

Міністерство освіти і науки України

**Київський національний університет
імені Тараса Шевченка**

механіко-математичний факультет

**кафедра
математичного аналізу**

О.О. Курченко

**ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ
ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ
НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК**

Київ 2016

УДК 517(075.8)
ББК 22.161я73
К93

Рецензенти:

Ковтонюк М.М., доктор педагогічних наук, кандидат фізико-математичних наук, доцент, завідувач кафедри математики та інформатики Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського;

Краснитський С.М., доктор фізико-математичних наук, професор, професор кафедри інформаційних технологій проектування Київського національного університету технології та дизайну;

Пашко А.О., доктор фізико-математичних наук, доцент, завідувачий НДС «Проблем системного аналізу» факультету комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

Рекомендовано до друку вченою радою механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка (протокол № 6 від 12 грудня 2016 року)

Курченко О.О. Інтегральне числення функцій однієї змінної: навч. посібник/ О.О. Курченко. – К., 2016. – 140 с.

Цей навчальний посібник містить навчальний матеріал модуля «Первісна та невизначений інтеграл. Інтеграл Рімана» нормативного курсу “Математичний аналіз: функції однієї змінної”, що викладається у другому семестрі першого курсу для студентів спеціальностей математика та статистика освітнього рівня «бакалавр» механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

Для викладачів і студентів математичних спеціальностей університетів.

Зміст

<i>Передмова</i>	5
Розділ 1. Первісна. Невизначений інтеграл	7
1.1 Первісна. Невизначений інтеграл	7
1.2 Елементарні властивості невизначених інтегралів. Таблиця інтегралів	11
1.3 Заміна змінної у невизначеному інтегралі	14
1.4 Інтегрування частинами	16
1.5 Інтегрування раціональних функцій	18
1.6 Інтегрування раціональних функцій від синуса та косинуса . . .	28
1.7 Інтегрування деяких ірраціональностей	30
1.8 Інтегрування біномних диференціалів	33
Розділ 2. Інтеграл Рімана	35
2.1 Задачі, що приводять до поняття визначеного інтеграла	35
2.2 Означення інтеграла Рімана	38
2.3 Суми Дарбу. Теорема Дарбу	42
2.4 Сім'ї інтегровних функцій	51
2.5 Властивості інтеграла Рімана	57
2.6 Нерівності Гельдера та Мінковського.	63
2.7 Інтеграл із змінною межею інтегрування	65
2.8 Формула Ньютона-Лейбніца	70
Розділ 3. Обчислення та застосування інтеграла Рімана.	76
3.1 Формула заміни змінної	76
3.2 Інтегрування частинами	78
3.3 Граничний перехід під знаком інтеграла Рімана	82
3.3.1 Рівномірна збіжність послідовності функцій	84
3.3.2 Теорема про граничний перехід під знаком інтеграла Рімана	90
3.4 Площа криволінійної трапеції	93
3.5 Довжина кривої	99

3.6 Об'єм тіла обертання	104
3.7 Площа поверхні обертання	107
3.8 Центри ваги. Теореми Гульдіна	111

Додаток

Д.1 Теорема Вейєрштрасса про наближення многочленами неперервної на відрізку функції	118
---	-----

Розв'язання, вказівки, відповіді	120
---	------------

Література	137
-----------------------------	------------

<i>Предметний покажчик</i>	<i>139</i>
--------------------------------------	------------

Передмова

Інтегральне числення виникло як загальний метод обчислення площ, об'ємів, центрів ваги. У сучасній математиці це розділ математичного аналізу, в якому вивчаються властивості і способи обчислення інтегралів та їх застосування для розв'язання як теоретичних, так і прикладних задач.

Відкриття інтегрального числення та встановлення його зв'язку з диференціальним численням належить Ісааку Ньютону та Готфріду Лейбніцу. У розвиток методів інтегрування зробили свій внесок Леонард Ойлер, М.В.Остроградський, П.Л.Чебишов. Логічно обґрунтовану побудову визначеного інтеграла як границі інтегральних сум здійснив німецький математик Георг Ріман. Сучасний підхід до викладання інтегрального числення функцій однієї змінної для студентів математичних спеціальностей ґрунтується на теорії границь, поняттях точної нижньої і точної верхньої межі.

Цей навчальний посібник написаний автором на основі багаторічного досвіду викладання нормативного курсу «Математичний аналіз: функції однієї змінної» для студентів спеціальностей «математика» та «статистика» на механіко-математичному факультеті Київського національного університету імені Тараса Шевченка. У першому розділі пропонованого навчального посібника викладені основні методи обчислення невизначених інтегралів. Другий розділ присвячений теорії інтеграла Рімана. При цьому інтеграл Рімана визначається як границя інтегральних сум та доводиться обмеженість функції, інтегровної за Ріманом. Далі визначаються нижній та верхній інтегралі і доводиться критерій інтегровності Дарбу. У цьому ж розділі викладені властивості інтеграла Рімана, нерівності Гельдера та Мінковського для визначених інтегралів. Закінчується розділ формулою Ньютон-Лейбніца – справжньою перлиною математичного аналізу. Методи обчислення

визначених інтегралів та традиційні застосування читач знайде у третьому розділі. У цьому ж розділі міститься теорема про граничний перехід під знаком інтеграла Рімана. Основною умовою цієї теореми є умова рівномірної збіжності послідовності функцій. Це поняття викладено у пункті 3.3.1. Додаток містить теорему Вейерштрасса про рівномірне наближення многочленами неперервної на відрізок функції.

Вивчення математичного аналізу, як і будь-якої математичної дисципліни, передбачає систематичне самостійне розв'язання задач. Тому й у цьому навчальному посібнику виклад супроводжується вправами. До всіх вправ наведені розв'язання, вказівки та відповіді.

Автор висловлює щирю подяку колегам – викладачам кафедри математичного аналізу механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка, спілкування з якими сприяло написанню цього навчального посібника. Автор також вдячний магістру статистики Ользі Жученко за підготовку ілюстрацій до електронної версії цього посібника.

Київ, серпень 2016 р.

Розділ 1. Первісна та невизначений інтеграл

Нехай J – проміжок, $F: J \rightarrow \mathbb{R}$ – диференційовна на J функція і відома її похідна F' . Як відновити функцію за її похідною? Чи однозначно визначається функція за своєю похідною? Задача знаходження функції за її похідною становить не лише теоретичний інтерес, але й має важливі застосування. Наведемо простий приклад: за відомою функцією швидкості $v(t), t \in [0, T]$ визначити функцію шляху $S(t), t \in [0, T]$. Процедура знаходження функції за її похідною називається інтегруванням. Відновленню функції за її похідною і присвячений цей розділ.

1.1 Первісна. Невизначений інтеграл

Нехай J – проміжок, тобто одна з наступних множин на $\mathbb{R}$: $[a, b], [a, b), (a, b], (a, b), (-\infty, a], (-\infty, a), [b, +\infty), (b, +\infty), (-\infty, +\infty)$, де $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Похідна функції на кінці проміжку (якщо такий є) означатиме відповідну односторонню похідну. Так, наприклад, для функції $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ покладемо $F'(a) := F'_+(a), F'(b) := F'_-(b)$.

Означення 1.1.1. Функція $F: J \rightarrow \mathbb{R}$ називається *первісною функції* $f: J \rightarrow \mathbb{R}$ *на проміжку* J , якщо функція F диференційовна на цьому проміжку і $\forall x \in J: F'(x) = f(x)$.

Підкреслимо, що означення первісної дається на проміжку.

Зауваження 1.1.1. Оскільки з диференційовності випливає неперервність, то первісна F функції $f: J \rightarrow \mathbb{R}$ на проміжку J неперервна на цьому проміжку, тобто $F \in C(J)$.

Приклад 1.1.1. Функція $f(x)=0$, $x \in \mathbb{R}$ має безліч первісних виду $F(x)=C$, $x \in \mathbb{R}$, де C – довільна стала. Дійсно, $\forall x \in \mathbb{R}: F'(x)=(C)'=0=f(x)$.

Приклад 1.1.2. Нехай $f(x)=e^x$, $x \in \mathbb{R}$. Функція $F(x)=e^x$, $x \in \mathbb{R}$ є первісною функції f на $\mathbb{R}$. Дійсно, $\forall x \in \mathbb{R}: F'(x)=(e^x)'=e^x=f(x)$. Зауважимо, що для довільної сталої C функція e^x+C , $x \in \mathbb{R}$ також є первісною функції f на $\mathbb{R}$.

Приклад 1.1.3. Функція

$$\operatorname{sign} x := \begin{cases} -1, & \text{якщо } x < 0, \\ 0, & \text{якщо } x = 0, \\ 1, & \text{якщо } x > 0, \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}$$

не має первісної на $\mathbb{R}$.

Доведення. Проведемо міркування від супротивного. Припустимо, що $F(x)$, $x \in \mathbb{R}$ – первісна функції sign на $\mathbb{R}$, тобто $\forall x \in \mathbb{R}: F'(x)=\operatorname{sign}(x)$. До функції F застосуємо теорему Лагранжа на відрізку $[0, x]$, $0 < x < 1$:

$$\exists \theta \in (0, x): F(x) - F(0) = F'(\theta)x = x, \quad \text{звідки} \quad \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = 1. \quad \text{У цій}$$

рівності перейдемо до границі при $x \rightarrow 0+$ і отримаємо $F'_+(0)=1$. Але за припущенням має бути $F'(0)=\operatorname{sign} 0=0$. Суперечність.

Цей приклад свідчить, що не будь-яка функція має первісну. Пізніше, у наступному розділі, буде доведено, що довільна неперервна на проміжку функція має первісну на цьому проміжку.

Теорема 1.1.1 (про структуру множини первісних). Нехай функція $f: J \rightarrow \mathbb{R}$ має первісну на проміжку J . Тоді:

- 1) якщо $F(x)$, $x \in J$ – первісна функції f на J , то $\forall C \in \mathbb{R}$ функція $F(x)+C$, $x \in J$ також первісна функції f на J ;

- 2) якщо $F(x)$, $x \in J$ та $G(x)$, $x \in J$ – дві первісні функції f на J ,
то $F(x) - G(x) = \text{const}$, $x \in J$.

Доведення. 1) За означенням первісної, $\forall x \in J: F'(x) = f(x)$. Похідна сталої дорівнює нулеві, і тому $\forall x \in J: (F(x) + C)' = f(x)$. Отже, функція $F(x) + C$, $x \in J$ – первісна функції f на J .

- 2) Нехай функції $F(x)$, $G(x)$, $x \in J$ – первісні функції f на J . Тоді

$$\forall x \in J: (F(x) - G(x))' = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

За наслідком з теореми Лагранжа, $F(x) - G(x) = \text{const}$, $x \in J$. Теорема доведена.

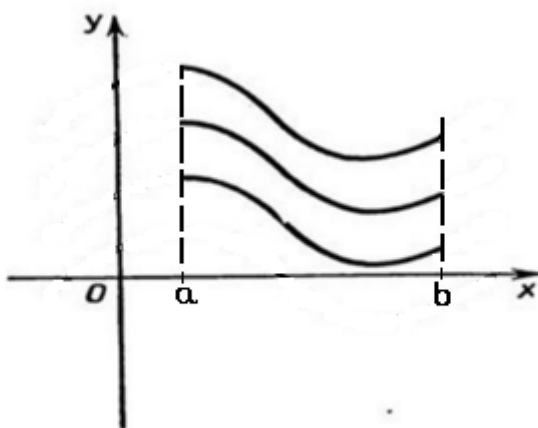


Рис. 1.1.1 Графік довільної первісної можна отримати паралельним переносом графіка фіксованої первісної вздовж осі ординат. Через кожну точки смуги $[a, b] \times \mathbb{R}$ проходить графік рівно однієї первісної.

Таким чином, для функції, яка має первісну на проміжку J , множина всіх її первісних має вигляд

$$\{F(x) + C, x \in J \mid C \in \mathbb{R}\},$$

де $F(x)$, $x \in J$ – довільна фіксована первісна функції f на J . Певну первісну можна виокремити за її значенням у деякій точці $x_0 \in J$. Графічна інтерпретація множини первісних наведена на рис. 1.1.1.

Означення 1.1.2. Нехай функція $f: J \rightarrow \mathbb{R}$ має первісну на J . Множина всіх її первісних на проміжку J називається **невизначеним інтегралом функції f** на J .

Позначення: $\int f(x)dx$, $x \in J$; $\int f(x)dx = F(x) + C$, $x \in J$,

де $F(x)$, $x \in J$ – первісна функції f на J ; C – довільна дійсна стала.

Приклад 1.1.4. $\int x dx = \frac{x^2}{2} + C$, $x \in \mathbb{R}$.

Вправа 1.1.1. Знайдіть $\int \min(x^2, x^3) dx$, $x \in \mathbb{R}$.

Вправа 1.1.2. Нехай функція $f: J \rightarrow \mathbb{R}$ непарна і має первісну на проміжку J . Доведіть, що довільна первісна функції f на J парна.

Вправа 1.1.3. Нехай функція $f: J \rightarrow \mathbb{R}$ парна і має первісну на J . Доведіть, що лише одна первісна функції f на J непарна.

Вправа 1.1.4. Чи обов'язково первісна періодичної функції періодична?

Наступне, більш загальне означення первісної, дозволяє розширити клас функцій, що мають первісну, зокрема, знайти первісну функції прикладу 1.1.3 у розумінні цього більш загального означення.

Означення 1.1.3. Нехай J – проміжок, A – скінченна підмножина проміжка J , функція $f: J \rightarrow \mathbb{R}$. Функція $F: J \rightarrow \mathbb{R}$ називається первісною у широкому сенсі функції f на проміжку J , якщо:

- 1) функція F неперервна на J ;
- 2) функція F диференційовна на $J \setminus A$ і $\forall x \in J \setminus A: F'(x) = f(x)$.

Зауважимо, що у цьому означенні множина A , як і проміжок J , задана наперед і фіксована. Насправді її вибір залежить від функції $f: J \rightarrow \mathbb{R}$. Первісна у означенні 1.1.1 є первісною у широкому сенсі для довільної скінченної (зокрема порожньої) множини A .

Приклад 1.1.5. Нехай $J = \mathbb{R}$, $A = \{0\}$. Функція $F(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$ – первісна у широкому сенсі функції $f(x) = \operatorname{sign} x$, $x \in \mathbb{R}$ на числовій прямій. Дійсно: 1) $F \in C(\mathbb{R})$; 2) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \exists F'(x) = \operatorname{sign} x$.

Зауваження 1.1.2. Твердження теореми про структуру множини всіх первісних залишається правильним для первісних у широкому сенсі.

Тому коректне наступне означення.

Означення 1.1.4. Нехай функція $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ має первісну у широкому сенсі на проміжку J . Множина всіх її первісних у широкому сенсі на проміжку J називається *невизначеним інтегралом у широкому сенсі функції f на J* або просто *невизначеним інтегралом функції f на J* .

Позначення такі ж, як і для невизначеного інтеграла в означенні 1.1.2.

Приклад 1.1.6. Нехай $J = \mathbb{R}$, $A = \{0\}$; $f(x) = \operatorname{sign} x$, $x \in \mathbb{R}$. Як випливає із прикладу 1.1.5, $\int \operatorname{sign} x dx = |x| + C$, $x \in \mathbb{R}$, де C – довільна дійсна стала.

Вправа 1.1.6. Доведіть твердження зауваження 1.1.2.

Вправа 1.1.5. Нехай $f(x) = \operatorname{sign}(x^2 - 1)$, $x \in \mathbb{R}$, $A = \{-1, 1\}$. Знайдіть первісну у широкому сенсі функції f на $\mathbb{R}$, графік якої проходить через початок координат. Запишіть невизначений інтеграл функції f на $\mathbb{R}$.

1.2 Елементарні властивості невизначених інтегралів. Таблиця інтегралів

Нехай функція $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ має первісну F на проміжку J . Наступні дві властивості виявляють взаємну оберненість операцій диференціювання та інтегрування.

1. $d \int f(x) dx = f(x) dx$, $x \in J$.

$$2. \int F'(x)dx = F(x) + C, \quad x \in J.$$

У наступних двох властивостях рівність між невизначеними інтегралами розуміється як рівність між функціями з точністю до адитивної сталої.

$$3. \forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \int (af(x))dx = a \int f(x)dx, \quad x \in J.$$

Доведення. Похідні правої і лівої частин рівності співпадають, звідки випливає, що дві довільні функції відповідно лівої і правої частин рівності рівні між собою з точністю до адитивної сталої.

4. Нехай функції $f: J \rightarrow \mathbb{R}$, $g: J \rightarrow \mathbb{R}$ мають первісні на проміжку J . Тоді функція $f + g$ має первісну на J , причому

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx, \quad x \in J.$$

Доведення аналогічне попередньому.

Властивості 3 і 4 означають лінійність операції інтегрування.

5. Нехай $\int f(x)dx = F(x) + C$, $x \in J$; $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Тоді

$$\int f(ax + b)dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C, \quad x \in J_1 := \{x \mid ax + b \in J\}.$$

Доведення. Дійсно,

$$\forall x \in J_1 : \left(\frac{1}{a} F(ax + b) + C \right)' = f(ax + b).$$

Властивість доведена.

За означенням первісної та невизначеного інтеграла,

$$F'(x) = f(x), \quad x \in J \Leftrightarrow \int f(x)dx = F(x) + C, \quad x \in J.$$

За допомогою цього співвідношення та таблиці похідних отримуємо таблицю інтегралів.

Таблиця інтегралів

$$1. \int 0 dx = C, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$2. \quad \forall \alpha \neq -1: \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad \text{на кожному проміжку множини}$$

визначення.

$$3. \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \quad \text{на кожному з проміжків } (-\infty, 0), (0, +\infty).$$

$$4. \quad \forall a > 0, a \neq 1: \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad x \in \mathbb{R}; \text{ зокрема, при } a = e:$$

$$\int e^x dx = e^x + C, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$5. \int \sin x dx = -\cos x + C, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$6. \int \cos x dx = \sin x + C, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$7. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C \quad \text{на кожному з інтервалів } \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n\right),$$

$n \in \mathbb{Z}.$

$$8. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C \quad \text{на кожному з інтервалів } (\pi n, \pi + \pi n),$$

$n \in \mathbb{Z}.$

$$9. \quad \forall a \neq 0: \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$10. \quad \forall a > 0: \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} + C, \quad x \in (-a, a).$$

$$11. \quad \forall a \neq 0: \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right) + C, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$12. \quad \forall a > 0: \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + C \quad \text{на кожному з проміжків}$$

$(-\infty, -a), (a, +\infty).$

13. $\forall a > 0 : \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$ на кожному з проміжків $(-\infty, -a), (-a, a), (a, +\infty)$.

14. $\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C, x \in \mathbb{R}.$

15. $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C, x \in \mathbb{R}.$

Зауваження 1.2.1. Первісні елементарних функцій не завжди є елементарними функціями. Наприклад, первісні функцій

$$\cos x^2, \sin x^2, e^{x^2}, x \in \mathbb{R}$$

не є елементарними функціями.

1.3 Заміна змінної у невизначеному інтегралі

Теорема 1.3.1. Нехай виконуються такі умови:

- 1) $\int f(x) dx = F(x) + C, x \in J;$
- 2) функція $\varphi: \tilde{J} \rightarrow J$ диференційовна на проміжку $\tilde{J}$.

Тоді $\int f(\varphi(u))\varphi'(u)du = F(\varphi(u)) + C, u \in \tilde{J}.$

Доведення. Внаслідок правила диференціювання суперпозиції функцій,

$$\forall u \in \tilde{J}: (F(\varphi(u)))' = F'(\varphi(u))\varphi'(u),$$

звідки випливає твердження теореми. Теорема доведена.

Ця теорема обґрунтовує такий метод інтегрування за допомогою підстановки (заміни змінної):

$$\int f(\varphi(u))\varphi'(u)du = \left| \begin{array}{l} x = \varphi(u) \\ dx = \varphi'(u)du \end{array} \right| = \int f(x)dx = F(x) + C = F(\varphi(u)) + C, u \in \tilde{J}.$$

У нескладних випадках застосовують також скорочений запис:

$$\int f(\varphi(u))\varphi'(u)du = \int f(\varphi(u))d\varphi(u) = F(\varphi(u)) + C, \quad u \in \tilde{J}.$$

Приклад 1.3.1. $\int \sin^2 x \cos x dx = \int \sin^2 x d \sin x = \frac{\sin^3 x}{3} + C, \quad x \in \mathbb{R}.$

Приклад 1.3.2. Для $a > 0$ обчислити $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$.

Розв'язання. Для обчислення цього інтеграла застосуємо метод підстановки:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{a^2 - x^2} dx &= \left| \begin{array}{l} x = a \sin u, u \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \\ dx = a \cos u du \\ u = \arcsin \frac{x}{a}, x \in (-a, a) \end{array} \right| = a^2 \int \cos^2 u du = \\ &= a^2 \int \frac{1 + \cos 2u}{2} du = a^2 \frac{u}{2} + \frac{a^2}{4} \sin 2u + C = \\ &= \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + C, \quad x \in (-a, a). \end{aligned}$$

Вправа 1.3.1. Для $a \neq 0$ обчисліть інтеграл $\int \sqrt{x^2 - a^2} dx$ на кожному з проміжків $(-\infty, -|a|)$, $(|a|, +\infty)$.

Вправа 1.3.2. Для $a \neq 0$ обчисліть інтеграл $\int \sqrt{x^2 + a^2} dx, \quad x \in \mathbb{R}.$

Універсальної відповіді на питання про вибір вдалої підстановки не існує. Рекомендовані підстановки у важливих частинних випадках будуть вказані нижче.

1.4 Інтегрування частинами

Теорема 1.4.1. Нехай функції $u: J \rightarrow \mathbb{R}$, $v: J \rightarrow \mathbb{R}$ диференційовні на проміжку J ; функція uv' має первісну на J . Тоді функція $u'v$ також має первісну на J та має місце формула інтегрування частинами:

$$\int u'(x)v(x)dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)dx, \quad x \in J.$$

Доведення. Оскільки

$$\forall x \in J : (u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x),$$

то функція uv є первісною функції $u'v + uv'$ на J . Тому

$$\int (u'(x)v(x) + u(x)v'(x))dx = u(x)v(x) + C, \quad x \in J.$$

Із цієї рівності та умови про існування первісної функції uv' випливає твердження теореми. Теорема доведена.

Формулу інтегрування частинами записують також у вигляді

$$\int vdu = uv - \int u dv, \quad x \in J.$$

Підінтегральний вираз можна багатьма способами подати у вигляді vdu , де $u(\cdot), v(\cdot)$ – функції змінної інтегрування. Для дієвості методу інтегрування частинами ці функції рекомендується підбирати так, щоб інтеграл $\int u dv$ знаходився легше, ніж інтеграл $\int vdu$.

Приклад 1.4.1. $\int x e^x dx = \int x d e^x = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C, \quad x \in \mathbb{R}.$

Приклад 1.4.2. $\int x^2 \cos x dx = \int x^2 d \sin x = x^2 \sin x - 2 \int x \sin x dx =$

$$= x^2 \sin x + 2 \int x d \cos x = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \int \cos x dx =$$

$$= x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C.$$

У цьому прикладі формула інтегрування частинами застосована двічі.

Приклад 1.4.3. Для $a \neq 0$ обчислимо $\int \sqrt{x^2 + a^2} dx$, $x \in \mathbb{R}$.

Розв'язання. Покладемо $I = \int \sqrt{x^2 + a^2} dx$ і застосуємо формулу інтегрування частинами:

$$\begin{aligned} I &= \int \sqrt{x^2 + a^2} dx = x\sqrt{x^2 + a^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = \\ &= x\sqrt{x^2 + a^2} - \int \frac{x^2 + a^2 - a^2}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = x\sqrt{x^2 + a^2} - \int \sqrt{x^2 + a^2} dx + a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \\ &= x\sqrt{x^2 + a^2} - I + a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}}. \end{aligned}$$

Отримаємо рівняння відносно I :

$$2I = x\sqrt{x^2 + a^2} + a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}},$$

звідки

$$I = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \ln \left(x + \sqrt{x^2 + a^2} \right) + C, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Цей приклад повчальний тим, що після інтегрування частинами та елементарних перетворень ми отримали лінійне рівняння відносно шуканого інтеграла.

Вправа 1.4.1. За допомогою інтегрування частинами обчисліть інтеграл $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$, $x \in (-a, a)$, $a > 0$.

Вправа 1.4.2. За допомогою інтегрування частинами обчисліть інтеграл $\int \sqrt{x^2 - a^2} dx$, $a \neq 0$ на кожному з проміжків $(-\infty, -|a|)$, $(|a|, +\infty)$.

Вправа 1.4.3. Для параметрів $a, b \neq 0$ обчисліть інтеграли $\int e^{ax} \cos bx dx$, $\int e^{ax} \sin bx dx$.

1.5 Інтегрування раціональних функцій

Нехай $P: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $Q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – многочлени. Відношення многочленів

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \quad x \in \{x \mid Q(x) \neq 0\} \quad (1.5.1)$$

називається раціональною функцією (у цьому підрозділі використовується також термін дріб). Дріб (1.5.1) називається правильним, якщо степінь многочлена P менший степеня многочлена Q . Зауважимо, що сума та добуток правильних дробів будуть правильними дробами. Раціональну функцію завжди можна подати у вигляді суми многочлена (можливо, тотожно рівного нулю) та правильного дробу. Обчислити первісну многочлена легко. Тому надалі зосередимся на задачі інтегрування правильного дробу.

Інтегрування елементарних дробів. Будемо розрізняти чотири типи елементарних дробів:

1) $\frac{A}{x-a}$;

3) $\frac{Mx+N}{x^2+px+q} \quad (p^2-4q < 0)$;

$$2) \frac{A}{(x-a)^k}, \quad (k > 1); \qquad 4) \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^m} \quad (p^2 - 4q < 0, \quad m > 1),$$

де k, m – натуральні числа; A, M, N, a, p, q – дійсні числа.

Умова $p^2 - 4q < 0$ означає, що многочлен другого степеня $x^2 + px + q$ не має дійсних коренів.

Обчислимо невизначені інтеграли елементарних дробів для кожного з чотирьох типів.

$$1. \int \frac{A}{x-a} dx = A \ln|x-a| + C.$$

$$2. \int \frac{A}{(x-a)^k} dx = \frac{A(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C = -\frac{A}{k-1} \cdot \frac{1}{(x-a)^{k-1}} + C.$$

$$3. \int \frac{Mx + N}{x^2 + px + q} dx = \int \frac{Mx + N}{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)} dx = \left| \begin{array}{l} x + \frac{p}{2} = t, \quad dx = dt \\ a^2 := q - \frac{p^2}{4} > 0 \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{M\left(t - \frac{p}{2}\right) + N}{t^2 + a^2} dt = \left| b := N - \frac{Mp}{2} \right| = M \int \frac{t}{t^2 + a^2} dt + b \int \frac{dt}{t^2 + a^2} =$$

$$= \frac{M}{2} \ln(t^2 + a^2) + \frac{b}{a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} + C.$$

4. Після перетворень, щойно виконаних при інтегруванні елементарних дробів третього типу, отримаємо:

$$\int \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^m} dx = M \int \frac{t}{(t^2 + a^2)^m} dt + b \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^m}.$$

$$\int \frac{t}{(t^2 + a^2)^m} dt = \frac{1}{2} \int \frac{d(t^2 + a^2)}{(t^2 + a^2)^m} = -\frac{1}{2(m-1)} \cdot \frac{1}{(t^2 + a^2)^{m-1}} + C.$$

Для обчислення невизначеного інтеграла $I_m = \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^m}$, $m \in \mathbb{N}$,

отримаємо рекурентну формулу. Якщо $m = 1$, то

$$I_1 = \int \frac{dt}{t^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} + C.$$

У випадку $m \geq 2$ застосуємо формулу інтегрування частинами:

$$\begin{aligned} I_m &= \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^m} = \frac{t}{(t^2 + a^2)^m} + 2m \int \frac{t^2 + a^2 - a^2}{(t^2 + a^2)^{m+1}} dt = \\ &= \frac{t}{(t^2 + a^2)^m} + 2m I_m - 2ma^2 I_{m+1}, \end{aligned}$$

звідки знаходимо

$$I_{m+1} = \frac{1}{2ma^2} \left((2m-1) I_m + \frac{t}{(t^2 + a^2)^m} \right), \quad m \geq 1.$$

Цим самим задача інтегрування елементарних дробів розв'язана.

Розклад правильного дробу на елементарні. Інтегрування правильних дробів ґрунтується на такій теоремі.

Теорема 1.5.1. Кожний правильний дріб

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

можна подати у вигляді суми скінченного числа елементарних дробів.

Доведення. Не втрачаючи загальності, покладемо старший коефіцієнт многочлена $Q(x)$ рівний одиниці, тоді його розклад на незвідні над полем дійсних чисел многочлени можна записати у вигляді

$$Q(x) = (x - a_1)^{k_1} \cdot \dots \cdot (x - a_s)^{k_s} \cdot (x^2 + p_1x + q_1)^{m_1} \cdot \dots \cdot (x^2 + p_rx + q_r)^{m_r},$$

де $a_1, \dots, a_s; p_1, \dots, p_r; q_1, \dots, q_r$ – дійсні числа, причому $p_i^2 - 4q_i < 0$, $1 \leq i \leq r$; $k_1, \dots, k_s; m_1, \dots, m_r$ – натуральні числа.

Для доведення теореми нам будуть потрібні дві леми.

Лема 1.5.1. Нехай $Q(x) = (x - a)^k Q_1(x)$, де $k \in \mathbb{N}$, а многочлен $Q_1(x)$

на $x - a$ не ділиться. Тоді правильний дріб $\frac{P(x)}{Q(x)}$ можна подати у вигляді

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x - a)^k} + \frac{P_1(x)}{(x - a)^{k-1} Q_1(x)},$$

де $\frac{A}{(x - a)^k}$ – елементарний дріб, $\frac{P_1(x)}{(x - a)^{k-1} Q_1(x)}$ – правильний дріб.

