

Н.І. Ободан, Н.А. Гук

ОБЕРНЕНІ ЗАДАЧІ ІДЕНТИФІКАЦІЇ МОДЕЛЕЙ

2013

**Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України
Дніпропетровський національний університет
ім. Олеся Гончара**

Н.І. Ободан, Н.А. Гук

ОБЕРНЕНІ ЗАДАЧІ ІДЕНТИФІКАЦІЇ МОДЕЛЕЙ

Ухвалено вченою радою як навчальний посібник

**Дніпропетровськ
РВВ ДНУ
2013**

УДК 007:159.955
О 21

Рецензенти : д-р фіз.-мат. наук, проф. О.М. Кісельова
д-р фіз.-мат. наук, проф. В.Б. Говоруха

О 21 Ободан, Н.І. Обернені задачі ідентифікації моделей [Текст]: навч. посіб. /
Н.І. Ободан, Н.А. Гук. – Д.: РВВ ДНУ, 2013. – 48 с.

Навчальний посібник присвячено одному із сучасних напрямків прикладної математики, а саме теорії обернених задач, безпосередньо пов'язаної із проблемою обробки та інтерпретації інформації. Розглянуто особливості постановки обернених задач і методи їх розв'язання. Наведено різні типи обернених задач для звичайних диференціальних рівнянь і рівнянь у частинних похідних.

Для студентів старших курсів ДНУ галузі знань «Системний аналіз», які навчаються за спеціалізаціями «Системний аналіз», «Прикладна математика». Матеріалами навчального посібника можуть послуговуватися аспіранти і всі, кого цікавлять питання щодо розв'язування обернених задач.

ВСТУП

Математичне моделювання – це процес побудови та дослідження математичної моделі, створеної за вихідними фізичними параметрами, що забезпечує можливість одержувати інформацію про поведінку об'єкта.

На відміну від реально поставленого експерименту математична модель об'єкта має ряд переваг, які пов'язані з трьома основними аспектами. По-перше, це економія матеріальних ресурсів, необхідних для постановки та проведення фізичного експерименту; по-друге, можливість апробації системи в екстремальних умовах і навіть за їх межами; по-третє, оцінка працездатності систем із тривалими технологічними (дні, тижні, місяці, роки) циклами роботи в суттєво більш стислі строки (наприклад, дослідження процесів нагрівання на сотні градусів зі швидкостями, нижчими десятих часток градуса в годину).

Математична модель за формою здебільшого являє собою систему диференціальних рівнянь у частинних похідних, що описують поведінку об'єкта в навколишньому середовищі з установленими початковими та граничними умовами.

Обране диференціальне рівняння в частинних похідних (або система таких рівнянь) разом із початковими та граничними умовами зазвичай складають основу математичної моделі об'єкта, що підлягає аналізу. Поряд з наданими постановником задачі додатковими експериментальними даними вони є результатом виконання першого етапу моделювання.

Під час побудови математичних моделей звичайно закладають деякі припущення, які можуть призводити до «некоректності» математичної моделі відносно до реальних процесів. Ці припущення формулюють за допомогою деяких залежностей (наприклад, законів фізики), параметри яких «припасовують» до значень, отриманих з результатів експериментальних досліджень.

Оскільки під час опису реальних процесів значення деяких параметрів, що входять до рівняння математичної моделі, беруться з великими припущеннями, то їх можна розглядати як невідомі величини для конкретно поставленої задачі математичного моделювання. Для їх визначення слід послуговуватися непрямою інформацією – даними про розв'язок задачі, які експериментально одержати значно простіше. Такі задачі відносять до класу обернених задач.

Обернені задачі цього типу формулюють на першій стадії моделювання реального процесу за допомогою спільних зусиль математика та постановника з задачі, який надає необхідну непряму інформацію про об'єкт дослідження.

На відміну від задач прямого моделювання обернені задачі з математичного погляду можна віднести до класу «некоректних» задач, а саме до таких, чий розв'язок є нестійкий щодо похибки вхідних даних.

Усунення проблем, пов'язаних з «некоректністю» задачі, виконує математик на другому етапі моделювання шляхом розробки спеціальних регулярівних алгоритмів.

1. МЕТОД ОБЕРНЕНИХ ЗАДАЧ

1.1. Прямі й обернені задачі. Типи обернених задач

Математична модель будь-якого об'єкта дослідження уможливорює встановлення зв'язку між вхідними та вихідними даними про об'єкт та дозволяє прогнозувати його поведінку за зміни зовнішніх факторів. З погляду співвідношення причина – наслідок усі задачі математичного моделювання можна розбити на два класи – прямі задачі та обернені задачі.

Для прямих задач відомими є причини, необхідно знайти наслідки.

Як причини можуть виступати такі фактори:

- 1) зовнішній вплив;
- 2) початкові та крайові умови, сформульовані для моделі;
- 3) коефіцієнти диференціальних операторів, застосовуваних для опису моделі та пов'язаних зі структурою об'єкта, його фізичними й хімічними властивостями;
- 4) геометричні властивості моделі.

Як наслідки можна застосовувати будь-які компоненти фізичних полів (переміщення, деформації, температурне поле, магнітний та електричний потенціали та ін.).

Для опису *прямих* задач застосовують зазвичай рівняння математичної фізики. Для таких задач детально розроблені аналітичні та числові методи розв'язування, найбільш популярними з яких є метод скінченних різниць, метод скінченних елементів, метод граничних елементів. Для реалізації перелічених методів створено пакети прикладних програм, їх постійно удосконалюють.

Для *обернених* задач необхідно за відомими наслідками визначити одну або кілька причин із числа перерахованих у п. 1 – 4.

Обернені задачі широко застосовують у науці й техніці [6, 8, 11], за їх допомогою можна:

- 1) визначати механічні та теплофізичні властивості матеріалів, ідентифікувати полімерні і композитні матеріали, біоматеріали, п'єзокерамічні матеріали;
- 2) розв'язувати задачі сейсморозвідки, а саме визначати розташування й потужності покладів корисних копалин за відбитими від родовища звуковими сигналами;
- 3) розв'язувати проблеми неруйнівного контролю, а саме визначати розташування й конфігурацію дефекту за виміряним на поверхні тіла полем пружних переміщень або за резонансними частотами;
- 4) моделювати явища акустичної емісії та встановлювати зв'язок між основними характеристиками емісії та характеристиками напруженого стану, дослідження цього явища дозволяє виявити стан конструкції, що передують її руйнуванню;
- 5) розв'язувати задачі рентгенівської й акустичної томографії.

Вибираючи математичну модель, звичайно фіксують два етапи:

- 1) вибір структури оператора A , що здійснює відображення входу $x(t)$ на вихід $y(t)$;

2) ідентифікація причин, перелічених у п. 1 – 4.

Структура оператора A може бути різною:

1) скінченновимірний оператор (наприклад, матриця);

2) диференціальний оператор (звичайний або у частинних похідних);

3) інтегральний або інтегродиференціальний оператор;

4) абстрактний оператор, що відображає спеціальні функціональні властивості, у тому числі й ті, що погано формалізуються.

Процедура ідентифікації припускає числове визначення або аналітичний опис невідомих функцій та параметрів, що описують фактори, зазначені у п. 1 – 4.

Умовно обернені задачі можна класифікувати у такий спосіб [1, 4]:

1) *ретроспективні задачі* – задачі про визначення початкового стану об'єкта (початкових умов) за деякими заданими або спостережуваними функціями або операторами від розв'язку прямої задачі;

2) *коефіцієнтні обернені задачі* – задачі визначення функцій і параметрів, що входять до оператора A , за заданими або спостережуваними функціями або операторами від розв'язку прямої задачі;

3) *граничні обернені задачі* – задачі визначення граничних умов і зовнішнього впливу на об'єкт за заданими або спостережуваними функціями або операторами від розв'язку прямої задачі.

Розглянемо деякі приклади постановок обернених задач.

Математичну модель руху маси на пружині описують диференціальним рівнянням

$$m(t)\frac{d^2x(t)}{dt^2} + k(t) = P(t), \quad t_0 \leq t \leq t_N;$$
$$x(0) = x_0; \quad \frac{dx_0}{dt} = x'_0,$$

де $m(t)$ – величина маси; $k(t)$ – коефіцієнт пружності пружини; $P(t)$ – зовнішній вплив; $x(t)$ – переміщення маси; t – час; t_0 , t_N – початковий та кінцевий моменти часу.

Необхідно:

1) за відомими значеннями $x(t_i)$, $i=1, N$ (або частиною з них) визначити значення x_0 , x'_0 за відомих значень коефіцієнта $k(t)$ та зовнішнього впливу $P(t)$ (*ретроспективна задача*);

2) за відомими значеннями $x(t_i)$, $i=1, N$ (або частиною з них) визначити зовнішній вплив $P(t)$ за відомих $k(t)$, x_0 , x'_0 (*гранична обернена задача*);

3) за відомими значеннями $x(t_i)$, $i=1, N$ (або частиною з них) і відомими $P(t)$, x_0 , x'_0 визначити масу $m(t)$ й (або) коефіцієнт пружності $k(t)$ (*коефіцієнтна обернена задача*).

1.2. Математична особливість обернених задач

Розглянемо довільну задачу (пряму або обернену), що полягає в знаходженні деякого розв'язку за вихідними даними. Розв'язок позначимо через z і будемо вважати, що він обирається з деякої множини Z ($z \in Z$) елементів тієї ж або іншої математичної природи (вектори, функції та ін.); вихідні дані позначимо через u , вважаючи, що $u \in U$. Тоді наша задача може бути записана у вигляді

$$z = R(u),$$

де R – деякий «оператор», який можна розуміти як алгоритм обчислення шуканої величини z за відомою величиною u .

Характер множин Z і U , а також властивості оператора R залежать від постановки задачі. У конкретних задачах вводять міри близькості елементів із зазначених множин (відстань між ними або метрика), і тоді останні називають метричними просторами.

Відповідно до поняття, уведеного на початку століття Ж. Адамаром, задачу $z = R(u)$ називають коректно поставленою, якщо вона задовольняє три умови:

- 1) за кожного $u \in U$ розв'язок задачі існує;
 - 2) розв'язок є єдиний за кожного $u \in U$;
 - 3) розв'язок є стійкий до малих варіацій величини u , тобто достатньо малим зміненням величини u відповідають як завгодно малі зміни величини z [1, 7].
- Якщо задача не задовольняє хоча б одну із зазначених умов, то її називають некоректно поставленою.

Очевидно тепер, що обернені задачі в розглянутих прикладах відносять до числа некоректно поставлених, оскільки в них порушується третя, а можливо, і перша із зазначених вище умов. Некоректність постановки оберненої задачі і є її математична особливість. Якщо для пошуку наближеного розв'язку оберненої задачі застосовувати будь-який класичний алгоритм формально, не враховуючи некоректності постановки задачі, то є великий ризик отримати результат, який не має ні наукової, ні прикладної цінності.

У спільності відзначеної специфіки задач цього класу можна переконатися, розглядаючи узагальнюючі класичні постановки обернених задач.

Позначимо через Z – метричний простір характеристик об'єкта або процесу, які є невідомими оберненої задачі інтерпретації, а через U – простір характеристик спостережуваного явища, тобто непрямих характеристик об'єкта. Припустимо, що кожному $z \in Z$ за допомогою відомого оператора A можна поставити у відповідність значення $u \in U$:

$$u = Az.$$

Тоді обернену задачу сформулюємо у вигляді операторного рівняння

$$Az = u, \quad z \in Z, \quad u \in U. \quad (1.1)$$

Сформульована природна постановка задачі інтерпретації некоректна за такими причинами [12]:

1) за визначенням множини U властивості її елементів ($u = Az$) визначаються властивостями множини Z та заданим оператором A . Похибки, внесені, скажімо, через неточність вимірювань, є некеровані, таким чином, збурений елемент $\tilde{u}$ може й не належати до множини U . У цьому випадку рівняння $Az = \tilde{u}$, яке необхідно розв'язувати на практиці, не має розв'язків і має суто умовний характер;

2) у обернених задачах оператор A має «інтегральний» характер, тобто його значення Az слабо чутливі до збурень величини z . Тому, навіть за умови можливості розв'язання рівняння, малим збуренням величини u можуть відповідати великі збурення величини z , при цьому характеристика об'єкта повністю спотворюється.

Питання про єдиність розв'язку рівняння (1.1) можна розглядати тільки в конкретних постановках задачі за наявності точних вихідних даних ($u \in U$). Доказ цього факту, якщо він не впливає з фізичних міркувань, – суто математична проблема. У задачах інтерпретації цей доказ має принципове значення, оскільки надає сенсу постановці задачі про пошук наближеного розв'язку за неточних вхідних даних.

Якщо рівняння $Az = \tilde{u}$ має умовний характер, то більш природною є «варіаційна» постановка оберненої задачі, тобто перехід до задачі мінімізації «відстані» між Az і $\tilde{u}$. Позначимо через $\tilde{U}$ множину спостережень за характеристиками об'єкта з урахуванням можливих похибок результатів вимірювань. Нехай $\rho_{\tilde{U}}(u_1, u_2)$ – міра близькості елементів (відстань між елементами) у множині U , вигляд якої також залежить від конкретної задачі. Тоді за наближення z до точного розв'язку рівняння (1.1) (а не до розв'язку $Az = \tilde{u}$, якого не існує!) можна обрати елемент, на якому досягається точна нижня грань ($\inf$ – найглибший мінімум) відстані між Az і $\tilde{u}$:

$$\tilde{z} = \arg \inf \rho_{\tilde{U}}(Az, \tilde{u}), \quad z \in Z. \quad (1.2)$$

У задачах розглянутого класу під $\rho_{\tilde{U}}$ відповідно до умов експерименту мається на увазі середньоквадратична метрика, яка осереднює локальні похибки. За певної конкретизації простору $\tilde{U}$ й відповідної міри $\rho_{\tilde{U}}$ ця постановка є подібна до методу найменших квадратів, однак вона може бути ефективною (приводити до задовільного результату) лише за певних обмежень на властивості оператора A (оператор A не повинен бути цілком безперервним) і простору Z .

Якщо такі обмеження не виконуються, то задача (1.2) залишається некоректною за такими причинами:

1. Хоча $\inf \rho_{\tilde{U}}$ існує (тому що $\rho_{\tilde{U}} \geq 0$, тобто обмежена знизу), елемент, на якому досягається точна нижня грань, може й не існувати в множині Z .

2. Якщо оператор A – цілком безперервний, то малим збуренням Az і ρ можуть відповідати збурення величини z (а виходить, і $\tilde{z}$), які є далекі від точного розв’язку задачі.

У подібних до (1.2) класичних варіаційних постановках можуть бути сформульовані й обернені задачі ще двох інших типів.

Розглянемо узагальнюючу постановку цих задач. Нехай Z – метричний простір, який описує множину можливих параметрів конструкції; U – метричний простір, який описує множину можливих експлуатаційних характеристик: $u = Az$, $z \in Z$, де A – заданий явно або неявно оператор, який здійснює відображення елементів з простору Z в простір U . Метричний простір $\tilde{U}$ характеризує множину бажаних експлуатаційних характеристик $\tilde{u}$ об’єкта дослідження, причому $U \subset \tilde{U}$. Тоді шуканий елемент $\tilde{z}$ повинен задовольняти вимогу

$$\tilde{z} = \arg \inf (\rho_{\tilde{U}}(Az, \tilde{u})), \quad z \in Z, \quad (1.3)$$

де Z – область визначення оператора A .

