КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

М. А. Разумова, В. М. Хотяїнцев

ОСНОВИ ВЕКТОРНОГО І ТЕНЗОРНОГО АНАЛІЗУ

Навчальний посібник

*Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України
як навчальний посібник
для студентів фізичних спеціальностей університетів*

КИЇВський ВПЦ УНІВЕРСИТЕТ
2011

УДК 514.742.4+514.743.4(075.8)
ББК 22.151.51я73
Р17

Рецензенти:
д-р фіз.-мат. наук, проф. М. Ф. Городній,
д-р фіз.-мат. наук, проф. С. Й. Вільчинський,
канд. фіз.-мат. наук, доц. А. В. Чайковський

*Рекомендовано до друку вченою радою
фізичного факультету
(протокол № 11 від 29 червня 2010 року)*

Разумова, М. А.
Р17 Основи векторного і тензорного аналізу: навчальний посібник / М. А. Разумова, В. М. Хотяїнцев. – К. : Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2011. – 216 с.

ISBN 978-966-439-114-4

Подано теоретичний курс з основ векторного і тензорного аналізу, приклади розв'язувань типових задач, задачі для самостійного опрацювання з відповідями та вказівками до їх розв'язання. Видання спрямовано на оволодіння стилем і підходами до роботи з векторами й тензорами, які є типовими для фізики.

Для студентів, аспірантів, викладачів фізичних та інженерно-фізичних спеціальностей.

УДК 514.742.4+514.743.4(075.8)
ББК 22.151.51я73

Гриф надано Міністерством освіти і науки України
(Лист №1/11-12318 від 30.12.10)

ISBN 978-966-439-114-4

Передмова

Навчальний посібник підготовлено викладачами кафедри теоретичної фізики фізичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Він відображає багаторічний досвід викладання на фізичному факультеті дисципліни "Основи векторного і тензорного аналізу" (ОВТА), яка входить до математичного циклу дисциплін для студентів фізичних спеціальностей. Посібник підготовлено фізиками і для фізиків, він відповідає програмі з математики для фізичних спеціальностей і орієнтований на подальше використання матеріалу в теоретичній фізиці.

На нашу думку, основним пріоритетом у математичній підготовці фізиків має бути поєднання математичних знань з фізичним способом мислення. Для того, щоб молода людина стала фізиком, у процесі здобуття освіти математичний апарат має інтегруватися у фізичний спосіб мислення, що поступово формується, і ставати його органічною частиною. Саме так ми і намагаємось будувати курс ОВТА, із цих позицій написано і цей посібник. Зазначимо окремі моменти, важливі для викладачів.

Для фізика за вектором і тензором завжди стоїть реальний об'єкт, а тому вектор (тензор) – не тотожний набору чисел. Вектор (тензор) – це єдиний об'єкт, який може бути заданий різними способами, залежно від контексту, а набір компонент є лише його зображенням у певному базисі, користуватись яким у розглядуваній задачі може бути зручно або ні. На нашу думку, це має принципове значення для фізики. Скрізь, де це можливо, ми намагаємось уникати прямолінійного використання координатного підходу, а натомість демонструємо можливості інших геометричних і аналітичних способів задання і роботи з векторами (тензорами). Це враховується вже на рівні постановок задач, по можливості їх сформульовано без звернення до конкретної системи координат, як це і прийнято у фізиці.

Важливо, що саме такий погляд на вектори має своє логічне продовження у квантовій механіці, особливістю якої є специфічний спосіб задання стану, а саме: стану квантової системи ставиться у відповідність вектор у гільбертовому просторі, що може мати різні зображення в різних базисах, а це відповідає різним представленням у квантовій механіці. Не менш важливим є і розуміння як цілісних об'єктів таких ненаочних величин як 4-вектори і 4-тензори у спеціальній теорії відносності, саме тому, що для них використовується майже виключно координатний підхід.

Векторне і тензорне числення мають не лише суто прикладне значення як підготовка необхідної бази для класичної механіки чи електродинаміки. Саме тут, на прикладі звичайних векторів і найпростіших тензорів другого рангу, студенти в елементарній формі знайомляться з потужною ідеєю ортогональності, власними векторами та іншими фундаментальними ідеями та поняттями, які пізніше мають розвиток у математичній фізиці, теорії операторів та функціональному аналізі.

У цілому видання спрямовано на практичні потреби фізиків, на оволодіння студентами таким стилем і підходами до роботи з векторами і тензорами, які характерні саме для фізики, зокрема, при вивченні університетських нормативних навчальних дисциплін із теоретичної фізики.

Посібник орієнтовано на студентів молодших курсів, які вже знайомі з лінійною алгеброю, основною частиною математичного аналізу, основами векторної алгебри.

Автори вдячні колегам із кафедри теоретичної фізики Київського національного університету імені Тараса Шевченка за цінні зауваження та пропозиції, ураховані під час укладання посібника.

Вступ

Метою і завданням навчальної дисципліни "Основи векторного і тензорного аналізу" є ознайомлення з методами векторного та тензорного аналізу, ідеями, на яких вони ґрунтуються, та формування у студентів навичок роботи з різними геометричними об'єктами, які є базовими у математичному апараті теоретичної фізики, насамперед класичної механіки, електродинаміки та квантової механіки, а також формування у студентів фізичного мислення на основі відповідних математичних понять.

Предметом дослідження є групи величин, які називаються *тензорами*.

Поняття тензора (від латинського слова *tendo – напружую, розтягую*) належить до основних фундаментальних математичних понять і широко застосовується в механіці, електродинаміці, теорії відносності. Виникло в роботах XIX ст. із теорії пружності, систематично досліджено в 1886–1901 рр. італійським геометром Г. Річчі-Курбастро (1853–1925) та його учнем – італійським математиком та механіком Т. Лéві-Чівíта (1873–1941). Увага до нового апарату (тензорного аналізу) значно зросла після створення в 1915–1916 р. А. Ейнштейном (1879–1955) загальної теорії відносності, математична частина якої цілком базується на тензорному численні.

Тензори – це певні геометричні об'єкти, які розглядаються у просторі певної геометрії.

Наведемо означення лінійного (афінного, векторного) простору. Нехай є множина R з елементами $A, B, C, \ldots$, і нехай у R задані операція додавання, що ставить у відповідність парі A та B однозначно визначений елемент $A+B$, та операція множення на число α із деякого поля чисел. Введені операції повинні задовольняти вісім аксіом:

1. $A+B=B+A$.
2. $(A+B)+C=A+(B+C)$.

3. Існує нульовий елемент простору 0 такий, що $A+0=A$.

4. Існує обернений елемент простору $(-A)$ такий, що $A+(-A)=0$.

5. $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$.

6. $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$.

7. $(\alpha\beta)A=\alpha(\beta A)$.

8. $1\cdot A=A$.

Лінійний простір, визначений цими аксіомами, може бути як скінченновимірним, так і нескінченновимірним.

Основна частина цього посібника відповідає практичним потребам абсолютної більшості майбутніх фізиків і присвячена розгляду векторів та тензорів у тривимірному дійсному лінійному просторі R_3, у якому визначено скалярний добуток векторів та довжина (норма) вектора як корінь квадратний зі скалярного добутку вектора самого на себе. Такий простір ми будемо називати евклідовим і позначати E_3. Це простір класичної фізики, яка виходить із уявлень про абсолютний тривимірний простір, що існує незалежно від тих матеріальних об'єктів, що знаходяться в ньому, і підкоряється законам евклідової геометрії. У кінці посібника ми зупинимося на просторі спеціальної теорії відносності – чотиривимірному псевдоевклідовому просторі, точками якого є події з компонентами (*ct, x, y, z*), – так званому просторі Мінковського. Тензорний аналіз у ріманових просторах, на думку авторів, доцільно викладати пізніше, при вивченні загальної теорії відносності й теорії гравітації.

Розділ 1
Векторна алгебра

§ 1. Означення вектора та основні операції над векторами у безкоординатному підході

1.1 Означення вектора

Існує два основні підходи або два способи представлення векторів та операцій над ними – координатний та безкоординатний. Вектор a зазвичай позначають як $\vec{a}$.

Означення 1. **Вектором** у E_3 називається величина, яка характеризується: 1) невід'ємним числом (так званим модулем або абсолютним значенням), що визначає її у певних одиницях міри; 2) напрямком у просторі; 3) підкоряється певним правилам геометричного додавання (правилу паралелограма) та множення на число[1].

Отже, перший спосіб задання вектора $\vec{a}$ – через модуль $a = |\vec{a}|$ і напрямок. Якщо $\vec{e}$ – одиничний вектор ($|\vec{e}| = 1$), що задає напрям вектора $\vec{a}$, то $\vec{a}$ можна подати у вигляді

$$\vec{a} = a\vec{e}, \qquad \vec{e} = \frac{\vec{a}}{a}.$$

Вектори є однаковими, якщо їх модулі та напрямки збігаються. Запис $\vec{a} = \vec{0}$ або $\vec{a} = 0$ означає, що модуль $|\vec{a}| = 0$ і напрямок вектора невизначений.

Природа векторів (фізичних векторних величин) може бути різною. Прикладом найпростішого вектора є так званий геометричний вектор – напрямлений відрізок.

---

[1]Згадані правила додавання і множення векторів на число підкоряються аксіомам лінійного векторного простору (див. Вступ).

Довільний вектор – це не обов'язково напрямлений відрізок, але кожному вектору можна *поставити у відповідність* деякий напрямлений відрізок, який має напрямок розглядуваного вектора і довжину, що дорівнює числовому значенню його модуля (у певному масштабі). Це зручний спосіб зображення вектора. При цьому операціям із векторами відповідатимуть операції із відповідними напрямленими відрізками. Таким чином, в основі поняття вектора або векторної величини лежить поняття *геометричного вектора,* яке належить до основних понять простору. Саме з них зазвичай починають знайомство з векторами у школі та в курсі аналітичної геометрії.

Звідси випливає інше означення вектора.

Означення 2. **Векторна фізична величина** – це фізична величина, кожному значенню якої можна поставити у відповідність геометричний вектор так, щоб операціям із цими фізичними величинами відповідали операції із відповідними геометричними векторами.

Ідея векторного числення полягає у тому, щоб установити таку відповідність та геометризувати фізичне мислення: різної природи фізичним векторним величинам поставити у відповідність напрямлені відрізки і виконувати операції із ними наочно і за універсальними правилами.

Прикладом відмінного від напрямленого відрізка об'єкта геометричної природи, який можна розглядати як вектор, є векторний елемент площі – частина площини, обмежена контуром, на якому задано додатний напрямок обходу (форма контуру значення не має). Елемент площі зобразимо вектором, довжина якого дорівнює площі S, яка обмежена контуром, а напрямок збігається з напрямком додатної нормалі до площини. При цьому, за домовленістю, додатною вважається нормаль, із вістря якої обхід контуру в додатному напрямку виглядає як такий, що здійснюється проти руху годинникової стрілки[2]. Позначимо вектор, що зображає елемент площі, через $\vec{S} = S\,\vec{n}$, де $\vec{n}$ – одиничний вектор

---

[2]Такий вибір додатної нормалі відповідає також так званому правилу гвинта: гвинт (із правою різьбою), вісь якого перпендикулярна до площини, обертаючись у напрямку обходу контуру, поступально рухається в напрямку додатної нормалі.

у напрямку додатної нормалі (рис. 1.1). Виконання правила додавання векторів (третій пункт означення 1) для елементів площі забезпечує така теорема.

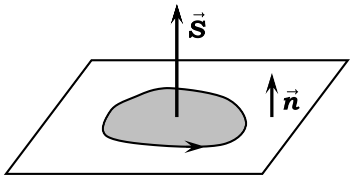

Рис. 1.1. Векторний елемент площі

Векторна сума елементів площі для замкненої поверхні (тобто вектор замкненої поверхні) дорівнює нулю.

Цю теорему достатньо довести для тетраедра (приклад 1 із п. 1.2), оскільки довільний багатогранник можна розбити на ряд тетраедрів. Застосувавши теорему до кожного із тетраедрів, а потім додавши результати, отримаємо: сума векторів усіх граней багатогранника плюс сума всіх векторів додаткових граней, які утворилися у результаті розбиття багатогранника на тетраедри, дорівнює нулю. Але оскільки кожна додаткова грань одночасно є гранню для двох тетраедрів, причому для першого тетраедра за зовнішню нормаль до неї ми повинні прийняти один напрямок нормалі, а для другого – протилежний напрямок, то сума векторів, кожен з яких відповідає додатковій грані, дорівнює нулю. І як результат, сума векторів усіх граней багатогранника, що власне і є вектором замкненого багатогранника, дорівнює нулю.

Оскільки у поверхню довільної форми можна вписати ряд нескінченно малих багатогранників із гранями, площі яких прямують до нуля, то для вектора її поверхні в результаті граничного переходу теж отримаємо нуль.

Уточнимо, що векторний елемент площі є псевдовектором (див. розд. 5, § 1).

1.2. Основні операції над векторами у безкоординатному підході та їх властивості

1. *Сума векторів* $\vec{a}+\vec{b}$ (рис. 1.2) знаходиться за правилом паралелограма (паралельним перенесенням до кінця першого вектора треба прикласти початок другого і з'єднати початок першого із кінцем другого). Правило паралелограма для геометричної суми векторів обмежує множину величин, що характеризуються напрямком, які можна назвати векторами.

Наприклад, поворот твердого тіла навколо будь-якої осі на скінченний кут, здавалося б, можна задати напрямленим відрізком, але це не буде вектор, тому що два послідовні повороти навколо різних осей складаються не за правилом паралелограма, а за більш складним правилом. При цьому результат поворотів залежить від послідовності їх виконання, у той час як при додаванні векторів $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$. Така відмінність пояснюється тим, що обертання твердого тіла на скінченний кут описується певною матрицею. Зазначимо, що нескінченно малі повороти можна представляти векторами, тому що для них правило паралелограма справедливе.

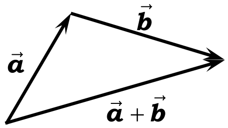

Рис. 1.2.
Сума векторів

2. *Добуток вектора на дійсне число* $c\vec{a}$ – це вектор, що має напрямок $\vec{a}$, якщо $c>0$, і протилежний напрямок, якщо $c<0$, та $|c\vec{a}|=|c||\vec{a}|$.

3. *Проекція вектора на вісь* $\vec{u}$: $a_u = a\cos\alpha$ – це довжина відрізка (рис. 1.3), що відсікається на осі перпендикулярними до неї площинами, проведеними через кінці вектора $\vec{a}$, взята зі знаком "+" або "–", якщо напрямок вектора $\vec{a}_u$ (рис. 1.3) збігається з $\vec{u}$ або протилежний до $\vec{u}$, відповідно. Тут α – кут між векторами $\vec{a}$ та $\vec{u}$, $0\le\alpha\le\pi$.

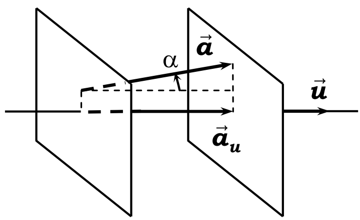

Рис. 1.3 до визначення проекції вектора на вісь

4. *Скалярний добуток* $\vec{a}\cdot\vec{b}$ є числом, вирахуваним за формулою

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = ab\cos\alpha = a_b b = ab_a .$$

Тут $a_b = a\cos\alpha$, $b_a = b\cos\alpha$ – проекції векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ на напрямок іншого (рис. 1.4). Якщо вектор $\vec{u}$ – одиничний, то $\vec{a}\cdot\vec{u}=a_u$. У фізиці скалярний добуток векторів, наприклад, визначає роботу сили, потік вектора через поверхню тощо.

Основні властивості скалярного добутку[3]:

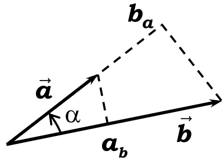

Рис. 1.4. Проекція одного вектора на напрямок іншого

1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$;

2) $\vec{a}\cdot\vec{a}=\left|\vec{a}\right|^2=a^2$;

3) $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$, якщо $\vec{a}=0$ або $\vec{b}=0$, або вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ перпендикулярні (ортогональні);

4) $\sum\limits_{i=1}^{p}\vec{a}_i\cdot\sum\limits_{j=1}^{r}\vec{b}_j=\sum\limits_{i=1}^{p}\sum\limits_{j=1}^{r}\vec{a}_i\cdot\vec{b}_j$;

5) $(m\vec{a}\cdot n\vec{b})=mn(\vec{a}\cdot\vec{b})=n(\vec{a}\cdot m\vec{b})=m(n\vec{a}\cdot\vec{b})$.

Необхідною і достатньою умовою **ортогональності** ненульових векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ є рівність нулю їх скалярного добутку $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.

5. *Векторний добуток* $\vec{a}\times\vec{b}$ – це вектор, який дорівнює векторному елементу площі паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (рис. 1.5). Векторний добуток є перпендикулярним площині векторів-співмножників і утворює з $\vec{a}$, $\vec{b}$ так звану праву[4] трійку векторів. Його модуль дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$, тобто $\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\sin\alpha$. Тут α – найменший кут між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$, $0\le\alpha\le\pi$. Використовуватимемо для векторного добутку векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ позначення: $\vec{a}\times\vec{b}$, хоча в літературі зустрічаються й інші позначення, зокрема, $[\vec{a}\times\vec{b}]$, $[\vec{a},\vec{b}]$, $(\vec{a}\times\vec{b})$.

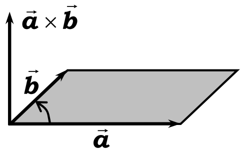

Рис. 1.5. Векторний добуток

Приклади векторних добутків: момент сили є добутком радіус-вектора точки її прикладання на вектор-силу $\vec{N}=\vec{r}\times\vec{F}$, лі-

[3]У літературі для скалярного добутку векторів використовується також позначення $(\vec{a}\cdot\vec{b})$ або $(\vec{a},\vec{b})$.

[4]Для правої (лівої) трійки векторів $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ поворот від $\vec{e}_1$ до $\vec{e}_2$ на менший кут ($\le\pi$) здійснюється проти годинникової стрілки (за годинниковою стрілкою), якщо дивитись із кінця вектора $\vec{e}_3$.

нійна швидкість точки тіла, що обертається, є векторним добутком кутової швидкості на радіус-вектор точки відносно нерухомого полюса $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$.

Основні властивості векторного добутку:

1) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$;

2) $\vec{a} \times \vec{a} = 0$;

3) $\vec{a} \times \vec{b} = 0$, якщо $\vec{a} = 0$ або $\vec{b} = 0$, або вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ колінеарні;

4) $\sum\limits_{i=1}^{p} \vec{a}_i \times \sum\limits_{j=1}^{r} \vec{b}_j = \sum\limits_{i=1}^{p} \sum\limits_{j=1}^{r} \vec{a}_i \times \vec{b}_j$;

5) $m\vec{a} \times n\vec{b} = mn(\vec{a} \times \vec{b}) = n(\vec{a} \times m\vec{b}) = m(n\vec{a} \times \vec{b})$.

Необхідною і достатньою умовою **колінеарності** відмінних від нуля векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ є рівність нулю їх векторного добутку $\vec{a} \times \vec{b} = 0$.

Приклад 1. Нехай у тетраедрі із площами граней s_1, s_2, s_3, s_4 проведено чотири вектори $\vec{S}_1$, $\vec{S}_2$, $\vec{S}_3$, $\vec{S}_4$ у напрямку зовнішніх нормалей до граней. Довжини векторів відповідно дорівнюють площам граней $\left|\vec{S}_i\right| = s_i$. Показати, що $\vec{S}_1 + \vec{S}_2 + \vec{S}_3 + \vec{S}_4 = 0$, тобто векторна сума елементів площі для поверхні тетраедра дорівнює нулю.

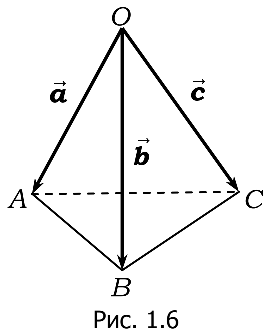

Рис. 1.6
до прикладу 1

Розв'язання. Із вершини тетраедра проведемо три допоміжні вектори (рис. 1.6). Векторні елементи площі виражаються через відповідні векторні добутки: для бічних граней $\vec{S}_1 = \vec{a} \times \vec{b}/2$, $\vec{S}_2 = \vec{b} \times \vec{c}/2$, $\vec{S}_3 = \vec{c} \times \vec{a}/2$; для трикутника ABC $\vec{S}_4 = (\vec{c} - \vec{a}) \times (\vec{b} - \vec{a})/2$. Тоді

$$2(\vec{S}_1 + \vec{S}_2 + \vec{S}_3 + \vec{S}_4) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a} + (\vec{c} - \vec{a}) \times (\vec{b} - \vec{a}) = 0 .$$

6. *Мішаний добуток* $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ і має такий геометричний зміст: він дорівнює об'єму паралелепіпеда (рис. 1.7), побудованого на векторах $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, узятому зі знаком "+", якщо $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ утворюють праву трійку векторів, та зі знаком "–", якщо ліву. Коли під знаком мішаного добутку зустрічаються два однакові вектори, то такий мішаний добуток дорівнює нулю (неможливо побудувати паралелепіпед на двох векторах).

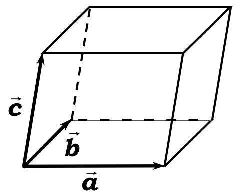

Рис. 1.7. Мішаний добуток

Основні властивості мішаного добутку:

1) $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=(\vec{b},\vec{c},\vec{a})=(\vec{c},\vec{a},\vec{b})$;

2) $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=-(\vec{c},\vec{b},\vec{a})=-(\vec{a},\vec{c},\vec{b})=-(\vec{b},\vec{a},\vec{c})$;

3) $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=0$, якщо $\vec{a}=\vec{0}$ або $\vec{b}=\vec{0}$, або $\vec{c}=\vec{0}$, або вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ – компланарні, тобто лежать у паралельних площинах;

4) $(\alpha\vec{a}+\beta\vec{d},\vec{b},\vec{c})=\alpha(\vec{a},\vec{b},\vec{c})+\beta(\vec{d},\vec{b},\vec{c})$;

5) $(m\vec{a},n\vec{b},\vec{c})=mn(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=n(\vec{a},m\vec{b},\vec{c})=m(n\vec{a},\vec{b},\vec{c})$;

6) $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$, тобто в мішаному добутку можна міняти місцями знаки скалярного та векторного множення.

Необхідною та достатньою умовою **компланарності** трійки відмінних від нуля векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$ є рівність нулю їх мішаного добутку $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=0$.

7. *Подвійний векторний добуток* $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ – це вектор, який, з одного боку, є перпендикулярним до $\vec{a}$, а з іншого, є перпендикулярним до $\vec{b}\times\vec{c}$, тобто до нормалі площини, яка визначається векторами $\vec{b}$ та $\vec{c}$. Він є компланарним до векторів $\vec{b}$ і $\vec{c}$.

Оскільки вектор $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ перпендикулярний до $\vec{a}$ і лежить у площині векторів $\vec{b}$ та $\vec{c}$, то його можна розкласти за цими векторами так, що

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=n\vec{b}+m\vec{c}, \tag{1.1}$$

де m, n – скалярні величини, які знайдемо далі.

Для знаходження m, помножимо (1.1) скалярно на вектор $\vec{b}'$ (рис. 1.8), який є перпендикулярним до $\vec{b}$ ($\vec{b}\cdot\vec{b}'=0$) і лежить у площині векторів $\vec{b}$ та $\vec{c}$ (вектор $\vec{c}$ – поміж векторами $\vec{b}$, $\vec{b}'$) так, що $\vec{b}$, $\vec{b}'$ та $\vec{b}\times\vec{c}$ утворюють праву трійку векторів. Тоді

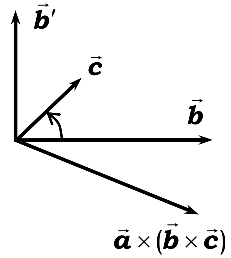

Рис. 1.8. Подвійний векторний добуток лежить у площині векторів $\vec{b}$, $\vec{c}$

$$\vec{b}'\cdot(\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}))=m(\vec{b}'\cdot\vec{c}). \tag{1.2}$$

Використаємо циклічну перестановку у мішаному добутку:

$$\vec{b}'\cdot(\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}))=\vec{a}\cdot((\vec{b}\times\vec{c})\times\vec{b}') \tag{1.3}$$

і безпосередньо обчислимо $(\vec{b}\times\vec{c})\times\vec{b}'$.

Векторний добуток $\vec{b}\times\vec{c}$ перпендикулярний до площини, у якій лежить вектор $\vec{b}'$, а його довжина дорівнює $\left|\vec{b}\times\vec{c}\right|=bc\sin(\vec{b},\vec{c})$, тому

$$\left|(\vec{b}\times\vec{c})\times\vec{b}'\right|=bcb'\sin(\vec{b},\vec{c})\ =bcb'\cos(\vec{b}',\vec{c})=b(\vec{b}'\cdot\vec{c})$$

(оскільки $\vec{b}'$ та $\vec{b}$ – перпендикулярні, то $\sin(\vec{b},\vec{c})=\cos(\vec{b}',\vec{c})$), а

$$(\vec{b}\times\vec{c})\times\vec{b}'=-\vec{b}(\vec{b}',\vec{c}) \tag{1.4}$$

(напрямок вектора $(\vec{b}\times\vec{c})\times\vec{b}'$ протилежний до напрямку вектора $\vec{b}$, оскільки вектори $\vec{b}$, $\vec{b}'$ та $\vec{b}\times\vec{c}$ за домовленістю утворюють праву трійку векторів). Із (1.2) з урахуванням (1.3), (1.4) знаходимо, що

$$m=-(\vec{a}\cdot\vec{b}). \tag{1.5}$$

Щоб знайти n, перепишемо формулу (1.1) у вигляді

$$\vec{a}\times(\vec{c}\times\vec{b})=-m\vec{c}-n\vec{b}. \tag{1.6}$$

Порівнюючи (1.6) із (1.1) та застосовуючи щойно знайдений результат (1.5), зразу отримуємо

$$n=(\vec{a}\cdot\vec{c}), \tag{1.7}$$

так, що кінцева формула має вигляд

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{b}\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)-\vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b}). \tag{1.8}$$

Ця формула залишається справедливою і при колінеарності векторів $\vec{b}$ та $\vec{c}$, коли права та ліва частини обертаються на нуль. Зазначимо, що у подвійному векторному добутку порядок множення є принциповим. Наприклад, обчислюючи $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$, отримаємо зовсім інший вектор

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=-\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c})-\vec{a}(\vec{c}\cdot\vec{b}),$$

такий, який лежить у площині векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, на відміну від вектора $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$, що знаходиться у площині векторів $\vec{b}$ та $\vec{c}$.

Сформулюємо для запам'ятовування правило розкриття подвійного векторного добутку словами: *перший вектор внутрішнього векторного добутку множимо на скалярний добуток тих векторів, що залишились, і віднімаємо другий вектор внутрішнього векторного добутку, помножений на скалярний добуток тих векторів, що залишились.*

Формула (1.8) легко виводиться у координатному підході.

1.3. Розкладання вектора на поздовжню та поперечну складові відносно виділеного напрямку

Основним методом роботи з векторами є розкладання векторів на складові. Вибір складових має приводити до спрощення розв'язування задачі. Якщо у розглядуваній задачі є виділені напрямки, зручно складові вибирати паралельними до цих напрямків. Найпростіший варіант такого розкладання виникає тоді, коли в задачі є лише один виділений напрямок.

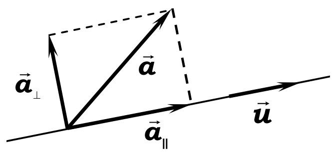

Рис. 1.9. Розкладання вектора на поздовжню та поперечну складові

Розкладання вектора на поздовжню та поперечну складові відносно виділеного напрямку, який задається одиничним вектором $\vec{u}$, виконується за формулою

$$\vec{a}=\vec{a}_{||}+\vec{a}_{\perp}.$$

Поздовжня складова вектора $\vec{a}$ – вектор $\vec{a}_{||}$ – напрямлений паралельно до $\vec{u}$, а його проекція (див. п. 1.2, операції 3, 4) визначається скалярним добутком $\vec{a}$ та $\vec{u}$, тому

$$\vec{a}_{||} = (\vec{a} \cdot \vec{u})\vec{u} \, .$$

Поперечна складова вектора

$$\vec{a}_{\perp} = \vec{a} - \vec{a}_{||} = \vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{u})\vec{u} = \vec{a}(\vec{u} \cdot \vec{u}) - \vec{u}(\vec{a} \cdot \vec{u}) \, .$$

Вираз праворуч є розкритим подвійним векторним добутком, тобто його можна переписати у вигляді

$$\vec{a}_{\perp} = \vec{u} \times (\vec{a} \times \vec{u}) \, .$$

Таким чином, довільний вектор у тривимірному просторі можна представити у вигляді такого розкладу:

$$\vec{a} = \vec{a}_{||} + \vec{a}_{\perp} = \vec{u}(\vec{a} \cdot \vec{u}) + \vec{u} \times (\vec{a} \times \vec{u}), \quad |\vec{u}| = 1. \tag{1.9}$$

Координатний (див. § 2) і безкоординатний підходи є взаємно доповнювальними. Переваги безкоординатного підходу полягають у тому, що *безкоординатна форма* задання та виконання операцій із векторами є більш компактною та наочною. Вона безпосередньо відображає зміст векторних величин та співвідношень між ними як інваріантних, тобто таких, що не залежать від конкретного вибору систем координат. До них належать, наприклад, такі:

$m\dfrac{d\vec{v}}{dt} = e\vec{E} + e\vec{v} \times \vec{B}$ – рівняння руху зарядженої частинки в електричному $\vec{E}$ та магнітному полях $\vec{B}$,

$(\vec{r} \cdot \vec{n}) = \alpha$ – рівняння площини, що перпендикулярна до одиничного вектора $\vec{n}$ і проходить на відстані α від початку координат.

Застосування координатного методу дозволяє вивчати геометричні об'єкти не безпосередньо, а досить розвиненими методами алгебри (в аналітичній геометрії) та аналізу (у диференціальній геометрії). Цим шляхом удається досить легко отримати ряд результатів, безпосереднє доведення яких у загальному випадку неможливе або надто громіздке. Однак у координатному методі кожний вектор задається своїми координатами, які залежать уже не тільки від самого вектора, але й від розглядуваної координатної системи (див. п. 2.4). Можна сказати, що вони є зображенням вектора у цій системі координат. Координатний метод дозволяє також вивчати більш складні об'єкти – *тензори*, які є узагальненням поняття вектора.

Властивості геометричних або фізичних об'єктів, що не залежать від вибору системи координат, у якій ці об'єкти вивчаються, називаються їх *інваріантними властивостями*. Саме такі властивості і є цікавими для вивчення. Основне завдання векторного та тензорного числення і полягає у тому, щоб навчитися відокремлювати результати, що відносяться до самих об'єктів, від тих, які привнесено вибором системи координат.

§ 2. Координатний метод

2.1. Координатний підхід

Координатний підхід вимагає використання певної системи координат, яка задається початком відліку та базисними векторами. На першому етапі (розділи 1–3) обмежимося лише прямолінійними декартовими (прямокутними) системами координат (ПДСК).

Зауважимо, що у векторному і тензорному численні широко застосовуються індексні позначення, тобто величини з індексами, верхніми та нижніми. У ПДСК немає необхідності розрізняти верхні та нижні індекси, тому використовуємо тільки нижні.

Згідно з аксіомою розмірності у тривимірному просторі існує рівно три лінійно незалежні вектори. Виберемо їх одиничними та ортогональними:

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}, \tag{1.10}$$

де $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j \end{cases}$ – символ Кро́некера, корисне позначення, яке ввів у 1866 р. німецький математик Л. Кро́некер (1823–1891). Вектори $\vec{e}_i$ ($i = 1, 2, 3$ або $i = x, y, z$) називаються **ортами** системи координат і утворюють базис або репер. Вони ж задають напрямки осей ПДСК: Ox_1, Ox_2, Ox_3 (або Ox, Oy, Oz). Зауважимо, що у випадку декартової системи координат існує кілька способів позначення векторів базису. Вибір позначень мотивується зручністю використання у конкретній задачі $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\} \equiv \{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\} \equiv \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. Початок відліку – точка O, у якій перетинаються осі ПДСК, має значення лише для визначення радіус-вектора та декартових координат точки x_1, x_2, x_3 (або x, y, z). Оскільки всякий четвертий вектор $\vec{a}$ є лінійно залежним від $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, то довільний вектор $\vec{a}$ можна подати у вигляді розкладу за цим базисом[5]:

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3. \tag{1.11}$$

Числа a_1, a_2, a_3 називають **координатами** вектора $\vec{a}$ у даній системі координат, а вектори $a_1\vec{e}_1$, $a_2\vec{e}_2$, $a_3\vec{e}_3$ – його **складовими** вздовж координатних осей. Зауважимо, що для векторів термін **компоненти** вживають також як синонім слова координати. Помножимо (1.11) скалярно на $\vec{e}_1$ і одержимо

$$\vec{a} \cdot \vec{e}_1 = a_1, \tag{1.12}$$

де $a_1 = a\cos\alpha_1$ – проекція вектора $\vec{a}$ на вісь (Ox_1). Тобто компоненти вектора у ПДСК – це проекції на осі. Отже, із формул (1.11), (1.12) випливає, що у конкретній ПДСК вектор може бути повністю заданим набором своїх координат і, навпаки, набір координат у конкретній ПДСК повністю визначає вектор. Звичайно це записують як $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ або $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$, що є одне й те саме. Зауважимо, що перший запис не слід розуміти як тотожність лівої та правої частин, а лише як взаємно однозначну відповідність між вектором і набором його координат. Подібні записи читають так: "вектор $\vec{a}$ з набором координат a_1, a_2, a_3". Детальніше про це сказано у п. 2.5. В евклідовому просторі, вибравши певну точку O за початок відліку, можна кожній точці простору поставити у відповідність її радіус-вектор $\vec{r} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$. Тут x_1, x_2, x_3 – декартові координати точки у цій системі координат, для яких зазвичай використовують позначення x, y, z. Зауважимо, що у ПДСК індексами, які позначають компоненти вектора, можуть бути не цифри, а відповідні осям маленькі латинські букви: $\vec{a}(a_x, a_y, a_z)$.

---

[5]Термін "базис" є загальним для всіх лінійних просторів. Вважають, що множина векторів (базисних векторів) у цьому лінійному векторному просторі утворює базис, якщо довільний вектор із такого простору можна подати у вигляді лінійної комбінації базисних векторів. У нескінченновимірних та функціональних просторах лінійна комбінація заміняється рядом.

2.2. Правила запису індексних виразів. Вільні та німі індекси

Надалі приймемо таку угоду про підсумовування. *Якщо один і той самий латинський індекс під знаком суми зустрічається двічі, то знак суми опускаємо.* Наприклад:

$$\vec{a} = \sum_{i=1}^{n} a_i \vec{e}_i \equiv a_i \vec{e}_i\,, \quad \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_{ii} \equiv \varepsilon_{ii}\,,$$

де n – розмірність простору. Якщо індекси, що повторюються, позначені грецькими літерами, то за умовчуванням (за відсутності знака суми) підсумовування немає.

Індекс, за яким здійснюється підсумовування, називається **німим індексом**. Назва "німий" тут означає буквально "той, що нічого не говорить". Тобто німий індекс не несе ніякої інформації. Він лише вказує, за якою саме парою індексів здійснюється підсумовування. Букву, котрою він позначається в цій парі індексів, можна замінити іншою:

$$a_i \vec{e}_i \equiv a_k \vec{e}_k \equiv a_j \vec{e}_j\,.$$

Індекс, який зустрічається один раз, називають **вільним індексом**. У будь-якому виразі кожен із доданків повинен мати одні й ті самі вільні індекси, а позначення вільних і німих індексів в одному виразі збігатися не можуть. Наприклад:

$$x_i = a_{ik} b_k + c_{jki} u_{jk}\,.$$

В іншому випадку такий вираз не має змісту.

Пізніше, при розгляді косокутних та криволінійних систем координат, ми введемо верхні та нижні індекси. Тоді в кожному доданку має бути один і той самий набір вільних індексів як за найменуваннями, так і за позиціями (вгорі або внизу), а пара німих індексів складатиметься із верхнього та нижнього індексів.

Букви, якими позначено вільні індекси, також можна довільно заміняти на інші, але в усіх доданках одночасно. Наприклад, останній вираз можна переписати у вигляді:

$$x_l = a_{lk} b_k + c_{jkl} u_{jk}\,. \tag{1.13}$$

Кожний вільний індекс набуває значень від 1 до n (n – розмірність простору). Таким чином, у (1.13) одночасно записано n співвідношень, а якщо вираз містить k вільних індексів, то в ньому, відповідно, – n^k співвідношень.

2.3. Операції над векторами у координатному підході

Усі операції з векторами, запроваджені в § 1, можна здійснювати і у координатному підході. При цьому координатний підхід вимагає, щоб усі вектори, які беруть участь у цій операції, були задані в одній і тій самій системі координат.

Маємо *рівність векторів* ($\vec{a} = \vec{b}$), якщо в деякій системі координат їх відповідні компоненти однакові: $a_i = b_i$.

Отримуємо *нуль-вектор* ($\vec{0}$ або 0) або вектор $\vec{a} = 0$, якщо всі його компоненти дорівнюють нулю.

Інші операції здійснюються таким чином:

$$\vec{a} + \vec{b} = \left(a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3\right). \tag{1.14}$$

$$\alpha\vec{a} = \left(\alpha a_1, \alpha a_2, \alpha a_3\right). \tag{1.15}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3. \tag{1.16}$$

Довжиною (нормою) дійсного вектора $\vec{a}$ називається число

$$a \equiv |\,\vec{a}\,| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}},$$

яке визначається через скалярний добуток вектора самого на себе;

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = e_{ijk} a_i b_j c_k, \tag{1.17}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = e_{ijk} a_i b_j \vec{e}_k, \tag{1.18}$$

де e_{ijk} – символ Ле́ві-Чіві́та, визначений таким чином:

$$e_{ijk} = \begin{cases} +1, \text{ якщо } i, j, k \text{ складають циклічний порядок;} \\ -1, \text{ якщо } i, j, k \text{ складають антициклічний порядок;} \\ \ \ 0, \text{ якщо серед } i, j, k \text{ є однакові значення.} \end{cases} \tag{1.19}$$

Приклади циклічних порядків із чисел 1, 2, 3: 123, 231, 312; антициклічних: 213, 321, 132; циклічних порядків із латинських букв: *x,y,z*: *xyz, yzx, zxy*; антициклічних: *yxz, zyx, xzy*. На практиці доцільно замість визначника (1.18) користуватися компактною формулою для знаходження конкретної компоненти векторного добутку:

$[\vec{a}\times\vec{b}]_i = a_j b_k - a_k b_j$, де i, j, k складають циклічний порядок, наприклад, $[\vec{a}\times\vec{b}]_x = a_y b_z - a_z b_y$.

Наведемо корисну векторну тотожність

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})(\vec{d},\vec{e},\vec{f}) = \begin{vmatrix} \vec{a}\cdot\vec{d} & \vec{b}\cdot\vec{d} & \vec{c}\cdot\vec{d} \\ \vec{a}\cdot\vec{e} & \vec{b}\cdot\vec{e} & \vec{c}\cdot\vec{e} \\ \vec{a}\cdot\vec{f} & \vec{b}\cdot\vec{f} & \vec{c}\cdot\vec{f} \end{vmatrix} \tag{1.20}$$

та її доведення.

Оскільки мішаний добуток векторів записується визначником матриці, компонентами якої є відповідні координати векторів (див. (1.17)), то використовуючи такі властивості визначників: $\det B = \det B^T$ $(B^T_{ij} = B_{ji})$, $\det A\cdot\det B^T = \det(A\cdot B^T)$, знаходимо

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})(\vec{d},\vec{e},\vec{f}) = \det A\cdot\det B = \det A\cdot\det B^T = \det(AB^T),$$

$$\det(AB^T) = \det\left(\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d_1 & e_1 & f_1 \\ d_2 & e_2 & f_2 \\ d_3 & e_3 & f_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{vmatrix} \vec{a}\cdot\vec{d} & \vec{a}\cdot\vec{e} & \vec{a}\cdot\vec{f} \\ \vec{b}\cdot\vec{d} & \vec{b}\cdot\vec{e} & \vec{b}\cdot\vec{f} \\ \vec{c}\cdot\vec{d} & \vec{c}\cdot\vec{e} & \vec{c}\cdot\vec{f} \end{vmatrix}.$$

2.4. Циклічний базис

Циклічний базис є зручним для опису векторів, що обертаються, зокрема при розгляді руху заряджених частинок у магнітному полі, світла циркулярної поляризації тощо. Вираз для розкладання довільного вектора $\vec{a}$ за векторами циклічного базису

$$\vec{e}_\pm = \frac{\vec{e}_x \pm i\vec{e}_y}{\sqrt{2}}, \quad \vec{e}_0 = \vec{e}_z \tag{1.21}$$

має вигляд

$$\vec{a} = a_-\vec{e}_+ + a_+\vec{e}_- + a_0\vec{e}_0. \tag{1.22}$$

Циклічні компоненти $a_\pm$, a_0 пов'язані з декартовими формулами:

$$a_\pm = \frac{a_x \pm i a_y}{\sqrt{2}}, \; a_0 = a_z, \; a_x = \frac{a_+ + a_-}{\sqrt{2}}, \; a_y = \frac{a_+ - a_-}{i\sqrt{2}}.$$

Для зарядженої частинки в постійному магнітному полі $\vec{B} = B\vec{e}_z$ векторне рівняння руху розпадається на три окремі рівняння для циклічних компонент вектора швидкості $\vec{v}$. Вектор $\vec{v}$ є дійсним, тому $v_- = v_+^*$ і декартові координати v_x, v_y знаходяться як $v_x = \sqrt{2}\,\mathrm{Re}\, v_+$, $v_y = \sqrt{2}\,\mathrm{Im}\, v_+$.

Розглянемо векторну монохроматичну плоску хвилю. Її поле

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{A}e^{i\vec{k}\vec{r} - i\omega t} + \text{к.с.}$$

є дійсним (тут $\vec{k}$ і ω – дійсні величини, к.с. – комплексно-спряжений до першого доданка вираз), але вектор амплітуди $\vec{A}$ є комплексним, оскільки $\vec{A}$ несе інформацію не лише про амплітуди, а й про відносні фази всіх компонент поля. Нехай хвиля є поперечною, наприклад, світлова хвиля у вакуумі або в ізотропному прозорому середовищі. Тоді $\vec{A}$ має лише перпендикулярні до хвильового вектора $\vec{k}$ складові. Направимо вісь Oz паралельно $\vec{k}$. Відмінність ситуації від руху в магнітному полі полягає в тому, що відповідні циклічні компоненти комплексної амплітуди $\vec{A}$ тепер незалежні. Вектори поляризації, що відповідають циркулярно поляризованому світлу, зазвичай визначаються формулами $\vec{e}_{\vec{k},\pm} = (\vec{e}_x \pm i\vec{e}_y)\big/\sqrt{2}$. Нехай $\vec{A} = A\vec{e}_{\vec{k},+}$, тобто $\vec{A}$ не містить складової, пропорційної $\vec{e}_{\vec{k},-}$. Тоді декартові компоненти поля мають вигляд

$$E_x = \sqrt{2}A\cos(\omega t - kz)\,,\; E_y = \sqrt{2}A\sin(\omega t - kz)\,.$$

Тут для простоти A вважаємо дійсним. Таким чином, у фіксованій точці простору вектор $\vec{E}$ обертається у площині, перпендикулярній до вектора $\vec{k}$, причому обертається в напрямку проти руху годинникової стрілки, якщо дивитися із кінця вектора $\vec{k}$. За означенням така хвиля відповідає правій круговій поляризації світла (або додатній спіральності фотона). Отже, вектор $\vec{e}_{\vec{k},-}$ відповідає лівій круговій поляризації.

Довільний комплексний вектор може бути поданий як лінійна комбінація дійсних векторів із комплексними коефіцієнтами (див., наприклад, (1.21)). Тобто комплексні вектори утворюють лінійний простір над полем комплексних чисел, але базис у цьому просторі може вибиратися дійсним. Комплексні вектори не мають напрямку і довжини у звичайному розумінні, як дійсні вектори. Тому поняття скалярного добутку і модуля вектора необхідно узагальнити, але так, щоб ключова ідея ортогональності працювала, а для дійсних векторів нові означення переходили у попередні.

Збережемо за позначенням $\vec{a}\cdot\vec{b}$ зміст, визначений зв'язком цього виразу із компонентами векторів у ПДСК:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3\,.$$

Парадоксальна (із погляду дійсних векторів (див. § 5 розд. 4)) рівність $\vec{e}_+\cdot\vec{e}_+=0$ показує, що для комплексних векторів величина $\vec{a}\cdot\vec{b}$ не може служити скалярним добутком. *Скалярний добуток* векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (узагалі кажучи, комплексних) позначатимемо тепер через $(\vec{a},\vec{b})$, означивши його так: $(\vec{a},\vec{b})=\vec{a}^*\cdot\vec{b}$. Звідси випливає несиметричність скалярного добутку для комплексних векторів $(\vec{b},\vec{a})=(\vec{a},\vec{b})^*$ та інші властивості скалярного добутку. Квадрат модуля (він же *квадрат норми*) комплексного вектора означимо через скалярний добуток

$$a^2\equiv|\vec{a}|^2=(\vec{a},\vec{a})\,,$$

або іншими словами, $a^2=\vec{a}^*\cdot\vec{a}$. Тоді завжди $a^2\geq 0$, причому $a=0$ тільки, якщо $\vec{a}=0$. Такі означення забезпечують виконання всіх аксіом, яким мають задовольняти норма і скалярний добуток у нормованому векторному лінійному просторі зі скалярним добутком.

Поняття ортогональності в загальному випадку також визначається через скалярний добуток, а саме, ортогональними є вектори, скалярний добуток яких дорівнює нулю. Таким чином, умова ортогональності комплексних векторів набуває вигляду

$$(\vec{a},\vec{b})=\vec{a}^*\cdot\vec{b}=0\,. \tag{1.23}$$

Скалярні добутки векторів циклічного базису мають вигляд $(\vec{e}_-,\vec{e}_+)=\vec{e}_+\cdot\vec{e}_+=0$, $(\vec{e}_+,\vec{e}_-)=\vec{e}_-\cdot\vec{e}_-=0$, $(\vec{e}_0,\vec{e}_\pm)=0$, $(\vec{e}_-,\vec{e}_-)=(\vec{e}_+,\vec{e}_+)=\vec{e}_+\cdot\vec{e}_-=1$. Отже, циклічний базис (1.21) є ортонормованим. Пропонуємо читачеві самостійно виразити циклічні компоненти вектора через скалярні добутки з векторами циклічного базису. Для векторних добутків маємо $\vec{e}_-\times\vec{e}_+=i\vec{e}_0$, $\vec{e}_+\times\vec{e}_0=i\vec{e}_+$, $\vec{e}_0\times\vec{e}_-=i\vec{e}_-$.

2.5. Зауваження щодо філософії координатного методу

Із тензорами, особливо вищих порядків, доводиться працювати майже виключно у координатному підході, оскільки правила обчислень у ньому є універсальними.

У координатному підході ми працюємо не з об'єктом як таким (вектором, тензором), а з набором його компонент. У різних системах компоненти одного й того самого об'єкта різні. Тобто сам *об'єкт – інваріантний, а форма його представлення – ні*. У цьому полягає певний недолік координатного методу: потрібна інформація про об'єкт ускладнюється неістотною інформацією про окремий вибір координатної системи. Тому задача теорії полягає у тому, щоб навчитися відокремлювати те суттєве, що стосується самих досліджуваних тензорних величин, і відкидати те, що привнесено тим чи іншим вибором системи координат.

Необхідно зробити ще одне важливе зауваження. Конкретний вектор $\vec{a}$ відповідає деякому реальному об'єкту геометричної або фізичної природи, скажімо, переміщенню точки, швидкості, силі тощо. Цей об'єкт існує незалежно від того, у якій системі ми його розглядаємо, і чи розглядаємо взагалі. Але числа a_1, a_2, a_3 – координати вектора $\vec{a}$ – уже залежать не тільки від самого $\vec{a}$, але й від координатної системи, відносно якої ми його розглядаємо. Якщо вибрати іншу систему координат (рис. 1.10), то й компоненти будуть

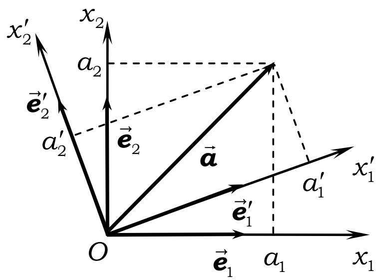

Рис. 1.10. Координати вектора на площині в різних системах координат

інші, хоча вектор – той самий, $(a_1, a_2, a_3) \to (a_1', a_2', a_3')$. Можна сказати, що компоненти вектора є зображенням вектора у цій системі координат. Те саме відноситься і до тензорів. Такої принципової позиції ми і дотримуємось. Проте в літературі існує й інша точка зору, згідно з якою набір координат вектора (набір компонент тензора) буквально ототожнюється із самим вектором (тензором). Наша позиція видається нам більш прийнятною з погляду фізики.

Водночас між вектором (тензором) і набором його компонент у даній системі координат існує взаємно однозначна відповідність. З урахуванням такої відповідності можна говорити про набір компонент як про сам об'єкт. Така термінологія є широко розповсюдженою і спрощує мову, тому вислови у подібному стилі вживаються і в цьому посібнику.

2.6. Типові ситуації вибору координатних осей

За координатного підходу вибір системи координат є важливим кроком у розв'язуванні кожної задачі. Вибирати систему координат треба так, щоб *максимально спростити* розв'язування задачі. Не слід прагнути непотрібної "загальної" системи координат. Вибір системи координат – це інструмент спрощення задачі. Розглянемо типові приклади.

1. У задачі є один виділений напрямок, що задається вектором $\vec{a}$. Систему координат слід вибрати так, щоб його координати були найпростіші: $\vec{e}_3$ паралельно до $\vec{a}$. Тоді $\vec{a} = (0, 0, a)$, де $a = |\vec{a}|$, $\vec{a} = a\vec{e}_3$. Приклад – задача про просторовий рух тіла в однорідному полі тяжіння, $\vec{a} = \vec{g}$.

2. У задачі виділено два напрямки, пов'язані з векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$, що утворюють кут α. Вибираємо, наприклад (рис. 1.11), $\vec{e}_3$ – напрямлений паралельно вектору $\vec{a}$; базисний вектор $\vec{e}_1$ –

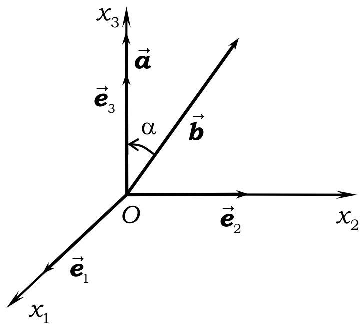

Рис. 1.11. Вибір системи координат для задачі, у якій виділено два напрямки

перпендикулярно до площини векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$; $\vec{e}_2$ – у площині векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$. Тоді $\vec{a} = (0,0,a)$, $\vec{b} = (0, b\sin\alpha, b\cos\alpha)$. Перемноживши $\vec{a}$ та $\vec{b}$ у компонентах, зокрема, одержимо відомі результати: $\vec{a}\cdot\vec{b} = ab\cos\alpha$, $\vec{b}\times\vec{a} = ba\sin\alpha\,\vec{e}_1$.

Приклад – рух зарядженої частинки в непаралельних однорідних електричному та магнітному полях, $\vec{a} = \vec{B}$, $\vec{b} = \vec{E}$.

Контрольні запитання

1. Означення вектора та основні операції над векторами в безкоординатному підході.

2. Координати вектора в декартовій системі координат.

3. Розкладання вектора на поздовжню та поперечну складові відносно заданого напрямку.

4. Операції над векторами у координатному підході.

5. Геометричний зміст скалярного, векторного та мішаного добутків векторів.

6. Правило розкриття подвійного векторного добутку векторів.

7. Правила запису індексних виразів. Вільні та німі індекси.

Задачі

1.1. Знайти проекції $[\vec{a}\times\vec{b}]_y$, $[\vec{d}\times\vec{f}]_z$ на осі декартової системи координат.

1.2. Обчислити добутки ортів прямокутної системи координат:
а) $(\vec{e}_x\times\vec{e}_y)\times(\vec{e}_z\times\vec{e}_y)$; б) $((\vec{e}_z\times\vec{e}_x)\times\vec{e}_x)\times((\vec{e}_y\times\vec{e}_z)\times\vec{e}_y)$.

У задачах 1.3–1.9 довести векторні тотожності:

1.3. $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d}) = \begin{vmatrix} \vec{a}\cdot\vec{c} & \vec{b}\cdot\vec{c} \\ \vec{a}\cdot\vec{d} & \vec{b}\cdot\vec{d} \end{vmatrix}$.

1.4. $(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d}) = \vec{b}(\vec{a},\vec{c},\vec{d}) - \vec{a}(\vec{b},\vec{c},\vec{d}) = \vec{c}(\vec{a},\vec{b},\vec{d}) - \vec{d}(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$.

1.5. $(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{a}\times\vec{c}) = \vec{a}(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$.

1.6. $(\vec{a}\times\vec{b},\ \vec{b}\times\vec{c},\ \vec{c}\times\vec{a})=(\vec{a},\vec{b},\vec{c})^2$.

1.7. $\vec{a}\times(\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{d}))=(\vec{a},\vec{c},\vec{d})\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b})(\vec{c}\times\vec{d})$.

1.8. $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})(\vec{d},\vec{e},\vec{f})=\begin{vmatrix}\vec{a}\cdot\vec{d} & \vec{b}\cdot\vec{d} & \vec{c}\cdot\vec{d}\\ \vec{a}\cdot\vec{e} & \vec{b}\cdot\vec{e} & \vec{c}\cdot\vec{e}\\ \vec{a}\cdot\vec{f} & \vec{b}\cdot\vec{f} & \vec{c}\cdot\vec{f}\end{vmatrix}$.

1.9. $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})^2=\begin{vmatrix}\vec{a}\cdot\vec{a} & \vec{b}\cdot\vec{a} & \vec{c}\cdot\vec{a}\\ \vec{a}\cdot\vec{b} & \vec{b}\cdot\vec{b} & \vec{c}\cdot\vec{b}\\ \vec{a}\cdot\vec{c} & \vec{b}\cdot\vec{c} & \vec{c}\cdot\vec{c}\end{vmatrix}$.

1.10. Дано вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ і кути між ними: $\alpha=\angle(\vec{b},\vec{c})$, $\beta=\angle(\vec{a},\vec{c})$, $\gamma=\angle(\vec{a},\vec{b})$. Знайти кут між площинами $(\vec{a}\vec{b})$ і $(\vec{b}\vec{c})$.

1.11. Знайти кут між радіус-векторами $\vec{r}$ та $\vec{r}\,'$, напрямки яких відповідно задано сферичними кутами (θ,φ) та (θ',φ').

1.12. Вивести теорему косинусів сферичної тригонометрії

$$\cos\alpha=\cos\beta\cos\gamma+\sin\beta\sin\gamma\cos A,$$

де $\alpha=\angle(\vec{b},\vec{c})$, $\beta=\angle(\vec{a},\vec{c})$, $\gamma=\angle(\vec{a},\vec{b})$; $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ – одиничні вектори зі спільним початком; $A=\angle((\vec{a},\vec{b}),(\vec{a},\vec{c}))$ – двогранний кут при векторі $\vec{a}$.

1.13. Вивести теорему синусів сферичної тригонометрії

$$\frac{\sin A}{\sin\alpha}=\frac{\sin B}{\sin\beta}=\frac{\sin C}{\sin\gamma}.$$

де $\alpha=\angle(\vec{b},\vec{c})$, $\beta=\angle(\vec{a},\vec{c})$, $\gamma=\angle(\vec{a},\vec{b})$; $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ – одиничні вектори зі спільним початком; $A=\angle((\vec{a},\vec{b}),(\vec{a},\vec{c}))$, $B=\angle((\vec{b},\vec{a}),(\vec{b},\vec{c}))$, $C=\angle((\vec{c},\vec{a}),(\vec{c},\vec{b}))$ – двогранні кути при векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$, відповідно.

1.14. Задано одиничні вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ зі спільним початком і кути між ними: $\alpha=\angle(\vec{b},\vec{c})$, $\beta=\angle(\vec{c},\vec{a})$, $\gamma=\angle(\vec{a},\vec{b})$. Знайти кут між вектором $\vec{c}$ і площиною $(\vec{a}\vec{b})$.

1.15. Дано призму об'єму V. Обчислити мішаний добуток векторів $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CD})$ (рис. 1.12).

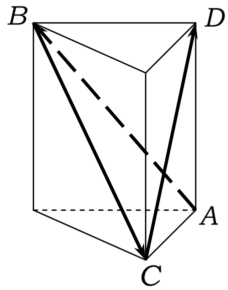

Рис. 1.12
до задачі 1.15

1.16. Дано куб зі стороною a. Обчислити мішаний добуток векторів $(\vec{p},\vec{q},\vec{r})$. Виконати аналогічне обчислення, якщо замість куба дано паралелепіпед об'єму V (рис. 1.13).

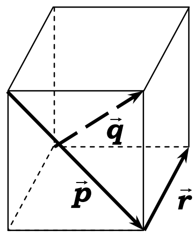

Рис. 1.13
до задачі 1.16

1.17. Дано тетраедр $ABCD$ об'єму V. Знайти мішаний добуток векторів $(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DC})$.

1.18. Довести формулу розкладання вектора $\vec{a}$ на поздовжню та поперечну складові відносно напрямку, заданого одиничним вектором $\vec{n}$: $\vec{a}=\vec{n}(\vec{a}\cdot\vec{n})+\vec{n}\times(\vec{a}\times\vec{n})$ або $\vec{a}=\vec{a}_{\parallel}+\vec{a}_{\perp}$, де $\vec{a}_{\parallel}=\vec{n}(\vec{a}\cdot\vec{n})$, $\vec{a}_{\perp}=\vec{n}\times(\vec{a}\times\vec{n})$.

1.19. Знайти вектор, який є результатом дзеркального відображення вектора $\vec{a}$ у площині, перпендикулярній одиничному вектору $\vec{n}$.

1.20. Вираз $|\vec{r}-\vec{r}'|$ розвинути в ряд Тейлора за r'/r із точністю до $(r'/r)^2$, якщо $r'\ll r$.

1.21. Вираз $1/|\vec{r}-\vec{r}'|$ розвинути в ряд Тейлора за r'/r із точністю до $(r'/r)^2$, якщо $r'\ll r$.

1.22. Записати рівняння площини, що проходить через точку із радіус-вектором $\vec{r}_1$ перпендикулярно до заданого вектора $\vec{n}$.

1.23. Записати рівняння площини, що проходить через дві точки з радіус-векторами $\vec{r}_1$ та $\vec{r}_2$ паралельно до заданого вектора $\vec{a}$.

1.24. Записати рівняння площини, що проходить через точку з радіус-вектором $\vec{r}_1$ паралельно до заданих векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$.

1.25. Записати рівняння площини, що проходить через задані точки з радіус-векторами $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ і $\vec{r}_3$, що не належать одній прямій.

1.26. Записати рівняння площини, яка перпендикулярна одиничному вектору $\vec{n}$ і проходить на відстані d від початку координат.

1.27. Записати рівняння площини, що проходить через задану точку $\vec{r}_1$ паралельно заданій площині $\vec{r}\cdot\vec{n}=\alpha$.

1.28. Записати рівняння прямої, що проходить через точку з радіус-вектором $\vec{r}_1$ паралельно до заданого вектора $\vec{a}$.

1.29. Знайти довжину перпендикуляра, опущеного із початку координат на пряму $(\vec{r}-\vec{r}_1)\times\vec{a}=0$.

1.30. Знайти найкоротшу відстань між двома непаралельними прямими, заданими рівняннями $\vec{r}\times\vec{a}=\vec{A}$ та $\vec{r}\times\vec{b}=\vec{B}$, якщо $\vec{a}\cdot\vec{A}=0$, $\vec{b}\cdot\vec{B}=0$, $\vec{a}\times\vec{b}\neq\vec{0}$. Знайти умову перетину цих прямих.