Доведення. Покажемо, що існують число A і многочлен $P_1(x)$ такі, що виконується тотожність

$$P(x) - A Q_1(x) = (x - a) P_1(x).$$

Спочатку визначимо сталу A так, щоб права частина останньої рівності ділилася на $x - a$. Внаслідок теореми Безу, для цього достатньо щоб $P(a) - AQ_1(a) = 0$. Число $Q_1(a)$ відмінне від нуля, оскільки многочлен $Q_1(x)$ не ділиться на $x - a$. Тому з рівності $P(a) - AQ_1(a) = 0$ отримуємо

$$A = \frac{P(a)}{Q_1(a)}.$$

Після такого вибору сталої A многочлен $P_1(x)$ визначимо як частку:

$$P_1(x) = \frac{P(x) - AQ_1(x)}{x - a}.$$

Легко переконатися, що дріб $\frac{P_1(x)}{(x - a)^{k-1} Q_1(x)}$ — правильний. Лема доведена.

Лема 1.5.2. Нехай $Q(x) = (x^2 + px + q)^m Q_1(x)$, де $m \in \mathbb{N}$, $p^2 - 4q < 0$, а многочлен $Q_1(x)$ на $x^2 + px + q$ не ділиться. Тоді правильний дріб $\frac{P(x)}{Q(x)}$ можна подати у вигляді

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^m} + \frac{P_1(x)}{(x^2 + px + q)^{m-1} Q_1(x)},$$

де $\frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^m}$ — елементарний дріб, $\frac{P_1(x)}{(x^2 + px + q)^{m-1} Q_1(x)}$ —

правильний дріб.

Доведення. Покажемо, що існують числа M, N і многочлен $P_1(x)$ такі, що виконується тотожність

$$P(x) - (Mx + N)Q_1(x) = (x^2 + px + q)P_1(x).$$

Сталі M, N визначимо так, щоб ліва частина останньої рівності ділилася на $x^2 + px + q$. Нехай $\alpha x + \beta, \gamma x + \delta$ – залишки від ділення відповідно многочленів $P(x)$ та $Q_1(x)$ на $x^2 + px + q$. Тоді задача зводиться до підбору сталих M, N таким чином, щоб вираз

$$\alpha x + \beta - (Mx + N)(\gamma x + \delta) = -\gamma M x^2 + (\alpha - \delta M - \gamma N)x + (\beta - \delta N)$$

ділився на $x^2 + px + q$. Після ділення у залишку отримаємо многочлен першого степеня

$$((p\gamma - \delta)M - \gamma N + \alpha)x + (q\gamma M - \delta N + \beta).$$

Ми маємо вибрати сталі M, N так, щоб цей залишок дорівнював нулю.

Таким чином, для визначення M, N отримаємо лінійну систему рівнянь:

$$\begin{cases} (p\gamma - \delta)M - \gamma N = -\alpha, \\ q\gamma M - \delta N = -\beta. \end{cases}$$

Визначник цієї системи

$$\begin{vmatrix} p\gamma - \delta & -\gamma \\ q\gamma & -\delta \end{vmatrix} = \delta^2 - p\gamma\delta + q\gamma^2$$

відмінний від нуля. Дійсно, при $\gamma \neq 0$,

$$\delta^2 - p\gamma\delta + q\gamma^2 = \gamma^2 \left(\left(-\frac{\delta}{\gamma} \right)^2 + p \left(-\frac{\delta}{\gamma} \right) + q \right) \neq 0,$$

оскільки число $-\frac{\delta}{\gamma}$ не може бути коренем незвідного тричлена $x^2 + px + q$.

Якщо $\gamma = 0$, то визначник дорівнює $\delta^2 \neq 0$, оскільки многочлен $Q_1(x)$ на $x^2 + px + q$ не ділиться, а тому числа γ і δ одночасно не дорівнюють нулеві. Отже, сталі M, N однозначно визначаються із системи рівнянь.

Після такого вибору сталих M, N , многочлен $P_1(x)$ визначимо як частку:

$$P_1(x) = \frac{P(x) - (Mx + N)Q_1(x)}{x^2 + px + q}.$$

Легко бачити, що дріб

$$\frac{P_1(x)}{(x^2 + px + q)^{m-1} Q_1(x)}$$

правильний. Лема доведена.

Дальше доведення теореми полягає у послідовному застосуванні цих двох лем.

Якщо многочлен $Q(x)$ містить множник $x - a$ лише у першому степені, внаслідок леми 1.5.1, буде виділений один елементарний дріб

$$\frac{A}{x - a}.$$

Якщо $Q(x) = (x - a)^k Q_1(x)$, де $k > 1$ і $Q_1(x)$ не ділиться на $x - a$, послідовно k разів застосовуємо лему 1.5.1 і отримуємо групу із k елементарних дробів:

$$\frac{A_1}{x - a} + \frac{A_2}{(x - a)^2} + \dots + \frac{A_k}{(x - a)^k}.$$

Це міркування застосовується до кожного з лінійних множників, що входять до розкладу многочлена $Q(x)$.

Аналогічно, квадратичному множнику $x^2 + px + q$ у степені m поставиться у відповідність група m елементарних дробів

$$\frac{M_1x + N_1}{x^2 + px + q} + \frac{M_2x + N_2}{(x^2 + px + q)^2} + \dots + \frac{M_mx + N_m}{(x^2 + px + q)^m}.$$

Схожу групу елементарних дробів породить кожний з квадратичних множників, що входять до розкладу многочлена $Q(x)$.

Таким чином, у випадку

$$Q(x) = (x - a_1)^{k_1} \cdot \dots \cdot (x - a_s)^{k_s} \cdot (x^2 + p_1x + q_1)^{m_1} \cdot \dots \cdot (x^2 + p_rx + q_r)^{m_r}$$

для правильного дробу $\frac{P(x)}{Q(x)}$ отримаємо наступний розклад:

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{A_1^{(1)}}{x - a_1} + \frac{A_2^{(1)}}{(x - a_1)^2} + \dots + \frac{A_{k_1}^{(1)}}{(x - a_1)^{k_1}} + \dots \\ &\quad \dots + \frac{A_1^{(s)}}{x - a_s} + \frac{A_2^{(s)}}{(x - a_s)^2} + \dots + \frac{A_{k_s}^{(s)}}{(x - a_s)^{k_s}} + \dots \\ &\quad \dots + \frac{M_1^{(1)}x + N_1^{(1)}}{x^2 + p_1x + q_1} + \frac{M_2^{(1)}x + N_2^{(1)}}{(x^2 + p_1x + q_1)^2} + \dots + \frac{M_{m_1}^{(1)}x + N_{m_1}^{(1)}}{(x^2 + p_1x + q_1)^{m_1}} + \dots \\ &\quad \dots + \frac{M_1^{(r)}x + N_1^{(r)}}{x^2 + p_rx + q_r} + \frac{M_2^{(r)}x + N_2^{(r)}}{(x^2 + p_rx + q_r)^2} + \dots + \frac{M_{m_r}^{(r)}x + N_{m_r}^{(r)}}{(x^2 + p_rx + q_r)^{m_r}}. \end{aligned} \quad (1.5.2)$$

Теорема доведена.

Визначення коефіцієнтів. Зауважимо, що кількість невідомих коефіцієнтів у розкладі (1.5.2) дорівнює степеню многочлена $Q(x)$. Для їх знаходження зазвичай застосовують такий метод. Праву частину рівності (1.5.2) зводять до спільного знаменника $Q(x)$. Прирівнюють чисельники і отримуємо рівність двох многочленів, степінь яких не перевищує $n - 1$, де n – степінь многочлена $Q(x)$. Із рівності коефіцієнтів при рівних степенях x отримують лінійну систему з n рівнянь відносно n невідомих коефіцієнтів. З існування розкладу випливає сумісність цієї системи рівнянь. Крім того, розв’язок існує для довільного набору вільних членів (коефіцієнтів многочлена $P(x)$). Тому система визначена. Звідси, зокрема, випливає єдиність з точністю до перестановки доданків розкладу правильного дробу на елементарні. Цей метод називається **методом невизначених коефіцієнтів**.

Приклад 1.5.1. Обчисліть інтеграл $\int \frac{2x^4 - x^3 + 3x^2}{(x-1)(x^2+1)^2} dx$.

Розв’язання. Під знаком інтеграла стоїть правильний дріб. Знайдемо його розклад на елементарні дроби. Для цього застосуємо метод невизначених коефіцієнтів:

$$\frac{2x^4 - x^3 + 3x^2}{(x-1)(x^2+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}.$$

Зводимо до спільного знаменника доданки у правій частині цієї рівності і прирівнюємо чисельники:

$$2x^4 - x^3 + 3x^2 = A(x^2+1)^2 + (Bx+C)(x-1)(x^2+1) + (Dx+E)(x-1).$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x у цій рівності, отримаємо систему лінійних рівнянь відносно A, B, C, D, E :

$$\begin{aligned}
 x^4 | \quad & A + B = 2, \\
 x^3 | \quad & -B + C = -1, \\
 x^2 | \quad & 2A + B - C + D = 3, \\
 x^1 | \quad & -B + C - D + E = 0, \\
 x^0 | \quad & A - C - E = 0.
 \end{aligned}$$

Із цієї системи рівнянь отримуємо: $A = B = E = 1$, $C = D = 0$. Отже,

$$\begin{aligned}
 \int \frac{2x^4 - x^3 + 3x^2}{(x-1)(x^2+1)^2} dx &= \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{xdx}{x^2+1} + \int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \ln|x-1| + \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + \\
 &+ \int \frac{1}{(x^2+1)^2} dx.
 \end{aligned}$$

Інтеграл

$$I_2 = \int \frac{1}{(x^2+1)^2} dx$$

знаходимо за допомогою рекурентної формули:

$$I_2 = \frac{1}{2} \left(I_1 + \frac{x}{x^2+1} \right) = \frac{1}{2} \left(\arctg x + \frac{x}{x^2+1} \right).$$

Відповідь:

$$\int \frac{2x^4 - x^3 + 3x^2}{(x-1)(x^2+1)^2} dx = \ln|x-1| + \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + \frac{1}{2} \arctg x + \frac{x}{2(x^2+1)} + C.$$

Як впливає з формул для інтегрування елементарних дробів та теореми 1.5.1, невизначений інтеграл довільної раціональної функції виражається через логарифми раціональних функцій, арктангенс та раціональну функцію. Для застосування методу невизначених коефіцієнтів

необхідно знати розклад на незвідні множники над полем дійсних чисел знаменника підінтегральної раціональної функції. На практиці такий розклад часто можна знайти лише наближено. М.В.Остроградський¹ відкрив спосіб, за допомогою якого раціональна частина невизначеного інтеграла від раціональної функції визначається без такого розкладу на множники ([11], п. 276).

1.6 Інтегрування раціональних функцій від синуса та косинуса

Функція

$$P(x, y) = \sum_{i,j=0}^n a_{ij} x^i y^j, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

де $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i, j \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, називається **многочленом двох змінних**.

Нехай $P(x, y)$, $Q(x, y)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ – многочлени двох змінних.

Функція

$$R(x, y) = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}, \quad (x, y) \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid Q(x, y) \neq 0\}$$

називається **раціональною функцією двох змінних**.

Зауваження 1.6.1. Нехай $x(t)$, $y(t)$ – раціональні функції змінної t . Функція $R(x, y)$ – раціональна функція двох змінних. Тоді $R(x(t), y(t))$ – раціональна функція змінної t .

¹ Остроградський Михайло Васильович (24.09.1801 – 1.01.1862) – український математик

Інтегрування раціональної функції $R(\sin x, \cos x)$ від синуса та косинуса зводиться до інтегрування раціональної функції однієї змінної за допомогою підстановки $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$. Нагадаємо, що

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}, \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}.$$

Тоді,

$$\int R(\sin x, \cos x) dx = \left| \begin{array}{l} t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}, \quad x = 2 \operatorname{arctg} t, \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} \end{array} \right| = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2dt}{1+t^2} -$$

інтеграл від раціональної функції змінної t .

Приклад 1.6.1. $\int \frac{\sin x}{(\sin x - \cos x + 1)(1 + \cos x)} dx = \left| \begin{array}{l} t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}, \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} \end{array} \right| =$

$$= \int \frac{2tdt}{2t - 1 + t^2 + 1 + t^2} = \int \frac{dt}{t+1} = \ln|t+1| + C = \ln\left|1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2}\right| + C. \quad (1.6.1)$$

Вправа 1.6.1. Вкажіть всі проміжки, на яких справджується (1.6.1).

Вправа 1.6.2. Нехай $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$. Доведіть, що в цьому випадку підстановка $t = \cos x$ зводить обчислення інтеграла $\int R(\sin x, \cos x) dx$ до інтегрування раціональної функції однієї змінної.

Вправа 1.6.3. Нехай $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$. Доведіть, що в цьому випадку підстановка $t = \sin x$ зводить обчислення інтеграла $\int R(\sin x, \cos x) dx$ до інтегрування раціональної функції однієї змінної.

Вправа 1.6.4. Нехай $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$. Доведіть, що в цьому випадку підстановка $t = \operatorname{tg} x$ зводить обчислення інтеграла $\int R(\sin x, \cos x) dx$ до інтегрування раціональної функції однієї змінної.

1.7 Інтегрування деяких ірраціональностей

Інтегрування функції $R\left(x, \sqrt[n]{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}}\right)$ ($\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$). Нехай $R(x, y)$ – раціональна функція двох змінних, $\alpha, \beta, \delta, \gamma \in \mathbb{R}$, $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$. Інтегрування функції $R\left(x, \sqrt[n]{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}}\right)$ зводиться до інтегрування раціональної функції за допомогою підстановки $t = \sqrt[n]{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}}$. При такій підстановці змінна x виражається через t за допомогою раціональної функції: $x = \frac{\delta t^n - \beta}{\alpha - \gamma t^n} =: r(t)$. Зауважимо, що похідна раціональної функції є раціональною функцією. Тому функція $r'(t)$ – раціональна функція. Таким чином,

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}}\right) dx = \left| \begin{array}{l} t = \sqrt[n]{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}}, \\ x = r(t), \quad dx = r'(t) dt \end{array} \right| = \int R(r(t), t) r'(t) dt.$$

Останній інтеграл є інтегралом від раціональної функції змінної t .

Приклад 1.7.1.

$$\int \frac{dx}{\left(\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)} + x+1\right)(x-1)} = \int \frac{dx}{\left(\sqrt[3]{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2} + \frac{x+1}{x-1}\right)(x-1)^2} =$$

$$= \left| dx = \frac{3t^2(t^3-1) - 3t^2(t^3+1)}{(t^3-1)^2} dt = \frac{-6t^2 dt}{(t^3-1)^2} \right| = \int \frac{-6t^2 dt}{(t^2+t^3)(t^3-1)^2} \frac{4}{(t^3-1)^2} =$$

$$= -\frac{3}{2} \int \frac{dt}{t+1} = -\frac{3}{2} \ln|t+1| + C, \text{ де } t = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}.$$

Інтегрування функції $R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})$. Підстановки Ойлера¹

Нехай $R(x, y)$ – раціональна функція двох змінних. За допомогою відомих підстановок Ойлера, інтегрування функції $R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})$ зводиться до інтегрування раціональної функції.

Першу підстановку Ойлера

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t + \sqrt{ax} \quad \text{або} \quad \sqrt{ax^2 + bx + c} = t - \sqrt{ax}$$

застосовують у випадку $a > 0$. Нехай, наприклад, $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t + \sqrt{ax}$.

Після піднесення обох частин цієї рівності до квадрата і віднімання від обох частин рівності ax^2 , знаходимо, що x раціонально виражається через t , тобто $x = r(t)$, де $r(t)$ – раціональна функція змінної t . Тоді

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx = \left| \begin{array}{l} \sqrt{ax^2 + bx + c} = t + \sqrt{ax} \\ x = r(t), dx = r'(t)dt \end{array} \right| = \int R(r(t), t + \sqrt{ar(t)}) r'(t) dt.$$

Останній інтеграл є інтегралом від раціональної функції (нагадаємо, що похідна раціональної функції – раціональна функція).

¹ Леонард Ойлер (Ейлер) (15.04.1707 – 18.09.1783) – математик, фізик, механік, астроном. Народився у Швейцарії. Працював у Росії (Петербург), Пруссії (Берлін).

Другу підстановку Ойлера

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = tx + \sqrt{c} \quad \text{або} \quad \sqrt{ax^2 + bx + c} = tx - \sqrt{c}$$

можна застосувати у випадку $c > 0$. Якщо перший чи другий вираз піднести до квадрата, відняти від обох частин рівності c і скоротити на x , то отримаємо лінійне рівняння відносно змінної x . Отже, знову x раціонально виражається через t , тобто $x = \tilde{r}(t)$, де $\tilde{r}(t)$ – раціональна функція змінної t . Тоді

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx = \left| \begin{array}{l} \sqrt{ax^2 + bx + c} = tx + \sqrt{c} \\ x = \tilde{r}(t), dx = \tilde{r}'(t)dt \end{array} \right| = \int R(\tilde{r}(t), t\tilde{r}(t) + \sqrt{c})\tilde{r}'(t)dt.$$

Останній інтеграл є інтегралом від раціональної функції.

Третя підстановка Ойлера може бути застосована у випадку, коли квадратний тричлен $ax^2 + bx + c$ має різні дійсні корені λ і μ . Тоді

$$ax^2 + bx + c = a(x - \lambda)(x - \mu).$$

Покладемо $ax^2 + bx + c = t(x - \lambda)$. Піднесемо обидві частини цієї рівності до квадрата, скоротимо на $(x - \lambda)$, помітимо, що x раціонально виражається через t і т.д., як для першої та другої підстановок.

Неважко бачити, що цими підстановками вичерпуються всі можливі випадки.

Приклад 1.7.2. Обчислимо

$$\int \frac{2\sqrt{x^2 + x + 1} + 2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x + 1}(2x\sqrt{x^2 + x + 1} + 2x^2 + x + 2)} dx.$$

Застосуємо першу підстановку Ойлера:

$$\sqrt{x^2 + x + 1} = t - x, \quad x^2 + x + 1 = t^2 - 2tx + x^2, \quad x(1 + 2t) = t^2 - 1,$$

$$x = \frac{t^2 - 1}{1 + 2t}, \quad dx = \frac{2t(1 + 2t) - 2(t^2 - 1)}{(1 + 2t)^2} dt = \frac{2t^2 + 2t + 2}{(1 + 2t)^2} dt.$$

Тоді

$$\begin{aligned} & \int \frac{2\sqrt{x^2 + x + 1} + 2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x + 1}(2x\sqrt{x^2 + x + 1} + 2x^2 + x + 2)} dx = \\ &= \int \frac{2t + 1}{2\sqrt{x^2 + x + 1}(2xt + x + 2)} \frac{2(t^2 + t + 1)}{(2t + 1)^2} dt = \\ &= \int \frac{t^2 + t + 1}{(2t + 1)\left(t - \frac{t^2 - 1}{2t + 1}\right)(t^2 - 1 + 2)} dt = \\ &= \int \frac{t^2 + t + 1}{(t^2 + t + 1)(t^2 + 1)} dt = \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \operatorname{arctg} t + C = \operatorname{arctg}\left(x + \sqrt{x^2 + x + 1}\right) + C. \end{aligned}$$

1.8 Інтегрування диференціального бінома

Вираз $x^m (a + bx^n)^p dx$, в якому $a, b \in \mathbb{R}; m, n, p \in \mathbb{Q}$, називається **диференціальним біномом**. Видатний російський математик П.Л.Чебишов¹ довів, що інтеграл від біномного диференціала виражається в елементарних функціях лише у випадках, вказаних у наступних трьох вправах. Відповідні підстановки називаються **підстановками Чебишова**.

¹ Пафнутій Львович Чебишов (16.05.1821 – 8.12.1894) – російський математик і механік.

Вправа 1.8.1. Нехай p – ціле. Доведіть, що в цьому випадку підстановка $x = t^N$, де N – спільний знаменник дробів m, n , зводить обчислення інтеграла $\int x^m (a + bx^n)^p dx$ до інтегрування раціональної функції однієї змінної.

Вправа 1.8.2. Нехай $\frac{m+1}{n}$ – ціле. Доведіть, що в цьому випадку підстановка $a + bx^n = t^N$, де N – знаменник дробу p , зводить обчислення інтеграла $\int x^m (a + bx^n)^p dx$ до інтегрування раціональної функції однієї змінної.

Вправа 1.8.3. Нехай $\frac{m+1}{n} + p$ – ціле. Доведіть, що в цьому випадку підстановка $ax^{-n} + b = t^N$, де N – знаменник дробу p , зводить обчислення інтеграла $\int x^m (a + bx^n)^p dx$ до інтегрування раціональної функції однієї змінної.

Приклад 1.8.1. Знайдемо інтеграл

$$\int \frac{x}{\sqrt{1 + \sqrt[3]{x^2}}} dx.$$

Це інтеграл від біномного диференціала, $m=1$, $p=-\frac{1}{2}$, $n=\frac{2}{3}$; $\frac{m+1}{n}=3$ – ціле. Отже, застосуємо підстановку $t^2 = x^{2/3} + 1$:

$$\int \frac{x}{\sqrt{1 + \sqrt[3]{x^2}}} dx = \left| \begin{array}{l} t^2 = x^{2/3} + 1, t > 0, \\ x = (t^2 - 1)^{3/2}, \\ dx = \frac{3}{2}(t^2 - 1)^{1/2} \cdot 2tdt \end{array} \right| = \int \frac{(t^2 - 1)^{3/2} \cdot 3(t^2 - 1)^{1/2} t dt}{t} =$$

$$= 3 \int (t^2 - 1)^2 dt = 3 \int (t^4 - 2t^2 + 1) dt = \frac{3t^5}{5} - 2t^3 + 3t + C,$$

де $t = \sqrt{x^{2/3} + 1}$.

Розділ 2. Інтеграл Рімана

Геометричні задачі вимірювання площі, обчислення довжини кривої, об'єму та площі поверхні тіла обертання, а також низка задач природничих наук та техніки приводять до поняття визначеного інтеграла. Цей розділ присвячений викладу теорії визначеного інтеграла та його застосуванням. Логічно обґрунтовану побудову визначеного інтеграла як границі інтегральних сум здійснив німецький математик Георг Ріман¹ у дев'ятнадцятому столітті.

2.1 Задачі, що приводять до поняття визначеного інтеграла

1. Обчислення площі криволінійної трапеції. Нехай $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ невід'ємна, неперервна на відрізку $[a, b]$ функція,

$$\Pi = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq f(x), a \leq x \leq b\} -$$

криволінійна трапеція. Для знаходження площі криволінійної трапеції Π відмітимо на відрізку $[a, b]$ у напрямі від a до b точки $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$. Проведемо систему прямих $x = x_k$, $0 \leq k \leq n$ і отримаємо розбиття трапеції Π на криволінійні трапеції

$$\Pi_k = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq f(x), x_k \leq x \leq x_{k+1}\}, \quad 0 \leq k \leq n-1: \quad \Pi = \bigcup_{k=0}^{n-1} \Pi_k.$$

Внаслідок теореми Кантора, неперервна на відрізку $[a, b]$ функція є рівномірно неперервною на цьому відрізку і тому при достатньо малих

¹ Ріман Георг Фрідріх Бернхард (17.9.1826 – 30.7.1866) – німецький математик.

$\Delta x_k := x_{k+1} - x_k$, $0 \leq k \leq n-1$ значення функції f у точках відрізка $[x_k, x_{k+1}]$ мало різняться між собою. Тому наближено можна вважати, що функція f на кожному відрізку $[x_k, x_{k+1}]$, $0 \leq k \leq n-1$ стала, рівна значенню функції f у деякій точці $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$. Це означає, що замість криволінійної трапеції $x_k A_k A_{k+1} x_{k+1}$ ми розглядаємо прямокутник з основою $[x_k, x_{k+1}]$ та висотою $f(\xi_k)$, а площу Π_k наближено виражаємо добутком $f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k) = f(\xi_k)\Delta x_k$, що рівний площі прямокутника. Тоді для площі

σ криволінійної трапеції Π отримаємо наближену рівність

$$\sigma \approx \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k.$$

Похибка має тенденцію зменшуватися із зменшенням довжини відрізків $[x_k, x_{k+1}]$, $0 \leq k \leq n-1$. Покладемо $d = \max_{0 \leq k \leq n-1} \Delta x_k$. Після переходу до границі при $d \rightarrow 0$ отримаємо рівність

$$\sigma = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k.$$

Права частина цієї рівності і є визначений інтеграл.

2. Обчислення довжини шляху. Розглянемо задачу знаходження довжини шляху, пройденого матеріальною точкою, яка рухалася із швидкістю $v(t)$ на відрізку часу $[t_0, t_0 + T]$. Для цього розіб'ємо відрізок $[t_0, t_0 + T]$ точками $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = t_0 + T$ на дрібні проміжки $[t_k, t_{k+1}]$, $0 \leq k \leq n-1$. Тоді на проміжку часу $[t_k, t_{k+1}]$ швидкість змінюється мало, так що її можна вважати сталою і рівній значенню швидкості у довільно взятій точці $\tau_k \in [t_k, t_{k+1}]$. Шлях, пройдений точкою на проміжку часу $[t_k, t_{k+1}]$ наближено рівний $v(\tau_k)(t_{k+1} - t_k) = v(\tau_k)\Delta t_k$. За час T точка пройде шлях

$$S \approx \sum_{k=0}^{n-1} v(\tau_k) \Delta \tau_k.$$

Похибка має тенденцію зменшуватися із зменшенням довжини відрізків $[t_k, t_{k+1}]$, $0 \leq k \leq n-1$. Покладемо $d = \max_{0 \leq k \leq n-1} \Delta t_k$. Після переходу до границі при $d \rightarrow 0$ отримаємо рівність

$$S = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\tau_k) \Delta t_k.$$

Приклад 2.1.1. Із використанням ідей Архімеда¹ знайдемо площу криволінійної трапеції

$$OAB = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq x^2, 0 \leq x \leq 1\}$$

Для цього розіб'ємо відрізок $[0, 1]$ на n рівних частин і побудуємо дві східчасті фігури, як показано на рис. 2.1.1

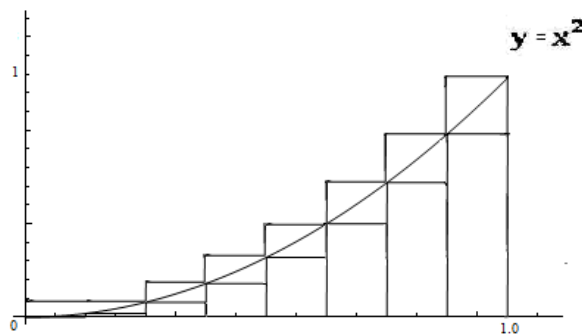


Рис.2.1.1: описана і вписана східчасті фігури для криволінійної трапеції OAB

Площа описаної східчастої фігури

$$U_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n} \right)^2 \cdot \frac{1}{n},$$

а площа вписаної східчастої фігури

$$L_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{k-1}{n} \right)^2 \cdot \frac{1}{n}.$$

¹ Архімед (287 – 212 до н.е.) – давньогрецький математик, фізик, механік

Для знаходження границі послідовності (U_n) при $n \rightarrow \infty$ застосуємо теорему Штольца:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2}{n^3};$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^3 - (n-1)^3} = \frac{1}{3}.$$

Отже, $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \frac{1}{3}$. Аналогічно, $\lim_{n \rightarrow \infty} L_n = \frac{1}{3}$. Далі, $\forall n \in N$:

$$L_n < S_{OAB} < U_n.$$

Після переходу до границі при $n \rightarrow \infty$ отримаємо площу криволінійної трапеції OAB : $S_{OAB} = \frac{1}{3}$.

Вправа 2.1.1. Застосуйте метод Архімеда для обчислення площі криволінійної трапеції $\{(x, y) | 0 \leq y \leq x^3, 0 \leq x \leq 1\}$.

Вправа 2.1.2. Застосуйте метод Архімеда для обчислення площі криволінійної трапеції $\{(x, y) | 0 \leq y \leq e^x, 0 \leq x \leq 1\}$.

2.2 Означення інтеграла Рімана

Означення 2.2.1. *Розбиттям* відрізка $[a, b]$ називається впорядкований набір точок $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ таких, що

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Позначення: $\lambda = \lambda([a, b]) = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$.

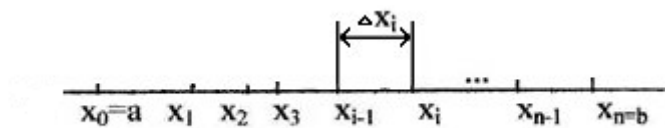


Рис. 2.2.1: Геометрична інтерпретація розбиття

Покладемо $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$, $0 \leq k \leq n-1$. **Дрібністю (діаметром) розбиття** λ називається число

$$d(\lambda) := \max_{0 \leq k \leq n-1} \Delta x_k.$$

Зауважимо, що $\sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k = b - a$. На кожному відрізку $[x_k, x_{k+1}]$, $0 \leq k \leq n-1$

розбиття λ зафіксуємо довільну точку $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$. Набір точок $\{\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n\}$ називається **набором проміжних точок**, що відповідає розбиттю λ і позначається символом $\{\xi_i | \lambda\}$.

Означення 2.2.2. Інтегральною сумою функції $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ для розбиття λ і набору проміжних точок $\{\xi_i | \lambda\}$ називається число

$$S(f, \lambda; \{\xi_i | \lambda\}) := \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i.$$

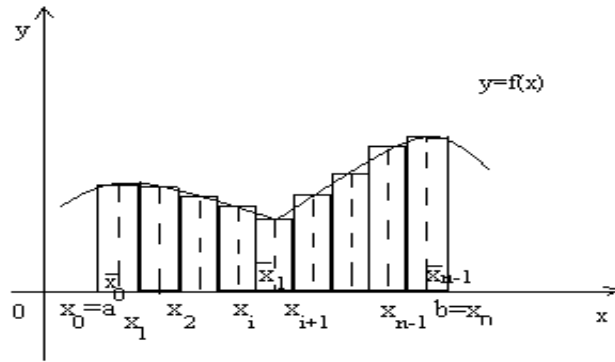


Рис. 2.2.2: Геометрична інтерпретація $S(f, \lambda; \{\xi_i | \lambda\})$. Площа східчастої фігури дорівнює $S(f, \lambda; \{\xi_i | \lambda\})$.