Відмінність задачі (1.3) від задачі (1.2), незважаючи на формальну подібність, полягає насамперед у тому, що метрики $\rho_{\tilde{U}}$ в просторах $\tilde{U}$ мають різний сенс. У задачах інтерпретації $\tilde{U}$ – множина спостережуваних величин, і в цьому випадку зазвичай з експерименту відома усереднена оцінка похибки. Відповідно $\rho_{\tilde{U}}$ – її середньоквадратичне відхилення. Наприклад, якщо $\tilde{u} = u(x)$, $x \in [c, d]$, то метрику визначають у такій спосіб:

$$\rho_{\tilde{U}}(u_1, u_2) = \left\{ \int_c^d (u_1(x) - u_2(x))^2 dx \right\}^{1/2}.$$

У задачах синтезу $\tilde{U}$ – множина «ідеальних» експлуатаційних характеристик, тоді метрика, обрана як усереднена міра відхилення, може виявитися недостатньою. Так, у тому ж прикладі вищезазначена метрика може виявитися нечутливою до великих локальних збурень, неприпустимих під час експлуатації об’єкта. У цих випадках «рівномірну» оцінку відхилення вводять у такій спосіб:

$$\rho_{\tilde{U}}(u_1, u_2) = \max_D |u_1(M) - u_2(M)|,$$

де D – область визначення функцій $u = u(M)$.

У більш загальній постановці синтезовану систему характеризує інший «функціонал якості» $\Phi(z)$, який задають явно або алгоритмічно. Цей функціонал необов’язково повинен бути метрикою в будь-якому метричному просторі. Тоді основна вимога до системи може бути сформульована у вигляді

$$\tilde{z} = \arg \inf \Phi(z), \quad z \in Z. \quad (1.4)$$

Прикладом такої постановки можуть служити задачі проектування. Для них функціонал якості є заданий, у наведеній вище постановці роль «функціонала якості» відіграє $\rho_{\tilde{U}}(Az, \tilde{u})$.

Таким чином, обернена задача будь-якого класу може бути сформульована у варіаційній постановці, тобто як задача мінімізації цільового функціонала. Для задач класу інтерпретації за точних вихідних даних така задача еквівалентна деякому операторному рівнянню. У розглянутих класичних постановках (1.2) – (1.4) передбачено єдиність мінімізуючого елемента $\tilde{z}$. Якщо існує множина $\tilde{Z}_0$ елементів $\tilde{z}$, які задовольняють умову (1.3), то постановка задачі, для визначеності, має бути уточнена вказівкою, який саме елемент із $\tilde{Z}_0$ треба обирати. А втім цим не вичерпується питання про коректність постановки обернених задач синтезу та керування у формі (1.2) – (1.4).

По-перше, як і в задачах інтерпретації, потрібна впевненість у тому, що введені обмеження на z гарантують існування мінімізуючого елемента на множині Z . По-друге, в умовах слабкої залежності функціоналів якості або цільових функціоналів від значних змін параметра z потрібна впевненість у тому, що отриманий наближений розв'язок виявиться прийнятним у практичному сенсі. Щодо цього вихідні математичні постановки (1.2) – (1.4) залишаються некоректними.

Ігнорувати некоректність постановки задачі не можна. Для її подолання існують два шляхи: а) коректна постановка оберненої задачі того або іншого типу, яка заснована на залученні додаткової інформації про шуканий розв'язок; б) керування класичними алгоритмами розв'язання некоректно поставлених задач.

2. МЕТОДИ УСУНЕННЯ НЕКОРЕКТНОСТІ

2.1. Про наближення розв'язку некоректно поставлених задач

Проблема знаходження стійкого розв'язку обернених задач пов'язана з побудовою таких методів, які б дозволяли визначати наближений розв'язок $\bar{z}$, тобто розв'язок, близький до шуканого розв'язку z , на основі наявної, приблизно заданої вихідної інформації $\bar{u}$ й величини похибки δ , що характеризує близькість між $\bar{u}$ та u в деякій метриці.

Уперше проблему побудови стійкого розв'язку обернених задач сформулював А.М. Тихонов [12], запропонувавши підхід до усунення нестійкості розв'язку оберненої задачі, який ґрунтується на застосуванні апіорної інформації про точний розв'язок задачі. Апіорна інформація про точний розв'язок досить часто має місце під час аналізу різних обернених задач. Як правило, вона пов'язана з тим, що невідома характеристика $\bar{z}$ являє собою деяку фізичну величину, що має певні властивості, до яких можна віднести, наприклад, додатність, монотонність, обмеженість її похідної та багато інших. Такого типу апіорна інформація дозволяє в ряді випадків звужити множину елементів Z , до якої належить розв'язок $\bar{z}$ оберненої задачі, до деякої множини M , на якій розв'язок оберненої задачі буде стійким. Обґрунтуванням подібного підходу до отримання стійкого розв'язку обернених задач є така теорема [Там само].

Теорема 2.1.1. Нехай множина M метричного простору Z взаємно однозначно відображається оператором A на множину N метричного простору U . Тоді, якщо оператор A є безперервний на множині M та M є компактна множина, то обернений оператор A^{-1} є безперервний на множині N .

Ідея звуження множини можливих розв'язків оберненої задачі до деякої множини, на якій її розв'язок є стійкий, лежить в основі поняття коректності за Тихоновим або умовної коректності оберненої задачі [2, 12].

Задачу розв'язання рівняння $Az = u$ називають коректно поставленою за Тихоновим (умовно-коректною), якщо виконані такі умови:

- 1) апіорі відомо, що розв'язок рівняння $Az = u$ існує й належить деякій заданій множині M (множині коректності) простору Z ;
- 2) розв'язок рівняння є єдиний на множині M ;
- 3) існує безперервна залежність розв'язку рівняння $Az = u$ від правої частини, та її варіації не виводять розв'язок за границі множини M .

Відповідну множину M називають множиною коректності розв'язку оберненої задачі. У тому випадку, коли задача розв'язання рівняння $Az = u$ є умовно-коректна та множина M – компактна множина в Z , можлива побудова оцінок стійкості розв'язку оберненої задачі [12]. Ця можливість ґрунтується на такій теоремі.

Теорема 2.1.2. Нехай оператор A відображає компакту множину $M \subset Z$ безперервно та взаємно однозначно на множину $N = AM \subset U$. Тоді існує безперервна в нулі функція $\omega(\tau)$, $\omega(0) = 0$, така, що для будь-яких z_1 і $z_2 \in M$ виконується оцінка

$$\|z_1 - z_2\| \leq \omega(\|Az_1 - Az_2\|). \quad (2.1)$$

Оцінки стійкості типу (2.1), отримані в припущенні, що розв'язок належить деякій множині M , називають оцінками умовної стійкості.

Попередній підхід до розв'язання некоректних задач ґрунтувався на використанні апріорної інформації про належність розв'язку до деякої множини M . Однак для багатьох обернених задач характерною є ситуація, коли апріорна інформація про належність розв'язку до множини M , на якій розв'язок розглянутої задачі був би стійким, відсутня. В цьому випадку для побудови наближених розв'язків некоректної задачі слід скористатися фундаментальними поняттями регулярного оператора [Там само].

Розглянемо задачу розв'язання рівняння $Az = u$, де A – оператор, що відображає простір Z на простір U (Z, U – лінійні нормовані простори).

Припустимо, що оператор A , простори Z та U такі, що задача є некоректною. Нехай для точної правої частини u існує єдиний розв'язок рівняння – $\bar{z}$, тобто $A\bar{z} = u$. Однак елемент $\bar{u}$ невідомий, а задані значення u_δ та величина похибки δ такі, що $\|u_\delta - \bar{u}\| \leq \delta$. Потрібно побудувати наближений розв'язок рівняння – елемент z_δ , який би збігався до точного розв'язку $\bar{z}$ за збіжності до нуля величини похибки δ заданої вихідної інформації. Оскільки задача є некоректною, то для побудови наближеного розв'язку не можна застосовувати обернений оператор, тобто брати z_δ як елемент $A^{-1}u_\delta$. Це можна пояснити тим, що обернений оператор може бути невизначеним на u_δ та не безперервним на множині U .

Для визначення наближеного розв'язку z_δ природно використовувати всю вихідну інформацію, тобто значення u_δ й величину похибки δ .

Визначення. Оператор $R(u, \delta)$, що здійснює відображення простору U на простір Z , називають регулярним для рівняння $Az = u$, якщо він має такі властивості:

1) існує число $\delta_1 > 0$ таке, що оператор $R(u, \delta)$ визначений для всіх $\delta \in [0, \delta_1]$ та $u_\delta \in U$, що задовольняють нерівність $\|u_\delta - \bar{u}\| \leq \delta$;

2) для кожного $\varepsilon > 0$ існує число $\delta_0(\varepsilon, u_\delta) \leq \delta_1$ таке, що з нерівності $\|u_\delta - \bar{u}\| \leq \delta \leq \delta_0$ випливає нерівність $\|z_\delta - \bar{z}\| \leq \varepsilon$, де $z_\delta = R(u_\delta, \delta)$.

Наведене визначення допускає багатозначність оператора $R(u, \delta)$. Через z_δ позначають довільний елемент із множини значень $R(u, \delta)$.

Для теорії наближених методів типовою є ситуація, коли конкретний метод побудови наближеного розв'язку задачі залежить від деякого параметра. Це може бути крок сітки дискретизації, номер ітерацій та ін. З огляду на це здебільшого послуговуються саме такою схемою побудови регулярного оператора. Задається деяке сімейство операторів $R(u, \alpha)$, що здійснюють відображення множини U на множину Z , при цьому будучи залежними від деякого параметра α . Потім параметр α вибирають залежно від похибки δ та u_δ : $\alpha = \alpha(\delta, u_\delta)$ так, щоб $R(u_\delta, \alpha(\delta, u_\delta)) \rightarrow \bar{z}$ за $\delta \rightarrow 0$.

Задачу пошуку наближеного розв'язку рівняння $Az = u$ можна розглядати в більш загальній постановці, коли не тільки права частина u , але й оператор A задані з похибкою. Оскільки загальні принципи побудови наближеного розв'язку рівняння за такої постановки задачі, як правило, залишаються такими ж, що й за точно заданого оператора A , то для простоти викладу розглянемо тільки випадок точно заданого оператора.

Нижче наводимо основні наближені методи, застосовні для усунення некоректності постановки оберненої задачі.

2.2. Метод квазірозв'язків

Розглянемо операторне рівняння 1-го роду

$$Az = u, \quad (2.2)$$

де A – безперервний оператор, що діє з метричного простору Z в метричний простір U такий, що задача розв'язання рівняння (2.2) є некоректною.

Припустимо, що для точної правої частини рівняння (2.2) $\bar{u}$ існує єдиний розв'язок $\bar{z}$, що належить деякій компактній множині M . Однак елемент $\bar{u}$ є невідомий, а задані наближена права частина u_δ й величина похибки δ такі, що умова $\rho(u_\delta, \bar{u}) \leq \delta$ виконується. Потрібно, уважаючи відомими $\bar{u}$ та δ , запропонувати спосіб побудови наближених розв'язків z_δ , які б збігалися до точного розв'язку $\bar{z}$ за $\delta \rightarrow 0$. Розглянемо множину

$$Z_\delta = \{z : \rho(Az, u_\delta) \leq \delta\}.$$

Оскільки задача розв'язання рівняння (2.2) є некоректною, довільний елемент цієї множини не можна розглядати як наближений розв'язок. Оскільки існує апіорна інформація про належність точного розв'язку $\bar{z}$ компактній множині M , то цілком природно звужити множину Z_δ , обравши за множину розв'язків оберненої задачі її перетин з компактом M , а саме $Z_\delta^M = Z_\delta \cap M$. Відзначимо, що для будь-якого $\delta > 0$ множина Z_δ^M є непуста, оскільки містить точний розв'язок $\bar{z}$. Показано [12], що елементи множини Z_δ^M можна розглядати як наближені розв'язки рівняння (2.2).
Теорема 2.2.1. За $\delta \rightarrow 0$

$$\sup_{z \in Z_\delta^M} \rho(z, \bar{z}) \rightarrow 0. \quad (2.3)$$

У випадку, коли задача розв'язання рівняння (2.2) некоректна, природно спробувати так змінити поняття розв'язку, щоб за певних умов задача його знаходження була коректною.

Зважаючи на це В.К. Іванов увів поняття «квазірозв'язок». Нехай у рівнянні (2.2) A – безперервний оператор, що діє з лінійного нормованого простору Z в лінійний нормований простір U , і M – компактна множина в просторі Z .

Визначення. Квазірозв'язком рівняння (2.2) називають елемент z_K , який мінімізує похибку $\|Az - u\|$ на множині M

$$z_K = \arg \inf_{z \in M} \|Az - u\|. \quad (2.4)$$

Із визначення квазірозв'язку випливає, що він існує для кожного $u \in U$. Дійсно, оскільки оператор A є безперервний, то похибка $\|Az - u\|$ – є безперервний функціонал, що досягає своєї нижньої грані на компактній множині M . Якщо $u \in AM$, то квазірозв'язок z_K збігається до точного розв'язка, тому що в цьому випадку $\|Az_K - u\| = 0$.

Можна показати, що у разі виконання певних умов квазірозв'язок рівняння (2.2) існує, є єдиний та безперервно залежить від правої частини u [1]. Тоді можна сформулювати теорему [4].

Теорема 2.2.2. Нехай A – лінійний безперервний оператор, що відображає лінійний нормований простір Z у гільбертовий простір U та є такий, що рівняння $Az = 0$ має тільки нульовий розв'язок, а множина M – опукла компактна множина у просторі Z . Тоді для будь-якого елемента $u \in U$ квазірозв'язок рівняння (2.2) існує, є єдиний та безперервно залежить від правої частини u .

Розглянемо питання про застосування методу квазірозв'язків для розв'язання рівняння (2.2) з правою частиною, яка задана наближено [12]. Нехай A – безперервний оператор, що відображає лінійний нормований простір Z у лінійний нормований простір U . Для точної правої частини $\bar{u}$ рівняння (2.2) має єдиний розв'язок $\bar{z}$, що належить компактній множині M . Припустимо, що елемент $\bar{u}$ невідомий, натомість задано елемент u_δ . Позначимо через Z_k^δ множину квазірозв'язків рівняння (2.2) на компактній множині M , яка відповідає елемента u_δ .

Теорема 2.2.3. Якщо $\|u_\delta - \bar{u}\| \rightarrow 0$, то $\sup_{z \in Z_k^\delta} \|z - \bar{z}\| \rightarrow 0$.

Теореми 2.2.1 та 2.2.3 є основою для побудови стійких методів розв'язання багатьох обернених задач. Дуже часто, послуговуючись апіорною інформацією про розв'язок задачі, можна зробити висновок про його належність до деякої компактної множини M . Потім задача пошуку наближеного розв'язку рівняння зводиться до задачі мінімізації функціонала-похибки $\|Az - u_\delta\|$ на множині M . При цьому, як це впливає з теореми 2.2.1, якщо величина похибки δ задана, то процес мінімізації можна закінчити, як тільки буде знайдений елемент z_δ такий, що виконується умова $\|Az - u_\delta\| \geq \delta$. Якщо ж величина δ невідома, то потрібно проводити процес мінімізації функціонала до кінця, щоб знайти квазірозв'язок оберненої задачі.

