

Київський національний університет
імені Тараса Шевченка

МЕЛЬНИК Т.А.
КРЕНЕВИЧ А.П.

**ТЕОРІЯ ПРОСТОРІВ СОБОЛЄВА
ТА УЗАГАЛЬНЕНІ РОЗВ'ЯЗКИ
КРАЙОВИХ ЗАДАЧ**

Підручник

Київ – 2017

УДК 519.942+550

Рецензенти:

д-р фіз.-мат. наук, проф. С.Д. Івасишин
д-р фіз.-мат. наук, проф. О.В. Капустян
д-р фіз.-мат. наук, проф. В.А. Михайлець

Рекомендовано до друку вченою радою механіко-математичного
факультету
(протокол № 11 від 24 квітня 2017 року)

Мельник Т.А., Крєневич А.П.

Теорія просторів Соболева та узагальнені розв'язки крайових задач:
підручник – К.: ВПЦ "Київський Університет", 201___. – ___ с.

Підручник містить стисло викладений матеріал із чіткими і строгими доведеннями, що повною мірою охоплює програми дисциплін «Простори Соболева та узагальнені розв'язки задач математичної фізики», «Диференціальні рівняння з частинними похідними» і «Нелінійний аналіз та його застосування», що викладаються студентам спеціальності “Математика” механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

Для студентів і аспірантів математичних спеціальностей вищих навчальних закладів та викладачів.

ПЕРЕДМОВА

Оглядаючись на те, де знайшли своє застосування простори Соболева (а це широкий спектр різних галузей математики від диференціальної геометрії до чисельного аналізу та прикладної математики), можна сміливо зазначити, що простори Соболева -- це один з найважливіших математичних засобів з тих, які були запропоновані в XX столітті.

У 30-ті рр. XX ст. С.Л. Соболевим було запропоновано новий підхід до постановок і розв'язань крайових задач математичної фізики. В основі цього підходу лежить новий клас функцій, а саме простори Соболева, та їх основні властивості.

Підручник складається з трьох частин. В першій частині наведено основні класичні результати теорії просторів Соболева, які включаються в програму дисципліни за вибором студента «Простори Соболева та узагальнені розв'язки задач математичної фізики», що читається для бакалаврів четвертого курсу механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка. В другій частині розглянуто поняття узагальнених розв'язків лінійних крайових і спектральних задач та доведено теореми існування та єдиності таких розв'язків в просторах Соболева. Матеріал другої частини входить в програму нормативної дисципліни «Диференціальні рівняння з частинними похідними», що читається для магістрів першого курсу механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Основні методи нелінійного аналізу (варіаційний метод Ойлера-Лагранжа, метод монотонності, теореми про нерухому точку) та їх застосування до дослідження нелінійних крайових задач викладені в третій частині, яка читається в рамках нормативного курсу «Нелінійний аналіз та його застосування» для магістрів першого курсу механіко-математичного факультету. Перша та третя частина написана проф. Т.А. Мельником, а друга – доц. А.П. Креневичем. Автори розробили відповідні курси і періодично читають їх на механіко-математичному факультеті.

При підборі матеріалу для підручника і лекційного матеріалу для згаданих дисциплін використано підручники [5, 6, 19, 22, 29, 27, 28, 32, 38, 42]. Авторами спрощено і модифіковано доведення ряду теорем. Крім того, до підручника розроблено збірники задач [23, 24, 33]. Розв'язання цих задач допоможе студентам самостійно опрацьовувати

теоретичний матеріал, навчитись розв'язувати основні типи задач та краще засвоїти основні поняття й положення згаданих дисциплін.

Матеріал підручника завершує підготовку сучасного спеціаліста зі спеціалізації «диференціальні рівняння», яка також базується на класичних нормативних курсах «Звичайні диференціальні рівняння» [1, 20, 34, 35, 39] та «Рівняння математичної фізики» [4, 7, 9, 10, 16, 26, 31, 36, 40], які читаються бакалаврам на механіко-математичному факультеті Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

Для подальшого ознайомлення з сучасними результатами по теорії просторів Соболева автори рекомендують літературу [3, 21, 41, 43, 46], по теорії лінійних крайових задач – таку літературу [17, 18, 25, 30, 41, 44, 45, 47]. Нелінійна теорія крайових задач зараз інтенсивно розвивається і її сучасний стан найбільш повно на наш погляд подано в [5, 8, 12, 15, 19, 37, 17, 18, 43, 48].

*Ваші відгуки і побажання щодо змісту підручника
просимо присилати на наші електронні адреси:
melnyk@imath.kiev.ua та akrenevych@gmail.com*

Основні позначення і терміни

$\mathbb{R}^n$ – n -вимірний евклідовий простір.

$x = (x_1, \dots, x_n)$ – елемент з $\mathbb{R}^n$, $|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$.

$\mathbb{R}^{n+1}$ – $(n+1)$ -вимірний евклідовий простір з елементами (x, t) , для яких $x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}$.

Ω – область у $\mathbb{R}^n$, тобто відкрита та зв'язна множина у $\mathbb{R}^n$.

$|\Omega|$ – міра обмеженої області Ω .

$\partial\Omega$ – межа області Ω .

S – $(n-1)$ -вимірна обмежена замкнена поверхня.

$\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ – замикання області Ω .

$\Omega' \subseteq \Omega$ – обмежена область Ω' компактно вкладається в область Ω ($\bar{\Omega}' \subset \Omega$).

$\frac{\partial u}{\partial x_i}, u_{x_i}$ або $\partial_{x_i} u$ – частинна похідна функції $u(x_1, \dots, x_n)$ за змінною x_i .

$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right)$ – вектор-градієнт функції u .

$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$ – оператор Лапласа від функції u .

$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ – мультиіндекс, компоненти якого цілі невід'ємні числа, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$.

$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$ – диференціальний оператор за мультиіндексом α .

$C^k(\Omega)$ – множина функцій, що мають в Ω неперервні частинні похідні до k -го порядку включно.

$C^k(\bar{\Omega})$ – множина функцій, що мають в $\bar{\Omega}$ неперервні частинні похідні до k -го порядку включно.

$C_0^k(\Omega)$ – підмножина фінітних функцій простору $C^k(\Omega)$; f – фінітна в Ω , якщо існує компакт $K \subset \Omega$, що $f(x) = 0$ для всіх $x \in \Omega \setminus K$.

$C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k \geq 0} C^k(\Omega)$, $C^\infty(\bar{\Omega}) = \bigcap_{k \geq 0} C^k(\bar{\Omega})$, $C_0^\infty(\Omega) = \bigcap_{k \geq 0} C_0^k(\Omega)$.

$L^p(\Omega)$ – банаховий простір вимірних та інтегрованих за Лебегом на Ω зі степенем $p \geq 1$ функцій.

$L_{loc}^p(\Omega)$ – простір локально інтегрованих за Лебегом на Ω зі степенем $p \geq 1$ функцій, тобто простір функцій, що інтегровані зі степенем $p \geq 1$ за Лебегом у довільній області $\Omega' \subseteq \Omega$.

$\|u\|_B$ – норма елемента u у нормованому просторі B .

$(u, v)_H$ – скалярний добуток у гільбертовому просторі H .

$X \subseteq Y$ – компактне вкладення банахового простору X в простір Y .

ЧАСТИНА 1.

ТЕОРІЯ ПРОСТОРІВ СОБОЛЄВА

.....

1. ОЗНАЧЕННЯ ПРОСТОРІВ СОБОЛЄВА ТА ЇХ НАЙПРОСТІШІ ВЛАСТИВОСТІ

1.1. Основна ідея нового підходу до постановок і розв'язань крайових задач математичної фізики

Розглянемо початково-крайову задачу

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(a^2(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f(x, t), & x \in (0, l), t > 0; \\ u(0, t) &= u(l, t) = 0, & t \geq 0; \\ u(x, 0) &= 0, \quad \partial_t u(x, 0) = 0 & x \in [0, l], \end{aligned} \quad (1.1)$$

яка описує вимушені коливання тонкої закріпленої струни. Класична постановка даної задачі вимагає, щоб $a^2 \in C^1([0, l])$, $f \in C(\Pi)$, де $\Pi = (0, l) \times (0, +\infty)$, а її розв'язок шукаємо в таких просторах: $u \in C^2(\Pi) \cap C(\bar{\Pi})$, $\partial_t u \in C(\bar{\Pi})$.

Якщо ж струна складена з двох кусків різної густини, тобто a^2 – кусково-гладка функція, то класичного розв'язку не існує. Таким чином, багато практично важливих задач математичної фізики не можуть бути розв'язані в класичній постановці. Тому виникає необхідність у заміні постановки задачі та в узагальненні поняття розв'язку, щоб більше наблизити його до фізичної реальності. Деякі кроки в цьому напрямку були зроблені ленінградським професором М.М. Гюнтером, К. Фрідріксом у США, Ж. Лере у Франції. Однак систематична перебудова математичної фізики, яка дала потужний імпульс розвитку науки, почалась з робіт молодого радянського математика С.Л. Соболева. Слід зауважити, що з прізвищ математиків не часто роблять прикметники; у цьому розумінні прізвище Соболева стоїть в одному ряду із засновниками функціонального аналізу Гільбертом і Банахом.

Припустимо, що існує класичний розв'язок задачі (1.1). Узявши довільну функцію $v \in C_0^\infty(\Pi)$, домноживши диференціальне рівняння задачі (1.1) на неї та проінтегрувавши отримане співвідношення по області Π , отримаємо

$$\int_0^l \int_0^{+\infty} (\partial_t u \partial_t v - a^2(x) \partial_x u \partial_x v + f v) dt dx = 0. \quad (1.2)$$

При інтегруванні частинами врахували, що функція v має компактний носій в області Π . Для того, щоб існували інтеграли в лівій частині рівності (1.2), достатньо, щоб функція a^2 була вимірною та майже скрізь обмеженою, $f \in L^2$, а функція u мала частинні похідні першого порядку, які б були інтегровані у квадраті. Підібравши правильно простори функцій для коефіцієнтів a^2, f та розв'язку u , можна було б означити узагальнений розв'язок задачі (1.1) як функцію u з простору X , що задовольняє інтегральну тотожність (1.2).

Далі, визначивши певним чином лінійний оператор $A: X \mapsto Y$, який би враховував структуру диференціального оператора та крайові умови, записують дану крайову задачу у вигляді операторного рівняння $Au = f$, яке досліджують за допомогою методів функціонального аналізу. Якраз простори Соболева дають можливість застосувати таку схему дослідження.

1.2. Узагальнені похідні

Нехай Ω область в $\mathbb{R}^n$, а $\varphi: \Omega \mapsto \mathbb{R}$ – функція, яка визначена на Ω . Носієм функції φ називається замикання такої множини $\{x \in \Omega : \varphi(x) \neq 0\}$, тобто

$$\text{supp } \varphi := \overline{\{x \in \Omega : \varphi(x) \neq 0\}}.$$

Основна ідея для означення узагальненої похідної. Нехай $u \in C^1(\Omega)$, $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, а Ω' – обмежена область з гладкою межею і $\text{supp } \varphi \subset \Omega' \Subset \Omega$. Тоді, використовуючи формулу Остроградського, маємо

$$\int_{\Omega} u \cdot \partial_{x_i} \varphi dx = \int_{\Omega'} u \cdot \partial_{x_i} \varphi dx = - \int_{\Omega'} \partial_{x_i} u \cdot \varphi dx = - \int_{\Omega} \partial_{x_i} u \cdot \varphi dx.$$

Аналогічно, якщо $u \in C^\infty(\Omega)$ і $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ – мультиіндекс, компоненти якого є цілими невід'ємними числами, то

$$\int_{\Omega} u \cdot D^{\alpha} \varphi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} D^{\alpha} u \cdot \varphi \, dx \quad \forall \varphi \in C_0^{\infty}(\Omega), \quad (1.3)$$

де $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ – довжина мультиіндексу α .

Припустимо, що $u \notin C^{\infty}(\Omega)$. Чи існує така сумовна функція v , що тотожність (1.3) – правильна з заміною v на $D^{\alpha} u$?

Означення 1. Нехай $u \in L_{loc}^1(\Omega)$ і α – мультиіндекс. Функція $v_{\alpha} \in L_{loc}^1(\Omega)$ називається α -ою узагальненою частинною похідною порядку $|\alpha|$ функції u , якщо

$$\int_{\Omega} u \cdot D^{\alpha} \varphi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v_{\alpha} \cdot \varphi \, dx \quad \forall \varphi \in C_0^{\infty}(\Omega);$$

при цьому зберігаємо старе позначення похідної та позначаємо $v_{\alpha} = D^{\alpha} u$.

Лема 1.1. (про єдиність узагальненої похідної). Якщо існує узагальнена похідна функції u , то вона однозначно визначається з точністю до множини міри нуль.

Доведення. Нехай $v_{\alpha}, \tilde{v} \in L_{loc}^1(\Omega)$ і

$$\int_{\Omega} u \cdot D^{\alpha} \varphi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v_{\alpha} \varphi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} \tilde{v} \varphi \, dx \quad \forall \varphi \in C_0^{\infty}(\Omega).$$

Тоді $\int_{\Omega} (v_{\alpha} - \tilde{v}) \cdot \varphi \, dx = 0$ для довільної функції $\varphi \in C_0^{\infty}(\Omega)$. Згідно з лемою дю Буа-Реймона, $v_{\alpha} = \tilde{v}$ майже скрізь у Ω . ■

Зауваження. Очевидно, що якщо деяка функція має класичну похідну в області Ω , то вона збігається з узагальненою похідною. Оберне твердження не завжди справедливе.

Приклад 1. Нехай $u(x) = |x|$, $\Omega = (-1, 1)$. Покажемо, що $u' = \text{sign } x$. Для цього візьмемо довільну функцію $\varphi \in C_0^{\infty}(\Omega)$ і інтегруванням частинами перевіряємо, що

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 |x| \varphi' \, dx &= - \int_{-1}^0 x \varphi' \, dx + \int_0^1 x \varphi' \, dx = \\ &= -x \varphi|_{-1}^0 + \int_{-1}^0 \varphi \, dx + x \varphi|_0^1 - \int_0^1 \varphi \, dx = \end{aligned}$$

$$= - \left(\int_{-1}^0 (-1) \cdot \varphi \, dx + \int_0^1 (1) \cdot \varphi \, dx \right) = - \int_{-1}^1 \operatorname{sign} x \cdot \varphi \, dx.$$

На підставі означення 1 та інтегральної тотожності (1.3) робимо висновок, що $u' = \operatorname{sign} x$, $x \in (-1,1)$. $\square$

Приклад 2. Нехай $u = \operatorname{sign} x$, $x \in \Omega = (-1,1)$. Покажемо, що не існує узагальненої похідної функції u на проміжку $(-1,1)$.

Припустимо протилежне, тобто існує така функція $v \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, що тотожності (1.3) має місце для заданої функції u . Тоді

$$\begin{aligned} - \int_{-1}^1 v \, \varphi \, dx &= \int_{-1}^1 \operatorname{sign} x \cdot \varphi' \, dx = \int_{-1}^0 -\varphi' \, dx + \int_0^1 \varphi' \, dx = \\ &= -\varphi|_{-1}^0 + \varphi|_0^1 = -2\varphi(0) \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \end{aligned}$$

Покажемо, що такої рівності не може бути. Нехай спочатку пробна функція φ така, що $\varphi(x) = 0$ для $x \in [-1,0]$, тобто $\varphi \in C_0^\infty(0,1) \subset C_0^\infty(\Omega)$. Тоді

$$0 = 2\varphi(0) = \int_{-1}^1 v \, \varphi \, dx = \int_0^1 v \, \varphi \, dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(0,1).$$

З останньої рівності випливає що $v = 0$ майже скрізь на $(0,1)$.

Аналогічно, вибираючи довільну функцію $\varphi \in C_0^\infty(-1,0) \subset C_0^\infty(\Omega)$, показуємо, що $v = 0$ майже скрізь на $(-1,0)$. Таким чином, $v = 0$ майже скрізь на $(-1,1)$. Тому $\int_{-1}^1 v \, \varphi \, dx = 0$ для всіх $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. А це протирічить рівності $\int_{-1}^1 v \, \varphi \, dx = 2\varphi(0)$ для функцій $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, для яких $\varphi(0) \neq 0$.

Отримали суперечність, яка доводить, що не існує узагальненої похідної функції $u = \operatorname{sign} x$ в області $x \in (-1,1)$. $\square$

У класичному математичному аналізі існування похідної старшого порядку вказує на існування похідних нижчих порядків. Наведемо приклад, який ілюструє, що для узагальнених похідних це не завжди так.

Приклад 3. Нехай на квадраті $\Omega = (-1,1) \times (-1,1)$ задана функція $u(x_1, x_2) = \operatorname{sign} x_1 + \operatorname{sign} x_2$.

Повторюючи викладки попереднього прикладу, легко можна показати, що не існує $\partial_{x_1} u$ та $\partial_{x_2} u$. Однак існує узагальнена похідна $\partial_{x_1 x_2} u$ та $\partial_{x_1 x_2} u = 0$. Дійсно, для довільної функції $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u \partial_{x_1 x_2} \varphi \, dx_1 dx_2 &= \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \text{sign}(x_i) \partial_{x_1 x_2} \varphi \, dx_1 dx_2 = \\ &= - \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega \cap \{x_i < 0\}} \partial_{x_1 x_2} \varphi \, dx_1 dx_2 + \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega \cap \{x_i > 0\}} \partial_{x_1 x_2} \varphi \, dx_1 dx_2 = 0. \end{aligned}$$

1.3. Означення просторів Соболева

Означення. Нехай $k \in \mathbb{N}$, $p \in [1, +\infty]$. Множина функцій

$$W^{k,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega) : \begin{array}{l} \forall \text{ мультиіндексу } \alpha, |\alpha| \leq k, \\ \exists \text{ узагальнена похідна } D^{\alpha} u \in L^p(\Omega) \end{array}\}$$

називається простором Соболева.

Якщо $p = 2$, то використовують таке позначення: $H^k(\Omega) := W^{k,2}(\Omega)$.
Логічно зробити довізначення: $W^{0,p}(\Omega) := L^p(\Omega)$, $H^0(\Omega) := L^2(\Omega)$.

Лема 1.2. Нехай $u, v \in W^{k,p}(\Omega)$, $|\alpha| \leq k$. Тоді:

$$1) \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} : \quad D^{\alpha}(\lambda u + \mu v) = \lambda D^{\alpha} u + \mu D^{\alpha} v \\ \text{та} \quad \lambda u + \mu v \in W^{k,p}(\Omega);$$

2) для довільних α, β таких, що $|\alpha| + |\beta| \leq k$, маємо

$$D^{\alpha} u \in W^{k-|\alpha|,p}(\Omega) \quad \text{і} \quad D^{\beta}(D^{\alpha} u) = D^{\alpha}(D^{\beta} u) = D^{\alpha+\beta} u;$$

3) якщо G – відкрита підмножина в Ω , то $u \in W^{k,p}(G)$;

4) якщо $\psi \in C_0^{\infty}(\Omega)$, то $\psi u \in W^{k,p}(\Omega)$ і

$$D^{\alpha}(\psi u) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^{\beta} \psi \cdot D^{\alpha-\beta} u, \quad (\text{формула Лейбніца})$$

$$\text{де} \quad \binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}, \quad \alpha! = \alpha_1! \alpha_2! \cdot \dots \cdot \alpha_n!.$$

Перші три пункти пропонуються читачу у вигляді вправи.
Доведення четвертого пункту проводиться за допомогою методу

математичної індукції. Перевіримо тільки базу індукції. Нехай $|\alpha| = 1$, тобто $D^\alpha = \partial_{x_i}$. Тоді для довільної функції $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \psi u \partial_{x_i} \varphi \, dx &= \int_{\Omega} u (\partial_{x_i}(\psi \varphi) - \varphi \partial_{x_i} \psi) \, dx = \\ &= \int_{\Omega} u \partial_{x_i}(\psi \varphi) \, dx - \int_{\Omega} u \varphi \partial_{x_i} \psi \, dx = \\ &= - \int_{\Omega} (\psi \partial_{x_i} u + u \partial_{x_i} \psi) \varphi \, dx. \end{aligned}$$

Отже, $\partial_{x_i}(\psi u) = \psi \partial_{x_i} u + u \partial_{x_i} \psi$.

У просторі Соболева $W^{k,p}(\Omega)$ вводиться така норма:

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} |D^\alpha u|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} & (1 \leq p < +\infty), \\ \sum_{|\alpha| \leq k} \operatorname{esssup}_{\Omega} |D^\alpha u| & (p = +\infty), \end{cases} \quad (1.4)$$

Нагадаємо, що $\operatorname{esssup}_{\Omega} |u| := \inf \{c \in \mathbb{R} : |u| \leq c \text{ майже скрізь у } \Omega\}$.

Покажемо, що величина $\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}$ є нормою. Перші дві властивості норми – очевидні. Нерівність трикутника доведемо для випадку $p \in [1, +\infty)$. Для цього скористаємося дискретною нерівністю Мінковського. Тоді

$$\begin{aligned} \|u + v\|_{W^{k,p}(\Omega)} &= \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u + D^\alpha v\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \\ &\leq \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha v\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}} = \\ &= \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} + \|v\|_{W^{k,p}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Теорема 1.1. Простір Соболева $W^{k,p}(\Omega)$ – банаховий простір.

Доведення. Лінійність простору $W^{k,p}(\Omega)$ випливає з лінійності простору $L^p(\Omega)$ і першої властивості леми 1.2. Доведемо його повноту. Припустимо, що послідовність $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ – фундаментальна в $W^{k,p}(\Omega)$. Тоді, для кожного мультиіндексу α , $|\alpha| \leq k$, послідовність $\{D^\alpha u_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ буде фундаментальною в $L^p(\Omega)$. Оскільки простір $L^p(\Omega)$ – повний, то існує єдина функція $u_\alpha \in L^p(\Omega)$ така, що

$$D^\alpha u_m \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} u_\alpha \text{ в } L^p(\Omega).$$

Позначимо $u := u_{(0, \dots, 0)}$ та покажемо, що $u \in W^{k,p}(\Omega)$ і $D^\alpha u = u_\alpha$. Дійсно, для довільної функції $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u D^\alpha \varphi \, dx &= \lim_{m \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} u_m D^\alpha \varphi \, dx = \\ &= \lim_{m \rightarrow +\infty} (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} D^\alpha u_m \cdot \varphi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u_\alpha \varphi \, dx, \end{aligned}$$

тобто $D^\alpha u = u_\alpha$ ($|\alpha| \leq k$). Оскільки $D^\alpha u_m \rightarrow D^\alpha u$ в $L^p(\Omega)$ для всіх $|\alpha| \leq k$, то $u_m \rightarrow u$ у $W^{k,p}(\Omega)$, що і треба було довести. ■

Будемо писати, що $u_m \rightarrow u$ у $W_{loc}^{k,p}(\Omega)$ при $m \rightarrow +\infty$, якщо $u_m \rightarrow u$ у $W^{k,p}(K)$ для довільної обмеженої області $K \Subset \Omega$.

Позначимо через $W_0^{k,p}(\Omega)$ замикання простору $C_0^\infty(\Omega)$ за нормою простору $W^{k,p}(\Omega)$. Таким чином, $u \in W_0^{k,p}(\Omega)$ тоді і тільки тоді, коли існує послідовність $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subset C_0^\infty(\Omega)$ така, що $u_m \rightarrow u$ у $W^{k,p}(\Omega)$. Для простору $W_0^{k,2}(\Omega)$ будемо використовувати позначення $H_0^k(\Omega)$. Очевидно, що $W_0^{k,p}(\Omega) \subset W^{k,p}(\Omega)$.

Зауваження. Деякі властивості просторів $W^{k,p}(\Omega)$ і $W_0^{k,p}(\Omega)$ безпосередньо випливають з їх природного включення в добуток N_k екземплярів простору $L^p(\Omega)$, де N_k – кількість мультиіндексів, що задовольняють умову $|\alpha| \leq k$. Оскільки скінченні добутки й замкнуті підпростори сепарабельних (рефлексивних) банахових просторів є сепарабельними (рефлексивними) банаховими просторами, то простори $W^{k,p}(\Omega)$ і $W_0^{k,p}(\Omega)$ – сепарабельні при $1 \leq p < +\infty$ (рефлексивні при $1 < p < +\infty$).

Легко перевірити, що простори $H^k(\Omega)$ та $H_0^1(\Omega)$ є гільбертовими просторами зі скалярним добутком

$$(u, v)_{H^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} D^\alpha u D^\alpha v \, dx, \quad (1.5)$$

який породжує норму (1.4) при $p = 2$.

Приклад 1. Нехай $\Omega = B_1(0) \in \mathbb{R}^n$, $u(x) = |x|^{-q}$ при $x \in \Omega \setminus \{0\}$, $q > 0$. При яких значеннях q, n, p функція $u \in W^{1,p}(\Omega)$?

Очевидно, що

$$\partial_{x_i} u = -\frac{qx_i}{|x|^{q+2}} \quad \text{і} \quad |\nabla u| = \frac{q}{|x|^{q+1}} \quad (x \neq 0).$$

Дані функції належать до $L^1(\Omega)$ тоді і тільки тоді, коли

$$\int_{\Omega} |\nabla u| dx = \omega_n \int_0^1 \frac{q}{r^{q+1}} r^{n-1} dr < +\infty,$$

тобто при $q < n - 1$. Тут ω_n – площа поверхні одиничної кулі в $\mathbb{R}^n$.

Розглянемо довільну функцію $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ і довільне число $\varepsilon > 0$.

Тоді

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \setminus B_\varepsilon(0)} u \partial_{x_i} \varphi dx &= - \int_{\Omega \setminus B_\varepsilon(0)} \partial_{x_i} u \cdot \varphi dx \\ &+ \int_{\partial B_\varepsilon(0)} u \varphi v_i dS_x, \end{aligned} \quad (1.6)$$

де $v = (v_1, \dots, v_n)$ – внутрішня нормаль до $\partial B_\varepsilon(0)$. Оскільки

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial B_\varepsilon(0)} u \varphi v_i dS_x \right| &\leq \max_{\Omega} |\varphi| \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \varepsilon^{-q} dS_x \\ &= \max_{\Omega} |\varphi| \omega_n \varepsilon^{-q+n-1} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0, \end{aligned}$$

то переходячи до границі при $\varepsilon \rightarrow 0$ в (1.6), отримаємо

$$\int_{\Omega} u \partial_{x_i} \varphi dx = - \int_{\Omega} \partial_{x_i} u \cdot \varphi dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Отже, функція u має всі узагальнені похідні першого порядку і

$$\partial_{x_i} u = -\frac{qx_i}{|x|^{q+2}} \quad (q > 0).$$

Крім того,

$$|\nabla u| = \frac{q}{|x|^{q+1}} \in L^p(\Omega) \Leftrightarrow (q+1)p < n.$$

Таким чином, $u \in W^{1,p}(\Omega) \Leftrightarrow q < \frac{n-p}{p}$; а при $p \geq n$, $u \notin W^{1,p}(\Omega)$.

Наприклад, при $n = 3$ і $p = 2$ функція $|x|^{-\frac{1}{4}} \in H^2(\Omega)$.

2. НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ ІЗ ПРОСТОРІВ СОБОЛЕВА ГЛАДКИМИ ФУНКЦІЯМИ

2.1. Усереднені функції

Розглянемо функцію $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, яка визначається таким чином:

$$\eta(x) = \begin{cases} C e^{\frac{1}{|x^2|-1}}, & \text{якщо } |x| < 1, \\ 0, & \text{якщо } |x| \geq 1. \end{cases}$$

Константа C вибирається так, щоб $\int_{\mathbb{R}^n} \eta(x) dx = 1$.

За допомогою функції η визначимо функцію

$$\eta_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n} \eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

яку називають *ядром усереднення* радіуса ε .

Легко перевірити, що $\eta_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\text{supp } \eta_\varepsilon \subset B_\varepsilon(0)$, $\int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon(x) dx = 1$, $\eta_\varepsilon \geq 0$, та для довільного мультиіндексу α

$$\exists C_\alpha > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n: \quad |D^\alpha \eta_\varepsilon(x)| \leq \frac{C_\alpha}{\varepsilon^{n+|\alpha|}}. \quad (2.1)$$

Означення. Нехай $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Усередненою функцією для функції f називається згортка функцій η_ε та f , тобто

$$f^\varepsilon(x) := (\eta_\varepsilon * f)(x) = \int_{\Omega} \eta_\varepsilon(x - y) \cdot f(y) dy. \quad (2.2)$$

Усереднена функція визначена для тих значень змінної x , для яких інтеграл у (2.2) є скінченним. Інтегрування в інтегралі (2.2) відбувається фактично по кулі $B_\varepsilon(x)$. Тому $f^\varepsilon(x) = 0$ для всіх значень змінної $x \notin \Omega^\varepsilon := \{x \in \mathbb{R}^n: \text{dist}(x, \Omega) < \varepsilon\}$.

Лема 2.1. Усереднена функція $f^\varepsilon \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$, де $\Omega_\varepsilon := \{x \in \Omega: \text{dist}(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}$.

Доведення даної леми полягає в перевірці умов теореми про диференційовність інтеграла Лебега залежного від параметра.

Зауваження. Якщо $f \in L^1(\Omega)$ і Ω – обмежена, то для довільного $\varepsilon > 0$ функція $f^\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Цей факт впливає з лему 2.1, якщо вважати, що функція f продовжена нулем поза областю Ω .

Приклад. Для довільної області Ω та довільного числа $\varepsilon > 0$ існує така функція $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, що для всіх $x \in \mathbb{R}^n$: $0 \leq \psi(x) \leq 1$ та $\psi(x) = 1$, якщо $x \in \Omega$, і $\psi(x) = 0$, якщо $x \notin \Omega^{2\varepsilon}$. Шукана функція визначається формулою

$$\psi(x) = (\eta_\varepsilon * \chi_{\Omega^\varepsilon})(x) = \int_{\Omega^\varepsilon} \eta_\varepsilon(x - y) \cdot \chi_{\Omega^\varepsilon}(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

де $\chi_{\Omega^\varepsilon}$ – характеристична функція області Ω^ε .

Вправа. Використовуючи попередній приклад, довести, що для довільних областей Ω та Q таких, що $\bar{\Omega} \in Q$ та $\text{dist}(\partial Q, \Omega) > 0$, існує така функція $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, що для всіх $x \in \mathbb{R}^n$: $0 \leq \psi(x) \leq 1$ та

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega, \\ 0, & x \notin Q. \end{cases}$$

Як буде видно з наступних лем, основна властивість усереднених функцій полягає в тому, що якщо функція f належить до деякого топологічного простору, то усереднені функції f^ε апроксимують функцію f у топології цього простору.

Лема 2.2. Якщо $f \in C(\Omega)$, то для довільного компакта $K \subset \Omega$

$$f^\varepsilon \xrightarrow{K} f \quad \text{при} \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Доведення. Розглянемо довільний компакт $K \subset \Omega$ і виберемо ε_0 таким, щоб $2\varepsilon_0 < \text{dist}(K, \partial\Omega)$. Тоді для всіх $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ $K \subset \Omega_\varepsilon$ та $f^\varepsilon \in C^\infty(K)$ (див. лему 2.1). Зробивши заміну змінних $z = (x - y)/\varepsilon$ в інтегралі

$$f^\varepsilon(x) = \int_{|y-x|<\varepsilon} \eta_\varepsilon(x - y) f(y) dy, \quad x \in K,$$

одержимо

$$f^\varepsilon(x) = \int_{|z|<1} \eta_\varepsilon(z) f(x - \varepsilon z) dz, \quad x \in K.$$

Оскільки f – рівномірно неперервна на K^{ε_0} , то

$$\begin{aligned} \sup_{x \in K} |f(x) - f^\varepsilon(x)| &\leq \sup_{x \in K} \int_{|z| < 1} \eta(z) |f(x) - f(x - \varepsilon z)| dz \leq \\ &\leq \sup_{x \in K} \sup_{|z| < 1} |f(x) - f(x - \varepsilon z)| \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0. \end{aligned}$$

Лему доведено. ■

Розглянемо тепер питання про апроксимацію функцій із простору $L^p_{loc}(\Omega)$.

Лема 2.3. Якщо $f \in L^p_{loc}(\Omega)$ і $p \in [1, +\infty)$, то $f^\varepsilon \rightarrow f$ у $L^p_{loc}(\Omega)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Доведення. Розглянемо довільну обмежену область $K \Subset \Omega$. Як і в попередній лемі виберемо ε_0 таким, щоб $2\varepsilon_0 < \text{dist}(K, \partial\Omega)$. Використовуючи нерівність Гельдера, отримаємо, що для всіх $x \in K$

$$\begin{aligned} |f^\varepsilon(x)| &= \left| \int_{B_\varepsilon(x)} \eta_\varepsilon^{1-\frac{1}{p}}(x-y) \eta_\varepsilon^{\frac{1}{p}}(x-y) f(y) dy \right| \leq \\ &\leq \left(\int_{B_\varepsilon(x)} \eta_\varepsilon(x-y) dy \right)^{1-\frac{1}{p}} \left(\int_{B_\varepsilon(x)} \eta_\varepsilon(x-y) |f(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Підносячи нерівність (2.3) до степеня p та інтегруючи по K , виводимо $\|f^\varepsilon\|_{L^p(K)} \leq \|f\|_{L^p(K^\varepsilon)} < +\infty$ для всіх $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$.

Оскільки множина неперервних функцій є всюди щільною в просторі L^p , то для довільного числа $\delta > 0$ існує така неперервна функція w , що $\|f - w\|_{L^p(K^{\varepsilon_0})} < \delta$. На підставі лемми 2.2 існує таке $\varepsilon_1 < \varepsilon_0$, що для всіх $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$ маємо $\|w - w^\varepsilon\|_{L^p(K)} < \delta$. Тоді

$$\begin{aligned} \|f - f^\varepsilon\|_{L^p(K)} &\leq \|f - w\|_{L^p(K)} + \|w - w^\varepsilon\|_{L^p(K)} + \|w^\varepsilon - f^\varepsilon\|_{L^p(K)} \\ &< 2\delta + \|f - w\|_{L^p(K^\varepsilon)} < 3\delta. \end{aligned}$$

Таким чином, послідовність усереднених функцій $\{f^\varepsilon\}$ збігається до f у $L^p_{loc}(\Omega)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. ■

Зауваження. Якщо $f \in L^p(\Omega)$ і Ω – обмежена, то $f^\varepsilon \rightarrow f$ у $L^p(\Omega)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Лема 2.4. Якщо $u \in W_{loc}^{k,p}(\Omega)$ і $p \in [1, +\infty)$, то $u^\varepsilon \rightarrow u$ у $W_{loc}^{k,p}(\Omega)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Доведення. Спочатку зауважимо, що згідно з лемою 2.1, для довільного $\varepsilon > 0$ функція u^ε належить простору $C^\infty(\Omega_\varepsilon)$. Далі доведемо рівність

$$D^\alpha(u^\varepsilon) = \eta_\varepsilon * D^\alpha u = (D^\alpha u)^\varepsilon \quad \text{в } \Omega_\varepsilon \quad (\forall \alpha, |\alpha| \leq k), \quad (2.4)$$

тобто класична похідна гладкої функції u^ε є усередненою функцією для відповідної узагальненої похідної функції u . Візьмемо довільне $x \in \Omega_\varepsilon$. Диференціюючи під знаком інтеграла і використовуючи означення узагальненої похідної, отримаємо

$$\begin{aligned} D^\alpha u^\varepsilon(x) &= \int_{\Omega} D_x^\alpha(\eta_\varepsilon(x-y)) \cdot u(y) dy = \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} D_y^\alpha(\eta_\varepsilon(x-y)) \cdot u(y) dy = (\eta * D^\alpha u)(x). \end{aligned}$$

Візьмемо довільну обмежену область $K \Subset \Omega$. Згідно з (2.4) та лемою 2.3

$$\forall \alpha \quad |\alpha| \leq k : \quad D^\alpha u^\varepsilon \rightarrow D^\alpha u \quad \text{в } L^p(K) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Отже,

$$\|u^\varepsilon - u\|_{W^{k,p}(K)}^p = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u^\varepsilon - D^\alpha u\|_{L^p(K)}^p \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

Лему доведено. ■

З леми 2.4 випливає такий наслідок, доведення якого пропонується читачу як вправа.

Наслідок. Локально інтегрована функція v є узагальненою похідною порядку $|\alpha|$ функції u ($v = D^\alpha u$) тоді й тільки тоді, коли існує послідовність гладких функцій $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}}$, яка збігається до u в $L_{loc}^1(\Omega)$, а послідовність похідних $\{D^\alpha u_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ збігається до v в $L_{loc}^1(\Omega)$.

Фактично цей наслідок можна використовувати як еквівалентне означення узагальнених похідних. Крім того, за допомогою цього наслідку багато результатів класичного диференціального числення можуть бути перенесені на узагальнені похідні (див. наступну лему).

Лема 2.5. Нехай $f \in C^1(\mathbb{R})$, $f' \in L^\infty(\mathbb{R})$ і $u \in W^{1,1}(\Omega)$. Тоді композиція $f \circ u \in W^{1,1}(\Omega)$ та $\partial_{x_i}(f \circ u) = f'(u) \cdot \partial_{x_i}u$, $i \in \{1, \dots, n\}$.

Доведення. Згідно з попереднім наслідком існує така послідовність функцій $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subset C^1(\Omega)$, що послідовності $\{u_m\}$ і $\{\partial_{x_i}u_m\}$ збігаються в $L^1_{loc}(\Omega)$ до u та $\partial_{x_i}u$ відповідно. Тоді для довільної обмеженої області $K \Subset \Omega$ маємо

$$\int_K |f(u_m) - f(u)| dx \leq \sup |f'| \int_K |u_m - u| dx \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0,$$

та

$$\begin{aligned} & \int_K |f'(u_m) \partial_{x_i}u_m - f'(u) \partial_{x_i}u| dx \leq \\ & \leq \sup |f'| \int_K |\partial_{x_i}u_m - \partial_{x_i}u| dx + \int_K |f'(u_m) - f'(u)| |\partial_{x_i}u| dx. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Існує підпослідовність послідовності $\{u_m\}$, яку знову позначимо через $\{u_m\}$, що збігається майже скрізь у K до u . Оскільки f' – неперервна, то послідовність $\{f'(u_m)\}$ збігається майже скрізь у K до $f'(u)$. На підставі теореми про мажоровану збіжність останній інтеграл у (2.5) прямує до нуля. Отже, послідовності $\{f(u_m)\}$ і $\{f'(u_m) \partial_{x_i}u_m\}$ збігаються в $L^1_{loc}(\Omega)$ до $f(u)$ та $f'(u) \partial_{x_i}u$ відповідно, а це означає (див. наслідок), що має місце рівність $\partial_{x_i}(f(u)) = f'(u) \cdot \partial_{x_i}u$. ■

2.2. Наближення гладкими функціями функцій із $W^{k,p}(\Omega)$

Нагадаємо теорему про розбиття одиниці.

Теорема 2.1 (про розбиття одиниці). Нехай сімейство відкритих множин $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ покриває область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, тобто $\Omega \subset \bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha$. Тоді існує скінченна або зліченна множина функцій $\{\psi_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$:

1. $\forall j \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n: 0 \leq \psi_j(x) \leq 1,$
2. $\forall j \in \mathbb{N} \quad \exists \alpha \in A: \text{supp } \psi_j \subset V_\alpha,$

3. $\forall x \in \Omega$ лиш скінченна кількість функцій $\{\psi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ відмінна від нуля,
 4. $\forall x \in \Omega \quad \sum_{j \in \mathbb{N}} \psi_j(x) = 1$.

Множина функцій $\{\psi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$, яка визначена в попередній теоремі, називається *розбиттям одиниці*, що відповідає покриттю $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$. Доведення цієї теореми можна знайти в [11]. Далі будемо використовувати більш простіший варіант теореми про розбиття одиниці.

Лема 2.6. Нехай Ω та $\{V_i\}_{i=0}^N$ – обмежені області і $\{V_i\}_{i=0}^N$ – скінченне покриття області Ω таке, що $\bar{V}_0 \subset \Omega$ та $\partial\Omega \subset \bigcup_{i=1}^N V_i$. Тоді існує скінченне розбиття одиниці $\{\psi_i\}_{i=0}^N \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ таке, що

1. $\forall i \in \{0, 1, \dots, N\} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n: 0 \leq \psi_i(x) \leq 1$,
2. $\forall i \in \{0, 1, \dots, N\} : \text{supp } \psi_i \subset V_i$,
3. $\forall x \in \Omega \quad \sum_{i=0}^N \psi_i(x) = 1$.

Доведення. Покажемо, що існує нове покриття $\{Q_i\}_{i=0}^N$ області Ω таке, що для кожного $i \in \{0, 1, \dots, N\}$: $\bar{Q}_i \subset V_i$. Так, наприклад, для того, щоб знайти область Q_0 , визначимо область $K_0 := \Omega \setminus (\bigcup_{i=1}^N \bar{V}_i)$. Очевидно, що $\bar{K}_0 \subset V_0$ та існує таке $\varepsilon_0 > 0$, що $\bar{K}_0^{\varepsilon_0} \subset V_0$. Покладемо $Q_0 := K_0^{\varepsilon_0}$. Зрозуміло, що $Q_0, V_1, \dots, V_N$ – покриття області Ω .

Далі з допомогою покриття $Q_0, V_1, \dots, V_N$ визначаємо область $K_1 := \Omega \cap (V_1 \setminus (\bar{Q}_0 \cup \bar{V}_2 \cup \dots \cup \bar{V}_N))$. Очевидно, що $\bar{K}_1 \subset V_1$ та існує таке $\varepsilon_1 > 0$, що $\bar{K}_1^{\varepsilon_1} \subset V_1$. Покладемо $Q_1 := K_1^{\varepsilon_1}$. Зрозуміло, що $Q_0, Q_1, V_2, \dots, V_N$ – покриття області Ω . Продовжуючи цю процедуру через скінченну кількість кроків отримаємо шукане покриття $\{Q_i\}_{i=0}^N$.

Згідно вправи перед лемою 2.2 для кожного $i \in \{0, 1, \dots, N\}$ існує функція $\varphi_i \in C_0^\infty(V_i)$, що $0 \leq \varphi_i(x) \leq 1$ та $\varphi_i(x) = 1$ в області Q_i . Очевидно, що для всіх $x \in \Omega$ маємо $\sum_{i=0}^N \varphi_i(x) \geq 1$. Тоді функції з шуканого розбиття одиниці, яке відповідає покриттю $\{V_i\}_{i=0}^N$, визначаються таким чином:

$$\psi_i(x) = \frac{\varphi_i(x)}{\sum_{j=0}^N \varphi_j(x)}, \quad x \in V_i, \quad i \in \{0, 1, \dots, N\}.$$

Лему доведено. ■

Теорема 2.2. Нехай Ω – обмежена область, $u \in W^{k,p}(\Omega)$ ($1 \leq p < +\infty$). Тоді існує послідовність $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subset C^\infty(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega)$ така, що

$$u_m \rightarrow u \text{ у } W^{k,p}(\Omega) \text{ при } m \rightarrow +\infty.$$

Доведення. Легко перевірити, що область Ω можна зобразити у вигляді об'єднання: $\Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Omega_i$, де $\Omega_i = \{x \in \Omega: \text{dist}(x, \partial\Omega) > \frac{1}{i}\}$. Побудуємо нове локально-скінченне покриття $\{V_i\}_{i=0}^{\infty}$ області Ω таким чином: $V_i = \Omega_{i+2} \setminus \bar{\Omega}_i$, $i \in \mathbb{N}$; $V_0 = \Omega_2$. Очевидно, що $V_i \cap V_{i+1} = \Omega_{i+2} \setminus \bar{\Omega}_{i+1} \neq \emptyset$. Візьмемо розбиття одиниці $\{\psi_i\}_{i=0}^{\infty}$, яке відповідає покриттю $\{V_i\}_{i=0}^{\infty}$. Зрозуміло, що для кожного $i \in \mathbb{N}_0$ функція $\psi_i u \in W^{k,p}(\Omega)$. Можна вважати, що $\text{supp}(\psi_i u) \subset V_i$, $i \in \mathbb{N}_0$.

Побудуємо інше локально-скінченне покриття $\{Q_i\}_{i=0}^{\infty}$ області Ω таке, що для кожного $i \in \mathbb{N}_0$: $\bar{V}_i \subset Q_i$; області Q_i визначаються так:

$$Q_0 := \Omega_3, \quad Q_1 := \Omega_4, \quad Q_i := \Omega_{i+3} \setminus \bar{\Omega}_{i-1}, \quad i = 2, 3, \dots$$

Розглянемо усереднену функцію u_i^ε для функції $\psi_i u$. На підставі леми 2.4, для довільного числа $m \in \mathbb{N}$ і довільного $i \in \mathbb{N}_0$ існує $\varepsilon_{i,m} > 0$ таке, що $\text{supp}(u_i^{\varepsilon_{i,m}}) \subset Q_i$ та

$$\|u_i^{\varepsilon_{i,m}} - \psi_i u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \|u_i^{\varepsilon_{i,m}} - \psi_i u\|_{W^{k,p}(Q_i)} < \frac{m^{-1}}{2^{i+1}}.$$

Визначимо функцію $u_m(x) = \sum_{i=0}^{\infty} u_i^{\varepsilon_{i,m}}(x)$, $x \in \Omega$. Оскільки $\{Q_i\}_{i=0}^{\infty}$ – локально-скінченне покриття області Ω , то для довільного $m \in \mathbb{N}$ функція u_m визначається коректно і $u_m \in C^\infty(\Omega)$. Крім того,

$$\|u_m - u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left\| \sum_{i=0}^{+\infty} (u_i^{\varepsilon_{i,m}} - \psi_i u) \right\|_{W^{k,p}(\Omega)} \leq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{m^{-1}}{2^{i+1}} = \frac{1}{m}.$$

З цієї нерівності випливає, що послідовність $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subset W^{k,p}(\Omega)$ та збігається у $W^{k,p}(\Omega)$ до функції u . ■

Зауваження. У формулюванні даної теореми не можна замінити простір $C^\infty(\Omega)$ на простір $C^\infty(\bar{\Omega})$ у випадку довільної області Ω . Однак, при певній гладкості межі області Ω , простір $C^\infty(\bar{\Omega})$ є щільним у $W^{k,p}(\Omega)$.

Означення. Будемо говорити, що межа області Ω належить класу C^k ($\partial\Omega \in C^k$), якщо для довільної точки $x^0 \in \partial\Omega$ існує число $r > 0$ і функція $\gamma \in C^k(\mathbb{R}^{n-1})$, що з точністю до перепозначень і переорієнтації координат за необхідності,

$$\Omega \cap B_r(x^0) = \{x \in B_r(x^0) : x_n > \gamma(x_1, \dots, x_{n-1})\}.$$

Область Ω називається областю з гладкою межею ($\partial\Omega \in C^\infty$), якщо $\gamma \in C^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$. Область Ω називається областю з ліпшицевою межею ($\partial\Omega \in C^{0,1}$), якщо γ – ліпшицева функція.

