

С.М.Ковальов, С.І.Ботвіновська, К.М.Гермаш,
А.В.Золотова, Ж.Г.Левіна

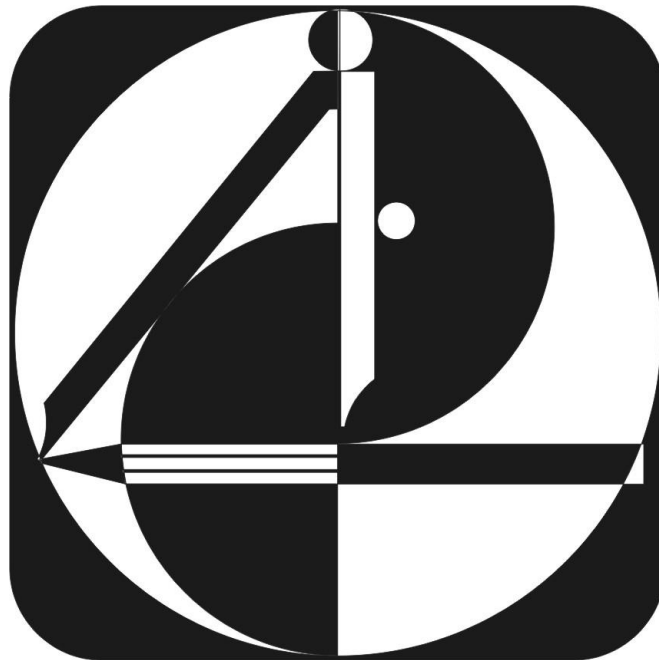
НАРИСНА ГЕОМЕТРІЯ

За редакцією доктора технічних наук,
професора С.М. Ковальова

Навчальний посібник у двох книгах

Книга II. **Аксонометрія ,перспектива, проекції з
числовими позначками**

для студентів архітектурного факультету
Київського національного університету будівництва і архітектури



КИЇВ 2018

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
Київський національний університет будівництва і архітектури

С.М.Ковальов, С.І.Ботвіновська, К.М.Гермаш,
А.В.Золотова, Ж.Г.Левіна

НАРИСНА ГЕОМЕТРІЯ

Книга II. Аксонометрія ,перспектива, проекції з
числовими позначками

*Рекомендовано науково методичною радою
Київського національного університету будівництва і архітектури
як навчальний посібник для студентів архітектурного факультету*

Київ 2018

УДК 514.18:004(075.8)
ББК 25.151. 3-я 73
Н 28

Автори: С.М.Ковальов, д-р техн. наук, професор (передмова, умовні позначення, розділ 1 – 4, 6, 8, підрозділ 7.7 розділу 7);
С.І. Ботвіновська, канд. техн. наук, доцент (підрозділ 5.5 розділу 5);
К.М.Гермаш, канд. техн. наук, доцент (підрозділи 7.1 – 7.6 розділу 7);
Ж.Г.Левіна, канд. техн. наук, доцент (розділи 9 – 10);
А.В.Золотова, канд. техн. наук (підрозділи 8.7, 8.8 розділу 8);
комп'ютерний набір к.т.н., доценти К.М.Гермаш, А.В.Золотова,
С.І.Ботвіновська, Ж.Г.Левіна, ст. лаборант Мушкіна А.Б.

Рецензенти: В.В.Ванін; доктор технічних наук, професор, НТУУ КПІ ім.І.І. Сікорського,
І.О. Седак, доктор архітектури, професор, НАОМА,
В.В.Плоский доктор технічних наук, професор, КНУБА

Затверджено на засіданні вченої ради Київського національного університету будівництва і архітектури, протокол № від _____._____.2018 року.

Нарисна геометрія. навч. посіб. у 2-х книгах. Книга II. Аксонометрія, перспектива, проєкції з числовими позначками / С.М.Ковальов, С.І.Ботвіновська, К.М. Гермаш та ін.

Н 28 – К.: КНУБА, 2018. – 145 с.: іл..
ISBN 978-966-627-155-9

Книга II навчального посібника містить теоретичні положення із спеціальних розділів курсу нарисної геометрії: аксонометричні проєкції, перспективні проєкції та проєкції з числовими позначками. Наведено проклади застосування аксонометричних зображень та тіней в аксонометрії, наближені до задач архітектурної практики (розділи 9,10). Розділи 11-15 присвячено поширеним в архітектурній практиці способам побудов перспективних зображень та тіней в перспективі. В розділі 12 (метричні задачі в перспективі) підсилено наочність викладання матеріалу у порівнянні з іншими підручниками, оскільки досвід кафедри нарисної геометрії показав, що цей матеріал викликає певні труднощі у сприйнятті студентами. В частині 4»Проекції з числовими позначками» основні правила виконання креслень для наочності посилені відповідними розрізами. Призначено для студентів архітектурного факультету.

УДК 514.18:004(075.8)
ББК 25.151. 3-я 73
Н 28

© С.М.Ковальов, С.І.Ботвіновська,
К.М.Гермаш, та ін., 2018
© КНУБА, 2018

ЗМІСТ

ВСТУП.....	5
УМОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ.....	6
ЧАСТИНА ДРУГА. АКСОНОМЕТРИЧНІ ПРОЕКЦІЇ.....	7
Розділ 9. Основи теорії аксонометрії.....	7
9.1. Основні поняття та визначення.....	7
9.2. Показники спотворення.....	8
9.3. Залежність між елементами аксонометричного проєкціювання.....	8
9.4. Нормальна та збільшена аксонометрія.....	12
9.5. Властивості аксонометричних проєкцій геометричних фігур.....	13
9.6. Побудова аксонометричних зображень геометричних фігур.....	18
9.7. Аксонометрія кривих ліній.....	23
Розділ 10. Побудова тіней в аксонометрії.....	31
10.1. Побудова тіней елементарних геометричних фігур.....	33
10.2. Тіні від просторових фігур.....	42
ЧАСТИНА ТРЕТЯ. ПЕРСПЕКТИВА.....	52
Розділ 11. Перспектива на вертикальній картині.....	52
11.1. Апарат побудови перспективи.....	52
11.2. Перспектива точки прямої і площини.....	53
11.3. Вибір точки зору і картинної площини.....	56
11.4. Радіальний спосіб і спосіб бічної стіни.....	60
11.5. Ділильний масштаб.....	61
11.6. Спосіб архітекторів.....	63
11.7. Спосіб накладеної сітки.....	65
11.8. Перспектива поверхонь обертання.....	66
11.9. Перспектива інтер'єра.....	69
11.10. Перспектива на картинній площині загального положення.....	71
Розділ 12. Позиційні та метричні задачі у перспективі.....	73
Розділ 13. Відбиття у перспективі.....	82
Розділ 14. Реконструкція перспективи.....	88
Розділ 15. Тіні у перспективі.....	96
15.1. Напрямок променів світла при побудові тіней у перспективі.....	97
15.2. Основні правила побудови тіней від прямих в перспективі.....	98
15.3. Вплив положення джерела світла на характер освітленості поверхонь.....	100
15.4. Тіні багатогранників.....	102
15.5. Тіні кривих поверхонь та поверхонь обертання.....	109
15.6. Тіні при точковому джерелі світла.....	118
ЧАСТИНА ЧЕТВЕРТА. ПРОЕКЦІЇ З ЧИСЛОВИМИ ПОЗНАЧКАМИ.....	123
Розділ 16. Проекції геометричних фігур.....	123

16.1. Проекції точки.....	123
16.2. Проекції прямої.....	124
16.3. Проекції двох прямих.....	126
16.4. Проекції площини.....	127
16.5. Проекції поверхонь.....	128
Розділ 17. Позиційні задачі	131
17.1. Перетин двох площин.....	131
17.2. Перетин прямої і площини.....	131
17.3. Перетин поверхні з площиною. Взаємний перетин поверхонь.....	132
Список літератури.....	141

ВСТУП

Навчальний посібник призначено для студентів архітектурного факультету Київського національного університету будівництва і архітектури і відповідає програмі з нарисної геометрії, яку затверджено радою архітектурного факультету.

Нарисна геометрія, як навчальна дисципліна є частиною більш широкої наукової спеціальності «Прикладна геометрія та інженерна графіка», яка вивчає методи геометричного моделювання об'єктів, процесів та явищ. Нарисна геометрія вивчає теорію методів відображення просторових об'єктів на площині та графічного розв'язання стереометричних задач на кресленнях.

Сучасні вимоги до навчального курсу нарисної геометрії відповідають ідеям Г. Монжа, збагаченим сучасним станом розвитку комп'ютерних технологій.

Особливо важливими для архітекторів є розділи, що пов'язані з побудовою тіней та перспективи, оскільки останні широко застосовуються в архітектурному проектуванні. Незважаючи на існування достатнього числа комп'ютерних пакетів для автоматизованого проектування архітектурних об'єктів, для того щоб користуватись цими пакетами необхідно знати теоретичні основи відповідних побудов.

У навчальному посібнику витримано класичну послідовність викладення матеріалу, але для більш гнучкого узгодження програм нарисної геометрії і архітектурного проектування, розділи, які пов'язані з побудовою тіней і перспективи викладено таким чином, щоб їх можна було вивчати безпосередньо після розділу 3 з відтермінуванням розділів 4-7 на більш віддалений час.

Автори навчального посібника виносять подяку рецензентам за зауваження та поради для покращення змісту посібника.

УМОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ

Для того, щоб на зображеннях геометричних фігур розрізняти їх елементи, в нарисній геометрії використовується система позначень за допомогою літер і цифр.

Точки позначаються великими літерами латинської абетки або цифрами: $A, B, C, D, \dots, 1, 2, 3, 4, \dots$

Прямі та криві лінії позначаються рядковими літерами латинської абетки: $a, b, c, d, e, \dots$

Поверхні і площини позначаються великими літерами грецької абетки, написання яких відрізняється від латинських літер: $\Gamma, \Delta, \Theta, \Lambda, \Sigma, \Phi, \Psi, \Omega$.

Площини проєкцій: горизонтальна – Π_1 , фронтальна – Π_2 , профільна – Π_3 , аксонометрична – Π' .

Позначення різних зображень однієї фігури відрізняються за допомогою відповідних індексів, наприклад, горизонтальна проєкція точки A – A_1 , фронтальна проєкція – A_2 , профільна проєкція – A_3 , аксонометрична проєкція – A' .

Осі проєкцій – x_{12}, y_{13}, z_{23} , де індекси вказують, лінією перетину яких площин проєкцій є зазначена вісь.

Знаки відношень геометричних фігур:

$A \in m$ – точка A належить лінії m ;

$A \equiv B$ – точки A і B збігаються;

$\Gamma \cap \Delta$ – фігури Γ і Δ перетинаються;

$\parallel$ – паралельно;

$\angle$ – кут, двогранний кут;

$\perp$ – перпендикулярно.

АКСОНОМЕТРИЧНІ ПРОЕКЦІЇ

РОЗДІЛ 9. ОСНОВИ ТЕОРІЇ АКСОНОМЕТРІЇ

9.1. Основні поняття та визначення

Розглянемо уже знайомі прямокутні проекції предмета на три взаємно-перпендикулярні площини проекцій Π_1, Π_2, Π_3 (рис. 9.1).

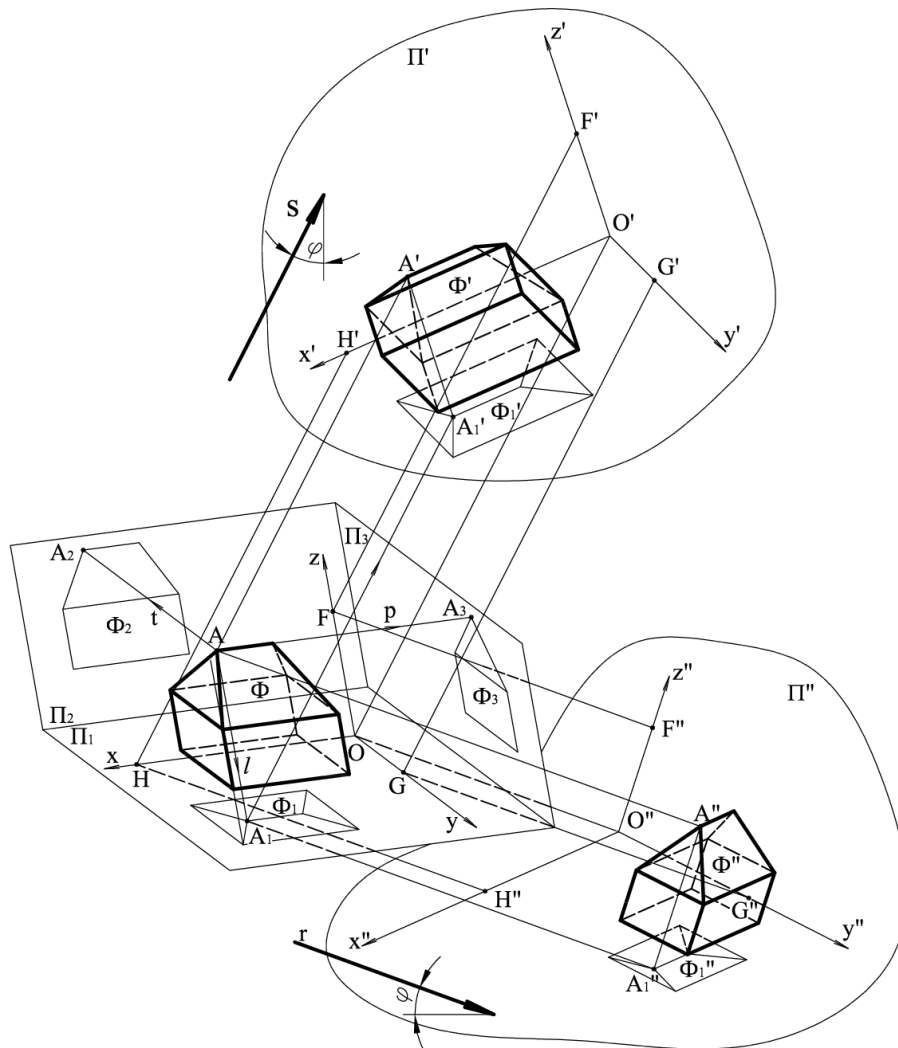


Рис. 9.1

Напрями проєкціювання на кожну з них визначають промені l, t, p , - перпендикулярні до відповідних площин проєкцій. Якщо основні виміри предмета Φ паралельні або перпендикулярні площинам проєкцій, отримані на них зображення мають певні переваги в визначенні його метричних та позиційних характеристик, але програють в їх наочності. Для отримання наочного зображення використовують паралельну проєкцію Φ' предмета Φ на довільну площину Π' за довільним напрямом

проекціювання s . Для повноти зображення разом із предметом Φ на площину Π' проєкціюється система координат $Oxyz$, до якої предмет віднесено, та одна із його вторинних проєкцій, наприклад Φ_1 (на Oxy).

Паралельна проєкція предмета на площині Π' , побудована разом із проєкцією координатної системи $Oxyz$, до якої предмет віднесено, називають його **аксонометричною проєкцією** (або **аксонометрією**).

Слово аксонометрія означає вимір за осями ($\acute{\alpha}\xi\acute{\omega}\nu$ – вісь, $\mu\acute{\epsilon}\tau\acute{\rho}\eta$ – вимірюю). З часом поняття аксонометрії поширилось на назву розділу теорії зображень та на кінцевий результат відповідної побудови – тобто на отримане зображення.

Отже, маємо: Π' – **площина аксонометричних проєкцій**; Φ' – аксонометрична проєкція предмета Φ ; $O'x'y'z'$ – аксонометрична проєкція системи координат $Oxyz$. Прямі x', y', z' – **аксонометричні осі**. На рис. 9.1 показано побудову ще однієї аксонометрії Φ'' тієї ж фігури Φ на іншу аксонометричну площину Π'' за довільним напрямом проєкціювання r .

Напрям проєкціювання s (r) утворює кут φ із площиною аксонометричних проєкцій $\Pi'(\Pi'')$. Якщо $\varphi = 90^\circ$ – аксонометрія **прямокутна**, якщо $\varphi \neq 90^\circ$, аксонометрія – **косокутна**.

9.2. Показники спотворення

В загальному випадку осі x', y', z' не паралельні осям x, y, z . Тому довільні відрізки OH, OG, OF не дорівнюють їх аксонометричним зображенням $O'H', O'G', O'F'$. У зв'язку з цим виникає питання про спотворення розмірів вздовж кожної з осей. Відношення $O'H':OH=u, O'G':OG=v, O'F':OF=w$ називають **коефіцієнтами (показниками) спотворення** по осях x', y', z' відповідно. Якщо вздовж кожної з них відкласти від точки O відрізки певної довжини величиною e_x, e_y, e_z , то внаслідок проєкціювання на площину Π' дістанемо відрізки e'_x, e'_y, e'_z – аксонометричні одиниці виміру на відповідних осях (рис. 9.2). В такому разі записані вище співвідношення матимуть вигляд: $e'_x : e_x = u; e'_y : e_y = v; e'_z : e_z = w$. При $e_x = e_y = e_z = 1$ маємо: $e'_x = u; e'_y = v; e'_z = w$. Тобто величини u, v, w – будуть показниками спотворення вздовж відповідних аксонометричних осей. В залежності від положення площини Π' відносно координатних осей x, y, z та напрямку проєкціювання s показники спотворення можуть бути:

- 1) Нерівними ($u \neq v \neq w$). Така аксонометрія називається **триметричною**.
- 2) Два із трьох показників можуть бути рівними ($u = v \neq w$, або $u = w \neq v$, або $v = w \neq u$). Тоді аксонометрія – **диметрична**.
- 3) Всі три показники однакові ($u = v = w$) – аксонометрія **ізометрична**.

9.3. Залежність між елементами аксонометричного проєкціювання

Основоположною в теорії аксонометрії є **теорема Польке**, яка стверджує: **три довільні відрізки $O'A', O'B', O'C'$ на площині зображень Π' , які виходять із**

однієї точки O' , можуть бути прийняті за паралельні проєкції трьох рівних за довжиною відрізків OA , OB , OC , що утворюють у просторі систему прямокутних координатних осей (рис. 9.3). Це означає, що напрям аксонометричних осей на площині аксонометричних проєкцій, а також відношення показників спотворення можна задавати абсолютно довільно. При цьому показники спотворення будуть пропорційними аксонометричним одиницям виміру на кожній з осей: $u : v : w = e'_x : e'_y : e'_z$

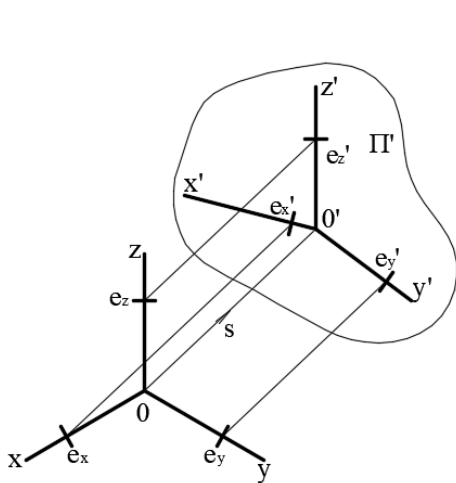


Рис. 9.2

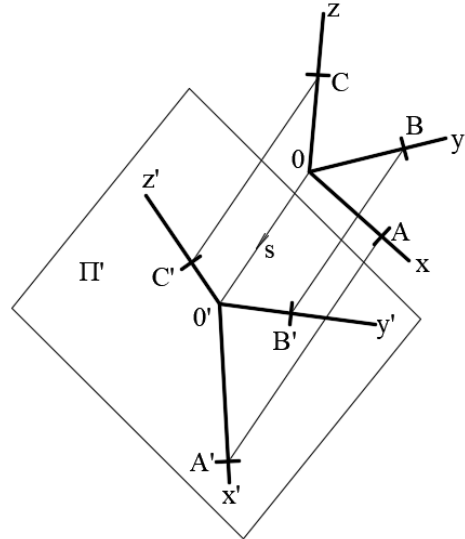


Рис. 9.3

Для будь-якої довільної точки A , віднесеної у просторі до системи координат $Oxyz$ (рис. 9.1), необхідно і достатньо додати одну із її вторинних проєкцій, наприклад, A_1 на площині Oxy . В такому разі задання точки буде повним. Координатні осі разом із точкою, її вторинною проєкцією та системою координат проєкціюють на площину аксонометричних проєкцій Π' за напрямом s . При цьому для кожної координати точки має бути врахований відповідний коефіцієнт спотворення.

Між показниками спотворення і кутом φ існує залежність, яка в загальному випадку має вигляд: $u^2 + v^2 + w^2 = 2 + \text{ctg}^2 \varphi$

Графічне представлення такої залежності показано на рис. 9.4, де представлено систему координат $Oxyz$, площину загального положення Π' та напрям проєкціювання s так, щоб $\varphi \neq 90^\circ$. Якщо площину Π' продовжити до перетину з осями Ox , Oy , Oz , отримаємо аксонометричний трикутник слідів $A'B'C'$. Прямі $A'B'$, $A'C'$, $B'C'$ - сліди координатних площин Oxy , Oxz , Oyz на Π' . Прямі, які з'єднують точку O' з точками A' , B' , C' , визначають систему аксонометричних осей $O'x'y'z'$.

Якщо на осях Ox , Oy , Oz задати однакові відрізки e , то на осях $O'x'$, $O'y'$, $O'z'$ отримаємо їх проєкції e'_x , e'_y , e'_z , які в загальному випадку мають не однакову довжину. Це відповідає **триметричній косокутній проєкції**. ($u \neq v \neq w$).

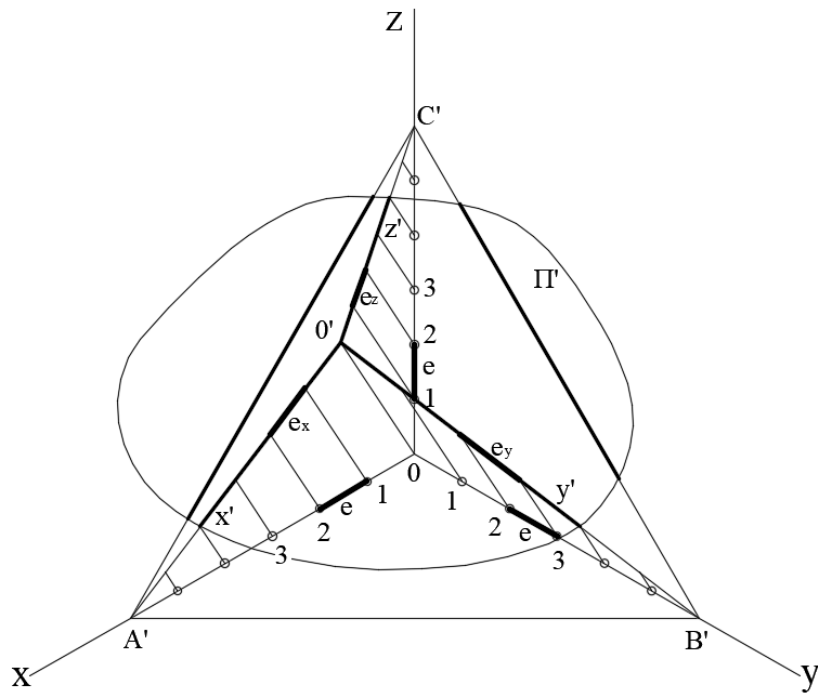


Рис. 9.4

Наведемо деякі приклади косокутних аксонометрій.

Якщо площину Π' розмістити паралельно двом осям координат, наприклад Ox і Oz , то за будь-якого напрямку s (крім $s \parallel \Pi'$) відрізки на осях Ox і Oz проєкціюються на Π' без спотворення, тобто $u = w = 1$ (рис. 9.5, а). Напрямок проєкціювання s і показник спотворення v по осі Oy можуть змінюватись в залежності від кута φ . При $\varphi = 45^\circ$ і $v = 1$ маємо **косокутну фронтальну ізометрію** (рис. 9.5, а).

Не змінюючи напрямку осі Oy , змінюючи тільки напрямку s можна досягти значення $v = 0,5$. Отримане зображення має назву **косокутної фронтальної диметрії** (рис. 9.5, б).

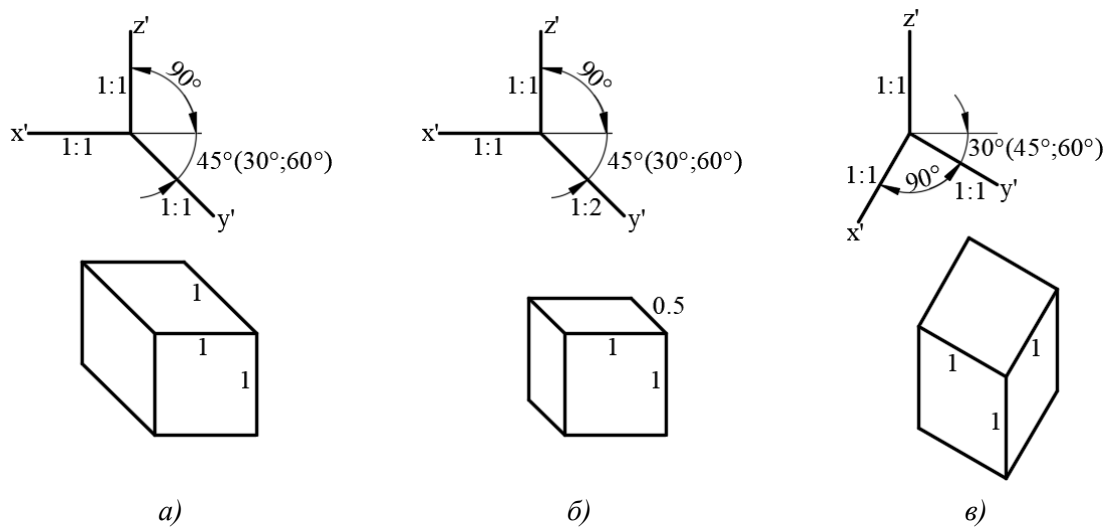


Рис. 9.5

Аналогічно можна отримати **косокутну горизонтальну ізометрію**, якщо Π' паралельна осям Ox і Oy (рис. 9.5, в). Для випадків, розглянутих на рис. 9.5, а та 9.5, в, можемо записати співвідношення: $u : v : w = 1 : 1 : 1$.

Окремо розглянемо прямокутні аксонометричні проєкції. Як уже зазначалось, напрям проєкціювання s має бути перпендикулярним до площини Π' ($\varphi = 90^\circ$). На рис. 9.6, а показано проєкціювальний промінь s (відрізок OO'). Аксонометричні осі $O'x'$, $O'y'$, $O'z'$ є висотами трикутника слідів $A'B'C'$, а початок координат O' збігається з ортоцентром цього трикутника. В цьому випадку трикутник слідів однозначно визначає напрям аксонометричних осей. Формула, що пов'язує величини u , v , w та кут φ ($\varphi = 90^\circ$) має вигляд: $u^2 + v^2 + w^2 = 2$, оскільки $\text{ctg } 90^\circ = 0$.

Якщо $u = v = w$, то $3u^2 = 2$, звідки $u = \sqrt{2/3} \approx 0,82$. Таку аксонометрію називають **прямокутною ізометрією** (рис. 9.6, б).

Якщо $u = w$, а $v = 0,5u$, це означає, що скорочення по осі $O'y'$ вдвічі більше, ніж по осях $O'x'$ і $O'z'$, а наведена вище формула матиме вигляд: $2u^2 + (u/2)^2 = 2$, звідки $u = w = \sqrt{8/9} = 0,94$; $v = 0,47$, а зображення називають **прямокутною диметрією** (рис. 9.6, в).

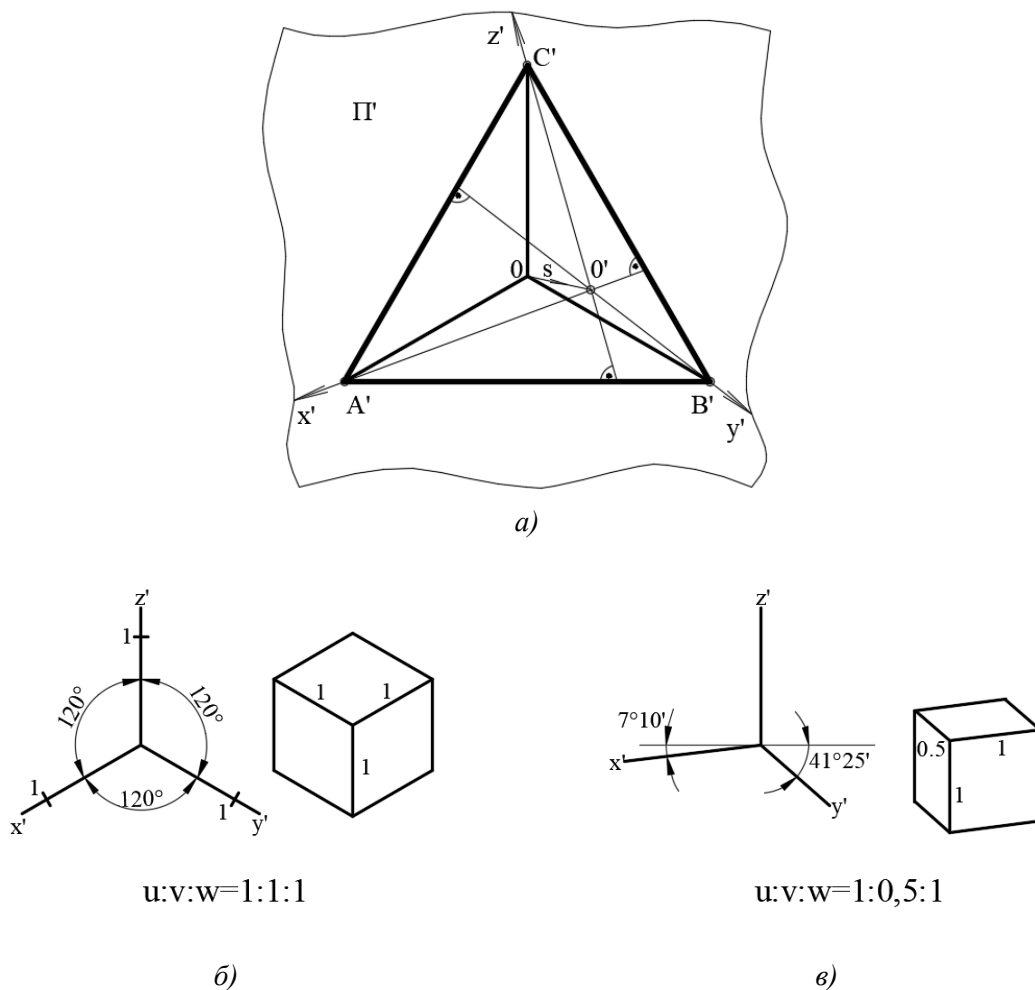


Рис. 9.6

Кожне із розглянутих та наведених на рис. 9.5, б, в, г та 9.6, б, в забезпечує наочність зображень та простоту побудов. Вони набули широкого практичного застосування, у зв'язку з чим були рекомендовані як стандартні.

9.4. Нормальна та збільшена аксонометрія

Показники спотворення можна збільшити, або зменшити множенням на одну й ту саму величину m , (**коефіцієнт приведення**), підібравши її такою, щоб отримані величини були зручнішими при побудовах. Тоді отримаємо **приведені показники** спотворення: $U = um$, $V = vm$, $W = wm$

Підставимо ці значення в формулу квадратів коефіцієнтів спотворення і отримаємо: $U^2 + V^2 + W^2 = 2m^2$

Наприклад для прямокутній ізометрії, де $u = v = w = 0,82$, можна помножити їх на 1,22. Отримаємо $U = V = W = 1$.

Для прямокутної диметрії такою величиною є 1,06. Аналогічні підрахунки дадуть такі значення приведених показників спотворення: $U = W = 1$; $V = 0,5$.

В результаті маємо можливість отримати **нормальну** аксонометрію, побудовану за значеннями реальних показників спотворення u, v, w , або **збільшену (приведену)** аксонометрію, побудовану за значеннями приведених показників спотворення U, V, W . На рис. 9.7 та 9.8 представлено зображення куба, сторона якого дорівнює одиниці: нормальна прямокутна ізометрія (рис. 9.7, а), приведена прямокутна ізометрія (рис. 9.7, б), нормальна прямокутна диметрія (рис. 9.8, а) та приведена прямокутна диметрія (рис. 9.8, б).



Рис. 9.7

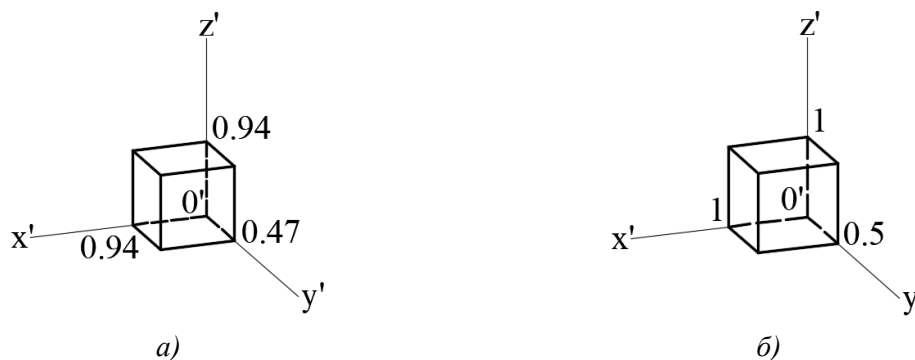


Рис. 9.8

9.5. Властивості аксонометричних проєкцій геометричних фігур

Аксонометричні проєкції мають властивості будь-яких паралельних проєкцій, а саме:

1) Якщо лінії у просторі паралельні між собою, то їх аксонометричні проєкції також взаємно паралельні. Тому на площині аксонометричних проєкцій Π' координата z_a буде паралельною осі $O'z'$, координата y_a буде паралельна осі $O'y'$, координата x_a – паралельна осі $O'x'$ (рис. 9.9).

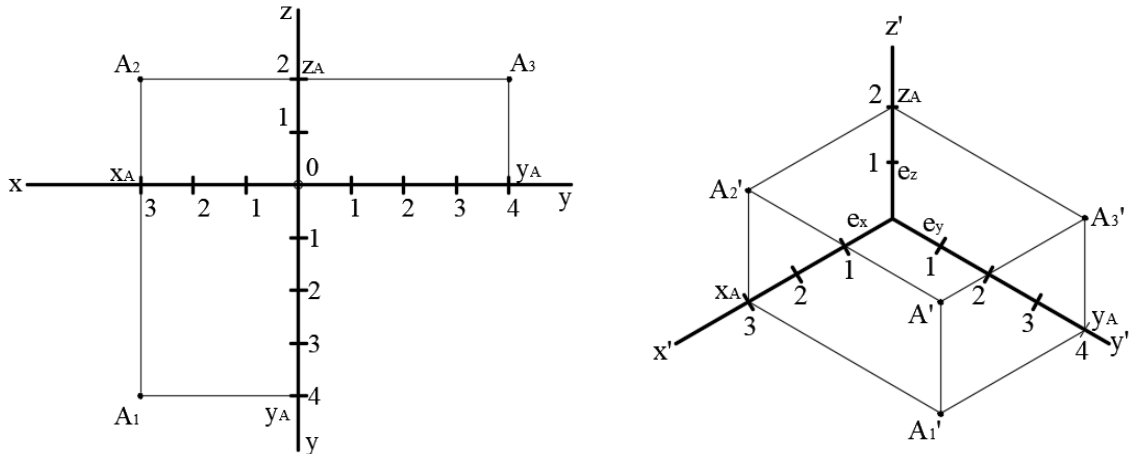


Рис. 9.9

2) Довжини паралельних відрізків змінюються в процесі проєкціювання так, що відношення довжин їх проєкцій залишається пропорційним. Тобто, якщо у просторі на будь-якій координатній осі і на паралельних до неї прямих відкласти відрізки однакової довжини, то проєкції всіх таких відрізків в аксонометрії будуть рівними між собою. Якщо треба побудувати точку A з координатами $x_a=3$; $y_a=4$; $z_a=2$, то необхідно з урахуванням відповідних показників спотворення відкласти на осі $O'x'$ три одиниці, на осі $O'y'$ чотири одиниці виміру. Із точок x'_a та y'_a провести лінії, паралельні відповідно осям $O'x'$ та $O'y'$ до перетину в точці A'_1 , (вторинна горизонтальна проєкція точки A). На вертикальній прямій, проведеній через точку A'_1 , на відстані двох одиниць буде знаходитись аксонометрія A' шуканої точки A . На рис. 9.9 показано також вторинні фронтальну та профільну проєкції A'_2 та A'_3 . На практиці для побудови зображення A' достатньо скористатися лише однією з вторинних проєкцій, як це показано на рис. 9.10, б, в, г. Послідовність відкладення координат x_a , y_a , z_a визначається формою та положенням фігури, до складу якої входить точка A . Послідовність розглянутої побудови, є основою для зображення геометричних фігур, зокрема – відрізків прямої, плоских фігур та площин незалежно від способу їх задання.

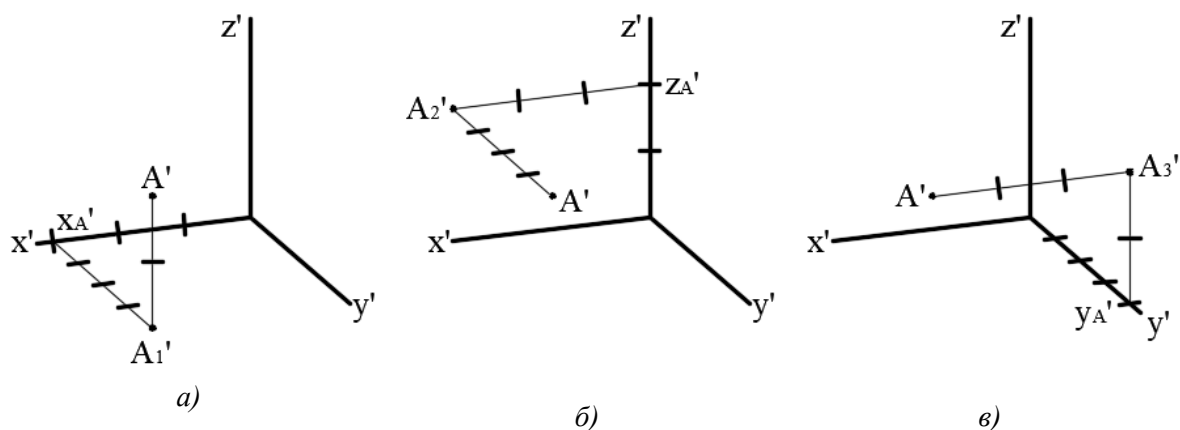


Рис. 9.10

На рис. 9.11, *а, б, в* показано відрізки, перпендикулярні до площин проекцій, тобто паралельні до осей координат. В кожному із випадків достатньо побудувати за описаним вище алгоритмом одну із точок відрізка та накреслити його зображення паралельно відповідній осі.

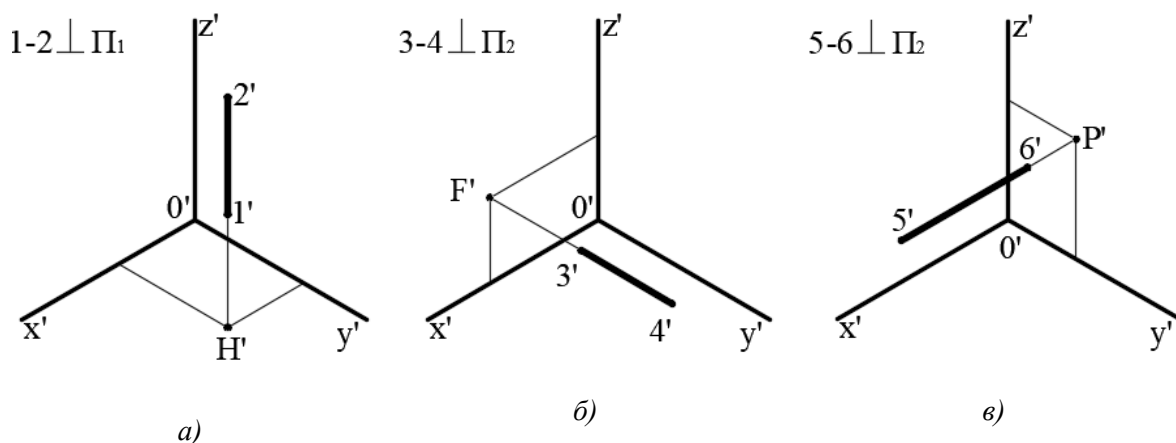


Рис. 9.11

На рис. 9.12 показано варіанти побудов зображень відрізків, кожен з яких паралельний до однієї площини проекцій. Для таких відрізків необхідно будувати дві точки, через які проходить відрізок. Оптимальною є послідовність побудов координат, в якій першими відкладаються координати, однакові для обох точок.

На рис. 9.11 та 9.12 літерами H' , F' і P' позначені сліди відрізків на площинах проекцій – точки перетину їх із площинами Π'_1 , Π'_2 , Π'_3 . На рис. 9.13 побудовано аксонометрію прямої m загального положення саме її слідами F' та P' , якщо координати останніх відомі.

Для побудови будь-якої прямої загального положення необхідно визначити зображення двох довільних точок прямої за алгоритмом, показаним на рис. 9.10. Для паралельних відрізків загального положення паралельність та пропорційність їх

довжин зберігається. Необхідно пам'ятати, що на прямих *не паралельних* осям координат, ніякі розміри відкладати не можна.

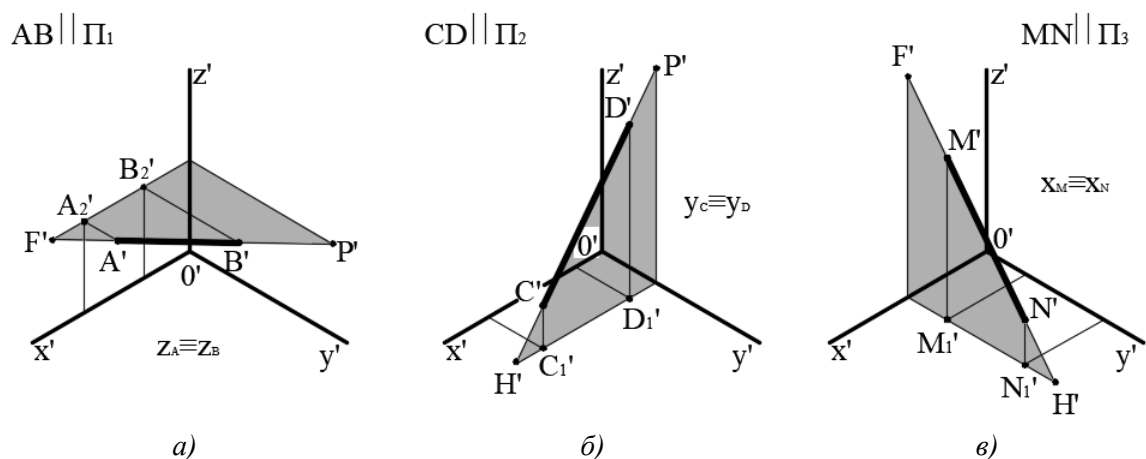


Рис. 9.12

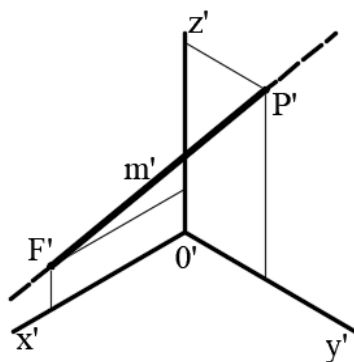


Рис. 9.13

Для задання площини показують вторинні та аксонометричні проєкції елементів, які її визначають. На рис. 9.14 показано зображення площин рівня: Δ (ABC), паралельної до Π_1 ; Γ ($AB \parallel CD$), паралельної до Π_2 ; Ω (m, n), паралельної до Π_3 .

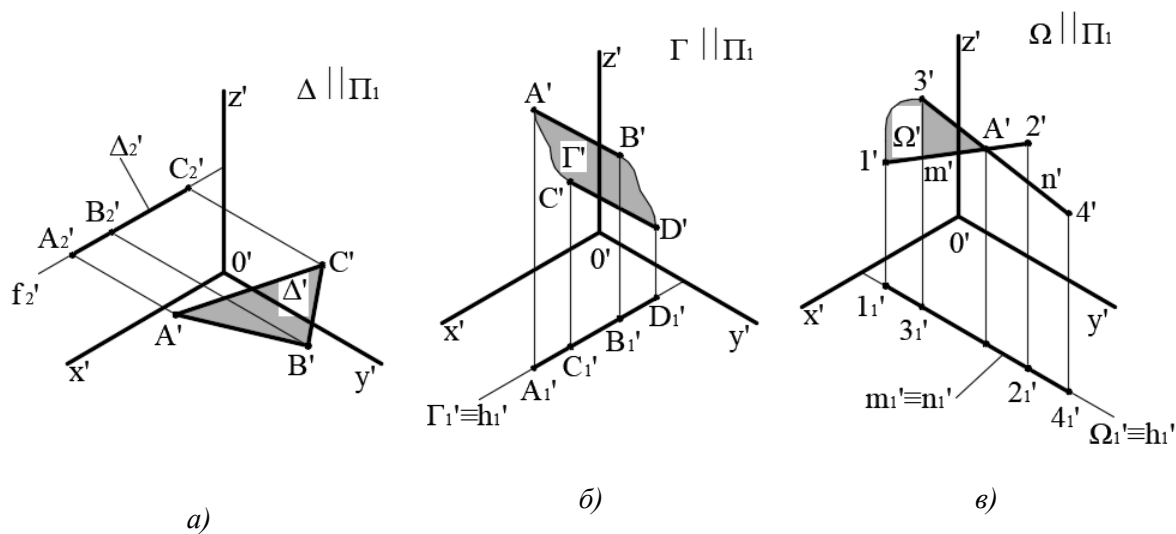


Рис. 9.14

Для зручності при побудові зображень першими відкладено координати, однакові для всіх точок кожної площини: z – для Δ , y – для Γ , x – для Ω . Площини Λ , Σ , Ψ , перпендикулярні відповідно до Π_1 , Π_2 , Π_3 (рис. 9.15), задано слідами h , f , p . На рис. 9.16 показано сліди площини Φ загального положення.

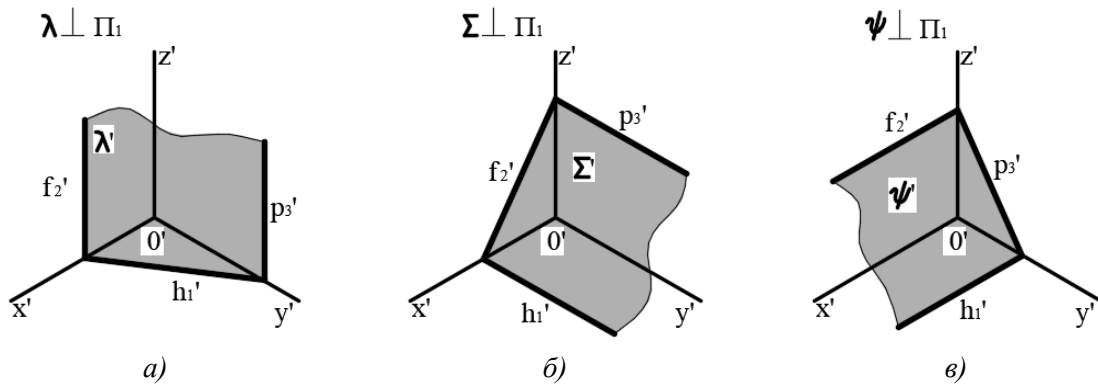


Рис. 9.15

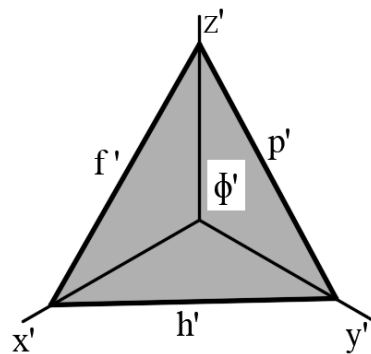


Рис. 9.16

3). Якщо лінії у просторі перетинаються, їх аксонометричні проєкції також перетинаються. При цьому точка перетину проєкцій прямих є проєкцією точки перетину самих прямих.

4). Якщо пряма є дотичною до кривої лінії в будь-якій точці A , то проєкція прямої залишається дотичною до проєкції кривої в точці A' – проєкції точки A .

5). Якщо площина будь-якої фігури паралельна площині аксонометричних проєкцій, то відрізки, кути, площі в цій фігурі проєкціюються в натуральну величину (з урахуванням коефіцієнтів спотворення).

Сформульовані властивості дозволяють будувати аксонометричні зображення геометричних фігур та розв'язувати з ними позиційні задачі.

На рис. 9.17, *a* показано точку C , в якій відрізок загального положення AB перетинає площину Δ , перпендикулярну до Π_1 . (рішення впливає безпосередньо із вторинної горизонтальної проєкції). На рис. 9.17, *б, в, г* для визначення точки C перетину відрізка AB із площиною Σ використано допоміжні площини Γ та лінії 12 перетину Γ і Σ .

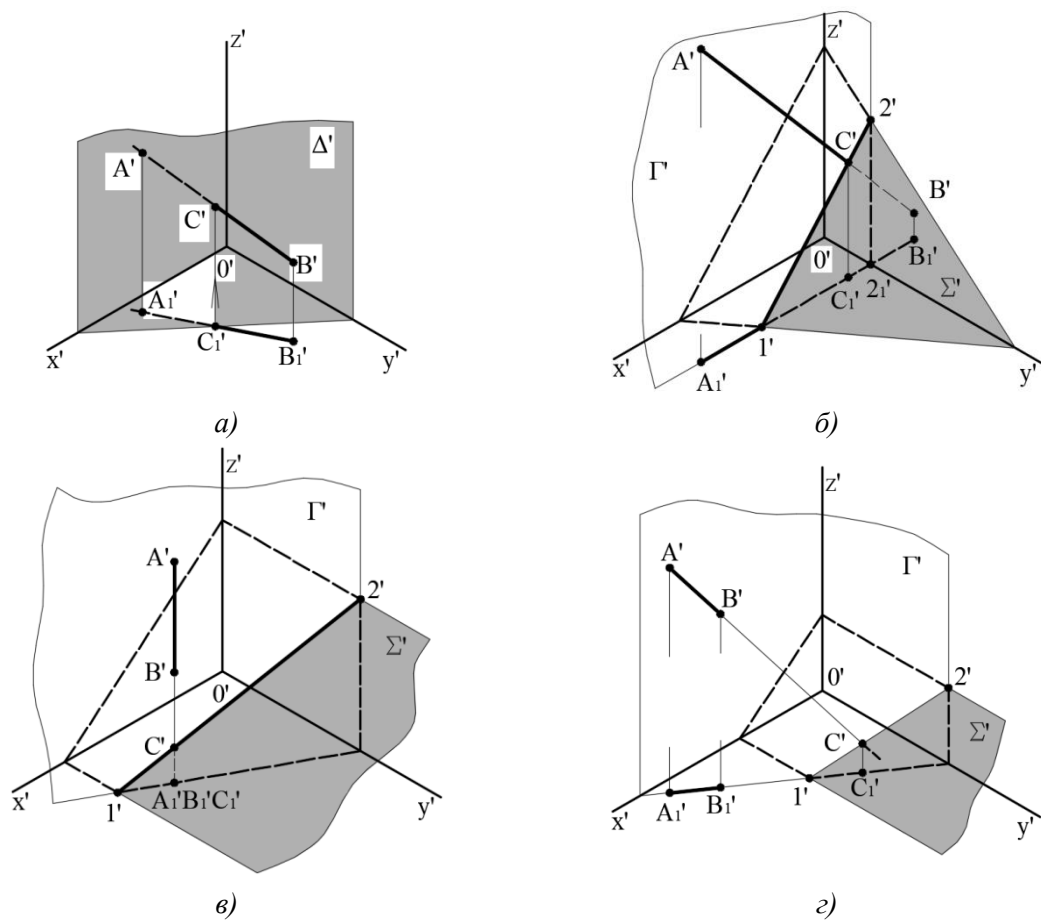


Рис. 9.17

На рис. 9.18 показано поверхню Σ , яка складається із вертикальної площини та частини циліндра.

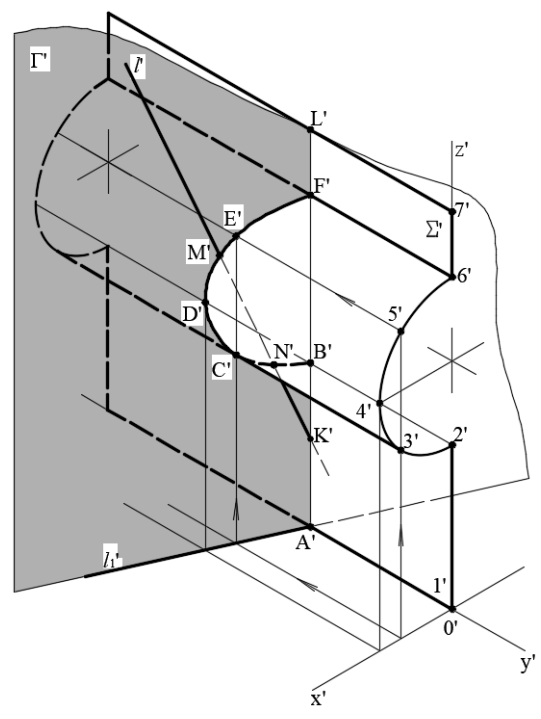


Рис. 9.18

Допоміжна площина Γ перетинає Σ по лінії $ABCDEFL$. Пряма l площини Γ перетинає лінію $ABCDEFL$ і поверхню Σ в точках M, N, K .

На рис. 9.19 представлено побудову слідів трикутника $A'B'C'$. Вони утворюють трикутник з вершинами M', N' і K' на осях. Кожен із слідів площини трикутника $A'B'C'$ проходить через відповідні сліди його сторін (позначені цифрами). Лінія $l'2'$ перетину двох площин Σ' і Γ' , заданих слідами (рис. 9.20), проходить через точки перетину одноіменних слідів. На рисунку показано також вторинні проекції лінії перетину: $1_1'2_1'$ (на площині $O'x'y'$) та $1_3'2_3'$ (на площині $y'O'z'$). Для побудови зображення точок в наведених прикладах було використано прямокутну диметрію (рис. 9.10) та прямокутну ізометрію (рис. 9.11 – 9.20).

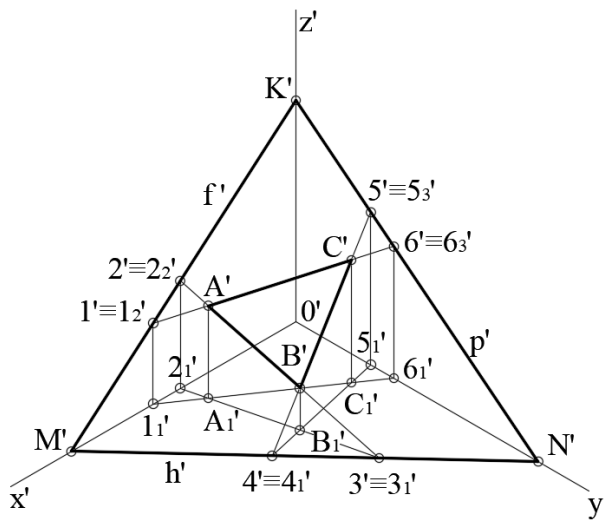


Рис. 9.19

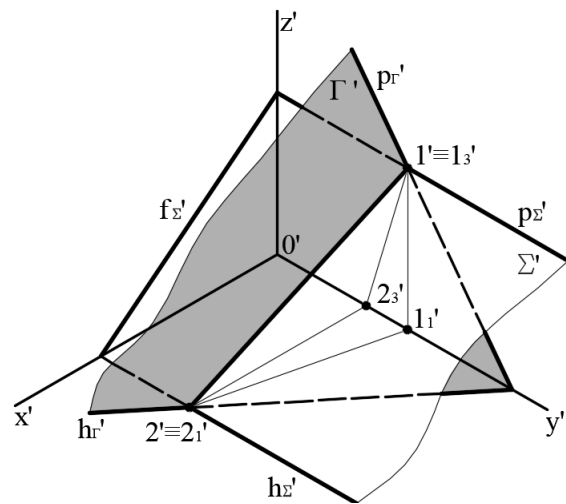


Рис. 9.20

9.6. Побудова аксонометричних зображень геометричних фігур

Будемо розглядати геометричні фігури як певну сукупність точок. Аксонометрія кожної будується за алгоритмом, представленим на рис. 9.10. В загальному випадку точка A простору може бути віднесена до будь-якої прямокутної декартової системи координат. Якщо сукупність точок, відрізків та плоских фігур утворюють симетричну плоску або просторову форму, то систему координат розміщують так, щоб координатні осі та площини збігались із осями симетрії та площинами симетрії фігури, що значно спрощує та скорочує побудови. На рис. 9.21, а початок координат суміщено із центром шестикутника нижньої основи призми, який має дві осі симетрії Ox та Oy . Точки A і D належать осі Ox , тому $x_a = -x_d$. Координати $y_a = y_c$, $x_b = -x_c$. Координати z точок A, B, C, D дорівнюють нулю. Точки A, B, C, D є в той же час вторинними проєкціями точок $1, 2, 3, 4$ верхньої основи, для побудови яких залишається додати координату z . На рис. 9.21, б, в показано призми, основи яких - фронтальна та профільна. Положення початку координат – центр

основи призми; напрям координатних осей не змінено. При побудові точок 1, 2, 3, 4 другої основи призми на рис. 9.21, б використано їх вторинні фронтальні проекції а на рис. 9.21, в – вторинні профільні проекції. Як і на рис. 9.21, а, ними є аксонометрії точок A, B, C, D .

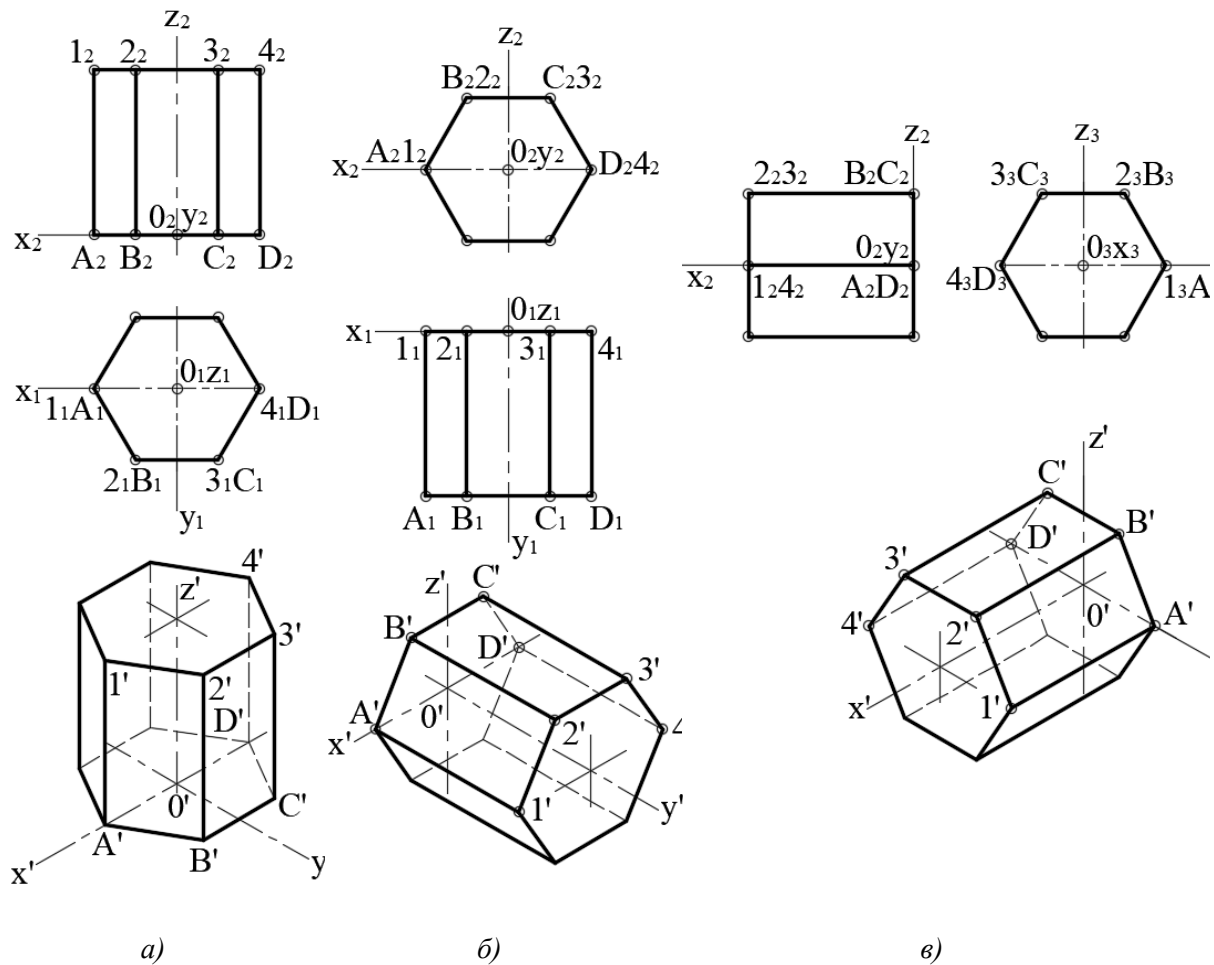


Рис. 9.21

П'ятикутник (рис. 9.22, а) має одну вісь симетрії – Oy , призма із такою основою – одну площину симетрії – yOz . Початок координат в такому випадку доцільно розмістити в будь-якій точці на осі Oy , наприклад, в середині відрізка DM . Напрямок осей, як і раніше – стандартний. Побудова аксонометрії призми із фронтальною та профільною основами показано відповідно на рис. 9.22, б, в.

