

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА
ШЕВЧЕНКА

ПРИКЛАДНИЙ ВЕКТОРНИЙ АНАЛІЗ

Навчальний посібник

Г.М. Зражевський, В.Ф. Зражевська

Київ 2023

УДК 514.742.2+514.742/531+514.742/532+514.742/533

ББК 22.151.51+22.2я73

Рецензенти

Академік НАНУ, доктор фіз-мат. наук, професор, В.Т. Грінченко

Доктор фіз-мат наук, професор, М.Є. Дудкін

Рекомендовано до друку вченою радою механіко-математичного факультету

(протокол № 6 від 15 грудня 2022 року)

Подано теоретичний курс щодо застосування векторного та тензорного аналізу в проблемах та задачах класичної механіки, механіки суцільного середовища, механіки деформівного твердого тіла та механіки рідини. Посібник містить значну кількість прикладів та вправ для самостійного опрацювання. Основна мета посібника - спростити оволодіння основними математичними підходами та формалізмами при використанні векторів та тензорів на яких побудована механіка, як складова частина прикладної математики.

Посібник розрахований на студентів, аспірантів та викладачів спеціальностей споріднених з прикладною математикою.

Передмова

Навчальний посібник підготовлено на основі обов'язкового курсу "Прикладний векторний аналіз у задачах механіки"(NND10), що викладається на механіко-математичному факультеті для спеціальності 111 "Математика" в межах другого освітнього рівня (магістр) та є складовою освітньої програми "Комп'ютерна механіка".

Посібник має на меті підсумувати та розвинути знання та навички, отримані здобувачами освіти за механічними спеціальностями та спорідненими з ними, при вивченні базових та спеціалізованих математичних та механічних предметів таких, як "Диференціальна геометрія", "Лінійна алгебра", "Математичний аналіз", "Теоретична механіка", "Механіка суцільного середовища", "Механіка деформівного твердого тіла", "Механіка рідини та газу" та інших на основі застосування векторного та тензорного формалізму. Таким чином, слухач курсу може універсалізувати вже отримані дещо розрізнені (через традиційність методологій різних дисциплін) знання та підходи до розв'язання багатопланових задач та проблем, що ставляться в прикладній математиці. Адже вектори та тензори є основними описовими об'єктами в усіх розділах механіки та переважної більшості розділів прикладної математики.

Посібник не містить елементарних математичних відомостей, які, як вважається, вже знайомі читачу з попереднього досвіду навчання на першому освітньому рівні. Так, наприклад, в Посібник не входять розділи, що стосуються основ векторної алгебри, теорії лінійних просторів, класичних розділів механіки, хоча ці знання використовуються при формулюванні та розв'язанні прикладів. Головною метою Посібника є не викладання нового формального знання, а скоріше систематизація отриманих раніше знань та підходів для формування цілісної математичної культури з єдиним підходом до формалізації та розв'язання прикладних задач. Для цього, зокрема, в Посібнику дається кілька еквівалентних означень основних математичних понять, що дозволяє його використання читачами з різною базовою освітою.

В Посібник не включені розрахункові задачі. Вся увага приділена теоретичному аналізу та розв'язанню проблем та задач в максимально загальній постановці. Хоча кожний розділ Посібника починається з викладення теоретичного матеріалу, головна увага зосереджена на прикладах в яких демонструється застосування математичних методів при розв'язанні теоретичних прикладних задач. Серед розглянутих задач є як прості, класичні задачі, так і достатньо комплексні, що можуть покласти початок нових наукових досліджень.

Всі задачі, розглянуті в Посібнику мають строге математичне доведення чи обґрунтування. Водночас, автори намагались уникнути через мірної формалізації, узагальнення та використання математичних понять, які хоча і корисні для дослідників механіків, але виходять за мінімально достатні межі теорії, необхідної для постановки та розв'язання більшості прикладних задач та не включені до освітньої програми "Комп'ютерна механіка". Так, наприклад, вважається, що базовими просторами є тривимірний евклідов точковий простір E , елементами якого є точки та асоційований з ним векторний простір V з векторами як елементами. Тензор розглядається як лінійне перетворення з V в V , тобто Посібник обмежується афінними тензорами та векторами. Головна увага приділяється не координатному, а інваріантному опису та оперуванню векторами та тензорами. Розрахунок полягає в тому, що строге систематичне викладення обмеженого матеріалу, а також, демонстрація його використання на значній кількості задач спростить читачу перехід до формалізму наступного рівня.

Вправи, що включені до Посібника мають на меті не лише закріплення знань та методології, а також розвинення творчого математичного мислення, оскільки не всі вони можуть бути виконані по аналогії з Прикладами.

Посібник призначений для студентів другого ступеня освіти (магістрів), аспірантів та викладачів спеціальностей споріднених з прикладною математикою. Його частини можуть бути використані при розробці нових

теоретичних курсів, формулюванні завдань для кваліфікаційних робіт здобувачів освіти.

1. Скаляри, вектори, тензори

1.1. Основні означення

Скаляри та вектори

Означення скалярної величини. Скаляром називається величина, що визначається одним числом при обраній одиниці вимірювання (в тому числі і безрозмірна величина), що є інваріантною при довільному афінному перетворенні..

Порівняння скалярів допускається лише при заданні їхніх значень в одних одиницях вимірювань. Два скаляри вважаються рівними, якщо їхні чисельні значення в одних одиницях вимірювань рівні за величиною.

Приклади скалярних величин: маса матеріальної точки, довжина не деформівного стрижня, проміжок часу, кінетична енергія матеріальної точки,

В залежності від задач та способу оперування існує кілька означень вектора.

Геометричне означення вектора вводить поняття напрямленого відрізка, що будується на двох геометричних точках. При цьому, модулем вектора називають відстань між точками, а напрямок вектора визначається порядком слідування точок в описі. Таким чином, дві довільні точки (що не збігаються) дають змогу побудувати два (взаємно протилежні) вектори.

Аналітичне означення вектора передбачає введення впорядкованої трійки чисел (однакової розмірності) співвідносно до деякої координатної системи, що називаються компонентами вектора. При цьому, зміна компонентів вектора при зміні координатної системи повинна забезпечувати незмінність напрямленого відрізка, що асоціюється з вектором.

Аксиоматичне означення вектора задає вектор як елемент алгебраїчної множини, що називається лінійним векторним простором та визначається

сукупністю аксіом накладених на дві операції: множення на скаляр та додавання.

В класичній механіці з огляду на її методологію та історію розвитку ми будемо дотримуватись наступного означення.

Означення векторної величини. Вектором називається величина (фізична чи математична) яка для повного опису окрім одного невід'ємного числа (довжини чи модуля) потребує також вказування деякого напрямку в просторі та для якої введено правило множення на скаляр, що зводиться до масштабування (зміни напрямку на протилежний при множенні на від'ємне число) і правило додавання (правило паралелограма).

Зауваження. У фізиці прийнято вводити в розгляд геометричне поняття вектора та поняття фізичної векторної величини. В механіці такий поділ не є широкоживаний незважаючи на те, що об'єктами опису в механіці є як суто геометричні, так і фізичні властивості.

При аксіоматичному означенні під вектором розуміють множину напрямлених відрізків, що збігаються (в розумінні збігання початкової та кінцевої точок задання) з точністю до паралельного перенесення (**вільний вектор**). Проте, опис механічних об'єктів потребує введення підкласів векторів з накладеними обмеженнями. Так **ковзний вектор** - множина векторів, що мають спільний носій, тобто початкова та кінцева точки напрямленого відрізка лежать на одній прямій. **Приєднаний вектор** - єдиний напрямлений відрізок початкова точка якого фіксується в просторі.

Декартові системи координат. Ортогональні афінні перетворення

Означення прямокутної декартової системи координат. Під прямокутною декартовою системою координат розуміють ортонормальний базис $\{\mathbf{i}_i\} = (\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$ разом з точкою $O \in E$, що називається початком системи координат.

При цьому для кожного вектора $\mathbf{a} \in V$ можливий розклад: $\mathbf{a} = a_i \mathbf{i}_i$ де $a_i = \mathbf{a} \cdot \mathbf{i}_i, i = \overline{1,3}$ - декартові компоненти вектора.

Відповідно, кожній точці $x \in E$ ставиться у взаємно однозначну відповідність вектор (радіус-вектор) $\mathbf{r} \in V$, що відраховується від початку координат з координатами $x_i = (\mathbf{r} - \mathbf{0}) \cdot \mathbf{i}_i, i = \overline{1,3}$.

Геометричне означення афінного перетворення простору. Під афінним перетворенням простору розуміють бієктивне відображення евклідового простору в себе при якому паралельні прямі відображаються в паралельні прямі.

Алгебраїчне означення афінного перетворення простору. Афінним перетворенням евклідового простору називається невідроджене лінійне перетворення між $x \in \mathbb{R}^3$ та $x' \in \mathbb{R}^3$ виду $x' = Mx + v, v \in \mathbb{R}^3$ де M - невідроджена матриця.

В термінах асоційованого векторного простору V це означення можна переписати у вигляді перетворень не компланарних (базисних) векторів. Якщо $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ - не компланарні, то перетворення $\mathbf{e}_i \mapsto \mathbf{e}'_i, i = \overline{1,3}$ за означенням буде афінним, якщо

$$\mathbf{e}'_i = \alpha_{ij} \mathbf{e}_j, i = \overline{1,3} \quad A = \{\alpha_{ij}\}_{i,j=1}^3 : \det A \neq 0. \quad (1.1)$$

При цьому A називається матрицею афінного перетворення (матрицею повороту).

В тому випадку, коли афінне перетворення ставить у відповідність декартовому ортонормальному базису $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$ декартовий ортонормальний базис $(\mathbf{i}'_1, \mathbf{i}'_2, \mathbf{i}'_3)$ за правилом

$$\mathbf{i}'_i = \alpha_{ij} \mathbf{i}_j, i = \overline{1,3}, \quad (1.2)$$

афінне перетворення називається ортогональним (точніше - ортонормальним) афінним перетворенням. Афінне перетворення передбачає також зміну початку

координат (трансляцію): $\mathbf{0}' = \mathbf{0} + \mathbf{v}, \mathbf{v} \in V$ так, що для фіксованої точки $x \in E$, асоційований радіус-вектор $\mathbf{r} \in V$ відображається в $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{v} \in V$ з декартовими компонентами $x'_i = (\mathbf{r} - \mathbf{0}') \cdot \mathbf{i}'_i = \alpha_{ij} x_j - v_i, v_i = \mathbf{v} \cdot \mathbf{i}_i, i = \overline{1,3}$.

В подальшому розглядаються лише ортогональні афінні перетворення.

Відповідно, перетворення декартових компонентів вектора $\mathbf{a}$ має вигляд:

$$\mathbf{a} = a_i \mathbf{i}_i = a'_i \mathbf{i}'_i \Rightarrow a'_i = \alpha_{ij} a_j, i = \overline{1,3}, A = \{\alpha_{ij}\}_{i,j=1}^3 : \det A \neq 0. \quad (1.3)$$

З огляду на означення ортогонального афінного перетворення, аналітичне означення вектора можна сформулювати наступним чином. Якщо для кожної прямокутної декартової системи координат з ортами $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$ визначено сукупність трьох скалярів $a_i, i = \overline{1,3}$, які перетворюються до скалярів $a'_i, i = \overline{1,3}$ відносно іншої системи координат $(\mathbf{i}'_1, \mathbf{i}'_2, \mathbf{i}'_3)$, зв'язок якої з вихідною системою є афінним $(\mathbf{i}'_i = \alpha_{ij} \mathbf{i}_j, i = \overline{1,3})$, так, що має місце $a'_i = \alpha_{ij} a_j, i = \overline{1,3}$, то сукупність таких трьох величин називається афінним ортогональним вектором $\mathbf{a}$. При цьому, $a_i, i = \overline{1,3}$ є компонентами вектора в системі координат $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$, а $a'_i, i = \overline{1,3}$ є компонентами вектора по в системі координат $(\mathbf{i}'_1, \mathbf{i}'_2, \mathbf{i}'_3)$. Тобто

$$\mathbf{a} = a_i \mathbf{i}_i = a'_i \mathbf{i}'_i \quad (1.4)$$

По аналогії з означенням вектора можна дати означення афінного ортогонального тензора.

Афінні ортогональні тензори

Означення афінного ортогонального тензора другого рангу (cartesian tensor). Якщо для кожної прямокутної декартової системи координат з ортами $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$ визначено сукупність трьох векторів $\mathbf{p}_i \in V, i = \overline{1,3}$, які перетворюються на вектори $\mathbf{p}'_i \in V, i = \overline{1,3}$ відносно іншої системи координат $(\mathbf{i}'_1, \mathbf{i}'_2, \mathbf{i}'_3)$, зв'язок якої з вихідною системою є афінним $(\mathbf{i}'_i = \alpha_{ij} \mathbf{i}_j, i = \overline{1,3})$, так, що має місце $\mathbf{p}'_i = \alpha_{ij} \mathbf{p}_j, i = \overline{1,3}$, то сукупність таких трьох величин називається афінним ортогональним тензором другого рангу $\mathbf{P} = \{\mathbf{p}_i\}_{i=1}^3$. При цьому,

$p_i, i = \overline{1,3}$ називаються складовими тензора в системі координат (i_1, i_2, i_3) , а $p'_i, i = \overline{1,3}$ є складовими тензора в системі координат (i'_1, i'_2, i'_3) .

Надалі розглядаються лише ортогональні афінні тензори.

Якщо $p_i, i = \overline{1,3}$ мають представлення $p_i = p_{ij} i_j, i = \overline{1,3}$, то тензор $\mathbf{P}$ представляється матрицею $\{\mathbf{P}\} = \{p_{ij}\}_{i,j=1}^3$. При цьому, $p_{ij}, i, j = \overline{1,3}$ називаються компонентами тензора.

При афінному перетворенні з матрицею $A = \{\alpha_{ij}\}_{i,j=1}^3$ компоненти тензора перетворюються за правилом $p'_{ij} = \alpha_{ik} \alpha_{js} p_{ks}, i, j = \overline{1,3}$, де p_{ij} є компонентами $\mathbf{P}$ в (i_1, i_2, i_3) та p'_{ij} - компоненти $\mathbf{P}$ в (i'_1, i'_2, i'_3) .

Дійсно, $p'_i = (p'_i \cdot i'_j) i'_j = \alpha_{ij} p_j = \alpha_{ij} ((p_j \cdot i_k) i_k), i = \overline{1,3}$ де $p'_i \cdot i'_j = p'_{ij}$, $p_j \cdot i_k = p_{jk}$. Водночас, $i_i = \alpha_{ji} i'_j, i = \overline{1,3}$. Виконавши підстановки та проектування на (i'_1, i'_2, i'_3) , отримаємо формулу перетворення.

Формули перетворення дозволяють сформулювати еквівалентне означення афінного ортогонального тензора другого рангу.

Означення афінного ортогонального тензора другого рангу (через дев'яти компонентне представлення). Якщо для кожної прямокутної декартової системи координат з ортами (i_1, i_2, i_3) визначено сукупність дев'яти величин, які можна подати у вигляді матриці $\{p_{ij}\}_{i,j=1}^3$, що відповідають іншим дев'яти величинам $\{p'_{ij}\}_{i,j=1}^3$ при афінному ортогональному перетворенні до системи координат (i'_1, i'_2, i'_3) з матрицею перетворення $A = \{\alpha_{ij}\}_{i,j=1}^3$ так, що

$$p'_{ij} = \alpha_{ik} \alpha_{js} p_{ks}, i, j = \overline{1,3}, \quad (1.5)$$

то сукупність таких дев'яти величин визначає афінний ортогональний тензор другого рангу $\mathbf{P}$. При цьому, $\{\mathbf{P}\} = \{p_{ij}\}_{i,j=1}^3$ є матричним представленням тензора в $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$ та $\{\mathbf{P}\} = \{p'_{ij}\}_{i,j=1}^3$ є матричним представленням тензора в $(\mathbf{i}'_1, \mathbf{i}'_2, \mathbf{i}'_3)$, а $p_{ij}, p'_{ij}, i, j = \overline{1,3}$ є компонентами тензора $\mathbf{P}$ у відповідних системах координат.

Це означення можна узагальнити, визначивши тензор n -го рангу.

Означення тензора n -го рангу в m -вимірному евклідовому просторі E^m .

Якщо для кожної прямокутної декартової системи координат з ортами $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3, \dots, \mathbf{i}_m)$, що визначені в V^m -векторному просторі, асоційованому з E^m визначено сукупність nm величин, які можна подати у вигляді n -вимірного масиву $\{p_{i_1 i_2 \dots i_n}\}_{i_1, i_2, \dots, i_n=1}^m$, що відповідають іншим nm величинам $\{p'_{i_1 i_2 \dots i_n}\}_{i_1, i_2, \dots, i_n=1}^m$ при афінному ортогональному перетворенні до системи координат $(\mathbf{i}'_1, \mathbf{i}'_2, \mathbf{i}'_3, \dots, \mathbf{i}'_m)$ з матрицею перетворення $A = \{\alpha_{ij}\}_{i,j=1}^m$ так, що

$$p'_{i_1 i_2 \dots i_n} = \alpha_{i_1 j_1} \alpha_{i_2 j_2} \dots \alpha_{i_n j_n} p_{j_1 j_2 \dots j_n}, \quad i_1, i_2, \dots, i_n = \overline{1, m}, \quad (1.6)$$

то сукупність таких nm величин визначає афінний тензор n -го рангу $\mathbf{P}$. При цьому, $\{\mathbf{P}\} = \{p_{i_1 i_2 \dots i_n}\}_{i_1, i_2, \dots, i_n=1}^m$ є матричним представленням тензора в $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3, \dots, \mathbf{i}_m)$ та $\{\mathbf{P}\} = \{p'_{i_1 i_2 \dots i_n}\}_{i_1, i_2, \dots, i_n=1}^m$ є матричним представленням тензора в $(\mathbf{i}'_1, \mathbf{i}'_2, \mathbf{i}'_3, \dots, \mathbf{i}'_m)$, а $p_{i_1 i_2 \dots i_n}, p'_{i_1 i_2 \dots i_n}, i_1, i_2, \dots, i_n = \overline{1, m}$ називають компонентами тензора $\mathbf{P}$ у відповідних системах координат.

Надалі (якщо це не оговорюється) розглядаються афінні тензори другого рангу в $E \stackrel{def}{=} E^3$.

Властивості ортогональних афінних перетворень

1. Коефіцієнти матриці ортогонального афінного перетворення визначаються як напрямні косинуси ортів.

Дійсно, згідно з (1.2):

$$\cos(\mathbf{i}'_i, \mathbf{i}_j) = \mathbf{i}'_i \cdot \mathbf{i}_j = \alpha_{ik} \mathbf{i}_k \cdot \mathbf{i}_j = \alpha_{ik} \delta_{kj} = \alpha_{ij}, i, j = \overline{1,3}. \quad (1.7)$$

Окрім того, справедливі формули:

$$\alpha_{ik} \alpha_{jk} = \delta_{ij}, i, j = \overline{1,3} \quad (1.8)$$

$$\text{Дійсно, } \delta_{ij} = \mathbf{i}'_i \cdot \mathbf{i}'_j = (\alpha_{ik} \mathbf{i}_k) \cdot (\alpha_{js} \mathbf{i}_s) = \alpha_{ik} \alpha_{js} (\mathbf{i}_k \cdot \mathbf{i}_s) = \alpha_{ik} \alpha_{js} \delta_{ks} = \alpha_{ik} \alpha_{jk}.$$

2. Матриця ортогонального афінного перетворення є ортогональною.

Дійсно, згідно з (1.3) для довільного вектора $\mathbf{a}$: $\mathbf{a} = a_i \mathbf{i}_i = a'_i \mathbf{i}'_i$, $a'_i = \alpha_{ij} a_j, i = \overline{1,3}$

де $A = \{\alpha_{ij}\}_{i,j=1}^3 : \det A \neq 0$, тобто $\mathbf{a}' = A \mathbf{a}$ де $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)^T$, $\mathbf{a}' = (a'_1, a'_2, a'_3)^T$,

$\mathbf{a}, \mathbf{a}' \in \mathbb{R}^3$. Тоді, оскільки $\det A \neq 0$, $\exists B = \{\beta_{ij}\}_{i,j=1}^3$, $B = A^{-1} : \mathbf{a} = B \mathbf{a}'$,

$a_i = \beta_{ij} a'_j, i = \overline{1,3}$, та $\mathbf{i}_i = \beta_{ij} \mathbf{i}'_j, i = \overline{1,3}$. Згідно з (1.5):

$$\cos(\mathbf{i}_i, \mathbf{i}'_j) = \mathbf{i}_i \cdot \mathbf{i}'_j = \beta_{ik} \mathbf{i}'_k \cdot \mathbf{i}'_j = \beta_{ik} \delta_{jk} = \beta_{ij} = \cos(\mathbf{i}'_j, \mathbf{i}_i) = \alpha_{ji}, i, j = \overline{1,3} \Rightarrow B = A^{-1} = A^T.$$

Також, оскільки матриця ортогонального афінного перетворення є ортогональною, її визначник дорівнює одиниці. Дійсно,

$$\det(AA^T) = \det(A) \det(A^T) = (\det(A))^2 = \det(I) = 1.$$

3. Будь яке лінійне перетворення визначає тензор. При цьому, матриця лінійного перетворення в системі декартових координат є матричним (дев'ятикомпонентним) представленням тензора. Кожен тензор асоціюється з деяким лінійним перетворенням.

Доведення. Нехай оператор $\hat{\mathbf{P}}$ задає лінійне перетворення $\mathbf{b} = \hat{\mathbf{P}} \mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$. В силу лінійності $\hat{\mathbf{P}}$ координатне представлення перетворення в $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$ має вигляд $b_i \mathbf{i}_i = \mathbf{b} = \hat{\mathbf{P}} \mathbf{a} = \hat{\mathbf{P}}(a_j \mathbf{i}_j) = a_j \hat{\mathbf{P}} \mathbf{i}_j \Rightarrow b_i = (\mathbf{i}_i \cdot \hat{\mathbf{P}} \mathbf{i}_j) a_j, i = \overline{1,3} \Rightarrow b_i = p_{ij} a_j$ де

$p_{ij} = \mathbf{i}_i \cdot \widehat{\mathbf{P}} \mathbf{i}_j, i, j = \overline{1,3}$ - коефіцієнти матриці лінійного перетворення $\mathbf{P} = \{\widehat{\mathbf{P}}\} = \{p_{ij}\}_{i,j=1}^3$ в $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$. Доведемо, що $\mathbf{P} = \{\widehat{\mathbf{P}}\} = \{p_{ij}\}_{i,j=1}^3$ є матричним представленням деякого тензора $\mathbf{P}$. Дійсно, при афінному перетворенні $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3) \mapsto (\mathbf{i}'_1, \mathbf{i}'_2, \mathbf{i}'_3)$ з матрицею $A = \{\alpha_{ij}\}_{i,j=1}^m$: $\mathbf{b} = b_i \mathbf{i}_i = b'_i \mathbf{i}'_i, b'_i = \alpha_{ji} b_j$ $\mathbf{a} = a_j \mathbf{i}_j = a'_j \mathbf{i}'_j, a_j = \alpha_{kj} a'_k \Rightarrow \alpha_{ji} b'_j = p_{ij} \alpha_{kj} a'_k$. Якщо $\mathbf{a}^T = \{a_i\}_{i=1}^3, \mathbf{b}^T = \{b_i\}_{i=1}^3 \in \mathbb{R}^3$, останній вираз можна записати в матричному вигляді: $\mathbf{A}^T \mathbf{b} = \mathbf{P} \mathbf{A}^T \mathbf{a} \Rightarrow \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b} = \mathbf{P} \mathbf{A}^T \mathbf{a} \Rightarrow \mathbf{b} = \mathbf{A} \mathbf{P} \mathbf{A}^T \mathbf{a} \Rightarrow b'_i = \alpha_{is} \alpha_{jk} p_{sk} a'_j, i = \overline{1,3} \Rightarrow b'_i = p'_{ij} a'_j, i = \overline{1,3}$ де $p'_{ij} = \alpha_{is} \alpha_{jk} p_{sk}, i, j = \overline{1,3}$ - представлення $\{\widehat{\mathbf{P}}\}$ в системі координат $(\mathbf{i}'_1, \mathbf{i}'_2, \mathbf{i}'_3)$ і за означенням є матричним представленням деякого тензора $\mathbf{P}$.

Розглянемо довільний тензор $\mathbf{P}$ з матричним представленням в $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$: $\mathbf{P} = \{\mathbf{P}\} = \{p_{ij}\}_{i,j=1}^3$. Поставимо у відповідність такому тензору лінійне перетворення з оператором $\widehat{\mathbf{P}}$, матричне представлення якого в $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$ є матрицею $\{\widehat{\mathbf{P}}\} = \mathbf{P}$.

Наслідком доведеного твердження є той факт, що, якщо для деяких $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$ в координатному описі в декартовій системі координат виконується співвідношення $b_i = p_{ij} a_j, i = \overline{1,3}$ де $\mathbf{b} = b_i \mathbf{i}_i, \mathbf{a} = a_i \mathbf{i}_i$ то $\mathbf{P} = \{p_{ij}\}_{i,j=1}^3$ є матричним представленням деякого тензора $\mathbf{P}$: $\{\mathbf{P}\} = \mathbf{P}$. В матричному запису це твердження має вигляд:

$$\exists \mathbf{a}^T = \{a_i\}_{i=1}^3, \mathbf{b}^T = \{b_i\}_{i=1}^3 \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{a} = a_i \mathbf{i}_i, \mathbf{b} = b_i \mathbf{i}_i \in V \wedge \mathbf{b} = \mathbf{P} \mathbf{a} \Rightarrow \mathbf{P} = \{\mathbf{P}\}. \quad (1.9)$$

Іншим важливим наслідком доведеного твердження є те, що у випадку, якщо

$$\forall \mathbf{a}^T = \{a_i\}_{i=1}^3, \mathbf{b}^T = \{b_i\}_{i=1}^3 \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{a} = a_i \mathbf{i}_i, \mathbf{b} = b_i \mathbf{i}_i \in V \wedge \mathbf{b}^T \mathbf{P} \mathbf{a} = \varphi \quad (1.10)$$

та φ - скаляр, то $P = \{\mathbf{P}\}$ тобто є матричним представленням деякого тензора.

1.2 Алгебраїчні тензорні операції

Основні операції над тензорами та їхні властивості

Під тензорною операцією будемо розуміти операцію з будь-якими операндами, якщо результатом операції буде тензор та операції, серед операндів яких є тензори.

1. Нульовий тензор ($\mathbf{0}$) - тензор, лінійне перетворення якого (тобто лінійне перетворення, що асоціюється з тензором) ставить у відповідність довільному вектору нульовий вектор: $\forall \mathbf{a} \in V \Rightarrow \widehat{\mathbf{0}}\mathbf{a} = \mathbf{0}$. $\{\mathbf{0}\} = \{0\}_{i,j=1}^3$

2. Одиничний тензор ($\mathbf{I}$) - тензор, лінійне перетворення якого є тотожнім: $\forall \mathbf{a} \in V \Rightarrow \widehat{\mathbf{I}}\mathbf{a} = \mathbf{a}$. $\{\mathbf{I}\} = \{\delta_{ij}\}_{i,j=1}^3$.

3. Операція порівняння. Тензори $\mathbf{P}$ та $\mathbf{S}$ рівні: $\mathbf{P} = \mathbf{S} \Leftrightarrow \forall \mathbf{a} \in V \Rightarrow \widehat{\mathbf{P}}\mathbf{a} = \widehat{\mathbf{S}}\mathbf{a}$. $\Leftrightarrow \{\mathbf{P}\} = \{\mathbf{S}\}$.

4. Операція множення тензора на скаляр. $\mathbf{S} = \lambda \mathbf{P} \Leftrightarrow \forall \mathbf{a} \in V \Rightarrow \widehat{\mathbf{S}}\mathbf{a} = \lambda(\widehat{\mathbf{P}}\mathbf{a})$. $\{\lambda \mathbf{P}\} = \lambda \{\mathbf{P}\}$.

5. Додавання тензорів: $\mathbf{D} = \mathbf{P} + \mathbf{S} \Leftrightarrow \forall \mathbf{a} \in V \Rightarrow \widehat{\mathbf{D}}\mathbf{a} = \widehat{\mathbf{P}}\mathbf{a} + \widehat{\mathbf{S}}\mathbf{a} \Leftrightarrow \{\mathbf{P} + \mathbf{S}\} = \{\mathbf{P}\} + \{\mathbf{S}\}$. Операція додавання дистрибутивна: $\lambda(\mathbf{P} + \mathbf{S}) = \lambda \mathbf{P} + \lambda \mathbf{S}$.

6. Множення тензора на вектор. $\forall \mathbf{a} \in V: \mathbf{b} = \mathbf{P}\mathbf{a} \Leftrightarrow \mathbf{b} = \widehat{\mathbf{P}}\mathbf{a}$. Операція дистрибутивна: $(\mathbf{P} + \mathbf{S})\mathbf{a} = \mathbf{P}\mathbf{a} + \mathbf{S}\mathbf{a}$, $\mathbf{P}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{P}\mathbf{a} + \mathbf{P}\mathbf{b}$

7. Транспонування тензора. $\mathbf{S} = \mathbf{P}^T: \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in V \Rightarrow \mathbf{P}\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{S}\mathbf{b}$. $\{\mathbf{P}^T\} = \{\mathbf{P}\}^T$.

Тензор $\mathbf{P}$ називається симетричним, якщо $\mathbf{P}^T = \mathbf{P}: \{\mathbf{P}\}_{ij} = \{\mathbf{P}\}_{ji}$ та антисиметричним, якщо $\mathbf{P}^T = (-1)\mathbf{P} = -\mathbf{P}: \{\mathbf{P}\}_{ij} = -\{\mathbf{P}\}_{ji}$. Будь-який тензор $\mathbf{P}$

можна єдиним чином представити у вигляді суми симетричного $\mathbf{P}_s = \frac{1}{2}(\mathbf{P} + \mathbf{P}^T)$

та антисиметричного $\mathbf{P}_a = \frac{1}{2}(\mathbf{P} - \mathbf{P}^T)$ тензорів: $\mathbf{P} = \mathbf{P}_s + \mathbf{P}_a$.

8. Множення тензора на тензор. $\mathbf{S} \circ \mathbf{P} = \mathbf{SP} : \forall \mathbf{a} \in V \Rightarrow (\mathbf{SP})\mathbf{a} = \mathbf{S}(\mathbf{Pa})$.

$\{\mathbf{SP}\} = \{\mathbf{S}\}\{\mathbf{P}\}$. Операція асоціативна:

$$(\mathbf{SP})\mathbf{D} = \mathbf{S}(\mathbf{PD}) \quad (1.11)$$

та не комутативна:

$$\mathbf{SP} = (\mathbf{P}^T \mathbf{S}^T)^T. \quad (1.12)$$

9. Обернений тензор визначається з умови $\mathbf{S} = \mathbf{P}^{-1} \Leftrightarrow \mathbf{SP} = \mathbf{PS} = \mathbf{I}$. $\{\mathbf{P}^{-1}\} = \{\mathbf{P}\}^{-1}$

. $(\mathbf{P}^{-1})^{-1} = \mathbf{P}$ і має наступні властивості:

$$\bullet \quad (\mathbf{PS})^{-1} = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{P}^{-1} \quad (1.13)$$

$$\bullet \quad (\mathbf{P}^{-1})^T = (\mathbf{P}^T)^{-1}.$$

10. Тензорний добуток двох векторів (діада) визначається як:

$$\forall \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in V, \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} : (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})\mathbf{c} = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a} \quad \{\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}\}_{ij} = a_i b_j, i, j = \overline{1, 3}.$$

Властивості тензорного добутку векторів.

$$\begin{aligned} \bullet \quad \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} &= (\mathbf{b} \otimes \mathbf{a})^T \\ \bullet \quad (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})(\mathbf{c} \otimes \mathbf{d}) &= (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a} \otimes \mathbf{d} \\ \bullet \quad (\mathbf{i}_i \otimes \mathbf{i}_i)(\mathbf{i}_j \otimes \mathbf{i}_j) &= \delta_{ij}(\mathbf{i}_i \otimes \mathbf{i}_i), i, j = \overline{1, 3} \end{aligned} \quad (1.14)$$

$$\bullet \quad \mathbf{i}_i \otimes \mathbf{i}_i = \mathbf{I}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad \hat{\mathbf{a}} \otimes \hat{\mathbf{a}} &\text{ є тензором проектування на напрямок } \hat{\mathbf{a}} : \\ \forall \mathbf{b} \in V, \mathbf{b} &= (\hat{\mathbf{a}} \otimes \hat{\mathbf{a}})\mathbf{b} + (\mathbf{I} - (\hat{\mathbf{a}} \otimes \hat{\mathbf{a}}))\mathbf{b} : (\hat{\mathbf{a}} \otimes \hat{\mathbf{a}})\mathbf{b} = (\mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{a}})\hat{\mathbf{a}} + (\mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{a}})\hat{\mathbf{a}}) \\ &(\mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{a}})\hat{\mathbf{a}} \square \hat{\mathbf{a}}, (\mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{a}})\hat{\mathbf{a}}) \perp \hat{\mathbf{a}}. \end{aligned}$$

$$\bullet \quad \forall \mathbf{P} : \{\mathbf{P}\} = \{p_{ij}\}_{i,j=1}^3, \mathbf{P} = p_{ij} \mathbf{i}_i \otimes \mathbf{i}_j.$$

$$\bullet \quad \text{tr}(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \text{ (означення операції trace(tr)).}$$

11. Внутрішній (inner) добуток тензорів. $\mathbf{P} \cdot \mathbf{S} = \text{tr}(\mathbf{P}^T \mathbf{S})$. $\mathbf{P} \cdot \mathbf{S} = \{\mathbf{P}\}_{ij} \{\mathbf{S}\}_{ij}$.

Властивості внутрішнього добутку.

- Якщо $\mathbf{P}$ - симетричний, то $\mathbf{P} \cdot \mathbf{S} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{P}^T = \mathbf{S} \cdot \mathbf{P}_s$.
- Якщо $\mathbf{P}$ - симетричний, то $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in V \Rightarrow \mathbf{Pa} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{Pb}$. (1.15)
- Якщо $\mathbf{P}$ - антисиметричний, то $\mathbf{P} \cdot \mathbf{S} = -\mathbf{S} \cdot \mathbf{P}^T = \mathbf{S} \cdot \mathbf{P}_a$.
- Якщо $\mathbf{P}$ - антисиметричний, то $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in V \Rightarrow \mathbf{Pa} \cdot \mathbf{b} = -\mathbf{a} \cdot \mathbf{Pb}$.

12. Визначником (детермінантом) тензора називається визначник матриці його матричного представлення: $\det \mathbf{P} = \det \{\mathbf{P}\}$.

Властивості визначника тензора.

- $\det(\mathbf{P} \cdot \mathbf{S}) = \det(\mathbf{P}) \det(\mathbf{S})$.
- $\det \mathbf{P}^T = \det \mathbf{P}$. (1.16)
- $\det \mathbf{P}^{-1} = (\det \mathbf{P})^{-1}$.

13. Тензор $\mathbf{P}$ називається ортогональним, якщо $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in V, \mathbf{Pa} \cdot \mathbf{Pb} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$.

Тензор $\mathbf{P}$ є ортогональним тоді та лише тоді, коли $\mathbf{PP}^T = \mathbf{P}^T \mathbf{P} = \mathbf{I}$ (еквівалентна умова $\mathbf{P}^T = \mathbf{P}^{-1}$). Ортогональний тензор з додатним визначником називається тензором обертання.

14. Тензор $\mathbf{P}$ називається додатно визначеним, якщо $\forall \mathbf{a} \neq \mathbf{0} \in V, \mathbf{a} \cdot \mathbf{Pa} > 0$.

15. Кожному антисиметричному тензору $\mathbf{P}$ можна поставити у відповідність вектор (аксіальний) $\mathbf{p}$ такий, що $\forall \mathbf{a} \in V, \mathbf{Pa} = \mathbf{p} \times \mathbf{a}$.

1.3 Спектральні властивості тензорів

Власні значення та власні вектори тензора. Спектральна теорема
Означення власного значення та власного вектора тензора. Власним значенням та власним вектором тензора $\mathbf{P}$ називаються такий скаляр λ та вектор $\mathbf{u} \in V$ (якщо існують), що $\mathbf{Pu} = \lambda \mathbf{u}$

Характеристичним простором для $\mathbf{P}$, що відповідає λ називається підпростір V векторів $\mathbf{v} \in V$ таких, що $\mathbf{Pv} = \lambda \mathbf{v}$. Розмірність такого простору називають кратністю власного числа λ .

Означення спектра тензора. Спектром тензора $\mathbf{P}$ називають впорядкований набір його власних чисел в якому власні числа повторюються відповідно до їх кратності: $(\lambda_1, \lambda_2, \dots): \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$

Справедливі твердження:

- а) Власні значення додатно визначеного тензора - строго додатні.
- б) Характеристичні простори симетричного тензора - взаємно ортогональні.

Спектральна теорема. Якщо тензор $\mathbf{P}$ є симетричним, то існує декартів базис V , що складається виключно з власних векторів $\mathbf{P}$. Окрім того, для кожного такого базису $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$, складеного з власних векторів, що відповідають впорядкованим власним значенням $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ повного спектра $\mathbf{P}$ має місце представлення:

$$\mathbf{P} = \lambda_i \mathbf{i}_i \otimes \mathbf{i}_i. \quad (1.17)$$

Цей вираз називається спектральним розкладом $\mathbf{P}$. В такому базисі матричне представлення $\mathbf{P}$ є одно діагональним: $\{\mathbf{P}\} = \{\lambda_i \delta_{ij}\}_{i,j=1}^3$.

Означення головних напрямів та головних осей тензора. Головними напрямками тензора називають орти власного базису, існування якого доводиться в спектральній теоремі. Вони визначаються напрямками власних векторів тензора. Осі, що мають головні напрямки називають головними осями тензора.

Справедливі твердження.

- а) $\mathbf{P}$ має три різних власних значень тоді і лише тоді, коли характеристичні підпростори $\mathbf{P}$ є взаємно перпендикулярними прямими, що містять нульовий вектор.
- б) $\mathbf{P}$ має рівно два різних власних значення тоді і лише тоді, коли він представляється як $\mathbf{P} = \lambda_1 \mathbf{i} \otimes \mathbf{i} + \lambda_2 (\mathbf{I} - \mathbf{i} \otimes \mathbf{i})$, $|\mathbf{i}|=1$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$. В цьому випадку, λ_1 та λ_2 є власними значеннями $\mathbf{P}$, а характеристичними просторами $\mathbf{P}$ є пряма, колінеарна до $\mathbf{i}$ та площина, перпендикулярна до $\mathbf{i}$.

в) $\mathbf{P}$ має рівно одне (трикратне) власне значення тоді та лише тоді, коли $\mathbf{P} = \lambda \mathbf{I}$. В цьому випадку λ є власним значенням $\mathbf{P}$ та характеристичним простором $\mathbf{P} \in V$.

г) Всі власні значення симетричного дійсного тензора - дійсні.

Характеристичний многочлен тензора. Головні інваріанти тензора. Теорема Гамільтона-Келі

Означення характеристичного многочлена тензора. Характеристичним многочленом тензора називається кубічний многочлен

$$\phi_{\mathbf{P}}(\lambda) = \det(\mathbf{P} - \lambda \mathbf{I}) = -\lambda^3 + I_1(\mathbf{P})\lambda^2 - I_2(\mathbf{P})\lambda + I_3(\mathbf{P}) \quad (1.18)$$

Характеристичне рівняння тензора має вигляд:

$$\phi_{\mathbf{P}}(\lambda) = 0 \quad (1.19)$$

Коефіцієнти характеристичного рівняння $I_1(\mathbf{P}), I_2(\mathbf{P}), I_3(\mathbf{P})$

$$\begin{cases} I_1(\mathbf{P}) = \text{tr } \mathbf{P} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \\ I_2(\mathbf{P}) = \frac{1}{2}((\text{tr } \mathbf{P})^2 - \text{tr } (\mathbf{P}^2)) = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 \\ I_3(\mathbf{P}) = \det \mathbf{P} = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 \end{cases} \quad (1.20)$$

називаються головними інваріантами $\mathbf{P}$. Корені характеристичного рівняння $\lambda_i, i = \overline{1,3}$ є власними числами тензора.

Теорема Гамільтона-Келі. Кожний тензор $\mathbf{P}$ задовольняє власне характеристичне рівняння:

$$\mathbf{P}^3 - I_1(\mathbf{P})\mathbf{P}^2 + I_2(\mathbf{P})\mathbf{P} - I_3(\mathbf{P}) = 0 \quad (1.21)$$

де $I_1(\mathbf{P}), I_2(\mathbf{P}), I_3(\mathbf{P})$ - головні інваріанти $\mathbf{P}$.

1.4. Приклади

Приклад 1.1. Чи є векторна алгебра та векторний аналіз єдиною альтернативою оперування багато вимірними об'єктами?

Розв'язання. Звичайно ні. Достатньо згадати комплексну алгебру (та теорію функцій комплексних чисел) чи теорію кватерніонів Гамільтона.

Приклад 1.2. Довести, що сила, прикладена до матеріальної точки, є приєднаним вектором.

Доведення. Дійсно, згідно з означенням сили, як міри взаємодії матеріальної точки з зовнішніми об'єктами, для її опису необхідно задати як величину, так і напрямок. Дві сили, прикладені до матеріальної точки, аксіоматично зводяться до рівнодійної, яка визначається правилом паралелограма (аксіома Ньютона про паралелограм сил), а множення на скаляр призводить до масштабування сили, що слідує з другого закону Ньютона для випадку прямолінійного рівноприскореного руху. Отже, сила є вектором. Таким чином, поняття сили аксіоматично нерозривно пов'язане з точкою прикладання. Отже, сила, прикладена до матеріальної точки, є приєднаним вектором.

Приклад 1.3. Довести, що сила, прикладена до абсолютно твердого тіла, може бути описана ковзним вектором.

Доведення. Нехай до абсолютно твердого тіла в точці A прикладена сила F : $\{F, A\}$ (Рис.1). Прикладемо в точці B , що лежить на прямій p , лінії дії сили F , систему сил, еквівалентну нулю $\{F, B\} \cup \{-F, B\} \sqsubset 0$. Але за аксіомою $\{F, A\} \cup \{-F, B\} \sqsubset 0$, а отже, $\{F, A\} \cup \{F, B\} \cup \{-F, B\} \sqsubset \{F, B\}$, тобто $\{F, A\} \sqsubset \{F, B\}$. Оскільки точка B обрана довільним чином на p , дія сили,

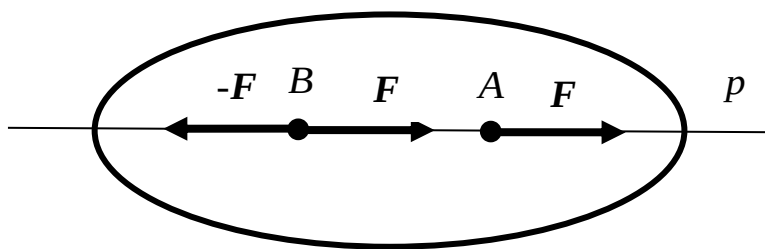


Рис. 1.

прикладеної до абсолютно твердого тіла, не залежить від точки прикладання, що розташована на лінії дії сили. Отже, сила, прикладена до абсолютно твердого тіла може бути описана ковзним вектором.

Приклад 1.4. Довести, що швидкість матеріальної точки може бути описана приєднаним вектором.

Доведення. За аналітичним означенням, швидкість матеріальної точки визначається як $\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$ (якщо така границя існує), де $\Delta \mathbf{r}$ - переміщення матеріальної точки за час Δt . За геометричним означенням вектора, $\Delta \mathbf{r}$ є вектором, множення вектора на $1/\Delta t$ теж є вектором.

Зауваження. Поняття напрямленого відрізка розуміється виключно формально в сенсі геометричного асоціювання вектора з його геометричною інтерпретацією. Скажімо, вихор поля швидкостей суцільного середовища в заданій точці є приєднаним вектором в тому розумінні, що його можна асоціювати з напрямленим відрізком в тривимірному просторі відповідної розмірності.

Приклад 1.5. Система диференціальних рівнянь $\dot{x}_i = F_i(x_i, t)$, $i = \overline{1, n}$ може бути записана у вигляді $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$ де $\mathbf{x}^T = \{x_i\}_{i=1}^n$, $\mathbf{F}^T = \{F_i\}_{i=1}^n$. Чи є розв'язок задачі Коші такої системи вектором?

Розв'язок. Ні, не обов'язково. Це залежить від фізичного змісту задачі. Наприклад, диференціальне рівняння одновимірного руху матеріальної точки (другий закон Ньютона) має вигляд: $\ddot{x} = F(x, t)$ та може бути записане у вигляді $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$ де $\mathbf{x}^T = (x, \dot{x})$, $\mathbf{F}^T = (\dot{x}, F)$. Якщо задача розв'язується в розмірних величинах $[x] = m$, $[\dot{x}] = m/c$, то $(x, \dot{x})$ не є вектором, оскільки його компоненти мають різну розмірність і, скажімо, скалярний добуток двох таких об'єктів не має сенсу, оскільки включає суму величин різної розмірності ($m^2 + (m/c)^2$). Водночас, перейшовши до безрозмірного опису з характерними значеннями $[l] = m$ та $[T] = c$: $\tilde{x} = x/l$, $\tilde{t} = t/T$, отримаємо рівняння в

безрозмірних величинах $\frac{d\tilde{\mathbf{x}}}{d\tilde{t}} = \tilde{\mathbf{F}}(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{t})$ де $\tilde{\mathbf{x}}^T = (\tilde{x}, d\tilde{x}/d\tilde{t})$,

$\tilde{\mathbf{F}}^T = (d\tilde{x}/d\tilde{t}, T^2/l F(\tilde{x}l, \tilde{t}T))$. В цьому випадку $\tilde{\mathbf{x}}^T$ має безрозмірні компоненти та є вектором (асоційованим з точкою фазового простору).

Але, наприклад, система диференціальних рівнянь динамічної рівноваги системи матеріальних точок $\ddot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{F}(\mathbf{x}_i, \dot{\mathbf{x}}_i, t)$, $i = \overline{1, n}$ має розв'язком точку $3n$ вимірному координатного простору, а отже, елемента асоційованого векторного простору, хоча, рівняння записане в розмірних величинах.

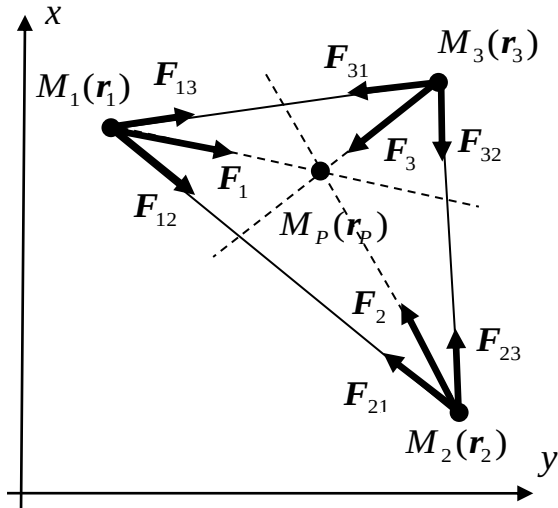


Рис.2

Приклад 1.6. Три матеріальні точки $M_i(\mathbf{r}_i)$ з масами m_i , $i = \overline{1, 3}$ утворюють замкнену систему та взаємодіють попарно згідно з законом всесвітнього тяжіння. Довести, що носії сил, прикладених до точок, перетинаються в одній точці $M_p(\mathbf{r}_p)$ (полюсі притягання). Знайти розташування полюса.