Нагадаємо, що функція $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ називається ліпшицевою, якщо

$$\exists C > 0 \quad \forall x, y \in \Omega: |f(x) - f(y)| \leq C|x - y|. \quad (2.6)$$

Теорема 2.3. Нехай Ω – обмежена область і $\partial\Omega \in C^1$. Тоді для довільної функції $u \in W^{k,p}(\Omega)$ ($1 \leq p < +\infty$) існує послідовність $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subset C^\infty(\bar{\Omega})$ така, що

$$u_m \rightarrow u \quad \text{у } W^{k,p}(\Omega) \quad \text{при } m \rightarrow +\infty.$$

Доведення. 1. Зафіксуємо довільну точку $x^0 \in \partial\Omega$. Оскільки $\partial\Omega \in C^1$, то існує число $r > 0$ і функція $\gamma \in C^1(\mathbb{R}^{n-1})$, що

$$\Omega \cap B_r(x^0) = \{x \in B_r(x^0) : x_n > \gamma(x_1, \dots, x_{n-1})\}.$$

Покладемо $V := \Omega \cap B_{r/2}(x^0)$ і $x^\varepsilon := x + 2\varepsilon e_n$ ($e_n = (0, \dots, 0, 1)$). Тоді

$$\exists \varepsilon_0 \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0) \quad \forall x \in V: B_\varepsilon(x^\varepsilon) \subset B_r(x^0). \quad (2.7)$$

Визначимо функцію $u_\varepsilon(x) := u(x + 2\varepsilon e_n)$, $x \in V^{2\varepsilon}$, де $V^{2\varepsilon} = \{x \in \mathbb{R}^n : \text{dist}(x, V) < 2\varepsilon\}$. Тоді, згідно з лемою 2.1, усереднена функція

$$v^\varepsilon(x) = \int_{V^{2\varepsilon}} \eta_\varepsilon(x - y) u_\varepsilon(y) dy, \quad x \in V^\varepsilon,$$

належить простору $C^\infty(V^\varepsilon)$, а значить, $v^\varepsilon \in C^\infty(\bar{V})$.

На підставі міркувань, що наведені в лемах 2.3 і 2.4 та факту про неперервність L^p -норм відносно зсуву за змінною (фактично u_ε – це зсув за змінною x_n на відстань 2ε функції u) маємо, що для довільного мультиіндексу α , $|\alpha| \leq k$,

$$\|D^\alpha v^\varepsilon - D^\alpha u\|_{L^p(V)} \leq \|D^\alpha v^\varepsilon - D^\alpha u_\varepsilon\|_{L^p(V)} + \|D^\alpha u_\varepsilon - D^\alpha u\|_{L^p(V)} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0,$$

тобто $v^\varepsilon \rightarrow u$ у $W^{k,p}(V)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

2. Оскільки $\partial\Omega$ - компакт, то існує скінченне число точок $x_i^0 \in \partial\Omega$, чисел $r_i > 0$, відповідних множин $V_i = \Omega \cap B_{r_i/2}(x_i^0)$, $i = 1, \dots, N$, для яких має місце (2.7) і $\partial\Omega \subset \bigcup_{i=1}^N B_{r_i/2}(x_i^0)$.

Виходячи з міркувань наведених у попередньому пункті доведення, показуємо, що для довільного $i = 1, \dots, N$ і довільного числа $\delta > 0$ існує функція $v_i \in C^\infty(\overline{V_i})$, для якої має місце нерівність

$$\|v_i - u\|_{W^{k,p}(V_i)} \leq \frac{\delta}{N+1}. \quad (2.8)$$

Виберемо область V_0 таку, що $\overline{V_0} \subset \Omega$ і $\Omega \subset \bigcup_{i=0}^N V_i$. З леми 2.4 випливає існування функції $v_0 \in C^\infty(\overline{V_0})$ такої, що

$$\|v_0 - u\|_{W^{k,p}(V_0)} \leq \frac{\delta}{N+1}. \quad (2.9)$$

Візьмемо розбиття одиниці $\{\psi_i\}_{i=0}^N$, яке відповідає покриттю $\{V_0, B_{\frac{r_i}{2}}(x_i^0), i = 1, \dots, N\}$ і визначимо функцію

$$v(x) = \sum_{i=0}^N \psi_i(x) v_i(x), \quad x \in \Omega.$$

Очевидно $v \in C^\infty(\overline{\Omega})$. Оскільки $u = \sum_{i=0}^N \psi_i u$, то з (2.10) і (2.11) випливає, що для довільного мультиіндексу α , $|\alpha| \leq k$,

$$\begin{aligned} \|D^\alpha v - D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)} &\leq \sum_{i=0}^N \|D^\alpha(\psi_i v_i) - D^\alpha(\psi_i u)\|_{L^p(V_i)} \leq \\ &\leq C \sum_{i=0}^N \|v_i - u\|_{W^{k,p}(V_i)} \leq C \delta. \end{aligned}$$

Теорему доведено. ■

Зауваження. У формулюванні даної теореми можна послабити умову на гладкість межі. З доведення теореми видно, що достатньо вимагати, щоб $\partial\Omega \in C^{0,1}$. Крім того, теорему 2.4 можна записати у вигляді співвідношення

$$W^{k,p}(\Omega) = \overline{(C^\infty(\overline{\Omega}), \|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)})}.$$

В загальному випадку, коли межа не є достатньо гладкою, має місце включення

$$\overline{(C^\infty(\bar{\Omega}), \|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)})} \subset W^{k,p}(\Omega).$$

3. ПРОДОВЖЕННЯ ФУНКЦІЙ ІЗ ПРОСТОРІВ СОБОЛЕВА

Мета даного параграфу показати, що функції з простору $W^{k,p}(\Omega)$ можна продовжити у $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ ($1 \leq p < +\infty$) за певної гладкості межі області Ω . Зрозуміло, що продовження нулем на область $\mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$, не зберігає узагальненої похідної, а значить, і класу простору.

Теорема 3.1. (про продовження). Нехай Ω та V – обмежені області такі, що $\partial\Omega \in C^1$ і $\bar{\Omega} \subset V$. Тоді існує лінійний оператор $E: W^{1,p}(\Omega) \mapsto W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ такий, що:

1. $\forall u \in W^{1,p}(\Omega): Eu = u$ майже скрізь у Ω ,
2. $\forall u \in W^{1,p}(\Omega): \text{supp}(Eu) \subset V$,
3. $\exists C > 0 \forall u \in W^{1,p}(\Omega): \|Eu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$,

де константа C залежить тільки від p , Ω і V .

Оператор E називають оператором продовження з простору $W^{1,p}(\Omega)$ у простір $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Третя властивість вказує на те, що оператор E – обмежений.

Доведення. 1. Зафіксуємо довільну точку $x^0 \in \partial\Omega$ і припустимо, що межа є плоскою в деякому околі точки x^0 , тобто існує таке число $r > 0$, що

$$B_r(x^0) \cap \bar{\Omega} = B_r(x^0) \cap \{x: x_n \geq 0\} =: B^+.$$

Позначимо $B^- := B_r(x^0) \cap \{x: x_n \leq 0\}$.

2. Спочатку припустимо, що $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$, і визначимо функцію

$$\bar{u}(x) := \begin{cases} u(x), & x \in B^+, \\ -3u(x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n) + 4u\left(x_1, \dots, x_{n-1}, -\frac{x_n}{2}\right), & x \in B^-. \end{cases}$$

Очевидно, що $\bar{u} \in C^1(B)$, де $B := B_r(x^0)$. Дійсно, якщо позначити $u^+ := \bar{u}|_{B^+}$, $u^- := \bar{u}|_{B^-}$, то $u^+(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) = u^-(x_1, \dots, x_{n-1}, 0)$, звідки випливає, що

$$\partial_{x_i} u^+(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) = \partial_{x_i} u^-(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n-1\}.$$

Оскільки

$$\partial_{x_n} u^-(x) = 3 \partial_{x_n} u(x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n) - 2 \partial_{x_n} u\left(x_1, \dots, x_{n-1}, -\frac{x_n}{2}\right),$$

то і $\partial_{x_n} u^+(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) = \partial_{x_n} u^-(x_1, \dots, x_{n-1}, 0)$. Крім того, легко перевірити, що

$$\|\bar{u}\|_{W^{1,p}(B)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(B^+)},$$

де константа $C > 0$ не залежить від u , та $\overline{\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2} = \lambda_1 \overline{u_1} + \lambda_2 \overline{u_2}$.

3. Тепер відмовимося від припущення, що межа є плоскою в деякому околі точки x^0 . У цьому випадку використаємо відображення, яке вирівнює межу біля точки x^0 . Оскільки $\partial\Omega \in C^1$, то існує число $r > 0$ і функція $\gamma \in C^1(\mathbb{R}^{n-1})$ такі, що

$$\Omega \cap B_r(x^0) = \{x \in B_r(x^0) : x_n > \gamma(x_1, \dots, x_{n-1})\}.$$

Крім того, число r виберемо так, щоб $\overline{B_r(x^0)} \subset V$.

Визначимо вектор-відображення $F: B_r(x^0) \mapsto \mathbb{R}^n$:

$$\begin{cases} y_i = F_i(x) = x_i, & i \in \{1, 2, \dots, n-1\}, \\ y_n = F_n(x) = x_n - \gamma(x_1, \dots, x_{n-1}), \end{cases} \quad x \in B_r(x^0).$$

Легко перевірити, що якобіан $J(F)|_{x \in B_r(x^0)} = 1$.

Нехай $y^0 = F(x^0)$. Тоді F відображає кулю $B_r(x^0)$ на деяку область $\mathcal{M}$, яка містить точку y^0 , причому $F: \partial\Omega \cap B_r(x^0) \mapsto \{y \in \mathbb{R}^n : y_n = 0\}$. Очевидно, що обернене відображення $F^{-1}: \mathcal{M} \mapsto B_r(x^0)$ визначається рівностями

$$\begin{cases} x_i = y_i, & i \in \{1, 2, \dots, n-1\}, \\ x_n = y_n + \gamma(y_1, \dots, y_{n-1}), \end{cases} \quad y \in \mathcal{M},$$

і якобіан $J(F^{-1})|_{y \in \mathcal{M}} = 1$. Розглянемо функцію

$$v(y) := u(F^{-1}(y)), \quad y \in B_{r_1}^+ := B_{r_1}(y^0) \cap \{y : y_n \geq 0\},$$

де куля $\overline{B_{r_1}(y^0)} \subset \mathcal{M}$. Зрозуміло, що $v \in C^1(B_{r_1}^+)$.

Аналогічно, як у пункті 2, побудуємо продовження $\bar{v} \in C^1(B_{r_1}(y^0))$ функції v таке, що

$$\|\bar{v}\|_{W^{1,p}(B_{r_1}(y^0))} \leq C \|v\|_{W^{1,p}(B_{r_1}^+)}. \quad (3.1)$$

Покладемо $Q := F^{-1}(B_{r_1}(y^0))$. Очевидно, що $x^0 \in Q$. Перейшовши до координат x , отримаємо, що функція $\bar{u}(x) = \bar{v}(F(x))$, $x \in Q$, є продовженням функції u з області $\Omega \cap Q$ на область Q і $\bar{u} \in C^1(Q)$.

На підставі співвідношень $\partial_{x_i} \bar{u} = \partial_{y_i} \bar{v} - \partial_{y_n} \bar{v} \partial_{x_i} \gamma$ для $i = 1, \dots, n-1$, $\partial_{x_n} \bar{u} = \partial_{y_n} \bar{v}$ та (3.1), маємо

$$\|\bar{u}\|_{W^{1,p}(Q)} \leq C_1 \|\bar{v}\|_{W^{1,p}(B_{r_1}(y^0))} \leq C_2 \|v\|_{W^{1,p}(B_{r_1}^+)} \leq C_3 \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

4. В попередньому пункті доведено, що для кожної точки на межі області Ω існує окіл Q цієї точки, на який можна продовжити функцію u . Таким чином, отримуємо покриття межі, а оскільки $\partial\Omega$ – компакт, то існує скінченне підпокриття, тобто набір областей $\{Q_i\}_{i=1}^N$ таких, що

$$\partial\Omega \subset \bigcup_{i=1}^N Q_i \Subset V, \quad (3.2)$$

та функцій $\bar{u}_i \in C^1(Q_i)$, $i = 1, \dots, N$, які є продовженнями функції u на Q_i і для яких має місце

$$\|\bar{u}_i\|_{W^{1,p}(Q_i)} \leq C_i \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}. \quad (3.3)$$

Виберемо область Q_0 таку, що $\overline{Q_0} \subset \Omega$ і $\Omega \subset \bigcup_{i=0}^N Q_i$. Візьмемо розбиття одиниці $\{\psi_i\}_{i=0}^N$, яке відповідає покриттю $\{Q_i\}_{i=0}^N$ (див. лему 2.6) і визначимо функцію

$$Eu(x) := \sum_{i=0}^N \psi_i(x) \bar{u}_i(x), \quad x \in \bigcup_{i=0}^N Q_i, \quad (\bar{u}_0 = u).$$

Очевидно, що $Eu(x) = u(x)$ для всіх $x \in \Omega$. Згідно з (3.2) $\bar{u} \in C_0^1(V)$, а на підставі (3.3)

$$\|Eu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}, \quad (3.4)$$

де константа C залежить тільки від p, Ω та V і не залежить від u . Крім того, зауважимо, що відображення $u \mapsto Eu$ – лінійне.

5. Нагадаємо, що продовження Eu побудоване за припущення, що $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$. Тепер розглянемо довільну функцію $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Згідно з теоремою 2.3 існує послідовність $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subset C^\infty(\overline{\Omega})$ така, що

$$u_m \rightarrow u \text{ у } W^{1,p}(\Omega) \text{ при } m \rightarrow +\infty.$$

Для кожної функції u_m можна побудувати продовження $Eu_m \in C_0^1(V)$, для якого має місце нерівність (3.4). Тоді

$$\|Eu_m - Eu_k\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|u_m - u_k\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

Отже, $\{Eu_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ – фундаментальна послідовність у $W^{1,p}(V)$. Границю цієї послідовності позначимо через Eu , тобто $Eu := \lim_{m \rightarrow +\infty} Eu_m$. Очевидно, що дана границя не залежить від вибору апроксимуючої послідовності.

Перейшовши в нерівності $\|Eu_m\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|u_m\|_{W^{1,p}(\Omega)}$ до границі при $m \rightarrow +\infty$, отримаємо $\|Eu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$. ■

Зауваження 1. Дана теорема справедлива за слабшого припущення на межу області, а саме $\partial\Omega \in C^{0,1}$.

Зауваження 2. Нехай Ω і V – обмежені області такі, що $\partial\Omega \in C^{k-1,1}$ та $\bar{\Omega} \subset V$. Тоді існує лінійний обмежений оператор

$$E: W^{k,p}(\Omega) \mapsto W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$$

такий, що:

- $\forall u \in W^{k,p}(\Omega): Eu = u$ майже скрізь у Ω ;
- $\forall u \in W^{k,p}(\Omega): \text{supp}(Eu) \subset V$;
- $\exists C > 0 \forall u \in W^{k,p}(\Omega): \|Eu\|_{W^{k,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}$.

Доведення даного твердження повторює доведення теореми 3.1, однак у пункті 2 потрібно будувати продовження за такою формулою:

$$\bar{u}(x) := \begin{cases} u(x), & x \in B^+, \\ \sum_{i=1}^{k+1} A_i u\left(x_1, \dots, x_{n-1}, -\frac{x_n}{i}\right), & x \in B^-. \end{cases}$$

де коефіцієнти $A_1, \dots, A_{k+1}$ є розв'язками системи

$$\sum_{i=1}^{k+1} \left(-\frac{1}{i}\right)^s A_i = 1, \quad s = 0, 1, \dots, k.$$

Зауважимо, що визначник даної системи – це визначник Вандермонда, який відмінний від нуля, і тому система має єдиний розв'язок.

4 . ПРОСТОРИ СОБОЛЕВА $H^1(a, b)$ ТА $H_0^1(a, b)$

Нагадаємо, що $H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega)$ – гільбертів простір з таким скалярним добутком:

$$(u, v)_{H^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} D^{\alpha} u D^{\alpha} v \, dx, \quad u, v \in H^k(\Omega);$$

у випадку, коли Ω – інтервал (a, b) і $k = 1$, будемо мати простір $H^1(a, b)$, норма в якому визначається звичайним чином:

$$\|u\|_{H^1(a,b)} = \sqrt{(u, u)_{H^1(a,b)}} = \left(\int_a^b (u^2 + (u')^2) \, dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Очевидно, що $H^1(a, b) \subset L^2(a, b)$, причому дане вкладення є неперервним ($\|u\|_{L^2(a,b)} \leq \|u\|_{H^1(a,b)}$). Згідно з теоремою 2.3 простір $C^\infty([a, b])$ є всюди щільним у $H^1(a, b)$.

Нагадаємо, що банановий простір X неперервно вкладається у банановий простір Y ($X \subset Y$), якщо кожний елемент x з простору X належить також до простору Y та існує стала C , що для всіх $x \in X$ виконується нерівність $\|x\|_Y \leq C \|x\|_X$.

Теорема 4.1. Для довільної функції $u \in H^1(a, b)$ існує єдина функція $u_0 \in C([a, b])$ така, що $u = u_0$ майже скрізь на $[a, b]$. Крім того, існує така постійна $c > 0$, яка не залежить від u та u_0 , що

$$\|u_0\|_{C([a,b])} \leq c \|u\|_{H^1(a,b)}. \quad (4.1)$$

Зауваження 1. Оскільки елементами в просторі є класи еквівалентності функцій, які рівні майже скрізь, то дана теорема стверджує, що в клас еквівалентності функції $u \in H^1(a, b)$ потрапляє неперервна функція $u_0 \in C([a, b])$, причому має місце нерівність (4.1). Тому теорему 4.1 можна переформулювати так:

Простір $H^1(a, b)$ неперервно вкладається в простір $C([a, b])$.

Доведення. Для довільної функції $u \in H^1(a, b)$ згідно з теоремою 2.3 існує послідовність $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subset C^\infty([a, b])$ така, що

$$u_m \rightarrow u \text{ в } H^1(a, b) \text{ при } m \rightarrow +\infty. \quad (4.2)$$

На підставі теореми про середнє значення для довільного $m \in \mathbb{N}$ і $x \in [a, b]$ має місце таке зображення:

$$u_m(x) = \int_{\xi}^x u'_m(t) dt + \frac{1}{b-a} \int_a^b u_m(t) dt,$$

де ξ – точка з $[a, b]$ така, що $u_m(\xi) = (b-a)^{-1} \int_a^b u_m dt$. З даного представлення за допомогою нерівності Коші – Буняковського виводимо нерівність:

$$\begin{aligned} |u_m(x)| &\leq \int_{\xi}^x |u'_m(t)| dt + \frac{1}{b-a} \int_a^b |u_m(t)| dt \leq \\ &\leq c_1 \left(\int_a^b (u_m^2 + (u'_m)^2) dx \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

де $c_1 = \sqrt{2(b-a)} \max \left\{ 1, \frac{1}{b-a} \right\}$. З (4.3) випливає така нерівність

$$\|u_m\|_{C([a,b])} := \max_{x \in [a,b]} |u_m(x)| \leq c_1 \|u_m\|_{H^1(a,b)}, \quad (4.4)$$

звідки маємо, що

$$\|u_m - u_n\|_{C([a,b])} \leq c_1 \|u_m - u_n\|_{H^1(a,b)}. \quad (4.5)$$

Урахувавши (4.2), з (4.5) робимо висновок, що $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ – фундаментальна в $C([a, b])$. Це означає, що існує єдина функція $u_0 \in C([a, b])$ така, що

$$u_m \xrightarrow{[a,b]} u_0 \quad \text{при } m \rightarrow +\infty. \quad (4.6)$$

Із (4.2) та (4.6) випливає, що $u = u_0$ майже скрізь на $[a, b]$. Перейшовши до границі при $m \rightarrow \infty$ у (4.4), отримаємо (4.1). ■

Виникає природне питання: чи можна вважати, що $H^1(a, b) = C([a, b])$? Виявляється, що ні. Обґрунтовує цю відповідь така теорема.

Теорема 4.2. Кожна функція $u \in H^1(a, b)$ майже скрізь на $[a, b]$ збігається з деякою абсолютно неперервною функцією u_0 .

Доведення. Нагадаємо, що деяка функція u_0 є абсолютно неперервною тоді й тільки тоді, коли майже скрізь на $[a, b]$ існує похідна даної функції і для довільного $x \in [a, b]$

$$u_0(x) = \int_a^x u'_0(t) dt + u_0(a). \quad (4.7)$$

Так само, як і в теоремі 4.1, для довільної функції $u \in H^1(a, b)$ візьмемо послідовність $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subset C^\infty([a, b])$ таку, що $u_m \rightarrow u$ в $H^1(a, b)$ при $m \rightarrow +\infty$. Згідно з теоремою 4.1 існує єдина неперервна функція u_0 така, що $u_m \rightarrow u_0$ рівномірно на $[a, b]$ і $u = u_0$ майже скрізь на $[a, b]$. Урахувавши ці факти й перейшовши до границі в рівності

$$u_m(x) = \int_a^x u'_m(t) dt + u_m(a)$$

при $m \rightarrow +\infty$, отримаємо, що

$$u_0(x) = \int_a^x u'(t) dt + u_0(a), \quad \forall x \in [a, b].$$

Дана рівність означає, що майже скрізь на $[a, b]$ існує похідна даної функції, $u'_0 = u'$ та u_0 є абсолютно неперервною функцією. ■

Зауваження 2. Нагадаємо, що не кожна неперервна функція є абсолютно неперервною, наприклад, функція Кантора (див. [14, глава VI]). Дана функція – неперервна, неспадна і її похідна майже скрізь дорівнює нулю. Однак її не можна зобразити у вигляді (4.7).

Зауваження 3. З доведення теореми 4.2 випливає, що для довільної функції u з простору $H^1(a, b)$ існує майже скрізь класична похідна і вона майже скрізь збігається з узагальненою похідною.

Теорема 4.3. Вкладення $H^1(a, b) \subset C([a, b])$ – компактне.

Доведення. Фактично нам потрібно довести, що з довільної обмеженої послідовності $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ у $H^1(a, b)$ можна вибрати фундаментальну підпослідовність у $C([a, b])$. Для цього скористаємося теоремою Асколі – Арцела.

З обмеженості послідовності $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ у $H^1(a, b)$ і (4.1) випливає, що дана множина функцій буде рівномірно обмеженою, тобто існує постійна $c_1 > 0$ така, що для всіх $m \in \mathbb{N}$: $\|u_m\|_{C([a, b])} \leq c_1$. Тут і далі в доведенні на підставі теореми 4.1 можемо вважати, що кожна функція u_m є неперервною на $[a, b]$.

Згідно з теоремою 4.2, для кожного $m \in \mathbb{N}$

$$u_m(x) = \int_a^x u'_m(t) dt + u_m(a), \quad \forall x \in [a, b],$$

звідки

$$|u_m(x_1) - u_m(x_2)| \leq \sqrt{|x_1 - x_2|} \sqrt{\int_{x_2}^{x_1} |u'_m(t)|^2 dt} \leq c_2 \sqrt{|x_1 - x_2|},$$

для довільних $x_1, x_2 \in [a, b]$. Дана нерівність показує, що множина функцій $\{u_m\}_{m=1}^\infty$ є одностайно неперервною. Таким чином, виконуються умови теореми Асколі – Арцела, а значить, з послідовності $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ можна вибрати фундаментальну підпослідовність у $C([a, b])$. ■

За означенням $H_0^1(a, b) = \overline{(C_0^\infty((a, b)), \|\cdot\|_{H^1(a, b)})}$. Оскільки простір $C_0^\infty((a, b)) \subset C^\infty([a, b])$, то $H_0^1(a, b) \subset H^1(a, b) \subset C([a, b])$. Ми показали, що останнє включення – строге. А чи буде строгим перше включення? Щоб дати відповідь на дане питання, розглянемо довільну функцію $u \in H_0^1(a, b)$. Згідно з означенням простору $H_0^1(a, b)$, існує послідовність $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subset C_0^\infty((a, b))$ така, що $u_m \rightarrow u$ в $H^1(a, b)$ при $m \rightarrow +\infty$. З теореми 4.1 випливає, що $u_m \rightrightarrows u_0$ на $[a, b]$ при $m \rightarrow +\infty$, де $u_0 \in C([a, b])$ і $u = u_0$ майже скрізь на $[a, b]$. Отже,

$$u(a) = \lim_{m \rightarrow +\infty} u_m(a) = 0, \quad u(b) = \lim_{m \rightarrow +\infty} u_m(b) = 0.$$

Таким чином, кожна функція $u \in H_0^1(a, b)$ майже скрізь на (a, b) збігається з деякою абсолютно неперервною функцією u_0 такою, що $u_0(a) = u_0(b) = 0$. Це означає, що $H_0^1(a, b) \neq H^1(a, b)$.

Лема 4.1 (нерівність Фрідрікса). Існує така стала $C > 0$, що для всіх функцій $u \in H_0^1(a, b)$ має місце нерівність

$$\int_a^b u^2(x) dx \leq C \int_a^b (u'(x))^2 dx. \quad (4.8)$$

Доведення. Для довільної функції $u \in H_0^1(a, b)$ існує послідовність $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subset C_0^\infty((a, b))$ така, що $u_m \rightarrow u$ в $H^1(a, b)$ при $m \rightarrow +\infty$. Тоді для довільного $m \in \mathbb{N}$ і $x \in [a, b]$

$$u_m(x) = \int_a^x u'_m(t) dt,$$

звідки

$$u_m^2(x) = \left(\int_a^x u'_m(t) dt \right)^2 \leq \int_a^x dt \int_a^x (u'_m)^2 dt \leq (b-a) \int_a^b (u'_m)^2 dt.$$

Інтегруючи останню нерівність, маємо нерівність

$$\int_a^b u_m^2(x) dx \leq (b-a)^2 \int_a^b (u'_m)^2 dt.$$

Перейшовши в ній до границі при $m \rightarrow +\infty$, отримуємо (4.8). ■

Уведемо в просторі $H_0^1(a, b)$ новий скалярний добуток

$$(u, v)_{H_0^1(a, b)} := \int_a^b u' v' dx, \quad \forall u, v \in H_0^1(a, b).$$

Читачу пропонується перевірити, що це дійсно скалярний добуток. Цей добуток визначає норму

$$\|u\|_{H_0^1(a, b)} = \sqrt{(u, u)_{H_0^1(a, b)}}.$$

Очевидно, що для кожної функції $u \in H_0^1(a, b)$ має місце нерівність

$$\|u\|_{H_0^1(a, b)} \leq \|u\|_{H^1(a, b)}.$$

З другого боку, на підставі нерівності Фрідрікса маємо

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^1(a, b)} &= \left(\int_a^b u^2 dx + \int_a^b (u')^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \left(C \int_a^b (u')^2 dx + \int_a^b (u')^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = C_1 \|u\|_{H_0^1(a, b)} \quad \forall u \in H_0^1(a, b). \end{aligned}$$

Таким чином, норми $\|\cdot\|_{H^1(a, b)}$ та $\|\cdot\|_{H_0^1(a, b)}$ — еквівалентні. Отже,

$$H_0^1(a, b) = \overline{(C_0^\infty(a, b), \|\cdot\|_{H_0^1(a, b)})}.$$

5. ОПЕРАТОРИ СЛІДУ

Якщо функція $u \in C(\bar{\Omega})$, то очевидно u приймає значення на межі $\partial\Omega$, яке будемо позначати $u|_{\partial\Omega}$. Виникає питання: чи можна визначити коректно значення на межі $\partial\Omega$ для довільної функції $u \in W^{1,p}(\Omega)$ (така функція, узагалі кажучи, не є неперервною і визначається з точністю до міри нуль, а міра Лебега множини $\partial\Omega$ дорівнює нулю).

Теорема 5.1. Нехай Ω – обмежена область і $\partial\Omega \in C^1$; $p \in [1, +\infty)$. Тоді існує такий лінійний оператор $T: W^{1,p}(\Omega) \mapsto L^p(\partial\Omega)$, що:

- $Tu = u|_{\partial\Omega}$, якщо $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$;
- $\exists C > 0 \ \forall u \in W^{1,p}(\Omega): \|Tu\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$.

Означення 1. Оператор T визначений у теоремі 5.1, називається оператором сліду, а Tu – слід функції на межі $\partial\Omega$.

Доведення. 1. Припустимо спочатку, що $u \in C^1(\bar{\Omega})$ і межа області Ω є плоскою в деякому околі точки x^0 , тобто існує таке число $r > 0$, що

$$B_r(x^0) \cap \bar{\Omega} = B_r(x^0) \cap \{x: x_n \geq 0\} =: B_r^+.$$

Виберемо функцію $\zeta \in C_0^\infty(B_r(x^0))$ таку, що $\zeta \geq 0$ на $B_r(x^0)$ і $\zeta \equiv 1$ на $B_{r/2}(x^0)$. Позначимо $\Gamma := B_{r/2}(x^0) \cap \{x: x_n = 0\}$ і $x' = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} = \{x_n = 0\}$. Застосовуючи нерівність Юнга, виводимо

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} |u|^p dx' &\leq \int_{\{x_n=0\}} \zeta |u|^p dx' = - \int_{B_r^+} \partial_{x_n}(\zeta |u|^p) dx = \\ &= - \int_{B_r^+} (|u|^p \partial_{x_n} \zeta + \zeta p |u|^{p-1} \text{sign}(u) \partial_{x_n} u) dx \leq \\ &\leq C \int_{B_r^+} \left(|u|^p + \sum_{i=1}^n |\partial_{x_i} u|^p \right) dx \leq C \|u\|_{W^{1,p}(B_r^+)}^p. \end{aligned} \quad (5.1)$$

2. Якщо межа не є плоскою в околі $B_r(x^0)$ точки $x^0 \in \partial\Omega$, то розпрямляючи межу за допомогою відображення $F: B_r(x^0) \mapsto \mathbb{R}^n$ (див. пункт 3 у теоремі 3.1) і використовуючи (5.1), виводимо нерівність

$$\int_{\Gamma} |u|^p d\sigma_x \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}^p,$$

де $\Gamma = \partial\Omega \cap B_{\frac{r}{2}}(x^0)$, де $d\sigma_x$ – елемент площі $(n-1)$ -вимірної поверхні $\partial\Omega$. Отже для кожної точки на межі області Ω існує відкрита обмежена поверхня на $\partial\Omega$, для якої має місце вище наведена нерівність.

3. Оскільки $\partial\Omega$ – компакт, то існує скінченне число відкритих поверхонь Γ_i на $\partial\Omega$ такі, що

$$\partial\Omega \subset \bigcup_{i=1}^N \Gamma_i \quad \text{та} \quad \|u\|_{L^p(\Gamma_i)}^p \leq C_i \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}^p.$$

Підсумовуючи останні нерівності за $i = 1, \dots, N$, отримуємо нерівність

$$\|u\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}. \quad (5.2)$$

Таким чином, на просторі функцій $C^1(\bar{\Omega})$ можна визначити оператор $Tu := u|_{\partial\Omega}$, який є лінійним і для нього виконується нерівність (5.2).

4. Тепер розглянемо довільну функцію $u \in W^{1,p}(\Omega)$. З теореми 2.3 випливає існування послідовності $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subset C^\infty(\bar{\Omega})$ такої, що

$$u_m \rightarrow u \quad \text{у} \quad W^{1,p}(\Omega) \quad \text{при} \quad m \rightarrow +\infty.$$

Для кожної функції u_m визначена функція $Tu_m \in L^p(\partial\Omega)$ і має місце нерівність (5.2). Тоді

$$\|Tu_m - Tu_k\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq C \|u_m - u_k\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

Отже, $\{Tu_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ – фундаментальна послідовність у $L^p(\partial\Omega)$. Границю цієї послідовності позначимо через Tu , тобто $Tu = \lim_{m \rightarrow +\infty} Tu_m$. Очевидно, що дана границя не залежить від вибору апроксимуючої послідовності.

Перейшовши до границі в нерівності $\|Tu_m\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq C \|u_m\|_{W^{1,p}(\Omega)}$, при $m \rightarrow +\infty$, отримаємо $\|Tu\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$. ■

На підставі пункту 4 з доведення попередньої теореми можемо сформулювати і таке означення сліду для функції $u \in W^{1,p}(\Omega)$ на поверхні $\partial\Omega$.

Означення 2. Нехай $u \in W^{1,p}(\Omega)$ і послідовність $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subset C^1(\bar{\Omega})$, яка апроксимує функцію u у $W^{1,p}(\Omega)$. Тоді слідом функції u на $(n-1)$ -вимірній поверхні $\partial\Omega$ називається така границя:

$$Tu := \lim_{m \rightarrow +\infty} u_m|_{\partial\Omega} \text{ у просторі } L^p(\partial\Omega).$$

За допомогою оператора сліду легко зрозуміти чим відрізняються простори $W^{1,p}(\Omega)$ і $W_0^{1,p}(\Omega)$ (означення цього простору дано в кінці розділу 1). Виявляється, що має місце такий критерій належності до простору $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Теорема 5.2. Нехай Ω – обмежена область і $\partial\Omega \in C^1$; $p \in [1, +\infty)$. Тоді

$$u \in W_0^{1,p}(\Omega) \Leftrightarrow Tu = 0 \text{ на } \partial\Omega.$$

Доведення необхідності пропонуємо читачу у вигляді вправи; доведення достатності опускаємо (його можна прочитати в книгах [6, 16, 29, 42]).

Приклад. Нехай Ω – круг $B_1(0)$ в $\mathbb{R}^2$ з центром в точці $(0,0)$ радіуса 1. Розглянемо функцію

$$u(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1^2 + x_2^2, & (x_1, x_2) \in \Omega, \\ 2, & (x_1, x_2) \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Очевидно, що $u \in W^{1,p}(\Omega)$; $p \in [1, +\infty)$. Знайдемо слід цієї функції на межі $\partial\Omega$ області Ω .

За апроксимуючу послідовність $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subset C^1(\bar{\Omega})$ візьмемо таку послідовність $u_m(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$, $(x_1, x_2) \in \bar{\Omega}$. Легко перевірити, що $u_m \rightarrow u$ у $W^{1,p}(\Omega)$ при $m \rightarrow +\infty$. Крім того, $u_m|_{\partial\Omega} \equiv 1$. Тому

$$Tu = \lim_{m \rightarrow +\infty} u_m|_{\partial\Omega} = 1 \text{ у просторі } L^p(\partial\Omega).$$

Вправа 1. Нехай $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $v \in W^{1,q}(\Omega)$ ($1 < p < +\infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$).

Довести формулу інтегрування частинами

$$\int_{\Omega} \partial_{x_i} u v \, dx = \int_{\partial\Omega} Tu Tv \cos(\mathbf{v}, x_i) \, d\sigma_x - \int_{\Omega} u \partial_{x_i} v \, dx, \quad (5.3)$$

де $v_i(x) = \cos(\mathbf{v}, x_i)$ – косинус кута, що утворює вектор зовнішньої нормалі $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$ до поверхні $\partial\Omega$ з віссю системи координат Ox_i . $\square$

Вправа 2. (Формула Остроградського). Нехай в обмеженій області Ω ($\partial\Omega \in C^1$) визначине векторне поле $\mathbf{A} = (a_1(x), \dots, a_n(x))$, компоненти якого належать простору $W^{1,p}(\Omega)$, тобто $\frac{\partial a_i}{\partial x_i} \in W^{1,p}(\Omega)$ для $i = 1, \dots, n$. Довести формулу формулу Остроградського

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{A}(x)) \, dx = \int_{\partial\Omega} \sum_{i=1}^n T(a_i(x)) \, v_i(x) \, d\sigma_x. \quad (5.4)$$

Якщо функція u належить простору $W^{2,p}(\Omega)$, то можна визначити слід похідної по нормалі на межі області Ω таким чином:

$$T(\partial_{\mathbf{v}} u) := \sum_{i=1}^n T(\partial_{x_i} u) \, v_i. \quad (5.5)$$

Вправа 3. Нехай $u, v \in H^2(\Omega)$, $\partial\Omega \in C^1$. Довести другу формулу Гріна-Остроградського

$$\int_{\Omega} (v \, \Delta u - u \, \Delta v) \, dx = \int_{\partial\Omega} (T(v) T(\partial_{\mathbf{v}} u) - T(u) T(\partial_{\mathbf{v}} v)) \, d\sigma_x.$$

Зауваження 1. Природнім чином постає питання чи буде відображення $T: W^{1,p}(\Omega) \mapsto L^p(\partial\Omega)$ сюр'єкцією, тобто чи кожна функція з простору $L^p(\partial\Omega)$ буде слідом деякої функції з $W^{1,p}(\Omega)$? Відповідь на це питання буде надано в кінці пункту 8.1.

6 . НЕРІВНОСТІ В ПРОСТОРАХ СОБОЛЕВА. ТЕОРЕМА СОБОЛЕВА

Мета цього розділу полягає в тому, щоб дати відповідь на питання: *якщо функція належить до деякого простору Соболева, то чи буде вона автоматично належати до деякого іншого простору?* Розглянемо спочатку простір $W^{1,p}(\Omega)$. Частково відповідь на поставлене питання ми можемо дати у випадку, коли розмірність простору $n = 1$; тоді $W^{1,p}((a, b)) \subset C([a, b])$. Для $n \geq 2$ таке вкладення неправильне. Вичерпна відповідь буде залежати від співвідношення параметрів p та n .

6.1. Випадок $p \in [1, n)$

Число $p^* := \frac{np}{n-p}$ будемо називати *соболевським спряженим числом* до числа p . Очевидно, що $p^* > p$.

Теорема 6.1. (Гагліардо – Ніренберга – Соболева). Нехай $1 \leq p < n$. Тоді існує така постійна $C > 0$, яка залежить тільки від p і n , що

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \quad \forall u \in C_0^1(\mathbb{R}^n). \quad (6.1)$$

Доведення. Спочатку розглянемо випадок $p = 1$; тоді $p^* = \frac{n}{n-1}$. Оскільки $\text{supp}(u)$ – компакт, то для довільних $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ й $x \in \mathbb{R}^n$ маємо

$$u(x) = \int_{-\infty}^{x_i} \partial_{x_i} u(x_1, \dots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \dots, x_n) dy_i,$$

звідки виводимо нерівності

$$|u(x)|^{\frac{1}{n-1}} \leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\nabla u(x_1, \dots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \dots, x_n)| dy_i \right)^{\frac{1}{n-1}}$$

для $i = 1, 2, \dots, n$. Перемноживши їх, отримаємо

$$|u(x)|^{\frac{n}{n-1}} \leq \prod_{i=1}^n I_i^{\frac{1}{n-1}}, \quad I_i := \int_{-\infty}^{+\infty} |\nabla u(x_1, \dots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \dots, x_n)| dy_i.$$

Зауважимо, що функція I_i не залежить від змінної x_i .

Проінтегруємо останню нерівність за x_1 і застосуємо узагальнену нерівність Гельдера з показниками $p_k = n - 1, k = 1, 2, \dots, n - 1$:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} |u(x)|^{\frac{n}{n-1}} dx_1 &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{i=1}^n I_i^{\frac{1}{n-1}} dx_1 = \\ &= I_1^{\frac{1}{n-1}} \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{i=2}^n I_i^{\frac{1}{n-1}} dx_1 \leq I_1^{\frac{1}{n-1}} \prod_{i=2}^n \left(\int_{-\infty}^{+\infty} I_i dx_1 \right)^{\frac{1}{n-1}}. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Інтегруючи (6.2) за x_2 і знову застосовуючи узагальнену нерівність Гельдера з тими ж самими показниками, одержуємо

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |u(x)|^{\frac{n}{n-1}} dx_1 dx_2 \leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} I_2 dx_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} I_1 dx_2 \right)^{\frac{1}{n-1}} \prod_{i=3}^n \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} I_i dx_1 dx_2 \right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

Продовжуючи інтегрувати за $x_3, \dots, x_n$, знайдемо

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^{\frac{n}{n-1}} dx \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u| dx \right)^{\frac{n}{n-1}},$$

звідки

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq \|\nabla u\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}. \quad (6.3)$$

Тепер розглянемо випадок $1 < p < n$. Застосуємо (6.3) до функції $v = |u|^\gamma$, де параметр $\gamma > 1$ і буде вибраний далі. Тоді

$$\begin{aligned} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^{\frac{\gamma n}{n-1}} dx \right)^{\frac{n-1}{n}} &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla(|u|^\gamma)| dx = \gamma \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\gamma-1} |\nabla u| dx \\ &\leq \gamma \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{(\gamma-1)\frac{p}{p-1}} dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Виберемо γ так, щоб $\frac{\gamma n}{n-1} = (\gamma-1)\frac{p}{p-1}$, тобто $\gamma = \frac{p(n-1)}{n-p}$. Тоді $\frac{\gamma n}{n-1} = p^*$. Таким чином, нерівність (6.4) перепишеться у вигляді

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^{p^*} dx \right)^{\frac{1}{p^*}} \leq \frac{p(n-1)}{n-p} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Теорему доведено. ■

Лема 6.1. Нехай Ω – обмежена область і $\partial\Omega \in C^1$; $p \in [1, n)$. Тоді кожна функція u з простору $W^{1,p}(\Omega)$ належить до $L^{p^*}(\Omega)$ і має місце нерівність

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)},$$

де стала C залежить від p, n і Ω ; тобто вкладення $W^{1,p}(\Omega) \subset L^{p^*}(\Omega)$ – неперервне.

Доведення. Згідно з теоремою 3.1 (про оператор продовження) існує така область V і оператор продовження $E: W^{1,p}(\Omega) \mapsto W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, що $\bar{\Omega} \subset V$, та для довільної функції $u \in W^{1,p}(\Omega)$ носій Eu міститься в V та

$$\exists C > 0 \quad \forall u \in W^{1,p}(\Omega) : \|Eu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

Таким чином, $Eu \in W_0^{1,p}(V)$, а значить на підставі означення простору $W_0^{1,p}(V)$ існує послідовність $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subset C_0^\infty(V)$ така, що $u_m \rightarrow Eu$ у $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ (вважаємо, що функції $\{u_m\}$ продовжені нулем на $\mathbb{R}^n$) при $m \rightarrow +\infty$.

Застосовуючи теорему 6.1 до різниці $u_m - u_k$, отримаємо

$$\|u_m - u_k\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|\nabla(u_m - u_k)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \quad \forall k, m \in \mathbb{N}.$$

Отже, послідовність $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ — фундаментальна в $L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$, а тому $u_m \rightarrow Eu$ в $L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$ при $m \rightarrow +\infty$. А значить $Eu|_\Omega = u \in L^{p^*}(\Omega)$.

Переходячи до границі в нерівності $\|u_m\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|\nabla u_m\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$ при $m \rightarrow +\infty$, знаходимо $\|Eu\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|\nabla Eu\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$. Ураховуючи попередні нерівності, виводимо

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq \|Eu\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|\nabla Eu\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C_1 \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

Лему доведено. ■

Лема 6.2. Нехай Ω — обмежена область і $\partial\Omega \in C^1$; $p \in [1, n)$. Тоді для довільного $q \in [1, p^*)$ кожна функція u з простору $W^{1,p}(\Omega)$ належить до $L^q(\Omega)$ і має місце нерівність

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)},$$

де постійна C залежить від p, n, q і Ω , тобто вкладення $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ — неперервне.

Доведення. Ураховуючи обмеженість області Ω і застосовуючи нерівність Гельдера, маємо

$$\int_\Omega |u|^q dx \leq \left(\int_\Omega 1^{q'} dx \right)^{\frac{1}{q'}} \left(\int_\Omega |u|^{p^*} dx \right)^{\frac{q}{p^*}} = |\Omega|^{\frac{1}{q'}} \|u\|_{L^{p^*}(\Omega)}^q, \quad (6.5)$$

де $p' = \frac{p^*}{q} > 1$, $\frac{1}{p'} + \frac{1}{q'} = 1$. Далі потрібно застосувати лему 6.1 ■

Наслідок. Нехай Ω — обмежена область і $p \in [1, n)$. Тоді для довільного $q \in [1, p^*]$ кожна функція u з простору $W_0^{1,p}(\Omega)$ належить до $L^q(\Omega)$ і має місце нерівність

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \quad (6.6)$$

де постійна C залежить тільки від p, n, q та Ω .

Доведення. Оскільки $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, то існує послідовність $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subset C_0^\infty(\Omega)$ така, що $u_m \rightarrow u$ у $W^{1,p}(\Omega)$ при $m \rightarrow +\infty$. Продовжимо функції $\{u_m\}_{m=1}^\infty$ нулем поза Ω і застосуємо теорему 6.1 У результаті отримаємо

$$\|u_m\|_{L^{p^*}(\Omega)} = \|u_m\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|\nabla u_m\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = C \|\nabla u_m\|_{L^p(\Omega)}.$$

Перейшовши до границі в цій нерівності, отримаємо нерівність (6.6) при $q = p^*$. Для $q \in [1, p^*)$ потрібно скористатися нерівністю (6.5). ■

Зауваження 1. З попереднього наслідку випливає, що величина $\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$ задає еквівалентну норму в просторі $W_0^{1,p}(\Omega)$, яку будемо позначати $\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} := \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$. Таким чином,

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \overline{(C_0^\infty(\Omega), \|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)})} = \overline{(C_0^\infty(\Omega), \|\cdot\|_{W_0^{1,p}(\Omega)})}.$$

Цей факт має місце і для всіх $p \in [1, +\infty)$. Для цього потрібно довести еквівалентність норм $\|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}$ та $\|\cdot\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}$. Очевидно, що для всіх $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ має місце нерівність $\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$. Зворотня нерівність з деякою сталою впливає з нерівності Фрідрікса

$$\exists C > 0 \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega): \quad \|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}. \quad (6.7)$$

Доведення нерівності (6.7) достатньо провести для функцій $u \in C_0^\infty(\Omega)$. Не зменшуючи загальності, можна вважати, що $\bar{\Omega}$ міститься кубі $(0, a)^n$ та функція u продовжена нулем поза $\bar{\Omega}$. Тоді

$$|u(x)|^p = \left| \int_0^{x_i} u(x_1, \dots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \dots, x_n) dy_i \right|^p \quad \forall x \in \Omega.$$

Застосовуючи нерівність Гельдера до інтеграла справа та інтегруючи по кубу, отримаємо нерівність (6.7).

Зауваження 2. На підставі нерівності Фрідрікса при $p = 2$ можна стверджувати, що скалярний добудок в $H_0^1(\Omega)$ можна визначити формулою

$$(u, v)_{H_0^1(\Omega)} = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega). \quad (6.8)$$

6.2. Випадок $n < p \leq +\infty$

Означення. Функція $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ називається функцією Гельдера з показником $\gamma \in (0, 1]$, якщо

$$\exists C > 0 \quad \forall x, y \in \Omega: \quad |f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\gamma.$$

Нехай $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ – обмежена й неперервна функція. Уведемо такі величини:

$$\|f\|_{C(\bar{\Omega})} := \sup_{x \in \bar{\Omega}} |f(x)|, \quad [f]_{C^{0,\gamma}(\bar{\Omega})} := \sup_{x, y \in \bar{\Omega}, x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\gamma}. \quad (6.9)$$

Остання величина в (6.9) називається напівнормою Гельдера з показником γ .

Означення. Множина функцій

$$C^{k,\gamma}(\bar{\Omega}) := \left\{ f \in C^k(\bar{\Omega}): \quad \|f\|_{C^{k,\gamma}(\bar{\Omega})} < +\infty \right\},$$

де

$$\|f\|_{C^{k,\gamma}(\bar{\Omega})} := \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha f\|_{C(\bar{\Omega})} + \sum_{|\alpha|=k} [D^\alpha f]_{C^{0,\gamma}(\bar{\Omega})}, \quad (6.10)$$

називається простором Гельдера з показником γ .

Таким чином, простір Гельдера $C^{k,\gamma}(\bar{\Omega})$ складається з k разів неперервно диференційованих функцій, k -ті похідні яких є функціями Гельдера з показником γ . Наступне твердження пропонується у вигляді вправи.

Вправа 1. Довести, що простір функцій $C^{k,\gamma}(\bar{\Omega})$ є простором Банаха.