На рис. 9.21 та 9.22 показано побудови призми в прямокутній ізометрії.

На рис. 9.23 та 9.24 – те саме – в прямокутній диметрії, де помітно скорочення розмірів призми в напрямі осі Oy .

За прямокутними проекціями призми із квадратною основою (рис. 9.25, а та 9.26, а) побудовано прямокутну ізометрію (рис. 9.25, б та 9.26, б) та прямокутну диметрію (рис. 9.25, в та 9.26, в).

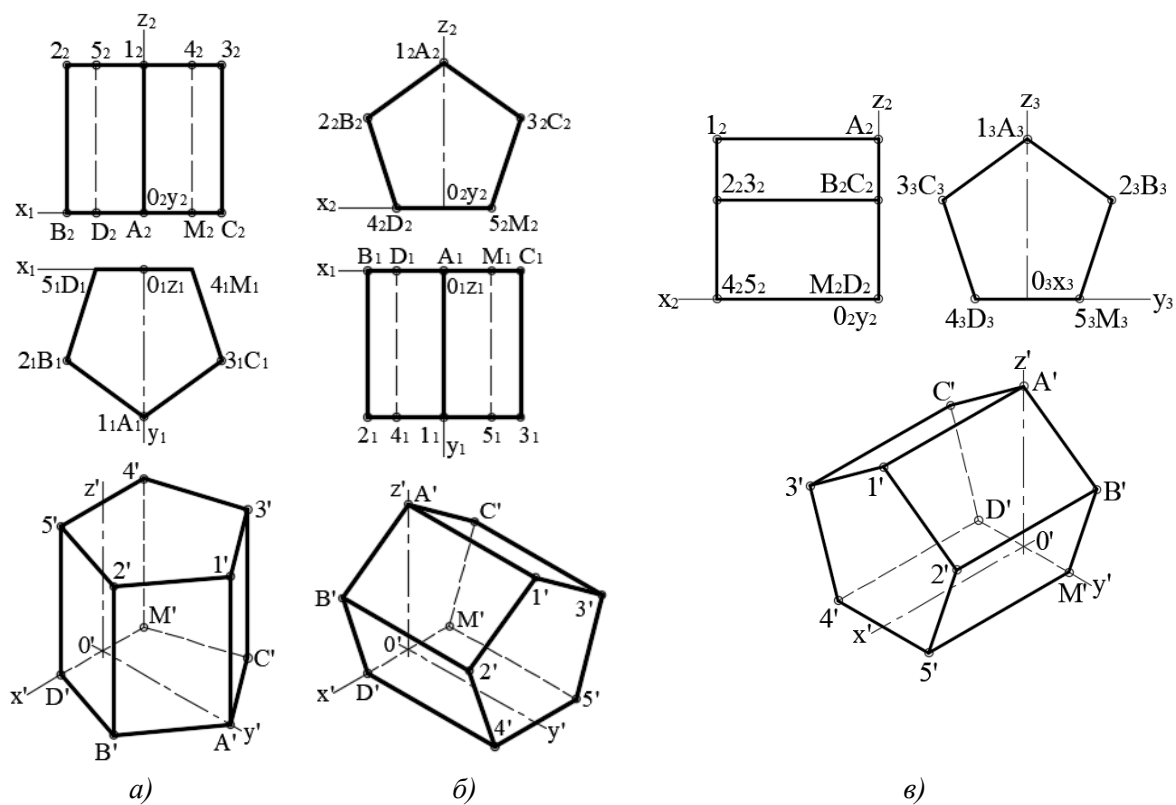


Рис. 9.22

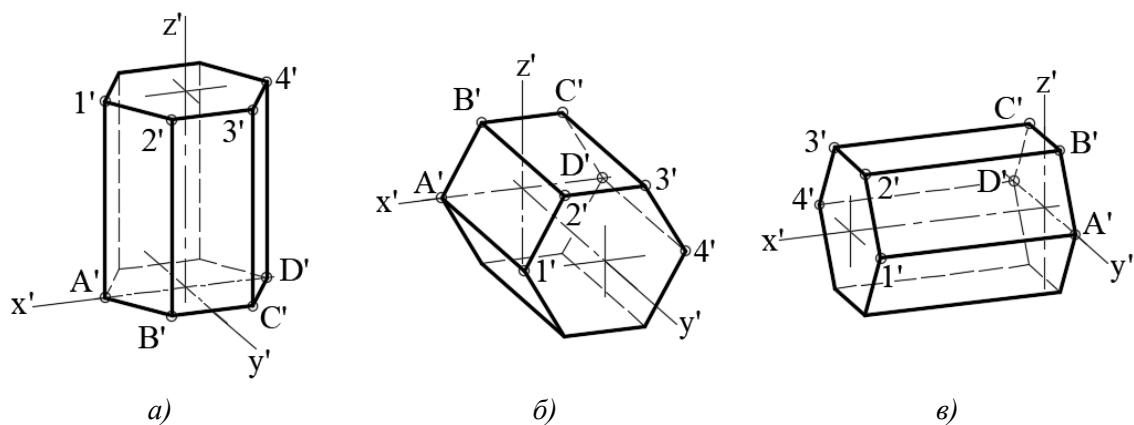


Рис. 9.23

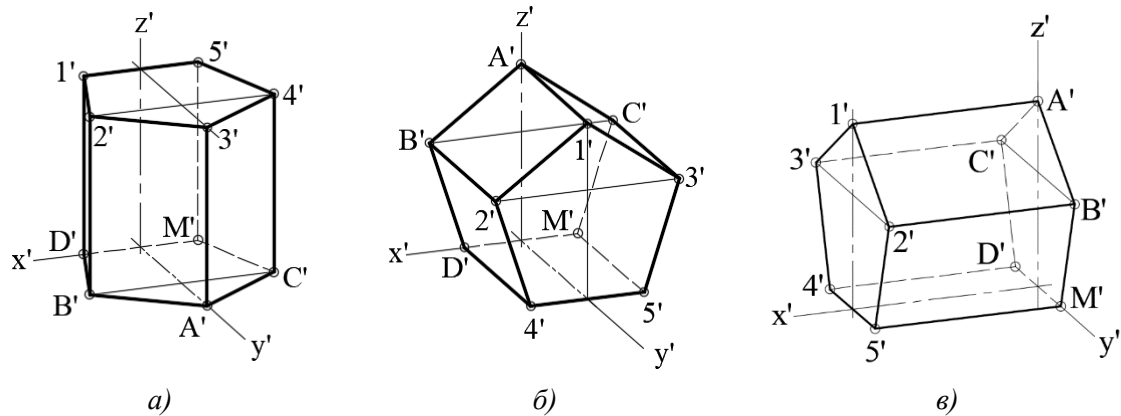
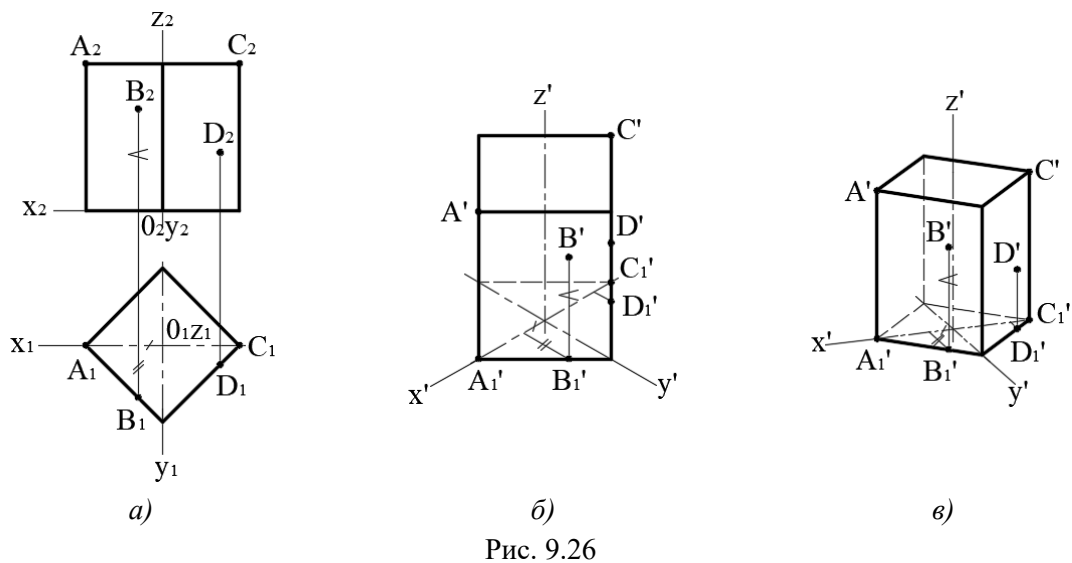
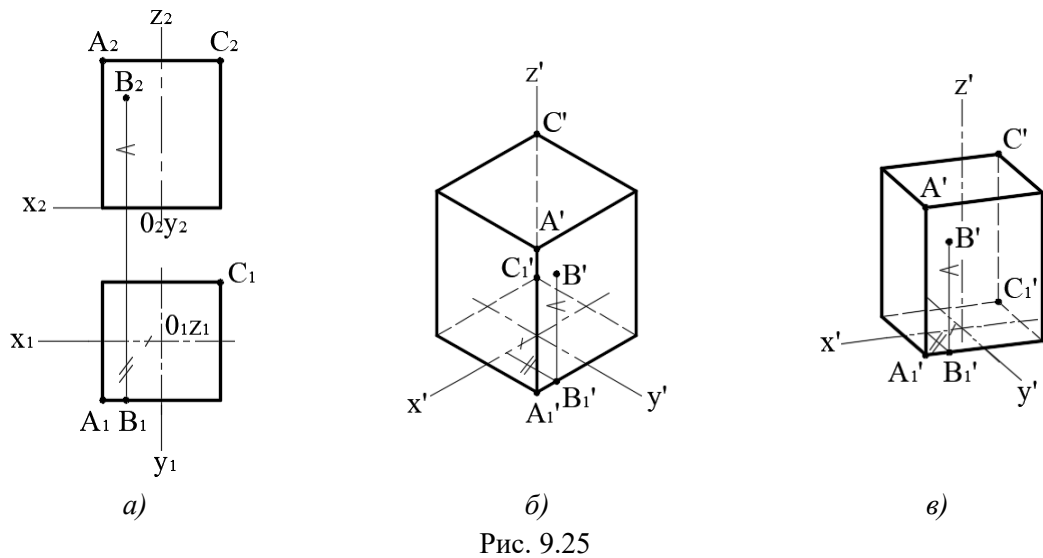


Рис. 9.24



На рис. 9.27, *а* дано проєкції спрощеного зображення будинку, на рис. 9.27, *б* – його прямокутну ізометрію, а на рис. 9.27, *в* – прямокутну диметрію.

Будинок віднесено до системи координат $Oxyz$, положення якої узгоджено з наявністю площини симетрії Oyz для значної частини будинку. При побудові аксонометричного зображення за вторинну проєкцію зручно прийняті на площині $O'x'y'z'$ (план), у зв'язку із чим спочатку відкладено координати x і y , а потім додано координату z (висоту) кожної точки. Порівняння двох аксонометрій дозволяє оцінити переваги та недоліки кожної.

Так, наприклад, точки 1,2,3,4 на плані будинку попали на одну пряму у площині, що нахилена до осей Ox і Oy під кутом 45° . Тому ізометричні зображення точок 1,2,3,4 не є наочними (вони попали на одну вертикаль). В диметрії розташування точок 1, 2, 3, 4 є більш наочним. Наведемо пояснення деяких побудов для обох аксонометрій. Прямі 5-6 і 7-8 перетинаються в точці 6 (в їх спільній площині Γ). В точці 6 пряма 5-6 перетинає площину Ω . В точці B вертикальна пряма

AM перетинається з похилою площиною Σ тому що AM перетинає в цій точці пряму, проведену в площині Σ паралельно $D4$.

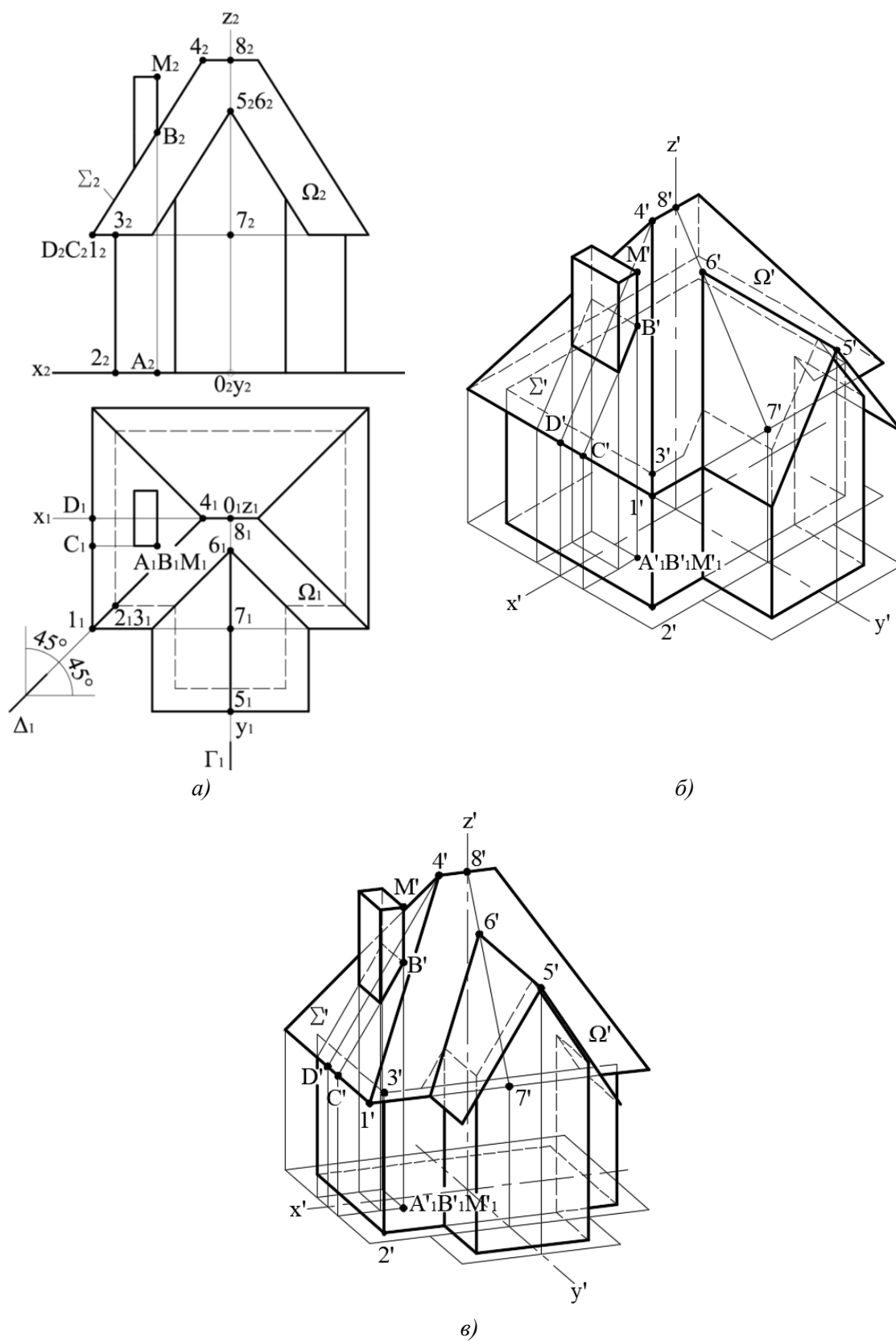


Рис. 9.27

9.7. Аксонометрія кривих ліній

Побудова аксонометричного зображення будь-якої кривої може бути здійснена за описаним вище алгоритмом, у відповідності до якого знаходиться зображення певної кількості точок цієї кривої (в тому числі особливих) за трьома координатами кожної з них. На рис. 9.28 показано таку побудову для довільної кривої l , розташованій в площині xOy . При цьому зберігаються властивості точок кривої, наприклад, точка A залишається точкою перегину, а пряма t залишається дотичною до l , тощо.

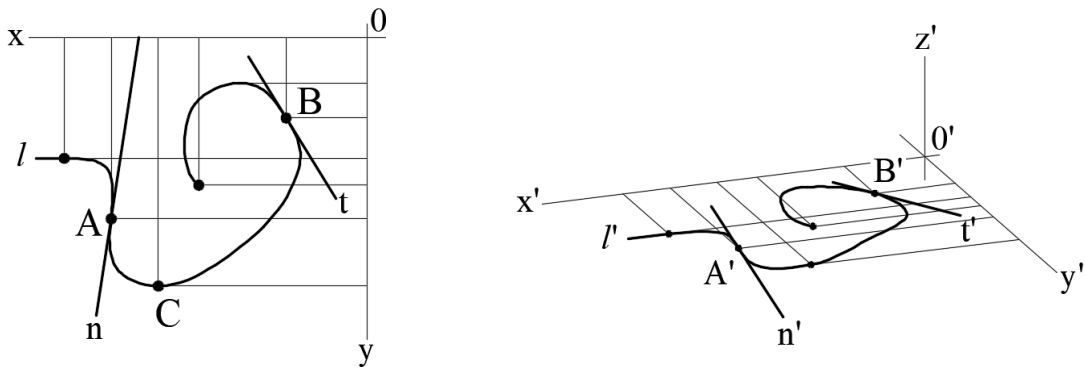


Рис. 9.28

Дуже важливим є вміння будувати зображення кола – лінії, надзвичайно поширеній в практиці, а також такої, що є основою для утворення більш складних кривих. На рис. 9.29 показано побудову аксонометрії кола, що належить координатній площині xOy . Точки A, B, C, D належать осям координат. Точки 1, 2, 3, 4 є кінцями хорд, проведених в необхідній кількості в зручному напрямі, наприклад, паралельно одній із осей.

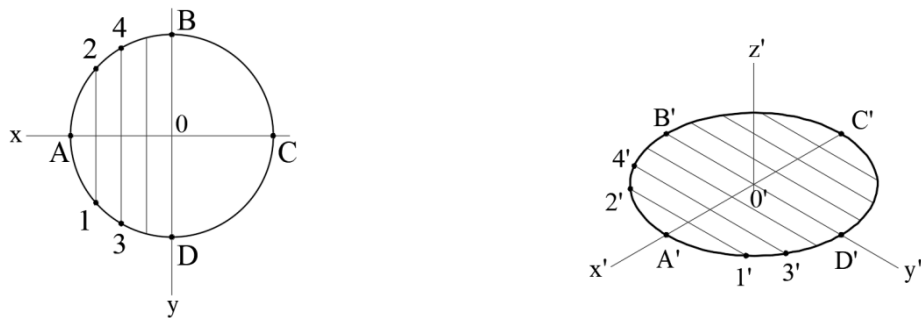


Рис. 9.29

Зазвичай при побудові кола визначають характерні точки A, B, C, D на координатних осях, що належать серединам сторін описаного квадрата, паралельних осям координат (точки дотику кола до сторін квадрата), та точки M, N, K, L на його діагоналях. Вказані вісім точок рівномірно розташовані вздовж лінії кола та ділять

його на рівні частини (рис. 9.30, *a*). На рис. 9.30, *б* представлено аксонометрію заданого кола в загальному вигляді, при відомих розмірі діаметра кола та показниках спотворення вздовж кожної з осей. Довільна точка *E* є перетином прямої *D'H* та прямої, проведеної через точку *E* паралельно *DD'*.

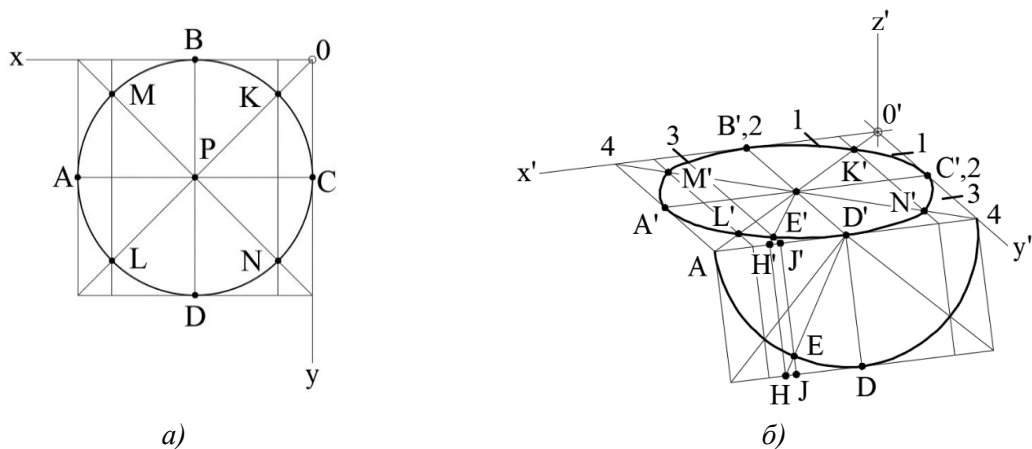


Рис. 9.30

Аналогічні побудови можна виконати в інших координатних площинах незалежно від того, чи буде це нормальна аксонометрія або приведена, прямокутна чи косокутна. Наведемо приклади побудови зображень кола в стандартних аксонометріях.

1. Прямокутна ізометрія. Кола належать площинам *xOy*, *xOz* та *yOz* (рис. 9.31, *a*).

Координати центрів *S*, *D*, *P* та величину радіуса *R* задано. В кожному еліпсі діаметри, паралельні аксонометричним осям, дорівнюють $d=2R$. Розмір великих осей ($1'-2'$, $5'-6'$, $9'-10'$) мають довжину $1,22d$. Довжина малих осей ($3'-4'$, $7'-8'$, $11'-12'$) дорівнює $0,71d$. Такий вигляд мають кола в збільшеній ізометрії. Великі осі: $1'-2'$, $5'-6'$ та $9'-10'$ перпендикулярні до аксонометричних осей *Oz*, *Oy* та *Ox* відповідно. Мала вісь в кожному з еліпсів перпендикулярна до великої осі. На рис. 9.31, *б* показано нормальну прямокутну ізометрію того ж горизонтального кола.

Діаметри $A'B'$ і $C'E'$, паралельні осям координат, мають довжину $0,82d$. Діаметр $1'-2'$, паралельний до аксонометричної площини *xOy*, має довжину d (велика вісь). Довжина малої осі $3'-4'$ дорівнює $0,56d$.

2. Прямокутна диметрія. Побудова кіл в площинах аксонометричних проекцій зрозуміла із рис. 9.32. Як і в попередньому прикладі, еліпси проходять через середини сторін описаних квадратів та через точки на діагоналях квадратів (на рисунку не позначені). Позначеннями виділено великі і малі осі в площинах *xOy* та *yOz*. Вони не збігаються з діагоналями описаних квадратів, а мають такі напрями: велика вісь $A'B'$ перпендикулярна до осі *Oz*, $M'N'$ - до *Ox*, малі осі $C'D'$ і $K'L'$ - залишаються перпендикулярними до великих осей. Розміри великих і малих осей в кожній з аксонометричних площин показано на рис. 9.32, де представлено приведені (збільшені) зображення.

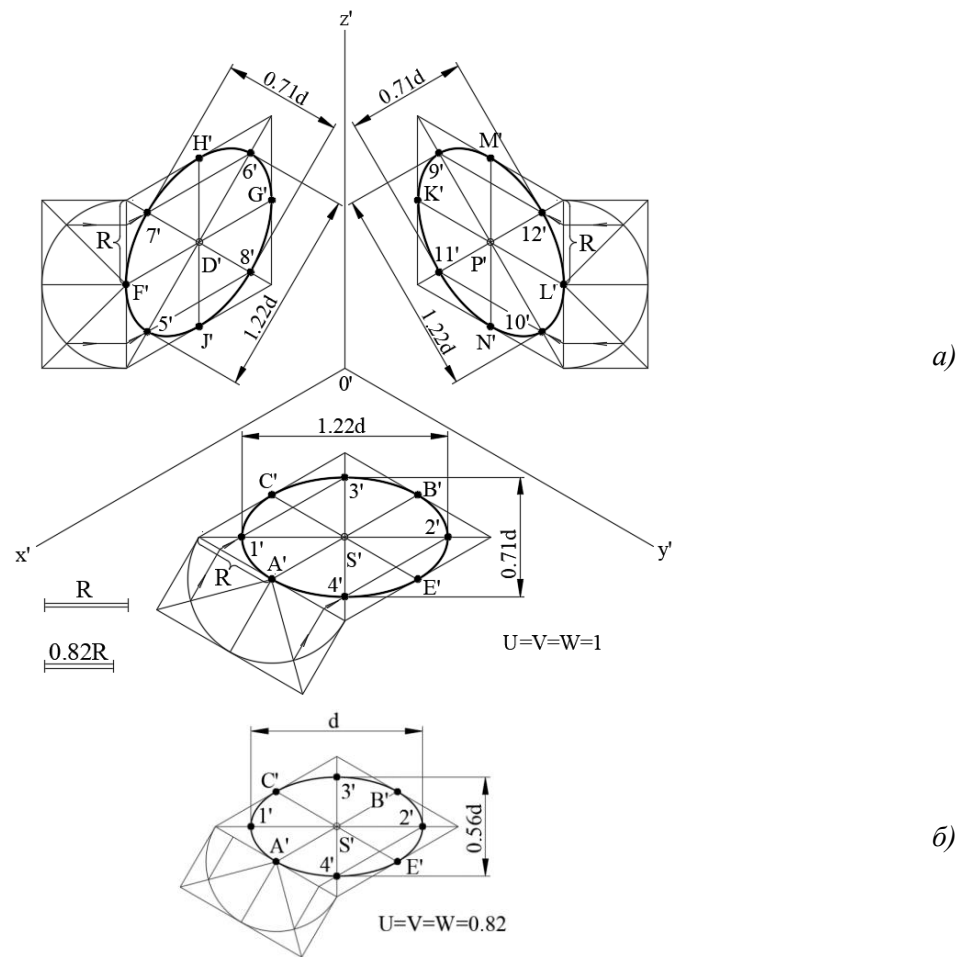


Рис. 9.31

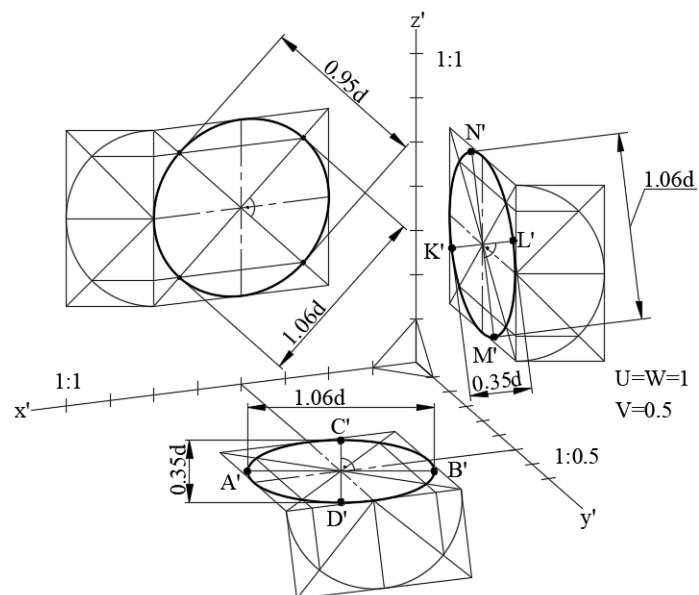


Рис. 9.32

Прямокутні аксонометричні проєкції дають зображення, які наближаються до реального зорового сприйняття об'єктів. Косокутні проєкції мають іншу перевагу – при забезпеченні відносної наочності зображень вони дають змогу будувати складні

контури в певних площинах без спотворення. Напрям аксонометричних осей та показники спотворення на кожній з них для стандартних косокутних проекцій було показано на рис. 9.5. Далі показано аксонометрії кіл, вписаних в грані куба, паралельні до відповідних площин проекцій: в фронтальній ізометрії (рис. 9.33), горизонтальній ізометрії (рис. 9.34) та фронтальній диметрії (рис. 9.35).

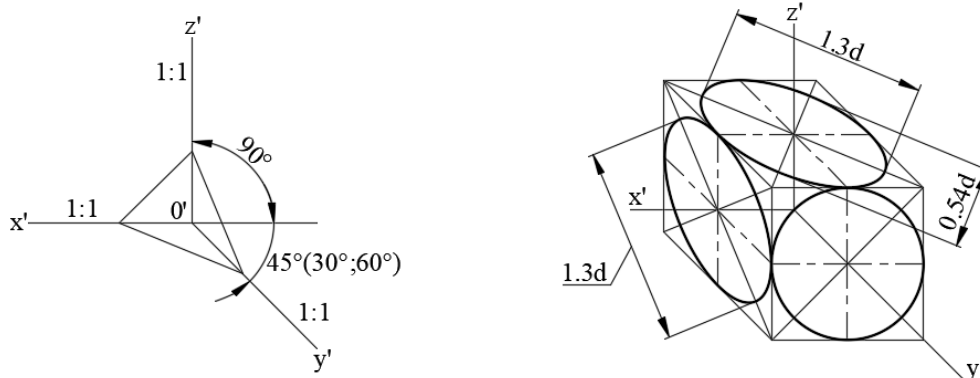


Рис. 9.33

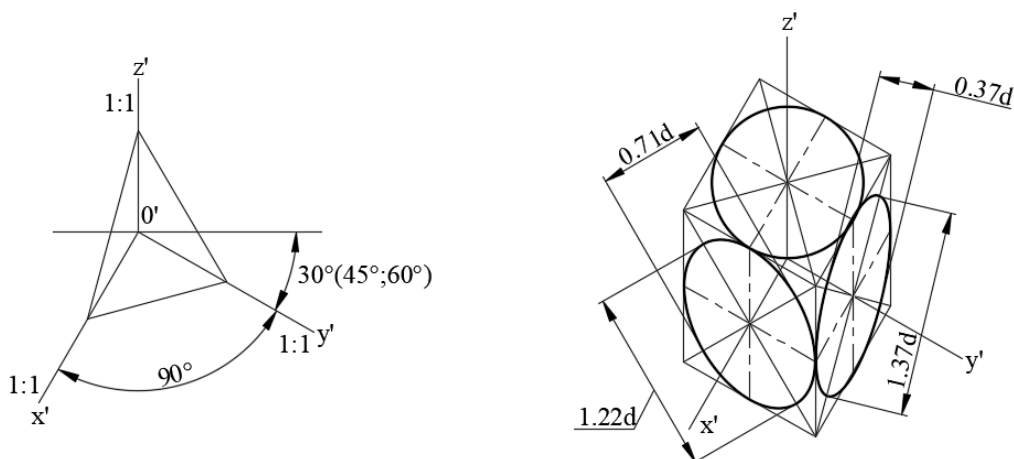


Рис. 9.34

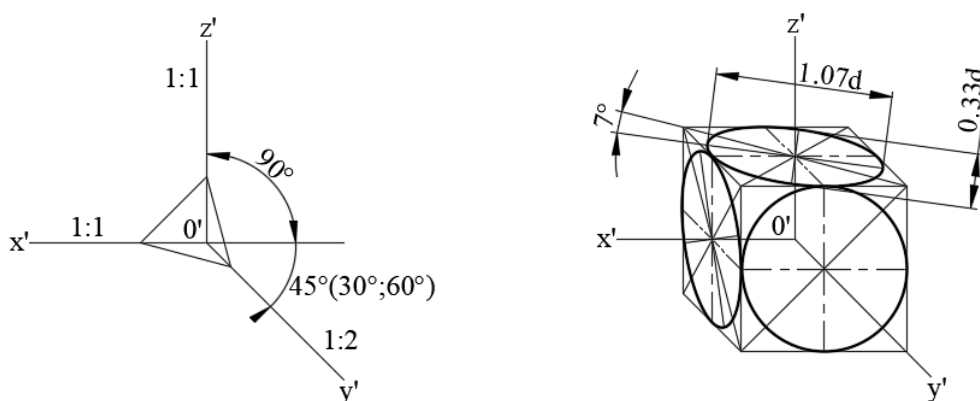


Рис. 9.35

Кожний з еліпсів має чотири точки дотику до сторін описаного квадрата, чотири точки на діагоналях квадрата. Розміри та положення великих і малих осей в кожному еліпсі показано на рис. 9.33 – 9.35.

Розглянуті еліпси є лекальними кривими. З метою спрощення побудов замість еліпса може бути використана інша лінія, наприклад, складена циркульна замкнена крива, утворена спряженням чотирьох дуг. На рис. 9.36 показано побудову складених кривих, якими в деяких випадках можна замінити еліпси в прямокутній ізометрії (рис. 9.31). Для цього будують ромб (проекцію описаного квадрата), дві вершини якого O_1 і O_2 є центрами дуг $A'E'$ та $C'B'$. В перетині великої діагоналі ромба з прямими O_1C' та O_1B' (або O_2A' та O_2E'), визначаються точки O_3 та O_4 , які є центрами дуг $A'C'$ та $B'E'$. Необхідно зауважити, що складена крива проходить тільки через середини сторін описаного квадрата (A' , B' , C' , E'). Розміри великої та малої осей не дорівнюють осям відповідного еліпса. У зв'язку з чим така крива не завжди відповідає вимогам до креслень.

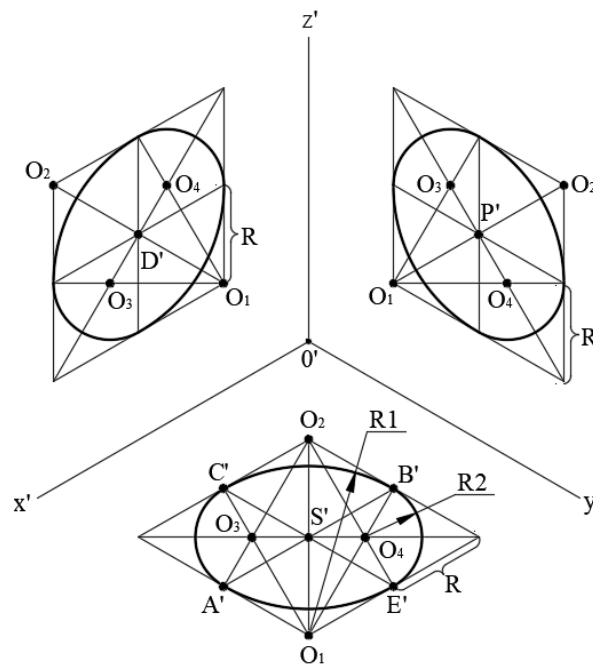


Рис. 9.36

На рис. 9.37 показано ортогональні проекції та аксонометрію просторової кривої – циліндричної гвинтової лінії, в утворенні якої приймає участь коло. Побудовано також дотичну до гвинтової лінії в точці 3. Дотична t перетинає площину xOy в точці A .

Побудова кола необхідна в зображенні циліндра, конуса, сфери. На рис. 9.38 показано прямий круговий конус з основою у вигляді горизонтального кола.

Аксонометричне зображення – прямокутна диметрія, в якій коло побудовано як на рис. 9.32. Положення точок дотику контурних твірних конуса до еліпса залежить від співвідношення розмірів діаметра основи і висоти конуса. Побудовано також точки 1 і 2 перетину прямої AB з бічною поверхнею конуса.

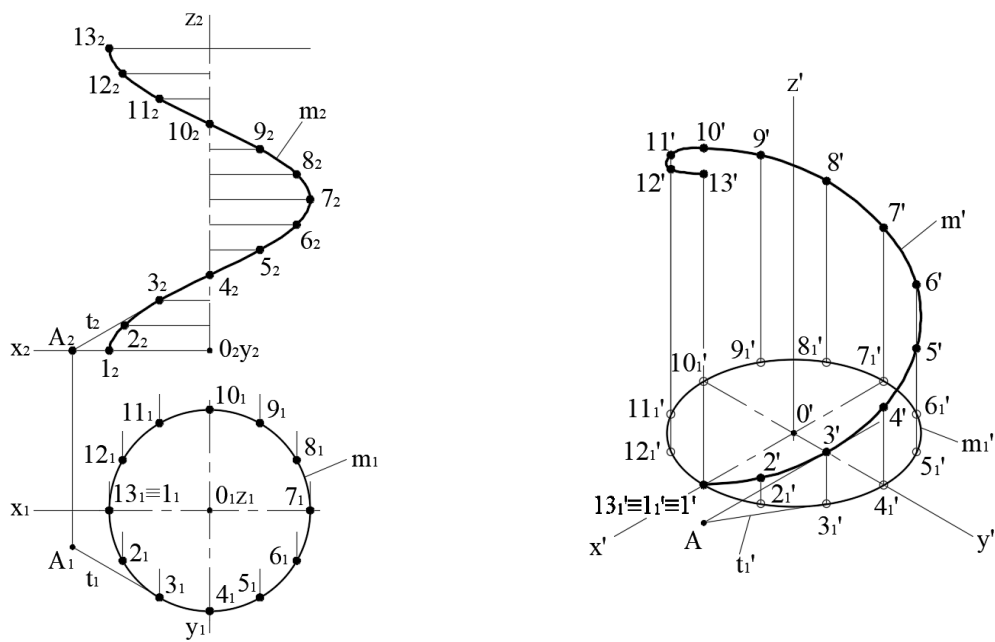


Рис. 9.37

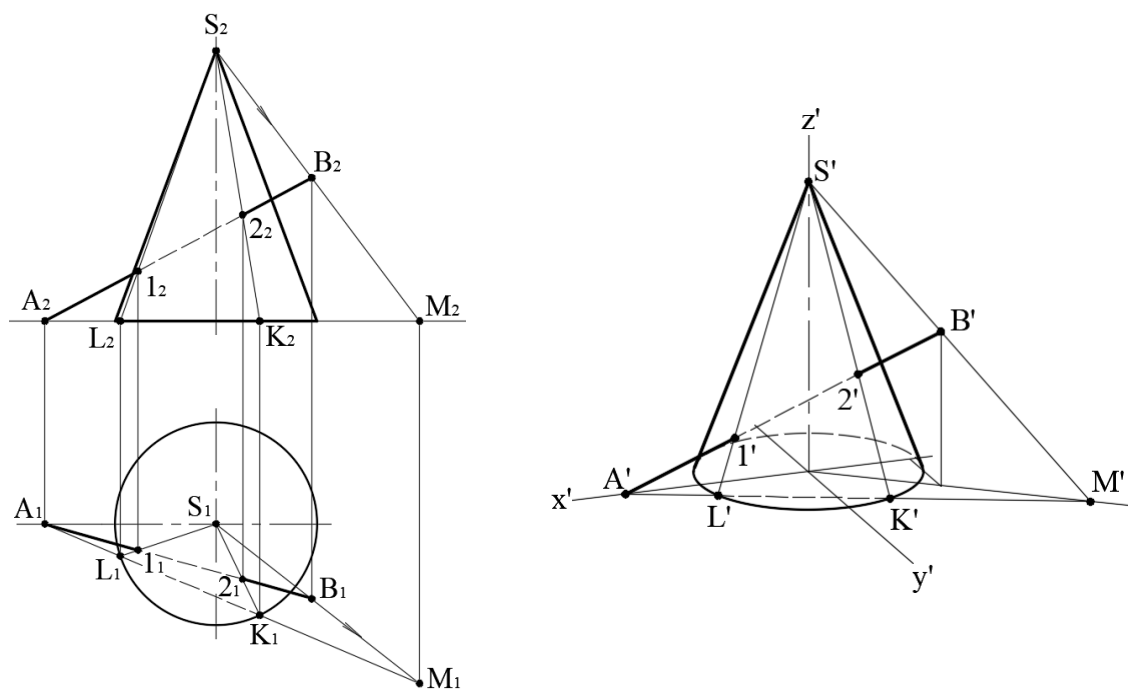


Рис. 9.38

На рис. 9.39 показано похилий еліптичний циліндр з основою у вигляді горизонтального кола. Аксонометричне зображення циліндра – прямокутна ізометрія. Показано побудову площин Δ і Γ , які проходять через довільну точку A простору та є дотичними до бічної поверхні циліндра.

За необхідності для побудови наочних зображень конуса, циліндра та будь-яких лінійчатих поверхонь можуть бути використані прямокутні або косокутні аксонометрії.

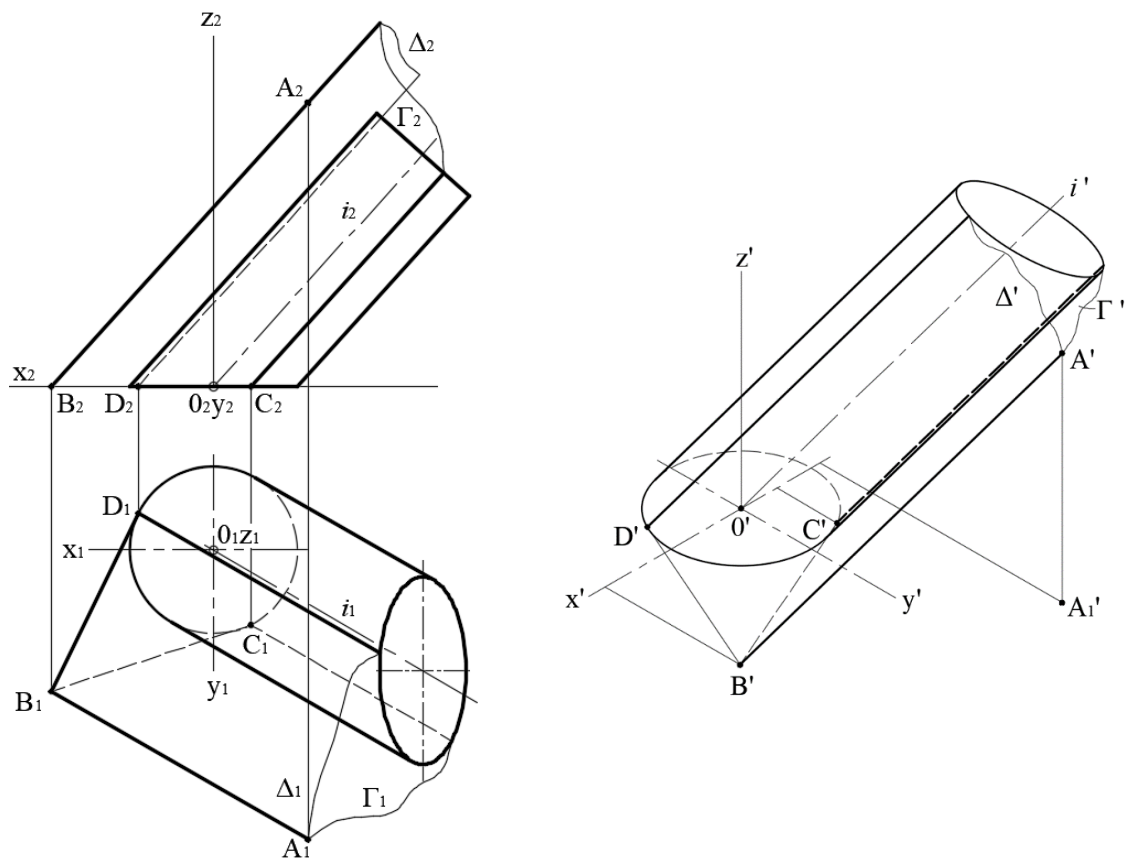


Рис. 9.39

При побудові аксонометрії сфери необхідно пам'ятати, що її косокутна аксонометрія має вигляд еліпса, а прямокутна – кола. Приклад аксонометричного зображення сфери радіуса R з вирізом передньої восьмої частини дано на рис. 9.40, *а* (прямокутна приведена ізометрія) та на рис. 9.40, *б* (прямокутна приведена диметрія).

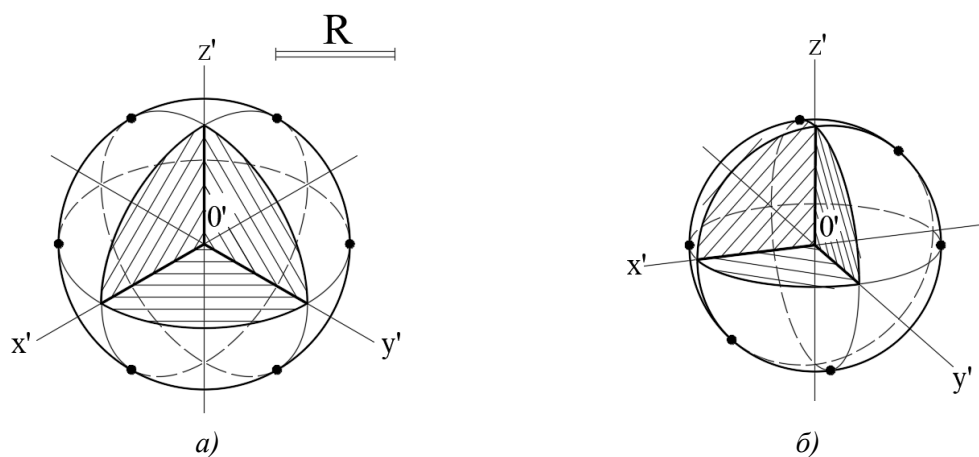


Рис. 9.40

На рис. 9.41 показано побудову лінії перетину циліндра і конуса.

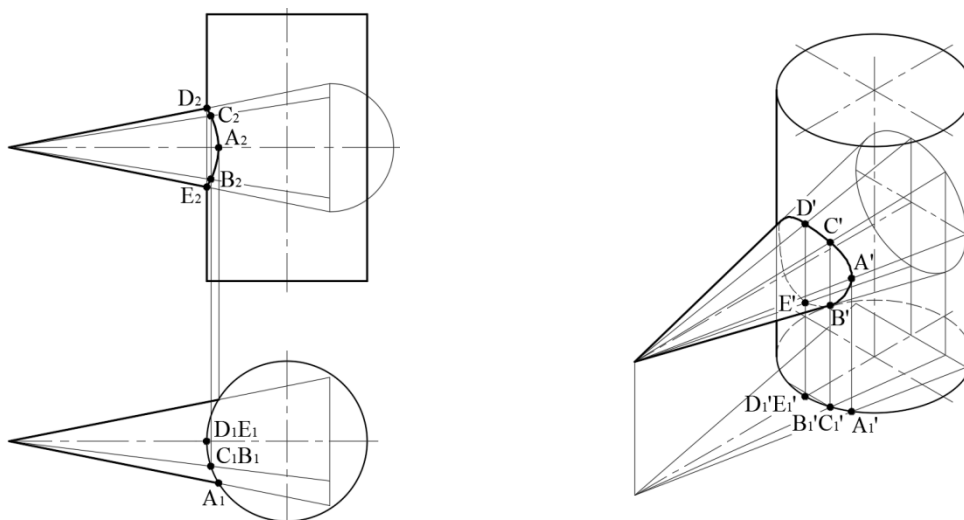


Рис. 9.41

АксонOMETPію об'єкта можна побудувати за табличними даними, отриманими в результаті підрахунків. Такими даними можуть бути координати точок, що належать поверхні (рис. 9.42). Якщо в процесі творчого пошуку архітектор, інженер отримує наочне зображення деякої форми в аксонометрії, то знання властивостей аксонометричних проєкцій дозволяє йому виконати зворотнє завдання – відтворити ортогональні проєкції об'єкта.

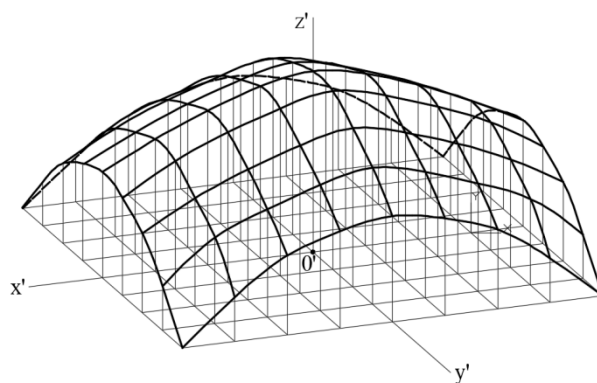


Рис. 9.42

Запитання для самоконтролю

1. Що таке показники спотворення?
2. Чим відрізняється прямокутна ізометрія від косокутної?
3. Які види стандартної аксонометрії ви знаєте?
4. Що таке «ізометрична» аксонометрія, «симетрична» аксонометрія?
5. Що таке «приведена» аксонометрія?

РОЗДІЛ 10. ПОБУДОВА ТІНЕЙ В АКСОНОМЕТРІЇ

АксонOMETричні зображення можна зробити більш наочними, якщо їх доповнити тінями, що важливо для архітектурних креслень. Правила побудови тіней в ортогональних проекціях було викладено в розділі 8. Визначимось із основними положеннями таких побудов в аксонометрії.

1. Світлові промені будемо вважати паралельними прямими, що відповідає природному освітленню.

2. В ортогональних проекціях зручним для побудов був стандартний напрям світлових променів, який обирався паралельним діагоналі куба, показаного на рис.8.5, *а, б*. На рис.10.1, *а, б* наведено ортогональні проекції та прямокутну ізометрію куба із проекціями діагоналі AB . Діагональ AB проєкціюється в точку, тому її використання для побудов неможливо. На рис.10.2, *а, б* в такому ж кубі показана інша діагональ – CD . В такому разі побудови будуть можливими, але незручними тому, що промінь s збігається із його фронтальною проєкцією s_2 . Саме тому на рис. 8.5, *а* показано світловий куб в прямокутній диметрії.

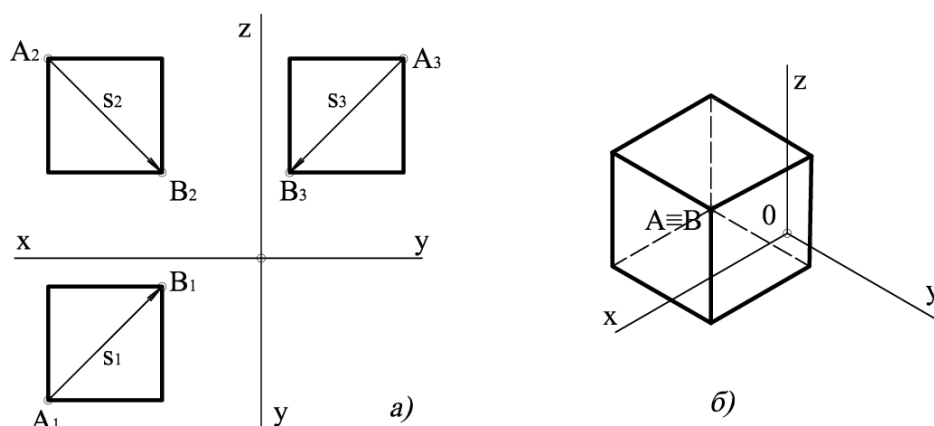


Рис.10.1

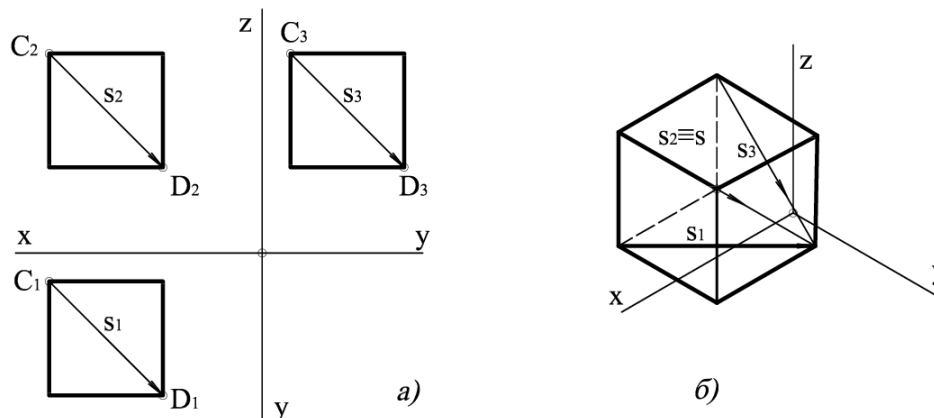


Рис.10.2

3. Якщо для аксонометричного зображення обрати поширену в практиці прямокутну ізометрію, то за напрям світлового променя доцільно прийняти будь-яку діагональ *паралелепіпеда* з довільним співвідношенням його сторін та гранями, паралельними площинам проєкцій (рис.10.3, *а*). На практиці зазвичай показують промінь s та одну з його проєкцій, наприклад s_1 на Π_1 (рис.10.3, *б*). Цього достатньо для визначення проєкції s_2 на Π_2 , та s_3 на Π_3 , які будуть паралельними діагоналям відповідних граней паралелепіпеда з вершинами в точках A, A_1, B (рис.10.3, *в*), де показано спрощений варіант такої побудови. На рис.10.4, *а, б* представлено варіанти вибору напрямку світлового променя паралельно іншим діагоналям того ж світлового паралелепіпеда.

4. В подальшому аксонометричні побудови буде виконано із застосуванням прямокутної ізометрії та прямокутної диметрії.

5. Для полегшення читання креслень в аксонометрії при позначенні точок, ліній, площин та поверхонь буде скасовано «штрихи» з огляду на те, що в практичних кресленнях вони не застосовуються.

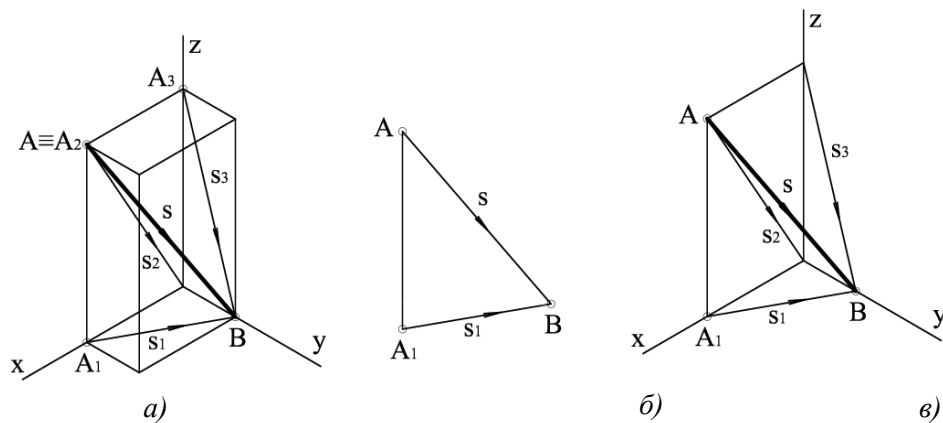


Рис.10.3

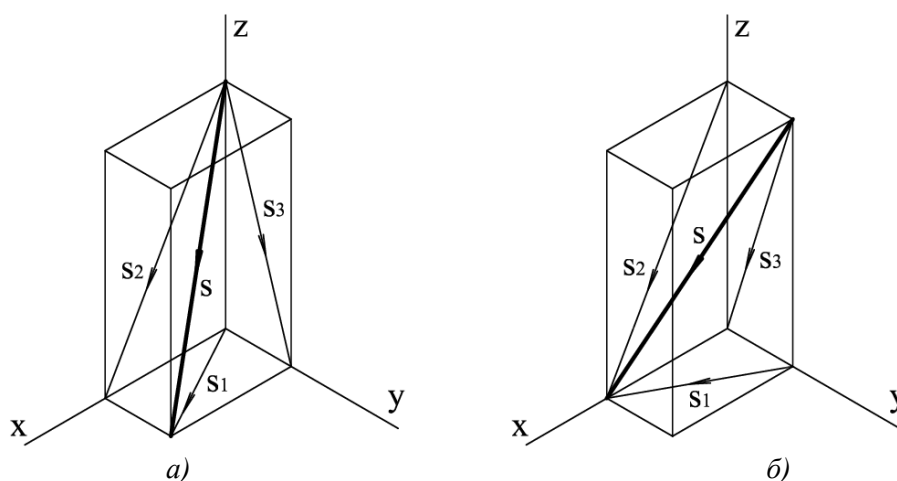


Рис.10.4

10.1. Побудова тіней від елементарних геометричних фігур

В загальному випадку тінь від точки на будь-яку площину є результатом перетину із цією площиною світлового променя, проведеного через точку. Архітектурні об'єкти утворено площинами, більшість яких паралельна до площин проєкцій, тому спочатку розглянемо побудову тіней від точки на Π_1 , Π_2 і Π_3 . При побудові тіні від точки на площину проєкцій використано перетин світлового променя з його ортогональною проєкцією на цю площину. Так, тінь точки A на Π_1 знаходиться у перетині променя s із його проєкцією s_1 на Π_1 (рис. 10.5, а), на Π_2 – у перетині s із s_2 (рис. 10.5, б), на Π_3 – у перетині s і s_3 (рис. 10.5, в). В кожному випадку промінь s та його проєкція утворюють світлову площину, перпендикулярну до відповідної площини проєкції.

В розділі 8 показано, що в ортогональних проєкціях тінь відрізка, перпендикулярного будь-якій площині, збігається з проєкцією світлового променя на цю площину. Така властивість справедлива і для побудов в аксонометрії: на рис. 10.5, б відрізок AA_2 , перпендикулярний до Π_2 , дає на Π_2 тінь A_2A_T . На рис. 10.5, в відрізок AA_3 , перпендикулярний до Π_3 , дає на Π_3 тінь A_3A_T .

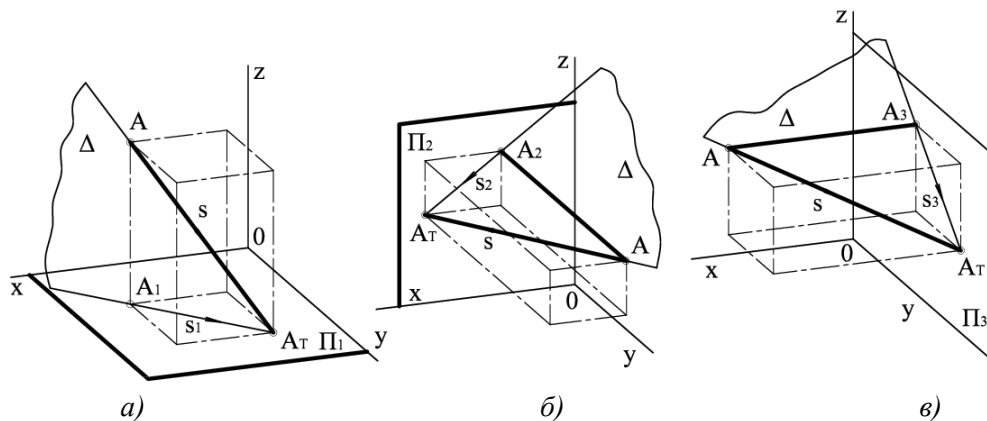


Рис.10.5

За наявності одночасно двох або більшої кількості площин тінь точки попаде на площину, найближчу до неї в напрямі світлового променя. Це залежить від співвідношення координат x , y , z точки і від напрямку світлового променя. На рис. 10.6 показано три приклади побудови тіней точки A із координатами x_a , y_a , z_a . Побудови виконано із використанням вертикальних світлових площин Δ . На рис. 10.6, а промінь s перетинає першою площиною Π_1 . Тінь точки A попадає на Π_1 (A_{T1}). На рис. 10.6, б перетин s з площиною Π_1 відбувається за площиною Π_2 . Це означає, що тінь від A попадає на Π_2 (A_{T2}) і знаходиться на лінії перетину площин Π_2 і Δ . Точка A_{T1} може за необхідністю визначатись як допоміжна для інших побудов. Аналогічно визначено тінь A_{T3} точки A , яка попадає на Π_3 (рис. 10.6, в).

Для визначення тіні відрізка, перпендикулярного до Π_1 , використано аналогічну побудову. На рис. 10.7 показано, що тінь вертикального відрізка AB з

точкою B на Π_1 починається в точці B , і проходить в напрямі горизонтальної проєкції світлового променя s_1 . Відрізок тіні на Π_1 закінчується в точці A_{T1} (рис. 10.7, а). Якщо тінь точки A попадає на Π_2 або на Π_3 (рис. 10.7, б, в), лінія тіні має злам на відповідній осі в точці C_T , яку з'єднано з A_{T2} (A_{T3}). Із побудов видно, що контур тіні відрізка, перпендикулярного до Π_1 , повторює лінію перетину вертикальної світлової площини Δ , проведеної через AB , із площинами проєкцій. Зворотний світловий промінь, проведений із точки зламу C_T , показує, від якої саме точки C відрізка AB тінь попаде на лінію перетину площин проєкцій. Відрізок AA_2 , перпендикулярний до Π_2 , дає на Π_2 тінь A_2A_T (рис. 10.5, б), а тінь відрізка AA_3 , перпендикулярного до Π_3 (рис. 10.5, в), визначається відрізком A_3A_T .