1.31. Знайти відстань від заданої точки $\vec{r}_1$ до площини $\vec{r}\cdot\vec{N}=\alpha$.

1.32. Розв'язати рівняння відносно невідомого вектора $\vec{x}$:

а) $\alpha\vec{x}+\beta(\vec{a}\times\vec{x})=\vec{b}$; б) $\vec{a}+\vec{b}\times\vec{x}=\vec{x}.$

1.33. Розв'язати систему рівнянь відносно вектора $\vec{x}$:

$$\begin{cases}\vec{x}\cdot\vec{a}=p,\\ \vec{x}\times\vec{b}=\vec{q}.\end{cases}$$

Установити геометричний зміст розв'язку.

1.34. Розв'язати системи рівнянь відносно невідомих x, y та z:

а) $x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}=\vec{d}$; б) $x(\vec{b}\times\vec{c})+y(\vec{c}\times\vec{a})+z(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{d}.$

1.35. Використовуючи векторні тотожності, розв'язати відносно невідомого вектора $\vec{x}$ систему рівнянь:

$$\begin{cases}\vec{x}\cdot\vec{a}=\alpha,\\ \vec{x}\cdot\vec{b}=\beta,\\ \vec{x}\cdot\vec{c}=\gamma.\end{cases}$$

Розділ 2
Тензори. Закон перетворення компонент тензора при заміні базису

§ 1. Матриця переходу та її властивості. Закон перетворення компонент вектора при заміні ортонормованого базису

Перш ніж наводити закон перетворення компонент, необхідно означити клас перетворень базису. Розглядатимемо перетворення, які ортонормований базис переводять в ортонормований, зберігаючи при цьому довжини векторів і кути між ними. Більш загальні перетворення розглядатимуться в розд. 7. Вважатимемо також, що при відповідному перетворенні декартової системи координат початок відліку (точка O) не зміщується. Зазначимо, що в більшості геометричних та фізичних застосувань положення точки O або зовсім не має значення (наприклад, у випадку однорідного електричного поля), або навпаки, природним чином фіксоване. Так, у неоднорідному полі це та точка, у нескінченно малому околі якої досліджується фізична картина.

1.1. Матриця переходу

Нехай у просторі E_3 поряд з ортонормованим базисом $S\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ із початком відліку в точці O задано інший ортонормований базис $S'\{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3\}$ із тим самим початком відліку. Вектори одного базису можна розкладати за векторами іншого базису. Будемо позначати через α_{ij} $(i, j = 1,2,3)$ коефіцієнти перед $\vec{e}_j$ при розкладанні векторів $\vec{e}'_i$ за векторами нештрихованого базису:

$$\vec{e}_1' = \alpha_{11}\vec{e}_1 + \alpha_{12}\vec{e}_2 + \alpha_{13}\vec{e}_3 ,$$
$$\vec{e}_2' = \alpha_{21}\vec{e}_1 + \alpha_{22}\vec{e}_2 + \alpha_{23}\vec{e}_3 ,$$
$$\vec{e}_3' = \alpha_{31}\vec{e}_1 + \alpha_{32}\vec{e}_2 + \alpha_{33}\vec{e}_3 .$$

Коротко всі три рівняння можна записати так:

$$\vec{e}_i' = \alpha_{ij}\vec{e}_j . \tag{2.1}$$

Величини α_{ij} $(i, j = 1,2,3)$ утворюють матрицю 3×3, яка називається **матрицею перетворення** або **матрицею переходу**:

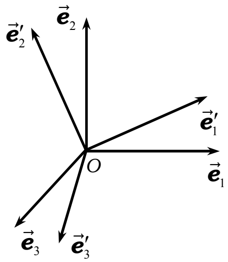

Рис. 2.1. Два ортонормовані базиси зі спільним початком відліку

$$A = \left\|\alpha_{ij}\right\| = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} . \tag{2.2}$$

Якщо задано матрицю A, то задано перехід від нештрихованої S до штрихованої системи S' координат. Рівняння (2.1) скалярно помножимо на $\vec{e}_k$ і, скориставшись рівністю $(\vec{e}_j \cdot \vec{e}_k) = \delta_{jk}$, одержимо

$$\alpha_{ik} = \vec{e}_i' \cdot \vec{e}_k = \cos\left(\vec{e}_i', \vec{e}_k\right) . \tag{2.3}$$

Подібним чином запишемо розкладання векторів нештрихованого базису за векторами штрихованого базису

$$\vec{e}_i = \beta_{ij}\vec{e}_j' , \tag{2.4}$$

де β_{ij} – елементи оберненої матриці переходу $\left\|\beta_{ij}\right\| = B = A^{-1}$. Дійсно, оскільки $\vec{e}_i' = \alpha_{ik}\vec{e}_k = \alpha_{ik}\beta_{kj}\vec{e}_j' = \delta_{ij}\vec{e}_j' = \vec{e}_i'$, тобто $\alpha_{ik}\beta_{kj} = \delta_{ij}$ або в матричній формі

$$AB = E ,$$

де E – одинична матриця, тобто $B = A^{-1}$.

Помножимо (2.4) скалярно на $\vec{e}_k'$ і, скориставшись рівністю $(\vec{e}_j' \cdot \vec{e}_k') = \delta_{jk}$, одержимо

$$\beta_{ik} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_k' = \cos\left(\vec{e}_i, \vec{e}_k'\right) = \cos\left(\vec{e}_k', \vec{e}_i\right) = \vec{e}_k' \cdot \vec{e}_i .$$

$$\beta_{ik} = \alpha_{ki} = \left(\alpha_{ik}\right)^T . \tag{2.5}$$

Запишемо (2.5) у матричному вигляді

$$B=\left\|\beta_{ik}\right\|=A^{-1}=\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31}\\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32}\\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33}\end{pmatrix}=A^{T}.$$

Рівність $\beta_{ik}=\alpha_{ki}$ означає, що обернену матрицю $A^{-1}=B$ одержуємо транспонуванням матриці A, тобто заміною рядків у матриці A її стовпцями.

Перетворення базису, що задовольняє умову $A^{-1}=A^{T}$, називається **ортогональним перетворенням**.

Отже, ми показали, що перетворення, яке переводить ортонормований базис в ортонормований, є ортогональним.

Пропонуємо самостійно довести обернене твердження: *ортогональне перетворення переводить ортонормований базис в ортонормований.*

Елементи матриці переходу можна знаходити як скалярні добутки векторів нового (штрихованого) та старого (нештрихованого) базисів (або як косинуси відповідних кутів) (див. формулу (2.3)), якщо взаємну орієнтацію двох базисів задано.

Приклад 1. Поворот навколо осі Ox на кут φ (рис. 2.2).

Розв'язання. За формулою (2.3) $\alpha_{11}=\vec{e}_1'\cdot\vec{e}_1=\cos\left(\vec{e}_1',\vec{e}_1\right)=1$.

$$\alpha_{32}=\vec{e}_3'\cdot\vec{e}_2=\cos\left(\vec{e}_3',\vec{e}_2\right)=$$

$$=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)=-\sin\varphi.$$

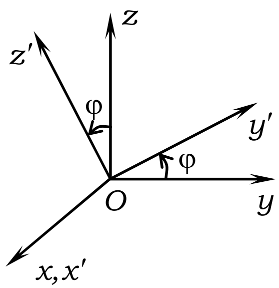

Рис. 2.2. Поворот навколо осі Ox на кут φ

Послідовно перебираючи елементи матриці, знаходимо

$$A(\varphi)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi\\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix},$$

тобто матрицю повороту на кут φ навколо осі Ox.

Приклад 2. Дзеркальне відображення у площині xOz (рис. 2.3).

Розв'язання. При такому перетворенні осі Ox та Oz не змінюються, а вісь Oy змінює напрямок на протилежний. Матриця переходу

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

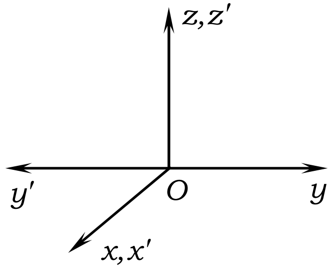

Рис. 2.3. Дзеркальне відображення у площині *xOz*

1.2. Властивості матриці переходу

Матриця переходу має ряд важливих властивостей. Із розкладання (2.1)

$$\vec{e}_i' = \alpha_{i1}\vec{e}_1 + \alpha_{i2}\vec{e}_2 + \alpha_{i3}\vec{e}_3 \text{ або } \vec{e}_i' = \left(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \alpha_{i3}\right)$$

видно, що i-рядок матриці A складають компоненти вектора $\vec{e}_i'$ у нештрихованому базисі. Із розкладання (2.4)

$$\vec{e}_i = \beta_{ij}\vec{e}_j' = \alpha_{ji}\vec{e}_j' \equiv \alpha_{1i}\vec{e}_1' + \alpha_{2i}\vec{e}_2' + \alpha_{3i}\vec{e}_3',$$

$\vec{e}_i = \begin{pmatrix}\alpha_{1i}\\ \alpha_{2i}\\ \alpha_{3i}\end{pmatrix}$, видно, що i-стовпець матриці A складають компоненти вектора $\vec{e}_i$ у штрихованому базисі. Оскільки $\vec{e}_i$ та $\vec{e}_i'$ є векторами ортонормованих базисів, тобто $\vec{e}_i' \cdot \vec{e}_j' = \alpha_{ik}\alpha_{jk} = \delta_{ij}$, $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \alpha_{ki}\alpha_{kj} = \delta_{ij}$, то

- сума квадратів елементів будь-якого рядка (стовпця) дорівнює одиниці;
- сума добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) на відповідні елементи іншого рядка (стовпця) дорівнює нулю.

Ці властивості можна представити у вигляді рівностей

$$\alpha_{ik}\alpha_{jk} = \delta_{ij}, \tag{2.6}$$

$$\alpha_{ki}\alpha_{kj} = \delta_{ij}, \tag{2.7}$$

або в матричній формі

$$AA^T = E, \quad A^T A = E. \tag{2.8}$$

Рівності (2.6)–(2.8) еквівалентні рівності (2.5). Матриці, які мають властивості, виражені рівностями (2.6)–(2.8) або (2.5), називаються **ортогональними**.

Співвідношення (2.6) *або* (2.7) *можна використовувати для перевірки правильності побудованої матриці переходу.*

Шість квадратичних умов (2.6) або (2.7) на 9 елементів матриці A означають, що із точністю до знака всі елементи матриці переходу задаються лише трьома незалежними параметрами. Для опису довільних просторових поворотів у механіці використовуються так звані кути Ейлера (кут власного обертання φ, кут прецесії ψ і кут нутації θ). Ці кути однозначно визначають положення абсолютно твердого тіла разом із координатами будь-якої із його точок (так званого полюса). В інших областях (астрономія, навігація тощо) використовуються інші системи параметрів, зручні для застосування при розв'язанні відповідних задач.

Приклад 3. Знайти матрицю переходу до штрихованої системи координат, орієнтація якої задається трьома кутами Ейлера ψ, θ, φ (рис. 2.4).

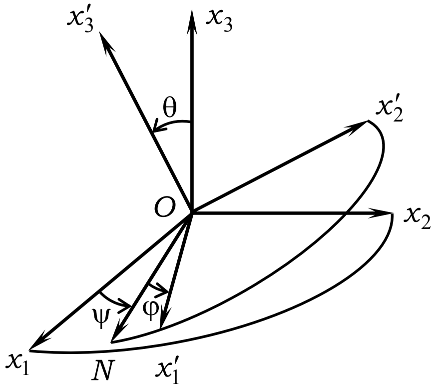

Рис. 2.4. Кути Ейлера

Розв'язання. Перехід від нештрихованої системи координат до штрихованої (рис. 2.4) можна здійснити шляхом виконання трьох послідовних поворотів системи координат на кути Ейлера ψ, θ, φ в додатному напрямку відносно відповідних осей: 1) повороту навколо осі x_3 на кут ψ. Цей поворот описується матрицею переходу

$$A_3(\psi)=\begin{pmatrix}\cos\psi & \sin\psi & 0\\ -\sin\psi & \cos\psi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

після такого повороту вісь x_1 переходить в ON;

2) повороту навколо осі ON на кут θ, який описується матрицею

$$A_1(\theta)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & \sin\theta\\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix};$$

3) повороту навколо осі x_3' на кут φ, який описується матрицею повороту

$$A_{3'}(\varphi)=\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi & 0\\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Правильний порядок множення матриць має бути таким: $A_{3'}(\varphi)A_1(\theta)A_3(\psi)$, причому послідовність виконання відповідних операцій відбувається справа наліво. Перемноживши матриці $A_{3'}(\varphi)A_1(\theta)A_3(\psi)$, знаходимо матрицю повороту на три кути Ейлера ψ, θ, φ:

$$\begin{pmatrix}\cos\psi\cos\varphi-\sin\psi\cos\theta\sin\varphi & \sin\psi\cos\varphi+\cos\psi\cos\theta\sin\varphi & \sin\theta\sin\varphi\\ -\cos\psi\sin\varphi-\sin\psi\cos\theta\cos\varphi & -\sin\psi\sin\varphi+\cos\psi\cos\theta\cos\varphi & \sin\theta\cos\varphi\\ \sin\psi\sin\theta & -\cos\psi\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

Відповідна матриця переходу від штрихованої системи координат до нештрихованої отримується з останньої операцією транспонування і задає коефіцієнти розкладання, відповідно, базисних векторів нештрихованої системи через базисні вектори штрихованої системи координат.

Із (2.8) випливає ще одна важлива властивість

$$\det A = \pm 1 .$$

Дійсно, $1 = \det E = \det(AA^T) = \det A \cdot \det A^T = (\det A)^2$. Таким чином, усі ортогональні перетворення розпадаються на 2 класи: для одних $\det A = 1$, для інших $\det A = -1$. Так, поворот належить до першого класу, а дзеркальне відображення у площині – до другого. Легко бачити, що перші переводять праву систему координат у праву (ліву – у ліву), а другі – праву систему координат у ліву (ліву – у праву). Зауважимо, що для тотожного і для нескінченно малого перетворення $\det A = 1$. Тому для всякого перетворення, яке можна здійснити шляхом неперервного руху систем координат, буде $\det A = 1$, оскільки таке перетворення можна представити як послідовність нескінченно малих. Таке перетворення називають **перетворенням руху** (неперервним перетворенням). І, навпаки, усяке перетворення другого типу можна представити як послідовність деякого повороту і дзеркального відображення у площині чи інверсії (заміни напрямків усіх осей на протилежні, $\vec{r}' = -\vec{r}$). Його не можна здійснити лише за допомогою послідовності нескінченно малих поворотів системи.

1.3. Закон перетворення компонент вектора

З'ясуємо спочатку як перетворюються компоненти вектора $\vec{a}$ при переході від нештрихованої системи координат S до штрихованої S' :

$$\vec{a} = a_j \vec{e}_j = a_i' \vec{e}_i' ,$$

$$a_j = \vec{a} \cdot \vec{e}_j , \quad a_i' = \vec{a} \cdot \vec{e}_i' .$$

Тоді

$$a_i' = \vec{a} \cdot \vec{e}_i' = \alpha_{ij} (\vec{a} \cdot \vec{e}_j) = \alpha_{ij} a_j .$$

Отже, компоненти вектора при переході від однієї до іншої декартової системи координат перетворюються так само, як і базисні орти:

$$\vec{e}_i' = \alpha_{ij} \vec{e}_j , \qquad a_i' = \alpha_{ij} a_j . \tag{2.9}$$

Зокрема, це відноситься і до координат радіус-вектора довільної точки простору $\vec{r} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3$, які збігаються з декартовими координатами точки $(x_1, x_2, x_3) \equiv (x, y, z)$:

$$x_i' = \alpha_{ij} x_j\,,\ \ x_i = \beta_{ij} x_j'\,.$$

Звідси випливає

$$\alpha_{ij} = \frac{\partial x_i'}{\partial x_j}\,, \qquad \beta_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial x_j'}\,. \qquad (2.10)$$

Якщо за означення перетворення прийняти не закон перетворення базису, а закон перетворення координат

$$x_i' = x_i'\left(x_1, x_2, x_3\right),$$

то за означення матриці переходу треба взяти співвідношення (2.10). Такий підхід є більш загальним, ніж за допомогою (2.3). Розглядаючи криволінійні системи координат (див. розд. 8), ми будемо діяти саме так.

1.4. Означення вектора у координатному підході

Закон перетворення компонент вектора при ортогональному перетворенні системи координат можна покласти в основу означення вектора і дати однотипні означення для скалярів, векторів, тензорів.

Означення. **Скаляр** або **абсолютний скаляр**, або **інваріант** – це величина, яка задається одним числом, що не змінюється при довільному ортогональному перетворенні системи координат.

$\varphi = \vec{a} \cdot \vec{b}$ – скаляр, оскільки

$$\varphi' = \vec{a} \cdot \vec{b} = a_1' b_1' + a_2' b_2' + a_3' b_3' \equiv a_i' b_i' =$$
$$= \alpha_{ij} a_j \alpha_{ik} b_k = \alpha_{ij} \alpha_{ik} a_j b_k = \delta_{jk} a_j b_k = a_k b_k = \varphi\,.$$

Означення. **Вектор** – це величина, яка в декартовій системі координат задається трьома впорядкованими числами, які при довільному ортогональному перетворенні системи координат перетворюються за законом

$$a_i' = \alpha_{ij} a_j\,. \qquad (2.11)$$

Подібним чином можна означити й узагальнений об'єкт – тензор довільного рангу. Тоді скаляр і вектор – це тензори нульового і першого рангу, відповідно.

§ 2. Тензор. Закон перетворення компонент тензора

2.1 Геометричний об'єкт

Скаляр, вектор, тензор – це приклади геометричних об'єктів. Термін "об'єкт" означає величину, що досліджується, а "геометричний" вказує на те, що об'єкт розглядається із погляду набору його геометричних властивостей. Означення кожного конкретного геометричного об'єкта в принципі можна дати геометричним шляхом без звернення до конкретної системи координат, використовуючи зв'язок цього об'єкта з іншими об'єктами, наприклад, векторами.

Для математичного опису геометричного об'єкта у координатному підході використовують його зображення в деякій системі координат – компоненти – і оперують лише з ними. З означення об'єкта має випливати, як для будь-якої системи координат знайти впорядкований набір чисел – компонент геометричного об'єкта, котрі повністю задають цей геометричний об'єкт у заданій системі координат.

Означення. Будемо говорити, що у просторі задано **геометричний об'єкт**, якщо

1) кожному базису однозначно відповідає впорядкована система чисел (компонент),

2) компоненти в одному базисі можна виразити через компоненти в іншому базисі і елементи матриці переходу, тобто задано закон перетворення компонент геометричного об'єкта.

Закон перетворення встановлює взаємно однозначний зв'язок між компонентами геометричного об'єкта в новій та старій системі координат. Окремий випадок геометричних об'єктів – тензори. Спираючись на означення вектора, наведемо конкретні приклади побудови геометричних об'єктів, які є тензорами.

2.2. Тензор проектування

Нехай задано деякий одиничний вектор $\vec{u}$. Розглянемо операцію, яка кожному вектору $\vec{x}$ ставить у відповідність вектор $\vec{y}$ за правилом

$$\vec{y} = \left(\vec{x} \cdot \vec{u}\right)\vec{u} . \tag{2.12}$$

Ця операція має ясний зміст: вектору $\vec{x}$ ставиться у відповідність його складова вздовж заданого вектора $\vec{u}$. Тобто, це операція проектування (рис. 2.5). Позначимо її символічно так:

$$\vec{y} = \hat{p}\,\vec{x}\,.$$

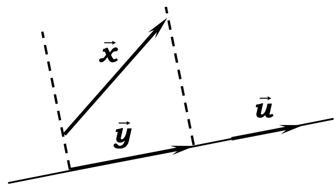

Рис. 2.5. Тензор проектування вектор $\vec{x}$ переводить в $\vec{y}$

Ця операція є лінійною:

$$\hat{p}\left(C_1\vec{x}_1 + C_2\vec{x}_2\right) = C_1\hat{p}\,\vec{x}_1 + C_2\hat{p}\,\vec{x}_2\,.$$

Отже, тим самим у просторі задано деякий об'єкт p, причому геометричний зміст його є інваріантним, тобто не залежить від вибору системи координат, у якій цей об'єкт розглядаємо.

Уведемо тепер деяку систему координат із базисом $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ і побудуємо зображення об'єкта в цій системі.

Подамо співвідношення (2.12) в індексній формі:

$$y_i = (x_j \cdot u_j)u_i = (u_i u_j)x_j\,.$$

Таким чином, у цій системі координат, об'єкт p можна задати таким набором чисел або компонент, які виражаються через компоненти вектора $\vec{u}$:

$$p_{ij} = u_i u_j\,.$$

Це символічно запишемо у вигляді

$$p = \left\{p_{ij}\right\}.$$

У цьому випадку компоненти об'єкта також розташуємо у вигляді квадратної матриці

$$p = \left\| p_{ij} \right\| = \begin{pmatrix} u_1u_1 & u_1u_2 & u_1u_3 \\ u_2u_1 & u_2u_2 & u_2u_3 \\ u_3u_1 & u_3u_2 & u_3u_3 \end{pmatrix}.$$

Оскільки закон перетворення компонент вектора $\vec{u}$ при заміні базису є відомим, то тим самим задано і закон перетворення об'єкта p. Таким чином задано геометричний об'єкт p.

Знайдемо закон перетворення його компонент. Оскільки $u'_i = \alpha_{ik}u_k$, маємо

$$p'_{ij} = u'_i u'_j = \alpha_{ik}u_k\alpha_{jl}u_l = \alpha_{ik}\alpha_{jl}u_k u_l\,,$$

тобто

$$p'_{ij} = \alpha_{ik}\alpha_{jl}p_{kl},$$

або в матричній формі

$$p' = ApA^T .$$

Означення. Величина t, що в даній системі координат задається набором чисел (компонент) t_{ij} ($i, j = 1,2,3$), які при переході до іншої системи координат перетворюються за законом

$$t'_{ij} = \alpha_{ik}\alpha_{jl}t_{kl}, \tag{2.13}$$

називається **тензором другого рангу**.

Таким чином, із погляду своїх геометричних властивостей, уведений вище об'єкт p є тензором другого рангу. Він називається **тензором проектування** або **проектором**. Поняття тензора, очевидно, є окремим випадком поняття геометричного об'єкта. Характерною рисою закону перетворення (2.13) є *лінійний однорідний зв'язок між компонентами тензора в різних системах координат.*

Якщо набір величин t_{ij} ($i, j = 1,2,3$) при заміні базису перетворюється за законом (2.13), то кажуть, що величини t_{ij} **утворюють тензор**.

Із наведених означень зовсім не випливає, що тензор як об'єкт слід ототожнювати з набором його компонент (так само, як і вектор). Компоненти лише задають тензор, хоча його можна задавати й інакше, наприклад, так, як це було зроблено вище для тензора проектування.

Наведемо ще кілька прикладів побудови тензорів.

2.3. Тензорний (діадний) добуток векторів

Нехай дано два вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$. Побудуємо сукупність величин (у цій системі координат):

$$t_{ij} = a_i b_j .$$

При заміні базису вони очевидно перетворюються за допомогою (2.13) і отже, утворюють деякий тензор, який називається *тензорним або діадним, або прямим добутком* векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ і позначається $t = \vec{a} \otimes \vec{b}$. Отже,

$$\vec{a} \otimes \vec{b} = \left\{ a_i b_j \right\}. \tag{2.14}$$

Такий тензор називають *діадою.* Розглянутий у п. 2.2 тензор проектування є тензорним добутком

$$p = \vec{u} \otimes \vec{u}.$$

Тензор $t = \vec{a} \otimes \vec{b}$ перетворює довільний вектор $\vec{x}$ у вектор, колінеарний до лівого вектора діади:

$$\left(\vec{a} \otimes \vec{b} \right) \vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \left(b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 \right) \\ a_2 \left(b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 \right) \\ a_3 \left(b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 \right) \end{pmatrix} =$$

$$= \vec{a} (\vec{b} \cdot \vec{x}).$$

Якщо вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ неколінеарні, то тензори $\vec{a} \otimes \vec{b}$ та $\vec{b} \otimes \vec{a}$ не збігаються, їм відповідають транспоновані матриці компонент.

2.4. Лінійний оператор як тензор

Нехай у лінійному просторі векторів E_3 задано (не важливо як саме) деякий оператор $\hat{L}$:

$$\vec{y} = \hat{L} \vec{x}, \tag{2.15}$$

який є лінійним, $\hat{L}\left(C_1 \vec{x}_1 + C_2 \vec{x}_2 \right) = C_1 \hat{L} \vec{x}_1 + C_2 \hat{L} \vec{x}_2$, та інваріантним (тобто закон (2.15) не залежить від вибору системи координат).

Запишемо (2.15) через компоненти векторів $\vec{x}$ та $\vec{y}$ у довільній системі координат

$$\vec{y} = \hat{L} \vec{x} = \hat{L}(x_j \vec{e}_j) = x_j \hat{L} \vec{e}_j.$$

Домножимо цю рівність скалярно на $\vec{e}_i$, урахувавши, що $(\vec{y} \cdot \vec{e}_i) = y_i$. Тоді

$$y_i = (\vec{e}_i \hat{L} \vec{e}_j) x_j,$$

тобто у компонентах закон (2.15) набуває вигляду

$$y_i = L_{ij} x_j ,$$

де L_{ij} – набір компонент, що задають оператор $\hat{L}$ у цій системі координат. У довільному базисі вони визначаються за формулою

$$L_{ij} = \vec{e}_i \hat{L} \vec{e}_j .$$

Перейдемо до іншої системи координат. Тоді, використовуючи рівність $\vec{e}'_i = \alpha_{ij} \vec{e}_j$ та інваріантність оператора $\hat{L}$, маємо

$$L'_{ij} = \vec{e}'_i \hat{L} \vec{e}'_j = \alpha_{ik} \vec{e}_k \hat{L} \alpha_{jl} \vec{e}_l = \alpha_{ik} \alpha_{jl} \vec{e}_k \hat{L} \vec{e}_l = \alpha_{ik} \alpha_{jl} L_{kl} ,$$

що збігається із (2.13). Таким чином, інваріантний лінійний оператор у лінійному просторі векторів E_3 як геометричний об'єкт є тензором другого рангу. І навпаки, кожний тензор другого рангу $t = \left\{ t_{ij} \right\}$ можна розглядати як лінійний оператор, що здійснює операцію:

$$\vec{y} = \hat{t} \vec{x}$$

за правилом

$$y_i = t_{ij} x_j .$$

Це окремий випадок операцій із тензорами, що називається *згорткою* (у цьому випадку тензора t і вектора $\vec{x}$).

Уведеному у п. 2.2 тензору проектування із компонентами $p_{ij} = u_i u_j$ відповідає оператор проектування або проектор, $\hat{p} = \vec{u} \otimes \vec{u}$, що здійснює відображення $\vec{x} \to \vec{y}$ (2.12), іншому тензору $t = \vec{a} \otimes \vec{b} = \left\{ a_i b_j \right\}$ відповідає операція $y_i = a_i b_j x_j = a_i (\vec{b} \cdot \vec{x})$, тобто

$$\vec{y} = \hat{t} \vec{x} = (\vec{a} \otimes \vec{b}) \vec{x} = \vec{a} (\vec{b} \cdot \vec{x}) .$$

2.5. Одиничний тензор

Одиничному оператору $\hat{E} \vec{x} = \vec{x}$ відповідає одиничний тензор

$$E = \left\{ \vec{e}_i \hat{E} \vec{e}_j \right\} = \left\{ \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j \right\} = \left\{ \delta_{ij} \right\} ,$$

тобто у довільній системі координат одиничному тензору відповідає одинична матриця, а сам одиничний оператор можна представити у вигляді суми проекторів на осі:

$$\hat{E} = \vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1 + \vec{e}_2 \otimes \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \otimes \vec{e}_3 .$$

Останнє співвідношення виражає факт так званої *повноти ортогонального базису*: у цьому просторі не існує відмінного від нуля вектора, який був би ортогональним до всіх векторів базису $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. Поняття повноти базису набуває особливої ваги у просторах нескінченної розмірності, зокрема, у функціональних просторах при побудові розвинень за системами ортогональних функцій, так званих узагальнених рядів Фур'є.

2.6. Оператор повороту

Побудуємо матрицю переходу для повороту системи координат на кут φ навколо осі, паралельної вектору $\vec{n}$, де $|\vec{n}| = 1$. Для цього розглянемо закон перетворення довільного вектора $\vec{a}$ (рис. 2.6), який представимо у вигляді суми поздовжньої та поперечної складових (див. п. 1.3) відносно $\vec{n}$:

$$\vec{a} = \vec{a}_{\parallel} + \vec{a}_{\perp} = \vec{n}(\vec{a} \cdot \vec{n}) + \vec{n} \times \left(\vec{a} \times \vec{n}\right) .$$

При повороті на кут φ відносно $\vec{n}$ вектор $\vec{a}$ перейде у вектор $\vec{a}'$.

Матриця повороту системи координат на додатний кут φ навколо осі, паралельної вектору $\vec{n}$ (рис. 2.6), визначає зв'язок: $\vec{a}' = A\vec{a}$ або $a_i' = \alpha_{ij} a_j$ (оскільки таке перетворення переводить вектор $\vec{a}$ в $\vec{a}'$). Для базисних векторів справедливий такий самий зв'язок $\vec{e}_i' = \alpha_{ij} \vec{e}_j$.

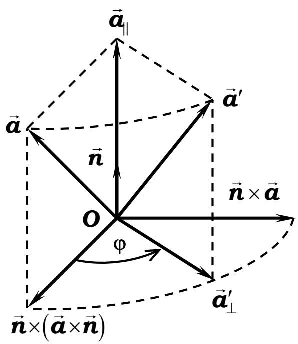

Рис. 2.6.
Поворот вектора $\vec{a}$

Як видно з рис. 2.6, поздовжня відносно $\vec{n}$ складова при такому перетворенні не зміниться, $\vec{a}_{\parallel}' = \vec{a}_{\parallel}$, а поперечна – повернеться на кут φ. Три вектори $\vec{a}_\perp = \vec{n}\times(\vec{a}\times\vec{n})$, $\vec{a}'_\perp$ та $\vec{n}\times\vec{a}$ – однакові за абсолютною величиною і лежать в одній площині. Крім того, вектори $\vec{n}$, $\vec{a}_\perp = \vec{n}\times(\vec{a}\times\vec{n})$ та $\vec{n}\times\vec{a}$ утворюють ортогональну праву трійку векторів, тому маємо

$$\vec{a}' = \vec{a}'_\parallel + \vec{a}'_\perp = \vec{n}(\vec{a}\cdot\vec{n}) + \cos\varphi\,\vec{n}\times(\vec{a}\times\vec{n}) + \sin\varphi\,\vec{n}\times\vec{a}\,.$$

Оскільки одержаний закон перетворення справедливий для довільного вектора $\vec{a}$, у тому числі і для ортів декартової системи координат $\vec{e}_i$, то

$$\vec{e}'_i = \vec{n}(\vec{e}_i\cdot\vec{n}) + \cos\varphi\,\vec{n}\times(\vec{e}_i\times\vec{n}) + \sin\varphi\,\vec{n}\times\vec{e}_i \text{ або}$$

$$\vec{e}'_i = \cos\varphi\,\vec{e}_i + (1-\cos\varphi)(\vec{e}_i\cdot\vec{n})\vec{n} + \sin\varphi\,\vec{n}\times\vec{e}_i = \alpha_{ij}\vec{e}_j\,.$$

Тоді, використовуючи співвідношення $\alpha_{ij} = \vec{e}'_i\cdot\vec{e}_j$, $\vec{e}_i\cdot\vec{n} = n_i$, $(\vec{n}\times\vec{e}_i)\cdot\vec{e}_j = \vec{n}\cdot(\vec{e}_i\times\vec{e}_j) = \vec{n}\cdot e_{ijk}\vec{e}_k = e_{ijk}n_k$, знаходимо

$$\alpha_{ij} = \cos\varphi\,\delta_{ij} + (1-\cos\varphi)n_i n_j + \sin\varphi\, e_{ijk}n_k$$

або оператор повороту на кут φ навколо осі, паралельної одиничному вектору $\vec{n}$:

$$\hat{A}_{\vec{n}}(\varphi) = \cos\varphi\,\hat{E} + (1-\cos\varphi)\vec{n}\otimes\vec{n} + \sin\varphi[\vec{n}\times\hat{E}]\,. \qquad (2.16)$$

Тут $\hat{E}$ – одиничний оператор. У (2.16) використано символічне позначення $[\vec{n}\times\hat{E}]$ для тензора, який діє на довільний вектор $\vec{x}$ за правилом $[\vec{n}\times\hat{E}]\vec{x} = \vec{n}\times\vec{x}$.

2.7. Означення тензора рангу *n*

Тензор рангу n – це величина, що в розглядуваній декартовій системі координат задається впорядкованим набором 3^n чисел – компонент – $\{t_{i_1 i_2 \ldots i_n}\}$, $i_\alpha = 1,2,3,\ \alpha = \overline{1,n}$, які при переході до іншої декартової системи координат перетворюються за законом

$$t'_{i_1 i_2 \cdots i_n} = \alpha_{i_1 j_1}\alpha_{i_2 j_2}\ldots\alpha_{i_n j_n} t_{j_1 j_2 \cdots j_n}\,. \qquad (2.17)$$

Ранг (валентність) тензора визначає:

1) структуру зображення об'єкта (n-вимірна матриця);

2) кількість множників α_{ij} у (2.17), тобто компоненти тензора в іншій системі координат є лінійними однорідними функціями компонент матриці переходу степеня *n*.

Як і для векторів (див. п. 2.1), для тензора t символічну рівність $t = \left\{ t_{i_1 i_2 \ldots i_n} \right\}$ слід читати як "тензор t із компонентами $t_{i_1 i_2 \ldots i_n}$". Вислів "тензор $t_{i_1 i_2 \ldots i_n}$" означає те саме.

Один із шляхів побудови тензорів вищих рангів – операції із тензорами менших рангів, зокрема першого і другого рангів. Далі перейдемо до операцій із тензорами, зміст яких не залежить від координатної системи, у котрій вони виконуються.

Контрольні запитання

1. Матриця переходу та її властивості.

2. Ортогональне перетворення.

3. Властивості ортогональної матриці.

4. У якому співвідношенні знаходяться обернена та транспонована до ортогональної матриці переходу матриці?

5. Чому дорівнює визначник ортогональної матриці переходу?

6. Які перетворення називають перетвореннями руху (неперервними перетвореннями)?

7. Чи можна звести перетворення відображень до послідовності перетворень руху?

8. Як змінюються координати вектора внаслідок інверсії?

9. Закон перетворення компонент вектора при заміні ортонормованого базису.

10. Означення вектора у координатному підході.

11. Означення тензора другого рангу.

12. Закон перетворення компонент тензора другого рангу.

13. Чи змінюються компоненти одиничного тензора при поворотах системи координат?

14. Тензор проектування.

15. Які вектори тензором проектування не повертаються?

16. Чи змінюються компоненти тензора проектування $u_i u_j$ при поворотах системи координат на довільний кут навколо осі, паралельної вектору $\vec{u}$?

17. Тензорний (діадний) добуток векторів.

18. Лінійний оператор як тензор.

19. Одиничний тензор.

20. Означення тензора рангу n.

Задачі

2.1. За заданими елементами матриці переходу відновити решту:

а) $\begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & -1 \\ \cdot & 1 & \cdot \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} \alpha & \cdot & \beta \\ \cdot & -1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$, де $\alpha^2 + \beta^2 = 1$;

в) $\begin{pmatrix} \cdot & \alpha & \cdot \\ \cdot & \cdot & \alpha \\ 1 & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$, $|\alpha| = 1$.

Для випадку б) знайти визначник матриці переходу для обох варіантів (залежно від вибору знака α_{31}). У чому полягає їх відмінність?

2.2. Знайти матрицю переходу від системи координат S до S', якщо $x' = z$, $y' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - y)$, $z' = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y)$.

2.3. Подати зображення взаємного розташування систем координат, пов'язаних матрицями переходу:

а) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2.4. Знайти матриці переходу для перетворень:

а) поворот на кут π навколо осі Ox;

б) дзеркальне відображення у площині yOz;

в) інверсія.

2.5. Знайти матриці переходу для поворотів системи координат на кут α (у напрямку проти годинникової стрілки):

а) навколо осі Ox; б) навколо осі Oy; в) навколо осі Oz.

Переконатись, що матриця переходу для повороту на кут $(-\alpha)$, тобто перетворення, оберненого до даного, збігається із транспонованою матрицею.

2.6. Знайти матрицю переходу для повороту на кут φ навколо осі Oz із наступним дзеркальним відображенням у площині xOy (дзеркально-поворотна вісь).

2.7. Знайти матрицю переходу для двох послідовних поворотів на кут φ навколо осі Oz та кут θ навколо осі Oy'.

2.8. Знайти матрицю переходу для дзеркального відображення у площині, перпендикулярній вектору: а) (0, 0, 1); б) (1, 1, 0); в) (1, 1, 1); г) $\vec{n}$, де $n = 1$.

2.9. Знайти матрицю переходу для повороту системи координат на кут φ навколо осі, паралельної вектору: а) (1, 1, 1); б) $\vec{n}$, де $n = 1$.

2.10. За яких умов наведені матриці переходу переводять ортонормований базис в ортонормований?

а) $\alpha_{ij} = 2a_i a_j - \delta_{ij}$; б) $\alpha_{ij} = a_i a_j - e_{ijk} a_k$;

в) $\alpha_{ij} = \beta(a_i a_j - e_{ijk} a_k - \delta_{ij})$.

Тут a_i ($i = 1,2,3$) – компоненти вектора $\vec{a}$; β – скалярна величина; e_{ijk} – символ Леві-Чівіта; δ_{ij} – символ Кронекера.

2.11. Використовуючи явний вираз для матриці переходу, довести, що для просторового повороту навколо осі Ox (осі Oy, або Oz) має місце групова властивість $A(\varphi_1) \cdot A(\varphi_2) = A(\varphi_1 + \varphi_2)$.

2.12. Довести на прикладах, що результат двох послідовних поворотів навколо різних осей залежить від порядку їх виконання.

Розділ 3
Алгебраїчні операції з тензорами

Якщо за допомогою якої-небудь операції з одного або декількох тензорів утворюється інший тензор, то така операція називається **тензорною**. Основними тензорними операціями є додавання та множення, а також згортка і перестановка індексів. За координатного підходу всі тензорні операції визначаються через компоненти тензорів, але мають інваріантний зміст, тобто означені співвідношення між компонентами тензорів виконуються у будь-якій системі координат. При цьому слід знати про таке:

1) довільна тензорна операція здійснюється над тензорами, заданими в одній і тій самій системі координат;

2) задача полягає у тому, щоб утворити із компонент тензорів-операндів такі комбінації, які також утворюють тензор. Тоді операція має інваріантний зміст, що треба доводити для кожної операції окремо. Якщо нижче для якоїсь із операцій таке доведення не наводиться, пропонуємо зробити це самостійно.

§ 1. Елементарні лінійні операції (операції лінійного простору)

Операції лінійного простору визначені лише для тензорів однакового рангу. Приклади наводитимемо для тензорів другого рангу.

1. Рівність $a = b$, якщо в деякій системі координат їх відповідні компоненти однакові. Приклад: $a_{ij} = b_{ij}$.

2. Нуль тензор 0. Тензор $a = 0$, якщо всі його компоненти дорівнюють нулю.

3. Множення на скаляр $a = \alpha b$. Приклад: $a_{ij} = \alpha b_{ij}$.

4. Сума $c = a + b$. Приклад: $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Іще раз підкреслимо, що

- у таких операціях беруть участь тільки тензори однакового рангу;
- всі означені операції інваріантні, тобто, якщо певні співвідношення між компонентами тензорів мають місце в одній системі координат, то вони зберігають свій вигляд і в будь-якій іншій.

Вправа. Покажіть, що в силу означень 1 – 4 множина тензорів однакової будови (структури) є лінійним простором. Для цього необхідно перевірити виконання восьми аксіом лінійного простору (див. Вступ).

§ 2. Добутки і згортки

1. Тензорний добуток. Нехай $a = \left\{a_{ij}\right\}$, $b = \left\{b_{pqr}\right\}$ – тензори. Їх тензорним добутком $c = a \otimes b$ називається тензор із компонентами $c_{ijpqr} = a_{ij} b_{pqr}$. Ранг утвореного тензора дорівнює сумі рангів тензорів-співмножників: $n_c = n_a + n_b$. Тензори-співмножники, на відміну від доданків у сумі (різниці), можуть бути різного рангу. Діадний добуток векторів є окремим випадком тензорного добутку. Діадний добуток кількох векторів теж зводиться до тензорного добутку і є асоціативним: $(\vec{a} \otimes \vec{b}) \otimes \vec{c} = \vec{a} \otimes (\vec{b} \otimes \vec{c}) = \vec{a} \otimes \vec{b} \otimes \vec{c}$.

Тензорний добуток можна використовувати для побудови тензорів вищих рангів.

2. Згортка тензора. Нехай ранг тензора a $n_a \geq 2$, наприклад, $a = \left\{a_{ijkl}\right\}$. Виберемо яку-небудь пару індексів, наприклад, ij, покладемо $i = j$ і обчислимо суму за i $(i = 1,2,3)$: $a_{iikl} = a_{11kl} + a_{22kl} + a_{33kl}$. У результаті отримаємо тензор $c = \left\{c_{kl}\right\}$, де $c_{kl} = a_{iikl}$, ранг якого на дві одиниці менший за ранг вихідного тензора, $n_c = n_a - 2$.

Доведемо, що компоненти c_{kl} утворюють тензор

$$c'_{kn} = a'_{iikn} = \alpha_{ip}\alpha_{iq}\alpha_{km}\alpha_{nl}a_{pqml} = \delta_{pq}\alpha_{km}\alpha_{nl}a_{pqml} =$$
$$= \alpha_{km}\alpha_{nl}a_{ppml} = \alpha_{km}\alpha_{nl}c_{ml}\,.$$

Згортати тензор можна за однією, двома, трьома і більше (якщо вистачає індексів) виділеними парами.

Для будь-якого тензора другого рангу згортка $t_{ii} = Sp\,t = \varphi$ є скаляром. Прикладом згортки для тензора $t = \vec{a} \otimes \vec{b}$ є скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$: $c = t_{ii} = a_i b_i = (\vec{a} \cdot \vec{b})$.

3. Внутрішній добуток або згортка двох тензорів. Нехай $a = \{a_{ij}\}$, $b = \{b_{pqr}\}$. Утворимо тензорний добуток $a_{ij}b_{pqr}$ і одержаний тензор згорнемо за будь-якою парою індексів, один із яких належить тензору a, а інший – b. Ранг утвореного тензора $n_c = n_a + n_b - 2$. Наприклад, $c_{jqr} = a_{ij}b_{iqr}$.

Можна згортати за декількома парами індексів: $d_p = a_{ij}b_{pij}$, а також за декількома парами індексів різних тензорів: $b_{pqr}d_p d_q = g_r$.

Внутрішні добутки $d_i = t_{ij}a_j$, $c_i = b_k t_{ki}$, $\varphi = b_k t_{ki} a_i$ в інваріантному вигляді звичайно записують так: $\vec{d} = t\vec{a}$, $\vec{c} = \vec{b}t$, $\varphi = \vec{b}t\vec{a}$. Інколи використовують й інші позначення (із крапкою): $\vec{d} = t \cdot \vec{a}$, $\vec{c} = \vec{b} \cdot t$, $\varphi = \vec{b} \cdot t \cdot \vec{a}$.

Приклади згортки з фізики. 1. Момент кількості руху твердого тіла, що обертається навколо закріпленої точки (рис. 3.1), $\vec{L} = I \cdot \vec{\omega}$, є відносним вектором (поняття відносного вектора вводиться в розд. 5), який утворюється внаслідок згортки тензора інерції $I = \{I_{ij}\}$ з іншим відносним вектором – кутовою швидкістю $\vec{\omega}$, або у компонентах $L_i = I_{ij}\omega_j$. 2. У виразі для кінетичної енергії $T = \frac{1}{2} I_{ij}\omega_i\omega_j = \frac{1}{2}\vec{\omega} \cdot I \cdot \vec{\omega}$ є дві згортки за двома парами індексів, у результаті яких утворюється скаляр.

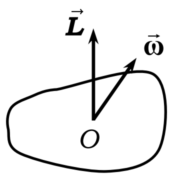

Рис. 3.1. Момент кількості руху

§ 3. Перестановка індексів. Симетричні та антисиметричні тензори

1. Означимо операцію *перестановки індексів*.

Означення. Нехай $a = \{a_{ij}\}$ – тензор, покладемо $b_{ij} = a_{ji}$. Тоді величини $\{b_{ij}\}$ утворюють тензор $\{b_{ij}\} = b$. Операцію перестановки індексів виконують за вибраною парою індексів.

2. Тензор $a = \{a_{ij}\}$ називається *симетричним* за виділеною парою індексів, якщо його компоненти не змінюються при перестановці індексів пари, $a_{ij} = a_{ji}$.

Наприклад: $E = \{\delta_{ij}\}$; $p = \{u_i u_j\}$.

3. Тензор $a = \{a_{ij}\}$ називається *антисиметричним* (*кососиметричним*) за виділеною парою індексів, якщо його компоненти змінюють знак при перестановці індексів пари, $a_{ji} = -a_{ij}$. Усі діагональні (за даною парою індексів) компоненти такого тензора дорівнюють нулю.

Наприклад: $t = \{a_i b_j - a_j b_i\}$.

4. Тензор називається *повністю симетричним* (*антисиметричним*), якщо він *симетричний* (*антисиметричний*) за довільною парою індексів.

У просторі розмірності *N* не може бути повністю антисиметричного тензора рангу вище *N*.

Усі властивості симетрії тензора є інваріантними, тобто не залежать від вибору системи координат.

5. Довільний тензор c можна представити у вигляді суми симетричного та антисиметричного тензорів відносно перестановки індексів заданої пари. Наприклад:

$$c_{ijkl} = a_{ijkl} + b_{ijkl}\text{, де } a_{ijkl} = a_{jikl}\text{, } b_{ijkl} = -b_{jikl}$$

(тут $a_{ijkl} = \frac{1}{2}\left(c_{ijkl} + c_{jikl}\right) \equiv c_{(ij)kl}$, $b_{ijkl} = \frac{1}{2}\left(c_{ijkl} - c_{jikl}\right) \equiv c_{[ij]kl}$).

Тензори $c_{(ij)kl}$ та $c_{[ij]kl}$ називаються відповідно симетричною та антисиметричною частинами тензора c_{ijkl}. Виділення із c_{ijkl}

симетричної частини відносно перестановки індексів цієї пари називається симетруванням, а виділення антисиметричної частини – альтернуванням.

6. Запишемо деякі властивості тензорів, що є результатом наявності певної симетрії:

а) сума симетричних (антисиметричних) тензорів є симетричним (антисиметричним) тензором;

б) згортка симетричного тензора з антисиметричним за двома парами індексів дорівнює нулю:

$$a_{(ij)}b_{[ij]} = 0 .$$

$\varphi = a_{(ij)}b_{[ij]} = a_{(ji)}b_{[ji]} = -a_{(ij)}b_{[ij]} = -\varphi$. Звідси випливає, що $\varphi = 0$.

Наслідок. Якщо $\{c_{ij}\}$ утворюють довільний тензор, а $\{s_{ij}\}$ – симетричний тензор, то $c_{ij}s_{ij} = c_{(ij)}s_{ij}$. Зокрема, $t_{ij}n_i n_j = t_{(ij)}n_i n_j$;

в) якщо $t = \{t_{ij}\}$ – симетричний тензор другого рангу, то $t \cdot \vec{a} = \vec{a} \cdot t$. Дійсно, $t_{ij}a_j = t_{ji}a_j = a_j t_{ji}$.

Наслідок. $\vec{x} \cdot t \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot t \cdot \vec{x}$, якщо $t = \{t_{ij}\}$ – симетричний тензор другого рангу;

г) якщо $t = \{t_{ij}\}$ – антисиметричний тензор другого рангу, то $t \cdot \vec{a} = -\vec{a} \cdot t$.

§ 4. Обернена тензорна ознака

Закон перетворення геометричного об'єкта можна знайти безпосередньо із його означення. Однак, для складних об'єктів зробити це буває технічно непросто. У цьому випадку може виявитися ефективною так звана обернена тензорна ознака, аналогічна означенню ділення як дії, оберненої до множення.

Нагадаємо, що задати тензор – значить визначити його компоненти в якій-небудь системі координат. Для цього необхідно задати достатню кількість чисел або функцій. Причому ця кількість не довільна: для скаляра повинно бути одне число або функція, для тензора першого рангу у тривимірному просторі –

три, для тензора другого рангу – дев'ять; п'ять заданих елементів, наприклад, не визначають жодного тривимірного тензора.

Нехай набір компонент деякого геометричного об'єкта $Q=\left\{Q_{ij}\right\}$ за структурою відповідає тензору другого рангу. Необхідно визначити чи є даний геометричний об'єкт тензором. Для цього утворимо його згортку з довільними незалежними векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$.

Обернена тензорна ознака. Якщо в результаті згортки геометричного об'єкта $Q=\left\{Q_{ij}\right\}$ ($i, j=\overline{1,3}$) із двома довільними незалежними векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$ утворюється скаляр, то цей геометричний об'єкт є тензором другого рангу.

Доведемо це твердження.

Якщо $\varphi=Q_{ij}a_ib_j$ – скаляр, то має виконуватися рівність $\varphi=\varphi'$.

Знайдемо згортку геометричного об'єкта Q з векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$ у нештрихованій системі координат:

$$\varphi=Q_{kl}a_kb_l=Q_{kl}\alpha_{ik}a_i'\alpha_{jl}b_j'=\alpha_{ik}\alpha_{jl}Q_{kl}a_i'b_j'.$$

Тоді $\varphi'-\varphi=Q_{ij}'a_i'b_j'-\alpha_{ik}\alpha_{jl}Q_{kl}a_i'b_j'=\left(Q_{ij}'-\alpha_{ik}\alpha_{jl}Q_{kl}\right)a_i'b_j'=0$.

Оскільки ця рівність виконується для будь-яких $\vec{a}$ та $\vec{b}$, то $Q_{ij}'=\alpha_{ik}\alpha_{jl}Q_{kl}$, тобто для компонент геометричного об'єкта Q отримали такий самий закон перетворення, як для компонент тензора другого рангу.

Наслідок 1. Для симетричного геометричного об'єкта $Q_{ji}=Q_{ij}$ обернена тензорна ознака є чинною за більш слабкої умови: якщо $\varphi=Q_{ij}a_ia_j$ є скаляром для довільного вектора $\vec{a}$. Пропонуємо читачеві довести це твердження самостійно.

Наслідок 2. Якщо в результаті згортки геометричного об'єкта $Q=\left\{Q_{ij}\right\}$ ($i,j=\overline{1,3}$) із довільним вектором $\vec{a}$ утворюється вектор $\vec{c}$:

$$Q_{ij}a_j=c_i,$$

то геометричний об'єкт $Q=\left\{Q_{ij}\right\}$ є тензором другого рангу.

Дійсно, у результаті згортки $Q = \{Q_{ij}\}$ із двома векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$ утворюється скалярний добуток векторів: $Q_{ij}a_j b_i = c_i b_i = \vec{c} \cdot \vec{b}$, який є скалярною величиною.

Узагальнена обернена тензорна ознака. Нехай задано геометричний об'єкт $Q = \{Q_{i_1 \ldots i_n}\}$, $i_\alpha = \overline{1,3}$, $\overline{\alpha = 1, n}$. Якщо для довільних n незалежних векторів $\{\vec{a}^{(\alpha)}\}$ згортка $Q_{i_1 \ldots i_n} a_{i_1}^{(1)} a_{i_2}^{(2)} \ldots a_{i_n}^{(n)}$ є скаляром, то цей геометричний об'єкт є тензором n-го рангу.

§ 5. Інваріантність тензорних рівнянь

Тензорне рівняння є інваріантним, якщо воно не змінює свого вигляду при переході до іншої системи координат. Це питання містить декілька аспектів.

1. Інваріантне рівняння можна трактувати як співвідношення між тензорами, яке не зв'язане безпосередньо із координатним представленням. І навпаки.

2. Усякому зв'язку між тензорами, що існує незалежно від вибору системи координат (наприклад, фізичний закон) у координатному представленні відповідає інваріантне рівняння на компоненти тензорів.

3. Вимога інваріантності рівнянь, що відображають деякий фізичний закон або геометричне співвідношення, виступає як ознака правильності запису рівняння. Подібну функцію виконує вимога: всі доданки в рівнянні повинні мати однакову розмірність. Усі члени рівняння мають бути тензорами одного рангу – усі скаляри (скалярне рівняння) або всі вектори (векторне рівняння), або всі тензори рангу n (тензорне рівняння). Отже, у всіх доданках повинна бути однакова кількість вільних індексів, і всі вільні індекси мають бути однаковими, тощо.

4. У теоретичній фізиці йтиме мова про інваріантність рівнянь відносно певних перетворень систем координат в іншому розумінні, а саме про таку інваріантність, яка пов'язана з еквівалентністю різних систем координат (систем відліку) і відобра-

жає властивості симетрії відповідної фізичної системи, середовища або простору і часу.

Контрольні запитання

1. Елементарні лінійні операції.

2. Чи можна здійснювати лінійні операції над тензорами різної будови?

3. Добутки і згортки. Приклади.

4. Перестановка індексів, симетричні та антисиметричні тензори.

5. Властивість симетрії – це інваріантна характеристика тензора?

6. Обернена тензорна ознака.

7. Інваріантність тензорних рівнянь.

Задачі

3.1. Знайти компоненти тензора $I = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$ у системі координат, повернeній на кут φ відносно осі *Ox*.

3.2. Показати, що компоненти довільного тензора другого рангу t_{ij} перетворюються як добутки декартових координат $x_i \overline{x}_j$. Тут набори (x_1, x_2, x_3) і $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3)$ – координати двох довільних точок або компоненти двох довільних радіус-векторів. Результат узагальнити на випадок тензорів вищих рангів.

3.3. Знайти компоненти t'_{11}, t'_{12} тензора другого рангу t при перетворенні системи координат $x' = y$, $y' = -x$, $z' = -z$.

3.4. Знайти всі компоненти t'_{ij} тензора t другого рангу загального вигляду у системі координат, повернeній на кут π навколо осі *Oz*.

3.5. Знайти компоненту t'_{12} симетричного тензора $t = \{t_{ij}\}$ у системі координат, повернeній на кут φ навколо осі *Oz*. Для яких кутів $t'_{12} = 0$?

3.6. Знайти поворот, який приводить симетричний тензор другого рангу $t = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & 0 \\ t_{12} & t_{22} & 0 \\ 0 & 0 & t_{33} \end{pmatrix}$ до діагонального вигляду.

3.7. Знайти обмеження на загальний вигляд тензора t другого рангу, якщо він не змінюється після таких просторових перетворень:

а) поворот на кут $2\pi/2$ навколо осі Oz (вісь симетрії C_2);

б) поворот на кут $2\pi/4$ навколо осі Oz (вісь симетрії C_4);

в) поворот на кут $2\pi/6$ навколо осі Oz (вісь симетрії C_6);

г) поворот на кут $2\pi/8$ навколо осі Oz (вісь симетрії C_8);

д) дзеркальне відображення у площині xOy (перетворення σ_h);

є) поворот на кут $2\pi/2$ навколо осей Ox, Oy та Oz.

3.8. Знайти компоненту λ'_{123} тензора третього рангу у системі координат, отриманій поворотом на кут $\pi/4$ навколо осі Ox.

3.9. Знайти відмінні від нуля компоненти тензора четвертого рангу, якщо він не змінюється при повороті на кут π навколо осі Oz.

3.10. Визначити кількість незалежних компонент тензора пружних сталих $\lambda = \{\lambda_{ijkl}\}$, які задовольняють властивості симетрії:

$$\lambda_{ijkl} = \lambda_{klij}, \ \lambda_{ijkl} = \lambda_{jikl}, \ \lambda_{ijkl} = \lambda_{ijlk}.$$

3.11. Компоненти тензора λ четвертого рангу задовольняють рівності: $\lambda_{ijkl} = \lambda_{klij}$, $\lambda_{ijkl} = \lambda_{jikl}$, $\lambda_{ijkl} = \lambda_{ijlk}$. Які компоненти тензора λ відмінні від нуля, якщо він не змінюється при повороті на кут $\pi/2$ навколо осей Ox, Oy та Oz? Знайти незалежні компоненти тензора λ.

3.12. Визначити кількість незалежних компонент тензора $\lambda = \{\lambda_{ijkl}\}$ пружних сталих кристала:

а) кубічної симетрії C_4;

б) гексагональної симетрії C_6 (вісь симетрії – Oz).

3.13. Показати, що тензор $\lambda = \{\lambda_{ijkl}\}$ пружних сталих ізотропного тіла характеризується двома незалежними параметрами.

3.14. Обчислити:

а)$(\vec{a} \otimes \vec{b}) \cdot \vec{c}$; б)$\vec{a} \cdot (\vec{b} \otimes \vec{c})$; в)$(\vec{a} \otimes \vec{b}) \cdot \vec{b}$; г)$(\vec{a} \otimes \vec{b}) \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$.

3.15. Задано тензор із компонентами $\tilde{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_{ij} - \dfrac{\varepsilon_{ik} n_k n_l \varepsilon_{lj}}{\varepsilon_{pq} n_p n_q}$. Обчислити згортку $\tilde{\varepsilon}_{ij} n_j$, де n_j – компоненти одиничного вектора $\vec{n}$. Знайти компоненти $\tilde{\varepsilon}_{ij}$ тензора, якщо $\vec{n} \parallel Oz$.

3.16. Дано вектор $\vec{a} = \vec{n} \times (\vec{b} \times \vec{n})$. Установити зв'язок між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ у вигляді тензорної рівності ($\vec{a} = t\vec{b}$).

3.17. Побудувати з одиничного тензора другого рангу та заданого одиничного вектора $\vec{s}$ симетричний тензор другого рангу:

а) загального вигляду;

б) із нульовим слідом.

Показати, що такі тензори є одновісними.

Розділ 4
Тензори другого рангу

§ 1. Обернений тензор

Як уже зазначалося, кожному тензору другого рангу відповідає лінійний оператор, який кожному вектору $\vec{x}$ ставить у відповідність деякий вектор $\vec{y}$, наприклад, таким чином:

$$\vec{y} = \hat{t}\,\vec{x}\,.$$

Тоді оберненому оператору $\hat{t}^{-1}$, якщо він існує (а він існує і єдиний, якщо оператор $\hat{t}$ невироджений, тобто, якщо визначник матриці t є відмінним від нуля), $\hat{t}^{-1}\vec{y} = \vec{x}$, відповідає обернений тензор. Він має такі властивості:

$$t \cdot t^{-1} = t^{-1} t = E\,,$$

$$\left\| t_{ij} \right\| \cdot \left\| t_{ij}^{-1} \right\| = \left\| \delta_{ij} \right\|,$$

$$\left\| t_{ij}^{-1} \right\| = \left\| t_{ij} \right\|^{-1},$$

тобто оберненому тензору відповідає обернена матриця компонент тензора.

Обернені тензори часто використовуються у фізиці. Наприклад, закон Ома в диференціальній формі $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ (густина струму $\vec{j}$ у провіднику дорівнює згортці тензора питомої електропровідності σ з напруженістю електричного поля $\vec{E}$) можна переписати у вигляді $\vec{E} = \rho \vec{j}$ (величину $\rho = \sigma^{-1}$ називають тензором питомого опору).

