Міністерство освіти і науки України

Державний університет "Житомирська політехніка"

К. Р. Колос

КОМП'ЮТЕРНА ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА

Навчальний посібник

Рекомендувано Вченою радою

Державного університету "Житомирська політехніка"

Житомир 2020

УДК 519.1

К-61

Рецензенти:

О. М. Спірін - доктор педагогічних наук, професор, член-кореспондент НАПН України, проректор з наукової роботи та цифровізації Державного закладу вищої освіти "Університет менеджменту освіти";

С. О. Семеріков - доктор педагогічних наук, професор, професор кафедри інформатики та прикладної математики Криворізького державного педагогічного університету;

Т. А. Вакалюк - доктор педагогічних наук, доцент, професор кафедри інженерії програмного забезпечення Державного університету "Житомирська політехніка".

Рекомендовано Вченою радою

Державного університету "Житомирська політехніка"

як навчальний посібник для студентів ІТ-спеціальностей

(Протокол №___ від 26.06.2020)

Колос К. Р.

К-61 Комп'ютерна дискретна математика : навчальний посібник [Електронний ресурс] / К. Р. Колос. – Житомир : Державний університет "Житомирська політехніка", 200 с.

В навчальному посібнику викладено основні розділи комп'ютерної дискретної математики - "Теорія множин", "Теорія відношень", "Елементи комбінаторики", "Теорія графів". Теоретичний матеріал проілюстровано прикладами з різних областей знань. Наведено велику кількість вправ і задач для набуття практичного досвіду.

Навчальний посібник призначено для студентів різних спеціальностей, які вивчають комп'ютерну дискретну математику, аспірантів і фахівців, які використовують відповідні математичні та комп'ютерні методи.

Зміст

ВСТУП

Комп'ютерна дискретна математика (КДМ) – це комплекс математичних дисциплін, який виник десь в середині минулого століття, а саме тоді, коли почали розвиватися комп'ютерні системи.

Виникнення цієї дисципліни обумовлене тим, що математика – математичний аналіз – працює з неперервними об'єктами, тобто з тим, що можна ділити, ділити, ділити…, а воно ще ділиться й ділиться. Дискретна математика працює з об'єктами, які можна перерахувати, тобто з дискретною – конкретною кількістю. І комп'ютерні системи саме так і працюють. Тобто все, що виконується в комп'ютерних системах (його може бути дуже багато, але воно скінченне або злічене) можна певним описати певною алгоритмічною мовою.

Тому комп'ютерну дискретну математику широко використовується у математичній кібернетиці та програмуванні під час створення автоматизованих систем керування та проектування, засобів передачі й опрацюванні відомостей, а також під час розв'язування багатьох технічних та економічних задач.

Це обумовлює обов'язкове включення дисципліни "Комп'ютерна дискретна математика" до навчальних планів з підготовки майбутніх фахівців за спеціальностями код "Програмна інженерія", код "Комп'ютерні науки", … та код … вищих закладів освіти.

Навчальний посібник укладено на основі лекційних і практичних занять з дисципліни "Комп'ютерна дискретна математика", які викладаються студентам Державного університету "Житомирська політехніка".

Мета видання: ознайомити читачів з основними поняттями та моделями комп'ютерної дискретної математики, а також методами й алгоритмами розв'язування широкого кола задач.

Основними завданнями дисципліни є: навчити студентів глибоко розуміти проблеми, що виникають під час автоматизації процесів обробки дискретної інформації, сформувати навички застосування формальних методів комп'ютерної дискретної математики під час проектування автоматизованих систем обробки інформації та керування, комп'ютерних систем проектування, створити надійний теоретичний фундамент для наступних навчальних курсів.

Зміст навчального посібника обмежено основними темами : "Теорія множин", "Теорія відношень", "Елементи комбінаторики", "Теорія графів".

Згідно з планом, на вивчення дисципліни відводиться 180 години. З них на лекції – 50 годин, на лабораторні роботи – 20, на самостійну роботу – 90 годин. Дисципліна розрахована на 1 семестр. Після опрацювання декількох лекцій виконується лабораторна робота для закріплення матеріалу. Лабораторні роботи здійснюються в обчислювальному центрі Державного університету "Житомирська політехніка", де студенти забезпечені відповідною технічною базою.

Вимоги до лабораторних робіт

Метою лабораторних робіт є закріплення теоретичних знань з дисципліни «Комп'ютерна дискретна математика» та набуття практичних умінь та навичок з моделювання об'єктів різного типу й виконання операцій над ними.

До кожної лабораторної роботи подано 30 варіантів комплектів завдань, в тому числі передбачені завдання для комп'ютерної реалізації, під час виконання яких студенти можуть використовувати «С»-подібну мову програмування JavaScript.

Інтерфейс програм може бути створений з використанням мови HTML. Вцілому студенти вільні у виборі мови програмування. Робота над таким міні-проектом включає в обов'язковому порядку створення блок-схеми й складання електронного звіту.

Основні структурні одиниці звіту з лабораторної роботи:

1. тема роботи;

2. розв'язання завдання № 1;

3. постановка задачі із завдання № 2;

4. блок-схема програми;

5. код програми;

6. тестовий приклад, можливо з перевіркою деяких задач завдання № 1 за допомогою розробленої програми.

Обов'язковою умовою захисту лабораторної роботи є демонстрація роботи створеної програми викладачеві.

Тестування й налагодження програм може проводитись на платформі https://jsfiddle.net. Інструментарій для зображення блок-схем перебуває на сайті https://www.draw.io/.

Довідкові матеріали з JavaScript: http://javascript.ru, https://learn.javascript.ru/.

Матеріали, які є додатковими відомостями з теми, що вивчається, і потрібні для детальнішого та глибшого засвоєння дисципліни, виносяться на самостійне опрацювання студентів.

Після вивчення зазначеної дисципліни підсумкове семестрове оцінювання здійснюється за результатами поточного навчання чи у формі комбінованого іспиту.

РОЗДІЛ 1. ТЕОРІЯ МНОЖИН

1.1. Сутність поняття "множина"

Що таке "множина"? Ніхто не знає відповіді на це питання.

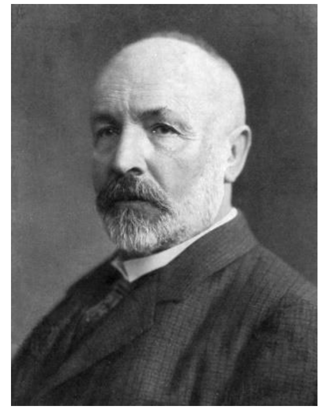


Рис. 1.1.1. Георг Кантор (Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor) (3.03.1845-6.01.1018)

Георг Кантор (нім. математик, який винайшов цю теорію) запропонував інтуїтивне визначення множини: "множина (англ. set) – це певна сукупність об'єктів, які ми можемо розрізнити між собою, які не повторюються і які об'єднані в єдине ціле нашою інтуїцією за якоюсь певною ознакою" (рис. 1.1.1).

Приклади множини

1. Множина студентів потоку Державного університету "Житомирська політехніка" – це множина.

Студенти – це об'єкти, які можна розрізнити (адже жоден зі студентів не повторюється). Студенти об'єднані в певне ціле – потік.

2. Множина парт в лекційній аудиторії.

3. Множина студентів і парт у лекційній аудиторії. Знову ж таки: можна відрізнити студента від парти, парту від парти, студента від студента.

Рис. 1.1.2. Приклад множини (множина яблук на долоні)

Тобто можна об'єднувати множини. Фактично все, що завгодно. І тому це визначення підкупає своєю простотою, адже якщо, наприклад, щось взяти – це є множина (рис. 1.1.2).

Але це називається інтуїтивним визначенням, тому воно не є формальним, не є математичним. І наприкінці розділу буде зрозуміло, що ось таке визначення призводить до парадоксів, тобто до об'єктів, які фізично не можуть існувати.

Але поки-що, якщо у нас уже є такий математичний об'єкт, – потрібно навчитися з ним працювати.

В першу чергу потрібно навчитися його зображати, щоб було зрозуміло про що йдеться.

1.2. Способи подання (представлення) множин.

Способів подання (представлення) множин є 2,5.

1) **Явний**. Беремо і перелічуємо всі об'єкти, які входять до даної множини.

Приклади.

1. Множина $\mathrm{A} = \{a, b, c, \dots, z\}$ – множина всіх літер латинського алфавіту.

2. Множина $B = \{0, 1\}$ – це множина значень, які можуть приймати певні біти у комп'ютерних системах.

3. Множина $C = \{$  ,  $\}$. Вона складається з ялинки та їжачка.

4. А множина $D = \{0, 1,$  $\}$ з нуля, одиниці та ялинки.

Тобто все, що завгодно.

Ми використовуємо певні службові символи. Множина позначається фігурними дужками, об'єкти перелічуються через кому. При цьому порядок об'єктів у множині не важливий. Тобто, якщо є множина $B_2 = \{1, 0\}$, що складається з 1 та 0, то це те ж саме, що множина $B = \{0,1\}$, яка складається з 0 та 1: $B_2 = \{1,0\} = \{0,1\}$.

В такому представленні дві складнощі.

Перша очевидна. У прикладі 1 використовували «…» – якщо об'єктів забагато, то їх перелічення буде займати дуже багато часу та місця, більше того – може бути нескінченна множина, тобто об'єктів буде настільки багато, що їх не можна перелічити за розумний час.

І ще одна така синтаксична неув'язка. Якщо потрібно включити до множини об'єкт «,» або об'єкт «{» (це рідкісні випадки, але є такі), то використовують «» до окремого службового слова. У нас такого не буде.

Але що робити з великими множинами?

2) **Неявний спосіб**.

Об'єднуємо у множину всі об'єкти, які задовольняють певним властивостям.

Нехай $P(x)$ – це певна властивість (науковою мовою – предикат).

Істина: якщо ця властивість виконується – 1, та неістина (хиба) , якщо ця властивість не виконується – 0. Тоді можна задати множину як всі елементи x, для яких виконується задана властивість: $X = \{x : P(x)\}$ *або* $X = \{x \mid P(x)\}$.

Наприклад.

$E = \{x \mid x - \textit{натуральне}, x - \textit{парне}\}$ – множина всіх парних натуральних чисел задається за допомогою такого предиката, який ми описуємо словом. Можемо описувати словами, можемо більш формально.

3) Третій **спосіб графічний**.

Це не спосіб представлення множини. Це спосіб її візуалізації. Називається діаграма Ойлера-Венна (рис. 1.2.1).

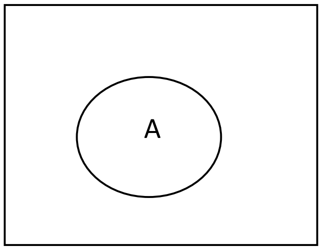


Рис. 1.2.1. Приклад діаграми Ейлера-Венна

Це множина А. Це такі кола, можуть бути не кола. Діаграмою не можна подати множину. Ми не будемо знати, які там є об'єкти, але можна дуже зручно візуалізувати операції над множинами.

Існують множини, які певним чином стандартизовані. Для них є спеціальні позначення:

$\varnothing$ – порожня множина – це множина, яка не містить жодного елементу.

U – множина універсум – це множина, яка містить всі об'єкти. Далі ми покажемо, що універсаму не існує. Але поки що ми його введемо.

N (ℕ) – множина натуральних чисел: $\mathrm{N} = \{1,2,3,...\}$. Зауважую, що в нашому курсі 0 (нуль) не буде вважатися натуральним числом. Тут є цікава ситуація: у Франції, Бразилії 0 вважається натуральним числом; у інших країнах 0 не вважається натуральним числом. Але іноді його зручно вважати натуральним числом, долучати до множини натуральних чисел. Але у викладі нашого курсу зручно вважати 0 не натуральним числом. Але якщо 0 нам все таки знадобиться, – ми введемо множину N_0 – цілих невід'ємних чисел: $\mathrm{N}_0 = \{0,1,2,3,...\}$(natural – натуральне).

Насправді в природі існують лише натуральні числа, а все інше – це вигадка людського мозку.

Приклади.

Z (ℤ) – множина цілих чисел: $\mathrm{Z} = \{0,1,2,...\}$

Чому Z? (Георг Кантор був німцем: з нім. zahlen (цалєн) – це числа)

Q (ℚ) – раціональні числа: $\mathrm{Q} = \left\{ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{n}} \mid m \in \mathrm{Z}, n \in N \right\}$. Чому Q? Від лат. quotient – частка.

R (ℝ) – множина дійсних чисел. Її вже не можна ні описати, ні перелічити. R – тому, що real – «дійсне».

І остання множина – це комплексні числа – C (ℚ) (komplex – склади).

Тобто в нас уже є певне розуміння, що таке множина; у нас уже є певні множини, з якими ми довго працювали, але не знали, що це є множини і вони певним чином позначаються.

Що можна з ними зробити?

По перше, перевірити чи належить елемент множині, чи ні: $a \in A$(українською мовою це досить легко читати: «елемент а є елементом множини А»). «$\in$» – це, дійсно, латинська літера «є» певним чином трансформована.

Зауважую, що майбутні програмісти повинні чітко дотримуватися синтаксису. Якщо у вас є такий символ ($\in$), то праворуч від нього обов'язково повинна стояти множина, а ліворуч – все, що завгодно і в нашому розумінні може бути елементом цієї множини (може розглядатися як елемент цієї множини). Тобто може стояти інша множина, наприклад, числа, букви, об'єкти, матриці, поліноми, парти, студенти, зірки у Всесвіті, – все, що завгодно.

Якщо написано: $a \notin A$, то об'єкт а не є елементом множини А. Він не належить цій множині.

Тобто ваша задача зараз – навчитися правильно читати і писати.

Включення – це відношення між множинами. $A \subseteq B$ – «множина А включається в множину В» або «множина А є підмножиною множини В». Якщо писати це відношення словами, то це означає, що всі елементи множини А одночасно є елементами множини В.

Оскільки у нас математика, – ми стверджуємо лише це і більше нічого. Тобто ми не знаємо чи є у В ще якісь елементи, окрім тих, що є в А. Чи є в А взагалі якісь елементи.

Наприклад: $\varnothing \subseteq B$ **– порожня множина є підмножиною довільної множини**. Чому? Тому, що всі елементи цієї множини (∅) повинні належати цій множині (В). А які тут (∅) є елементи? Ніякі. Тобто чи можна порушити цю умову? Чи можна навести елемент звідси (∅), щоб належав (В)? Не можна. Тобто це твердження виконується.

І ось цей принцип, коли для того, щоб порушити певне твердження, ви повинні навести контр-приклад. Якщо не можете навести контр-приклад, то ви не можете порушити. Він у нас буде використовуватися дуже часто.

Тепер оце словесне твердження: всі елементи множини А одночасно є елементами множини В. Тепер я його напишу, як його пишуть математики: $(A \subseteq B) \Leftrightarrow (\forall a : a \in A \Rightarrow a \in B)$, тобто множина А є підмножиною множини В тоді та тільки тоді, коли для будь-якого елементу а з того, що а належить множині А випливає, що а належить множині В. Чи всім зрозумілий цей запис?

$\Leftrightarrow$ – логічна еквівалентність: тобто ось це твердження $(A \subseteq B)$ виконується тоді і тільки тоді, коли виконується $(\forall a : a \in A \Rightarrow a \in B)$.

$\forall$ – квантор загальності. Він читається як «будь-який», «довільний» або «всі». І взагалі це анг. слово $\forall$ny. (Літеру А, яку перевернули).

Є ще квантор $\exists$ – існування, який читається як «існує» (може з уточненням «існує деякий»). І це від англ. слова exist – «існує».

Тобто те, що іде після «:» у $(\forall a : a \in A \Rightarrow a \in B)$ виконується для будь-якого елементу а. Що виконується? Логічний наслідок ($\Rightarrow$) якщо твердження тут $(a \in A)$ є коректним, то твердження тут $(a \in B)$ також повинне бути коректним. Якщо твердження тут $(a \in A)$ не є коректним, то нам все рівно. Це дуже важливо насправді, тому що $\varnothing \subseteq B$. Щоб зробити це твердження $(a \in A)$ некоректним треба підібрати такий елемент а, для якого ось це твердження $(a \in A)$ буде невірним, а ось це твердження $(a \in B)$ буде вірним. Але ми не можемо підібрати таких елементів a, тому що таких елементів в порожній множині не існує. Тому я не можу порушити цей логічний наслідок. Для всіх елементів a, ось це твердження $(a \in A)$, якщо тут підставити Ø воно буде некоректним. Логічний наслідок не порушується. Типовою помилкою початківців є те, що вони бачать, що ліва частина логічного наслідку є некоректна, – і все: сам логічний наслідок є некоректним. Ні. Наслідок перевіряє на це.

Строге включення.

$A \subset B$ – «всі елементи множини A є елементами множини B, але в множині B є ще елементи, яких немає в множині A».

Математично: $(A \subset B) \Leftrightarrow (A \subseteq B) \overset{\wedge}{\&} (\exists b \in B : b \notin A)$

Вважається, що «множина A є строгою підмножиною множини B тоді та тільки тоді, коли A є підмножиною множини B і одночасно з цим (& – амперсанд; або можна писати – $\wedge$ (перевернуту літеру v); це одне і теж саме) існує такий елемент b множини B, для якого виконується, що b не належить множині A».

Новий символ – & ($\wedge$) – це логічне «та». Його потрібно ставити тоді, коли обидва твердження повинні бути істинними одночасно.

Альтернативою є $\vee$ – логічне «або» (це альтернативна істинність). Або одне, або інше, або обидва одночасно.

Чи можна стверджувати, що Ø$\subset B$ довільної множини B? Для довільної множини не можна. Чому? Якщо B є порожньою множиною, то це твердження не є коректним. Чому? Тому, що не виконується $(\exists b \in B)$, тобто тут не буде існувати жодного b.

Якщо B є не порожньою множиною, тоді **так**. Тобто можна підібрати такий елемент, який не буде належати порожній множині, оскільки цій множині не належить жоден елемент.

Тепер очевидне визначення.

<u>Що таке рівність двох множин?</u>

Дві множини рівні $A = B$, якщо вони складаються з однакових елементів. Це інтуїтивно зрозуміло. Але з’являються вже певні складності.

Можна це перевірити, якщо множини подані явно. Тобто ми бачимо всі їх елементи. Але якщо множини подані неявно, то треба перевіряти предикати. А це вже складно. Тому ось це словесне визначення ми будемо замінювати на формальне визначення, з яким будемо працювати. Будемо казати що дві множини рівні тоді та тільки тоді, коли множина A є підмножиною множини B і одночасно всі елементи B належать множині A: $(A = B) \Leftrightarrow (A \subseteq B) \& (\mathrm{B} \subseteq \mathrm{A})$.

Тепер нам треба навчитися робити операції над множинами. У нас таких операцій існує декілька.

1.3. Операції над множинами

1) об’єднання (англ. union): **операцією об’єднання двох множин називається множина, яка складається з елементів першої та другої множини.**

Тобто «**Множина С називається об’єднанням множин А та В, якщо це множина, що складається з елементів, які належать множині А або належать множині В»:** $C = A \cup B = \{x : (x \in A) \vee (x \in B)\}$.

Тут прослідковується алгоритм побудови визначення:

по-перше: що ми визначаємо? Ми визначаємо об’єднання двох множин;

якщо потрібно оперувати у визначенні ось цими множинами (А та В) – їх іменують. Тобто ми могли б сформулювати: об’єднанням двох множин – це…; а можна формулювати: об’єднання множин А та В… і можна *директивно звертатись* до множини А та В окремо. Так «називається», тобто тут ми переходимо до визначення. В першу чергу ми вказуємо – який математичний об’єкт визначається. Тобто «об’єднання множин – це **множина**». Не число, не літера… це множина. Далі ми кажемо як визначається ця множина, тобто яким чином вона будується. Фактично ми описуємо ось цей предикат ($(x \in A) \vee (x \in B)$) словом.

Далі усі інші визначення не буду писати словами, але ви повинні розуміти, як вони будуються і читаються.

Зрозуміти що таке об’єднання нам допомагає графічне представлення (рис.1.3.1).

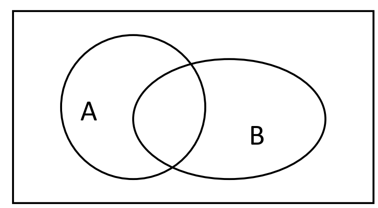


Рис. 1.3.1. Графічне представлення множин А та В

Ось у нас є множина А, ось у нас є множина В. Що є об’єднанням цих двох множин? Множина С (рис. 1.3.2, рис. 1.3.3).

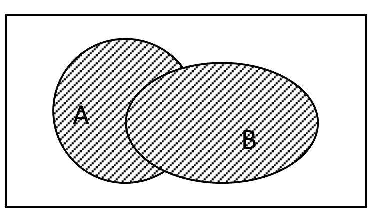


Рис. 1.3.2. Множина С - об'єднання множин А та В

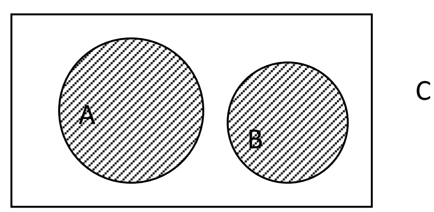


Рис. 1.3.3. Множина С - об'єднання множин А та В

Якщо в об’єднанні є елементи, які належать і А і В, – в об’єднанні вони рахуються 1 раз. Тому, що елементи всередині множини не повторюються.

2-га операція – перетин множин (рис. 1.3.4).

$$\mathrm{D} = \mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \{\mathrm{x} : (\mathrm{x} \in \mathrm{A}) \& (x \in B)\}.$$

Відмінність була в тому, що в попередньому була альтернативна істинність: або множині А або множині В. Тут – одночасно.

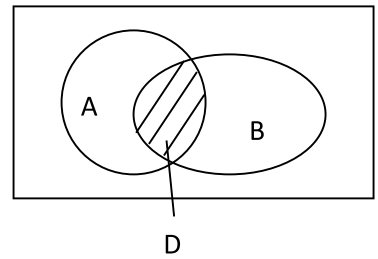


Рис. 1.3.4. Множина D - перетин множин A та B

3) Різниця (set difference)

$\mathrm{E} = \mathrm{A} \setminus \mathrm{B} = \{\mathrm{x} : (\mathrm{x} \in \mathrm{A}) \& (x \notin B)\}$. Тобто ми взяли множину А і викреслили з неї всі елементи, які належать множині В (рис. 1.3.5).

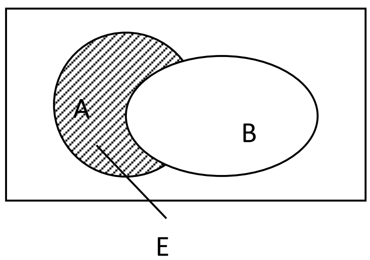


Рис. 1.3.5. Множина E - різниця множин A та B

При цьому, зверніть увагу: якщо ви з множини А віднімете множину В, а потім об’єднаєте те, що вийшло з множиною В – ви не одержите множину А. Тому, що віднімаєте ви лише спільні елементи, а додаєте потім з усією множиною. Тобто тут не має аналогії з арифметичними операціями. Взагалі різниця множин – це досить "хитра" та "підступна" операція. Вона має багато властивостей, що не притаманні відніманню чисел. Потрібно про це пам’ятати.

Наступна операція – симетрична різниця (symetrix set).

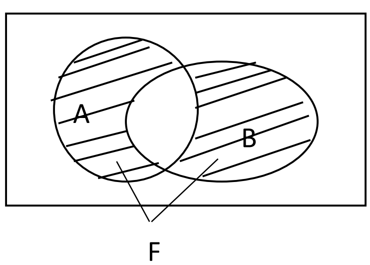


Рис. 1.3.6. Множина F - симетрична різниця множин A та B

Множина F є симетричною різницею двох множин, якщо вона складається з елементів, які належать рівно одній з цих двох множин: $\mathrm{F} = \mathrm{A} \Delta \mathrm{B} = \{\mathrm{x} : (\mathrm{x} \in \mathrm{A}) \& (x \notin B) \vee (x \in B) \& (x \notin A)\}$

Тобто елемент х належить лише одній множині: або А або В, але не одночасно їм двом (рис. 1.3.6).

Симетрична різниця нагадує визначення різниці двох множин $(A \setminus B)$ і визначення різниці двох множин $(B \setminus A)$. Тому можна сказати, що симетрична різниця двох множин А та В - це $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Тепер подивіться на рисунок 1.3.6. Чи можна якось інакше представити семетричну різницю? Так само ми можемо сказати, що симетрична різниця - це $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Далі ми будемо вчитися доводити ці тотожні перетворення з рівності формул, що визначені як операції над множинами.

5) Остання операція: доповнення (доповнення до універсуму). Ми вводили універсам як множину, яка містить всі елементи. Тому кажуть, що доповненням до А є така множина, яка складається з усіх елементів, які не належать А: $\overline{A} = \{x : (x \notin A)\}$. Звісно, щоб побудувати таке доповнення, – потрібно знати звідки брати усі елементи. Якщо ви подивитеся на наші рисунки, то побачите, що усе це побудовано у якомусь прямокутнику – це і є універсам.

Єдине, що зупиняє – це те, як ми зараз доведемо, універсаму не існує.

Але я поясню, як ми з цим будемо боротися.

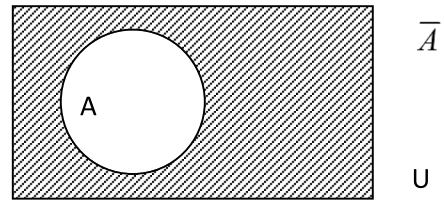


Рис. 1.3.7. Доповнення до множини А

Якщо у нас є множина А (рис. 1.3.7), то ось це все (заштрихована область на рис. 1.3.7) – множина не А ($\overline{A}$).

U – множина всіх об'єктів, які ми розглядаємо.

Ми це будемо далі розглядати і розглядати.

А зараз – чому універсаму не існує?

Здається: всім зрозуміло, що таке «множина». Так само, як всім зрозуміло, що таке крапка, що таке пряма, що таке площина. Хоча насправді математика Евкліда не визначає це поняття. Вони беруться як категоріальні.

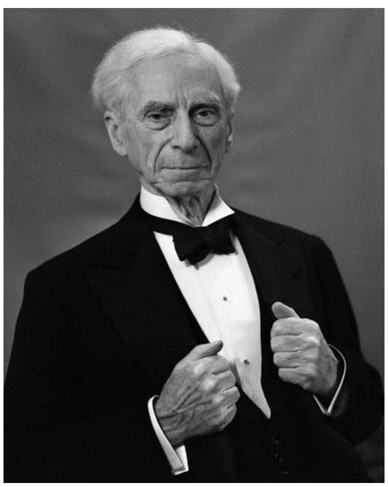


Рис. 1.3.8. Бертран Артур Вільям Расел (англ. Bertrand Arthur William Russell) (1872-1970)

Так от був собі такий Бертран Рассел – відомий математик, філософ і "велика зелена трійка", тобто він був відомий тим, що будував контр-приклади для багатьох таких інтуїтивних конструкцій. Зараз ми розглянемо цей приклад.

Множина універсам U за визначенням – це множина, яка містить абсолютно всі об'єкти, які ми можемо уявити, зокрема вона має містити сама себе, як усі елементи. Адже універсам – це об'єкт, який ми уявляємо, тому він повинен бути елементом самого себе: $\mathrm{U} \in \mathrm{U}$ – самоналежність (серед елементів множини U є множина U).

І от зараз ми сформулюємо Парадокс Бертрана, - більш відомий як «парадокс перукаря».

Так от: у нас є множини, які містять самі себе в якості елементу і є множини, які не містять самі себе в якості елементу.

Скажімо, U містить сама себе, а порожня множина не містить сама себе, бо порожня множина не містить нічого. Тому розглянемо множину Y , яка складається з усіх таких множин X, які не є власними елементами: $\mathrm{Y} = \{\mathrm{X} : \mathrm{X} \notin \mathrm{X}\}$. Це можна зробити, оскільки інтуїтивне визначення множини не заперечує цього. А чи належить множина Y сама собі: $\mathrm{Y} \in \mathrm{Y}$? Припустимо, що $\mathrm{Y} \in \mathrm{Y}$, але за визначенням Y як елемент множини Y не повинен містити себе в якості елементу. Тоді $\mathrm{Y} \notin \mathrm{Y}$, але за визначенням множина Y складається з усіх множин, що не містять себе в якості елементу. Тобто виходить що якщо $\mathrm{Y} \in \mathrm{Y}$, то повинна $\mathrm{Y} \notin \mathrm{Y}$. А якщо $\mathrm{Y} \notin \mathrm{Y}$, то вона повинна $\mathrm{Y} \in \mathrm{Y}$. Замкнене коло. Тому це зветься парадоксом. Парадокс перукаря формулювався так: перукар стриже лише тих людей, які не стрижуть себе самі. Хто стриже перукаря? Множина Х не стриже сама себе. Питання: чи стриже перукар сам себе? Якщо стриже, то він стриже не лише тих людей, які не стрижуть самі себе. Це коло починає скручуватися.

І що ми бачимо? Якщо ми залишаємося працювати із інтуїтивним визначенням множини, то ми дозволяємо собі існування об’єктів, які не можуть існувати, тобто об’єкти, які містять протиріччя у своїй власній структурі. Для математиків це не припустимо.

Бертран був не першим, хто звернув увагу на таке: що Кантова теорія неформальна. Але після парадокса Бертрана стало ясно, що потрібно з цим щось робити. І математики поступили так, як вони завжди поступають: ввели аксіоматику. Тобто сучасна теорія множин не оперує інтуїтивним розумінням множини. В неї є аксіоми, які чітко задають, що може бути множиною, а що ні.

Рис. 1.3.9. Ернст Цермело (нім. Ernst Zermelo) (1871-1953)

Рис. 1.3.10. Абрахáм Галеві (Адольф) Фре́нкель (івр. אברהם הלוי (אדולף) פרנקל; нім. Abraham Halevi (Adolf) Fraenkel) (1891-1965)

Таких аксіоматик є декілька. Найбільш відома – це аксіоматика Цермело-Френкеля. Інколи до неї ще дописують фон Неймана.

Там (серед 10 аксіом) описується правило що ми вважаємо множиною, що не вважаємо множиною. Дуже чіткі, конкретні, прості правила. І потім з цього вже робляться висновки, що можна робити з множиною, а що ні.

Зокрема, з усіх цих аксіоматик випливає, що універсальної множини не існує. Тобто взагалі не може існувати множини, яка містить всі об’єкти.

Як ми побачимо пізніше: якщо розглядати множину всіх підмножин, то вона завжди буде більша за вихідну множину. Тобто побудову надмножин надмножин не можна ніколи зупинити. Але наша задача зараз – створити певне розуміння теорії множин. Тому не будемо занурюватися в аксіоматику. І надалі будемо користуватися інтуїтивним визначенням множини, але завжди будемо пам’ятати, що насправді там все дуже інакше. І будемо вважати, що у нас не буде виникати протиріч.

Прикладні математики працюють з прикладними питаннями і тому питання таких парадоксів у них, зазвичай, не виникає. Там все досить конкретно, чітко, все можна подивитися.

1.4. Універсальна множина. Доповнення до множини

Вище було показано, що не існує такого поняття, як універсальна множина. Зафіксовано, що будуватимемо множини за певними правилами.

Але, якщо у нас є операція доповнення, то у нас повинна бути якась універсальна множина. Тобто на практиці в певних галузях знань, в яких ми використовуємо теорію множин, універсальною множиною позначається множина всіх можливих об’єктів. І це оговорюється з самого початку. Що саме ця множина для нас виступає як універсальна.

Тобто, якщо ми, скажімо, працюємо зі словами, як у лінгвістиці, то у нас універсальна множина – це всі можливі буквосполучення певної довжини. Якщо у нас, скажімо, теорія графів: у нас є графи і є ребра між ними, – то усі можливі ребра – це універсальна множина. І так далі.

Коли ми будемо входити в нову галузь математики, то там буде оголошуватися, що таке універсальна множина.

Тепер у нас є операції. І зараз ми з вами будемо формулювати їх властивості.

1.5. Алгебраїчні властивості операцій над множинами

1) (Ідемпотентність) Якщо ви об’єднаєте множину саму з собою, що ви одержите? Цю саму множину.

$$A \cup A = A$$

Якщо ви перетнете множину саму з собою? Знов те ж саме.

$$A \cap A = A$$

Тісно з цим зв’язана інша властивість – (інволютивність).

Якщо ви візьмете множину (А), доповнення до цієї множини ($\overline{A}$), а потім доповнення до доповнення цієї множини ($\overline{\overline{A}}$), то отримаєте ту ж саму множину:

$$\overline{\overline{A}} = A .$$

Тобто перше доповнення – це всі елементи, які не входять в множину А, друге доповнення – це всі елементи, які не входять в доповнення, тобто всі елементи, які входять в множину А.

2) Комутативність операцій. Для деяких операцій нам не важливо, в якому порядку стоять її елементи.

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

$$A \Delta B = B \Delta A$$

3) Асоціативність. Якщо є декілька однакових операцій одна з одною, то не важливо, в якому порядку їх виконувати – результат від цього не зміниться.

Тобто, якщо ви об’єднаєте множину В з множиною С, а потім – об’єднаєте з множиною А, то це все рівно, що множину А об’єднати з В, а потім об’єднати з С:

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C .$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

$A\Delta(B\Delta C)=(A\Delta B)\Delta C$.

Що з цього випливає? Якщо у вас є декілька однакових операцій ($\cup$, $\cap$, Δ) підряд, то ви можете не писати дужки. Тобто ви можете прибрати дужки і робити виконувані операції так, як вам заманеться. А враховуючи комутативність, ви можете ще й переставляти аргументи в тому порядку, в якому вам зручно.

4) Дистрибутивність. Властивість дистрибутивності поєднує різні операції між собою. Якщо вам потрібно об'єднати множину А та перетин множин В та С, то ви можете внести операцію об'єднання в дужки і спочатку об'єднати множину А з множиною В, потім об'єднати множину А з множиною С, а те, що вийшло – перетнути: $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

Так само буде і навпаки: $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

Тут є певна аналогія з додаванням та множенням: якщо ви множите число на суму чисел, то можна помножити окремо це число на кожний з доданків, і ці два добутки додати. Але, як всяка аналогія вона є неповна, тому, що ці дві операції повністю однакові за своїми арифметичними властивостями, а додавання і множення – не однакові.

$A\cap(B\Delta C)=(A\cap B)\Delta(A\cap C)$.

Зауважимо, що якщо замість $\cap$ поставити $\cup$, то нічого не вийде. Тобто властивість об'єднання для симетричної різниці не виконується (не працює). І пізнніше буде показано чому.

5) Правила поглинання. Якщо я візьму множину А і об'єднаю її з перетином множини А і множини В, – що я одержу? … Я одержу множину А:

$A\cup(A\cap B)=A$

Ви берете В – звужуєте його до перетину з А, потім розширюєте до А – і ви отримуєте А. При цьому в якості В може виступати довільна множина – і вона поглинається множиною А ось таким способом.

Аналогічно: $A\cap(A\cup B)=A$ (розширили В до А, і звузили до А – і отримали А).

Це правила, які виходять за межі інтуїтивної арифметики, тому пам'ятайте.

6) Два важливих правила, які називаються **законами де Моргана**:

Якщо ви хочете обчислити доповнення до об'єднання двох множин, то ви берете доповнення до першої множини, берете доповнення до другої множини і перетинаєте їх між собою: $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$ (доповнення об'єднання є перетином доповнень).

Аналогічно: $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

Закони де Моргана дозволяють нам певним чином розкривати дужки, якщо перед дужками стоїть своєрідний «гумус» до множин – операція доповнення. При цьому операції змінюються.

7) Властивості порожньої множини та універсальної множини. Порожня та універсальна множина – це певні межі для нас. Не може бути нічого менше за порожнє, нічого більше – за універсальне.

Так от. Що буде, якщо я множину A об'єднаю з універсальною множиною? … Буде універсальна множина: $A \cup \mathrm{U} = \mathrm{U}$. Бо все, що є в A є і в універсальній множині.

$A \cap \mathrm{U} = \mathrm{A}$

$A \cup \varnothing = \mathrm{A}$

$A \cap \varnothing = \varnothing$

$A \setminus A = \varnothing$

$A \Delta A = \varnothing$, тому, що, як ми пам'ятаємо: симетрична різниця - це перше без другого в об'єднанні з другим без першого; перше без другого – це порожня множина і друге без першого теж порожня множина; об'єднання двох порожніх множин – це порожня множина.

8) Якщо об'єднати множину зі своїм доповненням – ми одержимо взагалі все, що у нас є: $A \cup \overline{A} = U$

$A \cap \overline{A} = \varnothing$

Ці всі властивості доведені. Зараз будемо розбирати як вони доводились.

Всі ці властивості потрібно пам'ятати для того, щоб кожного разу не доводити, наприклад, асоціативність об'єднання. Це такий ходовий інструмент, що можна одразу використовувати цю формулу. Але ви повинні знати, як це доводиться, тому що потім у вас будуть більш складні твердження – і ви повинні знати метод, яким це все доводиться.

Але перед цим зверніть увагу: візьмемо для прикладу дистрибутивність. Ми фактично поміняли місцями об'єднання на перетин, а перетин на об'єднання – і перша формула перейшла в другу формулу. Асоціативність – аналогічно. Тобто серед усіх цих формул можна вже інтуїтивно проглянути так званий «**принцип двоїстості**».

Як було зазначено раніше: у нас об'єднання і перетин – це дві рівноправні операції. Це проявляється навіть в тому, що якщо ми беремо коректну формулу, замінюємо в ній всі об'єднання на перетини і всі перетини – на об'єднання, всі універсальні множини – на порожні, а всі порожні – на універсальні, то ми одержимо знову коректну формулу. Таким чином нам потрібно доводити вдвічі менше формул. Тому, що одну половину довели, – інша робиться заміною операцій.

<u>Принцип двоїстості</u>

Якщо у нас є істинне твердження, що використовує лише об'єднання, перетин та доповнення множин, і в цьому твердженні ми замінимо всі об'єднання на перетини, а перетини – на об'єднання, всі універсальні множини – на порожні, а всі порожні – на універсальні, то ми одержимо істинне твердження:

$\cup \Leftrightarrow \cap$, **Ø** $\Leftrightarrow U$ **, то одержимо істинне твердження.**

Я вам зараз формулюю без доведення, а у курсі математичної логіки це доводиться більш загальним випадком: фактично буде виконуватися для багатьох конструкцій, а не тільки для теорії множин.

Але знову ж таки:

По-перше, вам потрібне істинне твердження, тобто твердження, яке вам потрібно довести;

По-друге, я зафіксувала, що ми використовуємо об'єднання, перетин та доповнення… тут немає різниці… що робити з різницею? Різницю та симетричну різницю можна виразити окремими формулами через об'єднання та доповнення.

1.6. Приклади доведення тверджень

1) Доведемо, що різниця двох множин є перетином першої множини і доповненням до другої множини: $A \setminus B = A \cap \overline{B}$.

Перша ваша реакція, якщо вас просять щось довести: малюємо діаграми – і дивимося чи це справедливо (рис. 1.6.1, рис. 1.6.2).

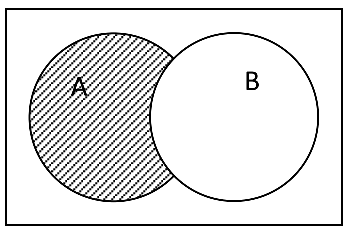


Рис. 1.6.1. A\B

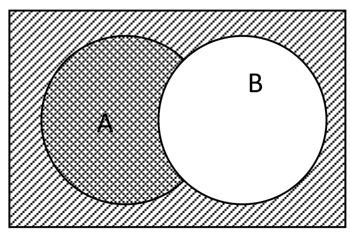


Рис. 1.6.2. $A \cap \overline{B}$

Діаграмка показує, що твердження може бути вірне. Чи можна вважати діаграмки доведенням? Ні.

Чому діаграмами не може побудуватися доведення?

По-перше: діаграмки не описують множину; вони певним чином ілюструють, певним чином візуалізують… ви бачите, як вони між собою розташовані, але вони не можуть описати елементи, що входять в ці множини.

По-друге: хто вам сказав, що множини A та B розташовані саме так? Що в них є перетин, що в них є елементи, які не входять в інші множини?

Скільки взагалі способів намалювати діаграму для 2 множин?

Відповідь: вони можуть

1) перетинатися,
2) можуть не перетинатися,
3) перша множина може належати (включати, містити) другій,
4) друга може включатися в першу.

Тобто на діаграмах для двох множин потрібно розглядати щонайменше 4 випадки і перевіряти для кожного з них.

Якщо у вас буде 3 множини. Скільки взаємно розташувальних випадків буде? Відповідь: 64. Тому, що у вас є 3 пари і для кожної пари 4 варіанти взаємного розташування. $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$ випадки, які потрібно розглядати… Воно вам треба? Якщо у вас буде 4 множини? … ну все, мабуть.

Тому діаграмами ми лише перевіряємо себе: чи дійсно те, що ми доводимо буде вірне. Якщо воно не буде вірно, – діаграмка нам про це може сказати зразу, тоді ми побудуємо контр приклад, який це порушує.

Але це твердження є вірним, тому ми будемо його доводити <u>методом розглядання елементів</u>. *Ото ж зараз – магія!*

Ми розглядаємо довільний елемент *x*: $\forall x: \quad x \in (A \setminus B)$. Нехай елемент *x* належить різниці множин A і B. Тоді за визначенням операції різниці:

$\forall x: \quad x \in (A \setminus B) \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \notin B \end{cases}$ (Визначення операції різниці ми вводили раніше)

Що є в фігурних дужках? … всі повинні знати… Це є одночасне виконання всіх вимог.

Дивіться: за визначенням операції доповнення – якщо елемент $x \notin B$, то він належить доповненню:

$\forall x: \quad x \in (A \setminus B) \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \notin B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in \overline{B} \end{cases}$. За визначенням операції $\cap$: якщо елемент x належить множині A та множині доповнення до B, то він належить їх перетину:

$$\forall x: \quad x \in (A \setminus B) \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \notin B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in \overline{B} \end{cases} \Leftrightarrow x \in A \cap \overline{B} .$$

Значить, на кожному кроці ми користувалися певним визначенням: визначенням різниці, визначення доповнення, визначення перетину. Ми не використовували більше нічого. Визначення всі задавалися логічними еквівалентностями… так?.. тобто, якщо це різниця, то це дві такі умови і навпаки. Тому, якщо елемент належить $x \in (A \setminus B)$, то він відразу належить $x \in A \cap \overline{B}$. А якщо $x \in A \cap \overline{B}$, то по цьому ж ланцюгу в зворотній бік – $x \in (A \setminus B)$. Звідси випливає рівність цих множин.

Звісно, з цього всього: $\left(\forall x: \quad x \in (A \setminus B) \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \notin B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in \overline{B} \end{cases} \Leftrightarrow x \in A \cap \overline{B}\right)$ буде випливати рівність цих множин: $A \setminus B = A \cap \overline{B}$.

Це перший метод.

Ми можемо розглядати елементи зліва, можемо розглядати елементи справа. Не завжди буде так райдужно… це ми в наступному прикладі побачимо.

Другий метод

В нас є набір формул, які ми вважаємо правильними і ми можемо їх використовувати. Скажімо, пам'ятаєте: раніше, коли ми вводили симетричну різницю – ми її ввели, що це: $A\Delta B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$, – а потім, дивлячись на діаграмки, певним чином вивели, що це буде: $A\Delta B=(A\cup B)\setminus(A\cap B)$ -? Цього ми не доводили. Зараз доведемо. Діаграмки ми малювали минулого разу (див. с. 13). Зараз ми будемо використовувати еквівалентні перетворення, тобто це будемо доводити шляхом еквівалентних перетворень.

Ми беремо першу формулу $A\Delta B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$. Кожну операцію різниці ми можемо позбутися за вище доведеною формулою (оскільки ми її довели – ми можемо її використовувати):

$$A\Delta B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)=(A\cap\overline{B})\cup(B\cap\overline{A})=.$$

Я зараз лише описую, що я використовую на кожному кроці.

Далі - в нас є якась множина, яку ми об'єднуємо з перетином двох множин. Якщо ми об'єднуємо множину з перетином двох множин – ми можемо використати властивість дистрибутивності і тоді повинні першу множину об'єднати з другою, першу множину об'єднати з другою другою і результат перетнути:

$$=((A\cap\overline{B})\cup B)\cap((A\cap\overline{B})\cup\overline{A})=$$

Чому обов'язково ставити дужки? Тому, що операції об'єднання і перетину еквівалентні. Якщо ви не поставите дужки – ви можете їх виконати не в тому порядку, в якому потрібно.

Далі... кожне з цих великих дужок можна розкрити за дистрибутивністю.

$$=(A\cup B)\cap(B\cup\overline{B})\cap(A\cup\overline{A})\cap(\overline{B}\cup\overline{A})=$$

Оскільки тут підряд ідуть 3 перетини, то не ставимо дужок за властивістю асоціативності.

$=(A\cup B)\cap(\overline{A}\cup\overline{B})=$ … за законом де Моргана: якщо у нас є об'єднання доповнень, то це буде доповнення до перетину:

$=(A\cup B)\cap\overline{(A\cap B)}=$ за формулою з прикладу 1: якщо у нас є перетин з доповненням до множини – це фактично різниця між цими множинами:

$$=(A\cup B)\setminus(A\cap B).$$

Доведено.

І знову таки… зверніть увагу, що на кожному кроці ми використовували лише те, що в нас вважається істиною: або це визначення, або (як в даному випадку) перевірка тих властивостей, які ми взяли істинними, щоб не доводити їх. Але, знов-таки: всі ці властивості доведені.

Серед іншого ви повинні в якості розумової вправи вчитися доводити їх: сіли – і довели.

Зараз доведемо один з законів поглинання, щоб ви бачили, що воно не так все райдужно.

3). Потрібно довести, що для довільних множин А та В виконується ось така рівність:

$$A \cup (A \cap B) = A.$$

Отже, нам потрібно довести, що одна множина дорівнює іншій множині. В першому прикладі ми це зробили не явно. Але, якщо ми доводимо рівність множин, то що потрібно довести? Що множина $A \cup (A \cap B)$ включається в множину А, а множина А включається в множину $A \cup (A \cap B)$. Адже рівність множин ми визначали як взаємне включення.

Отже, у нас з'являється перше твердження, яке нам потрібно довести:

а) $A \cup (A \cap B) \subseteq A$

що всі елементи множини зліва є елементами множини справа.

Доводимо. Як доводимо? Знову методом розглядання елементів.

Нехай **(** $\forall x \in A \cup (A \cap B) \Rightarrow$. Тоді за визначенням об'єднання:

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x \in A \\ x \in A \cap B \end{array}\right. \Rightarrow$… тут з'являється <u>квадратна дужка</u>, тобто <u>сукупність</u>… у вас виконується або перше або друге твердження. Далі за визначенням перетину:

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x \in A \\ \begin{cases} x \in A \overset{!}{\Rightarrow} \\ x \in B \end{cases} \end{array}\right.$ – умова $x \in A \cap B$ розпадається на дві умови, які повинні виконуватися одночасно. А далі, якщо елемент x одночасно належить множині A та множині B, то він точно належить множині A, – тоді про умову $x \in B$ можна забути (*закреслюю*). Але, що важливо (над «=» ставлю знак «!»): <u>це не еквівалентне перетворення</u>! Тобто з цієї умови випливає:

$\overset{!}{\Rightarrow} \left[\begin{array}{l} x \in A \\ x \in A \end{array}\right. \Rightarrow$, *x* належить А. Але з того, що він належить А я не можу сказати, що він належить множині В. Тому, якщо в попередніх перетвореннях замість «$\Rightarrow$» я могла поставити «$\Leftrightarrow$», то тут я цього зробити не можу. Це наслідок. Це ланцюг лише в один бік. Тобто тут елемент *x* або належить А, або належить А.

$\Rightarrow x \in A$**)**$\Rightarrow$. І що у нас вийшло: якщо елемент $x \in A \cup (A \cap B)$, то він обов'язково належить А. З цього за визначенням операції включення з усього цього логічного ланцюга (беру його в дужки) випливає, що множина зліва є підмножиною множини А:

$\Rightarrow A \cup (A \cap B) \subseteq A$.

б) тепер нам потрібно довести, що:

$A \subseteq A \cup (A \cap B)$

Ми можемо тут сказати, що це є очевидним, тому, що, якщо у нас є об'єднання множини A з чимось, то вся множина A в це об'єднання входить. Але ми підемо складним шляхом; знову ми розглядаємо певний елемент x, що належить A:

$\forall x \quad x \in A \Rightarrow$. Для чого <u>йдемо складним шляхом, щоб продемонструвати техніку, щоб ви бачили що ви можете робити, що ви не можете робити. І потім цю техніку будете використовувати для доведення більш складних тверджень</u>.

Якщо у нас є елемент x, то він же належить певному універсуму, який клас окреслює, тому ми можемо сказати, що:

$\Rightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in U \end{cases} \Rightarrow$ … добре, якщо елемент належить універсуму, то він або належить множині B, або їй не належить.

$\Rightarrow \begin{cases} x \in A \\ \left[\begin{array}{l} x \in B \\ x \in \overline{B} \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow$ … дві альтернативи. Пам'ятаєте: якщо об'єднати B з доповненням до B, то ми одержимо універсум.

Далі ми помічаємо, що x обов'язково належить множині A і або належить множині B, або не належить множині B. Тому можемо умову $x \in A$ приписати до оцих двох одночасно:

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \in A \\ x \in B \end{cases} \\ \begin{cases} x \in A \\ x \in \overline{B} \end{cases} \end{array}\right. \overset{!}{\Rightarrow}$ … що ми тут зробили?.. ми розкрили дужки … це практично дистрибутивність: зробили один перетин, другий перетин та об'єднали їх між собою.

Якщо $x \in A$ та $x \in \overline{B}$, то про $x \in \overline{B}$ можу забути – елемент x однозначно належить A.

І знову над «=» ставлю знак «!» – логічний наслідок, який не є зворотним. Тобто ми спрощуємо собі умови, тому ми не можемо потім повернутися в зворотній бік:

$$\overset{!}{\Rightarrow} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \in A \\ x \in B \end{cases} \\ x \in A \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x \in A \cap B \\ x \in A \end{array}\right. \Rightarrow x \in A \cup (A \cap B).$$

Отже, із того, що $x \in A$ випливає, що він належить $x \in A \cup (A \cap B)$, – звідси випливає, що множина А є підмножиною множини $A \cup (A \cap B)$.

в) А уже з того, що $A \cup (A \cap B) \subseteq A$, а $A \subseteq A \cup (A \cap B)$ – за визначенням рівності множин: $A = A \cup (A \cap B)$.

Все, що ми роблбимо – законно… послаблюємо умову,.. але з того, що ми не можемо повернути цей логічний наслідок в інший бік – ми не можемо обійтися одним ланцюгом, як це зробили в першому прикладі. Там унас були одні логічні еквівалентності, тому ми логічно довели двостороннє включення відразу. Тут ми цього зробити не можемо, оскільки тут нам потрібно було зробити наслідок… і тому ми довели лише включення. Щоб довести включення в інший бік – потрібно побудувати інший ланцюг в інший бік. Але його ми також побудували.

Останнє, що потрібно знати з доведення, все інше уже буде безпосередньо на лабораторних заняттях.

Дехто просить вас довести, що об'єднання з симетричною різницею підкорюється закону дистрибутивності:

4) $A \cup (B \Delta C) = (A \cup B) \Delta (A \cup C)$

Перше, що ви робите, – це малюєте діаграмки і дивитеся – працює чи не працює. Ми казали, що для 3 множин – 64 випадки діаграм, але ми розглядаємо один: якщо на ньому працює, то починаємо доводити, якщо ні – то потрібно навести контр-приклад.

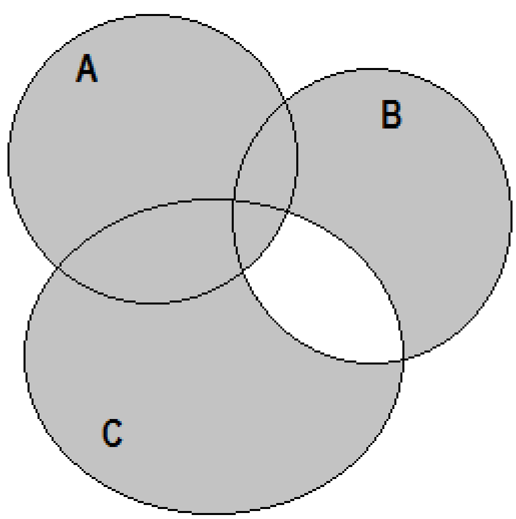


Рис. 1.6.3. $A \cup (B \Delta C)$

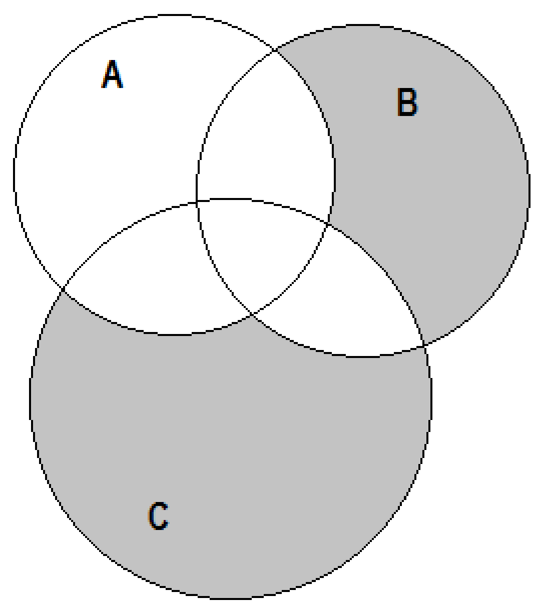


Рис. 1.6.4. $(A \cup B) \Delta (A \cup C)$

Тобто Ви повинні навести 3 множини: А, В і С. Бажано в явному вигляді, але це не обов'язково, для яких оця рівність не буде виконуватися.

Давайте наведемо якусь множину.

Наприклад: $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2,$  $\}$, $C = \{3,$  $\}$.

Оскільки множини B і C не перетинаються, то їх семетрична різниця міститиме всі елементи.

Отже, $A \cup (B \triangle C) = \{1, 2, 3\} \cup \{2, 3,$  ,  $\} = \{1, 2, 3,$  ,  $\}$ – тобто це буде множина ліворуч.

Множина праворуч:

$(A \cup B) \triangle (A \cup C) = \{1, 2, 3,$  $\} \triangle \{1, 2, 3,$  $\} = \{$  ,  $\}$.

Оскільки множини $\{1, 2, 3,$  ,  $\}$ і $\{$  ,  $\}$ не рівні між собою, то задана рівність не є коректною.

Ось такий контр-приклад доводить те, що задана рівність не справджується на заданих множинах, а значить не є справедливою для будь-якої множини.

1.7. Потужність скінченної множини

Потужність скінченної множини A – це кількість її елементів. Потужність зазвичай позначається $|A|$ (A за модулем, але це не модуль – це потужність), іноді – $\#A$ (шляхом застосування символу октото́рп (від лат. octothorpe — вісім ніг (кінців)), який називають дієзом, але це не дієз).

Введемо визначення. **Об'єднання** двох множин називається **диз'юнктним**, якщо ці множини не перетинаються. В цьому випадку будемо писати, що C одержано ось таким об'єднанням множин A та B. Я підкреслюю, що якщо написано ось так: $A\coprod B$, – то це означає: $C = A\coprod B \Leftrightarrow \begin{cases} C = A\cup B \\ A\cap B = \varnothing \end{cases}$. Далі ми ось цю кон'югацію назвемо розбиттям множини C – і це значно коротше, ніж «диз'юнктне об'єднання множин».

<u>Теорема (про потужність диз'юнктного об'єднання двох множин):</u>

якщо $C = A\coprod B \Rightarrow |C| = |A| + |B|$.

Доведення. Це настільки очевидна теорема, що лише схематично окреслимо: якщо у нас множини скінченні, тобто кількість елементів виражається певним натуральним числом, то їх можна всі перенумерувати. Тобто перенумеровуємо всі елементи множини A, перенумеровуємо всі елементи множини B, – потім починаємо перекидати їх в множину C і от: номери множини A зберігаємо, а номери елементів з B збільшуємо на потужність A. Звідси в C будуть елементи з номерами від 1 до $|A| + |B|$. *Тобто загальна кількість елементів буде* $|A| + |B|$.

<u>Наслідок</u>: $A = \coprod\limits_{i=1}^{n} A_i$ = $A_1 \coprod A_2 \coprod ... \coprod A_n$ – якщо є *n*-множин $A_1, A_2, ..., A_n$, які попарно не перетинаються і їх диз'юнктно об'єднують, тоді потужність $|A| = \sum\limits_{i=1}^{n} |A|_i$ $= |A_1| + |A_2| + ... + |A_n|$.

Доведення. Беремо n-ту множину і всі попередні – це буде дез'юнктне об'єднання двох множин – буде сума, потім беремо (n-1)-множину і всі попередні – буде знову сума і так далі…

<u>Лема 1</u>. $|A \setminus B| = |A| \setminus |A\cap B|$.

Доведення. Розглянемо дві множини: $X = A\setminus B$ і $Y = A\cap B$. Що буде об'єднанням цих двох множин? $X\cup Y = (A\setminus B)\cup(A\cap B) = (A\cap \overline{B})\cup(A\cap B) = A\cap(B\cup \overline{B}) = A\cap U = A$. (*використано дистрибутивність*). А якщо ми перетнемо ці дві множини?

$$X\cap Y = (A\setminus B)\cap(A\cap B) = A\cap \overline{B}\cap A\cap B = A\cap B\cap \overline{B} = A\cap \varnothing = \varnothing$$

(*за асоціативністю прибрали дужки*).

Тобто ці дві множини X та Y в об'єднанні дають A, а в перетині – Ø. Тому множина A диз'юнктно розбивається на X та Y: $A = X\coprod Y$. А тому можна застосувати теорему і тоді: $|A| = |X| + |Y| = |A\setminus B| + |A\cap B|$. *Доведено.*

<u>Лема 2</u>. Якщо мені потрібно об'єднати дві множини і обчислити потужність, то мені потрібно взяти потужність A, додати потужність B і відняти потужність їх перетину:

$|A\cup B| = |A| + |B| - |A\cap B|$.

Ця лема, насправді, у різних варіація повторюється майже у всіх розділах математики. Скажімо, під час дослідження системи лінійних рівнянь кількість вхідних і вихідних змінних описується через потужність апарату та потужність образу.

Або інше: якщо ви візьмете максимум двох чисел, візьмете мінімум двох чисел – і їх додасте, то це все рівно, що додати ці два числа.

Доведення (*воно взагалі просте*). Множину перетину A з B можна представити як: $A \cup B = B \coprod (A \setminus B)$. Звідси і за допомогою леми 1 випливає, що потужність об'єднання двох множин це: $|A \cup B| = |B| + |A \setminus B| = |B| + |A| - |A \cap B|$.

Як це виглядає візуально?

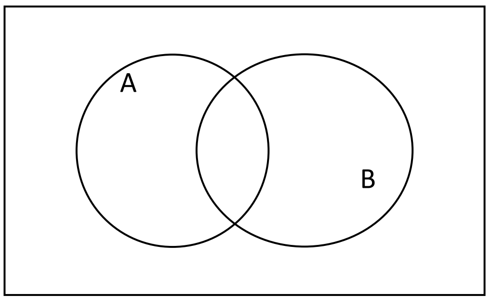


Рис. 1.7.1. Візуалізація потужності множини

Потужність – це площа цього кола (рис. 1.7.1). Як знайти площу цієї фігури, яка складається з двох кіл? Ви берете площу круга А, площу круга В, а фрагмент їх перетину ви підрахували двічі, а потрібно лише один раз. Тому ми один раз його віднімаємо.

Це зрозуміла ілюстрація. А перед цим було строге доведення.

Що робити, якщо є об'єднання великої кількості множин, які можуть перетинатися між собою?

<u>Теорема (формула включень і виключень – *взагалі то це не є формула, це є принцип обрахунку потужності об'єднання множин*).</u>

Формула включень і виключень є досить простою, якщо розуміти принцип, але виглядає досить громісткою.

Якщо у нас є об'єднання множин $A_1, A_2, ..., A_n$ і ми бажаємо дізнатися, яка є там потужність: $\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - ... + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n|$.

Для початку ми беремо потужності кожної множини, потім беремо потужності їх попарних перетинів – і ці потужності ми віднімаємо. Потім ми беремо їх потужності перетинів по три і додаємо, потім беремо по 4 і віднімаємо, потім по п'ять – і додаємо, по 6 – віднімаємо… наприкінці в нас буде перетин всіх *n*-множин – в деяких випадках ми будемо їх додавати, в деяких – віднімати, тому $(-1)^{n-1}$: якщо n – парне, то будемо віднімати, якщо не парне – додавати.

Пояснимо як це працює.

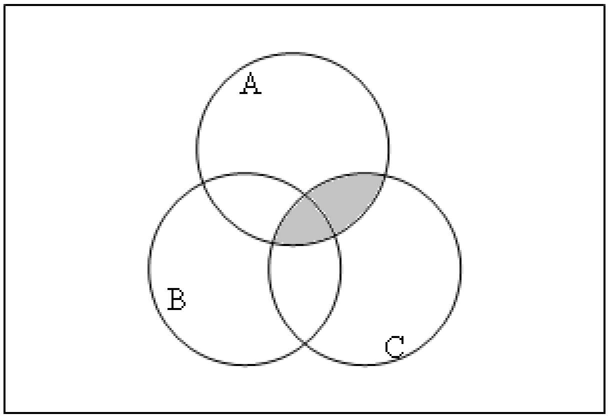


Рис. 1.7.2. Візуалізація потужності множини

Розглянемо 3 множини А, В, С. Я хочу обчислити потужність об'єднання цих двох множин, тобто площу цієї фігури (рис. 1.7.2).

Спочатку я беру площу кожного кола:

$$|A|+|B|+|C|-$$

Але перетин двох множин A та C ми порахували двічі – в одному колі і в іншому колі. Тому його треба відняти (рис. 1.7.2). Так само треба відняти перетин множин A та B, B та C (рис. 1.7.3).

$$-|A \cap B|-|A \cap C|-|B \cap C|+$$

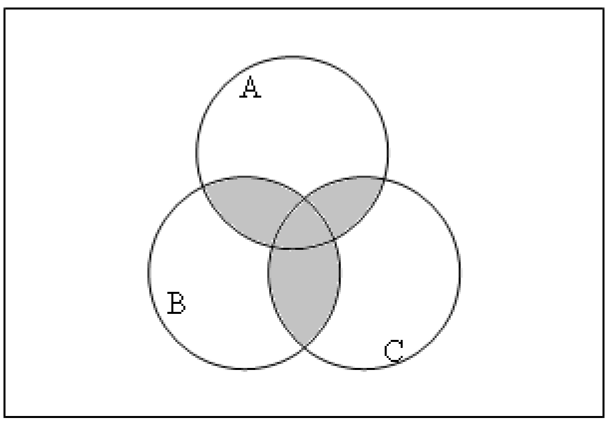
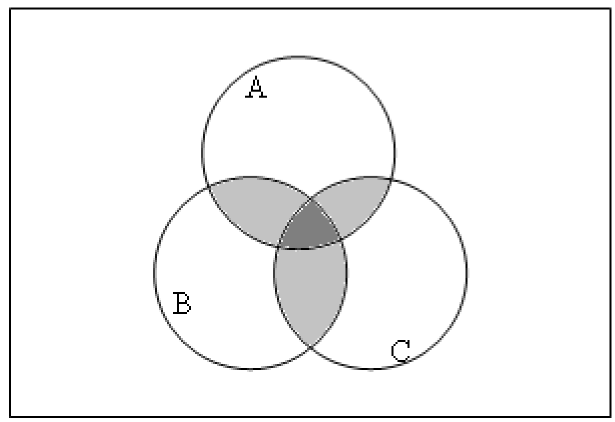


Рис. 1.7.3. Візуалізація потужності множини



Р*ис. 1.7.4. Візуалізація потужності множини*

Але подивимося на середній шматочок (рис. 1.7.4). Що це за шматочок? Це перетин всіх трьох множин – це елементи, які належать всім трьом множинам одночасно. Спочатку ми цей шматочок тричі додали в кожному колі, а потім ми його тричі відняли в кожному колі – і він зник! А ми повинні його порахувати. Тому потім нам потрібно його повернути:

$$|A|+|B|+|C|-|A \cap B|-|A \cap C|-|B \cap C|+|A \cap B \cap C|.$$

І ось ми одержали формулу включень, виключень для 3 множин.

Коли ми беремо для чотирьох множин. Графічно це не можна назвати «красиво». Тому я не буду цього малювати. Але там буде так само: ви додаєте потужності кожної множини, але певні елементи, що належать двом множинам ви порахували двічі, тому ви повинні їх відняти. Але виявляється певні елементи, що належать 3 і більше множинам – ви скільки раз додали, стільки й відняли, – треба їх повернути. Ви їх повертаєте, але при цьому елементи, що належали 4 і більше множинам ви + , - , + – додали зайву кількість разів (*чому ми <u>формулу назвали «включень та виключень» – ми на кожному кроці уточнюємо, уточнюємо, уточнюємо, поки не доходимо до самого кінця, – де дуже все точно… і якщо ви зрозумієте</u>*

цей принцип: +1, - по два, + по три, - по чотири, + по 5, - по 6…, – то ця формула не буде визивати у вас жодних труднощів.

Теорема (формула включень та виключень). Взагалі то це не «формула», це є принцип: як рахувати певні об'єкти множин, що перетинаються. У нас було n-множин $A_1, A_2, \ldots, A_n$, які ми об'єднували між собою і їх загальна потужність обчислювалася як:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n}|A_i| - \sum_{i<j}|A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k}|A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots + (-1)^{n-1}|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n| \qquad (1)$$

(сума потужностей кожної множини, мінус сума потужностей їх всіх можливих попарних перетинів, + сума потужностей їх всіх можливих перетинів по три, *- по чотири, + по 5, - по 6… і т.д. І на останок – їх загальний перетин, який може бути або з «+» або з «-» – в залежності від їх кількості*).

Ми з вами розглянули певний приклад для 3 множин. Чому воно будується саме так. А зараз ми це все доведемо методом математичної індукції.

Доведення.

Що на першому кроці в методі математичної індукції? ***База****. Яку ми візьмемо базу?* **Якщо розглянути 1 множину $n = 1$, то як буде виглядати формула включень та виключень?** $|A| = |A_1|$ (*потужність однієї множини, об'єднаної самої з собою – це буде сума цієї множини і все, бо в нас не буде попарних перетинів, бо в нас лише одна множина*). **Побачили, що для $n = 1$ формула вироджується, тобто з формули залишається тривіальна рівність**. Цього насправді достатньо, щоб довести цю формулу методом математичної індукції, але що буде, якщо $n = 2$?

$n = 2: |A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$ – (*сума потужностей множин, мінус потужність всіх можливих перетинів; оскільки у нас лише 2 множини – у нас лише один попарний перетин*).

Це ми доводили – це лема 2.

Насправді ця рівність, якщо ви будете брати замість множин A_1, A_2 – все більше і більше множин – вона дозволить вам вивести ось цю формулу.

Отже, крок – **індукція**.

Нехай для $\forall n$ -множин формула вірна. Нам потрібно буде його вивести декілька раз для різних випадків.

Позначимо $B = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ (об'єднання n-множин через B). І додамо ще одну множину з індексом $n+1: |B \cup A_{n+1}| =$

Що можна сказати про потужність цієї множини? За лемою 2:

$$\left|B\cup A_{n+1}\right|=\left|B\right|+\left|A_{n+1}\right|-\left|B\cap A_{n+1}\right|=.$$

Якщо замість B підставити, що це об'єднання n-множин:

$$\left|B\cup A_{n+1}\right|=\left|B\right|+\left|A_{n+1}\right|-\left|B\cap A_{n+1}\right|=\left|\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right|+\left|A_{n+1}\right|-\left|\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)\cap A_{n+1}\right|=$$

Але, якщо у нас є об'єднання, яке ми потім перетинаємо певною множиною, то ми можемо скористатися властивістю дистрибутивності: ми можемо перетин внести в дужки:

$$\left|B\cup A_{n+1}\right|=\left|B\right|+\left|A_{n+1}\right|-\left|B\cap A_{n+1}\right|=\left|\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right|+\left|A_{n+1}\right|-\left|\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)\cap A_{n+1}\right|=\left|\bigcup_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}}A_i\right|+\left|A_{n+1}\right|-\left|\bigcup_{i=1}^{n}\left(A_i\cap A_{n+1}\right)\right|$$

За припущенням індукції потужність $\left|\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right|$ множини розписується згідно формули (1) і тут будуть фігурувати всі можливі сполучення множин від першої – до n-тої, – так, як потрібно за формулою. Множина $A_{\mathrm{n}+1}$, яка включається в першу суму – суму потужностей множин.

$\left|\bigcup_{i=1}^{n}\left(A_i\cap A_{n+1}\right)\right|$ – це об'єднання n-множин; і ми рахуємо їх потужність. За припущенням індукції я знову можу застосувати формулу (1). Але множини будуть інші. Якщо я буду це окремо розписувати:

$-\left|\bigcup_{i=1}^{n}\left(A_i\cap A_{n+1}\right)\right|=-\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}}\left|\mathrm{A}_{\mathrm{i}}\cap A_{i+1}\right|$. Плюс сума потужностей попарних перетинів:

$-\left|\bigcup_{i=1}^{n}\left(A_i\cap A_{n+1}\right)\right|=-\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}}\left|\mathrm{A}_{\mathrm{i}}\cap A_{i+1}\right|+\sum_{1\le i\le j\le n}\left|A_i\cap A_{n+1}\cap A_j\cap A_{n+1}\right|=$ але, якщо ми двічі перетинаємо з однією і тією ж самою множиною – це все рівно, що перетнути з нею 1 раз, тому:

$=-\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}}\left|\mathrm{A}_{\mathrm{i}}\cap A_{i+1}\right|+\sum_{1\le i\le j\le n}\left|A_i\cap A_{n+1}\cap A_j\right|-$. Зрозуміло?

Далі буде сума перетинів потужностей по 3:

$$=-\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}}\left|\mathrm{A}_{\mathrm{i}}\cap A_{i+1}\right|+\sum_{1\le i\le j\le n}\left|A_i\cap A_{n+1}\cap A_j\right|-\sum_{1\le i\le j\le k\le n}\left|A_i\cap A_{n+1}\cap A_j\cap A_{n+1}\cap A_k\cap A_{n+1}\right|=$$

$$=-\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}}\left|\mathrm{A}_{\mathrm{i}}\cap A_{i+1}\right|+\sum_{1\le i\le j\le n}\left|A_i\cap A_{n+1}\cap A_j\right|-\sum_{1\le i\le j\le k\le n}\left|A_i\cap A_{n+1}\cap A_j\cap A_k\right|+\ldots+\left(-1\right)^n\left|A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_{n+1}\right|$$

Що ми бачимо? Що в цій сумі: $\left|B\cup A_{n+1}\right|=$, – яку ми починали розглядати потужність об'єднання $\mathrm{n}+1$-множини буде сума потужностей кожної множини, «-» сума потужностей їх попарних перетинів, потім буде «+» сума їх перетинів по три,… по чотири,… по 5… по 6… в кінці – сума потужностей всіх множин і цю суму ми трактуємо як $(-1)^{(n+1)-1}$ (*щоб формули збігалися*).

Тобто, якщо у нас вірна ця формула для n-множин, то ось ми довели, що вона буде вірна для $n+1$ – множини.

Далі індукційний перехід: якщо вона вірна для $n=1$, то буде вірна для $n=2$; якщо вона вірна для $n=2$, то буде вірна для $n=3$ і т.д.

До речі питання: чому індукційний перехід є перервним? Тобто чому нам ось цих двох тверджень справедливості бази та коректності переходу від n до $n+1$ достатньо, щоб довести твердження для довільного n?

Тому, що якщо нам дадуть певне конкретне число n – ми побудуємо доведення цього твердження за скінченну кількість кроків: починаємо з бази і застосовуємо n-кроків індукційного класу. Тут ключовим є те, що для кожного натурального n ми можемо побудувати доведення за скінченну кількість кроків. Якщо б у нас індукція вимагала нескінченної кількості кроків, то ми б ніколи не дочекалися твердження про істинність.