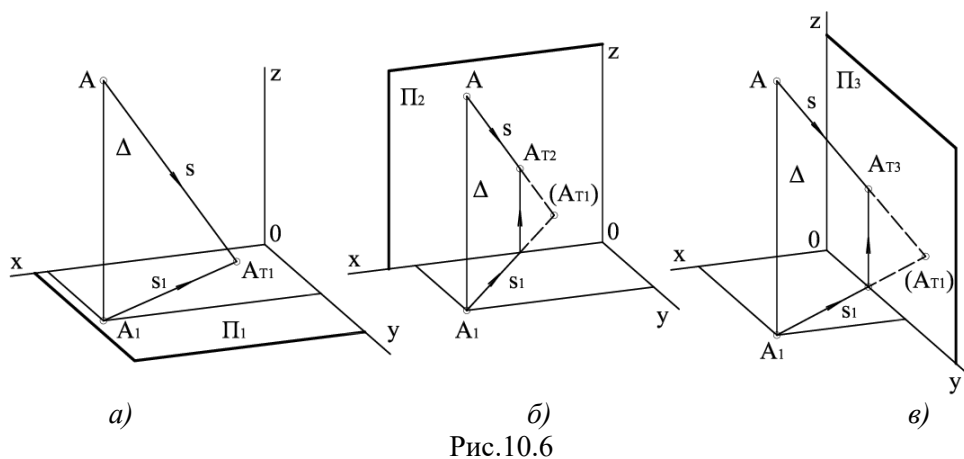


Рис.10.6

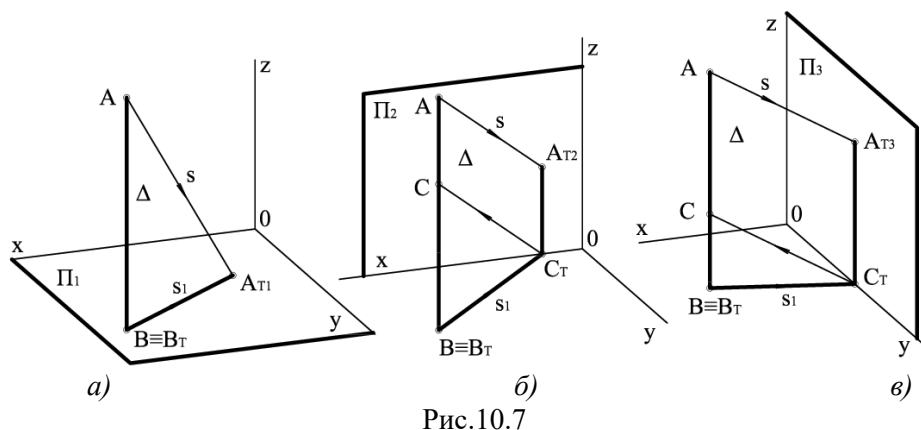


Рис.10.7

Вертикальну світлову площину Δ використано для визначення контура тіні від вертикального відрізка AB на бічну поверхню призми з горизонтальними бічними ребрами (рис. 10.8) та бічну поверхню циліндра з горизонтальними твірними (рис. 10.9). Площина Δ перетинає площину основи (відрізок $B_T C_T$) та поверхні призми і циліндра (лінія m , яка проходить через точки $C_T-1_T-2_T-3_T...$). Для побудови точок 1_T , 2_T , 3_T , ... знайдено точки перетину площини Δ з

горизонтальними проекціями відповідних ребер призми (або твірних циліндра). Тінь точки A в обох прикладах знаходиться в перетині світлового променя і лінії m .

На рис. 10.10 показано тінь вертикального відрізка AB , що перетинає похилу грань призми в точці C . Тінь відрізка AB знаходиться на лінії 1-2 перетину світлової площини Δ , проведеної через AB , з бічною гранню призми. Таким чином, тінь відрізка AC починається в точці $C_T=C$ і закінчується в точці A_T . Тінь відрізка AB загального положення на площину загального положення Σ (рис. 10.11) – відрізок A_TB_T . Кожна із цих точок отримана в результаті перетину відповідного світлового променя із площиною Σ , для чого через A і B проведено вертикальні світлові площини Δ і Γ та визначено лінії перетину їх із Σ (1-2 і 3-4).

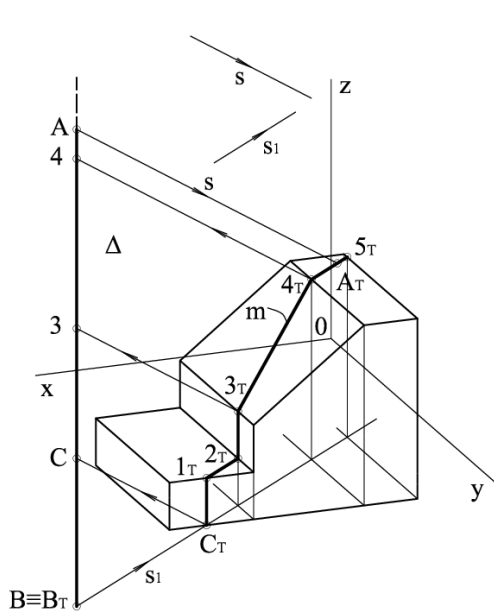


Рис.10.8

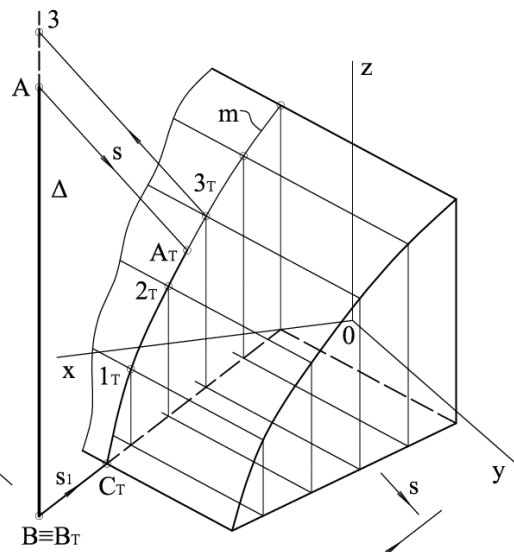


Рис.10.9

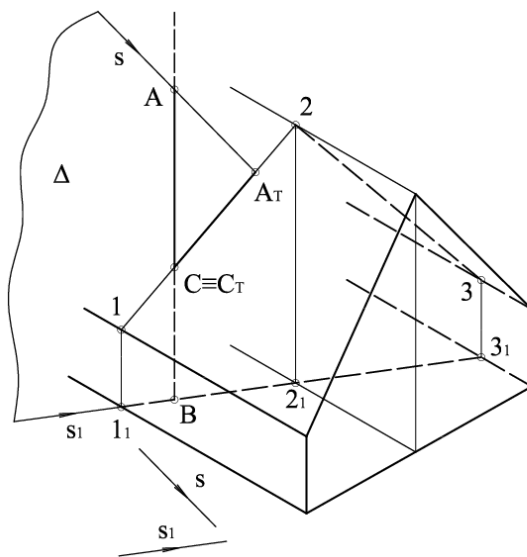


Рис.10.10

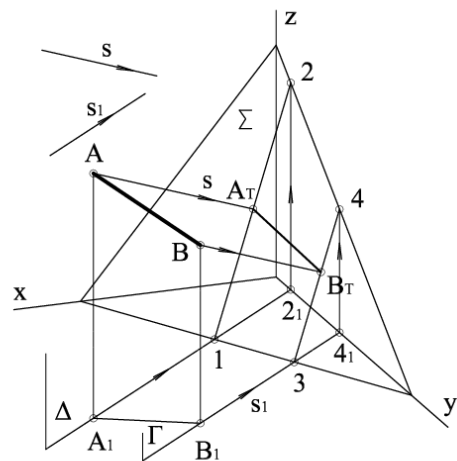


Рис.10.11

На рис. 10.12, *а* показано відрізок AB , паралельний до Π_1 . Відрізок тіні $A_T B_T$ на Π_1 паралельний AB , а його довжина дорівнює AB . Це твердження справедливо для зображень тіней відрізків, паралельних до будь-яких площин, наприклад, CD , паралельного до Π_2 , або MN , паралельного до Π_3 (рис. 10.12, *б*, *в*).

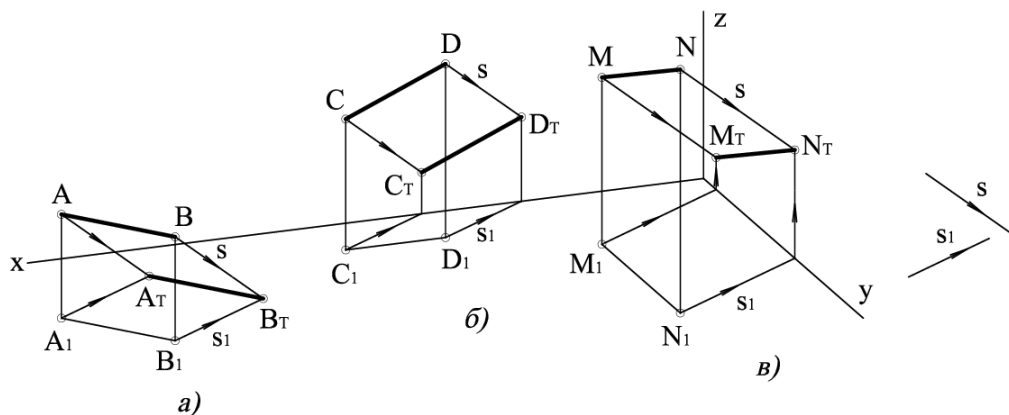


Рис.10.12

Тінь відрізка може падати повністю на одну площину (рис. 10.13, *а*). На рис. 10.13, *б* видно, що тінь точки C на Π_1 (C_{T1}) знаходиться за Π_3 . Відрізок $A_{T1}C_{T1}$ перетинає вісь Oy в точці B_T . В дійсності тінь точки C попадає на Π_3 (C_{T3}). Таким чином, тінь відрізка попадає на дві площини. Лінія тіні є ламаною і складається із відрізків $A_{T1}-B_T$ на Π_1 та B_T-C_{T3} на Π_3 . Зворотний промінь, проведений із B_T , визначає положення точки B , яка дає тінь на вісь Oy . На рис. 10.13, *в* представлено побудову тіні відрізка AC , яка попадає на три площини (Π_1 , Π_3 і Π_2) із точками зламу 1 і 2 на осях Oy і Oz .

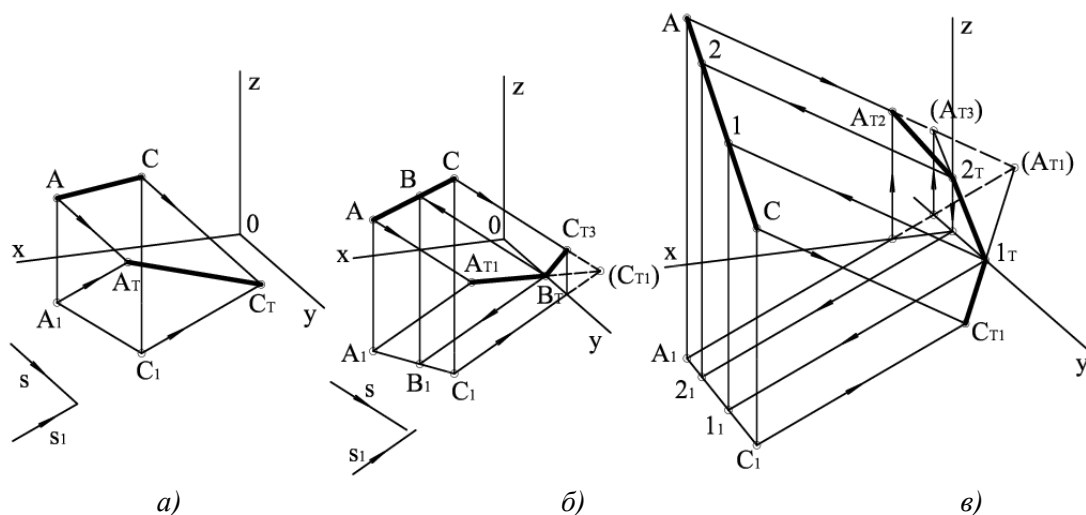


Рис.10.13

Контури тіней *плоских фігур* будують як сукупність тіней від характерних точок цих фігур, наприклад, від вершин багатокутника. На рис.10.14,*а* показано побудову тіні на Π_1 горизонтального прямокутника із сторонами, паралельними осям координат, на рис. 10.14, *б* – тінь такого ж прямокутника на Π_2 .

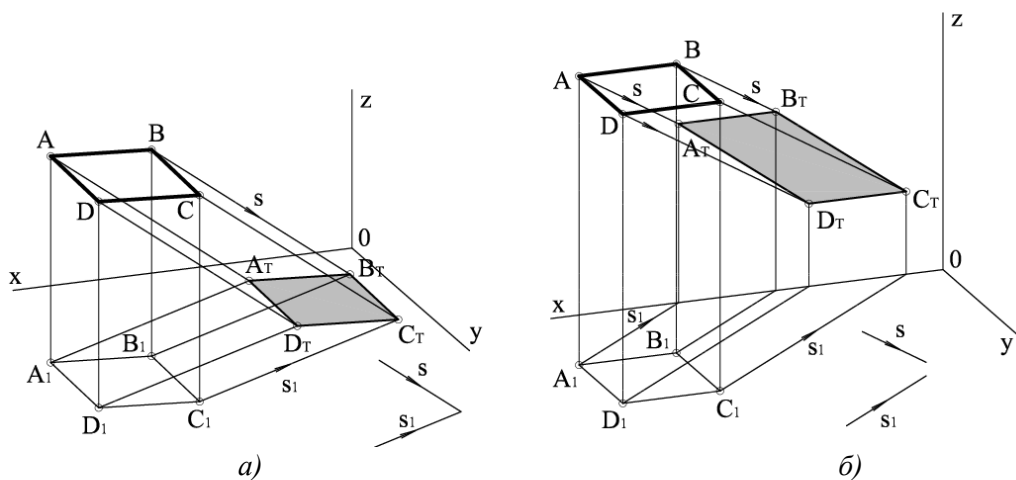


Рис.10.14

Із рисунка безпосередньо видно, що тінь фігури, паралельної до площини, повторює форму і розмір фігури. Такою властивістю можна скористатись для спрощення побудов.

Так на рис. 10.15 видно, що тінь від CD падає на Π_1 , а від AB – на Π_2 . Тіні від DA і CB на Π_1 проведено із точок C_{T1} і D_{T1} паралельно самим відрізкам до перетину із віссю Ox в точках 1 і 2, які потім з'єднано із точками тіней вершин A і B на Π_2 .

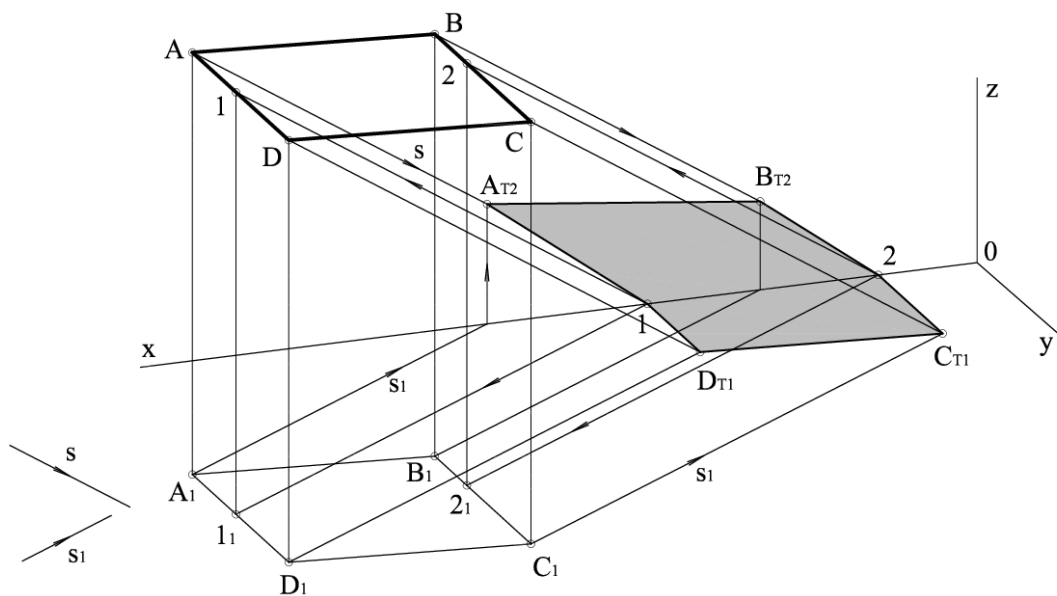


Рис.10.15

На рис. 10.16, *а* показано побудову контурів тіней від сторін трикутника загального положення на площини Π_1 і Π_2 , а на рис. 10.16, *б* – контур тіні трикутника загального положення на Π_1, Π_2 і Π_3 .

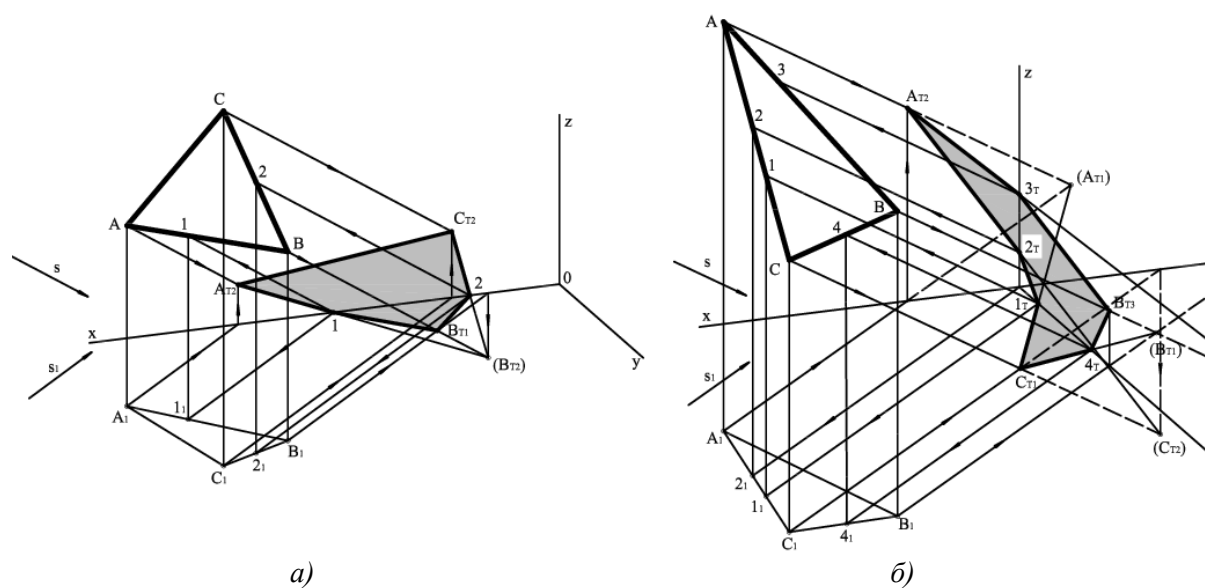


Рис.10.16

Розглянемо приклад, показаний на рис. 10.17.

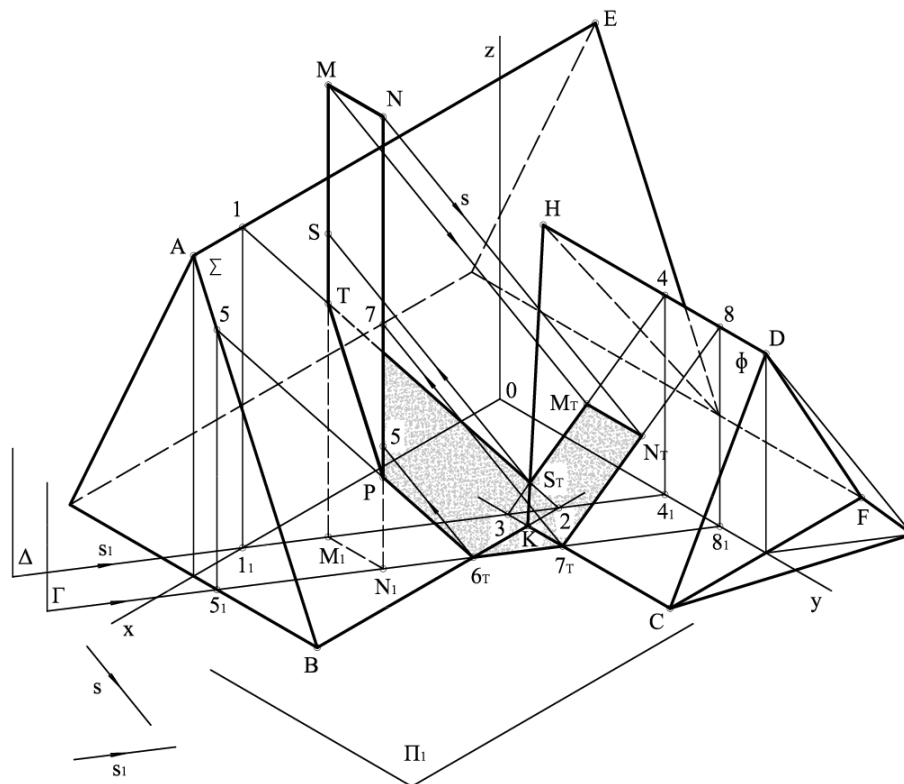


Рис.10.17

Дано дві тригранні призми (Σ і Φ), горизонтальні бічні грані яких знаходяться в площині Π_1 . Площини BAE і CDH перетинаються вздовж лінії KH . Дано також два вертикальних відрізка з точками M_1 і N_1 на Π_1 . Вертикальна світлова площина Δ , проведена через M_1 , перетинає площину BAE по прямій 1-2, а площину CDH по прямій 3-4, які в свою чергу перетинаються в точці S_T на прямій KH . Лінія 1- S_T -4 – результат перетину площини Δ з видимими бічними гранями заданих призм. Пряма 1-2 визначає також точку T перетину прямої M_1M з площиною BAE . Відрізок $T-M$ дає тінь $T-S_T-M_T$. Зворотний промінь із точки S_T дозволяє визначити на TM точку S , тінь якої падає на пряму KH . Таким чином, тінь від TS падає на призму Σ , а від SM – на призму Φ . Аналогічна побудова виконана за допомогою світлової площини Γ , проведеної через пряму N_1N . Відмінність полягає в наявності відрізка 6_T-7_T . Тінь відрізка PN – ламана $P-6_T-7_T-N_T$. Відрізок MN паралельний площині CDH , тінь від нього – відрізок M_T-N_T – паралельний MN та має таку ж довжину. Заштриховано контур тіні, який утворюється від плоскої фігури $PNMT$. Наведений приклад – фрагмент побудови тіні від призми з вертикальними бічними ребрами, які перетинають похилу площину.

Необхідно пам'ятати що обернена до спостерігача сторона плоскої фігури може бути освітленою, або знаходитись у власній тіні. Це залежить від положення фігури та від напрямку світлового променя. На рис. 10.18 показано три приклади побудови падаючої тіні на площину Π_1 від трикутників, відмінність між якими полягає тільки в висоті точки B . При однаковому напрямі світлового променя видима сторона трикутника знаходиться у власній тіні (рис. 10.18, а) або є освітленою (рис. 10.18, б). На це вказує трикутник падаючої тіні. Контур падаючої тіні від плоскої фігури може спроекціюватись у пряму (рис. 10.18, в). Це є ознакою того, що світловий промінь паралельний до площини фігури, яка в такому випадку вважається затіненою.

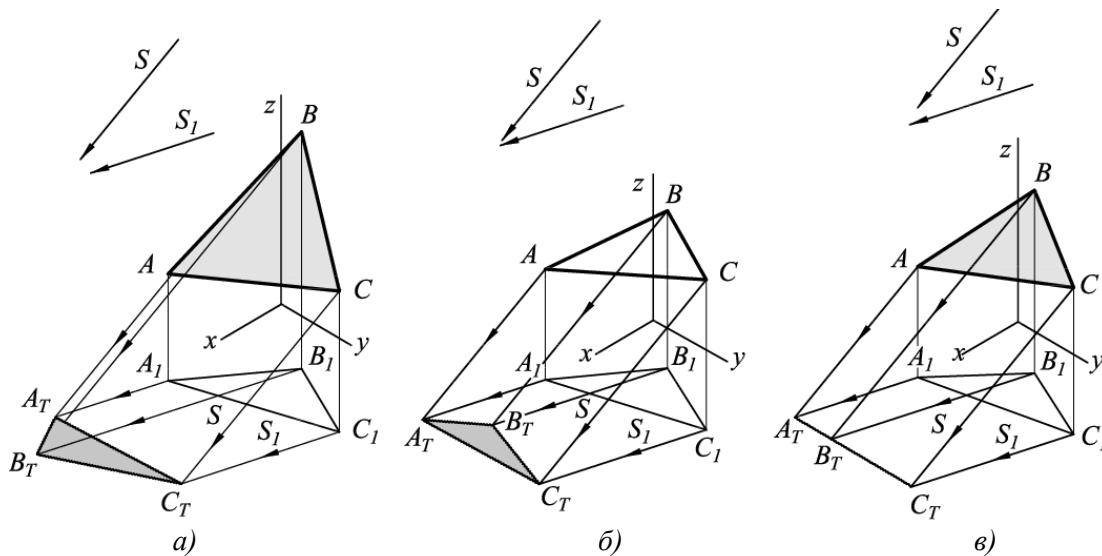


Рис.10.18

На рис. 10.19 показано аналогічні побудови для трьох однакових трикутників, тіні яких визначено за різними напрямками світлових променів.

При побудові тіней розглядаються *мимобіжні* прямі. Якщо відрізки їх падаючих тіней на одну площину перетинаються, це означає, що тінь від деякої точки одного відрізка попадає на другий відрізок. На рис. 10.20, *а* показано, що тіні, які падають на Π_1 від вертикального відрізка AB та відрізка загального положення CD , перетинаються. В точку $1_T=2_T$ попали тіні від точки 1 на CD і 2 на AB . Їх положення на відрізках визначено за допомогою зворотного променя.

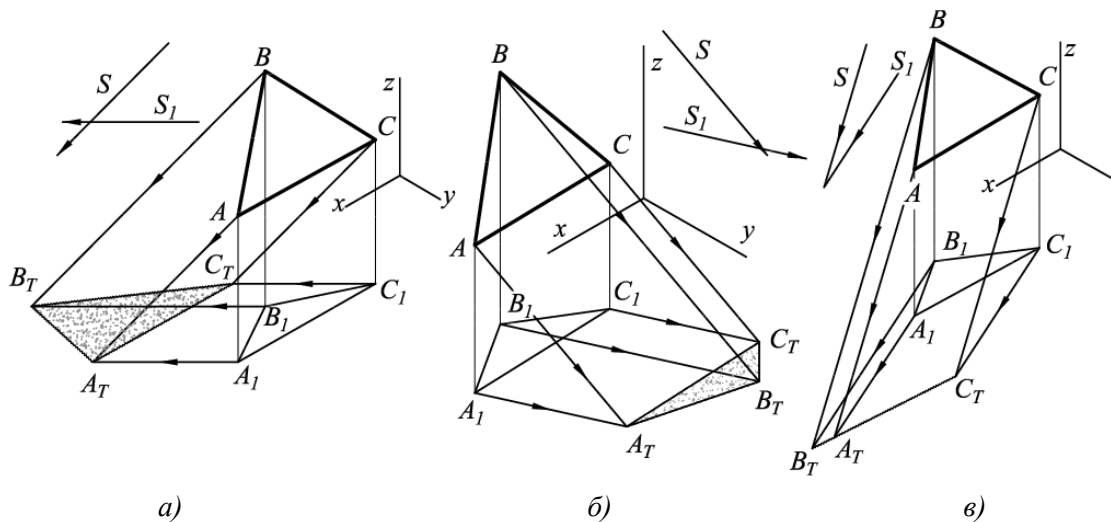


Рис.10.19

На рис. 10.20, *б* аналогічна побудова виконана для мимобіжних відрізків AB і CD , паралельних відповідно осям Oy та Ox .

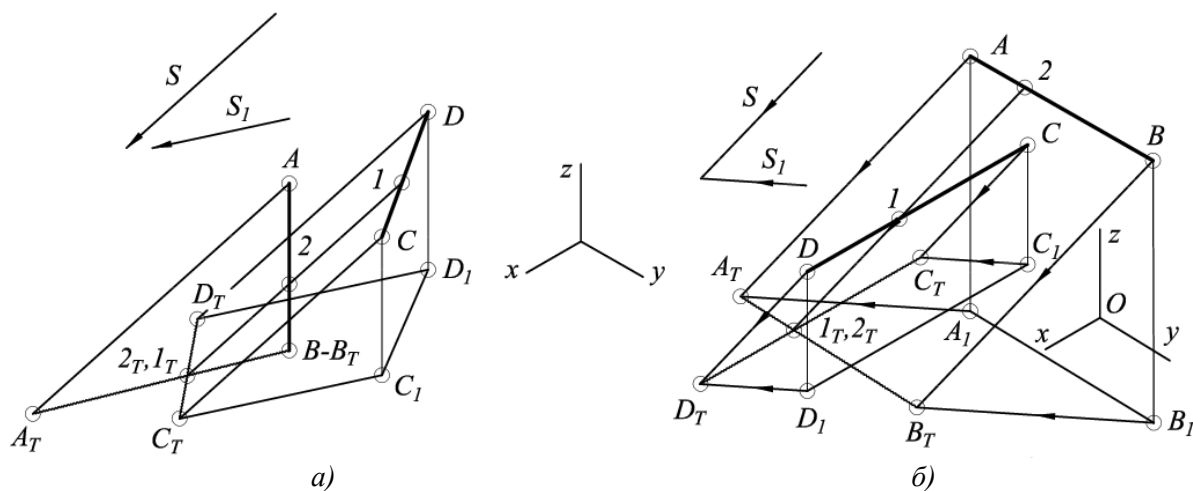


Рис.10.20

На рис. 10.21 показано тінь горизонтального круга на Π_1 , її контур повторює контур фігури. При побудові контуру тіні, що падає від такого ж круга

на Π_2 (рис. 10.22), визначені тіні характерних точок – 1, 3, 5, 7, що належать сторонам описаного квадрата, та точок 2, 4, 6, 8 на його діагоналях.

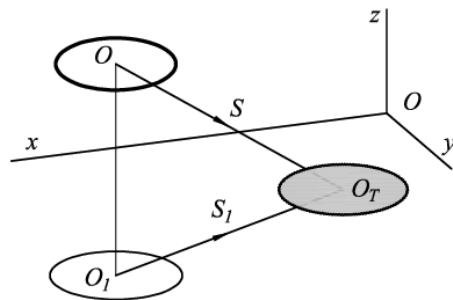


Рис.10.21

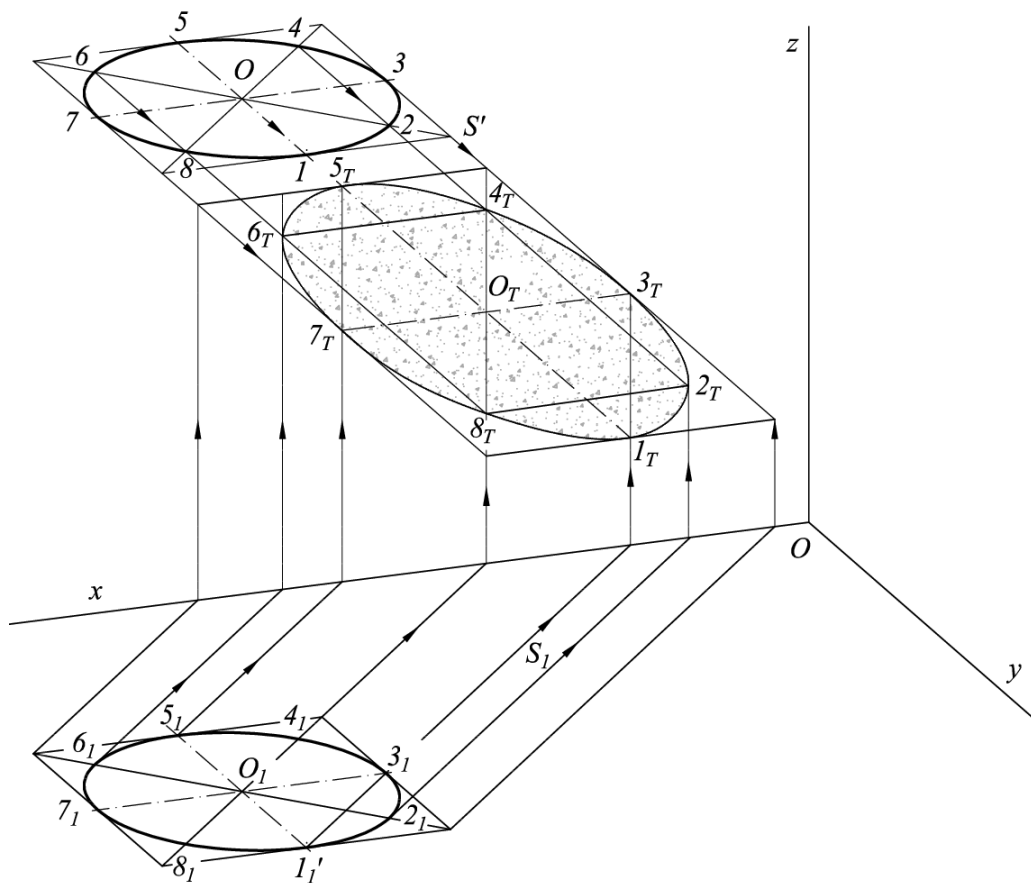


Рис.10.22

На рис. 10.23 показано, що контур тіні від горизонтального круга перетинає вісь Ox в точках A і B . На Π_1 упала тінь дуги $A-7-8-1-2-3-B$. На Π_2 – відповідно попадає тінь від дуги $A-6-5-4-B$. Тінь хорди AB попадає на вісь Ox .

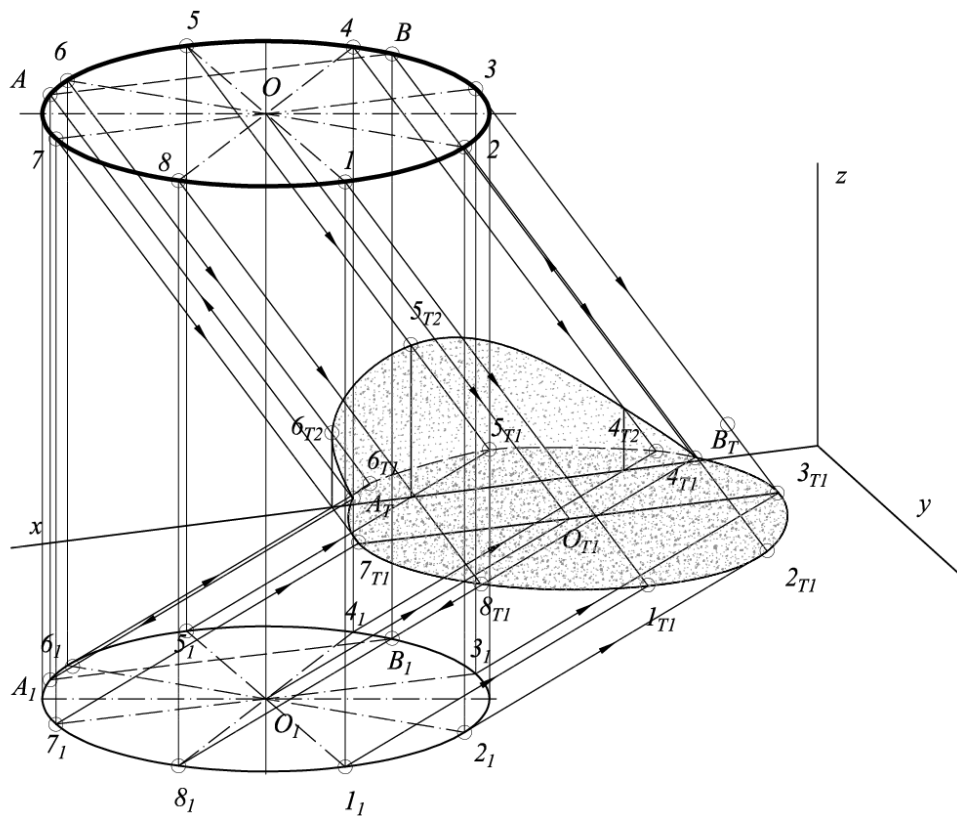


Рис.10.23

10.2. Тіні від просторових фігур

Як і в ортогональних проекціях, власні тіні призми та циліндра (рис. 10.24, 10.25) визначаються за допомогою дотичних до їх бічних поверхонь світлових площин Δ і Γ (в даному разі – вертикальних).

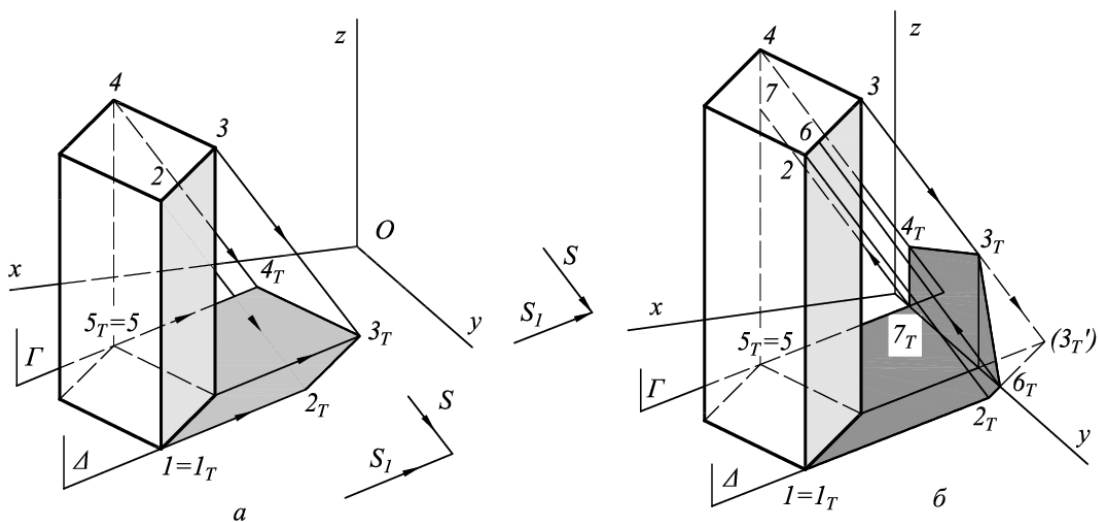


Рис.10.24

Контур власної тіні на обох поверхнях – просторова лінія 1-2-3-4-5. Для побудови контуру падаючої тіні достатньо визначити тіні точок 2,3,4. Якщо вони

попадають на Π_1 , то тінь всієї поверхні падає на Π_1 (рис. 10.24, а, 10.25, а). На рис. 10.25, а лінія тіні від дуги 2-3-4 в точках 2_T і 4_T має дотик до прямих 1_T-2_T і 5_T-4_T . На рис. 10.24, б: тінь призми падає на дві площини. На площину Π_1 попадають тіні ліній 1-2-6 та 5-7. Ламана 6-3-4-7 дає тінь на Π_2 .

На рис. 10.25, б: на площину Π_1 попадають тіні ліній 1-6 та 5-4 (пряма), 4-7 (крива), а на Π_2 - тінь дуги кола 7-3-2 та прямої 2-6. В точках 2_T і 4_T криві на контурі тіні дотичні до прямих 6_T-2_T і 5_T-4_T .

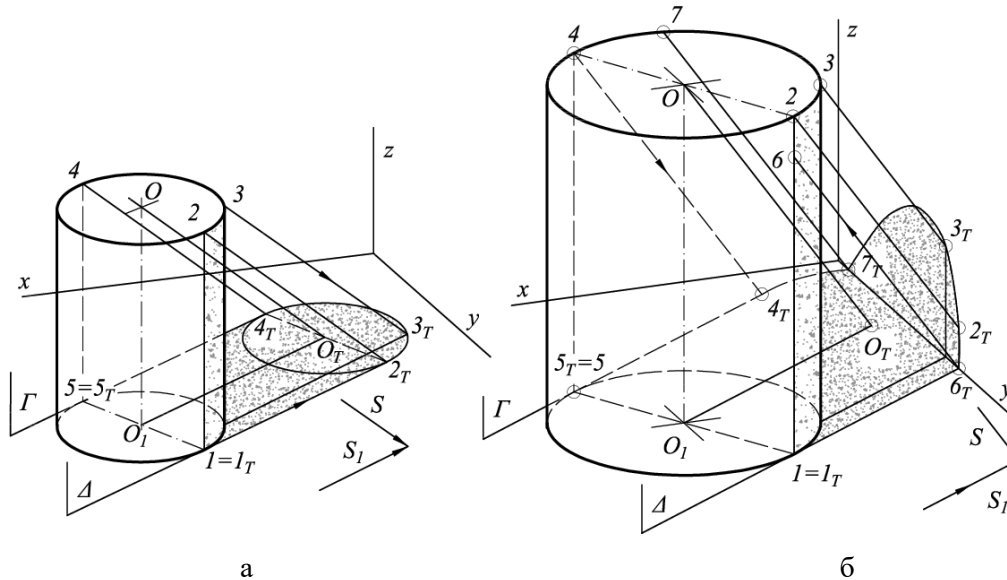


Рис.10.25

Для піраміди (рис. 10.26, а) і конуса (рис. 10.26, б) будують спочатку падаючу тінь вершин Q на площину основи поверхні (в даному прикладі на Π_1). Прямі, проведені із точки Q_T^1 до контуру основи поверхні, необхідні для визначення точок дотику. Вони утворюють контур падаючої тіні і визначають границю власної тіні – ребра AQ і BQ на піраміді та твірні QM і KQ на конусі.

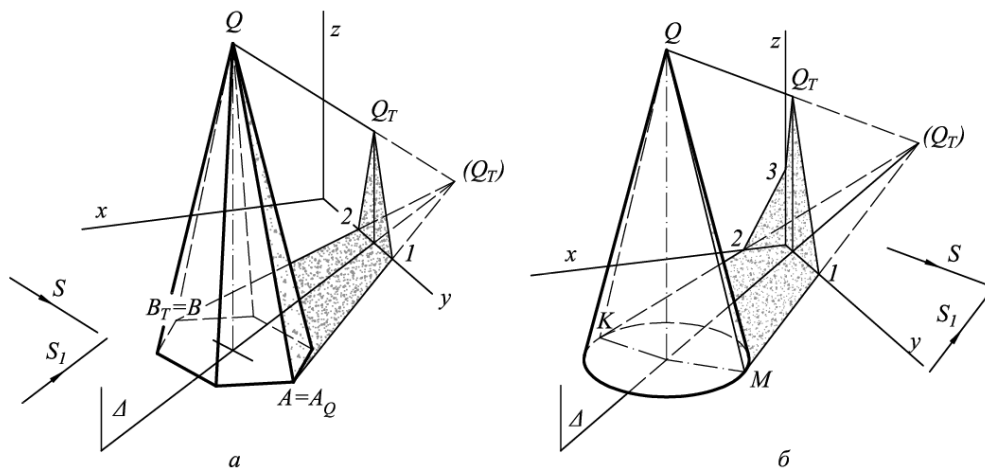


Рис.10.26

Якщо вважати присутніми площину Π_3 (рис. 10.26, а) та Π_2 і Π_3 (рис. 10.26, б), то контур тіні розподілиться на вказаних площинах із точками зламу на лініях перетину площин.

На рис. 10.27 показано побудову падаючої тіні конуса на три горизонтальні та три вертикальні площини, які утворюють призматичну поверхню. Тінь дають твірні AQ і BQ .

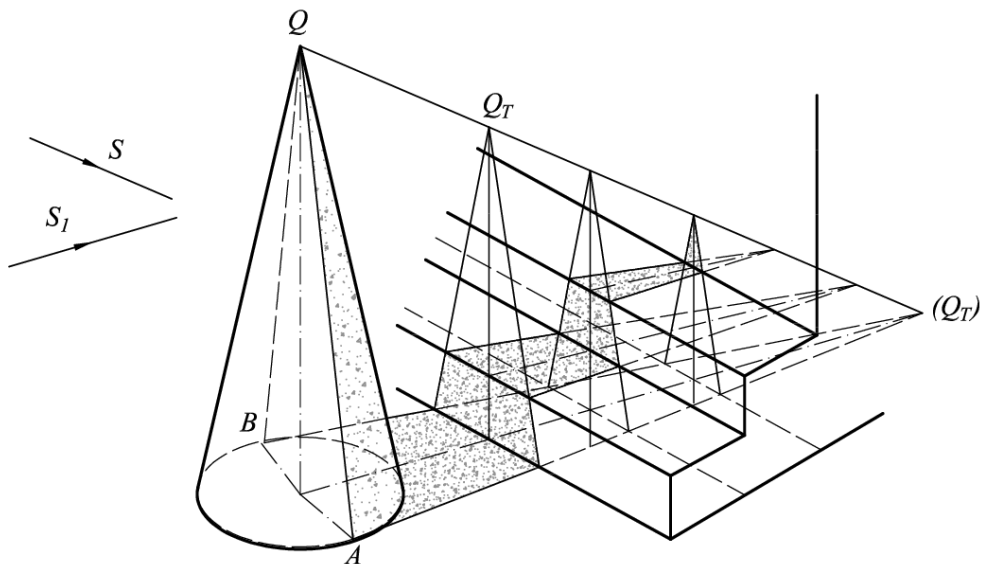


Рис.10.27

Рис. 10.28 демонструє тінь всередині конічної поверхні (конічний ніші). Власна тінь обмежена твірними AQ і BQ . Тінь всередині ніші дає твірна BQ , частина якої (BC) падає на горизонтальну грань ніші, а тінь другої частини (CQ) – на конічну поверхню.

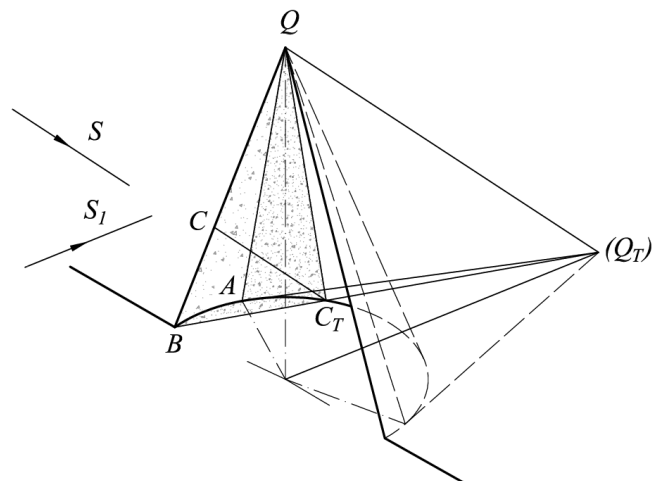


Рис.10.28

На рис. 10.29 дано: циліндр Φ з горизонтальною основою на Π_1 , профільна площина Ψ і половина циліндра Ω (з віссю, паралельною осі Oy), який примикає до Ψ . Задано довільно напрям світлового променя s та його горизонтальну проекцію s_1 . Побудови тіней розглянемо в такій послідовності:

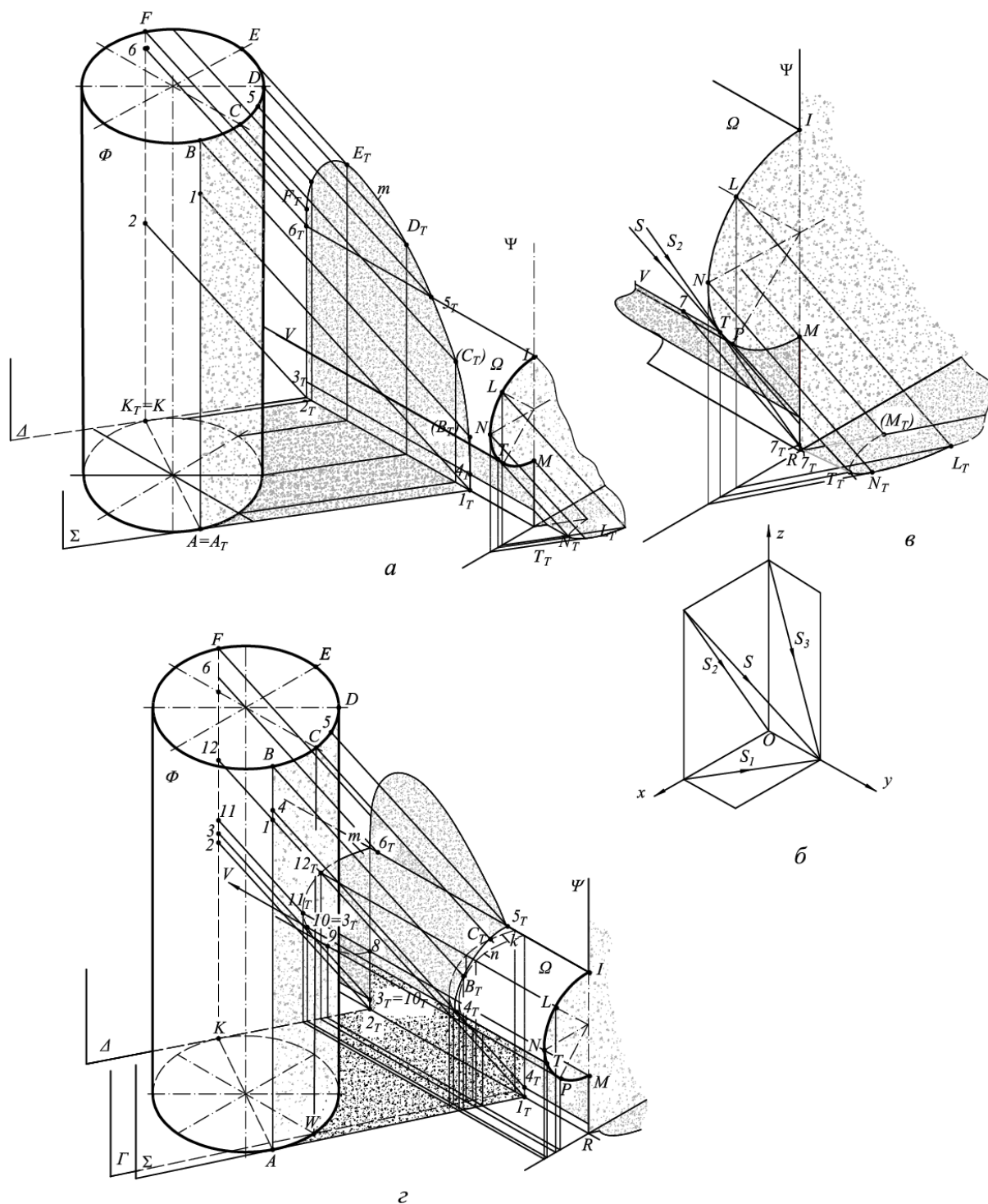


Рис.10.29

1. За допомогою світлового паралелепіпеда визначаємо напрям проекцій світлового променя на Π_2 і Π_3 (s_2 і s_3) (рис. 10.29, б). За напрямом s_1 проводимо дотичні до горизонтальної основи циліндра Φ . За напрямом s_2 будуємо дотичну до фронтальної основи циліндра Ω . (рис. 10.29, а, в). Точки дотику A , K , T – основи твірних, які визначають власні тіні на циліндрах.

2. Падаюча тінь циліндра Ω визначається дугою кола $I-L-N-T$ та прямою $T-V$ (Рис. 10.29, в). Вона попадає частково на горизонтальну площину ($I_T-L_T-N_T-T_T-7_T$), а частково – на площину Ψ .

3. Власна тінь циліндра Φ має контур $A-B-C-D-E-F-K$. (рис. 10.29, з). В даному прикладі на горизонтальну площину Π_1 – попадають тіні відрізків $A-1$ і $K-2$. Відрізки $1-B$ і $2-F$ дають тіні на площину Ψ . Завершує контур тіні крива m ($F_T-E_T-D_T-C_T-B_T$) (рис.10.29,а).

Але ділянки 3_T-6_T і 4_T-5_T попадають на поверхню циліндра Ω та тіні, від нього на площину Ψ .

4. Побудову тіні на циліндрі Ω показано на рис. 10.29, з. Вертикальна світлова площина Δ , яку проведено через пряму KF , перетинає циліндр Ω по лінії $8-9-10-11_T-12_T-6_T$. Нас буде цікавити її частина $10-11_T-12_T-6_T$, тому що вона знаходиться на освітленій частині поверхні циліндра. Важливо: тінь точки 3 на KF попаде в точку 10 на TV , а разом вони дадуть тінь на Ψ ($3_T=10_T$).

Аналогічну побудову виконано в площині Σ , проведеній через AB , але лінію перетину n використано тільки на ділянці 4_T-B_T . Від B_T до 5_T тінь дає крива $B-C-5$.

Тінь точки C шукаємо на лінії k , вздовж якої циліндр Ω перетинається із світловою площиною Γ , проведеної через твірну WC .

На рис. 10.30, а показано призму та півсферу, для яких визначено власні та падаючі тіні.

На рис. 10.30, в показано побудову контура власної тіні на півсфері – лінію кола, яке проходить через точки A , B , C , На лінії l , вздовж якої допоміжний циліндр з вертикальною віссю Oz , має дотик до сфери, визначено точку дотику A , прямої, паралельної до s_1 . На інших горизонтальних колах (m і n на висоті h_1 і h_2), які є лініями дотику до сфери допоміжних конусів із вершинами D і E (рис. 10.30, б), визначено точки B і C дотику прямих, проведених із D_T і E_T – тіней точок D і E на площинах ліній m і n . Падаюча тінь від півсфери на горизонтальну площину – лінія $A-B_T-C_T$.

Вертикальна світлова площина Δ (рис. 10.30, а), яку проведено через переднє ребро призми $1-2$, перетинає горизонтальну площину по прямій $1-M_T$, яка є тінню частини ребра $1-M$. Тінь відрізка $M-2$ попаде на сферу і повторить лінію a перетину сфери площиною Δ ($M-N-K...$), побудову якої показано на рис. 10.30, б, де точки M , N , K , ... знайдено в результаті перетину ліній m , n , l з площиною Δ . За допомогою таких самих площин побудовано тіні точок 3 , 4 , 6 , 7 .

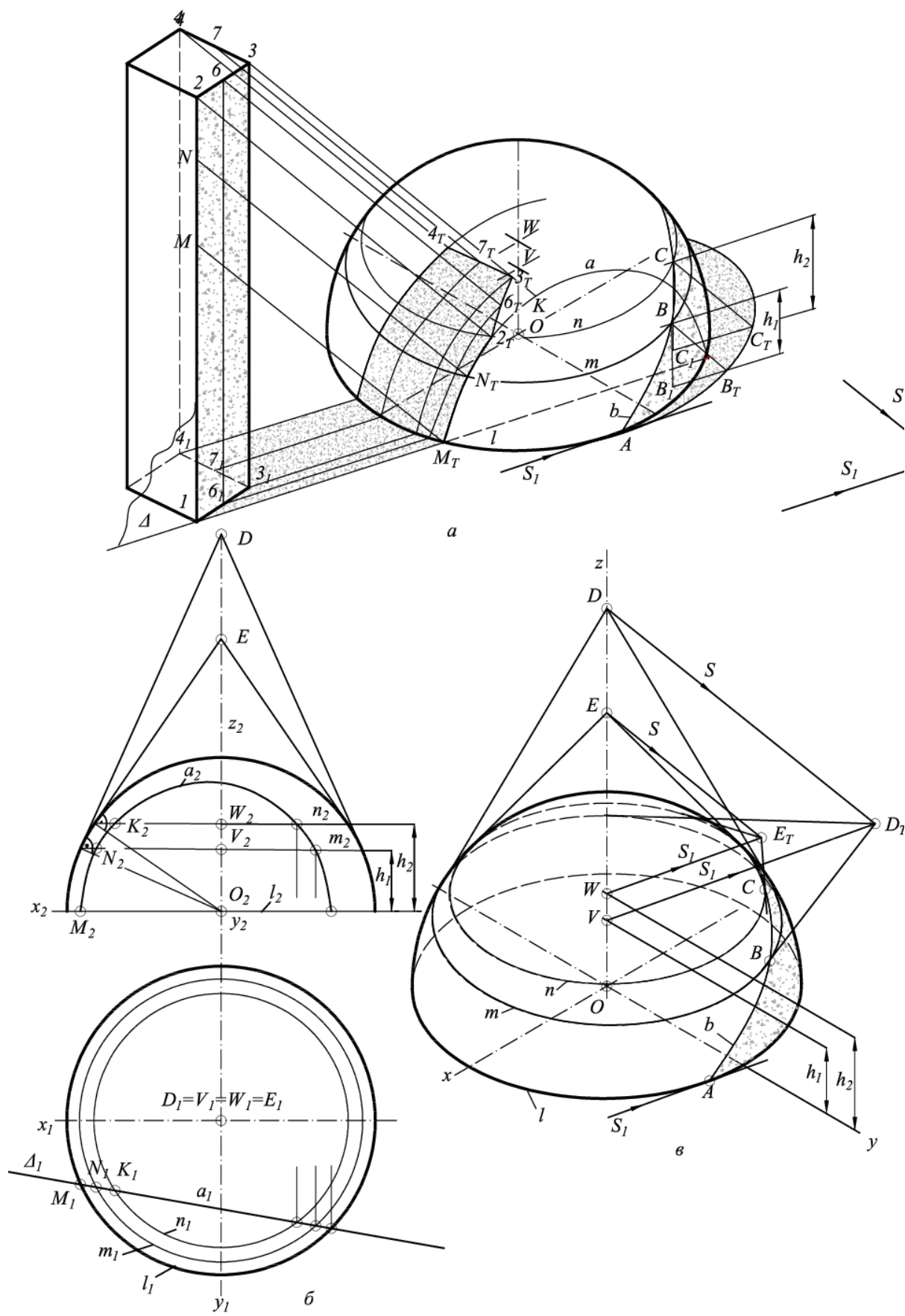


Рис.10.30

На рис. 10.31 дано композицію із чотирьох призм та циліндра. За допомогою вертикальних світлових площин на кожній фігурі визначено границі власних тіней. Побудовано падаючі тіні кожної фігури на горизонтальну площину. Від призм Ω і Ψ тіні попадуть на призму Φ та циліндр. Так, тінь ребра AB починається в точці A і проходить в напрямі S_1 до перетину з гранню Σ призми Φ в точці 1. Тінь відрізка 1- B падає на площину Σ . Тінь ребра BC починається в точці B_T і проходить в точку 2, в якій пряма BC перетинає продовження площини Σ . Фактично, пряма B_T -2 є проекцією світлового променя на площину Σ , а трикутник B -2- B_T - світлова площина, яка проходить через BC і перетинає Σ по прямій B_T -2. Із побудови видно, що на грань Σ падає тінь від частини BD відрізка BC . Тінь відрізка $2C$ падає на невидиму бічну грань призми Φ і далі – на горизонтальну площину (як невидимі, ці тіні не показано). На рисунку показано видиму частину тіні від ребра PT на горизонтальну площину.

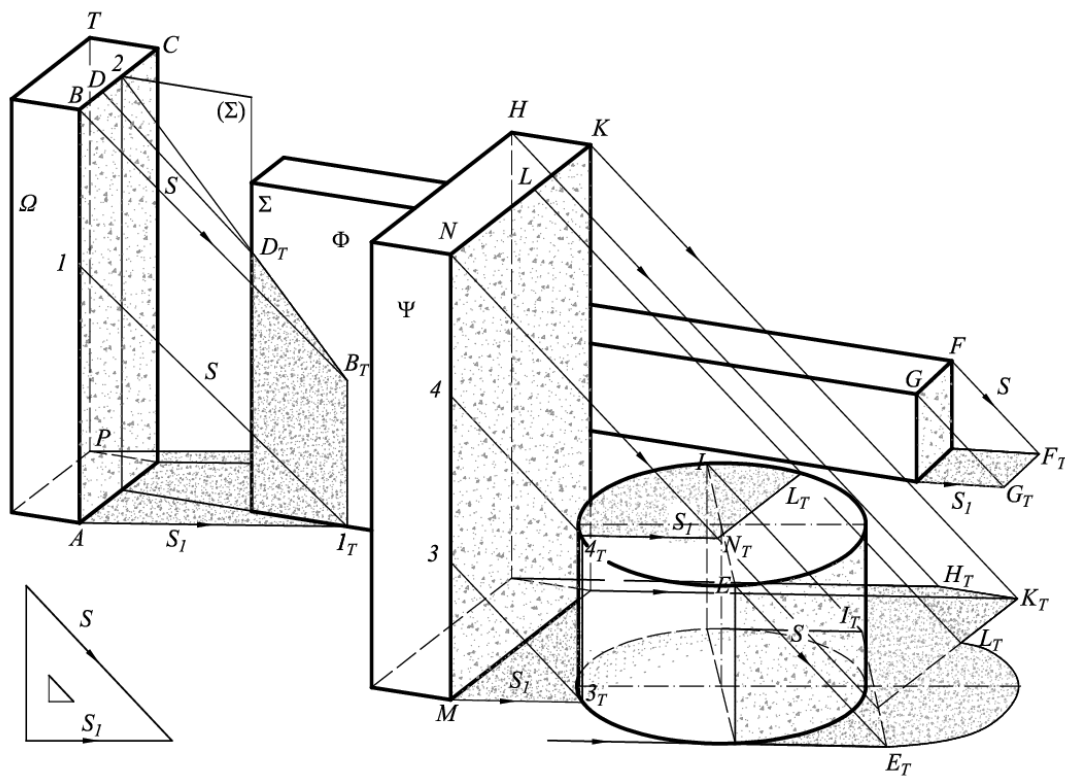


Рис.10.31

Тінь ребра MN призми Ψ повторює лінію перетину світлової площини, проведеної через це ребро, з горизонтальною площиною і циліндром – (лінія M_T - 3_T - 4_T ...) і закінчиться в точці N_T . Тінь горизонтального відрізка NK починається в точці N_T і на площині верхньої основи циліндра і на горизонтальній площині основи всієї композиції має напрям, паралельний NK . Зауважимо, що тінь точки L падає на лінію кола, а разом із тінню кола – на площину основи.

На рис. 10.32 представлено геометричну форму, яка має в плані вигляд правильного шестикутника і утворена похилими площинами. Тіні точок A, B, C, D, E, F збігаються із самими точками. Знайдено тіні точок $T, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ на горизонтальну площину. Цього достатньо для побудови тіней відрізків $A-1, T-1, B-2, 2-C, C-3, 3-D, T-4, 4-E, 6-F$.