Теорема 6.2. (нерівність Моррі). Нехай $n < p < +\infty$. Тоді існує така постійна C , яка залежить тільки від n і p , що

$$\|u\|_{C^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \quad \forall u \in C^1(\mathbb{R}^n) \cap W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \quad (6.11)$$

де $\gamma = 1 - \frac{n}{p}$, $\|\cdot\|_{C^{0,\gamma}}$ – норма Гельдера (див. (6.10)).

Доведення. Зауважимо, що при $p = +\infty$ нерівність (6.11) – очевидна. Візьмемо довільну функцію $u \in C^1(\mathbb{R}^n) \cap W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$.

1. Доведемо спочатку нерівність

$$\frac{1}{\omega_n r^n} \int_{B_r(x)} |u(y) - u(x)| dy \leq C \int_{B_r(x)} \frac{|\nabla u(y)|}{|y - x|^{n-1}} dy, \quad (6.12)$$

де $B_r(x)$ – довільна куля з центром у точці $x \in \mathbb{R}^n$, ω_n – об'єм одиничної кулі, постійна C залежить тільки від n . Для цього візьмемо довільне $z \in \partial B_1(0)$ і $s \in (0, r)$ і оцінимо модуль такої різниці:

$$|u(x + sz) - u(x)| = \left| \int_0^s \frac{d}{dt} (u(x + tz)) dt \right| \leq \int_0^s |\nabla u(x + tz)| dt.$$

Проінтегрувавши отриману нерівність по поверхні одиничної кулі, маємо

$$\begin{aligned} \int_{\partial B_1(0)} |u(x + sz) - u(x)| d\sigma_z &\leq \int_0^s \int_{\partial B_1(0)} |\nabla u(x + tz)| d\sigma_z dt = \\ &= \int_0^s \int_{\partial B_1(0)} \frac{|\nabla u(x + tz)|}{t^{n-1}} t^{n-1} d\sigma_z dt. \end{aligned}$$

Покладемо $y = x + tz$, тоді $t = |y - x|$. Повертаючись від сферичних координат до декартових, отримаємо

$$\int_{\partial B_1(0)} |u(x + sz) - u(x)| d\sigma_z \leq \int_{B_s(x)} \frac{|\nabla u(y)|}{|y - x|^{n-1}} dy \leq \int_{B_r(x)} \frac{|\nabla u(y)|}{|y - x|^{n-1}} dy.$$

Домноживши останню нерівність на s^{n-1} і проінтегрувавши по s від 0 до r , знаходимо

$$\int_{B_r(x)} |u(y) - u(x)| dy \leq \frac{r^n}{n} \int_{B_r(x)} \frac{|\nabla u(y)|}{|y - x|^{n-1}} dy,$$

звідки випливає (6.12).

2. Зафіксуємо довільну точку $x \in \mathbb{R}^n$. Потім, застосовуючи нерівність (6.12), виводимо

$$\begin{aligned}
|u(x)| &= \left| \frac{1}{\omega_n} \int_{B_1(x)} u(y) dy \right| \leq C \int_{B_1(x)} \frac{|\nabla u(y)|}{|y-x|^{n-1}} dy + C_1 \|u\|_{L^p(B_1(x))} \leq \\
&\leq \left(\int_{B_1(x)} |\nabla u(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{B_1(x)} \frac{dy}{|y-x|^{(n-1)\frac{p}{p-1}}} \right)^{\frac{p-1}{p}} + C_1 \|u\|_{L^p(B_1(x))} \leq \\
&\leq C_2 \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}$$

В останньому переході ми скористалися тим, що $p > n$, а значить

$$(n-1)\frac{p}{p-1} < n \quad \text{та} \quad \int_{B_1(x)} \frac{dy}{|y-x|^{(n-1)\frac{p}{p-1}}} < +\infty.$$

Оскільки x – довільна точка з $\mathbb{R}^n$, то

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |u(x)| \leq C_2 \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}. \quad (6.13)$$

3. Зафіксуємо тепер дві довільні точки $x \in \mathbb{R}^n$ та $y \in \mathbb{R}^n$ і введемо такі позначення: $r := |x - y|$, $W_r := B_r(x) \cap B_r(y)$. Тоді

$$\begin{aligned}
|u(x) - u(y)| &= \left| \frac{1}{|W_r|} \int_{W_r} (u(x) - u(y)) dz \right| \leq \\
&\leq \frac{1}{|W_r|} \int_{W_r} |u(x) - u(z)| dz + \frac{1}{|W_r|} \int_{W_r} |u(z) - u(y)| dz.
\end{aligned}$$

Останні два доданки рівноцінні. Тому оцінимо один з них, використовуючи (6.12):

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|W_r|} \int_{W_r} |u(x) - u(z)| dz &\leq \frac{\omega_n r^n}{|W_r|} \frac{1}{\omega_n r^n} \int_{B_r(x)} |u(x) - u(z)| dz \leq \\
&\leq C_1 \int_{B_r(x)} \frac{|\nabla u(z)|}{|z-x|^{n-1}} dz \leq C_1 \|\nabla u\|_{L^p(B_r(x))} \left(C_2 \int_0^r s^{n-1-(n-1)\frac{p}{p-1}} ds \right)^{\frac{p-1}{p}} \\
&= C_3 r^{1-\frac{n}{p}} \|\nabla u\|_{L^p(B_r(x))}.
\end{aligned}$$

Зауважимо, що $\frac{\omega_n r^n}{|W_r|} \leq C$, де постійна C не залежить від r .

Таким чином,

$$\begin{aligned}
|u(x) - u(y)| &\leq C_4 |x - y|^{1-\frac{n}{p}} \|\nabla u\|_{L^p(B_{2r}(x))} \leq \\
&\leq C_4 |x - y|^{1-\frac{n}{p}} \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},
\end{aligned} \tag{6.14}$$

звідки, ураховуючи, що x та y довільні, отримуємо

$$\sup_{x \neq y \in \mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^{1-\frac{n}{p}}} \leq C_4 \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \tag{6.15}$$

З (6.14) і (6.15) випливає (6.11). ■

Теорема 6.3. Нехай Ω — обмежена область і $\partial\Omega \in C^1$; $p \in (n, +\infty)$. Тоді для довільної функції $u \in W^{1,p}(\Omega)$ існує єдина функція $u^* \in C^{0,\gamma}(\bar{\Omega})$, ($\gamma = 1 - \frac{n}{p}$) така, що $u = u^*$ майже скрізь у Ω і

$$\|u^*\|_{C^{0,\gamma}(\bar{\Omega})} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)},$$

де постійна C залежить від p, n і Ω ; тобто вкладення $W^{1,p}(\Omega) \subset C^{0,\gamma}(\bar{\Omega})$ — неперервне.

Доведення. Згідно з теоремою 3.1 (про оператор продовження) існує така область V і оператор продовження $E: W^{1,p}(\Omega) \mapsto W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, що $\bar{\Omega} \subset V$ та для довільної функції $u \in W^{1,p}(\Omega)$ носій Eu належить V і

$$\exists C > 0 \quad \forall u \in W^{1,p}(\Omega): \|Eu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

Таким чином, $Eu \in W_0^{1,p}(V)$, а значить на підставі означення простору $W_0^{1,p}(V)$ існує послідовність $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subset C_0^\infty(V)$ така, що $u_m \rightarrow Eu$ у $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ (вважаємо, що функції $\{u_m\}$ продовжені нулем на $\mathbb{R}^n$) при $m \rightarrow +\infty$.

Застосовуючи нерівність Моррі до різниці $u_m - u_k$, отримаємо

$$\|u_m - u_k\|_{C^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|u_m - u_k\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \quad \forall k, m \in \mathbb{N}.$$

Отже, послідовність $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ — фундаментальна в $C^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)$, а тому існує єдина функція $u^* \in C^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)$ така, що $u_m \rightarrow u^*$ в $C^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)$ при $m \rightarrow +\infty$. Очевидно, що $u^* = Eu$ майже скрізь у $\mathbb{R}^n$ і $u^* = u$ майже скрізь у Ω .

Переходячи до границі в нерівності $\|u_m\|_{C^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|u_m\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}$ при $m \rightarrow +\infty$, знаходимо $\|u^*\|_{C^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|Eu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}$. Ураховуючи попередні нерівності, виводимо

$$\|u^*\|_{C^{0,\gamma}(\bar{\Omega})} \leq \|u^*\|_{C^{0,\gamma}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|Eu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C_1 \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

Теорему доведено. ■

З леми 6.1 і того факту, що $p^* = \frac{np}{n-p} \rightarrow +\infty$ при $p \rightarrow n$, слід очікувати, що $u \in L^{+\infty}(\Omega)$, якщо $u \in W^{1,n}(\Omega)$. Однак це невірно при $n > 1$. Цю відповідь обґрунтовує такий приклад:

$$u(x) = \ln \left(\ln \left(1 + \frac{1}{|x|} \right) \right), \quad x \in \Omega := B_1(0).$$

Легко перевірити, що $u \in W^{1,n}(\Omega)$, але $u \notin L^\infty(\Omega)$. Даний приклад показує, що не можна переходити до границі при $p \rightarrow n$ і в теоремі 6.3.

Лема 6.3. Нехай Ω – обмежена область і $\partial\Omega \in C^1$. Тоді для довільного $q \in [1, +\infty)$ має місце таке неперервне вкладення: $W^{1,n}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$.

Доведення. Спочатку розглянемо $q_1 \in [n, +\infty)$. Візьмемо довільне число $p_1 \in [1, n)$. Тоді очевидно $u \in W^{1,p_1}(\Omega)$ і

$$\|u\|_{W^{1,p_1}(\Omega)} \leq C_1 \|u\|_{W^{1,n}(\Omega)} \quad \forall u \in W^{1,n}(\Omega).$$

Згідно з лемою 6.1 функція $u \in L^{p_1^*}(\Omega)$, ($p_1^* = \frac{np_1}{n-p_1}$) і

$$\|u\|_{L^{p_1^*}(\Omega)} \leq C_2 \|u\|_{W^{1,p_1}(\Omega)} \leq C_3 \|u\|_{W^{1,n}(\Omega)}.$$

Оскільки відображення $p_1^* = \frac{np_1}{n-p_1}$, $p_1 \in [1, n)$, – бієкція множини $[1, n)$ на $[\frac{n}{n-1}, +\infty)$, то для довільного $q_1 \in [n, +\infty)$ завжди можна підібрати таке $p_1 \in [1, n)$, щоб $q_1 = p_1^*$.

Для $q_2 \in [1, n)$ потрібно скористатися нерівністю (6.5). ■

6.3. Загальна теорема Соболева

Теорема 6.4. Нехай Ω – обмежена область і $\partial\Omega \in C^1$; функція $u \in W^{k,p}(\Omega)$.

1. Якщо $kp < n$, то $u \in L^q(\Omega)$, де $q = \frac{np}{n-kp}$, і

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}. \quad (6.16)$$

Тут постійна C залежить тільки від k, p, n та області Ω .

2. Якщо $kp > n$, то існує єдина функція $u^* \in C^{k-\lfloor \frac{n}{p} \rfloor-1, \gamma}(\bar{\Omega})$ така, що $u = u^*$ майже скрізь у Ω і

$$\|u^*\|_{C^{k-\lfloor \frac{n}{p} \rfloor-1, \gamma}(\bar{\Omega})} \leq C \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}, \quad (6.17)$$

де постійна C залежить тільки від k, p, n, γ та області Ω , а

$$\gamma = \begin{cases} \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + 1 - \frac{n}{p}, & \text{якщо } \frac{n}{p} \notin \mathbb{N} \\ \text{довільне додатне число менше 1,} & \text{якщо } \frac{n}{p} \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Доведення 1. Нехай $u \in W^{k,p}(\Omega)$ і $kp < n$. Візьмемо довільний мультиіндекс β , $|\beta| \leq k-1$. Тоді $D^\beta u \in W^{1,p}(\Omega)$, а згідно з лемою 6.1 функція $D^\beta u \in L^{p^*}(\Omega)$ і

$$\|D^\beta u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C \|D^\beta u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}, \quad \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}.$$

Таким чином, функція $u \in W^{k-1,p^*}(\Omega)$ і

$$\|u\|_{W^{k-1,p^*}(\Omega)} \leq C_1 \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}.$$

Оскільки

$$p^* = \frac{np}{n-p} = \frac{n}{\frac{n}{p} - 1} < \frac{n}{k-1} \Leftrightarrow p^*(k-1) < n,$$

то ми можемо повторити попередню процедуру й отримати, що функція $u \in W^{k-2,p^{**}}(\Omega)$, де $\frac{1}{p^{**}} = \frac{1}{p^*} - \frac{1}{n} = \frac{1}{p} - \frac{2}{n}$ та

$$\|u\|_{W^{k-2,p^{**}}(\Omega)} \leq C_2 \|u\|_{W^{k-1,p^*}(\Omega)} \leq C_3 \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}.$$

Через k кроків такої процедури одержимо, що $u \in L^q(\Omega)$, де $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{k}{n}$, і нерівність (6.16).

2. Нехай $u \in W^{k,p}(\Omega)$, $kp > n$ і $\frac{n}{p} \notin \mathbb{N}$. Щоб застосувати теорему 6.3, потрібно, щоб степінь інтегрованості був більшим за розмірність простору. Тому "пожертвуємо" декількома порядками похідних, щоб підвищити степінь інтегрованості. Покладемо $l := \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor$. Очевидно

$l < \frac{n}{p} < l + 1$ і $lp < n$. Як і в пункті 1, переконуємося, що функція $u \in W^{k-l,r}(\Omega)$ та $\|u\|_{W^{k-l,r}(\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}$, де

$$r = \frac{pn}{n - lp} = \frac{n}{\frac{n}{p} - l} > n.$$

З теореми 2.3 випливає існування послідовності $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subset C^\infty(\bar{\Omega})$ такої, що $u_m \rightarrow u$ у $W^{k-l,r}(\Omega)$ при $m \rightarrow +\infty$, а з теореми 6.3 буде випливати, що вона є фундаментальною в $C^{k-l-1,1-\frac{n}{r}}(\bar{\Omega})$ та

$$\|u_m\|_{C^{k-l-1,1-\frac{n}{r}}(\bar{\Omega})} \leq C \|u_m\|_{W^{k-l,r}(\Omega)}, \quad (6.18)$$

Тому існує єдина функція $u^* \in C^{k-l-1,1-\frac{n}{r}}(\bar{\Omega})$ така, що $u_m \rightarrow u^*$ у $C^{k-l-1,1-\frac{n}{r}}(\bar{\Omega})$ при $m \rightarrow +\infty$. Це означає, що $u = u^*$ майже скрізь у Ω . Урахувавши позначення для l і визначення числа r в граничному переході при $m \rightarrow +\infty$ з (6.18) отримуємо (6.17).

3. Нехай тепер $u \in W^{k,p}(\Omega)$, $kp > n$ і $\frac{n}{p} \in \mathbb{N}$. Покладемо $l := \frac{n}{p} - 1$. Тоді знову функція $u \in W^{k-l,r}(\Omega)$ і

$$\|u\|_{W^{k-l,r}(\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)},$$

де $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{l}{n}$, але тепер

$$r = \frac{pn}{n - pl} = \frac{np}{n - p\left(\frac{n}{p} - 1\right)} = n.$$

Згідно з лемою 6.3 для довільного $q \in (n, +\infty)$ і довільного мультиіндексу β , $|\beta| \leq k - l - 1 = k - \frac{n}{p}$, функція $D^\beta u \in L^q(\Omega)$, тобто $u \in W^{k-\frac{n}{p},q}(\Omega)$. Згідно з попереднім пунктом доведення існує єдина функція $u^* \in C^{k-\frac{n}{p}-1,1-\frac{n}{q}}(\bar{\Omega})$ така, що $u = u^*$ майже скрізь у Ω та

$$\|u^*\|_{C^{k-\frac{n}{p}-1,1-\frac{n}{q}}(\bar{\Omega})} \leq C \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}.$$

Оскільки q – довільне число з інтервалу $(n, +\infty)$, то $u^* \in C^{k-\frac{n}{p}-1,1-\gamma}(\bar{\Omega})$ для довільного $\gamma \in (0,1)$. ■

7. Теорема Релліха – Кондрашова про компактні вкладення та наслідки з неї

Означення. Нехай X і Y – банахові простори та $X \subset Y$. Будемо говорити, що простір X компактно вкладається в простір Y (у позначеннях $X \subseteq Y$), якщо

1. $\exists C > 0 \quad \forall x \in X: \|x\|_Y \leq C \|x\|_X$;
2. з кожної обмеженої послідовності в X можна вибрати фундаментальну підпослідовність в Y .

Теорема 7.1. Нехай Ω – обмежена область і $\partial\Omega \in C^1$; $1 \leq p < n$. Тоді для кожного $q \in [1, p^*)$

$$W^{1,p}(\Omega) \subseteq L^q(\Omega).$$

Доведення теореми через його громіздкість не подаємо. Зацікавлений читач може ознайомитись з ним, наприклад, в [42, 22].

Зауваження. Якщо $p > n$, то $W^{1,p}(\Omega) \subseteq C(\bar{\Omega})$. Цей факт впливає з теореми 6.3 про неперервне вкладення $W^{1,p}(\Omega) \subset C^{0,\gamma}(\bar{\Omega})$ і теореми Арцела – Асколі.

Лема 7.1. Нехай Ω – обмежена область і $\partial\Omega \in C^1$. Тоді для кожного $p \in [1, +\infty)$

$$W^{1,p}(\Omega) \subseteq L^p(\Omega).$$

Доведення. При $p \in [1, n)$ компактність даного вкладення впливає з теореми 7.1 і нерівності $p < p^*$. При $p \in (n, +\infty)$ це впливає із попереднього зауваження і неперервності вкладення $C(\bar{\Omega}) \subset L^p(\Omega)$.

Нехай тепер $p = n$. Тоді на підставі леми 6.1 мають місце такі неперервні вкладення:

$$W^{1,n}(\Omega) \subset W^{1,q}(\Omega) \subset L^{q^*}(\Omega) \quad \forall q \in [1, n), \quad q^* = \frac{qn}{n-q}.$$

Оскільки $\lim_{q \rightarrow n-0} q^* = +\infty$, то знову застосовуючи теорему 7.1, приходимо до компактного включення $W^{1,n}(\Omega) \subseteq L^n(\Omega)$. ■

З даної леми отримуємо такі наслідки.

Наслідок 1. Для кожного $p \in [1, +\infty)$: $W^{k,p}(\Omega) \subseteq W^{k-1,p}(\Omega)$.

Наслідок 2. Для кожного $p \in [1, +\infty)$: $W_0^{1,p}(\Omega) \subseteq L^p(\Omega)$;
причому не потрібно припущення, що $\partial\Omega \in C^1$.

Із загальної теореми Соболева 6.4 і вищенаведених фактів випливають такі твердження:

- $W^{k,p}(\Omega) \subseteq L^q(\Omega)$, якщо $kp < n$, $q \in \left[1, \frac{np}{n-kp}\right)$;
- $W^{k,p}(\Omega) \subseteq C^m(\bar{\Omega})$, якщо $kp > n$, $m \in \left[0, k - \left[\frac{n}{p}\right] - 1\right] \cap \mathbb{Z}$.

Зараз покажемо як теореми компактності можуть бути використані при доведенні різних нерівностей для функцій з просторів Соболева. Уведемо позначення

$$\langle u \rangle_\Omega := \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega u \, dx;$$

величина $\langle u \rangle_\Omega$ називається середнім функції u по області Ω .

Теорема 7.2. Нехай Ω – обмежена область і $\partial\Omega \in C^1$; $1 \leq p \leq \infty$. Тоді існує константа $C = C(n, p, \Omega)$ така, що для всіх функцій $u \in W^{1,p}(\Omega)$

$$\|u - \langle u \rangle_\Omega\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}. \quad (7.1)$$

Доведення. Нерівність (7.1) доведемо від супротивного. Тоді для кожного $k \in \mathbb{N}$ існує така функція $u_k \in W^{1,p}(\Omega)$, що

$$\|u_k - \langle u_k \rangle_\Omega\|_{L^p(\Omega)} > k \|\nabla u_k\|_{L^p(\Omega)}. \quad (7.2)$$

Розглянемо послідовність функцій

$$v_k(x) := \frac{u_k(x) - \langle u_k \rangle_\Omega}{\|u_k - \langle u_k \rangle_\Omega\|_{L^p(\Omega)}}, \quad x \in \Omega, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Легко перевірити, що

$$\langle v_k \rangle_\Omega = 0, \quad \|v_k\|_{L^p(\Omega)} = 1, \quad (7.3)$$

а з нерівності (7.2) маємо, що

$$\|\nabla v_k\|_{L^p(\Omega)} < \frac{1}{k}, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (7.4)$$

З (7.3) і (7.4) випливає, що послідовність $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ обмежена у $W^{1,p}(\Omega)$. Тоді, згідно з лемою 7.1, існує підпослідовність $\{v_{k_m}\}_{m=1}^{\infty} \subset \{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ і функція $v \in L^p(\Omega)$ такі, що $v_{k_m} \rightarrow v$ у $L^p(\Omega)$ при $m \rightarrow +\infty$. Крім того, з (7.3) випливає, що $\langle v \rangle_{\Omega} = 0$ та $\|v\|_{L^p(\Omega)} = 1$.

Оскільки для довільної функції $\varphi \in C_0^{\infty}(\Omega)$ та кожного $i = 1, 2, \dots, n$

$$\int_{\Omega} v \partial_{x_i} \varphi \, dx = \lim_{m \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} v_{k_m} \partial_{x_i} \varphi \, dx = - \lim_{m \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \partial_{x_i} v_{k_m} \varphi \, dx = 0,$$

то $v \in W^{1,p}(\Omega)$ і $\nabla v = 0$ майже скрізь у Ω , а значить, $v = \text{const.}$ З іншого боку, $\langle v \rangle_{\Omega} = 0$. Тому $v \equiv 0$ в Ω . А це суперечить встановленій рівності $\|v\|_{L^p(\Omega)} = 1$. ■

8. Спряжені простори до просторів Соболева

Для подальшого вивчення крайових задач дуже важливо мати характеристизацію спряжених просторів до просторів Соболева та їх властивості. Спочатку встановимо структуру простору

$$H^{-1}(\Omega) := (H_0^1(\Omega))^*.$$

Тут Ω – обмежена область і $\partial\Omega \in C^1$. Нагадаємо, що $H^{-1}(\Omega)$ – простір лінійних неперервних функціоналів над $H_0^1(\Omega)$ і норма елемента $F \in H^{-1}(\Omega)$ в цьому просторі, зазвичай, визначається формулою

$$\|F\|_{H^{-1}(\Omega)} = \sup_{u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{|\langle F, u \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}|}{\|u\|_{H_0^1(\Omega)}},$$

де $\langle F, u \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}$ – це значення, яке є дійсним числом, функціонала F на елементі $u \in H_0^1(\Omega)$.

Лема 8.1. (про характеристизацію $H^{-1}(\Omega)$). Для кожного функціонала $F \in H^{-1}(\Omega)$ існує набір функцій $\{f_1, \dots, f_n\} \subset L^2(\Omega)$ такий, що

$$\langle F, u \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} f_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \, dx \quad \forall u \in H_0^1(\Omega). \quad (8.1)$$

і $\|F\|_{H^{-1}(\Omega)} = \left(\sum_{i=1}^n \|f_i\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$. Крім того, вираз

$$\langle G, u \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} = \int_{\Omega} g_0 u \, dx + \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} g_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \, dx \quad \forall u \in H_0^1(\Omega), \quad (8.2)$$

де $\{g_0, g_1, \dots, g_n\} \subset L^2(\Omega)$, задає лінійний неперервний функціонал над $H_0^1(\Omega)$ та

$$\|G\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq C \sum_{i=0}^n \|g_i\|_{L^2(\Omega)}. \quad (8.3)$$

Доведення. Розглянемо довільний функціонал $F \in H^{-1}(\Omega)$. З теореми Рісса про представлення неперервних функціоналів [3, Глава VII] випливає, що існує єдиний елемент $v \in H_0^1(\Omega)$ такий, що

$$\begin{aligned} \langle F, u \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} &= (v, u)_{H_0^1(\Omega)} = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_i} dx \quad \forall u \\ &\in H_0^1(\Omega) \end{aligned} \quad (8.4)$$

і $\|F\|_{H^{-1}(\Omega)} = \|v\|_{H_0^1(\Omega)}$. Нагадаємо, що скалярний добуток в $H_0^1(\Omega)$ визначається формулою (8.5). Покладемо $f_i = \frac{\partial v}{\partial x_i}$, $i = \overline{1, n}$. Тоді

$$\|F\|_{H^{-1}(\Omega)} = \|v\|_{H_0^1(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial v}{\partial x_i} \right)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^n \|f_i\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

що і треба було довести в першій частині.

Легко перевірити, що формула (8.2) задає лінійний функціонал. Для доведення його обмеженості, а значить і неперервності, потрібно до інтегралів в (8.2) застосувати нерівність Коші – Буняковською, а потім нерівність Фрідрікса (6.7) при $p = 2$:

$$\left| \langle G, u \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \right| \leq \|g_0\|_{L^2(\Omega)} C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \|g_i\|_{L^2(\Omega)} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)},$$

звідки буде слідувати нерівність (8.3). ■

Зробимо деякі зауваження до цієї леми. Формулу (8.2) можна записати як рівність $G = g_0 - \sum_{i=1}^n \frac{\partial g_i}{\partial x_i}$ в просторі $H^{-1}(\Omega)$. Крім цього, кожній функції $g_0 \in L^2(\Omega)$ можна поставити у відповідність лінійний неперервний функціонал

$$\langle g_0, u \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} := \int_{\Omega} g_0 u dx, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Таким чином, маємо вкладення $L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$, а нерівність (8.3) вказує на те, що це вкладення є неперервним. Оскільки вкладення $H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ є щільним неперервним і компактним, то і вкладення

$L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$ має такі ж властивості [3, Глава XIV]. Отже, маємо ланцюжок щільних, неперервних і компактних вкладень:

$$H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega),$$

який називається гільбертовим оснащенням простору $L^2(\Omega)$ просторами $H_0^1(\Omega)$ та $H^{-1}(\Omega)$.

На підставі леми 8.1 і зазначеного вище, оператор Лапласа

$$-\Delta\varphi = -\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) \quad (\varphi \in H_0^1(\Omega))$$

можна трактувати як оператор, який діє з простору $H_0^1(\Omega)$ в простір $H^{-1}(\Omega)$. Крім того, нерівність (8.3) вказує на те, що оператор Лапласа

$$-\Delta: H_0^1(\Omega) \mapsto H^{-1}(\Omega)$$

є обмеженим, тобто існує стала $C > 0$ така, що

$$\|-\Delta\varphi\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq C\|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)} \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

З рівності (8.2) випливає, що

$$\langle -\Delta\varphi, u \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} = (\nabla\varphi, \nabla u)_{L^2(\Omega)} \quad \forall \varphi, u \in H_0^1(\Omega).$$

Ця тотожність означає, що оператор $-\Delta: H_0^1(\Omega) \mapsto H^{-1}(\Omega)$ є коерцитивним, а значить його ядро є нульовим, самоспряженим відносно $L^2(\Omega)$ та невід'ємним (див. [3, Глава XIV]). Твердження для тотожності (8.4) означає, що це відображення є сюр'єктивним. Таким чином, відображення $-\Delta: H_0^1(\Omega) \mapsto H^{-1}(\Omega)$ є бієкцією та

$$\forall F \in H^{-1}(\Omega) \exists! v \in H_0^1(\Omega): -\Delta v = F \quad \wedge \quad \|F\|_{H^{-1}(\Omega)} = \|v\|_{H_0^1(\Omega)},$$

тобто оператор Лапласа $-\Delta: H_0^1(\Omega) \mapsto H^{-1}(\Omega)$ є ізометричним оператором [3, Глава VIII]. Тепер крайову задачу Діріхле для рівняння Пуассона:

$$\begin{cases} -\Delta u = F & \text{в } \Omega, \\ u = 0 & \text{на } \partial\Omega, \end{cases}$$

можна розглядати з правою частиною $F \in H^{-1}(\Omega)$ і стверджувати, що вона має єдиний розв'язок в просторі $H_0^1(\Omega)$. Детальний аналіз таких задач буде зроблений в Частині 2.

Аналогічно можна побудувати і такий ланцюжок щільних, неперервних і компактних вкладень:

$$H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset (H^1(\Omega))^* =: H^1(\Omega)^*.$$

Однак не можна стверджувати, що спряжений простір $H^1(\Omega)^*$ міститься в $H^{-1}(\Omega)$, бо вкладення $H_0^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$ не є щільним. Відомий результат (див. [46, Розділ 4]), що простір $H^{-1}(\Omega)$ ізоморфний фактор-простору

$$H^1(\Omega)^* / \{F \in H^1(\Omega)^*: \langle F, v \rangle_{H^1(\Omega)^*, H^1(\Omega)} = 0 \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)\}.$$

Легко перевірити, що для кожної функції $u \in H^1(\Omega)$, $Tu \neq 0$, лінійний і неперервний функціонал, який визначається через оператор сліду $T: H^1(\Omega) \mapsto L^2(\partial\Omega)$, є ненульовим, однак

$$\langle U_T, v \rangle_{H^1(\Omega)^*, H^1(\Omega)} = \int_{\partial\Omega} Tu \cdot Tv \, d\sigma_x = 0 \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

9. Простори Соболева залежні від часу

Для обслуговування параболічних крайових задач використовують спеціальні простори Соболева – це простори функцій, які мають різні властивості по відношенню до своїх аргументів. Серед цих аргументів виділяють дійсну змінну $t \in [0, T]$, яку називають часовою змінною і просторову змінну $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$. Узагальненням таких просторів є простори функцій зі значеннями в банахових просторах. Нагадаємо деякі властивості таких просторів.

Нехай B – банаховий простір. Будемо розглядати функції, які діють з відрізка $[0, T]$ в простір B , тобто $f: [0, T] \mapsto B$.

Означення 1. Функція $s: [0, T] \mapsto B$ називається простою, якщо її можна представити у вигляді

$$s(t) = \sum_{i=1}^m \chi_{E_i}(t) u_i,$$

де E_i – вимірні за Лебегом множини в $[0, T]$, які не перетинаються; χ_{E_i} – індикатор множини E_i ; $u_i \in B$, $i = \overline{1, m}$; m – деяке натуральне число. Інтегралом від такої простої функції називається така сума

$$\int_0^T s(t) \, dt \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^m u_i \cdot \text{meas}(E_i).$$

Означення 2. Функція $u: [0, T] \mapsto B$ називається вимірною, якщо існує послідовність простих функцій $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ така, що $s_n(t) \rightarrow u(t)$ в B для майже всіх $t \in (0, T)$. Якщо до того ж

$$\int_0^T \|u(t) - s_n(t)\|_B dt \rightarrow 0, \quad n \rightarrow +\infty,$$

то така функція називається сумованою та

$$\int_0^T u(t) dt \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^T s_n(t) dt.$$

Теорема (Бохнера). Вимірна функція $u: [0, T] \mapsto B$ є сумованою тоді і тільки тоді, коли числова функція $\|u(t)\|_B$, $t \in [0, T]$, – сумована. Крім того,

$$\left\| \int_0^T u(t) dt \right\|_B \leq \int_0^T \|u(t)\|_B dt \quad (9.1)$$

та

$$\forall u^* \in B^* \quad \int_0^T \langle u^*, u(t) \rangle_{B^*, B} dt = \langle u^*, \int_0^T u(t) dt \rangle_{B^*, B}. \quad (9.2)$$

Означення 3. Нехай $p \in [1, +\infty)$. Через $L^p(0, T; B)$ будемо позначати множину вимірних функцій $u: [0, T] \mapsto B$, для яких

$$\int_0^T \|u(t)\|_B^p dt < +\infty.$$

Очевидно, що $L^p(0, T; \mathbb{R}) = L^p(0, T)$. Якщо на множині $L^p(0, T; B)$ природнім чином ввести операцію додавання функцій, множення на дійсне число та визначити норму

$$\|u\|_{L^p(0, T; B)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_B^p dt \right)^{\frac{1}{p}},$$

то отримаємо банаховий простір. Доведення проводиться так само, як доведення повноти простору $L^p(0, T)$ [3, Глава VI].

Легко довести такі властивості простору $L^p(0, T; B)$: якщо $p \in [1, +\infty)$ та B – сепарабельний, то і $L^p(0, T; B)$ – сепарабельний; якщо $p \in (1, +\infty)$ і B – рефлексивний, то і $L^p(0, T; B)$ – рефлексивний та $(L^p(0, T; B))^* = L^q(0, T; B^*)$, де $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Наприклад, зрозуміло, що $(L^2(0, T; H_0^1(\Omega)))^* = L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$. Крім того, дія функціоналу $f \in (L^p(0, T; B))^*$ визначається

$$\langle f, u \rangle_{(L^p(0, T; B))^*, L^p(0, T; B)} = \int_0^T \langle f(t), u(t) \rangle_{B^*, B} dt \quad \forall u \in L^p(0, T; B).$$

Визначимо також простір неперервних функцій на відрізку $[0, T]$ зі значеннями в B з такою нормою

$$\|u(t)\|_{C([0,T];B)} = \max_{t \in [0,T]} \|u(t)\|_B.$$

Легко перевірити, що такий простір є банаховим. Очевидно також, що $C([0, T]; \mathbb{R}) = C([0, T])$.

Означення 4. Нехай u та $v \in L^p(0, T; B)$. Функція v називається узагальненою похідною для функції u ($v = u'_t = u'$), якщо

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(0, T): \int_0^T \varphi'(t) \cdot u(t) dt = - \int_0^T \varphi(t) \cdot v(t) dt.$$

Означення 5. Нехай $p \in [1, +\infty)$. Через $W^{1,p}(0, T; B)$ будемо позначати лінійний простір всіх функцій $u \in L^p(0, T; B)$, які мають узагальнену похідну $u' \in L^p(0, T; B)$ і який оснащений нормою

$$\|u\|_{W^{1,p}(0,T;B)} = \left(\|u(t)\|_{L^p(0,T;B)}^p + \|u'(t)\|_{L^p(0,T;B)}^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Лема 9.1. Простір $W^{1,p}(0, T; B)$ – банаховий простір.

Доведення. Нехай $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ – фундаментальна послідовність в $W^{1,p}(0, T; B)$. Тоді послідовності $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ та $\{u'_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ – фундаментальні в $L^p(0, T; B)$. Оскільки простір $L^p(0, T; B)$ – повний, то існують єдині функції u та v з $L^p(0, T; B)$ такі, що

$$u_m \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} u, \quad u'_m \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} v \quad \text{в } L^p(0, T; B).$$

Оскільки на підставі формули (9.1) для довільної функції $\varphi \in C_0^\infty(0, T)$

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^T \varphi'(t) \cdot u dt - \int_0^T \varphi'(t) \cdot u_m dt \right\|_B &\leq \int_0^T |\varphi'(t)| \|u - u_m\|_B dt \leq \\ &\leq \left(\int_0^T |\varphi'(t)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^T \|u - u_m\|_B^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0, \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} \int_0^T \varphi'(t) \cdot u dt &= \lim_{m \rightarrow +\infty} \int_0^T \varphi'(t) \cdot u_m dt = \\ &= - \lim_{m \rightarrow +\infty} \int_0^T \varphi(t) \cdot u'_m dt = - \int_0^T \varphi(t) \cdot v dt. \end{aligned}$$

Це означає, що існує узагальнена похідна $u' = v \in L^p(0, T; B)$, а значить простір $W^{1,p}(0, T; B)$ – повний. ■

Очевидно, що $W^{1,p}(0, T; \mathbb{R}) = W^{1,p}(0, T)$. Тому слід очікувати, що простір $W^{1,p}(0, T; B)$ буде мати схожі властивості як і одновимірний простір Соболева $W^{1,p}(0, T)$. Дійсно, так само як і в параграфі 4, використовуючи теорему Бохнера як це ми робили в попередній лемі, доводимо аналоги теорем 4.1 та 4.2, які для простору $W^{1,p}(0, T; B)$ об'єднаємо в одну.

Теорема 9.1. Для кожної функції $u \in W^{1,p}(0, T; B)$ існує єдина функція $u_0 \in C([0, T], B)$ така, що:

- 1) $u = u_0$ майже скрізь на $(0, T)$,
- 2) $\|u_0\|_{C([0, T], B)} \leq C_0 \|u\|_{W^{1,p}(0, T; B)}$, де стала C_0 не залежить від u та u_0 ;
- 3) u_0 – абсолютно неперервна функція на $[0, T]$, тобто існує майже скрізь похідна u'_0 та для всіх $t \in [0, T]$:

$$u_0(t) = u_0(0) + \int_0^t u'_0(\tau) d\tau.$$

Зауваження 1. Для побудови апроксимуючої послідовності гладких функцій $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subset C^\infty([0, T]; B)$, яка потрібна для доведення цієї теореми, можна взяти послідовність

$$u_m = \left(\eta_{\frac{1}{m}} * u \right)(t) = \int_0^T \eta_{\frac{1}{m}}(t - \tau) \cdot u d\tau, \quad t \in [0, T], \quad m \in \mathbb{N},$$

де η_ε – ядро усереднення (див. пункт 2.1); при цьому вважаємо, що $u = 0$ поза відрізком $[0, T]$. Так само як в лемі 2.4 перевіряємо, що $(u_m)'_t = \left(\eta_{\frac{1}{m}} * u' \right)$.

Означення 6. Через $\mathcal{W}(0, T)$ будемо позначати лінійний простір всіх функцій $u \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$, які мають узагальнену похідну $u' \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ і який оснащений нормою

$$\|u\|_{\mathcal{W}} = \|u\|_{L^2(0, T; H_0^1(\Omega))} + \|u'(t)\|_{L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))}.$$

Нагадаємо, що Ω – обмежена область та $\partial\Omega \in C^1$.

Теорема 9.2. Для кожної функції $u \in \mathcal{W}(0, T)$ існує єдина функція $Wu_0 \in C([0, T]; L^2(\Omega))$ така, що:

- 1) $u = u_0$ майже скрізь на $(0, T)$,
- 2) $\|u_0\|_{C([0, T]; L^2(\Omega))} \leq C_0 \|u\|_{\mathcal{W}}$, де стала C_0 не залежить від u та u_0 ;

3) *числова функція* $[0, T] \ni t \rightarrow \|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2$ *– абсолютно неперервна та для майже всіх* $t \in (0, T)$

$$\frac{d}{dt} (\|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2) = 2\langle u'(t), u(t) \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}. \quad (9.3)$$

Доведення. Для довільної функції $u \in \mathcal{W}(0, T)$ згідно з зауваженням 1 існує послідовність $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subset C^\infty([0, T]; H_0^1(\Omega))$ така, що $u_m \rightarrow u$ в $\mathcal{W}(0, T)$ при $m \rightarrow +\infty$. Тоді для кожного $m \in \mathbb{N}$

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega} u_m^2(t, x) dx \right) = 2 \int_{\Omega} u_m(t, x) u'_m(t, x) dx = 2 \langle u'_m, u_m \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}.$$

Використовуючи цю формулу, знаходимо, що для всіх $t, s \in [0, T]$:

$$\begin{aligned} \|u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \|u_m(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_s^t \frac{d}{d\tau} (\|u_m(\tau)\|_{L^2(\Omega)}^2) d\tau = \\ &= \|u_m(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2 \int_s^t \langle u'_m(\tau), u_m(\tau) \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} d\tau \leq \\ &\leq \|u_m(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2 \int_0^T \|u'_m(\tau)\|_{H^{-1}(\Omega)} \cdot \|u_m(\tau)\|_{H_0^1(\Omega)} d\tau \leq \\ &\leq \|u_m(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^T \|u'_m(t)\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 dt + \int_0^T \|u_m(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 dt. \end{aligned}$$

Спочатку проінтегрувавши отриману нерівність по $s \in [0, T]$, виводимо

$$\max_{t \in [0, T]} \|u_m(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq C_0 \|u_m\|_{\mathcal{W}}. \quad (9.4)$$

З (9.4) випливає, що для довільних $n, m \in \mathbb{N}$

$$\|u_n - u_m\|_{C([0, T]; L^2(\Omega))} \leq C_0 \|u_n - u_m\|_{\mathcal{W}},$$

звідки робимо висновок, що $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ – фундаментальна послідовність в $C([0, T]; L^2(\Omega))$. Отже існує єдина функція $u_0 \in C([0, T]; L^2(\Omega))$ така, що $u_m \rightarrow u_0$ в $C([0, T]; L^2(\Omega))$, а значить $u = u_0$ майже скрізь на $(0, T)$. Перейшовши до границі в (9.4), маємо $\|u_0\|_{C([0, T]; L^2(\Omega))} \leq C_0 \|u\|_{\mathcal{W}}$.

Таким чином, перші два твердження теореми доведено. Для доведення останнього, потрібно перейти до границі в рівності

$$\|u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 = \|u_m(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2 \int_0^t \langle u'_m(\tau), u_m(\tau) \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} d\tau.$$

В результаті отримаємо, що для всіх $t \in [0, T]$

$$\|u_0(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 = \|u_0(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2 \int_0^t \langle u'(\tau), u(\tau) \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} d\tau.$$

Ця тотожність означає (див. доведення теореми 4.2), що числова функція $[0, T] \ni t \rightarrow \|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2$ є абсолютно неперервною та майже скрізь на $[0, T]$ існує її похідна і має місце рівність (9.3). ■

Наслідок 1. Нехай Ω і V – обмежені області такі, що $\partial\Omega \in C^{k-1,1}$, $\partial V \in C^1$ і $\bar{\Omega} \subset V$. та $\bar{\Omega} \subset V$. Якщо $u \in L^2(0, T; H^{k+2}(\Omega))$ та $u' \in L^2(0, T; H^k(\Omega))$, то існує єдина функція $u_0 \in C([0, T]; H^{k+1}(\Omega))$ така, що $u = u_0$ майже скрізь на $[0, T]$ та

$$\max_{t \in [0, T]} \|u_0(t)\|_{H^{k+1}(\Omega)} \leq C_1 \left(\|u'\|_{L^2(0, T; H^k(\Omega))} + \|u\|_{L^2(0, T; H^{k+2}(\Omega))} \right).$$

Доведення. Для початку візьмемо $u \in L^2(0, T; H_0^{k+2}(\Omega))$, узагальнена похідна якої $u' \in L^2(0, T; H_0^k(\Omega))$. Згідно з зауваженням 1 існує послідовність $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subset C^\infty([0, T]; H_0^{k+2}(\Omega))$ така, що $u_m \rightarrow u$ в $L^2(0, T; H_0^{k+2}(\Omega))$. Зрозуміло, що $u'_m \rightarrow u'$ в $L^2(0, T; H_0^k(\Omega))$ при $m \rightarrow +\infty$. Тоді для кожного $m \in \mathbb{N}$ і для кожного мультиіндекса α ($|\alpha| \leq k+1$) та для всіх $t, s \in [0, T]$:

$$\begin{aligned} \|D_x^\alpha u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \|D_x^\alpha u_m(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_s^t \frac{d}{d\tau} (\|D_x^\alpha u_m(\tau)\|_{L^2(\Omega)}^2) d\tau = \\ &= \|D_x^\alpha u_m(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2 \int_s^t \int_\Omega D_x^\alpha u_m D_x^\alpha u'_m dx d\tau. \end{aligned}$$

Враховуючи властивості функцій u_m та u'_m , можна проінтегрувати по частинам у внутрішньому інтегралі перекинувши одну похідну по якісь просторовій змінній з функції u'_m на функцію u_m (див. (5.3)). Тоді проінтегрувавши отриману рівність по $s \in [0, T]$, а потім просумувавши по мультиіндексам α ($|\alpha| \leq k+1$), виводимо, що для всіх $t \in [0, T]$:

$$\|u_m(t)\|_{H_0^{k+1}(\Omega)}^2 \leq C_1 \left(\int_0^t \|u'_m\|_{H_0^k(\Omega)}^2 dt + \int_0^t \|u_m(t)\|_{H_0^{k+2}(\Omega)}^2 dt \right).$$

Далі так само як в доведенні теореми 9.2 завершуємо доведення.

Для довільної функції $u \in L^2(0, T; H^{k+2}(\Omega))$ потрібно спочатку побудувати продовження $Eu \in L^2(0, T; H_0^{k+2}(V))$, потім скористатися для продовження Eu вище доведенням, а накінець оцінкою в зауваженні 2 з розділу 3. ■

Наслідок 2. Для довільних функцій $u, v \in \mathcal{W}(0, T)$ має місце формула інтегрування по частинам

$$\begin{aligned} \langle u', v \rangle_{L^2(a, b; H^{-1}(\Omega)), L^2(a, b; H_0^1(\Omega))} + \langle v', u \rangle_{L^2(a, b; H^{-1}(\Omega)), L^2(a, b; H_0^1(\Omega))} = \\ = (u(b), v(b))_{L^2(\Omega)} - (u(a), v(a))_{L^2(\Omega)}, \end{aligned}$$

де a, b – довільні числа з відрізка $[0, T]$, $a < b$, а $(\cdot, \cdot)_{L^2(\Omega)}$ – скалярний добуток в просторі $L^2(\Omega)$.

Доведення. Як і в теоремі 9.2 виберемо послідовності $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ та $\{v_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ з $C^\infty([0, T]; H_0^1(\Omega))$ такі, що $u_m \rightarrow u$ та $v_m \rightarrow v$ в $\mathcal{W}(0, T)$ при $m \rightarrow +\infty$. Тоді

$$\begin{aligned} \langle u'_m, v_m \rangle_{L^2(a, b; H^{-1}(\Omega)), L^2(a, b; H_0^1(\Omega))} &= \int_a^b \langle u'_m, v_m \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} dt = \\ &= \int_a^b \int_\Omega u'_m(t, x) v_m(t, x) dx dt = \int_\Omega \left(\int_a^b u'_m(t, x) v_m(t, x) dt \right) dx = \\ &= \int_\Omega \left(u_m(b) v_m(b) - u_m(a) v_m(a) - \int_a^b u_m(t, x) v'_m(t, x) dt \right) dx = \\ &= (u_m(b), v_m(b))_{L^2(\Omega)} - (u_m(a), v_m(a))_{L^2(\Omega)} - \int_a^b \langle u'_m, v_m \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} dt. \end{aligned}$$

Далі граничним переходом отримуємо потрібну формулу. ■

Зрозуміло, якщо банаховий простір B_1 неперервно вкладається в банаховий простір B_2 ($\exists c > 0 \forall u \in B_1: \|u\|_{B_2} \leq c \|u\|_{B_1}$), то простір $L^p(0, T; B_1)$ неперервно вкладається в $L^p(0, T; B_2)$. Природнім чином виникає питання, чи буде правильним аналогічне твердження для компактного вкладення $B_1 \subseteq B_2$, тобто чи $L^p(0, T; B_1) \subseteq L^p(0, T; B_2)$? Виявляється, що ні. Наприклад, якщо $B_1 = B_2 = \mathbb{R}$ (кожна обмежена множина є передкомпактною), однак в просторі $L^2(0, T; \mathbb{R}) = L^2(0, T)$ з обмеженості множини не слідує її передкомпактність. Цю проблему вирішує наступна теорема.

Теорема 9.3. ([19]). Нехай B_0, B_1, B – банахові простори, причому $B_0 \subset B \subset B_1$ (неперервні вкладення), $B_0 \subseteq B$, та B_0, B_1 – рефлексивні простори.