2.3. Метод регуляризації на компактних множинах

Зупинимось ще на одному моменті, пов'язаному з розв'язанням рівняння (2.2), припускаючи, що існує апіорна інформація про належність точного розв'язку компактній множині M . Це припущення необтяжливе, оскільки, навіть не володіючи будь-якою кількісною інформацією про точний розв'язок, ми, як правило, можемо вибрати настільки великий компакт M , що він міститиме точ-

ний розв'язок. Наприклад, розв'язуючи задачу в просторі безперервних функцій $Z \subset C[a, b]$ і припускаючи, що точний розв'язок належить до цього класу $\bar{z} \in C^1[a, b]$, за компакт M можна взяти замикання множини функцій $z(x)$ таких, що

$$|z(x)| \leq c_1, |z'(x)| \leq c_2, x \in [a, b].$$

Відтак, не володіючи певною кількісною інформацією про розв'язок $\bar{z}(x)$, можна припустити, що, взявши значення c_1 й c_2 досить великими, матимемо, що $\bar{z} \in M$. З теоретичного погляду на основі теорем 2.2.1, 2.2.3 проблема стійкого розв'язку з задачі із приблизно заданою правою частиною вважатиметься розв'язаною. Однак слід зазначити, що теореми 2.2.1 і 2.2.3 мають асимптотичний характер, тобто вони доводять, що множина наближених розв'язків збігається до розв'язку $\bar{z}$ за виконання умови $\|u_\delta - \bar{u}\| \rightarrow 0$. У той же час на практиці ми стикаємося з необхідністю розв'язувати задачу з конкретним значенням u_δ . При цьому, якщо компактна множина M є «дуже велика», множина наближених розв'язків Z_δ^M також може бути великою й містити елементи, далекі від розв'язку $\bar{z}$. Так само у разі великого розміру компакту M квазірозв'язок для даного u_δ може бути досить далеким від точного розв'язку $\bar{z}$.

Таким чином, точність методів, заснованих на використанні апріорної інформації про належність точного розв'язку компактній множині M , суттєво залежить від вигляду множини M .

Наведемо критерій компактності множини, яким найбільш часто послуговуються під час практичного застосування.

Критерій Арцела [12]. Множина $M \subset C[a, b]$ компактна, якщо функції з M рівномірно обмежені та рівноступенево безперервні.

Розглянемо типові для практики розв'язання обернених задач способи вибору компактної множини M :

1) M – обмежена множина у просторі R^n . Така ситуація зустрічається, коли вихідне операторне рівняння можна побудувати із застосуванням скінченного числа параметрів, тобто задача формулюється як задача пошуку розв'язку в деякому функціональному просторі, а метод квазірозв'язків буде аналогом методу найменших квадратів;

2) у ряді обернених задач апріорною інформацією слугує інформація про характер поведінки функції, що описує шуканий розв'язок, як-от:

а) додатність; б) монотонність; в) опуклість.

Зазначимо, що наведені нижче приклади множин є компактні в $L_2[a, b]$:

1) $M_{\downarrow C}$ – множина обмежених монотонно незростаючих функцій

$$M_{\downarrow C} = \{u(x) \in L_2[a, b] \mid 0 \leq u(x) \leq c, u(x_2) \leq u(x_1), x_2 \leq x_1\}, \quad (2.5)$$

відповідно до теореми [9] $M_{\downarrow C}$ компактна в $L_2[a, b]$;

2) $M_C^\cap$ – множина обмежених опуклих догори функцій

$$\hat{M}_C = \left\{ u(x) \in L_2[a, b] \mid 0 \leq u(x) \leq c, u\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \geq \frac{u(x_1) + u(x_2)}{2} \right\}; \quad (2.6)$$

3) $\hat{M}_{\downarrow C}$ – множина обмежених незростаючих опуклих до гори функцій:

$$\hat{M}_C = \left\{ u(x) \in L_2[a, b] \mid 0 \leq u(x) \leq C, u\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \geq \frac{u(x_1) + u(x_2)}{2}, u(x_2) \leq u(x_1), x_2 \geq x_1 \right\}. \quad (2.7)$$

Для відшукування квазірозв'язків на компактних множинах зазвичай застосовують процедуру дискретизації, техніка якої має свою специфіку. Фактично для побудови наближеного розв'язку достатньо навчитися будувати послідовність елементів, яка мінімізує функціонал-нев'язку $\rho_U(Az, u)$ на множині M . Про способи дискретизації та зведення задач до скінченно вимірних мова йтиме в наступних параграфах.

2.4. Метод регуляризації Тихонова

Метод регуляризації А.М. Тихонова [12] широко застосовують для розв'язання лінійних і нелінійних операторних рівнянь типу (2.2).

Розглянемо застосування цього методу для задачі розв'язання операторного рівняння (2.2), в якому A – лінійний цілком безперервний оператор, що здійснює відображення Z в U (Z і U – сепарабельні гільбертові простори). Оскільки оператор A цілком безперервний, задача розв'язання рівняння (2.2) є некоректна.

Припустимо, що для точної правої частини $\bar{u}$ рівняння (2.2) має єдиний розв'язок $\bar{z}$. Однак, оскільки елемент $\bar{u}$ є невідомий, натомість задані наближена права частина u_δ й величина похибки δ : $\|u_\delta - \bar{u}\| \leq \delta$, потрібно, за відомими u_δ й δ , побудувати наближений розв'язок рівняння (2.2) – z_δ , який би збігався до точного розв'язку $\bar{z}$ за $\delta \rightarrow 0$.

Розглянемо функціонал

$$M^\alpha(z) = \|Az - u\|^2 + \alpha\|z\|^2, \quad (2.8)$$

де α – додатний параметр. Наявні та доведені такі теореми [Там само].

Теорема 2.4.1. Для будь-яких $u \in U$ та $\alpha > 0$ функціонал $M^\alpha(z)$ сягає своєї нижньої грані на єдиному елементі.

Теорема 2.4.2. Якщо $\alpha(\delta) > 0$ за $\delta > 0$, $\alpha(\delta) \rightarrow 0$ і $\delta^2/\alpha(\delta) \rightarrow 0$ за $\delta \rightarrow 0$, то $\|z_{\alpha(\delta)} - \bar{z}\| \rightarrow 0$ за $\delta \rightarrow 0$.

Таким чином, за узгодження швидкості збіжності до нуля параметра регуляризації $\alpha(\delta)$ з величиною похибки δ наближений розв'язок $z_{\alpha(\delta_n)}$ збігатиметься до точного розв'язку $\bar{z}$ за $\delta \rightarrow 0$. Оскільки розв'язуючи практичні задачі доводиться шукати наближений розв'язок за конкретної величини похибки δ , то важливо вказати і спосіб вибору $\alpha(\delta)$ за заданої величини δ , який би забезпечував збіжність послідовності елементів $z_{\alpha(\delta_n)}$ до точного розв'язку $\bar{z}$ за $\delta \rightarrow 0$. Можна

показати [Там само], що параметр регуляризації $\alpha(\delta)$ можна однозначно визначити як корінь рівняння

$$\|A\hat{z}_\alpha - u_\delta\| = \delta,$$

де $\hat{z}_\alpha$ – елемент, на якому досягається точна нижня грань функціонала:

$$\Phi(z, \alpha) = \|Az - u_\delta\|^2 + \alpha \cdot \|z\|^2.$$

2.5. Метод похибки

Розглянемо задачу розв'язання рівняння (2.2) [4], де A – безперервний оператор, що здійснює відображення Z в U (Z, U – лінійні нормовані простори). Припустимо, що не існує безперервної залежності z від u , тому задача розв'язання рівняння (2.2) є некоректно поставлена. Зазначимо, що лінійність оператора A не передбачається.

Нехай для точної правої частини $\bar{u}$ існує єдиний розв'язок рівняння (2.2) – $\bar{z}$, причому $\bar{z} = V\bar{f}$, де V – лінійний, цілком безперервний, взаємно однозначний оператор, що відображає сепарабельний гільбертовий простір F у простір Z , а $\bar{f} \neq 0$. Потрібно знайти наближений розв'язок рівняння (2.2) за умови, що точна права частина $\bar{u}$ невідома, а задані u_δ й δ такі, що виконується умова $\|u_\delta - \bar{u}\| \leq \delta$.

Розглянемо в просторі Z множину елементів

$$Z_\delta = \{z = Vf, f \in F; \|AVf - u_\delta\| \leq \delta\}. \quad (2.9)$$

З урахуванням визначення цієї множини для кожного елемента $z \in Z_\delta$ виконується нерівність $\|Az - u_\delta\| \leq \delta$. Однак, оскільки задача розв'язання рівняння (2.2) є некоректна, довільний елемент множини Z_δ не можна розглядати як наближений розв'язок рівняння (2.2). Метод похибки, заснований на виділенні із множини Z_δ елементів, що мають мінімальну норму, забезпечує збіжність наближених розв'язків до точного [Там само].

Позначимо через F_δ множину елементів простору F таких, що $\|AVf - u_\delta\| \leq \delta$. Зауважимо, що для будь-якого $\delta > 0$ множина F_δ є непуста, тому що їй належить елемент $\bar{f}$.

Теорема 2.5.1. Для кожного $\delta > 0$ у множині F_δ існує елемент, що має мінімальну норму.

Розглянемо множину $\bar{F}_\delta$, що складається з елементів множини F_δ , на яких досягається мінімум $\|f\|$ на множині F_δ . З теореми 2.5.1 випливає, що множина F_δ є непуста.

Теорема 2.5.2. У випадку $\delta \rightarrow 0$ $\sup_{z \in V\bar{F}_\delta} \|z - \bar{z}\| \rightarrow 0$, тобто елементи множини $V\bar{F}_\delta$ можна розглядати як наближені розв'язки рівняння (2.2).

2.6. Ітераційний метод розв'язання рівнянь

Ітераційні методи застосовують для розв'язування численного класу різних задач. Їх також можна застосовувати для розв'язання операторних рівнянь (2.2) із приблизно заданою правою частиною, однак при цьому необхідно враховувати специфіку цих рівнянь, обумовлену їх некоректністю.

Нехай A – лінійний, цілком безперервний оператор, що відображає простір Z в U (Z, U – сепарабельні гільбертові простори). Припустимо, що для точної правої частини $\bar{u}$ рівняння $Az = \bar{u}$ має єдиний розв'язок $\bar{z}$, але елемент $\bar{u}$ невідомий, наближена права частина u_δ й величина похибки δ задані так, що виконується умова $\|u_\delta - \bar{u}\| \leq \delta$.

Розглянемо ітераційний процес

$$z_n = z_{n-1} + \mu(A^*u - A^*Az_{n-1}), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2.10)$$

де $z_0 = \mu A^*u$; A^* – оператор, спряжений з оператором A , μ – додатний числовий параметр.

Покажемо, застосовуючи метод математичної індукції, що елемент z_n , знайдений на n -му кроці ітераційного процесу (2.10), може бути зображений у вигляді $z_n = R_n u$, де оператор R визначають у такий спосіб:

$$R_n = \mu \sum_{i=0}^n (E - \mu A^* A)^i A^*, \quad (2.11)$$

де E – одиничний оператор. Дійсно, за $n=1$ з (2.10) маємо

$$z_1 = \mu A^* u + (E - \mu A^* A)z_0 = \mu A^* u + (E - \mu A^* A)\mu A^* u = R_1 u.$$

Нехай $z_n = R_n u$. Тоді з (2.10) випливає, що

$$\begin{aligned} z_{n+1} &= \mu A^* u + (E - \mu A^* A)R_n u = \mu A^* u + \mu \sum_{i=0}^n (E - \mu A^* A)^{i+1} A^* u = \\ &= \mu A^* u + \mu \sum_{i=0}^{n+1} (E - \mu A^* A)^i A^* u = R_{n+1} u. \end{aligned}$$

Таким чином, запис $z_n = R_n u$ є справедливий для будь-якого числа кроків n ітераційного процесу (2.10) і еквівалентний застосуванню до елемента u оператора R_n , описаного формулою (2.11).

2.7. Проекційний метод розв'язання рівнянь

Проекційні методи наближеного розв'язання різних задач засновані на тому, що наближений розв'язок шукають у вигляді скінченновимірної лінійної комбінації функцій з деякої системи функцій. Застосовуючи проекційні методи для розв'язання операторних рівнянь типу (2.2) із цілком безперервним оператором, необхідно накладати суттєво більш жорсткі обмеження на властивості функцій системи, за допомогою якої будують наближений розв'язок. Суттєвою для відшу-

кання наближеного розв'язку є також наявність апіорної інформації про точний розв'язок [4].

Нехай A – лінійний безперервний оператор, що здійснює відображення з простору Z у простір U (Z, U – сепарабельні гільбертові простори), такий, що рівняння $Az = 0$ має тільки нульовий розв'язок. Припустимо, що для точної правої частини $\bar{u}$ існує розв'язок $\bar{z}$ рівняння

$$Az = \bar{u}, \quad (2.12)$$

який може бути зображений у такий спосіб:

$$\bar{z} = \sum_{i=1}^N \alpha_i \varphi_i, \alpha_N \neq 0, \quad (2.13)$$

де φ_i – заздалегідь відома система лінійно незалежних функцій у просторі Z . У формулі (2.13) невідомими є число доданків N у сумі та коефіцієнти α_i . Точний розв'язок $\bar{z}$ рівняння (2.12) у вигляді (2.13) являє собою існуючу апіорну інформацію про точний розв'язок $\bar{z}$.

Розглянемо метод наближеного розв'язання рівняння (2.12) з неточною правою частиною, тобто у разі, коли елемент $\bar{u}$ є невідомий, а задані u_δ та δ такі, що виконується умова $\|u_\delta - \bar{u}\| \leq \delta$. Визначимо для $n \geq 1$ систему множин

$$Z_n^\delta = \left\{ z = \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i \mid \|Az - u_\delta\| \leq q\delta \right\}, \quad (2.14)$$

де c_i – дійсні числа; q – задана стала, $q \geq 1$. Позначимо через $n(\delta)$ додатне ціле число таке, що $Z_{(n-1)}^\delta = \emptyset$, $Z_n^\delta \neq \emptyset$, де $\emptyset$ – пуста множина. Тоді справедливою є *Теорема 2.7.1.* [Там само] Існує $\delta_0 > 0$ таке, що $n(\delta) = N$ для $0 < \delta < \delta_0$

$$\sup_{z \in Z_{n(\delta)}^\delta} \|z - \bar{z}\| \rightarrow 0 \text{ за } \delta \rightarrow 0.$$

Збіжність наближених розв'язків буде мати місце тільки у разі спеціального вибору системи функцій $\{\varphi_i\}$.

Припустимо, що $A\bar{z} = \bar{u}$, але $\bar{u}$ невідоме, а задані u_δ та δ такі, що $\|u_\delta - \bar{u}\| \leq \delta$. Оскільки оператор A^*A є цілком безперервний, самоспряжений та додатний, то за теоремою Гільберта-Шмідта існує ортонормований базис власних елементів оператора $A^*A\{\varphi_i\}$, $A^*A\varphi_i = \lambda_i \varphi_i$, $\lambda_i > 0$, $i = 1, 2, \dots$

Визначимо множини наближених розв'язків $Z_{n(\delta)}^\delta$ відповідно до (2.13) та (2.14), взявши за базисні функції φ_i – базис власних елементів оператора A^*A , а сталу $q > 1$. Тоді для будь-якої похибки $\delta > 0$ множини Z_n^δ за досить великого значення n є непусті, і номер $n(\delta)$, визначений умовою (2.14), існує.

Теорема 2.7.2. [Там само] Якщо базис власних елементів оператора A^*A упорядкований за незростанням власних значень, то у разі $\delta \rightarrow 0 \quad \sup_{z \in Z_{n(\delta)}^\delta} \|z - \bar{z}\| \rightarrow 0$.