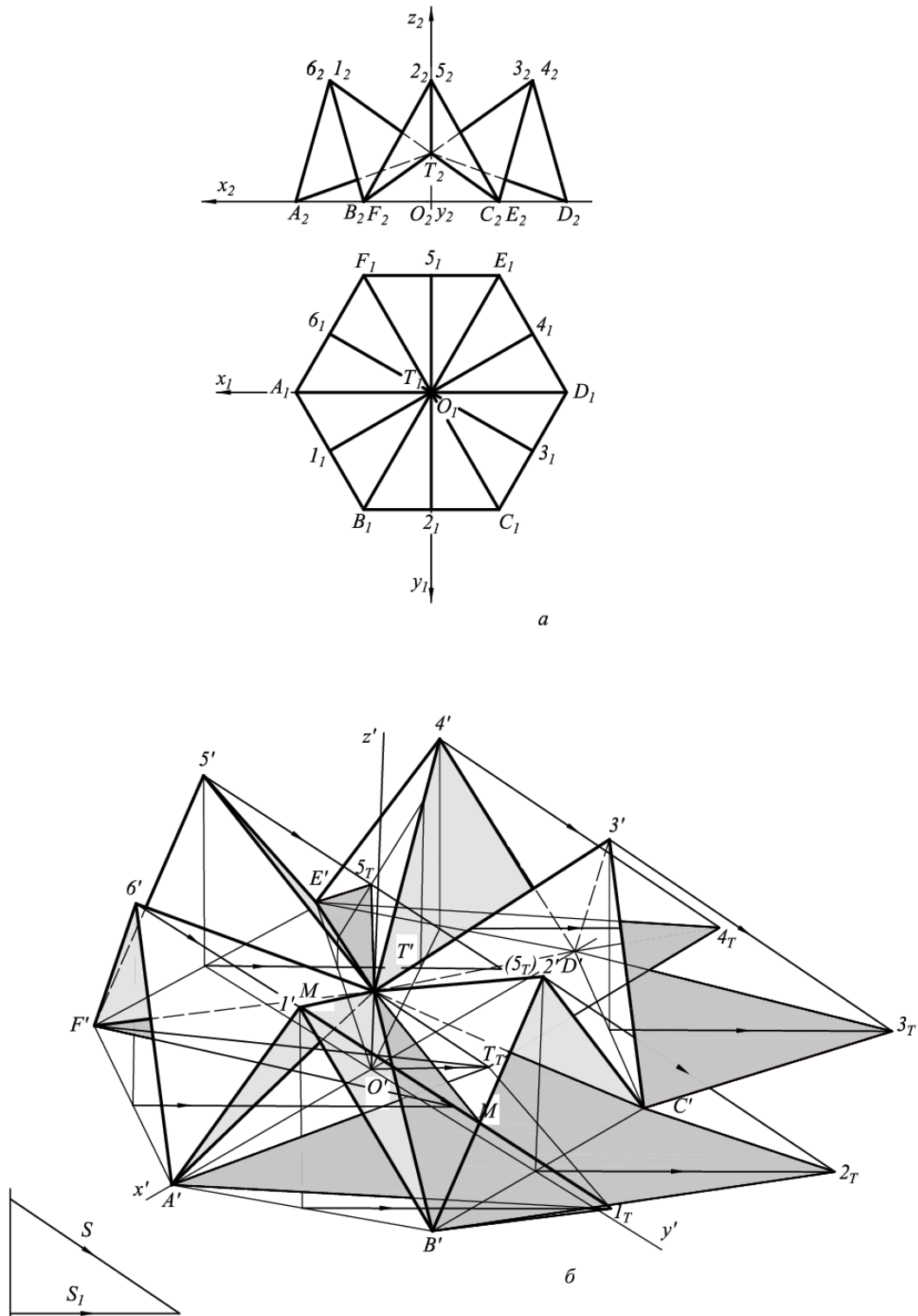
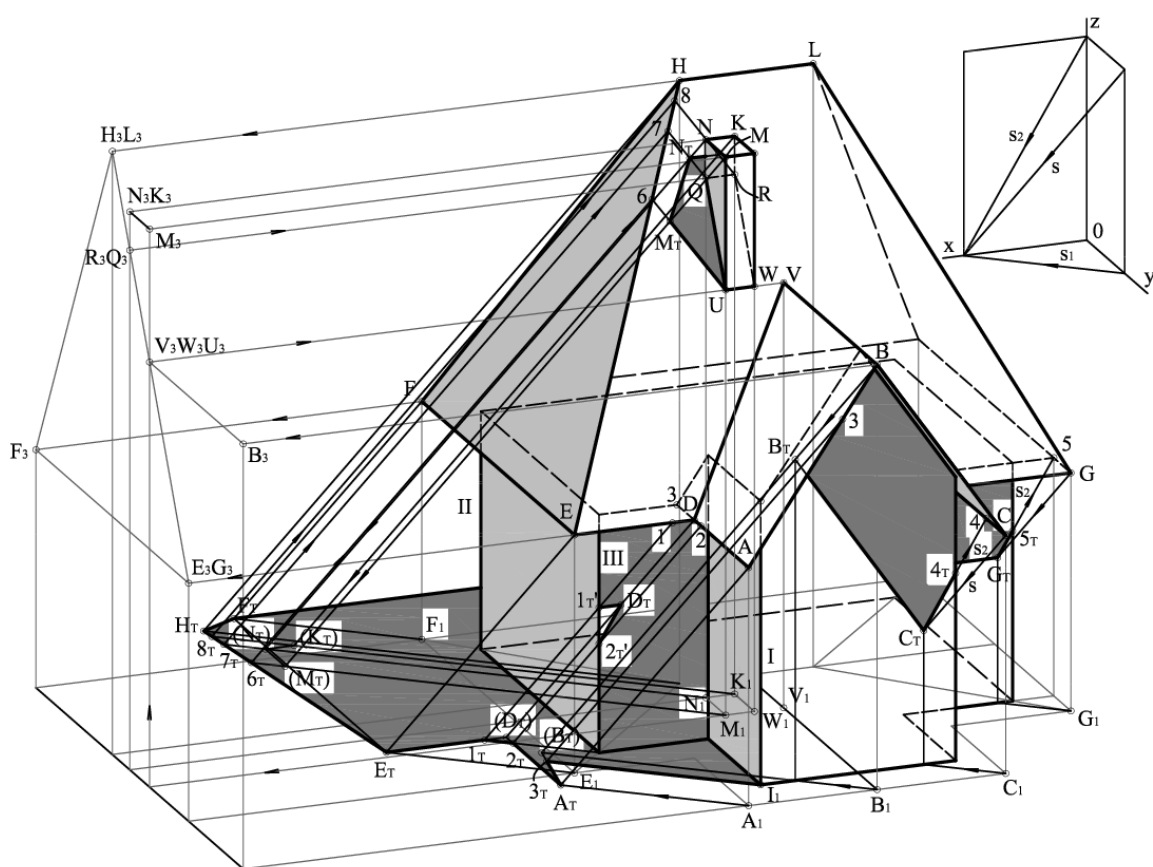


Рис.10.32

Пояснимо деякі побудови, які показано на рис. 10.33. Положення проєкції світлового променя s_1 показує, які вертикальні грані (стін та димаря) знаходяться у власній тіні. Щоб визначити, чи є освітленою похила площина $ABVD$ побудовано падаючі тіні точок A, D, B на горизонтальну площину. Розташування точок $A_T, (D_T), (B_T)$ вказує на те, що грань $ABVD$ – освітлена (див. рис. 10.18, б). Аналогічна побудова для точок E, F, H показує, що грань цього трикутника - у власній тіні (як на рис. 10.18, а).



Тіні точок C і G (C_T і G_T) визначено на відповідних «фасадах» із використанням вертикальних світлових площин. Через отримані точки проведено контури тіней паралельно відповідним лініям зрізів GE і CB . Тіні C_T-4_T та G_T-5_T проведено в напрямі фронтальної проекції світлового променя s_2 (див. рис. 10.5, б). Із рисунку також видно, від яких точок 4 і 5 відповідних зрізів утворюються точки тіней 4_T і 5_T . Тінь B_T невидима. Частина $B-3$ зрізу AB дає тінь на «свій фасад» (B_T-3_T), друга частина $3-A$ - на землю. Точка 3_T є також перетином тіні A_T - (B_T) і тіні вертикального ребра I. Побудова тіней зрізів, які проходять через точки A , D ,

$E, F, \dots$ пояснень не потребує. Видно, що вертикальне ребро II тіні не дає, а тінь вертикального ребра III перетинає тінь зрізу в точках 1_T і 2_T . Точки 1 на ED і 2 на AD показують частини $E-1$ і $A-2$ зрізів, тіні від яких попадуть на землю, і частини $1-D$ і $D-2$ тих же зрізів, тіні від яких падають на фасад. З'ясовуємо, що відрізок $1'_T - 2'_T$ вертикального ребра III дає тінь на землю ($1_T - 2_T$). Тінь $2'_T - D_T$ має напрям s_2 . (В той же час D_T може бути побудована за допомогою вертикальної світлової площини, проведеної через точку D) (на рисунку не показано).

Перші побудови власних і падаючих тіней на призматичних поверхнях та їх фрагментах було показано на рис. 10.17 та рис. 10.24. Розглянемо призматичну поверхню димаря, яка задана планом $M_1N_1K_1W_1$. Для визначення точок Q, R, U, W , в яких вертикальні ребра призми перетинають похилу площину $EHLG$, додатково знаходимо профільну проекцію споруди. Бачимо, що побудовані тіні (M_T), (N_T), не тільки попали в межі падаючої тіні даху, а ще знаходяться «до» (за напрямом променя) тіні $E_T - F_T$. Це означає, що тінь димаря падає тільки на площину $EHLG$. Для подальшої побудови здійснено уявне продовження вертикальних ребер призми (на рисунку не показано). Показано продовження тіней цих ребер до перетину із лінією тіні від ребра EH в точках $6_T, 7_T, 8_T$. Зворотними променями визначено положення точок 6, 7, 8 на EH . В ці точки буде направлено лінії тіней вертикальних ребер. Шукані точки M_T, N_T, K_T знайдуться на світлових променях s , проведених із M, N, K .

Запитання для самоконтролю

1. Чому для задання напрямку світлового променя в аксонометрії використовують діагональ, паралелепіпеда а не куба?
2. Як побудувати проекції світлового променя на площинах проекцій?
3. Що таке світлова площина?
4. Яку допоміжну світлову площину проведено через вертикальну пряму N_1N на рис. 10.17?

ЧАСТИНА ТРЕТЯ. ПЕРСПЕКТИВА

Перспективою є наочна проєкційно-зображальна система, що базується на центральному проєкціюванні і враховує особливості зорового сприйняття людини. Перспектива є найбільш наочною з усіх проєкційно-зображальних систем, оскільки апарат її побудови враховує особливості формування зображення в оці людини. Завдяки своїй наочності перспектива широко застосовується у таких галузях творчої діяльності людини як архітектурне проєктування, малювання, живопис.

Обмеженість застосування перспективних зображень пояснюється відносною складністю побудов і розв'язань метричних задач у центральних проєкціях.

Основи теорії перспективи було закладено ще в епоху Відродження, коли видатні митці того часу намагалися знайти геометричні закономірності побудови зображень у живопису. Тому в перспективі історично склалась своєрідна термінологія, яка дещо відрізняється від термінів, що використовуються в інших проєкційно-зображальних системах [6].

Залежно від форми поверхні, на якій будується зображення, перспектива буває лінійною (на площині). Панорамною (на циліндричній поверхні) та сферичною (на поверхні сфери). У свою чергу лінійна перспектива може бути на *вертикальній картині*, якщо площина перспективних проєкцій вертикальна, і на *похилій картині*, якщо площина проєкцій займає загальне положення.

РОЗДІЛ 11. ПЕРСПЕКТИВА НА ВЕРТИКАЛЬНІЙ КАРТИНІ

11.1. Апарат побудови перспективи

Апарат побудови перспективи складається з чотирьох основних площин (рис.11.1):

K' – **картинна площина** або **картина**, на якій будується перспективне зображення об'єкта (площина перспективних проєкцій);

Π_1 – **предметна площина** – горизонтальна площина, на якій розміщуються об'єкти. Ця площина відповідає площині землі;

Γ – **площина горизонту** – горизонтальна площина, яка проходить на рівні очей людини;

N – **нейтральна площина** – площина, яка паралельна до картинної площини і знаходиться на відстані очей людини від неї.

Характерними лініями і точками апарату перспективи є:

л.г. – **лінія горизонту** – лінія перетину площини горизонту Γ з картиною K' . Лінія горизонту є центральною проєкцією невласної прямої площини Π_1 основи;

л.о. – **лінія основи**, яка визначається при перетині предметної площини Π_1 з картиною K' ;

C – **точка зору**, яка відповідає положенню очей людини і є центром проєкціювання;

CO – **головний промінь зору**, що проходить через точку зору (C) перпендикулярно до картинної площини (K). Довжина відрізка CO називається зоровою відстанню.

C_1 – **основа точки зору** (ортогональна проєкція точки зору C на предметну площину Π_1);

O – **головна точка картини**;

O_1 – **основа головної точки**;

α – **кут ясного бачення** людини при нерухомих очах ($18^\circ \leq \alpha \leq 53^\circ$), який обмежує зображення на картині. При куті $\alpha < 18^\circ$ перспективне зображення стає невиразним і незначно відрізняється від аксонометричного. При куті $\alpha > 53^\circ$ на периферії перспективного зображення виникають значні спотворення.

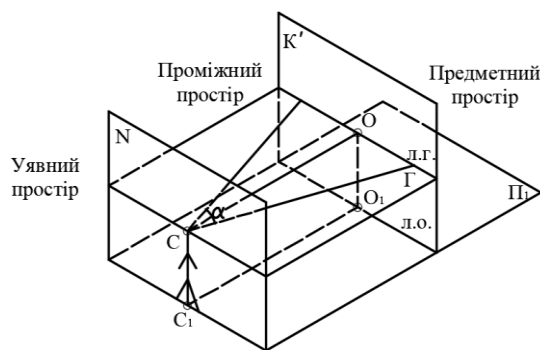


Рис. 11.1

Площини K' і N поділяють простір на три частини. Частина простору за картинною площиною K' відносно точки зору C називається **предметним простором**. Частина простору між площинами K' і N називається **проміжним простором**, а перед площиною N – **уявним простором**. Усі об'єкти, для яких будуються перспективні зображення, розміщуються в предметному і проміжному просторі. Якщо об'єкт знаходиться в уявному просторі, то його центральна проєкція на площині K' буде перегорнутою. Тому ця частина простору не використовується для побудови перспективи.

11.2. Перспектива точки, прямої і площини

Для побудови перспективи прямої лінії достатньо побудувати перспективу двох її довільних точок, але найзручнішими для побудов є дві характерні точки прямої (рис. 11.2):

1. Точка M_K перетину прямої m з картинною площиною. Ця точка має назву «картинний слід прямої (m)».

2. Невласна (нескінченно віддалена) точка прямої m .



Рис. 11.2

Аналогічно перспективу площини (Δ) задають картинним слідом (δ_K) та лінією збігу $\delta_{3\phi}$. Картинний слід δ_K є лінією перетину даної площини (Δ) з картинною площиною K' . Для визначення лінії ($\delta_{3\phi}$) збігу площини (Δ) через точку зору (C) проводять площину паралельно даній площині (Δ) до перетину з картинною площиною (K'). Картинний слід (δ_K) площини (Δ) і лінія її збігу ($\delta_{3\phi}$) є паралельними прямими. Лінія збігу площини є перспективною проекцією невласної прямої даної площини (Δ) і одночасно лінією збігу множини площин, які паралельні даній.

Розглянемо деякі властивості перспективних зображень прямих і площин окремого положення (рис. 11.3).

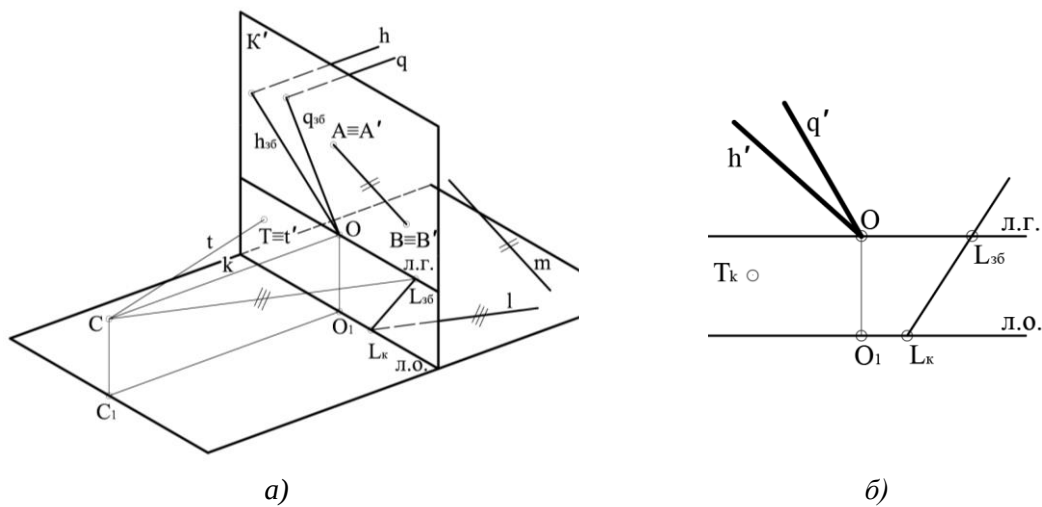


Рис. 11.3

Точка збігу L_{36} довільної горизонтальної прямої (l) належить лінії горизонту (л.з.). Лінія горизонту є лінією збігу всіх горизонтальних площин.

Точкою збігу всіх прямих ($h, q \dots$), перпендикулярних до картинної площини (K'), є головна точка (O) картини (K). Лінії збігу всіх площин, які перпендикулярні до картинної площини, проходять через головну точку (O) картини.

Точкою збігу прямої (m), яка паралельна до картинної площини (K'), або належить їй, є невласна точка картинної площини (K'), тобто перспектива прямої m паралельна до самої прямої.

Перспектива $(A'B')$ відрізка (AB) прямої, що належить картинній площині, збігається з самим відрізком і тому є натуральною величиною відрізка AB .

Перспективною прямої (t), що проходить через точку (C) зору є її картинний слід T_K . Картинний слід площини, яка проходить через точку C зору, збігається з лінією збігу цієї площини.

Точки збігу множини прямих, що нахилені до картинної площини під кутом 45° , утворюють коло, радіус якого дорівнює зоровій відстані, а центром є головна точка O картини (рис. 11.4). $A_K F_{36}$ - перспектива прямої, що лежить у предметній площині і нахилена до картини під кутом 45° .

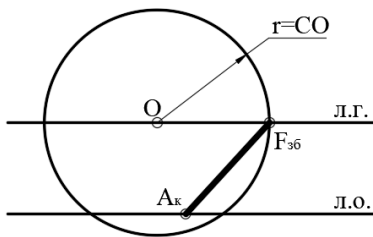


Рис. 11.4

На рис. 11.5 показано побудову точок і ліній збігу відповідно ребер і граней тригранної призми, що має форму двосхилого даху будинку:

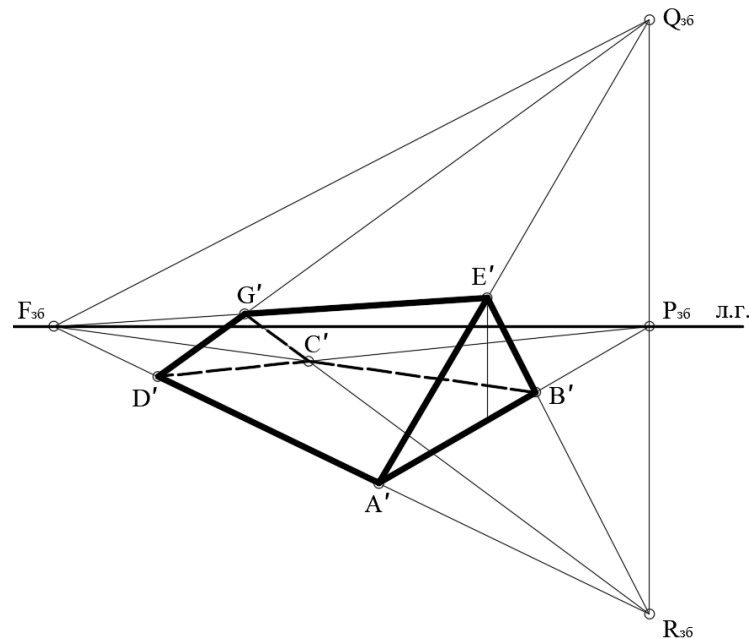


Рис. 11.5

F_{36} - точка збігу паралельних прямих EG , AD і BC належить лінії горизонту, оскільки ці прямі є горизонтальними.

P_{36} - точка збігу прямих AB і CD , яка так само належить лінії горизонту;

Q_{36} - точка збігу паралельних прямих AE і DG ;

R_{36} - точка збігу паралельних прямих BE і CG ;

$F_{36}P_{36}$ (л.г.) – лінія збігу горизонтальної площини $ABCD$;

$Q_{36}R_{36}$ - лінія збігу паралельних вертикальних площин ABE і DCG ;

$F_{36}Q_{36}$ - лінія збігу похилої площини $ADGE$;

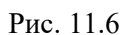
$F_{36}R_{36}$ - лінія збігу похилої площини $BEGC$.

11.3. Вибір точки зору і картинної площини

При побудові перспективних зображень на апарат центрального проєкціювання накладаються певні обмеження, пов'язані з особливостями зорового бачення людини. Тому вибір точки зору і картинної площини має принципове значення. Крім того, вибір точки зору впливає на інформативність та наочність перспективного зображення.

На рис. 11.6 задано ортогональні проєкції прямокутного паралелепіпеда, який можна вважати стилізованим образом будинку. Вихідними даними для побудови перспективи є ортогональні проєкції, де призначаються лінія горизонту на рівні очей спостерігача та точка S зору в плані за умови, щоб кут α зору не перевищував 53° . Положення точки S зору в плані обирається так, щоб найкраще забезпечити огляд

У практиці архітектурного проектування, де зображувані об'єкти мають домінуючі напрями прямих ліній, існує два основних принципи побудови перспективних зображень, а саме, з використанням лінії основи і без використання останньої. Розглянемо їх на прикладі побудови перспективи багатокутника, що належить предметній площині.



Кожна зі сторін шестикутника визначається картинним слідом і точкою збігу. Картинні сліди всіх сторін належать лінії основи, оскільки шестикутник належить предметній площині. Наприклад, сторона BD шестикутника визначається точкою збігу $P_{зб}$ та картинним слідом 1 . Вершини шестикутника визначаються в результаті перетину відповідних сторін.

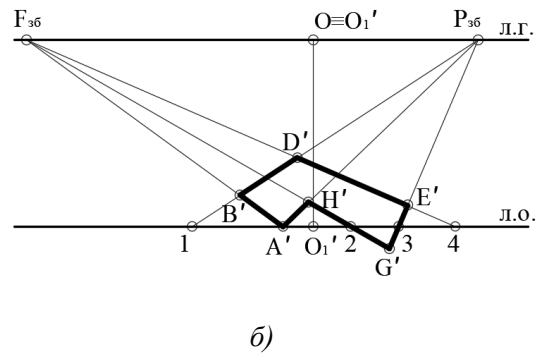
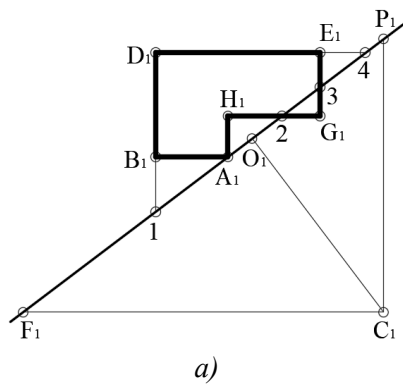


Рис. 11.7

На рис. 11.8. показано побудову перспективи того самого шестикутника без використання лінії основи.

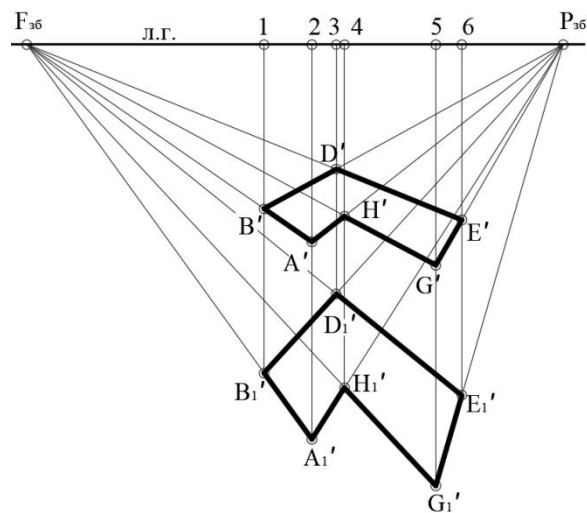
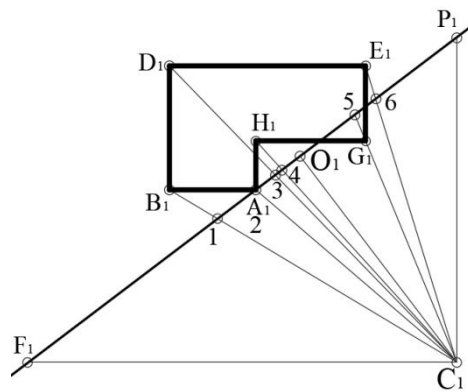


Рис. 11.8

Через вершини шестикутника проведено вертикальні зорові площини 1, 2, 3, ... 6, які перетинають картинну площину по вертикальних прямих. Сліди цих площин і точки збігу $F_{зб}$ та $P_{зб}$ переносять на перспективне зображення (рис. 11.8, б). Оскільки точка A належить картині, то відстань від A до лінії горизонту на перспективі дорівнює висоті точки зору ($A'2$). Точки B' і H' визначаються в результаті перетину прямих $A'F_{зб}$ і $A'P_{зб}$ з відповідними картинними слідами вертикальних зорових площин. Інші вершини визначаються так само з послідовним використанням раніше побудованих вершин.

Зміна висоти точки зору впливає на вигляд перспективи. На рис. 11.8 показано приклад, коли висоту точки зору $2A'$ збільшено до $2A'_1$.

Перспективу довільної плоскої кривої, яка належить предметній площині, будують по точкам, які визначають на перетині прямих двох довільних напрямів (рис. 11.9).

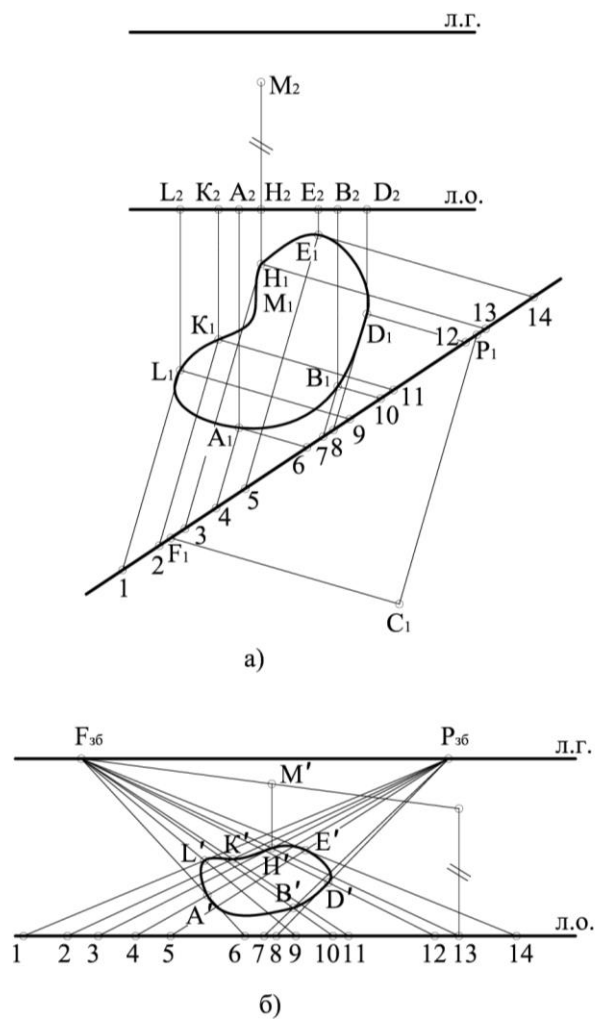


Рис. 11.9

Наприклад, перспектива A' точки A визначається в результаті перетину прямих $F_{зб}6$ та $P_{зб}4$.

Щоб побудувати довільну точку M , яка знаходиться на висоті M_2H_2 від предметної площини P , потрібно через точку M провести вертикальну площину і у

картинній площині через позначку 13 відкласти висоту H_2M_2 . Усі точки прямої FM' , у тому числі і точка M знаходяться на висоті H_2M_2 .

11.4. Радіальний спосіб і спосіб бічної стіни

Якщо ортогональні проекції об'єкта задано так, що картинна площина є профільною, то перспективне зображення будують способом, який називається **радіальним**. На рис. 11.10 показано побудову перспективи стилізованого будинку радіальним способом. План будинку повернуто відносно профільної картинної площини так, щоб з точки зору C було видно два фасади. Перспектива кожної точки знаходиться як точка перетину зорового променя з картинною площиною.

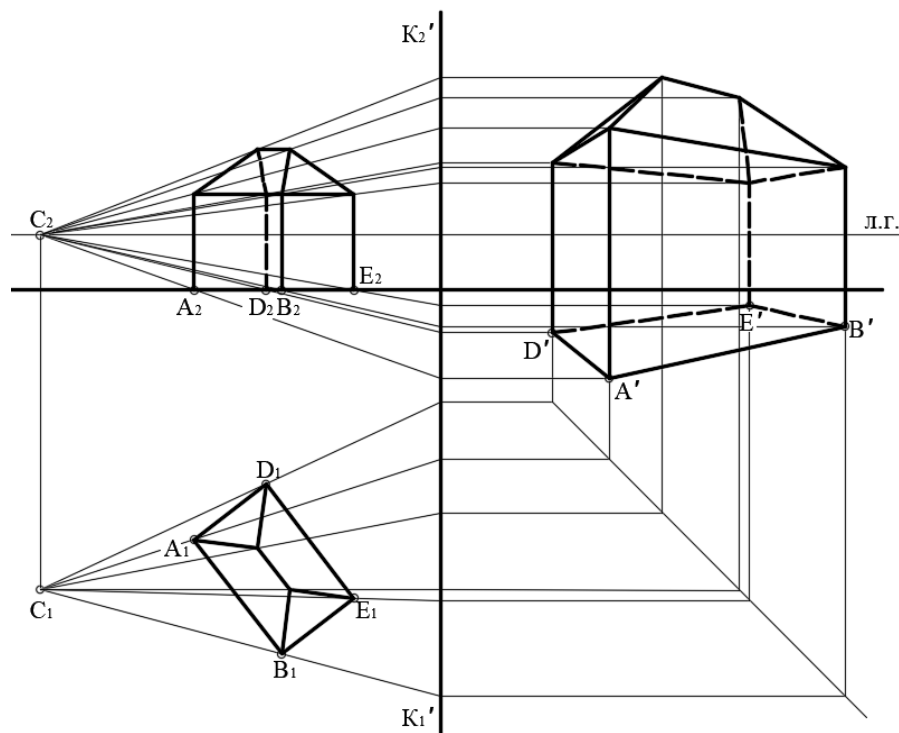


Рис. 11.10

Недолік цього способу полягає в тому, що для побудови перспективи неможливо використати ортогональні проекції у звичайному положенні об'єкта, коли його домінуючі напрями паралельні до площин проекцій.

Такого недоліку позбавлений спосіб бічної стіни. На заданих ортогональних проекціях (рис. 11.11) призначено лінію горизонту (л.г.), точку зору (C) та положення картинної площини (K').

На перспективному зображенні призначено вертикальну бічну стіну картинним слідом q_K та точкою збігу $Q_{зб}$. Пряма QT є лінією перетину бічної стіни з предметною площиною. Для досягнення більш точних побудов застосовано прийом «опущеного плану», так як було показано на рис. 11.8. Для цього призначено нову предметну площину нижче основної на відстані TR . Цю нову предметну площину

задано картинним слідом r , на який перенесено з горизонтальної проекції площини K' картинні сліди 1-5 домінуючих напрямів об'єкта. Опущений план побудовано за картинними слідами 1-5 та точками збігу $F_{зб}$ і $P_{зб}$ домінуючих напрямів.

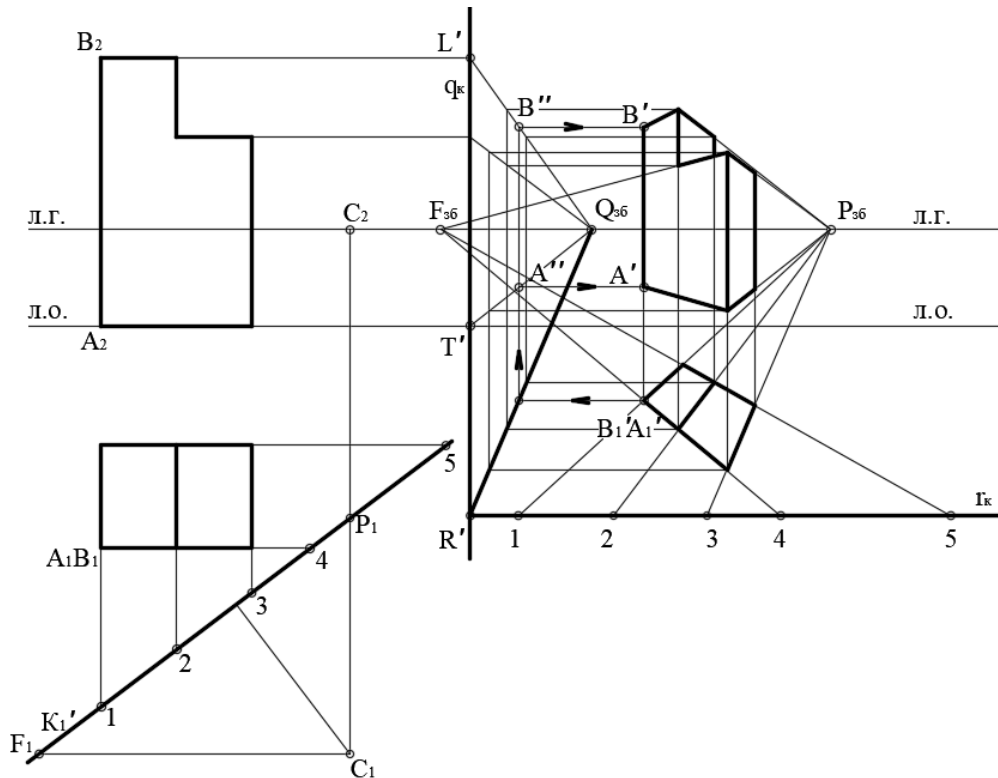


Рис. 11.11

Бічну стіну використано для визначення положення точок об'єкта по висоті. Наприклад, для визначення точки B на перспективі через її вторинну проекцію B_1' проведено горизонтальну лінію до перетину з прямою $R'Q_k$. Тоді на бічній стіні визначено висоту $A''B''$ і спроекційовано її на відповідне ребро об'єкта в перспективі.

11.5. Ділильний масштаб

Ділильним масштабом називають поділ перспективи відрізка прямої у заданому відношенні. Відношення довжин відрізків однієї прямої у перспективі в загальному випадку спотворюється. Якщо пряма паралельна до картинної площини, це відношення не спотворюється, і дана властивість використовується для поділу відрізка прямої у перспективі у заданому відношенні.

Спочатку розглянемо поділ у заданому відношенні відрізка, який належить предметній площині. На рис. 11.12, *a* показано план і перспективу відрізка AB , що належить предметній площині і який потрібно поділити у відношенні $\frac{AD}{DB} = \frac{m}{n}$. На лінії основи від точки A відкладено відрізки $A_1E_1 = m$ і $E_1G_1 = n$. Точку G_1 з'єднано з точкою B , а через точку E_1 проведено пряму E_1D_1 паралельно B_1G_1 .

Паралельні прямі E_1D_1 і B_1G_1 у плані поділяють відрізок A_1B_1 у відношенні $\frac{m}{n}$. У перспективі ці прямі мають точку збігу $P_{зб}$, яка визначається у результаті перетину прямої $B'G'$ з лінією горизонту. Точка D' поділяє перспективу $A'B'$ відрізка AB у відношенні $\frac{m}{n}$.

Якщо точка A не є картинним слідом прямої AB (рис. 11.12, б), то відрізок $A'G' = A_1G_1$ не є перспективою відрізка A_1G_1 , але відношення $\frac{A'E'}{E'G'} = \frac{m}{n}$ зберігається, оскільки пряма AG паралельна до картинної площини. Тому від точки A' у перспективі можна відкласти натуральні величини $A'E' = m$ та $E'G' = n$, і подальші побудови виконати так як показано на рис. 11.12, а.

Побудови, які показано на рис. 11.12, б можна узагальнити для поділу у заданому відношенні відрізка прямої загального положення. На рис. 11.13 на прямій $F_{зб}M_K$, де $F_{зб}$ - точка збігу прямої, а M_K - її картинний слід, задано відрізок $A'B'$, який потрібно поділити у відношенні $m:n:l$. Через пряму FM проведено довільну площину FGM , яку задано лінією збігу $f_{зб}$ і точкою M_K . Через точку A' відрізка $A'B'$ проведено пряму $A'R'$ паралельно лінії збігу $f_{зб}$. Пряма AR є паралельною до картинної площини K' і тому на ній можна відкласти натуральну величину відрізків AN , NL і LE , де точки N і L поділяють відрізок AR у відношенні $m:n:l$. Через точки B' і R' проведено пряму і на $f_{зб}$ визначено її точку збігу $H_{зб}$. Прямі BR , DL і EN у площині FGM є паралельними і тому мають спільну точку збігу $H_{зб}$, а відрізок AB у перспективі поділяється у відношенні $m:n:l$.

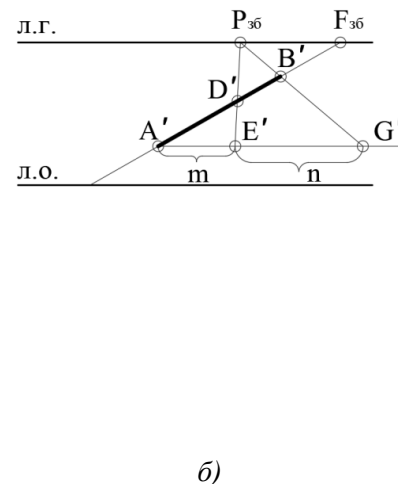
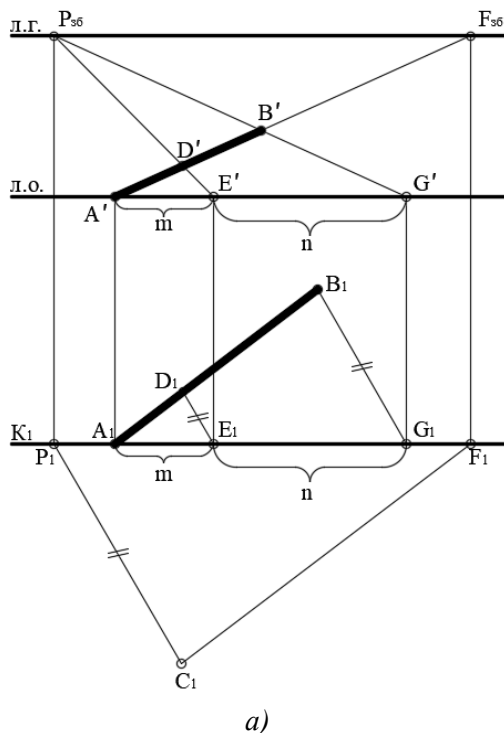


Рис. 11.12

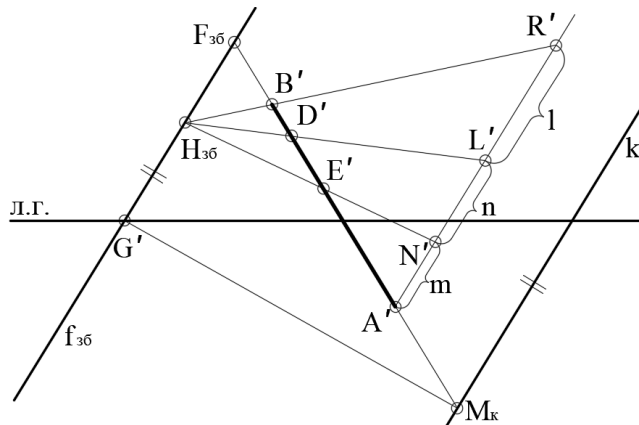


Рис. 11.13

11.6. Спосіб архітекторів

Способом архітекторів називають сукупність прийомів, які найчастіше використовуються при побудові перспектив архітектурних споруд. Такими прийомами є:

1. максимальне використання точок збігу домінуючих напрямів;
2. відсутність лінії основи на перспективному зображенні;
3. застосування ділильного масштабу для побудови перспективи архітектурних деталей.

На рис. 11.14 показано побудову перспективи будинку способом архітекторів.

На плані (рис. 11.14, а) призначено точку зору C та картинну площину, яка проходить через правий передній кут будинку. На фасаді призначено лінію горизонту (Л.Г.). На картинній площині визначено точки збігу $F_{зб}$ і $G_{зб}$ домінуючих напрямів та картинні сліди вертикальних зорових площин, що проходять через видимі вертикальні ребра та точки об'єкта.

На рис. 11.14, б розміщено лінію горизонту, на яку зі збільшенням у два рази перенесено точки збігу $F_{зб}$ і $G_{зб}$ та картинні сліди вертикальних зорових площин.

Побудовано перспективу основних точок і ліній об'єкта так, як було показано на рис. 11.6. Для визначення висот точок об'єкта у перспективі від лінії горизонту використано переднє праве ребро, яке знаходиться картинній площині і тому проєкціюється без спотворення. На цьому ребрі можна відкладати необхідні висоти з відповідним збільшенням.

Для визначення висоти точок 7 і 8 гребеня даху через них проведено вертикальну площину до перетину з картинною площиною (позиція 9). Для розміщення прорізів вікон на фасаді використано ділильний масштаб (як на рис. 11.2).

При компоновці перспективного зображення на форматі точки збігу домінуючих напрямів можуть опинитися за межами формату. У цьому випадку широко застосовують спеціальну лінійку і лекала у вигляді дуг кіл (рис. 11.15).

Відомі також способи побудови перспективи з використанням допоміжного проєкціювання [підручник], але вони зводяться до різних інтерпретацій вже розглянутих способів.

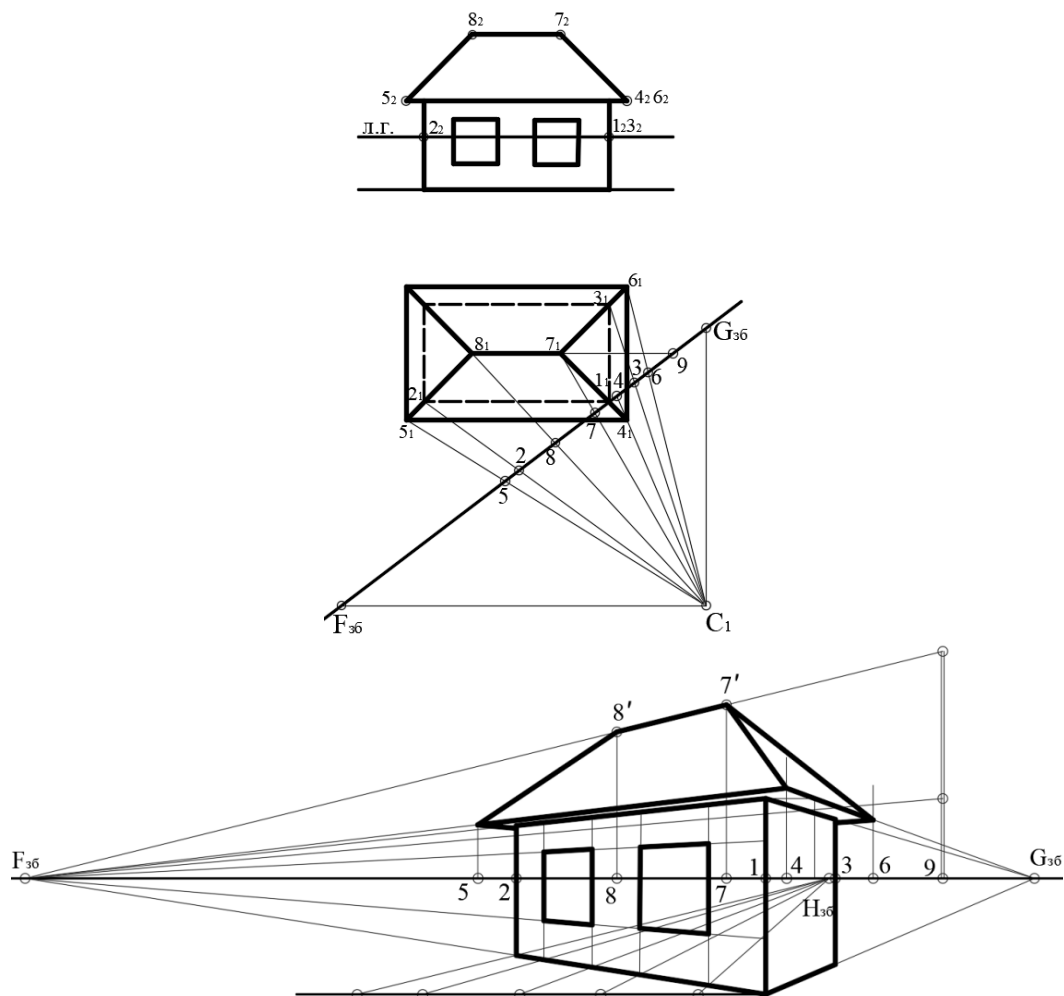


Рис. 11.14

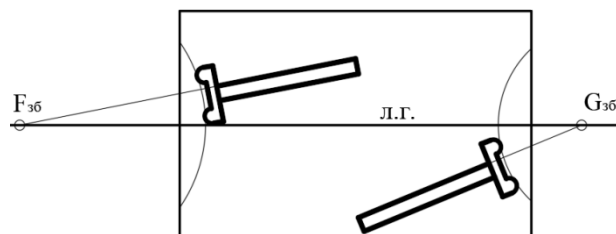


Рис. 11.15

11.7. Спосіб накладеної сітки

Спосіб накладеної сітки використовують для побудови перспективних зображень ділянок місцевості з комплексною забудовою. Для покращення огляду забудови, щоб будівлі на зображенні якнайменше закривали одна одну, такі перспективи будують з підвищеною точкою зору «з пташиного польоту» (рис. 11.16).

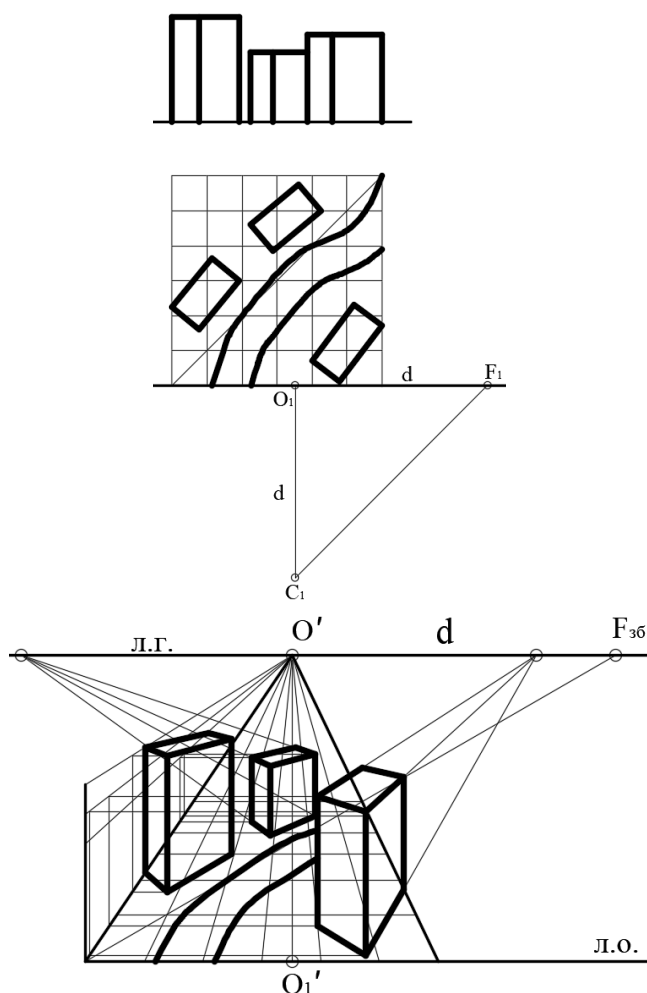


Рис. 11.16

На план місцевості з забудовою накладають квадратну сітку так, щоб одна лінія сітки збігалась з лінією основи. Крок сітки залежить від насиченості плану.

Для побудови перспективи (рис. 11.16, б) призначають лінію горизонту і лінію основи на відстані, що дорівнює обраній висоті точки зору. На лінію основи переносять поділ сторони сітки, а на лінію горизонту – головну точку картини. Перспективу сітки будують використовуючи діагональ. Точка F_{36} збігу діагоналі знаходиться на лінії горизонту на відстані d (дистанційна відстань) від головної точки O' , що дорівнює відстані від точки C зору до картинної площини. Лінії сітки, які перпендикулярні до картинної площини, визначаються головною точкою O' та

точками поділу лінії основи. На перетині цих ліній з діагоналлю визначають лінії сітки, що паралельні до картинної площини. В побудовану сітку вписують з певним наближенням елементи плану. Способом бічної стіни визначають висоти вертикальних ребер на перспективному зображенні. Точність побудов перевіряють таким чином, щоб точки збігу домінуючих напрямів об'єктів були на лінії горизонту.

11.8. Перспектива поверхонь обертання

Поверхні обертання мають поширення як в класичних, так і сучасних архітектурних формах (рис. 11.17). Контур поверхні обертання у перспективі будується як лінія, що огинає множину перерізів поверхні у вигляді кіл.

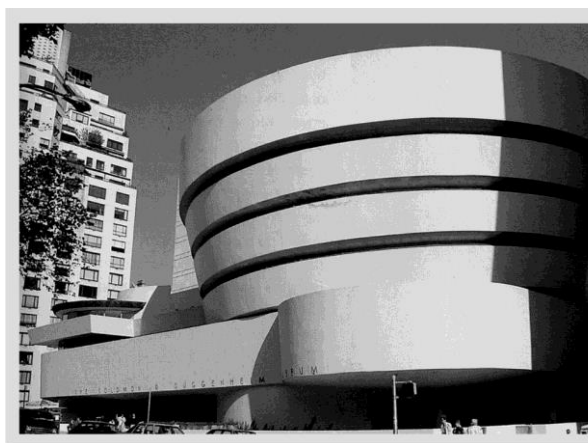
У більшості випадків поверхні обертання архітектурних форм мають або вертикальну вісь, або горизонтальну. Тому основою побудови перспективи поверхні обертання є перспектива кола, яке належить або горизонтальній, або вертикальній площині.



а)



б)



в)

Рис. 11.17

Перспективою кола у загальному випадку є еліпс. Вважається, що еліпс можна достатньо точно окреслити за 8 точками, більш-менш рівномірно розміщеними вздовж кривої. На рис. 11.18 показано побудову перспективи кола у горизонтальній площині, центр якого знаходиться у вертикальній площині, що проходить через головний промінь CO .

Коло вписується у квадрат, сторони якого попарно паралельні і перпендикулярні до картинної площини. Фіксуються 8 точок кола – 4 точки на сторонах квадрата і 4 на діагоналях.

На перспективному зображенні призначають лінію основи і лінію горизонту, відстань між якими дорівнює висоті точки зору. Через зафіксовані точки кола на плані проводять прямі, які утворюють ортогональну сітку, і на лінію основи переносять точки 1-5 цієї сітки.

Перспективу сітки будують за допомогою діагоналі квадрата, яка на перспективі визначається картинним слідом 5 та точкою збігу $F_{зб}$. Відповідні вузли сітки у перспективі визначають еліпс, який є перспективою кола a . При побудові перспективи кола дуже важливо, щоб зображення було в межах кута α ясного бачення. Інакше перспективою кола буде нахилений еліпс, що не відповідає особливостям зорового сприйняття людини (рис. 11.18).

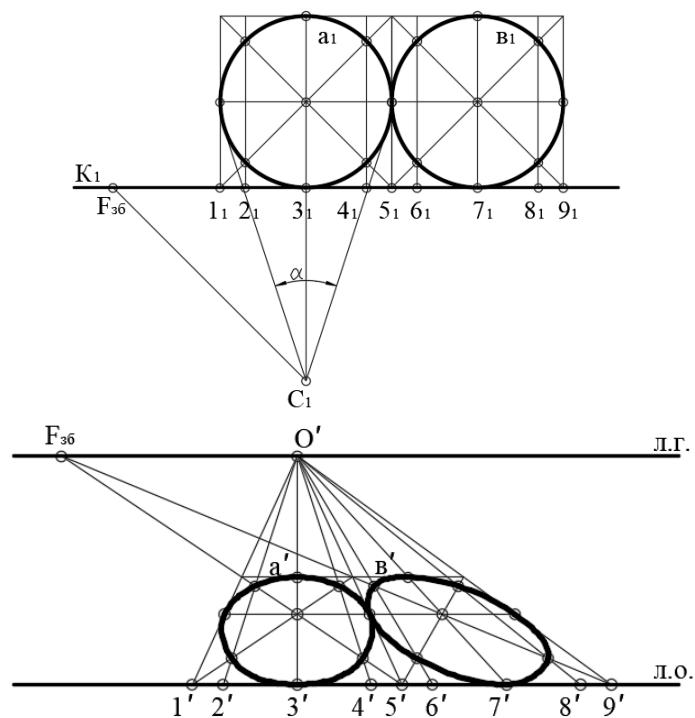


Рис. 11.18

На рис. 11.19 показано побудову перспективи вертикального циліндра, що стоїть на предметній площині. Картинна площина перерізає циліндр по двох вертикальних відрізках, тому їх довжина в перспективі не спотворюється. Кола двох

основ побудовано так, як було показано на рис. 11.19. Контурні твірні у перспективі є дотичними до кіл основ.

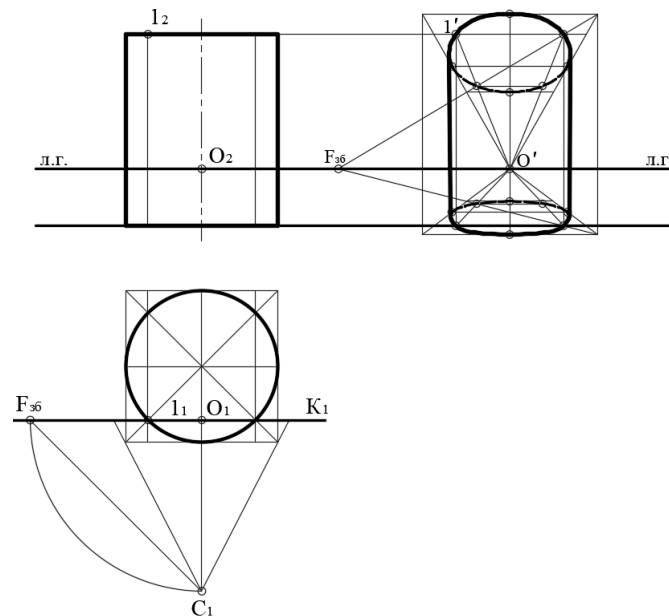


Рис. 11.19

На рис. 11.20 побудовано перспективу циліндра обертання, що лежить на предметній площині. Для побудови перспективи використано лише дві вертикальні зорові площини, що проходять через точки D і E . Основи циліндра вписано в квадрати. Спочатку побудовано перспективу цих квадратів, потім в них вписано перспективні зображення кіл-основ. Сторона AB квадрата належить картинній площині і це використано для його побудови у перспективі.

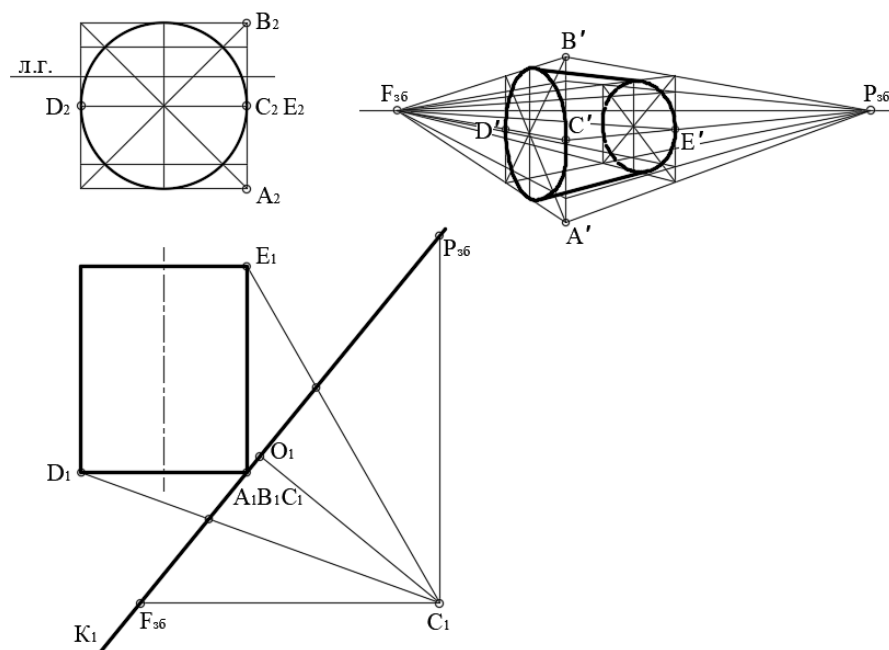


Рис. 11.20

На рис. 11.21. на прикладі бані показано побудову перспективи поверхні обертання. Картинну площину проведено через вісь поверхні, а точку C зору призначено у площині горизонту так, щоб головна точка картини була на осі поверхні. Для побудови точок перерізів на діагоналях описаних квадратів використано ту властивість, що вписане коло поділяє наближено півдіагоналі квадрата у відношенні 7:3, а це відношення на поздовжній стороні квадрата у перспективі не спотворюється.

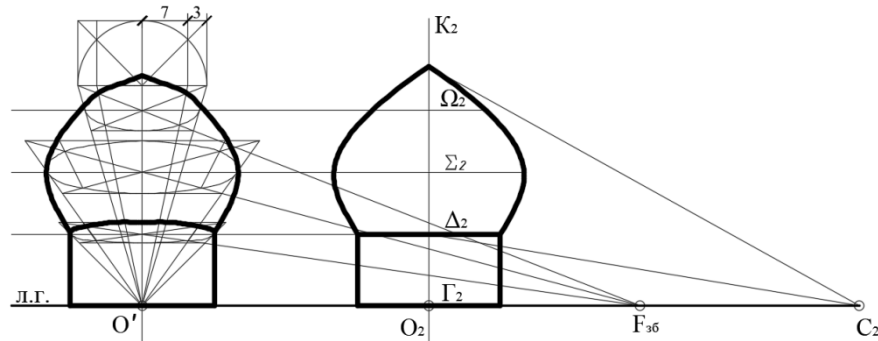


Рис. 11.21

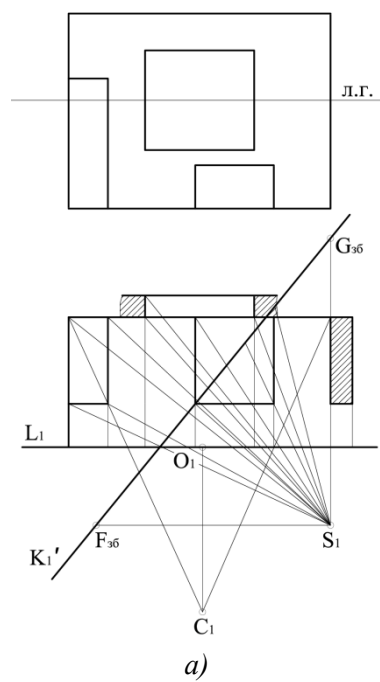
11.9. Перспектива інтер'єра

Особливість перспективи інтер'єра полягає в тому, що кут огляду повинен бути більшим ніж кут ясного зору, оскільки, з одного боку, зорова відстань обмежена габаритами приміщення, а з іншого боку, на зображенні потрібно показати якнайбільше елементів інтер'єра.

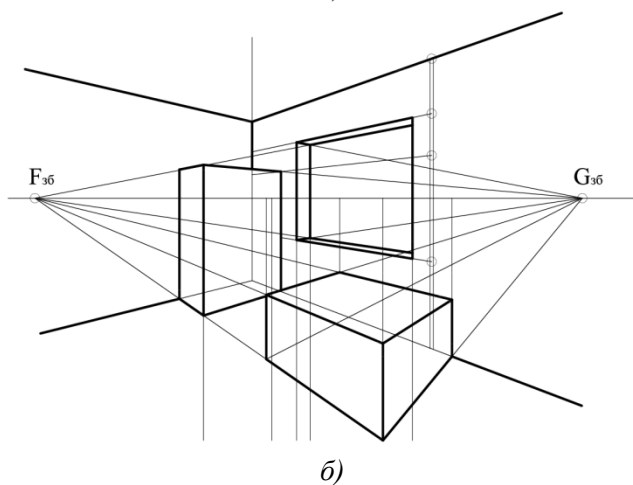
За положенням картинної площини розрізняють два типи перспективи інтер'єра прямокутного в плані приміщення: звичайна або «кутова» перспектива, і так звана «фронтальна перспектива», коли картинну площину призначають паралельно площині стіни.