Означення 2.2.3. Дійсне число I називається **границею інтегральних сум** $S(f, \lambda; \{\xi_i | \lambda\})$ при $d(\lambda) \rightarrow 0$, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall \lambda, d(\lambda) < \delta, \forall \{\xi_i | \lambda\}: |S(f, \lambda; \{\xi_i | \lambda\}) - I| < \varepsilon.$$

Позначення: $I = \lim_{d(\lambda) \rightarrow 0} S(f, \lambda; \{\xi_i | \lambda\})$.

Вправа 2.2.1. Нехай функція $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ обмежена на $[a, b]$, $\alpha > 0$. Доведіть,

$$\text{що } \lim_{d(\lambda) \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) (\Delta x_k)^{1+\alpha} = 0.$$

Означення 2.2.4. Функція $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ називається *інтегровною за Ріманом* на відрізку $[a, b]$ якщо існує скінченна границя інтегральних сум $S(f, \lambda; \{\xi_i | \lambda\})$ при $d(\lambda) \rightarrow 0$. Ця границя називається *визначенням інтегралом (інтегралом Рімана)* функції f на відрізку $[a, b]$ і позначається

$$I = \int_a^b f(x) dx.$$

У цьому запису $f(x)$ — *підінтегральна функція*, x — *змінна інтегрування*, a — *нижня межа інтегрування*, b — *верхня межа інтегрування*.

Через $R([a, b])$ позначають множину всіх функцій, інтегровних за Ріманом на відрізку $[a, b]$.

Приклад 2.2.1. Інтегровність сталої. Нехай $f(x) = c$, $x \in [a, b]$. Тоді для довільного розбиття $\lambda = \{a = x_0, x_1, \dots, x_n = b\}$ та довільного набору проміжних точок $\{\xi_i | \lambda\}$:

$$S(f, \lambda; \{\xi_i | \lambda\}) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i = c \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_i = c(b-a).$$

Тому $\lim_{d(\lambda) \rightarrow 0} S(f, \lambda; \{\xi_k | \lambda\}) = c(b-a)$. Отже, за означенням інтегровної

$$\text{функції, } f \in R([a, b]) \text{ і } \int_a^b f(x) dx = \int_a^b c dx = c(b-a).$$

Лема 2.2.1 (обмеженість інтегровної за Ріманом функції). Інтегровна за Ріманом на відрізку $[a, b]$ функція обмежена на цьому відрізку.

Доведення. Нехай $f \in R([a, b])$. Застосуємо метод від супротивного. Припустимо, що функція f необмежена на $[a, b]$. За означенням інтегровної функції, існує

$$\lim_{d(\lambda) \rightarrow 0} S(f, \lambda; \{\xi_i | \lambda\}) = \int_a^b f(x) dx =: I.$$

В означенні границі інтегральних сум покладемо $\varepsilon = 1$. Тоді

$$\exists \delta > 0 \forall \lambda, d(\lambda) < \delta, \forall \{\xi_i | \lambda\}:$$

$$I - 1 < S(f, \lambda; \{\xi_i | \lambda\}) < I + 1. \quad (2.2.1)$$

Зафіксуємо розбиття $\lambda = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ з $d(\lambda) < \delta$. Оскільки функція f необмежена на відрізку $[a, b]$, то принаймні для одного індексу $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ вона необмежена на відрізку $[x_k, x_{k+1}]$. Зафіксуємо всі проміжні точки, крім точки $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$. Тоді інтегральна сума

$$S(f, \lambda; \{\xi_i | \lambda\}) = \sum_{i=0, i \neq k}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i + f(\xi_k) \Delta x_k$$

може набути як завгодно великих за модулем значень за рахунок доданка $f(\xi_k) \Delta x_k$ шляхом належного вибору проміжної точки $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$. Це суперечить нерівностям (2.2.1). Лема доведена.

Вправа 2.2.2. Нехай $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}}, & x \in (0, 1], \\ 0, & x = 0. \end{cases}$ Чи інтегровна за Ріманом функція

f на відрізку $[0, 1]$?

Як свідчить наступний приклад, обмеженість функції на відрізку $[a, b]$ не є достатньою умовою для її інтегровності на цьому відрізку.

Приклад 2.2.2. Неінтегровність за Ріманом функції Діріхле¹.
Функція

¹ Діріхле Петер Густав Лежен (13.2.1805 – 5.5.1859) – німецький математик

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1], \\ 0, & x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0, 1] \end{cases}$$

називається функцією Діріхле. Покажемо, що ця функція не інтегровна на відрізку $[0, 1]$. Для довільного розбиття $\lambda = \{0 = x_0, x_1, \dots, x_n = 1\}$ відрізка $[0, 1]$ кожний відрізок $[x_k, x_{k+1}]$, $0 \leq k \leq n-1$ містить як раціональні, так і ірраціональні точки. Нехай $\{\xi'_i | \lambda\}$, $\{\xi''_i | \lambda\}$ – набори проміжних точок такі, що $\{\xi'_i | \lambda\} \subset \mathbb{Q}$, $\{\xi''_i | \lambda\} \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Тоді

$$S(f, \lambda; \{\xi'_i | \lambda\}) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi'_i) \Delta x_i = 1, \quad S(f, \lambda; \{\xi''_i | \lambda\}) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi''_i) \Delta x_i = 0,$$

причому ці рівності справджуються для розбиттів як завгодно малої дрібності. Отже, границя інтегральних сум $S(f, \lambda; \{\xi_i | \lambda\})$ при $d(\lambda) \rightarrow 0$ не існує, внаслідок чого, $f \notin R([0, 1])$.

2.3 Суми Дарбу¹. Теорема Дарбу

Нехай функція $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ обмежена на $[a, b]$. Тоді для довільного розбиття $\lambda = \{a = x_0, x_1, \dots, x_n = b\}$ функція f обмежена на кожному відрізку $[x_k, x_{k+1}]$, $0 \leq k \leq n-1$. Тому, внаслідок теореми про існування точних меж, існують числа $m_k = \inf\{f(x) | x_k \leq x \leq x_{k+1}\}$, $M_k = \sup\{f(x) | x_k \leq x \leq x_{k+1}\}$, $0 \leq k \leq n-1$.

Означення 2.3.1. Нижньою сумою Дарбу обмеженої на $[a, b]$ функції f для розбиття $\lambda = \{a = x_0, x_1, \dots, x_n = b\}$ називається число

$$L(f, \lambda) := \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k.$$

¹ Дарбу Жан Гастон (13.8.1842 – 23.2.1917) – французький математик

Верхньою сумою Дарбу обмеженої на $[a, b]$ функції f для розбиття $\lambda = \{a = x_0, x_1, \dots, x_n = b\}$ називається число

$$U(f, \lambda) := \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k.$$

Геометрична інтерпретація верхньої та нижньої сум Дарбу зображена на рис. 2.3.1.

Через $\Lambda = \Lambda([a, b])$ позначимо множину всіх розбиттів відрізка $[a, b]$. Для обмеженої функції $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ покладемо $m = \inf \{f(x) | a \leq x \leq b\}$, $M = \sup \{f(x) | a \leq x \leq b\}$. Тоді $\forall \lambda \in \Lambda \quad \forall \{\xi_i | \lambda\}$:

$$m \leq m_k \leq f(\xi_k) \leq M_k \leq M, \quad 0 \leq k \leq n-1.$$

Почленно помножимо цей ланцюжок нерівностей на Δx_k і підсумуємо по

k від 0 до $n-1$. Враховуючи, що $\sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k = b - a$, отримаємо:

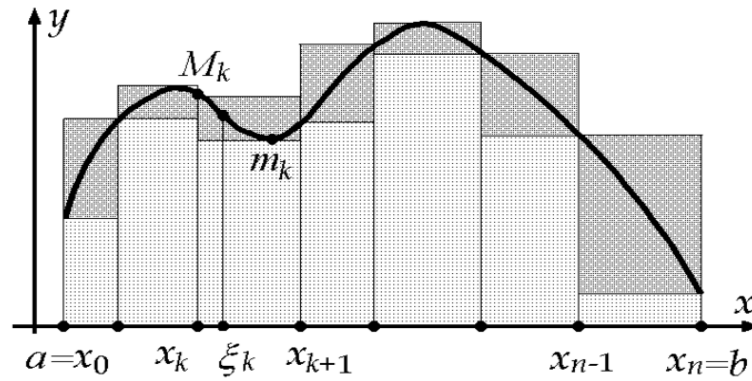


Рис. 2.3.1: Геометрична інтерпретація нижньої та верхньої сум Дарбу. Площа вписаної сідчастої фігури дорівнює $L(f, \lambda)$. Площа описаної сідчастої фігури дорівнює $U(f, \lambda)$.

$$m(b-a) \leq L(f, \lambda) \leq S(f, \lambda; \{\xi_i | \lambda\}) \leq U(f, \lambda) \leq M(b-a). \quad (2.3.1)$$

Означення 2.3.2. *Нижнім інтегралом* функції f на відрізку $[a, b]$ називається число

$$\int_{-} f(x)dx = \sup_{\lambda \in \Lambda} L(f, \lambda).$$

Верхнім інтегралом функції f на відрізку $[a, b]$ називається число

$$\bar{\int} f(x)dx = \inf_{\lambda \in \Lambda} U(f, \lambda).$$

Із ланцюжка нерівностей (2.3.1) випливає, що множини $\{L(f, \lambda) | \lambda \in \Lambda\}$ та $\{U(f, \lambda) | \lambda \in \Lambda\}$ обмежені, звідки, внаслідок теореми про існування точних меж, випливає коректність означення 2.3.2.

Приклад 2.3.1. Нехай $f(x)$, $x \in [a, b]$ – звуження функції Діріхле на відрізок $[0, 1]$. Тоді $\forall \lambda = \{0 = x_0, x_1, \dots, x_n = 1\}$, $\forall k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$: $m_k = \inf\{f(x) | x_k \leq x \leq x_{k+1}\} = 0$, $M_k = \sup\{f(x) | x_k \leq x \leq x_{k+1}\} = 1$, оскільки відрізок $[x_k, x_{k+1}]$ містить як раціональні, так і ірраціональні точки. Далі,

$$\forall \lambda \in \Lambda: L(f, \lambda) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k = 0 \Rightarrow \int_{-} f(x)dx = 0 \quad \text{і}$$

$$\forall \lambda \in \Lambda: U(f, \lambda) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k = 1 \Rightarrow \bar{\int} f(x)dx = 1.$$

Нам стануть у нагоді наступні властивості сум Дарбу.

Означення 2.3.3. Розбиття $\tilde{\lambda}$ називається подрібненням розбиття λ , якщо $\lambda \subset \tilde{\lambda}$.

Властивість 2.3.1. Нехай розбиття $\tilde{\lambda}$ є подрібненням розбиття λ . Тоді

$$L(f, \lambda) \leq L(f, \tilde{\lambda}) \leq U(f, \tilde{\lambda}) \leq U(f, \lambda). \quad (2.3.2)$$

Доведення. Доведемо нерівність $U(f, \tilde{\lambda}) \leq U(f, \lambda)$. Нерівність $L(f, \lambda) \leq L(f, \tilde{\lambda})$ доводиться аналогічно. Розбиття $\tilde{\lambda}$ утворюється приєднанням до розбиття λ скінченного числа точок відрізка $[a, b]$. Тому можна розглянути набір вкладених розбиттів

$$\lambda = \lambda_0 \subset \lambda_1 \subset \lambda_2 \subset \dots \subset \lambda_m \subset \tilde{\lambda},$$

таких, що розбиття λ_{i+1} має рівно на одну точку більше, ніж розбиття λ_i , $0 \leq i \leq m-1$. Отже, достатньо довести, що після приєднання до розбиття однієї точки верхня сума Дарбу не збільшиться. Нехай $\lambda = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, $\tilde{\lambda} = \lambda \cup \{c\}$, де $c = c_k \in (x_k, x_{k+1})$ для деякого індексу $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$.

Покладемо

$$M_k = \sup\{f(x) \mid x_k \leq x \leq x_{k+1}\},$$

$$M'_k = \sup\{f(x) \mid x_k \leq x \leq c_k\}, \quad M''_k = \sup\{f(x) \mid c_k \leq x \leq x_{k+1}\}.$$

Зауважимо, що $M_k \geq M'_k$, $M_k \geq M''_k$. Тоді

$$\begin{aligned} U(f, \lambda) - U(f, \tilde{\lambda}) &= M_k(x_k - x_{k+1}) - M'_k(c_k - x_k) - M''_k(x_{k+1} - c_k) = \\ &= (M_k - M'_k)(c_k - x_k) + (M_k - M''_k)(x_{k+1} - c_k) \geq 0. \end{aligned}$$

Властивість доведена.

Властивість 2.3.2. $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda: \quad L(f, \lambda_1) \leq U(f, \lambda_2).$

Доведення. Покладемо $\lambda = \lambda_1 \cup \lambda_2$. Тоді розбиття λ – подрібнення кожного з розбиттів λ_1, λ_2 , а тому, внаслідок властивості 2.3.2,

$$L(f, \lambda_1) \leq L(f, \lambda) \leq U(f, \lambda) \leq U(f, \lambda_2).$$

Властивість доведена.

Властивість 2.3.3. Для довільної функції $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, обмеженої на $[a, b]$, нижній інтеграл не більший верхнього інтеграла:

$$\int_a^b f(x) dx \leq \bar{\int}_a^b f(x) dx. \quad (2.3.3)$$

Доведення. Внаслідок властивості 2.3.2,

$$\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda: \quad L(f, \lambda_1) \leq U(f, \lambda_2).$$

У цій нерівності зафіксуємо λ_2 і перейдемо до точної верхньої межі по

$\lambda_1 \in \Lambda$. Отримаємо нерівність $\sup_{\lambda_1 \in \Lambda} L(f, \lambda_1) \leq U(f, \lambda_2)$, тобто

$$\int f(x)dx \leq U(f, \lambda_2).$$

У цій нерівності перейдемо до точної нижньої межі по $\lambda_2 \in \Lambda$ і отримаємо нерівність (2.3.3). Властивість доведена.

Теорема Дарбу

Лема 2.3.1. $\forall \lambda \in \Lambda$:

$$L(f, \lambda) = \inf \{S(f, \lambda; \{\xi_i | \lambda\}) | \{\xi_i | \lambda\}\}, \quad (2.3.4)$$

$$U(f, \lambda) = \sup \{S(f, \lambda; \{\xi_i | \lambda\}) | \{\xi_i | \lambda\}\}, \quad (2.3.5)$$

де точні межі беруться по множині всіх можливих наборів проміжних точок, що відповідають розбиттю λ .

Доведення. Дійсно, $\forall \{\xi_i | \lambda\}$

$$S(f, \lambda; \{\xi_i | \lambda\}) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k \leq \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k = U(f, \lambda). \quad (2.3.6)$$

Для кожного $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$: $M_k = \sup \{f(x) | x_k \leq x \leq x_{k+1}\}$, а тому

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \tilde{\xi}_k \in [x_k, x_{k+1}]: f(\tilde{\xi}_k) > M_k - \frac{\varepsilon}{b-a}, \quad 0 \leq k \leq n-1.$$

Цю нерівність помножимо на Δx_k і підсумуємо від $k=0$ до $k=n-1$.

Отримаємо нерівність

$$S(f, \lambda; \{\tilde{\xi}_i | \lambda\}) > U(f, \lambda) - \varepsilon. \quad (2.3.7)$$

Із нерівностей (2.3.6) та (2.3.7) за означенням супремуму випливає рівність (2.3.5). Аналогічно доводиться (2.3.4). Лема доведена.

Лема 2.3.2. Для довільної функції $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, обмеженої на $[a, b]$, границя нижніх сум Дарбу при $d(\lambda) \rightarrow 0$ дорівнює нижньому інтегралу функції f на відрізку $[a, b]$; границя верхніх сум Дарбу при $d(\lambda) \rightarrow 0$ дорівнює верхньому інтегралу функції f на відрізку $[a, b]$. Тобто,

$$\lim_{d(\lambda) \rightarrow 0} L(f, \lambda) = \int f(x) dx, \quad (2.3.8)$$

$$\lim_{d(\lambda) \rightarrow 0} U(f, \lambda) = \int f(x) dx. \quad (2.3.9)$$

Доведення. Доведемо твердження для верхніх сум Дарбу. Твердження для нижніх сум Дарбу доводиться аналогічно. За означенням верхнього інтеграла,

$$I^* = \int f(x) dx = \inf_{\lambda \in \Lambda} U(f, \lambda).$$

Внаслідок означення точної нижньої межі, $\forall \varepsilon > 0 \exists \lambda_0 \in \Lambda$:

$$I^* \leq U(f, \lambda_0) < I^* + \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2.3.10)$$

Нехай $\lambda_0 = \{a = z_0, z_1, \dots, z_m = b\}$. Оскільки функція f обмежена на відрізка $[a, b]$, то

$$\exists C > 0 \quad \forall x \in [a, b]: |f(x)| \leq C.$$

Покладемо $\delta = \min\left(\frac{\varepsilon}{4mC}, \min_{0 \leq k \leq m-1} \Delta z_k\right) > 0$ і доведемо, що $\forall \lambda \in \Lambda, d(\lambda) < \delta$:

$$U(f, \lambda) < U(f, \lambda_0) + \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2.3.11)$$

Для цього розглянемо розбиття $\tilde{\lambda} = \lambda \cup \lambda_0$, яке є подрібненням кожного з розбиттів λ, λ_0 . Далі, $U(f, \lambda) = U(f, \tilde{\lambda}) + (U(f, \lambda) - U(f, \tilde{\lambda})) \leq U(f, \lambda_0) + (U(f, \lambda) - U(f, \tilde{\lambda}))$. Отже, для доведення нерівності (2.3.11)

достатньо показати, що

$$U(f, \lambda) - U(f, \tilde{\lambda}) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Нехай $\lambda = \{a = x_0, x_1, \dots, x_n = b\}$. Після об'єднання цього розбиття з розбиттям λ_0 , на деякі інтервали (x_k, x_{k+1}) потрапляють точки розбиття λ_0 .

При цьому більше однієї точки потрапити не може, оскільки $d(\lambda) < \delta \leq \min_{0 \leq i \leq m} \Delta z_i$.

Інтервали (x_k, x_{k+1}) , які не містять точок λ_0 , дають нульовий внесок у різницю $U(f, \lambda) - U(f, \tilde{\lambda})$. Нехай інтервал (x_k, x_{k+1}) містить точку $z \in \lambda_0$.

Покладемо

$$M_k = \sup\{f(x) \mid x_k \leq x \leq x_{k+1}\}, \quad M'_k = \sup\{f(x) \mid x_k \leq x \leq z\},$$

$$M''_k = \sup\{f(x) \mid z \leq x \leq x_{k+1}\}.$$

Оцінемо внесок відповідного доданка до різниці $U(f, \lambda) - U(f, \tilde{\lambda})$:

$$M_k(x_{k+1} - x_k) - M'_k(z - x_k) - M''_k(x_{k+1} - z) =$$

$$= (M_k - M'_k)(z - x_k) + (M_k - M''_k)(x_{k+1} - z) \leq 2C\delta.$$

Кількість інтервалів (x_k, x_{k+1}) , які містять точки розбиття λ_0 , не перевищує

m . Тому $U(f, \lambda) - U(f, \tilde{\lambda}) < 2Cm\delta = \frac{2Cm\varepsilon}{4Cm} = \frac{\varepsilon}{2}$. Таким чином, нерівність

(2.3.11) доведена. Із нерівностей (2.3.10), (2.3.11) випливає, що $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall \lambda, d(\lambda) < \delta: I^* \leq U(f, \lambda) < I^* + \varepsilon$. Рівність (2.3.9) доведена.

Теорема 2.3.1 (Дарбу). Функція $f \in R([a, b])$ тоді і тільки тоді, коли

$\int f(x)dx = \bar{\int} f(x)dx$. При цьому спільне значення нижнього і верхнього

інтегралів дорівнює $\int_a^b f(x)dx$.

Доведення. Необхідність. Нехай $\lim_{d(\lambda) \rightarrow 0} S(f, \lambda; \{\xi_i \mid \lambda\}) = \int_a^b f(x)dx =: I$.

Внаслідок леми 2.2.1, функція f обмежена на відрізку $[a, b]$. За означенням границі інтегральних сум, $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall \lambda, d(\lambda) < \delta \forall \{\xi_i \mid \lambda\}$:

$$I - \varepsilon < S(f, \lambda; \{\xi_i \mid \lambda\}) < I + \varepsilon,$$

звідки, внаслідок леми 2.3.1, випливає, що

$$I - \varepsilon < \sup_{\{\xi_i | \lambda\}} S(f, \lambda; \{\xi_i | \lambda\}) = U(f, \lambda) \leq I + \varepsilon,$$

де точна верхня межа береться по множині всіх можливих наборів проміжних точок, що відповідають розбиттю λ . Таким чином,

$$\lim_{d(\lambda) \rightarrow 0} U(f, \lambda) = I.$$

За лемою 2.3.2,

$$\lim_{d(\lambda) \rightarrow 0} U(f, \lambda) = \int f(x) dx,$$

тому $I = \int f(x) dx$. Аналогічно доводиться, що $I = \int f(x) dx$. Необхідність доведена.

Достатність. Нехай $\int f(x) dx = \int f(x) dx = I$. Далі, $\forall \lambda \in \Lambda, \forall \{\xi_i | \lambda\}$:

$$L(f, \lambda) \leq S(f, \lambda; \{\xi_i | \lambda\}) \leq U(f, \lambda).$$

Внаслідок леми 2.3.2, $\lim_{d(\lambda) \rightarrow 0} L(f, \lambda) = \int f(x) dx$, і $\lim_{d(\lambda) \rightarrow 0} U(f, \lambda) = \int f(x) dx$.

Враховуючи рівність нижнього і верхнього інтегралів, отримуємо, що існує границя інтегральних сум $\lim_{d(\lambda) \rightarrow 0} S(f, \lambda; \{\xi_i | \lambda\}) = I$. Таким чином,

$f \in R([a, b])$ та $I = \int_a^b f(x) dx$. Теорема доведена.

Зауваження 2.3.1. З доведення достатності випливає, що для функції $f \in R([a, b])$ границя верхніх (нижніх) сум Дарбу при $d(\lambda) \rightarrow 0$ дорівнює інтегралу функції f на відрізку $[a, b]$:

Теорема 2.3.2 (критерій інтегровності).

$$f \in R([a, b]) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \lambda \in \Lambda: U(f, \lambda) - L(f, \lambda) < \varepsilon.$$

Доведення. Необхідність. Нехай $f \in R([a, b])$. Внаслідок теореми Дарбу,

$$\int_a^b f(x) dx = \bar{\int}_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx = I.$$

За означенням нижнього та верхнього інтегралів та означенням точних меж,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \lambda_1 \in \Lambda : L(f, \lambda_1) > I - \frac{\varepsilon}{2}, \quad \exists \lambda_2 \in \Lambda : U(f, \lambda_2) < I + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Покладемо $\lambda = \lambda_1 \cup \lambda_2$. Оскільки розбиття λ – подрібнення кожного з розбиттів λ_1, λ_2 , то

$$U(f, \lambda) - L(f, \lambda) \leq U(f, \lambda_2) - L(f, \lambda_1) < \varepsilon.$$

Достатність. Нехай $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \lambda \in \Lambda : U(f, \lambda) - L(f, \lambda) < \varepsilon$. Крім того,

$$L(f, \lambda) \leq \int_a^b f(x) dx \leq \bar{\int}_a^b f(x) dx \leq U(f, \lambda),$$

звідки $0 \leq \bar{\int}_a^b f(x) dx - \int_a^b f(x) dx < \varepsilon$. У цій нерівності перейдемо до границі

при $\varepsilon \rightarrow 0+$ і отримаємо рівність $\bar{\int}_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$. Внаслідок теореми

Дарбу, звідси випливає, що $f \in R([a, b])$. Теорема доведена.

Нехай функція $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ обмежена на відрізку $[a, b]$.

Означення 2.3.3. Коливанням функції f на відрізку $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ називається число $\omega(f, [\alpha, \beta]) = \sup_{x \in [\alpha, \beta]} f(x) - \inf_{x \in [\alpha, \beta]} f(x)$.

Наприклад, $\omega(\sin, [0, 2\pi]) = 2$.

Вправа 2.3.1. Доведіть, що

$$\omega(f, [\alpha, \beta]) = \sup_{s, t \in [\alpha, \beta]} (f(s) - f(t)) = \sup_{s, t \in [\alpha, \beta]} |f(s) - f(t)|.$$

Для розбиття $\lambda = \{a = x_0, x_1, \dots, x_n = b\}$ покладемо

$$\omega_k(f) = \omega(f, [x_k, x_{k+1}]), \quad 0 \leq k \leq n-1;$$

$$\Omega(f, \lambda) := \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k(f) \Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} (M_k - m_k) \Delta x_k = U(f, \lambda) - L(f, \lambda). \quad (2.3.12)$$

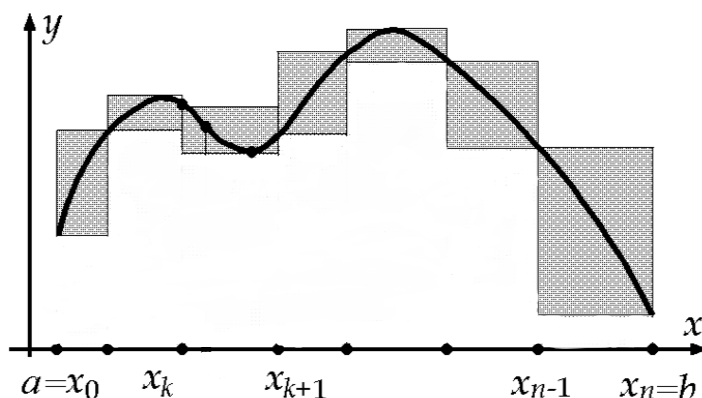


Рис. 2.3.1 Геометрична інтерпретація $\Omega(f, \lambda)$. Площа заштрихованої фігури дорівнює $\Omega(f, \lambda)$.

Із критерію інтегровності (теорема 2.3.2) та рівностей (2.3.12) випливає

Теорема 2.3.3 (критерій інтегровності в термінах коливань).

$$f \in R([a, b]) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \lambda \in \Lambda : \Omega(f, \lambda) < \varepsilon.$$

Зауваження 2.3.2. Із рівності (2.3.12) та зауваження 2.3.1 до теореми Дарбу випливає, що для функції $f \in R([a, b])$: $\lim_{d(\lambda) \rightarrow 0} \Omega(f, \lambda) = 0$.

2.4 Сім'ї інтегровних функцій

У цьому підрозділі буде встановлено інтегровність за Ріманом на відрізьку $[a, b]$ таких класів функцій:

- сім'я монотонних на відрізьку $[a, b]$ функцій;

- сім'я неперервних на відрізку $[a, b]$ функцій;
- сім'я обмежених функцій $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, кожна з яких має не більше скінченної множини точок розриву на відрізку $[a, b]$.

Теорема 2.4.1 (інтегровність монотонної на відрізку функції).

Монотонна на відрізку функція інтегровна за Ріманом на цьому відрізку.

Доведення. Нехай функція $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ неспадна на відрізку $[a, b]$.

Для довільного $\varepsilon > 0 \exists \lambda = \{a = x_0, x_1, \dots, x_n\} \in \Lambda, d(\lambda) < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a) + 1}$. Тоді

$$\begin{aligned} U(f, \lambda) - L(f, \lambda) &= \sum_{k=0}^{n-1} (M_k - m_k) \Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} (f(x_{k+1}) - f(x_k)) \Delta x_k \leq \\ &\leq d(\lambda) \sum_{k=0}^{n-1} (f(x_{k+1}) - f(x_k)) = d(\lambda) (f(b) - f(a)) \leq \frac{\varepsilon (f(b) - f(a))}{f(b) - f(a) + 1} < \varepsilon \end{aligned}$$

і внаслідок критерію інтегровності в термінах сум Дарбу, $f \in R([a, b])$.

Теорема доведена.

Теорема 2.4.2 (інтегровність неперервної на відрізку функції).

Неперервна на відрізку функція інтегровна за Ріманом на цьому відрізку.

Доведення. Нехай $f \in C([a, b])$. За теоремою Кантора про рівномірну неперервність неперервної на відрізку функції,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall s, t \in [a, b] \quad |s - t| < \delta : |f(s) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

Виберемо розбиття $\lambda = \{a = x_0, x_1, \dots, x_n\} \in \Lambda, d(\lambda) < \delta$. Тоді

$$\forall k \in \{0, 1, \dots, n-1\}: \omega_k(f) = \sup_{x \in [x_k, x_{k+1}]} |f(s) - f(t)| \leq \frac{\varepsilon}{b - a},$$

оскільки $x_{k+1} - x_k < \delta$. Далі,

$$\Omega(f, \lambda) = \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k(f) \Delta x_k \leq \frac{\varepsilon}{b - a} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k = \varepsilon.$$

Внаслідок критерію інтегровності в термінах коливань, $f \in R([a, b])$. Теорема доведена.

Приклад 2.4.1. Функція $f(x) = x^2$, $x \in [0, 1]$ неперервна на відрізку $[0, 1]$ і, внаслідок теореми 2, інтегровна за Ріманом на цьому відрізку. За означенням інтегрової за Ріманом функції, існує границя інтегральних сум

$$\lim_{d(\lambda) \rightarrow 0} S(f, \lambda; \{\xi_k \mid \lambda\}) = \int_a^b f(x) dx.$$

Для обчислення цієї границі виберемо послідовність рівномірних розбиттів $\lambda_n = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, n\right\}$, $d(\lambda_n) = \frac{1}{n} \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$ і набори проміжних точок

$$\{\xi_k \mid \lambda_n\} = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}\right\}, n \in N.$$

Тоді

$$S(f, \lambda_n; \{\xi_k \mid \lambda_n\}) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^2 \frac{1}{n} = \frac{1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2}{n^3} \rightarrow \frac{1}{3}, n \rightarrow \infty.$$

Отже, $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$.