Виникає питання: як, знаючи компоненти тензора t, знайти компоненти оберненого тензора? Лінійне перетворення в будь-якому базисі можна записати у вигляді системи лінійних алгебраїчних рівнянь: $t_{ij}x_j = y_i$. Знайти обернений тензор – значить знайти коефіцієнти розкладання компонент вектора $\vec{x}$ за заданими компонентами вектора $\vec{y}$: $x_i = t_{ij}^{-1} y_j$. Система лінійних алгебраїчних рівнянь має розв'язок, коли $\det t \neq 0$. За формулами Крамера, наприклад:

$$x_1 = \frac{1}{\det t}\begin{vmatrix} y_1 & t_{12} & t_{13} \\ y_2 & t_{22} & t_{23} \\ y_3 & t_{32} & t_{33} \end{vmatrix} = \frac{T_{11}}{\det t} y_1 + \frac{T_{21}}{\det t} y_2 + \frac{T_{31}}{\det t} y_3 .$$

А з іншого боку, числові множники перед y_i в розкладанні компонент вектора $\vec{x}$ є елементами оберненої матриці, наприклад:

$$x_1 = t_{11}^{-1} y_1 + t_{12}^{-1} y_2 + t_{12}^{-1} y_3 = t_{1i}^{-1} y_i ,$$

тобто

$$\left\| t_{ji} \right\|^{-1} = \frac{\left\| T_{ij} \right\|}{\det t} = \frac{\partial \ln(\det t)}{\partial t_{ij}},$$

тут T_{ij} – алгебраїчні доповнення елементів матриці $\left\| t_{ij} \right\|$.

$$T_{ij} = \left(-1\right)^{i+j} \Delta_{ij} ,$$

де Δ_{ij} – мінор до елемента t_{ij} матриці $\left\| t_{ij} \right\|$, який дорівнює визначнику матриці, яка утворюється із $\left\| t_{ij} \right\|$ у результаті викреслювання i-го рядка та j-го стовпця.

Таким чином, обернена матриця, а отже і обернений тензор, існує, якщо визначник $\det t \neq 0$. Причому $\det t$ є скаляром, тобто умова $\det t \neq 0$ є інваріантною, що випливає із закону перетворення тензора в матричній формі:

$$t' = AtA^T ,$$

тому що

$$\det t' = \det A \det t \det A^T = \det t .$$

У результаті, оскільки компоненти оберненого тензора виражаються через алгебраїчні доповнення T_{ij} як: $\left\| t_{ji} \right\|^{-1} = \dfrac{\left\| T_{ij} \right\|}{\det t}$, а

$\det t$ є скалярною величиною, то алгебраїчні доповнення T_{ij} теж утворюють тензор другого рангу, $\{T_{ij}\} = T$.

У деяких випадках використовуються обернені тензори і для тензорів вищих рангів. Наприклад, закон Гука у пружному середовищі $p_{ij} = \lambda_{ijkl} u_{kl}$ (p_{ij} – тензор напружень, λ_{ijkl} – тензор пружних сталих, u_{kl} – тензор деформацій) можна переписати так: $u_{ij} = \sigma_{ijkl} p_{kl}$, де $\|\sigma_{ijkl}\| = \|\lambda_{ijkl}\|^{-1}$. Матрицями $\|\lambda_{ijkl}\|$ та $\|\sigma_{ijkl}\|$ задаються лінійні оператори у просторі тензорів другого рангу.

§ 2. Власні вектори та власні (головні) значення довільного тензора другого рангу

У цьому параграфі розглянемо загальні питання щодо власних векторів та власних значень будь-яких тензорів другого рангу. Особливості симетричних тензорів детально розглядаються в § 4.

Тензор другого рангу t як лінійний оператор, що діє у просторі векторів, ставить у відповідність вектору $\vec{x}$ деякий вектор $\vec{y}$

$$\vec{y} = t \cdot \vec{x} .$$

Узагалі кажучи, вектори $\vec{y}$ і $\vec{x}$ – неколінеарні (оператором $\hat{t}$ змінюється довжина і напрямок вектора $\vec{x}$).

Приклад із механіки: момент кількості руху $\vec{L}$ твердого тіла, що обертається навколо закріпленої точки (рис. 4.1), $\vec{L} = I \cdot \vec{\omega}$, у загальному випадку неколінеарний вектору кутової швидкості $\vec{\omega}$. Але для даного тіла існують такі напрямки осі обертання, які задають головні осі тензора інерції I, коли $\vec{L}$ і $\vec{\omega}$ паралельні. Із погляду динаміки обертального руху абсолютно твердого тіла, такі напрямки якісно відрізняються від інших.

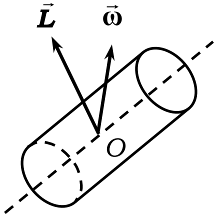

Рис. 4.1. Приклад неколінеарності $\vec{L}$ та $\vec{\omega}$

Приклад з електродинаміки: зв'язок вектора електричної індукції $\vec{D}$ та напруженості електричного поля $\vec{E}$ має вигляд $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$. Якщо середовище анізотропне, діелектрична проникність ε є тензором другого рангу, вектори $\vec{E}$ та $\vec{D}$ не є паралельними. Лише в ізотропному середовищі, коли ε вироджується у скаляр і будь-який напрямок є головним, вектори $\vec{E}$ та $\vec{D}$ – паралельні. Таким чином, тензорний характер діелектричної проникності проявляється, якщо враховувати анізотропію середовища.

Власним вектором тензора називається будь-який ненульовий вектор $\vec{x}$, який відображається тензором у пропорційний йому вектор $\lambda\vec{x}$, а відповідне число λ називається **власним значенням** тензора. Власні вектори є ненульовими розв'язками рівняння:

$$t \cdot \vec{x} = \lambda\vec{x}, \tag{4.1}$$

або у компонентах

$$t_{ij}x_j = \lambda x_i .$$

Наступні зауваження сформулюємо для дійсних $\vec{x}$ і λ. У результаті операції $t \cdot \vec{x}$ вектор $\vec{x}$ можливо змінює довжину, але не змінює напрямок (із точністю до заміни на протилежний).

Зауваження 1. Оскільки $\vec{x}$ та $\lambda\vec{x}$ є векторами, то звідси випливає, що власне значення λ є скалярною величиною або інваріантом. Помноживши векторну рівність (4.1) скалярно на $\vec{x}$, отримаємо вираз для λ через відповідний власний вектор

$$\lambda = \frac{\vec{x} \cdot t \cdot \vec{x}}{\vec{x} \cdot \vec{x}},$$

значення якого не залежить від вибору системи координат. Отже, і власні значення λ_i, і відповідні власні вектори $\vec{x}_i$ є інваріантними характеристиками тензора другого рангу.

Зауваження 2. Нехай власний вектор $\vec{x}_1$ відповідає власному значенню λ_1, тоді вектор $C\vec{x}_1$, де C – довільна стала, теж є власним вектором, що відповідає λ_1. Тому домовимося, що різні власні вектори – це лінійно незалежні власні вектори. Модуль і знак векторів $\vec{x}_i$ не несе інформації про тензор t, їх можна вибрати довільно. Інформацію про тензор несуть напрямки векторів

$\vec{x}_i$. Тому надалі, для однозначності, будемо вибирати власні вектори одиничними, тобто

$$|\vec{x}_i| = 1 .$$

Зауваження 3. Власному вектору $\vec{x}_i$ відповідає одне власне значення λ_i (за формулою зауваження 1), а одному власному значенню λ_i можуть відповідати, узагалі кажучи, декілька різних, тобто лінійно незалежних власних векторів.

Зауваження 4. Інколи напрямок власного вектора (або векторів) можна знайти з міркувань симетрії. Наприклад, у системі з аксіальною симетрією вектор $\vec{x}_1$, паралельний осі симетрії, є власним вектором (рис. 4.2). Для дійсного симетричного тензора другого рангу довільний вектор, перпендикулярний до $\vec{x}_1$ (рис. 4.2), також буде власним (див. у § 4 випадок власних значень, що збігаються).

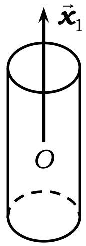

Рис. 4.2. Власний вектор $\vec{x}_1$, паралельний осі симетрії

Зауваження 5. Для дійсного, але несиметричного тензора власні значення λ_i, а отже і власні вектори $\vec{x}_i$, можуть бути комплексними. У такому випадку говорити про напрямок вектора $\vec{x}_i$ у тривимірному дійсному евклідовому просторі немає змісту.

Розглянемо задачу знаходження власних значень λ_i та відповідних власних векторів $\vec{x}_i$ тензора другого рангу загального вигляду. Використовуватимемо координатний підхід. Рівняння (4.1), яке задовольняє власний вектор із компонентами (x_1, x_2, x_3), враховуючи рівність $x_i = \delta_{ij} x_j$, перепишемо у вигляді

$$(t_{ij} - \lambda\delta_{ij}) x_j = 0 ,$$

або

$$\begin{pmatrix} t_{11}-\lambda & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22}-\lambda & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33}-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad (4.2)$$

тобто для компонент власного вектора отримали лінійну однорідну систему алгебраїчних рівнянь. Ця система має нетривіальний розв'язок тільки тоді, коли

$$\det\left|t_{ij} - \lambda\delta_{ij}\right| = 0 . \tag{4.3}$$

Тут (4.3) – алгебраїчне рівняння третього порядку відносно λ – так зване **характеристичне рівняння**, яке після розкриття визначника набуває вигляду

$$\lambda^3 - I_1\lambda^2 + I_2\lambda - I_3 = 0 , \tag{4.4}$$

де I_1, I_2, I_3 – певні функції компонент тензора (див. формули (4.6)–(4.8)). Розв'язавши характеристичне рівняння, знайдемо власні значення λ_i $(i = 1,\ 2,\ 3)$. Для визначення власного вектора $\vec{x}_i$, що відповідає певному власному значенню λ_i, підставимо $\lambda = \lambda_i$ в рівняння (4.2) і розв'яжемо його відносно невідомих компонент (x_1, x_2, x_3). Знормувавши знайдений вектор на одиницю, отримаємо відповідний власному значенню λ_i власний вектор $\vec{x}_i$.

Якщо всі власні значення λ_i $(i = 1, 2, 3)$ різні, то отримані одиничні власні вектори $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, $\vec{x}_3$ будуть лінійно незалежними.

Для несиметричних тензорів поряд із власними векторами (4.1), які називаються **правими власними векторами**, можна розглядати і ліві власні вектори, які є розв'язками рівняння

$$\vec{y} \cdot t = \lambda\vec{y} \quad (t_{ji} y_j = \lambda y_i \text{ або } t_{ij}^T y_j = \lambda y_i) \tag{4.5}$$

і тому є власними векторами транспонованої матриці.

Оскільки $\det t = \det t^T$, то власні значення для лівих і правих векторів збігаються.

Якщо тензор t – симетричний, то $\vec{y} \cdot t = t \cdot \vec{y}$, і як наслідок, ліві та праві власні вектори збігаються. Для несиметричного тензора, коли два (або більше) власні значення однакові, кількість власних векторів може бути менше трьох.

Якщо всі власні значення тензора t відмінні від нуля, $\lambda_i \neq 0$, то існує обернений тензор із власними значеннями $1/\lambda_i$, і власні вектори тензорів t і t^{-1} збігаються.

§ 3. Інваріанти тензора другого рангу

Компоненти тензора залежать від вибору системи координат. Але із компонент тензора можна скласти такі комбінації, які від вибору системи координат не залежать. Часто вони мають самостійний важливий фізичний зміст. Так, деформацію пружного середовища характеризує тензор деформацій u_{kl}. Його перший інваріант

$$I_1 = u_{11} + u_{22} + u_{33} = \frac{\Delta V}{V}$$

і має смисл відносної зміни об'єму при деформації.

3.1. Способи побудови інваріантів

1. Через характеристичне рівняння. Інваріантами тензора є власні значення $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, їх знаходимо із характеристичного рівняння

$$\begin{vmatrix} t_{11}-\lambda & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22}-\lambda & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0 .$$

Якщо розкрити визначник і зібрати доданки з однаковими степенями λ, то одержимо скалярне кубічне рівняння

$$-\lambda^3 + I_1\lambda^2 - I_2\lambda + I_3 = 0,$$

де

$$I_1 = t_{11} + t_{22} + t_{33} = \mathrm{Sp}\, t, \tag{4.6}$$

$$I_2 = T_{11} + T_{22} + T_{33} = \mathrm{Sp}\, T, \tag{4.7}$$

$$I_3 = \det t. \tag{4.8}$$

Тут і далі в цьому параграфі під t та T розуміємо матрицю компонент відповідного тензора (означення T див. § 1).

Зазначимо, що головні значення тензора будуть інваріантами лише за умови, що інваріантами будуть коефіцієнти алгебраїчного рівняння третього степеня – I_1, I_2, I_3. Кубічний многочлен, користуючись теоремою Вієта, можна розкласти на множники

$$-\lambda^3+I_1\lambda^2-I_2\lambda+I_3=-(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3),$$

де $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ – корені характеристичного рівняння, тому коефіцієнти характеристичного рівняння I_1,I_2,I_3 виражаються також через його корені $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$:

$$I_1=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3,$$
$$I_2=\lambda_2\lambda_3+\lambda_1\lambda_3+\lambda_2\lambda_3,$$
$$I_3=\lambda_1\lambda_2\lambda_3.$$

Величини I_1, I_2, I_3 (4.6)–(4.8) називають, відповідно, першим, другим та третім інваріантами тензора другого рангу. Але, насправді, інваріантів тензора можна побудувати дуже багато, зважаючи на те, що власні значення $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ є інваріантами тензора, тому будь-яка їх комбінація є теж інваріантом.

Очевидно, що інваріантом є також величина

$$\mathrm{Sp}\,t^{-1}=\frac{I_2}{I_3}=\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}+\frac{1}{\lambda_3}.$$

2. Множенням тензора самого на себе і різними способами утворювати згортки. Наприклад, величини

$$\mathrm{Sp}\,t=t_{ii},$$
$$\mathrm{Sp}\,t^2=t_{ij}t_{ji},$$
$$\mathrm{Sp}\,t^3=t_{ij}t_{jk}t_{ki}$$

– теж інваріанти і виражаються через I_1, I_2, I_3. Наступні інваріанти такого типу, тобто слід ("шпур") від t^4 та слід від довільного більш високого степеня t, не будуть незалежними від перших трьох інваріантів. Це випливає із так званої **теореми Гамільтона–Келлі**: будь-яка квадратна матриця t задовольняє своє характеристичне рівняння:

$$t^3-I_1t^2+I_2t-I_3E=0.$$

Звідси отримуємо

$$t^4=I_1t^3-I_2t^2+I_3t.$$

Замість інваріантів $\mathrm{Sp}\,t^2$, $\mathrm{Sp}\,t^3$ можна будувати згортки типу $\mathrm{Sp}(t\cdot t^T)$, $\mathrm{Sp}(t^2\cdot t^T)$ і т. п.

Для тензорів вищих рангів інваріанти можна будувати таким самим шляхом.

§ 4. Головні значення та головна система координат дійсного симетричного тензора другого рангу

Для симетричного тензора справедлива рівність $\vec{x}\cdot t = t\cdot\vec{x}$, тому ліві та праві власні вектори збігаються.

Покажемо, що *всі власні значення дійсного симетричного тензора дійсні,* $\lambda = \lambda^*$. Виходитимемо з рівняння, яке задовольняють власні вектори:

$$t\cdot\vec{x} = \lambda\vec{x}\,.$$

Припустимо, що власний вектор $\vec{x}$ – комплексний, і домножимо останню рівність зліва на $\vec{x}^*$. Тоді $\vec{x}^*\cdot t\cdot\vec{x} = \lambda\vec{x}^*\cdot\vec{x}$. Оскільки $\vec{x}^*\cdot\vec{x}$ та $\vec{x}^*\cdot t\cdot\vec{x}$ – дійсні:

$$(\vec{x}^*\cdot\vec{x})^* = \vec{x}\cdot\vec{x}^* = \vec{x}^*\cdot\vec{x}\,,$$

та

$$(\vec{x}^*\cdot t\cdot\vec{x})^* = \vec{x}\cdot t\cdot\vec{x}^* = (t\cdot\vec{x}^*)\cdot\vec{x} = \vec{x}^*\cdot t\cdot\vec{x}\,,$$

то λ теж дійсне.

Наслідок. Власні вектори також можна вибрати дійсними: $\vec{x}_i = \vec{x}_i^*$, оскільки в рівнянні (4.2) коефіцієнти $(t_{ij} - \lambda\delta_{ij})$ – дійсні.

Напрямки, що задаються дійсними власними векторами, називають **головними напрямками тензора** t, осі цих напрямків – **головними осями тензора**, а відповідні числа λ – **головними значеннями тензора**.

Покажемо, що *власні вектори, які відповідають різним власним значенням, ортогональні*.

Припустимо, що два незалежні власні вектори задовольняють рівняння

$$t\cdot\vec{x}_1 = \lambda_1\vec{x}_1\,,\quad t\cdot\vec{x}_2 = \lambda_2\vec{x}_2\,.$$

Тоді $\vec{x}_2 \cdot t \cdot \vec{x}_1 = \lambda_1 \vec{x}_2 \cdot \vec{x}_1$ і $\vec{x}_1 \cdot t \cdot \vec{x}_2 = \lambda_2 \vec{x}_1 \cdot \vec{x}_2$. Оскільки тензор t – симетричний, то

$$\vec{x}_2 \cdot t \cdot \vec{x}_1 = \vec{x}_1 \cdot t \cdot \vec{x}_2 ,$$

тому

$$\vec{x}_2 \cdot t \cdot \vec{x}_1 - \vec{x}_1 \cdot t \cdot \vec{x}_2 = \left(\lambda_1 - \lambda_2\right) \vec{x}_2 \cdot \vec{x}_1 = 0 .$$

Остання рівність задовольняється, якщо

а) власні вектори ортогональні $\vec{x}_2 \cdot \vec{x}_1 = 0$, а відповідні власні значення різні $\lambda_1 \neq \lambda_2$;

б) власні значення збігаються $\lambda_1 = \lambda_2$, тоді власні вектори не обов'язково ортогональні $\vec{x}_2 \cdot \vec{x}_1 \neq 0$.

Отже, якщо всі власні значення різні, то відповідні власні вектори $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, $\vec{x}_3$ – обов'язково ортогональні.

Розглянемо особливості випадку, коли є однакові власні значення: $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$ (один із коренів характеристичного рівняння має кратність 2). Виявляється, що за наявності однакових власних значень *власні вектори можна вибрати ортогональними*.

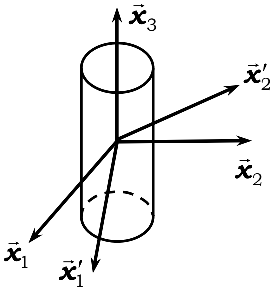

Рис. 4.3. При $\lambda_1 = \lambda_2$ довільний напрямок, перпендикулярний до головної осі $\vec{x}_3$, буде головним

При $\lambda_1 = \lambda_2$ власні вектори $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$ вибираються неоднозначно. Дійсно, якщо $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$ – лінійно незалежні власні вектори, що відповідають $\lambda_1 = \lambda_2$, то будь-яка їх лінійна комбінація, $\vec{x}_1' = C_1 \vec{x}_1 + C_2 \vec{x}_2 \neq 0$, буде власним вектором, що відповідає тому самому власному значенню $\lambda_1 = \lambda_2$:

$$t\vec{x}_1' = t\left(C_1 \vec{x}_1 + C_2 \vec{x}_2\right) = C_1 t \vec{x}_1 + C_2 t \vec{x}_2 = C_1 \lambda_1 \vec{x}_1 + C_2 \lambda_1 \vec{x}_2 = \lambda_1 \vec{x}' .$$

Отже, при $\lambda_1 = \lambda_2$ довільний напрямок, перпендикулярний до головної осі $\vec{x}_3$, буде головним. Відповідний тензор називається ***одновісним***. *Кратному кореню характеристичного рівняння відповідає ціла власна площина, перпендикулярна головній осі* $\vec{x}_3$. Будь-яка вісь, що лежить у цій площині, є головною віссю тензора.

У цій власній площині завжди можна вибрати, причому неоднозначно, пару ортогональних векторів, тобто завжди *існує три ортогональні власні вектори* $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, $\vec{x}_3$.

Якщо два неортогональні напрямки є головними, то відповідні головні значення збігаються.

Тензор, кратний одиничному, має діагональний вигляд у будь-якій системі координат і називається ***кульовим***. Для такого тензора $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ і довільний напрямок у просторі є головним.

Для матеріальних тензорів наявність власних значень, що збігаються, як правило, є наслідком симетрії фізичної системи.

Виберемо власні вектори $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, $\vec{x}_3$ так, щоб вони були ортогональними й одиничними. Пов'язана з ортонормованим базисом власних векторів система координат називається **головною системою координат** тензора, її осі паралельні головним осям тензора. Знайдемо компоненти тензора в такій системі

$$t_{ij} = \vec{x}_i t \vec{x}_j = \lambda_j \vec{x}_i \cdot \vec{x}_j = \lambda_j \delta_{ij},$$

де підсумовування за індексом j немає. Тобто в головній системі координат тензор має діагональний вигляд, а діагональними компонентами є власні значення тензора для відповідних головних осей. Таким чином, *дійсний симетричний тензор зводиться до діагонального вигляду ортогональним перетворенням*, оскільки перехід від довільного ортонормованого базису до ортонормованого базису головної системи координат здійснюється за допомогою ортогонального перетворення.

У головній системі симетричний тензор можна представити у вигляді розкладу за трьома симетричними діадами

$$t = \lambda_1 \vec{x}_1 \otimes \vec{x}_1 + \lambda_2 \vec{x}_2 \otimes \vec{x}_2 + \lambda_3 \vec{x}_3 \otimes \vec{x}_3$$

або лінійної комбінації трьох тензорів проектування на головні осі. Водночас $\vec{x}_1 \otimes \vec{x}_1 + \vec{x}_2 \otimes \vec{x}_2 + \vec{x}_3 \otimes \vec{x}_3 = E$, де E – одиничний тензор, тому справедливе й інше представлення (за λ_1 можна взяти будь-яке із власних значень):

$$t = \lambda_1 E + \left(\lambda_2 - \lambda_1\right) \vec{x}_2 \otimes \vec{x}_2 + \left(\lambda_3 - \lambda_1\right) \vec{x}_3 \otimes \vec{x}_3 .$$

Якщо $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$, маємо таке представлення одновісного тензора в інваріантному вигляді:

$$t = \lambda_1 E + \left(\lambda_3 - \lambda_1\right) \vec{x}_3 \otimes \vec{x}_3, \qquad (4.9)$$

де $\vec{x}_3$ відповідає виділеній головній осі. У довільній системі координат компоненти одновісного тензора мають вигляд

$$t_{ij} = \lambda_1 \delta_{ij} + (\lambda_3 - \lambda_1) u_i u_j ,$$

де $\vec{u}$ – одиничний вектор у напрямку виділеної головної осі.

Приклад. Знайти матрицю компонент тензора інерції для двох частинок із масами m, зв'язаних невагомим стрижнем завдовжки l ("гантелька" у площині xOy у системі координат, зображеній на рис. 4.4). Знайти власні вектори та власні значення, головну систему координат тензора інерції та його вигляд у головній системі координат.

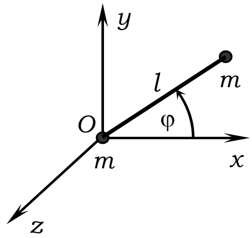

Рис. 4.4
до прикладу

Розв'язання. Згідно із загальною формулою (див. п. 5.1)

$$I_{ik} = \sum_{n=1}^{N} m^{(n)} \left\{ \delta_{ik} \sum_{p=1}^{3} x_p^{(n)} x_p^{(n)} - x_i^{(n)} x_k^{(n)} \right\},$$

визначимо тензор інерції для "гантельки"

$$\left\| I_{ij} \right\| = ml^2 \begin{pmatrix} \sin^2\varphi & -\sin\varphi\cos\varphi & 0 \\ -\sin\varphi\cos\varphi & \cos^2\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Внесок дає лише одна частинка, оскільки координати частинки, розміщеної у початку відліку, дорівнюють нулю, і відповідно її внесок у тензор інерції є нульовим.

Можна знайти інваріанти побудованого тензора інерції: слід матриці $I_1 = 2ml^2$, суму головних мінорів $I_2 = m^2 l^4$ і визначник $I_3 = 0$. Тоді характеристичне рівняння для знаходження власних значень через інваріанти

$$\lambda^3 - I_1 \lambda^2 + I_2 \lambda - I_3 = 0$$

має вигляд

$$\lambda^3 - 2ml^2 \lambda^2 + m^2 l^4 \lambda = 0 ,$$

розв'язки якого дорівнюють: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2,3} = ml^2$. Отримали випадок власних значень, що збігаються.

Напрямки головних осей дійсного симетричного тензора другого рангу можна знайти з міркувань симетрії. У системі є аксіальна симетрія – вектор $\vec{x}_1 = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0)$, паралельний осі симетрії (стрижню "гантельки"), є власним вектором (рис. 4.4), який відповідає власному значенню $\lambda_1 = 0$. Вектори $\vec{x}_2$, $\vec{x}_3$, що відповідають однаковим власним значенням $\lambda_{2,3} = ml^2$, вибираються неоднозначно: довільний вектор, що лежить у площині, перпендикулярній вектору $\vec{x}_1$, буде власним вектором (це приклад одновісного тензора, для якого вся площина, перпендикулярна вектору $\vec{x}_1$, буде власною). На цій площині завжди можна вибрати два вектори, ортогональні між собою, так, щоб вони разом із вектором $\vec{x}_1$ утворювали праву трійку векторів, наприклад, можна вибрати $\vec{x}_2 = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0)$, $\vec{x}_3 = (0,0,1)$.

Перехід до головної системи координат здійснюється поворотом навколо осі Oz на кут φ, відповідна матриця переходу утворюється із координат векторів $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, $\vec{x}_3$:

$$A(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

У головній системі координат тензор має діагональний вигляд

$$I = ml^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Зміна орієнтації головних осей (що задається векторами $\vec{x}_2$, $\vec{x}_3$) додатковим поворотом навколо $\vec{x}_1 = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0)$ на довільний кут не вплине на діагональний вигляд тензора інерції у головній системі координат.

§ 5. Приклади тензорів другого рангу з механіки

5.1. Тензор інерції

Вектор моменту кількості руху системи N частинок (матеріальних точок) відносно початку координат дорівнює

$$\vec{L} = \sum_{n=1}^{N} m^{(n)} \vec{r}^{(n)} \times \vec{v}^{(n)} ,$$

де $m^{(n)}$ – маса n-ї частинки, $\vec{r}^{(n)}$ – її радіус-вектор, $\vec{v}^{(n)}$ – її швидкість.

Нехай система є абсолютно твердим тілом, і одна з його частинок (яку й оберемо за початок відліку) є нерухомою. Оскільки відстані між частинками не змінюються, їх швидкості виражаються через миттєву кутову швидкість за формулою Ейлера $\vec{v}^{(n)} = \vec{\omega} \times \vec{r}^{(n)}$. Тоді

$$\vec{L} = \sum_{n=1}^{N} m^{(n)} \vec{r}^{(n)} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}^{(n)} \right) = \sum_{n=1}^{N} m^{(n)} \left\{ \vec{\omega} \left(\vec{r}^{(n)} \cdot \vec{r}^{(n)} \right) - \vec{r}^{(n)} \left(\vec{\omega} \cdot \vec{r}^{(n)} \right) \right\}$$

або у проекціях

$$L_i = \sum_{n=1}^{N} m^{(n)} \left\{ \omega_i x_l^{(n)} x_l^{(n)} - x_i^{(n)} \omega_k x_k^{(n)} \right\},$$

де $x_i^{(n)}$ – i-координата n-ї частинки. Скориставшись рівністю $\omega_i = \delta_{ik} \omega_k$, запишемо

$$L_i = \omega_k \sum_{n=1}^{N} m^{(n)} \left\{ \delta_{ik} x_l^{(n)} x_l^{(n)} - x_i^{(n)} x_k^{(n)} \right\} = I_{ik} \omega_k ,$$

де дев'ять величин

$$I_{ik} = \sum_{n=1}^{N} m^{(n)} \left\{ \delta_{ik} x_l^{(n)} x_l^{(n)} - x_i^{(n)} x_k^{(n)} \right\}$$

утворюють тензор, який називається **тензором інерції**. Ці формули можна узагальнити на випадок неперервного розподілу речовини з густиною $\rho(\vec{r})$:

$$I_{ik} = \int_V \left\{ \delta_{ik} x_l x_l - x_i x_k \right\} \rho(\vec{r}) dV .$$

Діагональні елементи тензора інерції називаються **моментами інерції** відносно відповідних координатних осей. Якщо $\vec{l}$ – одиничний вектор, то згортка $I_{ij}l_i l_j$ визначає момент інерції відносно осі, напрямленої вздовж $\vec{l}$, – осьовий момент інерції. Недіагональні елементи, узяті з оберненим знаком, – добутки інерції або **відцентрові моменти інерції**. Головні осі тензора інерції називають **головними осями інерції**. У головній системі координат, пов'язаній із цими осями, відцентрові моменти відсутні.

Оскільки осьові моменти інерції додатні, то квадратична форма $I_{ij}x_i x_j = \varphi$ – інваріантна й додатно-визначена, а рівняння $I_{ij}x_i x_j = 1$ визначає так званий еліпсоїд інерції, уведений О. Коші в 1827 р. Ця поверхня є наочним геометричним образом, що відповідає тензору інерції. Вона відображає його симетрію (для одновісного та кульового тензорів), а також дозволяє інтерпретувати певні властивості, пов'язані із тензором, чисто геометричним способом. Подібні еліпсоїди застосовуються в оптиці для тензора діелектричної проникності (або оберненого йому тензора) у зв'язку з явищем двопроменезаломлення. Щоб отримати I_{11}, необхідно покласти в цьому рівнянні $x_2 = x_3 = 0$. Тоді $I_{11} = 1/x_1^2$ і справедливо таке: оскільки вісь x_1 ми вибрали довільним чином, то момент інерції тіла відносно довільної осі, що проходить через початок координат, дорівнює оберненому квадрату відстані від початку координат до точки перетину цієї осі з еліпсоїдом інерції. Легко бачити, що нормаль до еліпсоїда інерції у точці $\vec{r}\left(x_1, x_2, x_3\right)$ паралельна вектору $I\,\vec{r}$, а тому вказує напрям вектора $\vec{L}$, якщо $\vec{r} \parallel \vec{\omega}$.

Уведені величини широко використовуються при вивченні обертального руху твердого тіла. Можна показати, що головні осі інерції мають безпосередній фізичний зміст. Якщо тіло закріплено в початку координат і приведено до обертання навколо однієї із цих осей, то за відсутності зовнішніх сил це тіло продовжує обертатися навколо цієї осі як навколо нерухомої[6]. Моменти інерції є мірою інерції тіла відносно обертального руху, а через добутки інерції виражаються сили реакції, що виникають у закріплених точках осі обертання.

5.2. Тензор деформацій

Розглянемо у пружному тілі дві довільні точки A та B, які внаслідок деформації тіла зайняли положення A' і B' (рис. 4.5). До деформації їх радіус-вектори – $\vec{r}$ та $\vec{r}+\Delta\vec{r}$, після деформації – $\vec{r}+\vec{u}\left(\vec{r}\right)$ та $\vec{r}+\Delta\vec{r}+\vec{u}\left(\vec{r}+\Delta\vec{r}\right)$. Величини $\vec{u}\left(\vec{r}\right)$ та $\vec{u}\left(\vec{r}+\Delta\vec{r}\right)$ називають векторами зміщень точок A та B. Відносний радіус-вектор до деформації становив $\Delta\vec{r}$, після деформації – став $\Delta\vec{r}'$. Обчислимо $\left(\Delta\vec{r}'\right)^2-\left(\Delta\vec{r}\right)^2$, припускаючи, що вектор зміщень є неперервно-диференційовною функцією точки:

$$\Delta\vec{r}'=\Delta\vec{r}+\vec{u}\left(\vec{r}+\Delta\vec{r}\right)-\vec{u}\left(\vec{r}\right)$$

або у проекціях

$$\Delta x_i'=\Delta x_i+u_i\left(x_1+\Delta x_1,x_2+\Delta x_2,x_3+\Delta x_3\right)-u_i\left(x_1,x_2,x_3\right).$$

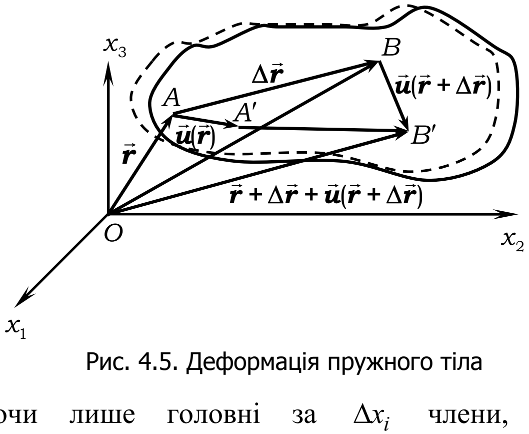

Рис. 4.5. Деформація пружного тіла

Зберігаючи лише головні за Δx_i члени, знаходимо $\Delta x_i'\approx\Delta x_i+\dfrac{\partial u_i}{\partial x_k}\Delta x_k$, звідки

[6]Такий рух буде стійким тільки у випадку, якщо головний момент інерції для відповідної осі є найбільшим або найменшим з усіх.

$$\left(\Delta\vec{r}'\right)^2-\left(\Delta\vec{r}\right)^2=\Delta x_i'\Delta x_i'-\Delta x_i\Delta x_i\approx 2\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\Delta x_i\Delta x_k+\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_i}{\partial x_l}\Delta x_k\Delta x_l=$$

$$=\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\Delta x_i\Delta x_k+\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\Delta x_k\Delta x_i+\frac{\partial u_l}{\partial x_k}\frac{\partial u_l}{\partial x_i}\Delta x_k\Delta x_i=$$

$$=\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k}{\partial x_i}+\frac{\partial u_l}{\partial x_k}\frac{\partial u_l}{\partial x_i}\right)\Delta x_i\Delta x_k=2u_{ik}\Delta x_i\Delta x_k\,,$$

де позначено

$$u_{ik}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k}{\partial x_i}+\frac{\partial u_l}{\partial x_k}\frac{\partial u_l}{\partial x_i}\right).$$

Оскільки квадрат відстані та його зміна є скаляром, а вектор $\Delta\vec{r}$ – довільний і $u_{ki}=u_{ik}$, то за наслідком оберненої тензорної ознаки (див. розд. 2, § 4) величини u_{ik} утворюють симетричний тензор, який називається **тензором деформацій**. У лінійній теорії пружності, коли відносні деформації малі, приймається

$$u_{ik}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right).$$

Таким чином, шість незалежних компонент тензора деформацій визначають відносну зміну квадрата відстані між двома довільними нескінченно близькими точками $\vec{r}$ та $\vec{r}+\Delta\vec{r}$ залежно від напрямку відносного радіус-вектора $\Delta\vec{r}$.

Контрольні запитання

1. Тензори другого рангу. Приклади з фізики.

2. Як знайти компоненти оберненого тензора до тензора другого рангу?

3. Як знайти власні вектори та власні (головні) значення тензора другого рангу?

4. Який геометричний зміст власних векторів симетричного тензора другого рангу?

5. Чи є відмінність між правими та лівими власними векторами тензора другого рангу?

6. Інваріанти тензора другого рангу.

7. Головні значення та головна система координат симетричного тензора другого рангу.

8. Які напрямки називають головними напрямками симетричного тензора?

9. Для яких тензорів власною є ціла (уся) площина (тобто довільний вектор у цій площині буде власним вектором)? Наведіть приклади.

10. Чи можуть три неортогональні вектори бути власними векторами симетричного тензора другого рангу?

11. У випадку однакових власних значень для симетричного тензора другого рангу трійка ортогональних власних векторів вибирається неоднозначно? Якщо так, то у чому полягає неоднозначність?

12. Чи може для тензора другого рангу бути власною ціла площина, яка не є ортогональною до одного із головних напрямків цього тензора? Наведіть приклад (див. задачу 4.6).

13. Який вигляд має тензор у своїй головній системі координат? Що є його діагональними компонентами?

Задачі

4.1. Циліндр із тензором інерції $I = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$ (Oz – вісь симетрії) обертається із кутовою швидкістю $\vec{\omega} = (0, -\omega\sin\alpha, \omega\cos\alpha)$, заданою у головній системі координат тензора інерції. Записати у головній системі координат та у системі координат, отриманій із неї поворотом на кут α навколо осі Ox:

а) момент імпульсу $\vec{L} = I \cdot \vec{\omega}$;

б) кінетичну енергію обертання $T = \dfrac{1}{2}\vec{\omega} \cdot I \cdot \vec{\omega}$;

в) момент відцентрових сил $\vec{N} = \vec{\omega} \times \vec{L}$.

4.2. Для симетричного двовимірного тензора $t = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{12} & t_{22} \end{pmatrix}$ знайти власні значення.

4.3. Знайти власні значення та власні вектори матриць Паулі:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

4.4. Знайти власні значення та власні вектори тензора

$$t = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & 0 \\ t_{12} & t_{22} & 0 \\ 0 & 0 & t_{33} \end{pmatrix}.$$

У задачах (4.5)–(4.13) знайти власні значення, власні вектори та інваріанти вказаних тензорів.

4.5. $t = \vec{a} \otimes \vec{a}$.

4.6. $t = \vec{a} \otimes \vec{b}$.

4.7. $t = ma^2 \hat{E} - m\vec{a} \otimes \vec{a}$.

4.8. $t = \vec{a} \otimes \vec{a} - \frac{1}{2} a^2 \hat{E}$.

4.9. $t = \vec{a} \otimes \vec{a} + \vec{b} \otimes \vec{b}$, де $\vec{a}$, $\vec{b}$ – одиничні вектори, кут між якими φ .

4.10. $t = \vec{a} \otimes \vec{b} + \vec{b} \otimes \vec{a}$.

4.11. Антисиметричний тензор

$$t = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Зауваження. Пошук можна проводити, записуючи компоненти тензора t у вигляді $t_{ij} = -e_{ijk}\omega_k$.

4.12. $t = \vec{a} \otimes \vec{b} - \vec{b} \otimes \vec{a}$.

4.13. Тензор діелектричної проникності оптично активного анізотропного кристала

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_\perp & -i\varepsilon_a & 0 \\ i\varepsilon_a & \varepsilon_\perp & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_\parallel \end{pmatrix}.$$

Розділ 5
Псевдотензори

§ 1. Псевдовектори та псевдотензори

Псевдовектори та псевдотензори – це геометричні об'єкти, які за одних умов не відрізняються від векторів та тензорів, а за інших – дещо відрізняються, і це може бути важливим. Вживають також назви: для псевдотензора – відносний тензор, для псевдовектора – аксіальний вектор, для звичайного вектора – полярний вектор.

Вище в основу класифікації геометричних об'єктів покладено закон перетворення їх компонент при переході від однієї до іншої ортонормованої системи координат, тобто при ортогональному перетворенні. Зокрема, якщо

$$\vec{e}_i' = \alpha_{ij}\vec{e}_j\,, \tag{5.1}$$

то скаляри, вектори і тензори – це об'єкти, що перетворюються за правилами

$$\begin{gathered} \varphi' = \varphi\,, \\ a_i' = \alpha_{ij}a_j\,, \\ t_{ij}' = \alpha_{ik}\alpha_{jl}t_{kl}\,. \end{gathered} \tag{5.2}$$

Введемо новий клас геометричних об'єктів, споріднених скалярам, векторам і тензорам, які називаються відповідно псевдоскалярами, псевдовекторами і псевдотензорами.

У практичній роботі фізики користуються в основному правими ортогональними системами координат, оскільки для багатьох задач цілком достатньо тільки таких систем. У цьому разі використовуються лише такі ортогональні перетворення, які праву систему координат переводять у праву. Кожне таке перетворення відповідає просторовому повороту. У цьому найбільш розповсюдженому із практичної точки зору випадку ніякої різниці між "справжніми" та "відносними" тензорними величинами немає. І ті, й інші перетворюються за формулами (5.2). Тому їх і не розрізняють, називаючи, наприклад, і радіус-вектор, і імпульс, і момент кількості руху просто векторами.

Відмінність псевдовеличин проявляється відносно таких ортогональних перетворень, які праву систему координат переводять у ліву і навпаки. Найпростішими представниками цих перетворень є дзеркальне відображення у площині, наприклад, xOy :

$$\vec{e}_1' = \vec{e}_1\,,\ \ \vec{e}_2' = \vec{e}_2\,,\ \ \vec{e}_3' = -\vec{e}_3\,,$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

та інверсія $\vec{e}_i' = -\vec{e}_i, i = \overline{1,3}$, $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Для таких перетворень $\det A = -1$.

Як уже зазначалося вище (див. розд. 2, п. 1.2), довільне ортогональне перетворення, що не зводиться до повороту, може бути представлене як послідовність деякого повороту і дзеркального відображення у площині або інверсії.

Необхідність у саме таких перетвореннях, для яких $\det A = -1$, може виникати тоді, коли необхідно врахувати симетрію фізичної системи і відповідного тензора, що характеризує її властивості. Наявність симетрії може обмежувати кількість ненульових і незалежних компонент тензора. Наслідки, наприклад, наявності площини симетрії у системі для справжніх та псевдовеличин є, взагалі кажучи, різними.

Означимо векторний добуток $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ у довільній (і лівій, і правій) системі координат як геометричний об'єкт із компонентами

$$c_i = a_j b_k - a_k b_j\,,$$

де індекси i, j, k складають циклічний порядок, і знайдемо закон їх перетворення.

Одержимо щодо дзеркального відображення у площині xOy такий закон перетворення компонент:

$$a_1' = a_1, \qquad b_1' = b_1, \qquad c_1' = a_2'b_3' - a_3'b_2' = -c_1,$$
$$a_2' = a_2, \qquad b_2' = b_2, \qquad c_2' = a_3'b_1' - a_1'b_3' = -c_2,$$
$$a_3' = -a_3, \qquad b_3' = -b_3, \qquad c_3' = a_1'b_2' - a_2'b_1' = c_3.$$

Тобто закон перетворення компонент c_i відрізняється від закону перетворення компонент векторів a_i та b_i додатковим множником -1. Векторний добуток двох векторів є прикладом псевдовектора або аксіального вектора.

Для визначення природи вектора, можна уявити його відображення у дзеркалі, перпендикулярному до нього. Дзеркальне відображення полярного вектора змінює напрямок вектора на протилежний, у той час як відображення аксіального вектора напрямок не змінює.

Запишемо тепер закон перетворення псевдовектора через елементи матриці переходу в загальному вигляді і з'ясуємо, чим відрізняються розглянуті два класи ортогональних перетворень. Скористаємося тим, що у проекціях на довільний ортонормований базис мішаний добуток векторів $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ можна записати у вигляді

$$(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = \begin{vmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{vmatrix} = \det(e_{i\alpha}),$$

де i – номер проекції, α – номер вектора.

Записавши закон перетворення базису у проекціях

$$e'_{i\alpha} = \alpha_{ij} e_{j\alpha},$$

одержимо для визначника матриць

$$\det(e'_{i\alpha}) = \det(\alpha_{ij}) \det(e_{j\alpha}) = \Delta \det(e_{j\alpha})$$

або

$$(\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \vec{e}\,'_3) = \Delta (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3).$$

Тут $\Delta = \det(\alpha_{ij}) = +1$ для поворотів та $\Delta = -1$ для інверсії та всіх інших перетворень, які праву систему координат переводять у ліву або ліву – у праву, відповідно.

$\left(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\right) = +1$ для ортонормованого базису правої системи координат.

$\left(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\right) = -1$ для ортонормованого базису лівої системи координат.

Означення. **Псевдоскаляри, псевдовектори і псевдотензори** – це геометричні об'єкти, які при ортогональному перетворенні базису (5.1) перетворюються за правилами

$$\varphi' = \Delta \varphi \,,$$

$$a'_i = \Delta \alpha_{ij} a_j \,,$$

$$t'_{ij} = \Delta \alpha_{ik} \alpha_{jl} t_{kl} \,.$$

Отже, псевдоскаляру не можна приписати певний знак: він залежить від того, відносно якої системи координат ця величина обчислюється. Аналогічно псевдовектору не можна приписати певний напрямок. Проте причина цього криється не у системі координат, а у самій природі величини.

Із погляду означення тензорів в інваріантній формі особливі властивості псевдовеличин пов'язані з тим, що їх знак фактично визначається за домовленістю. Так, напрямок векторного добутку $\vec{a} \times \vec{b}$ за означенням є таким (див. п. 1.2), що вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{a} \times \vec{b}$ утворюють праву трійку векторів. Що саме є правим, а що лівим, є предметом нашої домовленості, і насправді не має принципового значення. Важливим є *збіг чи відмінність "лівого" і "правого" для того чи іншого об'єкта.* Саме в цьому питанні справжні та псевдовеличини поводяться по-різному, і це має важливі фізичні наслідки. Наприклад: права та ліва поляризація світла, спіральність у квантовій механіці.

Наочним прикладом псевдовектора, визначеного в інваріантній формі, може служити векторний елемент площі (див. розд. 1, п. 1.1, рис. 1.1). При відбиванні у площині, у якій лежить контур, напрямлений відрізок, перпендикулярний площині, змінює знак, оскільки точки його початку та кінця переходять у дзеркально-симетричні їм точки, розташовані з протилежного боку від площини. Водночас напрям обходу контуру не змінюється, а отже не змінюється знак додатної нормалі $\vec{n}$, який вибирається за домовленістю (!) (див. розд. 1, п. 1.1). Отже, $\vec{n}$ і $\vec{S} = S\vec{n}$ – псевдовектори, а площа S – скаляр.

Очевидно, що добуток псевдотензора на псевдотензор є тензором, а множення тензора на псевдоскаляр перетворює його на псевдотензор, скалярний добуток вектора і псевдовектора є псевдоскаляром і т. п.

§ 2. Тензор Леві-Чівіта

Дуже важливими у численних застосуваннях є одиничний тензор E та тензор Леві-Чівіта. Перший із них є справжнім симетричним тензором другого рангу. Другий є псевдотензором третього рангу, антисиметричним за довільною парою індексів. Компоненти першого з них дорівнюють значенням символу Кро́некера, $E = \{\delta_{ij}\}$,

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j; \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Компоненти другого дорівнюють значенням символу Ле́ві-Чіві́та (1.19). Об'єднує їх те, що матриці обох тензорів мають однаковий вигляд в усіх системах координат, $\delta_{ij} = \delta'_{ij}$ та $e_{ijk} = e'_{ijk}$. Такі тензори в математичній літературі називаються **інваріантними**. Водночас δ_{ij} та e_{ijk} формально задовольняють закон перетворення для відповідних об'єктів при переході до іншої системи координат:

$$\delta'_{ij} = \alpha_{ik}\alpha_{jl}\delta_{kl}\,,$$

$$e'_{ijk} = \Delta\,\alpha_{im}\alpha_{jn}\alpha_{kl}e_{mnl}\,. \qquad (5.3)$$

Дійсно, оскільки $\delta_{ij} = \delta'_{ij}$, а для ортогональних перетворень $\alpha_{ik}\alpha_{jk} = \delta_{ij}$, перша рівність обертається на тотожність. Рівність (5.3) буде доведена нижче. Тобто, як це не парадоксально, незалежні від вибору системи координат набори констант $\{\delta_{ij}\}$ та $\{e_{ijk}\}$ дійсно утворюють тензор другого рангу та псевдотензор третього рангу, відповідно. Незалежність компонент одиничного тензора та тензора Леві-Чівіта від вибору системи координат свідчить про те, що ці геометричні об'єкти виглядають однаково в усіх системах координат. Вони є ізотропними об'єктами, тобто відносно них усі напрямки у просторі є рівноправними (див. § 4). Крім того, вони не змінюються при інверсії. Поверхня, що відповідає одиничному тензору (див. розд. 4, п. 5.1), $\delta_{ij}x_i x_j = 1$, є одиничною сферою.

Щодо рівності (5.3), скористаємося тим, що за допомогою e_{ijk} можна записати ряд корисних співвідношень, зокрема, векторний добуток (1.18) та визначник матриці

$$\det(A) = a_{1i}a_{2j}a_{3k}e_{ijk}\,, \quad \det(A)\cdot e_{nml} = a_{ni}a_{mj}a_{lk}e_{ijk}\,, \qquad (5.4)$$

де $A = \left\| a_{ij} \right\|$. Тепер розглянемо геометричний об'єкт третього рангу, компоненти якого в довільній системі координат дорівнюють значенням символу Леві-Чівіта e_{ijk}:

$$e'_{ijk} = e_{ijk} \qquad (5.5)$$

і покажемо, що рівність (5.3) дійсно виконується при довільних ортогональних перетвореннях.

Підставимо у (5.4) замість матриці $A = \left\| a_{ij} \right\|$ матрицю переходу $\left\| \alpha_{ij} \right\|$, тоді із (5.4) випливає

$$\alpha_{ni}\alpha_{mj}\alpha_{lk}e_{ijk} = \Delta\, e'_{nml}\,.$$

Домноживши цю рівність на Δ і враховуючи, що для ортогональних перетворень $\Delta^2 = 1$, одержимо вираз (5.3). Отже, компоненти e_{ijk} формально задовольняють закон перетворення (5.3). Тому величини e_{ijk} утворюють абсолютно антисиметричний псевдотензор третього рангу. Його й називають **тензором Леві-Чівіта** (хоча він є псевдотензором). Таким чином векторний добуток $\vec{a}\times\vec{b} = e_{ijk}\vec{e}_i a_j b_k$ є псевдовектором, а мішаний добуток $(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = e_{ijk}a_i b_j c_k$ – псевдоскаляром.

Важливе значення для практики мають тотожності, які виражають зовнішній добуток і згортки двох тензорів Леві-Чівіта через символи Кронекера[7]:

1) $e_{klm}e_{ijn} = \left(\vec{e}_k, \vec{e}_l, \vec{e}_m\right)\left(\vec{e}_i, \vec{e}_j, \vec{e}_n\right) =$

$$= \begin{vmatrix} \vec{e}_k \cdot \vec{e}_i & \vec{e}_k \cdot \vec{e}_j & \vec{e}_k \cdot \vec{e}_n \\ \vec{e}_l \cdot \vec{e}_i & \vec{e}_l \cdot \vec{e}_j & \vec{e}_l \cdot \vec{e}_n \\ \vec{e}_m \cdot \vec{e}_i & \vec{e}_m \cdot \vec{e}_j & \vec{e}_m \cdot \vec{e}_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \delta_{ki} & \delta_{kj} & \delta_{kn} \\ \delta_{li} & \delta_{lj} & \delta_{ln} \\ \delta_{mi} & \delta_{mj} & \delta_{mn} \end{vmatrix}$$

(тут ми скористалися рівністю

$$\left(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\right)\left(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\right) = \det A \cdot \det B = \det A \cdot \det B^T =$$

$$= \det(A \cdot B^T) = \det\left\|\vec{a}_i \cdot \vec{b}_j\right\|);$$

2) $e_{klm}e_{ijm} = \sum\limits_m \begin{vmatrix} \delta_{ki} & \delta_{kj} & \delta_{km} \\ \delta_{li} & \delta_{lj} & \delta_{lm} \\ \delta_{mi} & \delta_{mj} & \delta_{mm} \end{vmatrix} =$

$$= \sum_m \left(\delta_{km} \begin{vmatrix} \delta_{li} & \delta_{lj} \\ \delta_{mi} & \delta_{mj} \end{vmatrix} - \delta_{lm} \begin{vmatrix} \delta_{ki} & \delta_{kj} \\ \delta_{mi} & \delta_{mj} \end{vmatrix} + \delta_{mm} \begin{vmatrix} \delta_{ki} & \delta_{kj} \\ \delta_{li} & \delta_{lj} \end{vmatrix} \right) =$$

$$= \begin{vmatrix} \delta_{li} & \delta_{lj} \\ \delta_{ki} & \delta_{kj} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \delta_{ki} & \delta_{kj} \\ \delta_{li} & \delta_{lj} \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} \delta_{ki} & \delta_{kj} \\ \delta_{li} & \delta_{lj} \end{vmatrix} = \delta_{ki}\delta_{lj} - \delta_{li}\delta_{kj};$$

3) $e_{klm}e_{ilm} = \sum\limits_l \left(\delta_{ki}\delta_{ll} - \delta_{li}\delta_{kl}\right) = 3\delta_{ki} - \delta_{ki} = 2\delta_{ki};$

4) $e_{klm}e_{klm} = 2\delta_{kk} = 6$.

§ 3. Антисиметричний тензор другого рангу як псевдовектор

Нехай Ω – довільний антисиметричний тензор другого рангу, $\Omega_{ij} = -\Omega_{ji}$, у тривимірному просторі матрицю його компонент можна записати так:

---

[7] Нагадаємо, що у п. 2.2 розд. 1 ми домовилися про запис підсумовування: якщо один і той самий латинський індекс під знаком суми зустрічається двічі, то знак суми опускаємо.

$$\left\|\Omega_{ij}\right\| = \begin{pmatrix} 0 & \Omega_{12} & \Omega_{13} \\ -\Omega_{12} & 0 & \Omega_{23} \\ -\Omega_{13} & -\Omega_{23} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix},$$

тобто тензор Ω задається трьома незалежними параметрами $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$:

$$\Omega_{ij} = -e_{ijk}\omega_k . \tag{5.6}$$

Якщо ми домножимо (5.6) на e_{ijn} і підсумуємо за i, j, то знайдемо вираз для ω_n через Ω_{ij}:

$$e_{ijn}\Omega_{ij} = -e_{ijn}e_{ijk}\omega_k = -2\delta_{nk}\omega_k = -2\omega_n ,$$

$$\omega_n = -\frac{1}{2}e_{nij}\Omega_{ij} . \tag{5.7}$$

Звідси видно, що $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ утворюють псевдовектор, оскільки ω_i є результатом згортки псевдотензора і тензора. Таким чином, довільний антисиметричний тензор другого рангу еквівалентний деякому псевдовектору (аксіальному вектору) і навпаки. Єдиний ненульовий інваріант тензора Ω дорівнює $I_2 = \left|\vec{\omega}\right|^2$, а сам тензор має єдиний виділений напрямок, паралельний $\vec{\omega}$.

Об'єкти Ω та $\vec{\omega}$ називаються **дуальними**, а побудова за одним із таких об'єктів іншого називається **дуалізацією**.

Розглянемо тепер відображення $\vec{y} = \Omega\,\vec{x}$:

$$y_i = \Omega_{ij}x_j = -e_{ijk}\omega_k x_j = e_{ikj}\omega_k x_j , \tag{5.8}$$

тобто $\vec{y} = \Omega\,\vec{x} = \vec{\omega}\times\vec{x}$.

Оскільки $\vec{\omega}\times\vec{x} = \vec{\omega}\times\hat{E}\vec{x}$, де $\hat{E}$ – одиничний оператор, то використовують символічний запис

$$\Omega = \vec{\omega}\times\hat{E} . \tag{5.9}$$

У компонентах його слід читати: $\Omega_{ij} = e_{ikl}\omega_k\delta_{lj} = -e_{ijk}\omega_k$, що збігається із (5.6).

Той факт, що кількість компонент вектора дорівнює кількості незалежних компонент антисиметричного тензора другого рангу, справедливий лише для тривимірного простору. У випадку

n-вимірного простору антисиметричний тензор має $\frac{n(n-1)}{2}$ незалежних компонент, у той час як вектор – n компонент.

§ 4. Ізотропні та одновісні тензори та псевдотензори

Ізотропними тензорами та псевдотензорами називаються ті з них, компоненти яких не змінюються при довільних поворотах системи координат.

Скаляри та псевдоскаляри, очевидно, є ізотропними об'єктами.

Нульовий тензор будь-якого рангу є ізотропним.

Ізотропних ненульових дійсних тензорів першого порядку не існує. Ізотропний лише нульовий дійсний вектор.

Доведемо останнє твердження. Оскільки компоненти ізотропного вектора $\vec{A}$, за означенням, однакові в усіх системах відліку, то після довільного повороту $A'_i = A_i$, тобто $A'_x = A_x$, $A'_y = A_y$, $A'_z = A_z$. Повернувши систему координат навколо осі Oz на кут π, із формул перетворень компонент вектора отримаємо $A'_x = -A_x$, $A'_y = -A_y$, $A'_z = A_z$. Ці рівності сумісні із попередніми лише за умови $A_x = A_y = 0$. Здійснивши поворот навколо осі Ox на кут π, аналогічно показуємо, що і $A_z = 0$, тобто вектор $\vec{A} = 0$.

Довільний ізотропний тензор t другого рангу – кратний одиничному тензору $t = C\,E$ і має компоненти

$$t_{ij} = C\,\delta_{ij}\,, \tag{5.10}$$

де $C = \text{const}$.

Доведемо це. Довільний тензор другого рангу можна представити у вигляді суми симетричного й антисиметричного тензорів $t_{ij} = s_{ij} + a_{ij}$. Антисиметричний тензор еквівалентний деякому аксіальному вектору (див. (5.7)) і, в силу доведеної вище властивості вектора, його компоненти не залежать від системи відліку лише тоді, коли вони дорівнюють нулю. Тому розглянемо симетричний тензор s_{ij}. Виберемо систему відліку, у якій тензор s_{ij} має діагональний вигляд $\lambda_i\delta_{ij}$. Якщо власні значення λ_i різні, то компоненти тензора залежатимуть від вибору осей, тобто від того, якою цифрою (1, 2 чи 3) позначено цю вісь. Тільки при $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$ компоненти тензора не залежатимуть від вибору осей і матимуть вигляд $\lambda\delta_{ij}$, що і треба було довести.

Ненульові ізотропні тензори вищих рангів можна побудувати з ізотропних тензорів другого порядку, використовуючи тензорні операції.

Із одиничних тензорів другого рангу можна побудувати ізотропний тензор λ четвертого рангу найбільш загального вигляду

$$\lambda_{ijkl} = A\delta_{ij}\delta_{kl} + B\delta_{ik}\delta_{jl} + C\delta_{il}\delta_{jk} \tag{5.11}$$

та ізотропні тензори λ четвертого рангу із заданою симетрією, зокрема, для таких окремих випадків:

а) тензор, симетричний відносно перестановки пар індексів $\lambda_{ijkl} = \lambda_{klij}$ та відносно перестановки індексів у парі $\lambda_{ijkl} = \lambda_{jikl}$ (симетрія тензора пружних сталих):

$$\lambda_{ijkl} = A\delta_{ij}\delta_{kl} + B(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})\,; \tag{5.12}$$

б) тензор із симетрією тензора пружних сталих, але з нульовим слідом $\lambda_{ijkk} = 0$:

$$\lambda_{ijkl} = A[\tfrac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) - \tfrac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl}]\,; \tag{5.13}$$

в) повністю симетричний тензор:

$$\lambda_{ijkl} = A(\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})\,. \tag{5.14}$$

Серед геометричних об'єктів третього рангу ізотропними є псевдотензори третього рангу, кратні антисиметричному тензору Леві-Чівіта, компоненти якого однакові у всіх системах координат і дорівнюють e_{ijk} згідно із формулою (1.19).

Тензори, які не є повністю ізотропними, але є ізотропними відносно поворотів навколо певної осі, що задається вектором $\vec{u}$, можна побудувати з ізотропних тензорів та компонент вектора $\vec{u}$. Прикладом можуть служити вирази для одновісного симетричного тензора другого рангу (розд. 4, § 3, формула (4.9)) та розглянуте у § 3 представлення антисиметричного тензора другого рангу через псевдовектор.

Будемо називати **одновісними** тензорами відповідного рангу такі тензори, компоненти яких не змінюються при довільних поворотах системи координат навколо осі, паралельної деякому вектору $\vec{u}$. За такого повороту відносне розташування вектора $\vec{u}$ та координатних осей (яке може бути задане, наприклад, кутами між координатними осями та вектором $\vec{u}$) не змінюється; не змінюються і координати вектора $\vec{u}$, а отже, і компоненти тензора $u_i u_j$ (тензора проектування на напрямок вектора $\vec{u}$, якщо $\vec{u}$ – одиничний вектор).

Якщо головні значення тензора $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$, маємо для одновісного симетричного тензора інваріантне представлення (див. формулу (4.9)):

$$\varepsilon = \lambda_1 E + (\lambda_3 - \lambda_1)\vec{x}_3 \otimes \vec{x}_3,$$

де $\vec{x}_3 = \vec{u}$ відповідає виділеній головній осі симетрії.

У довільній системі координат його компоненти мають вигляд

$$\varepsilon_{ij} = \lambda_1 \delta_{ij} + (\lambda_3 - \lambda_1) u_i u_j. \tag{5.15}$$

Це означає, що тензори δ_{ij} та $u_i u_j$ утворюють базис у лінійному просторі симетричних одновісних тензорів другого рангу:

$$\varepsilon_{ij} = A\delta_{ij} + B u_i u_j. \tag{5.16}$$

Довільний симетричний одновісний тензор другого рангу є лінійною комбінацією ізотропного тензора та тензора проектування і має дві незалежні компоненти, які можна виразити через головні значення тензора, тобто діагональні компоненти тензора в головній системі координат.