На рис. 11.22, б показано звичайну перспективу інтер'єра на картинній площині K' . Перспективу побудовано способом архітекторів. Для визначення висоти кожного елемента інтер'єра використано вертикальний картинний слід фронтальної стіни приміщення.

Для побудови «фронтальної перспективи» (рис.11.22) картинну площину L' призначено паралельно фронтальній стіні, а головну точку O картини – на лінії горизонту посередині перспективного зображення. У цьому випадку точкою збігу прямих, що перпендикулярні картині, є її головна точка O . При зміщенні головної точки вправо або вліво можна більш виразно показати елементи інтер'єра, які розміщено вздовж однієї з бічних стін.

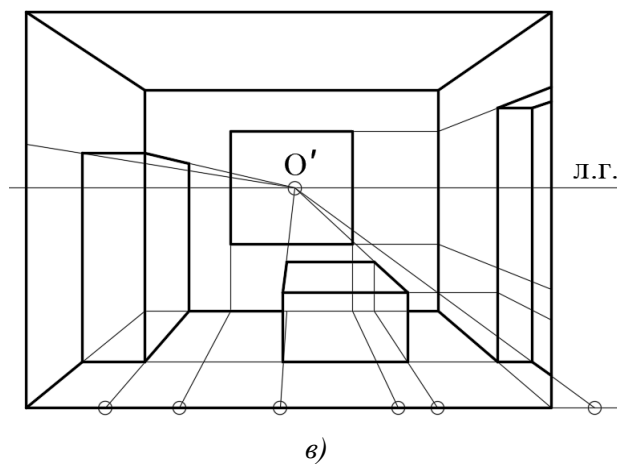


a)



б)

Рис. 11.22



в)

Рис. 11.22

11.10. Перспектива на картинній площині загального положення

При побудові перспективи висотних споруд або перспективи ділянок місцевості «з пташиного польоту» на вертикальній картині головний промінь у вертикальній площині виходить за межі середньої третини кута (β) ясного бачення людини.

На рис. 11.23 радіальним способом побудовано перспективу призми на вертикальній картині, де домінуючі горизонтальні напрями об'єкта мають точки збігу $F_{зб}$ і $P_{зб}$.

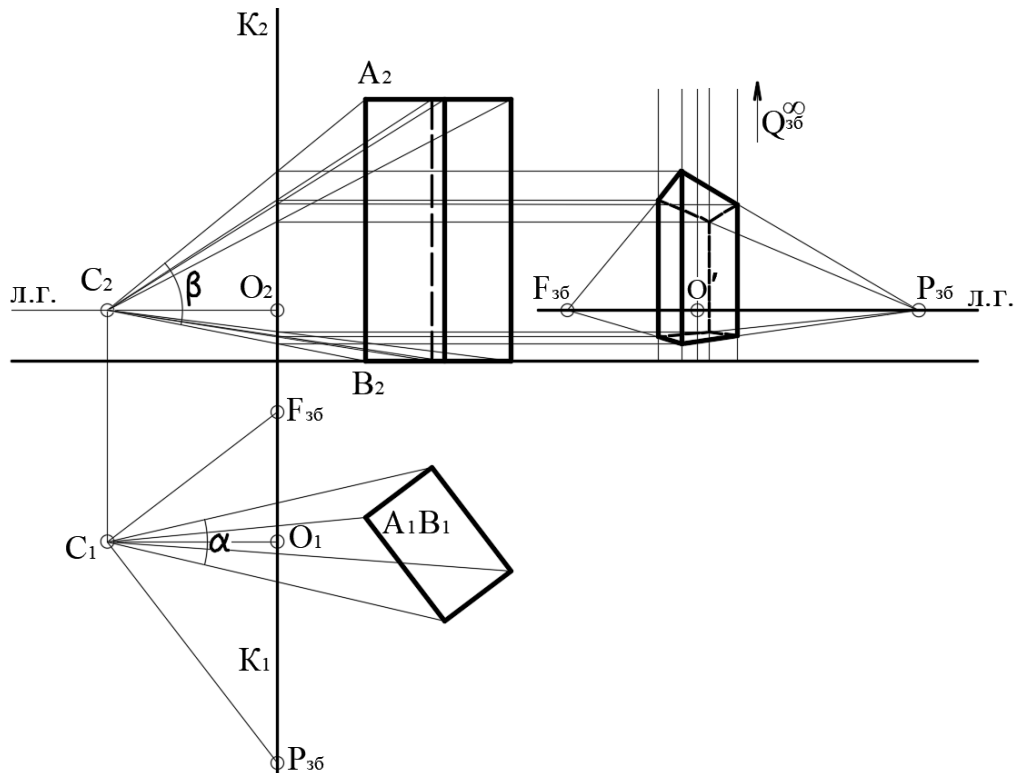


Рис. 11.23

Точка збігу вертикальних прямих (третій домінуючий напрям) є невласною. Головний промінь CO виходить за межі середньої третини кута ACB зору і тому перспективне зображення є спотвореним. На рис. 11.24 картинну площину K' нахилено відносно предметної площини так, що головний промінь CO потрапляє у середню третину кута ACB . Тоді точка $Q_{зб}$ збігу вертикальних прямих стає власною і визначається в результаті перетину вертикального променя CQ' з картиною. Щоб отримати неспотворене перспективне зображення, картинна площина разом з побудованим зображенням об'єкта повертається у вертикальне положення навколо лінії основи. При цьому головна точка зору O не належить лінії горизонту, а займає положення ближче до центру перспективного зображення.

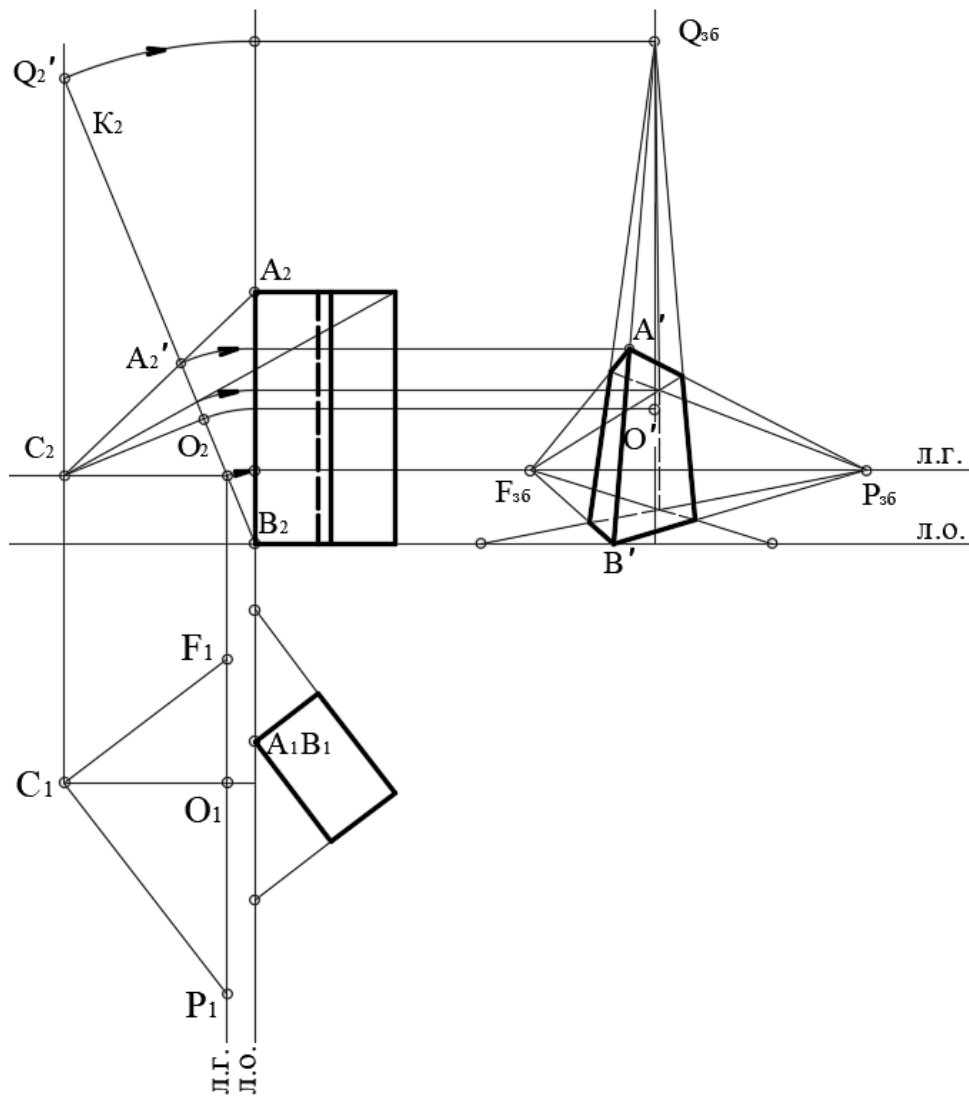


Рис. 11.24

Запитання для самоконтролю

1. Як побудувати точки збігу горизонтальних прямих?
2. Що таке картинний слід прямої?
3. Як побудувати точку збігу прямих, що належать картинній площині?
4. Що таке ділильний масштаб і для чого він використовується?
5. Що таке фронтальна перспектива?

РОЗДІЛ 12. ПОЗИЦІЙНІ ТА МЕТРИЧНІ ЗАДАЧІ У ПЕРСПЕКТИВІ

Основним способом розв’язання позиційних задач у перспективі є спосіб допоміжних січних площин, а основним елементом – визначення лінії перетину двох площин загального положення.

На рис. 12.1 показано дві площини, які у перспективі задано картинними слідами a_K і b_K та лініями збігу відповідно $f_{зб}$ і $g_{зб}$. Лінія $M'N'$ перетину площин визначається двома точками, одна з яких (M') є точкою перетину картинних слідів (a_K і b_K), а друга (N') – точкою перетину ліній ($f_{зб}$ і $g_{зб}$) збігу площин.

На рис. 12.2 показано побудову перспективи точки L перетину прямої AF загального положення, що задана картинним слідом A_K і точкою збігу $F_{зб}$, з площиною загального положення, яку задано картинним слідом b_K і лінією збігу $g_{зб}$. Для розв’язання задачі через пряму AF проведено довільну січну площину Δ , яку задано картинним слідом a_K та лінією збігу $f_{зб}$. Картинний слід a_K площини Δ проведено довільно через картинний слід A_K прямої AF , а лінія збігу $f_{зб}$ площини Δ проходить через точку $F_{зб}$ збігу прямої паралельно a_K . Лінією перетину заданої площини з допоміжною січною площиною Δ у перспективі є пряма $M'N'$, яка перетинає пряму $A'F'$ у шуканій точці L' .

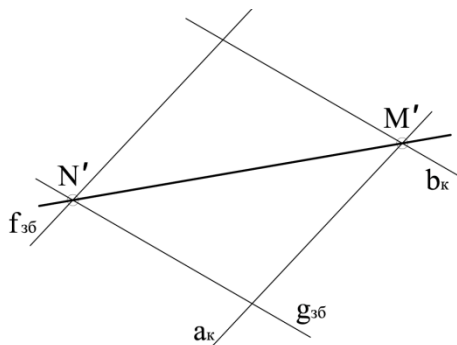


Рис. 12.1

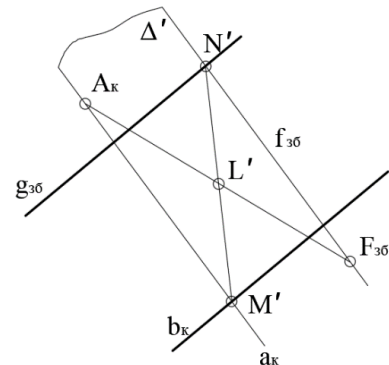


Рис. 12.2

На рис. 12.3 показано побудову перерізу конуса обертання площиною Δ загального положення, яку задано картинним слідом a_K і лінією збігу $f_{зб}$. Задачу розв’язано за допомогою допоміжних вертикальних січних площин, які проходять через вісь конуса. Наприклад, площина Γ перерізає конус по двох твірних SA і SC , а площину Δ – по прямій MN . Точки B і D перетину прямої MN з твірними SA і SC належать шуканому перерізу. Пряма GH є лінією перетину предметної площини з площиною Δ і тому перетинає основу конуса в точках шуканого перерізу.

Якщо позиційні задачі у перспективі розв’язуються так само, як у інших проекційно-зображувальних системах, то при розв’язанні метричних задач слід враховувати те, що натуральну величину відрізка або кута можна виміряти на перспективному зображенні тільки у тому випадку, коли цей відрізок або кут

належать картинній площині. Тому для розв'язання метричних задач потрібні відомості про апарат проєкціювання, тобто на зображенні потрібно мати головну точку картини і знати зорову відстань.

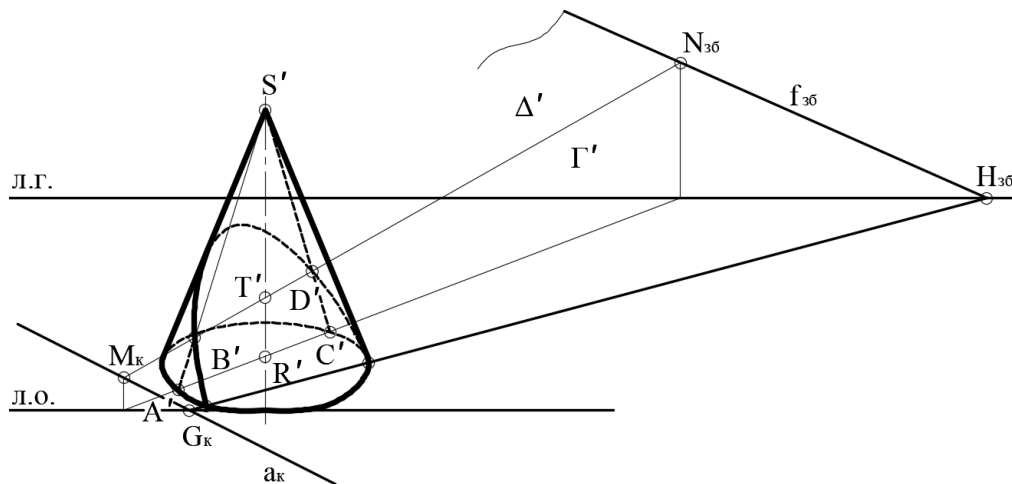


Рис. 12.3

В основі визначення довжини відрізка прямої є операція його перенесення картинну площину. Це можна зробити, перепроєкціювавши відрізок на картину у певному напрямі. На рис. 12.4 показано визначення довжини поздовжнього відрізка AB , що не належить предметній площині, та вертикального відрізка AC за допомогою допоміжного проєкціювання на картинну площину. Для наочності наведено горизонтальну проєкцію апарата перспективи.

На рис. 12.4,а відрізки AB і AC спроекційовано ортогонально на картинну площину і тому точкою збігу проєкціювальних променів є головна точка O' картини. На рис. 12.4,б обрано довільний горизонтальний напрям косокутного проєкціювання відрізків на картинну площину.

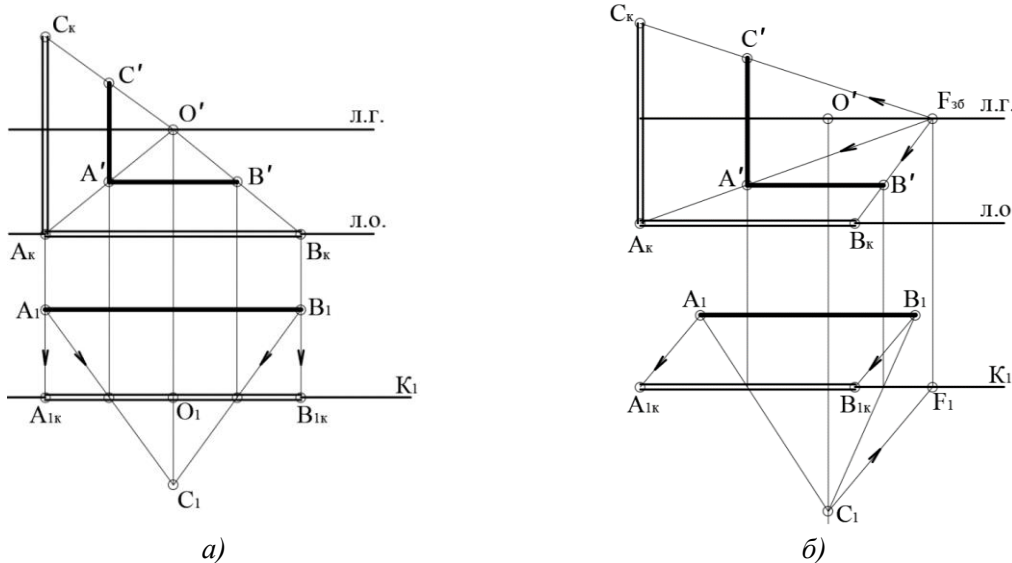
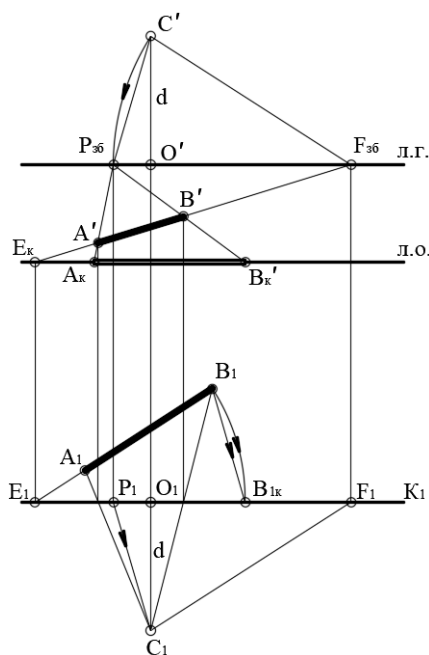


Рис. 12.4

На рис. 12.5 показано визначення довжини довільного відрізка AB , що належить предметній площині. Відрізок AB повернуто у предметній площині навколо картинного сліду E до суміщення з лінією основи. Дуги повороту ($\overline{B_1B_{1K}}$) точок відрізка AB замінено променями (B_1B_{1K}) допоміжного косокутного проєкціювання на картинну площину. Точка P є точкою збігу променів допоміжного проєкціювання. У результаті отримано допоміжну проєкцію $A'_KB'_K$ відрізка AB на лінії основи без спотворення його довжини.

Визначення довжини відрізка прямої загального положення зводиться до побудов, які показано на рис. 12.5, якщо через пряму провести площину перпендикулярну до картинної площини.

На рис. 12.6,а пряму загального положення задано точкою збігу F та картинним слідом K . Задано також головну точку O картини та зорову відстань d . Через пряму FK проведено площину, перпендикулярну картинній площині (рис. 12.6, б). Її лінія збігу $f_{3б}$ визначається головною точкою картини O' та точкою $F_{3б}$ збігу заданої прямої. Картинний слід h_K площини проходить через картинний слід K_K заданої прямої паралельно лінії збігу $f_{3б}$. Решта побудов виконується так, як було показано на рис. 12.5.



75

Нехай потрібно визначити натуральну величину трикутника у площині Γ загального положення, яку задано у перспективі лінією збігу $f_{зб}$ та картинним слідом a_K (рис. 12.7). Для цього площину Γ повертають навколо картинного сліду a_K до суміщення з картинною площиною. Цей поворот замінюється косокутним проєкціюванням у напрямі MM' , як показано на допоміжній проєкції апарата проєкціювання (рис. 12.7, б). Напрямок допоміжного проєкціювання має точку збігу $G_{зб}$.

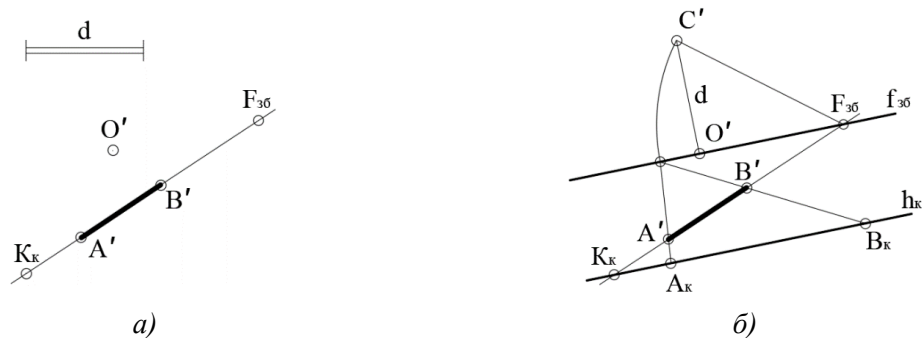


Рис. 12.6

Через вершини трикутника проводять прямі $A'A_a$, $B'B_a$, $D'D_a$ перпендикулярно до картинного сліду a_K площини Γ . Ці прямі у перспективі мають точку збігу $F_{зб}$, а на допоміжній косокутній проєкції залишаються перпендикулярними до картинного сліду a_K . Точки A_H , B_H , D_H перетину цих прямих з відповідними перспективними проєкціями променів косокутного проєкціювання (GA , GB , GD) є шуканими. Розв'язання задачі значно спрощується, якщо багатокутник належить предметній площині.

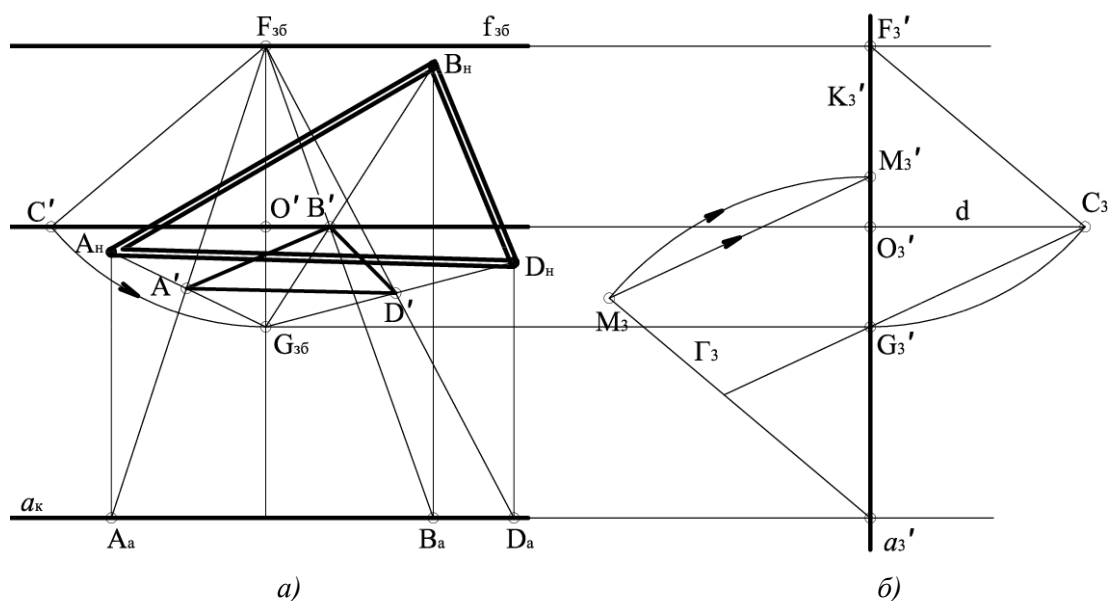


Рис. 12.7

На рис. 12.8 показано визначення натуральної величини прямокутника, який знаходиться у предметній площині. На рис. 12.8, *a* за заданими умовами відновлено горизонтальну проекцію апарата перспективи. Горизонтальну проекцію C_1 точки зору відновлено, враховуючи те, що на перспективі зображено прямокутник, і тому його сторони взаємно перпендикулярні. Отже, зорові промені CF і CG також є перпендикулярними, і прямий кут між ними будується як такий, що спирається на діаметр кола. Тоді через картинні сліди сторін прямокутника проведено горизонтальні проекції сторін паралельно домінуючим напрямкам C_1F_1 та C_1G_1 . Горизонтальна проекція $A_1B_1D_1E_1$ прямокутника є його натуральною величиною. На рис. 12.8, *б* показано такі самі побудови без використання горизонтальної проекції апарата перспективи.

На рис. 12.9 показано визначення відстані між паралельними прямими m і n , які задано картинними слідами M_K і N_K та точкою збігу $F_{3б}$. Прямі m і n визначають площину Γ , картинний слід a_K якої проходить через картинні сліди M_K і N_K відповідно прямих m і n . Паралельно сліду a_K через точку збігу $F_{3б}$ прямих m і n проведено лінію збігу $f_{3б}$ площини Γ . Через головну точку O проведено променеву площину DOC . Промінь $CF_{3б}$ є паралельним до прямих m і n . Якщо площину Γ з прямими m і n повернути навколо картинного сліду а до суміщення з картиною K' (рис. 12.9, *б*), а променеву площину CDF – навколо лінії збігу $f_{3б}$ також до суміщення з картиною K' , то у суміщеному положенні прямі m , n і $CF_{3б}$ будуть паралельними, а відстань між прямими m і n буде проєкціюватись у натуральну величину як відрізок, що належить картинній площині K' .

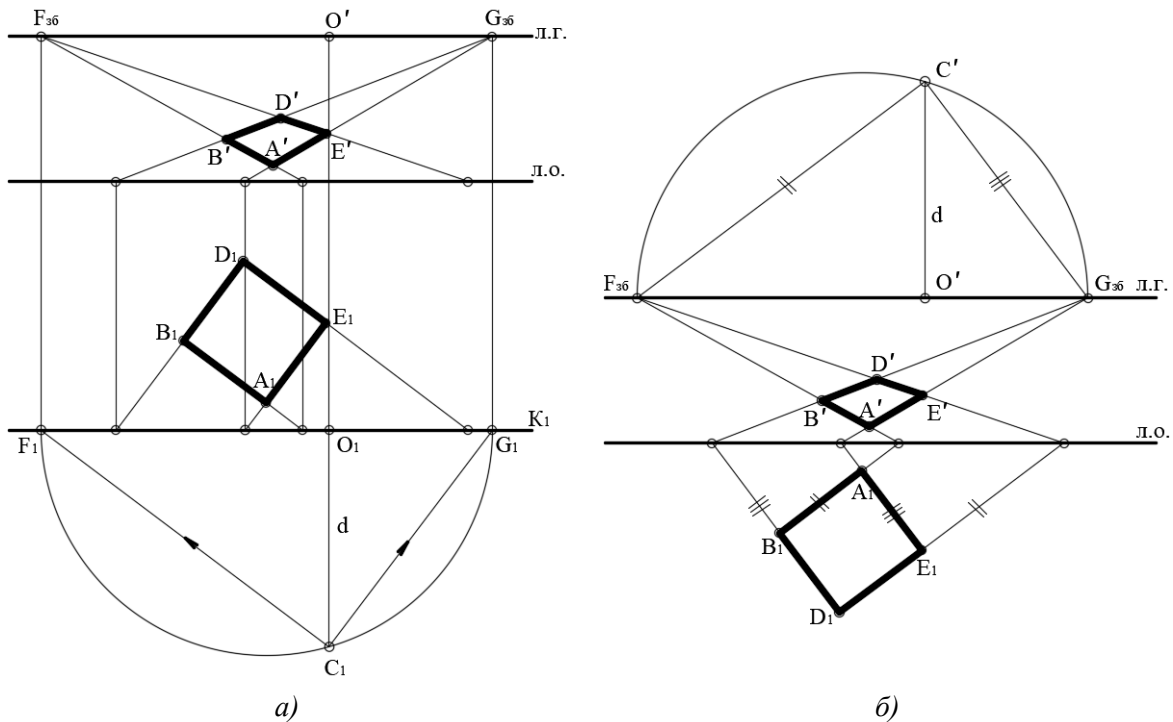


Рис. 12.8

Відстань між мимобіжними прямими проєкціюється у натуральну величину, якщо площина їх паралелізму перпендикулярна до картинної площини.

На рис.12.10 мимобіжні прямі задано точками збігу $F_{зб}$ і $G_{зб}$ та картинними слідами відповідно M_K і N_K . Задано також головну точку картини O' і зорову відстань d .

Будь-яка площина паралелізму заданих прямих має лінію збігу $f_{зб}$, що проходить через точки збігу $F_{зб}$ і $G_{зб}$ прямих. Через прямі FM і GN проведено дві площини паралелізму цих прямих. Тоді відстань між заданими мимобіжними прямими буде вимірюватися відстанню між цими площинами. Задача розв'язується способом заміни площин проєкцій. Замість предметної площини Π_1 обрано нову площину проєкцій Π_3 , що проходить через точку зору C перпендикулярно до лінії збігу $f_{зб}$. Будується ортогональна проєкція апарату перспективи на площині Π_3 . Площина проєкцій Π_3 суміщується з картинною площиною (K') обертанням навколо осі x'_3 . Лінія $f_{зб}$ збігу на площині Π_3 проєкціюється точкою $F_3 \equiv G_3$, а зорова відстань d – відрізком OC_3 перпендикулярно до осі x'_3 . Усі площини паралелізму прямих FM і NG є проєкціювальними відносно площини проєкцій Π_3 і проєкціюються паралельними прямими (у тому числі і зорова площина паралелізму CFG). Через допоміжні проєкції M_3 і N_3 картинних слідів M_K і N_K прямих FM і GN паралельно площині паралелізму CFG проведено дві площини паралелізму прямих і визначено відстань між ними. Ця відстань на площину проєкцій Π_3 проєкціюється у натуральну величину.

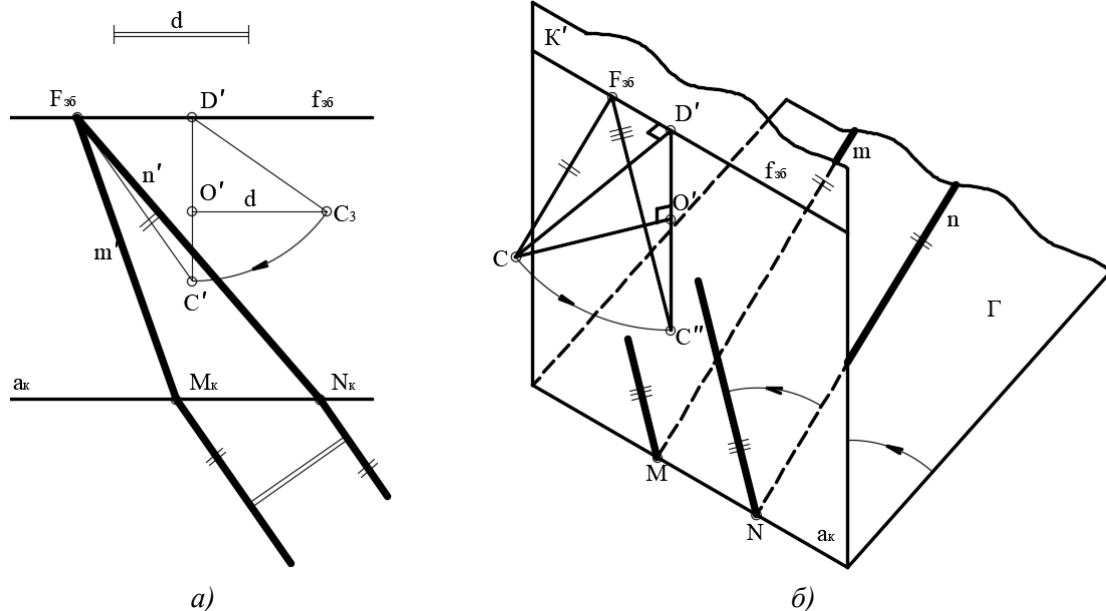
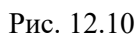


Рис. 12.9

Побудови, які виконано на рис. 12.10 можна також трактувати як визначення відстані між паралельними площинами або відстані від прямої до паралельної їй площини.

При визначенні кутів між прямими та площинами достатньо через точку зору (С) провести відповідні фігури (прямі і площини) паралельно заданим і визначити кут між останніми. Тому картинні сліди фігур, між якими вимірюються кути, не потрібні.

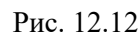
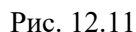


На рис. 12.11 задано головну точку O' картини та точки збігу $F_{зб}$ і $G_{зб}$ двох прямих (мимобіжних або перетинних).

Кут α між прямою m і площиною Γ (рис. 12.12) можна визначити як такий, що доповнює кут β між прямою m і перпендикуляром n до площини до прямого кута:

Тому спочатку розглянемо задачу побудови у перспективі довільного перпендикуляра до заданої площини. На рис. 12.13, *a* площину Γ загального положення задано лінією збігу $f_{3\phi}$. Слід зауважити, що лінія збігу задає у перспективі

80



80



Рис. 12.13

80

На рис. 12.13,б додатково задано точку $F_{3б}$ збігу прямої m . Потрібно визначити кут між прямою m і площиною Γ . Кут β між прямою m і перпендикуляром до площини Γ визначаємо так, як було показано на рис.12.11. Кут α , що доповнює кут β до 90° , є шуканим.

Кут між двома площинами Γ і Δ вимірюється плоским кутом, що утворюється лініями перетину площин Γ і Δ з третьою площиною, яка перпендикулярна до лінії перетину площин Γ і Δ .

Напрями площин Γ і Δ на рис. 12.14 задано лініями збігу відповідно f_{36} і g_{36} . Задано також головну точку картини O' та зорову відстань d . Потрібно визначити натуральну величину двогранного кута α між площинами Γ і Δ .

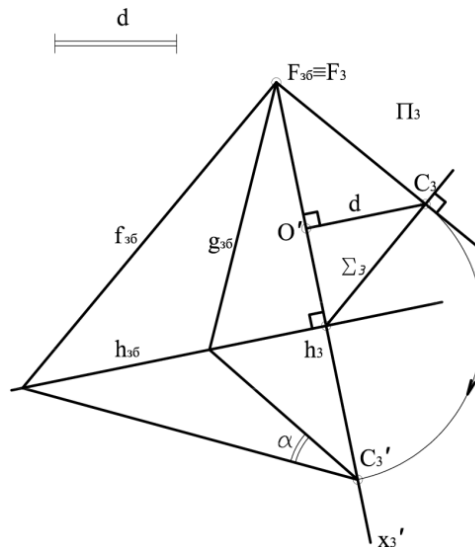


Рис. 12.14

Точка F_{36} перетину ліній збігу f_{36} і g_{36} відповідно площин Γ і Δ є точкою збігу лінії перетину площин. Через точку збігу F_{36} і головну точку картини O' проведено допоміжну площину проєкцій P_3 перпендикулярно до картинної площини K' . Площину проєкцій P_3 обернуто навколо осі x'_3 до суміщення з картинною площиною. У суміщеному положенні площини P_3 побудовано проєкцію C_3 точки зору C на відстані d від осі x'_3 . Пряма F_3C_3 є проєкцією лінії перетину площин Γ і Δ , які проходять через точку зору C , на площині проєкцій P_3 . Площина Σ , що перпендикулярна лінії перетину F_3C_3 площин Γ і Δ , є проєкціовальною відносно площини проєкцій P_3 і проєкціюється лінією Σ_3 перпендикулярно до F_3C_3 .

Лінією перетину площини Σ з картинною площиною K' є лінія збігу h_{36} всіх площин, перпендикулярних до лінії перетину площин Γ і Δ . Площині Σ належать сторони шуканого кута α . Якщо цю площину обернути навколо лінії збігу h_{36} до суміщення з картиною, то кут α буде проєкціюватися у натуральну величину.

Запитання для самоконтролю

1. За відомою перспективою відрізка паралельного (горизонтального) картині визначити його натуральну величину?
2. Визначити відстань між паралельними прямими, заданими на перспективному зображенні.
4. Визначити кут між прямими за їх перспективним зображенням.

РОЗДІЛ 13. ВІДБИТТЯ У ПЕРСПЕКТИВІ

В основі побудови відбиття у плоских дзеркальних поверхнях (різноманітні дзеркала, дзеркальні поверхні водоймищ та ін.) лежить закон оптичної фізики, згідно з яким кут падіння світлового променя на дзеркальну площину дорівнює куту відбиття. Обидва промені (падаючий і відбитий) належать площині, перпендикулярній площині дзеркала (рис. 13.1). Тому довільна точка об'єкта і її відбиття належать спільному перпендикуляру до площини дзеркала на однакових відстанях від нього.

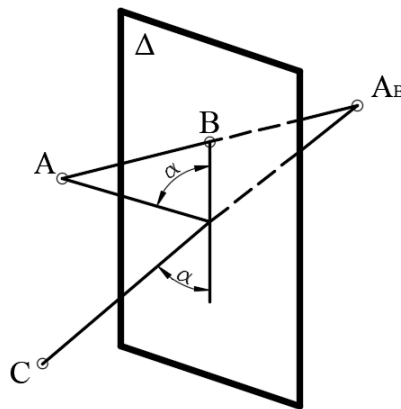


Рис. 13.1

Для побудови перспективи A_v' відбиття точки A у дзеркальній площині D потрібно через точку A провести перпендикуляр до D , визначити точку B його перетину з площиною D і відкласти на ньому відрізок BA_v , що дорівнює відрізку AB .

На рис. 13.2 покроково показано послідовність побудови відбиття довільної точки A , яку задано перспективою A' і вторинною проекцією A_1' , у дзеркальній площині D загального положення.

На рис. 13.2, а дзеркальну площину D задано прямокутником, сторона 1-4 якого належить предметній площині. Задано також зорову відстань $CO=d$. Перпендикулярність сторін прямокутника забезпечено заданням прямого кута $F_{36}C_3G_{36}$ між домінуючими напрямками в плані.

Першим кроком розв'язання задачі є побудова перпендикуляра n до дзеркальної площини 1-2-3-4, який проходить через точку A (рис. 13.2, б). Для цього через точки збігу протилежних сторін прямокутника проведено лінію збігу (d_{36}) дзеркальної площини D . Перпендикулярно до неї через головну точку O проведено допоміжну площину проєкцій Π_4 . Способом заміни площин проєкцій, як було показано на рис. 12.13, визначено точку N_{36} збігу перпендикулярів до площини D , у тому числі і перпендикуляра AN_{36} .

Другим кроком розв'язання задачі є побудова точки B перетину перпендикуляра AN_{36} з площиною D . Для цього потрібно через AN_{36} провести довільну січну площину. На рис. 12.2, в, такою є площина S ($AA_1G_{36}N_{36}$), яка

перерізає площину D по прямій ST . Перетин прямих $AN_{3\delta}$ і ST визначає точку B перетину перпендикуляра $AN_{3\delta}$ з площиною D .

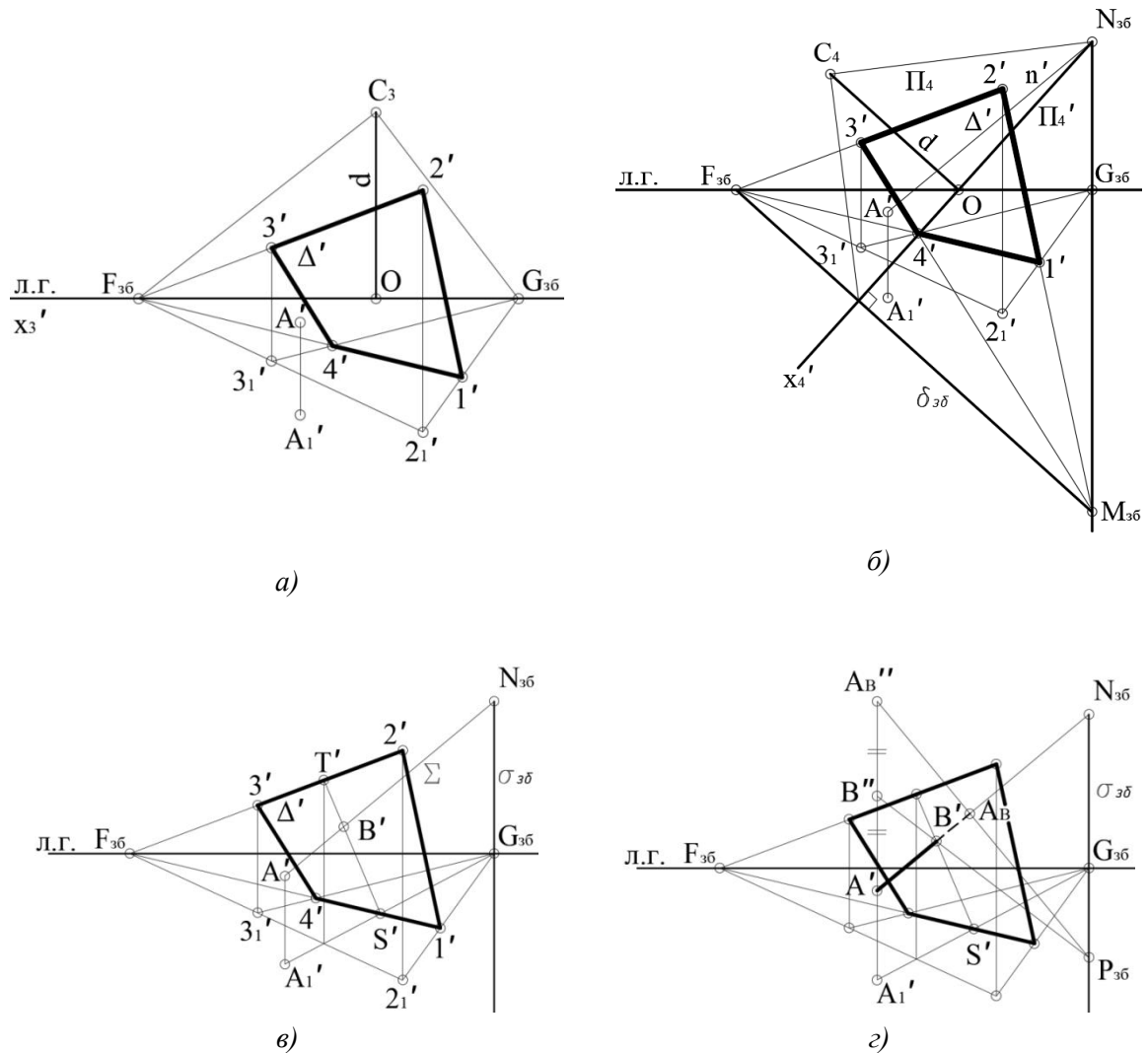


Рис. 13.2

Третім, останнім кроком розв'язання задачі є побудова відбиття A_B точки A у дзеркальній площині. Відстань $A_B B$ повинна дорівнювати відстані AB . Для побудови відбиття A_B використано ділильний масштаб. Через точку A у площині S проведено пряму, паралельну до лінії збігу ($s_{3\delta}$), на якій від точки B відкладено два рівні відрізки. На лінії збігу ($s_{3\delta}$) знайдено точку збігу $P_{3\delta}$ паралельних прямих, що відсікають на прямій $AN_{3\delta}$ рівні за довжиною відрізки AB і $A_B B$.

На рис. 13.3 показано розв'язання тієї ж задачі у випадку, коли дзеркальну площину D задано лінією збігу $d_{3\delta}$ і картинним слідом d_k , а точку A задано на прямій l . Пряму l , у свою чергу, задано точкою збігу $L_{3\delta}$ і картинним слідом L_k . Точку збігу $N_{3\delta}$ перпендикулярів до дзеркальної площини D побудовано так само, як на рис. 13.2.

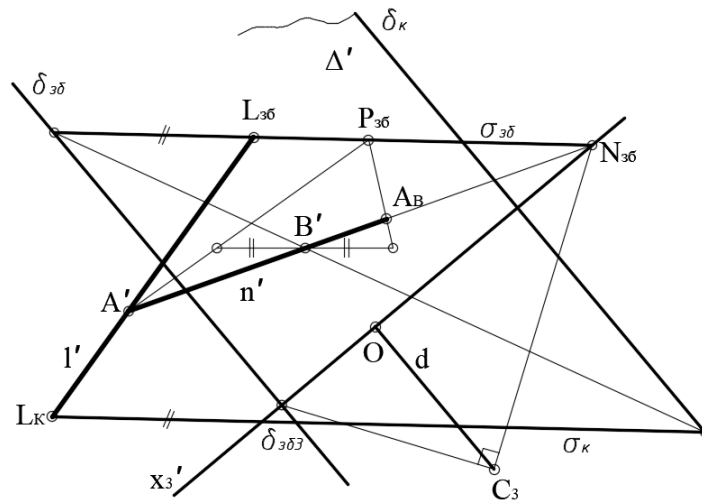


Рис. 13.3

Для цього через точку зору C і головну точку O картини проведено допоміжну площину перпендикулярно до d_{36} і обертанням навколо осі x_3' суміщено з картинною площиною. Тоді площина, що проходить через точку зору C паралельно до площини D , спроекціюється лінією $d_{363}C_3$. Перпендикуляр до площини D , що проходить через точку зору C , матиме точку збігу N_{36} , яка є точкою збігу всіх перпендикулярів до площини D , в тому числі і перпендикуляра n , проведеного через точку A . Для побудови точки B перетину перпендикуляра AN_{36} з площиною D через AN_{36} проведено допоміжну площину S . Лінія збігу s_{36} площини S визначається точками збігу N_{36} і L_{36} прямих n і l відповідно. Картинний слід площини S проходить через картинний слід L_k прямої l паралельно s_{36} . Точки перетину ліній збігу і картинних слідів площин D і S визначають лінію перетину цих площин, яка у перетині з прямою l визначить точку B перетину перпендикуляра n з дзеркальною площиною D . За допомогою ділильного масштабу на прямій AN_{36} відкладено відрізок BA_B , що за довжиною дорівнює відрізку AB .

Якщо дзеркальна площина D займає окреме положення, всі побудови значно спрощуються.

На рис. 13.4 показано побудову відбиття точки A у вертикальній дзеркальній площині D .

Точку A задано перспективою A' і вторинною проекцією A_1' . Дзеркальну площину D задано прямокутником 1-2-3-4. Сторона 1-4 прямокутника належить предметній площині, а сторони 1-2 і 3-4 – вертикальні. Точку збігу N_{36} перпендикулярів до площини D визначено обертанням площини горизонту навколо лінії горизонту (л.г.) до суміщення з картиною K' . Після суміщення точка зору C займає положення C_3 . Площина, що проходить через точку C зору паралельно до площини D , спроекціюється лінією $F_{36}C_3$, а перпендикулярний до неї зоровий промінь – прямою C_3N_{36} . Точка N_{36} є точкою збігу всіх перпендикулярів до площини D , у тому числі і n . Для визначення точки B перетину перпендикуляра n з площиною D через n проведено вертикальну січну площину AA_1N_{36} , яка перетинає площину D

по вертикальній прямій BB_1 . Для побудови відбиття A_B точки A використано ділильний масштаб з точкою збігу $P_{зб}$.

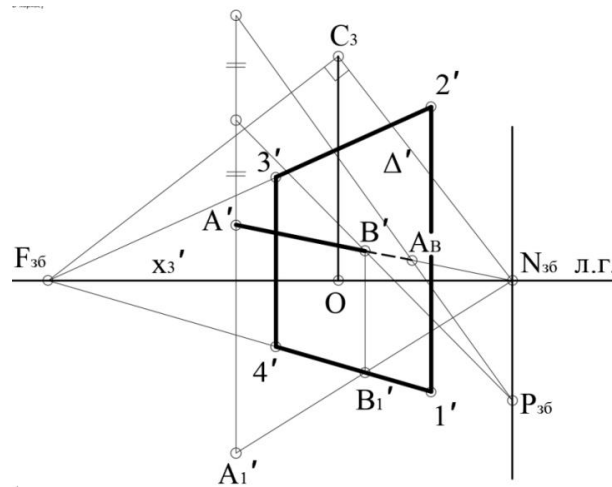


Рис. 13.4

На рис. 13.5 показано побудову відбиття A_B точки A у горизонтальній дзеркальній площині D .

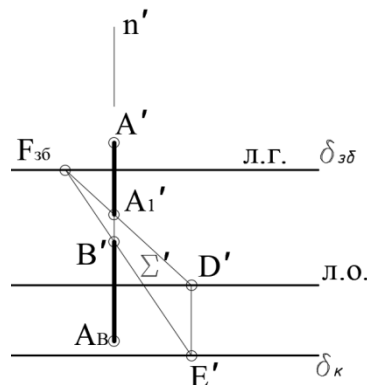


Рис. 13.5

Точку A задано перспективою A' і вторинною проєкцією A_1' . Площину D задано лінією збігу (л.г.) і картинним слідом d_k . Перпендикуляр n до площини D є вертикальною прямою. Точку B можна визначити за допомогою довільної вертикальної січної площини S , що проходить через n . Цю площину можна задати довільним вертикальним картинним слідом DE . Точки A_1 і D визначають лінію перетину площини S з предметною площиною. Оскільки пряма A_1D належить предметній площині, точка її збігу $F_{зб}$ знаходиться на лінії горизонту. Пряма $EF_{зб}$ належить дзеркальній площині D ; її точка збігу також $F_{зб}$. У результаті перетину прямих $EF_{зб}$ і n визначається точка B перетину перпендикуляра n з дзеркальною площиною. Перпендикуляр n паралельний до картинної площини, тому відбиття A_B

точки A у дзеркальній площині D можна побудувати без ділильного масштабу, відклавши на n від точки B довжину AB .

На рис. 13.6 наведено приклад перспективи інтер'єра з побудовою відбиття у дзеркальній стіні. Точкою збігу $G_{зб}$ перпендикулярів до дзеркальної стіни є точка збігу ліній домінуючого напрямку іншої стіни, оскільки дві стіни утворюють прямий кут. Для побудови відбиття двічі використано ділильний масштаб.

На рис. 13.7 показано фронтальну перспективу інтер'єра з фронтальною дзеркальною стіною. У цьому випадку точкою збігу перпендикулярів до фронтальної дзеркальної стіни є головна точка картини. Для побудови відбиття три рази застосовано ділильний масштаб.

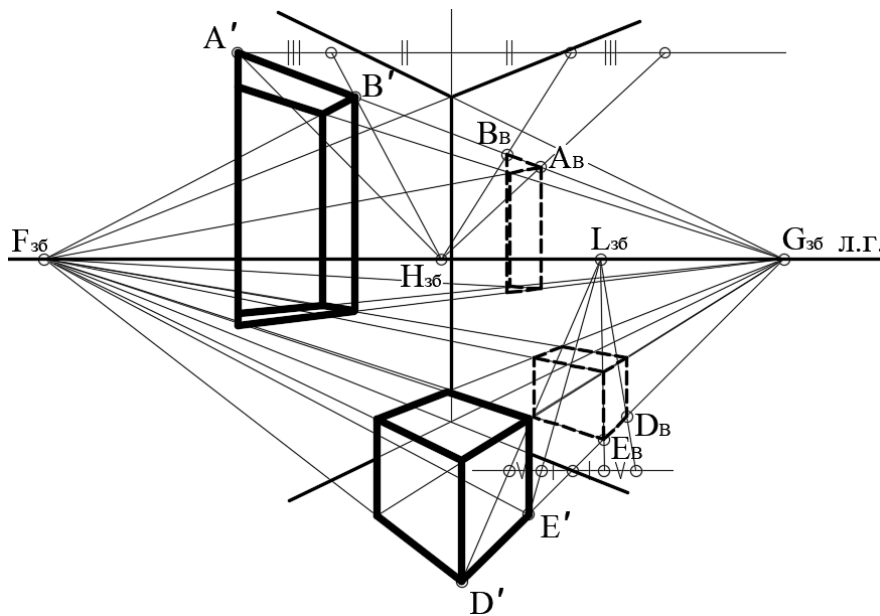


Рис. 13.6

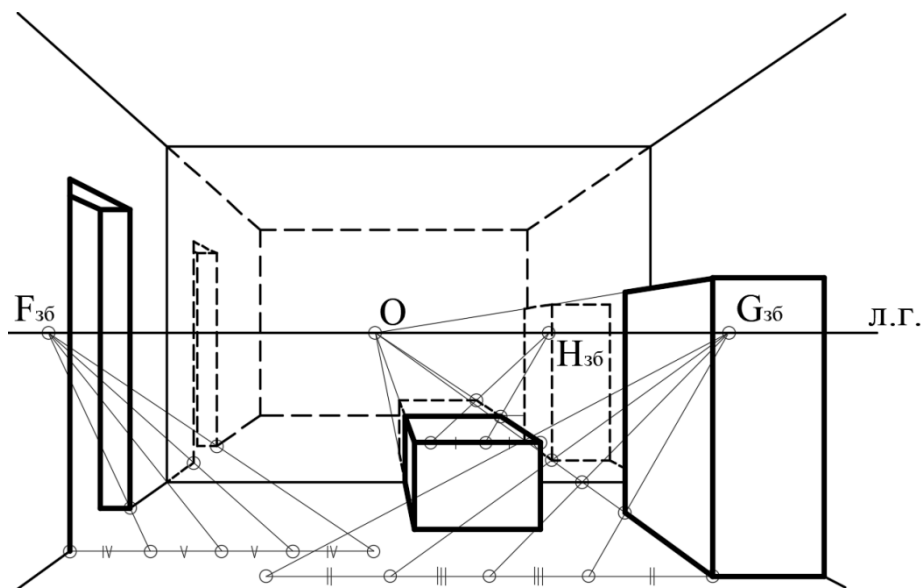


Рис. 13.7

На рис. 13.8 наведено побудову відбиття у дзеркальній поверхні водойми. Спочатку побудовано точки перетину вертикальних прямих з поверхнею води (дзеркальна площина), потім від цих точок відкладено відповідні висоти.

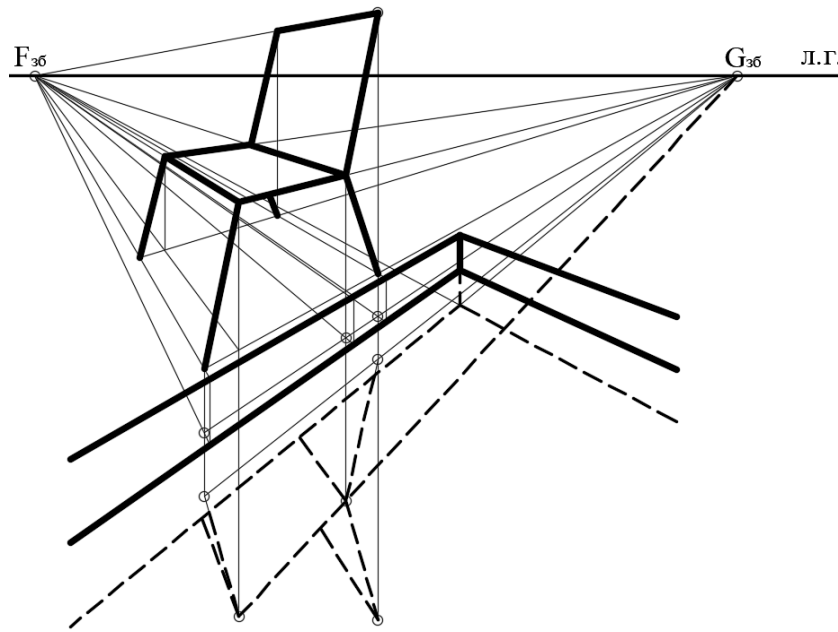


Рис 13.8

Запитання для самоконтролю

1. Побудуйте відбиття точки на вертикальній площині.
2. Побудуйте відбиття точки на площині, перпендикулярній до площини проєкцій.
3. Побудуйте відбиття точки на площині паралельній до площини картини.
4. Побудуйте відбиття точки на горизонтальній площині.

РОЗДІЛ 14. РЕКОНСТРУКЦІЯ ПЕРСПЕКТИВИ

Всяка проекційно-зображальна система повинна мати мінімум дві проекції. У цьому випадку зображення є зворотними, тобто за зображенням можна відновити положення об'єкта у просторі відносно певної системи віднесення та його розміри у певному масштабі.

Перспектива, як проекційно-зображальна система, також повинна містити два зображення. Одне з них – це центральна проекція об'єкта (саме перспективне зображення), друге – вторинна проекція, тобто перспектива горизонтальної проекції об'єкта. Роль другої проекції можуть відігравати падаючі тіні при яскравому освітленні.

Звичайна фотографія об'єкта є його перспективним зображенням, яке не містить вторинної проекції, але може мати зображення тіней.

Реконструкцією перспективного зображення називається відновлення ортогональних проекцій об'єкта за його перспективою. Вона посідає важливе місце як у дослідженнях з історії архітектури, так і при відновленні частково або цілком втрачених пам'яток архітектури за малюнками або фотографіями, що збереглися.

Реконструкція перспективи виконується у два етапи. На першому етапі виконується реконструкція апарата перспективи, тобто за перспективним зображенням об'єкта визначають точки збігу домінуючих напрямів, головну точку картини та зорову відстань. На другому етапі вже за відомими елементами апарата перспективи відновлюють ортогональні проекції об'єкта.

Для реконструкції апарата перспективи, яка містить тільки одне зображення, використовують різноманітні додаткові відомості про метричні характеристики елементів об'єкта. Розглянемо такі можливості на конкретних прикладах (рис.14.1).

1. За перспективним зображенням прямокутного паралелепіпеда на похилій картинній площині визначити головну точку картини і зорову відстань.

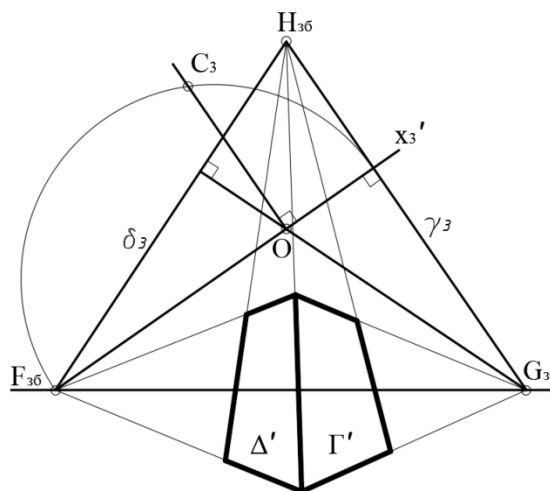


Рис. 14.1

Додатково до перспективного зображення відомо, що три домінуючих напрями є взаємно перпендикулярними.

Точки збігу $F_{3б}$, $G_{3б}$ та $H_{3б}$ домінуючих напрямів визначаються як точки перетину перспективних зображень паралельних ребер призми. Побудовані точки збігу попарно визначають лінії збігу $d_{3б}$ та $g_{3б}$ площин, яким належать грані паралелепіпеда. Оскільки ці площини взаємно перпендикулярні, то головна точка O картини визначається в результаті перетину висот трикутника $F_{3б}G_{3б}H_{3б}$. Зорова відстань OC_3 визначається так, як було показано на рис. 12.8.

2. Визначити головну точку вертикальної картини і зорову відстань, якщо задано перспективу квадрата, який належить предметній площині (рис. 14.2 - 14.3) і лінію горизонту. Додатковою умовою є те, що чотирикутник є квадратом.

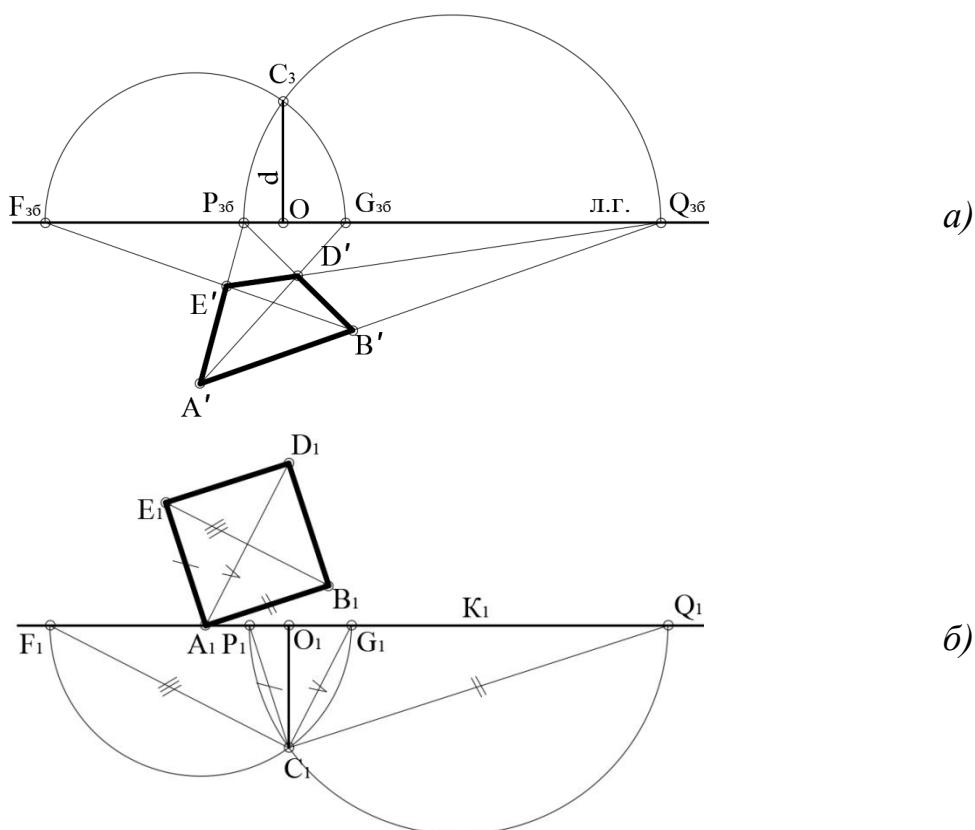


Рис. 14.2

На рис. 14.2, б для наочності показано горизонтальну проекцію апарата перспективи. Точки збігу $P_{3б}$ і $Q_{3б}$ сторін квадрата визначаються зоровими променями CP і CQ , які паралельні сторонам квадрата і тому взаємно перпендикулярні. При цьому проекція C_1 точки зору належить півколу $P_1C_1Q_1$, яке спирається на діаметр P_1Q_1 . З іншого боку, точки збігу $F_{3б}$ і $G_{3б}$ діагоналей BE і AD визначаються зоровими променями CF і CG , які також взаємно перпендикулярні, і тому проекція C_1 точки зору належить півколу $F_1C_1G_1$, яке спирається на діаметр F_1G_1 . Тому точку зору C можна визначити в результаті перетину двох зазначених півкіл. Одночасно визначаються головна точка O картини і зорова відстань CO .

