Київський національний університет імені Тараса Шевченка

О.В. Капустян, Н.В. Касімова, Ю.В. Ловейкін,
А.В. Сукретна, Ю.В. Федоренко

Диференціальні рівняння: задачі, методи розв'язування, комп'ютерний практикум

Київ — 2023

УДК 517.9

Рецензенти:
доктор фіз.-мат. наук, проф. Бойчук О.А.
доктор фіз.-мат. наук, проф. Станжицький О.М.

Рекомендовано до друку Вченою радою
механіко-математичного факультету
протокол № 2 від 15.09.2022

Диференціальні рівняння: задачі, методи розв'язування, комп'ютерний практикум: навч. посібн. / О.В. Капустян, Н.В. Касімова, Ю.В. Ловейкін, А.В. Сукретна, Ю.В. Федоренко. — К.: ..., 2023. — 135 с.

У посібнику стисло викладено теоретичний матеріал, наведено приклади розв'язування типових задач, запропоновано задачі для самостійної роботи студентів, а також завдання для лабораторних робіт, що включають в себе комп'ютерний практикум, з основних розділів курсу звичайних диференціальних рівнянь.

Матеріал посібника розбито на шістнадцять занять, що відповідає стандартному семестровому курсу.

Для студентів математичних, комп'ютерних, технічних та природничих спеціальностей університетів.

Зміст

Вступ

Диференціальні рівняння є одним з найпотужніших математичних інструментів для моделювання та дослідження процесів навколишнього середовища. Сучасна теорія звичайних диференціальних рівнянь являє собою багаторівневу систему знань із розгалуженою внутрішньою структурою, різноманітними зв'язками з іншими розділами математики та потужним арсеналом аналітичних, геометричних та чисельних методів, багато з яких можна відзначити як виключно корисні з точки зору практичних застосувань. Тому диференціальні рівняння як навчальна дисципліна, що викладається в університетах, досить повно забезпечена літературою. Проте більшість існуючих посібників розраховані або на засвоєння елементарних навичок інтегрування та аналізу в межах загального курсу вищої математики для нематематичних спеціальностей, або на глибоке і детальне вивчення в класичному річному курсі для студентів-математиків. Тому в сучасних умовах зростаючої кількості комп'ютерних та технічних спеціальностей виникла необхідність підготувати посібник, який був би розрахований в першу чергу на студентів цих спеціальностей, враховував би їх достатньо високу математичну підготовку і забезпечував би засвоєння основних теоретичних та прикладних аспектів навчальної дисципліни "Диференціальні рівняння" в межах короткого семестрового курсу. Це обумовило структуру посібника, який складається з шістнадцяти тем, в межах кожної з яких можна виділити теоретичну, практичну та лабораторну частину. До кожної теми наведено короткі теоретичні відомості, розв'язані типові задачі, а значна кількість вправ дає можливість викладачу адаптивно, виходячи з потреб та можливостей аудиторії, здійснити підбір завдань для проведення практичних занять, самостійних та контрольних робіт, а студентам – широкі можливості для активної самостійної роботи з метою відпрацювання навичок застосування викладених прийомів та алгоритмів.

Окремо слід зупинитися на запропонованих у посібнику лабораторних роботах. З огляду на розвиток інформаційних технологій в сучасному світі неможливо залишити поза увагою користь і зручність використання відповідного програмного забезпечення до дослідження, аналізу і прогнозування поведінки моделей, що описуються за допомогою диференціальних рівнянь. Завдання лабораторних робіт складено таким чином, щоб студенти могли застосовувати як сучасні програмні пакети для розв'язання задач обчислювальної математики (такі як Octave, Maple, Mathematica, MatLab, MathCad тощо), які відомі простотою інтерфейсу та великою бібліотекою вбудованих функцій і методів, так і об'єктно-орієнтовні мови програмування (наприклад, Python), для яких характерний зрозумілий синтаксис та зручні пакети для наукових, зокрема, символьних, обчислень.

Для засвоєння матеріалу посібника достатньо володіти такими стандартними розділами математичного аналізу, як "Границі", "Похідна", "Інтеграл Рімана", "Функціональні ряди", "Диференціальне числення функцій кількох змінних", а також основами лінійної алгебри та програмування.

Теоретичною основою даного посібника є підручник "Диференціальні рівняння" авторів А.М. Самойленко, М.О. Перестюк, І.О. Парасюк, навчальний посібник "Диференціальні рівняння в задачах" авторів А.М. Самойленко, С.А. Кривошея, М.О. Перестюк та навчальний посібник "Збірник задач з диференціальних рівнянь" авторів М.О. Перестюк, М.Я. Свіщук.

Автори щиро вдячні професору кафедри інтегральних та диференціальних рівнянь Київського національного університету імені Тараса Шевченка, доктору фізико-математичних наук, академіку НАН України *Миколі Олексійовичу Перестюку* за постійну підтримку, увагу та поради при підготовці даного посібника.

1. Утворення диференціальних рівнянь

Перш ніж розглядати диференціальне рівняння як абстрактний об'єкт, приділимо увагу питанню утворення диференціальних рівнянь. Багато процесів, що відбуваються у часі, можуть бути описані рівністю, яка пов'язує між собою шукану функцію, її похідні та аргумент, від якого ця функція залежить. Така рівність називається *диференціальним рівнянням.*

Диференціальне рівняння першого порядку записується у вигляді

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \tag{1}$$

де $y = y(x)$ — шукана функція, x — аргумент шуканої функції (незалежна змінна).

Диференціальні рівняння є математичними моделями певних процесів, які можуть мати різноманітну природу, наприклад, геометричну, фізичну, біологічну, економічну, соціальну та ін. Одними з найперших задач, які зводилися до розв'язання диференціальних рівнянь, були так звані обернені задачі на дотичні. Наведемо простий приклад такої задачі.

Нехай на площині з прямокутною декартовою системою координат Oxy потрібно знайти криву, у кожній точці якої кутовий коефіцієнт дотичної пропорційний з коефіцієнтом k ординаті точки дотику. Позначимо через $y = y(x)$, $x \in \mathbb{R}$, функцію, графіком якої є шукана крива. Враховуючи геометричний зміст похідної, умову задачі можна записати у вигляді рівності

$$\frac{dy}{dx} = ky, \tag{2}$$

яка є одним з найпростіших, але дуже важливим диференціальним рівнянням. Зокрема, рівнянням (2) описуються найпростіша модель чисельності одновидової популяції, процес охолодження тіла за рахунок теплообміну з середовищем, процес розпаду радіоактивних елементів, розмір банківського вкладу при неперервному нарахуванні відсотків та ін.

Розв'язками диференціальних рівнянь є диференційовні функції, що перетворюють рівняння на тотожність. Зокрема для рівняння (2) безпосередньою підстановкою легко впевнитись, що кожна функція $y(x) = C\mathrm{e}^{kx}$, де $C \in \mathbb{R}$, задовольняє (перетворює на тотожність) це рівняння.

Розв'язки диференціальних рівнянь можуть виражатися елементарними функціями, інтегралами від них, а також неявно або параметрично. Щоб переконатися, що розв'язок дійсно перетворює рівняння на тотожність, використовуємо відомі факти з математичного аналізу.

Приклад 1. Довести, що функція $y(x) = e^x \int\limits_0^x e^{s^2} ds + Ce^x$ є розв'язком диференціального рівняння $y' = e^{x+x^2} + y$.

Розв'язання. Використовуючи правило диференціювання добутку двох функцій та формулу для похідної від інтеграла зі змінною верхньою межею, знаходимо похідну $y'(x) = e^x \int\limits_0^x e^{s^2} ds + e^x \cdot e^{x^2} + Ce^x$. Тоді, підставляючи в рівняння, переконуємось у справедливості тотожності:

$$y' = e^x \int\limits_0^x e^{s^2} ds + e^x \cdot e^{x^2} + Ce^x = e^{x+x^2} + y.$$

Отже, вказана функція є розв'язком заданого рівняння.

Кожне диференціальне рівняння має безліч розв'язків — ціла сім'я функцій задовольняє одне конкретне диференціальне рівняння.

Навпаки теж вірно: маючи деяку $n-$параметричну сім'ю функцій, можна знайти диференціальне рівняння, для якого ця сім'я функцій буде розв'язком. Для цього потрібно продиференціювати рівняння сім'ї кривих по x, вважаючи при цьому y функцією від x, стільки разів, скільки параметрів задають сім'ю кривих, потім вилучити з отриманих співвідношень параметри.

Приклад 2. Знайти диференціальне рівняння сім'ї кривих $y^2 = 2Cx$.

Розв'язання. Диференціюємо задану неявну функцію: $2yy' = 2C$, звідки $C = yy'$. Підставляємо знайдене значення C у вихідне рівняння і отримуємо: $y^2 = 2xyy'$ або $y - 2y'x = 0$. Це і є шукане диференціальне рівняння заданої сім'ї кривих.

Отже, диференціальне рівняння описує всі можливі еволюції, які можуть відбуватись у моделі. Для того щоб виділити певну еволюцію системи із усіх, потрібна додаткова умова. Такою умовою, як правило, виступає стан системи у певний момент часу. Найчастіше стан системи відомий на початку розгляду процесу еволюції. Тому таку додаткову умову називають *початковою умовою.*

З точки зору диференціального рівняння початкова умова означає, що при певному значенні аргумента відоме значення шуканої функції. Записується початкова умова рівністю

$$y(x_0) = y_0, \tag{3}$$

де y_0 — значення шуканої функції при значенні аргумента x_0.

Пара (1), (3) називається *задачею Коші.*

Зокрема, для рівняння (2) початкова умова (3) означає, що потрібно знайти криву, яка проходить через точку (x_0, y_0) площини Oxy.

Розглянемо кілька процесів різної природи, математичний опис яких приводить до диференціальних рівнянь

Приклад 3. Тіло, що має в початковий момент часу температуру T_0, помістили в середовище, температура якого підтримується постійною і рівна T_1. Як буде змінюватись з плином часу температура тіла?

Розв'язання. Позначимо через $T(t)$ температуру тіла в момент часу t. Експериментально встановлено, що за певних спрощень швидкість зміни температури тіла пропорційна різниці температур тіла і навколишнього середовища. Це означає, що

$$\frac{dT(t)}{dt} = -\gamma(T(t) - T_1), \tag{4}$$

де $\gamma > 0$ – коефіцієнт пропорційності. Знак мінус в правій частині рівняння відповідає експериментальним даним: якщо $T(t) - T_1 > 0$, то температура тіла зменшується і тому швидкість її зміни від'ємна, якщо ж $T(t) - T_1 < 0$, то температура тіла зростає, а тому швидкість її зміни додатня. Отже, процес нагрівання (або охолодження) тіла в середовищі зі сталою температурою моделюється рівнянням (4), одним із розв'язків якого є функція $T(t) = T_1$. Всі ж розв'язки цього рівняння виражаються формулою $T(t) = T_1 + Ce^{-\gamma t}$, $C \in \mathbb{R}$. Враховуючи початкову умову $T(0) = T_0$, знаходимо шукану залежність температури тіла від часу: $T(t) = T_1 + (T_0 - T_1)e^{-\gamma t}$. Функція $T(t)$ зростає, якщо $T_0 - T_1 < 0$ (тіло нагрівається), і спадає, якщо $T_0 - T_1 > 0$ (тіло охолоджується). В обох випадках з ростом t її значення прямує до T_1.

Приклад 4. В посудину з чистою водою місткістю 10 л неперервно зі швидкістю 2 л за хвилину надходить розчин, в кожному літрі якого міститься 0,3 кг солі. Розчин, що надходить в посудину, перемішується з водою, і суміш витікає з посудини з тією ж швидкістю. Скільки солі буде в посудині через 5 хвилин?

Розв'язання. Візьмемо за незалежну змінну час t, а за шукану функцію $y(t)$ – кількість солі в посудині через t хвилин після початку досліду. Знайдемо, на яку величину зміниться кількість солі за проміжок часу від момету t до моменту $t + \triangle t$. За одну хвилину надходить 2 літри розчину, а за $\triangle t$ хвилин – $2\triangle t$ літрів. В цих $2\triangle t$ літрах міститься $0,3 \cdot 2\triangle t = 0,6\triangle t$ кг солі. Разом з тим за час $\triangle t$ із посудини витікає $2\triangle t$ літрів розчину. В момент t у всій посудині (10 л) міститься $y(t)$ кг солі, а отже, в $2\triangle t$ літрах розчину, що витікає, містилося б $0,2\triangle t \cdot y(t)$ кг солі, якщо б за час $\triangle t$ вміст солі в посудині не змінювався. Але, оскільки він за цей час змінюється на величину, нескінченно малу при $\triangle t \to 0$, то в $2\triangle t$ літрах розчину, що витікає, міститься $2\triangle t \cdot (y(t) + \alpha(t, \triangle t))$ кг солі, де $\alpha(t, \triangle t) \to 0$ при $\triangle t \to 0$. Отже, в розчині, що надходить за проміжок часу $[t,\, t + \triangle t)$, міститься $0,6\triangle t$ кг солі, а в розчині, що витікає, міститься $0,2\triangle t(y(t) + \alpha(t, \triangle t))$ кг солі. Зміна кількості солі $y(t + \triangle t) - y(t)$ за цей час дорівнює різниці отриманих вище величин, а саме

$$y(t + \triangle t) - y(t) = 0,6\triangle t - 0,2\triangle t \cdot (y(t) + \alpha(t, \triangle t)). \qquad (5)$$

Розділимо рівність (5) на $\triangle t$ і перейдемо у отриманій рівності до границі при $\triangle t \to 0$. В лівій частині одержимо похідну $y'(t)$, а в правій частині – $0,6 - 0,2y(t)$. Отже, маємо диференціальне рівняння

$$y'(t) = 0,6 - 0,2y(t),$$

яке описує процес зміни з часом кількості солі у розчині. Всі розв'язки цього рівняння задаються сім'єю функцій

$$y(t) = 3 - Ce^{-0,2t}, \quad C \in \mathbb{R}. \tag{6}$$

Оскільки в початковий момент (при $t = 0$) солі в посудині не було, то $y(0) = 0$ – початкова умова. Підставивши (6) у початкову умову, знайдемо функцію $y(t)$, яка описує зміну кількості солі у розчині:

$$0 = y(0) = 3 - C \quad \Rightarrow \quad 0 = 3 - C \quad \Rightarrow \quad C = 3.$$

Підставивши отримане значення C в (6), маємо $y(t) = 3 - 3e^{-0,2t}$ – функцію, що задає кількість солі у розчині при заданих умовах. Порахуємо кількість солі в посудині через 5 хв, а саме, значення функції $y(t)$ при $t = 5$:

$$y(5) = 3 - 3e^{-0,2\cdot 5} = 3 - \frac{3}{e} \approx 1,9 \text{ кг солі.}$$

Приклад 5. Матеріальна точка маси m вільно падає під дією сили тяжіння. Нехтуючи опором повітря, знайти закон руху точки.

Розв'язання. На вертикальній осі, вздовж якої падає точка, виберемо точку відліку O і визначимо додатній напрямок – від точки O вниз. Положення матеріальної точки визначаються координатою $y(t)$, що змінюється з часом t уздовж вибраної осі. Точка падає під дією сили тяжіння $F = mg$, де g – прискорення вільного падіння. Враховуючи те, що прискорення матеріальної точки є другою похідною по часу від положення цієї точки, яке змінюється з часом, згідно другого закону Ньютона ($ma = F$) маємо диференціальне рівняння руху матеріальної точки:

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = mg \quad \text{або} \quad \frac{d^2y}{dt^2} = g.$$

Інтегруючи двічі останнє співвідношення, знаходимо

$$\frac{dy}{dt} = gt + C_1, \quad y = \frac{gt^2}{2} + C_1 t + C_2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \tag{7}$$

Формула (7) визначає закон руху матеріальної точки, що вільно падає під дією сили тяжіння без опору повітря. Знаючи у початковий момент часу $t = 0$ положення точки y_0 і її швидкість v_0, із сукупності функцій (7) виберемо ту, що описує рух точки за заданих початкових даних. Оскільки швидкість точки є першою похідною по часу від положення цієї точки, то маємо початкові умови: $y(0) = y_0$, $\dfrac{dy(0)}{dt} = v_0$.

Підставляючи (7) у вказані початкові умови, знаходимо, що $C_1 = v_0$, $C_2 = y_0$. Отже, шукана функція, що описує рух матеріальної точки з початковим положенням y_0 і початковою швидрістю v_0, має вигляд

$$y(t) = \frac{gt^2}{2} + v_0 t + y_0.$$

Таким чином, одержали відому формулу шляху, що проходить точка при рівноприскореному русі.

Вправи

У задачах 1–5 перевірити, чи є задані функції розв'язками вказаних рівнянь ($C \in \mathbb{R}$):

1. $y = e^{\arcsin(Cx)}$, $xy' = y\,\mathrm{tg}(\ln y)$.

2. $y = e^{\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}}$, $y' \sin x = y \ln y$.

3. $y = x\int\limits_1^x \dfrac{\sin s}{s}ds$, $xy' = y + x\sin x$.

4. $x = ye^{Cy+1}$, $y' = \dfrac{y}{x(\ln x - \ln y)}$.

5. $x = y\ln y$, $y'(x+y) = y$.

6. Довести, що параметрично задана функція $\begin{cases} x = C\cos t, \\ y = C\sin t, \end{cases}$ при довільному ненульовому C є розв'язком рівняння $x + yy' = 0$.

У задачах 7–11 скласти диференціальні рівняння сімей кривих:

7. $y^2 + Cx = x^3$, $C \in \mathbb{R}$.

8. $x\,\mathrm{tg}(x + C) = y$, $C \in \mathbb{R}$.

9. $x^2 + y^2 = Ce^{\mathrm{arctg}\,\frac{x}{y}}$ – сім'я логарифмічних спіралей, $C \in \mathbb{R}$.

10. $\ln y = ax + by$, $a, b \in \mathbb{R}$.

11. $y = ax^3 + bx^2 + cx$, $a, b, c \in \mathbb{R}$.

12. Знайти диференціальне рівняння всіх кіл на площині.

13. Скласти диференціальне рівняння кіл, що дотикаються одночасно до прямих $y = 0$ та $x = 0$ і розташовані в першій і третій чвертях.

14. Скласти диференціальне рівняння кривих, у яких точка перетину довільної дотичної з віссю абсцис має абсцису, вдвічі меншу за абсцису точки дотику.

15. Скласти диференціальне рівняння всіх парабол, які проходять через початок координат і для яких вісь $0x$ є віссю симетрії.

16. Знайти диференціальне рівняння кривих, для яких сума катетів трикутника, утвореного дотичною, ординатою точки дотику і віссю абсцис є величиною сталою і дорівнює b.

17. В умовах боротьби за існування швидкість збільшення числа особин популяції пропорційна (з коефіцієнтом a) кількості особин в наявний момент часу, а швидкість їх зменшення пропорційна (з коефіцієнтом b) квадрату кількості особин; a, b – сталі. Записати закон зміни кількості особин у вигляді диференціального рівняння.

18. За допомогою диференціального рівняння записати закон зміни струму $I(t)$ в колі з опором R та самоіндукцією L, якщо початкова сила струму I_0, а електрорушійна сила змінюється за законом $U = U_0 \sin wt$.

19. Деяка кількість нерозчиненої речовини містить у своїх порах 10 кг солі. Піддаючи її дії 90 л води, довідалися, що протягом години розчиняється половина наявної кількості солі. Швидкість розчинювання пропорційна (з коефіцієнтом a) добутку кількості нерозчиненої солі та різниці між концентрацією насиченого розчину (1 кг на 3 л) та концентрацією даної речовини (концентрацією даної речовини називають її кількість, що міститься в одиниці об'єму). Записати закон зміни кількості солі у розчині у вигляді диференціального рівняння.

20. Точка маси m рухається прямолінійно. На неї діє сила пропорційна кубові часу, який пройшов з моменту часу, коли швидкість дорівнювала нулю (коефіцієнт пропорційності a). Крім того, точка зазнає опору середовища, який пропорційний добутку часу та швидкості (коуфіцієнт пропорційності b). Записати закон зміни швидкості у вигляді диференціального рівняння.

2. Інтегровні типи диференціальних рівнянь

Диференціальне рівняння вигляду

$$y' = f(x), \tag{8}$$

де f — неперервна на деякому інтервалі $(a, b) \subset \mathbb{R}$ функція, називається *найпростішим диференціальним рівнянням першого порядку.*

Твердження. *Для довільних $x_0 \in (a, b)$, $y_0 \in \mathbb{R}$ задача Коші*

$$y' = f(x), \quad y(x_0) = y_0,$$

де $f \in \mathrm{C}(a, b)$, має єдиний розв'язок, який задається формулою $y(x) = \int\limits_{x_0}^{x} f(s)ds + y_0$ і визначений на (a, b).

Зауваження. *Всі розв'язки рівняння (8) задаються сім'єю функцій $y = F(x) + C$, де $F(x)$ – деяка первісна функції $f(x)$, наприклад, $F(x) = \int\limits_{x_0}^{x} f(s)ds$, $C \in \mathbb{R}$ – довільна стала.*

Приклад 1. Знайти всі розв'язки рівняння $y' = x^2 + 1$ та розв'язок задачі Коші з початковою умовою $y(1) = 2$.

Розв'язання. Всі розв'язки рівняння задаються сім'єю функцій

$$y = \int (x^2 + 1)dx = \frac{x^3}{3} + x + C, \ C \in \mathbb{R}.$$

Для знаходження розв'язку задачі Коші, підставимо отримані функції $y = \frac{x^3}{3} + x + C$ у початкову умову і знайдемо значення сталої C, яка і буде визначати розв'язок задачі Коші:

$$y(1) = \frac{1}{3} + 1 + C = 2 \quad \Rightarrow \quad C = \frac{2}{3}.$$

Таким чином, розв'язком задачі Коші є функція $y(x) = \frac{x^3}{3} + x + \frac{2}{3}$.

Диференціальне рівняння вигляду

$$y' = f(x)g(y), \tag{9}$$

де $f \in \mathrm{C}(a, b)$, $g \in \mathrm{C}(c, d)$, називається *диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними.*

Теорема. *Нехай $f \in \mathrm{C}(a, b)$, $g \in \mathrm{C}(c, d)$ і $g(y) \neq 0$ для всіх $y \in (c, d)$. Тоді для будь-яких $x_0 \in (a, b)$ та $y_0 \in (c, d)$ існує єдиний* *розв'язок задачі Коші*

$$y' = f(x)g(y), \quad y(x_0) = y_0, \tag{10}$$

який задається неявною функцією $\int\limits_{y_0}^{y} \frac{ds}{g(s)} = \int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt$, *визначеною у деякому околі точки* x_0.

Рівність

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

називається загальним інтегралом рівняння (9).

Якщо функція $g(y)$ у жодній точці не обертається в нуль, то загальний інтеграл задає всі розв'язки рівняння (9). Якщо існують точки y_* такі, що $g(y_*) = 0$, то, щоб одержати всі розв'язки рівняння (9), до загального інтегралу цього рівняння потрібно додати сталі функції $y = y_*$ для всіх таких y_*, що $g(y_*) = 0$.

Таким чином, всі розв'язки рівняння (9) задаються сукупністю

$$\left[\begin{array}{l} \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C, \quad C \in \mathbb{R}, \\ y = y_* \quad \text{для всіх } y_* \text{ таких, що } g(y_*) = 0, \text{ якщо такі } y_* \text{ існують.} \end{array}\right.$$

Приклад 2. Проінтегрувати рівняння $y' = y^2$ та знайти розв'язок задачі Коші з початковою умовою $y(2) = 0$.

Розв'язання. Знайдемо спочатку всі розв'язки рівняння:

$$\int \frac{dy}{y^2} = x + C \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{y} = x + C \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{1}{x+C}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Функція $y = 0$ також є розв'язком рівняння, оскільки обертає праву частину на нуль. Отже, всі розв'язки рівняння

$$\left[\begin{array}{l} y = -\frac{1}{x+C}, \quad C \in \mathbb{R}, \\ y = 0. \end{array}\right.$$

Задовольняючи початкову умову, отримуємо розв'язок задачі Коші $y(t) \equiv 0$.

Приклад 3. Знайти всі розв'язки рівняння $y' \operatorname{ctg} x + y = 2$ та розв'язок, який задовольняє початкову умову $y(\frac{\pi}{3}) = -1$.

Розв'язання. Перепишемо задане рівняння у вигляді:

$$\frac{dy}{dx} = (2 - y) \operatorname{tg} x.$$

Найперше зауважимо, що функція $y = 2$ є розв'язком рівняння. Далі, відокремлюючи змінні та інтегруючи, знаходимо:

$$\frac{1}{2-y} = \operatorname{tg} x, \quad \int \frac{dy}{y-2} = -\int \operatorname{tg} x dx + C, \quad C \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \ln|y-2| = \ln|\cos x| + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Якщо після інтегрування невідома функція знаходиться під знаком логарифма, то, як правило, від логарифма позбуваються потенціюванням (знаходять експоненту від обидвох частин рівності). В результаті, використовуючи властивості експоненти та логарифма, одержуємо

$$|y-2| = C_1|\cos x|, \quad C_1 = e^C > 0.$$

Модулі у останній рівності можна розкрити:

$$y - 2 = \pm C_1 \cos x = C_2 \cos x, \quad C_2 = \pm C_1 \neq 0.$$

Врахувавши, що при $C_2 = 0$ маємо розв'язок $y = 2$, і розширюючи область значень довільної сталої C_2 до всієї дійсної осі, остаточно отримуємо загальний розв'язок вихідного рівняння

$$y = 2 + C_2 \cos x, \quad C_2 \in \mathbb{R}.$$

Задовольнимо тепер початкову умову:

$$y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2 + \frac{C}{2} = -1 \quad \Rightarrow \quad C = -6 \quad \Rightarrow \quad y = 2 - 6\cos x.$$

Зауваження. *Не обмежуючи загальності, сталу інтегрування на кожному кроці можемо позначати однією і тією ж літерою з указанням множини значень цієї константи.*

Рівняння з відокремлюваними змінними також може бути записане в *симетричній формі*:

$$P(x)Q(y)dx + M(x)N(y)dy = 0,$$

де $P(x), M(x)$ – неперервні функції на деякому інтервалі $(a,b) \in \mathbb{R}$, $Q(y), N(y)$ – неперервні функції на деякому інтервалі $(c,d) \in \mathbb{R}$. У такій формі немає чіткого розділення на незалежну змінну та невідому функцію цієї змінної, відповідно як розв'язки ми можемо розглядати як функції $y = y(x)$, так і $x = x(y)$, або навіть у параметричному заданні $x = x(t)$, $y = y(t)$. Для такого рівняння потрібно відслідкувувати не лише розв'язки вигляду $y = y_*$, де $Q(y_*) = 0$, але й розв'язки вигляду $x = x_*$, де $M(x_*) = 0$.

Приклад 4. Розв'язати рівняння $xydx + (x+1)dy = 0$.

Розв'язання. Насамперед зауважимо, що розв'язками цього рівняння будуть функції $x = -1$ при $y \neq 0$ і $y = 0$ при $x \neq -1$. Точка $(-1, 0)$ є так званою особливою точкою рівняння, до вивчення таких точок ми ще повернемося пізніше. Далі відокремлюючи змінні, отримуємо рівняння

$$\frac{x}{x+1}dx + \frac{1}{y}dy = 0,$$

інтегруючи яке, маємо

$$\int \frac{x}{x+1}dx + \int \frac{1}{y}dy = C, \quad C \in \mathbb{R},$$

тобто

$$x - \ln|x+1| + \ln|y| = C, \quad C \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad y = Ce^{-x}(x+1), \quad C \in \mathbb{R}.$$

Таким чином, ми знайшли однопараметричну сім'ю розв'язків вихідного рівняння. Зауважимо, що розв'язок $y = 0$ входить в цю сім'ю (одержується при $C = 0$), а розв'язок $x = -1$ потрібно додати окремо, щоб отримати всі розв'язки рівняння.

Рівняння вигляду

$$y' = f(ax + by + c)$$

зводиться заміною $z = ax + by + c$, де $z = z(x)$ — нова невідома функція, до рівняння з відокремлюваними змінними

$$z' = bf(z) + a.$$

Приклад 5. Розв'язати рівняння $y' = y + 2x - 3$.

Розв'язання. Запровадимо заміну $z = y + 2x - 3$, де $z = z(x)$ – нова невідома функція, тоді, диференціюючи по x вказану заміну, маємо $z' = y' + 2$ або $y' = z' - 2$. Після підстановки одержуємо рівняння $z' - 2 = z$. Відокремлюючи змінні у останньому рівнянні, знаходимо

$$\frac{dz}{z+2} = dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dz}{z+2} = \int dx + C, \quad C \in \mathbb{R},$$

$$\ln|z+2| = x + C, \quad C \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad z = Ce^x - 2, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Розв'язок $z = -2$ входить у знайдену однопараметричну сім'ю розв'язків (отримується при $C = 0$). Повертаючись до вихідної невідомої функції y ($y = z - 2x + 3$), маємо загальний розв'язок вихідного рівняння

$$y = Ce^x - 2x + 1.$$

Диференціальне рівняння

$$y' = f(x, y) \tag{11}$$

називається *однорідним диференціальним рівнянням*, якщо для будь-якого додатного λ виконується рівність $f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y)$.

Зауваження. *Також, рівняння* (11) *є однорідним, якщо існує функція* $g(z)$ *така, що*

$$f(x, y) \equiv g\left(\frac{y}{x}\right).$$

Твердження. *Однорідне диференціальне рівняння* (11) *заміною* $y = xz$, *де* $z = z(x)$ *— нова невідома функція, зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними.*

Приклад 6. Розв'язати рівняння $y' = \dfrac{y}{x} + \operatorname{tg} \dfrac{y}{x}$.

Розв'язання. Оскільки має місце співвідношення

$$\frac{\lambda y}{\lambda x} + \operatorname{tg} \frac{\lambda y}{\lambda x} = \frac{y}{x} + \operatorname{tg} \frac{y}{x}, \quad \forall \lambda > 0,$$

то дане рівняння є однорідним. Запровадимо заміну $y = zx$, де $z = z(x)$ – нова невідома функція. Диференціюючи заміну по x, маємо $y' = z + xz'$. Далі, підставляючи заміну у вихідне рівняння, одержимо

$$z + xz' = z + \operatorname{tg} z \quad \Rightarrow \quad \frac{z'}{\operatorname{tg} z} = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dz}{\operatorname{tg} z} = \int \frac{dx}{x} + C, \quad C \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \ln|\sin z| = \ln|x| + C, \quad C \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \sin z = Cx, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Розв'язки $z = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, входять у отриману однопараметричну сім'ю розв'язків (одержуються при $C = 0$). Повертаючись через заміну до вихідної змінної y, дістанемо всі розв'язки у неявній формі заданого рівняння

$$\sin \frac{y}{x} = Cx, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Рівняння вигляду

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right) \tag{12}$$

зводиться до однорідного рівняння, якщо прямі $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ та $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ не є паралельними, тобто $\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \neq 0$. А саме, потрібно виконати одночасну заміну як незалежної змінної, так і невідомої функції

$$\begin{cases} x = u + x_0, \\ y = v + y_0, \end{cases} \tag{13}$$

де u - нова незалежна змінна, $v = v(u)$ – нова невідома функція, (x_0, y_0) – точка перетину згаданих вище прямих, тобто єдиний розв'язок лінійної алгебаїчної системи

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0. \end{cases}$$

В результаті заміни (13) одержується однорідне рівняння

$$\frac{dv}{du} = f\left(\frac{a_1u + b_1v}{a_2u + b_2v}\right).$$

Якщо ж вказані вище прямі є паралельними, тобто $a_2x + b_2y = = k(a_1x + b_1y)$ для деякого $k \in \mathbb{R}$, то рівняння (12), фактично, має вигляд $y' = F(ax+by)$, і зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними заміною $z = ax + by$, де $z = z(x)$.

Приклад 7. Розв'язати рівняння $y' = 2\left(\dfrac{y+2}{x+y-1}\right)^2$.

Розв'язання. Оскільки $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, то впровадимо заміну (13):

$$\begin{cases} x = u + x_0, \\ y = v + y_0, \end{cases}$$

де x_0, y_0 знаходяться як розв'язок системи

$$\begin{cases} y + 2 = 0 \\ x + y - 1 = 0, \end{cases}$$

з якої маємо $x_0 = 3$, $y_0 = -2$. Тому остаточно маємо заміну

$$\begin{cases} x = u + 3, \\ y = v - 2. \end{cases}$$

і отримуємо однорідне диференціальне рівняння відносно невідомої функції $v = v(u)$

$$\frac{dv}{du} = 2\left(\frac{v}{u+v}\right)^2,$$

що розв'язується за допомогою заміни $v = zu$, $z = z(u)$. Тоді, диференціюючи заміну по u, маємо $v' = z'u + z$, і в результаті приходимо до рівняння

$$z'u + z = 2\left(\frac{z}{1+z}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad z'u = -\frac{z^3 + z}{(z+1)^2}.$$

Зауважимо, що $z = 0$ є розв'язком останнього рівняння. Далі, відокремлюючи змінні та інтегруючи, маємо

$$\frac{(z+1)^2}{z(z^2+1)} = -\frac{1}{u} \quad \Rightarrow \quad \int \left(\frac{1}{z} + \frac{2}{z^2+1}\right) dz = -\int \frac{du}{u} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \ln|z| + 2\operatorname{arctg} z + \ln|u| = C,\ C \in \mathbb{R}, \quad \Rightarrow \quad zue^{2\operatorname{arctg} z} = C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Оскільки розв'язок $z = 0$ входить у знайдену однопараметричну сім'ю функцій (одержується при $C = 0$), то, послідовно повертаючись до початкових змінних, знаходимо

$$ve^{2\operatorname{arctg} \frac{v}{u}} = C, \quad C \in \mathbb{R},$$

і остаточно отримуємо загальний розв'язок вихідного рівняння

$$(y+2)e^{2\operatorname{arctg} \frac{y+2}{x-3}} = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Приклад 8. Розв'язати рівняння $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{2x + 2y - 1}{x + y - 2} = 0.$

Розв'язання. Оскільки $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$, то прямі $2x + 2y - 1 = 0$ і $x + y - 2 = 0$ паралельні. Тому, виконуючи заміну змінних $x + y = z$, $z = z(x)$, отримаємо рівняння з відокремлюваними змінними

$$\frac{dz}{dx} - 1 + \frac{2z - 1}{z - 2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{dx} = -\frac{z+1}{z-2}.$$

Функція $z = -1$ є розв'язком отриманого рівняння Далі відокремлюючи змінні та інтегруючи:

$$\frac{z-2}{z+1}=-1 \quad \Rightarrow \quad \int \frac{z-2}{z+1}dz=-\int dx,$$

знаходимо однопараметричну сім'ю розв'язків цього рівняння

$$z+x-3\ln|z+1|=C, \quad C\in\mathbb{R}.$$

Крім того, до отриманої сім'ї розв'язків треба додати розв'язок $z=-1$, і, таким чином, одержуємо всі розв'язки рівняня з відокремлюваними змінними

$$\left[\begin{array}{l} z+x-3\ln|z+1|=C, \quad C\in\mathbb{R}. \\ z=-1. \end{array}\right.$$

Повертаючись до початкових змінних, одержуємо всі роз'язки вихідного рівняння

$$\left[\begin{array}{l} y+2x-3\ln|y+x+1|=C, \quad C\in\mathbb{R}, \\ y=-1-x. \end{array}\right.$$

Диференціальне рівняння (11) називається *квазіоднорідним*, якщо знайдеться $\sigma\in\mathbb{R}$ таке, що для будь-якого $\lambda>0$ виконується рівність

$$f(\lambda x,\lambda^\sigma y)=\lambda^{\sigma-1}f(x,y).$$

Число σ називається показником квазіоднорідності цього рівняння.