2.8. Метод усічених сингулярних розкладань

Одним із ефективних методів побудови регулярірного оператора є метод усікання сингулярних розкладань [7], тісно пов'язаний з ортогональними розкладаннями, а саме з рядами Фур'є.

Сингулярним розкладанням оператора $A: U \rightarrow F$ називають його зображення у вигляді

$$Au = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k(u, u_k) f_k, \quad (2.15)$$

де $\{u_k\}$, $\{f_k\}$ – нормовані ортогональні системи функцій у просторах U і F відповідно, а величини σ_k називають сингулярними числами оператора A .

Будемо вважати, що послідовність $\{\sigma_k\}$ є обмежена. Тоді оператор A являє собою безперервний лінійний оператор, що здійснює відображення з простору U у простір F , зі спряженим оператором

$$A^*f = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k(f, f_k) u_k,$$

а оператори

$$\begin{aligned} A^*Au &= \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k^2(u, u_k) u_k, \\ AA^*f &= \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k^2(f, f_k) f_k \end{aligned} \quad (2.16)$$

є самоспряжені у просторах U і F відповідно. Спектр оператора $B = A^*A$ містить власні значення σ_k^2 , яким відповідають власні елементи u_k і, можливо, власне значення 0, кратність якого може бути як скінченною, так і нескінченною. Те ж саме справедливо і для оператора A^*A із власними елементами f_k . При цьому власні елементи пов'язані співвідношеннями

$$\begin{aligned} A^*f_k &= \sigma_k u_k, \\ Au_k &= \sigma_k f_k. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Правильне і обернене твердження, якщо $\{f_k\}$, $\{u_k\}$ – нормовані системи власних елементів операторів A^*A та AA^* , що задовольняють співвідношення (2.16), то оператор A допускає зображення (2.15). Зокрема, компактні (цілком безперервні) оператори завжди припускають сингулярне розкладання, причому для них $\sigma_k \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$. Має місце така теорема.

Теорема 2.8.1. Якщо оператор A припускає сингулярне розкладання (2.15), то оператор, що замінює обернений, будують за правилом

$$A^+ f = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k^{-1}(f, f_k) u_k . \quad (2.18)$$

З огляду на теорему 2.8.1. оператор A^+ є необмежений у тому й тільки в тому випадку, коли $\sigma_k \rightarrow 0$. За таких умов оператор A^+ можна регуляризувати за допомогою усіченого сингулярного розкладання, якщо зберегти скінченне чи сло членів ряду в зображенні (2.18) і відкинути зростаючі доданки:

$$u = Rf = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k^{-1}(f, f_k) u_k . \quad (2.19)$$

Очевидно, що параметром регуляризації служить число N , яке вибирають виходячи з апіорної інформації про похибку δ .

Аналізуючи структуру сингулярного розкладання, можна зрозуміти причину некоректності. Нехай f_δ апроксимує f , тобто $\|f - f_\delta\|_F \leq \delta$. Якщо відомо тільки f_δ , то для коефіцієнтів розкладання Rf з теореми 2.8.1 можна одержати оцінку

$$\left| \sigma_k^{-1}(f, f_k) - \sigma_k^{-1}(f_\delta, f_k) \right| \leq \delta \sigma_k^{-1},$$

з якої зрозуміло, що внесок доданків u_k у розкладання $A^+ f$ для малих σ_k (практично за $\sigma_k < \delta$) не можна обчислити з прийнятною точністю. Таким чином, якщо відомі сингулярні числа й відповідні їм власні елементи оператора, то можна визначитися, які компоненти розв'язку рівняння (2.15) можна обчислити за наближенням елемента f_δ , а які – неможливо. На жаль, обчислення або знаходження асимптотик сингулярних чисел операторів і числове до слідження їх залежностей від параметрів некоректної задачі є досить складна проблема, хоча для деяких задач можна побудувати їх явні зображення (особливо у випадку самоспряжених операторів).

Зазначимо, що число доданків N , яке необхідно вибрати у представленні (2.19), визначають із критерію похибки [4] у такий спосіб:

$$N = \max N(\delta): \|Au - f_\delta\| \leq \delta .$$

Слід зауважити, що процедура мінімізації стабілізуючого функціонала А.М. Тихонова за наявності сингулярного розкладання приводить до розв'язку (2.18) такого вигляду:

$$u_\delta = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sigma_k}{\sigma_k^2 + \alpha} (f_\delta, f_k) u_k ,$$

причому параметр регуляризації $\alpha > 0$ повинен узгоджуватися з похибкою δ вхідної інформації відповідно до теореми 2.8.1, а крім того, його можна обрати з критерію похибки.

3. МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕКОРЕКТНИХ ЗАДАЧ

3.1. Методи оптимізації

Однією з головних проблем під час розв'язання некоректних задач за допомогою викладених вище способів усунення некоректності є задача відшукування мінімуму функціонала-похибки

$$\rho_u(Au, f) \equiv J[u] = \|Au - f\|^2, \quad f \in F, \quad u \in U. \quad (3.1)$$

Для розв'язання цієї проблеми застосовують різні ітераційні процедури [3].

Існує кілька способів прямого знаходження мінімуму функціонала (3.1). При цьому ітераційний процес побудови розв'язку некоректної задачі має таку характерну властивість поведінки: початкові ітерації добре наближаються до точного розв'язку, однак починаючи з деякої ітерації характерною стає наявність суттєвих коливань, а ітераційний процес починає набувати розбіжний характер. Це обумовлено тією обставиною, що у разі існування незамкненого образу оператора $R(A)$ та розв'язку рівняння (2.2), що є єдиний, не всяка послідовність, яка мінімізує функціонал (3.1), буде збіжною, оскільки обернений оператор A^{-1} є необмежений. Виникає проблема: на якій ітерації слід призупинити ітераційний процес, щоб уникнути його розбіжності? Для з'ясування цього питання розглянемо основні типи ітераційних процесів для квадратичного функціонала (3.1).

Важливу роль під час побудови ітераційних алгоритмів відіграє похідна функціонала за Фреше $J'[u]$ [1], яка для лінійного оператора A має вигляд

$$J'[u] = 2A^*(Au - f). \quad (3.2)$$

Серію ітераційних методів звичайно будують за таким правилом:

$$u_{n+1} = u_n - \beta_n J'[u_n], \quad n = 1, 2, \dots, \quad (3.3)$$

де параметр β_n вибирають залежно від типу ітераційної схеми.

Слід зазначити, що градієнтні методи вигляду (3.3) також прийнятні для ідентифікації векторної, функціонально-векторної або скалярної невідомої $u \in U$, однак похибка отриманого розв'язку суттєво залежить від вибору початкового наближення.

Для отримання $(n+1)$ -го наближення u_{n+1} до розв'язку u задачі

$$Au = \bar{f}, \quad u \in U, \quad \bar{f} \in F \quad (3.4)$$

за допомогою ітераційного процесу (3.3) найбільш часто застосовують три методи вибору коефіцієнта β_n та напрямку спуску p_n . Ці методи ґрунтуються на мінімізації функціонала $\|u_{n+1} - u\|^2$ й функціонала-похибки (3.1) у просторі U , де $A: U \rightarrow F$ – лінійний, безперервний оператор, що диференціюється за Фреше; U, F – гільбертові простори [Там само].

1. *Метод мінімальних похибок.* Послугуючись цим методом за напрям спуску вибирають $p_n = J'_{u_n}$, де J'_{u_n} – градієнт функціонала (3.1) за $u = u_n$. Крок спуску β_n на кожній ітерації отримують з умови мінімуму функціонала

$$\|u_{n+1} - u\|^2 = \|u_n - \beta_n J'_{u_n} - u\|^2 = \|u_n - u\|^2 - 2\beta_n (u_n - u, J'_{u_n}) + \beta_n^2 \|J'_{u_n}\|^2. \quad (3.5)$$

Мінімум цього функціонала по β_n досягається за

$$\beta_n = \frac{\|e_n\|^2}{\|J'_{u_n}\|^2}, \quad (3.6)$$

де $e_n = Au_n - \bar{f}$.

Для отримання наближення u_{n+1} вираз (3.3) з урахуванням (3.6) набуває вигляду:

$$u_{n+1} = u_n - \beta_n J'_{u_n}, \quad n=1,2,\dots \quad (3.7)$$

2. *Методу найшвидшого спуску.* Послугуючись цим методом за напрям спуску беруть $\rho_n = J'_{u_n}$, де J'_{u_n} – градієнт функціонала (3.1) за $u = u_n$. Крок спуску β_n на кожній ітерації добирають з умови мінімуму функціонала

$$\|Au_{n+1} - \bar{f}\|^2 = \|Au_n - \bar{f}\|^2 - 2\beta_n (Au_n - \bar{f}, J'_{u_n}) + \beta_n^2 \|AJ'_{u_n}\|^2. \quad (3.8)$$

Мінімум цього функціонала по β_n досягається за умови

$$\beta_n = \frac{\|J'_{u_n}\|^2}{\|AJ'_{u_n}\|^2}. \quad (3.9)$$

Для отримання $(n+1)$ -го наближення u_{n+1} (3.3) до розв'язку u з урахуванням (3.9) на основі мінімізації функціонала (3.1) вираз (3.3) набуває в игляду

$$u_{n+1} = u_n - \frac{\|J'_{u_n}\|^2}{\|AJ'_{u_n}\|^2} J'_{u_n}.$$

3. *Метод спряжених градієнтів.* Напрямом спуску в даному методі вибирають

$$\rho_n = J'_{u_n} + \gamma_n \rho_{n-1}, \quad \text{де } \gamma_0 = 0, \quad \gamma_n = \frac{\|J'_{u_n}\|^2}{\|J'_{u_{n-1}}\|^2}; \quad J'_{u_n} - \text{ градієнт функціонала (3.1) за}$$

$$u = u_n. \text{ Крок спуску } \beta_n \text{ на кожній ітерації вибирають у вигляді } \beta_n = \frac{\|J'_{u_n}, \rho_n\|^2}{\|A\rho_n\|^2}.$$

Перелічені методи мають лінійну швидкість збіжності [1] для задач із безперервним оберненим оператором. Більш високу (надлінійну) швидкість збіжності в таких задачах має метод спряжених градієнтів [Там само].

Тепер замість точної задачі (2.2) розглянемо наближену:

$$A_h u = f_\delta, \quad u \in U, \quad f_\delta \in F, \quad \|f - f_\delta\| \leq \delta,$$

причому наближений оператор $A_h : U \rightarrow F$ – лінійний безперервний оператор з деякого сімейства апроксимуючих операторів, що задовольняє умов у

$$\|A - A_h\| \leq h.$$

У наведеному випадку послідовність наближень u_n може досить сильно відрізнятися від точного розв'язку задачі (2.2). Однак за досить малих похибок $\eta = (\delta, h)$ перші наближення в градієнтних методах мало відрізняються від відповідних наближень за точних вихідних даних. Зі зростанням номера ітерації наближення можуть досить сильно відрізнятися від розв'язків. Метод ітераційної регуляризації полягає в тому, щоб за наявною апріорною інформацією про похибку вхідних даних η вибрати деяке наближення, близьке до точного розв'язку; зокрема, тут номер ітерації є параметром регуляризації. Має місце така теорема [Там само].

Теорема 3.1.1. Методи 1 – 3 породжують регуляризуюче сімейство операторів, у яких номер ітерації є параметром регуляризації. При цьому регулярівне наближення збігається до нормального розв'язку рівняння (2.2) відносно початкового наближення за збіжності похибки у вихідних даних до нуля ($\eta \rightarrow 0$).

Теорема 3.1.1 констатує необхідність принципового вибору кількості ітерацій $N(\eta)$, за якого наближення $u_n(\eta)$ стають стійкими до похибок вихідних даних, однак не забезпечує конструктивного способу вибору. На практиці один із можливих способів вибору числа $N(\eta)$ полягає у виконанні умови узгодження значень величин Δ_N та $\Delta_H = h \|u^0\| + \delta$, де u^0 – нормальний розв'язок рівняння (2.2).

Критерій вибору $N(\eta)$ формулюється в такий спосіб:

$$N = \min_n \{n : \Phi[n] < \Delta_H\},$$

де $\Phi[n]$ – деякий функціонал, що залежить від конкретного обраного ітераційного методу; наприклад, для методу найшвидшого спуску – $\Phi[n] = \frac{e_n}{2}$

У випадку конкретної реалізації у виразі для e_n можна замінити u^0 на u_n .

3.2. Метод обернення оператора

У загальному випадку побудувати розв'язок початково-крайової прямої задачі в аналітичному вигляді, а потім задовольнити додаткову умову $Az = u$ неможливо. Для операторів прямої задачі з постійними коефіцієнтами можна здійснити цю процедуру, послуговуючись поняттям фундаментального розв'язку й побудувати функції Гріна. У цьому випадку оператор можна зобразити у такий спосіб:

$$Az \equiv \int_a^b K(x, s)z(s)ds = u(x), \quad c \leq x \leq d, \quad (3.11)$$

де $K(x, s)$ – функція, яка інтегрується з квадратом. Інтегральний оператор у (3.11) діє з простору $L_2[a, b]$ в $L_2[c, d]$, причому він є цілком безперервний [4]. Припустимо, що для точної правої частини $\bar{u}(x) \in L_2[c, d]$ рівняння (3.11) має єдиний роз-

в'язок $\bar{z}(x) \in L_2[a, b]$, однак $\bar{u}(x)$ невідомий, а задана функція $u_\delta(x)$ й величина похибки δ такі, що

$$\|u_\delta - \bar{u}\|_{L_2[c, d]} = \left(\int_c^d (u_\delta(x) - \bar{u}(x))^2 dx \right)^{1/2} \leq \delta.$$

Потрібно побудувати наближений розв'язок $z_\delta(s)$ рівняння (2.2) такий, щоб

$$\|z_\delta - \bar{z}\|_{L_2[a, b]} = \left(\int_a^b (z_\delta(s) - \bar{z}(s))^2 ds \right)^{1/2} \rightarrow 0 \text{ за } \delta \rightarrow 0.$$

Надалі будемо вважати, що для функції $u_\delta(x)$ виконується умова $\|u_\delta\|_{L_2[c, d]} > \delta$ і замикання області значень оператора A збігається в $L_2[c, d]$.