Таку побудову можна виконати безпосередньо на перспективному зображенні при відомих точках збігу $F_{зб}$, $P_{зб}$, $G_{зб}$, і $Q_{зб}$ (рис. 14.2, а).

На рис. 14.3. показано розв'язання тієї ж задачі, де як додаткову умову використано те, що діагональ квадрата є бісектрисою його внутрішніх кутів.

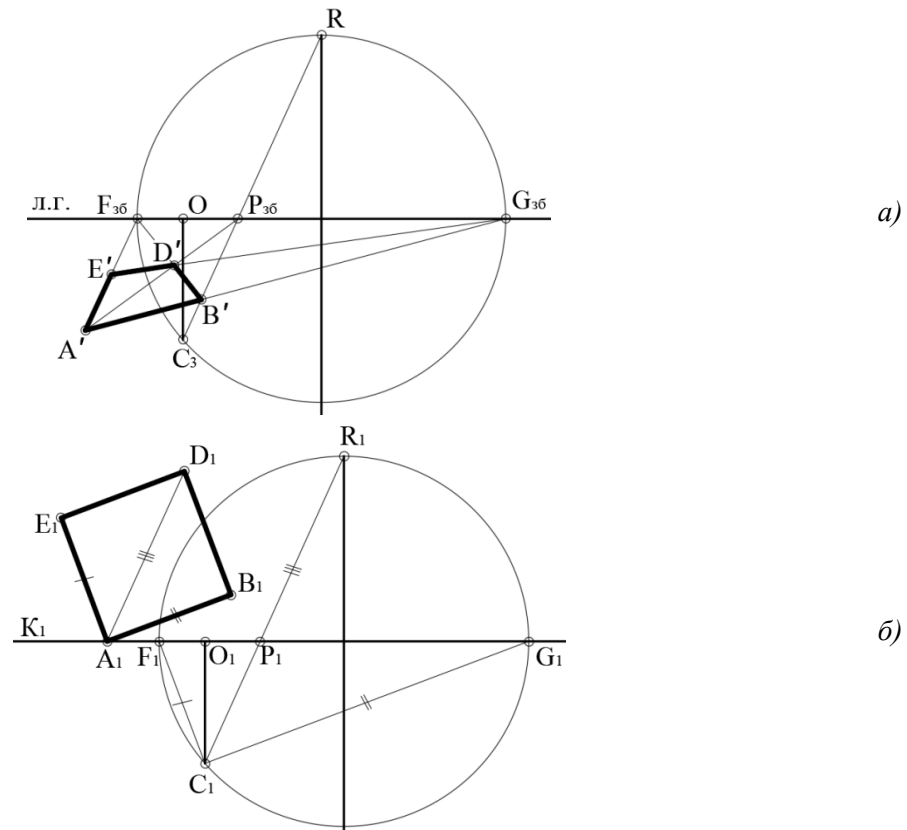


Рис. 14.3

Як і в попередньому випадку, для наочності на рис. 14.3, б, показано горизонтальну проекцію апарата перспективи. Зорові промені C_1F_1 і C_1G_1 утворюють прямий кут, який спирається на коло з діаметром F_1G_1 . Зоровий промінь C_1P_1 поділяє навпіл кут $F_1C_1G_1$, тому що спирається на рівні дуги F_1R_1 і R_1G_1 . Тому точку C зору і зорову відстань CO можна визначити безпосередньо на перспективі в результаті перетину прямої $RP_{зб}$ з колом, діаметром якого є відрізок $F_{зб}G_{зб}$.

3. У предметній площині задано перспективу прямокутника $AEML$ на вертикальній картині. Додатково задано відношення довжин його сторін $AL/AE = m/n$. Визначити головну точку O картини і зорову відстань CO (рис. 14.4).

За допомогою ділильного масштабу відрізок AL у перспективі поділено у відношенні $m:n$, де $H_{зб}$ – точка збігу паралельних прямих, що поділяють відрізок AL . Паралельно AE проведено пряму BD (точка збігу – $F_{зб}$). Чотирикутник $A'B'D'E'$ є квадратом у перспективі. Далі головну точку O картини і зорову відстань $OC_з$ визначено так, як було показано на рис. 14.3.

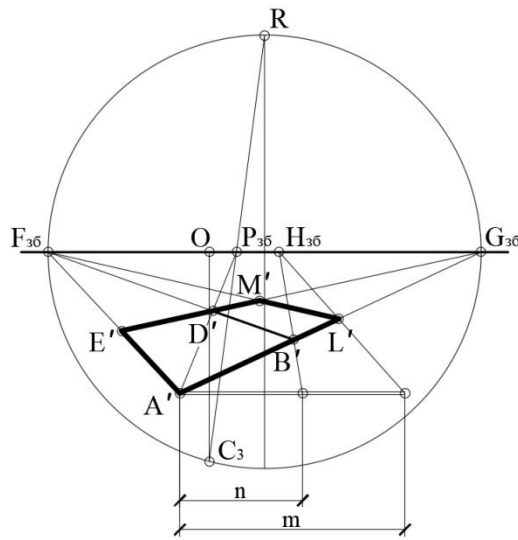
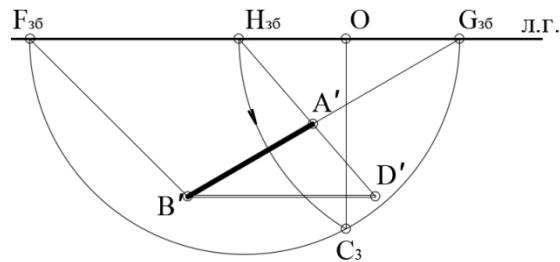
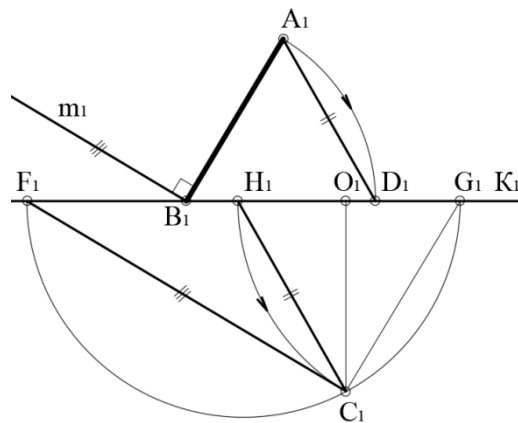


Рис. 14.4

4. Визначити головну точку вертикальної картини і зорову відстань, якщо задано перспективу $A'B'$ горизонтального відрізка AB , де B – картинний слід прямої AB . Також задано натуральну величину відрізка AB (рис. 14.5). Задано також точку збігу F_{36} горизонтальних прямих, які перпендикулярні до відрізка AB . Додатковою інформацією у цьому випадку є натуральна величина відрізка AB .



a)



b)

Рис. 14.5

На рис. 14.5, б, для наочності показано горизонтальну проекцію апарата перспективи. Відрізок AB повернуто навколо вертикальної осі, що проходить через точку B , до суміщення з картинною площиною K' в положення B_1D_1 . Тоді B_1D_1 – задана натуральна величина відрізка AB у перспективі. Якщо дугу A_1D_1 замінити

хордою A_1D_1 , то точка H_1 є точкою збігу хорди A_1D_1 . Точка зору C_1 з одного боку є вершиною прямого кута $F_1C_1G_1$, а з іншого боку відрізок C_1G_1 дорівнює відрізку H_1G_1 . Тому точка зору C визначається у результаті перетину дуги H_1C_1 з півколом $F_1C_1G_1$.

Відрізок C_1O_1 є зоровою відстанню, а точка O_1 – горизонтальною проекцією головної точки O .

Ці побудови можна виконати без горизонтальної проекції апарата перспективи безпосередньо на перспективному зображенні (рис. 14.5, а).

5. На перспективному зображенні задано еліпс, який є перспективою кола, що належить предметній площині (рис. 14.6). Додатковою умовою є те, що у перспективі задано саме коло, а не еліпс.

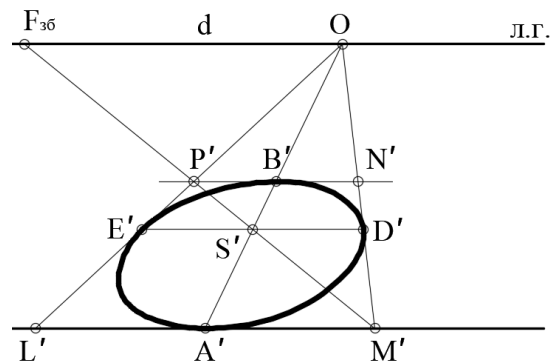


Рис. 14.6

Головна точка O картини і зорова відстань визначаються дуже просто, якщо навколо заданого кола описати квадрат, дві сторони (PN і LM) якого паралельні картинній площині, а дві інші сторони (PL і MN) перпендикулярні до неї. Для цього паралельно лінії горизонту проводять дві дотичні (PN і LM) до перспективного зображення кола і визначають точки A і B дотику. Відрізок AB є діаметром кола, який є перпендикулярним до картинної площини. Тому точка O перетину прямої AB з лінією горизонту є головною точкою картини, яка визначає дві сторони (PL і MN) квадрата. Відстань від точки $F_{зб}$ збігу діагоналі квадрата до головної точки O картини дорівнює зоровій відстані.

На другому етапі реконструкції перспективи відновлюють ортогональні проекції об'єкта, для чого існує кілька способів. Розглянемо деякі з них.

1. Суміщення площини, якій належить плоска фігура, з картиною обертанням навколо картинного сліду площини.

На рис. 14.7. а, задано перспективу прямокутника $MNQP$, який належить вертикальній площині.

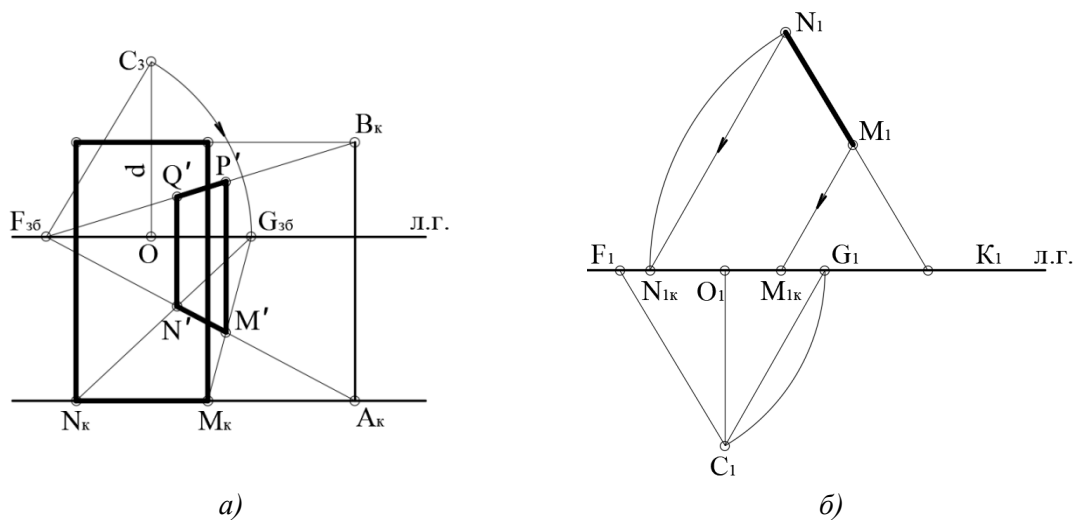


Рис. 14.7

Перспективу реконструйовано поворотом площини навколо її картинного сліду до суміщення з картиною, що для наочності показано на горизонтальній проекції апарата перспективи (рис. 14.7, б). Дуги повороту замінено відповідними хордами, які мають точку збігу G_1 . Точку збігу G_{36} можна визначити безпосередньо на перспективному зображенні за відомими головною точкою O картини та зоровою відстанню d .

2. Відновлення плану споруди за допомогою прямих окремого положення.

На рис. 14.8 наведено перспективу трикутника PQR , що належить предметній площині. Відомі також головна точка O картини і зорова відстань $OC = d$.

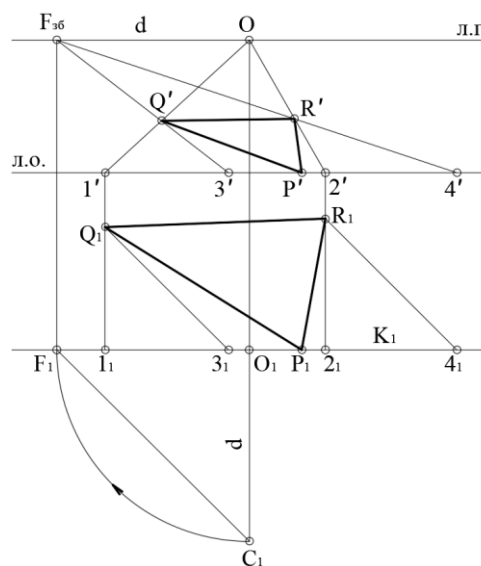


Рис. 14.8

Через вершину P трикутника проведено лінію основи. Кожна з інших вершин (наприклад, Q) трикутника визначається як результат перетину двох допоміжних прямих окремого положення у предметній площині. Одна з прямих (Ol) є

перпендикулярною до картинної площини і тому має точку збігу O і картинний слід 1 . Друга пряма $F_{36}3$ нахилена до картини під кутом 45° і тому її точкою збігу є F_{36} на відстані d від головної точки O на лінії горизонту. Точки збігу і картинні сліди допоміжних прямих за відповідністю переносять на горизонтальну проекцію K_1 картинної площини і відновлюють горизонтальні проекції цих прямих. Горизонтальні проекції вершин трикутника визначено в результаті перетину горизонтальних проекцій відповідних допоміжних прямих.

3. Відновлення ортогональних проекцій за допомогою взаємно перпендикулярних домінуючих напрямів об'єкта.

На рис. 14.9 задано перспективу прямокутної призми при відомих лінії горизонту і головній точці O картини.

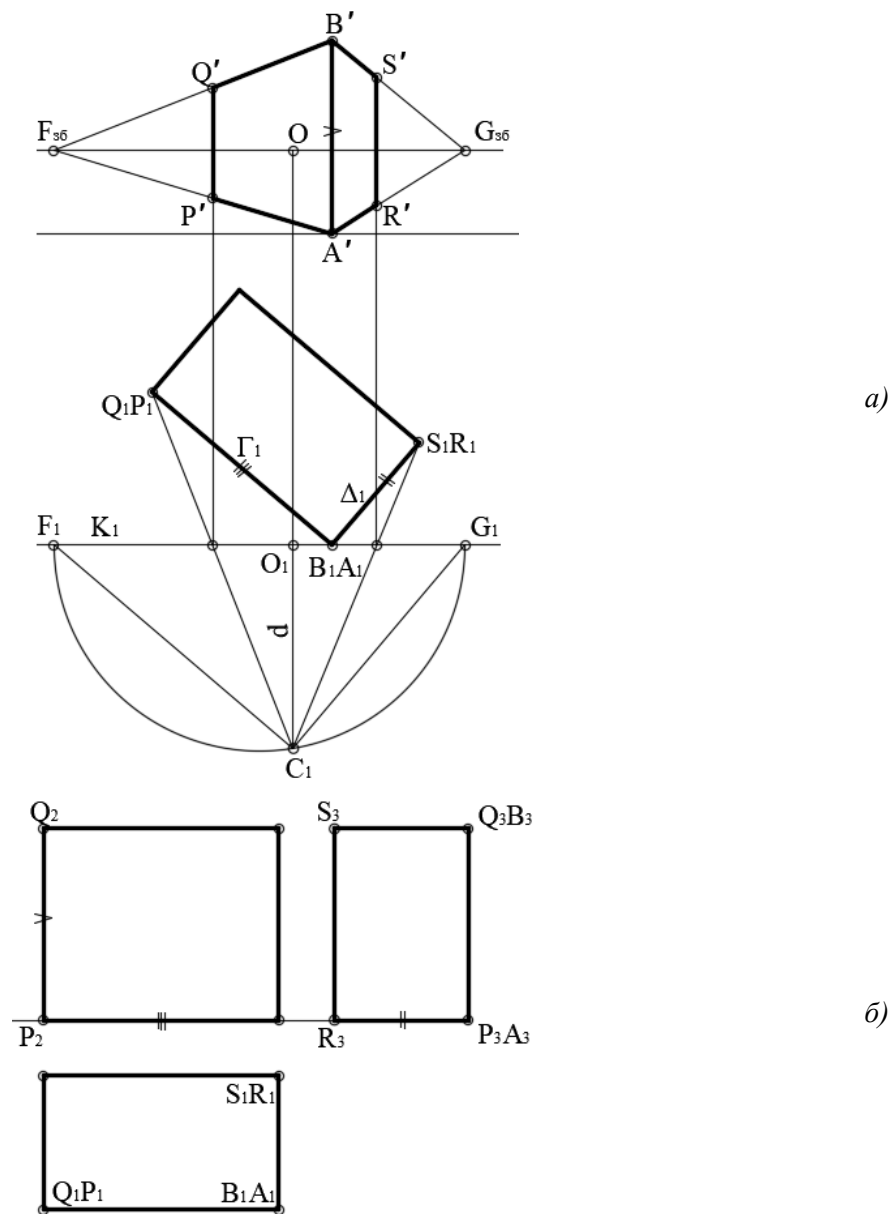


Рис. 14.9

Перспективу вертикальних ребер QP і SR та точки збігу $F_{зб}$ і $G_{зб}$ за відповідністю перенесено на горизонтальну проекцію K_1 картинної площини, яку проведено через ребро AB . Також через ребро AB на горизонтальній проекції проведено площини Γ і Δ бічних граней призми паралельно домінуючим напрямкам C_1F_1 і C_1G_1 . Горизонтальні проекції Q_1P_1 і S_1R_1 ребер QP і SR відповідно визначено в результаті перетину площин Γ і Δ із зоровими площинами CQP і CSR відповідно.

За відновленим планом і відомою висотою $A'B'$ призми на рис. 14.9, б побудовано ортогональні проекції призми.

Запитання для самоконтролю

1. Як знайти точки збігу домінуючих напрямів об'єкта за їх перспективою?
2. Для чого використовується допоміжний квадрат при реконструкції перспективи?
3. Які вихідні умови потрібно задати для реконструкції перспективи?

РОЗДІЛ 15. ТІНІ У ПЕРСПЕКТИВІ

Побудова тіней на перспективних зображеннях збільшує їх архітектурну виразність та створює додатковий ефект «глибини» простору, а також є додатковим засобом виявлення форм та пропорцій зображуваних об'єктів.

При побудові тіней у перспективі можливі два випадки освітлення. В першому випадку джерело світла знаходиться на дуже великій відстані від об'єкта. Промені світла вважаються паралельними, що відповідає, наприклад, сонячному освітленню. У другому випадку джерело світла є точковим і знаходиться на відстані, співвідносній з розмірами об'єктів. Цей випадок відповідає штучним джерелам світла і розглядається при побудові тіней у перспективі інтер'єрів.

Задання різних джерел освітлення у перспективі має свої особливості.

Нескінченно віддалене джерело світла у перспективі задається точкою $S_{зб}$ збігу світлових променів та точкою $S_{лзб}$ збігу горизонтальних проекцій світлових променів (рис. 15.1). Точка $S_{лзб}$ збігу горизонтальних проекцій променів світла належить лінії збігу горизонтальної площини, тобто лінії горизонту.

Точкове джерело світла у перспективі задається власною точкою S та її прямокутною проекцією S_1 на горизонтальну площину (рис. 15.2).

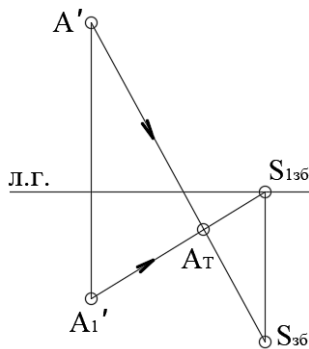


Рис. 15.1

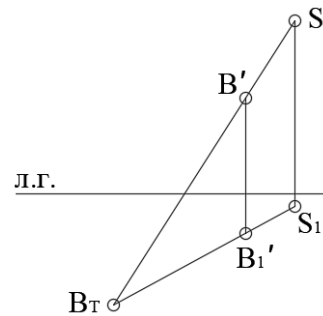


Рис. 15.2

Розглянемо загальний принцип побудови тіні від точки в перспективі для нескінченно віддаленого та точкового джерел освітлення.

На рис. 15.1 нескінченно віддалене джерело світла задано точкою $S_{зб}$ збігу променів світла та точкою $S_{лзб}$ збігу горизонтальних проекцій променів світла. Також задано перспективу A' точки A та перспективу A_1' її горизонтальної проекції. Тінь A_T від точки A на горизонтальну площину визначиться як точка перетину променя світла SA з цією площиною. Вертикальна світлова площина, проведена через промінь SA , перетне горизонтальну площину по прямій A_1S_1 . Точка A_T перетину променя світла SA з прямою A_1S_1 і є шуканою тінню точки A .

На рис. 15.2 точкове джерело світла задано власною точкою S та її прямокутною проекцією S_1 на горизонтальну площину. Також задано перспективу B' точки B та перспективу B_1' її прямокутної проекції на ту ж горизонтальну площину. Щоб побудувати тінь від точки B на горизонтальну площину, потрібно через неї

провести промінь світла SB та визначити точку його перетину з горизонтальною площиною. Для цього через промінь SB проводиться вертикальна світлова площина, яка перетинає горизонтальну площину по прямій S_1B_1 . Точка B_T перетину променя SB з прямою S_1B_1 і є шуканою тінню точки B .

Надалі будемо розглядати побудову тіней в перспективі при сонячному освітленні (нескінченно віддалене джерело світла).

15.1. Напрямок променів світла при побудові тіней в перспективі

Вибір напрямку освітлення значно впливає на виявлення форми об'єкта та загальну виразність зображення. Загалом можливі три випадки положення нескінченно віддаленого джерела світла (сонця) відносно глядача:

- перед глядачем;
- позаду глядача;
- у нейтральній площині.

Розглянемо ці випадки на прикладі побудови тіней від вертикального відрізка на предметну площину.

Якщо сонце розташовано попереду і ліворуч чи праворуч від глядача, точка $S_{зб}$ збігу світлових променів знаходитиметься над лінією горизонту відповідно зліва чи справа від головної точки картини (рис. 15.3, а, б). Тінь від вертикального відрізка AB буде направлена в сторону глядача.

Якщо сонце розташовано позаду і праворуч чи ліворуч від глядача, точка $S_{зб}$ збігу світлових променів знаходитиметься нижче лінії горизонту відповідно зліва чи справа від головної точки картини (рис. 15.4, а, б). Тінь від вертикального відрізка AB падатиме від глядача.

При розташуванні сонця у нейтральній площині промені світла є паралельними до картинної площини, тому точки збігу променів та їх проєкцій є невласними. Напрямок світлових променів задається відрізком s , напрям проєкцій променів на горизонтальну площину – горизонтальним відрізком s_1 .

На рис. 15.5, а, б показано два можливі випадки розташування джерела світла при розміщенні його у нейтральній площині – відповідно зліва і справа від глядача. Тіні від вертикальних відрізків на горизонтальну площину будуть горизонтальними.

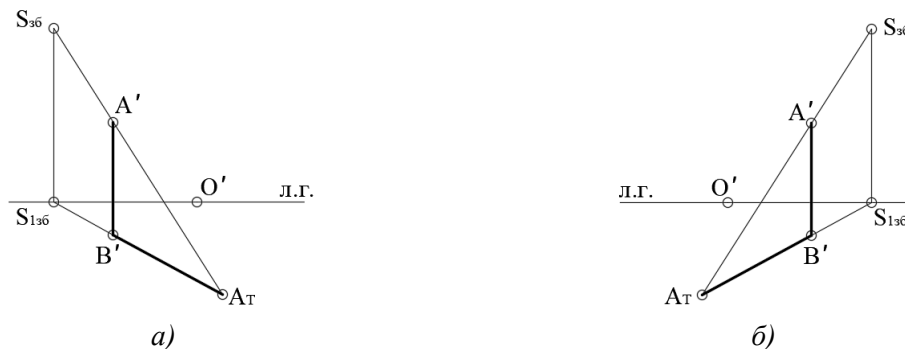


Рис. 15.3

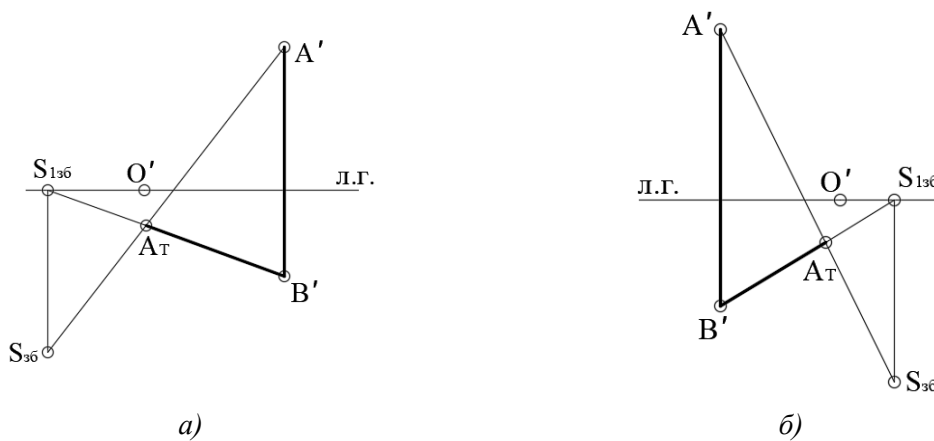


Рис. 15.4

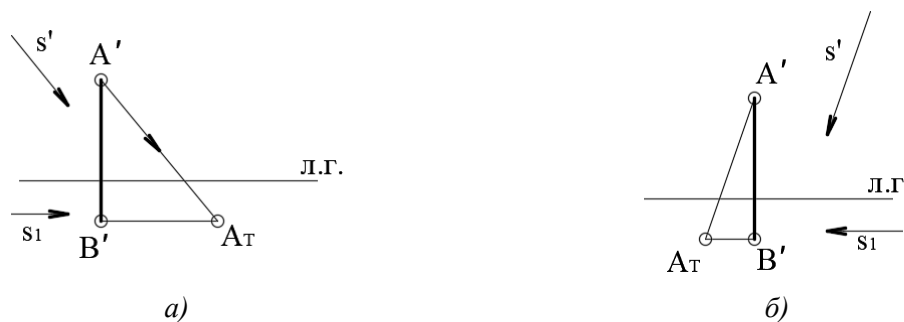


Рис. 15.5

15.2. Основні правила побудови тіней від прямих у перспективі

1. Тінь від прямої, перпендикулярної до площини, збігається з проекцією променя світла на цю площину, і направлена в точку збігу проекцій променів світла на цю площину. Побудова тіней від вертикальних прямих детально розглянута у попередніх прикладах (рис. 15.3-15.5).

2. Тінь від прямої, паралельної до площини на цю ж площину, паралельна до прямої і направлена у ту ж точку збігу, що й пряма.

На рис. 15.6 наведено перспективу горизонтального відрізка AB та перспективу його горизонтальної проекції A_1B_1 .

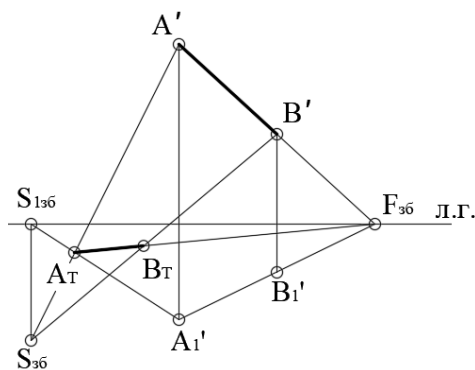


Рис. 15.6

Відома точка F_{36} збігу відрізка AB , точка S_{36} збігу світлових променів та точка S_{136} збігу горизонтальних проєкцій світлових променів. Для побудови перспективи падаючої тіні відрізка AB на предметну площину досить знайти тінь від однієї з кінцевих точок відрізка, наприклад тінь A_T від точки A . Точку A_T слід з'єднати з точкою F_{36} збігу відрізка AB . Точка B_T тіні точки B знайдеться в перетині прямої $A_T F_{36}$ і променя світла BS . Відрізок $A_T B_T$ є перспективою тіні горизонтального відрізка AB на предметну площину.

3. Тінь від похилої прямої на площину направлена в точку перетину прямої з цією площиною.

На рис. 15.7, а наведено перспективу похилого відрізка AB , точка A якого належить предметній площині. Задано також перспективу горизонтально проєкції $A_1 B_1$ відрізка AB , точку S_{36} збігу світлових променів та точку S_{136} збігу горизонтальних проєкцій світлових променів. Для побудови падаючої тіні відрізка AB на предметну площину спочатку знайдено тінь B_T точки B . Тінь відрізка буде спрямована у точку A його перетину з предметною площиною. Отже, відрізок AB_T є перспективою тіні похилого відрізка AB на предметну площину.

Якщо точку перетину похилої прямої з площиною не задано, її слід визначити. На рис. 15.7, б задано перспективу відрізка AB похилої прямої та перспективу його горизонтально проєкції $A_1 B_1$. Задано точку S_{36} збігу світлових променів та точку S_{136} збігу горизонтальних проєкцій світлових променів. Щоб знайти точку перетину прямої з предметною площиною, слід продовжити її перспективу до перетину з продовженням перспективи її горизонтальної проєкції в точці C . Потім слід побудувати тінь B_T від точки B і з'єднати точку B_T з точкою C . Тіні A_T і B_T від точок A і B визначаються так, як було показано на рис.15.3,а. Відрізок $A_T B_T$ є перспективою тіні відрізка AB похилої прямої на предметну площину.

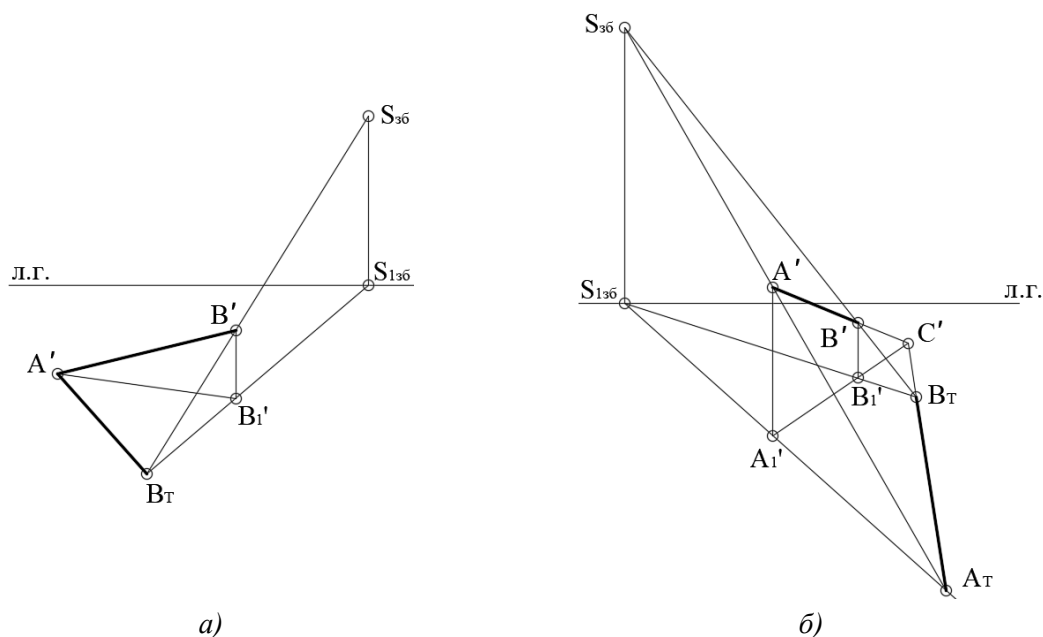


Рис. 15.7

15.3. Вплив положення джерела світла на характер освітленості поверхонь

На виразність перспективних зображень архітектурних об'єктів значно впливає характер їх освітленості, що, у свою чергу, залежить від обраного напрямку променів світла. На рис. 15.8, *a-d*, показано побудову власних та падаючих тіней чотирикутної в плані призми при різних положеннях джерела світла (сонця).

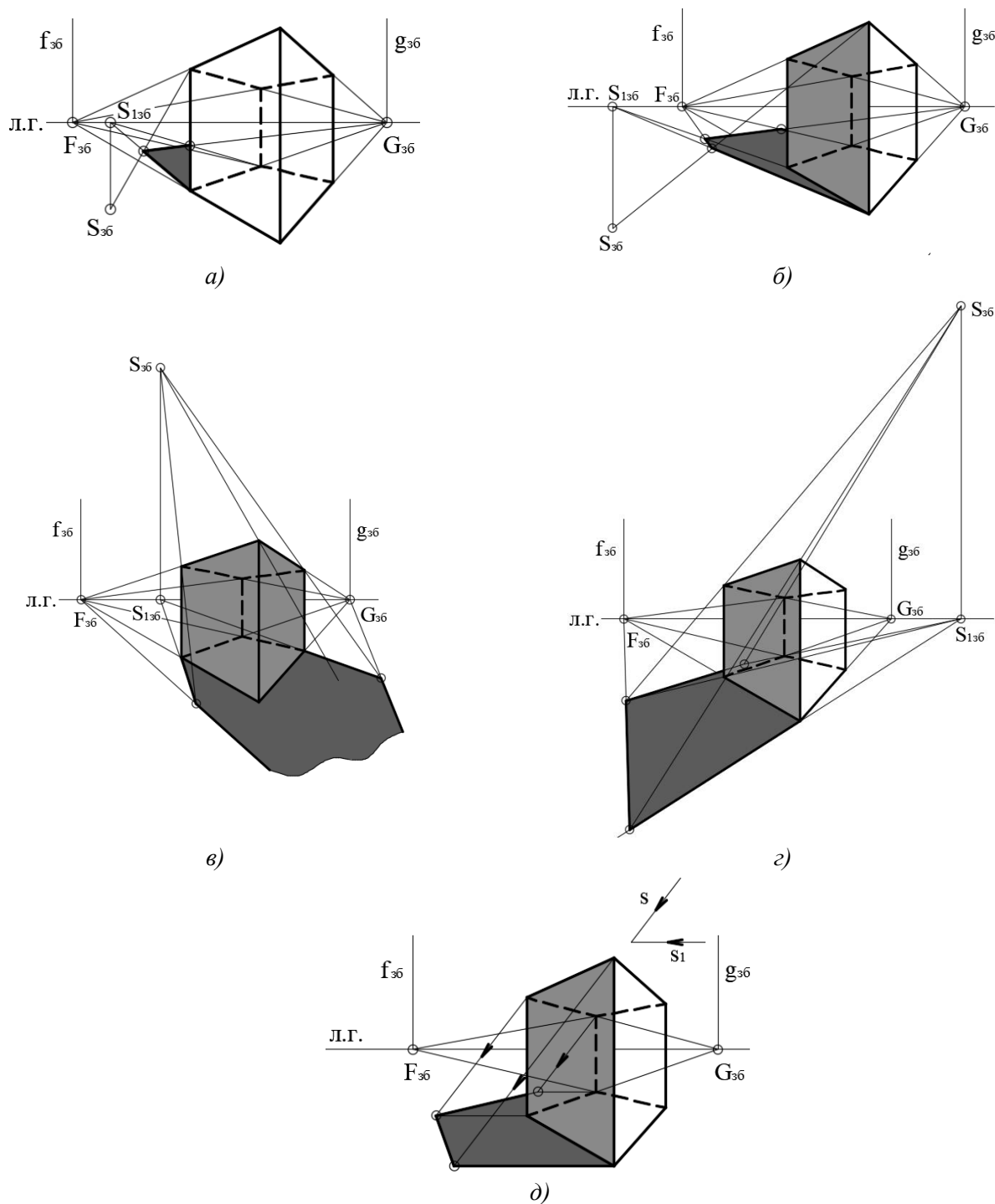


Рис. 15.8

Якщо необхідно, щоб освітленими були обидві видимі грані призми, точку збігу $S_{зб}$ світлових променів слід обирати між лініями $f_{зб}$ і $g_{зб}$ збігу цих граней нижче лінії горизонту (рис. 15.8, *а*, сонце позаду спостерігача). Якщо точка $S_{зб}$ збігу світлових променів знаходиться за межами ліній збігу граней призми і нижче лінії горизонту, одна з видимих граней призми буде у власній тіні (рис. 15.8, *б*).

Якщо точку $S_{зб}$ збігу світлових променів обрати між лініями збігу бічних граней призми і вище лінії горизонту, обидві видимі грані призми будуть у власній тіні (рис. 15.8, *в*).

У випадку, коли точка $S_{зб}$ збігу променів світла знаходиться вище лінії горизонту і за межами ліній збігу бічних граней призми, одна з видимих граней буде у власній тіні (рис. 15.8, *г*).

Якщо промені світла паралельні до картинної площини, точка $S_{зб}$ їх збігу є невласною. Отже, вона знаходитиметься за межами ліній збігу бічних граней призми, тому одна з її видимих граней буде у власній тіні (рис. 15.8, *д*).

Для уникнення надто довгих тіней точка $S_{зб}$ збігу променів світла повинна знаходитись на достатній відстані від лінії горизонту, оскільки відстань $S_{зб}S_{Iзб}$ пропорційна висоті стояння сонця.

Іноді положення джерела світла зручно визначити, задавши падаючу тінь від якої-небудь точки об'єкта на предметну площину чи іншу поверхню.

На рис. 15.9, *а*, задано перспективу вертикального відрізка AB і тінь A_T від точки A на предметну площину. Продовженням прямої $B'A_T$ до перетину з лінією горизонту отримано точку $S_{Iзб}$ збігу горизонтальних проекцій світлових променів (рис. 15.9, *б*). Точку $S_{зб}$ збігу світлових променів знайдено продовженням прямої AA_T до перетину з перпендикуляром, проведеним до лінії горизонту в точці $S_{Iзб}$ (рис. 15.9, *в*).

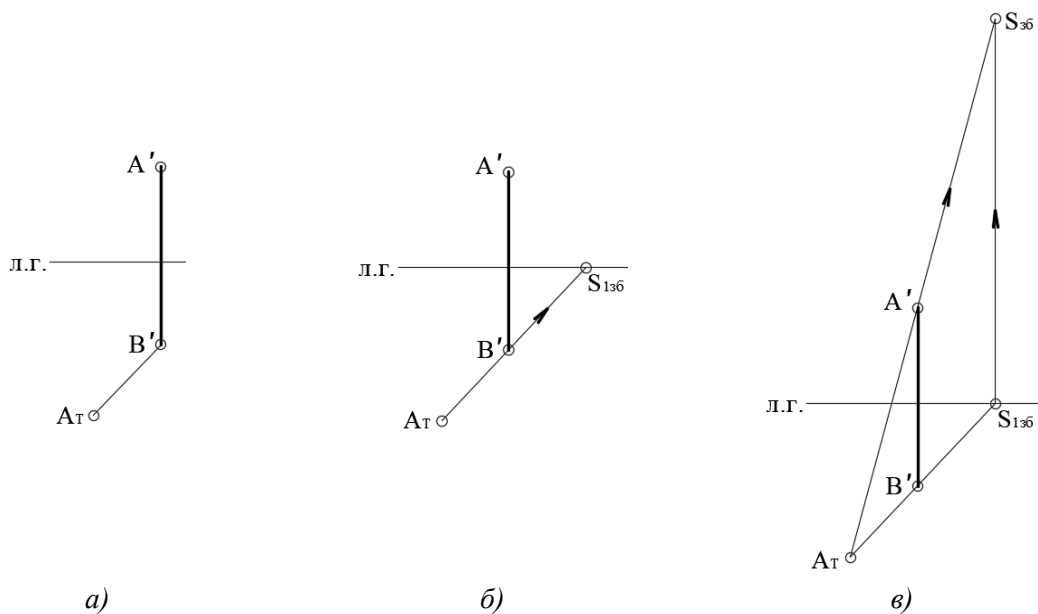


Рис. 15.9

15.4. Тіні багатогранників

На рис. 15.10 показано побудову власної і падаючої тіней багатогранника, складеного з двох чотирикутних у плані призм. Точку збігу $S_{зб}$ світлових променів задано між лініями збігу бічних граней призм, тому видимі бічні грані будуть освітлені. Нижня горизонтальна грань верхньої призми знаходитиметься у власній тіні.

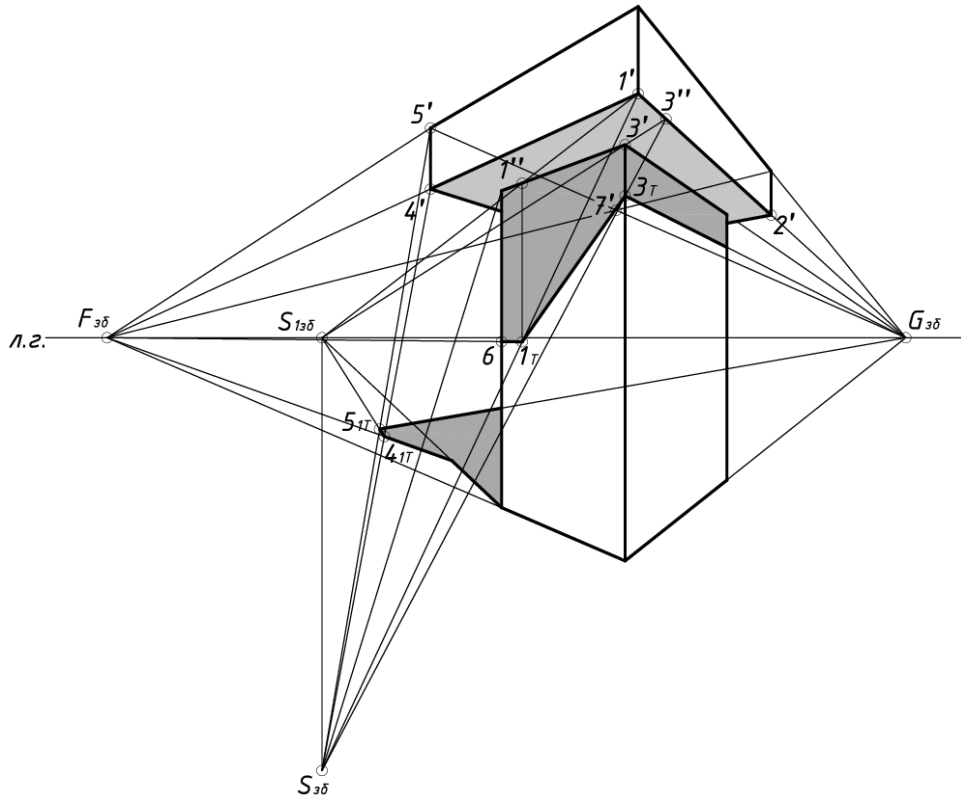


Рис. 15.10

Для побудови тіней використано допоміжне проєкціювання променів світла на горизонтальну площину нижньої основи верхньої призми. При цьому точкою збігу проєкцій променів світла на цю площину також буде точка S_{I36} на лінії горизонту.

На праву бічну грань нижньої призми падатиме тінь від ребра 1-2 верхньої призми. Проведено проекцію світлового променя $3''S$ через точку 3 переднього ребра нижньої призми. Ця пряма перетинає ребро 1-2 у точці $3''$, яка кидає тінь на переднє ребро нижньої призми. Точка тіні 3_T визначається в перетині променя світла $3''S$ з цим ребром. Оскільки ребро 1-2 і права бічна грань нижньої призми паралельні, лінія тіні буде спрямована з точки 3_T у точку збігу $G_{3б}$.

Точка 1 кидатиме тінь на ліву бічну грань нижньої призми. Для побудови цієї тіні проведено допоміжну проекцію променя світла $1'S_1$, який перетне ребро верхньої основи нижньої призми в точці $1''$. Далі проведено промінь світла $1S$ до

перетину з вертикальною прямою, проведеною з точки $1''$. Точка перетину 1_T і є шукана тінь від точки 1 на ліву грань нижньої призми.

Тінь від ребра $1-4$ на лівій грані нижньої призми паралельна самому ребру і спрямована і точку збігу $F_{зб}$ до перетину з лівим ребром у точці 6 . З'єднавши точки 1_T і 3_T , отримаємо тінь відрізка $1-3$, що падає на ліву грань нижньої призми.

Контур падаючої тіні на землю визначатимуть ребра, що відокремлюють освітлені та неосвітлені грані призми. Отже, контур падаючої тіні утворять тінь від лівого вертикального ребра нижньої призми, тіні від ребер $1-4$, $4-5$ і $5-7$ верхньої призми. Тіні від вертикальних ребер, перпендикулярних до площини основи, будуть спрямовані у точку S_1 збігу горизонтальних проекцій світлових променів. Тінь від ребра $5-7$ буде паралельна самому ребру і спрямована у точку збігу $G_{зб}$.

На рис. 15.11 показано побудову тіней від бар'єру на сході та від сходів на горизонтальну та вертикальну площини (землю та стіну). Промені світла задано паралельними до картинної площини.

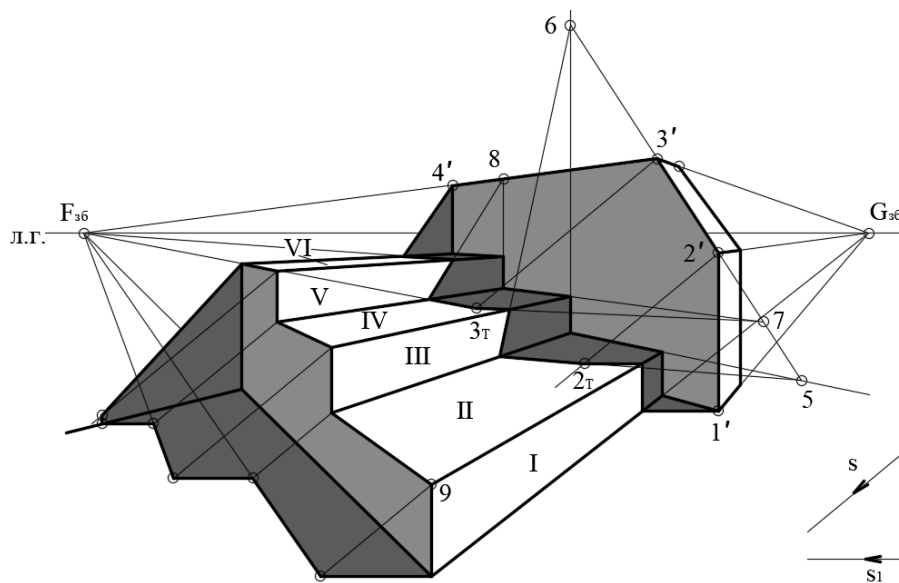


Рис. 15.11

Тінь на сході від бар'єру кидатиме ламана $1-2-3-4$. Тінь від вертикального ребра $1-2$ на землю буде паралельна до проекції s_1 променів світла, тобто горизонтальна. Тінь на паралельну ребру вертикальну площину I буде вертикальна. Тінь на горизонтальній площині II буде горизонтальною до перетину з променем світла, проведеним з точки 2 паралельно до s_1 .

Далі тінь кидатиме похиле ребро $2-3$. Тінь від нього на горизонтальну площину II направлена у точку 5 перетину цієї площини з ребром $2-3$. Тінь на вертикальну площину III спрямована у точку 6 перетину цієї площини з ребром $2-3$. Тінь від ребра $2-3$ на горизонтальну площину IV направлена у точку 7 перетину її з ребром $2-3$ до зустрічі з променем світла, проведеним з точки 3 . Тінь від горизонтального ребра $3-4$ на горизонтальні площини IV і VI паралельна до самого

ребра і направлена у точку збігу $F_{зб}$. Тінь від ребра 3-4 на вертикальні площини спрямована у точки 8 і 4 перетину цих площин з ребром 3-4.

Тіні від лівого контура сходів на землю та на стіну будуються аналогічно.

На рис. 15.12 показано побудову тіні від вертикальної призми на горизонтальну призму та на землю за допомогою січних світлових площин.

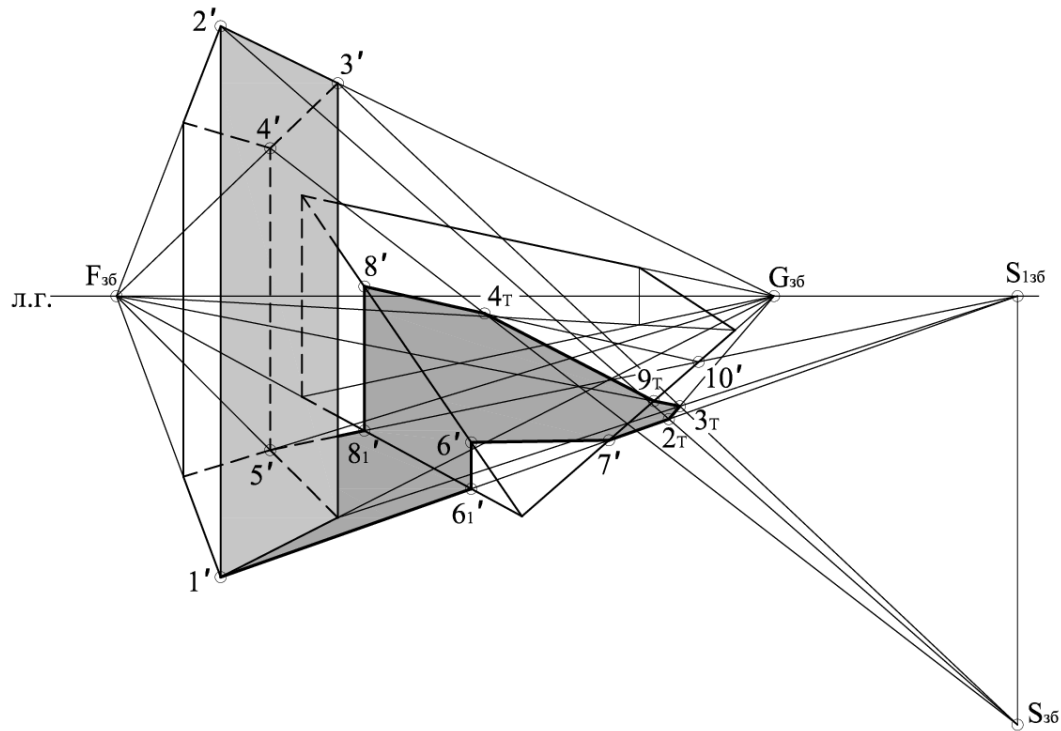


Рис. 15.12

Точку збігу світлових променів $S_{зб}$ обрано таким чином, що права видима бічна грань вертикальної призми знаходиться у власній тіні. Отже, контуром падаючої тіні буде тінь від ламаної 1-2-3-4-5. Тінь падатиме на землю, на ліву вертикальну грань горизонтальної призми та на похилу грань горизонтальної призми. Тіні від вертикальних ребер 1-2 і 4-5 на землю будуть спрямовані у точку $S_{1зб}$ збігу горизонтальних проєкцій світлових променів. Потім через ці ребра проведено вертикальні світлові площини і визначено лінії їх перетину з поверхнею горизонтальної призми. Ця лінія знаходиться як ламана, що сполучає точки перетину ребер призми з проведеними світловими площинами. Вертикальна світлова площина, проведена через ребро 1-2, перетинає землю по прямій $1S_1$, а поверхню горизонтальної призми – по ламаній 6_1-6-7 . Відрізок 6_1-6 є тінню ребра 1-2 на ліву вертикальну грань призми; відрізок 6-7 є тінню частини ребра 1-2 на похилу грань горизонтальної призми.

Тінь від точки 2 падає на землю. Її знайдено в перетині прямої $1S_1$ з променем світла $2S_{зб}$.

Тінь від ребра 2-3 на землю буде паралельна до самого ребра і направлена в його точку збігу $G_{3б}$. Тінь від точки 3 знайдено в перетині прямої $2TG_{3б}$ з променем світла $3S_{3б}$.

Тінь від ребра 3-4 на землю буде паралельна до самого ребра і спрямована в точку збігу $F_{3б}$ до перетину з нижнім горизонтальним ребром горизонтальної призми у точці 9.

Вертикальна світлова площина, проведена через ребро 4-5, перетинає поверхню горизонтальної призми по ламаній 8_1-8-10 . Відрізок 8_1-8 є тінню ребра 4-5 на ліву вертикальну грань горизонтальної призми. Отже, лінія $8-10$ – це лінія перетину світлової площини, проведеної через ребро 4-5, з похилою гранню призми. Тінь 4_T від точки 4 знайдено в перетині лінії $8-10$ і променя світла $4-S$. Відрізок $8-4_T$ є тінню частини ребра 4-5 на похилу грань горизонтальної призми. Відрізок $4-9_T$ – тінь частини ребра 3-4 на похилу грань горизонтальної призми.

Падаюча тінь на землю від горизонтальної призми на зображенні буде невидимою і тому не показана.

У деяких випадках для побудови тіней зручним є спосіб використання точок збігу ліній перетину світлових площин з площинами, на які падає тінь. Фактично це точки збігу ліній тіней від прямих на площину. Розглянемо цей спосіб докладніше.

Як відомо, лінія збігу довільної площини визначається як пряма, що сполучає точки збігу двох прямих цієї площини. Відповідно, точка збігу будь-якої прямої площини належатиме її лінії збігу.

На рис. 15.13 задано площину загального положення α трикутником, де $F_{3б}G_{3б}$ є її лінією збігу. Також задано відрізок AB , при цьому точка B належить площині α . Задано точку $N_{3б}$ збігу відрізка AB та точку $S_{3б}$ збігу променів світла. Для побудови тіні відрізка AB на площину α через нього проведено світлову площину, лінія збігу якої визначиться точками $N_{3б}$ та $S_{3б}$. Перетин лінії $N_{3б}S_{3б}$ та лінії збігу $F_{3б}G_{3б}$ площини α визначить точку $T_{3б}$ збігу лінії тіні відрізка AB на площину α . Тінь відрізка AB на площину α буде спрямована у знайдену точку $T_{3б}$ і буде обмежена точкою A_T тіні від точки A , знайденої в перетині променя світла $S_{3б}A$ з прямою $BT_{3б}$.

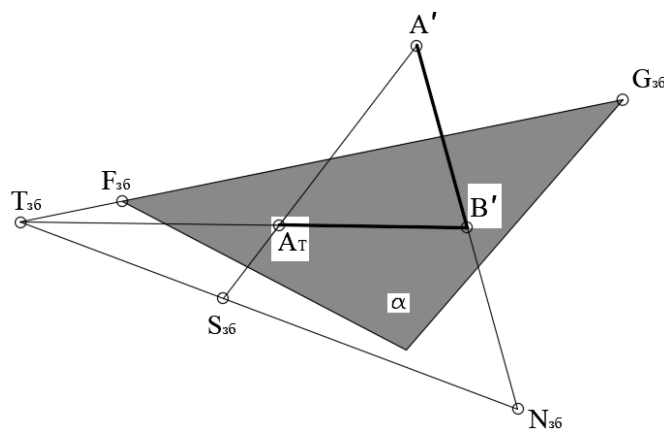


Рис. 15.13

Дану побудову можна розглядати як допоміжне проєкціювання точки $S_{зб}$ на площину α в напрямку прямої AB . Тоді знайдена точка $T_{зб}$ є допоміжною проєкцією точки $S_{зб}$ на площину α .

Узагальнивши наведені вище побудови, можна сформулювати наступні правила:

Правило 1: Лінія збігу світлової площини, проведеної через довільну пряму, визначається двома точками: точкою збігу променів світла $S_{зб}$ і точкою збігу прямої, через яку проведено світлову площину.

Правило 2: Точка збігу лінії тіні від прямої на площину визначається в перетині лінії збігу світлової площини, проведеної через пряму, і лінії збігу площини, на яку падає тінь.

Правило 3: тінь від прямої на площину збігається з допоміжною проєкцією променя світла на цю площину при напрямку проєкціювання, паралельному до прямої.

Розглянемо застосування описаного методу на практиці. На рис.15.14 задано вертикальну площину D , її лінію збігу $d_{зб}$, відрізок AB , перпендикулярний до площини D . Точка A належить площині D . Відома точка збігу $F_{зб}$ відрізка AB і точка $S_{зб}$ збігу променів світла. Лінією збігу світлової площини, проведеної через відрізок AB , буде пряма $F_{зб}S_{зб}$, що сполучає точку $F_{зб}$ збігу відрізка AB і точку $S_{зб}$ збігу променів світла. В перетині прямої $F_{зб}S_{зб}$ і лінії збігу $d_{зб}$ площини D визначиться точка $T_{зб}$ збігу лінії тіні відрізка AB на площину D . Тінь відрізка AB буде спрямована у точку $T_{зб}$ і обмежена тінню B_T від точки B , знайденою в перетині прямої $AT_{зб}$ з променем світла $BS_{зб}$.

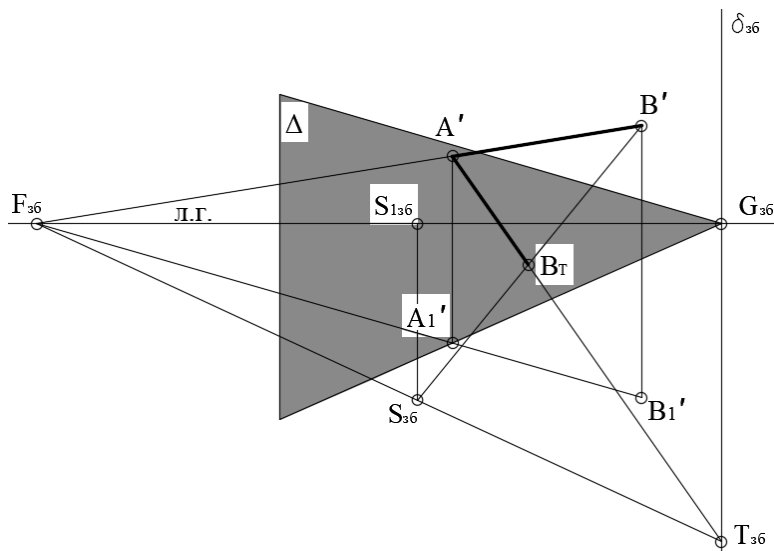


Рис. 15.14

На рис. 15.15 задано похилу площину Ω . Лінією її збігу буде пряма що

Розглянемо побудову тіні від вертикального відрізка AB . Точка збігу відрізка AB є невласною. Тому лінією збігу вертикальної світлової площини, проведеної через нього, є вертикальна пряма, що проходить через точку $S_{зб}$ збігу світлових променів. Лінією збігу предметної площини є лінія горизонту (*л.г.*). Лінія перетину цих двох площин є тінню відрізка AB на предметну площину, а точкою збігу тіні є точка $S_{лзб}$.

Побудуємо тінь похилого ребра CD на землю. Лінією збігу світлової площини, проведеної через ребро CD , буде лінія $S_{36}R_{36}$. Її перетин з лінією горизонту (лінія збігу площини, на яку падає тінь), визначить точку U_{36} збігу лінії тіні відрізка CD на землю. Тінь від точки D знайдено в перетині прямої CU_{36} і променя світла DS_{36} .

107

площини Ω визначить точку $V_{3б}$ збігу лінії тіні відрізка EG на цю площину. Тінь від точки G знайдено в перетині прямої $EV_{3б}$ і променя світла $GS_{3б}$.

На рис. 15.16 показано побудову тіні від димаря (вертикальної чотирикутної призми) на схилу даху (горизонтальну призму).

Точка $S_{3б}$ збігу променів світла вибрана таким чином, що права грань вертикальної призми знаходиться у власній тіні. Контур падаючої тіні від димаря визначить ламана $1-2-3-4-5$. Лінією збігу похилої грані горизонтальної призми є пряма $F_{3б}R_{3б}$. На ній знаходитимуться усі точки збігу ліній тіней на цю грань.

Лінією збігу світлових площин, проведених через вертикальні ребра $1-2$ і $4-5$ є вертикальна пряма $S_{3б}S_{13б}$, що проходить через точку збігу $S_{3б}$ променів світла. Перетин цієї прямої з лінією збігу $F_{3б}R_{3б}$ визначить точку $U_{3б}$ збігу для тіней від вертикальних ребер на похилу грань. Тіні від точок 2 і 4 знайдено в перетині променів світла $S_{3б}2$ та $S_{3б}4$ з прямими $1U_{3б}$ і $5U_{3б}$.

Точкою збігу ребра $2-3$ є точка $G_{3б}$. Отже, лінія збігу світлової площини, проведеної через це ребро – пряма $S_{3б}G_{3б}$. В перетині прямих $S_{3б}G_{3б}$ і $F_{3б}R_{3б}$ знайдено точку $V_{3б}$ збігу тіні ребра $2-3$ на похилу грань горизонтальної призми.