Зауваження. *При $\sigma=1$ маємо однорідне диференціальне рівняння.*

Твердження. *Квазіоднорідне рівняння (11) з показником квазіоднорідності σ заміною $y=x^\sigma z$, де $z=z(x)$ — нова невідома функція, зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними.*

Приклад 9. Розв'язати рівняння $x^3(y'-x)=y^2$.

Розв'язання. Перепишемо рівняння у вигляді

$$y'=x+\frac{y^2}{x^3}.$$

Для правої частини рівняння перевіримо умову квазіоднорідності. Оскільки

$$f(\lambda x,\lambda^\sigma y)=\lambda x+\frac{\lambda^{2\sigma}y^2}{\lambda^3x^3}=\lambda x+\lambda^{2\sigma-3}\frac{y^2}{x^3}, \tag{14}$$

$$\lambda^{\sigma-1}f(x,y)=\lambda^{\sigma-1}x+\lambda^{\sigma-1}\frac{y^2}{x^3}, \tag{15}$$

то рівність між (14) та (15) для всіх $\lambda > 0$ можлива при

$$\begin{cases} \lambda^{2\sigma-3} = \lambda^{\sigma-1}, \\ \lambda = \lambda^{\sigma-1}; \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2\sigma - 3 = \sigma - 1 \\ 1 = \sigma - 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \sigma = 2.$$

Впровадимо заміну $y = x^2 z$, $z = z(x)$. Тоді $y' = z'x^2 + 2xz$. Підставивши y і y' рівняння, будемо мати

$$z'x^2 + 2xz = x + \frac{z^2x^4}{x^3} \quad \Rightarrow \quad x^2\frac{dz}{dx} = x(1-z)^2.$$

Стала функція $z = 1$, що є розв'язком отриманого рівняння. Тепер можемо відокремити змінні:

$$-\frac{dz}{(z-1)^2} = -\frac{dx}{x},$$

та проінтегрувати:

$$\frac{1}{z-1} = -\ln|x| + C, \quad C \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad z = 1 + \frac{1}{C - \ln|x|}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Додаючи до отриманої сім'ї розв'язків рівняння з відокремлюваними змінними розв'язок $z = 1$, одержуємо всі розв'язки цього рівняння

$$\left[\begin{array}{l} z = 1 + \dfrac{1}{C - \ln|x|}, \quad C \in \mathbb{R}, \\ z = 1. \end{array}\right.$$

Повернувшись до вихідної невідомої функції, отримуємо

$$\left[\begin{array}{l} y = x^2 + \frac{x^2}{C - \ln|x|}, \quad C \in \mathbb{R}, \\ y = x^2. \end{array}\right.$$

Зауваження. *При ірраціональному σ та раціональному σ з парним знаменником заміна $y = x^\sigma z$ для квазіоднорідного рівняння справедлива лише для $x > 0$, для $x < 0$ потрібно застосовувати заміну $y = z(-x)^\sigma$.*

Вправи

У задачах 21–52 розв'язати диференціальні рівняння; там, де вказано, знайти розв'язок, що задовольняє початкову умову.

21. $xy' + y = y^2$, $y(1) = \dfrac{1}{2}$.

22. $y = 2\int\limits_0^x \sqrt{y}dx$.

23. $(x^2 - 1)y' + 2xy^2 = 0$, $y(0) = 1$.

24. $2x^2yy' + y^2 = 2.$

25. $z' = 10^{x+z}.$

26. $y' = (x + y + 1)^2.$

27. $y' = 2x\cos^2 y,\ y(0) = \frac{\pi}{4}.$

28. $y' = \cos(y - x).$

29. $y' = \sqrt{4x + 2y - 1}.$

30. $(y^2 + xy^2)y' + x^2 - yx^2 = 0.$

31. $e^y(1 + x^2)dy - 2x(1 + e^y)dx = 0.$

32. $(xy^2 + x)dx + (y - x^2y)dy = 0.$

33. $\sqrt{y^2 + 1}dx = xydy.$

34. $y' - xy^2 = 2xy.$

35. $(x + 2y)y' = 1,\ y(0) = -1.$

36. $(x^2 - y^2)dx + 2xydy = 0.$

37. $xdy = (ax + by)dx.$

38. $xy' = y\cos\ln\frac{y}{x}.$

39. $(2x - 4y + 6)dx + (x + y - 3)dy = 0.$

40. $x(x + 2y)dx + (x^2 - y^2)dy = 0.$

41. $xy' - y = (x + y)\ln\frac{x + y}{x}.$

42. $(2x + y + 1)dx - (4x + 2y - 3)dy = 0.$

43. $(y' + 1)\ln\frac{x + y}{x + 3} = \frac{x + y}{x + 3}.$

44. $y' = \frac{xy + y^2e^{-x/y}}{x^2}.$

45. $\frac{2}{3}xyy' = \sqrt{x^6 - y^4} + y^2.$

46. $2x^2y' = y^3 + xy.$

47. $y' = y^2 - \frac{2}{x^2}.$

48. $2y + (x^2y + 1)xy' = 0.$

49. $2xdy + (x^2y^4 + 1)ydx = 0.$

50. $ydx + x(2xy + 1)dy = 0.$

51. $2y' + x = 4\sqrt{y}.$

52. $2xy' + y = y^2\sqrt{x - x^2y^2}.$

53.* Знайти розв'язок рівняння $3y^2y' + 16x = 2xy^3$, що залишається обмеженим при $x \to +\infty$.

54.* Знайти кут між інтегральними кривими рівняння $y' = \varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$ та прямою $y = kx$.

55.* Довести, що однорідне рівняння зводиться до рівняння з відокремленими змінними переходом до полярних координат.

56.* При яких m і n рівняння $\dfrac{dy}{dx} = ax^m + by^n$ є квазіоднорідним? Розв'язати рівняння $y' = x^m + 2y^2$ за умови, що воно є квазіоднорідним.

3. Геометрична інтерпретація диференціального рівняння першого порядку

Розглянемо *автономне рівняння* вигляду

$$y' = g(y). \tag{16}$$

Насамперед зауважимо, що якщо $g(y^*) = 0$, то функція $y = y^*$ є розв'язком рівняння (16). Крім того, якщо $y(x)$ – розв'язок рівняння (16) на деякому інтервалі (α, β), то для довільного $\tau \in \mathbb{R}$ функція $y_\tau(x) = y(x - \tau)$ теж є розв'язком рівняння (16) на $(\alpha + \tau, \beta + \tau)$. Отже, достатньо розглядати задачу Коші з $x_0 = 0$, тобто

$$\begin{cases} y' = g(y) \\ y(0) = y_0. \end{cases} \tag{17}$$

Нехай $-\infty \le c < d \le +\infty$. Справедливий наступний результат.

Теорема (про існування розв'язку автономного рівняння). *Якщо $g \in \mathrm{C}(c, d)$ та $g(y) > 0$ для всіх $y \in (c, d)$, то для довільного $y_0 \in (c, d)$ існує єдиний розв'язок $y = y(x)$ задачі (17), що задається неявною формулою*

$$\int_{y_0}^{y} \frac{ds}{g(s)} = x, \tag{18}$$

причому цей розв'язок визначений і монотонно зростаючий на (α, β), де $\alpha = \lim\limits_{y \to c+} \int_{y_0}^{y} \frac{ds}{g(s)}$, $\beta = \lim\limits_{y \to d-} \int_{y_0}^{y} \frac{ds}{g(s)}$.

Зауважимо, що якщо $g(y) < 0$, то y визначений і монотонно спадний на (β, α).

Теорема (про максимальний інтервал існування розв'язку автономного рівняння). *Нехай $g \in \mathrm{C}(c, +\infty)$ і $g(y) > 0$ для всіх $y \in (c, +\infty)$. Тоді*

1) якщо

$$g(y) = O(y), \quad y \to \infty, \tag{19}$$

то для довільного $y_0 \in (c, +\infty)$ розв'язок (17) існує на $(\alpha, +\infty)$;

2) якщо для деякого $k > 1$:

$$g(y) = O(y^k), \quad y \to \infty, \tag{20}$$

то для довільного $y_0 \in (c, +\infty)$ *знайдеться* $\beta = \beta(y_0) < \infty$ *таке, що розв'язок задачі* (17) *існує на* (α, β) *і* $\lim\limits_{x \to \beta-} y(x) = +\infty$.

Зауважимо, що при $g(y) < 0$ або при $y_0 \in (-\infty, d)$ твердження залишається вірним з відповідною заміною інтервалів.

Значення $\beta(y_0)$ можна знайти з рівності $\beta(y_0) = \lim\limits_{y \to \infty} \int\limits_{y_0}^{y} \dfrac{ds}{g(s)}$.

Нехай тепер y^* – єдиний нуль функції $g(y)$ на інтервалі (c, d). Тоді вірний наступний результат про асимптотичну поведінку розв'язків автономного рівняння.

Теорема (про асимптотичні властивості розв'язків автономного рівняння). *Нехай* $g \in \mathrm{C}(c, y^*)$ *та* $g(y) > 0$ *для всіх* $y \in (c, y^*)$, $g(y^*) = 0$. *Для* $y_0 \in (c, y^*)$ *покладемо* $F(y) = \int\limits_{y_0}^{y} \dfrac{ds}{g(s)}$. *Тоді*

1) *якщо існує границя* $\lim\limits_{y \to y^*} F(y) =: \beta(y_0) < \infty$, *то розв'язок задачі Коші* (17) *строго монотонно зростає, дотикаючись до прямої* $y = y^*$ *в точці* $x = \beta(y_0)$;
2) *якщо ж* $\lim\limits_{y \to y^*} F(y) = \infty$, *то* $y = y^*$ *– горизонтальна асимптота розв'язку* (17) *при* $x \to \infty$, *тобто* $\begin{cases} y(x) \to y^*, \ x \to \infty, \\ y'(x) \to 0, \ x \to \infty. \end{cases}$

Твердження теореми справедливе для всіх $y_0 \in (y^*, d)$, якщо вимагати виконання умов $g(y) < 0$ для всіх $y \in (y^*, d)$, $g(y^*) = 0$. При $x \to -\infty$ можна отримати аналогічні асимптотичні властивості.

Зауважимо, що якщо в умовах теореми існує похідна $g'(y)$, то виконується пункт 2).

Якщо $y_1, y_2, \ldots$ – нулі правої частини рівняння (16), то вони розбивають вісь $0y$ на проміжки знакосталості функції $g(y)$, а відповідні сталі розв'язки $y \equiv y_1$, $y \equiv y_2, \ldots$ рівняння (16) розбивають площину $0xy$ на горизонтальні смуги, в кожній з яких розв'язки рівняння є монотонними функціями, асимптотичні властивості яких можна уточнити за допомогою двох останніх теорем.

Приклад 1. Проаналізувати поведінку розв'язів задачі Коші $y' = y^2$, $y(0) = y_0$ в залежності від значення параметру y_0.

Розв'язання. Оскільки $g(y) = y^2 \in C(\mathbb{R})$, $g(0) = 0$ та $g(y) > 0$ для всіх $y \in (-\infty, 0) \bigcup (0, \infty)$, то $y^* = 0$ і рівняння має один сталий розв'язок $y \equiv 0$, а всі інші розв'язки строго монотонно зростають.

Використовуючи теорему про максимальний проміжок існування розв'язку автономного рівняння та враховуючи, що $g(y) = y^2$, приходимо до висновку, що для $y_0 > 0$ розв'язки задачі Коші прямують до нескінченності за скінченний час, тобто мають вертикальну асимптоту $x = \beta(y_0) = \lim\limits_{y \to \infty} \int\limits_{y_0}^{y} \frac{ds}{s^2} = \frac{1}{y_0} > 0$. Аналогічно, для $y_0 < 0$ розв'язки відповідної задачі Коші матимуть вертикальну асимптоту $x = \beta(y_0) < 0$.

При цьому оскільки $F(y) = \int\limits_{y_0}^{y} \frac{ds}{g(s)} = \int\limits_{y_0}^{y} \frac{ds}{s^2} = -\frac{1}{y} + \frac{1}{y_0} \to \infty$, $y \to 0$, то використовуючи теорему про асимптотичні властивості розв'язків автономного рівняння, отримуємо, що $y = 0$ є горизонтальною асимптотою розв'язку заданої задачі Коші для кожного $y_0 \neq 0$. А саме, при $y_0 < 0$ для розв'язків відповідної задачі Коші має місце асимптотична властивість $y(x) \to 0$, $t \to \infty$, в той час, як для розв'язків задачі Коші з $y_0 > 0$ маємо $y(x) \to 0$, $t \to -\infty$. Крім того, розв'язок задачі Коші (при $y_0 \neq 0$) не має спільних точок з асимптотою $y = 0$.

Пересвідчитись у справедливості наших висновків можна також безпосередньо. Розв'язуючи задану задачу Коші знаходимо $y(x) = -\frac{1}{x - \frac{1}{y_0}}$, тобто для кожного $y_0 \neq 0$ графіком розв'язку є гіпербола з вертикальною асимптотою $x = \frac{1}{y_0}$ та горизонтальною асимптотою $y = 0$. Однак отримати розв'язок у явному вигляді вдається далеко не завжди, а розглянуті теореми дають змогу отримати уявлення про поведінку розв'язків рівняння, не шукаючи явно ці розв'язки.

Приклад 2. Проаналізувати поведінку розв'язів задачі Коші $y' = 2\sqrt{-y}$, $y(0) = y_0$ в залежності від значення параметру y_0.

Розв'язання. Маємо $g(y) = 2\sqrt{-y} \in C(-\infty, 0)$, $g(0) = 0$, $g(y) > 0$ для всіх $y \in (-\infty, 0)$, $y^* = 0$.

За теоремою про максимальний проміжок існування розв'язку автономного рівняння всі розв'язки існують на проміжку $(0, \infty)$.

Застосовуючи теорему про асимптотичні властивості, бачимо, що оскільки $F(y) = -\sqrt{-y} + \sqrt{-y_0} \to \sqrt{-y_0}$, $y \to 0$, то розв'язок заданої задачі Коші дотикається до прямої $y = 0$ в точці $x = \sqrt{-y_0}$. Отже, кожна точка прямої $y = 0$ є точкою неєдиності розв'язку задачі Коші. Такі розв'язки диференціальних рівнянь називаються *особливими.*

Розв'язуючи задану задачу Коші для $y_0 < 0$, отримуємо

$$y(x) = -(\sqrt{-y_0} - x)^2, \quad x \le \sqrt{-y_0},$$

що ще раз підтверджує наші висновки.

Перейдемо до розгляду загального диференціального рівняння першого порядку

$$y' = f(x, y) \tag{21}$$

з неперервною функцією $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$.

Поведінка розв'язків рівняння (21) може бути набагато складнішою, ніж для автономного рівняння. Однак певну інформацію ми можемо отримати безпосередньо з вигляду правої частини $f(x, y)$, не вдаючись при цьому до відшукання розв'язків в явному вигляду і подальшого аналізу отриманих функцій.

Наприклад, у області

$$D_+ = \{(x, y) \in D : f(x, y) > 0\}$$

всі розв'язки рівняння (21) строго монотонно зростають, а в області

$$D_- = \{(x, y) \in D : f(x, y) < 0\}$$

навпаки строго монотонно спадають. Точки екстремуму належать кривій

$$\Gamma_0 = \{(x, y) \in D : f(x, y) = 0\}.$$

Якщо припустити, що функція f неперервно диференційовна, то диференціюючи по x тотожність

$$y'(x) = f(x, y(x)),$$

що справедлива для кожного розв'язку рівняння (21), отримуємо вираз для другої похідної у термінах функції f:

$$\begin{aligned} y''(x) = \frac{d}{dx} f(x, y(x)) &= f'_x(x, y(x)) + f'_y(x, y(x)) \cdot y'(x) = \\ &= f'_x(x, y(x)) + f'_y(x, y(x)) \cdot f(x, y(x)), \end{aligned}$$

який дозволяє виділити множини точок перегину, опуклості вгору чи вниз розв'язків, а також уточнити множини точок екстремуму, виділивши точки мінімуму та максимуму.

Полем напрямків у області $D \subseteq \mathbb{R}^2$ називається відповідність, яка кожній точці $(x_0, y_0) \in D$ зіставляє пряму $y = f(x_0, y_0)(x - x_0) + y_0$, що проходить через точку $(x_0, y_0) \in D$. Поле напрямків зображається у вигляді малих відрізків відповідних прямих. Цей об'єкт можна вважати геометричним еквівалентом диференціального рівняння. З огляду на геометричний зміст похідної очевидно, що *інтегральна крива у кожній своїй точці дотикається до поля напрямків.*

Множина точок $\Gamma_k = \{(x, y) \in D : f(x, y) = k\}$, де k – дійсне число з області значень функції f, називається $k-$*ізокліною* рівняння (21). Очевидно, що *вздовж ізоклін поле напрямків паралельне*, а точки екстремума інтегральних кривих рівняння (21) лежать на $0-$ізокліні.

Для автономного рівняння (16) аналогом поля напрямків є *векторне поле на прямій* – залежність, яка кожній точці y_0 прямої $0y$ ставить у відвідність вектор довжини $|g(y_0)|$, що прикладений у цій точці у додатному напрямку для $g(y_0) > 0$ і у від'ємному напрямку для $g(y_0) < 0$.

Використовуючи наведені вище характеристики інтегральних кривих рівняння (21) (множини спадання та зростання, опуклості вниз і вгору, точок максимуму і мімімуму), а також будуючи поле напрямків у вузлах деякої достатньо густої сітки з горизонтальних та вертикальних прямих, можна отримати достатньо чітке уявлення про поведінку розв'язків рівняння (21), не вдаючись при цьому до безпосереднього розв'язання.

Лабораторна робота, комп'ютерний практикум 1

Задача 1. Для диференціального рівняння $y' = f(x, y)$ виконати наступні завдання, результати відобразити на одному графіку.

1) Зобразити поле напрямків в точках $\left(m, \frac{n}{2}\right)$, $m = -6, -5, \ldots, 6$, $n = -10, -9, \ldots, 10$.

2) Зобразити ізокліни, які характеризуються кутовими коефіцієнтами $k = \pm\frac{1}{2}, \pm 1, \pm\frac{3}{2}$.
3) Зобразити області, де інтегральні криві рівняння зростають, та області, де інтегральні криві спадають.
4) Описати аналітично та зобразити множини точок максимуму розв'язків.
5) Виділити області, де інтегральні криві опуклі вгору, та області, де інтегральнв криві опуклі вниз.
6) Описати аналітично та зобразити множину точок перегину інтегральних кривих.
7) Зобразити наближено інтегральні криві, які проходять через точки $(0, -2)$, $(0, 0)$, $(0, 1)$ відповідно.

Варіанти завдань.

1. $y' = y^2 - 3y + x - 2.$

2. $y' = y^2 - x.$

3. $y' = y^2 - y + x.$

4. $y' = y^2 - 3y - x + 2.$

5. $y' = y^2 + x.$

6. $y' = y^2 + y + x.$

7. $y' = y^2 - 2y + x.$

8. $y' = y^2 + y + x - 2.$

9. $y' = y^2 + x - 1.$

10. $y' = y^2 - x - 1.$

11. $y' = y^2 - 5y + x + 6.$

12. $y' = y^2 + x - 2.$

Задача 2. Для автономного рівняння $y' = g(y)$ провести наступні дослідження.

1) Зобразити векторне поле в точках 0, ± 1, ± 2, ± 3, ± 4.
2) Знайти області зростання і спадання, множину точок перегину інтегральних кривих заданого рівняння.
3) Знайти явний вигляд $y(x, y_0)$, $x \in I_{y_0}$ – непродовжуваного розв'язку рівняння такого, що $y(0, y_0) = y_0$. У разі наявності вертикальних асимптот, вказати точки, через які вони проходять, а відтак, знайти явний вигляд інтервалу I_{y_0}.
4) Для $y_0 \in [y_1, y_2]$, $y_0 \in (-\infty, y_1)$, $y_0 \in (y_2, +\infty)$ (y_1, y_2 – нулі функції $g(y)$, розташовані в порядку зростання) зобразити графік функції $y(x, y_0)$.
5) Нехай $I = (a, b)$, $J = (b, c)$ – інтервали зростання і спадання інтегральних кривих заданого рівняння, відповідно. Зобразити

графіки функцій $y(x, b + 1/2)$ та $y(x, b - 1/2)$ для $x \geq 0$. Знайти $x \geq 0$ таке, що $|y(x, b + 1/2) - y(x, b - 1/2)| < 10^{-3}$.

Варіанти завдань.

1. $g(y) = y^2 + 3y + 2$.

2. $g(y) = y^2 - 2y - 3$.

3. $g(y) = y^2 - 3y + 2$.

4. $g(y) = y^2 + y - 6$.

5. $g(y) = y^2 + y$.

6. $g(y) = 2y - y^2 + 3$.

7. $g(y) = y^2 - y$.

8. $g(y) = y^2 - 1$.

9. $g(y) = y - y^2$.

10. $g(y) = y^2 - 2y$.

11. $g(y) = 3y - y^2 - 2$.

12. $g(y) = 2 - y - y^2$.

4. Лінійне рівняння, рівняння Бернуллі

Диференціальне рівняння вигляду

$$y' = a(x)y + b(x), \tag{22}$$

де $a(x)$ та $b(x)$ — задані неперервні функції, називається *лінійним неоднорідним рівнянням.* Рівняння вигляду

$$y' = a(x)y \tag{23}$$

називається *лінійним однорідним рівнянням*, що відповідає лінійному неорднорідному рівнянню (22).

Рівняння (23), крім того що є лінійним, також є рівнянням з відокремлюваними змінними, і всі розв'язки цього рівняння задаються сім'єю функцій

$$y = C\mathrm{e}^{\int_{x_0}^{x} a(s)ds}, \quad C \in \mathbb{R},$$

де x_0 — деяка точка з області визначення функції $a(x)$.

Найрозповсюдженішим методом знаходження розв'язків лінійного неоднорідного рівняння (22) є *метод варіації довільної сталої* (*метод Лагранжа*). Суть цього методу полягає у тому, що спочатку розв'язуємо відповідне лінійне однорідне рівняння (23), а далі розв'язки неоднорідного рівняння (22) шукаємо у вигляді

$$y = C(x)\mathrm{e}^{\int_{x_0}^{x} a(s)ds},$$

де $C(x)$ – нова невідома функція. Тоді після підстановки у (22), відносно $C(x)$ одержуємо диференціальне рівняння

$$C'(x)\mathrm{e}^{\int_{x_0}^{x} a(s)ds} = b(x).$$

Звідки знаходимо $C(x) = \overline{C} + \int\limits_{x_0}^{x} \mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{t} a(s)ds} b(t)dt$, $\overline{C} \in \mathbb{R}$, а отже, і всі розв'язки рівняння (22)

$$y = \mathrm{e}^{\int_{x_0}^{x} a(s)ds} \left(\overline{C} + \int_{x_0}^{x} \mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{t} a(s)ds} b(t)dt \right), \quad \overline{C} \in \mathbb{R}. \tag{24}$$

Теорема. *Нехай $a(\cdot)$, $b(\cdot) \in \mathrm{C}(\alpha, \beta)$. Тоді для будь-яких $x_0 \in \in (\alpha, \beta)$, $y_0 \in \mathbb{R}$ задача Коші*

$$y' = a(x)y + b(x), \quad y(x_0) = y_0$$

має єдиний розв'язок

$$y(x) = \mathrm{e}^{\int_{x_0}^{x} a(s)ds} \left(y_0 + \int_{x_0}^{x} \mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{t} a(s)ds} b(t)dt \right)$$

визначений на (α, β).

Приклад 1. Розв'язати рівняння $xy' - 2y = 2x^4$.

Розв'язання. Перепишемо задане рівняння у вигляді $y' - \dfrac{2}{x}y = 2x^3$. Розв'яжемо спочатку однорідне рівняння

$$y' - \frac{2}{x}y = 0.$$

Загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд

$$y(x) = C \exp^{\int \frac{2}{x}dx} = Cx^2, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Тому відповідно до методу варіації довільної сталої будемо шукати розв'язок вихідного рівняння у вигляді $y(x) = C(x)x^2$. Підставимо $y(x)$ у вихідне рівняння:

$$xC'(x)x^2 + 2x^2C(x) - 2x^2C(x) = 2x^4 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad C'(x) = 2x \quad \Rightarrow \quad C(x) = x^2 + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}.$$

Зауважимо, що ми можемо позначати сталу інтегрування C_1 знову ж літерою C. Отже, $y(x) = x^2(x^2 + C)$, $C \in \mathbb{R}$ – загальний розв'язок вихідного лінійного неоднорідного рівняння.

Рівняння вигляду

$$y' = a(x)y + b(x)y^n, \tag{25}$$

де $a(x)$ та $b(x)$ — задані функції, $n \in \mathbb{R}$, називається *рівнянням Бернуллі.*

Зауваження. *При $n = 1$ рівняння (25) перетворюється у лінійне однорідне рівняння, при $n = 0$ — у лінійне неоднорідне рівняння.*

Для розв'язання рівняння Бернуллі при $n \neq 1$ використовується *метод Бернуллі*, відповідно до якого розв'язки рівняння (25) шукаємо у вигляді $y = uv$, де $u = u(x)$, $v = v(x)$ — поки що невизначені функції. Підставляємо $y = uv$ у рівняння та групуємо доданки

$$u'v + uv' = a(x)uv + b(x)u^n v^n \quad \Rightarrow \quad (u' - a(x)u)v + uv' = b(x)u^n v^n.$$

Якщо тепер функцію $u = u(x)$ вибрати як будь-який ненульовий розв'язок лінійного однорідного рівняння $u' = a(x)u$, наприклад, $u(x) = e^{\int_{x_0}^{x} a(s)ds}$, то відносно функції v приходимо до диференціального рівняння з відокремлюваними змінними

$$v' = b(x)v^n e^{(n-1)\int_{x_0}^{x} a(s)ds}.$$

Розв'язавши це рівняння і домноживши знайдені розв'язки на функцію $u(x)$, одержимо всі розв'язки рівняння Бернуллі.

Відмітимо, що при $n > 0$ рівняння з відокремлюваними змінними для функції $v(x)$ має розв'язок $v \equiv 0$, тобто функція $y \equiv 0$ завжди є розв'язком рівняння Бернуллі для $n > 0$.

Зауваження. *При $n \neq 0$ та $n \neq 1$ рівняння Бернуллі можна звести до лінійного неоднорідного рівняння заміною $z = y^{1-n}$, де $z = z(x)$ — нова невідома функція. Однак зазначимо, що при такій заміні для $n > 0$ ми втрачаємо розв'язок $y = 0$, тому його слід додати до отриманої сім'ї функцій.*

Лінійне рівняння, як частинний розв'язок рівняння Бернуллі, також можна розв'язувати методом Бернуллі.

Приклад 2. Розв'язати рівняння $y' - \dfrac{1}{x}y = 3x$ методом Бернуллі.

Розв'язання. Задане рівняння є лінійним неоднорідним. Згідно методу Бернуллі розв'язок цього рівняння шукаємо у вигляді $y = uv$. Тоді, диференціюючи підстановку по x, маємо $y' = u'v + v'u$. Підставивши y і y' у рівняння, одержимо:

$$u'v + v'u - \frac{1}{x}uv = 3x \quad \Rightarrow \quad uv' + v(u' - \frac{1}{x}u) = 3x.$$

Розв'язуємо рівняння $u' - \dfrac{1}{x}u = 0$. Частковим розв'язком такого рівняння з відокремленими змінними є функція $u(x) = x \not\equiv 0$. Підставивши це значення у співвідношення $uv' = 3x$, одержимо $xv' = 3x$ або $v' = 3$. Звідки $v = 3x + C$, $C \in \mathbb{R}$. Тоді загальний розв'язок заданого лінійного неоднорідного рівняння має вигляд: $y = x(3x + C)$, $C \in \mathbb{R}$.

Приклад 3. Розв'язати рівняння $y' + \dfrac{y}{x} = y^2\dfrac{\ln x}{x}$.

Розв'язання. Задане рівняння є рівнянням Бернуллі. Розв'яжемо його двома способами.

<u>`1-й спосіб`</u>. Використаємо метод Бернуллі. Застосовуючи підстановку $y = uv$, маємо:

$$u'v + v'u + \frac{uv}{x} = u^2v^2\frac{\ln x}{x} \quad \Rightarrow \quad \left(u' + \frac{u}{x}\right)v + v'u = u^2v^2\frac{\ln x}{x}.$$

Функцію u шукаємо як деякий нетривіальний розв'язок рівняння $u' + \dfrac{u}{x} = 0$, візьмемо, наприклад, $u = \dfrac{1}{x} \not\equiv 0$. Тоді для v отримуємо рівняння з відокремлюваними змінними

$$v' = \frac{v^2}{x^2}\ln x.$$

Функція $v \equiv 0$ є розв'язком цього рівняння, інші розв'язки знаходимо відокремлюючи змінні

$$\frac{1}{v^2} = \frac{\ln x}{x^2} \quad \Rightarrow \quad \int\frac{dv}{v^2} = \int\frac{\ln x}{x^2}dx \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{v} = \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} + C, \quad C \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad v = \frac{x}{1 + Cx + \ln x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Отже, всі розв'язки вихідного рівняння задаються сукупністю

$$\left[\begin{array}{l} y = \dfrac{1}{1 + Cx + \ln x}, \quad C \in \mathbb{R}, \\ y = 0. \end{array}\right.$$

<u>`2-й спосіб`</u>. Застосуємо заміну $z = y^{1-2} = \dfrac{1}{y}$, $z = z(x)$, тоді $z' = -\dfrac{y'}{y^2}$. Відразу зауважимо, що за такої заміни втрачається розв'язок $y = 0$ вихідного рівняння. Впровадивши заміну, будемо мати:

$$-\frac{1}{z^2}z' + \frac{1}{zx} = \frac{1}{z^2}\frac{\ln x}{x} \quad \Rightarrow \quad -z' + \frac{z}{x} = \frac{\ln x}{x}.$$

Розв'язуючи останнє лінійне неоднорідне рівняння відносно z, отримаємо: $z = \ln x + 1 + Cx$, $C \in \mathbb{R}$. Повертаючись до вихідної невідомої функції, одержуємо всі розв'язки рівняння Бернуллі:

$$\left[\begin{array}{l} y(x) = \dfrac{1}{\ln x + 1 + Cx}, \quad C \in \mathbb{R}, \\ y = 0. \end{array}\right.$$

Лінійне неоднорідне рівняння (22) можна також розв'язувати *методом Ейлера* (*методом інтегрувального множника*). А саме, домноживни це рівняння на функцію $m(x) = \mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x} a(s)ds}$ (інтегрувальний множник), одержимо рівність

$$y'\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x} a(s)ds} - a(x)y\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x} a(s)ds} = b(x)\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x} a(s)ds}$$

або, що те саме,

$$\frac{d}{dx}\left(y\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x} a(s)ds}\right) = b(x)\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x} a(s)ds}.$$

Проінтегрувавши останню рівність по x та виразивши явно $y = y(x)$, одержимо всі розв'язки лінійного неоднорідного рівняння у вигляді (24).

Приклад 4. Розв'язати рівняння $x^2y' + xy + 1 = 0$ методом Ейлера (методом інтегрувального множника).

Розв'язання. Перепишемо задане рівняння у вигляді

$$y' + \frac{1}{x}y = -\frac{1}{x^2}.$$

Згідно медоду Ейлера домножимо останнє рівняння на $m(x) = e^{\int \frac{1}{x}dx} = x$. Будемо мати:

$$xy' + y = -\frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad (xy)' = -\frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad xy = -\ln|x| + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Тому загальним розв'язком вихідного рівняння буде сім'я функцій

$$y = -\frac{1}{x}\ln|x| + \frac{C}{x}, C \in \mathbb{R}.$$

Зауваження. *Деякі рівняння стають лінійними, якщо поміняти "ролями" шукану функцію і незалежну змінну. Однак при такій процедурі можна втратити розв'язки вигляду $y = \mathrm{const}$, які слід перевірити окремо та додати до сім'ї розв'язків.*

Приклад 5. Розв'язати рівняння $y = (2x + y^3)y'$.

Розв'язання. Вихідне рівняння не є лінійним відносно змінної y. Одразу зауважимо, що серед функцій вигляду $y = \mathrm{const}$ лише $y = 0$ розв'язком. Далі перепишемо рівняння у вигляді

$$\frac{1}{y'} = \frac{2x + y^3}{y} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dy} - \frac{2}{y}x = y^2.$$

Отримане рівняння є лінійним неоднорідним, в якому незалежною змінною є y, а шуканою функцією $x = x(y)$. Застосовуючи один із запропонованих вище методів для розв'язування лінійних неоднорідних рівнянь, отримаємо розв'язок

$$x = (y + C)y^2, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Тоді розв'язки вихідного рівняння задаються сукупністю

$$\left[\begin{array}{l} x = (y + C)y^2, \quad C \in \mathbb{R}, \\ y = 0. \end{array}\right.$$

Вправи

У задачах 57–72 розв'язати рівняння:

57. $y' \sin x - y \cos x = -\dfrac{\sin^2 x}{x^2}$.

58. $(xy + e^x)dx - xdy = 0$.

59. $2x(x^2 + y)dx = dy$.

60. $(xy' - 1)\ln x = 2y$.

61. $(2e^y - x)y' = 1$.

62. $y' + 2y = y^2 e^x$.

63. $xy' - 2x^2\sqrt{y} = 4y$.

64. $(2x + 1)y' = 4x + 2y$.

65. $y = x(y' - x\cos x)$.

66. $y(x) = \int\limits_0^x y(t)dt + x + 1$.

67. $\int\limits_0^x (x - t)y(t)dt = 2x + \int\limits_0^x y(t)dt$.

68. $(2x^2 y \ln y - x)y' = y$.

69. $xy' + y = xy^2 \ln x$.

70. $y' + ytgx = \dfrac{1}{\cos x}$.

71. $(x + 1)(y' + y^2) = -y$.

72. $xy^2 y' = x^2 + y^3$.

73.* Знайти періодичний розв'язок рівняння $y' = 2y\cos^2 x - \sin x$.

74.* Нехай в рівнянні $xy' + ay = f(x)$ маємо $a = \mathrm{const} > 0$, $f(x) \to b \in \mathbb{R}$ при $x \to 0$. Показати, що лише один розв'язок рівняння залишаються обмеженим при $x \to 0$ і знайти границю цього розв'язку при $x \to 0$.

75.* Нехай в рівняння попередньої задачі $a = \mathrm{const} < 0$, $f(x) \to b \in \mathbb{R}$ при $x \to 0$. Показати, що всі розв'язки цього рівняння мають одну і ту ж скінченну границю при $x \to 0$. Знайти цю границю.

76.* Знайти всі 2π-періодичні розв'язки рівняння $y' = y\cos x + \cos x$.

5. Рівняння Ріккаті

Рівняння Ріккаті має вигляд

$$y' = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x), \tag{26}$$

де P, Q, R – неперервні функції змінної $x \in (a,b)$, $(a \geq -\infty,\ b \leq \infty)$.

У загальному випадку рівняння Ріккаті (26) не інтегрується в квадратурах. Однак, існує багато частинних випадків, коли інтегрування можливе.

Наприклад, при $P \equiv 0$ рівняння Ріккаті перетворюється на лінійне рівняння, а при $R \equiv 0$ – на рівняння Бернуллі. Розглянемо інші випадки, коли рівняння Ріккаті можна проінтегрувати в квадратурах.

1) Якщо рівняння (26) має вигляд

$$y' = Ay^2 + B\frac{y}{x} + C\frac{1}{x^2},$$

де A, B, C – деякі дійсні сталі, то (26) – квазіоднорідне рівняння з показником квазіоднорідності $\sigma = -1$.