Доведення. Введемо позначення:

$$\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j, \quad i, j = \overline{1, 3}, i \neq j. \quad \text{Згідно з}$$

законом всесвітнього тяжіння $\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_{ij} + \mathbf{F}_{ik}$, $i, j, k \in \{(1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2)\}$,

$$\mathbf{F}_{ij} = \frac{\mathbf{r}_{ij}}{r_{ij}} F_{ij}, \quad F_{ij} = -f \frac{m_i m_j}{r_{ij}^2}, \quad i, j = \overline{1, 3}, i \neq j. \quad \text{Згідно з третім законом Ньютона,}$$

$$\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}.$$

Нехай точки не лежать на одній прямій $\hat{\mathbf{r}}_{ij} \times \hat{\mathbf{r}}_{jk} \neq 0$, $i, j, k \in \{(1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2)\}$

, ($\hat{\mathbf{r}}_{ij} = \mathbf{r}_{ij} / r_{ij}$), отже, точки та носії сил лежать в одній площині. Доведемо, що

носії сил $\mathbf{F}_i$, $i = \overline{1, 3}$ перетинаються в одній точці. Перш за все, доведемо, що

носії двох сил перетинаються в одній точці. Від супротивного: нехай існують

такі $i \neq j$, що $\mathbf{F}_i \times \mathbf{F}_j = 0$. Тоді

$$(\mathbf{F}_{ij} + \mathbf{F}_{ik}) \times (\mathbf{F}_{ji} + \mathbf{F}_{jk}) = (\hat{\mathbf{r}}_{ij} F_{ij} + \hat{\mathbf{r}}_{ik} F_{ik}) \times (-\hat{\mathbf{r}}_{ij} F_{ij} + \hat{\mathbf{r}}_{jk} F_{jk}) = 0. \quad \text{Приймаючи до уваги,}$$

що $\hat{\mathbf{r}}_{ij} = -\hat{\mathbf{r}}_{ji}$, $\hat{\mathbf{r}}_{ij} \times \hat{\mathbf{r}}_{ij} = 0$ та $\hat{\mathbf{r}}_{ij} + \hat{\mathbf{r}}_{jk} + \hat{\mathbf{r}}_{ki} = 0$, остання рівність має вигляд:

$(\mathbf{r}_{ij} \times \mathbf{r}_{ki}) \times (F_{ij}F_{jk} + F_{ij}F_{ik} + F_{ik}F_{jk}) = 0$. Другий співмножник відмінний від нуля, оскільки, $F_{ij} < 0$, $i, j = \overline{1,3}, i \neq j$. Отже, прийшли до протиріччя, оскільки за умовою: $\hat{\mathbf{r}}_{ij} \times \hat{\mathbf{r}}_{ki} = \hat{\mathbf{r}}_{ji} \times \hat{\mathbf{r}}_{ik} \neq 0$. Нехай $P(\mathbf{r}_p)$ - точка перетину носіїв сил $\mathbf{F}_i$ та $\mathbf{F}_j$, $i \neq j$. Доведемо, що носій сили $\mathbf{F}_k$, $k \neq i \neq j$ проходить через точку $P(\mathbf{r}_p)$. Очевидно, що моменти сил $\mathbf{F}_i$ та $\mathbf{F}_j$ відносно точки $P(\mathbf{r}_p)$ рівні нулю: $M_p(\mathbf{F}_i) = (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_p) \times \mathbf{F}_i = 0$, $M_p(\mathbf{F}_j) = (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_p) \times \mathbf{F}_j = 0$. Оскільки система замкнена, то $M_p(\{\mathbf{F}_i, \mathbf{F}_j, \mathbf{F}_k\}) = M_p(\mathbf{F}_i) + M_p(\mathbf{F}_j) + M_p(\mathbf{F}_k) = 0$, отже, $M_p(\mathbf{F}_k) = (\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_p) \times \mathbf{F}_k = 0$. Таким чином, точка $P(\mathbf{r}_p)$ лежить на носіїві сили $\mathbf{F}_k$.

Знайдемо $\mathbf{r}_p$ з системи рівнянь: $\begin{cases} M_p(\mathbf{F}_i) = 0 \\ M_p(\mathbf{F}_j) = 0 \end{cases}, i \neq j$, що еквівалентна системі

$$\begin{cases} \mathbf{r}_p - \mathbf{r}_i = \alpha_i \mathbf{F}_i \\ \mathbf{r}_p - \mathbf{r}_j = \alpha_j \mathbf{F}_j \end{cases}, i \neq j. \text{ Різниця рівнянь, що складають систему приводить до}$$

рівняння відносно невідомих коефіцієнтів α_i, α_j :

$$-\mathbf{r}_{ij} = (\alpha_i + \alpha_j)F_{ij}\hat{\mathbf{r}}_{ij} + \alpha_i F_{ik}\hat{\mathbf{r}}_{ik} - \alpha_j F_{jk}\hat{\mathbf{r}}_{jk} \text{ яке, з врахуванням } \hat{\mathbf{r}}_{ij} + \hat{\mathbf{r}}_{jk} + \hat{\mathbf{r}}_{ki} = 0 \text{ та } \hat{\mathbf{r}}_{ij} \times \hat{\mathbf{r}}_{ik} = -\hat{\mathbf{r}}_{ji} \times \hat{\mathbf{r}}_{ik} \neq 0, \text{ зводиться до системи рівнянь:}$$

$$\begin{cases} 1 + (\alpha_i + \alpha_j) \frac{F_{ij}}{r_{ij}} + \alpha_j \frac{F_{jk}}{r_{jk}} = 0 \\ \alpha_i \frac{F_{ik}}{r_{ik}} - \alpha_j \frac{F_{jk}}{r_{jk}} = 0 \end{cases}, (i, j, k) \in \{(1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2)\}.$$

Розв'язок такої лінійної системи рівнянь єдиний та має вигляд:

$$\begin{cases} \alpha_i = -\frac{r_{ij}r_{ik}F_{jk}}{D} \\ \alpha_j = -\frac{r_{ij}r_{ik}F_{ik}}{D} \end{cases}, D = F_{ik}F_{jk}r_{ij} + F_{ij}F_{jk}r_{ik} + F_{ij}F_{ik}r_{jk}, (i, j, k) \in \{(1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2)\}$$

Останній вираз, використовуючи правило сумування по індексам, можна записати як: $D = F_{ik}F_{jk}r_{ij}$, $(i, j, k) \in \{(1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2)\}$ (враховуючи той факт,

що $F_{ij} = F_{ji}$, $i, j = \overline{1,3}, i \neq j$). У випадку, коли $F_{ij} = -f \frac{m_i m_j}{r_{ij}^2}$, $\mathbf{r}_P$ знаходиться з рівняння $\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_i = \alpha_i \mathbf{F}_i$ та має вигляд:
$$\mathbf{r}_P = \frac{m_i r_{jk}^3 \mathbf{r}_i + m_j r_{ik}^3 \mathbf{r}_j + m_k r_{ij}^3 \mathbf{r}_k}{m_i r_{jk}^3 + m_j r_{ik}^3 + m_k r_{ij}^3}.$$

У випадку, коли точки $M_i(\mathbf{r}_i)$ утворюють рівносторонній трикутник ($r_{ij} = a$,

$i, j = \overline{1,3}, i \neq j$), точка P є центром мас:
$$\mathbf{r}_P = \frac{\sum_{i=1}^3 m_i \mathbf{r}_i}{\sum_{i=1}^3 m_i}.$$
 Цей результат є ключовим

для розглянутої Лагранжем часткової задачі трьох тіл.

Приклад 1.7. Побудувати матрицю ортогонального афінного перетворення при повороті тригранника ортів $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$ на кут φ відносно осі з ортом $\hat{\mathbf{k}} = k_1 \mathbf{i}_1 + k_2 \mathbf{i}_2 + k_3 \mathbf{i}_3$, що проходить через початок координат без трансляції. Додатний напрямок відрахунку φ визначається напрямком $\hat{\mathbf{k}}$.

Розв'язання. Розглянемо довільний вектор, що визначає точку координатної сітки системи координат $\mathbf{r} = x_i \mathbf{i}_i$, $x_i = \text{const}, i = \overline{1,3}$. При заданому афінному перетворенні, вектору $\mathbf{r}$ відповідає вектор $\mathbf{r}' = x'_i \mathbf{i}'_i = x_i \mathbf{i}'_i$. Представимо вектори $\mathbf{r}$ та $\mathbf{r}'$ через колінеарні та ортогональні до $\hat{\mathbf{k}}$ складові: $\mathbf{r} = \mathbf{r}_\perp + \mathbf{r}_\parallel$, $\mathbf{r}' = \mathbf{r}'_\perp + \mathbf{r}'_\parallel$. За умовою задачі, $\mathbf{r}'_\parallel = \mathbf{r}_\parallel = \hat{\mathbf{k}}(\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{k}})$, $\mathbf{r}'_\perp \cdot \hat{\mathbf{k}} = 0 \wedge |\mathbf{r}'_\perp| = |\mathbf{r}_\perp| \wedge (\mathbf{r}'_\perp, \mathbf{r}_\perp) = \varphi$. А отже, з врахуванням зауваження щодо напрямку відрахунку φ , $\mathbf{r}'_\perp$ можна знайти з системи рівнянь:

$$\begin{cases} \mathbf{r}_\perp \times \mathbf{r}'_\perp = \hat{\mathbf{k}} |\mathbf{r}_\perp|^2 \sin \varphi \\ \mathbf{r}_\perp \cdot \mathbf{r}'_\perp = |\mathbf{r}_\perp|^2 \cos \varphi \end{cases}$$
 Розв'язок першого рівняння має вигляд

$\mathbf{r}'_\perp = \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{r}_\perp \sin \varphi + p \mathbf{r}_\perp$ де p - довільна стала. Підставивши його в друге рівняння, отримаємо $p = \cos \varphi$. Таким чином,

$$\mathbf{r}' = \hat{\mathbf{k}}(\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{k}}) + \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{r}_\perp \sin \varphi + \mathbf{r}_\perp \cos \varphi \quad \text{де} \quad \mathbf{r}_\perp = \mathbf{r} - \hat{\mathbf{k}}(\mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{k}}) = \hat{\mathbf{k}} \times (\mathbf{r} \times \hat{\mathbf{k}}). \quad (1.22)$$

Підставивши в (1.22) в якості $\mathbf{r}$ орт $\mathbf{i}_1$, отримаємо:

$\mathbf{i}'_1 = \hat{\mathbf{k}} k_1 + \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{i}_1 \sin \varphi + (\mathbf{i}_1 - \hat{\mathbf{k}} k_1) \cos \varphi$. Звідси легко отримати:

$$\begin{cases} \mathbf{i}'_1 \cdot \mathbf{i}_1 = \alpha_{11} = k_1^2(1 - \cos \varphi) + \cos \varphi \\ \mathbf{i}'_1 \cdot \mathbf{i}_2 = \alpha_{12} = k_1 k_2(1 - \cos \varphi) + k_3 \sin \varphi \\ \mathbf{i}'_1 \cdot \mathbf{i}_3 = \alpha_{13} = k_1 k_3(1 - \cos \varphi) - k_2 \sin \varphi \end{cases}$$

Інші 6 коефіцієнтів матриці афінного перетворення можна отримати, використавши циклічну перестановку індексів:

$$\begin{cases} \alpha_{ii} = k_i^2(1 - \cos \varphi) + \cos \varphi \\ \alpha_{ij} = k_i k_j(1 - \cos \varphi) + k_k \sin \varphi, (i, j, k) \in \{(1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2)\} \\ \alpha_{ik} = k_i k_k(1 - \cos \varphi) - k_j \sin \varphi \end{cases} \quad (1.23)$$

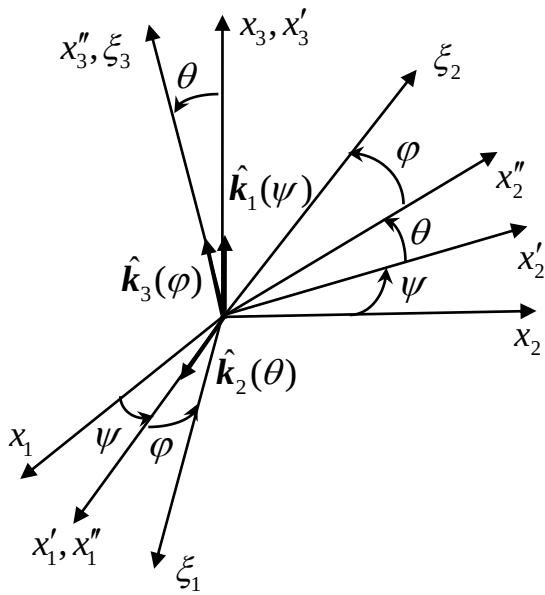


Рис. 3

Приклад 1.8. Побудувати матрицю афінного перетворення лагранжевої системи координат, що визначає рух твердого тіла з нерухомою точкою (теорема Ейлера). Отримати кінематичні формули Ейлера.

Розв'язання. Згідно з теоремою Ейлера, орієнтація твердого тіла в просторі може бути визначена кутами Ейлера. Тобто, лагранжева система довільної орієнтації тіла $(\xi_1, \xi_2, \xi_3), O$ є результатом трьох

обертань з початкової орієнтації: $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3), O \xrightarrow{\hat{k}_1(\psi)} (\mathbf{i}'_1, \mathbf{i}'_2, \mathbf{i}'_3), O$, $(\mathbf{i}'_1, \mathbf{i}'_2, \mathbf{i}'_3), O \xrightarrow{\hat{k}_2(\theta)} (\mathbf{i}''_1, \mathbf{i}''_2, \mathbf{i}''_3), O$, $(\mathbf{i}''_1, \mathbf{i}''_2, \mathbf{i}''_3), O \xrightarrow{\hat{k}_3(\varphi)} (\xi_1, \xi_2, \xi_3), O$ з матрицями афінних перетворень $\mathbf{A}' = \{\alpha'_{ij}\}_{i,j=1}^3$, $\mathbf{A}'' = \{\alpha''_{ij}\}_{i,j=1}^3$, $\mathbf{A}''' = \{\alpha'''_{ij}\}_{i,j=1}^3$. Очевидно, що результуюча матриця афінного перетворення $\mathbf{A} = \{\alpha_{ij}\}_{i,j=1}^3$: $\mathbf{A} = \mathbf{A}''' \mathbf{A}'' \mathbf{A}'$. Для побудови $\mathbf{A}', \mathbf{A}'', \mathbf{A}'''$ скористаємось (1.23), беручи до уваги, що $\hat{k}_1 = \mathbf{i}_3$, $\hat{k}_2 = \mathbf{i}'_2$,

$$\hat{k}_3 = \mathbf{i}_3'' . \text{ Легко отримати: } \mathbf{A}' = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}''' = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{та}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \sin \varphi \cos \theta & \sin \psi \cos \varphi + \cos \psi \sin \varphi \cos \theta & \sin \varphi \sin \theta \\ -\cos \psi \sin \varphi - \sin \psi \cos \varphi \cos \theta & -\sin \psi \sin \varphi + \cos \psi \cos \varphi \cos \theta & \cos \varphi \sin \theta \\ \sin \psi \sin \theta & -\cos \psi \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Згідно з описом Ейлера, враховуючи, що кутова швидкість твердого тіла з нерухомою точкою є ковзним вектором, носій якого проходить через початок координат, отримавмо

$\boldsymbol{\omega} = \omega_{x_1} \mathbf{i}_1 + \omega_{x_2} \mathbf{i}_2 + \omega_{x_3} \mathbf{i}_3 = \omega_{\xi_1} \boldsymbol{\xi}_1 + \omega_{\xi_2} \boldsymbol{\xi}_2 + \omega_{\xi_3} \boldsymbol{\xi}_3 = \mathbf{i}_3 \dot{\psi} + \mathbf{i}_2' \dot{\theta} + \mathbf{i}_3'' \dot{\varphi}$. Враховуючи, що $\mathbf{i}_2' = \alpha'_{2j} \mathbf{i}_j$, $\mathbf{i}_3'' = \alpha''_{2j} \alpha'_{jk} \mathbf{i}_k$, маємо: $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{i}_3 \dot{\psi} + \dot{\theta} \alpha'_{2j} \mathbf{i}_j + \dot{\varphi} \alpha''_{2j} \alpha'_{jk} \mathbf{i}_k$, а, отже, кінематичні формули Ейлера в ейлерових координатах мають вигляд:

$$\begin{cases} \omega_{x_1} = \dot{\theta} \cos \psi + \dot{\varphi} \sin \psi \sin \theta \\ \omega_{x_2} = \dot{\theta} \sin \psi - \dot{\varphi} \cos \psi \sin \theta \\ \omega_{x_3} = \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta \end{cases} .$$

В силу ортогональності матриці $\mathbf{A}$, $\omega_{\xi_i} = \alpha_{ji} \omega_{x_j}$, а отже, кінематичні формули Ейлера в лагранжевих координатах мають вигляд:

$$\begin{cases} \omega_{\xi_1} = \dot{\psi} \sin \varphi \sin \theta + \dot{\theta} \cos \varphi \\ \omega_{\xi_2} = \dot{\psi} \cos \varphi \sin \theta - \dot{\theta} \sin \varphi \\ \omega_{\xi_3} = \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi} \end{cases} .$$

Приклад 1.9. Визначити закон руху деякої довільної точки абсолютно твердого тіла з нерухомою точкою при заданому законі руху тіла.

Розв'язання. Закон руху абсолютно твердого тіла з нерухомою точкою можна подати шляхом задання кутів Ейлера як функцій часу $\psi = \psi(t)$, $\theta = \theta(t)$, $\varphi = \varphi(t)$, $t > 0$, які згідно з теоремою Ейлера описують зміну орієнтації тіла в

просторі. Нехай деяка точка тіла M визначається лагранжевими координатами $M(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$. Вважаємо, що в початковий момент часу лагранжева та ейлерова системи збігаються, тобто $\mathbf{r}_M(0) = \mathbf{i}_i x_i(0) = \xi_i(0) \xi_i$. В довільний момент часу $\mathbf{r}_M(t) = \mathbf{i}_i x_i(t) = \xi_i(t) \xi_i = \mathbf{i}_i \alpha_{ji}(\psi(t), \theta(t), \varphi(t)) \xi_j$. З результатів Прикладу 1.8. отримаємо :

$$\begin{aligned} x_1(t) &= (\cos \psi(t) \cos \varphi(t) - \sin \psi(t) \sin \varphi(t) \cos \theta(t)) \xi_1 + \\ &+ (-\cos \psi(t) \sin \varphi(t) - \sin \psi(t) \cos \varphi(t) \cos \theta(t)) \xi_2 + \sin \psi(t) \sin \theta(t) \xi_3, \\ x_2(t) &= (\sin \psi(t) \cos \varphi(t) + \cos \psi(t) \sin \varphi(t) \cos \theta(t)) \xi_1 + \\ &+ (-\sin \psi(t) \sin \varphi(t) + \cos \psi(t) \cos \varphi(t) \cos \theta(t)) \xi_2 - \cos \psi(t) \sin \theta(t) \xi_3, \\ x_3(t) &= \sin \varphi(t) \sin \theta(t) \xi_1 + \cos \varphi(t) \sin \theta(t) \xi_2 + \cos \theta(t) \xi_3 \end{aligned}$$

Приклад 1.10. Кінетичний момент абсолютно твердого тіла з нерухомою точкою O відносно нерухомої точки за означенням дорівнює: $\mathbf{L}_O = \int_M \mathbf{r} \times \mathbf{v} dm$,

де $\mathbf{r}$ - радіус-вектор субфізичного елементу dm відносно точки O . Довести, що його можна представити у вигляді $\mathbf{L}_O = \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}$, де $\boldsymbol{\omega}$ - миттєва кутова швидкість тіла, а $\mathbf{J}$ - симетричний афінний тензор другого рангу (тензор інерції).

Доведення (перший спосіб). Згідно з формулою Ейлера,

$$\mathbf{r} \times \mathbf{v} = \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \boldsymbol{\omega} r^2 - \mathbf{r}(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}).$$

$$(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3) \quad . \quad (\mathbf{r} \times \mathbf{v})_i = \omega_i x_k x_k - x_i (\omega_j x_j) = (\delta_{ij} x_k x_k - x_i x_j) \omega_j, i = \overline{1,3} \quad . \quad \text{Отже,}$$

$$(\mathbf{L}_O)_i = \int_M (\delta_{ij} x_k x_k - x_i x_j) dm \omega_j = J_{ij} \omega_j, i = \overline{1,3} \quad , \text{ де } J_{ij} = \int_M (\delta_{ij} x_k x_k - x_i x_j) dm, i, j = \overline{1,3}$$

- моменти інерції тіла в системі координат $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$. Оскільки $\mathbf{L}_O = \mathbf{i}_i (\mathbf{L}_O)_i$ та

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{i}_i \omega_i - \text{векторні величини, } \exists \mathbf{J} : \{\mathbf{J}\} = \{J_{ij}\}_{i,j=1}^3. \text{ Тензор є симетричним, оскільки}$$

$$J_{ij} = J_{ji}, i, j = \overline{1,3}.$$

Доведення (другий спосіб). Згідно з властивістю тензорного добутку векторів:

$$\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in V, \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{a}) = (\mathbf{a}^2 \mathbf{I} - \mathbf{a} \otimes \mathbf{a}) \mathbf{b} \quad , \quad \text{а отже,} \quad \mathbf{r} \times \mathbf{v} = \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = (\mathbf{r}^2 \mathbf{I} - \mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) \boldsymbol{\omega}$$

$$\Rightarrow \mathbf{L}_O = \int_M \mathbf{r} \times \mathbf{v} dm = \int_M (\mathbf{r}^2 \mathbf{I} - \mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) dm \boldsymbol{\omega} = \mathbf{J} \boldsymbol{\omega} \quad \text{де}$$

$$\mathbf{J} = \int_M (\mathbf{r}^2 \mathbf{I} - \mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) dm \quad . \quad (1.24)$$

Оскільки $(\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{a})(\mathbf{r} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) \mathbf{b}$, $\mathbf{J}$ - симетричний афінний тензор.

Оскільки за означенням $\mathbf{r}^2 = \text{tr}(\mathbf{r} \otimes \mathbf{r})$, тензор інерції можна подати у вигляді:

$$\mathbf{J} = (\text{tr} \mathbf{M}) \mathbf{I} - \mathbf{M} \quad , \quad \text{де}$$

$$\mathbf{M}(t) = \int_M \mathbf{r} \otimes \mathbf{r} dm \quad - \text{симетричний афінний тензор.} \quad (1.25)$$

Приклад 1.11. Довести теорему про паралельні осі (узагальнена теорема Штерна): тензор інерції твердого тіла відносно довільної точки тіла $M(\mathbf{r}_M)$ визначається як $\mathbf{J}_M = \mathbf{J}_C + m(\mathbf{r}_{MC}^2 \mathbf{I} - \mathbf{r}_{MC} \otimes \mathbf{r}_{MC})$, де $\mathbf{J}_C$ - тензор інерції , побудований відносно центру мас тіла $C(\mathbf{r}_C)$, а $\mathbf{r}_{MC} = \mathbf{r}_M - \mathbf{r}_C$.

Доведення. Нехай $\mathbf{r}'_C = \mathbf{r} - \mathbf{r}_C$, $\mathbf{r}'_M = \mathbf{r} - \mathbf{r}_M$. Тоді очевидно, що $\mathbf{r}'_M = \mathbf{r}'_C - \mathbf{r}_{MC}$.

Згідно з (1.24) та беручи до уваги, що за означенням $\int_M \mathbf{r}'_C dm = \mathbf{0}$, отримаємо:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_M &= \int_M (\mathbf{r}_M'^2 \mathbf{I} - \mathbf{r}_M' \otimes \mathbf{r}_M') dm = \int_M ((\mathbf{r}'_C - \mathbf{r}_{MC})^2 \mathbf{I} - (\mathbf{r}'_C - \mathbf{r}_{MC}) \otimes (\mathbf{r}'_C - \mathbf{r}_{MC})) dm = \\ &= \mathbf{r}_{MC}^2 \int_M dm \mathbf{I} - 2\mathbf{r}_{MC} \cdot \int_M \mathbf{r}'_C dm \mathbf{I} + \int_M \mathbf{r}_C'^2 dm \mathbf{I} + \mathbf{r}_{MC} \otimes \int_M \mathbf{r}'_C dm + \int_M \mathbf{r}'_C dm \otimes \mathbf{r}_{MC} - \int_M \mathbf{r}'_C \otimes \mathbf{r}'_C dm = \\ &= \int_M (\mathbf{r}_C'^2 \mathbf{I} - \mathbf{r}_C' \otimes \mathbf{r}_C') dm + m(\mathbf{r}_{MC}^2 \mathbf{I} - \mathbf{r}_{MC} \otimes \mathbf{r}_{MC}) = \\ &= \mathbf{J}_C + m(\mathbf{r}_{MC}^2 \mathbf{I} - \mathbf{r}_{MC} \otimes \mathbf{r}_{MC}). \end{aligned}$$

Приклад 1.12. Представити тензор інерції твердого тіла з нерухомою точкою як функцію часу.

Розв'язання. Тензор інерції описує розподіл маси тіла відносно трійки ортогональних осей, що проходять через нерухому точку тіла. Отже, матричне

представлення тензора інерції в лагранжевому описі (ξ_1, ξ_2, ξ_3) не залежить від часу $\{\mathbf{J}\}_{(\xi_1, \xi_2, \xi_3)} = \left\{ J_{\xi_i \xi_j} \right\}_{i,j=1}^3 = \text{const}$. В ейлеровому описі $\{\mathbf{J}\}_{(i_1, i_2, i_3)} = \left\{ J_{x_i x_j}(t) \right\}_{i,j=1}^3$. Сумістимо в момент часу $t=0$ лагранжевий та ейлерів базиси: $(i_1, i_2, i_3) \equiv (\xi_1(0), \xi_2(0), \xi_3(0))$. Тоді, $\{\mathbf{J}(0)\} = \{\mathbf{J}\}_{(\xi_1(0), \xi_2(0), \xi_3(0))} = \{\mathbf{J}\}_{(i_1, i_2, i_3)}$. Закон руху твердого тіла з нерухомою точкою згідно з теоремою Ейлера можна подати заданням зміни кутів Ейлера $\psi = \psi(t), \theta = \theta(t), \varphi = \varphi(t), t > 0$, що визначають матрицю афінного перетворення $(i_1, i_2, i_3), O \xrightarrow{\hat{k}_1(\psi), \hat{k}_2(\theta), \hat{k}_3(\varphi)} (\xi_1, \xi_2, \xi_3), O$ з матрицею A , що приведена в **Прикладі 1.8**. Оскільки матриця A є матрицею ортогонального лінійного перетворення, їй відповідає тензор $\mathbf{A} : \{\mathbf{A}\} = A(t) = \left\{ \alpha_{ij}(t) \right\}_{i,j=1}^3$. Згідно з означенням тензора $\mathbf{P} : \{\mathbf{P}\} = \{p_{ij}\}_{i,j=1}^3$ при афінному перетворенні його компоненти змінюються по правилу: $p'_{ij} = \alpha_{ik} \alpha_{jl} p_{kl}$, тобто $\{\mathbf{P}\}' = A\{\mathbf{P}\}A^T$. Отже,

$$\mathbf{J}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{J}(0)\mathbf{A}^T(t). \quad (1.26)$$

Приклад 1.13. Кінетична енергія твердого тіла з нерухомою точкою за означенням дорівнює: $T = \frac{1}{2} \int_M \mathbf{v}^2 dm$. Довести, що кінетичну енергію можна представити у вигляді $2T = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}$, де $\boldsymbol{\omega}$ - миттєва кутова швидкість тіла, а $\mathbf{J}$ - тензор інерції.

Доведення. Згідно з властивістю тензорного добутку векторів: $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in V, (\mathbf{b} \times \mathbf{a})^2 = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{a}^2 \mathbf{I} - \mathbf{a} \otimes \mathbf{a}) \mathbf{b}$. Отже, $\mathbf{v}^2 = (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})^2 = \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{r}^2 \mathbf{I} - \mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) \boldsymbol{\omega} \Rightarrow 2T = \int_M \mathbf{v}^2 dm = \boldsymbol{\omega} \cdot \int_M (\mathbf{r}^2 \mathbf{I} - \mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) dm \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{J} \boldsymbol{\omega}$, де $\mathbf{J} = \int_M (\mathbf{r}^2 \mathbf{I} - \mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) dm$ - тензор інерції.

Приклад 1.14. Довести, що $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = (\mathbf{b} \otimes \mathbf{a})^T$.

Доведення. Дійсно, $(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}\mathbf{c}) \cdot \mathbf{d} = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})$. Водночас,

$$((\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})^T \mathbf{c}) \cdot \mathbf{d} = \mathbf{c} \cdot ((\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})^T)^T \mathbf{d} = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \mathbf{d} = (\mathbf{c} \cdot \mathbf{a})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) = ((\mathbf{b} \otimes \mathbf{a})^T \mathbf{c}) \cdot \mathbf{d} .$$

Приклад 1.15. Довести, що

$$\forall \mathbf{P} : \{\mathbf{P}\} = \{p_{ij}\}_{i,j=1}^3, \mathbf{P} = p_{ij} \mathbf{i}_i \otimes \mathbf{i}_j . \quad (1.27)$$

Доведення. Дійсно, оскільки за означенням $p_{ij} = \mathbf{i}_i \cdot \mathbf{P} \mathbf{i}_j$, $i, j = \overline{1,3}$, то

$$\forall \mathbf{a}, \sum_{i,j=1}^3 p_{ij} \mathbf{i}_i \otimes \mathbf{i}_j \mathbf{a} = \sum_{i,j=1}^3 p_{ij} (\mathbf{i}_j \mathbf{a}) \mathbf{i}_i = \sum_{i,j=1}^3 p_{ij} a_j \mathbf{i}_i = \sum_{i,j=1}^3 a_j (\mathbf{i}_i \cdot \mathbf{P} \mathbf{i}_j) \mathbf{i}_i = \sum_{i=1}^3 (\mathbf{i}_i \cdot \mathbf{P} \mathbf{a}) \mathbf{i}_i = \mathbf{P} \mathbf{a} .$$

Приклад 1.16. За означенням, операція $\text{trace}(\text{tr})$ - лінійна операція над тензором, така, що $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in V, \text{tr}(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ Довести, що

$$\forall \mathbf{P} : \{\mathbf{P}\} = \{p_{ij}\}_{i,j=1}^3, \text{tr } \mathbf{P} = \sum_{i=1}^3 p_{ii} .$$

Доведення. Дійсно, згідно з (1.27) :

$$\text{tr } \mathbf{P} = \text{tr} (p_{ij} \mathbf{i}_i \otimes \mathbf{i}_j) = p_{ij} \text{tr}(\mathbf{i}_i \otimes \mathbf{i}_j) = p_{ij} \mathbf{i}_i \cdot \mathbf{i}_j = p_{ij} \delta_{ij} = p_{ii}$$

Приклад 1.17. Довести, що кожному антисиметричному тензору $\mathbf{P}$ можна поставити у відповідність вектор (аксіальний) $\mathbf{p}$ такий, що $\forall \mathbf{a} \in V, \mathbf{P} \mathbf{a} = \mathbf{p} \times \mathbf{a}$

Доведення. Дійсно, за означенням, якщо $\mathbf{P}$ - антисиметричний, то в деякому $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$ базисі матричне представлення тензора має вигляд:

$$\{\mathbf{P}\} = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 0 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 0 \end{pmatrix} . \text{ Побудуємо } \mathbf{p} = \alpha \mathbf{i}_1 + \beta \mathbf{i}_2 + \gamma \mathbf{i}_3 . \text{ Легко бачити, що}$$

$$\{\mathbf{P}\} \{\mathbf{a}\} = \{\mathbf{p} \times \mathbf{a}\} . \text{ Отже, } \forall \mathbf{a} \in V, \mathbf{P} \mathbf{a} = \mathbf{p} \times \mathbf{a} . \text{ Доведемо, що } \mathbf{p} - \text{вектор.}$$

Застосуємо афінне перетворення $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3), O \mapsto (\mathbf{i}'_1, \mathbf{i}'_2, \mathbf{i}'_3), O$ з матрицею

$$\mathbf{A} = \{\alpha_{ij}\}_{i,j=1}^3 \quad \text{до} \quad \text{тензора}$$

$$\mathbf{P} = \gamma(\mathbf{i}_2 \otimes \mathbf{i}_1 - \mathbf{i}_1 \otimes \mathbf{i}_2) + \beta(\mathbf{i}_1 \otimes \mathbf{i}_3 - \mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{i}_1) + \alpha(\mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{i}_2 - \mathbf{i}_2 \otimes \mathbf{i}_3) . \quad \text{Оскільки}$$

$$\{\mathbf{i}_m \otimes \mathbf{i}_n\}_{ij} = \delta_{im} \delta_{in}, i, j = \overline{1,3} \quad , \quad \text{то}$$

$$p'_{ij} = \alpha_{ik} \alpha_{js} p_{ks} = \gamma(\alpha_{i2} \alpha_{j1} - \alpha_{i1} \alpha_{j2}) + \beta(\alpha_{i1} \alpha_{j3} - \alpha_{i3} \alpha_{j1}) + \alpha(\alpha_{i1} \alpha_{j3} - \alpha_{i3} \alpha_{j1}), i, j = \overline{1,3} .$$

Легко бачити, що $\forall \mathbf{a} = a'_i \mathbf{i}'_i$ має місце $p'_{ij} a'_j = \{\mathbf{p} \times \mathbf{a}\}_i, i = \overline{1,3}$, де $\{\mathbf{p}\}_i = \alpha \alpha_{i1} + \beta \alpha_{i2} + \gamma \alpha_{i3}$.

Приклад 1.18. Довести, що якщо $\mathbf{P}$ - симетричний, а $\mathbf{S}$ - антисиметричний, то $\mathbf{P} \cdot \mathbf{S} = 0$.

Доведення. Дійсно, згідно з властивостями внутрішнього добутку, якщо $\mathbf{P}$ - симетричний, а $\mathbf{S}$ - антисиметричний, то $\mathbf{P} \cdot \mathbf{S} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{S}^T = \mathbf{P} \cdot (-\mathbf{S}) = -\mathbf{P} \cdot \mathbf{S} = 0$

Приклад 1.19. Довести, що власне значення тензора є скаляром.

Доведення. Оскільки $\mathbf{P}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$, то $\lambda = \frac{1}{|\mathbf{u}^2|} \mathbf{u} \cdot \mathbf{P}\mathbf{u}$, що є інваріантним означенням власного числа тензора.

Приклад 1.20. Довести, що еліпсоїд тензора інерції є еліпсоїдом.

Доведення. Еліпсоїдом симетричного тензора $\mathbf{P}$ називається поверхня 2-го порядку $\mathbf{r} \cdot \mathbf{P}\mathbf{r} = 1$. Еліпсоїдом тензора інерції є поверхня 2-го порядку $\mathbf{r} \cdot \mathbf{J}\mathbf{r} = 1$ (див. **Приклад 1.10.**) , де $\mathbf{J}$ є симетричним тензором. Згідно з спектральною теоремою, відносно базису, що складений власними векторами $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$ тензора $\mathbf{J}$ має місце представлення $\mathbf{J} = J_{ii} \mathbf{i}_i \otimes \mathbf{i}_i$. Тоді власні значення тензора $\mathbf{J}$, $J_{ii} = \lambda_i, i = \overline{1,3}$ - є моментами інерції відносно координатних осей. Оскільки осьові моменти інерції $J_{ii} = \int_M (x_k x_k - x_i^2) dm > 0, i = \overline{1,3}$, то поверхня тензора, що є інваріантною по відношенню до координатного опису, має вигляд $J_{ii} x_i^2 = 1$ і є еліпсоїдом за означенням.

Приклад 1.21. Довести, що вектор $\mathbf{n} = \mathbf{P}\mathbf{r}$ є нормальним вектором для еліпсоїда симетричного тензора $\mathbf{P}$.

Доведення. Еліпсоїдом симетричного тензора $\mathbf{P}$ є поверхня 2-го порядку $\mathbf{r} \cdot \mathbf{P}\mathbf{r} = 1$. Тоді за правилом Лейбніца $d\mathbf{r} \cdot \mathbf{P}\mathbf{r} + \mathbf{r} \cdot \mathbf{P}d\mathbf{r} = 0$, де $d\mathbf{r}$ лежить в

дотичній площині до поверхні. Згідно з властивістю симетричного тензора $d\mathbf{r} \cdot \mathbf{Pr} = \mathbf{r} \cdot \mathbf{P}d\mathbf{r} \Rightarrow d\mathbf{r} \cdot \mathbf{Pr} = 0 \Leftrightarrow d\mathbf{r} \perp \mathbf{Pr}$.

Приклад 1.22. Довести твердження геометричної інтерпретації Пуансо руху твердого тіла з нерухомою точкою у випадку Ейлера.

Доведення. Умови, накладені Ейлером на рух твердого тіла, зводять рух тіла до руху за інерцією де за нерухому точку обирається центр інерції тіла (центр тяжіння). В цьому випадку, очевидно кінетичний момент відносно нерухомої

точки $\mathbf{L}_O = \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}$ та кінетична енергія тіла $T = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}$ ($\boldsymbol{\omega}$ - миттєва кутова

швидкість тіла, $\mathbf{J}$ - тензор інерції) зберігаються згідно з теоремою про зміну кінетичного моменту та теоремою про зміну кінетичної енергії матеріальної системи. Рівняння еліпсоїда інерції має вигляд: $\mathbf{r} \cdot \mathbf{J}\mathbf{r} = 1$. Побудуємо площину,

дотичну до еліпсоїда інерції в точці M з радіус-вектором $\mathbf{r}_M(t) = \lambda(t)\boldsymbol{\omega}(t)$:

$\lambda^2 \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} = 1$. Оскільки кінетична енергія зберігається, $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2T}} = \text{const}$. За

результатом **Прикладу 1.21.** вектор нормалі до еліпсоїда інерції в точці M

дорівнює: $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}}{\sqrt{2T}} = \frac{\mathbf{L}_O}{\sqrt{2T}} = \text{const}$. Рівняння дотичної в точці M площини має

вигляд: $(\mathbf{r}_M - \mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} = 0$, або $\mathbf{r} \cdot \mathbf{L}_O - \frac{1}{\sqrt{2T}} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} = 0$, що можна представити як

$\mathbf{r} \cdot \mathbf{L}_O = \sqrt{2T}$. Ця площина є нерухомою, оскільки нормальний до неї вектор $\mathbf{L}_O$

та відстань від площини до нерухомої точки $d = \frac{\sqrt{2T}}{|\mathbf{L}_O|}$ не змінюються з часом.

При цьому, точка контакту еліпсоїда інерції та площини завжди лежить на миттєвій осі обертання ($\mathbf{r}_M(t) = \lambda \boldsymbol{\omega}(t)$), отже, її швидкість дорівнює нулю.

Звідси слідує відсутність проковзування.

Отже, рух тіла відносно нерухомої точки за інерцією (випадок Ейлера) передбачає кочення еліпсоїда інерції по нерухомій площині, ортогональній до збереженого кінетичного моменту тіла без проковзування. Це і є твердження Пуансо.

1.5. Вправи

1.1. Дана трійка чисел (T_1, T_2, T_3) , які визначають температуру в трьох різних точках твердого тіла. Чи є вони компонентами вектора?

1.2. Чи може бути точка влучення кулі в мішень описана вектором? Чи є ймовірність влучення кулі в задану область мішені скаляром?

1.3. Довести, що прискорення матеріальної точки є приєднаним вектором.

1.4. Довести, що кутова швидкість твердого тіла з нерухомою точкою є ковзним вектором.

1.5. Довести, що момент пари сил, прикладеної до абсолютно твердого тіла є вільним вектором.

1.6. Повернувшись до **Прикладу 1.6.** визначити залежність F_i ($F_i = \frac{(\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_i|} F_i$)

від $|\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_i|$. Розв'язати поставлену в **Прикладі 1.6** задачу при умові, що точки $M_i(\mathbf{r}_i)$ лежать на одній прямій ($\mathbf{r}_{ij} = \hat{\mathbf{e}} r_{ij}, |\hat{\mathbf{e}}|=1$). Показати, як в цьому випадку використати вираз для $\mathbf{r}_P$, отриманий в **Прикладі 1.6.**

1.7. Чи справедливе твердження **Прикладу 1.6.** для системи n ($n > 3$) матеріальних точок? Відповідь обґрунтувати.

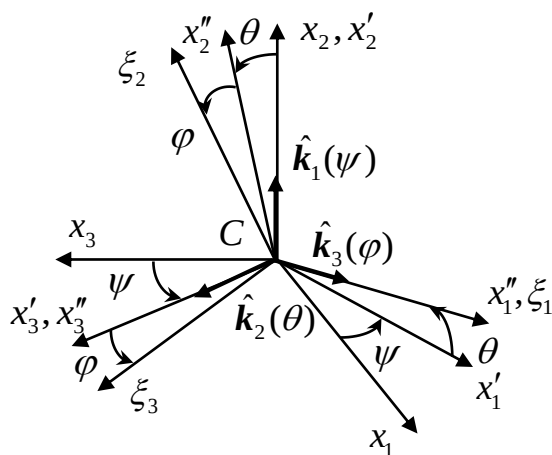


Рис. 4

1.8. Розглянемо систему з n векторів в координатному представленні $\mathbf{r}_i = \mathbf{i}_i x_i + \mathbf{j}_i y_i + \mathbf{k}_i z_i$, $i = \overline{1, n}$. Чи є об'єкт, складений з їхніх компонентів $(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_n, y_n, z_n)$, координатним представленням вектора?

1.9. Орієнтація літака визначається трьома літаковими кутами: ψ - кут рискання, θ - кут тангажу, φ - кут крену, які є параметрами афінного перетворення ейлерової системи координат $(i_1, i_2, i_3), C$ в лагранжеву систему координат $(\xi_1, \xi_2, \xi_3), C$ (C - центр мас літака). Вісь x_1 напрямлена по курсу літака, вісь x_2 напрямлена вертикально вгору, вісь x_3 доповнює x_1 та x_2 до правої трійки осей. Вісь ξ_1 напрямлена по осі літака від хвоста до кабіни, вісь ξ_2 розташована в площині симетрії літака, вісь ξ_3 напрямлена по розмаху крил вправо від пілота. Побудувати матрицю афінного перетворення $(i_1, i_2, i_3), C \mapsto (\xi_1, \xi_2, \xi_3), C$, а також, проєкції вектора кутової швидкості літака на осі ейлерової та лагранжевої систем координат.

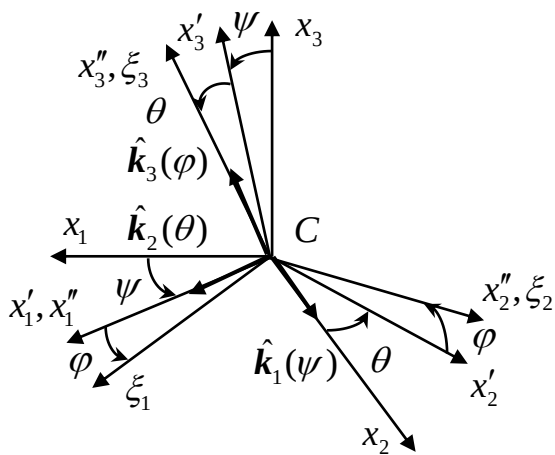


Рис. 5

1.10. Орієнтація корабля визначається трьома корабельними кутами: ψ - кут диференту, θ - кут крену, φ - кут рискання, які є параметрами афінного перетворення ейлерової системи координат $(i_1, i_2, i_3), C$ в лагранжеву систему координат $(\xi_1, \xi_2, \xi_3), C$ (C - центр мас літака). Вісь x_1 напрямлена по курсу корабля, вісь x_2 напрямлена вліво від курсу, вісь x_3 напрямлена вертикально вгору. Вісь ξ_1 напрямлена по осі корабля від корми до носу, вісь ξ_2 до лівого борту корабля, вісь ξ_3 напрямлена по перпендикулярно палубі вгору. Побудувати матрицю афінного перетворення $(i_1, i_2, i_3), C \mapsto (\xi_1, \xi_2, \xi_3), C$, а також, проєкції вектора кутової швидкості корабля на осі ейлерової та лагранжевої систем координат.

1.10. Використавши результати **Прикладу 1.9.** довести справедливність формули Ейлера для лінійної швидкості абсолютно твердого тіла з нерухомою точкою: $\mathbf{v}_M = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_M$.

1.11. Розв'язати задачу, поставлену в **Прикладі 1.9.** використавши в якості закону руху абсолютно твердого тіла з нерухомою точкою літакові кути та корабельні кути.

1.12. Отримати вирази проєкцій вектора кутової швидкості руху абсолютно твердого тіла з нерухомою точкою на осі лагранжевої та ейлерової систем координат для закону руху тіла, заданого через літакові кути та корабельні кути (аналогі кінематичних формул Ейлера).

1.13. Довести, що $(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})(\mathbf{c} \otimes \mathbf{d}) = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a} \otimes \mathbf{d}$.

1.14. Довести, що $\{\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}\}_{ij} = a_i b_j, i, j = \overline{1,3}$.

1.15. Довести, що $\text{tr} \mathbf{P} = \text{tr} \mathbf{P}^T$ та $\text{tr}(\mathbf{PS}) = \text{tr}(\mathbf{SP})$.

1.16. Довести, що якщо $\forall \mathbf{S}, \mathbf{P} \cdot \mathbf{S} = 0$ то $\mathbf{P} = \mathbf{0}$.

1.17. Довести, що якщо $\mathbf{P}$ - симетричний, а $\mathbf{Q}$ - ортогональний тензори, то $\mathbf{QPQ}^T$ - симетричний тензор.

1.18. Довести, що головні інваріанти тензора $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ визначаються як:
 $I_1(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}, I_2(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = I_3(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = 0$.

1.19. Довести, що головні інваріанти тензора антисиметричного тензора $\mathbf{P}$ мають вигляд: $I_1(\mathbf{P}) = 0, I_2(\mathbf{P}) = \omega^2, I_3(\mathbf{P}) = 0$, де ω - аксіальний вектор, що асоціюється з $\mathbf{P}$ (див. **Приклад 1.17.**).

1.20. Довести, що для тензора $\mathbf{P}$, представленого у вигляді: $\mathbf{P} = \mathbf{i}_i \otimes \mathbf{p}_i$, головні інваріанти можна записати у вигляді:

$$\begin{aligned} I_1(\mathbf{P}) &= \mathbf{i}_1 \cdot \mathbf{p}_1 + \mathbf{i}_2 \cdot \mathbf{p}_2 + \mathbf{i}_3 \cdot \mathbf{p}_3, \\ I_2(\mathbf{P}) &= \mathbf{i}_1(\mathbf{p}_2 \times \mathbf{p}_3) + \mathbf{i}_2(\mathbf{p}_3 \times \mathbf{p}_1) + \mathbf{i}_3(\mathbf{p}_1 \times \mathbf{p}_2), \\ I_3(\mathbf{P}) &= \mathbf{p}_1(\mathbf{p}_2 \times \mathbf{p}_3). \end{aligned}$$

1.21. Показати, що для довільного тензора $I_n = \text{tr}(\mathbf{P}^n), n \in \mathbb{N}$ є інваріантною величиною, що виражається через головні інваріанти.

2. Похідна скаляра, вектора та тензора по скалярному аргументу

2.1. Основні означення

Функціональна залежність від скаляра. Поняття неперервності та диференційованості.

Означення залежності від скаляра. Змінний скаляр, вектор та тензор, зміна яких пов'язана зі зміною скаляра t , називаються скалярною, векторною та тензорною функціями скалярного аргументу $\varphi(t)$, $\mathbf{a}(t)$, $\mathbf{P}(t)$ відповідно.

В задачах механіки скалярним аргументом, як правило, є час або натуральна координата.

В координатному представленні $\mathbf{a}(t) = a_i(t)\mathbf{i}_i$, $\mathbf{P}(t) = p_{ij}(t)\mathbf{i}_i \otimes \mathbf{i}_j$, де компонентами $\mathbf{a}(t)$ та $\mathbf{P}(t)$ є скалярні функції від t .

Означення неперервності по скаляру. Скалярна, векторна чи тензорна функції скалярного аргументу $\varphi(t)$, $\mathbf{a}(t)$, $\mathbf{P}(t)$ ($\mathbf{f}(t)$) називаються неперервними в точці визначення t , якщо існує окіл t в якому $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathbf{f}(t + \Delta t) = \mathbf{f}(t)$.

Означення диференційованості по скаляру. Скалярна, векторна чи тензорна функції скалярного аргументу $\varphi(t)$, $\mathbf{a}(t)$, $\mathbf{P}(t)$ ($\mathbf{f}(t)$) називаються диференційованими функціями в точці неперервності t , якщо в деякому околі t існує $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{f}(t + \Delta t) - \mathbf{f}(t)}{\Delta t}$. Якщо границя існує, вона називається похідною

$$\mathbf{f}(t) \left(\dot{\mathbf{f}}(t) \equiv \frac{d\mathbf{f}}{dt} \right).$$

Вектор та тензор, що обертаються разом з тілом

Означення вектора та тензора, що обертаються разом з тілом. Вектор $\mathbf{a} = \mathbf{a}(t), t > 0$, заданий на точках тіла, називається таким, що обертається разом

з твердим тілом, якщо він має представлення : $\mathbf{a}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{a}(0), t > 0$ де $\mathbf{A} = \mathbf{A}(t)$ - ортогональний тензор обертання тіла.

