$ Q_2/Q_1 = ?	$Q = \frac{U^2}{R}t$, $R = \rho\frac{l}{S}$, $Q = \frac{U^2tS}{\rho l}$, $\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{l_1}{l_2} = k.$

Відповідь: Збільшиться у k разів.

3.87. Лампа, що розрахована на напругу 127 В, споживає потужність 50 Вт. Який додатковий опір треба приєднати до лампи,

щоб ця лампа світилася з нормальним розжаренням при напрузі U_2 = 220 В?

Дано	*Розв'язання*
U_1 = 127 В U_2 = 220 В P = 50 Вт $R_д$ = ?	$\frac{U_1}{R} = \frac{U_2}{R + R_д}$. $R = \frac{U_1^2}{P}$,  $R_{дод} = \frac{U_2 - U_1}{I}$, $I = \frac{P}{U_1}$, $R_{дод} = \frac{(U_2 - U_1)U_1}{P}$.

Відповідь: $R_д$ = 236,2 Ом.

3.88. Яку потужність споживає 25-ватна лампочка, розрахована на напругу U_1 = 120 В, якщо її ввімкнули в мережу з напругою U_2 = 220 В? Зміну опору лампочки не враховувати.

Дано	*Розв'язання*
P_1 = 25 Вт U_1 = 120 В U_2 = 220 В $R_1 = R_2$ P_2 = ?	$P_1 = \frac{U_1^2}{R_1}$, $P_2 = \frac{U_2^2}{R_2}$, $\frac{P_2}{P_1} = \frac{U_2^2}{U_1^2}$, $P_2 = P_1(\frac{U_2}{U_1})^2$.

***Відповідь*:** P_2 = 84,03 Вт.

3.89. Підйомний кран піднімає рівномірно вгору вантаж масою m = 0,4 т за час t = 40 с на висоту h = 18 м. Електродвигун крана працює під напругою U = 380 В. Визначити потужність P двигуна і споживаний ним струм I, якщо ККД установки η = 0,8.

Дано	*Розв'язання*
m = 0,4 т = 400 кг t = 40 с h = 18 м U = 380 В η = 0,8 $P_{витр}$ = ? I = ?	$P_{кор} = \frac{mgh}{t}$, $P_{витр} = \frac{P_{кор}}{\eta}$, $I = \frac{P_{витр}}{U} = \frac{mgh}{\eta tU}$.

Відповідь: $P_{витр}$ = 2,2 кВт, I = 5,79 А.

3.90. Електровоз їде зі сталою швидкістю v = 54 км/год і розвиває при цьому силу тяги F = 70 кН. Визначити силу струму I в двигунах електровоза, якщо напруга на них U = 1,5 кВ, а ККД двигунів η =

0,92.

Дано	*Розв'язання*
v = 54 км/год = 15 м/с F = 70 кН = $7\cdot10^4$ Н U = 1,5 кВ = 1 500 В η = 0,92	$I = \frac{P_{витр}}{U}$, $P_{витр} = \frac{P_{кор}}{\eta}$, $P_{кор} = Fv$, $I = \frac{Fv}{\eta U}$.
I = ?	

***Відповідь*:** I = 761 А.

3.91. Електричний чайник має два нагрівальні елементи. У разі включення першого елементу вода в чайнику закипає через t_1 = 15 хв, у разі включення другого – через t_2 = 30 хв. За який час закипить вода в чайнику, якщо включити обидва елементи: а) послідовно; б) паралельно?

Дано	*Розв'язання*
t_1 = 15 хв t_2 = 30 хв	Позначимо через Q кількість теплоти, яку необхідно надати воді в чайнику, щоб вона закипіла.
$t_{послід}$ = ? $t_{парал}$ = ?	Тоді для всіх чотирьох випадків

$$Q = \frac{U^2}{R_1}t_1 = \frac{U^2}{R_2}t_2 = \frac{U^2}{R_{послід}}t_{послід} = \frac{U^2}{R_{парал}}t_{парал}.$$

Тут R_1 – опір першого елемента, R_2 – другого, $R_{послід} = R_1 + R_2$ – опір у разі послідовного з'єднання, $R_{парал} = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}$ – опір у разі паралельного з'єднання, U – незмінна напруга в електричній мережі. З цих рівнянь знаходимо

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{t_2}{t_1},\quad t_{послід} = \frac{R_{послід}}{R_1}t_1 = \frac{R_1 + R_2}{R_1}t_1 = (1 + \frac{R_2}{R_1})t_1 = t_1 + t_2,$$

$$t_{парал} = \frac{R_{парал}}{R_1}t_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2}t_1 = \frac{1}{\frac{R_1}{R_2} + 1}t_1 = \frac{t_1t_2}{t_1 + t_2}.$$

***Відповідь*:** $t_{послід}$ = 45 хв, $t_{парал}$ = 10 хв.

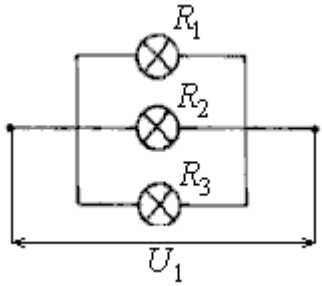
3.92. Два провідники, опори яких R_1 = 7 Ом і R_2 = 5 Ом, з'єднані паралельно і підключені до джерела струму. У першому провіднику

протягом деякого часу виділилось Q_1 = 300 Дж теплоти. Яка кількість теплоти виділилась у другому провіднику за той же час?

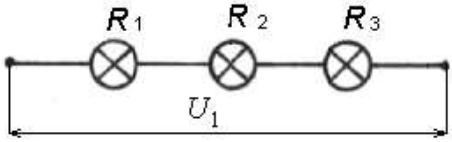
Відповідь: Q_2 = 420 Дж.

3.93. Чи можна три лампочки на 110 В з потужностями 25, 30 і 50 Вт ввімкнути в мережу з напругою 220 В, щоб вони не перегоріли?

Дано	*Розв'язання*
U_1 = 110 В P_1 = 25 Вт P_2 = 30 Вт U_2 = 220 В	Розглянемо варіанти підключення лампочок у мережі U_1 = 110 В.



У разі паралельного підключення кожна з лампочок працює в режимі, на який вона розрахована, і струми крізь кожну лампочку становлять $I_1 = \frac{P_1}{U_1} = \frac{25}{110} = 0{,}227\text{A}$,



$$I_2 = \frac{P_2}{U_1} = \frac{30}{110} = 0{,}273\text{A}\ ,\ I_3 = \frac{P_3}{U_1} = \frac{50}{110} = 0{,}455\text{A}.$$

У разі послідовного підключення крізь всі лампочки проходить однаковий струм

$$I = \frac{U_1}{R_1 + R_2 + R_3}.$$

Опори R_1, R_2, та R_3 знаходимо з формули $R = \frac{U^2}{P}$;

$$R_1 = \frac{110^2}{25} = 484\ \text{Ом},\ R_2 = \frac{110^2}{30} = 403\ \text{Ом},\ R_3 = \frac{110^2}{50} = 242\ \text{Ом}.$$

Отже $I = \dfrac{110}{484 + 403 + 242} = 0{,}097\text{A}$.

Якщо порівняти цей струм з тими, на які розрахована кожна з лампочок, можна бачити, що при послідовному з'єднанні всі лампочки працюють не на повну потужність.

Нехай тепер ці лампочки ввімкнуті у мережу U_2 = 220 В.У разі паралельного підключення

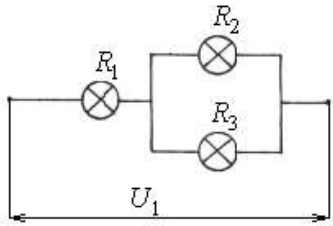
$I_1 = \dfrac{220}{484} = 0{,}455\text{A}$, $I_2 = \dfrac{220}{403} = 0{,}545\text{A}$, $I_3 = \dfrac{220}{242} = 0{,}909\text{A}$. Ці струми перевищують ті, на які розраховані лампочки. Отже, окремі лампочки вмикати не можна.

При послідовному підключенні всіх трьох лампочок

$I = \dfrac{220}{1129} = 0{,}195\text{A}$, тобто всі лампочки знов працюють не на повну потужність. Таке підключення можливе.

Тепер розглянемо змішане з'єднання лампочок у мережі U_1 = 110 В.

Повний опір у такому варіанті становить $R_1 + \dfrac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = 635\text{Ом}$,



струм у нерозгалуженій ділянці кола

$I = \dfrac{110}{635} = 0{,}173\text{A}$. Таке підключення можливе, бо для першої лампочки граничний струм 0,227 А. Щодо до другої і третьої, то вони тут мають добрий запас потужності.

Тепер замінимо R_1 на R_2, а потім на R_3. Ці варіанти у разі напруги U_1 = 110 В є також можливими.

Але у разі мережі U_2 = 220 В жодне змішане з'єднання лампочок не є можливим. Так, для зображеного на рисунку з'єднання

$I = \dfrac{220}{635} = 0{,}346\text{A}$, але перша лампочка розрахована лише на 0,227 А і може згоріти. Інші варіанти розглядаються аналогічно.

Відповідь: У мережі 220 В можна вмикати тільки три послідовно з'єднані лампочки.

3.94. Джерело струму з внутрішнім опором r = 1,5 Ом замкнули на реостат, опір якого змінюється від R_1 = 3 Ом до R_2 = 7,5 Ом. У скільки разів змінюється при цьому потужність P струму на реостаті ?

Дано	*Розв'язання*
r = 1,5 Ом R_1 = 3 Ом R_2 = 7,5 Ом. P_1/P_2 = ?	Із співвідношень $I = \dfrac{\varepsilon}{R+r}$ та $P = I^2R$ отримаємо вираз для потужності струму на зовнішньому опорі R (на реостаті): $P = \dfrac{\varepsilon^2 R}{(R+r)^2}$.

Шукане відношення має вигляд

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{R_1}{R_2}\left(\frac{R_2+r}{R_1+r}\right)^2.$$

Відповідь: P_1/P_2 = 1,6.

3.95. На резисторі опором R = 9 Ом, підключеному до джерела струму з ЕРС ε = 3,1 В, виділяється потужність P = 1 Вт. Визначити внутрішній опір r джерела струму.

Дано	*Розв'язання*
R = 9 Ом ε = 3,1 В P = 1 Вт r = ?	$P = I^2R,\quad I = \dfrac{\varepsilon}{R+r},\quad P = \dfrac{\varepsilon^2 R}{(R+r)^2},$ Розкриваючи квадрат суми, одержимо квадратне рівняння відносно r

$$r^2 + 2Rr + (R^2 - \frac{E^2R}{P}) = 0.$$

Доцільно підставити числові значення $r^2 + 18r - 5{,}49 = 0$, звідки $r = 0{,}3$ Ом.

Відповідь: r = 0,3 Ом.

3.96. До джерела струму приєднують спочатку опір R_1, а потім – опір R_2. В обох випадках корисна потужність джерела була однакова. Визначити внутрішній опір r джерела.

Дано	*Розв'язання*

R_1 R_2 $P_{кор1} = P_{кор2}$	$$P_{кор} = I^2R = \frac{\varepsilon^2}{(R+r)^2}R,$$
$r = ?$	$$\frac{\varepsilon^2}{(R_1+r)^2}R_1 = \frac{\varepsilon^2}{(R_2+r)^2}R_2,$$

виконуючи алгебраїчні перетворення, одержимо

$$r = \sqrt{R_1R_2}.$$

Відповідь: $r = \sqrt{R_1R_2}$.

3.97. **Визначити ККД електричної мережі, якщо внутрішній опір джерела у 4 рази менший, ніж зовнішній.**

Відповідь: η = 0,8.

3.98. Напруга на затискачах джерела з ЕРС ε = 12 В становить U = 9 В. До джерела приєднано опір R = 3 Ом. Визначити ККД η джерела і його внутрішній опір r.

Відповідь: η = 75 %, r = 1 Ом**.**

3.99. При силі струму I_1 = 3 А на зовнішньому опорі виділяється потужність P_1 = 18 Вт, а при силі струму I_2 = 1 А – відповідно, P_2 = 10 Вт. Визначити ЕРС ε джерела та його внутрішній опір r.

Дано	*Розв'язання*
$I_1 = 3$ А $P_1 = 18$ Вт $I_2 = 1$ А $P_2 = 10$ Вт	$P_1 = I_1^2R_1, \quad R_1 = \frac{P_1}{I_1^2}, \quad I_1 = \frac{\varepsilon}{R_1+r},$
$\varepsilon = ?$ $r = ?$	$\begin{cases} I_1 = \dfrac{\varepsilon}{(P_1/I_1^2)+r}, \\ I_2 = \dfrac{\varepsilon}{(P_2/I_2^2)+r} \end{cases}$ **Розв'язуючи систему двох**

рівнянь, знаходимо

$$\varepsilon = \frac{P_2I_1^2 - P_1I_2^2}{I_1I_2(I_1-I_2)}, \qquad r = \frac{P_2I_1 - P_1I_2}{I_1I_2(I_1-I_2)}.$$

***Відповідь*:** ε = 12 В, r = 2 Ом.

3.100. У разі підключення до джерела струму з внутрішнім опором r = 2 Ом резистора опором R = 4 Ом напруга на затискачах джерела падає до U = 6 В. Визначити повну потужність P_0 і найбільшу корисну потужність $P_{max\ кор}$ джерела

Дано	*Розв'язання*
$r = 2$ Ом $R = 4$ Ом $U = 6$ В	$P_0 = I^2(R+r)$, $I = \frac{U}{R}$, $P_0 = \frac{U^2}{R^2}(R+r)$.
P_0 = ? $P_{кор\ max}$ = ?	$P_{кор} = I^2R = \frac{\varepsilon^2}{(R+r)^2}R$.

Дослідимо цю функцію на максимум, для чого прирівняємо нулеві першу похідну за R.

$$P'_{кор} = \varepsilon^2 \frac{(R+r)^2 - 2(R+r)R}{(R+r)^4} = 0.$$

Дорівнюючи нулю чисельник, знаходимо, що ця умова виконується у разі $r = R$. Тоді $P_{кор\,max} = \frac{\varepsilon^2}{(2R)^2}R = \frac{\varepsilon^2}{4R}$.

$$\varepsilon = U + Ir = U + \frac{U}{R}r = U(1+\frac{r}{R}), \quad P_{кор max} = \frac{U^2}{4R}\left(1+\frac{r}{R}\right)^2.$$

Відповідь: P_0 = 13,5 Вт, $P_{кор\ max}$ = 5,06 Вт.

3.101. Елемент з ЕРС ε = 6 В дає максимальний струм I = 3 А (під час короткого замикання). Яка найбільша потужність може виділятися на зовнішньому опорі.

Дано	*Розв'язання*
ε = 6 В $I_{к.з}$ = 3 А	$I_{к.з} = \frac{\varepsilon}{r}$, тобто під час короткого замикання зовнішній опір R відсутній.
$P_{кор\ max}$ = ?	

Максимальну корисну потужність можна одержати за умови $R = r$ (див. розв'язання задачі 3.100)

$$P_{кор.max} = I^2R = \left(\frac{\varepsilon}{R+r}\right)^2 R = \frac{\varepsilon^2}{4R} = \frac{\varepsilon I_{к.з}}{4}.$$

Відповідь: $P_{кор\ max}$ = 4,5 Вт.

3.102. Яка найбільша корисна потужність $P_{\text{кор. max}}$ може бути отримана від джерела струму з ЕРС E = 12 В і внутрішнім опором r = 1 Ом?

Відповідь: $P_{\text{кор max}}$ = 3,6 Вт.

3.103. Зовнішнє коло джерела струму споживає потужність P = 0,75 Вт. Визначити силу струму у колі, якщо ЕРС джерела струму ε = 2 В і внутрішній опір r = 1 Ом.

Дано	*Розв'язання*
P = 0,75 Вт E = 2 В r = 1 Ом I = ?	$P = I^2R$, $I = \dfrac{\varepsilon}{R+r}$, з цих двох рівнянь одержимо квадратне рівняння відносно I

$$I^2 - \frac{\varepsilon}{r}I + \frac{P}{r} = 0.$$

Підставивши числа, визначимо два корені I_1 та I_2, обидва додатні, тобто мають фізичний зміст.

Відповідь: I_1 = 1,5 А, I_2 = 0,5 А.

3.104. Джерело струму замикають один раз резистором, опір якого R_1 = 4 Ом, другий раз – R_2 = 9 Ом. В обох випадках потужність струму у зовнішньому колі однакова. При якому зовнішньому опорі R вона буде максимальною?

Дано	*Розв'язання*
R_1 = 4 Ом R_2 = 9 Ом $P_1 = P_2$ R = ?	Максимальна корисна потужність має місце за умови $R = r$ (див. розв'язання задачі 3.100).

$$P_1 = P_2, \quad I_1^2R_1 = I_2^2R_2, \quad \frac{I_1}{I_2} = \sqrt{\frac{R_2}{R_1}},$$

$$I_1 = \frac{\varepsilon}{R_1+r}, \quad I_2 = \frac{\varepsilon}{R_2+r}, \quad \frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2+r}{R_1+r}, \quad \frac{R_2+r}{R_1+r} = \sqrt{\frac{R_2}{R_1}},$$

$$r = \frac{R_1\sqrt{\dfrac{R_1}{R_2}} - R_2}{1-\sqrt{\dfrac{R_2}{R_1}}}.$$

Відповідь: R = 6 Ом

З'єднання елементів у батарею

3.105. Акумуляторна батарея, що використовується у шахтному електротранспорті, складається з N = 112 банок, з'єднаних послідовно. ЕРС та внутрішній опір кожної банки дорівнюють відповідно ε_1 = 1,25 В і r_1 = 0,1 Ом. Який струм I дає ця батарея крізь зовнішній опір R = 100 Ом?

Відповідь: $I = 1{,}3$ А.

3.106. Батарея складається з n = 5 послідовно з'єднаних елементів з ЕРС ε = 1,8 В та внутрішнім опором r = 0,3 Ом кожний. У разі якої сили струму I потужність, що виділяється на зовнішньому опорі, дорівнює P = 13,5 Вт?

Дано	*Розв'язання*
$n = 5$ $P = 13{,}5$ Вт $\varepsilon = 1{,}8$ В $r = 0{,}3$ Ом $I = ?$	$I = \dfrac{n\varepsilon}{R+nr}, \quad P = I^2R = (\dfrac{n\varepsilon}{R+nr})^2R,$ $R^2 + (2nr - \dfrac{n^2\varepsilon^2}{P})R + n^2r^2 = 0, \quad R^2 - 3R + 2{,}25 = 0,$ $R = 1{,}5$ Ом.

Відповідь: I = 3 А.

3.107. Батарея складається з двох паралельно з'єднаних елементів з внутрішніми опорами r_1 = 0,3 Ом і r_2 = 0,2 Ом та ЕРС ε_1 = 1,8 В і ε_2 = 2 В. Визначити ЕРС батареї.

Відповідь: ε = 1,92 В.

3.108. Батарея складається з паралельно з'єднаних елементів з внутрішнім опором r = 5 Ом та ЕРС ε = 5,5 В кожний. При струмі в зовнішньому колі I = 2 А корисна потужність P = 7 Вт. Скільки в батареї елементів?

Дано	*Розв'язання*
$r = 5$ Ом $\varepsilon = 5{,}5$ В $I = 2$ А $P = 7$ Вт $n = ?$	$I = \dfrac{\varepsilon}{\dfrac{r}{n} + R}, \quad R = \dfrac{P}{I^2}, \quad n = \dfrac{I^2r}{I\varepsilon - P}.$ ***Відповідь: :*** $n = 5$.

Електричний струм у металах і рідинах

3.109. Визначити кількість електронів провідності в одному кубічному сантиметрі міді.

Дано	*Розв'язання*
$\rho = 8{,}9\cdot10^3$ кг/м^3 $M = 64\cdot10^{-3}$кг/моль N_A = $6{,}02\cdot10^{23}$ 1/моль n = ?	Під час утворення кристалічних граток металу від кожного атома відщеплюються валентні електрони, які й є носіями струму в металах. Якщо від кожного атома відщепиться по одному електрону, то кількість n електронів в одиниці об'єму буде дорівнювати кількості атомів в одиниці об'єму. Кількість молів

речовини в одиниці об'єму дорівнює $\frac{\rho}{M}$, де ρ – масса одиниці об'єму, або густина, M – молярна масса. Кількість частинок в одному молі дорівнює числу Авогадро $N_A = 6{,}02\cdot10^{23}$ 1/моль. Тоді кількість атомів в одиниці об'єму, а також кількість n електронів в одиниці об'єму

$$n = \frac{\rho}{M} N_A .$$

Відповідь: $n = 0{,}84\cdot10^{23}$ 1/см^3..

3.110. Визначити середню швидкість <v> впорядкованого руху електронів у алюмінієвому провіднику, площа поперечного перерізу якого S = 1 мм^2, при силі струму в ньому I =1 А. Вважати, що концентрація електронів провідності дорівнює концентрації атомів провідника.

Дано	*Розв'язання*
S = 1 мм^2 = 10^{-6} м^2 I =1 А $\rho = 2{,}69\cdot10^3$ кг/м^3 $M = 27\cdot10^{-3}$кг/моль $N_A = 6{,}02\cdot10^{23}$ 1/моль $e = 1.6\cdot10^{-19}$ Кл <v> = ?	$I = ne\langle v\rangle S$, $n = \frac{\rho}{M} N_A$ (див. розв'язання задачі 3.109) $\langle v \rangle = \frac{IM}{\rho N_A e S}$. ***Відповідь:*** <$v$> = 0,1 мм/с.

3.111. Плоску металеву деталь треба покрити шаром хрому завтовшки Δh = 50 мкм. Який час Δt потрібен для цього, якщо при хромуванні густина струму (відношення сили струму I до площі поперечного перерізу S провідника) j = 2 кА/м^2, а електрохімічний еквівалент хрому k = 0,18 мг/Кл.

Дано	*Розв'язання*
Δh = 50 мкм $j = I/S$ = 2 кА/м^2 k = 0,18 мг/Кл. Δt = ?	Нехай ρ – густина хрому. Позначимо через S площу поверхні деталі. Тоді, виразивши масу хрому через густину, за законом електролізу будемо мати: $\Delta m = \rho S \Delta h = kI\Delta t.$

Сила струму $I = jS$. Таким чином

$$\Delta t = \frac{\rho \Delta h}{kj}$$

Відповідь: Δt = 17 хв.

3.112. Дві електролітичні ванни з'єднані послідовно. У першій ванні виділилося m_1 = 3,9 г цинку, у другій за той же час m_2 = 2,24 г заліза. Визначити валентність n_2 заліза, якщо цинк має валентність n_1 = 2.

Дано	*Розв'язання*
$I_1 = I_2$ m_1 = 3,9 кг $t_1 = t_2$ m_2 = 2,24 кг $M_1 = 65 \cdot 10^{-3}$ кг/моль $M_2 = 56 \cdot 10^{-3}$ кг/моль n_1 = 2 n_2 = ?	$m = \frac{IMt}{\lvert e \rvert N_A n}$, $\frac{m_1}{m_2} = \frac{M_1 n_2}{M_2 n_1}$, $n_2 = \frac{m_1 M_2}{m_2 M_1} n_1.$ ***Відповідь:*** n_2 = 3

3.113. В електролітичній ванні через розчин пройшов заряд Q = 193 кКл. При цьому на катоді виділився метал кількістю ν = 1 моль. Визначити валентність n металу.

Дано	*Розв'язання*

Q = 193 кКл = $1{,}93\cdot10^5$ Кл ν = 1 моль n = ?	$m = \dfrac{ItM}{\lvert e\rvert N_A n}$, $\dfrac{m}{M} = \nu$, $It = Q$, $n = \dfrac{Q}{\lvert e\rvert N_A \nu}$.

Відповідь: n = 2.

3.114. Під час електролізу мідного купоросу за час t = 1 год виділилась мідь масою m = 0,5 кг. Площа поверхні електродів, опущених в електроліт, S = 7,5 м^2. Знайти густину струму j. Електрохімічний еквівалент міді $k = 3{,}3\cdot10^{-7}$кг/Кл

Дано	*Розв'язання*
t = 1 год = 3600 с m = 0,5 кг $k = 3{,}3\cdot10^{-7}$кг/Кл S = 7,5 м^2 j = ?	$j = \dfrac{I}{S}$, $m = kIt$, $j = \dfrac{m}{ktS}$. ***Відповідь:*** j = 56,1 А/м^2·.

3.3. Магнітне поле. Електромагнітна індукція

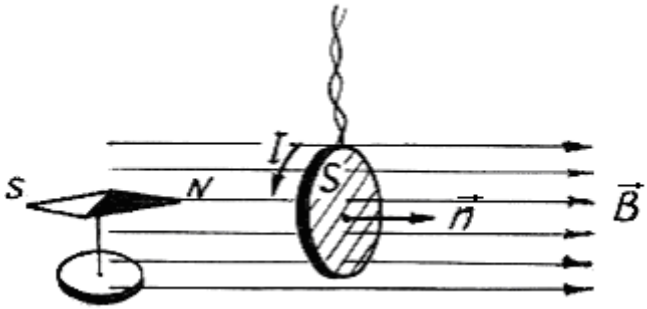
Основні закони і формули

- Силовою характеристикою магнітного поля є магнітна індукція $\vec{B}$. Модуль вектора магнітної індукції

$$B = \frac{M_{\max}}{IS},$$

де M_{max} – максимальний обертальний момент, що діє з боку магнітного поля на замкнутий контур малих розмірів (пробний контур) площею S зі струмом I.

Напрям вектора $\vec{B}$ співпадає з напрямом додатної нормалі $\vec{n}$ до площини пробного контуру, який встановився у рівновазі. Додатною нормаллю є така, напрям якої зв'язаний з напрямом струму правилом гвинта



- Модуль сили, що діє на провідник зі струмом у магнітному полі (сили Ампера):

$$F = IBl \sin \alpha,$$

де B – модуль вектора магнітної індукції, I – сила струму, що проходить вздовж лінійного провідника завдовжки l, α – кут між напрямом струму та вектором магнітної індукції; напрям сили визначається за правилом лівої руки.

- Модуль сили, яка діє з боку магнітного поля на заряджену частинку, що рухається у цьому полі (сили Лоренца):

$$F = qvB \sin \alpha,$$

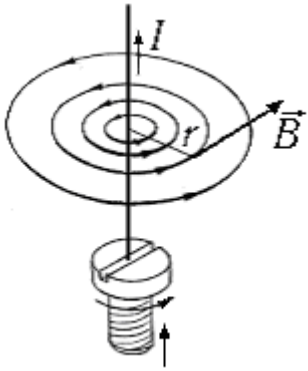
де q – електричний заряд частинки, v – модуль її швидкості, B – модуль вектора магнітної індукції, α – кут між напрямом вектора швидкості частинки та вектором магнітної індукції; напрям сили також визначається за правилом лівої руки. Якщо поле однорідне, а кут $\alpha = 90°$, то заряджена частинка рухається по колу радіуса R з періодом T

$$R = \frac{v}{(\frac{q}{m})B}; \qquad T = \frac{2\pi}{(\frac{q}{m})B}.$$

- Принцип суперпозиції (накладання) магнітних полів: магнітна індукція $\vec{B}$ результуючого магнітного поля дорівнює векторній сумі магнітних індукцій полів, що створюються кожним струмом окремо

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + ... + \vec{B}_n .$$

• Магнітна індукція (за модулем) у вакуумі на відстані r від прямолінійного довгого провідника зі струмом сили I:



$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r},$$

де $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м – магнітна стала; напрям вектора $\vec{B}$ визначається за правилом гвинта.

• Магнітний потік Ф крізь поверхню площею S у випадку однорідного поля:

$$\Phi = BS\cos\alpha,$$

де B – модуль вектора магнітної індукції, α – кут між векторами магнітної індукції $\vec{B}$ та нормалі $\vec{n}$ до поверхні.

• ЕРС електромагнітної індукції (середнє за часом значення) в замкненому провідному контурі чисельно дорівнює і протилежна за знаком швидкості зміни магнітного потоку крізь поверхню, обмежену контуром

$$\varepsilon_I = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}.$$

Знак мінус вказує, що збільшення потоку викликає $\varepsilon_I < 0$ (поле індукційного струму направлено назустріч потоку), зменшення потоку викликає $\varepsilon_I > 0$ (напрям потоку і поля індукційного струму співпадають). За модулем

$$|\varepsilon_i| = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}.$$

Миттєве значення (у даний момент часу) ЕРС індукції (за модулем)

$$|\varepsilon_i| = \Phi'$$

де Φ' – похідна за часом від магнітного потоку.

• Різниця потенціалів U на кінцях провідника завдовжки l, що рухається зі швидкістю v в однорідному магнітному полі

$$U = Blv\sin\alpha,$$

де α – кут між віссю провідника і напрямом швидкості.

- Якщо замкнений контур, у якому індукується ЕРС, складається не з одного витка, а з N витків, і потік Ф, що пронизує кожний з витків, однаковий, то повний магнітний потік Ψ (його називають потокозчепленням контуру)

$$\Psi = N\Phi,$$

а ЕРС індукції у такому складному контурі (за модулем)

$$|\varepsilon_i| = N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}.$$

- ЕРС індукції, яка виникає у рамці, що містить N витків площею S, під час обертання рамки з кутовою швидкістю ω в однорідному магнітному полі з індукцією B навколо осі, що лежить у площині рамки і перпендикулярна до вектора $\vec{B}$

$$\varepsilon_i = BNS\omega \sin \omega t,$$

де ωt – миттєве значення кута між вектором $\vec{B}$ і вектором нормалі $\vec{n}$ до площини рамки.

- Електричний заряд q, який проходить у замкненому провідному контурі опору R при зміні потокозчеплення контуру від значення Ψ_1 до Ψ_2

$$q = \frac{\Psi_1 - \Psi_2}{R}.$$

- Магнітний потік крізь поверхню, що обмежена контуром, обумовлений магнітним полем самого струму I в цьому контурі

$$\Psi = LI,$$

де Ψ – потокозчеплення самоіндукції, L – індуктивність контуру.

- ЕРС самоіндукції, що виникає у замкненому контурі при зміні струму в ньому (середнє та миттєве значення):

$$\varepsilon_s = -L\frac{\Delta I}{\Delta t},\ \varepsilon_s = -LI',$$

де I' – похідна за часом від сили струму.

- Енергія магнітного поля, що створюється струмом, та об’ємна густина енергії магнітного поля у вакуумі

$$W = \frac{LI^2}{2},\ w = \frac{B^2}{2\mu_0}.$$

Магнітна індукція. Сила Ампера

3.115. Максимальний обертальний момент, що діє на рамку зі струмом $I = 0{,}5$ А і площі $S = 1$ см^2 у магнітному полі, $M_{max} = 2$ мкН·м. Визначити магнітну індукцію B поля.

Дано	*Розв'язання*
$I = 0{,}5$ А $S = 1$ см^2 = 10^{-4} м^2 $M_{max} = 2$мкН·м = $2 \cdot 10^{-6}$ Н·м	$B = \dfrac{M_{max}}{IS}$
B = ?	***Відповідь:*** $B = 0{,}04$ Тл.

3.116. Плоска прямокутна котушка з $N = 200$ витків зі сторонами 10 і 5 см міститься в однорідному магнітному полі індукції $B = 0{,}05$ Тл. Який максимальний обертальний момент M_{max} може діяти на котушку у цьому полі, якщо сила струму в котушці $I = 2$ А?

Відповідь: $M_{max} = 0{,}1$ Н·м.

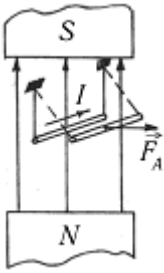
3.117. В однорідному магнітному полі індукції $B = 1$ Тл міститься прямий провідник завдовжки $l = 50$ см. Вздовж провідника проходить струм $I = 0{,}2$ мкА, він утворює кут $\alpha = 30°$ з напрямом ліній індукції поля. Визначити силу F, що діє на провідник з боку поля.

Відповідь: $F = 50$ нН.

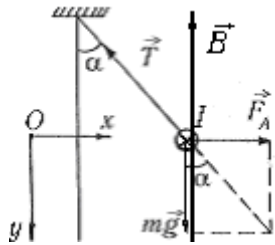
3.118. Вздовж провідника завдовжки $l = 30$ см, поміщеному в однорідне магнітне поле так, що напрям струму в ньому утворює кут $\alpha = 45^\circ$ з напрямом ліній магнітної індукції, проходить струм $I = 50$ мА. Сила, що діє з боку поля на цей провідник, $F = 300$ мН. Визначити магнітну індукцію B.

Відповідь: $B = 0{,}028$ Тл.

3.119. Між полюсами магніту на двох тонких нитках підвішений горизонтальний лінійний провідник, маса якого $m = 10$ г та довжина $l = 20$ см. Магнітна індукція поля направлена вертикально вгору, за модулем $B = 0.25$ Тл. На який кут α від вертикалі відхиляться нитки, якщо вздовж провідника пропустити струм $I = 2$А? Масою ниток нехтувати.



Дано	*Розв'язання*

m = 10 г = 0,01 кг l = 20 см = 0,2 м I = 2 А B = 0,25 Тл	
α = ?	

Для визначення напряму сили Ампера скористуємося правилом лівої руки: розміщуємо ліву руку так, щоб лінії магнітної індукції входили в долоню, а чотири пальці збігалися з напрямом струму, тоді великий палець вкаже напрям сили Ампера. На рисунку хрестиком позначений струм, що проходить від нас.

Сили, що діють в магнітному полі на підвідні нитки зі струмом, зрівноважують одна одну, оскільки струми в них протилежні за напрямом.

Умови рівноваги провідника $m\vec{g} + \vec{F}_A + \vec{T} = 0$,

$$Ox:\ F_A - T\sin\alpha = 0,$$

$$Oy:\ mg - T\cos\alpha = 0.$$

Звідси $tg\alpha = \dfrac{F_A}{mg}$, $F_A = IBl$ (струм перпендикулярний до магнітного поля).

$$\alpha = arctg\,\frac{IBl}{mg}.$$

Відповідь: α = 45°.

3.120. На алюмінієвий провідник зі струмом, який поміщено у магнітне поле індукції B = 2.5 мТл, з боку поля діє сила F = 3 мН. Площа поперечного перерізу провідника S = 1 мм^2. Напрями струму та ліній магнітної індукції перпендикулярні один до одного. Визначити різницю потенціалів U, яка підтримується на кінцях провідника.

Дано	*Розв'язання*

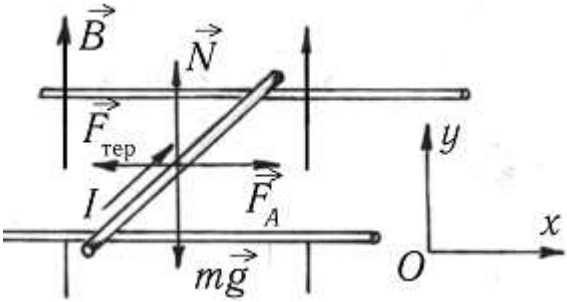
$S = 1$ мм$^2 = 10^{-6}$ м^2 $F = 3$ мН $= 3 \cdot 10^{-3}$ Н $B = 2{,}5$ мТл $= 2{,}5 \cdot 10^{-3}$ Тл $\alpha = 90°$ $\rho = 2{,}8 \cdot 10^{-8}$ Ом·м	$U = IR, \quad R = \rho \dfrac{l}{S},$ $F_A = IBl \sin\alpha$
$U = ?$	$I = \dfrac{F_A}{Bl \sin\alpha}, \quad U = \dfrac{\rho F_A}{BS \sin\alpha}.$
Відповідь: $U = 0{,}034$ В.	

3.121. В однорідному горизонтальному магнітному полі індукції $B = 0{,}2$ Тл міститься прямий провідник маси $m = 0{,}2$ кг. Провідник також розміщено горизонтально і перпендикулярно до напряму ліній магнітної індукції. Після включення струму сили $I = 4$ А провідник почав рухатись вертикально вгору. Через час $t = 3$ с після початку руху провідник має швидкість $v = 10$ м/с. Визначити довжину l провідника.