2) Якщо рівняння (26) має вигляд

$$y' = A\frac{y^2}{x} + \frac{1}{2}\frac{y}{x} + C, \tag{27}$$

де A, C – дійсні сталі, то заміною $y = z\sqrt{x}$, де $z = z(x)$ – нова шукана функція, воно зводиться до рівняння з відокремленими змінними.

3) Якщо відомий деякий частинний розв'язок $y = \varphi(x)$ рівняння (26), то заміною $y = z + \varphi(x)$, де $z = z(x)$ – нова шукана функція, воно зводиться до рівняння Бернуллі.

Приклад 1. Розв'язати рівняння $x^2y' = x^2y^2 + xy + 1$.

Розв'язання. Це рівняння Ріккаті. Спробуємо відшукати його частинний розв'язок у вигляді $y = \dfrac{a}{x}$, де сталу a підберемо таким чином, щоб дійсно отримати розв'язок. Підставляючи зазначену функцію у рівняння, маємо:

$$x^2\left(-\frac{a}{x^2}\right) = x^2\left(\frac{a}{x}\right)^2 + x\cdot\frac{a}{x} + 1 \quad\Rightarrow\quad -a = a^2 + a + 1 \quad\Rightarrow\quad (a+1)^2 = 0.$$

Звідси $a = -1$, і функція $y(x) = -\dfrac{1}{x}$ – частинний розв'язок рівняння.

Тепер зробимо заміну $y = z - \dfrac{1}{x}$, де $z = z(x)$, тоді $y' = z' + \dfrac{1}{x^2}$. Підставляючи заміну у рівняння, маємо:

$$x^2\left(z' + \frac{1}{x^2}\right) = x^2\left(z - \frac{1}{x}\right)^2 + x\left(z - \frac{1}{x}\right) + 1, \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x^2z' + 1 = x^2z^2 - 2xz + 1 + xz - 1 + 1 \quad \Rightarrow \quad x^2z' = x^2z^2 - xz.$$

У результаті, дійсно, прийшли до рівняння Бернуллі

$$z' = z^2 - \frac{z}{x}.$$

Одразу зазначимо, що це рівняння має розв'язок $z = 0$, який породжує частинний розв'язок $y = -\dfrac{1}{x}$ вихідного рівняння, який ми вже знайшли. Інші розв'язки отримуємо за допомогою методу Бернуллі, використовуючи підстановку $z = uv$:

$$u'v + uv' = u^2v^2 - \frac{uv}{x} \quad \Rightarrow \quad \left(u' + \frac{u}{x}\right)v + uv' = u^2v^2.$$

Виберемо u як нетривіальний частинний розв'язок рівняння $u' + \dfrac{u}{x} = 0$, наприклад, $u = \dfrac{1}{x}$. Тоді відносно v приходимо до рівняння $\dfrac{1}{x}v' = \dfrac{1}{x^2}v^2$, з якого маємо:

$$\frac{dv}{v^2} = \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad -\int\frac{dv}{v^2} = -\int\frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{v} = -\ln|x| + C, \quad C \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad v = \frac{1}{C - \ln|x|} \quad \Rightarrow \quad z = uv = \frac{1}{Cx - x\ln|x|}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Згадуючи, що $y = z - \dfrac{1}{x}$, повертаємося до вихідної змінної, і беручи до уваги розв'язок $y = -\dfrac{1}{x}$, отримуємо всі розв'язки вихідного рівняння Ріккаті:

$$\left[\begin{array}{l} y = \dfrac{1}{Cx - x\ln|x|} - \dfrac{1}{x}, \quad C \in \mathbb{R}, \\[3ex] y = -\dfrac{1}{x}. \end{array}\right.$$

4) Рівняння (26) можна звести до *рівняння Ріккаті канонічного вигляду*

$$y' = \pm y^2 + R(x),$$

за допомогою комбінації підстановок $y = \alpha(x)z$, $z = u + \beta(x)$, де

$z = z(x)$, $u = u(x)$. При цьому у першій підстановці функцію $\alpha(x)$ вибираємо так, щоб перетворити на ± 1 коефіцієнт при y^2, а в другій – функцію $\beta(x)$ так, щоб перетворити на 0 коефіцієнт при z, при цьому коефіцієнт при z^2 не змінюється. Зведення рівняння Ріккаті до канонічного вигляду не гарантує його інтегровності у квадратурах, але у такому вигляді рівняння або може бути віднесене до одного з інтегровних типів, або може бути простіше знайти частинний розв'язок.

Приклад 2. Розв'язати рівняння $y' = 4y^2 - 4x^2y + x^4 + x + 4$.

Розв'язання. Спробуємо звести рівняння до канонічного вигляду. Спочатку зробимо заміну $y = \alpha(x)z$, $z = z(x)$, і підберемо функцію $\alpha(x)$:

$$\alpha'(x)z + \alpha(x)z' = 4\alpha^2(x)z^2 - 4x^2\alpha(x)z + x^4 + x + 4,$$

$$z' = 4\alpha(x)z^2 - \left(4x^2 + \frac{\alpha'(x)}{\alpha(x)}\right)z + \frac{x^4 + x + 4}{\alpha(x)}.$$

Отже, якщо покласти $\alpha(x) = \dfrac{1}{4}$, то коефіцієнт при z^2 буде рівним 1, і ми отримаємо рівняння

$$z' = z^2 - 4x^2z + 4x^4 + 4x + 16.$$

Далі застосуємо заміну $z = u + \beta(x)$ і виберемо $\beta(x)$ так, щоб перетворити на нуль коефіцієнт при z:

$$u' + \beta'(x) = (u + \beta(x))^2 - 4x^2(u + \beta(x)) + 4x^4 + 4x + 16,$$

$$u' = u^2 + \left(2\beta(x) - 4x^2\right)u + 4x^4 + 4x + 16 + \beta^2(x) - 4x^2\beta(x) - \beta'(x).$$

Таким чином, якщо вибрати $\beta(x) = 2x^2$, то приходимо до рівняння

$$u' = u^2 + 16,$$

яке є не лише рівнянням Ріккаті канонічного вигляду, але й рівняннм з відокремлюваними змінними, розв'язуючи яке отримуємо

$$u = 4\,\mathrm{tg}(4x + C), \quad C \in \mathbb{R}.$$

Нарешті послідовно повертаючись до вихідних змінних ($y = \dfrac{1}{4}z = \dfrac{1}{4}(u + {} + 2x^2)$), остаточно отримуємо всі розв'язки заданого рівняння:

$$y = \mathrm{tg}(4x + C) + \frac{1}{2}x^2, \quad C \in \mathbb{R}.$$

5) Рівняння Ріккаті вигляду

$$y' + Ay^2 = Bx^m, \tag{28}$$

де A, B та m – дійсні сталі, називається *рівнянням Ріккаті спеціального вигляду.* Зауважимо, що у випадку, коли $m = 0$ або $m = -2$ рівняння (28) легко інтегрується в елементарних функціях, адже є рівнянням з відокремленими змінними та квазіоднорідним рівнянням, відповідно. Для інших значень m, рівняння (28) інтегрується в квадратурах тоді і лише тоді, коли

$$\frac{m}{2m+4} = k \in \mathbb{Z}. \tag{29}$$

`Метод інтегрування`:

а) заміною $y = \dfrac{z}{x}$, $z = z(x)$ зводимо рівняння до вигляду
$$xz' - z + Az^2 = Bx^{m+2};$$

б) проводимо заміну незалежної змінної $t = x^{m+2}$ і далі розглядаємо $z = z(t)$, в результаті отримуємо рівняння вигляду
$$tz' + \alpha z + \beta z^2 = \gamma t;$$

в) далі послідовним застосуванням однієї з двох замін
$$z = \frac{t}{a+u}, \quad \text{де} \quad a = \frac{1+\alpha}{\gamma}$$
або
$$z = a + \frac{t}{u}, \quad \text{де} \quad a = -\frac{\alpha}{\beta}$$
приходимо до рівняння (27), причому перша з указаних замін збільшує коефіцієнт при z на одиницю, а друга – зменшує.

Приклад 3. Розв'язати рівняння $y' = y^2 + \dfrac{1}{x^4}$.

Розв'язання. Маємо рівняння Ріккаті спеціального вигляду з $m = -4$. Оскільки $\dfrac{-4}{2\cdot(-4)+4} = 1 \in \mathbb{Z}$, то рівняння інтегрується в квадратурах. Застосуємо описаний вище алгоритм.

Впровадимо заміну $y = \dfrac{z}{x}$. Тоді оскільки $y' = \dfrac{z'}{x} - \dfrac{z}{x^2}$, то отримуємо

$$\frac{z'}{x} - \frac{z}{x^2} - \frac{z^2}{x^2} = \frac{1}{x^4} \quad \Rightarrow \quad xz' - z - z^2 = \frac{1}{x^2}.$$

Тепер робимо заміну незалежної змінної $t = \dfrac{1}{x^2}$. Тоді

$$z' = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dt}\frac{dt}{dx} = -\frac{2}{x^3}z'_t \quad \Rightarrow \quad xz'_x = -2tz'_t,$$

а тому приходимо до рівняння відносно функції $z = z(t)$:

$$-2tz'_t - z - z^2 = t \quad \Rightarrow \quad tz'_t + \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}z^2 = -\frac{1}{2}t.$$

Порівнюючи отримане рівняння з (27), бачимо, що нам потрібно зменшити коефіцієнт при z на одиницю (у рівнянні (27) відповідний коефіцієнт дорівнює $-\frac{1}{2}$). Оскільки $\alpha = \beta = \dfrac{1}{2}$, $\gamma = -\dfrac{1}{2}$, то застосовуємо заміну $z = a + \dfrac{t}{u}$ з $a = -\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = -1$, тобто $z = -1 + \dfrac{t}{u}$. Тоді $z' = \dfrac{1}{u} - \dfrac{tu'}{u^2}$ і підставляючи у рівняння:

$$t\left(\frac{1}{u} - \frac{tu'}{u^2}\right) + \frac{1}{2}\left(-1 + \frac{t}{u}\right) + \frac{1}{2}\left(-1 + \frac{t}{u}\right)^2 = -\frac{1}{2}t,$$

приходимо до рівняння вигляду (27)

$$u' = \frac{1}{2}\cdot\frac{u^2}{t} + \frac{1}{2}\cdot\frac{u}{t} + \frac{1}{2}.$$

Насамкінець застосовуємо заміну $u = v\sqrt{t}$. Зауважимо, що оскільки у нас $t = \dfrac{1}{x^2} > 0$, то операція добування кореня є коректною. Тоді оскільки $u' = v'\sqrt{t} + \dfrac{v}{2\sqrt{t}}$, то підставляючи приходимо до рівняння з відокремлюваними змінними:

$$v'\sqrt{t} + \frac{v}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{2}v^2 + \frac{v}{2\sqrt{t}} + \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad v'\sqrt{t} = \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}.$$

Розв'язуючи останнє рівняння знаходимо

$$v(t) = \operatorname{tg}(\sqrt{t} + C), \quad C \in \mathbb{R}.$$

Тепер залишилось лише зробити зворотні заміни і повернутися до початкової функції:

$$u(t) = \sqrt{t}\operatorname{tg}\left(\sqrt{t} + C\right), \quad C \in \mathbb{R},$$

$$z(t) = -1 + \frac{t}{u} = -1 + \sqrt{t}\operatorname{ctg}\left(\sqrt{t} + C\right), \quad C \in \mathbb{R},$$

$$z(x) = -1 + \frac{1}{x}\left(\operatorname{ctg}\frac{1}{x} + C\right), \quad C \in \mathbb{R},$$

$$y(x) = \frac{z}{x} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\left(\operatorname{ctg}\frac{1}{x} + C\right), \quad C \in \mathbb{R}.$$

Лабораторна робота, комп'ютерний практикум 2

Задача 1. Шляхом підбору частинного розв'язку звести рівняння Ріккаті до рівняння Бернуллі і розв'язати його.

Варіанти завдань.

1. $x^2y' + xy + x^2y^2 = 4.$

2. $xy' = y^2 - (2x+1)y + x^2 + 2x.$

3. $x^2y' + (xy-2)^2 = 0.$

4. $y' - 2xy + y^2 = 5 - x^2.$

5. $y' + 2ye^x - y^2 = e^{2x} + e^x.$

6. $3y' + y^2 + \dfrac{2}{x^2} = 0.$

7. $xy' - (2x+1)y + y^2 = -x^2.$

8. $x^3y' - y^2 - x^2y + x^2 = 0.$

9. $y' = -y^2 + x^2 + 1.$

10. $y' + y^2 = x^2 - 2x.$

11. $y' + y^2 = -\dfrac{1}{4x^2}.$

12. $y' = \dfrac{y^2}{2} + \dfrac{1}{2x^2}.$

Задача 2. Розв'язати рівняння Ріккаті, попередньо звівши його до канонічного вигляду.

Варіанти завдань.

1. $y' = y^2 - \dfrac{2y}{x^3} + \dfrac{1}{x^6}.$

2. $y' = -\dfrac{y^2}{x^4} + \dfrac{4y}{x} + 1.$

3. $x^2y' - y^2 - 2xy - 3 = 0.$

4. $y' = -y^2 + \dfrac{2y}{x^2} - \dfrac{2}{x^3}.$

5. $y' = y^2 - \dfrac{2y}{x} + \dfrac{3}{x^4}.$

6. $x^2y' + y^2 - 2xy - 1 = 0.$

7. $y' = -e^xy^2 - y + x^{-\frac{4}{3}}e^{-x}.$

8. $y' = y^2 - 2x^{-\frac{1}{3}}y + x^{-\frac{2}{3}}.$

9. $y' = \dfrac{2}{3}x^{-\frac{5}{3}} - 2x^{-\frac{2}{3}}y - y^2.$

10. $xy' = x^{\frac{1}{3}}y^2 + \dfrac{2}{3}y + \dfrac{1}{3}x^{\frac{1}{3}}.$

11. $xy' + y^2 - y - x^{\frac{2}{3}} = 0.$

12. $y' = y^2 - \dfrac{2y}{x} + \dfrac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}.$

6. Рівняння у повних диференціалах, інтегрувальний множник

Розглянемо диференціальне рівняння у симетричній формі

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0, \tag{30}$$

де функції $M, N \in \mathrm{C}(D)$, $D \subset \mathbb{R}^2$ — відкрита область, $|M(x,y)| + |N(x,y)| \neq 0$ для всіх $(x,y) \in D$.

Означення. *Рівняння* (30) *називається рівнянням у повних диференціалах, якщо існує функція $U \in \mathrm{C}^1(D)$ така, що*

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial x} = M(x,y) \quad і \quad \frac{\partial U(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$$

в області D, тобто рівняння (30) *можна переписати у вигляді*

$$dU(x,y) = 0.$$

Теорема. *Нехай* (30) *є рівнянням у повних диференціалах. Тоді для будь-якої точки $(x_0, y_0) \in D$ існує єдина інтегральна крива цього рівняння, яка проходить через точку (x_0, y_0), визначена принаймні в деякому околі цієї точки і задається неявною функцією $U(x,y) = C_0$ для $C_0 = U(x_0, y_0)$.*

Зауваження. *Всі розв'язки рівняння у повних диференціалах* (30) *задаються неявно рівністю $U(x,y) = C$, $C \in \mathbb{R}$, яка називається загальним інтегралом рівняння у повних диференціалах.*

Теорема. *Нехай $M, N \in \mathrm{C}^1(D)$, D – однозв'язна область. Тоді рівняння* (30) *є рівнянням у повних диференціалах тоді і лише тоді, коли*

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} \quad для\ всіх \quad (x,y) \in D.$$

Зауваження. *Для рівняння у повних диференціалах* (30) *функцію $U(x,y)$ можна визначити формулою*

$$U(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(s,y)ds + \int_{y_0}^{y} N(x_0,s)ds,$$

де $(x_0, y_0) \in D$ — деяка точка.

Приклад 1. Розв'язати рівняння $ydx + xdy = 0$.

Розв'язання. Перевіримо для заданого рівняння умову повноти. Оскільки у нас $M(x,y) = y$, $N(x,y) = x$, то $\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x} = 1 - 1 = 0$. Отже, маємо рівняння в повних диференціалах. Очевидно, що $U(x,y) = xy$, тому загальними інтегралом буде $xy = C$, $C \in \mathbb{R}$.

Приклад 2. Розв'язати рівняння $2xydx + (x^2 - y^2)dy = 0$.

Розв'язання. Перевіримо для заданого рівняння умову повноти. Оскільки $M(x,y) = 2xy$, $N(x,y) = x^2 - y^2$, то $\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x} = 2x - 2x = 0$. Отже, маємо рівняння в повних диференціалах. Знайдемо для нього загальний інтеграл $U(x,y) = C$, $C \in \mathbb{R}$. Відомо, що

$$\frac{\partial U}{\partial x} = M = 2xy \quad \Rightarrow \quad U = \int 2xydx + \varphi(y) = x^2y + \varphi(y).$$

Тоді з одного боку

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2y + \varphi(y)\right) = x^2 + \varphi'(y),$$

з іншого боку з рівняння

$$\frac{\partial U}{\partial y} = x^2 - y^2,$$

тому, прирівнюючи праві частини, знаходимо

$$\varphi'(y) = -y^2 \quad \Rightarrow \quad \varphi(y) = -\frac{y^3}{3} \quad \Rightarrow \quad U(x,y) = x^2y - \frac{y^3}{3}.$$

Отже, загальний інтеграл рівняння: $x^2y - \dfrac{1}{3}y^3 = C$, $C \in \mathbb{R}$.

Не кожне рівняння вигляду (30) є рівнянням у повних диференціалах. Однак можна спробувати звести рівняння (30) до рівняння у повних диференціалах, домножуючи його на деяку функцію. Таким чином, ми приходимо до поняття інтегрувального множника.

Функцію $\mu(x,y) \in \mathrm{C}(D)$, яка не перетворюється в нуль у жодній точці області D, називається *інтегрувальним множником* рівняння (30), якщо після домноження на цю функцію рівняння (30) перетворюється на рівняння у повних диференціалах.

Припустимо, що у рівнянні (30) $M, N \in \mathrm{C}^1(D)$ і D є однозв'язною областю. Тоді для того щоб функція $\mu(x,y) \in \mathrm{C}^1(D)$ була інтегрувальним множником цього рівняння необхідно і достатньо, щоб виконувалась рівність

$$\frac{\partial}{\partial y}\Big(\mu(x,y)M(x,y)\Big) = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\mu(x,y)N(x,y)\Big) \tag{31}$$

в області D.

Для одержання інтегрувального множника достатньо відшукати один нетривіальний розв'язок $\mu(x,y)$ рівняння (31), знаходити всі розв'язки цього рівняння не потрібно. Зокрема, у деяких випадках інтегрувальний множник можна знайти як функцію однієї змінної, або $\mu = \mu(x)$, або $\mu = \mu(y)$. У таких випадках рівність (31) перетворюється на звичайне диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними. А саме, якщо дріб

$$\frac{M'_y - N'_x}{N} = \varphi(x)$$

є функцією лише змінної x, то інтегрувальний множник $\mu = \mu(x)$ знаходиться як розв'язок диференціального рівняння

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{M'_y - N'_x}{N} = \varphi(x).$$

Аналогічно, якщо дріб

$$\frac{N'_x - M'_y}{M} = \psi(y)$$

є функцією лише змінної y, то інтегрувальний множник $\mu = \mu(y)$ знаходиться як розв'язок диференціального рівняння

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{N'_x - M'_y}{M} = \psi(y).$$

Приклад 3. Розв'язати рівняння $(x^2 - \sin^2 y)dx + x\sin 2y dy = 0$.

Розв'язання. Перевіримо умову повноти:

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = -2\sin y\cos y - \sin 2y = -2\sin 2y \neq 0.$$

Отже, умова повноти не виконується. Тому задане рівняння не є рівнянням в повних диференціалах. Спробуємо знайти інтегрувальний множник як функцію змінної x: $\mu = \mu(x)$. Перевіряємо вираз:

$$\frac{M'_y - N'_x}{N} = \frac{-2\sin 2y}{x\sin 2y} = -\frac{2}{x} = \varphi(x).$$

Отже, можемо знайти інтегрувальний множник як функцію змінної x з диференціального рівняння

$$\frac{\mu'}{\mu} = -\frac{2}{x}, \quad \text{де} \quad \mu = \mu(x).$$

Таким чином, прийшли до диференціального рівняння з відокремлюваними змінними, розв'язком якого, наприклад, є функція $\mu(x) = \dfrac{1}{x^2}$. Далі, домножаючи вихідне рівняння на цей інтегрувальний множник, отримаємо рівняння

$$\left(1 - \frac{\sin^2 y}{x^2}\right) dx + \frac{\sin^2 y}{x} dy = 0.$$

Це рівняння є рівнянням у повних диференціалах. Знайдемо його загальний інтеграл. З одного боку:

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\sin 2y}{x} \quad \Rightarrow \quad U = \frac{1}{x}\int \sin 2y dy + \varphi(x) = \frac{\sin^2 y}{x} + \varphi(x).$$

З іншого боку:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\sin^2 y}{x^2} + \varphi'(x) = 1 - \frac{\sin^2 y}{x^2} \quad \Rightarrow \quad \varphi'(x) = 1 \quad \Rightarrow \quad \varphi(x) = x.$$

Отже, $U(x, y) = \dfrac{\sin^2 y}{x} + x$, тобто маємо загальний інтеграл

$$\frac{\sin^2 y}{x} + x = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Зауважимо, що знайдений інтегрувальний множник $\mu(x) = \dfrac{1}{x^2}$ невизначений вздовж прямої $x = 0$, тому його використання звужує початкову область визначення рівняння і, таким чином, може привести до втрати розв'язків. Дійсно, функція $x \equiv 0$ є розв'язком вихідного рівняння, тому її треба додати до знайдених розв'язків рівняння з відокремлюваними змінними. Таким чином, одержуємо всі розв'язки вихідного рівняння:

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{\sin^2 y}{x} + x = C, \quad C \in \mathbb{R}, \\ x \equiv 0. \end{array}\right.$$

Приклад 4. Розв'язати рівняння $y(x + y)dx + (xy + 1)dy = 0$.

Розв'язання. Перевіримо умову повноти:

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = x + 2y - y = x + y \neq 0.$$

Отже, умова повноти не виконується. Тому задане рівняння не є рівнянням в повних диференціалах. Спробуємо відшукати інтегрувальний множник як іункцію змінної y: $\mu = \mu(y)$. Перевіряємо вираз:

$$\frac{N'_x - M'_y}{M} = \frac{x+y}{-y(x+y)} = -\frac{1}{y} = \psi(y).$$

Отже, можемо знайти інтегрувальний множник як функцію змінної y з диференціального рівняння

$$\frac{\mu'}{\mu} = -\frac{1}{y}, \quad \text{де} \quad \mu = \mu(y).$$

Таким чином, отримали рівняння з відокремлюваними змінними для знаходження інтегрувального множника. Одним з його розв'язків є функція $\mu(y) = \dfrac{1}{y}$. Тепер домноживши вихідне рівняння на знайдений інтегрувальний множник, одержуємо рівняння в повних диференціалах:

$$(x+y)dx + \left(x + \frac{1}{y}\right)dy = 0.$$

Знайдемо його загальний інтеграл:

$$xdx + ydx + xdy + \frac{dy}{y} = 0 \quad \Rightarrow \quad d\left(\frac{1}{2}x^2 + xy + \ln|y|\right) = 0.$$

Тому загальним інтегралом рівняння з відокремлюваними змінними є

$$U(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + xy + \ln|y| = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Оскільки ми використовували інтегрувальний множник $\mu(y) = \dfrac{1}{y}$ невизначений при $y = 0$, то безпосередньою перевіркою встановлюємо, що функція $y \equiv 0$ теж є розв'язком вихідного рівняння. Отже, всі розв'язки вихідного рівняння задаються сукупністю:

$$\left[\begin{array}{l} U(x,y) = \dfrac{1}{2}x^2 + xy + \ln|y| = C, \quad C \in \mathbb{R}, \\ y \equiv 0. \end{array}\right.$$

Іноді інтегрувальний множник можна шукати у вигляді $\mu = \mu(\omega(x,y))$, де $\omega(x,y)$ – деяка функція, зокрема, досить часто використовуються варіанти: $\omega(x,y) = x^2 \pm y^2$, $\omega(x,y) = xy$, $\omega(x,y) = x \pm y$. У цьому випадку з рівності (31) отримуємо рівняння для знаходження $\mu = \mu(\omega(x, y))$:

$$\frac{\mu'_\omega}{\mu} = \frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N\dfrac{\partial \omega}{\partial x} - M\dfrac{\partial \omega}{\partial y}} = \eta(\omega).$$

Якщо виявиться, що права частина цього рівняння залежить лише від $\omega(x, y)$, то рівняння (30) допускає інтегрувальний множник вигляду $\mu = \mu(\omega(x, y))$.

Приклад 5. Розв'язати рівняння $(x^2 + y^2 + y)dx - xdy = 0$.

Розв'язання. Перевіримо умову повноти:

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = 2y + 2 \neq 0.$$

Отже, умова повноти не виконується. Тому задане рівняння не є рівнянням в повних диференціалах. Знайдемо інтегрувальний множник вигляду $\mu = \mu(\omega)$, де $\omega(x, y) = x^2 + y^2$. Оскільки

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N\dfrac{\partial \omega}{\partial x} - M\dfrac{\partial \omega}{\partial y}} = \frac{y+1}{-x^2(y+1) - y^2(y+1)} = -\frac{1}{x^2+y^2} = -\frac{1}{\omega} = \eta(\omega),$$

то рівняння допускає інтегрувальний множник такого вигляду, і ми можемо його знайти як один з розв'язків рівняння

$$\frac{\mu'_\omega}{\mu} = -\frac{1}{\omega} \quad \Rightarrow \quad \mu = \frac{1}{\omega} = \frac{1}{x^2+y^2}.$$

Тепер домножимо вихідне рівняння на інтегрувальний множник:

$$\left(1 + \frac{y}{x^2+y^2}\right)dx - \frac{x}{x^2+y^2}dy = 0.$$

Отримали рівняння в повних диференціалах, загальним інтегралом якого, а також загальним інтегралом вихідного рівняння, є

$$x + \operatorname{arctg}\frac{x}{y} = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

При відшуканні інтегрувальних множників можна використовувати наступний результат.

Теорема (про загальний вигляд інтегрувального множника). *Якщо $\mu(x, y)$ — інтегрувальний множник рівняння* (30),

$U(x, y)$ — інтеграл рівняння

$$\mu(x, y)M(x, y)dx + \mu(x, y)N(x, y) = 0$$

і $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ — довільна неперервна функція, то функція $f(U(x, y))\mu(x, y)$ також є інтегрувальним множником рівняння (30).

Приклад 6. Розв'язати рівняння

$$\left(\frac{y}{x} + 3x^2\right) dx + \left(1 + \frac{x^3}{y}\right) dy = 0.$$

Розв'язання. Перепишемо вихідне рівняння у вигляді:

$$\left(\frac{y}{x}dx + dy\right) + \left(3x^2dx + \frac{x^3}{y}dy\right) = 0.$$

Для рівняння $\frac{y}{x}dx + dy = 0$ інтегрувальним множником є функція $\mu_1 = x$, а інтегралом є функція $U_1 = xy$. Відповідно, для рівняння $3x^2dx + \frac{x^3}{y}dy = 0$ інтегрувальним множником є функція $\mu_2 = y$, а інтегралом є $U_2 = x^3y$. Якщо ми зможемо підібрати функції $\varphi, \psi \in C^1$ таким чином, щоб $x\varphi(xy) = y\psi(x^3y)$, то цей вираз буде одночасно інтегрувальним множником і для першої, і для другої дужки, тобто інтегрувальними всього рівняння. Для $\varphi(t) = t^2$, $\psi(s) = s$ потрібна рівність буде виконуватись, а отже, спільне значення $\mu = x^3y^2$ буде інтегрувальним множником для вихідного рівняння, після домноження на який отримуємо рівняння

$$\left(x^2y^3dx + x^3y^2dy\right) + \left(3x^5y^2dx + x^6ydy\right) = 0$$

загальний інтеграл якого легко знайти

$$U = \frac{1}{3}x^3y^3 + \frac{1}{2}x^6y^2 = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Відмітимо, що ми домножили вихідне рівняння на функцію $\mu = x^3y^2$, що обертається на нуль вздовж прямих $x = 0$, $y = 0$. Разом з тим множини $x = 0$, $y = 0$ не належать до множини допустимих значень рівняння, тому їх слід виключити зі знайденого загального інтегралу:

$$\begin{cases} U = \frac{1}{3}x^3y^3 + \frac{1}{2}x^6y^2 = C, \quad C \in \mathbb{R}, \\ x \neq 0, \quad y \neq 0. \end{cases}$$

Останній вираз також можна переписати наступним чином. Помітимо, що при $x = 0$ або $y = 0$ значення параметру $C = 0$. З іншого боку, якщо

$C=0$, то окрім значень $x=0$ та $y=0$ рівність $U=\dfrac{1}{3}x^3y^3+\dfrac{1}{2}x^6y^2=0$ задовольняє функція $y=-\dfrac{3}{2}x^3$, яка є розв'язком вихідного рівняння, тому маємо

$$\left[\begin{array}{l} U=\dfrac{1}{3}x^3y^3+\dfrac{1}{2}x^6y^2=C, \quad C\in\mathbb{R}\setminus\{0\}, \\ y=-\dfrac{3}{2}x^3. \end{array}\right.$$

Вправи

У задачах 77–97 розв'язати рівняння:

77. $(y+e^x)dx+xdy=0.$

78. $\dfrac{x}{x^2+y^2}dx+\dfrac{y}{x^2+y^2}dy=0.$

79. $\left(\dfrac{1}{x}+y\right)dx+(3y^2+x)dy=0.$

80. $2xye^{x^2}dx+(2-e^{x^2})dy=0.$

81. $\dfrac{x}{y^2}dx-\dfrac{x^2}{y^3}dy=0.$

82. $yx^{y-1}dx+x^y\ln x dy=0.$

83. $(x^2-4xy-2y^2)dx+(y^2-4xy-2x^2)dy=0.$

84. $3x^2(1+\ln y)dx=\left(2y-\dfrac{x^3}{y}\right)dy.$

85. $2x(1+\sqrt{x^2-y})dx-\sqrt{x^2-y}dy=0.$

86. $e^{-y}dx-(2y+xe^{-y})dy=0.$

87. $ydx-(x+x^2+y^2)dy=0.$

88. $(x^2+y^2+2x)dx+2ydy=0.$

89. $dx+(x+e^{-y}y^2)dy=0.$

90. $\left(y-\frac{ay}{x}+x\right)dx+ady=0$, a – параметр, $\omega=x\pm y$.

91. $(x^2+y^2+y)dx-xdy=0$, $\omega=x^2\pm y^2$.

92. $(x^2+y^2+1)dx-2xydy=0.$

93. $y^2(x-3y)dx+(1-3xy^2)dy=0.$

94. $(2xy+ax)dx+dy=0$, a – параметр.

95. $(2y^2-9xy)dx+(3xy-6x^2)dy=0$, $\mu=x^{\alpha}y^{\beta}$.

96. $(2x-2y-x^2+2xy)dx+(2x^2-4xy-2x)dy=0$, $\mu=e^{ax}e^{by}$.

97. $(x^3-xy^2-y)dx+(xy^2-y^3+x)dy=0.$

98.* Методом інтегрувального множника розв'язати однорідне диференціальне рівняння $(py - qx)dx - (px - qy)dy = 0$.

99.* Знайти інтегрувальний множник для лінійного рівняння $dy - (a(x)y + b(x))dx = 0$.

100.* Знайти інтегрувальний множник рівняння $yg(xy)dx + xh(xy)dy = 0$.

101.* За яких умов рівняння $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ має інтегрувальний множник у формі $\mu(x, y) = h(xy)$?

7. Фазові портрети автономних систем на площині

Нехай $M, N \in \mathrm{C}(D)$, D – деяка область в $\mathbb{R}^2$, і нехай виконується умова

$$|M(x,y)| + |N(x,y)| \neq 0 \quad \forall\,(x,y) \in D. \tag{32}$$

Розглянемо диференціальне рівняння першого порядку в симетричній формі

$$M(x,y)dx - N(x,y)dy = 0. \tag{33}$$

Поряд із рівнянням (33) розглянемо автономну систему другого порядку

$$\begin{cases} \dot{x} = N(x,y), \\ \dot{y} = M(x,y); \end{cases} \tag{34}$$

тут символ $\dot{\square}$ (крапка зверху) позначає похідну за змінною t, тобто $\dot{x} = \dfrac{dx}{dt}$, $\dot{y} = \dfrac{dy}{dt}$.

Означення. *Фазовою траєкторією системи* (34) *називається гладка крива* $\Gamma = \{(x(t), y(t)), t \in (\alpha, \beta)\}$, *яка цілком лежить в області* D *(для всіх* $t \in (\alpha, \beta)$ *точка* $(x(t), y(t)) \in D$*) і для якої виконується тотожність*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \equiv N(x(t), y(t)) \\ \dot{y}(t) \equiv M(x(t), y(t)). \end{cases}$$

Має місце наступний результат про зв'язок між автономною системою і рівнянням в симетричній формі.

Теорема. *За умови* (32) *довільна фазова траєкторія автономної системи* (34) *є інтегральною кривою диференціального рівняння* (33) *і навпаки.*

Означення. *Точка* (x_0, y_0)*, для якої виконується*

$$\begin{cases} M(x_0, y_0) = 0, \\ N(x_0, y_0) = 0, \end{cases}$$

називається особливою точкою рівняння (33)*, або положенням рівноваги системи* (34)*.*

Зауваження. *Якщо* (x_0, y_0) *– положення рівноваги системи* (34), *то* $x(t) \equiv x_0$, $y(t) \equiv y_0$ *є сталим розв'язком (стаціонарним розв'язком) цієї системи.*

Для положення рівноваги (особливої точки) $(x_0,\ y_0)$ заміна $x = \bar{x} + x_0$, $y = \bar{y} + y_0$ переносить його у точку $(0, 0)$. Тому, не обмежуючи загальності, можна вважати, що $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

Нехай $M, N \in \mathrm{C}^1(D)$, $(0, 0) \in D$, $M(0, 0) = N(0, 0) = 0$. Тоді можемо записати

$$M(x, y) = M'_x(0, 0) \cdot x + M'_y(0, 0) \cdot y + o(\sqrt{x^2 + y^2})$$

$$N(x, y) = N'_x(0, 0) \cdot x + N'_y(0, 0) \cdot y + o(\sqrt{x^2 + y^2})$$

при $(x, y) \to (0, 0)$.

Означення. *Систему*

$$\begin{cases} \dot{x} = N'_x(0, 0)x + N'_y(0, 0)y \\ \dot{y} = M'_x(0, 0)x + M'_y(0, 0)y \end{cases} \tag{35}$$

називають лінеаризованою (або системою першого наближення) для системи (34) *в околі положення рівноваги* $(0, 0)$ *(тривіального положення рівноваги).*

Поведінка фазових траєкторій систем (34) і (35) в околі тривіального положення рівноваги досить часто тісно пов'язані. Тому важливо вивчати поведінку траєкторій системи (35).

Розглянемо лінійну систему зі сталими коефіцієнтами

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by, \\ \dot{y} = cx + dy, \end{cases} \tag{36}$$

де $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ і одночасно нулю не дорівнюють. Очевидно, що $(0, 0)$ – положення рівноваги цієї системи.

Нехай

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Тоді систему (36) можна переписати у векторній формі

$$\dot{\mathbf{v}} = A\mathbf{v}.$$

Нехай λ_1, λ_2 – власні числа матриці A, тобто розв'язки характеристичного рівняння

$$\det(A - \lambda E) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Розглянемо можливі випадки.