Наприклад, тензор $\mathbf{A}$ з ейлеровим представленням $\{\mathbf{A}(t)\} = A(\psi(t), \varphi(t), \psi(t))$, що згідно з теоремою Ейлера визначає орієнтацію твердого тіла з нерухомою точкою є ортогональним тензором обертання тіла.

Аналогічно, тензор $\mathbf{P} = \mathbf{P}(t), t > 0$ заданий на точках тіла називається таким, що обертається разом з твердим тілом якщо він має представлення :

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{P}(0)\mathbf{A}^T(t), t > 0 , \text{ де } \mathbf{A} = \mathbf{A}(t) - \text{ортогональний тензор обертання тіла.}$$

Наприклад, тензор інерції згідно з **Прикладом 1.10.** допускає представлення $\mathbf{J}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{J}(0)\mathbf{A}^T(t)$, а отже, є тензором, що обертається разом з тілом.

Похідна від тензора $\mathbf{P} = \mathbf{P}(t)$ по скалярному аргументу визначається аналогічним чином. Тензор $\mathbf{P} = \mathbf{P}(t)$ називається диференційованим по змінній

t , якщо існує границя: $\dot{\mathbf{P}}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{P}(t + \Delta t) - \mathbf{P}(t)}{\Delta t}$. В цьому випадку, ця границя називається похідною від тензора по t .

В матричному представленні в базисі $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$ $\{\mathbf{P}(t)\} = \{p_{ij}(t)\}_{i,j=1}^3$, похідною тензора по t є тензор з матричним представленням: $\{\dot{\mathbf{P}}(t)\} = \{\dot{p}_{ij}(t)\}_{i,j=1}^3$.

2.2. Диференціальні властивості векторів та тензорів, що залежать від скалярного аргументу

1. Для диференційованих функцій $\varphi \in \mathbb{R}$, $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in V$ мають місце рівності:

$$\begin{aligned} 1. \quad & \frac{d}{dt}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \frac{d}{dt}\mathbf{a} + \frac{d}{dt}\mathbf{b} \\ 2. \quad & \frac{d}{dt}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \frac{d\mathbf{b}}{dt} + \frac{d\mathbf{a}}{dt} \cdot \mathbf{b} \\ 3. \quad & \frac{d}{dt}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{a} \times \frac{d\mathbf{b}}{dt} + \frac{d\mathbf{a}}{dt} \times \mathbf{b} \end{aligned} \tag{2.1}$$

$$4. \frac{d}{dt}(\varphi \mathbf{a}) = \varphi \frac{d\mathbf{a}}{dt} + \frac{d\varphi}{dt} \mathbf{a}$$

$$5. \frac{d}{dt}(\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})) = \mathbf{a} \cdot \left(\mathbf{b} \times \frac{d\mathbf{c}}{dt} \right) + \mathbf{a} \cdot \left(\frac{d\mathbf{b}}{dt} \times \mathbf{c} \right) + \frac{d\mathbf{a}}{dt} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$$

$$6. \frac{d}{dt}(\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})) = \mathbf{a} \times \left(\mathbf{b} \times \frac{d\mathbf{c}}{dt} \right) + \mathbf{a} \times \left(\frac{d\mathbf{b}}{dt} \times \mathbf{c} \right) + \frac{d\mathbf{a}}{dt} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$$

2. Множення тензорів задовольняє правило Лейбніца. Якщо $\mathbf{a} = \mathbf{a}(t)$, $\mathbf{P} = \mathbf{P}(t)$, $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(t)$ - довільні диференційовані вектор та тензори, то мають місце рівності:

$$1. \frac{d(\mathbf{PQ})}{dt} = \dot{\mathbf{P}}\mathbf{Q} + \mathbf{P}\dot{\mathbf{Q}}$$

$$2. \frac{d(\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q})}{dt} = \dot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{Q} + \mathbf{P} \cdot \dot{\mathbf{Q}}$$

$$3. \frac{d(\mathbf{Pa})}{dt} = \dot{\mathbf{P}}\mathbf{a} + \mathbf{P}\dot{\mathbf{a}} \quad (2.2)$$

$$4. \frac{d\mathbf{P}^T}{dt} = \left(\frac{d\mathbf{P}}{dt} \right)^T$$

$$5. \frac{d\mathbf{P}^{-1}}{dt} = -\mathbf{P}^{-1} \frac{d\mathbf{P}}{dt} \mathbf{P}^{-1}$$

2.3. Приклади

Приклад 2.1. Чи завжди для матеріальної точки радіус-вектор, вектор швидкості та вектор прискорення $(\mathbf{r}(t), \mathbf{v}(t), \mathbf{w}(t))$ є неперервними функціями.

Розв'язання.

1. Доведемо, що $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ завжди є неперервною функцією. Від супротивного.

Нехай $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)) \neq 0$. Тоді елементарне переміщення за як завгодно

малий проміжок часу $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t) \neq 0$ - скінченне, що суперечить основній аксіомі кінематики матеріальної точки.

2. Доведемо, що $v(t)$ за умови відсутності миттєвої (імпульсної) сили є неперервною функцією. Дійсно, згідно з теоремою про зміну кількості руху матеріальної точки на проміжку часу $[t, t + \Delta t]$ $\Delta K = m(v(t + \Delta t) - v(t))$ дорівнює імпульсу сили F на цьому проміжку часу: $S = \int_t^{t+\Delta t} F(t) dt$. Якщо $F(t)$ не є імпульсною на проміжку $[t, t + \Delta t]$ (приймає лише скінченні значення) то $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta v = 0$. У випадку, коли $F(t)$ є імпульсною, можливий випадок при якому $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} S \neq 0$. Тоді $v(t)$ є розривною. Як приклад, розглянемо удар матеріальної точки по нерухомій перешкоді. У випадку ортогонального абсолютно пружного удару напрямок вектора швидкості точки змінюється на протилежний за проміжок удару, який в елементарній теорії удару вважається нульовим (точніше - як завгодно малим).

3. Покажемо, що $w(t)$ може бути як розривною функцією, так і неперервною. Дійсно, згідно з другим законом Ньютона при русі матеріальної точки під дією постійної сили F : $w = F / m = const$ - а отже, є неперервною. Водночас, при рівномірному русі матеріальної точки по траєкторії, що гладким чином складена з двох дуг довільних кіл так, що траєкторія не є дугою одного кола, в точці сполучення дуг може стрибком змінюватись радіус кривини та центр кривини (принаймні або кривина, або центр кривини). Оскільки при криволінійному рівномірному русі точки її прискорення має лише нормальну складову $w = w_v = v^2 / \rho$, що напрямлена до центру кривини, в точці сполучення за як завгодно малий проміжок часу зміна вектора прискорення є скінченною (удар другого роду).

В деяких задачах механіки розглядається неперервність зліва та справа $\lim_{\Delta t \rightarrow +0} a(t + \Delta t) = a^+(t)$, $\lim_{\Delta t \rightarrow -0} a(t + \Delta t) = a^-(t)$. При існуванні таких границь не обов'язково $a^+(t) = a^-(t)$. Наприклад, в елементарній теорії удару вводяться поняття швидкості матеріальної точки до та після удару.

Приклад 2.2. Чи є радіус-вектор та вектор швидкості матеріальної точки завжди диференційованими функціями? Довести, що вектор швидкості матеріальної точки визначається як похідна від радіус-вектора матеріальної точки та, при можливості визначення, прискорення матеріальної точки дорівнює похідній від вектора швидкості матеріальної точки.

Розв'язання. За аналітичним означенням, вектор миттєвої швидкості матеріальної точки визначається як така швидкість прямолінійного рівномірного руху точки, що дозволяє визначити переміщення матеріальної точки (радіус-вектор завжди є неперервною функцією часу - **Приклад 2.1**) з точністю до малих другого порядку малості відносно часу, за який переміщення досягається: $\Delta \mathbf{r}(t, \Delta t) = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t) = \mathbf{v}(t)\Delta t + o(\Delta t)$. А отже, границя

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} = \mathbf{v}(t) \text{ існує завжди, оскільки в класичній механіці швидкість}$$

завжди скінченна.

Вектор швидкості матеріальної точки не є завжди диференційованою функцією. Для диференційованості векторної функції скалярного аргументу необхідною умовою є неперервність функції в точці (за означенням). В точках розриву 1-го роду вектора швидкості (класична механіка не допускає розриву 2-го роду вектора швидкості) поняття диференційованості втрачає сенс. Так у випадку, описаному в **Прикладі 2.1** при дії на точку імпульсної сили (зі скінченням імпульсом), в цей момент часу швидкість не є неперервною, а отже, не може бути диференційованою функцією.

Приклад 2.3. Довести, що при виконанні умови $\forall \mathbf{a} \in V: |\mathbf{a}(t)| = a = \text{const}$,

виконується: $\mathbf{a} \cdot \frac{d\mathbf{a}}{dt} = 0$.

Доведення. Дійсно, оскільки $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = a^2 = \text{const}$, то

$$\frac{da^2}{dt} = \mathbf{a} \cdot \frac{d\mathbf{a}}{dt} + \frac{d\mathbf{a}}{dt} \cdot \mathbf{a} = 2\mathbf{a} \cdot \frac{d\mathbf{a}}{dt} = 0$$

Приклад 2.4. Довести, що для довільного тензора $\mathbf{P} = \mathbf{P}(t)$ при умові його диференційованості та існуванні оберненого тензора $\mathbf{P}^{-1}(t)$, справедлива формула: $\frac{d\mathbf{P}^{-1}}{dt} = -\mathbf{P}^{-1} \frac{d\mathbf{P}}{dt} \mathbf{P}^{-1}$.

Доведення.

Дійсно,

$$\mathbf{P}\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{I} \Rightarrow \frac{d\mathbf{P}}{dt} \mathbf{P}^{-1} + \mathbf{P} \frac{d\mathbf{P}^{-1}}{dt} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{P} \frac{d\mathbf{P}^{-1}}{dt} = -\frac{d\mathbf{P}}{dt} \mathbf{P}^{-1} \Rightarrow \frac{d\mathbf{P}^{-1}}{dt} = -\mathbf{P}^{-1} \frac{d\mathbf{P}}{dt} \mathbf{P}^{-1}.$$

Приклад 2.3. Довести, що для довільного тензора $\mathbf{P} = \mathbf{P}(t)$ при умові його диференційованості та існуванні оберненого тензора $\mathbf{P}^{-1}(t)$, справедлива формула:

$$\frac{d}{dt} \det(\mathbf{P}) = \det(\mathbf{P}) \operatorname{tr}(\dot{\mathbf{P}} \mathbf{P}^{-1}). \quad (2.3)$$

Доведення. Згідно з (1.18) $\phi_{\mathbf{P}}(-1) = \det(\mathbf{P} + \mathbf{I}) = 1 + \operatorname{tr}(\mathbf{P}) + o(\|\mathbf{P}\|)$. За

означенням, $\frac{d}{dt} \det(\mathbf{P}) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\det(\mathbf{P}(t + \Delta t)) - \det(\mathbf{P}(t))}{\Delta t}$. Отже

$$\det(\mathbf{P}(t + \Delta t)) = \det(\mathbf{P}(t)) + \frac{d}{dt} \det(\mathbf{P}) \Delta t + o(\Delta t). \quad \text{Розглянемо}$$

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{P}(t + \Delta t)) &= \det(\mathbf{P}(t) + \dot{\mathbf{P}}(t) \Delta t + \mathbf{o}(\Delta t)) = \det(\mathbf{P}(t) + \dot{\mathbf{P}}(t) \Delta t) + o(\Delta t) = \\ &= \det((\mathbf{I} + \dot{\mathbf{P}}(t) \mathbf{P}^{-1}(t) \Delta t) \mathbf{P}(t)) + o(\Delta t) = \det(\mathbf{I} + \dot{\mathbf{P}}(t) \mathbf{P}^{-1}(t) \Delta t) \det(\mathbf{P}(t)) + o(\Delta t) = \\ &= (1 + \operatorname{tr}(\dot{\mathbf{P}}(t) \mathbf{P}^{-1}(t) \Delta t)) \det(\mathbf{P}(t)) + o(\Delta t) \end{aligned}$$

Отже $\det(\mathbf{P}(t + \Delta t)) - \det(\mathbf{P}(t)) = \operatorname{tr}(\dot{\mathbf{P}}(t) \mathbf{P}^{-1}(t)) \det(\mathbf{P}(t)) \Delta t + o(\Delta t)$, що і доводить (2.3).

Приклад 2.4. Довести формули Френе.

Позначимо через $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\nu}$, $\boldsymbol{\beta}$ - орти дотичної, головної нормалі та бінормалі, s - натуральну координату, k , κ - кривину та кручення кривої ($T = 1/\kappa$, $\rho = 1/k$ - радіуси кручення та кривини). Якщо $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ - рівняння гладкої кривої, то

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}, \quad \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\tau} \times \boldsymbol{\nu}. \quad \text{Формули Френе мають вигляд:}$$

$$\begin{aligned}
1. \quad & \frac{d\tau}{ds} = k\mathbf{v} \\
2. \quad & \frac{d\mathbf{v}}{ds} = -k\tau + \kappa\beta \\
3. \quad & \frac{d\beta}{ds} = -\kappa\mathbf{v}
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Доведення.

1. Нехай крива є гладкою в деякому околі точки $M(\mathbf{r}(s))$. Оскільки $|\tau|=1$, то згідно з **Прикладом 2.3**, $\frac{d\tau}{ds} \perp \tau$, а отже, є нормаллю. Розглянемо дві точки на

кривій $M(\mathbf{r}(s))$ та $M'(\mathbf{r}(s+\Delta s))$ ($\Delta s \ll 1$) з дотичними $\tau(s)$ та $\tau(s+\Delta s)$.

Очевидно, $|\Delta\tau| = |\tau(s+\Delta s) - \tau(s)| = 2\sin(\Delta\varphi/2) = \Delta\varphi + O(\Delta s^2)$, де $\Delta\varphi$ - кут між

дотичними. Ввівши кривину як $k = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s}$ та враховуючи, що $\tau(s)$ та $\tau(s+\Delta s)$

в граничному положенні при $M \rightarrow M'$ визначають стичну площину,

отримаємо формулу 1. Також очевидно, що $\left| \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} \right| = \left| \frac{d\tau}{ds} \right| = |k\mathbf{v}| = k$ та $\mathbf{v} = 1/k \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}$.

$$3. \quad \frac{d\beta}{ds} = \frac{d(\tau \times \mathbf{v})}{ds} = \tau \times \frac{d\mathbf{v}}{ds} + \frac{d\tau}{ds} \times \mathbf{v} = \tau \times \frac{d\mathbf{v}}{ds} + k\mathbf{v} \times \mathbf{v} = \tau \times \frac{d\mathbf{v}}{ds}. \quad \text{А отже,}$$

$\frac{d\beta}{ds} \perp \beta \wedge \frac{d\beta}{ds} \perp \tau$. Звідси слідує, що $\frac{d\beta}{ds} = -\kappa\mathbf{v}$ де аналогічно попередньому

пункту прикладу $\kappa = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\psi}{\Delta s}$ де $\Delta\psi$ - кут між головними нормаллями в точках

$M(\mathbf{r}(s))$ та $M'(\mathbf{r}(s+\Delta s))$ $\mathbf{v}(s)$ та $\mathbf{v}(s+\Delta s)$.

2. Очевидно (див Вправу 2.4), що $\mathbf{v} = \beta \times \tau$ та $\tau = \mathbf{v} \times \beta$. А отже,:

$$\frac{d\mathbf{v}}{ds} = \frac{d(\beta \times \tau)}{ds} = \frac{d\beta}{ds} \times \tau + \beta \times \frac{d\tau}{ds} = -\kappa\mathbf{v} \times \tau + k\beta \times \mathbf{v} = \kappa\beta - k\tau$$

Приклад 2.5. Довести, що при русі матеріальної точки по траєкторії $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ ($s \in [0, S)$) за законом руху $s = s(t)$, швидкість та прискорення точки визначаються формулами: $\mathbf{v} = \boldsymbol{\tau} \dot{s}$, $\mathbf{w} = \mathbf{w}_\tau + \mathbf{w}_\nu = \boldsymbol{\tau} \ddot{s} + \nu k \dot{s}^2$.

Доведення. Оскільки закон руху має вигляд $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(s(t))$, то за аналітичним означенням швидкості та правилом диференціювання складної функції маємо:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \frac{ds}{dt} = \boldsymbol{\tau} \dot{s} \quad . \quad \text{Аналогічно,}$$

$$\mathbf{w} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d(\boldsymbol{\tau} \dot{s})}{dt} = \boldsymbol{\tau} \frac{d\dot{s}}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt} \dot{s} = \boldsymbol{\tau} \ddot{s} + \frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} \frac{ds}{dt} \dot{s} = \boldsymbol{\tau} \ddot{s} + \nu k \dot{s}^2 = \boldsymbol{\tau} \ddot{s} + \nu k \dot{s}^2.$$

Приклад 2.6. Два вали з різними радіусами обертаються та знаходяться в зчепленні без проковзування. Довести, що точки валів на лінії зчеплення мають однакові обертові прискорення.

Доведення. Розглянемо дві матеріальні точки валів M_1 та M_2 , що в даний момент часу розташовані в одній геометричній точці M , що знаходиться на лінії контакту валів. Як показано в **Прикладі 2.2**, швидкості цих матеріальних точок $\mathbf{v}_1(t)$ та $\mathbf{v}_2(t)$ диференційовані. Окрім того, за означенням контакту без проковзування $\mathbf{v}_1(t) = \mathbf{v}_2(t)$ в будь-який момент часу. Розглянемо довільний вектор $\mathbf{a}(t) = \hat{\mathbf{a}}(t) a(t)$ так, що $|\hat{\mathbf{a}}(t)| = 1$. Очевидно, $\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \hat{\mathbf{a}} \frac{da}{dt} + \frac{d\hat{\mathbf{a}}}{dt} a$. Згідно з

Прикладом 2.3. $\hat{\mathbf{a}} \cdot \frac{d\hat{\mathbf{a}}}{dt} = 0$, а отже, $\hat{\mathbf{a}} \cdot \frac{d\mathbf{a}}{dt} = \frac{da}{dt}$. Нехай $\mathbf{v}_1(t) = \mathbf{v}_2(t) = \boldsymbol{\tau} v(t)$. За

означенням, прискорення M_1 та M_2 : $\mathbf{w}_i(t) = \frac{d\mathbf{v}_i}{dt}$, $i = 1, 2$. Тому

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{w}_i(t) = \boldsymbol{\tau} \cdot \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \frac{dv}{dt}, \quad i = 1, 2.$$

Обертове прискорення точки твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі є дотичною складовою повного прискорення. Отже, твердження доведене.

Приклад 2.7. Стрижень AB рухається в площині та опирається без відриву на кут в точці C . Довести, що швидкість точки стрижня C' , яка в даний момент часу знаходиться в геометричній точці C , напрямлена вздовж AB .

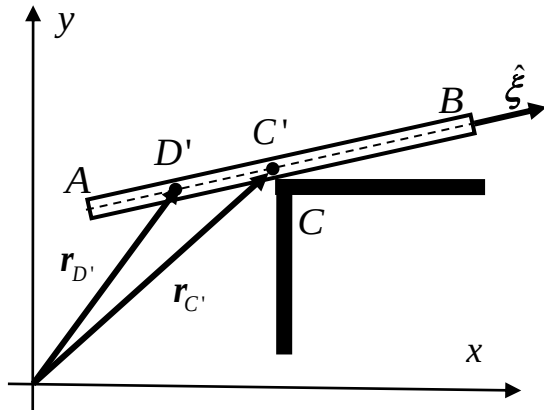


Рис. 6.

Доведення. Нехай лагранжева координата точки стрижня C' , яка в даний момент часу t розташовується в положенні точки кута C , дорівнює $\xi_{C'}$. Очевидно, що $\xi_{C'} = \xi_{C'}(t)$. Розглянемо довільну точку стрижня D' з лагранжевою координатою $\xi_{D'}$ ($\xi_{D'} = \text{const}$). Порахуємо швидкість точки D' . Оскільки

$$\mathbf{r}_{D'} = \mathbf{r}_{C'} + \mathbf{r}_{C'D'} = \mathbf{r}_{C'} + (\xi_{D'} - \xi_{C'}) \hat{\xi}, \text{ де } \hat{\xi} -$$

напрямний орт лагранжевої осі стрижня та $\mathbf{r}_{C'} = \text{const}$, $\xi_{D'} = \text{const}$, то

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{D'} &= \dot{\mathbf{r}}_{C'} + \dot{\mathbf{r}}_{C'D'} = \dot{\mathbf{r}}_{C'} + (\dot{\xi}_{D'} - \dot{\xi}_{C'}(t)) \hat{\xi}(t) + (\xi_{D'} - \xi_{C'}(t)) \dot{\hat{\xi}}(t) = \\ &= -\dot{\xi}_{C'}(t) \hat{\xi}(t) + (\xi_{D'} - \xi_{C'}(t)) \dot{\hat{\xi}}(t). \end{aligned}$$

Якщо в момент часу t точка D' збігається з точкою C' ($\xi_{D'} = \xi_{C'}$), то $\mathbf{v}_{D'} = \mathbf{v}_{C'} = -\dot{\xi}_{C'}(t) \hat{\xi}(t)$, тобто напрямлена вздовж осі стрижня.

Приклад 2.8. Кількість руху системи матеріальних точок з постійною масою можна знайти за формулою: $\mathbf{K} = m\mathbf{v}_c$ де $\mathbf{v}_c$ - швидкість руху центру інерції системи. Узагальніть цей вираз для системи точок зі змінними масами.

Розв'язок. За означенням, $\mathbf{K} = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i$ та $m\mathbf{r}_c = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i$. Диференціюючи

$$\text{останній вираз, отримаємо } \mathbf{K} = m\mathbf{v}_c + \frac{dm}{dt} \mathbf{r}_c - \sum_{i=1}^n \frac{dm_i}{dt} \mathbf{r}_i.$$

Приклад 2.9. Вивести рівняння теореми про зміну кількості руху системи матеріальних точок зі змінними масами.

Розв'язок. З означення кількості руху системи: $\frac{dK}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{dm_i}{dt} \mathbf{v}_i + \sum_{i=1}^n m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt}$. Згідно

з формулою Мещерського: $m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \mathbf{F}_i + (\mathbf{u}_i - \mathbf{v}_i) \frac{dm_i}{dt}$, $i = \overline{1, n}$ де $\mathbf{F}_i$ - сила, що діє

на точку, $\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_i(t, \tau)$ ($\mathbf{u}_i(t, \tau)$ - швидкість в момент часу t елементу маси який від'єднується чи приєднується до матеріальної точки в момент часу τ).

Просумувавши останній вираз по всім матеріальним точкам та враховуючи, що головний вектор зовнішніх сил рівний нулю (за 3-м законом Ньютона),

отримаємо $\frac{dK}{dt} = \mathbf{R}^{(3)} + \sum_{i=1}^n \frac{dm_i}{dt} \mathbf{u}_i$ де $\mathbf{R}^{(3)}$ - головний вектор зовнішніх сил,

прикладених до точок системи. Звернемо увагу на те, що кількість руху точки є зв'язаним вектором, але кількість руху системи вже є вільним вектором, оскільки він знаходиться як головний вектор системи зв'язаних векторів.

Приклад 2.10. Довести, що трансляційне перетворення координат $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{a}$ не змінює вигляд рівняння теореми про зміну моменту кількості руху матеріальної точки у випадку, коли $\ddot{\mathbf{a}} = 0$.

Доведення. В інерціальній системі відліку якщо $\mathbf{r}$ відраховується від нерухомої точки, рівняння теореми про зміну моменту кількості руху має вигляд:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times (m\mathbf{v})) = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \text{ де } \mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}. \text{ При вказаному перетворенні координат } \mathbf{r} = \mathbf{r}' - \mathbf{a},$$

$$\text{А отже,} \quad \frac{d}{dt}((\mathbf{r}' - \mathbf{a}) \times m(\dot{\mathbf{r}}' - \dot{\mathbf{a}})) = (\mathbf{r}' - \mathbf{a}) \times \mathbf{F} \quad \Leftrightarrow$$

$(\dot{\mathbf{r}}' - \dot{\mathbf{a}}) \times m(\dot{\mathbf{r}}' - \dot{\mathbf{a}}) + (\mathbf{r}' - \mathbf{a}) \times m(\ddot{\mathbf{r}}' - \ddot{\mathbf{a}}) = (\mathbf{r}' - \mathbf{a}) \times \mathbf{F}$. Перший доданок в лівій частині завжди рівний нулю, окрім того, за умовою $\ddot{\mathbf{a}} = 0$. Отримане рівняння зведеться до вигляду: $(\mathbf{r}' - \mathbf{a}) \times m\ddot{\mathbf{r}}' = (\mathbf{r}' - \mathbf{a}) \times \mathbf{F}$, або $(\mathbf{r}' - \mathbf{a}) \times (-m\ddot{\mathbf{r}}' + \mathbf{F}) = 0$.

Водночас, згідно з принципом Галілея (або першим законом Ньютона), змінена система координат є також інерціальна ($\dot{\mathbf{a}} = 0$) отже, в ній $m\ddot{\mathbf{r}}' = \mathbf{F}$.

Приклад 2.11. Довести, що при русі замкненої системи матеріальних точок зберігається як повний кінетичний момент так і кінетичний момент відносного

руху відносно центру інерції. Водночас, при аналізі інтегрованості такої системи корисним є лише збережений кінетичний момент відносного руху відносно центру інерції.

Доведення. Дійсно, оскільки на точки замкненої системи діють лише внутрішні сили, а отже, головний момент зовнішніх сил відносно нерухомої точки

$$\mathbf{M}_o^{(3)} = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{(3)}$$
 та головний момент зовнішніх сил відносно центру інерції

$$\mathbf{M}_c^{(3)} = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}'_i \times \mathbf{F}_i^{(3)}$$
 рівні нулю, то згідно з теоремами про зміну кінетичного

моменту відносно нерухомої точки $\frac{d}{dt} \mathbf{L}_O = \mathbf{M}_O^{(3)}$ ($\mathbf{L}_O = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times (m_i \dot{\mathbf{r}}_i)$) та

$$\frac{d}{dt} \mathbf{L}_{rc} = \mathbf{M}_c^{(3)}$$
 ($\mathbf{L}_{rc} = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}'_i \times (m_i \dot{\mathbf{r}}'_i)$). Звідси слідує, що, $\mathbf{L}_O = const$ та $\mathbf{L}_{rc} = const$.

Водночас, за теоремою про визначення кінетичного моменту системи

$$\mathbf{L}_O = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_C \times (m \dot{\mathbf{r}}_C) + \mathbf{L}_{rc},$$
 де $\mathbf{r}_C = \mathbf{r}_C(t)$ - закон руху центру інерції та m - повна

маса системи. Для замкненої системи за теоремою про збереження руху центру

інерції $\dot{\mathbf{r}}_C = \mathbf{v}_{C0} = const$ (оскільки $\mathbf{R}^{(3)} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{(3)} = 0$ то кількість руху системи

також зберігається), а отже, $\mathbf{r}_C = \mathbf{v}_{C0} t + \mathbf{r}_{C0}$ та

$$\mathbf{L}_O = \sum_{i=1}^N (\mathbf{v}_{C0} t + \mathbf{r}_{C0}) \times (m \mathbf{v}_{C0}) + \mathbf{L}_{rc} = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_{C0} \times (m \mathbf{v}_{C0}) + \mathbf{L}_{rc}.$$
 Як видно, $\mathbf{L}_O$

відрізняється від $\mathbf{L}_{rc}$ лише сталим доданком, а отже, не впливає на інтегрованість системи.

Приклад 2.12. Матеріальна точка рухається по внутрішній поверхні гладкої сфери за інерцією. Якою може бути траєкторія руху матеріальної точки?

Розв'язання. Звільнимось від в'язі, приклавши до матеріальної точки еквівалентну реакцію. З огляду на гладкість сфери, реакція має лише нормальну складову, а отже, її лінія дії завжди проходить через центр сфери. За другим законом Ньютона сила, що діє на матеріальну точку завжди лежить в стичній

площині до траєкторії, отже, стична площина до траєкторії в будь-який момент часу проходить через центр сфери. Момент кількості руху точки відносно центру сфери зберігається, отже, за теоремою площ стична площина є нерухомою (і як доведено, проходить через центр сфери). Таким чином, матеріальна точка може рухатись за інерцією лише по колу великого діаметру з постійною за величиною швидкістю.

Є й більш просте розв'язання цієї задачі. Згідно з результатами Вправи 2.14 . траєкторія руху за інерцією матеріальної точки по довільній однозв'язній гладкій поверхні лежить на геодезичній лінії цієї поверхні. Геодезична лінія сфери - коло великого діаметру.

Приклад 2.13. Довести, що для довільного ортогонального тензора $\mathbf{P} = \mathbf{P}(t), t > 0$ справедливе твердження, що $\dot{\mathbf{P}}\mathbf{P}^T$ є антисиметричним тензором.

Доведення. Дійсно: $\mathbf{P}\mathbf{P}^T = \mathbf{P}\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{I} \Rightarrow \frac{d}{dt}(\mathbf{P}\mathbf{P}^T) = \frac{d\mathbf{P}}{dt}\mathbf{P}^T + \mathbf{P}\frac{d\mathbf{P}^T}{dt} = \dot{\mathbf{P}}\mathbf{P}^T + \mathbf{P}\dot{\mathbf{P}}^T = \mathbf{0}$.

А отже, $\dot{\mathbf{P}}\mathbf{P}^T = -\mathbf{P}\dot{\mathbf{P}}^T = -(\dot{\mathbf{P}}\mathbf{P}^T)^T$.

Приклад 2.14. Довести, що необхідною та достатньою умовою того, що $\mathbf{a} = \mathbf{a}(t), t > 0$ є таким, що обертається разом з тілом є умова:

$$\dot{\mathbf{a}}(t) = \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{a}(t) \quad (2.5)$$

Доведення.

Необхідність. Нехай $\mathbf{a}$ обертається разом з тілом, тоді, за означенням: $\mathbf{a}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{a}(0) \Rightarrow \dot{\mathbf{a}}(t) = \dot{\mathbf{A}}(t)\mathbf{a}(0)$. Водночас $\mathbf{a}(0) = \mathbf{A}^{-1}(t)\mathbf{a}(t) \Rightarrow$ (через ортогональність $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$) $\dot{\mathbf{a}}(t) = \dot{\mathbf{A}}(t)\mathbf{A}^T(t)\mathbf{a}(t) = \boldsymbol{\Omega}(t)\mathbf{a}(t)$. Згідно з результатами Прикладу 2.13., $\boldsymbol{\Omega}$ є антисиметричним тензором та за результатами Прикладу 1.17. він асоціюється з аксіальним вектором $\boldsymbol{\omega}: \boldsymbol{\Omega}\mathbf{a} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}$.

Достатність. Розглянемо $\mathbf{b}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{a}(0)$. Для нього:

$$\dot{\mathbf{b}}(t) = \dot{\mathbf{A}}(t)\mathbf{a}(0) = \dot{\mathbf{A}}(t)\mathbf{A}^T(t)\mathbf{a}(t) = \boldsymbol{\Omega}(t)\mathbf{a}(t) = \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{a}(t) .$$

Отже, оскільки, $\mathbf{b}(0) = \mathbf{A}(0)\mathbf{a}(0) = \mathbf{a}(0)$, то вектори $\mathbf{a} = \mathbf{a}(t)$ та $\mathbf{b} = \mathbf{b}(t)$ є розв'язками однакових

задач Коші: $\dot{\mathbf{a}}(t) = \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{a}(t), t > 0 \wedge \mathbf{a}(0) = \mathbf{a}(0)$ та

$\dot{\mathbf{b}}(t) = \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{a}(t), t > 0 \wedge \mathbf{b}(0) = \mathbf{a}(0)$. Диференціальні рівняння задачі Коші розв'язані відносно старшої похідної та є лінійними. Отже за теоремою Коші про єдиність розв'язку задачі Коші, їхні розв'язки збігаються:
 $\mathbf{a}(t) = \mathbf{b}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{a}(0), t > 0$

Приклад 2.15. Використовуючи результат **Прикладу 2.14.** довести формулу Ейлера для лінійної швидкості твердого тіла з нерухомою точкою.

Доведення. Нехай деяка точка $M(\xi)$ твердого тіла з нерухомою точкою задається в лагранжевому описі вектором $\xi_M = \xi_i \xi_{Mi}$, а її закон руху $\mathbf{r}_M = \mathbf{r}_M(\xi_M, t), t > 0$. Нехай в момент часу $t = 0$ лагранжеві та ейлерові орти збігаються $\mathbf{i}_i = \xi_i, i = \overline{1,3}$, отже, $\mathbf{r}_M(\xi_M, 0) = \xi_M$. Згідно з теоремою Ейлера, $\mathbf{r}_M(\xi_M, t) = \mathbf{A}(t)\xi_M = \mathbf{A}(t)\mathbf{r}_M(\xi_M, 0), t > 0$, де $\mathbf{A} = \mathbf{A}(t)$ - тензор обертання , матриця якого в $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$ є матрицею афінного перетворення $\{\mathbf{A}(t)\} = \mathbf{A}(\psi(t), \theta(t), \varphi(t))$ визначеного в **Прикладі 1.7.** ($\psi = \psi(t), \theta = \theta(t), \varphi = \varphi(t), t > 0$ - закон руху твердого тіла з нерухомою точкою). Отже, $\mathbf{r}_M$ є вектором, що обертається разом з тілом та згідно з **Прикладом 2.14** :
 $\mathbf{v}_M(\xi_M, t) = \dot{\mathbf{r}}_M(\xi_M, t) = \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{r}_M(\xi_M, t), t > 0$, де $\boldsymbol{\omega}(t)$ є аксіальним вектором (вектором миттєвої кутової швидкості твердого тіла з нерухомою точкою), що асоціюється з антисиметричним тензором $\boldsymbol{\Omega}(t) = \dot{\mathbf{A}}(t)\mathbf{A}^T(t)$.

Приклад 2.16. Довести, що формулу теореми про зміну кінетичного моменту твердого тіла з нерухомою точкою можна подати у вигляді: $\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L}_O = \mathbf{M}_O$.

Доведення. За теоремою про зміну кінетичного моменту твердого тіла з нерухомою точкою $\dot{\mathbf{L}}_O = \mathbf{M}_O$, де $\mathbf{L}_O = \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}$ - кінетичний момент тіла відносно нерухомої точки, $\mathbf{M}_O$ - головний момент зовнішніх сил, прикладених до тіла відносно нерухомої точки. Як слідує з **Прикладу 1.10.** , $\mathbf{J}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{J}(0)\mathbf{A}^T(t)$ - момент інерції твердого тіла (побудований відносно нерухомої точки) є тензором, що обертається разом з тілом. Згідно з правилом Лейбніца

$\dot{L}_O = \mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \dot{\mathbf{J}}\boldsymbol{\omega}$. Розглянемо $\dot{\mathbf{J}}(t) = \dot{\mathbf{A}}(t)\mathbf{J}(0)\mathbf{A}^T(t) + \mathbf{A}(t)\mathbf{J}(0)\dot{\mathbf{A}}^T(t)$ (де враховано, що $\frac{d\mathbf{A}^T}{dt} = \dot{\mathbf{A}}^T$). Оскільки $\mathbf{J}(0) = \mathbf{A}^T(t)\mathbf{J}(t)\mathbf{A}(t)$, то завдяки ортогональності тензора $\mathbf{A}$ має місце $\dot{\mathbf{J}} = \dot{\mathbf{A}}\mathbf{A}^T\mathbf{J}\mathbf{A}\mathbf{A}^T + \mathbf{A}\mathbf{A}^T\mathbf{J}\mathbf{A}\dot{\mathbf{A}}^T = \dot{\mathbf{A}}\mathbf{A}^T\mathbf{J} + \mathbf{J}\mathbf{A}\dot{\mathbf{A}}^T$. В Прикладі 2.14. доведено, що $\boldsymbol{\Omega}(t) = \dot{\mathbf{A}}(t)\mathbf{A}^T(t)$ є антисиметричним тензором, з яким асоціюється вектор миттєвої кутової швидкості тіла так, що $\boldsymbol{\omega} : \boldsymbol{\Omega}\mathbf{a} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}$. Враховуючи, що $\mathbf{A}\dot{\mathbf{A}}^T = (\dot{\mathbf{A}}\mathbf{A}^T)^T = \boldsymbol{\Omega}^T = -\boldsymbol{\Omega}$, отримаємо: $\dot{\mathbf{J}}\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\Omega}\mathbf{J}\boldsymbol{\omega} - \mathbf{J}\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}) - \mathbf{J}(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L}_O$. Отже, дійсно, $\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L}_O = \mathbf{M}_O$.

2.4. Вправи

2.1. Розглянемо тверде тіло з нерухомою точкою. Чи завжди вектори кута повороту, кутової швидкості та кутового прискорення тіла $(\boldsymbol{\varphi}(t), \boldsymbol{\omega}(t), \boldsymbol{\varepsilon}(t))$ є неперервними функціями часу?.

2.2. Розглянемо стаціонарний потік ідеальної (в'язкої) рідини. Чи є вектори швидкості та прискорення руху окремо взятої частинки рідини (субфізичного елементу) завжди неперервними?

2.3. Довести, що в точці гладкості кривої $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$, $\boldsymbol{\tau} = d\mathbf{r} / ds$ є ортом.

2.4. Для Прикладу 2.3. довести, що $\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\beta}$, $\kappa = \frac{\frac{d\mathbf{r}}{ds} \cdot \left(\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} \times \frac{d^3\mathbf{r}}{ds^3} \right)}{\left(\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} \right)^2}$.

2.5. Рух точки по гладкій кривій задано координатним способом в прямокутній

декартовій системі координат: $\begin{cases} x_1 = x_1(t) \\ x_2 = x_2(t), t \in [0, T) \\ x_3 = x_3(t) \end{cases}$. Визначити кривину

траєкторії в точці в якій матеріальна точка знаходиться в момент часу t .

2.6. Узагальнити результат **Прикладу 2.6.** на випадок вільного руху двох тіл, що знаходяться в точковому контакті без проковзування. Чи справедливе твердження **Прикладу 2.6.** при можливості проковзування?

2.7. Узагальнити результат **Прикладу 2.7.** Показати, що при ковзанні без відриву від кута довільної плоскої фігури, швидкість точки дотику фігури буде рівна нулю чи напрямлена по дотичній до контуру фігури в точці дотику.

2.8. Довести, що якщо матеріальна точка в заданому положенні на траєкторії має швидкість $\mathbf{v}$ та прискорення $\mathbf{w}$, то радіус кривини її траєкторії визначається формулою $\rho = v^3 / |\mathbf{v} \times \mathbf{w}|$.

2.9. Довести, що якщо матеріальна точка рухається згідно з законом $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ та її прискорення $\mathbf{w}(t)$ таке, що завжди $\mathbf{r}(t) \times \mathbf{w}(t) = 0$, то траєкторією точки є плоска крива.

2.10. Рівняння теореми про рух центру інерції матеріальної системи з постійними масами має вигляд: $m\mathbf{w}_c = \mathbf{R}^{(3)}$, де $\mathbf{w}_c$ - прискорення центру інерції системи, а $\mathbf{R}^{(3)}$ - головний вектор зовнішніх сил, прикладених до точок системи. Користуючись результатами **Прикладу 2.8.** та **Прикладу 2.9.** виведіть формулу цієї теореми для випадку системи зі змінними масами.

2.11. Довести твердження **Прикладу 2.10.** користуючись теоремою Коріоліса. Чи справедливе твердження **Прикладу 2.10.** для системи матеріальних точок?

2.12. Довести, що інтеграл збереження руху центру інерції системи матеріальних точок та інтеграл кількості руху системи не є лінійно незалежними.

2.13. Матеріальна точка рухається під дією сили $\mathbf{F}$, момент якої відносно точки O має властивість: $\mathbf{M}_O(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{a}_i = 0$, $i = \overline{1,3}$, де $\mathbf{a}_i = \text{const}$ - трійка не компланарних векторів ($\mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3) \neq 0$). Довести, що в цьому випадку існує три скалярних ізолювальних інтеграли руху (векторний момент кількості руху).

Водночас, при виконанні умови $\mathbf{M}_O(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{a}_i = 0$, $i = \overline{1,2}$ так, що $\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 \neq 0$, існує лише один скалярний інтеграл.

2.14. Довести, що траєкторія руху за інерцією матеріальної точки по довільній однозв'язній гладкій поверхні лежить на геодезичній лінії цієї поверхні.

2.15. По аналогії з **Прикладом 2.15.** записати вираз для лінійної швидкості довільної точки вільного твердого тіла через закон руху тіла: $\mathbf{r}_O = \mathbf{r}(t)$, $\psi = \psi(t), \theta = \theta(t), \varphi = \varphi(t), t > 0$.

2.1. Довести, що для $\forall \mathbf{P} = \mathbf{P}(t) : \exists \mathbf{P}^{-1}(t)$ з диференційованості $\mathbf{P}$ слідує диференційованість $\mathbf{P}^{-1}$.

3. Функції від векторного аргументу. Скалярні, векторні та тензорні поля

3.1. Скалярні, векторні та тензорні поля. Диференційованість, інтегрованість та головні властивості

Поняття скалярного, векторного та тензорного полів.

Неперервність та диференційованість.

Означення скалярного, векторного та тензорного полів. Скалярним, векторним та тензорним полем називається частина простору в якій кожній геометричній точці надається додаткова властивість яка може бути описана деяким скаляром, вектором чи тензором.

Скалярні, векторні та тензорні поля описуються заданням скалярної, векторної чи тензорної функції векторного аргументу $\varphi = \varphi(\mathbf{r})$, $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{r})$, $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{r})$.

В координатному описі скаляр та вектор поля можуть описуватись як функції компонентів радіус-вектора: $\varphi = \varphi(x_1, x_2, x_3)$, $\mathbf{a} = a_i(x_1, x_2, x_3)\mathbf{i}_i$, $\mathbf{P} = p_{ij}(x_1, x_2, x_3)\mathbf{i}_i \otimes \mathbf{i}_j$.

У випадку, коли функції полів явним чином залежать від часу $\varphi = \varphi(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$, поля називаються нестационарними, в іншому випадку - стационарними.

Означення неперервності скаляра, вектора та тензора полів. Скаляр, вектор та тензор полів називаються неперервними, якщо $\lim_{\Delta \mathbf{r} \rightarrow 0} (\varphi(\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}) - \varphi(\mathbf{r})) = 0$ та $\lim_{\Delta \mathbf{r} \rightarrow 0} (\mathbf{a}(\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}) - \mathbf{a}(\mathbf{r})) = 0$, $\lim_{\Delta \mathbf{r} \rightarrow 0} (\mathbf{P}(\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}) - \mathbf{P}(\mathbf{r})) = 0$ відповідно, для всіх точок полів.

Означення диференційованості скаляра та вектора. Неперервні скаляр та вектор називаються диференційованими в точці $M(\mathbf{r})$, якщо існує деякий окіл цієї точки, такий, що для всіх точок околу $M'(\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r})$ існують границі

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\varphi(\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}) - \varphi(\mathbf{r})}{\Delta s}, \quad \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\mathbf{a}(\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}) - \mathbf{a}(\mathbf{r})}{\Delta s} \quad \text{відповідно, де } \Delta s = |\Delta \mathbf{r}| + o(|\Delta \mathbf{r}|) -$$

приріст натуральної координати гладкої кривої, що лежить в околі точки M та проходить через точки M та M' .

В окремих випадках кажуть про частинну диференційованість скаляра чи вектора полів. Розглянемо деякий напрямок $\hat{\tau}$ ($|\hat{\tau}|=1$) та покладемо в границях $\Delta \mathbf{r} = \hat{\tau} \Delta s + o(\Delta s)$. Якщо в якості $\hat{\tau}$ вибираються орти системи $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$, тобто $\hat{\tau} = \mathbf{i}_1 \vee \mathbf{i}_2 \vee \mathbf{i}_3$, то кажуть про частинну диференційованість по координатах.

Границі (якщо існують)
$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{\varphi(x_1 + \Delta x_1, x_2, x_3) - \varphi(x_1, x_2, x_3)}{\Delta x_1},$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = \lim_{\Delta x_2 \rightarrow 0} \frac{\varphi(x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3) - \varphi(x_1, x_2, x_3)}{\Delta x_2}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} = \lim_{\Delta x_3 \rightarrow 0} \frac{\varphi(x_1, x_2, x_3 + \Delta x_3) - \varphi(x_1, x_2, x_3)}{\Delta x_3}$$

називаються частинними похідними.

Поняття диференційованості полів можна поширити на тензорні поля наступним чином.

Означення порядку малості. Нехай $f = f(x)$, відображає підмножину R або V в підмножину R або V чи є оператором лінійного перетворення з V в V .

Тоді $f(x)$ прямує до нуля швидше ніж x : $f(x) = o(x)$ при $x \rightarrow 0$ якщо

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} = 0, \quad \text{де } \|f(x)\| \text{ є нормою } f(x) \text{ (у випадку відображення -}$$

узгодженою нормою матриці лінійного перетворення).

Запис, $f(x) = g(x) + o(x)$ означає, що $f(x) - g(x) = o(x)$.

Узагальнене означення диференційованості. Назвемо $f = f(x)$ диференційованою по x , якщо існує перетворення $Df(x)$ таке, що $f(x + \Delta x) = f(x) + Df(x)[\Delta x] + o(\Delta x)$ при $\Delta x \rightarrow 0$. Якщо $Df(x)$ (похідна від $f(x)$ по x) існує, воно є єдиним та для довільних Δx та визначається границею

$$Df(x)[\Delta x] = \lim_{\substack{\alpha \rightarrow 0 \\ \alpha \in R}} \frac{1}{\alpha} (f(x + \alpha \Delta x) - f(x)) = \left. \frac{df(x + \alpha \Delta x)}{d\alpha} \right|_{\alpha=0}. \quad (3.1)$$

Узагальнене означення диференціювання узагальнює також диференціювання по скалярному аргументу:

$$D\mathbf{a}(t)[\alpha] = \alpha \dot{\mathbf{a}}(t) . \quad (3.2)$$

Якщо $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ є диференційованою на деякій підмножині, то $D\mathbf{f}(\mathbf{x})$ є відображенням цієї підмножини в підмножину простору вищого рангу. В окремих випадках є сенс говорити про неперервну диференційованість $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ 1-го та вищого порядків, тобто належність $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ до класів $C^1, C^2, \dots$.

Продемонструємо на прикладах побудову узагальненої похідної.

1. При диференціюванні скаляра $\varphi(\mathbf{r}) = \mathbf{r}^2$ по вектору:

$$\varphi(\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}) = \mathbf{r}^2 + 2\mathbf{r} \cdot \Delta\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}^2 = \varphi(\mathbf{r}) + 2\mathbf{r} \cdot \Delta\mathbf{r} + o(\Delta\mathbf{r}) . \text{ Отже, } D\varphi(\mathbf{r})[\Delta\mathbf{r}] = 2\mathbf{r} \cdot \Delta\mathbf{r} .$$

2. При диференціюванні лінійного відображення $\mathbf{L}(\mathbf{a}) = \mathbf{P}\mathbf{a}$ по вектору:

$$\mathbf{L}(\mathbf{a} + \Delta\mathbf{a}) = \mathbf{P}(\mathbf{a} + \Delta\mathbf{a}) = \mathbf{P}\mathbf{a} + \mathbf{P}\Delta\mathbf{a} = \mathbf{L}(\mathbf{a}) + \mathbf{P}\Delta\mathbf{a} . \text{ Отже, } D\mathbf{L}(\mathbf{a}) = \mathbf{P} .$$

3. При диференціюванні тензорної функції по тензору $\mathbf{G}(\mathbf{P}) = \mathbf{P}^2$:

$$\mathbf{G}(\mathbf{P} + \Delta\mathbf{P}) = \mathbf{P}^2 + \mathbf{P}\Delta\mathbf{P} + \Delta\mathbf{P}\mathbf{P} + o(\Delta\mathbf{P}) = \mathbf{G}(\mathbf{P}) + \mathbf{P}\Delta\mathbf{P} + \Delta\mathbf{P}\mathbf{P} + o(\Delta\mathbf{P}) . \quad \text{Отже, } D\mathbf{G}(\mathbf{P})[\Delta\mathbf{P}] = \mathbf{P}\Delta\mathbf{P} + \Delta\mathbf{P}\mathbf{P} .$$

4. При диференціюванні скалярної функції по тензору $\varphi(\mathbf{P}) = \det(\mathbf{P})$:

$$\det(\mathbf{P} + \Delta\mathbf{P}) = \det((\mathbf{I} + \Delta\mathbf{P}\mathbf{P}^{-1})\mathbf{P}) = \det(\mathbf{P})\det(\mathbf{I} + \Delta\mathbf{P}\mathbf{P}^{-1}) . \text{ Оскільки згідно з (1.19)}$$

при $\lambda = -1$ виконується рівність $\det(\mathbf{I} + \mathbf{Q}) = 1 + \text{tr}(\mathbf{Q}) + o(\mathbf{Q})$ то

$$\det(\mathbf{P} + \Delta\mathbf{P}) = \det(\mathbf{P})(1 + \text{tr}(\Delta\mathbf{P}\mathbf{P}^{-1})) + o(\Delta\mathbf{P}) = \varphi(\mathbf{P}) + \det(\mathbf{P})\text{tr}(\Delta\mathbf{P}\mathbf{P}^{-1}) + o(\Delta\mathbf{P}) . \quad \text{А}$$

отже, $D\det(\mathbf{P})[\Delta\mathbf{P}] = \det(\mathbf{P})\text{tr}(\Delta\mathbf{P}\mathbf{P}^{-1})$.