Для наближеного розв'язання рівняння (2.2) будемо застосовувати метод регуляризації А.М. Тихонова. Побудуємо функціонал [Там само] у просторі $L_2[a, b]$:

$$M^\alpha(z) = \|Az - u_\delta\|_{L_2[c, d]}^2 + \alpha \|z\|_{L_2[a, b]}^2 = \int_c^d \left(\int_a^b K(x, s) z(s) ds - u_\delta(x) \right)^2 dx + \int_a^b z^2(s) ds. \quad (3.12)$$

З теореми 2.4.1 випливає, що для кожного $\alpha > 0$ існує єдина функція $\hat{z}_\alpha(z)$, на якій досягається точна нижня грань функціонала (3.12). Для побудови функції $\hat{z}_\alpha(z)$ можна застосовувати прямі методи мінімізації функціонала (3.12) або визначати $\hat{z}_\alpha(z)$ з рівняння, що є необхідною умовою екстремуму. Це рівняння в операторному вигляді записують у такий спосіб: $\alpha \hat{z}_\alpha + A^* A \hat{z}_\alpha = A^* u_\delta$. Оператор A^* є спряжений до інтегрального оператора A , діє із простору $L_2[c, d]$ в $L_2[a, b]$ і має вигляд

$$A^* f \equiv \int_c^d K(x, t) f(t) dt, \quad a \leq x \leq b.$$

Отже, рівняння, що являє собою необхідну умову мінімуму функціонала (3.12), має вигляд

$$\alpha \hat{z}_\alpha(x) + \int_c^d K(x, t) \int_a^b K(t, s) \hat{z}_\alpha(s) ds dt = \int_c^d K(x, t) u_\delta(t) dt,$$

або

$$\alpha \hat{z}_\alpha(x) + \int_a^b K_1(x, s) \hat{z}_\alpha(s) ds = \int_c^d K(x, t) u_\delta(t) dt, \quad (3.13)$$

де ядро $K_1(t, s)$ описується формулою

$$K_1(t, s) = \int_c^d K(x, t) K(x, s) dx. \quad (3.14)$$

Функція $K_1(t, s)$ є симетричною функцією своїх аргументів в $K_1(t, s) = K_1(s, t)$. Рівняння (3.13) являє собою інтегральне рівняння Фредгольма 2-го роду. Це рів-

няння має єдиний розв'язок за будь-якої функції $u_\delta(x) \in L_2[c, d]$ та за будь-якого значення параметра $\alpha > 0$. З теореми 2.4.2 випливає, що у разі відповідного узгодження значення параметра α з величиною похибки δ ($\alpha = \alpha(\delta)$) розв'язок рівняння (3.13) буде збігатися до точного розв'язку $\bar{z}(s)$ в метриці простору $L_2[c, d]$, якщо похибка δ буде збігатися до нуля.

У випадку заданої величини похибки δ можна вибрати параметр регуляризації α , спираючись на теорему 2.3.1. Рівняння для визначення параметра α має такий вигляд:

$$\int_c^d \left(\int_a^b K(x, s) \hat{z}_\alpha(s) ds - u_\delta(x) \right)^2 dx = \delta^2, \quad (3.15)$$

де $\hat{z}_\alpha(s)$ – розв'язок інтегрального рівняння (3.13). Для розв'язання нелінійного рівняння (3.15) можна застосовувати будь-які методи визначення коренів функції однієї змінної, наприклад ітераційні методи. При цьому на кожному кроці ітераційного процесу для обчислення значення $\phi(\alpha_{n-1})$ необхідно розв'язувати рівняння (3.13) зі значенням параметра $\alpha = \alpha_{n-1}$.

3.3. Метод малого параметра

Розглянемо об'єкт дослідження, стан якого в області

$$\Omega = \{x \mid x = (x_1, x_2), \quad 0 < x_\xi < l_\xi, \quad \xi = 1, 2\},$$

де l_ξ – границя області Ω , зображена рівнянням

$$c(x) \frac{\partial u}{\partial t} + Lu = f(x, t), \quad x \in \Omega, \quad 0 < t \leq T, \quad (3.16)$$

де

$$Lu \equiv - \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k(x) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right), \quad x \in \Omega,$$

$u = u(x)$ – функція, що описує поведінку об'єкта, $c(x)$, $k(x)$ – функції, що визначають модель об'єкта.

Будемо вважати, що на границі області Ω задані змішані крайові умови. Нехай $\gamma = \{x \mid x \in \partial\Omega, \quad x_2 = l_2\}$ та $\Gamma = \partial\Omega/\gamma$ – частина границі області Ω . На границі Γ задані умови першого роду, а на γ – другого роду:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= g(x, t), \quad x \in \Gamma, \\ k(x) \frac{\partial u}{\partial n} &= q(x, t), \quad x \in \gamma, \quad 0 < t \leq T \end{aligned} \quad (3.17)$$

Задана також початкова умова $u(x, 0) = u^0(x)$, $x \in \Omega$

$$u(x, t^*) = u_*(x, t^*). \quad (3.18)$$

У випадку розв'язування коефіцієнтних задач невідомою виступає вектор-функція $H(x) = \{c(x), k(x), f(x)\}^T$, при цьому зазвичай відома область визначення компонент вектор-функції $H(x) = \{c_1 \leq c(x) \leq c_2, k_1 \leq k(x) \leq k_2, f_1 \leq f(x) \leq f_2\}$.

Передбачається, що

$$\begin{aligned} c(x) &= c_0(x) + \varepsilon \tilde{c}(x); \\ k(x) &= k_0(x) + \varepsilon^\gamma \tilde{k}(x); \\ f(x) &= f_0(x) + \varepsilon^\beta \tilde{f}(x), \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\text{де } \varepsilon = \frac{c_2 - c_1}{c_1} < 1; \quad \varepsilon^\gamma = \frac{k_2 - k_1}{k_1} < 1; \quad \varepsilon^\beta = \frac{f_2 - f_1}{f_1} < 1, \quad \gamma, \beta > 0$$

Будемо шукати розв'язок вихідної задачі (3.16)-(3.18), ураховуючи апроксимації (3.19), у вигляді розкладання за ступенями малого параметра ε :

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 + o(\varepsilon^2). \quad (3.20)$$

Враховуючи (3.19), (3.20) зобразимо (3.16) у такий спосіб:

$$(c_0 + \varepsilon \tilde{c}) \frac{\partial(u_0 + \varepsilon u_1)}{\partial t} + L(u_0 + \varepsilon u_1) = f_0 + \varepsilon^\beta \tilde{f}, \quad (3.21)$$

$$\text{де } L = \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (k_0 + \varepsilon^\gamma \tilde{k}) \frac{\partial(u_0 + \varepsilon u_1)}{\partial x_\alpha}, \quad x \in \Omega.$$

Крайові (3.17) та початкові умови (3.18) матимуть вигляд

$$\begin{aligned} u_0 + \varepsilon u_1 &= g(x, t), \quad x \in \Gamma; \\ (k_0 + \varepsilon \tilde{k}) \frac{\partial(u_0 + \varepsilon u_1)}{\partial n} &= q(x, t), \quad x \in \gamma, \quad 0 \leq t \leq T; \\ u(x, 0) &= u^0(x). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Далі складемо крайові задачі за однакових ступенів параметра ε :

$$\varepsilon^0 : \begin{cases} c_0 \frac{\partial u_0}{\partial t} + L_0(u_0) = f_0 \\ u_0(x, t) = g(x, t), \quad x \in \Gamma; \\ k_0 \frac{\partial u_0}{\partial n} = q(x, t), \quad x \in \gamma \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases} \quad (3.23)$$

$$\varepsilon^1 : \begin{cases} c_0 \frac{\partial u_1}{\partial t} + L_0(u_1) + \tilde{c} \frac{\partial u_0}{\partial t} + L_1(u_0) \\ u_1(x, t) = 0, \quad x \in \Gamma \\ L_1 = \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\varepsilon^{\gamma-1} \tilde{k}(x) \frac{\partial u_0}{\partial x_\alpha} \right), \quad (\gamma - i) \leq 0. \\ k_0 \frac{\partial u_1}{\partial n} = \varepsilon^{\gamma-1} \tilde{k}(x) \frac{\partial u_0}{\partial n}, \quad x \in \gamma \end{cases} \quad (3.24)$$

Для знаходження невідомих компонент вектор-функцій $\tilde{H} = \{\tilde{c}, \tilde{k}, \tilde{f}\}^T$ у першому наближенні будемо застосовувати умову (1.3), з якої випливає, що

$$\tilde{H} = \arg \inf_{\tilde{H}} J(\tilde{H}),$$

$$\text{де } J(\tilde{H}) = \int_{\Omega} ((u_0 + \varepsilon u_1(\tilde{H})) - u)^2 dx.$$

Аналогічно відшукуємо компоненти вектор-функції $\tilde{H}$ у подальших наближеннях.

У разі розв'язання граничної задачі за невідому виступає вектор-функція $H = \{g, q\}$. При цьому передбачаємо, що області дозволених значень функцій g , q відомі, визначатимемо їх у такий спосіб: $g_1 \leq g \leq g_2$; $q_1 \leq q \leq q_2$.

Візьмемо, що

$$\begin{aligned} g &= g_0 + \varepsilon \tilde{g}; \\ q &= q_0 + \varepsilon^\alpha \tilde{q}; \end{aligned} \quad (3.26)$$

$$\text{де } g_0, q_0 - \text{заздалегідь задані; } \varepsilon = \frac{g_2 - g_1}{g_1} < 1; \varepsilon^\alpha = \frac{q_2 - q_1}{q_1} < 1; \alpha > 1.$$

Як і раніше, вважаючи, що розв'язок може бути зображений як:

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 + o(\varepsilon^2),$$

отримаємо, що рівняння (3.23), (3.24) відносно u_i на ітераціях залишаються без змін, а крайові умови набувають вигляду

$$\begin{aligned} u_0(x, t) &= g_0, \quad k \frac{\partial u_0}{\partial n} = q_0, \\ u_1(x, t) &= q_1, \quad k \frac{\partial u_1}{\partial n} = \tilde{q}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Початкову умову вважатимемо заданою.

Невідому вектор-функцію $\tilde{H} = (\tilde{g}, \tilde{q})$ визначимо з умови (1.3)

$$\tilde{H} = \arg \inf_{\tilde{H}} J(\tilde{H}), \quad \tilde{H} \in H^*. \quad (3.28)$$

Для ретроспективних задач за невідомої початкової умови $u(x, 0)$, але відомих умов типу (3.17) у кінцевий момент часу задача стає умовно-оберненою, оскільки за введення оберненого часу задача перетворюється на пряму задачу. Коли задані тільки умови у середині часового інтервалу $0 \leq t \leq T$, то задачу розв'язують аналогічно викладеному вище. Обиремо апроксимацію розв'язку у вигляді:

$$u(x, 0) = u^*(x, 0) + \varepsilon \tilde{u}, \quad (3.29)$$

$$\text{де } u_2 \leq u(x, 0) \leq u_1, \quad \varepsilon = \frac{u_2 - u_1}{u_1} < 1, \quad u^*(x, 0) - \text{деяка задана початкова умова, а функцію } \tilde{u} \text{ обчислимо з умови}$$

$$\tilde{u} = \arg \inf_{\tilde{u}} J(\tilde{u}), \quad \tilde{u} \in \tilde{D}.$$

При цьому застосуємо один із методів оптимізації.

3.4. Дискретизація задачі й метод обернення різницевої схеми

Для побудови розв'язку оберненої задачі зведемо процедуру визначення невідомих функцій $H(x)$ до ідентифікаційної задачі, тобто здійсимо перехід від континуальної моделі об'єкта дослідження до дискретної моделі із застосуванням методу скінченних елементів. Дискретизація задачі припускає скінченно-елементну апроксимацію невідомих функцій прямої і оберненої задач, дискретизацію множини можливих станів об'єкта, дискретизацію функціонала оберненої задачі [10].

Для опису невідомих функцій прямої і оберненої задач на області, зайнятій об'єктом дослідження, уведемо сітки, невідомі функції зобразимо у вигляді векторів, компоненти яких є вузовими значеннями функцій задачі.

Уведемо:

- сітку прямої задачі – X_s , де $X_s = (\xi_{1s}, \xi_{2s}, \xi_{3s})$, $s = \overline{1, S}$; невідомі функції, $u(X, H)$, що описують розв'язок прямої задачі, зобразимо у вигляді векторів $U = \{u_s\}$;
- сітку оберненої задачі – X_j , де $X_j = (\xi_{1j}, \xi_{2j}, \xi_{3j})$, $j = \overline{1, M}$ (усі вузли X_j виберемо з числа X_s); невідомі функції $H(X)$, що описують розв'язок оберненої задачі, зобразимо у вигляді векторів $H = \{H_j\}$;
- сітку для обраних точок спостереження – X_r , $r = \overline{1, N}$ (усі вузли X_r виберемо з числа X_s); функцію $u^*(X)$, що описує результати вимірювань параметрів стану, наведемо у вигляді вектора $u^* = \{U_r^*\}$.

Для побудови розв'язку прямої задачі застосуємо метод скінченних елементів. Виконаємо регулярну триангуляцію області $\Omega = \bigcup_k T_k$, де T_k – елемент триангуляції.

Наближений розв'язок прямої задачі знайдемо як функцію в просторі вузових параметрів, їх кількість визначає вимірність простору.

Невідомі функції на елементі запишемо в криволінійній системі координат $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Кожна координатна система $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ породжує свій ансамбль скінченних елементів. Для об'єднання скінченних елементів усіх ансамблів скористаємося глобальною декартовою системою координат ξ_1, ξ_2, ξ_3 .

Для запису локальної апроксимації функцій задачі й геометрії об'єкта усередині кожного скінченного елемента скористаємося локальною системою барицентричних координат L_1, L_2, L_3 .

Для вектора компонентів невідомих усередині кожного скінченного елемента (e) виконуємо апроксимацію квадратичним або кубічним поліномом:

$$u(x) = (N_1 I, N_2 I, \dots, N_v I) U^{(l)} = [N] U^{(l)}, \quad (3.30)$$

де $[N]$ – матриця, що залежить від L - координат елемента; I – одинична матриця, U – вектор вузлових значень функцій прямої задачі $u(X, H)$.

Після виконання процедур інтегрування співвідношень, що описують модель прямої задачі, за заданої апроксимації невідомих функцій і підсумовування матриць елементів, отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення вузлових значень функції $u(X, H)$:

$$KU = R, \quad (3.31)$$

де K – матриця системи; R – проекція вектора зовнішнього впливу.

Виконуючи стандартні процедури обернення матриць та розв'язання системи лінійних рівнянь (3.31), можна обчислити значення компонент вектора U

$$U = K^{-1}R. \quad (3.32)$$

Після знаходження значень компонент вектора переміщень U разом із заданим у вузлах спостережень вектором $U^*(X_r)$ будуємо функціонал-похибку оберненої задачі в дискретній формі. У результаті, з урахуванням виконаної дискретизації прямої і оберненої задач, функціонал оберненої задачі зобразимо у вигляді

$$J = \sum_{r=1}^N (U(X_r, H) - U^*(X_r))^T (U(X_r, H) - U^*(X_r)), \quad (3.33)$$

$$H = \{H_j\} \subset E^M, U^*(X_r) \in \bar{U}, j = \overline{1, M}, r = \overline{1, N},$$

для спрощення покладемо, що $A = E$.

Тоді задачу знаходження невідомого вектора можна зобразити у такий спосіб:

$$H = \underset{H \in H_k}{\operatorname{argmin}} \sum_{r=1}^N (U(X_r, H) - U^*(X_r))^T (U(X_r, H) - U^*(X_r)). \quad (3.34)$$

Для знаходження розв'язку оберненої задачі необхідно мінімізувати функціонал (3.33), сформульований у багатовимірному просторі параметрів E^M .

Вище було показано, що множина, на якій відшукується розв'язок оберненої задачі, повинна задовольняти умову компактності, тобто функція $H(X)$ має бути обмежена зверху й знизу разом зі своєю похідною.

Під час виконання зазначених умов, зважаючи на єдиність розв'язку оберненої задачі, цей розв'язок можна знайти будь-яким методом локальної оптимізації (див. 3.1).

3.5. Метод нейромережевої апроксимації

Одним із способів реалізації методу регуляризації на компактних множинах у комбінації з дискретизацією задачі (див. 3.4) є нейромережева апроксимація розв'язку оберненої задачі. У цьому випадку як вхід нейронної мережі використовують інформацію про спостереження за об'єктом, а як вихід – розв'язок оберненої задачі. При цьому передбачається, що функція, яка описує розв'язок прямої задачі $u(X, H)$ та інформація про спостережувані значення u^* дискретизовані

аналогічно (3.30). Тоді для двошарової нейромережі компоненти вектора H та U пов'язані співвідношенням [5]

$$H_i = F \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j f \left(\sum_{l=1}^m \alpha_{jl} U_l + \alpha_{j0} \right) + \alpha_0 \right), \quad (3.35)$$

де $H = \{H_j\}$; $j = \overline{1, M}$; $U = \{U_s\}$; $s = \overline{1, S}$; α_j , α_{jl} – компоненти вектора параметрів, що налаштовуються в процесі реалізації алгоритму ідентифікації вектора H за значенням вектора U ; F , f – функції активації; m , n – число нейронів у шарах.