Приклади.

1) з того, що для вас найбільш близьке… для математиків досить часто потрібні прості числа – <u>великі прості числа, дуже великі прості числа!</u> І певної формули, яка дозволяє генерувати прості числа – її немає! Тому зазвичай генерують випадкове число – і перевіряють чи є воно простим чи ні. Існують алгоритми – тести на перевірку простоти, але вони доволі складні – і вимагають певного часу для свого виконання. А оскільки простих чисел не так багато, то нам потрібно декілька разів генерувати випадкові числа, щоб знайти просте. Але можна спочатку, коли ви згенерували число – перевірити чи ділиться воно на 2, на 3, на 5, на 7 – на мої прості числа, які ми знаємо. Якщо ділиться, то воно вже точно не просте. Так?

То ж питання: якщо ми перевіряємо подільність числа, обраного з інтервалу $[1, N]$, на 2, на 3, на 5, то скільки чисел ми таким чином можемо відкинути? Ці множини чисел, які окремо діляться на 2, на 3 і на 5 – вони перетинаються. Бо у вас, звісно, є множини, які діляться на ці числа одночасно (числа, які одночасно діляться на 2 і на 5 тощо). Тому потрібно застосувати формулу включень і виключень. Спочатку беремо потужність по одному. Скільки чисел буде ділитися на 2? Половина (для зручності будемо вважати, що N ділиться на 30):

$$=\frac{N}{2}+$$

Скільки чисел ділиться на 3? Кожне третє – третина:

$$=\frac{N}{2}+\frac{N}{3}+$$

Скільки на 5? 1/5:

$$=\frac{\mathrm{N}}{2}+\frac{\mathrm{N}}{3}+\frac{N}{5}-.$$

Але у нас є числа, які діляться і на 2 і на 3 – ми їх обрахували двічі, тобто ми повинні відняти всі числа, які одночасно поділяються на 2 і на 3, на 2 і на 5, на 3 і на 5:

$$=\frac{\mathrm{N}}{2}+\frac{\mathrm{N}}{3}+\frac{N}{5}-\frac{\mathrm{N}}{6}-\frac{N}{10}-\frac{N}{15}+$$

І нарешті числа, які поділяються на 2, на 3 і на 5:

$$=\frac{\mathrm{N}}{2}+\frac{\mathrm{N}}{3}+\frac{N}{5}-\frac{\mathrm{N}}{6}-\frac{N}{10}-\frac{N}{15}+\frac{\mathrm{N}}{30}=.$$

Якщо суму цих дробів коректно обчислити, то отримаємо:

$$=\frac{\mathrm{N}}{2}+\frac{\mathrm{N}}{3}+\frac{N}{5}-\frac{\mathrm{N}}{6}-\frac{N}{10}-\frac{N}{15}+\frac{\mathrm{N}}{30}=\frac{22\mathrm{N}}{30}\approx N\cdot 0{,}7333...$$

Тепер: якби у мене було б не число 5, а 4, то формула б виглядала б зовсім інакше, бо множина чисел $\frac{\mathrm{N}}{4}$ була б підмножиною чисел $\frac{\mathrm{N}}{2}$.

Якщо числа не взаємно прості – там потрібно найменше спільне кратне.

Тобто цей тест: якщо ми перевіряємо подільність на 2, 3 та 5, – він відразу викреслює $\frac{3}{4}$ всіх чисел. Якщо взяти перших 10 простих чисел, то можна, здається, до 95%.

Тобто така проста перевірка дуже пришвидшує тестування простоти чисел.

Інший приклад

2) Скільки взагалі існує чисел від 1 до N, які взаємно прості з заданим числом N?

Що таке взаємно прості числа? Взаємно прості числа – це числа, які не мають спільних дільників, окрім одиниці.

Тобто ми повинні обчислити потужність множини таких натуральних чисел, які належать цьому проміжку і не мають нетривіальних спільних дільників із числом N:

$\varphi(M)=\#\{\mathrm{x}\in\mathrm{N}\,|\,1\leq\mathrm{x}\leq\mathrm{N},\mathrm{НД}(\mathrm{x},\mathrm{N})=1\}$ – *функція Ойлера (Euler's totient(? Ніхто не знає) function)*

Отже, як обчислювати це число?

По-перше, кожне натуральне число ми можемо розкласти на прості дільники.

Тобто я маю число $\mathrm{N}=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_t^{\alpha_t}$. Можу представити це число, де p-прості числа, а α – це певний степінь. Зветься це канонічний розклад числа.

Отже, якщо у вас число x має спільний дільник із числом *n,* то цей спільний дільник повинен ділитися або на p_1, або на p_2, або на p_3, або на p_t.

(Якщо у вас $\mathrm{N}=2^{30}$, то які спільні дільники можуть бути в цього числа з іншими числами? 1, 2, 2^2, $2^3,\dots,2^{30}$; якщо буде $\mathrm{N}=2^{30}\cdot 3^{20}$: будуть усі степені 2-ки, усі степені 3-ки та їх множення; а спільний дільник «5» не буде, тому, що N не ділиться на 5; не може виникнути спільних дільників, окрім добутків степенів цих простих чисел).

Позначимо через A_i множину таких чисел, які лежать в інтервалі від 1 до N і поділяються на задане просте число p_i, яке ми взяли із розкладу нашого числа N: $A_i=\{x\in N\,|\,1\le x\le N,\ x\,\vdots\,p_i\}$.

Тоді що можна сказати про числа з множини A_i? Вони точно не є взаємно простими з N. Бо в них є спільний дільник, щонайменше ось цей $-\ \mathrm{p}_\mathrm{i}$.

Тому функція Ойлера для числа N: це мені потрібно взяти всі числа від 1 до N – і відняти всі числа, що входять до множин A_i. Тобто це буде: $\varphi=N-|A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_t|$.

А чому дорівнює потужність множини A_i? Множина A_i містить всі числа, що діляться на p_i-те (кожне p_i-те число буде ділитися на p_i). Тому: $|\mathrm{A}_\mathrm{i}|=\dfrac{N}{p_i}$.

Чому дорівнює потужність попарного перетину? $|\mathrm{A}_\mathrm{i}\cap A_j|=$

Перетин цих множин – це всі числа, які поділяються і на p_i і на p_j. Відповідно це буде кожне $\mathrm{p}_\mathrm{i}p_j$-те число: $|\mathrm{A}_\mathrm{i}\cap A_j|=\dfrac{N}{p_ip_j}$. Так?

Якщо в нас буде перетин по три – це всі числа, що поділяються на $\mathrm{p}_\mathrm{i}p_j\mathrm{p}_\mathrm{k}$: $|\mathrm{A}_\mathrm{i}\cap A_j\cap A_k|=\dfrac{N}{p_ip_jp_k}$.

І тоді, якщо ми застосуємо для того виразу: $\varphi=N-|A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_t|$, – формулу включень та виключень, то ми побачимо, що функція Ойлера: $\varphi(\mathrm{N})=N-\sum_{i=1}^{t}\dfrac{N}{p_i}+\sum_{1\le i\le j}\dfrac{N}{p_ip_j}-\sum_{1\le i\le j\le k}\dfrac{N}{p_ip_jp_k}+\ldots+(-1)^t\dfrac{N}{p_ip_j\cdots p_t}=$ («+» сума по 4, «-» сума по 5, «+» сума по 6 і т.д. В кінці будемо мати ↑)

Якщо ми уважно подивимося на цей вираз, то можна побачити, що це розклад ось цього виразу: $=\mathrm{N}\left(1-\dfrac{1}{\mathrm{p}_1}\right)\left(1-\dfrac{1}{p_2}\right)\left(1-\dfrac{1}{p_3}\right)\ldots\left(1-\dfrac{1}{p_t}\right)$.

Цей факт я зараз залишаю без доведення, а ви спробуйте самостійно довести методом математичної індукції.

1.8. Методи конструювання складних множин.

Першою такою складною множиною є так званий булеан.

1.8.1. Булеан множини

Булеаном множини А ми називаємо **множину всіх її підмножин**.

Традиційне позначення для булеана: 2^A. Але я підкреслюю: це не 2 піднести до степеня множина А, – тобто 2^A – це не операція, це символ, що означає булеан!!! Це лише позначення для булеана.

Є альтернативні позначення для булеана: $\mathrm{P}(A)$ або $B(A)$.

Чому саме такий символ (2^A) зараз покажу.

Спочатку формальне визначення: $2^A = \{B \mid \mathrm{B} \subseteq \mathrm{A}\}$ – булеан це є множини, які є підмножинами множини А.

Які є **очевидні властивості булеана**?

$\varnothing \in 2^{\mathrm{A}}$ – пуста множина є елементом будь-якого булеану (бо порожня множина завжди є множиною будь-якої множини);

Наша вихідна множина також завжди є власною підмножиною, тому вона завжди належить нашому булеану: $A \in 2^A$.

Тобто ці дві властивості є тут (які виконуються для будь-яких множин).

А скільки взагалі підмножин буде в нашій множині?

Якщо наша множина А скінченна, то для неї є теорема.

Теорема (про потужність булеана): **якщо** множина **А** є **скінченною** і містить n елементів, то її булеан містить 2^n елементів. Тобто потужність булеану обчислюється за допомогою такого виразу: $\left|2^A\right| = 2^{|A|}$. Або: $|A| = \mathrm{n} \Rightarrow \left|2^{\mathrm{A}}\right| = 2^n$. Що одне і те ж саме.

Якщо множина А складається з 1 елемента, то скільки в неї підмножин? 2. Які? Ø та сама множина А.

Якщо множина А складається з 2 елементів: $\mathrm{A} = \{\mathrm{a}, \mathrm{b}\}$, то: $2^A = \{\varnothing, \{\mathrm{a}\}, \{b\}, \{a, b\}\}$. Можна перевірити для 3-4 елементів множини. І ми бачимо, що твердження здається коректним. Добре. Нам це потрібно доводити. Як ми це будемо доводити? Методом математичної індукції.

Але це буде один зі способів, який ми зараз розглянемо.

Доведення

(1-ий спосіб).

Отже, доводимо методом математичної індукції. З чого починаємо? З бази.

Яку беремо базу? $n = 0$.

У нас в множині може бути 0 елементів, але менше 0 бути не може.

(математична індукція – ми починаємо з найменшого числа, яке у нас є).

Отже, якщо $n = 0$: $2^{\varnothing}$ Як виглядає булеан порожньої множини? $2^{\varnothing} = \{\varnothing\}$ – це множина, яка містить один елемент – $\varnothing$ (порожню множину).

Потужність такого булеану: $\left|2^{\varnothing}\right| = 1 = 2^0$, бо це множина, що містить 1 елемент. А $1 = 2^0$.

База в нас сходиться.

Ви вже не плутаєте порожню множину і множину, що містить порожню множину? Так? ☺ Це різні речі.

Припустимо, що твердження нашої теореми стверджується для всіх множин, потужності n. То що буде із множиною потужності $n+1$?

Розглянемо множину В: $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n, b_{n+1}\}$. Очевидно, що будь-яка підмножина множини В містить елемент з номером $n+1$ або його не містить. Очевидно?

І це задає нам розбиття всіх підмножин на 2 незалежні підкласи. Клас не може містити і не містити елемент одночасно. І будь-яка множина може бути описана в такий спосіб.

Тобто мені можна окремо обчислити кількість підмножин, що не містять b_{n+1} і окремо обчислити кількість підмножин, що містять b_{n+1}-ше і додати ці два числа.

Отже, скільки підмножин у мене не містять b_{n+1}?

Якщо підмножина не містить b_{n+1}, то вона є підмножиною множини від b_1 – до b_n. А це є множина потужності n.

За припущенням індукції кількість таких підмножин буде 2^n.

Тобто, якщо у нас є підмножина $B_1 \subseteq B$ і $b_{n+1} \notin B_1$, то кількість таких підмножин дорівнює 2^n - за припущенням індукції: $\# B_1 = 2^n$ (бо насправді $B_1 \subseteq \{b_1, \ldots, b_n\}$).

Якщо $B_2 \subseteq B$ і $b_{n+1} \in B_2$. Давайте візьмемо цей елемент $n+1$-ий і вилучимо його. Тобто множина B_2 – з якої вилучили елемент b_{n+1} – вона є підмножиною множини від b_1 – до b_n: $B_2 \setminus \{b_{n+1}\} \subseteq \{b_1 \ldots b_n\}$. *Так?*

Тому зразу можемо сказати скільки множин B_2 існує: $\# B_2 = 2^n$ – за припущенням індукції. Тобто всі множини B_2 можуть бути одержані таким шляхом. Берете підмножину цієї множини – додаєте до неї елемент b_{n+1}.

І відповідно загальна кількість підмножин $\left|2^{\mathrm{n}}\right| = 2^n + 2^n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$.

Знову ж таки: всі підмножини, які у нас тут є ми розбиваємо на 2 незалежні класи, тобто ми певну множину віднесли до певного класу – і ці множини не перетинаються, тобто не має множини, яка належить двом класам одночасно. Тут це буде диз'юнктне об'єднання. Обчислимо потужність кожного класу. Як? За припущенням. Тобто зводимо наше обчислення до того твердження, яке вже є коректним для нас. І обчислимо загальну кількість. І виявляється, що якщо припущення індукції вірне для n, то воно буде справедливе для довільної множини потужності $n+1$.

Звідси індукційний перехід дає нам справедливість теореми для довільної множини, потужності n.

(2 спосіб)

Ви можете запитати мене: чому я даю два способи доведення одного і того ж самого твердження? Чи цього не достатньо? Взагалі то достатньо, але для того, щоб ви бачили, як це можна робити. Тому, що в деяких випадках працює ось таке, а в деяких випадках ось таке не працює. Працює щось інше. Наприклад те, що буду розповідати зараз.

Зараз ми доведемо практично методом комбінаторного обрахунку.

$A = \{\mathrm{a}_1, a_2, \ldots, a_n\}$ – це множина з n-елементів. Ось ці елементи в мене є і пронумеровані. У нас є певна підмножина множини А: $\mathrm{B} \subseteq \mathrm{A}$. Навпроти елемента будемо ставити 1, якщо він належить цій множині (В), 0 – якщо не належить. Тоді цю підмножину В можна представити у вигляді: $0\ 1\ 0\ 1\ \ \ldots\ \ 1$ – певного бітового вектора («одинички» стоять навпроти тих елементів, які належать, «нулики» – навпроти тих, які не належать).

Зрозуміло, що кожну підмножину можна так подати.

Зрозуміло й інше: кожний бітовий вектор довжини n задає певну підмножину. Більш того: 2 різні вектори задають різні підмножини. А дві різні підмножини задають два різні вектори. Чому? Якщо підмножини різні, то там є елемент, що одній множині належить, а іншій не належить. Інакше вони співпадають по всіх елементах.

Ось наприклад:

$\mathrm{B} \subseteq \mathrm{A}$ 0 1 0 1 … 1

$C \subseteq A$ $\underbrace{0\ 0\ 1\ 1 \ldots 1}_{\mathrm{n}} \Rightarrow$

Ось по 2-му елементу ці дві підмножини (В і С) будуть відрізнятися.

Тобто співставлення бітового вектора нашим підмножинам – воно однозначне: одній підмножині – один бітовий вектор.

Тому кількість підмножин може бути лише такою, як кількість n-бітних векторів. А скільки у існує n-бітних векторів? Є n-бітів, кожен біт приймає значення 0 або 1 (кожен елемент може мати 2 варіанти). І треба все перемножати, оскільки ми одночасно обираємо ці варіанти.

$\Rightarrow 2^n$ бітових векторів.

А якщо векторів 2^n, то і підмножин буде 2^n.

Тобто дві множини мають однакову кількість елементів, якщо можна побудувати між цими елементами взаємно однозначне представлення – бієктивну функцію.

А тепер подивіться скільки місця в попередньому способі, скільки в цьому (скільки різних тверджень я доводила там, скільки тут).

Наступна конструкція, яку ми будемо розглядати – покриття множини А.

1.8.2. Покриття множини

Покриття множини А – це така система множин, об'єднання яких накриває всю множину А.

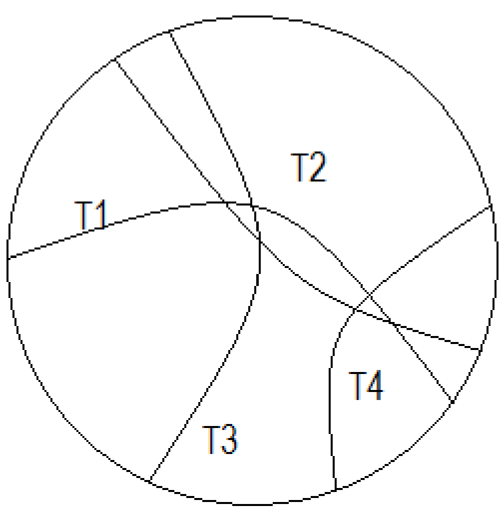
Тобто елементами покриття є підмножини множини А:

$\Delta \subseteq 2^A$ (покриття можна позначати великою грецькою літерою Δ)

$\Delta = \{T_1, T_2, \ldots, T_t\}$

Ці елементи задовольняють двом умовам:

1) всі елементи покриття є не порожніми множинами $T \neq \varnothing$;



1.8.2.1.Покриття множини А

2) а їх об'єднання дає всю множину А: $\bigcup_{i=1}^{t} T_i = A$.

Тобто, якщо у вас є множина А, то тут є якась множина T_1, T_2, T_3, T_4 і вони так «лап, лап, лап» – і усю множину A накрили (рис. 1.8.2.1).

Кожен елемент з множини A буде належати якійсь з множин T, можливо, неподільній.

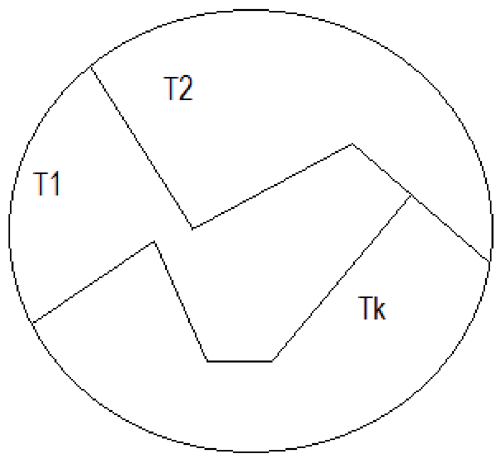
В топології, ще в якихось розділах математики це поняття розглядають в більш широкому сенсі, де це може бути система довільних, в тому числі таких, які виходять за межі множини A. Але в нас важливо, щоб це були саме підмножини множини A.

а) частковий випадок покриття: **розбиття множини А**.

Розбиттям множини A ми називаємо таку систему множин Π (це велика грецька літера «пі»): $\Pi \subseteq 2^A$, $\Pi = \{T_1, \ldots, T_k\}$.

1) Ця система множин, по-перше, є покриттям.

2) і по друге: для всіх $i \neq j$ ці множини не перетинаються між собою: $i \neq j$ $T_i \cap T_j = \varnothing$.



1.8.2.2.Розбиття множини A

Тобто, якщо в покритті ці елементи могли перетинатися і кожен елемент міг належати декільком частинам покриття, то в розбитті кожен елемент належить рівно одній частині розбиття.

Якщо ми покриття схематично зображаємо так (рис. 1.8.2.1), то розбиття (рис. 1.8.2.2): берете тарілку – розбиваєте, – і те, що трапилось з нею - це і є розбиття.

Приклади:

1) беремо множину натуральних чисел N. У нас є парні та непарні натуральні числа.

Чи може число бути одночасно і парним і непарним? Ні, не може.

Чи може бути число, що не є парним, ні непарним? Ні.

Тому, якщо ми візьмемо всі парні числа ($2\mathrm{N}$) і всі непарні числа ($2\mathrm{N}-1$): $\mathrm{N} = 2\mathrm{N} \coprod (2\mathrm{N}-1)$, – то вони задають розбиття множини натуральних чисел.

Тобто, ось ця система: $\Pi = \{2\mathrm{N}, 2\mathrm{N}\text{ -}1\}$ – це розбиття.

Взагалі кажучи, якщо Π – це розбиття, то я завжди можу написати, що в мене множина $A = T_1 \coprod T_2 \coprod \ldots \coprod T_k$ – ось цих всіх частин.

І починаючи з цього моменту ми перестанемо казати «диз'юнктне об'єднання» – ми будемо казати лише «розбиття». Тому, що це більш зрозуміло.

2) Знову беремо натуральні числа. Є прості натуральні числа, є складені натуральні числа. Чи може бути число одночасно простим і складеним? Ні, не може.

Тому можна сказати, що довжина натуральних чисел – це прості числа і складені числа: $\mathrm{N} = \text{прості} \coprod \text{складені}$. Так?

А чи є у нас натуральні числа, які не є ні простими, ні складеними? Одиниця (1) – вона не є простим числом, бо просте число має два різні дільники: 1 і саме себе; а 1 не має двох різних дільників. $\mathrm{N} = \text{прості} \coprod \text{складені} \coprod \{1\}$ – а ось тепер це буде розбиття.У нас всі натуральні числа входять в якусь з цих множин і лише вони.

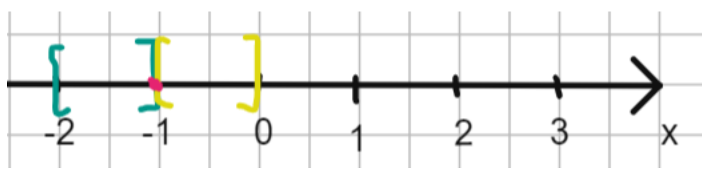
3) Нехай множина A_0 – це множина всіх цілих чисел, що діляться на 3: $A_0 = \{3k \mid k \in Z\}$, множина A_1 – це всі числа, що дають при діленні на 3 остачу 1: $A_1 = \{3k+1 \mid k \in Z\}$, і множина A_2 – це всі числа, що дають при діленні на 3 остачу 2: $A_2 = \{3k+2 \mid k \in Z\}$. Чи можуть у нас бути ще якісь остачі? При діленні на 3 остача може бути лише 0, 1 або 2. От вам 0, от вам 1, от вам 2. Тоді система множин A_0, A_1, A_2 – це що? Розбиття. Розбиття чого? Множини цілих чисел. Ви не можете казати просто «розбиття», бо ви повинні прив'язатися до вихідної множини – яку ви саме розбиваєте. Тобто у нас $\{A_0, A_1, A_2\}$ – це розбиття множини цілих чисел.

4) Розглянемо систему відрізків числової осі (одиничні відрізки: від цілого числа k – до цілого числа $k+1$):

$C_1 = \{[k, k+1] \mid k \in Z\}$.

Ці відрізки перетинаються. То що таке є система C_1? C_1 – це покриття всіх дійсних чисел – R .

У вас є відрізок $[-2,-1]$, у вас є відрізок $[-1,0]$ і вони перетинаються в точці -1 (рис. 1.8.2.3). Тобто число -1 належить одночасно двом відрізкам. Відрізки $[-1,0]$ і $[0,1]$ теж перетинаються, $[0,1]$ і $[1,2]$ теж перетинаються, – але в сукупності вони перетинають усю числову вісь. Тому система C_1 – це є покриття множини дійсних чисел.



1.8.2.3. Перетин відрізків [-2, -1] і [-1, 0]

Розглянемо систему C_2 – напівінтервалів одиничної довжини: $C_2 = \{[k, k+1) \mid k \in Z\}$. Що таке система C_2? Це вже розбиття. Бо ці точки, що належать двом відрізкам, за рахунок того, що я їх вилучаю зліва відрізків, – вони належать лише одній з цих множин. Отже, C_2 – це розбиття R .

І нарешті система $C_3 = \{(k, k+1) \mid k \in Z\}$ інтервалів на числовій осі. Що таке C_3? Ми не можемо класифікувати цю систему множини. Воно не є покриттям, оскільки цілі точки не належать жодному з цих інтервалів. Так? Тобто всі ці множини не порожні, але їх об'єднання не дає множину дійсних чисел. Тому це не є покриттям, – і відповідно не є розбиттям.

Наступна операція над множинами, яка конструює множину складного вигляду – декартовий добуток двох множин.

1.8.3. Декартовий добуток множин

Наступна операція над множинами, яка конструює множину складного вигляду – декартів добуток множин (cartesian product).

Означення. Декартів добуток 2-х множин A та B – це множина всіх впорядкованих пар виду (a, b), де $a \in A$, $b \in B$ (перший елемент іде із 1-ї множини, а другий – із другої).

Позначається декартовий добуток: $A \times B$.

Формальний запис: $A \times B = \{(\mathrm{a}, \mathrm{b}) \mid a \in A, b \in B\}$.

(*Множина всіх впорядкованих пар, де 1-ий елемент пробігає всі елементи з А, а 2-ий пробігає всі елементи з В*)

Що таке впорядкована пара? Чим вона відрізняється від множини?

Тобто нам важливий порядок – як це випливає з означення. Якщо ми поміняємо місцями (a, b) і (b, a), то це будуть дві різні впорядковані пари. А якщо це буде множина, то від переставляння елементів нічого не зміниться. Якщо ми якусь множину позначимо фігурними дужками, то там нам порядок неважливий. Коли ми ставимо круглі дужки, то це буде впорядкована пара, впорядкована трійка, впорядкована калька або, як ми її називаємо **кортежем** або **вектором**. Корисно: в дискретній математиці впорядкованість ще підсилюють, позначають: $\langle a, \mathrm{b}\rangle$ – так можна також зустріти позначення впорядкованості в літературі. Вважаю, що потрібно дотримуватися єдиної системи нотації: у векторній математиці та математичному аналізі позначається (a, b), тому і ми будемо так позначати.

Якщо у нас не дві множини, а 3, 4 або 5? То що буде, якщо ми їх всі перемножимо?

Декартовий добуток множин $\mathrm{A}_1, A_2, \ldots, A_n$ **для довільної кількості множин визначаємо їх декартовий добуток як множину, що містить всі можливі впорядковані** n:

$$\mathrm{A}_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \ldots, a_n \in A_n\}.$$

Що зручно в такому вигляді? Можна між A розставляти дужки. За такого визначення декартовий добуток набуває асоціативності: вам не важливо в якому порядку їх перемножати, оскільки на виході ви все рівно одержите впорядковану n.

1.8.4. Декартовий степінь.

Декартів степінь множини A: $A^{\mathrm{n}} = \underbrace{A \times A \ldots \times A}_{n}$. Тобто це буде множина векторів, в якому кожна координата пробігає всі значення з множини A.

<u>Приклади</u> (ви їх всі знаєте ще зі школи).

1) Чому він називається «декартовим»? Що вигадав Рене Декарт?

Систему координування площини, а потім простору, а пізніше взагалі – n-вимірного простору.

Що таке точка на площині? Як вона задається в декартовій системі координат?

Двома числами: координатою за віссю Ox та координатою за віссю Oy.

Так ось:

площина $\mathrm{R}^2 = \{(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \mid x, y \in R\}$ – це просто декартовий добуток множини дійсних чисел (числової осі) на саму себе;

простір $\mathrm{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in R\}$ – це, відповідно, добуток 3-го степеня – і нам потрібно 3 координати.

n-вимірний простір R^n відповідно буде задаватися векторами з n-координат .

2) Пам'ятаєте множина раціональних чисел визначалася нами як: $\mathrm{Q} = \left\{\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{n}} \mid m \in Z, n \in N\right\}$. Так?

Якщо ми розглянемо множину дробів, які не можна скорочувати $-\ Q'$. Тобто у мене $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ будуть два різні записи. Тоді фактично вся множина Q' буде задаватися парою чисел: перше з множини Z, друге – з N: $\mathrm{Q} \subseteq Q' \sim Z \times N$. (знак "~" – це не рівність, тому що тут впорядковані пари, а вище – дроби; але воно однакове, адже з цих пар можна перейти до дробів і навпаки. А множина Q, якщо ми дозволяємо скорочувати це буде певна підмножина Q').

<u>Теорема (про потужність декартового добутку).</u>

Якщо є дві скінченні множини A та B, то чому дорівнює потужність їх декартового добутку? $|\mathrm{A} \times \mathrm{B}| = |A| \cdot |B|$.

Система позначень неминуче повинна підказувати вам, що ви робите.

Кількість впорядкованих пар – це просто добуток потужностей кожної з множини.

Знову таки це очевидна теорема. Пропоную самостійно здійснити схематичне доведення.

Візьмемо перший елемент з множини A. Скільки пар він утворює? Стільки, скільки є елементів в множині B, бо кожен елемент з множини B дає нам одну пару. Беремо другий елемент з множини A. Скільки пар він утворює? Знову стільки, скільки є елементів в множині B. Беремо третій, четвертий, п'ятий,…, останній, а потім все додаємо – одержимо $|\mathrm{A}| \cdot |B|$.

Наслідок.

1) Якщо є декартовий добуток n-множин: $|\mathrm{A}_1 \times \mathrm{A}_2 \times \ldots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \ldots \cdot |A_n|$;

2) Якщо є декартовий степінь множини: $|\mathrm{A}^{\mathrm{n}}| = |A|^n$.

1.8.5. Алфавіт

Остання конструкція, яку вам потрібно знати – вона для теорії формальних громад як дослідження мови – алфавіт. Що таке алфавіт? Це довільна множина, яку ми захотіли вважати алфавітом.

Алфавіт A – це довільна множина (зазвичай скінченна множина, але не обов'язково).

Якщо ми множину назвала «Алфавітом», то елементи цієї множини ми будемо називати – «літерами» чи «символами»: $a \in A$ **– символ (літера)**.

Якщо в нас є впорядкована n-ка символів, то ми можемо $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ прибрати дужки, коми, – це все «зліпити в одне» – і одержимо… що? Слово довжиною n будемо писати просто: $a_1 a_2 \ldots a_n$. Підкреслюю: *це все лише тоді, коли ми працюємо з алфавітом. Тобто ми інтерактивно назначила цю множину алфавітом – і тоді впорядковані n-ки записуватимемо ось так:* $a_1 a_2 \ldots a_n$.

І відповідно… що таке A^n ?

Це множина всіх слів, довжини n: A^n **– множина всіх слів, довжини n**.

Для алфавітів вводиться ще одне спеціальне визначення.

Скажімо, у нас є слово і ми починаємо з нього вилучати літери. Якщо ми вилучаємо літери – слово залишається словом. Але в певний момент часу літер уже не буде, а слово залишиться словом. Ось «таке слово» позначається спеціальним символом ε **– порожнє слово (слово, що не містить жодної літери)**.

І в цьому різниця між алфавітом і звичайним декартовим добутком звичайних множин. Якщо ми перемножимо 0 множин на 0 множин… що одержимо? Порожню множину: ми нічого не одержимо. А тут ми можемо ввести нульовий степінь – A^0, – (якого ми не могли ввести над звичайним декартовом добутком) і за визначенням це є множина, яка містить порожнє слово і більш нічого: $A^0 = \{\varepsilon\}$.

І ось тепер ми можемо взяти всі можливі словосполучення й об'єднати їх в єдину множину – множину всіх слів. То ця операція називається «замикання алфавіту (зірка Кліні)»: $A^* = A^0 \cup A^1 \cup A^2 \cup \ldots = \bigcup_{n=0}^{\infty} A^n$.

Якщо ви будуєте якесь словосполучення, то воно точно є в A^*. Всі слова, які ви можете вигадати із заданих літер – вони тут є: тут слова довжиною 0, тут слова довжиною 1, довжиною 2, 3, 4 і т.д.

(Формальною) мовою над алфавітом А що ми називаємо? Що таке взагалі «мова»? Неформальна? От ви розмовляєте українською, англійською, польською та російською мовами. Що це таке? Це певні літеро сполучення, яким ви надаєте певний сенс. Тобто для вас є коректні літеросполучення, є некоректні сполучення. Тобто фактично: $L \subseteq A^*$ – ви обрали певну кількість слів і назвали їх правильними. І оце для вас є мова.

Формальною ми називаємо будь-яку мову підмножини із множини всіх можливих слів.

Лабораторна робота № 1. Моделювання основних операцій двох числових множин

Теоретичні відомості та приклади розв'язування задач

Множина – це сукупність деяких об’єктів (елементів множини), виділених за певною ознакою з інших об’єктів. При цьому повинно бути дано повний опис класу всіх об’єктів, які розглядаються (універсальна множина U). Факт належності елемента а множині A позначається $a \in A$. Запис $a \notin A$ означає, що елемент а універсальної множини не належить множині А . Якщо для всіх елементів множини А і тільки для них виконується властивість Р , то це позначають $A = \{a \mid P(a)\}$. Інколи вдається перелічити всі елементи множини A. Тоді наводять повний перелік усіх різних елементів множини: $A = \{a_1, a_{2,\ldots}, a_n\}$.

Множина, яка не має жодного елемента, називається порожньою і позначається ∅.

Якщо кожен елемент множини А є елементом множини В , то А називається підмножиною множини В, що позначають А ⊂ В . Вважається, що порожня множина є підмножиною будь-якої множини, а також А ⊂ А.

Множина всіх підмножин множини А називається булеаном і позначається Р(А). Потужність скінченної множини дорівнює кількості її елементів, позначається |A| . Потужність порожньої множини дорівнює 0.

Якщо |A| = n , то |P(A)|=2^n.

Приклад. {1, 4, 5} ⊂ {−1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 7}, але

{1, 4, 5} ∉ {−1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 7}.

Приклад. Знайти булеан множини A = {a, b, c}.

Розв’язання.

Потужності множин |A| = 3 , |P(A)| = 8 . Булеан має вигляд P(A) = {∅, {a}, {b}, {c}, {a, b}, {a, c}, {b, c}, {a, b, c}}.

Дві множини A і B рівні між собою, якщо A ⊂ B і B ⊂ A.

Над множинами можна виконувати дії: об’єднання, переріз, доповнення, різницю, симетричну різницю, декартів добуток.

Об’єднання – A ∪ B = { x | x∈ A V x ∈ B},

переріз – A ∩ B = { x | x ∈ A ∧ x ∈ B},

доповнення - A = { x | x ∉ A},

різниця - A \ B = { x | x ∈ A ∧ x ∉ B},

симетрична різниця – A Δ B = { x | (x∈ A∧ x ∉ B) ∨ (x∈ B ∧ x ∉ A)}.

Тут використано логічні знаки: ∨ - «або», ∧ - «і».

Приклад. Виконати дії над множинами A = {1, 2, 3, 4} і B = { 3, 4, 5, 6, 7}.

Розв’язання

A ∪ B = {1, 2, 3, 4} ∪ { 3, 4, 5, 6, 7} = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7},

A ∩ B = {1, 2, 3, 4} ∩ { 3, 4, 5, 6, 7} = {3, 4},

A \ B = {1, 2, 3, 4} \ { 3, 4, 5, 6, 7} = {1, 2},

A Δ B = {1, 2, 3, 4} Δ { 3, 4, 5, 6, 7} = {1, 2, 5, 6, 7}.

Приклад. Довести логічним методом, що для довільних множин A і B виконується тотожність $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$.

Розв’язання.

Нехай x ∈ $\overline{A \cup B}$ ⇒ x ∉ (A∪ B) ⇒ (x∉ A) ∧ (x∉ B) ⇒ x ∈ $\bar{A}$ ∧ x ∈ $\bar{\mathrm{B}}$ ⇒ x ∈ $\bar{A} \cap \bar{B}$. Таким чином, доведено, що $\overline{A \cup B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$. Повторюючи міркування в зворотному порядку, одержимо $\bar{A} \cap \bar{B} \subset \overline{A \cup B}$, що доводить тотожність.

Пріоритет виконання операцій у спадному порядку – доповнення, переріз, об’єднання, різниця, симетрична різниця.

Приклад. Зобразити на діаграмі Ейлера-Вена множину, яку задано за допомогою операцій:

A ∪C Δ B \ A∩C .

Розв’язання.

З врахуванням порядку виконання операцій:

1) $A \cap C$ (рис. 1), 2) $A \cup C$ (рис. 2), 3) $B \backslash A \cap C$ (рис.4), 4) $A \cup C \Delta B \backslash A \cap C$ (рис. 4).

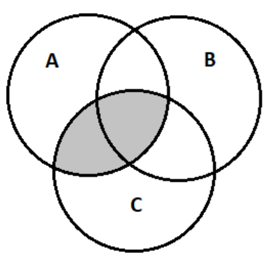


Рис. 1. A∩C

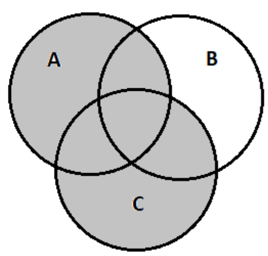


Рис. 2 A∪C

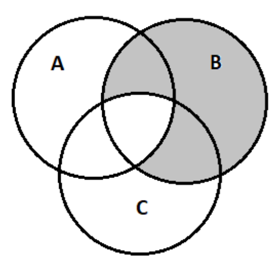


Рис. 3. B\A∩C

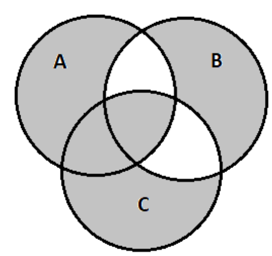


Рис. 4. A∪CΔB\A∩C

Приклад. За допомогою дій над множинами описати множину, зображену на рис.5.

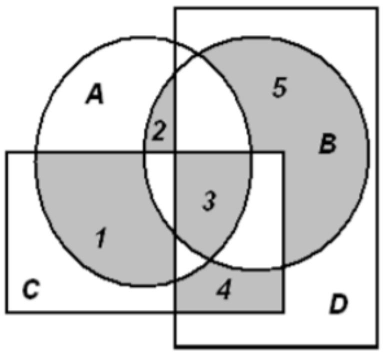


Рис. 5

Розв'язання

Виділена частина є об'єднанням п'ятьох частин.

Опишемо кожну окремо:

1) $A \cap C \backslash B \backslash D$,

2) $A \cap B \backslash D \backslash C$,

3) $A \cap B \cap C \cap D$,

4) $C \cap D \backslash A \backslash B$,

5) $B \backslash A \backslash C$.

Тому результат буде мати вигляд:

$(A \cap C \backslash B \backslash D) \cup (A \cap B \backslash D \backslash C) \cup (A \cap B \cap C \cap D) \cup (C \cap D \backslash A \backslash B) \cup (B \backslash A \backslash C)$.

Закони алгебри множин:

1. A∪ B = B ∪ A, A∩ B = B ∩ A комутативність;

2. (A∪B)∪C = A∪(B∪C), (A∩B)∩C = A∩(B∩C) асоціативність;

3. (A∪ B)∩C = (A∩C) ∪(B ∩C) , (A ∩ B) × (C ∩ D) = (A× D) ∩ (B ×C) дистрибутивність;

4. A∪∅ = A , A∩∅ = ∅ властивості порожньої множини;

5. A∪U = U , A∩U = A властивості універсума;

6. A∪ A = U , A∩ A = ∅ властивості доповнення;

7. A∪ A = A, A∩ A = A ідемпотентність;

8. A = A інволюція;

9. A∪ B = A∩ B , A∩ B = A∪ B закони де Моргана;

10. (A∪ B) ∩ A = A, (A∩ B) ∪ A = A закон поглинання;

11. A \ B = A∩ B заміна різниці;

12. AΔB = (A∩ B) ∪(B ∩ A) заміна симетричної різниці.

Приклад. Спростити вираз, використовуючи закони алгебри множин $\overline{A \setminus B \cup C} \cap A \cup B$.

Розв'язання.

$\overline{A \setminus B \cup C} \cap A \cup B$ $\overline{A \cap \overline{B \cup C}} \cap A \cup B = (\bar{A} \cup \overline{\overline{B \cup C}}) \cap A \cup B = (\bar{A} \cup B \cup C) \cap A \cup B = [(\bar{A} \cap A) \cup ((B \cup C) \cap A)] \cup B = [\emptyset \cup (B \cap A) \cup (C \cap A)] \cup B = (B \cap A) \cup (C \cap A) \cup B$ $((B \cap A) \cup B) \cup (C \cap A) = B \cup (C \cap A)$.

Індивідуальні завдання

Завдання №1. Використовуючи теоретичні відомості, розв'язати наступні задачі за своїм варіантом:

Варіант № 1

1. Для даних скінчених множин A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}, B = {4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}, C = {2, 4, 6, 8, 10} та універсума U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} знайти множину, яку задано за допомогою операцій:

а) (A ∩ B) ∪C ;

б) (A ∪C \) B.

2. На множинах задачі 1 побудувати булеан множини $\overline{(B \setminus \bar{A}) \cup C}$. Знайти його потужність.

3. Нехай маємо множини: N - множина натуральних чисел, Z - множина цілих чисел, Q - множина раціональних чисел, R – множина дійсних чисел; A, B, C - будь-які множини. Перевірити які твердження є вірними (в останній задачі у випадку невірного твердження достатньо навести контрприклад, якщо твердження вірне - навести доведення):

а) {2, 3} ∈ {{1, 2}, 2, 3};

б) Q ⊂ R ;

в) Q ∪ N ⊂ N ;

г) N ∩ Z ⊂ Z ∩ Q ;

д) якщо C ⊂ $\bar{A} \cup \bar{B}$, то A ∩ B ⊂ $\bar{C}$.

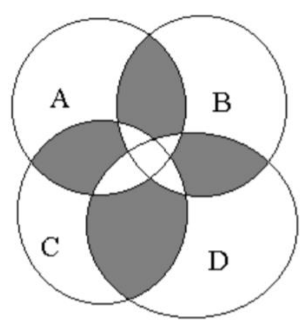
4. Логічним методом довести тотожність:

$$A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C).$$

5. Зобразити на діаграмі Ейлера-Венна множину:

$$((A \cap B)\ \Delta\ C) \setminus (A \cup C).$$

6. Множину зображено на діаграмі. Записати її за допомогою операцій.



7. Спростити вигляд множини, яка задана за допомогою операцій, застосовуючи закони алгебри множин (у відповідь множини можуть входити не більше одного разу):

$$\overline{A \cap B \cap C} \cup (A \cap B) \cup \bar{C}.$$

Варіант № 2

1. Для даних скінчених множин A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}, B = {4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}, C = {1, 3, 5, 7, 9} та універсума U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} знайти множину, яку задано за допомогою операцій:

а) $A \cup \overline{B \cap C}$;

б) (A \ C) Δ B .

2. На множинах задачі 1 побудувати булеан множини ($\overline{B}$ Δ C) ∩ A . Знайти його потужність.

3. Нехай маємо множини: N - множина натуральних чисел, Z - множина цілих чисел, Q - множина раціональних чисел, R - множина дійсних чисел; A, B, C - будь-які множини. Перевірити які твердження є вірними (в останній задачі у випадку невірного твердження достатньо навести контрприклад, якщо твердження вірне - навести доведення):

а) ∅ ∩ {∅} = ∅ ; **б)** Q ∈ R ;

в) N ∩ Z = Z ; **г)** R \ N ⊂ R \ Q ;

д) якщо A \ C ⊂ B \ C , то A ⊂ B.

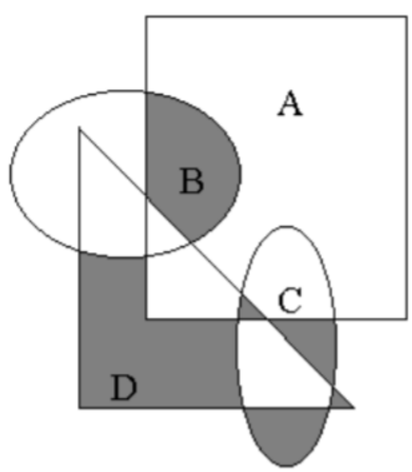
4. Логічним методом довести тотожність:

$$(A \cap B) \setminus (A \cap C) = (A \cap B) \setminus C .$$

5. Зобразити на діаграмі Ейлера-Венна множину:

$$((A \setminus B) \Delta (C \setminus B)) \cup B .$$

6. Множину зображено на діаграмі. Записати її за допомогою операцій.



7. Спростити вигляд множини, яка задана за допомогою операцій, застосовуючи закони алгебри множин (у відповідь множини можуть входити не більше одного разу):

$$(A \setminus B) \cup (A \cap B \cap C).$$

Варіант № 3

1. Для даних скінчених множин A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}, B = {5, 6, 7, 8, 9, 10}, C = {1, 2, 3, 8, 9, 10} та універсума U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} знайти множину, яку задано за допомогою операцій:

а) $\overline{B} \cup \overline{C}$;

б) $\overline{\mathrm{A}\ \Delta\ \mathrm{C}}$.

2. На множинах задачі 1 побудувати булеан множини $\overline{(\mathrm{C} \setminus A) \cup (A \setminus B)}$. Знайти його потужність.

3. Нехай маємо множини: N - множина натуральних чисел, Z - множина цілих чисел, Q - множина раціональних чисел, R - множина дійсних чисел; A, B, C - будь-які множини. Перевірити які твердження є вірними (в останній задачі у випадку невірного твердження достатньо навести контрприклад, якщо твердження вірне - навести доведення):

а) $\emptyset \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$;

б) $Q \cup R \subset Q$;

в) $Q \cap Z = Z \cup N$;

г) $Z \setminus N \subset R \setminus Q$;

д) якщо $A \subset B$ і $\bar{C} \subset \bar{B}$, то $C \cap A = \emptyset$.

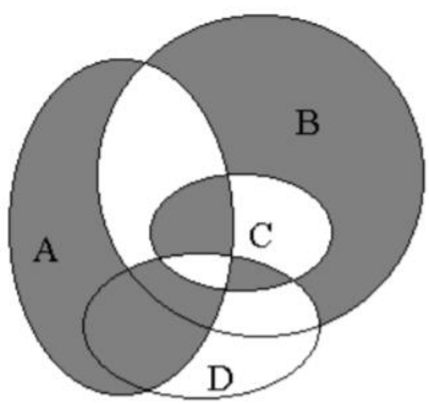
4. Логічним методом довести тотожність:

$$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C).$$

5. Зобразити на діаграмі Ейлера-Венна множину:

$$(A \setminus (C \setminus B)) \cap (C\ \Delta\ A).$$

6. Множину зображено на діаграмі. Записати її за допомогою операцій.



7. Спростити вигляд множини, яка задана за допомогою операцій, застосовуючи закони алгебри множин (у відповідь множини можуть входити не більше одного разу):

$$(A \setminus B)\ \Delta\ A.$$

Варіант № 4

1. Для даних скінчених множин A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}, B = {4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}, C = {2, 4, 6, 8, 10} та універсума U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} знайти множину, яку задано за допомогою операцій:

а) B \ (C \ A);

б) $\bar{B}\ \Delta\ \bar{C}$.

2. На множинах задачі 1 побудувати булеан множини $\overline{A \setminus B \cup C} \cap A$. Знайти його потужність.

3. Нехай маємо множини: N - множина натуральних чисел, Z - множина цілих чисел, Q - множина раціональних чисел, R - множина дійсних чисел; A, B, C - будь-які множини. Перевірити які твердження є вірними (в останній задачі у випадку невірного твердження достатньо навести контрприклад, якщо твердження вірне - навести доведення):

а) { 2,1 } ⊂ {1, 2}, 2, 3 }; **б)** Q ∪ R = R ;

в) N ∩ R ⊂ Z ; **г)** Z \ N ⊂ Q \ N ;

д) якщо A ∩ $\bar{B}$ ⊂ C , то A ⊂ B ∪C .

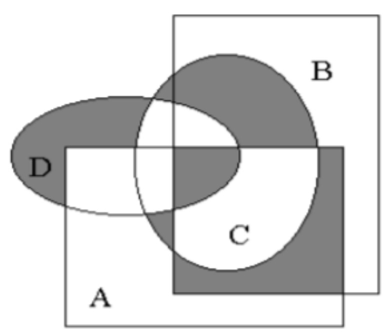
4. Логічним методом довести тотожність:

A \ (B ∪ C) = (A \ B) \ C .

5. Зобразити на діаграмі Ейлера-Венна множину:

(C Δ A ∩ B ∪ C) ∪ (B \ A).

6. Множину зображено на діаграмі. Записати її за допомогою операцій.



7. Спростити вигляд множини, яка задана за допомогою операцій, застосовуючи закони алгебри множин (у відповідь множини можуть входити не більше одного разу):

((A Δ B ∪ C) ∪ $\bar{A}$) ∩C .

Варіант № 5

1. Для даних скінчених множин A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}, B = {4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}, C = {1, 3, 5, 7, 9} та універсума U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} знайти множину, яку задано за допомогою операцій:

а) $A \cap B \cup C$;

б) $\bar{A} \Delta \bar{C}$.

2. На множинах задачі 1 побудувати булеан множини $C \setminus (\bar{A} \cup \bar{B}) \cap C$. Знайти його потужність.

3. Нехай маємо множини: N - множина натуральних чисел, Z - множина цілих чисел, Q - множина раціональних чисел, R - множина дійсних чисел; A, B, C - будь-які множини. Перевірити які твердження є вірними (в останній задачі у випадку невірного твердження достатньо навести контрприклад, якщо твердження вірне - навести доведення):

а) $3 \in \{\{1, 2\}\ 3, 4\}$;

б) $Z \subset N$;

в) $Q \cap Z \subset R \setminus N$;

г) $Q \setminus Z \subset R \setminus N$;

д) якщо $A \subset B$ і $A \subset C$, то $A \subset B \cap C$.

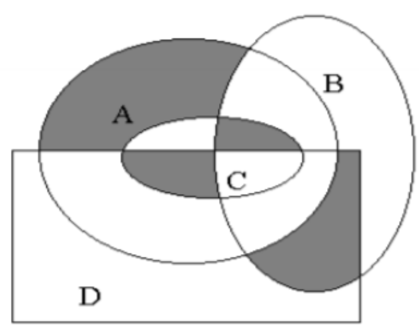
4. Логічним методом довести тотожність:

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C).$$

5. Зобразити на діаграмі Ейлера-Венна множину:

$$B \cap (A \Delta (C \setminus B)) \setminus A.$$

6. Множину зображено на діаграмі. Записати її за допомогою операцій.



7. Спростити вигляд множини, яка задана за допомогою операцій, застосовуючи закони алгебри множин (у відповідь множини можуть входити не більше одного разу):

$$((A \Delta B) \setminus C) \cap \bar{B} \cup (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Варіант № 6

1. Для даних скінчених множин A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}, B = {5, 6, 7, 8, 9, 10}, C = {1, 2, 3, 8, 9, 10} та універсума U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} знайти множину, яку задано за допомогою операцій:

а) (A ∩C) ∪ B ;

б) B Δ C .

2. На множинах задачі 1 побудувати булеан множини C \ ($\bar{A}$ ∪ $\bar{C}$) ∩ B . Знайти його потужність.

3. Нехай маємо множини: N - множина натуральних чисел, Z - множина цілих чисел, Q - множина раціональних чисел, R - множина дійсних чисел; A, B, C - будь-які множини. Перевірити які твердження є вірними (в останній задачі у випадку невірного твердження достатньо навести контрприклад, якщо твердження вірне - навести доведення):

а) ∅ ∪ {∅} = ∅ ; **б)** N ∈ Z ;

в) Q ∪ N = R ∩ Q ; **г)** R \ (N ∪ Z) ⊂ Q ;

д) якщо A ∩ B ⊂ $\bar{C}$, то $\overline{A \cap B}$ ⊂ C .

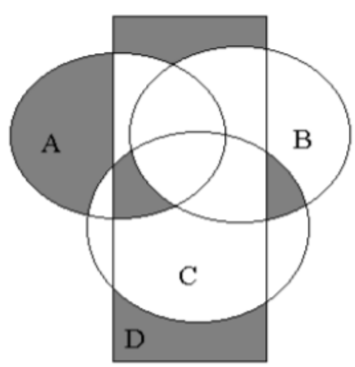
4. Логічним методом довести тотожність:

A ∩ (B \ C) = (A ∩ B) \ C .

5. Зобразити на діаграмі Ейлера-Венна множину:

((C ∪ A) Δ B) \ (A ∪ C).

6. Множину зображено на діаграмі. Записати її за допомогою операцій.



7. Спростити вигляд множини, яка задана за допомогою операцій, застосовуючи закони алгебри множин (у відповідь множини можуть входити не більше одного разу):

(A Δ B ∩ C) ∪ B .

Варіант № 7

1. Для даних скінчених множин A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}, B = {4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}, C = {2, 4, 6, 8, 10} та універсума U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} знайти множину, яку задано за допомогою операцій:

а) $A \Delta B$;

б) $B \cap \bar{C} \cap \bar{A}$.

2. На множинах задачі 1 побудувати булеан множини $\overline{A \Delta C} \cap B$. Знайти його потужність.

3. Нехай маємо множини: N - множина натуральних чисел, Z - множина цілих чисел, Q - множина раціональних чисел, R - множина дійсних чисел; A, B, C - будь-які множини. Перевірити які твердження є вірними (в останній задачі у випадку невірного твердження достатньо навести контрприклад, якщо твердження вірне - навести доведення):

а) $\{1, 2\} \in \{ \{1, 2, 3\}, \{2, 3\}, 1, 2\}$; **б)** $N \cap R \subset Z$;

в) $Z \cup N \subset N$; **г)** $R \setminus (N \cap Z) \subset Q$;

д) якщо $A \cup C \subset B \cup C$, то $A \subset B$.

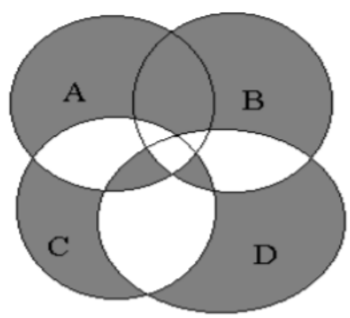
4. Логічним методом довести тотожність:

$$A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C).$$

5. Зобразити на діаграмі Ейлера-Венна множину:

$$((A \setminus B) \cap (C \setminus B)) \Delta B .$$

6. Множину зображено на діаграмі. Записати її за допомогою операцій.



7. Спростити вигляд множини, яка задана за допомогою операцій, застосовуючи закони алгебри множин (у відповідь множини можуть входити не більше одного разу):

$$((A \cup B) \Delta C) \cup (B \cap C) \cup (A \cap C).$$

Варіант № 8

1. Для даних скінчених множин A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}, B = {4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}, C = {1, 3, 5, 7, 9} та універсума U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} знайти множину, яку задано за допомогою операцій:

а) $(A \cup C) \setminus B$;

б) $\overline{A \Delta C}$.

2. На множинах задачі 1 побудувати булеан множини $(\bar{A} \,\Delta\, C) \setminus B$. Знайти його потужність.

3. Нехай маємо множини: N - множина натуральних чисел, Z - множина цілих чисел, Q - множина раціональних чисел, R - множина дійсних чисел; A, B, C - будь-які множини. Перевірити які твердження є вірними (в останній задачі у випадку невірного твердження достатньо навести контрприклад, якщо твердження вірне - навести доведення):

а) $\{1, 3, 5\} \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$;

б) $Q \cup R \subset R$;

в) $R \subset Z \cup Q$;

г) $Q \setminus N \subset Z \cap Q$;

д) якщо $A \subset \bar{B}$, то $B \subset \bar{A}$.

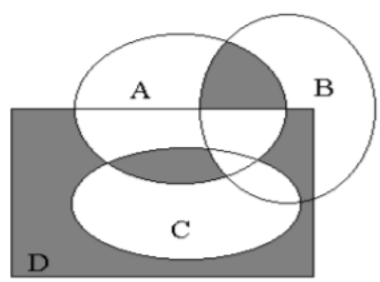
4. Логічним методом довести тотожність:

$$A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C) .$$

5. Зобразити на діаграмі Ейлера-Венна множину:

$$(A \cup B \Delta C) \setminus (A \cup C) .$$

6. Множину зображено на діаграмі. Записати її за допомогою операцій.



7. Спростити вигляд множини, яка задана за допомогою операцій, застосовуючи закони алгебри множин (у відповідь множини можуть входити не більше одного разу):

$$(A \cap \bar{B}) \cup (A \cap B \cap C) \cup \overline{A \cap C}.$$

Варіант № 9

1. Для даних скінчених множин A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}, B = {5, 6, 7, 8, 9, 10}, C = {1, 2, 3, 8, 9,10} та універсума U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} знайти множину, яку задано за допомогою операцій:

а) ($\overline{B}$ \ C) ∪ B;

б) (B ∩ $\bar{A}$) Δ C .

2. На множинах задачі 1 побудувати булеан множини B \ ((A \ B) Δ C). Знайти його потужність.

3. Нехай маємо множини: N - множина натуральних чисел, Z - множина цілих чисел, Q - множина раціональних чисел, R - множина дійсних чисел; A, B, C - будь-які множини. Перевірити які твердження є вірними (в останній задачі у випадку невірного твердження достатньо навести контрприклад, якщо твердження вірне - навести доведення):

а) $\{4\} \subset \{1, 2, 3, \{4, 5\}\}$; **б)** $Q \cap R \subset R$;

в) $R \backslash Z \subset Q$; **г)** $N \cap R \subset Z \cap Q$;

д) якщо $C \subset B \cap \bar{A}$, то $A \cap C = \emptyset$.

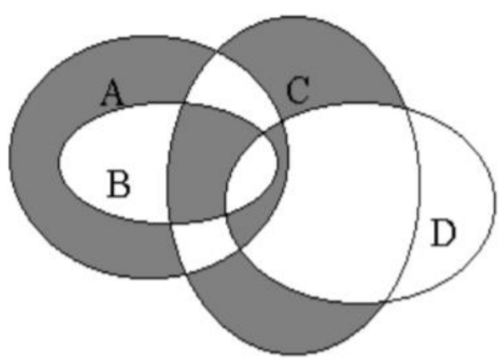
4. Логічним методом довести тотожність:

A Δ (A Δ B) = B .

5. Зобразити на діаграмі Ейлера-Венна множину:

(((A ∩ B) Δ C) \ A) Δ B .

6. Множину зображено на діаграмі. Записати її за допомогою операцій.



7. Спростити вигляд множини, яка задана за допомогою операцій, застосовуючи закони алгебри множин (у відповідь множини можуть входити не більше одного разу):

$$\overline{\overline{A} \cap \overline{B}} \cup (A \cap C) \cup \overline{C \setminus B}.$$

Варіант № 10

1. Для даних скінчених множин A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}, B = {4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}, C = {2, 4, 6, 8, 10} та універсума U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} знайти множину, яку задано за допомогою операцій:

а) $\overline{\mathrm{A} \cap \mathrm{B}}$;

б) (A \ C) ∪ (B \ A).

2. На множинах задачі 1 побудувати булеан множини C \ $\overline{A \cap C}$. Знайти його потужність.

3. Нехай маємо множини: N - множина натуральних чисел, Z - множина цілих чисел, Q - множина раціональних чисел, R - множина дійсних чисел; A, B, C - будь-які множини. Перевірити які твердження є вірними (в останній задачі у випадку невірного твердження достатньо навести контрприклад, якщо твердження вірне - навести доведення):

а) {2, 3} ⊂ {1, 2, 3, 4, 5}; **б)** Q ⊂ N ;

в) N ∪ Z = Z ∩ R ; **г)** Z \ N ⊂ Q ∩ Z ;

д) якщо A ⊂ B , то A ⊂ B.

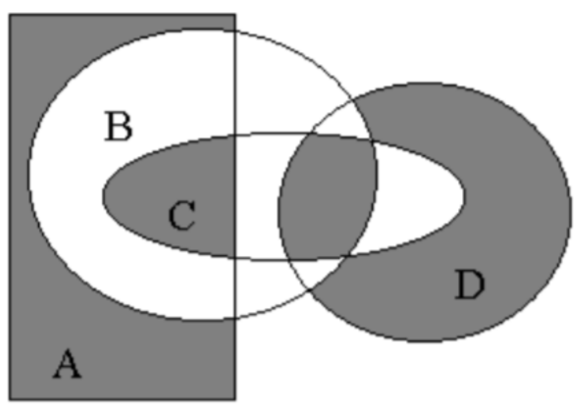
4. Логічним методом довести тотожність:

$$(A \cap C) \setminus B = (A \setminus B) \cap (C \setminus B).$$

5. Зобразити на діаграмі Ейлера-Венна множину:

$$(C \setminus A)\ \Delta\ (B \cup (A \setminus C \cap B)) .$$

6. Множину зображено на діаграмі. Записати її за допомогою операцій.



7. Спростити вигляд множини, яка задана за допомогою операцій, застосовуючи закони алгебри множин (у відповідь множини можуть входити не більше одного разу):

$$(A \cap C\ \Delta\ B) \setminus A.$$

Варіант № 11

1. Для даних скінчених множин A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}, B = {4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}, C = {1, 3, 5, 7, 9} та універсума U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} знайти множину, яку задано за допомогою операцій:

а) $A \cap (B \cup C)$;

б) $\bar{B} \, \Delta \, \bar{C}$.

2. На множинах задачі 1 побудувати булеан множини $(\bar{C} \, \Delta \, B) \cap A$. Знайти його потужність.

3. Нехай маємо множини: N - множина натуральних чисел, Z - множина цілих чисел, Q - множина раціональних чисел, R - множина дійсних чисел; A, B, C - будь-які множини. Перевірити які твердження є вірними (в останній задачі у випадку невірного твердження достатньо навести контрприклад, якщо твердження вірне - навести доведення):

а) $\{4, 5\} \subset \{\{1\}, 2, 3, 4, 5\}$; **б)** $N \in R$;

в) $Q \cup N \subset N$; **г)** $Q \setminus Z \subset R$;

д) якщо $A \subset B$ і $B \subset \bar{C}$, то $A \cap C = \emptyset$.

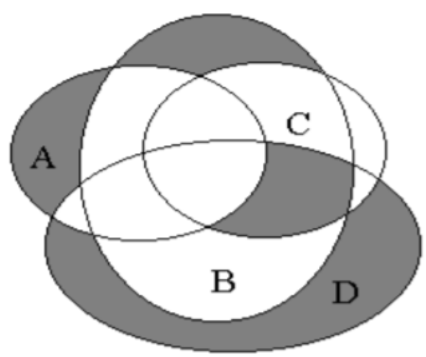
4. Логічним методом довести тотожність:

$$A (\setminus B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C).$$

5. Зобразити на діаграмі Ейлера-Венна множину:

$$((B \cap C) \, \Delta \, A) \setminus C) \, \Delta \, B .$$

6. Множину зображено на діаграмі. Записати її за допомогою операцій.



7. Спростити вигляд множини, яка задана за допомогою операцій, застосовуючи закони алгебри множин (у відповідь множини можуть входити не більше одного разу):

$$(A \cup B) \cap \bar{C} \cup (\overline{A \cap B} \cap C) \cup (A \cap B \cap C).$$

Варіант № 12

1. Для даних скінчених множин A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}, B = {5, 6, 7, 8, 9, 10}, C = {1, 2, 3, 8, 9, 10} та універсума U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} знайти множину, яку задано за допомогою операцій:

а) $(A \setminus C) \cap \bar{B}$;

б) $\bar{C}\ \Delta\ B$.

2. На множинах задачі 1 побудувати булеан множини $A \setminus (\bar{B}\ \Delta\ \bar{C})$. Знайти його потужність.

3. Нехай маємо множини: N - множина натуральних чисел, Z - множина цілих чисел, Q - множина раціональних чисел, R - множина дійсних чисел; A, B, C - будь-які множини. Перевірити які твердження є вірними (в останній задачі у випадку невірного твердження достатньо навести контрприклад, якщо твердження вірне - навести доведення):

а) $\{1\} \subset \{\{1, 2\}, 3, 4\}$; **б)** $Q \cap N = N$;

в) $Q \setminus N \subset Z$; **г)** $(R \setminus Q) \cap N = \emptyset$;

д) якщо $A \subset B$, то $C \setminus B \subset C \setminus A$.

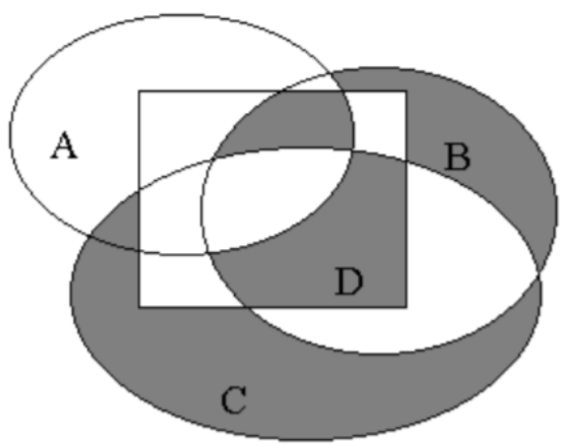
4. Логічним методом довести тотожність:

$$(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C).$$

5. Зобразити на діаграмі Ейлера-Венна множину:

$$((A \cup B) \cup (C\ \Delta\ B)) \setminus (A \setminus B).$$

6. Множину зображено на діаграмі. Записати її за допомогою операцій.



7. Спростити вигляд множини, яка задана за допомогою операцій, застосовуючи закони алгебри множин (у відповідь множини можуть входити не більше одного разу):

$$(A\ \Delta\ \overline{B \cap C}) \cup A.$$

Варіант № 13

1. Для даних скінчених множин A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}, B = {4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}, C = {2, 4, 6, 8, 10} та універсума U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} знайти множину, яку задано за допомогою операцій:

а) $A \cap (B \cup C)$;

б) $\overline{B \,\Delta\, C}$.

2. На множинах задачі 1 побудувати булеан множини $C \setminus (B \setminus \bar{C}) \cap A$. Знайти його потужність.

3. Нехай маємо множини: N - множина натуральних чисел, Z - множина цілих чисел, Q - множина раціональних чисел, R - множина дійсних чисел; A, B, C - будь-які множини. Перевірити які твердження є вірними (в останній задачі у випадку невірного твердження достатньо навести контрприклад, якщо твердження вірне - навести доведення):

а) $\emptyset \in \{1, 2, 3\}$; **б)** $Z \subset R$;

в) $Q \cup Z = Q$; **г)** $R \setminus Z \subset R \setminus N$;

д) якщо $A \subset B$, то $A \cap C \subset B \cap C$.

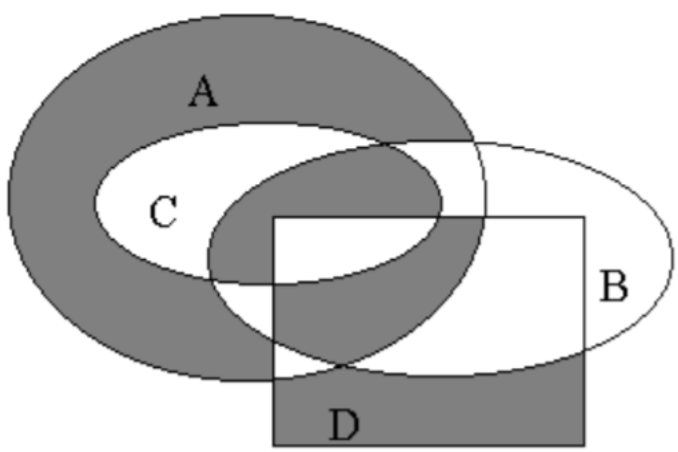
4. Логічним методом довести тотожність:

$$\overline{A \cup B} \cap A = \emptyset \, .$$

5. Зобразити на діаграмі Ейлера-Венна множину:

$$(B \cup C) \,\Delta\, A \setminus (B \cap C).$$

6. Множину зображено на діаграмі. Записати її за допомогою операцій.



7. Спростити вигляд множини, яка задана за допомогою операцій, застосовуючи закони алгебри множин (у відповідь множини можуть входити не більше одного разу):

$$(A \cap \bar{B}) \,\Delta\, (\bar{A} \cap B).$$

Варіант № 14

1. Для даних скінчених множин A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}, B = {4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}, C = {1, 3, 5, 7, 9} та універсума U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} знайти множину, яку задано за допомогою операцій:

а) $(\overline{B} \cap C) \cap \overline{A}$;

б) $\overline{(A \setminus C) \cup B}$.

2. На множинах задачі 1 побудувати булеан множини $B \setminus ((A \cup B) \setminus C)$. Знайти його потужність.

3. Нехай маємо множини: N - множина натуральних чисел, Z - множина цілих чисел, Q - множина раціональних чисел, R - множина дійсних чисел; A, B, C - будь-які множини. Перевірити які твердження є вірними (в останній задачі у випадку невірного твердження достатньо навести контрприклад, якщо твердження вірне - навести доведення):

а) $3 \subset \{1, 2, 3, 4\}$; **б)** $N \subset R$;

в) $R \subset Q \cap R$; **г)** $Z \setminus N \subset R \setminus Q$;

д) якщо $C \subset A \cup \overline{B}$, то $C \subset \overline{B}$.

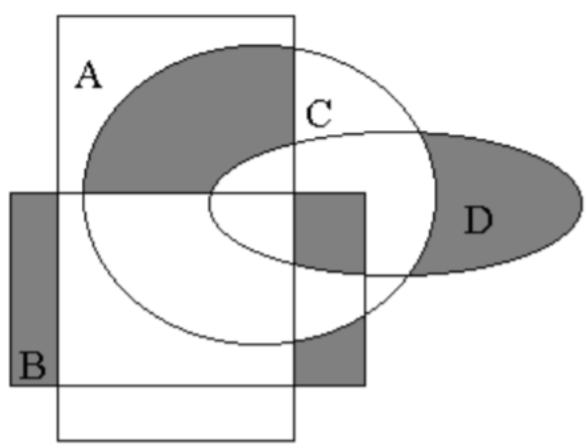
4. Логічним методом довести тотожність:

$$\overline{A \cap B} \cap A = A \setminus B .$$

5. Зобразити на діаграмі Ейлера-Венна множину:

$$(A \setminus B \setminus C) \cup (B \cap C)\ \Delta\ A .$$

6. Множину зображено на діаграмі. Записати її за допомогою операцій.



7. Спростити вигляд множини, яка задана за допомогою операцій, застосовуючи закони алгебри множин (у відповідь множини можуть входити не більше одного разу):

$$(A \cap B \cap C) \cup \overline{A} \cup \overline{B} .$$

Варіант № 15

1. Для даних скінчених множин A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}, B = {5, 6, 7, 8, 9, 10}, C = {1, 2, 3, 8, 9, 10} та універсума U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} знайти множину, яку задано за допомогою операцій:

а) $(A \cap \overline{B}) \cup C$;

б) $\bar{A} \, \Delta \, C$.

2. На множинах задачі 1 побудувати булеан множини $(A \setminus (\bar{C} \cap B)) \cap C$. Знайти його потужність.

3. Нехай маємо множини: N - множина натуральних чисел, Z - множина цілих чисел, Q - множина раціональних чисел, R - множина дійсних чисел; A, B, C - будь-які множини. Перевірити які твердження є вірними (в останній задачі у випадку невірного твердження достатньо навести контрприклад, якщо твердження вірне - навести доведення):

а) $\{1, 2, 3\} \subset \{2, 3, 4, 5\}$;

б) $Q \cup N \subset R$;

в) $Z \cap Q \subset Q \setminus N$;

г) $(R \setminus Q) \cap Z = \emptyset$;

д) якщо $B \subset \bar{A}$ і $A \subset C$, то $B \subset \bar{C}$.

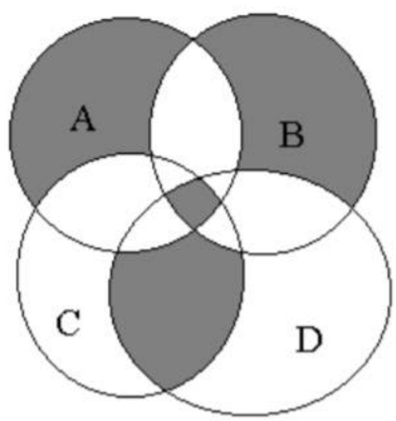
4. Логічним методом довести тотожність:

$$\overline{A \cap B \cap C} \cap C = C \setminus (A \cap B).$$

5. Зобразити на діаграмі Ейлера-Венна множину:

$$(A \cap C \cup B) \, \Delta \, (A \, \Delta \, B).$$

6. Множину зображено на діаграмі. Записати її за допомогою операцій.



