

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ ІМЕНІ ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

МЕТОДИ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

ЧАСТИНА 3

МЕТОД ФУР'Є. ЗАДАЧА ШТУРМА-ЛІУВІЛЛЯ

Навчальний посібник

Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра за спеціальностями
104 Фізика та астрономія, 105 Прикладна фізика та наноматеріали,
111 Математика, 113 Прикладна математика

Укладач В. С. Герасимчук

Електронне мережне навчальне видання

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2024

УДК 517.95 (075.8)

М54

Укладач: Герасимчук Віктор Семенович, д-р фіз.-мат. наук, професор

Рецензент Антонов В. М., д-р фіз.-мат. наук, професор, чл.-кор. НАН України,
завідувач відділу обчислювальної фізики
Інституту металофізики ім. Г. В. Курдюмова НАН України

Відповідальний редактор Швець О. Ю., д-р фіз.-мат. наук, професор

*Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
(протокол № 8 від 20.06.2024 р.)
за поданням вченої ради Фізико-математичного факультету
(протокол № 4 від 03.04.2024 р.)*

М54 **Методи математичної фізики.** Частина 3. Метод Фур'є. Задача Штурма-Ліувілля [Електронний ресурс]: навч. посіб. для здобувачів ступеня бакалавра за спеціальностями 104 Фізика та астрономія, 105 Прикладна фізика та наноматеріали, 111 Математика, 113 Прикладна математика / КПІ ім. Ігоря Сікорського; уклад.: В. С. Герасимчук. – Електрон. текст. дані (1 файл). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2024. – 58 с.

У навчальному посібнику викладено основи одного з найпотужніших методів класичної математичної фізики – методу Фур'є. Наведено і обґрунтовано процедуру розв'язання першої мішаної задачі для хвильового рівняння та рівняння теплопровідності. Викладено основні відомості про задачу Штурма-Ліувілля, яка є невід'ємною складовою методу Фур'є. Сформульовані та обґрунтовані властивості власних значень і власних функцій задачі Штурма-Ліувілля. Наведено приклади найпоширеніших задач Штурма-Ліувілля.

Посібник охоплює матеріал першої частини кредитного модуля курсу "Методи математичної фізики" і містить як матеріал стандартних розділів курсу, так і компактне викладення питань, яким в навчальній літературі приділяється недостатня увага. Акцент робиться на загальних моментах та практичних навичках. Кожен параграф містить теоретичні відомості, типові задачі з поясненнями і графіками та задачі для самостійного розв'язування, забезпечені відповідями.

Це видання продовжує серію навчальних видань об'єднаних єдиною темою та назвою "Методи математичної фізики".

Посібник призначений для здобувачів ступеня бакалавра за спеціальностями 104 Фізика та астрономія, 105 Прикладна фізика та наноматеріали, 111 Математика, 113 Прикладна математика. Може бути корисним студентам інших природознавчих та інженерно-технічних спеціальностей, здобувачам ступеня магістра, а також викладачам закладів вищої освіти. Він буде корисним для самостійної роботи здобувачів вищої освіти та дистанційного навчання.

УДК 517.95 (075.8)

Реєстр. № НП 23/24-449. Обсяг 2,42 авт. арк.

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
проспект Берестейський, 37, м. Київ, 03056
<https://kpi.ua>

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру видавців, виготовлювачів
і розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 5354 від 25.05.2017 р.

© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2024

1. Розв’язування першої мішаної задачі методом Фур'є. Одновимірні задачі

Навіть відносно прості фізичні процеси протікають з такою великою кількістю взаємних зв’язків з іншими явищами та об’єктами, що їх вивчення без спрощення в принципі неможливе (хоча б тому, що не завжди ці зв’язки відомі). Спрощення полягає в ідеалізації аналізованого явища шляхом абстрагування від другорядних деталей, тобто, заміні природних закономірностей деякими наближеними. Ступінь адекватності останніх обумовлена обсягом знань про аналізований процес або явище, рівнем потреб людської діяльності та рівнем розвитку математичного апарату на даний момент часу. Розвиток наших знань про фізичні закономірності та вдосконалення математичного апарату дає можливість включати в розгляд все більше зв’язків даного явища і, отже, отримувати більш точний опис досліджуваних процесів.

Описавши в [2] деякі фізичні явища за допомогою математичних моделей у диференціальній формі, а саме, крайових задач, приступимо до їх розв’язування. Основна ідея розв’язання ДРЧП полягає у знаходженні повного набору лінійно-незалежних частинних розв’язків у вигляді добутку функцій, кожна з яких залежить від однієї змінної. Тоді загальний розв’язок є сумою всіх частинних розв’язків, кожен з яких помножено на константу.

Почнемо з одного з найвідоміших і найпотужніших методів – *методу відокремлення змінних* або *методу Фур'є*¹. Суть методу є досить прозорою. Вона полягає у розкладанні заданих умов крайової задачі на найпростіші компоненти та знаходженні відгуку системи на кожен з них. І наступної *суперпозиції* (тобто підсумовування або накладання) всіх відгуків для знаходження рішення за вихідних початкових умов.

Оскільки в методі Фур'є використовується принцип суперпозиції, то метод застосовується для розв’язання тільки лінійних крайових задач. Крім того, вже в процесі побудови рішення стане ясно, що метод безпосередньо реалізується лише в тому випадку, коли рівняння стану та граничні умови однорідні, тобто важливими є:

(а) *лінійність та однорідність* рівняння

$$L[u(M, t)] = 0, \quad M \in D \subset R^3, \quad t > 0,$$

де $L[u]$ – лінійний диференціальний оператор 2-го порядку зі змінними, в загальному випадку, коефіцієнтами;

¹ **ФУР'Є** Жан-Батіст Жозеф (*Fourier Jean-Baptiste Joseph*, 1768-1830) – французький математик і фізик. Започаткував використання тригонометричних рядів (рядів Фур'є) для розв’язування задач математичної фізики, зокрема, в теорії поширення тепла. У 1807 р. представив доповідь «Про поширення тепла в твердому тілі», яка отримала дуже суперечливу оцінку сучасників. Змиритися з тим, що Фур'є розкладав функції у тригонометричні ряди не могли навіть його великі співвітчизники Лагранж та Лаплас.

(b) лінійність та однорідність граничних умов

$$\left(\alpha \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + \beta u(M, t) \right) \Big|_S = 0 \quad (\alpha^2 + \beta^2 \neq 0).$$

У всьому іншому метод однаковою мірою застосовний для розв'язання рівнянь математичної фізики всіх типів: гіперболічного, параболічного та еліптичного. У чому й полягає головна його перевага.

“Все є лише коливання та їх вплив. Все і кожне утворено з коливань”
(Макс Планк, німецький фізик-теоретик, один з основоположників квантової фізики)

1.1 Розв'язування першої мішаної задачі для хвильового рівняння

I. Для розуміння основної ідеї методу відокремлення змінних сформулюємо алгоритм розв'язування:

- шукаємо розв'язки ДРЧП у вигляді добутку функцій від однієї змінної;
- підпорядковуємо ці розв'язки граничним умовам, внаслідок чого отримуємо повний набір частинних розв'язків, помножених на константи;
- сума одержаних частинних розв'язків дає загальний розв'язок;
- підпорядковуємо загальний розв'язок початковим умовам, завдяки чому знаходимо коефіцієнти загального розв'язку.

Почнемо з найпростішого випадку. Розглянемо *першу мішану задачу* для рівняння гіперболічного типу: *знайти функцію $u(x, t)$, визначену в області $0 \leq x \leq l$, $t \geq 0$, яка задовольняє однорідне хвильове рівняння*

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad \text{для } 0 < x < l, \quad 0 < t < \infty, \quad (1.1)$$

однорідні граничні умови 1-го роду

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad 0 < t < \infty \quad (1.2)$$

та довільні початкові умови

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l. \quad (1.3)$$

Зауваження 1. Функція $u(x, t) \equiv 0$ не є розв'язком крайової задачі, оскільки не задовольняє початкові умови (1.3).

Зауваження 2. Фізична інтерпретація крайової задачі (1.1)-(1.3) наведена в [2, п. 1.2]

Розв'язування здійснимо в два етапи. На **першому** – знайдемо нескінченне число таких розв'язків рівняння з частинними похідними (1.1), які задовольняють граничні умови (1.2). Останні будемо шукати у вигляді добутку

$$u(x, t) = X(x) \cdot T(t). \quad (1.4)$$

Зауваження 3. Функції $X(x)$ і $T(t)$ не можуть бути тотожно рівними нулю, адже в протилежному випадку $u(x, t) \equiv 0$.

Підставимо добуток (1.4) послідовно в (1.1) і (1.2)

$$X(x)T''(t) = a^2 X''(x)T(t), \quad X(0)T(t) = 0, \quad X(l)T(t) = 0,$$

де штрихи позначають диференціювання за відповідною змінною. Розділивши останні рівності на $X(x)$ і $T(t)$, отримаємо

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2} \frac{T''(t)}{T(t)} = -\mu, \quad X(0) = 0, \quad X(l) = 0. \quad (1.5)$$

Тут μ – деяка константа, адже перший дріб залежить від просторової координати x , а другий – від часу t (знак мінус вибраний для зручності).

Таким чином, для того, щоб розв'язок у вигляді (1.4) задовольняв рівняння (1.1) і умови (1.2), необхідно й достатньо, щоб функція $T(t)$ задовольняла звичайне диференціальне рівняння

$$T''(t) + a^2 \mu T(t) = 0, \quad (1.6)$$

а функція $X(x)$ була нетривіальним розв'язком крайової задачі з невідомим параметром μ

$$X''(x) + \mu X(x) = 0, \quad (1.7)$$

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0. \quad (1.8)$$

З крайовою задачею такого типу ми ще не зустрічались. Характерна особливість останньої полягає в тому, що $X(x) \equiv 0$ є її тривіальним розв'язком, а такий розв'язок, як було зазначено вище, нас не влаштовує. Однак, можна поставити задачу так: знайти такі значення параметра μ , при яких крайова задача (1.7)-(1.8) має нетривіальний розв'язок. Це **задача Штурма-Ліувілля**². Вказані значення параметра μ називають *власними значеннями* (власними числами), а самі розв'язки $X(x)$ – *власними функціями* (власними розв'язками).

Множина всіх власних значень задачі (1.7)-(1.8) називається *спектром*, а задача знаходження спектра і відповідної йому системи власних функцій – *спектральною задачею*.

Інтегруємо ЛОДР 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами (1.7) методом Ейлера [9]. Поклавши $X(x) = \exp(\alpha x)$, отримаємо характеристичне рівняння

$$\alpha^2 + \mu = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_{1,2} = \pm \sqrt{-\mu}.$$

Проаналізуємо його розв'язки в залежності від знаку параметра μ .

² **ШТУРМ** Жак Шарль Франсуа (*Sturm Jacques Charles François*, 1803-1855) – швейцарський і французький математик і фізик. Удостоєний премії з математики за роботи зі стисливості рідин. Його ім'я носить теорема, яка дозволяє точно визначити число дійсних коренів алгебраїчного рівняння між даними межами.

ЛІУВІЛЛЬ Жозеф (*Liouville Joseph*, 1809-1882) – французький математик. Відомий своїми працями у різних галузях математики, включаючи теорію чисел, комплексний аналіз, диференціальну геометрію та диференціальну топологію, а також математичну фізику і навіть астрономію. Йому належить фундаментальна теорема гамільтонової механіки і класичної статистичної фізики щодо сталості фазового об'єму системи, що рухається, а також теорема про інтегрування канонічних рівнянь динаміки. У гамільтоновій динаміці ввів поняття змінних *дія-кут* як опис повністю інтегрованих систем.

1. Нехай $\mu < 0$, тоді корені характеристичного рівняння дійсні й різні. Тому загальний розв'язок рівняння (1.7) має вигляд

$$X(x) = C \exp(\sqrt{-\mu}x) + D \exp(-\sqrt{-\mu}x).$$

Задовольняючи граничні умови (1.8), отримаємо систему для визначення сталих C і D :

$$\begin{cases} C e^{\sqrt{|\mu|x}} \Big|_{x=0} + D e^{-\sqrt{|\mu|x}} \Big|_{x=0} = 0, \\ C e^{\sqrt{|\mu|x}} \Big|_{x=l} + D e^{-\sqrt{|\mu|x}} \Big|_{x=l} = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C + D = 0, \\ C e^{\sqrt{|\mu|}l} + D e^{-\sqrt{|\mu|}l} = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = -D, \\ -D \cdot (e^{\sqrt{|\mu|}l} - e^{-\sqrt{|\mu|}l}) = 0. \end{cases}$$

Визначник однорідної системи не дорівнює нулю, тому вона має лише тривіальний розв'язок. Звідки $D = 0$, $C = 0$, а отже $X(x) \equiv 0$. Таким чином, при $\mu < 0$ задача власних значень і власних функцій не має.

2. Нехай $\mu = 0$, тоді характеристичне рівняння має нульовий кратний корінь і, отже, $X(x) = Cx + D$. Враховуючи граничні умови (1.8), отримаємо

$$\begin{cases} C \cdot 0 + D = 0, \\ C \cdot l + D = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D = 0, \\ C \cdot l = 0. \end{cases}$$

Тобто, $C = D = 0$ і маємо ситуацію подібну до попереднього випадку.

3. Нехай $\mu > 0$, тоді корені рівняння чисто уявні $\alpha_{1,2} = \pm i\sqrt{\mu}$. Загальний розв'язок записується за допомогою тригонометричних функцій

$$X(x) = C \cos \sqrt{\mu}x + D \sin \sqrt{\mu}x. \quad (1.9)$$

Підставляючи цю рівність в першу граничну умову (1.8), отримаємо $C = 0$. Друга гранична умова дає $D \sin \sqrt{\mu}l = 0$.

$$\begin{cases} C \cos \sqrt{\mu} \cdot 0 + D \sin \sqrt{\mu} \cdot 0 = 0, \\ C \cos \sqrt{\mu} \cdot l + D \sin \sqrt{\mu} \cdot l = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = 0, \\ C \cos \sqrt{\mu} \cdot l + D \sin \sqrt{\mu} \cdot l = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = 0, \\ D \cdot \sin \sqrt{\mu}l = 0. \end{cases}$$

Слід вважати $D \neq 0$, оскільки в іншому випадку знову отримаємо тривіальний розв'язок $X(x) \equiv 0$. Тому покладемо $\sin \sqrt{\mu}l = 0$, і розв'язуючи це тригонометричне рівняння знайдемо $\sqrt{\mu} = \frac{n\pi}{l}$ ($n = \pm 1, \pm 2, \dots$). Значенню $n = 0$ відповідає $\mu = 0$, що, як ми вже бачили, нас не влаштовує.

Таким чином, нетривіальний розв'язок задачі Штурма-Ліувілля (1.7)-(1.8) можливий лише при додатних значення параметра μ . Щоб підкреслити цю обставину та спростити подальші записи, перепозначимо μ через λ^2 .

Власним значенням задачі (1.7)-(1.8)

$$\mu_n \equiv \lambda_n^2 = \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2, \quad (n = \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (1.10)$$

відповідатимуть, згідно з (1.9), *власні функції*

$$X_n(x) = \sin \lambda_n x = \sin \frac{n\pi}{l} x, \quad (1.11)$$

які визначаються з точністю до сталого множника.

Принципово, що власні функції $X_n(x)$ утворюють повну систему лінійно-незалежних функцій, ортogonalних на відрітку $(0, l)$

$$\int_0^l X_n(x) \cdot X_m(x) dx = 0, \quad n \neq m,$$

з квадратом норми (переконатися **самостійно!**)

$$\|X_n(x)\|^2 \equiv \int_a^b [X_n(x)]^2 dx = \int_a^b \sin^2 \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{l}{2}, \quad n = m.$$

Таким чином, розв'язком просторової задачі для функції $X(x)$ визначено набір констант μ_n , а отже, стає визначеною задача для функції $T(t)$:

$$T_n''(t) + a^2 \lambda_n^2 T_n(t) = 0, \quad (1.12)$$

розв'язок якої має вигляд

$$T_n(t) = A_n \cos a \lambda_n t + B_n \sin a \lambda_n t. \quad (1.13)$$

Отже, маємо повний набір лінійно-незалежних частинних розв'язків:

$$u_n(x, t) = X_n(x) T_n(t) = (A_n \cos a \lambda_n t + B_n \sin a \lambda_n t) \cdot \sin \lambda_n x \quad (1.14)$$

які задовольняють рівняння (1.1) та граничні умови (1.2) при будь-яких довільних значеннях констант A_n і B_n . Цим перший етап побудови розв'язку завершено.

Переходячи до **другого етапу**, перш за все, зазначимо наступне – в силу *лінійності* й *однорідності* рівняння (1.1) та умов (1.2) суперпозиція частинних розв'язків (1.14) також слугуватиме розв'язком поставленої задачі. Тому, запишемо розв'язок задачі (1.1)-(1.3) у вигляді нескінченного ряду, складеного з функції $u_n(x, t)$:

$$u(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{-1} u_n + \sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} [u_n(x, t) + u_{-n}(x, t)],$$

де

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (\tilde{A}_n \cos a \lambda_n t + \tilde{B}_n \sin a \lambda_n t) \cdot \sin \lambda_n x,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_{-n}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (\tilde{A}_{-n} \cos a \lambda_{-n} t + \tilde{B}_{-n} \sin a \lambda_{-n} t) \cdot \sin \lambda_{-n} x.$$

Приводячи подібні й позначаючи $A_n = \tilde{A}_n - \tilde{A}_{-n}$, $B_n = \tilde{B}_n - \tilde{B}_{-n}$, запишемо

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos a\lambda_n t + B_n \sin a\lambda_n t) \cdot \sin \lambda_n x. \quad (1.15)$$

Кожний доданок ряду (1.15) задовольняє рівняння (1.1) й однорідні граничні умови (1.2). Як зазначалося, будь-яка скінченна (часткова) сума цього ряду також задовольняє вказані вимоги. Весь ряд (1.15) задовольняє (1.1)-(1.2), якщо він допускає двократне почленне диференціювання по x і t та є рівномірно збіжним.

На завершення залишилось підібрати сталі A_n і B_n так, щоб ряд (1.15) задовольняв і початкові умови (1.3). Враховуючи першу початкову умову, тобто поклавши в (1.15) $t = 0$, отримаємо

$$u(x, 0) = \begin{cases} \varphi(x) \\ \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \lambda_n x \end{cases} \Rightarrow \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \lambda_n x. \quad (1.16)$$

Щоб скористатися другою початковою умовою спочатку продиференціюємо (1.15) за змінною t :

$$u_t(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a\lambda_n (-A_n \sin a\lambda_n t + B_n \cos a\lambda_n t) \cdot \sin \lambda_n x$$

і візьмемо до уваги другу початкову умову (1.13):

$$u_t(x, 0) = \begin{cases} \psi(x) \\ \sum_{n=1}^{\infty} a\lambda_n B_n \sin \lambda_n x \end{cases} \Rightarrow \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a\lambda_n B_n \sin \lambda_n x. \quad (1.17)$$

Вирази (1.16) і (1.17) є розвиненням функцій $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ в ряд Фур'є за власними функціями (1.11), які утворюють *повну систему ортогональних функцій* $\{X_n(x)\}$ на відрізку $(0, l)$. Коефіцієнти цих розвинень знаходяться стандартним способом – множенням (1.16) і (1.17) зліва і справа на $X_m(x) = \sin \lambda_m x$ ($m = \overline{1, \infty}$) та подальшим інтегруванням в межах від 0 до l . Внаслідок для номера $n = m$, маємо:

$$A_m = \frac{1}{\|X_m(x)\|^2} \int_0^l \varphi(x) X_m(x) dx = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \lambda_m x dx, \quad (1.18)$$

$$B_m = \frac{1}{a\lambda_m \|X_m(x)\|^2} \int_0^l \psi(x) X_m(x) dx = \frac{2}{m\pi a} \int_0^l \psi(x) \sin \lambda_m x dx.$$

Функція $u(x, t)$, визначена нескінченним рядом (1.15) з коефіцієнтами (1.18), є, взагалі кажучи, формальним розв'язком вихідної крайової задачі.