Дано	*Розв'язання*
$m = 0{,}2$ кг $I = 4$ А $B = 0{,}2$ Тл $t = 3$ с $v = 10$ м/с	$m\vec{g} + \vec{F}_A = m\vec{a},$ Ox: $F_A - mg = ma,$ $a = \dfrac{v}{t}, \; F_A = IBl,$ $l = \dfrac{m(\frac{v}{t} + g)}{IB}.$
$l = ?$	
Відповідь: $l = 3{,}28$ м.	

3.122. Горизонтальні провідні рейки розміщені на відстані $d = 0{,}4$ м одна від одної в магнітному полі, перпендикулярному до рейок. На рейках лежить стержень масою $m = 0{,}5$ кг, перпендикулярний до рейок. По рейкам і стержню пропускають струм сили $I = 50$ А. Якою має бути магнітна індукція B поля, щоб стержень почав рухатись, якщо коефіцієнт тертя між стержнем та рейками $\mu = 0{,}3$?

Дано	*Розв'язання*

$d = 0{,}4$ м $m = 0{,}5$ кг $I = 50$ А $\mu = 0{,}3$ $a > 0$	
$B = ?$	

$$m\vec{g} + \vec{F}_A + \vec{N} + \vec{F}_{тер} = m\vec{a},$$

$$Ox: \quad F_A - F_{тер} = ma,$$

$$Oy: \quad N - mg = 0,$$

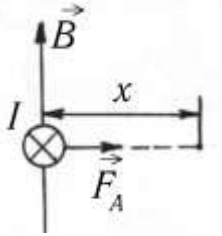
$$F_{тер} = \mu N = \mu mg, \quad F_A = IBd, \quad IBd - \mu mg = ma, \; a > 0, \; IBd > \mu mg,$$

$$B > \frac{\mu mg}{Id}$$

Відповідь: $B > 0{,}075$ Тл.

3.123. Провідник завдовжки $l = 8$ см зі струмом $I = 50$ А переміщується на відстань $x = 10$ см перпендикулярно до ліній магнітної індукції однорідного магнітного поля індукції $B = 0{,}6$ Тл. Визначити виконану при цьому роботу A.

Дано	*Розв'язання*
$l = 8$ см $= 0{,}08$ м $I = 50$ А $x = 10$ см $= 0{,}1$ м $B = 0{,}6$ Тл	$A = F_A x \cos\alpha$. Напрям переміщення співпадає з напрямом амперової сили, отже $\alpha = 0$.
$A = ?$	



$$F_A = IBl. \qquad A = IBlx \; .$$

(Хрестиком на рисунку позначений струм крізь переріз провідника – від нас перпендикулярно до площини рисунка).

Відповідь: $A = 0{,}24$ Дж.

Магнітне поле прямого струму

3.124. Вздовж прямого нескінченно довгого провідника

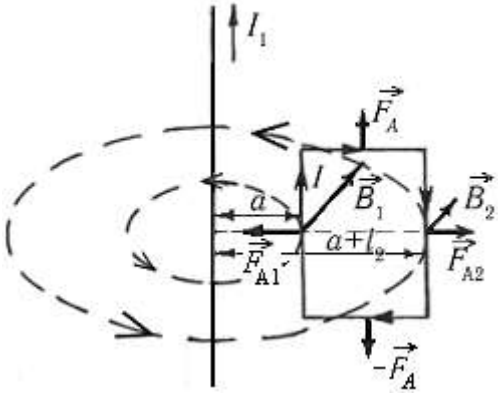
проходить струм сили I = 50 А. Визначити магнітну індукцію B у точці, яка віддалена на відстань r = 5 см від провідника.

Відповідь: B = 0,2 мТл.

3.125. Струм I, який проходить вздовж довгого прямого провідника, збільшився втричі. Як треба змінити відстань r від провідника до магнітної стрілки, яка відхиляється під дією магнітного поля цього струму, щоб її відхилення не змінилося при збільшенні струму?

Відповідь: r_2/r_1 = 3.

3.126. Прямокутну рамку зі струмом I = 1,5 мА поміщено в одній площині з довгим прямим провідником так, що її більша сторона паралельна провідникові. Сила струму в провіднику I_1 = 2 мА, відстань від нього до ближньої сторони рамки a = 10 см. Довжини сторін рамки l_1 = 30 см, l_2 = 18 см. Яка сила F діє на рамку з боку магнітного поля провідника зі струмом?

Дано	*Розв'язання*
$I = 1{,}5$ А $= 1{,}5 \cdot 10^{-3}$ А $I_1 = 2$ мА $= 2 \cdot 10^{-3}$ А $l_1 = 30$ см $= 0{,}3$ м $l_2 = 18$ см $= 0{,}18$ м $a = 10$ см $= 0{,}1$ м	
F = ?	

Довгий прямий провідник зі струмом I_1 створює навколо себе магнітне поле, індукція якого на відстані a становить

$B_1 = \dfrac{\mu_0 I_1}{2\pi a}$, а на відстані $a + l_2$, відповідно,

$B_2 = \dfrac{\mu_0 I_1}{2\pi(a + L_2)}$.Таке магнітне поле діє на сторони рамки зі

струмом I: на ближню з силою $F_{A1} = IB_1l_1$, на дальню – $F_{A2} = IB_2l_1$.

На горизонтальні сторони рамки зі струмом магнітне поле діє з однаковими за модулем, але протилежно спрямованими силами $\vec{F}_A$, що компенсують одна одну. Напрям ліній індукції поля визначається правилом гвинта, напрям амперової сили – правилом лівої руки. Сумарна сила, що діє на рамку

$\vec{F} = \vec{F}_{A1} + \vec{F}_{A2}$, або за модулем $F = F_{A1} - F_{A2}$.

$$F = I\frac{\mu_0 I_1}{2\pi a}l_1 - I\frac{\mu_0 I_1}{2\pi(a+l_2)}l_1 = \frac{\mu_0 I I_1 l_1 l_2}{2\pi a(a+l_2)}.$$

Відповідь: F = 1,16 пН.

Принцип суперпозиції магнітних полів

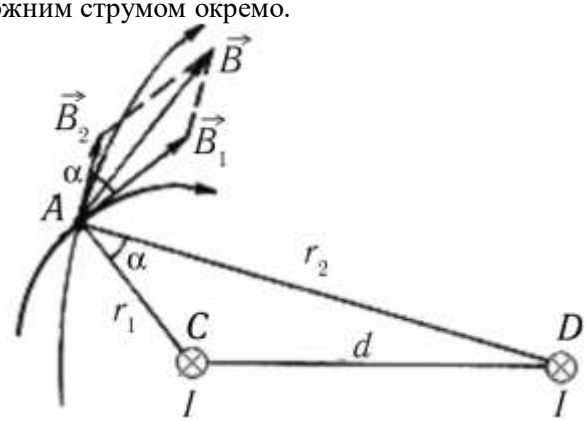
3.127. Два паралельних прямих довгих провідники, по яких в одному напрямі проходять струми I_1 = 4 А та I_2 = 6 А, розміщені на відстані d = 10 см один від одного. Визначити магнітну індукцію поля $\vec{B}$ у точці, яка відстоїть від першого провідника на r_1 = 5 см і від другого – на r_2 = 12 см.

Дано	*Розв'язання*
I_1 = 4 А I_2 = 6 А d = 10 см = 0,1 м r_1 = 5 см = $5\cdot10^{-2}$ м r_2 =12 см = 0,12·м B = ?	На рисунку літерами C і D позначені перерізи двох паралельних провідників зі струмами. Струми проходять перпендикулярно до площини рисунка від нас, такий напрям струмів позначений хрестиками. Лінії магнітної індукції являють собою концентричні кола, які охоплюють кожний струм і напрям яких визначається правилом гвинта. Виберемо такі лінії, що проходять через задану точку A. Одна з них має центр у точці C і радіус r_1 = 5 см, друга – центр у точці D і радіус r_2 = 12 см.

Вектори $\vec{B}_1$ і $\vec{B}_2$ магнітної індукції кожного струму направлені по дотичній до відповідної лінії магнітної індукції, кут між ними позначимо α.

Магнітне поле в точці A створюється двома струмами. Як і електричне поле, магнітне задовольняє принципу суперпозиції.

Вектор $\vec{B}$ магнітної індукції результуючого поля в точці A дорівнює векторній сумі магнітних індукцій $\vec{B}_1$ і $\vec{B}_2$ полів, що створюються у цій точці кожним струмом окремо.



Додамо вектори $\vec{B}_1$ і $\vec{B}_2$ за правилом паралелограма:

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 .$$

Модуль результуючого вектора, тобто довжину діагоналі паралелограма, знайдемо за теоремою косинусів

$$B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2 - 2B_1B_2\cos(180 - \alpha)} = \sqrt{B_1^2 + B_2^2 + 2B_1B_2\cos\alpha} .$$

Магнітні індукції полів кожного струму в точці A чисельно дорівнюють

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r_1}; \qquad B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r_2}.$$

Щоб визначити cos α, зауважимо, що ∠DAC = α, як кути зі взаємно перпендикулярними сторонами. Тому знов за теоремою косинусів з трикутника ACD одержимо

$$d^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos\alpha,$$

звідки

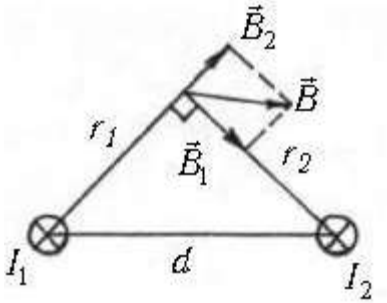
$$\cos\alpha = \frac{r_1^2 + r_2^2 - d^2}{2r_1r_2}.$$

Підставивши вирази для B_1, B_2 та cos α у рівняння, одержимо

$$B = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{2\pi}\sqrt{\frac{4^2}{\left(5\cdot 10^{-2}\right)^2} + \frac{6^2}{\left(12\cdot 10^{-2}\right)^2} + \frac{4\cdot 6}{5\cdot 12\cdot 10^{-4}}\left(\frac{5^2+12^2-10^2}{2\cdot 5\cdot 12}\right)} \approx 21{,}2 \text{ мкТл}$$

Відповідь: B = 21,2 мкТл.

3.128. Вздовж двох довгих прямих паралельних провідників, що знаходяться на відстані d = 5 см один від одного, в однаковому напрямі проходять струми сили I_1 = 5 А та I_2 = 10 А. Визначити магнітну індукцію B поля в точці, яка відстоїть на r_1 = 3 см від першого провідника і на r_2 = 4 см від другого.

Дано	*Розв'язання*
d = 5 см =0,05 м I_1 = 5 А I_2 = 10 А r_1 = 3 см = 0,03 м r_2 = 4 см = 0,04 м B = ?	

За принципом суперпозиції

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 .$$

Кут між векторами $\vec{B}_1$ і $\vec{B}_2$ і кут у вершині трикутника однакові, як кути зі взаємно перпендикулярними сторонами. Але кут у вершині прямий (так званий, єгипетський трикутник). Отже, паралелограм, за яким додаються вектори, є прямокутним. Тоді за теоремою Піфагора

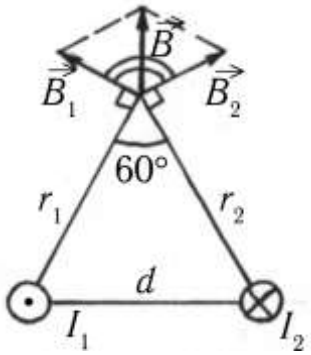
$$B^2 = B_1^2 + B_2^2, \quad B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r_1}, \quad B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r_2}, \quad B = \frac{\mu_0}{2\pi}\sqrt{\left(\frac{I_1}{r_1}\right)^2 + \left(\frac{I_2}{r_2}\right)^2} .$$

Відповідь: B = 60,1 мкТл.

3.129. Два довгих прямих провідники розміщені паралельно один одному на відстані d = 10 см. Вздовж провідників проходять струми I = 5А у протилежних напрямах. Визначити модуль та напрям індукції магнітного поля B у точці, що знаходиться на відстані r = 10 см від

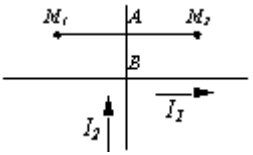
кожного з провідників.

Дано	*Розв'язання*
d = 10 см = 0,1 м $r_1 = r_2$ =10 см = 0,1 м $I_1 = I_2$ = 5 А B = ?	$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$. З умови задачі випливає, що магнітні індукції, створені кожним зі струмів у заданій точці, однакові за модулем $B_1 = B_2$. Тоді паралелограм, за яким додаються вектори $\vec{B}_1$ і $\vec{B}_2$, є ромбом з тупим кутом 120°. Користуючись властивостями ромба, визначимо довжину однієї з діагоналей ромба – модуль результуючої магнітної індукції $B = B_1,\ B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r_1}$.



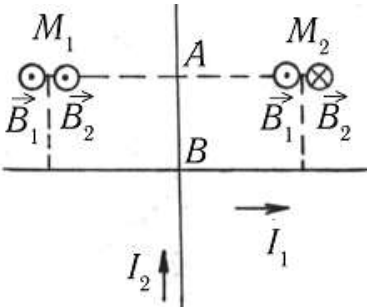
Відповідь: B = 10 мкТл.

3.130. Два довгих прямих провідники зі струмами I_1 = 2 А та I_2 = 3 А розміщені перпендикулярно один до одного в одній площині.



Визначити індукції B_{M1} та B_{M2} магнітного поля в точках M_1 та M_2, якщо відстані $AM_1 = AM_2$ = 1 см, AB = 2 см.

Дано	*Розв'язання*
I_1 = 2 А I_2 = 3 А $AM_1 = AM_2$ = 1см = 0,01м AB = 2 см = 0,02 м B_{M_1} = ? B_{M_2} = ?	За правилом гвинта визначаємо напрями векторів $\vec{B}_1$ і $\vec{B}_2$ магнітної індукції полів, що створюється окремими струмами. На рисунку кружечок з



точкою означає, що магнітна індукція спрямована від рисунка до нас, з хрестиком – від нас. У кожній з точок M_1 та M_2 $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$ за принципом суперпозиції. У скалярному вигляді

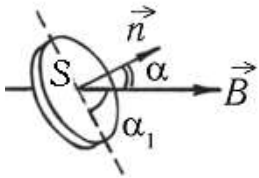
$$B_{M_1} = B_1 + B_2,\ B_{M_2} = |B_1 - B_2|,\ B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi(AB)},\ B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi(AM_1)}.$$

Відповідь: $B_{M_1} = 80$ мкТл, $B_{M_2} = 40$ мкТл.

Магнітний потік

3.131. Визначити магнітний потік Ф крізь круг радіуса R = 5 см, площина якого становить кут α_1 = 60° з напрямом ліній магнітної індукції. Магнітна індукція однорідного поля B = 20 мТл.

Дано	*Розв'язання*
B = 20 мТл = 0,02 Тл R = 5 см = 0,05 м α_1 = 60° Ф = ?	За визначенням магнітний потік $\Phi = BS \cdot \cos\alpha$, де α – кут між нормаллю до площини і напрямом магнітного поля. В умові заданий інший кут $\alpha_1 = 90 - \alpha$. Тоді $\Phi = B \cdot S \cdot \cos(90 - \alpha_1) = B\pi R^2 \sin\alpha_1$.



Відповідь: Ф = 136 мкВб.

3.132. Як зміниться потік Ф магнітної індукції крізь деяку площадку, якщо кут, що утворює нормаль до цієї площадки з напрямом ліній магнітної індукції, зменшиться від α_1 = 60° до α_2 = 30°.

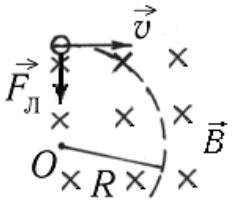
Відповідь: Зросте у $\sqrt{3}$ рази.

3.133. В однорідному магнітному полі індукції B = 0,12 Тл поміщена квадратна рамка. Її площина утворює з напрямом магнітного поля кут α = 30°. Довжина сторони рамки a = 10 см. Визначити магнітний потік Ф, що пронизує рамку.

Відповідь: Ф = 0,6 мВб.

Рух заряджених частинок в електричному і магнітному полях. Сила Лоренца

3.134. Електрон влітає в магнітне поле в напрямі, перпендикулярному до ліній магнітної індукції, зі швидкістю v = 10 Мм/с. Визначити індукцію B магнітного поля, якщо електрон описує коло радіуса R = 10 см. Заряд електрона $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, маса $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг

Дано	*Розв'язання*
v = 10 Мм/с = 10^7 м R = 10 см = 0,1 м $\frac{e}{m} = 1{,}76 \cdot 10^{11}$ Кл/кг	
B = ?	

$$F_Л = ma_{доц}, F_Л = evB, \; a_{доц} = \frac{v^2}{R}, \; B = \frac{v}{(\frac{e}{m})R}$$

Відповідь: B = 0,57 мТл.

3.135. Частинка з питомим зарядом (відношенням заряду до маси) (q/m) = 48 МКл/кг, пройшовши в однорідному електричному полі напруженості E = 8 кВ/м вздовж силової лінії шлях s = 3 см, збільшила свою швидкість від v_1 до v_2. Після цього вона потрапила в однорідне магнітне поле індукції B = 0,1 Тл перпендикулярно до його силових ліній і рухається вздовж кола радіуса R = 5 см. Якою була початкова швидкість v_1 частинки?

Дано	*Розв'язання*

(q/m) = 48 МКл/кг = $4{,}8\cdot10^7$ Кл/кг E = 8 кВ/м = 8 000 В/м $v_1 \to v_2$ s = 3 см = 0,03 м B = 0,1 Тл α = 90° R = 5 см = 0,05 м	Частинка збільшує кінетичну енергію за рахунок роботи сил електричного поля $A = \Delta W_k$
v_1 = ?	

$$Fs = Eqs = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} \qquad (1)$$

У магнітному полі на частинку діє сила Лоренца, яка за модулем

$$F = qv_2 B \sin\alpha,$$

де α – кут між напрямом швидкості та вектором магнітної індукції. Оскільки ця сила перпендикулярна до вектора швидкості, вона надає частинці доцентрового прискорення $a = \frac{v^2}{R}$, з яким ця частинка обертається вздовж кола. За умовою $\sin\alpha = 1$, тому другий закон Ньютона $F_Л = ma_{доц}$ матиме вигляд

$$qv_2B = \frac{mv_2^2}{R}. \qquad (2)$$

З рівняння (2) знаходимо v_2 та підставляємо його значення в (1), після чого маємо:

$$v_1^2 = \frac{q}{m}\left(\left(\frac{q}{m}\right)B^2R^2 - 2Es\right).$$

Відповідь: v_1 = 0,19 Мм/с.

3.136. Альфа-частинка влітає в однорідне магнітне поле індукції B = 0,5 мТл зі швидкістю v = 300 км/с. Вектор швидкості утворює кут α = 30° з напрямом ліній індукції. Визначити радіус R траєкторії альфа-частинки у цьому полі. Відношення заряду альфа-частинки до її маси q/m = 48,1·МКл/кг.

Відповідь: R = 6,2 м

3.137. Електрон рухається в однорідному магнітному полі індукції B = 7,5 мТл по колу радіуса R = 5 см. Визначити силу, що діє на електрон з боку поля.

Дано	*Розв'язання*
$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг $B = 7{,}5$ мТл $= 7{,}5 \cdot 10^{-3}$ Тл $R = 5$ см $= 0{,}05$ м	$F = \frac{mv^2}{R}$, $v = \frac{e}{m}BR$. (див. розв'язання задачі 3.134) $F = \frac{B^2e^2R}{m}$..
$F = ?$	

Відповідь: $F = 7{,}9 \cdot 10^{-14}$ Н.

3.138. Електрон з кінетичною енергією $W_k = 520$ еВ влетів в однорідне магнітне поле індукції $B = 20$ мТл перпендикулярно до ліній індукції. Визначити радіус R кола, по якому буде рухатись електрон. Заряд електрона $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, маса $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг.

Дано	*Розв'язання*
$W_k = 520$ еВ $= 8{,}32 \cdot 10^{-17}$Дж $B = 20$ мТл $= 0{,}02$ Тл $\alpha = 90°$ $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг	$R = \frac{v}{(\frac{e}{m})B}$, $\frac{mv^2}{2} = W_k$, $v = \sqrt{\frac{2W_k}{m}}$. $R = \frac{\sqrt{\frac{2W_k}{m}}}{\left(\frac{e}{m}\right)B}$.
$R = ?$	

Відповідь: $R = 3{,}8$ мм.

3.139. Протон, пройшовши прискорюючу різницю потенціалів, потрапляє до однорідного магнітного поля індукції $B = 0{,}25$ Тл перпендикулярно до ліній індукції. Радіус кола, по якому рухається протон, $R = 0{,}2$ м. Яку прискорюючу різницю потенціалів U пройшов протон? Відношення заряду протона до його маси $q/m = 96$ МКл/кг.

Дано	*Розв'язання*
$B = 0{,}25$ Тл $\alpha = 90°$ $R = 0{,}2$ м $q/m = 96 \cdot$МКл/кг $=$ $9{,}6 \cdot 10^7$ Кл/кг	$qU = \frac{mv^2}{2}$, $F_Л = ma_{доц}$, $F_Л = qvB\sin\alpha$, $a_{доц} = \frac{v^2}{R}$, $v = \frac{qBR\sin\alpha}{m}$, $qU = \frac{m}{2}(\frac{qBR\sin\alpha}{m})^2$,
$U = ?$	

$$U = \frac{1}{2}(\frac{q}{m})B^2R^2 \sin^2 \alpha .$$

Відповідь: U = 120 В.

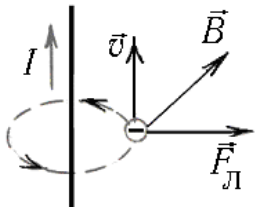
3.140. Електрон рухається по колу в однорідному магнітному полі індукції B = 4 мТл. Визначити період T обертання електрона. Заряд електрона $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, маса $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг.

Дано	*Розв'язання*
B = 4 мТл = $4 \cdot 10^{-3}$ Тл $\frac{e}{m}$ = $1{,}76 \cdot 10^{11}$ Кл/кг	$T = \frac{2\pi R}{v}, v = (\frac{e}{m})BR$, (див. розв'язання задачі 3.134) $T = \frac{2\pi}{(\frac{e}{m})B}$.
T = ?	

Відповідь: T = 9 нс.

3.141. Електрон рухається зі швидкістю v = 10 Мм/с паралельно прямолінійному провіднику на відстані r = 5 мм від нього. Яка сила F буде діяти на електрон, якщо вздовж провідника пропустити струм сили I = 6 А?

Дано	*Розв'язання*
v = 10 Мм/с = $= 10^7$ м/с $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл $\alpha = 90°$ r = 5 мм = $5 \cdot 10^{-3}$ м I = 6 А	$F_Л = evB \sin \alpha$ $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$,
F = ?	



$$F = \frac{\mu_0 Iev}{2\pi r} \sin \alpha$$

Відповідь: $F_Л = 4{,}1 \cdot 10^{-16}$ Н.

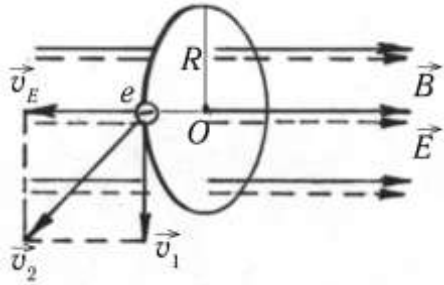
3.142. Два іони, які мають однакові заряди і однакові кінетичні енергії, але різні маси, влітають в однорідне магнітне поле. Перший іон описав коло радіуса R_1 = 3 см, а другий – R_2 = 1,5 см. Визначити відношення мас m_1/m_2 іонів.

Дано	*Розв'язання*

$q_1 = q_2$ $W_{k_1} = W_{k_2}$ $R_1 = 3$ см $R_2 = 1{,}5$ см $\frac{m_1}{m_2} = ?$	$\frac{m_1 v_1^2}{2} = W_{k_1}, v_1 = \sqrt{\frac{2W_{k_1}}{m_1}}, \frac{m_2 v_2^2}{2} = W_{k_2}, v_2 = \sqrt{\frac{2W_{k_2}}{m_2}}$ $R = \frac{vm}{qB}$ (дивись розв'язання задачі 3 134) $\frac{R_1}{R_2} = \frac{v_1 m_1}{v_2 m_2} = \frac{\sqrt{\frac{2W_{k_1}}{m_1}} m_1}{\sqrt{\frac{2W_{k_2}}{m_2}} m_2} = \sqrt{\frac{m_1}{m_2}}, \quad \frac{m_1}{m_2} = (\frac{R_1}{R_2})^2.$

Відповідь:.$m_1/m_2 = 4$.

3.143. Електрон рухається по колу радіуса $R = 10$ см в однорідному магнітному полі індукції $B = 1$ Тл. Паралельно магнітному полю збуджується однорідне електричне поле напруженості $E = 100$ В/м. За який проміжок часу t кінетична енергія електрона зросте удвічі?

Дано	*Розв'язання*
$B = 1$ Тл $R = 10$ см $= 0{,}1$ м $E = 100$ В/м $\frac{W_{k_2}}{W_{k_1}} = 2$ $t = ?$	

До появи електричного поля $\vec{E}$ (лінії напруженості вказані на рисунку штриховими лініями) електрон обертався навколо ліній магнітної індукції поля $\vec{B}$ (вони вказані суцільними лініями) по колу певного радіуса R, який пов'язаний зі швидкістю v_1 обертання співвідношенням $v_1 = \left(\frac{e}{m}\right)BR$ (див. розв'язання задачі 3.134). Після ввімкнення електричного поля на електрон почала діяти електрична сила $F = eE$ проти поля (заряд негативний). Ця сила надає прискорення $a = \frac{F}{m} = \frac{eE}{m}$. За деякий час електрон набуде також

швидкості $v_E = at$. Повна швидкість $\vec{v}_2$ електрона знаходиться за правилом додавання векторів. Її модуль за теоремою Піфагора

$$v_2^2 = v_1^2 + v_E^2.$$

За умовою $\frac{W_{k_2}}{W_{k_1}} = 2$, тобто $\frac{mv_2^2}{2} \cdot \frac{2}{mv_1^2} = 2$, або $\frac{v_2^2}{v_1^2} = 2$.

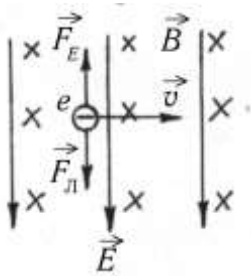
Звідси $v_2^2 = 2v_1^2$. Тепер $2v_1^2 = v_1^2 + v_E^2$,

$v_1^2 = v_E^2$, $(\frac{e}{m})^2 B^2 R^2 = (\frac{e}{m})^2 E^2 t^2$. Остаточно $t = \frac{BR}{E}$.

Відповідь: t = 1 мс.

3.144. Однорідні електричне і магнітне поля напрямлені взаємно перпендикулярно. Напруженість електричного поля E = 100 кВ/м, магнітна індукція B = 50 мТл. Електрон влітає у схрещені поля і рухається прямолінійно. Якими мають бути напрям і модуль швидкості електрона?

Дано	*Розв'язання*
E = 100 кВ/м =10^5 В/м B = 50 мТл = 0,05 Тл $\vec{v}$ = const	З того факту, що електрон рухається прямолінійно, випливає, що сила, яка діє з боку електричного поля $\vec{F}_E$, дорівнює за модулем і протилежна за напрямом лоренцовій силі, що діє з боку магнітного поля $\vec{F}_Л$.
v = ?	



На рисунку магнітне поле направлене від нас перпендикулярно до площини рисунка (позначене хрестиками), електричне – вниз у площині рисунка (позначене лініями).

$$\vec{F}_E = \vec{F}_Л, \quad eE = evB, \quad v = \frac{E}{B}.$$

Відповідь: v = 2 Мм/с.

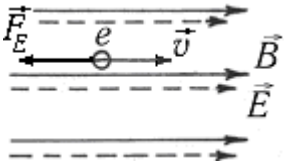
3.145. Електрон пройшов прискорюючу різницю потенціалів U = 500 В і влетів у взаємно перпендикулярні однорідні електричне і магнітне поля. Напруженість електричного поля E = 20 кВ/м. Визначити магнітну індукцію B, якщо електрон рухається у схрещених полях прямолінійно.

Дано	*Розв'язання*
E = 20 кВ/м =2·10^4 В/м U = 500 В $\frac{e}{m}$ = 1,76·10^{11} Кл/кг	$\frac{mv^2}{2} = eU$, $v = \sqrt{\frac{2eU}{m}}$, $B = \frac{E}{v}$ (див. розв'язання задачі 3.144)
B = ?	$B = E\sqrt{\frac{m}{2eU}}$

Відповідь: B = 1,5 мТл.

3.146. Однорідне електричне (E = 2 кВ/м) і магнітне (B = 3 мТл) поля співпадають за напрямом. Електрон влітає у простір, де існують поля, зі швидкістю v = 1 Мм/с. Визначити прискорення електрона у початковий момент часу, якщо напрям його швидкості: а) співпадає з загальним напрямом полів; б) перпендикулярний до напрямів полів.

Дано	*Розв'язання*
E = 2 кВ/м =2·10^3 В/м B = 3 мТл = 3·10^{-3} Тл $\frac{e}{m}$ = 1,76·10^{11} Кл/кг	а) У цьому випадку лоренцова сила
a = ?	

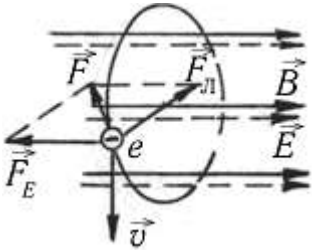


$$F_Л = evB \sin \alpha$$

відсутня, бо $\alpha = 0$.

Сила, що діє з боку електричного поля, за модулем $F_E = eE$, прискорення

$$a = \frac{F_E}{m} = (\frac{e}{m})E.$$



б) У цьому випадку діють сили з боку обох полів

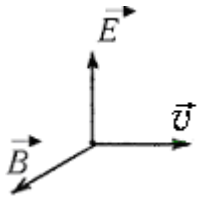
$$\vec{F} = \vec{F}_Л + \vec{F}_E,$$

або за модулем $F^2 = F_Л^2 + F_E^2$

$$a = \frac{F}{m} = (\frac{e}{m})\sqrt{v^2B^2 + E^2}.$$

Відповідь: а) a = 3,52·10^{14} м/с^2, б) a = 6,35·10^{14} м/с^2.

3.147. Пучок електронів влітає у простір, де збуджені однорідне електричне поле (E = 1 кВ/м) і перпендикулярно до нього магнітне поле (B = 1 мТл). Швидкість електронів постійна і направлена перпендикулярно до векторів $\vec{E}$ і $\vec{B}$. Визначити швидкість v руху електронів. Як будуть рухатись електрони, якщо виключити: а) електричне поле; б) магнітне поле?



Відповідь: $v = E/B$ = 1 Мм/с; уздовж а) кола; б) параболи.

Електромагнітна індукція

3.148. В однорідному магнітному полі, індукція якого B = 0,1 Тл, розміщений виток площею S = 50 см^2. Перпендикуляр до площини витка утворює з напрямом магнітного поля кут α = 60°.Чому дорівнює середнє значення ЕРС індукції, що виникає у витку під час вимкнення поля протягом Δt = 0,02 с?

Дано	*Розв'язання*
B = 0,1 Тл S = 50 см^2 = 5·10^{-3} м^2 α = 60° Δt = 0,02 с	$\lvert\langle\varepsilon_i\rangle\rvert = \dfrac{\Delta\Phi}{\Delta t}$, $\Delta\Phi = \Phi_0$, $\Phi_0 = BS\cos\alpha$, $\lvert\langle\varepsilon_i\rangle\rvert = \dfrac{BS\cos\alpha}{\Delta t}$.
$\langle\varepsilon_i\rangle$ = ?	

Відповідь: $\langle\varepsilon_i\rangle$= 12,5 мВ.

3.149. Провідний контур, який поміщено в однорідне магнітне поле, може деформуватися. Внаслідок цього магнітний потік крізь площу, що охоплюється контуром, змінився на $\Delta\Phi$ = 60 мВб за проміжок часу Δt = 15 мс. Визначити ЕРС індукції, що виникла у контурі.

Відповідь: ε_i = 4 В.

3.150. Виток, площа якого S = 2 см^2, розміщений перпендикулярно до ліній магнітної індукції поля. Чому дорівнює індукована у витку ЕРС, якщо за час t = 0,05 с магнітна індукція B рівномірно убуває від 0,5 до 0,1 Тл?

Відповідь: ε_i = 1,6 мВ.

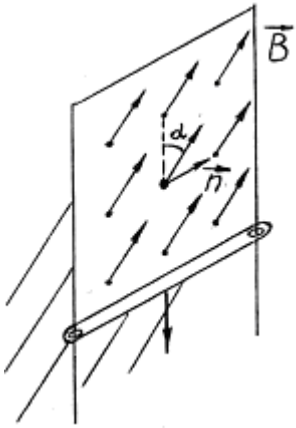
3.151. Який магнітний потік Ф пронизував кожний виток котушки, яка містить N = 1 000 витків, якщо при рівномірному зникненні магнітного поля протягом часу Δt = 0,1 с у котушці індукується ЕРС ε = 10 В?

Відповідь: Ф = 1мВб.

3.152. Провідник завдовжки l = 1 м рухається в однорідному магнітному полі зі швидкістю v = 4 м/с перпендикулярно до ліній індукції. При цьому на його кінцях виникає різниця потенціалів U = 100 мВ. Чому дорівнює магнітна індукція B поля, в якому рухається провідник?

Відповідь: B =25 мТл.

3.153. На розміщений вертикально провідний *П*-подібний контур насаджена перемичка, що може рухатись під дією сили тяжіння. Контур поміщено в однорідне магнітне поле, лінії індукції якого утворюють кут α = 30° з вертикаллю. Визначити електрорушійну силу індукції ε_i, що виникла в контурі через t = 5 с після початку руху перемички. Довжина перемички l = 30 см, магнітна індукція B = 6,5 мТл. Дією магнітного поля на провідник з індукційним струмом нехтувати.



Дано	*Розв'язання*
$\alpha = 30°$ $t = 5$ с $l = 30$ см $=0{,}3$ м $B = 6{,}5$ мТл $= 6{,}5\cdot10^{-3}$Тл $a = g$	Потік магнітної індукції зростає за рахунок збільшення площі S контуру, магнітна індукція при цьому залишається незмінною, тобто маємо $\Phi = BS\cos(90-\alpha) = BS\sin\alpha$ де S – площа контуру, яка зростає з часом t за законом $S = l\dfrac{at^2}{2}$.
$\varepsilon_i = ?$	

ЕРС індукції (за абсолютним значенням).знайдемо як похідну за часом від магнітного потоку

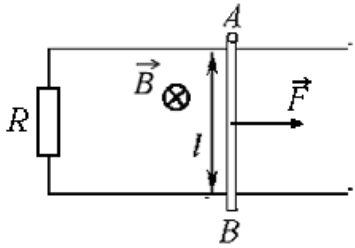
$$\varepsilon_i = \Phi' = Blat\sin\alpha$$

Оскільки перемичка вільно падає, $a = g$, тому остаточно маємо

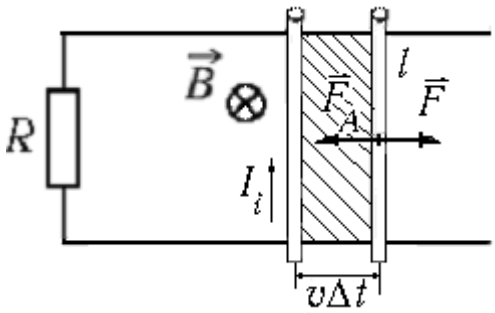
$$\varepsilon_i = Blgt\sin\alpha.$$

Відповідь: $\varepsilon_i = 47{,}82$ мВ.