I. Нехай $\det A = 0$. У цьому випадку принаймні одне з власних чисел нульове, скажімо $\lambda_1 = 0$, та $cx + dy = k(ax + by)$ з деяким $k \in \mathbb{R}$, і положення рівноваги системи (36) – це кожна точка прямої $ax + by = 0$ (тобто кожна точка прямої $ax + by = 0$ є окремою фазовою траєкторією).

При $ax + by \neq 0$ від системи (36) можемо перейти до диференціального рівняння

$$\frac{dy}{dx} = k,$$

всі розв'язки якого зображуються формулою $y = kx + C$, $C \in \mathbb{R}$.

1) Якщо $\lambda_2 \neq 0$, то кожна пряма $y = kx + c$ складається з трьох фазових траєкторій системи (36): це положення рівноваги, що є перетином прямих $y = kx + c$ і $ax + by = 0$, та два промені, рух вздовж яких визначається знаком λ_2 : якщо $\lambda_2 < 0$, то рух відбувається до положення рівноваги, якщо $\lambda_2 > 0$ – рух від положення рівноваги.

2) При $\lambda_2 = 0$ прямі $y = kx + c$ і $ax + by = 0$ паралельні. Кожна з прямих $y = kx + c$ є фазовою траєкторією, для уточненням напрямку руху вздовж якої потрібно скористатись *вектором фазової швидкості*

$$\dot{\mathbf{v}}|_{(x_*, y_*)} = \begin{pmatrix} ax_* + by_* \\ cx_* + dy_* \end{pmatrix},$$

що обчислюється в довільній точці (x_*, y_*) відмінній від положення рівноваги. Напрям вектора $\dot{\mathbf{v}}|_{(x_0, y_0)}$ вказує напрям руху уздовж фазових траєкторій.

II. Нехай $\det A \neq 0$. Тоді $\mathbf{v}_0 \equiv (0, 0)$ – єдине положення рівноваги, а власні числа є ненульовими розв'язками квадратного рівняння, тому можливі наступні ситуації.

1) Власні числа λ_1, λ_2 – дійсні та різні ($\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$). У цьому випадку кожному власному числу λ_i відповідає один власний вектор $\mathbf{s}_i$, $i = 1, 2$. При цьому власні числа можуть бути одного знаку або мати різні знаки.

а) Власні числа одного знаку: $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$.
У цьому випадку маємо фазовий портрет типу *"вузол"*.

Фазовими траєкторіями системи (36) є положення рівноваги $(0, 0)$, напівпрямі, що починаються в точці $(0, 0)$ і проходять вздовж власних векторів $\mathbf{s}_1$, $\mathbf{s}_2$, гілки парабол, які в точці $(0, 0)$ дотикаються до напівпрямих, паралельних власному вектору, що відповідає меншому за модулем власному числу.

Рух вздовж траєкторій визначається знаком λ_1, λ_2:
– якщо $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, то рух відбувається від положення рівноваги,
– якщо $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$, – рух до положення рівноваги.

б) Власні числа різних знаків: $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$.
У цьому випадку маємо фазовий портрет типу *"сідло"*.

Фазовими траєкторіями системи (36) є положення рівноваги $(0, 0)$, напівпрямі, що починаються у точці $(0, 0)$ і паралельні власним векторам $\mathbf{s}_1$, $\mathbf{s}_2$, і криві типу гіпербол, для яких ці напівпрямі є асимптотами.

Рух на напівпрямих визначається знаком відповідного власного числа. Нехай для визначеності $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 > 0$. Тоді на напівпрямих вздовж вектора $\mathbf{s}_1$ рухаємося до положення рівноваги, а на напівпрямих вздовж вектора $\mathbf{s}_2$ – від положення рівноваги. Рух вздовж інших траєкторій узгоджується з цими рухами.

2) Власні числа дійсні та однакові: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R}$.
Тоді можливі два випадки.

а) Матриця A – діагональна:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

тобто система (36) має вигляд

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda x, \\ \dot{y} = \lambda y; \end{cases}$$

А отже, переходячи до рівняння, отримуємо

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad y = Cx, \quad C \in \mathbb{R}.$$

У цьому випадку маємо фазовий портрети типу *"дикритичний вузол"*.

Фазові траєкторії системи (36) – це положення рівноваги $(0, 0)$ та напівпрямі, які виходять з точки $(0, 0)$ під всіма можливими напрямками. Рух вздовж напівпрямих визначається знаком λ: при $\lambda < 0$ – рух до положення рівноваги, при $\lambda > 0$ – рух від положення рівноваги.

б) Матриця A – не діагональна.
У цьому випадку маємо фазовий портрет типу *"вироджений вузол"*.

Нехай $\mathbf{s}$ – єдиний власний вектор, що відповідає кратному власному числу λ. Тоді фазові траєкторії системи (36) складаються з положення рівноваги $(0, 0)$, двох напівпрямих, що починаються в точці $(0, 0)$ і проходять вздовж власного вектора $\mathbf{s}$, і S-подібних кривих, які примикають до положення рівноваги, дотикаючись цих напівпрямих. Рух визначається знаком λ: якщо $\lambda < 0$, то рух відбувається до положення рівноваги, якщо $\lambda > 0$ – від положення рівноваги. Один з двох можливих варіантів фазового портрету (в яку сторону вигнуті дуги S-подібних кривих) визначає вектор фазової швидкості.

3) Власні числа – це пара комплексно-спряжених чисел:

$$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta \in \mathbb{C}.$$

а) Якщо дійсна частина ненульова ($\alpha \neq 0$), то маємо фазовий портрет типу *"фокус"*.

Всі фазові траєкторії окрім положення рівноваги мають вигляд спіралей, що "навиваються" на положення рівноваги.

Напрям руху визначає *знак дійсної частини* α: якщо $\alpha < 0$, то рух по спіралям відбувається таким чином, щоб поступово з кожним обертом уздовж спіралі наближатись до положення рівноваги, при $\alpha > 0$ – рух від положення рівноваги; та *вектор фазової швидкості*: спіралі намотуються за годинниковою стрілкою, чи проти неї.

Таким чином, в залежності від знаку α та напряму вектора фазової швидкості можливі чотири варіанти фазового портрету.

б) Якщо власні числа суто уявні, тобто $\alpha = 0$, то маємо фазовий портрет типу *"центр"*.

Всі фазові траєкторії окрім положення рівноваги мають вигляд концентричних еліпсів, розташованих навколо положення рівноваги, напрям руху по яким визначає вектор фазової швидкості.

Повернемось до аналізу систем (34) і (35). Справедливий наступний результат щодо коректності методу лінеаризації.

Теорема (Гробмана-Хартмана). *Якщо дійсні частини власних чисел матриці*

$$A = \begin{pmatrix} N'_x(0,0) & N'_y(0,0) \\ M'_x(0,0) & M'_y(0,0) \end{pmatrix}$$

відмінні від нуля, то в деякому околі точки $(0,0)$ *існує близька до тотожної заміна змінних, що переводить фазові траєкторії системи* (35) *в фазові траєкторії системи* (34).

Таким чином, при виконанні умов теореми фазові портрети систем (34) і (35) в деякому околі положення рівноваги є близькими.

Приклад 1. Знайти та дослідити особливі точки диференціального рівняння

$$(2xy - 4y - 8)dy = (4y^2 - x^2)dx. \tag{37}$$

Розв'язання. Поряд з рівнянням (37) розглянемо автономну систему

$$\begin{cases} \dot{x} = 2xy - 4y - 8, \\ \dot{y} = 4y^2 - x^2. \end{cases} \tag{38}$$

Особливі точки рівняння (37) (те саме, положення рівноваги системи (38)) знаходяться з системи алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} 2xy - 4y - 8 = 0, \\ 4y^2 - x^2 = 0; \end{cases} \tag{39}$$

розв'язуючи яку маємо

$$\begin{cases} 2xy - 4y - 8 = 0, \\ (2y - x)(2y + x) = 0; \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 2x, \\ y^2 - y - 2 = 0; \end{cases} \\ \begin{cases} y = -2x, \\ y^2 + y + 2 = 0. \end{cases} \end{array} \right.$$

Таким чином, з першої системи отримуємо дві особливі точки

$$(x_1, y_1) = (-2, -1), \quad (x_2, y_2) = (4, 2),$$

а друга система не має дійсних розв'язків.

Оскільки система (38) нелінійна, то випишемо лінеаризовану систему

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y_0(x - x_0) + (2x_0 - 4)(y - y_0), \\ \dot{y} = -2x_0(x - x_0) + 8y_0(y - y_0); \end{cases} \tag{40}$$

і дослідимо окремо кожне з положень рівноваги, скориставшись теоремою Гробмана–Хартмана.

1. Точка $(x_1, y_1) = (-2, -1)$. Лінеаризована система має вигляд

$$\begin{cases} \dot{x} = -2(x + 2) - 12(y + 1), \\ \dot{y} = 4(x + 2) - 8(y + 1). \end{cases} \tag{41}$$

Впровадивши заміну $\xi_1 = x + 2$, $\eta_1 = y + 1$, у площині $0\xi_1\eta_1$ приходимо до системи вигляду (35) з матрицею

$$A_1 = \begin{pmatrix} -2 & -8 \\ 4 & -8 \end{pmatrix}.$$

Власні числа матриці A_1 знаходяться з характеристичного рівняння

$$\begin{vmatrix} -2 - \lambda & -8 \\ 4 & -8 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^2 + 10\lambda + 48 = 0,$$

яке має пару комплексно-спряжений коренів $\lambda_{1,2} = -5 \pm i\sqrt{23}$ з від'ємною дійсною частиною. Тому $(x_1, y_1) = (-2, -1)$ є особливою точкою типу фокус, в її околі всі фазові траєкторії системи (41) (а отже, і вихідної системи (38)) є спіралями, рух по яким відбувається до точки $(-2, -1)$. Ці спіралі можуть закручуватися за або проти годинникової стрілки, щоб уточнити, як саме, потрібен вектор фазової швидкості, порахований у точці близький до особливої. Візьмемо, наприклад, точку $(-2,0)$. Тоді вектор фазової швидкості

$$\dot{\mathbf{v}}|_{(-2,0)} = \begin{pmatrix} -4(-2+2)-6(0+1) \\ 2(-2+2)+-8(0+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ -8 \end{pmatrix}$$

направлений вниз і ліворуч, отже, спіралі намотуються проти годинникової стрілки.

2. Точка $(x_2, y_2) = (4,2)$. інеаризована система має вигляд

$$\begin{cases} \dot{x} = 4(x-4)+4(y-2), \\ \dot{y} = -8(x-4)+16(y-2). \end{cases} \tag{42}$$

Впровадивши заміну $\xi_2 = x-4$, $\eta_2 = y-2$, у площині $0\xi_2\eta_2$ приходимо до системи вигляду (35) з матрицею

$$A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -8 & 16 \end{pmatrix}.$$

Власні числа матриці A_2 знаходяться з характеристичного рівняння

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 4 \\ -8 & 16-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^2 - 20\lambda + 96 = 0,$$

яке має пару дійсних від'ємних коренів $\lambda_1 = 8$, $\lambda_2 = 12$. Тому $(x_2, y_2) = (4,2)$ є особливою точкою типу вузол.

Знайдемо власні вектори $\mathbf{s}_1$, $\mathbf{s}_2$:

$$\mathbf{s}_1 : \quad \begin{pmatrix} 4-8 & 4 \\ -8 & 16-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -8 & 8 \end{pmatrix} \sim (1,-1) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{s}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{s}_2 : \quad \begin{pmatrix} 4-12 & 4 \\ -8 & 16-12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 4 \\ -8 & 4 \end{pmatrix} \sim (-2,1) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{s}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Отже, в околі точки $(4,2)$ фазові траєкторії системи (42) (а отже, і вихідної системи (38)) складаються з чотирьох променів, які утворюють дві прямі, що проходять через точку $(4,2)$ паралельно векторам $\mathbf{s}_1$, $\mathbf{s}_2$, та гілок парабол. Параболи дотикаються прямої, що проходить через особливу точку паралельно власному вектору, який відповідає меншому за модулем власному числу $\lambda_1 = 8$, тобто $y = x-2$. Рух по траєкторіям відбувається від точки $(4,2)$.

Лабораторна робота, комп'ютерний практикум 3

Задача 1. Для заданої лінійної системи:

1) знайти, під яким кутом фазові траєкторії перетинають пряму $y = x$;
2) для фазових траєкторій, що примикають до початку координат, знайти кут, під яким вони примикають до точки $(0, 0)$;
3) зобразити фазові траєкторії.

Варіанти завдань.

1. $\begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = 4x + y; \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dot{x} = -2x + 3y, \\ \dot{y} = x - y; \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - y, \\ \dot{y} = 2x + 7y; \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dot{x} = 2y - x, \\ \dot{y} = 3x - y; \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = 5x - 3y; \end{cases}$

6. $\begin{cases} \dot{x} = -2x - y, \\ \dot{y} = -9x - 3y; \end{cases}$

7. $\begin{cases} \dot{x} = -2x - y, \\ \dot{y} = 2x + 3y; \end{cases}$

8. $\begin{cases} \dot{x} = -x - 3y, \\ \dot{y} = -2x - y; \end{cases}$

9. $\begin{cases} \dot{x} = x + 4y, \\ \dot{y} = x + y; \end{cases}$

10. $\begin{cases} \dot{x} = 5y - x, \\ \dot{y} = x - 2y; \end{cases}$

11. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 3y, \\ \dot{y} = -4x + 2y; \end{cases}$

12. $\begin{cases} \dot{x} = -4y - x, \\ \dot{y} = -3x - y. \end{cases}$

Задача 2. Для заданої автономної системи:

1) знайти всі положення рівноваги системи диференціальних рівнянь, для кожного з положень рівноваги записати відповідну систему першого наближення;
2) зобразити на фазовій площині напрямки векторного поля у точках (m, n), де $m = -6, -5, \ldots, 6$, $n = -6, -5, \ldots, 6$;
3) визначити тип усіх положення рівноваги;
4) зобразити на фазовій площині фазові траєкторії в околах положень рівноваги.

Варіанти завдань.

1. $\begin{cases} \dot{x} = 2xy - 4y - 8, \\ \dot{y} = 4y^2 - x^2; \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dot{x} = -2y(x - y), \\ \dot{y} = 2 + x - y^2; \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dot{x} = x - y, \\ \dot{y} = y^2 + x^2 - 2; \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dot{x} = x + y + 1, \\ \dot{y} = y + \sqrt{2x^2 + 1}; \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dot{x} = x - y - 1, \\ \dot{y} = x^3 - y^3 - 7; \end{cases}$

6. $\begin{cases} \dot{x} = y^2 - xy + 12, \\ \dot{y} = x^2 - xy - 28; \end{cases}$

7. $\begin{cases} \dot{x} = x^2y + xy - 6, \\ \dot{y} = xy + x + y - 5; \end{cases}$

8. $\begin{cases} \dot{x} = x^3 + y^3 - 9, \\ \dot{y} = xy - 2; \end{cases}$

9. $\begin{cases} \dot{x} = (2x - y)^2 - 9, \\ \dot{y} = (x - 2y)^2 - 9; \end{cases}$

10. $\begin{cases} \dot{x} = x^2 + xy - 15, \\ \dot{y} = y^2 + xy - 10; \end{cases}$

11. $\begin{cases} \dot{x} = y - x, \\ \dot{y} = \sqrt{3x + y^2} - 2; \end{cases}$

12. $\begin{cases} \dot{x} = 4x^2 - y^2, \\ \dot{y} = 2xy - 4x - 8. \end{cases}$

8. Існування, єдиність та продовжуваність розв'язку задачі Коші

Розглядаємо задачу Коші

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \tag{43}$$

у прямокутнику $\Pi = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - x_0| \le a, |y - y_0| \le b\}$, де $a > 0$, $b > 0$ — деякі числа.

Основні результати щодо існування та єдиності розв'язку задачі Коші (43) дають теореми Пеано про існування розв'язку та Пікара про існування та єдиність розв'язку.

Теорема (Пеано). *Нехай функція* $f(x, y) \in C(\Pi)$. *Тоді на відрізку* $I_h = [x_0 - h, x_0 + h]$, *де* $h = \min\left\{a, \dfrac{b}{M}\right\}$, $M = \max\limits_{(x,y)\in\Pi} |f(x, y)|$, *існує розв'язок* $y(x)$ *задачі Коші* (43).

Теорема (Пікара). *Нехай функція* $f(x, y) \in C(\Pi)$ *задовольняє умову Ліпшиця щодо змінної* y, *тобто існує стала* $L > 0$ *(стала Ліпшиця) така, що для довільних точок* $(x, \bar{y}), (x, \tilde{y}) \in \Pi$ *виконується*

$$|f(x, \bar{y}) - f(x, \tilde{y})| \le L|\bar{y} - \tilde{y}|.$$

Тоді на відрізку $I_h = [x_0 - h, x_0 + h]$, *де* $h = \min\left\{a, \dfrac{b}{M}\right\}$, $M = \max\limits_{(x,y)\in\Pi} |f(x, y)|$, *існує єдиний розв'язок задачі Коші* (43). *Цей розв'язок є границею рівномірно збіжної послідовності функцій* $\{y_k(x), k = 0, 1, 2, \ldots\}$, *визначеної рекурентними формулами методу послідовних наближень*

$$y_0(x) \equiv y_0,$$
$$y_{k+1}(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(s, y_k(s))ds, \quad x \in I_h, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

При цьому має місце оцінка швидкості збіжності

$$|y(x) - y_k(x)| \le \frac{M}{L} \frac{(Lh)^{k+1}}{(k+1)!} =: \triangle_k \text{ для всіх } x \in I.$$

Зауваження. *Умова Ліпшиця виконується, якщо існує неперервна частинна похідна* $\dfrac{\partial f}{\partial y} \in C(\Pi)$.

Теорема Пікара гарантує існування та єдиність розв'язку на деякому невеличкому відрізку довкола початкової точки x_0. Послідовно застосовуючи теорему Пікара можна продовжити розв'язок до виходу на границю прямокутника П, однак питання продовження на весь інтервал $I_h = [x_0 - a, x_0 + a]$ залишається відкритим. Наступні результати можна застосовувати при дослідження питання продовження розв'язку.

Теорема (порівняння). *Припустимо, що $D \subset \mathbb{R}^2$ – опукла область і функції $f(x,y), f_1(x,y), f_2(x,y) \in \mathrm{C}(D)$ задовольняють умову*

$$f_1(x,y) < f(x,y) < f_2(x,y) \quad \textit{для всіх} \quad (x,y) \in D.$$

Нехай $y_k(x) : I_k \mapsto \mathbb{R}$ – непродовжуваний розв'язок задачі Коші $y' = f_k(x,y)$, $y(x_0) = y_0$, $k = 1,2$, графік якого належить області D, де $(x_0, y_0) \in D$ — спільна початкова точка. Тоді розв'язок задачі Коші (43) допускає продовження на інтервал $I = I_1 \cap I_2$ і задовольняє нерівність

$$y_1(x) < y(x) < y_2(x) \quad \textit{для всіх} \quad x \in I_+ := \{x \in I,\ x > x_0\},$$
$$y_1(x) > y(x) > y_2(x) \quad \textit{для всіх} \quad x \in I_- := \{x \in I,\ x < x_0\}.$$

Твердження. *Якщо функція $f(x,y) \in \mathrm{C}(\mathbb{R}^2)$ задовольняє умову*

$$|f(x,y)| \le a(x)|y| + b(x) \quad \textit{для всіх} \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

де функції $a(x)$, $b(x) \in \mathrm{C}(\mathbb{R} \mapsto [0,\infty])$, то кожен розв'язок рівняння $y' = f(x,y)$ продовжується на всю дійсну вісь.

Приклад 1. Для задачі Коші

$$\begin{cases} y' = x - y^2, \\ y(0) = 0; \end{cases}$$

у прямокутнику $\Pi = \{(x,y) : |x| \le 1,\ |y| \le 1\}$ перевірити умови теореми Пікара, знайти третє наближення до точного розв'язку і оцінити похибку.

Розв'язання. У нашому випадку $f(x,y) = x - y^2$, $a = 1$, $b = 1$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$. Очевидно, що $f \in C(\Pi)$ як степенева функція і існує $f'_y = -2y$

обмежена на П, а тому умови теореми Пікара виконуються. Знайдемо проміжок, на якому теорема Пікара гарантує існування та єдиність розв'язку задачі Коші. Оскільки $M = \max\limits_{(x,y)\in\Pi} |x-y^2| = 2$, $L = \max\limits_{(x,y)\in\Pi} |-2y| = 2$, то $h = \min\left\{1, \frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{2}$. Отже, за теоремою Пікара існує і єдиний розв'язок задачі Коші $y = y(x)$ принаймні на проміжку $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Побудуємо три послідовні наближення до точного розв'язку:

$$
\begin{aligned}
&y_0(x) = 0,\\
&y_1(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(s, y_0)ds = 0 + \int\limits_{0}^{x}(s-0)ds = \frac{x^2}{2},\\
&y_2(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(s, y_1(s))ds = 0 + \int\limits_{0}^{x}\left(s - \left(\frac{s^2}{2}\right)^2\right)ds = \frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{20},\\
&y_3(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(s, y_2(s))ds = 0 + \int\limits_{0}^{x}\left(s - \left(\frac{s^2}{2} - \frac{s^5}{20}\right)^2\right)ds =\\
&\qquad = \frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{20} + \frac{x^8}{160} - \frac{x^{11}}{4400}.
\end{aligned}
$$

Порахуємо похибку

$$
\max_{\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]} |y(x) - y_3(x)| \le \triangle_3 = \frac{M}{L}\frac{(Lh)^{3+1}}{(3+1)!} = \frac{2}{2}\frac{\left(2\cdot\frac{1}{2}\right)^4}{(4)!} = \frac{1}{24}.
$$

Приклад 2. Знайти максимальний проміжок існування розв'язку задачі Коші

$$
\begin{cases} y' = (x^2+y^2)e^{1-x^2-y^2},\\ y(0) = 0. \end{cases}
$$

Розв'язання. Візьмемо у якості прямокутника П квадрат $\Pi = \{(x,y) : |x| \le a,\ |y| \le a\}$, $a \ge 1$. Тоді

$$
\begin{aligned}
&f(x,y) = (x^2+y^2)e^{1-x^2-y^2} \in C(\Pi),\\
&f'_y(x,y) = 2ye^{1-x^2-y^2} - 2y(x^2+y^2)e^{1-x^2-y^2} = 2y(1-x^2-y^2)e^{1-x^2-y^2}
\end{aligned}
$$

і f'_y – обмежена на П. Отже, за теоремою Пікара існує єдиний розв'язок задачі Коші, визначений на $[-h, h]$, де $h = \min\left\{a, \frac{a}{M}\right\}$, $M = \max\limits_{(x,y)\in\Pi} |f(x,y)| = \max\limits_{(x,y)\in\Pi}(x^2+y^2)e^{1-x^2-y^2}$.

Розглянемо функцію $g(t)=te^{1-t}$ при $t\geq 0$. Тоді, якщо $t=x^2+y^2$, то $M=\max\limits_{0\leq t\leq 2a^2} g(t)$. Покажемо, що максимум досягається при $t=1$. Дійсно, оскільки $g'(t)=e^{1-t}-te^{1-t}=(1-t)e^{1-t}$, то єдиною критичною точкою функції $g(t)$ буде $t=1$. У точці $t=1$ похідна похідна $g'(t)$ змінює знак з "+" на "-", тому $t=1$ – єдина точка максимуму функції $g(t)$. Тому $\max\limits_{t\in[0,2a^2]} g(t)=g(1)=1$. Звідси

$$\max_{(x,y)\in\Pi}|f(x,y)|=1 \quad\Rightarrow\quad M=1 \quad\Rightarrow\quad h=\min\left\{a,\frac{a}{M}\right\}=a.$$

Таким чином, для довільного $a>0$ розв'язок існує на $[-a,a]$, а отже і на всьому $\mathbb{R}$.

Приклад 3. Знайти розв'язок задачі Коші

$$\begin{cases} y'=x+y,\\ y(0)=1;\end{cases}$$

як границю послідовних наближень.

Розв'язання. Побудуємо послідовність наближень $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$:

$$y_0(x)=y_0=1,$$

$$y_1(x)=y_0+\int\limits_{x_0}^{x}f(s,y_0(s))ds=1+\int\limits_0^x(s+1)ds=1+x+\frac{x^2}{2},$$

$$y_2(x)=y_0+\int\limits_{x_0}^{x}f(s,y_1(s))ds=1+\int\limits_0^x\left(s+1+s+\frac{s^2}{2}\right)ds=$$

$$=1+\int\limits_0^x\left(1+2s+\frac{s^2}{2}\right)ds=1+x+x^2+\frac{x^3}{2\cdot 3},$$

$$y_3(x)=y_0+\int\limits_{x_0}^{x}f(s,y_2(s))ds=1+\int\limits_0^x\left(s+1+s+s^2+\frac{s^3}{2\cdot 3}\right)ds=$$

$$=1+\int\limits_0^x\left(1+2s+s^2+\frac{s^3}{2\cdot 3}\right)ds=1+x+x^2+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4\cdot 3\cdot 2};$$

$$y_4(x)=y_0+\int\limits_{x_0}^{x}f(s,y_3(s))ds=$$

$$=1+\int\limits_0^x\left(s+1+s+s^2+\frac{s^3}{3}+\frac{s^4}{4\cdot 3\cdot 2}\right)ds=$$

$$=1+x+x^2+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4\cdot 3}+\frac{x^5}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}$$

$\ldots$

У побудованих наближеннях проявляється закономірність, яка дає можливість сформулювати гіпотезу про те, що

$$y_n(x) = 1 + x + 2 \cdot \frac{x^2}{2!} + 2 \cdot \frac{x^3}{3!} + \cdots + 2 \cdot \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}. \qquad (44)$$

Перевіримо цю гіпотезу за допомогою методу математичної індукції:

$$y_{n+1}(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(s, y_n(s))ds =$$

$$= 1 + \int\limits_{0}^{x} \left(s + 1 + s + 2 \cdot \frac{s^2}{2!} + 2 \cdot \frac{s^3}{3!} + \cdots + 2 \cdot \frac{s^n}{n!} + s^{n+1}(n+1)! \right) ds =$$

$$= 1 + x + 2 \cdot \frac{x^2}{2!} + 2 \cdot \frac{x^3}{3!} + \cdots + 2 \cdot \frac{x^n}{n!} + 2 \cdot x^{n+1}(n+1)! + \frac{x^{n+2}}{(n+2)!}.$$

Отже, гіпотеза вірна і послідовні наближення дійсно визначаються формулою (44). Знайдемо тепер границю $y_n(x)$ при $n \to \infty$:

$$y_n(x) = 1 + x + 2 \cdot \frac{x^2}{2!} + 2 \cdot \frac{x^3}{3!} + \cdots + 2 \cdot \frac{x^n}{n!} + x^{n+1}(n+1)! =$$

$$= 2\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}\right) - x - 1 + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \to 2e^x - x - 1,\ n \to \infty.$$

Неважко перевірити, що отриманий таким способом розв'язок $y(x) = 2e^x - x - 1$ збігається з розв'язком задачі Коші для лінійного рівняння, що можна отримати одним із запропонованих вище методів.

Вправи

102. Знайти найменшу константу $M \in \mathbb{R}$, яка обмежує модуль функції $f(x, y) = x^2 + y^2 + 2(2 - x - y)$ у прямокутнику $\Pi = \{(x, y) : |x - 1| \le a,\ |y - 1| \le b\}$.

103. Перевірити, що функція $f(x, y) = y^2 \sin x + e^x$ в смузі $\Pi = \{(x, y) : |y| \le b\}$ задовольняє умову Ліпшиця за y рівномірно відносно $x \in \mathbb{R}$. Знайти найменшу зі сталих Ліпшиця.

У задачах 104–106, використовуючи достатні умови єдиності, виділити такі області площини, через кожну точку яких проходить єдина інтегральна крива:

104. $y' = xy + y^3$.

105. $(x - 1)y' = y^{1/2} - x$.

106. $(y - x)y' = y \ln y$.

У задачах 107–109 вказати відрізок, на якому задача Коші має розв'язок:

107. $y' = e^y + x$, $y(-3) = 0$.

108. $y' = 2y^2 + 3xe^y \sin(xy)$, $y(2) = 4$.

109. $y' = x + y^3$, $y(0) = 0$.

У задачах 110–112 для вказаних задач Коші побудувати п'ять послідовних наближень Пікара:

110. $y' = 4 - y$, $y(0) = 0$.

111. $y' = 2 - x$, $y(2) = -2$.

112. $y' = y \sin x$, $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$.

У задачах 113–116, застосовуючи метод послідовних наближень Пікара, знати точний розв'язок задачі Коші:

$$\begin{cases} y' = a(x)y + b(x), \\ y(\alpha) = \beta; \end{cases}$$

та розв'язати задану задачу Коші методом Лагранжа, порівняти отримані результати.

113. $a(x) = 1$, $b(x) = 2x - x^2$, $y(0) = 1$.

114. $a(x) = -x$, $b(x) = x^3$, $y(0) = -1$.

115. $a(x) = 1$, $b(x) = -1$, $y(0) = 2$.

116. $a(x) = 1$, $b(x) = 2x$, $y(0) = 1$.

117. Для задачі Коші

$$\begin{cases} y' = x^2 + y^2, \\ y(0) = 0; \end{cases}$$

у прямокутнику $\Pi = \{(x, y) : |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$ перевірити умови теореми Пікара, знайти третє наближення до точного розв'язку і оцінити похибку.

118. Як поводять себе на проміжку $[0, 2]$ послідовні наближення Пікара для диференціального рівняння $y' = y^2$, якщо $y(0) = 1$?

119. При яких невід'ємних значеннях змінної m порушується єдиність розв'язку задачі Коші для рівняння $\frac{dy}{dx} = |y|^m$ та в яких точках?

120.* Довести, що розв'язок задачі Коші

$$\begin{cases} y' = \sin(xy)y - y^3, \\ y(0) = 1; \end{cases}$$

існує для всіх $x \geq 0$.

121.* Довести, що розв'язок задачі Коші

$$\begin{cases} y' = x^3 - y^3, \\ y(x_0) = y_0; \end{cases}$$

існує на $[x_0, +\infty)$.

Лабораторна робота, комп'ютерний практикум 4

Задача 1. У прямокутнику

$$\Pi = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - x_0| \leq a,\ |y - y_0| \leq b\right\}$$

для задачі Коші

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

виконати наступні завдання.

1) Знайти сталу Ліпшиця функції $f(x, y)$ в Π та перевірити виконання умов теореми Пікара.
2) На якому проміжку $[x_0 - h, x_0 + h]$ теорема Пікара гарантує збіжність послідовних наближень?
3) Знайти третє пікарівське наближення $y_3(x)$, $x \in [x_0 - h,\ x_0 + h]$ до розв'язку заданої задачі Коші.
4) Оцінити похибку $\triangle_n = \max\limits_{|x - x_0| \leq h} |y(x) - y_n(x)|$ для третього наближення. При якому n буде виконуватись нерівність $\triangle_n \leq 10^{-3}$?
5) Знайти $h_1 \in (0, h)$ таке, що на проміжку $[x_0 - h_1,\ x_0 + h_1]$ для третього наближення можна гарантувати оцінку похибки $\triangle_{h_1, 3} = \max\limits_{|x - x_0| \leq h_1} |y(x) - y_3(x)| \leq 10^{-6}$.

Варіанти завдань.

1. $f(x, y) = x^2 + y^2 + 2$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $a = 2$, $b = 1$;

2. $f(x, y) = x^2 - y^2$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $a = 1$, $b = 2$;

3. $f(x,y) = x^2 - y^2$, $x_0 = 2$, $y_0 = 0$, $a = 1$, $b = 1$;

4. $f(x,y) = x + y^2$, $x_0 = 3$, $y_0 = 0$, $a = 3$, $b = 1$;

5. $f(x,y) = x - y^2$, $x_0 = 5$, $y_0 = 2$, $a = 2$, $b = 2$;

6. $f(x,y) = x - y^2$, $x_0 = -4$, $y_0 = 2$, $a = 2$, $b = 3$;

7. $f(x,y) = 2xy + y^2$, $x_0 = 5$, $y_0 = 3$, $a = 3$, $b = 2$;

8. $f(x,y) = x^2 + y^2$, $x_0 = 7$, $y_0 = 0$, $a = 3$, $b = 1$;

9. $f(x,y) = e^x + y^2$, $x_0 = 1$, $y_0 = 0$, $a = 2$, $b = 2$;

10. $f(x,y) = x + y^2$, $x_0 = 2$, $y_0 = 3$, $a = 1$, $b = 2$;

11. $f(x,y) = xe^x + x^2y^2$, $x_0 = 1$, $y_0 = 0$, $a = 2$, $b = 2$;

12. $f(x,y) = e^x + y^2$, $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, $a = 2$, $b = 1$.

Задача 2. В області $K \subset \mathbb{R}^2$ задано задачу Коші

$$\begin{cases} y' = g(y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

1) Чи виконані для заданої задачі Коші умови теореми Пеано? На якому інтервалі ця теорема гарантує існування розв'язку заданої задачі Коші?
2) Знайти всі розв'язки заданої задачі Коші. Вказати максимальний та мінімальний розв'язки цієї задачі. (Тут під максимальним розв'язком задачі Коші ми розуміємо такий її непродовжуваний розв'язок $y_{\max} = y_{\max}(x)$, що для будь-якого іншого розв'язку $y = y(x)$ цієї задачі має місце нерівність $y(x) \le y_{\max}(x)$. Мінімальний розв'язок $y_{\min} = y_{\min}(x)$ визначається аналогічно).
3) Зобразити геометричну фігуру G, яку "заповнюють" інтегральні криві – графіки розв'язків заданої задачі, та розв'язок задачі, що для $x \neq x_0$ лежить сторого між мінімальним і максимальним розв'язком.

Варіанти завдань.

1. $g(y) = 3y^{2/3}$, $K = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 1\right\}$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$.

2. $g(y) = -3y^{2/3}$, $K = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \le 2\right\}$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$.

3. $g(y) = 4(y-1)^{3/4}$, $K = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 1, x^2 + y^2 - 2y \leq 3\big\}$, $x_0 = 0$, $y_0 = 1$.

4. $g(y) = 2\sqrt{y}$, $K = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \dfrac{x^2}{4} + y^2 \leq 1\right\}$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$.

5. $g(y) = 4(2-y)^{3/4}$, $K = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 2y \leq 5\big\}$, $x_0 = -1$, $y_0 = 2$.

6. $g(y) = \sqrt{-y}$, $K = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\big\}$, $x_0 = 1$, $y_0 = 0$.

7. $g(y) = -\sqrt{y}$, $K = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 9\big\}$, $x_0 = 2$, $y_0 = 0$.

8. $g(y) = (y-2)^{3/4}$, $K = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 2y \leq 5\big\}$, $x_0 = 1$, $y_0 = 2$.

9. $g(y) = -\sqrt{-y}$, $K = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 8\big\}$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$.

10. $g(y) = -(y+2)^{3/4}$, $K = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 16\big\}$, $x_0 = -1$, $y_0 = -2$.

11. $g(y) = (1 - 1/2y)^{1/3}$, $K = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 5y \leq 6\big\}$, $x_0 = 0$, $y_0 = 2$.

12. $g(y) = -2\sqrt{y}$, $K = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 16\big\}$, $x_0 = -1$, $y_0 = 0$.

9. Диференціальні рівняння вищих порядків

Диференціальне рівняння n-го порядку записується у вигляді

$$F\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right) = 0, \tag{45}$$

де $F : G \to \mathbb{R}$, $G \subset \mathbb{R}^{2+n}$.