Стверджувати, що вона є фактичним розв'язком ми зможемо, лише впевнившись в рівномірній збіжності рядів, отриманих з (1.15) двократним почленним диференціюванням. Оскільки коефіцієнти (1.18) визначаються за допомогою функцій $\varphi(x)$ і $\psi(x)$, то залишається визначити, яким обмеженням ці функції повинні задовольняти, щоб мала місце рівномірна збіжність.

Оскільки розв'язок отримано нами у вигляді ряду Фур'є, то можна скористатися відомою властивістю цих рядів: *якщо функція $f(x)$ періодична з періодом $2l$ і неперервно диференційовна k разів, то її коефіцієнти Фур'є*

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi}{l} x dx, \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx$$

при $n \rightarrow \infty$ є величинами більш високого порядку малості в порівнянні з n^k і

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|) \cdot n^{k-1} < \infty. \quad (1.19)$$

Звідси, для забезпечення рівномірної збіжності ряду (1.15) після його двократного почленного диференціювання, достатньо вимагати, щоб

$$\sum_{n=1}^{\infty} |A_n| n^2 < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |B_n| n^2 < \infty. \quad (1.20)$$

В силу (1.18) для збіжності рядів (1.20) достатньо, щоб функція $\varphi(x)$ після непарного продовження на відрізок $[-l, 0]$ і періодичного продовження з періодом $2l$ була тричі неперервно диференційовною і задовольняла умови

$$\varphi(0) = \varphi(l) = 0, \quad \varphi''(0) = \varphi''(l) = 0,$$

а функція $\psi(x)$ за тих самих умов продовження була б двічі неперервно диференційовною і задовольняла умови

$$\psi(0) = \psi(l) = 0.$$

Таким чином, якщо функції $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ задовольняють цим обмеженням, то ряд (1.15) з коефіцієнтами (1.18), дає двічі неперервно диференційовні розв'язки *першої мішаної задачі* (1.1)-(1.3).

Більш детальне обґрунтування розв'язання мішаних крайових задач дивись у п. 1.3.

II. Найпростішою механічною моделлю *першої мішаної задачі* є задача про вільні поперечні коливання струни із закріпленими кінцями. Коливання струни, що описуються законом $u_n(x, t)$, називаються *власними коливаннями*.

Якщо ввести позначення $A_n = a_n \sin \delta_n$ і $B_n = a_n \cos \delta_n$, так що

$$a_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}, \quad \delta_n = \arctg \frac{A_n}{B_n},$$

то розв'язок (1.15) набуває зручний для аналізу вигляд:

$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n [\sin \delta_n \cdot \cos a\lambda_n t + \cos \delta_n \cdot \sin a\lambda_n t] \cdot \sin \lambda_n x = \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{a_n \sin \lambda_n x}_{\text{амплітуда}} \cdot \sin(\omega_n t + \delta_n),
 \end{aligned}
 \tag{1.21}$$

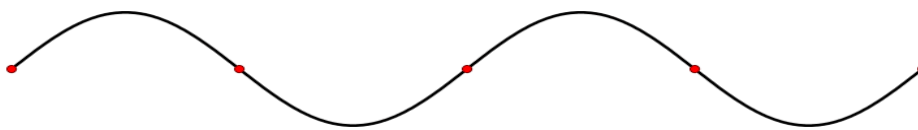
де $\omega_n \equiv a\lambda_n$.

Звідси випливає, що точки струни здійснюють гармонічний коливальний рух з амплітудою $a_n \sin \lambda_n x = a_n \sin \frac{n\pi x}{l}$, власною частотою $\omega_n \equiv a\lambda_n = \frac{n\pi a}{l}$ і початковою фазою δ_n .

Коливальний процес характеризується тим, що амплітуда коливань залежить від абсциси точки, а частота і фаза для всіх точок одні й ті самі. Це означає, що всі точки струни рухаються синхронно, одночасно досягаючи свого максимального відхилення в ту чи іншу сторону. Такий коливальний процес називається стоячою хвилею. Профіль хвилі в будь-який момент часу є синусоїдою. Стоячі хвилі утворюються при накладенні двох біжучих хвиль, які поширюються назустріч одна одній з однаковою частотою і однаковою амплітудою. Поняття біжучої хвилі дано в [1, п.7].

Точки $x = \frac{n-1}{n}l$, в яких $\sin \frac{n\pi x}{l} = \sin \pi(n-1) = 0$ (відмічені червоним на рисунку) протягом усього процесу залишаються нерухомими і називаються вузлами стоячої хвилі.

Точки $x = \frac{2n-1}{2n}l$, в яких $\sin \frac{n\pi x}{l} = \sin \frac{\pi}{2}(2n-1) = \pm 1$ здійснюють коливання з максимальною амплітудою і називаються пучностями стоячої хвилі.



Відстань між двома послідовними станами середовища, що коливаються в однаковій фазі (напр., між двома послідовними гребенями або западинами), називається довжиною хвилі й позначається через λ . Відстань між двома сусідніми вузлами і між двома сусідніми пучностями однакові й рівні половині довжини хвилі λ . Цю величину зовуть довжиною стоячої хвилі $\lambda_{cm} = \lambda/2$. У закріпленій з обох кінців натягнутій струні при збудженні поперечних коливань встановлюються стоячі хвилі довжини λ , причому в місцях закріплення струни розташовуються вузли. Звідси випливає, що на довжині струни l має вкладатися ціле число n стоячих хвиль $l = n\lambda_{cm}$, або напівхвиль $l = n\lambda/2$.

Висновок. З проведеного аналізу стає зрозуміло, що розв'язок хвильового рівняння (1.1) за одних умов (задача Коші, див. [1], п.7) описує *біжучу* хвилю, а при інших (крайова задача) – *стоячу* хвилю.

Порівняємо основні характеристики *біжучої* та *стоячої* хвиль

Біжуча хвиля	Стояча хвиля
амплітуда коливань	
амплітуда хвилі <u>незмінна</u>	всі точки хвилі між двома вузлами коливаються з <u>різними</u> амплітудами
фаза коливань	
всі точки хвилі рухаються з <u>однаковою</u> фазою	всі точки між двома вузлами коливаються з <u>однаковими</u> фазами
фаза коливань <u>залежить від координати</u> точки x	при переході через вузол фаза коливань змінюється на π ; точки, що лежать по різні боки від вузла коливаються у <u>протифазі</u>
перенесення енергії	
енергія <u>переноситься</u> у напрямку поширення хвилі	<u>енергії не переноситься</u> ; лише в межах $\lambda/2$ відбуваються взаємні перетворення кінетичної енергії на потенційну і назад

При коливанні струна генерує звук, який є результатом накладання коливань, що відповідають стоячим хвилям $u_n(x, t)$. Сила звуку визначається амплітудою $a_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}$, а висота звуку – частотою ω_n .

Найменша власна частота $\omega_1 = \frac{a\pi}{l} = \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{T}{\rho}}$ є частотою *основного тону*.

Вона тим вища, чим коротша та легша струна (тобто чим менше l і ρ), і чим більша сила натягу T . Тони, що відповідають більш високим частотам, називаються *обертонами*. Частоти ω_n ($n \geq 2$) називаються частотами *власних обертонів*. Обертони, частота яких кратна основній частоті, називаються *гармоніками*. Коливання струни є суперпозицією різних гармонік (*спектр*).

Отже, розв'язок (1.21) складається з окремих гармонік, амплітуди яких швидко згасають зі збільшенням номера гармоніки і які створюють *тембр* звуку, яким власне і розрізняються музичні інструменти.

Зауваження 4. Частота коливань ω вказує кількість коливань за секунду. Вона має розмірність $(1/c) = \text{Гц}$. Людське вухо сприймає коливання повітря в інтервалі від 16 Гц (межа інфразвуку) до $2 \cdot 10^4$ Гц (межа ультразвуку).

Енергія n -ої гармоніки стоячої хвилі у випадку граничних умов 1-го та 2-го роду визначається за формулою:

$$E_n(t) = \frac{1}{2} \int_0^l \left[\rho \left(\frac{\partial u_n}{\partial t} \right)^2 + T \left(\frac{\partial u_n}{\partial x} \right)^2 \right] dx, \quad a^2 = \frac{T}{\rho}, \quad (1.22)$$

де T – сила натягу, ρ – лінійна густина матеріалу струни.

А у випадку граничних умов 3-го роду за формулою:

$$E_n(t) = \frac{1}{2} \int_0^l \left[\rho \left(\frac{\partial u_n}{\partial t} \right)^2 + T \left(\frac{\partial u_n}{\partial x} \right)^2 \right] dx + \frac{\gamma T}{2} [u_n^2(l, t) + u_n^2(0, t)], \quad (1.22)$$

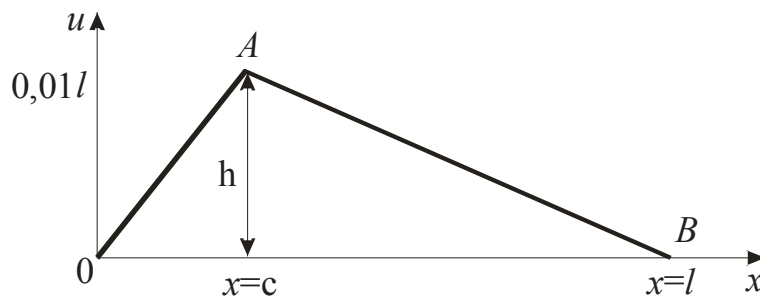
де γ – коефіцієнт жорсткості пружного кріплення кінців струни [2, п.1.3].

Зауваження 5. Метод Фур'є можна використовувати і в тих випадках, коли $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ будь-які інтегровні на відрізку $[a, b]$ функції, наприклад, обмежені й такі, що мають лише скінченне число точок розриву на проміжку (a, b) , тобто які належать класу кусково-неперервних функцій C' .

III. Проілюструємо вищевикладене розв'язанням задачі про *вільні коливання струни*. Коливання називають вільними, якщо відсутній вплив зовнішніх сил.

Приклад 1. Вивчити коливання струни довжиною l , закріпленої на кінцях, якщо в точці $x = c$ вона була відтягнута вгору на відстань h і затиснена. У початковий момент часу струна відпущена і їй надана можливість здійснювати вільні коливання.

Зробимо схематичний рисунок³ і запишемо математичну постановку задачі. Для цього потрібно з'ясувати початкові умови.



Дійсно, перша початкова умова відображає початковий профіль струни, тобто ламану лінію OAB . Тому треба знайти рівняння прямої OA між двома точками $O(0,0)$ і $A(c,h)$:

$$\frac{y - y_O}{y_A - y_O} = \frac{x - x_O}{x_A - x_O} \Rightarrow \frac{y}{h} = \frac{x}{c} \Rightarrow y_{OA} = \frac{h}{c} x$$

і рівняння прямої AB між точками $A(c,h)$ і $B(l,0)$:

$$\frac{y - y_B}{y_A - y_B} = \frac{x - x_B}{x_A - x_B} \Rightarrow y_{AB} = \frac{h}{c - l} (x - l).$$

Оскільки струна відпущена без повідомлення її точкам початкової швидкості, то друга початкова умова є $\psi(x) = u_t(x, 0) = 0$.

³ Зрозуміло, що рисунок перебільшує реальну ситуацію (це зроблено свідомо, для наочності). У класичній МФ вивчаються малі коливання [2], тому відхилення струни від положення рівноваги h має бути значно меншим за довжину струни l , тобто $h \ll l$.

Математична постановка задачі така: знайти розв'язок однорідного хвильового рівняння

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < \infty,$$

що задовольняє граничні

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad 0 < t < \infty$$

та початкові умови

$$u(x, 0) = \varphi(x) = \begin{cases} \frac{h}{c}x, & 0 < x \leq c; \\ \frac{h}{c-l}(x-l), & c < x < l. \end{cases} \quad \psi(x) = u_t(x, 0) = 0.$$

1. Маємо *першу мішану задачу* (1.1)-(1.3) про вільні поперечні коливання однорідної струни із закріпленими кінцями при певних заданих початкових умовах. Аналітичний запис початкового профілю струни, зображеного на рисунку, збігається з рівняннями відрізків OA і AB (величина $0,01l$ показує порядок малості початкового збурення).

Власні значення та власні функції *першої мішаної задачі* визначаються формулами (1.10) і (1.11):

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{l}, \quad X_n(x) = \sin \frac{n\pi}{l}x,$$

а її розв'язок має вигляд (1.15):

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi a}{l}t + B_n \sin \frac{n\pi a}{l}t \right) \cdot \sin \frac{n\pi}{l}x.$$

Коефіцієнти A_n і B_n , відповідно до (1.18), знаходяться за формулами:

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \quad B_n = \frac{2}{n\pi a} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx.$$

Обраховуємо коефіцієнт A_n , інтегруючи частинами:

$$A_n = \frac{2}{l} \left[\int_0^c \varphi(x) \sin \lambda_n x dx + \int_c^l \varphi(x) \sin \lambda_n x dx \right] = \frac{2}{l} \left[\underbrace{\frac{h}{c} \int_0^c x \sin \lambda_n x dx}_{I_1} + \frac{h}{l-c} \underbrace{\int_c^l (l-x) \sin \lambda_n x dx}_{I_2} \right] \Rightarrow$$

$$I_1 = \int_0^c x \sin \frac{n\pi x}{l} dx = -\frac{lc}{n\pi} \cos \frac{n\pi c}{l} + \left(\frac{l}{n\pi} \right)^2 \sin \frac{n\pi c}{l},$$

$$I_2 = \int_c^l (l-x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{l(l-c)}{n\pi} \cos \frac{n\pi c}{l} + \left(\frac{l}{n\pi} \right)^2 \sin \frac{n\pi c}{l},$$

$$\Rightarrow \frac{2}{l} \left[\frac{h}{c} \left(-\frac{lc}{n\pi} \cos \frac{n\pi c}{l} + \left(\frac{l}{n\pi} \right)^2 \sin \frac{n\pi c}{l} \right) + \frac{h}{l-c} \left(\frac{l(l-c)}{n\pi} \cos \frac{n\pi c}{l} + \left(\frac{l}{n\pi} \right)^2 \sin \frac{n\pi c}{l} \right) \right] =$$

$$= \frac{2h}{c(l-c) \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2} \sin \frac{n\pi c}{l}.$$

Цей коефіцієнт визначає амплітуди коливальних мод струни, тобто склад (набір) та інтенсивності обертонів. Виявляється, а музиканти знають це з власного досвіду, тембр струни, тобто, краса звучання струни залежить від точки, в якій струна відхилена від рівноважного стану, а саме від положення точки c .

Коефіцієнти B_n дорівнюють нулю, оскільки $\psi(x) = 0$ за умовою:

$$B_n = \frac{2}{n\pi a} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{2}{n\pi a} \int_0^l 0 \cdot \sin \frac{n\pi x}{l} dx = 0.$$

Підставляючи значення коефіцієнтів A_n і B_n в розв'язок (1.15), отримаємо закон коливання точок струни:

$$u(x, t) = \frac{2hl^2}{\pi^2 c(l-c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi c}{l} \cos \frac{n\pi at}{l} \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

Якщо уявити, що струна відтягнута точно в середині ($c = l/2$) і має профіль рівнобедреного трикутника, тоді $\frac{n\pi c}{l} = \frac{n\pi}{2}$ і при всіх парних значеннях n відхилення точок струни від положення рівноваги рівні нулю (тривіальний розв'язок). Це означає, що розв'язок задачі буде містити лише непарні гармоніки:

$$u(x, t) = \frac{8h}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{l} \cos \frac{(2n-1)\pi at}{l}.$$

2. Проведемо невеличкий музичний аналіз отриманих результатів. У разі $c = l/2$ при $n = 1$ матимемо *основний тон* струни

$$u_1(x, t) = \frac{8h}{\pi^2} \sin \frac{\pi x}{l} \cos \frac{\pi at}{l}, \quad \omega_1 = \frac{\pi a}{l},$$

форма якої має пучність в середині і два вузли на кінцях.

При $n = 2$ матимемо *перший обертон* струни, що коливається

$$u_2(x, t) = \frac{8h}{9\pi^2} \sin \frac{3\pi x}{l} \cos \frac{3\pi at}{l}, \quad \omega_2 = \frac{3\pi a}{l},$$

амплітуда якого в 9 разів менша за амплітуду основного тону. Оскільки енергія коливань пропорційна квадрату амплітуди (див. нижче), звук від цієї моди

буде майже в 81 раз слабшим основного тону, а частота коливань – втричі більшою, тобто, це більш високий звук. Форма струни тепер має три пучності і чотири вузли.

При $n = 3$ матимемо *другий обертон* струни, що коливається

$$u_3(x, t) = \frac{8h}{25\pi^2} \sin \frac{5\pi x}{l} \cos \frac{5\pi at}{l}, \quad \omega_3 = \frac{5\pi a}{l},$$

амплітуда якого вже в 25 разів менша за амплітуду основного тону. Значить, звук від цієї моди буде майже в 625 раз слабшим основного тону, а частота коливань – у п'ять разів більшою, тобто, це ще більш високий звук. Форма струни має п'ять пучностей і шість вузлів.

Таким чином, при відхиленні струни у центрі, відношення інтенсивностей основного тону та обертонів таке $1 : (1/81) : (1/625)$, що свідчить про те, що забарвлення мелодії слабке, працює фактично один обертон, з потрібною частотою та звуком майже на два порядки слабшим основного тону.

Візьмемо тепер $c = l/3$. При $n = 1$ маємо *основний тон* струни

$$u_1(x, t) = \frac{9h}{\pi^2} \sin \frac{\pi x}{l} \cos \frac{\pi at}{l}, \quad \omega_1 = \frac{\pi a}{l},$$

який за своїми характеристиками майже не відрізняється від основного тону попереднього випадку.

При $n = 2$ маємо *перший обертон*

$$u_2(x, t) = \frac{9h}{4\pi^2} \sin \frac{2\pi x}{l} \cos \frac{2\pi at}{l}, \quad \omega_2 = \frac{2\pi a}{l},$$

амплітуда якого менше амплітуди основного тону в 4 рази, а отже інтенсивність першого обертону слабше основного тону в 16 разів. Частота звуку вдвічі більша основної частоти. Форма струни має дві пучності і три вузли.