7. Спростити вигляд множини, яка задана за допомогою операцій, застосовуючи закони алгебри множин (у відповідь множини можуть входити не більше одного разу):

$$(A \cap C \, \Delta \, B) \setminus B.$$

Варіант № 16

1. Для даних скінчених множин A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}, B = {4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}, C = {2, 4, 6, 8, 10} та універсума U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} знайти множину, яку задано за допомогою операцій:

а) $(C \setminus A) \cup (B \setminus A)$;

б) $(B \setminus \bar{C}) \cap A$.

2. На множинах задачі 1 побудувати булеан множини $\overline{B \Delta C} \setminus C$. Знайти його потужність.

3. Нехай маємо множини: N - множина натуральних чисел, Z - множина цілих чисел, Q - множина раціональних чисел, R - множина дійсних чисел; A, B, C - будь-які множини. Перевірити які твердження є вірними (в останній задачі у випадку невірного твердження достатньо навести контрприклад, якщо твердження вірне - навести доведення):

а) $4 \in \{1, 2, 3, \{4, 5\}\}$; **б)** $Q \in R$;

в) $Q \cap R = R$; **г)** $Z \cup Q \subset Q \setminus N$;

д) якщо $A \subset B$, то $A \setminus C \subset B \setminus C$.

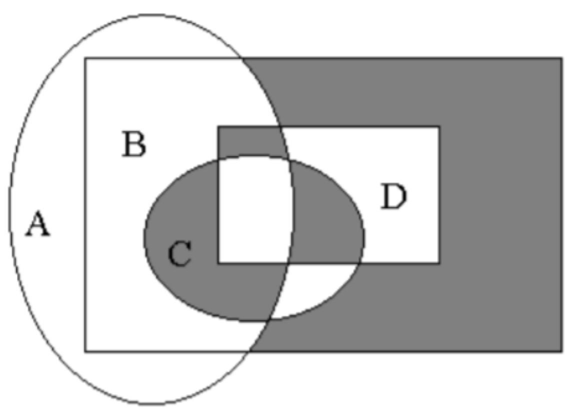
4. Логічним методом довести тотожність:

$$\overline{A \setminus B} \cap C = (C \setminus A) \cup (B \cap C).$$

5. Зобразити на діаграмі Ейлера-Венна множину:

$$(A \cap B \,\Delta\, C) \cup (B \setminus (A \setminus C)).$$

6. Множину зображено на діаграмі. Записати її за допомогою операцій.



7. Спростити вигляд множини, яка задана за допомогою операцій, застосовуючи закони алгебри множин (у відповідь множини можуть входити не більше одного разу):

$$(\bar{A} \,\Delta\, \bar{B}) \cup C \cup B.$$

Варіант № 17

1. Для даних скінчених множин A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}, B = {4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}, C = {1, 3, 5, 7, 9} та універсума U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} знайти множину, яку задано за допомогою операцій:

а) $(A \cup B) \setminus C$;

б) $\overline{C \cup A} \cap B$.

2. На множинах задачі 1 побудувати булеан множини $C \setminus \overline{(A \setminus C) \cup B}$. Знайти його потужність.

3. Нехай маємо множини: N - множина натуральних чисел, Z - множина цілих чисел, Q - множина раціональних чисел, R - множина дійсних чисел; A, B, C - будь-які множини. Перевірити які твердження є вірними (в останній задачі у випадку невірного твердження достатньо навести контрприклад, якщо твердження вірне - навести доведення):

а) $\{4, 5\} \subset \{1, 2, 3, \{4, 5\}\}$;

б) $Q \subset R \cap N$;

в) $N \cup Z \subset Q \setminus N$;

г) $R \cap Q \subset Q \cup Z$;

д) якщо $A \cap B \subset \bar{C}$, то $A \cap C = \emptyset$.

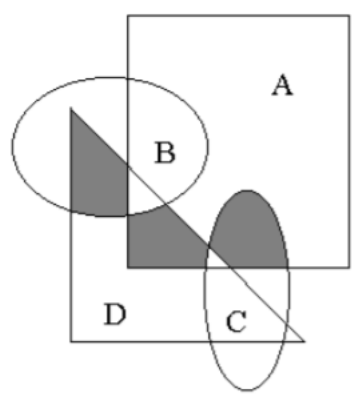
4. Логічним методом довести тотожність:

$$(A \cup B \setminus C) \cup (A \cap C) = A \cup (B \setminus C).$$

5. Зобразити на діаграмі Ейлера-Венна множину:

$$((B \cup A) \setminus C) \Delta A \cap B .$$

6. Множину зображено на діаграмі. Записати її за допомогою операцій.



7. Спростити вигляд множини, яка задана за допомогою операцій, застосовуючи закони алгебри множин (у відповідь множини можуть входити не більше одного разу):

$$\overline{\overline{A} \cup B} \cap \overline{C \cap B}.$$

Варіант № 18

1. Для даних скінчених множин A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}, B = {5, 6, 7, 8, 9, 10}, C = {1, 2, 3, 8, 9, 10} та універсума U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} знайти множину, яку задано за допомогою операцій:

а) A \ ($\bar{C}$ ∩ B);

б) (A Δ C) \ B .

2. На множинах задачі 1 побудувати булеан множини $\overline{(A \cap \bar{B}) \cup C}$. Знайти його потужність.

3. Нехай маємо множини: N - множина натуральних чисел, Z - множина цілих чисел, Q - множина раціональних чисел, R - множина дійсних чисел; A, B, C - будь-які множини. Перевірити які твердження є вірними (в останній задачі у випадку невірного твердження достатньо навести контрприклад, якщо твердження вірне - навести доведення):

а) 5 ∈ {1, 3, 5, 7}; **б)** N ∈ R ;

в) R \ Q ⊂ R \ N ; **г)** Q ⊂ R \ Z ;

д) якщо A ⊂ B, то $\bar{B} \subset \bar{A}$.

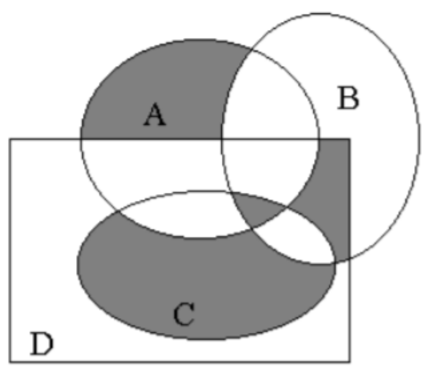
4. Логічним методом довести тотожність:

(A ∪ B (\) A ∪C) = B \ A \ C .

5. Зобразити на діаграмі Ейлера-Венна множину:

((B ∩C \) A Δ() B \ A).

6. Множину зображено на діаграмі. Записати її за допомогою операцій.



7. Спростити вигляд множини, яка задана за допомогою операцій, застосовуючи закони алгебри множин (у відповідь множини можуть входити не більше одного разу):

($\bar{A}$ Δ B) ∪ (B \ A).

Варіант № 19

1. Для даних скінчених множин A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}, B = {4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}, C = {2, 4, 6, 8, 10} та універсума U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} знайти множину, яку задано за допомогою операцій:

а) $\overline{A \cap C}$;

б) A ∩ (B ∩ $\bar{C}$).

2. На множинах задачі 1 побудувати булеан множини $\overline{(A \setminus C) \cup (B \setminus A)}$. Знайти його потужність.

3. Нехай маємо множини: N - множина натуральних чисел, Z - множина цілих чисел, Q - множина раціональних чисел, R - множина дійсних чисел; A, B, C - будь-які множини. Перевірити які твердження є вірними (в останній задачі у випадку невірного твердження достатньо навести конрприклад, якщо твердження вірне - навести доведення):

а) {∅} ⊂ {1, 2, 3}; **б)** Z ⊂ R ∪ N ;

в) R ∪ Z = Z ∩Q ; **г)** Q ⊂ R \ (N ∪ Z);

д) якщо A ⊂ B , то A ∪ C ⊂ B ∪ C .

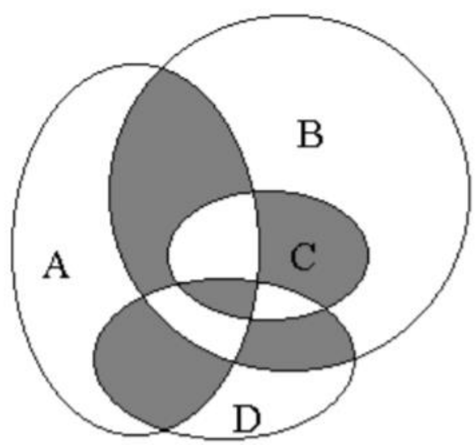
4. Логічним методом довести тотожність:

$$A \,\Delta\, (A \cap B) = A \setminus B.$$

5. Зобразити на діаграмі Ейлера-Венна множину:

$$((C \,\Delta\, A) \setminus B) \cup (A \cap C) \,\Delta\, B .$$

6. Множину зображено на діаграмі. Записати її за допомогою операцій.



7. Спростити вигляд множини, яка задана за допомогою операцій, застосовуючи закони алгебри множин (у відповідь множини можуть входити не більше одного разу):

$$(\overline{B} \setminus A) \cup \overline{C \cap A}.$$

Варіант № 20

1. Для даних скінчених множин A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}, B = {4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}, C = {1, 3, 5, 7, 9} та універсума U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} знайти множину, яку задано за допомогою операцій:

а) $A \setminus (B \setminus C)$;

б) $\bar{C} \Delta B$.

2. На множинах задачі 1 побудувати булеан множини $(A \cap (B \cup C)) \setminus C$. Знайти його потужність.

3. Нехай маємо множини: N - множина натуральних чисел, Z - множина цілих чисел, Q - множина раціональних чисел, R - множина дійсних чисел; A, B, C - будь-які множини. Перевірити які твердження є вірними (в останній задачі у випадку невірного твердження достатньо навести конрприклад, якщо твердження вірне - навести доведення):

а) $\{1, 3\} \subset \{1, 3, 5, 6, 7\}$; **б)** $Z \cup R = R$;

в) $R \setminus Q \subset Z$; **г)** $Q \setminus N \subset Q \setminus Z$;

д) якщо $A \cap B \subset C$, то $B \subset C \cup A$.

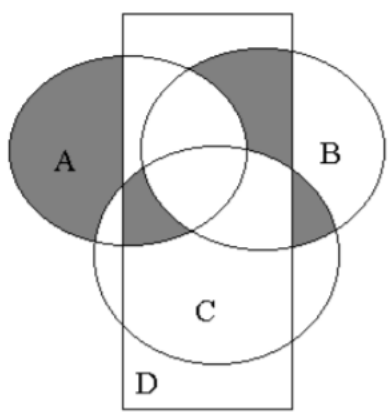
4. Логічним методом довести тотожність:

$$(A \Delta B) \cup (A \cap B) = A \cup B .$$

5. Зобразити на діаграмі Ейлера-Венна множину

$$(A \Delta B) \setminus (A \cap C) \Delta C .$$

6. Множину зображено на діаграмі. Записати її за допомогою операцій.



7. Спростити вигляд множини, яка задана за допомогою операцій, застосовуючи закони алгебри множин (у відповідь множини можуть входити не більше одного разу):

$$(A \cup \bar{B}) \cap (B \cup A \cap C).$$

Варіант № 21

1. Для даних скінчених множин A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}, B = {5, 6, 7, 8, 9, 10}, C = {1, 2, 3, 8, 9, 10} та універсума U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} знайти множину, яку задано за допомогою операцій:

а) $\overline{B}$ \ (C \ $\overline{A}$);

б) $\overline{B}$ Δ $\overline{C}$.

2. На множинах задачі 1 побудувати булеан множини ($\overline{C}$ Δ B) ∩ A . Знайти його потужність.

3. Нехай маємо множини: N - множина натуральних чисел, Z - множина цілих чисел, Q - множина раціональних чисел, R - множина дійсних чисел; A, B, C - будь-які множини. Перевірити які твердження є вірними (в останній задачі у випадку невірного твердження достатньо навести контрприклад, якщо твердження вірне - навести доведення):

а) {2, 4} ∈ {2, 4, 6, 8, {2, 4, 6}}; **б)** N ⊂ R ∩ Z ;

в) R \ Z ⊂ Q ; **г)** N ∪ Z ⊂ R \ Q ;

д) якщо A ⊂ B ∪C , то A ∩ B ⊂ C .

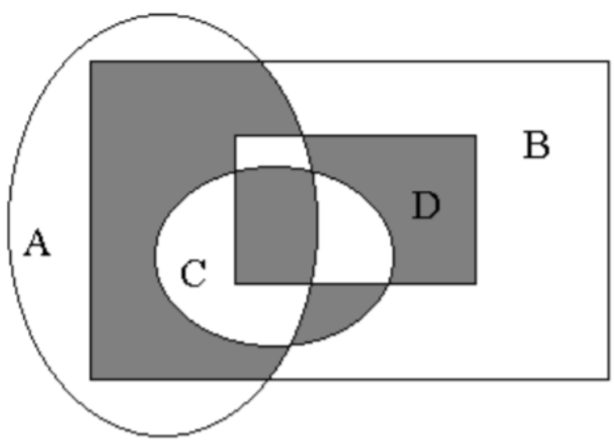
4. Логічним методом довести тотожність:

(A ∪ B) ∩ A = A.

5. Зобразити на діаграмі Ейлера-Венна множину:

C ∪ (A Δ (B \ C) \ (B ∩C) .

6. Множину зображено на діаграмі. Записати її за допомогою операцій.



7. Спростити вигляд множини, яка задана за допомогою операцій, застосовуючи закони алгебри множин (у відповідь множини можуть входити не більше одного разу):

(A ∩ B ∩C) ∪ ($\overline{B}$ ∩C) ∪ $\overline{C}$

Варіант № 22

1. Для даних скінчених множин A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}, B = {4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}, C = {2, 4, 6, 8, 10} та універсума U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} знайти множину, яку задано за допомогою операцій:

а) $(A \cup C) \cap B$;

б) $\overline{A \Delta C}$.

2. На множинах задачі 1 побудувати булеан множини $(A \Delta B) \cap C$. Знайти його потужність.

3. Нехай маємо множини: N - множина натуральних чисел, Z - множина цілих чисел, Q - множина раціональних чисел, R - множина дійсних чисел; A, B, C - будь-які множини. Перевірити які твердження є вірними (в останній задачі у випадку невірного твердження достатньо навести контрприклад, якщо твердження вірне - навести доведення):

а) $\emptyset \subset \{2, 4, 6, 8\}$;

б) $Z \in R$;

в) $N \cup R \subset N$;

г) $Z \subset R \setminus Q$;

д) якщо $A \subset B$ і $B \subset C$, то $A \subset C$.

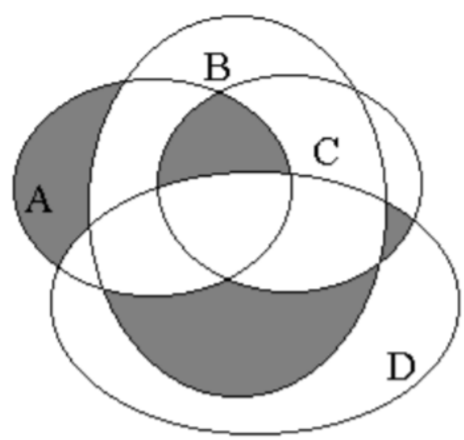
4. Логічним методом довести тотожність:

$$(A \cap B) \cup A = A.$$

5. Зобразити на діаграмі Ейлера-Венна множину:

$$((A \setminus B) \Delta (A \setminus C)) \cup (B \cap C).$$

6. Множину зображено на діаграмі. Записати її за допомогою операцій.



7. Спростити вигляд множини, яка задана за допомогою операцій, застосовуючи закони алгебри множин (у відповідь множини можуть входити не більше одного разу):

$$(\overline{A \cup B} \cup A \cup B) \cap C.$$

Варіант № 23

1. Для даних скінчених множин A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}, B = {4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}, C = {1, 3, 5, 7, 9} та універсума U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} знайти множину, яку задано за допомогою операцій:

а) $\bar{A}$ Δ C ;

б) (B ∩ $\bar{C}$) \ A.

2. На множинах задачі 1 побудувати булеан множини ((A ∪ C) \ B) ∩ C . Знайти його потужність.

3. Нехай маємо множини: N - множина натуральних чисел, Z - множина цілих чисел, Q - множина раціональних чисел, R - множина дійсних чисел; A, B, C - будь-які множини. Перевірити які твердження є вірними (в останній задачі у випадку невірного твердження достатньо навести контрприклад, якщо твердження вірне - навести доведення):

а) 2 ⊂ {2, 4, 6, 8}; **б)** Z \ Q ⊂ R ;

в) Q ∪ N ⊂ Z ; **г)** N ∪ Z ⊂ Q ∩ N ;

д) якщо A ⊂ $\overline{B \cup C}$ і B ⊂ $\overline{A \cup C}$, то B = ∅ .

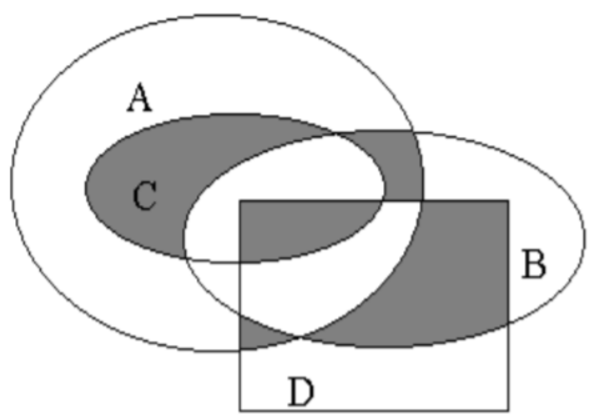
4. Логічним методом довести тотожність:

$$(A \cup B)\ \Delta\ (B \cup C) = (A\ \Delta\ C) \setminus B.$$

5. Зобразити на діаграмі Ейлера-Венна множину:

$$(B \cup (C\ \Delta\ (A \setminus B))) \setminus C.$$

6. Множину зображено на діаграмі. Записати її за допомогою операцій.



7. Спростити вигляд множини, яка задана за допомогою операцій, застосовуючи закони алгебри множин (у відповідь множини можуть входити не більше одного разу):

$$(A\ \Delta\ B) \cup (A \cap B \cap C) \cup A .$$

Варіант № 24

1. Для даних скінчених множин A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}, B = {5, 6, 7, 8, 9, 10}, C = {1, 2, 3, 8, 9, 10} та універсума U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} знайти множину, яку задано за допомогою операцій:

а) $\overline{A \cap B} \setminus C$;

б) (A \ B) Δ C .

2. На множинах задачі 1 побудувати булеан множини $((\overline{B} \setminus C) \cup B) \cap C$. Знайти його потужність.

3. Нехай маємо множини: N - множина натуральних чисел, Z - множина цілих чисел, Q - множина раціональних чисел, R - множина дійсних чисел; A, B, C - будь-які множини. Перевірити які твердження є вірними (в останній задачі у випадку невірного твердження достатньо навести контрприклад, якщо твердження вірне - навести доведення):

а) $\{4\} \subset \{2, 4, 6, 8\}$; **б)** $Z \cap R = R$;

в) $N \cup Q \subset R \cap Z$; **г)** $N \cap Q \subset Q \setminus Z$;

д) якщо $A \subset B \cup C$, то $A \cap \overline{B} \subset C$.

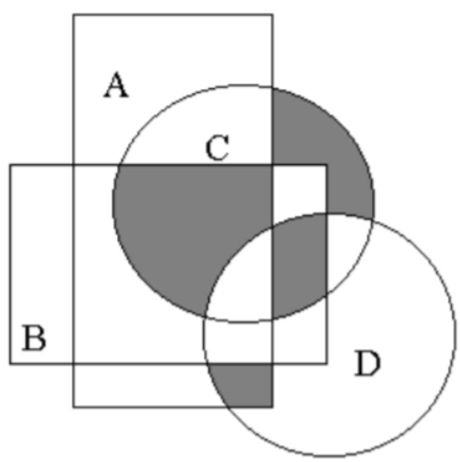
4. Логічним методом довести тотожність:

$$\overline{A \setminus C} \cup \overline{C \setminus B} = U .$$

5. Зобразити на діаграмі Ейлера-Венна множину:

$$(((A \cup C) \Delta B) \setminus A) \Delta B.$$

6. Множину зображено на діаграмі. Записати її за допомогою операцій.



7. Спростити вигляд множини, яка задана за допомогою операцій, застосовуючи закони алгебри множин (у відповідь множини можуть входити не більше одного разу):

$$(C \setminus (A \cap B)) \cup B.$$

Варіант № 25

1. Для даних скінчених множин A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}, B = {4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}, C = {2, 4, 6, 8, 10} та універсума U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} знайти множину, яку задано за допомогою операцій:

а) $\overline{(A \setminus B) \cup C}$;

б) (B \ $\bar{A}$) Δ C .

2. На множинах задачі 1 побудувати булеан множини ($\bar{B}$ Δ $\bar{C}$) ∩ A. Знайти його потужність.

3. Нехай маємо множини: N - множина натуральних чисел, Z - множина цілих чисел, Q - множина раціональних чисел, A, B, C - будь-які множини. Перевірити які твердження є вірними (в останній задачі у випадку невірного твердження достатньо навести контрприклад, якщо твердження вірне - навести доведення):

а) {1, 2, 4} ⊂ {2, 4, 6, 8};

б) Q ∩ N ⊂ N ;

в) N ∪ Z ⊂ Z ;

г) (Q \ Z) ∩ N = ∅ ;

д) якщо A ∩ B ⊂ C , то A ⊂ $\bar{B}$ ∪ C.

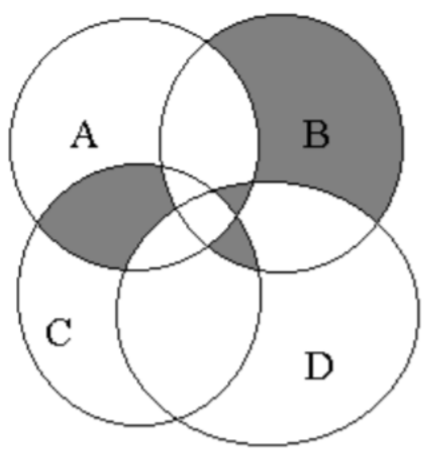
4. Логічним методом довести тотожність:

$$(A \setminus B)\ \Delta\ A = A \cap B .$$

5. Зобразити на діаграмі Ейлера-Венна множину

$$B \setminus (C\ \Delta\ A) \cap (C \setminus A).$$

6. Множину зображено на діаграмі. Записати її за допомогою операцій.



7. Спростити вигляд множини, яка задана за допомогою операцій, застосовуючи закони алгебри множин (у відповідь множини можуть входити не більше одного разу):

$$\overline{A \cup B \cup C} \cup (A \cap B \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap B \cap \bar{C}).$$

Варіант № 26

1. Для даних скінчених множин A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}, B = {4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}, C = {1, 3, 5, 7, 9} та універсума U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} знайти множину, яку задано за допомогою операцій:

а) $(\overline{A \cap B}) \setminus C$;

б) $(\bar{A} \cup \bar{B}\ ) \cap C$.

2. На множинах задачі 1 побудувати булеан множини $\overline{A \cap B \cup C}$. Знайти його потужність.

3. Нехай маємо множини: N - множина натуральних чисел, Z - множина цілих чисел, Q - множина раціональних чисел, R - множина дійсних чисел; A, B, C - будь-які множини. Перевірити які твердження є вірними (в останній задачі у випадку невірного твердження достатньо навести контрприклад, якщо твердження вірне - навести доведення):

а) $\{2\} \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$; **б)** $Z \cup R = Z$;

в) $Q \subset R \cup N$; **г)** $(Q \setminus R) \cup Z \subset Z$;

д) якщо $A \neq B$ і $B \neq C$, то $A \neq C$.

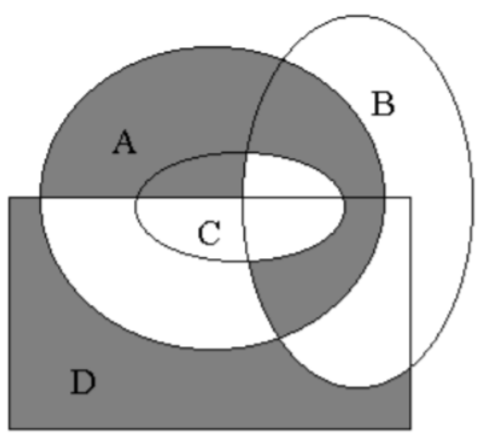
4. Логічним методом довести тотожність:

$$\overline{(A \cup B) \setminus C} = \overline{A \cup B \cup C} \cup C.$$

5. Зобразити на діаграмі Ейлера-Венна множину:

$$(B \cap (C \Delta A)) \setminus (C \cap B).$$

6. Множину зображено на діаграмі. Записати її за допомогою операцій.



7. Спростити вигляд множини, яка задана за допомогою операцій, застосовуючи закони алгебри множин (у відповідь множини можуть входити не більше одного разу):

$$((A \cap \bar{B}\ ) \Delta C) \cup A.$$

Варіант № 27

1. Для даних скінчених множин A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}, B = {4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}, C = {1, 2, 3, 8, 9, 10} та універсума U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} знайти множину, яку задано за допомогою операцій:

а) $(\bar{A} \cup \bar{C}) \cap B$;

б) $(A \Delta C)\Delta B$.

2. На множинах задачі 1 побудувати булеан множини $\overline{(A \cap C) \cup B}$. Знайти його потужність.

3. Нехай маємо множини: N - множина натуральних чисел, Z - множина цілих чисел, Q - множина раціональних чисел, R - множина дійсних чисел; A, B, C - будь-які множини. Перевірити які твердження є вірними (в останній задачі у випадку невірного твердження достатньо навести контрприклад, якщо твердження вірне - навести доведення):

а) $\emptyset = \{\emptyset\}$; **б)** $Z \in R$;

в) $Q \cap R \subset Z$; **г)** $(R \setminus Q) \cup Z \subset Z$;

д) якщо $A \cap B \subset C$ і $A \cup B \subset C$, то $A \cap C = \emptyset$.

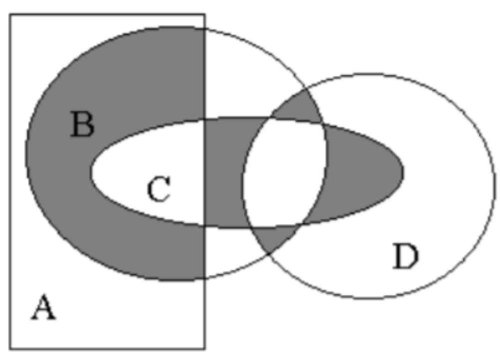
4. Логічним методом довести тотожність:

$$(A \cup \bar{B}) \cap (B \cup A) = A.$$

5. Зобразити на діаграмі Ейлера-Венна множину:

$$((A \cap B \cup C) \Delta B) \Delta A.$$

6. Множину зображено на діаграмі. Записати її за допомогою операцій.



7. Спростити вигляд множини, яка задана за допомогою операцій, застосовуючи закони алгебри множин (у відповідь множини можуть входити не більше одного разу):

$$((B \cup C) \Delta A) \cup (A \cap B) \cup (A \cap C) .$$

Варіант № 28

1. Для даних скінчених множин A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}, B = {4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}, C = {2, 4, 6, 8, 10} та універсума U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} знайти множину, яку задано за допомогою операцій:

а) $\overline{B} \cap \bar{C}$;

б) (B \ $\bar{A}$) ∪ C .

2. На множинах задачі 1 побудувати булеан множини $\overline{(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \cup \mathrm{C}}$. Знайти його потужність.

3. Нехай маємо множини: N - множина натуральних чисел, Z - множина цілих чисел, Q - множина раціональних чисел, R - множина дійсних чисел; A, B, C - будь-які множини. Перевірити які твердження є вірними (в останній задачі у випадку невірного твердження достатньо навести контрприклад, якщо твердження вірне - навести доведення):

а) {1, 2, 3} ⊂ {1, 2, 3, {1, 2, 3}}; **б)** N ∩ R = R ;

в) R ⊂ Z ∪ Q ; **г)** R ∩ N ⊂ Q \ Z ;

д) якщо A ⊂ B ∩ C , то A ⊂ B і A ⊂ C .

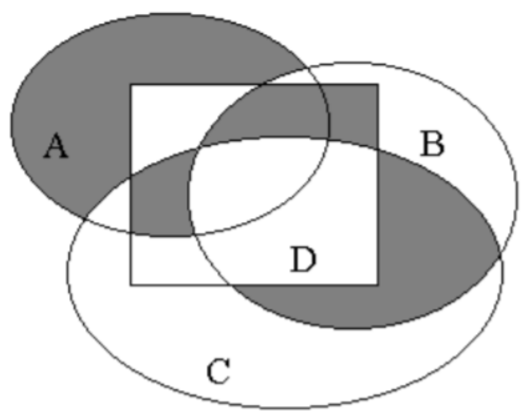
4. Логічним методом довести тотожність:

$$\overline{\mathrm{A} \cap \mathrm{B}} \cup \mathrm{A} = \mathrm{U} .$$

5. Зобразити на діаграмі Ейлера-Венна множину

$$((A \setminus B) \cup (B \setminus C))\ \Delta\ C .$$

6. Множину зображено на діаграмі. Записати її за допомогою операцій.



7. Спростити вигляд множини, яка задана за допомогою операцій, застосовуючи закони алгебри множин (у відповідь множини можуть входити не більше одного разу):

$$(A \cap B \cap X) \cup (A \cap B \cap C \cap X \cap Y) \cup (A \cap X \cap \overline{X}).$$

Варіант № 29

1. Для даних скінчених множин A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}, B = {4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}, C = {1, 3, 5, 7, 9} та універсума U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} знайти множину, яку задано за допомогою операцій:

а) $\overline{B}$ Δ C ;

б) A ∩ $\overline{\mathrm{B} \cup \mathrm{C}}$.

2. На множинах задачі 1 побудувати булеан множини ((A \ C) Δ B) ∩ A . Знайти його потужність.

3. Нехай маємо множини: N - множина натуральних чисел, Z - множина цілих чисел, Q - множина раціональних чисел, R - множина дійсних чисел; A, B, C - будь-які множини. Перевірити які твердження є вірними (в останній задачі у випадку невірного твердження достатньо навести контрприклад, якщо твердження вірне - навести доведення):

а) {2} ⊂ {1, 2, 3, 4, 5}; **б)** N ∈ Q ;

в) N ⊂ R ∩ N ; **г)** R \ N ⊂ Q \ Z ;

д) якщо A ⊂ C і B ⊂ C , то A ∪ B ⊂ C .

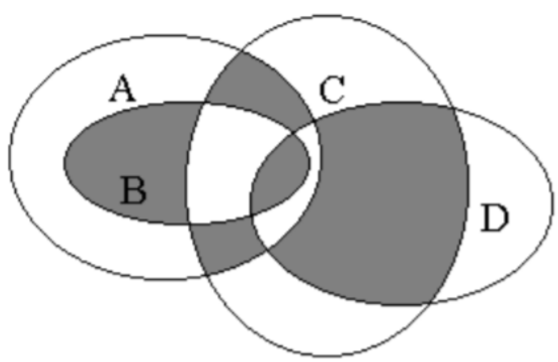
4. Логічним методом довести тотожність:

(A ∪ B) Δ C = (A ∪ B ∪C) \ (A ∩C) \ (B ∩ C).

5. Зобразити на діаграмі Ейлера-Венна множину

(A Δ B ∩C) Δ (B \ C).

6. Множину зображено на діаграмі. Записати її за допомогою операцій.



7. Спростити вигляд множини, яка задана за допомогою операцій, застосовуючи закони алгебри множин (у відповідь множини можуть входити не більше одного разу):

(A ∩ B ∩C) ∪ ($\bar{A}$ ∩ B ∩C) ∪ $\bar{B}$ ∪ $\bar{C}$.

Варіант № 30

1. Для даних скінчених множин A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}, B = {4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}, C = {1, 2, 3, 8, 9, 10} та універсума U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} знайти множину, яку задано за допомогою операцій:

а) $(C \setminus A) \cup (A \setminus B)$;

б) $\overline{A \Delta B}$.

2. На множинах задачі 1 побудувати булеан множини $\overline{\overline{B} \cup \overline{C}}$. Знайти його потужність.

3. Нехай маємо множини: N - множина натуральних чисел, Z - множина цілих чисел, Q - множина раціональних чисел, R - множина дійсних чисел; A, B, C - будь-які множини. Перевірити які твердження є вірними (в останній задачі у випадку невірного твердження достатньо навести контрприклад, якщо твердження вірне - навести доведення):

а) $\{1, 2, 3\} \in \{1, 2, 3, \{1, 2, 3\}\}$;

б) $Q \cup R \subset Z$;

в) $Q \cap N = N$;

г) $Q \setminus Z \subset R \setminus N$;

д) якщо $A \in B$ і $B \in C$, то $A \in C$.

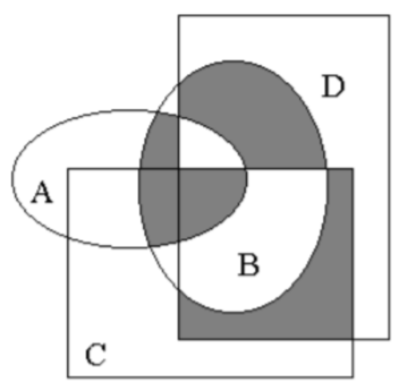
4. Логічним методом довести тотожність:

$$(A \cap B \cap C) \cup (A \setminus B \setminus C) = A \setminus (B \Delta C).$$

5. Зобразити на діаграмі Ейлера-Венна множину:

$$(((A \cap C) \setminus B) \cup B \cap A) \Delta C .$$

6. Множину зображено на діаграмі. Записати її за допомогою операцій.



7. Спростити вигляд множини, яка задана за допомогою операцій, застосовуючи закони алгебри множин (у відповідь множини можуть входити не більше одного разу):

$$(A \cap B \cap C \cap \overline{D}) \cup (\overline{A} \cap C) \cup (\overline{B} \cap C) \cup (C \cap D) .$$

Завдання №2. Написати програму, яка реалізує основні операції теорії множин, а саме, об'єднання, переріз, різницю, симетричну різницю над двома числовими множинами.

Програма може бути написана на будь-якій відомій студенту мові програмування. Робота вважається зарахованою, якщо програма протестована разом з викладачем та отриманий вірний результат під час аудиторних занять. Вимоги до оформлення роботи дивись у вступі.

РОЗДІЛ 2. ТЕОРІЯ ВІДНОШЕНЬ

Попередній розділ був присвячений множинам. Ми множини визначили, навчились з ними працювати. Але множина – це лише сукупність певних об'єктів, а нас цікавлять зв'язки між цими об'єктами. І ось ці зв'язки певним чином моделюються (формулюються) мовою так званих «відношень».

2.1. Сутність поняття "відношення на множинах"

m-арне відношення на множинах $A_1, A_2, \ldots, A_m$ – це просто певна підмножина $R \subseteq A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_m$ декартового добутку цих множин.

Відношення традиційно позначається літерою R. Чому? (**Relation**)

Яка підмножина? Будь-яка. Будь-яка підмножина є певним відношенням на цих об'єктах. Нагадую: декартовий добуток – це сукупність впорядкованих емів, де перший є з A_1, другий – з A_2, третій – з A_3 і т.д.

Відповідно m-арне відношення на множині A – це просто підмножина m-го декартового степеня: $R \subseteq A^m$.

2.2. Види відношень

Зауважимо, що будемо вживати: «відношення», «відношення», «відношення»,… – але потрібно пам'ятати що «відношення» не існує. Ми завжди повинні вказувати – скільки об'єктів пов'язує наше відношення за раз – арність, і на яких множинах це відношення визначене, бо інакше ми будемо говорити ні про що.

Звідки така «дивна» форма **m-арне**? З латини:

1) Найпростіші відношення – це **унарні відношення**, коли у вас $R \subseteq A$, $m = 1$; унарні відношення у нас просто виокремлюють певну ознаку, за якою ми класифікуємо наші об'єкти; скажімо в множині натуральних чисел можна виокремити підмножину простих чисел – це буде унарне відношення простоти; можна, скажімо, виокремити множину від'ємних чисел в множині цілих чисел – і це буде унарне відношення від'ємності (якщо це зробити над множиною цілих чисел – це буде одне відношення, якщо над множиною дійсних чисел – відношення від'ємності, але це зовсім інше відношення, тому що зовсім інший базис); в множині всіх квадратних рівнянь можна виокремити рівняння, які мають два різні розв'язки. Тобто довільна підмножина певним чином задає якусь ознаку. Цю ознаку можна трактувати як певне відношення.

2) Бінарні відношення: (коли ми пов'язуємо об'єкти з двох множин) $R \subseteq A \times B$, $m = 2$ – це найпоширеніший і найбільш досліджений випадок відношень. Ми бінарним відношенням присвятимо, мабуть, усе, що у нас залишилося з теорії.

Ви добре знаєте, що таке бінарне відношення. Ви неодноразово ними користувалися. Скажімо:

– це відношення $\leq$, $<$ (строго менше), або просто = на числах (*окремо на* N*, окремо на* Z*, окремо на* Q*, окремо на* R); *(«+», «-», «/», «*» – це операції, бо внаслідок їх застосування є* *результат; а відношення – або воно є, або його немає; до операцій над відношенням ми ще дійдемо… не сьогодні, але дійдемо);*

– це відношення $\subseteq$, $\subset$ включення (нестрогого, строгого) на множинах: ми обираємо певний універсум, розглядаємо всі його підмножини і в них визначаємо ось ці два відношення;

– відношення включення об’єкта в множину $\in$ – це теж відношення, але в якості множини B тут виступає множина множин, а в якості множини A – щось – множина якихось об’єктів, які ми трактуємо як елементи цих множин;

– відношення паралельності, відношення перпендикулярності окремо на множині прямих (тобто ви розглядаєте дві прямі – вони будуть паралельні чи перпендикулярні, чи не паралельні чи не перпендикулярні), маєте розглядати відношення між прямими і площинами, наприклад (у вас пряма і площина можуть бути паралельні, можуть бути перпендикулярні, можуть не бути ні те, ні інше).

Взагалі бінарних відношень тисячі. Вони нас оточують звідусіль. І ми їх будемо досліджувати.

3) Тернарні відношення: (відповідно, коли ми зв’язуємо три об’єкти) $\mathrm{R} \subseteq \mathrm{A} \times \mathrm{B} \times \mathrm{C}$, $m = 3$.

Класичний приклад: чи можна з 3 заданих відрізків побудувати трикутник? З певних можна, а з певних – не можна. І ось це відношення на множині відрізків.

Чи утворюють 3 вектори замкнутий контур?

Розглянемо множину навчальних дисциплін, множину груп і множину аудиторій. Тоді тернарне відношення: група – дисципліна – викладається в аудиторії (*група такато буде вивчати певну дисципліну в аудиторії такій то*). Як назвемо це тернарне відношення? … Розклад (штатний розклад). Але насправді, якщо ви подивитеся на наш розклад, то ви побачите, що це не тернарне відношення. Що ми ще забули? Є ще час, тобто на якій парі це буде, є ще викладач, тиждень, є ще маркер: це в нас лекція, практика, семінар, лабораторна робота, комп’ютерний практикум, факультатив, консультація… І ось це вас повинно навести на думку: яку IT-технологію побудували на основі відношень? Реляційні бази даних. Тобто реляційні бази даних містять інформацію у вигляді таблиць, що фактично є описом певного відношення певної арності; і ми можемо з цими таблицями щось робити: об’єднувати, перетинати, обирати з лівої колонки, за правою колонкою. Мова SQL дозволяє нам це робити. Але фундамент цієї математики – це ось – це відношення та їх властивості, які ми зараз будемо розглядати.

Які операції можна робити з відношенням?

По-перше, згідно з визначенням ($\mathrm{R} \subseteq \mathrm{A}_1 \times A_2 \times \ldots \times A_m$) m-арне відношення є підмножиною, тобто воно є множиною. Тому операції над множинами можна робити і з відношеннями.

Для двох відношень однакової арності на однакових множинах можна застосовувати $\cup$, $\cap$, \, Δ та доповнення, – і одержувати в результаті – відношення цієї ж арності на цих же множинах.

Зауважу: якщо у вас буде два відношення різної арності або на різних множинах, то ви теж можете застосовувати $\cup$, $\cap$ і все інше, але врезультаті ви не будете одержувати відношення. Ту множину, яку ви одержите в результаті такої операції – вона не буде підпадати під це визначення ($\mathrm{R} \subseteq \mathrm{A}_1 \times A_2 \times \ldots \times A_m$).

Якщо ж арність співпадає, множини співпадають, то в результаті одержите таке відношення.

Якщо у нас є операція доповнення, – нам потрібний універсум. Бо в нас є доповнення до універсуму. Що буде виступати універсамом? Дивіться визначення: ми розглядаємо підмножини декартового добутку. Тобто для відношень універсамом буде ця множина, з якої ми власне обираємо зв'язки. Вона має назву – і це буде **область визначення** або буде зручно – «**домен**». Ми будемо казати про відношення, які визначені на заданому домені.

Знову таки. Коли ми говоримо про функцію: функції є частковими випадками відношень, – то там домен і область визначення не вся множина, а це її частина.

Переходимо власне до вивчення бінарних відношень.

Бінарні відношення як частковий випадок відношень загального виду мають більше потрібних нам властивостей і більше засобів для обробки.

2.3. Способи представлення (подання) бінарних відношень

(З цього моменту при вживанні терміну "відношення", будемо вважати «бінарне відношення»)

Для бінарних відношень є 3 способи подання зручних в тому чи іншому випадку.

1) явний спосіб (коли ми просто перелічуємо всі пари, які належать цьому відношенню).

Скажімо, є у нас множина $\mathrm{A} = \{a, b, c, d\}$, є у вас множина $B = \{0,1,2\}$. І ми пишемо, що відношення $R = \{(a,0),(a,1),(b,2),(c,2)\}$. Можете написати інші пари, але вже буде інше бінарне відношення на цих множинах.

2) Другий спосіб – це так звана **«стрілкова діаграма»**.

Виглядає це приблизно так (якщо у нас елементи поєднані – ми малюємо стрілку) (рис. 2.3.1):

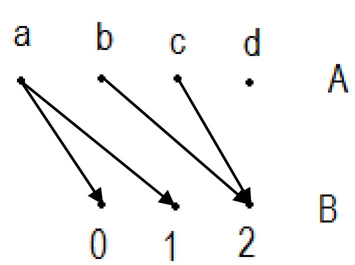


Рис. 2.3.1

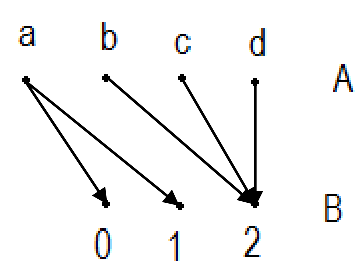


Рис. 2.3.2

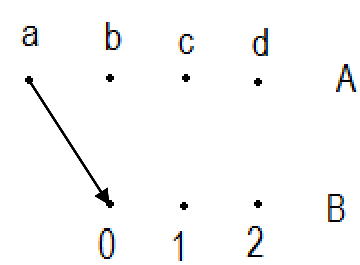


Рис. 2.3.3

Розглянемо ще таке відношення: $\mathrm{R}_2 = \{(a,0),(d,2)\}$. Як побудувати об’єднання і перетин відношень R і R_2? Рис. 2.3.2: об’єднання відношень; рис. 2.3.3: перетин відношень. Різницю та симетричну різницю спробуйте побудувати самостійно.

Це діаграма, яка відображає які елементи поєднані з якими. Традиційно малюється зверху вниз. Але це не обов’язково. Тобто тут не має якоїсь формалістики. Це просто зручний засіб, щоб ми самі бачили, що тут відбувається.

Порожня множина – це теж бінарне відношення: відношення, що не поєднує нічого і не з чим. Діаграма буде взагалі без стрілок.

Діаграми є зручними, коли ми будемо виконувати операції над множинами. Тобто: якщо у вас є два відношення і треба знайти їх об’єднання. Як буде виглядати об’єднання двох відношень? Ви просто малюєте всі стрілки на одній діаграмі.

Як буде виглядати діаграма перетину? Ви малюєте всі стрілки. Ті, які двічі наведені – ті залишаєте.

3) Матричне представлення.

	0	1	2
a	1	1	0
b	0	0	1
c	0	0	1
d	0	0	0

Ми можемо намалювати матрицю. Для цього відношення $R = \{(a,0),(a,1),(b,2),(c,2)\}$ на цих множинах – це буде матриця 4×3. В неї рядки будуть пронумеровані елементами множини $\mathrm{A} = \{a,b,c,d\}$, а стовпчики елементами множини $B = \{0,1,2\}$. Якщо у нас є упорядкована пара (наприклад, $(\mathrm{a},0)$ – елемент a поєднаний з елементом 0), то я намалюю в матриці 1 і т.д.

Буде ось така матриця.

Тобто я ставлю 1, якщо пара входить; ставлю 0, якщо пара не входить.

Власне, за другим доведенням теореми про булеан: там ми множину міняли на бітовий вектор – тут те ж саме, тільки тут не вектор, а матриця, бо у нас декартовий добуток (у нас дві множини, які ми поєднуємо разом).

Матричне представлення дуже зручне, бо дозволяє автоматично обчислювати майже все, що можна зробити з відношенням. Це представлення досить добре для комп’ютерів, для програмної реалізації.

Але ми до цього повернемося, коли будемо досліджувати графи. Там аналогічне представлення має місце. Там ми вже будемо знати, що з цим можна робити.

Для бінарних відношень існує дві спеціальні операції (вони існують лише для бінарних відношень).

2.4. Операції над бінарними відношеннями

1) Нехай у нас є бінарне відношення, задане на множинах A та B: $\mathrm{R} \subseteq \mathrm{A} \times \mathrm{B}$. Оберненим відношенням (inverse): $\mathrm{R}^{-1} \subseteq B \times A$ – це є відношення, задане на множинах B та A. І множина

$R^{-1} = \{(b,a) \mid (a,b) \in R\}$ – складається з таких пар (b,a), якщо пара (a,b) належить відношенню R.

Є відношення, скажімо, викладачі і дисципліни. Я можу викладати дискретну математику, математичний аналіз, пакети прикладних програм, спеціальні розділи тощо. А буває, що мене цікавлять яку дисципліну можуть викладати викладачі на кафедрі. І тут визначається, що дискретну математику можу викладати я, може ще дехто з викладачів кафедри.

Тобто в нас важливий порядок і відношення обернене цей порядок змінює – акценти по іншому розставляє.

Також для бінарних відношень є досить зручна мутація. Замість того, щоб писати ось так: $(\mathrm{a},\mathrm{b}) \in R$ можна писати aRb. Тому замість $R^{-1} = \{(b,a) \mid (a,b) \in R\}$ можна записати: $R^{-1} = \{(b,a) \mid \mathrm{aRb}\}$. Так ми будемо писати досить часто, бо перший раз ми писали 7 символів, а так – 3.

Як виглядає стрілкова діаграма для оберненого відношення? Беремо діаграму – перевертаємо догори ногами – і всі стрілки перегортаємо догори ногами. Все.

Як виглядає матриця для оберненого відношення? Транспонована матриця: берете головну діагональ – і перегортаєте. Якщо вона квадратна – вона залишиться квадратною, але все зміниться, якщо вона прямокутна: вона буде інший прямокутник. В нашому випадку з прямокутника 3×4 буде прямокутник 4×3.

2) Нехай у нас є два відношення: $\mathrm{R}_1 \subseteq \mathrm{A} \times \mathrm{B}$ (одне визначене на множинах А та В), $\mathrm{R}_2 \subseteq \mathrm{B} \times C$ (а друге визначене на множинах В та С). Тоді композицією (англ. composition) відношень R_1 та R_2 назвемо бінарне відношення $\mathrm{R}_3 = R_1 \circ R_2 \subseteq A \times C$ ($\circ$ – це спеціальний символ для композиції), яке буде визначене на множинах А та С ; визначається воно ось так: $\mathrm{R}_3 = R_1 \circ R_2 \{(a,c) \mid \exists b \in B : aR_1 b, bR_2 c\}$. Зауважимо, що при цьому ми можемо написати, що *a* є елементом множини А, тому, що за інших умов умова $\mathrm{aR}_1 b$ не виконається (так само, що с є елементом множини С).

Що нам дає композиція? Вона дозволяє будувати складні зв'язки між елементами.

Попереджаю, що в деяких джерелах (які більше математичний аналіз, ніж дискретна математика) часто потрібно читати $\mathrm{R}_3 = R_1 \circ R_2 \subseteq A \times C$ в інший бік: спочатку R_2, потім – R_1. В деяких спочатку R_1, потім – R_2. Пишемо так, щоб це було семантично зрозуміло: у нас *a* спочатку йде з *b*, потім йде з *c*.

Є, скажімо, композиція функцій – коли ми результат однієї функції підставляємо в іншу. І там є різні читання, в якому порядку виконувати ось ці функції.

Як будувати композицію за стрілковою діаграмою? Потрібно намалювати дві стрілкові діаграми, зістикувати їх і подивитися, що вийде.

Приклад

Беремо множину $\mathrm{A}=\{a,b,c,d\}$, множину $B=\{0,1,2\}$, множину $C=\{$ 🙂, 😟, 😕, 😆 $\}$. Відношення R_1 таке саме, яке в нас було – це $R_1=\{(a,0),(a,1),(b,2),(c,2)\}$. Відношення R_2 визначаємо на множинах B та C, скажімо: $\mathrm{R}_2=\{(0,$🙂$),(1,$😆$),(1,$😕$)\}$.

Малюємо дві діаграми (рис. 2.4.1). Далі я беру кожен елемент з множини A – і дивлюся до яких елементів з множини C я можу досягти, «мандруючи» ось цими стрілками. І бачу, що відношення R_3 буде склад🙂ися 😕 яки😆пар? $\mathrm{R}_3=\{(\mathrm{a},\ ),(a,\ ),(a,\ )\}$ – це є результат композиції відношення R_1 та R_2.

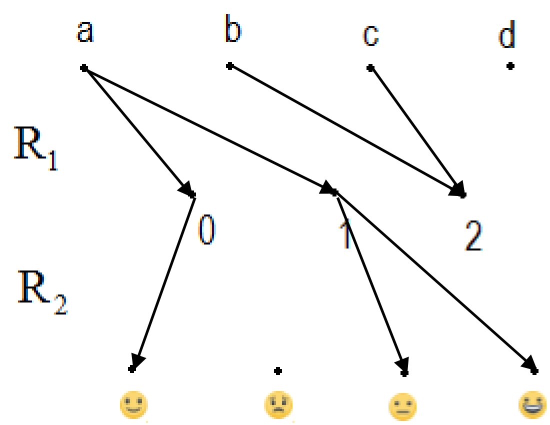


Рис. 2.4.1

Якщо будувати композицію не діаграмою, а згідно визначення, тобто згідно цієї умови: $\mathrm{R}_3=R_1\circ R_2\{(a,c)\,|\,\exists b\in B: aR_1b, bR_2c\}$, – то що нам потрібно зробити? Ми беремо кожну пару з першого відношення, дивимося, який тут останній елемент, шукаємо його на першому місці в парах другого відношення – і з’єднуємо краї. Але це ви повинні раз проглянути, два проглянути, три проглянути…

Проте композицію $\mathrm{R}_2\circ R_1$ ви побудувати не зможете, бо цього взагалі не існує! Чому? Відношення R_2 визначене на множинах B та **C**, відношення R_1 визначене на множинах **A** та B. Щоб композицію можна було побудувати ці дві множини повинні співпадати. А в такому порядку вони не співпадають. Тому цього: $\mathrm{R}_2\circ R_1$ – не існує взагалі.

А якщо, наприклад, у нас є два відношення, задані на одній множині: $\mathrm{R}_1\subseteq A^2$, $\mathrm{R}_{21}\subseteq A^2$, – то ми, звісно, можемо побудувати композицію відношення $R_1\circ R_2$ (бо у нас там усюди множина A і, звісно, що вона усюди співпадає сама із собою), ви можете побудувати і інше відношення $R_2\circ R_1$. Але ці два відношення будуть різними: $R_1\circ R_2\neq R_2\circ R_1$. Довільний контр-приклад намалюйте самостійно. Берете два відношення і будуєте композицію в один бік і композицію в інший бік. Побачите, що одержите два різних результати.

Доречі, якщо у нас є бінарне відношення $\mathrm{R}\subseteq \mathrm{A}^2$, яке задане на одній множині, то його степенем ми називаємо n-кратну композицію цього відношення самого із собою:

$R^n = \underbrace{R \circ R \circ \ldots \circ R}_{n}$. І знову таки: не потрібно плутати це із декартовим степенем. Тобто, якщо у вас є декартовий степінь множини, то це буде певна сукупність впорядкованих елементів; якщо у вас є степінь бінарного відношення, то це буде n-кратна композиція… що одержимо в результаті? …– бінарне відношення на цій самій множині.

2.5. Властивості бінарних відношень на одній множині

Зараз сформулюємо 11 властивостей, які можуть мати бінарні відношення, заданих на одній множині (А): $\mathrm{R} \subseteq \mathrm{A}^2$. *І ви повинні ці всі слова знати і знати, що вони означають. Усі властивості згруповано в 4 блоки (усі властивості в кожному з блоків певним чином пов'язані між собою).*

Блок 1: 3 властивості

1) Рефлексивність

бінарне відношення R, визначене на множині A, називається рефлексивним, якщо для довільного елемента множини A він знаходиться у відношенні сам із собою: $\forall a \in A\ a\mathrm{R}\mathrm{a}$.

Наприклад

Візьмемо множину цілих чисел Z і операцію $\leq$: чи вірно, що кожен $x \leq x$? Так. То це рефлексивне відношення, бо це виконується для довільного елемента з цієї множини.

Іррефлексивність

Бінарне відношення називається іррефлексивним, якщо для довільного елемента а з цієї множини елемент а не знаходиться у відношенні сам із собою: $\forall a \in A\ a\overline{\mathrm{R}}\mathrm{a}$. (що таке $\overline{\mathrm{R}}$? Доповнення. Тобто всі ті а, які не входять у ваші оригінальні пари).

Приклад

Z, < – за певною аналогією. Відношення строго < на множині цілих чисел є іррефлексивним, тому, що для кожного елементу *x* ви не можете сказати, що він строго < сам за себе. *Так?*

Нерефлексивність

Зазвичай в книжках з дискретної математики не виокремлюють цю властивість, тому, що зрозуміло: нерефлексивність – це коли не виконується рефлективність. *Так?* Але я зараз спеціально буду писати цю властивість, щоб ви бачили, що таке «не виконується».

Тобто у нас є умова: $\forall a \in A\ a\mathrm{R}\mathrm{a}$, – нам потрібно порушити цю умову: що існує певний елемент а, для якого ця умова не виконується: $\exists a \in A\ a\overline{\mathrm{R}}\mathrm{a}$, – тобто існує такий елемент, який не вступає у відношення сам із собою. *Бачите різницю між цим ($\exists a \in A\ a\overline{\mathrm{R}}\mathrm{a}$ – тут існує хоча б один; тобто всі інші можуть вступати самі із собою у зв'язки, але один є такий… «паразит», що не вступає) і попереднім визначенням ($\forall a \in A\ a\overline{\mathrm{R}}\mathrm{a}$ – тут для будь-якого елементу)?*

Приклад

R, $y = x^2$. Чи буде це відношення рефлексивним? Ні, бо $2^2 \neq 2$.

Чи буде це відношення іррефлексивним? Ні, тому, що $1^2 = 1$.

Отже, це просто не рефлексивне відношення.

Звісно, що умова іррефлексивності більш строга, ніж рефлективності. І коли вас будуть просити класифікувати відношення і воно є іррефлексивним, то ви повинні писати, що воно є іррефлексивним, а не обмежуватися тим, що воно нерефлексивне.

Блок 2: 4 властивості

2) Симетричність

Бінарне відношення на множині А називається симетричним, якщо для двох довільних елементів з множини А: $\forall a, b \in A$ – виконується наступна умова: якщо елемент *a* знаходиться у відношенні з елементом *b*, то елемент *b* знаходиться у відношенні з елементом *a*:

$$aRb \Rightarrow bRa.$$

Приклад

Множина Z і відношення рівності (=) на ній: якщо $x = y$, то $y = x$.

Але зауважте: в рефлективності умова формулювалася як певне твердження (тобто умова, яку потрібно перевірити і все), тут умова формулюється як логічний наслідок (тобто якщо виконується умова aRb (елемент а знаходиться у відношенні до b), то обов'язково повинна виконуватися умова bRa). А якщо елемент *a* не знаходиться у відношенні з елементом *b* – ми взагалі не розглядаємо такі елементи. *Це знову ж таки різниця між твердженнями і логічними наслідками, які ви повинні розуміти. Чому? Тому, що потім, коли ми будемо порушувати цю умову – ви повинні розуміти, як її порушувати*.

Антисеметричність

Це найскладніша для розуміння властивість. Зараз сформулюю її формально, а потім поясню що це означає.

Отже, відношення називається антисиметричним, якщо для $\forall a, b \in A$ виконується наступна умова: якщо $aRb, bRa \Rightarrow a = b$.

Приклад

Візьмемо систему підмножин (2^B) і відношення включення ($\subseteq$). Тоді, якщо *a* є включенням по *b*, а *b* є включенням по *a*, то згідно визначення рівності множин множини А та В співпадають. Отже, відношення включення не є симетричним, – воно є антисиметричним.

Асиметричність

Відношення R називається асиметричним, якщо виконується така умова: $\forall a, b \in A$ якщо $aRb \Rightarrow b\overline{R}a$.

Приклад

Відношення строгого включення: 2^{B}, $\subset$ – є асиметричним, бо якщо множина A є строго включеною в множину B, то навпаки неможливо ніколи.

І ось тут різниця між антисеметричністю і асиметричністю: «симетрично» – зрозуміло: у вас однакове, що в один бік, що в інший; «антисеметричність» і «асиметричність» забороняють симетрію, тобто, якщо у вас є в один бік, то в інший нічого не має бути; але при цьому «асиметричність» забороняє взагалі будь-яку симетрію, а антисеметричність – вона дозволяє одну єдину симетрію – «однаковість».

Тобто асиметричні відношення за визначенням є іррефлексивним, бо якщо замість aRb підставити $a = b$, тобто: $\forall a, a \in A$ якщо aRa *повинновипливати* $a\overline{R}a$ – це не можливо, тому жодної такої пари у R не має. Тому асиметричні відношення є іррефлексивними одразу. А антисиметричні – не є іррефлексивним: можуть бути, а можуть не бути.

Несиметричність

Несиметричність – це просто порушення умови симетричності. *Як ми будуємо порушення логічного наслідку? Ви повинні навести контр-приклад.* Тобто існує певна пара елементів $\exists a, b \in A$, що з того, що виконується ліва частина логічного наслідку: aRb випливає заперечення цього: $aRb \Rightarrow b\overline{R}a$.

Отже, відношення може бути або симетричним, або несиметричним. Якщо воно не симетричне, то, зокрема, воно може бути антисиметричне, або ще більш строга умова – може бути асиметричне. Тобто у вас несиметричність $\rightarrow$ антисиметричність $\rightarrow$асиметричність – за порядком збільшення строгості формулювань.

Блок 3: 2 властивості

3) Транзитивність

Ми кажемо, що бінарне відношення є транзитивним, якщо для довільних трьох елементів: $\forall a, b, c \in A$ якщо aRb і bRc, то aRc: $aRb,\ bRc \Rightarrow aRc$.

Приклад

З нетривіальних прикладів: L – множина усіх прямих; розглянемо відношення паралельності: якщо пряма *a* паралельна прямій *b*, а пряма *b* паралельна прямій *c*, то прямі *a* і *c* паралельні. *Сама назва «транзитивність» вказує, що ви певну властивість «протягуєте певним шляхом».*

Чи є порожнє відношення транзитивним? Порожнє відношення – це відношення, що не містить жодної пари. Порушується умова: aRb, bRc, – адже мені потрібно обрати дві пари та ще й з однаковими кінцями, – в порожньому відношенні таких пар немає, тому ми не можемо порушити умову aRc, тому порожнє відношення транзитивне. *Я це знову проговорюю, тому що інтуїтивно це здається «нісенітницею», але це випливає з формального означення, тому це потрібно враховувати.*

Нетранзитивність

І відповідно відношення є нетранзитивним, якщо у вас існує трійка елементів *a, b, c,* які порушують умову транзитивності, тобто $\exists \mathrm{a,b,c} \in \mathrm{A}: aRb, bRc \Rightarrow a\overline{R}c$.

Приклад

Знову очевидний, здається: множина прямих і відношення перпендикулярності: L, $\perp$. Тобто, якщо пряма *a* перпендикулярна прямій *b*, а пряма *b* перпендикулярна прямій *c*, то на площині прямі *a* і *c* не можуть бути перпендикулярними.

Блок 4: 2 властивості

4) Зв'язність

Відношення R називається зв'язним (totality), якщо для двох довільних елементів *a* та *b:* $\forall \mathrm{a,b} \in \mathrm{A}$ у вас або aRb, або bRa.

Що одразу випливає із властивості зв'язності? Тобто зв'язні відношення поєднують всі елементи нашої множини тим чи іншим способом. Так? Що буде, якщо підставити $\mathrm{b} = \mathrm{a}$? Це ж два довільних елемента? Так. Тоді або a знаходиться у відношенні з a, або a знаходиться у відношенні з a. І це повинні бути якісь елементи. Тобто, якщо відношення зв'язне, то воно автоматично рефлексивне – кожен елемент повинен входити у відношення сам із собою.

Іноді це погано. Іноді нам не треба розглядати однаковість, тому є ще поняття «слабка зв'язність».

Слабка зв'язність (connexity)

Кажемо, що відношення є слабко зв'язним, якщо для $\forall \mathrm{a,b} \in \mathrm{A}$ з того, що $\mathrm{a} \neq \mathrm{b}$ випливає, що або aRb, або bRa.

Відмінність в тому, що зв'язність вимагає рефлективності, а слабка зв'язність взагалі не розглядає зв'язок елементів самих із собою.

<u>Приклади</u>

Якщо на множині R-чисел у нас відношення $\leq$, то воно є зв'язним відношенням. Бо про довільні два числа можна сказати, що одне є менше, або рівне за інше.

А якщо взяти відношення строго <, то це буде слабко зв'язане відношення, тому що про довільні два різних числа ви можете сказати, що одне є строго меншим за інше, а про два однакових числа ви не можете сказати нічого… а і не треба. Так?

А якщо ви візьмете систему підмножин 2^{B} і відношення включення $\subseteq$, то воно не буде зв'язне, тому що я можу навести приклади двох підмножин, жодне з яких не буде включатися в іншу. Наприклад, $\{1\}$ і $\{2\}$ – два різні елементи і ці підмножини не зв'язані між собою. То це відношення не є зв'язним.

2.6. Перевірка властивостей бінарних відношень

Сформулюємо 3 леми про те, як перевіряти ці блоки властивостей.

Лема 1. Назвемо діагоналлю множини А – множину всіх пар виду (a,a), де а пробігає всі елементи множини А: (діагональ множини A позначається: i_A або (в деяких джерелах) Δ_A)
$i_A = \Delta_A = \{(a,a) \mid \forall \mathrm{a} \in \mathrm{A}\}$.

Яке відношення описує діагональ? Діагональ описує відношення тотожності – співпадання двох об'єктів даної множини. Чому називається «діагональ»? Як виглядає матриця цього відношення? На діагоналі будуть одинички, а всі інші елементи – нулі (рис. 2.6.1).

Малюєте ви матрицю цього відношення. Це множина упорядкованих пар, тобто підмножина декартового добутку, значить це є відношення. Яке це відношення? В цьому відношенні діагональ буде одиничною, а всі інші елементи – нулями.

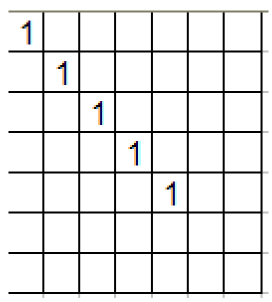


Рис. 2.6.1.

Так от, **бінарне відношення R на множині A (** $\mathrm{R} \subseteq \mathrm{A}^2$ **) є <u>рефлексивним</u> тоді та тільки тоді, коли діагональ є його підмножиною:** $i_A \subseteq R$ **.**

Бінарне відношення $\mathrm{R} \subseteq \mathrm{A}^2$ є іррефлексивним, тоді і тільки тоді, коли $\mathrm{i}_\mathrm{A} \cap R = \varnothing$.

Лема 2. **Бінарне відношення на множині A є <u>симетричним</u> тоді і тільки тоді, коли воно співпадає із власним оберненим відношенням**: $\mathrm{R} \subseteq \mathrm{A}^2$ – симетричне $\Leftrightarrow \mathrm{R} = \mathrm{R}^{-1}$.

Це знов-таки повинно бути інтуїтивно зрозуміло: ми поміняли усі пари місцями – і одержали те, що було. Чому? Тому, що воно симетричне.

Бінарне відношення $\mathrm{R} \subseteq \mathrm{A}^2$ **– <u>антисиметричне</u>** $\Leftrightarrow$ $\mathrm{i}_\mathrm{A} \cap R \subseteq \mathrm{i}_\mathrm{A}$ (коли у нього та оберненого відношення спільні елементи – лише пари виду (a,a)).

Бінарне відношення $\mathrm{R} \subseteq \mathrm{A}^2$ **– <u>асиметричним</u>**, коли в нього взагалі немає спільних елементів із своїм оберненим відношенням: $\mathrm{R} \cap R^{-1} = \varnothing$.

Обернене відношення відповідає за симетрію. Леми, які формулюються, повинні вам вказувати алгебраїчний шлях визначення властивостей відношень.

Скажімо, коли ви будете це програмувати, – в матричному представленні всі ці умови перевіряються дуже швидко.

Лема 3. **Бінарне відношення** $\mathrm{R} \subseteq \mathrm{A}^2$ **на множині А є <u>транзитивним</u>** тоді і тільки тоді, коли його степінь (квадрат, власне) є підмножиною вихідного відношення: $\mathrm{R}^2 \subseteq R$.

Тут ми сформулювали 6 тверджень, але це логічна еквівалентність – насправді тверджень тут 12 (справа наліво, зліва направо).

Зараз розглянемо 2 досить важливі приклади.

Приклади

1) візьмемо множину цілих чисел Z і визначимо на ній відношення порівнянності за модулем, яке я позначу ось так: $\langle \mathrm{Z}, \equiv_n \rangle$ ($\langle \ \rangle$ – алгебраїчна система; тобто є множина Z і на ній визначено відношення порівнянності за модулем). Тобто $(x \equiv_n y) \Leftrightarrow (x \equiv y (\mathrm{mod}\, n)) \Leftrightarrow ((\mathrm{x} - \mathrm{y}) \vdots n)$ (*другий вираз – більш канонічний*).

Тобто які елементи – які цілі числа поєднуються цим відношенням? Якщо вони при діленні на *n* дають однакову остачу. Так?

Пам'ятаєте, ми минулого разу розглядали розбиття цілих чисел на клас чисел, які поділяються на 3, які поділяються і дають остачу 1, які поділяються і дають остачу 2. Так ось це відношення – всі числа в першому класі поєднує між собою, всі числа в другому класі поєднує між собою і всі числа в третьому класі поєднує між собою. Тому, що, якщо вас *x* та *y* дають однакову остачу, то їх різниця поділяється на n. А, якщо різну, – то не поділяється. Так?

Що ви можете сказати про це відношення? Чи є воно <u>рефлексивним</u>? Треба перевірити.

Тобто треба перевірити умову, що x завжди знаходиться у відношенні сам із собою: $\mathrm{x} \equiv_{\mathrm{n}} x \Leftrightarrow (x - x) \vdots n \Leftrightarrow 0 \vdots n$ (це рівносильно тому, що $(x - x)$ повинно ділитись на *n*, але $(x - x) = 0$, а 0 ділиться на будь-яке число, зокрема на *n*). Тобто це є істинне твердження. Тому наше відношення є рефлексивним. Згодні?

Чи є наше відношення <u>симетричним</u>? Знову: беремо означення симетричності. З того, що $\mathrm{x} \equiv_{\mathrm{n}} y \Rightarrow \mathrm{y} \equiv_{\mathrm{n}} x$ () для довільних елементів x та y. Дивимося: якщо $\mathrm{x} \equiv_{\mathrm{n}} y \Rightarrow (x - y) \vdots n \Rightarrow (x - y) = k \cdot n, k \in \mathrm{Z} \Rightarrow (y - x) = -k \cdot n \Rightarrow (y - x) \vdots n \Rightarrow \mathrm{y} \equiv_{\mathrm{n}} x$.

Тобто ми використовуємо в цьому доведенні: означення симетричності і умову $((\mathrm{x} - \mathrm{y}) \vdots n)$.

Чи є наше відношення <u>транзитивним</u>?

За умовою: якщо $x \equiv_n y, y \equiv_n z \Rightarrow x \equiv_n z$. Давайте перевіримо чи виконується ця умова. $x \equiv_n y, y \equiv_n z \Rightarrow \begin{cases} x-y=kn \\ y-z=tn \end{cases}, k,t \in Z \Rightarrow (x-z)=(x-y)+(y-z)=(k+t)\cdot n, k,t,(k+t) \in Z \Rightarrow$

$\Rightarrow (k+t)n \vdots n$, тому умова транзитивності виконується.

Так ось, такі бінарні відношення, які є рефлексивними, симетричними і транзитивними називаються **відношеннями еквівалентності**. І вони визначають нетривіальні рівності між елементами нашої множини. Тобто бачите, що у вас за модулем 5, 1 і 6 – це два різних числа, але вони є однаковими, тому що дають однакову остачу. Нам це важливо.

2) Візьмемо множину натуральних чисел: $\langle N, \vdots \rangle$ – воно очевидно не є зв'язним. Чому?

Подільність, тобто ми кажемо, що x поділяється на y тоді і тільки тоді, коли існує певне натуральне число k, що $x = ky$: $(x,y) \Leftrightarrow (\exists k \in N \ x = ky)$.

Чи є це відношення рефлексивним?

Звісно, x завжди поділяється сам на себе. Тобто $x = 1 \cdot x \Rightarrow x \vdots x$.

Але воно не є симетричним. Адже, якщо $x \vdots y$, то не факт, що $y \vdots x$.

Але воно є антисиметричним. Зараз ми це доведемо. Нехай у вас $x \vdots y, y \vdots x$, тоді згідно нашого визначення: $\exists k_1, k_2 \in N \ \begin{cases} x = k_1 y \\ y = k_2 x \end{cases} \Rightarrow$. Згодні? Тоді, якщо я підставлю другу рівність у першу, я одержу: $\Rightarrow 1 = k_1 \cdot k_2 \Rightarrow$. Згодні? Які можуть бути натуральні числа k_1 і k_2, щоб їх добуток дорівнював 1? Перша одиниця і друга одиниця. В множині натуральних чисел більше розв'язків не має: $\Rightarrow \begin{cases} k_1 = 1, \\ k_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow x = y$. Тобто, якщо виконуються ось ці дві умови: $x \vdots y, y \vdots x$, – то обов'язково $x = y$. Так?

Транзитивність сформулюйте і доведіть самостійно. Воно є транзитивним.

Бінарні відношення, що мають такі три властивості: рефлексивні, антисиметричні і транзитивні, – це **відношення часткового порядку**. Це відношення, які дозволяють в нашій множині певним чином впорядкувати елементи за важливістю. Але частково, тому що не кожні два елементи можна буде порівняти. Скажімо, 2 і 3 не будуть порівняними за цим відношенням, бо ні 2 на 3 не ділиться, ні 3 на 2 не ділиться.

Лабораторна робота № 2. Побудова матриці бінарного відношення

Теоретичні відомості та приклади розв'язування задач

Декартовий добуток множин A і B (позначається $A \times B$) – це множина всіх упорядкованих пар елементів (a, b), де $a \in A$, $b \in B$. При цьому вважається, що, (a_1, b_1)= (b_1, a_1), тоді і тільки тоді, коли $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$. Потужність декартового добутку дорівнює $|\mathrm{A} \times \mathrm{B}| = |\mathrm{A}| \cdot |\mathrm{B}|$.

Приклад. Довести тотожність $(A \times B) \cap (\mathrm{C} \times \mathrm{D})$=(A∩C) $\times$ $(B \cap \mathrm{D})$.