Ціпне правило (диференціювання складної функції).

Якщо $\mathbf{g} = \mathbf{g}(\mathbf{x})$ диференційована по $\mathbf{x}$, а $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{y})$ - диференційована по $\mathbf{y}$: $\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x})$, то композиція: $\mathbf{h} = \mathbf{f} \circ \mathbf{g}$: $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{x}))$ є диференційованою по $\mathbf{x}$ та

$$D\mathbf{h}(\mathbf{x}) = D\mathbf{f}(\mathbf{y}) \circ D\mathbf{g}(\mathbf{x}) \quad (3.3)$$

або $D\mathbf{h}(\mathbf{x})[\Delta\mathbf{x}] = D\mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{x}))[D\mathbf{g}(\mathbf{x})[\Delta\mathbf{x}]]$.

Зокрема, при диференціюванні по $t \in \mathbb{R}$: $D\mathbf{h}(t)[\Delta t] = \Delta t \dot{\mathbf{h}}(t)$, $D\mathbf{g}(t)[\Delta t] = \Delta t \dot{\mathbf{g}}(t)$, $\frac{d}{dt} \mathbf{f}(\mathbf{g}(t)) = D(\mathbf{f}(\mathbf{g}(t)))[\dot{\mathbf{g}}(t)]$. (3.4)

Означення поверхні рівня (ізоповерхні) скалярного поля. Поверхнею рівня скалярного поля зі скаляром $\varphi(\mathbf{r})$ називається поверхня, що задається рівнянням $\varphi(\mathbf{r}) = \text{const}$.

Означення векторної лінії векторного поля. Векторною лінією векторного поля з вектором $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ називається кожна крива $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$, така, що вектор дотичної до неї в кожній точці $\hat{\mathbf{t}} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}$ збігається з напрямком вектора поля

$$\hat{\mathbf{a}}(\mathbf{r}) = \mathbf{a}(\mathbf{r}) / |\mathbf{a}(\mathbf{r})| .$$

Очевидно, що векторною лінією векторного поля з вектором $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ є кожна крива $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$, що задовольняє диференціальне рівняння $\frac{d\mathbf{r}}{ds} \times \mathbf{a}(\mathbf{r}) = 0$.

В базовій системі координат рівняння ліній рівня визначається диференціальним рівнянням

$$\frac{dx_1}{a_1(x_1, x_2, x_3)} = \frac{dx_2}{a_2(x_1, x_2, x_3)} = \frac{dx_3}{a_3(x_1, x_2, x_3)} . \quad (3.5)$$

Означення векторної трубки векторного поля. Векторною трубкою векторного поля називається така поверхня, що генерується векторними лініями векторного поля, та існує така скінченна плоска фігура (плоский переріз векторної трубки), що через кожну точку граничного контуру фігури проходить векторна лінія поля та кожна векторна лінія, що лежить на цій поверхні перетинає контур (тобто, між точками граничного контуру плоского перерізу та векторними лініями існує взаємно однозначна відповідність).

. Похідна скаляра та вектора за напрямком

Означення похідної скаляра за напрямком. Похідною скаляра поля $\varphi = \varphi(\mathbf{r})$ за напрямком $\hat{\mathbf{s}}$ ($|\mathbf{s}|=1$) називається границя (якщо така існує):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \hat{\mathbf{s}}} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\varphi(\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}) - \varphi(\mathbf{r})}{\Delta s}, \text{ де } \Delta \mathbf{r} = \Delta s \hat{\mathbf{s}}. \quad (3.6)$$

При координатному представленні в системі координат $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \hat{\mathbf{s}}} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} s_i, \quad \hat{\mathbf{s}} = s_i \mathbf{i}_i. \quad (3.7)$$

Похідна скаляра $\varphi = \varphi(\mathbf{r})$ за вектором $\mathbf{s}$ визначається через похідну скаляра за напрямком:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{s}} = \frac{\partial \varphi}{\partial \hat{\mathbf{s}}} |\mathbf{s}| = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} s_i, \quad \mathbf{s} = \hat{\mathbf{s}} |\mathbf{s}| = s_i \mathbf{i}_i. \quad (3.8)$$

Означення похідної вектора за напрямком. Похідною вектора поля $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{r})$ за напрямком $\hat{\mathbf{s}}$ ($|\hat{\mathbf{s}}|=1$) називається границя (якщо така існує):

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \hat{\mathbf{s}}} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\mathbf{a}(\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}) - \mathbf{a}(\mathbf{r})}{\Delta s}, \text{ де } \Delta \mathbf{r} = \Delta s \hat{\mathbf{s}}. \quad (3.9)$$

Інваріантне означення похідної вектора за напрямком. Похідна вектора за напрямком в точці $M(\mathbf{r})$ можна також визначити за формулою:

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \hat{\mathbf{s}}} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oint_S (\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{s}}) \mathbf{a} dS}{V}, \quad (3.10)$$

де V та S - об'єм та поверхня замкненого просторового околу точки M .

При координатному представленні в системі координат $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$ похідна вектора за напрямком може бути записана у вигляді:

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \hat{\mathbf{s}}} = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x_i} s_i, \quad \hat{\mathbf{s}} = s_i \mathbf{i}_i. \quad (3.11)$$

Місцева та повна похідні по скалярному аргументу

Означення місцевої похідної скаляра та вектора полів. Якщо скаляр та вектор полів залежать від скалярного аргументу t : $\varphi = \varphi(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{r}, t)$, то місцевими похідними називаються частинні похідні функцій поля по скалярному аргументу: $\frac{\partial \varphi(\mathbf{r}, t)}{\partial t}$, $\frac{\partial \mathbf{a}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}$.

Означення повної похідної скаляра та вектора полів. Нехай скаляр та вектор полів залежать від скалярного аргументу t : $\varphi = \varphi(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{r}, t)$, та значення цих функцій розглядається на гладких кривих, що параметризовані відносно t :

$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, а отже, $d\mathbf{r} = \boldsymbol{\tau} dt$, де $\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$ напрямлений по дотичній до кривої. Тоді

повними похідними називаються похідні функцій поля по скалярному аргументу вздовж кривої:

$$\frac{d\varphi(\mathbf{r}(t), t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\varphi(\mathbf{r}(t + \Delta t), t + \Delta t) - \varphi(\mathbf{r}(t), t)}{\Delta t},$$

$$\frac{d\mathbf{a}(\mathbf{r}(t), t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{a}(\mathbf{r}(t + \Delta t), t + \Delta t) - \mathbf{a}(\mathbf{r}(t), t)}{\Delta t}.$$

Інтегрування скалярів та векторів

Означення лінійного інтеграла вздовж кривої. Лінійними інтегралами скаляра $\varphi = \varphi(\mathbf{r})$ та вектора $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{r})$ полів вздовж кусково-гладкої орієнтованої кривої L називаються відповідно криволінійні інтеграли першого та другого роду:

$$\int_L \varphi(\mathbf{r}) d|\mathbf{r}| = \int_L \varphi(\mathbf{r}) ds, \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} \int_L \mathbf{a}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} &= [d\mathbf{r} = \hat{\boldsymbol{\tau}} ds] = \int_L \mathbf{a}(\mathbf{r}) \cdot \hat{\boldsymbol{\tau}} ds = \int_L a_\tau(\mathbf{r}) ds = \\ &= \int_L a_1(x_1, x_2, x_3) dx_1 + a_2(x_1, x_2, x_3) dx_2 + a_3(x_1, x_2, x_3) dx_3 \end{aligned} \quad (3.13)$$

При зміні напрямку орієнтації кривої на протилежний, лінійний інтеграл скаляра не змінюється, тоді як лінійний інтеграл вектора змінює знак на протилежний.

Означення циркуляції векторного поля вздовж контуру. Циркуляцією векторного поля вздовж замкненого контуру C називається лінійний інтеграл вектора поля $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{r})$ вздовж орієнтованого контуру (замкненої кривої) C :

$$\oint_C \mathbf{a}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}.$$

Означення потоку векторного поля через поверхню. Поток векторного поля через однозв'язну кусково-гладку, орієнтовану поверхню S називається поверхневий інтеграл першого роду від нормальної проєкції вектора поля по поверхні S (еквівалентно, поверхневий інтеграл другого роду від вектора поля):

$$\int_S \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S} = \left[d\mathbf{S} = \hat{n} dS, \hat{n} - \text{нормаль до } S \right] = \int_S a_n dS = \int_S (a_1 dx_2 dx_3 + a_2 dx_1 dx_3 + a_3 dx_1 dx_2) \quad (3.14)$$

Орієнтація поверхні (додатна сторона поверхні) визначається напрямком нормалі.

3.2. Градієнт скалярного поля. Потенціальність вектора

Означення градієнта скалярного поля. Градієнтом скалярного поля з диференційованим скаляром $\varphi = \varphi(\mathbf{r})$ в точці $M(\mathbf{r})$ називається вектор:

$$\text{grad } \varphi = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oint_S \hat{n} \varphi dS}{V} \quad (\text{grad } \varphi \stackrel{\text{def}}{=} \nabla \varphi), \quad (3.15)$$

де V та S - об'єм та поверхня замкненого просторового околу точки M .

Означення потенціального векторного поля. Вектор $\mathbf{a}(\mathbf{r})$, що має представлення у вигляді градієнта деякого скаляра $\varphi(\mathbf{r})$ (потенціалу поля $\mathbf{a}(\mathbf{r})$):

$\mathbf{a} = \text{grad} \varphi$, називається потенціальним вектором, а поле такого вектора називається потенціальним векторним полем.

Приведемо основні властивості та формули градієнта скаляра.

1. В базовому координатному представленні градієнт записується як:

$$\text{grad} \varphi = \mathbf{i}_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \mathbf{i}_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \mathbf{i}_3 \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} = \left(\mathbf{i}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \mathbf{i}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \mathbf{i}_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \varphi. \quad (3.16)$$

Диференціальний оператор, що в координатному описі відносно $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$ має представлення $\nabla = \mathbf{i}_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, називається оператором набла (оператором Гамільтона).

2. Згідно з (3.8) та (3.16) маємо:

$$\text{grad} \varphi \cdot \mathbf{a} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} a_i = \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{a}}, \quad (3.17)$$

$$\text{зокрема } d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx_i = \nabla \varphi \cdot d\mathbf{r}. \quad (3.18)$$

Доведемо, що

$$d\varphi = \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} \Leftrightarrow \mathbf{a} = \text{grad} \varphi \quad (3.19)$$

Дійсно, $d\varphi = \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} \wedge d\varphi = \text{grad} \varphi \cdot d\mathbf{r} \Rightarrow \forall d\mathbf{r} : (\text{grad} \varphi - \mathbf{a}) \cdot d\mathbf{r} = 0 \Leftrightarrow \text{grad} \varphi - \mathbf{a} = 0$.

3. Покажемо справедливість формул: $\max_{\hat{\mathbf{s}}: |\hat{\mathbf{s}}|=1} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial \hat{\mathbf{s}}} \right| = |\text{grad} \varphi|$ та

$$\arg \max_{\hat{\mathbf{s}}: |\hat{\mathbf{s}}|=1} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial \hat{\mathbf{s}}} \right| = \pm \frac{\text{grad} \varphi}{|\text{grad} \varphi|}. \quad (3.20)$$

Дійсно, з (3.17) слідує, що $\left| \frac{\partial \varphi}{\partial \hat{\mathbf{s}}} \right| = |\text{grad} \varphi \cdot \hat{\mathbf{s}}| \leq |\text{grad} \varphi| |\hat{\mathbf{s}}|_{|\hat{\mathbf{s}}|=1} = |\text{grad} \varphi|$. Окрім того,

$$|\text{grad} \varphi| |\hat{\mathbf{s}}| = |\text{grad} \varphi| \Leftrightarrow \hat{\mathbf{s}} \parallel \text{grad} \varphi$$

4. Покажемо, що

$$\text{grad} \varphi(r) = \varphi'(r) \frac{\mathbf{r}}{r}, \text{ де } r = |\mathbf{r}|. \quad (3.21)$$

Дійсно, $d\varphi(r) = \varphi'(r)dr$, та,

$$dr^2 = 2rdr = d\mathbf{r}^2 = 2\mathbf{r}d\mathbf{r} \Rightarrow dr = \frac{\mathbf{r}}{r}d\mathbf{r} \Rightarrow d\varphi(r) = \varphi'(r) \frac{\mathbf{r}}{r}d\mathbf{r}. \text{ А отже, згідно з (3.19)}$$

отримуємо (3.21). Зокрема, $\text{grad} r = \frac{\mathbf{r}}{r} = \hat{\mathbf{r}}.$

5. Приведемо базові властивості градієнта від скаляру.

$$\begin{aligned} \text{grad}(\varphi + \psi) &= \text{grad} \varphi + \text{grad} \psi \\ \text{grad}(\lambda \varphi) &= \lambda \text{grad} \varphi, (\lambda = \text{const}) \\ \text{grad} \Phi(\varphi) &= \Phi'(\varphi) \text{grad} \varphi \end{aligned} \quad (3.22)$$

6. Покажемо, що $\text{grad} \Phi(x, y, z)$ має напрямок нормалі до поверхні $\Phi(x_1, x_2, x_3) = 0$ (в точці гладкості). Дійсно, $d\Phi(x, y, z) = 0$. Згідно з (3.18) $d\Phi = \text{grad} \Phi \cdot d\mathbf{r}$. Отже, $\text{grad} \Phi$ ортогональний до вектора $d\mathbf{r} = \hat{\mathbf{t}} ds$, що має дотичний напрямок до поверхні.

7. При формальному використанні векторного оператора набла, $\hat{\mathbf{s}} \cdot \nabla = s_i \frac{\partial}{\partial x_i}$,

похідну вектора за напрямком можна записати як:

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \hat{\mathbf{s}}} = (\hat{\mathbf{s}} \cdot \nabla) \mathbf{a}. \quad (3.23)$$

Аналогічно,

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{v}} = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{a} = v \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \hat{\mathbf{v}}} = v(\hat{\mathbf{v}} \cdot \nabla) \mathbf{a}, \mathbf{v} = v\hat{\mathbf{v}}. \quad (3.24)$$

8. Аналогічно до (3.19) має місце формула:

$$d\mathbf{a} = (d\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{a} \quad (3.25)$$

Дійсно, $d\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x_i} dx_i$

9. Доведемо зв'язок між місцевою та повною похідними по скалярному аргументу:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi(\mathbf{r},t)}{dt} &= \frac{\partial\varphi(\mathbf{r},t)}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad } \varphi(\mathbf{r},t) \\ \frac{d\mathbf{a}(\mathbf{r},t)}{dt} &= \frac{\partial\mathbf{a}(\mathbf{r},t)}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{a}(\mathbf{r},t) \end{aligned} \quad (3.26)$$

де $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ та $d\mathbf{r} = \mathbf{v} dt$.

Дійсно, згідно з (3.13) та (3.21) $d\varphi(\mathbf{r},t) = \frac{\partial\varphi(\mathbf{r},t)}{\partial t} dt + \text{grad } \varphi \cdot d\mathbf{r}$,

$d\mathbf{a} = \frac{\partial\mathbf{a}(\mathbf{r},t)}{\partial t} dt + (d\mathbf{r} \cdot \nabla)\mathbf{a}$, а отже, розділивши диференціали на dt (в силу інваріантності першого диференціалу), та врахувавши, що $d\mathbf{r} = \mathbf{v} dt$, отримаємо (3.26).

10. Має місце формула:

$$\oint_S \varphi \hat{n} dS = \int_V \text{grad } \varphi dV, \quad (3.27)$$

де S - гранична поверхня V .

Цю формулу можна отримати безпосередньо з означення, розбивши об'єм V на елементарні та скориставшись теоремою про інтегральне середнє.

11. Лінійний інтеграл від вектора потенціального векторного поля по довільній кривій, що розташовується в однозв'язній області та потенціал якого є однозначною функцією, залежить лише від початкової та кінцевої точок кривої.

Дійсно, якщо $\mathbf{a} = \text{grad } \varphi$, то

$$\begin{aligned} \int_{L(M_0(\mathbf{r}_0), M_1(\mathbf{r}_1))} \mathbf{a}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} &= \int_{L(M_0(\mathbf{r}_0), M_1(\mathbf{r}_1))} \text{grad } \varphi \cdot d\mathbf{r} = \\ \int_{L(M_0(\mathbf{r}_0), M_1(\mathbf{r}_1))} d\varphi &= \varphi(\mathbf{r}_1) - \varphi(\mathbf{r}_0). \end{aligned} \quad (3.28)$$

Зокрема, при виконанні вказаних умов (однозв'язність, потенціальність та однозначність потенціалу), для довільного замкненого контуру C має місце:

$$\oint_C \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C \text{grad } \varphi \cdot d\mathbf{r} = 0, \quad (3.29)$$

оскільки з диференційованості φ випливає його неперервність.

Окрім того, якщо для довільного замкненого контуру C виконується:

$$\oint_C \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = 0 \quad (3.30)$$

то з необхідністю та достатністю вектор $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{r})$ є потенціальним. В достатності легко переконатись, взявши на C довільну (фіксовану) точку $M_0(\mathbf{r}_0) \in C$ та змінну точку $\mathbf{r} \in C$ та поклавши

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int_{L(M_0(\mathbf{r}_0), M(\mathbf{r}))} \mathbf{a}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}, \text{ де } L \in C. \quad (3.31)$$

В цьому випадку, очевидно, $\text{grad } \varphi = \mathbf{a}$.

3.3. Дивергенція та вихор вектора. Гамільтонів формалізм.

Теорема Гауса та пов'язані з нею питання

Дивергенція та соленоїдальність векторного поля. Гамільтонів формалізм

Означення дивергенції векторного поля. Дивергенцією векторного поля з диференційованим вектором $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{r})$ в точці $M(\mathbf{r})$ називається скаляр:

$$\text{div } \mathbf{a} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oint_S \hat{n} \cdot \mathbf{a} dS}{V} \quad (\text{div } \mathbf{a} \stackrel{\text{def}}{=} \nabla \cdot \mathbf{a}), \quad (3.32)$$

де V та S - об'єм та поверхня замкненого просторового околу точки M .

Зауваження. Не варто плутати $\nabla \cdot \mathbf{a}$ - дивергенцією вектора $\mathbf{a}$ з $\nabla \mathbf{a}$ - градієнтом вектора $\mathbf{a}$. $\nabla \cdot \mathbf{a} = \text{tr}(\nabla \mathbf{a})$.

В декартовому координатному представленні дивергенція має вигляд:

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \frac{\partial a_3}{\partial x_3} = \left(\mathbf{i}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \mathbf{i}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \mathbf{i}_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \mathbf{a}. \quad (3.33)$$

Означення лінійного однорідного виразу. Лінійним однорідним виразом називається вираз такий, що для довільних векторів $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ та числа λ виконуються рівності: $L(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = L(\mathbf{a}) + L(\mathbf{b})$, $L(\lambda \mathbf{a}) = \lambda L(\mathbf{a})$.

Для перетворення лінійних однорідних диференціальних виразів першого порядку може бути застосований Гамільтонів формалізм в якому оператор ∇ формально наділяється властивостями вектора.

Правила використання Гамільтонового формалізму:

- для ∇ справедливі (формально) векторні операції;
- оператор ∇ діє на всі змінні, які стоять праворуч від нього;
- диференціальний вираз повторюється в сумуванні стільки разів, скільки в виразі є змінних (скалярів чи векторів), які стоять правіше від оператора Гамільтона. При цьому, в кожному доданку лише одна змінна є операційною, інші вважаються незмінними (правило Лейбніца);
- використовуючи операції над векторами вирази перетворюються таким чином, щоб в кінцевих виразах справа від оператора ∇ розташовувалась лише одна змінна величина;

1. Наведемо базові властивості дивергенції:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) &= \operatorname{div} \mathbf{a} + \operatorname{div} \mathbf{b} \\ \operatorname{div}(\lambda \mathbf{a}) &= \lambda \operatorname{div} \mathbf{a}, (\lambda = \text{const}) \\ \operatorname{div} \Phi(\varphi) &= \Phi'(\varphi) \operatorname{grad} \varphi \end{aligned} \quad (3.34)$$

2. Покажемо, що $\operatorname{div}(\varphi \mathbf{a}) = \varphi \operatorname{div} \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \operatorname{grad} \varphi$ (3.35)

Дійсно, за Гамільтоновим формалізмом (φ_c вважається сталою) маємо

$$\operatorname{div}(\varphi \mathbf{a}) = \nabla \cdot (\varphi \mathbf{a}) = \nabla \cdot (\varphi \mathbf{a}_c) + \nabla \cdot (\varphi_c \mathbf{a}) = (\nabla \varphi) \cdot \mathbf{a}_c + \varphi_c (\nabla \cdot \mathbf{a}) = \operatorname{grad} \varphi \cdot \mathbf{a} + \varphi \operatorname{div} \mathbf{a}.$$

3. Оператор Лапласа може бути представлений як:

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} \varphi) = \nabla \cdot \nabla \varphi \stackrel{\text{def}}{=} \nabla^2 \varphi = \Delta \varphi. \quad (3.36)$$

Означення соленоїдального векторного поля. Соленоїдальним векторним полем в деякій області Ω називається таке поле, вектор якого $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{r})$ є диференційованим в області та $\operatorname{div} \mathbf{a} = 0$ в усіх точках Ω за виключенням множини міри нуль. Точки поля, в яких $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{r})$ не є диференційованою функцією, але $|\operatorname{div} \mathbf{a}| < \infty$, називаються сингулярними точками поля. В механіці такі точки прийнято називати джерелами ($\operatorname{div} \mathbf{a}$ - інтенсивність джерела)

Властивості соленоїдального вектора. Теорема Гауса.

Узагальнена теорема Гауса

1. Теорема Гауса. Для диференційованого в скінченному об'ємі V вектора $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{r})$ справедлива формула :

$$\oint_S \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{a} dS = \int_V \operatorname{div} \mathbf{a} dV \quad (\text{або} \quad \oint_S \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{a} dS = \int_V \nabla \cdot \mathbf{a} dV), \quad (3.37)$$

де S - гранична поверхня V .

Для достатньо гладкого тензора $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{r})$ теорема Гауса має вигляд:

$$\oint_S \mathbf{P} \hat{\mathbf{n}} dS = \int_V \operatorname{div} \mathbf{P} dV. \quad (3.38)$$

2. Узагальнена теорема Гауса. Для довільного (скалярного чи векторного) лінійного однорідного виразу $L(\cdot)$ має місце:.

$$\oint_S L(\hat{\mathbf{n}}) dS = \int_V L(\nabla) dV. \quad (3.39)$$

Згідно з (3.39), інваріантне означення довільного лінійного оператора першого порядку як векторного так і скалярного записується як:

$$L(\nabla) = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oint_S L(\hat{\mathbf{n}}) dS}{V}, \quad (3.40)$$

де S - поверхня однозв'язного об'єму V .

З теоремою Гауса пов'язані наступні твердження.

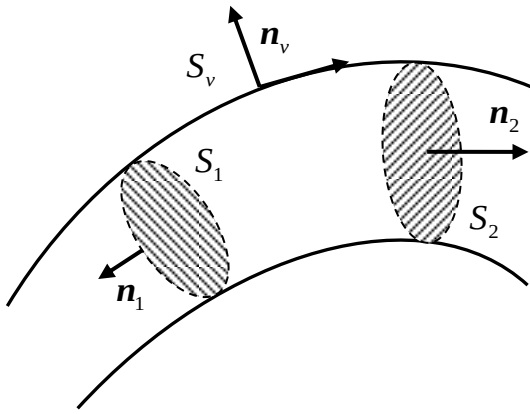


Рис. 7.

1. Потік соленоїдального вектора через переріз векторної трубки не залежить від перерізу (Рис. 7.).

Доведення цього твердження базується на теоремі Гауса.

Дійсно, розглянемо об'єм V , що замикається поверхнею $S = S_1 \cup S_2 \cup S_v$, де S_1 та S_2 - плоскі перерізи, а S_v є частиною векторної трубки, що обмежена перерізами. Якщо поле

соленоїдальне з вектором $\mathbf{a}$, то в кожній точці V $\operatorname{div} \mathbf{a} = 0$, а отже,

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{a} dV = \iiint_{S_1 \cup S_2 \cup S_v} \mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = 0. \quad \text{При цьому, очевидно, що } \iint_{S_v} \mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = 0 \text{ за}$$

означенням векторної трубки ($\mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$ для кожної точки поверхні S_v).

Водночас, перерізи S_1 та S_2 мають бути однаково орієнтовні (тобто $\mathbf{a} \cdot \mathbf{S}_1$ та

$\mathbf{a} \cdot \mathbf{S}_2$ повинні мати однаковий знак), отже, $\iint_{S_1} \mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS - \iint_{S_2} \mathbf{a} \cdot (-\hat{\mathbf{n}}) dS = 0$.

2. Потік соленоїдального поля через замкнену скінченну поверхню дорівнює нулю.

Це твердження є безпосереднім наслідком теореми Гауса.

3. Потік соленоїдального поля через поверхню, напнуту на скінченний контур, не залежить від виду поверхні.

Це твердження є прямим наслідком попереднього твердження. Дійсно, якщо дві поверхні, напнуті на деякий контур, не перетинаються, вони разом складають замкнену поверхню. В іншому випадку, достатньо розглянути третю поверхню, що не перетинається з першими двома поверхнями (та також напнута на цей контур) та порівняти потоки через задані поверхні з потоком через третю поверхню.

Вихор вектора. Вихрове векторне поле

Означення вихору векторного поля. Вихором векторного поля з диференційованим вектором $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{r})$ в точці $M(\mathbf{r})$ називається вектор, проєкція якого визначається як:

$$\text{rot } \mathbf{a} \cdot \hat{n} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{\oint_C \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r}}{S} \quad (\text{rot } \mathbf{a} \stackrel{\text{def}}{=} \nabla \times \mathbf{a}). \quad , \quad (3.41)$$

де S - площа плоскої фігури, що обмежується замкненим контуром C та має нормаль $\hat{n}$.

Означення вихрового векторного поля. Вихровим векторним полем називається поле, вектор якого $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{r})$ допускає представлення:
 $\exists \mathbf{b} = \mathbf{b}(\mathbf{r}) : \mathbf{a} = \nabla \times \mathbf{b}$.

Формули, що стосуються вихору векторного поля.

1. В базовому координатному представленні вихор вектора $\mathbf{a}$ знаходиться як::

$$\text{rot } \mathbf{a} = \nabla \times \mathbf{a} = \mathbf{i} \left(\frac{\partial a_3}{\partial x_2} - \frac{\partial a_2}{\partial x_3} \right) + \mathbf{j} \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_3} - \frac{\partial a_3}{\partial x_1} \right) + \mathbf{k} \left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2} \right) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}$$

2. Базові властивості вихору:

$$\text{rot}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \text{rot } \mathbf{a} + \text{rot } \mathbf{b}$$

$$\text{rot}(\lambda \mathbf{a}) = \lambda \text{rot } \mathbf{a}, (\lambda = \text{const}) \quad (3.42)$$

$$\text{rot } \Phi(\varphi) = \Phi'(\varphi) \times \text{grad } \varphi$$

$$3. \text{rot}(\varphi \mathbf{a}) = \varphi \text{rot } \mathbf{a} + \text{grad } \varphi \times \mathbf{a} . \quad (3.43)$$

Дійсно, згідно з Гамільтоновим формалізмом:

$$\text{rot}(\varphi \mathbf{a}) = \nabla \times (\varphi_c \mathbf{a}) + \nabla \times (\varphi \mathbf{a}_c) = \varphi_c \nabla \times \mathbf{a} - \mathbf{a}_c \times \nabla \varphi = \varphi \text{rot } \mathbf{a} - \mathbf{a} \times \text{grad } \varphi .$$

$$4. \text{rot}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{a} - \mathbf{b}(\text{div } \mathbf{a}) - (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b} + \mathbf{a}(\text{div } \mathbf{b}). \quad (3.44)$$

5. За узагальненою теоремою Гауса має місце:

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = \nabla \times \mathbf{a} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oint_S \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{a} dS}{V}, \quad (3.45)$$

$$\oint_S \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{a} dS = \int_V \operatorname{rot} \mathbf{a} dV. \quad (3.46)$$

$$6. \operatorname{rot} \mathbf{a} = \arg \max_{\mathbf{b}, \mathbf{b} \cdot d\mathbf{r}=0} \lim_{S \rightarrow 0} \frac{\oint_S \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r}}{S}.$$

7. Деякі корисні формули.

$$a) \operatorname{div}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{b} \quad (3.47)$$

Дійсно, $\operatorname{div}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \nabla \cdot (\mathbf{a}_c \times \mathbf{b}) + \nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}_c)$. Водночас:

$$\nabla \cdot (\mathbf{a}_c \times \mathbf{b}) = -\mathbf{a}_c \cdot (\nabla \times \mathbf{b}) = -\mathbf{a} \cdot (\nabla \times \mathbf{b}), \text{ а } \nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}_c) = -\nabla \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{a}_c).$$

$$б) \operatorname{grad}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{a} + (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b} + \mathbf{b} \times (\operatorname{rot} \mathbf{a}) + \mathbf{a} \times (\operatorname{rot} \mathbf{b}) \quad (3.48)$$

Дійсно, $\operatorname{grad}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \nabla \cdot (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \nabla \cdot (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}_c) + \nabla \cdot (\mathbf{a}_c \cdot \mathbf{b})$. Водночас,

$$\nabla \cdot (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}_c) = \mathbf{b}_c \cdot (\nabla \cdot \mathbf{a}) + \mathbf{b}_c \times (\nabla \times \mathbf{a}). \text{ Взявши до уваги: } \nabla \cdot (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}_c) = \nabla \cdot (\mathbf{b}_c \cdot \mathbf{a}),$$

отримаємо шукану формулу. Зокрема, поклавши в (3.48) $\mathbf{b} = \mathbf{a}$, отримаємо:

$$\operatorname{grad} \frac{\mathbf{a}^2}{2} = (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{a} + \mathbf{a} \times (\operatorname{rot} \mathbf{a}). \quad (3.49)$$

$$в) \operatorname{rot} \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \operatorname{rot} \mathbf{a} \times \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b} - \mathbf{a} \times \operatorname{rot} \mathbf{b} + \mathbf{a} \operatorname{div} \mathbf{b}$$

Дійсно, $\operatorname{rot}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}_c) + \nabla \times (\mathbf{a}_c \times \mathbf{b})$. Водночас

$$\nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}_c) = (\mathbf{b}_c \cdot \nabla) \mathbf{a} - \mathbf{b}_c (\nabla \cdot \mathbf{a}). \text{ Враховуючи, що } \nabla \times (\mathbf{a}_c \times \mathbf{b}) = -\nabla \times (\mathbf{b} \times \mathbf{a}_c),$$

отримаємо шукане. З отриманої формули слідує:

$$\mathbf{a} \times \operatorname{rot} \mathbf{b} = -(\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b} + \mathbf{a} \operatorname{div} \mathbf{b} \quad (3.50)$$

3.4. Тензорне представлення градієнта, дивергенції та вихору

Градiєнт скаляра, що залежить від вектора можна визначити через означення

похідної (3.9). Оскільки $\varphi(\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}) = \varphi(\mathbf{r}) + \nabla \varphi(\mathbf{r}) \cdot \Delta \mathbf{r} + o(\Delta \mathbf{r})$, то

$\nabla \varphi(\mathbf{r}) \cdot \Delta \mathbf{r} = D\varphi(\mathbf{r})[\Delta \mathbf{r}]$. По аналогії з цим, можна задати тензор градієнта від

вектора по вектору як тензор $\nabla \mathbf{a}(\mathbf{r})$ такий, що:
 $\mathbf{a}(\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}) = \mathbf{a}(\mathbf{r}) + \nabla \mathbf{a}(\mathbf{r}) \Delta \mathbf{r} + \mathbf{o}(\Delta \mathbf{r})$. Або: $\nabla \mathbf{a}(\mathbf{r}) \Delta \mathbf{r} = D\mathbf{a}(\mathbf{r})[\Delta \mathbf{r}]$. Звідки слідує, що диференціал від вектора допускає представлення:

$$d\mathbf{a} = \nabla \mathbf{a} d\mathbf{r} . \quad (3.51)$$

В координатному представленні (в системі координат $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$: $\mathbf{a} = a_i \mathbf{i}_i$) покомпонентне представлення градієнта від вектора має вигляд:

$$\{\nabla \mathbf{a}(\mathbf{r})\}_{i,j} = \frac{\partial a_i}{\partial x_j}, i, j = \overline{1,3} .$$

Дивергенція вектора через його градієнт визначиться як

$$\operatorname{div} \mathbf{a}(\mathbf{r}) = \operatorname{tr}(\nabla \mathbf{a}(\mathbf{r})) . \quad (3.52)$$

Визначимо дивергенцію від тензора $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{r})$ як вектор з властивістю:

$$(\operatorname{div} \mathbf{P}) \cdot \mathbf{a} = \operatorname{div}(\mathbf{P}^T \mathbf{a}) . \quad (3.53)$$

Тоді в координатному представленні (в системі координат $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$:

$\{\mathbf{P}\} = \{p_{ij}\}_{i,j=1}^3$) покомпонентне представлення дивергенції від тензору має вигляд: $\{\operatorname{div} \mathbf{P}\}_i = \frac{\partial p_{ij}}{\partial x_j}, i = \overline{1,3}$.

По аналогії з (3.26) можна дати альтернативне означення дивергенції тензора у вигляді:

$$\operatorname{div} \mathbf{P} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oint_S \mathbf{P}^T \hat{\mathbf{n}} dS}{V} . \quad (3.54)$$

Властивості градієнта та дивергенції через тензорні операції

1. Базові властивості.

$$\nabla(\varphi \mathbf{a}) = \varphi \nabla \mathbf{a} + \mathbf{a} \otimes \nabla \varphi ,$$

$$\nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (\nabla \mathbf{a})^T \mathbf{b} + (\nabla \mathbf{b})^T \mathbf{a} ,$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = \mathbf{a} \operatorname{div} \mathbf{b} + (\nabla \mathbf{a}) \mathbf{b} , \quad (3.55)$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{P}^T \mathbf{a}) = \mathbf{P} \cdot \nabla \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \operatorname{div} \mathbf{P} ,$$

$$\operatorname{div}(\varphi \mathbf{P}) = \varphi \operatorname{div} \mathbf{P} + \mathbf{P} \nabla \varphi ,$$

$$\operatorname{div}(\nabla \mathbf{a}^T) = \nabla(\operatorname{div} \mathbf{a}) .$$

Доведемо, як приклад, що $\nabla(\varphi \mathbf{a}) = \varphi \nabla \mathbf{a} + \mathbf{a} \otimes \nabla \varphi$:

$$(\nabla(\varphi \mathbf{a})(r)) \mathbf{b} = \varphi(r) \nabla \mathbf{a}(r) \mathbf{b} + (\nabla \varphi(r) \cdot \mathbf{b}) \mathbf{a}(r) = (\varphi(r) \nabla \mathbf{a}(r) + \mathbf{a}(r) \otimes \nabla \varphi(r)) \mathbf{b} .$$

Доведемо також, що $\operatorname{div}(\nabla \mathbf{a}^T) = \nabla(\operatorname{div} \mathbf{a})$:

$$\{\operatorname{div}(\nabla \mathbf{a}^T)\}_i = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial a_j}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial a_j}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i} (\operatorname{div} \mathbf{a}) = \{\nabla(\operatorname{div} \mathbf{a})\}_i .$$

Інші тотожності з (3.55) пропонується довести у Вправі 3.44.

2. Оператор вихору вектора $\mathbf{a} = \mathbf{a}(r)$ можна подати у вигляді вектора $\operatorname{rot} \mathbf{a}(r)$, такого, що:

$$\operatorname{rot} \mathbf{a}(r) \times \mathbf{b} = (\nabla \mathbf{a} - (\nabla \mathbf{a})^T) \mathbf{b} . \quad (3.56)$$

Дійсно, $\mathbf{P} = \nabla \mathbf{a} - (\nabla \mathbf{a})^T$ - антисиметричний тензор. З ним асоціюється аксіальний вектор $\boldsymbol{\omega}$ такий, що $(\nabla \mathbf{a} - (\nabla \mathbf{a})^T) \mathbf{b} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{b}$. Записавши координатне представлення $\nabla \mathbf{a} - (\nabla \mathbf{a})^T$ в $(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$ легко бачити, що $\boldsymbol{\omega} = \operatorname{rot} \mathbf{a}(r)$.

3. Згідно з цінним правилом градієнт композиції має вигляд:

$$\nabla(\mathbf{f} \circ \mathbf{g})(r) = \nabla \mathbf{f}(\mathbf{y}) \nabla \mathbf{g}(r) . \quad (3.57)$$

Якщо φ скаляр, а $\mathbf{a}$ вектор, що залежать від $\mathbf{f} = \mathbf{f}(t)$ - вектора чи тензора, то їх похідні по скаляру мають вигляд:

$$\frac{d}{dt} \varphi(\mathbf{f}(t)) = \nabla \varphi(\mathbf{f}(t)) \cdot \dot{\mathbf{f}}(t) \quad (3.58)$$

$$\frac{d}{dt} \mathbf{a}(\mathbf{f}(t)) = \nabla \mathbf{a}(\mathbf{f}(t)) \dot{\mathbf{f}}(t) \quad (3.59)$$

3.5. Теорема Стокса, формули Гріна, теорема Гельмгольца, теорема Рейнольдса-Лейбніца , поновлення вектора

Теорема Стокса

В теоремі Стокса доводиться, що циркуляція вектора по замкненому контуру дорівнює потоку вихора вектора через поверхню, що напнута на контур:

$$\oint_C \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = \int_S \operatorname{rot} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S} \quad (3.60)$$

Користуючись теоремою Стокса можна отримати наступні результати.

1. Доведемо, що

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a} = \operatorname{grad} \varphi. \quad (3.61)$$

Достатність. Нехай $\mathbf{a} = \operatorname{grad} \varphi$ (тобто $\mathbf{a}$ - потенціальний вектор). Тоді, згідно з

$$(3.29) \quad \forall C: \oint_C \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = 0 \Rightarrow \forall \mathbf{b} \text{ має місце } (\operatorname{rot} \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = 0 \Leftrightarrow \operatorname{rot} \mathbf{a} = 0.$$

Необхідність. Нехай $\operatorname{rot} \mathbf{a} = 0 \Rightarrow$ (за теоремою Стокса (3.60)) $\forall C, \oint_C \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = 0$

$\Rightarrow$ (згідно з (3.29)) $\exists \varphi: \mathbf{a} = \nabla \varphi$.

2. Справедливе твердження:

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{a} = 0. \quad (3.62)$$

Дійсно, нехай S - довільна замкнена поверхня. Використаємо теорему Стокса (3.60) стягнувши замкнений контур C в точку $M_0(\mathbf{r}_0)$:

$$\int_S \operatorname{rot} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{a}(\mathbf{r}_0) L(C) + O(L(C)^2) = 0 \quad (L(C) \rightarrow 0 - \text{довжина контуру } C).$$

За означенням дивергенції отримаємо задекларований результат. Тобто, вихрове поле - соленоїдальне, а отже, векторні лінії вихрового поля є замкнутими кривими, або (для розімкнутих векторних ліній) їхні кінці розташовуються на границі області поля.

3. $\operatorname{div} \mathbf{a} = 0 \Rightarrow \exists \mathbf{b} = \mathbf{b}(\mathbf{r}): \mathbf{a} = \operatorname{rot} \mathbf{b}$ - тобто довільне соленоїдальне поле є вихровим полем. При цьому, $\mathbf{b}$ визначається з точністю до потенціального вектора, оскільки $\operatorname{rot}(\mathbf{b} + \operatorname{grad} \varphi) = \operatorname{rot} \mathbf{b} + \operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi = \operatorname{rot} \mathbf{b}$.

Формули Гріна

Нехай $\mathbf{a} = \varphi \operatorname{grad} \psi$. Тоді згідно з (3.35) :

$\operatorname{div} \mathbf{a} = \varphi \operatorname{div}(\operatorname{grad} \psi) + \operatorname{grad} \varphi \cdot \operatorname{grad} \psi = \varphi \Delta \psi + \operatorname{grad} \varphi \cdot \operatorname{grad} \psi$. Згідно з теоремою

Гауса (3.37) : $\int_V \operatorname{div} \mathbf{a} dV = \oint_S \mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$. В даному випадку $\mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \varphi \operatorname{grad} \psi \cdot \hat{\mathbf{n}} = \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n}$,

тому справедлива перша формула Гріна:

$$\int_V (\varphi \Delta \psi + \operatorname{grad} \varphi \cdot \operatorname{grad} \psi) dV = \oint_S \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} dS . \quad (3.63)$$

Поклавши $\psi = \varphi$ отримаємо:

$$\int_V (\varphi \Delta \varphi + (\operatorname{grad} \varphi)^2) dV = \oint_S \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS . \quad (3.64)$$

Нарешті, поклавши $\psi = 1$ в (3.63), отримаємо:

$$\int_V \Delta \varphi dV = \oint_S \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS . \quad (3.65)$$

Ця формула дає також змогу сформулювати інваріантне означення застосування оператора Лапласа до скаляра :

$$\Delta \varphi = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oint_S \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS}{V} \dots \quad (3.66)$$

Оскільки для вектора $\mathbf{a}$ має місце:

$$\int_V \Delta \mathbf{a} dV = \oint_S \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \hat{\mathbf{n}}} dS = \oint_S (\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla) \mathbf{a} dS , \quad (3.67)$$

то застосування оператора Лапласа до вектора має вигляд:

$$\Delta \mathbf{a} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oint_S \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \hat{\mathbf{n}}} dS}{V} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oint_S (\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla) \mathbf{a} dS}{V} . \quad (3.68)$$

З (3.63) шляхом перестановки в (3.63) місцями φ та ψ з подальшим відніманням легко отримати другу формулу Гріна:

$$\int_V (\varphi \Delta \psi - \psi \Delta \varphi) dV = \oint_S \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) dS . \quad (3.69)$$

Формули (3.63) - (3.69) використовуються в теорії математичної фізики.

Теорема Гельмгольца

Довільне векторне, двічі неперервно диференційоване поле $\mathbf{a}$, можна представити у вигляді суми безвихрового поля та соленоїдального поля. Якщо розклад $\mathbf{a}$ виконується в $\mathbf{R}^3$, до умови гладкості додається умова зникання $\mathbf{a}$ на нескінченності швидше за $1/r$:

$$\mathbf{a} = \text{grad } \varphi + \text{rot } \mathbf{b}, \quad \text{div } \mathbf{b} = 0. \quad (3.70)$$

Покажемо, що φ в (3.70) визначається з точністю до розв'язку рівняння Лапласа $\Delta \psi = 0$, а $\mathbf{b}$ - з точністю до вектора $\mathbf{c} : \text{div } \mathbf{c} = 0 \wedge \text{rot } \mathbf{c} = -\text{grad } \psi$.

Дійсно, нехай φ та $\mathbf{b}$ такі, що виконується (3.70). Шукатимемо такі ψ та $\mathbf{c}$, що для $\tilde{\varphi} = \varphi + \psi$ та $\tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$ виконується $\mathbf{a} = \text{grad } \varphi + \text{rot } \mathbf{b} = \text{grad } \tilde{\varphi} + \text{rot } \tilde{\mathbf{b}}$. Очевидно, це можливо тоді та лише тоді, коли $\text{rot } \mathbf{c} + \text{grad } \psi = 0$. Водночас, $\text{div } \mathbf{a} = \nabla^2 \varphi = \nabla^2 \tilde{\varphi} = \Delta \varphi + \Delta \psi \Leftrightarrow \Delta \psi = 0$ та $\text{rot } \mathbf{a} = \text{rot rot } \tilde{\mathbf{b}} = \text{rot rot } \mathbf{b} + \text{rot rot } \mathbf{c}$. $\text{rot rot } \mathbf{c} = 0$ оскільки $\text{rot } \mathbf{c}$ за умовою є потенціальним вектором. Окрім того, $\text{div } \tilde{\mathbf{b}} = 0 \Leftrightarrow \text{div } \mathbf{c} = 0$.

Поновлення вектора по його вихору та дивергенції (задача Гельмгольца)

Розрізняють поновлення вектора для внутрішньої задачі: $\mathbf{r} \in V$, для зовнішньої задачі $\mathbf{r} \in \mathbf{R}^3 \setminus V$ (де V - обмежений об'єм), та для задачі в $\mathbf{R}^3$.

Загалом, задача поновлення вектора полягає в знаходженні такого диференційованого вектора $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{r})$, для якого задані:

$$\begin{cases} \text{div } \mathbf{a} = \rho \\ \text{rot } \mathbf{a} = \omega \end{cases} \quad (3.71)$$

Для внутрішньої та зовнішньої задач додається гранична умова:

$$\mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{n}} = f(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in S, \quad (3.72)$$

де $\hat{\mathbf{n}}$ - нормаль до поверхні S , що замикає об'єм V , $\rho = \rho(\mathbf{r})$, $\omega = \omega(\mathbf{r})$, $f = f(\mathbf{r})$ - задані функції.

Розглянемо необхідні умови існування розв'язку задачі Гельмгольца:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\omega} = 0 . \quad (3.73)$$

Ця умова слідує з того, що $\operatorname{div} \operatorname{rot} \boldsymbol{a} = 0$.

Для внутрішньої та зовнішньої задач:

$$\int_V \rho dV = \oint_S f dS . \quad (3.74)$$

Ця умова є наслідком теореми Гауса: $\int_V \operatorname{div} \boldsymbol{a} dV = \oint_S \boldsymbol{a} \cdot d\boldsymbol{S} \Rightarrow \int_V \rho dV = \oint_S f dS$.

Умова (3.74) називається умовою сумісності, умовою Гауса, умовою замикання потоку.

Розглянемо достатні умови існування розв'язку.

а) Внутрішня задача.

Якщо виконані умови (3.73) та (3.74) то розв'язок внутрішньої задачі існує та він єдиний.

б) Зовнішня задача та задача в $\mathbb{R}^3$.

Якщо виконані умова (3.73) , існують граничні значення інтегралів Пуассона

$$I_1(\boldsymbol{r}) = \lim_{V \rightarrow \mathbb{R}^3} \int_V \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} dV(\boldsymbol{r}') \quad , \quad I_2(\boldsymbol{r}) = \lim_{V \rightarrow \mathbb{R}^3} \int_V \frac{\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} dV(\boldsymbol{r}') \quad \text{з поведінкою } I_1(\boldsymbol{r}) ,$$

$I_2(\boldsymbol{r}) \underset{r \rightarrow \infty}{=} \bar{O}(1/r^2)$, то розв'язок зовнішньої задачі існує, він єдиний та має місце:

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}) \underset{r \rightarrow \infty}{=} \boldsymbol{o}(1/r) . \quad (3.75)$$

У випадку зовнішньої задачі інтеграли Пуассона будуються на $V \setminus V'$, де $V \subset V'$ та V' спрямовується до $\mathbb{R}^3$.

Теорема Рейнольдса-Лейбніца про диференціювання інтеграла по об'єму, що залежить від скалярного параметра (Reynolds transport theorem).