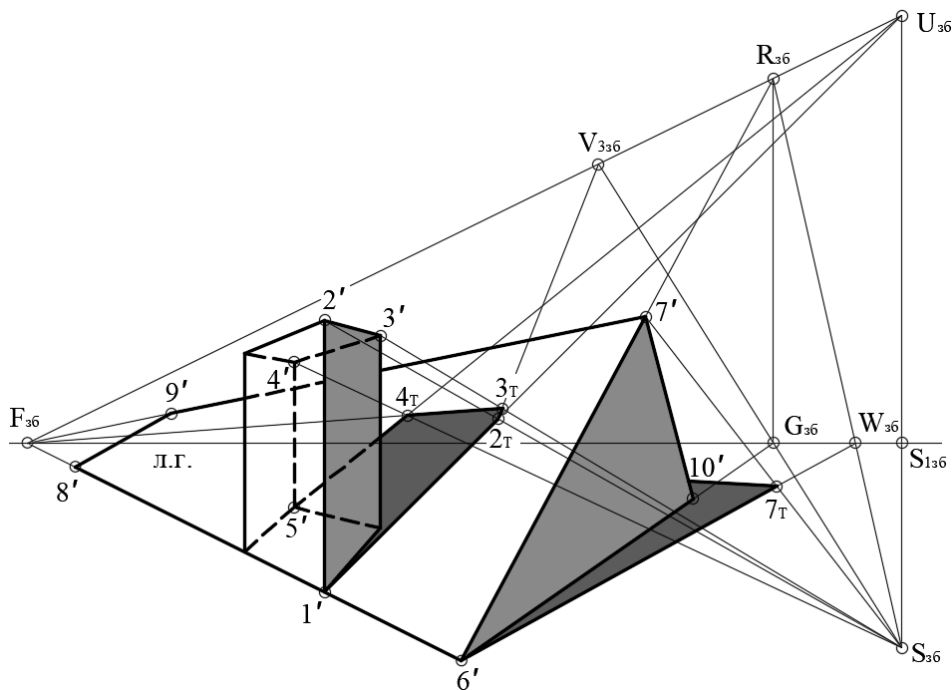


Рис. 15.16

Сполучивши точки 3_T і 4_T , отримаємо тінь від ребра $3-4$. Вона повинна бути спрямована у точку збігу $F_{3б}$, оскільки ребро $3-4$ паралельне до площини, на яку падає тінь.

Аналогічно побудовано тінь від горизонтальної призми на предметну площину. Вертикальна грань $6-7-10$ знаходиться у власній тіні. Отже, тінь падатиме від ребер $6-7$ та $7-9$. Лінія збігу світлової площини, проведеної через ребро $6-7$ –

лінія $S_{36}R_{36}$. Перетин її з лінією горизонту визначить точку збігу W_{36} тіні ребра 6-7 на предметну площину. Тінь від точки 7 побудовано в перетині прямої 6- W_{36} і променя світла 7- S_{36} .

На рис. 15.17 побудовано тіні від димаря на двох схилах даху. Тінь переходить з одного схилу на інший. Точки збігу ліній тіней на правий схил даху знаходитимуться на його лінії збігу $F_{36}P_{36}$. Точки збігу ліній тіней на лівий схил даху знайдено на його лінії збігу $R_{36}G_{36}$. Загалом хід побудов аналогічний описаному у попередніх прикладах.

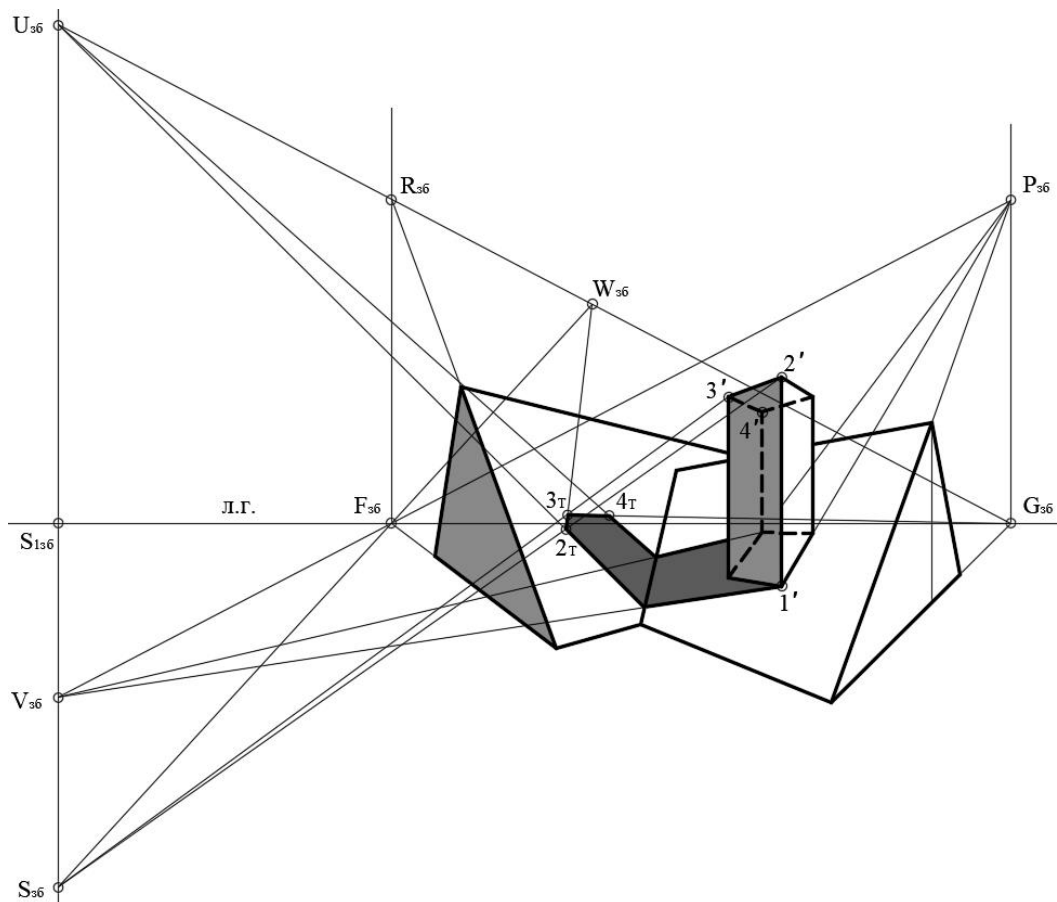


Рис. 15.17

15.5. Тіні кривих поверхонь та поверхонь обертання

Контур власної тіні циліндра і конуса обертання визначається проведенням світлових площин, дотичних до їх поверхонь. Лінія дотику і буде контуром власної тіні.

На рис. 15.18 наведено побудову власної та падаючої тіні вертикального циліндра обертання. Горизонтальні проєкції світлових площин, дотичних до

поверхні циліндра, матимуть точкою збігу S_{136} – точку збігу горизонтальних проєкцій світлових променів. Дотичні, які проведено з точки S_{136} до кривої основи циліндра, визначають точки твірних, які є контуром власної тіні циліндра. Контуром падаючої тіні є тінь від межі власної тіні, тобто від твірної 1-3, частини кола верхньої основи 3-4 і твірної 2-4.

Для побудови контура власної і падаючої тіні вертикального конуса обертання спершу потрібно знайти тінь T_T його вершини на площину основи. Дотичні з точки T_T до кривої основи конуса утворюють контур падаючої тіні та визначають точки 1 і 2 твірних, які є межею власної тіні конуса (рис. 15.19).

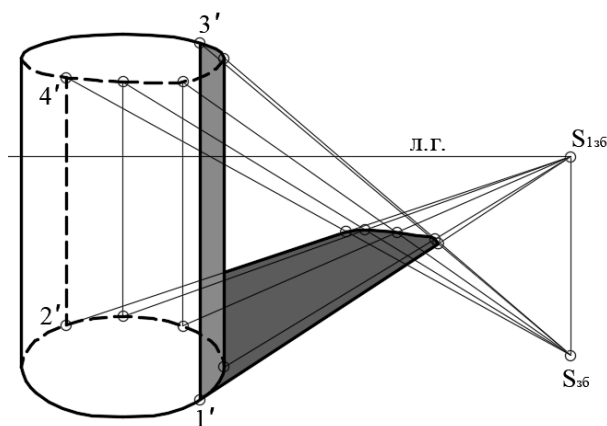


Рис. 15.18

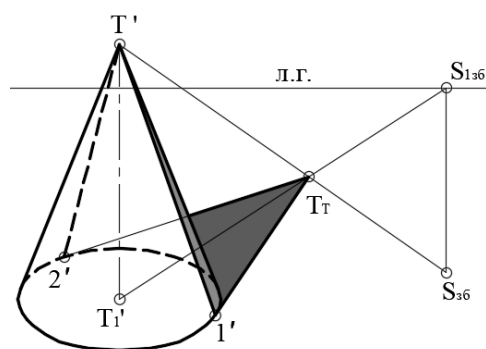


Рис. 15.19

На рис. 15.20 показано побудову тіней на поверхні циліндра, накритого квадратною плитою. Застосовано спосіб січних світлових площин. Спочатку проведено вертикальну світлову площину, дотичну до поверхні циліндра. Вона дотикається до верхньої основи циліндра в точці $1_1'$, через яку пройде контур власної тіні циліндра. Ця ж світлова площина перетинає нижнє праве ребро плити в точці 1, яка кидатиме тінь 1_T на твірну-контур власної тіні циліндра. Точку 1_T тіні знайдено в перетині променя світла $S_{36}1$ і контура власної тіні циліндра. Для визначення точки тіні від кутової точки плити 2 через неї проведено вертикальну світлову площину, яка перетинає верхню основу циліндра в точці 2_1 і визначає твірну, на яку впаде тінь від точки 2. Точка 2_T тіні визначена в перетині променя світла $S_{36}2$ і твірної, що проходить через точку 2_1 .

Для побудови точки тіні на лівому контурі циліндра проведено вертикальну світлову площину через верхню точку 3_1 лівої контурної твірної циліндра. Ця площина перетинає ліве нижнє ребро плити в точці 3, яка і кидатиме тінь на лівий контур циліндра. Точку 3_T тіні знайдено в перетині променя світла $S_{36}3$ і лівого контура циліндра. Користуючись описаним алгоритмом, можна побудувати необхідну кількість точок падаючої тіні.

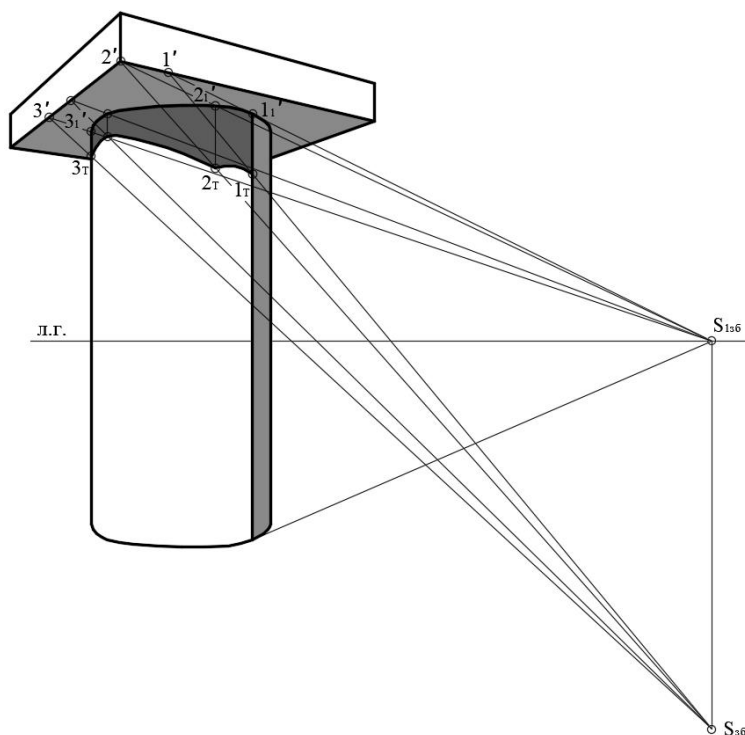


Рис. 15.20

На рис. 15.21 показано аналогічну задачу з побудовою тіней на циліндрі, накритому циліндричною плитою. Тут також застосовано спосіб вертикальних січних світлових площин.

Вертикальна світлова площина, дотична до поверхні циліндричної плити, визначить точку 2 контура власної тіні. Далі, як у попередньому прикладі, проведено вертикальну світлову площину, дотичну до поверхні нижнього циліндра і визначено точку 1_1 , через яку пройде контур власної тіні циліндра. Ця світлова площина перетинає нижню основу плити в точці 1, яка кидатиме тінь 1_T на контур власної тіні циліндра.

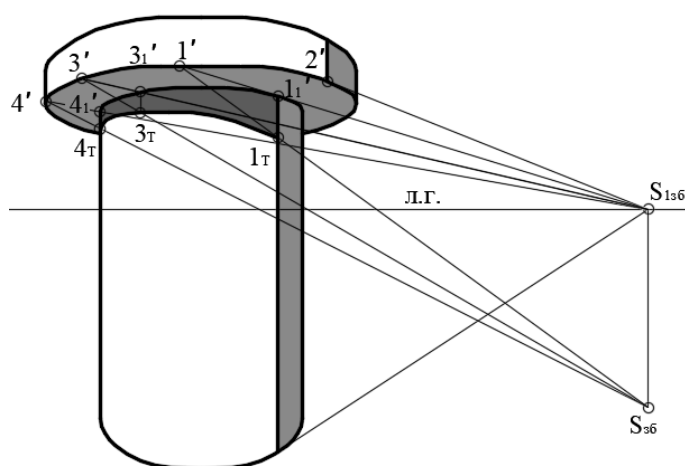


Рис. 15.21

Для побудови довільної точки контура падаючої тіні проведено довільну вертикальну світлову площину, яка перетинає верхню основу циліндра в точці 3_1 , а

нижню основу плити в точці 3. Точка 3 кидатиме тінь 3_T на твірну, яка пройде через точку 3_1 .

Точка 4_T тіні на лівому контурі циліндра побудована аналогічно тому, як це було зроблено у попередньому прикладі.

На рис. 15.22 показано побудову тіні від циліндричної плити на конічну поверхню. Контур власної тіні циліндричної поверхні побудовано так, як показано у попередніх прикладах.

Для побудови точок тіні на конічній поверхні промені світла проєкціюють на площину нижньої основи плити з вершини конуса. У такому випадку світлові площини, визначені променями світла та їх відповідними проєкціями, перетинатимуть поверхню конуса по твірним.

Проекцією точки $S_{3б}$ збігу променів світла на площину нижньої основи плити буде точка $U_{3б}$, знайдена в перетині променя світла $S_{3б}T$ і прямої S_1T_1 .

Дотична, проведена з точки $U_{3б}$ до кривої верхньої основи конуса, визначить точку 1_1 , яка належить твірній-контурі власної тіні конуса. Продовження дотичної $U_{3б}1_1$ до перетину з кривою нижньої основи плити визначить точку 1, яка лежить в одній світловій площині з твірною 1_1T . Тому в перетині променя світла $1S_{3б}$ з цією твірною визначиться точка падаючої тіні 1_T .

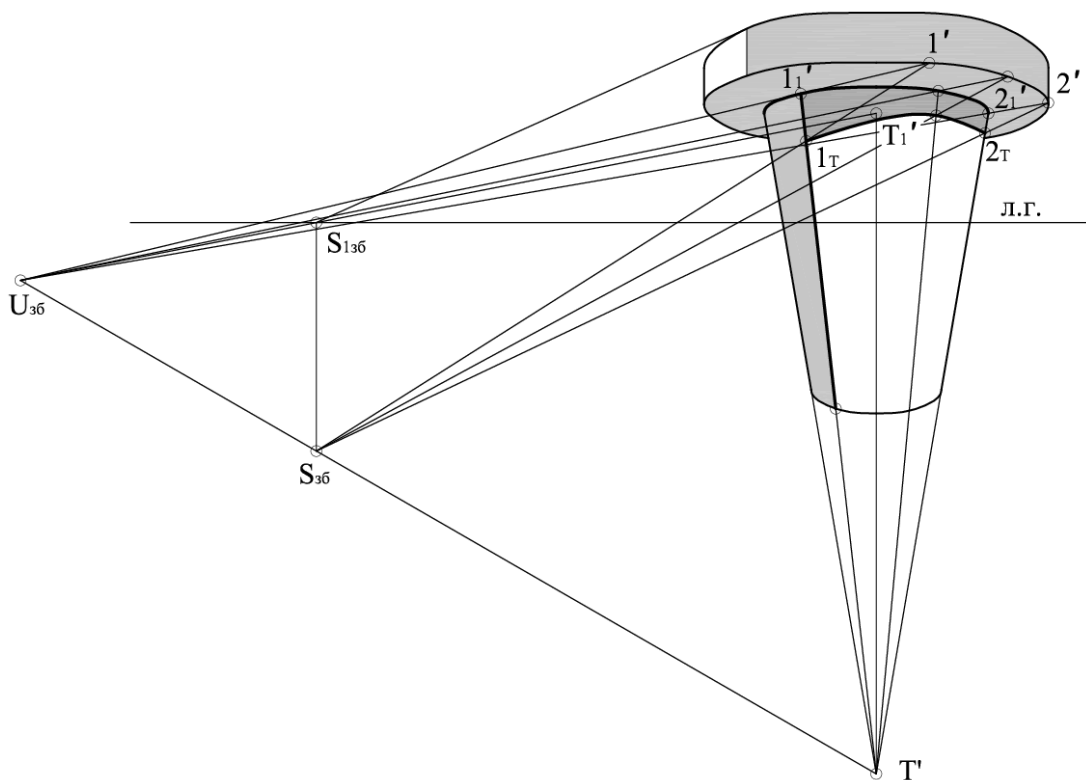


Рис. 15.22

Для побудови точки тіні на правій контурній твірній конуса через її верхню точку проведено проєкцію променя світла $U_{3б}2_1$. Його перетин з кривою нижньої основи плити визначить точку 2, яка знаходиться в одній світловій площині з правим

контуром конуса і кидатиме на нього тінь. Перетин променя світла $S_{36}2$ з твірною 2_1T визначить точку тіні 2_T . За наведеним алгоритмом можна побудувати необхідну кількість точок падаючої тіні.

Допоміжне проєкціювання променів світла на площину основи циліндричної поверхні в напрямку її твірних застосовується при побудові тіней в циліндричних арках і нішах. Розглянемо це на прикладі.

На рис. 15.23 задано перспективу ніші з циліндричним завершенням, точку G_{36} збігу твірних циліндричної поверхні, лінію збігу d_{36} вертикальної площини стіни та точку S_{36} збігу променів світла. Точку U_{36} збігу проєкцій променів світла на площину стіни знайдено в перетині променя $S_{36}G_{36}$ з лінією збігу d_{36} . Провівши з точки U_{36} дотичну до кривої основи ніші, отримуємо точку D_T твірної контура власної тіні циліндричної поверхні ніші.

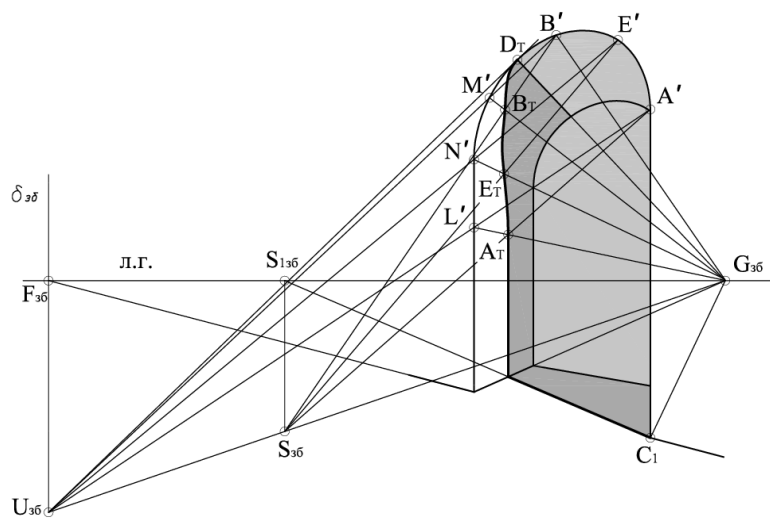


Рис. 15.23

Для побудови тіні від довільної точки B проведено проєкцію променя світла $U_{36}B$, який перетинає криву основи ніші у точці M – основі твірної, на яку впаде тінь від точки B . Точка тіні B_T знаходиться в перетині цієї твірної і променя світла $S_{36}B$. Так само знайдено тінь A_T від граничної точки A , у якій крива контура ніші переходить в пряму.

Оскільки тінь від лівого вертикального ребра контура ніші падає на паралельну йому площину, тінь від нього нижче точки A_T буде паралельною до самого ребра і матиме вигляд вертикальної прямої.

На рис. 15.24 наведено аналогічну побудову для випадку, коли площина контура основи ніші є паралельною до картинної площини.

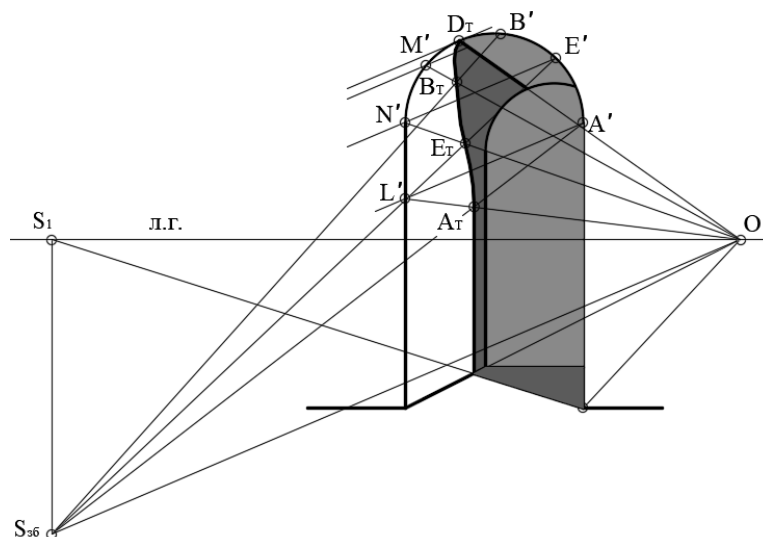


Рис. 15.24

У цьому випадку точка збігу проєкцій променів світла на площину основи ніші буде невласною, а самі допоміжні проєкції світлових променів будуть паралельні прямій $S_{36}O$ і паралельні між собою.

Розглянутий метод також використовується при побудові тіней на поздовжні тяги з криволінійними профілями.

На рис. 15.25 задано перспективу горизонтальної тяги, профіль якої складається з прямолінійних та криволінійних ділянок. Задано перспективу вертикальної прямої AB , точка A якої належить предметній площині. Задано також точку S_{36} проєкцій променів світла, точку S_{136} збігу горизонтальних проєкцій променів світла та лінію d_{36} збігу вертикальної площини торця тяги.

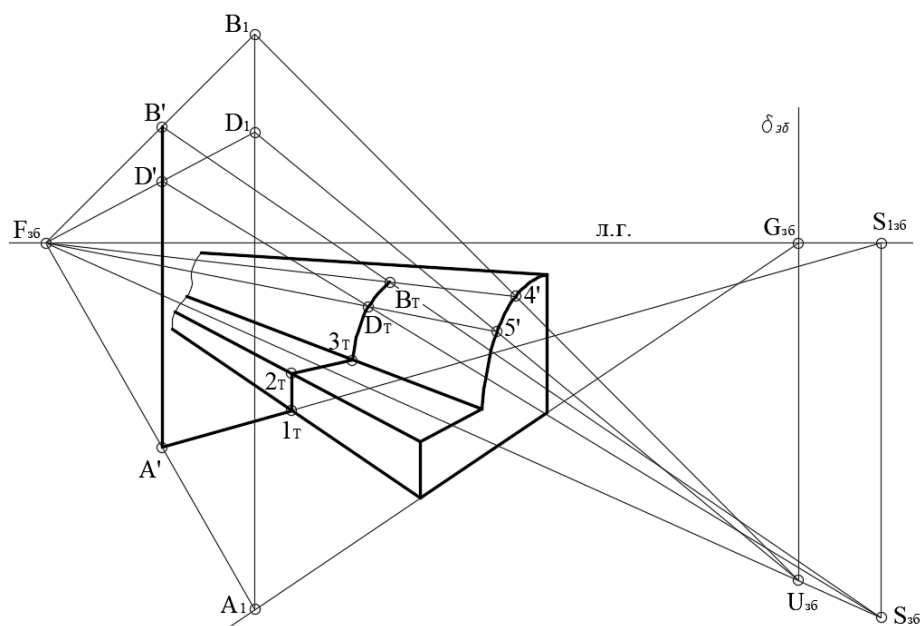


Рис. 15.25

Тінь від прямої AB на предметну площину і горизонтальну грань тяги спрямована у точку S_{136} ; тінь 1-2 на ліву вертикальну грань тяги паралельна до прямої і є вертикальною.

Далі точку S_{36} збігу проєкцій променів світла спроекційовано на площину основи тяги в напрямку її твірних. Для цього проведено промінь світла $S_{36}F_{36}$, і в його перетині з лінією d_{36} отримано точку U_{36} збігу проєкцій променів світла на площину торця тяги. Відрізок AB також спроекційовано на площину торця тяги в напрямку її твірних і отримано допоміжну проєкцію A_1B_1 .

Для побудови тіні від точки B на поверхню тяги через точку B_1 проведено проєкцію променя світла $U_{36}B_1$, перетин якої з профілем тяги в точці 4 визначить твірну, на яку впаде тінь від точки B . Перетин цієї твірної з променем світла $S_{36}B$ дасть шукану точку тіні B_T .

Таким способом можна побудувати необхідну кількість точок падаючої тіні для більш точного відтворення її форми. Наприклад, слід знайти точку тіні на твірній $F_{36}5$ тяги. Для цього спочатку у площині торця тяги проведено проєкцію променя світла $U_{36}5$. Його перетин з допоміжною проєкцією прямої A_1B_1 визначить точку D_1 , яка є допоміжною проєкцією точки D прямої AB . Точку D знайдено в перетині прямої AB з променем $F_{36}D_1$, і саме ця точка кидатиме тінь на твірну $F_{36}5$. Перетин променя світла $S_{36}D$ з твірною $F_{36}5$ визначить шукану точку тіні D_T .

На рис. 15.26 показано побудову тіні у закритій циліндричній ніші з вертикальною віссю

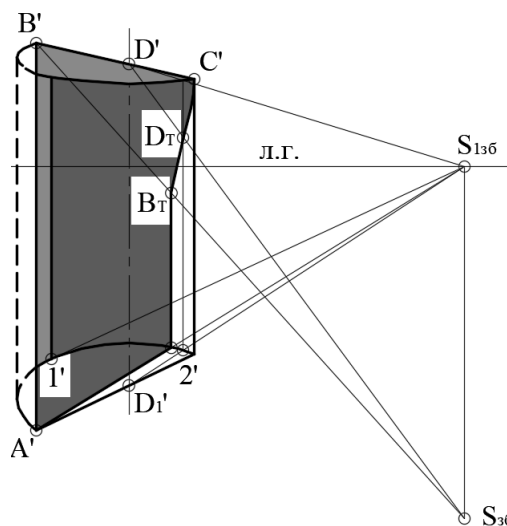


Рис. 15.26

. Спершу з точки S_{136} проведено дотичну до кривої основи циліндричної поверхні. Точка дотику 1 визначить твірну границю контура власної тіні. Тінь від вертикальної твірної AB на горизонтальну площину направлена у точку S_{136} збігу горизонтальних проєкцій променів світла. Тінь від цієї ж твірної на циліндричну

поверхню вертикальна і обмежена точкою тіні B_T , знайденою в перетині променя світла $S_{36}B$ з лінією тіні. Далі на циліндричну поверхню падатиме тінь від горизонтальної прямої BC . Тінь від неї будується з використанням прямокутних проєкцій точок прямої та горизонтальних проєкцій променів світла на площину основи ніші. Так, для побудови тіні від довільної точки D через її горизонтальну проєкцію D_1 у площині нижньої основи ніші проведено проєкцію $S_{136}D_1$ променя світла $S_{36}D$, який в перетині з кривою основи циліндра визначить точку 2 твірної, на яку впаде тінь. Точку тіні D_T знайдено в перетині цієї твірної і променя світла $S_{36}D$.

На рис. 15.27 показано побудову тіней у конічній ніші. Для визначення контура власної тіні вершину T конуса спроекційовано на площину основи у напрямку променів світла. Зі знайденої точки T_T проведено дотичну до кривої основи ніші, визначено точку 1. Твірна $T1$ є контуром власної тіні конічної поверхні ніші. Тінь від крайньої твірної TA на площину основи спрямована у точку S_{136} ; на конічну поверхню – направлена з точки 2 у вершину T .

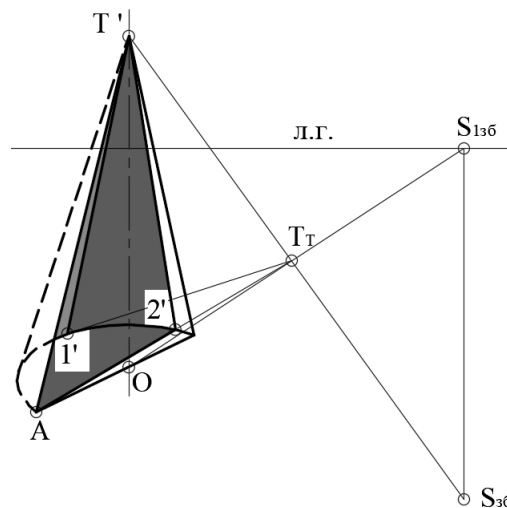


Рис. 15.27

Для побудови власних і падаючих тіней на тілах обертання складної форми також застосовують спосіб січних світлових перерізів.

На рис. 15.28 показано побудову тіней на циліндричній колоні та капітелі. При цьому використано горизонтальні перерізи циліндра і капітелі та проєкції цих перерізів на предметну площину.

Спершу проводять вертикальну січну світлову площину D , дотичну до поверхні циліндра. Вона зобразиться на площині основи прямою $S_{136}1$, дотичною до кривої основи циліндра. Точка $1'$ визначить твірну контура власної тіні циліндра. Точки 2, 3, 4 перетину світлової площини з проєкціями перерізів капітелі зворотніми вертикальними прямими повертаються на відповідні перерізи. Отримані точки сполучаються плавною кривою, яка є лінією перетину поверхні капітелі і світлової площини D . Промінь світла, дотичний до кривої перерізу, визначить точку A контура власної тіні капітелі. Побудована лінія перерізу капітелі і контур власної тіні

циліндра знаходяться в одній світловій площині, тому перетин променя світла $S_{36}A$ з контуром власної тіні циліндра визначить точку A_T падаючої тіні.

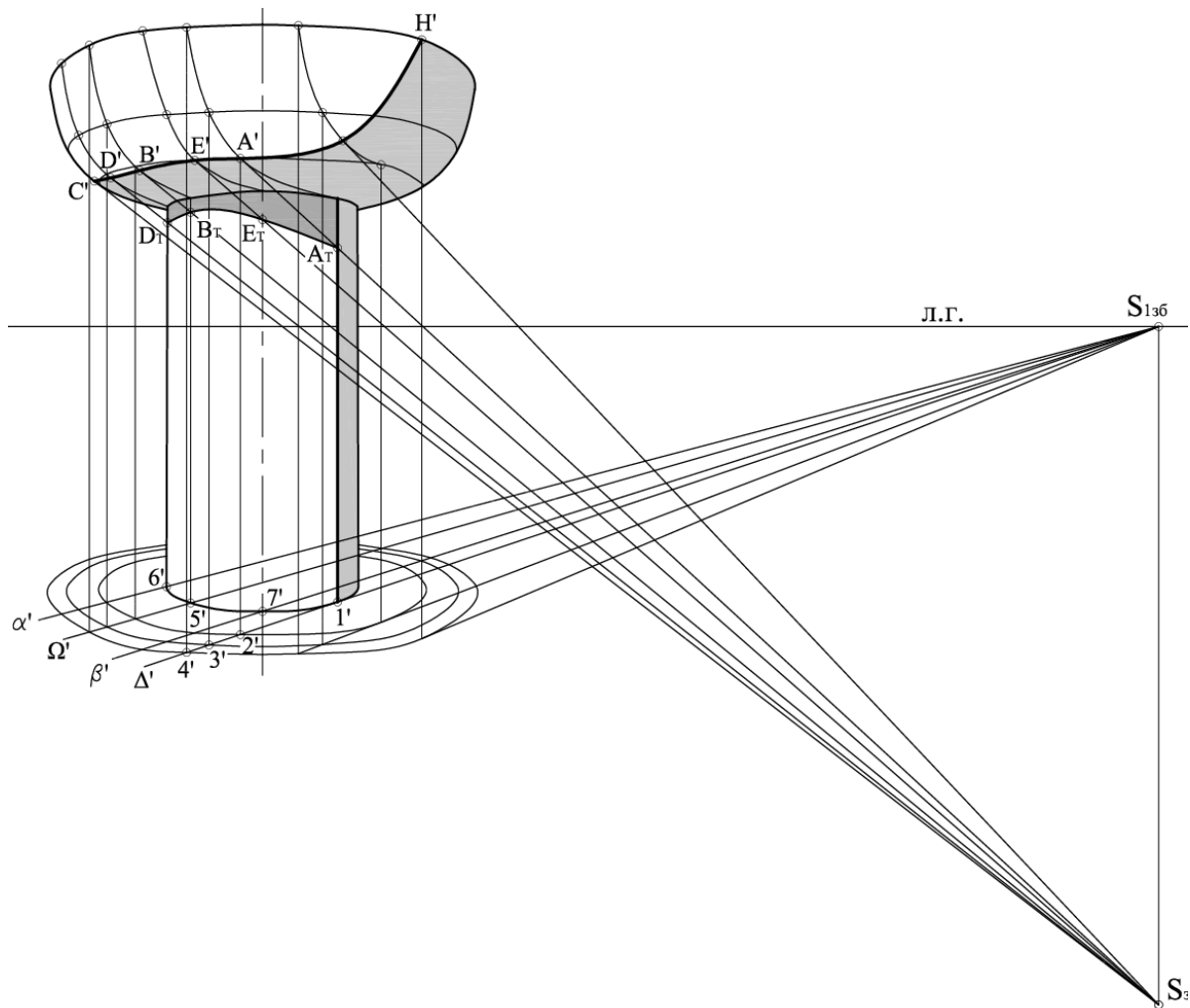


Рис. 15.28

Провівши кілька додаткових вертикальних світлових площин, можна отримати необхідну кількість точок тіні. Наприклад, на рисунку показано побудову точки тіні B_T у січній площині Ω . Аналогічно описаному вище знайдено твірну перетину з площиною Ω поверхні циліндра та побудовано криву перерізу цією ж площиною поверхні капітелі. Промінь світла, дотичний до побудованої кривої, визначає ще одну точку B контура власної тіні капітелі. Так само знайдено точку тіні E_T у січній площині β та точку тіні D_T на лівому контурі циліндра у січній площині α .

Точку H власної тіні побудовано як точку дотику вертикальної світлової площини до капітелі. Точку C власної тіні на контурі капітелі побудовано наближено за умовою, що контур капітелі майже збігається з відповідним перерізом вертикальної світлової площини.

15.6. Тіні при точковому джерелі світла

Точкове джерело світла, як правило, задається перспективою точки S (джерела світла) та перспективою її прямокутної проекції S_1 на предметну площину.

При точковому джерелі освітлення загальні правила побудови тіней такі ж, що і при сонячному освітленні. Розглянемо їх особливості на кількох прикладах.

На рис. 15.29 задано перспективу відрізка $ABCD$ вертикальної площини. Відрізок CD належить площині основи. Задано також перспективу S джерела світла та його прямокутної проекції S_1 на площину основи. Оскільки відрізки AC і BD перпендикулярні до площини основи, то тіні від них збігатимуться з прямокутними проекціями променів світла на цю площину. Слід провести проекції променів світла S_1C і S_1D . Їх перетин зі світловими променями SA і SB визначить точки тіней A_T і B_T . Відрізок AB паралельний до площини основи, тому тінь від нього буде паралельна до самого відрізка і спрямована у точку збігу $F_{зб}$.

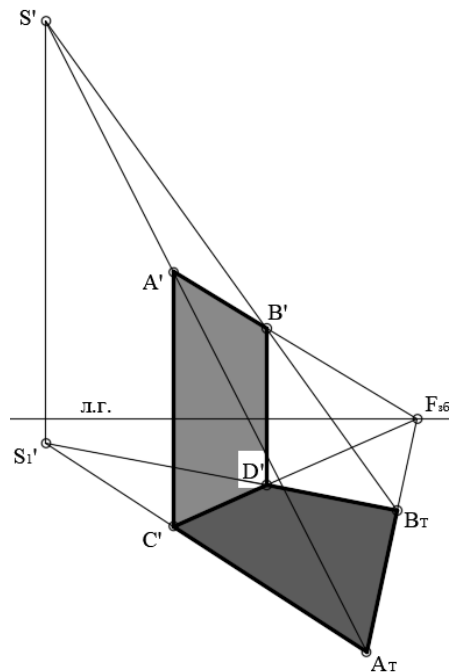


Рис. 15.29

На рис. 15.30 задано перспективу вертикальної площини Δ та перпендикулярного до неї горизонтального відрізка ABC' , сторона CD якого належить площині Δ . Задано також перспективу S' джерела світла та його прямокутної проекції S_1' на площину основи. Побудовано прямокутну проекцію джерела світла S на площину Δ . Для цього через точку S проведено вертикальну площину Ω , перпендикулярну до площини Δ . Ця площина перетне останню по прямій 1-2, перетин якої з променем $SG_{зб}$ визначить проекцію S_2 . Тіні відрізків AC і BD на площину Δ будуть спрямовані у точку S_2 . Точки A_T і B_T тіней визначаються в перетині

проекцій променів світла S_2C та S_2D з променями світла SA і SB . Оскільки відрізок AB паралельний до площини Δ , тінь від нього повинна бути спрямована у точку збігу F_{36} .

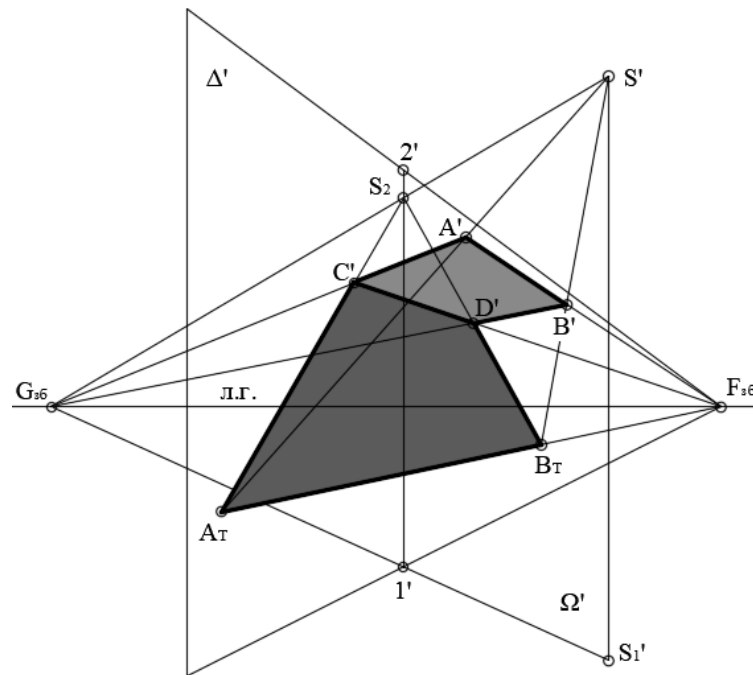


Рис. 15.30

На рис. 15.31, *а, б*, показано побудову тіней від вертикального відрізка AB та похилого відрізка CD на похилу площину Σ . Точки B і C належать площині основи. Застосовано спосіб допоміжних січних площин. Тінь відрізка AB на горизонтальну площину основи буде спрямована у точку S_1 і перетне нижню сторону площини Σ у точці 1 . Далі через відрізок AB проведено вертикальну світлову площину та побудовано лінію $1-2$ її перетину з площиною Σ . Перетин лінії $1-2$ і променя світла SA визначить точку тіні A_T і лінію $1-A_T$ тіні частини відрізка AB на похилу площину.

Для знаходження тіні похилого відрізка CD на площину основи знайдено тінь D_{T1} від точки D на цю площину. Для цього через прямокутну проекцію D_1 точки D на площину основи проведено проекцію S_1D_1 променя світла. Її перетин з променем світла SD визначить точку тіні D_{T1} . З'єднавши останню з точкою C отримаємо тінь відрізка CD на площину основи, яка перетне нижню сторону площини Σ в точці 3 . Для побудови тіні відрізка CD на похилу площину через точку D проведено вертикальну світлову площину, яка перетинає площину Σ по прямій $4-5$. Перетин останньої з променем світла SD визначить точку тіні D_T .

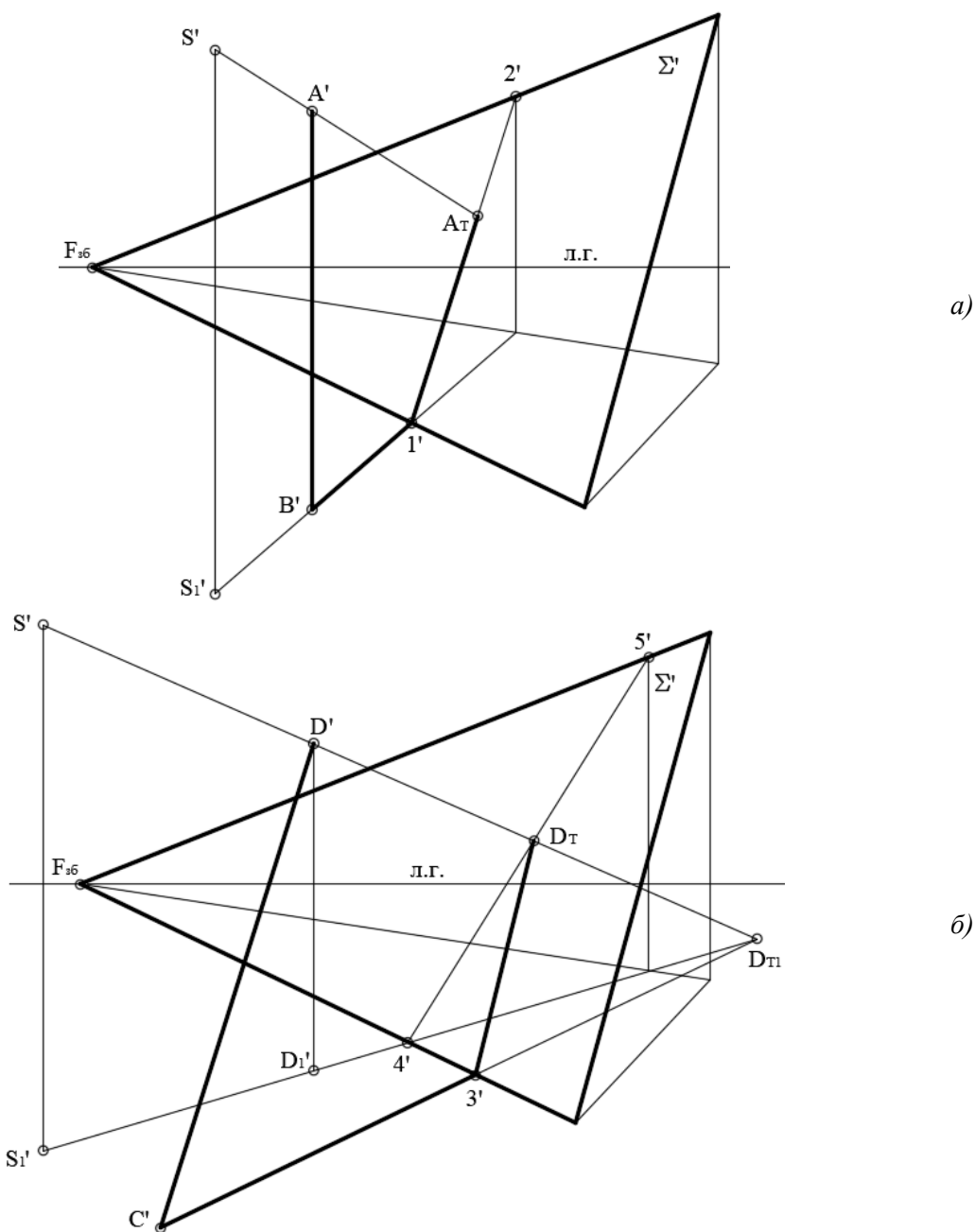


Рис. 15.31

На рис. 15.32 показано побудову падаючої тіні похилого відрізка $ABDC$ на вертикальну площину D . Сторона CD належить площині D , а сторони AC і BD паралельні до картинної площини. Для побудови тіней джерело світла S спроекційовано на площину D у напрямі похилих ребер AC і BD . Для цього через точку S проведено вертикальну площину, яка перетинає площину D по прямій $1-2$; також з точки S проведено промінь світла, паралельний до AC і BD . Його перетин з прямою $1-2$ визначить точку збігу S_{236} ліній тіней похилих ребер на площину D . Отже, тіні від ребер AC і BD будуть спрямовані в точку S_{236} . Точки тіней A_T і B_T знайдено в перетині прямих S_2C та S_2D з променями світла SA та SB . Тінь відрізка AB буде паралельна до нього і повинна бути спрямована в точку збігу F_{36} .

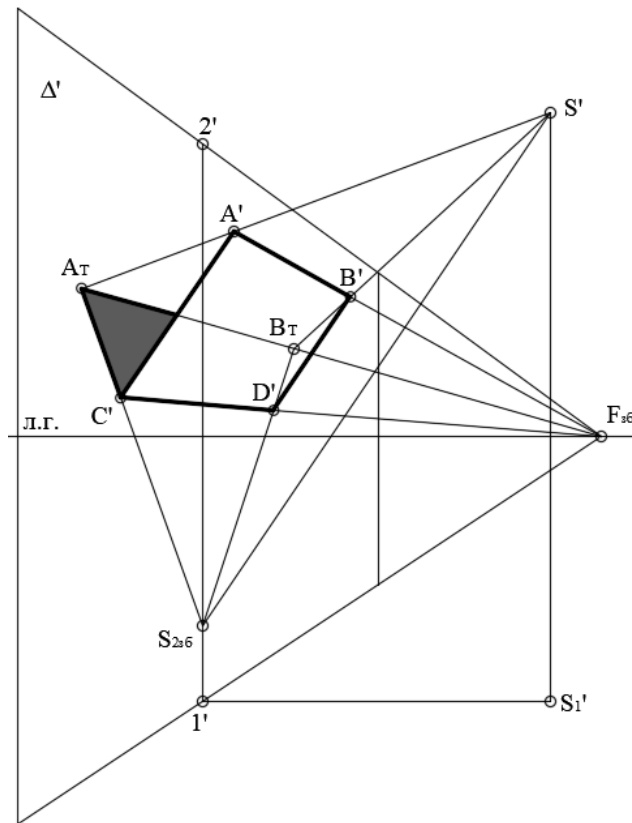


Рис. 15.32

На рис. 15.33 показано побудову тіней в перспективі інтер'єра при точковому джерелі світла, яке задано перспективою точки S . При побудові застосовано розглянуті вище прийоми та способи.

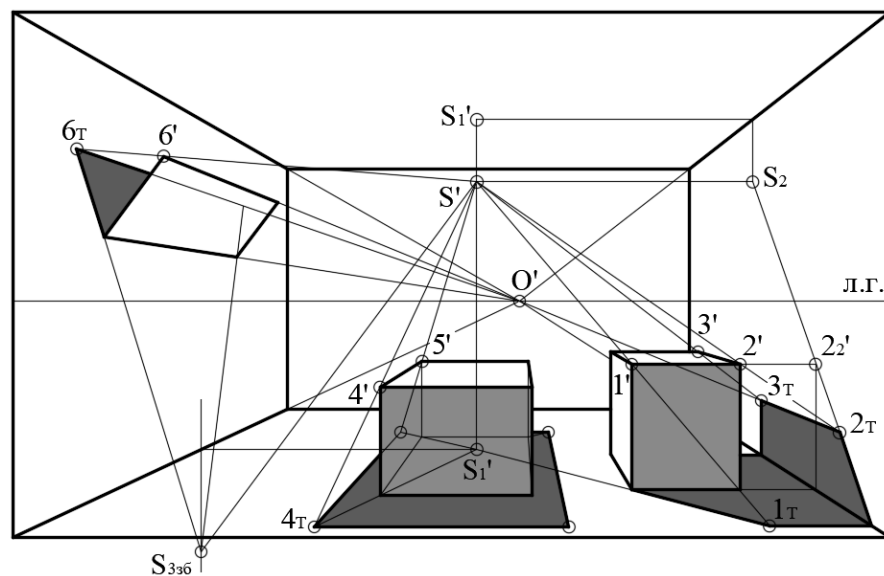


Рис. 15.33

В сучасних інтер'єрах значного поширення набули лінійні джерела світла. У

такому випадку тінь будь-якого предмета складається з сукупностей тіней від кожної точки такого джерела світла. Загальний контур падаючої тіні обмежується тінню від межових точок S і R джерела світла (рис. 15.34).

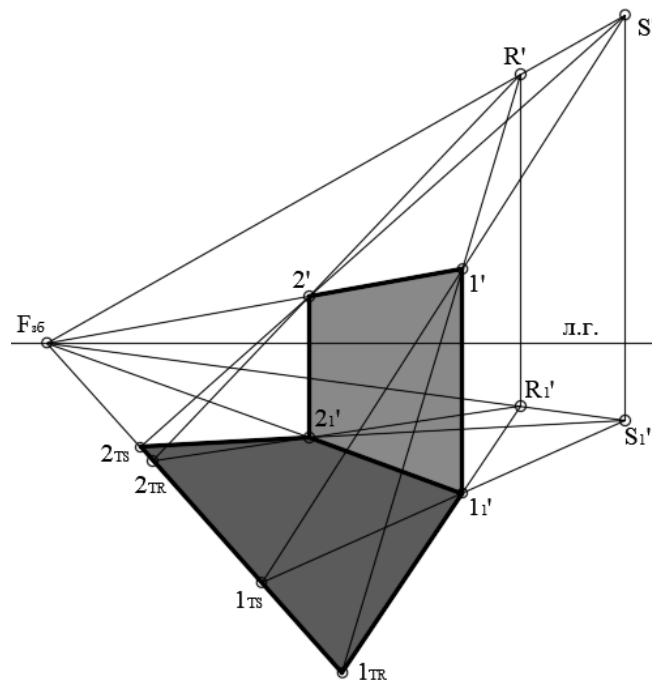


Рис. 15.34

Запитання для самоконтролю

1. Як задати січну світлову площину в перспективі?
2. Що таке точка збігу світлових променів і точка збігу проекції світлових променів?
3. Як задати положення джерела світла при штучному освітленні?

ЧАСТИНА ЧЕТВЕРТА. ПРОЕКЦІЇ З ЧИСЛОВИМИ ПОЗНАЧКАМИ

В процесі проектування в будівництві вирішується питання розташування споруди на конкретній місцевості, для чого необхідна інформація про її рельєф. Незакономірна форма поверхні землі не дає можливості її зображення в звичайних ортогональних проекціях на взаємно перпендикулярних площинах, а також в аксонометрії та в перспективі. Основним зображенням є горизонтальна проекція (план місцевості), на якій показують окремі точки, розташовані на певній висоті, та лінії, що з'єднують точки з однаковою висотою. Висоти показують у вигляді чисел (позначок), тому метод зображення отримав назву – **проекції з числовими позначками**. Додатковими зображеннями, як правило, є розрізи. Для отримання розрізів використовують вертикальні площини, які разом із отриманими зображеннями на них суміщають із основною горизонтальною площиною.

РОЗДІЛ 16. ПРОЕКЦІЇ ГЕОМЕТРИЧНИХ ФІГУР

16.1. Проекції точки

Положення точок у просторі визначають відносно горизонтальної площини Π_1 , яку будемо називати **площиною нульового рівня**, або **нульовою** Π_0 (рис. 16.1, а). За одиницю довжини зазвичай приймають один метр і показують у вигляді лінійного масштабу. Точка може знаходитись над площиною або під нею. Відстані від точок до нульової площини є їх висотними позначками.

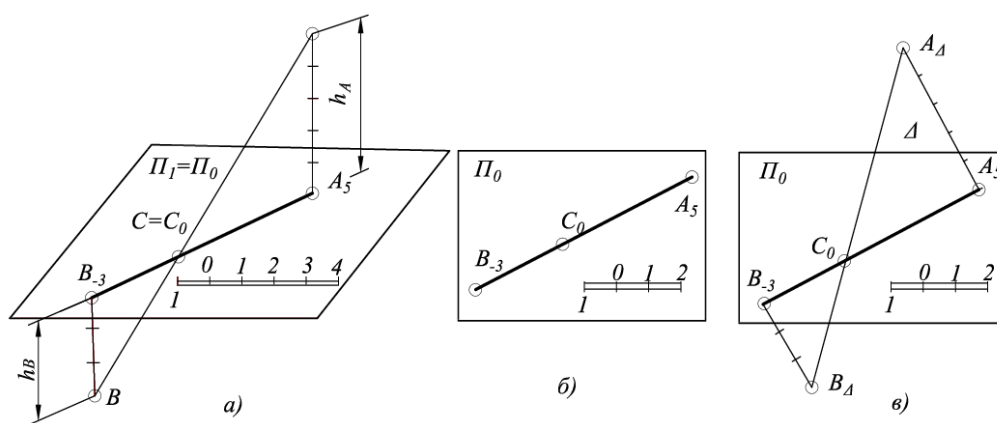


Рис.16.1

Із рисунка видно, що точки A і B мають висотні позначки відповідно 5м і мінус 3м, що і зазначають на зображеннях прямокутних проекцій точок у вигляді A_5 і

B_3 (рис. 16.1, б). На рис. 16.1, в показано також проекції точок A, B, C на додаткову вертикальну площину Δ , проведену через пряму AB та суміщену із Π_0 .

Раніше аналогічну побудову у вигляді заміни площин проекцій використовували при розв'язанні метричних та позиційних задач.

За необхідністю положення площини Π_0 можна обирати так, щоби всі точки об'єкта мали додатні значення позначок.

16.2. Проекції прямої

На рис. 16.2, а показано відрізок AB , його проекції на Π_0 (A_6B_3) та на додаткову вертикальну площину Δ , паралельну AB . Комплексне зображення прямої AB на площинах Π_0 та Δ дано на рис. 16.2, б. Для скорочення побудов площину Δ поводять безпосередньо через пряму AB (рис. 16.2, в, 16.1, в).

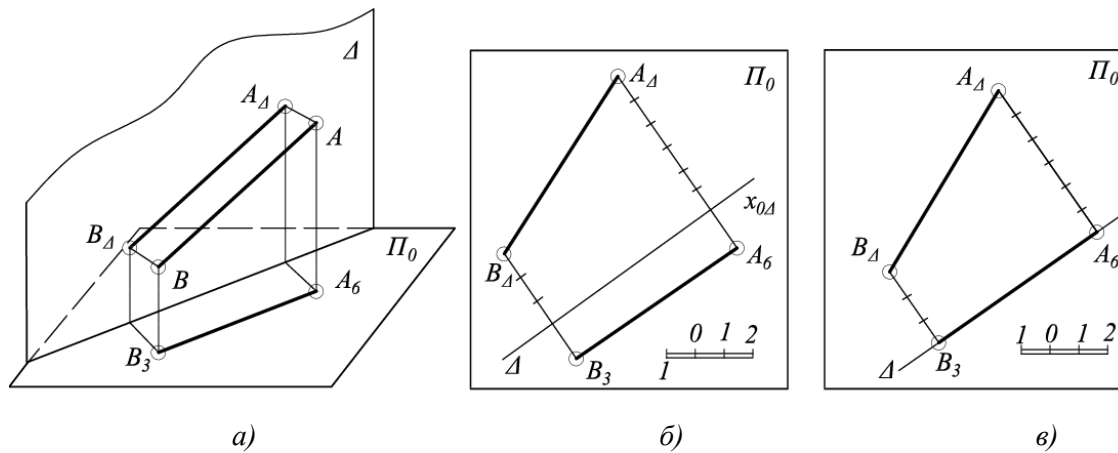


Рис.16.2

Розглянемо деякі характеристики прямої лінії (рис. 16.3). Довжину горизонтальної проекції відрізка, що задає пряму, називають **закладенням (L)**. Величина **i (уклон)** визначається відношенням різниці позначок кінцевих точок відрізка до закладення: $i = (h_A - h_B) : L = \operatorname{tg} \alpha$, где α – кут нахилу прямої до горизонтальної площини.

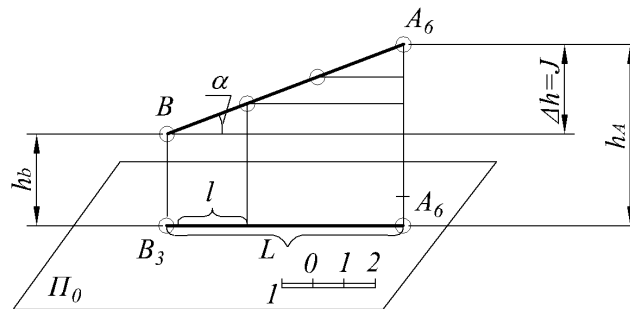


Рис.16.3

J – підйом відрізка дорівнює різниці позначок кінців відрізка $h_A - h_B$.

l – інтервал прямої – величина закладення на підйомі, що дорівнює одиниці, тобто $l = L : J$. Оскільки $J = \Delta h$, то уклон $i = J : L = 1 : l$, звідки виходить, що інтервал і уклон – величини взаємно обернені.

На рис. 16.4, а, б показано у порівнянні два відрізки AB і CD проекціями з числовими позначками A_1B_2 і C_2D_1 . Додаткові зображення відрізків на вертикальних площинах Δ , паралельних відрізкам, показують наочно їх підйом (AB) і падіння (CD) на дві одиниці.

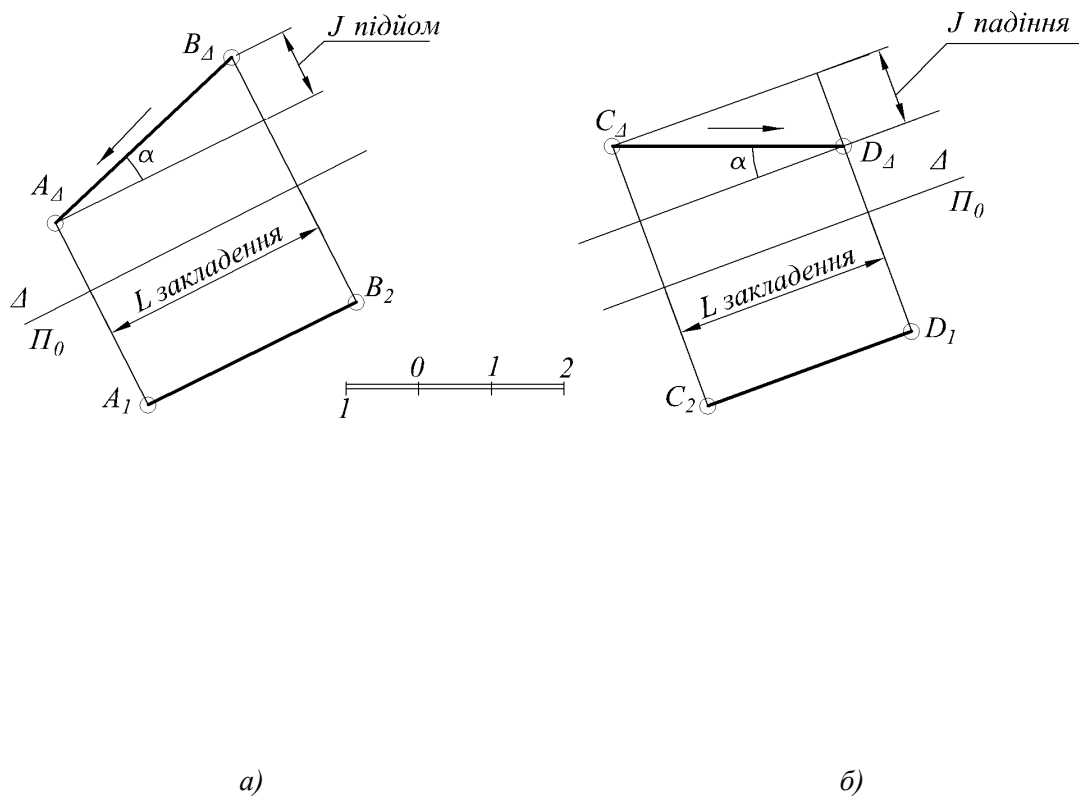
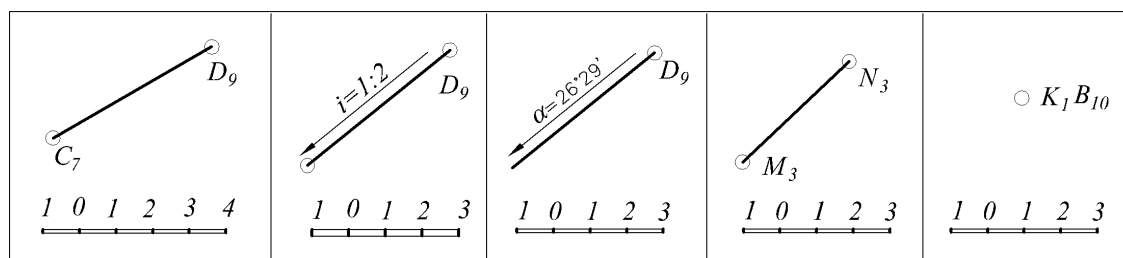


Рис.16.4

Розглянуті властивості прямої лінії дозволяють визначати характеристики прямої безпосередньо на проекціях із числовими позначками. Для відрізка C_7D_9 (рис. 16.5, а) закладення L , як показує лінійний масштаб, дорівнює 5, а уклон $i = J:L = (9 - 7) : 5 = 2 : 5 = 1 : 2,5$. Якщо відома величина i , пряму можна задати так, як це показано на рис. 16.5, б, або, визначивши кут α , - як на рис. 16.5, в, що також дозволяє підрахувати інші характеристики прямої. На рис. 16.5, г зображено горизонтальну пряму, а на рис. 16.5, д – вертикальну пряму.



a)

b)

v)

z)

d)

Рис.16.5

Коли пряма задана двома точками, висотні позначки яких виражені не цілими числами – $A_{5,3} B_{2,4}$ (рис. 16.6, a), виникає необхідність у визначенні на цій прямій точок із цілими числами. В такому разі виконують операцію «градуювання» прямої (або її інтерполяцію). Для цього достатньо побудувати проекцію прямої $A_{5,3}B_{2,4}$ на додаткову вертикальну площину (Δ проходить через AB), де відповідно до лінійного масштабу нанесено ряд необхідних горизонталей (2,3,4,5,6) з інтервалом в одну одиницю висоти. У проекційному зв'язку на відповідному рівні показують зображення точок, отримують зображення відрізка, а на його перетині з лініями рівня визначають положення точок із цілими значеннями висот C, D, M , а потім їх зображення на плані – C_5, D_4, M_3 .