Тоді лінійний простір $\mathcal{W}(0, T)$ всіх функцій $u \in L^{p_0}(0, T; B_0)$, які мають узагальнену похідну $u' \in L^{p_1}(0, T; B_1)$, де $1 < p_0 \leq p_1 < +\infty$, є банаховим простором з нормою

$$\|u\|_{\mathfrak{W}} = \|u\|_{L^{p_0}(0,T;B_0)} + \|u'\|_{L^{p_1}(0,T;B_1)}$$

та $\mathfrak{W}(0,T) \subseteq L^{p_0}(0,T;B)$.

Приклад 1. В розділі 8 було показано, що $H_0^1(\Omega) \subseteq L^2(\Omega) \subseteq H^{-1}(\Omega)$. Тому згідно з теоремою 9.3, маємо $\mathcal{W}(0,T) \subseteq L^2(0,T;L^2(\Omega))$.

ЧАСТИНА 2.

УЗАГАЛЬНЕНІ РОЗВ'ЯЗКИ ЛІНІЙНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ

10. ЕЛІПТИЧНІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ

Нехай Ω – обмежена область у $\mathbb{R}^n$ і $\partial\Omega \in C^1$. Розглянемо диференціальний вираз

$$\mathcal{L}(u(x)) := \sum_{i,j=1}^n \partial_{x_i} \left(a_{ij}(x) \partial_{x_j} u(x) \right) + c(x)u(x),$$

де $\{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$ та c – задані функції, які називаються коефіцієнтами даного диференціального виразу.

Означення 1. Диференціальний вираз $\mathcal{L}$ називається еліптичним диференціальним оператором дивергентного виду, якщо

- $a_{i,j} \in L^\infty(\Omega)$, $c \in L^\infty(\Omega)$, $\forall i, j = 1, \dots, n$;
- $\exists \chi_1 > 0, \exists \chi_2 > 0$, що для майже всіх $x \in \Omega$ і довільного вектора $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ маємо

$$\chi_1 |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq \chi_2 |\xi|^2. \quad (10.1)$$

Крім того, якщо для всіх $i, j = 1, \dots, n$ і майже всіх $x \in \Omega$ виконується рівність $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$, то диференціальний оператор $\mathcal{L}$ називається симетричним. У цьому випадку будемо говорити, що симетричний еліптичний диференціальний оператор $\mathcal{L}$ належить класу $E(\chi_1, \chi_2)$.

Прикладом симетричного еліптичного диференціального оператора дивергентного виду є оператор Лапласа

$$\Delta u(x) = \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_n^2},$$

для якого $\chi_1 = \chi_2 = 1$.

10.1. Узагальнений розв'язок задачі Діріхле

Нехай коефіцієнти $\{a_{ij}\} \subset C^1(\Omega)$, $c \in C(\Omega)$, а функція $f \in C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$. В області Ω розглянемо крайову задачу для симетричного еліптичного диференціального оператора $\mathcal{L}$ з однорідними крайовими умовами:

$$-\mathcal{L}(u(x)) = f(x) \quad \forall x \in \Omega, \quad u(x) = 0 \quad \forall x \in \partial\Omega. \quad (10.2)$$

Задача (10.2) називається першою крайовою задачею з однорідною крайовою умовою, або задачею Діріхле з однорідною крайовою умовою.

Нагадаємо, що функція $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ називається класичним розв'язком задачі (10.2), якщо при підстановці функції u в диференціальне рівняння задачі (10.2) отримаємо правильну тотожність в області Ω і $u|_{\partial\Omega} = 0$. Відомо, що при вказаних умовах на коефіцієнти оператора $\mathcal{L}$, на праву частину f і межу області Ω існує єдиний класичний розв'язок задачі (10.2) (див. [26, 29]).

Візьмемо довільну функцію $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, домножимо диференціальне рівняння задачі (10.2) на φ і проінтегруємо по області Ω , використовуючи формулу Остроградського. У результаті отримаємо, що класичний розв'язок u задовольняє інтегральну тотожність

$$\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \partial_{x_j} u(x) \partial_{x_i} \varphi \, dx + \int_{\Omega} c(x) u(x) \varphi(x) \, dx = \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) \, dx.$$

Для існування інтегралів у цій тотожності достатньо, щоб $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$, $c \in L^\infty(\Omega)$ і $f \in L^2(\Omega)$. Дану тотожність можна використати для поняття узагальнення розв'язку задачі (10.2).

Означення 1. Нехай $\mathcal{L} \in E(\chi_1, \chi_2)$, $f \in L^2(\Omega)$. Функція u з простору $H_0^1(\Omega)$ називається узагальненим розв'язком крайової задачі (10.2), якщо для всіх $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ має місце така інтегральна тотожність:

$$\int_{\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \partial_{x_j} u \partial_{x_i} \varphi + c(x) u \varphi \right) dx = \int_{\Omega} f(x) \varphi dx. \quad (10.3)$$

Зрозуміло, що якщо існує узагальнений розв'язок задачі (10.2), то він не обов'язково буде класичним розв'язком. Нагадаємо, що простір $C_0^\infty(\Omega)$ є всюди щільним в просторі $H_0^1(\Omega)$, тому в цьому означенні $\varphi \in H_0^1(\Omega)$.

Теорема 10.1. *Нехай коефіцієнт $c \geq 0$ м.с. в Ω . Тоді існує єдиний узагальнений розв'язок крайової задачі (10.2), для якого має місце така апіорна оцінка:*

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)}, \quad (10.4)$$

де C – додатна постійна, яка не залежить від u та f .

Доведення. Для диференціального оператора $\mathcal{L} \in E(\chi_1, \chi_2)$ розглянемо відповідну білінійну форму

$$B_D[u, v] = \int_{\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \partial_{x_j} u \partial_{x_i} v + c(x) u v \right) dx \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega).$$

Легко перевірити, що дана білінійна форма задає новий скалярний добуток на $H_0^1(\Omega)$. З (10.1), умови теореми та нерівності Фрідрікса (6.7) випливає, що

$$\chi_1 \|\psi\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq B_D[\psi, \psi] \leq C_1 \|\psi\|_{H_0^1(\Omega)}^2. \quad (10.5)$$

Дана двостороння нерівність означає, що замикання простору $C_0^\infty(\Omega)$ за нормою $\|\psi\|_D := \sqrt{B_D[\psi, \psi]}$ збігається з простором $H_0^1(\Omega)$. Нагадаємо (див. зауваження 1 в пункті 6.1), що $\|\psi\|_{H_0^1(\Omega)} = \|\nabla \psi\|_{L^2(\Omega)}$.

Інтегральну тотожність (10.3) можна переписати в такому вигляді:

$$B_D[u, \varphi] = \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega). \quad (10.6)$$

Доведемо існування та єдиність розв'язку цієї тотожності.

Права частина тотожності (10.6) задає функціонал

$$l(\varphi) := \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega)$$

над простором $H_0^1(\Omega)$ з новим скалярним добутком $B_D[\cdot, \cdot]$. Лінійність даного функціонала не викликає сумнівів. Обмеженість функціонала $l: H_0^1(\Omega) \mapsto \mathbb{R}$ впливає з нерівності Фрідрікса (6.7) при $p = 2$ і нерівності (10.5):

$$\begin{aligned} |l(\varphi)| &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|\varphi\|_{L^2(\Omega)} \leq C_2 \|f\|_{L^2(\Omega)} \|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \\ &\leq C_2 (\chi_1)^{-1/2} \|f\|_{L^2(\Omega)} \|\varphi\|_D = C_3 \|f\|_{L^2(\Omega)} \|\varphi\|_D. \end{aligned}$$

Таким чином, норма цього функціонала не перевищує $C_3 \|f\|_{L^2(\Omega)}$. Згідно з теоремою Рісса про зображення лінійного неперервного функціонала маємо, що існує єдиний елемент $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ такий, що

$$l(\varphi) = B_D[u_0, \varphi] \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega), \quad (10.7)$$

$$\|u_0\|_D = \|l\| \leq C_3 \|f\|_{L^2(\Omega)}. \quad (10.8)$$

З (10.7) випливає, що тільки функція u_0 задовольняє інтегральну тотожність (10.6), а значить і тотожність (10.3). На підставі (10.5) з (10.8) виводимо (10.4). ■

Зауваження 1. Нехай маємо дві крайові задачі:

$$-\mathcal{L}(u_1(x)) = f_1(x) \quad \forall x \in \Omega, \quad u_1(x) = 0 \quad \forall x \in \partial\Omega,$$

та

$$-\mathcal{L}(u_2(x)) = f_2(x) \quad \forall x \in \Omega, \quad u_2(x) = 0 \quad \forall x \in \partial\Omega.$$

Використовуючи апіорну оцінку (10.4), для різниці розв'язків цих задач отримаємо нерівність

$$\|u_1 - u_2\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C \|f_1 - f_2\|_{L^2(\Omega)},$$

яка показує неперервну залежність розв'язків однорідних крайових задач Діріхле в нормі простору $H_0^1(\Omega)$ від правих частин цих задач.

Зауваження 2. З теореми 10.1 і зауваження 1 випливає, що крайова задача (10.2) в узагальненій постановці поставлена коректно.

Розглянемо тепер задачу Діріхле з неоднорідною крайовою умовою:

$$-\mathcal{L}(u(x)) = f(x) \quad \forall x \in \Omega, \quad u(x) = \phi(x) \quad \forall x \in \partial\Omega. \quad (10.9)$$

Означення 2. Нехай $L \in E(\chi_1, \chi_2)$, $f \in L^2(\Omega)$. Функція u з простору $H^1(\Omega)$ називається узагальненим розв'язком крайової задачі (10.9), якщо вона задовольняє інтегральну тотожність (10.3) для всіх $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ та її слід на межі області Ω збігається з ϕ , тобто $T(u) = \phi$ на $\partial\Omega$.

Надалі будемо використовувати запис $u|_{\partial\Omega} = \phi$ розуміючи під ним слід функції u на межі $\partial\Omega$.

Теорема 10.2. Нехай коефіцієнт $c \geq 0$ м.с. в Ω та функція $\phi \in$ слідом деякої функції з простору $H^1(\Omega)$. Тоді існує єдиний узагальнений розв'язок задачі (10.9), для якого має місце оцінка

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \inf_{\substack{\Phi \in H^1(\Omega) \\ \Phi|_{\partial\Omega} = \phi}} \|\Phi\|_{H^1(\Omega)} \right). \quad (10.10)$$

де стала $C > 0$ не залежить від f і ϕ .

Доведення. Почнемо з доведення єдиності узагальненого розв'язку задачі (10.9). Припустимо, що існує два узагальнених розв'язки u_1 і u_2 . Тоді очевидно, що їхня різниця $u = u_1 - u_2$ належить простору $H_0^1(\Omega)$ і задовольняє інтегральну тотожність (10.3) з функцією $f \equiv 0$. Тоді, очевидно, що $u \equiv 0$ у просторі $H_0^1(\Omega)$, а значить і рівність функцій u_1 і u_2 як елементів простору $H^1(\Omega)$.

Нехай $\Phi \in H^1(\Omega)$ і її слід рівний ϕ , тобто $\Phi|_{\partial\Omega} = \phi$. Тоді заміною $u = w + \Phi$ задача (10.9) зводиться до відшукування функції $w \in H_0^1(\Omega)$, що задовольняє інтегральну тотожність

$$B_D[w, \varphi] = \int_{\Omega} \left(f\varphi - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \partial_{x_j} \Phi \partial_{x_i} \varphi - c(x) \Phi \varphi \right) dx \quad (10.11)$$

для усіх $\varphi \in H_0^1(\Omega)$. Покажемо, що права частина тотожності (10.11) задає лінійний та обмежений функціонал над простором $H_0^1(\Omega)$. Лінійність є очевидною. Доведемо обмеженість. Для цього скористаємося тим, що $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$, $c \in L^\infty(\Omega)$, нерівностями Фрідрікса (6.7), Коші – Буняковського та нерівністю (10.5):

$$\begin{aligned}
|l(\varphi)| &:= \left| \int_{\Omega} \left(f\varphi - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \partial_{x_j} \Phi \partial_{x_i} \varphi - c(x) \Phi \varphi \right) dx \right| \leq \\
&\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|\varphi\|_{L^2(\Omega)} + \sum_{i,j=1}^n \|a_{ij}\|_{L^\infty(\Omega)} \|\nabla \Phi\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla \varphi\|_{L^2(\Omega)} + \\
&+ \|c\|_{L^\infty(\Omega)} \|\Phi\|_{L^2(\Omega)} \|\varphi\|_{L^2(\Omega)} \leq C_1 (\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|\Phi\|_{H^1(\Omega)}) \|\varphi\|_D.
\end{aligned}$$

де стала $C_1 > 0$ не залежить від φ, f і Φ .

Тоді, згідно з теоремою Рісса, існує єдиний елемент $w \in H_0^1(\Omega)$, який задовольняє тотожність (10.11) і для якого має місце оцінка

$$\|w\|_D = \|l\| \leq C_1 (\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|\Phi\|_{H^1(\Omega)}). \quad (10.12)$$

Таким чином, що існує єдина функція $u = w + \Phi$, яка задовольняє інтегральну тотожність (10.3), її слід на межі $\partial\Omega$ рівний Φ і на підставі (10.5) маємо оцінку

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C_3 (\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|\Phi\|_{H^1(\Omega)}), \quad (10.13)$$

де стала $C_2 > 0$ не залежить від f і Φ . Оскільки згідно з доведеним раніше, узагальнений розв'язок єдиний, то він не залежить від функції $\Phi \in H^1(\Omega)$, слід якої рівний Φ на межі області Ω . Тоді з нерівності (10.13) отримаємо оцінку (10.10), що і завершує доведення теореми. ■

З цього означення випливає природна умова на функцію Φ : необхідно, щоб вона була слідом деякої функції з простору $H^1(\Omega)$. Множина таких функцій утворює підпростір в просторі $L^2(\partial\Omega)$, який позначають $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$. Виявляється, що не кожна функція з $L^2(\partial\Omega)$ є слідом деякої функції з простору $H^1(\Omega)$; більше цього, для цього недостатньо навіть неперервності (див. наприклад [29, 4.1.8]). Крім того, простір $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ є банаховим простором з нормою

$$\|\Phi\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} := \inf_{\substack{\Phi \in H^1(\Omega) \\ \Phi|_{\partial\Omega} = \Phi}} \|\Phi\|_{H^1(\Omega)}$$

та має місце компактне вкладення $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \hookrightarrow L^2(\partial\Omega)$.

Таким чином, відображення $T: W^{1,p}(\Omega) \mapsto L^p(\partial\Omega)$ не є сюр'єкцією. Має місце така теорема про оператор сліду.

Теорема 10.3. Нехай Ω – обмежена область у $\mathbb{R}^n$, $\partial\Omega \in C^1$ та $1 < p < +\infty$. Тоді оператор сліду T є неперервним відображенням з простору $W^{1,p}(\Omega)$ в простір $W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$.

Крім того, якщо $p < n$, то оператор сліду T є неперервним відображенням з $W^{1,p}(\Omega)$ в $L^q(\partial\Omega)$ для $q \in \left[1, \frac{(n-1)p}{n-p}\right]$; якщо ж $p = n$, то відображення $T: W^{1,p}(\Omega) \mapsto L^q(\partial\Omega)$ є неперервним для всіх $q \in [1, +\infty)$.

На підставі вище наведених фактів теорему 10.2 можна переформулювати в такому вигляді.

Теорема 10.4. Нехай $c \geq 0$ м.с. в Ω та функція $\phi \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$. Тоді існує єдиний узагальнений розв'язок задачі (10.9), для якого має місце оцінка

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|\phi\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \right).$$

Зауваження 4. Нехай маємо дві крайові задачі:

$$-\mathcal{L}(u_1(x)) = f_1(x) \quad \forall x \in \Omega, \quad u_1(x) = \phi_1 \quad \forall x \in \partial\Omega,$$

та

$$-\mathcal{L}(u_2(x)) = f_2(x) \quad \forall x \in \Omega, \quad u_2(x) = \phi_2 \quad \forall x \in \partial\Omega.$$

Використовуючи апіорну оцінку з теореми 10.4, для різниці розв'язків цих задач отримаємо нерівність

$$\|u_1 - u_2\|_{H^1(\Omega)} \leq C \left(\|f_1 - f_2\|_{L^2(\Omega)} + \|\phi_1 - \phi_2\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \right)$$

яка показує неперервну залежність розв'язків крайових задач Діріхле в нормі простору $H^1(\Omega)$ від правих частин цих задач.

10.2. Узагальнений розв'язок задачі Робена

Розглянемо крайову задачу

$$-\mathcal{L}(u(x)) = f(x) \quad \forall x \in \Omega, \tag{10.14}$$

$$\sigma_\nu(u(x)) + k(x)u(x) = \psi(x) \quad \forall x \in \partial\Omega, \tag{10.15}$$

де f, k, ψ – задані функції,

$$\sigma_v(u(x)) := \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \partial_{x_j} u(x) v_i(x)$$

– конормальна похідна, $v = (v_1, \dots, v_n)$ – зовнішня (по відношенню до області Ω) нормаль до $\partial\Omega$. Умова (10.15) називається третьою крайовою умовою.

Нагадаємо, що якщо $\{a_{ij}\} \subset C^1(\bar{\Omega})$, $\{c, f\} \subset C(\Omega)$, а $\{k, \psi\} \subset C(\partial\Omega)$, то функція $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ називається класичним розв'язком третьої крайової задачі або задачі Робена (10.14)–(10.15), якщо вона задовольняє рівняння (10.14) в Ω , а на межі $\partial\Omega$ крайовій умові (10.15).

Нехай існує класичний розв'язок задачі (10.14)–(10.15). Візьмемо довільну функцію $\varphi \in C^\infty(\bar{\Omega})$, домножимо диференціальне рівняння (10.14) на φ і проінтегруємо по області Ω , використовуючи формулу Остроградського. З врахуванням умови (10.15) отримаємо, що класичний розв'язок u задовольняє інтегральну тотожність

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \partial_{x_j} u \partial_{x_i} \varphi \, dx + \int_{\Omega} c(x) u \varphi \, dx + \int_{\partial\Omega} k(x) u \varphi \, dS_x = \\ = \int_{\Omega} f(x) \varphi \, dx + \int_{\partial\Omega} \psi(x) \varphi \, dS_x. \end{aligned}$$

Для існування інтегралів у цій тотожності достатньо, щоб $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$, $c \in L^\infty(\Omega)$, $k \in L^\infty(\partial\Omega)$ і $f \in L^2(\Omega)$, $\psi \in L^2(\partial\Omega)$. Дану тотожність можна використати для узагальнення поняття розв'язку задачі (10.14)–(10.15).

Означення. Нехай $\mathcal{L} \in E(\chi_1, \chi_2)$, $f \in L^2(\Omega)$, $k \in L^\infty(\partial\Omega)$, $\psi \in L^2(\partial\Omega)$. Функція u з простору $H^1(\Omega)$ називається узагальненим розв'язком крайової задачі (10.14)–(10.15), якщо має місце така інтегральна тотожність:

$$\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \partial_{x_j} u \partial_{x_i} \varphi \, dx + \int_{\Omega} c u \varphi \, dx + \int_{\partial\Omega} k T(u) T(\varphi) \, dS_x = \quad (10.16)$$

$$= \int_{\Omega} f \varphi \, dx + \int_{\partial\Omega} \psi T(\varphi) \, dS_x$$

для довільних $\varphi \in H^1(\Omega)$. Тут $T: H^1(\Omega) \mapsto L^2(\partial\Omega)$ – оператор сліду.

Нагадаємо, що простір функцій $C^\infty(\bar{\Omega})$ є всюди щільним в просторі $H^1(\Omega)$ (див. теорему 2.3). Зрозуміло також, що якщо існує класичний розв'язок задачі (10.14)–(10.15), то він буде й узагальненим розв'язком. Обернене твердження, узагалі кажучи, неправильне.

Теорема 10.5. Нехай $c \geq 0$ м.с. в Ω , $k \geq 0$ м.с. в $\partial\Omega$, причому хоча б одна з функцій c чи k не дорівнює (з точністю до майже скрізь) тотожно нулю на своїй області визначення. Тоді для довільних функцій $f \in L^2(\Omega)$ і $\psi \in L^2(\partial\Omega)$ існує єдиний узагальнений розв'язок крайової задачі (10.14)–(10.15), для якого має місце така апіорна оцінка:

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|\psi\|_{L^2(\partial\Omega)}), \quad (10.17)$$

де C – додатна постійна, яка не залежить від u , f та ψ .

Доведення. Розглянемо білінійну форму

$$B_R[u, v] := \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \partial_{x_j} u \partial_{x_i} v \, dx + \int_{\Omega} c u v \, dx + \int_{\partial\Omega} k T(u) T(v) \, dS_x$$

на $H^1(\Omega)$. Легко перевірити, що дана білінійна форма задає новий скалярний добуток на $H^1(\Omega)$. Покажемо, що норма $\|v\|_R := \sqrt{B_R[v, v]}$, яка породжується цим добутком, еквівалентна нормі простору $H^1(\Omega)$.

На підставі властивостей оператора сліду (див. теорему 5.1) і (10.1) маємо, що

$$\begin{aligned} \|v\|_R^2 &\leq \chi_2 \int_{\Omega} |\nabla v|^2 \, dx + \|c\|_{L^\infty(\Omega)} \int_{\Omega} v^2 \, dx + \|k\|_{L^\infty(\Omega)} \int_{\partial\Omega} (Tv)^2 \, dS_x \leq \\ &\leq C_1 \|v\|_{H^1(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Доведемо тепер, що існує така додатна постійна C , що для всіх функцій $v \in H^1(\Omega)$: $\|v\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq C \|v\|_R^2$. Доведення проведемо від супротивного. Тоді для кожного $m \in \mathbb{N}$ існує така функція $v_m \in H^1(\Omega)$,

що $\|v_m\|_{H^1(\Omega)}^2 > m B_R[v_m, v_m]$. Розділивши останню нерівність на $\|v_m\|_{H^1(\Omega)}^2$ отримаємо

$$B_F(h_m, h_m) < \frac{1}{m}, \quad (10.18)$$

де $h_m = \frac{v_m}{\|v_m\|_{H^1(\Omega)}}$. Легко перевірити, що

$$\|h_m\|_{H^1(\Omega)} = 1 \quad \forall m \in \mathbb{N}. \quad (10.19)$$

Враховуючи, що кожен з трьох доданків, який визначає білінійну форму B_R є не від'ємний, то з (10.18) слідує, що кожен з них не перевищує $\frac{1}{m}$. Таким чином, на підставі (10.1) маємо

$$\chi_1 \int_{\Omega} |\nabla h_m|^2 dx < \frac{1}{m}, \quad (10.20)$$

$$\int_{\Omega} c(x) (h_m)^2 dx < \frac{1}{m}, \quad (10.21)$$

$$\int_{\partial\Omega} k(x) (T(h_m))^2 dS_x < \frac{1}{m} \quad (10.22)$$

для всіх $m \in \mathbb{N}$.

Оскільки послідовність $\{h_m\}_{m=1}^{\infty}$ — обмежена в $H^1(\Omega)$ (див. (10.19), то згідно з лемою 7.1, існує фундаментальна в $L^2(\Omega)$ підпослідовність $\{h_{m_p}\}_{p=1}^{\infty} \subset \{h_m\}_{m=1}^{\infty}$, яку знову позначимо через $\{h_m\}$. З першої нерівності в (10.20) отримаємо, що

$$\begin{aligned} \|h_m - h_n\|_{H^1(\Omega)}^2 &= \|h_m - h_n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla(h_m - h_n)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \\ &\leq \|h_m - h_n\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2\|\nabla h_m\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2\|\nabla h_n\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \\ &\leq \|h_m - h_n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{2}{\chi_1 m} + \frac{2}{\chi_1 n}, \end{aligned}$$

звідки випливає, що послідовність $\{h_m\}$ — фундаментальна в $H^1(\Omega)$. Тому існує функція $h_0 \in H^1(\Omega)$ така, що $h_m \rightarrow h_0$ у $H^1(\Omega)$ при $m \rightarrow +\infty$.

Переходячи до границь в нерівностях (10.19)-(10.22) при $m \rightarrow +\infty$ та враховуючи неперервність оператора сліду, отримаємо такі співвідношення:

$$\|h_0\|_{H^1(\Omega)} = 1, \quad \int_{\Omega} |\nabla h_0|^2 dx = 0, \quad (10.23)$$

$$\int_{\Omega} c(x) (h_0)^2 dx = 0, \quad \int_{\partial\Omega} k(x) (T(h_0))^2 dS_x = 0. \quad (10.24)$$

З перших двох рівностей у (10.23) випливає, що $h_0 \equiv 1/\sqrt{|\Omega|}$. Тоді, очевидно, що слід $Th_0 = \frac{1}{\sqrt{|\Omega|}}$. А це, на підставі умов теореми, суперечить останнім рівностям в (10.24), з яких випливає, що $h_0 = 0$ майже скрізь на Ω . Отримали суперечність.

Таким чином, існують такі додатні постійні C_1 і C_2 , що

$$C_2 \|v\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq B_R[v, v] \leq C_1 \|v\|_{H^1(\Omega)}^2 \quad \forall v \in H^1(\Omega). \quad (10.25)$$

Інтегральну тотожність (10.16) можна переписати в такому вигляді:

$$B_R[u, \varphi] = l_1(\varphi) \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega), \quad (10.26)$$

де

$$l_1(\varphi) := \int_{\Omega} f \varphi dx + \int_{\partial\Omega} \psi T(\varphi) dS_x \quad (10.27)$$

задає лінійний та обмежений функціонал над простором $H^1(\Omega)$ з новим скалярним добутком $B_R[\cdot, \cdot]$. Лінійність даного функціонала не викликає сумнівів. Обмеженість функціонала $l_1: H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ випливає з нерівності (10.25) та з обмеженості оператора сліду (див. теорему 5.1):

$$\begin{aligned} |l_1(\varphi)| &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|\varphi\|_{L^2(\Omega)} + \|\psi\|_{L^2(\partial\Omega)} \|T(\varphi)\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq \\ &\leq (\|f\|_{L^2(\Omega)} + C_3 \|\psi\|_{L^2(\partial\Omega)}) \|\varphi\|_{H^1(\Omega)} \leq C_4 (\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|\psi\|_{L^2(\partial\Omega)}) \|\varphi\|_{R}. \end{aligned}$$

Таким чином, $l_1 \in (H^1(\Omega))^*$ і його норма не перевищує $C_4 (\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|\psi\|_{L^2(\partial\Omega)})$. Далі, застосовуючи теорему Рісса про зображення лінійного неперервного функціонала та використовуючи ліву частину нерівності (10.25) завершуємо доведення теореми. ■

Зауваження. Нехай маємо дві крайові задачі Робена:

$$-\mathcal{L}(u_1) = f_1 \quad \forall x \in \Omega, \quad \sigma_v(u_1) + ku_1 = \psi_1 \quad \forall x \in \partial\Omega,$$

та

$$-\mathcal{L}(u_2) = f_2 \quad \forall x \in \Omega, \quad \sigma_v(u_2) + ku_2 = \psi_2 \quad \forall x \in \partial\Omega.$$

Використовуючи апіорну оцінку (10.17) для різниці розв'язків цих задач отримаємо нерівність

$$\|u_1 - u_2\|_{H^1(\Omega)} \leq C(\|f_1 - f_2\|_{L^2(\Omega)} + \|\psi_1 - \psi_2\|_{L^2(\partial\Omega)}),$$

яка показує неперервну залежність розв'язків крайових задач Фур'є в нормі простору $H^1(\Omega)$ від правих частин цих задач. Таким чином, крайова задача (10.14)–(10.15) в узагальненій постановці поставлена коректно.

10.3. Узагальнений розв'язок задачі Робена у випадку, коли дані задачі належать L^p , $p < 2$

В попередньому пункті ми припускали, що $f \in L^2(\Omega)$, $\psi \in L^2(\partial\Omega)$. Зараз покажемо, що існує єдиний узагальнений розв'язок з простору $H^1(\Omega)$ задачі (10.14)–(10.15) і у випадку, коли $f \in L^q(\Omega)$ і $\psi \in L^r(\partial\Omega)$ при $q \in (1, 2)$ і $r \in (1, 2)$. Зрозуміло, що у цьому випадку праві частини f та ψ не обов'язково належать до просторів L^2 .

Для цього, щоб довести цей факт, потрібно перевірити, що функціонал l_1 з попередньої теореми (див. (10.27)) буде належати простору $(H^1(\Omega))^*$ і при таких обмеженнях на функції f та ψ .

Спочатку розглянемо випадок, коли розмірність простору $n = 2$. В цьому випадку параметр $p = n = 2$ (нагадаємо, що $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$). Тоді з леми 6.3 випливає, що для кожного $q' \in (1, +\infty)$ існує стала $C_1 > 0$, що

$$\|u\|_{L^{q'}(\Omega)} \leq C_1 \|u\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall u \in H^1(\Omega). \quad (10.28)$$

А з другої частини теореми 10.3 маємо, що для кожного $r' \in (1, +\infty)$

$$\exists C_2 > 0 \quad \forall u \in H^1(\Omega): \quad \|Tu\|_{L^{r'}(\partial\Omega)} \leq C_2 \|u\|_{H^1(\Omega)}. \quad (10.29)$$

Використовуючи ці дві нерівності виводимо, що

$$\begin{aligned} |l_1(\varphi)| &\leq \|f\|_{L^q(\Omega)} \|\varphi\|_{L^{q'}(\Omega)} + \|\psi\|_{L^r(\partial\Omega)} \|T(\varphi)\|_{L^{r'}(\partial\Omega)} \leq \\ &\leq C_3 (\|f\|_{L^q(\Omega)} + \|\psi\|_{L^r(\partial\Omega)}) \|\varphi\|_{H^1(\Omega)} \leq C_4 (\|f\|_{L^q(\Omega)} + \|\psi\|_{L^r(\partial\Omega)}) \|\varphi\|_F, \end{aligned}$$

де тепер q' та r' такі, що $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$ та $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$.

У випадку $n > 2$ параметр $p = 2 < n$. Тому з леми 6.2 маємо, що тільки для кожного $q' \in \left[1, \frac{2n}{n-2}\right)$ виконується нерівність (10.28), а з

другої частини теореми 10.3 маємо, що тільки для кожного $r' \in \left[1, \frac{2(n-1)}{n-2}\right]$ виконується нерівність (10.29). Ці обмеження дають можливість знайти умови для параметрів q та r :

$$\frac{1}{q} + \frac{n-2}{2n} = 1 \quad \Rightarrow \quad q = \frac{2n}{n+2},$$

$$\frac{1}{r} + \frac{n-2}{2(n-1)} = 1 \quad \Rightarrow \quad r = 2 - \frac{2}{n}.$$

Отже, в цьому випадку $l_1 \in (H^1(\Omega))^*$, якщо $f \in L^q(\Omega)$ для $q \in (\frac{2n}{n+2}, 2)$ і $\psi \in L^r(\partial\Omega)$ для $r \in [2 - \frac{2}{n}, 2)$.

Таким чином, доведена така теорема.

Теорема 10.6. Нехай $c \geq 0$ м.с. в Ω , $k \geq 0$ м.с. в $\partial\Omega$, причому хоча б одна з функцій c чи k не дорівнює тотожно нулю (з точністю до майже скрізь) на своїй області визначення. Тоді для довільних функцій $f \in L^q(\Omega)$ і $\psi \in L^r(\partial\Omega)$, де $q \in (1, 2)$ і $r \in (1, 2)$ у випадку $n = 2$ та $q \in (\frac{2n}{n+2}, 2)$ і $r \in [2 - \frac{2}{n}, 2)$ у випадку $n > 2$, існує єдиний узагальнений розв'язок крайової задачі (10.14)–(10.15), для якого має місце така апріорна оцінка:

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C(\|f\|_{L^q(\Omega)} + \|\psi\|_{L^r(\partial\Omega)}), \quad (10.30)$$

де C – додатна постійна, яка не залежить від u , f та ψ .

10.4. Узагальнений розв'язок однорідної задачі Неймана

В цьому пункті будемо вважати, що в диференціальному операторі $\mathcal{L}$ коефіцієнт $c \equiv 0$ та будемо досліджувати крайову задачу

$$-\mathcal{L}(u(x)) = f(x) \quad \forall x \in \Omega, \quad \sigma_\nu(u(x)) = 0 \quad \forall x \in \partial\Omega. \quad (10.31)$$

Крайові умови такого виду називаються однорідними крайовими умовами Неймана.

Одразу ж зауважимо, що на відміну від попередніх задач Діріхле та Робена, крайова задача Неймана (10.31) має нетривіальне ядро (легко перевірити, що довільна постійна функція є розв'язком однорідної задачі (10.31), тобто коли $f \equiv 0$). Це означає, що білінійна форма, яка відповідає оператору $\mathcal{L}$ не задає скалярний добуток на просторі $H^1(\Omega)$.

Цей факт суттєво ускладнює доведення теореми про існування та єдиність узагальненого розв'язку задачі (10.31).

Аналогічно, як і в попередньому пункті, вводимо поняття узагальненого розв'язку задачі (10.31).

Означення. Нехай $\mathcal{L} \in E(\chi_1, \chi_2)$, $c \equiv 0$, $f \in L^2(\Omega)$. Функція u з простору $H^1(\Omega)$ називається узагальненим розв'язком крайової задачі (10.31), якщо має місце така інтегральна тотожність:

$$\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \partial_{x_j} u \partial_{x_i} \varphi \, dx = \int_{\Omega} f \varphi \, dx \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega). \quad (10.32)$$

Теорема 10.7. Для того, щоб існував узагальнений розв'язок крайової задачі (10.31) необхідно й достатньо, щоб

$$\langle f \rangle_{\Omega} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} f \, dx = 0.$$

При цьому існує єдиний узагальнений розв'язок u_0 , для якого $\langle u_0 \rangle_{\Omega} = 0$ та

$$\|u_0\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)}, \quad (10.33)$$

де додатна постійна C не залежить від u_0 та f . Будь-який інший узагальнений розв'язок крайової задачі (10.31) зображується у вигляді $u_0 + c_1$, де c_1 – деяка постійна.

Доведення. Необхідна умова теореми випливає з інтегральної тотожності (10.32), якщо взяти $\varphi \equiv 1$. Доведемо достатність.

Розглянемо лінійний підпростір

$$\hat{H}(\Omega) := \{u \in H^1(\Omega): \langle u \rangle_{\Omega} = 0\}$$

простору $H^1(\Omega)$. З нерівності Пуанкаре (7.1) випливає, що існує додатна постійна C така, що для всіх функцій $u \in \hat{H}(\Omega)$:

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}. \quad (10.34)$$

З нерівностей (10.34) і (10.1) слідує, що білінійна форма

$$B_N[u, v] := \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \partial_{x_j} u \partial_{x_i} v dx \quad \forall u, v \in \hat{H}(\Omega)$$

задає скалярний добуток на підпросторі $\hat{H}(\Omega)$, який породжує норму

$$\|u\|_N := \sqrt{B_N[u, u]}, \quad u \in \hat{H}(\Omega).$$

Інтегральну тотожність (10.32) можна переписати в такому вигляді:

$$B_N[u, \varphi] = l_2(\varphi) \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega), \quad (10.35)$$

де лінійний функціонал l_2 задається рівністю

$$l_2(\varphi) := \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx, \quad \varphi \in H^1(\Omega).$$

Розглянемо цей функціонал на підпростором $\hat{H}(\Omega)$. Обмеженість функціонала $l_2: \hat{H}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ випливає з нерівностей (10.34) і (10.1):

$$|l_2(\varphi)| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|\varphi\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla \varphi\|_{L^2(\Omega)} \leq C_1 \|f\|_{L^2(\Omega)} \|\varphi\|_N.$$

Таким чином, $l_2 \in (\hat{H}(\Omega))^*$ і його норма цього функціонала не перевищує $C_1 \|f\|_{L^2(\Omega)}$. Згідно з теоремою Рісса про зображення лінійного неперервного функціонала маємо, що існує єдиний елемент $u_0 \in \hat{H}(\Omega)$ такий, що

$$l_2(\varphi) = B_N[u_0, \varphi] \quad \forall \varphi \in \hat{H}(\Omega), \quad (10.36)$$

$$\|u_0\|_N = \|l_2\| \leq C_1 \|f\|_{L^2(\Omega)}. \quad (10.37)$$

Покажемо, що функція u_0 задовольняє інтегральну тотожність (10.35) для довільної функції $\varphi \in H^1(\Omega)$. Для цього за допомогою функції $\varphi \in H^1(\Omega)$ визначимо функцію $\psi = \varphi - \langle \varphi \rangle_{\Omega}$. Очевидно, $\psi \in \hat{H}(\Omega)$ і $\varphi = \psi + \langle \varphi \rangle_{\Omega}$. Використовуючи (10.36) і умову $\langle f \rangle_{\Omega} = 0$, виводимо

$$\int_{\Omega} f \varphi dx = l_2(\psi) + \langle \varphi \rangle_{\Omega} \cdot \langle f \rangle_{\Omega} = B_N[u_0, \psi] = B_N[u_0, \varphi] \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega).$$

Таким чином, функція u_0 задовольняє інтегральну тотожність (10.35).

Припустимо, що існує ще одна функція $u_1 \in H^1(\Omega)$, яка задовольняє дану тотожність (10.35). Тоді функція

$$v(x) = u_1(x) - u_0(x) - \langle u_1 - u_0 \rangle_{\Omega}, \quad x \in \Omega,$$

яка належить до $\hat{H}(\Omega)$, буде задовольняти рівність $B_N[v, \psi] = 0$ для довільних функцій $\psi \in \hat{H}(\Omega)$. Це можливо лише тоді, коли $v \equiv 0$, а отже, $u_1 = u_0 + \langle u_1 - u_0 \rangle_\Omega$.

На підставі (10.34) і (10.1) з (10.37) виводимо (10.33). ■

Вправа. Довести теорему 10.7 у випадку, коли $f \in L^q(\Omega)$, де $q < 2$ (див. доведення теореми 10.6).

10.5. Спектральні властивості еліптичного оператора

Розглянемо в області Ω еліптичний симетричний диференціальний оператор $\mathcal{L} \in E(\chi_1, \chi_2)$, визначений вище. Якщо коефіцієнти цього оператора $\{a_{ij}\} \subset C^1(\Omega)$, $c \in C(\Omega)$, то

Означення. Функція $u \in C^2(\Omega)$, що тотожно не дорівнює нулю у області Ω , називається власною функцією першої крайової задачі для оператора $\mathcal{L}$, якщо існує таке число λ , що u є класичним розв'язком такої крайової задачі

$$\begin{aligned} -\mathcal{L}(u(x)) &= \lambda u(x), x \in \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} &= 0. \end{aligned} \tag{10.38}$$

При цьому λ називається власним значенням (або власним числом), що відповідає власній функції u .

Означення. Функція $u \in C^2(\Omega)$, що тотожно не дорівнює нулю у області Ω , називається власною функцією третьої (другої при $k \equiv 0$ у $\partial\Omega$) крайової задачі для оператора $\mathcal{L}$, якщо існує таке число λ , що u є класичним розв'язком такої крайової задачі

$$\begin{aligned} -\mathcal{L}(u(x)) &= \lambda u(x), x \in \Omega, \\ (\sigma_\nu(u(x)) + k(x)u(x))|_{\partial\Omega} &= 0. \end{aligned} \tag{10.39}$$

Як і у попередньому означенні, λ називається власним значенням (або власним числом), що відповідає власній функції u .

Очевидно, що кожній власній функції відповідає єдине власне значення. Зворотна відповідність неоднозначна, зокрема, якщо u – власна функція, що відповідає власному значенню λ , то і для будь-якого дійсного числа α відмінного від нуля, функція αu є власною функцією, що відповідає цьому ж власному значенню λ . Тому, у

подальшому, будемо вважати (якщо не стверджується іншого), що власні функції є нормовані за нормою простору $L^2(\Omega)$

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} = 1. \quad (10.40)$$

Проводячи викладки, аналогічні до тих, що були здійснені при введенні означення узагальненого розв'язку крайової задачі, можемо перекоонатися, що класична власна функції першої крайової задачі, при умові, що вона належить простору $H_0^1(\Omega)$, задовольняє інтегральну тотожність

$$\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \partial_{x_j} u \partial_{x_i} \varphi \, dx + \int_{\Omega} c u \varphi \, dx = \lambda \int_{\Omega} u \varphi \, dx, \quad (10.41)$$

для довільної функції $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, а класична власна функція третьої крайової задачі, при умові, що вона належить простору $H^1(\Omega)$, інтегральну тотожність

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \partial_{x_j} u \partial_{x_i} \varphi \, dx + \int_{\Omega} c u \varphi \, dx + \\ + \int_{\partial\Omega} k(x) T(u) T(\varphi) \, dS_x = \lambda \int_{\Omega} u \varphi \, dx \end{aligned} \quad (10.42)$$

для довільної $\varphi \in H^1(\Omega)$.

На базі отриманих співвідношень введемо означення узагальненої власної функції для диференціального оператора $\mathcal{L}$.

Нехай

$$a_{ij} \in L^\infty(\Omega), \, c \in L^\infty(\Omega), \, k \in L^\infty(\partial\Omega).$$

Зауваження. При таких припущеннях оператор $\mathcal{L}$ це формальний символічний оператор, що розуміють лише в контексті інтегральних тотожностей (10.41) чи (10.42).

Означення. Відмінна від нуля функція $u \in H_0^1(\Omega)$, називається узагальненою власною функцією першої крайової задачі для оператора $\mathcal{L} \in E(\chi_1, \chi_2)$, якщо існує таке число λ , що u задовольняє інтегральну тотожність (10.41) для будь-якої функції $\varphi \in H_0^1(\Omega)$. λ називається власним значенням, що відповідає узагальненій власній функції u .

Означення. Відмінна від нуля функція $u \in H^1(\Omega)$, називається узагальненою власною функцією третьої (другої при $k \equiv 0$ у $\partial\Omega$) крайової задачі для оператора $\mathcal{L} \in E(\chi_1, \chi_2)$, якщо існує таке число λ , що u задовольняє інтегральну тотожність (10.42) для будь-якої функції $\varphi \in H^1(\Omega)$. λ називається власним значенням, що відповідає узагальненій власній функції u .

Зауваження. У подальшому будемо вважати, що узагальнені власні функції також нормовані умовою (10.40).

При вивченні властивостей узагальнених власних функцій та власних значень першої крайової задачі у просторі $H_0^1(\Omega)$ зручно використовувати скалярний добуток еквівалентний стандартному визначений співвідношенням

$$B_D[u, v] = \int_{\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \partial_{x_j} u \partial_{x_i} v + cuv \right) dx \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega).$$

При вивченні властивостей узагальнених власних функцій і власних значень третьої крайової задачі у просторі $H^1(\Omega)$ поруч зі стандартним, будемо використовувати скалярний добуток

$$B_R[u, v] := \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \partial_{x_j} u \partial_{x_i} v dx + \int_{\Omega} cuv dx + \int_{\partial\Omega} k T(u) T(v) dS_x$$

Для вивчення властивостей узагальнених власних функцій та власних значень доведемо дві допоміжні леми.

Лема 10.1. Існує лінійний обмежений оператор

$$A_1 : L^2(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$$

що визначається рівністю

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} = B_D[A_1 u, v] \quad (10.43)$$

для довільного $v \in H_0^1(\Omega)$. Цей оператор A_1 має обернений оператор A_1^{-1} . При цьому, якщо цей оператор розглядати як оператор, що діє з $H_0^1(\Omega)$ у себе, то від є самостпряженим, додатновизначеним та компактним.

Лема 10.2. Існує лінійний обмежений оператор

$$A_3 : L^2(\Omega) \rightarrow H^1(\Omega)$$

що визначається рівністю

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} = B_R[A_3 u, v].$$

для довільного $v \in H^1(\Omega)$. Цей оператор A_3 має обернений оператор A_3^{-1} . При цьому, якщо цей оператор розглядати як оператор, що діє з $H^1(\Omega)$ у себе, то від є самостпряженим, додатновизначеним та компактним.

Зауваження. Очевидно, що вигляд оператора A_1 чи A_3 залежить від того, яким чином у $H_0^1(\Omega)$ чи $H^1(\Omega)$ відповідно, задано скалярний добуток.

Хід доведення обох лем відрізняється лише виглядом скалярного добутку, тому проведемо доведення для першої леми, а доведення другої пропонуємо провести читачу самостійно.

Доведення. Очевидно, що для довільного фіксованого $u \in L^2(\Omega)$ вираз

$$l(v) = (u, v)_{L^2(\Omega)}$$

визначає у $H_0^1(\Omega)$ лінійний функціонал. З оцінки

$$\begin{aligned} |l(v)| &= |(u, v)_{L^2(\Omega)}| \leq \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \\ &\leq \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \leq (\chi_1)^{-\frac{1}{2}} \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_D = \\ &= C_1 \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_D. \end{aligned}$$

де $\|\cdot\|_D$ норма породжена скалярним добутком B_D , впливає, що функціонал l є обмеженим, а отже і неперервним у $H_0^1(\Omega)$. Тут C_1 додатна стала, що не залежить від u .

Згідно з теоремою Рісса про зображення лінійного неперервного функціонала існує єдиний елемент $U \in H_0^1(\Omega)$, такий, що

$$l(v) = B_D[U, v],$$

причому U задовольняє нерівність

$$\|U\|_D \leq C_1 \|u\|_{L^2(\Omega)} \quad (10.44)$$

Таким чином, кожному $u \in L^2(\Omega)$ ставиться єдиний елемент $U \in H_0^1(\Omega)$, що визначається тотожністю (10.43). Це означає, що на $L^2(\Omega)$ заданий оператор

$$A_1 : L^2(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega),$$

що визначається інтегральною тотожністю

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} = B_D[U, v] = B_D[A_1 u, v]$$

для всіх $v \in H_0^1(\Omega)$, тобто $U = A_1 u$.

З лінійності скалярних добутків у $L^2(\Omega)$ і $H_0^1(\Omega)$ випливає, лінійність оператора A_1 , а з нерівності (10.44) його обмеженість.

Покажемо, що оператор A_1 має обернений. Для цього досить показати, що він має тривіальне ядро, тобто, що з рівності $A_1 u = 0$ у $H_0^1(\Omega)$ випливає $u = 0$ у $L^2(\Omega)$. Дійсно, з тотожності (10.43) отримаємо, що для будь-якого $v \in H_0^1(\Omega)$ має місце тотожність

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} = B_D[A_1 u, v] = B_D[0, v] = 0$$

яка і доводить, що $u = 0$ у $L^2(\Omega)$. Таким чином існує оператор

$$A_1^{-1} : H_0^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega).$$

Розглянемо тепер оператор A_1 як оператор з простору $H_0^1(\Omega)$ у себе

$$A_1 : H_0^1(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$$

Для будь-якого $u \in H_0^1(\Omega)$ вираз

$$B_D[A_1 u, v] = (u, u)_{L^2(\Omega)} = \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq 0$$

означає, що A_1 є додатновизначеним. Для будь-яких $u, v \in H_0^1(\Omega)$ з тотожності (10.43) і тотожності

$$B_D[A_1 v, u] = B_D[A_1 u, v] = (v, u)_{L^2(\Omega)} = (u, v)_{L^2(\Omega)}$$

випливає, що A_1 є самоспряженим.