Нехай $\boldsymbol{\xi}$ - лагранжів радіус-вектор субфізичного елементу суцільного середовища, $\boldsymbol{r}(\boldsymbol{\xi}, t)$ - його ейлерів радіус-вектор та V_L - об'єм в лагранжевому описі ($\{\boldsymbol{\xi} : \boldsymbol{\xi} \in V_L\}$) - фіксований скінченний об'єм з замикаючою поверхнею S_L

. Відповідно, в ейлеровому описі цей об'єм залежить від t
 $V_E = \{\mathbf{r} : \boldsymbol{\xi}(\mathbf{r}, t) \in V_L\} = V_E(t)$ та замикається поверхнею
 $S_E = \{\mathbf{r} : \boldsymbol{\xi}(\mathbf{r}, t) \in S_L\} = S_E(t)$. Для деякого вектора $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{r}, t)$ розглянемо

$$\mathbf{I}_V(t) = \int_{V_E(t)} \mathbf{a}(\mathbf{r}, t) dV.$$

В теоремі Рейнольдса-Лейбніца стверджується, що:

$$\frac{d\mathbf{I}_V(t)}{dt} = \int_{V_E(t)} \frac{\partial \mathbf{a}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} dV + \oint_{S_E(t)} \mathbf{a}(\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v}) dS, \quad (3.76)$$

де $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \left. \frac{\partial \mathbf{r}(\boldsymbol{\xi}, t)}{\partial t} \right|_{\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}(\mathbf{r}, t)}$ - поле швидкостей руху суцільного середовища в ейлеровому описі.

Доведення. Дійсно, оскільки з умови взаємно-однозначної відповідності між ейлеровим та лагранжевим радіус-векторами виконується $J(\boldsymbol{\xi}, t) = \det(\nabla_{\boldsymbol{\xi}} \mathbf{r}(\boldsymbol{\xi}, t)) = (\det \mathbf{F}) \neq 0$, то перейшовши в (3.76) до інтегрування по незмінному в часі об'єму V_L маємо:

$$\int_{V_E(t)} \mathbf{a}(\mathbf{r}, t) dV_r = \int_{V_L} \mathbf{a}(\mathbf{r}(\boldsymbol{\xi}, t), t) J(\boldsymbol{\xi}, t) dV_{\boldsymbol{\xi}} = \int_{V_L} \hat{\mathbf{a}}(\boldsymbol{\xi}, t) J(\boldsymbol{\xi}, t) dV_{\boldsymbol{\xi}}.$$

За означенням похідної:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V_L} \hat{\mathbf{a}}(\boldsymbol{\xi}, t) J(\boldsymbol{\xi}, t) dV_{\boldsymbol{\xi}} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left\{ \int_{V_L} \hat{\mathbf{a}}(\boldsymbol{\xi}, t + \Delta t) J(\boldsymbol{\xi}, t + \Delta t) dV_{\boldsymbol{\xi}} - \int_{V_L} \hat{\mathbf{a}}(\boldsymbol{\xi}, t) J(\boldsymbol{\xi}, t) dV_{\boldsymbol{\xi}} \right\} = \\ &= \int_{V_L} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \{ \hat{\mathbf{a}}(\boldsymbol{\xi}, t + \Delta t) J(\boldsymbol{\xi}, t + \Delta t) - \hat{\mathbf{a}}(\boldsymbol{\xi}, t) J(\boldsymbol{\xi}, t) \} dV_{\boldsymbol{\xi}} = \int_{V_L} \frac{\partial}{\partial t} (\hat{\mathbf{a}}(\boldsymbol{\xi}, t) J(\boldsymbol{\xi}, t)) dV_{\boldsymbol{\xi}} = \\ &= \int_{V_L} \left(\frac{\partial \hat{\mathbf{a}}(\boldsymbol{\xi}, t)}{\partial t} J(\boldsymbol{\xi}, t) + \hat{\mathbf{a}}(\boldsymbol{\xi}, t) \frac{\partial J(\boldsymbol{\xi}, t)}{\partial t} \right) dV_{\boldsymbol{\xi}} \end{aligned}$$

Покажемо, що $\frac{\partial J(\boldsymbol{\xi}, t)}{\partial t} = J(\boldsymbol{\xi}, t) \operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{r}(\boldsymbol{\xi}, t), t)$.

Дійсно,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial J(\xi, t)}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}(\det \mathbf{F}) = \left[\forall \mathbf{A} = \mathbf{A}(t) : \frac{\partial}{\partial t}(\det \mathbf{A}) = \det \mathbf{A} \operatorname{tr} \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \mathbf{A}^{-1} \right) \right] = \\
J(\xi, t) \operatorname{tr} \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} \mathbf{F}^{-1} \right) &= \left[\mathbf{F}(\xi, t) = \nabla_{\xi} \mathbf{r}(\xi, t), \frac{\partial \mathbf{F}(\xi, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\nabla_{\xi} \mathbf{r}(\xi, t)) = \right. \\
\nabla_{\xi} \left(\frac{\partial \mathbf{r}(\xi, t)}{\partial t} \right) &= \nabla_{\xi} \mathbf{v}(\mathbf{r}(\xi, t), t) = \nabla_r \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}(\xi, t)} \nabla_{\xi} \mathbf{r}(\xi, t) = \nabla_r \mathbf{v}(\mathbf{r}(\xi, t), t) \mathbf{F}(\xi, t) \left. \right] = \\
J(\xi, t) \operatorname{tr}(\nabla_r \mathbf{v} \mathbf{F} \mathbf{F}^{-1}) &= J \operatorname{tr}(\nabla_r \mathbf{v}) = J(\xi, t) \operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{r}(\xi, t), t).
\end{aligned}$$

Отже,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \int_{V_L} \hat{\mathbf{a}}(\xi, t) J(\xi, t) dV_{\xi} &= \int_{V_L} \left(\frac{\partial \hat{\mathbf{a}}(\xi, t)}{\partial t} + \hat{\mathbf{a}}(\xi, t) \operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{r}(\xi, t), t) \right) J(\xi, t) dV_{\xi} = \\
\int_{V_E(t)} \left(\frac{d\mathbf{a}(\mathbf{r}, t)}{dt} + \mathbf{a}(\mathbf{r}, t) \operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \right) dV_r. & \quad (3.77)
\end{aligned}$$

Оскільки $\frac{d\mathbf{a}(\mathbf{r}, t)}{dt} = \frac{\partial \mathbf{a}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + (\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \cdot \nabla_r) \mathbf{a}(\mathbf{r}, t)$, то:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \int_{V_E(t)} \mathbf{a}(\mathbf{r}, t) dV_r &= \int_{V_E(t)} \left(\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot (\operatorname{div} \mathbf{v}) \right) dV_r = \\
\left[(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot (\operatorname{div} \mathbf{v}) = (\operatorname{div} \mathbf{v}) \mathbf{a} \right] &= \int_{V_E(t)} \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} dV_r + \oint_{S_E(t)} (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{a} dS_r.
\end{aligned}$$

Отже,

$$\frac{d}{dt} \int_{V_E(t)} \mathbf{a}(\mathbf{r}, t) dV_r = \int_{V_E(t)} \left(\frac{d\mathbf{a}(\mathbf{r}, t)}{dt} + \mathbf{a}(\mathbf{r}, t) \operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \right) dV_r, \quad (3.78)$$

або

$$\frac{d}{dt} \int_{V_E(t)} \mathbf{a}(\mathbf{r}, t) dV_r = \int_{V_E(t)} \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} dV_r + \oint_{S_E(t)} (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{a} dS_r. \quad (3.79)$$

Легко бачити, що для скаляра теорема Рейнольдса-Лейбніца набуває виду:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_E(t)} \varphi(\mathbf{r}, t) dV_r = \int_{V_E(t)} \left(\frac{d\varphi(\mathbf{r}, t)}{dt} + \varphi(\mathbf{r}, t) \operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \right) dV_r, \quad (3.80)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{V_E(t)} \varphi(\mathbf{r}, t) dV_r = \int_{V_E(t)} \frac{\partial \varphi}{\partial t} dV_r + \oint_{S_E(t)} \varphi(\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v}) dS_r. \quad (3.81)$$

Умови збереження векторних ліній та векторних трубок поля.

Теорема про середнє.

1. Застосування інтегрального правила Лейбніца для потоку вектора $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{r}, t)$ через поверхню, що складена з субфізичних елементів течії з полем швидкостей $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ (в ейлеровому описі) приводить до формули:

$$\frac{d}{dt} \int_{S_E(t)} \mathbf{a} dS = \int_{S_E(t)} \left(\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} + \mathbf{v} \operatorname{div} \mathbf{a} + \operatorname{rot}(\mathbf{a} \times \mathbf{v}) \right) dS . \quad (3.82)$$

Довести справедливість (3.82) пропонується у Вправі 3.34.

2. За означенням, векторна лінія C_E поля $\mathbf{a} : C_E(t) : \{\mathbf{r} = \mathbf{r}(s, t), \mathbf{a} \times d\mathbf{r} = 0\}$ зберігається, якщо $\forall t > t_0$, крива $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\xi, t), \xi : \mathbf{r}(\xi, t_0) \in C_E(t_0)$ також є векторною лінією. Очевидно, при збереженні векторних ліній, векторні трубки також зберігаються.

Необхідною та достатньою умовою збереження векторних ліній (а отже, і векторних трубок) та інтенсивності векторних трубок вектора $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{r}, t)$, є виконання рівняння:

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} - (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \mathbf{a} \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (3.83)$$

в кожній точці течії та в будь-який момент часу.

Доведення.

Необхідність. Нехай векторні лінії зберігаються. А отже, зберігаються і векторні трубки та їхні інтенсивності. Розглянемо збережену векторну трубку, стаціонарну в лагранжевому описі. Її інтенсивність зберігається, а отже, для довільного перерізу виконується:

$$\frac{d}{dt} \int_{S_E(t)} \mathbf{a} dS = \int_{S_E(t)} \left(\frac{d\mathbf{a}}{dt} - (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \mathbf{a} \operatorname{div} \mathbf{v} \right) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = 0 . \quad \text{Побудуємо сімейство}$$

перерізів трубки, що проходять через фіксовану точку з різними нормаллями.

Для них потік $\mathbf{a}$ зберігається (та дорівнює інтенсивності трубки). Отже, для

$$\forall \hat{\mathbf{n}} \text{ має місце: } \left(\frac{d\mathbf{a}}{dt} - (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \mathbf{a} \operatorname{div} \mathbf{v} \right) \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \Rightarrow \frac{d\mathbf{a}}{dt} - (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \mathbf{a} \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 .$$

Достатність. Нехай (3.83) виконується. Розглянемо векторну поверхню S_0 в момент часу t_0 та зафіксуємо лагранжеві радіус-вектори точок, що лежать на цій поверхні. Отримаємо для довільного моменту часу t поверхню $S(t)$.

Оскільки за умовою виконується (3.83), то $\int_{S_0} \mathbf{a} d\mathbf{S} = 0$ то $\int_{S(t)} \mathbf{a} d\mathbf{S} = 0$, що означає

той факт, що $S(t)$ також є векторною поверхнею. Оскільки векторні лінії є перетином векторних поверхонь, то при збереженні векторних поверхонь, векторні лінії також зберігаються.

3. Еквівалентною до умови (3.83) збереження векторних ліній є умова:

$$\left(\frac{d\mathbf{a}}{dt} - (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) \times \mathbf{a} = 0 . \quad (3.84)$$

4. Застосування інтегрального правила Лейбніца до лінійного інтеграла від вектора $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{r}, t)$ по кривій, що складена з субфізичних елементів течії з полем швидкостей $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ (в ейлеровому описі) приводить до формули:

$$\frac{d}{dt} \int_{C_E(t)} \mathbf{a} d\mathbf{r} = \int_{C_E(t)} \left(\frac{d\mathbf{a}}{dt} + (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \mathbf{a} \times \operatorname{rot} \mathbf{v} \right) d\mathbf{r} . \quad (3.85)$$

Довести цей факт пропонується у Вправі 3.49.

5. Теорема про середнє. Нехай $V: \mathbf{r}_0 \in V$, а $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{r})$ - довільний неперервний в V скаляр, вектор чи тензор. Тоді,

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}_0) = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \int_V \mathbf{f} dV . \quad (3.86)$$

Зокрема,

$$\forall V, \int_V \mathbf{f} dV = 0 \Leftrightarrow \mathbf{f} = 0 . \quad (3.87)$$

Доведення. (3.86) слідує з нерівності:

$$\left| f(\mathbf{r}_0) - \frac{1}{V} \int_V f dV \right| \leq \frac{1}{V} \int_V |f(\mathbf{r}_0) - f(\mathbf{r})| dV \leq \sup_{\mathbf{r} \in V} |f(\mathbf{r}_0) - f(\mathbf{r})|$$

та неперервності $f = f(\mathbf{r})$.

3.6. Приклади

Приклад 3.1. Довести, що поверхні рівня скалярного поля не перетинаються.

Доведення. Від супротивного. Нехай дві поверхні рівня поля зі скаляром $\varphi(\mathbf{r})$ визначаються сталими C_1 та C_2 ($C_1 \neq C_2$) так, що їхні рівняння мають вигляд $\varphi(\mathbf{r}) = C_1$ та $\varphi(\mathbf{r}) = C_2$, мають спільну точку $\mathbf{r}_0$. В цьому випадку має виконуватись система рівнянь $\begin{cases} \varphi(\mathbf{r}_0) = C_1 \\ \varphi(\mathbf{r}_0) = C_2 \end{cases}$, або $C_1 = C_2$, що суперечить умові $C_1 \neq C_2$.

Приклад 3.2. Як побудувати векторну лінію векторного поля з вектором $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{r})$, що проходить через задану точку простору $\mathbf{r}_0$?

Розв'язок. Оскільки диференціальне рівняння (3.1) для визначення векторної лінії має другий порядок, то його розв'язок визначається інтегралом 2-го порядку: $\Phi(\mathbf{r}, s, C_1, C_2) = 0$ де C_1, C_2 - довільні сталі. Це є, очевидно, двопараметричне сімейство кривих, параметризованих натуральним чином (взагалі кажучи, параметризація таких кривих може бути довільною, наприклад

$$\frac{dx_1}{a_x(x_1, x_2, x_3)} = \frac{dx_2}{a_y(x_1, x_2, x_3)} = \frac{dx_3}{a_z(x_1, x_2, x_3)} = dt).$$

Оскільки за умовою векторна лінія має проходити через задану точку, то має виконуватись умова: $\Phi(\mathbf{r}_0, s_0, C_1, C_2) = 0$ (s_0 - значення параметра, що відповідає точці $\mathbf{r}_0$), що є рівнянням з трьома невідомими величинами s_0, C_1, C_2 . Визначення їх і дозволить побудувати шукану криву у вигляді $\Phi(\mathbf{r}, s, C_1, C_2) = 0$.

Приклад 3.3. Як побудувати векторну трубку поля з вектором $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{r})$, що має плоским перерізом фігуру з граничним контуром $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $t \in [t_0, t_1]$?

Розв'язання. Розглянемо довільну точку кривої $\tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{r}(\tilde{t})$, $\tilde{t} \in [t_0, t_1]$ та скористаємось результатами **Прикладу 3.2.**, побудувавши векторну лінію $\mathbf{a}$, що проходить через точку $\tilde{\mathbf{r}}$: $\Phi(\mathbf{r}, s, C_1(\tilde{t}), C_2(\tilde{t})) = 0$ де $C_1(\tilde{t}), C_2(\tilde{t})$ знаходяться з рівняння $\Phi(\tilde{\mathbf{r}}, s(\tilde{t}), C_1(\tilde{t}), C_2(\tilde{t})) = 0$. Якщо таке рівняння для деякого $\tilde{t} \in [t_0, t_1]$ не має розв'язку чи задана плоска фігура не є плоским перерізом жодної векторної трубки поля $\mathbf{a}$ то розв'язку задачі не існує. Якщо розв'язок існує, то, він є єдиним (це твердження пропонується довести в Вправі 1.2). Виключивши з рівнянь $\Phi(\mathbf{r}, s, C_1(\tilde{t}), C_2(\tilde{t})) = 0$ параметри $s, C_1(\tilde{t}), C_2(\tilde{t})$, отримаємо рівняння векторної трубки у вигляді $\Phi(\mathbf{r}) = 0$.

Приклад 3.4. Довести, що $\text{grad } \varphi$ є вектором.

Доведення. Розглянемо перетворення координат $x'_i = \alpha_{ij} x_j + \beta_j$, $i, j = \overline{1, 3}$ з ортогональною матрицею обертання $A = \{\alpha_{ij}\}_{i,j=1}^3$ та вектором паралельного перенесення $\boldsymbol{\beta}^T = \{\beta_j\}_{j=1}^3$. Тоді, очевидно, $(\text{grad } \varphi(x_1, x_2, x_3))^T = \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\}_{i=1}^3$ та

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \frac{\partial \varphi}{\partial x'_j} \frac{\partial x'_j}{\partial x_i} = \alpha_{ji} \frac{\partial \varphi}{\partial x'_j} \quad . \quad \text{Отже,}$$

$$(\text{grad } \varphi(x'_1, x'_2, x'_3))^T = \left\{ \alpha_{ji} \frac{\partial \varphi}{\partial x'_j} \right\}_{i=1}^3 = A^T (\text{grad } \varphi(x_1, x_2, x_3))^T . \quad \text{Таким чином, при}$$

лінійному ортогональному координатному перетворенні трійка чисел, що складають $\text{grad } \varphi$, перетворюється лінійним чином, та $\text{grad } \varphi$ є інваріантним об'єктом.

Водночас, доведення того факту, що $\text{grad } \varphi$ є вектором, є очевидним, виходячи з незалежності його означення (3.15) від координатного опису.

Приклад 3.5. Задано дві диференційовані функції двох змінних $u = u(x, y)$ та $v = v(x, y)$. Довести, що ці функції функціонально залежні (тобто існує така $F = F(.,.)$, що $F(u, v) = 0$) тоді та лише тоді, коли $\nabla u \times \nabla v = 0$.

Доведення.

Необхідність. Нехай $\exists F(u, v) = 0 \Rightarrow$

$$dF = \frac{\partial F}{\partial u} du + \frac{\partial F}{\partial v} dv = \frac{\partial F}{\partial u} \text{grad } u \cdot d\mathbf{r} + \frac{\partial F}{\partial v} \text{grad } v \cdot d\mathbf{r} = 0 \Rightarrow$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial u} \text{grad } u + \frac{\partial F}{\partial v} \text{grad } v \right) \cdot d\mathbf{r} = 0 \Leftrightarrow \text{grad } u = - \frac{\partial F / \partial v}{\partial F / \partial u} \text{grad } v \Rightarrow \text{grad } u \times \text{grad } v = 0.$$

Достатність. $\exists \text{grad } u \times \text{grad } v = 0 \Rightarrow \exists \lambda = \lambda(u, v): \text{grad } u = \lambda \text{grad } v \Rightarrow$

$\tilde{F}(x, y) \equiv F(u(x, y), v(x, y))$ є розв'язком диференціального рівняння першого порядку $du = \lambda(u, v)dv$, що розв'язане відносно похідної.

Приклад 3.6. Довести, що в точці гладкості кривої для якої $\hat{\mathbf{t}}, \hat{\mathbf{v}}$ є напрямками дотичної та головної нормалі в заданій точці, виконується $(\hat{\mathbf{t}} \cdot \nabla) \hat{\mathbf{t}} = k \hat{\mathbf{v}}$.

Доведення. Дійсно, $d\hat{\mathbf{t}} = (d\mathbf{r} \cdot \nabla) \hat{\mathbf{t}} = (ds \hat{\mathbf{t}} \cdot \nabla) \hat{\mathbf{t}} = ds(\hat{\mathbf{t}} \cdot \nabla) \hat{\mathbf{t}}$, а за формулами

Френе $\frac{d\hat{\mathbf{t}}}{ds} = k \hat{\mathbf{v}}$.

Приклад 3.7. Визначити прискорення субфізичного елемента суцільного середовища, рух якого описується нестационарним полем швидкостей (в ейлеровому описі) $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$.

Розв'язання. Розглянемо субфізичний елемент суцільного середовища, що рухається за законом $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ (траєкторія руху такого елемента - крива $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t), t \in [t_0, t_1]$) та в момент часу t знаходиться в точці $M(\mathbf{r})$. Його швидкість за означенням ейлерового опису рівна $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$. Прискорення руху елемента, за означенням визначається як:

$$\mathbf{w}(\mathbf{r}, t) = \frac{d\mathbf{w}(\mathbf{r}(t), t)}{dt} = \frac{d\mathbf{w}(\mathbf{r}, t)}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + (\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \cdot \nabla) \mathbf{v}(\mathbf{r}, t).$$

Приклад 3.5. В просторі задано три точки $M_i(\mathbf{r}_i)$, $i = \overline{1, 3}$, що не лежать на

одній прямій. Знайти точку $P(\mathbf{r}_p)$ таку, що $\mathbf{r}_p = \arg \min_r \sum_{i=1}^3 |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}|$.

Розв'язання. Введемо позначення: $\mathbf{r}_{i\Box} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_i$, $\mathbf{r}_{i\Box} = r_{i\Box} \hat{\mathbf{r}}_{i\Box}$, $\varphi(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^3 r_{i\Box}$,

$\mathbf{r}_P = \arg \min_{\mathbf{r}} \sum_{i=1}^3 r_{i\Box}$, $\mathbf{r}_{iP} = \mathbf{r}_P - \mathbf{r}_i$, $\hat{\mathbf{r}}_{iP} = \mathbf{r}_{iP} / r_{iP}$. Необхідною умовою існування

екстремуму функції $\varphi = \varphi(\mathbf{r})$ є рівняння:

$$\text{grad } \varphi(\mathbf{r}_P) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^3 \text{grad } r_{i\Box} = 0. \text{ Водночас } dr_{i\Box}^2 = d\mathbf{r}_{i\Box}^2 = 2\mathbf{r}_{i\Box} d\mathbf{r}_{i\Box} = 2\mathbf{r}_{i\Box} d\mathbf{r}. \quad (3.17)$$

$$\Rightarrow \text{grad } r_{i\Box}^2 = 2\mathbf{r}_{i\Box}. \quad (3.21) \Rightarrow \text{grad } r_{i\Box}^2 = 2r_{i\Box} \text{grad } r_{i\Box}, \text{ отже, } \text{grad } r_{i\Box} = \frac{\mathbf{r}_{i\Box}}{r_{i\Box}} = \hat{\mathbf{r}}_{i\Box}.$$

Таким чином, $\mathbf{r}_P$ є розв'язком поставленої задачі при виконанні умови: $\sum_{i=1}^3 \hat{\mathbf{r}}_{iP} = 0$.

Тобто, напрямки з P на M_i складають замкнений рівносторонній трикутник, а тому, P лежить в площині M_i , $i = \overline{1,3}$ та розташовується таким чином, що $M_i P M_j = M_j P M_i$, $i, j, k \in \{(1,2,3), (2,3,1), (3,1,2)\}$.

Приклад 3.7. Довести, що якщо система матеріальних точок рухається під дією стаціонарної потенціальної системи сил, то повна механічна енергія такої системи зберігається.

Доведення. Система сил, прикладених до системи матеріальних точок $M_i(\mathbf{r}_i)$, $i = \overline{1, n}$ називається потенціальною та стаціонарною, якщо існує функція $\Pi = \Pi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n)$ (потенціальна енергія системи), що явно не залежить від часу, така, що сила, прикладена до точки $M_i(\mathbf{r}_i)$ має вигляд $\mathbf{F}_i = -\text{grad}_{\mathbf{r}_i} \Pi$.

Нехай матеріальні точки рухаються згідно з законами рухів $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(t)$ та на проміжку часу dt отримують елементарні переміщення $d\mathbf{r}_i$. Сили, прикладені до точок на таких елементарних переміщеннях, виконують елементарну роботу $d'A_i = \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}_i$, $i = \overline{1, n}$. Повна елементарна робота є диференціалом від

потенціальної енергії: $d'A = \sum_{i=1}^n d'A_i = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}_i = -\sum_{i=1}^n \text{grad}_{\mathbf{r}_i} \Pi \cdot d\mathbf{r}_i = -d\Pi$. Дійсно,

$$\Pi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n) = \tilde{\Pi}(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_n, y_n, z_n)$$

та

$$d\Pi = d\tilde{\Pi} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \tilde{\Pi}}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial \tilde{\Pi}}{\partial y_i} dy_i + \frac{\partial \tilde{\Pi}}{\partial z_i} dz_i \right) = \sum_{i=1}^n \text{grad}_{\mathbf{r}_i} \Pi \cdot d\mathbf{r}_i.$$

Згідно з теоремою про зміну кінетичної енергії: $dT = d'A$ де $T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i^2$ -

повна кінетична енергія системи. Отже,

$$dT + d\Pi = 0 \Rightarrow d(T + \Pi) = 0 \Rightarrow E \equiv T + \Pi = \text{const}.$$

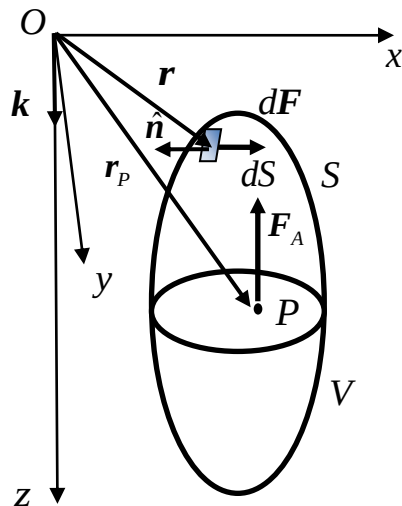


Рис. 8.

Приклад 3.8. Дослідити силу Архімеда, спричинену зануренням твердого тіла у рідину.

Розв'язання. Вважаємо, що тіло V з поверхнею S повністю занурене в рідину з густиною ρ . Згідно з положеннями гідростатики, на елемент поверхні dS з радіус-вектором $\mathbf{r}$ ($\mathbf{r}$ відраховується від заданої точки вільної поверхні тіла.) з боку рідини на тіло діє поверхнева сила (сила тиску):

$d\mathbf{F} = -\hat{\mathbf{n}} \rho g (\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) dS = -\rho g (\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) d\mathbf{S}$, де $\hat{\mathbf{n}}$ - напрямок зовнішньої нормалі ($\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r})$), g - прискорення вільного падіння однорідного поля сил земного тяжіння, $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$ - глибина занурення елемента dS ($\mathbf{k}$ - напрямок істинної вертикалі, вісі x, y визначають площину вільної поверхні рідини). Визначимо головний вектор сил, прикладених до поверхні тіла V :

$\mathbf{F} = \int_S d\mathbf{F} = -\rho g \int_S \hat{\mathbf{n}} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) dS$. За узагальненою теоремою Гауса (3.39) (теоремою

про градієнт), $\mathbf{F} = -\rho g \int_V \text{grad}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) dV$. Оскільки $\mathbf{k} = \text{const}$ то $\text{grad}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) = \mathbf{k}$, а

отже, $\mathbf{F} = -\rho g \mathbf{k} \int_V dV = -\rho V g \mathbf{k} = m_p g (-\mathbf{k})$ де m_p - маса рідини, що може

заповнити об'єм тіла V . Доведемо, що система сил тиску $d\mathbf{F}(\mathbf{r})$ зводиться до рівнодійної. Дійсно, момент $d\mathbf{F}(\mathbf{r})$ відносно точки P тіла визначається як

$d\mathbf{M}_p(d\mathbf{F}) = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_p) \times d\mathbf{F}$ та головний момент сил тиску відносно точки P дорівнює:

$$\mathbf{M}_p = \int_S (\mathbf{r} - \mathbf{r}_p) \times d\mathbf{F} = -\rho g \int_S (\mathbf{r} - \mathbf{r}_p) \times \hat{n} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) dS = -\rho g \int_V (\mathbf{r} - \mathbf{r}_p) \times \text{grad} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) dV = -\rho g \int_V (\mathbf{r} - \mathbf{r}_p) dV \times \mathbf{k}.$$

А отже, рівняння $\mathbf{M}_p = 0$ має єдиний розв'язок: $\mathbf{r}_p = \frac{\int_V \mathbf{r} dV}{V}$, що не залежить від $\mathbf{k}$. Тобто, сили тиску зводяться до рівнодійної, що прикладається в центрі об'єму. Ця точка не залежить ні від властивостей рідини (однорідної), ні від орієнтації тіла щодо вільної поверхні тіла, отже, є центром сил тиску.

Приклад 3.9. Матеріальна точка знаходиться під дією N потенціальних сил $\mathbf{F}_i$ $i = \overline{1, N}$ з потенціалами V_i , $i = \overline{1, N}$. Довести, що існує єдине еквівалентне потенціальне силове поле.

Доведення. До матеріальної точки прикладені сили, що зводяться до рівнодійної $\mathbf{F} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i = \sum_{i=1}^N \text{grad} V_i = \text{grad} \sum_{i=1}^N V_i = \text{grad} V$. Отже, існує еквівалентне потенціальне силове поле з потенціалом $V = \sum_{i=1}^N V_i$.

Приклад 3.10. Визначити гравітаційний потенціал однорідної кулі з радіусом R та масою m .

Розв'язання. На тестову матеріальну точку $M(\mathbf{r})$ з масою 1 з боку матеріальної точки $M_i(\mathbf{r}_i)$ з масою m_i згідно з законом всесвітнього тяжіння діє центральна

сила $\mathbf{F}_i(\mathbf{r}) = -\hat{\mathbf{r}}_{i\Box} f \frac{m_i}{r_{i\Box}^2}$ де $\mathbf{r}_{i\Box} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_i$, $\mathbf{r}_{i\Box} = \hat{\mathbf{r}}_{i\Box} r_{i\Box}$, $r_{i\Box} = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|$. Центральна сила

$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{r}} F(r)$ є потенціальною з потенціалом $V(r) = \int F(r) dr$. Дійсно, згідно з (3.17), $\text{grad} V(r) = V'(r) \text{grad} r = \hat{\mathbf{r}} V'(r)$. Отже, потенціал точки $M_i(\mathbf{r}_i)$

визначається як $V_i = f \frac{m_i}{r_{i\Box}}$ (нульова еквіпотенціальна поверхня розташована на

нескінченності). Згідно з **Прикладом 3.9**, сумарний гравітаційний потенціал N матеріальних точок $M_i(\mathbf{r}_i)$ з масами m_i $i = \overline{1, N}$ визначиться як:

$$V = \sum_{i=1}^N V_i = \sum_{i=1}^N f \frac{m_i}{r_{i0}} . \quad \text{Перейшовши від}$$

дискретної системи матеріальних точок до твердого масивного тіла (використавши очевидну збіжність сум Дарбу), отримаємо гравітаційний потенціал масивного тіла у вигляді:

$$V(\mathbf{r}) = f \int_V \frac{dm(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = f \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV(\mathbf{r}') . \quad \text{Для}$$

однорідного тіла з густиною $\rho = \rho_0$

$$\text{очевидно маємо: } V(\mathbf{r}) = \rho_0 f \int_V \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV(\mathbf{r}')$$

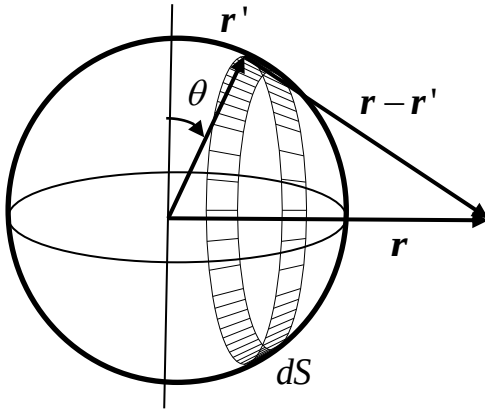


Рис. 9.

. Для однорідного тіла густина визначається як: $\rho_0 = \frac{3m}{4\pi R^3}$. Покажемо, що для

випадку однорідної кулі має місце: $V(\mathbf{r}) = V(r)$. Дійсно, нехай $\mathbf{r}$ та $\mathbf{r}'$ відраховуються від центру кулі та $\mathbf{r} = \hat{\mathbf{r}} r$, $|\hat{\mathbf{r}}| = 1$. Центральна симетрія області допускає представлення $dV = S_{r'} dr'$ де $S_{r'}$ - сфера з радіусом $r' = |\mathbf{r}'|$, а отже,

$$\text{потенціал може бути представлений у вигляді } V(r) = \rho_0 f \int_0^R dr' \int_{S_{r'}} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS .$$

Обравши в якості елементу поверхні $S_{r'}$ сферичне кільце, ортогональне напрямку $\hat{\mathbf{r}}$ та беручи до уваги, що $dS = 2\pi r'^2 d\sin\theta$, $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$ і

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = (r^2 + r'^2 - 2rr'\sin\theta)^{1/2} \quad \text{порахуємо} \quad \text{інтеграл:}$$

$$\int_{S_{r'}} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS = 2\pi r'^2 \int_{-1}^1 \frac{d\xi}{(r^2 + r'^2 - 2rr'\xi)} = 4\pi r'^2 \begin{cases} 1/r, & r' < r \\ 1/r', & r' > r \end{cases} .$$

Отже, маємо 2 випадки.

1) Якщо $r > R$ то $V(r) = \frac{4\pi \rho_0 f}{r} \int_0^R r'^2 dr' = f \frac{4\pi R^3 \rho_0}{3r} = f \frac{m}{r}$ та сила, що діє на пробну матеріальну точку рівна: $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \text{grad}V(r) = -\hat{\mathbf{r}} \frac{f m}{r^2}$. Отже зовнішній

потенціал однорідної кулі є центральним симетричним та є функцією відстані до центру кулі. Гравітаційна взаємодія кулі та матеріальної точки визначається законом всесвітнього притягання точки до центру кулі.

2) Якщо $r < R$, то

$$V(r) = 4\pi \rho_0 f \left\{ \frac{1}{r} \int_0^r r'^2 dr' + \int_r^R r' dr' \right\} = f \frac{4\pi R^3 \rho_0}{3} \left(\frac{3}{2R} - \frac{r^2}{2R^3} \right) = f \frac{m}{2R} \left(3 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right) \quad \text{та}$$

сила, що діє на пробну матеріальну точку дорівнює: $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \text{grad}V(r) = -\hat{\mathbf{r}} \frac{f m r}{R^3}$.

Внутрішній потенціал однорідної кулі теж є функцією відстані до центру кулі. Але гравітаційна взаємодія кулі та матеріальної точки, що знаходиться всередині кулі є лінійною функцією відстані точки до центру кулі.

Приклад 3.11. Визначити гравітаційний потенціал однорідної (за густиною) товстостінної сферичної оболонки масою m . Розглянути лише зовнішню та внутрішню задачі.

Розв'язання. Нехай внутрішній радіус оболонки R_{in} , а зовнішній R_{out} . Густина

матеріалу $\rho_0 = \frac{3m}{4\pi} \left(\frac{1}{R_{out}^3} - \frac{1}{R_{in}^3} \right)$. Повторюючи викладки **Прикладу 3.10.**,

отримаємо:

$$1) \quad \text{якщо} \quad r > R_{out}, \quad \text{то} \quad V(r) = \frac{4\pi \rho_0 f}{r} \int_{R_{in}}^{R_{out}} r'^2 dr' = f \frac{4\pi (R_{out}^3 - R_{in}^3) \rho_0}{3r} = f \frac{m}{r}.$$

Результат не відрізняється від результату **Прикладу 3.10.** Сила, що діє на пробну матеріальну точку, рівна: $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \text{grad}V(r) = -\hat{\mathbf{r}} \frac{f m}{r^2}$;

2) якщо $r < R_{in}$, то $V(r) = 4\pi \rho_0 f \int_{R_{in}}^{R_{out}} r' dr' = const$ та сила, що діє на пробну матеріальну точку дорівнює: $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \text{grad}V(r) = 0$. Отже, вільна матеріальна точка, яка знаходиться всередині порожнини товстостінної сферичної оболонки, буде перебувати в стані невагомості.

Приклад 3.12. Визначити гравітаційний потенціал скінченного неоднорідного тіла довільної форми, при умові, що $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|/R \ll 1$, де $M_0(\mathbf{r}_0)$ - сферичний центр тіла, R - сферичний радіус тіла. Сферичним центром та сферичним радіусом тіла називають відповідно центр та радіус мінімальної за розміром сфери, що вміщує в собі тіло.

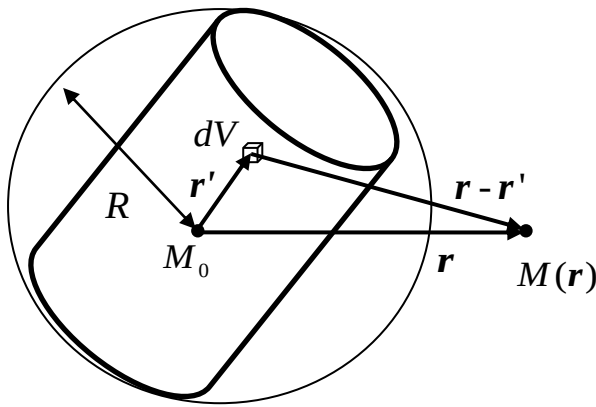


Рис. 10.

Розв'язання. Будемо відраховувати вектори від сферичного центру тіла M_0 . Нехай густина тіла $\rho = \rho(\mathbf{r}')$. Тоді, згідно з **Прикладом 3.9.**, маємо: $V(\mathbf{r}) = f \int_V \frac{dm(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = f \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV$

Розкладемо $\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$ в ряд Бернуллі по малому $\frac{r'}{r}$:

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{r \left(1 + \left(\frac{r'}{r} \right)^2 - 2 \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} \right)^{1/2}} = \frac{1}{r} - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^3} + \frac{1}{2r} \left(\frac{r'}{r} \right)^2 + o \left(\left(\frac{r'}{r} \right)^2 \right) . \quad \text{Тоді}$$

$$V(\mathbf{r}) = \frac{f}{r} \int_V \rho(\mathbf{r}') dV - \frac{f}{r^3} \mathbf{r} \cdot \int_V \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') dV + o \left(\left(\frac{R}{r} \right)^3 \right) . \quad \text{За означенням, } \int_V \rho(\mathbf{r}') dV = m ,$$

$$\int_V \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') dV = \mathbf{r}_c m \quad (\mathbf{r}_c - \text{центр мас тіла, } m - \text{маса тіла}). \quad \text{Отже,}$$

$V(\mathbf{r}) = \frac{f m}{r} - \frac{f m \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_c}{r^3} + o\left(\left(\frac{R}{r}\right)^2\right)$. Гравітаційна сила, що діє на пробну

матеріальну

точку,

дорівнює:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \text{grad} V(\mathbf{r}) = -\hat{\mathbf{r}} \frac{f m}{r^2} - f m \left(\frac{\mathbf{r}_c}{r^3} - 3\hat{\mathbf{r}} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_c}{r^4} \right) + o\left(\left(\frac{R}{r}\right)^3\right) .$$
 Якщо взяти до уваги,

що $|\mathbf{r}_c|/r \ll (R/r)$ та покласти $\mathbf{r}_o \equiv \mathbf{r}_c$ (тобто вести відрахунок векторів від центру мас: $\mathbf{r}_c = 0$), то головний вектор сил гравітації тіла набуде вигляду:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\hat{\mathbf{r}} \frac{f m}{r^2} + o\left(\left(\frac{R}{r}\right)^3\right) .$$
 Таким чином, поле гравітації тіла є центральним

лише з точністю до складових порядку $o\left(\left(\frac{R}{r}\right)^3\right)$.

Приклад 3.13. Довести, що $\int_V ((\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \mathbf{v} \text{div} \mathbf{v}) dV = \oint_S v_n \mathbf{v} dS$.

Доведення. Розглянемо формальний вираз $(\nabla \cdot \mathbf{v}) \mathbf{a}$. За гамільтонівим формалізмом має місце:

$$(\text{div} \mathbf{v}) \mathbf{a} = (\nabla \cdot \mathbf{v}_c) \mathbf{a} + (\nabla \cdot \mathbf{v}) \mathbf{a}_c = (\mathbf{v}_c \cdot \nabla) \mathbf{a} + \mathbf{a}_c (\nabla \cdot \mathbf{v}) = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{a} + \mathbf{a} \text{div} \mathbf{v} .$$
 За

узагальненою теоремою Гауса виконується рівність:

$$\int_V \mathbf{a} \text{div} \mathbf{v} dV = \oint_S (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{a} dS = \oint_S v_n \mathbf{a} dS , \text{ а отже, } \int_V ((\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{a} + \mathbf{a} \text{div} \mathbf{v}) dV = \oint_S v_n \mathbf{a} dS .$$

Поклавши $\mathbf{a} = \mathbf{v}$ отримаємо шукану формулу.

Приклад 3.14. Порахувати дивергенцію поля швидкостей та поля прискорень точок вільного абсолютно твердого тіла.

Розв'язання. Швидкості точок вільного твердого тіла визначаються як:

$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$, де $\mathbf{v}_0$ - швидкість полюса, $\boldsymbol{\omega}$ - миттєва кутова швидкість тіла, $\mathbf{r}$ - радіус-вектор точки тіла, що відраховується від полюса. Тоді $\text{div} \mathbf{v}(\mathbf{r}) = \text{div}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$, оскільки $\mathbf{v}_0$ (як і $\boldsymbol{\omega}$) не залежить від $\mathbf{r}$. Також, для

довільного $\mathbf{c} = \text{const}$ має місце: $\text{div}(\mathbf{c} \times \mathbf{r}) = \frac{\partial(c_y z - c_z y)}{\partial x} + \dots = 0 + 0 + 0 = 0$.

Отже, поле швидкостей - соленоїдальне.

Прискорення точок вільного твердого тіла визначаються як:

$\mathbf{w}(\mathbf{r}) = \mathbf{w}_0 + \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$, де $\boldsymbol{\varepsilon} = \dot{\boldsymbol{\omega}}$ - кутове прискорення тіла. Тоді $\text{div} \mathbf{w} = \text{div}(\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})) = \text{div}(\boldsymbol{\omega} \cdot (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r})) + \text{div} \mathbf{r} (\boldsymbol{\omega}^2) = -2\boldsymbol{\omega}^2$. Отже, дивергенція поля прискорень повністю визначається модулем миттєвої кутової швидкості тіла.

Приклад 3.15. Знайти дивергенцію центрального силового поля. Довести, що гравітаційне поле матеріальної точки є соленоїдальним.

Розв'язання. Центральне силове поле визначається силою поля: $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{r}} F(r)$

($\mathbf{r} = \hat{\mathbf{r}} r$). Отже, $\text{div} \mathbf{F} = F(r) \text{div} \hat{\mathbf{r}} + \hat{\mathbf{r}} \cdot \text{grad} F(r)$. Водночас

$\text{div} \hat{\mathbf{r}} = \text{div} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \right) = \frac{\text{div} \mathbf{r}}{r} - \frac{\mathbf{r} \cdot \text{grad} r}{r^2} = \frac{2}{r}$, $F'(r) \hat{\mathbf{r}} \cdot \text{grad} r = F'(r)$. Таким чином,

$\text{div} \mathbf{F} = \frac{2}{r} F(r) + F'(r)$. Центральне силове поле є соленоїдальним тоді та лише

тоді, коли $F'(r) + \frac{2}{r} F(r) = 0 \Leftrightarrow \frac{F'(r)}{F(r)} = -\frac{2}{r} \Leftrightarrow \ln F(r) = -2 \ln r + \ln C \Leftrightarrow$

$F(r) = \frac{C}{r^2}$. Отже, центральне силове поле завжди є потенціальним з

потенціалом $V(r) = \int F(r) dr$, але не завжди є соленоїдальним. Оскільки,

гравітаційне поле матеріальної точки має потенціал $V(r) = f \frac{m}{r}$, воно є як

потенціальним, так і соленоїдальним.

Приклад 3.16. Вивести рівняння нерозривності течії рідини чи газу.

Розв'язання. Потік рідини в ейлеровому описі задається скалярним полем

густини $\rho = \rho(\mathbf{r}, t)$ ($\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V}$) та векторним полем швидкостей $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$.

Нехай S - деяка довільна замкнена, фіксована в просторі поверхня, а V - об'єм,

що замикається S . За означенням густини, маса рідини, що в момент часу t займає об'єм V , визначається інтегралом $M(t) = \int_V \rho(\mathbf{r}, t) dV$. За елементарний

проміжок часу $[t, t + dt]$ маса рідини зміниться на величину $dM = \int_V \frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} dV dt$

, оскільки $M(t + dt) = \int_V \left(\rho(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} dt \right) dV$. За означенням поля швидкостей,

маса рідини, що протікає за час dt через елемент поверхні $d\mathbf{S} = \hat{\mathbf{n}} dS$ дорівнює

$dm_{ds} = \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} dt$. За законом збереження маси маємо: $dM = - \oint_S dm_{ds}$ або

$\int_V \frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} dV dt = - \oint_S \rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S} dt$. Використавши теорему Гауса,

отримаємо: $\int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) \right) dV = 0$. Оскільки V - довільний об'єм, то згідно з

теоремою про середнє має виконуватись: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0$. Це і є рівняння

нерозривності потоку. Перетворимо рівняння нерозривності. Оскільки

$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \rho$ та $\nabla(\rho \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{v}$, то рівняння нерозривності

можна записати у вигляді::

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (3.88)$$

У випадку нестисливої рідини $\frac{d\rho}{dt} = 0$ та рівняння нерозривності набуває вигляду $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$.

Зауважимо, що в силу ейлерового опису для нестационарної течії нестисливої

рідини ($\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$) $\frac{\partial \rho}{\partial t} \neq 0$, оскільки нестисливість декларується для елементу

рідини (лагранжів опис), а не для просторового об'єму. Також для

потенціальної течії нестисливої рідини існує потенціал швидкості

$\varphi = \varphi(\mathbf{r}, t); \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \text{grad } \varphi(\mathbf{r}, t)$ та рівняння нерозривності набуває вигляду рівняння Лапласа: $\nabla^2 \varphi = 0$ або $\Delta \varphi = 0$.

Приклад 3.17. Вивести основне рівняння гідромеханіки ідеальної рідини.

Розв'язання. Ідеальною називають рідину, в якій внутрішня сила взаємодії двох сусідніх субфізичних елементів є поверхневою силою, що має лише нормальну складову (тобто напрямлена вздовж нормалі до площадки контакту): $d\mathbf{Q} = -p \hat{\mathbf{n}} dS$. Нормальна складова не залежить від напрямку нормалі та називається тиском $p = p(\mathbf{r}, t)$ (в ейлеровому описі течії).

Розглянемо, як і в **Прикладі 3.16.**, деякий просторовий об'єм V , що замикається поверхнею S . Складемо рівняння силового балансу Даламбера, котрий полягає в тому, що головний вектор зовнішніх сил, прикладених до точок, що в момент часу t знаходяться в V та головний вектор сил інерції мають зрівноважуватись. Якщо до елементарного об'єму рідини з масою $dm = \rho dV$ прикладена зовнішня об'ємна сила $\mathbf{F} dm$ (інтенсивність сили $\mathbf{F}$ приведена до одиниці маси), то головний вектор зовнішніх об'ємних сил, прикладених (в момент часу t) до точок, що заповнюють об'єм V визначається як $\int_V \rho \mathbf{F} dV$. Головний вектор поверхневих сил, згідно з означенням ідеальної

рідини дорівнює: $\oint_S d\mathbf{Q} = -\oint_S p \hat{\mathbf{n}} dS$. Оскільки сила інерції, прикладена до

елементарного об'єму рідини з масою dm , дорівнює

$-\mathbf{w} dm = -\frac{d\mathbf{v}}{dt} dm = -\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} dV$, то головний вектор сил інерції для об'єму V

визначається як: $-\int_V \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} dV$. Таким чином, рівняння силового балансу для

об'єму V має вигляд: $\int_V \left(\rho \mathbf{F} - \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right) dV - \oint_S p \hat{\mathbf{n}} dS = 0$. Або, з використанням

узагальненої теореми Гауса: $\int_V \left(\rho \mathbf{F} - \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \text{grad } p \right) dV = 0$. Через довільність

об'єму V , використавши теорему про середнє, отримуємо рівняння:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p . \quad (3.89)$$

Використавши формулу зв'язку повної та локальної похідних за часом, отримаємо основне рівняння гідромеханіки у вигляді:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p . \quad (3.90)$$

При отриманні (3.89) використана лише частина критерію динамічної рівноваги матеріальної системи - силовий баланс (в формалізмі Даламбера). Водночас, має виконуватись також умова моментного балансу. Візьмемо субфізичний елемент з малим об'ємом dV_ε , що замикається поверхнею dS_ε ($\varepsilon \ll 1$). За означенням субфізичного елемента, $\rho(\mathbf{r}) = \rho = \text{const}$, $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{F} = \text{const}$, $\mathbf{r} \in dV_\varepsilon$.