Таке зображення можливе на основі теореми Колмогорова, з якої випливає, що якщо функція H безперервно залежить від функції U , то її можна зобразити у вигляді

$$H(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k) = \sum_{q=1}^{2n+1} h_q \sum_{p=1}^k \phi_q^p(U_2), \quad (3.36)$$

де функції h_q – безперервні функції, а функції $\phi_q^p(U_2)$ такі, що не залежать від вигляду функції $H(U)$.

Далі, А.Н. Горбань [Там само] показав, що будь-яка нелінійна апроксимація має універсальні апроксимаційні властивості: за допомогою лінійних операцій та каскадного об'єднання з довільних нелінійних елементів можна отримати будь-який необхідний результат з будь-якою попередньо заданою точністю. При цьому доведено, що для отримання скільки завгодно точної апроксимації (а не зображення) можна використовувати практично будь-яку одну нелінійну функцію.

Відтак для апроксимації залежності $H(U_1, U_2)$ необхідно:

1) забезпечити безперервність розв'язку H оберненої задачі від розв'язку U прямої задачі;

2) реалізувати вказану процедуру апроксимації, тобто обрати деякий набір функцій однієї змінної у вигляді лінійних операцій, побудувати їх суперпозицію, яка буде аргументом єдиної нелінійної функції.

Для забезпечення безперервної залежності функції H від U визначимо структуру множини, до якої належить функція H :

$$\overline{H} = \{H, H_1 \leq H \leq H_2, H > 0\}. \quad (3.37)$$

Якщо є виміряні значення компонент вектора U^* , то елемент множини $H^* \in \overline{H}$ повинен задовольняти операторне рівняння

$$U(H) = U^*, H \in \overline{H}, U^* \in \overline{U},$$

де $U(H)$ – розв'язок прямої задачі, який обчислюють шляхом розв'язання (3.32).

Це означає, що вектор $U(H)$ здійснює відображення елемента $H^* \in \overline{H}$ на елемент $U^* \in \overline{U}$. У цьому випадку елемент H^* є розв'язком оберненої задачі.

Якщо множина $\overline{H}$, що зображена у (3.37), компактна множина, то у просторі W^0 з будь-якої послідовності $\{H^{(m)}\} \subset \overline{H}$ можна виділити хоча б одну підпослідов-

ність $\{H_n^{(m)}\} \subset \{H^{(m)}\}$, яка б збігалася до деякого елемента $H^* \in W^0$ в нормі простору W^0 .

Умова (3.37) не є достатня для означення множини $\bar{H}$ як компактної. Тому введемо підмножини $\bar{H}_k$, для яких виконується умова

$$a \leq \frac{dH}{dU} \leq b; \text{sign } a = \text{sign } b; \bar{H}_k \subset \bar{H}. \quad (3.38)$$

Тоді підмножини $\bar{H}_k$ будуть компактними, оскільки вони обмежені та монотонні. Оскільки оператор $U(H)$ безперервний, то функціонал (3.33) є також безперервний, тобто якщо послідовність $\{H^{(m)}\} \subset \bar{H}_k$ збігається до елемента $H^* \in \bar{H}_k$ в нормі простору W^0 , то числова послідовність $J^{(m)}$ збігається до елемента J^* . Відтак згідно з теоремою Вейерштрасса [12] маємо, що задача мінімізації функціонала (3.33) на множині $\bar{H}_k$ має щонайменше один розв'язок, та будь-яка мінімізуюча послідовність $\{H^{(m)}\} \subset \bar{H}_k$ збігається до елемента H^* , $H^* \in \bar{H}_k$.

Тепер покажемо, що залежність функції H від функції U є безперервна. Доведемо таку теорему:

Теорема 3.5.1. Якщо вектор спостережень U^ заданий, то відображення $\bar{H}_k \rightarrow \bar{U}$ є взаємнооднозначним.*

Доведення: Розв'язок U прямої задачі (3.31) є лінійним відносно вектор-функції H . Отже, якщо обрати H_1 та H_2 такими, що $H_1 \neq H_2$, то завжди $U^*(H_1) \neq U^*(H_2)$. Це означає, що відображення $\bar{H}_k \rightarrow \bar{U}$ є однозначним.

Для подальших міркувань застосуємо топологічну лему [Там само] у термінах поставленої задачі.

Лема: Нехай метричний простір $\bar{H}$ відображається на метричний простір $\bar{U}$, а $H_0^* \in \bar{H}$ – образ компакту при цьому відображенні. Якщо відображення $\bar{H} \rightarrow \bar{U}$ є безперервне та взаємнооднозначне, то обернене відображення множини $\bar{U}$ на $\bar{H}$ є також безперервне в метриці простору $\bar{U}$.

Звідси впливає безперервність залежності функцій H від U , тобто можливість апроксимації залежності $H(U^*)$ за допомогою нейронної мережі.

Таким чином, нелінійну апроксимаційну структуру (3.35) можна реалізувати у вигляді нейронної мережі. Нейромережева структура являє собою параметризовану множину моделей

$$M : \{f(\phi(\alpha, U^*)), \alpha\}, \alpha \in D_M, H = f(\phi(U^*, \alpha), \alpha), \quad (3.39)$$

де вектор α визначає набір параметрів, що налаштовуються в мережевій моделі; D_M – підмножина простору R , на якій здійснюється пошук конкретної моделі. Основною вимогою до модельної структури є приналежність реальної системи $S = \{U^*, H^*\}$ множині моделей M , $S \in M$.

Моделлю M^* назвемо опис типу (3.39) за умови конкретного завдання вектора $\alpha = \alpha^*$

$$M^* : M^* = M(\alpha^*), \quad \alpha^* \in D_M. \quad (3.40)$$

Таким чином, задача апроксимації (3.39) складається з побудови нелінійної функції $f(\phi(U^*, \alpha), \alpha)$, де $\phi(U^*, \alpha)$ – вектор-функція, що використовує інформацію про спостереження за об'єктом; α – вектор параметрів, що налагоджується за відомими входами U^* та виходом H системи в процесі навчання. Навчання являє собою відображення множини даних про стан об'єкта на множину параметрів нейромережевої моделі ($Z^N \rightarrow \alpha$), де $Z^N = \{H_i, U_i\}$, $i = \overline{1, N}$, H_i – вектори з фіксованими значеннями компонент; U_i – відповідні до них вектори невідомих прямих задач, які обчислюють за допомогою співвідношень (3.32); N – обсяг вибірки, що визначає підмножину $\overline{H}_k$. Обсяг вибірки розраховують з умови, що крок $\Delta H = \frac{H_1 - H_2}{N}$ на множині $\overline{H} = \{H, H_1 \leq H \leq H_2, H > 0\}$ повинен забезпечувати різницю між двома розрахунками, яка задовольняє вимогу

$$\|U_n(H + \Delta H)\| - \|U_{n-1}(H_{n-1})\| = \mu, \quad \mu < 1, \quad (3.41)$$

де ΔH – крок дискретизації, який забезпечує $H_i = H_{i-1} + \Delta H$.

Таким чином, модель для розв'язання оберненої задачі можна реалізувати у вигляді інверсної функціональної структури, схема якої зображена на рис. 1. Як багатошарову нейромережу (БШН) використовують багатошаровий перцептрон. Розглянемо структурні одиниці схеми: МНМ – модуль навчання мережі; ПЗ – алгоритм, що реалізує розв'язування прямої задачі; АН – алгоритм навчання нейромережі; $e = U^* - U(H)$ – похибка; ε – малий параметр.

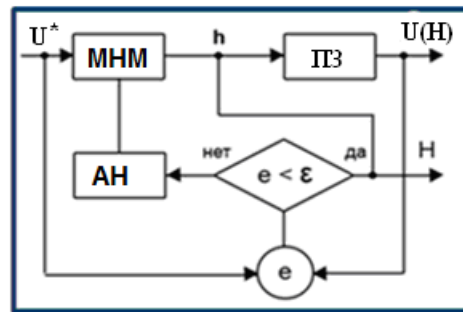


Рис. 1. Нейромережева структура для розв'язання оберненої задачі

Кількість вхідних і вихідних елементів у багатошаровому перцептроні в значається умовами задачі.

Під час побудови нейромережевої моделі основною задачею є створення адекватної до розглянутої задачі вибірки, що навчає мережу. Повнота і достовірність вибірки забезпечує можливість розв'язання оберненої задачі та якість отриманих результатів. Задача побудови вибірки полягає в тому, щоб, враховуючи властивості розв'язків прямої задачі, вибрати максимально інформативні дані, які б відповідали властивостям системи. Основними моментами на етапі створення

вибірki є раціональний підбір кроку дискретизації області $\bar{H}$, а також вибір точок спостереження з врахуванням властивостей розв'язків сформульованої прямої задачі.

Навчання мережі (3.35), тобто налаштування параметрів α_j , відбувається із застосуванням, наприклад, методу оберненого поширення помилки або іншого градієнтного методу. Налаштована мережа являє собою програмний продукт; на його вхід подається вектор значень спостережуваних параметрів U^* , на виході отримуємо вектор параметрів H , який характеризує властивості спостережуваної системи.

3.6. Метод квазіобернення

Розглянемо таку пряму задачу. Нехай D – скінченна область точок $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ n -вимірного евклідова простору R^n , обмежена гладкою або кусково-гладкою поверхнею S , t – час. На області D задана безперервна функція $\varphi(x)$. Пряма задача полягає у знаходженні в області $G \equiv \{x \in D, t > 0\}$ розв'язку рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0,$$

що задовольняє крайову

$$u(x, t) = 0 \text{ за } x \in S$$

і початкову умови

$$u(x, 0) = \varphi(x),$$

$$\text{де } \Delta u = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}.$$

Відомо, що розв'язок такої задачі $u = u(x, t)$ існує. Кожній функції $\varphi(x) \in C$ відповідає розв'язок задачі, який позначимо $u(x, t; \varphi)$.

Обернена задача полягає у знаходженні функції $\varphi(x)$ за відомою функцією $u(x, t; \varphi)$. У реальних задачах функцію $u(x, t; \varphi)$ зазвичай отримують як результат вимірювань і отже, вона відома приблизно. Будемо вважати, що $u(x, t; \varphi) \in L_2$. Така функція може й не відповідати ніякій «початковій» функції $\varphi(x)$. Таким чином, у класі функцій C може і не існувати розв'язку оберненої задачі. Тому будемо розглядати задачу знаходження деякого узагальненого розв'язку оберненої задачі.

Нехай задані число $T > 0$ та функція $\psi(x)$ в області D , $\psi(x) \in L_2$. На функціях $\varphi(x)$ класу C визначено функціонал

$$f(\varphi) = \int_D |u(x, t; \varphi) - \psi(x)|^2 dx. \quad (3.42)$$

Узагальненим розв'язком оберненої задачі будемо називати функцію $\varphi(x)$, на якій досягається точна нижня границя функціонала (3.42)

$$f_0 = \inf_{\varphi \in C} f(\varphi).$$

Слід зазначити, що «природний» підхід до розв'язання цієї задачі полягає у такому виборі функції $\varphi(x)$, щоб виповнювалась умова $f(\varphi) = 0$.

Для цього досить знайти розв'язок прямої задачі

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u &= 0; \\ u(x, t) &= 0 \text{ для } x \in S, \quad 0 < t < T; \\ u(x, T) &= \psi(x) \end{aligned}$$

і покласти $\varphi(x) = u(x, 0)$. Але така задача за заданої функції $\psi(x)$ з L_2 , узагалі кажучи, не має розв'язків і, крім того, нестійка до малих змін функції $\psi(x)$.

На деякому класі узагальнених функцій $\varphi(x)$ $f_0 = 0$. Тому розглянемо задачу знаходження наближеного значення f_0 із заданим рівнем похибки.

Для заданого числа $\varepsilon > 0$ знайдемо функцію $\varphi_\varepsilon(x)$, на якій $f(\varphi_\varepsilon) \leq \varepsilon$. Саме ця задача розв'язується методом квазіобернення.

Ідея методу квазіобернення полягає в тому, що замість оператора теплопровідності $\partial/\partial t - \Delta$ використовують «близький» до нього оператор B_α , для якого задача з оберненням відліку часу

$$\begin{aligned} B_\alpha u_\alpha &= 0, \quad x \in D, \quad t < T, \quad \alpha > 0; \\ u_\alpha(x, T) &= \psi(x); \\ u_\alpha(x, t) &= 0 \text{ для } x \in S, \quad t < T \end{aligned}$$

є стійка.

Розв'язавши цю задачу, вважають $\varphi(x) = u_\alpha(x, 0)$. Звичайно за оператор B_α беруть оператор $\frac{\partial}{\partial t} - \Delta - \alpha \Delta^2$ і розв'язують пряму задачу

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_\alpha}{\partial t} - \Delta u_\alpha - \alpha \Delta^2 u_\alpha &= 0, \quad x \in D, \quad t < T, \quad \alpha > 0; \\ u_\alpha(x, T) &= \psi(x); \\ u_\alpha(x, t) &= 0 \text{ для } x \in S, \quad 0 < t \leq T; \\ \Delta u_\alpha &= 0 \text{ для } x \in S, \quad 0 < t \leq T. \end{aligned}$$

Потім покладають, що

$$\varphi(x) = u_\alpha(x, 0).$$

Слід зазначити, що u_α не збігається у звичайному сенсі за $\alpha \rightarrow 0$.

4. РОЗВ'ЯЗАННЯ ДЕЯКИХ ОБЕРНЕНИХ ЗАДАЧ

4.1. Коефіцієнтні обернені задачі

Розглянемо жорстко закріплений на кінці $x = 0$ пружний стрижень довжини l , в якому збуджуються коливання за допомогою сили, прикладеної до торця стрижня $x = l$ (рис. 2) [3]. Будемо вважати, що модуль пружності $E = E(x)$, густина $\rho = \rho(x)$, площа поперечного перерізу $F = F(x)$ є функціями координати x .

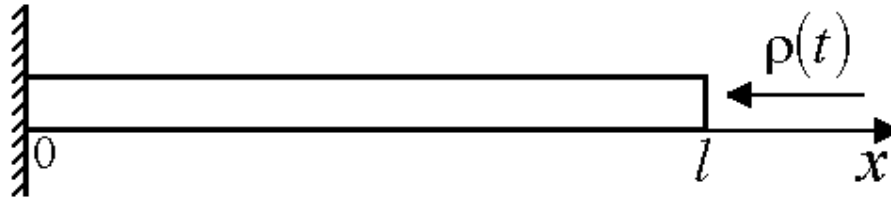


Рис. 2. Стрижнева система за динамічного стискання

Рівняння руху для неоднорідного стрижня має такий вигляд:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(E(x) F(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \rho(x) F(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (4.1)$$

а крайові умови можна зобразити у вигляді

$$u(0, t) = 0, \quad E(l) \frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = -\frac{p(t)}{F(l)}. \quad (4.2)$$

Далі будемо розглядати задачі про коливання стрижню, що встановилися, покладаючи, що $p(t) = p e^{i\omega t}$ і

$$u(x, t) = u(x) e^{i\omega t},$$

де ω – частота коливань. Припустимо, що є додаткова інформація про зв'язок

$$u(l, \omega) = f(\omega), \quad \omega \in [\omega_1, \omega_2]. \quad (4.3)$$

Тоді маємо такі постановки обернених задач:

- 1) F – стала; за відомою $\rho(x)$ знайти $E(x)$ з умови (4.3);
- 2) F – стала; за відомою $E(x)$ знайти $\rho(x)$ з умови (4.3);
- 3) E, ρ – сталі; $F(x)$ невідома, її визначають з умови (4.3).