Означення. *Функція $y = y(x)$, $x \in (a, b)$, називається розв'язком рівняння* (45) *на інтервалі (a, b), якщо:*

1) $y(x)$ має на (a, b) неперервні похідні до порядку n включно;

2) графік функції $y(x)$ цілком лежить в області G, тобто точки $\left(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)\right) \in G$ для всіх $x \in (a, b)$;

3) при підстановці $y(x)$ у рівняння (45) *обертає його на тотожність, а саме $F\left(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)\right) \equiv 0$ для всіх $x \in (a, b)$.*

У різноманітних ситуаціях досить часто виникають диференціальні рівняння вигляду

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}\right), \tag{46}$$

де $f : D \in \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^{1+n}$. Також, питання про можливість зведення рівняння (45) до вигляду (46) вирішується за допомогою теореми про неявну функцію.

Задача Коші для рівняння (46) полягає у тому, щоб для заданих початкових даних $(x_0, y_0, y_{0,1}, y_{0,2}, \dots, y_{0,n-1}) \in D$ знайти розв'язок $y(x)$ цього рівняння, визначений принаймні в деякому околі точки x_0, який задовольняє *початкові умови*

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_{0,1}, \quad \dots \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{0,n-1}.$$

Рівняння (46) завжди можна звести до, так званої, *нормальної системи* диференціальних рівнянь, а саме, покладаючи $y_1 = y$, $y_2 = y_1'$, $y_3 = y_2'$,…, $y_n = y_{n-1}'$, отримуємо систему

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ \dots \\ y_{n-1}' = y_n, \\ y_n' = f(x, y_1, \dots, y_n). \end{cases}$$

Розв'язки рівняння (45) (або (46)) можуть бути записані

- у явному вигляді: $y = y(x)$;
- у неявному вигляді: $\Phi(x, y) = 0$;
- у параметричній формі: $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases}$

Розповсюдженим підходом до розв'язування (інтегрування) диференціальних рівнянь вищих порядків є зниження порядку цього рівняння.

Розглянемо випадки, коли у рівняннях (45) і (46) можна знизити порядок та проінтегрувати.

1. Рівняння вигляду

$$y^{(n)} = f(x),$$

де f – неперервна на $I = (a, b)$ функція, називається *найпростішим диференціальним рівнянням n-го порядку.* Розв'язки цього рівняння можна знайти послідовним інтегруванням:

$$y = \underbrace{\int \cdots \int}_{n \text{ разів}} f(x)\,dx \ldots dx = \Phi(x) + C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \ldots + C_n,$$

де $\Phi(x)$ – деяка первісна функції $f(x)$, а $C_1, \ldots, C_n \in \mathbb{R}$ – довільні сталі.

Приклад 1. Розв'язати задачу Коші

$$y'' = -6x, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = -2.$$

Розв'язання. Послідовно інтегруючи, знаходимо загальний розв'язок рівняння:

$$y' = \int (-6x)\,dx = -3x^2 + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R};$$

$$y = \int (-3x^2 + C_1)dx = -x^3 + C_1 x + C_2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Для знаходження розв'язку задачі Коші підставляємо знайдені розв'язки у початкові умови:

$$y(0) = C_2 = 3, \quad y'(0) = C_1 = -2.$$

Отже, розв'язок задачі Коші: $y(x) = -x^3 - 2x + 3$.

2. Для рівняння вигляду

$$y^{(n)} = f\left(y^{(n-1)}\right),$$

ввівши нову невідому функцію (виконавши заміну змінних) $u = y^{(n-1)}$, $u = u(x)$, приходимо до автономного рівняння

$$u' = f(u),$$

з якого маємо

$$\int \frac{du}{f(u)} = x + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}.$$

Припустимо, що з отриманої рівності можна явно виразити

$$u = \varphi(x, C_1), \quad C_1 \in \mathbb{R}.$$

Тоді, підставляючи отриману функцію u у заміну, приходимо до найпростішого диференціального рівняння $(n-1)$-го порядку

$$y^{(n-1)} = \varphi(x, C_1),$$

розв'язавши яке, одержимо всі розв'язки вихідного рівняння.

Приклад 2. Розв'язати рівняння $y'' + 2y' = 0$.

Розв'язання. Впровадивши заміну $u = y'$, приходимо до рівняння $u' + 2u = 0$, розв'язки якого мають вигляд $u = C_1 e^{-2x}$, $C_1 \in \mathbb{R}$. Тоді, підставляючи знайдені розв'язки у заміну і інтегруючи, маємо

$$y = C_1 \int e^{-2x} dx + C_2 = -\frac{C_1}{2}\, e^{-2x} + C_2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Беручи до уваги довільність сталих C_1, C_2, загальний розв'язок рівняння можна переписати у вигляді

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

3. Для рівняння вигляду

$$y^{(n)} = f\left(y^{(n-2)}\right),$$

впровадивши заміну $u = y^{(n-2)}$, $u = u(x)$, приходимо до рівняння другого порядку

$$u'' = f(u).$$

Домножуючи обидві частини отриманого рівняння на $2u'$:

$$2u'u'' = 2u'f(u),$$

отримаємо рівняння у повних диференціалах

$$d(u')^2 = 2f(u)du,$$

після інтегрування якого маємо автономне рівняння першого порядку:

$$(u')^2 = 2\int f(u)du + C_1 \quad \Rightarrow \quad u' = \pm\sqrt{2\int f(u)\,du + C_1}, \quad C_1 \in \mathbb{R}.$$

Розв'язавши отримані рівняння і повертаючись до вихідних змінних, тобто підставляючи знайдені функції $u = u(x)$ у заміну $y^{(n-2)} = u$, дістанемо найпростіше диференціальне рівняння $(n-2)$-го порядку.

Приклад 3. Розв'язати задачу Коші

$$y'' = e^y, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -\sqrt{2}.$$

Розв'язання. Оскільки ми маємо рівняння другого порядку, то першу заміну робити не потрібно, а можна одразу домножити праву та ліву частини рівняння на $2y'$:

$$2y'y'' = 2y'e^y \quad \Rightarrow \quad dy'^2 = 2e^y dy \quad \Rightarrow \quad y'^2 = 2e^y + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}.$$

Враховуючи, що нам потрібно знайти розв'язок задачі Коші, для спрощення подальшого розв'язування рівняння одразу визначимо значення довільної сталої C_1 з початкової умови $y'(0) = -\sqrt{2}$:

$$\left(-\sqrt{2}\right)^2 = 2e^0 + C_1.$$

Отже, $C_1 = 0$, і приходимо до пари рівнянь першого порядку

$$y' = \pm\sqrt{2}e^{y/2}.$$

Враховуючи початкову умову $y'(0) = -\sqrt{2} < 0$, з отриманої пари рівнянь достатньо розглядати тільки рівняння зі знаком "мінус", тобто $y' = -\sqrt{2}e^{y/2}$.

Таким чином, ми отримали автономне рівняння першого порядку, а тому після відокремлення змінних та інтегрування приходимо до розв'язку

$$-2e^{-y/2} = -\sqrt{2}x + C_2, \quad C_2 \in \mathbb{R}.$$

Далі з початкових умов знаходимо, що $C_2 = -2$. Тоді маємо $e^{-y/2} = \frac{x}{\sqrt{2}} + 1$.

Остаточно отримуємо розв'язок задачі Коші

$$y(x) = -2\ln\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + 1\right).$$

Як бачимо, диференціальне рівняння n-го порядку (45) має загальний інтеграл

$$\Phi(x, y, C_1, \ldots, C_n) = 0, \quad C_1, \ldots, C_n \in \mathbb{R},$$

в процесі знаходження якого отримуємо деякі проміжні результати вигляду

$$\varphi_k(x, y, y', \ldots, y^{(n-k)}, C_1, \ldots, C_k) = 0. \tag{47}$$

Вираз (47) називають *k-им інтегралом* рівняння (45).

Перехід від рівняння (45) до його k-го інтегралу (47) називається *зниженням порядку.* Рівняння (47) теоретично простіше за рівняння (45), і тому придатніше для подальших досліджень.

У вже розглянутих випадках **1–3** послідовно знижується порядок рівняння до першого і інтегрується отримане рівняння. Розглянемо типи рівнянь, що допускають зниження порядку.

4. Для рівняння вигляду

$$F\left(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}\right) = 0$$

заміна $u = y^{(k)}$, де $u = u(x)$, знижує порядок на k одиниць.

Приклад 4. Розв'язати рівняння $y''' = 2xy''$.

Розв'язання. Впроваджуючи заміну $u = y''$, $u = u(x)$, приходимо до рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними $u' = 2xu$, розв'язок якого має вигляд $u = C_1 e^{x^2}$, $C_1 \in \mathbb{R}$. повертаючись до вихідної функції приходимо до рівняння другого порядку

$$y'' = C_1 e^{x^2}, \quad C_1 \in \mathbb{R}.$$

Таким чином, ми знизили порядок вихідного рівняння на одиницю, разом з тим отримане рівняння є найпростішим диференціальним рівнянням, тобто розв'язується послідовним інтегруванням. Остаточно знаходимо

$$y = C_1 \iint e^{x^2} dx dx + C_2 x + C_3, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

5. Якщо рівняння не містить явно незалежної змінної, тобто є *автономним*:

$$F\left(y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right) = 0,$$

то заміна $u = y'$, де $u = u(y)$ – нова невідома функція змінної y, знижує порядок цього рівняння на одиницю. При цьому враховуємо, що

$$\begin{aligned} y' &= u, \\ y'' &= \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dy}\frac{dy}{dx} = u'u, \\ y''' &= \frac{dy''}{dx} = \frac{dy''}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{d(u'u)}{dy}u = u''u^2 + u'^2 u, \\ &\dots \\ y^{(n)} &= Y(u, u', u'', \dots, u^{(n-1)}). \end{aligned}$$

Після підстановки заміни у рівняння одержуємо відносно нової невідомої функції $u = u(y)$ диференціальне рівняння $(n-1)$-го порядку.

Зауваження. *При такій заміні можна втратити розв'язки вигляду* $y = \mathrm{const}$.

Приклад 5. Розв'язати рівняння $yy'' = y'^2$.

Розв'язання. Це автономне рівняння, тому після заміни $u = y'$, де $u = u(y)$, маємо $yuu' = u^2$.

Таким чином, ми знизили порядок рівняння на одиницю і отримали диференціальне рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними, розв'язками якого є функції $u = C_1 y$, $C_1 \in \mathbb{R}$. Зауважимо, що функція $u = 0$ входить до сім'ї функцій $u = C_1 y$, $C_1 \in \mathbb{R}$ (отримується при $C_1 = 0$).

Виконуючи зворотню заміну, приходимо до диференціального рівняння першого порядку з відокремленими змінними $y' = C_1 y$, $C_1 \in \mathbb{R}$, розв'язуючи яке знаходимо загальних розв'язок вихідного рівняння

$$y(x) = C_2 e^{C_1 x} \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

6. Якщо рівняння (45) *однорідне* відносно змінних $y, y', \ldots, y^{(n)}$, тобто існує $m \in \mathbb{R}$, що для всіх $\lambda > 0$ виконується

$$F\left(x, \lambda y, \lambda y', \lambda y'', \ldots, \lambda y^{(n)}\right) = \lambda^m F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right),$$

і тому інваріантне відносно розтягів $(x, y) \to (x, \lambda y)$, то його порядок можна знизити на одиницю заміною $y' = uy$, де $u = u(x)$ – нова невідома функція. При цьому

$$\begin{aligned}
y' &= uy, \\
y'' &= (y')' = (uy)' = u'y + uy' = u'y + u^2 y = (u' + u^2)y, \\
y''' &= (y'')' = ((u' + u^2)y)' = (u'' + 3uu' + u^3)y, \\
&\ldots \\
y^{(n)} &= Y(u, u', u'', \ldots, u^{(n-1)})y.
\end{aligned}$$

Підставляючи заміну в (45) та використовуючи властивість однорідності, отримуємо розв'язок $y = 0$ та рівняння $(n-1)$-го порядку

$$F\left(x, 1, u, u' + u^2, \ldots, Y(u, u', u'', \ldots, u^{(n-1)})\right) = 0.$$

Приклад 6. Розв'язати рівняння $xyy'' - xy'^2 - yy' = 0$.

Розв'язання. Неважко помітити, що рівняння є однорідним. Дійсно, для всіх $\lambda > 0$ маємо $x\lambda y\lambda y'' - x(\lambda y')^2 - \lambda y \lambda y' = \lambda^2(xyy'' - xy'^2 - yy')$. Тоді впроваджуючи заміну $y' = yu$, $u = u(x)$, маємо $y'' = (u' + u^2)y$ і рівняння після підстановки заміни переписується у вигляді

$$x(u' + u^2)y^2 - xu^2y^2 - uy^2 = 0.$$

Виносячи y^2 за дужки, бачимо, що або $y = 0$, або приходимо до диференціального рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними

$$xu' - u = 0,$$

загальний розв'язок якого має вигляд $u = C_1 x$, $C_1 \in \mathbb{R}$.

Повертаючись через заміну до вихідної функції, знову отримуємо диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними

$$y' = c_1 xy,$$

розв'язавши яке, отримуємо загальний розв'язок $y = C_2 e^{C_1 x^2}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Зауважимо, що розв'язок y=0 входить в останню формулу при C_2=0.

7. Якщо рівняння (45) є *квазіоднорідним (або узагальнено однорідним)*, тобто існує $\sigma \in \mathbb{R}$ таке, що для довільного $\lambda > 0$ виконується умова

$$F\left(\lambda x, \lambda^{\sigma} y, \lambda^{\sigma-1} y', \ldots, \lambda^{\sigma-n} y^{(n)}\right) = \lambda^{m} F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right).$$

з деяким $m \in \mathbb{R}$ (у цьому випадку ще кажуть, що рівняння (45) інваріантне щодо розтягів $(x, y) \to (\lambda x, \lambda^{\sigma} y)$), то заміна

$$\begin{cases} x = e^{t}, \\ y = u e^{\sigma t}, \end{cases} \tag{48}$$

де $u = u(t)$ – нова невідома функція, зводить це рівняння до автономного рівняння n-го порядку, яке вже допускає зниження порядку.

При заміні (48) похідні перетворюються за формулами

$$\begin{aligned} y' &= \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot e^{-t} = (u' + \sigma u) \cdot e^{(\sigma-1)t}, \\ y'' &= \frac{dy'}{dt} \cdot e^{-t} = \left[u'' + (2\sigma - 1)\, u' + \sigma(\sigma - 1)\, u\right] \cdot e^{(\sigma-2)t}, \\ &\ldots \\ y^{(n)} &= Y(u, u', u'', \ldots, u^{(n)}) \cdot e^{(\sigma-n)t}. \end{aligned} \tag{49}$$

Підставляючи вирази (48), (49), і використовуючи умову квазіоднорідності, приходимо до автономного рівняння n-го порядку, яке допускає зниження порядку на одиницю.

Зауваження. *Вказана заміна* (48) *застосовна при* $x > 0$, *при* $x < 0$ *потрібна заміна*

$$\begin{cases} x = -e^{t}, \\ y = z e^{kt}. \end{cases}$$

Приклад 7. Розв'язати рівняння $x^2 y'' - 3xy' + 4y + x^2 = 0$.

Розв'язання. Підберемо σ таким чином, щоб виконувалась умова квазіоднорідності. Оскільки $F(x, y, y', y'') = x^2 y'' - 3xy' + 4y + x^2$, то умова квазіоднорідності означає, що вірною є рівність

$$(\lambda x)^2 \left(\lambda^{\sigma-2} y''\right) - 3(\lambda x)\left(\lambda^{\sigma-1} y'\right) + 4\lambda^{\sigma} y + (\lambda x)^2 = \lambda^{m}\left(x^2 y'' - 3xy' + 4y + x^2\right),$$

що можливо лише при $\sigma = 2$ (при цьому $m = 2$).

Отже, нам потрібно виконати заміну

$$\begin{cases} x = e^t, \\ y = ue^{2t}. \end{cases}$$

Тоді за формулами (49):

$$y' = (u' + 2u)e^t, \quad y'' = u'' + 3u' + 2u,$$

і підставляючи у вихідне рівняння, приходимо до рівняння

$$e^{2t}(u'' + 3u' + 2u) - 3(u' + 2u)e^{2t} + 4ue^{2t} + e^{2t} = 0 \quad \Rightarrow \quad u'' = -1,$$

яке не лише автономне, але й легко розв'язується послідовним інтегруванням:

$$u = -\frac{1}{2}\, t^2 + C_1 t + C_2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Знаючи функцію $u = u(t)$, легко знаходимо

$$y(t) = e^{2t}u(t) = e^{2t}\left(-\frac{1}{2}\, t^2 + C_1 t + C_2\right), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

А беручи до уваги заміну незалежної змінної $x = e^t$ або $t = \ln x$, отримуємо розв'язки

$$y(x) = x^2\left(-\frac{1}{2}\ln^2 x + C_1 \ln x + C_2\right), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Крім того, зауважимо, що рівняння не зміниться, якщо впровадити заміну $x \mapsto -x$. Тому разом з розв'язком $y(x)$ при $x > 0$, розв'язком також буде функція $y(-x)$ при $x < 0$. Отже, всі розв'язки задаються формулою

$$y(x) = x^2\left(-\frac{1}{2}\ln^2|x| + C_1 \ln|x| + C_2\right), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

8. Якщо рівняння (45) має форму повної похідної, тобто існує неперервно диференційовна функція $G(x, y, p_1, \ldots, p_{n-1})$ така, що

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = \frac{d}{dx}\, G\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}\right),$$

то воно допускає очевидне зниження порядку на одиницю. А саме, в результаті інтегрування дістанемо:

$$G\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}\right) = C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}.$$

Останнє співвідношення називають *першим інтегралом рівняння.*

Приклад 8. Розв'язати рівняння $y'' = xy' + y + 1$.

Розв'язання. Перепишемо рівняння у вигляді $y'' - xy' - y = 1$. Тепер нескладно помітити, що його ліва частина є повною похідною по x:

$$(y' - xy)' = 1.$$

Проінтегрувавши, отримуємо перший інтеграл:

$$y' - xy = x + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R},$$

який у свою чергу є лінійним диференціальним рівнянням першого порядку.

Домножуючи ліву і праву частину цього рівняння на $e^{-x^2/2}$, знову отримуємо рівняння у формі повної похідної

$$\left(ye^{-x^2/2}\right)' = xe^{-x^2/2} + C_1 e^{-x^2/2}.$$

Інтегруємо останню рівність

$$ye^{-x^2/2} = -e^{-x^2/2} + C_1 \int e^{-x^2/2} dx + C_2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R};$$

і приходимо до розв'язку вихідного рівняння

$$y = C_1 e^{x^2/2} \int e^{-x^2/2} dx + C_2 e^{x^2/2} - 1, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Зауваження. *Зауважимо, що зниження порядку у рівнянні у формі повної похідної не потребує заміни змінних.*

9. Якщо рівняння (45) не має форми повної похідної, то у деяких випадках воно може набути бажаної форми при домноженні його на деяку функцію $\mu\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right)$ – інтегрувальний множник. Слід мати на увазі, що якщо при цьому для деяких значень своїх змінних $\mu = 0$, то можуть з'явитися зайві розв'язки, а якщо інтегрувальний множник має вужчу область визначення, ніж саме рівняння, то навпаки можлива втрата деяких розв'язків.

Приклад 9. Розв'язати рівняння $yy'' = y'^2$.

Розв'язання. Домножуючи ліву і праву частини рівняння на інтегрувальний множник $\dfrac{1}{y^2}$, приходимо до рівняння

$$\frac{y''y - y'^2}{y^2} = 0,$$

ліва частина якого є повною похідною:

$$\left(\frac{y'}{y}\right)' = 0.$$

Тому після інтегрування приходимо до першого інтегралу, що є диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними

$$\frac{y'}{y} = C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R},$$

розв'язуючи яке знаходимо розв'язок вихідного рівняння

$$y = C_2 e^{C_1 x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Зауважимо, що використовуючи інтегрувальний множник $\frac{1}{y^2}$, ми могли втратити розв'язок $y = 0$, але цей розв'язок входить у отриману сім'ю розв'язків при $C_2 = 0$.

Вправи

Знизити порядок рівнянь, там, де це можливо, розв'язати рівняння, там, де вказані початкові умови, знайти розв'язок задачі Коші.

122. $y''' = e^{-x}; \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = 0.$

123. $xy^{(4)} = 1.$

124. $y'' = e^x + \frac{3}{4}x^{-\frac{5}{2}}.$

125. $y'' = \frac{1}{(x-1)^3} - \frac{1}{(x+1)^3}.$

126. $y'(1 + y'^2) = ay''.$

127. $yy''^2 = 1.$

128. $y^4 - y^3 y'' = 1.$

129. $y''' y'^2 = 1.$

130. $y''' = 2xy''.$

131. $x^2 y'' = y'^2.$

132. $y'' x \ln x = y'.$

133. $xy'' = y' \ln\left(\frac{y'}{x}\right).$

134. $y''^3 + xy'' = 2y'.$

135. $2y'(y'' + 2) = xy''^2.$

136. $y''' + (y-2)y' = 0.$

137. $y^2(y'y''' - 2y''^2) - yy'^2 y'' = 2y'^4.$

138. $yy'y''' + 2y'^2 y'' = 3yy''^2.$

139. $yy'' = y'^2.$

140. $1 + y'^2 = 2yy''.$

141. $2yy'' + y^2 + y'^4 = 0.$

142. $y''^2 - 2y'y''' + 1 = 0.$

143. $y''' y'^2 = y''^3.$

144. $2yy'' = y^2 + y'^2.$

145. $(y' + 2y)y'' = y'^2$

146. $yy'' = y^2 - y'^3.$

147. $yy'' = y'^2 + 2xy^2.$

148. $y''^2 - yy''' = \left(\dfrac{y'}{x}\right)^2.$

149. $y'^2 + 2xyy'' = 0.$

150. $x^2(y^2y''' - y'^3) - 2y^2y' - 3xyy'^2 = 0.$

151. $x^2yy'' = (y - xy')^2.$

152. $yy'' - y'^2 = \dfrac{yy'}{\sqrt{1+x^2}}.$

153. $x^2(yy'' - y'^2) + xyy' = y\sqrt{x^2y'^2 + y^2}.$

154. $yy'' = y'^2 + 15y^2\sqrt{x}.$

155. $(x^2+1)(y'^2 - yy'') = xyy'.$

156. $y(xy'' + y') = xy'^2(1-x).$

157. $x^2(y'^2 - 2yy'') = y^2.$

158. $y'' + \cos xy' - \sin xy = 0.$

159. $y'' + \dfrac{2}{x}\,y' + y^2 = 0.$

160. $x^2yy'' + 1 = (1-y)xy'.$

161. $y(2xy'' + y') = xy'^2 + 1.$

162. $yy' + xyy'' - xy'^2 = x^3.$

163. $\dfrac{y^2}{x^2} + y'^2 = 3xy'' + \dfrac{2yy'}{x}.$

164. $x^2(yy'' - y'^2) + xyy' = (2xy' - 3y)\sqrt{x^3}.$

165. $x^4(y'^2 - 2yy'') = 4x^3yy' + 1.$

166. $x^2y'' - 3xy' + 4y + x^2 = 0.$

167. $xyy'' + yy' - x^2y'^3 = 0.$

168. $y'' - \dfrac{1}{x}\,y' + \dfrac{1}{x^2}\,y = 1.$

169. $y'' = 2yy'.$

170. $y''y + y'^2 = 1.$

171. $xy'' = 2yy' - y'.$

172. $y'' = xy' + y + 1.$

173. $yy''' - y'y'' = 0.$

174. $yy'' = y'.$

175. $y'' = y'^2y.$

176. $5y'''^2 - 3y''y^{(4)} = 0.$

10. Лінійні рівняння вищих порядків

Диференціальне рівняння вигляду

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = b(x), \qquad (50)$$

де $a_j(x), b(x) : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, n$, — задані функції, називається *лінійним неоднорідним рівнянням (ЛНР) n-го порядку.*

Рівняння вигляду

$$L[y] = y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0, \qquad (51)$$

називається *лінійним однорідним рівнянням (ЛОР) n-го порядку*, що відповідає ЛНР (50).

Загальний розв'язок $y_{\text{з.н.}}$ ЛНР (50) дорівнює сумі загального розв'язку $y_{\text{з.о.}}$ відповідного ЛОР (51) та деякого частинного розв'язку $y_{\text{ч.н.}}$ ЛНР (50):

$$y_{\text{з.н.}} = y_{\text{з.о.}} + y_{\text{ч.н.}}.$$

Спочатку розглянемо ЛОР (51).

Розв'язки ЛОР (51) утворюють лінійний простір, тобто має місце.

Твердження. *Якщо $y_1(x)$, $y_2(x)$, $\ldots y_k(x)$ – розв'язки ЛОР* (51), *то для довільних сталих C_1, C_2, $\ldots C_k \in \mathbb{R}$ функція*

$$C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \ldots + C_ky_k(x)$$

також буде розв'язком рівняння (51).

Цей лінійний простір $n-$вимірний.

Означення. *Функцій $y_1(x)$, $y_2(x)$, $\ldots$, $y_k(x) : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$, називаються лінійно залежними на (α, β), якщо існують сталі $C_1, C_2, \ldots, C_k \in \mathbb{R}$, які одночасно не обертаються в нуль, такі, що*

$$C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \cdots + C_ky_k(x) \equiv 0 \quad x \in (\alpha, \beta).$$

Функції $y_1(x)$, $y_2(x)$, $\ldots$, $y_k(x)$ називаються лінійно незалежними на (α, β), якщо $C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \cdots + C_ky_k(x) \equiv 0$ на (α, β) тоді і лише тоді, коли $C_1 = C_2 = \cdots = C_k = 0$.

Приклад 1. Дослідити лінійну залежність та незалежність системи функцій 1, x, x^2, $\dots$, x^k, $x \in \mathbb{R}$.

Розв'язання. Ця система функцій є лінійно незалежною на будь-якому інтервалі $I \subseteq \mathbb{R}$. Дійсно, лінійна комбінація $C_1 + C_2 x + \dots + C_{k+1} x^k$ є многочленом і за умови $|C_1| + \dots + |C_{k+1}| \neq 0$ обертається в нуль не більше, ніж у k ізольованих точках дійсної осі, а тотожно дорівнювати нулю може лише при $C_1 = \dots = C_{k+1} = 0$.

Означення. *Якщо* $y_1(x)$, $y_2(x)$, $\dots$, $y_n(x) \in \mathrm{C}^{n-1}(\alpha, \beta)$, *то визначник*

$$W[y_1(x), \dots, y_n(x)] := \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

називається визначником Вронського (вронськіаном) цієї системи функцій.

Твердження. *Якщо система функцій* $y_1(x)$, $y_2(x)$, $\dots$, $y_n(x) \in \in \mathrm{C}^{n-1}(\alpha, \beta)$ *лінійно залежна на* (α, β), *то* $W[y_1(x), \dots, y_n(x)] \equiv 0$ *на* (α, β). *Якщо ж* $W[y_1(x_0), \dots, y_n(x_0)] \neq 0$ *хоча б в одній точці* $x_0 \in (\alpha, \beta)$, *то система функцій* $y_1(x)$, $y_2(x)$, $\dots$, $y_n(x)$ *є лінійно незалежною на* (α, β).

Приклад 2. Дослідити лінійну залежність та незалежність системи функцій 1, e^x, xe^x, $x \in \mathbb{R}$.

Розв'язання. Вказані функції є двічі неперервно диференційовними на $\mathbb{R}$. Тому можемо записати вронськіан цієї системи функцій:

$$W = \begin{vmatrix} 1 & e^x & xe^x \\ 0 & e^x & (x+1)e^x \\ 0 & e^x & (x+2)e^x \end{vmatrix} = (x+2)e^{2x} - (x+1)e^{2x} = e^{2x},$$

який не обертається в нуль у жодній точці на $\mathbb{R}$. Отже, задана система функцій є лінійно незалежною на $\mathbb{R}$.

Розглянемо систему функцій $y_1(x)$, $y_2(x)$, $\dots$, $y_n(x) : (\alpha, \beta) \to \to \mathbb{R}$, кожна з яких є розв'язком лінійного однорідного рівняння n-го порядку (51).

Означення. *Фундаментальною системою розв'язків (ФСР) рівняння* (51) *називається набір з n лінійно незалежних розв'язків цього рівняння.*

Теорема. *Якщо $a_j(x) \in \mathrm{C}(\alpha, \beta)$, $j = 1, \ldots, n$, то фундаментальна система розв'язків рівняння* (51) *існує.*

Справедливий *критерій фундаментальності системи розв'язків лінійного однорідного рівняння.*

Твердження. *Нехай $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x) \in \mathrm{C}^{n-1}(\alpha, \beta)$ – розв'язки лінійного однорідного рівняння n-го порядку* (51)*. Тоді якщо існує $x_0 \in (\alpha, \beta)$ таке, що $W[y_1(x_0), \ldots, y_n(x_0)] = 0$, то ці розв'язки лінійно залежні. Якщо ж $W[y_1(x_0), \ldots, y_n(x_0)] \neq 0$ хоча б в одній точці $x_0 \in (\alpha, \beta)$, то функції $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ є лінійно незалежними на (α, β), тобто є фундаментальною системою розв'язків, причому вронськіан не перетворюється на нуль у жодній точці інтервалу (α, β).*

Зауваження. *Будь-який набір з $n + 1$ розв'язків рівняння* (51) *є лінійно залежним.*

Твердження. *Якщо $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ — фундаментальна система розв'язків рівняння* (51)*, то загальний розв'язок цього рівняння задається формулою*

$$y_{з.о.} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \cdots + C_n y_n(x), \quad C_1, \ldots, C_n \in \mathbb{R}.$$

Теорема. *Нехай $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$, $x \in (\alpha, \beta)$ – лінійно незалежні розв'язки рівняння* (51) *і $x_0 \in (\alpha, \beta)$ – фіксована точка. Тоді справедлива формула Остроградського–Ліувілля*

$$W[y_1(x), \ldots, y_n(x)] = W[y_1(x_0), \ldots, y_n(x_0)] \mathrm{e}^{-\int\limits_{x_0}^{x} a_1(s) ds}, \quad x \in (\alpha, \beta).$$

Приклад 3. Дослідити на лінійну незалежність розв'язки $y_1(x)$ і $y_2(x)$ рівняння

$$y'' + \frac{1}{x}\, y' + \left(1 - \frac{a^2}{x^2}\right) y = 0, \quad x \neq 0, \ a = \mathrm{const}$$

на $I = (0, +\infty)$, якщо відомо, що:

а) $y_1(1) = 3,\ y_1'(1) = -1,\ y_2(1) = 0,\ y_2'(1) = -2;$
б) $y_1(1) = -6,\ y_1'(1) = 2,\ y_2(1) = \frac{1}{3}\,,\ y_2'(1) = -\frac{1}{9}\,.$

Знайти $W[y_1, y_2]$.

Розв'язання. Використовуючи формулу Остроградського–Ліувілля, записуємо

$$W[y_1, y_2] = W(1)e^{-\int\limits_1^x ds/s} = W(1)e^{-\ln|x|} = \frac{W(1)}{|x|}.$$

Далі розглянемо задані пункти окремо.

а) Для розв'язків, що задовольняють умовам першого пункту, маємо

$$W(1) = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -6 \neq 0,$$

а тому ці розв'язки є лінійно незалежними.

б) Для умов другого пункту маємо:

$$W(1) = \begin{vmatrix} -6 & \frac{1}{3} \\ 2 & -\frac{1}{9} \end{vmatrix} = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} = 0,$$

тобто $W(x) \equiv 0$, і розв'язки є лінійно залежними.

Нехай $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ задані лінійно незалежні функції змінної $x \in (\alpha, \beta)$, що мають неперервні похідні до n-го порядку включно, і $W[y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)] \neq 0$ на (α, β). Тоді рівняння

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & \cdots & y_n(x) & y(x) \\ y_1'(x) & \cdots & y_n'(x) & y'(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n)}(x) & \cdots & y_n^{(n)}(x) & y^{(n)}(x) \end{vmatrix} = 0.$$

є лінійним однорідним рівнянням $n-$го порядку на (α, β) з фундаментальною системою розв'язків $y_1(x), \ldots\ldots, y_n(x)$.

Якщо відомо r лінійно незалежних частинних розв'язків рівняння (51), то порядок рівняння можна знизити на r одиниць.

Твердження. *Нехай $y_1(x)$, $y_2(x)$, $\ldots$, $y_r(x)$ — лінійно незалежні розв'язки рівняння* (51) *і $y_1(x)$ не перетворюється в нуль на (α, β). Тоді заміна $y = y_1(x)z$, $z' = u$, де $z = z(x)$, $u = u(x)$, зводить* *це рівняння до лінійного однорідного рівняння* $(n-1)$*-го порядку відносно невідомої функції* $u = u(x)$*, яке має* $r-1$ *лінійно незалежних розв'язків вигляду* $u_j(x) = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{y_{j+1}(x)}{y_1(x)}\right)$*,* $j = 1, \ldots, r-1$*.*

Зауваження. *У останньому твердженні перша заміна* ($y = y_1(x)z$) *"знищує" останній доданок у рівнянні* (51)*, тобто рівняння після заміни набуває вигляду* $z^{(n)} + b_1(x)z^{(n-1)} + \cdots + b_{n-1}(x)z' = 0$*, а друга заміна* ($z' = u$) *безпосередньо знижує порядок рівняння. Крім того, цю пару замін можна також записати у вигляді* $y = y_1(x)\int u dx$*.*

Приклад 4. Розв'язати рівняння $y''' - \dfrac{3}{x}y'' + \dfrac{6}{x^2}y' - \dfrac{6}{x^3}y = 0$.

Розв'язання. Легко бачити, що $y_1(x) = x$ – розв'язок цього рівняння. Тоді виконаємо заміну для зниження порядку

$$y = xz, \quad z' = u, \quad z = z(x), u = u(x),$$

Тоді при такій заміні:

$$y' = xz' + z, \quad y'' = xz'' + 2z', \quad y''' = xz''' + 3z'',$$

і підставляючи в рівняння, отримуємо рівняння

$$xz''' + 3z'' - \frac{3}{x}(xz'' + 2z') + \frac{6}{x^2}(xz' + z) - \frac{6}{x^3}xz = 0 \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad xz''' = 0 \quad \Rightarrow \quad u'' = 0.$$

Розв'язок останнього рівняння $u = C_1x + C_2$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, і виконуючи зворотню заміну, знаходимо розв'язок вихідного рівняння

$$y = x\int(C_1x + C_2)dx = C_1x^3 + C_2x^2 + C_3x, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

При розв'язанні рівнянь другого порядку вигляду

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad p, q \in \mathrm{C}(\alpha, \beta), \tag{52}$$

зручно користуватися таким результатом: якщо відомий один частинний розв'язок $y_1(x)$ рівняння (52) такий, що $y_1(x) \neq 0$ на (α, β), то загальний розв'язок можна знайти за *формулою Абеля*:

$$y = C_1y_1(x)\int \frac{e^{-\int p(x)\,dx}}{y_1^2(x)}dx + C_2y_1(x), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Приклад 5. Знайти загальний розв'язок рівняння $y'' + \dfrac{2}{x}y' + +y = 0$, якщо відомий один частинний розв'язок $y_1(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ цього рівняння.

Розв'язання. Скористаємося формулою Абеля:

$$y = C_1\frac{\sin x}{x}\int\frac{x^2e^{-\int 2dx/x}}{\sin^2 x}\,dx + C_2\frac{\sin x}{x} =$$
$$= C_1\frac{\sin x}{x}\int\frac{dx}{\sin^2 x}\,dx + C_2\frac{\sin x}{x} = -C_1\frac{\cos x}{x} + C_2\frac{\sin x}{x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Для знаходження загального розв'язку ЛНР (50), окрім загального розв'язку відповідного ЛОР (51), достатньо знайти деякий частинний розв'язок ЛНР.