При $n = 3$ маємо *другий обертон*

$$u_3(x, t) = \frac{9h}{9\pi^2} \sin \frac{3\pi x}{l} \cos \frac{3\pi at}{l}, \quad \omega_3 = \frac{3\pi a}{l}.$$

За інтенсивністю цей обертон слабший за основний тон у 81 раз, а частота звуку втричі більша частоти основного звуку. Форма струни має три пучності і чотири вузли.

Як бачимо, у цьому випадку відношення інтенсивностей основного тону та обертонів більш слабке $1 : (1/16) : (1/81)$, а отже забарвлення мелодії більш насичене, оскільки на основний тон накладаються майже порівняні з ним обертони.

Значить для струнних інструментів має суттєве значення, у якій саме точці закріпленої на кінцях струни ми відтягуємо її. Зрозуміло, що цією обставиною користуються як фахівці при створенні струнних музичних інструментів, так і самі виконавці.

3. На завершення, знайдемо енергію n -ої гармоніки стоячої хвилі, яка визначається за формулою (1.22). Для цього обчислимо спочатку відповідні похідні. Оскільки

$$u_n = \frac{2hl^2}{(\pi n)^2 c(l-c)} \sin \frac{n\pi c}{l} \cos \frac{n\pi at}{l} \sin \frac{n\pi x}{l},$$

то

$$\frac{\partial u_n}{\partial t} = \frac{2hl^2}{(\pi n)^2 c(l-c)} \cdot \left(-\frac{n\pi a}{l}\right) \sin \frac{n\pi c}{l} \sin \frac{n\pi at}{l} \sin \frac{n\pi x}{l},$$

$$\left(\frac{\partial u_n}{\partial t}\right)^2 = \left(\frac{2hl^2}{(\pi n)^2 c(l-c)} \sin \frac{n\pi c}{l}\right)^2 \cdot \left(-\frac{n\pi a}{l}\right)^2 \sin^2 \frac{n\pi at}{l} \sin^2 \frac{n\pi x}{l},$$

$$\frac{\partial u_n}{\partial x} = \frac{2hl^2}{(\pi n)^2 c(l-c)} \cdot \left(\frac{n\pi}{l}\right) \sin \frac{n\pi c}{l} \cos \frac{n\pi at}{l} \cos \frac{n\pi x}{l},$$

$$\left(\frac{\partial u_n}{\partial x}\right)^2 = \left(\frac{2hl^2}{(\pi n)^2 c(l-c)} \sin \frac{n\pi c}{l}\right)^2 \cdot \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \cos^2 \frac{n\pi at}{l} \cos^2 \frac{n\pi x}{l}.$$

Тоді

$$\begin{aligned} E_n(t) &= \frac{1}{2} \int_0^l \left[\rho \left(\frac{\partial u_n}{\partial t} \right)^2 + T \left(\frac{\partial u_n}{\partial x} \right)^2 \right] dx = \left(\text{де } a^2 = \frac{T}{\rho} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^l \left\{ \rho \left[\left(\frac{2hl^2}{(\pi n)^2 c(l-c)} \sin \frac{n\pi c}{l} \right)^2 \cdot \left(-\frac{n\pi a}{l} \right)^2 \sin^2 \frac{n\pi at}{l} \sin^2 \frac{n\pi x}{l} \right] + \right. \\ &\quad \left. + T \left[\left(\frac{2hl^2}{(\pi n)^2 c(l-c)} \sin \frac{n\pi c}{l} \right)^2 \cdot \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 \cos^2 \frac{n\pi at}{l} \cos^2 \frac{n\pi x}{l} \right] \right\} dx = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{2hl^2}{(\pi n)^2 c(l-c)} \sin \frac{n\pi c}{l} \right)^2 \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 \int_0^l \left\{ \rho \left[a^2 \sin^2 \frac{n\pi at}{l} \sin^2 \frac{n\pi x}{l} \right] + T \left[\cos^2 \frac{n\pi at}{l} \cos^2 \frac{n\pi x}{l} \right] \right\} dx = \\ &= \frac{\rho}{2} \left(\frac{2hl^2}{(\pi n)^2 c(l-c)} \sin \frac{n\pi c}{l} \right)^2 \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 \cdot \int_0^l \left\{ \left[a^2 \sin^2 \frac{n\pi at}{l} \sin^2 \frac{n\pi x}{l} \right] + \frac{T}{\rho} \left[\cos^2 \frac{n\pi at}{l} \cos^2 \frac{n\pi x}{l} \right] \right\} dx = \\ &= \frac{\rho}{2} \left(\frac{n\pi a}{l} \right)^2 \left(\frac{2hl^2}{(\pi n)^2 c(l-c)} \sin \frac{n\pi c}{l} \right)^2 \left\{ \sin^2 \frac{n\pi at}{l} \int_0^l \sin^2 \frac{n\pi x}{l} dx + \cos^2 \frac{n\pi at}{l} \int_0^l \cos^2 \frac{n\pi x}{l} dx \right\} = \\ &= \frac{\rho \omega_n^2}{2} \left(\frac{2hl^2}{(\pi n)^2 c(l-c)} \sin \frac{n\pi c}{l} \right)^2 \cdot \frac{1}{2} \left\{ \sin^2 \frac{n\pi at}{l} \cdot \int_0^l \left(1 - \cos \frac{2n\pi x}{l} \right) dx + \cos^2 \frac{n\pi at}{l} \int_0^l \left(1 + \cos \frac{2n\pi x}{l} \right) dx \right\} = \end{aligned}$$

$$= \frac{\rho \omega_n^2}{2} \left(\frac{2hl^2}{(\pi n)^2 c(l-c)} \sin \frac{n\pi c}{l} \right)^2 \cdot \frac{l}{2} \left\{ \sin^2 \frac{n\pi a t}{l} + \cos^2 \frac{n\pi a t}{l} \right\} =$$

$$= \frac{\rho l \omega_n^2}{4} \cdot \left(\frac{2hl^2}{(\pi n)^2 c(l-c)} \sin \frac{n\pi c}{l} \right)^2 = \frac{m}{4} A_n^2 \omega_n^2,$$

де введено позначення $A_n = \frac{2hl^2}{(\pi n)^2 c(l-c)} \sin \frac{n\pi c}{l}$ – амплітуда, $\omega_n \equiv a\lambda_n = \frac{n\pi a}{l}$ – власна частота, $m = l\rho$ – маса.

Отже, енергія n -ої гармоніки стоячої хвилі $E_n = \frac{m}{4} A_n^2 \omega_n^2$, $n \in \mathbb{N}$. Доречно перевірити розмірність (**самостійно!**).

Зауваження 6. Енергія коливань пропорційна квадрату амплітуди, що є типовим для класичного гармонічного осцилятора. При цьому вона спадає обернено пропорційно n^2 .

1.2 Розв'язування першої мішаної задачі для рівняння теплопровідності

Тепер розглянемо *першу мішану задачу* для рівняння теплопровідності: знайти функцію $u(x, t)$, визначену і неперервну в замкненій області ($0 \leq x \leq l$, $0 \leq t \leq T$), яка задовольняє рівняння теплопровідності у відкритій області

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T, \quad (1.23)$$

однорідні граничні умови 1-го роду

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (1.24)$$

та довільну початкову умову

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l. \quad (1.25)$$

Зауваження 1. Фізична інтерпретація крайової задачі (1.23)-(1.25) дана в [2, п. 2.2].

Побудуємо формальний розв'язок цієї задачі. Як і при розв'язанні *першої мішаної задачі для хвильового рівняння*, розв'язання задачі (1.23)-(1.25) шукатимемо методом Фур'є у вигляді (1.4), тобто, $u(x, t) = X(x) \cdot T(t)$. Підстановка цього виразу у співвідношення (1.23)-(1.25) приводить до розглянутої вище задачі Штурма-Ліувілля (1.7)-(1.8) для функції $X(x)$, власні значення та власні функції якої визначаються (1.10) та (1.11), а саме

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{l}, \quad X_n(x) = \sin \lambda_n x = \sin \frac{n\pi}{l} x, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Функція $T(t) = T_n(t)$, на відміну від (1.12), тепер задовольняє звичайне ДР першого порядку з відокремлюваними змінними

$$T'_n(t) + a^2 \lambda_n^2 T_n(t) = 0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (1.26)$$

яке легко інтегрується

$$T_n(t) = A_n e^{-a^2 \lambda_n^2 t} = A_n \exp \left(- \left(\frac{n\pi a}{l} \right)^2 t \right). \quad (1.27)$$

Як наслідок, знаходимо розв'язок шуканої задачі (1.23)-(1.25)

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-a^2 \lambda_n^2 t} \cdot \sin \lambda_n x, \quad x \in [0, l], \quad t > 0. \quad (1.28)$$

З огляду на початкову умову (1.25) маємо

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \lambda_n x, \quad x \in [0, l].$$

Припускаючи, що функція $\varphi(x)$ розкладається в рівномірно й абсолютно збіжний ряд Фур'є, знаходимо коефіцієнти цього розвинення A_n :

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \lambda_n x dx, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1.29)$$

Отже, двічі неперервно диференційований розв'язок вихідної задачі дається рядом (1.28), де коефіцієнт A_n знаходиться за формулою (1.29).

Висновок. Розв'язування *першої мішаної задачі* для одновимірних рівнянь гіперболічного (*хвильового*) та параболічного (*теплопровідності*) типів методом Фур'є на першому етапі містять одну й ту саму і при цьому найбільш трудомістку частину – *задачу Штурма-Ліувілля*, і незначно відрізняються на другому етапі.

Приклад 2. Знайти закон розподілу температури всередині тонкого однорідного стержня довжиною $l = 4$ дм, якщо на його кінцях підтримується нульова температура, бічна поверхня теплоізована, а температура в початковий момент

$$u(x, 0) = \begin{cases} x, & 0 < x \leq l/2, \\ l - x, & l/2 < x \leq l. \end{cases} \quad (1.30)$$

Задача зводиться до інтегрування рівняння (1.23) за умов (1.24)-(1.25), де $l = 4$, а функція $\varphi(x)$ визначається виразом (1.30). Розв'язання задачі шукатимемо у вигляді ряду (1.28) з коефіцієнтами (1.29):

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{\pi k x}{l} dx = \\ &= \frac{2}{l} \int_0^{l/2} x \sin \frac{\pi k x}{l} dx + \frac{2}{l} \int_{l/2}^l (l - x) \sin \frac{\pi k x}{l} dx = \dots = \frac{4l}{(k\pi)^2} \sin \frac{k\pi}{2}. \end{aligned}$$

Звідки випливає:

$$A_{2n} = 0, \quad A_{2n+1} = \frac{(-1)^n 4l}{\pi^2 (2n+1)^2}.$$

Остаточний результат з урахуванням заданої довжини стержня

$$u(x, t) = \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \cdot \exp\left[-\left(\frac{(2n+1)\pi a}{4}\right)^2 t\right] \cdot \sin \frac{(2n+1)\pi x}{4}.$$

Отриманий результат не складно перевірити. Дійсно, граничні умови однозначно задовольняються. Перевіримо початкову умову. У відповідності з початковою умовою (1.30), температура в початковий момент всередині стержня ($x = l/2$) довжиною $l = 4$ дорівнює $u(2, 0) = 2$.

З іншого боку, з отриманого розв'язку витікає, що

$$u(2, 0) = \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \sin \frac{(2n+1)\pi}{2} = \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \left(\sin \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3^2} \sin \frac{3\pi}{2} + \frac{1}{5^2} \sin \frac{5\pi}{2} + \dots \right).$$

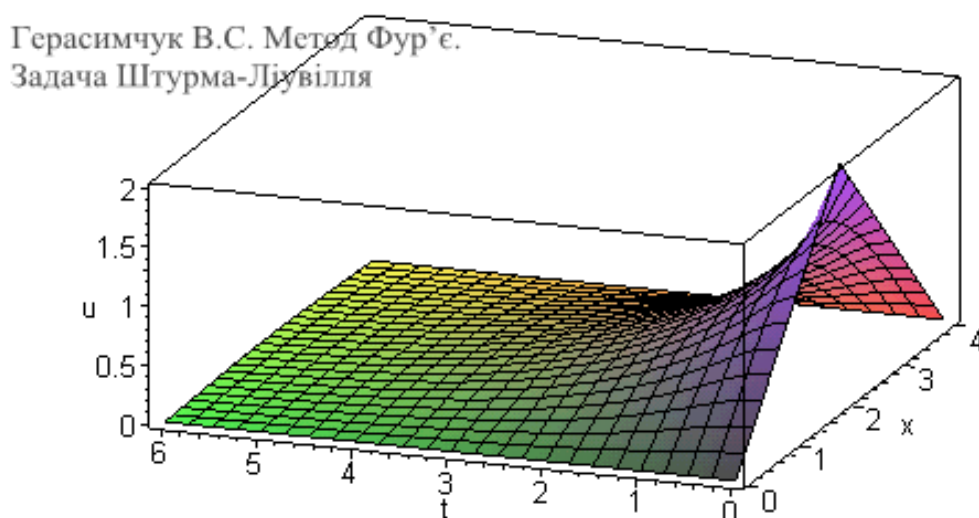
В теорії рядів [10] відома сума числового ряду

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8},$$

з урахуванням якої отримуємо той самий результат, що і з початкової умови

$$u(2, 0) = \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \cdot \frac{\pi^2}{8} = 2.$$

Отже, знайдений розв'язок дійсно задовольняє умови заданої крайової задачі. На завершення наведемо графік функції $u(x, t)$, що описує заданий розподіл температур



1.3 Обґрунтування розв'язання мішаних крайових задач

Нехай маємо однорідну мішану задачу для рівняння гіперболічного типу

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 \quad (x \in (0, l), \quad t > 0), \quad (1.31)$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0 \quad (t \geq 0), \quad (1.32)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x) \quad (x \in [0, l]). \quad (1.33)$$

Частинні розв'язки шукаємо у вигляді добутку $u(x, t) = X(x) \cdot T(t)$. Знак перед константою розділення, як показано у п. 1.1, має бути від'ємний.

Зауваження 1. Останнє може бути обґрунтоване фізичними міркуваннями: функція $T(t)$ буде періодичною лише при $\mu > 0$, а без періодичної залежності від часу процес не може бути коливальним.

Після відокремлення змінних приходимо до задачі Штурма-Ліувілля для функції $X(x)$

$$X''(x) + \mu X(x) = 0, \quad X(0) = 0, \quad X(l) = 0 \quad (1.34)$$

та рівняння для функції $T(t)$

$$T''(t) + a^2 \lambda^2 T(t) = 0. \quad (1.35)$$

Як відомо (див. п.1.1) задача на власні значення (1.34) має такий розв'язок

$$\mu_n \equiv \lambda_n^2 = \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2, \quad X_n(x) = \sin \lambda_n x = \sin \frac{n\pi}{l} x, \quad (n = \overline{1, \infty}) \quad (1.36)$$

Вважаючи $\lambda = \lambda_n$ і враховуючи, що $\lambda_n > 0$ запишемо загальний розв'язок рівняння (1.35)

$$T_n(t) = A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t, \quad \omega_n = a \lambda_n. \quad (1.37)$$

Розв'язок виду $u_n(x, t) = X_n(x) \cdot T_n(t)$ задовольняє рівняння (1.31) і граничні умови (1.32). Те саме можна сказати і про скінченні суми таких комбінацій

$$u_N(x, t) = \sum_{n=1}^N T_n(t) \cdot X_n(x) = \sum_{n=1}^N (A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t) \cdot \sin \lambda_n x. \quad (1.38)$$

Однак функція $u_N(x, t)$ подана скінченною сумою (1.38), за жодного вибору довільних сталих A_n і B_n не задовольняє початкові умови (1.33). Щоб задовольнити останнім, потрібно перейти від скінченних сум до нескінченних і шукати розв'язання задачі (1.31)-(1.33) у вигляді

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t) \sin \lambda_n x, \quad (1.39)$$

де довільні сталі A_n і B_n знаходяться з рівнянь

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \lambda_n x = \varphi(x), \quad \sum_{n=1}^{\infty} a \lambda_n B_n \sin \lambda_n x = \psi(x), \quad (1.40)$$

а операція диференціювання ряду (1.39) проведена формально.

Функція $u(x, t)$, як і функція $u_N(x, t)$, буде розв'язком рівняння (1.31), якщо ряд (1.39) збіжний і може бути двічі почленно диференційований по x і t . Крім того $u(x, t)$, як і $u_N(x, t)$, задовольняє граничні умови (1.32) за будь-яких значень коефіцієнтів A_n і B_n .

Співвідношення (1.40) свідчать, що довільні сталі A_n і B_n можна прийняти рівними коефіцієнтам розвинування функцій $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ у ряди Фур'є за власними функціями $X_n(x)$, тобто

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) X_n(x) dx, \quad B_n = \frac{2}{\pi n a} \int_0^l \psi(x) X_n(x) dx. \quad (1.41)$$

Отже, розв'язок (1.39), (1.41) є формальним, оскільки перехід до нескінченного ряду потребує обґрунтування таких положень: (а) збіжності ряду (1.39); (б) можливості його почленного дворазового диференціювання по x і t . Крім того, слід переконатися, що сума ряду (1.39) має гладкість, достатню для того, щоб її можна було вважати *класичним розв'язком* крайової задачі (1.31)-(1.33).

Обґрунтування розв'язку. Насамперед, формалізуємо поняття *класичного розв'язку* і з'ясуємо, яким умовам повинні задовольняти функції $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ щоб останній існував. Позначимо через Π прямокутник $[0, l] \times [0, T]$ на площині x, t . Класичний розв'язок задачі (1.31)-(1.33) (див. п. 1.1) має належати класу $C^2(\Pi) \cap C^1(\bar{\Pi})$. Якщо $u(x, t)$ – класичний розв'язок, то

$$\varphi(0) = \lim_{x \rightarrow +0} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow +0} u(x, 0) = \lim_{x \rightarrow +0} u(0, t) = 0,$$

$$\psi(0) = \lim_{x \rightarrow +0} \psi(x) = \lim_{x \rightarrow +0} u_t(x, 0) = \lim_{x \rightarrow +0} u_t(0, t) = 0.$$

Аналогічні умови мають бути справедливі і правому кінці ($x = l$). Отже, виконуються т.зв. *умови узгодження*

$$\varphi(0) = \varphi(l) = 0, \quad \psi(0) = \psi(l) = 0. \quad (1.42)$$

(Узгодження між початковими та граничними умовами необхідне для існування класичного розв'язку).

Крім того, якщо класичний розв'язок належить $C^2(\bar{\Pi})$ за будь-якого $T > 0$, то переходячи в рівняннях

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \quad u_{tt}(0, t) = 0,$$

до границі при $t \rightarrow 0$, маємо

$$u_{tt}(x, 0) = a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} 0, \quad u(x, 0) = a^2 \varphi''(x), \quad u_{tt}(0, 0) = 0.$$

У першій рівності спрямуємо $x \rightarrow 0$ і, скориставшись другою, отримаємо $\varphi''(0) = 0$. Аналогічний результат матиме місце і на правому кінці ($x = l$).

Поєднуючи ці результати, отримаємо додаткові умови

$$\varphi''(0) = \varphi''(l) = 0. \quad (1.43)$$

Теорема.⁴ Якщо функції $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ задовольняють умови (1.42), (1.43), і крім того

$$\varphi \in C^2[0, l], \quad \psi \in C^1[0, l], \quad \varphi''' \in L_2(0, l), \quad \psi'' \in L_2(0, l), \quad (1.44)$$

то сума ряду (1.39) є класичним розв'язком задачі (1.31)-(1.33), що належить $C^2(\bar{\Pi})$ за будь-якого $T > 0$.