Вправа 2.4.1. Нехай $f(x) = x^3$, $x \in [0, 1]$. Доведіть, що $f \in R([0, 1])$ та обчисліть

$$\int_0^1 f(x) dx.$$

Вправа 2.4.2. Нехай $f(x) = e^x$, $x \in [0, 1]$. Доведіть, що $f \in R([0, 1])$ та обчисліть

$$\int_0^1 f(x) dx.$$

Приклад 2.4.2. Доведемо, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} \right) = \int_0^1 \frac{dx}{1+x}. \quad (2.4.1)$$

Для цього перетворимо суму під знаком границі наступним чином:

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1 + \frac{k}{n}} \cdot \frac{1}{n}.$$

Функція $f(x) = \frac{1}{1+x}$, $x \in [0, 1]$ неперервна на відрізку $[0, 1]$ і, внаслідок теореми 2.2.2, інтегровна за Ріманом на цьому відрізку. За означенням інтегровної за Ріманом функції, існує границя інтегральних сум

$$\lim_{d(\lambda) \rightarrow 0} S(f, \lambda; \{\xi_k \mid \lambda\}) = \int_a^b f(x) dx.$$

Зокрема, для послідовності рівномірних розбиттів

$$\lambda_n = \left\{ 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, n \right\}, \quad d(\lambda_n) = \frac{1}{n} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty \quad \text{і наборів проміжних}$$

точок

$$\{\xi_k \mid \lambda_n\} = \left\{ 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n} \right\}, \quad n \in \mathbb{N}:$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1 + \frac{k}{n}} \cdot \frac{1}{n} \rightarrow \int_0^1 \frac{dx}{1+x}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Рівність (2.4.1) доведена.

Вправа 2.4.3. Доведіть, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{n^2 + k^2} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}.$$

Теорема 2.4.3 (*інтегровність функції із скінченною множиною точок розриву*). Нехай функція $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ задовольняє умови:

- 1) функція f обмежена на відрізку $[a, b]$;
- 2) $\exists \{z_1, z_2, \dots, z_m\} \subset [a, b]: f \in C([a, b] \setminus \{z_1, z_2, \dots, z_m\})$.

Тоді $f \in R([a, b])$.

Доведення. Оскільки функція f обмежена на $[a, b]$, то

$$\exists C > 0 \quad \forall x \in [a, b]: |f(x)| \leq C.$$

Не втрачаючи загальності, можна вважати, що $a = z_1 < z_2 < \dots < z_m = b$.

Для довільного $\varepsilon > 0$ покладемо $\delta = \min \left\{ \delta_1, \frac{\varepsilon}{8mC} \right\}$,

де $\delta_1 = \frac{1}{3} \min_{1 \leq i \leq m-1} (z_{i+1} - z_i)$. Тоді $\forall i \in \{1, 2, \dots, m-1\}: f \in C([z_i + \delta, z_{i+1} - \delta])$ і

за теоремою про інтегровність за Ріманом неперервної на відрізку функції, $f \in R([z_i + \delta, z_{i+1} - \delta])$, $1 \leq i \leq m-1$. Внаслідок критерію інтегровності в термінах коливань,

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, m-1\} \quad \exists \lambda_i = \lambda_i([z_i + \delta, z_{i+1} - \delta]): \Omega(f, \lambda_i) < \frac{\varepsilon}{2m}.$$

Покладемо $\lambda = \{a\} \cup \lambda_1 \cup \lambda_2 \cup \dots \cup \lambda_{m-1} \cup \{b\}$. Для цього розбиття

$$\begin{aligned} \Omega(f, \lambda) &= \sum_{i=1}^{m-1} \Omega(f, \lambda_i) + \omega(f, [a, a + \delta]) \cdot \delta + \sum_{i=2}^{m-1} \omega(f, [z_i - \delta, z_i + \delta]) \cdot 2\delta + \\ &+ \omega(f, [b - \delta, b]) \cdot \delta < m \cdot \frac{\varepsilon}{2m} + m \cdot 2C \cdot 2\delta = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

За критерієм інтегровності в термінах коливань, $f \in R([a, b])$. Теорема доведена.

Так само можна довести таке твердження.

Вправа 2.4.4. Нехай $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in R([a, b])$ і $\exists \{z_1, z_2, \dots, z_m\} \subset [a, b]:$

$\forall x \in [a, b] \setminus \{z_1, z_2, \dots, z_m\}: f(x) = g(x)$. Доведіть, що $g \in R([a, b])$.

Вправа 2.4.5. Нехай функція $f \in R([a, b])$ відмінна від нуля не більш ніж на

скінченній множині точок. Доведіть, що $f \in R([a, b])$ і $\int_a^b f(x) dx = 0$.

Вправа 2.4.6. Нехай $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ відмінні між собою не більш ніж на скінченній множині точок. Тоді функції f, g належать або не належать $R([a, b])$

одночасно. У випадку інтегровності $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx$.

Теорема 2.4.4. Нехай функція $f : [a, b] \rightarrow [m, M]$ інтегровна за Ріманом на відрізку $[a, b]$ і функція $g : [m, M] \rightarrow \mathbb{R}$ неперервна на $[m, M]$. Тоді суперпозиція цих функцій, функція $g(f)$ інтегровна за Ріманом на відрізку $[a, b]$.

Доведення. Внаслідок першої теореми Вейєрштрасса, неперервна на відрізку функція обмежена на цьому відрізку. Тому

$$\exists C > 0 \quad \forall y \in [m, M] : |g(y)| \leq C.$$

Далі, за теоремою Кантора про рівномірну неперервність неперервної на відрізку функції, функція g рівномірно неперервна на відрізку $[m, M]$, тобто

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall y_1, y_2 \in [m, M], |y_2 - y_1| < \delta : |g(y_2) - g(y_1)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Для функції $f \in R([a, b])$ застосуємо критерій інтегровності у термінах

коливань: $\exists \lambda = \{a = x_0, x_1, \dots, x_n = b\} : \Omega(f, \lambda) < \frac{\varepsilon \delta}{4C}$. Покладемо

$$A = \{k \in \{0, 1, \dots, n-1\} \mid \omega_k(f) \geq \delta\}. \quad \text{Тоді}$$

$$\delta \sum_{k \in A} \Delta x_k \leq \sum_{k \in A} \omega_k(f) \Delta x_k \leq \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k(f) \Delta x_k < \frac{\varepsilon \delta}{4C},$$

звідки $\sum_{k \in A} \Delta x_k < \frac{\varepsilon}{4C}$. Для $k \in \{0, 1, \dots, n-1\} \setminus A$: $\omega_k(f) < \delta$ і тому для таких

індексів k виконується нерівність $\omega_k(g(f)) < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$. Зрозуміло, що

$$\forall k \in A : \omega_k(g(f)) \leq 2C. \quad \text{Отже,}$$

$$\begin{aligned}\Omega(g(f), \lambda) &= \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k(g(f)) \Delta x_k = \sum_{k=0, k \notin A}^{n-1} \omega_k(g(f)) \Delta x_k + \sum_{k=0, k \in A}^{n-1} \omega_k(g(f)) \Delta x_k < \\ &< \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \cdot (b-a) + 2C \cdot \frac{\varepsilon}{4C} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Внаслідок критерію інтегровності, $g(f) \in R([a, b])$. Теорема доведена.

Зауваження 2.4.1. Суперпозиція двох інтегровних за Ріманом функцій не обов'язково інтегровна за Ріманом функція. Відповідний приклад можна знайти у підручнику [2] на с. 348 – 351 у пункті „Критерій інтегровності функції за Ріманом”.

Наслідок 2.4.1. Нехай $f \in R([a, b])$. Тоді $|f| \in R([a, b])$.

Наслідок 2.4.2. Нехай $f \in R([a, b])$. Тоді $f^2 \in R([a, b])$.

2.5 Властивості інтеграла Рімана

1. Лінійність. Нехай $f, g \in R([a, b])$. Тоді:

$$\begin{aligned}1) \quad &\forall c \in R : cf \in R([a, b]) \quad \text{і} \quad \int_a^b (cf(x)) dx = c \int_a^b f(x) dx; \\ 2) \quad &f + g \in R([a, b]) \quad \text{і} \quad \int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx. \quad (2.5.1)\end{aligned}$$

Доведення. Доведемо твердження 2). Твердження 1) доводиться аналогічно. Нехай $f, g \in R([a, b])$. За означенням інтегровної за Ріманом функції, існують границі інтегральних сум

$$\lim_{d(\lambda) \rightarrow 0} S(f, \lambda; \{\xi_i | \lambda\}) = \int_a^b f(x) dx \quad \text{і} \quad \lim_{d(\lambda) \rightarrow 0} S(g, \lambda; \{\xi_i | \lambda\}) = \int_a^b g(x) dx.$$

Оскільки $S(f + g, \lambda; \{\xi_i | \lambda\}) = S(f, \lambda; \{\xi_i | \lambda\}) + S(g, \lambda; \{\xi_i | \lambda\})$, то існує

$$\text{границя} \quad \lim_{d(\lambda) \rightarrow 0} S(f + g, \lambda; \{\xi_i | \lambda\}) = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx, \quad \text{звідки випливає,}$$

що $f + g \in R([a, b])$ і рівність (2.5.1). Властивість доведена.

Наслідок 2.5.1. Нехай $f, g \in R([a, b])$. Тоді $f \cdot g \in R([a, b])$.

Доведення. Це твердження випливає з лінійності, наслідку 2.4.2 попереднього підрозділу та тотожності

$$f \cdot g = \frac{1}{4} \left((f + g)^2 - (f - g)^2 \right).$$

2. Адитивність. Нехай $f \in R([a, b])$ і $a < c < b$. Тоді функція f інтегровна за Ріманом на кожному з відрізків $[a, c]$, $[c, b]$ і

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx. \quad (2.5.2)$$

Доведення. Нехай $f \in R([a, b])$. Внаслідок критерію інтегровності у термінах коливань, $\forall \varepsilon > 0 \exists \lambda \in \Lambda : \Omega(f, \lambda) < \varepsilon$. Розбиття $\tilde{\lambda} = \lambda \cup \{c\}$ є подрібненням розбиття λ і тому $\Omega(f, \tilde{\lambda}) \leq \Omega(f, \lambda) < \varepsilon$. Покладемо $\lambda_1 = \tilde{\lambda} \cap [a, c]$, $\lambda_2 = \tilde{\lambda} \cap [c, b]$. Тоді $\Omega(f, \lambda_1) + \Omega(f, \lambda_2) = \Omega(f, \tilde{\lambda}) < \varepsilon$. Таким чином, $\Omega(f, \lambda_1) < \varepsilon$ і $\Omega(f, \lambda_2) < \varepsilon$. За критерієм інтегровності $f \in R([a, c])$ і $f \in R([c, b])$.

Для довільного набору проміжних точок $\{\xi_i | \tilde{\lambda}\}$ покладемо $\{\xi_i | \lambda_1\} = \{\xi_i | \tilde{\lambda}\} \cap [a, c]$, $\{\xi_i | \lambda_2\} = \{\xi_i | \tilde{\lambda}\} \cap [c, b]$. Тоді

$$S(f, \tilde{\lambda}; \{\xi_i | \tilde{\lambda}\}) = S(f, \lambda_1; \{\xi_i | \lambda_1\}) + S(f, \lambda_2; \{\xi_i | \lambda_2\}).$$

(2.5.3)

За означенням інтеграла Рімана,

$$\lim_{d(\tilde{\lambda}) \rightarrow 0} S(f, \tilde{\lambda}; \{\xi_i | \tilde{\lambda}\}) = \int_a^b f(x) dx, \quad \lim_{d(\lambda_1) \rightarrow 0} S(f, \lambda_1; \{\xi_i | \lambda_1\}) = \int_a^c f(x) dx,$$

$$\lim_{d(\lambda_2) \rightarrow 0} S(f, \lambda_2; \{\xi_i | \lambda_2\}) = \int_c^b f(x) dx.$$

Зауважимо, що $d(\tilde{\lambda}) \rightarrow 0 \Leftrightarrow (d(\lambda_1) \rightarrow 0) \wedge (d(\lambda_2) \rightarrow 0)$. Тому після переходу до границі при $d(\tilde{\lambda}) \rightarrow 0$ у рівності (2.5.3), отримаємо рівність (2.5.2). Властивість доведена.

Вправа 2.5.1. Нехай $c \in (a, b)$, функція $f: [a, b] \rightarrow R$ інтегровна за Ріманом на кожному з відрізків $[a, c]$, $[c, b]$. Доведіть, що $f \in R([a, b])$ і виконується рівність (2.5.2).

Вправа 2.5.2. Нехай $a > 0$, функція $f \in R([-a, a])$ парна. Доведіть, що

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx. \quad (2.5.4)$$

Вправа 2.5.3. Нехай $a > 0$, функція $f \in R([-a, a])$ непарна. Доведіть, що

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0. \quad (2.5.5)$$

Вправа 2.5.4. Нехай функція $f: R \rightarrow R$ періодична з періодом $T > 0$ та інтегровна за Ріманом на відрізку $[0, T]$. Доведіть, що $\forall k \in Z: f \in R([kT, (k+1)T])$,

причому
$$\int_{kT}^{(k+1)T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx.$$

Вправа 2.5.5. Нехай функція $f: R \rightarrow R$ періодична з періодом $T > 0$ та інтегровна за Ріманом на відрізку $[0, T]$. Доведіть, що $\forall [a, b]: f \in R([a, b])$, причому

$$\int_{a+T}^{b+T} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx. \quad (2.5.6)$$

Вправа 2.5.6. Нехай функція $f: R \rightarrow R$ періодична з періодом $T > 0$ та інтегровна за Ріманом на відрізку $[0, T]$. Доведіть, що $\forall a \in R: f \in R([a, a+T])$, причому

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx. \quad (2.5.7)$$

3. Почленне інтегрування нерівності. Нехай функції $f, g \in R([a, b])$ і $\forall x \in [a, b]: f(x) \leq g(x)$. Тоді

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx. \quad (2.5.8)$$

Доведення. Для довільного розбиття λ , $\forall \{\xi_k | \lambda\}$ має місце нерівність

$$S(f, \lambda; \{\xi_k | \lambda\}) \leq S(g, \lambda; \{\xi_k | \lambda\}).$$

У цій нерівності перейдемо до границі при $d(\lambda) \rightarrow 0$ і отримаємо нерівність (2.5.8). Властивість доведена.

Наслідок 2.5.1. Нехай функція $f \in R([a, b])$ і $\forall x \in [a, b]: f(x) \geq 0$.

Тоді $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

Вправа 2.5.7. Нехай функція $f \in C([a, b])$ і $\forall x \in [a, b]: f(x) \geq 0$. Доведіть, що $\int_a^b f(x)dx = 0$ тоді й тільки тоді, коли $\forall x \in [a, b]: f(x) = 0$.

Наслідок 2.5.2. Нехай функція $f \in R([a, b])$; $m = \inf_{x \in [a, b]} f(x)$,

$$M = \sup_{x \in [a, b]} f(x). \text{ Тоді } m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

Для доведення цього наслідку достатньо почленно проінтегрувати нерівність $m \leq f(x) \leq M$, $x \in [a, b]$ на відрізку $[a, b]$.

3. Нерівність для модуля інтеграла. Нехай функція $f \in R([a, b])$.

Тоді $|f| \in R([a, b])$ і

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx. \quad (2.5.9)$$

Доведення. За наслідком 2.4.1 функція $|f|$ інтегровна за Ріманом на відрізку $[a, b]$. Почленно інтегруємо ланцюжок нерівностей $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$, $x \in [a, b]$ на відрізку $[a, b]$ і отримуємо

$$-\int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx,$$

звідки випливає нерівність (2.5.9).

4. Теорема про середнє значення. Нехай функція $f \in C([a, b])$. Тоді

$$\exists \theta \in [a, b]: \int_a^b f(x)dx = f(\theta)(b-a).$$

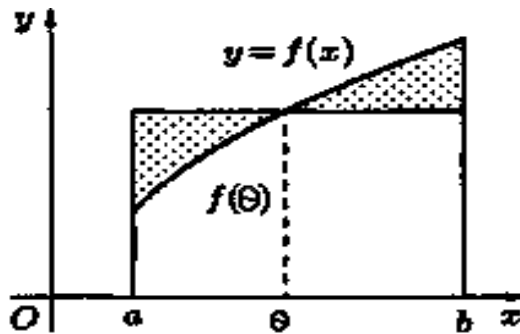


Рис. 2.5.1: Геометрична інтерпретація теореми про середнє значення. На відрізку $[a, b]$ існує точка θ , така, що площа криволінійної трапеції дорівнює $f(\theta)(b-a)$.

Доведення. За другою теоремою Вейєрштрасса для неперервних на відрізку функцій,

$$\exists x_*, x^* \in [a, b]: f(x_*) = \inf_{x \in [a, b]} f(x), \quad f(x^*) = \sup_{x \in [a, b]} f(x).$$

Почленно інтегруємо ланцюжок нерівностей

$$f(x_*) \leq f(x) \leq f(x^*), \quad x \in [a, b]$$

на відрізку $[a, b]$ і отримуємо, що

$$f(x_*)(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq f(x^*)(b-a),$$

звідки $f(x_*) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq f(x^*)$. Внаслідок теореми Коші про проміжне значення для неперервних функцій, існує число θ із відрізка з кінцями x_*, x^* : $f(\theta) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$. Теорема доведена.

Вправа 2.5.8. Нехай виконані умови теореми про середнє значення. Чи можна твердити, що $\exists! \theta \in [a, b]: \int_a^b f(x) dx = f(\theta)(b-a)$?

Вправа 2.5.9. Нехай функція $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ неперервна і строго монотонна на відрізку $[a, b]$. Доведіть, що $\exists! \theta \in [a, b]: \int_a^b f(x) dx = f(\theta)(b-a)$.

Вправа 2.5.10. Нехай $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, f \in C([a, b])$ і $\forall x \in [a, b]: g(x) \geq 0$. Доведіть, що $\exists \theta \in [a, b]: \int_a^b f(x) g(x) dx = f(\theta) \int_a^b g(x) dx$.

Для застосувань інтеграла Рімана корисна наступна

Лема 2.5.1. Нехай $f, g \in R([a, b])$. Тоді

$$\lim_{d(\lambda) \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) g(\eta_k) \Delta x_k = \int_a^b f(x) g(x) dx, \quad (2.5.10)$$

де $\{\xi_k | \lambda\}, \{\eta_k | \lambda\}$ – набори проміжних точок для розбиття λ .

Доведення. Функція $f \cdot g \in R([a, b])$ як добуток інтегровних за Ріманом функцій. Тому

$$\lim_{d(\lambda) \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) g(\xi_k) \Delta x_k = \int_a^b f(x) g(x) dx. \quad (2.5.11)$$

Доведемо, що

$$\lim_{d(\lambda) \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) (g(\xi_k) - g(\eta_k)) \Delta x_k = 0. \quad (2.5.12)$$

Функція f , інтегровна за Ріманом на відрізку $[a, b]$, обмежена на цьому відрізку, тобто $\exists C > 0 \forall x \in [a, b]: |f(x)| \leq C$. Далі,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(g(\xi_k) - g(\eta_k))\Delta x_k \right| &\leq \sum_{k=0}^{n-1} |f(\xi_k)(g(\xi_k) - g(\eta_k))\Delta x_k| \leq \\ &\leq C \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k(g)\Delta x_k = C\Omega(g, \lambda) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

внаслідок зауваження до критерію інтегровності в термінах коливань. Звідси випливає співвідношення (2.5.12). Рівність (2.5.10) є наслідком співвідношень (2.5.11) і (2.5.12). Лема доведена.

2.6 Нерівності Гельдера¹ та Мінковського²

Теорема 2.6.1 (нерівність Гельдера). Нехай $f, g \in R([a, b])$, а додатні числа p, q задовольняють рівність $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Тоді

$|f|^p, |g|^q \in R([a, b])$ і має місце нерівність Гельдера:

$$\left| \int_a^b f(x)g(x)dx \right| \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}. \quad (2.6.1)$$

Доведення. Інтегровність за Ріманом на відрізку $[a, b]$ функцій $|f|^p, |g|^q$ випливає з теореми 4 підрозділу 6.4. Зауважимо також, що $f \cdot g \in R([a, b])$ як добуток інтегровних за Ріманом функцій. Для інтегральних сум добутку $f \cdot g$ застосуємо нерівність Гельдера :

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)g(\xi_k)\Delta x_k \right| = \left| \sum_{k=0}^{n-1} (f(\xi_k)(\Delta x_k)^{1/p}) (g(\xi_k)(\Delta x_k)^{1/q}) \right| \leq$$

¹ Гельдер Отто Людвіг (22.12.1859 – 29.08.1937) – німецький математик

² Мінковський Герман (22.06.1864 – 12.01.1909) – німецький математик і фізик

$$\leq \left(\sum_{k=0}^{n-1} |f(\xi_k)|^p \Delta x_k \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=0}^{n-1} |g(\xi_k)|^q \Delta x_k \right)^{\frac{1}{q}}.$$

У цій нерівності перейдемо до границі при $d(\lambda) \rightarrow 0$ і отримаємо нерівність (2.6.1). Твердження доведено.

Вправа 2.6.1. Нехай функції $f, g, \varphi \in R([a, b])$, а додатні числа p, q, r задовольняють рівність $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$. Тоді $|f|^p, |g|^q, |\varphi|^r \in R([a, b])$ і має місце нерівність:

$$\left| \int_a^b f(x) g(x) \varphi(x) dx \right| \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_a^b |\varphi(x)|^r dx \right)^{\frac{1}{r}}.$$

Наслідок 2.6.1 (нерівність Коші-Буняковського для визначених інтегралів). Для функцій $f, g \in R([a, b])$ справджується нерівність

$$\left| \int_a^b f(x) g(x) dx \right| \leq \left(\int_a^b f^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b g^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Для доведення достатньо у нерівності Гельдера (2.6.1) покласти $p = q = 2$.

Теорема 2.6.2 (Нерівність Мінковського для визначених інтегралів). Нехай

$f, g \in R([a, b])$ і число $p \geq 1$. Тоді $|f|^p, |g|^p, |f + g|^p \in R([a, b])$ і має місце нерівність Мінковського:

$$\left(\int_a^b |f(x) + g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (2.6.2)$$

Доведення. Внаслідок лінійності інтеграла Рімана, $f + g \in R([a, b])$.

Інтегровність за Ріманом на відрізку $[a, b]$ функцій $|f|^p, |g|^p, |f + g|^p$

впливає з теореми 2.4.4. Для інтегральних сум функції $|f + g|^p$ застосуємо нерівність Мінковського :

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=0}^{n-1} |f(\xi_k) + g(\xi_k)|^p \Delta x_k \right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\sum_{k=0}^{n-1} |f(\xi_k)(\Delta x_k)^{1/p} + g(\xi_k)(\Delta x_k)^{1/p}|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \\ &\leq \left(\sum_{k=0}^{n-1} |f(\xi_k)|^p \Delta x_k \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=0}^{n-1} |g(\xi_k)|^p \Delta x_k \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

У цій нерівності перейдемо до границі при $d(\lambda) \rightarrow 0$ і отримаємо нерівність (2.6.2). Теорема доведена.

Нерівність Мінковського легко узагальнюється для довільного числа функцій.

Наслідок 2.6.2. Нехай $f_1, f_2, \dots, f_n \in R([a, b])$ і число $p \geq 1$. Тоді $|f_1|^p, |f_2|^p, \dots, |f_n|^p, |f_1 + f_2 + \dots + f_n|^p \in R([a, b])$ і має місце нерівність

$$\left(\int_a^b \left| \sum_{k=1}^n f_k(x) \right|^p dx \right)^{1/p} \leq \sum_{k=1}^n \left(\int_a^b |f_k(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Вправа 2.6.2. Доведіть наслідок 2.6.2.

2.7 Інтеграл із змінною межею інтегрування

Нехай функція $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ інтегровна за Ріманом на відрізку $[a, b]$.

Покладемо

$$\int_a^a f(x)dx := 0, \int_b^a f(x)dx := -\int_a^b f(x)dx.$$

Внаслідок адитивності інтеграла Рімана, $\forall x \in (a, b]$ функція f інтегровна за Ріманом на відрізку $[a, x]$. Функція

$$\varphi(x) = \int_a^x f(u)du, \quad x \in [a, b]$$

називається інтегралом із змінною верхньою межею інтегрування. Зауважимо, що $\varphi(a) = 0$.

Теорема 2.7.1 (про неперервність інтеграла із змінною межею інтегрування). Нехай $f \in R([a, b])$. Тоді функція $\varphi(x) = \int_a^x f(u)du, x \in [a, b]$ неперервна на відрізку $[a, b]$

Доведення. Функція f , інтегровна за Ріманом на відрізку $[a, b]$, обмежена на цьому відрізку, тобто $\exists C > 0 \forall x \in [a, b]: |f(x)| \leq C$. Далі,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \frac{\varepsilon}{C} > 0 \forall s, t \in [a, b], |s - t| < \delta: |\varphi(s) - \varphi(t)| = \left| \int_s^t f(u)du \right|.$$

Не втрачаючи загальності можна вважати, що $s \leq t$. Тоді

$$|\varphi(s) - \varphi(t)| \leq \int_s^t |f(u)|du \leq C(t - s) < C \frac{\varepsilon}{C} = \varepsilon.$$

Таким чином, функція φ рівномірно неперервна на відрізку $[a, b]$. Теорема доведена.

Теорема 2.7.2 (про неперервну диференційовність інтеграла із змінною межею інтегрування). Нехай $f \in C([a, b])$. Тоді функція

$\varphi(x) = \int_a^x f(u)du, x \in [a, b]$ неперервно диференційовна на відрізку $[a, b]$. При

цьому $\varphi'(x) = f(x), x \in [a, b]$.

Доведення. Розглянемо різницеве відношення

$$\frac{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} f(u) du,$$

$x, x + \Delta x \in [a, b]$, $\Delta x \neq 0$, x – фіксоване. За теоремою про середнє значення, існує число $\theta(x, \Delta x)$ із відрізка з кінцями $x, x + \Delta x$ таке, що

$$\frac{1}{\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} f(u) du = f(\theta(x, \Delta x)),$$

звідки

$$\frac{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x} = f(\theta(x, \Delta x)). \quad (2.7.1)$$

Зауважимо, що $\theta(x, x + \Delta x) \rightarrow x$ при $\Delta x \rightarrow 0$. Внаслідок неперервності функції f у точці x , $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(\theta(x, \Delta x)) = f(x)$. Тому із рівності (2.7.1)

випливає, що існує

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x} = f(x),$$

тобто $\varphi'(x) = f(x)$. Оскільки $f \in C([a, b])$, то $\varphi \in C^{(1)}([a, b])$. Теорема доведена.

Теорема 2.7.3 (про існування первісної). Неперервна на відрізку функція має первісну на цьому відрізку.

Доведення. Нехай $f \in C([a, b])$. Внаслідок теореми 2.7.2, функція φ є первісною функції f на відрізку $[a, b]$. Теорема доведена.

Вправа 2.7.1. Доведіть, що неперервна на проміжку функція має первісну на цьому проміжку.

Теорема 2.7.4 (друга теорема про середнє). Нехай функції $f, \varphi: [a, b] \rightarrow R$ задовольняють такі умови:

- 1) $f \in C^{(1)}([a, b])$;
- 2) f' зберігає знак на відрізку $[a, b]$;
- 3) $\varphi \in C([a, b])$.

Тоді

$$\exists \xi \in [a, b]: \int_a^b f(x)\varphi(x)dx = f(a) \int_a^{\xi} \varphi(x)dx + f(b) \int_{\xi}^b \varphi(x)dx. \quad (2.7.2)$$

Доведення. Покладемо $\Phi(x) = \int_a^x \varphi(t)dt$, $x \in [a, b]$. За теоремою 2.7.2

функція Φ неперервно диференційовна на $[a, b]$. Тоді

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\varphi(x)dx &= \int_a^b f(x)d\Phi(x) = f(x)\Phi(x)|_a^b - \int_a^b \Phi(x)f'(x)dx = \\ &= f(b)\Phi(b) - \int_a^b \Phi(x)f'(x)dx. \end{aligned}$$

Не втрачаючи загальності, можна вважати, що $f'(x) \geq 0$, $x \in [a, b]$.

Внаслідок твердження вправи 2.5.5,

$$\exists \xi \in [a, b]: \int_a^b \Phi(x)f'(x)dx = \Phi(\xi) \int_a^b f'(x)dx = \Phi(\xi)(f(b) - f(a)).$$

Отже,

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\varphi(x)dx &= f(b)\Phi(b) - \Phi(\xi)(f(b) - f(a)) = \\ &= f(a)\Phi(\xi) + f(b)(\Phi(b) - \Phi(\xi)) = f(a) \int_a^{\xi} \varphi(t)dt + f(b) \int_{\xi}^b \varphi(t)dt. \end{aligned}$$

Теорема доведена.

Теорема 2.7.5 (*форма Бонне¹ другої теореми про середнє*). Нехай виконуються умови теореми 2.7.4. Тоді:

1) якщо $f(b)(f(a) - f(b)) > 0$, то

$$\exists \eta \in [a, b]: \int_a^b f(x)\varphi(x)dx = f(a) \int_a^\eta \varphi(x)dx;$$

2) якщо $f(a)(f(b) - f(a)) > 0$, то

$$\exists \eta \in [a, b]: \int_a^b f(x)\varphi(x)dx = f(b) \int_\eta^b \varphi(x)dx.$$

Доведення. 1) Із доведення теореми 2.7.4 випливає, що

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = f(b)\Phi(b) + \Phi(\xi)(f(a) - f(b)) -$$

лінійна комбінація значень $\Phi(\xi)$, $\Phi(b)$ з одночасно додатними або одночасно від'ємними коефіцієнтами $f(b)$, $f(a) - f(b)$, сума яких дорівнює $f(a)$. Тому на відрізку з кінцями $\Phi(\xi)$, $\Phi(b)$ існує число μ , таке, що

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = \mu f(a).$$

Внаслідок неперервності функції Φ на $[\xi, b]$ та теореми Коші про проміжні значення неперервної функції, $\exists \eta \in [\xi, b]: \mu = \Phi(\eta)$. Отже,

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = f(a) \int_a^\eta \varphi(t)dt.$$

Вправа 2.7.2. Доведіть твердження 2) теореми 2.7.5.