3.154. Замкнений контур складається з провідних паралельних горизонтальних рейок, вздовж яких може переміщуватися без тертя металевий стрижень завдовжки l. Контур замикається резистором опору R і розміщується у вертикальному однорідному магнітному полі індукції B. Якою буде усталена швидкість стрижня, якщо до нього прикласти постійну силу F ?



Дано	*Розв'язання*
l B R F	Під дією сили F стрижень рухається управо і набуває прискорення, його швидкість зростає. Завдяки цьому зростає площа, обмежена контуром, і,
$v = ?$	



відповідно, зростає магнітний потік крізь площу: $\Delta\Phi = B\Delta S = Blv\Delta t$. На рисунку площа ΔS заштрихована. В контурі виникає ЕРС індукції $|\varepsilon_i| = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = Blv$ і індукційний струм $I_i = \frac{|\varepsilon_i|}{R} = \frac{Blv}{R}$. За правилом Ленца індукційний струм буде мати такий напрям, що його магнітне поле перешкоджає зростанню магнітного потоку, тобто в даному випадку проти ходу стрілки годинника. На стрижень зі струмом I_i з боку магнітного поля починає діяти амперова сила

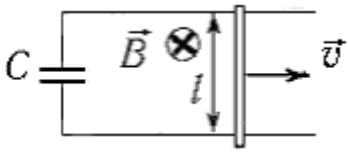
$$F_A = I_i Bl = \frac{B^2 l^2 v}{R},$$

яка за правилом лівої руки спрямована вліво. Вона гальмує рух стрижня, що є проявом правила Ленца – індукційний струм протидіє причині, яка викликала його появу. У початковий момент часу $F_A = 0$ і прискорення стрижня максимальне. Поступово амперова сила зростає (з формули видно, що вона є прямо пропорційною швидкості) до тих пір, поки не стане рівною прикладеній силі. Після цього прискорення стане рівним нулю, а швидкість руху – постійною. З умови $F = F_A$, або $F = \frac{B^2 l^2 v}{R}$ визначаємо швидкість усталеного рівномірного руху

$$v = \frac{FR}{B^2 l^2}.$$

Відповідь: $v = \frac{FR}{B^2 l^2}$.

3.155. Металевий стрижень завдовжки $l = 10$ см ковзає з постійною швидкістю $v = 1$ м/с вздовж провідних рейок у магнітному полі індукції $B = 0{,}01$ Тл, перпендикулярному до площини рейок. Кінці рейок замкнені на конденсатор ємності $C = 1$ мкФ. Визначити заряд на конденсаторі.

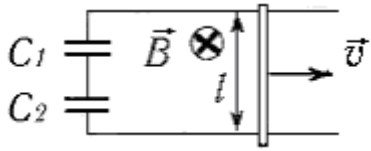


Дано	*Розв'язання*

l = 10 см = 0,1 м v =1 м/с C = 1 мкФ = 10^{-6} Ф B = 0,01 Тл	$\varepsilon_i = U_C$, $\varepsilon_i = vBl$, $U_C = \frac{q}{C}$, $q = BlvC$.
q = ?	

Відповідь: q = 1 нКл.

3.156. Замкнений контур складається з провідних паралельних горизонтальних рейок, вздовж яких може переміщуватися без тертя металевий стрижень завдовжки l = 0,2 м. Між лівими кінцями рейок включені послідовно два конденсатори, причому ємність C_2 другого конденсатора у n = 1,5 рази більша ємності C_1 першого. Контур розміщується у вертикальному однорідному магнітному полі.. Стрижень переміщують з постійною швидкістю v = 1 м/с. Визначити індукцію B поля, якщо на другому конденсаторі виникає напруга U_2 = 0,5 мВ. Опором провідників нехтувати.



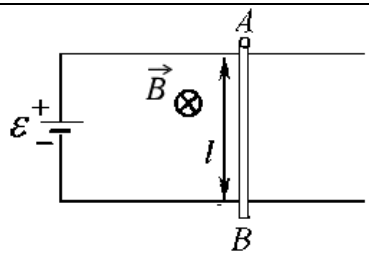
Дано	*Розв'язання*
l = 0,2 м v =1 м/с $\frac{C_2}{C_1} = n = 1,5$ U_2 = 0,5 мВ = 5·10 $^{-4}$ В	Напруга, що виникає на кінцях стрижня, $U = vBl$. Під такою напругою знаходяться два конденсатори, що з'єднані послідовно. Як відомо, при послідовному з'єднанні заряд на кожному з конденсаторів однаковий. $U = U_1 + U_2 = \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2} = q\frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2} = \frac{q}{C_2}(1 + \frac{C_2}{C_1})$
B = ?	

Але $\frac{q}{C_2} = U_2$, тоді

$$U = U_2\left(1 + \frac{C_2}{C_1}\right) = U_2(1+n),\ B = \frac{U}{vl}.\ B = \frac{U_2}{vl}(1+n)$$

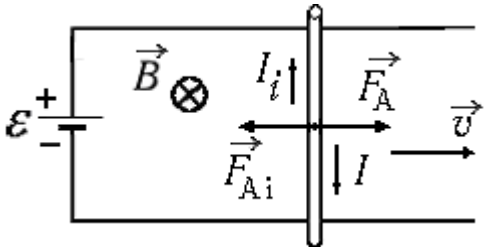
Відповідь: B = 6,25 мТл.

3.157. Замкнений контур складається з провідних паралельних горизонтальних



рейок, вздовж яких може переміщуватися без тертя металевий стрижень завдовжки l = 20 см. Кінці рейок замкнені на джерело струму з ЕРС ε = 1,2 В. Контур розміщується у вертикальному однорідному магнітному полі індукції B = 0,12 Тл. Якою буде усталена швидкість v стрижня?

Дано	*Розв'язання*
l = 20см = 0,2 м B = 0,12 Тл ε = 1,2 В	
v = ?	



Крізь стрижень проходить струм від джерела $I = \dfrac{\varepsilon}{R+r}$, де R та r – опори рейок і стрижня та внутрішній опір джерела, відповідно. На стрижень зі струмом з боку магнітного поля діє амперова сила $F_A = IBl = \dfrac{\varepsilon}{R+r}Bl$. Вона буде рухати стрижень направо та прискорювати його. Внаслідок зміни магнітного потоку крізь площу, охоплену контуром, виникне індукційний струм $I_i = \dfrac{\varepsilon_i}{R+r}$. ЕРС індукції, що виникає в стрижні, $\varepsilon_i = Bvl$ (див. розв'язання задачі). Індукційний струм за правилом Ленца направлений проти ходу годинникової стрілки. З боку магнітного поля на стрижень з індукційним струмом діє інша амперова сила

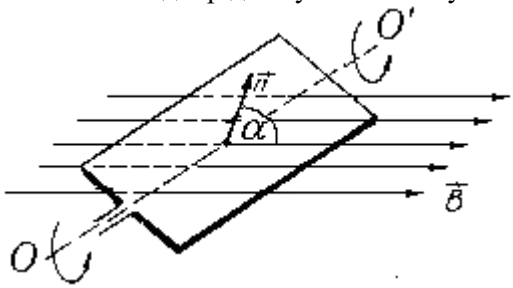
$$F_{Ai} = I_i Bl = \frac{\varepsilon_i}{R+r}Bl = \frac{vB^2l^2}{R+r},$$

вона направлена наліво. Коли сили зрівняються за модулем, прискорення зникне і рух стрижня буде рівномірним зі швидкістю v.

$$F_A = F_{Ai}, \qquad \frac{\varepsilon}{R+r}Bl = \frac{vB^2l^2}{R+r}, \qquad v = \frac{\varepsilon}{Bl}.$$

Відповідь: v = 50 м/с.

3.158. Плоский прямокутний контур (рамка) обертається з частотою $n = 20$ с$^{-1}$ навколо осі OO' в однорідному магнітному полі, індукція якого $B = 6$ мТл. Вісь обертання лежить у площині рамки і перпендикулярна до вектора магнітної індукції.



Площа рамки $S = 400$ см^2, рамка складається з $N = 200$ витків дроту. Визначити максимальний магнітний потік Φ_{max} крізь площу рамки і максимальну ЕРС індукції $\varepsilon_{i\ max}$, яка виникає у рамці під час її обертання.

Дано	*Розв'язання*
$n = 20$ с$^{-1}$ $B = 6$ мТл $= 6\cdot10^{-3}$ Тл $S = 400$ см$^2 = 0{,}04$ м^2 $N = 200$	Проведемо вектор нормалі $\vec{n}$ до площини рамки і позначимо через α кут між векторами $\vec{B}$ і $\vec{n}$. Виберемо початок відліку часу t так, щоб при $t = 0$ кут α дорівнював би нулю.
$\Phi_{max} = ?$ $\varepsilon_{i\,max} = ?$	

Якщо кутова швидкість обертання рамки $\omega = 2\pi n$ постійна, то кут α у довільний момент часу буде дорівнювати $\alpha = \omega t$.

Потік магнітної індукції крізь площину рамки буде змінюватись від максимального значення $\Phi_{max} = BS = 0{,}24$ мВб, коли площина перпендикулярна до поля, до $\Phi = 0$, коли площина паралельна полю. У разі будь-якого кута α: $\Phi = BS\cos\alpha = BS\cos\omega t$.

Підставивши значення потоку Φ в основний закон електромагнітної індукції $\varepsilon_i = |\Phi'|$ та обчисливши похідну за часом, знайдемо вираз для ЕРС індукції (за модулем), що виникає в рамці

$$\varepsilon_i = |\Phi'| = BS\omega\sin\omega t.$$

Таким чином, ЕРС змінюється з часом за синусоїдним законом. Максимальне значення ЕРС, яке настає для $\sin\omega t = 1$, дорівнює $\varepsilon_{i\,max} = BS\omega$. Тому можна записати

$$\varepsilon_i = \varepsilon_{i\,max}\sin\omega t.$$

Оскільки рамка складається з N послідовно з'єднаних витків, результуюча ЕРС у рамці дорівнює сумі ЕРС, що виникають у кожному витку

$$\varepsilon_i = BSN\omega \sin \omega t = 2\pi nBSN \sin 2\pi nt.$$

$$\varepsilon_{i\,\max} = 2\pi nBSN.$$

Відповідь: $\Phi_{\max}$ = 0,24 мВб, $\varepsilon_{i\,\max}$ = 6 В.

3.159. Рамка, площа якої S = 16 см^2, обертається в однорідному магнітному полі з частотою n = 2 с$^{-1}$. Вісь обертання лежить у площині рамки і перпендикулярна до напряму магнітного поля. Магнітна індукція B = 0,1 Тл. Встановити залежність магнітного потоку Ф, який пронизує рамку, від часу, якщо у початковий момент часу значення магнітного потоку було максимальним.

Відповідь: $\Phi(t) = 0{,}16 \cos 12{,}56\, t$ (мВб).

3.160. Дротяна котушка, яка має N = 100 витків діаметра d = 4 см, міститься в магнітному полі індукції B = 1 Тл, паралельному її осі. Вісь котушки рівномірно повертається на кут α = 180° за час t = 0,2 с. Визначити найбільше значення ЕРС індукції (за модулем), що виникає у котушці.

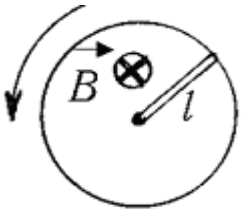
Дано	*Розв'язання*
$N = 100$ $d = 4$ см $= 4\cdot10^{-2}$ м $B = 1$ Тл $\alpha = 180° = \pi$ рад $t = 0{,}2$ с	$\varepsilon_{\max} = NBS\omega,\ S = \dfrac{\pi d^2}{4},\ \omega = \dfrac{\alpha}{t}.$ $\varepsilon_{\max} = \dfrac{NB\pi d^2\alpha}{4t}.$
$\varepsilon_{\max} = ?$	

Відповідь: $\varepsilon_{\max}$ = 1,97 В.

3.161. Як зміниться максимальна ЕРС індукції в рамці, яка обертається в однорідному магнітному полі, якщо частота n обертання збільшиться у k = 5 разів?

Відповідь: Збільшиться у k = 5 разів.

3.162. В однорідному вертикальному магнітному полі індукції B = 0,5 мТл обертається горизонтальний металевий стрижень



завдовжки l = 0,2 м навколо вертикальної осі, що проходить через один з його кінців. З якою частотою n слід обертати стрижень, щоб між його кінцями виникла різниця потенціалів U = 0,3 мВ?

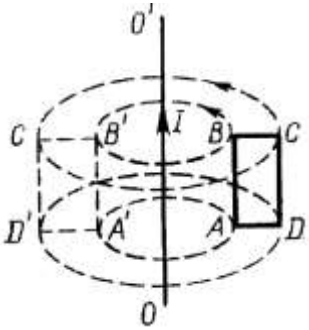
Дано	*Розв'язання*
l = 0,2 м B = 0,5 мТл = $5\cdot10^{-4}$ Тл U = 0,3 мВ = $3\cdot10^{-4}$ В n = ?	Під час кожного оберту стрижня магнітний потік, який він перетинає, $\Phi = BS = B\pi l^2$. Якщо стрижень робить n обертів за секунду, потік, що перетинається за секунду, $\Phi_1 = B\pi l^2 n$.

Зміна потоку за одиницю часу, тобто ЕРС індукції, що дорівнює різниці потенціалів на кінцях стрижня,

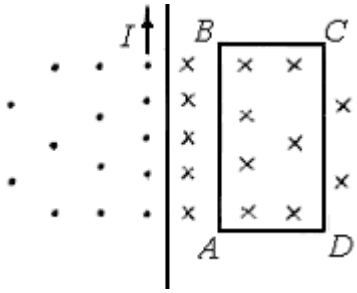
$$U = \varepsilon_i = = B\pi l^2 n, \text{ звідки } n = U/(B\pi\, l^2).$$

Відповідь: $n = 5\ \text{с}^{-1}$.

3.163. Провідна рамка *ABCD* розміщена в одній площині з довгим прямим провідником зі струмом. Чи буде виникати у рамці індукційний струм, якщо рамку: а) обертати відносно нерухомого провідника, як вказано на рисунку; б) обертати навколо сторони *AB*; в) обертати навколо сторони *BC*; г) переміщувати поступально у вертикальному напрямі; д) переміщувати поступально у горизонтальному напрямі?



Дано	*Розв'язання*
$B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$ *ABCD* ε_i = ?	Лініями магнітної індукції в даному випадку є концентричні кола, які лежать у площині, перпендикулярній до провідника зі струмом. На рисунку



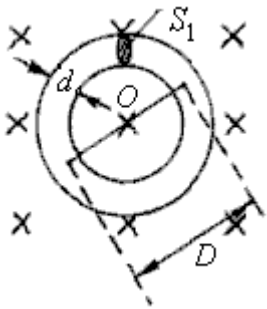
зображений переріз магнітного поля площиною, в якій лежить провідник. Справа від провідника лінії магнітної індукції напрямлені від нас перпендикулярно до площини рисунка (хрестики), зліва – до нас (точки).

Магнітна індукція убуває з відстанню r від провідника за формулою $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$, тобто магнітне поле, що створюється навколо провідника зі струмом, є неоднорідним. Густина ліній магнітної індукції, яка пропорційна модулю вектора $\vec{B}$, теж убуває в залежності від відстані до провідника (див. рисунок).

а) Під час обертання навколо провідника густина ліній, що пронизують площину рамки, не змінюється, магнітний потік крізь рамку залишається сталим, ЕРС індукції не виникає. б) Під час обертання навколо AB рамка переходить з позиції, де магнітне поле слабке, у позицію, де воно сильніше, і навпаки, магнітний потік змінюється, ЕРС у рамці виникає. в) Під час обертання навколо BC густина поля не змінюється, але внаслідок обертання рамки потік змінюється від максимального, коли рамка лежить у площині провідника, до нуля, коли рамка перпендикулярна до площини провідника, і знов до максимального потоку в інший бік, ЕРС виникає. г) Потік крізь рамку не змінюється, ЕРС відсутня. д) Потік змінюється, ЕРС індукції виникає.

Відповідь: а), г) Не буде; б), в), д) буде.

3.164. Алюмінієве кільце розміщене у магнітному полі так, що його площина перпендикулярна до вектора магнітної індукції. Діаметр кільця D = 25 см, діаметр дроту d = 2 мм. Визначити швидкість зміни магнітної індукції з часом, якщо при цьому в кільці виникає індукційний струм сили I = 12 А.

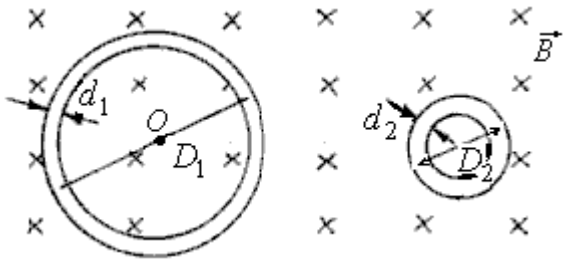
Дано	*Розв'язання*
$\rho = 2{,}7\cdot10^{-8}$ Ом·м D = 25 см = 0,25 м d = 2 мм = $2\cdot10^{-3}$ м I = 12 А $\frac{\Delta B}{\Delta t} = ?$	$I = \frac{\varepsilon_i}{R}$, $\varepsilon_i = \left\lvert\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right\rvert$, 

$$\left|\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right| = \left|\frac{\Delta B}{\Delta t}\right| S\ S = \frac{\pi D^2}{4}, \quad R = \rho\frac{l}{S_1},\ l = \pi D, \quad S_1 = \frac{\pi d^2}{4},$$

$$\left|\frac{\Delta B}{\Delta t}\right| = \frac{16\rho l}{\pi D d^2}.$$

Відповідь: $\left\|\frac{\Delta B}{\Delta t}\right\|$ = 1,65 Тл/с.

3.165. Два дротяних кільця різних діаметрів розміщені в одній площині перпендикулярно до однорідного магнітного поля, індукція якого рівномірно зростає з часом. У якому кільці індукується більший струм, якщо маси кілець однакові і виготовлені вони з однакового матеріалу?

Дано	*Розв'язання*
$m_1 = m_2$ $\rho_1 = \rho_2$ $\frac{\Delta B}{\Delta t}$ = const	
$\frac{I_1}{I_2}$ = ?	

$$I = \frac{\varepsilon_i}{R};$$

$$\varepsilon_i = \left|\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right| = \left|\frac{\Delta B}{\Delta t}\right| S;\ S = \frac{\pi D^2}{4};\ R = \rho\frac{l}{S'} = \frac{4\rho D}{d^2};\ I = \left|\frac{\Delta B}{\Delta t}\right|\frac{\pi D d^2}{16\rho};$$

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{D_1 d_1^2}{D_2 d_2^2};$$

$$m = \rho V; V = \frac{\pi d^2}{4}\pi D;\ m_1 = m_2;$$

$$\frac{\rho_1\pi^2 d_1^2 D_1}{4} = \frac{\rho_2\pi^2 d_2^2 D_2}{4};\ d_1^2 D_1 = d_2^2 D_2;\ \frac{I_1}{I_2} = \frac{D_1 d_1^2}{D_2 d_2^2} = 1.$$

Відповідь: Струми однакові.

3.166. Замкнений провідний контур, опір якого R = 3 Ом, міститься в магнітному полі. Внаслідок зміни індукції цього поля магнітний потік Ф крізь площу, охоплену контуром, зріс від

0,2 мВб до 0,5 мВб. Який заряд q (за модулем) пройшов крізь поперечний переріз провідника?

Дано	*Розв'язання*
R = 3 Ом Φ_1 = 0,2 мВб = $2\cdot10^{-4}$ Вб Φ_2 = 0,5 мВб = $5\cdot10^{-4}$ Вб Δq = ?	$\Delta q = I\Delta t$, $I = \dfrac{\varepsilon_i}{R}$, $\varepsilon_i = \left\lvert\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right\rvert$, $\Delta q = \dfrac{\left\lvert\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right\rvert\Delta t}{R} = \dfrac{\lvert\Delta\Phi\rvert}{R} = \dfrac{\lvert\Phi_2 - \Phi_1\rvert}{R}$.

Відповідь: Δq = 0,1 мКл.

3.167. В однорідному магнітному полі індукції B = 0,38 Тл міститься плоский виток площею S = 10 см^2, який розміщено перпендикулярно до ліній магнітної індукції. Опір витка R = 1 Ом. Який заряд q пройде вздовж витка, якщо поле зникне? Який струм виникне у витку, якщо поле буде спадати з постійною швидкістю $\Delta B/\Delta t$ = 0,06 Тл/с?

Відповідь: q = 0,38 мКл, I = 60 мкА.

3.168. Провідна рамка, площа якої S = 5 см^2, замкнена на гальванометр опору R = 10 кОм і міститься в однорідному магнітному полі індукції B = 10 мТл, причому лінії магнітної індукції перпендикулярні до площини рамки. Який заряд q пройде вздовж кола гальванометра, якщо напрям магнітного поля зміниться на протилежний?

Дано	*Розв'язання*
S = 5 см^2 = $5\cdot10^{-4}$ м^2 R = 10 кОм = 10^4 Ом B = 10 мТл = 10^{-2} Тл q = ?	$q = \dfrac{\Phi_1 - \Phi_2}{R}$, $\Phi = BS\cos\alpha$, $\alpha_1 = 0$, $\cos\alpha_1 = 1$, $\Phi_1 = BS$, $\alpha_2 = \pi$, $\cos\alpha_2 = -1$, $\Phi_2 = -BS$,

$$\Phi_1 - \Phi_2 = 2BS,\ q = \frac{2BS}{R}.$$

Відповідь: q= 1 нКл.

Індуктивність контуру. Самоіндукція

3.169. З провідником, по якому проходить струм $I = 300$ мА, зв'язаний магнітний потік $\Psi = 15$ мВб. Чому дорівнює індуктивність L цього провідника? Вказати розмірність цієї величини.

Дано	*Розв'язання*
$I = 300$ мА $= 0{,}3$ А $\Psi = 15$ мВб $= 0{,}015$ Вб $L = ?$	$\Psi = LI$, $\quad L = \dfrac{\Psi}{I}$ Визначити розмірність фізичної величини означає виразити її одиницю вимірювання через основні одиниці вимірювання в системі СІ м, кг, с, А.

$$[L] = \left[\frac{\Psi}{I}\right],\ \Psi = BS,\ [\Psi] = [B][S],\ B = \frac{M_{max}}{IS},\ [B] = \frac{\text{Н}\cdot\text{м}}{\text{А}\cdot\text{м}^2} = \frac{\text{кг}}{\text{А}\cdot\text{с}^2},$$

$$[S] = \text{м}^2,\ [I] = \text{А},\ [L] = \frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2}{\text{А}^2\cdot\text{с}^2}.$$

Відповідь: $L = 0{,}05$ Гн, $[L] = \text{кг}\cdot\text{м}^2/\ \text{А}^2\text{с}^2$.

3.170. Сила струму, що проходить крізь обмотку довгого соленоїда $I = 5$ А. Індуктивність соленоїда $L = 6$ мГн, кількість витків $N = 750$, площа поперечного перерізу соленоїда $S = 20$ см^2. Визначити магнітну індукцію поля всередині соленоїда.

Дано	*Розв'язання*
$I = 5$ А $L = 6$ мГн $= 6\cdot10^{-3}$ Гн $N = 750$ $S = 20$ см^2 $= 2\cdot10^{-3}$ м^2 $B = ?$	$\Psi = LI$, $\Psi = NBS$, $B = \dfrac{\Psi}{NS} = \dfrac{LI}{NS}$. ***Відповідь:*** $B = 20$ мТл.

3.171. Визначити індуктивність L провідника, в якому ЕРС самоіндукції $\varepsilon_s = 1{,}5$ В виникла під час рівномірної зміни струму на $\Delta I = 30$ мА за час $\Delta t = 2$ с.

Відповідь: $L = 0{,}1$ Гн.

3.172.. Чому дорівнює індуктивність L довгого соленоїда з

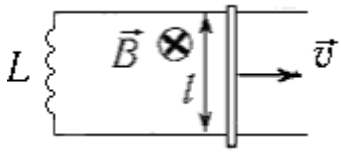
N = 5 000 витками, у кожному з яких під час рівномірного спадання електричного струму зі швидкістю $\frac{\Delta I}{\Delta t}$ = 0,2 А/с виникає ЕРС самоіндукції ε_s = 0.02 В?

Відповідь: L = 0,5 Гн.

3.173. Стрижень завдовжки l = 10 см ковзає з постійною швидкістю v = 1м/с по рейках, що містяться в магнітному полі індукції B = 20 мТл, перпендикулярному до площини рейок. Кінці рейок замкнуті на дротяну котушку, індуктивність якої

L = 2 мГн. Якою є швидкість зміни струму $\frac{\Delta I}{\Delta t}$ в котушці? Опором котушки, стрижня і рейок нехтувати.

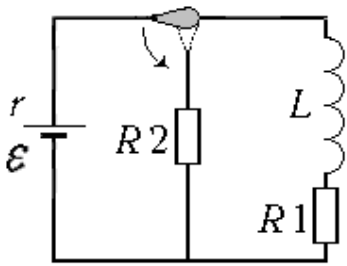
Дано	*Розв'язання*
l = 10 см = 0,1 м v = 1м/с B = 20 мТл = 0,02 Тл L = 2 мГн = $2\cdot10^{-3}$ Гн $\frac{\Delta I}{\Delta t}$ = ?	Оскільки на рейках, котушці і стрижні падіння напруги немає, ЕРС індукції, що виникає в рухомому стрижні, за модулем дорівнює ЕРС самоіндукції, що виникає в котушці внаслідок зміни струму:



$$\varepsilon_I = \varepsilon_s,\ Blv = L\left|\frac{\Delta I}{\Delta t}\right|,\ \text{звідки}\ \left|\frac{\Delta I}{\Delta t}\right| = \frac{Blv}{L}$$

Відповідь: $\frac{\Delta I}{\Delta t}$ = 1 А/с.

3.174. У колі, зображеному на рисунку, при замкнутому ключі в дротяній котушці встановлюється деякий струм. Якщо повернути ключ на резистор R_2 і відключити джерело струму, то в колі, що утворюється, ще деякий час буде проходити струм, який убуватиме з часом. Індуктивність котушки L = 2 мГн, опір котушки R_1 = 5 Ом, опір резистора R_2 = 1,5 Ом, ЕРС джерела



ε = 12 В, його внутрішній опір
r = 0,1 Ом. Який заряд q проходить крізь резистор R_2 після перемикання ключа?

Дано	*Розв'язання*
L = 2 мГн = $2\cdot10^{-3}$ Гн R_1 = 5 Ом R_2 = 1,5 Ом ε = 12 В r = 0,1 Ом	$q = \dfrac{\Psi_1 - \Psi_2}{R_1 + R_2}$, $\Psi_2 = 0$, $q = \dfrac{\Psi_1}{R_1 + R_2}$, $\Psi_1 = LI$, $I = \dfrac{\varepsilon}{R_1 + r}$,
q = ?	$q = \dfrac{L\varepsilon}{(R_1 + R_2)(R_1 + r)}$.

Відповідь: q = 724 мкКл.

3.175. Струм, що змінюється за законом $I = 3\cos 2t$ (час – у секундах, струм – у амперах), проходить крізь котушку індуктивністю L = 40 мГн. Визначити закон зміни і максимальне значення ЕРС самоіндукції.

Дано	*Розв'язання*
$I = 3\cos 2t$ L = 40 мГн = $4\cdot10^{-2}$ Гн	$\varepsilon_s = -LI'$, $I' = -6\sin 2t$, $\varepsilon_s = 0{,}24\sin 2t$, В
ε_s = ? ε_{smax} = ?	ε_{smax} = 0,24 В.

Відповідь: $\varepsilon_s = 0{,}24\sin 2t$, В, ε_{smax} = 0,24 В.

3.176. Постійний струм проходить через котушку і створює магнітне поле з енергією W = 50 мДж. Магнітний потік крізь котушку (потокозчеплення самоіндукції) Ψ = 0,1 Вб. Визначити силу струму I.

Дано	*Розв'язання*
W = 50 мДж = $5\cdot10^{-2}$Дж Ψ = 0,1 Вб	$\Psi = LI$, $W = \dfrac{LI^2}{2}$, $I = \dfrac{2W}{\Psi}$.
I = ?	

Відповідь: I = 1 А.

4 розділ

КОЛИВАННЯ І ХВИЛІ

4.1. Механічні коливання і хвилі

Основні закони і формули

- Якщо тіло здійснює гармонічні коливання вздовж осі координат *Ox* навколо положення рівноваги, що прийняте за початок координат, то координата тіла змінюється з часом за законом косинуса (або синуса)

$$x = x_m \cos(\omega t + \varphi_0),$$

де x – зміщення тіла від положення рівноваги ву момент часу t, x_m– амплітуда коливань, ω – кругова (циклічна частота), $\omega t + \varphi_0$ – фаза коливань у момент часу t, φ_0 – початкова фаза. (У подальшому вважаємо, що коливальний рух завдається законом косинуса, якщо інше не обумовлено).

- Фаза коливань звичайно записується в радіанах. Найменування одиниці (рад) не вказується, радіан не має розмірності. Співвідношення між одиницями кута

$$2\pi \text{ рад} = 6{,}28 \text{ рад} = 360°,\ 1 \text{ рад} = 57{,}3°.$$

- Амплітуда гармонічних коливань – модуль найбільшого зміщення x_m тіла від положення рівноваги, тобто завжди є додатною величиною.
- Період T, частота ν, кругова (циклічна) частота ω коливань

$$\nu = \frac{1}{T}; \qquad \omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}.$$

- Проекції швидкості та прискорення тіла, що здійснює гармонічні коливання, на вісь *Ox* (для спрощення індекс (x) опущений)

$$v = x' = -\omega x_m \sin(\omega t + \varphi_0);$$
$$a = v' = -\omega^2 x_m \cos(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 x.$$

- Амплітуда коливань швидкості – максимальне за модулем значення швидкості $v_m = \omega x_m$, амплітуда прискорення $a_m = \omega^2 x_m$.

- Сила, що діє на тіло (проекція на вісь Ox) під час гармонічних коливань

$$F = ma = -m\omega^2 x_m \cos(\omega t + \varphi_0) = -m\omega^2 x = -kx,$$

амплітуда сили

$$F_m = m\omega^2 x_m.$$

- Повна механічна енергія гармонічного коливання залишається сталою

$$E = E_k + E_p = \frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \frac{kx_m^2}{2} = \frac{mv_m^2}{2}.$$

- Період коливань математичного маятника

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

- Період вільних коливань вантажу на пружині

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

- Механічна (пружна) хвиля характеризується довжиною хвилі λ, швидкістю хвилі v та періодом коливань T

$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda\nu.$$

- Різниця фаз коливань двох точок хвилі, відстань між якими l

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi l}{\lambda}.$$

Кінематика гармонічних коливань.

4.1. Точка здійснює гармонічні коливання за законом $x = 0{,}03 \cos((\pi/8)t + \pi/4)$ м. Визначити: 1) амплітуду коливань x_m; 2) циклічну частоту ω; 3) частоту коливань ν; 4) період T; 5) початкову фазу φ_0; 6) прискорення a через час $t_1 = 5$ с після початку руху.

Дано	*Розв'язання*
$x = 0{,}03\cos((\pi/8)t + \pi/4)$, м $t_1 = 5$ с	$x = x_m \cos(\omega t + \varphi_0)$,
$x_m = ?$ $\omega = ?$ $\nu = ?$ $T = ?$ $\varphi_0 = ?$ $a(t_1) = ?$	$x_m = 0{,}03$ м,

$$\omega = \frac{\pi}{8}\,\text{с}^{-1},\ \nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{16}\,\text{Гц},$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 16\ \text{с},\ \varphi_0 = \frac{\pi}{4},\ a = -x_m\omega^2\cos(\omega t + \varphi_0),$$

$$a(t_1) = -x_m\omega^2\cos(\omega t_1 + \varphi_0) = -0{,}03\frac{\pi^2}{64}\cos(\frac{\pi}{8}\cdot 5 + \frac{\pi}{4})\ \text{м/с}^2,$$

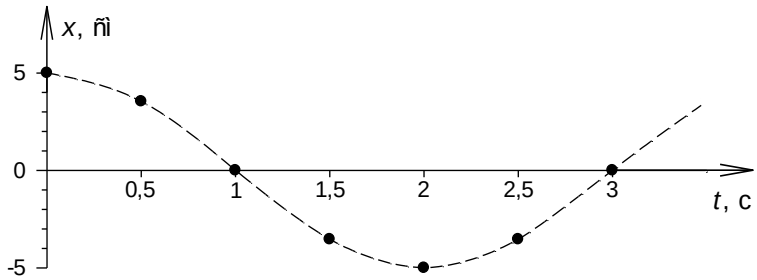
$$\cos(\frac{5\pi}{8} + \frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{7\pi}{8}) = \cos(\pi - \frac{\pi}{8}) = -\cos\frac{\pi}{8} = -\cos 22{,}5^\circ = -0{,}92.$$

Відповідь: $x_m = 0{,}03$ м, $\omega = \frac{\pi}{8}\,\text{с}^{-1}$, $\nu = \frac{1}{16}$ Гц, $T = 16$ с, $\varphi_0 = \frac{\pi}{4}$, $a(5) = 0{,}0043$ м/с^2.

4.2. Амплітуда гармонічних коливань точки $x_m = 5$ см, період T = 4 с, початкова фаза φ_0 дорівнює нулю. Написати рівняння коливального руху, побудувати графік залежності зміщення від часу $x(t)$. Якими будуть зміщення та фаза через час $t_1 = 0{,}5$ с від початку коливань?

Дано	*Розв'язання*
$x_m = 5$ см $T = 4$ с $\varphi_0 = 0$ $t_1 = 0{,}5$ с	$x = x_m\cos(\omega t + \varphi_0)$, $\omega = \frac{2\pi}{T}$, $\varphi_0 = 0$,
$x(t) = ?$ $x(t_1) = ?$ $\omega t_1 = ?$	$x(t) = x_m\cos\frac{2\pi}{T}t = 5\cos\frac{\pi}{2}t$ (см)

t (с)	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$x(t)$ (см)	5	3,54	0	–3,54	– 5	–3,54	0



Відповідь: $x(t) = 5\cos(\frac{\pi}{2}t)$ ñì, , $x(t_1)$ = 3,54 см, $\omega t_1 = \frac{\pi}{4}$.

4.3. Максимальна швидкість частинки, яка здійснює гармонічні коливання, v_m = 1 м/с, максимальне прискорення

a_m = 3,14 м/с^2. Визначити період T коливань.

Дано	*Розв'язання*
v_m = 1 м/с a_m = 3,14 м/с^2	$v_m = \omega x_m$, $a_m = \omega^2 x_m$, $\frac{a_m}{v_m} = \omega$, $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi v_m}{a_m}$.
T = ?	

Відповідь: T = 2 с.

4.4. Матеріальна точка здійснює коливання за законом

$x = x_m \cos \omega t$. Відомо, що при фазі $\pi/3$ зміщення x = 2 см.

Визначити амплітуду x_m і зміщення при фазі $3\pi/4$.

Дано	*Розв'язання*
$x = x_m \cos\omega t$ $\omega t_1 = \frac{\pi}{3}$ x_1 = 2 см $\omega t_2 = \frac{3\pi}{4}$	$x_1 = x_m \cos\omega t_1$, $2 = x_m \cos\frac{\pi}{3}$, $x_m = 4$ см, $x_2 = x_m \cos\omega t_2$, $x_2 = 4\cos\frac{3\pi}{4}$ ñì $= -2{,}82$ ñì .
x_m = ? x_2 = ?	

Відповідь: x_m = 4 см, x_2 = – 2,82 см.

4.5. Написати рівняння гармонічного коливального руху точки, якщо її максимальне прискорення a_m = 0,49 м/с^2, а період коливань T

= 2 с. Початкова фаза дорівнює нулю.