Взявши за центр моментів центр об'єму dV_ε $\mathbf{r}_{O_\varepsilon}$, отримаємо:

$$\int_{dV_\varepsilon} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_{O_\varepsilon}) \times (\rho \mathbf{F} - \rho \mathbf{w}) dV = -\rho (\mathbf{F} - \mathbf{w}) \times \int_{dV_\varepsilon} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_{O_\varepsilon}) dV = 0 , \quad \text{оскільки}$$

$$\int_{dV_\varepsilon} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_{O_\varepsilon}) dV = 0 . \text{ Окрім того, } \oint_{S_\varepsilon} p (\mathbf{r} - \mathbf{r}_{O_\varepsilon}) \times \hat{\mathbf{n}} dS = 0 \text{ як показано в Прикладі 3.8.}$$

Отже, умова балансу моментів виконується автоматично.

Приклад 3.18. Знайти вихор поля швидкостей точок вільного абсолютно твердого тіла.

Розв'язання. Швидкості точок вільного твердого тіла визначаються як $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$, де $\mathbf{v}_0$ - швидкість полюса, $\boldsymbol{\omega}$ - миттєва кутова швидкість тіла, $\mathbf{r}$ - радіус-вектор точки тіла, що відраховується від полюса. Оскільки $\mathbf{v}_0$ та $\boldsymbol{\omega}$ однакові для всіх точок твердого тіла, то згідно з (3.44) маємо: $\text{rot } \mathbf{v} = \text{rot}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = -(\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega}(\text{div } \mathbf{r})$. Водночас, $(\mathbf{c} \cdot \nabla) \mathbf{r} = \mathbf{c}$ (якщо $\mathbf{c} = \text{const}$) та $\text{div } \mathbf{r} = 3$. Як результат, маємо:

$$\text{rot } \mathbf{v} = 2\boldsymbol{\omega} . \quad (3.91)$$

Ця рівність є основою для проведення аналогії між рухами вихрових трубок ідеальної рідини та абсолютно-твердого тіла.

Приклад 3.19. Довести, що $(\mathbf{b} \cdot \nabla)(\varphi \mathbf{a}) = \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \text{grad } \varphi) + \varphi(\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{a}$.

Доведення. Дійсно, $(\mathbf{b} \cdot \nabla)(\varphi \mathbf{a}) = (\mathbf{b} \cdot \nabla)(\varphi_c \mathbf{a}) + (\mathbf{b} \cdot \nabla)(\varphi \mathbf{a}_c)$. Очевидно, $(\mathbf{b} \cdot \nabla)(\varphi_c \mathbf{a}) = \varphi_c (\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{a}$, $(\mathbf{b} \cdot \nabla)(\varphi \mathbf{a}_c) = \mathbf{a}_c (\mathbf{b} \cdot \text{grad } \varphi)$. Отже, $(\mathbf{b} \cdot \nabla)(\varphi \mathbf{a}) = \mathbf{a}_c (\mathbf{b} \cdot \text{grad } \varphi) + \varphi_c (\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \text{grad } \varphi) + \varphi(\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{a}$.

Приклад 3.20. Довести, що при виконанні умов: $\forall \mathbf{a} \in V: \text{div } \mathbf{a} = 0 \wedge \text{rot } \mathbf{a} = 0$ має місце: $\Delta \mathbf{a} = 0$.

Доведення. Дійсно згідно з (3.56): $\text{rot } \mathbf{a} = 0 \Rightarrow \nabla \mathbf{a} - \nabla \mathbf{a}^T = 0$. Водночас $0 = \text{div}(\nabla \mathbf{a} - \nabla \mathbf{a}^T) = \Delta \mathbf{a} - \nabla \text{div } \mathbf{a} = \Delta \mathbf{a}$.

Приклад 3.21. Довести, що

$$\text{rot rot } \mathbf{a} = \text{grad}(\text{div } \mathbf{a}) - \Delta \mathbf{a}. \quad (3.92)$$

Доведення. Дійсно згідно з Гамільтоновим формалізмом та формулою представлення подвійного векторного добутку: $\text{rot rot } \mathbf{a} = \nabla \times \nabla \times \mathbf{a} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{a}) - \nabla^2 \mathbf{a}$.

Приклад 3.22. Довести рівності:

$$\text{а) } \oint_S \varphi \mathbf{a} d\mathbf{S} = \int_V (\varphi \text{div } \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \text{grad } \varphi) dV,$$

$$\text{б) } \oint_S \Delta \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS = \int_V \left((\Delta \varphi)^2 + \text{grad } \varphi \cdot \nabla(\Delta \varphi) \right) dV.$$

Доведення.

а) Дійсно, оскільки $\text{div}(\varphi \mathbf{a}) = \varphi \text{div } \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \text{grad } \varphi$, то, використавши теорему Гауса (3.37), отримаємо бажаний результат.

б) Формула є прямим наслідком першої формули Гріна (3.63) для функцій φ та $\Delta \varphi$

Приклад 3.23. Довести, що

$$\oint_C \varphi \hat{\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{r} = \int_S (\hat{\mathbf{n}} \times \text{grad } \varphi) \cdot \hat{\mathbf{r}} dS \quad (\hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{r}).$$

Доведення. Очевидно, $(\hat{n} \times \text{grad } \varphi) \cdot \hat{r} = (\text{grad } \varphi \times \hat{r}) \cdot \hat{n}$, отже,

$$\int_S (\hat{n} \times \text{grad } \varphi) \cdot \hat{r} dS = \int_S (\text{grad } \varphi \times \hat{r}) \cdot \hat{n} dS . \quad \text{Прийнявши до уваги, що,}$$

$$\text{rot}(r \text{ grad } \varphi) = r \text{ rot grad } \varphi + \text{grad } r \times \text{grad } \varphi = \hat{r} \times \text{grad } \varphi \text{ та } \text{rot grad } \varphi = 0 , \text{ grad } r = \hat{r} ,$$

$$\text{отримаємо: } \int_S (\text{grad } \varphi \times \hat{r}) \cdot \hat{n} dS = - \int_S \text{rot}(r \text{ grad } \varphi) \cdot \hat{n} dS = - \oint_C r \text{ grad } \varphi \cdot d\mathbf{r} . \quad \text{Окрім}$$

$$\text{того, } r \text{ grad } \varphi = \text{grad}(r\varphi) - \varphi \text{ grad } r = \text{grad}(r\varphi) - \varphi \hat{r} . \quad \text{Тому,}$$

$$- \oint_C r \text{ grad } \varphi \cdot d\mathbf{r} = - \oint_C \text{grad}(r\varphi) \cdot d\mathbf{r} + \oint_C \varphi \hat{r} \cdot d\mathbf{r} = - \oint_C d(r\varphi) + \oint_C \varphi \hat{r} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C \varphi \hat{r} \cdot d\mathbf{r} .$$

Що і доводить задекларовану формулу.

Приклад 3.24. Довести, що необхідною та достатньою умовою представлення вектора $\mathbf{a}$ у вигляді $\mathbf{a} = \varphi \text{ grad } \psi$ є виконання умови $\mathbf{a} \cdot \text{rot } \mathbf{a} = 0$.

Доведення.

Необхідність. Нехай $\mathbf{a} = \varphi \text{ grad } \psi$. Тоді

$$\text{rot } \mathbf{a} = \text{rot}(\varphi \text{ grad } \psi) = \varphi \text{ rot}(\text{grad } \psi) + \text{grad } \varphi \times \text{grad } \psi = \text{grad } \varphi \times \text{grad } \psi \quad \text{і}$$

$$\mathbf{a} \cdot \text{rot } \mathbf{a} = (\varphi \text{ grad } \psi) \cdot (\text{grad } \varphi \times \text{grad } \psi) = \varphi (\text{grad } \psi \cdot (\text{grad } \varphi \times \text{grad } \psi)) = 0 .$$

Достатність. Нехай $\mathbf{a} \cdot \text{rot } \mathbf{a} = 0$. Побудуємо двопараметричне сімейство плоских кривих Γ_c , ортогональних до вектора $\mathbf{a}$, що визначається рівнянням:

$$\begin{cases} \mathbf{c} \cdot \mathbf{r} = 0, \mathbf{c} = \text{const} \\ \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = 0 \end{cases} . \quad \text{Побудуємо сімейство поверхонь, що складені з вихрових}$$

ліній $\mathbf{a}$, які проходять через криві сімейства Γ_c . Нехай деяка з таких поверхонь визначається як $\psi = c (c = \text{const})$. Покажемо, що для довільної ланки кривої, що має кінцями точки A та B і повністю лежить на поверхні $\psi = \text{const}$

, виконується: $\int_{AB} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = 0$. Для цього побудуємо замкнений контур, що лежить

на $\psi = c$: $C: \mathbf{r} \in (AB \cup AA' \cup A'B' \cup B'A) \wedge \psi(\mathbf{r}) = c$, де точки A' та B' є проєкціями точок A і B на криву Γ_c вздовж векторних ліній, що проходять

через A і B . Тоді за теоремою Стокса (3.60): $\oint_C \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = \int_S \text{rot } \mathbf{a} dS = 0$, оскільки

на поверхні $\psi = c$ виконується рівність: $(\text{rot } \mathbf{a}) \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$ за умовою її побудови.

Окрім того, оскільки A' та B' лежать на Γ_c (де $\mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = 0$), то $\int_{A'B'} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = 0$. А

також, $\int_{AA'} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = 0$ та $\int_{BB'} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = 0$, бо за умовою $\mathbf{a} \cdot \text{rot } \mathbf{a} = 0$. Тому, дійсно,

$\int_{AB} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = 0$ для довільних точок A і B . Це можливо тоді і лише тоді, коли в

кожній точці поверхні $\psi = c$ має місце $\mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = 0$, тобто, $\mathbf{a} \parallel \hat{\mathbf{n}}$, а отже, $\exists \varphi: \mathbf{a} = \varphi \text{grad } \psi$.

Приклад 3.25. Отримати рівняння (інтеграл) Бернуллі.

Розв'язання. Нехай

а) рідина є ідеальною (для неї виконується основне рівняння гідромеханіки ідеальної рідини);

б) потік рідини стаціонарний ($\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = 0$);

в) об'ємна сила - потенціальна ($\exists V = V(\mathbf{r}): \mathbf{F} = \text{grad } V$);

г) рідина - баротропна ($\rho = f(p)$).

Основне рівняння гідромеханіки ідеальної рідини при виконанні умов б) - г)

запишеться у вигляді (Приклад 3.17.) $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\text{grad } V - \frac{1}{\rho} \text{grad } p$. Введемо в

розгляд внутрішню енергію рідини $P(p) = \int \frac{dp}{\rho} = \int \frac{dp}{f(p)}$ (очевидно,

$\text{grad } P = P' \text{grad } p = \frac{\text{grad } p}{\rho}$) та скористаємось (3.49): $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \text{grad} \left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} \right) - \text{rot rot } \mathbf{v}$

. При цьому основне рівняння гідромеханіки ідеальної рідини набуде вигляду:

$\text{rot rot } \mathbf{v} - \text{grad} \left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} + V + P \right) = 0$. Проінтегруємо це рівняння вздовж лінії току

рідини $M_0 M$: $\int_{M_0}^M \text{rot rot } \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \int_{M_0}^M \text{grad} \left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} + V + P \right) \cdot d\mathbf{r}$. Візьмемо до уваги, що на

лінії току має місце $d\mathbf{r} \times \mathbf{v} = 0$. Отже, $\text{rot rot } \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \text{rot } \mathbf{v} \cdot (d\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = 0$, а

$$\text{grad}\left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} + V + P\right) \cdot d\mathbf{r} = d\left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} + V + P\right) \quad . \quad \text{Тоді:}$$

$$\left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} + V + P\right)\Big|_M = \left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} + V + P\right)\Big|_{M_0} = \text{const} \quad . \quad \text{Тобто, у випадку стаціонарної течії}$$

ідеальної баротропної рідини в потенціальному полі сили, сума потенціалу сили, внутрішньої енергії та кінетичної енергії вздовж лінії току зберігається:

$$V + P + \frac{\mathbf{v}^2}{2} = \text{const} \quad . \quad (3.93)$$

Приклад 3.26. Отримати інтеграл Коші для безвихрової течії.

Розв'язання. Нехай:

- а) рідина є ідеальною (для неї виконується основне рівняння гідромеханіки ідеальної рідини);
- б) течія є безвихровою ($\text{rot } \mathbf{v} = 0$);
- в) об'ємна сила - потенціальна ($\exists V = V(\mathbf{r}) : \mathbf{F} = \text{grad } V$);
- г) рідина - баротропна ($\rho = f(p)$).

Керуючись викладками попереднього прикладу, запишемо основне рівняння гідромеханіки у вигляді:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v} = -\text{grad}\left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} + V + P\right) \quad (3.94)$$

Оскільки течія за умовою є безвихровою, то вона - потенціальна. Отже $\exists \varphi = \varphi(\mathbf{r}) : \mathbf{v} = \text{grad } \varphi$. Тоді (3.94) запишеться у вигляді:

$$\text{grad} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\text{grad}\left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} + V + P\right) \Rightarrow \text{grad}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\mathbf{v}^2}{2} + V + P\right) = 0 \quad \text{та}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{(\text{grad } \varphi)^2}{2} + V + P = g(t) \quad , \quad (3.95)$$

де $g(t)$ - деяка функція часу.

Тобто, при безвихровому русі ідеальної баротропної рідини під дією потенціальних сил виконується інтеграл Коші (3.95).

Зауважимо також, що рівняння нерозривності для цього випадку має вигляд:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{grad } \varphi \cdot \text{grad } \rho + \rho \Delta \varphi = 0 . \quad (3.96)$$

Інтеграл Коші (3.95) та рівняння нерозривності (3.96) використовуються для побудови рівнянь динамічної рівноваги ідеального газу .

Приклад 3.27. Побудувати рівняння вихрового руху ідеальної рідини.

Розв'язання. Нехай:

а) рідина є ідеальною (для неї виконується основне рівняння гідромеханіки ідеальної рідини);

б) об'ємна сила - потенціальна ($\exists V = V(\mathbf{r}) : \mathbf{F} = \text{grad } V$);

в) рідина - баротропна ($\rho = f(p)$).

Як і в попередньому прикладі, приведемо основне рівняння гідромеханіки

ідеальної рідини до вигляду (3.94): $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v} = -\text{grad} \left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} + V + P \right)$.

Застосуємо до правої та лівої частини операцію rot :

$\text{rot} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \text{rot } \mathbf{v} (\mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v}) = -\text{rot grad} \left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} + V + P \right)$. Введемо позначення $\mathbf{\Omega} \stackrel{\text{def}}{=} \text{rot } \mathbf{v}$.

Взявши до уваги, що $\text{rot grad } \varphi = 0$ та згідно з (3.46)

$\text{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{\Omega}) = (\mathbf{\Omega} \cdot \nabla) \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{\Omega} + \mathbf{v} \text{div } \mathbf{\Omega} - \mathbf{\Omega} \text{div } \mathbf{v}$ та прийнявши до уваги, що $\text{div } \mathbf{\Omega} = \text{div rot } \mathbf{v} = 0$, отримаємо:

$$\frac{\partial \mathbf{\Omega}}{\partial t} - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{\Omega} - (\mathbf{\Omega} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \mathbf{\Omega} \text{div } \mathbf{v} = 0 . \quad (3.97)$$

Враховуючи (3.26) , (3.97) можна записати у вигляді:

$$\frac{d \mathbf{\Omega}}{dt} - (\mathbf{\Omega} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \mathbf{\Omega} \text{div } \mathbf{v} = 0 . \quad (3.98)$$

Рівняння (3.97) - (3.98) є рівняннями вихорів для течії ідеальної баротропної рідини під дією потенціальних сил.

Приклад 3.28. Довести, що умови (3.72) та (3.75) забезпечують єдиність розв'язку внутрішньої задачі Гельмгольца (3.71) - (3.75).

Доведення. Від супротивного. Нехай існують вектори $\mathbf{a}_1$ та $\mathbf{a}_2$ ($\mathbf{a}_1 \neq \mathbf{a}_2$), що задовольняють (3.72) та (3.75). Розглянемо $\mathbf{b} = \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2, \mathbf{b} \neq 0$, для якого $\operatorname{div} \mathbf{b} = 0 \wedge \operatorname{rot} \mathbf{b} = 0, \mathbf{r} \in V, \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0, \mathbf{r} \in S$. Отже, $\mathbf{b}$ - потенціальний вектор та

$\exists \varphi = \varphi(\mathbf{r}): \mathbf{b} = \operatorname{grad} \varphi, \Delta \varphi = 0, \mathbf{r} \in V$ та $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0, \mathbf{r} \in S$. Застосувавши до φ

формулу (3.64):
$$\int_V \left(\varphi \Delta \varphi + (\operatorname{grad} \varphi)^2 \right) dV = \oint_S \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS, \quad \text{отримуємо:}$$

$$\int_V (\operatorname{grad} \varphi)^2 dV = 0 \Leftrightarrow \varphi = 0, \mathbf{r} \in V. \quad \text{А отже, } \mathbf{b} = 0, \mathbf{r} \in V. \quad \text{Прийшли до}$$

суперечності.

Приклад 3.29. Довести, що для заданого скінченного об'єму ідеальної рідини справедливі теорема про зміну кількості руху та теорема про рух центру інерції матеріальної системи.

Доведення. Розглянемо скінченний об'єм ідеальної рідини, незмінний в лагранжевому описі $\xi: \xi \in V_L$ та такий, що має в ейлеровому описі вигляд $V_E(t) = \{ \mathbf{r}(\xi, t): \xi \in V_L \}$ з поверхнею $S_E(t) = \{ \mathbf{r}(\xi, t): \xi \in S_L \}$. Загальне рівняння гідромеханіки для ідеальної рідини визначене в (3.90): $\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \mathbf{F} - \operatorname{grad} p$.

Проінтегруємо це рівняння по $V_E(t)$:
$$\int_{V_E(t)} \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} dV = \int_{V_E(t)} (\rho \mathbf{F} - \operatorname{grad} p) dV.$$
 За

означенням, кількість руху рідини в об'ємі V_L ($V_E(t)$) визначається як:

$$\mathbf{K} = \int_{V_E(t)} \rho \mathbf{v} dV.$$
 Згідно з теоремою Рейнольдса-Лейбніца (3.78) врахувавши

рівняння нерозривності (3.88), записане у вигляді $\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ отримаємо:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{K}}{dt} &= \frac{d}{dt} \int_{V_E(t)} \rho \mathbf{v} dV = \int_{V_E(t)} \left(\frac{d(\rho \mathbf{v})}{dt} + \rho \mathbf{v} \operatorname{div} \mathbf{v} \right) dV = \\ &: \int_{V_E(t)} \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} dV + \int_{V_E(t)} \mathbf{v} \left(\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} \right) dV = \int_{V_E(t)} \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} dV. \end{aligned}$$

Оскільки за узагальненою теоремою Гауса (3.39): $\int_{V_E(t)} \text{grad } p \, dV = \oint_{S_E(t)} p \hat{n} dS$, з

загального рівняння гідромеханіки отримаємо рівняння теореми про зміну кількості руху:

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = \int_{V_E(t)} \rho \mathbf{F} \, dV - \oint_{S_E(t)} p \hat{n} dS. \quad (3.99)$$

За означенням, центр інерції об'єму рідини V_L , $\mathbf{r}_C = \mathbf{r}_C(t)$ визначається за

формулою: $\mathbf{r}_C = \frac{1}{M} \int_M \rho d\mathbf{m} = \frac{1}{M} \int_{V_E(t)} \rho \mathbf{r} dV$ ($M = \int_{V_E(t)} \rho dV$ - маса рідини). Згідно з

теоремою Рейнольдса-Лейбніца (3.78) та рівнянням нерозривності (3.88) можемо записати:

$$\begin{aligned} M \frac{d\mathbf{r}_C}{dt} &= \frac{d}{dt} \int_{V_E(t)} \rho \mathbf{r} \, dV = \int_{V_E(t)} \left(\frac{d(\rho \mathbf{r})}{dt} + \rho \mathbf{r} \text{div} \mathbf{v} \right) dV = \\ &= \int_{V_E(t)} \rho \frac{d\mathbf{r}}{dt} \, dV + \int_{V_E(t)} \mathbf{r} \left(\frac{d\rho}{dt} + \rho \text{div} \mathbf{v} \right) dV = \int_{V_E(t)} \rho \frac{d\mathbf{r}}{dt} \, dV = \int_{V_E(t)} \rho \mathbf{v} \, dV = \mathbf{K}. \end{aligned}$$

Отже, враховуючи (3.99), рівняння теореми про рух центру інерції запишеться як:

$$M \frac{d^2 \mathbf{r}_C}{dt^2} = \int_{V_E(t)} \rho \mathbf{F} \, dV - \oint_{S_E(t)} p \hat{n} dS. \quad (3.100)$$

Приклад 3.30. Розглянемо систему, що складається з абсолютно твердого тіла з відкритою однозв'язною порожниною, частково заповненою ідеальною рідиною з наявністю вільної поверхні. Довести, що для неї справедливі теореми про зміни кількості руху та руху центру інерції матеріальної системи.

Доведення. Нехай абсолютно тверде тіло займає об'єм $\xi: \xi \in V_L^{rb}$ та має масу M^{rb} . Ідеальна рідина займає об'єм: $\xi: \xi \in V_L^{ld}$ ($\mathbf{r} = \mathbf{r}(\xi, t): \xi \in V_L^{ld}$), $V_E^{ld}(t) = \{\mathbf{r}: \mathbf{r} = \mathbf{r}(\xi, t): \xi \in V_L^{ld}\}$ та має масу M^{ld} . Нехай вільна поверхня рідини $\Sigma_E^{ld}(t)$ та спільна границя (границя контакту тіла та рідини) $S_E^{com}(t)$ такі, що складають повну поверхню рідини $S_E^{com}(t) \cup \Sigma_E^{ld}(t) = S_E^{ld}(t)$. Вважаємо, що на

тверде тіло діють зовнішні об'ємні сили з густиною $\mathbf{F}^{rb}(\xi, t)$, $\xi \in V_L^{rb}$ та зосереджені сили $\mathbf{F}_i^{rb}$, $i = \overline{1, n}$, що прикладені в точках $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(\xi_i, t)$: $\xi_i \in \overline{V}_L^{ld}$ та можуть залежати від геометричних та кінематичних властивостей твердого тіла. На частину поверхні твердого тіла, що контактує з рідиною $S_E^{com}(t)$ (за нормаль до цієї поверхні оберемо зовнішню нормаль до поверхні рідини $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}, t)$: $\mathbf{r} \in S_E^{com}(t)$), діють поверхневі сили (сили тиску). Ідеальна рідина рухається під дією зовнішніх об'ємних сил $\mathbf{F}^{ld}(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{r} \in V_E^{ld}(t)$ та поверхневої сили (сили тиску) на поверхні $S_E^{com}(t)$. На вільній поверхні рідини $\Sigma_E^{ld}(t)$ тиск має бути рівний атмосферному тиску p_a . Оскільки основне рівняння гідромеханіки включає лише зміну тиску, постійна складова тиску є адитивною складовою розв'язку, отже, можна вважати, що на поверхні $\Sigma_E^{ld}(t)$ має місце $p = 0$. Згідно з результатами **Прикладу 3.29**. маємо:

$$\frac{d\mathbf{K}^{ld}}{dt} = \int_{V_E^{ld}(t)} \rho \mathbf{F} dV - \oint_{S_E^{com}(t)} p \hat{\mathbf{n}} dS, \quad (3.101)$$

$$M^{ld} \frac{d^2 \mathbf{r}_C^{ld}}{dt^2} = \int_{V_E^{ld}(t)} \rho^{ld} \mathbf{F}^{ld} dV - \oint_{S_E^{com}(t)} p \hat{\mathbf{n}} dS, \quad (3.102)$$

де $\mathbf{K}^{ld} = \mathbf{K}^{ld}(t)$, $\mathbf{r}_C^{ld} = \mathbf{r}_C^{ld}(t)$ - кількість руху та закон руху центру інерції рідини відповідно. Згідно з теоремами про зміну кількості руху та руху центру інерції системи матеріальних точок для твердого тіла отримаємо:

$$\frac{d\mathbf{K}^{rb}}{dt} = \int_{V_L^{rb}} \mathbf{F}^{rb} dV + \oint_{S_E^{com}(t)} p \hat{\mathbf{n}} dS + \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i^{rb}, \quad (3.103)$$

$$M^{rb} \frac{d^2 \mathbf{r}_C^{rb}}{dt^2} = \int_{V_L^{rb}} \mathbf{F}^{rb} dV + \oint_{S_E^{com}(t)} p \hat{\mathbf{n}} dS + \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i^{rb}, \quad (3.104)$$

де $\mathbf{K}^{rb} = \mathbf{K}^{rb}(t)$, $\mathbf{r}_C^{rb} = \mathbf{r}_C^{rb}(t)$ - кількість руху та закон руху центру інерції твердого тіла. Оскільки, за означенням кількість руху та центр інерції системи визначаються

як :

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}^{lb} + \mathbf{K}^{rb} = \mathbf{K}(t), M\mathbf{r}_C = M^{ld}\mathbf{r}_C^{ld} + M^{rb}\mathbf{r}_C^{rb} = M\mathbf{r}_C(t), M = M^{rb} + M^{ld} \quad , \quad \text{то} \quad 3$$

(3.103)-(3.104.) отримаємо:

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = \int_{V_E^{ld}(t)} \rho \mathbf{F} dV + \int_{V_L^{rb}} \mathbf{F}^{rb} dV + \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i^{rb} \quad , \quad (3.105)$$

$$M \frac{d^2 \mathbf{r}_C}{dt^2} = \int_{V_E^{ld}(t)} \rho^{ld} \mathbf{F}^{ld} dV + \int_{V_L^{rb}} \mathbf{F}^{rb} dV + \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i^{rb} \quad .$$

Отже, для описаної матеріальної системи справедливі теореми про зміни кількості руху та руху центру інерції матеріальної системи (3.105).

Приклад 3.31. Привести основну ідею розв'язання задачі Гельмгольца (3.71) - (3.75).

Розв'язання. Вважатимемо, що достатні умови існування та єдиності розв'язку задачі Гельмгольца виконані.

1) Побудуємо потенціальний вектор $\mathbf{b}_1$ з потенціалом φ ($\text{grad } \varphi = \mathbf{b}_1$) такий, що $\text{div } \mathbf{b}_1 = \rho \Leftrightarrow \Delta \varphi = \rho$. Частинним розв'язком рівняння Пуассона є інтеграл

Пуассона (потенціал Ньютона): $\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV(\mathbf{r}')$. У випадку задачі в

$\mathbb{R}^3$ потрібно спрямувати V до E . У випадку зовнішньої задачі інтеграл Пуассона побудуємо на $V \setminus V'$, де $V \subset V'$ та спрямуємо V' до $\mathbb{R}^3$. Очевидно також, що $\text{rot } \mathbf{b}_1 = \text{rot grad } \varphi = 0$.

2) Побудуємо соленоїдальний вектор $\mathbf{b}_2$ з вихровим потенціалом $\mathbf{A}$ ($\text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{b}_2$).

Оскільки $\text{rot } \mathbf{b}_2 = \text{rot rot } \mathbf{A} = \text{grad}(\text{div } \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A}$. то $\text{rot } \mathbf{b}_2 = \boldsymbol{\omega} \Leftrightarrow \Delta \mathbf{A} = -\boldsymbol{\omega}$.

Частинним розв'язком рівняння Пуассона є інтеграл Пуассона (потенціал

Ньютона): $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV(\mathbf{r}')$. Легко бачити, що $\text{div } \boldsymbol{\omega} = 0 \Rightarrow$

$\text{div } \mathbf{A} = 0$. У випадку задачі в E потрібно спрямувати V до $\mathbb{R}^3$. У випадку зовнішньої задачі інтеграл Пуассона побудуємо на $V \setminus V'$, де $V \subset V'$ та спрямуємо V' до E . Очевидно також, що $\text{div } \mathbf{b}_2 = \text{div rot } \mathbf{A} = 0$.

Таким чином, $\mathbf{a} = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 = \text{grad } \varphi + \text{rot } \mathbf{A}$ є шуканим вектором у випадку задачі Гельмгольца в $\mathbb{R}^3$.

3) При розв'язанні внутрішньої та зовнішньої задач необхідно також задовольнити граничні умови: $\mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{n}} = f(\mathbf{r}), \mathbf{r} \in S$, $\hat{\mathbf{n}}$ - нормаль до S (поверхні V). Для цього, побудуємо потенціальний вектор $\mathbf{b}_3$ з потенціалом ψ ($\text{grad } \psi = \mathbf{b}_3$) такий, що $\text{div } \mathbf{b}_3 = 0 \Leftrightarrow \Delta \psi = 0$ та який задовольняє граничну умову: $(\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3) \cdot \hat{\mathbf{n}} = f(\mathbf{r}), \mathbf{r} \in S$, тобто є розв'язком задачі Неймана:

$$\begin{aligned} \Delta \psi &= 0, \mathbf{r} \in V \\ \frac{\partial \psi}{\partial n} &= f(\mathbf{r}) - (\mathbf{b}_1(\mathbf{r}) + \mathbf{b}_2(\mathbf{r})) \cdot \hat{\mathbf{n}}, \mathbf{r} \in S \end{aligned} \quad (3.106)$$

Для зовнішньої області, задача (3.106) має розв'язок і він - єдиний.

Для внутрішньої області для існування розв'язку (у випадку існування розв'язку, він буде єдиним) необхідно та достатньо виконання умови сумісності: $\oint_S (f(\mathbf{r}) - (\mathbf{b}_1(\mathbf{r}) + \mathbf{b}_2(\mathbf{r})) \cdot \hat{\mathbf{n}}) dS = 0$. Очевидно, згідно з теоремою Гауса

$$(3.37): \quad \oint_S \mathbf{b}_1(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \oint_S \text{grad } \varphi \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \int_V \Delta \varphi dS = \int_V \rho dS \quad \text{та}$$

$$\oint_S \mathbf{b}_2(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \oint_S \text{rot } \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \int_V \text{div rot } \mathbf{A} dS = 0 \quad . \quad \text{Отже критерій Неймана}$$

виконаний.

Як бачимо, $\mathbf{a} = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3 = \text{grad}(\varphi + \psi) + \text{rot } \mathbf{A}$ є розв'язком зовнішньої та внутрішньої задач Гельмгольца.

Приклад 3.32. Поновити вектор по значеннях його дивергенції та вихору в $\mathbb{R}^2$.

Розв'язання. Нехай для невідомого вектора $\mathbf{a} = \mathbf{a}(x, y) = i a_x(x, y) + j a_y(x, y)$ задано

$$\begin{cases} \text{div } \mathbf{a} = \rho \\ \text{rot } \mathbf{a} = \omega \end{cases} \quad , \text{ де } \rho = \rho(x, y), \omega = \omega(x, y) - \text{задані функції в } \mathbb{R}^2.$$

За означенням $\text{rot } \mathbf{a}$, очевидно в $\mathbb{R}^2$ має місце: $\omega(x, y) = k \omega(x, y)$. Згідно з теоремою Гельмгольца маємо: $\mathbf{a} = \text{grad } \varphi + \text{rot } \mathbf{A}, \text{div } \mathbf{A} = 0$, де $\varphi = \varphi(x, y), \mathbf{A} = \mathbf{A}(x, y)$. Покладемо $\mathbf{A} = k \psi(x, y)$. В цьому випадку рівність

$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ виконується автоматично, та оскільки $\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{a} = \rho \\ \operatorname{rot} \mathbf{a} = \mathbf{k}\omega(x, y) \end{cases}$ то $\begin{cases} \Delta \varphi = \rho \\ \Delta \psi = \omega \end{cases}$.

Отже,
$$\begin{cases} a_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ a_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases}, \quad \text{де} \quad \varphi(x, y) = \lim_{S \rightarrow \mathbb{R}^2} \frac{1}{2\pi} \int_S \rho(x', y') \ln r' dx' dy' ,$$

$$\psi(x, y) = \lim_{S \rightarrow \mathbb{R}^2} \frac{1}{2\pi} \int_S \omega(x', y') \ln r' dx' dy' , \quad r' = (x'^2 + y'^2)^{1/2} - \text{інтеграли Пуассона для}$$

площини $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Приклад 3.33. Довести теорему про автомодельний розв'язок хвильового рівняння, яка стверджує, що для будь-якої двічі диференційованої функції $\psi(\mathbf{r}, t)$ та довільної точки ξ , функція

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{r} \psi(\xi, t - r/c), \quad \text{де } r = |\mathbf{r} - \xi| \quad (3.107)$$

задовольняє хвильове рівняння $\Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0$.

Доведення. Очевидно, $\operatorname{grad} \varphi = \frac{1}{r} \operatorname{grad} \psi + \psi \operatorname{grad} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{1}{r} \operatorname{grad} \psi - \frac{\mathbf{r} - \xi}{r^3} \psi$ та

$$\operatorname{grad} \psi = -\frac{1}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t} \operatorname{grad} r = -\frac{1}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{\mathbf{r} - \xi}{r} \Rightarrow \operatorname{grad} \varphi = -\left(\frac{1}{cr} \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\psi}{r^2} \right) \frac{\mathbf{r} - \xi}{r} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Delta \varphi &= \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = -\left(\frac{1}{cr^2} \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\psi}{r^3} \right) \operatorname{div}(\mathbf{r} - \xi) - (\mathbf{r} - \xi) \cdot \operatorname{grad} \left(\frac{1}{cr^2} \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\psi}{r^3} \right) = \\ &= -3 \left(\frac{1}{cr^2} \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\psi}{r^3} \right) - (\mathbf{r} - \xi) \cdot \frac{(\mathbf{r} - \xi)}{r} \left(-\frac{1}{c^2 r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \frac{2}{cr^3} \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{1}{cr^3} \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{3\psi}{r^4} \right) = \\ &= \frac{1}{c^2 r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \end{aligned}$$

Водночас, $\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = r \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$. Отже, $\Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0$.

Приклад 3.34. Основне рівняння лінійної однорідної ізотропної динамічної теорії пружності (рівняння Ламе) в лагранжевому описі має вигляд:

$$\mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} - \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} + \mathbf{X} = 0 , \quad (3.108)$$

де $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ - вектор пружних переміщень, λ, μ - коефіцієнти Ламе, ρ - густина, $\mathbf{X}$ - густина зовнішньої об'ємної сили.

Показати, що рівняння Ламе можна представити у вигляді:

$$c_1^2 \operatorname{grad}(\operatorname{div} \mathbf{u}) - c_2^2 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u} - \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} + \frac{1}{\rho} \mathbf{X} = 0 , \quad (3.109)$$

$$\text{де } c_1^2 = \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \right)^{1/2} , \quad c_2^2 = \left(\frac{\mu}{\rho} \right)^{1/2} .$$

Розв'язання. Дійсно, виконавши в (3.108) підстановку згідно з (3.92) $\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} = \Delta \mathbf{u} + \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u}$, отримаємо (3.109).

Приклад 3.35. Отримати з (3.109) рівняння для дилатації ($e(\mathbf{r}, t) = \operatorname{div} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$) та вектора обертання ($\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$).

Розв'язання. Застосувавши до (3.109) операцію div та врахувавши, що $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u}) = 0$, перепишемо (3.109) у вигляді:

$$c_1^2 \Delta(\operatorname{div} \mathbf{u}) - \operatorname{div} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \right) + \frac{\operatorname{div} \mathbf{X}}{\rho} = 0 . \quad (3.110)$$

Оскільки $\operatorname{div} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \right) = \frac{\partial^2 (\operatorname{div} \mathbf{u})}{\partial t^2}$ то рівняння для дилатації має вигляд:

$$\Delta e - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 e}{\partial t^2} + \frac{1}{\rho c_1^2} \operatorname{div} \mathbf{X} = 0 . \quad (3.111)$$

Застосувавши до (3.109) операцію rot та врахувавши, що $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u}) = 0$, перепишемо (3.109) у вигляді:

$$\frac{\mu}{\rho} \operatorname{rot}(\Delta \mathbf{u}) - \operatorname{rot} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \right) + \frac{1}{\rho} \operatorname{rot} \mathbf{X} = 0 , \text{ або, враховуючи, що } \operatorname{rot} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \right) = \frac{\partial^2 (\operatorname{rot} \mathbf{u})}{\partial t^2} ,$$

рівняння для вектора обертання запишеться у вигляді:

$$\Delta \boldsymbol{\omega} - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{\omega}}{\partial t^2} + \frac{\operatorname{rot} \mathbf{X}}{c_2^2 \rho} = 0 . \quad (3.112)$$

Отже, дилатація та обертання задовольняють хвильові рівняння.

Приклад 3.36. Представити розв'язок однорідного рівняння Ламе (3.109) у вигляді суперпозиції безвихрового та соленоїдального векторів пружних переміщень, що задовольняють хвильові рівняння.

Розв'язання. Запишемо однорідне рівняння Ламе у вигляді

$$c_1^2 \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} - c_2^2 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u} - \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = 0. \quad (3.113)$$

Згідно з теоремою Гельмгольца, вектор пружних переміщень $\mathbf{u}$ можна представити у вигляді суми членів: $\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$, таких, що $\operatorname{rot} \mathbf{v} = 0$ та $\operatorname{div} \mathbf{w} = 0$.

Підставимо це представлення в (3.113) та застосуємо до отриманого виразу операцію div . Приймаючи до уваги той факт, що $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u}) = 0$,

отримаємо: $\operatorname{div} \left(c_1^2 \Delta \mathbf{v} - \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2} \right) = 0$. Оскільки $\operatorname{rot} \mathbf{v} = 0$, то $\operatorname{rot} \left(c_1^2 \Delta \mathbf{v} - \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2} \right) = 0$.

Згідно з результатами Вправи 3.27, $\mathbf{v}$ задовольняє хвильовому рівнянню:

$$c_1^2 \Delta \mathbf{v} - \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2} = 0. \quad (3.114)$$

Підставимо представлення $\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$ в (3.113) та застосуємо до отриманого рівняння операцію rot . Враховуючи, що $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u}) = 0$, отримаємо:

$\operatorname{rot} \left(c_2^2 \Delta \mathbf{w} - \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2} \right) = 0$. Оскільки в силу умови $\operatorname{div} \mathbf{w} = 0$, а отже,

$\operatorname{div} \left(c_2^2 \Delta \mathbf{w} - \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2} \right) = 0$, то згідно з результатами Вправи 3.27 $\mathbf{w}$ задовольняє

хвильове рівняння:

$$c_2^2 \Delta \mathbf{w} - \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2} = 0. \quad (3.115)$$

Приклад 3.37. Довести теорему Ламе: якщо поле пружних переміщень задовольняє неоднорідне рівняння Ламе (3.108) та об'ємна сила і початкові значення розкладаються на потенціали Гельмгольца:

$$\mathbf{X} = \text{grad } \Phi + \text{rot } \Psi, \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(\mathbf{r}, 0) = \text{grad } A + \text{rot } \mathbf{B}, \quad \mathbf{u}(\mathbf{r}, 0) = \text{grad } C + \text{rot } \mathbf{D} \quad (3.116)$$

таких, що

$$\text{div } \Psi = 0, \text{div } \mathbf{B} = 0, \text{div } \mathbf{D} = 0, \quad (3.117)$$

то існують потенціали φ та ψ для яких:

$$1) \mathbf{u} = \text{grad } \varphi + \text{rot } \psi;$$

$$2) \text{div } \psi = 0;$$

$$3) c_1^2 \Delta \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{\Phi}{\rho} = 0; \quad (3.118)$$

$$4) c_2^2 \Delta \psi - \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \frac{\Psi}{\rho} = 0.$$

Доведення. Представимо φ та ψ у вигляді:

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\rho} \int_0^t (t - \tau) (\Phi(\mathbf{r}, \tau) + (\lambda + 2\mu) \text{div } \mathbf{u}(\mathbf{r}, \tau)) d\tau + tA + C, \quad (3.119)$$

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\rho} \int_0^t (t - \tau) (\Psi(\mathbf{r}, \tau) - \mu \text{rot } \mathbf{u}(\mathbf{r}, \tau)) d\tau + t\mathbf{B} + \mathbf{D}. \quad (3.120)$$

Перевіримо виконання 1)-4).

1)

$$\text{grad } \varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\rho} \int_0^t (t - \tau) (\text{grad } \Phi(\mathbf{r}, \tau) + (\lambda + 2\mu) \text{grad } (\text{div } \mathbf{u}(\mathbf{r}, \tau))) d\tau + t \text{grad } A + \text{grad } C,$$

$$\text{rot } \psi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\rho} \int_0^t (t - \tau) (\text{rot } \Psi(\mathbf{r}, \tau) - \mu \text{rot } \text{rot } \mathbf{u}(\mathbf{r}, \tau)) d\tau + t \text{rot } \mathbf{B} + \text{rot } \mathbf{D}. \text{ Отже,}$$

$$\text{grad } \varphi(\mathbf{r}, t) + \text{rot } \psi(\mathbf{r}, t) =$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\rho} \int_0^t (t - \tau) \{ (\text{grad } \Phi(\mathbf{r}, \tau) + \text{rot } \Psi(\mathbf{r}, \tau)) + \\ & ((\lambda + 2\mu) \text{grad } (\text{div } \mathbf{u}(\mathbf{r}, \tau)) - \mu \text{rot } \text{rot } \mathbf{u}(\mathbf{r}, \tau)) \} d\tau + \\ & t(\text{grad } A + \text{rot } \mathbf{B}) + (\text{grad } C + \text{rot } \mathbf{D}). \end{aligned}$$

Оскільки $\mathbf{u}(\mathbf{r}, \tau)$ задовольняє рівняння Ламе (3.113), та враховуючи (3.117):

$$\text{grad } \varphi(\mathbf{r}, t) + \text{rot } \boldsymbol{\psi}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\rho} \int_0^t (t - \tau) \rho \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{r}, \tau)}{\partial \tau} d\tau + t \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(\mathbf{r}, 0) + \mathbf{u}(\mathbf{r}, 0) ,$$

звідки отримаємо $\text{grad } \varphi(\mathbf{r}, t) + \text{rot } \boldsymbol{\psi}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$.

$$2) \quad \text{div } \boldsymbol{\psi}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\rho} \int_0^t (t - \tau) (\text{div } \boldsymbol{\Psi}(\mathbf{r}, \tau) - \mu \text{div rot } \mathbf{u}(\mathbf{r}, \tau)) d\tau + t \text{div } \mathbf{B} + \text{div } \mathbf{D} = 0 \quad \text{згідно}$$

з (3.113) та очевидним фактом: $\text{div rot } \mathbf{u} = 0$.

3) Враховуючи, що $\text{div } \mathbf{u} = \text{div}(\text{grad } \varphi + \text{rot } \boldsymbol{\psi}) = \text{div grad } \varphi = \Delta \varphi$ отримаємо:

$$\frac{\partial \varphi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \int_0^t (\Phi(\mathbf{r}, \tau) + (\lambda + 2\mu) \Delta \varphi(\mathbf{r}, \tau)) d\tau + A \quad \text{та}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho} (\Phi(\mathbf{r}, t) + (\lambda + 2\mu) \Delta \varphi(\mathbf{r}, t)) . \quad \text{Тобто 3) виконується.}$$

4) Оскільки $\text{rot } \mathbf{u} = \text{rot}(\text{grad } \varphi + \text{rot } \boldsymbol{\psi}) = \text{rot rot } \boldsymbol{\psi} = \text{grad div } \boldsymbol{\psi} - \Delta \boldsymbol{\psi}$, то аналогічно

до попереднього маємо:

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{\psi}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho} (\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{r}, t) - \mu \text{rot } \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)) = \frac{1}{\rho} (\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{r}, \tau) - \mu \Delta \boldsymbol{\psi}(\mathbf{r}, t))$$

Приклад 3.38. Довести, що рівняння Ламе має наслідком результат теореми про рух інерції матеріальної системи та теореми про зміну кількості руху матеріальної системи.

Розв'язання. Нехай вільне обмежене деформівне тіло V з поверхнею S рухається під дією об'ємних розподілених сил з густиною $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{r}, t), \mathbf{r} \in V$, зосереджених сил $\mathbf{F}_i(t)$ (прикладених в точках тіла з лагранжевими радіус-векторами $\mathbf{r}_i \in \bar{V}$), $i = \overline{1, n}$ та поверхневих сил з віднесеною до одиниці площі поверхні $\mathbf{T} = \mathbf{T}(\mathbf{r}, t), \mathbf{r} \in S$. Динамічна рівновага такого тіла забезпечується при розв'язанні початково-граничної задачі для рівняння Ламе, записаного відносно вектора пружних переміщень $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r}, t), \mathbf{r} \in V, t > 0$:

$$(\lambda + 2\mu) \text{grad div } \mathbf{u} - \mu \text{rot rot } \mathbf{u} - \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} + \mathbf{X} + \sum_{i=1}^n \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \mathbf{F}_i = 0 , \quad (3.121)$$

граничних умов:

$$\mathbf{t}_n = \mathbf{T}(\mathbf{r}, t), \mathbf{r} \in S \quad (3.122)$$

де $\mathbf{t}_n$ - вектор напружень на поверхні S з нормаллю $\hat{\mathbf{n}}$.

та початкових умов:

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{r}), \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(\mathbf{r}, 0) = \dot{\mathbf{u}}_0(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in V \quad (3.123)$$

Проінтегруємо (3.121) по V в векторному просторі лагранжевих координат:

$$\int_V \left\{ (\lambda + 2\mu) \text{grad div} \mathbf{u} - \mu \text{rot rot} \mathbf{u} - \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} + \mathbf{X} + \sum_{i=1}^n \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \mathbf{F}_i \right\} dV = 0$$

Проаналізуємо

$$\mathbf{I}_1 = \int_V \{ (\lambda + 2\mu) \text{grad div} \mathbf{u} - \mu \text{rot rot} \mathbf{u} \} dV.$$

Згідно з узагальненою теоремою Гауса (3.39):

$$\mathbf{I}_1 = \oint_S \{ (\lambda + 2\mu) \hat{\mathbf{n}} \text{div} \mathbf{u} - \mu \hat{\mathbf{n}} \times \text{rot} \mathbf{u} \} dS.$$

Згідно з (3.50) $\mathbf{a} \times \text{rot} \mathbf{b} = -(\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{b} + \mathbf{a} \text{div} \mathbf{b}$, отже, $\hat{\mathbf{n}} \times \text{rot} \mathbf{u} = -(\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \hat{\mathbf{n}} \text{div} \mathbf{u}$.

Тобто

$$\mathbf{I}_1 = \oint_S \{ (\lambda + \mu) \hat{\mathbf{n}} \text{div} \mathbf{u} + \mu (\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla) \mathbf{u} \} dS. \quad (3.124)$$

Покажемо, що $(\lambda + \mu) \hat{\mathbf{n}} \text{div} \mathbf{u} + \mu (\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \mathbf{t}_n$.

Дійсно, в координатному представленні (в базовій системі координат) $\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{e}_i n_i$,

$\mathbf{u} = \mathbf{e}_i u_i$, $\mathbf{t}_n = \mathbf{e}_i t_i$ ($\mathbf{e}_i, i = \overline{1,3}$ - орти прямокутної декартової системи координат) де

$t_i = \mu(u_{i,j} + u_{j,i})n_j + \lambda u_{j,j}n_i$. Нормальна складова $\mathbf{t}_n$ визначається як:

$t_i n_i = \mu(u_{i,j} + u_{j,i})n_j n_i + \lambda u_{j,j}n_i n_i = (2\mu + \lambda)u_{i,i}$, ($u_{i,i} = \text{div} \mathbf{u} = e$). Проекція $\mathbf{t}_n$ на

довільний дотичний напрямок $\hat{\boldsymbol{\tau}} = \mathbf{e}_i \tau_i : \hat{\boldsymbol{\tau}} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0, |\hat{\boldsymbol{\tau}}| = 1 \Leftrightarrow \tau_i n_i = 0, \tau_i n_i = 1$ дорівнює:

$t_i \tau_i = \mu(u_{i,j} + u_{j,i})n_j \tau_i + \lambda u_{j,j}n_i \tau_i = \mu(u_{i,j} + u_{j,i})n_i \tau_j$, де в останньому виразі при

сумуванні $i < j$.