Приклад 2.7.1. Нехай $0 < a < b$. Доведемо, що

¹ Бонне П'єр Осіан (22.12.1819 – 22.06.1892) – французький математик і астроном

$$\left| \int_a^b \frac{\sin x}{x} dx \right| \leq \frac{2}{a}.$$

Покладемо $f(t) = \frac{1}{t}$, $\varphi(t) = \sin t$, $t \in [a, b]$. Похідна функції f від'ємна на $[a, b]$;

$$\frac{1}{b} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) > 0. \text{ Внаслідок твердження 1) теореми 2.7.5,}$$

$$\exists \eta \in [a, b]: \int_a^b \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{a} \int_a^\eta \sin x dx.$$

$$\text{Оскільки } \left| \int_a^\eta \sin x dx \right| \leq 2, \text{ то } \left| \int_a^b \frac{\sin x}{x} dx \right| = \left| \frac{1}{a} \int_a^\eta \sin x dx \right| \leq \frac{2}{a}.$$

2.8 Формула Ньютона¹-Лейбніца²

Формула Ньютона-Лейбніца, назва якої містить прізвища фундаторів математичного аналізу, є справжньою перлиною інтегрального та диференціального числення. Вона має нетривіальні узагальнення в математичному аналізі функцій кількох змінних.

Теорема 2.8.1 (формула Ньютона-Лейбніца). Нехай функція $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ задовольняє такі умови:

- 1) $f \in R([a, b])$;
- 2) функція f має первісну на відрізку $[a, b]$.

Тоді має місце формула Ньютона-Лейбніца:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b := F(b) - F(a), \quad (2.8.1)$$

¹ Ньютон Ісаак (4.01.1643 – 31.03.1727) – англійський фізик, астроном і математик

² Лейбніц Готфрід Вільгельм (1.07.1646 – 14.11.1716) – німецький математик, фізик і філософ

де F – первісна функції f на відрізку $[a, b]$.

Цю теорему називають також **основною теоремою інтегрального числення**.

Зауваження 2.8.1. Внаслідок теореми про структуру множини первісних, різниця $F(b) - F(a)$ не залежить від вибору первісної функції f .

Доведення теореми. Нехай F – первісна функції f на відрізку $[a, b]$. Для довільного розбиття $\lambda = \{a = x_0, x_1, \dots, x_n = b\}$ має місце рівність

$$F(b) - F(a) = \sum_{k=0}^{n-1} (F(x_{k+1}) - F(x_k)).$$

На кожному відрізку $[x_k, x_{k+1}]$, $0 \leq k \leq n-1$, функція F задовольняє умови теореми Лагранжа. Тому $\exists \theta_k \in (x_k, x_{k+1})$: $F(x_{k+1}) - F(x_k) = F'(\theta_k) \Delta x_k = f(\theta_k) \Delta x_k$. Отже,

$$F(b) - F(a) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\theta_k) \Delta x_k.$$

У правій частині цієї рівності стоїть інтегральна сума $S(f, \lambda; \{\theta_k | \lambda\})$. Функція $f \in R([a, b])$ і тому після переходу до границі при $d(\lambda) \rightarrow 0$ у цій рівності отримаємо (6.8.1). Теорема доведена.

Зауваження 2.8.2. Умови теореми незалежні, тобто інтегровна за Ріманом на відрізку функція не обов'язково має первісну на цьому відрізку, а існування первісної функції f на відрізку не забезпечує, взагалі кажучи, інтегровність за Ріманом функції f на цьому відрізку. Наведемо відповідні приклади.

Приклад 2.8.1. Функція $f(x) = \operatorname{sign} x$, $x \in [-1, 1]$ монотонна на відрізку $[-1, 1]$ і тому $f \in R([-1, 1])$, але не має первісної на відрізку $[-1, 1]$ (приклад 3 підрозділу 5.1).

Приклад 2.8.2. Функція

$$f(x) = \begin{cases} 2x \cos \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} \sin \frac{1}{x^2}, & x \in [-1, 1] \setminus \{0\}, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

має первісну

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x^2}, & x \in [-1, 1] \setminus \{0\}, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

на відрізку $[-1, 1]$, але $f \notin R([-1, 1])$, оскільки функція f необмежена на відрізку $[-1, 1]$.

Наслідок 2.8.1. Для функції $f \in C([a, b])$ має місце формула Ньютона-Лейбніца:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a),$$

де функція $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ – первісна функції f на відрізку $[a, b]$.

Доведення. Неперервна на відрізку функція має первісну на цьому відрізку (теорема 2.7.3) та інтегровна за Ріманом на цьому відрізку (теорема 2.4.2). Тому твердження наслідку випливає із теореми 2.8.1.

Друга умова основної теореми інтегрального числення (теореми 2.8.1) про існування первісної на відрізку може бути дещо послаблена: достатньо існування первісної у широкому сенсі.

Теорема 2.8.2 (формула Ньютона-Лейбніца). Нехай функція $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ задовольняє такі умови:

- 1) $f \in R([a, b])$;
- 2) функція f має первісну у широкому сенсі на відрізку $[a, b]$.

Тоді має місце формула Ньютона-Лейбніца:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b := F(b) - F(a), \quad (2.8.1)$$

де F – первісна у широкому сенсі функції f на відрізку $[a, b]$.

Доведення. Нехай $A \subset [a, b]$ – скінченна множина, $F \in C([a, b])$ і $\forall x \in [a, b] \setminus A: F'(x) = f(x)$, тобто F – первісна у широкому сенсі функції f на $[a, b]$. Не втрачаючи загальності можна розглядати лише такі розбиття відрізка $[a, b]$, що містять множину A . Далі дослівно повторюються міркування з доведення теореми 2.8.1. Теорема доведена.

Зауваження 2.8.3. Нехай виконуються умови теореми 2.8.2, $A = \{a = a_0, a_1, \dots, a_m = b\}$, $a_0 < a_1 < \dots < a_m$. Внаслідок адитивності інтеграла Рімана,

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=0}^{m-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x) dx.$$

На відрізку $[a_k, a_{k+1}]$, $0 \leq k \leq m-1$ функція f задовольняє умови теореми

2.8.2, отже $\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x) dx$, $0 \leq k \leq m-1$ можна обчислити за формулою

Ньютона-Лейбніца.

Приклад 2.8.3. Для натурального числа n обчислимо $\int_0^n [x] dx$.

Маємо:

$$\begin{aligned} \int_0^n [x] dx &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} [x] dx = \sum_{k=0}^{n-1} (kx) \Big|_k^{k+1} = \sum_{k=0}^{n-1} (k(k+1) - k^2) = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2}. \end{aligned}$$

Вправа 2.8.1. Для натурального числа n обчисліть $\int_0^{n^2} [\sqrt{x}] dx$.

Теорема 2.8.3 (формула Лейбніца). Нехай функції $a(\cdot), b(\cdot): (a_1, b_1) \rightarrow (a_2, b_2)$ диференційовні на інтервалі (a_1, b_1) , функція $f \in C((a_2, b_2))$. Тоді має місце формула Лейбніца:

$$\frac{d}{dx} \int_{a(x)}^{b(x)} f(u) du = f(b(x))b'(x) - f(a(x))a'(x), x \in \mathbb{R}.$$

Доведення. Неперервна на проміжку функція має первісну на цьому проміжку (твердження вправи 2.7.1). Нехай функція F – первісна функції f на (a_2, b_2) . Застосуємо формулу Ньютона-Лейбніца для функції f на відрізка з кінцями $a(x), b(x)$:

$$\int_{a(x)}^{b(x)} f(u) du = F(b(x)) - F(a(x)), x \in (a_1, b_1).$$

Права частина цієї рівності диференційовна на (a_1, b_1) , похідна обчислюється за правилами диференціювання. Таким чином,

$$\frac{d}{dx} \int_{a(x)}^{b(x)} f(u) du = F'(b(x))b'(x) - F'(a(x))a'(x) =$$

$$= f(b(x))b'(x) - f(a(x))a'(x), x \in (a_1, b_1).$$

Теорема доведена.

Приклад 2.8.4. Нехай $F(x) = \int_{\sqrt{x}}^{x^2} \sin t^2 dt, x > 0$. За формулою

Лейбніца,

$$F'(x) = 2x \sin x^4 - \frac{1}{2\sqrt{x}} \sin x, \quad x > 0.$$

Вправа 2.8.2. Знайдіть

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_{\sqrt{x}}^x \operatorname{tg} u \, du}{\int_x^{\sqrt{x}} u \sin^2 u \, du}.$$

Розділ 3. Обчислення та застосування інтеграла Рімана

3.1 Формула заміни змінної

Формулу заміни змінної часто застосовують для обчислення інтеграла Рімана. Цей метод обчислення називають також способом підстановки.

Теорема 3.1.1 (формула заміни змінної). Нехай функція $f \in C((a, b))$; функція $u : [\alpha, \beta] \rightarrow (a, b)$ неперервно диференційовна на $[\alpha, \beta]$. Тоді має місце формула заміни змінної:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(u(t))u'(t)dt = \int_{u(\alpha)}^{u(\beta)} f(x)dx. \quad (3.1.1)$$

Доведення. Функція f неперервна на відрізку з кінцями $u(\alpha)$, $u(\beta)$, а тому інтегровна за Ріманом і має первісну на цьому відрізку. Нехай F – первісна функції f на відрізку з кінцями $u(\alpha)$, $u(\beta)$. За формулою Ньютона-Лейбніца,

$$\int_{u(\alpha)}^{u(\beta)} f(x)dx = F(u(\beta)) - F(u(\alpha)). \quad (3.1.2)$$

Далі, $f(u)u' \in C([\alpha, \beta]) \subset R([\alpha, \beta])$, а функція $F(u)$ – первісна функції $f(u)u'$ на $[\alpha, \beta]$. Тому, внаслідок формули Ньютона-Лейбніца,

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(u(t))u'(t)dt = F(u(\beta)) - F(u(\alpha)). \quad (3.1.3)$$

Із рівностей (3.1.2) і (3.1.3) випливає формула (3.1.1). Теорема доведена.

Приклад 3.1.1. Обчислимо інтеграл $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$. Маємо:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx &= \left| \begin{array}{l} x = \sin t, t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\ dx = \cos t dt \end{array} \right| = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt = \\ &= \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \left(\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Вправа 3.1.1. Обчисліть інтеграл $\int_0^1 \sqrt{1+x^2} dx$.

Приклад 3.1.2. Функціональне рівняння Коші¹. Знайдемо всі функції $f \in C(\mathbb{R})$, які задовольняють функціональне рівняння Коші:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}: f(x+y) = f(x) + f(y). \quad (3.1.4)$$

Розв'язання. У рівності (3.1.4) покладемо $x = y = 0$ і отримаємо $f(0) = 2f(0)$, звідки $f(0) = 0$. Далі у рівності (3.1.4) зафіксуємо x та зінтегруємо по $y \in [0, 1]$:

$$\int_0^1 f(x+y) dy = f(x) + \int_0^1 f(y) dy. \quad (3.1.5)$$

У правій частині цієї рівності зробимо заміну змінної:

$$\int_0^1 f(x+y) dy = \left| \begin{array}{l} x+y=u, u \in [x, x+1] \\ dy=du \end{array} \right| = \int_x^{x+1} f(u) du.$$

Покладемо $C := \int_0^1 f(y) dy$. Тоді рівність (3.1.5) набере виду

$$\int_x^{x+1} f(u) du = f(x) + C.$$

¹ Коші Огюстен Луї (21.08.1789 – 23.05.1857) – французький математик.

Функція $f \in C(\mathbb{R})$, тому за формулою Лейбніца ліва частина останньої рівності диференційовна на $\mathbb{R}$. Отже, функція f , яка стоїть у лівій частині цієї рівності, також диференційовна на $\mathbb{R}$. Таким чином,

$$f(x+1) - f(x) = f'(x),$$

звідки, внаслідок (3.1.4), $f(1) = f'(x)$. За наслідком з теореми Лагранжа,

$$f(x) = ax + c, \quad x \in \mathbb{R},$$

де $a = f'(1)$. Стала $c = 0$, оскільки $f(0) = 0$.

Перевірка свідчить, що функція

$$f(x) = ax, \quad x \in \mathbb{R},$$

де a – довільна стала, задовольняє функціональне рівняння Коші:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}: a(x+y) = ax + ay.$$

Отже, кожний розв'язок функціонального рівняння Коші у класі неперервних на $\mathbb{R}$ функцій має вигляд

$$f(x) = ax, \quad x \in \mathbb{R},$$

де a – довільна дійсна стала і кожна функція такого виду є розв'язком цього функціонального рівняння.

3.2 Інтегрування частинами

Поряд із способом підстановки, інтегрування частинами є ефективним інструментом для обчислення визначених інтегралів.

Теорема 3.2.1 (формула інтегрування частинами). Нехай функції $u, v \in C^{(1)}([a, b])$. Тоді має місце формула інтегрування частинами:

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u'(x)v(x)dx.$$

Доведення. Добуток функцій $u(x)v(x)$, $x \in [a, b]$ є первісною функції

$u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$, $x \in [a, b]$ на відрізку $[a, b]$. Тому за формулою Ньютона-Лейбніца

$$\int_a^b (u'(x)v(x) + u(x)v'(x))dx = u(b)v(b) - u(a)v(a),$$

звідки й випливає формула інтегрування частинами. Теорема доведена.

Зауваження 3.2.1. Формулу інтегрування частинами записують також у вигляді

$$\int_a^b u(x)dv(x) = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)du(x).$$

Приклад 3.2.1. Обчислимо інтеграл $\int_0^{\pi} x \sin x dx$:

$$\int_0^{\pi} x \sin x dx = -\int_0^{\pi} x d \cos x = -x \cos x \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x dx = \pi.$$

Вправа 3.2.1. Нехай $f \in C^{(2)}([a, b])$. Обчисліть інтеграл $\int_a^b x f''(x) dx$.

Приклад 3.2.2. Обчислимо інтеграл

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx, \quad n \in N \cup \{0\}.$$

Зазначимо, що $I_0 = \frac{\pi}{2}$, $I_1 = 1$. Для обчислення I_n , $n \geq 2$ застосуємо формулу інтегрування частинами:

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx = -\int_0^{\pi/2} \sin^{n-1} x d \cos x = -\sin^{n-1} x \cos x \Big|_0^{\pi/2} + \\ &+ (n-1) \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \cos^2 x dx = (n-1) \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x (1 - \sin^2 x) dx = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n, \end{aligned}$$

звідки $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$, $n \geq 2$. Отже,

$$I_{2k} = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \cdot \frac{\pi}{2}, \quad k \geq 1 \quad \text{і} \quad I_{2k+1} = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}, \quad k \geq 0. \quad (3.2.6)$$

Формула Валліса¹. У попередньому прикладі обчислений інтеграл

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx, \quad n \in N \cup \{0\}.$$

Для довільного $k \in N$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$: $\sin^{2k+1} x \leq \sin^{2k} x \leq \sin^{2k-1} x$. Почленно

проінтегруємо цей ланцюжок нерівностей на відрізку $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ і отримаємо

$$I_{2k+1} \leq I_{2k} \leq I_{2k-1}, \quad k \geq 1,$$

звідки

$$\frac{(2k)!!}{(2k+1)!!} \leq \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \cdot \frac{\pi}{2} \leq \frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!}, \quad k \geq 1.$$

Домножимо останній ланцюжок нерівностей на $\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!}$ і отримаємо

$$\frac{1}{2k+1} \left(\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!} \right)^2 \leq \frac{\pi}{2} \leq \frac{1}{2k} \left(\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!} \right)^2, \quad k \geq 1.$$

$$\text{Далі,} \quad 0 \leq \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2k+1} \cdot \left(\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!} \right)^2 \leq \left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{2k+1} \right) \left(\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!} \right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2k} \cdot \frac{1}{2k+1} \left(\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!} \right)^2 \leq \frac{1}{2k} \cdot \frac{\pi}{2} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty,$$

звідки випливає, що

¹ Валліс Джон (23.11.1616 – 28.10.1703) – англійський математик.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2k+1} \left(\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!} \right)^2 = \frac{\pi}{2}. \quad (3.2.1)$$

Ця рівність називається **формулою Валліса**.

Вправа 3.2.2. Знайдіть границю $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{b_k - \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2} - a_k}$,

де

$$a_k = \frac{1}{2k+1} \left(\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!} \right)^2, \quad b_k = \frac{1}{2k} \left(\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!} \right)^2, \quad k \geq 1.$$

Теорема 3.2.2 (формула Тейлора із залишковим членом в інтегральній формі). Нехай $f \in C^{(n+1)}((\alpha, \beta))$. Тоді $\forall a, x \in (\alpha, \beta)$ виконується рівність

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \\ + \frac{1}{n!} \int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt. \quad (3.2.2)$$

Залишковий член $r_n = \frac{1}{n!} \int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt$ називається **залишковим**

членом формули Тейлора в інтегральній формі.

Доведення. Послідовно застосуємо формулу інтегрування частинами

для залишкового члена: $\frac{1}{n!} \int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt =$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n df^{(n)}(t) = \frac{1}{n!} f^{(n)}(t)(x-t)^n \Big|_a^x + \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1} dt = \\
&= \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n df^{(n)}(t) = \frac{1}{n!} f^{(n)}(t)(x-t)^n \Big|_a^x + \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1} dt = \\
&= -\frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n + \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x f^{(n)}(t)(x-t)^{n-1} dt = \\
&= -\frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n - \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} (x-a)^{n-1} + \\
&\quad + \frac{1}{(n-2)!} \int_a^x f^{(n-1)}(t)(x-t)^{n-2} dt = \dots = \\
&= -\frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n - \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} (x-a)^{n-1} - \dots - \frac{f'(a)}{1!} (x-a) + \int_a^x f'(t) dt.
\end{aligned}$$

Враховуючи, що

$$\int_a^x f'(t) dt = f(x) - f(a),$$

отримаємо (3.2.2). Теорема доведена.

Переважа формули Тейлора у вигляді (3.2.2) полягає у тому, що залишковий член в інтегральній формі не містить проміжної точки.

3.3 Граничний перехід під знаком інтеграла Рімана

Нехай $(f_n(x), x \in [a, b])$ – послідовність інтегровних за Ріманом на

Відрізку $[a, b]$ функцій, функція $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Припустимо, що

$$\forall x \in [a, b]: f_n(x) \rightarrow f(x), n \rightarrow \infty$$

(така збіжність послідовності функцій (f_n) до функції f називається поточною).

Чи буде функція f – поточкова границя послідовності функцій $(f_n) \subset R([a, b])$, також інтегровна за Ріманом на відрізку $[a, b]$? Якщо це так, то чи можливий граничний перехід, тобто чи буде правильна рівність

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) dx?$$

Наступні приклади свідчать, що поточної збіжності не достатньо для позитивної відповіді на ці питання.

Приклад 3.3.1. Нехай для натурального n

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \in \left[0, \frac{1}{n}\right), \\ \frac{1}{x}, & x \in \left[\frac{1}{n}, 1\right]; \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ \frac{1}{x}, & x \in (0, 1]. \end{cases}$$

Для довільного $n \geq 1$ функція f_n має рівно одну точку розриву на відрізку $[0, 1]$ і тому $f_n \in R([0, 1])$ за теоремою 2.4.3. Отже, $(f_n) \subset R([0, 1])$. Крім того, $\forall x \in [0, 1]: f_n(x) \rightarrow f(x), n \rightarrow \infty$, тобто послідовність функцій (f_n) збігається до функції f поточною на відрізку $[0, 1]$. Але функція f необмежена на відрізку $[0, 1]$ і тому не є інтегровою за Ріманом на відрізку $[0, 1]$.

Приклад 3.3.2. Нехай для натурального n

$$f_n(x) = \begin{cases} n, & x \in \left(0, \frac{1}{n}\right), \\ 0, & x \in \{0\} \cup \left[\frac{1}{n}, 1\right]; \end{cases} \quad f(x) = 0, x \in [0, 1].$$

Для довільного $n \geq 1$ функція f_n має рівно дві точки розриву на відрізку $[0,1]$ і тому $f_n \in R([0,1])$ за теоремою 2.4.3. Отже, $(f_n) \subset R([0,1])$. Крім того, $\forall x \in [0,1]: f_n(x) \rightarrow f(x), n \rightarrow \infty$, тобто послідовність функцій (f_n) збігається до функції f поточною на відрізку $[0,1]$. Зрозуміло, що

функція $f \in R([0,1])$ і $\int_0^1 f(x) dx = 0$. Але $\int_0^1 f_n(x) dx = 1, n \geq 1$. Отже,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx \neq \int_a^b \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) dx, \text{ тобто граничний перехід під знаком}$$

інтеграла не дозволений.

У теоремі про граничний перехід під знаком інтеграла Рімана наведені достатні умови, за яких гранична функція залишається інтегровною за Ріманом і допустимий граничний перехід під знаком інтеграла. Однією з таких умов є умова рівномірної збіжності послідовності функцій, більш сильної збіжності, ніж поточкова. У наступному пункті ви познайомитеся з цим важливим у математичному аналізі та його застосуваннях видом збіжності послідовності функцій.

3.3.1 Рівномірна збіжність послідовності функцій

Нехай $A \subset \mathbb{R}, f_n: A \rightarrow \mathbb{R}, n \geq 1; f: A \rightarrow \mathbb{R}$.

Означення 3.3.1. Послідовність функцій $(f_n(x), x \in A)$ називається поточною збіжною на множині A до функції $f(x), x \in A$, якщо

$$\forall x \in A: f_n(x) \rightarrow f(x), n \rightarrow \infty. \quad (3.3.1)$$

Зауваження 3.3.1. Очевидно,

$$(1) \Leftrightarrow \forall x \in A \forall \varepsilon > 0 \exists N = N(x, \varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n \geq N: |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Зверніть увагу на ту обставину, що N залежить не тільки від ε , але й від x .

Приклад 3.3.1. Нехай $f_n(x) = x^n$, $x \in [0,1]$, $n \geq 1$. Послідовність функцій (f_n) збігається поточною на відрізку $[0,1]$ до функції

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1), \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

Дійсно,

$$x^n \rightarrow \begin{cases} 0, & x \in [0,1), \\ 1, & x = 1 \end{cases} \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Нехай $x \in (0,1)$. Тоді $\forall \varepsilon > 0$:

$$|x^n - 0| < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln x}.$$

Отже,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = \left\lceil \frac{\ln \varepsilon}{\ln x} \right\rceil + 1 \quad \forall n \geq N: |x^n - 0| < \varepsilon.$$

Як бачимо, номер N залежить від x .

Якщо в означенні поточної збіжності всі $x \in A$ можна задовольнити одним номером N , то отримаємо рівномірну збіжність на множині A , означення якої наведено нижче.

Означення 3.3.2. Послідовність функцій $(f_n(x), x \in A)$ називається *рівномірно збіжною* на множині $B \subset A$ до функції $f(x), x \in A$, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N \forall x \in B: |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Оскільки

$$\forall x \in B: |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \Leftrightarrow \sup_{x \in B} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon,$$

то означення 3.3.2 рівносильне наступному.

Означення 3.3.3. Послідовність функцій $(f_n(x), x \in A)$ називається *рівномірно збіжною на множині* $B \subset A$ до функції $f(x), x \in A$, якщо

$$d_n = \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Зауваження 3.3.2. Із рівномірної збіжності на множині B послідовності функцій випливає її поточкова збіжність на цій множині. Іншими словами: поточкова збіжність є необхідною умовою рівномірної збіжності.

Приклад 3.3.2. Для довільного $\gamma \in (0,1)$ послідовність функцій $(x^n, x \in [0, 1])$ збігається рівномірно на $[0, 1 - \gamma]$ до $f(x) = 0, x \in [0, 1]$:

$$d_n = \sup_{x \in [0, 1 - \gamma]} |x^n - 0| = (1 - \gamma)^n \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Ця послідовність функцій не є рівномірно збіжною на відрізку $[0, 1]$. Оскільки поточкова збіжність є необхідною умовою рівномірної збіжності, то єдиним на те, щоб бути рівномірною границею, є поточкова границя, а саме функція

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1), \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

(приклад 3.3.1). Перевірка рівномірної збіжності на відрізку $[0, 1]$ розглядуваної послідовності функцій до функції f полягає у дослідженні збіжності до нуля числової послідовності

$$d_n = \sup_{x \in [0, 1]} |x^n - f(x)|, \quad n \geq 1.$$

Маємо:

$$d_n = \sup_{x \in [0, 1]} |x^n - f(x)| \geq \sup_{x \in [0, 1)} |x^n - 0| = 1, \quad n \geq 1$$

не прямує до нуля при $n \rightarrow \infty$. Отже, послідовність функцій $(x^n, x \in [0, 1])$ не збігається рівномірно на відрізку $[0, 1]$.

Приклад 3.3.3. Послідовність функцій

$$\left(\frac{1}{n + |x|}, x \in \mathbb{R} \right)$$

збігається поточково на $\mathbb{R}$ до функції $f(x) = 0, x \in \mathbb{R}$. Оскільки

$$d_n = \sup_{x \in [0, 1]} \left| \frac{1}{n + |x|} - 0 \right| = \frac{1}{n} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty,$$

то ця послідовність збігається рівномірно на $\mathbb{R}$ до функції $f(x) = 0, x \in \mathbb{R}$.

Приклад 3.3.4. Послідовність функцій

$$(x^{n+1} - x^n + \sin x, x \in [0, 1])$$

збігається поточково на $[0, 1]$ до функції $f(x) = \sin x, x \in [0, 1]$. Дослідимо збіжність до нуля послідовності

$$d_n = \sup_{x \in [0, 1]} |x^{n+1} - x^n + \sin x - \sin x| = \sup_{x \in [0, 1]} |x^{n+1} - x^n| = \max_{x \in [0, 1]} |x^{n+1} - x^n|.$$

До функції $\varphi(x) = x^n - x^{n+1}, x \in [0, 1]$ застосуємо алгоритм знаходження найбільшого і найменшого значення функції на відрізку. Маємо:

$$\varphi'(x) = nx^{n-1} - (n+1)x^n = 0, x = \frac{n}{n+1};$$

$$\varphi(0) = \varphi(1) = 0, \quad \varphi\left(\frac{n}{n+1}\right) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n - \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \left(1 - \frac{n}{n+1}\right).$$

Отже,

$$d_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) \leq \frac{1}{n+1} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

і досліджувана послідовність збігається рівномірно на відріжку $[0,1]$ до функції $f(x) = \sin x$, $x \in [0,1]$.

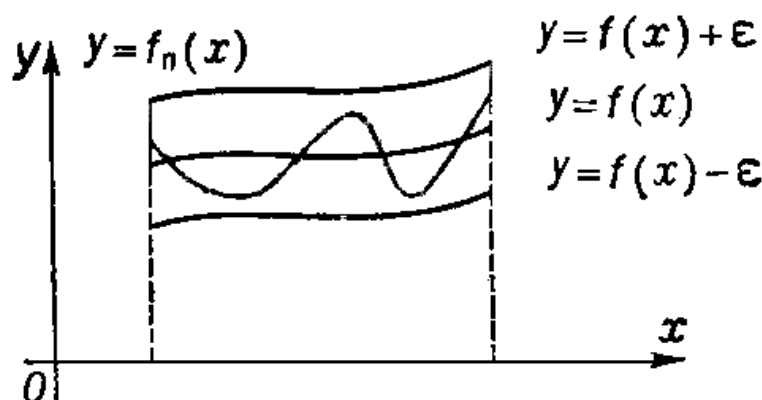


Рис. 3.3.1: Геометрична інтерпретація рівномірної збіжності.

Пояснення до рисунка 3.3.1. Для довільного $\varepsilon > 0$ множину $G(\varepsilon) = \{(x, y) \mid f(x) - \varepsilon < y < f(x) + \varepsilon, x \in [a, b]\}$ назвемо ε -смужкою навколо функції f . Геометрична інтерпретація рівномірної збіжності на відріжку $[a, b]$ послідовності функцій $(f_n(x), x \in [a, b])$ до функції $(f(x), x \in [a, b])$ полягає у наступному: $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N$: графік f_n належить ε -смужці навколо графіка функції f .

Теорема 3.3.1 (критерій Коші рівномірної збіжності послідовності функцій). Послідовність функцій $(f_n(x), x \in A)$ рівномірно збіжна на множині A тоді й тільки тоді, коли

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall m \geq N \forall n \geq N \forall x \in A: |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon. \quad (3.3.2)$$

Доведення. Необхідність. Нехай послідовність функцій $(f_n(x), x \in A)$ рівномірно збігається на A до функції $f(x), x \in A$. Тоді

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall m \geq N \forall x \in A: |f_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{і}$$

$$\forall n \geq N \forall x \in A: |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

звідки

$$\begin{aligned} \forall m \geq N \forall n \geq N \forall x \in A: |f_m(x) - f_n(x)| &\leq \\ &\leq |f_m(x) - f(x)| + |f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Достатність. Для фіксованого $x \in A$ із умови теореми слідує, що числова послідовність $(f_n(x))$ фундаментальна. За критерієм Коші збіжності числової послідовності, ця послідовність збіжна. Границю цієї послідовності позначимо через $f(x)$: $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$. Таким чином, визначена функція $f: A \rightarrow \mathbb{R}$. Для довільного $x \in A$ у нерівності $|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ умови (3.3.2) перейдемо до границі при $m \rightarrow \infty$ і отримаємо $|f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$. Отже,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N \forall x \in A: |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon,$$

що й означає рівномірну збіжність на A послідовності функцій $(f_n(x), x \in A)$. Теорема доведена.

Довільна функція $f \in C([a, b])$ є границею рівномірно збіжної на відріжку $[a, b]$ послідовності многочленів. Це твердження називається теоремою Вейєрштрасса¹ про наближення многочленами неперервної на відріжку функції. Цю теорему з доведенням із застосуванням інтеграла Рімана читач знайде у додатку 1. Доведення цієї теореми за допомогою

¹ Вейєрштрасс Карл Теодор Вільгельм (31.10.1815 – 19.02.1897) – німецький математик.

многочленів Бернштейна¹ міститься у підручниках [6, с. 112 – 114], [9, с. 138 – 144].

3.3.2 Теорема про граничний перехід під знаком інтеграла Рімана

Наступна теорема містить достатні умови збереження інтегровності за Ріманом граничної функції та переходу до границі під знаком визначеного інтеграла.

Теорема 3.3.2 (про граничний перехід під знаком інтеграла Рімана). Нехай $(f_n(x), x \in [a, b])$ – послідовність дійсних функцій, $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ і виконані такі умови:

- 1) $\forall n \geq 1: f_n \in R([a, b])$;
- 2) $(f_n(x), x \in [a, b])$ збігається рівномірно на $[a, b]$ до f .