Розв'язання. Нехай $(x, y) \in (A \times B) \cap (\mathrm{C} \times \mathrm{D}) \Leftrightarrow (x, y) \in (A \times B) \,\&\, (x, y) \in (\mathrm{C} \times \mathrm{D}) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x \in A \,\&\, y \in B) \& (x \in \mathrm{C} \,\&\, y \in \mathrm{D}) \Leftrightarrow x \in A \,\&\, y \in B \,\&\, x \in \mathrm{C} \,\&\, y \in \mathrm{D} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x \in A \,\&\, x \in \mathrm{C}) \,\&\, (y \in B \;\,\&\, y \in \mathrm{D}) \Leftrightarrow x \in (A \cap \mathrm{C}) \,\&\, y \in (B \cap \mathrm{D}) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x, y) \in (A \cap \mathrm{C}) \times (B \cap \mathrm{D})$

Бінарним відношенням R називається підмножина декартова добутку A×B (тобто R⊂A×B). Якщо пара (a, b) належить відношенню R, то пишуть (a, b)∈R чи aRb.

Областю визначення бінарного відношення R ⊂ X × Y називається множина $\delta_R = \{x | \exists\, y\ (x, y) \in R\}$,), а *областю значень* – множина $\rho_R = \{y | \exists\, x\ (x, y) \in R\}$ (∃ - існує).

Для скінчених множин бінарне відношення R ⊂ X × Y зручно задавати за допомогою матриці відношення $R_{m \times n} = (r_{ij})$, де $m = |A|$, $n = |B|$.

Елементами матриці є значення $r_{ij} = \begin{cases} 1, \text{якщо } (a_i, b_j) \in R \\ 0, \text{якщо } (a_i, b_j) \notin R \end{cases}$

Приклад. Знайти матрицю відношення $R \subset M \times 2^M$, де $R = \{(x, y) |\ x \in M \,\&\, y \subset M \,\&\, x \in y \,\&\, |y| > x + 1\}$, $M = \{x | x \in Z \,\&\, |x| \leq 1\}$, Z - множина цілих чисел.

Розв'язання.

Згідно з означенням матриці відношення, розв'язок має вигляд

	∅	$\{-1\}$	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{-1,0\}$	$\{-1,1\}$	$\{0,1\}$	$\{-1,0,1\}$
-1	0	1	0	0	1	1	0	1
0	0	0	0	0	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0	1

Приклад.

Зобразити відношення графічно, де R - множина дійсних чисел, та знайти його область визначення та область значень:

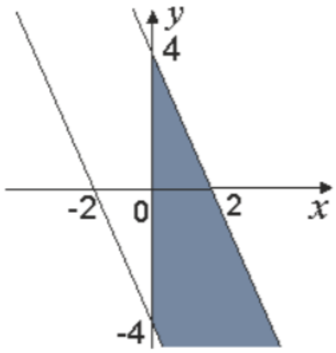
1. $\alpha_1 = \{(x, y) | (x, y) \in R^2 \& \ |2x + y| \leq 4 \,\&\, x \geq 0\}$;

2. $\alpha_2 = \{(x, y) | (x, y) \in R^2 \& \ x^2 + 2x - y^2 \leq 0\}$.

Розв’язання.

Зображення відношення α_1 зводиться до графічного розв’язання системи нерівностей

$\begin{cases} 2x + y \leq 4 \\ 2x + y \geq -4 \end{cases}$. Розв’язок цієї системи з врахуванням останньої умови зображено на рис. 2.1. Область визначення $\delta_{\alpha_1} = [0; \infty)$, область значень $\rho_{\alpha_1} = (-\infty; 4]$.



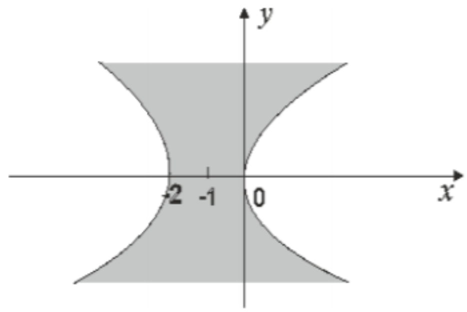


Рисунок 2.1 Рисунок 2.2

Для побудови області, яка відповідає відношенню α_2, знаходимо границю цієї області $x^2 + 2x - y^2 = 0$ чи $(x+1)^2 - y^2 = 1$. Це є рівняння гіперболи з центром симетрії в точці (-1; 0) та дійсною та уявною піввісями, рівними 1. Тому відношенню α_2 відповідає частина площини, зображена на рис. 2.2. Область визначення $\delta_{\alpha_2} = R$, область значень $\rho_{\alpha_2} = R$.

Види бінарних відношень.

Нехай задано бінарне відношення R на множині A^2: $R \subseteq A \times A = \{(a,b) | a \in A, b \in A\}$.

1. Бінарне відношення R на множині A називається *рефлексивним*, якщо для будь якого $a \in A$ виконується aRa , тобто $(a,a) \in R$. Головна діагональ матриці рефлексивного відношення складається з одиниць. Граф рефлексивного відношення обов’язково має петлі у кожній вершині.

2. Бінарне відношення R на множині A називається *антирефлексивним*, якщо для будь якого $a \in A$ не виконується aRa , тобто $(a,a) \notin R$. Головна діагональ матриці антирефлексивного відношення складається з нулів. Граф антирефлексивного відношення не має петель.

3. Бінарне відношення R на множині A називається *симетричним*, якщо для будь яких $a, b \in A$ з aRb слідує bRa , тобто якщо $(a,b) \in R$ то і $(b,a) \in R$. Матриця симетричного відношення симетрична відносно головної діагоналі. Граф симетричного відношення не є орієнтованим.

4. Бінарне відношення R на множині A називається *антисиметричним*, якщо для будь яких $a, b \in A$, з aRb та bRa слідує що $a = b$. Тобто якщо $(a,b) \in R$ то і $(b,a) \in R$, то $a = b$. Матриця антисиметричного відношення не має жодної пари одиниць, які знаходяться на

симетричних місцях по відношенню до головної діагоналі. У графа антисиметричного відношення вершини з'єднуються тільки однією напрямною дугою.

5. Бінарне відношення R на множині A називається *транзитивним*, якщо для будь яких a, b, c ∈ A, з aRb та bRc слідує, що aRc . Тобто якщо (a, b) ∈ R і (b, c) ∈ R, то (a, c) ∈ R. Матриця транзитивного відношення характеризується тим, що якщо елемент матриці $\sigma_{ij} = 1$ та $\sigma_{jm} = 1$, то обов'язково $\sigma_{im} = 1$. Граф транзитивного відношення такий, що якщо з'єднані дугами, наприклад, перша-друга та друга-третя вершини, то обов'язково є дуга з першої в третю вершину.

6. Бінарне відношення R на множині A називається *антитранзитивним*, якщо для будь яких a, b, c ∈ A з aRb та bRc слідує що не виконується aRc . Тобто якщо $(a, b) \in R$ і $(b, c) \in R$, то $(a, c) \notin R$. Матриця транзитивного відношення характеризується тим, що якщо елемент матриці $\sigma_{ij} = 1$ та $\sigma_{jm} = 1$, то обов'язково $\sigma_{im} = 0$. Граф транзитивного відношення такий, що якщо з'єднані дугами, наприклад, перша-друга та друга-третя вершини, то обов'язково немає дуги з першої в третю вершину.

Приклад. На множині $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ задано відношення $R = \{(a, b) | a, b \in A, a + b - \text{парне число}\}$. Визначити тип даного відношення.

Розв'язання.

Матриця даного відношення має вигляд: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Вочевидь, що дане відношення є:

- рефлексивним (вздовж головної діагоналі знаходяться одиниці);

- симетричним ($\sigma_{13} = \sigma_{31}, \sigma_{24} = \sigma_{42}$ та інші);

- транзитивним ($(1,3) \in R,\ (3,5) \in R \Rightarrow (1,5) \in R;\ (1,5) \in R,\ (5,3) \in R \Rightarrow (1,3) \in R$ та інші).

Приклад. Які властивості на множині $A = \{a, b, c, d\}$ має бінарне відношення

$R = \{(a, b), (b, d), (a, d), (b, a), (b, c)\}$.

Розв'язання.

Матриця даного відношення має вигляд: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Дане відношення є:

- антирефлексивним (вздовж головної діагоналі знаходяться нулі);

- не симетричним, оскільки $\sigma_{23} = 1$, а $\sigma_{32} = 0$;

- не антисиметричним, оскільки $\sigma_{12} = \sigma_{21} = 1$;

- не транзитивним, тому що $\sigma_{12} = 1, \sigma_{23} = 1$ та $\sigma_{13} = 0$.

Функцією з множини X на множину Y називається всюди визначена бінарна відповідність, при якій кожен елемент множини X зв’язаний з єдиним елементом множини Y. Функція записується наступним чином: якщо $f \subseteq X \times Y$, то $f: X \to Y$. Множину X називають областю визначення, а Y – множиною значень функції.

Областю значень функції називається підмножина в Y, яка складається з образів всіх елементів $x \in X$. Вона позначається символом $f(x)$.

Оскільки для кожного $x \in X$ існує єдиним чином визначений $y \in Y$, такий що $(x, y) \in f$, то записують $y = f(x)$ та говорять, що функція f відображує множину X на множину Y, а $f(x)$ називають образом x при відображенні f або значенням функції, яка відповідає аргументу x.

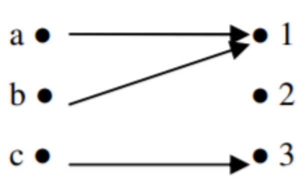
<u>Види функціональних відношень</u>

1. Функція називається ін’єктивною (ін'єкцією), якщо з умови $f(x_1) = f(x_2)$ слідує, що $x_1 = x_2$ для будь-яких $x_1, x_2 \in X$, . Функція ін’єктивна тоді і тільки тоді, коли для будь-яких $x_1, x_2 \in X$, якщо $x_1 \neq x_2$, то $f(x_1) \neq f(x_2)$, тобто для різних аргументів функція f приймає різні значення.

2. Функція називається сюр’єктивною (сюр'єкцією), якщо для кожного $y^* \in Y$ знайдеться такий $x^* \in X$, що $y^* = f(x^*)$.

3. Функція називається бієктивною (бієкцією), якщо вона ін’єктивна та сюр’єктивна одночасно. Таку функцію ще називають взаємно-однозначним відображенням.

Приклад. Визначити, які з зображених функцій ін’єктивні, сюр’єктивні або бієктивні.



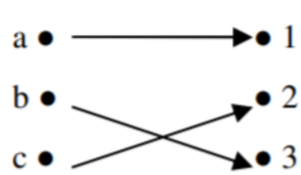
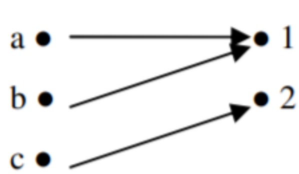


Рисунок 2.3 Рисунок 2.4



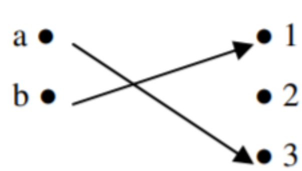


Рисунок 2.5 Рисунок 2.6

Розв’язання.

1. Рисунок 2.3. Дана функція не ін’єктивна, тому що значення $1 \in Y$ відповідає а та $b \in X$. Функція не є сюр’єктивною, тому що у елемент $2 \in Y$ нічого не переходить;

2. Рисунок 2.4. Дана функція ін’єкнивна, тому що різним аргументам відповідають різні значення. Функція сюр’єктивна, тому що множина її значень співпадає з областю значень. У даному випадку маємо бієктивну функцію;

3. Рисунок 2.5. Дана функція не інє’ктивна, тому що значення 1 функція приймає як для а так і для b. Функція сюр’єктивна, тому що множина Y співпадає з областю значень функції, тобто для кожного $y \in Y$ існує відповідний аргумент х з області визначення, що $y = f(x)$;

4. Рисунок 2.6. Дана функція ін’єктивна, але не сюр’єктивна.

Індивідуальні завдання

Завдання №1. Використовуючи теоретичні відомості, розв'язати наступні задачі за своїм варіантом:

Варіант № 1.

1. Чи є вірною рівність $(A \times B) \cap (A \times C) = A \times (B \cap C)$?
2. Знайти матрицю відношення $R \subset M \times 2^M$, де $M = \{1,2,3\}$:

$R = \{(x, y) | x \in M \& y \subset M \& |y| = x\}$.

3. Зобразити відношення графічно: $\alpha = \{(x, y) | (x, y) \in R^2 \& |x - 2y| \leq 3\}$, де R - множина дійсних чисел.
4. Навести приклад бінарного відношення $R \subset A \times A$, де $A = \{a, b, c, d, e\}$, яке є рефлексивне, симетричне, нетранзитивне, та побудувати його матрицю.
5. Визначити множину (якщо це можливо), на якій дане відношення є: а) функціональним; б) бієктивним:

$$\alpha = \left\{(x, y) | (x, y) \in R^2 \& \sqrt{(x + y)^2} = 9\right\}$$

Варіант № 2

1. Чи є вірною рівність $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$?
2. Знайти матриці відношення $R \subset 2^{\mathrm{A}} \times 2^{\mathrm{B}}$, де : $R = \{(x, y) | x \subset \mathrm{A} \,\&\, y \subset \mathrm{B} \,\&\, |x| = |y| \,\&\, x \cap y = \emptyset\}$. $B = \{1,3,5\}$
3. Зобразити відношення графічно: $\alpha = \{(x, y) | (x, y) \in R^2 \,\&\, x^2 - 2x + y^2 \leq 3\}$, де

R - множина дійсних чисел.

4. Маємо бінарне відношення $R \subset A \times A$, де $A = \{a, b, c, d, e\}$, яке задане своєю матрицею:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Перевірити: чи є дане відношення рефлексивним, симетричним, транзитивним, антисиметричним?

5. Визначити множину (якщо це можливо), на якій дане відношення є:

а) функціональним; б) бієктивним:

$$\alpha = \{(x, y) | (x, y) \in R^2 \,\&\, y = ln|x|\}.$$

Варіант № 3

1. Чи є вірною рівність $(A \cap B) \times (A \cap C) = A \times (B \cap C)$?
2. Знайти матрицю відношення $R \subset M \times 2^M$, де $M = \{1,2,3\}$:

$R = \{(x, y)|\ x \in M\ \&\ y \subset M\ \&\ |y| = x\}$.

3. Зобразити відношення графічно: $\alpha = \{(x, y)|(x, y) \in R^2\ \&|\ x + 1| \geq y\}$, де R - множина дійсних чисел.

4. Навести приклад бінарного відношення $R \subset A \times A$, де $A = \{a, b, c, d, e\}$, яке є антирефлексивне, антисиметричне, транзитивне та побудувати його матрицю.

5. Визначити множину (якщо це можливо), на якій дане відношення є: а) функціональним; б) бієктивним:

$$\alpha = \{(x, y)|(x, y) \in R^2\ \&\ |ln(x - 1)|\}$$

Варіант № 4

1. Чи є вірною рівність $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$?
2. Знайти матрицю відношення $R \subset M \times 2^M$, де $R = \{(x, y)|x \subset M\ \&\ y \subset M\ \&\ |y| = |x|\}$, $M = \{x|x \in Z\ \&\ |x| \leq 1\}$, Z – множина цілих чисел.
3. Зобразити відношення графічно: $\alpha = \{(x, y)|(x, y) \in R^2\ \&\ |4 + 2x| = y\}$, де

R - множина дійсних чисел.

4. Маємо бінарне відношення $R \subset A \times A$, де $A = \{a, b, c, d, e\}$, яке задане своєю матрицею:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Перевірити: чи є дане відношення рефлексивним, симетричним, транзитивним, антисиметричним?

5. Визначити множину (якщо це можливо), на якій дане відношення є:

а) функціональним; б) бієктивним:

$$\alpha = \{(x, y)|(x, y) \in R^2\ \&\ (x + y)^2 = 4\}.$$

Варіант № 5

1. Чи є вірною рівність $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \times D) \cap (C \cap B)$?
2. Знайти матрицю відношення $R \subset M \times 2^M : R = \{(x, y)|\ x \in M\ \&\ y \subset M\ \&\ |y| < x + 2\}$, де $M = \left\{x \,\middle|\, x \in Z\ \&\ |x| \le 1\right\}$, Z - множина цілих чисел.
3. Зобразити відношення графічно:

   $\alpha = \{(x, y)|(x, y) \in R^2\ \&\ (x + y)^2 = 4\}$, де R - множина дійсних чисел.

4. Навести приклад бінарного відношення $R \subset A \times A$, де $A = \{a, b, c, d, e\}$, яке є рефлексивне, несиметричне, транзитивне та побудувати його матрицю.

5. Визначити множину (якщо це можливо), на якій дане відношення є: а) функціональним; б) бієктивним:

$$\alpha = \{(x, y)|(x, y) \in R^2\ \&\ xy = 2\}.$$

Варіант № 6

1. Чи є вірною рівність $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \times C) \cap (B \times D)$?
2. Знайти матрицю відношення $R \subset 2^B \times A$, де : $R = \left\{(x, y)|x \subset B\ \&\ y \in A\ \&\ |x| = \frac{y}{2}\right\}$, де $B = \{1,2\}$, $A = \{y|y \in Z\ \&\ 1 \le y \le 4\}$, Z – множина цілих чисел.
3. Зобразити відношення графічно: $\alpha = \{(x, y)|(x, y) \in R^2\ \&\ |x| \le |y|\}$, де

R - множина дійсних чисел.

4. Маємо бінарне відношення $R \subset A \times A$, де $A = \{a, b, c, d, e\}$, яке задане своєю матрицею:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Перевірити: чи є дане відношення рефлексивним, симетричним, транзитивним, антисиметричним?

5. Визначити множину (якщо це можливо), на якій дане відношення є:

а) функціональним; б) бієктивним:

$$\alpha = \{(x, y)|(x, y) \in R^2\ \&\ (x + y)^3 = 5\}.$$

Варіант № 7

1. Чи є вірною рівність $(A \times B) \cap (C \cap D) = (A \times D) \cap (B \times C)$?
2. Знайти матрицю відношення $R \subset 2^A \times 2^B$: $R = \{(x, y) |\ x \subset A \ \&\ y \subset B \ \&\ x \subset y\}$, де

   $A = \{1,2\}$, $B = \{1,2,4\}$.

3. Зобразити відношення графічно: $\alpha = \{(x, y) | (x, y) \in R^2 \ \&\ x^2 - 2x + y^2 = 8\}$, де R - множина дійсних чисел.
4. Навести приклад бінарного відношення $R \subset A \times A$, де $A = \{a, b, c, d, e\}$, яке є антирефлексивне, симетричне, транзитивне та побудувати його матрицю.
5. Визначити множину (якщо це можливо), на якій дане відношення є: а) функціональним; б) бієктивним:

$$\alpha = \{(x, y) | (x, y) \in R^2 \ \&\ y = (x - 2)^{-2}\}.$$

Варіант № 8

1. Чи є вірною рівність $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$?
2. Знайти матрицю відношення $R \subset M \times 2^M$, де $M = \{1,2,3\}$:

   $R = \{(x, y) | x \in M \ \&\ y \subset M \ \&\ |y| < x\}$.

3. Зобразити відношення графічно: $\alpha = \{(x, y) | (x, y) \in R^2 \ \&\ x + y^2 = 4\}$, де

R - множина дійсних чисел.

4. Маємо бінарне відношення $R \subset A \times A$, де $A = \{a, b, c, d, e\}$, яке задане своєю матрицею:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Перевірити: чи є дане відношення рефлексивним, симетричним, транзитивним, антисиметричним?

5. Визначити множину (якщо це можливо), на якій дане відношення є:

а) функціональним; б) бієктивним:

$$\alpha = \{(x, y) | (x, y) \in R^2 \ \&\ y = |x^3|\}.$$

Варіант № 9

1. Чи є вірною рівність $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$?
2. Знайти матрицю відношення $R \subset M \times 2^M$: $R = \{(x, y)|\ x \in M\ \&\ y \subset M\ \&\ |y| - 1 = x\}$, де $M = \{x\ |\ x \in Z\ \&|x - 1| < 2\}$, Z - множина цілих чисел.

3. Зобразити відношення графічно: $\alpha = \{(x, y)|(x, y) \in R^2\ \&\ \mathrm{x} - y^2 > 0\}$, де R - множина дійсних чисел.

4. Навести приклад бінарного відношення $R \subset A \times A$, де $A = \{a, b, c, d, e\}$, яке є рефлексивне, антисиметричне, нетранзитивне та побудувати його матрицю.

5. Визначити множину (якщо це можливо), на якій дане відношення є: а) функціональним; б) бієктивним:

$$\alpha = \{(x, y)|(x, y) \in R^2\ \&\ y = \sqrt{1 - x^2}\}.$$

Варіант № 10

1. Чи є вірною рівність $(A \cup B) \times (C \cup D) = (A \times C) \cup (B \times C) \cup (A \times D) \cup (B \times D)$?
2. Знайти матрицю відношення $R \subset 2^A \times 2^B$, де $R = \{(x, y)|x \subset A\ \&\ y \subset B\ \&\ y \subset x\ \}$, де $A = 2{,}4\}$, $B = \{1{,}2{,}4\}$.
3. Зобразити відношення графічно: $\alpha = \{(x, y)|(x, y) \in R^2\ \&\ |y - 4| < 2\}$, де

R - множина дійсних чисел.

4. Маємо бінарне відношення $R \subset A \times A$, де $A = \{a, b, c, d, e\}$, яке задане своєю матрицею:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Перевірити: чи є дане відношення рефлексивним, симетричним, транзитивним, антисиметричним?

5. Визначити множину (якщо це можливо), на якій дане відношення є:

а) функціональним; б) бієктивним:

$$\alpha = \{(x, y)|(x, y) \in R^2\ \&\ y = e^{x-1}\}.$$

Варіант № 11

1. Чи є вірною рівність $(A \cup B) \times (C \cup D) = (A \times \mathrm{C}) \cup (B \times D)$?
2. Знайти матрицю відношення $R \subset M \times 2^M$, де $M = \{1,2,3\}$:

$$R = \{(x, y)|\; x \in M \;\&\; y \subset M \;\&\; |y| > x\}$$

3. Зобразити відношення графічно: $\alpha = \{(x, y)|(x, y) \in R^2 \;\&\; |x + 3| \geq |y|\}$, де R - множина дійсних чисел.

4. Навести приклад бінарного відношення $R \subset A \times A$, де $A = \{a, b, c, d, e\}$, яке є антирефлексивне, антисиметричне, нетранзитивне та побудувати його матрицю.

5. Визначити множину (якщо це можливо), на якій дане відношення є: а) функціональним; б) бієктивним:

$$\alpha = \left\{(x, y)|(x, y) \in R^2 \;\&\; x + \sqrt{y^2} = 1\right\}.$$

Варіант № 12

1. Чи є вірною рівність $(A \cup B) \times (A \cup C) = A \times (B \cup C)$?
2. Знайти матрицю відношення $R \subset 2^A \times 2^B$, де $A = \{1,2\}$, $B = \{1,3,5\}$:

$$R = \{(x, y)|x \subset A \;\&\; y \subset B \;\&\; |x| + |y| = 3\}.$$

3. Зобразити відношення графічно: $\alpha = \{(x, y)|(x, y) \in R^2 \;\&\; x^2 + y^2 = 9\}$, де

R - множина дійсних чисел.

4. Маємо бінарне відношення $R \subset A \times A$, де $A = \{a, b, c, d, e\}$, яке задане своєю матрицею:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Перевірити: чи є дане відношення рефлексивним, симетричним, транзитивним, антисиметричним?

5. Визначити множину (якщо це можливо), на якій дане відношення є:

а) функціональним; б) бієктивним:

$$\alpha = \{(x, y)|(x, y) \in R^2 \;\&\; |x| + y = 1\}.$$

Варіант № 13

1. Чи є вірною рівність $(A \times B) \cup (C \times D) = (A \cup \mathrm{C}) \times (B \cup D)$?
2. Знайти матрицю відношення $R \subset M \times 2^M$, де $M = \{(x, y)|\ x \in Z\ \&\ |x| \leq 1\}$:

$$R = \{(x, y)|\ x \in M\ \&\ x \in y\ \&\ y \subset M\ \&\ |y| > x\}$$

3. Зобразити відношення графічно: $\alpha = \{(x, y)|(x, y) \in R^2\ \&\ (x - y)^2 = 9\}$, де R - множина дійсних чисел.

4. Навести приклад бінарного відношення $R \subset A \times A$, де $A = \{a, b, c, d, e\}$, яке є нерефлексивне, симетричне, транзитивне, та побудувати його матрицю.

5. Визначити множину (якщо це можливо), на якій дане відношення є: а) функціональним; б) бієктивним:

$$\alpha = \left\{(x, y)|(x, y) \in R^2\ \&\ y = \left(\sqrt{x}\right)^4\right\}.$$

Варіант № 14

1. Чи є вірною рівність $A \times (B \cap C \cup D) = (A \times B) \cap (A \times C) \cup (A \times D)$?
2. Знайти матрицю відношення $R \subset 2^A \times 2^B$, де $A = \{1,3\}$, $B = \{2,4\}$:

$$R = \{(x, y)|x \subset A\ \&\ y \subset B\ \&\ |y| > |x|\}.$$

3. Зобразити відношення графічно: $\alpha = \{(x, y)|(x, y) \in R^2\ \&\ |6 - 3y| = x\}$, де

R - множина дійсних чисел.

4. Маємо бінарне відношення $R \subset A \times A$, де $A = \{a, b, c, d, e\}$, яке задане своєю матрицею:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Перевірити: чи є дане відношення рефлексивним, симетричним, транзитивним, антисиметричним?

5. Визначити множину (якщо це можливо), на якій дане відношення є:

а) функціональним; б) бієктивним:

$$\alpha = \{(x, y)|(x, y) \in R^2\ \&\ |x| + |y| = 4\}.$$

Варіант № 15

1. Чи є вірною рівність $\left(A \times (B \cap C)\right) \cap \left((A \cap B) \times C\right) = (A \times \mathrm{C}) \times (B \times B)$?
2. Знайти матрицю відношення $R \subset M \times 2^M$, де $M = \{1,2,3\}$:

$$R = \{(x, y) |\ x \in M \ \&\ y \subset M \ \&\ |y| \leq x\}$$

3. Зобразити відношення графічно: $\alpha = \{(x, y) | (x, y) \in R^2 \ \&\ \mathrm{x} + y^2 - 1 > 0\}$, де R - множина дійсних чисел.

4. Навести приклад бінарного відношення $R \subset A \times A$, де $A = \{a, b, c, d, e\}$, яке є антирефлексивне, несиметричне, транзитивне, та побудувати його матрицю.

5. Визначити множину (якщо це можливо), на якій дане відношення є: а) функціональним; б) бієктивним:

$$\alpha = \{(x, y) | (x, y) \in R^2 \ \&\ y = x + |x|\}.$$

Варіант № 16

1. Чи є вірною рівність $A \times (B \backslash C) = (A \times C) \backslash (B \times C)$?
2. Знайти матрицю відношення $R \subset 2^M \times M$, де $M = \{1,3,5\}$:

$$R = \left\{(x, y) | x \subset M \ \&\ y \in M \ \&\ y \in x \ \&\ |x| = \tfrac{y+1}{2}\right\}.$$

3. Зобразити відношення графічно: $\alpha = \{(x, y) | (x, y) \in R^2 \ \&\ |x + 3y| \leq 6\}$, де

R - множина дійсних чисел.

4. Маємо бінарне відношення $R \subset A \times A$, де $A = \{a, b, c, d, e\}$, яке задане своєю матрицею:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Перевірити: чи є дане відношення рефлексивним, симетричним, транзитивним, антисиметричним?

5. Визначити множину (якщо це можливо), на якій дане відношення є:

а) функціональним; б) бієктивним:

$$\alpha = \{(x, y) | (x, y) \in R^2 \ \&\ x + \left(\sqrt{y}\right)^2 = 1\}.$$

Варіант № 17

1. Чи є вірною рівність $A \times (B \backslash C) = (A \times B) \backslash (A \times C)$?
2. Знайти матрицю відношення $R \subset M \times 2^M$, де $M = \{1,2,3\}$:

$$R = \{(x, y) |\ x \in M \ \&\ y \subset M \ \&\ |y| \geq x\}$$

3. Зобразити відношення графічно: $\alpha = \{(x, y) | (x, y) \in R^2 \ \&\ |2x - 3y| \leq 6\}$, де R - множина дійсних чисел.

4. Навести приклад бінарного відношення $R \subset A \times A$, де $A = \{a, b, c, d, e\}$, яке є рефлексивне, антисиметричне, транзитивне, та побудувати його матрицю.

5. Визначити множину (якщо це можливо), на якій дане відношення є: а) функціональним; б) бієктивним:

$$\alpha = \{(x, y) | (x, y) \in R^2 \ \&\ y = (x + 3)^{-3}\}.$$

Варіант № 18

1. Чи є вірною рівність $(A \backslash B) \times C = (A \times C) \backslash (B \times C)$?
2. Знайти матрицю відношення $R \subset 2^M \times M$, де $M = \{x \mid x \in Z \ \&\ |x| \leq 1\}$:

$$R = \{(x, y) | x \in M \ \&\ y \subset M \ \&\ |y| = x\}.$$

3. Зобразити відношення графічно: $\alpha = \{(x, y) | (x, y) \in R^2 \ \&\ |1 - 2y| = x\}$, де

R - множина дійсних чисел.

4. Маємо бінарне відношення $R \subset A \times A$, де $A = \{a, b, c, d, e\}$, яке задане своєю матрицею:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Перевірити: чи є дане відношення рефлексивним, симетричним, транзитивним, антисиметричним?

5. Визначити множину (якщо це можливо), на якій дане відношення є:

а) функціональним; б) бієктивним:

$$\alpha = \{(x, y) | (x, y) \in R^2 \ \&\ y + x^2 = 4\}.$$

Варіант № 19

1. Чи є вірною рівність $(A \times B)\backslash(C \times D) = \big((A\backslash C) \times B\big) \cup \big((A \cap C) \times (B\backslash D)\big)$?
2. Знайти матрицю відношення $R \subset M \times 2^M$, де $M = \{1,2,3\}$:

$$R = \left\{(x, y)|\; x \subset M \;\&\; y \in M \;\&\; |x| = \frac{y+1}{2}\right\}$$

3. Зобразити відношення графічно: $\alpha = \{(x, y)|(x, y) \in R^2 \;\&\, |4x + y| > 2\}$, де R - множина дійсних чисел.
4. Навести приклад бінарного відношення $R \subset A \times A$, де $A = \{a, b, c, d, e\}$, яке є антирефлексивне, несиметричне, транзитивне, та побудувати його матрицю.
5. Визначити множину (якщо це можливо), на якій дане відношення є: а) функціональним; б) бієктивним:

$$\alpha = \{(x, y)|(x, y) \in R^2 \;\&\, y = \sqrt{x+1}\}.$$

Варіант № 20

1. Чи є вірною рівність: $(C \times D)\backslash(A \times B) = \big((C\backslash A) \times D\big) \cup \big(C \times (D\backslash B)\big)$?
2. Знайти матрицю відношення $R \subset 2^M \times M$, де $M = \{1,3,5\}$:

$$R = \{(x, y)|x \in M \;\&\; y \in x \;\&\; y \subset M \;\&\; |y| \le x\}.$$

3. Зобразити відношення графічно: $\alpha = \{(x, y)|(x, y) \in R^2 \;\&\; |1 + 4x| \le y\}$, де

R - множина дійсних чисел.

4. Маємо бінарне відношення $R \subset A \times A$, де $A = \{a, b, c, d, e\}$, яке задане своєю матрицею:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Перевірити: чи є дане відношення рефлексивним, симетричним, транзитивним, антисиметричним?

5. Визначити множину (якщо це можливо), на якій дане відношення є:

а) функціональним; б) бієктивним:

$$\alpha = \{(x, y)|(x, y) \in R^2 \;\&\, x = |y - 2|\}.$$

Варіант № 21

1. Чи є вірною рівність $(A\backslash B) \times (C\backslash A) = A \times (C\backslash B)$?
2. Знайти матрицю відношення $R \subset 2^A \times 2^B$, де $A = \{2,3\}$, $B = \{2,4\}$,

$$R = \{(x, y)|\ x \subset A \,\&\, y \subset B \,\&\, x \subset y\}$$

3. Зобразити відношення графічно: $\alpha = \{(x, y)|(x, y) \in R^2\ \,\&\, |x| \geq |y|\}$, де R - множина дійсних чисел.

4. Навести приклад бінарного відношення $R \subset A \times A$, де $A = \{a, b, c, d, e\}$, яке є нерефлексивне, антисиметричне, транзитивне, та побудувати його матрицю.

5. Визначити множину (якщо це можливо), на якій дане відношення є: а) функціональним; б) бієктивним:

$$\alpha = \{(x, y)|(x, y) \in R^2\ \,\&\, y = x^2 - x\}.$$

Варіант № 22

1. Чи є вірною рівність: $(A\backslash B) \times (C\backslash A) = (A \times C)\backslash(B \times A)$?
2. Знайти матрицю відношення $R \subset 2^A \times 2^B$:

   $R = \{(x, y)|x \subset A \,\&\, y \subset B \,\&\, x \cap y \neq \emptyset\}$, де $A = \{1,2\}$, $B = \{1,2,4\}$.

3. Зобразити відношення графічно: $\alpha = \{(x, y)|(x, y) \in R^2 \,\&\, x^2 + y^2 \leq 4\}$, де

R - множина дійсних чисел.

4. Маємо бінарне відношення $R \subset A \times A$, де $A = \{a, b, c, d, e\}$, яке задане своєю матрицею:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Перевірити: чи є дане відношення рефлексивним, симетричним, транзитивним, антисиметричним?

5. Визначити множину (якщо це можливо), на якій дане відношення є:

а) функціональним; б) бієктивним:

$$\alpha = \{(x, y)|(x, y) \in R^2\ \,\&\, (x + y)^5 = 1\}.$$

Варіант № 23

1. Чи є вірною рівність $\big((A\backslash B)\backslash C\big) \times D = (A \times D)\backslash(B \times D)\backslash(C \times D)$?
2. Знайти матрицю відношення $R \subset M \times 2^M$, де $M = \{1,2,3\}$:

$$R = \{(x,y)|\ x \in M \ \&\ x \in y \ \&\ y \subset M \ \&\ |y| \geq x\}$$

3. Зобразити відношення графічно:

$\alpha = \{(x,y)|(x,y) \in R^2 \ \ \&\ |2y - x| > 4\}$, де R - множина дійсних чисел.

4. Навести приклад бінарного відношення $R \subset A \times A$, де $A = \{a,b,c,d,e\}$, яке є нерефлексивне, несиметричне, транзитивне, та побудувати його матрицю.

5. Визначити множину (якщо це можливо), на якій дане відношення є: а) функціональним; б) бієктивним:

$$\alpha = \{(x,y)|(x,y) \in R^2 \ \ \&\ x + y^3 = 4\}.$$

Варіант № 24

1. Чи є вірною рівність: $(A\backslash B) \times (C \cap D) = (A \times C)\backslash(B \times D)$?
2. Знайти матрицю відношення $R \subset M \times 2^M$, де $M = \{x \mid x \in Z \ \&\ |x| \leq 1\}$:

$R = \{(x,y)|x \in M \ \&\ y \subset M \ \&\ |y| < x + 1\}.$

3. Зобразити відношення графічно: $\alpha = \{(x,y)|(x,y) \in R^2 \ \&\ x^2 + 4y + y^2 \leq 0\}$, де

R - множина дійсних чисел.

4. Маємо бінарне відношення $R \subset A \times A$, де $A = \{a,b,c,d,e\}$, яке задане своєю матрицею:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Перевірити: чи є дане відношення рефлексивним, симетричним, транзитивним, антисиметричним?

5. Визначити множину (якщо це можливо), на якій дане відношення є:

а) функціональним; б) бієктивним:

$$\alpha = \{(x,y)|(x,y) \in R^2 \ \ \&\ y = e^{|x|}\}.$$

Варіант № 25

1. Чи є вірною рівність $(A \cap B) \times (C \backslash D) = (B \times C) \backslash (A \times D)$?
2. Знайти матрицю відношення $R \subset 2^A \times 2^B$, де $A = \{1,2,3\}$, $B = \{2,4\}$,

$$R = \{(x, y) |\ x \subset A\ \&\ y \subset B\ \&\ y \cap x = \emptyset\}$$

3. Зобразити відношення графічно:

$\alpha = \{(x, y) | (x, y) \in R^2\ \ \& |6 - 2x| = y\}$, де R - множина дійсних чисел.

4. Навести приклад бінарного відношення $R \subset A \times A$, де $A = \{a, b, c, d, e\}$, яке є рефлексивне, симетричне, транзитивне, та побудувати його матрицю.

5. Визначити множину (якщо це можливо), на якій дане відношення є: а) функціональним; б) бієктивним:

$$\alpha = \{(x, y) | (x, y) \in R^2\ \ \& y\sqrt{x - 2} = 1\}.$$

Варіант № 26

1. Чи є вірною рівність: $(A \backslash B) \times (C \cup D) = \big((A \times C) \backslash (B \times C)\big) \cup \big((A \times D) \backslash (B \times D)\big)$?
2. Знайти матрицю відношення $R \subset M \times 2^M$, де $M = \{1,2,3\}$:

$R = \{(x, y) | x \in M\ \&\ x \in y\ \&\ y \subset M\ \&\ |y| < x\}$.

3. Зобразити відношення графічно: $\alpha = \{(x, y) | (x, y) \in R^2\ \&\ (2x - 6y)^2 = 9\}$, де

R - множина дійсних чисел.

4. Маємо бінарне відношення $R \subset A \times A$, де $A = \{a, b, c, d, e\}$, яке задане своєю матрицею:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Перевірити: чи є дане відношення рефлексивним, симетричним, транзитивним, антисиметричним?

5. Визначити множину (якщо це можливо), на якій дане відношення є:

а) функціональним; б) бієктивним:

$$\alpha = \{(x, y) | (x, y) \in R^2\ \ \& y = x^3 + x\}.$$

Варіант № 27

1. Чи є вірною рівність $(A \triangle B) \times C = (A \times C) \triangle (B \times C)$?
2. Знайти матрицю відношення $R \subset 2^A \times 2^B$, де $A = \{1,2\}$, $B = \{1,2,4\}$,

$R = \{(x,y)|\ x \subset A\ \&\ y \subset B\ \&\ x \subset y\ \&\ |x| + 1 = |y|\}$.

3. Зобразити відношення графічно: $\alpha = \{(x,y)|(x,y) \in R^2\ \ \&\ |x+y| > 1\}$, де R - множина дійсних чисел.

4. Навести приклад бінарного відношення $R \subset A \times A$, де $A = \{a,b,c,d,e\}$, яке є нерефлексивне, симетричне, нетранзитивне, та побудувати його матрицю.

5. Визначити множину (якщо це можливо), на якій дане відношення є: а) функціональним; б) бієктивним:

$$\alpha = \{(x,y)|(x,y) \in R^2\ \ \&\ y = \ln^2 x\ \}.$$

Варіант № 28

1. Чи є вірною рівність: $(A \times C)\backslash(B \times D) = \big((A\backslash B) \times C\big) \cup \big(A \times (C\backslash D)\big)$?
2. Знайти матрицю відношення $R \subset M \times 2^M$, де $M = \{1,2,3\}$:

$R = \{(x,y)|x \in M\ \&\ x \in y\ \&\ y \subset M\ \&\ |y| > x\}$.

3. Зобразити відношення графічно: $\alpha = \{(x,y)|(x,y) \in R^2\ \&\ x^2 + y^2 = 4\}$, де

R - множина дійсних чисел.

4. Маємо бінарне відношення $R \subset A \times A$, де $A = \{a,b,c,d,e\}$, яке задане своєю матрицею:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Перевірити: чи є дане відношення рефлексивним, симетричним, транзитивним, антисиметричним?

5. Визначити множину (якщо це можливо), на якій дане відношення є:

а) функціональним; б) бієктивним:

$$\alpha = \{(x,y)|(x,y) \in R^2\ \ \&\ y = \sqrt{|x-3|}\}.$$

Варіант № 29

1. Чи є вірною рівність $A \times (B \triangle C) = (A \times B) \triangle (A \times C)$?
2. Знайти матрицю відношення $R \subset 2^A \times 2^B$, де $A = \{1{,}4\}$, $B = \{2{,}3{,}6\}$, $C = \{2k \mid k \in Z\}$,

$$R = \{(x, y) \mid x \subset A \ \& \ y \subset B \ \& \ (x \cup y) \subset C\}$$

3. Зобразити відношення графічно:

$\alpha = \{(x, y) | (x, y) \in R^2 \ \& \ |2x - 4| \le y\}$, де R - множина дійсних чисел.

4. Навести приклад бінарного відношення $R \subset A \times A$, де $A = \{a, b, c, d, e\}$, яке є нерефлексивне, антисиметричне, транзитивне, та побудувати його матрицю.

5. Визначити множину (якщо це можливо), на якій дане відношення є: а) функціональним; б) бієктивним:

$$\alpha = \{(x, y) | (x, y) \in R^2 \ \& \ y - 5 = \sqrt{x^2 + 1}\}.$$

Варіант № 30

1. Чи є вірною рівність: $(A \triangle B) \times (B \backslash C) = B \times C$?
2. Знайти матрицю відношення $R \subset M \times 2^M$, де $M = \{x \mid x \in Z \ \& \ |x| \le 1\}$:

$R = \{(x, y) | x \in M \ \& \ y \subset M \ \& \ |y| > x\}$.

3. Зобразити відношення графічно: $\alpha = \{(x, y) | (x, y) \in R^2 \ \& \ x + 2y + y^2 = 3\}$, де

R - множина дійсних чисел.

4. Маємо бінарне відношення $R \subset A \times A$, де $A = \{a, b, c, d, e\}$, яке задане своєю матрицею:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Перевірити: чи є дане відношення рефлексивним, симетричним, транзитивним, антисиметричним?

5. Визначити множину (якщо це можливо), на якій дане відношення є:

а) функціональним; б) бієктивним:

$$\alpha = \{(x, y) | (x, y) \in R^2 \ \& \ |y| = x^2\}.$$

Завдання №2. Написати програму, яка знаходить матрицю бінарного відношення $\rho \subset A \times B$, заданого на двох числових множинах. Реалізувати введення цих множин, та виведення на екран матриці відношення. Навести різні варіанти тестових прикладів.

Відношення обрати згідно варіанту:

1. $\rho = \{(a, b) \mid a \in A \,\&\, b \in B \,\&\, a > b\}$;
2. $\rho = \{(a, b) \mid a \in A \,\&\, b \in B \,\&\, a < b\}$;
3. $\rho = \{(a, b) \mid a \in A \,\&\, b \in B \,\&\, (a + b) \vdots 2\}$;
4. $\rho = \{(a, b) \mid a \in A \,\&\, b \in B \,\&\, (2a + 1) \vdots b\}$;
5. $\rho = \{(a, b) \mid a \in A \,\&\, b \in B \,\&\, (a + 2b) \vdots 3\}$;
6. $\rho = \{(a, b) \mid a \in A \,\&\, b \in B \,\&\, 2a < b\}$;
7. $\rho = \{(a, b) \mid a \in A \,\&\, b \in B \,\&\, a < 3b\}$;
8. $\rho = \{(a, b) \mid a \in A \,\&\, b \in B \,\&\, (5a - b) \vdots 3\}$;
9. $\rho = \{(a, b) \mid a \in A \,\&\, b \in B \,\&\, a \vdots b\}$;
10. $\rho = \{(a, b) \mid a \in A \,\&\, b \in B \,\&\, (2b + 1) \vdots a\}$;
11. $\rho = \{(a, b) \mid a \in A \,\&\, b \in B \,\&\, 2a > 3b\}$;
12. $\rho = \{(a, b) \mid a \in A \,\&\, b \in B \,\&\, b \vdots a\}$;
13. $\rho = \{(a, b) \mid a \in A \,\&\, b \in B \,\&\, (2a - b) < 3\}$;
14. $\rho = \{(a, b) \mid a \in A \,\&\, b \in B \,\&\, a > 2b\}$;
15. $\rho = \{(a, b) \mid a \in A \,\&\, b \in B \,\&\, (a + b + 1) \vdots 3\}$;
16. $\rho = \{(a, b) \mid a \in A \,\&\, b \in B \,\&\, |a - b| < 2\}$;
17. $\rho = \{(a, b) \mid a \in A \,\&\, b \in B \,\&\, |a + b| > 1\}$;
18. $\rho = \{(a, b) \mid a \in A \,\&\, b \in B \,\&\, 3a > b\}$;
19. $\rho = \{(a, b) \mid a \in A \,\&\, b \in B \,\&\, (a + b - 1) \vdots 2\}$;
20. $\rho = \{(a, b) \mid a \in A \,\&\, b \in B \,\&\, (2a - b) \vdots 3\}$;
21. $\rho = \{(a, b) \mid a \in A \,\&\, b \in B \,\&\, |a - b| > 1\}$;
22. $\rho = \{(a, b) \mid a \in A \,\&\, b \in B \,\&\, (3a - b) \vdots 3\}$;
23. $\rho = \{(a, b) \mid a \in A \,\&\, b \in B \,\&\, (5a + b) \vdots 5\}$;
24. $\rho = \{(a, b) \mid a \in A \,\&\, b \in B \,\&\, (a + b) \vdots 5\}$;
25. $\rho = \{(a, b) \mid a \in A \,\&\, b \in B \,\&\, |2a - b| < 2\}$;
26. $\rho = \{(a, b) \mid a \in A \,\&\, b \in B \,\&\, 3a < b\}$;
27. $\rho = \{(a, b) \mid a \in A \,\&\, b \in B \,\&\, (2a + b) > 1\}$;
28. $\rho = \{(a, b) \mid a \in A \,\&\, b \in B \,\&\, (3a - b) < 1\}$;
29. $\rho = \{(a, b) \mid a \in A \,\&\, b \in B \,\&\, |a + b| > 2\}$;
30. $\rho = \{(a, b) \mid a \in A \,\&\, b \in B \,\&\, |a - b| < 3\}$.

РОЗДІЛ 3. ЕЛЕМЕНТИ КОМБІНАТОРИКИ

Головна задача комбінаторики – підрахунок і перелік елементів у скінчених множинах.

Правило додавання: якщо елемент – x може бути вибрано n способами, а y- іншими m способами, тоді вибір „ x або y” може бути здійснено (m+n) способами.

Правило добутку: якщо елемент – x може бути вибрано n способами, після чого y - m способами, тоді вибір упорядкованої пари (x,y) може бути здійснено (m·n) способами.

Набір елементів $x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{im}$ з множини X = $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ називається вибіркою об’єму m з n елементів – (n,m) – *вибіркою*.

Упорядкована (n,m) – вибірка, в якій елементи не можуть повторюватися, називається (n,m)-розміщенням, кількість всіх можливих розміщень обчислюється за формулою:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Упорядкована (n,m) – вибірка, в якій елементи можуть повторюватися, називається (n,m)-розміщенням з повторюваннями, кількість всіх можливих таких розміщень обчислюється за формулою:

$$\overline{A_n^m} = n^m$$

Неупорядкована (n,m) – вибірка, в якій елементи не можуть повторюватися, називається (n,m)-сполученням, кількість всіх можливих сполучень обчислюється за формулою:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}$$

Неупорядкована (n,m) – вибірка, в якій елементи можуть повторюватися, називається (n,m)-сполученням з повторюваннями, кількість всіх можливих таких сполучень обчислюється за формулою

$$\overline{C_n^m} = C_{n+m-1}^m$$

A_n^n - називається перестановкою, а кількість різних перестановок позначається та обчислюється за формулою:

$$P_n = n!$$

Якщо в перестановках є однакові елементи, а саме перший елемент присутній n_1 разів, другий елемент - n_2 разів, ... , k-ий елемент - n_k разів, причому $n_1 + n_2 + \ \dots, + n_k = n$, то їх називають перестановками з повторенням та кількість їх можна знайти за формулою

$$P(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}.$$

Нехай X = $\{X_1, X_2, \dots, X_k\}$ - розбиття множини X ($|X| = n$) на k підмножин таких, що:$\bigcup_{i=1}^{k}(X_i) = X$, $X_i \cap X_j = 0$ при i ≠ j, $|X_i| = n_i$.

Їх кількість при фіксованих n_i та упорядкованих $X_1, X_2, \dots, X_k$ обчислюється за формулою:

$$C_n^{n_1, n_2, \dots, n_k} = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \dots n_k!}$$

Якщо ж множину X ($|X| = n$) потрібно розбити на підмножини, серед яких для усіх $i = 1, \dots, n$ є $m_i \geq 0$ підмножин з *i* елементами, де $\sum_{i=1}^{n} i \cdot m_i = n$, та при цьому набір підмножин в розбитті не є упорядкованим, тоді їх кількість обчислюється за формулою:

$$N(m_1, \dots, m_n) = \frac{n!}{m_1!\, m_2! \dots m_n!\, (1!)^{m_1} (2!)^{m_2} \dots (n!)^{m_n}}$$

Лабораторна робота № 3. Генерація комбінаторних конфігурацій

Теоретичні відомості та приклади розв'язування задач

Формула включень та виключень. Нехай X_i- скінчені множини, де $i = 1, \dots, n$, тоді:

$$|X_1 \cup \ldots \cup X_n| = (|X_1| + \cdots + |X_n|) - (|X_1 \cap X_2| + \cdots + |X_{n-1} \cap X_n|) + (|X_1 \cap X_2 \cap X_3| + \cdots + |X_{n-2} \cap X_{n-1} \cap X_n|) - \ldots + (-1)^{n+1}|X_1 \cap \ldots \cap X_n|$$

Наслідок.

$$|X \backslash (X_1 \cup \ldots \cup X_n)| = \\ = |X| - (|X_1| + \cdots + |X_n|) + (|X_1 \cap X_2| + \cdots + |X_{n-1} \cap X_n|) - \cdots \\ + (-1)^n |X_1 \cap X_n|$$

Наведемо ще одну форму запису формули включень та виключень. Нехай X – скінчена множина з N елементів, $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ – деякі властивості, якими володіють чи ні елементи з X. Позначимо через $X_i = \{x \in X | \alpha_i(x)\}$ - множину елементів в X, які володіють властивістю α_i, а

$N(\alpha_{i1}, \dots, \alpha_{ik}) = |X_{i1} \cap \ldots \cap X_{ik}| = |\{x \in X | \alpha_{i1}(x) \wedge \ldots \wedge \alpha_{ik}(x)\}|$ - кількість елементів в X, які володіють одночасно властивостями $\alpha_{i1}, \dots, \alpha_{ik}$, $N_0 = |X \backslash (X_1 \cup \ldots \cup X_n)|$ - кількість елементів, які не володіють жодною з властивостей $\alpha_{i1}, \dots, \alpha_{ik}$. Тоді маємо формулу:

$$N_0 = N - S_1 + S_2 - \cdots + (-1)^n S_n,$$

де $S_k = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} N(\alpha_{i1}, \dots, \alpha_{ik})$, $k = 1,2, \dots, n$.

Якщо треба знайти кількість елементів, які володіють рівно m властивостями, тоді використовують наступну формулу:

$$\widehat{N}_m = \sum_{k=0}^{n-m} -1^k C_{m+k}^m S_{m+k}$$

Приклади.

1. Кожен день, протягом 10 днів, клієнт брав з картки гроші:

а) кожен день різну суму: 5, 10, 15,…, 50 грн;

б) 3 дні у сумі 100 грн, 5 днів у сумі 50 грн., 2 дня у сумі 20 грн.

Скількома способами він це міг зробити?

Розв’язання:

а) усього 10 днів (n=10), і в усі ці дні клієнт брав гроші (m=10), кожен день різну суму, тобто має значення лише в який день була яка сума, тому маємо перестановку: $P_{10} = 10! = 3628800$;

б) усього 10! перестановок, але 3! перестановок не відрізняються між собою тому, що в три дні сума однакова – 100 грн, також – 5! та 2! перестановки однакові, тому різних способів буде:

$$P_{10}^{3,5,2} = \frac{10!}{3!5!2!} = 2520;$$

2. Скільки п’ятицифрових чисел можна утворити з шести цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6?

Розв’язання.

З шести цифр (n=6) необхідно вибрати – п’ять (m=5), причому цифри у числі можуть повторюватися, і має значення в якому порядку вони записані, тому усього можливо утворити: $\overline{A_6^5} = 6^5 = 7776$ чисел.

3. Із 10 робітників фірми директору треба назначити бухгалтера, його помічника, двох менеджерів і трьох кур’єрів. Скількома способами це можливо зробити?

Розв’язання.

З початку з 10 осіб виберемо бухгалтера – маємо 10 способів, потім з дев’яти залишених осіб – його помічника – 9 способів, потім з восьми – двох менеджерів - $C_8^2 = \frac{8!}{2!(8-2)!} = 28$ способів та з шести, що залишилися, - трьох кур’єрів - $C_6^3 = \frac{6!}{3!(6-3)!} = 20$ способів. За теоремою добутку загальна кількість способів буде: $10 \cdot 9 \cdot 28 \cdot 20 = 50400.$

4. Скількома способами можна поставити в одну шеренгу гравців двох команд (по 5 чоловік) так, щоб при цьому два чоловіка однієї команди не стояли поруч?

Розв’язання.

З початку поставимо в шеренгу гравців однієї команди, це можливо зробити – P5=5!=120 способами. Потім будемо ставити між ними гравців другої команди. Усього можливих міст маємо – 6, з яких потрібно вибрати п’ять без повторювань та упорядковано, тому різних способів буде - $A_6^5 = \frac{6!}{(6-5)!} = 720.$ За правилом добутку усього різних способів поставити в одну шеренгу гравців двох команд буде –$120 \cdot 720 = 86400.$

5. Скількома способами можна роздати 6 однакових іграшок трьом дітям так, щоб кожен з них отримав хоча б по однієї іграшки?

Розв’язання.

З початку роздамо по одній іграшці кожній дитині, між останніми трьома іграшками введемо два роздільника, так щоб кількість іграшок до першого з них були для першої дитини, кількість іграшок між першим та другим роздільником – для другої дитини, а після другого роздільника – для третьої дитини. Тоді кількість різних способів отримання дітьми іграшок буде дорівнювати кількості можливих варіантів вибору двох міст для роздільників з п’ятьох можливих, тобто - $C_5^2 = \frac{5!}{2!(5-2)!} = 10.$

6. Скількома способами можна роздати 6 різних предметів трьом особам так, щоб кожна отримала по 2 предмети?

Розв’язання.

Це упорядковане розбиття, де n=6, $n_1 = n_2 = n_3 = 2$. Тобто можливих способів буде - $C_6^{2,2,2} = \frac{6!}{2!2!2!} = 90.$

7. Дев'ятьох робітників одного цеху мають розподілити на групи в 2, 3 і 4 чоловіка для проходження однакових курсів підвищення кваліфікації, які проходять в різних 7 навчальних закладах, з яких можливо вибрати будь-який. Скількома способами це можна зробити?

Розв'язання.

З початку виберемо 3 навчальних заклади, це можливо зробити $\overline{A_7^3} = 7^3 = 343$ способами, потім розіб'ємо робітників на три групи, це буде не упорядковане розбиття, тобто маємо:

$$N(0,1,1,1,0,0,0,0,0) = \frac{9!}{1!1!1!(2!)^1(3!)^1(4!)^1} = 1260.$$

Далі за правилом добутку отримаємо – $343 \cdot 1260 = 432180$ різних способів.

8. У спортивному клубі займаються 38 чоловік. З них 16 грають у баскетбол, 17 – у хокей, 18 – у волейбол. Баскетболом і хокеєм захоплюється 4 чоловіки, баскетболом і волейболом – 7, волейболом і хокеєм – 5. Скільки чоловік захоплюється одночасно хокеєм, баскетболом і волейболом? Скільки чоловік захоплюється лише одним із цих видів спорту?

Розв'язання.

За формулою включень та виключень маємо:

N=38, $N_0 = 0$, $S_1 = 16 + 17 + 18 = 51$, $S_2 = 4 + 7 + 5 = 16$, $N_0 = \mathrm{N} - S_1 + S_2 - S_3$, тоді $S_3 = \mathrm{N} - S_1 + S_2 - N_0 = 38 - 51 + 16 = 3$ - осіб захоплюється одночасно хокеєм, баскетболом і волейболом. Лише одним із цих видів спорту захоплюються:

$\widehat{N}_1 = \sum_{k=0}^{3-1}(-1)^k C_{1+k}^1 S_{1+k} = S_1 - \frac{2!}{1!(2-1)!} S_2 + \frac{3!}{1!(3-1)!} S_3 = 51 - 32 + 9 = 28$ (осіб)

Індивідуальні завдання

Завдання № 1. Використовуючи теоретичні відомості, розв’язати наступні комбінаторні задачі за своїм варіантом:

Варіант № 1

1. У мами було 2 яблука, 3 груші та 2 апельсини. Кожен день вона давала дитині по одному фрукту. Скількома способами вона могла це зробити?

2. Розклад на день містить 5 уроків. Визначити кількість таких можливих розкладів при виборі 11 дисциплін за умови, що жоден предмет не стоїть у розкладі двічі на день.

3. Скільки наборів із 17 тістечок можна скласти, якщо у продажу їх 4 сорти?

4. Із 15 робітників фірми директору треба назначити бухгалтера, його помічника, двох менеджерів і чотирьох кур’єрів. Скількома способами це можна зробити?

5. Скількома способами можна поставити в одну шеренгу гравців двох футбольних команд (по 6 чоловік) так, щоб при цьому два футболісти однієї команди не стояли поруч?

6. Три стрільці мають влучити у 15 мішеней (кожен у п’ять). Скількома способами вони можуть розподілити мішені між собою?

7. В екскурсії брали участь студенти технічного університету. Всі вони були зі значками, або з листівками. Юнаків було 16, а зі значками усього – 24 чоловіки. Дівчат із листівками було стільки ж, скільки й юнаків із значками, дівчат із листівками та значками було – 5. Скільки всього було студентів?

Варіант № 2

1. Кожен день, протягом 10 днів, клієнт брав з картки гроші:

а) 3 дні у сумі 100 грн, 5 днів у сумі 50 грн., 2 дня у сумі 20 грн;

б) кожен день різну суму 5, 10, 15,…, 50 грн.

Скількома способами він це міг зробити?

2. Скільки п’ятицифрових чисел можна утворити з дев’яти цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9?

3. Команда з п’яти чоловік виступає на змаганнях, у яких бере учать ще 20 спортсменів. Скількома способами можуть бути розподілені місця, зайняті членами цієї команди, за умови, що жодне з них не може бути поділено, та немає значення, як місця будуть поділені між членами команди?

4. Комісія складається з голови, його заступника, та ще трьох чоловік. Скількома способами можна вибрати таку комісію з 7 чоловік?

5. Скількома способами можна розставити 5 різних книжок з математики і 3 різні книжки з фізики, щоб усі книжки з фізики стояли поруч?

6. Вісім авторів мають писати книгу з шістнадцяти розділів. Скількома способами можна розподілити матеріал між авторами, якщо два чоловіки напишуть по три розділи, чотири – по два та двоє – по одному розділу книги?

7. Якщо відомо, що кожен учень у школі вивчає принаймні одну із іноземних мов, знайдіть загальну кількість учнів у школі, якщо відомо, що англійську мову вивчають 28 учнів, французьку – 23 учні, німецьку – 21 учень, англійську та французьку – 12 учнів, англійську та німецьку – 8 учнів, французьку та німецьку – 7 учнів, всі три мови - 5 учнів.

Варіант № 3

1. У вчителя 4 однакових групи з англійської мови і 3 однакових- з французької. Кожен день він готовиться до однієї мови і проводить заняття в одній групі. Скількома способами він може вести таку підготовку?

2. Садівник протягом трьох днів має посадити 10 дерев десяти різних сортів. Скількома способами він може розподілити за днями свою роботу?

3. У поштовому відділенні продаються листівки 10 сортів. Скількома способами можна купити в ньому 12 листівок?

4. Скільки існує різних нескоротних дробів, чисельниками і знаменниками яких є числа 2, 3, 4, 5, 6, 7, 11, 13, 17, 19?

5. З цифр 1, 2, 3, 5, 6, 8, 9 утворюють різні п’ятицифрові числа, які не мають однакових цифр. Визначити кількість чисел, у яких зустрічаються цифри 6 і 8 одночасно.

6. Скількома способами можна роздати 6 різних предметів трьом особам так, щоб кожна отримала по 2 предмети?

7. У спортивному клубі займаються 38 осіб. З них 16 грають у баскетбол, 17 – у хокей, 18 – у волейбол. Баскетболом і хокеєм захоплюється 4 особи, баскетболом і волейболом – 7, волейболом і хокеєм – 5. Скільки осіб захоплюється одночасно хокеєм, баскетболом і волейболом? Скільки осіб захоплюється лише одним із цих видів спорту?

Варіант № 4

1. Скількома способами можна видати 15 учням:

а) 15 різних варіантів білетів;

б) 5 білетів першого варіанта, 5 – другого, 5 – третього?

2. Скількома способами можна розділити 6 різних цукерок між трьома дітьми?

3. Скількома способами можна розташувати 12 різних деталей у трьох однакових ящиках?

4. Збори, на яких присутні 40 чоловік, обирають голову, секретаря і трьох членів комісії. Скількома способами це можна зробити?

5. Для учнів класу було куплено 20 білетів у театр на місцях, що знаходяться в одному ряду (на якому 20 місць). Скільки є способів розподілу цих білетів між учнями (10 хлопців та 10 дівчат), щоб два хлопця або дві дівчини не сиділи поруч?

6. Десятьох тенісистів мають розподілити на групи по 2, 3 і 5 спортсменів для поїздки на три турніри, які обираються з 6 можливих. Скількома способами це можна зробити?

7. Знайдіть кількість цілих додатних чисел, що не більше 1000 і не діляться на жодне з чисел 3, 5 і 7.

Варіант № 5

1. Скільки різних кілець, що світяться, можна утворити, розмістивши по колу 10 різнокольорових лампочок (кільця вважати однаковими, якщо послідовність кольорів одна й та сама)?

2. На дев'яти картинках записані цифри 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 (на кожній картці по одній цифрі). Беруть чотири катки і складають з них чотирицифрове число. Скільки різних чисел можна отримати таким чином?

3. Скільки існує трикутників, довжини сторін яких мають одне з таких значень: 4, 5, 6, 7 см?

4. Скільки різних правильних нескоротних дробів можна скласти з чисел 2, 5, 7, 11, 15, 17, 19, 23, 25 так, щоб у кожен дріб входило два числа?

5. Скільки п'ятицифрових чисел можна утворити з цифр 2, 3, 6, 7, 8 (без повторення) так, щоб парні цифри не стояли поруч?

6. Скількома способами можна розкласти 28 різних предметів у чотири однакові ящики так, щоб у кожному з них опинилося по 7 предметів?

7. Знайти кількість цілих додатних чисел, що не більше 1000 і не діляться на жодне з чисел 6, 7 і 15.

Варіант № 6

1. Скільки різних бус можна зробити з 15 різних бусинок?

2. Скільки різних трицифрових натуральних чисел можна скласти з цифр 1, 2, 3, 4, 5, щоб у ньому кожна з цих цифр зустрічалась не більше одного разу?

3. З лабораторії, у якій працює 25 чоловік, 5 співробітників мають поїхати у відрядження. Скільки може бути різних складів цієї групи?

4. Із 12 тенісистів і 6 тенісисток формують три змішані пари (до пари входять по одному тенісисту й одній тенісистці). Скількома способами це можна зробити?

5. На книжковій полиці вміщується тринадцять томів енциклопедії. Скількома способами їх можна розставити так, щоб томи 1 і 2 стояли поруч?

6. У турнірі беруть участь 12 шахістів. Визначити кількість різних розкладів першого туру (розклади вважаються різними, якщо вони відрізняються учасниками; колір та номер столу не враховується)

7. Знайти кількість цілих додатних чисел, що не більше 9000 і не діляться на жодне з чисел 12, 36 і 52.

Варіант № 7

1. Учасники шахового турніру грають у залі, де є 8 столів. Скількома способами можна розмістити 16 шахістів, якщо учасники всіх партій відомі?

2. Скільки трицифрових чисел можна утворити з дев’яти цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9?

3. Скільки можна побудувати різних прямокутних паралелепіпедів, довжини ребер яких виражають натуральними числами від 1 до 10?

4. У вищій лізі чемпіонату України з футболу грають 16 команд. Скільки існує способів розподілення І, ІІ, та ІІІ місця та вибору двох команд які перейдуть у першу лігу (дві останні команди)?

5. З цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 утворюють різні п’ятицифрові числа, що не мають однакових цифр. Визначити кількість чисел, у яких зустрічається цифри 5, 3, 4 одночасно, якщо вони не стоять поруч?

6. У шаховому турніру беруть участь 18 шахістів. Визначити кількість різних розкладів першого туру (розклади вважаються різними, якщо вони відрізняються учасниками, колір та номер столу не враховується).

7. Знайти кількість цілих додатних чисел, які змінюються від 101 до 1000 та діляться рівно на два з чисел 3, 6 і 7.

Варіант № 8

1. З букв розрізаної абетки складено слово «конус». Скільки «слів» можна отримати, якщо переставляти букви у цьому слові?

2. Скільки різних чотирицифрових чисел можна скласти з цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 так, щоб у кожному з них була цифра 1? (Цифри в числі не повинні повторюватися).

3. Із групи до складу якої входять 8 хлопчиків і 3 дівчинки, треба сформувати команду з 6 чоловік. Скільки існує способів формування такої команди?

4. Скільки можна скласти різних неправильних нескоротних дробів, чисельниками і знаменниками яких є числа 3, 5, 7, 9, 11, 13, 17, 27?

5. Скількома способами можна переставити букви в слові «обороноздатність», щоб дві букви «о» не стояли поряд?

6. П'ять учнів мають підготовити 10 докладів на семінар (кожен по два). Скількома способами вони можуть розподілити доклади між собою?

7. Студенти ІОТ факультету обов'язково знають хоча б одну мову програмування. Відомо що PASCAL – знають 15 учнів, FORTRAN – 26, C++ - 37, PASCAL та FORTRAN – 11, PASCAL та C++ - 10, PASCAL та FORTRAN – 13; C++, PASCAL та FORTRAN – 7 студентів. Скільки усього студентів на факультеті? Скільки з них знають тільки по одній мові програмування?

Варіант № 9

1. Скількома способами можна розставити 4 однакових книжки з алгебри і 5 різних з геометрії так, щоб усі книги з геометрії стояли разом?

2. У класі тридцять учнів. Скількома способами можна серед них вибрати старосту та його заступника?

3. Скільки наборів з 10 цукерок можна скласти, якщо у продажу їх 6 сортів?

4. На площині дано три точки: A, B, C. Проведемо через точку A 5 прямих, через B- 3 прямих, через C- 7 прямих. Причому у сукупності ці прямі є прямими загального положення, тобто жодні дві з них не паралельні і жодні три з них не перетинаються в одній точці (крім точок A, B, C), а також немає прямих, що проходять через дві з цих трьох точок. Знайти кількість трикутників, вершини яких є точками перетину цих прямих і не збігаються з точками A, B, C.

5. З цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 утворюють різні шестицифрові числа, що не мають однакових цифр. Визначити кількість чисел, у яких зустрічаються цифри 6 та 8 одночасно, але вони не стоять поруч.

6. У групі 20 чоловік. Їх необхідно поділити на п'ять коаліцій, в яких повинно бути 3, 3, 3, 4 та 7 чоловік. Скількома способами це можна зробити?

7. У класі навчається 40 учнів. Із них мають трійки з англійської мови 16 учнів, з математики – 12, з фізики – 18. Мають трійки з фізики та англійської мови – 11 учнів, з математики та англійської мови – 8, з математики та фізики – 6. А 7 учнів мають трійки по всім цим предметам. Скільки учнів навчаються без трійок з цих предметів? Скільки мають лише по дві трійки з цих предметів?

Варіант № 10

1. Скількома способами можна розставити

а) 10 різних книжок на полиці;

б) якщо серед них є 5 однакових?

2. З команди у якої 10 плавців, вибирається четвірка, яка бере участь в естафеті з комплексного плавання (тобто кожен пливе своїм стилем). Скількома способами можна вибрати цю естафетну четвірку?

3. Скількома способами можна розташувати 12 різних ручок у чотири однакові пенала?

4. На футбольний турнір треба послати збірну команду в складі: тренер, його помічник, 2 асистенти, 20 футболістів, лікар і 2 масажисти. Тренерський склад може бути відібраний з 10 фахівців, футболісти - з 25 спортсменів, лікаря треба вибрати одного з трьох, а масажистів – двох з п'яти. Скількома способами може бути укомплектована така команда?

5. З цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 утворюють різні шестицифрові числа, що не мають однакових цифр. Визначити кількість чисел, у яких зустрічаються цифри 7, 8 одночасно.

6. У групі 21 студент. Їх необхідно поділити на три коаліції по 7 осіб. Скількома способами це можна зробити?

7. На базі відпочинку знаходиться 70 осіб. З них 27 займаються в драматичному гуртку, 32 співають у хорі, 20 захоплюються спортом. Драмгурток відвідують 10 осіб з хору, а хор – 6 спортсменів, у драмгуртку 8 спортсменів; 3 спортсмени займаються і в драмгуртку, і в хорі. Скільки осіб не співають у хорі, не захоплюються спортом та не займаються у драмгуртку? Скільки осіб займається лише одним з цих гуртків?

Варіант № 11

1. Скількома способами можна розставити 12 стрільців: а) к 12 мішеням; б) 5 к перший мішені, 4 – к другій, 3 – к третій?

2. Із групи, що складається з 15 чоловік вибирають чотирьох учасників естафети 800х400х200х100 м. Скількома способами можна розставити спортсменів на етапах такої естафети?

3. Скількома способами можна вибрати 5 олівців з 11 різних?

4. Ліфт, у якому знаходиться 9 пасажирів, може зупинятись на десяти поверхах. Пасажири виходять групами по два, три і чотири чоловіки. Скількома способами вони можуть вийти, якщо ліфт не повертається на поверх, де він уже був?

5. На книжковій полиці вміщується одинадцять томів енциклопедії. Скількома способами їх можна розставити так, щоб томи 3 і 4 не стояли поруч?

6. Чотири садовода повинні висадити 14 різних дерев. Перший – 3 дерева, другий – 4 дерева, третій – 2 дерева, а четвертий останні дерева. Скількома способами вони можуть розподілити ці дерева між собою?

7. Під час дослідження читацьких смаків студентів виявилось, що 60% читають журнал А, 50% - журнал В, 50% - журнал С, 30% - журнали А і В, 20% - журнали В і С, 40% - журнали А і С, 10% - журнали А, В і С. Скільки відсотків студентів: а) не читає жодного журналу; б) читає тільки 2 журнали; в) читає не менше двох журналів?

Варіант № 12

1. В дитячому садку 10 хлопчиків. Скільки є способів одягнути їх в новорічні костюми:

а) якщо є 10 різних костюмів;

б) є 2 костюми зайців, 5 - ведмежат і 3 - білочок.

2. Скільки різних чотирицифрових чисел можна скласти з цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, якщо кожну з них використовувати при записи числа лише один раз?

3. У вазі стоїть пронумеровані 10 червоних і 5 рожевих гвоздик. Скількома способами можна вибрати з вази три квітки?

4. У чемпіонаті України з футболу грає 18 команд. Скількома способами можуть розподілити місця, якщо відомо, що команди «Динамо», «Дніпро», «Шахтар», «Чорноморець» і «Таврія» займуть перші п’ять місць?

5. Скількома способами можна поділити 15 однакових цукерок між п’ятьма дітьми?

6. Дванадцять атлетів треба розподілити на 2 групи по 3 атлета, та 3 групи по 2 атлета для змагань на різні дистанції, при цьому кожна з цих груп може поїхати на змагання в одне з трьох можливих міст. Скількома способами можна розподілити атлетів на необхідні групи та для кожної з них вибрати місто для змагання?