Доведення. Інтегруючи (1.41) частинами матимемо

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \lambda_n x \, dx = \frac{2}{n\pi} \int_0^l \varphi'(x) \cos \lambda_n x \, dx = -\frac{2l}{n^2 \pi^2} \int_0^l \varphi''(x) \sin \lambda_n x \, dx = \\ &= \frac{C_1}{n^3} \frac{2}{l} \int_0^l \varphi'''(x) \cos \lambda_n x \, dx, \quad \text{де } C_1 = -\left(\frac{l}{\pi}\right)^3. \end{aligned}$$

Аналогічно:

$$B_n = \frac{2}{an\pi} \int_0^l \psi(x) \sin \lambda_n x \, dx = \frac{C_2}{n^3} \frac{2}{l} \int_0^l \psi''(x) \sin \lambda_n x \, dx, \quad \text{де } C_2 = \frac{l^3}{a\pi^3}.$$

Таким чином,

$$A_n = \frac{C_1}{n^3} \alpha_n, \quad B_n = \frac{C_2}{n^3} \beta_n, \quad (1.45)$$

де α_n і β_n – коефіцієнти розвинення функцій $\varphi''(x)$ і $\psi''(x)$ в ряд Фур'є за повною системою ортогональних функцій $\left\{ \cos \frac{n\pi x}{l}, \sin \frac{n\pi x}{l} \right\}$.

Оскільки $\varphi''(x)$ і $\psi''(x)$ належать $L_2(0, l)$, то послідовності їх коефіцієнтів Фур'є $\alpha = \{\alpha_n\}$ і $\beta = \{\beta_n\}$ належать простору l_2 , тобто, ряди $\sum \alpha_n^2$ і $\sum \beta_n^2$ збігаються. Функціональний ряд (1.39) мажорується збіжним числовим

⁴ Гончаренко В.М. Основы теории уравнений в частных производных. – К.: Вища шк., 1985. – 311с.

рядом $\frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} (|C_1| \alpha_n + C_2 \beta_n) \frac{1}{n^3}$. Тому ряд (1.39) збігається рівномірно в $\bar{\Pi}$ при будь-якому $T > 0$. Те ж саме можна сказати про ряди, отримані одноразовим почленним диференціюванням ряду (1.39).

Після дворазового почленного диференціювання отримуємо ряд, мажоруючим для якого є ряд типу $C_3 \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n + \beta_n) \frac{1}{n}$. Останній також збігається, оскільки $\{1/n\} \in l_2$ і ряд являє собою скалярний добуток $(\alpha_n + \beta_n)$ і $\{1/n\}$. Отже, ряди, отримані формальним одно- і дворазовим диференціюванням (1.39), збігаються рівномірно.

Зауважимо, що викладена вище методика не є єдино можливою. Як приклад іншого підходу розглянемо одновимірну задачу **параболічного типу**

$$u_t = u_{xx}, \quad (x, t) \in \Pi, \quad \Pi = \{x, t \mid 0 < x < \pi, \quad 0 < t < \infty\} \quad (1.46)$$

при заданих граничних умовах

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \quad (0 \leq t < \infty)$$

і початковій умові

$$u(x, 0) = \varphi(x) \quad (0 \leq x \leq \pi),$$

де $\varphi(x)$ – неперервна функція обмеженої варіації, що приймає на кінцях відрізка значення $\varphi(0) = \varphi(\pi) = 0$.

Використовуючи результати п. 1.2, можемо записати формальний розв’язок даної крайової задачі у вигляді

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp(-n^2 t) \sin nx, \quad (1.47)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin nx. \quad (1.48)$$

Скористаємося відомою теоремою Жордана–Лебега⁵: Нехай функція $f(x)$ має період 2π і підсумовується на відрізку $[0, 2\pi]$. Крім того, $f(x)$ має обмежену варіацію в околі точки x_0 . Тоді,

$$S_n(x_0) \rightarrow \frac{1}{2} [f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)] \quad (n \rightarrow \infty).$$

При цьому, якщо функція $f(x)$ неперервна на $[a, b]$ і має обмежену варіацію, то послідовність $S_n(x)$ рівномірно збігається до $f(x)$ на будь-якому відрізку $[a', b']$, який лежить всередині $[a, b]$.

⁵ Мизохата С. Теория уравнений в частных производных. М: Мир, 1977. – 504 с.

Продовжимо функцію $\varphi(x)$ на відрізок $[-\pi, \pi]$, вважаючи $\varphi(x) = -\varphi(-x)$ при $x \in [-\pi, 0]$, і запишемо її у вигляді рівномірно збіжного ряду Фур'є

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin nx, \quad C_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi(t) \sin ntdt. \quad (1.49)$$

Порівнюючи (1.48) і (1.49), матимемо $A_n = C_n$.

Відповідно до теореми Рімана – Лебега: якщо $\varphi(t)$ – функція, що підсумовувана на $[a, b]$, то $\int_a^b \varphi(t) \sin ntdt \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Отже,

$$A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi(t) \sin ntdt \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty). \quad (1.50)$$

Покажемо тепер, що функція $u(x, t)$ (1.47) при $t > 0$ є фактичним розв'язком. Це доводиться в такий спосіб. Оскільки

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp(-n^2 t) \sin nx \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |A_n| \exp(-n^2 t),$$

а $\sum \exp(-n^2 t) < \infty$ при $t > 0$ і, згідно (1.50), $|A_n| < M$ ($n = 1, 2, \dots$), то цей ряд збігається при $t > 0$.

Крім того, функція $u(x, t)$ має похідні будь-якого порядку по x і t . Зокрема, виконаємо формально процедуру почленного диференціювання ряду (1.47) по x

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sum_{n=1}^{\infty} n A_n \exp(-n^2 t) \cos nx.$$

Ряд у правій частині мажорується при $t > 0$ рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} n |A_n| \exp(-n^2 t) \leq M \sum_{n=1}^{\infty} n \exp(-n^2 t) < \infty$$

і, отже, таке диференціювання є правомірним. Аналогічний результат маємо для другої похідної по x .

Диференціювання по t обґрунтовується подібним чином: ряд, отриманий почленним диференціюванням ряду (1.47) по t , мажорується при $0 < \delta \leq t < \infty$ рядом

$$\sum_n n^2 |A_n \sin nx| \exp(-n^2 t) \leq M \sum_n n^2 \exp(-\delta n^2) < \infty.$$

Оскільки кожен член оцінюється рівномірно по t , то почленне диференціювання ряду по t справедливе при $t > 0$. Отже,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = - \sum_{n=1}^{\infty} n^2 A_n \sin nx \exp(-n^2 t) .$$

Таким чином, функція $u(x, t)$ є розв'язком рівняння (1.46) при $t > 0$ і має неперервні похідні будь-якого порядку.

Залишилося показати, що при $t \rightarrow +0$ функція $u(x, t) \rightarrow \varphi(x)$ рівномірно по x . Для цього скористаємося тим, що ряд Фур'є $\sum A_n \sin nx$ збігається рівномірно, а послідовність додатних функцій $\{\exp(-n^2 t)\}$ спадає. За лемою про перетворення Абеля, для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке N , що

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |A_n \sin nx| \exp(-n^2 t) < \varepsilon \quad (t \geq 0).$$

Тепер оцінимо

$$\begin{aligned} & |u(x, t) - \varphi(x)| \leq \\ & \leq \left| \sum_{n=1}^N A_n \sin nx [\exp(-n^2 t) - 1] \right| + \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} A_n \sin nx \exp(-n^2 t) \right| + \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} A_n \sin nx \right|. \end{aligned}$$

Тут перший доданок справа прямує до нуля при $t \rightarrow +0$, а два останні доданки менші 2ε .

Зауваження 2. Єдиність розв'язку доводиться, як завжди, від протилежного. Якщо існує два розв'язки $u_i(x, t)$ ($i = 1, 2$), то їх різниця $u(x, t) = u_1 - u_2$ є розв'язком рівняння, що задовольняє нульовим граничним і нульовій початковій умовам. Покладемо

$$E(t) = \int_0^{\pi} |u(x, t)|^2 dx \text{ і продиференціюємо цю функцію. Використовуючи ту обставину, що}$$

$u(x, t)$ задовольняє рівняння та граничні умови, отримаємо

$$E'(t) = 2 \int_0^{\pi} u \cdot u_t dx = 2 \int_0^{\pi} u \cdot u_{xx} dx = -2 \int_0^{\pi} u_x^2 dx \leq 0, \quad t > 0,$$

тобто $E(t)$ – не зростаюча функція. Крім того $E(t) \geq 0$ і $\lim_{t \rightarrow 0} E(t) = 0$. Значить $E(t) \equiv 0$.

Отже, $u(x, t) \equiv 0$ і $u_1(x, t) \equiv u_2(x, t)$.

1.4 Приклад розв'язування крайової задачі

Приклад 3. На завершення теми обґрунтування розв'язків ще раз звернемося до задачі (1.31)-(1.33), задавши певний вид функцій $\varphi(x)$ і $\psi(x)$:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \quad (1.51)$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad t > 0, \quad (1.52)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x) \equiv \frac{1}{M} x(l-x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x) \equiv 0, \quad 0 < x < l. \quad (1.53)$$

Тут множник M^{-1} введений у початкову функцію, щоб мати можливість узгодити математичне розв'язання задачі з математичною моделлю реального фізичного процесу.

Розв'язання цієї задачі за довільних початкових умов отримано вище. Скориставшись ним, обчислимо за допомогою формул (1.41) невідомі коефіцієнти

$$A_k = \frac{2}{Ml} \int_0^l x(l-x) \sin \lambda_k dx = \frac{2}{Ml} \left[-\frac{x(l-x)}{k\pi} \cos \frac{k\pi x}{l} \Big|_0^l + \frac{l}{k\pi} \int_0^l (l-2x) \cos \frac{k\pi x}{l} dx \right] =$$

$$= \frac{4l^2}{k^3 \pi^3 M} (1 - (-1)^k) = \begin{cases} \frac{8l^2}{k^3 \pi^3 M}, & k = 2n+1, \\ 0, & k = 2n. \end{cases} \quad B_k = 0.$$

Отже, в даному випадку, відповідно до (1.39), отримуємо такий вираз, що описує коливальний процес

$$u(x, t) = \frac{8l^2}{\pi^3 M} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} \cos \frac{(2n+1)\pi at}{l} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{l} =$$

$$= \frac{8}{lM} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^3} \cos \omega_n t \cdot \sin \lambda_n x, \quad \lambda_n = \frac{(2n+1)\pi}{l}, \quad \omega_n = a\lambda_n. \quad (1.54)$$

Ряд збігається і може бути двічі почленно диференційований по t і x

$$u_{tt} = -\frac{4a^2}{lM} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} \cos \omega_n t \cdot \sin \lambda_n x, \quad u_{xx} = -\frac{4}{lM} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} \cos \omega_n t \cdot \sin \lambda_n x,$$

тобто, функція $u(x, t)$ задовольняє рівняння (1.31). Вона також задовольняє крайові умови, і отже, є розв'язком задачі.

Оскільки рівняння (1.31) описує малі коливання (у тому сенсі, що u_x^2 повинно мати величину, якою можна знехтувати в порівнянні з одиницею), то і $\varphi(x) = \frac{1}{M} x(l-x)$ повинно мати похідну $\varphi'(x)$, квадрат якої дуже малий.

Тоді й u_x^2 буде малим. Дійсно, оскільки

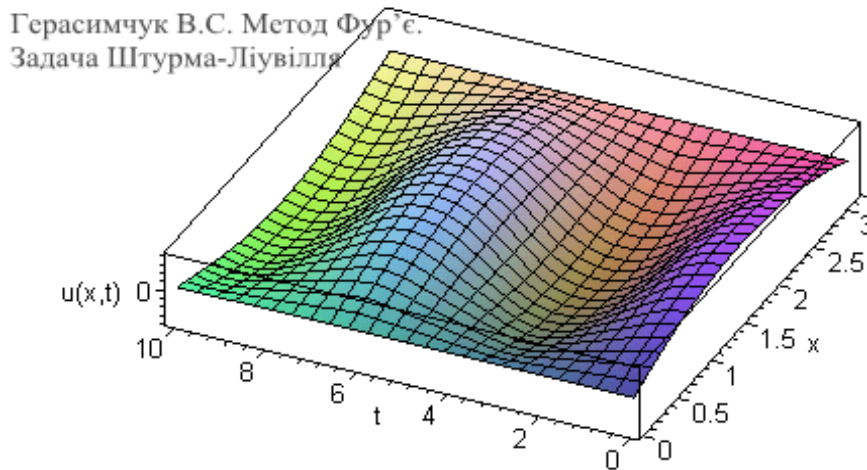
$$u_x = \frac{8}{lM} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} \cos \omega_n t \cdot \cos \lambda_n x,$$

то $|u_x| \leq \frac{8l}{\pi^2 M} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{l}{M}$, оскільки сума числового ряду $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$,

тобто $u_x^2 < (l/M)^2$ – буде як завгодно малим при досить великому M .

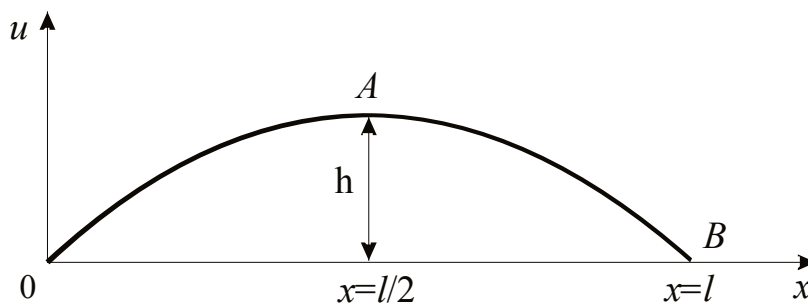
Висновок. Розв’язок (1.54) наближено представлятиме (в обмеженому часовому інтервалі) реальний фізичний процес коливань тільки при досить великих значеннях M .

Наведемо графічний розв’язок цієї задачі, виконаний за допомогою системи комп’ютерної алгебри Maple



Розглянутий приклад може слугувати математичною моделлю, наприклад, такого фізичного процесу:

Приклад 4. Струна довжиною l , закріплена на кінцях, в початковий момент часу мала форму параболи, симетричною відносно середини струни. Знайти закон коливання точок струни, вважаючи, що вона відпущена без надання її точкам початкової швидкості.



Для запису математичної постановки задачі потрібно з’ясувати аналітичний вираз початкового профілю струни – рівняння параболи

$$u(x,0) = \varphi(x) = ax^2 + bx + c.$$

Цьому рівнянню мають задовольняти координати точок, які належать цій кривій (див. виноску до [Прикладу 1](#)):

точка $O(0;0)$: $\varphi(0) = a \cdot 0 + b \cdot 0 + c = 0,$

точка $A(l/2;h)$: $\varphi(l/2) = a \cdot (l/2)^2 + b \cdot (l/2) + c = h,$

точка $B(l;0)$: $\varphi(l) = a \cdot l^2 + b \cdot l + c = 0.$

Звідси маємо систему алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} a \cdot 0 + b \cdot 0 + c = 0, \\ a \cdot (l/2)^2 + b \cdot (l/2) + c = h, \\ a \cdot l^2 + b \cdot l + c = 0, \end{cases}$$

розв'язуючи яку, знаходимо параметри параболи

$$a = -\frac{4h}{l^2}, \quad b = \frac{4h}{l}, \quad c = 0$$

і її рівняння (початковий профіль струни), яке корисно порівняти з (1.53):

$$u(x, 0) = \varphi(x) = -\frac{4h}{l^2}x^2 + \frac{4h}{l}x = \frac{4h}{l^2}x(l-x).$$

Отже, дістали *першу мішану задачу* (1.1)-(1.3) про вільні поперечні коливання струни:

знайти розв'язок однорідного хвильового рівняння

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < \infty,$$

що задовольняє граничні

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad 0 < t < \infty$$

та початкові умови

$$u(x, 0) = \varphi(x) = -\frac{4h}{l^2}x^2 + \frac{4h}{l}x = \frac{4h}{l^2}x(l-x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x) = 0.$$

Власні значення та власні функції *першої мішаної задачі* визначаються формулами (1.10) і (1.11):

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{l}, \quad X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{l},$$

а її розв'язок має вигляд (1.15):

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi a}{l} t + B_n \sin \frac{n\pi a}{l} t \right) \cdot \sin \frac{n\pi}{l} x.$$

Коефіцієнти A_n і B_n , відповідно до (1.18), знаходяться за формулами:

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \quad B_n = \frac{2}{n\pi a} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx.$$

Обраховуємо коефіцієнти:

$$A_k = \frac{8h}{l^3} \int_0^l x(l-x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx = \dots = \frac{16h}{(\pi k)^3} [1 - (-1)^k].$$

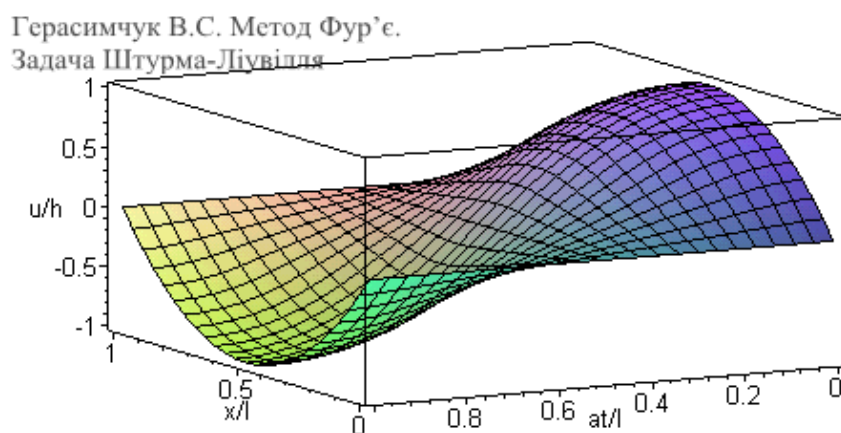
Звідки витікає, що якщо k -парне ($k = 2n$), то $A_{2n} = 0$. Якщо ж k -непарне ($k = 2n + 1$), то $A_{2n+1} = \frac{32h}{(2n+1)^3 \pi^3}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). У чинність другої початкової умови всі коефіцієнти $B_n = 0$.

Остаточно маємо,

$$u(x, t) = \frac{32h}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} \cos \frac{(2n+1)\pi at}{l} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{l}.$$

Очевидно, отриманий результат узгоджується з наведеним вище [Висновком](#), щодо величини множника M . У даному випадку $M^{-1} \sim h \ll 1$.

Динаміка цього коливального процесу наочно ілюструється графіком поверхні $u(x, t)$. Корисно співставити цей графік з попереднім рисунком.