Тоді $f \in R([a, b])$ і

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Доведення. Застосуємо критерій інтегровності. Із умови 2) слідує, що

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N \forall x \in [a, b]: |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{4(b-a)}.$$

Зокрема, при $n = N$,

$$\forall x \in [a, b]: f_N(x) - \frac{\varepsilon}{4(b-a)} < f(x) < f_N(x) + \frac{\varepsilon}{4(b-a)}. \quad (3.3.3)$$

¹ Бернштейн Сергій Натанович (5.03.1880 – 26.10.1968) – український математик, академік НАН України (1925)

Оскільки $f_N \in R([a, b])$, то, внаслідок критерію інтегровності, існує розбиття $\lambda = \{a = x_0, x_1, \dots, x_n = b\}$ відрізка $[a, b]$:

$$\Omega(f_N, \lambda) = \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k(f_N) \Delta x_k < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Із нерівності (3.3.3) випливає, що

$$\forall k \in \{0, 1, \dots, n-1\}: \omega_k(f) \leq \omega_k(f_N) + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Таким чином, $\Omega(f, \lambda) =$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k(f) \Delta x_k \leq \sum_{k=0}^{n-1} \left(\omega_k(f_N) + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \right) \Delta x_k = \Omega(f_N, \lambda) + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

і, внаслідок критерію інтегровності, $f \in R([a, b])$. Далі,

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| &\leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \leq \\ &\leq \sup_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)| \cdot (b-a) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

внаслідок умови 1). Тому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Теорема доведена.

Зауваження 3.3.3. Умова рівномірної збіжності теореми про граничний перехід під знаком інтеграла Рімана істотна (приклад 3.3.5)¹, але не є необхідною (приклад 3.3.6). Як свідчить наступний приклад, поточкова збіжність, взагалі кажучи, не зберігає інтегровності за Ріманом.

Приклад 3.3.5. Нехай (r_n) – послідовність усіх раціональних чисел

¹ Приклад 3.3.1 також свідчить про істотність умови рівномірної збіжності

відрізка $[0,1]$,

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & x \in \{r_1, r_2, \dots, r_n\}, \\ 0, & x \in [0,1] \setminus \{r_1, r_2, \dots, r_n\}, \end{cases} \quad n \geq 1.$$

Функція $f_n \in R([a,b])$ як функція з не більш ніж скінченною множиною точок розриву. Послідовність функцій (f_n) збігається поточково на $[0,1]$ до функції Діріхле

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \cap [0,1], \\ 0, & x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

яка не є інтегрованою за Ріманом на відрізку $[0,1]$.

Таким чином, поточкова збіжність, взагалі кажучи, не зберігає інтегровності за Ріманом.

Приклад 3.3.6. У прикладах 3.3.1, 3.3.2 доведено, що послідовність функцій $(x^n, x \in [0,1])$ збігається поточково на відрізку $[0,1]$ до функції

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1), \\ 1, & x = 1, \end{cases}$$

але не є рівномірно збіжною на цьому відрізку. Проте функція $f \in R([0,1])$ (має рівно одну точку розриву) і граничний перехід під знаком інтеграла правильний:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 x^n dx = \int_0^1 \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x^n \right) dx = \int_0^1 f(x) dx = 0,$$

що вірно, оскільки

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 x^n dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

В наступній теоремі показано, що в теоремі про граничний перехід під знаком інтеграла Рімана умова рівномірної збіжності послідовності функцій на відрізку може бути послаблена.

Теорема 3.3.3. Нехай послідовність функцій $(f_n) \subset R([a, b])$ та функція $f \in R([a, b])$ задовольняють умови:

$$1) \exists M \in \mathbb{R} \forall n \geq 1 \forall x \in [a, b]: |f_n(x)| \leq M;$$

2) $\forall \gamma \in (0, b-a)$ послідовність функцій (f_n) рівномірно збіжна на відрізьку $[a + \gamma, b]$ до функції f .

$$\text{Тоді } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Вправа 3.3.1. Доведіть теорему 3.3.3.

$$\text{Вправа 3.3.2. Доведіть, що } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 e^{-nx^2} dx = 0.$$

3.4 Площа криволінійної трапеції

У цьому підрозділі ми дамо означення площі криволінійної трапеції та формулу для її обчислення. Поняття площі для багатокутників та її властивості на рівні шкільного курсу математики вважаються відомими. У курсі математичного аналізу функцій кількох змінних буде побудована міра Жордана, частинним випадком якої є площа.

Нехай $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ невід'ємна, обмежена на відрізьку $[a, b]$ функція.

Множина точок площини

$$\Phi = \{(x, y) | 0 \leq y \leq f(x), a \leq x \leq b\} \quad (3.4.1)$$

називається **криволінійною трапецією**. На кожному відрізьку $[x_k, x_{k+1}]$, $0 \leq k \leq n-1$ розбиття $\lambda = \{a = x_0, x_1, \dots, x_n = b\}$ поряд з криволінійною трапецією

$$C_k = \{(x, y) | 0 \leq y \leq f(x), x_k \leq x \leq x_{k+1}\}$$

розглянемо прямокутники

$$L_k = \{(x, y) | 0 \leq y \leq m_k, x_k \leq x \leq x_{k+1}\}$$

та

$$U_k = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq M_k, x_k \leq x \leq x_{k+1}\},$$

$$\text{де } m_k = m_k(f) = \inf_{x \in [x_k, x_{k+1}]} f(x), \quad M_k = M_k(f) = \sup_{x \in [x_k, x_{k+1}]} f(x).$$

Зрозуміло, що

$$L_k \subset \Pi_k \subset U_k, \quad 0 \leq k \leq n-1,$$

звідки

$$\bigcup_{k=0}^{n-1} L_k \subset \bigcup_{k=0}^{n-1} \Pi_k = \Pi \subset \bigcup_{k=0}^{n-1} U_k.$$

Площа многокутника $\bigcup_{k=0}^{n-1} L_k$ дорівнює нижній сумі Дарбу $L(f, \lambda)$, а

площа многокутника $\bigcup_{k=0}^{n-1} U_k$ – верхній сумі Дарбу $U(f, \lambda)$.

Означення 3.4.1. Число $S_* = \sup_{\lambda \in \Lambda} L(f, \lambda)$ називається **внутрішньою**

площею криволінійної трапеції Π . Число $S^* = \inf_{\lambda \in \Lambda} U(f, \lambda)$ називається

зовнішньою площею криволінійної трапеції Π .

Означення 3.4.2. Криволінійна трапеція Π називається **квадровною**, якщо її внутрішня площа дорівнює зовнішній площі, а число $S(\Pi) := S_* = S^*$ – **площею криволінійної трапеції Π** .

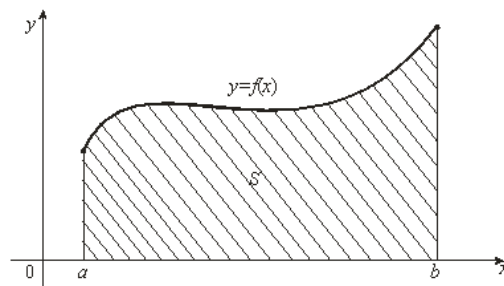


Рис. 3.4.1: Площа криволінійної трапеції: $S(\Pi) = \int_a^b f(x) dx$.

Із цих означень випливає, що криволінійна трапеція (3.4.2) квадровна тоді й тільки тоді, коли $f \in R([a, b])$. При цьому

$$S(\Pi) = \int_a^b f(x) dx.$$

Якщо $f(x) \leq 0, a \leq x \leq b$, то площа криволінійної трапеції

$\tilde{\Phi} = \{(x, y) | f(x) \leq y \leq 0, a \leq x \leq b\}$ дорівнює $\int_a^b f(x) dx$, взятому із знаком

мінус: $S(\tilde{\Pi}) = -\int_a^b f(x) dx$.

Приклад 3.4.1. Знайдемо площу фігури Π , обмеженої еліпсом

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

Внаслідок симетрії фігури Π відносно координатних осей,

$$S(\Pi) = 4b \int_0^a \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx = \left| \frac{x}{a} = t, dx = a dt \right| = 4ab \int_0^1 \sqrt{1 - t^2} dt = 4ab \cdot \frac{\pi}{4} = \pi ab.$$

Зауважимо, що $\int_0^1 \sqrt{1 - t^2} dt$ дорівнює площі чверті круга одиничного радіуса.

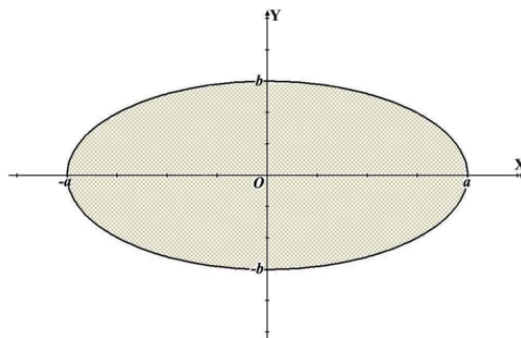


Рис. 3.4.2: Фігура, обмежена еліпсом

Отже, $S(\mathcal{C}) = \pi ab$. Зокрема, при $a = b = r$ отримаємо знайому формулу для площі круга радіуса r : $S = \pi r^2$.

Зауваження 3.4.1. Нехай $f, g \in R([a, b])$ і $f(x) \leq g(x)$, $x \in [a, b]$. Тоді множина $G = \{(x, y) | f(x) \leq y \leq g(x), a \leq x \leq b\}$ квадровна і має площу

$$S(G) = \int_a^b (g(x) - f(x)) dx.$$

Вправа 3.4.1. Знайдіть площу фігури, обмеженої графіками функцій $\sin x$, $\cos x$ на проміжку $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$.

Площа криволінійного сектора. Нагадаємо, що площа кругового сектора радіуса r з центральним кутом $\Delta\theta$ обчислюється за формулою

$$S = \frac{1}{2} r^2 \Delta\theta.$$

Нехай $0 \leq \alpha < \beta \leq 2\pi$, $f: [\alpha, \beta] \rightarrow R$ невід'ємна, обмежена на відріжку $[\alpha, \beta]$ функція. Множина точок у полярній системі координат

$$\Phi = \{(r, \theta) | 0 \leq r \leq f(\theta), \alpha \leq \theta \leq \beta\} \quad (3.4.2)$$

називається **криволінійним сектором**. На кожному відріжку $[\theta_k, \theta_{k+1}]$, $0 \leq k \leq n-1$ розбиття $\lambda = \{\alpha = \theta_0, \theta_1, \dots, \theta_n = \beta\}$ поряд з криволінійним сектором

$$\mathcal{C}_k = \{(r, \theta) | 0 \leq r \leq f(\theta), \theta_k \leq \theta \leq \theta_{k+1}\}$$

розглянемо кругові сектори

$$L_k = \{(r, \theta) | 0 \leq r \leq m_k, \theta_k \leq \theta \leq \theta_{k+1}\}$$

та

$$U_k = \{(r, \theta) | 0 \leq r \leq M_k, \theta_k \leq \theta \leq \theta_{k+1}\},$$

де $m_k = m_k(f) = \inf_{\theta \in [\theta_k, \theta_{k+1}]} f(\theta)$, $M_k = M_k(f) = \sup_{\theta \in [\theta_k, \theta_{k+1}]} f(\theta)$.

Зауважимо, що для невід'ємної функції f :

$$m_k^2(f) = m_k(f^2) := \inf_{\theta \in [\theta_k, \theta_{k+1}]} f^2(\theta)$$

і

$$M_k^2(f) = M_k(f^2) := \sup_{\theta \in [\theta_k, \theta_{k+1}]} f^2(\theta).$$

Зрозуміло, що

$$L_k \subset \Pi_k \subset U_k, \quad 0 \leq k \leq n-1,$$

звідки

$$\bigcup_{k=0}^{n-1} L_k \subset \bigcup_{k=0}^{n-1} \Pi_k = \Pi \subset \bigcup_{k=0}^{n-1} U_k.$$

Площа фігури $\bigcup_{k=0}^{n-1} L_k$ дорівнює

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2} m_k^2 \Delta \theta_k = L\left(\frac{1}{2} f^2, \lambda\right) -$$

нижній сумі Дарбу функції $\frac{1}{2} f^2$ для розбиття λ . Аналогічно, площа

фігури $\bigcup_{k=0}^{n-1} U_k$ дорівнює

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2} M_k^2 \Delta \theta_k = U\left(\frac{1}{2} f^2, \lambda\right) -$$

верхній сумі Дарбу функції $\frac{1}{2} f^2$ для розбиття λ .

Означення 3.4.3. Число $S_* = \sup_{\lambda \in \Lambda} L\left(\frac{1}{2} f^2, \lambda\right)$ називається

внутрішньою площею криволінійного сектора Π . Число

$S^* = \inf_{\lambda \in \Lambda} U\left(\frac{1}{2}f^2, \lambda\right)$ називається **зовнішньою площею** криволінійного сектора $\mathcal{U}$.

Означення 3.4.4. Криволінійний сектор $\mathcal{U}$ називається **квадровним**, якщо його внутрішня площа дорівнює зовнішній площі, а число $S(\mathcal{U}) := S_* = S^*$ – **площею криволінійного сектора** $\mathcal{U}$.

Зауважимо, що із теореми 2.4.4 випливає, що невід’ємна на відрізку $[\alpha, \beta]$ функція f інтегровна за Ріманом на цьому відрізку одночасно з функцією f^2 . Тому із означень 3.4.3, 3.4.4 випливає, що криволінійний сектор (1) квадровний тоді й тільки тоді, коли $f \in R([a, b])$. При цьому площа криволінійного сектора $\mathcal{U}$ обчислюється за формулою

$$S(\mathcal{U}) = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f^2(\theta) d\theta.$$

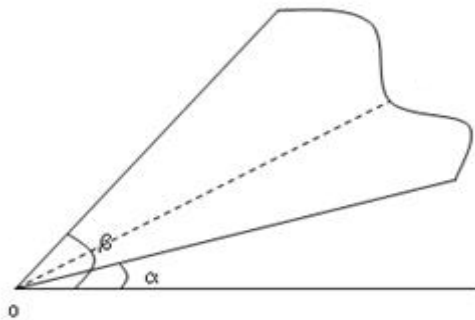
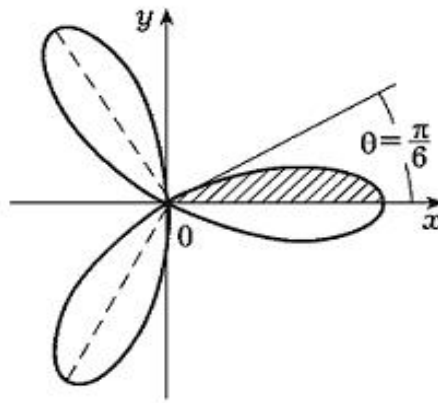


Рис.3.4.3: Обчислення площі криволінійного сектора $\mathcal{U}$: $S(\mathcal{U}) = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f^2(\theta) d\theta$.

Приклад 3.4.2. Обчислимо площу S трипелюсткової рози $r(\theta) = a \cos 3\theta$ (рис. 3.4.4)

Рис.3.4.4 Трипелюсткова троянда $r(\theta) = a \cos 3\theta$

Із графіка трипелюсткової рози зрозуміло, втричі більше площі листа, що відповідає зміні θ від $-\frac{\pi}{6}$ до $\frac{\pi}{6}$. Тому за формулою для площі криволінійного сектора

$$S = 3 \cdot \frac{1}{2} \int_{-\pi/6}^{\pi/6} a^2 \cos^2 3\theta d\theta = 3a^2 \int_0^{\pi/6} \cos^2 3\theta d\theta = \frac{\pi a^2}{4}.$$

Вправа 3.4.2. Крива $r = 2a(\cos \varphi + 1)$, $\varphi \in [-\pi, \pi]$ у полярній системі координат, де параметр $a > 0$, називається кардіоїдою¹. Знайдіть площу фігури, обмеженої кардіоїдою.

3.5 Довжина кривої

Нехай функції $\varphi, \psi \in C([a, b])$. Множина точок площини

$$\Gamma = \{(x, y) | x = \varphi(t), y = \psi(t), t \in [a, b]\} \quad (3.5.1)$$

називається **неперервною плоскою кривою**.

¹ Кардіоїду можна отримати як траєкторію фіксованої точки кола, що котиться без ковзання по колу того ж радіуса.

Плоска неперервна крива Γ називається **простою** якщо різним значенням параметра $t \in [a, b]$ відповідають різні точки кривої Γ . Точки $(\varphi(a), \psi(a)), (\varphi(b), \psi(b))$ називаються межовими точками кривої Γ . Крива Γ називається **простою замкнутою кривою**, якщо:

- 1) межові точки кривої Γ співпадають: $(\varphi(a), \psi(a)) = (\varphi(b), \psi(b))$;
- 2) $\forall s, t \in (a, b), s \neq t: (\varphi(t), \psi(t)) \neq (\varphi(s), \psi(s))$;
- 3) $\forall t \in (a, b): (\varphi(t), \psi(t)) \neq (\varphi(a), \psi(a))$.

Нехай далі неперервна плоска крива (3.5.1) – проста або проста замкнена крива. Для розбиття $\lambda = \{a = t_0, t_1, \dots, t_n = b\}$ покладемо $A_k = (\varphi(t_k), \psi(t_k))$, $0 \leq k \leq n$ і розглянемо ламану $\Gamma_\lambda = A_0 A_1 \dots A_n$.

Довжину ланки $A_k A_{k+1}$, $0 \leq k \leq n-1$ ламаної Γ_λ обчислимо за теоремою Піфагора: $|A_k A_{k+1}| = \sqrt{(\varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_k))^2 + (\psi(t_{k+1}) - \psi(t_k))^2}$. Тому довжина ламаної Γ_λ дорівнює

$$l(\Gamma_\lambda) = \sum_{k=0}^{n-1} |A_k A_{k+1}| = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{(\varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_k))^2 + (\psi(t_{k+1}) - \psi(t_k))^2}.$$

Означення 3.5.1. Крива Γ називається **спрямлюваною**, якщо існує скінченна границя довжин ламаних $\lim_{d(\lambda) \rightarrow 0} l(\Gamma_\lambda)$. При цьому число

$$l(\Gamma) = \lim_{d(\lambda) \rightarrow 0} l(\Gamma_\lambda)$$

називається **довжиною** кривої Γ .

Теорема 3.5.1 (формула довжини плоскої кривої). Нехай Γ – проста або замкнена проста крива, задана рівністю (3.5.1), в якій функції φ, ψ диференційовні на відрізку $[a, b]$, причому $\varphi', \psi' \in R([a, b])$. Тоді крива Γ спрямлювана, а її довжина обчислюється за формулою

$$l(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt. \quad (3.5.2)$$

Доведення. Як було встановлено вище, для розбиття $\lambda = \{a = t_0, t_1, \dots, t_n = b\}$ довжина ламаної Γ_λ

$$l(\Gamma_\lambda) = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{(\varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_k))^2 + (\psi(t_{k+1}) - \psi(t_k))^2}.$$

На відрізку $[t_k, t_{k+1}]$, $0 \leq k \leq n-1$ кожна з функцій φ, ψ задовольняє умови теореми Лагранжа, а тому $\exists \xi_k, \eta_k \in (t_k, t_{k+1})$:
 $\varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_k) = \varphi'(\xi_k) \Delta t_k$, $\psi(t_{k+1}) - \psi(t_k) = \psi'(\eta_k) \Delta t_k$. Отже,

$$l(\Gamma_\lambda) = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{(\varphi'(\xi_k))^2 + (\psi'(\eta_k))^2} \Delta t_k.$$

Внаслідок теореми 2.4.4 та лінійності простору $R([a, b])$ функція $\sqrt{(\varphi')^2 + (\psi')^2}$ інтегровна за Ріманом на відрізку $[a, b]$. За означенням інтеграла Рімана існує

$$\lim_{d(\lambda) \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{(\varphi'(\xi_k))^2 + (\psi'(\eta_k))^2} \Delta t_k = \int_a^b \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt. \quad (3.5.3)$$

Покладемо

$$r_\lambda = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{(\varphi'(\xi_k))^2 + (\psi'(\eta_k))^2} \Delta t_k - \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{(\varphi'(\xi_k))^2 + (\psi'(\xi_k))^2} \Delta t_k$$

і доведемо, що

$$\lim_{d(\lambda) \rightarrow 0} r_\lambda = 0. \quad (3.5.4)$$

Для оцінки $|r_\lambda|$ застосуємо нерівність

$$\left| \sqrt{u^2 + v^2} - \sqrt{u^2 + w^2} \right| \leq |v - w|, \quad (3.5.5)$$

яка має місце для довільних $u, v, w \in \mathbb{R}$.

Вправа 3.5.1. Доведіть нерівність (3.5.5).

Маємо:

$$|r_\lambda| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \left| \sqrt{(\varphi'(\xi_k))^2 + (\psi'(\eta_k))^2} - \sqrt{(\varphi'(\xi_k))^2 + (\psi'(\xi_k))^2} \right| \Delta t_k \leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n-1} |\psi'(\eta_k) - \psi'(\xi_k)| \Delta t_k \leq \Omega(\psi', \lambda).$$

Функція $\psi' \in R([a, b])$ і тому внаслідок зауваження до критерію інтегровності в термінах коливань, $\lim_{d(\lambda) \rightarrow 0} \Omega(\psi', \lambda) = 0$, звідки випливає

(3.5.4). Із рівностей (3.5.3), (3.5.4) випливає існування границі

$$\lim_{d(\lambda) \rightarrow 0} l(\Gamma_\lambda) = \int_a^b \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt.$$

Теорема доведена.

Зауваження 3.5.1. Умови теореми 3.5.1 справджуються для простої або простої замкненої кривої Γ , заданої рівністю (3.5.1), в якій функції $\varphi, \psi \in C^{(1)}([a, b])$.

Приклад 3.5.1. Знайдемо довжину арки циклоїди¹

$$x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), t \in [0, 2\pi],$$

де параметр $a > 0$.

За формулою (3.5.2) знаходимо:

$$l = a \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} dt = a \int_0^{2\pi} \sqrt{2(1 - \cos t)} dt = 2a \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt = 8a.$$

Вправа 3.5.2. Обчислити довжину дуги ланцюгової лінії², заданої рівнянням $y = \operatorname{ch} x$, $x \in [-a, a]$, де $a > 0$.

Зауваження 3.5.2. Нехай плоска крива Γ задана рівністю

$$\Gamma = \{(x, y) | y = f(x), x \in [a, b]\},$$

де функція f диференційовна на відрізку $[a, b]$, причому $f' \in R([a, b])$.

Тоді крива Γ спрямлювана, а її довжина обчислюється за формулою

¹ Циклоїдою називається траєкторія точки кола, що котиться без ковзання по прямій.

² Форму ланцюгової лінії набуває матеріальний ланцюжок, підвішений за кінці.

$$l(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx. \quad (3.5.6)$$

Для доведення достатньо записати криву Γ у вигляді

$$\Gamma = \{(x, y) | x = t, y = f(t), t \in [a, b]\}$$

і застосувати теорему 3.5.1.

Вправа 3.5.3. Знайдіть довжину графіка функції $y = \frac{x^2}{2}$, $x \in [0, 1]$.

Зауваження 3.5.2. Нехай проста крива Γ задана в полярній системі координат рівністю

$$\Gamma = \{(r, \theta) | r = \rho(\theta), \theta \in [\alpha, \beta]\},$$

де функція ρ диференційовна на відрізку $[\alpha, \beta]$, причому $\rho' \in R([\alpha, \beta])$.

Тоді крива Γ спрямлювана, а її довжина обчислюється за формулою

$$l(\Gamma) = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2(\theta) + (\rho'(\theta))^2} d\theta. \quad (3.5.7)$$

Для доведення достатньо записати криву Γ у вигляді

$$\Gamma = \{(x, y) | x = \rho(\theta)\cos\theta, y = \rho(\theta)\sin\theta, \theta \in [\alpha, \beta]\}$$

і застосувати теорему 3.5.1. Дійсно, у цьому випадку

$$\varphi(\theta) = \rho(\theta)\cos\theta, \quad \psi(\theta) = \rho(\theta)\sin\theta,$$

$$\begin{aligned} (\varphi'(\theta))^2 + (\psi'(\theta))^2 &= (\rho'(\theta)\cos\theta - \rho(\theta)\sin\theta)^2 + (\rho'(\theta)\sin\theta + \rho(\theta)\cos\theta)^2 = \\ &= \rho^2(\theta) + (\rho'(\theta))^2, \quad \theta \in [\alpha, \beta], \end{aligned}$$

звідки випливає формула (3.5.7) для обчислення довжини кривої, заданої у полярній системі координат.

Вправа 3.5.4. Обчисліть довжину кардіоїди $r = 2a(\cos\varphi + 1)$, $\varphi \in [-\pi, \pi]$, де параметр $a > 0$.

Зауваження 3.5.3. Нехай функції $\varphi, \psi, \chi \in C([a, b])$. Множина точок простору

$$\Gamma = \{(x, y, z) | x = \varphi(t), y = \psi(t), z = \chi(t), t \in [a, b]\} \quad (3.5.8)$$

називається **неперервною просторовою кривою**. Просторові проста і проста замкнена крива, а також спрямлюваність і довжина кривої визначаються аналогічно тому, як це було зроблено для плоскої неперервної кривої. Має місце

Теорема 3.5.2 (формула довжини просторової кривої). Нехай Γ – проста або замкнена проста просторова крива, задана рівністю (3.5.8), в якій функції φ, ψ, χ диференційовні на відрізку $[a, b]$, причому $\varphi', \psi', \chi' \in R([a, b])$. Тоді крива Γ спрямлювана, а її довжина обчислюється за формулою

$$l(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 + (\chi'(t))^2} dt.$$

Доведення аналогічне доведенню теореми 3.5.1.

Вправа 3.5.5. Знайдіть довжину одного витка гвинтової лінії¹

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad z = bt, \quad t \in \mathbb{R},$$

де параметри $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

3.6 Об'єм тіла обертання

Нагадаємо, що об'єм прямого кругового циліндра обчислюється за формулою

$$V = \pi r^2 h,$$

де r – радіус основи циліндра, h – висота циліндра.

Нехай $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ невід'ємна, обмежена на відрізку $[a, b]$ функція, $\Phi = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq f(x), a \leq x \leq b\}$ – криволінійна трапеція. Через G позначимо тіло, утворене обертанням криволінійної трапеції Φ навколо

¹ Траєкторія точки, що рівномірно рухається по твірній кругового циліндра, а ця твірна рухається рівномірно по поверхні циліндра, називається гвинтовою лінією.

осі абсцис. На кожному відрізку $[x_k, x_{k+1}]$, $0 \leq k \leq n-1$ розбиття $\lambda = \{a = x_0, x_1, \dots, x_n = b\}$ розглянемо криволінійну трапецію

$$C_k = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq f(x), x_k \leq x \leq x_{k+1}\}$$

і прямокутники

$$L_k = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq m_k, x_k \leq x \leq x_{k+1}\}, \quad U_k = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq M_k, x_k \leq x \leq x_{k+1}\},$$

$$\text{де } m_k = m_k(f) = \inf_{x \in [x_k, x_{k+1}]} f(x), \quad M_k = M_k(f) = \sup_{x \in [x_k, x_{k+1}]} f(x).$$

Через G_k, P_k, Q_k позначимо тіла, утворені відповідно обертанням криволінійної трапеції C_k , прямокутників L_k, U_k . Зауважимо, що P_k, Q_k – циліндри з радіусами основ відповідно $m_k(f), M_k(f)$ та висотою Δt_k . Зрозуміло, що

$$P_k \subset G_k \subset Q_k, \quad 0 \leq k \leq n-1,$$

звідки

$$P_\lambda := \bigcup_{k=0}^{n-1} P_k \subset \bigcup_{k=0}^{n-1} G_k = G \subset \bigcup_{k=0}^{n-1} Q_k =: Q_\lambda.$$

Кожне з тіл P_λ, Q_λ є об'єднанням n циліндрів. Об'єм тіла P_λ дорівнює

$$v(P_\lambda) = \sum_{k=0}^{n-1} \pi m_k^2(f) \Delta t_k = \sum_{k=0}^{n-1} \pi m_k(f^2) \Delta t_k = L(\pi f^2, \lambda), \quad (3.6.1)$$

а об'єм тіла Q_λ обчислюється так:

$$v(Q_\lambda) = \sum_{k=0}^{n-1} \pi M_k^2(f) \Delta t_k = \sum_{k=0}^{n-1} \pi M_k(f^2) \Delta t_k = U(\pi f^2, \lambda). \quad (3.6.2)$$

Означення 3.6.1. Число $V_* = \sup_{\lambda \in \Lambda} v(P_\lambda)$ називається внутрішнім

об'ємом тіла обертання G . Число $V^* = \sup_{\lambda \in \Lambda} v(Q_\lambda)$ називається зовнішнім

об'ємом тіла обертання G .

Означення 3.6.2. Тіло обертання G називається **кубовним**, якщо її внутрішній об'єм дорівнює зовнішньому об'єму, а число $v(G) := V_* = V^*$ – об'ємом тіла обертання G .

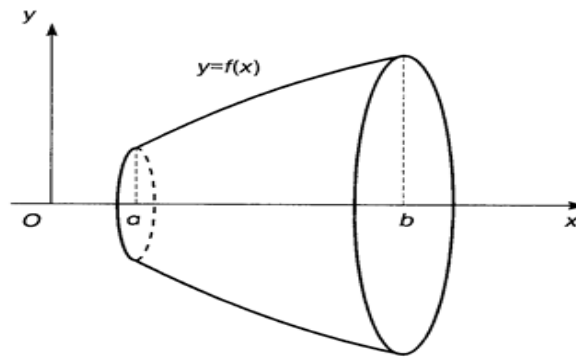


Рис. 3.6.1 Обчислення об'єму тіла обертання: $v(G) = \pi \int_a^b f^2(x) dx$.