7. На одній з кафедр університету працює 13 чоловік, кожен з яких знає хоча б одну іноземну мову. 10 чоловік знають англійську, 7 – німецьку, 6 – французьку, 5 – англійську та німецьку, 4 – англійську та французьку, 3 – німецьку та французьку. Скільки чоловік: а) знають всі три мови; б) знають тільки дві мови; в) знають лише англійську?

Варіант № 13

1. Чоловік протягом 14 днів мати був прочитати 14 журналів, причому в день він читав лише один журнал. Скількома варіантами він міг прочитати всі журнали?

2. Скільки різних трицифрових натуральних чисел можна скласти з цифр 1, 2, 3, 4, 5 за умови, що в кожне число входить цифра не більше одного разу?

3. Скількома способами можна вибрати трьох чергових із класу, в якому навчається 20 учнів?

4. Скількома способами можна розділити 6 різних іграшок та 5 різних книжок між 3 дітьми?

5. Скількома способами можна поділити 9 однакових яблук та 6 однакових груш між трьома чоловіками?

6. П’ять учнів вирішили написати всі необхідні 15 білетів, яки пропонував викладач на екзамен з філософії. При цьому кількість написаних кожним з них білетів розподілили так – перший має написати 4 білета, другий – 3, третій – 2, четвертий – 1, п’ятий – 5. Скількома способами можна розподілити таким чином всі білети між ними?

7. Скільки чотирьохзначних чисел діляться хоча б на одне з чисел 12, 8?

Варіант № 14

1. Скільки різних «слів» можна скласти з слова: а) «січень»; б) «автомат».

2. Скільки різних шестицифрових чисел можна утворити з восьми цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, так щоб у кожному з них була одна цифра 5 та цифри не повторювались?

3. З 10 пронумерованих білих і 8 пронумерованих червоних троянд треба скласти букет, який мав би п’ять квітів. Скількома способами це можна зробити?

4. У речовій лотереї розігрується 8 предметів. Усього в «урні» 50 квитків. Виймається 5 квитків. Скількома способами їх можна вийняти так, щоб тільки два з них були виграшні?

5. Скількома способами можна поділити 8 однакових ручок між чотирма учнями так, щоб у кожного з них було хоча б по одній?

6. У класі 18 учнів. Для проведення контрольної роботи вчитель повинен кожному з них видати один з чотирьох варіантів. Перший варіант получили 4 учня, другий – 6 учнів, третій – 5 учнів, а четвертий – останні учні класу. Скількома способами учні цього класу могли получити варіанти завдання до контрольної роботи?

7. З колоди взяті 5 карт, які занумеровані числами 1, …,5. Скількома способами можна розкласти їх у рядок так, щоб ні одна карта з номером і не займала і-є місце?

Варіант № 15

1. Скількома способами можна розставити а) 15 чоловік в шеренгу; б) 5 червоних, 3 зелені и 4 сині кубика в ряд?

2. Скільки різних п’ятицифрових чисел можна утворити з семі цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7?

3. На площині 12 точок розміщенні так, що жодні три з них не лежать на одній прямій. Скільки прямих можна провести через ці точки?

4. З лабораторії, у якій працює 25 чоловік, 5 співробітників мають поїхати у відрядження. Скільки може бути різних складів цієї групи, якщо начальник лабораторії і головний інженер одночасно їхати не можуть?

5. Скількома способами можна поділити 10 зошитів у клітку та 12 зошитів у лінійку між шістьома студентами так, щоб по одному зошиту у клітинку та по одному зошиту у лінійку було у кожного?

6. В гуртожиток необхідно поселити у три двомісні кімнати, та чотири трьохмісні кімнати 18 дівчат. Скількома способами можна розподілити дівчат у кімнати, якщо має значення тільки хто з ким буде в однієї кімнаті?

7. У бібліотеці усього 40 різних книг з математики, в яких можуть бути розділи за темами першого, другого та третього семестрів з курсу „Вища математика”. У 28 книгах є інформація за перший семестр, у 24 – за другий, у 15 – за третій; у 18 – за перший та другий, у 11 – за перший та третій, у 9 – за другий та третій; у 7 – за усі семестри. Скільки книг з математики не містять інформації з курсу вища математика? Скільки книг містить інформацію лише за перший семестр?

Варіант № 16

1. Скільки різних «слів» можна скласти з слова: а) «грудень»; б) «робота».

2. Розклад на день містить 4 уроків. Визначити кількість таких можливих розкладів при виборі з 8 дисциплін.

3. Група складається з 10 осіб. Скільки є способів відправити на екскурсію чотирьох осіб з цієї групи?

4. Із групи, до складу якої входять 7 хлопчиків і 4 дівчинки, потрібно сформувати команду з 6 осіб так, щоб вона мала не менше двох дівчат. Скільки існує способів формування такої команди?

5. Скількома способами можна розділити виріб 8 однакових деталей з латуні та 6 однакових деталей зі сталі на трьох станках, які можуть виробляти обидва ці типи деталей, якщо хоча б по одній з цих деталей повинен зробити кожен зі станків?

6. Скількома способами можна розділити 13 різних цукерок на 3 кучки по три цукерки, та одну кучку з чотирьох цукерок?

7. До університету прийшли п'ять вчителів, які читають кожен свій предмет: фізику, хімію, математику, інформатику, історію. Диспетчерська склала розклад занять на один день по одній парі з цих предметів навмання для кафедри за фамілією вчителя, та навмання для деканату за назвою предмету. Скількома способами можна скласти такий розклад, щоб ні один з вчителів не попав на свій предмет?

Варіант № 17

1. Скількома способами можна розставити а) 10 учнів в колонну; б) 3 кубика и 7 пірамід в ряд?

2. У спортивному класі 15 чоловік займаються легкою атлетикою. На змагання необхідно відправити по одному спортсмену для кросу на 2, 5 та 10 км. Скільки способів вибору спортсменів з цього класу на ці змагання?

3. Чемпіонат, у якому беруть участь 16 команд, проводиться в два кола (тобто кожна з команд двічі зустрічається з кожною з решти команд). Визначити, яку кількість зустрічей має бути проведено.

4. Скількома способами можна вибрати 2 олівця і 3 ручки з 6 різних олівців і 8 ручок?

5. Скількома способами можна поділити 5 однакових сорочок та 4 однакових штанів між двома хлопцями?

6. Скількома способами можна розділити 12 різних цукерок між трьома дітьми, якщо самому старшому маємо дати 3 цукерки, середньому – 4, а самому молодшому - 5?

7. Підкидаються три гральні кістки. Скільки може бути варіантів таких, щоб не виповнилась жодна умова: 1) на всіх кістках випали трійки; 2) на всіх кістках випали попарно різні числа; 3) рівно на однієї з них випала одиниця?

Варіант № 18

1. Скількома способами можна розставити на дошку з 16 квадратів а) 16 різних фішок, так щоб кожна була одна в своєму квадраті; б) якщо серед них було 5 червоних, 5 чорних та 6 білих?

2. На олімпіаду необхідно представити по одному учню за дисциплінами: фізика, математика, хімія, біологія. У класі 20 чоловік. Скількома способами можна вибрати з них для олімпіади, якщо відомо, що Іванов обов'язково повинен там бути?

3. Необхідно сховати у однакові 4 шафи (тобто немає значення порядок шаф) 6 дітей, при цьому всі шість вони можуть розміститися і в одному з них. Скількома способами це можна зробити?

4. У вазі стоять пронумеровані 10 червоних і 5 рожевих гвоздик. Скількома способами можна вибрати з вази три квітки так, щоб були як червоні, так і рожеві гвоздики?

5. Садівникові необхідно посадити 7 груш, 8 яблунь та 4 вишні у двох садах. Скільки варіантів може бути такої посадки, якщо хоча б по одному дереву кожного виду він повинен посадити у кожному саду?

6. Скільки різних варіантів розподілу10 спортсменів на пари для ігри у теніс?

7. Відомо, що телефонний номер з 6 цифр не ділиться на жодне з чисел 3, 6, а також не має цифри 0. Скільки різних таких номерів телефону може бути?

Варіант № 19

1. Скільки різних «слів» можна скласти з слова: а) «листопад»; б) «креслення».

2. Робочий має зробити за 5 днів 12 різних деталей. Для вироблення кожної з них достатньо 0,5 часу. Скількома способами робочий може розподілити за днями цю роботу?

3. Під час зустрічі 12 чоловік потиснули один одному руки. Скільки рукостискань було?

4. З 7 пронумерованих білих і 8 пронумерованих червоних троянд треба скласти букет, який мав би 2 білі та 3 червоні троянди або 3 біли та 2 червоні. Скількома способами це можна зробити?

5. Скількома способами можна поставити в ряд 7 хлопців та 5 дівчат так, щоб при цьому дві дівчини не стояли поруч?

6. Три робочих повинні зробити 10 різних деталей. Перший – 3 деталі, другий – 2, а третій – 5. Скількома способами вони можуть розподілити між собою роботу?

7. На заводі виробляються деталі трьох типів, яки потрібні для різних видів готової продукції. Відомо що для 50% готової продукції потрібні деталі першого типу, для 40% готової продукції потрібні деталі другого типу, для 35% - третього типу; для 26% готової продукції потрібні деталі першого та другого типу; 21% - першого та третього типу; 18% - другого та третього типу. Скільки відсотків готової продукції потребують всі три типа деталей?

Варіант № 20

1. Скільки різних «слів» можна скласти з слова: а) «книга»; б) «телевізор».

2. Скількома способами можна розділити 8 різних ручок між 4 учнями, якщо кожний з них може остатися і без ручки?

3. У лікарні 15 палат. Лікар веде п'ять з них. Скількома способами він може підібрати собі палати для лікування?

4. Скількома способами можна сформувати групу №1 з трьох учнів і одного викладача, якщо є 80 учнів і 3 викладача; чи групу №2 з п'яти учнів і двох викладачів, якщо є 20 учнів і 3 викладача?

5. Скількома способами можна по кругу поставити 5 різних ляльок та 3 різні м'які іграшки так, щоб при цьому м'які іграшки не стояли поруч?

6. Дев'ятьох студентів необхідно розподілити на три групи по 3 студента, для відправлення цих груп на різні конференції. Конференції проходять у різних п'ятьох містах, з яких необхідно вибрати три. Скількома способами можна відправити цих студентів на можливі конференції?

7. Лікар веде чотири палат з номерами 1,2,3,4. Скільки способів обходу лікарем палат так, щоб порядок заходу лікарем до палати не відповідав її номеру?

Варіант № 21

1. Скількома способами може бути а) утворена черга з 8 чоловік; б) складена матриця розміру (3x3), якщо в ній п'ять нулів, дві одиниці и дві двійки?

2. Скількома способами можна розділити 7 різних видів робіт між 5 робочими, якщо кожний з них може виконати і усі з них?

3. У лікарні 12 палат. Лікар повинен зайти в одну конкретну з них. Скільки способів того, що він не попаде в потрібну йому палату, якщо він заходить в п'ять навмання обраних?

4. У фортепіанному гуртку навчається 10 чоловік, у гуртку художнього слова - 15, у вокальному гуртку - 12 і у фотогуртку – 20 чоловік. Скількома способами можна сформувати трупу з чотирьох читців, трьох піаністів, п'яти співаків і одного фотографа?

5. Скількома способами можна розставити 9 різних книжок на полиці так, щоб дві задані книжки стояли поруч?

6. Два вчителя повинні розподілити між собою групу з 12 чоловік на дві підгрупи по 6 чоловік для проведення лабораторних робіт. Скількома способами вони це можуть зробити?

7. Скільки шестизначних чисел діляться хоча б на одне з чисел 24, 18? Скільки з них діляться рівно на одне з них?

Варіант № 22

1. Скільки різних «слів» можна скласти з слова: а) «сумнів»; б) «космос».

2. Скількома способами можна розподілити перших три місця між 8 учасниками змагання з художньої гімнастики?

3. Скількома способами можна купити у магазині 4 пачки сигарет, якщо на вітрині 10 різних видів?

4. На біржу фірма має відрядити двох брокерів, трьох дилерів і одного менеджера. Скількома способами це можна зробити, якщо до складу фірми входять 15 брокерів, 10 дилерів, і 5 менеджерів?

5. Скількома способами можна розподілити виріб 5 однакових деталей та інших 7 однакових деталей на двох станках, які можуть виробляти обидва ці типа деталей, якщо хоча б по одній деталі повинен зробити кожен зі станків?

6. Скількома способами можна розкласти 9 різних предметів у чотири однакових ящики так, щоб у трьох з них опинилося по 2 предмета, а в одному - 3?

7. Скільки чотиризначних чисел діляться хоча б на одне з чисел 2, 12, 16? Скільки з них діляться рівно на два з них?

Варіант № 23

1. Скількома способами можна а) розсадити 12 чоловік на 12 місць; б) повісити в шафу 5 однакових білих сорочок, 3 чорних и 7 синіх?

2. Асистент кафедри КН може читає 4 дисципліни, при цьому він повинен читати перших 3 пари протягом двох днів – вівторка та середи. Визначити кількість можливих його розкладів.

3. В університету 10 комп'ютерних залів. Студент забув у якому з них у нього пара. Скільки існує способів не попасти в потрібний йому зал, якщо він заходить в три навмання обраних?

4. У лотереї розігрується 12 призів. Усього 40 квитків. Виймається 4 квитка. Скількома способами їх можна вийняти так, щоб принаймні два з них були виграшні?

5. На двох дачних ділянках необхідно посадити 3 черешні, 5 яблунь та 6 абрикосів. Скільки варіантів може бути такої посадки, якщо хоча б по одному дереву повинно бути посаджено на кожній ділянці?

6. Скількома способами можна розділити 12 різних ручок на 3 набори по 4 в кожному, а потім ці набори поділити між трьома учнями, при цьому не обов'язково, щоб кожен учень отримав набір?

7. 70% людей люблять м’ясо, 50% - люблять молоко, 40% - люблять рибу. Хоча б один з цих продуктів люблять усі. М'ясо та молоко – люблять 43%, м'ясо та рибу – 36%, молоко та рибу – 28%. Скільки людей люблять усі три продукти?

Варіант № 24

1. Скільки різних «слів» можна скласти з слова: а) «таблиця» ; б) «тактика».

2. На міжвузівську конференцію необхідно представити п’ять студентів з доповідями з п’яти даних тем. У ЗНТУ після проведення відбору між студентами усіх факультетів було відібрано 12 кандидатів. Скількома способами серед них можна вибрати п’ятьох студентів для підготовки необхідних докладів з врахуванням розподілу тем?

3. Скільки можна побудувати різних прямокутників, довжини сторін яких виражаються натуральними числами від 1 до 7?

4. У вазі стоїть пронумеровані 12 червоних і 7 рожевих гвоздик. Скількома способами можна вибрати з вази п’ять квітів так, щоб усі вони були одного кольору?

5. Скількома способами можна переставити букви в слові «оборонятися», щоб однакові букви не стояли поряд?

6. Скількома способами можна розділити 10 різних чашок, та 10 різних тарілок на п’ять наборів по дві чашки та дві тарілки?

7. У гардероб здають пальта 5 осіб. Назад їм вертають пальта навмання. Скільки способів видачі пальт так, щоб не одне з них не дісталося господарю?

Варіант № 25

1. Скільки різних «слів» можна скласти з слова: а) «стілець»; б) «холодильник».

2. На конференцію необхідно представити три студента з докладами на три данні теми. У групі 11 чоловік. Скількома способами можна розподілити між ними ці доклади, якщо кожний студент не може робити більш одного докладу, а також Петров повинен зробити доклад обов’язково?

3. Скільки існує трикутників, довжини сторін яких мають одне з таких значень: 5, 6, 7, 8, 9 см?

4. Для привітання зі святом дівчат, яких у класі 10, хлопці вирішили купити по п’ять книг двох різних видів із 15, запропонованих видавництвом «Факт». Скільки існує різних способів отримання подарунків дівчатами?

5. Скількома способами можна поставити у колонну 8 чоловіків та 5 жінок так, щоб при цьому жінки стояли поруч?

6. В гуртожиток необхідно поселити у три двохмісні кімнати 6 дівчат, та три трьохмісні кімнати 9 хлопців. Скількома способами це можна зробити, якщо має значення тільки хто з ким буде в одній кімнаті?

7. У кіно продали 6 квитків з номерами місця. Люді займають ці 6 міст, але навмання. Скільки способів посадки людей так, щоб кожен з них не сидів на своєму місці?

Варіант № 26

1. На алеї у рядок саджають дерева. Скількома способами це можна зробити якщо: а) є 8 різних дерев; б) висаджують 5 берізок, 3 тополі, 2 каштани.

2. Скількома способами можна розділити 7 різних іграшок між 3 дітьми, якщо вони можуть остатися і без іграшок?

3. Скільки варіантів покупки 5 коробок цукерок, якщо в магазині є 7 різних видів?

4. Перший станок випустив 10 деталей з котрих 2 браковані, а другий станок випустив 15 деталей з 4 бракованими. Вибираємо станок и 5 деталей зроблених на ньому. Скількома способами можна здійснити цей вибір, щоб отримати рівно 2 браковані деталі?

5. Скількома способами можна по кругу поставити 3 учня першого класу та 5 учнів другого класу так, щоб всі учні першого класу стояли поруч?

6. У вазі стоять пронумеровані 14 червоних гвоздик. Скількома способами можна зробити з них три букета по три гвоздики, та один букет з п'яти гвоздик?

7. Студенти групи університету можуть мати читацький квиток чи перепустку до гуртожитку, хоча б одне обов'язково. Юнаків у групі 14; а студентів, які мають читацький квиток усього – 26. Дівчат з перепусткою стільки ж, скільки й юнаків з читацьким квитком, дівчат з читацьким квитком та перепусткою до гуртожитку було – 4. Скільки всього було студентів у групі?

Варіант № 27

1. Скільки різних «слів» можна скласти з слова: а) «тайфун» ; б) «піраміда».

2. Учень має чотири вихідних, протягом яких повинен зробити домашню роботу по 6 предметам. Скількома способами він може розподілити за днями виконання домашніх робіт по даним предметам?

3. У командировку необхідно відправити 7 чоловік. Скількома способами це можна зробити, якщо кандидатів – 21?

4. Перший станок випустив 10 деталей з котрих 2 браковані, а другий станок випустив 15 деталей з 4 бракованими. Вибираємо станок и 5 деталей зроблених на ньому. Скількома способами можна здійснити цей вибір, щоб отримати хоча б 2 браковані деталі?

5. Скількома способами можна переставити букви в слові «попередження», щоб однакові букви не стояли поряд?

6. Комісія складається з голови, та ще трьох відділів: перший по прийманню документів з двох чоловік; другий по проведенню письмового екзамену з чотирьох чоловік; третій по перевірці екзаменаційних робіт з трьох чоловік. На кафедрі 10 чоловік, скількома способами можна їх розподілити для утворення цієї комісії?

7. Знайти кількість цілих додатних чисел від 200 до 9000, які діляться рівно на два з чисел 16, 18, 15.

Варіант № 28

1. Викладач може перевірити контрольні роботі 12 студентів у різній послідовності. Скількома різними способами він може це зробити?

2. Скількома способами можна посадити алею з 12 дерев, якщо маємо по 15 дерев 4 видів?

3. Скільки наборів із 8 фруктів можна скласти, якщо у продажу їх 5 різних сортів?

4. Для хлопців, яких було 12, дівчата на 23 лютого вирішили купити ручки трьох різних видів по чотири кожного виду. Всього у магазині їм було запропоновано 10 різних видів. Скільки існує різних способів отримання подарунків хлопцями?

5. Необхідно зробити 18 карток по 6 кожного варіанту для написання контрольної роботі студентами першого курсу. Скількома способами може бути розподілена ця робота між трьома асистентами кафедри, якщо всі завдання на кожен варіант відомі?

6. Як можна розподілити 20 різних бусинок, для створення трьох бус: перше з 8, друге – з 7, та третє – з 5 бусинок?

7. Група з 8 осіб писала анкету без прізвищ. Скільки способів повернення цієї анкети так, щоб жодна особа не отримала своєї анкети?

Варіант № 29

1. Скільки різних «слів» можна скласти з слова: а) «плита»; б) «шоколад».

2. У змаганнях по футболу беруть участь 10 команд. Скількома способами можна розподілити перших п’ять місць між ними?

3. Скільки існує ромбів, довжини діагоналей яких мають одне з таких значень: 4, 5, 6, 7, 8, 9 см?
4. З колоди карт (36 штук) витягнули

4. Скільки варіантів того, що всі вони однієї масті, або одного пріоритету?

5. Необхідно розсадити 4 хлопців та 7 дівчат на один рядок з 15 міст в театрі. При цьому всі вони повинні сидіти підряд і так, щоб два хлопця не сиділи поруч. Скільки варіантів існує їх розсадити?

6. Скількома способами можна розставити 10 різних книжок на 2 полиці по 5 на кожну з них, з врахуванням розташування їх на полицях?

7. Дано 200 геометричних фігур. Відомо, що 150 з них мають усі прямі кути, 120 – мають однакові сторони, 87 – і однакові сторони і усі прямі кути. Скільки даних геометричних фігур не буде мати ці дві властивості? Скільки з цих фігур ромбів, які не є квадратами?

Варіант №30

1. Скільки різних «слів» можна скласти з слова: а) «автобус»; б) «конспект».

2. Скількома способами можна вибрати партнерів для танців для 6 дівчат, якщо є 9 хлопців?

3. На змаганні по тенісу виступає команда з восьмі чоловік. Всього у змаганні приймають участь 26 спортсменів. Скількома способами можуть бути розподілені місця, зайняті членами цієї команди, за умови, що жодне з них не може бути поділено, та немає значення, як місця будуть поділені між членами команди?

4. Скільки існує способів розсадити 14 чоловік за 10 парт обов'язково по 2 чоловіка за одну парту. Немає значення з якої сторони один від одного будуть сидіти люди за партою?

5. Скількома способами можна поділити 6 однакових столів та 10 стільців між чотирма аудиторіями, щоб у кожній з них було хоч би по одному столу та одному стільцю?

6. З 9 пронумерованих білих і 10 пронумерованих червоних троянд треба скласти 5 однокольорових букетів: три по 3 білих троянд, та два по 5 червоних. Скількома способами це можна зробити?

7. У класі навчається 35 учнів. Усі вони у вільний час або плавають у басейні, або грають на скрипці, або працюють у ботанічному саду. 25 осіб займаються ботанікою, а 5 займаються усім. Один учень з класу не грає на скрипці і не любить ботаніку, а двоє його друзів – ботаніки не вміють плавати, але добрі скрипалі. Скільки в класі скрипалів?

Завдання №2. Написати програму, яка дає можливість вибору з 6 варіантів комбінацій, а саме розміщення без повторень та з повторенням, сполучення без повторень та з повторенням, перестановки звичайні та з повторенням елементів. При кожному виборі далі реалізувати:

1) введення натуральних чисел n та k, а в останньому випадку чисел $k, n_1, n_2, \dots, n_k$ (для перестановок з повторенням);

2) виведення обраних комбінацій, а також кількості отриманих комбінацій, тобто підрахувати числа $A_n^k, \overline{A_n^k}, C_n^k, \overline{C_n^k}, P_n, P(n_1, n_2, \dots, n_k)$ у відповідності до зробленого вибору типу наборів на екран.

РОЗДІЛ 4. ТЕОРІЯ ГРАФІВ

Ви, мабуть, чули, що таке «граф»? Хтось десь, там, колись… Це точки, це лінії між точками… щось таке…

Насправді графи – це досить потужний засіб візуалізації процесів. Те, що можна спростити до того, що вам важливе і досліджувати саме те, що вам важливе шляхом розглядання малюнків. Адже людський мозок, як ми пам'ятаємо, він дуже пристосований до розглядання малюнків і розпізнавання того, що там робиться.

Застосовується теорія графів усюди: хімічні процеси, кристалографія, теорія прийняття рішень, комбінаторні оптимізації, діаграми Фейнмана у фізиці, транспортні задачі, логістичні задачі, компілятори тощо. Саме те, що це дуже просто… що там може бути складного? Ну точки, ну лінії між точками (рис. 4.1).

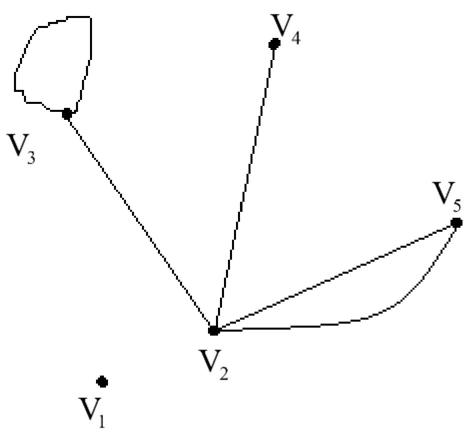


Рис. 4.1. Приклад графу

– можна трактувати як міста і дороги,

– можна трактувати як обчислювальні елементи на електронній платі і зв'язки між ними,

– можна трактувати як ваш родовід: пам'ятаємо множину людей і відношення батьківства до синівства тощо…

Іноді виникає думка, що це дуже просто… щось на рівні школярів… наступні лекції я спробую зробити так, щоб ви переконались в іншому – що теорія графів – це досить потужна математика.

Знову таки… коли ми розпочинаємо вивчати нову тему – ми розпочинаємо з:

1) з означень – 2) способів представлення – 3) операції – це все ми за цю лекцію встигнемо – а потім – 4) те, що з цим всім можна робити.

4.1. Неорієнтований граф

Означення. Неорієнтованим графом ми називаємо впорядковану пару з двох множин V та E: $G = \langle V, E \rangle$, де $V \neq \varnothing$ (*це не порожня множина*), яку ми назвемо «множиною вершин» (Чому V? Тому, що «вершина» англ. vertex). А множина $E \subseteq V^{(2)}$ – це множина невпорядкованих пар вершин, яку ми звемо «ребра» – множина ребер (ребра – англ. edge).

Символ $V^{(2)}$ (якщо у вас просто V^2 – це декартовий добуток – це множина впорядкованих пар); якщо ми ділимо її відношенням розпорядкування (тобто пари (b, a) та (a, b) будемо вважати одним і тим самим), то буде відношення розпорядкування. Тому ми кажемо, що цей граф неорієнтований, тому що якщо дві вершини поєднані ребром, то нам не важливо в який бік (це для нас однакова ситуація). *Потім у нас будуть орієнтовані графи – нам це буде важливо*.

(*Дописуємо назви вершин*) Це в нас якісь вершини: V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, – і якісь ребра. Бачимо: тут у нас є ізольовані вершини, є парні ребра, є петлі – є всі ситуації. Всі ці означення будемо вводити, коли вони нам знадобляться.

Насправді таких графів можна класифікувати багато. Ми будемо досліджувати найпростіший випадок.

4.2. Типи графів та їх узагальнення

1) Простий граф – це граф, який не має парних ребер. На рис. 4.1 – непростий граф, бо там є два ребра, що поєднують одні і ті ж самі вершини; в простому графі це забороняється.

Говорячи формальною мовою: в звичайному графі «$\subseteq$» може бути «мультимножиною», у простому графі це просто множиною – воно забороняє повторне використання ребер.

2) простий граф без петель (*як це випливає з його назви?*) – це простий граф, який додатково не має таких петель (як на *на рис. 1*), тобто ребра, які виходять і входять в одну і ту ж саму вершину в ньому забороняються.

3) Псевдограф – це граф, який має петлі. І він, в залежності від контексту, може бути простим або непростим.

Далі… нічого не сказали про множину вершин, нічого не сказали про множину петель… Для нас це якийсь довільні множини, окрім того, що множина вершин повинна бути не порожня. І відповідно, якщо множина вершин є скінченною, то множина ребер є скінченною, то ми кажемо, що граф є скінченним, тобто його можемо обмежити навіть візуально – за допомогою візуалізації.

4) Скінченний граф: (*якщо потужність* $<\infty$*, то це є скінченне натуральне число)* $|V|<\infty, \quad |E|<\infty$.

В інших випадках ми кажемо, що цей **граф є нескінченним**.

Тобто це може бути граф, в якому нескінченна кількість вершин, наприклад, всі натуральні числа; може бути граф, в якому нескінченна кількість ребер – якщо дозволити нескінченну кількість ребер, то їх можна вибирати нескінченну кількість.

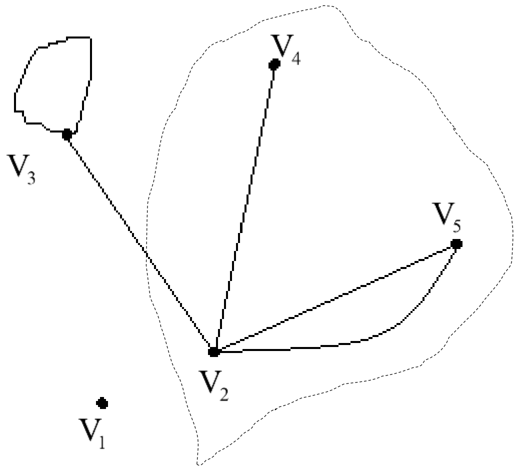


Рис. 4.2.1. Приклад мультиграфу

5) Мультиграф – це граф, в якому дозволяються парні ребра, а також дозволяються так звані «сукупні вершини».

Сукупна вершина – це множина вершин, яка розглядається як окрема вершина.

Скажімо, я можу взяти ці 3 вершини – і розглядати їх як одну (рис. 4.2.1). Але насправді то не 1 вершина, а множина вершин.

Відповідно там є певні засоби. Така ситуація виникає, коли, наприклад, розв'язуємо задачі класифікації: у вас є множина об'єктів, потім ви їх поєднуєте у певні класи і зв'язки між цими об'єктами вони скупочуються у зв'язки між класами. Тоді та ситуація… оператор мультиграфів природнім чином розглядається.

І тут, якщо казати формально, множина ребер є підмножиною і розглядаємо невпорядковані пари таких множин: $\mathrm{E} \subseteq \left(2^{\mathrm{V}}\right)^{(2)}$.

І нарешті…

6) Гіперграф – це конструкція, в якій ребро не є поєднанням пари вершин, а є поєднання трійки вершин, четвірки вершин, п'ятірки вершин тощо (ребра поєднують k вершин, де $\mathrm{k} \geq 3$). Тобто це певне узагальнення, яке зветься «гіперплощиною». Там ми виходимо в n-вимірний простір, там ребро – це багатомірна площина, яка поєднує ці вершини. І зрозуміло: $E \subseteq V^{(k)}$, – множина ребер представляється як підмножина впорядкованих k-тов.

Приклад гіперграфа. Берете кубик Рубика, його грані – це ребра гіперграфа. Адже кожна сторона поєднує 4 вершини.

Далі ми будемо розглядати лише скінченні прості графи без петель (якщо не буде наголошено іншого, але я тоді буду наголошувати).

Уявили собі «безмежний всесвіт» теорії графів? ☺

4.3. Способи представлення графів

Два способи у нас уже тут фігурують, але я їх витру ☺

1) Явний спосіб. Граф – це пара множин: V, E. Кожну множину можна подати у явному вигляді. Особливо, якщо це скінченний граф.

Наприклад, у вас буде граф $\mathrm{G} = \langle \mathrm{V}, \mathrm{G} \rangle$, що складається з пари множин V та E: $\mathrm{V} = \{\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}, \mathrm{d}\}$, $E = \{(a,b),(a,c),(b,d),(b,c)\}$ – тут просто перелічуються пари вершин, які поєднуються ребрами.

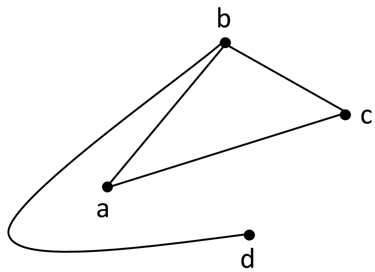


Рис. 4.3.1. Графічний спосіб представлення графа

2) Графічний спосіб. Тобто, я беру і малюю діаграму для графа $G = \langle V, G \rangle$: позначаю 4 вершини, заіменовую їх, і потім малюю ті ребра, які вказані у E: $E = \{(a,b),(a,c),(b,d),(b,c)\}$ (рис. 4.3.1).

Як малювати ребра? Як завгодно. Аби вони поєднували задані вершини.

Ребро (b,d) я намалювала ось так (як зображено на рис. 4.3.1), тому що якби я сполучила вершини b і d прямою, то таке ребро перетнуло б ребро (a,c) – і може виникнути хибна думка, що тут є вершина. Тому краще такого не робити.

Зрозуміло, якщо ми пронумеруємо першини в інший спосіб, то одержимо іншу картину для того самого графа. У картинках нас ніхто не обмежує.

А **якщо** у нас **графи щільні**, тобто вони містять багато ребер, тоді списки суміжності будуть великі і незручні, – тому, що це множини.

Множина – це не самий ефективний математичний об'єкт для комп'ютерної реалізації. А матриця суміжності як була $n \times n$, так і залишається $n \times n$. І працювати з нею такий самий час, як і для розріджених графів.

Щільні графи – це … *а яка взагалі максимальна кількість ребер у простому графі без петель з* n *вершин?* … У нас є n *вершин, нам потрібно поєднати пари вершин ребрами… скільки можливих пар вершин у вас існує?* C_n^2 ($|E| \to C_n^2$). **Граф є щільним, коли кількість його ребер дещо завелика (близька до максимального)**.

Але знов таки. Те, що ми сказали – це практичне спостереження, але це не догма. Знов таки… це залежить від того, які саме алгоритми роботи над графами ви використовуєте, які саме задачі розглядаєте.

Яка є перевага у матриці суміжності над списками суміжності?

Якщо вам потрібно перевірити чи поєднані ребром дві задані вершини, то матриця суміжності – ви просто дивитеся у відповідну комірку і все: там стоїть чи 0 або 1. Тобто ця перевірка є дуже швидкою. А в списках суміжності вам потрібно: переглянути всю цю множину – і знайти там вашу вершину. Якщо вона там є, то вони поєднані, якщо ні, то не поєднані. Тобто для такої задачі матриця суміжності краща.

Але, якщо у вас стоїть задача: знайти всі вершини, з якими ваша вершина поєднана ребрами, то навпаки: список суміжності надає одразу всі такі вершини – берете їх послідовно. А матриця суміжності: треба переглядати весь рядок – і дивитися чи там є 0 чи 1. Тобто тут уже буде операція більш складною, ніж при роботі зі списками суміжності.

Приклади графів

Потрібно ввести деяку кількість графів, якими ми будемо користуватися і які ви повинні знати. І заодно покажемо, що таке граф.

1) порожній граф

Граф називається порожнім, якщо він взагалі не має ребер.

Він має спеціальне позначення: $\mathrm{N_n}$ і складається з множини вершин і порожньої множини ребер – $\mathrm{N_n} = \langle V, \varnothing \rangle$.

Візуально він виглядає дуже просто (рис. 4.3.2): він має 5 вершин і жодного ребра.

Рис. 4.3.2. Граф $\mathrm{N_5}$

2) Повний граф – (це протилежність) це граф, який має всі можливі ребра.

Він також має спеціальне позначення: $\mathrm{K_n} = \langle \mathrm{V}, \mathrm{V}^{(2)} \setminus 2v \rangle$[1].

Оскільки ми розглядаємо графи без петель, то всі петлі ми з множини $V^{(2)}$ (V *у 2-ому дужковому степені*) виключаємо.

Наприклад, граф $\mathrm{K_5}$ … у вас повинно бути 5 вершин (рис. 4.3.3)

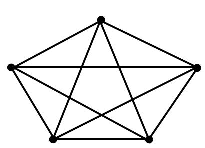


Рис. 4.3.3. Граф $\mathrm{K_5}$

І всі вони повинні бути поєднані ребрами. Проте намалювати цей граф, щоб у ньому ребра не перетиналися, не можливо. Тобто, як його не малюй, – якісь ребра все одно будуть перетинатися. Тому в такому випадку вершини варто виділити жирнішими.

[1] $\mathrm{V}^{(2)}$ – це множина невпорядкованих пар, які ми трактуємо як «можливі ребра»

3) Простий ланцюг – це граф $\mathrm{P}_\mathrm{n} = \langle V, E \rangle$,

в якому множина вершин (ми їх нумеруємо від 1 до n-ї) – $V = \{v_1 \dots v_n\}$,

а множина ребер – (це просто пара (v_i, v_{i+1}), де i пробігає значення від 1 до $\mathrm{n}-1$) – $E = \{(v_i, v_{i+1}) \mid i = \overline{1, n-1}\}$:

Тобто, перша вершина поєднана з 2-ю, 2-га з 3-ю, 3-тя з 4-ою, 4-та з 5-ою і т.д.

Ну і візуалізація (рис. 4.3.4) – це знов таки, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 – і вони поєднані ребрами.

v_1, v_2, v_3, v_4, v_5

Рис. 4.3.4. Граф P_5

Чому він називається «ланцюг»? Візуально зрозуміло…

4) Простий цикл – це граф, що складається з n-вершин: $C_\mathrm{n} = \langle V, E \rangle$, де $V = \{v_1 \dots v_n\}$,

$$E = \{(v_i, v_{i+1}) \mid i = \overline{1, n},\ v_{n+1} \equiv v_1\}.$$

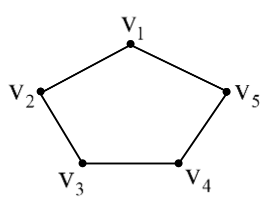


Рис. 4.3.5. Граф C_5

Простий цикл виглядає якось так: цикл, тому, що він круглий.

5) Граф, який зветься «**колесо**». Позначається: $\mathrm{W}_\mathrm{n} = \langle V, E \rangle$. Зауважте: колесо з номером n – це граф на $n+1$-ій вершині, тобто $V = \{v_0, v_1, \dots, v_n\}$. А ребра у нас бувають двох типів: $E = \{(v_i, v_{i+1}), (v_0, v_i) \mid i = \overline{1, n},\ v_{n+1} \equiv v_1\}$

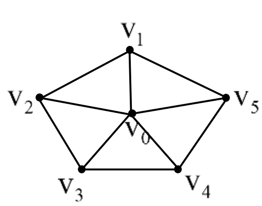


Рис. 4.3.6. Граф W_5

Маємо 6 вершин для колеса W_5. А, якщо я намалюю ребра не відрізками, а дугами – це буде, справді, колесо (рис. 4.3.6).

Знову ж таки… бачите, що рис. 4.3.6. зрозуміліший, ніж запис у п. 5, тому графи є таким потужним засобом.

Отже, ми визначили: що таке граф, як його можна подати. Тепер потрібно визначити, що з цим можна робити.

По-перше, визначимо поняття «підграф».

Підграф $G_1 \subseteq G_2$ *(будемо позначати підграф так само, як підмножини: символом «включення»; і кажемо, що граф* G_1 *є під графом графа* G_2 *тоді та тільки тоді, коли множина вершин графа* G_1 *є підмножиною множини вершин графа* G_2*, а множина ребер графа* G_1 *є підмножиною множини ребер графа* G_2*, але лише таких, які дозволяються; щоб у вас не було ситуації, коли у вас вершини a та b і ребро* (b, c)*, що ось за таким визначенням:* $E_1 \subseteq E_2$ *буде коректним, але це не буде граф (тобто у мене є* E_1 *– ребра можуть бути лише з цієї множини –* $V_1^{(2)}$ *– і, якщо це буде підмножина* E_2 *– це буде підграф))* $\Leftrightarrow (V_1 \subseteq V_2) \& (E_1 \subseteq E_2 \cap V_1^{(2)})$.

І, відповідно, поняття «підграфа» дозволяє нам ввести певний «**універсальний граф**», в якому ми будемо виконувати алгебраїчні операції. І таким графом, зазвичай, є **повний граф** K_n **, тобто граф, у якому є всі вершини і всі ребра, які ми можемо побудувати**.

Ще для нас цікаві так звані «кістякові підграфи».

Кістяковий підграф (*рос*. остовной («остов» – каркас) підграф; *англ*. spanning *(накриваючий)* subgraph; *укр. може бути «кістяковий», «каркасний», … (пів десятка назв)*) – це підграф, який містить всі вершини нашого графу G_2, але не всі ребра.

Ми кажемо, що G_1 **є кістяковим підграфом** G_2**, якщо** $V_1 = V_2$ (множини вершин у них співпадають), **і, відповідно,** $E_1 \subseteq E_2$ (множина ребер E_1 є підмножиною ребер E_2).

4.4. Алгебраїчні операції над графами

Оскільки граф – це пара множин, то логічно, що можна операції над множинами поширити на графи. Саме це ми зараз і зробимо.

1) Об’єднання графів.

Скажемо, що граф G є об’єднанням графів G_1 та G_2, якщо множини вершин V – це буде об’єднанням вершин V_1 *та* V_2**, а множина ребер** E **– це буде об’єднанням множин ребер** E_1 *та* E_2:

$G = G_1 \cup G_2 \Leftrightarrow V = V_1 \cup V_2, E = E_1 \cup E_2$.

2) Перетин графів.

$G = G_1 \cap G_2 \Leftrightarrow \begin{cases} V = V_1 \cap V_2, \\ E = E_1 \cap E_2 \cap V^{(2)} \end{cases}$ *($\cap V^{(2)}$ – щоб не вийти за межі визначення графа, щоб у нас не з'явилися у перетині ребра, яких не має у множині пар першин).*

3) Різниця графів.

Існує два способи визначити різницю графів. І, коли ви будете читати джерела, ви повинні обов'язково дивитися що саме під терміном «різниця графів» розуміється.

<u>По-перше</u>, ми кажемо, що граф G є різницею графів G_1 та G_2:

$G = G_1 \setminus G_2 \Leftrightarrow \begin{cases} V = V_1 \setminus V_2, \\ E = (E_1 \setminus E_2) \cap V^{(2)} \end{cases}$ **(** $E = (E_1 \setminus E_2) \cap V^{(2)}$ *– множина ребер є різницею множин ребер* E_1 *та* E_1 *в межах допустимого***).**

Тобто в цьому визначенні під різницею ми розуміємо: взяти граф G_1 і викинути з нього все, що пов'язане з графом G_2: всі вершини, всі ребра, всі ребра, що зв'язували вершини.

<u>Друге визначення різниці.</u>

Якщо у нас графи G_1 та G_2 визначені на одній множині вершин ($V_1 = V_2$), то різниця графів – це буде просто різниця множини ребер:

$$G = G_1 \setminus G_2 \Leftrightarrow \begin{cases} V = V_1, \\ E = E_1 \setminus E_2 \end{cases}.$$

Підкреслимо: це не одне і те ж саме визначення. За альтернативою – це два різних визначення фактично двох різних операцій.

Поміркуйте: якщо в 1) – визначення підставити $V_1 = V_2$, то G буде порожньою множиною (оскільки в нього множина вершин порожня). А в 2) – ні. І іноді потрібно використовувати таку – 1) операцію, іноді – таку: 2). Потрібно дивитися, що саме під «різницею графів» розуміє автор.

З 2-го визначення різниці графів випливає означення «доповнення до графа».

4) Доповнення до графа.

Кажемо, що $\overline{G}$ є доповненням до графа G: $\overline{G} = \left\langle V, V^{(2)} \setminus (E \cup vv) \right\rangle$, (тобто це та сама множина вершин V, окрім тих, що входять у множину G).

Звісно, що доповнення – це буде різницею повного графа K_n та G (через другий спосіб).

Наступна операція, яка зветься «сума графів» або «сполучення графів» або «поєднання графів».

5) Сума графів.

$\mathrm{G} = \mathrm{G}_1 + G_2 \Leftrightarrow \begin{cases} V = V_1 \coprod V_2 \\ E = E_1 \cup E_2 \cup V_1 \times V_2 \end{cases}$ ($V = V_1 \coprod V_2$ – сума визначена для графів, які не мають спільних вершин (тобто об'єднання цих двох множин повинне бути диз'юнктним – вони не повинні мати спільних точок. Чому? За визначенням!), *бо якщо вони мають спільні вершини, то все йде погано*); (множини ребер об'єднуються і додаються всі можливі ребра між вершинами V_1 та V_2 – зараз я їх записала, як декартовий добуток $\underline{V_1 \times V_2}$, але ви пам'ятаєте, що тут невпорядковані пари, тобто це всі можливі невпорядковані пари, в яких одна пара з множини $\underline{V_1}$, а друга – з множини $\underline{V_2}$).

Скажімо, беремо ми граф K_1. Що таке граф K_1?

Це точка. Повний граф з однієї вершини. Вершина одна, а ребер – жодного.

Беремо граф C_5. Це, як ми пам'ятаємо, ось такий цикл (рис. 4.4.1):

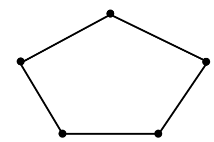


Рис. 4.4.1. Граф C_5

Що буде, якщо я додам граф K_1 до графа C_5:

$\mathrm{K}_1 + C_5 = \mathrm{W}_5$

Значить, ми повинні взяти граф C_5 повністю (рис. 4.4.1), ми повинні взяти граф K_1 повністю, а потім поєднати всі вершини графа K_1 з усіма вершинами графа C_5. Що отримаємо? Колесо (рис. 4.4.2).

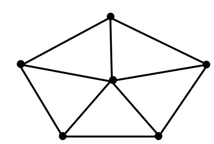


Рис. 4.4.2. Граф W_5

Візьмемо порожній граф N_n і порожній граф N_m. Що буде, якщо їх поєднати? Рис. 4.4.3

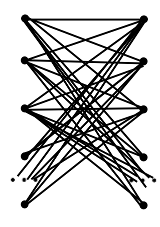


Рис. 4.4.3. Граф $\mathrm{K}_{\mathrm{n,m}} = \mathrm{N}_\mathrm{n} + \mathrm{N}_\mathrm{m}$

Розглянемо приклад: $N_3 + N_3$.

Маємо таку картинку: рис. 4.4.4. (перший граф N_3 – це у вас 3 будинки, другий граф N_3 – це у вас 3 криниці, а граф $N_3 + N_3$ – це всі можливі шляхи між будинками та криницями).

Називається він «повний двочастковий граф», але ми це ще введемо. Позначається – $K_{3,3}$.

А в попередньому випадку (рис. 4.4.3) – $K_{n,m}$.

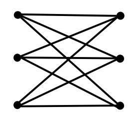


Рис. 4.4.4. Граф $K_{3,3} = N_3 + N_3$

І знов таки, намалювати в цьому випадку граф так, щоб ребра не перетинались, але неможливо.

Так ось… що буде, якщо від цієї суми ($K_{3,3} = N_3 + N_3$) відняти N_3?

Якщо розглядати різницю у другому сенсі, то нічого гарного не вийде. А якщо відняти у першому сенсі, то ми видаляємо всі вершини графа N_3 (другий доданок) і всі ребра, що його поєднують – одержимо перший доданок – N_3.

Тобто, якщо нам потрібно маніпулювати сумами, то тут різницю краще брати в першому сенсі.

Якщо вам потрібно маніпулювати з доповненнями, то тут різницю треба брати в другому сенсі.

В грубому смислі: $(G_1 + G_2) \setminus G_2 = G_1$ – в сенсі 3а). Але користуйтесь цим з обережністю.

Так…Там ще є декартовий добуток, доречі, але ми його зараз не буду вводити.

4.5. Алгоритмічні операції над графами

Те, що ми розглядали перед цим – це були алгебраїчні операції, тобто над графами як парами множин.

Є ще, так звані **«алгоритмічні операції» – це те, що ми можемо робити з графами в застосуванні певних процедур**.

По-перше, це може бути видалення вершин – ви берете і в графі знищуєте вершину і ребра, які з нею пов'язані.

1) видалення вершин (разом із інцидент ними ребрами), – тобто вершина не просто видаляється з графа, – вона видаляється з усіма ребрами, які з неї виходять.

Так само може бути операція «видалення ребра».

2) видалення ребра (взяли гумку і витерли це ребро з рисунку; вершини залишаємо), тобто видалення ребра **просто прибирає зв'язок, але не чіпає вершини**.

Відповідно є і зворотні операції – «внесення ребра».

3) внесення ребра (у вас були дві вершини – і ви між ними намалювали ребро) – так **додали до множини E ще одну пару**.

Може бути «внесення вершини».

4) внесення вершини (взяли і намалювали збоку ще одну точку – оце нова вершина вашого графа).

Якщо вам потрібно, щоб вона була з ребрами, то внесли вершину, а потім внесли потрібні ребра (бо ребра поєднують лише існуючі вершини).

Можна внести вершину у ребро

5) внесення вершини у ребро

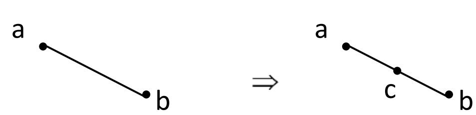


Рис. 4.4.5. Внесення вершини у ребро

Нехай у нас є ребро, що поєднує вершини a та b. А ми беремо і в його середині розташовуємо нову вершину c. І було одне ребро, а стало два ребра, поєднаних через вершину c (рис. 4.4.5).

То ось така операція називається «внесення вершини до ребра».

Далі… операція, яка називається «стягування ребра»

6) Стягування ребра

Дивіться (рис. 4.4.6): ось ребро – перша вершина і друга вершина. Беремо – і стягуємо.

Скажімо є у нас граф abcde. Я беру і роблю ось так (*проводжу ребро з вершини a до вершини c*). В що перетворюється граф?

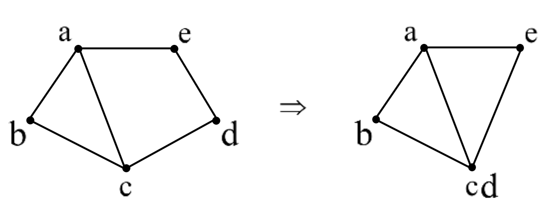


Рис. 4.5.1. Стягування ребра

Тобто ми видаляємо ребро *cd* – робимо *c* і *d* однаковою вершиною – і, відповідно, об'єднуємо ребра, які там є.

І одержуємо граф ось такий (рис. 4.4.6): тут буде вершина, яку умовно назву *cd* і ребра будуть ось такі: *ab*, *acd*, *ae*, *bcd*, *ac*, *ecd*.

Тобто вершина a не поєднувалася ребром з вершиною *d*, але вона поєднувалася ребром із вершиною *c*, тому ребро від *a* до *cd* залишається.

7) Ототожнення вершин – це стягування ребра, якого може не існувати.

Тобто ми беремо дві вершини нашого графу і кажемо, що вони співпадають. Тобто, якщо було стягування ребра – ми просто ребро зліплювали в одне ціле, а ототожнення двох вершин – взяли дві вершини – і сказали, що вона одна.

Наприклад. Візьмемо цей граф (рис. 4.5.2). Візьмемо вершини *b* та *e*. І ототожнимо їх. Ми повинні отримати 4 вершини: a, умовну вершину be, вершину c, вершину *d.*

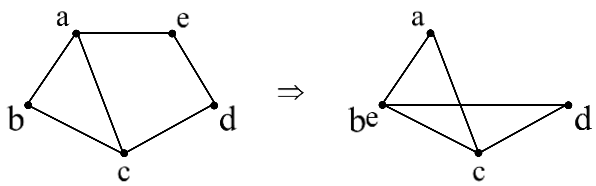


Рис. 4.5.2. Ототожнення вершини

Значить, всі ребра, які не стосувалися *b* та *e* залишаються. Тепер: вершина *b* була поєднана ребром із *a*, *b* була поєднана ребром із *c*. Це також залишається. *e* була поєднана ребрами із *a* та із *d.* І граф перетворюється на ось таку картинку (рис. 4.5.2). Ми практично взяли вершину *e* і перемістили на вершину *b* з усіма ребрами. (*– за резинучку потянули – і ось…одержали ось такий граф*)

Ось такі операції використовуються під час певних алгоритмічних застосувань графів, під час доведень певних теоретичних фактів. Коли нам чогось не вистачає, або щось зайве. Зайве можна прибрати. А того, чого не вистачає – ми будемо вносити.

Остання операція…

Для кожної вершини графу G ми вводимо поняття степеня.

8) Степінь вершини $\mathrm{v}\in \mathrm{V}$ – це просто кількість ребер, які виходять з цієї вершини або потужність відповідного списку суміжності: $\deg(\mathrm{v})=|\Gamma(v)|=\#\{u\in V \mid (u,v)\in E\}$.

Для степенів має місце дуже простий факт, але дуже значущий для теорії графів.

Я не казала, але вся теорія графів виникла як математична забавка Леонарда Ойлера, який сидів і думав: «а чи можна пройти по Кінесберських мостах так, щоб пройти кожен міст один раз?»

Лема (про рукостискання).

Теорію графів можна сформулювати так, що її зрозуміють першокласники. Лема про рукостискання – це один з таких прикладів. Якщо вас в лекційній аудиторії сидить… скільки? 97, наприклад. І ви, коли прийшли, – ви один одному потиснули руки… так загальна кількість потиснутих рук – хто б з ким там не потискав руки – вона завжди буде парною.

А, якщо формально, лема про рукостискання каже нам, що якщо в довільному графі G просумувати всі степені вершин, то ми одержимо подвійну кількість ребер:

$$\forall \mathrm{G} \sum_{\mathrm{v}\in \mathrm{V}} \deg(\mathrm{v}) = 2\cdot |E| .$$

Цей результат у нас очевидний.

Оскільки степінь – це кількість ребер, які виходять із заданої вершини. Якщо ви підрахуєте всі степені кожної вершини – і додасте, то ви одержите загальну кількість ребер. А при цьому кожне ребро було підраховане двічі: з одного кінця – і з іншого кінця. Тому це буде загальна кількість ребер, в якому кожне ребро підрахували двічі. Тобто $2 \cdot \textit{кількість ребер}$. *Кінець доведення. Лему про рукостискання довели. Це дуже просто. Але…*

Наслідок 1.

Скільки у вас може існувати вершин непарного степеня?

Чи може у вас бути граф з 11 вершинами, у яких всі степені непарні? …

Якщо у вас ось тут: $\sum_{v \in V} \deg(v)$, – 11 доданків і кожне з них непарне число – і ви це все додасте, то ви одержите непарне число.

А за лемою про рукостискання у вас повинна сума бути парна: $\sum_{v \in V} \deg(v) = 2 \cdot |E|$.

Тому **наслідок 1. В довільному графі кількість вершин непарного степеня є парною**.

Інакше ця сума: $\sum_{v \in V} \deg(v) = 2 \cdot |E|$, – не зійдеться.

Наслідок 2. Ми кажемо, що граф є k-регулярним, якщо всі його степені дорівнюють k, тобто із кожної вершини виходить однакова кількість ребер: $\forall v \in V \ \deg(v) = k$.

Скажімо, граф K_n є $(n-1)$-регулярним, тому що з кожної вершини виходить $(n-1)$-е ребро. Простий цикл є 2-регулярним, тому що з кожної вершини виходить по 2 ребра. А колесо взагалі не є регулярним графом, тому що з одних вершин виходить по 3 ребра, а з центральної – багато.

Так ось, <u>якщо у нас є k-регулярний граф на n-вершинах, то або k, або n є парним числом</u>. Чому це так? Припустимо, що обидва ці числа є k і n є непарними.

Тоді чому дорівнює ця сума: $\sum_{v \in V} \deg(v)$? Стосовно всіх степенів – всі степені дорівнюють k, доданків тут n, то ця сума буде: $n \cdot k$. Якщо обидва непарні, то і добуток їх непарний. А повинно бути парне! Протиріччя. …

4.6. Маршрути у графах

Продовжуємо дослідження графів. Ми вже з вами ввели означення графа, способи їх представлення, алгебраїчні та алгоритмічні операції.

А тепер те, що там є конструктивного, те, що нам потрібне.

Ми розглядаємо простий неорієнтований скінченний граф без петель: $G = \langle V, E \rangle$, – який має n-вершин та певну кількість ребер, де кожне ребро є невпорядкованою парою вершин: $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, $E \le V^{(2)}$.

Маршрутом (або шляхом) у графі (англ. walk, path, chain). Підкреслюю, що термінологія в теорії графів – вона трошки відрізняється: вітчизняна і закордонна.

Отже, маршрутом у графі ми називаємо скінченну послідовність вершин, де у вас кожні дві вершини на маршруті поєднані ребром у графі (рис. 4.6.1), тобто є суміжними: $\forall i\ \mathrm{v_i} \in V, (v_i, v_{i+1}) \in E$.

$$\mathrm{v}_1 \to v_2 \to \ldots \to \mathrm{v_m}$$

Рис. 4.6.1. Маршрут у графі

Це таке «страшне» визначення лише для того, щоб сказати, що якщо у вас є граф, а в ньому є якісь ребра, то маршрут – це просто шлях проходження по вашому графу в якомусь певному сенсі (рис. 4.6.2).

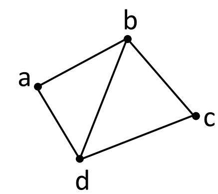


Рис. 4.6.2. Виділення маршруту у графі

Тобто, a→b→c→d→b→d→b→a (a переходить в b, b переходить в c і т.д.) – це маршрут. *Ми гуляємо ребрами нашого графа*.

А якщо, наприклад, ми хочемо зробити a→c (*a* переходить в *c*), то це не буде маршрутом, тому що в *a* та *c* не має ребра: a→c – не маршрут.

Відповідно довжина маршруту – це кількість ребер, які в ньому задіяні:

довжина маршруту = кількість ребер.

Якщо у вас якесь ребро повторюється, то воно рахується двічі.

Якщо у нашому прикладі ребро d→b і ребро d→b, то це два різних ребра на маршруті.

Далі… ми кажемо, що **маршрут є замкненим**, якщо в нього перша і остання вершина співпадають: $v_1 = v_m$.

Ланцюг (англ. *trail*) – це такий спеціальний маршрут, в якому немає повторів ребер.

Простий ланцюг – це ланцюг, в якому і вершини не повторюються, окрім, можливо, першої та останньої. Тобто ланцюг може бути замкненим. І це дозволяється.

Цикл – це замкнений ланцюг.

Простий цикл – це простий замкнений ланцюг.

Візьмемо якийсь приклад. Скажімо, такий граф на п'яти вершинах (рис. 4.6.3). І, якщо я побудую шлях d→c→b→a→c→e, то це буде ланцюг. Ланцюг довжини 5. Але є повторювана вершина *c*.

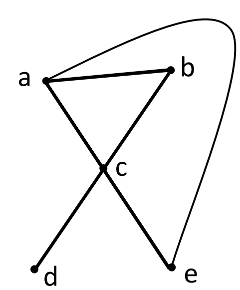


Рис. 4.6.3. Виділення ланцюга та простого ланцюга у графі з 5 вершин

Якщо я побудую щось на кшталт a→c→e, то це буде простий ланцюг, тому що і ребра всі різні, і вершини всі різні.

Якщо я потім ще добудую ребро з e→a: a→c→e →a, – одержимо простий цикл.

Чи є тут непростий цикл? Немає.

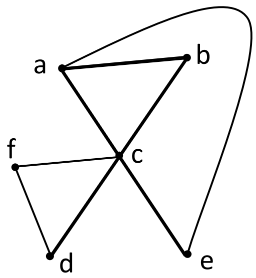


Рис. 4.6.4. Виділення циклу у графі з 5 вершин

Але, якщо я тут добудую вершину f і поєднаю її ребрами ось так (рис.4.6.4), то послідовність: d→f→c→b→a→c→d – це буде цикл, тому що ми починаємо з d (6), всі ребра різні, закінчуємо також у вершині d. Але у мене є повторювана вершина.

Тут поняття, які інтуїтивно зрозумілі, але їх є деяка кількість і ми ними будемо користуватися дуже часто, тому ви повинні розрізняти поняття «ланцюг» та «простий ланцюг».

Твердження.

Є деякі прості властивості, які (знову таки) інтуїтивно зрозумілі, але їх, формально кажучи, потрібно доводити.

От ми сформулюємо їх три.

Властивість 1.

Якщо у нас є маршрут від вершини v_i – до вершини v_j, то у нас існує вершин від v_j до v_i

. *Очевидно?*... Що це за маршрут? Потрібно всі вершини переписати у зворотному порядку. Оскільки у нас граф неорієнтований, то якщо є ребро від a→ до b, то є ребро b→a. *Для орієнтованих графів це буде невірне. Але про це поговоримо, коли у нас будуть орієнтовані графи.*

Властивість 2.

Якщо у нас існує маршрут з вершини v_i – до вершини v_j, то у нас існує простий ланцюг, який з'єднує ці вершини.

Тобто, якщо ми можемо хоча б якимось чином добратися до від однієї вершини – до іншої, то ми можемо це зробити не повторюючи ребра і навіть не повторюючи вершини.

Це ми зараз доведемо.

Властивість 3.

Довільний цикл розбивається у сукупність простих циклів. Скажімо, якщо ми розглянемо цикл (рис. 4.6.4), який ми намалювали: d→f→c→b→a→c→d, – то він розбивається у сукупність оцього цикла (d→f→c) і ось цього простого циклу (b→a→c). *Це ви будете самостійно доводити*.

Доведемо твердження 2.

- Нехай існує послідовність $v_i \to v_2 \to v_3 \to \ldots \to v_k \to v_t \to v_j$, тобто існує маршрут від v_i до v_j. І він пролягає через вершини v_2, v_3, v_4 і т.д.

Нехай цей маршрут не є простим ланцюгом. Тоді в ньому є, щонайменше, вершини, які повторюються.

І нехай це будуть вершини v_k, v_t. Тоді, якщо вершина v_k і вершина v_t – одна і та ж вершина, то навіщо мені робити ось цей перехід: $v_k \to v_t$? То ми будуємо відразу ось такий перехід:

$v_i \to v_2 \to v_3 \to \ldots \to v_k \to v_t \to v_j$.

Викидаємо ось цю частину: $\to v_t$.

А маршрут залишається маршрутом, тому що якщо тут є ребро $v_t \to v_j$, то й таке ребро:

$v_k \to v_j$ – існує. Тому, що це одна і та ж сама вершина.

Бачимо, що новий маршрут є коротшим, тобто ребер у ньому менше. І по-друге, ось ця пара повторюваних вершин: v_k, v_t – зникає, залишається лише одна з них.

Тобто ми замінюємо частину від $v_k \to \ldots \to v_{k+1}$ на одне ребро $v_k \to v_{k+1}$. І в новому маршруті кількість ребер менша і на 1 (одиницю) менше повторюваних вершин.

Якщо це знову непростий ланцюг, то в ньому знову існує пара повторюваних вершин. Ми знову можемо викинути частину маршруту, побудувавши нове ребро зв’язку. І знову повторюваних вершин стане менше. Так ми можемо повторювати доти, доки у нас не буде ситуація, коли всі вершини різні. А тоді це буде простий ланцюг.

Властивість 3 спробуйте довести самостійно… вона доводяться аналогічно. Але, знов таки, ви повинні викласти все це формально коректно.

Теорема (про степінь матриці суміжності).

Нехай у вас є скінченний простий без петель граф G і нехай A – це матриця суміжності цього графа: $G = \langle V, E \rangle$, $A = A_G$ – матриця суміжності (adjacency matrix). Матриця суміжності позначається – A_G, але я буду казати A, тому що в нас один граф G.

Нехай матриця A^k – це k-та степінь матриці суміжності, яка складається з елементів a_{ij}^k:

$A^k = \|a_{ij}^k\|$, $ij = \overline{1, n}$. Тоді ось це число a_{ij}^k – це кількість всіх <u>маршрутів</u> між вершиною v_i і вершиною v_j: $a_{ij}^{(2)} =$ кількість всіх маршрутів від v_i до v_j.

Підкреслюю, що це власне <u>маршрути</u>, тобто там можуть бути довільні повтори ребер і вершин, але кількість буде коректна.

Доведення.

Будемо доводити таке твердження за допомогою методу математичної індукції.

- Якщо $k=1$, то матриця A^1 – це таки матриця суміжності: $A^1 = \|a_{ij}\|$. І за визначенням матриці суміжності – що є її елементами?

Тобто $a_i = \begin{cases} 1, \text{якщо } \exists \text{ ребро } v_i \to v_j \\ 0, \text{якщо не існує} \end{cases}$

Але ж ребро – це є маршрут, довжиною 1.

Тому, де $k=1$ – ця матриця $A^1 = \|a_{ij}\|$ в точності описує кількість всіх маршрутів, довжини 1 між довільними вершинами.

Нехай твердження теореми справедливе для певного значення $\underline{k=m}$.

І розглянемо тоді маршрут, довжини $\underline{m+1}$ між двома заданими вершинами: $\underline{v_i}$ та $\underline{v_j}$.

Схематично зобразимо ось так:

$\underbrace{v_i \to \ldots \to v_t}_{m} \to v_j$, v_t – вершина з передостаннім номером (не важливо яким).

Якою може бути вершина v_t ? Будь-якою.

Тому загальна кількість маршрутів між ось цими вершинами: v_i та v_j – це кількість маршрутів від v_i – до v_t помножити на кількість маршрутів від v_t – до v_j .

А маршрут від v_t – до v_j – це або там є ребро, або там його немає.

Тому ми повинні розглянути всі можливі вершини v_t , які можуть бути передостанніми.

А передостанніми можуть бути довільні вершини. Ми повинні взяти кількість маршрутів від v_i – до вершини v_t і помножити їх на кількість маршрутів від v_t – до v_j , довжиною 1:

$$a_{ij}^{(m+1)} = \sum_{t=1}^{m} a_{it}^{m} \cdot a_{tj} \quad .$$

Але що це за формула? Це формула для множення матриць A^m та матриці A.

Бо в першому множнику ми пробігаємося по i-му рядку, а в другому множнику – по j-му стовпчику. Перемножуємо, додаємо. Повертаємо результат, який є з номером ij .

Тому, якщо у вас твердження справедливе для $k = m$, то воно буде справедливе для $k = m+1$, тому що там обчислюється загальна кількість маршрутів, довжини $m+1$. Звідси все випливає.

<u>Наслідок 1</u>.

Розглянемо матрицю $A^{\le k} = \left\| a_{ij}^{\le k} \right\|$, де $a_{ij}^{\le k}$ – елементи цієї матриці.

Ця матриця – це просто сума степенів матриці А: $A^{\le k} = \left\| a_{ij}^{\le k} \right\| = A + A^2 + A^3 + \ldots + A^k$.

Тоді що в нас буде елементом матриці $A^{\le k}$? Тобто що це за числа такі: $a_{ij}^{\le k}$?

А як ми додаємо матриці? (*вони всі однакові* $m \times m$). А в результаті що? Додаємо покоординатно… і що ми тут бачимо? Елемент a_{ij}: А – кількість шляхів, довжини 1, A^2 – кількість шляхів, довжини 2, A^3 – кількість шляхів, довжини 3, …, A^k – кількість шляхів, довжини k. А загалом? Довжина всіх шляхів, довжина яких не перевищує k.

Тобто $a_{ij}^{\le k} =$ кількість шляхів, довжини $\le k$.

<u>Наслідок 2</u>.

Теорема залишається справедливою, якщо ми дозволяємо петлі та парні ребра. Тобто для псевдо графів та мультиграфів. Просто в цьому випадку для псевдографів ми повинні ставити 1 на діагоналі (тобто це буде шлях з вершини в вершину, довжиною 1), а для мультиграфів ставимо не 1, а кількість ребер, що поєднує дві задані вершини: якщо там 2 ребра, то ставимо 2, якщо 3 ребра, то ставимо – 3. А ось це доведення (теореми) залишається справедливим. Причому досимвольно. Це дуже зручно.

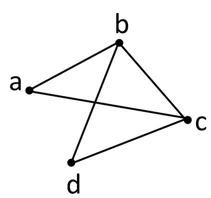


Рис. 4.6.5. Приклад графу

Давайте розглянемо певний <u>приклад</u>.

Візьмемо ось такий граф (рис. 4.6.5). Яка в нього буде матриця суміжності?

$$A = \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$ – матриця суміжності простого графа без петель

Хочу я обчислити кількість всіх маршрутів, довжини 2.

Ця матриця має бути симетричною, тому, записавши перший рядок, ми можемо записати перший стовпчик. З а виходить 2 ребра, тобто в (a,a) – двійка – це власне маршрут a$\to$b$\to$a і a$\to$c$\to$a.

$$A^2 = \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Скажімо в (a, d) також повинно існувати 2 маршрути: a→b→d і a→c→d. І так само для будь-якого іншого елементу. Тобто тут кожне число одержане шляхом перебору певних шляхів з попередніх матриць. (у нас лише одна попередня матриця)

Скажімо, цікавлять нас всі маршрути, довжиною 3 з a в d: $\mathrm{a}_{\mathrm{ad}}^{(3)}$. Якщо нас цікавить лише одна пара вершин, то необов'язково обчислювати всю матрицю з a в d. Тоді я беру перший рядок у матриці A^2 і четвертий стовпчик у матриці A (*обвести їх у матрицях*) – і перемножую їх: $\mathrm{a}_{\mathrm{ad}}^{(3)} = 2$. Тобто маємо, що $\exists$ лише 2 маршрути з a в d, довжиною 3.

Кажемо, що вершина v_{i} досяжна з вершиною v_{j}, якщо існує маршрут, який починається у v_{j} і закінчується – у v_{i}: $\mathrm{v}_{\mathrm{j}} \to .... \to v_i$. Тобто досяжність – це просто можливість почати в одній вершині і, проходячи ребрами графу, завершити шлях у іншій вершині.

Матриця досяжності графу G: D_G – це квадратна $n \times n$-матриця, елементи якої є нулями (0) та одиницями (1): $D_G = \left|d_{ij}\right|$. 0 – якщо вершини не досяжні; 1 – якщо вони досяжні.

Знову скористаюся дужками Айверсона (бо так коротше): $\deg = \left[\mathrm{v}_{\mathrm{j}}\ \textit{досяжна з}\ \mathrm{v}_{\mathrm{i}}\right].$

Що таке є «матриця досяжності» з алгебраїчної точки зору? Оскільки матриця суміжность, то вона визначає певне бінарне відношення на множинах – відношення сусідства. І в матриці суміжності стоять 1 на парах з'єднаних вершин, 0 – на парах не з'єднаних вершин.

Відповідно «матриця досяжності» – це транзитивне замикання цього відношення.

Зауваження. Якщо у вас матриця суміжності (A_{G}) визначає відношення сусідства на вершинах, тоді матриця досяжності (D_G) є <u>транзитивним замиканням</u> цього відношення.

Чому це транзитивне замикання?

Якщо у вас є ребро з a в b і ребро з b в c, то за транзитивним замиканням у вас повинно бути ребро (a, c). Так? Ми не малюємо ребро, ми просто кажемо, що існує такий маршрут.

Потім, якщо з c є маршрут у d, то існує маршрут з a в d. І так ми розгортаємо, розгортаємо, розгортаємо… поки можемо.

Для неорієнтованих графів у нас відношення сусідства є симетричним. Потім ми робимо транзитивне замикання – одержимо транзитивність.

Так ось. Якщо у вас – вже це псевдограф, де на кожній вершині є петля, або це граф, у якому немає ізольованих вершин, – то в нас ось це транзитивне замикання створює відношення еквівалентності. Воно розбиває вершину на підмножини, всередині якої кожна вершина досяжна з кожною іншою.

А коли ми розглядаємо графи з ізольованими вершинами, то там дуже незручно. Там є підмножина вершин, які досяжні і є ось ці окремі точки, які не є досяжними. Так іноді для того, щоб уніфікувати підхід просто за визначенням кажуть, що «кожна вершина досяжна сама із себе, шляхом довжини 0 (*ми стоїмо на місці – оп – ми досягли*)». І тоді D_G буде не просто транзитивним, а буде рефлексивно-транзитивним замиканням. Бо навіть, якщо в мене немає петлі з *a* в *a (a – ізольована вершина)*, то вона є досяжною. Там все одно з'являється 1 на діагоналі. Але це не завжди. Тому пишемо так:

(чому, якщо ізольована, то не буде еквівалентності? Тому, що якщо подивитися на це відношення, то воно не буде рефлексивним; воно буде симетричним, транзитивним, але воно не буде рефлексивним, тому що не має там пар (a,a)*;*

А чому ми не можемо зробити замикання (a,a)*? Можна, але це не буде ось ця операція… її (ось цю рефлексивність) потрібно внести у визначення цієї операції;*

А в псевдо графах обов'язково існують петлі для всіх вершин? Ні, але про це було сказано раніше. Так, що в псевдографі петля є на кожній вершині)

Тобто часто для уніфікації вважають, що кожна вершина є досяжною сама із себе, тоді D_G – це завжди буде відношення еквівалентності. Це відношення еквівалентності ми його називаємо «відношення досяжності».