З одиничного тензора другого рангу та тензора проектування на напрямок заданого одиничного вектора $\vec{u}$ побудуємо тензори четвертого рангу такими шляхами: а) утворення прямих добутків; б) перестановка індексів в утворених добутках. Утворені тензори

$$\delta_{ij}\delta_{kl},\ \delta_{ik}\delta_{jl},\ \delta_{il}\delta_{jk}, \tag{5.17}$$

$$\delta_{ij}u_k u_l,\ \delta_{ik}u_j u_l,\ \delta_{il}u_j u_k,\ \delta_{jk}u_i u_l,\ \delta_{jl}u_i u_k,\ \delta_{kl}u_i u_j, \tag{5.18}$$

$$u_i u_j u_k u_l \tag{5.19}$$

є одновісними, тобто їх компоненти не змінюються при довільному повороті системи координат навколо паралельної вектору

$\vec{u}$ осі. Вони утворюють базис у відповідному лінійному просторі одновісних тензорів четвертого рангу.

Із "базисних" тензорів (5.17)–(5.19) шляхом утворення лінійних комбінацій будуємо одновісні тензори четвертого рангу найбільш загального вигляду, компоненти яких не змінюються при довільному повороті системи координат навколо напрямку вектора $\vec{u}$, для тензорів такої симетрії:

а) повністю симетричний тензор –

$$\eta_{ijkl} = A\left(\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}\right) + \\ + B\left(\delta_{ij}u_k u_l + \delta_{ik}u_j u_l + \delta_{il}u_j u_k + \delta_{jk}u_i u_l + \delta_{jl}u_i u_k + \delta_{kl}u_i u_j\right) + \\ + C u_i u_j u_k u_l\,; \tag{5.20}$$

б) тензор із симетрією тензора пружних сталих –

$$\eta_{ijkl} = A\delta_{ij}\delta_{kl} + D\left(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}\right) + \\ + B\left(\delta_{ij}u_k u_l + \delta_{kl}u_i u_j\right) + F\left(\delta_{ik}u_j u_l + \delta_{il}u_j u_k + \delta_{jk}u_i u_l + \delta_{jl}u_i u_k\right) + \\ + C u_i u_j u_k u_l\,. \tag{5.21}$$

Кількість незалежних компонент повністю симетричного тензора четвертого рангу найбільш загального вигляду (5.20), компоненти якого не змінюються при довільному повороті системи координат навколо напрямку вектора $\vec{u}$, дорівнює трьом. Загальний вигляд такого тензора через незалежні компоненти:

$$\eta_{ijkl} = \frac{1}{3}\lambda_1\left(\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}\right) + \left(\lambda_1 + \lambda_3 - 6\lambda_2\right)u_i u_j u_k u_l + \\ + \left(\lambda_2 - \frac{1}{3}\lambda_1\right)\left(\delta_{ij}u_k u_l + \delta_{ik}u_j u_l + \delta_{il}u_j u_k + \right. \\ \left. + \delta_{jk}u_i u_l + \delta_{jl}u_i u_k + \delta_{kl}u_i u_j\right), \tag{5.22}$$

де $\lambda_1 = \eta_{1111}$, $\lambda_2 = \eta_{1133}$, $\lambda_3 = \eta_{3333}$ у системі координат із віссю Oz, паралельною до $\vec{n}$.

Приклад 1. Вектор $\vec{s}$ хаотично обертається навколо деякого фіксованого напрямку $\vec{n}$ так, що ймовірність різних орієнтацій вектора $\vec{s}$ описується деякою функцією розподілу $f(\theta)$, де θ –

кут між $\vec{n}$ та $\vec{s}$. Вектори $\vec{n}$ та $\vec{s}$ вважати одиничними. Знайти середні значення компонент тензорів $\overline{s_i}$, $\overline{s_i s_j}$, $\overline{s_i s_j s_k}$, $\overline{s_i s_j s_k s_l}$, якщо $f(\pi-\theta)=f(\theta)$, тобто протилежні орієнтації вектора $\vec{s}$ рівноймовірні.

Розв'язання. Тут і далі в цьому розділі риска означає усереднення за орієнтаціями вектора:

$$\overline{G}=\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}G(\theta,\varphi)f(\theta,\varphi)\sin\theta d\theta\ , \qquad (5.23)$$

де θ,φ – сферичні кути, що задають орієнтацію вектора $\vec{n}$, $f(\theta,\varphi)$ – функція розподілу ймовірностей його орієнтацій.

Оскільки протилежні орієнтації вектора $\vec{s}$ рівноймовірні, тензори непарних рангів дорівнюють нулю: $\overline{s_i}=0$, $\overline{s_i s_j s_k}=0$. Тензор $\overline{s_i s_j}$ є симетричним і одновісним відносно напрямку вектора $\vec{n}$. Позначивши $\overline{s_i s_j}$ через ε_{ij}, відповідно до (5.15) маємо

$$\varepsilon_{ij}=\varepsilon_1\delta_{ij}+(\varepsilon_3-\varepsilon_1)n_i n_j\ ,$$

де $\varepsilon_1=\overline{s_x^2}=\overline{s_y^2}$, $\varepsilon_3=\overline{s_z^2}$ у системі координат із віссю *Oz*, паралельною до $\vec{n}$. Крім того, $\vec{s}^{\,2}=1$, тому $\overline{s_x^2}+\overline{s_y^2}+\overline{s_z^2}=2\varepsilon_1+\varepsilon_3=1$. Отже, головні значення тензора $\overline{s_i s_j}$ задаються одним незалежним параметром, який залежить від вигляду функції розподілу $f(\theta)$.

У подібних випадках, зокрема у теорії нематичних рідких кристалів, використовують такий розклад функції розподілу, що залежить тільки від сферичного кута θ

$$f(\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)S_l P_l(\cos\theta) \qquad (5.24)$$

за поліномами Лежандра $P_l(\cos\theta)$, які утворюють систему ортогональних на одиничній сфері функцій:

$$\int_0^{\pi}P_{l'}(\cos\theta)P_l(\cos\theta)\sin\theta\, d\theta=\frac{2}{2l+1}\delta_{l'l}\,.$$

У розкладі функції розподілу $f(\theta)$ коефіцієнти

$$S_l = \frac{1}{2}\int_0^\pi f(\theta)P_l(\cos\theta)\sin\theta d\theta \qquad (5.25)$$

– так звані параметри порядку, $S_l = \overline{P_l(\cos\theta)}$, де $\overline{P_l(\cos\theta)} = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi P_l(\cos\theta) f(\theta)\sin\theta d\theta$. Зокрема,

$$S_2 = \frac{1}{2}(3\overline{\cos^2\theta} - 1),\ S_4 = \frac{1}{8}(35\overline{\cos^4\theta} - 30\overline{\cos^2\theta} + 3), \qquad (5.26)$$

звідки

$$\overline{s_z^2} = \frac{1}{3}(1 + 2S_2),\ \overline{s_z^4} = \frac{1}{35}(8S_4 + 20S_2 + 7).$$

Тоді остаточно

$$\overline{s_i s_j} = \frac{1}{3}\delta_{ij} + S_2(n_i n_j - \frac{1}{3}\delta_{ij}).$$

Частина цього тензора, пропорційна параметру порядку, є тензором із нульовим слідом. У випадку сферично-симетричного розподілу, коли $f(\theta) = 1$ і $S_2 = 0$, ця частина зникає. Навпаки, якщо вектор $\vec{s}$ орієнтований строго вздовж $\vec{n}$, маємо $S_2 = 1$, тоді $\overline{s_i s_j} = n_i n_j$.

Тензор $\overline{s_i s_j s_k s_l}$ є повністю симетричним тензором четвертого рангу, і крім того, він є одновісним відносно напрямку вектора $\vec{n}$, отже, має загальний вигляд (5.22):

$$\overline{s_i s_j s_k s_l} = \frac{1}{3}\lambda_1\left(\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}\right) + \left(\lambda_1 + \lambda_3 - 6\lambda_2\right)n_i n_j n_k n_l +$$
$$+\left(\lambda_2 - \frac{1}{3}\lambda_1\right)\left(\delta_{ij}n_k n_l + \delta_{ik}n_j n_l + \delta_{il}n_j n_k +\right.$$
$$\left.+\delta_{jk}n_i n_l + \delta_{jl}n_i n_k + \delta_{kl}n_i n_j\right), \qquad (5.27)$$

де $\lambda_1 = \overline{s_x^4}$, $\lambda_2 = \overline{s_x^2 s_z^2}$, $\lambda_3 = \overline{s_z^4}$ у системі координат із віссю Oz, паралельною до $\vec{n}$. Ураховуючи, що вектор $\vec{s}$ – одиничний, після усереднення за кутом φ отримаємо, що всі середні значення

$\overline{s_i s_j}$ виражаються через два незалежні параметри $\overline{s_z^2}$ та $\overline{s_z^4}$: $\overline{s_x^2} = \frac{1}{2}(1 - \overline{s_z^2})$, $\lambda_3 = \overline{s_z^4}$, $\lambda_2 = \frac{1}{2}(\overline{s_z^2} - \overline{s_z^4})$, $\lambda_1 = \frac{3}{8}(1 - 2\overline{s_z^2} + \overline{s_z^4})$. У свою чергу, $\overline{s_z^2}$ та $\overline{s_z^4}$ записуються через параметри порядку S_2 та S_4 (5.26).

Приклад 2. Полікристалічне середовище складається із хаотично орієнтованих гексагональних мікрокристалів однакового розміру, причому осі симетрії мікрокристалів мають переважний напрямок орієнтації $\vec{n}$, а напрямки інших кристалічних осей рівноймовірні. Функція розподілу осей мікрокристалів за напрямками $f(\theta)$, де θ – кут між вектором $\vec{n}$ і віссю мікрокристала, визначена так, як у попередньому прикладі, є заданою. Відомо, що фізичні властивості мікрокристала описуються за допомогою деякого тензора. Знайти середнє за об'ємом значення такого тензора для середовища. Розглянути випадки таких тензорів: а) довільний симетричний тензор другого рангу; б) довільний повністю симетричний тензор четвертого рангу.

Розв'язання. Усереднення за об'ємом еквівалентне усередненню за орієнтаціями, оскільки розміри мікрокристалів однакові. Нехай напрямок осі симетрії окремого мікрокристала задається вектором $\vec{s}$ (протилежні орієнтації вектора $\vec{s}$ еквівалентні). У гексагональному кристалі симетричний тензор другого рангу є одновісним і має вигляд $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_1\delta_{ij} + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)s_i s_j$ (див. (5.15)), а повністю симетричний тензор четвертого рангу мікрокристалів за заданого $\vec{s}$ стає одновісним після усереднення за орієнтаціями кристалічних осей, перпендикулярних до $\vec{s}$, і має вигляд (див. (5.27)):

$$\eta_{ijkl} = \frac{1}{3}\lambda_1\left(\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}\right) + \left(\lambda_1 + \lambda_3 - 6\lambda_2\right)s_i s_j s_k s_l +$$
$$+\left(\lambda_2 - \frac{1}{3}\lambda_1\right)\left(\delta_{ij}s_k s_l + \delta_{ik}s_j s_l + \delta_{il}s_j s_k + \delta_{jk}s_i s_l + \delta_{jl}s_i s_k + \delta_{kl}s_i s_j\right).$$

Незалежні компоненти цього тензора λ_1, λ_2, λ_3 вважатимемо заданими. Позначимо компоненти тензора для середовища через ς_{ijkl}, $\varsigma_{ijkl} = \overline{\eta_{ijkl}}$. Скориставшись результатом прикладу 1, після усереднення за орієнтаціями вектора $\vec{s}$, дістанемо

$$\overline{\varepsilon_{ij}} = \frac{1}{3}(2\varepsilon_1 + \varepsilon_3)\delta_{ij} + S_2(\varepsilon_3 - \varepsilon_1)(n_i n_j - \frac{1}{3}\delta_{ij}),$$

$$\varsigma_{ijkl} = \frac{1}{3}\mu_1\left(\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}\right) + \left(\mu_1 + \mu_3 - 6\mu_2\right)n_i n_j n_k n_l +$$

$$+\left(\mu_2 - \frac{1}{3}\mu_1\right)\left(\delta_{ij}n_k n_l + \delta_{ik}n_j n_l + \delta_{il}n_j n_k +\right.$$

$$\left. +\delta_{jk}n_i n_l + \delta_{jl}n_i n_k + \delta_{kl}n_i n_j\right).$$

Тут

$$\mu_1 = \lambda_1 + (3\lambda_2 - \lambda_1)2\overline{s_x^2} + (\lambda_1 + \lambda_3 - 6\lambda_2)\overline{s_x^4},$$

$$3\mu_2 = \lambda_1 + (3\lambda_2 - \lambda_1)(\overline{s_x^2} + \overline{s_z^2}) + 3(\lambda_1 + \lambda_3 - 6\lambda_2)\overline{s_x^2 s_z^2},$$

$$\mu_3 = \lambda_1 + (3\lambda_2 - \lambda_1)2\overline{s_z^2} + (\lambda_1 + \lambda_3 - 6\lambda_2)\overline{s_z^4},$$

а всі середні у правих частинах обраховані у прикладі 1.

Контрольні запитання

1. Псевдовектори та псевдотензори.

2. Чому псевдотензори називають відносними тензорами?

3. Символи Леві-Чівіта.

4. Який геометричний об'єкт утворюють символи Леві-Чівіта?

5. Як змінюється псевдотензор Леві-Чівіта при переході до іншого ортонормованого базису?

6. Записати вираз для векторного та мішаного добутків векторів через символи Леві-Чівіта.

7. Записати вираз визначника квадратної матриці через символи Леві-Чівіта.

8. Довільному антисиметричному тензору другого рангу можна поставити у відповідність деякий псевдовектор (аксіальний вектор) чи справжній вектор? Як?

9. Чи можна поставити у відповідність псевдовектору деякий антисиметричний тензор другого рангу?

Задачі

5.1. Тензор $\vec{a}\otimes\vec{b}$ розкласти на симетричну та антисиметричну частини. Знайти аксіальний вектор $\vec{\omega}$, що відповідає антисиметричній частині цього тензора.

5.2. Довести твердження:

а) єдиний вектор, компоненти якого однакові в усіх системах координат, – нульовий вектор;

б) тензор другого рангу, компоненти якого однакові в усіх системах координат, – пропорційний δ_{ij};

в) псевдотензор третього рангу, компоненти якого однакові в усіх системах координат, – пропорційний e_{ijk};

г) повністю симетричний тензор четвертого рангу, компоненти якого однакові в усіх системах координат, – пропорційний $\delta_{ik}\delta_{lm}+\delta_{im}\delta_{kl}+\delta_{il}\delta_{km}$.

5.3. Одиничний вектор $\vec{n}$ із однаковою ймовірністю може набувати довільної орієнтації у просторі. Знайти середні значення його компонент $\overline{n_i}$ і їх добутків $\overline{n_i n_j}$, $\overline{n_i n_j n_k}$, $\overline{n_i n_j n_k n_l}$. Показати, що величини $\overline{n_i n_j}$, $\overline{n_i n_j n_k}$, $\overline{n_i n_j n_k n_l}$ утворюють симетричні тензори відповідного рангу.

5.4. Одиничний вектор $\vec{n}$ із однаковою ймовірністю може набувати довільної орієнтації у просторі. Обчислити середні значення таких добутків (означення середнього див. (5.23)):

а) $\overline{(\vec{a}\cdot\vec{n})^2}$; б) $\overline{(\vec{a}\cdot\vec{n})(\vec{b}\cdot\vec{n})}$; в) $\overline{(\vec{a}\cdot\vec{n})\vec{n}}$; г) $\overline{\left(\vec{a}\times\vec{n}\right)^2}$;

д) $\overline{(\vec{a}\times\vec{n})\cdot(\vec{b}\times\vec{n})}$; є) $\overline{(\vec{a}\cdot\vec{n})(\vec{b}\cdot\vec{n})(\vec{c}\cdot\vec{n})(\vec{d}\cdot\vec{n})}$;

де $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ – задані сталі вектори.

У задачах 5.5–5.7 обчислити інтеграл за орієнтаціями вектора $\vec{r}$, $\int\ldots d\Omega$ означає інтеграл за повним тілесним кутом (у сферичних координатах $d\Omega\equiv\sin\theta\, d\theta\, d\varphi$), $\vec{k}$ – сталий вектор, $\left|\vec{k}\right|\neq 1$.

5.5. $I(\vec{a},\vec{b})=\int d\Omega\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{r}}{r}\right)\left(\frac{\vec{b}\cdot\vec{r}}{r}\right)$.

5.6. $I(\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}) = \int d\Omega \left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{r}}{r}\right)\left(\frac{\vec{b}\cdot\vec{r}}{r}\right)\left(\frac{\vec{c}\cdot\vec{r}}{r}\right)\left(\frac{\vec{d}\cdot\vec{r}}{r}\right).$

5.7. Враховуючи симетрію підінтегрального виразу та його тензорну структуру, знайти значення інтегралів:

$$I_i(\vec{k}) = \frac{1}{4\pi}\int \frac{n_i d\Omega}{1+\vec{k}\cdot\vec{n}}, \qquad J_{ij}(\vec{k}) = \frac{1}{4\pi}\int \frac{n_i n_j d\Omega}{1+\vec{k}\cdot\vec{n}},$$

тут $\vec{k}$ – сталий вектор, $\left|\vec{k}\right| \neq 1$, $\vec{n} = \vec{r}/r$.

Розділ 6
Векторний аналіз у декартових системах координат

§ 1. Скалярне поле. Градієнт скалярного поля

Розглянуті в розд. 1 алгебраїчні операції над векторами придатні як для сталих, так і для змінних векторів.

Якщо деяка скалярна величина Φ має визначене значення в кожній точці тривимірного простору або частини простору, ми говоримо про скалярне поле $\Phi(\vec{r})$ цієї величини в цій області простору. Прикладами скалярних полів є поле температури, поле тиску в атмосфері, поле електростатичного потенціалу.

Задання поля за допомогою функції трьох змінних (трьох декартових координат) $\Phi(\vec{r}) = \Phi(x, y, z)$ не завжди дає достатню уяву про зміну цього поля. Тому зручно користуватися так званими поверхнями рівня. **Поверхнею рівня** $\Phi(\vec{r}) = C$ називають геометричне місце точок, у яких скалярна функція поля має одне й те саме значення. У випадку електростатичного потенціалу поверхні рівня називають **еквіпотенціальними поверхнями**. Надаючи константі C різних числових значень, маємо окремі поверхні рівня. Взаємне розміщення поверхонь рівня у просторі і дає наочне уявлення про це скалярне поле. Поверхні рівня не повинні перетинатися. Дійсно, на лінії перетину двох поверхонь – $\Phi_1(\vec{r}) = C_1$ та $\Phi_2(\vec{r}) = C_2$ – функція $\Phi(\vec{r})$ мала б два різні значення, що недопустимо. Математично це означає, що функція $\Phi(\vec{r})$ повинна бути однозначною.

При вивченні скалярних полів користуються не лише декартовою системою координат, а й іншими прямокутними, але криволінійними системами координат (див. розд. 8).

Приклад 1. Для поля, створеного точковим зарядом, розташованим у точці $\vec{r}_0$, електростатичний потенціал дорівнює $\Phi(\vec{r}) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{e}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}$. Еквіпотенціальними поверхнями $\Phi(\vec{r}) = \text{const}$ є концентричні сфери $|\vec{r}-\vec{r}_0| = C$, $(x-x_o)^2 + (y-y_o)^2 + (z-z_o)^2 = C^2$.

Нехай точка $\vec{r}$ є правильною точкою функції $\Phi(\vec{r})$, тобто в околі цієї точки функцію Φ можна розвинути в ряд Тейлора. У загальному випадку функція $\Phi(\vec{r})$ у різних напрямах змінюється по-різному. Природно поставити питання про швидкість зміни цієї функції в розглядуваній точці в довільному напрямку, що виходить із точки з радіус-вектором $\vec{r}$. Напрямок, у якому нас цікавить зміна функції Φ, характеризуватимемо одиничним вектором $\vec{s}$. Розглянемо точку $\vec{r}'$ таку, що $\vec{r}' - \vec{r} = \varepsilon\vec{s}$. Тоді границю відношення

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\Phi(\vec{r}')-\Phi(\vec{r})}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\Phi(\vec{r}+\varepsilon\vec{s})-\Phi(\vec{r})}{\varepsilon} = \frac{\partial\Phi}{\partial s}$$

будемо називати **похідною** скалярної функції у точці $\vec{r}$ **за напрямком** $\vec{s}$. Вважаючи ε малим і використовуючи розвинення в ряд Тейлора

$$\Phi(\vec{r}+\varepsilon\vec{s}) = \Phi(x+\varepsilon s_1, y+\varepsilon s_2, z+\varepsilon s_3) =$$
$$= \Phi(x,y,z) + \frac{1}{1!}\frac{\partial\Phi}{\partial x}\varepsilon s_1 + \frac{1}{1!}\frac{\partial\Phi}{\partial y}\varepsilon s_2 + \frac{1}{1!}\frac{\partial\Phi}{\partial z}\varepsilon s_3 + o(\varepsilon),$$

одержуємо

$$\frac{\partial\Phi}{\partial s} = s_1\frac{\partial\Phi}{\partial x} + s_2\frac{\partial\Phi}{\partial y} + s_3\frac{\partial\Phi}{\partial z}.$$

Праву частину можна інтерпретувати як скалярний добуток двох векторів $\vec{s} = s_1\vec{e}_1 + s_2\vec{e}_2 + s_3\vec{e}_3$ та $\operatorname{grad}\Phi = \dfrac{\partial\Phi}{\partial x}\vec{e}_1 + \dfrac{\partial\Phi}{\partial y}\vec{e}_2 + \dfrac{\partial\Phi}{\partial z}\vec{e}_3$, який називають **градієнтом** функції. Тоді можна записати

$$\frac{\partial\Phi}{\partial s} = \vec{s}\cdot\operatorname{grad}\Phi = \vec{s}\cdot\vec{\nabla}\Phi = (\vec{s}\cdot\vec{\nabla})\Phi.$$

Тут символ $\vec{\nabla}$ позначає оператор Гамільтона "набла" – диференціальний векторний лінійний оператор, який у декартовій системі координат має вигляд

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_1 \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_2 \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_3 \frac{\partial}{\partial z}$$

або

$$\vec{\nabla} = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z},$$

якщо використовувати загальноприйняті позначення для ортів ПДСК. При переході до іншої ПДСК частинні похідні від Φ перетворюються за таким самим законом, що і компоненти вектора. Отже, $\operatorname{grad}\Phi$ є вектором.

Повернемося до формули для похідної від скалярної функції за напрямком

$$\frac{\partial \Phi(\vec{r})}{\partial s} = (\vec{s} \cdot \vec{\nabla})\Phi = \vec{s} \cdot \operatorname{grad}\Phi .$$

Розкриваючи скалярний добуток, запишемо

$$\frac{\partial \Phi(\vec{r})}{\partial s} = |\vec{s}||\operatorname{grad}\Phi|\cos\left(\vec{s},\, \operatorname{grad}\Phi\right) = |\operatorname{grad}\Phi|\cos\left(\vec{s},\, \operatorname{grad}\Phi\right).$$

Розглянемо випадок, коли вектор $\vec{s}$ є дотичним до поверхні рівня. Оскільки на поверхні рівня $\Phi(\vec{r}) = \mathrm{const}$, то $\dfrac{\partial \Phi}{\partial s} = \vec{s} \cdot \vec{\nabla}\Phi = 0$, а це можливо тільки тоді, коли $\cos\left(\vec{s}, \vec{\nabla}\Phi\right) = 0$, тобто коли $\vec{s} \perp \vec{\nabla}\Phi$. Таким чином, вектор $\vec{\nabla}\Phi \equiv \operatorname{grad}\Phi$ є перпендикулярним до поверхні рівня. Якщо вектор $\vec{s}$ є довільно орієнтованим відносно поверхні рівня, але не дотичним до неї, то $\dfrac{\partial \Phi}{\partial s} \neq 0$ і величина $\dfrac{\partial \Phi}{\partial s}$ досягає максимального значення, якщо $\cos(\vec{s}, \vec{\nabla}\Phi) = 1$. Тоді $\left.\dfrac{\partial \Phi}{\partial s}\right|_{\max} = |\operatorname{grad}\Phi|$.

Отже, **градієнт функції** $\operatorname{grad}\Phi(\vec{r}) \equiv \vec{\nabla}\Phi$ – це вектор, що вказує напрямок найшвидшої зміни функції Φ у даній точці і за абсолютною величиною дорівнює відповідній похідній функції Φ за напрямком найшвидшого її зростання.

Оскільки $\vec{\nabla}$ – лінійний диференціальний оператор першого порядку, справедливі такі очевидні формули:

$$\operatorname{grad}\left(C_1 f + C_2 \varphi\right) = C_1 \operatorname{grad} f + C_2 \operatorname{grad} \varphi, \text{ де } C_1,\ C_2 \text{ – сталі,}$$

$$\operatorname{grad}\left(f\varphi\right) = \varphi \operatorname{grad} f + f \operatorname{grad} \varphi,$$

$$\operatorname{grad}\left(f(\varphi)\right) = \frac{df}{d\varphi} \operatorname{grad} \varphi.$$

Приклад 2. Знайти $\operatorname{grad} r$, де $r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ – довжина радіус-вектора.

Розв'язання.

$$\operatorname{grad} r = \vec{\nabla} r = \vec{i}\frac{\partial r}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial r}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial r}{\partial z} = \vec{i}\frac{x}{r} + \vec{j}\frac{y}{r} + \vec{k}\frac{z}{r} = \frac{\vec{r}}{r}.$$

Приклад 3. Знайти $\operatorname{grad}(\vec{a} \cdot \vec{r})$, де $\vec{a}$ – сталий вектор, $\vec{r} = (x, y, z)$ – радіус-вектор точки.

Розв'язання.

$$\vec{\nabla}(\vec{a} \cdot \vec{r}) = \vec{\nabla}(a_x x + a_y y + a_z z) = \vec{i} a_x + \vec{j} a_y + \vec{k} a_z = \vec{a}.$$

Приклад 4. Знайти $\operatorname{grad} \varphi(r)$, де $r = |\vec{r}|$.

Розв'язання. $\operatorname{grad} \varphi(r) = \dfrac{d\varphi}{dr} \operatorname{grad} r = \dfrac{d\varphi}{dr}\dfrac{\vec{r}}{r} = \varphi'(r)\dfrac{\vec{r}}{r}.$

Приклад 5. Знайти $(\vec{a} \cdot \vec{\nabla}) r$, де $\vec{a}$ – сталий вектор, $r = |\vec{r}|$.

Розв'язання. $(\vec{a} \cdot \vec{\nabla}) r = \vec{a} \cdot \operatorname{grad} r = \vec{a} \cdot \vec{r}/r = \left(\vec{a} \cdot \vec{r}\right)/r$.

§ 2. Векторні поля. Характеристики векторного поля

Якщо деяка векторна величина має визначене значення у кожній точці простору або частини простору, ми говоримо про векторне поле $\vec{A}(\vec{r})$ цієї величини. Прикладами векторних полів є: напруженість електростатичного поля, індукція магнітного поля, середня швидкість частинок рухомої рідини, а також поле градієнта скалярної функції.

2.1. Векторні лінії

Геометричними характеристиками скалярного поля є поверхні рівня, а наочне уявлення про структуру векторного поля дають **векторні лінії** – це напрямлені криві, дотичні до яких у кожній точці вказують напрямок вектора $\vec{A}$ в цій точці. Зокрема, якщо $\vec{A}$ є поле швидкостей стаціонарного потоку рідини, то його векторні лінії є траєкторіями частинок рідини. Зауважимо, що в електростатиці векторні лінії напруженостей називають **силовими лініями**. Неважко записати систему рівнянь, із якої можна знайти векторні лінії заданого поля $\vec{A}(\vec{r})$. Умову паралельності малого елемента $d\vec{r}(dx, dy, dz)$ довжини дуги векторної лінії та вектора $\vec{A}(\vec{r})$, який дорівнює

$$\vec{A}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{3} A_i(x, y, z)\vec{e}_i ,$$

де $A_i(x, y, z)$ – неперервні функції від x, y, z, які мають неперервні частинні похідні першого порядку, можна записати у вигляді

$$\vec{A} \times d\vec{r} = 0 \text{ або } \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ dx & dy & dz \end{vmatrix} = 0 .$$

Записавши цю векторну рівність у проекціях, дістаємо диференціальні рівняння для двох сімей поверхонь, лінії перетину яких і визначають векторні лінії:

$$\frac{dx}{A_1} = \frac{dy}{A_2} = \frac{dz}{A_3} . \qquad (6.1)$$

Інтегрування системи двох диференціальних рівнянь (6.1) дає систему двох рівнянь:

$$\varphi_1(x, y, z) = C_1 , \quad \varphi_2(x, y, z) = C_2 , \qquad (6.2)$$

які при фіксованих значеннях C_1 та C_2 визначають поверхні, перетином яких і є векторна лінія. Таким чином, розглянуті у сукупності, рівняння (6.2) визначають двопараметричну сім'ю векторних ліній.

Зауважимо, що векторні лінії не повинні перетинатися, що накладає умову однозначності на функцію $\vec{A}(\vec{r})$.

Приклад 6. Знайти векторні лінії для випадку векторного поля $\vec{A}(\vec{r}) = \vec{w} \times \vec{r}$, $\vec{w} = \text{const}$.

Розв'язання. Виберемо осі координат так, щоб сталий вектор $\vec{w}$ був напрямленим уздовж осі Oz, $\vec{w} = \left(0, 0, w\right)$. Тоді

$$A_1 = w_2 z - w_3 y = -wy, \; A_2 = w_3 x - w_1 z = wx, \; A_3 = w_1 y - w_2 x = 0$$

і рівняння векторних ліній (6.1) матимуть вигляд

$$\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{0}.$$

Звідси випливає, що $dz = 0$, $xdx + ydy = 0$, інтегрування яких дає систему двох рівнянь $z = C_1$, $x^2 + y^2 = C_2^2$, котрі визначають площину і циліндр при деяких фіксованих значеннях C_1 та C_2, перетином яких є коло. Таким чином, векторними лініями є концентричні кола, що лежать у площинах, перпендикулярних до вектора $\vec{w}$ (центри кіл лежать на осі вектора $\vec{w}$).

Приклад 7. Показати, що для векторного поля

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\vec{r}}{r^3}$$

векторними лініями є сім'я променів, що виходять із початку координат.

Розв'язання. У кожній точці простору, що задається радіус-вектором $\vec{r}$, за винятком початку координат, напрямок вектора $\vec{A}$ вказує одиничний вектор $\vec{e}_r = \vec{r}/r$, який виходить із початку координат у напрямку відповідного радіус-вектора $\vec{r}$. Оскільки через кожну точку проходить тільки одна векторна лінія в силу однозначності функції $\vec{A}(\vec{r}) = \vec{e}_r / r^2$, то зафіксувавши сферичні кути φ, θ (які визначають напрямок $\vec{e}_r$) та змінюючи r від нуля до нескінченності, отримаємо векторну лінію – промінь, що виходить із початку координат.

Рівняння векторних ліній (див. (6.1)) для цього випадку мають вигляд

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z},$$

інтегрування їх дає систему двох рівнянь $y=C_1x$, $z=C_2y$ за умови $\vec{r}\neq 0$, які у просторі визначають два набори площин із виключеним початком координат. Перетин їх дає систему променів, що виходять із початку координат. Вони і визначають сім'ю векторних ліній заданого поля.

2.2. Похідна від векторної функції за напрямком

Як і у випадку скалярного поля, уведемо поняття похідної за напрямком. Напрямок, у якому нас цікавить зміна неперервно диференційовної функції $\vec{A}$, характеризуватимемо одиничним вектором $\vec{s}$. Розглянемо точку $\vec{r}'$, близьку до $\vec{r}$, таку, що $\vec{r}'-\vec{r}=\varepsilon\vec{s}$. Тоді границю відношення

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\vec{A}(\vec{r}')-\vec{A}(\vec{r})}{\varepsilon}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\vec{A}(\vec{r}+\varepsilon\vec{s})-\vec{A}(\vec{r})}{\varepsilon}=\frac{\partial\vec{A}}{\partial s}$$

називатимемо **похідною векторної функції** у точці $\vec{r}$ **за напрямком** $\vec{s}$. Вважаючи ε малим і використовуючи розвинення в ряд Тейлора

$$\vec{A}(\vec{r}+\varepsilon\vec{s})=\vec{A}(x+\varepsilon s_1,y+\varepsilon s_2,z+\varepsilon s_3)=$$
$$=\vec{A}(x,y,z)+\frac{1}{1!}\frac{\partial\vec{A}}{\partial x}\varepsilon s_1+\frac{1}{1!}\frac{\partial\vec{A}}{\partial y}\varepsilon s_2+\frac{1}{1!}\frac{\partial\vec{A}}{\partial z}\varepsilon s_3+o(\varepsilon),$$

одержуємо

$$\frac{\partial\vec{A}}{\partial s}=s_1\frac{\partial\vec{A}}{\partial x}+s_2\frac{\partial\vec{A}}{\partial y}+s_3\frac{\partial\vec{A}}{\partial z}=\left(s_1\frac{\partial}{\partial x}+s_2\frac{\partial}{\partial y}+s_3\frac{\partial}{\partial z}\right)\vec{A}=(\vec{s}\cdot\vec{\nabla})\vec{A}.$$

Зазначимо, що напрямок необов'язково характеризувати одиничним вектором $\vec{s}$. Можна говорити про похідну від функції $\vec{A}$ за вектором $\vec{v}$ довільної довжини. Узагальнюючи останню формулу, отримаємо

$$\left(v_1\frac{\partial}{\partial x}+v_2\frac{\partial}{\partial y}+v_3\frac{\partial}{\partial z}\right)\vec{A}=(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{A}.$$

Приклад 8. Знайти $(\vec{a}\cdot\vec{\nabla})\vec{r}$.

Розв'язання. $(\vec{a}\cdot\vec{\nabla})\vec{r}=\left(a_x\frac{\partial}{\partial x}+a_y\frac{\partial}{\partial y}+a_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\vec{r}=$

$$=\left(a_x\frac{\partial}{\partial x}+a_y\frac{\partial}{\partial y}+a_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}\right)=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}=\vec{a}.$$

Нехай поле $\vec{A}(x,y,z,t)$ характеризує середовище, точки якого рухаються зі швидкостями $\vec{v}=\left(\frac{\partial x}{\partial t},\frac{\partial y}{\partial t},\frac{\partial z}{\partial t}\right)$. Знайдемо швидкість зміни поля з часом у заданій точці середовища

$$\frac{d\vec{A}}{dt}=\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}+(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{A}\,.$$

Доданок $\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$ виражає швидкість зміни величини $\vec{A}$ із часом у заданій точці простору і називається **локальною похідною**. Локальна похідна характеризує нестаціонарність поля. Доданок $(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{A}$ утворюється за рахунок зміни координат точки внаслідок її руху (конвекції), тому його називають **конвективною похідною**. Конвективна похідна характеризує просторову неоднорідність поля в даний момент часу.

Застосовуючи останню формулу до векторного поля швидкостей рідини $\vec{v}\left(x,y,z,t\right)$, маємо $\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}$. Як видно, повне прискорення складається із двох доданків: локального прискорення $\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}$ та переносного (конвективного) прискорення $(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}$.

2.3. Інваріантні характеристики векторних полів

Розглянемо диференціал векторного стаціонарного поля $\vec{A}(x,y,z)$

$$d\vec{A} = \frac{d\vec{A}}{d\vec{r}} d\vec{r}$$

або за компонентами

$$dA_i = \frac{\partial A_i}{\partial x_j} dx_j ,$$

тобто в результаті згортки деякого геометричного об'єкта, який задається 9 компонентами $\frac{\partial A_i}{\partial x_j}$, $i, j = \overline{1,3}$, із вектором, координати якого дорівнюють $\{dx_i\}$, утворився вектор із координатами $\{dA_i\}$. Із наслідку з оберненої тензорної ознаки випливає, що величини $\frac{\partial A_i}{\partial x_j}$, $i, j = \overline{1,3}$, утворюють тензор другого рангу. У результаті згортки тензора другого рангу за парою індексів утворюється скалярна величина

$$\frac{\partial A_i}{\partial x_i} = (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) = \operatorname{div} \vec{A} ,$$

яка є дивергенцією векторного поля (інваріантне означення див. п. 2.6), що змінюється від точки до точки, але в даній точці є інваріантною характеристикою, що не залежить від вибору системи координат, у якій вона обчислюється.

Приклад 9. Обчислити $\operatorname{div}\vec{r}$, де $\vec{r} = (x, y, z)$ – радіус-вектор точки.

Розв'язання. $\operatorname{div}\vec{r} = (\vec{\nabla} \cdot \vec{r}) = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3$.

Приклад 10. Обчислити $\operatorname{div}\left(r\vec{a}\right)$, де $\vec{a}$ – сталий вектор, $r = |\vec{r}\,|$, $\vec{r} = (x, y, z)$.

Розв'язання. $\operatorname{div}(r\vec{a}) = \vec{\nabla}\cdot(r\vec{a}) = \dfrac{\partial(ra_x)}{\partial x} + \dfrac{\partial(ra_x)}{\partial y} + \dfrac{\partial(ra_x)}{\partial z} =$

$$= a_x \frac{x}{r} + a_y \frac{y}{r} + a_z \frac{z}{r} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{r}}{r}.$$

Оскільки довільний тензор можна представити у вигляді суми симетричного s_{ij} та антисиметричного a_{ij} відносно перестановки індексів тензорів, то справедливе таке розкладання:

$$\frac{\partial A_i}{\partial x_j} = s_{ij} + a_{ij},$$

де

$$s_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial A_i}{\partial x_j} + \frac{\partial A_j}{\partial x_i}\right),\ a_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial A_i}{\partial x_j} - \frac{\partial A_j}{\partial x_i}\right).$$

Величини $\dfrac{\partial A_i}{\partial x_j}$ утворюють симетричний тензор лише тоді, коли векторне поле $\vec{A}(\vec{r})$ – потенціальне (див. п. 2.4). Другий інваріант (сума головних мінорів відповідної матриці) антисиметричного тензора другого рангу a_{ij}, компоненти якого можна представити у вигляді (див. (5.6)) $a_{ij} = -e_{ijk}\omega_k$, дорівнює $\vec{\omega}^2$. У нашому випадку $a_{ij} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial A_i}{\partial x_j} - \dfrac{\partial A_j}{\partial x_i}\right)$ і відповідно $\omega_k = -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial A_i}{\partial x_j} - \dfrac{\partial A_j}{\partial x_i}\right) = -\dfrac{1}{2}[\vec{\nabla}\times\vec{A}]_k = -\dfrac{1}{2}[\operatorname{rot}\vec{A}]_k$, де i, j, k утворюють циклічний порядок, а $\operatorname{rot}\vec{A}$ є позначенням векторної величини, яку називають **ротором (вихором)** векторного поля (інваріантне означення див. п. 2.6) і яка змінюється від точки до точки. Можемо говорити, що $\operatorname{rot}\vec{A}$ є вектором, який характеризує відхилення заданого векторного поля від потенціального (для потенціального поля $\operatorname{rot}\vec{A} = 0$).

Отже, $\operatorname{div}\vec{A}$ та $\operatorname{rot}\vec{A}$ є інваріантними диференціальними характеристиками векторних полів у кожній точці простору.

Приклад 11. Обчислити $\operatorname{rot}\vec{r}$, де $\vec{r}=(x,y,z)$.

Розв'язання. $\operatorname{rot}\vec{r}=\vec{\nabla}\times\vec{r}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ x & y & z\end{vmatrix}=$

$$=\vec{i}\left(\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{\partial y}{\partial z}\right)-\vec{j}\left(\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial x}{\partial z}\right)+\vec{k}\left(\frac{\partial y}{\partial x}-\frac{\partial x}{\partial y}\right)=0.$$

Приклад 12. Обчислити $\operatorname{rot}\left(r\vec{a}\right)$, де $\vec{a}$ – сталий вектор, $r=|\vec{r}\,|$.

Розв'язання. Знайдемо x-компоненту $\operatorname{rot}\left(r\vec{a}\right)$:

$$\left(\operatorname{rot}(r\vec{a})\right)_x=\frac{\partial(ra_z)}{\partial y}-\frac{\partial(ra_y)}{\partial z}=a_z\frac{y}{r}-a_y\frac{z}{r}=\frac{[\vec{r}\times\vec{a}]_x}{r}.$$

Тому $\operatorname{rot}\left(r\vec{a}\right)=\dfrac{\vec{r}\times\vec{a}}{r}$.

2.4. Потенціальне векторне поле. Лінійний інтеграл від вектора

Означення. Векторне поле $\vec{A}(\vec{r})=\sum\limits_{i=1}^{3}A_i(x,y,z)\vec{e}_i$, задане у просторовій області G, називається **потенціальним**, якщо існує така скалярна функція $\varphi(x,y,z)$, що для всіх точок області G виконується рівність:

$$\vec{A}(x,y,z)=\operatorname{grad}\varphi(x,y,z).$$

Зауваження. Для силових полів зазвичай

$$\vec{A}(x,y,z)=-\operatorname{grad}\varphi(x,y,z).$$

Тому далі враховуватимемо знак мінус перед градієнтом. Функція $\varphi(x,y,z)$ називається **скалярним потенціалом векторного поля.**

Щоб з'ясувати, чи є поле $\vec{A}$ потенціальним, необхідно перевірити виконання таких умов потенціальності векторного поля:

$$\frac{\partial A_1}{\partial y}=\frac{\partial A_2}{\partial x},\ \frac{\partial A_1}{\partial z}=\frac{\partial A_3}{\partial x},\ \frac{\partial A_3}{\partial y}=\frac{\partial A_2}{\partial z},$$

або $\mathrm{rot}\,\vec{A}=0$, які є наслідком незалежності другої мішаної похідної скалярної функції $\varphi(x,y,z)$ від порядку диференціювання.

Векторними лініями потенціального векторного поля є лінії поля градієнта відповідного скалярного потенціалу $\varphi(\vec{r})$, тобто лінії найшвидшої зміни скалярної функції $\varphi(\vec{r})$, що перпендикулярні до поверхонь рівня скалярного потенціалу $\varphi(\vec{r})=\mathrm{const}$ (див. § 1).

Важливу характеристику векторного поля дає **лінійний інтеграл від вектора** – звичайний криволінійний інтеграл другого роду – інтеграл уздовж напрямленого контуру від скалярного добутку вектора $\vec{A}(\vec{r})$ на векторний елемент довжини:

$$\int_C \vec{A}\cdot d\vec{r}=\int_C A_1dx+A_2dy+A_3dz,$$

де вектор $d\vec{r}$ має складові dx,dy,dz, а диференціали координат не незалежні, а є приростами відповідних координат уздовж контуру. Такими інтегралами виражається, наприклад, робота сили $\vec{A}(\vec{r})$ над матеріальною точкою, яка рухається за заданою траєкторією від точки M_0 до точки M_1. Якщо вектор $\vec{A}(\vec{r})$ – потенціальний, то

$$A_1dx+A_2dy+A_3dz=-\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx-\frac{\partial\varphi}{\partial x}dy-\frac{\partial\varphi}{\partial x}dz=-d\varphi$$

є повним диференціалом скалярної функції. Обчислюючи інтеграл, отримаємо

$$\int_C \vec{A}\cdot d\vec{r}=\int_{M_0}^{M_1}\vec{A}\cdot d\vec{r}=-\int_{M_0}^{M_1}d\varphi=\varphi(M_0)-\varphi(M_1).$$

У цьому випадку контурний інтеграл визначається положенням початкової та кінцевої точок інтегрування (рис. 6.1) і не залежить від форми контуру. Інтегруючи вздовж замкненого контуру (рис. 6.2) і враховуючи, що

$$\int_{M_0}^{M_1}\vec{A}\cdot d\vec{r}=-\int_{M_0}^{M_1}d\varphi=\varphi(M_0)-\varphi(M_1)$$

та

$$\int\limits_{M_1}^{M_0} \vec{A}\cdot d\vec{r} = \varphi(M_1) - \varphi(M_0)\,,$$

матимемо

$$\oint\limits_C \vec{A}\cdot d\vec{r} = \int\limits_{M_0}^{M_1} \vec{A}\cdot d\vec{r} + \int\limits_{M_1}^{M_0} \vec{A}\cdot d\vec{r} = 0\,,$$

якщо скалярна функція $\varphi(x,y,z)$ однозначна. Якщо функція $\varphi(x,y,z)$ неоднозначна, то після обходу контуру і повернення у точку M_0, функція $\varphi(x,y,z)$ може набувати іншого значення.

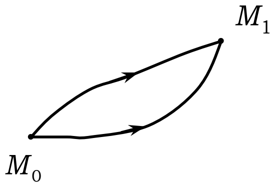

Рис. 6.1. Лінійний інтеграл від потенціального вектора не залежить від шляху інтегрування

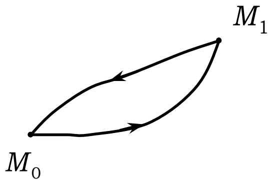

Рис. 6.2. Циркуляція потенціального вектора дорівнює нулю

Криволінійний інтеграл другого роду по замкненій кусково-гладкій орієнтованій кривій C

$$\oint\limits_C \vec{A}\cdot d\vec{r}$$

називають **циркуляцією векторного поля** $\vec{A}$ вздовж контуру C у заданому напрямку.

Ми показали, що циркуляція потенціального вектора $\vec{A}$ вздовж довільного замкненого контуру C дорівнює нулю за умови, що відповідний скалярний потенціал є однозначною функцією. Зауважимо, що такої важливої властивості довільний вектор не має.

Приклад 13. Показати, що напруженість електростатичного поля $\vec{E}$, створеного системою зарядів, є потенціальним вектором.

Розв'язання. Вектор $\vec{E}$ можна записати у вигляді $\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi$, де $\varphi(\vec{r}) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum\limits_i \dfrac{e_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|}$ – однозначна функція. Інтеграл $\int\limits_C \vec{E}\cdot d\vec{r}$ має прямий фізичний смисл – він виражає роботу, яку виконує поле при переміщенні одиничного позитивного заряду вздовж кривої

C. Умова $\oint\limits_C \vec{E}\cdot d\vec{r}=0$ означає те, що робота з переміщення заряду вздовж замкненої кривої C дорівнює нулю.

Загальних правил обчислення криволінійних інтегралів немає. Їх намагаються звести до обчислення визначених інтегралів, належним чином параметризувавши контур (приклади див. у розд. 8). Якщо контур інтегрування замкнений, можна скористатися формулою Стокса (див. п. 2.6) і звести обчислення до знаходження поверхневого інтеграла і подвійного інтеграла Рімана.

2.5. Потік векторного поля через поверхню

Однією із важливих характеристик векторного поля є потік векторного поля через поверхню. **Потоком** Π векторного поля $\vec{A}(\vec{r})$ через гладку або кусково-гладку орієнтовану поверхню S називається поверхневий інтеграл другого роду по поверхні S від проекції вектора $\vec{A}(\vec{r})$ на нормаль $\vec{n}(x,y,z)$ до обраної сторони цієї поверхні:

$$\Pi=\int\limits_S A_n dS=\int\limits_S \vec{A}\cdot d\vec{S}=\int\limits_S (\vec{A}\cdot\vec{n})dS\,.$$

Інтерпретацію потоку вектора легко дати у випадку, коли вектором $\vec{A}(\vec{r})$ є вектор швидкості рухомої рідини. Тоді потік вектора $\vec{A}(\vec{r})$ – це кількість (об'єм) рідини, що проходить за одиницю часу через орієнтовану поверхню S.

Існує декілька способів обчислення потоку вектора, використовуючи, зокрема:

1) проектування на одну із координатних площин;

2) проектування на всі три координатні площини;

3) перехід до криволінійних координат на поверхні.

Якщо поверхня, по якій ведеться інтегрування, є замкненою, то обчислення поверхневого інтеграла можна звести до обчислення об'ємного інтеграла, використовуючи теорему Остроградського–Гаусса, про яку йтиметься пізніше (див. п. 2.6).

2.6. Дивергенція та ротор. Інтегральні теореми

Щоб з'ясувати математичний і фізичний зміст ротора (вихору) та дивергенції векторного поля, розглянемо їх інваріантні визначення – менш формальні, ніж через оператор набла:

$$\operatorname{div}\vec{A} = \vec{\nabla}\cdot\vec{A}, \quad \operatorname{rot}\vec{A} = \vec{\nabla}\times\vec{A},$$

але більш наочні. Вони, можливо, є складнішими, але не залежать від вибору системи координат. Почнемо з ротора.

Виберемо точку M, у якій ми хочемо визначити ротор векторного поля. Задамо деякий напрямок одиничним вектором $\vec{n}$. Побудуємо маленьку плоску площадку ΔS, що проходить через точку M перпендикулярно до $\vec{n}$. Означимо напрямок обходу контуру C, що обмежує цю площадку (рис. 6.3), як такий, що узгоджується із напрямком $\vec{n}$ правилом правого гвинта: якщо дивитися з вістря вектора $\vec{n}$, то обхід контуру має здійснюватися у напрямку проти годинникової стрілки (при цьому область, що обходиться, залишається ліворуч).

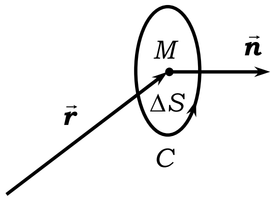

Рис. 6.3. Ілюстрація правила правого гвинта

Означення. **Проекція вектора ротора (вихору)** $\operatorname{rot}\vec{A}$ **на напрямок** $\vec{n}$ у точці M – це віднесена до одиниці площі циркуляція вектора $\vec{A}$ по замкненому нескінченно малому контуру, що обмежує площадку з нормаллю $\vec{n}$, в якій лежить дана точка:

$$(\operatorname{rot}\vec{A})_n \equiv \vec{n}\cdot\operatorname{rot}\vec{A} = \lim_{\Delta S\to 0}\frac{\oint_C \vec{A}\cdot d\vec{r}}{\Delta S}.$$

Ця величина показує, наскільки векторне поле $\vec{A}(\vec{r})$ відрізняється від потенціального.

Можна переконатися у тому, що це визначення збігається з означенням $\operatorname{rot}\vec{A} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$ у декартових координатах. Для цього обчислимо проекції ротора, користуючись інваріантним означенням і вибравши площадку у вигляді прямокутника зі сторонами, паралельними координатним осям. Наприклад, виберемо прямокутну площадку $\Delta S = \Delta x \Delta y$ (рис. 6.4) та $\vec{n}$ уздовж осі Oz. Враховуючи малі розміри площадки та використовуючи при обчисленні контурного інтеграла (рис. 6.4) теорему про середнє на кожній із ділянок, отримаємо

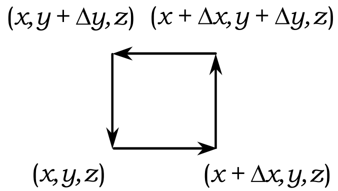

Рис. 6.4. Обхід прямокутної площадки

$$\oint_C \vec{A}\cdot d\vec{r} \approx A_x(\overline{x}, y, z)\Delta x + A_y(x+\Delta x, \overline{y}, z)\Delta y -$$

$$-A_x(\overline{x}, y+\Delta y, z)\Delta x - A_y(x, \overline{y}, z)\Delta y =$$

$$= \left(A_y(x+\Delta x, \overline{y}, z) - A_y(x, \overline{y}, z)\right)\Delta y +$$

$$+\left(A_x(\overline{x}, y, z) - A_x(\overline{x}, y+\Delta y, z)\right)\Delta x \approx \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\Delta S,$$

де $\overline{x}, \overline{y}$ – значення координат у деяких точках відповідних відрізків контуру. Враховано також, що обхід протилежних сторін здійснюється у протилежному напрямку, а при стягуванні площадки ΔS у точку M усі координати набувають значень, що відповідають цій точці. Підставивши останній результат в означення і здійснивши граничний перехід, отримаємо вираз для $\left[\vec{\nabla}\times\vec{A}\right]_z = \dfrac{\partial A_y}{\partial x} - \dfrac{\partial A_x}{\partial y}$ у декартових координатах. Аналогічно знаходять інші проекції вихору.

Таким чином, вихор вектора в заданому напрямку не залежить від вибору системи координат і дорівнює поверхневій густині циркуляції цього вектора по контуру площадки, що перпендикулярна до цього напрямку. Вихор вектора відрізнятиметься від нуля, якщо векторні лінії поля $\vec{A}$ закручуються, – мають замкнену або спіралеподібну форму.

Розглянемо тверде тіло, яке обертається навколо осі Oz із сталою кутовою швидкістю. Векторне поле швидкостей точок цього тіла подамо у вигляді

$$\vec{v} = [\vec{\omega} \times \vec{r}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} = -\omega y \vec{i} + \omega x \vec{j} .$$

Знайдемо ротор поля швидкостей $\vec{v}$:

$$\operatorname{rot} \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -\omega y & \omega x & 0 \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot 0 + \vec{j} \cdot 0 + 2\omega \vec{k} = 2\vec{\omega} .$$

Таким чином, $\operatorname{rot}[\vec{\omega} \times \vec{r}]$ є сталим вектором, напрямленим уздовж осі обертання, а його модуль дорівнює подвоєній кутовій швидкості обертання тіла.

За допомогою означення ротора (вихору) можна вивести інтегральне співвідношення, яке зв'язує циркуляцію довільного вектора $\vec{A}$ по замкненому контуру із потоком вихору цього вектора через незамкнену поверхню, яка спирається на вказаний контур.

Розглянемо довільну тривимірну незамкнену поверхню S, обмежену контуром C , і припустимо, що в кожній точці поверхні задано нормаль до поверхні $\vec{n}$. Розділимо поверхню на маленькі площадки ΔS_i , кожна з яких обмежена контуром C_i . Для кожної такої площадки запишемо наближене співвідношення:

$$\left(\operatorname{rot} \vec{A}\right)_n \Delta S_i \approx \oint_{C_i} \vec{A} \cdot d\vec{r} .$$

Підсумовуючи обидві частини співвідношення по i та перейшовши до границі, коли всі ΔS_i прямують до нуля, а їх кількість – до нескінченності, отримаємо точну рівність (формулу Стокса):

$$\int_S \operatorname{rot} \vec{A} \cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{r} .$$

Праворуч залишається інтеграл по контуру, що обмежує поверхню S . Усі інтеграли по внутрішніх контурах скорочуються. Формула Стокса зв'язує потік вихору векторного поля через поверхню з циркуляцією цього векторного поля вздовж замкненого контуру, на який спирається ця поверхня.

Якщо в деякій області G $\operatorname{rot}\vec{F}=0$, то векторне поле $\vec{F}$ в області G називається **безвихровим**.

Криволінійний інтеграл другого роду по кусково-гладкій орієнтованій кривій C для безвихрового поля визначається положенням початкової та кінцевої точок інтегрування і не залежить від форми шляху інтегрування.

Тепер дамо інваріантне означення дивергенції. Виберемо точку M, у якій ми хочемо визначити дивергенцію векторного поля $\vec{A}$. Оточимо точку M замкненою гладкою поверхнею S, яка охоплює об'єм ΔV, і задамо в кожній точці цієї поверхні зовнішню нормаль $\vec{n}$. Векторним елементом поверхні $d\vec{S}$ називатимемо добуток $\vec{n}dS$. Інтеграл по замкненій поверхні $\oint\limits_S \vec{A}\cdot d\vec{S}=\oint\limits_S A_n dS$ дає потік вектора $\vec{A}$ через поверхню S.

Поняття потоку вектора через замкнену поверхню приводить до поняття про дивергенцію або розбіжність поля. Це поняття дає деяку кількісну величину, яка характеризує інтенсивність джерел (або стоків) векторного поля в кожній точці.

Означення. **Дивергенція векторного поля** $\vec{A}$ – це віднесений до одиниці об'єму потік вектора $\vec{A}$ через поверхню нескінченно малого об'єму, що охоплює розглядувану точку:

$$\operatorname{div}\vec{A}=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\oint\limits_S A_n dS}{\Delta V}.$$

Це означення говорить, що дивергенція поля $\vec{A}$ в точці M є об'ємною густиною потоку вектора $\vec{A}$ в цій точці. Точки M векторного поля $\vec{A}(M)$, у яких $\operatorname{div}\vec{A}>0$, називаються **джерелами**, а точки, у яких $\operatorname{div}\vec{A}<0$, – **стоками** векторного поля.

Дивергенція векторного поля є скалярною функцією точки простору.

Звернемося до поля швидкостей рухомої рідини $\vec{v}(x,y,z)$ і розглянемо замкнену кусково-гладку поверхню S, що обмежує об'єм V. Для правої частини поверхні (рис. 6.5) кут між векторами

$\vec{v}(x,y,z)$ та $\vec{n}(x,y,z)$ є гострим, $\vec{v}\cdot\vec{n}>0$, і $\int\limits_{S'}\vec{v}\cdot d\vec{S}>0$. Для лівої частини поверхні $\int\limits_{S''}\vec{v}\cdot d\vec{S}<0$. Кожний із цих інтегралів має прямий фізичний зміст: $\int\limits_{S'}\vec{v}\cdot d\vec{S}>0$ визначає кількість рідини, що виходить за одиницю часу з об'єму V, а $\int\limits_{S''}\vec{v}\cdot d\vec{S}<0$ – кількість рідини, що входить за одиницю часу в об'єм V. Їх сума дорівнює $\oint\limits_{S}\vec{v}\cdot d\vec{S}$ – потоку вектора швидкості через замкнену поверхню – і визначає різницю між кількістю рідини, що виходить за одиницю часу з об'єму, і кількістю рідини, що входить за одиницю часу в об'єм V. Потік через замкнену поверхню $\oint\limits_{S}\vec{v}\cdot d\vec{S}\neq 0$, коли в об'ємі V існують джерела або стоки.

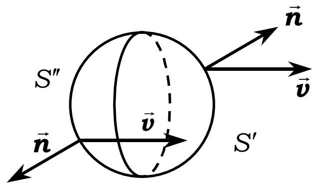

Рис. 6.5. Для лівої частини поверхні $\int\limits_{S''}\vec{v}\cdot d\vec{S}<0$, для правої – $\int\limits_{S'}\vec{v}\cdot d\vec{S}>0$

Розглянемо окремий клас векторних полів, які не мають ні джерел, ні стоків, і для яких дивергенція дорівнює нулю.

Означення. Якщо в усіх точках M області G дивергенція векторного поля (заданого в області G) дорівнює нулю:

$$\operatorname{div}\vec{A}(M)=0,$$

то говорять, що **поле соленоїдальне** в цій області.

У соленоїдальному полі всередині G векторні лінії ніде не починаються і ніде не закінчуються. Вони можуть мати кінці на межі області або прямувати до нескінченності, бути замкненими або спіралеподібними кривими. Соленоїдальним полем із замкненими векторними лініями є магнітне поле, що створюється, наприклад, струмом у провіднику.

Можна переконатися в тому, що інваріантне визначення дивергенції та означення $\operatorname{div}\vec{A}=\vec{\nabla}\cdot\vec{A}$ еквівалентні у випадку декартових координат. Для цього виберемо об'єм $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$ у вигляді малого прямокутного паралелепіпеда (на рис. 6.6 зазначено координати вершин паралелепіпеда) із ребрами $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ і обчислимо границю $\lim\limits_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \oint\limits_S A_n dS$.