Розглянемо детально ці задачі на прикладі першої, оскільки схеми їх досл ідження ідентичні. В основу аналізу покладемо метод малого параметра.

4.1.1. Задача про визначення модуля пружності $E(x)$

Розглянемо випадок, коли $\rho(x)$ та $F(x)$ постійні [Там само]. Рівняння коливань (4.1) і крайові умови (4.2) мають такий вигляд:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left(E(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \rho \omega^2 u = 0 \\ u(0) = 0 \\ E(l) \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l} = -p_0 = -\frac{p}{F} \end{cases} \quad (4.4)$$

Будемо знаходити невідому $E(x)$, послуговуючись додатковою інформацією про розв'язок

$$u(l, \omega) = f(\omega), \quad \omega \in [\omega_1, \omega_2]. \quad (4.5)$$

Припустимо, що

$$E(x) = E_0 + E_1(x), \quad \max \frac{|E_1(x)|}{E_0} \ll 1. \quad (4.6)$$

Позначимо $k^2 = \frac{\rho \omega^2}{E_0}$, $k \in [k_1, k_2]$ – хвильове число, та зобразимо відношення

$$\frac{|E(x)|}{E_0} = 1 + \varepsilon \eta(x).$$

Слід зазначити, що в задачі (4.4) $E(x)$ – довільна кусково-безперервна функція, однак побудувати аналітичний розв'язок прямої задачі (4.4) з довільним законом змінювання модуля пружності, взагалі кажучи, не можна. Будемо знаходити її розв'язок у вигляді розкладання за ступенями ε , враховуючи зображення (4.6):

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 + o(\varepsilon^2) \quad (4.7)$$

Зобразимо систему (4.4), враховуючи зображення (4.7):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left((1 + \varepsilon \eta(x)) \frac{\partial}{\partial x} (u_0 + \varepsilon u_1) \right) + k^2 (u_0 + \varepsilon u_1) &= 0; \\ (u_0 + \varepsilon u_1) \Big|_{x=0} &= 0; \\ \frac{\partial}{\partial x} (u_0 + \varepsilon u_1) \Big|_{x=l} &= -p_*; \quad p_* = \frac{p_0}{E_0}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Далі побудуємо крайові задачі за однакових ступенів параметра ε , аналогічно тому, як це було зроблено в (3.23), (3.24):

$$\varepsilon^0 : \begin{cases} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + k^2 u_0 = 0 \\ u_0(0) = 0 \\ \frac{\partial u_0}{\partial x} \Big|_{x=l} = -p_* \end{cases} ; \quad \varepsilon^1 : \begin{cases} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + k^2 u_1 + \frac{\partial}{\partial x} \left(\eta(x) \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) = 0 \\ u_1(0) = 0 \\ \frac{\partial u_1}{\partial x} \Big|_{x=l} = -\eta(x) \frac{\partial u_0}{\partial x} \Big|_{x=l} \end{cases}. \quad (4.9)$$

Задача (4.9) за ε_0 має постійні коефіцієнти, її розв'язок легко побудувати у вигляді

$$u_0 = A \sin kx + B \cos kx.$$

Значення коефіцієнтів можна отримати із крайових умов

$$A = -\frac{p_*}{k \cos kl}, \quad B = 0,$$

тоді вираз для u_0 матиме такий вигляд:

$$u_0 = -\frac{p_*}{k \cos kl} \sin kx.$$

Далі розглянемо систему (4.9), сформульовану за ε_1 . Її розв'язок має вигляд

$$u_1 = A_1 \sin kx + B_1 \cos kx + u_{1u}.$$

Щоб знайти частковий розв'язок u_{1u} , використаємо фундаментальний розв'язок відповідного оператора [3]

$$g(x) = \frac{\sin k|x|}{2k}$$

і знайдемо частковий розв'язок у вигляді згортки:

$$u_{1u} = \int_{-\infty}^{\infty} g(x - \xi) \left[-\frac{\partial}{\partial \xi} R(\xi) \right] d\xi = -\int_0^l \frac{\sin k|x - \xi|}{2k} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} R(\xi) \right] d\xi,$$

$$\text{де } R(\xi) = \left(\eta(\xi) \frac{\partial u_0}{\partial \xi} \right).$$

Задовольняючи крайові умови, обчислимо значення коефіцієнтів:

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{k \cos kl} \left[\eta(l) p_* + \frac{1}{2} \int_0^l \cos k(l - \xi) \left[\frac{\partial}{\partial \xi} R(\xi) \right] d\xi + \int_0^l \frac{\sin kl}{2} \int_0^l \sin k\xi \left[\frac{\partial}{\partial \xi} R(\xi) \right] d\xi \right], \\ B_1 &= \frac{1}{2k} \int_0^l \sin k\xi \left[\frac{\partial}{\partial \xi} R(\xi) \right] d\xi. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Таким чином, застосування додаткової умови (4.3) оберненої задачі привело до такого інтегрального рівняння:

$$\int_0^l \eta(\xi) \cos^2 k\xi d\xi = f_0(k) \cos^2 kl + \frac{\sin 2kl}{2k}, \quad f_0(k) = p_*^{-1} f(\omega), \quad k \in [k_1, k_2], \quad (4.11)$$

а обернена задача із застосуванням методу малого параметра зводиться до інтегрального рівняння Фредгольма 1-го роду із гладким ядром. Це рівняння можна розв'язати за допомогою числового методу оптимізації (див. розд. 3.1.).

Неважко бачити, що додаткові складнощі у випадку побудови оберненого оператора рівняння (4.11) виникають на резонансних частотах, тобто за

$kl = \frac{\pi}{2}(2n - 1)$. В цьому випадку права частина (4.11) перетворюється на нуль не-

залежно від вигляду функції $f_0(k)$. Узагалі кажучи, вона має свої точки розриву відповідно до резонансів неоднорідного стрижня. Для забезпечення єдиності розв'язку оберненої задачі відрізок $[k_1, k_2]$ слід вибирати між резонансними хвильовими числами.

4.1.2. Задача про визначення густини

Розглянемо задачу про визначення густини стрижня в такому вигляді [3]:

$$\begin{cases} E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \rho(x) \omega^2 u = 0 \\ u(0) = 0, \quad E \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l} = -p_0 \\ u(l, \omega) = f(\omega), \quad \omega \in [\omega_1, \omega_2] \end{cases} \quad (4.12)$$

Розв'язок задачі (4.12) будують із застосуванням методу малого параметра в припущенні, що

$$\rho(x) = \rho_0(1 + \varepsilon \eta(x)), \text{ де } \rho_0 = \min_{x \in [0, l]} \rho(x), \quad \eta(x) \geq 0.$$

Згідно з міркуваннями, описаними у попередньому пункті, перейдемо до інтегрального рівняння за допомогою скінченного перетворення Фур'є відносно до лінеаризованої задачі:

$$\begin{aligned} \int_0^l \eta(\xi) \sin^2 k\xi d\xi &= - \left(f_0(k) \cos^2 kl + \frac{\sin 2kl}{2k} \right), \\ k^2 &= \frac{\rho_0 \omega^2}{E}, \quad k \in [k_1, k_2], \quad f_0(k) = p_*^{-1} f(\omega). \end{aligned} \quad (4.13)$$

На відміну від попереднього випадку ядро інтегрального рівняння

$$K(k, \xi) = \sin^2 k\xi$$

не є додатне, а лише невід'ємне, тому права частина рівняння (4.13) відрізняється від рівняння (4.11) лише знаком. Зважаючи на таку особливість ядра (воно перетворюється на нуль за $\xi = 0$ для будь-яких k), можна передбачити, що похибка визначення густини в околі початку координат буде великою. Зазначимо, що задачі, аналогічні попередньо розглянутій, мають додаткові складності у разі обернення оператора (4.13), які виникають на резонансних частотах задачі нульового наближення, тобто за $kl = \frac{\pi}{2}(2n - 1)$. В цьому випадку права частина (4.11) перетворюється на нуль незалежно від функції $f_0(k)$.

4.1.3. Задача про визначення форми поперечного перерізу у стрижня

Розглянемо задачу про визначення форми поперечного перерізу у $F(x)$ за відомих значень густини й модуля пружності ($E = E_0$):

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left(EF(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \rho F(x) \omega^2 u = 0 \\ u(0) = 0 \\ EF(l) \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l} = -p \end{cases} \quad (4.14)$$

$$u(l, \omega) = f(\omega), \quad \omega \in [\omega_1, \omega_2]. \quad (4.15)$$

Аналогічно попередньому, у рамках методу малого параметра задача про визначення форми поперечного перерізу у стрижня зводиться до інтегрального рівняння Фредгольма 1-го роду із гладким ядром:

$$\int_0^l \eta(\xi) \cos 2k\xi d\xi = f_0(k) \cos^2 kl + \frac{\sin 2kl}{2k}, \quad k \in [k_1, k_2], \quad (4.16)$$

причому $k^2 = \frac{\rho \omega^2}{E_0}$. Для розв'язання рівняння (4.16) також необхідно скористатися

методами регуляризації [3]. Зауважимо, що праві частини рівнянь (4.11) і (4.16) збігаються, а вимоги до вибору відрізка $[k_1, k_2]$ формують аналогічно п. 4.1.1.

4.2. Граничні обернені задачі

Розглянемо задачу про ідентифікацію теплового потоку у стаціонарних задачах теплопровідності за відомим розв'язком [9].

За найпростішу математичну модель візьмемо одновимірне рівняння теплопровідності

$$-\frac{d}{dx} \left(k(x) \frac{dT}{dx} \right) + q(x)T = f(x), \quad 0 < x < l \quad (4.17)$$

за звичайних обмежень на значення його коефіцієнтів:

$$k(x) \geq \kappa > 0, \quad q(x) \geq 0,$$

де T – температура.

Пряма задача полягає у визначенні функції $T(x)$ з рівняння (4.17) із заданими коефіцієнтами $k(x)$, $q(x)$, правою частиною $f(x)$ й додатковими умовами на границі. У найпростішому випадку нехай задані однорідні крайові умови першого роду:

$$T(0) = 0, \quad T(l) = 0. \quad (4.18)$$

Сформулюємо обернену задачу. Будемо вважати, що права частина $f(x)$ – невідома функція. Для її визначення потрібно задати деяку додаткову інформацію про самий розв'язок. Оскільки необхідно знайти функцію, яка залежить від координати x , то додаткову інформацію бажано задати також у вигляді функції від x . Крім того, будемо вважати, що відомим є розподіл функції температури $T(x)$, де $x \in [0, l]$. За відомого точного розв'язку $T(x)$, $x \in [0, l]$ праву частину визначають однозначно. З рівняння (4.17) випливає, що

$$f(x) = -\frac{d}{dx} \left(k(x) \frac{dT}{dx} \right) + q(x)T, \quad 0 < x < l. \quad (4.19)$$

Застосування формули (4.19) припускає, наприклад, що $f(x) \in C(0, l)$, якщо розв'язок $T(x) \in C^2[0, l]$ за $k(x) \in C^1[0, l]$, $q(x) \in C[0, l]$.

Проблема полягає в тому, що вхідні дані (у нашому випадку розв'язок $T(x)$, $x \in [0, l]$) задані приблизно й не належать класу гладкості, зазначеному вище. Типова ситуація полягає в тому, що замість точного розв'язку $T(x)$, $x \in [0, l]$ відома функція $T_\delta(x)$, $x \in [0, l]$, причому $T_\delta(x)$, $x \in C[0, l]$ і

$$\|T_\delta(x) - T(x)\|_{C[0, l]} \leq \delta, \quad (4.20)$$

де $\|T(x)\|_{C[0, l]} = \max_{x \in [0, l]} |T(x)|$.

Задача (4.19), (4.20) є задачею обчислення значень диференціального оператора. Вона належить до класу некоректних у класичному сенсі задач, і для її розв'язання необхідно використати регулярівний алгоритм.

На множині функцій, що перетворюється на нуль на кінцях відрізка $[0, l]$ (див. (4.18)), визначимо оператор D за правилом

$$DT = -\frac{d}{dx} \left(k(x) \frac{dT}{dx} \right) + q(x)T.$$

Тоді задачу (4.18), (4.19) за точних вхідних даних можна записати у вигляді

$$f = DT. \quad (4.21)$$

У просторі $L_2(0, l)$ оператор

$$D = D^* \geq mE, \quad m = \kappa \frac{\pi^2}{l^2}.$$

Зважаючи на це, зауважимо, що D^{-1} існує й

$$0 < D \leq \frac{1}{m} E.$$

Тепер маємо можливість від рівняння (4.21) перейти до рівняння

$$Af = T, \quad (4.22)$$

де $A = A^* = D^{-1}$.

У рівнянні (4.22) права частина визначена з похибкою, замість точного значення відома T_δ , причому рівень похибки контролюємо нерівністю

$$\|T_\delta - T\| \leq \delta, \quad (4.23)$$

де

$$\|T(x)\|^2 = \int_0^l T^2(x) dx.$$

Для отримання стійкого розв'язку задачі застосуємо метод регуляризації А. М. Тихонова. У цьому випадку наближений розв'язок f_α , $\alpha = \alpha(\delta)$ визначимо з умови мінімуму функціонала

$$J_{\alpha}(f_{\alpha}) = \min_{v \in H} J_{\alpha}(T), \quad (4.24)$$

де

$$J_{\alpha}(T) = \|AT - T_{\delta}\|^2 + \alpha\|T\|^2. \quad (4.25)$$

Функціонал (4.25), з урахуванням уведених у (4.22) позначень, можна записати у вигляді

$$J_{\alpha}(T) = \|D^{-1}T - T_{\delta}\|^2 + \alpha\|T\|^2.$$

Його особливість пов'язана з тим, що обчислити значення оператора D простіше, ніж побудувати для нього обернений оператор. А тому замість (4.25) будемо використовувати більш загальний функціонал

$$J_{\alpha}(T) = \|D^{-1}T - T_{\delta}\|_{\zeta}^2 + \alpha\|T\|_{\zeta}^2,$$

$$\zeta = \zeta^* > 0.$$

Покладемо $\zeta = D^*D$, тоді

$$J_{\alpha}(T) = \|T - DT_{\delta}\|^2 + \alpha\|DT\|^2, \quad (4.26)$$

тобто для наближеного розв'язання задачі (4.21), (4.23) застосуємо варіант методу регуляризації А.М. Тихонова, який спирається на розв'язання варіаційної задачі (4.24), (4.26).

Рівняння Ейлера для (4.24), (4.26) матиме вигляд

$$(E + \alpha D^*D)f_{\alpha} = DT_{\delta}. \quad (4.27)$$

Для розглянутого прикладу (4.18)-(4.20) рівняння (4.27) приводить до крайової задачі для звичайного диференціального рівняння четвертого порядку. Розв'язок рівняння (4.27) можна оцінити за допомогою типової апріорної оцінки

$$\|f_{\alpha}\| \leq \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}\|T_{\delta}\|, \quad (4.28)$$

яка встановлює стійкість наближеного розв'язку до малих збурень правої частини.