1.5 Однорідна мішана задача або повздовжні коливання стержня

Сформулюємо однорідну *мішану задачу*, яка незначно відрізняється від *першої мішаної задачі* для хвильового рівняння граничними умовами:

знайти розв'язок однорідного хвильового рівняння

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < \infty, \quad (1.55)$$

що задовольняє граничні умови 1-го та 2-го роду

$$u(0, t) = 0, \quad u_x(l, t) = 0, \quad 0 < t < \infty \quad (1.56)$$

та довільні початкові умови

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x) \quad 0 \leq x \leq l. \quad (1.57)$$

Знову шукатимемо розв'язок методом Фур'є:

$$u(x, t) = X(x) \cdot T(t). \quad (1.58)$$

Підставимо припущений розв'язок (1.58) в (1.55) і (1.56)

$$X(x) T''(t) = a^2 X''(x) T(t), \quad X(0) \cdot T(t) = 0, \quad X'(l) \cdot T(t) = 0,$$

де штрихи позначають диференціювання по відповідній змінній. Розділивши останні рівності на $X(x)$ і $T(t)$, отримаємо

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2} \frac{T''(t)}{T(t)} = -\lambda^2, \quad X(0) = 0, \quad X'(l) = 0.$$

Тут λ – деяка константа, адже перший дріб залежить від x , а другий – від t (знак мінус вибраний для зручності).

Таким чином, для того, щоб розв’язок у вигляді (1.58) задовольняв рівняння (1.55) і умови (1.56), необхідно й достатньо, щоб функція $T(t)$ задовольняла звичайне диференціальне рівняння

$$T''(t) + a^2 \lambda^2 T(t) = 0, \quad (1.59)$$

а функція $X(x)$ була нетривіальним розв’язком крайової задачі з невідомим параметром λ

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \quad (1.60)$$

$$X(0) = 0, \quad X'(l) = 0. \quad (1.61)$$

З крайовою задачею такого типу, **задачею Штурма-Ліувілля**, ми зустрічались при розв’язанні *першої мішаної задачі* про вільні коливання струни із закріпленими кінцями (п.1.1). Однак, задача (1.60)-(1.61) відрізняється від попередньої другою крайовою умовою (наявністю похідної в другій умові). Тому маємо формулювати нову задачу Штурма-Ліувілля: знайти такі значення параметра λ (*власні значення*), при яких крайова задача (1.60)-(1.61) має нетривіальний розв’язок (*власні функції*).

Інтегруємо ЛОДР 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами (1.60) [9]. Поклавши $X(x) = \exp(\alpha x)$, матимемо характеристичне рівняння

$$\alpha^2 + \lambda^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_{1,2} = \pm \sqrt{-\lambda^2}.$$

Оскільки $\lambda > 0$ (усі інші значення λ не задовольняють умови задачі Штурма-Ліувілля), то корені рівняння суто уявні $\alpha_{1,2} = \pm i\lambda$. Загальний розв’язок рівняння (1.60) записується через тригонометричні функції

$$X(x) = C \cos \lambda x + D \sin \lambda x. \quad (1.62)$$

Підставляючи цю рівність в першу крайову умову (1.61), отримаємо $C = 0$. Далі обчислимо похідну від розв’язку (1.62)

$$X'(x) = -C\lambda \sin \lambda x + D\lambda \cos \lambda x,$$

і візьмемо до уваги другу крайову умову (1.61):

$$X'(l) = -C\lambda \sin \lambda l + D\lambda \cos \lambda l = 0.$$

Оскільки $C = 0$, то звідси матимемо $D\lambda \cos \lambda l = 0$. Щоб уникнути тривіального розв’язку $X(x) \equiv 0$, слід вважати $D \neq 0$. Тоді, розв’язуючи тригонометрич-

не рівняння

$$\cos \lambda l = 0,$$

знайдемо *власні значення* даної задачі

$$\lambda_n = \frac{(2n+1)\pi}{2l}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (1.63)$$

яким відповідатимуть, згідно з (1.63), *власні функції*

$$X_n(x) = \sin \lambda_n x = \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (1.64)$$

які, як відомо, визначаються з точністю до сталого множника.

Корисно порівняти ці *власні значення та власні функції* з відповідними значеннями та функціями *першої мішаної задачі* для вільних коливань струни (п.1.1) і зробити відповідні висновки.

За відомих власних значень λ_n , визначеним стає рівняння (1.59) для функції $T(t)$:

$$T_n''(t) + a^2 \lambda_n^2 T_n(t) = 0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (1.65)$$

розв'язок якого має вигляд

$$T_n(t) = A_n \cos a \lambda_n t + B_n \sin a \lambda_n t. \quad n \in \mathbb{N} \quad (1.66)$$

Отже, функція

$$u_n(x, t) = X_n(x) T_n(t) = (A_n \cos a \lambda_n t + B_n \sin a \lambda_n t) \cdot \sin \lambda_n x, \quad x \in [0, l], \quad t > 0 \quad (1.67)$$

задовольняє рівняння (1.55) і граничні умови (1.56) при будь-яких довільних значеннях констант A_n і B_n .

Далі зазначимо, що в силу *лінійності й однорідності* рівняння (1.55) і умов (1.56) суперпозиція частинних розв'язків (1.67) також є розв'язком поставленої задачі. Тому, запишемо розв'язок задачі (1.55)-(1.57) у вигляді нескінченного ряду, складеного з функцій $u_n(x, t)$:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} (A_n \cos a \lambda_n t + B_n \sin a \lambda_n t) \cdot \sin \lambda_n x = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{(2n+1)\pi a}{2l} t + B_n \sin \frac{(2n+1)\pi a}{2l} t \right) \cdot \sin \frac{(2n+1)\pi}{2l} x. \end{aligned} \quad (1.68)$$

Кожен доданок ряду (1.68) задовольняє рівняння (1.55) та однорідні граничні умови (1.56). Як зазначалося, будь-яка скінченна (часткова) сума цього ряду також задовольняє вказані вимоги. Весь ряд (1.68) задовольняє (1.55)-(1.56), якщо він допускає двократне почленне диференціювання по x і t та є рівномірно збіжним.

На завершення підберемо сталі A_n і B_n так, щоб ряд (1.68) задовольняв і початкові умови (1.57). Враховуючи першу початкову умову, поклавши в

(1.68) $t = 0$, матимемо

$$u(x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin \lambda_n x,$$

тобто

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin \lambda_n x = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin \frac{(2n+1)\pi}{2l} x, \quad x \in [0, l]. \quad (1.69)$$

Щоб скористатися другою початковою умовою спочатку продиференціюємо (1.68) за змінною t :

$$u_t(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} a\lambda_n (-A_n \sin a\lambda_n t + B_n \cos a\lambda_n t) \cdot \sin \lambda_n x$$

і візьмемо до уваги другу початкову умову (1.57):

$$u_t(x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} a\lambda_n B_n \sin \lambda_n x,$$

звідки

$$\psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a\lambda_n B_n \sin \lambda_n x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)\pi a}{2l} B_n \sin \frac{(2n+1)\pi}{2l} x, \quad x \in [0, l]. \quad (1.70)$$

Вирази (1.69) і (1.70) є розвиненням функцій $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ в ряд Фур'є за синусами. Коефіцієнти цих розвинень знаходяться стандартним способом – множенням (1.69) і (1.70) зліва і справа на *власні функції* $\sin \lambda_n x$ ($n = \overline{0, \infty}$) й інтегруванням в межах від 0 до l . Внаслідок чого маємо:

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \lambda_n x dx = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l} dx, \\ B_n &= \frac{4}{(2n+1)\pi a} \int_0^l \psi(x) \sin \lambda_n x dx = \frac{4}{(2n+1)\pi a} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l} dx. \end{aligned} \quad (1.71)$$

Ця задача моделює, наприклад, поперечні коливання струни із закріпленим лівим кінцем і вільним – правим. Або повздовжні коливання стержня, один кінець якого ($x = 0$) закріплений, а інший ($x = l$) – вільний.

Коливання відбуваються з власною частотою $\omega_n = a\lambda_n = \frac{(2n+1)\pi}{2l} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$, а енергія n -ої гармоніки коливань стержня визначається за формулою:

$$E_n = \frac{1}{2} \int_0^l \left[\rho \left(\frac{\partial u_n}{\partial t} \right)^2 + E \left(\frac{\partial u_n}{\partial x} \right)^2 \right] dx, \quad a^2 = \frac{E}{\rho},$$

де E – модуль Юнга (пружність) матеріалу стержня, ρ – об'ємна густина стержня.

Висновок. Порівнюючи задачі на *власні значення* та *власні функції*, які нам довелося розв'язувати в п. 1.1-1.4 легко помітити, що вони суттєво залежні від крайових умов задачі Штурма-Ліувілля. Тому, ще раз наголосимо – задача Штурма-Ліувілля має самостійний інтерес. Це пов'язано також з тим, що спектр частот (множина всіх власних значень) коливальної системи є її важливою фізичною характеристикою.

У зв'язку з цим доцільно спеціально зупинитися на математичній постановці спільної задачі на *власні значення* та розв'язанні стандартних (класичних) задач, що зустрічаються у додатках. Саме цьому ми й присвяtimo декілька наступних параграфів.

Задачі для самостійного розв'язування до розділу 1

1. Струна довжиною $l = 10$, закріплена на кінцях, знаходиться в положенні рівноваги. В початковий момент часу всім точкам струни надана швидкість $a \cdot 10^{-1}$ (де a – коефіцієнт в хвильовому рівнянні). Знайти закон колювання струни, енергію окремих гармонік і власну частоту. Побудувати графік.
2. В ударних музичних інструментах (наприклад, рояль) колювання збуджуються ударом, що надає струні початкову швидкість без початкового відхилення. Ширина інтервалу, по якому ударяє молоточок, і тривалість часу удару істотно впливають на величину енергії високих обертонів (переконаємось в цьому на наступних прикладах). Наявність високих обертонів (починаючи вже з 7-го) погіршує гармонійність звуку.

Отже, нехай однорідна струна довжиною l , закріплена на кінцях, перебуває у прямолінійному положенні рівноваги. У початковий момент часу вона отримує в точці $x = c$ удар молоточком, який надає точці сталу швидкість v_0 . Знайти відхилення $u(x, t)$ для будь-якого моменту часу, енергію окремих гармонік і власну частоту, якщо струна збуджується початковою швидкістю:

$$\text{a) } u_t(x, 0) = \begin{cases} v_0, & |x - c| < \frac{\pi}{2h}, \\ 0, & |x - c| > \frac{\pi}{2h}, \end{cases}$$

що відповідає *пласкому* жорсткому молоточку шириною π/h , де $[h] = m^{-1}$;

$$\text{b) } u_t(x, 0) = \begin{cases} v_0 \cos h(x - c), & |x - c| < \frac{\pi}{2h}, \\ 0, & |x - c| > \frac{\pi}{2h}, \end{cases}$$

що відповідає *опуклому* жорсткому молоточку шириною π/h ($[h] = m^{-1}$), який збуджує найбільшу швидкість в центрі інтервалу;

$$\text{c) } u_t(x, 0) = \frac{P_0}{\rho} \delta(x - c),$$

що відповідає *гострому* молоточку, який передає зосереджений імпульс P_0 точці $x = c$; тут $\delta(x)$ – дельта-функція Дірака.

3. Знайти закон розподілу температури всередині стержня довжиною l , якщо на його кінцях підтримується нульова температура, бічна поверхня теплоізолювана, а температура в початковий момент:

a) $u(x, 0) = Ax$;

b) $u(x, 0) = Ax(l - x)$.

Відповіді перевірити при $l = 4$ і побудувати графіки розв'язків.

4. Знайти повздовжні коливання стержня, один кінець якого ($x = 0$) закріплений, а інший ($x = l$) – вільний, якщо $u(x, 0) = hx/l$, $u_t(x, 0) = 0$.

5. Знайти розподіл температури всередині тонкого однорідного стержня довжиною l з теплоізолюваною бічною поверхнею, якщо його лівий кінець ($x = 0$) підтримується при нульовій температурі, а правий ($x = l$) теплоізолюваний. Температура стержня в початковий момент $u(x, 0) = Ax$.

Відповіді до задач

1. $u(x, t) = \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \sin \frac{(2n+1)\pi at}{10} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{10}, \quad \omega_n = a\lambda_n = \frac{(2n+1)\pi}{10} \sqrt{\frac{T}{\rho}}.$

2. a) $u(x, t) = \frac{4v_0 l}{\pi^2 a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{\pi n c}{l} \sin \frac{\pi^2 n}{2hl} \sin \frac{\pi nat}{l} \sin \frac{\pi nx}{l},$

$$E_n = 4\rho l \left(\frac{v_0}{\pi n} \cdot \sin \frac{\pi n c}{l} \sin \frac{\pi^2 n}{2hl} \right)^2, \quad \omega_n = a\lambda_n = \frac{n\pi}{l} \sqrt{\frac{T}{\rho}};$$

b) $u(x, t) = \frac{4v_0 h}{\pi^2 a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \left(h^2 - \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 \right)} \sin \frac{\pi n c}{l} \cos \frac{\pi^2 n}{2hl} \sin \frac{\pi nat}{l} \sin \frac{\pi nx}{l},$

$$E_n = \frac{4\rho}{l} \left(\frac{v_0 h}{h^2 - \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2} \cdot \sin \frac{\pi n c}{l} \sin \frac{\pi^2 n}{2hl} \right)^2, \quad \omega_n = a\lambda_n = \frac{n\pi}{l} \sqrt{\frac{T}{\rho}};$$

c) $u(x, t) = \frac{2P_0}{\pi a \rho} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{\pi n c}{l} \sin \frac{\pi nat}{l} \sin \frac{\pi nx}{l}, \quad E_n = \frac{1}{\rho l} \left(P_0 \sin \frac{\pi n c}{l} \right)^2, \quad \omega_n = \frac{n\pi}{l} \sqrt{\frac{T}{\rho}}.$

3. a) $u(x, t) = \frac{2Al}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot \exp \left[- \left(\frac{n\pi a}{l} \right)^2 t \right] \cdot \sin \frac{n\pi x}{l};$

b) $u(x, t) = \frac{8Al^2}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} \cdot \exp \left[- \left(\frac{(2n+1)\pi a}{l} \right)^2 t \right] \cdot \sin \frac{(2n+1)\pi x}{l}.$

4. $u(x, t) = \frac{8h}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \cos \frac{(2n+1)\pi at}{2l} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l}, \quad \omega_n = a\lambda_n = \frac{(2n+1)\pi}{2l} \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$

5. $u(x, t) = \frac{8Al}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \cdot \exp \left[- \left(\frac{(2n+1)\pi a}{2l} \right)^2 t \right] \cdot \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l}.$

2. Крайові задачі для звичайних ДР другого порядку

В попередніх параграфах ми мали можливість переконатися в тому, що *задача Штурма-Ліувілля* відіграє першорядну роль в методі Фур'є. Поширимо використану методику розв'язання крайової задачі на загальні випадки. Але спершу доцільно звернутися до деяких положень теорії звичайних лінійних ДР 2-го порядку

$$a_0(x)z'' + a_1(x)z' + a_2(x)z = F(x), \quad (2.1)$$

де $a_i(x)$ і $F(x)$ – задані неперервні функції на відрізку $[a, b]$, при цьому $a_0(x) \neq 0$ на $[a, b]$, $z(x)$ – шукана функція класу $C^2[a, b]$.

Для знаходження певного частинного розв'язку додатково задають або *початкові умови* (задача Коші)

$$z(x_0) = z_0, \quad z'(x_0) = z'_0, \quad (2.2)$$

або *граничні умови* (двоточкова крайова або гранична задача)

$$\alpha_1 z'(a) + \beta_1 z(a) = A, \quad \alpha_2 z'(b) + \beta_2 z(b) = B, \quad (2.3)$$

де $\alpha_i^2 + \beta_i^2 > 0$ ($i = 1, 2$), A і B – задані числа.

Зауваження 1. Якщо функція $f(x)$ визначена на інтервалі (a, b) і має при $x \rightarrow a+0$ скінченну границю A , то це записується як $f(a) = A$. Тому, наприклад, в першій рівності (2.3) мається на увазі, що $\lim_{x \rightarrow a+0} [\alpha_i z'(x) + \beta_i z(x)] = A$.

Зауваження 2. При $\alpha_i = 0$ із (2.3) отримуємо крайові умови *першого* роду, а при $\beta_i = 0$ – *другого* роду, якщо ж α_i і β_i відмінні від нуля одночасно – *третього* роду.

При зроблених припущеннях про характер коефіцієнтів і правої частини рівняння (2.1) задача Коші має єдиний розв'язок. Що ж стосується крайової задачі (2.1), (2.3), то вона може мати єдиний розв'язок, нескінченну множину розв'язків і, навіть, не мати їх зовсім.

Розв'язок неоднорідної крайової задачі (2.1), (2.3) можна шукати як суперпозицію функцій

$$z(x) = y(x) + w(x), \quad (2.4)$$

де $w(x)$ – довільна функція класу $C^2[a, b]$, яка задовольняє умови

$$\begin{cases} \alpha_1 w'(a) + \beta_1 w(a) = A \\ \alpha_2 w'(b) + \beta_2 w(b) = B, \end{cases} \quad (2.5)$$

а функція $y(x)$ є розв'язком крайової задачі з однорідними граничними умовами:

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x), \quad \text{де } f(x) = F(x) - a_0 w'' - a_1 w' - a_2 w, \quad (2.6)$$

$$\alpha_1 y'(a) + \beta_1 y(a) = 0, \quad \alpha_2 y'(b) + \beta_2 y(b) = 0 \quad (2.7)$$

Цю задачу будемо називати *регулярною*, якщо виконані умови

$$a_i(x), f(x) \in C[a, b], \quad a_0(x) \neq 0 \quad \forall x \in [a, b], \quad \alpha_i^2 + \beta_i^2 > 0.$$

Відповідна їй однорідна крайова задача

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2y(x) = 0, \quad x \in (a, b), \quad (2.8)$$

$$\alpha_1y'(a) + \beta_1y(a) = 0, \quad \alpha_2y'(b) + \beta_2y(b) = 0 \quad (2.9)$$

завжди має тривіальний розв'язок. Якщо ж існує і нетривіальний розв'язок $y = \varphi(x) \neq 0$, то кажуть, що $\varphi(x)$ є *власним розв'язком* крайової задачі (2.8)-(2.9).

Приклад 5. Знайти власні розв'язки однорідних крайових задач

$$1. \quad y'' + y = 0, \quad y(0) = y(\pi) = 0.$$

$$2. \quad y'' + y = 0, \quad y(0) = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Оскільки рівняння в обох задачах однакові, то однакові й їх загальні розв'язки: $y = C \cos x + D \sin x$. З граничних умов витікає $C = 0$, $D \neq 0$ (в задачі 1) і $C = D = 0$ (в задачі 2).

Отже, власними розв'язками задачі (1) є функції виду $y = D \sin x$; задача (2) має лише тривіальний розв'язок.

Логічним завершенням викладеного слугує наступна теорема.

Теорема. Якщо неоднорідна крайова задача (2.6)-(2.7) *регулярна*, а відповідна їй однорідна крайова задача (2.8)-(2.9) має лише тривіальний розв'язок, то за будь-якої правої частини $f(x) \in C[a, b]$ задача (2.6)-(2.7) має єдиний розв'язок, який визначається формулою

$$y(x) = \int_a^b G(x, s) f(s) ds, \quad (2.10)$$

де $G(x, s)$ – функція Гріна задачі (2.6)-(2.7).