Дано	*Розв'язання*
a_m = 0,49 м/с^2 T = 2 с $\varphi_0 = 0$	$x(t) = x_m \cos(\omega t + \varphi_0)$, $a_m = \omega^2 x_m$, $\omega = \frac{2\pi}{T}$, $x_m = \frac{a_m T^2}{4\pi^2}$, $x(t) = \frac{a_m T^2}{4\pi^2}\cos\frac{2\pi}{T}t$.
$x(t)$ = ?	

Відповідь: $x(t) = 0{,}05\cos\pi t$ (м).

4.6. Написати рівняння гармонічного коливання точки, якщо його амплітуда x_m = 15 м, максимальна швидкість точки v_m = 30 см/с, початкова фаза φ_0 = 10°.

Дано	*Розв'язання*
x_m= 15 см = 0,15 м v_m = 30 см/с = 0,3 м/с φ_0 = 10°	$x(t) = x_m \cos(\omega t + \varphi_0)$, $v_m = \omega x_m$, $\omega = \frac{v_m}{x_m} = 2$ с$^{-1}$, φ_0 = 10° = 0,17 рад.
$x(t)$ = ?	

Відповідь: $x(t) = 0{,}15\cos(2t + 0{,}17)$ (м).

Динаміка гармонічних коливань

4.7. Частинка маси m = 20 г здійснює гармонічні коливання за законом x = 0,4 cos (πt/5) м. Визначити максимальну силу F_m (за модулем), що діє на частинку.

Дано	*Розв'язання*
m = 20 г = 0,02 кг $x = 0{,}4\cos(\frac{\pi t}{5})$м	$F_m = ma_m$, $a_m = \omega^2 x_m$, $F_m = m\omega^2 x_m$. $\omega = \frac{\pi}{5}$ с$^{-1}$, $x_m = 0{,}4$ м.
F_m = ?	

Відповідь: F_m = 3,2 мН.

4.8. Частинка маси m = 20 г здійснює гармонічні коливання за законом $x = 0{,}1 \cos(4\pi t + \pi/4)$ м. Визначити повну механічну енергію E частинки.

Дано	*Розв'язання*
m = 20 г = 0,02 кг $x = 0{,}1\cos(4\pi\tau + \pi/4)$ м	$E = \dfrac{m\omega^2 x_m^2}{2}$. x_m = 0,1 м, $\omega = 4\pi$ с$^{-1}$
E = ?	

Відповідь: E = 15,8 мДж.

4.9. Частинка маси m = 30 г здійснює гармонічні коливання з амплітудою x_m = 4 см і періодом T = 12 с, початкова фаза дорівнює нулю. Визначити зміщення x, швидкість v, прискорення a, силу F і кінетичну енергію E_k у момент часу t_1 = 2 с після початку коливань.

Дано	*Розв'язання*
m = 30 г = 0,03 кг x_m = 4 см = 0,04 м T = 12 с $\varphi_0 = 0$ t_1 = 2 с	$x_1 = x_m \cos(\dfrac{2\pi}{T} t_1)$, $v_1 = -\dfrac{2\pi}{T} x_m \sin(\dfrac{2\pi}{Ò} t_1)$,
x_1 = ? v_1 = ? a_1 = ? F_1 = ? E_{k_1} = ?	$a_1 = -\dfrac{4\pi^2}{T^2} x_m \cos(\dfrac{2\pi}{Ò} t_1)$, $F_1 = ma_1$, $E_{k_1} = \dfrac{mv_1^2}{2}$.

Відповідь: x_1 = 0,02 м, v_1 = – 0,018 м/с, a_1 = – 0,005 м/с^2, F_1 = – 1,5 мкН, E_{k_1} = 5 мкДж .

4.10. Повна механічна енергія вантажу, що здійснює гармонічні коливання на пружині, E = 40 мкДж, максимальна сила, яка діє на нього з боку пружини, F_m = 2 мН, період коливань

T = 3 с, початкова фаза дорівнює нулю. Написати рівняння коливань вантажу.

Дано	*Розв'язання*

E = 40 мкДж = $4\cdot10^{-5}$Дж F_m = 2 мН = $2\cdot10^{-3}$ Н T = 3 с $\varphi_0 = 0$	$x(t) = x_m \cos(\omega t + \varphi_0)$, $E = \frac{kx_m^2}{2}$, $F_m = kx_m$, $x_m = \frac{2E}{F_m}$, $\omega = \frac{2\pi}{T}$, $x = \frac{2E}{F_m}\cos(\frac{2\pi}{T}t)$.
$x(t)$ = ?	

Відповідь: $x(t) = 0{,}04\cos\frac{2\pi}{3}t$ (м).

4.11. Вантаж маси m = 400 г здійснює коливання на пружині жорсткості k = 250 Н/м. Амплітуда коливань x_m = 1,5 см. Визначити повну механічну енергію коливань й максимальну швидкість руху вантажу.

Відповідь: E = 0,028 Дж, v_m = 37,5 см/с

Математичний маятник.

4.12. Чи буде коливатись математичний маятник на орбітальній космічній станції?

Розв'язання. Якщо математичний маятник рухається відносно Землі з прискоренням a вниз чи вгору, можна вважати, що прискорення вільного падіння дорівнює не g, а $g \pm a$ залежно від напряму, плюс – якщо маятник піднімається вгору, мінус – якщо прискорення направлено вниз. Отже, період коливань $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g \pm a}}$. Якщо ж маятник разом з точкою підвісу вільно падає, то $a = g$, натяг нитки зникає (стан невагомості) і коливання не відбуваються. З формули випливає, що період у цьому разі дорівнює нескінченності.

Космічна станція, рухаючись по орбіті, весь час "вільно падає". Тому математичний маятник на ній коливатись не буде.

Відповідь: Ні.

4.13. Період коливань математичного маятника T = 1 с. Яким буде період T_1 коливань цього маятника у космічному кораблі, який піднімається вгору з прискоренням $a = 4g$?

Відповідь: T_1 = 0,45 с.

4.14. Два математичних маятники одночасно починають коливатися. Перший здійснює 15 коливань за той самий час, протягом якого другий здійснює 10 коливань. Чому дорівнює довжина другого маятника, якщо довжина першого l_1 = 0,5 м?

Відповідь: l_2 = 1,13 м.

4.15. Два математичних маятники здійснюють за однаковий час різну кількість коливань: перший – n_1 = 10 коливань, другий – n_2 = 6 коливань. Різниця довжин маятників Δl = 16 см. Визначити довжини маятників і періоди їх коливань.

Дано	*Розв'язання*
$n_1 = 10$ $n_2 = 6$ $\Delta l = 16$ см $t_1 = t_2$	$T = \frac{t}{n}$, $\frac{T_1}{T_2} = \frac{n_2}{n_1}$, $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, $\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{l_1}{l_2}}$,
$l_1 = ?$ $l_2 = ?$ $T_1 = ?$ $T_2 = ?$	$l_2 = l_1 + \Delta l$, $\frac{n_2}{n_1} = \sqrt{\frac{l_1}{l_1 + \Delta l}}$, $l_1 = \frac{\Delta l\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}{1 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}$.

Відповідь: l_1 = 9см, l_2 = 25 см, T_1 = 0,6 с, T_2 = 1 с.

4.16. Два однакових математичних маятники здійснюють гармонічні коливання. Один з амплітудою 3 см, другий – 3,5 см. Як відрізняються періоди коливань цих маятників?

Розв'язання. Як випливає з формули $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, період гармонічних (малих) коливань математичного маятника від амплітуди не залежить.

Відповідь: Не відрізняються.

4.17. Математичний маятник здійснює малі коливання. Як зміниться максимальне прискорення маятника, якщо амплітуду збільшити вдвічі?

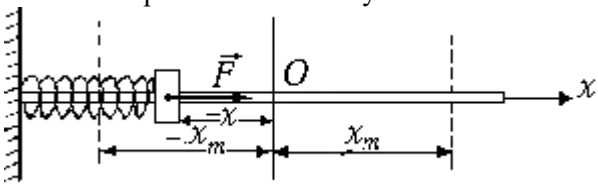
Розв'язання. Характерна особливість гармонічних коливань полягає в тому, що сила, яка повертає до положення рівноваги, прямо пропорційна відхиленню і спрямована протилежно ньому. Отже, за другим законом Ньютона і прискорення також пропорційне відхиленню.

Відповідь: Максимальне прискорення збільшиться вдвічі.

Коливання вантажу на пружині

4.18. Вантаж маси m = 100 г, закріплений на пружині жорсткості k = 8,1 Н/м, може коливатися вздовж горизонтального стрижня без тертя. У початковий момент часу вантаж відхилено від положення рівноваги на x_m = 5 см і відпущено. Встановити: 1) рівняння руху вантажу; 2) циклічну частоту ω та період T коливань; 3) максимальну швидкість v_m; 4) максимальне прискорення a_m; 5) повну механічну енергію E вантажу; 6) силу F_1, що діє на вантаж через t_1 = 0,3 с від початку руху; 7) побудувати графіки залежності зміщення та прискорення від часу

Дано	*Розв'язання*
m = 100 г = 0,1 кг k = 8,1 Н/м t = 0, x_m = 5 см = 0,05 м t_1 = 0,3 с	Спрямуємо вісь Ox вздовж стрижня і виберемо початок координат x = 0 у положенні рівноваги вантажу
$x(t)$ = ? ω = ? T = ? v_m = ? a_m = ? E = ? F_1 = ?	



Під дією сили пружності з боку пружини $F = -kx$ вантаж здійснює гармонічні коливання. Рівняння руху в загальному випадку за домовленістю виражаємо через косинус:

$$x = x_m \cos(\omega t + \varphi_0),$$

де φ_0 – початкова фаза коливань. За умовою в початковий момент часу t = 0 зміщення максимальне, $x = x_m$.Підставимо початкові умови (t = 0, $x = x_m$) в рівняння руху

$$x_m = x_m \cos\varphi_0 .$$

Звідси $\cos\varphi_0 = 1$, тобто початкова фаза коливань $\varphi_0 = 0$ (або $\varphi_0 = \pm 2\pi n$, де n – ціле число). Тепер рівняння руху набуває вигляду

$$x = x_m \cos\omega t .$$

Циклічну частоту ω та період T коливань знаходимо зі співвідношень

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}\ ;\ T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\ .$$

Повна механічна енергія вантажу $E = \frac{kx_m^2}{2}$. Обчислюючи похідні за часом від зміщення та швидкості, визначимо швидкість і прискорення:

$$v = x' = -\omega x_m \sin \omega t,$$
$$a = v' = -\omega^2 x_m \cos \omega t.$$

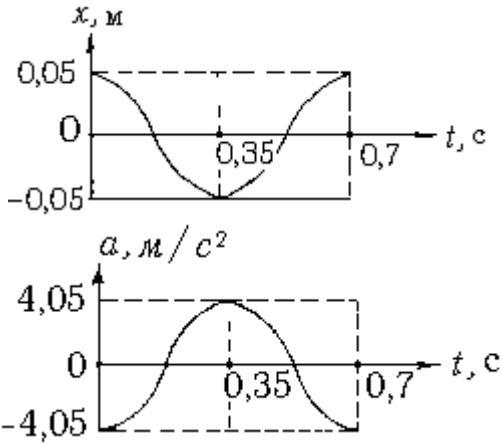
Амплітуда швидкості $v_m = \omega x_m = \sqrt{\frac{k}{m}} x_m$, амплітуда прискорення $a_m = \omega^2 x_m = \frac{k}{m} x_m$. Сила, що діє на вантаж у будь-який момент часу,

$$F = ma = -\omega^2 m x_m \cos \omega t = -k x_m \cos \sqrt{\frac{k}{m}}\, t.$$

Для побудови графіка визначимо зміщення $x = 0{,}05\cos 9t$ м та прискорення $a = -4{,}05\cos 9t$ м/с^2 для різних моментів часу t через кожну чверть періоду 0,175 с у межах періоду T = 0,7 с.

t, с	0	0,175	0,35	0,525	0,7
x, м	0,05	0	–0,05	0	0,05
a, м/с^2	–4,05	0	4,05	0	–4,05

Вибравши масштаб для t, x і a, побудуємо графіки.



Відповідь: $x = 0{,}05\cos 9t$, час у секундах, кут у радіанах, зміщення у метрах; $\omega = 9$ с$^{-1}$; $T = 0{,}7$ с; $v_m = 0{,}45$ м/с; $a_m = 4{,}05$ м/с^2; $E = 0{,}01$ Дж; $F_1 = 0{,}39$ Н.

4.19. Вантаж маси $m = 200$ г закріпленій на пружині жорсткості $k = 127$ Н/м і здійснює гармонічні коливання вздовж горизонтального стрижня. Скільки разів n за одну секунду кінетична енергія вантажу повністю перетворюється у потенціальну?

Дано	*Розв'язання*
$m = 200$ г $=0{,}2$ кг $k = 127$ Н/м $n = ?$	За період коливань двічі потенціальна енергія повністю переходить у кінетичну і навпаки. Період $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$. Кількість періодів за 1 с становить $\frac{1}{T}$, а кількість перетворень енергії $n = \frac{2}{T} = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$.

Відповідь: $n = 8$.

4.20. Тіло, що зв'язано зі стінкою пружиною, може ковзати без тертя по горизонтальній поверхні. Під дією сили $F = 2$ Н пружина розтягнулася на $x = 2{,}5$ см. Визначити період T пружних коливань, якщо маса тіла $m = 0{,}5$ кг.

Відповідь: $T = 0{,}5$ с.

4.21. На пружинних вагах жорсткості 900 Н/м жмут макулатури здійснює 10 коливань за 5 с. Обчислити масу макулатури і повну механічну енергію системи, якщо максимальне зміщення від положення рівноваги становить 5 см.

Відповідь: m = 5,7 кг, E = 1,12 Дж.

4.22. Тягарець, підвішений на пружині, здійснює гармонічні коливання з амплітудою x_m = 5 см. Визначити жорсткість k пружини, якщо максимальна кінетична енергія коливань тягарця $E_{k\,m}$ = 3 Дж.

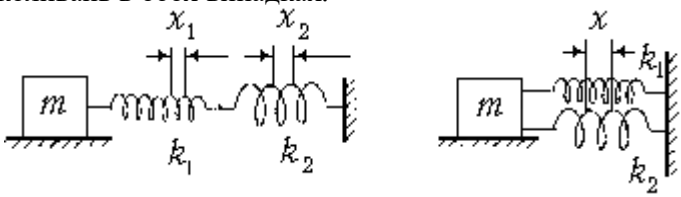
Відповідь: k = 2,4 кН/м.

4.23. Алюмінієва кулька підвішена до пружини і здійснює вертикальні коливання. Як зміниться період коливань, якщо алюмінієву кульку замінити свинцевою того ж радіуса? Густина алюмінію $\rho_{ал} = 2{,}7 \cdot 10^3$ кг/м^3, густина свинцю $\rho_{св} = 11{,}3 \cdot 10^3$ кг/м^3.

Дано	*Розв'язання*
$\rho_{ал} = 2{,}7 \cdot 10^3$ кг/м^3 $\rho_{св} = 11{,}3 \cdot 10^3$ кг/м^3 $r_{ал} = r_{св}$	$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$, $\dfrac{T_{св}}{T_{ал}} = \sqrt{\dfrac{m_{св}}{m_{ал}}}$, $m = \dfrac{4}{3}\pi r^3\rho$,
$\dfrac{T_{св}}{T_{ал}} = ?$	$\dfrac{T_{св}}{T_{ал}} = \sqrt{\dfrac{\rho_{св}}{\rho_{ал}}}$.

Відповідь: Збільшиться у 2,05 рази.

4.24. Тягар маси m лежить на гладкій поверхні і прикріплений до стінки, як вказано на рисунках. Жорсткості пружин k_1 і k_2. Визначити період T коливань в обох випадках.



Дано	*Розв'язання*
m k_1 k_2	Якщо подіяти на тягар деякою силою F, то при "послідовному" з'єднанні пружин перша пружина розтягнеться на x_1, друга – на x_2, оскільки жорсткості у них різні. Обидві разом розтягнуться на
T = ?	$x = x_1 + x_2$.

Для системи $F = kx = k(x_1 + x_2)$, де k – загальна жорсткість системи з двох пружин. За третім законом Ньютона кожна з пружин розтягується однаковою силою F (за модулем).

Тоді $k(x_1 + x_2) = k_1x_1 = k_2x_2$, звідки одержуємо

$$k = \frac{k_1k_2}{k_1 + k_2}.$$

Під час "паралельного" з'єднання зміщення x однакове для обох пружин, а загальна сила, що діє на тягар з боку пружин, $F = F_1 + F_2$. Для кожної пружини $F_1 = k_1x$; $F_2 = k_2x$. Для системи $F = kx$. $kx = k_1x + k_2x$, звідки

$$k = k_1 + k_2.$$

Відповідні періоди коливань становлять

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{k_1 + k_2}{k_1k_2}m}\,;\ T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}}\,.$$

Відповідь: $T = 2\pi\sqrt{\frac{k_1 + k_2}{k_1k_2}m}\,; T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}}\,.$

Хвилі в пружному середовищі

4.25. Пружна хвиля поширюється в сталі. Визначити частоту ν коливань, якщо відстань між найближчими точками хвилі, коливання яких відрізняються за фазою на 90°, дорівнює $l = 1{,}54$ м. Швидкість пружних хвиль у сталі v = 5 000 м/с.

Дано	*Розв'язання*
l = 1,54 м $\Delta\varphi$ = 90° v = 5 000 м/с	Довжина хвилі λ – це найменша відстань між двома точками, які коливаються в однаковій фазі, тобто рухаються синхронно. Вони мають однакові зміщення у будь-який момент часу.
ν = ?	

Враховуючи, що зміщення описується функцією косинуса (або синуса), робимо висновок, що фази цих точок або однакові, або різняться на $2\pi n$ радіан, де n – ціле число. Тоді дві

точки, різниця фаз коливань яких становить 90° (або $\frac{\pi}{2}$ радіан), віддалені одна від одної на відстань $l = \frac{\lambda}{4}$. Знаходимо

$$\lambda = 4l = 6{,}16 \text{ м}.$$

Частота ν хвилі

$$\nu = \frac{v}{\lambda} = \frac{5000}{6{,}16} = 812 \text{ Гц}.$$

Відповідь: ν = 812 Гц.

4.26. Звукова хвиля поширюється в граніті зі швидкістю v = 6 км/с, частота джерела звуку $\nu = 100$ кГц. На якій найменшій відстані Δx одна від одної знаходяться точки середовища, що здійснюють коливання у протилежних фазах?

Дано	*Розв'язання*
v = 6 км/с = $6 \cdot 10^3$ м/с ν = 100 кГц = 10^5 Гц	$\Delta x = \frac{\lambda}{2}, \lambda = \frac{v}{\nu}, \ \Delta x = \frac{v}{2\nu}.$
Δx = ?	***Відповідь***: Δx = 3 см.

4.27. На поверхні води поширюється хвиля, швидкість якої v = 2,4 м/с, частота коливань ν = 2 Гц. Якою є різниця фаз Δφ коливань точок, що лежать на прямій, вздовж якої поширюється хвиля, на відстанях 10, 60, 90 см одна від одної?

Дано	*Розв'язання*
v = 2,4 м/с ν = 2 Гц l_1 = 10 см = 0,1 м l_2 = 60 см = 0,6 м l_3 = 90 см = 0,9 м	$\Delta\varphi = 2\pi l/\lambda, \qquad \lambda = \frac{v}{\nu},$ $\Delta\varphi = \frac{2\pi l/\nu}{v}.$
$\Delta\varphi_1$ = ? $\Delta\varphi_2$ = ? $\Delta\varphi_3$ = ?	

Відповідь: $\Delta\varphi_1 = \frac{\pi}{6}, \ \Delta\varphi_2 = \pi, \ \Delta\varphi_3 = \frac{3}{2}\pi.$

4.28. Частоти коливань людського голосу лежать в інтервалі від $\nu_1 = 350$ Гц до $\nu_2 = 4{,}4$ кГц. Визначити відповідний інтервал довжин звукових хвиль. Швидкість звуку в повітрі v = 340 м/с.

Відповідь: λ_1 = 97см, λ_2 = 7,7 см.

4.29. Рибалка помітив, що за 10 с поплавок здійснює на хвилях 20 коливань, а відстань між сусідніми горбами хвиль становить 1,2 м. Яка швидкість поширення хвиль?

Відповідь: v = 2,4 м/с.

4.30. Катер пройшов на відстані s = 200 м від берега. Хвиля, утворена катером, дійшла до берега через t = 1,5 хв. Якою є довжина хвилі λ, утвореної катером, якщо частота ударів хвилі об берег ν = 0,5 Гц?

Дано	*Розв'язання*
s = 200 м t = 1,5 хв = 90 с ν = 0,5 Гц	$\lambda = \frac{v}{\nu}$, $v = \frac{s}{t}$, $\lambda = \frac{s}{\nu t}$.
λ = ?	***Відповідь***: λ = 4,44 м.

4.31. У деякому середовищі поширюється хвиля. Найменша відстань між двома частинками середовища, які коливаються в однаковій фазі, дорівнює 80 см, частота коливань ν = 18 Гц. З якою швидкістю v поширюється хвиля?

Відповідь: v = 14,4 м/с.

4.32. Уздовж гумового шнура поширюється поперечна хвиля. Дві точки, що відстоять від джерела хвилі на відстані x_1 = 12 м і x_2 = 15 м, коливаються з різницею фаз $\Delta\varphi = 180°$. Визначити довжину хвилі λ і швидкість v її поширення, якщо період коливань точок шнура T = 1,2 с.

Відповідь: λ = 6 м, v = 5 м/с.

4.33. Звукові хвилі з повітря поширились у воду. Довжина звукової хвилі в повітрі $\lambda_п$ = 1 м. Обчислити довжину звукової хвилі $\lambda_в$ у воді. Прийняти швидкість звуку в повітрі

$v_п$ = 340 м/с, у воді $v_в$ = 1500 м/с

Дано	*Розв'язання*
$\lambda_п$ = 1м $v_п$ = 340 м/с $v_в$ = 1 500 м/с	Під час переходу звукових хвиль з повітря в воду частота хвиль залишається сталою, а довжина хвилі змінюється: $\lambda = \frac{v}{\nu}$, $\frac{\lambda_в}{\lambda_п} = \frac{v_в}{v_п}$,
$\lambda_в$ = ?	

$$\lambda_в = \frac{v_в}{v_п}\lambda_п .$$

Відповідь: $\lambda_в = 4{,}41$ м.

4.2. Електромагнітні коливання і хвилі

Основні закони та формули

- Період вільних електромагнітних коливань у коливальному контурі (формула Томсона)

$$T = 2\pi\sqrt{LC},$$

де L – індуктивність котушки, C – ємність конденсатора.

- Закон зміни заряду на обкладках конденсатора в коливальному контурі

$$q = q_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

де $\omega_0 = 2\pi/T$ – власна циклічна частота контуру.

- Закони зміни напруги на конденсаторі і сили струму в коливальному контурі

$$U = \frac{q}{C} = \frac{q_m}{C}\cos(\omega_0 t + \varphi_0) = U_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

$$I = q' = -q_m\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = I_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}),$$

де $U_m = q_m/C$, $I_m = \omega_0 q_m$ – амплітудні значення напруги і сили струму.

- Зв'язок між амплітудами напруги і сили струму в коливальному контурі

$$U_m = \sqrt{\frac{L}{C}} I_m.$$

- Максимальні значення енергії електричного і магнітного полів

$$W_{Cm} = W_{Lm} = \frac{q_m^2}{2C} = \frac{LI_m^2}{2}.$$

- Якщо напруга в колі змінного струму змінюється за законом

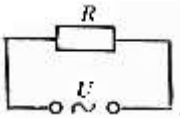
$$U = U_m \cos \omega t,$$

то сила струму змінюється з тією ж частотою, але у загальному випадку не збігається за фазою з напругою

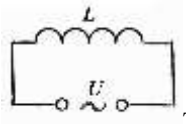
$$I = I_m \cos(\omega t + \varphi),$$

де φ – зсув фаз між коливаннями струму і напруги.

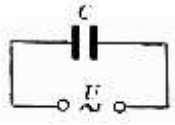
- Закон Ома для кола змінного струму, яке містить:



тільки активний опір R: $I_m = U_m/R$;



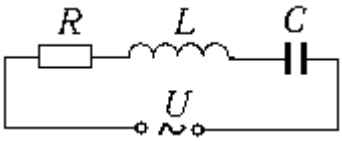
тільки індуктивний опір $X_L = \omega L$: $I_m = U_m/(\omega L)$;



тільки ємнісний опір $X_C = 1/(\omega C)$:

$$I_m = U_m/(1/(\omega C)).$$

Якщо коло змінного струму містить послідовно з'єднані резистор з активним (омічним) опором R, котушку з індуктивним опором $X_L = \omega L$ і конденсатор з ємнісним опором $X_C = \dfrac{1}{\omega C}$,



то повний опір кола

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}.$$

Між амплітудними (максимальними) значеннями струму в цьому колі і напругою на його кінцях існує зв'язок, аналогічний закону Ома

$$I_m = \frac{U_m}{Z}.$$

- Діючі значення сили змінного струму і змінної напруги

$$I_д = \frac{I_m}{\sqrt{2}}; \; U_д = \frac{U_m}{\sqrt{2}}.$$

- Середня за часом потужність змінного струму у колі, яке містить тільки активний опір

$$\langle P \rangle = I_д U_д.$$

- Резонансна частота в колі змінного струму з послідовно ввімкнутими активним опором R, котушкою індуктивності L і конденсатором ємності C

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

- Коефіцієнт трансформації трансформатора

$$k = \frac{N_1}{N_2} = \frac{U_1}{U_2},$$

де N_1, N_2 – кількість витків первинної та вторинної обмоток трансформатора, U_1, U_2 – напруги на первинній та вторинній обмотках при холостому ході. У трансформаторі під навантаженням (якщо нехтувати втратами потужності) $\frac{U_1}{U_2} \approx \frac{I_2}{I_1}$.

- Швидкість поширення електромагнітних хвиль у речовині $v = \frac{c}{n} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$, де $c = 3 \cdot 10^8$ м/с – швидкість електромагнітних хвиль у вакуумі, n – показник заломлення речовини, ε, μ – відповідно діелектрична та магнітна проникності речовини. Довжина електромагнітної хвилі у вакуумі $\lambda_0 = \frac{c}{\nu} = cT$.

Коливальний контур

4.34. Визначити період T і частоту ν власних коливань контуру, якщо контур містить конденсатор ємності C = 1 мкФ і котушку індуктивності L = 30 мкГн.

Відповідь: T = 34,4 мкс, ν = 29 кГц.

4.35. Як зміниться період коливань у коливальному контурі, якщо в контур включити послідовно ще такий самий конденсатор?

Дано	*Розв'язання*

C T $C_1 = C/2$	Загальна ємність C_1 двох послідовно включених конденсаторів ємності C знаходиться за формулою
$T_1/T = ?$	$$\frac{1}{C_1} = \frac{1}{C} + \frac{1}{C},\ C_1 = \frac{C}{2},\ T_1 = 2\pi\sqrt{LC_1},$$ $$\frac{T_1}{T} = \sqrt{\frac{C_1}{C}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Відповідь: зменшиться у $\sqrt{2}$ рази.

4.36. Коливальний контур складається з котушки індуктивності L = 0,025 Гн і плоского конденсатора, що має дві круглих пластини радіуса r = 2 см, розміщених на відстані d = 0,5 мм одна від одної. Яким буде період коливань контуру, якщо конденсатор заповнити слюдою з діелектричною проникністю ε = 7?

Дано	*Розв'язання*
L = 0,025 Гн r = 2 см = 0,02 м d = 0,5 мм = $5\cdot10^{-4}$ м ε = 7	$$T = 2\pi\sqrt{LC},\ C = \frac{\varepsilon_0\varepsilon S}{d},\ S = \pi r^2,$$ $$T = 2\pi\sqrt{\frac{\varepsilon_0\varepsilon\pi r^2 L}{d}}.$$
T = ?	

Відповідь: T = 12,39 мкс.

4.37. Заряд на обкладках конденсатора коливального контуру змінюється з часом за законом $q = 10^{-6}\cos(2\pi\ 10^3 t + (\pi/4))$ Кл. Визначити період, частоту, початкову фазу коливань у контурі і максимальну силу струму.

Відповідь: T = 1 мс, ν = 1 кГц, $\varphi_0 = \pi/4$, I_m. = 6,28 мА.

4.38. Сила струму в коливальному контурі змінюється з часом за законом $I = 10^{-6}\cos(10^5 t + (\pi/4))$ А. Визначити індуктивність котушки коливального контуру, якщо ємність конденсатора 2,5 мкФ.

Відповідь: L = 40 мкГн.

4.39. Напруга на обкладках конденсатора коливального контуру змінюється з часом за законом $U = 30\cos 10^3\pi t$ В. Індуктивність контуру L = 1,7 Гн. Визначити закон $I(t)$ зміни струму в контурі і максимальний заряд q_m на обкладках конденсатора

Дано	*Розв'язання*

$U = 30 \cos 10^3 \pi t$ В $L = 1{,}7$ Гн	Коливання струму в контурі відбуваються з тією ж циклічною частотою $\omega = 10^3\pi$ с $^{-1}$, що й коливання напруги, але випереджають їх за фазою на $\pi/2$.
$I(t) = ?$ $q_m = ?$	

Амплітуда напруги $U_m = 30$ В. Амплітуду сили струму визначимо із співвідношення $U_m = \sqrt{\frac{L}{C}} I_m$; звідки $I_m = \sqrt{\frac{C}{L}} U_m$. З формули $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ встановимо ємність $C = 1/L\omega^2 = 6 \cdot 10^{-8}$ Ф. Тоді амплітуда сили струму $I_m = \sqrt{\frac{6 \cdot 10^{-8}}{1{,}7}} \cdot 30$ А $= 5{,}6$ мА. Для коливань сили струму одержуємо закон: $I = 5{,}6 \cos (10^3\pi t + (\pi/2))$ мА.

За відомою максимальною напругою на конденсаторі та його ємністю знаходимо максимальний заряд конденсатора:

$$q_m = CU_m = 6 \cdot 10^{-8} \cdot 30 \text{ Кл} = 1{,}8 \text{ мкКл}.$$

Відповідь: $I = 5.6 \cos (10^3\pi t + (\pi/2))$ мА, $q_m = 1{,}8$ мкКл.

4.40. Заряджений конденсатор ємності $C = 20$ пФ підключений до котушки індуктивності $L = 2$ мГн. Максимальний струм через котушку $I_m = 500$ мкА. Яким був початковий заряд q_m на конденсаторі?

Дано	*Розв'язання*
$C = 20$ пФ $= 2 \cdot 10^{-11}$ Ф $L = 2$ мГн $= 2 \cdot 10^{-3}$ Гн $I_m = 500$ мкА $= 5 \cdot 10^{-4}$ А	$q_m = I_m/\omega_0$, $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, $q_m = I_m\sqrt{LC}$
$q_m = ?$	

Відповідь: $q_m = 0{,}1$ нКл.

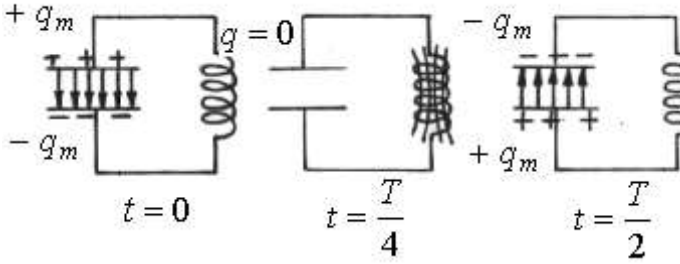
4.41. Ємність конденсатора коливального контуру $C = 15$ пФ, амплітуда напруги на ньому $U_m = 100$ В. Визначити максимальне значення енергії електричного та магнітного полів у контурі.

Відповідь: $W_{Cm} = W_{Lm} = 75$ нДж.

4.42. Конденсатор ємності $C = 1$ мкФ, заряджений до різниці потенціалів $U_m = 300$ В, підключений до котушки з індуктивністю $L = 0{,}02$ Гн. Який заряд проходить крізь котушку за час, потрібний для того, щоб конденсатор повністю перезарядився? Чому дорівнює діюча сила струму в контурі?

Дано	*Розв'язання*

C = 1 мкФ = 10^{-6} Ф U_m = 300 В L = 0,02 Гн	Простежимо за зміною заряду на якій-небудь обкладці конденсатора. Нехай у початковий момент часу t = 0 на верхній обкладці конденсатора був заряд + q_m
q = ? $I_д$ = ?	



За чверть періоду коливань $t = T/4$ заряд верхньої обкладки спаде до нуля, тобто у цьому разі крізь котушку пройде заряд q_m. За наступну чверть періоду коливань заряд верхньої обкладки стане негативним, отже, крізь котушку пройде у тому ж напрямку ще заряд q_m. Усього за півперіоду пройшов заряд $2q_m$. Потім у зворотному напрямі пройде ще стільки ж заряду, усього через котушку пройде заряд $4q_m$.

$q = 4q_m$; $q_m = CU_m$. Діюча сила струму $I_д = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$, $I_m = \frac{U_m}{\sqrt{\frac{L}{C}}}$,

$$I_д = \sqrt{\frac{C}{2L}}U_m.$$

Відповідь: q = 0,12 мКл, $I_д$ = 1,5 А.

4.43. Струм у коливальному контурі змінюється за законом $I = 9\pi \cdot 10^{-5} \cos(10^3\pi t + \pi/4)$ А. Ємність конденсатора C = 0,3 мкФ. Встановити період T коливань, заряд q_1 конденсатора через час t_1 = 3 с після початку коливань, закон $U(t)$ зміни напруги на конденсаторі.

Дано	*Розв'язання*

$I = 9\pi \cdot 10^{-5} \cos(10^3 \pi t + \frac{\pi}{4})$ А $C = 0{,}3$ мкФ $= 3 \cdot 10^{-7}$ Ф $t_1 = 3$ с	$q = q_m \cos(\omega t + \varphi_0)$, $U = U_m \cos(\omega t + \varphi_0)$, $I = I_m \cos(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2})$,
$T = ?$ $q_1 = ?$ $U(t) = ?$	

порівнюючи з умовою, маємо

$$I_m = 9\pi \cdot 10^{-5} \text{А}, \ \omega = 10^3 \pi \ \text{с}^{-1}, T = \frac{2\pi}{\omega} = 2 \cdot 10^{-3} \ \text{с}, \ \varphi_0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4},$$

$$\varphi_0 = -\frac{\pi}{4}, \ I_m = q_m \omega, \ q_m = \frac{I_m}{\omega} = 9 \cdot 10^{-8} \ \text{Кл},$$

$$q = \frac{I_m}{\omega} \cos(\omega t + \varphi_0), \ q = 9 \cdot 10^{-8} \cos(10^3 \pi t - \frac{\pi}{4}) \ \text{Кл},$$

$$q_1 = 9 \cdot 10^{-8} \cos(10^3 \pi \cdot 3 - \frac{\pi}{4}) \text{Кл} = 9 \cdot 10^{-8} \cos\frac{\pi}{4} \text{Кл} = 63{,}6 \ \text{нКл},$$

$$U_m = \frac{q_m}{C} = 0{,}3 \ \text{В}, \ U = 0{,}3 \cos(10^3 \pi t - \frac{\pi}{4}) \ \text{В}.$$

Відповідь: $T = 2$ мс, $q_1 = 63{,}6$ нКл, $U = 0{,}3 \cos(10^3 \pi t - \frac{\pi}{4})$ В.

4.44. Амплітудне значення сили струму $I_m = 1$ мА, напруги $U_m = 0{,}1$ В у коливальному контурі, період власних коливань якого $T = 6{,}3$ мс. Встановити індуктивність L та ємність C контуру.

Дано	*Розв'язання*
$I_m = 1$мА $= 10^{-3}$ А $U_m = 0{,}1$ В $T = 6{,}3$ мс $= 6{,}3 \cdot 10^{-3}$с	$U_m = \sqrt{\frac{L}{C}} I_m = \frac{\sqrt{LC} I_m}{C}$, $T = 2\pi\sqrt{LC}$,
$L = ?$, $C = ?$	$\sqrt{LC} = \frac{T}{2\pi}$, $U_m = \frac{T I_m}{2\pi C}$,

$$C = \frac{T I_m}{2\pi U_m}, \ L = \frac{T U_m}{2\pi I_m}.$$

Відповідь: $L = 0{,}1$ Гн, $C = 10$ мкФ.