Нормальна складова підінтегрального виразу (3.124) дорівнює:

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \{(\lambda + \mu) \hat{\mathbf{n}} \operatorname{div} \mathbf{u} + \mu (\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla) \mathbf{u}\} = (\lambda + \mu) u_{i,i} + \mu n_i n_j u_{i,j} = (\lambda + 2\mu) u_{i,i} = t_i n_i \quad \text{оскільки} \\ n_i n_j = \delta_{ij}.$$

Проекція підінтегрального виразу (3.124) на дотичний напрямок $\hat{\boldsymbol{\tau}}$ дорівнює:

$$\hat{\boldsymbol{\tau}} \cdot \{(\lambda + \mu) \hat{\mathbf{n}} \operatorname{div} \mathbf{u} + \mu (\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla) \mathbf{u}\} = \mu \hat{\boldsymbol{\tau}} \cdot ((\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla) \mathbf{u}) = \\ \mu (\tau_i n_j) u_{i,j} = \mu (u_{i,j} + u_{j,i}) n_i \tau_j = t_i \tau_i.$$

Отже, згідно з граничною умовою (3.122) $I_1 = \oint_S \mathbf{t}_n dS = \oint_S \mathbf{T} dS$.

Проаналізуємо інтеграл $I_2 = \int_V \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} dV = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_V \rho \mathbf{u} dV$. Рівняння Ламе отримані в

лагранжевому описі в припущенні, що в недеформованому стані тіла V лагранжеві та ейлерові координати збігаються (під $\mathbf{r}$ розуміється лагранжевий незмінний з часом вектор, що ідентифікує деяку однозначно визначену матеріальну точку тіла). Тому положення матеріальної точки, що визначається лагранжевим вектором $\mathbf{r}$ в момент часу t в просторово-координатному ейлеровому описі визначається як $\mathbf{r}'(\mathbf{r}, t) = \mathbf{r} + \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$. Отже, оскільки $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} = 0$,

то $\frac{\partial \mathbf{r}'(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}$ є швидкістю матеріальної точки тіла з лагранжевим радіус-вектором $\mathbf{r}$ в момент часу t . Тоді інтеграл I_2 запишеться у вигляді:

$$I_2 = \int_V \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} dV = \int_V \rho \frac{\partial^2 \mathbf{r}'}{\partial t^2} dV = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_V \rho \mathbf{r}' dV = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_V \mathbf{r}' dm \quad . \quad \text{За означенням,}$$

$$\int_V \mathbf{r}' dm = M \mathbf{r}_C' \quad , \quad \text{де } \mathbf{r}_C' \text{ - просторовий (ейлерів) радіус-вектор центру інерції}$$

деформівного тіла, а отже $\frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_V \mathbf{r}' dm = M \mathbf{w}_C$. Підсумовуючи, отримаємо:

$$M \mathbf{w}_C = \oint_S \mathbf{T} dS + \int_V \mathbf{X} dV + \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i. \quad (3.125)$$

Тобто, центр інерції деформівного тіла рухається як матеріальна точка, маса якої дорівнює масі тіла під дією головного вектора всіх зовнішніх сил, прикладених до тіла.

Водночас, за означенням, кількість руху субфізичного елементу dV з масою

$dm = \rho dV$ дорівнює: $dK = \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \rho dV$. Повна кількість руху:

$K = \int_V \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \rho dV$. Отже, $\mathbf{I}_2 = \frac{dK}{dt}$ та формула (3.125) може бути записана як:

$$\frac{dK}{dt} = \iint_S \mathbf{T} dS + \int_V \mathbf{X} dV + \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i . \quad (3.126)$$

Отже, швидкість зміни кількості руху деформівного тіла (описаного моделлю Ламе) дорівнює головному вектору всіх зовнішніх сил, прикладених до тіла.

Приклад 3.39. Довести, що рівняння Ламе мають наслідком результат теореми про зміну кінетичного моменту матеріальної системи.

Розв'язання. Нехай, як і в **Прикладі 3.38.** , вільне обмежене деформівне тіло V з поверхнею S рухається під дією об'ємних розподілених сил з густиною $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{r}, t), \mathbf{r} \in V$, зосереджених сил $\mathbf{F}_i(t)$ (прикладених в точках $\mathbf{r}_i \in \bar{V}$) , $i = \overline{1, n}$ та поверхневих сил з віднесеною до одиниці площі поверхні густиною $\mathbf{T} = \mathbf{T}(\mathbf{r}, t), \mathbf{r} \in S$. Динамічна рівновага такого тіла забезпечується при розв'язанні початково-граничної задачі для рівняння Ламе, записаного відносно вектора пружних переміщень $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r}, t), \mathbf{r} \in V, t > 0$ (3.121), граничних умов (3.122) та початкових умов (3.123).

Помножимо рівняння Ламе зліва на ейлерів радіус-вектор $\mathbf{r}'(\mathbf{r}, t) = \mathbf{r} + \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ векторним чином та проінтегруємо по об'єму тіла :

$$\int_V \mathbf{r}' \times \left\{ (\lambda + 2\mu) \text{grad div} \mathbf{u} - \mu \text{rot rot} \mathbf{u} - \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} + \mathbf{X} + \sum_{i=1}^n \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \mathbf{F}_i \right\} dV = 0 .$$

Як і в **Прикладі 3.38.**, згідно з узагальненою теоремою Гауса рівняння Ламе можна переписати у вигляді:

$$\oint_S (\mathbf{r} + \mathbf{u}) \times \{(\lambda + 2\mu) \hat{\mathbf{n}} \operatorname{div} \mathbf{u} - \mu \hat{\mathbf{n}} \times \operatorname{rot} \mathbf{u}\} dS + \int_V (\mathbf{r} + \mathbf{u}) \times \mathbf{X} dV + \sum_{i=1}^n (\mathbf{r}_i + \mathbf{u}(\mathbf{r}_i, t)) \times \mathbf{F}_i - \int_V \rho (\mathbf{r} + \mathbf{u}) \times \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} dV = 0. \quad (3.127)$$

В Прикладі 3.38. також показано, що $(\lambda + \mu) \hat{\mathbf{n}} \operatorname{div} \mathbf{u} + \mu (\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \mathbf{t}_n$. Момент кількості руху субфізичного елемента dV з масою $dm = \rho dV$ відносно нульової точки ($\mathbf{r}' = 0$) дорівнює: $d\mathbf{L}_O = \mathbf{r}' \times d\mathbf{K} = (\mathbf{r} + \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)) \times \left(\frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \rho dV \right)$. Отже,

кінетичний момент деформівного тіла визначається як:

$$\mathbf{L}_O = \int_V \rho (\mathbf{r} + \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)) \times \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} dV. \quad \text{Знайдемо бистроту зміни кінетичного}$$

моменту:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{L}_O}{dt} &= \int_V \rho \frac{\partial}{\partial t} \left((\mathbf{r} + \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)) \times \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right) dV = \int_V \rho \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \times \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right) dV + \\ &\int_V (\mathbf{r} + \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)) \times \frac{\partial^2 \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} dV = \int_V (\mathbf{r} + \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)) \times \frac{\partial^2 \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} dV. \end{aligned} \quad (3.128)$$

Отже, (3.128) запишеться у вигляді:

$$\frac{d\mathbf{L}_O}{dt} = \oint_S (\mathbf{r} + \mathbf{u}) \times \mathbf{t}_n dS + \int_V (\mathbf{r} + \mathbf{u}) \times \mathbf{X} dV + \sum_{i=1}^n (\mathbf{r}_i + \mathbf{u}(\mathbf{r}_i, t)) \times \mathbf{F}_i. \quad (3.129)$$

Отримали класичний результат: бистрота зміни кінетичного моменту деформівного тіла (описаного моделлю Ламе) дорівнює головному моменту всіх зовнішніх сил, прикладених до тіла.

Приклад 3.40. Формули Гріна є інтегральними співвідношеннями для оператора Лапласа. Зокрема, наслідком другої формули Гріна є той факт, що оператор Лапласа є самоспряженим оператором. Побудувати аналогічні інтегральні співвідношення для оператора Ламе.

Розв'язання. З рівняння (3.121) оператор Ламе має вигляд:

$$\hat{\mathbf{L}} = (\lambda + 2\mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} - \mu \operatorname{rot} \operatorname{rot} - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2}. \quad (3.130)$$

Проведемо деякі попередні перетворення:

$$\mathbf{v} \cdot \text{grad div } \mathbf{u} = \text{grad}(\mathbf{v} \text{ div } \mathbf{u}) - \text{grad } \mathbf{u} \cdot \text{grad } \mathbf{v} , \quad (3.131)$$

$$\mathbf{v} \cdot \text{rot rot } \mathbf{u} = -\text{div}(\mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{u}) + \text{rot } \mathbf{v} \cdot \text{rot } \mathbf{u} , \quad (3.132)$$

$$\mathbf{v} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right) - \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} . \quad (3.133)$$

Використовуючи (3.131) - (3.133), з (3.130) отримаємо:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{L}} \mathbf{u} &= (\lambda + 2\mu) \mathbf{v} \cdot (\text{grad div } \mathbf{u}) - \mu \mathbf{v} \cdot (\text{rot rot } \mathbf{u}) - \rho \mathbf{v} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \\ &= \nabla \{ (\lambda + 2\mu) \mathbf{v} \text{ div } \mathbf{u} + \mu \mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{u} \} - \rho \frac{\partial}{\partial t} \left(\mathbf{v} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right) - \\ &= (\lambda + 2\mu) \text{div } \mathbf{v} \text{ div } \mathbf{u} - \mu \text{rot } \mathbf{v} \cdot \text{rot } \mathbf{u} + \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} . \end{aligned} \quad (3.134)$$

Проінтегруємо $\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{L}} \mathbf{u}$ по області $[0, t] \times V$ та застосуємо теорему Гауса:

$$\begin{aligned} \int_0^t dt \int_V \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{L}} \mathbf{u} dV &= \int_0^t dt \oint_S \{ \hat{\mathbf{n}} \cdot ((\lambda + 2\mu) \mathbf{v} \text{ div } \mathbf{u} + \mu \mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{u}) \} dS - \\ &= \rho \left(\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \cdot \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} - \mathbf{v}(\mathbf{r}, 0) \cdot \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{r}, 0)}{\partial t} \right) - \\ &= \int_0^t dt \int_V \left\{ (\lambda + 2\mu) \text{div } \mathbf{v} \text{ div } \mathbf{u} - \mu \text{rot } \mathbf{v} \cdot \text{rot } \mathbf{u} - \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right\} dV . \end{aligned} \quad (3.135)$$

Враховуючи, що $\hat{\mathbf{n}} \cdot ((\lambda + 2\mu) \mathbf{v} \text{ div } \mathbf{u} + \mu \mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{u}) = \mathbf{v} \cdot ((\lambda + \mu) \hat{\mathbf{n}} \text{ div } \mathbf{u} + \mu (\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla) \mathbf{u})$,

отримаємо аналог першої формули Гріна для оператора Ламе:

$$\begin{aligned} \int_0^t dt \int_V \left\{ \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{L}} \mathbf{u} + (\lambda + 2\mu) \text{div } \mathbf{v} \text{ div } \mathbf{u} - \mu \text{rot } \mathbf{v} \cdot \text{rot } \mathbf{u} - \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right\} dV = \\ \int_0^t dt \oint_S \left\{ \mathbf{v} \cdot ((\lambda + \mu) \hat{\mathbf{n}} \text{ div } \mathbf{u} + \mu (\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla) \mathbf{u}) \right\} dS - \\ \rho \int_V \left(\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \cdot \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} - \mathbf{v}(\mathbf{r}, 0) \cdot \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{r}, 0)}{\partial t} \right) dV . \end{aligned} \quad (3.136)$$

Помінявши в (3.136) місцями $\mathbf{u}$ та $\mathbf{v}$ отримаємо симетричну формулу. Віднявши її від (3.136) отримаємо аналог другої формули Гріна для оператора Ламе:

$$\begin{aligned}
& \int_0^t dt \int_V \{ \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{L}} \mathbf{u} - \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{L}} \mathbf{v} \} dV = \\
& \int_0^t dt \int_S \{ \mathbf{v} \cdot ((\lambda + \mu) \hat{\mathbf{n}} \operatorname{div} \mathbf{u} + \mu (\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla) \mathbf{u}) - \mathbf{u} \cdot ((\lambda + \mu) \hat{\mathbf{n}} \operatorname{div} \mathbf{v} + \mu (\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla) \mathbf{v}) \} dS - \\
& \rho \int_V \left(\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \cdot \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} - \mathbf{v}(\mathbf{r}, 0) \cdot \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{r}, 0)}{\partial t} - \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \cdot \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \mathbf{u}(\mathbf{r}, 0) \cdot \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{r}, 0)}{\partial t} \right) dV.
\end{aligned} \quad (3.137)$$

З (3.137) зокрема слідує, що оператор Ламе є самоспряженим оператором.

В **Прикладі 3.38.** доведено, що $(\lambda + \mu) \hat{\mathbf{n}} \operatorname{div} \mathbf{u} + \mu (\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \mathbf{t}_n^u$ ($\mathbf{t}_n^u$ - вектор напружень на площадці з нормаллю $\hat{\mathbf{n}}$, що узгоджений з вектором переміщень $\mathbf{u}$). Тоді (3.137) набуде вигляду:

$$\begin{aligned}
& \int_0^t dt \int_V \{ \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{L}} \mathbf{u} - \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{L}} \mathbf{v} \} dV = \\
& \int_0^t dt \int_S \{ \mathbf{v} \cdot \mathbf{t}_n^u - \mathbf{u} \cdot \mathbf{t}_n^v \} dS - \\
& \rho \int_V \left(\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \cdot \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} - \mathbf{v}(\mathbf{r}, 0) \cdot \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{r}, 0)}{\partial t} - \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \cdot \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \mathbf{u}(\mathbf{r}, 0) \cdot \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{r}, 0)}{\partial t} \right) dV
\end{aligned} \quad (3.138)$$

Розглянемо дві мішані задачі динамічного деформування тіла різними системами навантаження з нульовими початковими умовами.

Пружні переміщення $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r}, t), \mathbf{r} \in V, t > 0$ знаходяться як розв'язок початково-граничної задачі:

$$\begin{aligned}
& \hat{\mathbf{L}} \mathbf{u} + \mathbf{X} = 0, \mathbf{r} \in V, t > 0 \\
& \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{r}, t), \mathbf{r} \in S_u, t > 0 \\
& \mathbf{t}_n^u(\mathbf{r}, t) = \bar{\mathbf{t}}_n^u(\mathbf{r}, t), \mathbf{r} \in S_{t_n}, t > 0, S_u \cup S_{t_n} = S \\
& \mathbf{u}(\mathbf{r}, 0) = 0, \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{r}, 0)}{\partial t} = 0, \mathbf{r} \in \bar{V}.
\end{aligned} \quad (3.139)$$

Пружні переміщення $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t), \mathbf{r} \in V, t > 0$ знаходяться як розв'язок початково-граничної задачі:

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{L}}\mathbf{v} + \mathbf{Y} &= 0, \mathbf{r} \in V, t > 0 \\
\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) &= \bar{\mathbf{v}}(\mathbf{r}, t), \mathbf{r} \in S_u, t > 0 \\
\mathbf{t}_n^v(\mathbf{r}, t) &= \bar{\mathbf{t}}_n^v(\mathbf{r}, t), \mathbf{r} \in S_{t_n}, t > 0, S_u \cup S_{t_n} = S \\
\mathbf{v}(\mathbf{r}, 0) &= 0, \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{r}, 0)}{\partial t} = 0, \mathbf{r} \in \bar{V}.
\end{aligned} \tag{3.140}$$

Підставивши розв'язки (3.139) та (3.140) в (3.138) та продиференціювавши результат по часовій змінній, отримаємо формулу взаємності робіт для лінійної ізотропної еластодинаміки:

$$\int_V \{ \mathbf{v} \cdot \mathbf{X} - \mathbf{u} \cdot \mathbf{Y} \} dV + \int_{S_u} \{ \bar{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{t}_n^u - \bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{t}_n^v \} dS + \int_{S_{t_n}} \{ \mathbf{v} \cdot \bar{\mathbf{t}}_n^u - \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{t}}_n^v \} dS = 0. \tag{3.141}$$

Прикладі 3.41. Отримати рівняння нерозривності течії рідини, використавши теорему Рейнольдса-Лейбніца.

Розв'язання. Рівняння нерозривності є наслідком закону збереження маси. Розглянемо довільний однозв'язний об'єм $V_{E(t)}$, що складається з фіксованої множини субфізичних елементів рідини з густиною $\rho = \rho(\mathbf{r}, t)$. Маса рідини в такому об'ємі дорівнює. $M = \int_{V_{E(t)}} \rho(\mathbf{r}, t) dV$. Отже, оскільки $\frac{dM}{dt} = 0$, то, згідно з

теоремою Рейнольдса-Лейбніца:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_{E(t)}} \rho(\mathbf{r}, t) dV = \int_{V_{E(t)}} \left(\frac{d\rho(\mathbf{r}, t)}{dt} + \rho(\mathbf{r}, t) \operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \right) dV = 0. \text{ Через довільність } V_{E(t)}$$

має місце рівняння нерозривності (див. (3.80)): $\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$.

Приклад 3.42. Отримати різні форми представлення формули Лейбніца для потоку вектора $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{r}, t)$ через скінченну поверхню $S_E(t)$, що складена з субфізичних елементів течії з полем швидкостей $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$. Який вигляд має ця формула у випадку замкненої поверхні?

$$\text{Розв'язання. Згідно з (3.78) маємо: } \frac{d}{dt} \int_{S_E(t)} \mathbf{a} dS = \int_{S_E(t)} \left(\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} + \mathbf{v} \operatorname{div} \mathbf{a} + \operatorname{rot}(\mathbf{a} \times \mathbf{v}) \right) dS.$$

Застосування теореми Стокса (3.60) дозволяє перетворити формулу до виду:

$$\frac{d}{dt} \int_{S_E(t)} \mathbf{a} dS = \int_{S_E(t)} \left(\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} + \mathbf{v} \operatorname{div} \mathbf{a} \right) dS + \oint_{C_E(t)} (\mathbf{a} \times \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{r} , \quad (3.142)$$

де $C_E(t)$ - граничний контур поверхні $S_E(t)$. У випадку однозв'язної замкненої скінченної поверхні, $C_E(t)$ може бути стягнуто в точку, та (3.142) набуде вигляду:

$$\frac{d}{dt} \oint_{S_E(t)} \mathbf{a} dS = \oint_{S_E(t)} \left(\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} + \mathbf{v} \operatorname{div} \mathbf{a} \right) dS . \quad (3.143)$$

Згідно з (3.46) та (3.26) маємо:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} + \mathbf{v} \operatorname{div} \mathbf{a} + \operatorname{rot}(\mathbf{a} \times \mathbf{v}) &= \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \mathbf{a} \operatorname{div} \mathbf{v} = \\ &= \frac{d\mathbf{a}}{dt} - (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \mathbf{a} \operatorname{div} \mathbf{v}. \end{aligned}$$

А отже,

$$\frac{d}{dt} \int_{S_E(t)} \mathbf{a} dS = \int_{S_E(t)} \left(\frac{d\mathbf{a}}{dt} - (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \mathbf{a} \operatorname{div} \mathbf{v} \right) dS . \quad (3.144)$$

Приклад 3.43. Отримати необхідну та достатню умову збереження ліній току.

Розв'язання. Згідно з (3.83) такою умовою є виконання векторним полем

швидкостей рівняння $\left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) \times \mathbf{v} = 0$. Оскільки $\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$ (див.

(3.26)), то необхідною та достатньою умовою збереження ліній току є

виконання рівняння: $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \times \mathbf{v} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \lambda \mathbf{v}$. Очевидним загальним

розв'язком такого рівняння є $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{w}(\mathbf{r}) e^{\int \lambda(\mathbf{r}, t) dt}$. Оскільки в цьому випадку лінії току визначаються рівнянням $\mathbf{w} \times d\mathbf{r} = 0$, то вони не залежать від часу і є нерухомими. Тобто необхідною та достатньою умовою збереження ліній току є також їхня незмінність в просторі з часом.

Приклад 3.44. Довести першу теорему Гельмгольца про вихори, яка стверджує, що при течії ідеальної баротропної рідини під дією потенціальних сил вихрові лінії та вихрові трубки зберігаються.

Доведення. Вихрове рівняння течії баротропної ідеальної рідини має вигляд

$$(3.98): \frac{d\Omega}{dt} - (\Omega \cdot \nabla)\mathbf{v} + \Omega \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad . \quad \text{Очевидно, це рівняння збігається з}$$

рівнянням необхідної та достатньої умови збереження вихрових ліній та трубок (3.144).

Приклад 3.45. Довести, що похідна по часу від циркуляції векторного поля швидкості по замкненому обмеженому контуру, що складений з субфізичних елементів дорівнює циркуляції прискорень по цьому контуру.

$$\text{Доведення. Згідно з (3.79)} \quad \frac{d}{dt} \int_{C_E(t)} \mathbf{v} d\mathbf{r} = \int_{C_E(t)} \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} + \mathbf{v} \times \operatorname{rot} \mathbf{v} \right) d\mathbf{r} \quad .$$

$$\text{Оскільки, згідно з (3.49)} \quad \operatorname{grad} \frac{\mathbf{v}^2}{2} = (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} + \mathbf{v} \times \operatorname{rot} \mathbf{v} \quad , \quad \text{то}$$

$$\frac{d}{dt} \int_{C_E(t)} \mathbf{v} d\mathbf{r} = \int_{C_E(t)} \frac{d\mathbf{v}}{dt} d\mathbf{r} + \int_{C_E(t)} \operatorname{grad} \frac{\mathbf{v}^2}{2} d\mathbf{r} \quad . \quad \text{Якщо } C_E(t) \text{ - замкнутий, то}$$

$$\oint_{C_E(t)} \operatorname{grad} \frac{\mathbf{v}^2}{2} d\mathbf{r} = 0 \quad . \quad \text{Звідси отримуємо:}$$

$$\frac{d}{dt} \oint_{C_E(t)} \mathbf{v} d\mathbf{r} = \oint_{C_E(t)} \frac{d\mathbf{v}}{dt} d\mathbf{r} \quad . \quad (3.145)$$

Приклад 3.46. Довести, що з потенціальності поля швидкостей течії слідує потенціальність поля прискорень течії.

$$\text{Доведення. Згідно з (3.49)} \quad \operatorname{grad} \frac{\mathbf{v}^2}{2} = (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} + \mathbf{v} \times \operatorname{rot} \mathbf{v} \quad . \quad \text{Отже,}$$

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \operatorname{grad} \frac{\mathbf{v}^2}{2} - \mathbf{v} \times \operatorname{rot} \mathbf{v} \quad . \quad \text{Для потенціальної течії}$$

$$\exists \varphi : \mathbf{v} = \operatorname{grad} \varphi \quad , \quad \text{отже,}$$

$$\mathbf{w} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = \frac{\partial (\operatorname{grad} \varphi)}{\partial t} + \operatorname{grad} \left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} \right) = \operatorname{grad} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\mathbf{v}^2}{2} \right) \quad . \quad \text{Таким чином,}$$

$$\text{прискорення є потенціальним полем з потенціалом } \Phi = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\mathbf{v}^2}{2} \quad .$$

Приклад 3.47. Довести теорему моментів для ідеальної рідини, яка стверджує, що для стаціонарної течії ідеальної рідини має місце:

$$\oint_S (\rho \mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}}) + p \hat{\mathbf{n}}) dS = 0 . \quad (3.146)$$

Доведення. Розглянемо для деякого фіксованого в просторі скінченного об'єму V з поверхнею S бистроту зміни кількості руху рідини, що заповнює цей об'єм: $\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \mathbf{v} dV = \int_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{v}) dV = \int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \mathbf{v} + \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \right) dV$. Згідно з основним рівнянням гідромеханіки для ідеальної рідини при відсутності масових сил та рівнянням нерозривності має місце: $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p$, $\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\text{div}(\rho \mathbf{v})$.

Отже,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \mathbf{v} dV &= - \int_V (\mathbf{v} \text{div}(\rho \mathbf{v}) + \rho(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \text{grad } p) dV = \\ &= - \int_V (\rho \mathbf{v} \text{div} \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)(\rho \mathbf{v}) + \text{grad } p) dV. \end{aligned}$$

Використавши узагальнену теорему Гауса, отримаємо:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \mathbf{v} dV = - \oint_S (\rho \mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}}) + p \hat{\mathbf{n}}) dS . \quad (3.147)$$

Що і є рівнянням теореми моментів для ідеальної рідини.

Для стаціонарної течії рівняння (3.147) набуває вигляду (3.146).

Приклад 3.48. Визначити головний вектор поверхневої сили, яка діє на тверде тіло, що займає об'єм V з поверхнею S при його обтіканні ідеальною рідиною.

Розв'язання. Згідно з **Прикладом 3.47.** для деякого фіксованого скінченного об'єму V з поверхнею S в стаціонарній течії ідеальної рідини має місце (3.146): $\oint_S (\rho \mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}}) + p \hat{\mathbf{n}}) dS = 0$. Водночас, головний вектор поверхневих сил

(сил тиску), що діють на тверде тіло з боку рідини, за третім законом Ньютона визначається як: $\mathbf{F} = - \oint_S p \hat{\mathbf{n}} dS$. Отже,

$$\mathbf{F} = - \oint_S \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}}) dS . \quad (3.148)$$

Приклад 3.49. Довести, що рівновага ідеальної рідини, яка знаходиться під дією об'ємної сили $\mathbf{F}$, можлива лише тоді, коли силові лінії поля $\mathbf{F}$ ортогональні до силових ліній поля $\text{rot } \mathbf{F}$.

Доведення. Рівняння рівноваги ідеальної рідини згідно з основним рівнянням гідродинаміки ідеальної рідини має вигляд: $\rho \mathbf{F} = \text{grad } p$. Отже, $\text{rot}(\rho \mathbf{F}) = \text{rot}(\text{grad } p) = 0$. Оскільки згідно з (3.43)

$$\text{rot}(\rho \mathbf{F}) = \text{grad } \rho \times \mathbf{F} + \rho \text{rot } \mathbf{F} , \quad \text{то}$$

$$\mathbf{F} \cdot \text{rot}(\rho \mathbf{F}) = \mathbf{F} \cdot (\text{grad } \rho \times \mathbf{F} + \rho \text{rot } \mathbf{F}) = \rho \mathbf{F} \cdot \text{rot } \mathbf{F} = 0 . \quad \text{Тобто рівняння}$$

$$\mathbf{F} \cdot \text{rot } \mathbf{F} = 0 \quad (3.149)$$

є необхідною умовою для рівноваги ідеальної рідини.

Очевидно, ця умова завжди виконується для плоскої течії та при потенціальності силового поля $\mathbf{F}$.

Приклад 3.50. Довести теорему Томсона, яка стверджує, що при течії ідеальної баротропної рідини під дією потенціальних сил в однозв'язній області циркуляція швидкості по довільному замкненому обмеженому контуру, що складений з субфізичних елементів, зберігається.

Доведення. Основне рівняння гідромеханіки ідеальної баротропної рідини має вигляд (3.94): $\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \text{grad}(U - P)$. Порахувавши циркуляцію від правої та лівої

частин та взявши до уваги, що $\oint_{C_E(t)} \text{grad}(U - P) d\mathbf{r} = 0$, отримаємо: $\oint_{C_E(t)} \frac{d\mathbf{v}}{dt} d\mathbf{r} = 0$

. Отже, згідно з **Прикладом 3.45.** $\frac{d}{dt} \oint_{C_E(t)} \mathbf{v} d\mathbf{r} = \oint_{C_E(t)} \frac{d\mathbf{v}}{dt} d\mathbf{r} = 0 \Rightarrow \oint_{C_E(t)} \mathbf{v} d\mathbf{r} = \text{const} .$

3.7. Вправи

3.1. Чи можуть векторні лінії поля перетинатись або само перетинатись?

3.2. Визначити бистроту зміни температури елементарної частинки суцільного середовища, що описується нестационарним полем швидкостей $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ та нестационарним полем розподілу температури $T = T(\mathbf{r}, t)$ (в ейлеровому описі).

Який фізичний зміст мають $\frac{\partial T(\mathbf{r}, t)}{\partial t}$ та $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \cdot \nabla T(\mathbf{r}, t)$?

3.3. Скалярним диференціальним оператором називається диференціальний оператор, форма якого не змінюється при трансляванні та обертанні базової системи координат. Довести, що для кожного вектора поля $\mathbf{a}$, $D\mathbf{a} = D(a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}) = \mathbf{i} D a_x + \mathbf{j} D a_y + \mathbf{k} D a_z$ утворює векторне поле, якщо D - скалярний диференціальний оператор.

3.4. Довести формулу: $\text{grad}(\varphi / \psi) = \frac{\psi \text{grad} \varphi - \varphi \text{grad} \psi}{\psi^2}$.

3.5. В просторі задано точки $M_i(\mathbf{r}_i)$, $i = \overline{1, n}$, що не лежать на одній прямій.

Знайти точку $P(\mathbf{r}_p)$ таку, що $\mathbf{r}_p = \arg \min_r \sum_{i=1}^n |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}|^2$.

3.6 Задано три диференційовані функції трьох змінних $u = u(x, y, z)$, $v = v(x, y, z)$ та $w = w(x, y, z)$. Довести, що ці функції функціонально залежні (тобто існує така функція $F = F(., ., .)$, що $F(u, v, w) = 0$) тоді та лише тоді, коли $\text{grad} u \cdot (\text{grad} v \times \text{grad} w) = 0$ (в координатній формі $\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} = 0$).

3.7 Довести, що рівність $\oint_C \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = 0$ для довільного замкненого C є достатньою умовою потенціальності $\mathbf{a}$.

3.8. Довести, що центральна сила, прикладена до матеріальної точки, завжди є потенціальною.

3.9. Повернутись до **Прикладу 3.8**. Нехай тіло знаходиться в стані вільної плавучості в стратифікованій рідині так, що площа розділу рідин з

густинами ρ_1 та ρ_2 проходить через переріз тіла. Довести, що сили тиску зводяться до рівнодійної. Визначити точку її прикладання. Чи є ця точка центром сил тиску? Якою має бути орієнтація тіла, щоб воно знаходилося в рівновазі? Чи буде таке положення рівноваги стійким?

3.10. Довести, що при гравітаційній взаємодії двох куль з центральносиметричним розподілом мас $\rho_i = \rho_i(r)$, $i = \overline{1,2}$ сили гравітації зводяться до сил притягання, що мають спільну лінію дії, яка проходить через центри куль, а величини сил пропорційні добутку їх мас та обернено пропорційні квадрату відстані між центрами.

3.11. Матеріальна точка маси m в початковий момент часу знаходиться в стані спокою на поверхні масивного однорідного об'єму газу кулястої форми з загальною масою M та радіусом R . Визначити закон руху матеріальної точки, вважаючи, що сила динамічного опору руху точки пропорційна її швидкості з заданим коефіцієнтом α . Визначити також закон руху матеріальної точки, якщо початкова швидкість точки $\mathbf{v}_0$ складає з напрямком на центр об'єму кут $\theta < \pi/2$.

3.12. Чи однакові прискорення вільного падіння на полюсах та на екваторі Землі? Взяти до уваги обертання Землі відносно власної осі та той факт, що земна поверхня є еліпсоїдом обертання з великою півсями $a = 6.37816 \cdot 10^6$ м, $b = 6.356.78 \cdot 10^6$ м. Відповідь обґрунтувати.

3.13. Використовуючи результати **Прикладу 3.12.** дослідити гравітаційну силову взаємодію двох масивних тіл довільної геометрії та довільних розподілів мас в тілах.

3.14. В **Прикладі 3.15.** доведено, що центральне силове поле $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{r}} \frac{C}{r^2}$ (C - довільна стала) є соленоїдальним. Водночас, якщо $S_\varepsilon = \{\mathbf{r} : |\mathbf{r}| = r_\varepsilon\}$ - центральна

сфера з радіусом r_ε , то $\oint_{S_\varepsilon} \frac{C\hat{\mathbf{r}}}{r^2} d\mathbf{S} = C \oint_{S_\varepsilon} \frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{r^2} d\mathbf{S} = \frac{C}{r_\varepsilon^2} \oint_{S_\varepsilon} d\mathbf{S} = 4\pi C \neq 0 (C \neq 0)$. Тобто

потік поля через замкнену поверхню відмінний від нуля. Пояснити колізію.

3.15. Розглядається рух нестисливої рідини. В якому випадку для опису течії достатньо розв'язати граничну (чи початково-граничну задачу) для рівняння нерозривності (3.88), не записуючи задачу для основного рівняння гідромеханіки (3.90)?

3.16. Вивести основне рівняння гідромеханіки в'язкої (ньютонівської) рідини (рівняння Нав'є-Стокса).

3.17. Знайти вихор поля прискорень точок вільного абсолютно твердого тіла.

3.18. Довести, що силове поле з вектором сили $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$ є потенціальним тоді і тільки тоді, коли $\nabla \times \mathbf{F} = 0$.

3.19. Використавши (3.95) та (3.96), побудувати рівняння поширення малих збурень в ідеальній баротропній рідині.

Вказівка. Використати представлення потенціалу у вигляді $\varphi = \Phi + \int_{t_0}^t g(t) dt$ та

вважати, що $\Delta p \ll 1$, $\Delta \rho \ll 1$, $\frac{dp}{d\rho}(p_0, \rho_0) \approx c^2 = \text{const}$, де p_0 та ρ_0 - тиск та густина рідини в рівноважному стані.

3.20. Довести, що $\mathbf{c} \cdot \text{grad}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{c} \cdot \nabla) \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \cdot \nabla) \mathbf{a}$.

3.21. Довести, що $(\mathbf{c} \cdot \nabla)(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{c} - \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{c}$.

3.22. Довести, що $\oint_S (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) d\mathbf{S} = \int_V (\mathbf{b} \cdot \text{rot} \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \text{rot} \mathbf{b}) dV$.

3.23. Довести, що $\oint_C \varphi \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = \int_S (\varphi \hat{\mathbf{n}} \cdot \text{rot} \mathbf{a} + \hat{\mathbf{n}} \cdot (\text{grad} \varphi \times \mathbf{a})) dS$ ($\hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{r}$).

3.24. Довести теорему Пуассона: $\oint_S \frac{\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} d\mathbf{S} = \begin{cases} 0, \mathbf{r}_0 \notin \text{in}(S) \\ 4\pi, \mathbf{r}_0 \in \text{in}(S) \end{cases}$.

3.25. Довести, що $\operatorname{rot} \mathbf{a} = 0 \wedge \operatorname{rot} \mathbf{b} = 0 \Rightarrow \operatorname{div}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0$.

3.26. Довести, довільний вектор $\mathbf{a}$ може бути представлений у вигляді $\mathbf{a} = \varphi \operatorname{grad} \psi + \operatorname{grad} \chi$.

3.27. Довести, що $\operatorname{rot} \mathbf{a} = 0 \wedge \operatorname{div} \mathbf{a} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a} = 0$.

3.28. Показати, що для потенціальної течії ідеальної нестисливої рідини кінетична енергія визначається формулою:

$$T = \frac{1}{2} \rho \oint_S \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS, \quad (3.150)$$

де φ - потенціал поля швидкостей.

Довести, що якщо ідеальна нестислива рідина заповнює деяку порожнину, то її рух може бути лише вихровим ($\operatorname{rot} \mathbf{v} \neq 0$).

3.29. Повернутись до **Прикладу 3.28.** та показати, що для зовнішньої задачі Гельмгольца та задачі в $\mathbb{R}^3$ побудований розв'язок має асимптотику: $\mathbf{a}(\mathbf{r}) \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} \bar{O}(1/r)$.

3.30. Чому інтеграл Пуассона називають також потенціалом Ньютона?

3.31. Спираючись на **Приклад 3.28.**, показати, що умови :

$$\lim_{V \rightarrow \mathbb{R}^3} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV(\mathbf{r}') \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} o(1/r^2), \quad \lim_{V \rightarrow \mathbb{R}^3} \int_V \frac{\omega(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV(\mathbf{r}') \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} o(1/r^2) \quad \text{є достатніми}$$

умовами для існування та єдиності розв'язку зовнішньої задачі Гельмгольца.

3.32. Які часткові рухи деформівного тіла описують функції $\mathbf{v}$ та $\mathbf{w}$ з **Прикладу 3.36.** ?

3.33. Використовуючи результати **Прикладу 3.33.** , показати, що частинний розв'язок рівняння $\Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi\rho$, $\mathbf{r} \in V, t > 0$ має вигляд потенціалу із запізненням:

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \int_V \frac{1}{|\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}|} \psi(\boldsymbol{\xi}, t - |\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}|/c) dV_{\boldsymbol{\xi}}. \quad (3.151)$$

3.34. Використовуючи результати Вправи 3.33., побудувати частинний розв'язок векторного хвильового рівняння: $\Delta \boldsymbol{\psi} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{\psi}}{\partial t^2} = -4\pi \mathbf{g} \quad \mathbf{r} \in V, t > 0$.

3.35. Довести твердження з **Прикладу 3.36.** для неоднорідного рівняння Ламе:

$c_1^2 \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} - c_2^2 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u} - \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} + \frac{1}{\rho} \mathbf{X} = 0$. Яким рівнянням будуть задовольняти складові $\mathbf{v}$ та $\mathbf{w}$?

3.36. Показати, що розв'язок плоскої задачі еластокінетики може бути визначений через два скалярні потенціали $\varphi = \varphi(x, y, t)$ та $\psi = \psi(x, y, t)$. Яким рівнянням вони мають задовольняти?

3.37. Чому умова 2) ($\operatorname{div} \boldsymbol{\psi} = 0$) в теоремі Ламе (**Приклад 3.37.**) є необхідною умовою? Відповідь обґрунтувати аналітично. Чи може вона бути змінена?

3.38. Чому потенціали Гельмгольца не використовуються при представленні розв'язку рівняння Ламе? Чи можна використати підхід Гельмгольца для представлення розв'язку рівняння Ламе? Які рівняння для потенціалів будуть в цьому випадку?

3.39. Чи описують рівняння Ламе просторовий рух деформівного твердого тіла? Відповідь обґрунтувати.

3.40. Узагальнити результати **Прикладу 3.38.** та **Прикладу 3.39** на випадок, коли до деформівного тіла в точках $\mathbf{r}_i \in \bar{V}$ прикладені зосереджені сили, що залежить від пружних переміщень: $\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i(\mathbf{u}, t)$, $i = \overline{1, n}$.

3.41. Сформулювати та довести теорему про зміну кінетичного моменту деформівного тіла у відносному русі відносно центру інерції тіла. Як розділити наступні рухи:

- просторовий рух як твердого тіла разом з центром інерції;
- просторовий рух як твердого тіла відносно центру інерції;

- рух, пов'язаний з деформуванням тіла ?

3.42. Сформулювати та довести теорему про зміну кінетичної енергії деформівного тіла у постановці **Прикладу 3.38**.

3.43. Побудувати інтегральні співвідношення (аналогічні до формул Гріна) для оператора Нав'є. Отримати, як наслідок, формулу взаємності робіт.

3.44. Довести аналог теореми Рейнольдса- Лейбніца для скаляра (3.80).

3.45. Довести, що для течії рідини, яка визначається полем швидкостей $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ для довільного однозв'язного об'єму $V_{E(t)}$, що складається з фіксованої множини субфізичних елементів та обмежений замкненою скінченною поверхнею $S_{E(t)}$ рідини, справедливо:

$$\frac{dV_{E(t)}}{dt} = \int_{V_{E(t)}} \operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) dV = \iint_{S_{E(t)}} \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS. \quad (3.152)$$

Сформулювати умови ізохоричності руху рідини.

3.46. Спираючись на **Приклад 3.30.**, довести, що для матеріальної системи, яка складається з абсолютно твердого тіла з відкритою однозв'язною порожниною, частково заповненою ідеальною рідиною з наявністю вільної поверхні, справедлива теорема про зміну кінетичного моменту.

3.47. Довести формулу (3.84), що є результатом застосування інтегрального правила Лейбніца для потоку вектора $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{r}, t)$ через поверхню, що складена з субфізичних елементів течії з полем швидкостей $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ (в ейлеровому описі).

3.48. Сформулювати необхідну та достатню умову того, щоб потік вектора $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{r}, t)$ через поверхню, що складена з субфізичних елементів течії, не залежав від часу.

3.49. Довести формулу (3.85), що є результатом застосування інтегрального правила Лейбніца для лінійного інтеграла від вектора $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{r}, t)$ по кривій, що складена з субфізичних елементів течії з полем швидкостей $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ (в ейлеровому описі).

3.50. Використовуючи означення, довести справедливність формул (3.55).

4. Криволінійні координати

4.1. Координатні лінії та поверхні. Основний та взаємний базиси

Означення криволінійних координат. Криволінійними координатами називається трійка чисел $q_i, i = \overline{1,3}$, яка допускає взаємно однозначну відповідність з точками евклідового простору E .

Тобто,

$$\exists q_i = q_i(\mathbf{r}) (i = \overline{1,3}) \Leftrightarrow \mathbf{r} = \mathbf{r}(q_1, q_2, q_3), \forall (q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{R}^3, \mathbf{r} \in V, \quad (4.1)$$

де V - лінійний векторний простір, асоційований з E .

Взагалі кажучи, прямокутні декартові координати також належать до класу криволінійних координат (принаймні за означенням та всіма властивостями).

Означення координатних поверхонь. Координатними поверхнями системи координат q_1, q_2, q_3 називаються поверхні:

$$q_i(\mathbf{r}) = C_i, C_i = \text{const}, i = \overline{1,3}. \quad (4.2)$$

Означення координатних ліній. Координатними лініями системи координат q_1, q_2, q_3 називаються криві, що є перетином двох координатних поверхонь:

$$\begin{cases} q_i(\mathbf{r}) = C_i \\ q_j(\mathbf{r}) = C_j \end{cases}, i, j = \overline{1,3}, i \neq j. \quad (4.3)$$

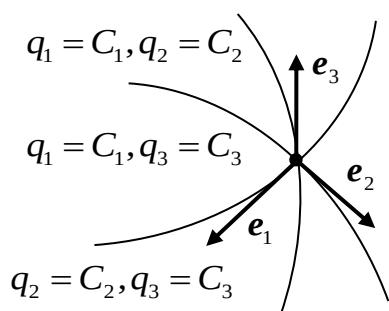


Рис. 11

Для кожної координатної лінії (4.3) існує поняття додатного напрямку, що визначається напрямком руху вздовж координатної лінії при збільшенні координати $q_k, k \neq i \neq j$.

Означення базису системи координат та базисних векторів. Базисом криволінійної системи координат q_1, q_2, q_3 називається

такий набір векторів $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ фіксованої довжини, дотичних до координатних

ліній та напрямлених вздовж додатного напрямку координатних ліній. Самі вектори $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ називаються базисними векторами.

Таким чином, базисні вектори можна отримати з (4.1) за формулою:

$$\mathbf{e}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i}, i = \overline{1,3}. \quad (4.4)$$

В загальному випадку, базис криволінійної системи координат є локальним.

Означення взаємного базису системи координат та базисних векторів взаємного базису. Базисом криволінійної системи координат q_1, q_2, q_3 називається такий набір векторів $\mathbf{e}_1^*, \mathbf{e}_2^*, \mathbf{e}_3^*$ фіксованої довжини, ортогональних до координатних поверхонь $q_1(\mathbf{r}) = C_1, q_2(\mathbf{r}) = C_2, q_3(\mathbf{r}) = C_3$ та напрямлених у напрямку зростання q_1, q_2, q_3 . Самі вектори $\mathbf{e}_1^*, \mathbf{e}_2^*, \mathbf{e}_3^*$ називаються базисними векторами взаємного базису.

Базисні вектори взаємного базису можна отримати з (4.2) за формулою:

$$\mathbf{e}_i^* = \text{grad } q_i, i = \overline{1,3}. \quad (4.5)$$

Умова взаємності базисів має вигляд:

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j^* = \delta_{ij} |\mathbf{e}_i| |\mathbf{e}_j^*|, i, j = \overline{1,3}. \quad (4.6)$$

Дійсно, згідно з (3.18): $dq_i = \text{grad } q_i \cdot d\mathbf{r} = \text{grad } q_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j} dq_j$. Водночас, $d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j} dq_j$

, а отже,

$$\text{grad } q_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j} = \delta_{ij}, i, j = \overline{1,3}. \quad (4.7)$$

Вектори взаємного базису можуть бути побудовані безпосередньо через вектори основного базису:

$$\mathbf{e}_i^* = \frac{\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_k}{V}, i \neq j \neq k, \quad (4.8)$$

де V - об'єм паралелепіпеда, побудованого на $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$.

Дійсно, $\mathbf{e}_i^* \cdot \mathbf{e}_j = 0 \wedge \mathbf{e}_i^* \cdot \mathbf{e}_k = 0, i \neq j \neq k \Rightarrow \mathbf{e}_i^* = \lambda \mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_k$. Водночас,

$$\mathbf{e}_i^* \cdot \mathbf{e}_i = 1 \Rightarrow \lambda \mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_k) = 1 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{\mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_k)} = \frac{1}{V} .$$

Аналогічно:

$$\mathbf{e}_i = \frac{\mathbf{e}_j^* \times \mathbf{e}_k^*}{V^*}, i \neq j \neq k , \quad (4.9)$$

де V^* - об'єм паралелепіпеду, побудованого на $\mathbf{e}_1^*, \mathbf{e}_2^*, \mathbf{e}_3^*$.

При цьому:

$$V = \frac{1}{V^*} \quad (4.10)$$

Дійсно,

$$1 = \mathbf{e}_i^* \cdot \mathbf{e}_i = \left(\frac{\mathbf{e}_j^* \times \mathbf{e}_k^*}{V^*} \right) \cdot \left(\frac{\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_k}{V} \right) = \frac{1}{VV^*} ((\mathbf{e}_j^* \cdot \mathbf{e}_j)(\mathbf{e}_k^* \cdot \mathbf{e}_k) - (\mathbf{e}_j^* \cdot \mathbf{e}_k)(\mathbf{e}_k^* \cdot \mathbf{e}_j)) = \frac{1}{VV^*} .$$

Ортогональні криволінійні системи координат. Коефіцієнти Ламе
Означення ортогональної криволінійної системи координат. Криволінійна система координат є ортогональною, якщо її базисні вектори взаємно ортогональні:

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = 0, i, j = \overline{1,3}, i \neq j \quad (4.11)$$

З (4.6) слідує, що у випадку ортогональної системи координат $\frac{\mathbf{e}_i^*}{|\mathbf{e}_i^*|} = \frac{\mathbf{e}_i}{|\mathbf{e}_i|}, i = \overline{1,3}$

, а отже, $\mathbf{e}_i^* \cdot \mathbf{e}_j^* = 0, i, j = \overline{1,3}, i \neq j$ тобто основний базис збігається з взаємним.

Означення одиничного базису. Базис системи координат $\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3$ називається одиничним, якщо $|\hat{\mathbf{e}}_i| = 1, i = \overline{1,3}$.

Очевидно, будь-який базис можна привести до одиничного (нормалізувати):

$$\hat{\mathbf{e}}_i = \frac{\mathbf{e}_i}{|\mathbf{e}_i|}, i = \overline{1,3}. \quad (4.12)$$

Означення коефіцієнтів Ламе. Коефіцієнтами Ламе криволінійної системи координат називаються модулі локальних базисних векторів:

$$H_i = |\mathbf{e}_i| = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \right|, i = \overline{1,3}. \quad (4.13)$$

Таким чином:

$$\mathbf{e}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} = |\mathbf{e}_i| \hat{\mathbf{e}}_i = H_i \hat{\mathbf{e}}_i, i = \overline{1,3}. \quad (4.14)$$

Для ортогональної системи координат, згідно з (4.7), має місце:

$$|\mathbf{e}_i^*| = |\text{grad } q_i| = \frac{1}{H_i}, i = \overline{1,3}. \quad (4.15)$$

Для ортонормального базису виконується:

$$\hat{\mathbf{e}}_i \cdot \hat{\mathbf{e}}_j = \delta_{ij}, i, j = \overline{1,3}. \quad (4.16)$$

Означення метричного тензора. Тензор $\mathbf{g}$ з матричним представленням в прямокутній декартовій системі координат з ортами $\mathbf{i}_j, j = \overline{1,3}$:

$$\{\mathbf{g}\}_{od} = \{g_{ij}\}_{i,j=1}^3 = \{\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j\}_{i,j=1}^3 \text{ називається метричним тензором.}$$

Означення компонентів вектора відносно базису. Компонентами вектора (коваріантними компонентами) $\mathbf{a}$ відносно базису $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ називаються такі скаляри $a_i, i = \overline{1,3}$, що $\mathbf{a} = a_i \mathbf{e}_i$.