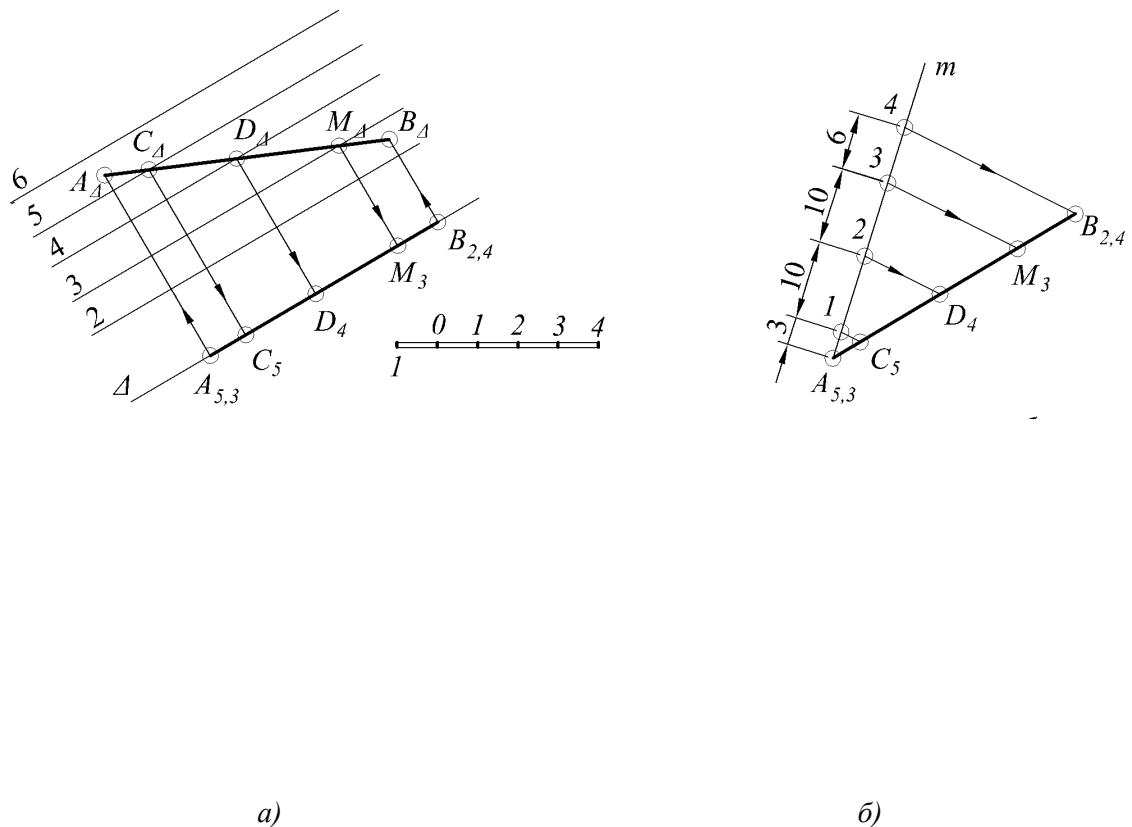


Рис.16.6

Те ж градуювання може бути виконано з використанням пропорційного поділу відрізка, прийнятого за сторону довільного кута, на другій стороні якого – m показують точки, відстані між якими мають співвідношення : $A_{5,3} - 1 : 1-2 : 2-3 : 3-4 = 0,3: 1:1:0,6 = 3:10:10:6$. На прямій $A_{5,3}-B_{2,4}$ отримаємо точки C_5, D_4, M_3 .

16.3. Проекції двох прямих

При всій повноті інформації в проекціях з числовими позначками для наочності зображення його доповнюють ще одним, як це було показано на попередніх кресленнях. Так, на рис. 16.7 показано проекції паралельних відрізків $A_{1,5}B_5$ і C_4D_9 . Їх зображення на вертикальній площині Δ також паралельні. Це

означає, що і у просторі AB і CD - паралельні. Проекції C_4D_9 і P_8S_3 перетинаються в точці T , висоту якої можна підрахувати, але в даному прикладі побудовано додаткові проекції відрізків C_4D_4 і P_4S_4 та точку їх перетину T_4 , яка відповідає точці T . Це означає, що прямі CD і PS перетинаються. У перетині проєкцій $A_{1,5}B_5$ і P_8S_3 знаходиться зображення двох точок – R на AB та Q на PS . Висновок – AB та PS – мимобіжні прямі. Читачеві пропонується самостійно визначити взаємне розташування прямих $N_1L_{2,3}$ та P_8S_3 .

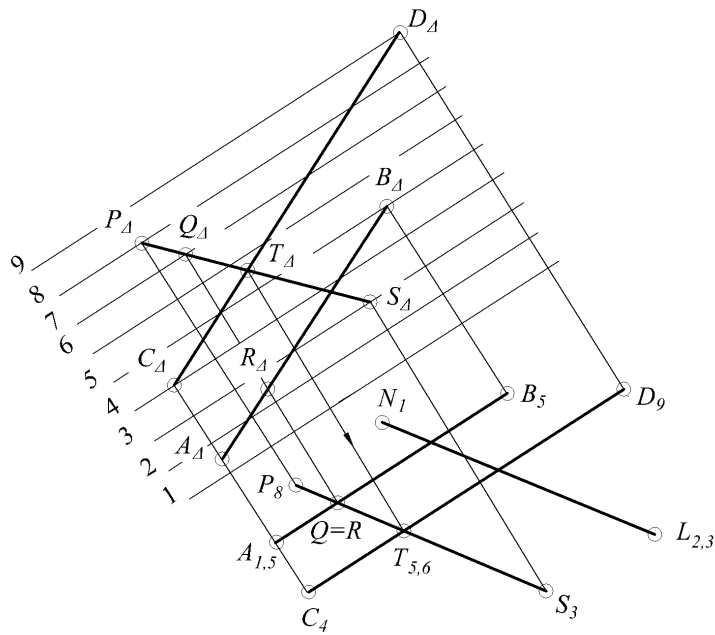


Рис.16.7

16.4. Проекції площини

Завдання площини трьома точками, точкою і прямою, двома прямими, тощо не є зручним в проєкціях із числовими позначками, оскільки визначення головних характеристик площини потребує додаткових побудов. Тому завдання площини також має свою специфіку. На рис. 16.8 показано площину P загального положення. h_0 - її горизонтальний слід. В цій площині через точку A проведено пряму p перпендикулярно h_0 . Як відомо, це лінія найбільшого нахилу площини P . Кут падіння лінії p – α . Горизонтальні прямі 1 (h_1), 11 (h_2) утворені на площині P в результаті перетину P з горизонтальними площинами, проведеними з рівним по висоті інтервалом, що дорівнює одиниці (січні площини на рисунку не показано). Проекції горизонталей 1 і 11 на Π_0 показано штриховими лініями (також з рівним

інтервалом), що проходять через точки 1 і 2 на проекції p_i прямої p . Кут α , утворений лінією p та її проекцією p_i , є кутом найбільшого нахилу площини P (або кутом *падіння* площини). Лінія p може бути проведена в будь-якому місці площини (наприклад, через точку B). Вона приймається за масштаб уклону і позначається подвійною лінією (товстою і тонкою). На зображенні площини в проекціях із числовими позначками показують проекцію лінії p – пряму p_i із нанесеними перпендикулярно до неї проекціями горизонталей 1 і 11 – прямими, що проходять через точки 1 і 2 з рівним

інтервалом, як це показано на рис. 16.9, *а*. Скорочене зображення цієї ж площини представлено на рис. 16.9, *б*, де показана проградуйована лінія найбільшого нахилу p_i площини P , через позначки якої можуть бути накреслені проекції необхідних горизонталей.

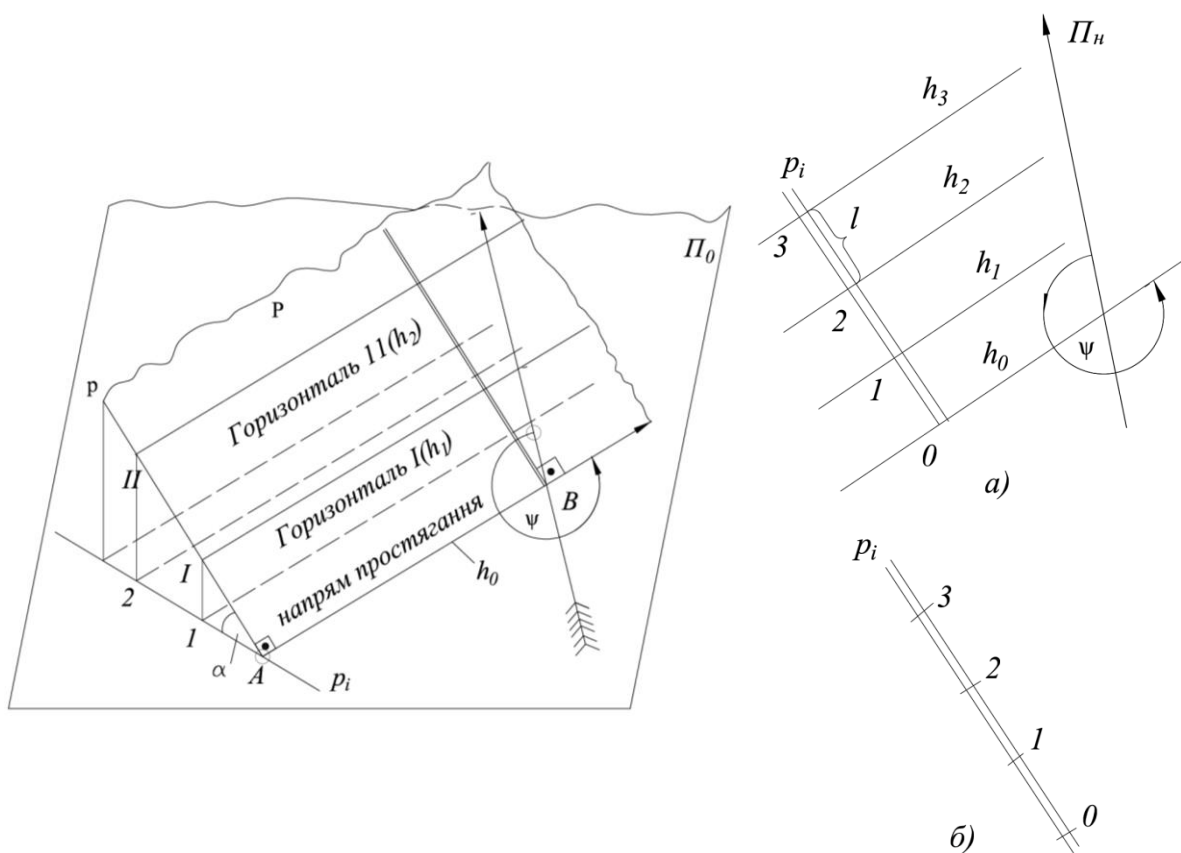


Рис.16.8

Рис.16.9

В геодезії, картографії тощо буває необхідним визначення **напрямку** та **кута простягання** площини за сторонами світу. Напрямок простягання спрямовується вправо, якщо на площину дивитись в напрямі наростання позначок. На рис. 16.8 і 16.9, *а* показано кут простягання ψ , який вимірюється в горизонтальній площині між північним напрямом меридіана (північний кінець магнітної стрілки) та напрямом простягання (проекції горизонталей) проти ходу годинникової стрілки.

16.5. Проекції поверхонь

В проекціях із числовими позначками можна задати також будь-яку поверхню, якщо відомі висотні координати точок поверхні, або лінії, що з'єднують точки з однаковими числовими позначками. На рис. 16.10, *а* показано прямий круговий конус, поверхня якого перетинається горизонтальними площинами, проведеними з рівними інтервалами по висоті. Горизонтальна проекція конуса може представляти конічну поверхню в системі проекцій з числовими позначками, якщо круговим горизонталям та вершині надати відповідні номери. Довільна твірна конуса виконує роль градуйованої прямої конічної поверхні. На рис. 16.10, *б* показано циліндричну поверхню з горизонтальними твірними, розташованими з рівним інтервалом по висоті. Аналогічно представлена горизонтальна проекція сфери (рис. 16.10, *в*).

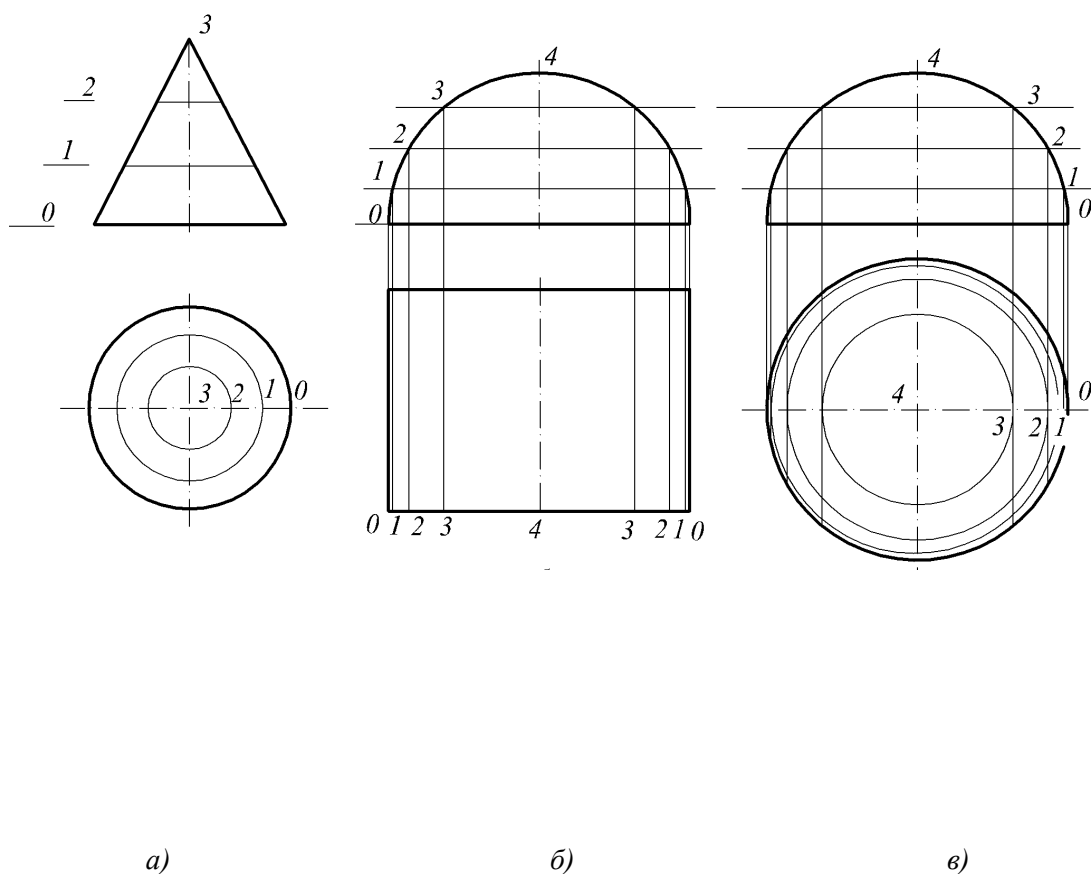


Рис.16.10

В інженерній практиці, пов'язаній із земляними роботами, часто зустрічається поверхня однакового нахилу (рис. 16.11), утворення якої теоретично пов'язане з рухом прямого кругового конуса, за умови що його вісь залишається вертикальною, а вершина належить напрямній кривій m (плоскій, або просторовій). Кожна горизонталь поверхні однакового нахилу є кривою, дотичною до однойменних горизонталей конусів.

Поверхня землі має незакономірний характер, тому завдання її можливе тільки у вигляді горизонталей – ліній, які проходять через точки з однаковими позначками. На рис. 16.12, *а, б* представлено два приклади такої поверхні. Номери горизонталей дають повну інформацію про підвищення рельєфу у напрямі центра, або його падіння. В обох прикладах додатково побудовано перерізи вертикальними січними площинами, які додають зображенням наочності.

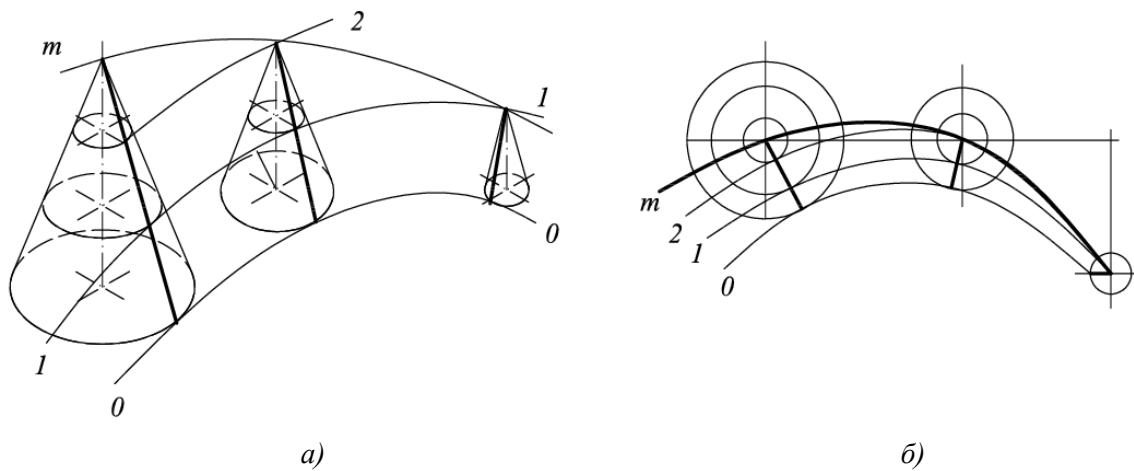


Рис.16.11

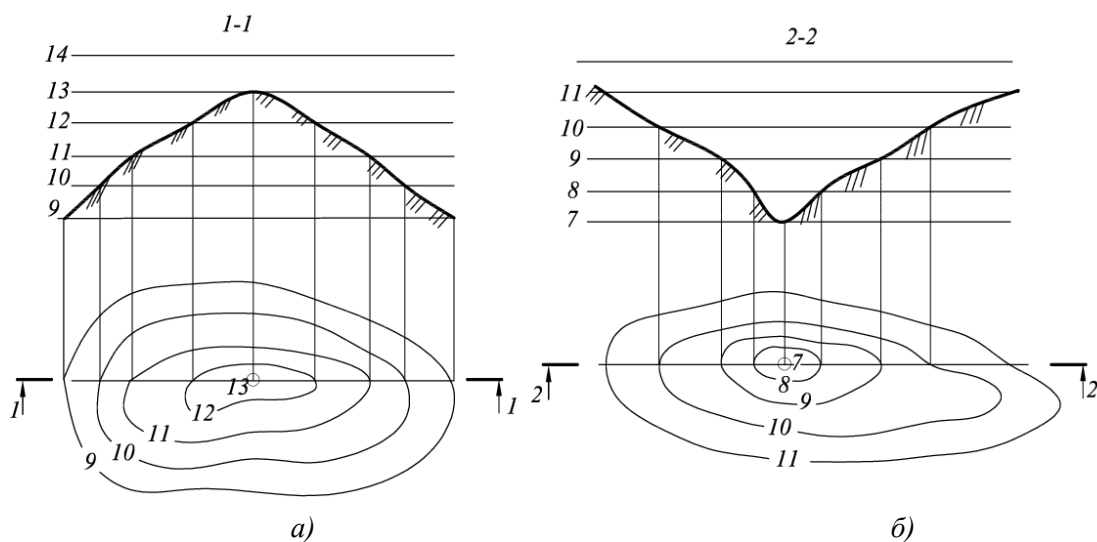


Рис.16.12

Запитання для самоконтролю

1. Як в проекціях з числовими позначками задати висоту точки?
2. Що таке закладення, уклон, підйом, інтервал прямої? Які з вказаних характеристик присутні на плані?
3. На рис.16.7 визначити взаємне розташування прямих $N_1 L_{2,3}$ та $P_8 S_3$.
4. Якій вигляд мають горизонталі площини, конічної та топографічної поверхонь?
5. Як побудувати точки, через які проходить лінія перетину двох площин, площини і конічної поверхні, площини і топографічної поверхні?

РОЗДІЛ 17. ПОЗИЦІЙНІ ЗАДАЧІ

17.1. Перетин двох площин

На рис. 17.1, *а* показано дві площини загального положення Σ і Δ , Лінія перетину яких проходить через точки перетину однойменних горизонталей. Положення горизонталей, що перетинаються, визначено за допомогою допоміжних горизонтальних січних площин Γ і Ω . Горизонталі *a* і *б* перетинаються в точці *M*, *c* і *d* – в точці *N*. Через точки *M* і *N* проходить шукана лінія перетину (пряма). На рис. 17.1, *б* такий приклад показано в проекціях з числовими позначками, де площини Σ і Δ задано масштабами уклонів. Точки *M* (перетин горизонталей 25) і *N* (перетин горизонталей 24) визначають лінію перетину. Зрозуміло, що і точка *K* (перетин горизонталей 23) має належати лінії перетину (прямій). Якщо масштаб уклонів площин Σ і Δ однаковий (тобто задані площини мають однаковий кут нахилу до горизонтальної площини), то лінія їх перетину буде проєкціюватися бісектрисою кута між однойменними горизонталями.

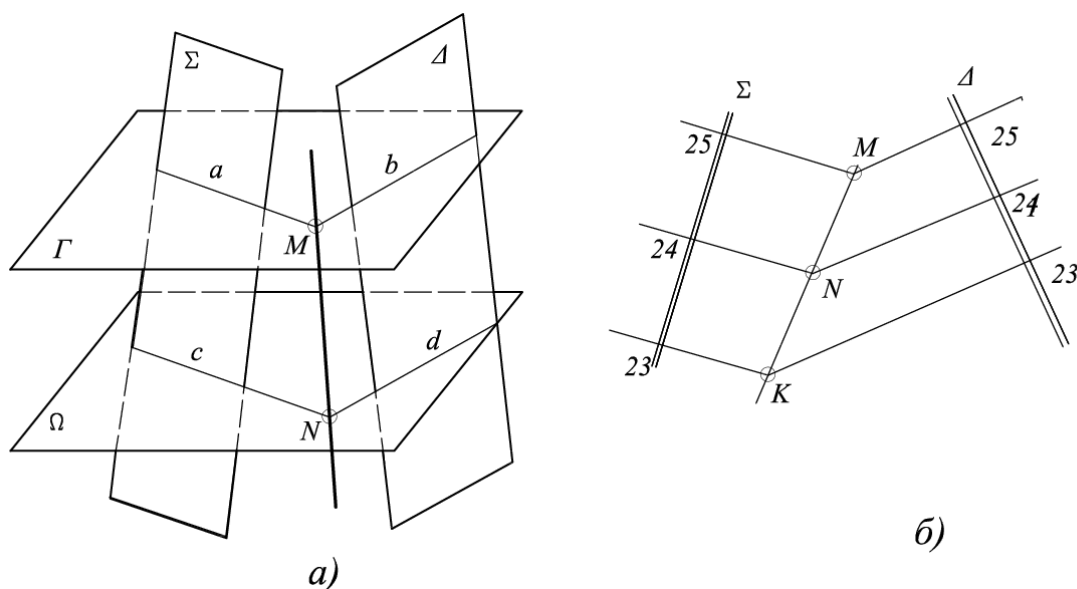


Рис.17.1

17.2. Перетин прямої і площини

Для побудови точки перетину прямої A_2B_5 з площиною Σ (рис. 17.2) використано допоміжну вертикальну січну площину Γ , проведену через AB . Площини Γ і Σ перетинаються по прямій C_2D_6 . Прямі AB і CD перетинаються в точці *M*, яка є точкою перетину прямої A_2B_5 з площиною Σ .

17.3. Перетин поверхні з площиною. Взаємний перетин поверхонь

На рис.17.3 показано лінію перетину конічної поверхні з площиною Σ . Шукана лінія – крива, яка проходить через точки перетину горизонталей поверхні конуса з однойменними горизонталями площини Σ . На рис. 17.4 показано топографічну поверхню і площину, лінія перетину яких з'єднує точки перетину однойменних горизонталей. Аналогічно побудовано лінію перетину конічної та топографічної поверхонь (рис. 17.5).

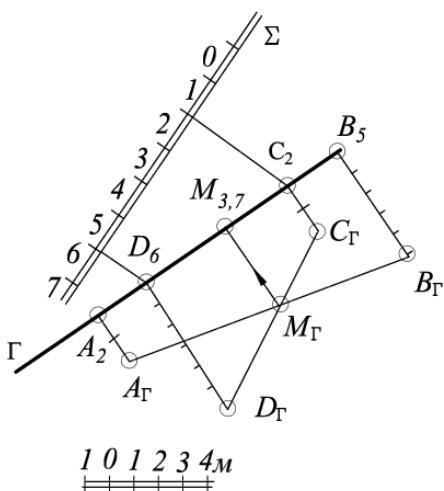


Рис.17.2

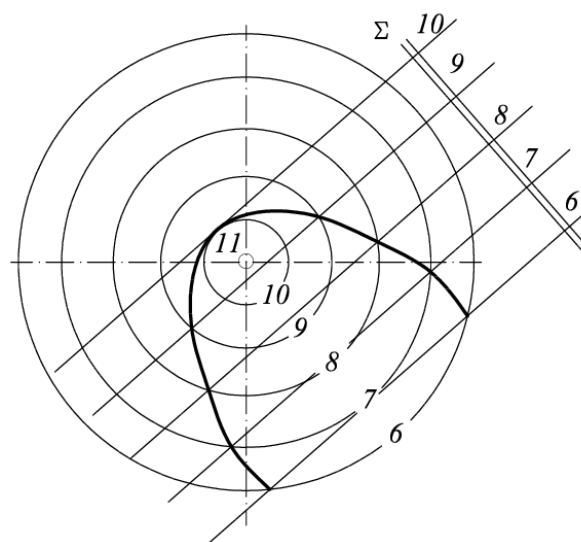


Рис.17.3

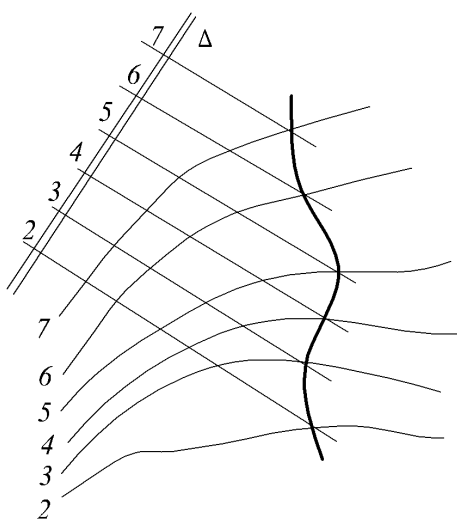


Рис.17.4

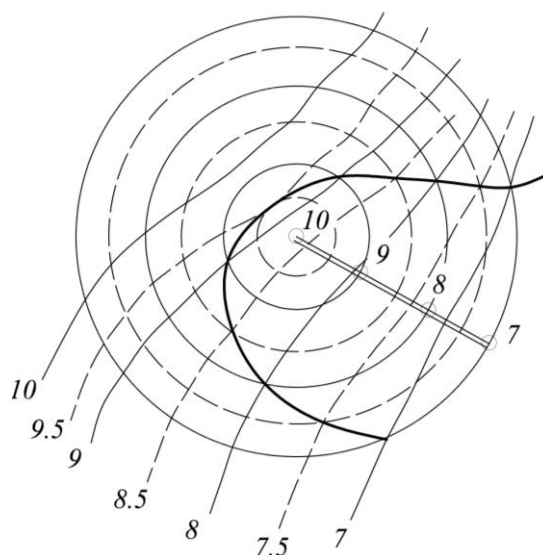


Рис.17.5

Розглянемо декілька задач практичного змісту.

Приклад 1. Спроектувати горизонтальний майданчик із контуром у вигляді трикутника ABC на висоті $+6$ (див. Рис.17.6). Місцевість – горизонтальна площина

на висоті +2. Процес проектування передбачає утворення насипу – в даному разі – зрізаної пірамідальної поверхні, основа якої трикутник MNK на висоті +2, та трикутник ABC – на висоті +6. Для кожної бічної грані задано кут нахилу. На контурі AB величина $i_1 = 1:1,5$; на контурі BC – $i_2 = 1:0,6$; на контурі AC – $i_3 = 1:1$. Величини укосів у вигляді графіків показано на рис.17.6, б, де на осях L і J відкладено в масштабі креслення відрізки довжиною 1м та визначено інтервали l_1, l_2, l_3 кожної площини укосів, які відкладено вздовж перпендикулярів до ліній контуру AB, BC, AC майданчика. Лінії AB, BC, AC є горизонталями укосів на висоті +6м. Через точки, які нанесено з відповідним інтервалом вздовж ліній i_1, i_2, i_3 , перпендикулярно до них проведено горизонталі з позначками 2, 3, 4, 5. Однойменні горизонталі продовжено до взаємного перетину в точках, через які проведено лінії перетину укосів. Останні горизонталі з позначкою +2 утворюють трикутник MNK – лінію перетину сконструйованих укосів з горизонтальною поверхнею землі на висоті +2.

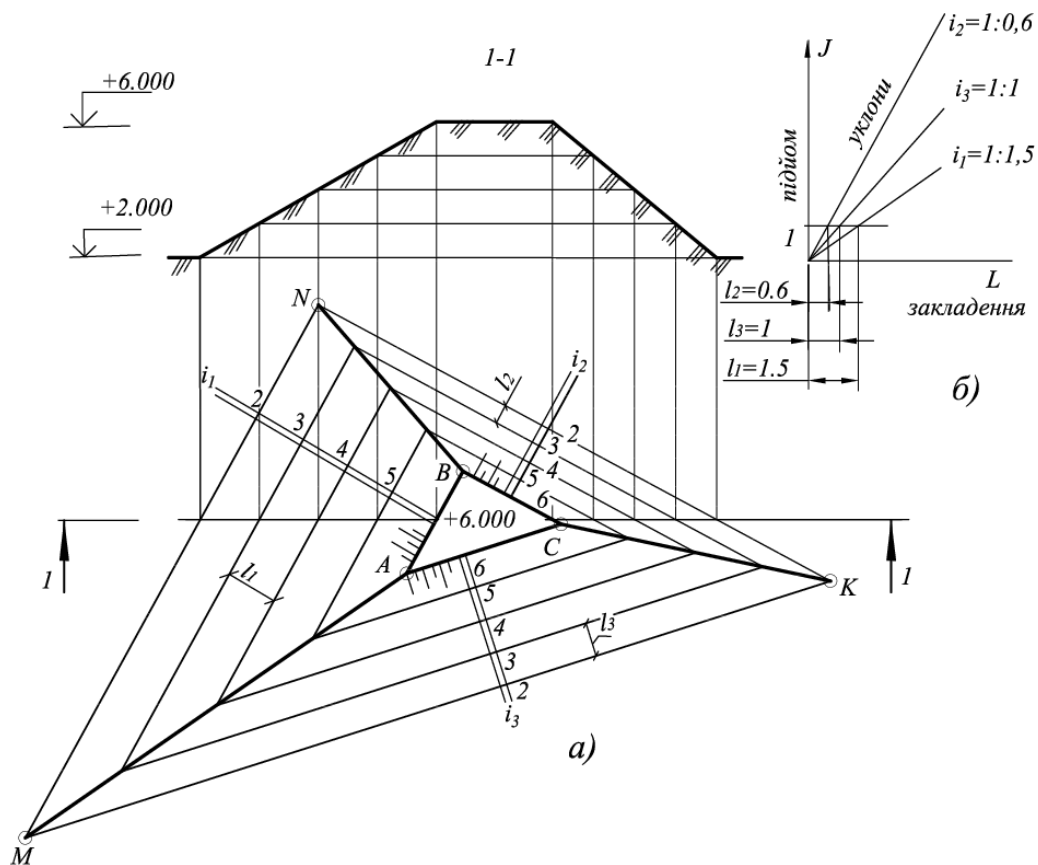


Рис.17.6

Бергштрихи – символічні лінії найбільшого нахилу, нанесені перпендикулярно до сторін трикутника ABC . Бергштрихи показують напрям нахилу кожного укосу та сприяють наочності зображень в наведених прикладах. Розріз сконструйованого майданчика виконано вертикальною площиною 1-1.

В розглянутому прикладі площини укосів мають довільні за величиною кути нахилу до горизонтальної площини. В реальних умовах в межах однієї споруди величини кутів залежать від природних властивостей ґрунту. Вони можуть бути меншими, якщо ґрунт «зрізається» (кут виїмки), або більшими, якщо ґрунт «насипається» (кут насипу). Наприклад, в останньому прикладі, де сконструйовано насип, площини укосів в реальних умовах мали б однакові уклони, інтервали, а лінії їх перетину проєкціювались би бісектрисами відповідних кутів між горизонталями.

Приклад 2. На місцевості у вигляді похилої площини, яку задано горизонталями ((паралельні прямі 4 – 14 з однаковим інтервалом), спроектувати горизонтальний майданчик прямокутної форми (чотирикутник $ABCD$) на висоті +6 (рис. 17.7).

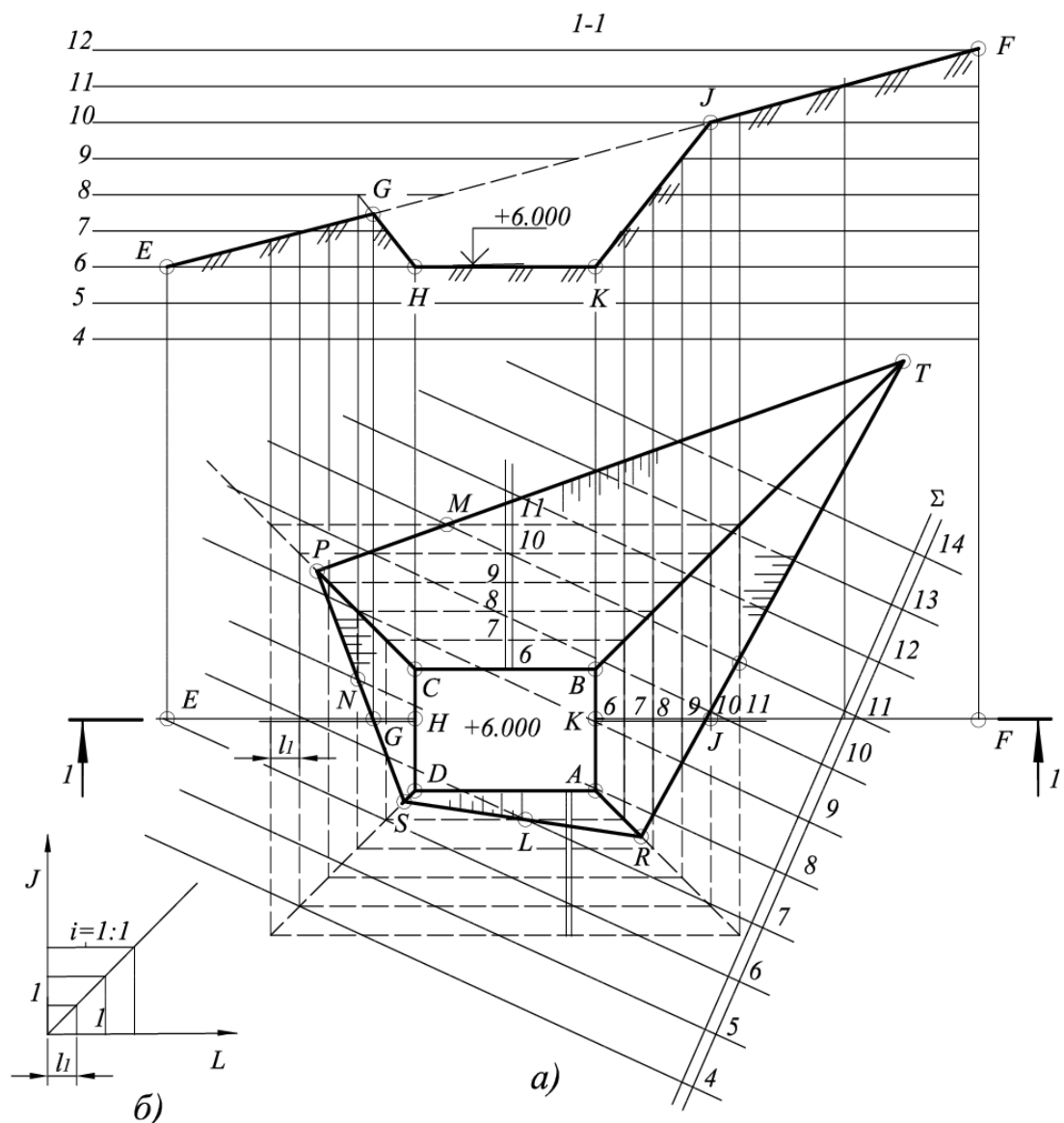


Рис.17.7

На лініях найбільшого нахилу кожної площини укосу відкладено однакові відрізки l . Через отримані точки паралельно AB , BC , CD і AD проведено проектні горизонталі 7, 8, 9, У перетині проектних горизонталей з однойменними горизонталлями місцевості отримано точки, через які проходять лінії перетину укосів з рельєфом місцевості (граничі виїмки котловану). Площина укосу на контурі AB перетинає площину місцевості Σ по лінії, яка з'єднує точки перетину однойменних горизонталей та продовжується до границь укосу (в точках R і T). Оскільки місцевість також є площиною, то перетин із нею площини укосу є пряма RT , що проходить через точки перетину інших однойменних горизонталей). Це означає, що для побудови границі укосу на контурі BC достатньо знайти одну точку M перетину однойменних горизонталей (наприклад, № 11), через яку провести пряму TMP в межах укосу. Аналогічно побудовано границі укосів на контурі CD (PNS) та на контурі AD (SLR). На розрізі 1-1 показано профіль місцевості (пряма EF) та профіль ($GHKJ$) котловану під майданчик.

Приклад 3. На місцевості, заданій горизонталлями 13 – 20, спроектувати майданчик у вигляді горизонтального прямокутника $ABCD$ на висоті +16 (рис.17.8).

Із креслення плану майданчика, суміщеного з планом місцевості, видно що на контурі $NABM$ необхідно конструювати укоси виїмки ($i_1 = 1:1$), а на контурі $NDCM$ – укоси насипу ($i_2 = 2:3$). M і N – точки перетину проектної горизонталі $ABCD$ із позначкою +16. MN – лінія нульових робіт (рис. 17.8, *а*). Із побудованого графіка уклонів (рис. 17.8, *б*) визначаємо величини інтервалів l_1 на контурі $NABM$ та l_2 - на $NDCM$. Для зручності побудов зображення ліній найбільшого нахилу площин укосів виїмки та насипу об'єднано показано на границях контурів (точки M і N). Через позначки проводимо відповідні горизонталі між лініями перетину укосів, які проектується бісектрисами кутів незалежно від величини інтервалів. На відміну від попереднього прикладу, де лінії перетину площин укосів з рельєфом місцевості (площиною) були прямими, лінії перетину проектних горизонталей із горизонталлями топографічної поверхні - криві, які з'єднують точки перетину однойменних горизонталей. Так, крива лінія, яка проходить на контурі CD через точки T_{14} і S_{15} , має бути теоретично продовжена до точки P_{13} і Q_{16} , а практично обмежена точками V і U на границях укосу. Побудови границь укосів на інших ділянках видно із рисунка 17.8, *в*. На розрізі 1-1 показано профіль топографічної поверхні ($E_{13} - F_{20}$) і проектні профілі горизонтального майданчика, а також укосів виїмки на контурі AB (до точки H) та насипу на контурі CD (до точки G).

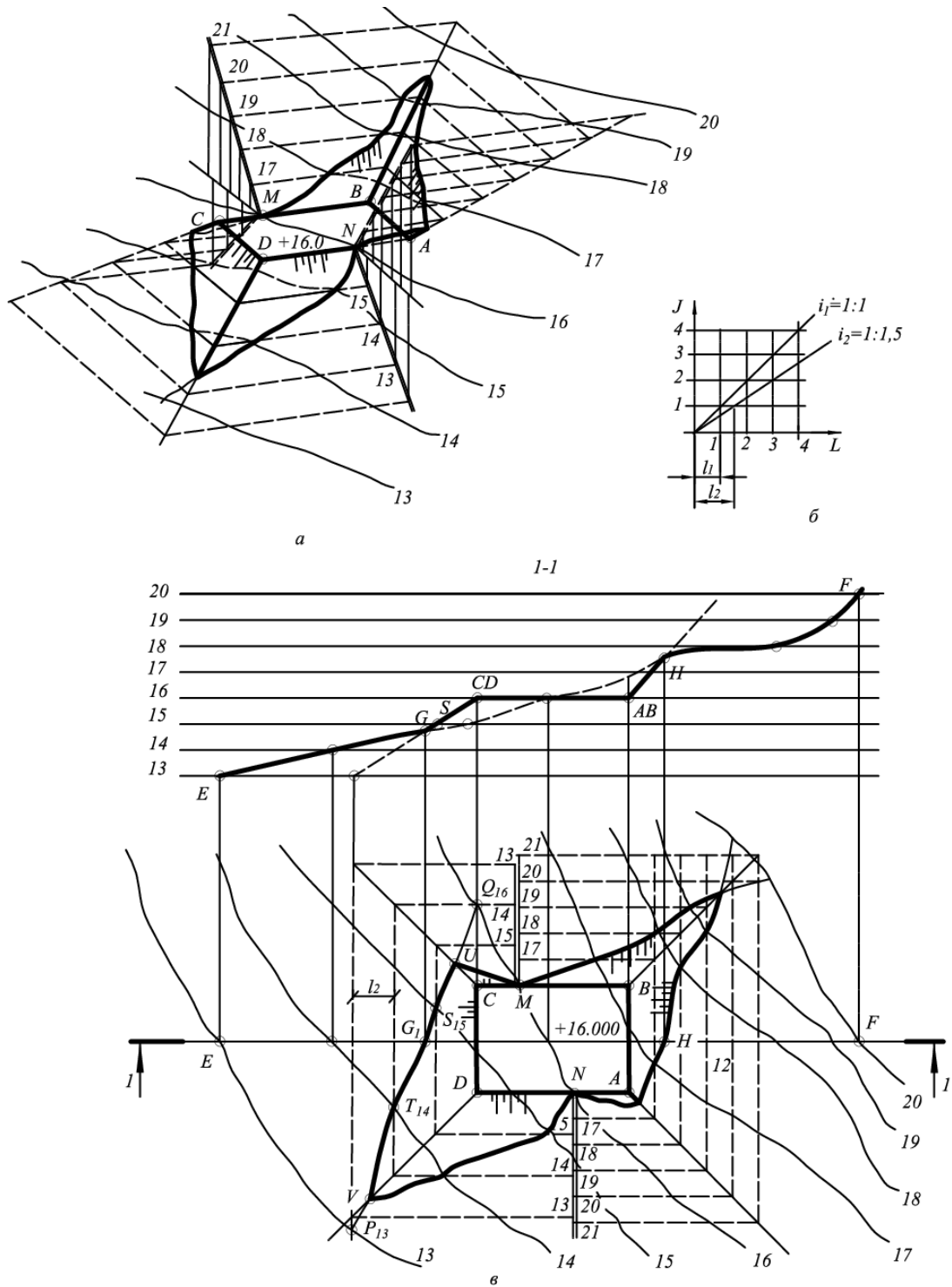


Рис.17.8

Приклад 4 (рис.17.9). На місцевості, заданій горизонталями 9 – 21, спроектувати горизонтальний майданчик, контур якого складається із прямокутника $ABCD$, половини кола DFE та прямокутної смуги між прямими AK і EH . Проектна позначка зазначеного контуру $+15$ (рис. 17.9, а). Задано уклон виїмки $i_e = 1:1$ та уклон насипу $i_n = 1:1,5$. За значеннями уклонів будуємо їх графіки (рис. 17.9, б), за якими визначаємо величини інтервалів l_e та l_n . На границях виїмки і насипу в точках

M і N показуємо суміщені зображення ліній найбільшого нахилу для площин і конічних поверхонь, на яких відкладаємо величин відповідних інтервалів. Через точки із значеннями 16 – 21 проводимо проектні горизонталі виїмки, а через точки із значеннями 14 -10 – проектні горизонталі насипу. Перетин укосів на контурі $MBCD$ відбувається вздовж бісектрис кутів з вершинами B і C . Лінія перетину укосів на контурах CD (площина) і DFN (конічна поверхня) має форму конічного перерізу.

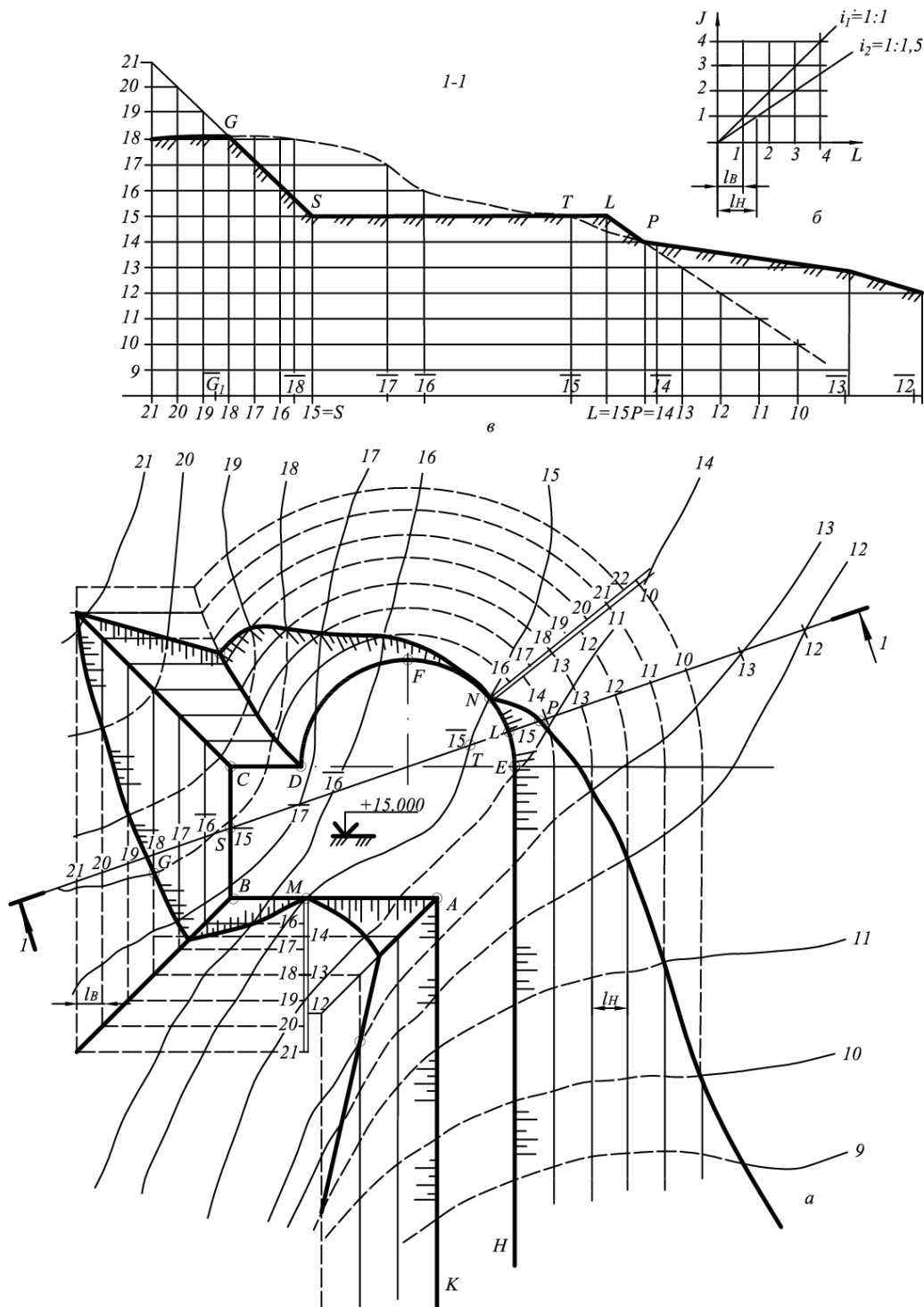


Рис.17.9

Вона проходить через точки перетину однойменних горизонталей. На контурі NE горизонталі конічної поверхні мають інтервал l_n , та кожна з них плавно переходить в пряму – відповідну горизонталь площини укосу на контурі EH . З таким же інтервалом побудовано горизонталі на контурі MAK (бісектриса кута з вершиною A) та лінія перетину двох укосів на цьому контурі. Залишається визначити точки перетину проектних горизонталей із однойменними горизонталями місцевості, а через побудовані точки провести лінії – границі укосів. На перерізі 1 – 1 (рис. 17.9, в) показано профіль місцевості (крива лінія), профіль майданчика (горизонтальна пряма SL) та профілі виїмки (GS) і насипу (LP). Лінія LP в даному випадку – пряма, оскільки січну площину 1-1 проведено через вісь конуса. Наочно показано обсяги виїмки («трикутник» GST) і насипу («трикутник» TLP). Видно також, що за межами укосів – до точки G зліва та після точки P справа залишилась задана місцевість.

Приклад 5. Майданчик $ABCD$ має підйом від нуля до позначки $+3$ (рис. 17.10). Такі похилі насипи або виїмки зустрічаються при виконанні земляних споруд і носять назву *анарелей*. На графіку показано величини $i_1 = 1:1$ для укосів AD і BC та $i_2 = 3:2$ для укосу AB . Показано також величини закладення укосів при висоті 3 одиниці: для укосу на контурі AB – у вигляді відрізка $3'-a = r_1$, а для бокових укосів – у вигляді відрізка $3'-b = r_2$. Бокові укоси – площини, які проходять через прямі AD і BC та є дотичними до прямих кругових конусів з вершинами в точках A і B та твірними із нахилом $1:1$.

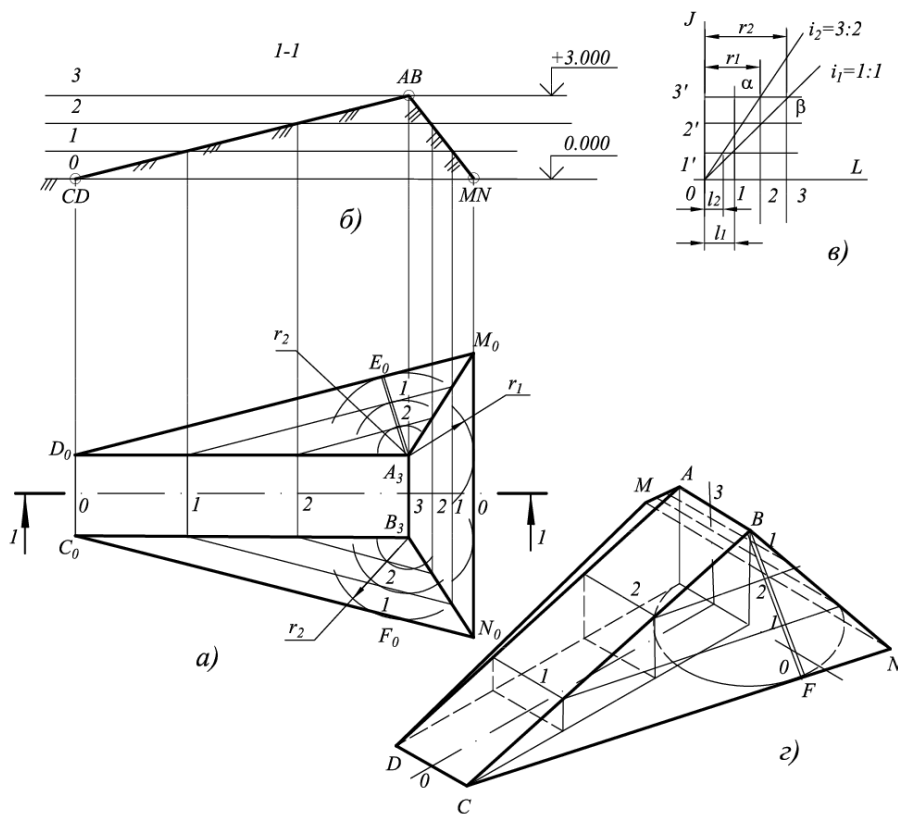


Рис.17.10

На рисунку показано штриховими лініями частини основ конусів (горизонталі на нульовій висоті – кола радіуса r_2), дотичними до яких є горизонтальні сліди CF і DE площин бічних укосів. Аналогічно побудовано площину укосу на контурі AB .

Горизонтальний слід цього укосу – пряма, дотична до прямих кругових конусів з вершинами в тих же точках A і B , але з нахилом твірних $3:2$. На рисунку для останніх конусів показано частини горизонталей на нульовій висоті – кіл радіуса r_1 . Побудована дотична перетинає продовження дотичних DE і CF в точках M і N . З'єднання останніх точок з A і B дає можливість побудувати лінії перетину (AM і BN) укосів. Для проведення горизонталей побудованих укосів достатньо проградуювати площину на контурі AB , провести горизонталі до перетину з границями укосу (прямими AM і BN) в точках, через які потім провести горизонталі бічних укосів паралельно горизонталям D_0M_0 і C_0N_0 . Горизонталі бічних укосів пройдуть через точки з позначками 1 і 2 на лініях бровки AD і BC .

Приклад 6. На рис. 17.11, *а* показано побудову укосів насипу криволінійної апарелі, нижня горизонталь якої – нуль, а верхня – плюс 4. Рівномірному під'йому майданчика відповідають рівні відстані між горизонталями 0 – 4. Уклони насипу вздовж криволінійних контурів AC і BD $i_1 = 1:1$, на контурі CD $i_2 = 5:3$. На графіку уклонів (рис. 17.11, *б*) визначено l_1 , і разом із ним – величини радіусів кіл, які дорівнюють $l_1, 2l_1, 3l_1, \dots$

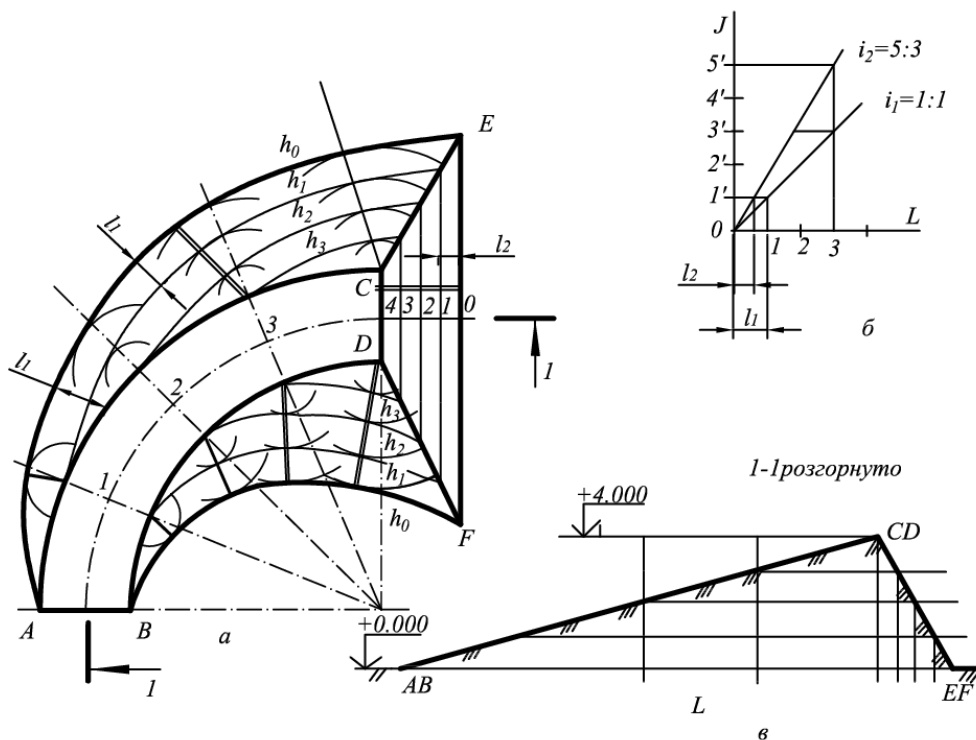


Рис.17.11

Кола є горизонталлями конусів обертання, твірні яких утворюють поверхні однакового скату на ділянках AC і BD . Криві (h_0, h_1, h_2, h_3), які дотичні до одноіменних горизонталей конусів, є горизонталлями утворених поверхонь насипів.

Побудови на ділянці *CD* зрозумілі із попереднього прикладу. Лінії *CE* і *DF* проходять через точки перетину одноіменних горизонталей утворених скатів (в загальному випадку це – криві). На рис. 17.11, *в* показано переріз 1-1 отриманої споруди вертикальною циліндричною поверхнею і площиною. Результат перерізу на зображенні «розгортається», що і вказано в його назві.

Запитання для самоконтролю

1. Що таке «проектна» горизонталь?
2. Що таке «укос виїмки» , «укос насипу»?
3. Чому лінія перетину двох укосів та дві лінії перетину кожного укосу з топографічною поверхнею проходять через одну точку?

Список літератури

1. *Архитектурное черчение: справочник* Д.И.Ткач, Н.Л.Русскевич, П.Р.Нири́нберг, И.Н.Ткач. – К.: Будівельник, 1991. – 272 с.
2. *Бубенников А.В.* Начертательная геометрия – М.: Высш. шк., 1985. – 288 с.: ил. Верещагина Т.А. Перспектива. Тени. Проекции с числовыми отметками: учебное пособие. – Пермь: Изд-во перм. госуд. техн. ун-та, 2010. – 81 с.: ил.
3. *Иванов Г.С.* Теоретические основы начертательной геометрии: Учебное пособие. – М.: Машиностроение, 1998. – 157 с.
4. *Інженерна та комп'ютерна графіка* (Михайленко В.Є., Найдіш В.М., Підкоритов А.М., Скидан І.А. – 2-ге видання. – К.: Вища школа, 2001. – 352 с.
5. *Інженерна та комп'ютерна графіка* / В.Є.Михайленко, В.В.Ванін, С.М.Ковальов. – 3-є вид. – К.: Каравела, 2004. – 344 с.
6. *Короев Ю.И.* Начертательная геометрия: учебник / Короев Ю.И. - 3-е изд., стер. – Москва: КноРус, 2014. – 422 с.: ил.
7. *Михайленко В.Є., Ванін В.В., Ковальов С.М.* Інженерна графіка. – Львів: Новий світ – 2002. – 284 с. – 157 с.
8. *Михайленко В.Є., Євстифеєв М.Ф., Ковальов С.М., Кащенко О.В.* Нарисна геометрія. – К.: Вища школа, 2004. – 301 с.
9. *Михайленко В.Е., Ковалев С.Н., Седлецкая Н.И.* Инженерная геометрия с элементами теории параметризации – К.: УМК ВО, 1989. – 64 с.
10. *Михайленко В.Е., Найдіш В.М.* Тлумачення термінів з прикладної геометрії, інженерної та комп'ютерної графіки – К.: Урожай, 1998. – 197 с.
11. *Рыжов Н.Н.* Параметрическая геометрия – М.: МАДИ, 1988. – 52 с.
12. *Ковалёв С.Н.* Формирование дискретных моделей поверхностей пространственных архитектурных конструкций. дис. ...доктора техн. наук. 05.01.01. М. : МАИ, 1986. 348с.
13. *Ботвіновська С.І., Ковальов С.М., Золотова А.В.* Геометричне моделювання поверхонь із заданими властивостями в дизайні та архітектурі. Управління розвитком складних систем Розділ «Інформаційні технології проектування». Київ : КНУБА. 2016. №. 25. С. 121– 26.

Навчальне видання

Нарисна геометрія

КОВАЛЬОВ Сергій Миколайович
БОТВІНОВСЬКА Світлана Іванівна
ГЕРМАШ Катерина Михайлівна
ЗОЛотоВА Алла Василівна
ЛЕВІНА Жанетта Григорівна

Редагування та коректура

Комп'ютерне верстання *К.М.Гермаш, А.В.Золотова,*
С.І.Ботвіновська, Ж.Г.Левіна

Підписано до друку р. **Формат 60x84_{1/8}.**
Папір офсетний. Гарнітура Таймс. Друк на різнографі.
Ум. друк. арк. 18,60. Обл.-вид. арк. 20,00.
Ум. фарбовідб. 161. Тираж 300 прим. Вид. № 47/1. Замовлення № .

КНУБА, 03037, Київ-37, Повітрофлотський проспект, 31
Віддруковано в редакційно-видавничому відділі
Київського національного університету будівництва і архітектури.

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру суб'єктів
видавничої справи ДК № 808 від 13.02.2002 р.