Змінний струм. Ємнісний опір

4.45. Напруга на кінцях ділянки кола зі змінним струмом змінюється за законом $U = U_m \cos(\omega t + (\pi/6))$ В. У момент часу $t_1 = T/16$, де T – період коливань, миттєве значення напруги становить $U_1 = 12$ В. Визначити амплітуду U_m напруги

Дано	*Розв'язання*
$U = U_m \cos(\omega t + \frac{\pi}{6})$ В $t_1 = T/16$ $U_1 = 12$ В $U_m = ?$	$\omega = \frac{2\pi}{T}, U = U_m \cos(\frac{2\pi}{T} t + \frac{\pi}{6}),$ $U_1 = U_m \cos\left(\frac{2\pi}{T}\frac{T}{16} + \frac{\pi}{6}\right) = 0{,}609 U_m.$ $U_m = \frac{U_1}{0{,}609} = 19{,}7$ В.

Відповідь: $U_m = 19{,}7$ В.

4.46. Діюче значення напруги на конденсаторі в колі змінного струму 100 В. Визначити максимальне значення енергії конденсатора, якщо його ємність 10 пФ.

Дано	*Розв'язання*
$U_д = 100$ В $C = 10$ пФ $= 10^{-11}$ Ф $W_m = ?$	$W_m = \frac{CU_m^2}{2}, \; U_m = U_д\sqrt{2}, \; W_m = CU_д^2.$

Відповідь: $W_m = 10^{-7}$ Дж.

4.47. Плоский слюдяний конденсатор (діелектрична проникність слюди $\varepsilon = 7$) з площею обкладок $S = 100$ см^2 і відстанню між ними $d = 0{,}1$ мм включений у коло змінного струму. Визначити ємнісний опір X_C конденсатора, якщо частота струму $\nu = 50$ Гц?

Дано	*Розв'язання*
$\varepsilon = 7$ $S = 100$ см$^2 = 10^{-2}$ м^2 $d = 0{,}1$ мм $= 10^{-4}$ м $\nu = 50$ Гц $X_C = ?$	$X_C = \frac{1}{\omega C}, \quad \omega = 2\pi\nu, \quad C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}$ $X_C = \frac{d}{2\pi\nu\varepsilon\varepsilon_0 S}.$

Відповідь: $X_C = 0{,}51$ МОм.

4.48. Конденсатор ємності $C = 0{,}5$ мкФ увімкнений у коло змінного струму. Визначити період T коливань змінного струму, якщо ємнісний опір конденсатора $X_C = 20$ Ом.

Дано	*Розв'язання*
C = 0,5мкФ = $5\cdot10^{-7}$ Ф X_c = 20 Ом	$T = \frac{2\pi}{\omega}$, $X_C = \frac{1}{\omega C}$, $T = 2\pi X_C C$.
T = ?	

Відповідь: T = 62,8 мкс.

4.49. Конденсатор ємності C = 0,5 мкФ увімкнуто в мережу змінного струму. Амперметр, увімкнутий у коло, показує струм I = 1,56 А. Період коливань струму T = 0,2 мс. Визначити амплітуду U_m напруги на конденсаторі

Дано	*Розв'язання*
C = 0,5 мкФ = $5\cdot10^{-7}$Ф $I_д$ = 1,56 А T = 0,2 мс = $2\cdot10^{-4}$с	Амперметр у колі змінного струму вимірює діюче (ефективне) значення сили струму, тобто $I_д$ = 1,56 А. Між амплітудними значеннями струму і напруги існує зв'язок, аналогічний
U_m = ?	

закону Ома $I_m = U_m/X_C$. Тут $X_C = 1/(\omega C)$ – ємнісний опір, $\omega = 2\pi/T$ – циклічна частота. З урахуванням того, що $I_m = \sqrt{2}\, I_д$, одержимо

$$U_m = \sqrt{2}\, I_д T/(2\pi C).$$

Відповідь: U_m = 140 В.

4.50. Конденсатор увімкнений в мережу змінного струму з частотою 50 Гц. Діюча напруга в мережі 220 В. Діюча сила струму крізь конденсатор 2,5 А. Яка його ємність?

Дано	*Розв'язання*
ν = 50 Гц $U_д$ = 220 В $I_д$ = 2,5 А	$X_C = \frac{1}{2\pi\nu C}$, $X_C = \frac{U_д}{I_д}$, $C = \frac{I_д}{2\pi\nu U_д}$.
C = ?	***Відповідь***: C = 36 мкФ.

4.51. Два конденсатори ємностей C_1 = 0,4 мкФ та C_2 = 0,5 мкФ увімкнено послідовно в коло змінного струму з діючою напругою $U_д$ = 16 В і частотою ν = 400 Гц. Який струм у колі буде зареєстрований амперметром?

Дано	*Розв'язання*
C_1 = 0,4 мкФ = $4\cdot10^{-7}$ Ф C_2 = 0,5 мкФ = $5\cdot10^{-7}$ Ф $U_д$ = 16 В ν = 400 Гц	$I_д = \frac{U_д}{X_C}$. $X_C = \frac{1}{\omega C}$, $C = \frac{C_1C_2}{C_1 + C_2}$, $\omega = 2\pi\nu$, $I_д = \frac{2\pi\nu U_д C_1 C_2}{C_1 + C_2}$.
$I_д$ = ?	
Відповідь: $I_д$ = 8,9 мА.	

Змінний струм. Індуктивний опір

4.52. Діюча напруга мережі, в яку ввімкнута котушка, $U_д$ = 220 В, частота струму ν = 50 Гц. Індуктивний опір котушки X_L = 600 Ом. Визначити амплітуду змінного струму I_m та індуктивність L котушки. Активним опором нехтувати.

Дано	*Розв'язання*
$U_д$ = 220 В ν = 50 Гц X_L = 600 Ом R = 0	$I_m = \frac{U_m}{X_L}$, $U_m = U_д\sqrt{2}$, $I_m = \frac{U_д\sqrt{2}}{X_L}$, $X_L = \omega L = 2\pi\nu L$, $L = \frac{X_L}{2\pi\nu}$.
I_m = ? L = ?	
Відповідь: I_m = 0,52 А, L = 1,91 Гн.	

4.53. Струм сили I = 0,5 А проходить через котушку і створює магнітний потік, що пронизує кожний виток котушки, Ψ = 40 мкВб. Котушка містить N = 800 витків. Визначити індуктивний опір X_L котушки змінному струму з частотою ν = 50 Гц.

Дано	*Розв'язання*
I = 0,5 А Ψ = 40 мкВб = $4\cdot10^{-5}$ Вб N = 800 ν = 50 Гц	$X_L = \omega L = 2\pi\nu L$, $N\Psi = LI$, $L = \frac{N\Psi}{I}$, $X_L = 2\pi\nu N\Psi/I$. ***Відповідь***: X_L = 20,1 Ом.
X_L = ?	

4.54. Котушка індуктивності L = 0,03 Гн увімкнена в коло змінного струму з частотою ν = 50 Гц. Визначити індуктивний опір X_L котушки.

Відповідь: X_L = 9,42 Ом.

4.55. Котушка з дуже малим активним опором включена в коло змінного струму з частотою 50 Гц. У разі напруги 125 В сила струму становить 2,5 А. Визначити індуктивність котушки.

Відповідь: L = 0,16 Гн.

4.56. Чи виділяється теплота на індуктивному і ємнісному опорах?

Відповідь: активний опір обумовлений зіткненням електронів у провідниках з іонами кристалічної гратки, за рахунок чого виділяється теплота. Реактивний опір – ємнісний та індуктивний – не супроводжується перетворенням електричної енергії в теплоту.

Послідовне з'єднання *R,L* і *C* в колі змінного струму

4.57. До мережі змінного струму з діючою напругою $U_д$ = 220 В і частотою ν = 50 Гц послідовно включені активний опір

R = 100 Ом, котушка індуктивності L = 50 мГн і конденсатор ємності C = 20 мкФ. Визначити діючу силу струму в колі, напруги на активному опорі, конденсаторі і котушці.

Дано	*Розв'язання*
$U_д$ = 220 В ν = 50 Гц R = 100 Ом L = 50 мГн = $5\cdot10^{-2}$ Гн C = 20 мкФ = $2\cdot10^{-5}$ Ф	$I_д = \frac{U_д}{Z}, Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$ $\omega = 2\pi\nu = 314c^{-1}$, Z = 175 Ом, I_g = 1,26 А, $U_R = I_д R$,
I = ? U_R = ? U_L = ? U_C = ?	$U_L = I_д \omega L$, $U_C = \frac{I_д}{\omega C}$.

Відповідь: $I_д$ = 1,26 А, U_R = 126 В, U_L = 19,78 В, U_C = 200,64 В.

4.58. У колі змінного струму з послідовно з'єднаними резистором, котушкою індуктивності і конденсатором опори окремих ділянок

відповідно дорівнюють R = 80 Ом, X_L = 80 Ом, X_C = 20 Ом. Напруга на омічному опорі U_R = 160 В. Визначити повний опір Z кола і повну максимальну напругу U_m на кінцях кола.

Дано	*Розв'язання*
R = 80 Ом X_L = 600 Ом X_C = 20 Ом U_R = 16 В	$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$, $I_m = \frac{U_R}{R}$, $U_m = I_m Z$. $U_m = \frac{U_R}{R}\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$.
Z = ? U_m = ?	
Відповідь: Z = 100 Ом, U_m = 200 В.	

Потужність змінного струму

4.59. Сила змінного струму змінюється з часом за законом $I = 2{,}5\cos(314\,t - (\pi/6))$А. Коло містить активний опір R = 1,5 Ом. Визначити діючу силу струму, діючу напругу та середню за часом потужність змінного струму.

Дано	*Розв'язання*
$I = 2{,}5\cos(314t - \frac{\pi}{6})$ А R = 1,5 Ом	I_m = 2,5 А, $I_д = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$, $U_m = I_m R$,
$I_д$ = ?, $U_д$ = ?, <P> = ?	$U_д = \frac{U_m}{\sqrt{2}} = \frac{I_m R}{\sqrt{2}}$, $\langle P \rangle = I_д U_д = \frac{I_m^2 R}{2}$.
Відповідь: $I_д$ =1,77 А, $U_д$ = 2,66 В, <P> = 4,7 Вт.	

4.60. Напруга в мережі змінюється за законом $U = 310\sin 314t$ В. Яка кількість теплоти Q виділиться за одну хвилину в електричній плитці з активним опором R = 60 Ом, якщо її ввімкнути в цю мережу?

Дано	*Розв'язання*
$U = 310\sin 314\,t$ В t = 1 хв = 60 с R = 60 Ом	$Q = \frac{U_д^2}{R}t$, $U_д = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$, $Q = \frac{U_m^2 t}{2R}$., U_m = 310 В,
Q = ?	

Відповідь: Q = 48,05 кДж.

4.61. Електрична піч, опір якої 20 Ом, живиться від генератора змінного струму. Визначити кількість теплоти, що виділяється за одну годину, якщо амплітуда сили струму 10 А.

Відповідь: Q = 3,6·МДж.

Резонанс в електричному колі

4.62. Коливальний контур складається з котушки індуктивності L = 5 мГн і конденсатора ємності C = 200 мкФ. Послідовно з елементами контуру ввімкнено змінну ЕРС. При якій циклічній частоті ω_0 прикладеної ЕРС буде зростати амплітуда коливань сили струму? Активним опором контуру нехтувати

Відповідь: ω_0 = 1 кГц.

4.63. У коло змінного струму з частотою 400 Гц включено котушку індуктивності 0,1 Гн. Якої ємності конденсатор потрібно включити послідовно з котушкою в коло, щоб відбувався резонанс?

Дано	*Розв'язання*
$\nu_{рез}$ = 400 Гц L = 0,1 Гн	$\omega_{ðåç} = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}, \omega = 2\pi\nu, C = \dfrac{1}{4\pi^2\nu_{ðåç}^2 L}$.
C = ?	

Відповідь: C = 1,6 мкФ.

4.64. У коливальному контурі з конденсатором ємності C = 10 нФ діє зовнішня змінна ЕРС. Резонанс настає при частоті цієї ЕРС ν = 5 кГц. Амплітуда коливань сили струму під час резонансу I_m = 2 мкА. Визначити повну електромагнітну енергію W контуру

Дано	*Розв'язання*
C = 10 нФ = 10^{-8} Ф $\nu_{рез}$ = 5 кГц = $5\cdot10^3$ Гц I_m = 2 мкА = $2\cdot10^{-6}$ А	$W = \dfrac{CU_{mC}^2}{2}, U_{mC} = \dfrac{I_m}{\omega C},$
W = ?	$\omega_{рез} = 2\pi\nu_{рез}, W = \dfrac{I_m^2}{8\pi^2\nu^2 C}$.

Відповідь: W = 0,2 пДж.

Трансформатор

4.65. Для підвищення напруги зі 120 В до 3 000 В використовують трансформатор, первинна обмотка якого має 90 витків. Визначити коефіцієнт трансформації і кількість витків вторинної обмотки.

Дано	*Розв'язання*
U_1 = 120 В U_2 = 3 000 В N_1 = 90	$k = \frac{U_1}{U_2} = \frac{N_1}{N_2}$, $N_2 = \frac{U_2}{U_1} N_1$.
k = ? N_2 = ?	

Відповідь: k = 0,04, N_2 = 2250.

4.66. Коефіцієнт трансформації трансформатора дорівнює 20. Яка обмотка трансформатора – первинна чи вторинна – повинна мати дріт більшого перерізу?

Дано	*Розв'язання*
k = 20	Оскільки k = 20,-трансформатор є знижувальним і кількість витків у вторинній обмотці є меншою, ніж у первинній, $N_2 < N_1$. Струми навантаження пов'язані з кількістю витків $\frac{I_1}{I_2} = \frac{N_2}{N_1}$. Тому у вторинній обмотці струм більший і, відповідно, більшим має бути переріз дроту.
S_1/S_2 = ?	

Відповідь: $S_2 > S_1$.

4.67. Зварювальний трансформатор має струм, напругу і кількість витків у первинній обмотці відповідно I_1 = 1 А, U_1 = 220 В, N_1 = 50. Напруга у вторинній обмотці U_2 = 22 В. Чому дорівнює струм I_2 у вторинній обмотці, і скільки вона містить витків N_2 ? Втратами нехтувати.

Дано	*Розв'язання*
I_1 = 1 А U_1 = 220 В N_1 = 50 U_2 = 22 В	$\frac{N_1}{N_2} = \frac{U_1}{U_2}$, $N_2 = N_1 \frac{U_2}{U_1}$, $I_1U_1 = I_2U_2$, $I_2 = \frac{I_1U_1}{U_2}$.
I_2 = ? N_2 = ?	

Відповідь: I_2 = 10 А, N_2 = 5.

4.68. Сила струму в первинній обмотці трансформатора I_1 = 4,4 А, напруга на її затискачах U_1 = 220 в. Сила струму у вторинній обмотці I_2 = 1,2 А, напруга на її затискачах U_2 = 770 В. Визначити ККД трансформатора.

Відповідь: η = 95 %.

4.69. Трансформатор з коефіцієнтом трансформації k = 10, знижує напругу з 10 кВ до 800 В. При цьому сила струму у вторинній обмотці I_2 = 2 А. Нехтуючи втратами в первинній обмотці, визначити опір r_2 вторинної обмотки.

Дано	*Розв'язання*
k = 10 $U_1 = 10^4$ В U_2 = 800 В I_2 = 2 А	$\varepsilon_1 = U_1,\ \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = k,\ \varepsilon_2 = \frac{U_1}{k},\ \varepsilon_2 = I_2 r_2 + U_2,$
r_2 = ?	$r_2 = \frac{\varepsilon_2 - U_2}{I_2} = \frac{\frac{U_1}{k} - U_2}{I_2}.$

Відповідь: r_2 = 100 Ом.

4.70. Знижувальний трансформатор з коефіцієнтом трансформації 10 ввімкнено в мережу з напругою 220 В. Нехтуючи опором первинної обмотки, визначити напругу на виході трансформатора, якщо опір вторинної обмотки 0,2 Ом, опір корисного навантаження 2 Ом.

Дано	*Розв'язання*
U_1 = 220 В k = 10 r_2 = 0,2 Ом R = 2 Ом	$U_1 = \varepsilon_1,\ \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = k,\ \varepsilon_2 = \frac{U_1}{k},$ $\varepsilon_2 = I_2 r_2 + U_2,\ I_2 = \frac{U_2}{R},\ \frac{U_1}{k} = U_2\left(\frac{r_2}{R} + 1\right),$
U_2 = ?	$U_2 = \frac{U_1}{k\left(\frac{r_2}{R} + 1\right)}.$

Відповідь: U_2 = 20 В.

Електромагнітні хвилі

4.71.Відкритий коливальний контур випромінює в повітрі електромагнітні хвилі довжиною 150 м. Яка ємність включена в контур, якщо його індуктивність 0,25 мГн? Активним опором нехтувати.

Дано	*Розв'язання*
$\lambda = 150$ м $L = 0{,}25$ Гн	$T = 2\pi\sqrt{LC}, \quad \lambda = cT, \quad C = \dfrac{\lambda^2}{4\pi^2 L c^2}.$
$C = ?$	

Відповідь: $C = 25$ пФ.

4.72. Електромагнітна хвиля поширюється в вакуумі. Коливання векторів напруженості електричного поля $\vec{E}$ збігаються за фазою в точках, найменша відстань між якими становить

$\Delta x = 9$ м. Визначити частоту ν електромагнітної хвилі. Якою буде відстань Δx_1 між точками, в яких збігаються за фазою коливання векторів магнітної індукції?

Дано	*Розв'язання*
$c = 3\cdot10^8$ м/с $\Delta x = 9$ *м*	$\nu = \dfrac{c}{\lambda}, \quad \lambda = \Delta x, \quad \Delta x_1 = \Delta x.$
$\nu = ?$	

Відповідь: $\nu = 33{,}3$ МГц, $\Delta x_1 = 9, 18, 27, \ldots$ м.

4.73. Струм у коливальному контурі змінюється за законом

$I = 0{,}7 \cos(10^6\pi\tau + (\pi/4))$ А. Визначити довжину електромагнітної хвилі λ, яка відповідає коливанням у контурі.

Дано	*Розв'язання*
$I = 0{,}7\ \cos\left(10^6\pi t + \dfrac{\pi}{4}\right)$ А $c = 3\cdot10^8$ м/с	$\lambda = \dfrac{c}{\nu}, \quad \nu = \dfrac{\omega}{2\pi}, \quad \lambda = \dfrac{2\pi c}{\omega}.$ $\omega = 10^6\pi$ с$^{-1}$.
$\lambda = ?$	

Відповідь: $\lambda = 600$ м.

4.74. У коливальному контурі здійснюються вільні коливання. Визначити довжину хвилі λ випромінювання, що генерується контуром, якщо максимальний заряд конденсатора $q_m = 0{,}1$ нКл, а максимальна сила струму в контурі $I_m = 1$мА.

Дано	*Розв'язання*

q_m = 1 нКл = 10^{-9} Кл I_m = 10 мА = 10^{-2} А	Довжина електромагнітної хвилі пов'язана з періодом коливань
λ = ?	$\lambda = cT = 2\pi c\sqrt{LC}$.

За законом збереження енергії в коливальному контурі найбільше значення енергії електричного поля конденсатора має дорівнювати найбільшому значенню енергії магнітного поля котушки $\frac{q_m^2}{2C} = \frac{LI_m^2}{2}$.

Звідси визначимо $LC = \frac{q_m^2}{I_m^2}$. Тоді довжина хвилі становить

$\lambda = 2\pi\tilde{n}\frac{q_m}{I_m}$.

Відповідь: λ = 188,4 м.

4.75. Індуктивність коливального контуру радіоприймача L = 0,25 мГн. Ємність конденсатора C змінюється в границях від 20 до 200 пФ. Хвилі якої довжини може приймати радіоприймач?

Дано	*Розв'язання*
L = 0,25 мГн = $0{,}25\cdot10^{-3}$ Гн C_1 = 20 пФ = $2\cdot10^{-11}$ Ф C_2 = 200 пФ = $2\cdot10^{-10}$ Ф	$\lambda = cT$, $T = 2\pi\sqrt{LC}$, $\lambda = 2\pi c\sqrt{LC}$.
λ_1 = ? λ_2 = ?	

Відповідь: від λ_1 = 133 м до λ_2 = 421 м.

4.76. Радіостанція передає на частоті ν = 100 МГц. Якою має бути довжина l антени для прийому такої станції, якщо вона становить половину довжини радіохвилі?

Дано	*Розв'язання*
ν = 100 МГц = 10^8 Гц $l = \frac{\lambda}{2}$	$\lambda = \frac{c}{\nu}$, $l = \frac{c}{2\nu}$.
l = ?	***Відповідь***: l = 1,5 м.

4.77. Визначити швидкість поширення електромагнітних хвиль у склі. Показник заломлення скла n = 1,5.

Відповідь: v = 200 Мм/с.

4.78. Електромагнітна хвиля з частотою $\nu_0 = 100$ МГц переходить з вакууму в немагнітне середовище.($\mu = 1$) з діелектричною проникністю $\varepsilon = 4$. Визначити довжини електромагнітної хвилі в вакуумі і середовищі.

Дано	*Розв'язання*
$\nu_0 = 100$ МГц $= 10^8$ Гц $c = 3\cdot10^8$ м/с $\varepsilon = 4$ $\mu = 1$	$\lambda_0 = \frac{c}{\nu_0}$, $\lambda = \frac{v}{\nu}$, $\nu = \nu_0$, $v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$. $\lambda = \frac{c}{\nu_0\sqrt{\varepsilon}}$.
$\lambda_0 = ?$ $\lambda = ?$	
Відповідь: $\lambda_0 = 3$ м, $\lambda = 1{,}5$ м..	

4.79. Електромагнітна хвиля з частотою $\nu = 9{,}7$ МГц переходить з немагнітного середовища ($\mu = 1$) в повітря.($\varepsilon = 1$, $\mu = 1$) Довжина хвилі в середовищі $\lambda = 22{,}09$ м. Визначити швидкість поширення хвилі в середовищі, показник заломлення середовища, довжину хвилі в повітрі.

Відповідь: $v = 214$ Мм/с, $n = 1{,}4$, $\lambda_0 = 30{,}93$ м.

5 розділ

ОПТИКА

5.1. ГЕОМЕТРИЧНА ОПТИКА

Основні закони і формули

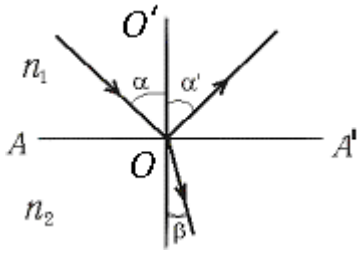
- Швидкість світла в середовищі:

$$v = c/n,$$

де $c \approx 3\cdot10^8$ м/с – швидкість світла у вакуумі, n – абсолютний показник заломлення середовища. В оптично однорідних середовищах світло поширюється прямолінійно. Світловий промінь – лінія, вздовж якої поширюється світлова енергія.

• ***Закони відбивання та заломлення світла:***

– на плоскій межі двох середовищ з показниками заломлення n_1 і n_2 падаючий (*I*), відбитий (*I′*), заломлений (*2*) промені, а також перпендикуляр *OO′*, поставлений в точку падіння *O*, лежать в одній площині;



– кут падіння дорівнює куту відбивання: $\alpha = \alpha'$;

– відношення синуса кута падіння α до синуса кута заломлення β є величина стала для двох даних середовищ

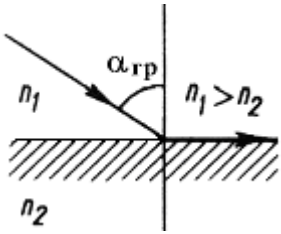
$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n_{21}$$

і називається відносним показником заломлення другого середовища відносно першого. З урахуванням зв'язку між відносним і абсолютним показниками заломлення $n_{21} = n_2/n_1$, закон заломлення записують у зручному для застосувань вигляді

$$n_1 \sin\alpha = n_2 \sin\beta,$$

тобто добуток показника заломлення на синус кута між нормаллю і променем при кожному заломленні є величина стала.

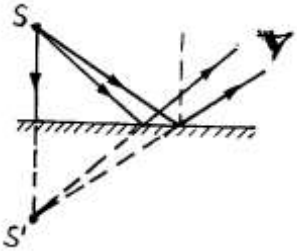
• Коли світло поширюється з оптично густішого середовища (середовища з більшим показником заломлення n_1) в оптично рідше середовище (середовище з меншим показником заломлення $n_2 < n_1$), то починаючи з деякого кута падіння $\alpha_{гр}$ світловий потік повністю відбивається від межі поділу. Такий кут падіння називається граничним кутом повного відбивання



$$\sin\alpha_{гр} = \frac{n_2}{n_1}.$$

• Зображення *S′* точкового джерела світла *S* у плоскому дзеркалі завжди уявне і симетричне джерелу відносно дзеркала. Якщо око людини розміщене у відбитому потоці світла, їй здається, що промені

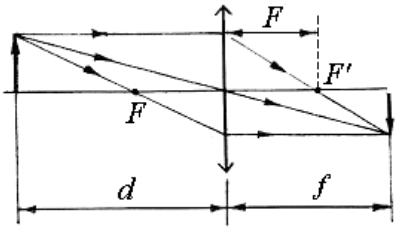
виходять з точки S'.Відстань від зображення до дзеркала дорівнює відстані від предмета до дзеркала.

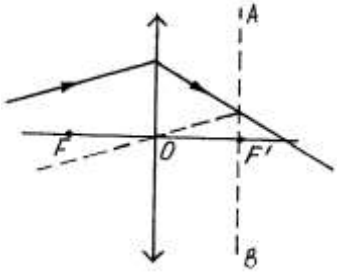


• Паралельний пучок променів, що падає на опуклу лінзу, після заломлення в лінзі сходиться в одній точці, яка називається *фокусом*. Лінія, що проходить через центр лінзи і обидва її фокуси називається *головною оптичною віссю*. Будь-яка інша лінія, що проходить через оптичний центр лінзи і не співпадає з головною оптичною віссю, називається *побічною оптичною віссю*. Дві паралельні площини, що проходять через фокуси лінзи перпендикулярно до її головної оптичної осі, називаються *фокальними площинами.* Кожний з променів, що є паралельним побічній оптичній осі, після заломлення в лінзі проходить через одну й ту ж точку, яка лежить у фокальній площині лінзи.

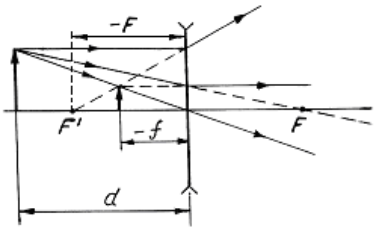
• На відміну від збиральної, розсіювальна лінза перетворює паралельний пучок променів у такий, що розходиться. Така лінза має уявні фокуси, в яких сходяться не самі промені, а їх уявні продовження в бік, протилежний напряму поширення світла.

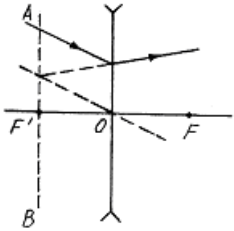
• Хід характерних променів у збиральній тонкій лінзі, а також хід довільного променя.



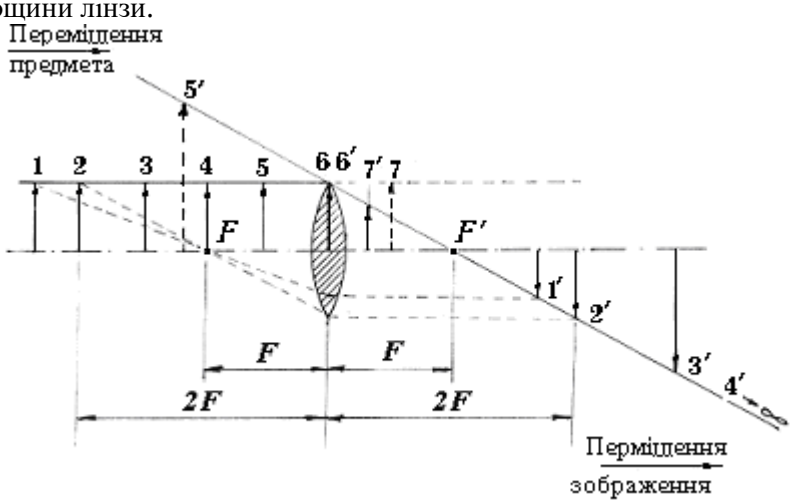


• Хід характерних променів у розсіювальній тонкій лінзі, а також хід довільного променя.

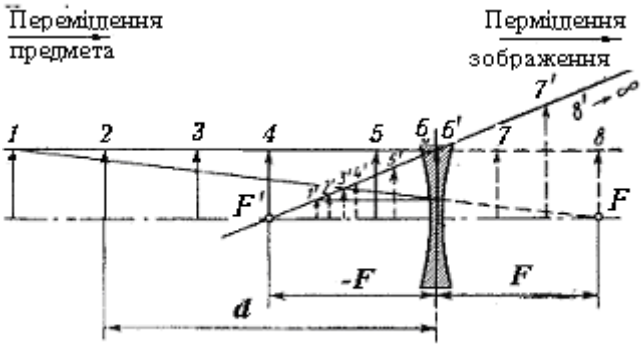




На рисунках FF' – головна оптична вісь лінзи; $|OF| = |OF'|$ – фокусна відстань лінзи; O – оптичний центр лінзи; AB – слід фокальної площини лінзи.



На рисунках показано побудову зображень (цифри зі штрихом) і переміщення їх в залежності від переміщення предмета (цифри без штрихів) для семи положень предмета перед збиральною і розсіювальною лінзами. Штриховими лініями вказані уявні зображення і предмети, розташовані справа від лінз.



- Формула лінзи

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F},$$

де d,f – відстані від лінзи до предмета і його зображення, F – фокусна відстань. Якщо величина d (або f, або F) дійсна, вона береться зі знаком плюс, якщо уявна – мінус. Величина $D = 1/F$ називається оптичною силою лінзи. Якщо фокусна відстань F виражена у метрах, то оптична сила D – у діоптріях (дптр).

Відбивання і заломлення світла

5.1. Під яким кутом α має впасти промінь з повітря на поверхню скла, щоб кут заломлення β був у 2 рази меншим, ніж кут падіння? Показник заломлення скла n = 1,5.

Дано	*Розв'язання*
$\frac{\alpha}{\beta}=2$ n = 1,5 α = ?	$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{\sin\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}=n$; $\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{n}{2}$, $\frac{\alpha}{2}=2\arccos\frac{n}{2}$.

Відповідь: α = 82°49′.

5.2. Промінь світла переходить з льоду в повітря. Кут падіння на поверхню льоду становить $\alpha = 15°$. Визначити кут заломлення β цього променя в повітрі. Показник заломлення льоду $n_л = 1{,}31$.

Дано	*Розв'язання*
$n_л = 1{,}31$ $\alpha = 15°$	$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{1}{n}, \beta = \arcsin(n\sin\alpha).$
$\beta = ?$	Відповідь: $\beta = 20°$.

5.3. Світло падає на плоску межу поділу води ($n_1 = 1{,}33$) та скла ($n_2 = 1{,}50$) з води під кутом $\alpha = 60°$. Визначити кут заломлення β.

Відповідь: $\beta = 50{,}2°$.

5.4. Швидкість поширення світла в деякій рідині $v =$ $= 240$ Мм/с. На поверхню цієї рідини під кутом $\alpha = 25°$ з повітря падає світловий промінь. Визначити кут заломлення променя.

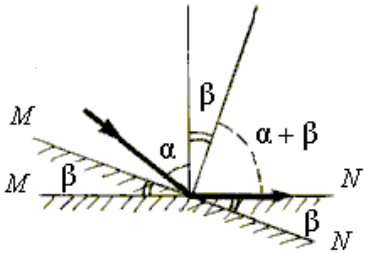
Дано	*Розв'язання*
$v = 2{,}4\cdot10^8$ м/с $\alpha = 25°$	$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n = \frac{c}{v}, \beta = \arcsin\frac{v\sin\alpha}{c}.$
$\beta = ?$	***Відповідь***: $\beta = 20°$.

5.5. Визначити кут падіння α променя на плоске дзеркало, якщо кут між падаючим та відбитим променями дорівнює γ.

Відповідь: $\alpha = \gamma/2$.

5.6. Промінь світла падає під кутом $\alpha = 60°$ до поверхні землі. Як треба розмістити плоске дзеркало, щоб після відбивання промінь йшов паралельно поверхні землі?

Дано	*Розв'язання*
$\alpha = 60°$ $\beta = ?$	Під час повороту дзеркала *MN* на кут β нормаль до дзеркала також повертається на кут β. Тепер кут падіння буде $\alpha + \beta$, а кут між падаючим і відбитим променями дорівнює $2(\alpha + \beta)$. За умовою задачі $2(\alpha + \beta) = 60° + 90° = 150°$. Звідси $\beta = 15°$.

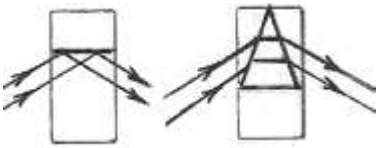


Відповідь: Під кутом $\beta = 15°$ до горизонту.

5.7. В якому з ящиків знаходиться плоске дзеркало, а в якому – трикутна скляна призма? Зробіть рисунок, вказавши хід променів усередині ящиків.

Розв'язання

Як видно з побудови, в першому ящику знаходиться плоске дзеркало, в другому – трикутна призма.



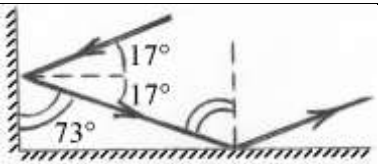
5.8. Предмет наближається до плоского дзеркала зі швидкістю v відносно дзеркала. Чому дорівнює швидкість v_1 предмета відносно його зображення?

Дано	*Розв'язання*
v	Якщо предмет s наближається до дзеркала зі швидкістю v, зображення s' також наближається до дзеркала зі швидкістю v. Швидкість v_1 предмета відносно його зображення $v_1 = v + v = 2v$.
v_1 = ?	

Відповідь: $v_1 = 2v$.

5.9. Світловий промінь падає на систему двох взаємно перпендикулярних дзеркал. Кут падіння променя на перше дзеркало 17°. Відбившись від першого дзеркала, промінь падає на друге. Визначити кут відбивання променя від другого дзеркала.

Дано	*Розв'язання*
$\alpha_1 = 17°$	
$\alpha_2' = ?$	

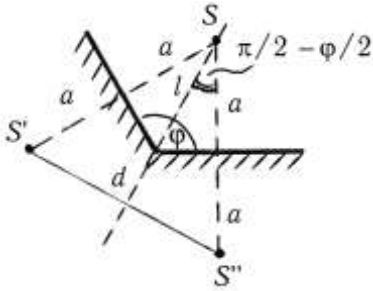


З закону відбивання світла випливає, що падаючий і відбитий промені утворюють однакові кути з нормаллю до площини дзеркала.

Відповідь: $\alpha_2' = 73°$.

5.10. Два плоских дзеркала утворюють двогранний кут φ = 120°. На відстані l = 12 см від лінії перетину дзеркал і на однаковій відстані від кожного дзеркала знаходиться точкове джерело світла. Визначити відстань d між зображеннями джерела.