Покажемо, що оператор A_1 є компактним. Виберемо довільну обмежену у $H_0^1(\Omega)$ послідовність $\{v_m : m \geq 1\}$. Оскільки $H_0^1(\Omega) \Subset L^2(\Omega)$, то з послідовності v_m можна вибрати фундаментальну у $L^2(\Omega)$ підпослідовність. Без обмеження загальності можемо вважати, що сама $\{v_m : m \geq 1\}$ є фундаментальною у $L^2(\Omega)$. Розглянемо послідовність $\{A_1 v_m : m \geq 1\}$. З обмеженості оператора A_1 випливає що для усіх $m, p \geq 1$ має місце нерівність

$$\|A_1 v_m - A_1 v_p\|_D = \|A_1(v_m - v_p)\|_D \leq C_1 \|v_m - v_p\|_{L^2(\Omega)},$$

яка означає, що послідовність $\{A_1 v_m: m \geq 1\}$ є фундаментальною у $H_0^1(\Omega)$. Лему доведено. ■

Вищенаведені леми стануть у нагоді для дослідження властивостей узагальнених власних функцій і власних значень оператора $\mathcal{L}$.

Властивості власних значень і узагальнених власних функцій першої крайової задачі

Нехай $\{\lambda_k: k \geq 1\}$ послідовність власних значень першої крайової задач, причому кожне з власних значень у цій послідовності трапляється стільки разів, яка його кратність. Нехай $\{u_k: k \geq 1\}$ послідовність власних функцій першої крайової задачі, що відповідає вищенаведеній послідовності власних значень.

Властивості власних значень та узагальнених власних функцій першої крайової задачі описує така

Теорема 10.8. *Нехай $c \geq 0$ м.с. в Ω . Тоді множина $\{\lambda_k: k \geq 1\}$ власних значень першої крайової задачі для оператора $\mathcal{L}$ є зліченною та усі власні значення є дійсними та додатними*

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \dots$$

Множина $\{\lambda_k: k \geq 1\}$ не містить скінченних граничних точок – єдиною граничною точкою множини власних значень є точка $+\infty$:

$$\lambda_k \rightarrow +\infty, k \rightarrow +\infty$$

Множина

$$\left\{ \frac{u_k}{\sqrt{\lambda_k}}: k \geq 1 \right\} \quad (10.45)$$

нормованих у $H_0^1(\Omega)$ (з нормою породженою скалярним добутком $B_D[\cdot; \cdot]$) власних функцій першої крайової задачі, утворює ортонормований базис простору $H_0^1(\Omega)$.

Доведення. Нехай $u \in H_0^1(\Omega)$ узагальнена власна функція першої крайової задачі для оператора $\mathcal{L}$, що відповідає власному значенню λ . Тоді згідно з означенням вона для всіх $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ задовольняє інтегральну тотожність (10.41). Використовуючи скалярний добуток визначений білінійною формою B_D можемо записати тотожність (10.41) у такому вигляді

$$B_D[u, \varphi] = \lambda(u, \varphi)_{L^2(\Omega)},$$

звідки, згідно з лемою 10.1,

$$B_D[u, \varphi] = \lambda B_D[A_1 u, \varphi].$$

Тут A_1 – оператор з властивостями зазначеними у лемі 10.1. Таким чином, з останньої тотожності отримаємо, що якщо u узагальнена власна функція, що відповідає власному числу λ , то вона задовольняє рівність

$$\lambda A_1 u = u$$

у просторі $H_0^1(\Omega)$.

Отже, λ є власним значенням першої крайової задачі для оператора $\mathcal{L}$, що відповідає узагальненій власній функції u тоді і лише тоді, коли λ є характеристичним числом (що відповідає власній функції u) самоспряженого компактного оператора A_1 з $H_0^1(\Omega)$ у $H_0^1(\Omega)$.

Скориставшись відомими фактами з теорії компактних самоспряжених операторів (наприклад [29, ст.95]), отримаємо властивості власних значень і власних функцій першої крайової задачі, що безпосередньо випливають з властивостей оператора A_1 . Таким чином

- Всі власні значення першої крайової задачі дійсні.
- Множина власних значень не більше ніж зліченна та не існує скінченних граничних точок для множини власних значень.
- Кожному власному числу відповідає скінченна кількість взаємно ортогональних у $H_0^1(\Omega)$ власних функцій (нормованих умовою (10.40)). Різним власним значенням відповідають ортогональні у $H_0^1(\Omega)$ власні функції.

Розглянемо послідовність власних значень $\{\lambda_k: k \geq 1\}$ та відповідну їй послідовність власних функцій $\{u_k: k \geq 1\}$. З вищенаведеного випливає, що для будь-якого $k \geq 1$ має місце рівність

$$\lambda_k A_1 u_k = u_k. \quad (10.46)$$

Помножимо у $H_0^1(\Omega)$ рівність (10.46) на u_k за допомогою скалярного добутку $B_D[\cdot, \cdot]$. Тоді отримаємо

$$\|u_k\|_D^2 = \lambda_k B_D[A_1 u_k, u_k] = \lambda_k (u_k, u_k)_{L_2(\Omega)} = \lambda_k \|u_k\|_{L_2(\Omega)}^2 \quad (10.47)$$

Отже, якщо $\{u_k: k \geq 1\}$ послідовність нормованих у $L_2(\Omega)$ власних функцій першої крайової задачі, то

$$\|u_k\|_D^2 = \lambda_k,$$

звідки можемо зробити висновок, що система (10.45) є ортонормованою у просторі $H_0^1(\Omega)$ (відносно скалярного добутку $B_D[\cdot, \cdot]$) системою власних функцій оператора A_1 . Таким чином, за наслідком з теореми Гільберта-Шмідта¹, система власних функцій (10.45) утворює ортонормований базис простору $H_0^1(\Omega)$. Оскільки простір $H_0^1(\Omega)$ є нескінченно-вимірним, то множина (10.45) є зліченною.

Перепишемо рівність (10.47) у інтегральному вигляді

$$\int_{\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \partial_{x_j} u_k \partial_{x_i} u_k + c u_k^2 \right) dx = \lambda_k \int_{\Omega} u_k^2 dx,$$

Звідки

$$\int_{\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \partial_{x_j} u_k \partial_{x_i} u_k + (c - \lambda_k) u_k^2 \right) dx = 0,$$

З того, що оператор $\mathcal{L}$ належить класу $E(\chi_1, \chi_2)$ можемо зробити висновок, що перший доданок під знаком інтеграла завжди додатний (для нетривіальних функцій u_k). Таким чином, з останньої рівності випливає, що $c(x) - \lambda_k < 0$, для всіх $x \in \Omega$. Або

$$\lambda_k > c(x) \geq 0, \text{ для всіх } x \in \Omega,$$

що означає, що всі власні числа першої крайової задачі є строго додатними

$$\lambda_k > 0, k \geq 1.$$

Отже, з останніх викладок, можемо зробити висновок, що єдиним граничним значенням множини власних значень є $+\infty$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = +\infty.$$

Теорему доведено. ■

¹ **Наслідок.** (теореми Гільберта-Шмідта) [29, ст.101]. Якщо самоспряжений, компактний оператор A з гільбертового простору H у H має обернений, то нормована (у H) система власних функцій $\{u_k: k \geq 1\}$ цього оператора утворює ортонормований базис простору H .

Властивості власних значень і узагальнених власних функцій третьої та другої крайових задач

Перейдемо до вивчення властивостей власних чисел та власних функцій третьої та другої крайових задач. Розглянемо спочатку випадок, коли хоча б одна з функцій s чи k , що входять до оператора $\mathcal{L}$ чи крайової умови відповідно, не дорівнює тотожно нулю (з точністю до майже скрізь) на своїй області визначення.

Теорема 10.9. *Нехай $s \geq 0$ м.с. в Ω , $k \geq 0$ м.с. в $\partial\Omega$, причому хоча б одна з функцій s чи k не дорівнює тотожно нулю (з точністю до майже скрізь) на своїй області визначення. Тоді множина $\{\lambda_k: k \geq 1\}$ власних значень третьої (другої) крайової задачі для оператора $\mathcal{L}$ є зліченною та не містить скінченних граничних точок. Усі власні значення є дійсними та додатними.*

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \dots$$

Єдиною граничною точкою множини власних значень є точка $+\infty$.

$$\lambda_k \rightarrow +\infty, k \rightarrow +\infty$$

Множина (10.45), нормованих у $H^1(\Omega)$ (з нормою породженою скалярним добутком $B_R[\cdot, \cdot]$) власних функцій третьої (другої) крайової задачі, утворює ортонормований базис простору $H^1(\Omega)$.

Доведення. Нехай $u \in H^1(\Omega)$ узагальнена власна функція третьої (другої при $k \equiv 0$ м.с. на $\partial\Omega$) крайової задачі для оператора $\mathcal{L}$, що відповідає власному значенню λ . Тоді згідно з означенням вона для всіх $v \in H^1(\Omega)$ задовольняє інтегральну тотожність (10.42). Тоді, використовуючи скалярний добуток $B_R[\cdot, \cdot]$ можемо записати тотожність (10.42) у такому вигляді

$$B_R[u, v] = \lambda(u, v)_{L^2(\Omega)},$$

звідки, згідно з лемою 10.2,

$$B_R[u, v] = \lambda B_R[A_3 u, v],$$

де A_3 – самоспряжений компактний оператор з $H^1(\Omega)$ у $H^1(\Omega)$. Таким чином, з останньої тотожності отримаємо, що якщо u узагальнена власна функція третьої крайової задачі для оператора $\mathcal{L}$, що відповідає власному числу λ , то вона задовольняє у просторі $H^1(\Omega)$ рівність

$$\lambda A_3 u = u$$

Подальші викладки майже повністю повторюють аналогічні викладки при отриманні при доведенні теореми 10.8. ■

Розглянемо випадок, коли c та k одночасно тотожно дорівнюють нулю м.с. на своїх множинах визначення.

Тоді, згідно з означенням, узагальнена власна функція другої крайової задачі (оскільки $k \equiv 0$ на $\partial\Omega$) є функція $u \in H^1(\Omega)$, що для будь-якої $v \in H^1(\Omega)$ задовольняє інтегральну тотожність

$$\int_{\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \partial_{x_j} u \partial_{x_i} v \right) dx = \lambda \int_{\Omega} uv dx, \quad (10.48)$$

Властивості власних значень та узагальнених власних функцій такої задачі описує така

Теорема 10.10. Множина $\{\lambda_k: k \geq 1\}$ власних значень другої крайової задачі для оператора $\mathcal{L}$ при $c \equiv 0$ м.с у Ω є зліченною та не містить скінченних граничних точок. Усі власні значення є дійсними та невід'ємними, причому серед власних значень існує просте власне значення $\lambda_1 = 0$, якому відповідає власна функція $u_1 = \frac{1}{\sqrt{|\Omega|}} = \text{const.}$ Єдиною граничною точкою множини власних значень є точка $+\infty$.
Послідовність

$$\left\{ \frac{u_k}{\sqrt{\lambda_k + 1}} : k \geq 1 \right\} \quad (10.49)$$

утворює ортонормований базис простору $H^1(\Omega)$ відносно норми породженої скалярним добутком

$$B_N[u, v] = \int_{\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \partial_{x_j} u \partial_{x_i} v + uv \right) dx. \quad (10.50)$$

Доведення. Додавши до обох частин інтегральної тотожності (10.48), доданок $\int_{\Omega} uv dx$ отримаємо, що узагальнена власна функція u , що відповідає власному значенню λ задовольняє інтегральну тотожність

$$\int_{\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \partial_{x_j} u \partial_{x_i} v + uv \right) dx = (\lambda + 1) \int_{\Omega} uv dx. \quad (10.51)$$

Уведемо у $H^1(\Omega)$ скалярний добуток еквівалентний стандартному визначений співвідношенням (10.50).

Тоді рівність (10.51) набуде вигляду

$$B_N[u, v] = (\lambda + 1)(u, v)_{L^2(\Omega)},$$

звідки, згідно з лемою 10.2, отримаємо тотожність

$$B_N[u, v] = (\lambda + 1)B_N[A_2 u, v],$$

де A_2 – оператор з властивостями зазначеними у лемі 10.2. Таким чином, з останньої тотожності отримаємо, що якщо u узагальнена власна функція другої крайової задачі для оператора $\mathcal{L}$, що відповідає власному значенню λ , то вона задовольняє у просторі $H^1(\Omega)$ рівність

$$(\lambda + 1)A_2 u = u$$

Отже, λ є власним числом другої крайової задачі для оператора $\mathcal{L}$ при $c \equiv 0$, що відповідає узагальненій власній функції u , тоді і лише тоді коли $\lambda + 1$ є характеристичним числом оператора A_2 , що відповідає власному елементу u . Таким чином, аналогічно до першої крайової задачі, можемо записати такі властивості власних значень і узагальнених власних функцій другої крайової задачі:

- Всі власні значення першої крайової задачі дійсні.
- Множина власних значень не більше ніж зліченна та не існує скінченних граничних точок для множини власних значень.
- Кожному власному числу відповідає скінченна кількість взаємно ортогональних у $H^1(\Omega)$ власних функцій (нормованих умовою (10.40)). Різним власним значенням відповідають ортогональні у $H^1(\Omega)$ власні функції.

Розглянемо послідовність власних значень $\{\lambda_k: k \geq 1\}$ та відповідну їй послідовність власних функцій $\{u_k: k \geq 1\}$. Тоді, згідно з вищенаведеними викладками, для будь-якого $k \geq 1$ має місце рівність

$$(\lambda_k + 1) A_2 u_k = u_k. \quad (10.52)$$

Помножимо у $H^1(\Omega)$ рівність (10.52) на u_k за допомогою скалярного добутку (10.50). Тоді отримаємо

$$\|u_k\|_N^2 = (\lambda_k + 1)B_N[A_2 u_k, u_k] = (\lambda_k + 1)(u_k, u_k)_{L_2(\Omega)} = (\lambda_k + 1)\|u_k\|_{L_2(\Omega)}^2 \quad (10.53)$$

Отже, якщо $\{u_k: k \geq 1\}$ послідовність нормованих у $L_2(\Omega)$ власних функцій другої крайової задачі, то

$$\|u_k\|_N^2 = \lambda_k + 1,$$

звідки можемо зробити висновок, що система (10.49) є ортонормованою у просторі $H^1(\Omega)$ (відносно скалярного добутку $B_N[\cdot, \cdot]$). Таким чином, за наслідком з теореми Гільберта-Шмідта, система власних функцій (10.49) утворює ортонормований базис простору $H^1(\Omega)$ і оскільки простір $H^1(\Omega)$ є нескінченно-вимірним, то множина (10.49) є зліченною.

Перепишемо рівність (10.53) у інтегральному вигляді

$$\int_{\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \partial_{x_j} u_k \partial_{x_i} u_k - \lambda_k u_k^2 \right) dx = 0$$

звідки, випливає, враховуючи умови накладені на коефіцієнти оператора $\mathcal{L}$, що

$$\lambda_k \geq 0, k \geq 1,$$

причому, елементарною перевіркою можемо переконатися, що власному значенню $\lambda_1 = 0$ відповідає єдина узагальнена власна функція $u_1 = \text{const}$. Враховуючи умову нормування (10.40) отримаємо

$$1 = \|u_1\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} u_1^2 dx = u_1^2 \int_{\Omega} dx = u_1^2 |\Omega|,$$

$$\text{звідки } u_1 = \frac{1}{\sqrt{|\Omega|}}. \quad \blacksquare$$

Система власних функцій крайової задачі як базис простору $L_2(\Omega)$

Нехай

$$\{\lambda_k: k \geq 1\} \quad (10.54)$$

послідовність власних значень першої, другої або третьої крайової задачі для оператора $\mathcal{L}$ у якій кожне власне значення повторюється стільки разів, яка його кратність. Нехай

$$\{u_k: k \geq 1\} \quad (10.55)$$

послідовність, що складається з узагальнених власних функцій першої, другої або третьої крайової задачі для оператора $\mathcal{L}$, що відповідає послідовності (10.54). Як і раніше, вважаємо, що послідовність (10.55) нормована у $L_2(\Omega)$ умовою (10.40)

Тоді має місце така

Теорема 10.11. (Про повноту системи власних функцій у $L_2(\Omega)$).
Послідовність (10.55) узагальнених власних функцій першої, другої або третьої крайової задачі для оператора $\mathcal{L}$ утворює ортонормований базис простору $L_2(\Omega)$. Будь-яка функція $f \in L_2(\Omega)$ розкладається у ряд Фур'є

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k u_k, \quad (10.56)$$

де $f_k = (f, u_k)_{L_2(\Omega)}$, $k \geq 1$, причому для коефіцієнтів f_k ряду (10.56) має місце рівність Парсеваля

$$\|f\|_{L_2(\Omega)}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} f_k^2, \quad k \geq 1 \quad (10.57)$$

Доведення. Проводячи викладки, що повторюють доведення попередніх теорем, отримаємо для будь-якого $k \geq 1$ узагальнена власна функція u_k задовольняє рівність

$$\lambda_k A_1 u_k = u_k \quad (10.58)$$

для першої крайової задачі

$$(\lambda_k + 1) A_2 u_k = u_k \quad (10.59)$$

для другої крайової задачі при $c \equiv 0$, та

$$\lambda_k A_3 u_k = u_k \quad (10.60)$$

для другої та третьої крайової задачі у випадку якщо хоча б одна з функцій c чи k не дорівнює тотожно нулю на своїй області визначення.

Домножимо рівність (10.58) на функцію u_s у $H_0^1(\Omega)$ за допомогою скалярного добутку $B_D[\cdot, \cdot]$, а рівності (10.59) та (10.60) на функцію u_s у $H^1(\Omega)$ за допомогою скалярного добутку $B_N[\cdot, \cdot]$ або $B_R[\cdot, \cdot]$ відповідно.

Таким чином з рівностей (10.58) і (10.60), використовуючи лему 10.1 або лему 10.2 відповідно, отримаємо, що для всіх $k \neq s$

$$\lambda_k(u_k, u_s)_{L^2(\Omega)} = 0,$$

а з рівності (10.59) та леми 10.2 для всіх $k \neq s$

$$(\lambda_k + 1)(u_k, u_s)_{L^2(\Omega)} = 0.$$

Отримані співвідношення означають, що система $\{u_k: k \geq 1\}$ є ортонормованою у $L_2(\Omega)$.

Оскільки лінійна оболонка системи (10.45), а отже і системи (10.55), є скрізь щільною у $H^1(\Omega)$ (або $H_0^1(\Omega)$), то тим самим лінійна оболонка система (10.55) є скрізь щільною $L^2(\Omega)$. Відповідно, [29 ст.71] система (10.55) є ортонормованим базисом простору $L_2(\Omega)$.

Таким чином довільний елемент $f \in L_2(\Omega)$ розкладається у збіжний у $L_2(\Omega)$ ряд Фур'є (10.56), а для його коефіцієнтів має місце рівність Парсеваля (10.57). ■

10.6. Існування розв'язків неоднорідної задачі Неймана

Можна дослідити розв'язність задачі Неймана відмінним від розглянутого вище методу, використовуючи теорію Фредгольма. Розглянемо у Ω диференціальне рівняння з частинними похідними вигляду

$$-\mathcal{L}(u(x)) = f(x), \quad \forall x \in \Omega \quad (10.61)$$

разом з крайовою умовою

$$\sigma_\nu(u(x))|_{\partial\Omega} = \psi(x), \quad \forall x \in \partial\Omega \quad (10.62)$$

де $f(x) \in L^2(\Omega)$ і $\psi(x) \in L^2(\partial\Omega)$. Згідно з означенням, узагальненим розв'язком другої крайової задачі (10.61), (10.62) є функція $u \in H^1(\Omega)$, що для усіх $\varphi \in H^1(\Omega)$ задовольняє інтегральну тотожність

$$\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \partial_{x_j} u \partial_{x_i} \varphi \, dx = \int_{\Omega} f \varphi \, dx + \int_{\partial\Omega} \psi \varphi \, dS_x. \quad (10.63)$$

У просторі $H^1(\Omega)$ введемо скалярний добуток $B_N[\cdot, \cdot]$ еквівалентний стандартному співвідношенням (10.50),

Тоді інтегральна тотожність (10.63) набуде вигляду

$$B_N[u, \varphi] - (u, \varphi)_{L^2(\Omega)} = l(\varphi), \quad (10.64)$$

де

$$l(\varphi) = \int_{\Omega} f \varphi dx + \int_{\partial\Omega} \psi \varphi dS_x$$

очевидно лінійний функціонал у просторі $H^1(\Omega)$. Покажемо, що цей функціонал є неперервним. Для цього покажемо, що він є обмеженим. Використавши нерівність Коші-Буняковського та основну нерівністю для сліду функції, отримаємо

$$\begin{aligned} |l(v)| &= \left| \int_{\Omega} f \varphi dx + \int_{\partial\Omega} \psi \varphi dS_x \right| \leq \int_{\Omega} |f| |\varphi| dx + \int_{\partial\Omega} |\psi| |\varphi| dS_x \leq \\ &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|\varphi\|_{L^2(\Omega)} + \|\psi\|_{L^2(\partial\Omega)} \|\varphi\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq \\ &\leq C_1 (\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|\psi\|_{L^2(\partial\Omega)}) \|\varphi\|_N, \end{aligned}$$

де $\|\cdot\|_N$ – норма, породжена скалярним добутком $B_N[\cdot, \cdot]$, C_1 – незалежна від f , ψ і φ додатна стала. Таким чином, l – лінійний неперервний функціонал над елементами простору $H^1(\Omega)$ і за теоремою Рісса отримуємо, що існує єдина функція $F \in H^1(\Omega)$, що

$$l(\varphi) = B_N[F, \varphi],$$

причому для F має місце оцінка

$$\|F\|_N = \|l\| \leq C_1 (\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|\psi\|_{L^2(\partial\Omega)}).$$

Згідно з лемою 10.2 існує оператор

$$A_2 : L^2(\Omega) \rightarrow H^1(\Omega)$$

з властивостями зазначеними у лемі 10.2, що тотожність (10.64) набуде вигляду

$$B_N[u, \varphi] - B_N[A_2 u, \varphi] = B_N[F, \varphi],$$

звідки отримаємо, що узагальнений розв'язок другої крайової задачі (10.61), (10.62) у $H^1(\Omega)$ задовольняє рівняння

$$u - A_2 u = F. \quad (10.65)$$

Оскільки число $\lambda_1 = 0$ є власним числом другої крайової задачі для оператора $\mathcal{L}$, що відповідає лівій частині рівняння (10.61), то $\mu = 1$ є

характеристичним числом оператора A_2 . При цьому, як відомо з вище доведеного, їм відповідає власна функція $u_1 = C_0 = \text{const}$. Це означає, що $u_1 = C_2$ є розв'язком однорідного рівняння

$$u - A_2 u = 0. \quad (10.66)$$

Оскільки оператор A_2 є самоспряженим, то згідно з третьою теоремою Фредгольма², рівняння (10.65) має розв'язок тоді і лише тоді, коли F ортогональна у $H^1(\Omega)$ сталим C_0

$$B_N[F, C_0] = l(C_0) = C_0 \left(\int_{\Omega} f dx + \int_{\partial\Omega} \psi dS \right) = 0.$$

При цьому серед розв'язків рівняння (10.65) існує єдиний розв'язок u_0 , що ортогональний у $H^1(\Omega)$ усім розв'язкам рівняння (10.66) тобто сталим C_0

$$B_N[u_0, C_0] = C_0 \int_{\Omega} u_0 dx = 0.$$

Для цього розв'язку u_0 має місце оцінка

$$\begin{aligned} \|u_0\|_{H^1(\Omega)} &\leq C_3 \|u_0\|_N \leq C_3 C_4 \|F\|_N = C_3 C_4 \|l\| = \\ &\leq C_1 C_3 C_4 (\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|\psi\|_{L^2(\partial\Omega)}) = C_5 (\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|\psi\|_{L^2(\partial\Omega)}). \end{aligned}$$

Усі інші розв'язки рівняння (10.65) зображуються у вигляді суми цього розв'язку u_0 та загального розв'язку однорідного рівняння (10.66)

² Нехай у гільбертовому просторі H визначено компактний оператор

$$A: H \rightarrow H.$$

Теорема (Третя теорема Фредгольма). [29, ст.91] Рівняння

$$u - Au = f \quad (1)$$

має розв'язок тоді і лише тоді, коли f ортогональна у H до усіх нетривіальних розв'язків рівняння

$$u - A^* u = 0. \quad (2)$$

При цьому, існує єдиний розв'язок $u_0 \in H$ рівняння (1), що ортогональний до всіх розв'язків однорідного рівняння

$$u - Au = 0 \quad (3)$$

і для якого має місце оцінка

$$\|u_0\| \leq C \|f\|,$$

де стала C незалежна від f додатна стала. Всі інші нетривіальні розв'язки рівняння (1) зображуються у вигляді

$$u = u_0 + u_{3,0},$$

де $u_{3,0}$ – загальний розв'язок однорідного рівняння (3).

$$u = u_0 + C_0.$$

Таким чином доведено таку теорему

Теорема 10.12. *Задача (10.61), (10.62) має узагальнений розв'язок для $f \in L^2(\Omega)$ і $\psi \in L^2(\partial\Omega)$ тоді і лише тоді коли*

$$\int_{\Omega} f dx + \int_{\partial\Omega} \psi dS = 0.$$

При цьому, серед розв'язків задачі Неймана (10.61), (10.62) існує єдиний розв'язок $u_0 \in H^1(\Omega)$ такий, що

$$\int_{\Omega} u_0 dx = 0.$$

Для нього має місце оцінка

$$\|u_0\|_{H^1(\Omega)} \leq C(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|\psi\|_{L^2(\partial\Omega)}),$$

де C – незалежна від f і ψ додатна стала. Всі інші розв'язки задачі (10.61), (10.62) зображуються у вигляді

$$u = u_0 + C_0,$$

де C_0 – довільна стала.

11. ГІПЕРБОЛІЧНІ РІВНЯННЯ

Нехай D – обмежена область з гладкою межею $\partial D \in C^1$. У $n + 1$ -вимірному просторі $\mathbb{R}^n$

$$\mathbb{R}^{n+1} = \{x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}\}$$

розглянемо обмежений циліндр

$$\Omega_T = \{x \in D, t \in (0, T)\},$$

де число $T > 0$ називається його висотою. Нехай

$$\Gamma_T = \{x \in \partial D, t \in (0, T)\},$$

бічна поверхня циліндра Ω_T , а

$$D_\tau = \{x \in D, t = \tau\},$$

перетин цього циліндра площиною $t = \tau$. Зокрема, верхня основа циліндра це

$$D_T = \{x \in D, t = T\},$$

а

$$D_0 = \{x \in D, t = 0\}$$

його нижня основа.

Як правило змінні $x = (x_1, \dots, x_n)$, називають просторовими змінними, а t – асоціюють з часом і називають часовою змінною.

Подібно до еліптичних крайових задач, розглянемо диференціальний оператор $\mathcal{L}$ (за змінними $(x_1, \dots, x_n)$) який для кожного $t \in [0, T]$ функції $u(x, t)$ ставить у відповідність елемент визначений співвідношенням

$$\mathcal{L}(u(x, t)) := \sum_{i,j=1}^n \partial_{x_i} \left(a_{ij}(x) \partial_{x_j} u(x, t) \right) + c(x)u(x, t),$$

де задані функції $\{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$ та c – його коефіцієнти. У цьому параграфі обмежимося лише випадком, коли коефіцієнти оператора $\mathcal{L}$ не залежать від частової змінної.

Будемо вважати, що оператор $\mathcal{L}$ є симетричним еліптичним оператором дивергентного виду (див. параграф 10 цього розділу).

Означення. Диференціальний оператор $\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \mathcal{L}$ будемо називати гіперболічним диференціальним оператором (дивергентного виду).

11.1. Мішана задача для гіперболічного рівняння

У циліндрі Ω_T розглянемо гіперболічне рівняння

$$u_{tt} - \mathcal{L}u = f(x, t), \quad (11.1)$$

де $f : \Omega_T \mapsto \mathbb{R}$, $u : \overline{\Omega}_T \mapsto \mathbb{R}$ – невідома функція, $u = u(x, t)$.

Поруч із рівнянням (11.1) розглянемо додаткові умови, що накладаються на невідому функцію u на основі циліндра D_0 (початкові умови)

$$u|_{t=0} = \varphi(x), x \in D \quad (11.2)$$

$$u_t|_{t=0} = \psi(x), x \in D \quad (11.3)$$

та одну з умов, що накладаються на бічній поверхні циліндра Γ_T (крайова умова)

$$u|_{\Gamma_T} = \gamma(x, t), (x, t) \in \Gamma_T \quad (11.4)$$

або

$$\left(\sigma_v(u(x, t)) + k(x)u(x, t) \right) \Big|_{\Gamma_T} = \gamma(x, t), \quad (x, t) \in \Gamma_T \quad (11.5)$$

де φ, ψ, γ, k – задані функції,

$$\sigma_v(u(x, t)) := \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \partial_{x_j} u(x, t) v_i(x)$$

– конормальна похідна за просторовими змінними, $v = (v_1, \dots, v_n)$ – зовнішня (по відношенню до циліндра Ω_T) нормаль до Γ_T .

Нагадаємо кілька означень відомих читачу з класичного курсу рівнянь математичної фізики.

Функція $u \in C^2(\Omega_T) \cap C^1(\Omega_T \cup \Gamma_T \cup \bar{D}_0)$, що задовольняє у циліндрі Ω_T рівняння (11.1), на основі D_0 початковим умовам (11.2), (11.3), а на бічній поверхні циліндра Γ_T крайову умову (11.4) називається *класичним розв'язком* першої *мішаної задачі для гіперболічного рівняння*. Задачу знаходження функції u для рівняння (11.1), що задовольняє початковим умовам (11.2), (11.3) та крайовій умові (11.4) будемо називати першою мішаною задачею для рівняння (11.1).

Функція $u \in C^2(\Omega_T) \cap C^1(\Omega_T \cup \Gamma_T \cup \bar{D}_0)$, що задовольняє у циліндрі Ω_T рівняння (11.1), на основі D_0 початковим умовам (11.2), (11.3), а на бічній поверхні циліндра Γ_T крайову умову (11.5) називається *класичним розв'язком* третьої (другої при $k \equiv 0$ м.с. на Γ_T .) *мішаної задачі для гіперболічного рівняння*. Задачу знаходження функції u для рівняння (11.1), що задовольняє початковим умовам (11.2), (11.3) та крайовій умові (11.5) – третьою (другою при $k \equiv 0$ м.с. на Γ_T .) мішаною задачею для рівняння (11.1).

Зауваження. Звернемо увагу, що часто у літературі замість терміну "мішана задача" використовують термін "початково-крайова задача".

Легко показати, що заміною невідомої функції кожна з наведених вище мішаних задач зводиться до відповідної задачі з однорідною

крайовою умовою. Тому у подальшому замість крайових умов (11.4) і (11.5) будемо розглядати однорідні крайові умови

$$u|_{\Gamma_T} = 0, \quad (x, t) \in \Gamma_T. \quad (11.6)$$

та

$$\sigma_v(u(x, t)) + k(x)u(x, t)|_{\Gamma_T} = 0, \quad (x, t) \in \Gamma_T \quad (11.7)$$

При дослідженні мішаних задач обмежимося у цьому курсі лише випадком, коли коефіцієнт c в операторі $\mathcal{L}$ є невід'ємним м.с. у D , а функція k у крайовій умові (11.7) залежить лише від просторової змінної x і є невід'ємною м.с. на ∂D .

Нехай функція $u(x, t)$ є розв'язком 1-ї мішаної задачі (11.1), (11.2), (11.3), (11.6) чи 3-ї мішаної задачі (11.1), (11.2), (11.3), (11.7) причому права частина $f(x, t)$ рівняння (11.1) належить $L^2(\Omega_T)$.

Проведемо деякі викладки, які стануть у нагоді при означенні узагальненого розв'язку мішаної задачі.

Виберемо довільне $\delta \in (0, T)$. Помножимо рівняння (11.1) на довільну функцію $v \in C^1(\bar{\Omega}_{T-\delta})$ таку, що

$$v|_{D_{T-\delta}} = 0 \quad (11.8)$$

і проінтегруємо отримане співвідношення по циліндру $\Omega_{T-\delta}$

$$\int_{\Omega_{T-\delta}} (u_{tt}v - \mathcal{L}u \cdot v) dxdt = \int_{\Omega_{T-\delta}} fvdxdxdt. \quad (11.9)$$

Використовуючи правило інтегрування частинами і формулу Гауса-Остроградського, ліву частину інтегральної рівності (11.9) можемо переписати у такому вигляді

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_{T-\delta}} ((u_t v)_t - u_t v_t) dxdt - \\ & - \int_{\Omega_{T-\delta}} \left(\sum_{i,j=1}^n \partial_{x_i} (a_{ij} \partial_{x_j} u \cdot v) + \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \partial_{x_j} u \partial_{x_i} v + cuv \right) dxdt = \\ & = \int_{\Omega_{T-\delta}} \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \partial_{x_j} u \partial_{x_i} v + cuv - u_t v_t \right) dxdt + \int_{\Omega_{T-\delta}} (u_t v)_t dxdt - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_{\Omega_{T-\delta}} \sum_{i,j=1}^n \partial_{x_i} (a_{ij} \partial_{x_j} u \cdot v) dx dt = \\
& = \int_{\Omega_{T-\delta}} \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \partial_{x_j} u \partial_{x_i} v + cuv - u_t v_t \right) dx dt + \\
& + \int_D \int_0^{T-\delta} (u_t v)_t dx dt - \int_0^{T-\delta} \int_D \sum_{i,j=1}^n \partial_{x_i} (a_{ij} \partial_{x_j} u \cdot v) = \\
& = \int_{\Omega_{T-\delta}} \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \partial_{x_j} u \partial_{x_i} v + cuv - u_t v_t \right) dx dt + \\
& + \int_{D_{T-\delta}} u_t v dx - \int_{D_0} u_t v dx - \int_0^{T-\delta} \int_{\partial D} \sigma_v(u) v dS_x dt = \\
& = \int_{\Omega_{T-\delta}} \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \partial_{x_j} u \partial_{x_i} v + cuv - u_t v_t \right) dx dt - \\
& - \int_{D_0} \psi v dx - \int_{\Gamma_{T-\delta}} \sigma_v(u) v dS_x dt.
\end{aligned}$$

Тут було використано те, що згідно з умовою (11.3) $u_t = \psi$ на D_0 .
Таким чином інтегральна тотожність (11.9) набуде вигляду

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_{T-\delta}} \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \partial_{x_j} u \partial_{x_i} v + cuv - u_t v_t \right) dx dt - \\
& - \int_{\Gamma_{T-\delta}} \sigma_v(u) v dS_x dt = \int_{\Omega_{T-\delta}} f v dx dt - \int_{D_0} \psi v dx.
\end{aligned} \tag{11.10}$$

Якщо $u(x, t)$ є розв'язком третьої мішаної задачі то, використовуючи крайову умову (11.7), з останньої інтегральної тотожності отримуємо, що $u(x, t)$ задовольняє інтегральну тотожність

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_{T-\delta}} \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \partial_{x_j} u \partial_{x_i} v + cuv - u_t v_t \right) dx dt + \\
& + \int_{\Gamma_{T-\delta}} kuv dS_x dt = \int_{\Omega_{T-\delta}} f v dx dt + \int_{D_0} \psi v dx.
\end{aligned}$$

для всіх функцій $v \in C^1(\bar{\Omega}_{T-\delta})$ що задовольняють умову (11.8), а отже і для всіх функцій $v \in H^1(\Omega_{T-\delta})$, що задовольняють умову (11.8). Якщо $u(x, t)$ є розв'язком першої крайової задачі, то на функцію $v \in C^1(\bar{\Omega}_{T-\delta})$ крім умови (11.8) додатково накладемо умову

$$v|_{\Gamma_{T-\delta}} = 0. \quad (11.11)$$

Тоді з тотожності (11.10) отримаємо, що класичний розв'язок $u(x, t)$ задовольняє інтегральну тотожність

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{T-\delta}} \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \partial_{x_j} u \partial_{x_i} v + cuv - u_t v_t \right) dx dt = \\ = \int_{\Omega_{T-\delta}} f v dx dt + \int_{D_0} \psi v dx. \end{aligned} \quad (11.12)$$

для всіх функцій $v \in C^1(\bar{\Omega}_{T-\delta})$ що задовольняють умовам (11.8) і (11.11), а отже відповідно і всіх функцій $v \in H^1(\Omega_{T-\delta})$ що задовольняють умовам (11.8) і (11.11).

Використовуючи отримані тотожності введемо поняття узагальненого розв'язку мішаної задачі. Нехай $f \in L^2(\Omega_T)$, $\varphi, \psi \in L^2(D)$.

Означення. Функція $u \in H^1(\Omega_T)$ називається узагальненим (слабким) розв'язком першої мішаної задачі (11.1), (11.2), (11.3), (11.6) у циліндрі Ω_T якщо u задовольняє початкову умову (11.2), та для довільної функції $v \in H^1(\Omega_T)$, що задовольняє умовам

$$v|_{D_T} = 0, \quad (11.13)$$

$$v|_{\Gamma_T} = 0. \quad (11.14)$$

інтегральну тотожність

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_T} \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \partial_{x_j} u \partial_{x_i} v + cuv - u_t v_t \right) dx dt = \\ = \int_{\Omega_T} f v dx dt + \int_{D_0} \psi v dx. \end{aligned}$$

Означення. Функція $u \in H^1(\Omega_T)$ називається узагальненим (слабким) розв'язком третьої мішаної задачі (11.1), (11.2), (11.3), (11.7) у циліндрі Ω_T якщо u задовольняє початкову умову (11.2), і всіх довільної функції $v \in H^1(\Omega_T)$, що задовольняють умову (11.13), інтегральну тотожність

$$\int_{\Omega_T} \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \partial_{x_j} u \partial_{x_i} v + cuv - u_t v_t \right) dx dt + \int_{\Gamma_T} k T(u) T(v) dS_x dt = \int_{\Omega_T} f v dx dt + \int_{D_0} \psi v dx.$$

З вищенаведених означень очевидним чином отримуємо такі наслідки

Теорема 11.1. Якщо узагальнений розв'язок задачі (11.1), (11.2), (11.3), (11.6) або (11.1), (11.2), (11.3), (11.7) належить $C^2(\Omega_T) \cap C^1(\Omega_T \cup \Gamma_T \cup \bar{D}_0)$ то він є для відповідної задачі її класичним розв'язком.

Для доведення цього факту досить провести викладки наведені вище у зворотному порядку.

Теорема 11.2. Нехай u є узагальненим розв'язком задачі (11.1), (11.2), (11.3), (11.6) або (11.1), (11.2), (11.3), (11.7) у циліндрі Ω_T , тоді u є узагальненим розв'язком відповідної задачі у області Ω_{T_1} , для довільного $T_1 < T$.

11.2. Єдиність узагальненого розв'язку

Теорема 11.3. Кожна з задач (11.1), (11.2), (11.3), (11.6) або (11.1), (11.2), (11.3), (11.7) не може мати більше одного узагальненого розв'язку.

Доведення. Для доведення теореми досить показати, що функція $u(x, t) \equiv 0$ в циліндрі Ω_T є узагальненим розв'язком відповідної мішаної задачі (11.1), (11.2), (11.3), (11.6) або (11.1), (11.2), (11.3), (11.7) при $f \equiv 0$, $\varphi \equiv 0$ та $\psi \equiv 0$. Тоді, у випадку першої мішаної задачі $u(x, t) \in H^1(\Omega_T)$ задовольняє інтегральну тотожність

$$\int_{\Omega_T} \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \partial_{x_j} u \partial_{x_i} v + cuv - u_t v_t \right) dx dt = 0, \quad (11.15)$$

для усіх $v \in H^1(\Omega_T)$, що задовольняють умови (11.13), (11.14), а в випадку третьої мішаної задачі задовольняє інтегральну тотожність

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_T} \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \partial_{x_j} u \partial_{x_i} v + cuv - u_t v_t \right) dx dt + \\ + \int_{\Gamma_T} k T(u) T(v) dS_x dt = 0, \end{aligned} \quad (11.16)$$

для усіх $v \in H^1(\Omega_T)$, що задовольняють умову (11.13).

Уведемо у $H_0^1(D)$ скалярний добуток еквівалентний стандартному за формулою

$$B[u, v] = \int_D \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \partial_{x_j} u \partial_{x_i} v + cuv \right) dx,$$

а у просторі $H^1(D)$ скалярний добуток

$$\begin{aligned} B[u, v] = \\ = \int_D \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \partial_{x_j} u \partial_{x_i} v + cuv \right) dx + \int_{\partial D} k T(u) T(v) dS_x. \end{aligned}$$

Тоді кожне з рівнянь (11.15) і (11.16) набуде такого вигляду

$$\int_0^T B[u, v] dt - \int_0^T (u_t, v_t)_{L^2(D)} dt = 0. \quad (11.17)$$

Виберемо довільне $\tau \in (0, T)$ і для нього розглянемо функцію визначену співвідношенням

$$v(x, t) = \begin{cases} \int_t^\tau u(x, \theta) d\theta, & t \in (0, \tau), \\ 0, & t \in (\tau, T). \end{cases} \quad (11.18)$$

Покажемо, що v визначена співвідношенням (11.18) належить простору $H^1(\Omega_T)$. Для цього знайдемо узагальнені частинні похідні за змінними t і $x_i, i = 1, \dots, n$. Нехай $g \in C_0^1(0, T)$ тоді

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_T} v g_t dx dt &= \int_D \int_0^T v g_t dt dx = \int_D \int_0^\tau \left(\int_t^\tau u(x, \theta) d\theta \right) g_t dt dx = \\ &= - \int_D \int_0^\tau \left(\int_t^\tau u(x, \theta) d\theta \right)_t g dt dx = - \int_D \int_0^\tau (-u(x, t)) g dt dx = \\ &= \int_{\Omega_T} v_t g dt dx, \end{aligned}$$

де

$$v_t = \begin{cases} -u(x, t) & t \in (0, \tau), \\ 0, & t \in (\tau, T). \end{cases}$$

Також, очевидно, що для всіх $i = 1, \dots, n$ узагальнена частинна похідна за змінною x_i визначається співвідношенням

$$v_{x_i} = \begin{cases} \int_t^\tau u_{x_i}(x, \theta) d\theta, & t \in (0, \tau), \\ 0, & t \in (\tau, T). \end{cases}$$

Отже, оскільки $u \in H^1(\Omega_T)$, то очевидно, що $v \in H^1(\Omega_T)$. Більше того, з (11.18) випливає, що v задовольняє співвідношення (11.13), а також, у випадку якщо u є розв'язком першої мішаної задачі, то і співвідношення (11.14). Отже функцію v можна підставити у рівняння (11.17). Тоді отримаємо

$$- \int_0^\tau B[v_t, v] dt + \int_0^\tau (v_{tt}, v_t)_{L^2(D)} dt = 0. \quad (11.19)$$

Оскільки

$$B[v_t, v] = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} B[v, v] = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v\|_B^2,$$

і, аналогічно

$$(v_{tt}, v_t)_{L^2(D)} = \left(\frac{d}{dt} v_t, v_t \right)_{L^2(D)} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (v_t, v_t)_{L^2(D)} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v_t\|_{L^2(D)}^2,$$

де $\|\cdot\|_B$ – норма породжена скалярним добутком $B[\cdot, \cdot]$. Тоді співвідношення (11.19) набуде вигляду

$$-\frac{1}{2} \int_0^\tau \frac{d}{dt} \|v\|_B^2 dt + \frac{1}{2} \int_0^\tau \frac{d}{dt} \|v_t\|_{L^2(D)}^2 dt = 0.$$

З останньої рівності матимемо

$$-\|v\|_{B_{t=0}}^{2=t} + \|v_t\|_{L^2(D)}^2 \Big|_{t=0}^{t=\tau} = 0,$$

або, враховуючи, що $v_t = -u$, $t \in (0, \tau)$

$$-\|v(x, \tau)\|_{H^1(D)}^2 + \|v(x, 0)\|_{H^1(D)}^2 + \|u(x, \tau)\|_{L^2(D)}^2 - \|u(x, 0)\|_{L^2(D)}^2 = 0.$$

Враховуючи умови на функції u і v , перший і останній доданки лівої частини дорівнюють нулю. Таким чином

$$\|v(x, 0)\|_{H^1(D)}^2 + \|u(x, \tau)\|_{L^2(D)}^2 = 0,$$

звідки випливає, що $u(x, \tau) = 0$ майже скрізь на D . Враховуючи довільність $\tau \in (0, T)$, отримаємо, що $u(x, \tau) = 0$ майже скрізь на Ω_T , що і завершує доведення теореми. ■

Враховуючи щойно доведену теорему можемо сформулювати

Наслідок. Мішана задача (11.1), (11.2), (11.3), (11.6) або (11.1), (11.2), (11.3), (11.7) не може мати більше одного класичного розв'язку.

11.3. Існування узагальненого розв'язку. Метод Фур'є

Питання про існування узагальненого розв'язку мішаної задачі будемо вивчати з допомогою методу Фур'є, котрий полягає у тому, що розв'язок мішаної задачі шукається у вигляді ряду Фур'є за системою власних функцій відповідної еліптичної задачі.

Нехай в області D функція v є узагальненою власною функцією що відповідає власному числу λ першої або третьої крайової задачі для оператора $\mathcal{L}$. Тобто, у випадку першої крайової задачі функція $v \in H_0^1(D)$ задовольняє інтегральну тотожність

$$\int_D \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \partial_{x_j} v \partial_{x_i} \eta + c v \eta \right) dx = \lambda \int_D v \eta dx \quad (11.20)$$

для усіх функцій $\eta \in H_0^1(D)$, а у випадку третьої крайової задачі інтегральну тотожність

$$\int_D \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \partial_{x_j} v \partial_{x_i} \eta + c v \eta \right) dx + \int_{\partial D} k T(u) T(\eta) dS_x =$$

$$= \lambda \int_D v \eta dx \quad (11.21)$$

для усіх функцій $\eta \in H^1(D)$.

Нехай $\{\lambda_k: k \geq 1\}$ послідовність власних значень першої або третьої крайової задачі для оператора $\mathcal{L}$ записана у порядку зростання, причому кожне з власних чисел у цій послідовності трапляється стільки разів, яка його кратність. Розглянемо ортонормовану у $L^2(D)$ систему $\{v_k: k \geq 1\}$ власних функцій першої крайової або третьої крайової задачі, що відповідає вищенаведеній послідовності власних чисел. Як раніше було доведено, послідовність $\{v_k: k \geq 1\}$ утворює ортонормований базис простору $L^2(D)$. Припустимо, що початкові функції φ і ψ належать простору $L^2(D)$, а отже їх можна розкласти за системою $\{v_k: k \geq 1\}$ у ряди Фур'є

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k v_k, \quad \psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k v_k, \quad (11.22)$$

де $\varphi_k = (\varphi, v_k)_{L^2(D)}$, $\psi_k = (\psi, v_k)_{L^2(D)}$.

Нехай $f \in L^2(\Omega_T)$. Тоді, використовуючи теорему Фубіні можемо зробити висновок, що для майже усіх $t \in (0, T)$ функція $f(\cdot, t) \in L^2(D)$, а отже для майже усіх $t \in (0, T)$ її можна розкласти у ряд Фур'є за системою $\{v_k: k \geq 1\}$

$$f(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) v_k, \quad (11.23)$$

де $f_k(t) = (f(\cdot, t), v_k)_{L^2(D)}$.

Згідно з рівністю Парсеваля

$$\|\varphi\|_{L^2(D)}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k^2, \quad \|\psi\|_{L^2(D)}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k^2,$$

і для майже усіх $t \in (0, T)$

$$\int_D f^2(x, t) dx = \sum_{k=1}^{\infty} f_k^2(t),$$

звідки

$$\int_{\Omega_T} f^2(x, t) dx dt = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^T f_k^2(t) dt,$$

Для початку у якості початкових функцій φ і ψ візьмемо k -ті члени рядків Фур'є (11.22)

$$u|_{t=0} = \varphi_k v_k, u_t|_{t=0} = \psi_k v_k, \quad (11.24)$$

а у якості правої частини рівняння – функцію $f_k(t)v_k$, $k \geq 1$.