Внаслідок теореми 2.4.4, невід'ємна на відрізку $[a, b]$ функція f інтегровна за Ріманом на цьому відрізку одночасно з функцією f^2 . Із означень 3.6.1, 3.6.2 та рівностей (3.6.1), (3.6.2) випливає, що тіло обертання G кубовне тоді й тільки тоді, коли $f \in R([a, b])$. При цьому

$$v(G) = \pi \int_a^b f^2(x) dx. \quad (3.6.3)$$

Приклад 3.6.1. Розглянемо кулю радіуса R як тіло, утворене обертанням криволінійної трапеції

$$\Phi = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq y \leq \sqrt{R^2 - x^2}, -R \leq x \leq R \right\}$$

навколо осі абсцис. За формулою (3.6.3) об'єм кулі радіуса R

$$V = \pi \int_{-R}^R (R^2 - x^2) dx = 2\pi \int_0^R (R^2 - x^2) dx = 2\pi \left(R^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^R = \frac{4\pi}{3} R^3.$$

Вправа 3.6.1. Кульовий сегмент кулі радіуса R має висоту h . Знайдіть об'єм цього сегмента.

3.7 Площа поверхні обертання

Нагадаємо, що площа бічної поверхні зрізаного конуса обчислюється за формулою

$$S = \pi(r_1 + r_2)l,$$

де r_1, r_2, l – радіуси основ та апофема зрізаного конуса.

Нехай

$$\Gamma = \{(x, y) | x = \varphi(t), y = \psi(t), t \in [a, b]\} \quad (3.7.1)$$

неперервна проста або проста замкнена крива. Припустимо, що крива Γ лежить вище вісі абсцис. Через Π позначимо поверхню, утворену обертанням кривої Γ навколо вісі абсцис. Для розбиття $\lambda = \{a = t_0, t_1, \dots, t_n = b\}$ розглянемо ламану $\Gamma_\lambda = A_0 A_1 \dots A_n$, де $A_k = (\varphi(t_k), \psi(t_k))$, $0 \leq k \leq n-1$. Через Π_λ позначимо поверхню, утворену обертанням ламаної Γ_λ навколо осі абсцис. Поверхня Π_λ є об'єднанням бічних поверхонь Π_k , $0 \leq k \leq n-1$ зрізаних конусів. Тому площа поверхні

$$\begin{aligned} \sigma(\Pi_\lambda) &= \sum_{k=0}^{n-1} \sigma(\Pi_k) = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} 2\pi \frac{\psi(t_k) + \psi(t_{k+1})}{2} \sqrt{(\varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_k))^2 + (\psi(t_{k+1}) - \psi(t_k))^2}. \end{aligned} \quad (3.7.1)$$

Означення 3.7.1. Поверхня обертання Π називається *квадровною*, якщо існує скінченна границя $\lim_{d(\lambda) \rightarrow 0} \sigma(\Pi_\lambda)$, а число

$$\sigma(\Pi) = \lim_{d(\lambda) \rightarrow 0} \sigma(\Pi_\lambda)$$

називається площею поверхні обертання Π .

Теорема 3.7.1 (площа поверхні обертання). Нехай функції $\varphi, \psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ задовольняють умови:

$$1) \quad \forall t \in [a, b] \quad \exists \varphi'(t), \psi'(t);$$

$$2) \quad \varphi', \psi' \in R([a, b]);$$

$$3) \quad \text{проста або проста замкнена крива} \quad \Gamma = \{(\varphi(t), \psi(t)) \mid t \in [a, b]\}$$

лежить у півплощині $\{(x, y) \mid y \geq 0\}$.

Тоді поверхня обертання Π , утворена обертанням кривої Γ навколо вісі абсцис, квадровна, а її площа обчислюється за формулою

$$\sigma(\Pi) = 2\pi \int_a^b \psi(t) \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt. \quad (3.7.2)$$

Доведення. Для розбиття $\lambda = \{a = t_0, t_1, \dots, t_n = b\}$ площа поверхні Π_λ обчислюється за формулою (3.7.1). За теоремою Коші про проміжне значення для неперервних функцій, для кожного $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ існує

точка $\eta_k \in [x_k, x_{k+1}]$ така, що $\psi(\eta_k) = \frac{\psi(t_k) + \psi(t_{k+1})}{2}$. Внаслідок теореми

Лагранжа, існують точки $\xi_k, \varsigma_k \in (t_k, t_{k+1})$ така, що $\varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_k) = \varphi'(\xi_k) \Delta t_k$, $\psi(t_{k+1}) - \psi(t_k) = \psi'(\varsigma_k) \Delta t_k$. Тому

$$\sigma(\Pi_\lambda) = 2\pi \sum_{k=0}^{n-1} \psi(\eta_k) \sqrt{(\varphi'(\xi_k))^2 + (\psi'(\varsigma_k))^2} \Delta t_k. \quad (3.7.3)$$

Внаслідок лінійності інтеграла Рімана та теореми 2.4.4, функція

$\sqrt{(\varphi')^2 + (\psi')^2}$ інтегровна за Ріманом на відрізку $[a, b]$. Функція

$\psi \sqrt{(\varphi')^2 + (\psi')^2} \in R([a, b])$ як добуток інтегровних за Ріманом функцій. За

лемою 2.5.1

$$\lim_{d(\lambda) \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} \psi(\eta_k) \sqrt{(\varphi'(\xi_k))^2 + (\psi'(\xi_k))^2} \Delta t_k = \int_a^b \psi(x) \sqrt{(\varphi'(x))^2 + (\psi'(x))^2} dx. \quad (3.7.4)$$

Покладемо

$$r_\lambda = \sum_{k=0}^{n-1} \psi(\eta_k) \sqrt{(\varphi'(\xi_k))^2 + (\psi'(\xi_k))^2} \Delta t_k - \sum_{k=0}^{n-1} \psi(\eta_k) \sqrt{(\varphi'(\xi_k))^2 + (\psi'(\zeta_k))^2} \Delta t_k$$

і доведемо, що

$$\lim_{d(\lambda) \rightarrow 0} r_\lambda = 0. \quad (3.7.5)$$

Функція $\psi \in R([a, b])$ і тому обмежена на відрізку $[a, b]$, тобто

$$\exists C > 0 \quad \forall x \in [a, b]: |\psi(x)| \leq C.$$

Тоді

$$\begin{aligned} |r_\lambda| &\leq \sum_{k=0}^{n-1} |\psi(\eta_k)| \left| \sqrt{(\varphi'(\xi_k))^2 + (\psi'(\xi_k))^2} - \sqrt{(\varphi'(\xi_k))^2 + (\psi'(\zeta_k))^2} \right| \Delta t_k \leq \\ &\leq C \sum_{k=0}^{n-1} \left| \sqrt{(\varphi'(\xi_k))^2 + (\psi'(\xi_k))^2} - \sqrt{(\varphi'(\xi_k))^2 + (\psi'(\zeta_k))^2} \right| \Delta t_k. \end{aligned}$$

Далі для оцінки $|r_\lambda|$ застосуємо нерівність¹

$$\left| \sqrt{u^2 + v^2} - \sqrt{u^2 + w^2} \right| \leq |v - w|,$$

яка має місце для довільних $u, v, w \in \mathbb{R}$. Маємо:

$$|r_\lambda| \leq C \sum_{k=0}^{n-1} |\psi'(\xi_k) - \psi'(\zeta_k)| \Delta t_k \leq C \Omega(\psi', \lambda).$$

¹ Нерівність (3.5.5)

За умовою теореми, функція $\psi' \in R([a, b])$. Внаслідок зауваження до критерію інтегровності в термінах коливань, $\lim_{d(\lambda) \rightarrow 0} \Omega(\psi', \lambda) = 0$, звідки випливає (3.7.5). Із рівностей (3.7.4), (3.7.5) випливає існування границі

$$\lim_{d(\lambda) \rightarrow 0} \sigma(\Pi_\lambda) = 2\pi \int_a^b \psi(t) \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt.$$

Отже, поверхня обертання Π квадратна, причому її площа обчислюється за формулою (3.7.2). Теорема доведена.

Зауваження 3.7.1. Якщо опустити умову 3) теореми, то твердження про квадратність поверхні обертання Π залишиться правильним. При

цьому її площа
$$\sigma(\Pi) = 2\pi \int_a^b |\psi(t)| \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt.$$

Приклад 3.7.1. Знайдемо площу поверхні, утворену обертанням арки циклоїди

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), \quad t \in [0, 2\pi],$$

де параметр $a > 0$, навколо вісі абсцис. За формулою для площі поверхні обертання маємо:

$$\begin{aligned} s &= 2\pi a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t) \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} dt = 2\pi a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t) \sqrt{2(1 - \cos t)} dt = \\ &= 8\pi a^2 \int_0^{2\pi} \sin^3 \frac{t}{2} dt = -16\pi a^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - \cos^2 \frac{t}{2}\right) d \cos \frac{t}{2} = \\ &= 16\pi a^2 \left(\frac{1}{3} \cos^3 \frac{t}{2} - \cos \frac{t}{2} \right)_0^{2\pi} = \frac{64\pi a^2}{3}. \end{aligned}$$

Наслідок 3.7.1. Нехай функція $f: [a, b] \rightarrow [0, +\infty)$ задовольняє умови:

1) $\forall t \in [a, b] \quad \exists f'(t);$

2) $f' \in R([a, b])$.

Тоді поверхня обертання Π , утворена обертанням графіка функції f навколо вісі абсцис, квадратна, а її площа обчислюється за формулою

$$\sigma(\Pi) = 2\pi \int_a^b f(t) \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt. \quad (3.7.6)$$

Для доведення цього наслідку достатньо подати графік функції $y = f(x)$, $x \in [a, b]$ у вигляді кривої, заданої параметрично: $x = t$, $y = f(t)$, $t \in [a, b]$.

Вправа 3.7.1. Площа поверхні сферичного шару. Частина сфери, що міститься між двома січними паралельними площинами, називається сферичним шаром. Розгляньте сферичний шар сфери радіуса R як поверхню, утворену обертанням графіка функції $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$, $x \in [h_1, h_2]$, де $-R < h_1 < h_2 < R$ навколо вісі абсцис. Знайдіть площу поверхні сферичного шару.

3.8 Центри ваги. Теореми Гульдіна¹

Центр ваги плоскої кривої. Перша теорема Гульдіна. Статичним моментом M матеріальної точки відносно осі l називається добуток маси m цієї точки на її відстань d до осі l : $M = md$. Для системи матеріальних точок $m_1, m_2, \dots, m_n$, що лежать у одній площині з віссю статичний момент обчислюють за формулою

$$M = \sum_{k=1}^n m_k d_k \varepsilon_k,$$

де d_k – відстань точки m_k до осі, ε_k дорівнює одиниці або мінус одиниці в залежності від того, по яку сторону від осі лежить точка m_k .

¹ Гульдін Пауль (12.06.1577 – 3.11.1643) – швейцарський математик.

Знайдемо статичні моменти M_x відносно осі абсцис і M_y відносно осі ординат кривої Γ , яка є графіком неперервно диференційовної на відрізку $[a, b]$ функції f . Припустимо, що крива однорідна, тобто її лінійна густина стала і дорівнює одиниці (тобто дуга кривої одиничної довжини має одиничну масу). Тоді маса дуги кривої вимірюється довжиною цієї дуги, а маса m кривої

$$m = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Нехай $\lambda = \{a = x_0, x_1, \dots, x_n = b\}$ – розбиття відрізка $[a, b]$. Статичні моменти M_x , M_y кривої Γ визначають як границі відповідних інтегральних сум:

$$M_x := \lim_{d(\lambda) \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \int_{x_k}^{x_{k+1}} \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt,$$

$$M_y := \lim_{d(\lambda) \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} x_k \int_{x_k}^{x_{k+1}} \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt.$$

За теоремою про середнє для інтеграла Рімана

$$\forall k \in \{0, 1, \dots, n-1\} \quad \exists \xi_k \in [x_k, x_{k+1}]:$$

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt = \sqrt{1 + (f'(\xi_k))^2} \Delta x_k.$$

Внаслідок леми 2.5.1,

$$\lim_{d(\lambda) \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \sqrt{1 + (f'(\xi_k))^2} \Delta x_k = \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx,$$

$$\lim_{d(\lambda) \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} x_k \sqrt{1 + (f'(\xi_k))^2} \Delta x_k = \int_a^b x \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Таким чином,

$$M_x = \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx,$$

$$M_y = \int_a^b x \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Наведемо також евристичні міркування для обчислення статичних моментів M_x , M_y кривої Γ .

На відрізку $[a, b]$ виділимо елемент dx . Елемент ds кривої, проекція на вісь абсцис якого дорівнює dx , має масу

$$ds = \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Вважатимемо, що цей елемент – матеріальна точка, яка лежить на відстані $f(x)$ від осі абсцис і на відстані x від осі ординат. Тоді цей елемент має відносно осі абсцис статичний момент

$$dM_x = f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx,$$

а відносно осі ординат –

$$dM_y = x \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Інтегруємо ці рівності на відрізку $[a, b]$ і відповідно отримуємо статичний момент M_x кривої відносно осі абсцис і статичний момент M_y кривої відносно осі ординат:

$$M_x = \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx,$$

$$M_y = \int_a^b x \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Центр ваги матеріального тіла – така точка, що при зосередженні всієї маси тіла у цій точці статичний момент цієї маси відносно довільної вісі рівний статичному моменту тіла відносно цієї ж вісі. Позначимо центр

ваги кривої через $C(\xi, \eta)$, і розглянемо статичні моменти відносно координатних осей:

$$m\xi = M_y, \quad m\eta = M_x,$$

звідки

$$\xi = \frac{M_y}{m} = \frac{\int_a^b x \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx}{\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx}, \quad \eta = \frac{M_x}{m} = \frac{\int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx}{\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx}.$$

Із формули для ординати центра ваги кривої маємо рівність

$$\int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = \eta s,$$

де $s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$ – довжина кривої. Зіставимо цю формулу з формулою для площі поверхні обертання і отримаємо рівність

$$\sigma(\Pi) = 2\pi\eta s -$$

окремий випадок першої теореми Гульдіна.

Теорема 3.8.1 (перша теорема Гульдіна). Площа поверхні обертання, отриманої обертанням плоскої кривої навколо осі, що лежить у площині цієї кривої і не перетинає її, дорівнює добутку довжини цієї кривої на довжину кола, описаного її центром ваги.

Центр ваги криволінійної трапеції. Друга теорема Гульдіна.

Знайдемо статичні моменти M_x відносно осі абсцис і M_y відносно осі ординат криволінійної трапеції $\Pi = \{(x, y) | 0 \leq y \leq f(x), x \in [a, b]\}$, де f – невід’ємна, неперервна на відрізку $[a, b]$ функція. Припустимо, що криволінійна трапеція однорідна, тобто її поверхнева густина стала і дорівнює одиниці (тобто одиниця площі криволінійної трапеції має

одиничну масу). Тоді маса довільної частини криволінійної трапеції вимірюється її площею, а маса m криволінійної трапеції

$$m = \int_a^b f(x) dx.$$

Нехай $\lambda = \{a = x_0, x_1, \dots, x_n = b\}$ – розбиття відрізка $[a, b]$. Статичні моменти M_x , M_y криволінійної трапеції Π визначають як границі відповідних інтегральних сум:

$$M_x := \lim_{d(\lambda) \rightarrow 0} \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} f^2(x_k) \Delta x_k,$$

$$M_y := \lim_{d(\lambda) \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} x_k f(x_k) \Delta x_k.$$

Таким чином,

$$M_x = \frac{1}{2} \int_a^b f^2(x) dx,$$

$$M_y = \int_a^b x f(x) dx.$$

Нижче наведені евристичні міркування для обчислення статичних моментів M_x , M_y криволінійної трапеції Π .

На відрізку $[a, b]$ виділимо елемент dx . Смужку ds криволінійної трапеції, проекція на вісь абсцис якої дорівнює dx , наближено приймемо за прямокутник з масою

$$ds = f(x) dx.$$

Вважатимемо, що маса цієї смужки зосереджена в її центрі ваги – точці з координатами $\left(x, \frac{1}{2} f(x)\right)$. Тоді ця смужка має відносно осі абсцис статичний момент

$$dM_x = \frac{1}{2} f^2(x) dx,$$

а відносно осі ординат —

$$dM_y = xf(x)dx.$$

Інтегруємо ці рівності на відрізку $[a, b]$ і відповідно отримуємо статичний момент M_x криволінійної трапеції відносно осі абсцис та її статичний момент M_y відносно осі ординат:

$$M_x = \frac{1}{2} \int_a^b f^2(x) dx,$$

$$M_y = \int_a^b xf(x) dx.$$

Позначимо центр ваги криволінійної трапеції через $C(\xi, \eta)$. За означенням центра ваги, маємо рівності

$$m\xi = M_y, \quad m\eta = M_x,$$

звідки

$$\xi = \frac{M_y}{m} = \frac{\int_a^b xf(x) dx}{\int_a^b f(x) dx}, \quad \eta = \frac{M_x}{m} = \frac{\frac{1}{2} \int_a^b f^2(x) dx}{\int_a^b f(x) dx}.$$

Із формули для ординати центра ваги криволінійної трапеції маємо рівність

$$\frac{1}{2} \int_a^b f^2(x) dx = \eta s,$$

де $s = \int_a^b f(x) dx$ — площа криволінійної трапеції. Порівняємо цю формулу з формулою для об'єму тіла обертання і отримаємо рівність $v(G) = 2\pi\eta s$ — окремий випадок другої теореми Гюльдіна.

Теорема 3.8.2 (друга теорема Гульдіна). Об'єм тіла обертання, отриманого обертанням плоскої фігури навколо осі, що лежить у площині цієї фігури і не перетинає її, дорівнює добутку площі цієї фігури на довжину кола, описаного її центром ваги.

Приклад 3.8.1 (площа поверхні та об'єм тора). Тіло, утворене обертанням круга навколо осі, яка лежить у площині цього круга і не перетинає його, називається тором. Бічна поверхня цього тора утворена обертанням кола, що обмежує цей круг. Зрозуміло, що центр ваги кола (круга) співпадає з його центром. Нехай R – відстань від центра кола до осі обертання, r – радіус кола. За першою теоремою Гульдіна площа бічної поверхні тора дорівнює

$$S = 2\pi r \cdot 2\pi R = 4\pi^2 rR.$$

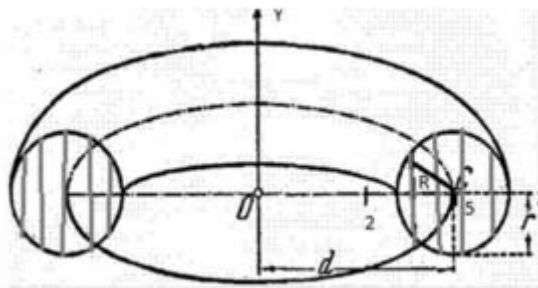


Рис.3.4.7: Тор як тіло обертання

Об'єм тора обчислимо за другою теоремою Гульдіна:

$$V = \pi r^2 \cdot 2\pi R = 2\pi^2 r^2 R.$$

Д.1 Теорема Вейєрштрасса про рівномірне наближення неперервної на відрізку функції многочленами

Теорема Д.1.1. Нехай $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ – неперервна на відрізку $[a, b]$ функція. Тоді існує послідовність многочленів (P_n) , що рівномірно на $[a, b]$ збігається до функції f .

Доведення. Без втрати загальності можна вважати, що $[a, b] = [0, 1]$. Припустимо також, що $f(0) = f(1) = 0$. Дійсно, для переходу до загального випадку розглянемо функцію

$$g(x) = f(x) - f(0) - x(f(1) - f(0)), \quad x \in [0, 1].$$

Функція g неперервна на $[a, b]$, $g(0) = g(1) = 0$ і якщо g – границя рівномірно збіжної на $[a, b]$ послідовності многочленів, то функція f також є такою границею, оскільки $(f - g)$ – многочлен.

Продовжимо функцію f на $\mathbb{R}$ за допомогою рівності $f(x) = 0$, $x \notin [0, 1]$. Так продовжена функція f рівномірно неперервна на $\mathbb{R}$. Покладемо

$$Q_n(x) = c_n (1 - x^2)^n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (\text{Д.2.1})$$

де сталі c_n обрані так, що

$$\int_{-1}^1 Q_n(x) dx = 1, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (\text{Д.2.2})$$

Оскільки

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (1 - x^2)^n dx &= 2 \int_0^1 (1 - x^2)^n dx \geq 2 \int_0^{1/\sqrt{n}} (1 - x^2)^n dx \geq \left| \begin{array}{l} \text{Нерівність Бернуллі для} \\ \text{підінтегральної функції} \end{array} \right| \geq \\ &\geq 2 \int_0^{1/\sqrt{n}} (1 - nx^2) dx = \frac{4}{3\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n}}, \end{aligned}$$

то $c_n < \sqrt{n}$. Із рівності (Д.2.1) випливає, що

$$\forall \delta > 0, \forall x, |x| \in [\delta, 1]: Q_n(x) = c_n(1 - x^2)^n \leq \sqrt{n}(1 - \delta^2)^n. \quad (\text{Д.2.3})$$

Отже, послідовність многочленів (Q_n) збігається до 0 рівномірно на $[-1, -\delta] \cup [\delta, 1]$.

Покладемо
$$P_n(x) = \int_{-1}^1 f(x+t)Q_n(t)dt, \quad x \in [0, 1].$$
 За наших

припущень щодо функції f , за допомогою заміни змінної, отримуємо, що

$$P_n(x) = \int_{-x}^{1-x} f(x+t)Q_n(t)dt = \left| \begin{matrix} x+t=s \\ dt=ds \end{matrix} \right| = \int_0^1 f(s)Q_n(s-x)ds.$$

Неважко бачити, що останній інтеграл – многочлен відносно змінної x . Таким чином, (P_n) – послідовність многочленів. За означенням рівномірної неперервності,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in \mathbb{R}, |x - y| < \delta: |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Нехай $M = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$. Для оцінки $|P_n - f|$ на відрізку $[0, 1]$ застосуємо співвідношення (Д.2.2), (Д.2.3) та невід'ємність Q_n на $[0, 1]$. Для довільного $x \in [0, 1]$ маємо:

$$\begin{aligned} |P_n(x) - f(x)| &= \left| \int_{-1}^1 (f(x+t) - f(x))Q_n(t)dt \right| \leq \int_{-1}^1 |f(x+t) - f(x)|Q_n(t)dt \leq \\ &\leq 2M \int_{-1}^{-\delta} Q_n(t)dt + \frac{\varepsilon}{2} \int_{-\delta}^{\delta} Q_n(t)dt + 2M \int_{\delta}^1 Q_n(t)dt \leq \\ &\leq 4M\sqrt{n}(1 - \delta^2)^n + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \end{aligned}$$

для всіх достатньо великих n . Теорему доведено.

Розв'язання, вказівки, відповіді

Розділ 1

1.1.1. Розв'язання. Зауважимо, що підінтегральна функція

$$f(x) = \min(x^2, x^3) = \begin{cases} x^3, & x \leq 1, \\ x^2, & x > 1. \end{cases}$$

Функція f має первісну на кожному з проміжків $(-\infty, 1]$, $(1, +\infty)$, причому

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x^4}{4} + C_1, & x \leq 1, \\ \frac{x^3}{3} + C_2, & x > 1. \end{cases}$$

Співвідношення між сталими C_1 і C_2 визначимо із умови неперервності первісної на

$\mathbb{R}$: $F(1-) = F(1+)$, звідки

$$\frac{1}{4} + C_1 = \frac{1}{3} + C_2, \quad C_2 = C_1 - \frac{1}{12}.$$

Покажемо, що

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x^4}{4} + C, & x \leq 1, \\ \frac{x^3}{3} + C - \frac{1}{12}, & x > 1 \end{cases}$$

для довільної сталої $C \in \mathbb{R}$ є первісною, тобто $F'(x) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Для точок

$x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ це випливає з правил диференціювання, а для $x = 1$ існують односторонні границі

$$\lim_{x \rightarrow 1-} F'(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} x^3 = 1 \quad \text{та} \quad \lim_{x \rightarrow 1+} F'(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} x^2 = 1,$$

і тому, за наслідком з теореми Лагранжа, існують односторонні похідні

$$F'(1-) = F'(1+) = 1 = f(1).$$

Отже, існує похідна $F'(1) = 1 = f(1)$. Таким чином,

$$\int \min(x^2, x^3) dx = \begin{cases} \frac{x^4}{4} + C, & x \leq 1, \\ \frac{x^3}{3} + C - \frac{1}{12}, & x > 1, \end{cases}$$

де $C \in \mathbb{R}$ – довільна стала.

1.1.2. Розв'язання. Із означення непарної функції випливає, що проміжок J симетричний відносно точки нуль. Нехай функція $G: J \cap [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ – первісна функції f на проміжку $J \cap [0, +\infty)$. Тоді функція

$$F(x) = \begin{cases} G(x), & x \in J \cap [0, +\infty), \\ G(-x), & x \in J \cap (-\infty, 0] \end{cases} \quad (4.1.1)$$

первісна функції f на проміжку J . Дійсно,

$$\forall x \in J \cap [0, +\infty): F'(x) = G'(x) = f(x),$$

$$\forall x \in J \cap (-\infty, 0]: F'(x) = -G'(-x) = -f(-x) = f(x).$$

Із (4.1.1) зрозуміло, що функція F парна. Довільна первісна функції f на проміжку J має вигляд $F(x) + C, x \in J$ – також парна функція.

1.1.3. Розв'язання. Із означення парної функції випливає, що проміжок J симетричний відносно точки нуль. Нехай функція $G: J \cap [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ – первісна функції f на проміжку $J \cap [0, +\infty)$, $G(0) = 0$. Тоді функція

$$F(x) = \begin{cases} G(x), & x \in J \cap [0, +\infty), \\ -G(-x), & x \in J \cap (-\infty, 0] \end{cases} \quad (4.1.2)$$

первісна функції f на проміжку J . Дійсно,

$$\forall x \in J \cap [0, +\infty): F'(x) = G'(x) = f(x),$$

$$\forall x \in J \cap (-\infty, 0]: F'(x) = G'(-x) = f(-x) = f(x).$$

Із (4.1.2) зрозуміло, що функція F непарна. Довільна первісна функції f на проміжку J має вигляд $F(x) + C, x \in J$ і при $C \neq 0$ не є непарною.

1.1.4. Вказівка. Розгляньте первісну періодичної функції $1 + \sin x, x \in \mathbb{R}$.

Відповідь: ні.

1.1.5. Розв'язання. Оскільки

$$f(x) = \operatorname{sign}(x^2 - 1) = \begin{cases} 1, & x < -1, \\ -1, & -1 < x < 1, \\ 1, & x > 1, \\ 0, & x = -1, 1, \end{cases}$$

то будемо шукати первісну у вигляді

$$F(x) = \begin{cases} x + C_1, & x < -1, \\ -x + C_2, & -1 \leq x < 1, \\ x + C_3, & x \geq 1. \end{cases}$$

З умови неперервності первісної F на $\mathbb{R}$ знаходимо співвідношення між сталими C_1, C_2, C_3 :

$$-1 + C_1 = 1 + C_2, \quad -1 + C_2 = 1 + C_3;$$

$$C_2 = C_1 - 2, \quad C_3 = C_2 - 2 = C_1 - 4.$$

З умови $F(0) = 0$ знаходимо $C_2 = 0$, звідки $C_1 = 2, C_3 = -2$.

$$\text{Відповідь: } F(x) = \begin{cases} x + 2, & x < -1, \\ -x, & -1 \leq x < 1, \\ x - 2, & x \geq 1. \end{cases}$$

1.3.1. Розв'язання. Без втрати загальності можна вважати $a > 0$. Нехай $x \in (a, +\infty)$. Застосуємо підстановку $x = a \operatorname{ch} t, t > 0$:

$$\int \sqrt{x^2 - a^2} dx = \left| \begin{array}{l} x = a \operatorname{ch} t, \quad t > 0, \\ dx = a \operatorname{sh} t dt, \\ t = \ln \left(x + \sqrt{x^2 - a^2} \right) - \ln a, \quad x \in (a, +\infty) \end{array} \right| = a^2 \int \operatorname{sh}^2 t dt =$$

$$= a^2 \int \frac{\operatorname{ch} 2t - 1}{2} dt = \frac{a^2}{4} \operatorname{sh} 2t - a^2 \frac{t}{2} + C = \left| \begin{array}{l} \operatorname{sh} 2t = 2 \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t, \\ \tilde{C} = C + \frac{a^2}{2} \ln a \end{array} \right| =$$

$$= \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \ln \left(x + \sqrt{x^2 - a^2} \right) + \tilde{C}, \quad x \in (a, +\infty).$$

У випадку інтервала $(-\infty, -a)$ застосовується підстановка $x = -a \operatorname{ch} t$, $t > 0$.

$$\text{Відповідь: } \int \sqrt{x^2 - a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \ln \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| + C \quad \text{на кожному з}$$

інтервалів $(-\infty, -|a|)$, $(|a|, +\infty)$.

1.3.2. Розв'язання. Без втрати загальності можна вважати $a > 0$. Застосуємо підстановку $x = a \operatorname{sh} t$, $t \in \mathbb{R}$:

$$\int \sqrt{x^2 + a^2} dx = \left| \begin{array}{l} x = a \operatorname{sh} t, \quad t \in \mathbb{R}, \\ dx = a \operatorname{ch} t dt, \\ t = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + a^2} \right) - \ln a, \quad x \in \mathbb{R} \end{array} \right| = a^2 \int \operatorname{ch}^2 t dt =$$

$$= a^2 \int \frac{\operatorname{ch} 2t + 1}{2} dt = \frac{a^2}{4} \operatorname{sh} 2t + a^2 \frac{t}{2} + C = \left| \begin{array}{l} \operatorname{sh} 2t = 2 \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t, \\ \tilde{C} = C - \frac{a^2}{2} \ln a \end{array} \right| =$$

$$= \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \ln \left(x + \sqrt{x^2 + a^2} \right) + \tilde{C}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Зауважте, що вираз під знаком логарифма додатний для всіх $x \in \mathbb{R}$.

1.4.1. Розв'язання. Після інтегрування частинами, отримуємо лінійне рівняння відносно шуканого інтеграла:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{a^2 - x^2} dx &= x \sqrt{a^2 - x^2} - \int \frac{-x^2 + a^2 - a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \\ &= x \sqrt{a^2 - x^2} - \int \sqrt{a^2 - x^2} dx + a^2 \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \\ &= x \sqrt{a^2 - x^2} - \int \sqrt{a^2 - x^2} dx + a^2 \arcsin \frac{x}{a} + C, \end{aligned}$$

звідки

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C, \quad x \in (-a, a).$$

1.4.2. Розв'язання. Без втрати загальності можна вважати $a > 0$. Після інтегрування частинами, отримуємо лінійне рівняння відносно шуканого інтеграла:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x^2 - a^2} dx &= x \sqrt{x^2 - a^2} - \int \frac{x^2 - a^2 + a^2}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \\ &= x \sqrt{x^2 - a^2} - \int \sqrt{x^2 - a^2} dx - a^2 \int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \\ &= x \sqrt{x^2 - a^2} - \int \sqrt{x^2 - a^2} dx - a^2 \ln \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| + C, \end{aligned}$$

звідки

$$\int \sqrt{x^2 - a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \ln \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| + C$$

на кожному з інтервалів $(-\infty, -|a|)$, $(|a|, +\infty)$.