Дано	*Розв'язання*
φ = 120° l = 12 см d = ?	Джерело світла S міститься на бісектрисі кута φ. Нехай відстань від джерела S до кожного з дзеркал a. Кожне з зображень – S' та S'' – знаходиться по той бік відповідного дзеркала на відстані $2a$ від джерела. З рисунка випливає



$$a = l\sin\frac{\varphi}{2},$$

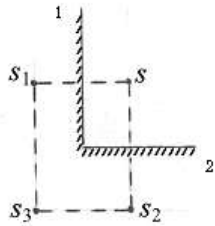
$$\frac{d}{2} = 2a\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2}\right) = 2a\cos\frac{\varphi}{2},$$

$$d = 4a\cos\frac{\varphi}{2} = 2l \cdot 2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2} = 2l\sin\varphi.$$

Відповідь: d = 20,8 см.

5.11. Два дзеркала утворюють двогранний кут 90°. Скільки зображень утворюється від світної точки, що міститься між дзеркалами?

Дано	*Розв'язання*
α = 90° n = ?	Перші два уявних зображення S_1 і S_2 утворюються за рахунок відбивання променів окремо у кожному дзеркалі. Зображення розміщені симетрично відносно дзеркал.



Частина променів відбивається від обох дзеркал. Наприклад, спочатку від дзеркала *1*, потім від дзеркала *2*. Тоді після відбивання у дзеркалі *1* пучок променів ніби виходить з S_1 і після відбивання у дзеркалі *2* одержуємо уявне зображення S_3. Отже, уявна світна точка

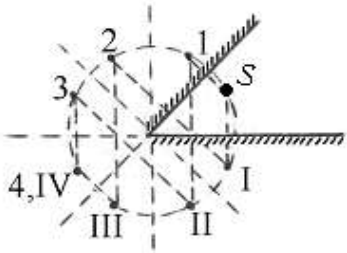
S_1 дає у дзеркалі *2* зображення S_3. Аналогічно точка S_2 у дзеркалі *1* дає зображення, що накладається на точку S_3.

Точка S_3 розміщена позаду обох дзеркал, тому вона в них не відбивається і зображення не дає. Таким чином, усього маємо 3 зображення.

Відповідь: n = 3.

5.12. Скільки зображень світної точки S можна отримати, якщо точка знаходиться між двома плоскими дзеркалами, які розміщені під кутом α = 45° одне до одного?

Дано	*Розв'язання*
α = 45°	В к а з і в к а. Див. задачу 5.11. Промені, що йдуть від світної точки S, багаторазово відбиваються від дзеркал і дають уявні зображення точки на своїх продовженнях. Виконуючи послідовно побудову зображень у дзеркалах, отримаємо зображення у верхньому дзеркалі (вказані арабськими цифрами) та у нижньому(вказані римськими цифрами) – усього сім зображень. Кількість зображень для будь-якого кута між дзеркалами
n = ?	



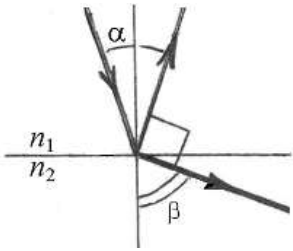
$$n = \frac{360^o}{\varphi} - 1.$$

Відповідь: n = 7.

5.13. На плоску межу поділу середовищ з абсолютними показниками заломлення n_1 = 2,4 і n_2 = 1,4 падає промінь світла з першого середовища. Визначити кут падіння α, якщо відомо, що відбитий та заломлений промені перпендикулярні один до одного.

Дано	*Розв'язання*

$n_1 = 2{,}4$ $n_2 = 1{,}4$ $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$	Зручно користуватися законом заломлення світла у вигляді $n_1 \sin\alpha = n_2 \sin\beta$.
$\alpha = ?$	З рисунка $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$,



$$\sin\beta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha,$$

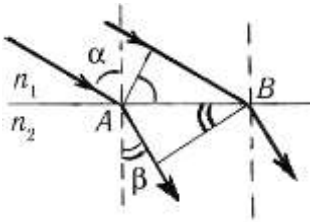
$$n_1 \sin\alpha = n_2 \cos\alpha,\ \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{n_2}{n_1},\ \alpha = \mathrm{arctg}\frac{n_2}{n_1}$$

Відповідь: $\alpha = 30{,}26°$.

5.14. Пучок паралельних променів завширшки $l_1 = 3$ см падає з повітря на плоску межу поділу середовищ. Абсолютний показник заломлення другого середовища $n_2 = 1{,}5$, кут падіння

$\alpha = 45°$. Визначити ширину l_2 пучка в другому середовищі.

Дано	*Розв'язання*
$l_1 = 3$ см $n_1 = 1$ $n_2 = 1{,}5$ $\alpha = 45°$	$l_1 = AB\cos\alpha$, $l_2 = AB\cos\beta$, $\frac{l_2}{l_1} = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}$;
$l_2 = ?$	$\cos\beta = \sqrt{1 - \sin^2\beta}$, $n_1 \sin\alpha = n_2 \sin\beta$,

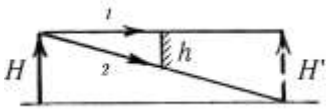


$$l_2 = l_1 \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2\alpha}}{\cos\alpha}.$$

Відповідь: $l_2 = 3{,}76$ см.

5.15. Якої найменшої висоти h потрібно взяти плоске дзеркало, щоб людина, зріст якої H, змогла побачити себе в ньому у повний зріст?

Дано	*Розв'язання*
H	Зображення H' людини є симетричним відносно площини дзеркала. Промені *1* та *2*
$h = ?$	

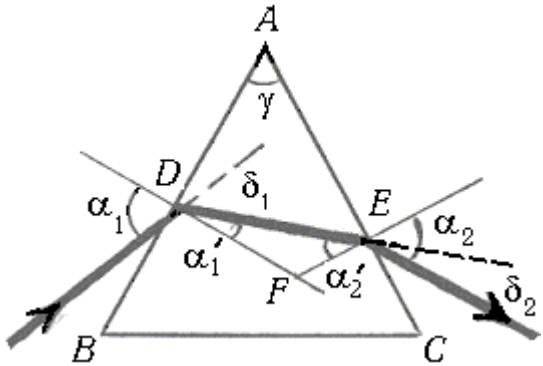


обмежують кут зору людини, отже нижня частина дзеркала є зайвою для того, щоб людина мала змогу побачити себе на весь зріст. З подібних трикутників знаходимо $h = \frac{H}{2}$. Дзеркало слід розмістити на висоті h від підлоги.

Відповідь: $h = H/2$.

5.16. Промінь монохроматичного світла падає на ліву бічну грань скляної тригранної призми під кутом $\alpha_1 = 60°$. Заломний кут призми $\gamma = 50°$, показник заломлення скла $n = 1{,}5$. Під яким кутом α_2 виходить промінь з правої бічної грані? На який кут відхиляється промінь від первісного напряму після проходження крізь призму?

Дано	*Розв'язання*
$\gamma = 50°$ $n = 1{,}5$ $\alpha_1 = 60°$	
$\alpha_2 = ?$	



За законом заломлення для лівої грані AB $\sin\alpha_1 = n \sin\alpha'_1$,

звідки $\alpha'_1 = \arcsin\left(\frac{\sin\alpha_1}{n}\right) = 35{,}26°$. Після першого заломлення кут відхилення променя становить $\delta_1 = \alpha_1 - \alpha'_1 = 24{,}74°$.

З трикутника ADE $\gamma + (90° - \alpha'_1) + (90° - \alpha'_2) = 180°$, звідки кут падіння на праву грань $\alpha'_2 = \gamma - \alpha'_1 = 14{,}74°$. За законом заломлення для правої грані AC $n \sin\alpha'_2 = \sin\alpha_2$, і кут заломлення на цій грані $\alpha_2 = \arcsin(n \sin\alpha'_2) = 22{,}44°$.

Кут заломлення променя під час другого заломлення

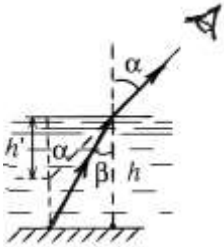
$$\delta_2 = \alpha_2 - \alpha'_2 = 7{,}7°.$$

Сумарний кут відхилення становить $\delta = \delta_1 + \delta_2 = 32{,}44°$.

***Відповідь*:** $\alpha_2 = 22{,}44°, \delta = 32{,}44°$.

5.17. Предмет лежить на дні водоймища глибини h = 4 м. На який глибині h' побачить людина цей предмет? Спостереження проводиться вертикально. Показник заломлення води n = 1,33.

Дано	*Розв'язання*
h = 4 м $n_{пов}$ = 1 $n_в$ = 1,33 h' = ?	Промінь від предмета, що лежить на дні водоймища, заломлюється на межі поділу вода – повітря. У разі переходу з середовища з більшим показником заломлення (вода, $n_в$ = 1,33) у середовище з меншим показником заломлення (повітря, $n_{пов}$ = 1), промінь, заломлюючись, відходить далі від перпендикуляра, тобто $\alpha > \beta$.



Людині, яка дивиться згори униз, здається, що глибина водоймища дорівнює h', хоча насправді вона є h За умовою спостереження проводиться вертикально, тобто всі кути падіння і заломлення дуже малі. Тангенси і синуси таких кутів можна замінити самими кутами, які виражені в радіанній мірі.

$$\mathrm{tg}\ \alpha \approx \sin\alpha \approx \alpha\,,\ \ \mathrm{tg}\alpha = \frac{AB}{h'}\,,\ \ \mathrm{tg}\beta = \frac{AB}{h}\,,\ \ h' = h\frac{\mathrm{tg}\beta}{\mathrm{tg}\alpha} \approx h\frac{\beta}{\alpha}\,,$$

$$n_{\text{пв}}\ \sin\alpha = n_{\text{в}}\sin\beta\,,\ \ n_{\text{пв}}\,\alpha \approx n_{\text{в}}\beta\,,\ \ \alpha = \frac{n_{\text{в}}}{n_{\text{пв}}}\beta\,,$$

$$h' = h\frac{\beta n_{\text{пв}}}{n_{\text{в}}\beta} = h\frac{n_{\text{пв}}}{n_{\text{в}}}\,.$$

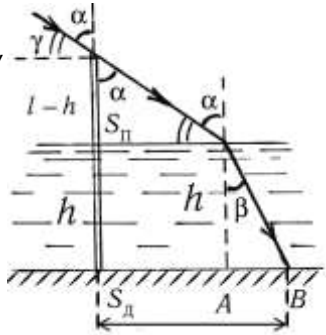
Відповідь: h' = 3 м.

5.18. Палицю завдовжки l = 4 м занурено вертикально у річку глибиною h=1,5 м. Визначити довжину тіні від палиці на поверхні ($s_п$) та на дні ($s_д$) річки, якщо сонячні промені падають під кутом γ = 30° до поверхні води. Показник заломлення води

n = 1,33.

Дано	*Розв'язання*

$l = 4$ м $h = 1{,}5$ м $\gamma = 30^\circ$ $n = 1{,}33$	$\alpha = 90^\circ - \gamma$, $s_п = (l - h)\mathrm{tg}\,\alpha = (l - h)\mathrm{ctg}\,\gamma$ $s_д = s_п + AB$, $AB = h\mathrm{tg}\,\beta$, $\sin\alpha = n\sin\beta$,
$s_п = ?$ $s_д = ?$	



$$\mathrm{tg}\,\beta = \frac{\sin\beta}{\sqrt{1-\sin^2\beta}} = \frac{\cos\gamma}{\sqrt{n^2-\cos^2\gamma}}$$

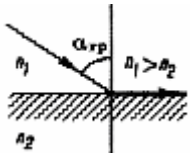
$$s_д = (l-h)\mathrm{ctg}\,\gamma + \frac{h\cos\gamma}{\sqrt{n^2-\cos^2\gamma}}.$$

Відповідь: $s_п = 4{,}33$ м, $s_д = 5{,}62$ м.

Повне відбивання

5.19. На плоску межу поділу двох середовищ *1* та *2* з показниками заломлення $n_1 > n_2$ падає промінь світла з середовища *1*. За якої умови заломленого променя не буде?

Дано	*Розв'язання*
$n_1 > n_2$ $i_{гр} = ?$	Промінь, який іде з оптично густішого середовища в оптично рідше, відхиляється від перпендикуляра. Кут заломлення може досягти максимального значення 90°, тобто заломлений промінь ковзає по поверхні. Зі збільшенням кута падіння світло не проходить у друге середовище, заломленого променя не буде (явище повного відбивання). Застосувавши закон заломлення світла, встановимо граничний кут повного відбивання



$$n_1 \sin\alpha_{гр} = n_2 \sin 90^\circ,$$

$$\sin\alpha_{гр} = n_2/n_1.$$

Кут падіння, при якому світло повністю відбивається в друге середовище

$$\alpha_{гр} \geq \arcsin(n_2/n_1).$$

Відповідь: $\alpha_{гр} \geq \arcsin(n_2/n_1)$.

5.20. Швидкість світла в алмазі $v = 1{,}22\cdot10^8$ м/с. Визначити граничний кут $\alpha_{гр}$ повного відбивання під час переходу світла з

алмазу в повітря.

Дано	*Розв'язання*
$v_{алм} = 1{,}22 \cdot 10^8$ м/с $v_{пов} = c = 3 \cdot 10^8$ м/с	
$\alpha_{гр} = ?$	

$$n_{пов} \sin\frac{\pi}{2} = n_{алм} \sin\alpha_{гр},$$

$$\sin\alpha_{ãð} = \frac{n_{îîâ}}{n_{àëì}},\ \frac{n_{пов}}{n_{алм}} = \frac{c}{v_{пов}}\frac{v_{алм}}{c},\ \sin\alpha_{ãð} = \frac{v_{àëì}}{v_{îîâ}},$$

$$\alpha_{ãð} = \arcsin\frac{v_{àëì}}{v_{îîâ}}.$$

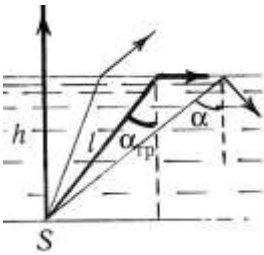
Відповідь: $\alpha_{гр} = 24°$.

5.21. Промінь світла виходить зі скипидару у повітря. Граничний кут повного відбивання $\alpha_{гр} = 42°23'$. Визначити швидкість $v_{ск}$ світла у скипидарі.

Відповідь: $v_{ск} = 2{,}02 \cdot 10^8$ м/с.

5.22. На дні посудини з водою знаходиться точкове джерело світла. Товщина шару води $h = 50$ см, показник заломлення води $n = 1{,}3$. Визначити максимальний і мінімальний час, потрібний для того, щоб світло від джерела пройшло шар води і вийшло з води у повітря

Дано	*Розв'язання*
$h = 50$ см $= 0{,}5$ м $n = 1{,}3$	Мінімальний час потрібен у випадку, коли промінь йде вертикально вгору, $t_{min} = \frac{h}{v}$ де $v = \frac{c}{n}$ – швидкість світла у воді.
$t_{min} = ?$ $t_{max} = ?$	



Максимальний час потрібен у випадку, коли промінь падає з води на поверхню під граничним кутом $\alpha_{гр}$. При цьому заломлений промінь ковзає по поверхні. Якщо промінь падає з води на поверхню під кутом, більшим за граничний, $\alpha > \alpha_{гр}$, він з

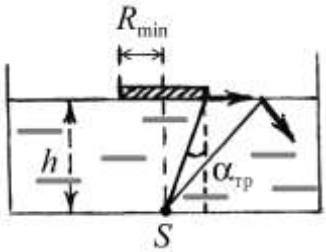
води не вийде, а відіб'ється назад у воду. Отже, $t_{max} = \frac{l}{v}$,

$l = \frac{h}{\cos\alpha_{ãð}}$, , $\sin\alpha_{ãð} = \frac{1}{n}$, $t_{max} = \frac{hn^2}{c\sqrt{n^2-1}}$.

Відповідь: t_{min} = 2,2 нс, t_{max} = 3,4 нс.

5.23. Широку посудину заповнено водою до висоти h = 11,5 см. На дні посудини знаходиться точкове джерело світла, а на поверхні води плаває непрозорий круглий диск, причому його центр і джерело лежать на одній вертикальній прямій. Яким має бути найменший радіус R_{min} диска, щоб жоден промінь світла від джерела не зміг вийти з води у повітря? Показник заломлення води n = 1,33.

Дано	*Розв'язання*
h = 11,5 см n = 1,33 R_{min} = ?	Розміри диска мають бути такими, щоб промінь, який падає від джерела S на край диска, падав би під граничним кутом $\alpha_{гр.}$ (див. розв'язання задачі 5.22). З рисунка випливає, що tg $\alpha_{гр.} = \frac{R_{min}}{h}$. Відомо також, що sin $\alpha_{гр} = \frac{1}{n}$. Після перетворень одержимо:



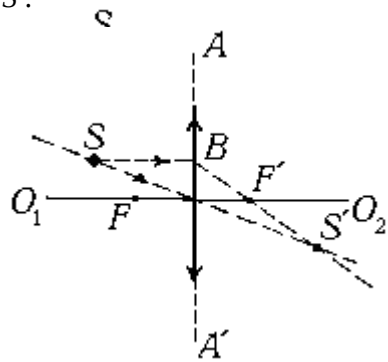
$$R_{min} = \frac{h}{\sqrt{n^2-1}}$$

Відповідь: R_{min} = 13,1 см.

Лінзи

5.24. На рисунку показано положення точкового джерела світла S та його зображення у тонкій лінзі S'. Пряма O_1O_2 — головна оптична вісь лінзи. Визначити побудовою центр O лінзи та її фокуси F і F'.

Розв'язання. Серед багатьох променів, які виходять із світної точки, є такий, що проходить

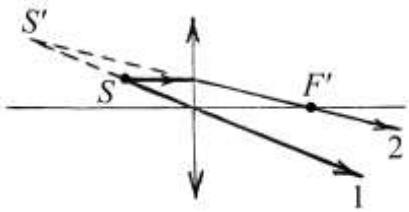


через S і S', не заломлюючись. Це буде у випадку, коли промінь SS' проходить через оптичний центр лінзи. Отже, лінза буде розміщена в площині, слід якої — пряма AA', перпендикулярна до головної оптичної осі. Промінь SB, паралельний головній оптичній осі, після проходження лінзи перетинає цю вісь у задньому фокусі F'. Передній фокус F визначимо, виходячи з умови $|OF| = |OF'|$.

5.25. На рисунку O_1O_2 - головна оптична вісь тонкої лінзи, S – світна точка, S' – її зображення. Визначити побудовою оптичний центр O лінзи та її фокуси F і F'.

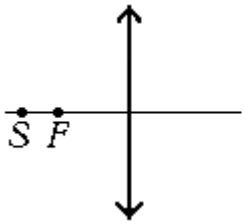
Розв'язання.

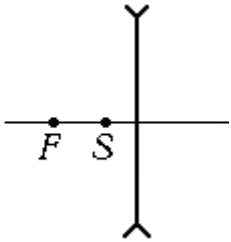
Проводимо пряму *1* через S та □S', вона проходить крізь оптичний центр лінзи. Так визначаємо положення збірної лінзи. Світна точка і її зображення містяться по один бік лінзи, отже зображення є уявним.



Промінь *2*, пущений паралельно оптичній осі, після заломлення має пройти через фокус F', але його продовження проходить через S'. Так визначаємо положення □F'.

5.26. Визначити побудовою зображення світної точки S у лінзах на наведених рисунках.





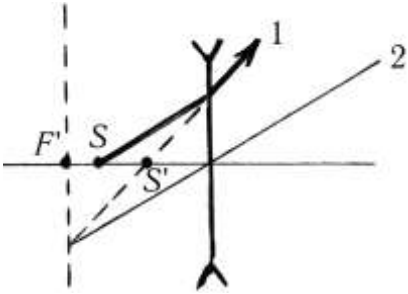
Розв'язання

Відкладаємо фокуси по обидва боки лінзи. Направимо на лінзу довільний промінь *1*. Паралельно *1* проводимо побічну оптичну вісь *2*,

яка перетне фокальну площину у побічному фокусі $F_{поб}$.

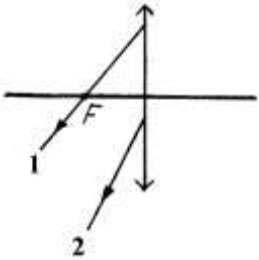
Промінь *1*, як і всі ті, що є паралельними побічній оптичній осі, після заломлення лінзою збираються у побічному фокусі $F_{поб}$. Отже, промінь *1* пройде через $F_{поб}$.

Зображення □S' лежить на перетині оптичної осі і променя *1*.

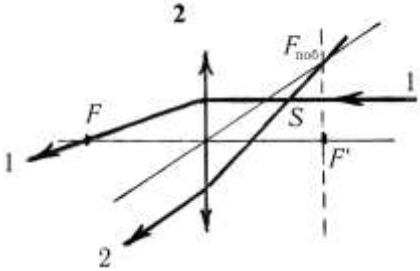


У другому випадку побічний фокус уявний, і в ньому збираються не самі промені, а їх продовження.

5.27. Визначити побудовою точку, з якої вийшли промені *1* і *2*, хід яких після лінзи показано на рисунку.

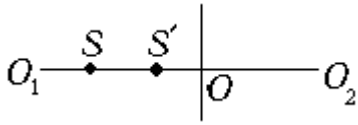


Розв'язання. Оскільки промінь *1* після заломлення проходить через фокус, до лінзи він йшов паралельно оптичній осі. Проведемо фокальну площину, відклавши фокусну відстань по інший бік лінзи. Проведемо тепер побічну оптичну вісь через центр лінзи паралельно променю *2*. Вона перетне фокальну площину у побічному фокусі $F_{поб}$. Крізь побічний фокус $F_{поб}$. має проходити і промінь *2*.



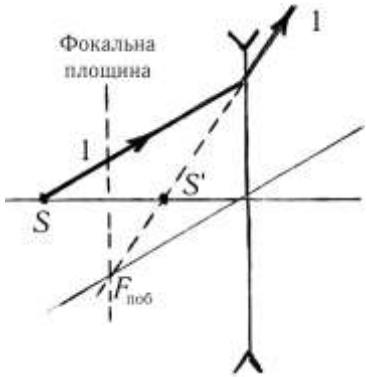
На перетині *1* і *2* міститься шукана точка *S*.

5.28. На рисунку. задані оптична вісь лінзи O_1O_2, світна точка *S*, її зображення *S'*, положення тонкої лінзи з оптичним центром *O*.



Визначити побудовою фокуси лінзи.

Розв'язання. Проводимо довільний промінь *1*.



Якою є лінза – збірною чи розсіювальною – невідомо. Якщо вона є збірною, то промінь *1* заломиться в напрямі до оптичної осі, але ані він, ані його продовження в такому разі не пройдуть через точку *S′*, що неможливо. Отже лінза є розсіювальною, а промінь *1* заломиться в бік від оптичної осі, тоді його продовження пройде через □точку *S′*.

Проводимо паралельно *1* побічну оптичну вісь. Продовження *1* перетне фокальну площину у побічному фокусі.

Будуємо фокальну площину, яка проходить через побічний фокус перпендикулярно до головної оптичної осі. Знаходимо фокуси лінзи.

5.29. Оптична сила збиральної лінзи D = 8 дптр. Предмет розміщений на відстані d = 50 см від лінзи. На якій відстані f від лінзи міститься зображення? Яким є збільшення Г лінзи?

Дано	*Розв'язання*
D = 8 дптр d = 50 см = 0,5 м	$\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=D$; $f=\frac{d}{Dd-1}$; $\Gamma=\frac{f}{d}$.
f = ? Г = ?	
Відповідь: f = 0,16 м; Г = 0,33.	

5.30. Збиральна лінза дає на екрані чітке зображення предмета, яке в Г = 2 рази більше, ніж предмет. Відстань від предмета до лінзи на l = 6 см більша від її фокусної відстані. Визначити відстань f від лінзи до екрана.

Дано	*Розв'язання*
Г = 2 $d - F = l$ = 6 см	$\Gamma=\frac{H}{h}=\frac{f}{d}$, $\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F}$, $d-F=l$,
f = ?	Розв'язуючи ці рівняння відносно f,

знаходимо $f = l\Gamma(\Gamma+1)$.

Відповідь: f = 36 см

5.31. Предмет розміщений на відстані d = 3 м від двоопуклої

тонкої лінзи з фокусною відстанню F = 1 м. Визначити, на якій відстані f від лінзи міститься зображення предмета.

Відповідь: f = 1,5 м.

5.32. Головна фокусна відстань збиральної лінзи F = 50 см. Предмет висотою h = 1,2 см поміщено на відстані d = 60 см від лінзи. Де і якої висоти утвориться зображення цього предмета?

Дано	*Розв'язання*
F = 50 см d = 60 см h = 1,2 см	$\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F}$; $f=\frac{Fd}{d-F}$, $\Gamma=\frac{H}{h}=\frac{f}{d}$, $H=\frac{Fh}{d-F}$.
f = ? H = ?	***Відповідь***: f = 300 см; H = 6 см.

5.33. Предмет висотою h =2 см розміщено перед збиральною лінзою на відстані d = 2,5 см. Зображення предмета на екрані має висоту H = 8 см. Визначити лінійне збільшення Г лінзи та її фокусну відстань F.

Дано	*Розв'язання*
d = 2,5 см h = 2 см H = 8 см	$\Gamma=\frac{H}{h}$, $\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F}$, $\frac{H}{h}=\frac{f}{d}$ (див. розв'язання
Г = ?F = ?	задачі 5.30), $F=\frac{dH}{H+h}$.

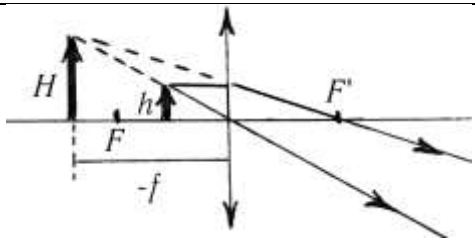
Відповідь: Г = 4, F = 2 см.

5.34. Зображення діапозитива 5×5 см, отримане на екрані за допомогою проекційного ліхтаря, має розмір 2×2 м. Визначити оптичну силу об'єктива проекційного ліхтаря, якщо відстань від об'єктива до екрана f = 4 м.

Дано	*Розв'язання*
h = 0,05 м H = 2 м f = 4 м	$\Gamma=\frac{H}{h}=\frac{f}{d}$; $\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F}=D$, $\frac{H}{hf}+\frac{1}{f}=D$;
D = ?	$D=\frac{H+h}{hf}$.

Відповідь: D = 10,25 дптр

5.35. За допомогою збиральної лінзи з фокусною відстанню F = 6 см розглядають монету діаметра 1,25 см. При цьому отримують уявне зображення, діаметр якого 5 см. Визначити відстань d від монети до лінзи і f від лінзи до зображення монети.

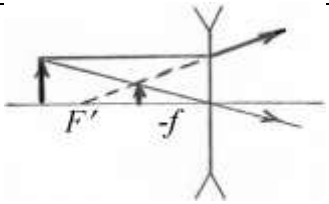
Дано	*Розв'язання*
F = 6 см h = 1,25 см H = 5 см	
d = ? f = ?	

За правилом знаків f треба вважати від'ємною величиною, оскільки зображення уявне. Формула лінзи тоді набуває вигляду $\frac{1}{d} - \frac{1}{|f|} = \frac{1}{F}$.

З рисунка $\frac{H}{h} = \frac{|f|}{d}$. Розв'язуючи ці рівняння, знаходимо $d = \frac{F(H-h)}{H}$, $|f| = \frac{F(H-h)}{h}$.

Відповідь: d = 4,5 см, $|f|$ = 18 см.

5.36. На якій відстані d перед розсіювальною лінзою з оптичною силою D = – 3 дптр треба поставити предмет, щоб його уявне зображення знаходилось посередині між лінзою та її фокусом?

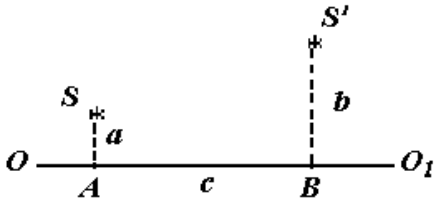
Дано	*Розв'язання*
D = – 3 дптр $\lvert f \rvert = \frac{\lvert F \rvert}{2}$	
d = ?	

У розсіювальної лінзи фокус є уявним, зображення теж. Тому формула лінзи набуває вигляду:

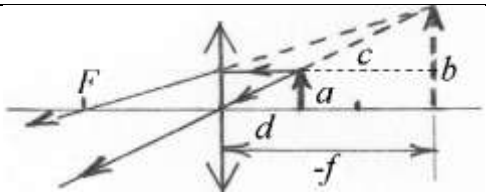
$\frac{1}{d} - \frac{1}{|f|} = -\frac{1}{|F|}$. За умовою $|f| = \frac{|F|}{2}$. Зв'язок між фокусною відстанню і оптичною силою $|F| = \frac{1}{|D|}$. Розв'язуючи ці рівняння, знаходимо: $d = |F| = \frac{1}{|D|}$.

Відповідь: d = 0,33 м.

5.37. На рис. зображена світна точка S і її зображення S', що дає лінза.



Головна оптична вісь лінзи - пряма OO_1. Відстані від точок до оптичної осі дорівнюють відповідно a = 20 см і b = 30 см, відстань між точками A і B дорівнює c = 15 см. Визначити фокусну відстань лінзи F.

Дано	*Розв'язання*
a = 20 см b = 30 см c = 15 см	
F = **?**	

За умовою зображення збільшене і пряме, такий випадок спостерігається, якщо предмет розташований між фокусом і збиральною лінзою (див. рис.). Формула лінзи з урахуванням того, що зображення уявне,

$$\frac{1}{d} - \frac{1}{|f|} = \frac{1}{F}.$$

З рисунка $\frac{b}{a} = \frac{|f|}{d}$, $|f| = c + d$. Розв'язуючи рівняння, знайдемо:

$$d = \frac{ac}{b-a}, \quad |f| = c + \frac{ac}{b-a}.$$

Відповідь: F = 90 см.

5.2. ХВИЛЬОВА ОПТИКА

Основні закони і формули

• Світло у ряді явищ поводить себе, як електромагнітна хвиля. Довжина світлової хвилі λ_0 у вакуумі пов'язана з частотою ν і швидкістю c світла у вакуумі:

$$\lambda_0 = \frac{c}{\nu}.$$

Довжина світлової хвилі в середовищі з абсолютним показником заломлення n

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{n}.$$

• Інтерференція світла – явище, в якому при накладанні пучків світла від когерентних джерел відбувається просторовий перерозподіл енергії світлового випромінювання, внаслідок чого в одних точках простору відбувається підсилення, в інших – послаблення інтенсивності світла.

Інтерференційні максимуми (підсилення світла) спостерігаються в тому випадку, коли оптична різниця ходу $L_2 - L_1$ двох хвиль, які приходять від джерел у дану точку, дорівнює цілому числу довжин хвиль у вакуумі:

$$L_2 - L_1 = \Delta = \pm\ m\lambda_0 \quad (m = 0, 1, 2, \ldots).$$

Інтерференційні мінімуми (послаблення світла) спостерігається в тому випадку, коли оптична різниця ходу двох хвиль дорівнює непарному числу довжин півхвиль у вакуумі

$$L_2 - L_1 = \Delta = \pm (2\ m+1)\lambda_0 /2 \quad (m = 0, 1, 2, \ldots).$$

• Дифракційна гратка – система з багатьох однакових щілин, розділених однаковими непрозорими проміжками. У фокальній площині лінзи, яка встановлена за граткою, збираються промені, які мають певний нахил φ до оптичної осі. Максимум спостерігається в тому випадку, коли виконується умова:

$$d \sin \varphi = \pm\, m\lambda,$$

тут d – період гратки; φ – кут дифракції; m = 0, 1, 2, …– порядок максимуму; λ – довжина хвилі, що падає нормально на поверхню гратки.

Довжина світлової хвилі в середовищі

5.38. Світло з довжиною хвилі λ_0 = 0,6 мкм поширюється з повітря у воду. Абсолютний показник заломлення води n = 1,33. Визначити довжину світлової хвилі у воді.

Дано	*Розв'язання*
λ_0 = 0,6 мкм n =1,33	$\lambda = \frac{v}{\nu},\ \nu = \frac{c}{\lambda_0},\ v = \frac{c}{n},\ \lambda = \frac{c\lambda_0}{nc} = \frac{\lambda_0}{n}.$
λ = ?	
Відповідь: λ = 0,45 мкм.	

5.39. Швидкість світла у воді $v = 1{,}95\cdot10^8$ м/с. Визначити довжину хвилі λ світла у воді при частоті $\nu = 4{,}85\cdot10^{14}$ Гц.

Відповідь: $\lambda = 402$ нм.

5.40. Довжина хвилі зелених променів при переході з рідини в скло змінюється на $\Delta\lambda = 0{,}47\cdot10^{-7}$ м. Частота, що відповідає зеленим променям, $\nu = 5{,}4\cdot10^{14}$ с$^{-1}$. Визначити показник заломлення n рідини, якщо показник заломлення скла $n_c = 1{,}5$.

Дано	*Розв'язання*
$\nu_з = 5{,}4\cdot10^{14}$ с$^{-1}$ $\Delta\lambda = 0{,}47\cdot10^{-7}$ м $n_c = 1{,}5$	$\lambda = \dfrac{v}{\nu}$, $v = \dfrac{c}{n}$, $\lambda = \dfrac{c}{\nu n}$, $\Delta\lambda = \lambda_р - \lambda_c = \dfrac{c}{\nu n_р} - \dfrac{c}{\nu n_c}$, $n_р = \dfrac{1}{\dfrac{\nu\Delta\lambda}{c} + \dfrac{1}{n_c}}$.
$n_р = ?$	

Відповідь: $n_р = 1{,}33$.

Інтерференція світла

5.41. Пучки когерентного випромінювання з різницею ходу $\Delta = 4$ мкм приходять в деяку точку простору. Що буде спостерігатись у цій точці – підсилення чи послаблення світла – для хвиль з довжиною λ = 800, 533, 470 нм?

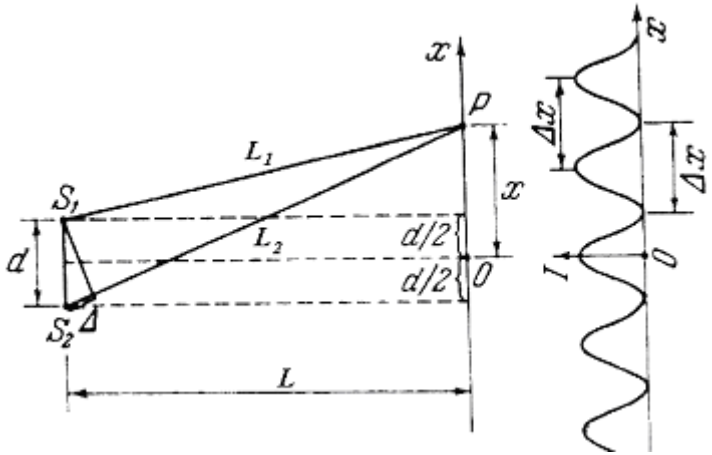
Дано	*Розв'язання*
$\Delta = 4$ мкм $= 4\cdot10^{-6}$ м $\lambda_1 = 800$ нм $= 8\cdot10^{-7}$ м $\lambda_2 = 533$ нм $= 5{,}33\cdot10^{-7}$ м $\lambda_3 = 470$ нм $= 4{,}7\cdot10^{-7}$ м	У першому випадку різниця ходу Δ хвиль дорівнює парному числу півхвиль, спостерігається підсилення, у другому і третьому – непарному числу, спостерігається послаблення.
Max = ? Min = ?	

Відповідь: *1* –max, *2,3* – min.

5.42. Відстань між двома вузькими світними щілинами, що випромінюють когерентне світло з довжиною хвилі $\lambda = 560$ нм, $d = 0{,}14$ мм. На відстані $L = 2$ м від джерел розміщено екран, на якому спостерігається інтерференційна картина – світлі та темні смуги, що

чергуються. Визначити відстань Δx між центрами двох сусідніх світлих смуг (ширину смуги).