Розглянемо функцію

$$u_k(x, t) = T_k(t)v_k, k \geq 1,$$

де

$$\begin{aligned} T_k(t) = & \varphi_k \cos \sqrt{\lambda_k} t + \frac{\psi_k}{\sqrt{\lambda_k}} \sin \sqrt{\lambda_k} t + \\ & + \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \int_0^t f_k(\tau) \sin \sqrt{\lambda_k}(t - \tau) d\tau, \end{aligned} \quad (11.25)$$

для усіх $k \geq 1$, якщо $\lambda_1 \neq 0$ (тобто 0 не є власним числом відповідної задачі). І, якщо $\lambda_1 = 0$ є власним числом відповідної задачі, то

$$\begin{aligned} T_1(t) = & \lim_{\lambda_1 \rightarrow 0} \left(\varphi_1 \cos \sqrt{\lambda_1} t + \frac{\psi_1}{\sqrt{\lambda_1}} \sin \sqrt{\lambda_1} t + \right. \\ & \left. + \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \int_0^t f_1(\tau) \sin \sqrt{\lambda_1}(t - \tau) d\tau \right) = \\ = & \varphi_1 + \psi_1 t + \int_0^t f_1(\tau)(t - \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (11.26)$$

Очевидно, що для усіх $k \geq 1$ функція $T_k \in H^2(0, T)$ і при $t = 0$ задовольняє початковим умовам

$$T_k(0) = \varphi_k, T'_k(0) = \psi_k.$$

Безпосередньою перевіркою переконаємося у тому, що функція T_k задовольняє диференціальне рівняння

$$T_k'' + \lambda_k T_k = f_k(t).$$

Покажемо, що функція $u_k(x, t)$ є розв'язком першої чи третьої мішаної задачі для рівняння

$$u_{tt} - \mathcal{L}u = f_k(t)v_k,$$

з початковими умовам (11.24). Дійсно, очевидно, що функція $u_k \in H^1(\Omega_T)$ і на D_0 задовольняє початкові умови (11.24). Крім того у випадку першої мішаної задачі u_k задовольняє крайовій умові (11.6) (оскільки v_k є узагальненою власною функцією першої крайової задачі). Покажемо, що у випадку першої мішаної задачі функція u_k задовольняє інтегральну тотожність

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_T} \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \partial_{x_j} u_k \partial_{x_i} \eta + c u_k v - u_{k_t} \eta_t \right) dx dt = \\ = \int_{\Omega_T} f_k(t) v_k \eta dx dt + \psi_k \int_{D_0} v_k \eta dx \end{aligned} \quad (11.27)$$

для усіх функцій $\eta \in H^1(\Omega_T)$, для яких мають місце співвідношення (11.13) і (11.14), а у випадку третьої мішаної задачі інтегральну тотожність

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_T} \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \partial_{x_j} u_k \partial_{x_i} \eta + c u_k \eta - u_{k_t} \eta_t \right) dx dt + \\ + \int_{\Gamma_T} k T(u_k) T(\eta) dS_x dt = \\ = \int_{\Omega_T} f_k(t) v_k \eta dx dt + \psi_k \int_{D_0} v_k \eta dx. \end{aligned} \quad (11.28)$$

для усіх функцій $v \in H^1(\Omega_T)$, для яких має місце співвідношення (11.13).

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_T} u_{k_t} \eta_t dx dt &= \int_D v_k \left(\int_0^T T_k'(t) \eta_t dt \right) dx = \\ &= \int_D v_k(x) \left(-\psi_k \eta(x, 0) - \int_0^T T_k''(t) \eta dt \right) dx = \\ &= -\psi_k \int_D v_k \eta(x, 0) dx - \int_{\Omega_T} v_k T_k''(t) \eta dx dt = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\psi_k \int_{D_0} v_k \eta dx - \int_{\Omega_T} v_k (f_k(t) - \lambda_k T_k(t)) \eta dx dt = \\
&= -\psi_k \int_{D_0} v_k \eta dx - \int_{\Omega_T} v_k (f_k(t) - \lambda_k T_k(t)) \eta dx dt = \\
&= -\psi_k \int_{D_0} v_k \eta dx + \lambda_k \int_{\Omega_T} u_k \eta dx dt - \int_{\Omega_T} f_k(t) v_k \eta dx dt.
\end{aligned}$$

Підставимо отримане співвідношення у ліву частину рівності (11.27). Враховуючи (11.20), отримаємо

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_T} \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \partial_{x_j} u_k \partial_{x_i} \eta + c u_k \eta - u_{k_t} \eta_t \right) dx dt = \\
&= \int_{\Omega_T} \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \partial_{x_j} u_k \partial_{x_i} \eta + c u_k \eta \right) dx dt - \\
&\quad - \lambda_k \int_{\Omega_T} u_k \eta dx dt \psi_k + \int_{D_0} v_k \eta dx = \\
&+ \int_{\Omega_T} f_k(t) v_k \eta dx dt = \int_{D_0} v_k \eta dx + \int_{\Omega_T} f_k(t) v_k \eta dx dt
\end{aligned}$$

Таким чином переконаємося у справедливості (11.27). Аналогічно для третьої задачі отримаємо тотожність (11.28) використовуючи інтегральну тотожність (11.21).

Якщо у якості початкових функцій у (11.2), (11.3) взяти часткові суми рядів Фур'є (11.22)

$$\sum_{k=1}^N \varphi_k v_k, \quad \sum_{k=1}^N \psi_k v_k,$$

для деякого фіксованого $N \geq 1$, а у якості правої частини рівняння (11.1) часткову суму ряду у (11.23)

$$\sum_{k=1}^N f_k(t) v_k,$$

то проводячи вкладки аналогічні вищенаведеним легко переконатися, що узагальненим розв'язком такої 1-ї мішаної задачі (11.1), (11.2), (11.3), (11.6) чи 3-ї мішаної задачі (11.1), (11.2), (11.3), (11.7) буде функція

$$u_N(x, t) = \sum_{k=1}^N u_k(x, t) = \sum_{k=1}^N T_k(t) v_k(x). \quad (11.29)$$

Зокрема, у випадку першої мішаної задачі функція u_N задовольняє інтегральну тотожність

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_T} \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \partial_{x_j} u_N \partial_{x_i} \eta + c u_N \eta - u_{N_t} \eta_t \right) dx dt = \\ = \int_{\Omega_T} \sum_{k=1}^N f_k(t) v_k \eta dx dt + \int_{D_0} \sum_{k=1}^N \psi_k v_k \eta dx \end{aligned} \quad (11.30)$$

для усіх функцій $\eta \in H^1(\Omega_T)$, для яких мають місце співвідношення (11.13) і (11.14), а у випадку третьої мішаної задачі інтегральну тотожність

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_T} \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \partial_{x_j} u_N \partial_{x_i} \eta + a u_N \eta - u_{N_t} \eta_t \right) dx dt - \\ - \int_{\Gamma_T} k T(u_N) T(\eta) dS_x dS dt = \\ = \int_{\Omega_T} \sum_{k=1}^N f_k(t) v_k \eta dx dt + \int_{D_0} \sum_{k=1}^N \psi_k v_k \eta dx. \end{aligned} \quad (11.31)$$

для усіх функцій $\eta \in H^1(\Omega_T)$, для яких має місце співвідношення (11.13).

Отже, цілком логічно очікувати, що якщо розв'язок вихідної мішаної задачі (11.1), (11.2), (11.3), (11.6) чи (11.1), (11.2), (11.3), (11.7) існує то він має форму ряду Фур'є

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) v_k(x). \quad (11.32)$$

Умови при яких розв'язок відповідної мішаної задачі існує забезпечує

Теорема 11.4. Нехай $f \in L^2(\Omega_T)$, $\psi \in L^2(D)$, а функція $\varphi \in H_0^1(D)$ у випадку 1-ї мішаної задачі (11.1), (11.2), (11.3), (11.6) та $\varphi \in H^1(D)$ у випадку 3-ї мішаної задачі (11.1), (11.2), (11.3), (11.7). Тоді

узагальнений розв'язок відповідної мішаної задачі існує і зображується збіжним у $H^1(\Omega_T)$ рядом (11.32). При цьому для розв'язку має місце оцінка

$$\|u\|_{H^1(\Omega_T)} \leq C(\|f\|_{L^2(\Omega_T)} + \|\varphi\|_{H^1(\Omega_T)} + \|\psi\|_{L^2(D)}), \quad (11.33)$$

де додатна стала C не залежить від φ , ψ та f .

Доведення. З формул (11.25) і (11.26) випливає, що для довільного $k \geq 2$ для всіх $t \in [0, T]$ має місце оцінка

$$|T_k(t)| \leq |\varphi_k| + |\psi_k| \lambda_k^{-1/2} + \lambda_k^{-1/2} \int_0^T |f_k(\tau)| d\tau,$$

а для $k = 1$ оцінка

$$|T_1(t)| \leq |\varphi_1| + C_1 |\psi_1| + C_1 \int_0^T |f_1(\tau)| d\tau,$$

де $C_1 = T$, якщо $\lambda_1 = 0$ або $C_1 = \lambda_1^{-1/2}$, якщо $\lambda_1 \neq 0$. Тому існує додатна стала C_2 , що залежить лише від T , що для всіх $t \in [0, T]$ мають місце оцінки

$$\begin{aligned} T_k^2(t) &\leq 3\varphi_k^2 + 3\psi_k^2 \lambda_k^{-1} + 3\lambda_k^{-1} \left(\int_0^T |f_k(\tau)| d\tau \right)^2 \leq \\ &\leq C_2 \left(\varphi_k^2 + \psi_k^2 \lambda_k^{-1} + \lambda_k^{-1} \int_0^T f_k^2(\tau) d\tau \right), k \geq 2 \end{aligned} \quad (11.34)$$

$$T_1^2(t) \leq C_2 \left(\varphi_1^2 + \psi_1^2 + \int_0^T f_1^2(\tau) d\tau \right) \quad (11.35)$$

Крім того, з формул (11.25) і (11.26) випливає, що для усіх $k \geq 1$ має місце оцінка

$$\left| \frac{dT_k(t)}{dt} \right| \leq |\varphi_k| \lambda_k^{1/2} + |\psi_k| + \int_0^T |f_k(\tau)| d\tau,$$

для $t \in [0, T]$, з якої випливає оцінка

$$\left| \frac{dT_k(t)}{dt} \right|^2 \leq C_2 \left(\varphi_k^2 \lambda_k + \psi_k^2 + \int_0^T f_k^2(\tau) d\tau \right). \quad (11.36)$$

Як було показано раніше, якщо $\{v_k: k \geq 1\}$ ортонормована у $L^2(D)$ послідовність узагальнених власних функцій оператора $\mathcal{L}$ першої крайової задачі то послідовність

$$\left\{ \frac{v_k}{\sqrt{\lambda_k}} : k \geq 1 \right\} \quad (11.37)$$

є ортонормованим базисом простору $H_0^1(D)$ зі скалярним добутком еквівалентним стандартному, що визначається співвідношенням

$$(u, v)_{H^1(D)} = \int_{D_t} \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \partial_{x_j} u \partial_{x_i} v + c u v \right) dx.$$

У випадку, якщо $\{v_k: k \geq 1\}$ є послідовністю власних функцій оператора $\mathcal{L}$ третьої крайової задачі, причому хоча б одна з функцій c чи k не дорівнює тотожно нулю (з точністю до майже скрізь) на своїй області визначення, то послідовність (11.37) є ортонормованим базисом простору $H^1(D)$ зі скалярним добутком еквівалентним стандартному, що визначається співвідношенням

$$(u, v)_{H^1(D)} = \int_{D_t} \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \partial_{x_j} u \partial_{x_i} v + c u v \right) dx + \int_{\partial D_t} k T(u) T(v) dS_x$$

І, нарешті, якщо $\{v_k: k \geq 1\}$ є послідовністю власних функцій оператора $\mathcal{L}$ для другої крайової задачі у випадку, якщо функцій c та k одночасно тотожно дорівнюють нулю (з точністю до майже скрізь) на своїй області визначення (при цьому $\lambda_1 = 0$ є власним числом оператора $\mathcal{L}$), то послідовність

$$\left\{ \frac{v_k}{\sqrt{\lambda_k + 1}} : k \geq 1 \right\} \quad (11.38)$$

є ортонормованим базисом простору $H^1(D)$ зі скалярним добутком еквівалентним стандартному, що визначається співвідношенням

$$(u, v)_{H^1(D)} = \int_{D_t} \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \partial_{x_j} u \partial_{x_i} v + u v \right) dx$$

Оскільки, згідно з умовами теореми функція $\varphi \in H_0^1(D)$ у випадку 1-ї мішаної задачі і $\varphi \in H^1(D)$ у випадку 3-ї мішаної задачі, то її можна розкласти у збіжний у $H^1(D)$ ряд Фур'є за системою власних функцій (11.37) (або (11.38)) відповідної крайової задачі. Подальше доведення

теореми, для спрощення викладок, проведемо для випадку, якщо серед власних чисел відсутнє нульове власне число. Доведення теореми для випадку, якщо серед власних чисел є нульове повністю повторює нижче наведені викладки, при використанні у $H^1(D)$ базису, що складається з функцій (11.38).

Таким чином

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\varphi}_k \frac{v_k}{\sqrt{\lambda_k}}, \quad (11.39)$$

де

$$\tilde{\varphi}_k = \left(\varphi, \frac{v_k}{\sqrt{\lambda_k}} \right)_{H^1(D)},$$

при цьому коефіцієнти $\tilde{\varphi}_k$ задовольняють рівність Пасеваля

$$\|\varphi\|_{H^1(D)}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\varphi}_k^2. \quad (11.40)$$

Тут, $\|\cdot\|_{H^1(D)}$ – норма у просторі $H_0^1(D)$ чи $H^1(D)$, що породжена скалярним добутком $(\cdot, \cdot)_{H^1(D)}$.

Порівнюючи (11.22) і (11.39) отримуємо, що коефіцієнти φ_k розкладу за базисом $\{v_k: k \geq 1\}$ і $\tilde{\varphi}_k$ розкладу за базисом $\left\{ \frac{v_k}{\sqrt{\lambda_k}}: k \geq 1 \right\}$ пов'язані співвідношенням

$$\tilde{\varphi}_k = \sqrt{\lambda_k} \varphi_k,$$

звідки, враховуючи рівність Парсеваля (11.40), впливає збіжність ряду

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \varphi_k^2 = \|\varphi\|_{H^1(D)}^2 < \infty.$$

Розглянемо часткову суму $u_N(x, t)$ визначену співвідношенням (11.29) Оскільки, згідно з доведеним раніше, $T_k \in H^2(0, T)$, і кожна з функцій $v_k \in H^1(D)$, то для кожного $t \in [0, T]$, функція $u_N \in H^1(D_t)$. У просторі $H^1(D_t)$, у випадку 1-ї мішаної задачі, введемо скалярний добуток еквівалентний стандартному за формулою

$$(u, v)_{H^1(D_t)} = \int_{D_t} \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \partial_{x_j} u \partial_{x_i} v + cuv \right) dx$$

і, у випадку 3-ї мішаної задачі, скалярний добуток еквівалентний стандартному за формулою

$$(u, v)_{H^1(D_t)} = \int_{D_t} \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \partial_{x_j} u \partial_{x_i} v + c u v \right) dx + \int_{\partial D_t} k T(u) T(v) dS_x$$

Тоді, згідно з рівністю Парсеваля (11.40), враховуючи оцінки (11.34) і (11.35), для усіх $t \in [0, T]$ і $N, M, 1 \leq M < N$ має місце оцінка

$$\begin{aligned} \|u_N(x, t) - u_M(x, t)\|_{H^1(D_t)}^2 &= \left\| \sum_{k=M+1}^N T_k(t) v_k(x) \right\|_{H^1(D_t)}^2 = \\ &= \left\| \sum_{k=M+1}^N T_k(t) \sqrt{\lambda_k} \frac{v_k}{\sqrt{\lambda_k}} \right\|_{H^1(D_t)}^2 = \sum_{k=M+1}^N T_k^2(t) \lambda_k \leq \\ &\leq C_2 \sum_{k=M+1}^N \left(\lambda_k \varphi_k^2 + \psi_k^2 + \int_0^T f_k^2(\tau) d\tau \right). \end{aligned} \quad (11.41)$$

і, враховуючи оцінку (11.36),

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial u_N(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial u_M(x, t)}{\partial t} \right\|_{L^2(D_t)}^2 &= \left\| \sum_{k=M+1}^N \frac{dT_k(t)}{dt} v_k \right\|_{L^2(D_t)}^2 = \\ &= \sum_{k=M+1}^N \left| \frac{dT_k(t)}{dt} \right|^2 \leq C_2 \sum_{k=M+1}^N \left(\varphi_k^2 \lambda_k + \psi_k^2 + \int_0^T f_k^2(\tau) d\tau \right). \end{aligned} \quad (11.42)$$

Аналогічно для усіх $t \in [0, T]$

$$\|u_N(x, t)\|_{H^1(D_t)}^2 \leq C_2 \sum_{k=1}^N \left(\lambda_k \varphi_k^2 + \psi_k^2 + \int_0^T f_k^2(\tau) d\tau \right), \quad (11.43)$$

$$\left\| \frac{\partial u_N(x, t)}{\partial t} \right\|_{L^2(D_t)}^2 \leq C_2 \sum_{k=1}^N \left(\varphi_k^2 \lambda_k + \psi_k^2 + \int_0^T f_k^2(\tau) d\tau \right) \quad (11.44)$$

Додавши нерівності (11.41) і (11.42) і інтегруючи отримане співвідношення від 0 до T , отримаємо

$$\begin{aligned} \|u_N(x, t) - u_M(x, t)\|_{H^1(\Omega_t)}^2 &\leq \\ &\leq C_3 \sum_{k=M+1}^N \left(\lambda_k \varphi_k^2 + \psi_k^2 + \int_0^T f_k^2(\tau) d\tau \right), \end{aligned} \quad (11.45)$$

де $C_3 = 2TC_2$. Зауважимо, що тут $\|\cdot\|_{H^1(\Omega_t)}$ – норма еквівалентна стандартній нормі у просторі $H^1(\Omega_t)$.

Згідно з раніше доведеним, кожен з рядів.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \varphi_k^2, \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k^2, \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^T f_k^2(\tau) d\tau$$

є збіжним, то з нерівності (11.45) випливає, що послідовність $\{u_N(x, t): N \geq 1\}$ є фундаментальною у просторі $H^1(\Omega_T)$, а отже і збіжною у $H^1(\Omega_T)$ до деякого елементу $u \in H^1(\Omega_T)$, причому очевидно, що

$$u = \lim_{N \rightarrow \infty} u_N(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) v_k(x).$$

Легко бачити, що отримана функція задовольняє початковій умові (11.2) і у випадку першої мішаної задачі крайовій умові (11.6). Перейшовши у інтегральних тотожностях (11.30) і (11.31) при $N \rightarrow \infty$ переконаємося у тому, що функція u є розв'язком відповідної мішаної задачі.

Додаючи нерівності (11.43) і (11.44), інтегруючи отримане співвідношення від 0 до T та враховуючи, еквівалентність норми $\|\cdot\|_{H^1(\Omega_t)}$ стандартній нормі у просторі $H^1(\Omega_t)$, отримаємо співвідношення (11.33), що і завершує доведення теореми. ■

12. ПАРАБОЛІЧНІ РІВНЯННЯ

Нехай D – обмежена область з гладкою межею $\partial D \in C^1$. Аналогічно до рівнянь гіперболічного типу, у $n+1$ -вимірному просторі $\mathbb{R}^n$ розглянемо обмежений циліндр $\Omega_T = \{x \in D, t \in (0, T)\}$ висотою T . Нехай $\Gamma_T = \{x \in \partial D, t \in (0, T)\}$ бічна поверхня циліндра Ω_T , а $D_\tau = \{x \in D, t = \tau\}$ перетин цього циліндра площиною $t = \tau$.

У подальшому через $C^{k,m}(\Omega_T)$ будемо позначати множину функцій, що мають у всіх точках циліндра Ω_T неперервні частинні похідні за

просторовими змінними $x_1, \dots, x_n$ до k -го порядку включно і неперервну частинну похідну за часовою змінною t до m -го порядку включно.

Подібно до гіперболічних рівнянь розглянутих у попередньому параграфі, для постановки задач використаємо симетричний еліптичний оператор $\mathcal{L}$ дивергентного виду (див. параграф 10).

Означення. Диференціальний оператор $\frac{\partial}{\partial t} - \mathcal{L}$ будемо називати параболічним диференціальним оператором (дивергентного виду).

12.1. Мішана задача для параболічного рівняння

У циліндрі Ω_T розглянемо параболічне рівняння

$$u_t - \mathcal{L}u = f(x, t), \quad (12.1)$$

де $f : \Omega_T \mapsto \mathbb{R}$, $u : \overline{\Omega_T} \mapsto \mathbb{R}$ – невідома функція, $u = u(x, t)$.

Розглянемо поруч із рівнянням (12.1), додаткову умову, що накладаються на невідому функцію u на основі циліндра D_0 (початкова умова)

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in D \quad (12.2)$$

та одну з умов, що накладаються на бічній поверхні циліндра Γ_T (крайова умова)

$$u|_{\Gamma_T} = \gamma(x, t), \quad (x, t) \in \Gamma_T \quad (12.3)$$

або

$$\left(\sigma_\nu(u(x, t)) + k(x)u(x, t) \right) \Big|_{\Gamma_T} = \gamma(x, t), \quad (x, t) \in \Gamma_T \quad (12.4)$$

де φ, γ, k – задані функції,

$$\sigma_\nu(u(x, t)) := \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \partial_{x_j} u(x, t) \nu_i(x)$$

– конормальна похідна за просторовими змінними, $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ – зовнішня (по відношенню до циліндра Ω_T) нормаль до Γ_T .

Нагадаємо кілька означень відомих читачу з класичного курсу рівнянь математичної фізики.

Функція $u \in C^{2,1}(\Omega_T) \cap C(\Omega_T \cup \Gamma_T \cup \bar{D}_0)$, що задовольняє у циліндрі Ω_T рівняння (12.1), на основі D_0 початкової умови (12.2), а на Γ_T крайовій умові (12.3) називається *класичним розв'язком* першої мішаної задачі для параболічного рівняння. Задачу знаходження функції u для рівняння (12.1), що задовольняє початковій умові (12.2) та крайовій умові (12.3) будемо називати першою мішаною задачею для параболічного рівняння.

Функція $u \in C^{2,1}(\Omega_T) \cap C(\Omega_T \cup \Gamma_T \cup \bar{D}_0) \cap C^{1,0}(\Omega_T \cup \Gamma_T)$, що задовольняє у циліндрі Ω_T рівняння (12.1), на основі D_0 початкової умови (12.2), а на Γ_T крайовій умові (12.4) називається *класичним розв'язком* третьої мішаної задачі для параболічного рівняння, а поставлену задачу знаходження такої функції u для рівняння (12.1), що задовольняє початковій умові (12.2) та крайовій умові (12.4) – третьою (другою при $k \equiv 0$) мішаною задачею для рівняння (12.1).

Як і для гіперболічних рівнянь, легко показати, що заміною невідомої функції кожна з мішаних задач зводиться до відповідної задачі з однорідною крайовою умовою. Тому у подальшому замість крайових умов (12.3) і (12.4) будемо розглядати однорідні крайові умови

$$u|_{\Gamma_T} = 0, (x, t) \in \Gamma_T \quad (12.5)$$

та

$$\left(\sigma_\nu(u(x, t)) + k(x)u(x, t) \right) \Big|_{\Gamma_T} = 0, \quad (x, t) \in \Gamma_T \quad (12.6)$$

При дослідженні мішаних задач обмежимося у цьому курсі лише випадком, коли коефіцієнти оператора $\mathcal{L}$ є невід'ємним у D , а функція k у крайовій умові (12.6) залежить лише від просторової змінної x і є невід'ємною на ∂D .

Означення. Простором $H^{1,0}(\Omega_T)$ будемо називати множину функцій з простору $L^2(\Omega_T)$, що мають у Ω_T узагальнені перші частинні похідні за просторовими змінними $x_1, \dots, x_n$ що належать до $L^2(\Omega_T)$.

Легко показати, що простір $H^{1,0}(\Omega_T)$ є гільбертовим простором зі скалярним добутком

$$(u, v)_{H^{1,0}(\Omega_T)} = \int_{\Omega_T} (\nabla u \nabla v + uv) dx dt$$

Покажемо, що для простору $H^{1,0}(\Omega_T)$ можна ввести поняття сліду на бічній поверхні циліндра Γ_T . Множина функцій $C^\infty(\bar{\Omega}_T)$ є скрізь-щільною у $H^{1,0}(\Omega_T)$ [29, ст.160]. Тоді для будь-якої функції $f \in H^{1,0}(\Omega_T)$ можна вибрати послідовність функцій $f_k \in C^\infty(\bar{\Omega}_T)$, таку, що

$$f_k \rightarrow f, k \rightarrow \infty$$

у просторі $H^{1,0}(\Omega_T)$. Оскільки для кожного $t \in [0, T]$ і для кожного $k \geq 1$ $f_k(\cdot, t) \in C^\infty(\bar{D})$, то за основною нерівністю для сліду функції для всіх $t \in [0, T]$ і для всіх $k, m \geq 1$ має місце оцінка

$$\|f_k - f_m\|_{L^2(\partial D)}^2 \leq C_1^2 \|f_k - f_m\|_{H^1(D)}^2, \quad (12.7)$$

де стала C_1 залежить лише від області D . Інтегруючи (12.7) в межах від 0 до T отримуємо нерівність

$$\|f_k - f_m\|_{L^2(\Gamma_T)} \leq C_1 \|f_k - f_m\|_{H^{1,0}(\Omega_T)}, \quad k, m \geq 1.$$

Оскільки послідовність функцій f_k є фундаментальною у $H^{1,0}(\Omega_T)$, то з останньої нерівності можемо зробити висновок, що послідовність

$$\{f_k|_{\Gamma_T}: k \geq 1\}$$

значень функцій f_k на бічній поверхні циліндра Γ_T є фундаментальною у просторі $L^2(\Gamma_T)$. Відповідно існує функція $f_{\Gamma_T} \in L^2(\Gamma_T)$ до якої у $L^2(\Gamma_T)$ збігається послідовність $f_k|_{\Gamma_T}$. Функцію f_{Γ_T} будемо називати *слідом* функції $f \in H^{1,0}(\Omega_T)$ на циліндричній поверхні Γ_T і позначати $f|_{\Gamma_T}$.

Повністю повторюючи викладки проведені для сліду функції з H^1 можемо переконатися, що слід функції $f \in H^{1,0}(\Omega_T)$ на Γ_T єдиний (як елемент простору $L^2(\Gamma_T)$), не залежить від апроксимуючої послідовності і для нього має місце оцінка

$$\|f\|_{L^2(\Gamma_T)} \leq C \|f\|_{H^{1,0}(\Omega_T)}.$$

яку у подальшому будемо називати основною нерівністю для сліду функції з простору $H^{1,0}(\Omega_T)$.

Зауваження. Введення поняття сліду функції на поверхні Γ_T дозволяє поширити на функції з простору $H^{1,0}(\Omega_T)$ формули Гауса-Остроградського та інтегрування частинами.

Введемо поняття узагальненого розв'язку. Для цього попередньо проведемо деякі викладки, які стануть у нагоді при означенні узагальненого розв'язку.

Припустимо, що класичний розв'язок рівняння (12.1) належить простору $H^{1,0}(\Omega_T)$, а функції $f \in L^2(\Omega_T)$, $\varphi \in L^2(D)$. Помножимо рівняння (12.1) на довільну функцію $v \in H^1(\Omega_T)$ для якої має місце співвідношення

$$v|_{t=T} = 0 \quad (12.8)$$

і проінтегруємо по всьому циліндру Ω_T

$$\int_{\Omega_T} (u_t v - \mathcal{L}u \cdot v) dx dt = \int_{\Omega_T} f v dx dt \quad (12.9)$$

Тоді, використовуючи формулу інтегрування частинами і, враховуючи початкову умову (12.2), отримаємо

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_T} u_t v dx dt &= \int_D dx \int_0^T u_t v dt = \int_D dx \left(uv|_{t=0}^T - \int_0^T uv_t dt \right) = \\ &= \int_D dx \left(u(x, T)v(x, T) - u(x, 0)v(x, 0) - \int_0^T uv_t dt \right) = \\ &= - \int_{D_0} \varphi v dx - \int_{\Omega_T} uv_t dx dt. \end{aligned}$$

Також з формули Гауса-Остроградського отримаємо

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega_T} \sum_{i,j=1}^n \partial_{x_i} (a_{ij} \partial_{x_j} u) v dx dt = \\ &= \int_{\Omega_T} \sum_{i,j=1}^n \partial_{x_i} (a_{ij} \partial_{x_j} u \cdot v) dx dt - \int_{\Omega_T} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \partial_{x_j} u \partial_{x_i} v dx dt = \\ &= \int_{\Gamma_T} \sigma_v(u) v dS_x dt - \int_{\Omega_T} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \partial_{x_j} u \partial_{x_i} v dx dt. \end{aligned}$$

Підставляючи отримані рівності у (12.9), отримаємо

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega_T} \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \partial_{x_j} u \partial_{x_i} v + cuv - uv_t \right) dx dt - \int_{\Gamma_T} \sigma_v(u) v dS_x dt \\ &= \int_{\Omega_T} f v dx dt + \int_{D_0} \varphi v dx. \end{aligned} \quad (12.10)$$

Використовуючи останню тотожність можна задати еквівалентне раніше наведеному означення класичного розв'язку відповідної мішаної задачі. Проте, отримана тотожність має сенс і при слабших умовах на коефіцієнти і праву частину рівняння, а також на початкову умову. Тому, використовуючи її, можемо визначити поняття слабого або узагальненого розв'язку відповідної задачі. У випадку першої мішаної задачі, додатково на функцію v будемо додатково накладати крайову умову

$$v|_{\Gamma_T} = 0 \quad (12.11)$$

Тоді тотожність (12.10), набуде вигляду

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_T} \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \partial_{x_j} u \partial_{x_i} v + cuv - uv_t \right) dxdt = \\ = \int_{\Omega_T} f v dxdt + \int_{D_0} \varphi v dx. \end{aligned} \quad (12.12)$$

У випадку третьої мішаної задачі з умови (12.6) інтегральна тотожність (12.10) набуде вигляду

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_T} \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \partial_{x_j} u \partial_{x_i} v + cuv - uv_t \right) dxdt + \int_{\Gamma_T} k u v dS_x dt \\ = \int_{\Omega_T} f v dxdt + \int_{D_0} \varphi v dx. \end{aligned} \quad (12.13)$$

Як бачимо класичний розв'язок першої чи третьої мішаної задачі задовольняє інтегральні тотожності (12.12) чи (12.13) відповідно. Якщо проаналізувати отримані інтегральні тотожності, то як і для попередніх задач очевидно, що вони мають сенс при значно слабших умовах, на шукану функцію та функції, що входять до рівняння та початкової та крайової умови. З огляду на це, розглядаючи інтегральні тотожності (12.12) чи (12.13), усунувшись від безпосереднього розгляду мішаної задачі для вихідного параболічного рівняння, приходимо до поняття узагальненого розв'язку відповідної мішаної задачі.

Зауваження. Очевидно, що за припущень накладених на коефіцієнти оператора $\mathcal{L}$, праву частину рівняння (12.1) та початкову функцію, визначена мішана задача є формальним символом, який розуміють лише в контексті інтегральних тотожностей (12.12) чи (12.13).

Означення. Функція $u \in H^{1,0}(\Omega_T)$ називається узагальненим розв'язком першої мішаної задачі (12.1), (12.2), (12.5) якщо на Γ_T вона задовольняє рівність (12.5) у сенсі слідів і для довільної $v \in H^1(\Omega_T)$ для якої мають місце співвідношення (12.8) і (12.11) функція u задовольняє інтегральну тотожність (12.12).

Означення. Функція $u \in H^{1,0}(\Omega_T)$ називається узагальненим розв'язком третьої мішаної задачі (12.1), (12.2), (12.6) якщо для довільної $v \in H^1(\Omega_T)$ для якої має місце співвідношення (12.8) функція u задовольняє інтегральну тотожність (12.13).

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_T} \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \partial_{x_j} u \partial_{x_i} v + cuv - uv_t \right) dxdt + \\ & + \int_{\Gamma_T} k T(u) T(v) dS_x dt = \int_{\Omega_T} f v dxdt + \int_{D_0} \varphi v dx. \end{aligned} \quad (12.14)$$

12.2. Єдиність узагальненого розв'язку

Теорема 12.1. Кожна з мішаних задач (12.1), (12.2), (12.5) або (12.1), (12.2), (12.6) не може мати більше одного узагальненого розв'язку.

Доведення теореми, як і для випадку мішаної задачі для гіперболічного рівняння проведемо методом від супротивного. Припустимо, що мішана задача (12.1), (12.2), (12.5) або (12.1), (12.2), (12.6) має два різних узагальнених розв'язки $u_1, u_2 \in H^{1,0}(\Omega_T)$. Тоді функція

$$u = u_1 - u_2 \in H^{1,0}(\Omega_T)$$

для будь-якої функції $v \in H^1(\Omega_T)$ задовольняє інтегральну тотожність

$$\int_{\Omega_T} \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \partial_{x_j} u \partial_{x_i} v + cuv - uv_t \right) dxdt = 0 \quad (12.15)$$

у випадку першої мішаної задачі, і інтегральну тотожність

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_T} \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \partial_{x_j} u \partial_{x_i} v + cuv - uv_t \right) dxdt + \\ & + \int_{\Gamma_T} k T(u) T(v) dS_x dt = 0 \end{aligned} \quad (12.16)$$

у випадку третьої мішаної задачі.

Розглянемо допоміжну функцію

$$v = \int_t^T u(x, \theta) d\theta.$$

Легко показати, що функція v має узагальнені частинні похідні за змінними $x_i, i = 1, \dots, n$ і t , причому

$$\begin{aligned} v_t &= -u, \\ \partial_{x_i} v &= \int_t^T \partial_{x_i} u(x, \theta) d\theta, \end{aligned}$$

звідки, враховуючи властивості функції u очевидним чином можемо зробити висновок, що $v \in H^1(\Omega_T)$. Крім того, очевидно, що функція v задовольняє умову (12.8), а у випадку першої мішаної задачі – умову (12.11). Отже функцію v можемо використовувати у якості "пробної" функції у інтегральних тотожностях означень узагальненого розв'язку. Оцінимо окремо кожен доданок тотожностей (12.15) і (12.16). Тоді

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega_T} u v_t dx dt &= \int_{\Omega_T} u^2 dx dt = \|u\|_{L^2(\Omega_T)}^2 \geq 0. \\ \int_{\Omega_T} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \partial_{x_j} u \partial_{x_i} v dx dt &= \int_D \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \int_0^T \partial_{x_j} u(x, t) \int_t^T \partial_{x_i} u(x, \theta) d\theta dt dx = \\ &= \int_D \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \int_0^T \partial_{x_i} u(x, \theta) \int_0^\theta \partial_{x_j} u(x, t) dt d\theta dx = \\ &= \int_D \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \int_0^T \partial_{x_i} u(x, \theta) \left(\int_0^T \partial_{x_j} u(x, t) dt - \int_\theta^T \partial_{x_j} u(x, t) dt \right) d\theta dx = \\ &= \int_D \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \int_0^T \partial_{x_i} u(x, t) dt \int_0^T \partial_{x_j} u(x, t) dt dx - \\ &\quad - \int_D \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \int_0^T \partial_{x_i} u(x, \theta) \int_\theta^T \partial_{x_j} u(x, t) dt d\theta dx = \end{aligned}$$

$$= \int_D \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \int_0^T \partial_{x_i} u(x, t) dt \int_0^T \partial_{x_j} u(x, t) dt dx - \\ - \int_{\Omega_T} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \partial_{x_j} u \partial_{x_i} v dx dt,$$

Звідки, враховуючи умову (10.1),

$$\int_{\Omega_T} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \partial_{x_j} u \partial_{x_i} v dx dt = \\ = \frac{1}{2} \int_D \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \int_0^T \partial_{x_i} u(x, t) dt \int_0^T \partial_{x_j} u(x, t) dt dx \geq 0.$$

Аналогічно, можемо показати, що

$$\int_{\Gamma_T} k T(u) T(v) dS_x dt \geq 0, \int_{\Omega_T} c u v dx dt \geq 0.$$

Отже, всі доданки в тотожностях (12.15) і (12.16) не від'ємні, а відтак тотожності (12.15) і (12.16) можуть виконуватися лише коли всі доданки рівні нулю, зокрема

$$\|u\|_{L^2(\Omega_T)}^2 = 0,$$

що означає, що $u = 0$ майже скрізь у Ω_T . Теорему доведено. ■

12.3. Існування узагальненого розв'язку

Як і у випадку мішаних задач для гіперболічного рівняння, питання про існування узагальненого розв'язку мішаної задачі для параболічного рівняння будемо вивчати з допомогою методу Фур'є, котрий полягає у тому, що розв'язок мішаної задачі шукають у вигляді ряду Фур'є за системою власних функцій відповідної еліптичної задачі.

Нехай $\{\lambda_k: k \geq 1\}$ послідовність власних значень оператора $\mathcal{L}$ відповідної крайової задачі записана у порядку зростання, причому кожне з власних чисел у цій послідовності трапляється стільки разів, яка його кратність. Розглянемо ортонормовану у $L^2(D)$ систему $\{v_k: k \geq 1\}$ власних функцій крайової задачі, що відповідає вищенаведеній послідовності власних чисел. Послідовність $\{v_k: k \geq 1\}$ утворює ортонормований базис простору $L^2(D)$. Припустимо, що

початкова функція φ належать простору $L^2(D)$, а отже їх можна розкласти за системою $\{v_k: k \geq 1\}$ у ряд Фур'є

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k v_k,$$

де $\varphi_k = (\varphi, v_k)_{L^2(D)}$.

Нехай $f \in L^2(\Omega_T)$. Тоді, використовуючи теорему Фубіні можемо зробити висновок, що для майже усіх $t \in (0, T)$ функція $f(\cdot, t) \in L^2(D)$, а отже для майже усіх $t \in (0, T)$ її можна розкласти у ряд Фур'є за системою $\{v_k: k \geq 1\}$

$$f(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) v_k,$$

де $f_k(t) = (f(\cdot, t), v_k)_{L^2(D)}$.

Згідно з рівністю Парсеваля

$$\|\varphi\|_{L^2(D)}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k^2,$$

і для майже усіх $t \in (0, T)$

$$\int_D f^2(x, t) dx = \sum_{k=1}^{\infty} f_k^2(t),$$

звідки

$$\int_{\Omega_T} f^2(x, t) dx dt = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^T f_k^2(t) dt.$$

Зауважимо, що зокрема з останньої рівності випливає, що $f_k \in L^2(0, T)$.

Розглянемо функцію

$$u_k(x, t) = T_k(t) v_k(x), k \geq 1,$$

де

$$T_k(t) = \varphi_k e^{-\lambda_k t} + \int_0^t f_k(\tau) e^{-\lambda_k(t-\tau)} d\tau. \quad (12.17)$$

Легко показати, що для усіх $k \geq 1$ функція $T_k \in H^1(0, T)$ і при $t = 0$ задовольняє початкову умову

$$T_k(0) = \varphi_k.$$

Безпосередньою перевіркою переконаємося у тому, що функція T_k задовольняє диференціальне рівняння

$$T'_k + \lambda_k T_k = f_k(t).$$

Повторюючи викладки, що здійснювалися для гіперболічного рівняння, можемо показати, що функція $u_k(x, t)$ є узагальненим розв'язком відповідної мішаної задачі для рівняння

$$u_t - \mathcal{L}u = f_k(t)v_k,$$

з початковою умовою

$$u|_{t=0} = \varphi_k v_k.$$

Враховуючи лінійність мішаних задач (12.1), (12.2), (12.5) або (12.1), (12.2), (12.6), очевидно, що функція

$$u_N(x, t) = \sum_{k=1}^N T_k(t)v_k$$

є узагальненим розв'язком першої чи третьої мішаної задачі для рівняння

$$u_t - \mathcal{L}u = \sum_{k=1}^N f_k(t)v_k$$

з початковою умовою

$$u|_{t=0} = \sum_{k=1}^N \varphi_k v_k.$$

Отже, цілком логічно очікувати, що якщо розв'язок вихідної мішаної задачі існує то він має форму ряду Фур'є

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t)v_k. \quad (12.18)$$

Умови при яких узагальнений розв'язок відповідної мішаної задачі існує забезпечує

Теорема 12.2. Нехай $f \in L^2(\Omega_T)$, $\varphi \in L^2(D)$. Тоді узагальнений розв'язок відповідної мішаної задачі (12.1), (12.2), (12.5) або (12.1), (12.2), (12.6) існує і зображується збіжним у $H^{1,0}(\Omega_T)$ рядом Фур'є (12.18). При цьому для розв'язку має місце оцінка

$$\|u\|_{H^{1,0}(\Omega_T)} \leq C(\|f\|_{L^2(\Omega_T)} + \|\varphi\|_{L^2(D)}), \quad (12.19)$$

де додатна стала C не залежить від φ та f .

Доведення. Оцінімо для кожного $k \geq 1$ T_k у (12.17)

$$\begin{aligned} |T_k(t)| &\leq |\varphi_k|e^{-\lambda_k t} + \left| \int_0^t f_k(\tau)e^{-\lambda_k(t-\tau)} d\tau \right| \leq \\ &\leq |\varphi_k|e^{-\lambda_k t} + \int_0^t |f_k(\tau)|e^{-\lambda_k(t-\tau)} d\tau \leq \\ &\leq |\varphi_k|e^{-\lambda_k t} + \left(\int_0^t f_k^2(\tau) d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t e^{-2\lambda_k(t-\tau)} d\tau \right)^{\frac{1}{2}} = \\ &= |\varphi_k|e^{-\lambda_k t} + \left(\int_0^t f_k^2(\tau) d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2\lambda_k} (1 - e^{-2\lambda_k t}) \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq |\varphi_k|e^{-\lambda_k t} + \frac{1}{\sqrt{2\lambda_k}} \left(\int_0^T f_k^2(\tau) d\tau \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Звідки

$$T_k^2(t) \leq 2\varphi_k^2 e^{-2\lambda_k t} + \frac{1}{\lambda_k} \int_0^T f_k^2(\tau) d\tau$$

Розглянемо часткову суму ряду (12.18)

$$u_N(x, t) = \sum_{k=1}^N T_k(t) v_k(x).$$

Як було показано раніше, якщо $\{v_k: k \geq 1\}$ ортонормована у $L^2(D)$ послідовність узагальнених власних функцій оператора $\mathcal{L}$ відповідної крайової задачі, то послідовність $\left\{ \frac{v_k}{\sqrt{\lambda_k}}: k \geq 1 \right\}$ (або $\left\{ \frac{v_k}{\sqrt{\lambda_k+1}}: k \geq 1 \right\}$ у випадку якщо серед власних чисел $\epsilon_{\lambda_1} = 0$) є ортонормованим

базисом (відносно деякого, еквівалентного стандартному скалярного добутку) простору $H_0^1(D)$ чи $H^1(D)$.

Подальше доведення теореми проведемо для випадку, якщо серед власних чисел відсутнє нульове власне число. Доведення теореми для випадку, якщо серед власних чисел є нульове повністю повторює нижче наведені викладки, при використанні у $H^1(D)$ базису, що складається з функцій $\left\{ \frac{v_k}{\sqrt{\lambda_k+1}} : k \geq 1 \right\}$.

13. ВАРІАЦІЙНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ЧАСТИННИМИ

13.1. Метод Рітца та його застосування для еліптичних рівнянь

Нехай H – деякий підпростір простору $H^1(\Omega)$. Нехай у H задано деякий скалярний добуток еквівалентний стандартному скалярному добутку у $H^1(\Omega)$.

Нехай у H задано деякий лінійний обмежений функціонал

$$l: H \rightarrow \mathbb{R} \\ |l(v)| \leq \|l\| \cdot \|v\|_H, v \in H.$$

Розглянемо у просторі H функціонал

$$E(v) = \|v\|_H^2 + 2l(v), v \in H. \quad (13.1)$$

Тоді з обмеженості функціоналу l отримаємо

$$\begin{aligned} E(v) &= \|v\|_H^2 + 2l(v) \geq \|v\|_H^2 - 2|l(v)| \geq \\ &\geq (\|v\|_H^2 - 2\|l\| \|v\|_H + \|l\|^2) - \|l\|^2 = \\ &= (\|v\|_H - \|l\|)^2 - \|l\|^2 \geq -\|l\|^2. \end{aligned}$$

Отже, функціонал E обмежений знизу на підпросторі H

$$E(v) \geq -\|l\|^2, v \in H.$$

Позначимо $d = \inf_{v \in H} E(v)$. Таким чином існує послідовність $\{v_m : m \geq 1\} \subset H$, що

$$\lim_{m \rightarrow \infty} E(v_m) = d. \quad (13.2)$$

Означення. Будь-яка послідовність $\{v_m: m \geq 1\} \subset H$, така, що для функціонала E виконується (13.2) називається послідовністю, що мінімізує функціонал E на H (мінімізуючою на H послідовністю для функціоналу E), а елемент $u \in H$ на якому цей мінімум досягається називається елементом, що реалізує мінімум функціоналу E на H .

Лема 13.1. Для будь-якого підпростору H простору $H^1(\Omega)$ існує єдиний елемент $u \in H$, що реалізує мінімум функціоналу E на H . Будь-яка послідовність $\{v_m: m \geq 1\} \subset H$, що мінімізує функціонал E на H збігається до цього елемента $u \in H$ за нормою простору $H^1(\Omega)$.

Зауваження. Очевидно, що значення d та елемент u , що реалізує мінімум функціоналу E на H залежить від простору H , вигляду функціоналу l і того як у H задано скалярний добуток.