2.1. Самоспряжені ДР другого порядку

Лінійне диференціальне рівняння виду

$$[p(x)y']' - q(x)y = g(x), \quad x \in [a, b] \quad (2.11)$$

$$\{p(x), p'(x), q(x), g(x) \in C[a, b]\}$$

називається *самоспряженим*.

Будь-яке лінійне ДР 2-го порядку (2.6) може бути зведене до самоспряженого виду (2.11) при додаткових вимогах на гладкість коефіцієнтів. Для

цього достатньо помножити обидві частини рівняння (2.6) на інтегруючий множник $\mu(x)$, підібравши його так, щоб виконувались рівності

$$a_0(x)\mu(x) = p(x), \quad a_1(x)\mu(x) = p'(x).$$

Це приводить до звичайного диференціального рівняння

$$(a_0(x)\mu)' = a_1(x)\mu,$$

розв'язком якого є функція

$$\mu(x) = \frac{p(x)}{a_0(x)}, \quad \text{де} \quad p(x) = \exp\left(\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)} dx\right). \quad (2.12)$$

Дійсно, в цьому випадку маємо

$$\begin{aligned} \mu(x) \cdot [a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y - f(x)] &= \\ = [y'p(x)]' + \frac{a_2(x)y - f(x)}{a_0(x)} p(x) &= [y'p(x)]' - q(x)y - g(x) = 0. \end{aligned}$$

Отже, щоб від рівняння (2.6) перейти до самоспряженого рівняння (2.11), достатньо знайти

$$q(x) = -\frac{a_2(x)}{a_0(x)} p(x), \quad g(x) = \frac{f(x)}{a_0(x)} p(x). \quad (2.13)$$

Приклад 6. Звести до самоспряженого виду лінійне диференціальне рівняння $y'' + y' - xy = 0$.

Тут $a_0 = a_1 = 1$, $a_2 = -x$, тому $\mu(x) = e^{\int dx} = e^x$, $p(x) = p'(x) = e^x$ і $q(x) = x \cdot e^x$. Задане рівняння зводиться до самоспряженого виду

$$(y' \cdot e^x)' - xye^x = 0.$$

2.2. Постановка спектральних задач

Як відомо, абсолютна більшість явищ об'єктивної реальності описується ДР у частинних похідних. Застосовуючи процедуру розділення змінних, крайову задачу для рівнянь у частинних похідних можна звести до розв'язування низки звичайних ДР. Незалежно від обраної системи координат основою для них є рівняння Штурма-Ліувілля (Ш-Л)

$$L[y(x, \mu)] \equiv \frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dy}{dx} \right] - [q(x) - \mu r(x)] y = 0, \quad (2.14)$$

яке зв'язує незалежну змінну x , шукану функцію $y(x)$ та її похідні по x , а також числовий параметр μ . Змінні коефіцієнти цього рівняння, функції

$$p(x) \geq 0, \quad q(x) \geq 0, \quad \rho(x) > 0 \quad (2.15)$$

задані й визначені на проміжку (a, b) , який може бути і нескінченним.

Додамо до рівняння (2.14) однорідні граничні умови (2.9):

$$\begin{cases} \alpha_1 y'(a, \mu) + \beta_1 y(a, \mu) = 0, & \alpha_1^2 + \beta_1^2 \neq 0; \\ \alpha_2 y'(b, \mu) + \beta_2 y(b, \mu) = 0, & \alpha_2^2 + \beta_2^2 \neq 0. \end{cases} \quad (2.16)$$

Внаслідок отримаємо крайову задачу, подібну розглянутій у п. 2, яка відрізняється наявністю невідомого параметра, який належить визначити.

Якби μ було заданим числом, співвідношення (2.14) і (2.16) описували б звичайну граничну задачу, що має очевидне тривіальне рішення. Однак наявність у рівнянні (2.14) невідомого параметра потребує нової постановки задачі: знайти такі числа $\mu = \mu_n$, при яких крайова (гранична) задача (2.14)-(2.16) має нетривіальне (не рівне тотожно нулю) рішення, а також самі рішення $y_n(x, \mu) \equiv y_n(x)$, відповідні цим числам.

Якщо такі числа μ_n існують, їх прийнято називати *власними числами* (*власними значеннями*), а функції $y_n(x)$ – *власними функціями* задачі Ш-Л.

Множину всіх власних значень називається *спектром задачі*. Спектр задачі, як правило, нескінченний і може бути зліченим (дискретним) або неперервним. У першому випадку спектр позначається через $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$, де нумерація власних значень здійснюється в порядку їх зростання. У другому випадку $\mu = \mu(x)$.

Лінійне однорідне рівняння (2.14) є ДР 2-го порядку спеціального виду, оскільки його коефіцієнти можуть мати особливі точки. Дійсно, переписавши рівняння у вигляді

$$y''(x) + \frac{p'(x)}{p(x)} y'(x) - \left(\frac{q(x)}{p(x)} - \mu \frac{\rho(x)}{p(x)} \right) y(x) = 0, \quad (2.17)$$

помічаємо, що воно не завжди може бути розв'язано в елементарних функціях, наприклад, якщо $p(x)$ обертається в нуль в деяких точках досліджуваного інтервалу. Зрозуміло, що можливі й інші особливі випадки, пов'язані з поведінкою інших коефіцієнтів.

У зв'язку з тим, що поведінка саме функції $p(x)$ в граничних точках інтервалу (a, b) зумовлює характер рішення і відіграє важливу роль у постановці граничних задач, зазвичай розглядають два випадки:

(1) *задача Ш-Л без особливої точки*, якщо коефіцієнти рівняння (2.17) є аналітичними функціями і при цьому функція $p(x)$ не перетворюється на нуль на відрізку $[a, b]$.

(2) *задача Ш-Л з особливою точкою*, якщо точка $x = a$ є простим нулем функції $p(x)$, а $q(x)$, $\rho(x)$ – аналітичні функції, не рівні нулю. Тоді коефіцієнти рівняння (2.17) мають особливості (в даному випадку це ліва гранична точка).

Зосередимось тут на першому з цих випадків. До другого випадку повернемося у свій час, коли виникне потреба розв'язувати задачі Ш-Л в будь-якій іншій (не декартовій) ортогональній системі координат і, відповідно, у введенні *спеціальних функцій* математичної фізики.

Задача на власні значення є основною методу Фур'є, оскільки саме вона є джерелом побудови *повної системи ортогональних функцій* (власних функцій задачі Ш-Л). За допомогою цих функцій і конструюється *ряд Фур'є*, який є розв'язком крайової задачі. Поки у розглядуваних нами крайових задачах повну систему ортогональних функцій утворюють *тригонометричні функції*. Тому розв'язок зазвичай має вигляд класичного ряду Фур'є. Власне сама теорія рядів Фур'є виникла як наслідок розв'язування задачі на власні значення. Згодом ми переконаємося, що повну систему ортогональних функцій можуть утворювати й інші функції, які ми відносимо до *спеціальних функцій* математичної фізики. А отже і ряди Фур'є можуть бути сконструйовані на основі цих спеціальних функцій.

3. Задача Штурма-Ліувілля без особливої точки

I. У математичній фізиці *теорія Штурма-Ліувілля* – стандартна процедура дослідження крайових задач для звичайних лінійних ДР 2-го порядку. Розглянемо однорідне рівняння

$$[p(x)y']' - q(x)y + \mu\rho(x)y(x) = 0, \quad x \in (a, b), \quad (3.1)$$

вважаючи, що для $\forall x \in [a, b]$ $p(x) > 0$, $0 < \rho(x) < \infty$ і $q(x) \geq 0$. Невід'ємна функція $\rho(x)$ називається *ваговою функцією* або просто *вагою*.

Рівняння (3.1) називається *рівнянням Штурма-Ліувілля* і є частинним випадком *самоспряженого* рівняння (2.11), в якому треба покласти $g(x) = 0$ а $q(x)$ замінити на $(q - \mu\rho)$.

До рівняння (3.1) слід додати однорідні крайові умови (2.9):

$$\alpha_1 y'(a) + \beta_1 y(a) = 0, \quad \alpha_2 y'(b) + \beta_2 y(b) = 0.$$

Задача Штурма-Ліувілля полягає, по суті, у з'ясуванні залежності загальної поведінки функції $y(x)$ від параметра μ і залежності власних значень μ від однорідних граничних умов, накладених на $y(x)$. Тому формулюватимемо задачу Штурма-Ліувілля наступним чином: *знайти значення параметра μ (власні значення), при яких рівняння (3.1) має нетривіальний розв'язок (власні функції) $y(x) \in C^2[a, b]$, що задовольняє крайові умови (2.9).*

Поставлену задачу зручно записати в операторній формі

$$L[y(x)] + \mu\rho(x)y(x) = 0, \quad \text{де } L[y(x)] \equiv [p(x)y'(x)]' - q(x)y(x), \quad (3.2)$$

$$l_a[y(x)] = 0, \quad l_a[y(x)] \equiv \alpha_1 y'(a) + \beta_1 y(a), \quad (3.3a)$$

$$l_b[y(x)] = 0, \quad l_b[y(x)] \equiv \alpha_2 y'(b) + \beta_2 y(b). \quad (3.3b)$$

Оператор $L[y]$ – лінійний диференціальний оператор 2-го порядку, який діє на функцію $y(x)$ називається *оператором Штурма-Ліувілля*. Умови (3.3) – крайові умови загального виду, що розпадаються.

При цьому для (3.2)-(3.3) повинні бути виконані умови регулярності:

$$p(x), \rho(x) > 0, \quad q(x) \geq 0, \quad p(x) \in C^1[a, b], \quad \rho(x), q(x) \in C[a, b], \quad \alpha_i^2 + \beta_i^2 > 0.$$

Якщо функції p, q, ρ і коефіцієнти крайових умов дійсні, то оператор $L[y]$ є *самоспряженим* у гільбертовому просторі. Його власні значення дійсні, а власні функції ортогональні з вагою $\rho(x)$.

Згідно з загальною теорією звичайних ЛОДР n -го порядку [9] загальний розв'язок рівняння (3.2) має вигляд

$$y(x, \mu) = C y_1(x, \mu) + D y_2(x, \mu), \quad C^2 + D^2 > 0, \quad (3.4)$$

де функції $\{y_i(x, \mu)\}$ ($i = 1, 2$) утворюють *фундаментальну систему* розв'язків і є *цілими функціями* по μ при кожному фіксованому x . Задовольняючи крайові умови (2.9), отримаємо систему двох рівнянь з двома невідомими C і D :

$$\begin{cases} \alpha_1 [C y_1'(a, \mu) + D y_2'(a, \mu)] + \beta_1 [C y_1(a, \mu) + D y_2(a, \mu)] = 0, \\ \alpha_2 [C y_1'(b, \mu) + D y_2'(b, \mu)] + \beta_2 [C y_1(b, \mu) + D y_2(b, \mu)] = 0 \end{cases}$$

або, приводячи подібні

$$\begin{cases} C [\alpha_1 y_1'(a, \mu) + \beta_1 y_1(a, \mu)] + D [\alpha_1 y_2'(a, \mu) + \beta_1 y_2(a, \mu)] = 0, \\ C [\alpha_2 y_1'(b, \mu) + \beta_2 y_1(b, \mu)] + D [\alpha_2 y_2'(b, \mu) + \beta_2 y_2(b, \mu)] = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_{11}(\mu)C + \alpha_{12}(\mu)D = 0, \\ \alpha_{21}(\mu)C + \alpha_{22}(\mu)D = 0. \end{cases} \quad (3.5)$$

де

$$\begin{aligned} \alpha_{11}(\mu) &= \alpha_1 y_1'(a, \mu) + \beta_1 y_1(a, \mu), & \alpha_{12}(\mu) &= \alpha_1 y_2'(a, \mu) + \beta_1 y_2(a, \mu), \\ \alpha_{21}(\mu) &= \alpha_2 y_1'(b, \mu) + \beta_2 y_1(b, \mu), & \alpha_{22}(\mu) &= \alpha_2 y_2'(b, \mu) + \beta_2 y_2(b, \mu). \end{aligned}$$

Згідно з (3.4) однорідна система (3.5) має ненульовий розв'язок. Це можливо лише в тому випадку, коли її визначник $\Delta(\mu) = 0$. Звідки, маємо рівняння

$$\Delta(\mu) = \begin{vmatrix} \alpha_{11}(\mu) & \alpha_{12}(\mu) \\ \alpha_{21}(\mu) & \alpha_{22}(\mu) \end{vmatrix} = \alpha_{11}(\mu) \alpha_{22}(\mu) - \alpha_{12}(\mu) \alpha_{21}(\mu) = 0, \quad (3.6)$$

корені якого μ_k є власними значеннями задачі Штурма-Ліувілля (3.2)-(3.3). Система (3.5) має розв'язок для кожного μ_k . Так, наприклад, перше рівняння системи має вигляд $\alpha_{11}(\mu_k) C_k + \alpha_{12}(\mu_k) D_k = 0$, звідки

$$C_k = -\frac{a_{12}(\mu_k)}{a_{11}(\mu_k)} D_k, \quad (3.7)$$

де D_k – довільні невідомі.

Це дозволяє записати власні функції (3.4) у вигляді:

$$y_k(x) = D_k \left[-y_1(x, \mu_k) \frac{a_{12}(\mu_k)}{a_{11}(\mu_k)} + y_2(x, \mu_k) \right], \quad (3.8)$$

тобто визначити їх з точністю до довільних сталих.

Проілюструємо наведений алгоритм на наступних прикладах.

Приклад 7. Знайти власні значення та власні функції задачі Штурма-Ліувілля

$$y''(x) + \mu y(x) = 0, \quad x \in (a, b), \quad (3.2')$$

$$y(a) = 0, \quad y(b) = 0. \quad (3.3')$$

Загальний розв'язок рівняння має вигляд

$$y(x, 0) = C_0 + D_0 x, \quad y(x, \mu) = C e^{\sqrt{-\mu} x} + D e^{-\sqrt{-\mu} x}. \quad (3.4')$$

Задовольняючи задані крайові умови, отримаємо дві однорідні системи для визначення сталих C_0, D_0 (випадок $\mu = 0$) і C, D (випадок $\mu \neq 0$)

$$\begin{cases} C_0 + a D_0 = 0, \\ C_0 + b D_0 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} e^{a\sqrt{-\mu}} C + e^{-a\sqrt{-\mu}} D = 0, \\ e^{b\sqrt{-\mu}} C + e^{-b\sqrt{-\mu}} D = 0. \end{cases} \quad (3.5')$$

Перша система має лише тривіальний розв'язок $C_0 = D_0 = 0$. Для існування ненульового розв'язку другої системи необхідно, щоб її визначник дорівнював нулю

$$e^{-(b-a)\sqrt{-\mu}} - e^{(b-a)\sqrt{-\mu}} = 0. \quad (3.6')$$

Звідси $e^{2(b-a)\sqrt{-\mu}} = 1$. Розв'язок цього рівняння існує лише при $\mu > 0$. В цьому випадку $2(b-a)\sqrt{-\mu} = 2n\pi i \quad (n = \overline{1, \infty})$, тобто $\mu_n \equiv \lambda_n^2 = \left(\frac{n\pi}{b-a} \right)^2$. При $\mu \leq 0$ крайова задача (3.2')-(3.3') власних значень і власних функцій не має.

Запишемо загальний розв'язок (3.4') при $\mu > 0$ в тригонометричній формі

$$y_n(x, \lambda_n) = C_n \cos \lambda_n x + D_n \sin \lambda_n x. \quad (3.4'')$$

Тоді система (3.5') набуває вигляду

$$\begin{cases} C_n \cos \lambda_n a + D_n \sin \lambda_n a = 0 \\ C_n \cos \lambda_n b + D_n \sin \lambda_n b = 0, \end{cases} \quad (3.5'')$$

звідки (наприклад, з першого рівняння) знаходимо умову зв'язку між невідомими

$$C_n = -D_n \operatorname{tg} \lambda_n a. \quad (3.7')$$

Підставляючи (3.7') в загальний розв'язок (3.4''), отримаємо

$$y_n(x, \lambda_n) = \frac{D_n}{\cos \lambda_n a} (\sin \lambda_n x \cos \lambda_n a - \cos \lambda_n x \sin \lambda_n a) = D_n^* \sin \lambda_n (x - a). \quad (3.8')$$

Отже, вихідна задача має наступні *власні значення* та *власні функції*

$$\mu_n = \lambda_n^2 = \left(\frac{n\pi}{b-a} \right)^2, \quad y_n(x) = \sin \frac{n\pi}{b-a} (x-a) \quad (n = \overline{1, \infty}). \quad (3.9)$$

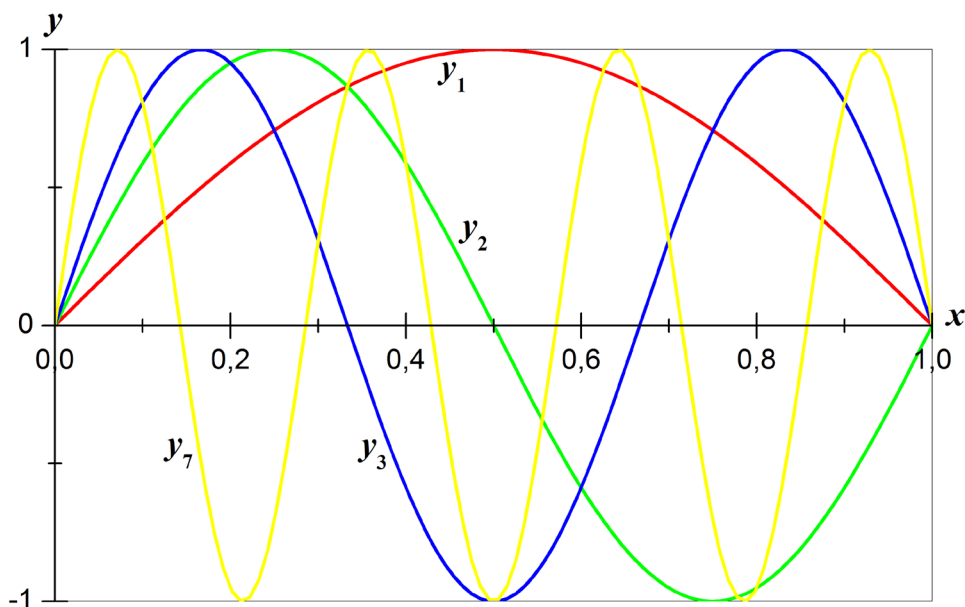
Зазначимо, що власні функції (3.9) ортогональні на відрізку (a, b) :

$$\int_a^b y_n(x) \cdot y_m(x) dx = 0, \quad n \neq m,$$

а їх квадрат норми дорівнює (не складно переконатися [самостійно!](#))

$$\|y_n(x)\|^2 \equiv \int_a^b [y_n(x)]^2 dx = \frac{b-a}{2}, \quad n = m.$$

Корисно побудувати графіки хоча б декількох перших власних функцій (3.9). Покладемо, наприклад, $a = 0$ і $b = 1$; тоді $y_1(x) = \sin \pi x$, $y_2(x) = \sin 2\pi x$, $y_3(x) = \sin 3\pi x$, ..., $y_7(x) = \sin 7\pi x$



Звернемо увагу на поведінку власних функцій $y_n(x)$ в граничних точках заданого відрізка на осі абсцис. Усі власні функції проходять через ці точки. В *першій мішаній задачі про поперечні коливання струни (п.1.1)* цим точкам відповідають *вузли* стоячої хвилі. Власна функція, що відповідає найменшому власному значенню ($y_1(x)$ для цієї задачі), не має вузлів всередині відрізка, тобто всередині відрізка в нуль не обертається. Однак, зі зростанням власного значення μ_n зростає кількість нулів власних функцій $y_n(x)$ на осі абсцис.