Дано	*Розв'язання*
$\lambda = 560$ нм $= 5{,}6\cdot10^{-7}$ м $d = 0{,}14$ мм $= 1{,}4\cdot10^{-4}$ м $L = 2$ м	На рисунку. S_1 і S_2 – два джерела світла, що випромінюють в однаковій фазі. Початок відліку на екрані вибраний у точці O, положення довільної точки на екрані характеризується координатою x. У правій частині рисунка показано зміну інтенсивності світла в залежності від координати x – чергування місць з максимальною і мінімальною інтенсивностями.
$\Delta x = ?$	



Згідно з рисунком

$$L_1^2 = L^2 + (x - \frac{d}{2})^2, \quad L_2^2 = L^2 + (x + \frac{d}{2})^2 \quad .$$

Тут L_1 і L_2 – відповідні шляхи, які пройшли світлові хвилі від кожного джерела до екрана. Віднімаємо одне рівняння від іншого

$$(L_2^2 - L_1^2) = (L_2 + L_1)(L_2 - L_1) = 2xd$$

Відстань x, у межах якої утворюються інтерференційні смуги, значно менша від L. Тому можна покласти $L_2 + L_1 \approx 2L$, і тоді оптична різниця ходу двох хвиль (середовище, у якому поширюються хвилі, для спрощення вважаємо повітрям з показником заломлення $n = 1$)

$$\Delta = L_2 - L_1 = xd/L.$$

У точці x екрана буде спостерігатись максимум інтенсивності світла, якщо різниця ходу Δ дорівнює цілому числу довжин хвиль

$$x_{max} = \pm m \frac{L}{d} \lambda \qquad (m = 0,1,2,...)$$

Ширина інтерференційної смуги, тобто відстань між двома сусідніми максимумами з номерами m і $m + 1$, буде мати значення

$$\Delta x = \frac{L}{d} \lambda .$$

Відповідь: $\Delta x = 8$ мм.

5.43. Екран освітлюється монохроматичним світлом, яке випромінюється двома когерентними джерелами світла S_1, S_2 (рис. до задачі 5.42). Відстань на екрані між двома сусідніми максимумами освітленості $\Delta x = 2$ мм, відстань до екрана $L = 4$ м, відстань між джерелами $d = 1$ мм. Визначити довжину хвилі λ світла, що випромінюється джерелами

Відповідь: $\lambda = 0,5$ мкм.

5.44. Два когерентних джерела S_1 і S_2 випускають монохроматичне світло з довжиною хвилі $\lambda = 600$ нм. Визначити, на якій відстані x від точки O на екрані, паралельному обом джерелам (рис. до задачі 5.42), буде спостерігатися перший максимум, якщо відстань до екрана $L = 4$ м, відстань між джерелами $d = 1$ мм.

Відповідь: $x_1 = 2,4$ мм.

5.45. На екран падає світло з довжиною хвилі $\lambda = 460$ нм від двох когерентних джерел, відстань між якими $d = 180$ мкм (рис. до задачі 5.42). На відстані $x = 20$ мм від середини екрану O проходить центр третьої світлої смуги. Визначити відстань L від джерел світла до екрану.

Відповідь: $L = 2,6$ м.

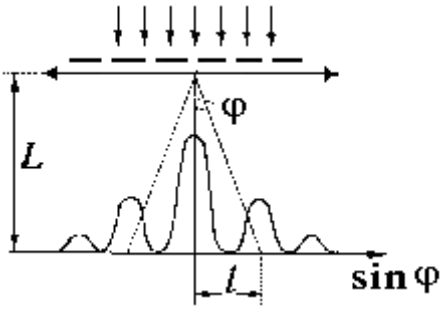
5.46. На екрані спостерігається інтерференційна картина від двох когерентних джерел світла (рис. до задачі 5.42) з довжиною хвилі $\lambda = 650$ нм. На відрізку довжиною $x = 6$ см. вміщується $n = 12$ інтерференційних смуг. Визначити відстань d між джерелами світла, якщо відстань від них до екрану $L = 3,4$ м.

Відповідь: $d = 0,44$ мм.

Дифракція світла

5.47. На дифракційну ґратку нормально до її поверхні падає світло з довжиною хвилі λ = 0,555 мкм. На екран, розміщений на відстані L = 1 м від ґратки, за допомогою лінзи проектується дифракційна картина. Перший максимум інтенсивності світла (освітленості) спостерігається на відстані l = 12 см від центрального. Визначити період d дифракційної ґратки.

Дано	*Розв'язання*
λ = 0,555 мкм L = 1 м l = 12 см = 0,12 м	Період дифракційної ґратки знаходимо з умови $d \sin\varphi = \pm m\lambda$, де за умовою задачі m = 1. З рисунка випливає, що $\mathrm{tg}\,\varphi = l/L$. Оскільки $l << L$, можна покласти $\mathrm{tg}\,\varphi \approx \sin\varphi$. Тоді $dl/L = m$, звідки $d = m\lambda L/l$.
d = ?	



Відповідь: d = 4,58 мкм.

5.48. Дифракційна ґратка відхиляє спектр третього порядку на кут φ_1 = 25°. На який кут φ_2 відхиляє вона спектр четвертого порядку?

Дано	*Розв'язання*
φ_1 = 25°. m_1 = 3 m_2 = 4	$\begin{cases} d\sin\varphi_1 = m_1\lambda \\ d\sin\varphi_2 = m_2\lambda \end{cases}, \quad \dfrac{\sin\varphi_1}{\sin\varphi_2} = \dfrac{m_1}{m_2},$ $\varphi_2 = \arcsin\left(\dfrac{m_2}{m_1}\sin\varphi_1\right)$
φ_2 = ?	

Відповідь: $\varphi_2 = 34°18'$.

5.49. У спектрі від дифракційної ґратки максимум третього порядку спостерігається під кутом $\varphi_3 = 45°$. Як відноситься період ґратки d до довжини хвилі λ падаючого світла?

Відповідь: $d/\lambda = 4{,}26$.

5.50. Визначити довжину хвилі λ монохроматичного світла, падаючого нормально на ґратку з періодом $d = 4{,}4$ мкм, якщо кут між напрямами на максимуми другого і третього порядків

$\Delta\varphi = 10°$.

Дано	*Розв'язання*
$d = 4{,}4$ мкм $\Delta\varphi = 10°$. $m_1 = 2$ $m_2 = 3$	$\begin{cases} d\sin\varphi_1 = m_1\lambda \\ d\sin\varphi_2 = m_2\lambda \end{cases}$, $\quad \dfrac{\sin\varphi_1}{\sin\varphi_2} = \dfrac{m_1}{m_2}$,
$\lambda = ?$	$\varphi_2 = \varphi_1 + \Delta\varphi$, $\sin(\varphi_1 + \Delta\varphi) = \sin\varphi_1 \cdot \cos\Delta\varphi + \cos\varphi_1 \sin\Delta\varphi =$ $= 0{,}98$

$$\sin\varphi_1 + 0{,}17\cos\varphi_1 = 0{,}98\sin\varphi_1 + 0{,}17\sqrt{1 - \sin^2\varphi_1},$$

$$\frac{\sin\varphi_1}{0{,}98\sin\varphi_1 + 0{,}17\sqrt{1 - \sin^2\varphi_1}} = \frac{2}{3},\ \sin\varphi_1 = 0{,}32,\ \lambda = \frac{d\sin\varphi_1}{m_1}.$$

Відповідь: $\lambda = 0{,}7$ мкм.

5.51. Третій дифракційний максимум розміщується на екрані на відстані $l = 19$ см від центрального максимуму і на відстані $L = 1{,}8$ м від ґратки. Визначити довжину світлової хвилі λ, якщо період ґратки $d = 20$ мкм.

Дано	*Розв'язання*
$m = 3$ $l = 0{,}19$ м $L = 1{,}8$ м $d = 2\cdot10^{-5}$ м	$\lambda = \dfrac{d\sin\varphi}{m}$, $\quad \sin\varphi = \dfrac{l}{L}$, $\quad \lambda = \dfrac{dl}{mL}$.
$\lambda = ?$	***Відповідь***: $\lambda = 0{,}7$ мкм.

6 розділ

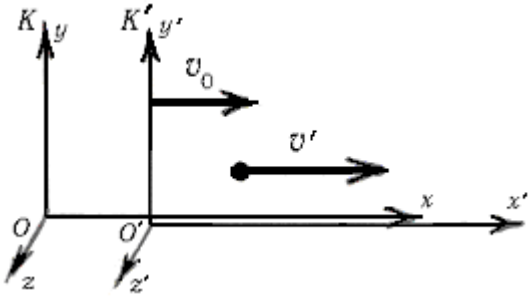
Елементи релятивістської та квантової фізики

6.1. Елементи теорії відносності

Основні закони і формули

• Релятивістський закон додавання швидкостей у випадку, коли система відліку K' рухається відносно системи K з постійною швидкістю v_0, направленою вздовж осі Ox, а тіло рухається паралельно осі Ox в напрямку швидкості v_0

$$v = \frac{v' + v_0}{1 + \frac{v_0 v'}{c^2}},$$



тут v – швидкість тіла відносно системи K, v' – швидкість тіла відносно системи K', $c = 3 \cdot 10^8$ м/с – швидкість світла в вакуумі.

• Маса тіла, що рухається зі швидкістю v (релятивістська маса)

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}},$$

де m_0 – маса спокою тіла.

• Закон взаємозв'язку маси і енергії: повна енергія вільної частинки дорівнює добутку релятивістської маси на квадрат швидкості світла в вакуумі

$$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}},$$

• У системі відліку, де тіло перебуває в спокої, його енергія називається енергією спокою

$$E_0 = m_0c^2.$$

• Частинка називається релятивістською, якщо її швидкість порівняна зі швидкістю світла.

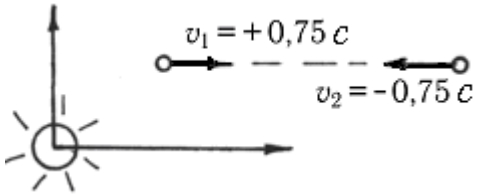
Повна енергія релятивістської частинки є сумою її енергії спокою і кінетичної енергії

$$E = mc^2 = m_0c^2 + E_k.$$

• Під час будь-якого збільшення або зменшення повної енергії тіла на ΔE релятивістська маса тіла зростає або зменшується на $\Delta m = \Delta E/c^2$.

6.1. Дві космічні частинки рухаються назустріч одна одній зі швидкостями $v_1 = v_2 = 0{,}75\ c$ відносно Сонця. Визначити швидкість v однієї частинки відносно іншої за класичною та релятивістською формулами додавання швидкостей.

Дано	*Розв'язання*
$v_1 = v_2 = 0{,}75$ с	
$v_{кл.відн}$ = ?	
$v_{рел.відн}$ = ?	

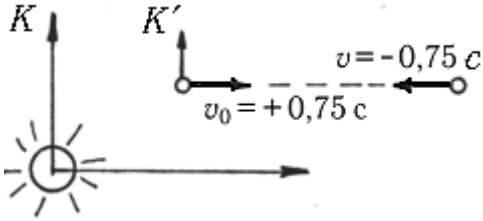


На верхньому рисунку зображені дві частинки, що рухаються зі швидкостями v_1 та v_2 відносно системи відліку, пов'язаній з Сонцем. Плюс та мінус вказують, що проекція швидкості на вісь Ox є додатною або від'ємною.

Введемо тепер рухому систему відліку K', з'єднавши її з однією з частинок, наприклад, з лівою. Тоді швидкість самої системи K' відносно K буде

$v_0 = +\ 0{,}75\ c$. Швидкість правої частинки є швидкістю її відносно K і вона буде тепер позначатися v та дорівнюватиме

$-\ 0{,}75\ c$.



Треба визначити

швидкість правої частинки відносно лівої, або відносно системи K', ця швидкість позначається v'. Отже задача формулюється так: дано $v_0 = +0{,}75\ c$, $v = -0{,}75\ c$, визначити v'.

За класичним законом додавання швидкостей

$$v = v_0 + v'.$$

або $v' = v - v_0 = -0{,}75 - 0{,}75\ c = -1{,}5\ c$. Мінус вказує напрям швидкості. Отже, права частинка наближається до лівої зі швидкістю 1,5 c. Але такої швидкості частинка мати не може, оскільки швидкість світла c є граничною. Класичний закон додавання швидкостей не можна застосовувати для великих швидкостей.

За релятивістським законом додавання швидкостей

$v = \dfrac{v_0 + v'}{1 + \dfrac{v_0 v'}{c^2}}$., або після алгебраїчних перетворень $v' = \dfrac{v - v_0}{1 - \dfrac{v_0 v}{c^2}}$.

$$v' = \frac{-0{,}75c - 0{,}75c}{1 - \dfrac{0{,}75c(-0{,}75c)}{c^2}} = -0{,}96c$$

Відносна швидкість зближення частинок не перевищує швидкості світла в вакуумі c.

Відповідь: $v_{\text{кл.відн}} = 1{,}5\ c$, що неможливо, $v_{\text{рел.відн}} = 0{,}96\ c$.

6.2. Дві релятивістські частинки рухаються в одному напрямі зі швидкостями $v_1 = 0{,}6\ c$ і $v_2 = 0{,}9\ c$ відносно лабораторної системи відліку. Визначити їх відносну швидкість за класичною та релятивістською формулами додавання швидкостей.

Відповідь: $v_{\text{кл.відн}} = 0{,}3\ c$, $v_{\text{рел.відн}} = 0{,}652\ c$.

6.3. На скільки збільшиться маса протона, якщо його прискорити до швидкості $v = 0{,}8\ c$?

Дано	*Розв'язання*
$m_0 = 1{,}6724 \cdot 10^{-27}$ кг $v = 0{,}8\ c$	$\Delta m = m - m_0 = m_0\left(\dfrac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1\right)$.
$\Delta m = ?$	

Відповідь: $\Delta m = 1{,}12 \cdot 10^{-27}$ кг.

6.4. При якій швидкості руху релятивістська маса електрона буде вдвічі більше його маси спокою?

Дано	*Розв'язання*

$m = 2\,m_0$ $v = ?$	$\dfrac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = 2m_0,\ 1 - \dfrac{v^2}{c^2} = \dfrac{1}{4},\ \dfrac{v^2}{c^2} = \dfrac{3}{4},$

$$v = 0{,}866\ c.$$

Відповідь: $v = 2{,}6 \cdot 10^8$ м/с.

6.5. Повна енергія релятивістської частинки у 6 разів перевищує її енергію спокою. Визначити швидкість цієї частинки.

Відповідь: $v = 2{,}96 \cdot 10^8$ м/с.

6.6. Визначити кінетичну енергію E_k протона, що рухається зі швидкістю $v = 0{,}75$ с. Відповідь виразити в електронвольтах.

Дано	*Розв'язання*
$m_0 = 1{,}6724 \cdot 10^{-27}$ кг $v = 0{,}75$ с	
$E_k = ?$	

$$E_k = mc^2 - m_0c^2 = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1\right).$$

Відповідь: $E_k = 7{,}69 \cdot 10^{-11}$ Дж = 481 МеВ.

6.7. Виразити масу спокою електрона в енергетичних одиницях – джоулях і електронвольтах.

Відповідь: $E_0 = 8{,}19 \cdot 10^{-14}$ Дж = 0,511 МеВ.

6.8. На скільки збільшиться маса спокою пружини жорсткості k = 0,15 МН/м під час її стискання на 5 см?

Дано	*Розв'язання*
$k = 0{,}15$ МН/м $= 0{,}15 \cdot 10^6$ Н/м $x = 5$ см $= 5 \cdot 10^{-2}$ м	
$\Delta m_0 = ?$	

$$\Delta m_0 = \frac{\Delta E}{c^2},\ \Delta E = \frac{kx^2}{2},\ \Delta m_0 = \frac{kx^2}{2c^2}$$

Відповідь: $\Delta m_0 = 2{,}08 \cdot 10^{-15}$ кг

6.9. Якій зміні маси спокою Δm_0 палива і окислювача у порівнянні з масою спокою продуктів згорання палива відповідає енергія, яку виробляє за рік теплова електростанція потужністю $P = 5$ ГВт?

Відповідь: маса спокою продуктів згорання менша на $\Delta m_0 = 1{,}75$ кг.

6.10. Під час поділу одного ядра урану $^{235}_{92}U$ звільняється енергія ΔE = 200 МеВ. На скільки відрізняється маса продуктів поділу ядер урану, що містяться в одному молі, від маси моля урану?

Відповідь: маса спокою продуктів поділу менша на Δm_0 = 0,21 г.

6.2. Світлові кванти

Основні закони і формули

- Енергія фотона

$$\varepsilon = h\nu = h\frac{c}{\lambda},$$

де $h = 6{,}63\cdot10^{-34}$ Дж·с – стала Планка; $c = 3\cdot10^{8}$ м/с – швидкість світла в вакуумі, ν – частота світла, λ – довжина хвилі.

- Маса фотона

$$m = \frac{h\nu}{c^2}.$$

- Імпульс фотона

$$p = mc = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}.$$

- Рівняння Ейнштейна для фотоефекту:

$$h\nu = A_{в} + \frac{mv_m^2}{2},$$

де $A_{в}$ – робота виходу електрона з металу; m – маса електрона, v_m – максимальна швидкість фотоелектрона.

Фотони

6.11. Гелій-неоновий лазер, який працює у неперервному режимі, випромінює світло з довжиною світлової хвилі λ = 632,8 нм і розвиває потужність P = 40 мВт. Скільки фотонів випромінює щосекунди лазер?

Дано	*Розв'язання*

$\lambda = 630$ нм $= 0{,}63\cdot10^{-6}$ м $P = 40$ мВт $= 4\cdot10^{-2}$ Вт $t = 1$ с	$W = Pt,$ $W = \varepsilon N = \frac{hc}{\lambda}N;\ Pt = \frac{hc}{\lambda}N\ :,$ $N = \frac{Pt\lambda}{hc}.$
$N = ?$	

Відповідь: $N = 1{,}27\cdot10^{17}$.

6.12. Око людини сприймає світло з довжиною хвилі 500 нм, якщо потужність світлових пучків, що потрапляють в око, понад $2{,}1\cdot10^{-17}$ Вт. Яка кількість світлових квантів потрапляє за секунду на сітківку ока в цьому випадку?

***Відповідь*:** $N = 53$.

6.13. Обчислити енергію ε, масу m і імпульс p фотонів, що відповідають найбільш довгим ($\lambda_{черв} = 0{,}76$ мкм) і найбільш коротким ($\lambda_{фіол} = 0{,}40$ мкм) хвилям видимої частини спектра.

Відповідь: $\varepsilon_{черв} = 2{,}62\cdot10^{-19}$ Дж, $\varepsilon_{фіол} = 4{,}97\cdot10^{-19}$ Дж, $m_{черв} = 2{,}9\cdot10^{-36}$ кг, $m_{фіол} = 5{,}53\cdot10^{-36}$ кг,
$p_{черв} = 8{,}73\cdot10^{-28}$ кг·м/с, $p_{фіол} = 1{,}66\cdot10^{-27}$ кг·м/с.

6.14. Визначити довжину хвилі λ фотона, маса якого дорівнює масі спокою: 1) електрона ($m_e = 9{,}1\cdot10^{-31}$ кг); 2) нейтрона ($m_н = 1{,}67\cdot10^{-27}$ кг).

Відповідь: 1) $\lambda = 2{,}43\cdot10^{-12}$ м, 2) $\lambda = 1.32\cdot10^{-15}$ м.

6.15. З якою швидкістю v має рухатись електрон, щоб його кінетична енергія дорівнювала б енергії γ-фотона з довжиною хвилі λ = 0,3 нм?

Дано	*Розв'язання*
$m_e = 9{,}1\cdot10^{-31}$ кг $E_k = \varepsilon$ $E_0 = 0{,}511$ МеВ $\lambda = 0{,}3$ нм $= 3\cdot10^{-10}$ м	Визначимо енергію γ-фотона в електронвольтах: $\varepsilon = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6{,}625\cdot10^{-34}3\cdot10^{8}}{3\cdot10^{-10}1{,}6\cdot10^{-19}}$ еВ =
$v = ?$	= 4,14 кеВ.

Щоб визначити, якою є частинка з кінетичною енергією E_k – релятивістською, коли її швидкість порівняна зі швидкістю світла, чи класичною, коли її швидкість значно менша, ніж швидкість світла, треба порівняти кінетичну енергію частинки з її енергією спокою.

Якщо $\frac{E_k}{E_0} << 1$, частинку можна вважати класичною і кінетичну енергію рахувати за формулою $E_k = \frac{mv^2}{2}$. У даному випадку E_k/E_0 = $4{,}14\cdot10^3/0{,}511\cdot10^6 = 8{,}1\cdot10^{-3} << 1$, тобто електрон тут можна вважати класичною частинкою і його швидкість визначити з формули $v = \sqrt{\frac{2E_k}{m}}$. $v = \sqrt{\frac{2hc}{m\lambda}}$.

Відповідь: $v = 3{,}81\cdot10^7$ м/с.

6.16. У середовищі з показником заломлення $n = 1{,}25$ довжина світлової хвилі $\lambda = 0{,}33$ мкм. Визначити енергію фотона ε. Відповідь виразити в електронвольтах.

Дано	*Розв'язання*
$n = 1{,}25$ $\lambda = 0{,}33$ мкм $= 3{,}3\cdot10^{-7}$ м 1 еВ $= 1{,}6\cdot10^{-19}$ Дж	Довжина світлової хвилі частоти ν у вакуумі становить $\lambda_0 = c/\nu$. В середовищі з показником заломлення n довжина хвилі має значення
ε = ?	

$$\lambda = v/\nu = c/\nu n = \lambda_0/n. \text{ Тоді}$$

$$\varepsilon = h\nu = \frac{hc}{\lambda n}.$$

Відповідь: $\varepsilon = 2{,}51$ еВ.

6.17. У деякому середовищі поширюється світло з довжиною світлової хвилі $\lambda = 300$ нм і енергією кванта $\varepsilon = 4{,}4\cdot10^{-19}$Дж. Визначити абсолютний показник заломлення n середовища.

Відповідь: $n = 1{,}5$.

6.18. Під якою напругою працює рентгенівська трубка, якщо "найжорсткіші" промені в рентгенівському спектрі цієї трубки мають частоту 10^{19} Гц?

Дано	*Розв'язання*
$\nu = 10^{19}$ Гц	Випромінювання виникає за рахунок енергії, яку втрачає електрон під час гальмування на аноді рентгенівської трубки. Енергія, яку набуває електрон в електричному полі, а потім втрачає, дорівнює eU, максимальна енергія кванта, що народжується, $h\nu$.
U = ?	

$$eU = h\nu;\ U = \frac{h\nu}{e};\quad U = \frac{6{,}62\cdot 10^{-34}\cdot 10^{19}}{1{,}6\cdot 10^{-19}}\ \text{В} = 4{,}1\cdot 10^{4}\ \text{В}.$$

Відповідь: U = 41 кВ.

Фотоефект

6.19. На цинкову пластинку падає світло з довжиною хвилі λ = 300 нм. Визначити максимальну швидкість фотоелектронів. Робота виходу електронів з цинку $A_в$ = 3,74 еВ.

Дано	*Розв'язання*
λ = 300 нм = $0{,}3\cdot 10^{-6}$ м $A_в$ = 3,74 еВ = $5{,}98\cdot 10^{-19}$ Дж	$\frac{hc}{\lambda} = A_в + \frac{mv_{max}^2}{2}$,
v_{max} = ?	$v_{max} = \sqrt{\frac{2}{m}\left(h\frac{c}{\lambda} - A_в\right)}$

Відповідь v_{max} = 375 км/с.

6.20. Визначити червону границю $\lambda_ч$ фотоефекту для цезію, якщо при опроміненні цезієвої пластинки світлом з довжиною хвилі λ = 400 нм максимальна швидкість фотоелектронів

$v_m = 6{,}5\cdot 10^5$ м/с.

Дано	*Розв'язання*
m_e=$9{,}1\cdot 10^{-31}$ кг λ = 400 нм = $0{,}4\cdot 10^{-6}$ м $v_m = 6{,}5\cdot 10^5$ м/с	Максимальну довжину хвилі $\lambda_ч$ випромінювання, за якої ще можливий фотоефект (в цьому випадку кінетична енергія фотоелектрона дорівнює нулю), називають червоною
$\lambda_ч$ = ?	

границею фотоефекту. Червону границю фотоефекту знаходимо з формули $\lambda_{\div} = \frac{hc}{A_{\hat{a}}}$. Роботу виходу $A_в$ визначимо з рівняння Ейнштейна для фотоефекту

$$A_в = \frac{hc}{\lambda} - \frac{mv_m^2}{2}.$$

Таким чином

$$\lambda_{\div} = \frac{hc}{\frac{hc}{\lambda} - \frac{mv_m^2}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{\lambda} - \frac{mv_m^2}{2hc}}.$$

Відповідь: $\lambda_ч$ = 652 нм.

6.21. Визначити роботу виходу $A_в$ електронів із натрію, якщо червона границя фотоефекту для нього $\lambda_ч$ = 500 нм. Відповідь виразити в електронвольтах.

Дано	*Розв'язання*
$\lambda_ч = 500$ нм $= 0{,}5\cdot10^{-6}$ м 1 еВ $= 1{,}6\cdot10^{-19}$ Дж	$\frac{hc}{\lambda} = A_в + \frac{mv_m^2}{2}$, $v_m = 0$, $\frac{hc}{\lambda_ч} = A_в$.
$A_в$ = ?	

Відповідь $A_в$ = 2,49 еВ.

6.22. Червона границя фотоефекту для деякого металу $\lambda_ч$ = 340 нм. Визначити максимальну кінетичну енергію $E_{k\max}$ електронів, які вириваються з металу світлом з довжиною хвилі λ = 180 нм. Відповідь виразити в електронвольтах.

Відповідь: $E_{k\max}$ = 3,24 еВ.

6.23. Яка частка η енергії фотона витрачена на роботу виривання електрона, якщо червона границя фотоефекту $\lambda_ч$ = 300 нм і максимальна кінетична енергія фотоелектрона $E_{k\max}$ =1 еВ.

Відповідь:η = 0,81.

6.24. Фотоелектрони, що вириваються з поверхні металу світлом з частотою $2{,}2\cdot10^{15}$ с$^{-1}$, повністю затримуються гальмівним потенціалом 6,6 В, а світлом з частотою $4{,}6\cdot10^{15}$ с$^{-1}$ – потенціалом 16,6 В. Визначити за даними досліду сталу Планка.

Дано	*Розв'язання*
$\nu_1 = 2{,}2\cdot10^{15}$ с$^{-1}$ U_1 = 6,6 В $\nu_2 = 4{,}6\cdot10^{15}$ с$^{-1}$ U_2 = 16,6 В	З рівняння Ейнштейна для фотоефекту максимальна кінетична енергія фотоелектронів $E_{k\max} = h\nu - A_{\hat{a}}$.
h = ?	За рахунок кінетичної енергії електрони

можуть здійснювати роботу проти сил гальмівного електричного поля $E_{k\max} = eU$.

Для вказаних випадків маємо систему рівнянь

$$\begin{cases} h\nu_1 - A_{вих} = eU_1 \\ h\nu_2 - A_{вих} = eU_2 \end{cases}$$, з якої визначимо сталу Планка

$$h = \frac{e(U_2 - U_1)}{\nu_2 - \nu_1}.$$

Відповідь: $h = 6{,}6 \cdot 10^{-34}$ Дж·с.

6.25. Срібна кулька опромінюється електромагнітним випромінюванням з довжиною хвилі $\lambda = 200$ нм. Внаслідок фотоефекту на поверхні кульки виникає електричний заряд. До якого максимального потенціалу φ_{max} заряджається кулька при цьому? Робота виходу електронів із срібла $A_в = 4{,}28$ еВ.

Дано	*Розв'язання*
$\lambda = 200$ нм $= 2 \cdot 10^{-7}$ м $A_в = 4{,}28$ еВ $= 6{,}85 \cdot 10^{-19}$ Дж $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл	Під час опромінювання кулька втрачає електрони і заряджається позитивно. Робота гальмівного електричного поля дорівнює
$\varphi_{max} = ?$	

кінетичній енергії електрона $e\varphi_{max} = \frac{mv_{max}^2}{2}$, $\frac{mv_{max}^2}{2} = \frac{hc}{\lambda} - A_в$,

$$\varphi_{max} = \frac{hc}{\lambda e} - \frac{A_в}{e}.$$

Відповідь: $\varphi_{max} = 1{,}94$ В.

6.26. Деякий метал опромінюється світлом з довжиною хвилі $\lambda = 250$ нм. Нехтуючи імпульсом фотона, знайти максимальний імпульс p_{max}, який отримує поверхня металу під час вильоту кожного електрона, якщо червона границя фотоефекту для цього металу $\lambda_ч = 280$ нм

Дано	*Розв'язання*
$\lambda = 250$ нм $= 2{,}5 \cdot 10^{-7}$ м $\lambda_ч = 280$ нм $= 2{,}8 \cdot 10^{-7}$ м $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг	$p_{max} = mv_{max}$, $\varepsilon = A_в + \frac{mv_{max}^2}{2}$,
$p_{max} = ?$	$\varepsilon = \frac{hc}{\lambda}$, $A_в = \frac{hc}{\lambda_ч}$,

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{2}{m} hc\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_ч}\right)}, \; p_{\max} = \sqrt{2mhc\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_ч}\right)}.$$

Відповідь: $p_{\max} = 4 \cdot 10^{-25}$ кг·м/с.

6.3. Будова атома

Основні закони і формули

- Модель атома водню за Бором.

Перший постулат Бора (постулат стаціонарних станів): атом може перебувати тільки в особливих стаціонарних станах, в яких він не випромінює. Здійснюються тільки ті орбіти електрона, які задовольняють певним квантовим умовам

$$m\, v_n r_n = n \frac{h}{2\pi},$$

де m – маса електрона, v_n – швидкість електрона на n-й орбіті радіуса r_n, h – стала Планка, n – ціле число (квантове число), або порядковий номер стаціонарного стану атома.

Другий постулат Бора (правило частот): під час переходу атома з одного стаціонарного стану в інший, енергія фотона, що випромінюється або поглинається

$$h\nu_{nm} = E_n - E_m,$$

де h – стала Планка; ν_{nm} – частота коливань, яка відповідає кванту випромінювання (поглинання); m, n – номери відповідних стаціонарних станів, E_n і E_m – енергії стаціонарних станів атома до і після випромінювання (або поглинання). Можливі частоти ν і відповідні довжини хвиль λ випромінювання атома водню

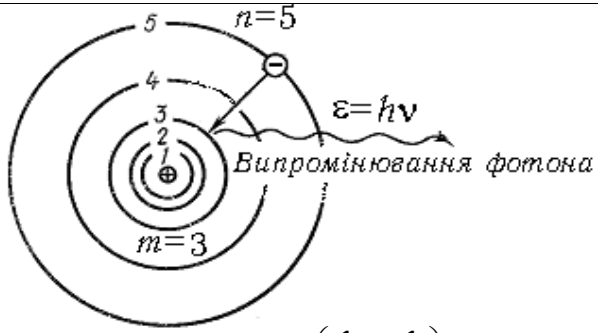
$$\nu = \frac{c}{\lambda} = R\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right),$$

де m визначає номер орбіти, на яку переходить електрон, n – номер орбіти, з якої переходить електрон, $R = 3{,}29 \cdot 10^{15}\,\text{с}^{-1}$ – стала Ридберга.

Атом водню за теорією Бора

6.27. Визначити довжину хвилі λ світла, яке випускається під час

переходу електрона в атомі водню з п’ятої стаціонарної орбіти на третю.

Дано	*Розв’язання*
$n = 6$ $m = 2$ $\lambda = ?$	

$$\lambda_{nm} = c/\nu_{nm} = c/R\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right) = 3\cdot10^8/3{,}29\cdot10^{15}\left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{5^2}\right), \text{ м} =$$

$= 1{,}28\cdot10^{-6}$ м.

Відповідь: $\lambda = 1{,}28$ мкм.

6.28. На скільки зміниться енергія електрона в атомі водню під час випромінювання атомом фотона з довжиною хвилі

$\lambda = 486$ нм?

Відповідь: $\Delta E = 2{,}56$ еВ.

6.29. Скільки квантів з різною енергією можуть випускати атоми водню, якщо їх електрони містяться на четвертій орбіті?

Дано	*Розв’язання*
$n = 4$ $m =$	Під час переходу з четвертої орбіти на першу, другу, третю – 3 кванти (див. рис. до задачі 6.27). З третьої орбіти на першу, другу – 2 кванти. З другої орбіти на першу – 1 квант. Усього 6 квантів.

Відповідь: 6 квантів.

6.30. Згідно з теорією Бора радіус першої орбіти електрона в атомі водню $r_1 = 52{,}9$ пм. Визначити лінійну v і кутову ω швидкості руху електрона на першій орбіті. Маса електрона

$m = 9{,}1\cdot10^{-31}$ кг, заряд електрона $e = 1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл.

Дано	*Розв’язання*

r_1 = 52,9 пм m = 9,1·10^{-31} кг e = 1,6·10^{-19} Кл	Електрон притягується до ядра з силою:
v = ? ω = ?	

$$F = k\frac{e_1 e_2}{r_1^2} = k\frac{e^2}{r_1^2},$$

де e_1 – заряд ядра атома водню; e_2 – заряд електрона ($|e_1| = |e_2| = e$).

За другим законом Ньютона сила взаємодії між зарядами надає електрону доцентрового прискорення (добуток маси електрона на доцентрове прискорення має дорівнювати кулонівській силі)

$$\frac{mv^2}{r_1} = k\frac{e^2}{r_1^2}.$$

Звідки лінійна швидкість електрона

$$v = e\sqrt{\frac{k}{mr_1}}.$$

Кутова швидкість

$$\omega = \frac{v}{r_1}.$$

Відповідь: v = 2,2·10^6 м/с, ω = 4,1·10^{16} с$^{-1}$.

6.31. Визначити радіус r_4 четвертої орбіти електрона в атомі водню. Радіус орбіти електрона в нормальному стані атома r_1 = 52,9 пм.

Дано	*Розв'язання*
r_1 = 52,9 пм = 0,53·10^{-10}м n = 4	$m\frac{v_n^2}{r_n} = k\frac{e^2}{r_n^2},$
r_4 = ?	

$$mv_n r_n = n\frac{h}{2\pi}\ (n = 1, 2, 3, ...)$$

$$r_n = \frac{h^2 n^2}{4\pi^2 kme^2} = r_1 n^2,\ r_1 = \frac{h^2}{4\pi^2 kme^2}.\ r_4 = 16\ r_1.$$

Відповідь: r_4 = 8,45·10^{-10}м.

6.32. Визначити радіус r_2 другої стаціонарної орбіти в атомі водню, швидкість v_2 і прискорення a_2 електрона на цій орбіті, якщо радіус першої орбіти r_1 = 52,9 пм.

Дано	*Розв'язання*

r_1 = 52,9 пм = 0,53·10^{-10}м n = 2	$m\frac{v_n^2}{r_n} = k\frac{e^2}{r_n^2}$,
r_2 = ? v_2 = ? a_2 = ?	$mv_nr_n = n\frac{h}{2\pi}(n = 1, 2, 3,...)$,

$r_n = n^2r_1$ (див. розв'язання задачі 6.31), $r_2 = 4r_1$.

$$v_n = \frac{2\pi ke^2}{h}\frac{1}{n}, v_2 = \frac{\pi ke^2}{h},\ a_n = \frac{v_n^2}{r_n} = \frac{16\pi^4k^3e^6m}{h^4n^4},\ a_2 = \frac{\pi^4k^3e^6m}{h^4}.$$

Відповідь: r_2 = 0,21 нм, v_2 = 1,09 Мм/с, a_2 = 5,61·10^{21} м/с^2.

6.33. Визначити період T обертання електрона на першій борівській орбіті (r_1 = 52,9 пм) атома водню.

Дано	*Розв'язання*
r_1 = 52,9 пм = 0,53·10^{-10}м e = 1,6·10^{-19} Кл	$T_n = \frac{2\pi r_n}{v_n}, T_n = \frac{r_1h}{ke^2}n^3, T_1 = \frac{r_1h}{ke^2}$.
T = ?	(див. розв'язання задачі 6.32).