Доведення. Нехай $\{v_m: m \geq 1\} \subset H$, будь-яка послідовність, що мінімізує E на H , тобто

$$\lim_{m \rightarrow \infty} E(v_m) = d$$

Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке $N = N(\varepsilon)$, що для всіх $m \geq N$ має місце оцінка

$$d \leq E(v_m) \leq d + \varepsilon$$

Виберемо $m, s \geq N$ і розглянемо таку норму

$$\begin{aligned} \left\| \frac{v_m \pm v_s}{2} \right\|_{H'}^2 &= \left(\frac{v_m \pm v_s}{2}, \frac{v_m \pm v_s}{2} \right)_{H'} = \\ &= \frac{1}{4} \|v_m\|_H^2 \pm \frac{1}{2} (v_m, v_s)_H + \frac{1}{4} \|v_s\|_H^2 \end{aligned}$$

Звідки

$$\left\| \frac{v_m + v_s}{2} \right\|_H^2 + \left\| \frac{v_m - v_s}{2} \right\|_H^2 = \frac{1}{2} \|v_m\|_H^2 + \frac{1}{2} \|v_s\|_H^2.$$

Або

$$\begin{aligned} \left\| \frac{v_m - v_s}{2} \right\|_H^2 &= \frac{1}{2} \|v_m\|_H^2 + \frac{1}{2} \|v_s\|_H^2 - \left\| \frac{v_m + v_s}{2} \right\|_H^2 = \\ &= \frac{1}{2} E(v_m) + \frac{1}{2} E(v_s) - l(v_m) - l(v_s) - E\left(\frac{v_m + v_s}{2}\right) + 2l\left(\frac{v_m + v_s}{2}\right) = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}E(v_m) + \frac{1}{2}E(v_s) - E\left(\frac{v_m + v_s}{2}\right) \leq \frac{1}{2}(d + \varepsilon) + \frac{1}{2}(d + \varepsilon) - d = \varepsilon.$$

Отже, послідовність $\{v_m: m \geq 1\}$ є фундаментальною у H , а отже у H існує такий елемент u , що $v_m \rightarrow u, m \rightarrow \infty$ у підпросторі H . Припустимо, що у H існує два елементи u_1 і u_2 , що реалізують мінімум функціоналу E на H . Тоді, проводячи викладки аналогічні до тих, що були наведені вище, отримаємо

$$\left\| \frac{u_1 - u_2}{2} \right\|_H^2 = \frac{1}{2}E(u_1) + \frac{1}{2}E(u_2) - E\left(\frac{u_1 + u_2}{2}\right) = \frac{1}{2}d + \frac{1}{2}d + d = 0,$$

Звідки, отримаємо, що $u_1 = u_2$ у просторі H . Лему доведено. ■

Нехай у H задана деяка система лінійно-незалежних функцій

$$\{\varphi_1, \dots, \varphi_k, \dots\} \subset H$$

зі скрізь-щільною у H лінійною оболонкою. Розглянемо k -вимірний підпростір простору H

$$R_k = \langle \varphi_1, \dots, \varphi_k \rangle$$

що є лінійною оболонкою системи функцій $\{\varphi_1, \dots, \varphi_k\}$. Оскільки $R_k \subset H$ лінійний підпростір H , то за лемою з попереднього пункту у R_k існує єдиний елемент $v_k \in R_k$ який реалізує на R_k мінімум функціоналу E визначеного співвідношенням (13.1).

Оскільки R_k лінійна оболонка функцій $\{\varphi_1, \dots, \varphi_k\}$, то довільний елемент з R_k можна зобразити у вигляді лінійної комбінації функцій $\varphi_1, \dots, \varphi_k$:

$$v = c_1\varphi_1 + \dots + c_k\varphi_k.$$

Таким чином задача знаходження мінімуму функціонала E на підпросторі R_k зводиться до задачі відшукування мінімуму функції

$$\begin{aligned} F(c_1, \dots, c_k) &= E(c_1\varphi_1 + \dots + c_k\varphi_k) = \\ &= \|c_1\varphi_1 + \dots + c_k\varphi_k\|_H^2 + 2l(c_1\varphi_1 + \dots + c_k\varphi_k) = \\ &= \sum_{i,j=1}^k c_i c_j (\varphi_i, \varphi_j)_H + 2 \sum_{i=1}^k c_i l(\varphi_i). \end{aligned}$$

по змінних $c_1, \dots, c_k$. Ця задача рівносильна розв'язанню системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\frac{\partial F(c_1, \dots, c_k)}{\partial c_i} = 0, \quad i = 1, \dots, k.$$

або, розписавши

$$\sum_{j=1}^k c_j (\varphi_i, \varphi_j)_H + l(\varphi_i) = 0, \quad i = 1, \dots, k. \quad (13.3)$$

Матриця

$$G = \left\{ (\varphi_i, \varphi_j)_H \right\}_{i,j=1}^k$$

називається матрицею Грамма системи функцій $\{\varphi_1, \dots, \varphi_k\}$. Очевидно, що матриця Грамма є симетричною, а отже всі її власні числа є дійсними. Покажемо, що матриця G є додатно-визначеною. Виберемо довільний дійсний вектор $(\xi_1, \dots, \xi_k) \in \mathbb{R}^k$

$$\begin{aligned} (G\xi, \xi)_{\mathbb{R}^k} &= \sum_{i,j=1}^k (\varphi_i, \varphi_j)_H \xi_i \xi_j = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k (\varphi_i, \varphi_j)_H \xi_i \xi_j = \\ &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k (\xi_i \varphi_i, \xi_j \varphi_j)_H = \left(\sum_{i=1}^k \xi_i \varphi_i, \sum_{j=1}^k \xi_j \varphi_j \right)_H = \left\| \sum_{i=1}^k \xi_i \varphi_i \right\|_H^2 > 0 \end{aligned}$$

Строга нерівність випливає з того, що система функцій $\{\varphi_1, \dots, \varphi_k\}$ є лінійно-незалежною, а отже для довільних чисел $(\xi_1, \dots, \xi_k) \in \mathbb{R}^k$ функція $\xi_1 \varphi_1 + \dots + \xi_k \varphi_k$ є відмінною від нуля у просторі H . Оскільки G є симетричною і додатно-визначеною, то її визначник відмінний від нуля

$$\det G \neq 0.$$

Таким чином система лінійних рівнянь (13.3) має єдиний розв'язок $(c_1^k, \dots, c_k^k)$, такий, що елемент $v_k = c_1^k \varphi_1 + \dots + c_k^k \varphi_k$ реалізує мінімум функціоналу E на підпросторі R_k .

Означення. Послідовність функцій $\{v_k: k \geq 1\}$ побудованих за вищенаведеним алгоритмом, називається послідовністю Рітца для функціоналу E по системі лінійно незалежних функцій $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots\} \in H$ зі скрізь-щільною у H лінійною оболонкою.

Лема 13.2. (Про послідовність Рітца) *Послідовність Рітца $\{v_k: k \geq 1\}$ для функціоналу E по довільній лінійно-незалежній системі функцій $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots\} \in H$ зі скрізь-щільною у H лінійною оболонкою є послідовністю, що мінімізує функціонал E . Вона збігається у просторі H до елементу $u \in H$, що реалізує мінімум функціоналу E у просторі H .*

Доведення. Нехай $u \in H$ – елемент, що реалізує мінімум функціоналу E на H . За лемою, доведеною у попередньому пункті, такий елемент у H існує і єдиний. Розглянемо послідовність

$$R_1 \subset R_2 \subset \dots \subset R_k \subset \dots \subset H, \quad (13.4)$$

де R_k – підпростір H , що є лінійною оболонкою функцій $\{\varphi_1, \dots, \varphi_k\}$, а $\{\varphi_k: k \geq 1\}$ – довільна система лінійно-незалежних функцій зі скрізьщільною у H лінійною оболонкою. Оскільки лінійна оболонка функцій $\{\varphi_k: k \geq 1\}$ скрізьщільна у H то, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists k = k(\varepsilon)$, $\exists c_1(\varepsilon), \dots, c_k(\varepsilon)$:

$$\|u - u_\varepsilon\| < \varepsilon,$$

де $u_\varepsilon = c_1(\varepsilon)\varphi_1 + \dots + c_k(\varepsilon)\varphi_k \in R_k$.

Оцінимо $E(u_\varepsilon)$:

$$\begin{aligned} d &\leq E(u_\varepsilon) = E(u_\varepsilon - u + u) = \|u_\varepsilon - u + u\|_{H'}^2 + 2l(u_\varepsilon - u + u) = \\ &= \|u_\varepsilon - u\|_{H'}^2 + \|u\|_{H'}^2 + 2(u_\varepsilon - u, u)_{H'} + 2l(u_\varepsilon - u) + 2l(u) = \\ &= E(u) + \|u_\varepsilon - u\|_{H'}^2 + 2l(u_\varepsilon - u) + 2(u_\varepsilon - u, u)_{H'} \leq \\ &\leq d + \varepsilon^2 + 2|l(u_\varepsilon - u)| + 2(u_\varepsilon - u, u)_{H'} \leq \\ &\leq d + \varepsilon^2 + 2\|l\| \|u_\varepsilon - u\|_{H'} + 2\|u\|_{H'} \|u_\varepsilon - u\|_{H'} \leq d + \varepsilon C_1, \end{aligned}$$

де стала $C_1 = (1 + 2\|l\| + 2\|u\|_{H'})$ – додатна стала. Таким чином

$$d \leq E(u_\varepsilon) \leq d + \varepsilon C_1. \quad (13.5)$$

Оскільки $u_\varepsilon \in R_k$, а на R_k мінімум функціоналу E досягається на деякій функції $v_k \in R_k$, то з нерівності (13.5) отримаємо

$$d \leq E(v_k) \leq E(u_\varepsilon) \leq d + \varepsilon C_1. \quad (13.6)$$

Із послідовності вкладень (13.4), отримаємо

$$E(v_1) \geq E(v_2) \geq \dots \geq E(v_k) \geq \dots \geq E(v_s) \geq d,$$

для $s \geq k$. Таким чином, враховуючи (13.6) отримаємо, що для всіх $s \geq k$ має місце оцінка

$$d \leq E(v_s) \leq E(v_k) \leq E(u_\varepsilon) \leq d + \varepsilon C_1.$$

Звідки випливає, що $E(v_s) \rightarrow d$, при $s \rightarrow \infty$. Це означає, що послідовність $\{v_s: s \geq 1\}$ є послідовністю, що мінімізує функціонал E на H . За вищедоведеною лемою, ця послідовність Рітца $\{v_k: k \geq 1\}$ збігається до елемента, що реалізує мінімум функціонала E на H . Лему доведено. ■

Доведемо важливу властивість, що реалізує мінімум функціоналу E на H , яка дозволяє пов'язати варіаційну задачу з крайовою задачею.

Лема 13.3. Функція $u \in H$, що реалізує мінімум функціоналу E на H для усіх функцій $v \in H$ задовольняє тотожність

$$(u, v)_H + l(v) = 0. \quad (13.7)$$

Доведення. Виберемо довільну функцію $v \in H$ і довільне число $t \in \mathbb{R}$. Функція

$$w_t = u + tv$$

належить H , тому многочлен (по t)

$$P(t) = E(w_t) = E(u) + 2t((u, v)_H + l(v)) + 2t^2 \|v\|_H^2 \geq d$$

для всіх $t \in \mathbb{R}$. Крім того, $P(0) = E(u) = d$. А отже

$$\frac{dP(t)}{dt} = 2((u, v)_H + l(v)) = 0.$$

Остання тотожність завершує доведення лема. ■

Застосуємо вищенаведені твердження до крайових задач для еліптичних рівнянь. Нехай простір H збігається $H^1(\Omega)$. Розглянемо у $H^1(\Omega)$ функціонал

$$E_3: H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R},$$

що визначається співвідношенням

$$E_3(v) = \int_{\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \partial_{x_j} v \partial_{x_i} v + cv^2 \right) dx + \int_{\partial\Omega} k(T(v))^2 dS_x - \quad (13.8)$$

$$-2 \int_{\Omega} f v dx - 2 \int_{\partial\Omega} \psi v dS_x,$$

де функції a_{ij} , c є коефіцієнтами еліптичного диференціального оператора $\mathcal{L}$ визначеного вище, $k \in L^\infty(\partial\Omega)$, $f \in L^2(\Omega)$ і $\psi \in L^2(\partial\Omega)$ – задані функції.

Теорема 13.1. Нехай функції $c \geq 0$ м.с. в Ω , $k \geq 0$ м.с. в $\partial\Omega$, причому хоча б одна з функцій c чи k не дорівнює (з точністю до майже скрізь) тотожно нулю на своїй області визначення. Тоді для довільних функцій $f \in L^2(\Omega)$ і $\psi \in L^2(\partial\Omega)$ функціонал E_3 визначений у просторі $H^1(\Omega)$ рівністю (13.8) досягає свого мінімуму на єдиному елементі $u \in H^1(\Omega)$. Цей елемент $u \in H^1(\Omega)$ є узагальненим розв'язком 3-ї крайової задачі (10.14) – (10.15).

Доведення. Введемо у $H^1(\Omega)$ скалярний добуток еквівалентний стандартному вигляду

$$\begin{aligned} B_R[u, v] := & \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \partial_{x_j} u \partial_{x_i} v dx + \int_{\Omega} c u v dx + \\ & + \int_{\partial\Omega} k T(u) T(v) dS_x \end{aligned} \quad (13.9)$$

і нехай $\|v\|_R$ – норма породжена скалярним добутком B_R .

Визначимо у $H^1(\Omega)$ лінійний функціонал $l: H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, вигляду

$$l(v) = - \int_{\Omega} f v dx - \int_{\partial\Omega} \psi v dS_x = -(f, v)_{L^2(\Omega)} - (\psi, v)_{L^2(\partial\Omega)}.$$

Використовуючи основну нерівність для сліду функції, покажемо, що функціонал l є обмеженим.

$$\begin{aligned} |l(v)| & \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} + \|\psi\|_{L^2(\partial\Omega)} \|v\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq \\ & (C_1 \|f\|_{L^2(\Omega)} + C_2 \|k\psi\|_{L^2(\partial\Omega)}) \|v\|_R = C_3 \|v\|_R, \end{aligned}$$

де стала C_3 не залежна від v додатна стала.

Розглянемо функціонал

$$E_3(v) = \|v\|_R^2 + 2l(v), v \in H^1(\Omega),$$

що у розгорнутому вигляді записується співвідношенням (13.8).

З вищенаведених викладок можемо зробити висновок, що функціонал E_3 досягає свого мінімуму на єдиній функції $u \in H^1(\Omega)$. Згідно з Лемою 13.3, функція u задовольняє тотожність (13.7) для всіх $v \in H^1(\Omega)$, яка у інтегральному вигляді матиме вигляд

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n (a_{ij} \partial_{x_j} u \partial_{x_i} v + c u v) dx + \int_{\partial\Omega} k T(u) T(v) dS_x = \\ = \int_{\Omega} f v dx - \int_{\partial\Omega} \psi T(v) dS_x = 0. \end{aligned}$$

Отримане рівняння є основною інтегральною тотожністю, що бере участь у означенні узагальненого розв'язку 3-ї крайової задачі. Таким чином теорема доведена ■

Як наслідок з вищенаведених тверджень можемо сформулювати таку теорему

Теорема 13.2. Послідовність Рітца для функціоналу E_3 по довільній системі лінійно-незалежних функцій $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots\} \subset H^1(\Omega)$ зі скрізьщільною у $H^1(\Omega)$ лінійною оболонкою збігається у $H^1(\Omega)$ до елементу $u \in H^1(\Omega)$ що реалізує мінімум функціоналу E_3 у $H^1(\Omega)$ який є узагальненим розв'язком крайової задачі (10.14), (10.15).

Розглянемо першу крайову задачу (10.9). Нехай функція ϕ є слідом деякої функції $\Phi \in H^1(\Omega)$. Розглянемо множину $H_{\phi}^1(\Omega)$, що складається з функцій з простору $H^1(\Omega)$, що мають на межі області слід ϕ . Розглянемо на $H_{\phi}^1(\Omega)$ функціонал

$$E_1: H_{\phi}^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R},$$

що визначається співвідношенням.

$$E_1(v) = \int_{\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \partial_{x_j} v \partial_{x_i} v + c v^2 \right) dx - 2 \int_{\Omega} f v dx, \quad (13.10)$$

де функції a_{ij} , c є коефіцієнтами еліптичного диференціального оператора $\mathcal{L}$ визначеного вище, $f \in L^2(\Omega)$ – задана функція.

Теорема 13.3. Нехай коефіцієнт $c \geq 0$ м.с. в Ω . Нехай функція ϕ є слідом деякої функції з простору $H^1(\Omega)$. Тоді для довільної функції $f \in L^2(\Omega)$ існує єдина функція $u \in H_{\phi}^1(\Omega)$, на якій функціонал E_1

набуває свого мінімального значення на множині $H_\phi^1(\Omega)$. Ця функція є узагальненим розв'язком першої крайової задачі (10.9).

Доведення. Нехай у просторі $H_0^1(\Omega)$ задано скалярний добуток еквівалентний стандартному визначений співвідношенням

$$B_D[u, v] = \int_{\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \partial_{x_j} u \partial_{x_i} v + c u v \right) dx \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega).$$

Згідно з умовою теореми існує продовження функції ϕ з межі $\partial\Omega$ на всю область Ω функцією $\Phi \in H^1(\Omega)$.

Розглянемо у $H_0^1(\Omega)$ лінійний функціонал визначений співвідношенням

$$l(v) = \int_{\Omega} \left(-f v + \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \partial_{x_j} \Phi \partial_{x_i} v + c \Phi v \right) dx \quad (13.11)$$

Очевидним чином легко показати, що цей функціонал є обмеженим у $H_0^1(\Omega)$.

Розглянемо у просторі $H_0^1(\Omega)$ функціонал

$$\begin{aligned} E_1^\Phi(v) &= \int_{\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \partial_{x_j} v \partial_{x_i} v + c v^2 \right) dx + \\ &+ 2 \int_{\Omega} \left(-f v + \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \partial_{x_j} \Phi \partial_{x_i} v + c \Phi v \right) dx. \end{aligned}$$

Нехай функція $u^\Phi \in H_0^1(\Omega)$ реалізує його мінімум на $H_0^1(\Omega)$. Тоді функція $u = \Phi + u^\Phi \in H^1(\Omega)$ належить множині $H_\phi^1(\Omega)$, що складається з функцій з простору $H^1(\Omega)$, що мають на межі області слід ϕ . Ця функція на множині $H_\phi^1(\Omega)$ реалізує мінімум функціоналу E_1 визначеного співвідношенням (13.10). Дійсно, співвідношення $v = \Phi + w$ при фіксованому Φ здійснює взаємно однозначну відповідність між усім $H_0^1(\Omega)$ ($w \in H_0^1(\Omega)$) і усім $H_\phi^1(\Omega)$ ($v \in H_\phi^1(\Omega)$). Тому з формули

$$\begin{aligned}
 E_1(v) &= E_1(\Phi + w) = \\
 &= E_1^\Phi(w) + \int_{\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \partial_{x_j} \Phi \partial_{x_i} w + c w^2 \right) dx - 2 \int_{\Omega} f \Phi w dx. \quad (13.12)
 \end{aligned}$$

отримаємо, що функціонал $E_1(v)$ для $v \in H_\Phi^1(\Omega)$ досягає свого мінімального значення лише при $v = \Phi + u^\Phi$.

Згідно з Лемою 13.3, функція $u^\Phi \in H_0^1(\Omega)$ задовольняє тотожність (13.7), яка у інтегральному вигляді матиме вигляд

$$\begin{aligned}
 &\int_{\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \partial_{x_j} u^\Phi \partial_{x_i} v + c u^\Phi v \right) dx = \\
 &= \int_{\Omega} \left(f v - \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \partial_{x_j} \Phi \partial_{x_i} v - c \Phi v \right) dx
 \end{aligned}$$

для всіх $v \in H_0^1(\Omega)$. І відповідно функція $u = \Phi + u^\Phi$ слід якої на $\partial\Omega$ збігається з функцією ϕ , задовольняє для всіх $v \in H_0^1(\Omega)$ інтегральну тотожність

$$\int_{\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \partial_{x_j} u \partial_{x_i} v + c u v \right) dx = \int_{\Omega} f v dx,$$

а отже функція $u = \Phi + u^\Phi$ є узагальненим розв'язком першої крайової задачі (10.9). ■

Побудуємо тепер послідовність Рітца для функціоналу E_1 . Нехай $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ – довільна лінійно незалежна система функцій з $H_\Phi^1(\Omega)$, для якої множина функцій

$$\left\{ \sum_{i=1}^k c_i \varphi_i : \sum_{i=1}^k c_i = 1, k \geq 1 \right\}$$

є скрізь-щільною у $H_\Phi^1(\Omega)$. Розглянемо послідовність

$$\varphi_2 - \varphi_1, \varphi_3 - \varphi_1, \dots$$

Очевидно, що всі елементи цієї послідовності належать простору $H_0^1(\Omega)$, причому їхня лінійна оболонка є скрізь-щільною у $H_0^1(\Omega)$.

Позначимо через $\tilde{R}_k, k \geq 1$ (нелінійний) многовид вигляду

$$\tilde{R}_k = \left\{ \sum_{i=1}^k c_i \varphi_i : \sum_{i=1}^k c_i = 1 \right\}$$

котрий можемо переписати у вигляді

$$\tilde{R}_k = \left\{ \varphi_1 + \sum_{i=1}^k c_i (\varphi_i - \varphi_1) \right\}.$$

Значення функціоналу $E_1(v)$ на многовиді $\tilde{R}_k$ пов'язані зі значеннями функціоналу на $E_1^{\varphi_1}(v)$ на k -вимірному підпросторі

$$R_k = \left\{ \sum_{i=2}^k c_i (\varphi_i - \varphi_1) \right\} \subset H_0^1(\Omega)$$

простору $H_0^1(\Omega)$ співвідношенням (13.12), якщо вважати $v = \varphi_1 + w$, $v \in \tilde{R}_k$, $w \in R_k$. Тому, для довільного $k \geq 2$ у $\tilde{R}_k$ існує єдина функція $v_k \in \tilde{R}_k$ що реалізує мінімум функціоналу $E_1(v)$ на многовиді $\tilde{R}_k$, причому $v_k = \varphi_1 + w_k$ де $w_k \in R_k$ єдина функція, що реалізує мінімум функціоналу $E_1^{\varphi_1}(v)$ на підпросторі R_k .

Отримана послідовність $\{v_k : k \geq 2\} \subset H_\varphi^1(\Omega)$ називається послідовністю Рітца для функціоналу $E_1(v)$ по системі функцій $\varphi_1, \varphi_2, \dots$. Оскільки послідовність $\{w_k : k \geq 2\} \subset H_0^1(\Omega)$ є послідовністю Рітца для функціоналу $E_1^{\varphi_1}(v)$ по системі $\varphi_2 - \varphi_1, \varphi_3 - \varphi_1, \dots$ то вона збігається у просторі $H^1(\Omega)$ до функції, що реалізує мінімум функціоналу $E_1^{\varphi_1}(v)$ у просторі $H_0^1(\Omega)$. Відповідно, послідовність $\{v_k : k \geq 2\}$ Рітца для функціоналу $E_1(v)$ по системі $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ збігається у $H^1(\Omega)$ до функції, що реалізує мінімум функціоналу $E_1(v)$ на $H_\varphi^1(\Omega)$. Таким чином можемо сформулювати

Теорема. Послідовність Рітца для функціоналу $E_1(v)$ заданого на $H_\varphi^1(\Omega)$, побудована по довільній системі лінійно-незалежних функцій $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ з $H_\varphi^1(\Omega)$, такий, що множина

$$\left\{ \sum_{i=1}^k c_i \varphi_i : \sum_{i=1}^k c_i = 1, k \geq 1 \right\}$$

скрізь-щільна у $H_\varphi^1(\Omega)$ збігається у $H^1(\Omega)$ до узагальненого розв'язку першої крайової задачі (10.9).

ЧАСТИНА 3.

НЕЛІНІЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

.....

Більшість явищ природознавства мають нелінійний характер. Тому лінійні математичні моделі таких явищ не в повній мірі описують їх властивості. Зрозуміло, що більш реальними моделями будуть відповідні нелінійні моделі.

Кожну крайову задачу, яка є математичною моделлю деякого явища, можна записати в операторній формі $A[u] = 0$, де $A[\cdot]$ – деякий диференціальний оператор, можливо нелінійний, а u – невідома функція. Якщо A – лінійний оператор, то існує багато добре розроблених методів для дослідження такої задачі. Якщо ж A – нелінійний оператор, то немає загальної теорії і для кожної нелінійної крайової задачі потрібно розробляти свій метод.

Наведемо приклади відомих нелінійних диференціальних рівнянь:

1. нелінійне рівняння Пуассона: $-\Delta u = f(u)$;
2. скалярне рівняння реакції-дифузії: $\partial_t u - \Delta u = f(u)$;
3. рівняння пористого середовища: $\partial_t u - \Delta(u^\gamma) = 0$;
4. рівняння мінімальної поверхні: $\operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} \right) = 0$;
5. рівняння Кортвега-де Фріза: $\partial_t u + \partial_{xxx}^3 u - 6 u \cdot \partial_x u = 0$.

На сьогодні найбільш відомі такі методи дослідження нелінійних крайових задач: варіаційний метод Ойлера-Лагранжа, метод монотонності, метод компактності, метод регуляризації, метод штрафу топологічні методи. Звичайно, що в деяких випадках можуть використовуватися одночасно декілька із вказаних вище методів. В підручнику ми познайомимось більш детально з першими двома методами.

14. Варіаційний метод Ойлера-Лагранжа

14.1. Основні ідеї

Варіаційне числення визначає важливий клас таких нелінійних задач, які можуть бути розв'язані за допомогою досить простого методу. Це клас задач, в яких нелінійний оператор $A[\cdot]$ в рівнянні

$$A[u] = 0, \quad (14.1)$$

є "похідною" у певному сенсі від відповідного функціоналу "енергії" $I[\cdot]$, тобто

$$A[\cdot] = I'[\cdot]. \quad (14.2)$$

Тоді задача (14.1) перепишеться у вигляді

$$I'[u] = 0 \quad (14.3)$$

і розв'язками задачі (14.1) будуть критичні точки функціоналу $I[\cdot]$, які в деяких випадках можна легко знайти.

Виявляється, що багато законів природознавства можуть бути математично змодельовані як варіаційні принципи, тобто у вигляді рівняння (14.3).

14.2. Перша варіація, рівняння Ойлера-Лагранжа

Нехай $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – обмежена область з гладкою межею $\partial\Omega$. Визначимо гладку функцію

$$L: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R},$$

яку будемо називати *Лагранжіаном*. Будемо використовувати скорочені записи для Лагранжіана

$$L = L(p, z, x) = L(p_1, \dots, p_n, z, x_1, \dots, x_n),$$

де $p \in \mathbb{R}^n$, $z \in \mathbb{R}$ і $x \in \Omega$, та його градієнтів

$$\nabla_p L = (L_{p_1}, \dots, L_{p_n}), \quad \nabla_z L = L_z, \quad \nabla_x L = (L_{x_1}, \dots, L_{x_n}),$$

де

$$L_{p_i} = \frac{\partial}{\partial p_i}, \quad L_z = \frac{\partial}{\partial z}, \quad L_{x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Уточнимо загальні ідеї з попереднього підрозділу. Припустимо, що функціонал $I[\cdot]$ визначається через інтеграл

$$I[\omega] := \int_{\Omega} L(\nabla\omega(x), \omega(x), x) dx, \quad (14.4)$$

де векторна змінна “ p ” замінена на градієнт $\nabla\omega(x)$, а змінна “ z ” – замінена на $\omega(x)$, та визначений на гладких функціях $\omega : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, які задовольняють крайову умову

$$\omega = g \quad \text{на } \partial\Omega. \quad (14.5)$$

Нехай гладка функція u задовольняє крайову умову $u = g$ на $\partial\Omega$ і функціонал $I[\cdot]$ досягає на ній свій мінімум серед усіх функцій ω , які задовольняють (14.5). Таку функцію будемо називати *мінімізатором* функціоналу $I[\cdot]$. Покажемо, що функція u автоматично є розв'язком деякого нелінійного диференціального рівняння з частинними похідними.

Для підтвердження цього, спочатку виберемо деяку гладку функцію $v \in C_0^\infty(\Omega)$ та визначимо гладку дійснозначну функцію

$$i(\tau) := I[u + \tau v] \quad (\tau \in \mathbb{R}). \quad (14.6)$$

З того, що u є мінімізатором $I[\cdot]$ та $u + \tau v = u = g$ на $\partial\Omega$, ми бачимо, що $i(\cdot)$ досягає свій мінімум при $\tau = 0$. Тому

$$i'(0) = 0. \quad (14.7)$$

Обчислимо цю похідну (яка називається першою варіацією). З співвідношення

$$i(\tau) = \int_{\Omega} L(\nabla u + \tau \nabla v, u + \tau v, x) dx \quad (14.8)$$

Знаходимо

$$\begin{aligned} i'(0) = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n L_{p_i}(\nabla u + \tau \nabla v, u + \tau v, x) v_{x_i} + \\ + L_z(\nabla u + \tau \nabla v, u + \tau v, x) v dx. \end{aligned}$$

При $\tau = 0$ з (14.7) маємо рівність

$$0 = i'(0) = \int_{\Omega} \left[\sum_{i=1}^n L_{p_i}(\nabla u, u, x) v_{x_i} + L_z(\nabla u, u, x) v \right] dx.$$

Проінтегрувавши в цьому інтегралі частинами та врахувавши, що носій функції v – компакт, отримуємо

$$0 = \int_{\Omega} \left[- \sum_{i=1}^n \left(L_{p_i}(\nabla u, u, x) \right)_{x_i} + L_z(\nabla u, u, x) \right] v dx.$$

Оскільки ця рівність має місце для довільних функцій $v \in C_0^\infty(\Omega)$, то u є розв'язком нелінійного диференціального рівняння з частинними похідними

$$-\sum_{i=1}^n \left(L_{p_i}(\nabla u, u, x) \right)_{x_i} + L_z(\nabla u, u, x) = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad (14.9)$$

яке називається *рівнянням Ойлера-Лагранжа*. Зауважимо, що (14.9) є квазілінійним диференціальним рівнянням з частинними похідними другого порядку у дивергентній формі.

Таким чином, всякий гладкий мінімізатор функціоналу $I[\cdot]$ є розв'язком рівняння Ойлера-Лагранжа (14.9), а значить ми можемо намагатись знайти розв'язок (14.9), шукаючи мінімізатор функціонала (14.4).

Приклад 1. (Принцип Діріхле). Розглянемо Лагранжіан

$$L(p, z, x) = \frac{1}{2} |p|^2.$$

Тоді $L_{p_i} = p_i$ ($i = 1, \dots, n$), $L_z = 0$; і рівнянням Ойлера-Лагранжа, пов'язане з функціоналом

$$I[\omega] := \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla \omega|^2 dx$$

на множині функцій з простору $C^\infty(\bar{\Omega})$, які задовольняють (14.5), буде рівняння Лапласа

$$\Delta u = 0 \quad \text{в } \Omega.$$

Цей факт називається принципом Діріхле, який вказує на те, що кожний мінімізатор даного функціоналу буде розв'язком крайової задачі Діріхле:

$$\Delta u = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad u = g \quad \text{на } \partial \Omega.$$

Приклад 2. (Узагальнений принцип Діріхле) Розглянемо Лагранжіан

$$L(p, z, x) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) p_i p_j - z f(x),$$

де $a_{ij} = a_{ji}$ ($i, j = 1, \dots, n$). Тоді $L_{p_i} = \sum_{j=1}^n a_{ij}(x) p_j$, $L_z = -f(x)$.

Отже, рівняння Ойлера-Лагранжа пов'язане з функціоналом

$$I[\omega] := \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \omega_{x_i} \omega_{x_j} - \omega f \right] dx,$$

буде лінійне диференціальне рівняння у дивергентній формі

$$-\sum_{i,j=1}^n \left(a_{ij}(x) u_{x_j} \right)_{x_i} = f \quad \text{в } \Omega.$$

Приклад 3. (Нелінійне рівняння Пуассона) Нехай $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ - гладка функція. Визначимо функцію $F(z) = \int_0^z f(y) dy$, $z \in \mathbb{R}$. Тоді рівняння Ойлера-Лагранжа, пов'язане з функціоналом

$$I[\omega] := \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} |\nabla \omega|^2 - F(\omega) \right] dx$$

на множині функцій з простору $C^\infty(\bar{\Omega})$, які задовольняють (14.5), буде нелінійним рівнянням Пуассона

$$-\Delta u = f(u) \quad \text{в } \Omega.$$

Приклад 4. (Рівняння мінімальної поверхні) Нехай

$$L(p, z, x) = (1 + |p|^2)^{1/2}$$

Тоді

$$I[\omega] := \int_{\Omega} (1 + |\nabla \omega|^2)^{1/2} dx$$

є площею гладкої поверхні $\omega: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, що задовольняє умову (14.5). Відповідним рівнянням Ойлера-Лагранжа буде рівняння

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{u_{x_i}}{(1 + |\nabla u|^2)^{1/2}} \right)_{x_i} = 0 \quad \text{в } \Omega. \quad (14.10)$$

Це диференціальне рівняння з частинними похідними є рівнянням мінімальної поверхні. Вираз $\operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{(1 + |\nabla u|^2)^{1/2}} \right)$ в лівій частині рівняння (14.10) є середньою кривизною поверхні $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Таким чином, мінімальна поверхня має нульову середню кривизну.

14.3. Друга варіація та опуклі функції

Обчислимо тепер другу варіацію $I[\cdot]$ від функції u , тобто другу похідну від функції $i(\cdot)$, яка визначається формулою (14.8). Диференціюючи під знаком інтегралу, знаходимо

$$i''(\tau) = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n L_{p_i p_j}(\nabla u + \tau \nabla v, u + \tau v, x) v_{x_i} v_{x_j} +$$

$$+ 2 \sum_{i=1}^n L_{p_{iz}} (\nabla u + \tau \nabla v, u + \tau v, x) v_{x_i} v + \\ + L_{zz} (\nabla u + \tau \nabla v, u + \tau v, x) v^2 dx.$$

З того, що $I[\cdot]$ досягає мінімуму в u , маємо $i''(0) \geq 0$, або

$$0 \leq i''(0) = \int_{\Omega} \left[\sum_{i,j=1}^n L_{p_i p_j} (\nabla u, u, x) v_{x_i} v_{x_j} + \right. \\ \left. + 2 \sum_{i=1}^n L_{p_{iz}} (\nabla u, u, x) v_{x_i} v + L_{zz} (\nabla u, u, x) v^2 \right] dx, \quad (14.11)$$

яка виконується для всіх функцій $v \in C_0^\infty(\Omega)$. Оскільки $C_0^\infty(\Omega)$ є всюди щільною множиною в просторі Соболева $H_0^1(\Omega)$, то нерівність (14.11) має місце для всіх функцій $v \in H_0^1(\Omega)$. Зафіксуємо $\xi \in \mathbb{R}^n$ та визначимо функцію

$$v(x) = \varepsilon \rho\left(\frac{x \cdot \xi}{\varepsilon}\right) \varphi(x), \quad \forall x \in \Omega,$$

де $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, а $\rho: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ - 1-періодична функція, визначена наступним чином:

$$\rho(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 1-x, & \text{якщо } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}, \quad \rho(x+1) = \rho(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Очевидно, що $|\rho'| = 1$ майже скрізь, а так визначена функція $v \in H_0^1(\Omega)$. Крім того,

$$v_{x_i}(x) = \rho'\left(\frac{x \cdot \xi}{\varepsilon}\right) \xi_i \varphi + O(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Підставимо функцію v та її похідні в (14.11). Врахувавши попереднє співвідношення, отримаємо

$$0 \leq \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n L_{p_i p_j} (\nabla u, u, x) (\rho')^2 \xi_i \xi_j \varphi^2 dx + O(\varepsilon).$$

Спрямувавши $\varepsilon \rightarrow 0$, виводимо нерівність

$$0 \leq \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n L_{p_i p_j} (\nabla u, u, x) \xi_i \xi_j \varphi^2 dx,$$

яка виконується для всіх $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Це означає, що для всіх $\xi \in \mathbb{R}^n$ та $x \in \Omega$

$$\sum_{i,j=1}^n L_{p_i p_j}(\nabla u, u, x) \xi_i \xi_j \geq 0. \quad (14.12)$$

Таким чином нерівність (14.12) є необхідною умовою для того, щоб функція u була гладким мінімізатором. Крім того, вона та вказує на те, що обґрунтовано припустити щоб Лагранжіан був опуклою функцією відносно векторної змінної $p \in \mathbb{R}^n$. Нагадаємо деякі факти з теорії опуклих функцій.

Означення 1. Функція $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ називається опуклою, якщо для довільних $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n$ та $\lambda \in [0, 1]$ виконується нерівність

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

Теорема 5.1. Нехай $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ - опукла функція. Тоді для кожного $x \in \mathbb{R}^n$ існує такий вектор $\Lambda \in \mathbb{R}^n$, що для всіх $y \in \mathbb{R}^n$

$$f(y) \geq f(x) + \Lambda \cdot (y - x). \quad (14.13)$$

Зауваження 1. Нерівність (14.13) вказує на те, що графік дотичної площини $y \rightarrow \Lambda \cdot (y - x) + f(x)$ до графіка опуклої функції $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ в кожній точці x буде лежати під графіком функції f . Крім того, якщо $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$, то $\Lambda = \nabla f(x)$.

Теорема 5.1. Нехай $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$. Функція f буде опуклою тоді і тільки тоді, коли для довільних $x \in \mathbb{R}^n$, $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} \xi_i \xi_j \geq 0. \quad (14.14)$$

Означення 2. Функція $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ називається рівномірно опуклою, якщо

$$\exists \lambda_0 > 0 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \quad x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} \xi_i \xi_j \geq \lambda_0 |\xi|^2.$$

14.4. Коерцитивність. Напівнеперервність знизу

Зазначимо, що навіть гладка функція $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, яка є обмеженою знизу, не обов'язково досягає мінімуму, наприклад, $f = e^x$ чи $f = (1 + x^2)^{-1}$. Це вказує на те, що для того, щоб функціонал $I[\omega]$, який визначається формулою (14.4), досягав свого мінімуму в

загальному потрібен гіпотетичний контроль над поведінкою $I[\omega]$ для “великих” значень функцій ω .

а) Коерцитивність. Нехай $1 < q < +\infty$ і існують такі константи $\alpha > 0, \beta \geq 0$, що для всіх $p \in \mathbb{R}^n, z \in \mathbb{R}, x \in \Omega$:

$$L(p, x, z) \geq \alpha|p|^q - \beta. \quad (14.15)$$

З цієї нерівності випливає, що для функціонала (14.4)

$$I[\omega] \geq \alpha \|\nabla \omega\|_{L^q(\Omega)}^q - \gamma, \quad (14.16)$$

де $\gamma := \beta|\Omega|$. Таким чином, $I[\omega] \rightarrow +\infty$, коли $\|\nabla \omega\|_{L^q}^q \rightarrow \infty$. Прийнято називати (14.16) умовою коерцитивності для функціонала $I[\cdot]$.

Повертаючись до нашого головного завдання знаходження мінімізатора для функціонала $I[\cdot]$, бачимо з (14.16), що краще визначати $I[\omega]$ не тільки на гладких функціях ω , але й на таких, які належать простору Соболева $W^{1,q}(\Omega)$ та задовольняють крайову умову (14.5) в сенсі сліду. Тому розширимо множину визначення функціоналу I на множину

$$\mathcal{A} := \{\omega \in W^{1,q}(\Omega): \omega = g \text{ на } \partial\Omega \text{ в сенсі сліду}\},$$

де задана функція $g \in W^{1,q}(\Omega)$. З (14.15) видно, що функціонал $I[\omega]$ визначений (але може дорівнювати $+\infty$) для кожної функції $\omega \in \mathcal{A}$.

б) Напівнеперервність знизу. Зауважимо, що хоча для неперервних функцій $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, які задовольняють умову коерцитивності існує мінімум, для нашого інтегрального функціоналу $I[\cdot]$, який визначається формулою (14.4), цього не достатньо. Щоб зрозуміти це, покладемо

$$m := \inf_{\omega \in \mathcal{A}} I[\omega]. \quad (14.17)$$

З (14.16) слідує, що $m > -\infty$. Якщо ж $m = +\infty$, то кожна функція з множини $\mathcal{A}$ буде мінімізатором для функціоналу $I[\cdot]$. Тому надалі вважаємо, що m деяке дійсне число. Виберемо деяку мінімізуючу послідовність функцій $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ таку, що

$$I[\varphi_k] \rightarrow m \text{ при } k \rightarrow +\infty. \quad (14.18)$$

Виникає питання: чи буде деяка підпослідовність послідовності $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ збігатися до мінімізатора?

З умови коерцитивності (14.16) та відомої нерівності (див. [?])

$$\exists C > 0 \quad \forall u \in W^{1,q}(\Omega): \|u\|_{W^{1,q}(\Omega)} \leq C(\|\nabla u\|_{L^q(\Omega)} + \|Tu\|_{L^q(\partial\Omega)})$$

можемо зробити висновок, що мінімізуюча послідовність є обмеженою в $W^{1,q}(\Omega)$. Але це не означає, що існує деяка підпослідовність, яка збігається в $W^{1,q}(\Omega)$, оскільки простір $W^{1,q}(\Omega)$ є нескінченновимірним. Однак, згідно нашого припущення $1 < q < \infty$, а

тому простір $L^q(\Omega)$ є рефлексивним. Це означає, що існує підпослідовність $\{\varphi_{k_j}\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ і функція $\varphi_0 \in W^{1,q}(\Omega)$ така, що

$$\begin{cases} \varphi_{k_j} \rightharpoonup \varphi_0 & \text{слабко в } L^q(\Omega) \\ \nabla \varphi_{k_j} \rightharpoonup \nabla \varphi_0 & \text{слабко в } L^q(\Omega; \mathbb{R}^m) \end{cases} \quad \text{при } j \rightarrow +\infty \quad (14.19)$$

Збіжності (14.19) еквівалентні такій збіжності:

$$\varphi_{k_j} \rightharpoonup \varphi_0 \quad \text{слабко в } W^{1,q}(\Omega) \quad \text{при } j \rightarrow +\infty. \quad (14.20)$$

Оскільки оператор сліду $T: W^{1,q}(\Omega) \mapsto L^q(\partial\Omega)$ – компактний, то $T\varphi_{k_j} \rightarrow T\varphi_0$ в $L^q(\partial\Omega)$, і тому $\varphi_0 = g$ на $\partial\Omega$ в сенсі сліду та $\varphi_0 \in \mathcal{A}$.

Отже, шляхом переходу до слабкої збіжності, з умови коерцитивності (14.16) виводимо (14.20) для виділеної підпослідовності.

Але виникає інша проблема. Майже у всіх випадках функціонал $I[\cdot]$ не є неперервний відносно слабкої збіжності. Іншими словами, ми не можемо вивести з (14.18) і (14.20) наступне:

$$I[\varphi_0] = \lim_{j \rightarrow +\infty} I[\varphi_{k_j}], \quad (14.21)$$

щоб можна було стверджувати, що u є мінімізатором. Проблема в тому, що з слабкої збіжності $\nabla \varphi_{k_j} \rightharpoonup \nabla \varphi_0$ не впливає збіжність $\nabla \varphi_{k_j} \rightarrow \nabla \varphi_0$ майже скрізь. Градієнт $\nabla \varphi_{k_j}$ може бути обмежений в L^q , але сильно коливатися при $k_j \rightarrow +\infty$. Наприклад, послідовність функцій $\{\varphi_k(x) = \sin(\pi k x), x \in [0, 1]\}_{k \in \mathbb{N}}$ слабко збігається до нуля в $L^2(0,1)$, але не збігається майже скрізь.

Насправді умова (14.21) не є необхідною, достатньо вимагати

$$I[\varphi_0] \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} I[\varphi_k]. \quad (14.22)$$

Тоді з (14.18) ми отримаємо $I[\varphi_0] \leq m$, а з (14.17) – $m \geq I[\varphi_0]$. Тому $I[\varphi_0] = m$, а отже, φ_0 є мінімізатором. Нерівність (14.22) покладемо в основу такого означення.

Означення 1. Функціонал $I[\cdot]$ називається слабко напів-неперервний знизу (с. н-п. з.) на $W^{1,q}(\Omega)$, якщо для довільної послідовності $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset W^{1,q}(\Omega)$, яка слабко в цьому просторі збігається до функції φ_0 , маємо

$$I[\varphi_0] \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} I[\varphi_k].$$

Таким чином, нам потрібно знайти такі умови на лагранжіан L , щоб забезпечити слабку напівнеперервність знизу функціоналу $I[\cdot]$. Має місце наступна теорема.

Теорема 14.1. (про слабку напівнеперервність знизу функціоналу).
Нехай лагранжіан L задовольняє умову (14.15) і для довільних $z \in \mathbb{R}$ та $x \in \Omega$ відображення $p \mapsto L(p, z, x)$ є опуклим. Тоді функціонал $I[\cdot]$ є слабо напівнеперервним знизу на $W^{1,q}(\Omega)$.

Доведення. 1. Розглянемо довільну послідовність $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, яка

$$\varphi_k \rightharpoonup \varphi_0 \text{ слабо в } W^{1,q}(\Omega), \quad (14.23)$$

і позначимо через $l := \liminf_{k \rightarrow +\infty} I[\varphi_k]$. Спираючись на попередні міркування, можемо вважати, що $l \in \mathbb{R}$. Нам потрібно довести, що

$$I[\varphi_0] \leq l. \quad (14.24)$$

З (14.23) випливає, що

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \|\varphi_k\|_{W^{1,q}(\Omega)} < +\infty. \quad (14.25)$$

Переходячи до підпослідовності і знову позначаючи її через $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, маємо

$$l = \lim_{k \rightarrow +\infty} I[\varphi_k]. \quad (14.26)$$

З теореми 7.1 маємо, що $\varphi_k \rightarrow \varphi_0$ сильно в $L^q(\Omega)$, а значить, переходячи до підпослідовності, якщо це необхідно, маємо

$$\varphi_k \rightarrow \varphi_0 \text{ м.с. в } \Omega \text{ при } k \rightarrow +\infty \quad (14.27)$$

2. Зафіксуємо довільне число $\varepsilon > 0$. Тоді з (14.27) і теореми Єгорова [?] існує така множина $E_\varepsilon \subset \Omega$, що

$$\varphi_k \rightarrow \varphi_0 \text{ рівномірно на } E_\varepsilon, \quad (14.28)$$

і

$$|\Omega \setminus E_\varepsilon| \leq \varepsilon. \quad (14.29)$$

Визначимо таку підмножину

$$F_\varepsilon := \left\{ x \in \Omega : |\varphi_0(x)| + |\nabla \varphi_0(x)| \leq \frac{1}{\varepsilon} \right\}. \quad (14.30)$$

Тоді

$$|\Omega \setminus F_\varepsilon| \rightarrow 0 \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (14.31)$$

Нарешті, покладемо

$$G_\varepsilon := E_\varepsilon \cap F_\varepsilon, \quad (14.32)$$

і зауважимо, що з (14.29) і (14.31) слідує

$$|\Omega \setminus G_\varepsilon| \rightarrow 0 \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (14.33)$$

3. Оскільки L обмежена знизу, то можна вважати, що $L \geq 0$ (в протилежному випадку покладемо $\tilde{L} = L + \beta \geq 0$). Тоді

$$I[\varphi_k] = \int_{\Omega} L(\nabla \varphi_k, \varphi_k, x) dx \geq \int_{G_\varepsilon} L(\nabla \varphi_k, \varphi_k, x) dx \geq \quad (14.34)$$

$$\geq \int_{G_\varepsilon} L(\nabla\varphi_0, \varphi_k, x) dx + \int_{G_\varepsilon} \nabla_p L(\nabla\varphi_0, \varphi_k, x) \cdot (\nabla\varphi_k - \nabla\varphi_0) dx$$

бо L є опуклою (див. (14.13)).

З (14.28), (14.30) і (14.32) отримаємо

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{G_\varepsilon} L(\nabla\varphi_0, \varphi_k, x) dx = \int_{G_\varepsilon} L(\nabla\varphi_0, \varphi_0, x) dx \quad (14.35)$$

Оскільки $\nabla_p L(\nabla\varphi_0, \varphi_k, x) \rightarrow \nabla_p L(\nabla\varphi_0, \varphi_0, x)$ рівномірно на G_ε і $\nabla\varphi_k \rightarrow \nabla\varphi_0$ слабо в $L^q(\Omega, \mathbb{R}^n)$, то

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{G_\varepsilon} \nabla_p L(\nabla\varphi_0, \varphi_k, x) \cdot (\nabla\varphi_k - \nabla\varphi_0) dx = 0. \quad (14.36)$$

Використовуючи тепер (14.35) і (14.36), з 14.33 виводимо

$$l = \lim_{k \rightarrow +\infty} I[\varphi_k] \geq \int_{G_\varepsilon} L(\nabla\varphi_0, \varphi_0, x) dx.$$

Ця нерівність виконується для будь-яких $\varepsilon > 0$. Спрямувавши ε до нуля і використавши (14.33), отримаємо

$$l \geq \int_{\Omega} L(\nabla\varphi_0, \varphi_0, x) dx = I[\varphi_0],$$

що і вимагалось довести. ■

Зауваження. Дуже важливо зрозуміти як вищевикладене доведення пов'язане з слабкою збіжністю $\nabla\varphi_k \rightarrow \nabla\varphi_0$. Поясненням цього є нерівність опуклості (14.33). Нагадаємо, що в загальному випадку немає збіжності $\nabla\varphi_k \rightarrow \nabla\varphi_0$ м.с., навіть якщо ми перейдемо до підпослідовності.