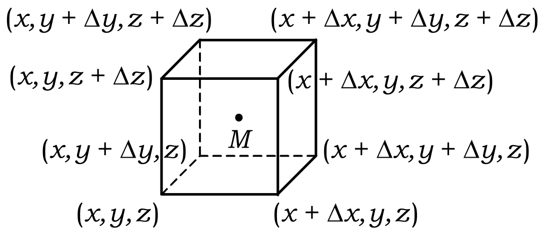

Рис. 6.6 до визначення дивергенції

Скориставшись мализною граней прямокутного паралелепіпеда, запишемо наближений вираз для поверхневого інтеграла:

$$\oint\limits_S \vec{A} \cdot d\vec{S} \approx \left(A_x(x + \Delta x, \overline{y}, \overline{z}) - A_x(x, \overline{y}, \overline{z}) \right) \Delta y \Delta z +$$

$$+ \left(A_y(\overline{x}, y + \Delta y, \overline{z}) - A_y(\overline{x}, y, \overline{z}) \right) \Delta x \Delta z +$$

$$+ \left(A_z(\overline{x}, \overline{y}, z + \Delta z) - A_z(\overline{x}, \overline{y}, z) \right) \Delta x \Delta y \approx$$

$$\approx \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \Delta V .$$

Для оцінювання шести інтегралів по окремих гранях тут використано теорему про середнє, величини $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}$ – це значення координат у деяких точках відповідних граней паралелепіпеда. Ураховано також, що нормаль має протилежний напрямок на протилежних гранях, а при стягуванні об'єму ΔV у точку M усі координати набувають значень, що відповідають цій точці. Використовуючи останній результат, переконаємося, що в декартових координатах $\operatorname{div} \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$.

Таким чином, *дивергенція вектора* в деякій точці відмінна від нуля, якщо існує ненульовий потік вектора через малу замкнену поверхню, що оточує цю точку. Для цього всередині поверхні повинні існувати джерела або стоки векторного поля, що створюють потік. Дивергенція характеризує густину таких джерел та стоків.

Приклад 14. Знайти дивергенцію сферичного векторного поля $\vec{A} = f(r)\vec{r}$, де $\vec{r} = (x, y, z)$ – радіус-вектор точки. Визначити вигляд функції $f(r)$, для якої $\operatorname{div}\vec{A} = 0$.

Розв'язання. $\operatorname{div}\vec{A} = \operatorname{div} f(r)\vec{r} = f'(r)r + 3f(r)$.

З умови $\operatorname{div}\vec{A} = 0$ випливає, що

$$f'(r)r + 3f(r) = 0, \text{ якщо } r \neq 0.$$

Відокремлюючи змінні, маємо

$$\frac{df}{f} = -\frac{3dr}{r}.$$

Після інтегрування дістаємо

$$\ln|f| = -3\ln r + \ln C,$$

звідси $f(r) = C/r^3$, де C – довільна стала.

Отже, дивергенція сферичного поля $\vec{A} = f(r)\vec{r}$ дорівнює нулю лише тоді, коли $f(r) = C/r^3$ (у випадку кулонівського поля), усюди за винятком початку координат. Отримане сферичне поле $\vec{A} = C\vec{r}/r^3$, з одного боку, є потенціальним (або безвихровим), оскільки його можна подати у вигляді $\vec{A}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\varphi(\vec{r})$, де $\varphi(\vec{r}) = C/r$, і жодних вихорів (замкнених або спіралеподібних кривих) серед векторних ліній такого поля немає. Векторними лініями для нього є промені, що виходять із початку координат (див. приклад 7). А з іншого боку, якщо використовувати означення соленоїдального поля як поля, для якого дивергенція дорівнює нулю в усіх точках заданої області, то це поле є одночасно і соленоїдальним у довільній області, яка не містить початку координат. Усе це говорить про неточності термінології. Для поля $\vec{A} = C\vec{r}/r^3$ і дивергенція, і ротор дорівнюють нулю в усіх точках простору, за винятком початку координат. Але дивергенція і ротор – це локальні характеристики поля. Більш наочне уявлення про поле дає картина векторних ліній. Якщо серед векторних ліній у розглядуваній області взагалі немає замкнених або спіралеподібних кривих, говорити про наявність вихорів (при $\operatorname{rot}\vec{A} = 0$) немає смислу.

За допомогою визначення дивергенції можна вивести інтегральне співвідношення, яке зв'язує інтеграл від дивергенції вектора $\vec{A}$ по об'єму із потоком цього вектора через замкнену поверхню, що обмежує цей об'єм.

Розглянемо довільний скінченний тривимірний об'єм V, обмежений замкненою поверхнею S, і припустимо, що у кожній точці поверхні задано нормаль до поверхні $\vec{n}$. Розіб'ємо об'єм V на маленькі об'єми ΔV_i, які обмежені поверхнями ΔS_i. Для кожного такого об'єму можна записати наближене співвідношення:

$$\operatorname{div}\vec{A}\,\Delta V_i \approx \oint\limits_{\Delta S_i} \vec{A}\cdot d\vec{S}\ .$$

Підсумовуючи обидві частини співвідношення за i та перейшовши до границі, спрямовуючи всі об'єми ΔV_i до нуля, а їх кількість – до нескінченності, отримаємо точну рівність (формулу Остроградського–Гаусса):

$$\int\limits_V \operatorname{div}\vec{A}\,dV = \oint\limits_S \vec{A}\cdot d\vec{S}\ .$$

Праворуч залишається інтеграл по зовнішній поверхні, що обмежує об'єм V. Усі інтеграли по внутрішніх поверхнях взаємно скорочуються, оскільки зовнішні нормалі до двох сусідніх поверхонь мають прямо протилежні напрямки.

Наведемо цікавий факт. Вектор нормалі до замкненої поверхні завжди орієнтований назовні від поверхні, і його треба трактувати як полярний вектор. Це випливає із того, що дивергенція вектора є інваріантом, а значить і добуток під знаком поверхневого інтеграла $\oint\limits_S \vec{A}\cdot d\vec{S}$ має давати справжній скаляр, тобто $d\vec{S}=\vec{n}dS$ повинен бути справжнім вектором на відміну від вектора нормалі відкритої площадки, який є аксіальним вектором, тому що його напрямок узгоджений із напрямком обходу контуру площадки.

Теорема Остроградського–Гаусса. Якщо в деякій області G простору координати вектора $\vec{A}(\vec{r})=\sum\limits_{i=1}^{3}A_i(x,y,z)\vec{e}_i$ неперервні та мають неперервні частинні похідні першого порядку, то потік вектора $\vec{A}$ через будь-яку замкнену кусково-гладку поверхню S, розташовану в області G, дорівнює потрійному інтегралу від $\operatorname{div}\vec{A}(\vec{r})$ по області V, обмеженій поверхнею S:

$$\oint\limits_S A_n dS=\int\limits_V \operatorname{div}\vec{A}\,dV,$$

нормаль до поверхні S береться зовнішня.

Щоб потік був відмінним від нуля, усередині області G мають бути джерела (або стоки) поля. Із теореми Остроградського–Гаусса випливає, що тоді $\operatorname{div}\vec{A}$ є відмінною від нуля і характеризує джерела поля. Саме векторне поле неначебто розходиться від джерел. Звідси і походить назва "розбіжність" або "дивергенція".

Зазначимо, що поняття про соленоїдальне векторне поле вводиться у зв'язку із законами електромагнетизму. Відомо, що не існує магнітних зарядів і тому поле індукції магнітного поля $\vec{B}$ не має джерел: $\operatorname{div}\vec{B}=0$. Це означає, що можна ввести вектор $\vec{A}$ такий, що $\vec{B}=\operatorname{rot}\vec{A}$. Вектор $\vec{A}$ називають **вектор-потенціалом** магнітного поля. Статичне магнітне поле породжується електричними струмами. Якщо задано розподіл цих струмів, то можна розрахувати вектор $\vec{A}$ (який, взагалі кажучи, не має прямого фізичного змісту), а потім $\vec{B}=\operatorname{rot}\vec{A}$. Із теореми Остроградського–Гаусса випливає, що в соленоїдальному полі потік вектора $\vec{B}$ через будь-яку замкнену поверхню, що лежить у цьому полі, дорівнює нулю. А згідно із теоремою Стокса, потік через довільну незамкнену поверхню від соленоїдального поля, яке можна представити у вигляді ротора від вектор-потенціалу, дорівнює $\int\limits_S \operatorname{rot}\vec{A}\cdot d\vec{S} = \oint\limits_C \vec{A}\cdot d\vec{r}$, тобто не залежить від форми поверхні і визначається лише формою замкненої кривої, на яку спирається ця поверхня.

Рівняння

$$\operatorname{div}\vec{A}(\vec{r}) = 0$$

(де $\vec{A}(\vec{r})$ задає поле швидкостей рідини) у гідродинаміці називається рівнянням нерозривності рідини, що не стискається. У цьому випадку кількість рідини, що виходить через яку-небудь замкнену поверхню S, завжди дорівнює кількості рідини, яка входить у S, і повний потік дорівнює нулю.

Тепер можна підсумувати обговорене і сформулювати теореми.

Теорема про безвихрові поля. Наведені твердження еквівалентні (тобто, якщо для поля $\vec{F}$ справедливе одне твердження, то одночасно виконуються всі інші):

1) $\vec{\nabla}\times\vec{F} = 0$ всюди;

2) $\int\limits_a^b \vec{F}\cdot d\vec{l}$ визначається положенням початкової та кінцевої точок інтегрування і не залежить від форми шляху інтегрування;

3) $\oint\limits_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0$ для довільного замкненого контуру;

4) $\vec{F}$ є градієнтом деякої скалярної функції. $\vec{F} = -\vec{\nabla}\varphi$.

Скалярний потенціал φ визначається неоднозначно. Будь-яку сталу можна додати до φ, оскільки вона не впливає на $\vec{\nabla}\varphi$.

Теорема про соленоїдальні поля. Наведені твердження еквівалентні:

1) $\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = 0$ всюди;

2) $\int\limits_S \vec{F}\cdot d\vec{S}$ не залежить від форми поверхні і визначається лише формою замкненої кривої, на яку спирається ця поверхня;

3) $\oint\limits_S \vec{F}\cdot d\vec{S}=0$ для довільної замкненої поверхні;

4) $\vec{F}$ є ротором деякої векторної функції. $\vec{F}=\mathrm{rot}\,\vec{A}$.

Векторний потенціал $\vec{A}$ визначається неоднозначно. Градієнт довільної скалярної функції можна додати до $\vec{A}$, не змінюючи при цьому $\mathrm{rot}\,\vec{A}$, оскільки $\mathrm{rot}\,\vec{\nabla}f=0$.

Але існує важливий клас полів, для яких і $\mathrm{rot}\,\vec{F}(\vec{r})=0$, і $\mathrm{div}\,\vec{F}(\vec{r})=0$. Такі поля можна назвати одночасно і потенціальними, і соленоїдальними. Їх можна подати у вигляді $\vec{F}(\vec{r})=-\vec{\nabla}\varphi(\vec{r})$ ($\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\,\varphi(\vec{r})=(\vec{\nabla}\times\vec{\nabla})\varphi(\vec{r})\equiv 0$), і для них усюди або у певній області простору також і $\mathrm{div}\,\vec{F}(\vec{r})=0$, а тому $\varphi(\vec{r})$ задовольняє рівняння Лапласа: $\Delta\varphi(\vec{r})=0$. Наприклад, потенціальні однорідне електричне поле і поле $\vec{E}$ точкового заряду можна назвати соленоїдальними, оскільки для них $\mathrm{div}\,\vec{E}=0$ усюди поза точкою, де знаходиться заряд (див. приклад 14).

Довільне неперервно диференційовне векторне поле $\vec{F}(\vec{r})$ можна представити у вигляді суми потенціального $\vec{F}_1(\vec{r})$ та соленоїдального полів $\vec{F}_2(\vec{r})$:

$$\vec{F}(\vec{r})=\vec{F}_1(\vec{r})+\vec{F}_2(\vec{r}), \tag{6.3}$$

де $\mathrm{rot}\,\vec{F}_1(\vec{r})=\vec{0}$, $\mathrm{div}\,\vec{F}_2(\vec{r})=0$.

За означенням потенціальне векторне поле є градієнтом деякого скалярного поля $\varphi(\vec{r})$: $\vec{F}_1(\vec{r})=-\vec{\nabla}\varphi$. Тому для вектора $\vec{F}_2(\vec{r})$ маємо

$$\vec{F}_2(\vec{r})=\vec{F}(\vec{r})+\vec{\nabla}\varphi(\vec{r}),$$

$$\mathrm{div}\,\vec{F}_2(\vec{r})=\mathrm{div}\,\vec{F}(\vec{r})+\mathrm{div}\,\vec{\nabla}\varphi(\vec{r})=\mathrm{div}\,\vec{F}(\vec{r})+\Delta\varphi(\vec{r}).$$

Векторне поле $\vec{F}_2(\vec{r})$ є соленоїдальним, якщо воно задовольняє умову $\operatorname{div}\vec{F}_2(\vec{r}) = 0$, тобто для скалярного потенціалу поля $\vec{F}_1(\vec{r})$ дістаємо рівняння

$$\Delta\varphi(\vec{r}) = -\operatorname{div}\vec{F}(\vec{r}), \tag{6.4}$$

де $\operatorname{div}\vec{F}(\vec{r})$ – відома функція для цього поля $\vec{F}(\vec{r})$. Отже, якщо $\varphi(\vec{r})$ є розв'язком рівняння (6.4), то поклавши $\vec{F}_1(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\varphi$, $\vec{F}_2(\vec{r}) = \vec{F}(\vec{r}) + \vec{\nabla}\varphi(\vec{r})$, маємо зображення поля у вигляді (6.3). $\vec{F}_1(\vec{r})$ містить усі джерела та стоки, а $\vec{F}_2(\vec{r})$ – усі вихори.

Рівняння (6.4) – неоднорідне рівняння в частинних похідних другого порядку, яке називається **рівнянням Пуассона**. Його розв'язок визначений із точністю до нескінченної кількості розв'язків однорідного рівняння $\Delta\varphi(\vec{r}) = 0$, тому розбиття поля у вигляді (6.3) не єдине.

У фізичних застосуваннях соленоїдальне поле часто називають **поперечним**, а потенціальне – **поздовжнім**. Ця термінологія має походження від такої побудови. Векторне поле $\vec{F}(\vec{r})$, яке є достатньо гладким в усьому просторі, а на нескінченності достатньо швидко прямує до нуля, можна представити у вигляді інтеграла Фур'є. Фур'є-образ позначимо $\vec{\tilde{F}}(\vec{k})$. Кожну Фур'є-компоненту розкладемо на дві складові: одна з яких напрямлена поздовжньо, тобто паралельно до $\vec{k}$, а інша – поперечно, тобто перпендикулярно до $\vec{k}$:

$$\vec{\tilde{F}}(\vec{k}) = \vec{\tilde{F}}_l(\vec{k}) + \vec{\tilde{F}}_t(\vec{k}),$$

$$\vec{k}\cdot\vec{\tilde{F}}_l(\vec{k}) = 0, \quad \vec{k}\times\vec{\tilde{F}}_t(\vec{k}) = 0.$$

У силу лінійності перетворення Фур'є поле $\vec{F}(\vec{r})$ також розіб'ється на дві складові, які теж називають поздовжньою та поперечною:

$$\vec{F}(\vec{r}) = \vec{F}_l(\vec{r}) + \vec{F}_t(\vec{r}),$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{F}_l(\vec{r}) = 0, \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{F}_t(\vec{r}) = 0,$$

причому тут поздовжнє поле є потенціальним, а поперечне – соленоїдальним.

§ 3. Застосування оператора $\vec{\nabla}$ у векторному аналізі

Диференціальні операції над скалярними та векторними функціями визначаються без використання конкретної системи координат, вони мають інваріантний зміст і виражаються через символічний векторний диференціальний оператор набла, який у декартових координатах має вигляд

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}.$$

Наприклад, дивергенцію векторного поля $\vec{A}$ формально можна розглядати як скалярний добуток символічного вектора $\vec{\nabla}$ на вектор $\vec{A}$, ротор векторного поля – як векторний добуток символічного вектора $\vec{\nabla}$ на вектор $\vec{A}$. Застосування оператора $\vec{\nabla}$ є надзвичайно зручним у багатьох задачах векторного аналізу. За домовленістю оператор $\vec{\nabla}$ діє на всі величини, що стоять праворуч від нього. У декартових координатах диференціальні операції першого порядку мають такий явний вигляд:

$$\operatorname{grad}\varphi = \vec{\nabla}\varphi = \vec{e}_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

$$(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\varphi = v_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + v_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} + v_z \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

$$\operatorname{div}\vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z},$$

$$\operatorname{rot}\vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix},$$

$$(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} = v_x \frac{\partial \vec{A}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \vec{A}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \vec{A}}{\partial z}.$$

Для обчислення диференціальних операцій векторного аналізу довільного порядку над довільними функціями можна використовувати символічний метод, який зводиться до таких дій. Усі диференціальні операції виражають через символічний оператор $\vec{\nabla}$, який, з одного боку, – є диференціальним оператором, оскільки містить похідні за координатами, а з іншого – є вектором. Кожен доданок у виразі повторюють буквально таку кількість разів, скільки в ньому є множників праворуч від $\vec{\nabla}$ і на які цей оператор діє. У кожному із таких розписаних доданків домовимося підкреслювати величини, на які діятиме оператор $\vec{\nabla}$, а всі інші множники відносно дії $\vec{\nabla}$ вважатимемо сталими. Далі, оскільки оператор $\vec{\nabla}$ – вектор, то формально використовуючи правила векторної алгебри, але пам'ятаючи, що $\vec{\nabla}$ діє лише на підкреслені величини, виконуємо відповідні перестановки співмножників так, щоб у кожному доданку праворуч від оператора $\vec{\nabla}$ залишилися лише підкреслені величини, після чого підкреслення можна опустити та повернутися від виразів через $\vec{\nabla}$ до стандартних позначень для отриманих диференціальних операцій.

Описаний символічний метод для диференціальних операцій над скалярними та векторними об'єктами є узагальненням відомого з математичного аналізу правила Лейбніца для диференціювання добутків функцій. У математичному аналізі у випадку функцій однієї змінної правило Лейбніца записують у вигляді

$$\frac{d}{dx}\big(f(x)g(x)\big) = f(x)\frac{dg(x)}{dx} + g(x)\frac{df(x)}{dx}$$

або, керуючись уведеною вище домовленістю,

$$\frac{d}{dx}\big(f(x)g(x)\big) = \frac{d}{dx}\Big[\underline{f(x)}g(x) + f(x)\underline{g(x)}\Big]$$

(кількість доданків у правій частині збігається із кількістю множників у лівій). У такій формі запису непідкреслений множник вважається сталим і його можна винести за знак похідної.

Пошук градієнта, ротора, дивергенції та їх комбінацій від явно заданих функцій звичайно проводять, записуючи їх у декартових координатах і здійснюючи диференціювання безпосередньо. Однак для об'єктів, які можна подати у вигляді добутків, доцільно спочатку скористатися символічним методом (або відповідними векторними тотожностями) і звести задачу пошуку диференціальних операцій до явного диференціювання невеликої кількості максимально простих функцій.

За такого підходу процедура пошуку градієнта, ротора та дивергенції аналогічна звичайному диференціюванню з використанням таблиці похідних елементарних функцій. Останні обчислюються попередньо, згідно із прямим означенням диференціальних операцій у декартових координатах. До "елементарних" операцій належать, наприклад:

$$\vec{\nabla}\left(\vec{a}\cdot\vec{r}\right)=\vec{a},\quad (\vec{a}\cdot\vec{\nabla})\vec{r}=\vec{a},\quad \vec{\nabla}r=\frac{\vec{r}}{r},\quad \operatorname{div}\vec{r}=3,\quad \operatorname{rot}\vec{r}=\vec{0},$$

а також деякі вирази, у яких функція під похідною залежить лише від $r=|\vec{r}\,|$, а саме:

$$\vec{\nabla}\Phi(r)=\frac{d\Phi(r)}{dr}\frac{\vec{r}}{r},$$

$$\operatorname{div}\vec{A}(r)=\frac{d\vec{A}(r)}{dr}\cdot\frac{\vec{r}}{r},$$

$$\operatorname{rot}\vec{A}(r)=\frac{\vec{r}}{r}\times\frac{d\vec{A}(r)}{dr}.$$

Наведемо приклади застосування символічного методу.

Приклад 15. Довести тотожність $\operatorname{div}(\varphi\vec{A})=\varphi\operatorname{div}\vec{A}+\vec{A}\cdot\vec{\nabla}\varphi$.

Розв'язання. $\operatorname{div}(\varphi\vec{A})=\vec{\nabla}\cdot(\varphi\vec{A})=\vec{\nabla}\cdot(\underline{\varphi}\vec{A}+\varphi\underline{\vec{A}})=$

$$=(\vec{\nabla}\underline{\varphi}\cdot\vec{A})+\varphi(\vec{\nabla}\cdot\underline{\vec{A}})=\vec{A}\cdot\operatorname{grad}\varphi+\varphi\operatorname{div}\vec{A}.$$

Приклад 16. Довести тотожність

$$\operatorname{grad}(\vec{A}\cdot\vec{B})=\vec{A}\times\operatorname{rot}\vec{B}+\vec{B}\times\operatorname{rot}\vec{A}+(\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{A}+(\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{B}.$$

Розв'язання.

$$\operatorname{grad}(\vec{A}\cdot\vec{B})=\vec{\nabla}(\vec{A}\cdot\vec{B})=\vec{\nabla}(\underline{\vec{A}\cdot\vec{B}})=\vec{\nabla}(\underline{\vec{A}}\cdot\vec{B})+\vec{\nabla}(\vec{A}\cdot\underline{\vec{B}}).$$

Вираз вигляду $\vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c})$ зустрічається при розкритті подвійного векторного добутку за формулою $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c})-\vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b})$. Звідси випливає, що

$$\vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c})=\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})+\vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b}).$$

Тоді

$$\vec{\nabla}(\underline{\vec{A}}\cdot\vec{B})=\vec{\nabla}(\vec{B}\cdot\underline{\vec{A}})=\vec{B}\times(\vec{\nabla}\times\underline{\vec{A}})+\underline{\vec{A}}(\vec{B}\cdot\vec{\nabla})=\vec{B}\times\operatorname{rot}\vec{A}+(\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{A},$$

$$\vec{\nabla}(\vec{A}\cdot\underline{\vec{B}})=\vec{A}\times(\vec{\nabla}\times\underline{\vec{B}})+\underline{\vec{B}}(\vec{A}\cdot\vec{\nabla})=\vec{A}\times\operatorname{rot}\vec{B}+(\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{B}.$$

Додаючи отримані рівності, знайдемо

$$\vec{\nabla}(\vec{A}\cdot\vec{B})=\vec{A}\times\operatorname{rot}\vec{B}+\vec{B}\times\operatorname{rot}\vec{A}+(\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{B}+(\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{A}.$$

Приклад 17. Знайти вираз для $\operatorname{div}(\vec{A}(\vec{r})\times\vec{B}(\vec{r}))$.

Розв'язання. $\operatorname{div}(\vec{A}(\vec{r})\times\vec{B}(\vec{r}))=\vec{\nabla}\cdot(\vec{A}(\vec{r})\times\vec{B}(\vec{r}))=$

$$=\vec{\nabla}\cdot(\underline{\vec{A}(\vec{r})}\times\vec{B}(\vec{r}))+\vec{\nabla}\cdot(\vec{A}(\vec{r})\times\underline{\vec{B}(\vec{r})})=$$

$$=\vec{B}(\vec{r})\cdot(\vec{\nabla}\times\underline{\vec{A}(\vec{r})})-\vec{A}(\vec{r})\cdot(\vec{\nabla}\times\underline{\vec{B}(\vec{r})})=$$

$$=\vec{B}(\vec{r})\cdot\operatorname{rot}\vec{A}(\vec{r})-\vec{A}(\vec{r})\cdot\operatorname{rot}\vec{B}(\vec{r}).$$

Приклад 18. Знайти вираз для $\operatorname{rot}(\varphi(\vec{r})\vec{A}(\vec{r}))$.

Розв'язання. $\operatorname{rot}(\varphi(\vec{r})\vec{A}(\vec{r}))=\vec{\nabla}\times(\varphi(\vec{r})\vec{A}(\vec{r}))=$

$$=\vec{\nabla}\times(\underline{\varphi(\vec{r})}\vec{A}(\vec{r}))+\vec{\nabla}\times(\varphi(\vec{r})\underline{\vec{A}(\vec{r})})=$$

$$=-(\vec{A}(\vec{r})\times\vec{\nabla}\underline{\varphi(\vec{r})})+\varphi(\vec{r})(\vec{\nabla}\times\underline{\vec{A}(\vec{r})})=$$

$$=-\vec{A}(\vec{r})\times\operatorname{grad}\varphi(\vec{r})+\varphi(\vec{r})\operatorname{rot}\vec{A}(\vec{r}).$$

Використовуючи символічний метод, можна також довести векторні тотожності, які справедливі в довільній системі координат тривимірного евклідового простору:

$$\vec{\nabla}(fg)=g\vec{\nabla}f+f\vec{\nabla}g.$$

$$\operatorname{rot}(\vec{A}\times\vec{B})=\vec{A}\operatorname{div}\vec{B}-\vec{B}\operatorname{div}\vec{A}+(\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{A}-(\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{B}.$$

$$\vec{\nabla}\vec{A}^2=2(\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{A}+2(\vec{A}\times\operatorname{rot}\vec{A}).$$

$$(\vec{\nabla}\cdot\vec{A})\vec{B}=(\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{B}+\vec{B}\operatorname{div}\vec{A}.$$

$$(\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\varphi\vec{A}=\vec{A}(\vec{B}\cdot\vec{\nabla}\varphi)+\varphi(\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{A}.$$

$$\vec{C}\cdot\vec{\nabla}(\vec{A}\cdot\vec{B}) = \vec{A}\cdot(\vec{C}\cdot\vec{\nabla})\vec{B} + \vec{B}\cdot(\vec{C}\cdot\vec{\nabla})\vec{A} .$$

$$(\vec{C}\cdot\vec{\nabla})(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{A}\times((\vec{C}\cdot\vec{\nabla})\vec{B}) - \vec{B}\times((\vec{C}\cdot\vec{\nabla})\vec{A}) .$$

$$(\vec{A}\times\vec{B})\operatorname{rot}\vec{C} = \vec{B}\cdot(\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{C} - \vec{A}\cdot(\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{C} .$$

$$(\vec{A}\times\vec{\nabla})\times\vec{B} = (\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{B} + \vec{A}\times\operatorname{rot}\vec{B} - \vec{A}\operatorname{div}\vec{B} .$$

$$(\vec{\nabla}\times\vec{A})\times\vec{B} = \vec{A}\operatorname{div}\vec{B} - (\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{B} - \vec{A}\times\operatorname{rot}\vec{B} - \vec{B}\times\operatorname{rot}\vec{A} .$$

Від скалярних та векторних полів за допомогою градієнта, дивергенції, ротора можна утворити шість диференціальних операцій другого порядку, що мають зміст:

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div}\vec{A}),$$

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = \operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{A}) \equiv 0,$$

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = \operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{A}),$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\Phi = (\vec{\nabla}\times\vec{\nabla})\Phi = \operatorname{rot}\big(\operatorname{grad}\Phi\big) \equiv 0,$$

оператор Лапласа (лапласіан) від скалярної функції

$$\Delta\Phi = (\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla})\Phi = \operatorname{div}(\operatorname{grad}\Phi)$$

та оператор Лапласа від векторної функції, який можна обчислювати за формулою

$$\Delta\vec{A} = \vec{\nabla}^2\vec{A} = (\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla})\vec{A} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) - \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) =$$

$$= \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{A} - \operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{A} .$$

§ 4. Основна теорема векторного аналізу

Формулювання Максвеллом чотирьох рівнянь електромагнетизму підняло важливе математичне питання: якою мірою векторна функція визначається своїми дивергенцією та ротором?

Є багато векторних функцій, для яких і дивергенція, і ротор дорівнюють нулю одночасно всюди в заданій області. Це функції вигляду $\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\varphi$, якщо відповідний скалярний потенціал є розв'язком рівняння Лапласа, а таких розв'язків існує безліч. Але для знаходження функції самого диференціального рівняння недостатньо, його треба доповнити відповідними крайовими умовами. В електродинаміці, наприклад, зазвичай вимагається, щоб поля прямували до нуля на нескінченності (далеко від усіх інших зарядів). Із такою додатковою умовою теорема Гельмгольца, яку ми сформулюємо далі, гарантує, що поле однозначно визначається своїми дивергенцією та ротором.

Припустимо, що

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{F}(\vec{r})=D(\vec{r}), \tag{6.5}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{F}(\vec{r})=\vec{C}(\vec{r}), \tag{6.6}$$

де $D(\vec{r})$ і $\vec{C}(\vec{r})$ – задані скалярна і векторна функції. Зазначимо для узгодженості, що поле $\vec{C}(\vec{r})$ має бути соленоїдальним, оскільки $\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{C}(\vec{r})=0$.

Задамо питання: чи можемо ми, на підґрунті цієї інформації, визначити $\vec{F}(\vec{r})$? Якщо $D(\vec{r})$ і $\vec{C}(\vec{r})$ прямують до нуля достатньо швидко на нескінченності, то відповідь буде "так". Як це зробити, покажемо явною побудовою. Вимагатимемо, щоб

$$\vec{F}=-\vec{\nabla}\varphi+\operatorname{rot}\vec{A}, \tag{6.7}$$

де

$$\varphi(\vec{r})\equiv\frac{1}{4\pi}\int\frac{D(\vec{r}')}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|}d\vec{r}' \tag{6.8}$$

і

$$\vec{A}(\vec{r})\equiv\frac{1}{4\pi}\int\frac{\vec{C}(\vec{r}')}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|}d\vec{r}', \tag{6.9}$$

та інтегрування здійснювалося по всьому простору.

Якщо $\vec{F}(\vec{r})$ задається формулою (6.7), тоді

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{F}(\vec{r})=-\Delta\varphi(\vec{r})=-\frac{1}{4\pi}\int D(\vec{r}')\Delta\left(\frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|}\right)d\vec{r}'=$$

$$=\int D(\vec{r}')\delta\left(\vec{r}-\vec{r}'\right)d\vec{r}'=D(\vec{r}).$$

Нагадаємо, що дивергенція ротора дорівнює нулю, тому доданок із $\vec{A}(\vec{r})$ опускаємо. Зазначимо, що диференціювання в операторі Лапласа Δ здійснюється відносно $\vec{r}$, який міститься в $\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|$. Отже, дивергенція – правильна. Розглянемо тепер ротор

$$\vec{\nabla}\times\vec{F}(\vec{r})=\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}(\vec{r}))=-\Delta\vec{A}(\vec{r})+\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{A}(\vec{r}) \tag{6.10}$$

(оскільки $\operatorname{rot}\vec{\nabla}\varphi=0$, доданок із φ опускаємо). Тоді

$$-\Delta\vec{A}(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi}\int \vec{C}(\vec{r}\,')\Delta\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right)d\vec{r}\,' = \int \vec{C}(\vec{r}\,')\delta\left(\vec{r}-\vec{r}\,'\right)d\vec{r}\,' = \vec{C}(\vec{r}),$$

що також є правильним, якщо переконаємося, що другий доданок праворуч у (6.10) дорівнює нулю. Використовуючи інтегрування частинами і враховуючи, що похідні від $|\vec{r}-\vec{r}\,'|$ відносно штрихованих координат відрізняються знаком від похідних за нештрихованими координатами, маємо

$$4\pi\vec{\nabla}\cdot\vec{A}(\vec{r}) = \int \vec{C}(\vec{r}\,')\cdot\vec{\nabla}\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right)d\vec{r}\,' = -\int \vec{C}(\vec{r}\,')\cdot\vec{\nabla}'\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right)d\vec{r}\,' =$$

$$= \int \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\vec{\nabla}'\cdot\vec{C}(\vec{r}\,')d\vec{r}\,' - \oiint \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\vec{C}(\vec{r}\,')\cdot d\vec{S}\,. \qquad (6.11)$$

Але $\operatorname{div}\vec{C}(\vec{r}) = 0$ за припущенням (див. (6.6)), і поверхневий інтеграл у (6.11) – по нескінченно віддаленій поверхні – зникне, як тільки $\vec{C}(\vec{r})$ прямуватиме до нуля на нескінченності достатньо швидко.

Цим доведенням припускаємо, що інтеграли у (6.8), (6.9) збігаються, а в іншому випадку φ і $\vec{A}$ зовсім не існують. При великих r', коли $|\vec{r}-\vec{r}\,'| \approx r'$, інтеграли за r' у формулах (6.8) і (6.9) мають форму

$$\int_a^\infty \frac{X(r')}{r'}r'^2dr' = \int_a^\infty r'X(r')dr'$$

(тут замість X можна поставити D або $\vec{C}$, нижня межа $a \gg 1$). Очевидно, що $X(r')$ має прямувати до нуля на великих відстанях, але цього не достатньо. Якщо $X \sim 1/r'$, підінтегральна функція дорівнює константі й інтеграл – розбіжний. І навіть, якщо $X \sim 1/r'^2$, інтеграл дорівнює логарифму, який все ще розбіжний, якщо верхня межа інтеграла прямує до нескінченності. Таким чином, для доведення необхідно вимагати, щоб дивергенція та ротор поля прямували до нуля швидше, ніж $1/r'^2$. Крім того, цього більш, ніж достатньо, щоб гарантувати прямування до нуля поверхневого інтеграла в (6.11).

Визначимо, чи є за таких умов для D і $\vec{C}$ вираз (6.7) однозначним? До $\vec{F}$ ми можемо додати довільну векторну функцію, для якої дивергенція та ротор одночасно дорівнюють нулю, і умови (6.5) та (6.6) виконуватимуться, як і раніше. Однак, не рівної нулю функції, яка одночасно має нульові дивергенцію та ротор усюди і прямує до нуля на нескінченності, не існує. Таким чином, за умови прямування $\vec{F}$ до нуля на нескінченності розв'язок (6.7) буде єдиним.

Тепер сформулюємо теорему Гельмгольца більш строго.

Основна теорема векторного аналізу (теорема розкладання Гельмгольца). Якщо дивергенція $D(\vec{r})$ та ротор $\vec{C}(\vec{r})$ векторної функції $\vec{F}(\vec{r})$ точно визначені і прямують до нуля на нескінченності швидше, ніж $1/r^2$, то неперервно диференційовне векторне поле $\vec{F}(\vec{r})$, яке зникає на нескінченності, однозначно визначається співвідношенням

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}\varphi + \operatorname{rot}\vec{A}.$$

Теорема має цікавий наслідок. Якщо неперервно диференційовна векторна функція $\vec{F}(\vec{r})$ прямує до нуля на нескінченності швидше, ніж $1/r$, то її можна представити як суму градієнта скалярної функції та ротора векторної функції:

$$\vec{F}(\vec{r}) = \vec{\nabla}\left(-\frac{1}{4\pi}\int\frac{\vec{\nabla}'\cdot\vec{F}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}d\vec{r}'\right) + \vec{\nabla}\times\left(\frac{1}{4\pi}\int\frac{\vec{\nabla}'\times\vec{F}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}d\vec{r}'\right).$$

1. Наприклад, в електростатиці $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho/\varepsilon_0$, $\vec{\nabla}\times\vec{E} = 0$, тому

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}d\vec{r}'\right) = -\vec{\nabla}\varphi(\vec{r}),$$

де $\varphi(\vec{r})$ – скалярний потенціал.

2. Наприклад, у магнітостатиці $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$, $\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{j}$, тому

$$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla}\times\left(\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}d\vec{r}'\right) = \vec{\nabla}\times\vec{A}(\vec{r}),$$

де $\vec{A}(\vec{r})$ – векторний потенціал.

§ 5. Узагальнені теореми Остроградського–Гаусса та Стокса

Ці інтегральні теореми використовуються в гідродинаміці, теорії пружності, електродинаміці.

Формула Остроградського–Гаусса встановлює зв'язок між певними характеристиками векторного поля всередині деякої області простору і характеристиками того самого поля на межі цієї області у вигляді рівності інтеграла по об'єму інтегралу по замкненій поверхні, що обмежує цей об'єм:

$$\oint_S \vec{A}\cdot\vec{n}dS = \int_V \operatorname{div}\vec{A}\,dV\,.$$

Формула Стокса зв'язує інтегральні характеристики поля на деякій незамкненій поверхні з інтегральними характеристиками того самого поля на контурі, що є межею цієї поверхні:

$$\oint_C \vec{A}\cdot\vec{\tau}dl = \int_S \operatorname{rot}\vec{A}\cdot\vec{n}dS\,.$$

Спочатку перейдемо до найбільш елементарної форми запису інтегральних теорем, а потім її узагальнимо. Запишемо

$$\oint_S dS\vec{n}\cdot\vec{A} = \int_V dV\vec{\nabla}\cdot\vec{A},\ \ \oint_C dl\vec{\tau}\cdot\vec{A} = \int_S dS\vec{n}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = \int_S dS(\vec{n}\times\vec{\nabla})\cdot\vec{A}\,.$$

Суть узагальнення полягає у тому, що замість $\cdot\vec{A}$ у формулі може мати місце довільне множення на довільний геометричний об'єкт, але одночасно ліворуч і праворуч.

Спочатку перепишемо інтегральні формули для векторного поля вигляду $\vec{A}=\vec{C}f$, де $\vec{C}$ – будь-який сталий вектор, а f – довільна скалярна функція координат:

$$\vec{C}\cdot\oint_S dS\vec{n}f = \vec{C}\cdot\int_V dV\vec{\nabla}f\,, \qquad \vec{C}\cdot\oint_C dl\vec{\tau}f = \vec{C}\cdot\int_S dS(\vec{n}\times\vec{\nabla})f\,.$$

Оскільки $\vec{C}$ – довільний сталий вектор, його опускаємо. І перейшовши до будь-яких декартових координат, запишемо i-проекцію отриманих рівностей:

$$\oint_S dSn_i f = \int_V dV\nabla_i f\,, \qquad \oint_C dl\tau_i f = \int_S dS[\vec{n}\times\vec{\nabla}]_i f\,.$$

Це теореми математичного аналізу, тут f – довільна функція, що може мати будь-яку кількість індексів і, крім того, може бути представлена як результат інваріантних тензорних операцій. Тому справедливим є такий загальний символічний запис:

$$\oint_S dS\vec{n}\odot(\ldots)=\int_V dV\vec{\nabla}\odot(\ldots),$$

$$\oint_C dl\vec{\tau}\odot(\ldots)=\int_S dS(\vec{n}\times\vec{\nabla})\odot(\ldots),$$

тут $\odot$ – символічне позначення послідовності операцій над полем $(\ldots)$ одного або декількох геометричних об'єктів.

Приклади перетворень поверхневих інтегралів у об'ємні:

$$\oint_{S(V)} \varphi\vec{n}dS=\int_V \vec{\nabla}\varphi dV .$$

$$\oint_{S(V)} (\vec{n}\times\vec{A})\,dS=\int_V \operatorname{rot}\vec{A}\,dV .$$

$$\oint_{S(V)} (\vec{n}\cdot\vec{\nabla})\varphi\,dS=\int_V \Delta\varphi dV .$$

$$\oint_{S(V)} (\vec{n}\cdot\vec{\nabla})\vec{A}dS=\int_V \Delta\vec{A}dV .$$

$$\oint_{S(V)} n_i t_{ij}dS=\int_V \frac{\partial t_{ij}}{\partial x^i}dV .$$

Зазначимо, що в останній формулі компоненти векторів і тензора задаються в декартовій системі координат.

Приклади перетворень інтегралів по замкненому контуру у поверхневі інтеграли:

$$\oint_C \varphi\vec{\tau}dl=\int_S (\vec{n}\times\vec{\nabla})\varphi dS .$$

$$\oint_C (\vec{\tau}\cdot\vec{\nabla})\varphi dl=0 .$$

$$\oint_C (\vec{\tau}\times\vec{A})dl=\int_S ((\vec{n}\times\vec{\nabla})\times\vec{A})dS .$$

Контрольні запитання

1. Дайте означення скалярного і векторного полів та наведіть приклади.

2. Що називається поверхнею рівня? Напишіть рівняння сім'ї поверхонь рівня електричного поля точкового заряду, який знаходиться у точці $M(x_0, y_0, z_0)$.

3. Дайте означення похідної за напрямком для скалярного та векторного полів.

4. Дайте означення градієнта скалярного поля. Як пов'язана похідна за напрямком із градієнтом скалярного поля в цій точці?

5. Що називається векторною лінією? Напишіть диференціальні рівняння для векторних ліній.

6. Яке векторне поле називається потенціальним? Наведіть приклади.

7. Сформулюйте необхідну та достатню умову незалежності криволінійного інтеграла $\int\limits_C \vec{A} \cdot d\vec{r} = \int\limits_C A_1 dx + A_2 dy + A_3 dz$ від шляху інтегрування, яка використовує похідні першого порядку.

8. Що називається циркуляцією векторного поля вздовж кривої? Напишіть вираз для циркуляції у векторній формі.

9. Напишіть формулу Стокса і сформулюйте умови, за яких ця формула справедлива. Який фізичний зміст формули Стокса?

10. Дайте інваріантне означення ротора векторного поля. Який фізичний зміст поняття ротора?

11. Яке векторне поле називається безвихровим?

12. Яке векторне поле називається соленоїдальним?

13. Що таке скалярний потенціал, векторний потенціал?

14. Що таке оператор Гамільтона ($\vec{\nabla}$)?

15. Запишіть за допомогою оператора Гамільтона (набла) градієнт скалярного поля, дивергенцію та ротор векторного поля, похідні скалярного та векторного полів за напрямком.

16. Що таке повна похідна, локальна похідна, конвективна похідна? Що вони характеризують та якими співвідношеннями зв'язані?

17. Як уводиться додатний напрямок обходу контуру, узгоджений з орієнтацією поверхні, обмеженої цим контуром?

18. Що називається потоком векторного поля через поверхню? Напишіть вираз для потоку у векторній формі.

19. Запишіть формулу Остроградського–Гаусса у декартових координатах і у векторній формі. Який її фізичний зміст?

20. Дайте інваріантне означення дивергенції векторного поля. Який фізичний зміст дивергенції?

21. Наведіть приклади фізичних полів, для яких а) $\operatorname{div}\vec{A}=0$, б) $\operatorname{rot}\vec{A}=0$.

22. Запишіть узагальнену теорему Остроградського–Гаусса.

23. Запишіть узагальнену теорему Стокса.

24. Як зобразити довільне векторне поле у вигляді суми потенціального і соленоїдального полів?

Задачі

6.1. Обчислити[8]:

а) $\vec{\nabla}r$; б) $\vec{\nabla}(\vec{a}\cdot\vec{r})$; в) $\vec{\nabla}r^n$; г) $\vec{\nabla}(\vec{a}\cdot\vec{r})r$; д) $\vec{\nabla}\dfrac{\alpha}{r}$;

є) $\vec{\nabla}\ln r$; ж) $(\vec{a}\cdot\vec{\nabla})\vec{r}$; з) $\vec{\nabla}(\vec{a}\cdot\vec{r})(\vec{b}\cdot\vec{r})$; і) $\vec{\nabla}(\vec{a}\cdot\vec{r})f(r)$;

к) $\vec{\nabla}\left(\vec{a}\times\vec{r}\right)^2$; л) $\vec{\nabla}(\vec{a}\cdot\vec{r})^2$; м) $\vec{\nabla}\left(\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{r}}{r^3}\right)$.

6.2. Для наведених векторних полів $\vec{A}$ обчислити $\operatorname{div}\vec{A}$ та $\operatorname{rot}\vec{A}$:

а) $\vec{r}$; б) $\vec{r}r^2$; в) $\vec{r}r^n, n\neq 2$; г) $\dfrac{\vec{r}}{r}$; д) $\dfrac{\vec{r}}{r^3}$; є) $\dfrac{\vec{r}}{r^n}$; ж) $\vec{a}\times\vec{r}$;

з) $\vec{r}(\vec{a}\cdot\vec{r})$; і) $\vec{a}(\vec{b}\cdot\vec{r})$; к) $\vec{a}r^n$; л) $\vec{a}\times(\vec{r}\times\vec{b})$;

м) $\vec{r}\times\left(\vec{a}\times\vec{r}\right)$; н) $\dfrac{\vec{a}\times\vec{r}}{r^3}$; о) $\vec{a}\ln r$; п) $r\left(\vec{a}\times\vec{r}\right)$.

6.3. Перетворити вирази: а) $\nabla\varphi(r)$; б) $\operatorname{div}\vec{A}(r)$; в) $\operatorname{rot}\vec{A}(r)$.

---

[8]Тут і в наступних задачах радіус-вектор точки $\vec{r}=(x,y,z)$, $r\equiv|\vec{r}\,|$, $\vec{a}$, $\vec{b}$ – сталі вектори. Це передбачає використання саме декартової системи координат.

6.4. Спростити вирази:

а) $\vec{\nabla}((\vec{a}\cdot\vec{r})\varphi(r))$; б) $\operatorname{div}((\vec{a}\cdot\vec{r})\vec{A}(r))$; в) $\operatorname{rot}((\vec{a}\cdot\vec{r})\vec{A}(r))$;

г) $\vec{\nabla}((\vec{a}\times\vec{r})\cdot\vec{A}(r))$; д) $\operatorname{div}((\vec{a}\times\vec{r})\times\vec{A}(r))$; є) $\operatorname{rot}((\vec{a}\times\vec{r})\times\vec{A}(r))$.

6.5. Обчислити: а) $\Delta\varphi(r)$; б) $\Delta\dfrac{\varphi(r)}{r}$; в) $\Delta\vec{A}(r)$; г) $\Delta\dfrac{(\vec{a}\cdot\vec{r})}{r^n}$.

6.6. Обчислити (вектори $\vec{a},\vec{k}$ – сталі):

а) $\vec{\nabla}e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$; б) $\vec{\nabla}e^{ikr}$; в) $\vec{\nabla}(e^{ikr}/r)$; г) $\vec{\nabla}((\vec{a}\cdot\vec{r})e^{i\vec{k}\vec{r}})$;

д) $\operatorname{div}(\vec{a}e^{i\vec{k}\vec{r}})$; є) $\operatorname{rot}(\vec{a}e^{i\vec{k}\vec{r}})$; ж) $\operatorname{div}(\vec{A}(r)e^{i\vec{k}\vec{r}})$; з) $\operatorname{div}\left(\dfrac{\vec{a}}{r}e^{ikr}\right)$;

і) $\operatorname{rot}\left(\dfrac{\vec{a}}{r}e^{ikr}\right)$; к) $\Delta e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$; л) $\Delta\left(\dfrac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{r}\right)$; м) Δe^{ikr}.

6.7. Знайти таку функцію $\varphi(r)$, що $\operatorname{div}(\vec{r}\varphi(r))=0$.

6.8. Для якої функції $\varphi(r)$ виконується рівність $\operatorname{div}(\vec{r}\varphi(r))=2\varphi(r)$?

6.9. Обчислити ротор та дивергенцію вектора $(\vec{a}\times\vec{r})\varphi(r)$.

6.10. Обчислити $\vec{\nabla}\left[\dfrac{1}{2m}\left(\vec{p}-\dfrac{e}{c}\vec{A}(\vec{r})\right)^2\right]$, де $\vec{A}(\vec{r})=\dfrac{1}{2}\vec{B}\times\vec{r}$; $\vec{p}$, $\vec{B}$ – сталі вектори; e, c, m – числові параметри (результат обчислення – сила, яка діє на частинку із зарядом e у магнітному полі, із точністю до знака).

6.11. Спростити вирази: а) $\vec{\nabla}\operatorname{div}(\varphi(\vec{r})\vec{a})$; б) $\vec{\nabla}\operatorname{div}(\varphi(\vec{r})\vec{A}(\vec{r}))$.

6.12. Спростити вирази:

а) $\operatorname{div}(\varphi(r)\vec{r})$; б) $\operatorname{rot}(\varphi(r)\vec{r})$; в) $(\vec{a}\cdot\vec{\nabla})(\varphi(r)\vec{r})$.

6.13. Обчислити $\operatorname{rot}\operatorname{rot}(\varphi(r)\vec{a})$.

6.14. Обчислити:

а) $\vec{\nabla}(\vec{A}(r)\cdot\vec{r})$; б) $\vec{\nabla}(\vec{A}(r)\cdot\vec{B}(r))$; в) $\operatorname{div}(\varphi(r)\vec{A}(r))$; г) $\operatorname{rot}(\varphi(r)\vec{A}(r))$;

д) $(\vec{a}\cdot\vec{\nabla})\varphi(r)$; є) $(\vec{a}\cdot\vec{\nabla})(\varphi(r)\vec{A}(r))$; ж) $(\vec{r}\times\vec{\nabla})\varphi(r)$;

з) $\operatorname{div}\left(\dfrac{\vec{r}}{r}\varphi(r)\right)$; і) $(\vec{r}\times\vec{\nabla})\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{r}}{r^3}$; к) $(\vec{a}\times\vec{\nabla})\times\vec{A}(r)$.

6.15. Обчислити: а) $(\vec{a}\cdot\vec{\nabla})^2r^2$; б) $(\vec{a}\times\vec{\nabla})^2r^2$; в) $(\vec{a}\times\vec{\nabla})\times\vec{r}$.

6.16. Обчислити: а) $\vec{\nabla}\varphi\big(f(\vec{r})\big)$; б) $\operatorname{div}\vec{A}\big(f(\vec{r})\big)$; в) $\operatorname{rot}\vec{A}\big(f(\vec{r})\big)$, де $f(\vec{r})$ – деяка скалярна функція векторного аргументу. Розглянути частинний випадок $f(\vec{r})=\vec{a}\cdot\vec{r}$.

6.17. Довести інтегральні теореми, що є наслідками теореми Стокса:

а) $\oint\limits_{L(S)}\varphi\vec{\tau}\,dl=\int\limits_{S}(\vec{n}\times\vec{\nabla})\varphi\,dS$; б) $\oint\limits_{L(S)}(\vec{\tau}\cdot\vec{\nabla})\varphi\,dl=0$;

в) $\oint\limits_{L(S)}(\vec{\tau}\times\vec{A})\,dl=\int\limits_{S}(\vec{n}\times\vec{\nabla})\times\vec{A}dS$.

6.18. Поверхневий інтеграл $\oint\limits_{S(V)}\Delta\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}dS$ перетворити на об'ємний.

6.19. Об'ємний інтеграл $\int\limits_{V}\vec{\nabla}\varphi\cdot\operatorname{rot}\vec{A}dV$ перетворити на поверхневий.

6.20. Обчислити поверхневі інтеграли:

а) $\oint\limits_{S(V)}\vec{r}\big(\vec{a}\cdot\vec{n}\big)dS$; б) $\oint\limits_{S(V)}\vec{n}(\vec{a}\cdot\vec{r})dS$; в) $\oint\limits_{S(V)}\vec{a}(\vec{n}\cdot\vec{r})dS$;

г) $\oint\limits_{S(V)}\vec{r}\times(\vec{n}\times\vec{a})f(r)dS$; д) $\oint\limits_{S(V)}(\vec{n}\times\vec{b})\cdot(\vec{a}\times\vec{r})dS$.

Тут $\vec{a}$ та $\vec{b}$ – сталі вектори.

6.21. Обчислити інтеграл $\oint\limits_{L(S)}(\vec{a}\cdot\vec{r})\vec{\tau}dl$, де $L(S)$ – плоский замкнений контур, що обмежує площу S.

6.22. Обчислити інтеграл $\oint\limits_{L(S)}\big(\vec{r}\times\vec{\tau}\big)dl$, де $L(S)$ – замкнений контур, що обмежує площу S на площині $\vec{r}\cdot\vec{n}=d$.

6.23. Довести тотожності:

а) $\oint\limits_{L(S)}\vec{r}\times(\vec{\tau}\times\vec{a})dl=\frac{1}{2}\oint\limits_{L(S)}(\vec{r}\times\vec{\tau})\times\vec{a}dl$; б) $\oint\limits_{L(S)}(\vec{r}\cdot\vec{a})\cdot\vec{\tau}dl=\oint\limits_{L(S)}(\vec{r}\times\vec{a})\times\vec{\tau}\,dl$.

6.24. Перетворити поверхневі інтеграли на об'ємні:

а) $\oint\limits_{S(V)}(\vec{n}\cdot\vec{r})(\vec{a}\cdot\vec{r})dS$; б) $\oint\limits_{S(V)}\vec{n}f(\vec{a}\cdot\vec{r})dS$; в) $\oint\limits_{S(V)}(\vec{n}\cdot\vec{a})\varphi(r)dS$;

г) $\oint\limits_{S(V)} \left(\vec{n}\times\vec{a}\right) f(r)\,dS$; д) $\oint\limits_{S(V)} \left(\vec{n}\times\vec{r}\right)\cdot\left(\vec{a}\times\vec{r}\right)dS.$

Тут $\vec{a}$ – сталий вектор, $\vec{n}$ – орт нормалі до поверхні $S(V)$, що обмежує об'єм V.

6.25. Перетворити поверхневі інтеграли на об'ємні:

а) $\oint\limits_{S(V)} \varphi\vec{A}\cdot\vec{n}\,dS$; б) $\oint\limits_{S(V)} (\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{n}\,dS$; в) $\oint\limits_{S(V)} \varphi\psi\dfrac{d\chi}{dn}dS$;

г) $\oint\limits_{S(V)} (\vec{A}\times\vec{\nabla}\varphi)\cdot\vec{n}\,dS$; д) $\oint\limits_{S(V)} \dfrac{d\varphi}{dn}dS$;

є) $\oint\limits_{S(V)} (\mathrm{rot}\,\vec{A}\times\Delta\vec{A})\cdot\vec{n}\,dS$ (при $\mathrm{div}\,\vec{A}=0$); ж) $\oint\limits_{S(V)} (\vec{A}\times\vec{n})\times\vec{B}dS.$

Тут $\vec{A}$, $\vec{B}$, φ, χ та ψ – функції, залежні від $\vec{r}$; $\vec{n}$ – орт нормалі до поверхні $S(V)$, що обмежує об'єм V.

6.26. Перетворити поверхневі інтеграли на об'ємні ($\vec{a}$, $\vec{k}$ – сталі вектори):

а) $\oint\limits_{S(V)} (\vec{r}\cdot\vec{A}(\vec{r}))\vec{n}\,dS$; б) $\oint\limits_{S(V)} \vec{a}e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\cdot\vec{n}\,dS$;

в) $\oint\limits_{S(V)} \left(\vec{a}\times\vec{n}\right)e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\,dS$; г) $\oint\limits_{S(V)} \dfrac{\vec{a}e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{r}\vec{n}\,dS.$

6.27. Перетворити контурні інтеграли на поверхневі ($\vec{a}$, $\vec{k}$ – сталі вектори):

а) $\oint\limits_{L(S)} \vec{a}e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\cdot\vec{\tau}\,dl$; б) $\oint\limits_{L(S)} \left(\vec{a}\times\vec{\tau}\,\right)e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\,dl$; в) $\oint\limits_{L(S)} \dfrac{\vec{a}e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{r}\cdot\vec{\tau}\,dl.$

6.28. Довести, що $\int\limits_V \vec{j}(\vec{r})\,dV=0$, якщо $\mathrm{div}\,\vec{j}=0$ всередині об'єму V та $\vec{j}\cdot\vec{n}=0$ на поверхні $S(V)$, що обмежує об'єм V.

6.29. Показати, що дивергенція вектора $\vec{A}+\dfrac{1}{4\pi}\vec{\nabla}\int\limits_V\dfrac{\mathrm{div}\,\vec{A}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dV'$ дорівнює нулю для довільного об'єму V.

Розділ 7
Вектори та тензори у косокутних системах координат

При дослідженні ортогональних тензорів та їх застосуванні, достатньо було користуватися лише нижніми індексами, оскільки в декартових системах координат немає різниці між використанням верхнього чи нижнього індексу. Для узагальнення поняття тензора і застосувань тензорів у довільних системах координат обов'язковим є введення як нижніх, так і верхніх індексів.

Раніше ми прийняли угоду про підсумовування у такій формі: у кожному доданку підсумовування здійснюється за довільними двома латинськими індексами, що повторюються (див. розд. 1, п. 2.2). Зазвичай угода про підсумовування вводиться у формі, запропонованій А. Ейнштейном: підсумовування здійснюється лише у тому випадку, коли в доданку однакові один верхній і один нижній індекси. Тому далі пара німих індексів складатиметься з одного верхнього й одного нижнього індексів. Для символів Кронекера використовуватимемо позначення δ_i^j або $\delta^j{}_i$, а для символів Леві-Чівіта – e^{ijk} або e_{ijk}. Кожен із цих символів визначається так само, як відповідні символи в декартових системах координат із нижніми індексами.

Косокутні системи координат уводяться за наявності трьох виділених некомпланарних векторів у фізичній системі, серед яких не всі ортогональні або рівні за довжиною. Наприклад, у монокристалі такими є вектори основних трансляцій (за винятком простої кубічної ґратки). Якщо ці вектори обрати за базисні, система координат буде косокутною (або афінною).

§ 1. Коваріантні та контраваріантні координати вектора

Якщо прямолінійні осі координат $x^1,\ x^2,\ x^3$ і відповідні базисні вектори $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ не є ортогональними, то довільний вектор $\vec{a}$ можна задати двома різними способами (рис. 7.1):

1) розкладанням його за векторами базису;

2) за допомогою ортогональних проекцій вектора $\vec{a}$ на осі координат.

Нехай $\vec{e}_i$ – різної довжини напрямлені по x^1, x^2, x^3 базисні вектори, $\left(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\right) \neq 0$. Тоді справедливе співвідношення:

$$\vec{a} = a^1\vec{e}_1 + a^2\vec{e}_2 + a^3\vec{e}_3 \equiv a^i\vec{e}_i\ .$$

Набір чисел a^1, a^2, a^3 однозначно визначає вектор $\vec{a}$. Тому ці числа можна назвати його координатами. Такі координати називають **контраваріантними**.

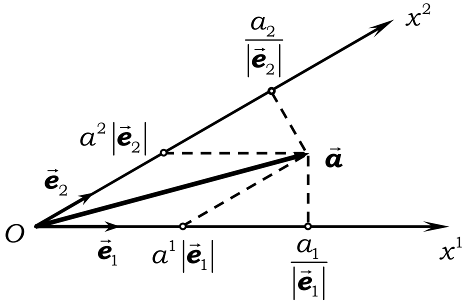

Рис. 7.1. Коваріантні та контраваріантні координати вектора на площині: вирази біля точок відповідають відстаням, виміряним в тих самих одиницях, що і довжини всіх векторів

Розглянемо скалярні добутки

$$a_1 = \vec{a} \cdot \vec{e}_1,\ a_2 = \vec{a} \cdot \vec{e}_2,\ a_3 = \vec{a} \cdot \vec{e}_3.$$

За означенням скалярного добутку

$$a_1 = \vec{a} \cdot \vec{e}_1 = |\vec{a}| \cdot |\vec{e}_1| \cdot \cos\alpha = a_{x^1} \cdot |\vec{e}_1|,$$

де a_{x^1} – ортогональна проекція вектора $\vec{a}$ на вісь x^1,

$$a_{x^1}=\frac{a_1}{|\vec{e}_1|},\ a_{x^2}=\frac{a_2}{|\vec{e}_2|},\ a_{x^3}=\frac{a_3}{|\vec{e}_3|}.$$

Таким чином, числа a_1,a_2,a_3 визначають ортогональні проекції вектора $\vec{a}$ на координатні осі, а тому і сам вектор. Отже, їх також можна вважати координатами вектора $\vec{a}$. На відміну від a^1,a^2,a^3 їх називають **коваріантними** координатами.

Надалі будемо позначати контраваріантні координати вектора верхніми індексами, коваріантні – нижніми.

Таким чином, вектор $\vec{a}$ у косокутній системі координат визначається своїми контраваріантними a^i $(i=1,2,3)$ або коваріантними a_i $(i=1,2,3)$ координатами:

$$\vec{a}=a^i\vec{e}_i,\ a_i=\vec{a}\cdot\vec{e}_i.$$

Виявляється, що при переході до іншого базису закони перетворення ко- і контраваріантних координат є різними. Розглянемо перетворення базисних векторів

$$\vec{e}_i'=\alpha_i^{\ k}\vec{e}_k, \tag{7.1}$$

що задається деякою матрицею переходу $A=\left\|\alpha_i^{\ k}\right\|$, $\det A\neq 0$, для якого існує обернене перетворення. Оберненому перетворенню відповідає обернена матриця переходу

$$A^{-1}=B=\left\|\beta_i^{\ k}\right\|,\qquad \beta_i^{\ k}\alpha_k^{\ j}=\delta_i^{\ j}, \tag{7.2}$$

тому старий базис виражається через новий так:

$$\vec{e}_i=\beta_i^{\ k}\vec{e}_k'. \tag{7.3}$$

У новій системі координат коваріантні координати вектора $\vec{a}$ будуть

$$a_i'=\vec{a}\cdot\vec{e}_i'=\vec{a}\cdot\alpha_i^{\ k}\vec{e}_k=\alpha_i^{\ k}\vec{a}\cdot\vec{e}_k=\alpha_i^{\ k}a_k,$$

тобто коваріантні координати вектора перетворюються за таким самим законом, як і базисні вектори $\vec{e}_i$:

$$a_i'=\alpha_i^{\ k}a_k. \tag{7.4}$$

Звідси і походження назви – *коваріантні,* тобто такі, що "змінюються так само".