Приклади

Є у вас такий граф (рис. 1).

Тоді виділені вершини є досяжними одна з одною, тому що

Існує маршрут між ними.

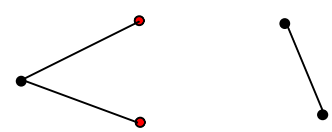
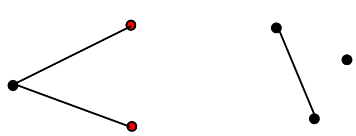


Рис. 1

Ці дві вершини (чорна вершина навпроти червоної вершини) не є досяжними, тому що не існує маршруту між ними.

Якщо у мене ще є ізольована вершина (рис. 2), то вона може вважатися досяжною сама із себе, а може не вважатися – в залежності від контексту.



І знов таки, це треба дивитися яке саме визначення використовується.

Рис. 2

<u>Теорема</u>. Беремо матрицю суміжності графу G : нехай $\mathrm{A}=\mathrm{A}_{\mathrm{G}}$, – і беремо суму всіх її степенів до $(n-1)$-го.: $C=A^0+A^1+\ldots+A^{n-1}=\left\|C_{ij}\right\|$. (*Що таке матриця* A^0*? З точки зору лінійної алгебри? Це одинична матриця. Тобто це матриця, яка створює нам рефлексивність*). І розглянемо матрицю: $\mathrm{D}=\left\|\mathrm{d}_{\mathrm{ij}}\right\|$, де $d_{ij}=\lfloor c_{ij}=0\rfloor$,– матриця D, яка формується за таким принципом: якщо у вас елемент $c_{ij}=0$, то і $d_{ij}=0$. А, якщо $c_{ij}\neq 0$, то ставимо 1.

Тоді ця матриця $\mathrm{D}\equiv\mathrm{D}_{\mathrm{G}}$ – це і буде матриця досяжності графа G .

(Ще раз: беремо обчислюємо степені матриці суміжності до $(n-1)$-го. Додаємо. Дивимося що одержали: якщо одержали не 0 – ставимо 1, якщо одержали 0, то ставимо – 0. Те, що вийшло – це буде матриця нулів та одиниць. І теорема стверджує, що це і буде матриця досяжності графу G . Тобто вона в точності опише, які вершини є досяжні, які ні. Між якими існує маршрут, між якими не існує). Зрозуміло?

Доведення

Доведення насправді досить просте, хоча виглядає дуже страшно.

Якщо у вас вершини досяжні, то між ними існує маршрут. Якщо між двома вершинами існує маршрут, то між ними існує простий ланцюг (ми це доводили). А скільки може бути вершин у простому ланцюгу? (у вас у простому ланцюгу вершини не повторюються). У графі у вас n-вершин. Перша і остання можуть повторюватися, тому всередині буде не більше, ніж $(n-1)$-на. Тому довжина простого ланцюга, який поєднує дві вершини не може перевищувати n (строго менше, ніж n). Тому не більш, ніж $(n-1)$. Тому ми просто обчислюємо кількість всіх маршрутів довжини 1, довжини 2, довжини 3, …, довжини $(n-1)$, – додаємо; і окремо ще обчислюємо нульовий степінь – це досяжність вершини самої з себе – для ізольованих вершин. І, якщо ми одержали не 0, то у вас існує якийсь маршрут, довжини не більш, ніж $(n-1)$. Тому ці вершини є поєднані. *Так? Тепер пишемо.*

<u>Якщо вершина v_{i} досяжна з v_{j}, то $\exists$ маршрут між цими вершинами, а тому $\exists$ простий ланцюг між цими вершинами.</u>

<u>Довжина вашого незамкненого простого ланцюга $\leq \mathrm{n}-1$, якщо у вас перша і остання вершини не співпадають. Якщо співпадають, то це окремий випадок: ми одразу фіксуємо, що ізольовані вершини не досяжні.</u>

$\leq \mathrm{n}-1$, тому що всі вершини повинні бути різними. Там максимум n вершин, тому найбільша кількість ребер – $(n-1)$. Звідси випливає твердження теореми (я його навіть писати не хочу… всі розуміють?).

Доведено

Приклад: граф відношення дружби на студентах потоку ФІКТ. 150 вершин… ☺

Це не самий ефективний спосіб обчислення матриці досяжності. Чому? Взагалі кажучи ось тут: $C = A^0 + A^1 + ... + A^{n-1} = \|C_{ij}\|$ – ми обчислимо загальну кількість маршрутів, не більш, ніж заданої довжини. Але мене не цікавить загальна кількість маршрутів. Мене цікавить наявність хоча б одного маршруту. Якщо такий маршрут $\exists$, то можна далі вже нічого не обчислювати. Тому я можу звести ось це обчислення матриці D: $\mathrm{D} = \|\mathrm{d}_{\mathrm{ij}}\|$, де $d_{ij} = \lfloor c_{ij} = 0 \rfloor$, – з арифметичних операцій у логічну.

Розглянемо дві $\mathrm{n} \times \mathrm{n}$*-матриці*. Нехай A, B – $\mathrm{n} \times \mathrm{n}$-матриці, яких елементи є 0 ата 1. І введемо альтернативну суму та альтернативне множення цих матриць.

Альтернативна сума для нас – це логічне «або» і ми його вводимо поелементно: $\mathrm{A} \vee B = \|a_{ij} \vee b_{ij}\|$.

Ось альтернативне множення – це буде якась матриця С: $\mathrm{A} \,\&\, \mathrm{B} = \mathrm{C} = \|c_{ij}\|$. Тут треба формулу для добутку матриць переписати у логічних операціях: $c_{\mathrm{ij}} = \bigvee_{t=1}^{n} \left(a_{it} \,\&\, b_{\mathrm{tj}}\right)$ – (*це буде сума по всіх* t *від 1 – до* n a_{it} *на* b_{ti} *).*

Дивіться, коли ми, скажімо, обчислюємо степінь $\mathrm{A}^{\mathrm{n-1}}$ – це було $\mathrm{A}^{\mathrm{n-2}} \cdot A$. Ми б обчислювали кількість всіх шляхів до однієї вершини – і множили ні кількість всіх шляхів до кінцевої вершини. Але, якщо мене не цікавить кількість всіх шляхів. Мене цікавить лише досяжність. То дві вершини є досяжними, якщо між ними існує хоча б 1 вершина, що перша досяжна до цієї вершини – і ця досяжна до кінцевої. $c_{\mathrm{ij}} = \bigvee_{t=1}^{n} \left(a_{it} \,\&\, b_{\mathrm{tj}}\right)$ – *і* досяжна з t, t досяжна з j. Ставимо логічне “&”, щоб це були одночасні умови. А потім я просто перебираю всі можливі вершини, бо мене цікавить наявність хоча б однієї такої вершини.

Тобто маємо

Теорема. $\mathrm{D}_{\mathrm{G}} = A^0 \vee A^1 \vee \ldots \vee A^{n-1}$.

Чи можна просто обчислити матрицю досяжності, якщо просто у формулі: $C = A^0 + A^1 + ... + A^{n-1} = \|C_{ij}\|$ – замінити всі арифметичні операції на логічні.

Що буде простіше?

Візьмемо штат Windows і процесор. Операція додавання регістрів займає, умовно, 10 тактів. Операція логічного «або» – 1 такт. Коли ви підносите матрицю до степеня – там числа множаться, множаться, множаться… – вони все ростуть, ростуть, ростуть… І самі арифметичні операції – із ростом довжини числа – стають все складнішими і складнішими. А тут: $\mathrm{D}_{\mathrm{G}} = A^0 \vee A^1 \vee \ldots \vee A^{n-1}$ – ніякого росту не відбувається. Воно все, знов таки, за 1 такт.

Більш того в регістрах в нас 32 біта або 64 біти. Можна ці операції робити пачками. Тобто паралельно 64 логічні «або» на біта.

Так ось. Формула: $C = A^0 + A^1 + \ldots + A^{n-1} = \|C_{ij}\|$ – це ще не самий оптимальний шлях обчислення матриці досяжності. Можна ще швидше.

<u>Алгоритм Уоршелла</u>. Він буде виглядати незвично. Але на виході ви одержите матрицю досяжності. І я спробую вам пояснити чому.

Отже, на вході в алгоритм у нас повинен бути граф G, представлений його матрицею суміжності ($\mathrm{A_G}$). *Тобто граф для цього алгоритму представляється у вигляді матриці суміжності.*

На виході ми маємо послідовність матриць: $\mathrm{W}_0, W_1, \ldots, W_n$, де n – це кількість вершин у графі і, відповідно, розміри матриці суміжності. Де матриця $\mathrm{W}_0 = A_G$ (матриця W_0 – це буде матриця суміжності графа), а матриця $W_n = D_G$ (матриця W_n – це буде матриця досяжності графа).

<u>Алгоритм.</u>

1. Присвоїмо матриці W_0 значення A_G: $\mathrm{W}_0 = A_G$.

2. Пробігаємо всі індекси матриць W: для всіх k від 1 до n.

3. Потім пробігаємо всі індекси елементів матриць W: для всіх i від 1 до n.

4. для всіх j від 1 до n.

5. І виконуємо таку операцію: $W_k[i, j] =$ (*я буду позначати елементи в програмістському стилі; це i, j-ий елемент матриці W_k*). Треба взяти: $W_k[i, j] = W_{k-1}[i, j] \vee (W_{k-1}[i, k] \,\&\, W_{k-1}[k, j])$ **–** *основний рядок цього алгоритму.*

Тобто 2-4 – потрійний цикл *for*. Його потрібно пробігти. Обчислити 5. І, якщо мені потрібна рефлексивність; а в графі можуть бути ізольовані вершини, то наприкінці просто проставляємо на діагоналі одинички:

6. $\mathrm{W_n} = \mathrm{W_n} \vee E$, де Е-одинична матриця.

Добре. Давайте розбиратися що тут відбувається.

Це весь алгоритм.

Він справді виглядає дивно (як «чорна магія»), але це тому, що ви не знаєте алгоритм Беллмана-Форда, який дізнаєтеся потім

Починаємо розбір ось цієї формули: $W_k[i, j] = W_{k-1}[i, j] \vee (W_{k-1}[i, k] \,\&\, W_{k-1}[k, j])$.

Якщо $W_{k-1}[i,k]=0$, тобто вершина k з вершини *i* не є «досяжною». То $W_k[i,j]=W_{k-1}[i,j]\vee(W_{k-1}[i,k]\&W_{k-1}[k,j])$ перетворюється у $W_k[i,j]=W_{k-1}[i,j]$. Тобто для заданого *i*, для якого $W_{k-1}[i,k]=0$ і для всіх j (це стовпчик) ми просто стовпчик матриці переписали у нову матрицю. Так?

Якщо $W_k[i,k]=1$, то там формула буде такою: $W_k[i,j]=W_{k-1}[i,j]\vee(W_{k-1}[i,k]\&W_k[k,j])$, – тобто це буде елемент з попередньої матриці або (ось це $W_k[i,k]=1$, тому його можна опустити… 1*на що завгодно=що завгодно): $W_k[i,j]=W_{k-1}[i,j]\vee W_k[k,j]$. І, якщо це розглядати як досяжність, то ми одержимо ось тут: $W_k[i,j]$, – що елемент j буде досяжний з *i*; або, якщо він був досяжний раніше, або, якщо він досяжний через вершину $W_k[k,j]$. Тобто тут: $W_k[i,k]=1$ – маємо маршрут з *i* до k, а тут: $W_k[k,j]$ – маємо або не маємо маршруту з k до j.

<u>Чому за цим алгоритмом швидше?</u>

Скільки потрібно виконати операцій, щоб виконати піднесення матриці до степеня? Множення 2 квадратних матриць… скільки операцій?

Ви повинні для обчислення одного елементу перемножити рядок на стовпчик – це буде n-множників.

Скільки у вас елементів? n^2. Тому обчислення добутку двох матриць – це буде n^3-операцій.

У вас матриць від нульової – до $(n-1)$-ої. Кожна матриця може обчислюватися шляхом множення від попереднього. Але їх n, тому загальна кількість операцій, які ви виконаєте буде n^4.

А тут (за алгоритмом) – n^3. У вас потрійний *for.* Кожний *for* робить n-операцій. Тобто $\mathrm{n}\cdot\mathrm{n}\cdot\mathrm{n}$-операцій за *for.*

<u>Чи є швидший алгоритм?</u> Поки-що ні. Алгоритм Уоршелла прискорюється за рахунок реалізації. Тобто це все рівно бітові операції – їх можна пачками – регістрами виконувати… тобто там лінійне прискорення.

Так ось.

<u>Теорема</u>. Матриця W_k – це буде матриця досяжності графу G, якщо обмежити всі проміжні вершини на шляхах лише вершинами від першої – до k-тої. І не чіпаючи всі інші вершини. (*ми обмежуємо всі проміжні вершини на маршрутах лише вершинами з множини* w_1*,* w_2*, …,* w_k*; і, відповідно, коли ми дійдемо до матриці* w_n*, то там будуть всі можливі проміжні вершини, тобто це будуть всі можливі маршрути, які ми розглядаємо. Тому це буде матриця досяжності.*)

Так ось. Доведення цієї теореми.

Матриця W_0 – це фактично матриця суміжності: $W_0 = A_G$ – і вона описує нам наявність маршрутів без проміжних вершин, тобто: початок, кінець, 1 ребро (жодних проміжних вершин).

Тобто я можу сказати, що це: $W_0 = A_G$ – є досяжність без проміжних вершин.

Матриця W_1 *(знову дивіться на 5-ий рядок алгоритму… $k=1$: і ми перевіряємо чи можемо ми з вершини v_i дійти до вершини v_1 ($W_k[i, j]$)*; а потім – чи можемо ми з вершини v_1 *дійти до вершини v_j. Тобто чи можуть бути вершини v_i та v_j чи просто поєднані ребром ($W_{k-1}[i, j]$), чи поєднані ланцюгом через вершину v_1 ($W_k[k, j]$).*

Так? Тоді давайте мені якусь емоційну реакцію… ☺).

Тобто матриця W_1 – розглядає всі маршрути між парами вершин, які проходять через вершину v_1 та всі попередньо розглянуті вершини. Але попередньо розглянутих вершин у нас жодної. Тому це буде просто досяжність через v_1.

Матриця W_2. Знов таки: ми розглядаємо досяжність через вершину v_2. Тобто чи існує маршрут від початку до v_2 і від v_2 – до кінця. А також через всі попередні. Але попередні – це вершина v_1, досяжність якої ми вже знаємо, бо вже розглянули. *Так?*

І, відповідно, матриця W_3 – це досяжність через v_3 та всі попередньо розглянуті, а саме: v_2 та v_1.

Матриця W_4 – це досяжність через v_4 та всі попередньо розглянуті, а саме: v_3, v_2 та v_1.

І на кожному кроці із ростом k (п. 2 алгоритму) у мене це все (п. 5 алгоритму) змінюється, змінюється, змінюється… я розглядаю все більше, більше, більше досяжності.

Тому ставлю **…**

Кінець доведення.

Починаємо розбір ось цієї формули: $W_k[i, j] = W_{k-1}[i, j] \vee (W_{k-1}[i, k] \& W_{k-1}[k, j])$.

1) Якщо $W_{k-1}[i, k] = 0$, тобто вершина k з вершини *i* не є «досяжною». То $W_k[i, j] = W_{k-1}[i, j] \vee (W_{k-1}[i, k] \& W_{k-1}[k, j])$ перетворюється у $W_k[i, j] = W_{k-1}[i, j]$. Тобто для заданого *i*, для якого $W_{k-1}[i, k] = 0$ і для всіх j (це стовпчик) ми просто стовпчик матриці переписали у нову матрицю. Так?

2) Якщо $W_k[i,k]=1$, то там формула буде такою: $W_k[i,j]=W_{k-1}[i,j]\vee(W_{k-1}[i,k]\& W_k[k,j])$, – тобто це буде елемент з попередньої матриці або (ось це $W_k[i,k]=1$, тому його можна опустити… 1*на що завгодно=що завгодно): $W_k[i,j]=W_{k-1}[i,j]\vee W_k[k,j]$. І, якщо це розглядати як досяжність, то ми одержимо ось тут: $W_k[i,j]$, – що елемент j буде досяжний з *i*; або, якщо він був досяжний раніше, або, якщо він досяжний через вершину $W_k[k,j]$. Тобто тут: $W_k[i,k]=1$ – маємо маршрут з *i* до k, а тут: $W_k[k,j]$ – маємо або не маємо маршруту з k до j .

Чому за цим алгоритмом швидше?

Скільки потрібно виконати операцій, щоб виконати піднесення матриці до степеня? Множення 2 квадратних матриць… скільки операцій?

Ви повинні для обчислення одного елементу перемножити рядок на стовпчик – це буде n-множників.

Скільки у вас елементів? n^2. Тому обчислення добутку двох матриць – це буде n^3-операцій.

У вас матриць від нульової – до $(n-1)$-ої. Кожна матриця може обчислюватися шляхом множення від попереднього. Але їх n, тому загальна кількість операцій, які ви виконаєте буде n^4.

А тут (за алгоритмом) – n^3. У вас потрійний *for.* Кожний *for* робить n-операцій. Тобто $\mathrm{n}\cdot\mathrm{n}\cdot\mathrm{n}$-операцій за *for.*

Чи є швидший алгоритм? Поки-що ні. Алгоритм Уоршелла прискорюється за рахунок реалізації. Тобто це все рівно бітові операції – їх можна пачками – регістрами виконувати… тобто там лінійне прискорення.

Так ось.

Теорема. Матриця W_k – це буде матриця досяжності графу G, якщо обмежити всі проміжні вершини на шляхах лише вершинами від першої – до k-тої. І не чіпаючи всі інші вершини. (*ми обмежуємо всі проміжні вершини на маршрутах лише вершинами з множини* W_1, W_2, …, W_k*; і, відповідно, коли ми дійдемо до матриці* W_n*, то там будуть всі можливі проміжні вершини, тобто це будуть всі можливі маршрути, які ми розглядаємо. Тому це буде матриця досяжності.*)

Так ось. Доведення цієї теореми.

Матриця W_0 – це фактично матриця суміжності: $\mathrm{W}_0=A_G$ – і вона описує нам наявність маршрутів без проміжних вершин, тобто: початок, кінець, 1 ребро (жодних проміжних вершин).

Тобто я можу сказати, що це: $W_0 = A_G$ – є досяжність без проміжних вершин.

Матриця W_1 *(знову дивіться на 5-ий рядок алгоритму… $k=1$: і ми перевіряємо чи можемо ми з вершини v_i дійти до вершини v_1 ($W_k[i,j]$)*; а потім – чи можемо ми з вершини v_1 *дійти до вершини v_j. Тобто чи можуть бути вершини v_i та v_j чи просто поєднані ребром ($W_{k-1}[i,j]$), чи поєднані ланцюгом через вершину v_1 ($W_k[k,j]$).*

Так? Тоді давайте мені якусь емоційну реакцію… ☺).

Тобто матриця W_1 – розглядає всі маршрути між парами вершин, які проходять через вершину v_1 та всі попередньо розглянуті вершини. Але попередньо розглянутих вершин у нас жодної. Тому це буде просто досяжність через v_1.

Матриця W_2. Знов таки: ми розглядаємо досяжність через вершину v_2. Тобто чи існує маршрут від початку до v_2 і від v_2 – до кінця. А також через всі попередні. Але попередні – це вершина v_1, досяжність якої ми вже знаємо, бо вже розглянули. *Так?*

І, відповідно, матриця W_3 – це досяжність через v_3 та всі попередньо розглянуті, а саме: v_2 та v_1.

Матриця W_4 – це досяжність через v_4 та всі попередньо розглянуті, а саме: v_3, v_2 та v_1.

І на кожному кроці із ростом k (п. 2 алгоритму) у мене це все (п. 5 алгоритму) змінюється, змінюється, змінюється… я розглядаю все більше, більше, більше досяжності.

Тому ставлю **…**

Кінець доведення.

Так ось… чому це швидше за піднесення матриці у степінь? Чому це ідеологічно швидше?

Цей алгоритм побудований на так званому принципі «динамічного програмування». *Хто чув це словосполучення? Дехто чув. Так?*

Значить, що таке «динамічне програмування»?

У вас є задача. Для обчислення цієї задачі потрібно обчислити певну кількість підзадач. Для обчислення цих під задач потрібно обчислити ще певну кількість підзадач – і ви можете опускатися на найнижчий рівень – на задачі, які не поділяються, які потрібно розв’язувати загалом. Потім ви з цих задач будуєте відповідно розв’язок вашої великої задачі. Але під час цієї декомпозиції у вас можуть виникати однакові типи задач. І ви їх будете розв’язувати, хоча ви їх уже розв’язали. Ви будете ще… і ще … і ще розв’язувати. Так ось, динамічне програмування (тут «програмування» – це не те, що ви на компіляторах пишете, це «програмування» в сенсі – процедура, обчислення) полягає в тому, що ми усі під задачі, які у нас виникають, відсортовуємо таким чином, щоб для розв’язання поточної задачі нам потрібні були розв’язки лише попередніх задач. Це буде таке собі «топологічне сортування часткового порядку»: ви вишиковуєте ваші задачі в рядок – і починаєте розв’язувати від першої – до останньої; і ви кожну під задачу будете розв’язувати один раз і ніколи не будете повертатися, тобто у вас усе, що необхідне для обчислення уже буде на поточний момент.

Ось так, коли ви, наприклад, обчислите якийсь там степінь A^4: ми її обчислювали як $A^3 \cdot A$ - досяжність від якоїсь вершини, довжини 3, а потім ще окремо ребро (4-те) – до кінцевої вершини. Так ось: у вас в середині A^3 уже міститься «куча» уже повторюваної інформації. А потім, коли ви її множите на А, ця інформація ще дублюється.

Значить Уоршелл видумав, як ось це дублювання прибрати. Ось саме цим шляхом, коли ми не розглядаємо усі можливі маршрути між i-ою та j-ою вершинами. Ми розглядаємо спочатку маршрути, які не містять проміжних вершин, потім – які містять 1 проміжну вершину: і це саме вершина v_1. Потім маршрути, які проходять через вершину v_2. Відповідно усі маршрути у нас структуруються за наявністю проміжних вершин. Кожен маршрут ви будете розглядати лише 1 раз на кожному кроці. І для того, щоб побудувати маршрути, які проходять через v_2 та v_1 - вам потрібно маршрути, які проходять через v_1 і все. Ви їх розглянули на попередньому кроці. І так на кожному кроці ви додаєте 1 вершину і розглядаєте можливі маршрути. Додаєте ще вершину – розглядаєте ще маршрути… наприкінці виявляється, що ви розглянули усі можливі маршрути.

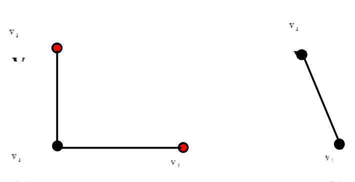
Зрозуміло?

Алгоритм Уоршелла узагальнюється. Він розв’язує з десяток різних задач. Якщо поміняти 5-ий рядок на якийсь інший.

Існують інші алгоритми на основі динамічного програмування.

А поки що <u>приклад</u>.

Візьмемо ось такий граф (рис. 1)



Граф маленький, тому його матрицю досяжності можна одразу намалювати. Це дуже добре, адже ми одразу знаємо, що ми повинні одержати наприкінці.

Треба побудувати матрицю суміжності. У нас виходить 5×5-матриця.

$$W_0 = \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccccc} * & & & & \end{array} \end{array} \begin{array}{c} * \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

у нас вершина v_1 поєднана лише з v_2. Тому 0,1,0,0,0.

Аналогічно інші вершини. Ось така у нас матриця суміжності W_0.

Далі починаємо обчислення.

Для того, щоб обчислити матрицю W_1 треба взяти 1-ий рядок і 1-ий стовпчик цієї матриці. Пробігтися по 1-му рядку – подивитися: **якщо у нас нуль (0)**, то ми цей стовпчик просто переписуємо у нову матрицю W_1 (це випадок **1) Якщо** $W_{k-1}[i,k]=0$).

Якщо у нас один (1), то треба до цього стовпчика (другого) заводити новий стовпчик – додати за логічним «або» («v») – і результат записати у нову матрицю.

Тому матриця W_1: перший елемент першого рядка 0, тому 1-ий стовпчик просто переписуємо. 2-ий елемент 1-го рядка 1, тому ми ці (1-ий та 2-ий) два стовпчики потрібно логічно додати і записати те, що вийде. Так? Далі – 0, 0, 0, – тому ці (3,4,5-ий) стовпчики просто переписуються. *Зрозуміло*?

$$W_1 = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccccc} & * & & & \end{array} \end{array} \begin{array}{c} \\ * \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

Для обчислення матриці W_2 потрібно в W_1 взяти 2-ий рядок та 2-ий стовпчик. Пробігтися по 2-му рядку. Якщо 1 – проводити, записати; якщо 0 – просто переписати.

Дивимося: тут 1, тому потрібно заводити ці (1,2-ий) 2-ва стовпчики. Далі 1 (якщо заводити стовпчик сам із собою, то ви одержите те ж саме, що і було). Далі знову 1, тому знову заводимо 2-ва стовпчики (2,3-ій). Далі 0, 0, – тому просто переписуємо. *Зрозуміло*?

$$W_2 = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccccc} & & * & ** & \end{array} \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ * \\ ** \\ \\ \\ \end{array} = W_3 .$$

Далі, щоб обчислити матрицю W_3 потрібно в W_2 взяти 3-ій рядок і 3-ій стовпчик. Пробігтися по 3-ому рядку: заводити і записати. *Процедура вже зрозуміла, здається. Так?*

Але хочу зауважити: 1, 2, 3-ій елементи «1», тому 1,2,3-ій стовпчики однакові. Далі стоять «0», тому у 4,5-му стовпчиках нічого не зміниться. Тому W_3 виглядає так само, як і W_2. *Зрозуміло?*

Тепер переходимо до матриці W_4. Перші 4-ри стовпчики просто переписуємо, бо там стоять «0». В 5-ий елемент 4-го рядка «1»

$$W_4 = \begin{array}{c@{}l} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ * \end{array} \\ \begin{array}{ccccc} & & & & * \end{array} & \end{array}.$$

І, нарешті, остання – 5-та вершина: 5-ий рядок, 5-ий стовпчик. Перших 3-ри стовпчики переписуємо. 4-ий заводимо. 5-ий переписуємо без змін.

$$W_6 = \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] = D_G$$ – Ось ця матриця буде матрицею досяжності графу G.

І ми бачимо, що вона має блокову структуру. Тобто у мене є сукупність вершин, які досяжні в нас в одне; іншу сукупність вершин, які досяжні в інше, а між ними вони не досяжні. Що це в нас є? класи еквівалентності за відношенням досяжності. Ось це (більший квадрат з «1») в нас один клас еквівалентності, ось це (меншийквадрат з «1») – інший клас еквівалентності. Наступного разу ми дізнаємось, що звуться вони «компонентами зв'язності».

Зараз занотуйте.

Для довільного графу завжди можна впорядкувати вершини таким чином, що його матриця досяжності буде мати блокову структуру. *(розказати про «блокові матриці»)* **Причому на діагоналі будуть стояти квадратні блоки з одних одиниць. Всі інші елементи будуть дорівнювати нулю.**

А взагалі: що таке «блокові матриці»? Зараз поясню… це просто…

Записали?

Що таке «блокова матриця»? Берете матрицю, а замість елементів вставляєте матриці.

Зокрема, ось ця матриця (D_G) має форму, наприклад:

$\mathrm{D}_{\mathrm{G}} = \begin{bmatrix} Y_1 & 0 \\ 0 & Y_2 \end{bmatrix}$, де матриця Y_1 – це буде 3×3-матриця з одних одиниць: $Y_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ – і вона буде квадратною. І матриця Y_2 це буде 2×2-матриця з одних одиниць: $Y_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ – і вона буде квадратною, а нулі – це «0». *Так?*

Значить, кожен блок описує окремий клас еквівалентності за відношенням досяжності.

Ну і, відповідно, чому мені потрібна «одинична діагональ»? Бо, якщо у вас є ізольована вершина, то це окремий клас еквівалентності. Якщо там не буде стояти «1», – там не буде блоку розміром 1×1 з одиничок.

<u>Тема наступної лекції: Зв’язність графів.</u>

Дякую за увагу. До зустрічі.

Лабораторна робота № 4. Основні операції над графами. Знаходження остова мінімальної ваги за алгоритмом Пріма-Краскала

Теоретичні відомості та приклади розв'язання задач

Теорія графів дає простий, доступний і потужний інструмент побудови моделей прикладних задач, є ефективним засобом формалізації сучасних інженерних і наукових задач у різних областях знань. *Графом G* називається пара множин (V, E), де V − множина вершин, перенумерованих числами $1, 2, \dots, n = v$; $V = \{v\}$, E − множина упорядкованих або неупорядкованих пар $e = (v', v'')$, $v' \in V$, $v'' \in V$, називаних дугами або ребрами, $E = \{e\}$. При цьому не має значення, як вершини розташовані в просторі або площині і які конфігурації мають ребра.

Неорієнтованим графом G називається граф у якого ребра не мають напрямку. Такі ребра описуються неупорядкованою парою (v', v'').

Орієнтований граф (орграф) – це граф ребра якого мають напрямок та можуть бути описані упорядкованою парою (v', v'').

Упорядковане ребро називають *дугою*.

Граф є *змішаним*, якщо поруч з орієнтованими ребрами (дугами) є також і неорієнтовані. Під час розв’язку задач змішаний граф зводиться до орграфа.

Кратними (паралельними) називаються ребра, які зв’язують одні і ті ж вершини. Якщо ребро виходить та й входить в одну і ту саму вершину, то таке ребро називається *петлею*.

Мультиграф – граф, який має кратні ребра.

Псевдограф – граф, який має петлі.

Простий граф – граф, який не має кратних ребер та петель. Будь яке ребро *e інцедентне* двом вершинам (v', v''), які воно з’єднує. У свою чергу вершини *(v′, v′′)* інцендентні до ребра e. Дві вершини (v′, v′′) називають суміжними, якщо вони належать до одного й того самого ребра e, і несуміжні у протилежному випадку.

Два ребра називають *суміжними*, якщо вони мають спільну вершину. Відношення суміжності як для вершин, так і для ребер є симетричним відношенням.

Степенем вершини графа G називається число інцидент них їй ребер.

Граф, який не має ребер називається *пустим графом*.

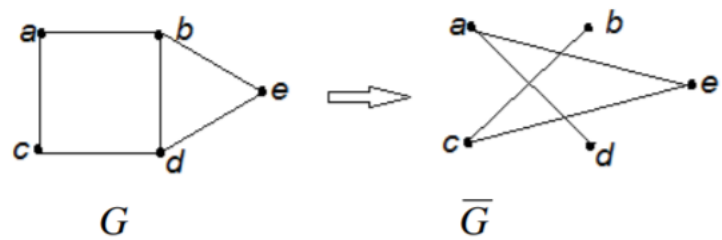
Граф, у якого не має вершин називається *нуль-графом*.

Вершина графа, яка не інцедентна до жодного ребра, називається ізольованою. Вершина графа, яка інцедентна тільки до одного ребра, називається звисаючій. Частина $G' = (V', E')$ графа $G = (V, E)$ називається підграфом графа G, якщо $V' \subseteq V$ і E' складається з тих і тільки тих ребер $e = (v', v'')$, у яких обидві кінцеві вершини $v', v'' \in V'$. Частина $G' = (V', E')$ називається суграфом або остовим підграфом графа G , якщо виконано умови: $V' = V$, $E' \subseteq E$.

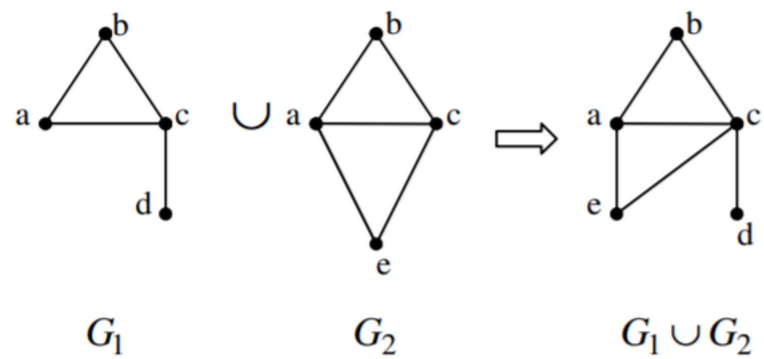
Операції над графами

1. *Вилученням ребра e* ($e \in E$) з графа $G = (V, E)$ - є така операція внаслідок якої отримаємо новий граф G_1 для якого $G_1 = (V, E \setminus \{e\})$.

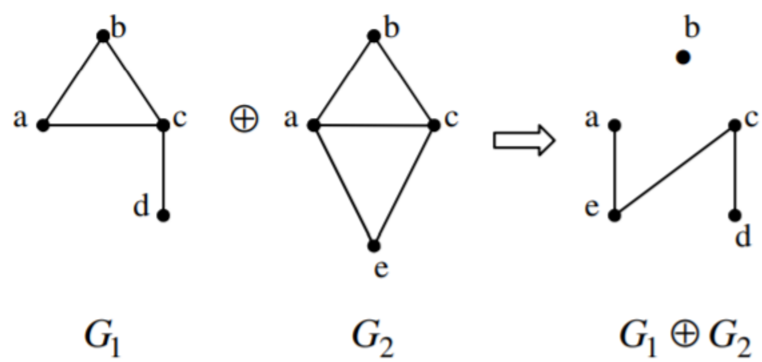
2. Доповненням графа $G = (V, E)$ називається граф $\bar{G} = (V, E')$, якщо він має одну і ту саму кількість вершин та дві його вершини суміжні тоді і тільки тоді коли вони не суміжні в G (тобто ребро $(v_i, v_j) \in E'$ тоді коли $(v_i, v_j) \notin E$). Наприклад:



3. Об'єднанням графів $G_1 = (V_1, E_1)$ та $G_2 = (V_2, E_2)$, Е називається граф $G = (V, E) = G_1 \cup G_2$ у якому $V = V_1 \cup V_2$ та $E = E_1 \cup E_2$. Наприклад:

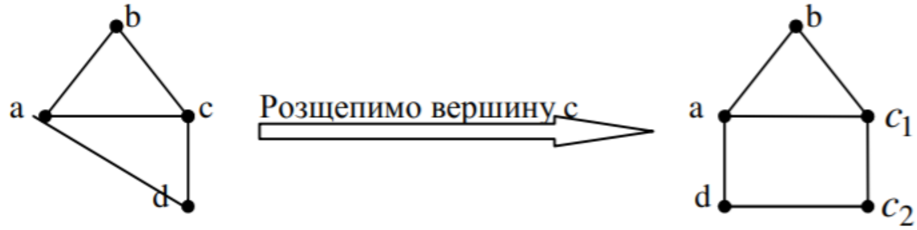


4. *Кільцевою сумою графів* $G_1 = (V_1, E_1)$ та $G_2 = (V_2, E_2)$ називається граф $G = (V, E) = G_1 \oplus G_2$ у якому $V = V_1 \cup V_2$ та $E = E_1 \triangle E_2 = (E_1 \cup E_2) \setminus (E_1 \cap E_2)$. Наприклад:

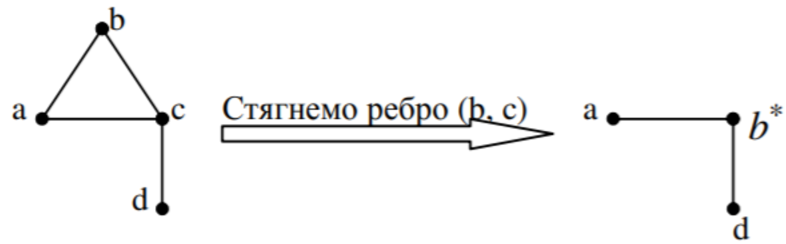


5. *Розщеплення (роздвоєння) вершини графа*. Нехай v - вершина графа $G = (V, E)$. Множину усіх суміжних з нею вершин довільним чином розділимо на дві множини $N_1(v)$ та $N_2(v)$, таких що $N_1(v) \cup N_2(v) = V$. Видаливши вершину v разом з інцидентними їй ребрами, додамо дві

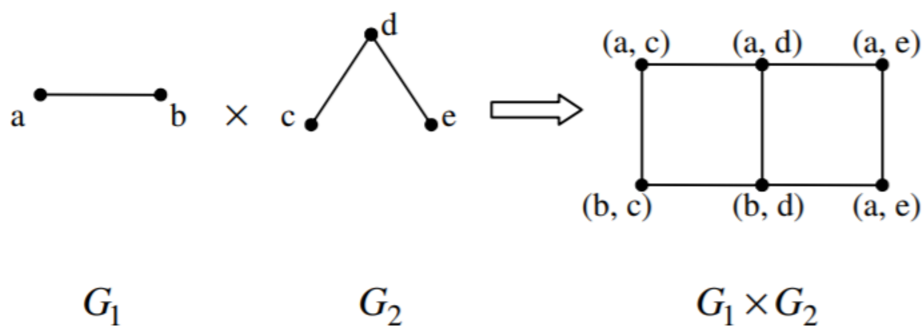
нові вершини v_1 та v_2, які з'єднані ребром (v_1, v_2). Вершину v_1 з'єднаємо ребром з кожною вершиною множини $N_1(v)$, а вершину v_1 - з кожною вершиною множини $N_2(v)$. Таким чином з графа G отримаємо новий граф G_v^* . Виконана операція називається розщепленням вершини v. Наприклад:



6. *Стягування ребра (дуги)*. Ця операція означає видалення ребра та ототожнення його суміжних вершин. Граф G_1 стягується до графа G_2, якщо граф G_2 може бути отриманим з G_1 в результаті деякої послідовності стягування ребер (дуг). Наприклад:



7. Добутком графів $G_1 = (V_1, E_1)$ та $G_2 = (V_2, E_2)$ називається граф $G = G_1 \times G_2$ у якого $V = V_1 \times V_2$ а множина ребер визначається наступним чином: вершини (u_1, v_1) та (u_2, v_2) суміжні у G тоді і тільки тоді коли $u_1 = u_2$ і v_1 та v_2 суміжні у G_2 , або $v_1 = v_2$ і u_1, u_2 суміжні у G_1. Наприклад:



Таблицею (матрицею) суміжності $R = [r_i, j]$ графа $G = (V, E)$ називається квадратна матриця порядку n (n – число вершин графа), елементи якої $r_{i,j}$ ($i = 1, 2, \dots n$; $j = 1,2, \dots n$) визначаються наступним чином:

$$r_{i,j} = \begin{cases} 1, \text{якщо існує дуга з } v_i \text{ в } v_j; \\ 0, \text{в іншому випадку.} \end{cases}$$

Матриця суміжності повністю визначає структуру графа.

Діаметром зв'язного графа називається максимально можлива довжина між двома його вершинами. Нехай дано неорієнтований граф $G = (V, E)$. Маршрутом довжини $l - 1$ з вершини v_1 у v_1 називається послідовність $M = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), \dots, (v_i, v_{i+1}), \dots, (v_{l-1}, v_l)\}$, яка складається з ребер $l = (v_s, v_{s+1}) \in E$, при цьому кожні два сусідніх ребра мають спільну кінцеву вершину. Маршрут називається *ланцюгом*, якщо всі його ребра різні.

Відкритий ланцюг називається *шляхом*, якщо всі його вершини різні.

Замкнений ланцюг називається *циклом*, якщо різні всі його вершини, за винятком кінцевих.

Шлях і цикл називаються *гамільтоновими*, якщо вони проходять через усі вершини графа.

Алгоритми знаходження найкоротшого кістякового дерева

Алгоритм Прима для даного n-вершинного графа $G = (V, E)$ будує по кроках $s = 1, 2, \dots, 1 \leq n - 1$ зростаюче дерево $D_s = (V_s, E_s)$, $V_s \subseteq V$, $E_s \subseteq E$.

$S = 1$. Фіксуємо довільну вершину v_0, серед усіх ребер, інцидентних вершині v_0 знаходимо найкоротше ребро $e_1 = (v_0, v_1)$. Покладемо, що $D_1 = (V_1, E_1)$, $V_1 = \{v_0, v_1\}$, $E_1 = \{e_1\}$ і переходимо до кроку s =2.

Нехай здійснено $s < n - 1$ кроків, у результаті чого в графі G виділено зростаюче дерево $D_s = (V_s, E_s)$. Тоді на кроці $(s + 1)$ серед усіх ребер $e = (v' \in V_s)$, таких, що $v' \in V_s$, $v'' \in (V \backslash V_s)$, знаходимо найкоротше ребро $e_{s+1} = (v_r, v_{s+1})$ і приєднуємо його до дерева D_s, у результаті чого одержуємо дерево $D_{s+1} = (V_{s+1}, E_{s+1})$, $V_{s+1} = V_s \cup \{v_{s+1}\}$, $E_{s+1} = E_s \cup \{e_{s+1}\}$. Алгоритм закінчує свою роботу в двох випадках:

1) результативно на кроці $s = n - 1$, у випадку, якщо граф G зв'язний;

2) безрезультативно, якщо $G - \text{незв'язний}$ граф.

Алгоритм Краскала. Перший етап – підготовчий: для даного графа G упорядклвуються ребра $e \in E$ у послідовність $e_1, e_2, \dots, e_m$, $m = |E|$, у порядку неспадання ваг цих ребер: $w(e_1) \leq w(e_2) \leq \cdots \leq w(e_s) \leq \cdots \leq w(e_m)$.

Другий етап виконується по кроках $s = 1, 2, \dots, m_0 \leq m$ у такий спосіб. На кроках $s = 1, 2$ ребра e_1, e_2 з послідовності фарбуються. На кожному наступному кроці s розглядається ребро e_s з послідовності, і воно зафарбовується тоді і тільки тоді, коли не утворює цикл з ребрами, пофарбованими на попередніх кроках. У противному випадку ребро e_s умовно викреслюється з графа $G = (V, E)$. Алгоритм закінчує роботу на кроці $s = m_0$, коли пофарбованим виявиться $(n - 1) -$ ше по рахунку ребро e_s, $n = |V|$, тому що за потребою $n - 1$ пофарбованих ребер утворюють кістякове дерево $n -$вершинного графа.

Індивідуальні завдання

Завдання № 1. Розв'язати на графах наступні задачі:

1. Виконати наступні операції над графами:

1) знайти доповнення до першого графу,

2) об’єднання графів,

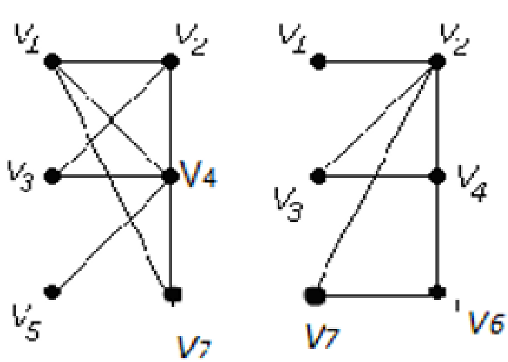
3) кільцеву суму G_1 та G_2 $(G_1 + G_2)$,

4) розщепити вершину у другому графі,

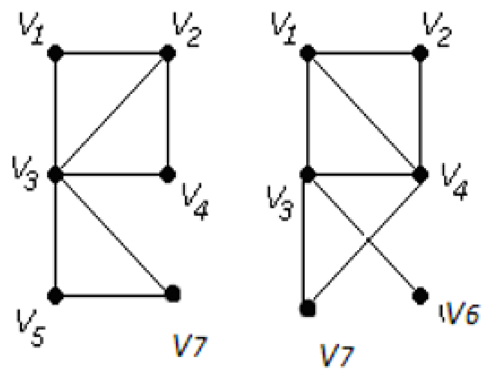
5) виділити підграф A, що складається з 3-х вершин в G_1 і знайти стягнення A в G_1 (G_1\ A),

6) добуток графів.

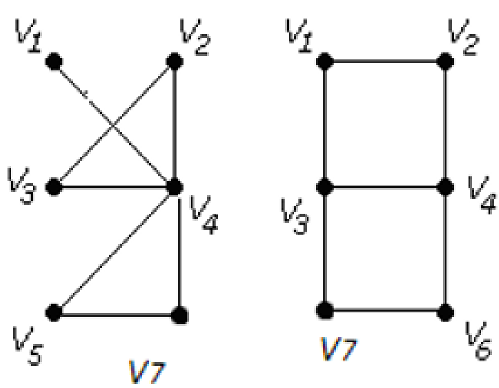
1



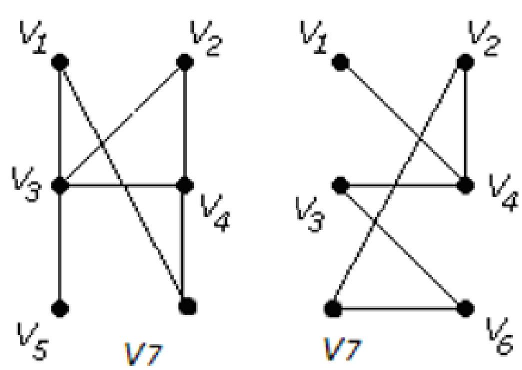
2



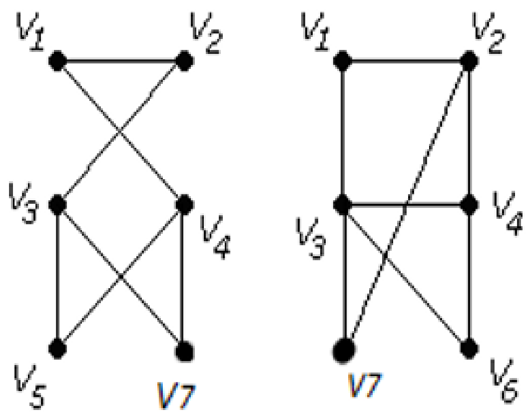
3



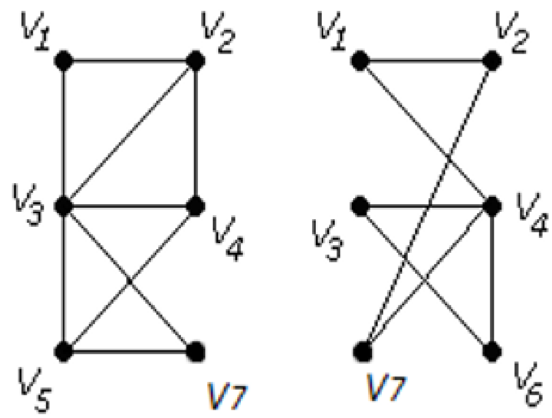
4



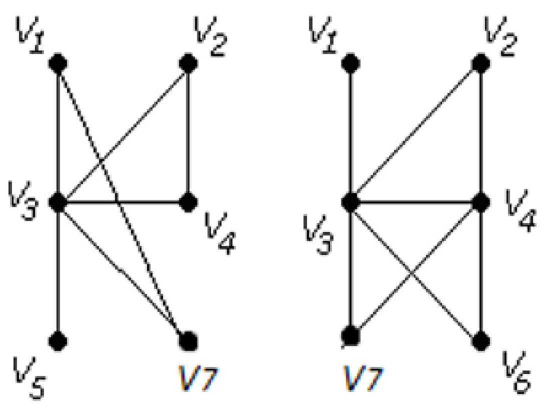
5


V1
V2
V3
V4
V5
V7
V1
V2
V3
V4
V7
V6

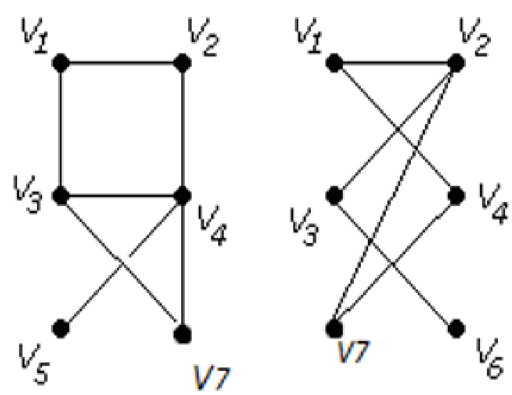
6


V1
V2
V3
V4
V5
V7
V1
V2
V3
V4
V7
V6

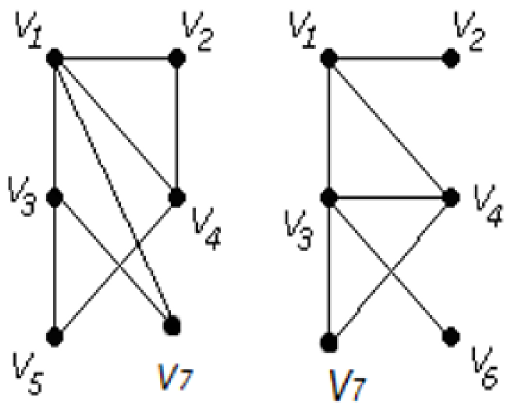
7


V1
V2
V3
V4
V5
V7
V1
V2
V3
V4
V7
V6

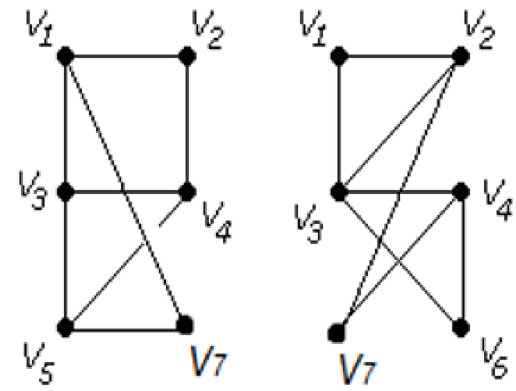
8


V1
V2
V3
V4
V5
V7
V1
V2
V3
V4
V7
V6

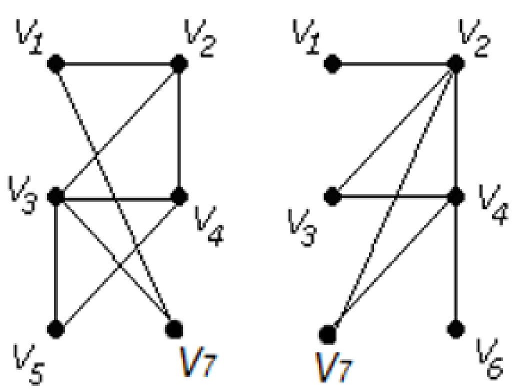
9


V_1
V_2
V_3
V_4
V_5
V_7
V_1
V_2
V_3
V_4
V_7
V_6

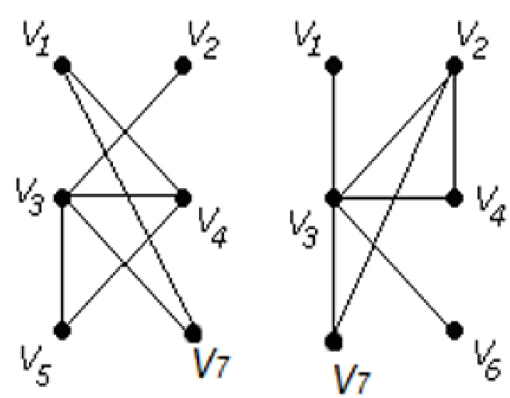
10


V_1
V_2
V_3
V_4
V_5
V_7
V_1
V_2
V_3
V_4
V_7
V_6

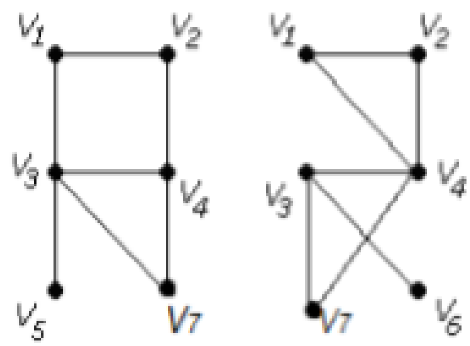
11


V_1
V_2
V_3
V_4
V_5
V_7
V_1
V_2
V_3
V_4
V_7
V_6

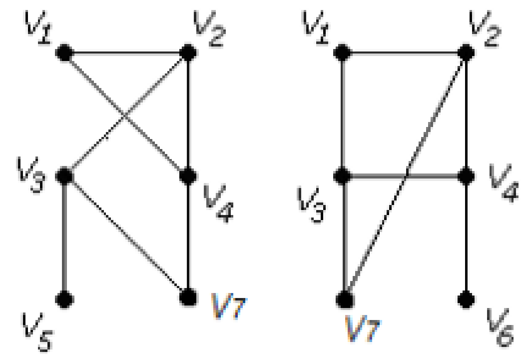
12


V_1
V_2
V_3
V_4
V_5
V_7
V_1
V_2
V_3
V_4
V_7
V_6

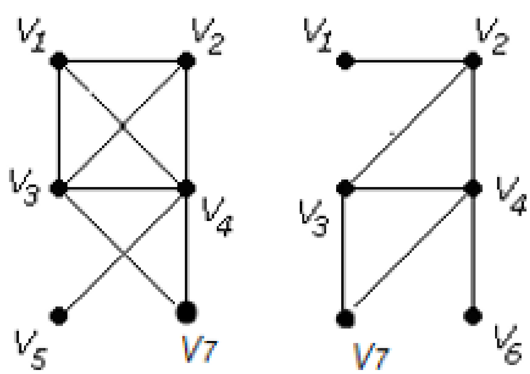
13



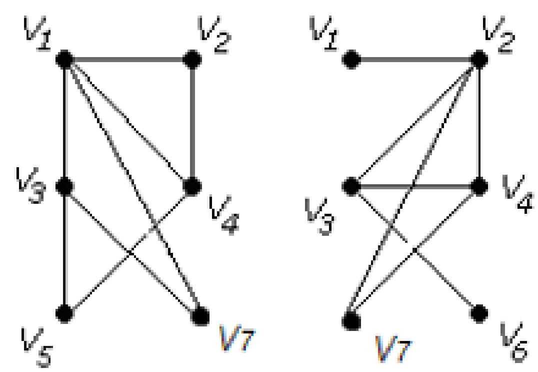
14



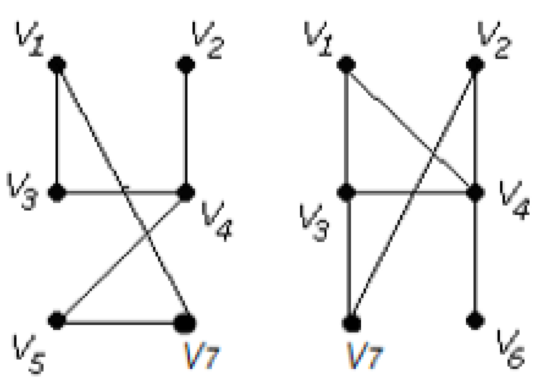
15



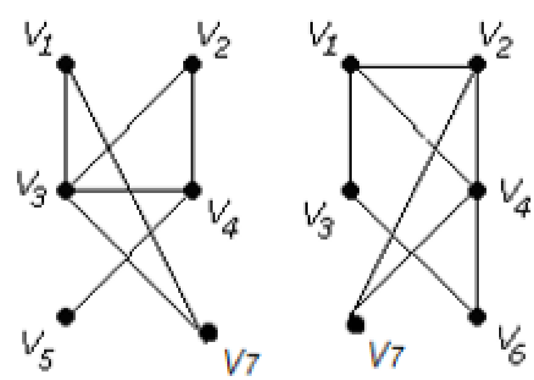
16



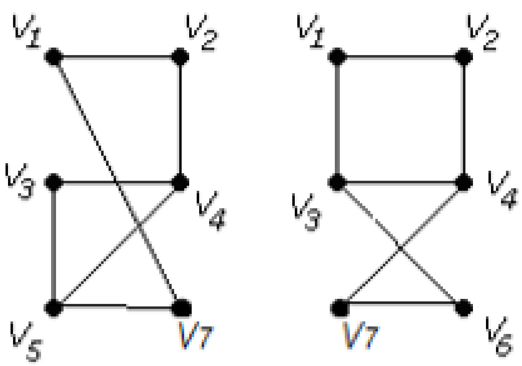
17



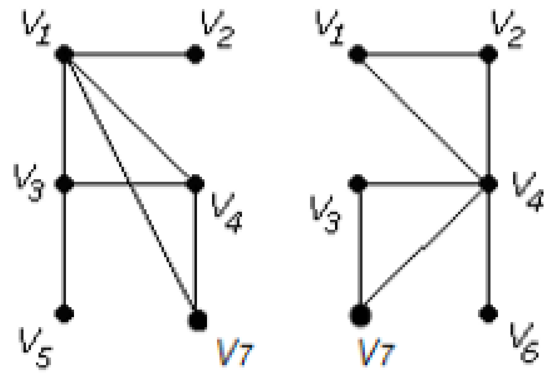
18



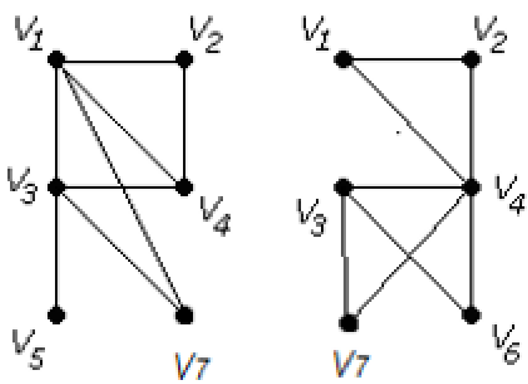
19



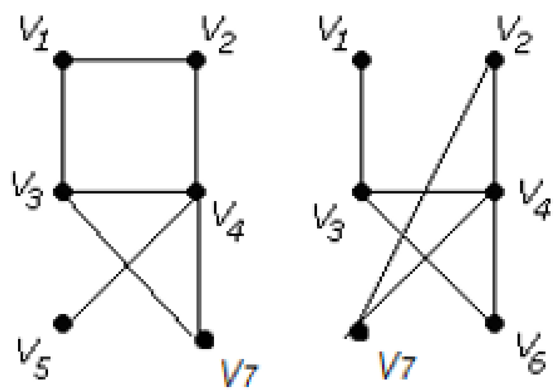
20



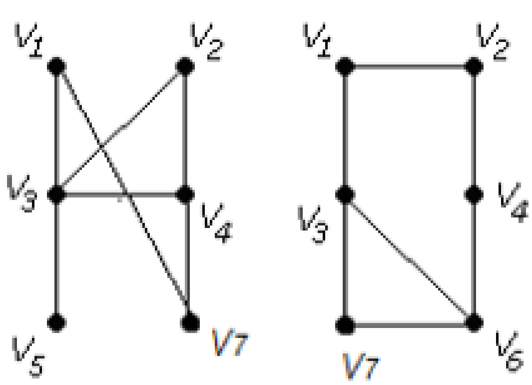
21



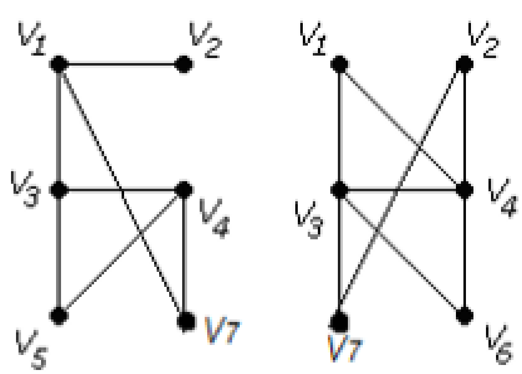
22



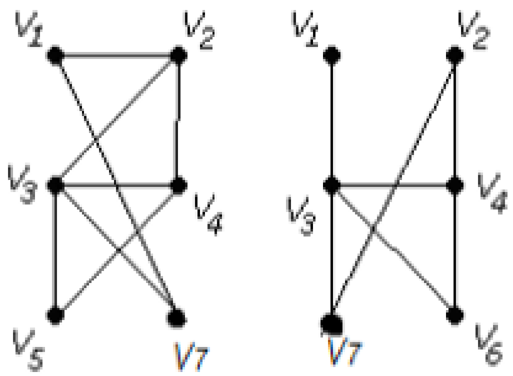
23



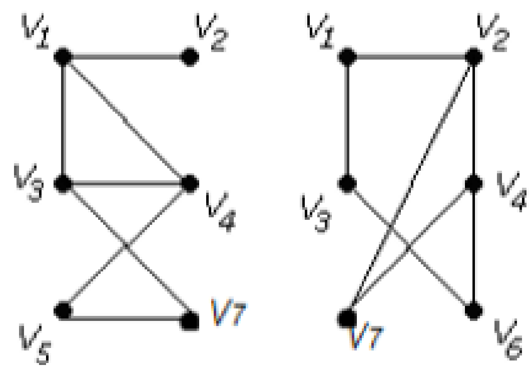
24



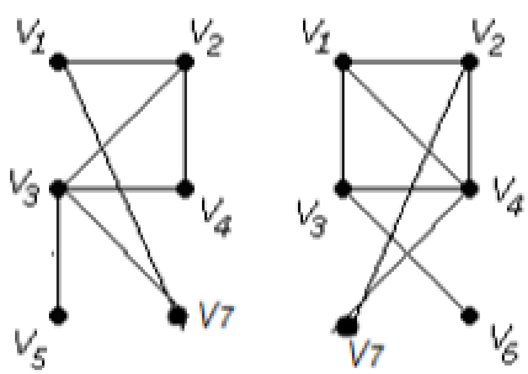
25



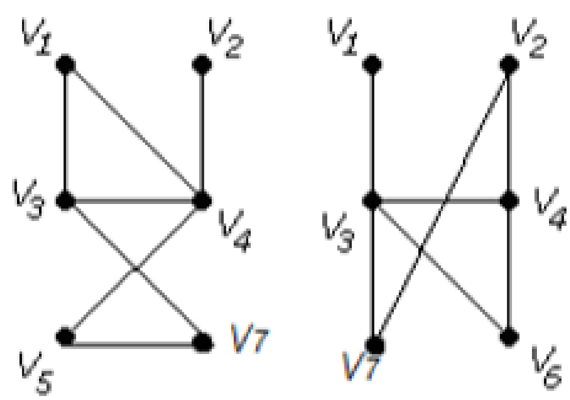
26



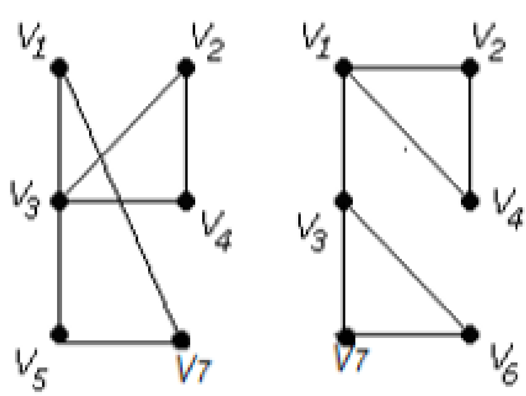
27



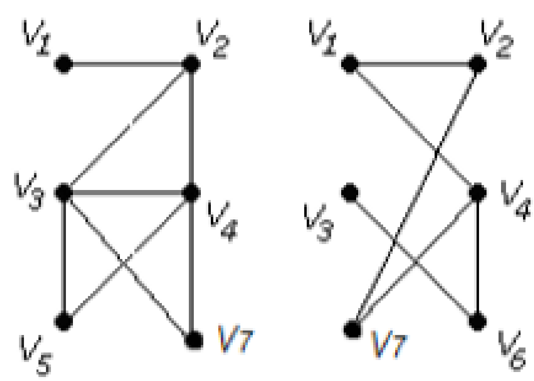
28



29

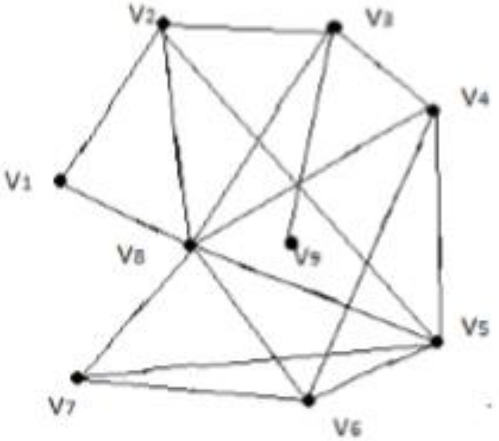


30

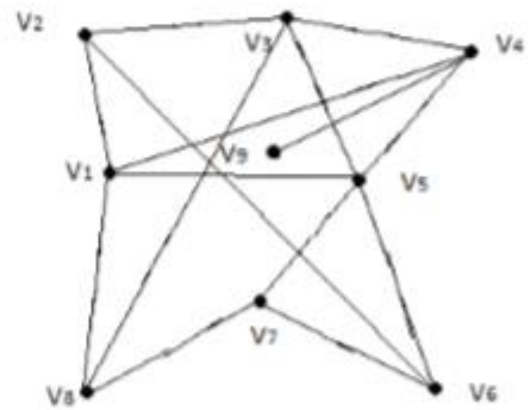


2. Знайти таблицю суміжності та діаметр графа.