Найчастіше для знаходження частинного розв'язку ЛНР (50) застосовують метод варіації довільних сталих (метод Лагранжа). Цей метод використовується для довільної неперервної функції $f(x)$ і полягає в тому, що частинний розв'язок ЛНР (50) шукають у формі

$$y_{\text{ч.н.}} = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 + \ldots + C_n(x)y_n, \tag{53}$$

де $\{y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n,(x)\}$ – ФСР відповідного лінійного однорідного рівняння (51), $C_i(x)$ – невідомі функції, які можна знайти, розв'язавши систему

$$\begin{cases} C_1'y_1 + C_2'y_2 + \ldots + C_n'y_n = 0; \\ C_1'y_1' + C_2'y_2' + \ldots + C_n'y_n' = 0; \\ \ldots \\ C_1'y_1^{(n-2)} + C_2'y_2^{(n-2)} + \ldots + C_n'y_n^{(n-2)} = 0; \\ C_1'y_1^{(n-1)} + C_2'y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n'y_n^{(n-1)} = b(x). \end{cases} \tag{54}$$

відносно $C_1', C_2', \ldots, C_n'$ і проінтегрувавши отримані диференціальні рівняння вигляду $\dfrac{dC_i}{dx} = \varphi(x), i = \overline{1, n}$.

Вправи

У задачах 177–181 дослідити на лінійну залежність та незалежність функції у їх спільній області визначення:

177. $y_1 = x,\ y_2 = 2x,\ y_3 = x^2$.

178. $y_1 = \cos x,\ y_2 = \cos(x+1),\ y_3 = \cos(x-2).$

179. $y_1 = x,\ y_2 = a^{\log_a x}.$

180. $y_1 = 2\pi,\ y_2 = \operatorname{arctg} \frac{x}{2\pi},\ y_3 = \operatorname{arcctg} \frac{x}{2\pi}.$

181. $y_1 = e^{-\frac{ax^2}{2}},\ y_2 = e^{-\frac{ax^2}{2}} \cdot \int\limits_0^x e^{\frac{a\xi^2}{2}} d\xi.$

182. Функції $y_1 = x$, $y_2 = x^5$, $y_3 = |x^5|$ задовольняють рівняння $x^2y'' - 5xy' + 5y = 0$. Чи є ці функції лінійно залежними при $x \in \in (-1,1)$? Відповідь аргументувати.

183. Дано чотири розв'язки рівняння $y''' + xy = 0$. Відомо, що графіки цих розв'язків дотикаються один до одного в одній точці. Скільки лінійно незалежних функцій може бути серед цих розв'язків?

184. Довести, що якщо два розв'язки рівняння $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ з неперервними коефіцієнтами мають максимум при одному й тому самому значенні x , то вони лінійно залежні.

185. Лінійне однорідне рівняння якого порядку може мати на інтервалі $(-1,1)$ чотири розв'язки вигляду:

$$y_1 = x^2 - 2x + 2;\ y_2 = (x-2)^2;\ y_3 = x^2 + x - 1;\ y_4 = 1 - x?$$

У задачах 186–187 знайти загальні розв'язки рівнянь, застосовуючи зниження порядку та формулу Абеля:

186. $y''(\cos x + \sin x) - 2\cos x y' + (\cos x - \sin x)y = 0, \quad y_1 = \cos x.$

187. $y''' + \dfrac{4x-3}{x(2x-1)}y'' - \dfrac{2}{x(2x-1)}y' + \dfrac{2}{x^2(2x-1)}y = 0,$

$$y_1 = x,\ y_2 = \frac{1}{x}.$$

188. Рівняння $(x-1)y'' - (x+1)y' + 2y = 0$ має розв'язок у вигляді многочлена. Знайти його фундаментальну систему розв'язків.

У задачах 189–190 скласти ЛОР якомога нижчого порядку, яке має розв'язки:

189. $y_1 = x,\ y_2 = e^x.$

190. $y_1 = 3x,\ y_2 = x - 2,\ y_3 = e^x + 1.$

11. Лінійні рівняння зі сталими коефіцієнтами

Розглянемо лінійне однорідне диференціальне рівняння n-го порядку зі сталими коефіцієнтами

$$L[y] = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_n y = 0. \qquad (55)$$

де $a_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, n$.

Алгебраїчне рівняння n-го степеня

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n = 0 \qquad (56)$$

називається *характеристичним рівнянням* для ЛОР (55).

Теорема (про ФСР для ЛОР зі сталими коефіцієнтами). *Нехай відомі корені характеристичного рівняння* (56)*: $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\} \in \mathbb{C}$. Тоді ФСР* (55) *може бути знайдена в елементарних функціях.*

Шукаємо розв'язок ЛОР (55) у вигляді $y(x) = e^{\lambda x}, \lambda \in \mathbb{C}$. Підставляючи у рівняння, отримуємо

$$L[y] = L[e^{\lambda x}] = e^{\lambda x}(\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n) = e^{\lambda x}P(\lambda) = 0.$$

Звідки λ – корінь рівняння (56).

Рівняння (56) – алгебраічне рівняння $n-$го степеня, тому за основною теоремою алгебри має n коренів з урахуванням кратності у полі комплексних чисел. Ці n коренів і зададуть ФСР ЛОР зі сталими коефіцієнтами (55).

Розглянемо можливі випадки:

I. $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\} \in \mathbb{R}$ – дійсні, різні, прості корені рівняння (56). Тоді $\{y_i(x) = e^{\lambda_i x}\}_{i=1}^n$ – линійно незалежні розв'язки ЛОР (55), тобто $\{e^{\lambda_i x}\}_{i=1}^n$ – ФСР (55).

II. $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ – різні, прості корені рівняння (56), але серед них є комплексні.

Нехай $\alpha \pm i\beta$ – пара комплексно-спряжених коренів. Потрібно знайти два лінійно незалежні розв'язки, що їм відповідають.

Оскільки $z = e^{(\alpha+i\beta)x}$ – розв'язок (55), то $\operatorname{Re} z = e^{\alpha x}\cos\beta x$, $\operatorname{Im} z = e^{\alpha x}\sin\beta x$ – два дійснозначні розв'язки рівняння (55). Корінь $\alpha - i\beta$ не породжує нових лінійно незалежних розв'язків. Отже, парі $\alpha \pm i\beta$ у ФСР відповідають два лінійно незалежні розв'язки $\{e^{\alpha x}\cos\beta x,\ e^{\alpha x}\sin\beta x\}$.

III. Серед коренів $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ є кратні. Нехай λ – корінь кратності k рівняння (56), тобто

$$p(\lambda) = p'(\lambda) = \ldots = p^{(k-1)}(\lambda) = 0, \quad p^k(\lambda) \neq 0.$$

Розглянемо тотожність

$$L[e^{\lambda x}] = p(\lambda)e^{\lambda x}.$$

Тоді для $m \le k-1$, використовуючи формулу Лейбніца, отримуємо

$$L[x^m e^{\lambda x}] = \frac{\partial^m}{\partial\lambda^m} L[e^{\lambda x}] = \frac{\partial^m}{\partial\lambda^m}\Big(p(\lambda)e^{\lambda x}\Big) =$$

$$= \sum_{j=0}^{m} C_m^j \frac{\partial^j}{\partial\lambda^j} p(\lambda) \cdot \frac{\partial^{m-i}}{\partial\lambda^{m-j}} e^{\lambda x} = 0.$$

Отже, кореню $\lambda \in \mathbb{R}$ кратності k рівняння (56) відповідають k лінійно незалежних розв'язки $\{e^{\lambda x},\ xe^{\lambda x},\ \dots,\ x^{k-1}e^{\lambda x}\}$ ЛОР (55).

Якщо ж $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ – комплексний корінь кратності k, то $\lambda = \alpha - i\beta \in \mathbb{C}$ теж є коренем цієї ж кратності, і парі $\lambda = \alpha \pm i\beta \in \mathbb{C}$ відповідають $2k$ лінійно незалежних розв'язки $\{\, e^{\alpha x}\cos\beta x,\ e^{\alpha x}\sin\beta x,\ xe^{\alpha x}\cos\beta x,\ xe^{\alpha x}\sin\beta x,\ \dots,\ x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,$ $x^{k-1}e^{\alpha x}\sin\beta x\}$ рівняння (55).

Приклад 1. Розв'язати рівняння $y'' - 2y' = 0$.

Розв'язання. Це ЛОР зі сталими коефіцієнтами. Для його розв'язання запишемо характеристичне рівняння

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda = 0,$$

яке має два різні дійсні корені $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$. Тому ФСР складається з функцій $y_1(x) = e^{0x} = 1$ та $y_2(x) = e^{2x}$. Отже, загальний розв'язок заданого ЛОР має вигляд

$$y = C_1 + C_2 e^{2x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Приклад 2. Розв'язати рівняння $y'' + 2y' + 10 = 0$.

Розв'язання. Записуємо характеристичне рівняння: $P(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda +$ $+\, 10 = 0$ та знаходимо його корені $\lambda_{1,2} = -1 \pm 3i$. Тоді ФСР має вигляд $y_1(x) = e^{-x}\cos 3x$, $y_2(x) = e^{-x}\sin 3x$, і можемо записати загальний розв'язок $y = C_1 e^{-x}\cos 3x + C_2 e^{-x}\sin 3x, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Приклад 3. Розв'язати рівняння $y^{IV} - y = 0$.

Розв'язання. Записуємо характеристичне рівняння: $P(\lambda) = \lambda^4 - 1 = 0$. Воно має корені $\lambda_{1,2} = \pm 1$, $\lambda_{3,4} = \pm i$. Тоді ФСР: $y_1(x) = e^x$, $y_2(x) = e^{-x}$, $y_3(x) = e^{0x}\cos 1x = \cos x$, $y_4(x) = \sin x$, а отже, загальний розв'язок

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3\cos x + C_4 \sin x, \quad C_i \in \mathbb{R},\ i = 1, \ldots, 4.$$

Приклад 4. Розв'язати рівняння $y'' - 4y' + 4y = 0$.

Розв'язання. Оскільки характеристичне рівняння $P(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$ має корінь $\lambda_{1,2} = 2$ кратності два, то ФСР має вигляд $y_1(x) = e^{2x}$, $y_2(x) = xe^{2x}$. Отже, загальний розв'язок

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Приклад 5. Розв'язати рівняння $y^V + 8y''' + 16y' = 0$

Розв'язання. Характеристичне рівняння має вигляд $P(\lambda) = \lambda^5 + 8\lambda^3 + 16\lambda = \lambda(\lambda^2 + 4)^2 = 0$. Його корені $\lambda_1 = 0$ та пара суто уявних комплексно-спряжених коренів $\lambda_{2,\ldots,5} = \pm 2i$ кратності два. Тому ФСР складається з п'яти функцій: $y_1(x) = 1$, $y_2(x) = \cos 2x$, $y_3(x) = \sin 2x$, $y_4(x) = x\cos 2x$, $y_5(x) = x\sin 2x$. Тоді загальний розв'язок ЛОР

$$y = C_1 + C_2\cos x + C_3 \sin x + C_4 x\cos x + C_5 x \sin x, \quad C_i \in \mathbb{R},\ i = 1, \ldots, 5.$$

Рівняння Ейлера має вигляд

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} x y' + a_n y = 0, \tag{57}$$

де $a_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, n$, і на проміжку $(0, +\infty)$ зводиться до рівняння зі сталими коефіцієнтами заміною незалежної змінної: $x = e^t$, де t – нова незалежна змінна.

Дійсно, перерахуємо похідні:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = y'_t e^{-t} = L_1[y]e^{-t},$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dt}e^{-t} = (y'_t e^{-t})'_t e^{-t} = (y''_t - y'_t)e^{-2t} = L_2[y]e^{-2t},$$

$$\ldots$$

$$y^{(n)} = L_n[y]e^{-nt},$$

де L_n – диференційний оператор n-го порядку зі сталими коефіцієнтами. Тоді при підстановці заміни в (57) маємо:

$$e^{nt}L_n[y]e^{-nt} + a_1 e^{(n-1)t}L_{n-1}[y]e^{-(n-1)t} + \cdots + a_n y = 0.$$

Отже, приходимо до виразу

$$\bar{L}[y] := L_n[y] + a_1 L_{n-1}[y] + \cdots + a_n y = 0,$$

що є ЛОР зі сталими коефіцієнтами.

Характеристичний поліном для рівняння Ейлера можна знайти, якщо шукати його ФСР у вигляді $y = x^r$:

$$r(r-1)\dots(r-n+1) + a_1 r(r-1)\dots(r-n+2) + \cdots + a_{n-1}r + a_n = 0.$$

Приклад 6. Розв'язати рівняння Ейлера $x^2 y'' + 6xy' + 4y = 0$

Розв'язання. Шукаємо розв'язки у вигляді $y = x^r$. Записуємо характеристичний поліном для рівняння Ейлера і шукаємо його корені:

$$r(r-1) + 6r + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad r^2 + 5r + 4 = 0$$

Розв'язавши отримане квадратне рівняння, маємо $r_1 = -1$, $r_2 = -4$. Тому загальний розв'язок рівняння Ейлера

$$y = C_1 x^{-1} + C_2 x^{-4}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Метод невизначених коефіцієнтів

Розглянемо лінійне неоднорідне рівнянням зі сталими коефіцієнтами

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_n y = f(x), \qquad (58)$$

де $a_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, n$, $f(x) : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ – задана функція.

Для знаходження частинного розв'язку $y_{\text{ч.н.}}$ ЛНР (58) можна скористатися методом варіації довільних сталих.

Однак, якщо права частина має спеціальний вигляд – квазіполіном, а саме

$$f(x) = e^{\alpha x}\left(P_{m_1}(x)\cos\beta x + Q_{m_2}(x)\sin\beta x\right),$$

де $P_{m_1}(x)$, $Q_{m_2}(x)$ – поліноми степенів m_1 та m_2 відповідно, то частинний розв'язок завжди можна знайти у вигляді квазіполінома

$$y_{\text{ч.н.}}(x) = e^{\alpha x}x^k\left(R_m(x)\cos\beta x + S_m(x)\sin\beta x\right), \qquad (59)$$

де $m = \max\{m_1, m_2\}$, k – кратність числа $\sigma := \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ як кореня характеристичного рівняння (56) ($k = 0$, якщо σ не є коренем характеристичного рівняння), $R_m(x)$, $S_m(x)$ – поліноми степеня m з невизначеними коефіцієнтами. Невизначені коефіцієнти поліномів $R_m(x)$ та $S_m(x)$ знаходяться підстановкою функції $y_{\text{ч.н.}}(x)$ у рівняння (58) з подальшим зведенням подібних доданків у отриманій рівності, записом системи лінійних алгебраїчних рівнянь для коефіцієнтів при лінійно незалежних функціях у доданках цієї рівності і знаходженням невизначених коефіцієнтів поліномів $R_m(x)$ та $S_m(x)$ із записаної системи алгебраїчних рівнянь.

Зауваження. *Якщо $\beta = 0$, то права частина рівняння (58) набуває вигляду*

$$f(x) = e^{\sigma x} P_m(x),$$

тобто $\sigma = \alpha \in \mathbb{R}$, $P_m(x)$ – поліном степеня m, і частинний розв'язок рівняння (58) можна знайти у вигляді

$$y_{ч.н.}(x) = e^{\sigma x} x^k Q_m(x),$$

де k – кратність числа $\sigma \in \mathbb{R}$ як кореня характеристичного рівняння (56) ($k = 0$, якщо σ не є коренем характеристичного рівняння), $Q_m(x)$ – поліном степеня m з невизначеними коефіцієнтами, які знаходяться підстановкою функції $y_{ч.н.}(x)$ у рівняння.

Приклад 7. Розв'язати рівняння методом невизначених коефіцієнтів $y''' - 6y'' + 9y' = xe^{3x}$.

Розв'язання. Запишемо характеристичне рівняння для відповідного лінійного однорідного рівняння $y''' - 6y'' + 9y' = 0$ і знайдемо його корені:

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 9\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 0, \quad \lambda_{2,3} = 3.$$

Отже, загальний розв'язок відповідного лінійного однорідного рівняння

$$y_{\text{з.о.}} = C_1 e^{0x} + (C_2 x + C_3) e^{3x} = C_1 + (C_2 x + C_3) e^{3x}, \quad C_1,\, C_2,\, C_3 \in \mathbb{R}.$$

Оскільки права частина рівняння є квазіполіном з $P_m(x) = x$, $m = 1$, а $\sigma = 3 \in \mathbb{R}$ є коренем кратності 2 характеристичного рівняння, то $k = 2$ і частинний розв'язок шукаємо у вигляді

$$y_{\text{ч.н.}}(x) = e^{3x} x^2 Q_m(x) = e^{3x} x^2 (Ax + B),$$

де $A, B \in \mathbb{R}$ – невизначені коефіцієнти. Підставляючи $y_{\text{ч.н.}}(x)$ у вихідне рівняння та прирівнюючи коефіцієнти при лінійно незалежних функціях, знаходимо, що $A = \frac{1}{18}$, а $B = -\frac{1}{18}$. Отже, частинний розв'язок має вигляд

$$y_{\text{ч.н.}}(x) = e^{3x}x^2\left(\frac{1}{18}x - \frac{1}{18}\right) = \frac{1}{18}e^{3x}x^2(x-1).$$

Підсумовуючи, отримуємо загальний розв'язок вихідного рівняння:

$$y = C_1 + (C_2x + C_3)e^{3x} + \frac{1}{18}e^{3x}x^2(x-1), \quad C_1,\, C_2,\, C_3 \in \mathbb{R}.$$

Приклад 8. Розв'язати рівняння методом варіації довільних сталих $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}$.

Розв'язання. Запишемо характеристичне рівняння для відповідного лінійного однорідного рівняння $y'' - 2y' + y = 0$ і знайдемо його корені:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = 1.$$

Отже, загальний розв'язок відповідного лінійного однорідного рівняння:

$$y_{\text{з.о.}} = C_1e^x + C_2xe^x, \quad C_1,\, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Тепер запишемо систему (54) для пошуку розв'язку вихідного лінійного неоднорідного рівняння за допомогою методу варіації довільних сталих і розв'яжемо її:

$$\begin{cases} C_1'(x)e^x + C_2'(x)xe^x = 0 \\ C_1'(x)e^x + C_2'(x)(e^x + xe^x) = \dfrac{e^x}{x} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} C_1'(x) + C_2'(x)x = 0 \\ C_1'(x) + C_2'(x)(1+x) = \dfrac{1}{x} \end{cases}$$

Звідси $C_2'(x) = \dfrac{1}{x}$ і $C_1'(x) = -1$, отже, $C_2(x) = \ln x + \tilde{C}_2$ і $C_1(x) = -x + \tilde{C}_1$.

Таким чином, ми отримали загальний розв'язок вихідного лінійного неоднорідного рівняння

$$y = \tilde{C}_1e^x + \tilde{C}_2xe^x - xe^x + xe^x\ln x, \quad \tilde{C}_1,\, \tilde{C}_2 \in \mathbb{R}.$$

При розв'язанні лінійних неоднорідних рівнянь також використовують такий результат.

Теорема (Принцип суперпозиції). *Нехай* $y_i = \varphi_i(x)$, $i = 1, \ldots, k$ *– частинні розв'язки* k *лінійних неоднорідних рівнянь*

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_ny = f_i(x), \quad i = 1, \ldots, k$$

відповідно, де $a_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, n$, $f_i(x) : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, k$ –

задані функції. Тоді $y(x)=\sum\limits_{i=1}^{k}\varphi_i(x)$ *– частинний розв'язок рівняння* $y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}y'+a_ny=\sum\limits_{i=1}^{k}f_i(x)$.

Вправи

У задачах 191–200 знайти загальний розв'язок рівняння:

191. $y''+3y'+2y=0$.

192. $y''-8y'+16y=0$.

193. $y''-8y'=0$.

194. $y''-2y'+9y=0$.

195. $y'''+8y=0$.

196. $y''-2y=0$.

197. $y^{(4)}-5y''+4y=0$.

198. $y'''-2y''+9y'-18y=0$.

199. $y^{(4)}+4y'''+6y''+4y'+y=0$.

200. $y^{(5)}-6y^{(4)}+9y'''=0$.

У задачах 201–204 розв'язати рівняння методом Лагранжа:

201. $y''+y=\operatorname{tg}x$.

202. $y''+3y'+2y=\dfrac{1}{e^x-1}$.

203. $y''+2y'+y=e^{-x}\sqrt{x-1}$.

204. $y''+y'+2y=\dfrac{1}{\sin x}$.

У задачах 205–210 розв'язати рівняння, шукаючи частинні розв'язки МНК:

205. $y''-5y'+6y=6x^2-10x+2$.

206. $y''-y=2e^x$.

207. $y''+y'-2y=3xe^x$.

208. $y^{(4)}-y=4e^x$.

209. $y^{(4)}+y'''=2\cos x$.

210. $y''+3y'-4y=e^{-4x}+xe^{-x}$.

У задачах 211–214 користуючись МНК, написати вигляд частинного розв'язку рівняння, не шукаючи значень коефіцієнтів:

211. $y''-y=xe^x\sin x$.

212. $y''+7y'+10y=xe^{-2x}\cos 5x$.

213. $y^{(4)}-4y'''+8y''-8y'+4y=e^x(\sin x+x\cos x)$.

214. $y'''-2y''+4y'-8y=e^{2x}\sin 2x+2x^2$.

У задачах 215–218 розв'язати рівняння, звівши їх до лінійних рівнянь зі сталими коефіцієнтами:

215. $x^2y''-xy'-3y=0$.

216. $x^3y'''+xy'-y=0$.

217. $x^2y''-xy'-3y=5x^4$.

218. $x^2y''-xy'=-x+\dfrac{3}{x}$.

Лабораторна робота, комп'ютерний практикум 5

Задача 1. Записати загальний розв'язок лінійного рівняння зі сталими коефіцієнтами, при цьому частинний розв'язок неоднорідного рівняння подати у вигляді суми двох доданків, один з яких шукати за допомогою методу невизначених коефіцієнтів, інший за допомогою методу варіації довільних сталих.

Варіанти завдань.

1. $y'' - 2y' + 2y = e^x + \dfrac{e^x}{\sin x}$.

2. $y''' + y' = \cos^3 x + \dfrac{1}{\cos x}$.

3. $y'' - 6y' + 9y = \dfrac{e^{3x}}{x^2} + xe^{3x}$.

4. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x} + xe^{2x}$.

5. $x^3(y'' - y) = x^2 - 2 + x^{-4}e^x$.

6. $y'' + 2y' + y = xe^x + \dfrac{1}{xe^x}$.

7. $y''+2y'+5y = e^{-x}(\cos^2 x+\operatorname{tg} x)$.

8. $y'' + y = 3\sin x + \operatorname{ctg} x$.

9. $y''' + y' = \sin^3 x + \dfrac{2+x^2}{x^3}$.

10. $y'' + 4y = 2\operatorname{tg} x + \cos^2 x$.

11. $y''' - 3y' + 2y = 9e^x + \dfrac{e^x}{e^x+1}$.

12. $y'' + 2y' + y = 5e^{-x}\sqrt{x+1} + (3x+7)e^x$.

Задача 2. Для рівняння з Задачі 1 знайти розв'язок задачі Коші, що задовольняє заданим початковим умовам:

Варіанти завдань.

1. $y(-\frac{3}{2}) = -3,\ \ y'(-\frac{3}{2}) = 2$.

2. $y(-1) = 1,\ \ y'(-1) = 2,\ \ y''(-1) = 3$.

3. $y(2) = 2,\ \ y'(2) = -1$.

4. $y(3) = \frac{2}{3},\ \ y'(3) = 2$.

5. $y(-2) = -4,\ \ y'(-2) = 2$.

6. $y(\frac{3}{2}) = 2,\ \ ,\ y'(\frac{3}{2}) = -4$.

7. $y(1) = 3,\ \ y'(1) = \frac{1}{2}$.

8. $y(-3) = 4,\ \ y'(-3) = -1$.

9. $y(1) = -3,\ \ y'(1) = 1,\ \ y''(1) = 2$.

10. $y(0) = -\frac{2}{3},\ \ y'(0) = \frac{3}{2}$.

11. $y(2) = 2,\ \ y'(2) = 4,\ \ y''(2) = -1$.

12. $y(0) = 3,\ \ y'(0) = -7$.

Задача 3. Розв'язати рівняння, звівши їх до лінійних рівнянь зі сталими коефіцієнтами:

Варіанти завдань.

1. $(2x+1)^2y'' - 4(2x+1)y' + 8y = -8x - 4.$

2. $x^2y'' - xy' + y = 6x\ln x.$

3. $x^2y'' - xy' = -x + \frac{3}{x}.$

4. $x^2y'' + xy' + y = 2\sin(\ln x).$

5. $x^2y'' - xy' + y = 8x^3.$

6. $x^2y'' + xy' + 4y = 10x.$

7. $x^3y'' - 2xy = 6\ln x.$

8. $x^2y'' - 6xy = 5x^3 + 8x^2.$

9. $(x-2)^2y'' - 3(x-2)y' + 4y = x.$

10. $(2x+3)^3y''' + 3(2x+3)y' - 6y = 0.$

11. $x^2y'' - 2y = \dfrac{3x^2}{x+1}.$

12. $x^2y'' - xy' + y = \dfrac{\ln x}{x} + \dfrac{x}{\ln x}.$

12. Лінійні системи диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами

Розглядаємо лінійну однорідну систему (ЛОС) диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами вигляду

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}, \tag{60}$$

де $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))^T$ – невідома вектор-функція незалежної змінної t, $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ – стала матриця розміру $n \times n$.

Фундаментальна система розв'язків системи (60) будується аналогічним чином, як і для лінійних однорідних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

Многочлен $P(\lambda) = \det(A - \lambda E)$ називається *характеристичним поліномом* системи (60).

Для знаходження розв'язків системи (60) потрібно знайти корені $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\} \in \mathbb{C}$ характеристичного полінома $P(\lambda)$.

Кожному простому дійсному кореню λ_j характеристичного полінома відповідає розв'язок системи (60) вигляду

$$\mathbf{x}_j(t) = e^{\lambda_j t}\mathbf{h}_j,$$

де $\mathbf{h}_j$ – власний вектор матриці A, що відповідає власному числу λ_j.

Якщо кореню λ кратності $k > 1$ відповідає рівно k лінійно незалежних власних векторів $\mathbf{h}_1, \ldots, \mathbf{h}_k$, то цьому власному числу відповідає k лінійно незалежних розв'язків системи (60)

$$\mathbf{x}_j(t) = e^{\lambda t}\mathbf{h}_j, \quad j = 1, \ldots, k.$$

Якщо кореню λ кратності $k > 1$ відповідає m менше, ніж k ($m < < k$), лінійно незалежних власних векторів $\mathbf{h}_1, \ldots, \mathbf{h}_m$, то кожному власному вектору $\mathbf{h}_j$ відповідає p_j (де p_j – розмір клітини Жордана, що відповідає вектору $\mathbf{h}_j$) розв'язків системи (60) вигляду

$$\mathbf{x}_{j,1}(t) = e^{\lambda t}\mathbf{h}_j,$$

$$\mathbf{x}_{j,2}(t) = e^{\lambda t}\left(t\mathbf{h}_j + \mathbf{h}_{j,1}\right),$$

$$\mathbf{x}_{j,3}(t) = e^{\lambda t}\left(\frac{t^2}{2!}\mathbf{h}_j + t\mathbf{h}_{j,1} + \mathbf{h}_{j,2}\right),$$

$$\ldots$$

$$\mathbf{x}_{j,p_j}(t) = e^{\lambda t}\left(\frac{t^{p_j-1}}{(p_j-1)!}\mathbf{h}_j + \frac{t^{p_j-2}}{(p_j-2)!}\mathbf{h}_{j,1} + \cdots + \frac{t}{1!}\mathbf{h}_{j,p_j-1} + \mathbf{h}_{j,p_j}\right),$$

де $\mathbf{h}_j$ — власний вектор матриці A, $\mathbf{h}_{j,1}, \ldots, \mathbf{h}_{j,p_j}$ — приєднані вектори, які визначаються із системи:

$$\begin{aligned}
&(A-\lambda E)\mathbf{h}_j = 0, \quad \mathbf{h}_j \neq 0,\\
&(A-\lambda E)\mathbf{h}_{j,1} = \mathbf{h}_j,\\
&(A-\lambda E)\mathbf{h}_{j,2} = \mathbf{h}_{j,1},\\
&\ldots\ldots\\
&(A-\lambda E)\mathbf{h}_{j,p_j} = \mathbf{h}_{j,p_j-1},
\end{aligned}$$

система $(A-\lambda E)\mathbf{h}_{j,p_j+1} = \mathbf{h}_{j,p_j}$ є несумісною і, відповідно, вектор $\mathbf{h}_{j,p_j+1}$ не може бути визначений і, крім того, несумісність цієї системи є умовою для визначення кількості розв'язків (розміру клітини Жордана), що відповідає вектору $\mathbf{h}_j$. Загальна кількість розв'язків системи (60), що відповідають кратному власному числу λ, дорівнює кратності цього власного числа.

Парі комплексно спряжених простих власних чисел $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \pm i\beta \in \mathbb{C}$ відповідає пара дійсних розв'язків системи (60)

$$\mathbf{x}_1(t) = \operatorname{Re}\mathbf{z}(t), \quad \mathbf{x}_2(t) = \operatorname{Im}\mathbf{z}(t),$$

де $\mathbf{z}(t) = e^{(\alpha+i\beta)t}\mathbf{h}$, $\mathbf{h}$ — власний вектор (з комплексними координатами), що відповідає власному числу $\alpha + i\beta$.

Після запису всіх часткових розв'язків, що відповідають всім кореням характеристичного полінома, одержуємо n лінійно незалежних розв'язків системи (60): $\{\mathbf{x}_i(t)\}_{i=1}^n$ – фундаментальну систему розв'язків цієї системи.

Матриця $X(t)$ розміру $n \times n$, стовпцями якої слугують елементи фундаментальної системи розв'язків системи (60), називається *фундаментальною матрицею* цієї системи:

$$X(t) = \Big(\mathbf{x}_1(t)\ \mathbf{x}_2(t)\ \cdots\ \mathbf{x}_n(t)\Big).$$

Формула

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i \mathbf{x}_i(t) = X(t)(C_1, \ldots, C_n)^T, \quad C_1, \ldots, C_n \in \mathbb{R},$$

визначає загальний розв'язок системи (60).

Приклад 1. Розв'язати систему $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = 4y - 4x \end{cases}$

Розв'язання. Спочатку запишемо матрицю системи

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}.$$

і складемо характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -4 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad (1-\lambda)(4-\lambda) - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 - 5\lambda = 0.$$

Корені цього рівняння $\lambda_1 = 0$ і $\lambda_2 = 5$.

Для власного числа $\lambda_1 = 0$ власним вектором буде $\mathbf{h}_1 = (1, 1)^T$, а для власного числа $\lambda_2 = 5$ власний вектор $\mathbf{h}_2 = (1, -4)^T$.

Отже, фундаментальна система розв'язків складається з двох вектор-функцій

$$\mathbf{x}_1(t) = e^{0t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2(t) = e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix},$$

а загальний розв'язок має вигляд

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{5t} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 + C_2 e^{5t} \\ C_1 - 4C_2 e^{5t}. \end{pmatrix}$$

Розписуючи покоординатно, отримуємо остаточну відповідь:

$$\begin{cases} x(t) = C_1 + C_2 e^{5t}, \\ y(t) = C_1 - 4C_2 e^{5t}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Приклад 2. Розв'язати систему $\begin{cases} \dot{x} = 2x - 3y, \\ \dot{y} = 3x + 2y; \end{cases}$

Розв'язання. Спочатку запишемо матрицю системи

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

та складемо характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -3 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad (2-\lambda)^2 - (-3)3 = 0 \quad \Rightarrow \quad (\lambda-2)^2 + 9 = 0.$$

Воно має пару комплексно-спряжених коренів $\lambda_{1,2} = 2 \pm 3i$. Знайдемо власний вектор, що відповідає власному числу $\lambda_1 = 2 + 3i$:

$$\begin{pmatrix} -3i & -3 \\ 3 & -3i \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} i & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \mathbf{h} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}.$$

Отже, до ФСР увійдуть дійснозначні вектор-функції, що є дійсною та уявною частиною комплекснозначної вектор-функції

$$\mathbf{z}(t) = e^{(2+3i)t} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = e^{2t} (\cos 3t + i \sin 3t) \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} e^{2t} \cos 3t \\ e^{2t} \sin 3t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} e^{2t} \sin 3t \\ -e^{2t} \cos 3t \end{pmatrix}.$$

Тому отримуємо загальний розв'язок

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} e^{2t} \cos 3t \\ e^{2t} \sin 3t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} e^{2t} \sin 3t \\ -e^{2t} \cos 3t \end{pmatrix},$$

або у координатній формі

$$\begin{cases} x(t) = C_1 e^{2t} \cos 3t + C_2 e^{2t} \sin 3t, \\ y(t) = C_1 e^{2t} \sin 3t - C_2 e^{2t} \cos 3t, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Приклад 3. Розв'язати систему $\begin{cases} x' = 3x - y \\ y' = 4x - y \end{cases}$

Розв'язання. Спочатку запишемо матрицю системи

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

і складемо характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 4 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad (3-\lambda)(-1-\lambda) + 4 = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0.$$

Це рівняння має один корінь кратності два: $\lambda_{1,2} = 1$.

В загальному вигляді власний вектор, що відповідає $\lambda_1 = 1$, має вигляд $\mathbf{h}_0 = (a, 2a)$. Тепер знайдемо приєднаний до нього

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 2a \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b - c = a \\ 4b - 2c = 2a \end{cases} \Rightarrow c = 2b - a \Rightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} b \\ 2b - a \end{pmatrix}.$$

Остаточно отримуємо

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = te^t \begin{pmatrix} a \\ 2a \end{pmatrix} + e^t \begin{pmatrix} b \\ 2b - a \end{pmatrix},$$

тобто загальний розв'язок вигляду

$$\begin{cases} x(t) = ate^t + be^t, \\ y(t) = 2ate^t + (2b - a)e^t, \quad a, b \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Вправи

Розв'язати лінійні однорідні системи диференціальних рівнянь:

219. $\begin{cases} \dot{x} = 5x - 6y + z; \\ \dot{y} = x - z \\ \dot{z} = -6z. \end{cases}$

220. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y; \\ \dot{y} = 2y + z \\ \dot{z} = 2z. \end{cases}$

221. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y; \\ \dot{y} = -6x - 3y. \end{cases}$

222. $\begin{cases} \dot{x} = x - 2y; \\ \dot{y} = 6x - 5y. \end{cases}$

223. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y - z; \\ \dot{y} = 12x - 4y - 12z \\ \dot{z} = -4x + y + 5z. \end{cases}$

224. $\begin{cases} \dot{x} = -3x + 4y - 2z; \\ \dot{y} = x + z; \\ \dot{z} = 6x - 6y + 5z, \end{cases}$

Розв'язати задачу Коші

225. $\begin{cases} \dot{x} = y + z; & x(0) = -1; \\ \dot{y} = x + z & y(0) = 1; \\ \dot{z} = x + y; & z(0) = 0. \end{cases}$

13. Знаходження розв'язків лінійних неоднорідних систем

Розв'язки лінійної неоднорідної системи (ЛНС) вигляду

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{f}(t), \tag{61}$$

де $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ – шукана n-вимірна вектор-функція, A – стала матриця розміру $n \times n$, $\mathbf{f}(t) \in C(a,b) \to \mathbb{R}^n$ – задана n-вимірна вектор функція, можна записати у вигляді

$$\mathbf{x}_{\text{з.н.}} = \mathbf{x}_{\text{з.о.}} + \mathbf{x}_{\text{ч.н.}}, \tag{62}$$

де $\mathbf{x}_{\text{з.о.}}$ – загальний розв'язок відповідної однорідної системи

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}, \tag{63}$$

а $\mathbf{x}_{\text{ч.н.}}$ – частинний розв'язок неоднорідної системи (61).