З іншого боку маємо

$$\vec{a} = a^i \vec{e}_i = a^i \beta_i^{\ k} \vec{e}'_k = a'^k \vec{e}'_k .$$

Отже, координати a^i змінюються протилежним чином, якщо порівнювати із законом перетворення базисних векторів, і перетворюються за допомогою транспонованої оберненої матриці:

$$a'^k = a^i \beta_i^{\ k} = \beta_i^{\ k} a^i , \tag{7.5}$$

а тому називаються *контраваріантними* координатами. На коваріантність або контраваріантність координат указує нижній або верхній індекс набору координат, відповідно.

Зауважимо, що раніше ми розглядали лише ортогональні перетворення $B = A^{-1} = A^T$, для яких перетворення коваріантних та контраваріантних векторів збігалися, а тепер **перетворення** координат векторів здійснюються **за законами** (7.4) і (7.5), в яких $B = A^{-1} \neq A^T$.

Формули

$$a'_i = \alpha_i^{\ k} a_k , \ a'^k = a^i \beta_i^{\ k}$$

задають закон, за яким перетворюються координати вектора при переході від однієї косокутної системи до іншої. Іншими словами, ці формули визначають трансформаційні властивості координат вектора.

Зв'язок між ко- та контраваріантними координатами. Набори координат a_i та a^i є різними представленнями одного і того самого вектора. Між цими представленнями існує певний зв'язок. Він є лінійним, однорідним і здійснюється за допомогою об'єкта другого рангу, який позначається g_{ij} і називається фундаментальним об'єктом або фундаментальною матрицею. Цей зв'язок випливає з означень відповідних координат

$$a_j = \vec{a} \cdot \vec{e}_j = a^i (\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j) = a^i g_{ij} ,$$

де

$$g_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j \tag{7.6}$$

– компоненти фундаментальної матриці.

Зупинимося на основних властивостях фундаментальної матриці:

1) $g_{ij} = g_{ji}$, тобто матриця симетрична;

2) $\det\|g_{ij}\| = g = \det(\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j) = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)^2 \neq 0$,

$$(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = \sqrt{g}\,, \qquad (7.7)$$

величину $\sqrt{g}$ вважають псевдоскаляром, приписуючи їй певний знак відповідно до формули (7.7);

3) існує обернена матриця g^{ij}: $g^{ik}g_{kj} = \delta^i{}_j$, $g_{ij}g^{jk} = \delta_i^{\ k}$, $\det\|g^{ij}\| = 1/g$;

4) $a_i = g_{ij}a^j$, $a^i = g^{ij}a_j$, тобто за допомогою фундаментальної матриці та оберненої до неї можна опускати та піднімати індекси ("жонглювати індексами").

Скалярний добуток векторів. У косокутних координатах скалярний добуток можна подати через координати будь-якого типу:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a^i\vec{e}_i \cdot b^j\vec{e}_j = g_{ij}a^ib^j = a_jb^j = g^{ji}a_jb_i = a^ib_i\,. \qquad (7.8)$$

У § 3 буде показано, що компоненти фундаментальної матриці утворюють тензор. Його називають **метричним тензором**, оскільки *він задає спосіб обчислення відстані між точками простору*. Якщо координати точок x^i та $x^i + dx^i$, то квадрат відстані між ними

$$ds^2 = g_{ij}dx^idx^j\,.$$

§ 2. Векторний і мішаний добутки векторів, взаємний базис

Запишемо добутки спочатку через коваріантні координати векторів. Скористаємося тотожністю (1.20) про два мішані добутки.

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = \begin{vmatrix} \vec{a}\cdot\vec{e}_1 & \vec{a}\cdot\vec{e}_2 & \vec{a}\cdot\vec{e}_3 \\ \vec{b}\cdot\vec{e}_1 & \vec{b}\cdot\vec{e}_2 & \vec{b}\cdot\vec{e}_3 \\ \vec{c}\cdot\vec{e}_1 & \vec{c}\cdot\vec{e}_2 & \vec{c}\cdot\vec{e}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix},$$

де $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ – базисні вектори, задані відносно деякої косокутної системи координат. Звідси випливає, що

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \frac{1}{\sqrt{g}}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

або

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \frac{1}{\sqrt{g}} e^{ijk} a_i b_j c_k = \varepsilon^{ijk} a_i b_j c_k\,, \tag{7.9}$$

де величину $\sqrt{g}$ визначено формулою (7.7) і введено позначення $e^{ijk}\big/\sqrt{g} = \varepsilon^{ijk}$. Оскільки $(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = [\vec{a}\times\vec{b}]^k c_k$, маємо

$$[\vec{a}\times\vec{b}]^k = \frac{1}{\sqrt{g}} e^{ijk} a_i b_j\,, \tag{7.10}$$

$$\vec{a}\times\vec{b} = \frac{1}{\sqrt{g}} e^{ijk} a_i b_j \vec{e}_k\,. \tag{7.11}$$

Якщо $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ – вектори основного базису, то виходячи зі співвідношення

$$\vec{e}^{\,i}\cdot\vec{e}_j = \delta^i{}_j\,, \tag{7.12}$$

можна означити інший базис $\{\vec{e}^{\,1},\vec{e}^{\,2},\vec{e}^{\,3}\}$, у розкладі за яким довільний вектор задається своїми коваріантними координатами.

Із тотожності (1.20) та співвідношення (7.12), знаходимо $(\vec{e}^{\,1},\vec{e}^{\,2},\vec{e}^{\,3})(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3) = 1$, тобто

$$(\vec{e}^{\,1},\vec{e}^{\,2},\vec{e}^{\,3}) = \frac{1}{(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)} = \frac{1}{\sqrt{g}}\,. \tag{7.13}$$

Співвідношення (7.12) містить 9 рівнянь для знаходження координат трьох векторів $\{\vec{e}^{\,1},\vec{e}^{\,2},\vec{e}^{\,3}\}$, зокрема, для знаходження $\vec{e}^{\,1}$ є три рівняння: $\vec{e}^{\,1}\cdot\vec{e}_1 = 1$, $\vec{e}^{\,1}\cdot\vec{e}_2 = 0$, $\vec{e}^{\,1}\cdot\vec{e}_3 = 0$. Причому із двох останніх випливає, що $\vec{e}^{\,1}$ треба шукати у вигляді: $\vec{e}^{\,1} = \alpha_1(\vec{e}_2\times\vec{e}_3)$, де α_1 – константа, яку знаходимо з першого рівняння: $\vec{e}^{\,1}\cdot\vec{e}_1 = \alpha_1(\vec{e}_2\times\vec{e}_3)\cdot\vec{e}_1 = 1$. Отже, $\alpha_1 = (\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)^{-1}$. Усі вектори взаємного базису виражають подібним чином через відповідні векторні та мішані добутки векторів основного базису:

$$\vec{e}^1 = \frac{\vec{e}_2 \times \vec{e}_3}{(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)}, \quad \vec{e}^2 = \frac{\vec{e}_3 \times \vec{e}_1}{(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)}, \quad \vec{e}^3 = \frac{\vec{e}_1 \times \vec{e}_2}{(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)}. \tag{7.14}$$

Вектори $\vec{e}^1, \vec{e}^2, \vec{e}^3$ утворюють так званий взаємний (або спряжений, або дуальний) базис. Аналогічно вектори основного базису виражають через добутки векторів взаємного базису:

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{e}^2 \times \vec{e}^3}{(\vec{e}^1, \vec{e}^2, \vec{e}^3)}, \quad \vec{e}_2 = \frac{\vec{e}^3 \times \vec{e}^1}{(\vec{e}^1, \vec{e}^2, \vec{e}^3)}, \quad \vec{e}_3 = \frac{\vec{e}^1 \times \vec{e}^2}{(\vec{e}^1, \vec{e}^2, \vec{e}^3)}. \tag{7.15}$$

Отже, взаємним відносно взаємного базису є основний базис. Із співвідношення $\vec{e}^i \cdot \vec{e}_j = \delta^i{}_j$ видно, що кожен вектор одного базису є перпендикулярним до двох векторів іншого базису, а із третім, індекс якого має те саме числове значення, утворює гострий кут. Наприклад, вектор $\vec{e}^1$ – ортогональний до $\vec{e}_2$ та $\vec{e}_3$, а скалярний добуток $\vec{e}^1 \cdot \vec{e}_1 = |\vec{e}^1| \cdot |\vec{e}_1| \cdot \cos(\vec{e}^1, \vec{e}_1) = 1$, звідки випливає, що кут між $\vec{e}^1$ та $\vec{e}_1$ – гострий.

Аналогічно знаходять вирази для мішаного та векторного добутків через контраваріантні координати векторів:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \sqrt{g} \begin{vmatrix} a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \\ c^1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = \sqrt{g} e_{ijk} a^i b^j c^k = \varepsilon_{ijk} a^i b^j c^k, \tag{7.16}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \sqrt{g} e_{ijk} a^i b^j \vec{e}^k. \tag{7.17}$$

Величини

$$\varepsilon^{ijk} = \frac{1}{\sqrt{g}} e^{ijk}, \ \varepsilon_{ijk} = \sqrt{g} e_{ijk}$$

утворюють тензор, а точніше, псевдотензор третього рангу, який називають **тензором Леві-Чівіта**.

Довільний вектор $\vec{a}$ можна представити у вигляді розкладання двома способами

$$\vec{a} = a^i \vec{e}_i = a_j g^{ji} \vec{e}_i = a_j \vec{e}^j,$$

тобто вектор можна розкласти як за векторами основного базису $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ – тоді координати розкладання є контраваріантними, так і за векторами взаємного базису $\{\vec{e}^1, \vec{e}^2, \vec{e}^3\}$ – із коваріантними координатами. При цьому коваріантні та контраваріантні координати вектора $\vec{a}$ визначаються як скалярні добутки вектора $\vec{a}$ на базисні вектори $\vec{e}_i$ та $\vec{e}^i$, відповідно,

$$a_i = \vec{a} \cdot \vec{e}_i, \qquad a^i = \vec{a} \cdot \vec{e}^i .$$

Це виправдовує назву базису $\{\vec{e}^1, \vec{e}^2, \vec{e}^3\}$ як взаємного відносно $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$.

Звичайно основний та взаємний базиси використовують паралельно. Прикладом використання апарату основного та взаємного базисів фактично є вектори основних трансляцій кристалічної ґратки (основний базис) та вектори оберненої ґратки (взаємний базис) у теорії твердого тіла. Радіус-вектор $\vec{r}$ зручно розкладати за векторами трансляцій, а хвильові вектори $\vec{k}$ – за векторами оберненої ґратки, тоді їх скалярний добуток має простий вигляд: $\vec{k} \cdot \vec{r} = k_i x^i$. Взаємний базис не збігається з основним не тільки для косокутного базису, але й у випадках, коли ортогональні базисні вектори не є одиничними.

§ 3. Тензори у косокутній системі координат

Як і вектори, тензори у косокутній системі координат можна задавати або коваріантними, або контраваріантними компонентами за кожним із індексів. Відповідно одержуємо різні типи компонент для одного тензора, наприклад, $t_{ij}, t^{ij}, t_i{}^j, t^i{}_j$. Про сукупності компонент тензора із певним набором верхніх та нижніх індексів говорять, що вони утворюють тензор певної будови. Так компоненти t_{ij} утворюють двічі коваріантний тензор, t^{ij} – двічі контраваріантний тензор, $t_i{}^j$ – один раз коваріантний і один раз контраваріантний тензор.

Розглянемо лінійний оператор $\hat{t}$ і відповідний тензор

$$\vec{y} = \hat{t}\,\vec{x} .$$

Перейдемо у цьому співвідношенні до координат. Кожен із векторів можна задати двома наборами координат:

$$\vec{x} = x_j \vec{e}^{\,j} = x^j \vec{e}_j \,;$$

$$\vec{y} = y_i \vec{e}^{\,i} = y^i \vec{e}_i \,.$$

Тензор другого рангу має два індекси, кожен із яких може бути нижнім або верхнім. Відповідно у косокутній системі координат отримуємо чотири набори координат тензора і чотири варіанти відповідних співвідношень:

$$t_{ij} = \vec{e}_i \,\hat{t}\, \vec{e}_j, \quad y_i = t_{ij} x^j, \quad \hat{t} = t_{ij} \vec{e}^{\,i} \otimes \vec{e}^{\,j},$$

$$t_i^{\ j} = \vec{e}_i \,\hat{t}\, \vec{e}^{\,j}, \quad y_i = t_i^{\ j} x_j, \quad \hat{t} = t_i^{\ j} \vec{e}^{\,i} \otimes \vec{e}_j,$$

$$t^i_{\ j} = \vec{e}^{\,i} \,\hat{t}\, \vec{e}_j, \quad y^i = t^i_{\ j} x^j, \quad \hat{t} = t^i_{\ j} \vec{e}_i \otimes \vec{e}^{\,j},$$

$$t^{ij} = \vec{e}^{\,i} \,\hat{t}\, \vec{e}^{\,j}, \quad y^i = t^{ij} x_j, \quad \hat{t} = t^{ij} \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \,.$$

Індекси можна опускати і піднімати за допомогою фундаментальної матриці та оберненої до неї, наприклад, $t_i^{\ k} = t_{ij} g^{jk}$.

Закон перетворення компонент тензора. Спочатку знайдемо закон перетворення векторів взаємного базису. Скористаємося законом перетворення контраваріантних координат (7.5) довільного вектора $\vec{a}$ та виразами для координат через відповідні скалярні добутки $a'^k = \vec{a} \cdot \vec{e}'^k$, $a^i = \vec{a} \cdot \vec{e}^{\,i}$:

$$a'^k = \vec{a} \cdot \vec{e}'^k = a^i \beta_i^{\ k} = \vec{a} \cdot \vec{e}^{\,i} \beta_i^{\ k} \,.$$

Оскільки вектор $\vec{a}$ довільний, звідси випливає рівність

$$\vec{e}'^k = \vec{e}^{\,i} \beta_i^{\ k} \,.$$

Тепер, знаючи закони перетворення базисних векторів

$$\vec{e}'_i = \alpha_i^{\ l} \vec{e}_l, \quad \vec{e}'^j = \vec{e}^{\,n} \beta_n^{\ j}, \tag{7.18}$$

можемо знайти і закон перетворення компонент тензора другого рангу. Наприклад, для один раз коваріантного та один раз контраваріантного тензора

$$t'^{\ j}_i = \vec{e}'_i \,\hat{t}\, \vec{e}'^j = \alpha_i^{\ l} \vec{e}_l \,\hat{t}\, \vec{e}^{\,n} \beta_n^{\ j} = \alpha_i^{\ l} \beta_n^{\ j} \vec{e}_l \,\hat{t}\, \vec{e}^{\,n} = \alpha_i^{\ l} \beta_n^{\ j} t_l^{\ n} \,. \tag{7.19}$$

За коваріантними індексами тензор перетворюється за допомогою матриці $A = \left\| \alpha_i^{\ k} \right\|$, за контраваріантними – $A^{-1} = \left\| \beta_i^{\ k} \right\|$.

Формулу (7.19) та аналогічні їй вирази для тензорів будь-якого рангу в координатному підході вважають означенням тензора. Такі тензори називають **афінними тензорами**.

Можна довести, що компоненти фундаментальної матриці g_{ij} та оберненої до неї матриці g^{ij} утворюють тензори, а піднімання або опускання одного з індексів перетворює їх на одиничний тензор: $g_{ij} g^{jk} = \delta_i^{\ k} = \delta_i^k$. Скориставшись означенням (7.6) та законом перетворення базисних векторів (7.1), маємо

$$g'_{ij} = \vec{e}'_i \cdot \vec{e}'_j = \alpha_i^{\ l} \vec{e}_l \cdot \alpha_j^{\ k} \vec{e}_k = \alpha_i^{\ l} \alpha_j^{\ k} \left(\vec{e}_l \cdot \vec{e}_k \right) = \alpha_i^{\ l} \alpha_j^{\ k} g_{lk} \quad (7.20)$$

– закон перетворення компонент двічі коваріантного тензора. Аналогічно для компонент оберненої матриці $g'^{ij} = \vec{e}'^i \cdot \vec{e}'^j = \beta_l^{\ i} \beta_k^{\ j} g^{lk}$ отримуємо закон перетворення компонент двічі контраваріантного тензора.

Дії над афінними тензорами аналогічні діям над тензорами, заданими в ортогональній системі координат. Природно, що лінійні операції можна здійснювати лише над тензорами однакової будови, згортати – за парою індексів, один із яких нижній, інший – верхній. Згортка за парою індексів, що складається із двох нижніх або із двох верхніх індексів, не є тензорною операцією, оскільки внаслідок такої дії утворюється новий геометричний об'єкт, який не є тензором.

Контрольні запитання

1. Якими координатами можна задавати вектор у косокутній системі координат?

2. Запишіть закон перетворення коваріантних та контраваріантних координат вектора.

3. Що таке фундаментальна матриця та обернена до неї?

4. Що визначає метричний тензор?

5. Як обчислюється векторний і мішаний добутки у косокутній системі координат?

6. У якому співвідношенні з основним базисом перебуває взаємний базис?

7. Якими наборами компонент можна задати тензор другого рангу у косокутній системі координат?

Розділ 8
Криволінійні системи координат

§ 1. Елементи криволінійних систем координат

Використання замість декартових координат інших систем координат, природно зв'язаних із розглядуваною задачею, спрощує розв'язок багатьох фізичних задач. Наприклад, для задач із аксіальною симетрією зручно користуватися циліндричною системою координат, для задач із центральною симетрією – сферичною системою координат.

Система криволінійних координат ставить у відповідність кожній точці простору $\vec{r}$ упорядковану трійку дійсних чисел q^1, q^2, q^3. Криволінійні координати q^1, q^2, q^3 точки зв'язані з її декартовими координатами співвідношеннями:

$$x = x(q^1, q^2, q^3), \quad y = y(q^1, q^2, q^3), \quad z = z(q^1, q^2, q^3), \tag{8.1}$$

або векторним співвідношенням

$$\vec{r} = \vec{r}(q^1, q^2, q^3), \tag{8.2}$$

де функції (8.1) усюди однозначні та неперервно диференційовні, причому якобіан переходу $I = \dfrac{\partial(x, y, z)}{\partial(q^1, q^2, q^3)} \neq 0$, тобто існують і обернені формули $q^i = q^i\left(x, y, z\right)$. Іншими словами, між декартовими координатами x, y, z і криволінійними координатами q^1, q^2, q^3 існує взаємно однозначна відповідність.

Візьмемо довільну точку $M(q_0^1, q_0^2, q_0^3)$ на рис. 8.1, зафіксуємо q^2, q^3 і змінюватимемо q^1. Тоді радіус-вектор $\vec{r} = \vec{r}(q^1, q_0^2, q_0^3)$ опише координатну лінію q^1 або q^1-координатну лінію. Аналогічно отримуємо q^2- і q^3-координатні лінії, і таким чином через кожну точку можна провести три різні координатні лінії. Різні q^1-координатні лінії (тобто такі, що відповідають різним значенням q^1) між собою не перетинаються. Аналогічне твердження має місце для q^2-, q^3-координатних ліній.

Якщо надамо приріст радіус-вектору $\vec{r} = \vec{r}(q^1, q^2, q^3)$ уздовж q^1-координатної лінії Δq^1, то величина

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial q^1} = \lim_{\Delta q^1 \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta q^1}$$

є вектором, дотичним до q^1-координатної лінії.

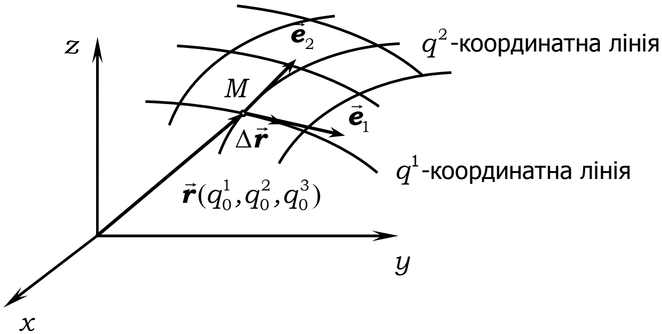

Рис. 8.1 до визначення координатних ліній

Таким чином, у кожній точці простору можна побудувати трійку векторів $\frac{\partial \vec{r}}{\partial q^i} = \vec{e}_i$. Оскільки вони некомпланарні, $\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q^1}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^2}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^3}\right) = I \neq 0$, то їх можна прийняти за вектори базису. Цей базис змінюватиметься від точки до точки, тому його називають **локальним**. Тобто одержуємо **поле базисів** або поле реперів (французькою мовою repère значить мітка, зарубка, орієнтир). Нумерація координат звичайно вибирається так, щоб базисні вектори $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ утворювали праву трійку векторів.

Таким чином, у кожній точці простору, що задається радіус-вектором $\vec{r} = \vec{r}(q^1, q^2, q^3)$, існує пов'язаний із криволінійною системою координат базис, який називають **основним локальним базисом**, вектори якого

$$\vec{e}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^i} \quad (i = 1, 2, 3) \tag{8.3}$$

є дотичними до q^i-координатних ліній, що проходять через точку $\vec{r} = \vec{r}(q^1, q^2, q^3)$. Напрямок вектора основного локального базису відповідає напрямку зростання відповідної координати. Підкреслимо, що криволінійна система координат локально подібна до косокутної системи. У загальному випадку базисні вектори $\vec{e}_i$ розташовані один відносно іншого під довільними кутами і їх довжини можуть відрізнятися від одиниці. Тому g_{ij}, g^{ij}, $\vec{e}^i$ визначаються так само, як у косокутній системі координат, але тепер це – функції координат.

Візьмемо довільну точку $M(q_0^1, q_0^2, q_0^3)$ на рис. 8.2. Зафіксуємо q^3 і змінюватимемо q^1, q^2. Тоді радіус-вектор $\vec{r} = \vec{r}(q^1, q^2, q_0^3)$ опише координатну поверхню. Тобто умова $q^i = \mathrm{const}$ визначає q^i-координатну поверхню. Координатні поверхні, що відповідають різним значенням однієї і тієї самої координати q^i, не перетинаються. Дві координатні поверхні, що відповідають різним координатам q^i, q^j, перетинаються по координатній лінії, яка відповідає третій координаті q^k. Тобто, розв'язавши систему двох рівнянь $q^i = \mathrm{const}$, $q^j = \mathrm{const}$, знайдемо рівняння для q^k-координатної лінії.

У розд. 1 векторну функцію точки $\vec{A}(\vec{r})$ розкладено за базисом декартової системи координат. Модуль і напрямок кожного вектора такого базису були однаковими у кожній точці простору. Якщо векторна функція $\vec{a}(\vec{r})$ описується у криволінійних координатах q^1, q^2, q^3, то зручніше використовувати основний локальний базис $\{\vec{e}_i\}$ (8.3) або взаємний базис $\{\vec{e}^i\}$. Вектори $\vec{e}^i$ визначаються так само, як у косокутній системі координат, наприклад, $\vec{e}^1 = \dfrac{\vec{e}_2 \times \vec{e}_3}{(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)} = \dfrac{1}{\sqrt{g}}(\vec{e}_2 \times \vec{e}_3)$, але тепер вони є векторними функціями координат $\vec{e}^i(q^1, q^2, q^3)$ і напрямлені перпендикулярно до відповідних координатних поверхонь $q^i = \text{const}$.

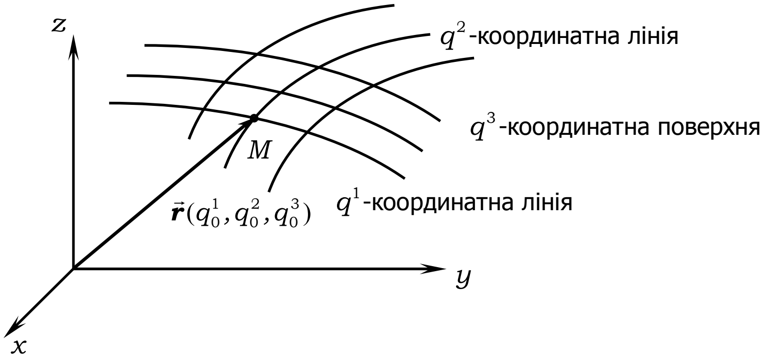

Рис. 8.2. Сітка координатних ліній на q^3-координатній поверхні

Довільну векторну функцію $\vec{a}(\vec{r})$ можна однозначно представити через вектори основного локального базису контраваріантними координатами $\{a^i\}$:

$$\vec{a} = a^i \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^i} = a^i \vec{e}_i ,$$

або коваріантними координатами $\{a_j\}$:

$$a_j = \vec{a} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^i} = \vec{a} \cdot \vec{e}_j ,$$

через вектори взаємного базису: $\vec{a} = a_j \vec{e}^{\,j}$.

Як і в косокутній системі координат, зв'язок між коваріантними та контраваріантними координатами у розглядуваній точці здійснюється за допомогою метричного тензора

$$a_j = \vec{a} \cdot \vec{e}_j = a^i (\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j) = a^i g_{ij} ,$$

але величини

$$g_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j$$

є функціями точки, тобто залежать від q^1, q^2, q^3, і задають поле метричного тензора. Метричний тензор визначає відстань між нескінченно близькими точками $\vec{r}$ та $\vec{r} + d\vec{r}$:

$$ds^2 = \left(d\vec{r}\right)^2 = (\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j)dq^i dq^j = g_{ij}(q^1, q^2, q^3)dq^i dq^j .$$

Визначник метричного тензора $g = \det\left\|g_{ij}\right\|$ виражається через якобіан переходу

$$I = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(q^1, q^2, q^3)}:$$

$$g = \det\left\|g_{ij}\right\| = \det\left\|\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j\right\| = \left(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\right)^2 = I^2 \neq 0 . \ \sqrt{g} = I .$$

Елементи довжини дуги, площі та об'єму у криволінійній системі координат. При обчисленні криволінійних інтегралів: а) $\int\limits_C \vec{A} \cdot \vec{\tau} dl$, де C – ділянка координатної лінії; б) поверхневих – $\int\limits_S \vec{A} \cdot \vec{n} dS$, де S – область на координатній поверхні; в) об'ємних – $\int\limits_V f dV$, де V – об'єм, обмежений координатною поверхнею, зручно користуватися відповідною криволінійною системою координат (рис. 8.3).

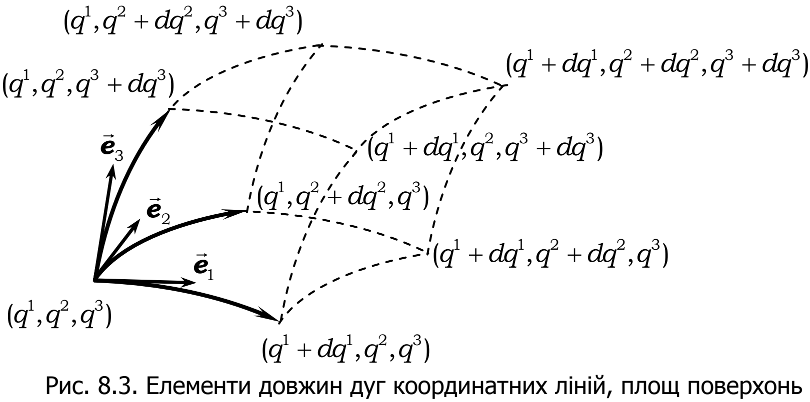

Рис. 8.3. Елементи довжин дуг координатних ліній, площ поверхонь та об'єму в системі криволінійних координат

Векторний елемент довжини дуги координатної лінії q^1 визначається формулою

$$d\vec{l}_1 = \left(\vec{\tau} dl\right)_1 = d\vec{r}\Big|_{q^2, q^3 = \text{const}} = \vec{e}_1 dq^1 = (d\vec{l}\,)_1 .$$

Аналогічні формули мають місце для елементів довжин дуг інших координатних ліній $d\vec{l}_2 = \vec{e}_2 dq^2$, $d\vec{l}_3 = \vec{e}_3 dq^3$.

Векторний елемент площі на q^3-координатній поверхні визначається формулою

$$(d\vec{S})_3 = d\vec{l}_1 \times d\vec{l}_2 = \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 dq^1 dq^2 = \sqrt{g}\,\vec{e}^{\,3} dq^1 dq^2 .$$

Аналогічні вирази мають місце для елементів площ інших координатних поверхонь:

$$(d\vec{S})_2 = d\vec{l}_3 \times d\vec{l}_1 = \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 dq^3 dq^1 = \sqrt{g}\,\vec{e}^{\,2} dq^1 dq^3 ,$$

$$(d\vec{S})_1 = d\vec{l}_2 \times d\vec{l}_3 = \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 dq^2 dq^3 = \sqrt{g}\,\vec{e}^{\,1} dq^2 dq^3 .$$

Шість координатних поверхонь, що відповідають точкам (q^1, q^2, q^3) та $(q^1 + dq^1, q^2 + dq^2, q^3 + dq^3)$, обмежують елемент об'єму (паралелепіпед) $dV = (d\vec{l}_1, d\vec{l}_2, d\vec{l}_3)$:

$$dV = \left(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\right) dq^1 dq^2 dq^3 = \sqrt{g}\, dq^1 dq^2 dq^3 .$$

Відносна простота отриманих виразів для елементів довжин дуг, площі поверхні та об'єму робить доцільним уведення відповідних систем криволінійних координат для обчислень.

Довільне векторне співвідношення, подане в декартовій системі координат, можна записати у криволінійних координатах, але слід пам'ятати, що базисні вектори у системі криволінійних координат є функціями точки.

§ 2. Ортогональні криволінійні системи координат

Криволінійні координати називаються ортогональними, якщо в довільній точці три координатні лінії, що проходять через цю точку, мають дотичні, що ортогональні між собою. Іншими словами, криволінійні системи координат, для яких вектори локального базису ортогональні ($\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = 0$, якщо $i \neq j$) у будь-якій точці простору, називаються **ортогональними криволінійними системами координат**. Відповідно фундаментальна матриця та обернена до неї мають діагональний вигляд

$$\left\| g_{ij} \right\| = \begin{vmatrix} g_{11} & 0 & 0 \\ 0 & g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & g_{33} \end{vmatrix}, \qquad \left\| g^{ij} \right\| = \begin{vmatrix} 1/g_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 1/g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1/g_{33} \end{vmatrix}.$$

Означимо параметри Ламе $H_\alpha \ (\alpha = 1,2,3)$ як довжини відповідних векторів локального основного базису:

$$H_\alpha = \left| \vec{e}_\alpha \right| = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^\alpha} \right| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q^\alpha} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q^\alpha} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q^\alpha} \right)^2} . \tag{8.4}$$

Вони характеризують у кожній точці простору зміну довжини координатної лінії $d\vec{l}_\alpha = (d\vec{l}\,)_\alpha$ залежно від зміни dq^α відповідної криволінійної координати q^α.

Тоді $g_{11} = H_1^2$, $g^{11} = H_1^{-2}$, і аналогічно записується для інших діагональних елементів фундаментальної матриці. Характерною рисою ортогонального базису є те, що вектори локального та взаємного базисів мають однакові напрямки, але відрізняються за довжиною та фізичною розмірністю (оскільки декартові координати x^i та криволінійні q^j можуть мати різну розмірність). Дійсно, наприклад, $\left| \vec{e}_1 \right| = H_1$, але $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}^{\,1} = 1$, тому $\vec{e}^{\,1}$ має довжину $\left| \vec{e}^{\,1} \right| = 1 / H_1$. Унаслідок цього й розмірність компонент одного і того самого вектора, розкладеного за векторами основного і взаємного базисів, може бути різною, що створює незручності при розв'язуванні фізичних задач. Тому вводять локальний базис із одиничних векторів $\vec{e}_{(\alpha)}$, $\vec{e}_{(\alpha)} \cdot \vec{e}_{(\beta)} = \delta_{\alpha\beta}$ (будемо їх позначати нижніми індексами, взятими у круглі дужки), так званий "фізичний" базис. Зв'язок між векторами локального та взаємного базисів та ортами фізичного базису має вигляд

$$\vec{e}_\alpha = H_\alpha \vec{e}_{(\alpha)}, \ \alpha = 1,2,3, \tag{8.5}$$

$$\vec{e}^{\,\alpha} = \frac{\vec{e}_{(\alpha)}}{H_\alpha}, \ \alpha = 1,2,3 \tag{8.6}$$

(знак суми за індексами, що повторюються, відсутній, оскільки індекси позначені грецькими літерами).

На практиці, у прикладних фізичних задачах використовують й інші позначення для векторів фізичного базису. Замість індексу у вигляді цифри, узятої у круглі дужки, використовують літеру, що позначає відповідну криволінійну координату. Наприклад, $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$, $\vec{e}_\varphi$ – відповідно орти фізичного базису $\vec{e}_{(1)}, \vec{e}_{(2)}, \vec{e}_{(3)}$ у сферичній системі координат.

Розкладання довільного вектора $\vec{A}$ за ортами $\vec{e}_{(\alpha)}$ набуває вигляду

$$\vec{A} = A_{(1)}\vec{e}_{(1)} + A_{(2)}\vec{e}_{(2)} + A_{(3)}\vec{e}_{(3)} = A_{(i)}\vec{e}_{(i)}, \tag{8.7}$$

де "фізичні" компоненти вектора $A_{(i)}$ тепер мають однакову розмірність, що збігається з розмірністю векторної величини $\vec{A}$, і зв'язані з коваріантними та контраваріантними координатами співвідношеннями

$$A_{(\alpha)} = \frac{A_\alpha}{H_\alpha}, \tag{8.8}$$

$$A_{(\alpha)} = A^\alpha H_\alpha. \tag{8.9}$$

Перетворення, що здійснює перехід від декартової системи координат до ортонормованої криволінійної системи координат, є ортогональним, оскільки переводить ортонормований базис у ортонормований. Коефіцієнти розкладання одного базису за іншим є елементами ортогональної матриці переходу α_{ij}. Знаючи їх і компоненти вектора (або тензора) в одній системі координат, можна знайти компоненти цього геометричного об'єкта в іншій системі координат. Причому, зв'язок між компонентами векторів у різних системах координат буде такий самий, як і між ортами, тобто за допомогою тієї ж матриці переходу. Наприклад, якщо ми знайшли розклад для орта сферичної системи координат за ортами декартової системи координат:

$$\vec{e}_r = \vec{e}_x \sin\theta\cos\varphi + \vec{e}_y \sin\theta\sin\varphi + \vec{e}_z \cos\theta,$$

то аналогічний зв'язок існуватиме й між компонентами векторів (коефіцієнти розкладання ті самі):

$$A_r = A_x \sin\theta\cos\varphi + A_y \sin\theta\sin\varphi + A_z \cos\theta.$$

Диференціал радіус-вектора

$$d\vec{r} = H_1 dq^1 \vec{e}_{(1)} + H_2 dq^2 \vec{e}_{(2)} + H_3 dq^3 \vec{e}_{(3)} \tag{8.10}$$

визначає відстань між нескінченно близькими точками $\vec{r}$ та $\vec{r} + d\vec{r}$ у фізичному базисі:

$$(d\vec{r})^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r} = H_1^2 (dq^1)^2 + H_2^2 (dq^2)^2 + H_3^2 (dq^3)^2 . \tag{8.11}$$

Векторний елемент довжини дуги координатної лінії q^1 визначається формулою

$$d\vec{l}_1 = \left(\vec{\tau} dl\right)_1 = d\vec{r}\big|_{q^2, q^3 = \mathrm{const}} = \vec{e}_1 dq^1 = H_1 dq^1 \vec{e}_{(1)} . \tag{8.12}$$

Аналогічні вирази мають місце для елементів довжин дуг інших координатних ліній:

$$d\vec{l}_2 = H_2 dq^2 \vec{e}_{(2)} , \; d\vec{l}_3 = H_3 dq^3 \vec{e}_{(3)} .$$

Векторний елемент площі q^3-координатної поверхні визначається формулою

$$(d\vec{S})_3 = d\vec{l}_1 \times d\vec{l}_2 = H_1 H_2 dq^1 dq^2 \vec{e}_{(3)} . \tag{8.13}$$

Аналогічні вирази мають місце для елементів площ інших координатних поверхонь:

$$(d\vec{S})_2 = d\vec{l}_3 \times d\vec{l}_1 = H_1 H_3 dq^1 dq^3 \vec{e}_{(2)} ,$$

$$(d\vec{S})_1 = d\vec{l}_2 \times d\vec{l}_3 = H_2 H_3 dq^2 dq^3 \vec{e}_{(1)} .$$

Шість координатних поверхонь, що відповідають точкам (q^1, q^2, q^3) та $(q^1 + dq^1, q^2 + dq^2, q^3 + dq^3)$, обмежують елемент об'єму (паралелепіпед) $dV = (d\vec{l}_1, d\vec{l}_2, d\vec{l}_3)$:

$$dV = H_1 H_2 H_3 dq^1 dq^2 dq^3 , \tag{8.14}$$

тобто якобіан переходу від декартових до криволінійних координат визначається добутком параметрів Ламе

$$I = H_1 H_2 H_3 . \tag{8.15}$$

Лінії векторного поля $\vec{A} = \sum\limits_{i=1}^{3} A_{(i)} \vec{e}_{(i)}$ у криволінійній системі координат із базисом $\{\vec{e}_{(1)}, \vec{e}_{(2)}, \vec{e}_{(3)}\}$ є розв'язками системи рівнянь

$$\frac{H_1 dq^1}{A_{(1)}} = \frac{H_2 dq^2}{A_{(2)}} = \frac{H_3 dq^3}{A_{(3)}}, \qquad (8.16)$$

що є наслідком умови паралельності малого елемента $d\vec{r}$ векторної лінії і вектора $\vec{A}(\vec{r})$, тобто $\vec{A}(\vec{r}) \times d\vec{r} = \vec{0}$.

Приклади криволінійних ортогональних систем координат. Циліндрична система координат (координати ρ, φ, z). Кожній точці простору, що задається радіус-вектором $\vec{r}$, ставиться у відповідність трійка чисел: ρ – відстань від точки до осі Oz; φ – кут, що утворює проекція радіус-вектора $\vec{r}$ у площині xOy із додатним напрямком осі Ox; z збігається з декартовою координатою z (рис. 8.4). Числа ρ, φ, z відіграють роль криволінійних координат q^1, q^2, q^3. Декартові координати x, y, z у циліндричній системі координат визначаються формулами

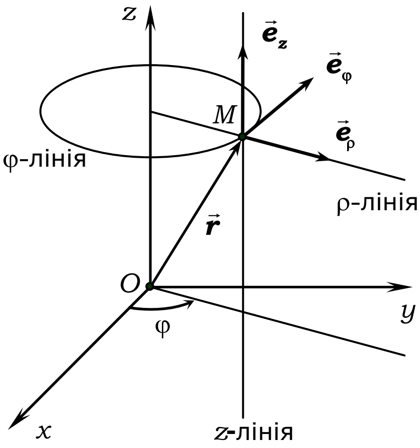

Рис. 8.4. Циліндрична система координат: координатні лінії та базисні вектори

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad z = z \qquad (8.17)$$

$$(0 \le \rho < \infty,\ 0 \le \varphi < 2\pi,\ -\infty < z < \infty).$$

Рівняння для координатної поверхні $\rho = \text{const}$ знайдемо із системи рівнянь (8.17), якщо виразимо змінну ρ через декартові координати і прирівняємо її до константи. Отримаємо $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \text{const}$, це рівняння циліндра. Аналогічно, $\text{tg}\,\varphi = y/x = \text{const}$ – півплощина, що утворює кут φ із площиною xOz і обмежена віссю Oz, $z = \text{const}$ – площина.

Через кожну точку проходять три координатні лінії, які можна розглядати як результат перетину відповідних координатних поверхонь: коло (φ-лінія, уздовж якої φ змінюється в межах від 0 до 2π, а ρ і z – фіксовані), півпряма (ρ-лінія, уздовж якої ρ змінюється в межах від 0 до $+\infty$, а φ і z – фіксовані), пряма (z-лінія, уздовж якої z змінюється в межах від $-\infty$ до $+\infty$, а φ і ρ – фіксовані).

Вектори локального базису можна знайти за допомогою розкладання радіус-вектора в декартовій системі координат:

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial\rho}=\frac{\partial x}{\partial\rho}\vec{e}_x+\frac{\partial y}{\partial\rho}\vec{e}_y+\frac{\partial z}{\partial\rho}\vec{e}_z=$$

$$=\frac{\partial(\rho\cos\varphi)}{\partial\rho}\vec{e}_x+\frac{\partial(\rho\sin\varphi)}{\partial\rho}\vec{e}_y+\frac{\partial z}{\partial\rho}\vec{e}_z=\cos\varphi\vec{e}_x+\sin\varphi\vec{e}_y,$$

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}=\frac{\partial x}{\partial\varphi}\vec{e}_x+\frac{\partial y}{\partial\varphi}\vec{e}_y+\frac{\partial z}{\partial\varphi}\vec{e}_z=$$

$$=\frac{\partial(\rho\cos\varphi)}{\partial\varphi}\vec{e}_x+\frac{\partial(\rho\sin\varphi)}{\partial\varphi}\vec{e}_y+\frac{\partial z}{\partial\varphi}\vec{e}_z=-\rho\sin\varphi\,\vec{e}_x+\rho\cos\varphi\,\vec{e}_y,$$

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial z}=\frac{\partial x}{\partial z}\vec{e}_x+\frac{\partial y}{\partial z}\vec{e}_y+\frac{\partial z}{\partial z}\vec{e}_z=\frac{\partial(\rho\cos\varphi)}{\partial z}\vec{e}_x+\frac{\partial(\rho\sin\varphi)}{\partial z}\vec{e}_y+\frac{\partial z}{\partial z}\vec{e}_z=\vec{e}_z.$$

Звідси знаходимо відповідні параметри Ламе (довжини векторів основного локального базису) $H_\rho=1$, $H_\varphi=\rho$, $H_z=1$ та зв'язок векторів фізичного ортонормованого базису $\vec{e}_\rho$, $\vec{e}_\varphi$, $\vec{e}_z$ та ортів $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$:

$$\vec{e}_\rho=\cos\varphi\,\vec{e}_x+\sin\varphi\,\vec{e}_y,$$

$$\vec{e}_\varphi=-\sin\varphi\,\vec{e}_x+\cos\varphi\,\vec{e}_y,$$

$$\vec{e}_z=\vec{e}_z.$$

Матриця переходу від декартового базису до циліндричного

$$A(\varphi)=\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi & 0\\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

збігається з матрицею повороту на кут φ навколо осі Oz. Стовпці цієї матриці задають коефіцієнти розкладання ортів ПДСК через орти циліндричної системи координат. Знаючи матрицю переходу, можна записати зв'язок компонент вектора $\vec{a}$ в цих базисах, наприклад:

$$a_x = a_\rho \cos\varphi - a_\varphi \sin\varphi\,,\ a_y = a_\rho \sin\varphi + a_\varphi \cos\varphi\,,\ a_z = a_z\,.$$

Цей зв'язок такий самий (коефіцієнти розкладання такі самі), як і для ортів відповідних базисів.

Вектори локального базису та параметри Ламе можна знайти іншим способом – геометрично, не користуючись декартовою системою координат. Для цього візьмемо довільну точку $M(\rho_0, \varphi_0, z_0)$ на рис. 8.4. Через точку M проходять три різні координатні лінії. Якщо зафіксуємо φ, z та змінюватимемо ρ, то радіус-вектор $\vec{r} = \vec{r}(\rho, \varphi_0, z_0)$ опише ρ-координатну лінію.

Якщо приріст радіус-вектора $\vec{r} = \vec{r}(\rho, \varphi, z)$ за ρ-координатною лінією дорівнює $\Delta\rho$, то величина

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} = \lim_{\Delta\rho\to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta\rho} = \lim_{\Delta\rho\to 0} \frac{\Delta\rho}{\Delta\rho}\frac{\vec{\rho}}{\rho} = \frac{\vec{\rho}}{\rho} = \vec{e}_\rho$$

є вектором, дотичним до ρ-координатної лінії, а його довжина $H_\rho = 1$.

Якщо зафіксуємо z, ρ та змінюватимемо φ, то радіус-вектор $\vec{r} = \vec{r}(\rho_0, \varphi, z_0)$ опише φ-координатну лінію, а величина

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = \lim_{\Delta\varphi\to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta\varphi} = \lim_{\Delta\varphi\to 0} \frac{\rho\Delta\varphi\vec{e}_\varphi}{\Delta\varphi} = \rho\vec{e}_\varphi$$

буде вектором, дотичним до φ-координатної лінії, а його довжина $H_\varphi = \rho$.

Орт циліндричної системи координат $\vec{e}_z$ збігається з ортом ПДСК $\vec{e}_z$.

Сферична система координат (координати r, θ, φ). Кожній точці простору, що задається радіус-вектором $\vec{r}$, ставиться у відповідність трійка чисел (r – відстань від точки до початку координат, θ – кут, що утворює радіус-вектор із додатним напрямком осі Oz, φ – кут, який утворює проекція радіус-вектора у площині xOy із додатним напрямком осі Ox) за формулами

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta \qquad (8.18)$$

$$(0 \le r < \infty,\ 0 \le \theta \le \pi,\ 0 \le \varphi < 2\pi).$$

Через кожну точку з координатами r, θ, φ проходять три координатні лінії (рис. 8.5): коло (φ-лінія, уздовж якої φ змінюється в межах від 0 до 2π, а r і θ – фіксовані), півпряма (r-лінія, вздовж якої r змінюється в межах від 0 до $+\infty$, а φ і θ – фіксовані), півколо (θ-лінія, уздовж якої θ змінюється в межах від 0 до π, а φ і r – фіксовані).

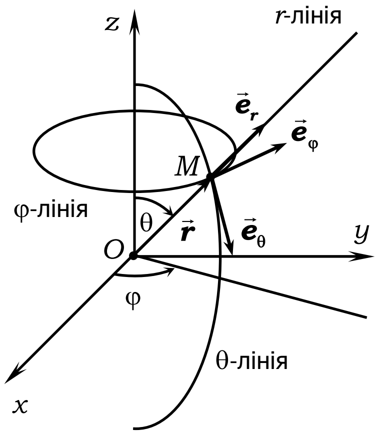

Рис. 8.5. Сферична система координат: координатні лінії та базисні вектори

У сферичній системі координат координатними поверхнями є

$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \mathrm{const}$ – сфера,

$\mathrm{tg}\,\theta = \sqrt{x^2 + y^2}\big/z = \mathrm{const}$ – конічна поверхня,

$\mathrm{tg}\,\varphi = y/x = \mathrm{const}$ – півплощина, що утворює кут φ із площиною xOz і обмежена віссю Oz.

Вектори локального базису можна знайти за допомогою розкладання радіус-вектора в декартовій системі координат:

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial r} = \frac{\partial x}{\partial r}\vec{e}_x + \frac{\partial y}{\partial r}\vec{e}_y + \frac{\partial z}{\partial r}\vec{e}_z = \sin\theta\cos\varphi\,\vec{e}_x + \sin\theta\sin\varphi\,\vec{e}_y + \cos\theta\,\vec{e}_z,$$

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial \theta} = \frac{\partial x}{\partial \theta}\vec{e}_x + \frac{\partial y}{\partial \theta}\vec{e}_y + \frac{\partial z}{\partial \theta}\vec{e}_z = r\cos\theta\cos\varphi\,\vec{e}_x + r\cos\theta\sin\varphi\,\vec{e}_y - r\sin\theta\,\vec{e}_z$$

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial \varphi} = \frac{\partial x}{\partial \varphi}\vec{e}_x + \frac{\partial y}{\partial \varphi}\vec{e}_y + \frac{\partial z}{\partial \varphi}\vec{e}_z = -r\sin\theta\sin\varphi\,\vec{e}_x + r\sin\theta\cos\varphi\,\vec{e}_y.$$

Звідси знаходимо відповідні параметри Ламе (довжини векторів основного базису): $H_r = 1$, $H_\theta = r$, $H_\varphi = r\sin\theta$ та зв'язок векторів фізичного ортонормованого базису $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$, $\vec{e}_\varphi$ та ортів $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$:

$$\vec{e}_r = \sin\theta\cos\varphi\,\vec{e}_x + \sin\theta\sin\varphi\,\vec{e}_y + \cos\theta\,\vec{e}_z,$$

$$\vec{e}_\theta = \cos\theta\cos\varphi\,\vec{e}_x + \cos\theta\sin\varphi\,\vec{e}_y - \sin\theta\,\vec{e}_z,$$

$$\vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\,\vec{e}_x + \cos\varphi\,\vec{e}_y,$$

який здійснюється за допомогою ортогональної матриці переходу від декартового базису до сферичного:

$$A(\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \end{pmatrix}.$$

Стовпці цієї матриці задають коефіцієнти розкладання ортів ПДСК через орти сферичної системи координат. Перехід від декартового базису до сферичного (рис. 8.5) здійснюється в результаті виконання трьох послідовних операцій: повороту на кут φ навколо осі Oz (перехід до циліндричної системи координат); повороту навколо осі, що задається ортом $\vec{e}_\varphi$, на кут $-\theta$ (перехід до системи координат, яка задається ортами $\vec{e}_\theta$, $\vec{e}_\varphi$, $\vec{e}_r$); циклічної перестановки осей (перехід від базису $\vec{e}_\theta$, $\vec{e}_\varphi$, $\vec{e}_r$ до базису $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$, $\vec{e}_\varphi$). Перемноживши відповідні матриці,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A(\theta,\varphi),$$

отримали матрицю переходу від декартового базису $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$ до сферичного $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi\}$. Знаючи матрицю переходу, можна записати зв'язок компонент вектора $\vec{a}$ в цих базисах, наприклад:

$$a_x = a_r\sin\theta\cos\varphi + a_\theta\cos\theta\cos\varphi - a_\varphi\sin\varphi,$$

$$a_y = a_r\sin\theta\sin\varphi + a_\theta\cos\theta\sin\varphi + a_\varphi\cos\varphi,$$

$$a_z = a_r\cos\theta - a_\theta\cos\theta.$$

Він такий самий (коефіцієнти розкладання такі самі), як і для ортів відповідних базисів.

Вектори основного локального базису та параметри Ламе можна знайти іншим способом – геометрично, не користуючись декартовою системою координат. Візьмемо довільну точку $M(r_0, \theta_0, \varphi_0)$ на рис. 8.5. Через точку M проходять три різні координатні лінії. Якщо зафіксуємо θ, φ та змінюватимемо r, то радіус-вектор $\vec{r} = \vec{r}(r, \theta_0, \varphi_0)$ опише r-координатну лінію.

Якщо приріст радіус-вектора $\vec{r} = \vec{r}(r, \theta, \varphi)$ за r-координатною лінією дорівнює Δr, то величина

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \lim_{\Delta r \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta r} = \lim_{\Delta r \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta r} \frac{\vec{r}}{r} = \frac{\vec{r}}{r} = \vec{e}_r$$

є вектором, дотичним до r-координатної лінії, а його довжина $H_r = 1$.

Якщо зафіксуємо r, θ та будемо змінювати φ, то радіус-вектор $\vec{r} = \vec{r}(r_0, \theta_0, \varphi)$ опише φ-координатну лінію, а величина

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = \lim_{\Delta \varphi \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta \varphi} = \lim_{\Delta \varphi \to 0} \frac{\rho \Delta \varphi \vec{e}_\varphi}{\Delta \varphi} = r \sin\theta \vec{e}_\varphi$$

буде вектором, дотичним до φ-координатної лінії, а його довжина $H_\varphi = r\sin\theta$.

Якщо зафіксуємо φ, r та будемо змінювати θ, то радіус-вектор $\vec{r} = \vec{r}(r_0, \theta, \varphi_0)$ опише θ-координатну лінію, а величина

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = \lim_{\Delta \theta \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta \theta} = \lim_{\Delta \varphi \to 0} \frac{r \Delta \theta \vec{e}_\theta}{\Delta \theta} = r \vec{e}_\theta$$

буде вектором, дотичним до θ-координатної лінії, а його довжина $H_\theta = r$.

Параболічна система координат (координати u, v, φ). Якщо у задачі зустрічаються разом r (сферичний радіус) та z, зручно користуватися параболічними координатами:

$$u = r + z\,,\; v = r - z\,,$$

$$\varphi = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} + 2\pi n, & n \in \mathbb{Z}, \quad \text{якщо } x \ge 0; \\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} + \pi(2n+1), & n \in \mathbb{Z}, \quad \text{якщо } x < 0. \end{cases}$$

Їх назва пов'язана із тим, що координатні поверхні $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ є параболоїдами обертання. У цьому можна переконатися, якщо піднести до квадрата вирази $u - z = r$ та $v + z = r$. У результаті отримаємо рівності

$$x^2 + y^2 = u^2 - 2uz\,,\; x^2 + y^2 = v^2 + 2vz\,,$$

які є рівняннями параболоїдів, якщо покласти $u = \text{const}$, $v = \text{const}$. Третьою координатною поверхнею є $\operatorname{tg}\varphi = y/x = \text{const}$ – півплощина, що утворює кут φ ($0 \le \varphi < 2\pi$) із площиною *xOz* і обмежена віссю *Oz*. Через кожну точку із координатами u, v, φ проходять три координатні лінії: коло (φ-лінія, уздовж якої φ змінюється в межах від 0 до 2π, а u і v – фіксовані) і дві півпараболи, утворені при перетині координатних поверхонь (півплощини і відповідного параболоїда).

Перехід до параболічної системи координат (u, v, φ) здійснюється за формулами

$$x = uv\cos\varphi, \quad y = uv\sin\varphi, \quad z = \frac{1}{2}(u^2 - v^2) \tag{8.19}$$

$$(0 \le u < \infty\,, 0 \le v < \infty\,,\; 0 \le \varphi < 2\pi).$$

Обчислюючи за формулами (8.4) параметри Ламе, отримуємо

$$H_u = H_v = \sqrt{u^2 + v^2}\,,\; H_\varphi = uv\,.$$

Запишемо базисні вектори

$$\vec{e}_u = \frac{1}{H_u}\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2}}\Big(v(\vec{e}_x\cos\varphi + \vec{e}_y\sin\varphi) + u\vec{e}_z\Big),$$

$$\vec{e}_v = \frac{1}{H_v}\frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2}}\Big(u(\vec{e}_x\cos\varphi + \vec{e}_y\sin\varphi) - v\vec{e}_z\Big),$$

$$\vec{e}_\varphi = \frac{1}{H_\varphi}\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = -\sin\varphi\,\vec{e}_x + \cos\varphi\,\vec{e}_y\,.$$

Зв'язок між декартовими компонентами вектора та параболічними такий самий, як між відповідними ортами:

$$a_x = \frac{v\cos\varphi}{\sqrt{u^2+v^2}}a_u + \frac{u\cos\varphi}{\sqrt{u^2+v^2}}a_v - \sin\varphi\, a_\varphi\,,$$

$$a_y = \frac{v\sin\varphi}{\sqrt{u^2+v^2}}a_u + \frac{u\sin\varphi}{\sqrt{u^2+v^2}}a_v + \cos\varphi\, a_\varphi\,,$$

$$a_z = \frac{ua_u - va_v}{\sqrt{u^2+v^2}}\,.$$

Приклад 1. Обчислити криволінійний інтеграл:

$$I = \oint\limits_C \frac{(x+y)\,dx - (x-y)\,dy}{x^2+y^2},$$

де C – коло $x^2 + y^2 = a^2$ (напрямок обходу – проти годинникової стрілки).

Розв'язання. Контур C збігається із координатною φ-лінією циліндричної системи координат. Представимо вихідний інтеграл I в інваріантній формі, враховуючи, що $xdy - ydx = \left[\vec{r}\times d\vec{l}\,\right]_z$ та $xdx + ydy = \vec{r}\cdot d\vec{l}$:

$$I = -\int\limits_C \frac{1}{\rho^2}\left[\vec{r}\times d\vec{l}\,\right]_z + \int\limits_C \frac{\vec{r}\cdot d\vec{l}}{a^2}.$$

Оскільки на контурі C $d\vec{l} = a\vec{e}_\varphi d\varphi$, $\vec{r} = a\vec{e}_\rho$, то

$$I = -\int\limits_0^{2\pi}\left(\vec{e}_\rho\times\vec{e}_\varphi\right)\cdot\vec{e}_z d\varphi = -2\pi.$$

Приклад 2. Знайти потік векторного поля $\vec{A} = e\vec{r}/r^3$ через верхню половину сфери $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z \ge 0$, $e = \text{const}$.

Розв'язання. Для задачі найбільш природними є сферичні координати r, θ та φ. На поверхні сфери радіуса a векторний елемент поверхні $d\vec{S} = a^2\sin\theta d\theta d\varphi\vec{e}_r$, $\vec{A} = \dfrac{e}{a^2}\vec{e}_r$, $\vec{A}\cdot d\vec{S} = e\sin\theta d\theta d\varphi$. Потік вектора $\vec{A}$ через задану частину сфери дорівнює $\int\limits_S \vec{A}\cdot d\vec{S} = e\int\limits_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int\limits_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi e.$

Приклад 3. Знайти потік векторного поля $\vec{A} = y^2\vec{e}_y + z\vec{e}_z$ через частину параболоїда $z = x^2 + y^2$, обмежену площиною $z = 2$, у напрямку зовнішньої нормалі.

Розв'язання. Поверхня, через яку проходить потік, який треба знайти, є частиною координатної поверхні $v = \text{const}$ (або $u = \text{const}$) параболічної системи координат. Тому спробуємо саме таку систему використати. Оскільки на заданій частині поверхні параболоїда z змінюється від 0 до 2, і $z = x^2 + y^2$ або $z = u^2v^2$, то ділянка поверхні, через яку проходить потік, який треба знайти, задається нерівністю $0 \le u^2v^2 \le 2$. Якщо вибрати координатну поверхню $v = 1$, то на заданій ділянці $0 \le u \le \sqrt{2}$, $0 \le \varphi < 2\pi$, тобто в цих змінних область інтегрування буде прямокутною. Маємо векторний елемент координатної поверхні $v = \text{const}$:

$$d\vec{S} = H_u H_\varphi du d\varphi \vec{e}_v = uv\sqrt{u^2+v^2}\vec{e}_v = uv\left(u(\vec{e}_x\cos\varphi + \vec{e}_y\sin\varphi) - v\vec{e}_z\right).$$

Відповідно $\vec{A}\cdot d\vec{S} = u^3\left(u\sin^3\varphi - 1\right)$. Оскільки $\int\limits_0^{2\pi}\sin^3\varphi d\varphi = 0$, то

$$\int\limits_S \vec{A}\cdot d\vec{S} = -2\pi\int\limits_0^{\sqrt{2}} u^3 du = -2\pi .$$

§ 3. Вектори і тензори у криволінійній системі координат

Будемо говорити, що задано тензорне поле, якщо кожній точці простору ставиться у відповідність тензор $t(\vec{r})$.

У криволінійній системі координат (q^1, q^2, q^3) послідовний спосіб роботи із тензорами передбачає використання компонент тензорів не в декартовій системі координат, а в **локальному базисі** криволінійної системи координат, який сам є функцією точки.

Нехай поряд із системою координат (q^1, q^2, q^3) існує штрихована криволінійна система координат (q'^1, q'^2, q'^3). Криволінійні координати q'^1, q'^2, q'^3 точки зв'язані з її координатами q^1, q^2, q^3 співвідношеннями

$$q'^i = q'^i(q^1, q^2, q^3), \tag{8.20}$$

де функції (8.20) усюди однозначні та неперервно диференційовні, причому якобіан переходу відмінний від нуля, тобто існують і обернені формули $q^i = q^i(q'^1, q'^2, q'^3)$. Іншими словами, між двома криволінійними системами існує взаємно однозначна відповідність.