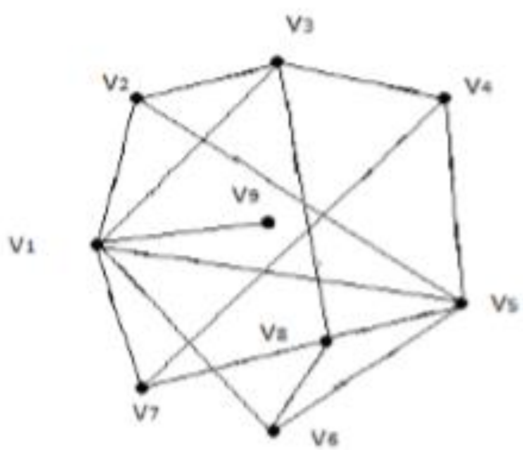
1



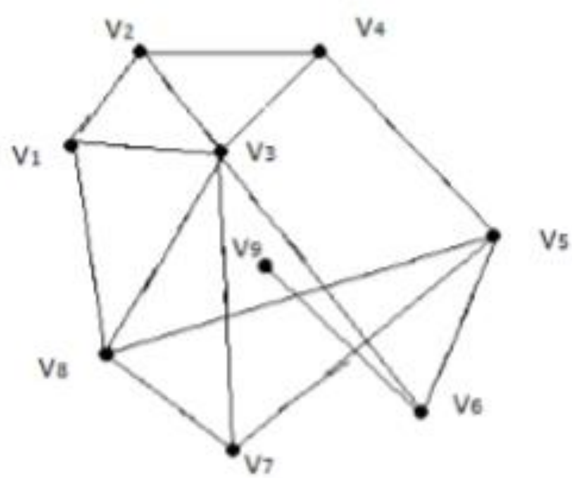
2



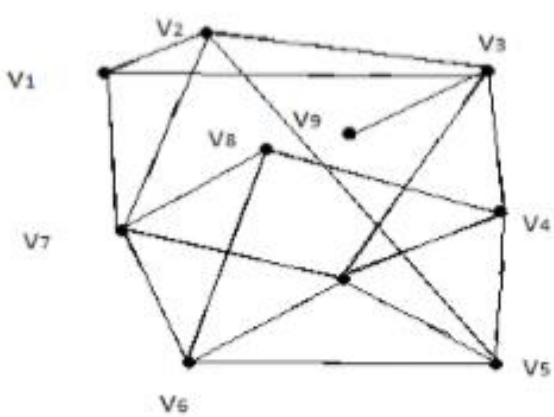
3



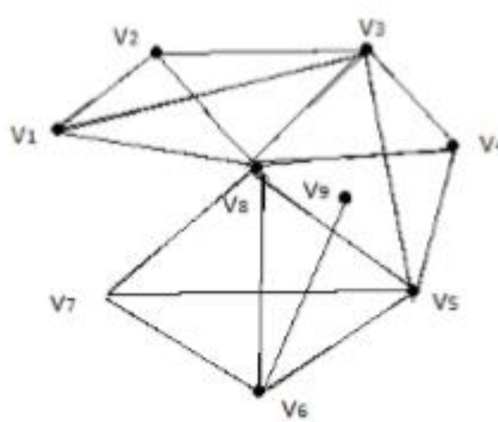
4



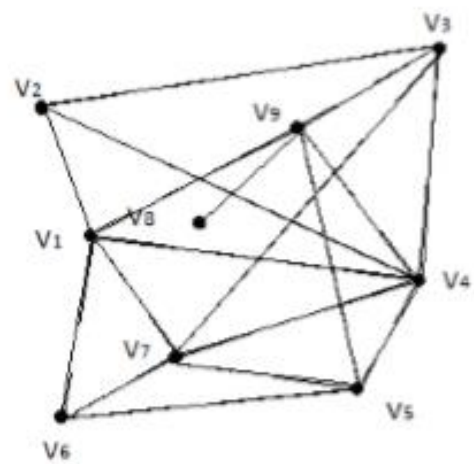
5



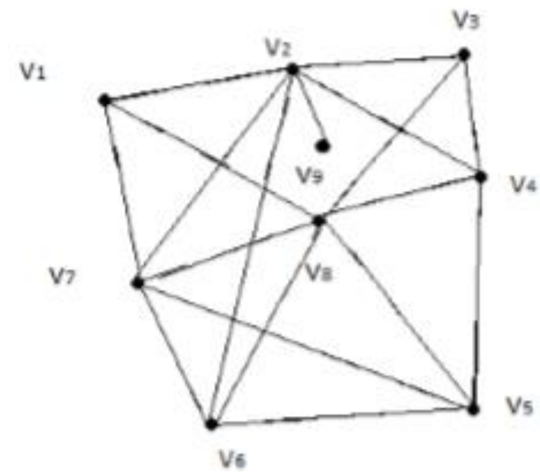
6



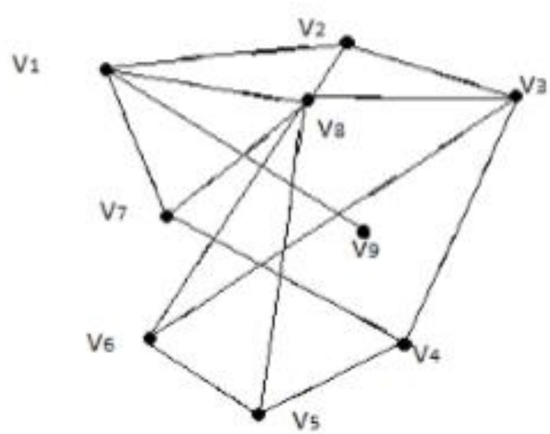
7


V_1
V_2
V_3
V_4
V_5
V_6
V_7
V_8
V_9

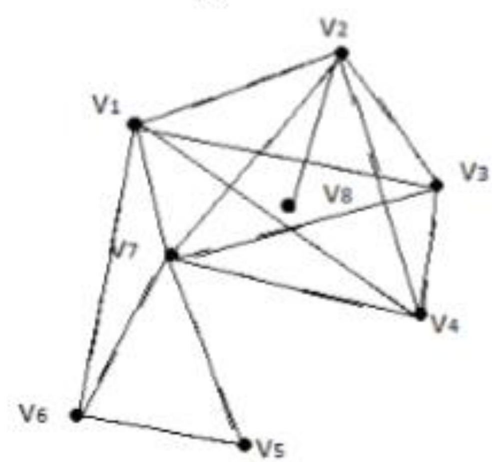
8


V_1
V_2
V_3
V_4
V_5
V_6
V_7
V_8
V_9

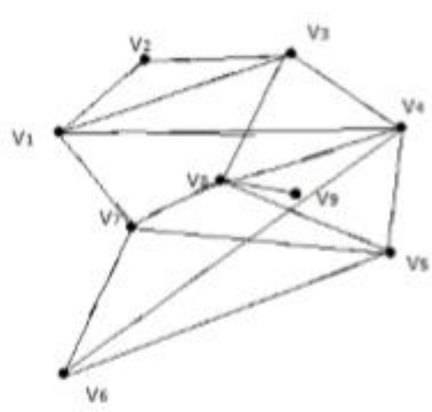
9


V_1
V_2
V_3
V_4
V_5
V_6
V_7
V_8
V_9

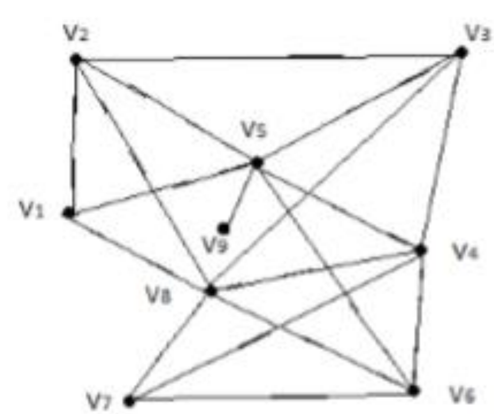
10


V_1
V_2
V_3
V_4
V_5
V_6
V_7
V_8

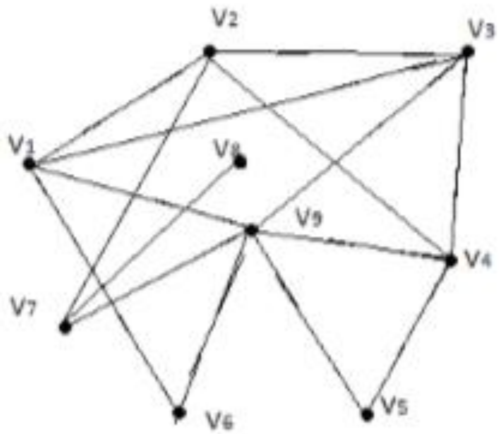
11


V_1
V_2
V_3
V_4
V_5
V_6
V_7
V_8
V_9

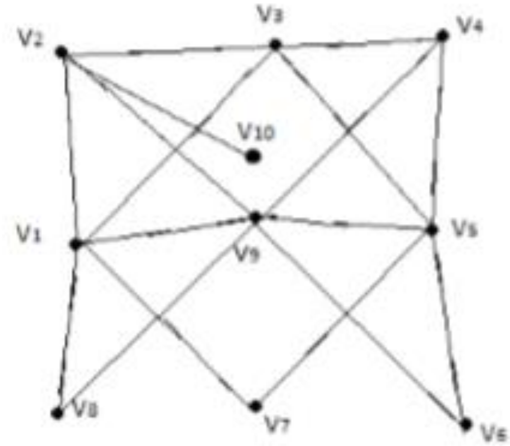
12


V_1
V_2
V_3
V_4
V_5
V_6
V_7
V_8
V_9

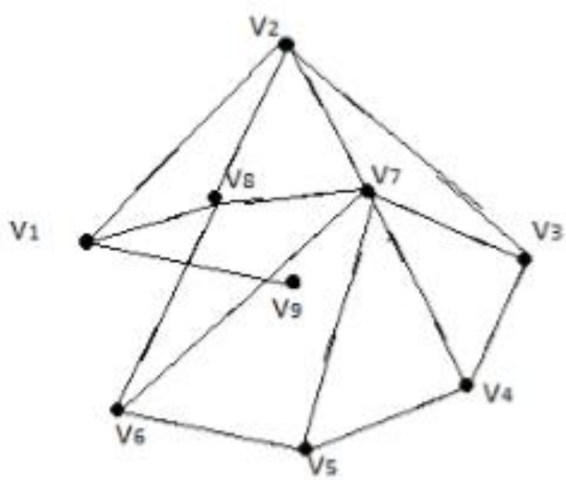
13



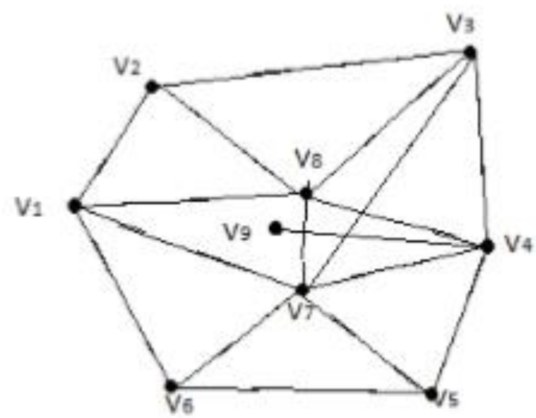
14



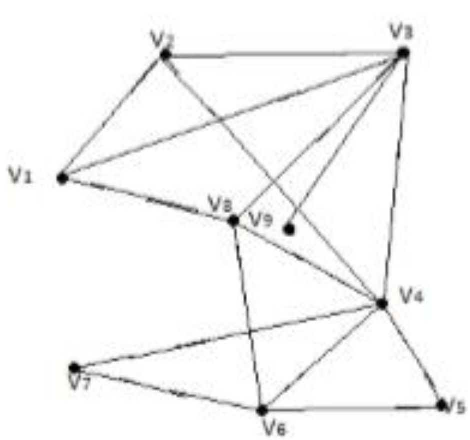
15



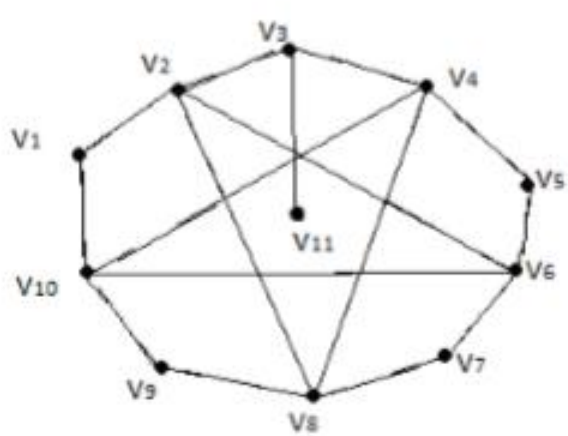
16



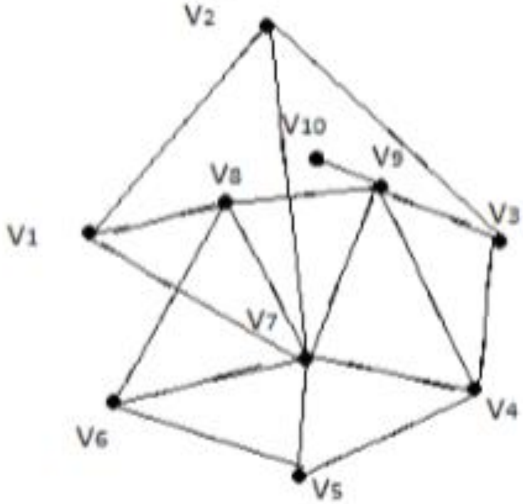
17



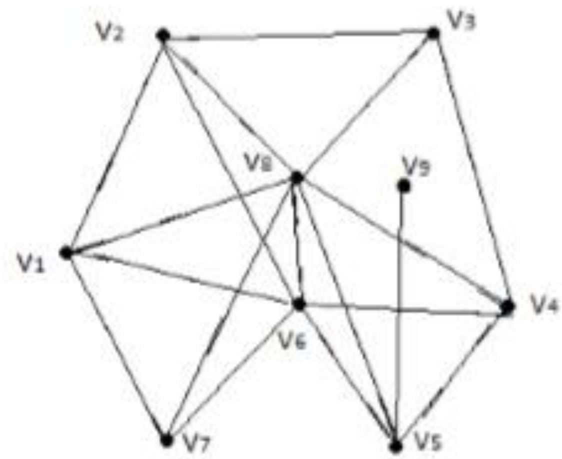
18



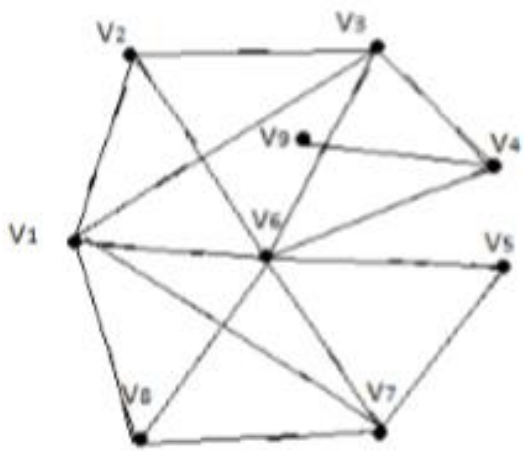
19



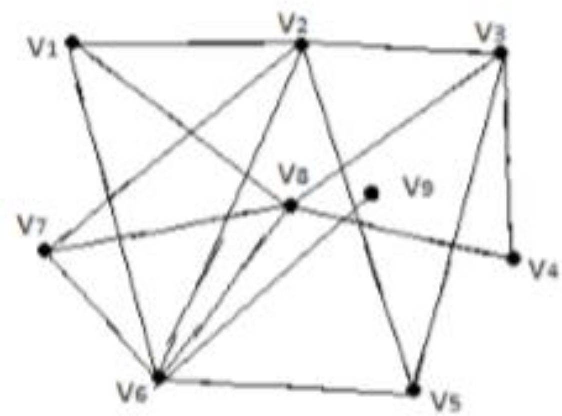
20



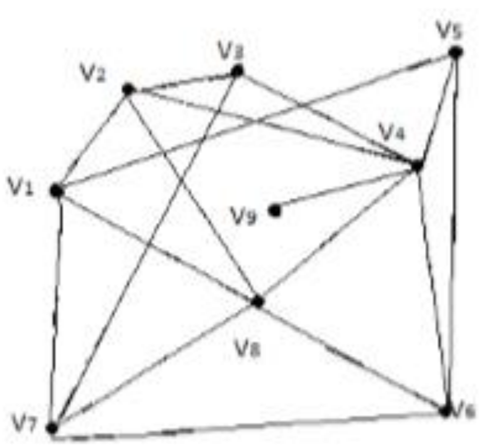
21



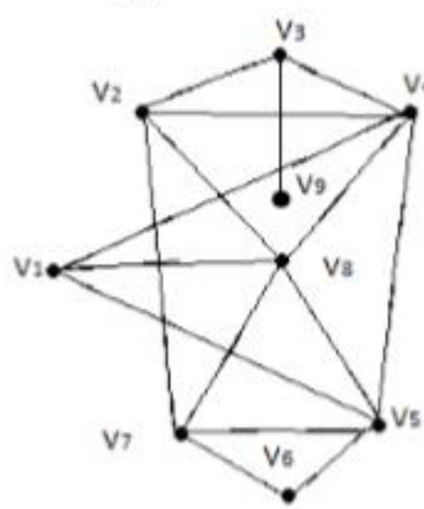
22



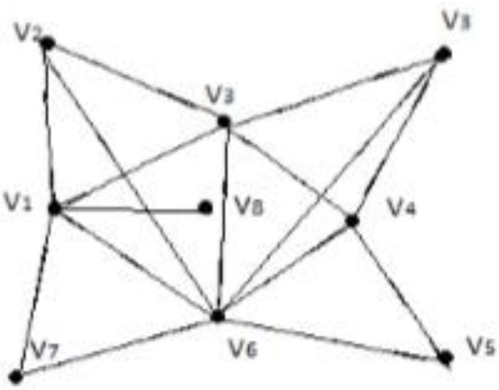
23



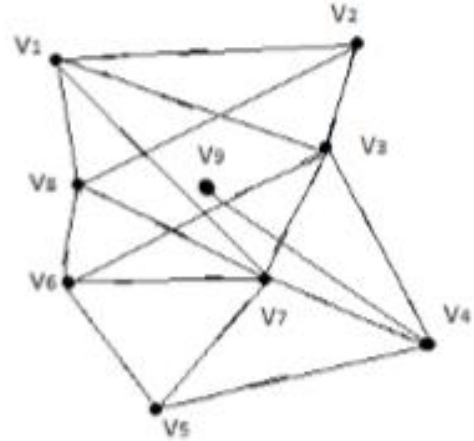
24



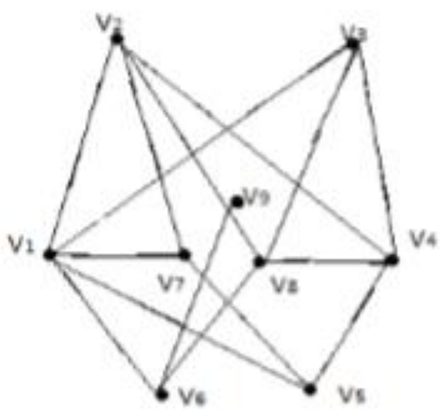
25



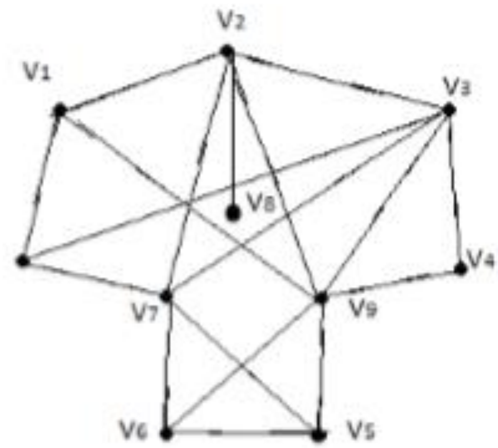
26



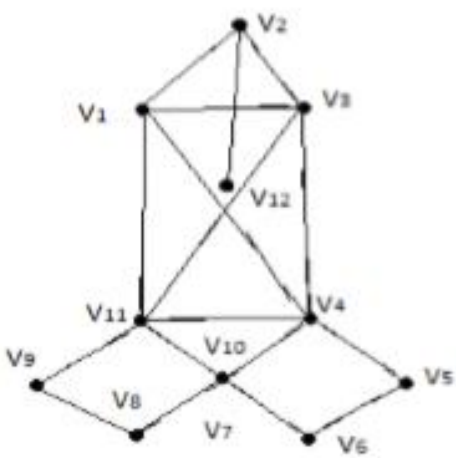
27



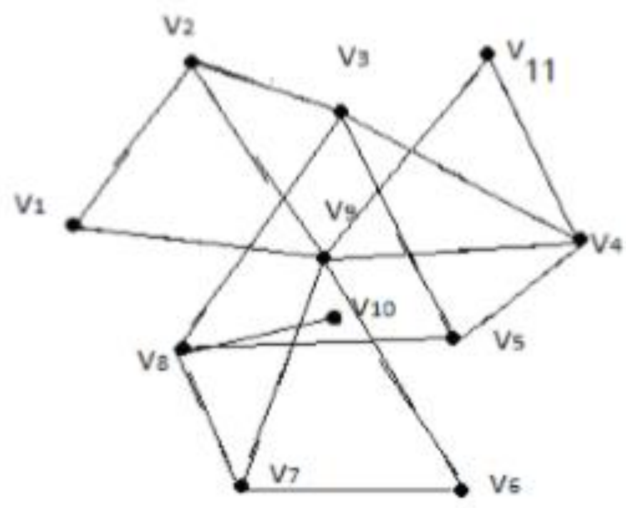
28



29

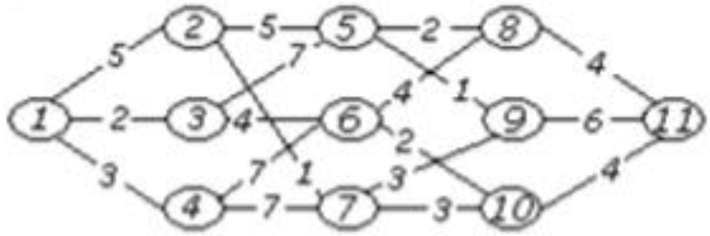


30

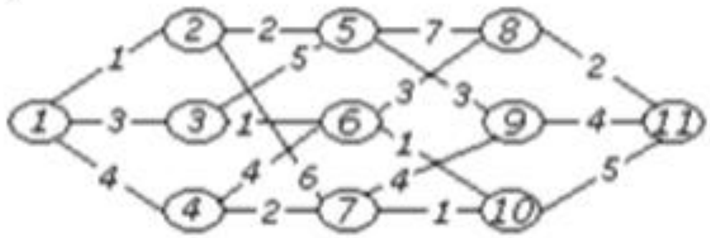


3. Знайти двома методами (Краскала і Прима) мінімальне остове дерево графа.

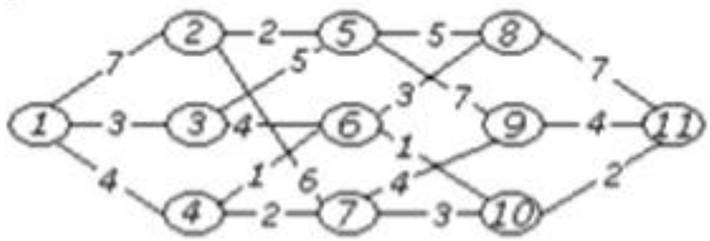
1



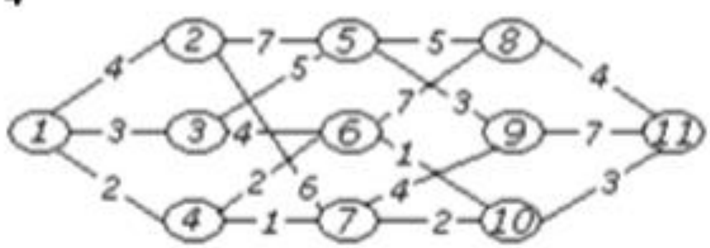
2



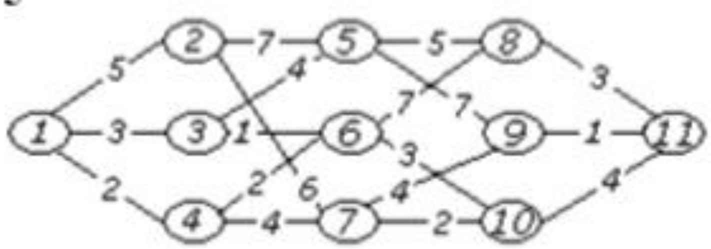
3



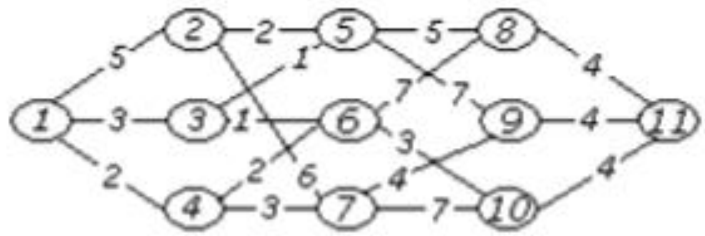
4



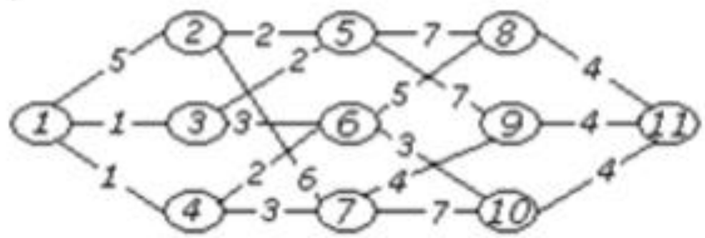
5



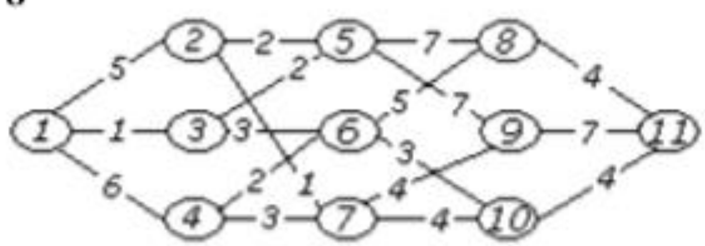
6



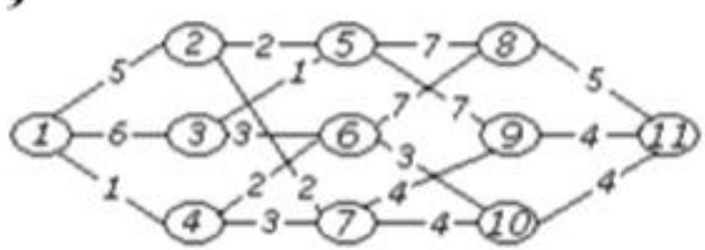
7



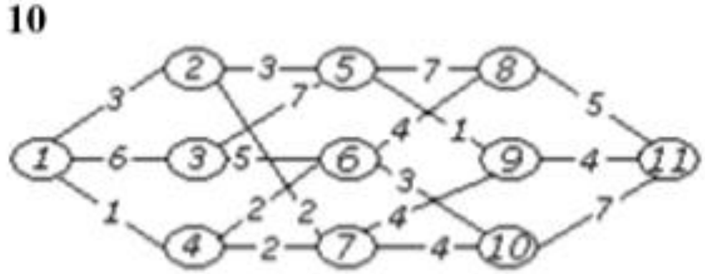
8



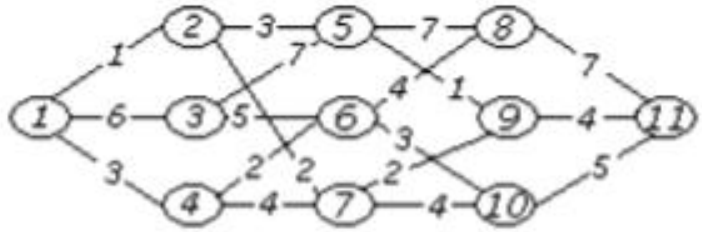
9



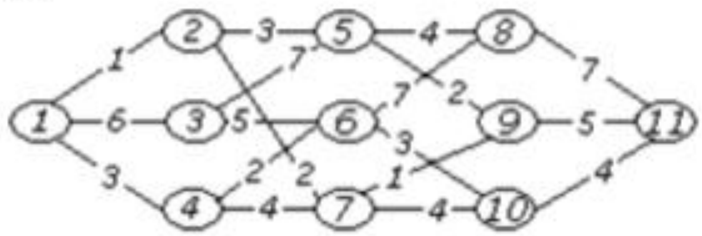
10



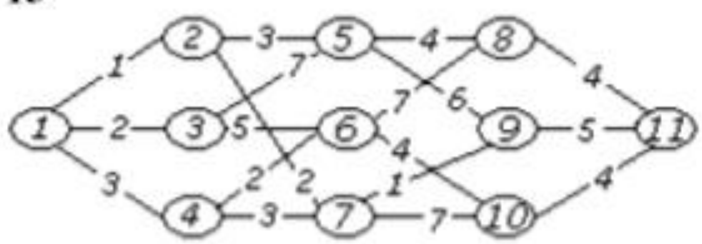
11



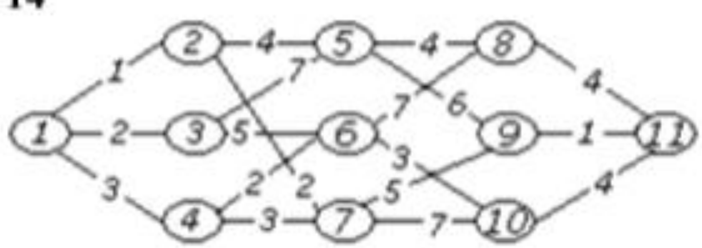
12



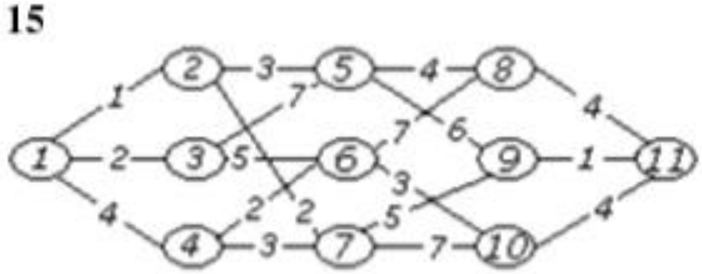
13



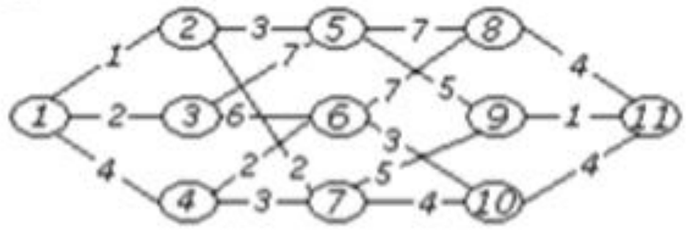
14



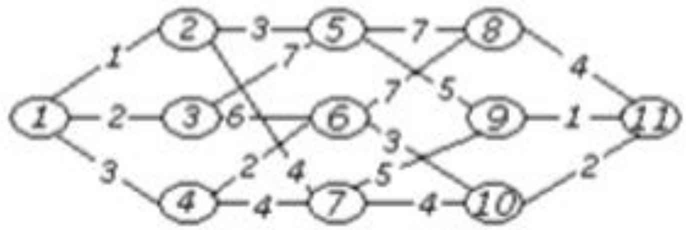
15



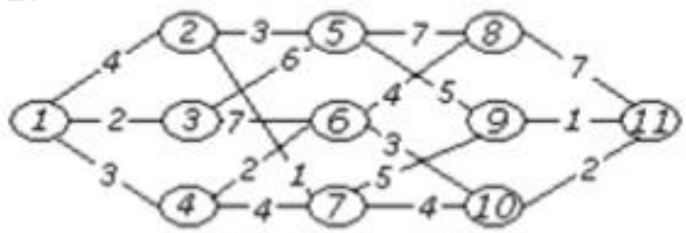
16


2 3 5 7 8
1 7 4
7 5
1 2 3 6 6 9 1 11
3
4 2 2 5 4
4 3 7 4 10

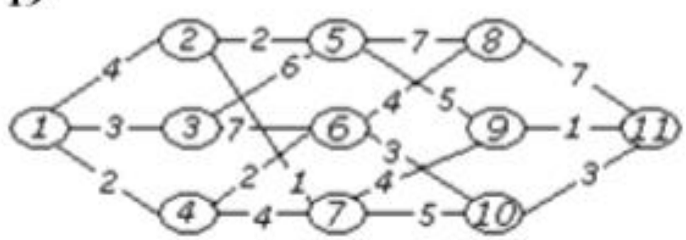
17


2 3 5 7 8
1 7 4
7 5
1 2 3 6 6 9 1 11
3
3 2 4 5 2
4 4 7 4 10

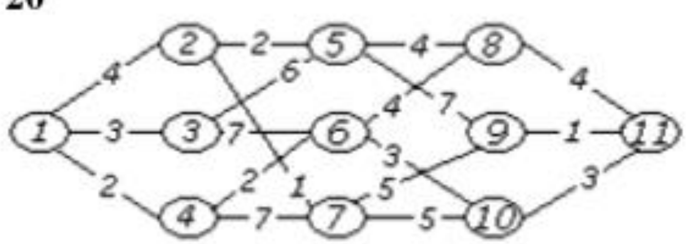
18


2 3 5 7 8
4 6 7
4 5
1 2 3 7 6 9 1 11
3
3 2 1 5 2
4 4 7 4 10

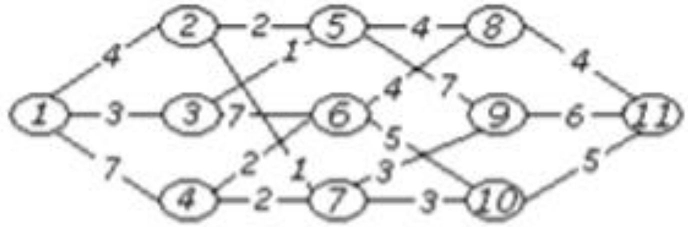
19


2 2 5 7 8
4 6 7
4 5
1 3 3 7 6 9 1 11
3
2 2 1 4 3
4 4 7 5 10

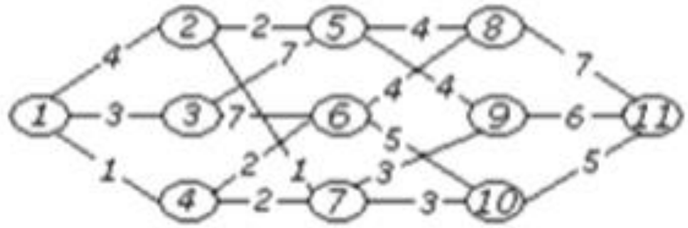
20


2 2 5 4 8
4 6 4
4 7
1 3 3 7 6 9 1 11
3
2 2 1 5 3
4 7 7 5 10

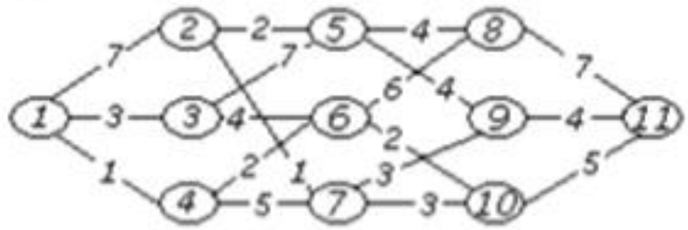
21



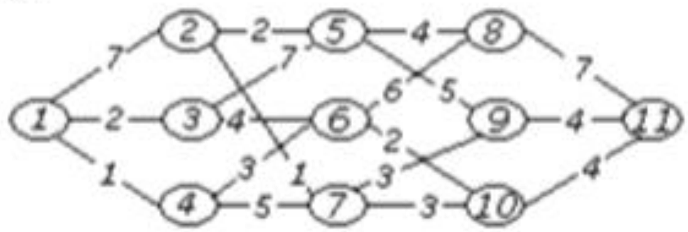
22



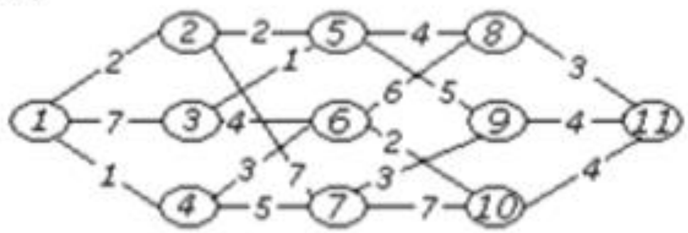
23



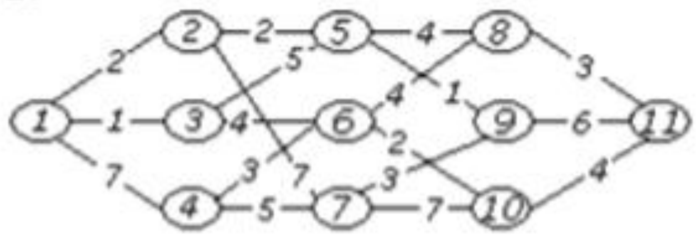
24



25

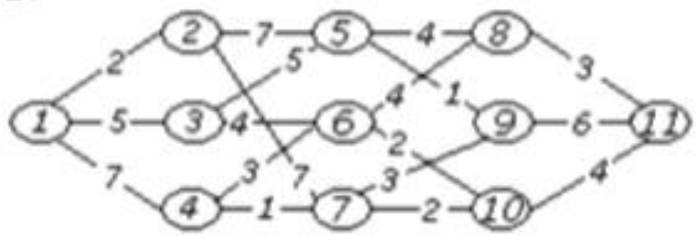


26



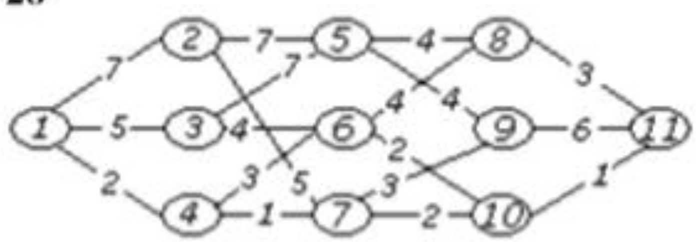
2 2 5 4 8
2 5 3
4 1
1 1 3 4 6 9 6 11
2
7 3 7 3 4
4 5 7 7 10

27



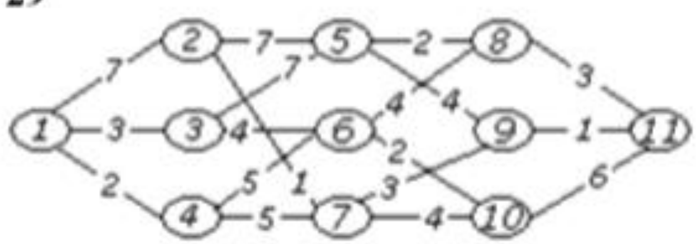
2 7 5 4 8
2 5 3
4 1
1 5 3 4 6 9 6 11
2
7 3 7 3 4
4 1 7 2 10

28



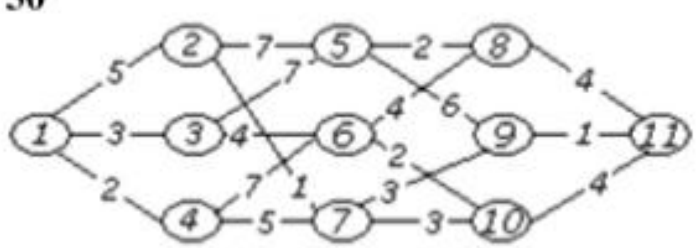
2 7 5 4 8
7 7 3
4 4
1 5 3 4 6 9 6 11
2
2 3 5 3 1
4 1 7 2 10

29



2 7 5 2 8
7 7 3
4 4
1 3 3 4 6 9 1 11
2
2 5 1 3 6
4 5 7 4 10

30



2 7 5 2 8
5 7 4
4 6
1 3 3 4 6 9 1 11
2
2 7 1 3 4
4 5 7 3 10

Завдання № 2. Написати програму, яка реалізує алгоритм знаходження остового дерева мінімальної ваги за алгоритмом Прима чи Краскала. Етапи розв'язання задачі виводити на екран. Протестувати розроблену програму на задачі 3 із завдання № 1.

Лабораторна робота № 5. Знаходження найкоротшого маршруту за алгоритмом Дейкстра. Плоскі і планарні графи

Теоретичні відомості та приклади розв'язання задач

Задача про найкоротший ланцюг. Алгоритм Дейкстра.

Дано n-вершинний графа $G = (V, E)$, у якому виділено пару вершин v_0, $v^* \in V$, і кожне ребро зважене числом $w(e) \geq 0$. Нехай $X = \{x\}$ – множина усіх простих ланцюгів, що з'єднують v_0 з v^*, $x = (V_x, E_x)$. Цільова функція $F(x) = \sum_e w(e) \longrightarrow min$. Потрібно знайти найкоротший ланцюг, тобто $x_0 \in X: F(x_0) = \min_{x \in X} F(x)$.

Перед описом алгоритму Дейкстра подамо визначення термінів "k-а найближча вершина і "дерево найближчих вершин". Перше з цих понять визначається індуктивно так.

1-й крок індукції. Нехай зафіксовано вершину x_0, E_1 – множина усіх ребер e∈E, інцидентних v_0. Серед ребер $e \in E_1$ вибираємо ребро $e(1) = (v_0,\ v_1)$, що має мінімальну вагу, тобто $w\big(e(1)\big) = \min_{c \in E_1} w(e)$. Тоді v_1 називаємо першою найближчою вершиною (НВ), число $w(e(1))$ позначаємо $l(1) = l(v_1)$ і називаємо відстанню до цієї НВ. Позначимо $V_1 = \{v_0,\ v_1\}$ – множину найближчих вершин.

2-й крок індукції. Позначимо E_2 – множину усіх ребер $e = (v', v'')$, $e \in E$, таких що $v' \in V1, v'' \in (V \backslash V_1)$. Найближчим вершинам $v \in V_1$ приписано відстані $l(v)$ до кореня v_0 , причому $l(v_0) = 0$. Введемо позначення: $\overline{V_1}$ – множина таких вершин $v'' \in (V \backslash V_1)$, що ∃ ребра виду $e = (v, v'')$, де $v \in V_1$. Для всіх ребер $e \in E_2$ знаходимо таке ребро $e_2 = (v', v_2)$, що величина $l(v') + w(e_2)$ найменша. Тоді v_2 називається другою найближчою вершиною, а ребра e_1, e_2 утворюють зростаюче дерево для виділених найближчих вершин $D_2 = \{e_1, e_2\}$.

$(s+1)$-й крок індукції. Нехай у результаті s кроків виділено множину найближчих вершин $V_s = \{v_0, v_1, \dots, v_s\}$ і відповідне їй зростаюче дерево $D_s = \{e_1, e_2, \dots, e_s\}$... Для кожної вершини $v \in V_s$ обчислена відстань $l(v)$ від кореня v_0 до v; $\overline{V_s}$ – множина вершин $v \in (V \backslash V_s)$, для яких існують ребра вигляду $e = (v_r, v)$, де $v_r \in V_s$, $v \in (V \backslash V_s)$. На кроці $s+1$ для кожної вершини $v_r \in V_s$ обчислюємо відстань до вершини v_r :$L(s+1)(v_r) = l(v_r) + \min_{v^* \in \overline{V_s}} w(v_r, v^*)$, де min береться по всіх ребрах $e = (v_r, v^*)$, $v^* \in \overline{V_s}$, після чого знаходимо min серед величин $L(s+1)(v_r)$. Нехай цей min досягнуто для вершин v_{r_0} і відповідної їй $v^* \in \overline{V_s}$, що назвемо v_{s+1}. Тоді вершину v_{s+1} називаємо $(s+1)$-ю НВ, одержуємо множину $V_{s+1} = V_s\, U v_{s+1}$ і зростаюче дерево $D_{s+1} = D_s U\big(v_{r_0}, v_{s+1}\big)$. $(s+1)$-й крок завершується перевіркою: чи є чергова НВ v_{s+1} відзначеною вершиною, що повинна бути за умовою задачі зв'язано найкоротшим ланцюгом з вершиною v_0. Якщо так, то довжина шуканого ланцюга дорівнює $l(v_{s+1}) = l(v_{r_0}) + w(v_{r_0}, v_{s+1})$; при цьому шуканий ланцюг однозначно відновлюється з ребер зростаючого дерева D_{s+1}. У противному випадку випливає перехід до кроку $s+2$. •

Приклад. У графі на рис.5.1 знайти найкоротший ланцюг для виділеної пари вершин v_0, v^*.

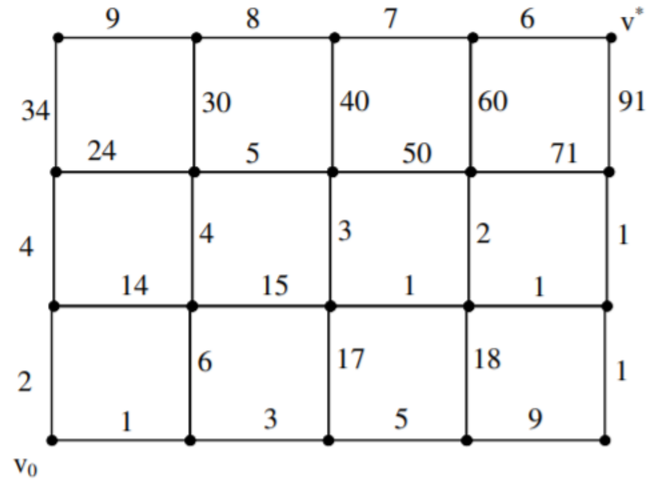


Рисунок 5.1

Розв’язання.

Будемо позначати найближчі вершини v_1, $v_2, v_3, \ldots$, у порядку їхньої появи (див. рис. 5.2): $l(v_1) = 1$, $l(v_2) = 2$, $l(v_3) = 4$, $l(v_4) = 6$, $l(v_5) = 7$, $l(v_6) = 9$, $l(v_7) = 11$, $l(v_8) = 16$, $l(v_9) = 18$, $l(v_{10}) = 19$, $l(v_{11}) = 19$, $l(v_{12}) = 20$, $l(v_{13}) = 20$, $l(v_{14}) = 22$, $l(v_{15}) = 40$, $l(v_{16}) = 41$, $l(v_{17}) = 49$, $l(v_{18}) = 56$, $l(v^*) = 62$.

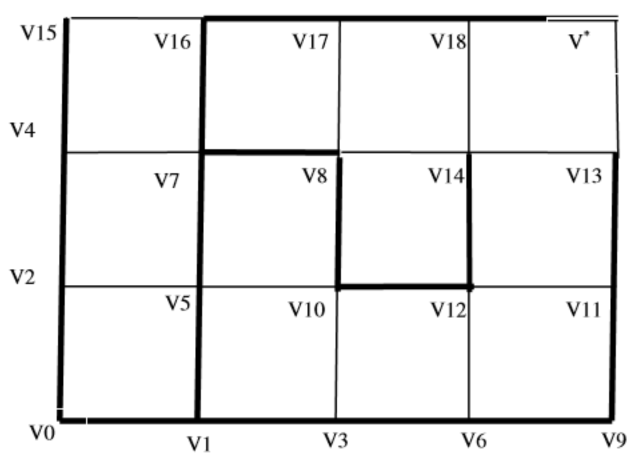


Рисунок 5.2

Дерево найближчих вершин виділено на рисунку 5.2 жирними лініями і є кістяковим деревом, тому що містить усі вершини графа. Шуканий найкоротший ланцюг: $[v_0,\ v_1, v_5, v_7, v_{16}, v_{17}, v_{18}, v^*]$, довжина ланцюга $l = l(v^*) = 62$.

<u>Плоскі і планарні графи</u>

Плоским графом називається граф, вершини якого є точками площини, а ребра – безперервними лініями без самоперетинань, що з'єднують відповідні вершини так, що ніякі два ребра не мають спільних точок крім інцидентної їм обом вершини. Граф називається *планарним*, якщо він є ізоморфним плоскому графу.

Гранню плоского графа називається максимальна за включенням множина точок площини, кожна пара яких може бути з'єднана жордановою кривою, що не перетинає ребра графа. Границею грані будемо вважати множину вершин і ребер, що належать цій грані.

Алгоритм γ укладання графа G являє собою процес послідовного приєднання до деякого укладеного підграфа $\tilde{G}$ графа G нового ланцюга, обидва кінці якого належать $\tilde{G}$. При цьому в якості початкового плоского графа $\tilde{G}$ вибирається будь-який простий цикл графа G. Процес продовжується доти, поки не буде побудовано плоский граф, ізоморфний графові G, або приєднання деякого ланцюга виявиться неможливим. В останньому випадку граф G не є планарным.

Нехай побудоване деяке укладання підграфа $\tilde{G}$ графа G. Сегментом S відносно $\tilde{G}$ будемо називати підграф графа G одного з наступних виглядів:

- ребро $e \in E$, $e = (u, v)$, таке, що $e \notin \tilde{E}$, $u, v \in \tilde{V}$, $\tilde{G} = (\tilde{V}, \tilde{E})$;

- зв'язний компонент графа $G - \tilde{G}$, доповнений всіма ребрами графа G, інцидентними вершинам узятого компонента, і кінцями цих ребер.

Вершину v сегмента S відносно $\tilde{G}$ будемо називати *контактною*, якщо $v \in \tilde{V}$.

Припустимою гранню для сегмента S відносно $\tilde{G}$ називається грань Γ графа $\tilde{G}$, що містить усі контактні вершини сегмента S. Через $\Gamma(S)$ будемо позначати множину припустимих граней для S. Назвемо α -ланцюгом простий ланцюг L сегмента S, що містить дві різні контактні вершини і не містить інших контактних вершин.

Тепер формально опишемо алгоритм γ.

0. Виберемо деякий простий цикл C графа G і укладемо його на площині; покладемо $\tilde{G} = G$.

1. Знайдемо грані графа $\tilde{G}$ і сегменти відносно $\tilde{G}$. Якщо множина сегментів порожня, то перейдемо до пункту 7.

2. Для кожного сегмента S визначимо множину $\Gamma(S)$.

3. Якщо існує сегмент S, для якого $\Gamma(S) = \emptyset$, то граф G не планарний. Кінець. Інакше перейдемо до п. 4.

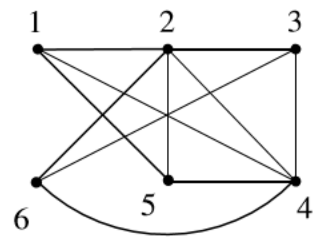
4. Якщо існує сегмент S, для якого мається єдина припустима грань Γ, то перейдемо до п. 6. Інакше до п. 5. 5.

Для деякого сегмента S $\Gamma(S) > 1$. У цьому випадку вибираємо довільну припустиму грань Γ.

6. Розмістимо довільний α- ланцюг $L \in S$ у грань Γ; замінимо $\tilde{G}$ на $\tilde{G} \cup L$ і перейдемо до п. 1.

7. Побудовано укладання $\tilde{G}$ графа G на площині. Кінець.

Кроком алгоритму γ будемо вважати приєднання до $\tilde{G}$ α- ланцюга L.



Приклад. Нехай граф G зображено на рисунку 5.3. Укладемо спочатку цикл $C = [1, 2, 3, 4, 1]$, що розбиває площину на дві грані Γ_1 і Γ_2 . На рисунку 5.4 зображено граф $\tilde{G} = C$ і сегменти S_1, S_2, S_3 відносно $\tilde{G}$ з контактними вершинами, що обведені колами. Оскільки $\Gamma(S_i) = \{\Gamma_1, \Gamma_2\}$ $(i = 1, 2, 3)$, то кожний α- ланцюг довільного сегмента можна укладати в будь-яку припустиму для нього грань.

Помістимо, наприклад, α- ланцюг $L = [2, 5, 4]$ у Γ_1. Виникає новий граф $\tilde{G}$ і його сегменти (рис. 5.5). При цьому $\Gamma(S_1) = \{\Gamma_3\}$, $\Gamma(S_2) = \{\Gamma_1, \Gamma_2\}$, $\Gamma(S_3) = \{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3\}$. Укладаємо $L = (1, 5)$ у грань Γ_3 (рис. 5.6).

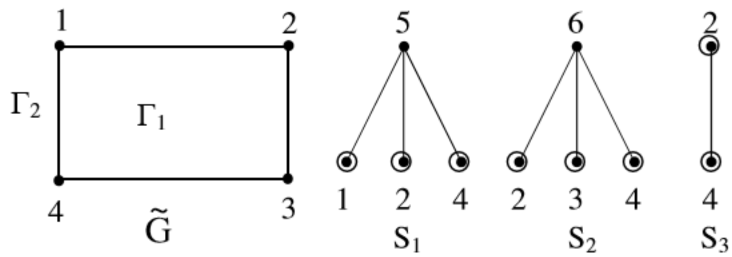


Рисунок 5.4

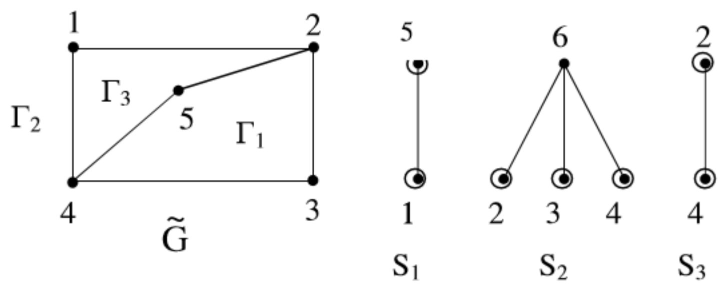


Рисунок 5.5

Тоді $\Gamma(S_1) = \{\Gamma_1, \Gamma_2\}$, $\Gamma(S_2) = \{\Gamma_1, \Gamma_2\}$. Далі укладемо α- ланцюг $L = (2, 6, 4)$ сегмента S_1 у Γ_1 (рис. 5.7). У результаті маємо $\Gamma(S_1) = \{\Gamma_5\}$, $\Gamma(S_2) = \{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_5\}$. Нарешті, уклавши ребро $(6, 3)$ у Γ_5, а ребро $(2, 4)$ – наприклад, у Γ_1, одержуємо укладання графа G на площині (рис. 5.8).

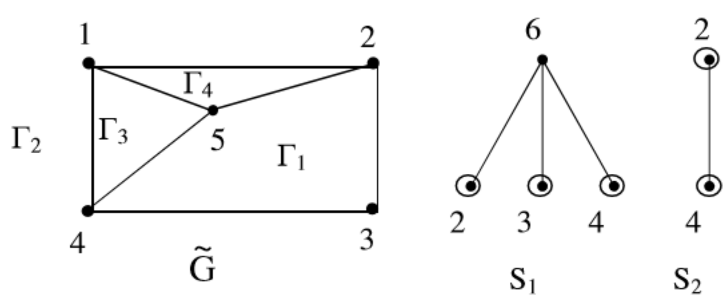


Рисунок 5.6

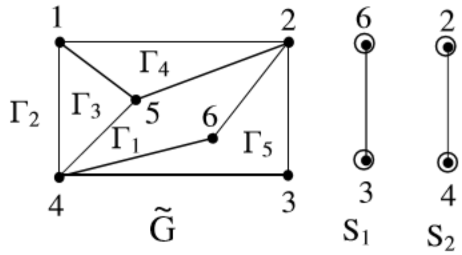


Рисунок 5.7

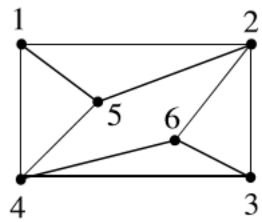


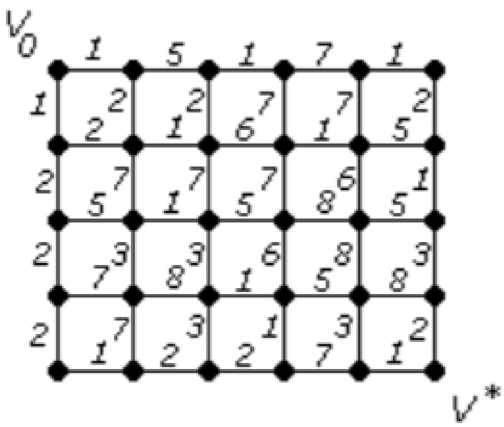
Рисунок 5.8

Індивідуальні завдання

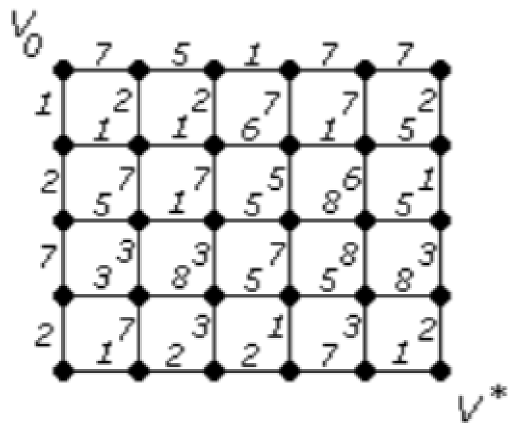
Завдання № 1. Розв'язати на графах наступні 2 задачі:

1. За допомогою алгоритму Дейкстра знайти найкоротший шлях у графі поміж парою вершин V_0 і V^*.

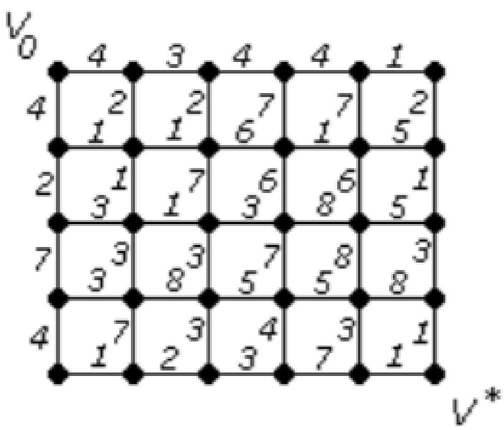
1



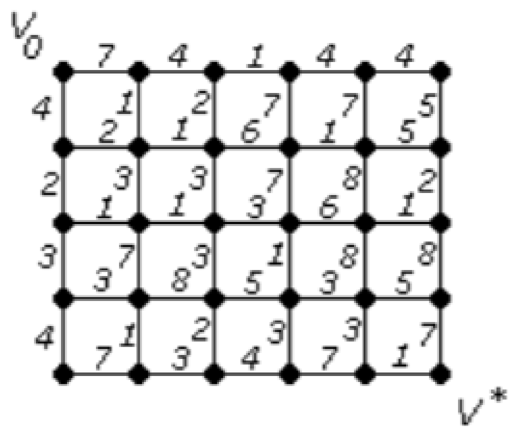
2



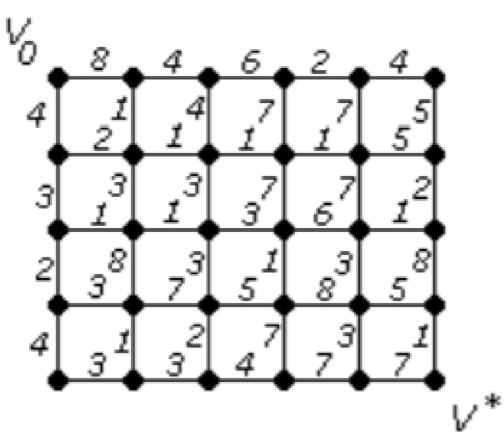
3



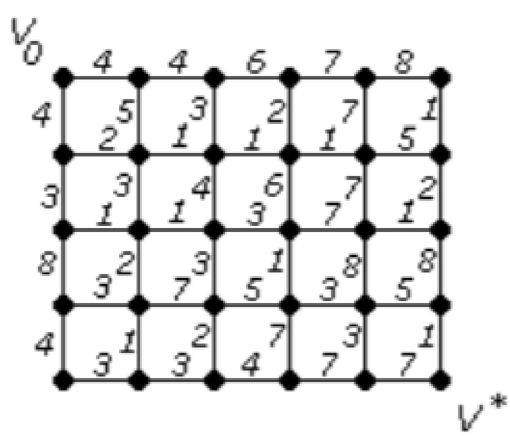
4



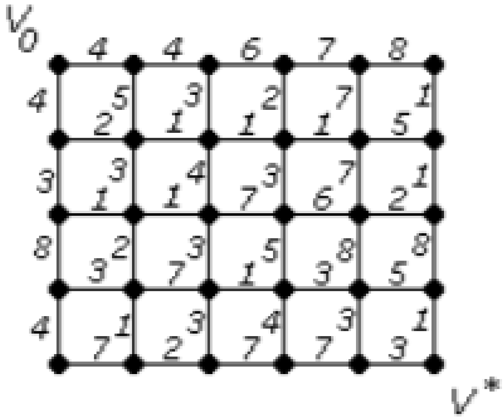
5



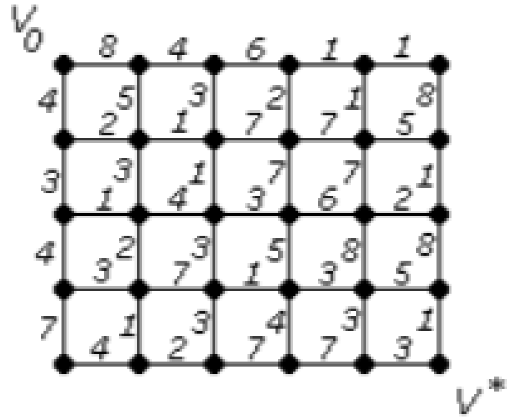
6



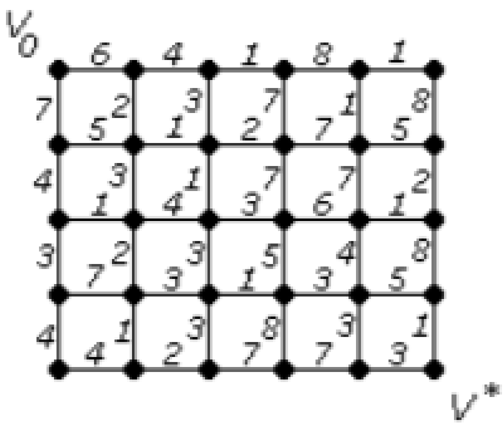
7


V_0
4 4 6 7 8
4 2 5 1 3 1 2 1 7 5 1
3 1 3 1 4 7 3 6 7 2 1
8 3 2 7 3 1 5 3 8 5 8
4 7 1 2 3 7 4 7 3 3 1
V^*

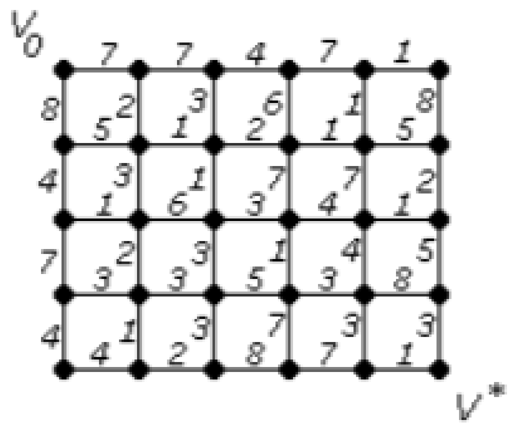
8


V_0
8 4 6 1 1
4 2 5 1 3 7 2 7 1 5 8
3 1 3 4 1 3 7 6 7 2 1
4 3 2 7 3 1 5 3 8 5 8
7 4 1 2 3 7 4 7 3 3 1
V^*

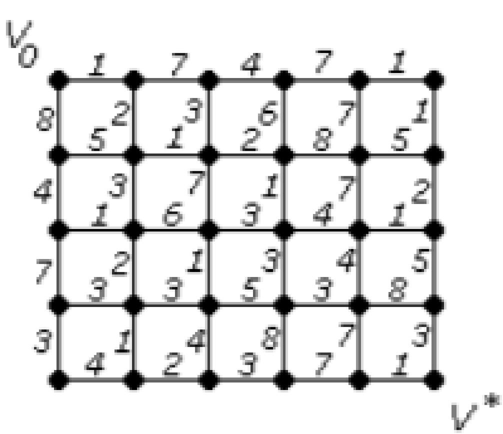
9


V_0
6 4 1 8 1
7 5 2 1 3 2 7 7 1 5 8
4 1 3 4 1 3 7 6 7 1 2
3 7 2 3 3 1 5 3 4 5 8
4 4 1 2 3 7 8 7 3 3 1
V^*

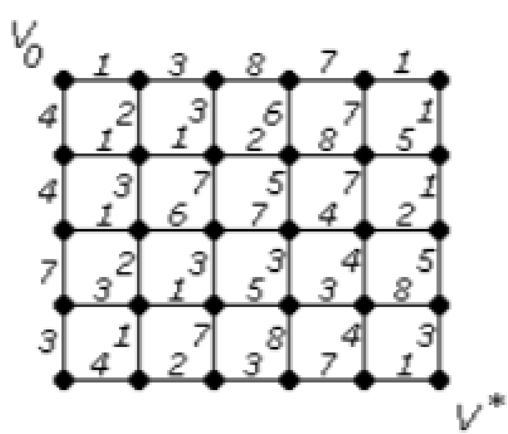
10


V_0
7 7 4 7 1
8 5 2 1 3 2 6 1 1 5 8
4 1 3 6 1 3 7 4 7 1 2
7 3 2 3 3 5 1 3 4 8 5
4 4 1 2 3 8 7 7 3 1 3
V^*

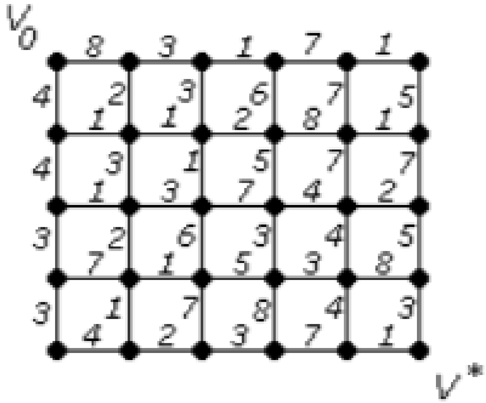
11


V_0
1 7 4 7 1
8 5 2 1 3 2 6 8 7 5 1
4 1 3 6 7 3 1 4 7 1 2
7 3 2 3 1 5 3 3 4 8 5
3 4 1 2 4 3 8 7 7 1 3
V^*

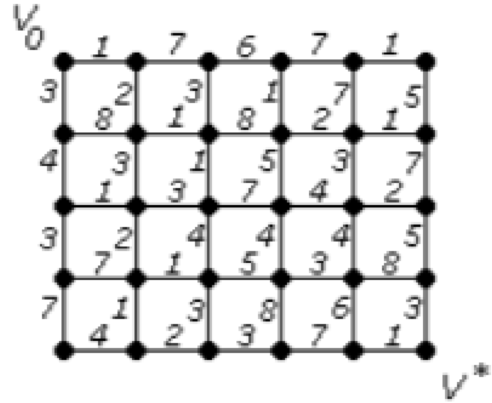
12


V_0
1 3 8 7 1
4 1 2 1 3 2 6 8 7 5 1
4 1 3 6 7 7 5 4 7 2 1
7 3 2 1 3 5 3 3 4 8 5
3 4 1 2 7 3 8 7 4 1 3
V^*

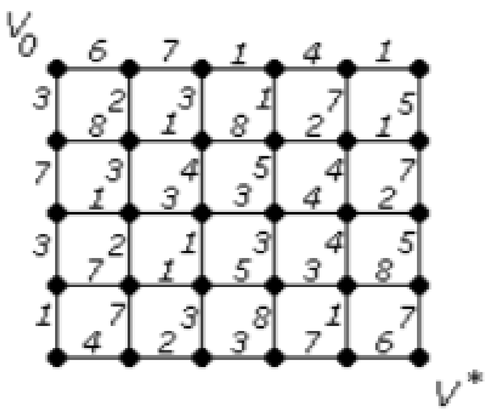
13



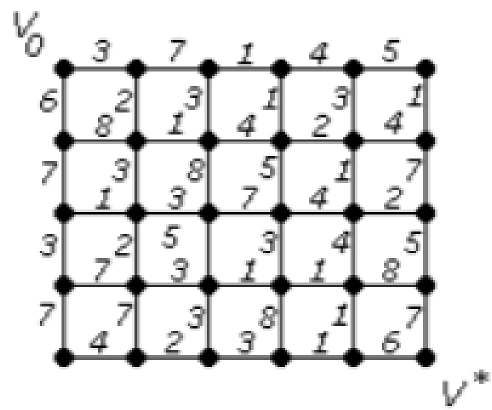
14



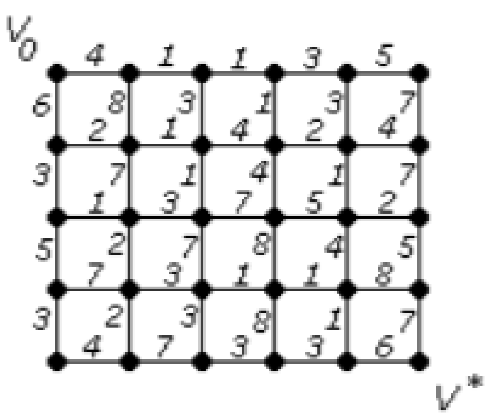
15



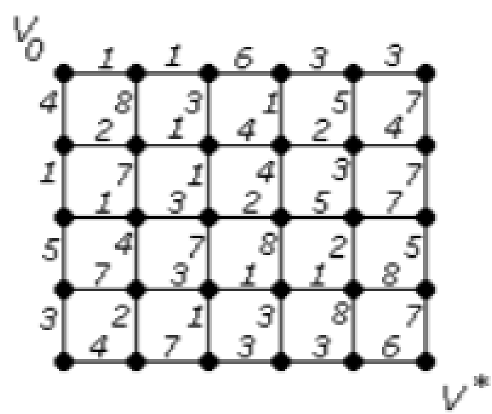
16



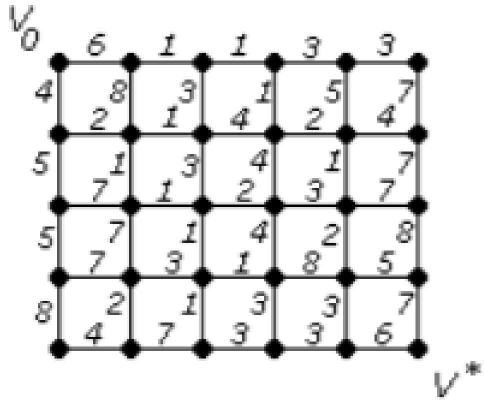
17



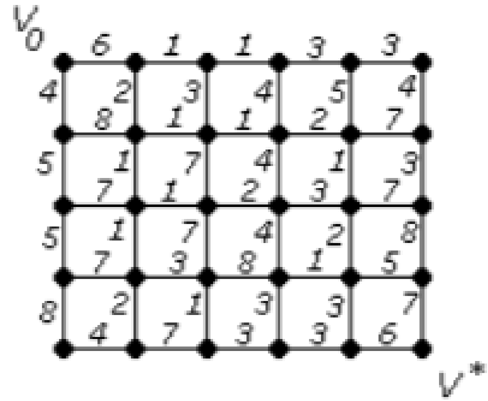
18



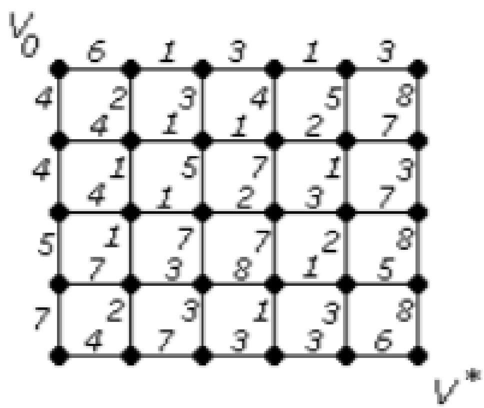
19



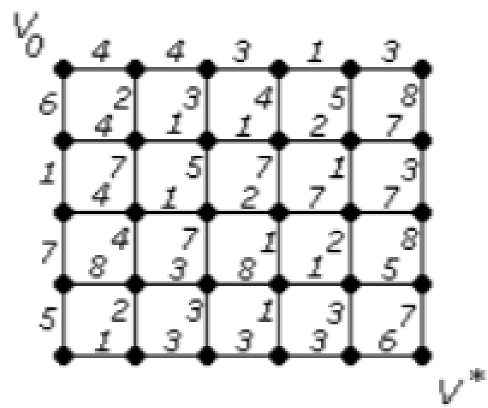
20



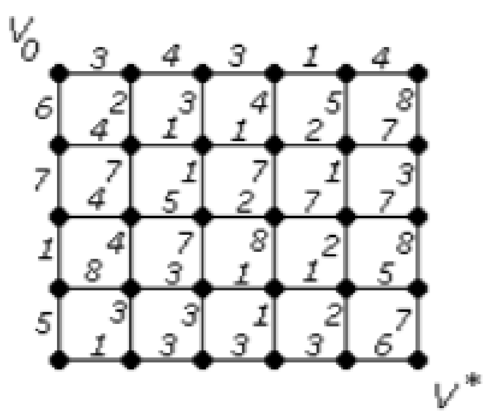
21



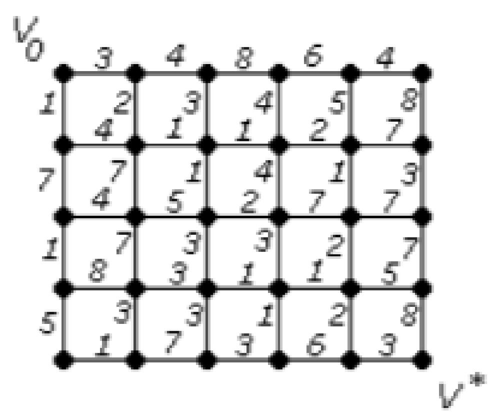
22



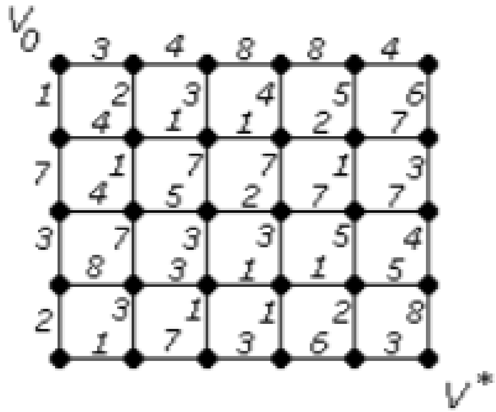
23



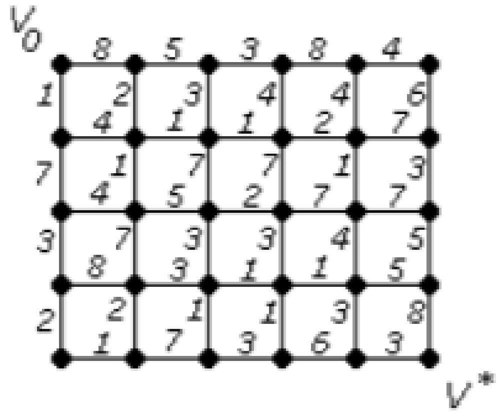
24



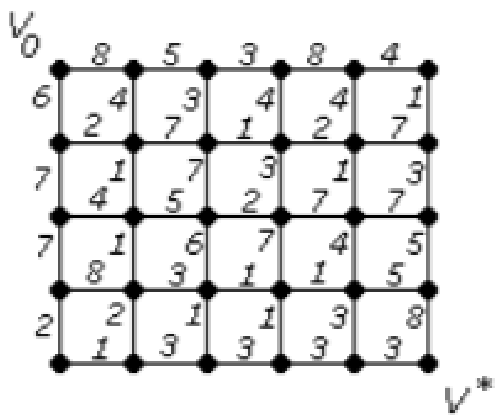
25



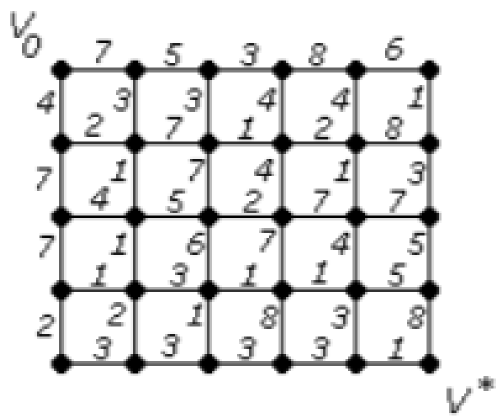
26



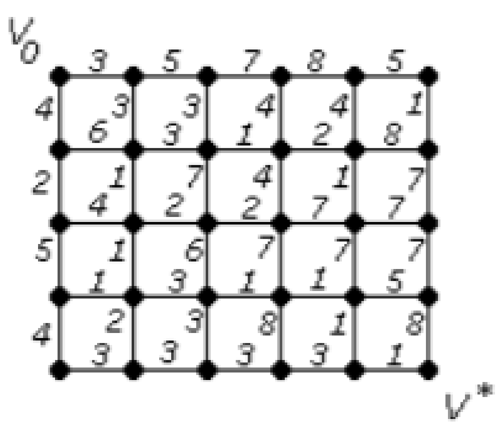
27



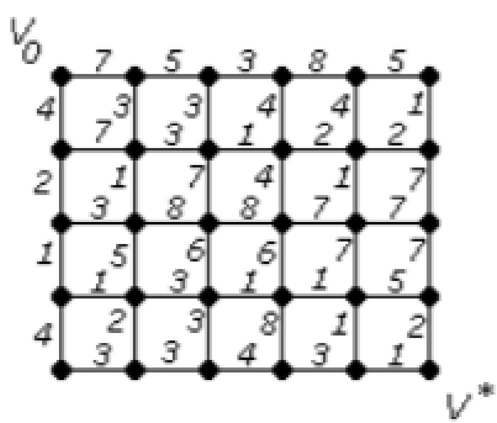
28



29

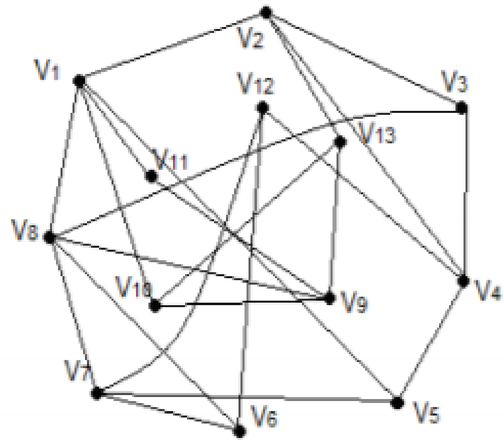


30

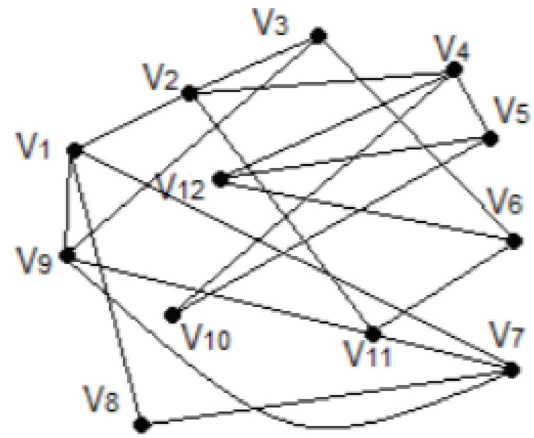


2. За допомогою γ -алгоритма зробити укладку графа у площині, або довести що вона неможлива.