Для відшукання $\mathbf{x}_{\text{ч.н.}}$ застосовуються два основні методи: метод невизначених коефіцієнтів і метод варіації довільних сталих.

Метод невизначених коефіцієнтів – це метод пошуку $\mathbf{x}_{\text{ч.н.}}$ у випадку спеціального вигляду правої частини $\mathbf{f}(t)$. А саме, якщо

$$\mathbf{f}(t) = e^{\alpha t}\mathbf{P}_m(t) = e^{\alpha t}(\mathbf{b}_0 t^m + \mathbf{b}_1 t^{m-1} + \ldots + \mathbf{b}_{m-1} t + \mathbf{b}_m),$$

де $b_i \in \mathbb{R}^n$, $i = \overline{0,m}$, – деякі сталі вектори, то частинний розв'язок можемо шукати у вигляді

$$\mathbf{x}_{\text{ч.н.}} = e^{\alpha t}\mathbf{Q}_{m+l}(t),$$

де l – максимальний з розмірів жорданових клітин, що відповідають числу α в жордановій нормальній формі матриці A. Зокрема, $l \le k$, де k – кратність числа α, як кореня характеристичного рівняння, $l = 0$, якщо α не є коренем характеристичного рівняння та $l = 1$ для простого кореня характеристичного рівняння.

Приклад 1. Розв'язати систему $\begin{cases} \dot{x} = 3x + 2y + 4e^{5t}, \\ \dot{y} = x + 2y. \end{cases}$

Розв'язання. Скористаємося формулою (62) і спочатку знайдемо загальний розв'язок відповідної однорідної системи. Для цього запишемо матрицю системи і складемо характеристичне рівняння

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad (3-\lambda)(2-\lambda) - 1 \cdot 2 = 0.$$

Таким чином, приходимо до характеристичного рівняння $\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$, яке має корені $\lambda_1 = 1$ та $\lambda_2 = 4$. Знайдемо відповідні власні вектори.

$$\underline{\lambda_1 = 1}: \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \mathbf{h}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix};$$

$$\underline{\lambda_2 = 4}: \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \mathbf{h}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Отже, одержуємо загальний розв'язок ЛОС

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\text{з.о.}} = C_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^{4t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Для знаходження частинного розв'язку вихідної лінійної неоднорідної системи скористаємося методом невизначених коефіцієнтів.

Оскільки права частина має вигляд

$$\mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} 4e^{5t} \\ 0 \end{pmatrix} = e^{5t} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} = e^{5t} \mathbf{P}_0(t),$$

і $\alpha = 5$ не є власним числом матриці системи, то відповідно до методу невизначених коефіцієнтів шукаємо частинний розв'язок у вигляді

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\text{ч.н.}} = e^{5t} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

де a, b – невизначені числові коефіцієнти, що знаходяться підстановкою в систему записаної функції:

$$\begin{cases} x_{\text{ч.н.}}(t) = ae^{5t}, \\ y_{\text{ч.н.}}(t) = be^{5t}; \end{cases} \quad \text{та} \quad \begin{cases} \dot{x}_{\text{ч.н.}}(t) = 5ae^{5t}, \\ \dot{y}_{\text{ч.н.}}(t) = 5be^{5t}. \end{cases}$$

Підставляючи, маємо

$$\begin{cases} 5ae^{5t} = 3ae^{5t} + 2be^{5t} + 4e^{5t}, \\ 5be^{5t} = ae^{5t} + 2be^{5t}; \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 5a = 3a + 2b + 4, \\ 5b = a + 2b; \end{cases}$$

З останньої системи знаходимо, що $a = 3$, $b = 1$, тобто

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\text{ч.н.}} = e^{5t} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, отримуємо загальний розв'язок ЛНС у векторній формі

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\text{з.н.}} = C_1e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2e^{4t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{5t} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

або в координатній формі:

$$\begin{cases} x(t) = C_1e^t + 2C_2e^{4t} + 3e^{5t}, \\ y(t) = -C_1e^t + C_2e^{4t} + e^{5t}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Метод невизначених коефіцієнтів також можна застосовувати у випадку, якщо права частина системи (61) має вигляд

$$\mathbf{f}(t) = e^{\alpha t} \left(\mathbf{P}_{m_1}(t) \cos \beta t + \mathbf{Q}_{m_2}(t) \sin \beta t \right).$$

Тоді

$$\mathbf{x}_{\text{ч.н.}} = e^{\alpha t} \left(\mathbf{R}_{m+l}(t) \cos \beta t + \mathbf{S}_{m+l}(t) \sin \beta t \right),$$

де $m = \max\{m_1, m_2\}$, l максимальний з розмірів жорданових клітин, що відповідають числу $\sigma = \alpha + i\beta$ в жордановій нормальній формі матриці A. Зокрема, $l = 0$, якщо σ не є коренем характеристичного рівняння, та для дво- та тривимірних систем $l = 1$, якщо σ корінь характеристичного рівняння.

Приклад 2. Розв'язати систему $\begin{cases} \dot{x} = y - 5\cos t, \\ \dot{y} = 2x + y; \end{cases}$

Розв'язання. Спочатку знайдемо загальний розв'язок відповідної однорідної системи, для цього запишемо матрицю системи і складемо характеристичне рівняння

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad (-\lambda)(1-\lambda) - 1 \cdot 2 = 0.$$

Отримали характеристичне рівняння $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$ з коренями $\lambda_1 = -1$ та $\lambda_2 = 2$. Знаходячи відповідні власні вектори

$$\underline{\lambda_1 = -1}: \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \mathbf{h}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$\underline{\lambda_2 = 2}: \quad \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \mathbf{h}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix};$$

остаточно одержуємо

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\text{з.о.}} = C_1e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Для знаходження частинного розв'язку вихідної неоднорідної системи скористаємося методом невизначених коефіцієнтів.

Оскільки права частина має вигляд

$$\mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} -5\cos t \\ 0 \end{pmatrix} = e^{0t}\left(\begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix}\cos t + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\sin t\right) =$$

$$= e^{0t}\left(\mathbf{P}_0^{(1)}(t)\cos t + \mathbf{P}_0^{(2)}(t)\sin t\right),$$

і число $\sigma = 0+1\cdot i = i$ не є власним числом матриці системи, то частинний розв'язок шукаємо у вигляді

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\text{ч.н.}} = e^{0t}\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\cos t + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}\sin t\right) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\cos t + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}\sin t,$$

де коефіцієнти a, b, c, d знаходимо, підставляючи записані функції

$$\begin{cases} x_{\text{ч.н.}}(t) = a\cos t + c\sin t, \\ y_{\text{ч.н.}}(t) = b\cos t + d\sin t; \end{cases} \quad \text{та} \quad \begin{cases} \dot{x}_{\text{ч.н.}}(t) = -a\sin t + c\cos t, \\ \dot{y}_{\text{ч.н.}}(t) = -b\sin t + d\cos t. \end{cases}$$

у вихідну систему:

$$\begin{cases} -a\sin t + c\cos t = b\cos t + d\sin t - 5\cos t, \\ -b\sin t + d\cos t = 2a\cos t + 2c\sin t + b\cos t + d\sin t. \end{cases}$$

Прирівнюючи коефіцієнти при лінійно незалежних функціях $\sin t$ і $\cos t$ приходимо до системи чотирьох лінійних рівнянь відносно чотирього змінних a, b, c, d :

$$\begin{cases} -a = d, \\ c = b - 5, \\ -b = 2c + d \\ d = 2a + b; \end{cases}$$

з якої знаходимо $a = -1$, $b = 3$, $c = -2$, $d = 1$. Отже,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\text{ч.н.}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}\cos t + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\sin t.$$

Отже, маємо загальний розв'язок вихідної ЛНС

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\text{з.н.}} = C_1 e^{-t}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}\cos t + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\sin t,$$

або у координатній формі

$$\begin{cases} x(t) = -C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t} - \cos t - 2\sin t, \\ y(t) = C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{2t} + 3\cos t + \sin t, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

У випадку довільної правої частини використовують *метод варіації довільних сталих.*

Нехай загальний розв'язок ЛОС має вигляд

$$\mathbf{x}(t) = X(t)\mathbf{C},$$

де $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^n$ – вектор довільних сталих, $X(t)$ – фундаментальна матриця системи (63). Відповідно до методу варіації довільних сталих будемо шукати розв'язок ЛНС (61) у вигляді

$$\mathbf{x}(t) = X(t)\mathbf{C}(t), \tag{64}$$

де вектор-функція $\mathbf{C}(t)$ визначається таким чином, щоб (64) був розв'язком (61), а саме з системи

$$X(t)\mathbf{C}'(t) = \mathbf{f}(t).$$

Приклад 3. Розв'язати систему $\begin{cases} \dot{x} = y + \mathrm{tg}^2\ t - 1, \\ \dot{y} = -x + \mathrm{tg}\ t. \end{cases}$

Розв'язання. Спочатку знайдемо загальний розв'язок відповідної однорідної системи. Для цього запишемо матрицю та характеристичне рівняння системи:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad (-\lambda)(-\lambda) - 1 \cdot 1 = 0.$$

Таким чином, отримали характеристичне рівняння $\lambda^2 + 1 = 0$, яке має пару суто уявних коренів $\lambda_{1,2} = \pm i$. Тепер знайдемо власний вектор для числа $\lambda_1 = i$:

$$\begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -i & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -i & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

Далі записуємо комплексно-значну вектор-функцію

$$\mathbf{z}(t) = e^{it}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = (\cos t + i \sin t)\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix},$$

дійсна та уявна частина якої утворює ФСР відповідної ЛОС системи. Отже, загальний розв'язок ЛОС

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\text{з.о.}} = C_1\begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}.$$

У відповідності з методом варіації довільних сталих загальний розв'язок ЛНС шукаємо у вигляді

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\text{з.н.}} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{pmatrix},$$

де функції $C_1(t)$, $C_2(t)$ знаходяться з системи

$$\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1'(t) \\ C_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{tg}^2\, t - 1 \\ \mathrm{tg}\, t \end{pmatrix},$$

або

$$\begin{cases} C_1'(t)\cos t + C_2'(t)\sin t = \mathrm{tg}^2\, t - 1, \\ -C_1'(t)\sin t + C_2'(t)\cos t = \mathrm{tg}\, t. \end{cases}$$

Звідси знаходимо

$$\begin{cases} C_1'(t) = -\cos t, \\ C_2'(t) = \sin t\ \mathrm{tg}^2 t. \end{cases}$$

Інтегруючи отримані вирази, маємо

$$\begin{cases} C_1(t) = -\sin t + \tilde{C}_1, \\ C_2(t) = \cos t + \dfrac{1}{\cos t} + \tilde{C}_2. \end{cases}$$

Підставляючи знайдені значення $C_1(t)$, $C_2(t)$, маємо загальний розв'язок вихідної ЛНС

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin t + C_1 \\ \cos t + \dfrac{1}{\cos t} + C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1\cos t + C_2\sin t + \mathrm{tg}\, t \\ -C_1\sin t + C_2\cos t + 2. \end{pmatrix}$$

або у координатній формі

$$\begin{cases} x(t) = C_1\cos t + C_2\sin t + \mathrm{tg}\, t, \\ y(t) = -C_1\sin t + C_2\cos t + 2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Для лінійних неоднорідних систем, як і для лінійних неоднорідних рівнянь n-го порядку має місце *принцип суперпозиції*: якщо у лінійній неоднорідній системі (61) вектор-функція $\mathbf{f}$ є сумою двох вектор-функцій

$$\mathbf{f}(t) = \mathbf{f}_1(t) + \mathbf{f}_2(t),$$

то і частинний розв'язок можна шукати у вигляді суми двох частинних розв'язків

$$\mathbf{x}_{\text{ч.н.}}(t) = \mathbf{x}_1(t) + \mathbf{x}_2(t),$$

де $\mathbf{x}_i(t)$ – розв'язок лінійної неоднорідної системи (61) з неоднорідністю $\mathbf{f}_i(t)$, $i = 1, 2$.

Вправи

Розв'язати лінійні неоднорідні системи методом невизначених коефіцієнтів:

226. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - 3y; \\ \dot{y} = x - 2y + 2\sin t. \end{cases}$

227. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 4y - 8; \\ \dot{y} = 3x + 6y. \end{cases}$

228. $\begin{cases} \dot{x} = 4x - 3y + \sin t; \\ \dot{y} = 2x - y + 2\cos t. \end{cases}$

229. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y; \\ \dot{y} = 2y - x - 5e^t \sin t. \end{cases}$

230. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y + e^t; \\ \dot{y} = -2x + 2t. \end{cases}$

231. $\begin{cases} \dot{x} = t^2 + 6t + 1 - y; \\ \dot{y} = x - 3t^2 + 3t + 1. \end{cases}$

232. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y - 2z - t + 2; \\ \dot{y} = 1 - x; \\ \dot{z} = x + y - z - t + 1. \end{cases}$

233. $\begin{cases} \dot{x} = -x - y + t^2; \\ \dot{y} = -y - z + 2t; \\ \dot{z} = -z + t. \end{cases}$

234. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y; \\ \dot{y} = y - 2x + 18t. \end{cases}$

235. $\begin{cases} \dot{x} = 5x - 3y + 2e^{3t}; \\ \dot{y} = x + y + 5e^{-t}. \end{cases}$

236. $\begin{cases} \dot{x} = y + 2e^t; \\ \dot{y} = x + t^2. \end{cases}$

237. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y + 2e^t; \\ \dot{y} = x + 2y - 3e^{4t}. \end{cases}$

Розв'язати системи методом варіації довільних сталих:

238. $\begin{cases} \dot{x} = x - y + \dfrac{1}{\cos t}; \\ \dot{y} = 2x - y. \end{cases}$

239. $\begin{cases} \dot{x} = -4x - 2y + \dfrac{2}{e^t - 1}; \\ \dot{y} = 6x + 3y - \dfrac{3}{e^t - 1}. \end{cases}$

240. $\begin{cases} \dot{x} = 2y - x; \\ \dot{y} = 4y - 3x + \dfrac{e^{3t}}{e^{2t} + 1}. \end{cases}$

241. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y; \\ \dot{y} = 2x - y + 15e^t\sqrt{t}. \end{cases}$

Лабораторна робота, комп'ютерний практикум 6

Задача 1. Розглядається система диференціальних рівнянь

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y} + \mathbf{f}(t), \tag{65}$$

де A – стала матриця розміру 3×3; $\mathbf{y}$, $\mathbf{f}(t)$ – тривимірні вектори.

1) Знайти загальний розв'язок відповідної лінійної однорідної системи $y' = Ay$.
2) Знайти загальний розв'язок неоднорідної системи (65), використовуючи метод невизначених коефіцієнтів.
3) Знайти розв'язок задачі Коші з початковими даними $x(0) = 0$, $y(0) = 0$, $z(0) = 0$.

Варіанти завдань.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $f(t) = \begin{pmatrix} e^{3t} + 2e^t \\ 2e^{3t} + e^t \\ -e^{3t} \end{pmatrix}$.

2. $A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & -5 \\ 3 & 2 & -3 \\ 7 & 1 & -6 \end{pmatrix}$, $f(t) = \begin{pmatrix} 2e^{-2t} \\ -e^{-2t} \\ e^{-2t} + e^{-t} \end{pmatrix}$.

3. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$, $f(t) = \begin{pmatrix} -e^{2t} \\ 3e^{2t} \\ e^{2t} + 1 \end{pmatrix}$.

4. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 4 & -2 \\ 1 & 5 & -3 \end{pmatrix}$, $f(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ -2\cos t \\ -\sin t + e^t \end{pmatrix}$.

5. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$, $f(t) = \begin{pmatrix} \cos t + e^{-t} \\ 2\sin t \\ -\cos t \end{pmatrix}$.

6. $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{pmatrix}$, $f(t) = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} t \\ -e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix}$.

7. $A = \begin{pmatrix} 9 & 22 & -6 \\ -1 & -4 & 1 \\ 8 & 16 & -5 \end{pmatrix}$, $f(t) = \begin{pmatrix} 3e^t \\ -e^t - 5e^{-2t} \\ 2e^t \end{pmatrix}$.

8. $A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & -5 \\ 3 & -4 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $f(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ e^{-4t} \\ 2 \end{pmatrix}$.

9. $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -8 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $f(t) = \begin{pmatrix} -e^{t} \\ 5e^{t}+1 \\ 3e^{t} \end{pmatrix}$.

10. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $f(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^{t} \\ 2e^{t} \end{pmatrix}$.

11. $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $f(t) = \begin{pmatrix} 2e^{-t} \\ 2\operatorname{sh} t \\ 2e^{t} \end{pmatrix}$.

12. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $f(t) = \begin{pmatrix} 24 \\ -e^{2t} \\ 2e^{2t} \end{pmatrix}$.

Задача 2. Використовуючи метод варіації довільних сталих, знайти загальний розв'язок системи диференціальних рівнянь

Варіанти завдань.

1. $\begin{cases} \dot{x} = -3x + y + \dfrac{2e^{-2t}\ln t}{t}, \\ \dot{y} = -x - y. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dot{x} = -2x - 3y + \dfrac{e^{t}}{\sin t}, \\ \dot{y} = 6x + 4y. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dot{x} = -2x - 3y, \\ \dot{y} = 3x + 4y - \dfrac{e^{t}}{t^2}. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dot{x} = -2x + 13y, \\ \dot{y} = -x + 4y - e^{t}\operatorname{ctg} 2t. \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dot{x} = 5x - 2y + e^{3t}\sqrt{t}, \\ \dot{y} = 2x + y - \dfrac{e^{3t}}{\sqrt{t}}. \end{cases}$

6. $\begin{cases} \dot{x} = -4x - 2y + \dfrac{2e^{-t}}{\cos t}, \\ \dot{y} = 5x + 2y - \dfrac{3e^{-t}}{\cos t}. \end{cases}$

7. $\begin{cases} \dot{x} = -x - 2y + e^{-3t}t^{-\frac{3}{2}}, \\ \dot{y} = 2x - 5y - e^{-3t}t^{\frac{3}{2}}. \end{cases}$

8. $\begin{cases} \dot{x} = -2x - 5y + \dfrac{5e^{t}}{\cos t}, \\ \dot{y} = 2x + 4y - \dfrac{3e^{t}}{\cos t}. \end{cases}$

9. $\begin{cases} \dot{x} = -4x + 3y - \dfrac{2e^{-t}\ln t}{t}, \\ \dot{y} = -3x + 2y. \end{cases}$

10. $\begin{cases} \dot{x} = -4x + 6y, \\ \dot{y} = -3x + 2y + \dfrac{3e^{-t}}{\cos 3t}. \end{cases}$

11. $\begin{cases} \dot{x} = x + y + e^{2t}\ln t, \\ \dot{y} = -x + 3y - e^{2t}\ln t. \end{cases}$

12. $\begin{cases} \dot{x} = -4x + y - e^{-t}\operatorname{tg} 2t, \\ \dot{y} = -13x + 2y. \end{cases}$

14. Стійкість розв'язків систем диференціальних рівнянь

Розглядаємо систему

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \tag{66}$$

де $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$, $\mathbf{f}(t,) = (f_1(t, \mathbf{x}), \ldots, f_n(t, \mathbf{x}))^T$, визначену в області $\Omega = [a, \infty) \times D$, $D \subset \mathbb{R}^n$. Будемо припускати, що розв'язок задачі Коші з довільними початковими даними існує та єдиний, тобто, наприклад, f_i – неперервні за всіма своїми змінними та неперервно диференційовні по x_i, $i = \overline{1, n}$.

Означення. *Розв'язок* $\mathbf{x}^*(t)$ *системи* (66) *називається стійким за Ляпуновим, якщо цей розв'язок визначений на* $[a, \infty)$ *і для будь-яких* $\varepsilon > 0$ *та* $t_0 \geq a$ *знайдеться таке* $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$, *що для будь-якого розв'язку* $\mathbf{x}(t)$ *цієї ж системи, такого, що* $\|\mathbf{x}(t_0) - \mathbf{x}^*(t_0)\| < \delta$, *він визначений на* $[t_0, \infty)$ *та виконується нерівність* $\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*(t)\| < \varepsilon$ *для всіх* $t > t_0$.

Тут і далі $\| \cdot \|$ – евклідова норма в $\mathbb{R}^n$.

Означення. *Розв'язок* $\mathbf{x}^*(t)$ *системи* (66) *називається асимптотично стійким за Ляпуновим, якщо цей розв'язок є стійким за Ляпуновим і для будь-якого* $t_0 \geq a$ *можна вказати* $\Delta = \Delta(t_0) > > 0$ *таке, що для кожного розв'язку* $\mathbf{x}(t)$ *цієї ж системи такого, що* $\|\mathbf{x}(t_0) - \mathbf{x}^*(t_0)\| < \Delta$, *виконується*

$$\lim_{t \to \infty} \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*(t)\| = 0.$$

Якщо ж $\Delta = +\infty$, *то розв'язок називають стійким всюди.*

Розв'язок $\mathbf{x}^*(t)$ системи (66) називається *нестійким*, якщо він не є стійким. Зокрема, розв'язок, який не продовжується на $[a, +\infty)$ є нестійким. Якщо розв'язок нестійкий і існує на $[a, +\infty)$, то знайдуться такі $\varepsilon > 0$ та $t_0 \geq 0$, що для кожного $\delta > 0$ знайдеться розв'язок $\widetilde{\mathbf{x}}(t)$ системи (66) такий, що $||\widetilde{\mathbf{x}}(t_0) - \mathbf{x}^*(t_0)|| < \delta$, однак для деякого $T = T(\delta, \varepsilon, t_0) > t_0$ виконується нерівність $||\widetilde{\mathbf{x}}(T) - \varphi(T)|| > \varepsilon$.

Зауважимо, що питання стійкості розв'язку $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*(t)$ системи (66) заміною $\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*(t)$ завжди можна звести до дослідження стійкості тривіального розв'язку $\mathbf{y}(t) \equiv 0$.

Приклад 1. Дослідити на стійкість розв'язок задачі Коші

$$3(t-1)\dot{x} = x, \quad x(2) = 0.$$

Розв'язання. Спочатку розв'яжемо рівняння. Відокремлюючи змінні та інтегруючи маємо

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{dt}{3(t-1)} \quad \Rightarrow \quad \ln|x| = \frac{1}{3}\ln|t-1| + C \quad \Rightarrow \quad x(t) = C\sqrt[3]{t-1}.$$

Задовольняючи початкову умову: $x(2) = C = 0$, отримуємо розв'язок $x^*(t) \equiv 0$, що існує для всіх $t \geq 2$.

Отже, нам потрібно дослідити на стійкість нульовий розв'язок $x^*(t) \equiv \equiv 0$. Але для будь-якого іншого розв'язку рівняння, для якого $x(t_0) = x_0$, $t_0 \geq 2$, маємо $x(t) = \dfrac{x_0}{\sqrt[3]{t_0 - 1}}\sqrt[3]{t-1}$, і хоча цей розв'язок і визначений при $t \geq 2$, однак значення $|x(t) - x^*(t)| = \dfrac{|x_0|}{\sqrt[3]{t_0-1}}\sqrt[3]{t-1}$ необмежене при $t \to \infty$, тому тривіальний розв'язок нестійкий.

Строго кажучи, у означенні нестійкості можна взяти $\varepsilon = 1$ та у якості $\widetilde{x}(t)$ – розв'язок з початковою умовою $\widetilde{x}(t_0) = \dfrac{\delta}{2}$. Тоді для $T \geq \dfrac{8}{\delta^3}(t_0 - 1) + 1$ матимемо $|x(T) - x^*(T)| = \dfrac{\delta}{2\sqrt[3]{t_0-1}}\sqrt[3]{T-1} \geq 1$.

Приклад 2. Дослідити на стійкість розв'язок задачі Коші

$$\dot{x} = 4x - t^2 x, \quad x(0) = 0.$$

Розв'язання. Розв'яжемо рівняння. Це рівняння з відокремлюваними змінними, тому

$$\frac{dx}{x} = (4 - t^2)dt \quad \Rightarrow \; \ln|x| = 4t - \frac{1}{3}t^3 + C \quad \Rightarrow \; x(t) = Ce^{4t - \frac{1}{3}t^3},$$

і всі розв'язки визначені на $\mathbb{R}$.

Беручи до уваги початкову умову $x(0) = C = 0$, знаходимо $x^*(t) \equiv 0$.

Для довільного початкового значення $x(t_0) = x_0$ розв'язком буде

$$x(t) = \frac{x_0}{e^{4t_0 - t_0^3/3}} e^{4t - t^3/3}.$$

Отже,

$$|x(t) - x^*(t)| = \left| \frac{x_0}{e^{4t_0 - t_0^3/3}} e^{4t - t^3/3} - 0 \right| = \frac{|x_0|}{e^{4t_0 - t_0^3/3}} e^{4t - t^3/3}.$$

Оскільки для $t \geq 0$ функція $\varphi(t) = 4t - \dfrac{1}{3}t^3$ досягає свого максимального значення $\dfrac{16}{3}$ у точці $t = 2$, то маємо оцінку

$$|x(t) - x^*(t)| = \frac{|x_0|}{e^{4t_0 - \frac{1}{3}t_0^3}} e^{4t - \frac{1}{3}t^3} \leq \frac{|x_0|}{e^{4t_0 - \frac{1}{3}t_0^3}} e^{\frac{16}{3}} < \varepsilon.$$

Тому для довільного $\varepsilon > 0$ та $t_0 \geq a$ знайдеться таке

$$\delta = \delta(\varepsilon, t_0) \in \left(0, \varepsilon \frac{e^{4t_0 - t_0^3/3}}{e^{\frac{16}{3}}}\right),$$

що для будь-якого розв'язку $x(t)$ рівняння, такого, що $|x(t_0) - x^*(t_0)| < \delta$, він визначений на $[t_0, \infty)$ та виконується нерівність $|x(t) - x^*(t)| < \varepsilon$ для всіх $t > t_0$.

Розглянемо лінійну однорідну систему

$$\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x} \tag{67}$$

з неперервними коефіцієнтами на $[a, \infty)$.

Розв'язки лінійної системи (67) одночасно є або стійкі, або асимптотично стійкі, або нестійкі. Тому коректним є поняття стійкості, асимптотичної стійкості, нестійкості лінійних систем.

Теорема (про стійкість лінійної системи). *Для стійкості лінійної однорідної системи* (67) *необхідно і достатньо, щоб її фундаментальна матриця була обмежена на* $[a, \infty)$.

Для асимптотичної стійкості системи (67) *необхідно і достатньо, щоб норма її фундаментальної матриці прямувала до нуля при* $t \to \infty$.

Для нестійкості розв'язків лінійної однорідної системи (67) *необхідно і достатно, щоб її фундаментальна матриця* $X(t)$ *була необмеженою на* $[a, +\infty)$.

Для лінійної однорідної системи зі сталою матрицею

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} \tag{68}$$

дослідження стійкості залежить від характеру власних чисел матриці A. А саме, справедливий наступний результат.

Теорема (Про стійкість лінійної системи зі сталою матрицею). *Якщо всі власні числа матриці* A *мають від'ємні дій-*

сні частини ($\operatorname{Re}\lambda_i < 0$, $i = \overline{1,n}$), то всі розв'язки системи (68) є асимптотично стійкими.

Якщо ж є хоча б одне власне число λ_s з додатною дійсною частиною ($\operatorname{Re}\lambda_s > 0$), то всі розв'язки системи (68) є нестійкими.

Якщо $\operatorname{Re}\lambda_i \le 0$ і, крім того, кожному власному числу з нульовою дійсною частиною відповідають тільки одновимірні клітини Жордана, то всі розв'язки системи (68) є стійкими за Ляпуновим.

Для вивчення $\operatorname{Re}\lambda_i$ не обов'язково знаходити всі λ_i з характеристичного рівняння

$$\det(A - \lambda E) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0. \quad (69)$$

Можна скористатися, наприклад, *критерієм Рауса – Гурвіца.*

Теорема (Критерій Рауса – Гурвіца). *Для того, щоб усі розв'язки рівняння* (69) *мали від'ємні дійсні частини, необхідно і достатньо, щоб головні мінори матриці Гурвіца*

$$\Gamma = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & a_n \end{pmatrix}$$

були додатними: $\Delta_1 = a_1 > 0$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} > 0$ *і т.д.*

Розглянемо n-вимірну автономну систему

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}). \quad (70)$$

Нехай $\mathbf{x}_*$ – положення рівноваги цієї системи (тобто $\mathbf{f}(\mathbf{x}_*) = 0$), $U_{\mathbf{x}_*} \ni \mathbf{x}_*$ – відкритий окіл точки $\mathbf{x}_*$.

Теорема. *Нехай* $\mathbf{f} \in \mathrm{C}^1(U_{\mathbf{x}_*})$ *і* $\mathbf{f}(\mathbf{x}_*) = 0$. *Якщо дійсні частини всіх власних чисел матриці* $A := \dfrac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}_*)}{\partial \mathbf{x}}$ *системи першого наближення є строго від'ємними, то положення рівноваги* $\mathbf{x}_*$ *системи* (70) *є асимптотично стійким.*

Якщо у матриці A існує хоча б одне власне число зі строго *додатною дійсною частиною, то положення рівноваги* $\mathbf{x}_*$ *системи* (70) *є нестійким.*

Приклад 3. Дослідити на стійкість положення рівноваги системи

$$\begin{cases} \dot{x} = 2xy - 4y - 8, \\ \dot{y} = 4y^2 - x^2. \end{cases}$$

Розв'язання. Ми вже досліджували цю систему раніше (система (38)). Тоді ми встановили, що ця система має два положення рівноваги: фокус $(x_1, y_1) = (-2, -1)$ і вузол $(x_2, y_2) = (4, 2)$. (див. Приклад 1 у темі "Фазові портрети автономних систем на площині").

Крім того, ми знайшли власні числа системи першого наближення для кожного положення рівноваги.

А саме, для точки $(x_1, y_1) = (-2, -1) : \lambda_{1,2} = -5 \pm \mathrm{i}\sqrt{23}$, тобто $\operatorname{Re}\lambda_{1,2} = -5 < 0$, а отже, це положення рівноваги асимптотично стійке.

Для іншого положення рівноваги $(x_2, y_2) = (4, 2)$ обидва власні числа $\lambda_1 = 8$ та $\lambda_2 = 12$ додатні, тому це положення рівноваги нестійке.

Підсумовуючи, отримуємо:

– асимптотичний стійкий фокус $(x_1, y_1) = (-2, -1)$;
– нестійкий вузол $(x_2, y_2) = (4, 2)$.

Випадок, коли дійсні частини власних чисел матриці A є недодатними, називається *критичним.* У цьому випадку лише по системі першого наближення характер стійкості положення рівноваги $\mathbf{x}_*$ системи (70) визначити неможливо, тому застосовують інші методи, зокрема, *метод функцій Ляпунова.*

Не обмежуючи загальності, вважатимемо далі, що положенням рівноваги системи (70) є точка $\mathbf{x}_* = 0$.

Уведемо до розгляду функцію $V : U_0 \mapsto \mathbb{R}$, де U_0 – деякий окіл положення рівноваги $\mathbf{x}_* = 0$.

Функцію $V \in \mathrm{C}^1(U_0)$ називають *функцією Ляпунова* системи (70), якщо:

– вона є додатно визначеною в U_0, тобто $V(\mathbf{0}) = 0$, $V(\mathbf{x}) > 0$ для всіх $\mathbf{x} \in U_0 \setminus \{0\}$;

– похідна унаслідок системи

$$\dot{V}_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial x_i} f_i(\mathbf{x}) \equiv (\mathrm{grad} V(\mathbf{x}), \mathbf{f}(\mathbf{x}))$$

є недодатною в $U_0 : \dot{V}_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) \leq 0$ (тут $(\cdot, \cdot)$ позначає скалярний добуток двох векторів).

Теорема (Ляпунова про стійкість). *Якщо система* (70) *в деякому околі* U_0 *має функцію Ляпунова, то положення рівноваги* $\mathbf{x}_* = 0$ *є стійким.*

Теорема (Ляпунова про асимптотичну стійкість). *Якщо система* (70) *в деякому околі* U_0 *має функцію Ляпунова, похідна унаслідок системи якої є від'ємно визначеною в* U_0*, то положення рівноваги* $\mathbf{x}_* = 0$ *є асимптотично стійким.*

Теорема (Ляпунова про нестійкість). *Припустимо, що в околі* $U_0 \ni \mathbf{x}_* = 0$ *для системи* (70) *існують функція* $V(\mathbf{x}) \in \in \mathrm{C}^1(U_0)$*, похідна унаслідок системи якої є знаковизначеною в* U_0*, а сама функція* V *не є знакосталою зі знаком, протилежним* $\dot{V}_f$*, в будь-якому околі нуля. Тоді положення рівноваги* $\mathbf{x}_* = 0$ *є нестійким.*

Теорема (Четаєва). *Якщо для системи* (70) *в деякій області* $D \in \mathbb{R}^n$ *такої, що* $\mathbf{0} \in \partial D$*, існує функція* $V(\mathbf{x})$ *для якої:*

– $V(\mathbf{x}) = 0$ *для всіх* $\mathbf{x} \in \partial D$*,*

– *для довільного* $\mathbf{x} \in D$ *виконуються нерівності* $V(\mathbf{x}) > 0$ *та* $\dot{V}_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) > 0$*,*

то нульовий розв'язок є нестійким.

Єдиного методу побудови функції Ляпунова не існує. Часто її будують у вигляді квадратичної форми або застосовують метод відокремлених змінних.

Приклад 4. Дослідити на стійкість нульовий розв'язок системи

$$\begin{cases} \dot{x} = x^3 - y, \\ \dot{y} = x + y^3. \end{cases}$$

Розв'язання. Спочатку спробуємо застосувати теорему про стійкість за першим наближенням. Виписуємо вектор-функцію правої частини

$$\mathbf{f}(x,y)=\begin{pmatrix} x^3-y \\ x+y^3 \end{pmatrix}$$

та знаходимо матрицю системи першого наближення

$$A=\left.\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial((x,y))}\right|_{(0,0)}=\left.\begin{pmatrix} 3x^2 & -1 \\ 1 & 3y^2 \end{pmatrix}\right|_{(0,0)}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для матриці A характеристичне рівняння $\lambda^2+1=0$ має пару суто уявних коренів $\lambda_{1,2}=\pm i$, тобто $\operatorname{Re}\lambda_{1,2}=0$, а тому теорема про стійкість за першим наближенням не дає відповіді на питання про характер стійкості.

Скористаємося методом функцій Ляпунова. Розглянемо функцію $V(x,y)=x^2+y^2$. Очевидно вона додатно визначена. Підраховуючи похідну унаслідок системи

$$\dot V_{\mathbf{f}}(x,y)=(\mathrm{grad}V(x,y),\mathbf{f}(x,y))=\frac{\partial V}{\partial x}(x^3-y)+\frac{\partial V}{\partial y}(x+y^3)=$$
$$=2x(x^3-y)+2y(x+y^3)=2x^4-2xy+2xy+2y^4=2(x^4+y^4),$$

бачимо, що вона теж додатно визначена. Таким чином, і сама функція V, і її похідна унаслідок системи додатно визначені, а тому за теоремою Ляпунова про нестійкість нульовий розв'язок системи буде нестійким.