Можна визначити вектори штрихованого локального базису та знайти їх зв'язок із векторами нештрихованого локального базису:

$$\vec{e}_i' = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q'^i} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^j}\frac{\partial q^j}{\partial q'^i} = \frac{\partial q^j}{\partial q'^i}\vec{e}_j\,. \tag{8.21}$$

Коефіцієнти розкладання одного базису за іншим визначають матрицю переходу

$$\alpha_i^j = \frac{\partial q^j}{\partial q'^i}\,. \tag{8.22}$$

І вектори штрихованого базису і елементи матриці переходу є функціями точки.

Із розкладання довільного вектора та тензора

$$\vec{a}(\vec{r}) = a^i(q^1, q^2, q^3)\,\vec{e}_i(q^1, q^2, q^3)\,,$$

$$t(\vec{r}) = t_{ij}(q^1, q^2, q^3)\,\vec{e}^{\,i}(q^1, q^2, q^3)\otimes\vec{e}^{\,j}(q^1, q^2, q^3)$$

видно, що залежність від криволінійних координат q^1, q^2, q^3 міститься і в компонентах, і в базисних векторах.

Вправа. Довести, що криволінійні координати $\{q^i\}$ не утворюють вектор, а $\{dq^i\}$ – утворюють.

§ 4. Коваріантне диференціювання векторних та тензорних полів

Наша задача полягає у тому, щоб у результаті диференціювання заданих тензорних полів одержати нові тензорні поля, тобто розробити такий метод диференціювання тензора, який приводить до тензорів вищих рангів.

1. Скалярне поле $\varphi(q^1, q^2, q^3)$. Знайдемо закон перетворення частинних похідних цього скалярного поля при переході до інших (штрихованих) криволінійних координат q'^1, q'^2, q'^3:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial q'^i} = \frac{\partial\varphi}{\partial q^j}\frac{\partial q^j}{\partial q'^i} = \alpha_i^{\ j}\frac{\partial\varphi}{\partial q^j},$$

скориставшись (8.22). Тут і далі верхній індекс у знаменнику рівнозначний нижньому індексу в чисельнику. Отриманий закон перетворення говорить про те, що похідні від скалярного поля за контраваріантними координатами $\varphi_{,j} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial q^j}$ утворюють коваріантний вектор – градієнт скалярного поля $\vec{\nabla}\varphi$, а диференціальний векторний оператор набла записують як $\vec{\nabla} = \vec{e}^{\,i}\dfrac{\partial}{\partial q^i}$.

2. Векторне поле $\vec{a}$. Для нього можна використовувати два еквівалентні представлення:

$$\vec{a}(q^1, q^2, q^3) = a^i(q^1, q^2, q^3)\vec{e}_i(q^1, q^2, q^3) =$$
$$= a_j(q^1, q^2, q^3)\vec{e}^{\,j}(q^1, q^2, q^3).$$

У декартовій системі координат базисні вектори є сталими: $\dfrac{\partial\vec{a}}{\partial x^k} = \dfrac{\partial a^i}{\partial x^k}\vec{e}_i$; величини $\left\{\dfrac{\partial a^i}{\partial x^k}\right\}$ утворюють тензор другого рангу.

У криволінійній системі координат величини $\left\{\dfrac{\partial a^i}{\partial q^k}\right\}$ не утворюють тензор. **Коваріантною (абсолютною) похідною** контраваріантного вектора називають сукупність 9 величин

$$\vec{e}^{\,j}\cdot\frac{\partial\vec{a}}{\partial q^k}=a^j_{\ ,k}\,.$$

Доведемо, що тензор утворюють величини $\left\{\vec{e}^{\,j}\cdot\dfrac{\partial\vec{a}}{\partial q^k}\right\}$. Запишемо їх у штрихованій системі координат

$$a'^j_{\ ,k}=\vec{e}'^{\,j}\cdot\frac{\partial\vec{a}}{\partial q'^k}=\beta^j_i\,\vec{e}^{\,i}\cdot\frac{\partial\vec{a}}{\partial q^l}\frac{\partial q^l}{\partial q'^k}=\beta^j_i\,\vec{e}^{\,i}\cdot\frac{\partial\vec{a}}{\partial q^l}\alpha^l_k=\beta^j_i\,a^i_{\ ,l}\,\alpha^l_k\,.$$

Отримали закон перетворення тензора другого рангу.

Знайдемо явний вираз для компонент коваріантної похідної вектора, використовуючи розкладання $\vec{a}=a^i\vec{e}_i$:

$$a^j_{\ ,k}=\vec{e}^{\,j}\cdot\frac{\partial\vec{a}}{\partial q^k}=\vec{e}^{\,j}\cdot\left(\frac{\partial a^i}{\partial q^k}\vec{e}_i+a^i\frac{\partial\vec{e}_i}{\partial q^k}\right)=$$

$$=\frac{\partial a^j}{\partial q^k}+a^i\vec{e}^{\,j}\cdot\frac{\partial\vec{e}_i}{\partial q^k}=\frac{\partial a^j}{\partial q^k}+a^i\Gamma^j_{ik}\,,$$

де величини Γ^j_{ik} позначають коефіцієнти розкладання вектора $\dfrac{\partial\vec{e}_i}{\partial q^k}=\dfrac{\partial^2\vec{r}}{\partial q^k\partial q^i}$ за базисом $\{\vec{e}_j\}$:

$$\frac{\partial\vec{e}_i}{\partial q^k}=\vec{e}_j\Gamma^j_{ik}\,.$$

Ці важливі коефіцієнти були введені в 1869 р. німецьким математиком Е. Крісто́ффелем (1829–1900) і називаються **символами Крістоффеля** II роду або **коефіцієнтами зв'язності**, тому що за їх допомогою зв'язуються однакові вектори в різних точках простору. Для символів Крістоффеля II роду Γ^k_{ij} використовують також позначення $\left\{\begin{matrix} i\,j \\ k\end{matrix}\right\}$ або $\{i\,j,k\}$.

Розташування індексів у цих символах вибрано так, щоб застосовувати тензорне правило підсумовування, хоча символи Крістоффеля не є тензорами; у кожній точці простору вони залежать не тільки від базису в цій точці, але й від характеру зміни базису при відході від неї. Тому при заміні системи координат символи Γ_{ik}^{j} перетворюються не за тензорним, а за деяким більш складним законом, на якому ми не будемо спинятися. Поруч із символами Крістоффеля II роду Γ_{ik}^{j} вводяться символи Крістоффеля I роду $\Gamma_{j,ik} = \begin{bmatrix} ik \\ j \end{bmatrix} = [ik, j]$, які є коефіцієнтами розкладання того самого вектора $\dfrac{\partial \vec{e}_i}{\partial q^k} = \dfrac{\partial^2 \vec{r}}{\partial q^k \partial q^i}$, але за взаємним базисом $\{\vec{e}^{\,j}\}$:

$$\frac{\partial \vec{e}_i}{\partial q^k} = \vec{e}^{\,j} \Gamma_{j,ik} .$$

Зазначимо, що між символами Крістоффеля існує зв'язок:

$$\Gamma_{ik}^{j} = g^{jl} \Gamma_{l,ik} , \ \Gamma_{j,ik} = g_{jl} \Gamma_{ik}^{l} .$$

Повернемося до диференціювання векторних полів. Ми одержали формулу для коваріантної похідної контраваріантного вектора

$$a^{j}{}_{,k} = \frac{\partial a^j}{\partial q^k} + a^i \Gamma_{ik}^{j} .$$

Узявши інше інваріантне представлення вектора у вигляді $\vec{a} = a_i \vec{e}^{\,i}$ через коваріантні координати, можна показати, що 9 величин

$$a_{j,k} = \vec{e}_j \cdot \frac{\partial \vec{a}}{\partial q^k} = \frac{\partial a_j}{\partial q^k} + a_i \vec{e}_j \cdot \frac{\partial \vec{e}^{\,i}}{\partial q^k} = \frac{\partial a_j}{\partial q^k} - a_i \Gamma_{jk}^{i}$$

утворюють тензор другого рангу (двічі коваріантний), який є іншим зображенням коваріантної похідної вектора.

Продиференціювавши $\vec{e}_j \cdot \vec{e}^{\,i} = \delta_j^i$, отримуємо співвідношення $\vec{e}_j \cdot \dfrac{\partial \vec{e}^{\,i}}{\partial q^k} = -\vec{e}^{\,i} \cdot \dfrac{\partial \vec{e}_j}{\partial q^k}$ і формулу для диференціювання векторів взаємного базису

$$\frac{\partial \vec{e}^{\,i}}{\partial q^k} = -\vec{e}^{\,l} \Gamma_{lk}^{i} .$$

Із формул для $a_{j,k}$, $a^j_{,k}$ випливає, що абсолютна (коваріантна) похідна векторного поля враховує не лише швидкість зміни самого поля при переміщенні вздовж координатних ліній (доданки $\frac{\partial a^j}{\partial q^k}$, $\frac{\partial a_j}{\partial q^k}$), а також і швидкість зміни локального базису. Доданки $a^i\Gamma^j_{ik}$, $-a_i\Gamma^i_{jk}$ обумовлені виключно введенням рухомого локального базису.

3. Коваріантне диференціювання тензора II рангу є природним узагальненням формул для коваріантної похідної вектора:

$$t_{ij,k} = \frac{\partial t_{ij}}{\partial q^k} - t_{lj}\Gamma^l_{ik} - t_{il}\Gamma^l_{jk}, \qquad t^i{}_{j,k} = \frac{\partial t^i{}_j}{\partial q^k} + t^l{}_j\Gamma^i_{lk} - t^i{}_l\Gamma^l_{jk},$$

$$t^{ij}{}_{,k} = \frac{\partial t^{ij}}{\partial q^k} + t^{lj}\Gamma^i_{lk} + t^{il}\Gamma^j_{lk}, \qquad t_i{}^j{}_{,k} = \frac{\partial t_i{}^j}{\partial q^k} - t_l{}^j\Gamma^l_{ik} + t_i{}^l\Gamma^j_{lk}.$$

Можна показати, що ці величини при заміні систем координат перетворюються як компоненти тензора третього рангу.

Аналогічно визначається коваріантна похідна тензора t довільної будови, а саме: щоб утворити, наприклад, похідну за k-координатою, необхідно скласти суму доданків трьох типів:

1) відповідна частинна похідна по k-координаті;

2) зі знаком "+" (кількість доданків дорівнює кількості контраваріантних індексів). Для кожного контраваріантного індексу $t^{.i.}_{...}$ записується доданок у вигляді добутку компоненти тензора на символ Крістоффеля другого роду $\Gamma^i_{pk}t^{.p.}_{...}$. При цьому відповідний контраваріантний індекс компоненти тензора t присвоюється символу Крістоффеля, на його місце ставиться німий індекс підсумовування, інший – із пари німих індексів – присвоюється символу Крістоффеля. Другим нижнім індексом у символі Крістоффеля стає індекс коваріантного диференціювання k;

3) зі знаком "–" (кількість доданків дорівнює кількості коваріантних індексів). Для кожного коваріантного індексу $t^{...}_{.i.}$ записується доданок такого вигляду: $-\Gamma^p_{ik}t^{...}_{.p.}$. Тут виконується послідовність присвоєнь, аналогічна описаній у п. 2), але до символу Крістоффеля переноситься відповідний коваріантний індекс тензора.

Операція коваріантного диференціювання вводиться у криволінійних координатах як інваріантна диференціальна операція, у результаті якої із довільного тензора рангу n утворюється тензор рангу $n+1$.

Правила коваріантного диференціювання збігаються із правилами звичайного диференціювання. Наприклад, $\left(a_{il} b_m\right)_{,k} = a_{il,k} b_m + a_{il} b_{m,k}$.

4. Теорема Річчі. Коваріантна похідна метричного тензора дорівнює нулю.

$$g_{ij,k} = 0, \qquad g^{ij}_{\ ,k} = 0.$$

Доведення. Теорему доведемо простим обчисленням, але спочатку покажемо, що символи Крістоффеля однозначно визначаються через компоненти метричного тензора.

Із розкладання $\dfrac{\partial \vec{e}_i}{\partial q^k} = \vec{e}^{\,j} \Gamma_{j,ik}$ випливає, що

$$\Gamma_{j,ik} = \vec{e}_j \cdot \frac{\partial \vec{e}_i}{\partial q^k}.$$

Використовуючи симетрію відносно перестановки індексів у виразі

$$\frac{\partial \vec{e}_i}{\partial q^k} = \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial q^k \partial q^i} = \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial q^i \partial q^k} = \frac{\partial \vec{e}_k}{\partial q^i},$$

одержимо

$$\Gamma_{j,ik} = \vec{e}_j \cdot \frac{\partial \vec{e}_i}{\partial q^k} = \frac{1}{2}\left(\vec{e}_j \cdot \frac{\partial \vec{e}_i}{\partial q^k} + \vec{e}_j \cdot \frac{\partial \vec{e}_k}{\partial q^i} \right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial (\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j)}{\partial q^k} + \frac{\partial (\vec{e}_k \cdot \vec{e}_j)}{\partial q^i} - \vec{e}_i \cdot \frac{\partial \vec{e}_j}{\partial q^k} - \vec{e}_k \cdot \frac{\partial \vec{e}_j}{\partial q^i} \right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial q^i} - \vec{e}_i \cdot \frac{\partial \vec{e}_k}{\partial q^j} - \vec{e}_k \cdot \frac{\partial \vec{e}_i}{\partial q^j} \right) = .$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial q^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j} \right)$$

Використовуючи означення коваріантної похідної від двічі коваріантного тензора та останню формулу для символів Крістоффеля, одержимо

$$g_{ij,k} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} - g_{lj}\Gamma^l_{ik} - g_{il}\Gamma^l_{jk} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} - \Gamma_{j,ik} - \Gamma_{i,jk} =$$

$$= \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial q^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ji}}{\partial q^k} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial q^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i}\right) = 0. \ \blacktriangle$$

Наслідок. $\dfrac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} = \Gamma_{j,ik} + \Gamma_{i,jk}$.

Аналогічно можна показати, що $g^{ij}_{\ ,k} = 0$.

Рівність нулю коваріантної похідної від метричного тензора дозволяє оперувати із його компонентами, як зі сталими, при коваріантному диференціюванні, наприклад,

$$a^i_{\ ,k} = (g^{ij}a_j)_{,k} = g^{ij}a_{j,k}.$$

Векторне поле називається **однорідним**, якщо воно не змінюється від точки до точки. Коваріантна похідна однорідного векторного поля $\vec{a}$ дорівнює нулю: $\dfrac{\partial a^j}{\partial q^k} = -a^i\Gamma^j_{ik}$, $\dfrac{\partial a_i}{\partial q^k} = a_j\Gamma^j_{ik}$.

§ 5. Векторні диференціальні операції у криволінійних системах координат

Виразимо основні диференціальні операції через коваріантні похідні відповідних полів та знайдемо їх вигляд в ортогональних криволінійних координатах.

Градієнт скалярного поля $\operatorname{grad}\Phi$ – це вектор, що має напрямок найшвидшого зростання скалярної функції Φ і за абсолютною величиною дорівнює похідній Φ за цим напрямком.

Градієнт скалярного поля визначають як вектор, коваріантні компоненти якого рівні $\dfrac{\partial \Phi}{\partial q^i}$ (тут q^i – узагальнені криволінійні координати). Тоді в довільній системі координат можна означити оператор набла

$$\vec{\nabla} = \vec{e}^{\,i}\frac{\partial}{\partial q^i}$$

так, що

$$\vec{\nabla}\Phi = \vec{e}^{\,i}\frac{\partial \Phi}{\partial q^i}.$$

Коваріантні компоненти вектора $\vec{\nabla}\Phi$ дорівнюють $\frac{\partial \Phi}{\partial q^i}$, контраваріантні: $g^{ij}\frac{\partial \Phi}{\partial q^j}$, "фізичні":

$$(\vec{\nabla}\Phi)_{(\alpha)} = \frac{1}{H_\alpha}\frac{\partial \Phi}{\partial q^\alpha}$$

у силу співвідношень $\vec{e}^{\,\alpha} = \frac{\vec{e}_{(\alpha)}}{H_\alpha}$, $\vec{e}_\alpha = H_\alpha \vec{e}_{(\alpha)}$, $A^\alpha = \frac{A_{(\alpha)}}{H_\alpha}$, $A_\alpha = H_\alpha A_{(\alpha)}$. Запишемо

$$\vec{\nabla}\Phi = \vec{e}^{\,i}\frac{\partial \Phi}{\partial q^i} = \sum_i \vec{e}_{(i)}\frac{1}{H_i}\frac{\partial \Phi}{\partial q^i}.$$

Наведемо вирази для градієнта скалярної функції у фізичному ортонормованому базисі:

у циліндричній системі координат

$$\vec{\nabla}\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\vec{e}_z,$$

у сферичній системі координат

$$\vec{\nabla}\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi,$$

у параболічній системі координат

$$\vec{\nabla}\Phi = \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u}\vec{e}_u + \frac{\partial \Phi}{\partial v}\vec{e}_v\right) + \frac{1}{uv}\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi.$$

Дивергенцію векторного поля $\vec{A}$ (інваріантне означення див. розд. 7, п. 2.6) визначають як скаляр, який дорівнює згортці тензора другого рангу – коваріантної похідної контраваріантного вектора (лінійний інваріант тензора другого рангу):

$$\operatorname{div}\vec{A} = A^i_{,i} = \frac{\partial A^i}{\partial q^i} + A^j\Gamma^i_{ij}.$$

Знайдемо вираз для суми (за індексами, що повторюються) Γ^i_{ij} через компоненти метричного тензора. Ураховуючи рівності

$$\Gamma_{i,jk} = g_{il}\Gamma^l_{jk},\ \Gamma^i_{jk} = g^{il}\Gamma_{l,jk}$$

та симетрію g^{ik}, запишемо

$$\Gamma^i_{ij} = g^{ik}\Gamma_{k,ij} = g^{ki}\Gamma_{i,kj} = \frac{1}{2}g^{ik}\left(\Gamma_{k,ij} + \Gamma_{i,kj}\right) = \frac{1}{2}g^{ik}\frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j}.$$

Тут за наслідком із теореми Річчі $\Gamma_{k,ij} + \Gamma_{i,kj} = \dfrac{\partial g_{ik}}{\partial q^j}$; g^{ik} – компоненти матриці, оберненої до фундаментальної, причому $g^{ik} = g^{ki}$. За загальним правилом знаходження компонент оберненої матриці

$$g^{ki} = \frac{G^{ik}}{g},$$

де G^{ik} – алгебраїчні доповнення фундаментальної матриці, які, крім того, дорівнюють похідній від визначника матриці за її елементом g_{ik}:

$$G^{ik} = \frac{\partial g}{\partial g_{ik}},$$

тобто

$$g^{ik} = \frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial g_{ik}},$$

$$\Gamma^i_{ij} = \frac{1}{2}\frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial g_{ik}}\frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j} = \frac{1}{2}\frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial q^j} = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial q^j}.$$

Тоді

$$A^i_{,i}=\frac{\partial A^i}{\partial q^i}+A^j\Gamma^i_{ij}=\frac{\partial A^i}{\partial q^i}+A^i\,\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial q^i}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\left(\sqrt{g}\,A^i\right)}{\partial q^i}=\frac{1}{\sqrt{g}}\sum_i\frac{\partial}{\partial q^i}\left(\frac{\sqrt{g}}{H_i}A_{(i)}\right)$$

або

$$\operatorname{div}\vec{A}=\frac{1}{H_1H_2H_3}\sum_i\frac{\partial}{\partial q^i}\left(\frac{H_1H_2H_3}{H_i}A_{(i)}\right),$$

використовуючи формули $\sqrt{g}=I=H_1H_2H_3$ та (8.9).

Наприклад, у циліндричній системі координат

$$\operatorname{div}\vec{A}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho A_\rho\right)+\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{\partial A_z}{\partial z},$$

у сферичній системі координат

$$\operatorname{div}\vec{A}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\,A_r\right)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\,A_\theta\right)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}.$$

Оператор Лапласа від скалярної функції, який дорівнює $\Delta\Phi=(\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla})\Phi=\operatorname{div}(\operatorname{grad}\Phi)$, обчислюється за формулою

$$\Delta\Phi=\operatorname{div}\vec{\nabla}\Phi=\frac{1}{H_1H_2H_3}\sum_i\frac{\partial}{\partial q^i}\left(\frac{H_1H_2H_3}{H_i^2}\frac{\partial\Phi}{\partial q^i}\right).$$

Наведемо вирази для лапласіана скалярної функції у фізичному ортонормованому базисі:

у циліндричній системі координат

$$\Delta\Phi=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2},$$

у сферичній системі координат

$$\Delta\Phi=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2},$$

у параболічній системі координат

$$\Delta\Phi=\frac{1}{u^2+v^2}\left[\frac{1}{u}\frac{\partial}{\partial u}\left(u\frac{\partial\Phi}{\partial u}\right)+\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial v}\left(v\frac{\partial\Phi}{\partial v}\right)+\left(\frac{1}{u^2}+\frac{1}{v^2}\right)\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}\right].$$

Ротор (вихор) векторного поля $\vec{A}$ (інваріантне означення див. розд. 7, п. 2.6) визначають як векторний добуток оператора набла на $\vec{A}$:

$$\vec{\nabla}\times\vec{A}=\vec{e}^{\,i}\frac{\partial}{\partial q^i}\times A_j\vec{e}^{\,j}=\vec{e}^{\,i}\times\vec{e}^{\,j}\frac{\partial A_j}{\partial q^i}+A_j\vec{e}^{\,i}\times\frac{\partial\vec{e}^{\,j}}{\partial q^i}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{g}}e^{ijk}\vec{e}_k\frac{\partial A_j}{\partial q^i}+A_j\vec{e}^{\,i}\times(-\Gamma^j_{ik}\vec{e}^{\,k})\,.$$

Другий доданок обертається на нуль, оскільки

$$\vec{e}^{\,i}\times\vec{e}^{\,k}\Gamma^j_{ik}=\frac{1}{\sqrt{g}}e^{ikn}\vec{e}_n\Gamma^j_{ik}=\frac{1}{2\sqrt{g}}e^{ikn}\vec{e}_n\left(\Gamma^j_{ik}+\Gamma^j_{ki}\right)=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{g}}\left(e^{ikn}+e^{kin}\right)\vec{e}_n\Gamma^j_{ik}=0\,.$$

Тут ми скористалися симетрією символів Крістоффеля відносно перестановки у парі нижніх індексів та рівністю $e^{ikn}\Gamma^j_{ki}=e^{kin}\Gamma^j_{ik}$, де пару німих індексів із i (за якими за домовленістю здійснюється підсумовування від 1 до 3) замінено на пару з індексів k, і навпаки, пару із k – замінено парою із i.

У результаті одержуємо

$$\operatorname{rot}\vec{A}=\frac{1}{\sqrt{g}}e^{ijk}\vec{e}_k\frac{\partial A_j}{\partial q^i}$$

або

$$\operatorname{rot}\vec{A}=\frac{1}{\sqrt{g}}\sum_k\vec{e}_k\left(\frac{\partial A_j}{\partial q^i}-\frac{\partial A_i}{\partial q^j}\right),$$

де індекси i,j,k утворюють циклічну перестановку із чисел 1, 2, 3. З останньої формули знаходимо контраваріантні та "фізичні" компоненти вихору

$$\left[\operatorname{rot}\vec{A}\right]^k=\frac{1}{\sqrt{g}}\left(\frac{\partial A_j}{\partial q^i}-\frac{\partial A_i}{\partial q^j}\right),$$

$$\left[\operatorname{rot}\vec{A}\right]_{(k)}=\frac{H_k}{H_1H_2H_3}\left(\frac{\partial\left(H_jA_{(j)}\right)}{\partial q^i}-\frac{\partial\left(H_iA_{(i)}\right)}{\partial q^j}\right),$$

де індекси i,j,k утворюють циклічну перестановку із чисел 1, 2, 3.

Ротор векторної функції має такий вигляд:
у циліндричній системі координат

$$\operatorname{rot}\vec{A} = \frac{\vec{e}_\rho}{\rho}\left(\frac{\partial A_z}{\partial\varphi} - \rho\frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right) + \vec{e}_\varphi\left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial\rho}\right) + \frac{\vec{e}_z}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_\varphi) - \frac{\partial A_\rho}{\partial\varphi}\right);$$

у сферичній системі координат

$$\operatorname{rot}\vec{A} = \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\left(A_\varphi\sin\theta\right) - \frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right)\vec{e}_r +$$

$$+\frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi)\right)\vec{e}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)\vec{e}_\varphi.$$

Лапласіан векторної функції обчислюється за формулою $\vec{\nabla}^2\vec{A} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) - \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A})$:
у циліндричній системі координат

$$\Delta\vec{A} = \left(\Delta A_\rho - \frac{A_\rho}{\rho^2} - \frac{2}{\rho^2}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}\right)\vec{e}_\rho + \left(\Delta A_\varphi - \frac{A_\varphi}{\rho^2} + \frac{2}{\rho^2}\frac{\partial A_\rho}{\partial\varphi}\right)\vec{e}_\varphi + \Delta A_z\vec{e}_z,$$

у сферичній системі координат

$$\Delta\vec{A} = \left\{\Delta A_r - \frac{2}{r^2}\left(A_r + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta A_\theta\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}\right)\right\}\vec{e}_r +$$

$$+\left\{\Delta A_\theta + \frac{2}{r^2}\left(\frac{\partial A_r}{\partial\theta} - \frac{A_\theta}{2\sin^2\theta} - \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}\right)\right\}\vec{e}_\theta +$$

$$+\left\{\Delta A_\varphi + \frac{2}{r^2\sin\theta}\left(\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} + \operatorname{ctg}\theta\frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi} - \frac{A_\varphi}{2\sin\theta}\right)\right\}\vec{e}_\varphi.$$

Контрольні запитання

1. Що таке криволінійні координати, координатні лінії, координатні поверхні?

2. Як вводяться локальні основний та взаємний базиси? Який геометричний зміст векторів основного базису?

3. Чому дорівнює векторний елемент довжини дуги координатної лінії, векторний елемент площі координатної поверхні, елемент об'єму у криволінійних координатах?

4. Які криволінійні координати називаються ортогональними?

5. Як вводиться локальний "фізичний" базис, пов'язаний з ортогональними криволінійними координатами?

6. Що таке параметри Ламе? Який їхній геометричний зміст?

7. Наведіть приклади ортогональних криволінійних координат. Запишіть формули, що пов'язують декартові координати з: а) циліндричними, б) сферичними координатами.

8. Обчисліть параметри Ламе для циліндричних і сферичних координат двома способами: а) за формулами для параметрів Ламе; б) використовуючи вигляд координатних ліній та геометричний зміст параметрів Ламе.

9. Запишіть закон перетворення векторів і тензорів у криволінійній системі координат.

10. Що таке символи Крістоффеля (коефіцієнти зв'язності)?

11. Коваріантне диференціювання векторних та тензорних полів.

12. Коваріантна похідна.

13. Сформулюйте й доведіть теорему Річчі.

14. Запишіть основні диференціальні операції першого порядку через коваріантну похідну відповідних полів.

15. Знайдіть вирази для градієнта, дивергенції, ротора, оператора Лапласа в ортогональній криволінійній системі координат (через параметри Ламе).

Задачі

8.1. Знайти параметри Ламе H_ξ, H_η, H_α у бісферичній (або біполярній) системі координат (ξ, η, α):

$$x = \frac{a\sin\eta\cos\alpha}{\operatorname{ch}\xi - \cos\eta}, \quad y = \frac{a\sin\eta\sin\alpha}{\operatorname{ch}\xi - \cos\eta}, \quad z = \frac{a\operatorname{sh}\xi}{\operatorname{ch}\xi - \cos\eta},$$

де a – сталий параметр, $-\infty < \xi < +\infty$, $0 \le \eta \le \pi$ та $0 \le \alpha < 2\pi$.

8.2. Знайти параметри Ламе H_ρ, H_ξ, H_η у тороїдальній системі координат (ρ, ξ, η):

$$x = \frac{a\operatorname{sh}\rho\cos\alpha}{\operatorname{ch}\rho - \cos\xi}, \quad y = \frac{a\operatorname{sh}\rho\sin\alpha}{\operatorname{ch}\rho - \cos\xi}, \quad z = \frac{a\sin\xi}{\operatorname{ch}\rho - \cos\xi},$$

де a – сталий параметр, $0 \le \rho < +\infty$, $0 \le \alpha < 2\pi$ та $-\pi < \xi \le \pi$.

8.3. Записати кінетичну енергію точкової частинки масою m, яку задано виразом $T = m\dot{\vec{r}}^2/2$, де $\vec{r} = \vec{r}(t)$, у циліндричній, сферичній і параболічній системах координат.

8.4. Записати кінетичну енергію точкової частинки масою m, яку задано виразом $T = m\dot{\vec{r}}^2/2$, де $\vec{r} = \vec{r}(t)$, у довільній ортогональній криволінійній системі координат.

8.5. Довести формулу

$$\frac{\partial \vec{e}_{(i)}}{\partial q^j} = \frac{\vec{e}_{(j)}}{H_i}\frac{\partial H_j}{\partial q^i} - \delta_{ij}\vec{\nabla} H_i$$

і обчислити похідні від векторів фізичного базису для циліндричної та сферичної систем координат.

8.6. Симетричний тензор деформацій визначає зміну відстані між нескінченно близькими точками при деформації пружного середовища, що задається полем зміщень $\vec{u}$, а саме, якщо $\vec{l}$ – вектор, проведений з однієї точки в іншу, то в лінійному наближенні за полем зміщень $\dfrac{\delta l}{l} = \sum\limits_{i,j=1}^{3} u_{(ij)} s_{(i)} s_{(j)}$, де $\vec{s} = \vec{l}/l$. У декартовій системі координат компоненти тензора деформацій мають вигляд

$$u_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right).$$

Записати компоненти тензора деформацій у циліндричній системі координат.

8.7. Записати компоненти тензора деформацій $u_{(ij)}$ у сферичній системі координат (див. задачу 8.6).

8.8. Записати компоненти тензора деформацій $u_{(ij)}$ у довільній ортогональній криволінійній системі координат (див. задачу 8.6).

8.9. Записати оператор Лапласа від скалярної функції у системі координат, яку задано рівняннями:

$x = (a + r\cos\theta)\cos\varphi,\ y = (a + r\cos\theta)\sin\varphi,\ z = r\sin\theta,$ де $a = \text{const}$.

8.10. Записати диференціальні оператори:

а) $\hat{L}_x = y\dfrac{\partial}{\partial z} - z\dfrac{\partial}{\partial y},\quad \hat{L}_y = z\dfrac{\partial}{\partial x} - x\dfrac{\partial}{\partial z},\quad \hat{L}_z = x\dfrac{\partial}{\partial y} - y\dfrac{\partial}{\partial x}$

у циліндричних координатах (ρ, φ, z);

б) $\hat{\vec{L}} = [\vec{r} \times \vec{\nabla}]$ у циліндричній системі координат і знайти його проекції на декартові орти. Порівняти відповідь із результатами п. а).

8.11. Записати диференціальні оператори:

а) $\hat{L}_x = y\dfrac{\partial}{\partial z} - z\dfrac{\partial}{\partial y}, \quad \hat{L}_y = z\dfrac{\partial}{\partial x} - x\dfrac{\partial}{\partial z}, \quad \hat{L}_z = x\dfrac{\partial}{\partial y} - y\dfrac{\partial}{\partial x}$

у сферичних координатах (r,θ,φ);

б) $\hat{\vec{L}} = [\vec{r} \times \vec{\nabla}]$ у сферичній системі координат і знайти його проекції на декартові орти. Порівняти відповідь із результатами п. а).

8.12. Записати вектор $(\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{A}$: а) у циліндричних координатах; б) у сферичних координатах.

8.13. Дивергенція симетричного тензора другого рангу $\vec{\nabla} \cdot t$ у декартових координатах має компоненти $(\vec{\nabla} \cdot t)_i = \dfrac{\partial t_{ki}}{\partial x_k}$. Знайти компоненти вектора $\vec{\nabla} \cdot t$: а) у циліндричних координатах; б) у сферичних координатах.

8.14. Величина $(t \cdot \vec{\nabla})\vec{u}$ (де t – симетричний тензор другого рангу, $\vec{u}$ – вектор) у декартових координатах обчислюється як $t_{ij}\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}$. Знайти вираз для обчислення величини $(t \cdot \vec{\nabla})\vec{u}$: а) у циліндричних координатах; б) у сферичних координатах.

8.15. Записати рівняння Максвелла (у системі СІ)

$$\operatorname{rot}\vec{E}(\vec{r},t) = -\frac{\partial \vec{B}(\vec{r},t)}{\partial t}, \qquad \operatorname{rot}\vec{H}(\vec{r},t) = \frac{\partial \vec{D}(\vec{r},t)}{\partial t} + \vec{j}(\vec{r},t),$$

$$\operatorname{div}\vec{D}(\vec{r},t) = \rho(\vec{r},t), \qquad \operatorname{div}\vec{B}(\vec{r},t) = 0,$$

у циліндричній і сферичній системах координат.

8.16. Обчислити, використовуючи циліндричні або сферичні координати та локальний базис (тут $\vec{a} = \text{const}$):

а) $\operatorname{div}\vec{r}$; б) $\operatorname{rot}\vec{r}$; в) $\vec{\nabla}\left(\vec{r} \cdot \vec{a}\right)$; г) $(\vec{a} \cdot \vec{\nabla})\vec{r}$; д) $\operatorname{div}\left(f(r)\vec{r}\right)$;

є) $\operatorname{rot}\left(f(r)\vec{r}\right)$; ж) $\vec{\nabla}\left(\dfrac{\vec{r} \cdot \vec{a}}{r^3}\right)$; з) $\operatorname{div}\dfrac{\vec{a} \times \vec{r}}{r^3}$; і) $\operatorname{rot}\dfrac{\vec{a} \times \vec{r}}{r^3}$.

8.17. Обчислити $\vec{\nabla} f(\vec{r})$, використовуючи циліндричні або сферичні координати та локальний базис, якщо

а) $f(\vec{r}) = 1/r$; б) $f(\vec{r}) = e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}$; в) $f(\vec{r}) = e^{ikr}/r$, де $\vec{k} = \text{const}$.

Розділ 9
Тензорне числення у псевдоевклідовому просторі

Відкриття М. Лобачевським геометрії, відмінної від евклідової, показало, що евклідова геометрія не може претендувати на роль єдиної геометрії. Постало питання: яка ж геометрія описує властивості навколишнього простору? Це питання виходить за межі математики. Розвиток фізики показав, що евклідова геометрія описує структуру навколишнього простору лише із певним ступенем точності, а також, що простір і час не є абсолютними, а певним чином пов'язані. Проявляється це в електромагнітних явищах та при русі тіл зі швидкостями, близькими до світлових. У релятивістській фізиці до трьох просторових координат додається координата часу – четвертий вимір. Перехід до рухомої системи координат поєднує простір і час точно визначеним у математичному відношенні чином так, що їх уже не можна відділяти. Теорія відносності виявляє, що простір та час нерозривно зв'язані і утворюють чотиривимірний континуум, який називається "простір – час". Уперше поняття "простір – час" застосував Г. Мінковський в 1908 р.

Поєднання простору та часу у спеціальній теорії відносності (СТВ) А. Ейнштейна показало існування зв'язку між іншими поняттями фізики. Певні фізичні величини, які в нерелятивістській фізиці розглядалися як незалежні, у релятивістській фізиці виявилися різними компонентами єдиного об'єкта. Дослідження в області теорії відносності дозволили сформулювати її математично, але наочно уявити собі чотиривимірний простір – час ми не можемо. Адже за допомогою наших органів відчуття ми спостерігаємо лише його тривимірні проекції. Тому висновки теорії відносності здаються нам парадоксальними. Крім того, звичний для нас тривимірний простір є евклідовим, а простір – час у СТВ є псевдоевклідовим і має інші геометричні властивості. Якби за допомогою притаманних нам відчуттів ми могли побачити, почути, відчути чотиривимірний простір–час безпосередньо, парадокси, можливо, зникли б назавжди.

§ 1. Математична структура псевдоевклідового простору

Псевдоевклідів простір із погляду лінійних властивостей є лінійним і в цьому відношенні не відрізняється від евклідового. Існує множина R з елементами – векторами $A, B, \ldots$, і на цій множині R задані операція додавання, що ставить у відповідність парі A та B однозначно визначений елемент $A+B$, та операція множення на число α із деякого поля. Уведені операції задовольняють 8 аксіом лінійного простору (див. Вступ). Псевдоевклідів простір відрізняється від евклідового метричними властивостями. В евклідовому просторі всі власні значення метричного тензора додатні, у псевдоевклідовому – деякі з них є від'ємними.

Вибравши відповідний базис, можна привести метричний тензор до діагонального вигляду, після чого, змінюючи довжини базисних векторів, зробити діагональні компоненти рівними ± 1. У такому базисі скалярний добуток матиме вигляд

$$(x^i \vec{e}_i) \cdot (y^j \vec{e}_j) = \lambda_1 x^1 y^1 + \lambda_2 x^2 y^2 + \ldots + \lambda_n x^n y^n , \qquad (9.1)$$

де $\lambda_i = \vec{e}_i^{\,2}$ можуть набувати лише двох значень: 1 та –1. Базиси із такою властивістю називаються ортонормованими. Простір є псевдоевклідовим, якщо не всі λ_i мають один знак, а квадрат вектора не є знаковизначеним. Пара чисел $(m,\ n-m)$, що задає кількість базисних векторів дійсної та суто уявної довжини відповідно, не залежить від вибору ортонормованого базису та називається сигнатурою псевдоевклідового простору. Псевдоевклідів простір із сигнатурою $(m, n-m)$ можна перетворити у простір із сигнатурою $(n-m, m)$ заміною знака скалярного добутку. Тому принципових відмінностей між такими просторами немає: зокрема, простір Мінковського в різних джерелах визначається і як простір сигнатури (1, 3), і як простір сигнатури (3, 1).

Особливістю просторів із знаконевизначеною метричною формою є існування ненульових векторів $\vec{x} \neq \vec{0}$, ортогональних самих до себе ($\vec{x} \cdot \vec{x} = 0$), або, що те саме, векторів, що мають нульову довжину $|\vec{x}| \overset{\text{def}}{=} \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}}$. Такі вектори (а також прямі, направляючими векторами яких вони є) називаються *ізотропними* (у фізиці – також нульовими або світлоподібними). Зокрема, псевдоевклідова площина має рівно два незбіжні ізотропні напрямки. Ізотропні прямі тривимірного псевдоевклідового простору, проведені через довільну фіксовану точку, утворюють конус із вершиною у цій точці.

Якщо ж деякі власні значення метричного тензора g_{ij} від'ємні, то існують вектори $\vec{x}$, для яких $\vec{x} \cdot \vec{x} < 0$, тобто з уявною довжиною. *Все це вимагає при розгляді псевдоевклідового простору деякої перебудови інтуїції, яка вже виникла раніше на основі досвіду, набутого при дослідженні евклідового простору.*

У теорії відносності велику роль відіграють псевдоевклідові простори із сигнатурою ($n-1$, 1). Такий простір називається **простором Мінковського**, а лінійне відображення такого простору самого у себе (що зберігає квадрати векторів) називається **перетворенням Лоренца**. Із формули

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \frac{1}{4}\left[\left(\vec{x} + \vec{y}\right)^2 - \left(\vec{x} - \vec{y}\right)^2 \right]$$

випливає, що при перетвореннях Лоренца зберігаються і будь-які скалярні добутки. *Перетворення Лоренца відіграють для простору Мінковського таку саму роль, як ортогональні перетворення (просторові повороти, дзеркальні відображення) для тривимірного евклідового простору.*

§ 2. Псевдоевклідова площина та її фізична інтерпретація

Зображення псевдоевклідової площини – це спроба знайти відповідність між точками звичайної двовимірної площини та точками двовимірного псевдоевклідового простору.

У теорії відносності точці псевдоевклідової площини відповідає подія (будь-яка), що відбувається в момент часу t у просторовій точці із координатою x. Точки такої площини зручно представляти векторами на звичайній площині із координатами $x^0 = ct$, $x^1 = x$ та скалярним добутком

$$(x^0\vec{e}_0 + x^1\vec{e}_1)\cdot(x^{0'}\vec{e}_0 + x^{1'}\vec{e}_1) = x^0 x^{0'} - x^1 x^{1'},$$

тут вектори $\vec{e}_0$, $\vec{e}_1$, зазвичай, – вектори, що виходять із початку координат у точки із координатами (1,0), (0,1), відповідно. Часова координата $x^0 = ct$ (c – швидкість світла) вибрана так, щоб її розмірність збігалася із розмірністю просторової координати.

Вектори вигляду $\vec{a}$, паралельні одній із прямих $ct = \pm x$, мають нульову довжину. Вектори називаються **просторово-подібними**, якщо їх квадрати від'ємні (на рис. 9.1 це вектори $\vec{j}, \vec{d}$), і **часо-подібними**, якщо їх квадрати додатні (на рис. 9.1 вектори $\vec{i}, \vec{b}$). Вибрана система координат – ортонормована

$$\vec{e}_0^{\,2} = 1,\ \vec{e}_1^{\,2} = -1.$$

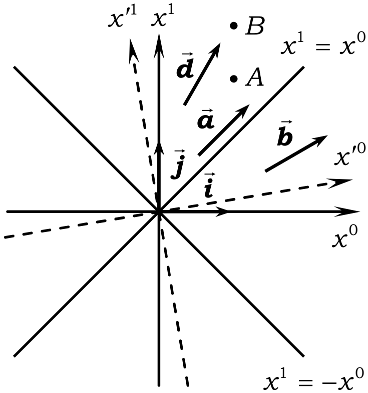

Рис. 9.1. Псевдоевклідова площина

Якщо записати двовимірне перетворення Лоренца у вигляді

$$x^0 = \alpha x'^0 + \beta x'^1,\ x^1 = \gamma x'^0 + \delta x'^1,$$

то з умови збереження квадрата двовимірного вектора

$$(x^0)^2 - (x^1)^2 = (x'^0)^2(\alpha^2 - \gamma^2) - (x'^1)^2(\delta^2 - \beta^2) + 2x'^0 x'^1\left(\gamma\delta - \alpha\beta\right)$$

випливає, що $\alpha = \delta = \operatorname{ch}\varphi, \gamma = \beta = \operatorname{sh}\varphi$, тобто

$$x^0 = x'^0 \operatorname{ch}\varphi + x'^1 \operatorname{sh}\varphi,\ x^1 = x'^0 \operatorname{sh}\varphi + x'^1 \operatorname{ch}\varphi, \tag{9.2}$$

$$\operatorname{ch}\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2\varphi}},\ \operatorname{sh}\varphi = \frac{\operatorname{th}\varphi}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2\varphi}}. \tag{9.3}$$

Тут $\operatorname{th}\varphi$ – параметр, що визначає перетворення. Знайдемо його для випадку, коли просторовий рух одновимірний (уздовж осі Ox) і штрихована інерціальна система координат S' рухається відносно нештрихованої інерціальної системи координат S зі швидкістю v. Ясно, що точка, яка знаходиться у стані спокою в нештрихованій інерціальній системі координат, повинна рухатися зі швидкістю $-v$ відносно штрихованої системи. З іншого боку, якщо точка є нерухомою в S, то $dx^0 = 0 = dx'^0 \operatorname{ch}\varphi + dx'^1 \operatorname{sh}\varphi$. Звідки $\dfrac{dx'^0}{dx'^1} \equiv \dfrac{dx'}{cdt'} = -\dfrac{v}{c} = -\operatorname{th}\varphi$, тобто $\operatorname{th}\varphi = \dfrac{v}{c}$. Тому перетворення Лоренца, що зв'язує між собою координату та час однієї і тієї самої події, зареєстрованої у розглянутих двох інерціальних системах відліку, має вигляд

$$ct = \frac{ct' + \frac{v}{c}x'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad x = \frac{vt' + x'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{9.4}$$

Зазначимо, що параметр φ, який визначає перетворення Лоренца, є аналогом кута повороту при обертанні. Послідовне використання двох перетворень із параметрами φ_1, φ_2 рівносильне перетворенню із параметром $\varphi_1 + \varphi_2$ (можна перевірити, перемноживши відповідні матриці переходу). Розглянуте перетворення Лоренца (9.4) можна тлумачити як відображення площини (ct, x) у саму себе при фіксованому початку координат. Воно називається **гіперболічним поворотом** площини (відносно прямих $ct = \pm x^1$), яка при цьому повороті переходить сама в себе. Назва пояснюється тим, що при такому перетворенні гіперболи $(ct)^2 - (x^1)^2 = C$, $C = \text{const}$, також переходять самі в себе.

Підбираючи φ, можна перевести вісь x^1 у довільне із просторово-подібних положень, які у цій теорії рівноправні (подібно до того, як на евклідовій площині взагалі всі напрямки x рівноправні). Відповідно змінюється і вісь x^0. З огляду на це слід зазначити таке: зображення осей x^0 та x^1 взаємно перпендикулярними жодного значення не має, осі x'^0, x'^1 анітрохи не гірші за x^0, x^1.

Осі x'^0, x'^1 та x^0, x^1 на рис. 9.1 – це власні осі часу і простору для двох спостерігачів, що рухаються один відносно одного зі швидкістю $v = c\,\mathrm{th}\,\varphi$. Оскільки $|\mathrm{th}\,\varphi| < 1$, то ця швидкість менша за c (гранична швидкість поширення сигналів дорівнює швидкості світла, тоді і гранична відносна швидкість руху спостерігачів дорівнює c). Із рис. 9.1 стає зрозумілим поняття відносності подій: так події A, B, одночасні з погляду першого із спостерігачів, не є одночасними із точки зору іншого.

У просторі Мінковського розмірності $n > 2$ сукупність просторово-подібних радіус-векторів відокремлена від сукупності часо-подібних *світловим конусом нульової довжини.*

§ 3. Тензорне числення у псевдоевклідовому просторі спеціальної теорії відносності

У спеціальній теорії відносності довільну подію прийнято характеризувати трьома просторовими координатами x, y, z та моментом часу t, у який вона відбулася. Інтервалом між двома подіями x_1, y_1, z_1, t_1 та x_2, y_2, z_2, t_2 називається величина S_{21}, квадрат якої задається виразом

$$S_{21}^2 = c^2\left(t_2 - t_1\right)^2 - \left(x_2 - x_1\right)^2 - \left(y_2 - y_1\right)^2 - \left(z_2 - z_1\right)^2 . \quad (9.5)$$

Згідно з основним постулатом теорії відносності інтервал між подіями має однаковий вигляд та числове значення у всіх інерціальних системах відліку. Іншими словами, квадратична форма (9.5) є інваріантом, тобто не залежить від вибору інерціальної системи відліку.

З огляду на це зручно об'єднати звичайний тривимірний простір та час в один чотиривимірний простір Мінковського. У цьому просторі вводитимемо два різновиди координат (контраваріантні й коваріантні) та два типи тензорних індексів (верхні та нижні) подібно до того, як це робилося в розд. 7 при розгляді косокутної системи координат. Кожна точка чотиривимірного псевдоевклідового простору характеризується чотиривимірним радіус-вектором (4-радіус-вектором) із контраваріантними координатами

$$x^0 = ct\,, \quad x^1 = x\,, \quad x^2 = y\,, \quad x^3 = z\,. \quad (9.6)$$

Квадрат відстані між двома точками в цьому чотиривимірному просторі визначається квадратичною формою (9.5), а квадрат 4-радіус-вектора таким виразом:

$$(x^0)^2-(x^1)^2-(x^2)^2-(x^3)^2=g_{ij}x^i x^j\,, \tag{9.7}$$

де коефіцієнти g_{ij} задають метричний тензор

$$\left\|g_{ij}\right\|=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}. \tag{9.8}$$

Перший індекс $i=0,1,2,3$ нумерує рядки матриці (9.8), а другий індекс j – стовпці. Контраваріантний метричний тензор $\left\|g^{ij}\right\|$, який є оберненим до (9.8), як і у тривимірному евклідовому просторі, повинен визначатися зі співвідношення $g_{ik}g^{kl}=\delta_i{}^l$. Тут і далі $\delta_i{}^l$ – символ Кронекера, але чотиривимірний, і використовується таке правило підсумовування: за парою німих індексів, яка складається з одного верхнього і одного нижнього однаково позначених індексів, всюди здійснюється підсумовування в межах від 0 до 3. Легко бачити із (9.8), що контраваріантні компоненти g^{ij} збігаються із коваріантними, тобто $g^{ij}=g_{ij}$.

Компоненти 4-радіус-вектора (9.6) при переході до іншої чотиривимірної системи координат перетворюються за законом

$$x^i=\alpha_k^i x'^k\,, \tag{9.9}$$

де сукупність коефіцієнтів α_k^i складає матрицю лінійного перетворення, яка описує перехід від штрихованої системи координат до нештрихованої. Верхній індекс коефіцієнта α_k^i означає номер рядка, нижній – номер стовпця матриці переходу.

Обернене перетворення (від нештрихованої до штрихованої системи координат) здійснюється за допомогою оберненої до $\left\|\alpha_k^i\right\|$ (9.9) матриці

$$x'^i=\overline{\alpha}_k^i x^k\,, \tag{9.10}$$

$$\overline{\alpha}^i{}_k \alpha^k_l = \delta^i_l . \qquad (9.11)$$

Оскільки перехід до іншої інерціальної системи координат у розглядуваному чотиривимірному просторі не змінює квадратичну форму (9.7), матриці перетворень (9.9) та (9.10) задовольняють співвідношення

$$g_{ik}\alpha^i_l\alpha^k_m = g_{lm}, \quad g_{ik}\overline{\alpha}^i_l\overline{\alpha}^k_m = g_{lm} . \qquad (9.12)$$

Нехай штрихована інерціальна система координат S' рухається відносно нерухомої нештрихованої системи координат S уздовж осі Ox зі швидкістю v (рис. 9.2).

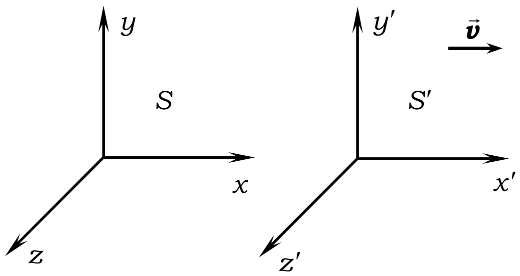

Рис. 9.2. Штрихована інерціальна система координат рухається відносно нерухомої нештрихованої системи координат уздовж осі Ox зі швидкістю v

Однойменні декартові осі паралельні, а в момент часу $t = t' = 0$ початки відліку цих двох координатних систем збіглися. Тоді координати та час однієї і тієї самої події, зареєстрованої у різних указаних інерціальних системах відліку, зв'язані між собою перетворенням Лоренца (див. (9.4))

$$ct = \frac{ct' + \frac{v}{c}x'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad x = \frac{vt' + x'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad y = y', \quad z = z' \qquad (9.13)$$

або у позначеннях чотиривимірного вектора (4-вектора):

$$x^0 = \gamma(x'^0 + \beta x'^1), \quad x^1 = \gamma(x'^1 + \beta x'^0), \quad x^2 = x'^2, \quad x^3 = x'^3, \qquad (9.14)$$

тут і далі використовуються позначення

$$\beta = \frac{v}{c}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} . \tag{9.15}$$

Перетворення (9.14) можна записати у матричному вигляді

$$x^i = \alpha^i_k x'^k ,$$

$$\alpha = \left\| \alpha^i_k \right\| = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \tag{9.16}$$

Формули оберненого перетворення отримуються заміною знака швидкості v:

$$x'^i = \overline{\alpha}^i_k x^k ,$$

$$\overline{\alpha} = \left\| \overline{\alpha}^i_k \right\| = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \tag{9.17}$$

Зазначимо, що (9.16), (9.17) – це приклади матриць перетворень, що фігурують у (9.9), (9.10) і відповідають переходу між системами координат, зображеними на рис. 9.2.

Означення 1. Вектор $\{A^i\}$ у чотиривимірному просторі (**4-вектор**) – це об'єкт, який задається впорядкованим набором із чотирьох величин A^0, A^1, A^2, A^3, які при переході від однієї чотиривимірної системи координат до іншої перетворюються за законом

$$A^i = \alpha^i_k A'^k , \qquad A'^i = \overline{\alpha}^i_k A^k , \tag{9.18}$$

тобто так само, як контраваріантні компоненти 4-радіус-вектора (9.9), (9.10). Говорять також, що $A^i \ (i = \overline{0,3})$ утворюють **контраваріантний 4-вектор**.

За аналогією із компонентами 4-радіус-вектора перша компонента A^0 4-вектора $\{A^i\}$ називається часовою, а три інші

A^1, A^2, A^3 – просторовими. Останні відносно ортогональних перетворень декартових систем координат утворюють звичайний тривимірний вектор $\vec{A}$ і збігаються з декартовими координатами цього вектора A_x, A_y, A_z. Інколи (наприклад, у [2], [19]) використовують такі позначення для 4-вектора:

$$A^i \equiv (A^0, A^1, A^2, A^3) \equiv (A^0, \vec{A}) . \tag{9.19}$$

Як і у випадку 4-радіус-вектора, квадратична форма

$$(A^0)^2 - (A^1)^2 - (A^2)^2 - (A^3)^2 , \tag{9.20}$$

складена із компонент довільного 4-вектора A^i, є інваріантом. Її називають **квадратом 4-вектора**. Квадрат 4-вектора може бути додатним, від'ємним або рівним нулю. Тоді вектори називають, відповідно, часо-подібними, просторово-подібними та нульовими.

Подібно до тривимірних евклідових векторів у косокутному базисі (див. розд. 7), ко- та контраваріантні компоненти 4-вектора зв'язані між собою за допомогою коваріантного g_{ik} та контраваріантного g^{ik} метричних тензорів таким чином:

$$A_i = g_{ik} A^k , \qquad A^i = g^{ik} A_k . \tag{9.21}$$

Якщо метричний тензор вибрано у вигляді (9.8), то зв'язок між ко- та контраваріантними компонентами 4-вектора є таким:

$$A_0 = A^0 , \quad A_1 = -A^1 , \quad A_2 = -A^2 , \quad A_3 = -A^3 . \tag{9.22}$$

Таким чином, один і той самий вектор можна подати як контраваріантними компонентами, так і коваріантними:

$$\{A^i\} = (A^0, \vec{A}) , \ \{A_i\} = (A^0, -\vec{A}) . \tag{9.23}$$

Квадрат 4-вектора (9.20) запишеться так:

$$A_0 A^0 + A_1 A^1 + A_2 A^2 + A_3 A^3 \equiv A_i A^i . \tag{9.24}$$

Скалярний добуток двох 4-векторів $\{A_i\}$ та $\{B^i\}$ має вигляд

$$A_i B^i = A_0 B^0 + A_1 B^1 + A_2 B^2 + A_3 B^3 . \tag{9.25}$$

Один і той самий скалярний добуток можна представити у різних формах:

$$A_i B^i = A^i B_i = g_{ik} A^i B^k = g^{ik} A_i B_k = A_0 B^0 - \vec{A} \cdot \vec{B} = A^0 B_0 - \vec{A} \cdot \vec{B} . \tag{9.26}$$

Скалярний добуток є інваріантним відносно довільних гіперболічних поворотів чотиривимірної координатної системи і, значить, відносно довільних перетворень Лоренца. Іншими словами, скалярний добуток 4-векторів є скаляром чотиривимірного псевдоевклідового простору.

Оскільки квадрат 4-радіус-вектора $x_k x^k$ є скаляром, то коваріантні компоненти x_k 4-радіус-вектора при переході до іншої чотиривимірної системи координат перетворюються за законом

$$x'_k = x_i \alpha^i_k \,, \; x_k = x'_i \bar{\alpha}^i_k \,, \tag{9.27}$$

де коефіцієнти α^i_k, $\bar{\alpha}^i_k$, що утворюють матриці переходу, такі самі, як і в (9.9), (9.10). Коваріантні компоненти довільного 4-вектора перетворюються за законом (9.27).

Диференціал

$$d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x^i} dx^i \tag{9.28}$$

скалярної функції теж є скаляром. Тут його представлено у вигляді скалярного добутку, складеного із операторів диференціювання $\partial / \partial x^i$ та контраваріантних компонент dx^i 4-вектора. Звідси випливає, що і оператори диференціювання $\partial / \partial x^i$ за координатами x^i повинні розглядатися як коваріантні компоненти операторного 4-вектора. Аналогічно оператори диференціювання $\partial / \partial x_i$ за координатами x_i 4-вектора є контраваріантними компонентами операторного 4-вектора:

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} \right\} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla} \right), \qquad \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \right\} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, - \vec{\nabla} \right). \tag{9.29}$$

Чотиривимірний градієнт (4-градієнт), що позначається як ∂_i або ∇_i, є узагальненням градієнта. Отже, 4-градієнт скалярної функції представляє собою такий 4-вектор:

$$\partial_i \Phi \equiv \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial x^i} \right\} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t}, \vec{\nabla} \Phi \right). \tag{9.30}$$

Тоді чотиривимірна дивергенція 4-вектора A^i визначається виразом

$$\frac{\partial A^i}{\partial x^i} = \frac{1}{c}\frac{\partial A^0}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{A} . \qquad (9.31)$$

Означення 2. Чотиривимірним тензором (**4-тензором**) T другого рангу називається об'єкт, який задається впорядкованим набором 16 величин T^{ik}, які при переході до іншої системи координат перетворюються за законом (як добуток відповідних компонент 4-радіус-вектора):

$$T^{ik} = \alpha_l^i \alpha_m^k T'^{lm} , \qquad T'^{ik} = \bar{\alpha}_l^i \bar{\alpha}_m^k T^{lm} . \qquad (9.32)$$

Якщо величини T^{ik} перетворюються за законом (9.32), то вважають також, що вони утворюють контраваріантний тензор другого рангу і записують $T = \{T^{ik}\}$, що означає тензор T із контраваріантними компонентами T^{ik}. Часто про сукупність компонент тензора говорять як про сам тензор, наприклад, двічі контраваріантний тензор T^{ik}.

Чотиривимірний тензор більш високого рангу визначається аналогічно. Один і той самий тензор другого рангу можна задавати різними наборами компонент: контраваріантними T^{ik}, коваріантними T_{ik} або мішаними T_i^k, $T^i{}_k$. Між ними існує зв'язок, утворений за допомогою коваріантного g_{ik} та контраваріантного g^{ik} метричних тензорів, подібний до (9.21), наприклад:

$$T_{ik} = g_{il} g_{km} T^{lm} , \qquad T^{ik} = g^{il} g^{km} T_{lm} . \quad T_i^k = g_{il} g^{km} T^l{}_m . \qquad (9.33)$$

Легко показати, що компоненти метричного тензора g_{ik} та g^{ik} дійсно утворюють тензори відповідної структури подібно до того, як це було зроблено в розд. 7, § 3. Оскільки коваріантні g_{ik} та контраваріантні g^{ik} метричні тензори мають однаковий діагональний вигляд (9.8), то підняття або опускання часового індексу 0 не змінює компоненту 4-тензора, у той час як така сама операція над одним із просторових індексів 1, 2, 3 змінює знак компоненти на протилежний.

Алгебраїчні тензорні операції для 4-тензорів псевдоевклідового простору аналогічні введеним у розд. 3 тензорним операціям над ортогональними тензорами та аналогічним операціям над афінними тензорами (див. розд. 7, § 3). Природно, що лінійні операції можна здійснювати лише над тензорами однакової структури, згортати – за парою індексів, один із яких нижній, інший – верхній. Згортка за двома нижніми або двома верхніми індексами не приводить до утворення нового тензора, тобто не є тензорною операцією.

Одиничний тензор має однаковий вигляд в усіх чотиривимірних системах координат (має структуру одиничної матриці розмірності 4×4). Компоненти одиничного тензора виражаються через символи Кронекера, які позначаються δ_i^j або δ^i_j, причому кожен з індексів може пробігати чотири значення: 0, 1, 2, 3. Величини δ_i^j утворюють одиничний тензор відповідної будови (один раз коваріантний, один раз контраваріантний), аналогічно для δ^i_j. Опускання верхнього індексу одиничного тензора перетворює його на двічі коваріантний метричний тензор g_{ij}, а піднімання нижнього – на двічі контраваріантний g^{ij}.