Зауваження 1. Розв'язок розглянутої задачі допускає наступну фізичну інтерпретацію. У квантовій механіці (з точністю до вибору одиниць) оператор Лапласа $-\frac{d^2}{dx^2}$ має сенс оператора кінетичної енергії, а μ_n є допустимими значеннями енергії квантової частинки, що рухається в одновимірній потенціальній прямокутній ямі з нескінченно високими стінками. Функції $y_n(x)$ є хвильовими функціями частинки, а величина $|y_n(x)|^2$ має сенс густини ймовірності виявити квантову частинку в стані з номером n у точці $x \in (0,1)$.

У квантовій механіці кінетична енергія набуває строго визначених дискретних (квантованих) значень. Імовірність знаходження частинки для найнижчого рівня енергії максимальна у центрі потенціальної ями, а для наступних рівнів максимуми симетрично зміщуються до країв ями, що наочно ілюструє наведений рисунок.

Зауваження 2. Порівняємо методи розв'язання крайових задач (1.7)-(1.8) і (3.2')-(3.3'), які відрізняються лише областю визначення. Очевидно, що другий підхід, який дозволяє автоматично записувати розв'язок для будь-яких інтервалів, є *більш загальним*. Так, наприклад, поклавши $a = 0$, $b = l$ і $y = X$ із (3.9') отримаємо власні значення та власні функції задачі (1.7)-(1.8), тобто вирази (1.10) і (1.11)

$$\mu_n = \lambda_n^2 = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \quad X_n(x) = \sin \frac{n\pi}{l} x,$$

які ортогональні на відрізку $(0,l)$

$$\int_0^l X_n(x) \cdot X_m(x) dx = 0, \quad n \neq m,$$

і мають квадрат норми

$$\|X_n(x)\|^2 \equiv \int_0^l [X_n(x)]^2 dx = \frac{l}{2}, \quad n = m.$$

Маючи ж розв'язок (1.10) і (1.11), знайти розв'язок задачі (3.2')-(3.3') не уявляється можливим. Іншими словами, необхідно розв'язувати задачу як нову (зрозуміло, що при цьому можуть бути використані деякі результати попереднього розв'язання). Зауважимо, що друга задача більш трудомістка.

II. Природно прагнення поєднати простоту однієї задачі з універсальністю іншої. Це можна зробити, частково вводячи безрозмірні змінні в умови задачі. В даному випадку це рівносильно переходу до формулювання задачі на стандартному відрізку $[0,1]$. Для цього введемо в рівняння (1.7) безрозмірну незалежну змінну

$$\frac{x}{l} = \xi, \quad \text{де } x \in [0,l], \quad \xi \in [0,1]$$

і перейдемо в ньому до нової змінної. Враховуючи

$$\frac{dX}{dx} = \frac{dX}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{l} \frac{dX}{d\xi}, \quad \frac{d^2 X}{dx^2} = \frac{1}{l^2} \frac{d^2 X}{d\xi^2},$$

отримаємо

$$X''(\xi) + \mu l^2 X(\xi) = 0; \quad X(0) = X(1) = 0 \quad (3.10)$$

Виконаємо таку саму операцію з рівнянням (3.2'). Введемо нову змінну

$$\xi = \frac{x-a}{b-a}, \quad \text{де } x \in [a, b], \quad \xi \in [0, 1]$$

Враховуючи умови зв'язку між похідними

$$y'(x) = \frac{y'(\xi)}{(b-a)}, \quad y''(x) = \frac{y''(\xi)}{(b-a)^2},$$

перепишемо (3.2')-(3.3') у вигляді

$$y''(\xi) + \mu(b-a)^2 y(\xi) = 0, \quad y(0) = y(1) = 0. \quad (3.11)$$

Порівнюючи (3.10) і (3.11), маємо одну й ту саму задачу Штурма-Ліувілля

$$y''(\xi) + \mu \rho y(\xi) = 0, \quad y(0) = y(1) = 0, \quad (\rho > 0), \quad (3.12)$$

для розв'язання якої тепер можна використовувати підхід, запропонований в цьому параграфі або в п. 1.1.

Остаточно маємо

$$\mu_n = \lambda_n^2 = \left(\frac{n\pi}{\sqrt{\rho}} \right)^2, \quad y_n = \sin n\pi\xi = \sin \lambda_n \sqrt{\rho} \xi \quad (n = \overline{1, \infty}). \quad (3.13)$$

Приклад 8. Знайти власні значення та власні функції задачі Штурма-Ліувілля

$$y''(\xi) + \mu \rho y(\xi) = 0, \quad y'(0) = y'(1) = 0, \quad (\rho > 0). \quad (3.14)$$

Ця задача відрізняється від розглянутої вище крайовими умовами. Загальний розв'язок рівняння (3.14) має вигляд

$$\begin{aligned} \mu = 0: & \quad y(\xi, 0) = C_0 + D_0 \xi, \\ \mu \neq 0: & \quad y(\xi, \mu) = C e^{\xi \sqrt{-\rho \mu}} + D e^{-\xi \sqrt{-\rho \mu}}. \end{aligned}$$

Звідси також знаходимо

$$y'(\xi, 0) = D_0, \quad y'(\xi, \mu) = \sqrt{-\rho \mu} \left(C e^{\xi \sqrt{-\rho \mu}} - D e^{-\xi \sqrt{-\rho \mu}} \right).$$

З граничних умов витікає:

$$D_0 = 0, \quad C = D, \quad e^{\sqrt{-\rho}\mu} - e^{-\sqrt{-\rho}\mu} = 0 \quad \Rightarrow \quad e^{2\sqrt{-\rho}\mu} = 1.$$

Останнє, як відомо, дає $2\sqrt{-\rho}\mu = 2n\pi i$ ($n = \overline{1, \infty}$), тобто $\mu\rho = (n\pi)^2$. Таким чином, отримали злічену множину власних значень

$$\mu_0 = 0, \quad \mu_n \equiv \lambda_n^2 = \left(\frac{n\pi}{\sqrt{\rho}} \right)^2 \quad (n = \overline{1, \infty}).$$

Кожному власному значенню μ_k ($k = \overline{0, \infty}$) відповідає лише одна (з точністю до константи) власна функція

$$y_0(\xi) = C_0,$$

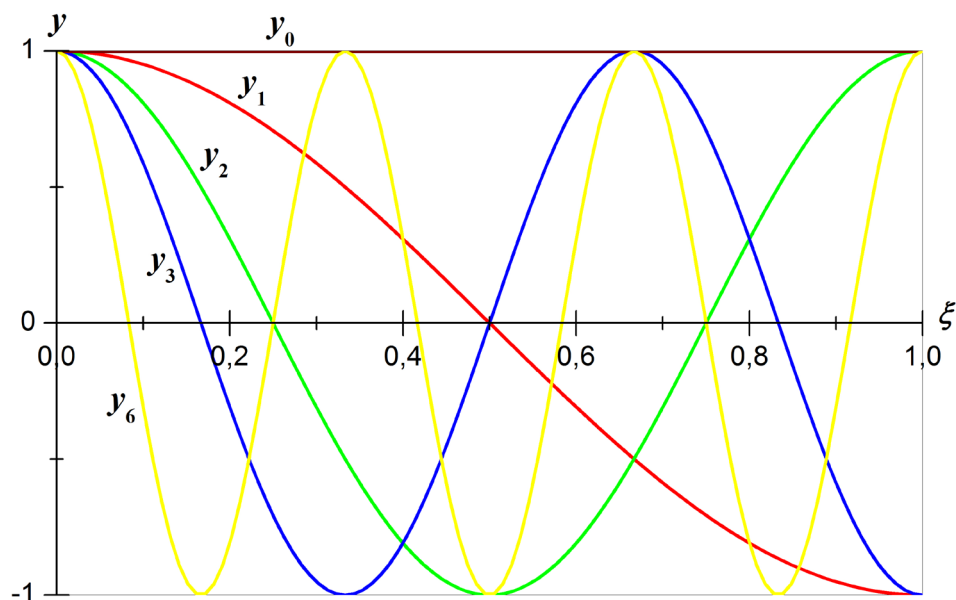
$$y_n(\xi) = C_n(e^{in\pi\xi} + e^{-in\pi\xi}) = 2C_n \cos n\pi\xi, \quad n = \overline{1, \infty}.$$

Кінцевий результат подамо у вигляді

$$\boxed{\mu_k = \lambda_k^2 = \frac{k^2\pi^2}{\rho}, \quad y_k(\xi) = \cos k\pi\xi, \quad k = \overline{0, \infty}.} \quad (3.15)$$

Побудуємо графіки декількох перших власних функцій (3.15) при $\xi \in [0, 1]$, поклавши, напр., $\rho = 1$. Тоді $y_0(\xi) = 1$, $y_1(\xi) = \cos \pi\xi$, $y_2(\xi) = \cos 2\pi\xi$, $y_3(\xi) = \cos 3\pi\xi$, ..., $y_6(\xi) = \cos 6\pi\xi$.

Знову звернемо увагу на поведінку власних функцій $y_n(x)$ у граничних точках заданого відрізка



Тут усі власні функції в граничних точках мають найбільше відхилення від осі абсцис. В першій мішаній задачі про поперечні коливання струни (п.1.1) цим точкам відповідають пучності стоячої хвилі. Максимальне відхилення

функцій $y_n(x)$ від осі абсцис у кінцевих точках заданого відрізка $[0,1]$ пов'язано з тим, що в крайових умовах задачі Штурма-Ліувілля (3.14) задані значення похідних, а не функцій. Як відомо з математичного аналізу [11], похідна функції дорівнює нулю саме в точках екстремуму. У даному випадку серед таких є і граничні точки заданого відрізка.

Також легко помітити, що чим більшим є власне значення μ_n , тим щільніше один до одного лежать на осі абсцис нулі власних функцій $y_n(x)$. Саме це і стверджує *перша теорема Штурма про порівняння* (див. далі п. 3.1).

Приклад 9. Знайти власні значення та власні функції задачі Штурма-Ліувілля

$$y''(x) + \mu y(x) = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(l) + \gamma y(l) = 0 \quad (\gamma > 0). \quad (3.16)$$

Загальний розв'язок рівняння має вигляд

$$y(x, \mu) = C_0 + D_0 x, \quad y(x, \mu) = C e^{\sqrt{-\mu} x} + D e^{-\sqrt{-\mu} x}.$$

Задовольняючи задані крайові умови, отримаємо дві однорідні системи для визначення сталих C_0, D_0 (випадок $\mu = 0$) і C, D (випадок $\mu \neq 0$)

$$\begin{cases} C_0 = 0, \\ D_0 + \gamma(C_0 + D_0 l) = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} C + D = 0, \\ \sqrt{-\mu}(C e^{\sqrt{-\mu} l} - D e^{-\sqrt{-\mu} l}) + \gamma(C e^{\sqrt{-\mu} l} + D e^{-\sqrt{-\mu} l}) = 0. \end{cases}$$

Перша система має лише тривіальний розв'язок $C_0 = D_0 = 0$. Розв'язуючи другу систему отримаємо рівняння

$$\sqrt{-\mu}(e^{\sqrt{-\mu} l} + e^{-\sqrt{-\mu} l}) + \gamma(e^{\sqrt{-\mu} l} - e^{-\sqrt{-\mu} l}) = 0.$$

Це рівняння при $\mu < 0$ розв'язків не має (**поясніть чому?**). А отже і крайова задача не має власних значень і власних функцій.

При $\mu > 0$ ($\sqrt{-\mu} = i\sqrt{\mu}$) з останнього рівняння знаходимо

$$\sqrt{\mu} = -\gamma \operatorname{tg} \sqrt{\mu} l.$$

Це трансцендентне рівняння має злічену множину коренів μ_n , $n \in \mathbb{N}$, які можна знайти або графічно, або за допомогою комп'ютерних (чисельних) методів з якою завгодно точністю. Не наводячи конкретних значень μ_n , задовольнимось тим, що при $\mu > 0$ нетривіальні розв'язки крайової задачі існують.

Ці розв'язки і є власними значеннями вихідної задачі Штурма-Ліувілля, яким відповідають власні функції (з точністю до константи)

$$y_n(x) = D(-e^{\sqrt{-\mu_n} x} + e^{-\sqrt{-\mu_n} x}) = \left| \sqrt{-\mu_n} = i\sqrt{\mu_n} \right| = D * \sin \sqrt{\mu_n} x, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3.17)$$

Очевидно, власні функції (3.17) ортогональні на відрізку $(0, l)$, як гармонічні функції, але їх квадрат норми тепер дорівнює

$$\begin{aligned}\|y_n(x)\|^2 &= \int_0^l \sin^2 \sqrt{\mu_n} x dx = \frac{1}{2} \int_0^l (1 - \cos 2\sqrt{\mu_n} x) dx = \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{2\sqrt{\mu_n}} \sin 2\sqrt{\mu_n} x \right) \Big|_0^l = \\ &= \left| \sqrt{\mu_n} = -\gamma \operatorname{tg} \sqrt{\mu_n} l \right| = \frac{1}{2} \left(l + \frac{2 \sin \sqrt{\mu_n} l \cdot \cos \sqrt{\mu_n} l}{2\gamma \operatorname{tg} \sqrt{\mu_n} l} \right) = \frac{1}{2} \left(l + \frac{\cos^2 \sqrt{\mu_n} l}{\gamma} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left[l + \frac{1}{\gamma \left(1 + \operatorname{tg}^2 \sqrt{\mu_n} l \right)} \right] = \frac{1}{2} \left(l + \frac{\gamma}{\gamma^2 + \mu_n} \right) = \frac{l(\mu_n + \gamma^2) + \gamma}{2(\mu_n + \gamma^2)}.\end{aligned}$$

Приклад 10. Знайти власні значення та власні функції задачі Штурма-Ліувілля

$$y''(x) + \mu y(x) = 0, \quad y'(0) - \gamma y(0) = 0, \quad y(l) = 0 \quad (\gamma > 0). \quad (3.18)$$

Загальний розв'язок рівняння має вигляд

$$y(x, 0) = C_0 + D_0 x, \quad y(x, \mu) = C e^{\sqrt{-\mu} x} + D e^{-\sqrt{-\mu} x}.$$

Задовольняючи задані крайові умови, отримаємо дві однорідні системи для визначення сталих C_0, D_0 (випадок $\mu = 0$) і C, D (випадок $\mu \neq 0$)

$$\begin{cases} -\gamma C_0 + D_0 = 0, \\ C_0 + D_0 l = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \sqrt{-\mu}(C - D) - \gamma(C + D) = 0, \\ C e^{\sqrt{-\mu} l} + D e^{-\sqrt{-\mu} l} = 0. \end{cases}$$

Очевидно, що перша система має лише тривіальний розв'язок $C_0 = D_0 = 0$. Розв'язуючи другу систему, знову, як і в попередньому [Прикладі 9](#), отримаємо рівняння

$$\sqrt{-\mu} (e^{\sqrt{-\mu} l} + e^{-\sqrt{-\mu} l}) + \gamma (e^{\sqrt{-\mu} l} - e^{-\sqrt{-\mu} l}) = 0,$$

з усіма висновками, що з нього випливають: при $\mu < 0$ крайова задача не має власних значень і власних функцій; а при $\mu > 0$ ($\sqrt{-\mu} = i\sqrt{\mu}$) існує злічена множина власних значень вихідної задачі Штурма-Ліувілля $\mu_n, n \in \mathbb{N}$.

Цим власним значенням (кореням рівняння $\sqrt{\mu_n} = -\gamma \operatorname{tg} \sqrt{\mu_n} l$) відповідають такі власні функції (з точністю до константи)

$$\begin{aligned}
y_n(x) &= D \left(\frac{\sqrt{-\mu_n} + \gamma}{\sqrt{-\mu_n} - \gamma} \cdot e^{\sqrt{-\mu_n}x} + e^{-\sqrt{-\mu_n}x} \right) = \\
&= D \left[\sqrt{-\mu_n} (e^{\sqrt{-\mu_n}x} + e^{-\sqrt{-\mu_n}x}) + \gamma (e^{\sqrt{-\mu_n}x} - e^{-\sqrt{-\mu_n}x}) \right] = \left| \sqrt{-\mu_n} = i\sqrt{\mu_n} \right| = \\
&= D^* \left(\sqrt{\mu_n} \cos \sqrt{\mu_n}x + \gamma \sin \sqrt{\mu_n}x \right), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3.19}
\end{aligned}$$

Ці власні функції ортогональні на відрізку $(0, l)$, як гармонічні функції, а їх квадрат норми такий

$$\begin{aligned}
\|y_n(x)\|^2 &= \int_0^l \left(\sqrt{\mu_n} \cos \sqrt{\mu_n}x + \gamma \sin \sqrt{\mu_n}x \right)^2 dx = \\
&= \int_0^l \left(\mu_n \cos^2 \sqrt{\mu_n}x + 2\gamma \sqrt{\mu_n} \sin \sqrt{\mu_n}x \cdot \cos \sqrt{\mu_n}x + \gamma^2 \sin^2 \sqrt{\mu_n}x \right) dx = \\
&= \left[\frac{\mu_n}{2} \left(x + \frac{1}{2\sqrt{\mu_n}} \sin 2\sqrt{\mu_n}x \right) - \gamma \cos^2 \sqrt{\mu_n}x + \frac{\gamma^2}{2} \left(x - \frac{1}{2\sqrt{\mu_n}} \sin 2\sqrt{\mu_n}x \right) \right]_0^l = \\
&= \frac{\mu_n}{2} \left(l + \frac{1}{2\sqrt{\mu_n}} \sin 2\sqrt{\mu_n}l \right) + \gamma \left(1 - \cos^2 \sqrt{\mu_n}l \right) + \frac{\gamma^2}{2} \left(l - \frac{1}{2\sqrt{\mu_n}} \sin 2\sqrt{\mu_n}l \right) = \\
&= \left| \sqrt{\mu_n} = -\gamma \operatorname{tg} \sqrt{\mu_n}l \right| = \\
&= \frac{\mu_n}{2} \left(l - \frac{2 \sin \sqrt{\mu_n}l \cdot \cos \sqrt{\mu_n}l}{2\gamma \operatorname{tg} \sqrt{\mu_n}l} \right) + \gamma \left(1 - \cos^2 \sqrt{\mu_n}l \right) + \frac{\gamma^2}{2} \left(l + \frac{2 \sin \sqrt{\mu_n}l \cdot \cos \sqrt{\mu_n}l}{2\gamma \operatorname{tg} \sqrt{\mu_n}l} \right) = \\
&= \frac{\mu_n}{2} \left(l - \frac{\cos^2 \sqrt{\mu_n}l}{\gamma} \right) + \gamma \left(1 - \cos^2 \sqrt{\mu_n}l \right) + \frac{\gamma^2}{2} \left(l + \frac{\cos^2 \sqrt{\mu_n}l}{\gamma} \right) = \\
&= \frac{\mu_n}{2} \left[l - \frac{1}{\gamma} \left(\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \sqrt{\mu_n}l} \right) \right] + \gamma \left(1 - \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \sqrt{\mu_n}l} \right) + \frac{\gamma^2}{2} \left[l + \frac{1}{\gamma} \left(\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \sqrt{\mu_n}l} \right) \right] = \\
&= \frac{\mu_n}{2} \left[l - \frac{1}{\gamma} \left(\frac{1}{1 + \frac{\mu_n}{\gamma^2}} \right) \right] + \gamma \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{\mu_n}{\gamma^2}} \right) + \frac{\gamma^2}{2} \left[l + \frac{1}{\gamma} \left(\frac{1}{1 + \frac{\mu_n}{\gamma^2}} \right) \right] =
\end{aligned}$$

$$= \frac{\mu_n}{2} \left(l - \frac{\gamma}{\gamma^2 + \mu_n} \right) + \gamma \left(1 - \frac{\gamma^2}{\gamma^2 + \mu_n} \right) + \frac{\gamma^2}{2} \left(l + \frac{\gamma}{\gamma^2 + \mu_n} \right) = \frac{l(\mu_n + \gamma^2) + \gamma}{2}.$$

3.1. Властивості власних значень і власних функцій

З'ясуємо основні властивості задачі Штурма-Ліувілля (3.2)-(3.3)

$$\begin{aligned} [p(x)y']' - q(x)y + \mu p(x)y &= 0, \quad x \in (a, b) \\ \alpha_1 y'(a) + \beta_1 y(a) &= \alpha_2 y'(b) + \beta_2 y(b) = 0. \end{aligned} \quad (3.20)$$

які витікають із загальної теорії лінійних диференціальних операторів⁶.