Приклад 5. Дослідити на стійкість нульовий розв'язок системи

$$\begin{cases} \dot x=2y^3-x^5; \\ \dot y=-x-y^3+y^5. \end{cases}$$

Розв'язання. Аналогічно попередньому прикладу, застосовуючи теорему про стійкість за першим наближенням, ми отримаємо критичний випадок і не зможемо визначити характер стійкості.

Застосовуючи метод відокремлених змінних, спробуємо підібрати функцію Ляпунова вигляду $V(x,y)=A(x)+B(y)$. Обчислимо похідну унаслідок системи:

$$\dot V_{\mathbf{f}}(x,y)=(\mathrm{grad}V(x,y),\mathbf{f}(x,y))=$$
$$=A'(x)(2y^3-x^5)+B'(y)(-x-y^3+y^5)=$$
$$=2y^3A'(x)-x^5A'(x)-xB'(y)-y^3B'(y)+y^5B'(y)=$$
$$=\big(2y^3A'(x)-xB'(y)\big)-x^5A'(x)-y^3B'(y)+y^5B'(y).$$

Підберемо функції $A(x)$ і $B(y)$ таким чином, щоб обнулити вираз у дужках і похідна унаслідок системи, як і сама функція $V(x,y) = A(x)+B(y)$, мала структуру з відокремленими змінними. Це легко зробити, якщо покласти $A'(x) = x$, $B'(y) = 2y^3$. Тоді $A(x) = \dfrac{x^2}{2}$, $B(y) = \dfrac{y^4}{2}$ і одержуємо

$$V(x,y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^4}{2},$$
$$\dot{V}_{\mathbf{f}} = -x^5 \cdot x - y^3 \cdot 2y^3 + y^5 \cdot 2y^3 = -x^6 - 2y^6 + 2y^8 = -x^6 - 2y^6(1-y^2).$$

Отже, бачимо, що, зокрема, в околі $U_0 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 < \dfrac{1}{2}\right\}$ точки нуль функція $V(x,y)$ додатно визначена, а її похідна унаслідок системи $\dot{V}_{\mathbf{f}}(x,y)$ від'ємно визначена, тому за теоремою Ляпунова про асимптотичну стійкість нульовий розв'язок вихідної системи є асимптотично стійким.

Вправи

242. Дослідити стійкість нульового розв'язку системи, якщо відомий її загальний розв'язок:

а) $x = C_1 \cos^2 t - C_2 e^{-t}, \ \ y = C_1 t^4 e^{-t} + 2C_2, \ \ C_1, C_2 \in \mathbb{R};$

б) $x = \dfrac{C_1 - C_2 t}{1+t}, \ \ y = (C_1 t^3 + C_2)e^{-t}, \ \ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$

243. Користуючись означенням стійкості, для рівняння $\dot{x} = t(x-1)$ дослідити стійкість розв'язки, що задовольняють заданим початковим умовам: а) $x(1) = 2$, б) $x(1) = 0$.

У задачах 244–246 дослідити на стійкість нульовий розв'язок системи:

244. $\begin{cases} \dot{x} = 2x; \\ \dot{y} = x - 5y. \end{cases}$

245. $\begin{cases} \dot{x} = -5x + y; \\ \dot{y} = x - 7y. \end{cases}$

246. $\begin{cases} \dot{x} = x^2 + y^2 - 2x; \\ \dot{y} = 3x^2 - x + 3y. \end{cases}$

247. Дослідити на стійкість розв'язок $x(t) = -t^2, \ y(t) = t$ системи

$$\begin{cases} \dot{x} = y^2 - 2ty - 2y - x; \\ \dot{y} = 2x + 2t^2 + e^{2t-2y}. \end{cases}$$

Дослідити на стійкість нульовий розв'язок системи:

248. $\begin{cases} \dot{x} = y - x + xy; \\ \dot{y} = x - y - x^2 - y^3. \end{cases}$

249. $\begin{cases} \dot{x} = xy - x^3 + y^3; \\ \dot{y} = x^2 - y^3. \end{cases}$

250. $\begin{cases} \dot{x} = 2y - x - y^3; \\ \dot{y} = x - 2y. \end{cases}$

251. $\begin{cases} \dot{x} = -x - xy; \\ \dot{y} = y^3 - x^3. \end{cases}$

Лабораторна робота, комп'ютерний практикум 7

Задача 1.

1) Знайти всі положення рівноваги системи диференціальних рівнянь, для кожного з положень рівноваги записати відповідну систему першого наближення.
2) Дослідити на стійкість усі положення рівноваги.
3) Наближено зобразити на фазовій площині фазові траєкторії в околах положень рівноваги, вказати напрямок руху вздовж траєкторій.

Варіанти завдань.

1. $\begin{cases} \dot{x} = 2xy - 4y - 8, \\ \dot{y} = 4y^2 - x^2. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = x^2 - y^2 - y - 1. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dot{x} = x - y, \\ \dot{y} = y^2 + x^2 - 2. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dot{x} = x + y + 1, \\ \dot{y} = y + \sqrt{2x^2 + 1}. \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dot{x} = x - y - 1, \\ \dot{y} = x^3 - y^3 - 7. \end{cases}$

6. $\begin{cases} \dot{x} = y^2 - xy + 12, \\ \dot{y} = x^2 - xy - 28. \end{cases}$

7. $\begin{cases} \dot{x} = x^2y + xy - 6, \\ \dot{y} = xy + x + y - 5. \end{cases}$

8. $\begin{cases} \dot{x} = x^3 + y^3 - 9, \\ \dot{y} = xy - 2. \end{cases}$

9. $\begin{cases} \dot{x} = x^2 + xy - 15, \\ \dot{y} = y^2 + xy - 10. \end{cases}$

10. $\begin{cases} \dot{x} = x^3 - y^3 - 65, \\ \dot{y} = x^2y + y^2x - 20. \end{cases}$

11. $\begin{cases} \dot{x} = y - x, \\ \dot{y} = \sqrt{3x + y^2} - 2. \end{cases}$

12. $\begin{cases} \dot{x} = 4x^2 - y^2, \\ \dot{y} = 2xy - 4x - 8. \end{cases}$

Задача 2. Записати матрицю Гурвіца та застосувати критерій Рауса-Гурвіца для дослідження асимптотичної стійкості розв'язків рівняння.

Варіанти завдань.

1. $y^{(5)} + 4y^{(4)} + 16y^{(3)} + 25y^{''} + 13y' + 9y = 0.$

2. $y^{(5)} + 3y^{(4)} + 10y^{(3)} + 22y^{''} + 23y' + 12y = 0.$

3. $y^{(5)} + 5y^{(4)} + 15y^{(3)} + 48y^{''} + 44y' + 74y = 0.$

4. $y^{(5)} + 2y^{(4)} + 14y^{(3)} + 36y^{''} + 23y' + 68y = 0.$

5. $y^{(5)} + 4y^{(4)} + 9y^{(3)} + 16y^{''} + 19y' + 13y = 0.$

6. $y^{(5)} + 3y^{(4)} + 6y^{(3)} + 7y^{''} + 4y' + 4y = 0.$

7. $y^{(5)} - 4y^{(4)} + 16y^{(3)} - 25y^{''} + 13y' - 9y = 0.$

8. $y^{(5)} - 3y^{(4)} + 10y^{(3)} - 22y^{''} + 23y' - 12y = 0.$

9. $y^{(5)} - 5y^{(4)} + 15y^{(3)} - 48y^{''} + 44y' - 74y = 0.$

10. $y^{(5)} - 2y^{(4)} + 14y^{(3)} - 36y^{''} + 23y' - 68y = 0.$

11. $y^{(5)} - 4y^{(4)} + 9y^{(3)} - 16y^{''} + 19y' - 13y = 0.$

12. $y^{(5)} - 3y^{(4)} + 6y^{(3)} - 7y^{''} + 4y' - 4y = 0.$

Задача 3. Дослідити на стійкість нульовий розв'язок системи.

Варіанти завдань.

1. $\begin{cases} \dot{x} = y - x^3, \\ \dot{y} = -4x - y^3. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dot{x} = -2x^5 - 3y, \\ \dot{y} = x - y^3. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dot{x} = 3x^3 - y, \\ \dot{y} = 2x + 7y^5. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dot{x} = 2y - x^5, \\ \dot{y} = -3x - y^5. \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dot{x} = 2x^3 - y, \\ \dot{y} = 5x - 3y^3. \end{cases}$

6. $\begin{cases} \dot{x} = -2x^3 - y, \\ \dot{y} = 3x - 3y^5. \end{cases}$

7. $\begin{cases} \dot{x} = 2x^3 - y, \\ \dot{y} = 2x + 3y. \end{cases}$

8. $\begin{cases} \dot{x} = -x^3 - 3y, \\ \dot{y} = 2x - y^5. \end{cases}$

9. $\begin{cases} \dot{x} = x^3 - 4y, \\ \dot{y} = x + y^3. \end{cases}$

10. $\begin{cases} \dot{x} = 5y - x^3, \\ \dot{y} = -x - 2y^5. \end{cases}$

11. $\begin{cases} \dot{x} = 3x^5 + 3y, \\ \dot{y} = -4x + 2y^3. \end{cases}$

12. $\begin{cases} \dot{x} = 4y - x^5, \\ \dot{y} = -3x - y^3. \end{cases}$

15. Крайові задачі

Розглянемо крайову задачу для лінійного диференціального рівняння другого порядку: знайти функцію $y = y(t)$, визначену на $[0, l]$, яка задовольняє

$$\begin{gathered} a(t)\ddot{y} + b(t)\dot{y} + c(t)y = F(t), \quad t \in (0, l), \\ \alpha_1 x(0) + \beta_1 \dot{x}(0) = \gamma_1, \quad \alpha_2 x(l) + \beta_2 \dot{x}(l) = \gamma_2, \end{gathered} \tag{71}$$

де $a, b, c, F \in \mathrm{C}(0, l)$ – задані функції, причому $a \neq 0,\ x \in [0, l]$, $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$ – задані числа, причому $|\alpha_j| + |\beta_j| \neq 0$, $j = 1, 2$.

Якщо $\beta_1 = \beta_2 = 0$, то такі крайові умови називаються *умовами першого роду*, якщо $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ — *умовами другого роду*, у решті випадків — *умовами третього роду.*

Якщо $F(t) \equiv 0$ і $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$, то крайову задачу (71) називають *однорідною.* Якщо ж або $F(t) \not\equiv 0$, або $|\gamma_1| + |\gamma_2| \neq 0$ – *неоднорідною* крайовою задачею.

Якщо вдається отримати загальний розв'язок рівняння у (71), то крайову задачу можна розв'язати безпосередньою підстановкою розв'язків у крайові умови.

Приклад 1. Розв'язати крайову задачу

$$\begin{aligned} &x^2y'' + 5xy' + 3y = 0; \\ &y'(1) = 3,\ y(x) = O\left(\tfrac{1}{x^2}\right) \text{ при } x \to +\infty; \end{aligned}$$

Розв'язання. Спочатку розв'яжемо рівняння

$$x^2y'' + 5xy' + 3y = 0.$$

Це рівняння Ейлера, тому шукаючи розв'язки у вигляді $y = x^\lambda$, записуємо характеристичне рівняння для рівняння Ейлера

$$\lambda(\lambda - 1) + 5\lambda + 3 = 0,$$

яке має корені $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = -3.$

Відповідно отримуємо загальний розв'язок рівняння

$$y(x) = \frac{C_1}{x} + \frac{C_2}{x^3}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Підставляємо у крайові умови.

Оскільки $y(x) = O\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ при $x \to +\infty$, то $C_1 = 0$, а отже,

$$y(x) = \frac{C_2}{x^3}.$$

Далі з першої умови знаходимо $C_2 = 3$, тобто маємо розв'язок крайової задачі

$$y(x) = \frac{3}{x^3}\ .$$

Не втрачаючи загальності, ми можемо обмежитись розглядом крайових задач для неоднорідного рівняння з однорідними умовами. Дійсно, якщо у (71) $\gamma_1 \neq 0$ і $\gamma_2 \neq 0$, то ми можемо зробити заміну

$$y = x + \varphi(t),$$

де $x = x(t)$ – нова невідома функція, а $\varphi(t)$ – деяка функція, що задовольняє неоднорідні крайові умови:

$$\alpha_1\varphi(0) + \beta_1\dot{\varphi}(0) = \gamma_1, \quad \alpha_2\varphi(l) + \beta_2\dot{\varphi}(l) = \gamma_2.$$

Наприклад, у випадку умов першого роду: $x(0) = \gamma_1, \quad x(l) = \gamma_2$, можна взяти

$$\varphi(t) = \frac{\gamma_1}{l}(l - t) + \frac{\gamma_2}{l}t.$$

У результаті заміни приходимо до крайової задачі

$$\begin{gathered} a(t)\ddot{x} + b(t)\dot{x} + c(t)x = f(t), \quad t \in (0, l), \\ \alpha_1 x(0) + \beta_1\dot{x}(0) = 0, \quad \alpha_2 x(l) + \beta_2\dot{x}(l) = 0, \end{gathered} \tag{72}$$

де $f(t) = F(t) - (a(t)\ddot{\varphi} + b(t)\dot{\varphi} + c(t)\varphi)$.

Поряд з неоднорідною задачею (72) розглянемо відповідну однорідну крайову задачу

$$\begin{gathered} a(t)\ddot{x} + b(t)\dot{x} + c(t)x = 0, \quad t \in (0, l), \\ \alpha_1 x(0) + \beta_1\dot{x}(0) = 0, \quad \alpha_2 x(l) + \beta_2\dot{x}(l) = 0. \end{gathered} \tag{73}$$

Зрозуміло, що кожна однорідна крайова задача (73) має тривіальний розв'язок $x(t) \equiv 0$, інших розв'язків однорідна крайова задача може не мати.

Розглянемо *невироджений випадок* крайової задачі (72), який характеризується тим, що відповідна однорідна задача (73) має лише тривіальний розв'язок $x(t) \equiv 0$.

Твердження. *Якщо у невиродженому випадку існує розв'язок крайової задачі* (72), *то він – єдиний.*

Функція $G(t,s) : [0,l] \times [0,l] \to \mathbb{R}$ з властивостями:

1) $G(t,s)$ неперервна у квадраті $K := [0,l] \times [0,l]$, має неперервні частинні похідні $G'_t(t,s)$, $G''_{tt}(t,s)$ у кожному із трикутників $\{(t,s) \in K : t > s\}$, $\{(t,s) \in K : t < s\}$;
2) для кожного фіксованого $s \in (0,l)$ функція $x_s(t) := G(t,s)$ задовольняє лінійне однорідне рівняння
$$a(t)\ddot{x} + b(t)\dot{x} + c(t)x = 0$$
при всіх $t \in [0,l] \setminus \{0\}$, а також однорідні крайові умови
$$\alpha_1 x(0) + \beta_1 \dot{x}(0) = 0, \quad \alpha_2 x(l) + \beta_2 \dot{x}(l) = 0;$$
3) на діагоналі $t = s$ квадрата K похідна $G'_t(t,s)$ має розрив першого роду зі стрибком $\dfrac{1}{a(s)}$;

називається *функцією Гріна* крайової задачі (72).

Теорема. *Нехай існує функція Гріна крайової задачі* (72). *Тоді, якою б не була функція* $f(t) \in \mathrm{C}(0,l)$, *ця задача має єдиний розв'язок, і його можна подати у вигляді*
$$x(t) = \int_0^l G(t,s) f(s) ds.$$

Для побудови функції Гріна крайової задачі (73) знаходять нетривіальні розв'язки $x_1(t)$ та $x_2(t)$ лінійного однорідного рівняння, які задовольняють, відповідно, першу і другу крайові умови з (73). Кожен з цих розв'язків існує і визначений з точністю до сталого множника (наприклад, $x_1(t)$ можна шукати з початкових умов $x(0) = \beta_1,\ \dot{x}(0) = -\alpha_1$). Далі функцію Гріна шукають у вигляді
$$G(x,s) = \begin{cases} c_1(s)x_1(t), & t \le s \\ c_2(s)x_2(t), & t \ge s, \end{cases}$$

добираючи функції $c_1(s)$, $c_2(s)$ так, щоб виконувалися умови неперервності функції Гріна $G(t,s)$ та стрибка її похідної $G'_t(t,s)$.

Приклад 2. Побудувати функцію Гріна для крайової задачі

$$\ddot{x} + x = 0;$$
$$\dot{x}(0) = 0,\ x(\pi) = 0.$$

Розв'язання. Загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння

$$x = C_1 \cos t + C_2 \sin t, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Знайдемо розв'язки

$$x_1(t): \quad x_1'(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1(t) = \cos t;$$

$$x_2(t): \quad x_2(\pi) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2(t) = \sin t.$$

Тепер шукатимемо функцію Гріна у вигляді

$$G(t,s) = \begin{cases} c_1(s)\cos t, & t \le s, \\ c_2(s)\sin t, & t \ge s. \end{cases}$$

Для такої функції $G(t,s)$ умова 2) означення функції Гріна виконуватиметься автоматично. Залишилось шляхом вибору функцій $c_1(s)$, $c_2(s)$ виконати умови 1), 3).

Для неперервності функцій $G(t,s)$ маємо

$$G(s-0,s) = G(s+0,s) \quad \Leftrightarrow \quad c_1(s)\cos s = c_2(s)\sin s.$$

Умова стрибку похідної дає

$$G'_x(s+0,s) - G'_x(s-0,s) = \frac{1}{a(s)} \quad \Leftrightarrow \quad c_2(s)\cos s + c_1(s)\sin s = 1.$$

Отже, функції $c_1(t)$, $c_2(t)$ знаходимо з системи

$$\begin{cases} c_1(s)\cos s - c_2(s)\sin s = 0, \\ c_1(s)\sin s + c_2(s)\cos s = 1; \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} c_1(s) = \sin s, \\ c_2(s) = \cos s. \end{cases}$$

І остаточно знаходимо функцію Гріна

$$G(t,s) = \begin{cases} \sin s \cos t, & t \le s, \\ \cos s \sin t, & t \ge s. \end{cases}$$

Вправи

252. Чи має крайова задача розв'язок:

а) $y'' - y = 0,\ y(0) = 0,\ y(2\pi) = 1;$

б) $y'' + y = 0,\ y(0) = 0,\ y(2\pi) = 1.$

Розв'язати крайові задачі:

253. $y'' + y = 1, \quad y(0) = 0, \quad y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1.$

254. $y'' - 2y' - 3y = 0, \quad y(0) = 1, \quad \lim\limits_{x\to\infty} y(x) = 0.$

255. $y'' - 2y' - 3y = 0, \quad y(0) = 1, \quad \lim\limits_{x\to\infty} y(x) = 2.$

256. $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0, \quad y(x) = O(x)$ при $x \to 0, \quad y(1) = 2.$

257. $y'' + y = 1, \quad y(1) = 1, \quad y'(0) = 0.$

258. $y'' - y = 0, \quad y(0) = -1, \quad y'(1) - y(1) = 2.$

259. $y'' + y = 1, \quad y(0) = 0, \quad y'(\pi) = 0.$

Побудувати функцію Гріна для крайових задач:

260. $y'' + y = f(x), \quad y(\pi) = 0, \quad y'(0) = 0.$

261. $y'' + y' = f(x), \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0.$

262. $y'' = f(x), \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 0.$

263. $x^2y'' + 2xy' = f(x), \quad y(1) = 0, \quad y'(3) = 0.$

264. $xy'' - y' = f(x), \quad y(2) = 0, \quad y'(1) = 0.$

265. $y'' = f(x), \quad y(0) = 0, \quad y(x)$ обмежена при $x \to +\infty.$

266. $y'' - y = f(x), \quad y'(0) = 0, \quad y'(2) + y(2) = 0.$

267. $y'' + y' = f(x), \quad y(+\infty) = 0, \quad y'(0) = 0.$

268. $y'' + 4y' + 3y = f(x), \quad y(0) = 0, \quad y(x) = O(e^{-2x})$ при $x \to +\infty.$

269. $x^2y'' + 2xy' - 2y = f(x),\ y(0)$обмежена, $y(1) = 0.$

16. Інтегрування диференціальних рівнянь рядами

Розглянемо диференціальне рівняння

$$\ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)x = 0, \tag{74}$$

в якому коефіцієнти $p(t)$, $q(t)$ є аналітичними функціями в околі деякої точки t_0, тобто розвиваються в околі цієї точки у збіжні степеневі ряди. Тоді таку саму властивість мають і розв'язки цього рівняння. Не обмежуючи загальності, можемо вважати, що $t_0 = 0$.

Теорема. *Якщо розвинення коефіцієнтів рівняння* (74) *у степеневі ряди* $p(t) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} p_j t^j$, $q(t) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} q_j t^j$ *збігаються на інтервалі* $(-r, r)$, *то кожен розв'язок цього рівняння можна представити сумою степеневого ряду* $x(t) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} c_j t^j$, *збіжного на тому самому інтервалі* $(-r, r)$.

Приклад 1. Знайти фундаментальну систему розв'язків рівняння $y'' - xy' = 0$ у вигляді рядів за степенями x.

Розв'язання. Функції $p(x) = -x$ та $q(x) = 0$ аналітичні на будь-якому інтервалі $(-r, r)$, тому шукаємо розв'язки у вигляді

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k.$$

Обчислюємо похідні

$$y'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1},$$

$$y''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) c_k x^{k-2},$$

і підставляємо в рівняння

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) c_k x^{k-2} - \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+1} = 0.$$

Змінемо поряд підсумовування таким чином, щоб у кожній сумі воно відбувалося по x^k :

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) c_{k+2} x^k - \sum_{k=1}^{\infty} c_{k-1} x^k = 0,$$

і збираючи в одну суму, маємо

$$2c_2 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[c_{k+2}(k+2)(k+1) - c_{k-1}\right] x^k = 0.$$

Звідси, прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях, знаходимо

$$2c_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_2 = 0,$$

$$c_{k+2} = \frac{c_{k-1}}{(k+1)(k+2)}, \ k \geq 1 \quad \text{або} \quad c_{k+3} = \frac{c_k}{(k+2)(k+3)}\ , \quad k \geq 0.$$

Для отримання першої функції з фундаментальної системи розв'язків покладемо $c_0 = 0,\ \ c_1 = 1$, тоді

$$c_{3k} = c_{3k+2} = 0, \quad c_{3k+1} = \frac{c_{3k-2}}{3k(3k+1)} = \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{3i(3i+1)}\ ,\ k \geq 1;$$

для другої функції $c_0 = 1,\ \ c_1 = 0$, тому

$$c_{3k+1} = c_{3k+2} = 0, \quad c_{3k} = \frac{c_{3k-3}}{3k(3k-1)} = \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{3i(3i-1)}\ ,\ k \geq 1.$$

У результаті записуємо ФСР:

$$y_1(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\prod_{i=1}^{k} \frac{1}{3i(3i-1)} \right) x^k,$$

$$y_2(x) = x + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\prod_{i=1}^{k} \frac{1}{3i(3i+1)} \right) x^k,$$

а загальний розв'язок має вигляд

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Розглянемо рівняння

$$t^2 \ddot{x} + tp(t)\dot{x} + q(t)x = 0, \tag{75}$$

де $p(t)$, $q(t)$ є аналітичними функціями в околі точки $t_0 = 0$, тобто розвиваються у степеневі ряди $p(t) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} p_j t^j$, $q(t) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} q_j t^j$, збіжні в деякому околі $|t| < r$.

Точка $t_0 = 0$ є *регулярною особливою точкою* для рівняння (75) при умові $|p_0| + |q_0| + |q_1| \neq 0$.

Рівність

$$\rho(\rho - 1) + p_0\rho + q_0 = 0$$

називається *визначальним рівнянням* диференціального рівняння (75).

Нехай ρ_1, ρ_2 — дійсні корені визначального рівняння, $\rho_2 \le \rho_1$.

Теорема. *Нехай у рівнянні* (75) *функції* $p(t)$ *та* $q(t)$ *розвиваються у збіжні на інтервалі* $(-r, r)$ *степеневі ряди. Тоді це рівняння завжди має розв'язок у вигляді узагальненого степеневого ряду*

$$x(t) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j t^{j+\rho_1},$$

причому ряд $\sum\limits_{j=0}^{\infty} |c_j t^j|$ *збігається при* $|t| < r$.

Якщо додатково виконується умова $\rho_1 - \rho_2 \notin \mathbb{Z}$, *то рівняння* (75) *має два лінійно незалежних розв'язки у вигляді збіжних при* $|t| < r$ *узагальнено степеневих рядів*

$$x_1(t) = \sum_{j=0}^{\infty} c_{1,j} t^{j+\rho_1}, \quad x_2(t) = \sum_{j=0}^{\infty} c_{2,j} t^{j+\rho_2}.$$

Якщо для коренів визначального рівняння $\rho_1 - \rho_2 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, *то інший лінійно незалежний розв'язок можна шукати або в такому ж вигляді, або у вигляді*

$$x_2(t) = t^{\rho_1} \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k + \gamma x_1(t) \ln t.$$

Приклад 2. Знайти два лінійно незалежні розв'язки рівняння

$$x(x-1)y'' + (3x-1)y' + y = 0$$

в околі особливої точки $x_0 = 0$ у вигляді узагальнено степеневих рядів, або рядів, що додатково містіть $\ln x$.

Розв'язання. Перепишемо рівняння у вигляді (75) для цього домножимо обидві частини рівняння на x та поділемо на $x - 1$:

$$x^2 y'' + x\frac{3x-1}{x-1} y' + \frac{x}{x-1} y = 0,$$

або

$$x^2 y'' + x\left(3 - \frac{2}{1-x}\right) y' + \left(1 - \frac{1}{1-x}\right) y = 0.$$

Складемо визначальне рівняння

$$\rho(\rho-1)+\rho=0 \quad \Leftrightarrow \quad \rho^2=0.$$

Воно має корінь $\rho_{1,2}=0$ кратності два. Тому перший розв'язок шукаємо у вигляді звичайного степевого ряду

$$y(x)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k.$$

Обчислюємо похідні

$$y'(x)=\sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1},$$

$$y''(x)=\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) c_k x^{k-2},$$

та підставляємо у вихідне рівняння

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^k-\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^{k-1}+\sum_{k=1}^{\infty} 3kc_k x^k-\sum_{k=1}^{\infty} kc_k x^{k-1}+\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k=0.$$

Далі у другому та четвертому доданках змінюємо порядок підсумовування

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^k-\sum_{k=1}^{\infty} k(k+1)c_{k+1} x^k+\sum_{k=1}^{\infty} 3kc_k x^k-$$

$$-\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)c_{k+1} x^k+\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k=0,$$

і прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях, маємо

$k=0: \quad -c_1+c_0=0 \quad \Rightarrow \quad c_1=c_0,$

$k=1: \quad -2c_2+3c_1-2c_2+c_1=0 \quad \Rightarrow \quad c_0=c_1=c_2,$

$k\geq 2: \quad c_{k+1}(k^2+k+k+1)=c_k(k^2-k+3k+1) \quad \Rightarrow \quad c_{k+1}=c_k.$

Отже, покладаючи $c_0=1$, отримуємо $c_k=1,\ k\geq 0$, тобто

$$y_1(x)=\sum_{k=0}^{\infty} x^k=\frac{1}{1-x}\ .$$

Оскільки $\rho_1-\rho_2=0$, то другий розв'язок шукаємо у вигляді:

$$y_2(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\widetilde{c}_k x^k+\gamma\ \frac{\ln x}{x-1}\ .$$

Позначимо

$$u(x)=\frac{\ln x}{x-1},$$

обчислимо похідні

$$u'(x) = \frac{1}{x(x-1)} - \frac{\ln x}{(x-1)^2},$$

$$u''(x) = -\frac{1}{x^2(x-1)} - \frac{2}{x(x-1)^2} + \frac{2\ln x}{(x-1)^3}$$

і підставимо в рівняння

$$-\frac{1}{x} - \frac{2}{(x-1)} + \frac{2x\ln x}{(x-1)^2} + \frac{3}{x-1} - \frac{3x\ln x}{(x-1)^2} - \frac{1}{x(x-1)} + \frac{\ln x}{(x-1)^2} + \frac{\ln x}{x-1} \equiv 0.$$

Таким чином, функція $u(x)$ є розв'язком вихідного рівняння.

Отже,

$$y_2(x) = \frac{\ln x}{x-1}\ .$$

і отримуємо загальний розв'язок

$$y(x) = \frac{C_1}{x-1} + \frac{C_2\ln x}{x-1}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Розглянемо задачу Коші

$$\dot{x} = f(t,x), \quad x(t_0) = x_0, \tag{76}$$

де $f(t,x) \in \mathrm{C}^\infty(D)$, $D \subset \mathbb{R}^2$, $(t_0, x_0) \in D$.

Тоді для кожного натурального N при $t \to t_0$ для розв'язку задачі Коші (76) має місце формула Тейлора

$$x(t) = x_0 + a_1(t-t_0) + a_2(t-t_0)^2 + \cdots + a_N(t-t_0)^N + \mathrm{o}((t-t_0)^N),$$

де коефіцієнти $a_j = \dfrac{1}{j!}\dfrac{d^j x(t_0)}{dt^j}$, $j = 1, \ldots, N$. Ці коефіцієнти можна визначити не знаючи явного вигляду самого розв'язку $x(t)$ рекурентними формулами, а саме,

$$a_1 = \dot{x}(t_0) = f(t_0, x_0),$$

$$a_2 = \frac{\ddot{x}(t_0)}{2!} = \frac{1}{2}\left(f'_t(t_0,x_0) + f'_x(t_0,x_0)f(t_0,x_0)\right),$$

$$a_j = \frac{1}{j!}\left(\frac{d^{j-1}}{dt^{j-1}} f(t,x(t))\right)\Bigg|_{t=t_0}, \quad j = 3, \ldots, N.$$

Відповідь на запитання: чи можна представити розв'язок задачі Коші (76) у вигляді збіжного степеневого ряду – дає теорема.

Теорема. *Нехай ряд Тейлора функції* $f(t,x)$ *збігається в деякому околі точки* (t_0, x_0). *Тоді існує таке дійне число* $\rho =$

$= \rho(t_0, x_0) > 0$, *що розв'язок задачі Коші* (76) *можна представити сумою збіжного на інтервалі* $(t_0 - \rho, t_0 + \rho)$ *степеневого ряду*

$$x(t) = x_0 + \sum_{j=1}^{\infty} a_j (t - t_0)^j,$$

де $a_j = \frac{1}{j!} \left(\dfrac{d^{j-1}}{dt^{j-1}} f(t, x(t)) \right) \Bigg|_{t=t_0}$, $j = 1, 2, \ldots$.

Вправи

Знайти два лінійно незалежних частинних розв'язки рівнянь в околі особливої точки $x_0 = 0$ у вигляді узагальнених степеневих рядів, або рядів що містять додатково $\ln x$:

270. $x(x-1)y'' + (3x-2)y' + y = 0.$

271. $x(x-1)y'' + (2x-2)y' - 2y = 0.$

272. $x(x-1)y'' + (x+1)y' - y = 0.$

273. $x(x-1)y'' + (3x-1)y' + y = 0.$

274. $x^2y'' - (3x + x^2)y' + 4y = 0.$

275. $x(x-1)^2y'' + x(x-1)y' - y = 0.$

276. $y'' + \dfrac{2}{x}y' + y = 0.$

277. $x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \dfrac{1}{4}\right)y = 0.$

Знайти у вигляді ряду за степенями x один частинний розв'язок, який задовольняє поставлені початкові умови. Знайти суму ряду та побудувати другий частинний розв'язок за формулою Абеля:

278. $y'' - 2xy' + 2y = 0, \quad y_1(0) = 0, \quad y_1'(0) = 2.$

279. $(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0, \quad y_1(0) = 0, \quad y_1'(0) = 1.$

280. $(1-x)y'' + xy' - y = 0, \quad y_1(0) = 1, \quad y_1'(0) = 1.$

281. $(1-x^2)y'' - xy' + y = 0, \quad y_1(0) = 0, \quad y_1'(0) = 1.$

282. $(1-x^2)y'' - xy' = 0, \quad y_1(0) = 1, \quad y_1'(0) = 0.$

Знайти розв'язки, які виражаються степеневими або узагальненими степеневими рядами:

283. $xy'' + y' - xy = 0.$

284. $xy'' - xy' - y = 0.$

285. $x^2y'' + 2xy' - (x^2 + 2x + 2)y = 0.$

286. $x^2y'' - x^2y' + (x - 2)y = 0.$

Знайти у вигляді степеневих рядів розв'язки задач Коші. Обчислити коефіцієнти рядів (до третього включно):

287. $y' = y^2 - x; \quad y(0) = 1.$

288. $y' = x + \dfrac{1}{y}, \quad y(0) = 1.$

289. $y' = y + xe^y, \quad y(0) = 0.$

290. $y' = 2x + \cos y, \quad y(0) = 0.$

Література

[1] Гаращенко Ф.Г., Матвієнко В.Т., Харченко І.І. Диференціальні рівняння для інформатиків: підручник. – К.: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2008. – 352 с.

[2] Гой Т. П., Махней О. В. Диференціальні рівняння: навч. посіб. – Вид. 2-ге, випр. та доп. – Тернопіль : Навчальна книга – Богдан, 2014. – 360 с.

[3] Гудименко Ф.С., Павлюк І.А., Волкова В.О. Збірник задач з диференціальних рівнянь. – К.: Вища школа, 1972. – 154 с.

[4] Диференціальні рівняння / І.І. Ляшко, О.К. Боярчук, Я.Г. Гай та ін. — К.: Вища школа, 1981. – 504 с.

[5] Збірник задач підвищеної складності з курсу "Диференціальні рівняння"/ Упоряд.: О.В. Капустян та ін., за ред. М.О.Перестюка. – К.: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2011. – 79 с.

[6] Кривошея С.А., Перестюк М.О., Бурим В.М. Диференціальні рівняння та інтегральні рівняння: Підручник. – К., Либідь, 2004. – 408 с.

[7] Лавренюк С.П. Курс диференціальних рівнянь. – Львів: Вид-во наук.-техн. л-ри, 1997. – 215 с.

[8] Перестюк М.О., Свіщук М.Я. Збірник задач з диференціальних рівнянь : Навч. посібник. – К.: ТВіМС, 2004. – 224 с.

[9] Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк М.О. Диференціальні рівняння в задачах: навч. посібник для студентів вищих навчальних закладів. – К., Либідь, 2003. – 504 с.

[10] Самойленко А.М., Перестюк М.О., Парасюк І.О. Диференціальні рівняння: підручник. – К.: ВПЦ "Київський університет 2010. – 527 с.

[11] Шкіль М.І., Лейфура В.М., Самусенко П.Ф. Диференціальні рівняння: навч. посіб. для студ. мат. спец. вищ. навч. закл. – К.: Техніка, 2003. – 368 с.

[12] Arrowsmith D., Place C. Ordinary differential equations: a qualitative approach with applications. – London, N.Y.: Chapman and Hall, 1982. – 250 p.

[13] Bellman R., Cooke K. Modern elementary differential equations. – N.Y., Dover Publications Inc, 1995. – 240 p.

[14] Coddington E. , Levinson N. Theory of ordinary differential equations. UK ed. edition. – Krieger Pub. Co, 1984. – 429 p.

[15] Constanda C. Differential Equations : Textbook. – Springer International Publishing, 2017. – 297 p.

[16] Hartman Ph. Ordinary differentail equations. – Society for Industrial and Applied Mathematics, 1987. – 632 p.

[17] Said-Houari B. Differential Equations: Methods and Applications : Textbook. – Springer International Publishing, 2015. – 212 p.

Навчальне видання

Капустян О.В.
Касімова Н.В.
Ловейкін Ю.В.
Сукретна А.В.
Федоренко Ю.В.

Диференціальні рівняння: задачі, методи розв'язування, комп'ютерний практикум

Навчальний посібник