Уводиться повністю антисиметричний 4-тензор (правильніше 4-псевдотензор) четвертого рангу, складений із 4-символів Леві-Чівіта e^{ijkl} або e_{ijkl}, який теж не змінюється при переході в іншу чотиривимірну систему координат. Компоненти 4-тензора Леві-Чівіта змінюють знак після перестановки довільних двох індексів, тому відмінні від нуля лише ті компоненти, у яких індекси i, j, k, l різні. При цьому $e^{0123}=1$, $e_{0123}=-1$, інші відмінні від нуля компоненти – це компоненти з індексами, які утворюються внаслідок циклічної або антициклічної перестановки індексів у послідовності чисел 0, 1, 2, 3.

Компоненти справжнього 4-тензора четвертого рангу, у яких один індекс часовий, а всі інші – просторові (або навпаки), змінюють знак при інверсії. Але компоненти e^{ijkl} не змінюються при інверсії, оскільки за означенням мають один і той самий вигляд в усіх чотиривимірних системах координат. Тому e^{ijkl} є не справжнім 4-тензором, а 4-псевдотензором.

Узагальнення теореми Остроградського–Гаусса на чотиривимірний псевдоевклідів простір запишеться таким чином:

$$\oint A^i dS_i = \int \frac{\partial A^i}{\partial x^i} d\Omega , \tag{9.34}$$

де A^i – деякий 4-вектор; $d\Omega = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$ – елемент об'єму в чотиривимірному просторі; dS_i – 4-вектор елемента гіперповерхні, контраваріантні компоненти якого

$$dS^0 = dx^1 dx^2 dx^3 ,\ dS^1 = dx^0 dx^2 dx^3 ,$$
$$dS^2 = dx^0 dx^1 dx^3 ,\ dS^3 = dx^0 dx^1 dx^2 .$$

Ліворуч у (9.34) інтегрування здійснюється по замкненій гіперповерхні, праворуч – по 4-об'єму, який знаходиться всередині гіперповерхні.

Контрольні запитання

1. Як означено скалярний добуток векторів у псевдоевклідовому просторі?

2. Чи є метрика псевдоевклідового простору знаковизначеною квадратичною формою?

3. Що називається сигнатурою псевдоевклідового простору?

4. Який простір називається простором Мінковського?

5. Як називається лінійне відображення простору Мінковського в себе, що зберігає квадрати векторів?

6. Дайте фізичну інтерпретацію двовимірного простору Мінковського.

7. Які вектори називаються просторово-подібними і часоподібними?

8. Якому перетворенню еквівалентна послідовність із двох гіперболічних поворотів із параметрами φ_1, φ_2?

9. Яка величина має однакові числові значення в усіх інерціальних системах відліку?

10. Який вигляд має метричний тензор у чотиривимірному просторі спеціальної теорії відносності?

11. Запишіть закон перетворення компонент 4-вектора при переході до іншої чотиривимірної системи координат та формули оберненого перетворення.

12. Якими компонентами задають 4-вектор у псевдоевклідовому просторі?

13. Як зв'язані між собою ко- та контраваріантні компоненти 4-вектора?

14. Як обчислюється скалярний добуток 4-векторів?

15. Якими компонентами представлено чотиривимірний градієнт скалярної функції?

Відповіді, вказівки та розв'язання

1.1. $a_z b_x - a_x b_z$; $d_x f_y - d_y f_x$. **1.2.** а) $-\vec{e}_y$; б) 0.

1.10. $\cos\Phi = \dfrac{\cos\beta - \cos\alpha\cos\gamma}{\sin\alpha\sin\gamma}$.

1.11. $\cos\Phi = \sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi-\varphi') + \cos\theta\cos\theta'$.

1.12. Указівка. Розглянути тотожність:
$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{a}\times\vec{c}) = a^2(\vec{b}\cdot\vec{c}) - (\vec{a}\cdot\vec{b})(\vec{a}\cdot\vec{c})$.

1.13. Указівка. Розглянути тотожність
$(\vec{a}\times\vec{b})\times\left(\vec{a}\times\vec{c}\right) = \vec{a}\,(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ та її аналоги.

1.14. $\sin^2\varphi = \dfrac{1}{\sin^2\gamma}\begin{vmatrix} 1 & \cos\gamma & \cos\beta \\ \cos\gamma & 1 & \cos\alpha \\ \cos\beta & \cos\alpha & 1 \end{vmatrix}$.

1.15. $2V$. **1.16.** $-2a^3$; $-2V$.

1.17. $6V$ ($-6V$), якщо вектори $\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DC}$ утворюють праву (ліву) трійку векторів.

1.19. $\vec{a}' = -\vec{n}(\vec{a}\cdot\vec{n}) + \vec{n}\times\left(\vec{a}\times\vec{n}\right)$.

1.20. $r - \vec{n}\cdot\vec{r}' + \dfrac{r'^2 - (\vec{n}\cdot\vec{r}')^2}{2r} + o\left(\left(\dfrac{r'}{r}\right)^2\right)$, де $\vec{n} = \dfrac{\vec{r}}{r}$.

1.21. $\dfrac{1}{r} + \dfrac{\vec{n}\cdot\vec{r}'}{r^2} + \dfrac{3(\vec{n}\cdot\vec{r}')^2 - r'^2}{2r^3} + o\left(\left(\dfrac{r'}{r}\right)^2\right)$, де $\vec{n} = \dfrac{\vec{r}}{r}$.

1.22. $(\vec{r}-\vec{r}_1)\cdot\vec{n} = 0$. **1.23.** $(\vec{r}-\vec{r}_1,\vec{r}_2-\vec{r}_1,\vec{a}) = 0$.

1.24. $(\vec{r}-\vec{r}_1,\vec{a},\vec{b}) = 0$. **1.25.** $\vec{r}\cdot(\vec{r}_1\times\vec{r}_2 + \vec{r}_2\times\vec{r}_3 + \vec{r}_3\times\vec{r}_1) = (\vec{r}_1,\vec{r}_2,\vec{r}_3)$.

1.26. $\vec{r}\cdot\vec{n} = d$. **1.27.** $(\vec{r}-\vec{r}_1)\cdot\vec{n} = 0$.

1.28. $\left(\vec{r}-\vec{r}_1\right)\times\vec{a} = 0$. **1.29.** $d = \dfrac{\left|\vec{r}_1\times\vec{a}\right|}{a}$.

1.30. $d=\dfrac{|\vec{A}\cdot\vec{b}+\vec{B}\cdot\vec{a}|}{|\vec{a}\times\vec{b}|}$; $\vec{A}\cdot\vec{b}+\vec{B}\cdot\vec{a}=0$. **1.31.** $d=\dfrac{|\alpha-\vec{r}_1\cdot\vec{N}|}{N}$.

1.32. а) $\dfrac{\alpha^2\vec{b}+\beta^2\vec{a}(\vec{a}\cdot\vec{b})-\alpha\beta\vec{a}\times\vec{b}}{\alpha(\alpha^2+\beta^2a^2)}$; б) $\dfrac{\vec{a}+\vec{b}\times\vec{a}+\vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{b})}{1+b^2}$.

1.33. $\dfrac{\vec{a}\times\vec{q}+p\vec{b}}{\vec{a}\cdot\vec{b}}$. **1.34.** а) $x=\dfrac{(\vec{b},\vec{c},\vec{d})}{(\vec{a},\vec{b},\vec{c})}$, $y=\dfrac{(\vec{c},\vec{a},\vec{d})}{(\vec{a},\vec{b},\vec{c})}$,

$z=\dfrac{(\vec{a},\vec{b},\vec{d})}{(\vec{a},\vec{b},\vec{c})}$; б) $x=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{d}}{(\vec{a},\vec{b},\vec{c})}$, $y=\dfrac{\vec{b}\cdot\vec{d}}{(\vec{a},\vec{b},\vec{c})}$, $z=\dfrac{\vec{c}\cdot\vec{d}}{(\vec{a},\vec{b},\vec{c})}$.

1.35. Указівка. Якщо $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})\neq 0$, то розв'язок системи рівнянь визначає радіус-вектор точки перетину трьох площин із нормалями $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$, відповідно. Тому радіус-вектор $\vec{x}$ має бути перпендикулярним одночасно до векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$; шукати його треба у вигляді розкладу $\vec{x}=p(\vec{b}\times\vec{c})+q(\vec{c}\times\vec{a})+r(\vec{a}\times\vec{b})$, де p, q, r – скалярні (правильніше – псевдоскалярні, див. розд. 5) величини, які легко знайти, підставивши такий розклад послідовно у три вихідні рівняння системи.

Відповідь: $\vec{x}=\dfrac{\alpha(\vec{b}\times\vec{c})+\beta(\vec{c}\times\vec{a})+\gamma(\vec{a}\times\vec{b})}{(\vec{a},\vec{b},\vec{c})}$.

2.1. а) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}\alpha&0&\beta\\0&-1&0\\\pm\beta&0&\mp\alpha\end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix}0&\alpha&0\\0&0&\alpha\\1&0&0\end{pmatrix}$,

причому $\alpha=\pm1$.

2.2. $\begin{pmatrix}0&1/\sqrt{2}&1/\sqrt{2}\\0&-1/\sqrt{2}&1/\sqrt{2}\\1&0&0\end{pmatrix}$.

2.4. а) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$.

2.5. а) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix}$,

в) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **2.6.** $\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

2.7. $\begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\theta & -\sin\varphi & \cos\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\cos\theta & \cos\varphi & \sin\varphi\sin\theta \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$.

2.8. а) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, в) $\begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 1/3 & -2/3 \\ -2/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$,

г) $A = E - 2\vec{n} \otimes \vec{n}$.

2.9. Указівка. Розглянути закон перетворення довільного вектора $\vec{a} = \vec{n}(\vec{a} \cdot \vec{n}) + \vec{n} \times (\vec{a} \times \vec{n}) = \vec{a}_{\parallel} + \vec{a}_{\perp}$ при повороті на кут φ відносно $\vec{n}$.

Відповіді:

а) $$\begin{pmatrix} \frac{1+2\cos\varphi}{3} & \frac{4}{3}\sin\frac{\varphi}{2}\sin\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{3}\right) & \frac{4}{3}\sin\frac{\varphi}{2}\sin\left(\frac{\varphi}{2}-\frac{\pi}{3}\right) \\ \frac{4}{3}\sin\frac{\varphi}{2}\sin\left(\frac{\varphi}{2}-\frac{\pi}{3}\right) & \frac{1+2\cos\varphi}{3} & \frac{4}{3}\sin\frac{\varphi}{2}\sin\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{3}\right) \\ \frac{4}{3}\sin\frac{\varphi}{2}\sin\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{3}\right) & \frac{4}{3}\sin\frac{\varphi}{2}\sin\left(\frac{\varphi}{2}-\frac{\pi}{3}\right) & \frac{1+2\cos\varphi}{3} \end{pmatrix},$$

б) $\alpha_{ij} = \cos\varphi\,\delta_{ij} + (1-\cos\varphi) n_i n_j + \sin\varphi\, e_{ijk} n_k$.

2.10. а) $|\vec{a}| = 1$, б) $|\vec{a}| = 1$, в) $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, $\beta = \pm 1/2$.

3.1. $$\begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2\cos^2\varphi + I_3\sin^2\varphi & (I_3 - I_2)\sin\varphi\cos\varphi \\ 0 & (I_3 - I_2)\sin\varphi\cos\varphi & I_2\sin^2\varphi + I_3\cos^2\varphi \end{pmatrix}.$$

3.2. Указівка. Порівняти закони перетворення вказаних об'єктів при ортогональних перетвореннях системи координат.

3.3. $t'_{11} = t_{22}$, $t'_{12} = -t_{21}$.

3.4. Скористаємось результатом задачі 3.2: компоненти тензора перетворюються за таким самим законом, що й добутки відповідних координат вектора (тут порядок множників принциповий). Наприклад, компонента t'_{11} перетворюється за таким самим законом, як $x'_1 x'_1 = (-x_1)(-x_1) = x_1 x_1$, тобто $t'_{11} = t_{11}$, компонента t'_{12} – як $x'_1 x'_2 = (-x_1)(-x_2) = x_1 x_2$, тобто $t'_{12} = t_{12}$, тощо.

Відповідь: $\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & -t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & -t_{23} \\ -t_{31} & -t_{32} & t_{33} \end{pmatrix}$.

3.5. $(t_{22} - t_{11})\sin\varphi\cos\varphi + t_{12}\cos 2\varphi$.

3.6. Поворот навколо осі Oz на кут $\varphi = \dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{2t_{12}}{t_{11} - t_{22}}$.

3.7. а), д) $\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & 0 \\ t_{21} & t_{22} & 0 \\ 0 & 0 & t_{33} \end{pmatrix}$; б), г) $\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & 0 \\ -t_{12} & t_{11} & 0 \\ 0 & 0 & t_{33} \end{pmatrix}$; в), є) $\begin{pmatrix} t_{11} & 0 & 0 \\ 0 & t_{22} & 0 \\ 0 & 0 & t_{33} \end{pmatrix}$.

3.8. $(\lambda_{123} - \lambda_{132} + \lambda_{133} - \lambda_{122})/2$.

3.9. Рівними нулю будуть усі компоненти, у яких індекс 3 зустрічається непарну кількість разів. Відмінні від нуля: λ_{1111}, λ_{2222}, λ_{1122}, λ_{1133}, λ_{1222}, λ_{1112}, λ_{2233}, λ_{1233}, λ_{3333} та їх симетричні перестановки.

3.10. 21.

3.11. Три лінійно незалежні компоненти: $\lambda_{1111} = \lambda_{2222} = \lambda_{3333}$, $\lambda_{1212} = \lambda_{1313} = \lambda_{2323}$, $\lambda_{1122} = \lambda_{2233} = \lambda_{1133}$ та їх симетричні перестановки.

3.12. а) три компоненти, $\lambda_{1111} = \lambda_{2222} = \lambda_{3333} = \alpha$, $\lambda_{1122} = \lambda_{1133} = \lambda_{2233} = \beta$, $\lambda_{1212} = \lambda_{1313} = \lambda_{2323} = \gamma$;

б) п'ять компонент, $\lambda_{1111} = \lambda_{2222}$, λ_{3333}, λ_{1122}, $\lambda_{1133} = \lambda_{2233}$, $\lambda_{1313} = \lambda_{2323}$, $\lambda_{1212} = (\lambda_{1111} - \lambda_{1122})/2$.

3.13. Дві лінійно незалежні компоненти. Відповідь до задачі 3.12 доповнюється додатковою умовою $\lambda_{1111} - \lambda_{1122} = 2\lambda_{1212}$.

3.14. а) $\vec{a}(\vec{b}\cdot\vec{c})$, б) $(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$, в) $b^2\vec{a}$, г) 0.

3.15. $0,\ \begin{pmatrix} \varepsilon_{11}-\varepsilon_{13}\varepsilon_{31}/\varepsilon_{33} & \varepsilon_{12}-\varepsilon_{13}\varepsilon_{32}/\varepsilon_{33} & 0 \\ \varepsilon_{21}-\varepsilon_{23}\varepsilon_{31}/\varepsilon_{33} & \varepsilon_{22}-\varepsilon_{23}\varepsilon_{32}/\varepsilon_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

3.16. $t = E\vec{n}^2 - \vec{n}\otimes\vec{n}$.

3.17. Відповідь: а) $\varepsilon_{ij} = A\delta_{ij} + Bs_i s_j$, тензор є одновісним як лінійна комбінація ізотропного та одновісного тензорів; б) $\varepsilon_{ij} = B(s_i s_j - \frac{1}{3}\delta_{ij})$.

4.1. а) $\vec{L} = \omega(0, -I\sin\alpha, I_3\cos\alpha)$,

$$\vec{L}' = \omega\left(0, \frac{(I_3 - I)\sin 2\alpha}{2},\ I\sin^2\alpha + I_3\cos^2\alpha\right),$$

б) $T = T' = \frac{1}{2}\omega^2(I\sin^2\alpha + I_3\cos^2\alpha)$,

в) $\vec{N} = (I - I_3)\omega^2\sin\alpha\cos\alpha\vec{e}_1$, $\vec{N}' = (I - I_3)\omega^2\sin\alpha\cos\alpha\vec{e}_1{}'$.

4.2. $\lambda_{1,2} = \dfrac{t_{11}+t_{22}}{2} \pm \sqrt{\left(\dfrac{t_{11}-t_{22}}{2}\right)^2 + \left(t_{12}\right)^2}$.

4.3. Для всіх матриць $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$. Власні вектори

для σ_1: $\vec{x}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)$, $\vec{x}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$;

для σ_2 : $\vec{x}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(i,1)$, $\vec{x}_2 = (-i,1)$;

для σ_3: $\vec{x}_1 = (0,1)$, $\vec{x}_2 = (1,0)$.

4.4. Указівка. Діагоналізувати тензор поворотом навколо осі Oz на кут $\varphi = \dfrac{1}{2}\mathrm{arctg}\dfrac{2t_{12}}{t_{11}-t_{22}}$. Власні значення

$$\lambda_{1,2} = \frac{t_{11}+t_{22}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{t_{11}-t_{22}}{2}\right)^2 + \left(t_{12}\right)^2}\ ,\ \lambda_3 = t_{33}\ .$$

4.5. $\lambda_1 = a^2$, $\lambda_{2,3} = 0$; $\vec{x}_1 = \dfrac{\vec{a}}{a}$, $\vec{x}_{2,3} \perp \vec{a}$. Можна вибрати $\vec{x}_2 = \dfrac{\vec{a}\times\vec{c}}{\left|\vec{a}\times\vec{c}\right|}$, $\vec{x}_3 = \dfrac{\vec{a}\times(\vec{a}\times\vec{c})}{\left|\vec{a}\times(\vec{a}\times\vec{c})\right|}$, де $\vec{c}$ – довільний вектор, неколінеарний вектору $\vec{a}$. $I_1 = a^2$, $I_2 = I_3 = 0$.

4.6. $\lambda_1 = \vec{a}\cdot\vec{b}$, $\lambda_{2,3} = 0$; $\vec{x}_1 = \vec{a}/a$, $\vec{x}_{2,3} \perp \vec{b}$. Можна вибрати $\vec{x}_2 = \dfrac{\vec{c}\times\vec{b}}{\left|\vec{c}\times\vec{b}\right|}$, $\vec{x}_3 = \dfrac{\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{b})}{\left|\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{b})\right|}$, де $\vec{c}$ – довільний вектор, неколінеарний векторам $\vec{a}$ та $\vec{b}$. $I_1 = \vec{a}\cdot\vec{b}$, $I_2 = I_3 = 0$.

4.7. $\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2,3} = ma^2$; $\vec{x}_1 = \vec{a}/a$, $\vec{x}_{2,3} \perp \vec{a}$. Можна вибрати $\vec{x}_2 = \dfrac{\vec{a}\times\vec{c}}{\left|\vec{a}\times\vec{c}\right|}$, $\vec{x}_3 = \dfrac{\vec{a}\times(\vec{a}\times\vec{c})}{\left|\vec{a}\times(\vec{a}\times\vec{c})\right|}$, де $\vec{c}$ – довільний вектор, неколінеарний вектору $\vec{a}$; $I_1 = 2ma^2$, $I_2 = m^2a^4$, $I_3 = 0$.

4.8. $\lambda_1 = a^2/2$, $\lambda_{2,3} = -\,a^2/2$; $\vec{x}_1 = \vec{a}/a$, $\vec{x}_{2,3} \perp \vec{a}$. Вибір векторів $\vec{x}_2$ і $\vec{x}_3$ вказано у попередній задачі; $I_1 = -\,a^2/2$, $I_2 = -\,a^4/4$, $I_3 = a^6/8$.

4.9. $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1 + \cos\varphi$, $\lambda_3 = 1 - \cos\varphi$;

$$\vec{x}_1 = \frac{\vec{a}\times\vec{b}}{\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|},\quad \vec{x}_2 = \frac{\vec{a}+\vec{b}}{2\left|\cos(\varphi/2)\right|},\quad \vec{x}_3 = \frac{\vec{a}-\vec{b}}{2\left|\sin(\varphi/2)\right|}.$$

$I_1 = 2$, $I_2 = \sin^2\varphi$, $I_3 = 0$.

4.10. $\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2,3} = \vec{a}\cdot\vec{b} \pm ab$; $\vec{x}_1 = \dfrac{\vec{a}\times\vec{b}}{\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|}$, $\vec{x}_2 = \dfrac{1}{2\cos(\varphi/2)}\left(\dfrac{\vec{a}}{a}+\dfrac{\vec{b}}{b}\right)$,

$\vec{x}_3 = \dfrac{1}{2\sin(\varphi/2)}\left(\dfrac{\vec{a}}{a}-\dfrac{\vec{b}}{b}\right)$, де φ – кут між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$.

4.11. $\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2,3} = \pm\, i\omega$; $\vec{x}_1 = \dfrac{\vec{\omega}}{\omega}$, $\vec{x}_{2,3} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{\vec{\omega}\times\vec{e}}{\left|\vec{\omega}\times\vec{e}\right|} \pm i\vec{e}\right)$,

де $\vec{e}$ – одиничний вектор, ортогональний до вектора $\vec{\omega}$;

$I_1 = 0$, $I_2 = -\omega^2$, $I_3 = 0$.

4.12. Див. відповідь до попередньої задачі, де слід покласти $\vec{\omega} = \vec{b}\times\vec{a}$.

4.13. $\lambda_1 = \varepsilon_{\parallel}$, $\lambda_{2,3} = \varepsilon_{\perp} \pm \varepsilon_a$; $\vec{x}_1 = (0,0,1)$, $\vec{x}_{2,3} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,\pm i,0)$.

5.1. $S=\frac{1}{2}\left(\vec{a}\otimes\vec{b}+\vec{b}\otimes\vec{a}\right)$, $A=\frac{1}{2}\left(\vec{a}\otimes\vec{b}-\vec{b}\otimes\vec{a}\right)=\vec{\omega}\times E$,

$\vec{\omega}=(\vec{b}\times\vec{a})/2$.

5.3. $\overline{n_i}=0$, $\overline{n_i n_j}=\delta_{ij}/3$, $\overline{n_i n_j n_k}=0$, $\overline{n_i n_j n_k n_l}=(\delta_{ij}\delta_{kl}+\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{jk}\delta_{il})/15.$

5.4. а) $\frac{1}{3}a^2$; б) $\frac{1}{3}(\vec{a}\cdot\vec{b})$; в) $\frac{1}{3}\vec{a}$; г) $\frac{2}{3}a^2$; д) $\frac{2}{3}(\vec{a}\cdot\vec{b})$;

є) $\frac{1}{15}\left((\vec{a}\cdot\vec{b})(\vec{c}\cdot\vec{d})+(\vec{a}\cdot\vec{c})(\vec{b}\cdot\vec{d})+(\vec{a}\cdot\vec{d})(\vec{b}\cdot\vec{c})\right)$.

5.5. $\frac{4\pi}{3}(\vec{a}\cdot\vec{b})$.

5.6. $\frac{4\pi}{15}\left((\vec{a}\cdot\vec{b})(\vec{c}\cdot\vec{d})+(\vec{a}\cdot\vec{c})(\vec{b}\cdot\vec{d})+(\vec{a}\cdot\vec{d})(\vec{b}\cdot\vec{c})\right)$.

5.7. $I_i(\vec{k})$ утворюють вектор $\vec{I}(\vec{k})=\vec{k}\left(1-I_0\right)/k.$ $J_{ij}(\vec{k})$ утворюють одновісний тензор другого рангу $J_{ij}=C\delta_{ij}+Dk_ik_j$, де $C=\left(I_0k^2-I_0+1\right)\Big/2k^2$, $D=\left(3I_0-3-I_0k^2\right)\Big/2k^4$, $I_0=\frac{1}{2k}\ln\left|\frac{1+k}{1-k}\right|.$

6.1. а) Перший спосіб:

$\vec{\nabla}r^2=\vec{\nabla}(x^2+y^2+z^2)=2(x\vec{e}_x+y\vec{e}_y+z\vec{e}_z)\equiv 2\vec{r}$.

З іншого боку, $\vec{\nabla}r^2=2r\vec{\nabla}r$, звідки $\vec{\nabla}r=\vec{r}/r$.

Другий спосіб: $\vec{\nabla}r=\vec{\nabla}\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\frac{x\vec{e}_x+y\vec{e}_y+z\vec{e}_z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\equiv\frac{\vec{r}}{r}$;

б) $\vec{\nabla}(\vec{a}\cdot\vec{r})=\left(\vec{e}_x\frac{\partial}{\partial x}+\vec{e}_y\frac{\partial}{\partial y}+\vec{e}_z\frac{\partial}{\partial z}\right)(xa_x+ya_y+za_z)=$

$=a_x\vec{e}_x+a_y\vec{e}_y+a_z\vec{e}_z\equiv\vec{a}$;

в) $nr^{n-2}\vec{r}$; г) $\frac{(\vec{a}\cdot\vec{r})\vec{r}}{r}+r\vec{a}$; д) $-\frac{\alpha\vec{r}}{r^3}$; є) $\frac{\vec{r}}{r^2}$;

ж) $(\vec{a}\cdot\vec{\nabla})\vec{r}=\left(a_x\frac{\partial}{\partial x}+a_y\frac{\partial}{\partial y}+a_z\frac{\partial}{\partial z}\right)(x\vec{e}_x+y\vec{e}_y+z\vec{e}_z)=$

$=a_x\vec{e}_x+a_y\vec{e}_y+a_z\vec{e}_z\equiv\vec{a}$.

Зауважимо, що у цьому випадку вектор $\vec{a}$ може бути змінним.

з) $\vec{a}(\vec{r}\cdot\vec{b})+\vec{b}(\vec{r}\cdot\vec{a})$; і) $f(r)\vec{a}+\dfrac{(\vec{a}\cdot\vec{r})\vec{r}}{r}f'(r)$;

к) $2a^2\vec{r}-2\vec{a}(\vec{a}\cdot\vec{r})$; л) $2\vec{a}(\vec{a}\cdot\vec{r})$; м) $\dfrac{r^2\vec{a}-3(\vec{a}\cdot\vec{r})\vec{r}}{r^5}$.

6.2. а) $3,\ 0$; б) $5r^2,\ 0$; в) $(n+3)r^n,\ 0$; г) $2/r,\ 0$; д) $0,\ 0$;

є) $(3-n)r^{-n},\ 0$; ж) $0,\ 2\vec{a}$;

з) $\operatorname{div}(\vec{r}(\vec{a}\cdot\vec{r}))=(\vec{a}\cdot\vec{r})\operatorname{div}\vec{r}+\vec{r}\cdot\vec{\nabla}(\vec{a}\cdot\vec{r})=3(\vec{a}\cdot\vec{r})+\vec{r}\cdot\vec{a}=4(\vec{a}\cdot\vec{r})$, де використано "елементарні" похідні $\operatorname{div}\vec{r}=3$, $\vec{\nabla}(\vec{a}\cdot\vec{r})=\vec{a}$; $\operatorname{rot}(\vec{r}(\vec{a}\cdot\vec{r}))=\vec{a}\times\vec{r}$;

і) $(\vec{a}\cdot\vec{b}),-\vec{a}\times\vec{b}$; к) $nr^{n-2}(\vec{a}\cdot\vec{r}),\ nr^{n-2}\left(\vec{r}\times\vec{a}\right)$; л) $2(\vec{a}\cdot\vec{b}),\ -\vec{a}\times\vec{b}$;

м) $-2\left(\vec{a}\cdot\vec{r}\right),\ 3\vec{r}\times\vec{a}$; н) $0,\ (-r^2\vec{a}+3(\vec{a}\cdot\vec{r})\vec{r})/r^5$;

о) $(\vec{a}\cdot\vec{r})/r^2,\ \left(\vec{r}\times\vec{a}\right)/r^2$; п) $0,\ 3r\vec{a}-\dfrac{(\vec{a}\cdot\vec{r})\vec{r}}{r}$.

6.3. а) $\vec{\nabla}\varphi(r)=\varphi'(r)\vec{\nabla}r\equiv\dfrac{\vec{r}}{r}\varphi'(r)$; б) $\dfrac{\vec{r}}{r}\cdot\vec{A}'(r)$; в) $\dfrac{\vec{r}}{r}\times\vec{A}'(r)$.

6.4. а) $\varphi(r)\vec{a}+\dfrac{\vec{r}}{r}\varphi'(r)(\vec{a}\cdot\vec{r})$; б) $\vec{a}\cdot\vec{A}(r)+(\vec{a}\cdot\vec{r})\left(\dfrac{\vec{r}}{r}\cdot\vec{A}'(r)\right)$;

в) $\vec{a}\times\vec{A}(r)+(\vec{a}\cdot\vec{r})\left(\dfrac{\vec{r}}{r}\times\vec{A}'(r)\right)$; г) $\vec{A}(r)\times\vec{a}+(\vec{A}'(r),\vec{a},\vec{r})\dfrac{\vec{r}}{r}$;

д) $2(\vec{a}\cdot\vec{A}(r))+\left(r\vec{a}-(\vec{a}\cdot\vec{r})\dfrac{\vec{r}}{r}\right)\cdot\vec{A}'(r)$; є) $\vec{a}\times\left(\vec{A}(r)+(\vec{r}\cdot\vec{A}'(r))\dfrac{\vec{r}}{r}\right)$.

6.5. а) $\varphi''(r)+\dfrac{2}{r}\varphi'(r)$; б) $\dfrac{\varphi''(r)}{r}$;

в) $\vec{A}''(r)+\dfrac{2}{r}\vec{A}'(r)$; г) $n(n-3)(\vec{a}\cdot\vec{r})r^{-n-2}$.

6.6. а) $i\vec{k}e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$; б) $\dfrac{ik\vec{r}}{r}e^{ikr}$; в) $\dfrac{(ikr-1)\vec{r}}{r^3}e^{ikr}$; г) $\left(\vec{a}+i\vec{k}(\vec{r}\cdot\vec{a})\right)e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$;

д) $i(\vec{k}\cdot\vec{a})e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$; є) $i(\vec{k}\times\vec{a})e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$; ж) $e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\left[\dfrac{\vec{r}}{r}\cdot\vec{A}'(r)+i\vec{k}\cdot\vec{A}(r)\right]$;

з) $\dfrac{ikr-1}{r^3}(\vec{a}\cdot\vec{r})e^{ikr}$; і) $\dfrac{ikr-1}{r^3}\left(\vec{r}\times\vec{a}\right)e^{ikr}$; к) $-k^2e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$;

л) $-\dfrac{2i(\vec{k}\cdot\vec{r})+k^2r^2}{r^3}e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$; м) $\left(\dfrac{2ik}{r}-k^2\right)e^{ikr}$.

6.7. c/r^3, де $c = \text{const}$.

6.8. c/r, де $c = \text{const}$.

6.9. 0; $2\varphi(r)\vec{a}+\varphi'(r)\dfrac{\vec{r}\times(\vec{a}\times\vec{r})}{r}$.

6.10. $\dfrac{e}{2mc}\left[\vec{B}\times\left(\vec{p}-\dfrac{e}{c}\vec{A}\right)\right]$.

6.11. а) $(\vec{a}\cdot\vec{\nabla})\vec{\nabla}\varphi$, б) $\varphi\,\text{grad}(\text{div}\,\vec{A})+\text{grad}\,\varphi\,\text{div}\,\vec{A}+$

$$+(\text{grad}\,\varphi\cdot\vec{\nabla})\vec{A}+(\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\,\text{grad}\,\varphi+\text{grad}\,\varphi\times\text{rot}\,\vec{A}.$$

6.12. а) $3\varphi(r)+r\varphi'(r)$; б) 0; в) $\varphi(r)\vec{a}+\varphi'(r)(\vec{a}\cdot\vec{r})(\vec{r}/r)$.

6.13. $\dfrac{1}{r^2}\left(\varphi''(r)-\dfrac{\varphi'(r)}{r}\right)\vec{r}\times(\vec{r}\times\vec{a})-2\vec{a}\dfrac{\varphi'(r)}{r}$.

6.14. а) $\vec{A}(r)+(\vec{r}\cdot\vec{A}'(r))(\vec{r}/r)$;

б) $(\vec{A}'(r)\cdot\vec{B}(r)+\vec{A}(r)\cdot\vec{B}'(r))(\vec{r}/r)$;

в) $\left(\varphi(r)(\vec{r}\cdot\vec{A}'(r))+\varphi'(r)(\vec{r}\cdot\vec{A})\right)/r$;

г) $\varphi(r)\dfrac{\vec{r}}{r}\times\vec{A}'(r)+\varphi'(r)\dfrac{\vec{r}}{r}\times\vec{A}(r)$; д) $\dfrac{(\vec{a}\cdot\vec{r})}{r}\varphi'(r)$;

є) $\dfrac{(\vec{a}\cdot\vec{r})}{r}\left(\varphi'(r)\vec{A}(r)+\varphi(r)\vec{A}'(r)\right)$;

ж) 0; з) $\varphi'(r)+\dfrac{2}{r}\varphi(r)$; і) $\dfrac{\vec{r}\times\vec{a}}{r^3}$; к) $\left[\vec{A}'(r)\times\dfrac{(\vec{r}\times\vec{a})}{r}\right]$.

6.15. а) $2a^2$; б) $4a^2$; в) $-2\vec{a}$.

6.16. а) $\dfrac{d\varphi}{df}\vec{\nabla}f$; б) $\dfrac{d\vec{A}}{df}\cdot\vec{\nabla}f$; в) $\vec{\nabla}f\times\dfrac{d\vec{A}}{df}$.

6.17. Указівка: а) помножити ліворуч обидві частини тотожності скалярно на довільний сталий вектор $\vec{c}$ і скористатися теоремою Стокса,

$$\vec{c}\cdot\oint_{L(S)}\varphi\,d\vec{l}=\oint_{L(S)}\vec{c}\varphi\cdot d\vec{l}=\int_S\text{rot}(\vec{c}\varphi)\cdot d\vec{S}=$$

$$=-\int_S(\vec{c}\times\vec{\nabla}\underline{\varphi})\cdot\vec{n}dS=\vec{c}\cdot\int_S(\vec{n}\times\vec{\nabla})\varphi dS.$$

Оскільки остання рівність задовольняється для довільного $\vec{c}$, то справедлива тотожність $\oint\limits_{L(S)} \varphi d\vec{l} = \int\limits_S (\vec{n}\times\vec{\nabla})\varphi dS;$

б) $\oint\limits_{L(S)} \vec{\nabla}\underline{\varphi}\cdot d\vec{l} = \int\limits_S \operatorname{rot}\left(\vec{\nabla}\underline{\varphi}\right)\cdot d\vec{S} = 0;$

в) $\vec{c}\cdot \oint\limits_{L(S)} \vec{\tau}\times\vec{A}dl = -\oint\limits_{L(S)} (\vec{c}\times\vec{A})\cdot d\vec{l} = -\int\limits_S (\vec{\nabla}\times(\vec{c}\times\underline{\vec{A}}))\cdot d\vec{S} =$

$$= -\int\limits_S \vec{n}\cdot(\vec{\nabla}\times(\vec{c}\times\underline{\vec{A}}))dS = \int\limits_S \vec{n}\cdot(\vec{\nabla}\times(\underline{\vec{A}}\times\vec{c}))\, dS =$$

$$= \int\limits_S (\vec{n}\times\vec{\nabla})\cdot(\underline{\vec{A}}\times\vec{c})\, dS = \int\limits_S (\vec{n}\times\vec{\nabla})\times\vec{A}dS\cdot\vec{c}.$$

6.18. $\int\limits_V \left((\Delta\varphi)^2 + \operatorname{grad}\varphi\cdot\operatorname{grad}\Delta\varphi\right)dV.$ **6.19.** $\oint\limits_{S(V)} \varphi\operatorname{rot}\vec{A}\cdot\vec{n}\,dS.$

6.20. а) $\vec{a}V$; б) $\vec{a}V$; в) $3\vec{a}V$; г) $-2\vec{a}\int f(r)dV + \int\frac{f'(r)}{r}\vec{r}\times(\vec{r}\times\vec{a})dV;$

д) $-2(\vec{a}\cdot\vec{b})V.$

6.21. $(\vec{n}\times\vec{a})S.$ **6.22.** $3S\vec{n}$.

6.24. а) $\int\limits_V 4(\vec{a}\cdot\vec{r})dV$; б) $\int\limits_V \vec{a}\,\frac{df(\vec{a}\cdot\vec{r})}{d(\vec{a}\cdot\vec{r})}dV$; в) $\int\limits_V \vec{a}\cdot\operatorname{grad}\varphi dV;$

г) $\int\limits_V \frac{\vec{r}\times\vec{a}}{r}f'(r)dV$; д) $-2\int\limits_V (\vec{a}\cdot\vec{r})dV.$

6.25. а) $\int\limits_V \left(\varphi\operatorname{div}\vec{A} + \vec{A}\cdot\operatorname{grad}\varphi\right)dV$; б) $\int\limits_V \left(\vec{B}\cdot\operatorname{rot}\vec{A} - \vec{A}\cdot\operatorname{rot}\vec{B}\right)dV;$

в) $\int\limits_V \left(\varphi\operatorname{div}(\psi\operatorname{grad}\chi) + \psi\operatorname{grad}\varphi\cdot\operatorname{grad}\chi\right)dV;$

г) $\int\limits_V \operatorname{grad}\varphi\cdot\operatorname{rot}\vec{A}dV$; д) $\int\limits_V \Delta\varphi dV;$

є) $-\int\limits_V \left((\Delta\vec{A})^2 + \operatorname{rot}\vec{A}\cdot\Delta\operatorname{rot}\vec{A}\right)dV;$

ж) $\int\limits_V \left(\vec{B}\times\operatorname{rot}\vec{A} + (\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{B} + \vec{A}\times\operatorname{rot}\vec{B} - \vec{A}\operatorname{div}\vec{B}\right)dV$.

6.26. а) $\int\limits_V \left(\vec r \times \operatorname{rot}\vec A + (\vec r\cdot\vec\nabla)\vec A + \vec A\right)dV$; б) $\int\limits_V i\vec a\cdot\vec k e^{i\vec k\cdot\vec r}\,dV$;

в) $\int\limits_V i\vec a\times\vec k\, e^{i\vec k\cdot\vec r}dV$; г) $\int\limits_V \vec a\cdot\left(i\vec k - \frac{\vec r}{r^2}\right)\frac{e^{i\vec k\cdot\vec r}}{r}dV$.

6.27. а) $\int\limits_S ie^{i\vec k\cdot\vec r}\left(\vec k\times\vec a\right)\cdot\vec n\,dS$; б) $\int\limits_S i\vec a\times\left(\vec n\times\vec k\right)e^{i\vec k\cdot\vec r}dS$;

в) $\int\limits_S \frac{e^{i\vec k\cdot\vec r}}{r^3}\left(\vec a\times\left(-i\vec k r^2+\vec r\right)\right)\cdot d\vec S$.

6.28. Указівка. Скористатися векторною тотожністю: $\vec j\cdot\operatorname{grad}\left(\vec c\cdot\vec r\right) = \operatorname{div}\left(\vec j\left(\vec c\cdot\vec r\right)\right) - \left(\vec c\cdot\vec r\right)\operatorname{div}\vec j$, де $\vec c$ – довільний сталий вектор.

6.29. Указівка. $\Delta\frac{1}{\left|\vec r-\vec r'\right|} = -4\pi\delta\left(\vec r-\vec r'\right)$.

8.1. $H_\xi = H_\eta = \frac{a}{\operatorname{ch}\xi-\cos\eta}$, $H_\alpha = \frac{a\sin\eta}{\operatorname{ch}\xi-\cos\eta}$.

8.2. $H_\rho = H_\xi = \frac{a}{\operatorname{ch}\rho-\cos\xi}$, $H_\alpha = \frac{a\operatorname{sh}\rho}{\operatorname{ch}\rho-\cos\xi}$.

8.3. а) $T=\frac{m}{2}\left(\dot\rho^2+\rho^2\dot\varphi^2+\dot z^2\right)$; б) $T=\frac{m}{2}\left(\dot r^2+r^2\dot\theta^2+r^2\sin^2\theta\dot\varphi^2\right)$;

в) $T=\frac{m}{2}\left((u^2+v^2)(\dot u^2+\dot v^2)+u^2v^2\dot\varphi^2\right)$.

8.4. $T=\frac{m}{2}\left(H_1^2\left(\dot q^1\right)^2+H_2^2\left(\dot q^2\right)^2+H_3^2\left(\dot q^3\right)^2\right)$, де H_i – параметри Ламе, q^i – узагальнені координати.

8.5. Відмінні від нуля похідні:

а) у циліндричній системі координат $\frac{\partial\vec e_\rho}{\partial\varphi}=\vec e_\varphi$, $\frac{\partial\vec e_\varphi}{\partial\varphi}=-\vec e_\rho$;

б) у сферичній системі координат $\frac{\partial\vec e_r}{\partial\theta}=\vec e_\theta$, $\frac{\partial\vec e_r}{\partial\varphi}=\sin\theta\,\vec e_\varphi$,

$\frac{\partial\vec e_\theta}{\partial\theta}=-\vec e_r$, $\frac{\partial\vec e_\theta}{\partial\varphi}=\cos\theta\,\vec e_\varphi$, $\frac{\partial\vec e_\varphi}{\partial\varphi}=-\sin\theta\,\vec e_r-\cos\theta\,\vec e_\theta$.

Указівка. Порівнюючи дві формули:

$$\frac{\partial\vec e_i}{\partial q^j}=\sum_k \vec e_k\Gamma^k_{ij}=\sum_{k,l}\vec e_k g^{kl}\Gamma_{ij,l}=\frac{1}{2}\sum_k\frac{\vec e_k}{H_k^2}\left\{\frac{\partial g_{ki}}{\partial q^j}+\frac{\partial g_{kj}}{\partial q^i}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k}\right\}=$$

$$=\vec e_{(i)}\frac{\partial H_i}{\partial q^j}+\vec e_{(j)}\frac{\partial H_j}{\partial q^i}-\delta_{ij}H_i\vec\nabla H_i \quad \text{та} \quad \frac{\partial\vec e_i}{\partial q^j}=\vec e_{(i)}\frac{\partial H_i}{\partial q^j}+H_i\frac{\partial\vec e_{(i)}}{\partial q^j},$$

знаходимо $\frac{\partial\vec e_{(i)}}{\partial q^j}=\frac{\vec e_{(j)}}{H_i}\frac{\partial H_j}{\partial q^i}-\delta_{ij}\vec\nabla H_i$.

8.6. $u_{\rho\rho}=\frac{\partial u_\rho}{\partial\rho},\ u_{\varphi\varphi}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{u_\rho}{\rho},\ u_{zz}=\frac{\partial u_z}{\partial z},\ 2u_{\varphi z}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial u_z}{\partial\varphi}+\frac{\partial u_\varphi}{\partial z};$

$$2u_{\rho z}=\frac{\partial u_\rho}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial\rho},\ 2u_{\rho\varphi}=\frac{\partial u_\varphi}{\partial\rho}-\frac{u_\varphi}{\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u_\rho}{\partial\varphi}.$$

8.7. $u_{rr}=\frac{\partial u_r}{\partial r},\ u_{\theta\theta}=\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+\frac{u_r}{r}, u_{\varphi\varphi}=\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{u_\theta}{r}\operatorname{ctg}\theta+\frac{u_r}{r},$

$$2u_{\theta\varphi}=\frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial\theta}-u_\varphi\operatorname{ctg}\theta\right)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial\varphi},$$

$$2u_{r\theta}=\frac{\partial u_\theta}{\partial r}-\frac{u_\theta}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta},\ 2u_{\varphi r}=\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_r}{\partial\varphi}+\frac{\partial u_\varphi}{\partial r}-\frac{u_\varphi}{r}.$$

8.8. Відповідь:

$$u_{(ij)}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{H_j}\frac{\partial u_{(i)}}{\partial q^j}+\frac{1}{H_i}\frac{\partial u_{(j)}}{\partial q^i}\right]-\frac{1}{2H_iH_j}\left[u_{(j)}\frac{\partial H_j}{\partial q^i}+u_{(i)}\frac{\partial H_i}{\partial q^j}\right]+$$

$$+\delta_{ij}\frac{1}{H_i}(\vec u\cdot\vec\nabla)H_i.$$

Указівка. З означення (див. задачу 8.6) маємо

$$\frac{\delta l}{l}=\vec s\cdot\left(\vec s\cdot\vec\nabla\right)\vec u=\sum_{i,j,k=1}^{3}s_{(i)}s_{(j)}\frac{\vec e_{(i)}}{H_j}\frac{\partial}{\partial q^j}\left(u_{(k)}\vec e_{(k)}\right).$$

Компоненти тензора деформацій зручно знаходити за формулами

$u_{(ij)}=\frac{1}{2}(\omega_{(ij)}+\omega_{(ji)})$, де $\omega_{(ij)}=\frac{1}{H_j}\left(\frac{\partial u_{(i)}}{\partial q^j}+\sum_{k=1}^{3}u_{(k)}\vec e_{(i)}\cdot\frac{\partial\vec e_{(k)}}{\partial q^j}\right)$, користуючись результатами задачі 8.5 для відповідних криволінійних систем; можна також використати представлення тензора деформацій через коваріантні похідні вектора зміщень $u_{ij} = \frac{1}{2}(u_{j,i} + u_{i,j})$ та відповідні фізичні компоненти:

$$u_{(ij)} = \frac{u_{ij}}{H_i H_j} = \frac{1}{2H_i H_j}(u_{i,j} + u_{j,i}),$$

оскільки $u_{ij}\vec{e}^i \otimes \vec{e}^j = \frac{u_{ij}}{H_i H_j}\vec{e}_{(i)} \otimes \vec{e}_{(j)} = u_{(ij)}\vec{e}_{(i)} \otimes \vec{e}_{(j)}$.

8.9. $$\Delta f = \frac{1}{r(a + r\cos\theta)}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left[r(a + r\cos\theta)\frac{\partial f}{\partial r}\right] + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[(a + r\cos\theta)\frac{\partial f}{\partial\theta}\right] + \frac{r}{a + r\cos\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}\right\}.$$

8.10. $$L_x = -z\left(\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{\cos\varphi}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) + \rho\sin\varphi\frac{\partial}{\partial z},$$
$$L_y = z\left(\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\rho} - \frac{\sin\varphi}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) - \rho\cos\varphi\frac{\partial}{\partial z},\ L_z = \frac{\partial}{\partial\varphi}.$$

8.11. $$L_x = -\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} - \cos\varphi\operatorname{ctg}\theta\frac{\partial}{\partial\varphi},$$
$$L_y = \cos\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} - \sin\varphi\operatorname{ctg}\theta\frac{\partial}{\partial\varphi},\ L_z = \frac{\partial}{\partial\varphi}.$$

8.12. а) $$\left((\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{A}\right)_\rho = A_\rho\frac{\partial A_\rho}{\partial\rho} + \frac{A_\varphi}{\rho}\frac{\partial A_\rho}{\partial\varphi} - \frac{A_\varphi^2}{\rho} + A_z\frac{\partial A_\rho}{\partial z},$$
$$\left((\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{A}\right)_\varphi = A_\rho\frac{\partial A_\varphi}{\partial\rho} + \frac{A_\varphi}{\rho}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{A_\rho A_\varphi}{\rho} + A_z\frac{\partial A_\varphi}{\partial z},$$
$$\left((\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{A}\right)_z = A_\rho\frac{\partial A_z}{\partial\rho} + \frac{A_\varphi}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial\varphi} + A_z\frac{\partial A_z}{\partial z}.$$

б) $$\left((\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{A}\right)_r = A_r\frac{\partial A_r}{\partial r} + \frac{A_\theta}{r}\frac{\partial A_r}{\partial\theta} + \frac{A_\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{A_\theta^2 + A_\varphi^2}{r},$$
$$\left((\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{A}\right)_\theta = A_r\frac{\partial A_\theta}{\partial r} + \frac{A_\theta}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial\theta} + \frac{A_\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi} + \frac{A_r A_\theta}{r} - \frac{A_\varphi^2\operatorname{ctg}\theta}{r},$$
$$\left((\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{A}\right)_\varphi = A_r\frac{\partial A_\varphi}{\partial r} + \frac{A_\theta}{r}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\theta} + \frac{A_\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{A_\varphi A_r}{r} + \frac{A_\theta A_\varphi\operatorname{ctg}\theta}{r}.$$

8.13. Указівка. $\left(\vec{\nabla}\cdot t\right)_{(j)}=\sum_i t^{ij}_{,i}H_j=\sum_i\frac{H_j}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial q^i}\left(\sqrt{g}t^{ij}\right)+H_j\sum_{i,l}\Gamma^j_{li}t^{li}=$

$$=\frac{H_j}{\sqrt{g}}\sum_i\frac{\partial}{\partial q^i}\left(\sqrt{g}\,\frac{t_{(ij)}}{H_iH_j}\right)+\sum_{i,l}\frac{t_{(il)}}{H_iH_l}\vec{e}_{(j)}\cdot\frac{\partial}{\partial q^i}\left(H_l\vec{e}_{(l)}\right).$$

Скористатися результатом задачі 8.5.

а) $(\vec{\nabla}\cdot t)_\rho=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho t_{\rho\rho})+\frac{1}{\rho}\frac{\partial t_{\rho\varphi}}{\partial\varphi}-\frac{1}{\rho}t_{\varphi\varphi}+\frac{\partial t_{\rho z}}{\partial z}$,

$(\vec{\nabla}\cdot t)_\varphi=\frac{1}{\rho}\frac{\partial t_{\varphi\varphi}}{\partial\varphi}+\frac{\partial t_{\rho\varphi}}{\partial\rho}+\frac{2}{\rho}t_{\rho\varphi}+\frac{\partial t_{\varphi z}}{\partial z}$,

$(\vec{\nabla}\cdot t)_z=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho t_{\rho z})+\frac{1}{\rho}\frac{\partial t_{\varphi z}}{\partial\varphi}+\frac{\partial t_{zz}}{\partial z}$;

б) $(\vec{\nabla}\cdot t)_r=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2t_{rr})+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(t_{r\theta}\sin\theta)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial t_{r\varphi}}{\partial\varphi}-\frac{t_{\theta\theta}+t_{\varphi\varphi}}{r}$,

$(\vec{\nabla}\cdot t)_\theta=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2t_{r\theta})+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(t_{\theta\theta}\sin\theta)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial t_{\theta\varphi}}{\partial\varphi}+\frac{t_{r\theta}}{r}-\frac{\operatorname{ctg}\theta}{r}t_{\varphi\varphi}$,

$(\vec{\nabla}\cdot t)_\varphi=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2t_{r\varphi})+\frac{1}{r}\frac{\partial t_{\theta\varphi}}{\partial\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial t_{\varphi\varphi}}{\partial\varphi}+\frac{t_{r\varphi}}{r}+\frac{2\operatorname{ctg}\theta}{r}t_{\theta\varphi}$.

8.14. Указівка. $\left(t\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{u}=\sum_{ij}t_{(ij)}u_{(ij)}$, де $u_{(ij)}$ – компоненти тензора деформацій, обчислені в задачах 8.6, 8.7.

а) $\left(t\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{u}=t_{\rho\rho}\frac{\partial u_\rho}{\partial\rho}+t_{\varphi\varphi}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{u_\rho}{\rho}\right)+t_{zz}\frac{\partial u_z}{\partial z}+$

$$+t_{\rho\varphi}\left[\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{u_\varphi}{\rho}\right)+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u_\rho}{\partial\varphi}\right]+t_{\varphi z}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial u_z}{\partial\varphi}+\frac{\partial u_\varphi}{\partial z}\right)+t_{\rho z}\left(\frac{\partial u_z}{\partial\rho}+\frac{\partial u_\rho}{\partial z}\right);$$

б) $\left(t\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{u}=t_{rr}\frac{\partial u_r}{\partial r}+t_{\theta\theta}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+\frac{u_r}{r}\right)+t_{\varphi\varphi}\left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{u_r}{r}+\frac{u_\theta\operatorname{ctg}\theta}{r}\right)+$

$$+t_{r\theta}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}-\frac{u_\theta}{r}\right)+t_{r\varphi}\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial r}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_r}{\partial\varphi}-\frac{u_\varphi}{r}\right)+$$

$$+t_{\theta\varphi}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial\varphi}-\frac{\operatorname{ctg}\theta}{r}u_\varphi\right).$$

8.15. У циліндричних координатах (тут r – циліндричний радіус):

$$\frac{\vec{e}_r}{r}\left(\frac{\partial E_z}{\partial \varphi}-r\frac{\partial E_\varphi}{\partial z}\right)+\vec{e}_\varphi\left(\frac{\partial E_r}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial r}\right)+\frac{\vec{e}_z}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rE_\varphi)-\frac{\partial E_r}{\partial \varphi}\right)=$$

$$=-\left(\dot{B}_r\vec{e}_r+\dot{B}_\varphi\vec{e}_\varphi+\dot{B}_z\vec{e}_z\right),$$

$$\frac{\vec{e}_r}{r}\left(\frac{\partial H_z}{\partial \varphi}-r\frac{\partial H_\varphi}{\partial z}\right)+\vec{e}_\varphi\left(\frac{\partial H_r}{\partial z}-\frac{\partial H_z}{\partial r}\right)+\frac{\vec{e}_z}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rH_\varphi)-\frac{\partial H_r}{\partial \varphi}\right)=$$

$$=\dot{D}_r\vec{e}_r+\dot{D}_\varphi\vec{e}_\varphi+\dot{D}_z\vec{e}_z+j_r\vec{e}_r+j_\varphi\vec{e}_\varphi+j_z\vec{e}_z,$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rD_r)+\frac{1}{r}\frac{\partial D_\varphi}{\partial \varphi}+\frac{\partial D_z}{\partial z}=\rho,\quad \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rB_r)+\frac{1}{r}\frac{\partial B_\varphi}{\partial \varphi}+\frac{\partial B_z}{\partial z}=0;$$

у сферичних координатах:

$$\frac{\vec{e}_r}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta E_\varphi\right)-\frac{\partial E_\theta}{\partial\varphi}\right)+\frac{\vec{e}_\theta}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial E_r}{\partial\varphi}-\frac{\partial}{\partial r}\left(rE_\varphi\right)\right)+$$

$$+\frac{\vec{e}_\varphi}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(rE_\theta\right)-\frac{\partial E_r}{\partial\theta}\right)=-\left(\dot{B}_r\vec{e}_r+\dot{B}_\varphi\vec{e}_\varphi+\dot{B}_z\vec{e}_z\right),$$

$$\frac{\vec{e}_r}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta H_\varphi\right)-\frac{\partial H_\theta}{\partial\varphi}\right)+\frac{\vec{e}_\theta}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial H_r}{\partial\varphi}-\frac{\partial}{\partial r}\left(rH_\varphi\right)\right)+$$

$$+\frac{\vec{e}_\varphi}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(rH_\theta\right)-\frac{\partial H_r}{\partial\theta}\right)=\dot{D}_r\vec{e}_r+\dot{D}_\varphi\vec{e}_\varphi+\dot{D}_z\vec{e}_z+j_r\vec{e}_r+j_\varphi\vec{e}_\varphi+j_z\vec{e}_z,$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2D_r\right)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\sin\theta D_\theta\right)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial D_\varphi}{\partial\varphi}=\rho,$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2B_r\right)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\sin\theta B_\theta\right)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial B_\varphi}{\partial\varphi}=0.$$

8.16. а) 3; б) 0; в) $\vec{a}$; г) $\vec{a}$; д) $3f+rf'$;

є) 0; ж) $\dfrac{\vec{a}-3a_r\vec{e}_r}{r^3}$; з) 0; і) $\dfrac{3a_r\vec{e}_r-\vec{a}}{r^3}$.

8.17. а) $-\dfrac{\vec{e}_r}{r^2}$; б) $i\vec{k}e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$; в) $\dfrac{\vec{e}_r e^{ikr}}{r^2}(ikr-1)$.

Список літератури

1. *Акивис, М. А.* Тензорное исчисление / М. А. Акивис, В. В. Гольдберг. – М. : Наука, 1969. – 352 с.

2. *Алексеев, А. И.* Сборник задач по классической электродинамике / А. И. Алексеев – М. : Наука, 1977. – 320 с.

3. *Анчиков, А. М.* Основы векторного и тензорного анализа / А. М. Анчиков. – Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1988. – 134 с.

4. *Батыгин, В. В.* Сборник задач по электродинамике / В. В. Батыгин, И. Н. Топтыгин. – М. : НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2002. – 640 с.

5. *Борисенко, А. И.* Векторный анализ и начала тензорного исчисления / А. И. Борисенко, И. Е. Тарапов. – М. : Высш. шк., 1966. – 252 с.

6. *Демидович, Б. П.* Сборник задач и упражнений по математическому анализу: учеб. пособие / Б. П. Демидович. – М. : Наука, 1990. – 624 с.

7. *Джеффрис, Г.* Методы математической физики / Г. Джеффрис, Б. Свирлс. – М. : Мир, 1969. – 424 с.

8. *Коренев, Г. В.* Тензорное исчисление / Г. В. Коренев. – М. : Изд-во МФТИ, 2000. – 240 с.

9. *Кочин, Н. Е.* Векторное исчисление и начала тензорного анализа / Н. Е. Кочин. – М. : Наука, 1965. – 426 с.

10. *Краснов, М. Л.* Векторный анализ / М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко. – М. : Наука, 1978. – 160 с.

11. *Мак-Коннел, А. Дж.* Введение в тензорный анализ с приложениями к геометрии, механике и физике / А. Дж. Мак-Коннел. – М. : Гос. изд-во физ.-мат. л-ры., 1963. – 408 с.

12. Математический анализ : в 3 т. Т. 2 / И. И. Ляшко, А. К. Боярчук, Я. Г. Гай, А. Ф. Калайда. – К. : Вища шк., 1985. – 551 с.

13. *Победря, Б. Е.* Лекции по тензорному анализу: учеб. пособие / Б. Е. Победря. – М. : Изд-во Моск. ун-та, 1986. – 264 с.

14. *Рашевский, П. К.* Риманова геометрия и тензорный анализ / П. К. Рашевский. – М. : Наука, 1967. – 664 с.

15. Сборник задач по теоретической физике / Л. Г. Гречко, В. И. Сугаков, О. Ф. Томасевич, А. М. Федорченко. – К. : Высш. шк., 1984. – 336 с.

16. *Сеньків, М. Т.* Векторний і тензорний аналіз: текст лекцій / М. Т. Сеньків. – Л. : РВВ Львів. ун-ту, 1991. – 146 с.

17. *Сова, Г. В.* Кратні, криволінійні та поверхневі інтеграли. Векторний аналіз: навч. посібник / Г. В. Сова. – Х. : ХТУРЕ, 1997. – 220 с.

18. *Схоутен, Я. А.* Тензорный анализ для физиков / Я. А. Схоутен. – М: Наука, 1965. – 456 с.

19. *Топтыгин, И. Н.* Современная электродинамика : в 2 ч. Ч. 1. : Микроскопическая теория: учеб. пособие / И. Н. Топтыгин. – М.; Ижевск : Ин-т компьютерных исследований, 2002. – 736 с.

20. *Федорченко, А. М.* Теоретична фізика : у 2 т. Т. 1 / А. М. Федорченко. – К. : Вища шк., 1992. – 500 с.

21. *Шкіль, М. І.* Математичний аналіз : у 2 ч. Ч. 2 / М. І. Шкіль. – К, : Вища шк., 1981. – 456 с.

22 . *Griffiths, David J.* Introduction to Electrodynamics / David J. Griffiths. – Prentice-Hall, 1999. – 576 p.

23. *Jackson, John D.* Classical Electrodynamics (3rd ed.) / John D. Jackson. – Wiley, 1998. – 808 p.

Предметний покажчик

Зміст

Навчальне видання

РАЗУМОВА Маргарита Анатоліївна
ХОТЯЇНЦЕВ Володимир Миколайович

ОСНОВИ ВЕКТОРНОГО І ТЕНЗОРНОГО АНАЛІЗУ

Редактор *Л. В. Магда*

Оригінал-макет виготовлено Видавничо-поліграфічним центром "Київський університет"

Підписано до друку 09.08.11. Формат 60x84$^{1/16}$. Вид. № Фз9.
Гарнітура Times New Roman.
Папір офсетний. Друк офсетний. Наклад 150.
Ум. друк. арк. 12,56. Обл.-вид. арк. 13,5. Зам. № 211-5736

Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет"
01601, Київ, б-р Т. Шевченка, 14, кімн. 43
☎ (38044) 239 32 22; (38044) 239 31 72; факс (38044) 239 31 28
Свідоцтво внесено до Державного реєстру ДК № 1103 від 31.10.02