Відповідно, компонентами вектора (контрваріантними компонентами) $\mathbf{a}$ відносно взаємного базису $\mathbf{e}_1^*, \mathbf{e}_2^*, \mathbf{e}_3^*$ називаються такі скаляри $a_i^*, i = \overline{1,3}$, що $\mathbf{a} = a_i^* \mathbf{e}_i^*$.

Згідно з (4.6) маємо:

$$a_i = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_i^* \text{ та } a_i^* = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_i, i = \overline{1,3}. \quad (4.17)$$

Зв'язок між коваріантними та контрваріантними компонентами вектора визначається як:

$$a_i^* = g_{ij} a_j. \quad (4.18)$$

Дійсно, $a_i^* = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_i = a_j \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_i = g_{ij} a_j$.

4.2. Елементи дуги, площі та об'єму в криволінійних координатах

Метрика в координатному просторі $(q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{R}^3$ повністю описується метричним тензором. Основні метричні характеристики визначаються наступним чином.

1. Елемент дуги:

$$(ds)^2 = |d\mathbf{r}|^2 = d\mathbf{r}^2 = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} dq_i \right)^2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j} dq_i dq_j = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j dq_i dq_j = g_{ij} dq_i dq_j. \quad (4.19)$$

Для ортогональних систем координат, метричний тензор повністю описується коефіцієнтами Ламе (метричними коефіцієнтами):

$$H_i = |\mathbf{e}_i| = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \right| = \frac{1}{|\mathbf{e}_i^*|} = \frac{1}{|\text{grad } q_i|} = \sqrt{g_{ii}}, \quad i = \overline{1, 3}. \quad (4.20)$$

Дійсно, в цьому випадку,

$$g_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij} H_i^2, \quad (4.21)$$

$$(ds)^2 = g_{ij} dq_i dq_j = g_{ii} dq_i^2 = H_i^2 dq_i^2.$$

Коефіцієнти Ламе мають геометричний сенс стиску-розтягу вздовж напрямків базисних векторів оскільки $\left(ds|_{q_i=C_i, q_j=C_j, i \neq j} \right)^2 = (ds_k)^2 = H_k^2 dq_k^2, k \neq i \neq j$. Отже, елемент дуги вздовж k - ї координатної лінії в загальному випадку визначається як :

$$ds_k = \sqrt{g_{kk}} dq_k. \quad (4.22)$$

У випадку ортогональної системи координат маємо:

$$ds_k = H_k dq_k. \quad (4.23)$$

2. Елемент площі на координатній поверхні $q_k = C_k, k \neq i \neq j$:

$$d\sigma_k = \sqrt{g_{ii}g_{jj} - g_{ij}^2} dq_i dq_j. \quad (4.24)$$

Дійсно:

$$d\sigma_k = |\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j| dq_i dq_j = \sqrt{(\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j) \cdot (\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j)} = \sqrt{(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i)(\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_j) - (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j)(\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_i)} dq_i dq_j.$$

У випадку ортогональної координатної системи має місце:

$$d\sigma_k = H_i H_j dq_i dq_j, k \neq i \neq j. \quad (4.25)$$

3. Елемент об'єму.

$$dV = \sqrt{G} dq_1 dq_2 dq_3, \quad (4.26)$$

де $G = \det[\mathbf{g}]$.

Дійсно,

$$dV = d\mathbf{r} \Big|_{q_j=C_j, q_k=C_k} \cdot \left(d\mathbf{r} \Big|_{q_i=C_i, q_k=C_k} \times d\mathbf{r} \Big|_{q_i=C_i, q_j=C_j} \right) = \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_j} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_k} \right) dq_i dq_j dq_k = \mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_k) dq_i dq_j dq_k = V dq_i dq_j dq_k,$$

де V - об'єм паралелепіпеда, побудованого на $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$.

Покажемо, що

$$V = \sqrt{G}. \quad (4.27)$$

Дійсно, за означенням, $\{\mathbf{g}\} = [\mathbf{e}][\mathbf{e}^T]$, де $[\mathbf{e}]$ - матриця, складена з декартових компонентів (розклад по ортам $\mathbf{i}_j, j = \overline{1,3}$) векторів $\mathbf{e}_i, i = \overline{1,3}$. А отже,

$$\det\{\mathbf{g}\} = (\det[\mathbf{e}])^2. \text{ Водночас, } \det[\mathbf{e}] = \mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_k) = V.$$

У випадку ортогональної координатної системи:

$$dV = H_1 H_2 H_3 dq_1 dq_2 dq_3. \quad (4.28)$$

4.3. Диференціальні операції в ортогональних системах координат

Нижче приводяться вирази для основних диференціальних операцій в ортогональних системах координат.

1. Градієнт скаляра ($\text{grad } \varphi$).

$$\text{grad } \varphi(q_1, q_2, q_3) = \frac{\hat{\mathbf{e}}_1}{H_1} \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} + \frac{\hat{\mathbf{e}}_2}{H_2} \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} + \frac{\hat{\mathbf{e}}_3}{H_3} \frac{\partial \varphi}{\partial q_3}. \quad (4.29)$$

Дійсно, оскільки $q_i = q_i(\mathbf{r}), i = \overline{1,3}$, то

$$\text{grad } \varphi(q_1, q_2, q_3) = \frac{\partial \varphi}{\partial q_i} \text{grad } q_i = \frac{\partial \varphi}{\partial q_i} \mathbf{e}_i^* = \frac{\partial \varphi}{\partial q_i} \frac{\hat{\mathbf{e}}_i^*}{H_i} = \frac{\partial \varphi}{\partial q_i} \frac{\hat{\mathbf{e}}_i}{H_i}.$$

Відповідно,

$$\nabla = \frac{\hat{e}_1}{H_1} \frac{\partial}{\partial q_1} + \frac{\hat{e}_2}{H_2} \frac{\partial}{\partial q_2} + \frac{\hat{e}_3}{H_3} \frac{\partial}{\partial q_3}. \quad (4.30)$$

2. Дивергенція вектора ($\text{div } \mathbf{a}$).

Якщо a_1, a_2, a_3 - компоненти вектора $\mathbf{a}$ в криволінійних координатах: $\mathbf{a} = a_i \hat{e}_i$,

то

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{a}(q_1, q_2, q_3) &= \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left(\frac{\partial(a_1 H_2 H_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial(a_2 H_1 H_3)}{\partial q_2} + \frac{\partial(a_3 H_1 H_2)}{\partial q_3} \right) = \\ &= \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{a_i H_1 H_2 H_3}{H_i} \right). \end{aligned} \quad (4.31)$$

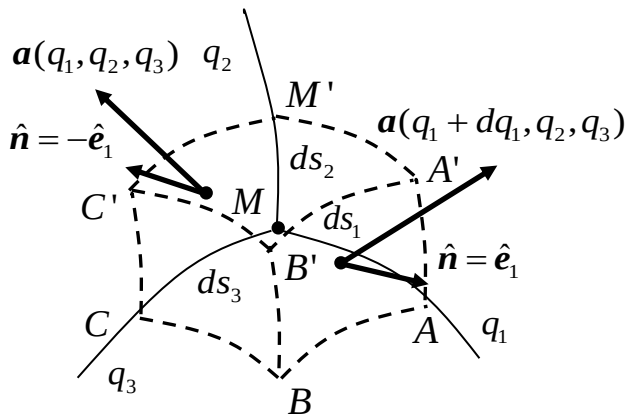


Рис.12.

Доведення. За означенням (3.32),

$$\text{div } \mathbf{a} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oint_S \hat{n} \cdot \mathbf{a} dS}{V}. \quad \text{Розглянемо}$$

елементарний криволінійний об'єм V з ребрами вздовж координатних ліній, що мають довжини ds_1, ds_2, ds_3 , з вершиною в $M(q_1, q_2, q_3)$ та обмежений поверхнею S . Очевидно, згідно з (4.23): $V = ds_1 ds_2 ds_3 = H_1 H_2 H_3 dq_1 dq_2 dq_3$.

Потік вектора $\mathbf{a}$ через сторону $CMM'C'$ визначається як:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{n} = -\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_1 = -a_1 d\sigma_1 = -\left(a_1 H_2 H_3\right) \Big|_{(q_1, q_2, q_3)} dq_2 dq_3. \quad \text{Аналогічно, потік вектора } \mathbf{a}$$

через сторону $ABB'A'$ дорівнює:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_1 = a_1 d\sigma_1 =$$

$$-\left(a_1 H_2 H_3\right) \Big|_{(q_1 + dq_1, q_2, q_3)} dq_2 dq_3 = \left(a_1 H_2 H_3 + \frac{\partial(a_1 H_2 H_3)}{\partial q_1} dq_1 \right) \Big|_{(q_1, q_2, q_3)} dq_2 dq_3. \quad \text{Провівши}$$

аналогічні міркування для інших пар сторін V , отримаємо за означенням:

$$\text{div } \mathbf{a} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left(\frac{\partial(a_1 H_2 H_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial(a_2 H_1 H_3)}{\partial q_2} + \frac{\partial(a_3 H_1 H_2)}{\partial q_3} \right).$$

Зокрема,

$$\operatorname{div} \hat{\mathbf{e}}_i = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{H_1 H_2 H_3}{H_i} \right). \quad (4.32)$$

3. Вихор вектора ($\operatorname{rot} \mathbf{a}$).

Якщо a_1, a_2, a_3 - компоненти вектора $\mathbf{a}$ в криволінійних координатах: $\mathbf{a} = a_i \hat{\mathbf{e}}_i$,

то

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{a} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \begin{vmatrix} H_1 \hat{\mathbf{e}}_1 & H_2 \hat{\mathbf{e}}_2 & H_3 \hat{\mathbf{e}}_3 \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ H_1 a_1 & H_2 a_2 & H_3 a_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{H_2 H_3} \left(\frac{\partial(H_3 a_3)}{\partial q_2} - \frac{\partial(H_3 a_3)}{\partial q_3} \right) \hat{\mathbf{e}}_1 + \\ \frac{1}{H_1 H_3} \left(\frac{\partial(H_1 a_1)}{\partial q_3} - \frac{\partial(H_3 a_3)}{\partial q_1} \right) \hat{\mathbf{e}}_2 + \frac{1}{H_1 H_2} \left(\frac{\partial(H_2 a_2)}{\partial q_1} - \frac{\partial(H_1 a_1)}{\partial q_2} \right) \hat{\mathbf{e}}_3. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Доведення. Очевидно,

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}(a_1 \hat{\mathbf{e}}_1) &= \operatorname{rot}(H_1 a_1 \operatorname{grad} q_1) = H_1 a_1 \operatorname{rot}(\operatorname{grad} q_1) - \operatorname{grad} q_1 \times \operatorname{grad}(H_1 a_1) = \\ \operatorname{grad}(H_1 a_1) \times \operatorname{grad} q_1 &= \left(\frac{\hat{\mathbf{e}}_1}{H_1} \frac{\partial(H_1 a_1)}{\partial q_1} + \frac{\hat{\mathbf{e}}_2}{H_2} \frac{\partial(H_1 a_1)}{\partial q_2} + \frac{\hat{\mathbf{e}}_3}{H_3} \frac{\partial(H_1 a_1)}{\partial q_3} \right) \times \frac{\hat{\mathbf{e}}_1}{H_1} = \\ \frac{\hat{\mathbf{e}}_2}{H_1 H_3} \frac{\partial(H_1 a_1)}{\partial q_3} - \frac{\hat{\mathbf{e}}_3}{H_1 H_2} \frac{\partial(H_1 a_1)}{\partial q_2}. \end{aligned}$$

Розглянувши аналогічним чином $\operatorname{rot}(a_2 \hat{\mathbf{e}}_2)$ та $\operatorname{rot}(a_3 \hat{\mathbf{e}}_3)$ і об'єднавши отримані вирази, отримаємо (4.33).

З (4.33) слідує, що

$$\operatorname{rot} \hat{\mathbf{e}}_i = \frac{1}{H_i} \operatorname{grad} H_i \times \hat{\mathbf{e}}_i, \quad i = \overline{1, 3}. \quad (4.34)$$

Дійсно,

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \hat{\mathbf{e}}_i &= \frac{1}{H_i H_k} \frac{\partial H_i}{\partial q_k} \hat{\mathbf{e}}_j - \frac{1}{H_i H_j} \frac{\partial H_i}{\partial q_j} \hat{\mathbf{e}}_k = \\ \frac{1}{H_i} \left(\frac{\hat{\mathbf{e}}_1}{H_1} \frac{\partial H_i}{\partial q_1} + \frac{\hat{\mathbf{e}}_2}{H_2} \frac{\partial H_i}{\partial q_2} + \frac{\hat{\mathbf{e}}_3}{H_3} \frac{\partial H_i}{\partial q_3} \right) \times \hat{\mathbf{e}}_i, \quad i \neq j \neq k. \end{aligned}$$

4. Градієнт від базисних векторів.

Справедливі формули:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_i}{\partial q_i} = -\frac{1}{H_j} \frac{\partial H_i}{\partial q_j} \hat{\mathbf{e}}_j - \frac{1}{H_k} \frac{\partial H_i}{\partial q_k} \hat{\mathbf{e}}_k \\ \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_i}{\partial q_j} = \frac{1}{H_i} \frac{\partial H_j}{\partial q_i} \hat{\mathbf{e}}_j \\ \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_i}{\partial q_k} = \frac{1}{H_i} \frac{\partial H_k}{\partial q_i} \hat{\mathbf{e}}_k \end{array} \right. , i \neq j \neq k. \quad (4.35)$$

Доведення. Оскільки $\hat{\mathbf{e}}_i \cdot \hat{\mathbf{e}}_i = \hat{\mathbf{e}}_i^2 = 1$, то згідно з (3.46), має місце

$$(\hat{\mathbf{e}}_i \cdot \nabla) \hat{\mathbf{e}}_i + \hat{\mathbf{e}}_i \times \text{rot} \hat{\mathbf{e}}_i = 0. \text{ За означенням } (\hat{\mathbf{e}}_i \cdot \nabla) \hat{\mathbf{e}}_i = \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_i}{\partial s_i} = \frac{1}{H_i} \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_i}{\partial q_i}, \text{ а згідно з (4.34):}$$

$$\hat{\mathbf{e}}_i \times \text{rot} \hat{\mathbf{e}}_i = \hat{\mathbf{e}}_i \times \left(\frac{1}{H_i H_k} \frac{\partial H_i}{\partial q_3} \hat{\mathbf{e}}_j - \frac{1}{H_i H_j} \frac{\partial H_i}{\partial q_j} \hat{\mathbf{e}}_k \right) = \frac{1}{H_i H_j} \frac{\partial H_i}{\partial q_j} \hat{\mathbf{e}}_j + \frac{1}{H_i H_k} \frac{\partial H_i}{\partial q_k} \hat{\mathbf{e}}_k.$$

Прийнявши до уваги, що $(\hat{\mathbf{e}}_j \cdot \nabla) \hat{\mathbf{e}}_i = \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_i}{\partial s_j} = \frac{1}{H_j} \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_i}{\partial q_j}$ та тотожність:

$2(\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{a} = \text{grad}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) + \text{rot}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) - \mathbf{a} \times \text{rot} \mathbf{b} - \mathbf{b} \times \text{rot} \mathbf{a} - \mathbf{a} \text{div} \mathbf{b} + \mathbf{b} \text{div} \mathbf{a}$ (поклавши в ній $\mathbf{a} = \hat{\mathbf{e}}_i, \mathbf{b} = \hat{\mathbf{e}}_j$), отримаємо дві останні формули з (4.35).

5. Оператор Лапласа.

$$\begin{aligned} \Delta \varphi(q_1, q_2, q_3) &= \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \\ &\left(\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{H_2 H_3}{H_1} \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{H_1 H_3}{H_2} \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{H_1 H_2}{H_3} \frac{\partial \varphi}{\partial q_3} \right) \right) = \\ &\frac{1}{H_1 H_2 H_3} \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{H_1 H_2 H_3}{H_i^2} \frac{\partial \varphi}{\partial q_i} \right). \end{aligned} \quad (4.36)$$

Дійсно, $\Delta \varphi = \text{div grad} \varphi$, а отже, згідно з (4.30) та (4.31), отримаємо (4.36).

6. Зв'язок між декартовими та криволінійними координатами.

В загальному випадку такий зв'язок визначається бієктивними диференційованими функціями:

$$x_i = x_i(q_1, q_2, q_3), \quad q_i = q_i(x_1, x_2, x_3), \quad i = \overline{1, 3}. \quad (4.37)$$

За означенням

$$H_i^2 = \left(\frac{\partial x_1}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial q_i} \right)^2, i = \overline{1,3}. \quad (4.38)$$

. Очевидно, $\text{grad } q_i = \mathbf{e}_i^* = \frac{1}{H_i} \hat{\mathbf{e}}_i^* = \frac{1}{H_i} \hat{\mathbf{e}}_i = \frac{1}{H_i^2} \mathbf{e}_i = \frac{1}{H_i^2} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i}$. А отже,

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial q_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial q_j} = \frac{1}{H_j^2} \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right) \frac{\partial}{\partial q_j}, i = \overline{1,3}. \text{ Зокрема,}$$

$$\frac{\partial q_j}{\partial x_i} = \frac{1}{H_j^2} \frac{\partial x_i}{\partial q_j}, i = \overline{1,3} \quad (4.39)$$

та

$$\mathbf{i}_i = \frac{1}{H_j} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \hat{\mathbf{e}}_j, i = \overline{1,3}. \quad (4.40)$$

Якщо $\mathbf{a} = a_{x_i} \mathbf{i}_i = a_{q_j} \hat{\mathbf{e}}_j$, то:

$$a_{x_i} = \frac{1}{H_j} a_{q_j} \frac{\partial x_i}{\partial q_j}, i = \overline{1,3}. \quad (4.41)$$

4.4. Приклади систем координат

1. Прямокутна декартова система координат (x_1, x_2, x_3) . В ній координатними поверхнями є площини: $x_i(\mathbf{r}) = C_i, C_i = \text{const}, i = \overline{1,3}$, координатними лініями є

$$\text{прямі лінії} \begin{cases} x_i(\mathbf{r}) = C_i \\ x_j(\mathbf{r}) = C_j \end{cases}, i, j = \overline{1,3}, i \neq j.$$

Ця система координат є ортогональною та $(ds)^2 = (dx_1)^2 + (dx_2)^2 + (dx_3)^2$. Отже,

$$H_1 = H_2 = H_3 = 1 \text{ та } ds_i = dx_i, i = \overline{1,3} \quad d\sigma_i = dx_j dx_k, i \neq j \neq k, \quad dV = dx_i dx_j dx_k, i \neq j \neq k.$$

2. Циліндрична система координат (ρ, φ, z) . В цій системі координат координатними поверхнями є $\rho = C_\rho$ - аксіальні циліндри з віссю Oz , $\varphi = C_\varphi$ - півплощини, обмеженні віссю Oz , $z = C_z$ - площини, ортогональні до осі Oz .

Координатними лініями є прямі, колінеарні до вісі Oz : $\begin{cases} \rho = C_\rho \\ \varphi = C_\varphi \end{cases}$, кола, що

лежать в площинах, ортогональних до вісі Oz та мають центри на осі Oz

$$\begin{cases} \rho = C_\rho \\ z = C_z \end{cases}, \text{ промені, що ортогональні до осі } Oz \text{ та мають центри на осі } Oz$$

$$\begin{cases} z = C_z \\ \varphi = C_\varphi \end{cases}.$$

Перетворення циліндричних до декартових координати має вигляд:

$$x_1 = \rho \cos \varphi, x_2 = \rho \sin \varphi, x_3 = z, \rho \geq 0, 0 \leq \varphi < 2\pi, -\infty < z < \infty.$$

Ця система координат є ортогональною та має місце:

$$(ds)^2 = (d(\rho \cos \varphi))^2 + (d(\rho \sin \varphi))^2 + (dz)^2 = (d\rho)^2 + (\rho d\varphi)^2 + (dz)^2. \text{ Отже,}$$

$$H_\rho = 1, H_\varphi = \rho, H_z = 1 \text{ та } ds_\rho = d\rho, ds_\varphi = \rho d\varphi, ds_z = dz,$$

$$d\sigma_\rho = \rho d\varphi dz, d\sigma_\varphi = d\rho dz, d\sigma_z = \rho d\varphi d\rho, dV = \rho d\rho d\varphi dz. \quad (4.42)$$

3. Сферична система координат (r, θ, φ) . В цій системі координатними поверхнями є сфери з початком в центрі координат (точці $\mathbf{r} = 0$) з рівнянням $r = C_r$, пів конуси з віссю Oz та вершиною в центрі координат $\theta = C_\theta$, півплощини, обмежені віссю Oz $\varphi = C_\varphi$. Координатними лініями є кола, , що лежать в площинах, ортогональних до осі Oz та мають центри на осі Oz

(паралелі) $\begin{cases} r = C_r \\ \theta = C_\theta \end{cases}$, кола, з діаметром, що лежать на осі Oz та з центром в

лежать в площинах, ортогональних до вісі Oz та мають центри в центрі

координат (меридіани) $\begin{cases} r = C_r \\ \varphi = C_\varphi \end{cases}$, промені, що мають початок в центрі координат

$$\begin{cases} \theta = C_\theta \\ \varphi = C_\varphi \end{cases}.$$

Координатні перетворення сферичних координат до декартових координат:

$$x_1 = r \sin \theta \cos \varphi, x_2 = r \sin \theta \sin \varphi, x_3 = r \cos \theta, r \geq 0, 0 \leq \theta < \pi, 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

Сферична система координат є ортогональною.

$$(ds)^2 = (d(r \sin \theta \cos \varphi))^2 + (d(r \sin \theta \sin \varphi))^2 + (d(r \cos \theta))^2 = (dr)^2 + (r d\theta)^2 + (r \sin \theta d\varphi)^2.$$

Отже, коефіцієнти Ламе визначаються як:

$$H_r = 1, H_\theta = r, H_\varphi = r \sin \theta \text{ та } ds_r = dr, ds_\theta = r d\theta, ds_\varphi = r \sin \theta d\varphi, \quad (4.43)$$

$$d\sigma_r = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi, d\sigma_\theta = r \sin \theta dr d\varphi, d\sigma_\varphi = r dr d\theta, \quad dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi.$$

4.5. Приклади

Приклад 4.1. Побудувати вирази для $\text{grad} \psi$, $\text{div} \mathbf{a}$, $\text{rot} \mathbf{a}$ та $\Delta \psi$ в циліндричній системі координат.

Розв'язання. Згідно з (4.29), (4.31), (4.33) та (4.42) маємо:

$$\text{grad} \psi(\rho, \varphi, z) = \hat{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \rho} + \hat{\phi} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} + \hat{k} \frac{\partial \psi}{\partial z},$$

$$\text{div} \mathbf{a}(\rho, \varphi, z) = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial(\rho a_\rho)}{\partial \rho} + \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial a_z}{\partial z}, \quad (4.44)$$

$$\text{rot} \mathbf{a}(\rho, \varphi, z) = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial a_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial a_\varphi}{\partial z} \right) \hat{\rho} + \left(\frac{\partial a_\rho}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial \rho} \right) \hat{\phi} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial(a_\varphi \rho)}{\partial \rho} - \frac{\partial a_\rho}{\partial \varphi} \right) \hat{k},$$

$$\Delta \psi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}.$$

Приклад 4.2. Побудувати вирази для $\text{grad} \psi$, $\text{div} \mathbf{a}$, $\text{rot} \mathbf{a}$ та $\Delta \psi$ в сферичній системі координат.

Розв'язання. Згідно з (4.29), (4.31), (4.33) та (4.43) маємо:

$$\text{grad} \psi(r, \theta, \varphi) = \frac{\partial \psi}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \hat{\phi},$$

$$\text{div} \mathbf{a}(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 a_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial(\sin \theta a_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} \right), \quad (4.45)$$

$$\text{rot} \mathbf{a}(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial(\sin \theta a_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{\partial a_\theta}{\partial \varphi} \right) \hat{r} + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial a_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial(r a_\varphi)}{\partial r} \right) \hat{\theta} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r a_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial a_r}{\partial \theta} \right) \hat{\phi},$$

$$\Delta \psi(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2}.$$

Приклад 4.3. Побудувати представлення векторів швидкості $\mathbf{v}$ та прискорення $\mathbf{w}$ матеріальної точки по заданому закону руху $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t), t > 0$ в циліндричній системі координат.

Розв'язання. В циліндричній системі координат $\mathbf{r} = \mathbf{i}_1 \rho \cos \varphi + \mathbf{i}_2 \rho \sin \varphi + \mathbf{i}_3 z$. А отже, згідно з (4.43):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} = H_\rho \hat{\rho} = \hat{\rho} = \mathbf{i}_1 \cos \varphi + \mathbf{i}_2 \sin \varphi \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = H_\varphi \hat{\varphi} = \rho \hat{\varphi} = \rho (-\mathbf{i}_1 \sin \varphi + \mathbf{i}_2 \cos \varphi) \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = H_z \hat{k} = \hat{k} = \mathbf{i}_3 \end{array} \right. \quad (4.46)$$

Швидкість та прискорення матеріальної точки за означенням: дорівнюють

відповідно $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = v_\rho \hat{\rho} + v_\varphi \hat{\varphi} + v_z \hat{k} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} \dot{\rho} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} \dot{\varphi} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} \dot{z} = \dot{\rho} \hat{\rho} + \rho \dot{\varphi} \hat{\varphi} + \dot{z} \hat{k}$ та

$$\mathbf{w} = w_\rho \hat{\rho} + w_\varphi \hat{\varphi} + w_z \hat{k} = \dot{\mathbf{v}} = \dot{v}_\rho \hat{\rho} + \dot{v}_\varphi \hat{\varphi} + v_z \dot{\hat{k}} + v_\rho \dot{\hat{\rho}} + v_\varphi \dot{\hat{\varphi}} + v_z \dot{\hat{k}}.$$

Шляхом диференціювання отримаємо: $\dot{v}_\rho = \ddot{\rho}, \dot{v}_\varphi = \dot{\rho} \dot{\varphi} + \rho \ddot{\varphi}, \dot{v}_z = \ddot{z}$ та

$$\dot{\hat{\rho}} = \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \rho} \dot{\rho} + \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \varphi} \dot{\varphi} + \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial z} \dot{z} = (-\mathbf{i}_1 \sin \varphi + \mathbf{i}_2 \cos \varphi) \dot{\varphi} = \dot{\varphi} \hat{\varphi},$$

$$\dot{\hat{\varphi}} = \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \rho} \dot{\rho} + \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \varphi} \dot{\varphi} + \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial z} \dot{z} = -(\mathbf{i}_1 \cos \varphi + \mathbf{i}_2 \sin \varphi) \dot{\varphi} = -\dot{\varphi} \hat{\rho}, \quad \dot{\hat{k}} = 0. \text{ Отже, прискорення}$$

може бути записане у вигляді: $\mathbf{w} = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2) \hat{\rho} + (\rho \ddot{\varphi} + 2\dot{\rho} \dot{\varphi}) \hat{\varphi} + \ddot{z} \hat{k}$.

Приклад 4.4. Побудувати представлення векторів швидкості $\mathbf{v}$ та прискорення $\mathbf{w}$ матеріальної точки по заданому закону руху $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t), t > 0$ в сферичній системі координат.

Розв'язання. Очевидно, в сферичній системі координат $\mathbf{r} = \mathbf{i}_1 r \sin \theta \cos \varphi + \mathbf{i}_2 r \sin \theta \sin \varphi + \mathbf{i}_3 r \cos \theta$. А отже, згідно з (4.43)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} = H_r \hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{r}} = \mathbf{i}_1 \sin \theta \cos \varphi + \mathbf{i}_2 \sin \theta \sin \varphi + \mathbf{i}_3 \cos \theta \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = H_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} = r \hat{\boldsymbol{\theta}} = r (\mathbf{i}_1 \cos \theta \cos \varphi + \mathbf{i}_2 \cos \theta \sin \varphi - \mathbf{i}_3 \sin \theta) . \\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = H_\varphi \hat{\boldsymbol{\phi}} = r \sin \theta \hat{\boldsymbol{\phi}} = r \sin \theta (-\mathbf{i}_1 \sin \varphi + \mathbf{i}_2 \cos \varphi) \end{array} \right. \quad (4.47)$$

Швидкість та прискорення матеріальної точки за означенням визначаються

$$\text{відповідно як} \quad \mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = v_r \hat{\mathbf{r}} + v_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} + v_\varphi \hat{\boldsymbol{\phi}} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} \dot{r} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} \dot{\varphi} = \dot{r} \hat{\mathbf{r}} + r \dot{\theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} + r \dot{\varphi} \sin \theta \hat{\boldsymbol{\phi}}$$

$$\text{та } \mathbf{w} = w_r \hat{\mathbf{r}} + w_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} + w_\varphi \hat{\boldsymbol{\phi}} = \dot{\mathbf{v}} = \dot{v}_r \hat{\mathbf{r}} + \dot{v}_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} + \dot{v}_\varphi \hat{\boldsymbol{\phi}} + v_r \dot{\hat{\mathbf{r}}} + v_\theta \dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}} + v_\varphi \dot{\hat{\boldsymbol{\phi}}} .$$

. Шляхом диференціювання отримаємо:

$$\dot{v}_r = \ddot{r}, \dot{v}_\theta = \dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta}, \dot{v}_\varphi = \dot{r} \dot{\varphi} \sin \theta + r \ddot{\varphi} \sin \theta + r \dot{\varphi} \dot{\theta} \cos \theta \quad \text{та,}$$

$$\dot{\hat{\mathbf{r}}} = \frac{\partial \hat{\mathbf{r}}}{\partial r} \dot{r} + \frac{\partial \hat{\mathbf{r}}}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial \hat{\mathbf{r}}}{\partial \varphi} \dot{\varphi} =$$

$$(-\mathbf{i}_1 \sin \theta \cos \varphi - \mathbf{i}_2 \sin \theta \sin \varphi - \mathbf{i}_3 \cos \theta) \dot{\theta} + (-\mathbf{i}_1 \sin \varphi + \mathbf{i}_2 \cos \varphi) \dot{\varphi} = -\dot{\theta} \hat{\mathbf{r}} + \dot{\varphi} \hat{\boldsymbol{\phi}},$$

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}} = \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\theta}}}{\partial r} \dot{r} + \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\theta}}}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\theta}}}{\partial \varphi} \dot{\varphi} =$$

$$(-\mathbf{i}_1 \sin \theta \cos \varphi - \mathbf{i}_2 \sin \theta \sin \varphi - \mathbf{i}_3 \cos \theta) \dot{\theta} + (-\mathbf{i}_1 \cos \theta \sin \varphi + \mathbf{i}_2 \cos \theta \cos \varphi) \dot{\varphi} = -\dot{\theta} \hat{\mathbf{r}} + \dot{\varphi} \cos \theta \hat{\boldsymbol{\phi}},$$

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\phi}}} = \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\phi}}}{\partial r} \dot{r} + \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\phi}}}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\phi}}}{\partial \varphi} \dot{\varphi} = -(\mathbf{i}_1 \cos \varphi + \mathbf{i}_2 \sin \varphi) \dot{\varphi} = -\dot{\varphi} (\hat{\mathbf{r}} \sin \theta + \hat{\boldsymbol{\theta}} \cos \theta) \quad . \quad \text{Отже,}$$

прискорення можна записати у вигляді:

$$\mathbf{w} = \left(\ddot{r} - \dot{r} \dot{\theta}^2 - r \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta \right) \hat{\mathbf{r}} + r \left(\ddot{\theta} + \frac{2}{r} \dot{r} \dot{\theta} - \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2 \right) \hat{\boldsymbol{\theta}} + r \sin \theta \left(\ddot{\varphi} + \frac{2}{r} \dot{r} \dot{\varphi} + 2 \dot{\varphi} \dot{\theta} \operatorname{ctg} \theta \right) \hat{\boldsymbol{\phi}} .$$

Приклад 4.5. Довести, що в ортогональній криволінійній системі координат:

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{1}{H_1} \hat{\mathbf{e}}_2 \frac{\partial}{\partial q_1} \left\{ \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[\frac{\partial (a_1 H_2 H_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{a_2}{H_1 H_3} \right) + \frac{\partial (a_3 H_1 H_2)}{\partial q_3} \right] \right\} + \dots \quad (4.48)$$

Доведення. Дійсно, згідно з (4.29) , та (4.31)

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left(\frac{\partial(a_1 H_2 H_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial(a_2 H_1 H_3)}{\partial q_2} + \frac{\partial(a_3 H_1 H_2)}{\partial q_3} \right)$$

$$\operatorname{grad} \varphi = \frac{\hat{\mathbf{e}}_1}{H_1} \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} + \frac{\hat{\mathbf{e}}_2}{H_2} \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} + \frac{\hat{\mathbf{e}}_3}{H_3} \frac{\partial \varphi}{\partial q_3} . \text{ Підставивши в останню формулу } \varphi = \operatorname{div} \mathbf{a} ,$$

отримаємо (4.48).

Приклад 4.6. Побудувати представлення кінетичної енергії матеріальної точки T по заданому закону руху $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t), t > 0$ в ортогональній криволінійній системі координат.

Розв'язання. За означенням, кінетична енергія матеріальної точки з масою m , що рухається зі швидкістю $\mathbf{v}$, визначається як $T = m \frac{\mathbf{v}^2}{2}$. Очевидно, в

криволінійних координатах $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = v_{q_i} \hat{\mathbf{e}}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \dot{q}_i = H_i \dot{q}_i \hat{\mathbf{e}}_i$, тоді

$$\mathbf{v}^2 = (H_i \dot{q}_i \hat{\mathbf{e}}_i)^2 = (H_i \dot{q}_i)^2 . \text{ Отже, } T = m \frac{(H_i \dot{q}_i)^2}{2} .$$

Приклад 4.7. Записати рівняння теореми про рух центру інерції системи матеріальних точок в ортогональній криволінійній системі координат.

Розв'язання. Рівняння теореми про рух центру інерції має вигляд: $M \mathbf{w}_C = \mathbf{R}^{(e)}$, де M - маса системи, $\mathbf{w}_C$ - прискорення центру мас системи, $\mathbf{R}^{(e)}$ - головний вектор зовнішніх сил, прикладених до точок системи. Нехай $\mathbf{r}_C = \mathbf{r}_C(t) = q_i(t) \hat{\mathbf{e}}_i(t)$ - закон руху центру інерції системи. Згідно з **Прикладом 4.8.**

4.8. , $\mathbf{v}_C = H_i \dot{q}_i \hat{\mathbf{e}}_i$. Тоді

$$\mathbf{w}_C = \dot{\mathbf{v}}_C = \dot{w}_{q_i} \hat{\mathbf{e}}_i = \dot{H}_i \dot{q}_i \hat{\mathbf{e}}_i + H_i \ddot{q}_i \hat{\mathbf{e}}_i + H_i \dot{q}_i \dot{\hat{\mathbf{e}}}_i = \frac{\partial H_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \dot{q}_i \hat{\mathbf{e}}_i + H_i \ddot{q}_i \hat{\mathbf{e}}_i + H_i \dot{q}_i \dot{q}_j \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_i}{\partial q_j} . \quad 3$$

врахуванням (4.35) отримаємо:

$$\begin{aligned} w_{C_{q_1}} = & H_1 \ddot{q}_1 + q_1 \left(\dot{q}_1 \frac{\partial H_1}{\partial q_1} + \dot{q}_2 \frac{\partial H_1}{\partial q_2} + \dot{q}_3 \frac{\partial H_1}{\partial q_3} \right) + \\ & H_2 q_2 \left(\dot{q}_1 \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} - \dot{q}_2 \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_2}{\partial q_1} \right) + H_3 q_3 \left(\dot{q}_1 \frac{1}{H_3} \frac{\partial H_1}{\partial q_3} - \dot{q}_2 \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_3}{\partial q_1} \right) \end{aligned} \quad (4.49)$$

Вирази для w_{Cq_2} та w_{Cq_3} отримуємо з (4.49) шляхом циклічної перестановки індексів.

Отже, рівняння теореми про рух центру інерції має вигляд: $M w_{Cq_i} = R_{q_i}^{(e)}, i = \overline{1,3}$, де $\mathbf{R}^{(e)} = R_{q_i}^{(e)} \hat{\mathbf{e}}_i$, а компоненти прискорення визначені в (4.49).

4.6. Вправи

4.1. Довести справедливість (4.33), використавши інваріантне означення вихора

$$(3.45): \operatorname{rot} \mathbf{a} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oint \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{a} dS}{V}.$$

4.2. Параболічна система координат $u, v, \varphi: u, v \geq 0, 0 \leq \varphi < 2\pi$ визначається формулами перетворення до декартових координат:

$$\begin{cases} x_1 = u v \cos \varphi \\ x_2 = u v \sin \varphi \\ x_3 = (u^2 - v^2) / 2 \end{cases} \quad (4.50)$$

а) Побудувати координатні поверхні та координатні лінії параболічної системи координат.

б) Знайти коефіцієнти Ламе, вирази для елементів дуги, площі та об'єму.

в) Побудувати вирази для $\operatorname{grad} \psi$, $\operatorname{div} \mathbf{a}$, $\operatorname{rot} \mathbf{a}$ та $\Delta \psi$ в параболічній системі координат.

4.3. Тороїдальна система координат $u, v, \varphi: -\pi < u \leq \pi, v \geq 0, 0 \leq \varphi < 2\pi$ визначається формулами перетворення до декартових координат:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{a \sinh v \cos \varphi}{\cosh v - \cos u} \\ x_2 = \frac{a \sinh v \sin \varphi}{\cosh v - \cos u} \\ x_3 = \frac{a \sin u}{\cosh v - \cos u} \end{cases} \quad (4.51)$$

- а) Побудувати координатні поверхні та координатні лінії тороїдальної системи координат.
- б) Знайти коефіцієнти Ламе, вирази для елементів дуги, площі та об'єму.
- в) Побудувати вирази для $\text{grad}\psi$, $\text{div}\mathbf{a}$, $\text{rot}\mathbf{a}$ та $\Delta\psi$ в тороїдальній системі координат.

4.4. Бісферична система координат $u, v, \varphi: -\pi < u \leq \pi, v \geq 0, 0 \leq \varphi < 2\pi$ визначається формулами перетворення до декартових координат:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{a \sin u \cos \varphi}{\cosh v - \cos u} \\ x_2 = \frac{a \sin u \sin \varphi}{\cosh v - \cos u} \\ x_3 = \frac{a \sinh v}{\cosh v - \cos u} \end{cases} . \quad (4.52)$$

- а) Побудувати координатні поверхні та координатні лінії бісферичної системи координат.
- б) Знайти коефіцієнти Ламе, вирази для елементів дуги, площі та об'єму.
- в) Побудувати вирази для $\text{grad}\psi$, $\text{div}\mathbf{a}$, $\text{rot}\mathbf{a}$ та $\Delta\psi$ в бісферичній системі координат.

4.5. Довести рівність

$$\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_3} \right) \right) (\text{grad } q_1 \cdot (\text{grad } q_2 \times \text{grad } q_3)) = 1 . \quad (4.53)$$

4.6. Довести, що

$$\begin{aligned} \text{rot}(\text{rot } \mathbf{a}) = & \frac{1}{H_2 H_3} \hat{\mathbf{e}}_1 \left\{ \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{H_3}{H_1 H_2} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (a_2 H_2) - \frac{\partial}{\partial q_2} (a_1 H_1) \right] \right) - \right. \\ & \left. \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{H_2}{H_1 H_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_3} (a_1 H_1) - \frac{\partial}{\partial q_1} (a_3 H_3) \right] \right) \right\} + \dots \end{aligned} \quad (4.54)$$

4.7. Довести справедливості формули:

$$\begin{aligned}
\Delta \mathbf{a} = & \frac{1}{H_1} \hat{\mathbf{e}}_1 \{ \Delta a_1 - a_1 H_1 \Delta H_1 + \\
& \frac{a_1}{H_1} H_1 \frac{\partial}{\partial q_1} (\Delta q_1) + \frac{a_2}{H_1} H_2 \frac{\partial}{\partial q_1} (\Delta q_2) + \frac{a_3}{H_1} H_3 \frac{\partial}{\partial q_1} (\Delta q_3) - \\
& 2 \frac{1}{H_1^2} \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{1}{H_1} \right) \frac{\partial}{\partial q_1} (a_1 H_1) - 2 \frac{1}{H_2^2} \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{1}{H_1} \right) \frac{\partial}{\partial q_1} (a_2 H_2) - \\
& 2 \frac{1}{H_3^2} \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{1}{H_1} \right) \frac{\partial}{\partial q_1} (a_3 H_3) + \\
& \frac{1}{H_1} \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{1}{H_1^2} \right) \frac{\partial}{\partial q_1} (a_1 H_1) + \frac{1}{H_1} \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{1}{H_2^2} \right) \frac{\partial}{\partial q_2} (a_2 H_2) + \\
& \frac{1}{H_1} \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{1}{H_3^2} \right) \frac{\partial}{\partial q_3} (a_3 H_3) + \dots
\end{aligned} \tag{4.55}$$

4.8. Записати рівняння Ламе (3.109) в циліндричній системі координат.

4.9. Записати рівняння Ламе (3.109) в сферичній системі координат.

4.10. Побудувати представлення векторів швидкості $\mathbf{v}$ та прискорення $\mathbf{w}$ матеріальної точки по заданому закону руху $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t), t > 0$ в тороїдальній системі координат (див. Вправу 4.3.).

4.11. Побудувати представлення векторів швидкості $\mathbf{v}$ та прискорення $\mathbf{w}$ матеріальної точки по заданому закону руху $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t), t > 0$ в бісферичній системі координат (див. Вправу 4.3.).

Список літератури

1. Разумова М. А., Хотяїнцев В. М. / М. А. Разумова, В. М. Хотяїнцев. Основи векторного і тензорного аналізу – К. : Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2011. – 216 с.
2. Sokolnikov I.S. / I.S. Sokolnikov . Tensor Analysis. - John Wiley & Sons, Inc., 1951. - 335 p.
3. Bourne D.E., Kendall P.C. / D.E. Bourne, P.C. Kendall. Vector and Tensor Analysis. Second Edition. - A Subsidiary of Harcourt Brace Jovanovich, Publishers, 1977. - 255 p.
4. Spiegel M. R. / M. R. Spiegel. Vector Analysis and an Introduction to Tensor Analysis. - Schaums Outline Series. McGraw-Hill, 2009. - 254 p.
5. Spain B. / B. Spain. Vector Analysis. - London: Van Nostrand, 1967. - 114 p.
6. Borisenko A.I., Tarapov I.E. / A.I. Borisenko, I.E. Tarapov. Vector and Tensor Analysis with Applications. - Dover Publications; New edition , 1979. - 288 p.
7. Young E.C. / Young E.C. Vector and Tensor Analysis. Second Edition. - CRC Press, 1992. - 588 p.
8. Aki K., Richards P.G. / K. Aki, P.G. Richards. Quantative Seismology. Theory and methods. Vol. 1., Second edition – University Science Books; Second edition, 2009 - 700 p.
9. Morton E. G. / E. G. Morton. An Introduction to Continuum Mechanics - Academic Press, 1981. - 265 p.
10. Іро Г. / Г. Іро. Класична механіка. Переклад з німецької. - Львівський національний університет ім. Івана Франка, 1999. - 464 с.
11. Кільчевський М.О. / М.О. Кільчевський. Курс теоретичної механіки. У 2-х томах. - К. : Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2009. – 499 с.
12. Nowacki W. / W. Nowacki. Teoria Sprężystości. - Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1979. - 872 p.
13. Taylor J.R. / J.R. Taylor. Classical Mechanics. - University Science Books, 2005. - 786 p.

Використані позначення

E - тривимірний евклідів точковий простір

V - векторний простір, асоційований з тривимірним евклідовим простіром

$\{\mathbf{i}_i\} = (\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$ - ортонормований декартов базис

$A, B, \dots$ - матриці

$A = \{\alpha_{ij}\}_{i,j=1}^3$ - компонентне представлення матриці

$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \dots$ - вектори

$\mathbf{r}$ - радіус-вектор точки евклідового простору

$\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \dots$ - тензори

$\mathbf{P} = \{\mathbf{P}\}$ - матричне представлення тензора

$\{\mathbf{P}\} = \{p_{ij}\}_{i,j=1}^n$ - компонентне представлення тензора

$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$ - символ Кронекера

$\hat{\mathbf{P}}, \hat{\mathbf{L}}, \dots$ - оператори

$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ - скалярний добуток векторів

$\mathbf{S} \circ \mathbf{P} = \mathbf{SP}$ - множення тензора на тензор

$\mathbf{Pa}$ - множення тензора на вектор (лінійне перетворення)

$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ - тензорний добуток векторів (діада)

$\mathbf{P} \cdot \mathbf{S} = \text{tr}(\mathbf{P}^T \mathbf{S})$ - внутрішній добуток тензорів

$\hat{\mathbf{t}}, \hat{\mathbf{v}}$ - дотичний та нормальний напрямки

$\text{grad } \varphi$ - градієнт скаляра

∇ - оператор Гамільтона

$\text{div } \mathbf{a} \equiv \nabla \cdot \mathbf{a}$ - дивергенція вектора

$\text{div } \mathbf{P}$ - дивергенція тензора

$\nabla \mathbf{a}$ - градієнт вектора

$\text{rot } \mathbf{a} \equiv \nabla \times \mathbf{a}$ - вихор вектора

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА	3
1. Скаляри, вектори, тензори	6
1.1. Основні означення.....	6
Скаляри та вектори.....	6
Декартові системи координат. Ортогональні афінні перетворення	7
Афінні ортогональні тензори.....	9
Властивості ортогональних афінних перетворень	12
1.2 Алгебраїчні тензорні операції.....	14
Основні операції над тензорами та їхні властивості	14
1.3 Спектральні властивості тензорів.....	16
Власні значення та власні вектори тензора. Спектральна теорема	16
Характеристичний многочлен тензора. Головні інваріанти тензора.	
Теорема Гамільтона-Келі.....	18
1.4. Приклади.....	18
1.5. Вправи	32
2. Похідна скаляра, вектора та тензора по скалярному аргументу	35
2.1. Основні означення.....	35
Функціональна залежність від скаляра. Поняття неперервності та	
диференційованості.....	35
Вектор та тензор, що обертаються разом з тілом	35
2.2. Диференціальні властивості векторів та тензорів, що залежать від	
скалярного аргументу	36
2.3. Приклади.....	37
2.4. Вправи	48
3. Функції від векторного аргументу. Скалярні, векторні та тензорні поля	
.....	51
3.1. Скалярні, векторні та тензорні поля. Диференційованість, інтегрованість	
та головні властивості	51
Поняття скалярного , векторного та тензорного полів. Неперервність та	
диференційованість.	51
. Похідна скаляра та вектора за напрямком	55
Місцева та повна похідні по скалярному аргументу.....	56
Інтегрування скалярів та векторів	56
3.2. Градієнт скалярного поля. Потенціальність вектора.....	57

3.3. Дивергенція та вихор вектора. Гамільтонів формалізм. Теорема Гауса та пов'язані з нею питання	61
Дивергенція та соленоїдальність векторного поля. Гамільтонів формалізм	61
Властивості соленоїдального вектора. Теорема Гауса. Узагальнена теорема Гауса.....	63
Вихор вектора. Вихрове векторне поле	65
3.4. Тензорне представлення градієнта, дивергенції та вихору	66
Властивості градієнта та дивергенції через тензорні операції	67
3.5. Теорема Стокса, формули Гріна, теорема Гельмгольца, теорема Рейнольдса-Лейбніца , поновлення вектора	68
Теорема Стокса.....	68
Формули Гріна.....	69
Теорема Гельмгольца	71
Поновлення вектора по його вихору та дивергенції (задача Гельмгольца)	71
Теорема Рейнольдса-Лейбніца про диференціювання інтеграла по об'єму, що залежить від скалярного параметра (Reynolds transport theorem).....	72
Умови збереження векторних ліній та векторних трубок поля. Теорема про середнє.	75
3.6. Приклади.....	77
3.7. Вправи	116
4. Криволінійні координати.....	123
4.1. Координатні лінії та поверхні. Основний та взаємний базиси	123
Ортогональні криволінійні системи координат. Коефіцієнти Ламе.....	125
4.2. Елементи дуги, площі та об'єму в криволінійних координатах	127
4.3. Диференціальні операції в ортогональних системах координат	128
4.4. Приклади систем координат	132
4.5. Приклади.....	134
4.6. Вправи	138
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ.....	141
ВИКОРИСТАНІ ПОЗНАЧЕННЯ	142