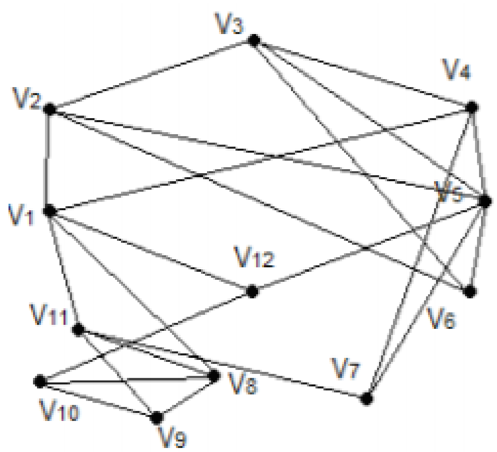
1



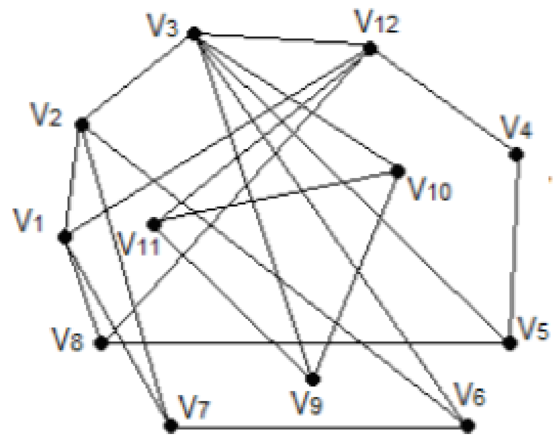
2



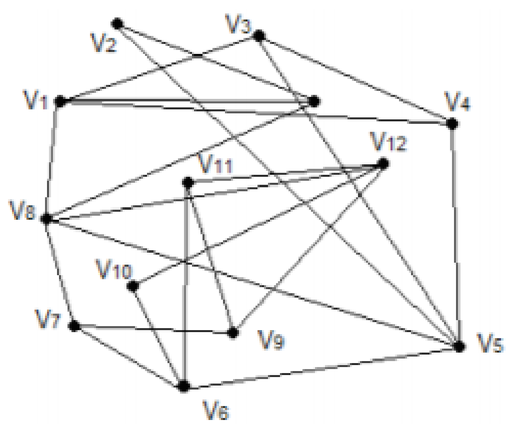
3



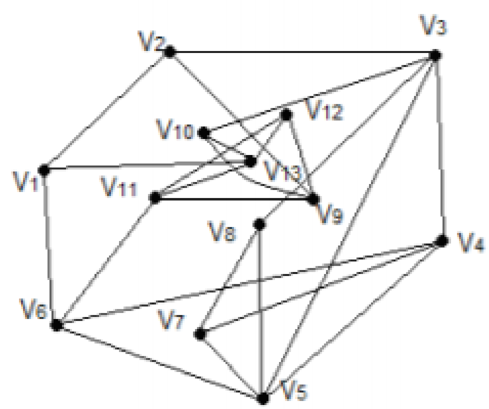
4



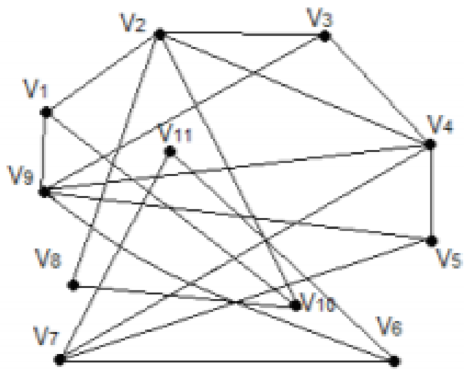
5



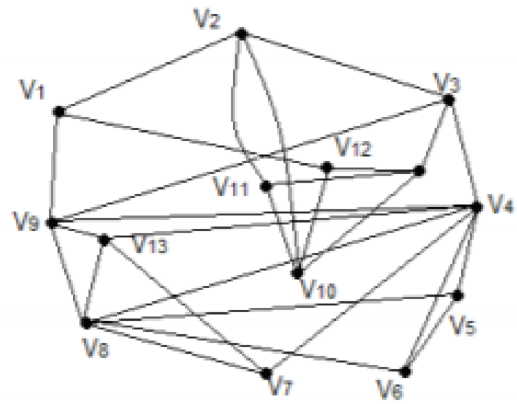
6



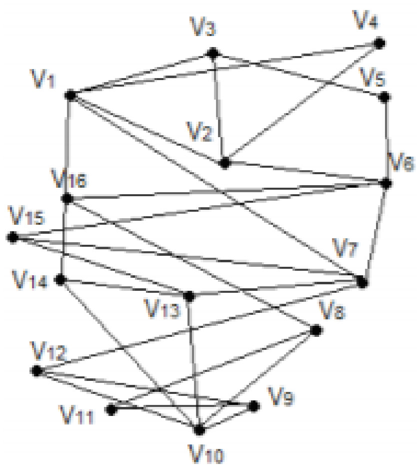
7


V2
V3
V1
V11
V4
V9
V5
V8
V10
V6
V7

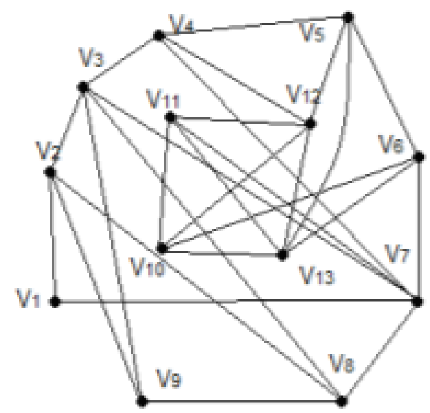
8


V2
V1
V3
V12
V11
V4
V9
V13
V10
V5
V8
V7
V6

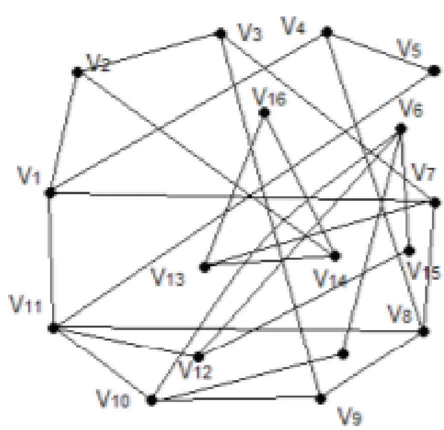
9


V3
V4
V1
V5
V2
V6
V16
V15
V7
V14
V13
V8
V12
V9
V11
V10

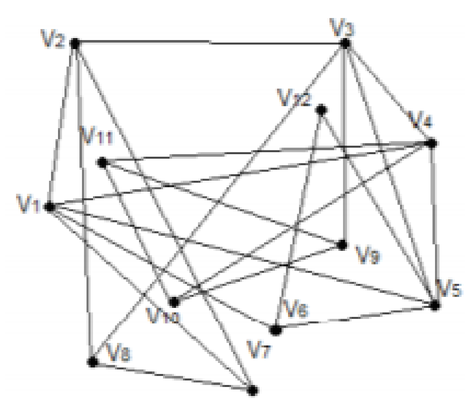
10


V4
V5
V3
V11
V12
V2
V6
V7
V10
V13
V1
V9
V8

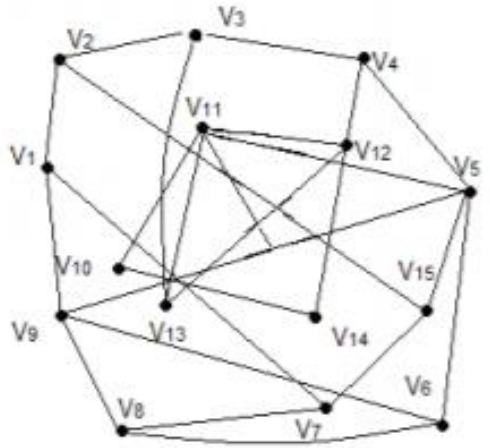
11


V3
V4
V2
V5
V16
V6
V7
V1
V13
V14
V15
V11
V8
V12
V10
V9

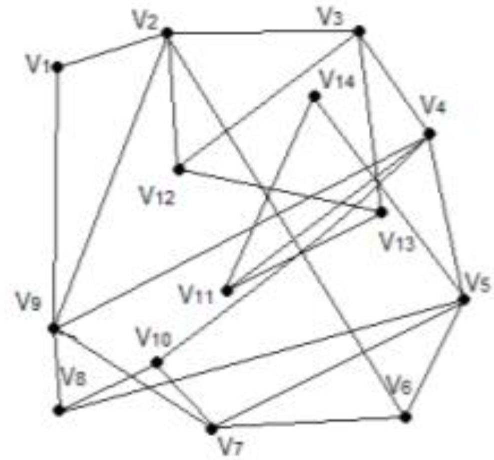
12


V2
V3
V12
V4
V11
V1
V9
V5
V10
V6
V7
V8

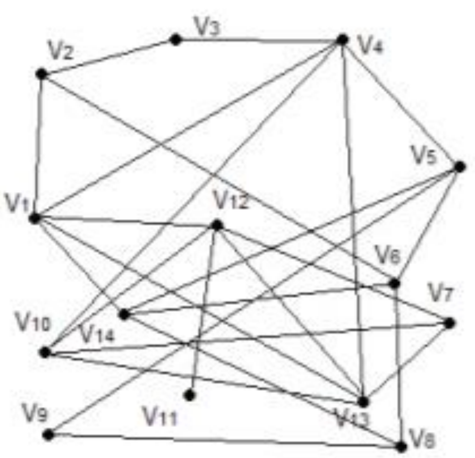
13



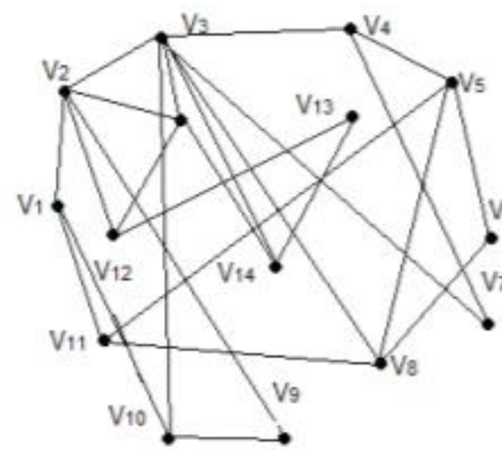
14



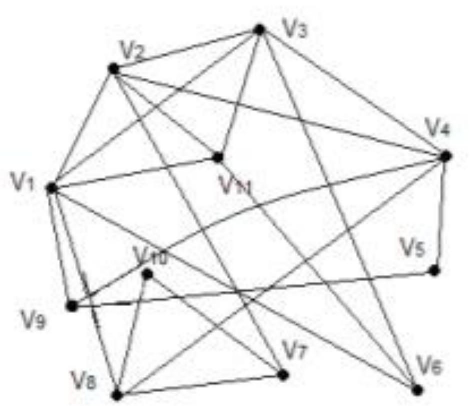
15



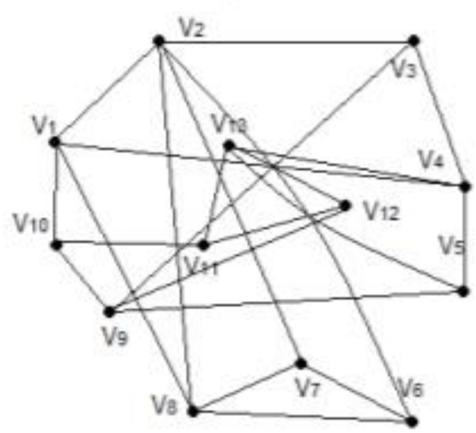
16



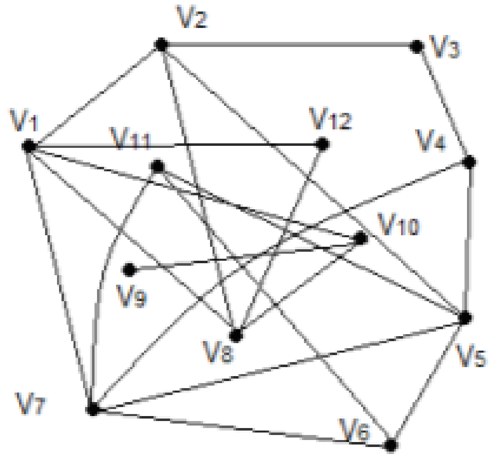
17



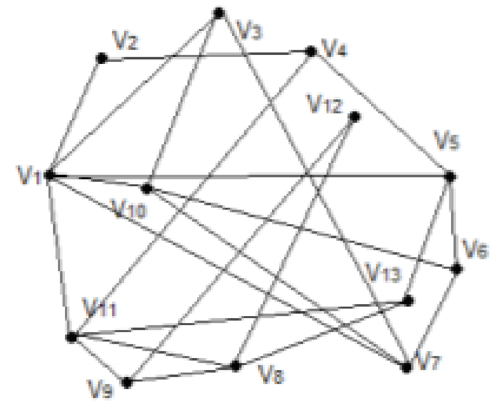
18



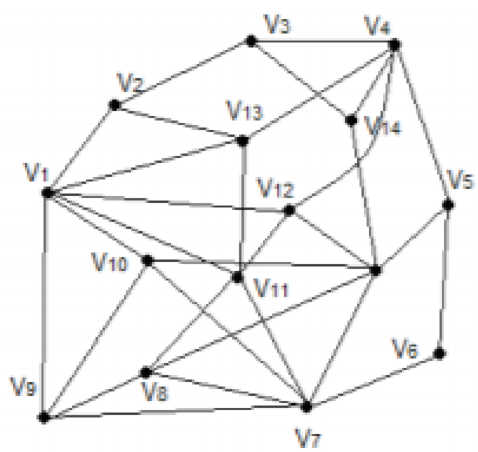
19



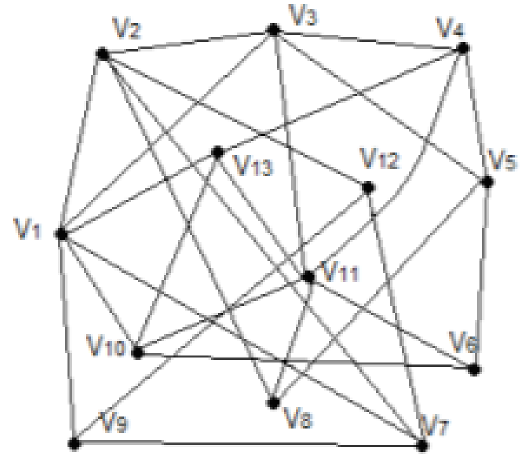
20



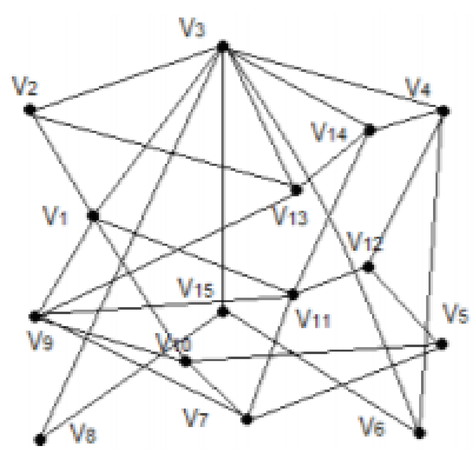
21



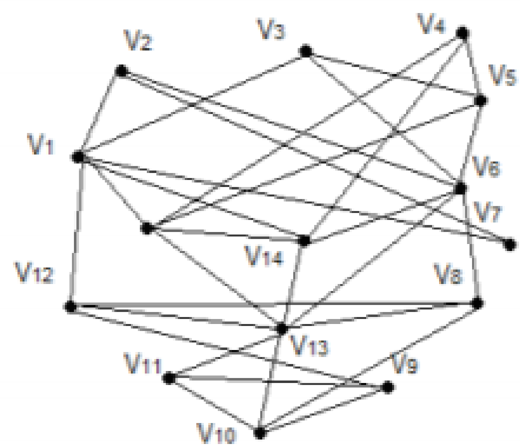
22



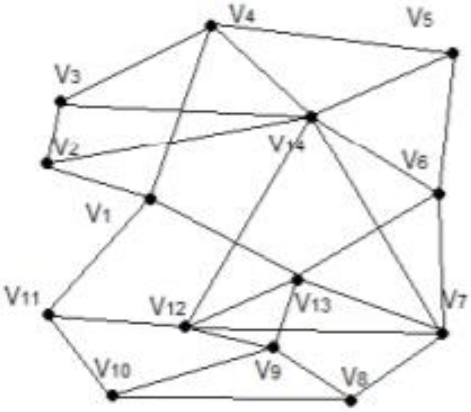
23



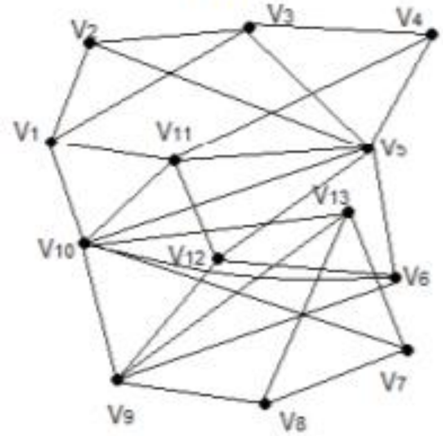
24



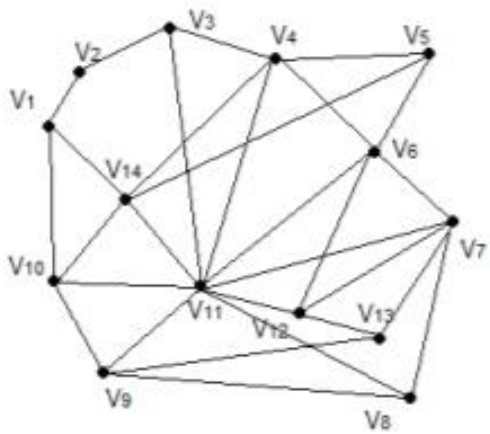
25



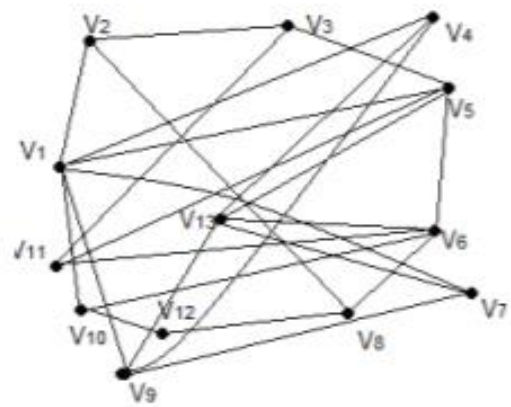
26



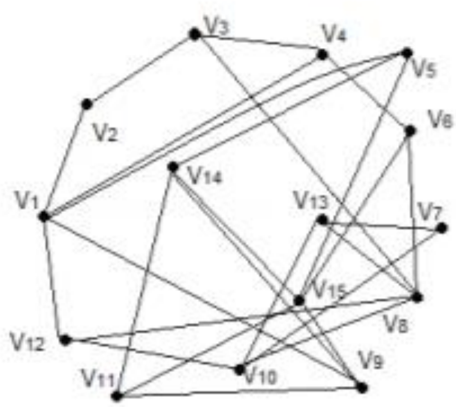
27



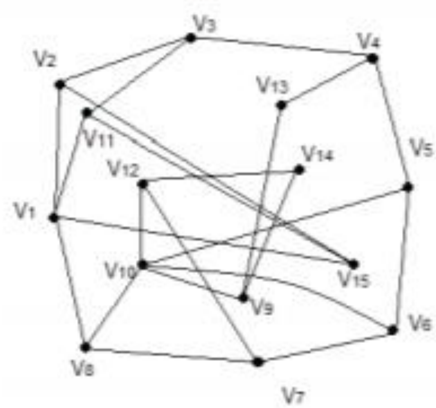
28



29



30



Завдання №2. Написати програму, яка реалізує алгоритм Дейкстра знаходження найкоротшого шляху між парою вершин в графі. Протестувати за розробленою програмою задачу 1 із завдання № 1.

Лабораторна робота № 6. Потоки в мережах

Теоретичні відомості та приклади розв'язання задач

Потоки в мережах.

Постановка задачі. Маємо зважений орієнтовний граф $G = (V, E)$, ваги $c(e)$ на дугах якого є цілими додатними числами і називаються пропускними спроможностями дуг. В графі виділено дві вершини: $s \in V$, яка називається джерелом (вона інцидентна лише дугам, що виходять з неї), і $t \in V$, яка називається стоком (ця вершина інцидентна лише дугам, що входять у вершину). Потоком з s в t величини V називається задана на дугах графа невід'ємна функція $f(e)$, яка задовольняє наступним умовам:

1) $\sum_{v' \in \Gamma(v)} f(v, v') - \sum_{v'' \in \Gamma^{-1}(v)} f(v'', v) = \begin{cases} V, v = s \\ 0, \ \ v \neq s, t, \\ -V, v = t \end{cases}$

де $\Gamma(v)$ - множина вершин суміжних з v через вихідні дуги, $\Gamma^{-1}(v)$ – множина вершин суміжних з v через вхідні дуги;

2) $f(e) \leq \ c(e)$ для всіх $e \in E$.

Тобто потік починається у вершині s та закінчується у вершині t, а в усіх інших вершинах мережі кількість потоку, який входить у вершину дорівнює кількості потоку, який з неї виходить. Крім того, на кожній дузі потік не перевищує її пропускної спроможності.

Нехай $X \subset V$, $s \in X$, $t \notin X$, $X = V \backslash X$. Розрізом $(X, \bar{X})$, що відділяє вершини s і t, називається множина дуг, які йдуть з X в $\bar{X}$. Пропускна спроможність розрізу $(X, \bar{X})$ визначається як

$C(X, \bar{X}) = \sum_{e \in (X, \bar{X})} c(e)$.

Розглянемо у якості прикладу мережу, зображену на рисунку 6.1, де числа біля дуг є їх пропускними спроможностями.

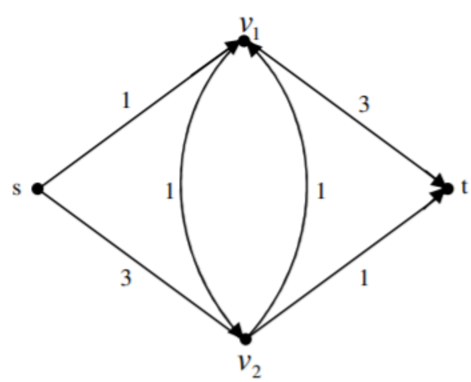


Рисунок 6.1

Нехай $X = \{s, v_1\}$. Тоді $(X, \bar{X}) = \{(s, v2\ ), (v1\ , v2), (v1, t)\}$, $c(X, \bar{X}\ ) = 3 + 1 + 3 = 7$.

Потік через розріз $f(X,\ \bar{X})$ визначається як різниця між сумою потоків по дугам із X в $\bar{X}$ і сумою потоків по дугам із $\bar{X}$ в X

$f(X, \overline{X}) = \sum_{e\in(X,\overline{X})} f(e) - \sum_{e\in(\bar{X},X)} f(e)$.

Теорема. (Ford, Fulkerson). Для будь-якої мережі максимальна величина потоку із s в t дорівнює мінімальної пропускної спроможності розрізу, який розділяє s і t.

Алгоритм знаходження максимального потоку в мережі.

Виберемо в якості початкового припустимого потоку нульовий по всім дугам потік і будемо його послідовно нарощувати, збільшуючи величину потоку на кожному кроці на $\Delta \geq 1$. За скінчену кількість кроків буде, таким чином, побудовано максимальний потік. Нарощування потоку буде здійснюватися наступним чином. Нехай маємо деякий припустимий потік. Покажемо, як можна його збільшити чи вказати розріз, пропускна спроможність якого дорівнює величині потоку. Будемо шукати такий шлях з s в t, у якому можна йти по дугам як у прямому, так і в зворотному напрямі, але дуги, які проходимо в прямому напрямі, повинні бути ненасиченими $(f(e) < c(e))$, а дуги, які проходимо в зворотному напрямі, повинні бути навантаженими $(f(e) > 0)$. Якщо такий шлях знайдено, то шукаємо мінімум по всім дугам шляху з величин $c(e) - f(e)$ для дуг, що проходилися в прямому напрямі і $f(e)$ для дуг, що проходилися в зворотному напрямі. Нехай цей мінімум дорівнює $\Delta \geq 1$. Будуємо новий потік, збільшуючи потік по дугам в прямому напрямі на Δ и зменшуючи потік по дугам в зворотному напрямі на ту ж саму величину. (Потоки по дугам, що не належать шляху, залишаються без змін).

Новий потік буде припустимим і мати величину на Δ одиниць більше попередньої. Якщо ж вершина t недосяжна подобнім чином із s, то це означає, що існує множина вершин $\bar{X} = V\backslash X$, недосяжних із s, причому $s \in X$, $t \in X$. Тому що з множини X неможливо перейти в множину X зазначеним вище чином, то всі дуги з $\bar{X}$ в X ненавантажені. Тому потік $f(X, \bar{X})$ через розріз $(X, \bar{X})$, дорівнює величині потоку в мережі, та дорівнює пропускної спроможності розрізу $(X, \overline{X})$. Таким чином буде побудовано максимальний потік.

Приклад. Перша цифра за дужками на кожній дузі визначає пропускну спроможність, друга в дужках – потік по дузі.

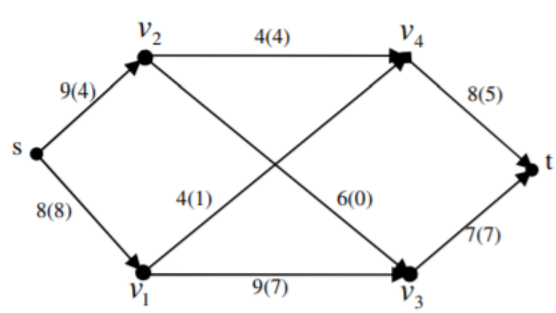


Рисунок 6.2

Зростаючим для потоку шляхом є $(s, v_2, v_3, v_1, v_4, t)$ $\Delta = min\{9 - 4, 6 - 0, 7, 4 - 1, 8 - 5\} = 3$.

Новий потік прийме вид

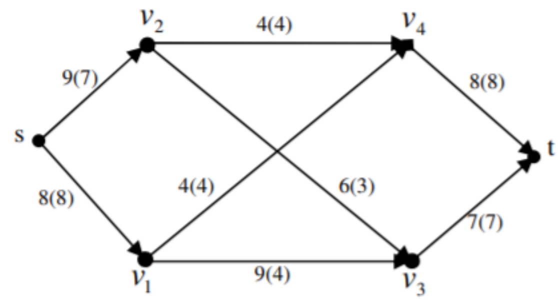


Рисунок 6.3

Спробуємо знову знайти зростаючий для потоку шлях. Із s можна потрапити в v_2, із v_2 - в v_3, із v_3 - в v_1. Ніяких інших вершин мережі з s досягнути не вдається. Тому $X = (s, v_1, v_2, v_3)$, $X = \{t, v_4\}$ і $(X, \bar{X}) = \{(v_1, v_4), (v_2, v_4), (v_3, t)\}$ - розріз с пропускною спроможністю $4 + 4 + 7 = 15$, рівною величині потоку в мережі. Отже, знайдений потік є максимальним.

Приклад. Знайти максимальний потік для графа, зображеного на рисунку. Вважати дуги орієнтовними зліва направо.

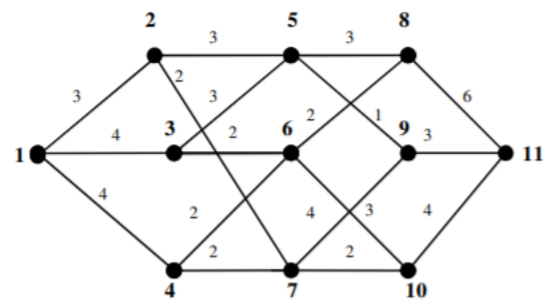


Рисунок 6.4

Спочатку робимо перебір всіх варіантів шляхів, які складаються лише з ненасичених дуг, побудований таким чином потік називається повним. Для цього обирають якомога верхні ненасичені дуги.

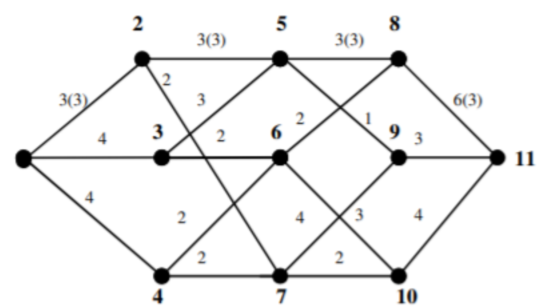


Рисунок 6.5

1) $(1, 2, 5, 6, 11)$, $\Delta = 3$;

2) $(1, 3, 5, 9, 11)$, $\Delta = 1$;

3) $(1, 3, 6, 8, 11)$, $\Delta = 2$;

4) $(1, 4, 6, 10, 11)$, $\Delta = 2$;

5) $(1, 4, 7, 9, 11)$, $\Delta = 2$.

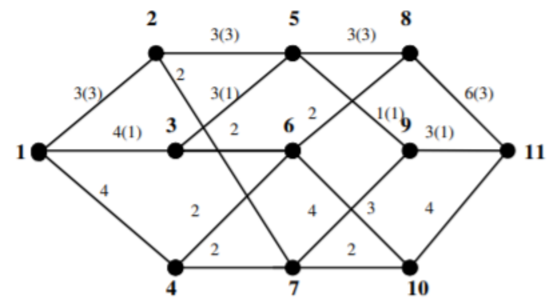


Рисунок 6.6

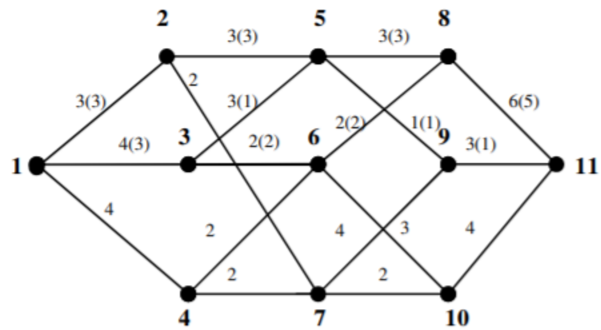


Рисунок 6.7

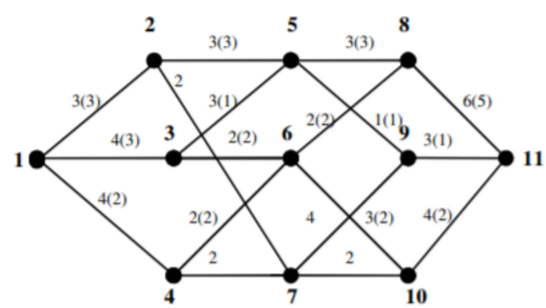


Рисунок 6.8

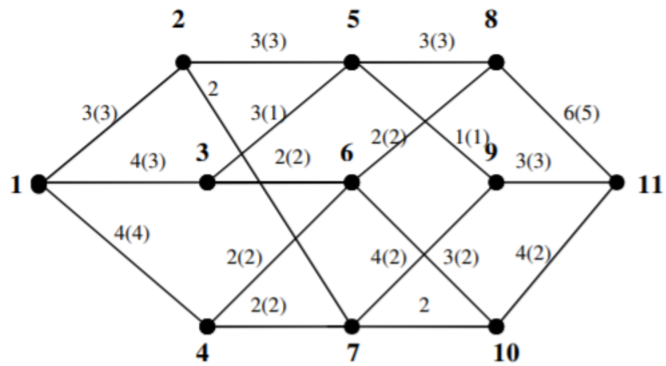


Рисунок 6.9

Значення повного потоку $V = 10$.

Далі шукаємо корегуючий шлях з врахуванням руху у зворотному напрямі - $(1, 3, 5, 2, 7, 10, 11)$, $\Delta = 1$.

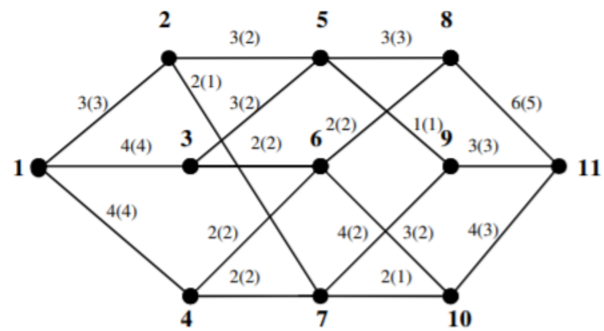


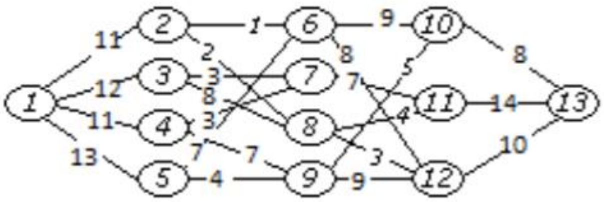
Рисунок 6.10

Цей потік є максимальний, оскільки вже 2, 3, 4 вершини є недосяжними, мінімальний розріз складають дуги $(1,2)$, $(1,3)$, $(1,4)$. Величина максимального потоку $V = 11$.

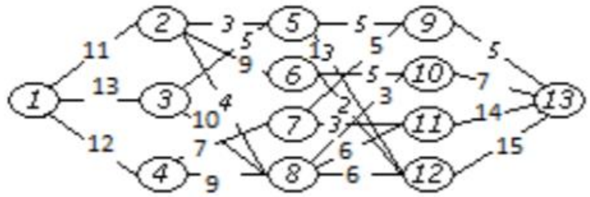
Індивідуальні завдання

Завдання № 1. Побудувати повний потік, а потім скорегувати його до найбільшого (дуги спрямовані зліва направо).

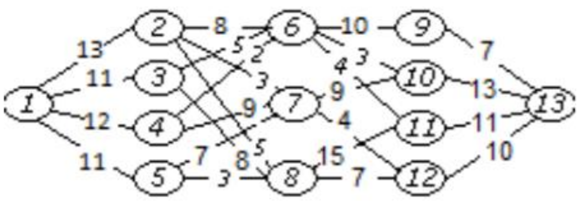
1



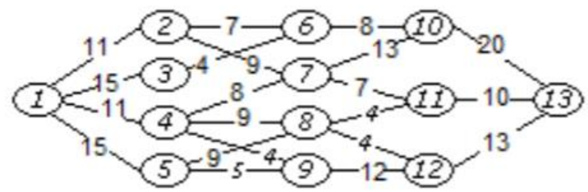
2



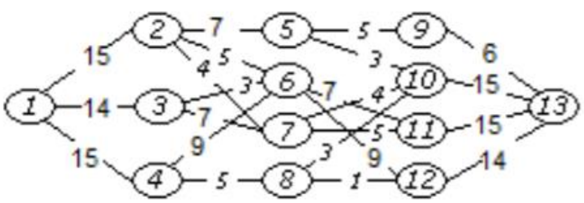
3



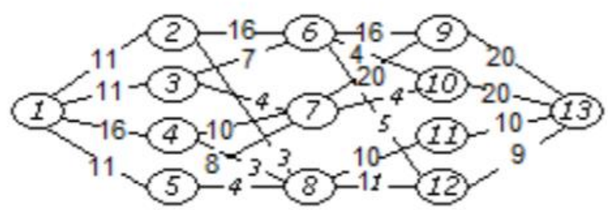
4



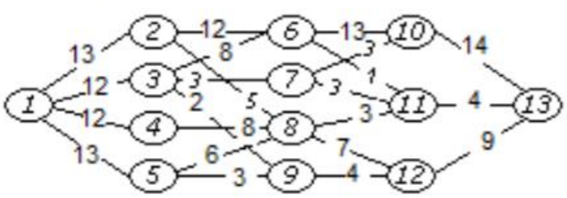
5



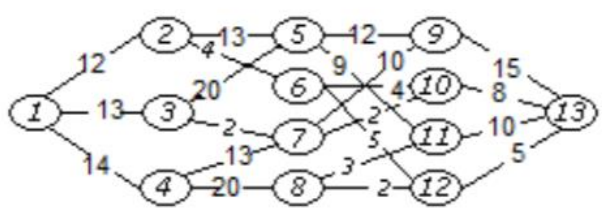
6



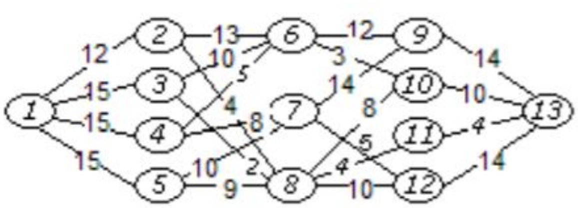
7



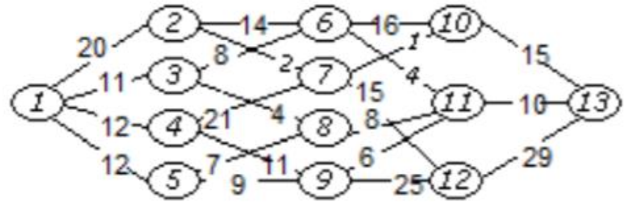
8



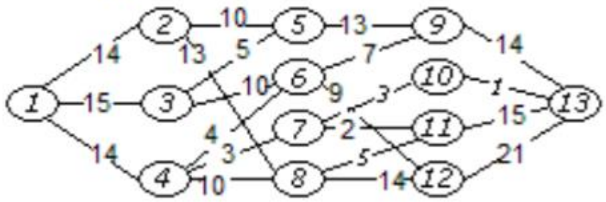
9



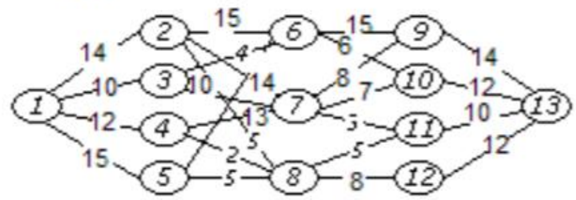
10



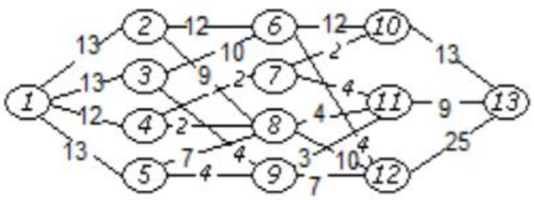
11



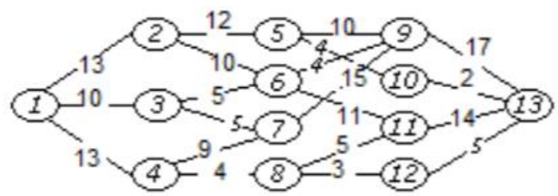
12



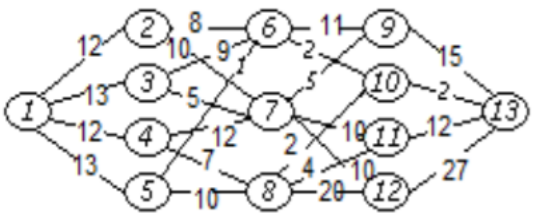
13



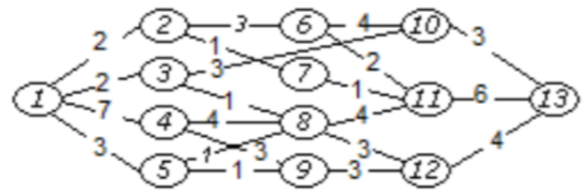
14



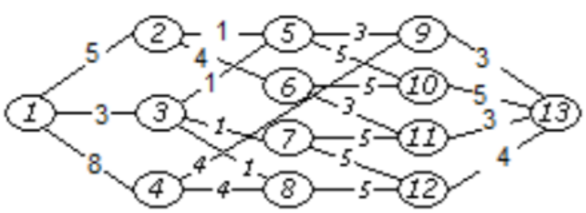
15



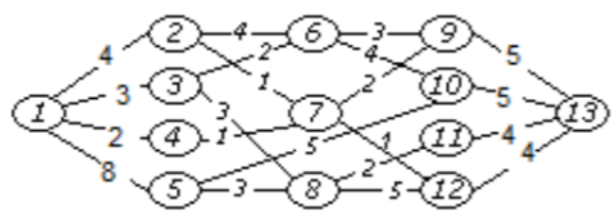
16



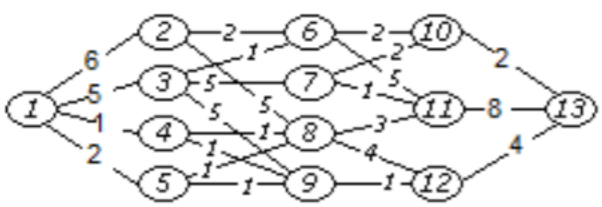
17



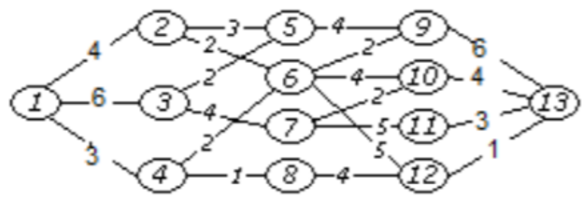
18



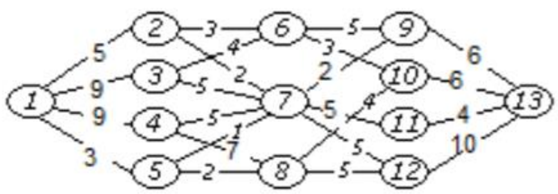
19



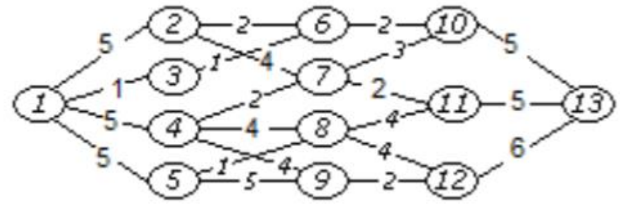
20



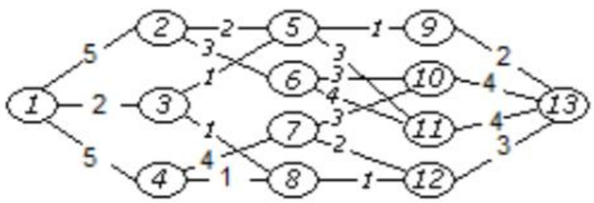
21



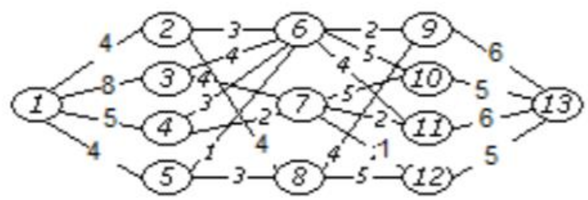
22



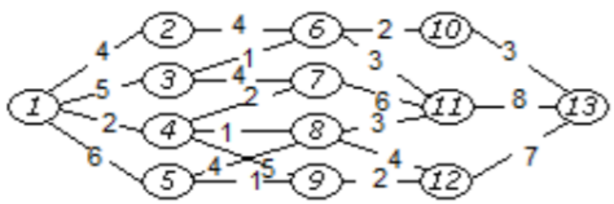
23



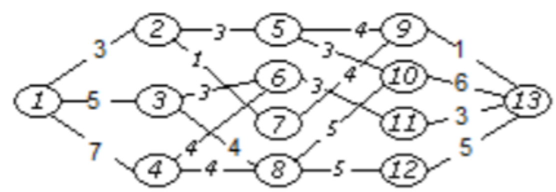
24



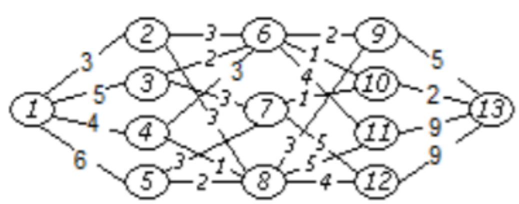
25



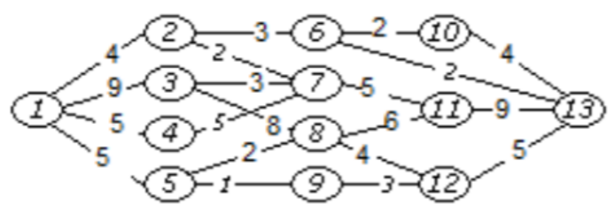
26



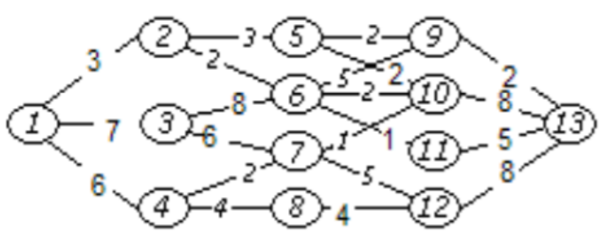
27



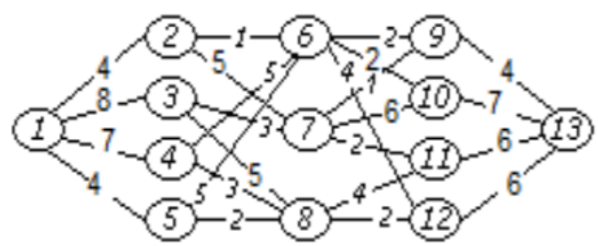
28



29



30



Завдання №2. Написати програму, яка знаходить максимальний потік в мережі. Протестувати за розробленою програмою мережу із завдання № 1.

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

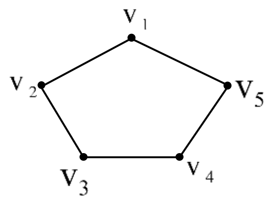
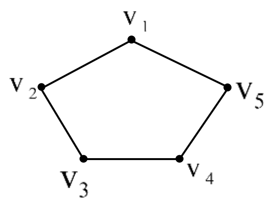
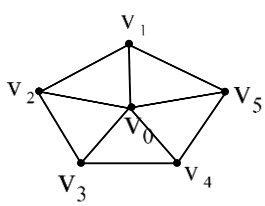
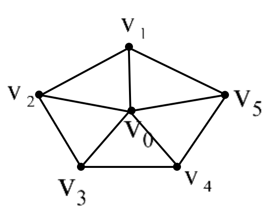
1	Коли виник комплекс математичних дисциплін – комп'ютерна дискретна математика?
2	Що зумовило виникнення комп'ютерної дискретної математики?
3	Що зумовило виникнення комп'ютерної дискретної математики?
4	З якими об'єктами працює комп'ютерна дискретна математика?
5	З якими об'єктами працює комп'ютерна дискретна математика?
6	Хто запропонував інтуїтивне визначення множини?
7	Хто запропонував інтуїтивне визначення множини?
8	Хто винайшов теорію множин?
9	Продовжіть: певна сукупність об'єктів, які ми можемо розрізнити між собою, які не повторюються і які об'єднані в єдине ціле нашою інтуїцією за якоюсь певною ознакою – це …
10	Продовжіть: певна сукупність об'єктів, які ми можемо розрізнити між собою, які не повторюються і які об'єднані в єдине ціле нашою інтуїцією за якоюсь певною ознакою – це …
11	Які є способи подання множини?
12	Які є способи подання множини?
13	Які є способи візуалізації множини?
14	Які є способи візуалізації множини?
15	Як називається множина, яка не містить жодного елементу?
16	Як називається множина, яка містить клас елементів, з яких ми вибираємо множини?
17	Продовжіть: універсум – це …
18	Продовжіть: універсум – це …
19	Як називається множина $\mathrm{N} = \{0,1,2,3,\ldots\}$?
20	Як називається множина $\mathrm{N} = \{0,1,2,3,\ldots\}$?
21	Як називається множина $\mathrm{Q} = \left\{ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{n}} \mid m \in \mathrm{Z}, n \in N \right\}$?
22	Що обов'язково повинно стояти праворуч від символу $\in$?
23	Що обов'язково повинно стояти праворуч від символу $\in$?
24	Який символ потрібно поставити у виразі: $(A \ldots B) \Leftrightarrow (\forall a : a \in A \Rightarrow a \in B)$, – замість «трикрапки»?
25	Який із символів є символом «логічної еквівалентності»?
26	Який із символів є символом «логічної еквівалентності»?
27	Яку операцію слід поставити між множинами A та B (замість «три крапки») у виразі: $C = A \ldots B = \{x : (x \in A) \vee (x \in B)\}$?
28	Яку операцію слід поставити між множинами A та B (замість «три крапки») у виразі: $C = A \ldots B = \{x : (x \in A) \vee (x \in B)\}$?
29	Яку операцію слід поставити між множинами A та B (замість «три крапки») у виразі: $\mathrm{D} = \mathrm{A} \ldots \mathrm{B} = \{\mathrm{x} : (\mathrm{x} \in \mathrm{A}) \& (x \in B)\}$?
30	Яку операцію слід поставити між множинами A та B (замість «три крапки») у виразі: $\mathrm{E} = \mathrm{A} \ldots \mathrm{B} = \{\mathrm{x} : (\mathrm{x} \in \mathrm{A}) \& (x \notin B)\}$?

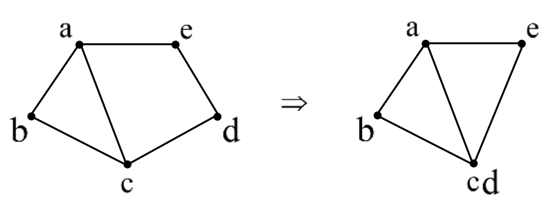
31	Яку операцію слід поставити між множинами А та В (замість «три крапки») у виразі: $\mathrm{E} = \mathrm{A} \ldots \mathrm{B} = \{\mathrm{x} : (\mathrm{x} \in \mathrm{A}) \& (x \notin B)\}$?
32	Яку операцію слід поставити між множинами А та В (замість «трикрапки») у виразі: $\mathrm{F} = \mathrm{A} \ldots \mathrm{B} = \{\mathrm{x} : (\mathrm{x} \in \mathrm{A}) \& (x \notin B) \vee (x \in B) \& (x \notin A)\}$?
33	Чим прославився Бартон Рассел?
34	Чим прославився Бартон Рассел?
35	Яку алгебраїчну властивість операцій над множинами відображає вираз: $A \cup B = B \cup A$?
36	Яку алгебраїчну властивість операцій над множинами відображає вираз: $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$?
37	Яку алгебраїчну властивість операцій над множинами відображає вираз: $A \cap B = B \cap A$?
38	Яку алгебраїчну властивість операцій над множинами відображає вираз: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$?
39	Яку алгебраїчну властивість операцій над множинами відображає вираз: $A \cup B = B \cup A$?
40	Який знак потрібно поставити замість «три крапки» у правилі поглинання: $A \cup (A \ldots B) = A$?
41	Який знак потрібно поставити замість «три крапки» у правилі поглинання: $A \cap (A \ldots B) = A$?
42	Який знак потрібно поставити замість «три крапки» у законі де Моргана: $\overline{\mathrm{A} \ldots \mathrm{B}} = \overline{A} \cap \overline{B}$?
43	Що буде результатом $A \Delta A =$?
44	Що буде результатом $A \Delta A =$?
45	Що буде результатом $A \cup \overline{A} =$?
46	Чому дорівнює $\mathrm{A} \setminus \mathrm{B} =$?
47	Чому дорівнює $\mathrm{A} \setminus \mathrm{B} =$?
48	Скільки існує способів намалювати діаграму Ейлера-Венна для двох множин?
49	Скільки існує способів намалювати діаграму Ейлера-Венна для двох множин?
50	Продовжіть: потужність скінченної множини – це…
51	Як позначається потужність множини А?
52	Який знак потрібно поставити у виразі: $C = A \coprod B \Rightarrow \lvert C \rvert = \lvert A \rvert \ldots \lvert B \rvert$, – замість «три крапки»?
53	Який знак потрібно поставити у виразі: $\lvert A \setminus B \rvert = \lvert A \rvert \setminus \lvert A \ldots B \rvert$, – замість «три крапки»?
54	Який знак потрібно поставити у виразі: $\lvert A \ldots B \rvert = \lvert A \rvert + \lvert B \rvert - \lvert A \cap B \rvert$, – замість «три крапки»?
55	Скільки чисел з інтервалу $[1, \mathrm{N}]$ ділиться на 2, на 3 і на 5?
56	Що таке булеан множини А?
57	Як позначається булеан множини А?
58	Що обраховується за формулою: 2^{n}?
59	Чому рівна потужність порожньої множини?
60	Як називається система множин, об’єднання яких накриває всю множину А?

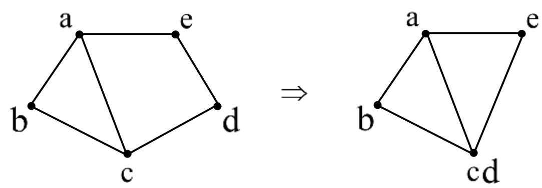
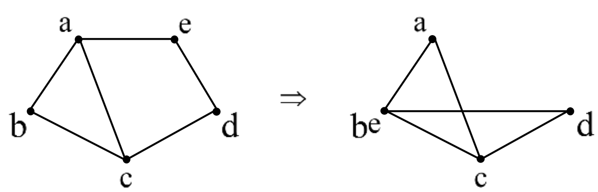
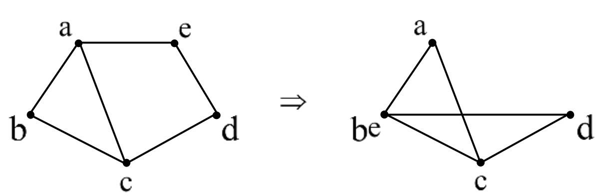
61	Як називається система множин, яка задовольняє таким умовам: 1) ця система множин є покриттям; 2) для $\forall\ i \neq j\ \ T_i \cap T_j = \varnothing$?
62	Які з систем є розбиттям?
63	Продовжіть: множина всіх впорядкованих пар виду (a, b), де $a \in A,\ b \in B$ – це …
64	При якій умові $(a, b) = (b, a)$?
65	Який знак потрібно поставити замість «*» у виразі $A_1 * A_2 * \ldots * A_n = \{(a_1, a_2, ..., a_n) \mid a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \ldots, a_n \in A_n\}$?
66	Хто винайшов систему координування n-вимірного простору?
67	Яким виразом задається система координування на площині?
68	Який знак потрібно поставити у виразі: $\|A \times B\| = \|A\| \ldots \|B\|$, – замість «три крапки»?
69	Що отримаємо, якщо зі слова вилучимо всі літери?
70	Що таке «замикання алфавіту (зірка Кліні)»?
71	Що таке «формальна мова»?
72	Як називається певна підмножина R декартового добутку множин $A_1, A_2, \ldots, A_m$?
73	Які з відношень є найпростішими?
74	Як називаються відношення, у яких пов’язані об’єкти з двох множин?
75	Як називаються відношення, які виокремлюють певну ознаку, за якою ми можемо класифікувати наші об’єкти?
76	Які з відношень є унарними?
77	Які з відношень є бінарними?
78	Які з відношень є унарними?
79	Яку ІТ-технологію побудували на основі теорії відношень?
80	Які операції можна виконувати для двох відношень однакової арності на однакових множинах?
81	Що є універсамом для відношення?
82	Які є способи представлення (подання) бінарних відношень?
83	Якщо на стрілковій діаграмі зображені елементи двох множин не поєднані жодною стрілкою, то що це за конструкція?
84	Який знак ставиться в матричному представленні відношення, якщо упорядкована пара елементів належить відношенню?
85	Який зі способів представлення (подання) бінарних відношень найкраще підходить для програмної реалізації?
86	Який знак потрібно поставити у виразі: $R_3 = R_1 \ldots R_2 \{(a, c) \mid \exists b \in B, a \in A, c \in C : aR_1b, bR_2c\}$, – замість «три крапки»?
87	Що буде результатом композиції двох бінарних відношень – $R_1 \subseteq A \times B$: $R_1 = \{(a,0),(a,1),(b,2),(c,2)\}$ і $R_2 \subseteq B \times C$: $R_2 = \{(0$🙂 $),(1$😃 $),(1$😐 $)\}$?
88	Що означає aRb?
89	Поставте необхідне у виразі (замість «три крапки»): $R^{-1} = \{(b, a) \mid \ldots\}$, – якщо $R \subseteq A \times B$ і R^{-1} – обернене відношення до R.
90	Як називається бінарне відношення на множині А, якщо: $\forall a \in A\ aRa$?
91	Як називається бінарне відношення на множині А, якщо: $\forall a \in A\ a\overline{R}a$?

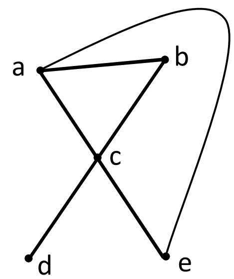
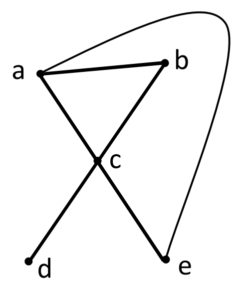
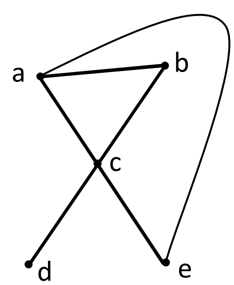
92	Як називається бінарне відношення на множині А, якщо: $\exists a \in A\ a\overline{R}a$?
93	Як називається бінарне відношення на множині А, якщо для $\forall a, b \in A$: $aRb \Rightarrow bRa$?
94	Як називається бінарне відношення на множині А, якщо $aRb, bRa \Rightarrow a = b$?
95	Яку властивість має відношення $y = x^2$ на множині R-чисел?
96	Яку властивість має операція $\leq$ на множині Z-чисел?
97	Яку властивість має операція < на множині Z-чисел?
98	Як називається бінарне відношення на множині А, якщо $\forall a, b \in A\ \ aRb \Rightarrow b\overline{R}a$?
99	Як називається бінарне відношення на множині А, якщо $\exists a, b \in A\ \ aRb \Rightarrow b\overline{R}a$?
100	Яку властивість має відношення включення ($\subseteq$) на системі підмножин (2^B)?
101	Яку властивість має відношення строгого включення ($\subset$) на системі підмножин (2^B)?
102	Встановіть порядок збільшення строгості формулювань між властивостями асиметричність, несиметричність та антисиметричність.
103	Як називається бінарне відношення на множині А, якщо для $\forall a, b, c \in A$: якщо aRb і bRc, то aRc: $aRb,\ bRc \Rightarrow aRc$?
104	Яку властивість має відношення паралельності на множині усіх прямих?
105	Яку властивість має порожнє відношення?
106	Як називається бінарне відношення на множині А, якщо $\exists a, b, c \in A$: $aRb, bRc \Rightarrow a\overline{R}c$?
107	Як називається $G = \langle V, E \rangle$, де $V \neq \varnothing$, V – множина вершин, $E \subseteq V^{(2)}$ – це множина ребер?
108	Як називається $G = \langle V, E \rangle$, де $V \neq \varnothing$, V – множина вершин, $E \subseteq V^{(2)}$ – це множина ребер?
109	Що позначається символом $V^{(2)}$?
110	Що позначається символом $V^{(2)}$?
111	Як називається граф, який не має парних ребер?
112	Як називається граф, який не має парних ребер?
113	Як називається граф, який не має парних ребер і петель?
114	Як називається граф, який не має парних ребер і петель?
115	Як називається граф, який має петлі?
116	Як називається граф, який має петлі?
117	Як називається граф, для якого: $\|V\| < \infty$, $\|E\| < \infty$?
118	Як називається граф, для якого: $\|V\| < \infty$, $\|E\| < \infty$?
119	Як називається граф, для якого: $\|V\| > \infty$, $\|E\| > \infty$?
120	Як називається граф, для якого: $\|V\| > \infty$, $\|E\| > \infty$?
121	Як називається граф, в якому дозволяються парні ребра, а також дозволяються так звані «сукупні вершини»?
122	Як називається граф, в якому дозволяються парні ребра, а також дозволяються так звані «сукупні вершини»?

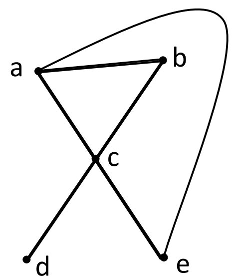
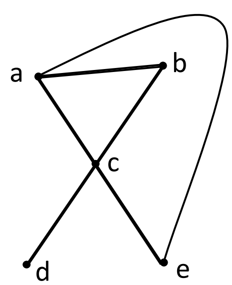
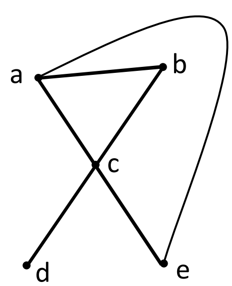
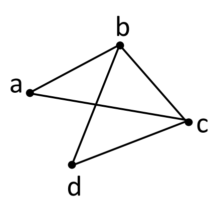
123	Як називається граф, в якому ребро не є поєднанням пари вершин, а є поєднання трійки вершин, четвірки вершин, п'ятірки вершин тощо (ребра поєднують k вершин, де $k \geq 3$)
124	Як називається граф, в якому ребро не є поєднанням пари вершин, а є поєднання трійки вершин, четвірки вершин, п'ятірки вершин тощо (ребра поєднують k вершин, де $k \geq 3$)
125	Яка з матриць неорієнтованого графа визначає відношення сусідства на вершинах?
126	Яка з матриць неорієнтованого графа визначає відношення сусідства на вершинах?
127	Яка з матриць неорієнтованого графа зв'язує вершини і ребра?
128	Яка з матриць неорієнтованого графа зв'язує вершини і ребра?
129	Яка з матриць має такі властивості: 1) кожен стовпчик матриці B_G містить рівно дві одиниці; 2) кількість одиничок в рядку матриці B_G дорівнює кількості ребер, які виходять з заданої вершини?
130	Яка з матриць має такі властивості: 1) кожен стовпчик матриці B_G містить рівно дві одиниці; 2) кількість одиничок в рядку матриці B_G дорівнює кількості ребер, які виходять з заданої вершини?
131	Як називається спосіб представлення графів, в якому $\forall u \in V$, яка пробігає множину вершин, просто перелічую усі вершини, з якими вона поєднана ребрами: $\Gamma(u) = \{v \in V \mid (u,v) \in E\}$?
132	Як називається спосіб представлення графів, в якому $\forall u \in V$, яка пробігає множину вершин, просто перелічую усі вершини, з якими вона поєднана ребрами: $\Gamma(u) = \{v \in V \mid (u,v) \in E\}$?
133	Які з графів називаються «щільними»?
134	Які з графів називаються «щільними»?
135	Які з графів називаються «порожніми»?
136	Які з графів називаються «порожніми»?
137	Які з графів називаються «повними»?
138	Які з графів називаються «повними»?
139	Який це граф: $K_n = \langle V, V^{(2)} \setminus 2v \rangle$?
140	Який це граф: $K_n = \langle V, V^{(2)} \setminus 2v \rangle$?
141	Як називається граф $P_n = \langle V, E \rangle$, де $V = \{v_1 \ldots v_n\}$, $E = \{(v_i, v_{i+1}) \mid i = \overline{1, n-1}\}$?
142	Як називається граф $P_n = \langle V, E \rangle$, де $V = \{v_1 \ldots v_n\}$, $E = \{(v_i, v_{i+1}) \mid i = \overline{1, n-1}\}$?
143	Як називається граф, зображений на рисунку? v_1, v_2, v_3, v_4, v_5
144	Як називається граф $C_n = \langle V, E \rangle$, де $V = \{v_1 \ldots v_n\}$, $E = \{(v_i, v_{i+1}) \mid i = \overline{1, n}, v_{n+1} \equiv v_1\}$?

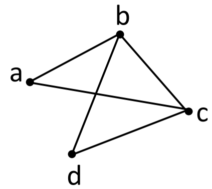
145	Як називається граф, зображений на рисунку? 
146	Як називається граф, зображений на рисунку? 
147	Як називається граф $C_{\text{n}} = \langle V, E \rangle$, де $V = \{v_1 \ldots v_n\}$, $E = \{(v_i, v_{i+1}) \mid i = \overline{1,n}, v_{n+1} \equiv v_1\}$?
148	Як називається граф, зображений на рисунку? 
149	Як називається граф, зображений на рисунку? 
150	Як називається граф, у якому є всі вершини і всі ребра, які ми можемо побудувати?
151	Як називається граф, у якому є всі вершини і всі ребра, які ми можемо побудувати?
152	Як називається граф, який містить всі вершини графу G_2, але не всі ребра?
153	Яку алгебраїчну операцію над графами задано: $\mathrm{G} = \mathrm{G}_1 \cup G_2 \Leftrightarrow \mathrm{V} = \mathrm{V}_1 \cup V_2,\ E = E_1 \cup E_2$?
154	Яку алгебраїчну операцію над графами задано: $\mathrm{G} = \mathrm{G}_1 \cup G_2 \Leftrightarrow \mathrm{V} = \mathrm{V}_1 \cup V_2,\ E = E_1 \cup E_2$?
155	Яку алгебраїчну операцію над графами задано: $\mathrm{G} = \mathrm{G}_1 \cap G_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{V} = \mathrm{V}_1 \cap V_2, \\ E = E_1 \cap E_2 \cap \mathrm{V}^{(2)} \end{cases}$?
156	Яку алгебраїчну операцію над графами задано: $\mathrm{G} = \mathrm{G}_1 \cap G_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{V} = \mathrm{V}_1 \cap V_2, \\ E = E_1 \cap E_2 \cap \mathrm{V}^{(2)} \end{cases}$?

157	Яку алгебраїчну операцію над графами задано: $\mathrm{G} = \mathrm{G}_1 \setminus G_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{V} = \mathrm{V}_1 \setminus V_2, \\ E = (E_1 \setminus E_2) \cap \mathrm{V}^{(2)} \end{cases}$?
158	Якщо графи G_1 та G_2 визначені на одній множині вершин ($\mathrm{V}_1 = V_2$), то яка алгебраїчна операцію над ними виконується за допомогою формул: $\mathrm{G} = \mathrm{G}_1 \setminus G_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{V} = \mathrm{V}_1, \\ E = E_1 \setminus E_2 \end{cases}$?
159	Яку алгебраїчну операцію над графами задано: $\overline{\mathrm{G}} = \left\langle \mathrm{V}, \mathrm{V}^{(2)} \setminus (E \cup vv) \right\rangle$?
160	Яку алгебраїчну операцію над графами задано: $\mathrm{G} = \mathrm{G}_1 + G_2 \Leftrightarrow \begin{cases} V = V_1 \coprod V_2 \\ E = E_1 \cup E_2 \cup V_1 \times V_2 \end{cases}$?
161	Яку алгебраїчну операцію над графами задано: $\mathrm{G} = \mathrm{G}_1 + G_2 \Leftrightarrow \begin{cases} V = V_1 \coprod V_2 \\ E = E_1 \cup E_2 \cup V_1 \times V_2 \end{cases}$?
162	Що отримаємо, якщо до графа K_1 додамо граф C_5?
163	Що отримаємо, якщо до порожнього графа N_n додамо порожній граф N_m?
164	Що отримаємо, якщо до порожнього графа N_n додамо порожній граф N_m?
165	Як називаються операції, які можна виконувати з графами в застосуванні певних процедур?
166	Як називається операція над графом, під час якої вершини видаляються з усіма ребрами, які з них виходять?
167	Як називається операція, під час якої лише прибирається зв’язок між вершинами графа?
168	Яку виконали операцію над графом, під час якої між двома вершинами намалювали ребро?
169	Яку виконали операцію над графом, під час якої домалювали вершину графа?
170	Яку алгоритмічну операцію зображено на рисунку? 

171	Яку алгоритмічну операцію зображено на рисунку? 
172	Яку алгоритмічну операцію зображено на рисунку? 
173	Яку алгоритмічну операцію зображено на рисунку? 
174	Продовжіть: кількість ребер, які виходять із певної вершини – це …
175	Продовжіть: потужність відповідного списку суміжності – це …
176	Виберіть визначення леми «Про рукостискання»
177	Як називається граф, якщо із кожної його вершини виходить однакова кількість ребер?
178	Як називається граф, якщо степені всіх його вершин рівні?
179	Як називається граф, якщо $\forall v \in V \ \deg(v) = k$?
180	Продовжіть: якщо є k-регулярний граф на n-вершинах, то …
181	Як називається шлях проходження по графу?
182	Чому дорівнює довжина маршруту?
183	Чому дорівнює довжина маршруту?
184	Як називається маршрут, в якому перша і остання вершини співпадають?
185	Як називається маршрут, в якому перша і остання вершини співпадають?
186	Як називається маршрут, в якому не має повторів ребер?
187	Як називається маршрут, в якому не має повторів ребер і вершин?
188	Як називається маршрут, в якому не має повторів ребер і вершин?
189	Як називається замкнений ланцюг?
190	Як називається замкнений ланцюг?

191	Як називається простий замкнений ланцюг?
192	Як називається простий замкнений ланцюг?
193	Якщо є граф на 5-ти вершинах (зображений на рисунку), то як називається маршрут d→c→b→a→c→e? 
194	Якщо є граф на 5-ти вершинах (зображений на рисунку), то як називається маршрут d→c→b→a→c→e? 
195	Якщо є граф на 5-ти вершинах (зображений на рисунку), то як називається маршрут a→c→e? 

196	Якщо є граф на 5-ти вершинах (зображений на рисунку), то як називається маршрут a→c→e →a? 
197	Якщо є граф на 5-ти вершинах (зображений на рисунку), то як називається маршрут a→c→e →a? 
198	Якщо є граф на 5-ти вершинах (зображений на рисунку), то як називається маршрут d→f→c→b→a→c→d ? 
199	Яка матриця суміжності у графа, заданого на рисунку? 

200	Яка матриця суміжності у графа, заданого на рисунку? 

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Асеев Г. Г., Абрамов О. М., Ситников Д. Э. Дискретная математика. – К.: Кондор, 2008. – 162 с.

2. Бардачов Ю. М., Соколова Н. А., Ходаков В. Є. Дискретна математика: Підручник. – К.: Вища школа, 2002. – 287 с.

3. Бондаренко М. Ф., Білоус Н. В., Руткас А. Г. Комп'ютерна дискретна математика: Підручник. – Харків: Компанія СМІТ, 2004. – 480 с.

4. Журавчак Л. М. Дискретна математика для програмістів: навч. Посібник / Л. М. Журавчак. – Львів : Видавництво Львівської політехніки, 2019. – 420 с.

5. Капитонова Ю. В. и др. Лекции по дискретной математике. – СПб.: БХВ-Петербург, 2004. – 624 с.

6. Капітонова Ю. В., Кривий С. Л., Летичевський О. А., Луцький Г. М., Печурін М. К. Основи дискретної математики: Підручник. – Київ: Наукова думка, 2002. – 578 с.

7. Кузнецов О. П., Адельсон-Вольский Г. М. Дискретная математика для инженера. – М.: Энергоатомиздат, 1988. – 480 с.

8. Міхайленко В. М., Федоренко Н. Д., Демченко В. В. Дискретна математика. – К.: Видавництво Європейського університету, 2003. – 317 с.

9. Нефедов В. Н., Осипова В. А. Курс дискретной математики. – М.: Изд-во МАИ, 1992. – 264 с.

10. Новиков Ф. А. Дискретная математика для программистов. – СПб.: Питер, 2000. – 304 с.

11. Оре О. Теория графов. – М.: Наука, 1980. – 336 с.

12. Остапович М. В., Чернишенко С. В., Ротар О. А. Дискретна математика для інформатиків. – Дніпропетровськ: Вид-во ДНУ, 2008. – 183 с.

13. Уилсон Р. Введение в теорию графов. – М.: Мир, 1977. – 207 с.

14. Форд Л. Р., Фалкерсон Д. Р. Потоки в сетях. – М.: Мир, 1966.– 229 с.

15. Хаггарти Р. Дискретная математика для программистов. – Москва: Техносфера, 2005. – 400 с.