Відповідь: T = 1,52·10^{-16} с.

6.34. У борівській моделі атома електрон обертається навколо ядра. Визначити імпульс p електрона на першій борівській орбіті, радіус якої r_1 = 52,9 пм.

Дано	*Розв'язання*
r_1 = 52,9 пм = 0,53·10^{-10} м m = 9,1·10^{-31} кг	$p_1 = mv_1,\ v_1 = \frac{2\pi ke^2}{h}$ (див.
p = ?	розв'язання задачі 6.32),

$$p_1 = \frac{2\pi kme^2}{h}.$$

Відповідь: p = 1,99·10^{-24} кг·м/с^2.

6.35. Визначити напруженість E електричного поля ядра на четвертій стаціонарній орбіті електрона в атомі водню.

Дано	*Розв'язання*
r_1 = 52,9 пм = 0,53·10^{-10}м n = 4	$E_4 = \frac{ke}{r_4^2}$,
E_4 = ?	$r_4 = 16\ r_1$ (див. розв'язання задачі

6.31), $E_4 = \frac{ke}{256r_1^2}$.

Відповідь: $E_4 = 2{,}01 \cdot 10^9$ В/м.

6.4. Фізика атомного ядра

Основні закони і формули

• Атомне ядро будь-якого елемента складається з протонів і нейтронів. Масове число A дорівнює кількості протонів і нейтронів. Зарядове число Z (порядковий номер хімічного елемента в періодичній таблиці Менделєєва) виражає кількість протонів в ядрі та кількість електронів в атомі. Кількість нейтронів в ядрі $N = A - Z$. Загальний символ для позначення ядра

$$^{A}_{Z}\mathrm{X},$$

де X – символ відповідного хімічного елемента.

• Енергія зв'язку атомного ядра

$$E_{зв} = \Delta mc^2 = (Zm_p + (A - Z)m_n - m_я)c^2 =$$
$$(Zm_H + (A - Z)\, m_n - m_a)c^2,$$

де Δm – різниця між сумою мас протонів і нейтронів ядра та масою ядра, m_p, m_n, $m_я$ – маси протона, нейтрона і ядра, $m_H = m_p + m_e$ – маса атома водню, m_a – маса атома, c – швидкість світла у вакуумі.

Якщо масу вимірювати в атомних одиницях маси (а.о.м.), а енергію – в мегаелектронвольтах (МеВ), то

$$E_{зв} = 931{,}5\ (Zm_H + (A - Z)\, m_n - m_a)\ \text{МеВ}.$$

Останнє співвідношення є більш зручним, оскільки в таблицях звичайно наводяться не маси ядер, а маси атомів.

• Кількість ядер радіоактивного ізотопу з часом зменшується за законом радіоактивного розпаду:

$$N = N_0 2^{-t/T} \quad \text{або} \quad N = N_0\, e^{-\lambda t},$$

де N – кількість наявних радіоактивних ядер на момент часу t, N_0 – початкова кількість ядер ($t = 0$), T – період піврозпаду,
$\lambda = (\ln 2)/T$ – стала радіоактивного розпаду.

• Кількість розпадів, що відбуваються з ядрами зразку за 1 с,

$$A = \left|\frac{dN}{dt}\right| = \lambda N$$

називається активністю даного зразку.

• Правило зміщення для α-розпаду

$$^{A}_{Z}X \rightarrow ^{A-4}_{Z-2}Y + ^{4}_{2}He,$$

правило зміщення для β^--розпаду

$$^{A}_{Z}X \rightarrow ^{A}_{Z+1}Y + ^{0}_{-1}e,$$

де $^{4}_{2}He$ – α-частинка, $^{0}_{-1}e$ – символічний запис електрона.

- Символічний запис ядерної реакції

$$X + a \rightarrow Y + b,$$

де X,Y – вихідне і кінцеве ядра, *a*,*b* – легкі частинки.

Під час ядерних реакцій (виконуються закони збереження енергії, електричного заряду, баріонного заряду(числа нуклонів) і деякі інші.

- Енергія ядерної реакції визначається різницею мас спокою (в енергетичних одиницях) вихідних і кінцевих ядер.

Склад атомного ядра. Енергія зв'язку ядра

6.36. Скільки протонів, нейтронів та електронів міститься в атомах торію $^{232}_{90}Th$ і телуру $^{128}_{52}Te$?

Дано	*Розв'язання*
$^{232}_{90}Th$ $^{128}_{52}Te$	$^{232}_{90}Th$: $Z = 90$, $N = A - Z = 142$. $^{128}_{52}Te$: $Z = 52$, $N = A - Z = 76$.
Z, N = ?	***Відповідь*** Торій – 90,142,90, телур – 52,76,52.

6.37. Визначити енергію зв'язку $E_{зв}$ ядра атома літію $^{7}_{3}Li$. якщо маси атома водню m_H = 1,00783 а.о.м., нейтрона m_n = 1,00866 а.о.м., атома літію m = 7,01601 а.о.м.

Дано	*Розв'язання*
$^{7}_{3}Li$ m_H = 1,00783 а.о.м. m_n = 1,00866 а.о.м. m = 7,01601 а.о.м..	$E_{зв}$ = = 931,5 (Zm_H+ ($A - Z$) m_n– m) МеВ. $^{7}_{3}Li$: $A = 7$, $Z = 3$. $E_{зв}$ = 931,5 (3·1,00783 + 4·1,00866 – 7,01601) МеВ= = 39,2 МеВ = $6{,}27\cdot10^{-12}$ Дж.
$E_{зв}$ = ?	

Відповідь: $E_{зв}$ = 39,2 МеВ = $6{,}27\cdot10^{-12}$ Дж.

6.38. На яку мінімальну відстань наблизиться α-частинка до ядра атома золота $^{197}_{79}Au$, якщо вона рухається зі швидкістю $v = 1{,}9\cdot10^{7}$м/с вздовж прямої, що проходить через центр ядра. Маса α-частинки $m = 6{,}6\cdot10^{-27}$ кг, її заряд $q_\alpha = 3{,}2\cdot10^{-19}$ Кл.

Дано	*Розв'язання*
$v = 1{,}9\cdot10^{7}$ м/с $m = 6{,}6\cdot10^{-27}$ кг $q_\alpha = 3{,}2\cdot10^{-19}$ Кл Z = 79	α-частинка може наблизитись на таку відстань, на якій потенціальна енергія взаємодії α-частинки з ядром золота дорівнює кінетичній енергії α-частинки. $k\frac{q_\alpha q_{Au}}{R} = \frac{mv^2}{2}$, $q_{Au} = Ze$, $R = \frac{2kq_\alpha Ze}{mv^2}$.
R = ?	

Відповідь: $R = 3{,}14\cdot10^{-14}$ м.

6.39. Яку найменшу енергію $E_{зв}$ потрібно витратити, щоб розділити на окремі нуклони ядро атома алюмінію $^{27}_{13}Al$, якщо маси

атома водню m_H = 1,00783 а.о.м., нейтрона m_n = = 1,00866 а.о.м., атома алюмінію m = 26,98146 а.о.м.

Відповідь: $E_{зв}$ = 225,02 МеВ.

6.40. Яку мінімальну енергію потрібно надати ядру атома кальцію $^{40}_{20}Ca$, щоб розщепити його на окремі нуклони, які не взаємодіють між собою, якщо маси спокою протона

m_p = 1,00728 а.о.м, нейтрона m_n = 1,00866 а.о.м., ядра атома кальцію $m_я$ = 39,9516 а.о.м.?

Відповідь: $E_{зв}$ = 342 МеВ.

Радіоактивність

6.41. Радіоактивні відходи атомних електростанцій містять радіоактивний ізотоп стронцію $^{90}_{38}Sr$ з періодом піврозпаду

T = 28 років. За який час кількість стронцію у відходах зменшиться в чотири рази?

Дано	*Розв'язання*
T = 28 років $\frac{N_0}{N_1} = 4$	$N_1 = N_0 2^{-\frac{t_1}{T}}$, $\frac{N_0}{N_1} = 2^{\frac{t_1}{T}}$, $4 = 2^2 = 2^{\frac{t_1}{T}}$, $t_1 = 2T$.
t_1 = ?	Кількість радіоактивних ядер зменшується вдвічі за час, що дорівнює періоду піврозпаду T, та у чотири рази за час $2T$.

Відповідь: t_1 = 56 років.

6.42. Визначити кількість атомів ΔN, що розпалися в m = 1 мг радіоактивного натрію $^{24}_{11}Na$ за час t_1 = 10 год. Період піврозпаду натрію T = 14,8 год.

Дано	*Розв'язання*
$m = 1$ мг $= 10^{-6}$ кг $M = 24 \cdot 10^{-3}$ кг/моль T = 14,8 год t_1 = 10 год	У законі радіоактивного розпаду $N = N_0 e^{-\lambda t}$ N – кількість ядер, що не розпалися до моменту часу t, N_0 – кількість ядер у початковий момент часу t = 0. Тоді кількість ΔN ядер, що розпалися за час
ΔN = ?	

t_1, знайдемо, віднявши від початкової кількості ядер N_0 кількість ядер N_1, що не розпалися в момент часу t_1

$$\Delta N = N_0 - N_1 = N_0 - N_0 e^{-\frac{0,693}{T}t_1} = \frac{m}{M} N_A (1 - e^{-\frac{0,693}{T}t_1}) =$$

$$\frac{10^{-6} 6,02 \cdot 10^{23}}{24 \cdot 10^{-3}} (1 - e^{-\frac{0,693}{14,8}10}) = 9,3 \cdot 10^{18}.$$

Відповідь: $\Delta N = 9,3 \cdot 10^{18}$.

6.43. Скільки атомів із 10^6 атомів радону розпадаються за одну добу? Період піврозпаду радону $T = 3,82$ доби.

Відповідь: $\Delta N = = 1,66 \cdot 10^5$.

6.44. За один рік початкова кількість радіоактивного препарату зменшилась у 5 разів. У скільки разів вона зменшиться за два роки?

Дано	*Розв'язання*
$t_1 = 1$ рік $\frac{N_0}{N_1} = 5$ $t_2 = 2$ роки	$N_1 = N_0 e^{-\lambda t_1}$, $N_2 = N_0 e^{-\lambda t_2}$, $\frac{N_0}{N_1} = e^{\lambda t_1} = 5$, $\lambda = \frac{\ln 5}{t_1}$, $\frac{N_0}{N_2} = e^{\lambda t_2}$, $\frac{N_0}{N_2} = e^{\frac{\ln 5}{t_1} t_2} = e^{2 \ln 5} = e^{3,22} = 25$.
$\frac{N_0}{N_2} = ?$	

Відповідь: $N_0/N_2 = 25$.

6.45. На скільки відсотків знижується за 30 діб активність ізотопу з періодом піврозпаду $T = 75$ діб?

Дано	*Розв'язання*
$T = 75$ діб $t_1 = 30$діб	$A_0 = \lambda N_0$, $A_1 = \lambda N_1 = \lambda N_0 e^{-\lambda t_1} = A_0 e^{-\lambda t_1}$. $\frac{A_0 - A_1}{A_0} 100\% = \left(1 - \frac{A_1}{A_0}\right) 100\% = \left(1 - e^{-\lambda t_1}\right) 100\%$
$\frac{A_0 - A_1}{A_0} 100\% = ?$	

$$\lambda t_1 = \frac{\ln 2}{T} t_1 = \frac{0,693 \cdot 30}{75} = 0,28,$$

$$\frac{A_0 - A_1}{A_0} 100\% = \left(1 - e^{-0,28}\right) 100\% = (1 - 0,76) 100\% = 24\%.$$

Відповідь: $\frac{A_0 - A_1}{A_0} 100\% = 24\%$.

6.46. Користуючись таблицею Менделєєва, визначити, в яке ядро перетворюється ядро торію $^{234}_{90}Th$ після трьох послідовних альфа-розпадів?

Дано	*Розв'язання*
$^{234}_{90}Th$ З α-розпаду	$^{234}_{90}Th \rightarrow ^{230}_{88}Ra \rightarrow ^{226}_{86}Rn \rightarrow ^{222}_{84}Po$. ***Відповідь:*** $^{222}_{84}Po$.
X = ?	

6.47. Який ізотоп утворюється з радіоактивного ізотопу сурми $^{133}_{51}Sb$ після чотирьох бета-розпадів?

Відповідь: $^{133}_{55}Cs$.

6.48. Який ізотоп утворюється з радіоактивного ізотопу радію $^{226}_{88}Ra$ внаслідок п'яти α-розпадів і чотирьох β-розпадів?

Відповідь: $^{206}_{83}Bi$.

6.49. Внаслідок послідовних радіоактивних розпадів ядро урану $^{238}_{92}U$ перетворилося на ядро свинцю $^{206}_{82}Pb$. Користуючись таблицею Менделєєва, визначити скільки актів α-розпаду і β-розпаду при цьому відбулося.

Дано	*Розв'язання*
$^{238}_{92}U$ $^{206}_{82}Pb$	Під час кожного α-розпаду масове число зменшується на 4 одиниці. Отже, воно набуде значення 206 після 8 α-розпадів: 238 – 32 = 206. Але при цьому зарядове число буде мати значення 92 – 2·8 = 76, що не співпадає з умовою.
α-розпадів=? β-розпадів=?	

Під час β-розпаду масове число не змінюється, а зарядове збільшується на одиницю. Тому після ще 6 β-розпадів зарядове число набуде значення 76 + 1·6 = 82, що й відповідає умові.

Відповідь: 8 α-розпадів і 6 β-розпадів.

Ядерні реакції.

6.50. При поглинанні ядром урану $^{235}_{92}U$ нейтрона відбувається поділ ядра на два уламки. Реакція супроводжується випусканням двох

нейтронів. Одним з уламків є ядро стронцію $^{94}_{38}Sr$. Визначити другий уламок.

Дано	*Розв'язання*
$^{235}_{92}U + ^{1}_{0}n = X + ^{94}_{38}Sr + 2^{1}_{0}n$	В ядерних реакціях діє закон збереження електричного заряду, згідно з яким алгебраїчна сума
X = ?	

електричних зарядів частинок до реакції дорівнює алгебраїчній сумі електричних зарядів частинок після реакції. Отже, зарядове число *Z* елемента X

$$Z = 92 - 38 = 54.$$

Поряд з цим законом діє закон збереження баріонного заряду (масових чисел): сумарне число нуклонів не змінюється внаслідок реакції. Отже, масове число *A* елемента X

$$A = (235 + 1) - (94 + 2) = 140.$$

Цей елемент – ксенон $^{140}_{54}Xe$.

$$^{235}_{92}U + ^{1}_{0}n = ^{140}_{54}Xe + ^{94}_{38}Sr + 2^{1}_{0}n$$

Відповідь: $^{140}_{54}Xe$.

6.51. Визначити порядковий номер *Z* та масове число *A* елемента X в ядерних реакціях:

$$^{24}_{12}Mg + ^{1}_{0}n \rightarrow ^{24}_{11}Na + \tilde{O},$$

$$^{14}_{7}N + ^{4}_{2}He \rightarrow \tilde{O} + ^{1}_{1}H.$$

Відповідь: $^{1}_{1}ð$, $^{17}_{8}O$.

6.52. Під час бомбардування ізотопу бора $^{10}_{5}B$ α-частинками утворюється ізотоп азоту $^{13}_{7}N$. Яка частинка при цьому викидається? Ізотоп азоту $^{13}_{7}N$ є радіоактивним і зазнає позитронного розпаду. Записати реакцію.

Дано	*Розв'язання*
$^{10}_{5}B + ^{4}_{2}He \rightarrow ^{13}_{7}N + X$	$^{10}_{5}\hat{A} + ^{4}_{2}\acute{I}\mathring{a} \rightarrow ^{13}_{7}N + ^{1}_{0}n$, $^{13}_{7}N \rightarrow ^{13}_{6}C + ^{0}_{+1}e$.
X = ?	

***Відповідь*:** нейтрон.

6.53. Визначити, виділяється чи поглинається енергія під час ядерної реакції: $^{14}_{7}N + ^{4}_{2}He \rightarrow ^{17}_{8}O + ^{1}_{1}H$. Визначити цю енергію. Маси

ядер: $m_N = 2{,}3253\cdot10^{-26}$ кг, $m_{He} = 6{,}6467\cdot10^{-27}$ кг, $m_H = 1{,}6736\cdot10^{-27}$ кг, $m_O = 2{,}8229\cdot10^{-26}$ кг.

Дано	*Розв'язання*
${}^{14}_{7}N+{}^{4}_{2}He\rightarrow{}^{17}_{8}O+{}^{1}_{1}H$	$\Delta E = (m_N + m_{He} - m_O - m_H)c^2$,
ΔE = ?	

Відповідь: $\Delta E = -2{,}61\cdot10^{-13}$ Дж, енергія поглинається.

6.54. Яка енергія ΔE виділяється під час термоядерної реакції синтезу ${}^{2}_{1}H+{}^{3}_{1}H\rightarrow{}^{4}_{2}He+{}^{1}_{0}n$? Відповідь дати у джоулях і електрон-вольтах.

Дано	*Розв'язання*
$m_{^2H} = 2{,}01410$ а.о.м. $m_{^3H} = 3{,}01605$ а.о.м. $m_{He} = 4{,}00260$ а.о.м. $m_n = 1{,}00866$ а.о.м.	$\Delta E = 931{,}5(m_{^2H} + m_{^3H} - m_{He} - m_n)$ МеВ
ΔE = ?	***Відповідь:*** $\Delta E = 2{,}82\cdot10^{-12}$ Дж $= 17{,}6$ МеВ .

6.55. Яку мінімальну кінетичну енергію повинна мати α-частинка для здійснення ядерної реакції:

$${}^{7}_{3}Li+{}^{4}_{2}He\rightarrow{}^{10}_{5}B+{}^{1}_{0}n\ ?$$

Прийняти, що ядро літію нерухоме, а частинки, що утворюються внаслідок реакції, рухаються в одному напрямі. Маси спокою: атома літію ${}^{7}_{3}Li$ $m_1 = 7{,}01601$ а.о.м., атома гелію ${}^{4}_{2}He$ $m_2 = 4{,}00260$ а.о.м, атома бору ${}^{10}_{5}B$ $m_3 = 10{,}01294$ а.о.м., нейтрона $m_4 = 1{,}00866$ а.о.м.

Дано	*Розв'язання*
${}^{7}_{3}Li+{}^{4}_{2}He\rightarrow{}^{10}_{5}B+{}^{1}_{0}n$	Якщо ядро літію нерухоме, то закон збереження енергії записується у вигляді $m_1c^2 + m_2c^2 + E_{k2} = m_3c^2 + m_4c^2 + E_{k3} + E_{k4}$, де
E_{k2} = ?	

E_{k2}, E_{k3}, E_{k4} – кінетичні енергії α-частинки, ядра бору і нейтрона. Енергія реакції $\Delta E = (m_1 + m_2 - m_3 - m_4)c^2 = E_{k3} + E_{k4} - E_{k2}$. Підстановка мас спокою дає $\Delta E = -2{,}73$ МеВ < 0, отже реакція відбувається з поглинанням енергії.

Може здатися, що у випадку, коли кінетична енергія α-частинки E_{k2} дорівнює $|\Delta E|$, реакція здійсниться. Але ж частинки –

продукти реакції теж мають кінетичні енергії! Тому кінетична енергія α-частинки E_{k2} має перевищувати $|\Delta E|$.

Розглянемо окремо сумарну кінетичну енергію частинок – продуктів реакції $E_{k3} + E_{k4}$ і позначимо її E_k'.

$$E_k' = \frac{1}{2}m_3v_3^2 + \frac{1}{2}m_4v_4^2.$$

Перетворимо цю формулу так, щоб зв'язати E_k' з кінетичною енергією бомбардуючої α-частинки.

Помножимо і поділимо праву частину на $m_3 + m_4$:

$$E_k' = \frac{(m_3 + m_4)(m_3v_3^2 + m_4v_4^2)}{2(m_3 + m_4)} = \frac{(m_3v_3 + m_4v_4)^2 + m_3m_4(v_3 - v_4)^2}{2(m_3 + m_4)}.$$

З останньої формули видно, що E_k' буде мінімальною, якщо $v_3 = v_4$, тобто коли обидві частинки рухаються з однаковими за величиною і напрямом швидкостями, або якщо відносна швидкість частинок – продуктів реакції дорівнює нулю. Тоді

$$E'_{k\min} = \frac{(m_3v_3 + m_4v_4)^2}{2(m_3 + m_4)}.$$

Закон збереження імпульсу в даному випадку має вигляд

$$m_2v_2 = m_3v_3 + m_4v_4.$$

Тоді

$$E'_{k\min} = \frac{(m_2v_2)^2}{2(m_3 + m_4)} = E_{k2\min}\frac{m_2}{m_3 + m_4}.$$

Отже, з урахуванням кінетичної енергії продуктів реакції, можна записати вираз для мінімальної кінетичної енергії α-частинки

$$E_{k2\min} = E'_{k\min} + |\Delta E| = E_{k2\min}\frac{m_2}{m_3 + m_4} + |\Delta E|.$$

Після перетворень отримаємо

$$E_{k2\min} = \frac{|\Delta E|}{1 - \dfrac{m_2}{m_3 + m_4}}.$$

Таким чином, мінімальна кінетична енергія α-частинки, починаючи з якої реакція є енергетично можливою, більше енергії реакції $|\Delta E|$.

Відповідь: $E_{k2\min}$ = 4,30 МеВ.

6.56. Визначити енергію, що можна отримати при розщепленні 1 г урану $^{235}_{92}U$, якщо при поділі кожного ядра урану виділяється енергія 200 МеВ.

Відповідь: ΔE = 5,12·10^{23} МеВ.

6.57. Які добові витрати ядерного пального – ізотопу урану $^{235}_{92}U$ – атомної електростанції потужністю 3 ГВт? Під час одного акту поділу ядра урану виділяється енергія 200 МеВ. ККД електростанції 25%.

Дано	*Розв'язання*
P = 3 ГВт = 3·10^9 Вт М = 235·10^{-3} кг/моль E = 200 МеВ = 3,2 10^{-11} Дж η = 25% t = 24 год = 86 400 с	$P = \frac{NE}{t}\eta$, $N = \frac{mN_A}{M}$, $m = \frac{PMt}{N_A E\eta}$.
m = ?	***Відповідь:*** m = 12,65 кг.

6.58. Однією з термоядерних реакцій синтезу, що є джерелом енергії Сонця, є реакція з виділенням енергії

$$^3_2He + ^3_2He = ^4_2He + 2\,^1_1p.$$

Обчислити цю енергію. Яка маса m_1 камінного вугілля з теплотворною здатністю q = 30 МДж/кг виділяє при згоранні стільки теплоти, скільки її виділяється під час утворення m = 1 г гелію ^4_2He? Маси ядер $m_{^3_2He}$ = 3,01603 а.о.м., $m_{^4_2He}$ = 4,00260 а.о.м m_p = 1,00728 а.о.м.

Дано	*Розв'язання*
q = 30 МДж/кг m = 1 г = 10^{-3} кг М = 4·10^{-3} кг/моль N_A = 6,022·10^{23} моль$^{-1}$ c^2 = 931,5 МеВ/а.о.м.	ΔE = $= c^2(2m_{^3_2He} - (m_{^4_2He} + 2m_p))\frac{m}{M}N_A$, $Q = q\,m_1$,. $\Delta E = Q$.
ΔE = ? m_1 = ?	
Відповідь: ΔE = 13,88 МеВ, m_1 = 11,14 т.	

Додаток. Таблиці фізичних величин

1. Множники і префікси для утворення кратних і часткових одиниць

Найменування	Позначення	Множник	Найменування	Позначення	Множник
екса	Е	10^{18}	деци	д	10^{-1}
пета	П	10^{15}	санти	с	10^{-2}
тера	Т	10^{12}	мілі	м	10^{-3}
гіга	Г	10^{9}	мікро	мк	10^{-6}
мега	М	10^{6}	нано	н	10^{-9}
кіло	к	10^{3}	піко	п	10^{-12}
гекто	г	10^{2}	фемто	ф	10^{-15}
дека	да	10^{1}	атто	а	10^{-18}

2. Фундаментальні фізичні сталі

Назва	Позначення	Числове значення
Швидкість світла у вакуумі	c	$2{,}998\cdot10^{8}$ м/с
Електрична стала	ε_0	$8{,}854\cdot10^{-12}$ Ф/м
Магнітна стала	$\mu_0=1/(\varepsilon_0 c^2)$	$4\pi\cdot10^{-7}$ Н/А^2=$12{,}566\cdot10^{-7}$ Н/А^2
Гравітаційна стала	$\boldsymbol{G}$	$6{,}673\cdot10^{-11}$ м^3/(кг·с^2)
Стала Планка	h	$6{,}626\cdot10^{-34}$ Дж·с
	$\hbar=h/(2\pi)$	$1{,}0546\cdot10^{-34}$ Дж·с
Елементарний заряд	e	$1{,}602\cdot10^{-19}$ Кл
Стала Рідберга	R_∞	$1{,}097\cdot10^{7}$ м$^{-1}$
Борівський радіус	a_0	$0{,}529\cdot10^{-10}$ м
Маса спокою електрона	m_e	$9{,}109\cdot10^{-31}$ кг
		0,511 МеВ
		$5{,}49\cdot10^{-4}$ а.о.м.
Маса спокою протона	m_p	$1{,}673\cdot10^{-27}$ кг
		1,00728 а.о.м.
Маса споко нейтрона	m_n	$1{,}675\cdot10^{-27}$ кг
		1,00866 а.о.м.
Атомна одиниця маси	а.о.м.	$1{,}661\cdot10^{-27}$ кг (931,494 МеВ)
Стала Авогадро	N_A	$6{,}022\cdot10^{23}$ 1/моль
Стала Больцмана	k	$1{,}3807\cdot10^{-23}$ Дж/К
Універсальна газова стала	R	8,315 Дж/(моль·К)
Прискорення вільного пдіння	g	9,807 м/с^2

3. Деякі астрономічні величини

Середня відстань від Землі до Місяця	$3{,}844\cdot10^{8}$ м
Середня відстань від Землі до Сонця	$1{,}496\cdot10^{11}$ м
Радіус Землі	$6{,}37\cdot10^{6}$ м
Маса Сонця	$1{,}99\cdot10^{30}$ кг
Маса Землі	$5{,}98\cdot10^{24}$ кг
Маса Місяця	$7{,}35\cdot10^{22}$ кг

4. Густина речовин

Густина газів за нормальних умов (T = 273,15 К; p_0 = 1,01·10^5 Па) ρ, кг/м^3

Азот	1,250	Гелій	0,18
Водень	0,089	Кисень	1,429
Вуглекислий газ	1,977	Повітря	1,293

***Густина рідин* ρ, кг/м^3**

Бензин	710	Гас (t = 0°С)	800
Вода (t = + 4°С)	1 000	Ртуть (t = 0°С)	13 596
Гліцерин	1 260	Спирт етиловий (t = 0°С)	789

Густина твердих тіл ρ, 10^3 кг/м^3

Алюміній	2,69	Сталь	7,8
Золото	19,3	Свинець	11,3
Лід (0°С)	0,91	Срібло	10,5
Мідь	8,9	Титан	4,5

5. Питома теплоємність c_p, Дж/(кг·К); **газів (за нормальних умов)**

Газ	c_p
Азот	1,0·10^3
Водень	1,43·10^4
Вуглекислий газ	848
Гелий	5 240
Кисень	913
Повітря сухе *	1 011

* Склад повітря по об'єму: 78,03% N_2 ; 20,99% O_2 ; 0,933% Ar; 0,03% CO_2 ; 0,01% H_2 ; 0,0018% He та ін.

6. Деякі фізичні характеристики рідин (при температурі 20°С)

Питома теплоємність c, кДж/(кг·К); поверхневий натяг на межі "рідина – повітря" σ, Н/м; точка кипіння $t_к$, °С, при $p_0 = 1{,}01 \cdot 10^5$ Па; питома теплота пароутворення при точках кипіння r, Дж/кг.

Рідина	c	$\sigma, 10^{-3}$	$t_к$	$r, 10^5$
Вода	4,18	0,0726	100,0	22,6
Гліцерин	2,42	0,066	290,0	-
Ртуть	0,14	0,5	356,7	2,85
Спирт етиловий	2,42	0,022	78,3	8,57

7. Деякі теплофізичні характеристики твердих тіл

Температурний коефіцієнт лінійного розширення в інтервалі 0 – 100 °С α, K^{-1}; питома теплоємність c при 18 °С, кДж/(кг·К); температура плавлення $t_{пл}$, °С; питома теплота плавлення λ, Дж/кг

Речовина	$\alpha, 10^{-6}$	c	$t_{пл}$	$\lambda, 10^5$
Алюміній	23,8	0,92	660	3,8
Залізо	12,1	0,46	15,39	2,7
Лід	51,0	2,09	0	3,35
Мідь	16,7	0,38	1083	1,8
Парафін	107-407	3,20	38-56	1,5
Свинець	29,3	0,12	327	0,25
Срібло	19,7	0,25	960,8	0,88

8. Питома теплота згоряння палива *q*, МДж/кг

Речовина	*q*	Речовина	*q*
Бензин	44	Дрова сухі	12
Кам'яне вугілля	27	Природний газ	44

9. Тиск і густина насиченої водяної пари при різних температурах

(тиск *p* в ГПа; *m* – масса пари в 1 м^3 у г)

t, °C	*p*	*m*	*t*, °C	*p*	*m*
0	6,11	4,84	18	20,64	15,4
1	6,57	5,22	19	21,97	16,3
2	7,05	5,60	20	23,65	17,3
3	7,59	5,98	21	24,87	18,3
4	8,13	6,40	22	26,44	19,4
5	8,72	6,48	23	28,93	20,6
6	9,35	7,3	24	29,84	21,8
7	10,01	7,8	25	31,68	23,0
8	10,73	8,3	26	33,61	24,4
9	11,48	8,8	27	35,65	25,8
10	12,28	9,4	28	37,80	27,2
11	13,12	10,0	29	40,05	28,7
12	14,03	10,7	30	42,42	30,8
13	14,97	11,4	31	44,93	32,1
14	15,99	12,1	32	47,54	33,9
15	17,05	12,8	33	50,30	35,7
16	18,17	13,6	34	53,20	37,6
17	19,37	14,5	35	56,24	39,6

10. Пружні властивості деяких твердих тіл

Модуль Юнга (модуль поздовжньої пружності) *E*, ГПа; границя міцності $\sigma_м$, МПа

Речовина	*E*	$\sigma_м$
Алюміній	68,5	98 – 390
Сталі різних марок	195 – 206	490 – 1570
Чавун	74 – 176	117 – 127
Латунь	78 – 98	98 – 490
Мідь деформована	112	156 – 441
Свинець	16,2	19,6

11. Швидкість звуку v, м/с

Речовина	v	Речовина	v
а) *гази*(*за нормальних умов*)		б) рідини	
Водень Повітря (сухе)	1286,0 331,46	Вода (t=20° C) в) *тверді тіла* (при 20ºС) Сталь	1482 Поздовжні хвилі у стрижнях 5050

12. Діелектрична проникність ε деяких речовин

Речовина	ε	Речовина	ε
Вода	81	Парафін	2
Гас	2,1	Слюда	6
Кварц	2,7	Скло	5,5 - 10
Масло трансформаторне	2,2	Фарфор	6

13. Питомий опір ρ і температурний коефіцієнт опору α (при 20°С)

Провідник	ρ, нОм·м	α, $К^{-1}$	Провідник	ρ, нОм·м	α, $К^{-1}$
Алюміній	28	0,0038	Нікелін	400	0,000017
Вольфрам	55	0,0051	Ніхром	980	0,00026
Залізо	98	0,0062	Свинець	211	0,0042
Константан	480	0,00002	Сталь	120	0,006
Мідь	17,2	0,0043			

14. Електрохімічні еквіваленти, мг / Кл

Алюміній (Al***)	0,093	Нікель (Ni^{**})	0,304
Залізо (Fe**)	0,289	Нікель (Ni^{***})	0,203
Залізо (Fe***)	0,193	Срібло (Ag^{*})	1,118
Мідь (Cu^{*})	0,660	Хром (Cr^{***})	0,180
Мідь (Cu^{**})	0,329	Цинк (Zn^{**})	0,338

15. Робота виходу електрона з металу, еВ

Вольфрам	4,50	Платина	5,29
Калій	2,00	Срібло	4,28
Літій	2,40	Цезій	1,97
Натрій	2,27	Цинк	3,74

16. Показники заломлення (середні для видимого випромінювання)

Алмаз	2,42	Повітря	1,00029
Вода (*t* = 20 °С)	1,33	Сірковуглець	1,63
Кварц	1,54	Скипидар(*t* = 20 °С)	1,47
Лід(*t* = – 4 °С)	1,31	Скло	1,50

17. Атомна маса деяких нуклідів $m_{ат}$, а. о. м.

Нуклід	$m_{ат}$	Нуклід	$m_{ат}$
^{1}H	1,007825	^{50}Ti	49,944736
^{2}H	2,014108	^{51}Ti	50,949858
^{3}H	3,016028	^{52}V	51,944800
^{3}He	3,016045	^{55}Mn	54,930249
^{4}He	4,002596	^{58}Co	57,935776
^{6}Li	6,015110	^{90}Sr	89,907711
^{7}Li	7,016046	^{210}Po	209,982760
^{7}Be	7,016925	^{222}Rn	222,017422
^{10}B	10,01294	^{226}Ra	226,025279
^{14}C	14,003217	^{232}Th	232,038112
^{27}Al	26,98146	^{238}U	238,050637
^{31}P	30,973762	^{239}U	239,054149
^{40}Ca	39,9516	^{239}Pu	239,052037

18. Період піврозпаду деяких радіоактивних нуклідів T

Нуклід	T	Нуклід	T
^{14}C Вуглець	5 730·років	^{226}Ra Радій	1 620·років.
^{24}Na Натрій	14,8 годин	^{232}Th Торій	$1{,}41\cdot10^{10}$ років
^{58}Co Кобальт	71 доба	^{238}U Уран	$4{,}5\cdot10^{9}$ років
^{90}Sr Стронцій	28 років	^{239}U Уран	23,54 хвилин
^{210}Po Полоній	140 діб	^{239}Pu Плутоній	24 390 років
^{222}Rn Радон	3,82 доби		

19. Позначення і назви деяких одиниць у СІ

Величина	Одиниця і її назва	Величина	Одиниця і її назва
Довжина	м – метр	Температура	К – кельвін
Час	с – секунда	Теплоємність питома	Дж/кг·К
Швидкість	м/с	Кількість електрики	Кл – кулон
Прискорення	м/с^2	Потенціал	В – вольт
Частота коливань	Гц – герц	Напруженість електричного поля	В/м
Колова частота	с$^{-1}$	Ємність	Ф – фарад
Кутова швидкість	рад/с	Сила струму	А – ампер
Маса	кг – кілограм а. о. м. – атомна одиниця маси	Опір	Ом
Густина	кг/м^3	Питомий опір	Ом·м
Сила	Н – ньютон	Магнітна індукція	Тл – тесла
Тиск, напруження	Па – паскаль	Магнітний потік	Вб – вебер
Імпульс	кг·м/с	Індуктивність	Гн – генрі
Момент сили	Н·м	Сила світла	кд – кандела
Енергія, робота	Дж – джоуль еВ – електрон-вольт	Світловий потік	лм – люмен
Потужність	Вт – ват	Освітленість	лк – люкс

Навчальне видання

Гаркуша Ігор Павлович, Мокляк Зінаїда Павлівна,
Буслов Юрій Олександрович

ФІЗИКА. ЗАДАЧІ З РОЗВ'ЯЗКАМИ

(Навчальний посібник)

Редакційно-видавничий комплекс

Підписано до друку 00.00.03. Формат 30х42/4. Папір Captain. Ризографія. Умовн. друк. арк. 00,0.
Обліково-видавн. арк. 00,0. Тираж 00 прим. Зам. №

Підготовлено до друку та видруковано у Національному гірничому університеті
49027, м. Дніпропетровськ, 27, просп. К. Маркса, 19.