Збіжність φ_k до φ_0 в L^q є сильною і тому нам не потрібно припущення щодо опуклості функції $z \rightarrow L(p, z, x)$.

Теорема 14.2. (Існування мінімізатора) Припустимо, що виконуються умови теореми 14.1., а також, що множина $\mathcal{A}$ не є порожньою.

Тоді існує принаймні одна функція $u \in \mathcal{A}$ така, що

$$I[u] = \min_{\omega \in \mathcal{A}} I[\omega].$$

Доведення. 1. Покладемо $m := \inf_{\omega \in \mathcal{A}} I[\omega]$. Якщо $m = +\infty$, то кожна функція з множини $\mathcal{A}$ є мінімізатором, а тому надалі будемо вважати, що m скінченне. Виберемо мінімізуючу послідовність $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$. Тоді

$$I[u_k] \rightarrow m \text{ при } k \rightarrow +\infty. \quad (14.37)$$

Як і раніше вважаємо $\beta = 0$ в (14.15) (якщо це не так, то покладемо $\tilde{L} := L + \beta$). Таким чином, $L \geq \alpha|p|^q$, а тому

$$I[\omega] \geq \alpha \int_{\Omega} |\nabla \omega|^q dx. \quad (14.38)$$

Оскільки m - скінченне, то з (14.37) і (14.38) маємо

$$\sup_k \|\nabla u_k\|_{L^q(\Omega)} < +\infty. \quad (14.39)$$

Зафіксуємо $\omega \in \mathcal{A}$. Оскільки u_k і ω співпадають з g на $\partial\Omega$ в сенсі сліду, то $u_k - \omega \in W_0^{1,q}(\Omega)$. Тоді з (14.39) та нерівності Фрідрікса (6.7) отримаємо

$$\begin{aligned} \|u_k\|_{L^q(\Omega)} &\leq \|u_k - \omega\|_{L^q(\Omega)} + \|\omega\|_{L^q(\Omega)} \leq \\ &\leq C \|\nabla u_k - \nabla \omega\|_{L^q(\Omega)} + C \leq C. \end{aligned}$$

Отже, $\|u_k\|_{L^q(\Omega)} < +\infty$. Ця оцінка і (14.39) означають, що $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ є обмеженою в $W^{1,q}(\Omega)$.

Таким чином, існує підпослідовність $\{u_{k_j}\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ і функція $u \in W^{1,q}(\Omega)$ такі, що

$$u_{k_j} \rightharpoonup u \text{ слабко в } W^{1,q}(\Omega).$$

Покажемо, що $u \in \mathcal{A}$. Оскільки оператор сліду $T: W^{1,q}(\Omega) \mapsto L^q(\partial\Omega)$ - компактний, то $Tu_{k_j} \rightarrow Tu$ в $L^q(\partial\Omega)$, і тому $u = g$ на $\partial\Omega$ в сенсі сліду, а значить $u \in \mathcal{A}$.

З теореми 14.1. маємо, що $I[u] \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} I[u_{k_j}] = m$. Однак $u \in \mathcal{A}$, а тому $I[u] = m = \min_{\omega \in \mathcal{A}} I[\omega]$. ■

Далі вияснимо, коли можна стверджувати, що мінімізатор є єдиним. В загальному випадку їх може існувати декілька і для забезпечення єдиності нам потрібно накласти деякі додаткові умови.

Теорема 14.3. (Єдиність мінімізатора). Припустимо, що лагранжіан L не залежить від змінної z , тобто $L = L(p, x)$, і для кожного $x \in \Omega$ функція $p \rightarrow L(p, x)$ рівномірно опукла, тобто існує стала $\theta > 0$ така, що для всіх $p, \xi \in \mathbb{R}^n$

$$\sum_{i,j=1}^n L_{p_i p_j}(p, x) \xi_i \xi_j \geq \theta |\xi|^2. \quad (14.40)$$

Тоді мінімізатор $u \in \mathcal{A}$ функціоналу $I[\cdot]$ - єдиний.

Доведення. Припустимо, що $u, \tilde{u} \in \mathcal{A}$ є мінімізаторами функціоналу $I[\cdot]$. Тоді $v := \frac{u+\tilde{u}}{2} \in \mathcal{A}$. З умови опуклості (14.40) пта формули Тейлора випливає, що для всіх $x \in \Omega$, $p, q \in \mathbb{R}^n$

$$L(p, x) \geq L(q, x) + \nabla_p L(q, x) \cdot (p - q) + \frac{\theta}{2} |p - q|^2. \quad (14.41)$$

Покладемо спочатку в (14.41) $q = \frac{\nabla u + \nabla \tilde{u}}{2}$ і $p = \nabla u$ та проінтегруємо по області Ω :

$$\begin{aligned} I[v] + \int_{\Omega} \nabla_p L\left(\frac{\nabla u + \nabla \tilde{u}}{2}, x\right) \cdot \left(\frac{\nabla u - \nabla \tilde{u}}{2}\right) dx + \\ + \frac{\theta}{8} \int_{\Omega} |\nabla u - \nabla \tilde{u}|^2 dx \leq I[u] \end{aligned} \quad (14.42)$$

Тепер покладемо $q = \frac{\nabla u + \nabla \tilde{u}}{2}$, $p = \nabla \tilde{u}$ і знову проінтегруємо по Ω :

$$\begin{aligned} I[v] + \int_{\Omega} \nabla_p L\left(\frac{\nabla u + \nabla \tilde{u}}{2}, x\right) \cdot \left(\frac{\nabla \tilde{u} - \nabla u}{2}\right) dx + \\ + \frac{\theta}{8} \int_{\Omega} |\nabla u - \nabla \tilde{u}|^2 dx \leq I[\tilde{u}] \end{aligned} \quad (14.43)$$

Додавши нерівності (14.42) і (14.43) та поділивши на 2, отримаємо

$$I[v] + \frac{\theta}{8} \int_{\Omega} |\nabla u - \nabla \tilde{u}|^2 dx \leq \frac{I[u] + I[\tilde{u}]}{2}.$$

Оскільки $I[u] = I[\tilde{u}] = \min_{\omega \in \mathcal{A}} I[\omega] \leq I[v]$, то $\nabla(u - \tilde{u}) = 0$ м.с. на Ω . З того, що слід $u - \tilde{u}$ на $\partial\Omega$ рівний нулю маємо $u = \tilde{u}$ м.с. в Ω . ■

14.5. Узагальнені розв'язки рівняння Ойлера-Лагранжа

Далі покажемо, що будь-який мінімізатор $u \in \mathcal{A}$ функціоналу $I[\cdot]$ є узагальненим розв'язком рівняння Ойлера-Лагранжа. Цей факт не випливає з пункту 14.2., оскільки не відомо чи u є гладкою функцією ($u \in W^{1,q}(\Omega)$). Для цього, як буде видно з подальших викладок, потрібні умови на ріст лагранжіану L та його похідні, а саме

$$|L(p, z, x)| \leq C(|p|^q + |z|^q + 1), \quad (14.44)$$

та

$$\begin{cases} |\nabla_p L(p, z, x)| \leq C(|p|^{q-1} + |z|^{q-1} + 1), \\ |\nabla_z L(p, z, x)| \leq C(|p|^{q-1} + |z|^{q-1} + 1), \end{cases} \quad (14.45)$$

для деякої константи C і для всіх $p \in \mathbb{R}^n$, $z \in \mathbb{R}$, $x \in \Omega$.

Якщо функція u є гладким мінімізатором, то вона є розв'язком крайової задачі для рівняння Ойлера-Лагранжа:

$$\begin{cases} -\sum_{i=1}^n \left(L_{p_i}(\nabla u, u, x) \right)_{x_i} + L_z(\nabla u, u, x) = 0 & \text{в } \Omega \\ u = g & \text{на } \partial\Omega. \end{cases} \quad (14.46)$$

Домножимо (14.46) на довільну функцію $v \in C_0^\infty(\Omega)$ і проінтегруємо по області Ω . Отримаємо таку рівність

$$\int_{\Omega} \sum_{i=1}^n L_{p_i}(\nabla u, u, x) v_{x_i} + L_z(\nabla u, u, x) v dx = 0. \quad (14.47)$$

Тепер припустимо, що $u \in W^{1,q}(\Omega)$ і виясимо за яких умов інтеграли в (14.47) є скінченними. Використавши (14.45), отримаємо

$$|\nabla_p L(\nabla u, u, x)| \leq C(|\nabla u|^{q-1} + |u|^{q-1} + 1) \in L^{q'}(\Omega),$$

де $q' = \frac{q}{1-q}, \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$. Так само

$$|\nabla_z L(\nabla u, u, x)| \leq C(|\nabla u|^{q-1} + |u|^{q-1} + 1) \in L^{q'}(\Omega), \quad (14.48)$$

Отже, для існування інтегралів в (14.47) достатньо, щоб $v \in W_0^{1,q}(\Omega)$.

Таким чином, приходимо до такого означення.

Означення. Будемо говорити, що $u \in \mathcal{A}$ є слабким розв'язком рівняння Ойлера-Лагранжа (задачі (14.46)), якщо для всіх $v \in W_0^{1,q}(\Omega)$

$$\int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^n L_{p_i}(\nabla u, u, x) v_{x_i} + L_z(\nabla u, u, x) v \right) dx = 0 \quad (14.49)$$

Теорема 14.4. Нехай L задовольняє умови росту (14.44) і (14.45) та $u \in \mathcal{A}$ є мінімізатором, тобто

$$I[u] = \min_{\omega \in \mathcal{A}} I[\omega]$$

Тоді u є слабким розв'язком задачі (14.46).

Доведення. Зафіксуємо довільну функцію $v \in W_0^{1,q}(\Omega)$ і визначимо функцію

$$i(\tau) := I[u + \tau v], \quad \tau \in \mathbb{R}.$$

З (14.44) слідує, що функція $i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ визначена коректно.

Нехай $\tau \neq 0$, тоді

$$\begin{aligned} \frac{i(\tau) - i(0)}{\tau} &= \int_{\Omega} \frac{L(\nabla u + \tau \nabla v, u + \tau v, x) - L(\nabla u, u, x)}{\tau} dx = \\ &= \int_{\Omega} L^{\tau}(x) dx, \end{aligned} \quad (14.50)$$

де

$$L^{\tau}(x) := \frac{1}{\tau} [L(\nabla u(x) + \tau \nabla v(x), u(x) + \tau v(x), x) - L(\nabla u(x), u(x), x)].$$

Очевидно, що для майже всіх $x \in \Omega$

$$L^{\tau}(x) \rightarrow \sum_{i=1}^n L_{p_i}(\nabla u, u, x) v_{x_i} + L_z(\nabla u, u, x) v \quad (14.51)$$

при $\tau \rightarrow 0$. Крім того,

$$\begin{aligned} L^{\tau}(x) &= \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \frac{d}{ds} L(\nabla u + s \nabla v, u + s v, x) = \\ &= \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \left(\sum_{i=1}^n L_{p_i}(\nabla u + s \nabla v, u + s v, x) v_{x_i} + L_z(\nabla u + s \nabla v, u + s v, x) v \right) ds \end{aligned}$$

Використовуючи нерівність Юнга: $ab \leq \frac{a^q}{q} + \frac{b^{q'}}{q'}$, де $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$, та (14.45), отримаємо

$$|L^{\tau}(x)| \leq C(|\nabla u|^q + |u|^q + |\nabla v|^q + |v|^q + 1) \in L^1(\Omega)$$

для всіх $\tau \neq 0$. Отже, за допомогою теореми Лебега про мажоровану збіжність з (14.50) і (14.51) виводимо, що похідна $i'(0)$ існує. Оскільки функція $i(\cdot)$ досягає свого мінімуму в точці $\tau = 0$, то $i'(0) = 0$, або

$$0 = i'(0) = \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^n L_{p_i}(\nabla u, u, x) v_{x_i} + L_z(\nabla u, u, x) v \right) dx.$$

Ця тотожність означає, що u є узагальненим розв'язком задачі (14.46). ■

Відомо, що не кожен узагальнений розв'язок задачі (14.46) є мінімізатором функціонала $I[\cdot]$. Але за певних умов це може бути.

Лема 14.5. Нехай відображення $(p, z) \rightarrow L(p, z, x)$ є опуклим для всіх $x \in \Omega$. Тоді кожен розв'язок рівняння Ойлера-Лагранжа є мінімізатором функціонала $I[\cdot]$.

Доведення. Нехай u – узагальнений розв'язок задачі (14.46). Візьмемо довільну функцію $\omega \in \mathcal{A}$. Використовуючи опуклість відображення $(p, z) \rightarrow L(p, z, x)$, отримаємо

$$L(\nabla u, u, x) + \nabla_p L(\nabla u, u) \cdot (\nabla \omega - \nabla u) + L_z(\nabla u, u, x)(\omega - u) \leq L(q, \omega, x).$$

Проінтегруємо цю нерівність по Ω :

$$I[u] + \int_{\Omega} (\nabla_p L(\nabla u, u, x) \cdot (\nabla \omega - \nabla u) + L_z(\nabla u, u, x)(\omega - u)) dx \leq I[\omega]$$

З (14.49) випливає, що інтеграл в лівій частині останньої нерівності дорівнює нулю, і тому $I[u] \leq I[\omega]$ для всіх $\omega \in \mathcal{A}$. ■

15. Застосування варіаційної теорії до задач з обмеженнями

15.1. Нелінійні спектральні задачі

Будемо шукати мінімум інтегралу Діріхле

$$I[\omega] = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla \omega|^2 dx$$

на множині $\mathcal{A} = \{\varphi \in H_0^1(\Omega) : \mathcal{J}[\varphi] := \int_{\Omega} G(\varphi) dx = 0\}$, де задана функція $G: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ є гладкою і задовольняє таку нерівність

$$\exists c > 0 \forall t \in \mathbb{R} : |G'(t)| \leq c(|t| + 1). \quad (15.1)$$

Наприклад, функція $G(t) = t^2 + 10 \sin t - 2$ задовольняє нерівність (15.1).

Теорема 15.1. Нехай $\mathcal{A} \neq \emptyset$. Тоді

$$\exists u \in \mathcal{A} : I[u] = \inf_{\omega \in \mathcal{A}} I[\omega].$$

Доведення. Позначимо через $m := \inf_{\omega \in \mathcal{A}} I[\omega]$. Очевидно, що m - скінченне невід'ємне число. Виберемо мінімізуючу послідовність $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$: $\lim_{k \rightarrow +\infty} I[\varphi_k] = m$. Тоді

$$\exists c > 0 \forall k \in \mathbb{N} : 0 \leq I[\varphi_k] \leq c,$$

звідки випливає, що $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ - обмежена послідовність в $H_0^1(\Omega)$.

З того, що $H_0^1(\Omega) \subseteq L^2(\Omega)$ і $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ - обмежена послідовність в $H_0^1(\Omega)$ випливає, що існує підпослідовність $\{\varphi_{k_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ та $u \in H_0^1(\Omega)$:

$$\begin{cases} \varphi_{k_j} \rightharpoonup u \text{ слабо в } H_0^1(\Omega), & \text{при } j \rightarrow +\infty, \\ \varphi_{k_j} \rightarrow u \text{ сильно в } L^2(\Omega), & \text{при } j \rightarrow +\infty. \end{cases}$$

Легко перевірити, що лагранжیان

$$L(p, z, x) = \frac{1}{2} (p_1^2 + \dots p_n^2) = \frac{1}{2} |p|^2$$

є рівномірно опуклим та задовольняє умову (14.15). Тоді на підставі теореми 14.1. робимо висновок, що функціонал $I[\cdot]$ є слабо напів-неперервний знизу на $H_0^1(\Omega)$, а тому

$$I[u] \leq \lim_{j \rightarrow +\infty} I[\varphi_{k_j}] = m.$$

Для завершення доведення, потрібно показати, що $u \in \mathcal{A}$. Використовуючи (15.1), нерівність Фрідрікса (6.7) та обмеженість послідовності $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ в $H_0^1(\Omega)$, виводимо нерівність

$$\begin{aligned} |\mathcal{J}[u]| &= |\mathcal{J}[u] - \mathcal{J}[\varphi_{k_j}]| = \left| \int_{\Omega} (G(u) - G(\varphi_{k_j})) dx \right| \leq \\ &\leq c_1 \int_{\Omega} (|u(x)| + |\varphi_{k_j}(x)| + 1) |u(x) - \varphi_{k_j}(x)| dx \leq \\ &\leq c_2 \|u - \varphi_{k_j}\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Оскільки $\varphi_{k_j} \rightarrow u$ в $L^2(\Omega)$ при $j \rightarrow +\infty$, то $\mathcal{J}[u] = 0$, тобто $u \in \mathcal{A}$. ■

Знайдемо рівняння Ойлера-Лагранжа для нашого мінімізанта u .

Теорема 15.2. Нехай $u \in \mathcal{A}$, функція $g := G'$ -ліпшицева (див. (2.6))
i

$$I[u] = \min_{\omega \in \mathcal{A}} I[\omega]. \quad (15.2)$$

Тоді існує число $\lambda \in \mathbb{R}$ таке, що

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx = \lambda \int_{\Omega} g(u) v dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (15.3)$$

Зауваження. Інтегральна тотожність (15.3) означає, що u – узагальнений розв'язок нелінійної крайової задачі

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda g(u) & \text{в } \Omega \\ u = 0 & \text{на } \partial\Omega, \end{cases} \quad (15.4)$$

де λ є множником Лагранжа, який відповідає інтегральному обмеженню $\mathcal{J}[u] = 0$. Крайова задача (15.4) з невідомою функцією $u \not\equiv 0$ та числом λ називається нелінійною задачею на власні значення.

Доведення. 1. Припустимо, що $g(u)$ не дорівнює нулю м.с. в Ω . Тоді існує функція $\omega \in H_0^1(\Omega)$ така, що

$$\int_{\Omega} g(u) \omega \, dx \neq 0. \quad (15.5)$$

Візьмемо довільну функцію $v \in H_0^1(\Omega)$ і визначимо функцію

$$j(\tau, \sigma) := \mathcal{J}[u + \tau v + \sigma \omega] = \int_{\Omega} G(u + \tau v + \sigma \omega) \, dx \quad (\tau, \sigma \in \mathbb{R}). \quad (15.6)$$

Оскільки $u \in \mathcal{A}$, то

$$j(0,0) = \int_{\Omega} G(u) \, dx = 0. \quad (15.7)$$

Так само, як в § 14.5, на підставі (15.1) перевіряємо, що $j \in C^1(\mathbb{R}^2)$, і знаходимо похідні

$$\frac{\partial j(\tau, \sigma)}{\partial \tau} = \int_{\Omega} g(u + \tau v + \sigma \omega) v \, dx, \quad (15.8)$$

$$\frac{\partial j(\tau, \sigma)}{\partial \sigma} = \int_{\Omega} g(u + \tau v + \sigma \omega) \omega \, dx. \quad (15.9)$$

Використовуючи (15.5), отримаємо

$$\frac{\partial j}{\partial \sigma}(0,0) \neq 0. \quad (15.10)$$

З теореми про неявну функцію, випливає, що існує таке додатне число τ_0 функція $\phi \in C^1(-\tau_0, \tau_0)$ така, що

$$\phi(0) = 0 \quad (15.11)$$

і

$$j(\tau, \phi(\tau)) = 0 \quad \forall \tau \in (-\tau_0, \tau_0). \quad (15.12)$$

Продиференціювавши (15.12), отримаємо

$$\frac{\partial j(\tau, \phi(\tau))}{\partial \tau} + \frac{\partial j(\tau, \phi(\tau))}{\partial \sigma} \cdot \phi'(\tau) = 0,$$

звідки, на підставі (15.8), (15.9) та (15.10), випливає

$$\phi'(0) = - \frac{\int_{\Omega} g(u) v \, dx}{\int_{\Omega} g(u) \omega \, dx}. \quad (15.13)$$

2. З (15.12) випливає, що

$$\mathcal{J}[u + \tau v + \phi(\tau) \omega] = 0 \quad \forall \tau \in (-\tau_0, \tau_0).$$

Тому для всіх $\tau \in (-\tau_0, \tau_0)$ функція $u + \tau v + \phi(\tau) \omega \in \mathcal{A}$. Визначимо функцію

$$i(\tau) := I[u + \tau v + \phi(\tau) \omega] \quad \forall \tau \in (-\tau_0, \tau_0).$$

Зрозуміло, що функція $i(\cdot)$ досягає мінімуму в точці 0. Тому

$$\begin{aligned}
0 &= i'(0) = \\
&= \int_{\Omega} (\nabla u + \tau \nabla v + \phi(\tau) \nabla \omega) \cdot (\nabla v + \phi'(\tau) \nabla \omega) dx \Big|_{\tau=0} \\
&= \int_{\Omega} \nabla u \cdot (\nabla v + \phi'(0) \nabla \omega) dx.
\end{aligned} \tag{15.14}$$

Згадаємо тепер (15.13) і визначимо

$$\lambda := \frac{\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \omega dx}{\int_{\Omega} g(u) \omega dx}.$$

Тоді рівність (15.14) перепишеться у вигляді.

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx = \lambda \int_{\Omega} g(u) v dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

3. Припустимо тепер, що $g(u) = 0$ м.с. в Ω . Тоді $G(u) = g(u) \nabla u = 0$ м.с. в Ω , звідки слідує, що $G(u)$ – стала м.с. в Ω . Оскільки $J[u] = \int_{\Omega} G(u(x)) dx = 0$, то $G(u(x)) = 0$ для майже всіх $x \in \Omega$. Оскільки слід $Tu = 0$ на $\partial\Omega$ і $T(G(u)) = G(Tu)$, то $G(0) = 0$. Але тоді $u = 0$ м.с. в Ω . В протилежному випадку $I[u] > I[0] = 0$, а значить u не є мінімізантом. Таким чином, $u = 0$ м.с. в Ω і тотожність (15.3) стає тривіальною та виконується для будь-яких $\lambda \in \mathbb{R}$. ■

15.2. Односторонні обмеження та варіаційні нерівності.

Розглянемо задачу мінімізації функціоналу енергії

$$I[\omega] := \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} |\nabla \omega|^2 - f \cdot \omega \right) dx \tag{15.15}$$

серед всіх функцій ω , які належать до множини

$$\mathcal{A} := \{\omega \in H_0^1(\Omega) \mid \omega \geq h \text{ м.с. в } \Omega\}, \tag{15.16}$$

де задана функція $f \in L^2(\Omega)$, а функція $h: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, яка називається обмеженням, належить до простору $C_0^\infty(\Omega)$. Легко перевірити, що множина $\mathcal{A}$ є опуклою.

Теорема 15.3. (Існування мінімізатора). Припустимо, що допустима множина $\mathcal{A}$ є непорожня. Тоді існує єдина функція $u \in \mathcal{A}$, яка задовольняє

$$I[u] = \min_{\omega \in \mathcal{A}} I[\omega].$$

Доведення. 1. Позначимо через $m := \inf_{\omega \in \mathcal{A}} I[\omega]$. Покажемо, що m – скінченне число. Для цього потрібно показати, що функціонал I є коерцитивним. Використовуючи нерівність Коші-Буняковського, нерівність Фрідрікса (6.7) та нерівність Коші з довільним додатнім числом ε ($ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{1}{4\varepsilon} b^2$, $a, b \geq 0$), виводимо

$$\begin{aligned} I[\varphi] &\geq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 dx - \|f\|_{L^2(\Omega)} \cdot C_1 \|\nabla \varphi\|_{L^2(\Omega)} \geq \\ &\geq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 dx - \varepsilon \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 dx - \frac{C_1^2}{4\varepsilon} \|f\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Взявши $\varepsilon = \frac{1}{4}$ в цій нерівності, отримаємо нерівність (14.16) з $q = 2$.

Виберемо мінімізуючу послідовність $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ і покажемо, що вона обмежена в просторі $H_0^1(\Omega)$. Оскільки $\lim_{k \rightarrow +\infty} I[\varphi_k] = m$ і m – скінченне число, то

$$\exists C > 0 \quad \forall k \in \mathbb{N} : |I[\varphi_k]| \leq C.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left| \int_{\Omega} |\nabla \varphi_k|^2 dx \right| &\leq |I[\varphi_k]| + \|f\|_{L^2(\Omega)} \cdot C_1 \|\nabla \varphi_k\|_{L^2(\Omega)} \leq \\ &\leq C + \varepsilon \int_{\Omega} |\nabla \varphi_k|^2 dx + \frac{C_1^2}{4\varepsilon} \|f\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Знову взявши $\varepsilon = \frac{1}{4}$, отримаємо, що $\|\nabla \varphi_k\|_{L^2(\Omega)} \leq C_2$ для всіх $k \in \mathbb{N}$.

Тоді існує підпослідовність $\{\varphi_{k_j}\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ та функція $u \in H_0^1(\Omega)$, що $\varphi_{k_j} \rightharpoonup u$ слабо в $H_0^1(\Omega)$ і $\varphi_{k_j} \rightarrow u$ сильно в $L^2(\Omega)$, бо $H_0^1(\Omega) \subseteq L^2(\Omega)$. З цієї підпослідовності можна вибрати підпослідовність (позначимо її знову через $\{\varphi_{k_j}\}$), яка буде збігатися до u м.с. в області Ω . Згадуючи, що $\varphi_{k_j} \geq h$ м.с., виводимо, що $u \geq h$ м.с. в Ω . Отже, $u \in \mathcal{A}$.

Далі існування мінімізатора слідує з загальних ідей, висвітлених раніше в пункті 12.4.

2. Зараз доведемо єдиність. Припустимо u і $\tilde{u} \in \mathcal{A}$ – два мінімізатори, і $u \not\equiv \tilde{u}$. Тоді $\omega := \frac{u+\tilde{u}}{2} \in \mathcal{A}$ та

$$\begin{aligned} I[\omega] &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left| \left(\frac{\nabla u + \nabla \tilde{u}}{2} \right) \right|^2 dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} f \cdot (u + \tilde{u}) dx = \\ &= \frac{1}{8} \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + 2\nabla u \cdot \nabla \tilde{u} + |\nabla \tilde{u}|^2) dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} f u dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} f \tilde{u} dx. \end{aligned}$$

Використавши векторну рівність $2a \cdot b = |a|^2 + |b|^2 - |a - b|^2$, маємо

$$\begin{aligned}
I[\omega] &= \frac{1}{8} \int_{\Omega} (2|\nabla u|^2 + 2|\nabla \tilde{u}|^2 - |\nabla u - \nabla \tilde{u}|^2) dx - \\
&- \frac{1}{2} \int_{\Omega} f u dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} f \tilde{u} dx = \frac{1}{2} I[u] + \frac{1}{2} I[\tilde{u}] - \frac{1}{8} \int_{\Omega} |\nabla u - \nabla \tilde{u}|^2 dx \\
&= m - \frac{1}{8} \int_{\Omega} |\nabla u - \nabla \tilde{u}|^2 dx < m.
\end{aligned}$$

Ця нерівність – строга, бо $u \not\equiv \tilde{u}$, а це приводить до протиріччя з тим, що u і $\tilde{u}$ – мінімізатори. ■

Теорема 15.4. (Варіаційна характеристика мінімізатора). Нехай $u \in \mathcal{A}$ – єдиний розв'язок

$$I[u] = \min_{\omega \in \mathcal{A}} I[\omega].$$

Тоді

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla (\omega - u) dx \geq \int_{\Omega} f(\omega - u) dx \quad \forall \omega \in \mathcal{A}. \quad (15.17)$$

Нерівність (15.17) називають варіаційною нерівністю.

Доведення. Зафіксуємо довільну функцію $\omega \in \mathcal{A}$. Тоді для кожного $\tau \in [0, 1]$

$$u + \tau(\omega - u) = (1 - \tau)u + \tau\omega \in \mathcal{A},$$

оскільки $\mathcal{A}$ – опукла множина. Якщо визначити функцію

$$i(\tau) := I[u + \tau(\omega - u)] \quad \forall \tau \in [0, 1],$$

то $i(0) \leq i(\tau)$ для всіх $\tau \in [0, 1]$. Тому, якщо існує похідна функції i , то

$$i'(0) \geq 0. \quad (15.18)$$

Для всіх $\tau \in (0, 1]$

$$\frac{i(\tau) - i(0)}{\tau} = \frac{1}{\tau} \int_{\Omega} \frac{|\nabla u + \tau \nabla(\omega - u)|^2 - |\nabla u|^2}{2} dx - \int_{\Omega} f \cdot (\omega - u) dx =$$

$$= \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla (\omega - u) dx + \tau \int_{\Omega} \frac{|\nabla(\omega - u)|^2}{2} dx - \int_{\Omega} f \cdot (\omega - u) dx.$$

З цієї рівності випливає, що існує похідна функції i , а тому на підставі (15.18)

$$0 \leq i'(0) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla (\omega - u) - f(\omega - u) dx \quad \forall \omega \in \mathcal{A}.$$

Теорема доведена. ■

Визначимо диференціальні співвідношення, які відповідають варіаційній нерівності (15.17). Легко перевірити, що множина

$$G_1 := \{x \in \Omega : u(x) > h(x)\}$$

є відкритою, а множина $G_2 := \{x \in \Omega : u(x) = h(x)\}$ – замкнена.

Зафіксуємо довільну функцію $v \in C_0^\infty(G_1)$. Тоді існує число $\tau_0 > 0$, що для всіх $\tau \in (-\tau_0, \tau_0)$ функція $\omega := u + \tau v \geq h$, і тому $\omega \in \mathcal{A}$. Підставимо її в (15.17). Тоді

$$\tau \int_{G_1} \nabla u \cdot \nabla v \, dx \geq \tau \int_{G_1} f v \, dx \quad \forall \tau \in (-\tau_0, \tau_0).$$

Це означає, що фактично має місце така рівність

$$\int_{G_1} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{G_1} f v \, dx \quad \forall v \in C_0^\infty(G_1).$$

Таким чином, на підставі гладкості узагальнених розв'язків лінійних задач, з попередньої рівності випливає, що

$$-\Delta u = f \text{ м.с. в } G_1. \quad (15.19)$$

Нехай тепер $v \in C_0^\infty(\Omega)$ і $v \geq 0$. Тоді функція $\omega := u + \tau v \in \mathcal{A}$ для всіх $\tau \in (0, 1]$ і якщо її підставити в (15.17), то

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx \geq \int_{\Omega} f v \, dx.$$

В [?,Розділ 4] доведено, що узагальнені розв'язки варіаційної нерівності (15.17) належать простору $W^{2,\infty}(\Omega)$. Тому проінтегрувавши частинами, отримаємо $\int_{\Omega} (-\Delta u - f) v \, dx \geq 0$ для всіх невід'ємних функцій $v \in C_0^\infty(\Omega)$. Таким чином

$$-\Delta u \geq f \text{ м.с. в } \Omega. \quad (15.20)$$

Об'єднуючи (15.19) і (15.20), приходимо до таких диференціальних співвідношень:

$$\begin{cases} -\Delta u \geq f, & u \geq h, & \text{м.с. в } \Omega \\ -\Delta u = f & \text{на } \Omega \cap \{u > h\}. \end{cases}$$

Зауваження. Множина $F := \partial G_1 \cap \Omega$ називається вільною межею. Багато цікавих задач в прикладній математиці, наприклад, в гідрогеології, в теорії пластичності, в теорії розповсюдження тріщин у пружних середовищах, в задачах оптимального керування, пов'язані з крайовими задачами з вільною межею.

15.3. Гармонічні відображення

В цьому параграфі будемо мінімізувати функціонал енергії

$$I[\mathbf{w}] := \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{w}|^2 dx \quad (15.21)$$

серед функцій, які належать до множини

$$\mathcal{A} := \{\mathbf{w} \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^m) \mid \mathbf{w} = \mathbf{g} \text{ на } \partial\Omega, \quad |\mathbf{w}| = 1 \text{ м. с.}\}. \quad (15.22)$$

Тут $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n)$ – вектор-функція, яка діє з області $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ на одиничну сферу $S^{m-1} = \partial B_1(0) \subset \mathbb{R}^m$. Кожна її компонента w_i належить до простору $H^1(\Omega)$. Коротко цей факт будемо записувати $\mathbf{w} \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^m)$. Задана вектор-функція $\mathbf{g}$ також належить $H^1(\Omega; \mathbb{R}^m)$. Такі задачі є математичними моделями поведінки рідких кристалів, а функції з множини $\mathcal{A}$ називаються гармонічними відображеннями.

Нагадаємо, що градієнтом від функції $\mathbf{w} \in H^1(\Omega; \mathbb{R}^m)$ є матриця

$$\nabla \mathbf{w} = \begin{pmatrix} \frac{\partial w_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial w_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial w_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial w_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Якщо $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}$ і $\mathbf{B} = \{b_{ij}\}$ – $m \times n$ -матриці, то

$$\mathbf{A} : \mathbf{B} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ij}.$$

Тоді $|\nabla \mathbf{w}|^2 = \nabla \mathbf{w} : \nabla \mathbf{w} = |\nabla w_1|^2 + \dots + |\nabla w_m|^2$.

Теорія з параграфів 14.2. та 14.4 без змін переноситься на функціонали

$$I[\mathbf{w}] := \int_{\Omega} L(\nabla \mathbf{w}(x), \mathbf{w}(x), x) dx,$$

з Лагранжианами $L: \mathbb{M}^{m \times n} \times \mathbb{R}^m \times \bar{\Omega} \mapsto \mathbb{R}$, де $\mathbb{M}^{n \times m}$ – множина $m \times n$ -матриць. Лагранжیان для функціоналу (15.21) має вигляд

$$L = L(\mathbf{P}, \mathbf{z}, x) = \frac{1}{2} |\mathbf{P}|^2, \quad \mathbf{P} \in \mathbb{M}^{m \times n}.$$

Легко перевірити, що такий Лагранжیان задовольняє умову (14.15) та відображення $\mathbf{P} \mapsto L(\mathbf{P})$ є рівномірно опуклим. Тому згідно з теоремами 14.2 і 14.3 існує єдиний мінімізатор $\mathbf{u} \in \mathcal{A}$ для функціонала (15.21).

Теорема 15.5. (Рівняння Ойлера-Лагранжа для гармонічних відображень). Нехай $\mathcal{A} \neq \emptyset$ і $\mathbf{u} \in \mathcal{A}$ задовольняє

$$I[\mathbf{u}] = \min_{\mathbf{w} \in \mathcal{A}} I[\mathbf{w}].$$

Тоді

$$\int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} \, dx = \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{u}|^2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, dx \quad (15.23)$$

для всіх $\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega; \mathbb{R}^m) \cap L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^m)$.

Зауваження. Якщо взяти в тотожності (15.23) тестову функцію у вигляді $\mathbf{v} = (v_1, 0, \dots, 0)$, де $v_1 \in H_0^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, то отримаємо таку тотожність:

$$\int_{\Omega} \nabla u_1 \cdot \nabla v_1 \, dx = \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{u}|^2 u_1 v_1 \, dx,$$

яка означає, що при певній гладкості u_1 , має місце рівність $-\Delta u_1 = |\nabla \mathbf{u}|^2 u_1$ майже скрізь в Ω . Таким чином, тотожність (15.23) вказує на те, що $\mathbf{u} = (u^1, \dots, u^m)$ – узагальнений розв'язок крайової задачі

$$\begin{cases} -\Delta \mathbf{u} = |\nabla \mathbf{u}|^2 \mathbf{u} & \text{в } \Omega \\ \mathbf{u} = \mathbf{g} & \text{на } \partial\Omega. \end{cases}$$

Доведення. Зафіксуємо $\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega; \mathbb{R}^m) \cap L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^m)$. Оскільки $|\mathbf{u}| = 1$ та $\mathbf{v}$ обмежена м.с. в Ω , то існує число $\tau_0 > 0$, що для всіх $\tau \in (-\tau_0, \tau_0)$

$$|\mathbf{u} + \tau \mathbf{v}| \neq 0 \text{ м.с.}$$

Тому для всіх $\tau \in (-\tau_0, \tau_0)$ коректно визначена вектор-функція

$$\mathbf{w}_\tau = \frac{\mathbf{u} + \tau \mathbf{v}}{|\mathbf{u} + \tau \mathbf{v}|} \in \mathcal{A}.$$

Зрозуміло, що скалярна функція

$$i(\tau) := I[\mathbf{w}_\tau] \quad \forall \tau \in (-\tau_0, \tau_0),$$

досягає мінімуму в $\tau = 0$ та $i'(0) = 0$. Знайдемо цю похідну. Знову використовуючи, що $|\mathbf{u}| = 1$ м.с. в Ω , виводимо рівність

$$\begin{aligned} 0 = i'(0) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{|\nabla \mathbf{u} + \tau \nabla \mathbf{v}|^2}{|\mathbf{u} + \tau \mathbf{v}|^2} \right) \Big|_{\tau=0} dx = \\ &= \int_{\Omega} \frac{(\nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v}) |\mathbf{u}|^2 - |\nabla \mathbf{u}|^2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}|^4} dx = \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} - |\nabla \mathbf{u}|^2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, dx, \end{aligned}$$

яка співпадає з (15.23). ■

Список літератури

1. Арнольд В.И., Обыкновенные дифференциальные уравнения – Ижевск: Удм.ГУ, 2000. - 368 с.
2. Будақ Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. Сборник задач по математической физике. – М.:Наука, 2003
3. Березанский Ю.М., Ус Г.Ф., Шефтель З.Г. Функциональный анализ. Курс лекций. – К.: Высшая школа, 1990.
4. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1981.
5. Гаевский Х., Грегер К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. - . М.: Мир, 1978.
6. Гильбарт Д., Трудингер Н. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. – М. : Наука, 1989.
7. Гончаренко В.М. Основи теорії рівнянь з частинними похідними. – К.: Вища школа, 1995.
8. Гончаренко В.М. Нелинейные задачи для уравнений с частными производными. – Черновцы: Рута, 2000.
9. Івасишен С.Д., Лавренчук В.П., Івасюк Г.П. та ін. Основи класичної теорії рівнянь математичної фізики: навчальний посібник – Чернівці: Видавничий дім "РОДОВІД", 2015.- 358 с.
10. Івасишен С.Д., Лавренчук В.П., Готинчан Т.І., Мельничук Л.М. Рівняння математичної фізики: основні методи, приклади, задачі: навчальний посібник – Чернівці: Видавничий дім "Родовід", 2016.- 212 с.
11. Иосида К. Функциональный анализ. – М.: Мир, 1967.
12. Жиков В.В. О вариационных задачах и нелинейных эллиптических уравнениях с нестандартными условиями роста. – Том 11: Белая серия в математике и физике. – Новосибирск: Тамара Рожковская 2017.
13. Киндерлерер Д., Стампаккья Г. Введение в вариационные неравенства и их приложения – М.: Мир, 1983.
14. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М. : Наука, 1981.

15. Ковалевский А.А., Скрыпник И.И., Шишков А.Е. Сингулярные решения нелинейных эллиптических и параболических уравнений. – Том 2, Серия «Задачи и методы: Математика, Механика, Кибернетика». – К.: Наукова Думка, 2010.
16. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. – М.: Наука, 1973.
17. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1967.
18. Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа (2-е изд.). – М.: Наука, 1973.
19. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М.: Мир, 1972.
20. Лопатинский Я.Б. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – К.: Вища школа, 1984.
21. Мазья В.Г. Пространства С.Л. Соболева. – Л.: Изд-во Ленингр. Ун-та, 1985.
22. Мельник Т.А. Простори Соболева та узагальнені розв'язки задач математичної фізики: Навчальний посібник. – К.: ВПЦ «Київський університет», 2006.
23. Мельник Т.А. Простори Соболева та узагальнені розв'язки задач математичної фізики: Методичні вказівки до самостійної роботи зі спеціального курсу. – К.: ВПЦ «Київський університет», 2005.
24. Методичні вказівки до практичних занять із дисципліни "Диференціальні рівняння з частинними похідними" для студентів механіко-математичного факультету / Упорядники: Крєневич А.П., Ловейкін А.В. – К.: ВПЦ "Київський Університет", 2016. – 25 с.
25. Михайлець В.А., Мурач А.А. Пространства Хермандера, интерполяция и эллиптические задачи // Праці Інституту НАН України. – 2010. – Т.84.
26. Михлин С.Г. Курс математической физики. – М.: Наука, 1968.
27. Михлин С.Г. Линейные уравнения в частных производных. – М.: Высшая школа, 1977.
28. Михлин С.Г. - Вариационные методы в математической физике – М.: Наука, 1970
29. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. – М.: Наука, 1983.
30. Олейник О.А., Радкевич Е.В. Уравнения с неотрицательной характеристической формой. – М.: Изд-во Московского университета, 2010.

31. Перестюк М.О., Маринець В.В. Теорія рівнянь математичної фізики. Навч. посібник. – К.: Либідь, 2001. – 336 с.
32. Ректорис К. Вариационные методы в математической физике и технике. – М.: Мир, 1985. – 590 с.
33. Романенко І.Б. Диференціальні рівняння з частинними похідними : Навчально-методичні вказівки до практичних занять. – К.: ВПЦ «Київський університет», 2008.
34. Самойленко А.М., Перестюк М.О., Парасюк І.О. Диференціальні рівняння. Підручник. 2-е видання – Київ: Либідь, 2003. 600 с.
35. Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк М.О. Диференціальні рівняння у прикладах і задачах. – Київ: Вища школа, 1994.
36. Самойленко В.Г., Конет І.М. Рівняння математичної фізики. – ВПЦ «Київський університет», 2014.
37. Скрыпник И.В. Методы исследования нелинейных эллиптических граничных задач. – М.: Наука, 1990.
38. Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. – 3-е изд., перераб. и доп./Под ред. О.А. Олейник. – М.: Наука, 1988.
39. Степанов В. Курс дифференциальных уравнений. – М.: Гос. издательство технико-теоретической литературы, 1950, 473 ст.
40. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики: учебное пособие для студентов физ.-мат. спец. ун-тов. М., Изд-во МГУ, 1999. 798с. – изд. 6-е.
41. Brezis H. Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations. – Springer: Heidelberg, London, 2011.
42. Evans L.C.. Partial differential equations. – Vol. 19: Graduate Studies in Math. – American Mathematical Society, 1999.
43. Hebey E. Nonlinear analysis on manifolds: Sobolev spaces and inequalities. – Vol. 5: Lecture notes – Courant Institute of Mathematical Sciences and American Mathematical Society, 2000.
44. Krylov N.V. Lectures on elliptic and parabolic equations in Hölder spaces. – Vol. 12: Graduate Studies in Math. – American Mathematical Society, 1996.
45. Maý J., Ziemer W.P. Fine regularity of solutions of elliptic partial differential equations. – Vol. 51: Mathematical Surveys and Monographs – American Mathematical Society, 1997.

46. Taylor M.E. Partial differential equations I. Basic theory. – Vol. 115: Applied Mathematical Sciences – Springer, 1997.

47. Taylor M.E. Partial differential equations II. Qualitative studies of linear equations. – Vol. 116: Applied Mathematical Sciences – Springer, 1997.

48. Taylor M.E. Partial differential equations III. Nonlinear equations. – Vol. 117: Applied Mathematical Sciences – Springer, 1997.

49. Showalter R.E. Monotone operators in Banach space and nonlinear partial differential equations. s – Vol. 49: Mathematical Surveys and Monographs – American Mathematical Society, 1997.

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА	3
Основні позначення і терміни	5
ЧАСТИНА 1. ТЕОРІЯ ПРОСТОРІВ СОБОЛЕВА.....	6
1. ОЗНАЧЕННЯ ПРОСТОРІВ СОБОЛЕВА ТА ЇХ НАЙПРОСТІШІ ВЛАСТИВОСТІ	6
1.2. Узагальнені похідні	7
1.3. Означення просторів Соболева	10
2 . НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ ІЗ ПРОСТОРІВ СОБОЛЕВА ГЛАДКИМИ ФУНКЦІЯМИ	14
2.1. Усереднені функції.....	14
2.2. Наближення гладкими функціями функцій із $Wk, p(\Omega)$	18
3 . ПРОДОВЖЕННЯ ФУНКЦІЙ ІЗ ПРОСТОРІВ СОБОЛЕВА.....	23
4 . ПРОСТОРИ СОБОЛЕВА $H1(a, b)$ ТА $H01(a, b)$	27
5 . ОПЕРАТОРИ СЛІДУ	32
6 . НЕРІВНОСТІ В ПРОСТОРАХ СОБОЛЕВА. ТЕОРЕМА СОБОЛЕВА .	35
6.1. Випадок $p \in [1, n)$	36
6.2. Випадок $n < p \leq +\infty$	40
6.3. Загальна теорема Соболева	44
7. Теорема Релліха – Кондрашова про компактні вкладавання та наслідки з неї	47
8. Спряжені простори до просторів Соболева	49
9. Простори Соболева залежні від часу.....	52
ЧАСТИНА 2. УЗАГАЛЬНЕНІ РОЗВ'ЯЗКИ ЛІНІЙНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ	60
10. ЕЛІПТИЧНІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ	60
10.1. Узагальнений розв'язок задачі Діріхле	61
10.2. Узагальнений розв'язок задачі Робена	66
10.3. Узагальнений розв'язок задачі Робена у випадку, коли дані задачі належать $Lp, p < 2$	71
10.4. Узагальнений розв'язок однорідної задачі Неймана	72
10.5. Спектральні властивості еліптичного оператора.....	75
Властивості власних значень і узагальнених власних функцій першої крайової задачі.....	80
Властивості власних значень і узагальнених власних функцій третьої та другої крайових задач	83
Система власних функцій крайової задачі як базис простору $L2\Omega$	86
10.6. Існування розв'язків неоднорідної задачі Неймана	88
11. ГІПЕРБОЛІЧНІ РІВНЯННЯ	91

11.1. Мішана задача для гіперболічного рівняння	92
11.2. Єдиність узагальненого розв'язку.....	97
11.3. Існування узагальненого розв'язку. Метод Фур'є	100
12. ПАРАБОЛІЧНІ РІВНЯННЯ	110
12.1. Мішана задача для параболічного рівняння	111
12.2. Єдиність узагальненого розв'язку.....	116
12.3. Існування узагальненого розв'язку.....	118
13. ВАРІАЦІЙНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ЧАСТИННИМИ	122
13.1. Метод Рітца та його застосування для еліптичних рівнянь	122
ЧАСТИНА 3. НЕЛІНІЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ.....	133
14. Варіаційний метод Ойлера-Лагранжа.....	134
14.1. Основні ідеї.....	134
14.2. Перша варіація, рівняння Ойлера-Лагранжа	134
14.3. Друга варіація та опуклі функції.....	137
14.4. Коерцитивність. Напівнеперервність знизу	139
14.5. Узагальнені розв'язки рівняння Ойлера-Лагранжа.....	145
15. Застосування варіаційної теорії до задач з обмеженнями ..	148
15.1. Нелінійні спектральні задачі	148
15.2. Односторонні обмеження та варіаційні нерівності.	151
15.3. Гармонічні відображення.....	155
Список літератури.....	157