1.4.3. Розв'язання. Проінтегруємо частинами кожний з цих інтегралів: отримаємо систему лінійних рівнянь відносно шуканих інтегралів:

$$\int e^{ax} \cos bx dx = \frac{1}{a} \int \cos bx de^{ax} = \frac{1}{a} \left(e^{ax} \cos bx + b \int e^{ax} \sin bxdx \right),$$

$$\int e^{ax} \sin bx dx = \frac{1}{a} \int \sin bx de^{ax} = \frac{1}{a} \left(e^{ax} \sin bx - b \int e^{ax} \cos bxdx \right).$$

Отримали систему лінійних рівнянь відносно шуканих інтегралів:

$$\begin{cases} \int e^{ax} \cos bx dx - \frac{b}{a} \int e^{ax} \sin bxdx = \frac{e^{ax} \cos bx}{a}, \\ \frac{b}{a} \int e^{ax} \cos bx dx + \int e^{ax} \sin bxdx = \frac{e^{ax} \sin bx}{a}, \end{cases}$$

звідки

$$\int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{ae^{ax} \cos bx + be^{ax} \sin bx}{a^2 + b^2} + C, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\int e^{ax} \sin bx \, dx = \frac{ae^{ax} \sin bx - be^{ax} \cos bx}{a^2 + b^2} + C, \quad x \in \mathbb{R}.$$

1.6.1. Відповідь: на довільному проміжку, що належить множині визначення підінтегральної функції $f(x) = \frac{\sin x}{(\sin x - \cos x + 1)(1 + \cos x)}$:

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{ k\pi, -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

1.6.2. Розв'язання. Якщо раціональна функція $R(u, v)$ задовольняє тотожність

$$R(-u, v) = -R(u, v)$$

для всіх (u, v) із множини визначення, то вона має вигляд

$$R(u, v) = uR_1(u^2, v),$$

де $R_1(\cdot, \cdot)$ – раціональна функція двох змінних. Тому

$$\begin{aligned} \int R(\sin x, \cos x) \, dx &= \int R_1(\sin^2 x, \cos x) \sin x \, dx = \left| \begin{array}{l} t = \cos x, \\ dt = -\sin x \, dx \end{array} \right| = \\ &= -\int R_1(1 - t^2, t)(1 - t^2) \, dt. \end{aligned}$$

Таким чином, маємо інтеграл від раціональної функції змінної t .

1.6.3. Вказівка. Якщо раціональна функція $R(u, v)$ задовольняє тотожність

$$R(u, -v) = -R(u, v)$$

для всіх (u, v) із множини визначення, то вона має вигляд

$$R(u, v) = vR_1(u, v^2),$$

де $R_1(\cdot, \cdot)$ – раціональна функція двох змінних.

1.6.4. Розв'язання. Нехай раціональна функція $R(u, v)$ задовольняє тотожність

$$R(-u, -v) = R(u, v).$$

Тоді

$$R(u, v) = R\left(\frac{u}{v}v, v\right) = R_1\left(\frac{u}{v}, v\right),$$

де $R_1(\cdot, \cdot)$ – раціональна функція двох змінних. За властивістю функції $R(u, v)$, при зміні знаків змінних u, v на протилежні,

$$R_1\left(\frac{u}{v}, -v\right) = R_1\left(\frac{u}{v}, v\right),$$

звідки випливає, що $R_1\left(\frac{u}{v}, v\right) = R_2\left(\frac{u}{v}, v^2\right)$, де $R_2(\cdot, \cdot)$ – раціональна функція двох змінних. Тому

$$\begin{aligned} \int R(\sin x, \cos x) dx &= \int R_2\left(\frac{\sin x}{\cos x}, \cos^2 x\right) dx = \left| \begin{array}{l} t = \operatorname{tg} x, \\ dx = \frac{dt}{1+t^2} \end{array} \right| = \\ &= \int R_2\left(t, \frac{1}{1+t^2}\right) \frac{1}{1+t^2} dt. \end{aligned}$$

Таким чином, маємо інтеграл від раціональної функції змінної t .

1.8.1. Розв'язання. Зазначимо, що mN, nN – цілі числа. Маємо:

$$\int x^m (a + bx^n)^p dx = \left| \begin{array}{l} x = t^N, \\ dx = Nt^{N-1} dt \end{array} \right| = N \int t^{mN} (a + bt^{nN})^p t^{N-1} dt.$$

У правій частині цієї рівності – інтеграл від раціональної функції змінної t .

1.8.2. Розв'язання. Зазначимо, що pN – ціле число. Маємо:

$$\int x^m (a + bx^n)^p dx = \left| \begin{array}{l} x = \left(\frac{t^N - a}{b}\right)^{1/n}, \\ dx = \frac{1}{nb} \left(\frac{t^N - a}{b}\right)^{\frac{1}{n}-1} Nt^{N-1} dt \end{array} \right| =$$

$$= \frac{N}{nb} \int \left(\frac{t^N - a}{b} \right)^{\frac{m+1}{n}-1} t^{pN} t^{N-1} dt -$$

інтеграл від раціональної функції змінної t .

1.8.3. Розв'язання. Зазначимо, що pN – ціле число. Маємо:

$$\int x^m (a + bx^n)^p dx = \left| \begin{array}{l} x = \left(\frac{t^N - b}{a} \right)^{\frac{-1}{n}}, \\ dx = -\frac{1}{na} \left(\frac{t^N - b}{a} \right)^{\frac{-1}{n}-1} N t^{N-1} dt \end{array} \right| =$$

$$= \frac{N}{na} \int \left(\frac{t^N - b}{a} \right)^{-\frac{m+1}{n}-1-p} t^{Np} t^{N-1} dt -$$

інтеграл від раціональної функції змінної t .

Розділ 2

2.1.1. Вказівка. Проведіть міркування по аналогії з прикладом 1.1.1.

Відповідь: $\frac{1}{4}$.

2.1.2. Відповідь: $e - 1$.

2.2.1. Розв'язання. Оскільки функція f обмежена на $[a, b]$, то $\exists M \in \mathbb{R} \forall x \in [a, b]: |f(x)| \leq M$. Далі,

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) (\Delta x_k)^{1+\alpha} \right| \leq M (b-a) (d(\lambda))^\alpha \rightarrow 0$$

при $d(\lambda) \rightarrow 0$, звідки випливає твердження вправи.

2.2.2. Вказівка. Зверніть увагу, що функція f необмежена на $[0, 1]$.

Відповідь: ні.

2.3.1. Вказівка. Множина $\{f(s) - f(t) \mid s, t \in [\alpha, \beta]\}$ симетрична відносно нуля, звідки випливає рівність $\sup_{s, t \in [\alpha, \beta]} (f(s) - f(t)) = \sup_{s, t \in [\alpha, \beta]} |f(s) - f(t)|$. Рівність

$$\sup_{s, t \in [\alpha, \beta]} (f(s) - f(t)) = \sup_{s \in [\alpha, \beta]} f(s) - \inf_{t \in [\alpha, \beta]} f(t)$$

доводиться за допомогою означень точної верхньої та точної нижньої меж.

2.4.1. Розв'язання. Функція $f(x) = x^3$, $x \in [0, 1]$ неперервна на відрізку $[0, 1]$ і, внаслідок теореми 2.4.2, інтегровна за Ріманом на цьому відрізку. За означенням інтегровної за Ріманом функції, існує границя інтегральних сум

$$\lim_{d(\lambda) \rightarrow 0} S(f, \lambda; \{\xi_k \mid \lambda\}) = \int_0^1 f(x) dx.$$

Для обчислення цієї границі виберемо послідовність рівномірних розбиттів

$$\lambda_n = \left\{ 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, n \right\}, \quad d(\lambda_n) = \frac{1}{n} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty \quad \text{і набори проміжних точок}$$

$$\{\xi_k \mid \lambda_n\} = \left\{ 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n} \right\}, \quad n \in N.$$

Тоді

$$S(f, \lambda_n; \{\xi_k \mid \lambda_n\}) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n} \right)^3 \frac{1}{n} = \frac{1^3 + 2^3 + \dots + (n-1)^3}{n^4} \rightarrow \frac{1}{4}, \quad n \rightarrow \infty.$$

$$\text{Отже, } \int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}.$$

2.4.2. Розв'язання. Функція $f(x) = e^x$, $x \in [0, 1]$ неперервна на відрізку $[0, 1]$ і, внаслідок теореми 2.4.2, інтегровна за Ріманом на цьому відрізку. За означенням інтегровної за Ріманом функції, існує границя інтегральних сум

$$\lim_{d(\lambda) \rightarrow 0} S(f, \lambda; \{\xi_k \mid \lambda\}) = \int_0^1 f(x) dx.$$

Для обчислення цієї границі виберемо послідовність рівномірних розбиттів

$$\lambda_n = \left\{ 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, n \right\}, \quad d(\lambda_n) = \frac{1}{n} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty \quad \text{і набори проміжних точок}$$

$$\{\xi_k \mid \lambda_n\} = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}\right\}, \quad n \in N.$$

Тоді

$$S(f, \lambda_n; \{\xi_k \mid \lambda_n\}) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{k/n} = \left| \begin{array}{l} \text{сума членів} \\ \text{геом. прогресії} \end{array} \right| = \frac{e-1}{n(e^{1/n}-1)} \rightarrow e-1, \quad n \rightarrow \infty.$$

$$\text{Отже, } \int_0^1 e^x dx = e-1.$$

2.4.3. Розв'язання. Перетворимо суму під знаком границі наступним чином:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{n^2 + k^2} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2} \cdot \frac{1}{n}.$$

Функція $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $x \in [0, 1]$ неперервна на відрізку $[0, 1]$ і, внаслідок теореми

2.4.2, інтегровна за Ріманом на цьому відрізку. За означенням інтегровної за Ріманом функції, існує границя інтегральних сум

$$\lim_{d(\lambda) \rightarrow 0} S(f, \lambda; \{\xi_k \mid \lambda\}) = \int_0^1 f(x) dx.$$

Зокрема, для послідовності рівномірних розбиттів

$$\lambda_n = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, n\right\}, \quad d(\lambda_n) = \frac{1}{n} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty \quad \text{і наборів проміжних точок}$$

$$\{\xi_k \mid \lambda_n\} = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}\right\}, \quad n \in N:$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2} \cdot \frac{1}{n} \rightarrow \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}, \quad n \rightarrow \infty.$$

2.4.4. Вказівка. Функція f обмежена на відрізку $[a, b]$, оскільки інтегровна

за Ріманом на цьому відрізку. Функція g відрізняється від f не більш ніж на скінченній множині точок і тому також обмежена на $[a, b]$. Далі повторюються міркування із доведення теореми 2.4.3.

2.4.5. Розв'язання. Внаслідок вправи 2.4.4, $f \in R([a, b])$. Тому існує границя інтегральних сум. Очевидно,

$$\forall \lambda = \lambda([a, b]) \exists \{\xi_i | \lambda\} : \{\xi_i | \lambda\} \cap \{z_1, z_2, \dots, z_m\} = \emptyset.$$

Для таких наборів проміжних точок $S(f, \lambda; \{\xi_i | \lambda\}) = 0$. Тому

$$\lim_{d(\lambda) \rightarrow 0} S(f, \lambda; \{\xi_i | \lambda\}) = 0, \text{ тобто } \int_a^b f(x) dx = 0.$$

2.4.6. Вказівка. Застосуйте твердження попередніх двох вправ.

2.5.1. Вказівка. Застосуйте критерій інтегровності. Після того, як буде доведена інтегровність функції f на відрізку $[a, b]$, рівність (4.2.1) впливатиме з властивості адитивності.

2.5.2. Розв'язання. Внаслідок властивості адитивності, $f \in R([0, a])$.

Розглянемо симетричні відносно точки 0 розбиття

$$\lambda = \{-a = x_0, x_1, \dots, x_n = 0, x_{n+1}, \dots, x_{2n} = a\}$$

та симетричні відносно 0 набори проміжних точок $\{\xi_i | \lambda\}$. Тоді, внаслідок парності функції f ,

$$\sum_{k=0}^{2n-1} f(\xi_k) \Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k + \sum_{k=n}^{2n-1} f(\xi_k) \Delta x_k = 2 \sum_{k=n}^{2n-1} f(\xi_k) \Delta x_k.$$

Після переходу до границі при $d(\lambda) \rightarrow 0$ у рівності

$$\sum_{k=0}^{2n-1} f(\xi_k) \Delta x_k = 2 \sum_{k=n}^{2n-1} f(\xi_k) \Delta x_k$$

отримаємо рівність (4.2.2).

2.5.3. Розв'язання. Розглянемо симетричні відносно точки 0 розбиття $\lambda = \{-a = x_0, x_1, \dots, x_n = 0, x_{n+1}, \dots, x_{2n} = a\}$ та симетричні відносно 0 набори проміжних точок $\{\xi_i | \lambda\}$. Тоді, внаслідок непарності функції f ,

$$\sum_{k=0}^{2n-1} f(\xi_k) \Delta x_k = 0.$$

Після переходу до границі при $d(\lambda) \rightarrow 0$ у цій рівності отримаємо рівність (4.2.3).

2.5.4. Розв'язання. Нехай $k \in \mathbb{Z}$. Довільному розбиттю

$$\lambda = \lambda([kT, (k+1)T]) = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$$

і набору проміжних точок $\{\xi_i \mid \lambda\}$ поставимо у відповідність розбиття

$$\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}([0, T]) = \{\tilde{x}_0, \tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n\} = \{x_0 - kT, x_1 - kT, \dots, x_n - kT\}$$

та набір проміжних точок $\{\tilde{\xi}_i \mid \tilde{\lambda}\}$, де $\tilde{\xi}_i = \xi_i - kT$, $0 \leq i \leq n-1$. Зазначимо, що

$d(\lambda) = d(\tilde{\lambda})$. Внаслідок періодичності функції f ,

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} f(\tilde{\xi}_k) \Delta \tilde{x}_k.$$

Оскільки $f \in R([0, T])$, то

$$\lim_{d(\tilde{\lambda}) \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\tilde{\xi}_k) \Delta \tilde{x}_k = \int_0^T f(x) dx.$$

Тому також

$$\lim_{d(\lambda) \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k = \int_0^T f(x) dx.$$

Це означає, що $f \in R([kT, (k+1)T])$ і

$$\int_{kT}^{(k+1)T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx.$$

2.5.5. Розв'язання. Для довільного відрізка $[a, b] \exists n \in \mathbb{N} : [a, b] \subset [-nT, nT]$.

Внаслідок твердження вправи 2.5.4 та адитивності інтеграла Рімана, $f \in R([-nT, nT])$,

звідки (знову внаслідок адитивності) $f \in R([a, b])$. Зрозуміло, що при цьому

$f \in R([a+T, b+T])$. Довільному розбиттю $\lambda = \lambda([a+T, b+T]) = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ і

набору проміжних точок $\{\xi_i \mid \lambda\}$ поставимо у відповідність розбиття

$$\tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}([a, b]) = \{\tilde{x}_0, \tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n\} = \{x_0 - T, x_1 - T, \dots, x_n - T\}$$

та набір проміжних точок $\{\tilde{\xi}_i \mid \tilde{\lambda}\}$, де $\tilde{\xi}_i = \xi_i - T$, $0 \leq i \leq n-1$. Зазначимо, що $d(\lambda) = d(\tilde{\lambda})$. Внаслідок періодичності функції f ,

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} f(\tilde{\xi}_k) \Delta \tilde{x}_k.$$

Оскільки $f \in R([a, b])$ та $f \in R([a+T, b+T])$ то після переходу до границі в останній рівності при $d(\lambda) = d(\tilde{\lambda}) \rightarrow 0$ отримаємо рівність (4.2.4).

2.5.6. Розв'язання. Внаслідок твердження вправи 2.5.5, $\forall a \in R$: $f \in R([a, a+T])$. Далі, $\exists! k \in Z : kT \leq a < (k+1)T$. Із тверджень вправ 2.5.4, 2.5.5 та адитивності інтеграла Рімана випливає наступний ланцюжок рівностей:

$$\begin{aligned} \int_a^{a+T} f(x) dx &= \int_a^{(k+1)T} f(x) dx + \int_{(k+1)T}^{a+T} f(x) dx = \\ &= \int_a^{(k+1)T} f(x) dx + \int_{kT}^a f(x) dx = \int_{kT}^{(k+1)T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx. \end{aligned}$$

2.5.7. Розв'язання. Достатність тривіальна: $\int_a^b 0 dx = 0$.

Необхідність доведемо від супротивного. Припустимо, $\exists x_0 \in [a, b]: f(x_0) > 0$.

Тоді

$$\exists \delta \in \left(0, \frac{b-a}{2}\right) \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \cap [a, b]: f(x) > \frac{f(x_0)}{2}.$$

Відрізок $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \cap [a, b]$ позначимо через $[c, d]$. Далі,

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_c^d f(x) dx \geq \frac{f(x_0)}{2}(d-c) > 0.$$

Суперечність. Отже, $\forall x \in [a, b]: f(x) = 0$.

2.5.8. Вказівка. Розгляньте приклад сталої на відрізку $[a, b]$ функції.

Відповідь: ні.

2.5.9. Розв'язання. Існування проміжної точки випливає із теореми про середнє значення. Припустимо,

$$\exists \theta_1, \theta_2 \in [a, b], \theta_1 \neq \theta_2 : \int_a^b f(x) dx = f(\theta_1)(b-a) \text{ і } \int_a^b f(x) dx = f(\theta_2)(b-a).$$

Тоді $f(\theta_1)(b-a) = f(\theta_2)(b-a)$, звідки $f(\theta_1) = f(\theta_2)$, що суперечить строгій монотонності функції f на відрізку $[a, b]$.

2.5.10. Розв'язання. За другою теоремою Вейерштрасса для неперервних на відрізку функцій,

$$\exists x_*, x^* \in [a, b] : f(x_*) = \inf_{x \in [a, b]} f(x), \quad f(x^*) = \sup_{x \in [a, b]} f(x).$$

Ланцюжок нерівностей

$$f(x_*) \leq f(x) \leq f(x^*), \quad x \in [a, b]$$

домножимо на невід'ємне число $g(x) \geq 0$ і проінтегруємо почленно на відрізку $[a, b]$:

$$f(x_*) \int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x) g(x) dx \leq f(x^*) \int_a^b g(x) dx.$$

Якщо $\int_a^b g(x) dx = 0$, то, внаслідок вправи 2.5.7, $g(x) = 0$, $x \in [a, b]$ і твердження

тривіальне. Нехай $\int_a^b g(x) dx > 0$. Тоді

$$f(x_*) \leq \frac{1}{\int_a^b g(x) dx} \int_a^b f(x) g(x) dx \leq f(x^*).$$

Внаслідок теореми Коші про проміжне значення для неперервних функцій, існує число

θ із відрізка з кінцями x_*, x^* : $f(\theta) = \frac{1}{\int_a^b g(x) dx} \int_a^b f(x) g(x) dx$. Твердження доведене.

2.6.1. Розв'язання. Внаслідок нерівності Гельдера,

$$\left| \int_a^b f(x)g(x)\varphi(x)dx \right| \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)\varphi(x)|^{p/(p-1)} dx \right)^{(p-1)/p}.$$

Покладемо $\tilde{p} = \frac{q(p-1)}{p}$, $\tilde{q} = \frac{r(p-1)}{p}$. Як легко перевірити, $\frac{1}{\tilde{p}} + \frac{1}{\tilde{q}} = 1$.

Для $\int_a^b |g(x)|^{p/(p-1)} |\varphi(x)|^{p/(p-1)} dx$ знову застосуємо нерівність Гельдера:

$$\int_a^b |g(x)|^{p/(p-1)} |\varphi(x)|^{p/(p-1)} dx \leq \left(\int_a^b |g(x)|^{\tilde{p}p/(p-1)} dx \right)^{1/\tilde{p}} \left(\int_a^b |\varphi(x)|^{\tilde{q}p/(p-1)} dx \right)^{1/\tilde{q}}.$$

Із цих двох нерівностей випливає нерівність, яку й потрібно було довести.

2.6.2. Вказівка. Застосуйте метод математичної індукції.

2.7.1. Вказівка. Нехай $\varphi \in C(J)$, J – проміжок, $x_0 \in J$ – фіксована точка. Тоді

функція $F(x) = \int_{x_0}^x \varphi(t)dt$, $x \in J$ – первісна функції φ на J .

2.7.2. Розв'язання. Покладемо $F(x) = \int_x^b \varphi(t)dt$, $x \in [a, b]$. Тоді

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\varphi(x)dx &= -\int_a^b f(x)\Phi'(x)dx = -\int_a^b f(x)d\Phi(x) = \\ &= f(a)\Phi(a) + \int_a^b f'(x)\Phi(x)dx. \end{aligned}$$

Внаслідок твердження вправи 2.5.5,

$$\exists \xi \in [a, b]: \int_a^b \Phi(x)f'(x)dx = \Phi(\xi) \int_a^b f'(x)dx = \Phi(\xi)(f(b) - f(a)).$$

Отже,

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = f(a)\Phi(a) + (f(b) - f(a))\Phi(\xi) -$$

лінійна комбінація значень $\Phi(a)$, $\Phi(\xi)$ з одночасно додатними або одночасно від'ємними коефіцієнтами $f(a)$, $f(b) - f(a)$, сума яких дорівнює $f(b)$. Тому на відрізьку з кінцями $\Phi(a)$, $\Phi(\xi)$ існує число μ , таке, що

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = \mu f(b).$$

Внаслідок неперервності функції Φ на $[a, \xi]$ та теореми Коші про проміжні значення неперервної функції, $\exists \eta \in [a, \xi]: \mu = \Phi(\eta)$. Отже,

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = f(b) \int_{\eta}^b \varphi(t)dt.$$

Твердження 2) доведено.

2.8.1. Відповідь: $\frac{n(n-1)(4n+1)}{6}$.

2.8.2. Вказівка. Застосуйте правило Лопіталя. Для обчислення похідних чисельника та знаменника застосуйте формулу Лейбніца.

Відповідь: 2.

Розділ 3

3.1.1. Відповідь: $\frac{1}{2}(\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})).$

3.2.1. Розв'язання. Маємо:

$$\begin{aligned} \int_a^b xf''(x)dx &= \int_a^b xdf'(x) = xf'(x) \Big|_a^b - \int_a^b f'(x)dx = (xf'(x) - f(x)) \Big|_a^b = \\ &= (bf'(b) - f(b)) - (af'(a) - f(a)). \end{aligned}$$

3.2.2. Вказівка. Застосуйте теорему Штольца для розкриття невизначеності нуль на нуль.

Відповідь: 1.

3.3.1. Розв'язання. Оскільки $f \in R([a, b])$, то функція f обмежена на відрізку $[a, b]$. Тому, не втрачаючи загальності, можна вважати, що $\forall x \in [a, b]: |f(x)| \leq M$.

Далі, $\forall \varepsilon > 0 \exists \gamma \in (0, b-a): 2M\gamma < \frac{\varepsilon}{2}$. Тоді

$$\Delta_n = \left| \int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|dx =$$

$$= \int_a^{a+\gamma} |f_n(x) - f(x)| dx + \int_{a+\gamma}^b |f_n(x) - f(x)| dx \leq 2M\gamma + \int_{a+\gamma}^b |f_n(x) - f(x)| dx.$$

Внаслідок теореми 3.3.2,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{a+\gamma}^b |f_n(x) - f(x)| dx = 0.$$

Отже, $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \Delta_n \leq 2M\gamma < \frac{\varepsilon}{2}$. Оскільки $\varepsilon > 0$ довільне і $\Delta_n \geq 0$, $n \geq 1$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta_n = 0$.

3.3.2. Вказівка. Застосуйте теорему 3.3.3.

3.4.1. Відповідь: $2\sqrt{2}$.

3.4.2. Відповідь: $6\pi a^2$.

3.5.1. Вказівка. При піднесенні до квадрата обох частин нерівності з невід'ємними частинами отримуємо рівносильну нерівність. Застосуйте цю властивість нерівності.

3.5.2. Відповідь: $2\sqrt{a}$.

3.5.3. Відповідь: $\frac{1}{2}(\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2}))$.

3.5.4. Відповідь: $8a$.

3.5.5. Вказівка. Один виток гвинтової лінії відповідає зміні t на проміжку довжини 2π . Можна вважати $t \in [0, 2\pi]$.

Відповідь: $2\pi\sqrt{a^2 + b^2}$.

3.6.1. Відповідь: $\frac{\pi h^2}{3}(3R - h)$.

3.7.1. Розв'язання. За формулою (3.7.6), площа поверхні цього сферичного шару

$$S = 2\pi \int_{h_1}^{h_2} \sqrt{R^2 - x^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}} dx = 2\pi R(h_2 - h_1).$$

Література

1. *Давидов М.О.* Курс математичного аналізу: Підручник: У трьох частинах. Частина 1. Функції однієї змінної. / М.О.Давидов. – К.: Вища школа, 1987. – 359 с.
2. *Денисьєвський М.О.* Збірник задач з математичного аналізу: функції однієї змінної. / М.О.Денисьєвський, О.О.Курченко, В.Н.Нагорний, О.Н.Нестеренко, Т.О. Петрова, А.В.Чайковський. – ВПЦ “Київський університет”, 2005. – 240 с.
3. *Дзядик В.К.* Математичний аналіз. Том 1. /В.К. Дзядик. – К.: Вища школа, 1995. – 495 с.
4. *Дороговцев А.Я.* Математический анализ: Сборник задач. / А.Я.Дороговцев. – К.: Вища школа, 1987. – 408 с.
5. *Дороговцев А.Я.* Математичний аналіз: Підручник. У двох частинах. Частина 1 / А.Я. Дороговцев. – К.:Либідь, 1993. – 320 с.
6. *Заболоцький М.В.* Математичний аналіз. / М.В. Заболоцький, О.Г.Сторож, С.І.Тарасюк. – К.: Знання, 2008. – 421 с.
7. *Зорич В.А.* Математический анализ. Часть 1 / В.А.Зорич. – М.: ФАЗИС, 1997. – 554 с.
8. *Ильин В.А.* Математический анализ. /В.А.Ильин, В.А.Садовничий, Бл.Х.Сендов. – М: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1979. – 720 с.
9. *Курченко О.О.* Диференціальне числення функції однієї змінної: підручник. / О.О. Курченко. – К., 2014. Сайт механіко-математичного ф-ту КНУ. – 239 с.
9. *Підкуйко С.І.* Математичний аналіз, т.1. / С.І. Підкуйко. – Львів: Галицька видавнича спілка, 2004. – 544 с.
10. *Рудин У.* Основы математического анализа / У. Рудин. – М.: Мир, 1976. – 319

11. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления, том 2. /Г.М.Фихтенгольц. – М.: Наука, 1969. – 608 с.

Предметний покажчик

- А**
- Адитивність інтеграла Рімана 58
- Б**
- Біном диференціальний 33
- В**
- Властивості інтеграла невизначеного 11
- - Рімана 57
 - сум Дарбу 45
- Г**
- Границя інтегральних сум 40
- Д**
- Діаметр розбиття 39
- Дрібність розбиття 39
- Довжина кривої 100
- Дріб елементарний 18
- правильний 18
- З**
- Задача про обчислення площі криволінійної трапеції 36
- Заміна змінної у невизначеному інтегралі 14
- - в інтегралі Рімана 75
- Збіжність поточкова 83
- рівномірна 84
- Змінна інтегрування 41
- І**
- Інтеграл верхній 44
- визначений 41
 - невизначений 10
 - нижній 44
 - Рімана 41
- Інтегрування диференціального бінома 33
- елементарних дробів 19, 20
 - почленне нерівності 59
 - частинами у визначеному інтегралі 77
 - - у невизначеному інтегралі 16
- К**
- Кардіоида 99
- Коливання функції 51
- Критерій Коші рівномірної збіжності
- послідовності функцій 87
- інтегровності 50
 - - в термінах коливань 51
- Крива неперервна 99
- проста 99
 - - замкнена 99
 - спрямлювана 100
- Л**
- Лінійність інтеграла Рімана 57
- Лінія гвинтова 104
- ланцюгова 102
- М**
- Межа інтегрування верхня 41
- - нижня 41
- Метод невизначених коефіцієнтів 26
- підстановки у невизначеному інтегралі 14
 - - у визначеному інтегралі 75
- Многочлен двох змінних 28
- Н**
- Набір проміжних точок 40
- Нерівність Гельдера 63
- Коші-Буняковського 64
 - Мінковського 64
- П**
- Подрібнення розбиття 45
- Площа криволінійної трапеції 93
- Первісна 7
- в широкому сенсі 10
- Перехід граничний під знаком інтеграла 89
- Підстановка в інтегралі Рімана 75
- у невизначеному інтегралі 14
- Підстановки Ойлера 31
- Чебишова 31
- Проміжок 7
- Р**
- Рівняння функціональне Коші 76
- Роза трипелюсткова 98
- Розбиття відрізка 39
- Розклад правильного дробу 20

С

Сектор криволінійний 96

Сума Дарбу верхня 43

- - нижня 43

- інтегральна 40

Т

Таблиця інтегралів 13

Теорема Вейерштрасса про рівномірне
наближення 117

- Гульдін перша 113

- - друга 115

- Дарбу 49

- про граничний перехід під знаком
інтеграла Рімана 89

Тор 115

Трапеція криволінійна 92

- - квадровна 93

Ф

Формула Валліса 79

- Лейбніца 73

- заміни змінної у визначеному
інтегралі 75

- - у невизначеному інтегралі 14

- інтегрування частинами у
визначеному інтегралі 77

- - у невизначеному інтегралі 16

Функція Діріхле 42

- підінтегральна 41

- раціональна 18

- - двох змінних 28

Ц

Циклоїда 102

Ч

Член залишковий формули Тейлора у
інтегральній формі 80