За різницевого обчислення правої частини крок дискретизації h виступає параметром регуляризації. Його величина повинна узгоджуватися з похибкою у вхідних даних δ . Оптимальне значення кроку дискретизації залежить від постійних M_1 , M_2 , тобто $h_{opt}(M_1, M_2)$. Найчастіше пряме обчислення цих постійних унеможливлено, тому в таких випадках слід орієнтуватися на використання вибору кроку дискретизації за критерієм похибки.

У випадку числового розв'язання нестійких задач дискретизація (перехід до скінченновимірної задачі) завжди привносить ефект регуляризації. Це зауваження стосується як сіткових методів, так і проєкційних методів. При цьому параметром дискретизації виступає вимірність задачі, яку визначають кроком дискретизації. Можна говорити, що числові методи мають властивість саморегуляризації. Однак за спроби збільшити вимірність задачі для одержання наближеного розв'язку з більшою точністю ми з деякого моменту одержуємо все більш і більш гірші результати – виявляється некоректність задачі. Тому потрібно вчасно призупинити

зменшення кроку дискретизації, обмежитися наближеним розв'язком, отриманим за деяких оптимальних параметрів сітки дискретизації.

Можливості регуляризації, заснованої на дискретизації задачі, досить обмежені. В обчислювальній практиці зазвичай вибирають інший шлях, застосовуючи методи, у яких регулярівні властивості мають місце для безперервної задачі. Під час виконання дискретизації з використанням сіток з досить малим кроком, явно не відслідковується близькість дискретної задачі до регуляризованої диференціальної задачі. У цьому випадку додаткові регулярівні властивості, що вносить дискретизація, не враховуються через їх незначний вплив. У разі, коли впливом похибок апроксимації не можна нехтувати, доцільно здійснювати більш ретельне врахування похибок. Зокрема, вибираючи параметр регуляризації його слід узгоджувати не тільки з похибкою в завданні правої частини, але й з похибкою в завданні оператора за наближеного розв'язання операторного рівняння першого роду. Вказаний підхід має назву принципу узагальненої похибки.

4.3. Обернена ретроспективна задача

Як модельні приклади таких задач розглянемо наступну початково - крайову одновимірну задачу для рівняння теплопровідності [3]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} &= \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}, \\ \frac{\partial T}{\partial x}(0, t) &= \frac{\partial T}{\partial x}(l, t) = 0 \\ T(x, 0) &= \varphi(x). \end{aligned} \quad (4.29)$$

Сформулюємо обернену ретроспективну задачу: необхідно знайти початковий розподіл температури $\varphi(x)$ за деякою інформацією про поле температур $T(x)$. При цьому будемо розрізняти дві найбільш вживані постановки обернених задач:

- 1) відомим є поле температур у деякий момент часу t^*

$$T(x, t^*) = f(x), \quad x \in [0, l];$$

- 2) відомим є поле температур у деякій точці x_0 усередині відрізка $[0, l]$:

$$T(x_0, t) = g(x), \quad t \in [t_1, t_2].$$

Під кутом зору здійснення спостереження за об'єктом другу постановку зобов'язати простіше, вимірювання температури здійснюють в одній точці, однак порівняльний аналіз постановок задач дозволяє виявити деякі особливості реконструкції початкової умови, які є дуже важливі для постановки експерименту.

Розглянемо першу постановку. Для розв'язання оберненої задачі необхідно знайти початковий розподіл температур $\varphi(x)$ за наявною інформацією про поле температур в деякий момент часу $t = t^* > 0$:

$$T(x, t^*) = f(x), \quad x \in [0, l]. \quad (4.30)$$

Побудуємо розв'язок прямої задачі із застосуванням методу розподілення змінних [1]. Відповідно до запропонованого методу будемо знаходити розв'язок у вигляді

$$T(x, t) = X(x)T(t).$$

Розділяючи змінні, одержимо співвідношення

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{\alpha} \frac{\dot{T}}{T} = \text{const} = -\lambda^2,$$

звідки

$$X'' + \lambda^2 X = 0, \quad X = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x.$$

Із граничних умов знаходимо

$$C_2 = 0, \quad C_1 \lambda \sin \lambda l = 0,$$

і, отже,

$$\lambda_n = \frac{\pi n}{l}, \quad X_n = \cos \frac{\pi n x}{l}, \quad T_n = C_n e^{-\alpha \lambda_n^2 t}.$$

Задовольняючи початкові умови, визначимо

$$C_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \cos \lambda_n \xi d\xi, \quad n = 1, 2, \dots, \quad C_0 = \frac{1}{l} \int_0^l \varphi(\xi) d\xi$$

Таким чином, розв'язок прямої задачі має вигляд

$$\theta(x, t) = \int_0^l K(x, \xi, t) \varphi(\xi) d\xi, \quad (4.31)$$

де

$$K(x, \xi, t) = \frac{1}{l} + \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \cos \lambda_n x \cos \lambda_n \xi e^{-\lambda_n^2 \alpha t}. \quad (4.32)$$

Обернена задача зводиться до інтегрального рівняння Фредгольма 1-го роду на підставі (4.31), (4.32) у разі задоволення умови (4.30):

$$K_1 \varphi = \int_0^l K_1(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi = f(x), \quad x \in [0, l], \quad (4.33)$$

причому

$$K_1(x, \xi) = K(x, \xi, T).$$

Слід зауважити, що ядро $K_1(x, \xi)$ є симетричне, а оператор $K_1 \varphi$ самоспряжений у просторі $L_2[0, l]$. Власні функції ядра дорівнюють -1 , $\cos \lambda_n x$, та являють собою повну ортогональну систему в $L_2[0, l]$. Сингулярні числа оператора K_1

$$\sigma_n^2 = e^{-\lambda_n^2 \alpha T}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

швидко зменшуються за $n \rightarrow \infty$, оскільки

$$\sigma_n^2 = e^{-c^2 n^2}, \quad c^2 = \pi^2 \alpha T l^{-2}.$$

З урахуванням оцінки

$$|K_1(x, \xi)| \leq \frac{1}{l} + \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n^2 \alpha T}$$

і збіжності ряду, розташованого в цьому виразі праворуч, ядро $K_1(x, \xi)$ (за теоремою Вейерштрасса [12]) являє собою безперервну функцію, отже, K_1 є цілком безперервний оператор, що діє з простору $L_2[0, l]$ в $L_2[0, l]$, тому обернений оператор K_1^{-1} є необмежений і проблема розв'язання інтегрального рівняння (4.33) потребує регуляризації.

Зазначимо, що, враховуючи ортогональність системи $\{1, \cos \lambda_n x\}$, неважко зобразити формальний розв'язок (4.33) у вигляді

$$\varphi(x) = \int_0^l K_1^*(x, \xi) f(\xi) d\xi, \quad (4.34)$$

де

$$K_1^*(x, \xi) = \frac{1}{l} + \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \cos \lambda_n x \cos \lambda_n \xi e^{\lambda_n^2 \alpha T} \quad (4.35)$$

з урахуванням того, що коефіцієнти Фур'є φ_k й f_k функцій $\varphi(x)$ і $f(x)$ відповідно пов'язані залежністю

$$\varphi_k \sigma_k^2 = f_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Із (4.34), (4.35) випливає, що для збіжності ряду у (4.34), через наявність швидкозростаючих множників $e^{\lambda_n^2 \alpha T}$, необхідно накласти досить жорсткі умови на характер убуття коефіцієнтів Фур'є f_k . Такі умови виконуються далеко не для всіх функцій з $L_2[0, l]$, навіть для тих, що мають нескінченну кількість похідних, і тому використовувати розв'язок рівняння (4.34) для практичних розрахунків не можна. Така структура розв'язку відображає факт необмеженості оператора, оберненого до K_1 .

Очевидно, одним із найбільш ефективних способів побудови регуляризованого розв'язку (4.34) є метод усічених сингулярних розкладань, згідно з яким регуляризований розв'язок матиме вигляд

$$\varphi_\delta(x) = R_N f_\delta = \frac{1}{l} \int_0^l f_\delta(\xi) d\xi + \frac{2}{l} \sum_{k=1}^N \int_0^l f_\delta(\xi) \cos \lambda_k \xi d\xi \cos \lambda_k x e^{\lambda_k^2 \alpha T}, \quad (4.36)$$

а число N (у цьому випадку – параметр регуляризації) обирають погодженим з похибкою δ вимірювання функції f ($\|f - f_\delta\| \leq \delta$). Знайдемо умови, з яких його слід визначати. Побудуємо оцінку похибки у нормі простору $L_2[0, l]$:

$$\|R_N f_\delta - \varphi\|_{L_2[0, l]} \leq \|R_N\| \cdot \|f_\delta - f\|_{L_2[0, l]} + \|R_N f - \varphi\|_{L_2[0, l]},$$

причому

$$\|R_N\| = \left(1 + \sum_{n=1}^N e^{2\lambda_n^2 \alpha T} \right)^{1/2} = M(N)$$

монотонно зростає зі зростанням N ,

$$\|R_N f - \varphi\|_{L_2[0,l]} = C(N)$$

являє собою норму остачі ряду, який збігається, й, отже, збігається до 0 за $N \rightarrow \infty$.

Таким чином, похибку регуляризованого розв'язку можна оцінити в такий спосіб:

$$m(N, \delta) = M(N) \cdot \delta + C(N),$$

і за заданої похибки δ завжди знайдеться елемент $N_*(\delta)$ такий, що доставляє $\min m(N, \delta)$. Якщо необхідно побудувати розв'язок оберненої задачі з похибкою, що не перевищує значення ε , у разі похибки вхідних даних δ , то порядок величини N є такий:

$$N = \left\lceil c^{-1} \ln \left(\frac{\varepsilon}{\delta} \right) \right\rceil, \quad c = \pi l^{-1} (\alpha T)^{0.5}.$$

Слід наголосити, що за певних співвідношень між параметрами ε та δ може статися випадок, коли такого цілого числа N не існує, тобто за заданої похибки вхідних даних неможливо досягнути необхідної точності розв'язку.

У принципі, для розв'язання ретроспективної задачі достатньо зробити заміну змінних $\tau = t^* - t$, де t^* – відомий час спостереження за об'єктом, і розв'язувати задачу з оберненим часом. Відповідна початково-крайова задача щодо функції

$$u(\tau) = \theta(t^* - \tau)$$

набуває вигляду

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= -\frac{1}{\alpha} \frac{\partial v}{\partial \tau}; \\ \frac{\partial v}{\partial x}(0, \tau) &= \frac{\partial v}{\partial x}(l, \tau) = 0; \\ v(x, 0) &= f(x). \end{aligned} \tag{4.37}$$

Для визначення $v(x, t^*) = \varphi(x)$ (температури стрижня в момент часу t^*) необхідно розв'язати початково-крайову задачу (4.34). Таким чином, невідому функцію можна отримати або з рівняння Фредгольма 1-го роду із гладким ядром (4.32), або у разі безпосереднього розв'язання рівняння (4.37) методом розподілення змінних. Члени отриманого при цьому ряду, як зазначено вище, містять експоненціально зростаючі співмножники, і для його збіжності потрібні дуже жорсткі обмеження на функцію $f(x)$, сформульовані, наприклад, у вигляді дуже швидкого убуття коефіцієнтів ряду Фур'є.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. **Алифанов, О.М.** Экстремальные методы решения некорректных задач [Текст] / О.М. Алифанов, Е.А. Артюхин, С.В. Румянцев. – М.: Наука, 1988. – 288 с.
2. **Бухгейм, А.Л.** Введение в теорию обратных задач [Текст] / А.Л. Бухгейм. – Н.: Наука, 1988. – 181 с.
3. **Ватульян, А.О.** Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела [Текст] / А.О. Ватульян. – М.: Физматлит, 2007. – 222 с.
4. **Денисов, А.М.** Введение в теорию обратных задач [Текст] / А.М. Денисов. – М.: МГУ, 1994. – 206 с.
5. **Егупов, Н.Д.** Методы робастного, нейронечеткого и адаптивного управления [Текст] / Н.Д. Егупов – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. – 744 с.
6. **Кравчук, А.С.** Основы компьютерной томографии [Текст] / А.С. Кравчук. – М.: Дрофа, 2001. – 151 с.
7. **Морозов, В.А.** Регулярные методы решения некорректно поставленных задач [Текст] / В.А. Морозов. – М.: Наука, 1987. – 608 с.
8. **Наттерер, Ф.** Математические аспекты компьютерной томографии [Текст] / Ф. Наттерер. – М.: Мир, 1990. – 288 с.
9. **Самарский, А.А.** Численные методы решения обратных задач математической физики [Текст] / А.А. Самарский, П.Н. Вабищевич. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 480 с.
10. **Сергиенко, И.В.** Системный анализ многокомпонентных распределенных систем [Текст] / И.В. Сергиенко, В.С. Дейнека. – К.: Наук. думка, 2009. – 639 с.
11. **Тихонов, А.Н.** Математическое моделирование технологических процессов и метод обратных задач в машиностроении [Текст] / А.Н. Тихонов, В.Д. Кальнер, В.Б. Гласко. – М.: Машиностроение, 1990. – 263 с.
12. **Тихонов, А.Н.** Методы решения некорректных задач [Текст] / А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин. – М.: Наука, 1979. – 386 с.

ЗМІСТ

Вступ.....	3
1. Метод обернених задач.....	4
1.1. Прямі й обернені задачі. Типи обернених задач.....	4
1.2. Математична особливість обернених задач.....	5
2. Методи усунення некоректності	10
2.1. Про наближення розв'язку некоректно поставлених задач....	10
2.2. Метод квазірозв'язків	12
2.3. Метод регуляризації на компактних множинах.....	13
2.4. Метод регуляризації Тихон ова.....	15
2.5. Метод похибки.....	16
2.6. Ітераційний метод розв'язання рівнянь.....	17
2.7. Проекційний метод розв'язання рівнянь.....	17
2.8. Метод усічених сингулярних розкладань.....	19
3. Методи розв'язання некоректних задач.....	21
3.1. Методи оптимізації.....	21
3.2. Метод обернення оператора.....	23
3.3. Метод малого параметра.....	25
3.4. Дискретизація задачі й метод обернення різницевої схеми.....	28
3.5. Метод нейромережевої апроксимації.....	29
3.6. Метод квазіобернення.....	33
4. Розв'язання деяких обернених задач.....	35
4.1. Коефіцієнтні обернені задачі.....	35
4.1.1. Задача про визначення модуля пружності $E(x)$	35
4.1.2. Задача про визначення густини.....	38
4.1.3. Задача про визначення форми поперечного перерізу стрижня	38
4.2. Граничні обернені задачі.....	39
4.3. Обернена ретроспективна задача.....	42
Бібліографічні посилання	46
Зміст	47

Темплан 2013, поз. 29

Навчальне видання

Наталія Іллівна Ободан
Наталія Анатоліївна Гук

Обернені задачі ідентифікації моделей

Навчальний посібник

Редактор	В.О. Насекан
Техредактор	Л.П. Замятіна
Коректор	Т.А. Белиба

Підписано до друку 31.01.13. Формат 60х84/16 Папір друкарський. Друк плоский
Ум. друк. арк. 2,8. Ум. фарбовідб. 2,8. Обл.-вид. арк. 2,5. Тираж 100 пр.
Зам. №_____

РВВ ДНУ, просп. Гагаріна, 72, м. Дніпропетровськ, 49010.
Друкарня ДНУ, вул. Наукова, 5, м. Дніпропетровськ, 49050

© Ободан Н.І., Гук Н.А., 2013