1. Якщо диференціальне рівняння

$$L[y] = 0, \quad (L[y] \equiv p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y)$$

за крайових умов

$$l_v[y] = 0, \quad (v = \overline{1, m}),$$

$$(l[y] \equiv \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) + \dots + \alpha_{n-1} y^{(n-1)}(a) + \beta_0 y(b) + \dots + \beta_{n-1} y^{(n-1)}(b))$$

має лише тривіальний розв'язок, то:

а) однорідна крайова задача

$$L[y] = \mu y, \quad l_v[y] = 0 \quad (3.21)$$

має не більш ніж злічену множину власних значень $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots$, які не мають скінченної граничної точки;

б) для всіх значень μ , відмінних від власних, неоднорідна крайова задача $L[y] = \mu y + f$, $l_v[y] = 0$ має розв'язок для будь-якої неперервної функції $f(x)$.

Упорядкована сукупність власних значень утворює спектр задачі Ш-Л (дискретний або неперервний), обмежений знизу і необмежений зверху.

Перша теорема Штурма про порівняння: чим більшою є величина μ , тим ближче один до одного лежать нулі функції $y(x)$, у припущенні, що $p(x)$ і $\rho(x)$ всюди додатні в інтервалі $a < x < b$ (див. рисунки до Прикладів 7 і 8).

2. Власні значення самоспряженого оператора $L[y]$, що утворюють спектр, дійсні.

Це ті значеннями параметра μ , при яких однорідна крайова задача (3.21) має нетривіальні розв'язки, які є відповідними власними функціями.

Доведення. Доведемо, що оператор Штурма-Ліувілля (3.2)

$$L[y(x)] = [p(x)y'(x)]' - q(x)y(x)$$

– самоспряжений. Умовою самоспряженості є тотожність $(Lu, v) = (u, Lv)$.

⁶ Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. – М.: Наука, 1969.

Означення. Скалярний добуток двох функцій, заданих на проміжку $[a, b]$ неперервних, двічі диференційованих і таких, що задовольняють крайові умови (3.3a), (3.3b)

$$\alpha_1 y'(a) + \beta_1 y(a) = 0, \quad \alpha_2 y'(b) + \beta_2 y(b) = 0$$

визначається як

$$(u, v) = \int_a^b u(x)v(x)dx.$$

Обчислимо:

$$\begin{aligned} (Lu, v) &= \int_a^b \left\{ [p(x)u'(x)]' - q(x)u(x) \right\} v(x)dx = \underbrace{\int_a^b [p(x)u'(x)]' v(x)dx}_{\text{інтегруємо частинами}} - \int_a^b q(x)u(x)v(x)dx = \\ &= \left| \begin{array}{l} U = v(x), \quad dU = v'(x)dx \\ dV = [\dots]' dx, \quad V = [\dots] \end{array} \right| = p(x)u'(x)v(x) \Big|_a^b - \underbrace{\int_a^b p(x)u'(x)v'(x)dx}_{\text{інтегруємо частинами}} - \int_a^b q(x)u(x)v(x)dx = \\ &= \left| \begin{array}{l} U = p(x)v'(x), \quad dU = (p(x)v'(x))' dx \\ dV = y'(x)dx, \quad V = y(x) \end{array} \right| = p(x)u'(x)v(x) \Big|_a^b - p(x)u(x)v'(x) \Big|_a^b + \\ &+ \int_a^b [p(x)v'(x)]' u(x)dx - \int_a^b q(x)u(x)v(x)dx = \cancel{p(b)u'(b)v(b)} - \cancel{p(a)u'(a)v(a)} - \\ &- \cancel{p(b)u(b)v'(b)} + \cancel{p(a)u(a)v'(a)} + \int_a^b \left\{ [p(x)v'(x)]' - q(x)v(x) \right\} u(x)dx = (u, Lv). \end{aligned}$$

Тут ми скористалися крайовими умовами, які утворюють однорідну систему двох рівнянь для кожної з функцій $u(x)$ і $v(x)$. У кожній з точок a і b окремо, маємо:

$$\begin{cases} \alpha_1 u'(a) + \beta_1 u(a) = 0, \\ \alpha_2 v'(a) + \beta_2 v(a) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} u'(a) & u(a) \\ v'(a) & v(a) \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow u'(a)v(a) = u(a)v'(a),$$

$$\begin{cases} \alpha_1 u'(b) + \beta_1 u(b) = 0, \\ \alpha_2 v'(b) + \beta_2 v(b) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} u'(b) & u(b) \\ v'(b) & v(b) \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow u'(b)v(b) = u(b)v'(b).$$

Таким чином, оскільки, $p(x)$ і $q(x)$ – дійсні функції, то оператор $L[y]$ – дійсний і симетричний, тобто *самоспряжений*.

Наслідок. Власні значення оператора Штурма-Ліувілля *дійсні*.

3. Власні функції $y_m(x)$ і $y_n(x)$, що відповідають різним власним значенням ($\mu_m \neq \mu_n$), ортogonalні з вагою $\rho(x)$ на відріжку $[a, b]$

$$(y_m, y_n) \equiv \int_a^b \rho(x)y_m(x)y_n(x)dx = 0, \quad m \neq n. \quad (3.22)$$

Доведення. Дійсно, нехай функції $y_m(x)$ і $y_n(x)$ задовольняють рівняння

$$(py'_m)' - qy_m + \mu_m \rho y_m = 0, \quad (py'_n)' - qy_n + \mu_n \rho y_n = 0.$$

Помножимо перше рівняння на y_n , друге – на y_m і віднімемо їх одне від одного. В результаті отримаємо

$$y_n(py'_m)' - y_m(py'_n)' = (\mu_n - \mu_m)\rho y_m y_n.$$

Не складно помітити, що ліва частина рівності є повна похідна

$$\frac{d}{dx}[p(y'_m y_n - y_m y'_n)] = (\mu_n - \mu_m)\rho y_m y_n,$$

тому, інтегруючи по відрізку $[a, b]$, матимемо

$$p(y'_m y_n - y_m y'_n) \Big|_a^b = (\mu_n - \mu_m) \int_a^b \rho y_m y_n dx. \quad (3.23)$$

Граничні умови (2.16) для функцій $y_m(x)$ і $y_n(x)$ утворюють однорідні системи алгебраїчних рівнянь з невідомими α_i і β_i ($i = 1, 2$):

$$\begin{cases} \alpha_1 y'_m(a) + \beta_1 y_m(a) = 0, \\ \alpha_2 y'_n(a) + \beta_2 y_n(a) = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_1 y'_m(b) + \beta_1 y_m(b) = 0, \\ \alpha_2 y'_n(b) + \beta_2 y_n(b) = 0. \end{cases}$$

За умовою α_i і β_i одночасно в нуль не обертаються, отже, системи мають нетривіальні розв'язки, а їх визначники (а це ліва частина рівності (3.23)) дорівнюють нулю. Отже, дорівнює нулю і права частина (3.23). Оскільки $\mu_n \neq \mu_m$, то справедливе і співвідношення (3.22).

Зауваження 3. Якщо граничні умови змінюються із зміною власних значень μ , то система власних функцій не є ортогональною.

4. Множина власних функцій $\{y_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ задачі III-Л є повною, що фактично означає розвинення будь-якої функції $f(x)$ з області визначення самоспряженого диференціального оператора в рівномірно збіжний ряд Фур'є за власними функціями цього оператора

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n y_n(x) \quad (3.24)$$

Твердження повноти власних функцій доводиться у курсі функціонального аналізу. Область визначення диференціального оператора n -го порядку складається з усіх функцій, які мають на даному інтервалі неперервні похідні до n -го порядку включно і задовольняють крайові умови, що породжують даний оператор.

Зазначимо спосіб знаходження коефіцієнтів C_n . Помножимо рівність (3.24) на $\rho(x)y_m(x)$ зліва і справа, і проінтегруємо по проміжку (a, b) . З урахуванням властивості ортогональності функцій $y_m(x)$ і $y_n(x)$ отримаємо:

$$C_m = \frac{1}{\|y_m\|^2} \int_a^b \rho(x) f(x) y_m(x) dx, \quad (3.25)$$

де $\|y_m\|^2 = \int_a^b \rho(x) |y_m(x)|^2 dx$ – нормуючий множник, або квадрат норми функції.

Зважаючи на лінійність й однорідність задачі Ш-Л її розв'язок визначається з точністю до сталого множника (див. п. 3, формула (3.8)). Цей множник вибирають так, щоб нормуючий множник дорівнював заданому числу (зазвичай рівному одиниці). Тоді система власних функцій задачі Ш-Л називається *ортонормованою*. Умову ортонормованості записують як

$$(y_m, y_n) = \int_a^b \rho(x) y_m(x) y_n(x) dx = \delta_{mn} = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ 1, & m = n. \end{cases}$$

Сформульовані властивості можуть бути виведені також з теорії інтегральних рівнянь. В розглянутому випадку достатньо встановити еквівалентність регулярної задачі (3.21) та інтегрального рівняння Фредгольма 2-го роду

$$y(x) = \mu \int_a^b K(x, s) y(s) ds + f(x). \quad (3.26)$$

Потрібна еквівалентність витікає з наступної теореми:

Теорема. Якщо $\mu \neq 0$ не є власним значенням задачі Штурма-Ліувілля (3.20), то для того, щоб функція $y(x) \in C^2[a, b]$ була розв'язком цієї задачі, необхідно і достатньо, щоб вона була розв'язком інтегрального рівняння (3.26), де $K(x, s) = G(x, s)$ – функція Гріна однорідної задачі $L[y(x)] = f(x)$, $l_a[y] = l_b[y] = 0$.

Отже, якщо виконуються умови регулярності, то властивості власних значень і власних функцій задачі Штурма-Ліувілля (3.20) збігаються з властивостями рівняння Фредгольма (3.26) з симетричним ядром. Укажемо ці властивості:

- 1) Існує нескінченна послідовність дійсних власних значень, які задовольняють нерівності $\mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_n < \dots \rightarrow \infty$.
- 2) Кожному власному значенню μ_n відповідає єдина (з точністю до сталого множника) ненульова власна функція $y_n(x)$.

Доведення. Припустимо, що $u = \varphi(x)$ і $v = \psi(x)$ – дві власні функції, що відповідають одному власному значенню λ_k . Достатньо довести їх лінійну залежність.

Оскільки функції u і v відповідають одному власному значенню λ_k , то на проміжку $[a, b]$ маємо дві тотожності, кожен з яких домножимо на протилежну функцію

$$[p(x)u'(x)]' - q(x)u(x) = -\lambda_k \rho(x)u(x) \quad | \cdot v(x)$$

$$[p(x)v'(x)]' - q(x)v(x) = -\lambda_k \rho(x)v(x) \quad | \cdot u(x)$$

і віднімемо від першої рівності другу:

$$v(x)[p(x)u'(x)]' - u(x)[p(x)v'(x)]' = 0.$$

Отримане співвідношення згортається до повної похідної

$$\{v(x)[p(x)u'(x)] - u(x)[p(x)v'(x)]\}' = 0,$$

звідки

$$v(x)[p(x)u'(x)] - u(x)[p(x)v'(x)] = \text{Const},$$

або

$$p(x)[u'(x)v(x) - u(x)v'(x)] = \text{Const}, \quad x \in [a, b].$$

Оскільки функції u і v задовольняють крайові умови в кожній із точок a і b , то

$$\begin{cases} \alpha_1 u'(a) + \beta_1 u(a) = 0, \\ \alpha_2 v'(a) + \beta_2 v(a) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} u'(a) & u(a) \\ v'(a) & v(a) \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow u'(a)v(a) - u(a)v'(a) = 0.$$

Функціональний визначник рівний нулю, значить функції $u(x)$ і $v(x)$ – лінійно залежні, тобто $u(x) = C v(x)$ на $[a, b]$.

3) Власні функції $y_n(x)$ і $y_m(x)$, що відповідають різним власним значенням μ_n і μ_m , *ортogonalні* на відрізку $[a, b]$ з ваговим множником $\rho(x)$, тобто задовольняють співвідношення (3.22).

4) Якщо крайові умови такі, що $\rho(x)u(x)u'(x)|_a^b \leq 0$, то всі власні значення невід'ємні.

Якщо функція q невід'ємна ($q \geq 0$), то всі власні значення невід'ємні ($\mu_n \geq 0$), тому доречно покласти $\mu_n = \lambda_n^2$. Якщо функція q обмежена знизу додатнім числом, то всі власні значення додатні.

5) Теорема Стеклова. Якщо функція $\varphi(x) \in C^2[a, b]$ задовольняє крайові умови $l_a[y] = l_b[y] = 0$, то вона розкладається в рівномірно й абсолютно збіжний ряд Фур'є за власними функціями задачі (3.20).

Ця властивість має неабияке значення для розв'язання крайових задач математичної фізики. Адже будь-яка функція, задана в якості початкової умови, може бути на основі цієї властивості подана у вигляді ряду, що збігається. Коефіцієнти ряду легко визначаються, якщо скористатися властивістю ортогональності власних функцій.

3.2. Стандартні задачі Штурма-Ліувілля

Задача Штурма-Ліувілля розв'язується особливо просто в тих випадках, коли рівняння (3.20) може бути проінтегроване при певному значенні μ в скінченному виді. Наведемо низку найпоширеніших задач Штурма-Ліувілля з крайовими умовами першого (I), другого (II) та третього (III) роду.

$$(I-I) \quad y''(x) + \mu y(x) = 0, \quad y(0) = y(l) = 0. \quad (3.27.1)$$

Власні значення $\mu_n = \lambda_n^2$, $\lambda_n = \frac{\pi n}{l}$ ($n = \overline{1, \infty}$). Кожному власному значенню відповідає єдина (з точністю до константи) власна функція $y_n(x) = \sin \lambda_n x$.

$$(I-II) \quad y''(x) + \mu y(x) = 0, \quad y(0) = y'(l) = 0. \quad (3.27.2)$$

Власні значення $\mu_n = \lambda_n^2$, $\lambda_n = \frac{\pi(2n-1)}{2l}$; власні функції $y_n = \sin \lambda_n x$ ($n = \overline{1, \infty}$).

$$(II-I) \quad y''(x) + \mu y(x) = 0, \quad y'(0) = y(l) = 0. \quad (3.27.3)$$

Власні значення $\mu_n = \lambda_n^2$, $\lambda_n = \frac{\pi(2n-1)}{2l}$; власні функції $y_n = \cos \lambda_n x$ ($n = \overline{1, \infty}$).

$$(II-II) \quad y'' + \mu y(x) = 0, \quad y'(0) = y'(l) = 0. \quad (3.27.4)$$

Власні значення $\mu_n = \lambda_n^2$, $\lambda_n = \frac{\pi n}{l}$; власні функції $y_n(x) = \cos \lambda_n x$ ($n = \overline{1, \infty}$).

Власному числу $\mu_0 = 0$ відповідає власна функція $y_0(x) \equiv 1$.

Зауваження 4. В кожній з наведених задач Штурма-Ліувілля з крайовими умовами першого (I) та другого (II) роду власні функції ортогональні одна одній з вагою $\rho(x) = 1$ на відрізка $[0, l]$ і мають однаковий квадрат норми $\|y_n(x)\|^2 = \frac{l}{2}$.

$$(I-III) \quad y''(x) + \mu y(x) = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(l) + \gamma y(l) = 0 \quad (\gamma > 0). \quad (3.28.1)$$

Власні значення $\mu_n = \lambda_n^2$ – розв'язки рівняння $\sqrt{\mu_n} = -\gamma \operatorname{tg} \sqrt{\mu_n} l$;

власні функції $y_n(x) = \sin \lambda_n x$, $n \in \mathbb{N}$; квадрат норми $\|y_n(x)\|^2 = \frac{l(\lambda_n^2 + \gamma^2) + \gamma}{2(\lambda_n^2 + \gamma^2)}$.

$$(II-III) \quad y''(x) + \mu y(x) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y'(l) + \gamma y(l) = 0 \quad (\gamma > 0). \quad (3.28.2)$$

Власні значення $\mu_n = \lambda_n^2$ – розв'язки рівняння $\gamma = \sqrt{\mu_n} \operatorname{tg} \sqrt{\mu_n} l$;

власні функції $y_n(x) = \cos \lambda_n x$, $n \in \mathbb{N}$; квадрат норми $\|y_n(x)\|^2 = \frac{l(\lambda_n^2 + \gamma^2) + \gamma}{2(\lambda_n^2 + \gamma^2)}$.

$$(III-I) \quad y''(x) + \mu y(x) = 0, \quad y'(0) - \gamma y(0) = 0, \quad y(l) = 0 \quad (\gamma > 0). \quad (3.28.3)$$

Власні значення $\mu_n = \lambda_n^2$ – розв’язки рівняння $\sqrt{\mu_n} = -\gamma \operatorname{tg} \sqrt{\mu_n} l$;

власні функції $y_n(x) = \lambda_n \cos \lambda_n x + \gamma \sin \lambda_n x, \quad n \in \mathbb{N}$;

квадрат норми $\|y_n(x)\|^2 = \frac{l(\lambda_n^2 + \gamma^2) + \gamma}{2}$.

$$(III-II) \quad y''(x) + \mu y(x) = 0, \quad y'(0) - \gamma y(0) = 0, \quad y'(l) = 0 \quad (\gamma > 0). \quad (3.28.4)$$

Власні значення $\mu_n = \lambda_n^2$ – розв’язки рівняння $\gamma = \sqrt{\mu_n} \operatorname{tg} \sqrt{\mu_n} l$;

власні функції $y_n(x) = \lambda_n \cos \lambda_n x + \gamma \sin \lambda_n x, \quad n \in \mathbb{N}$;

квадрат норми $\|y_n(x)\|^2 = \frac{l(\lambda_n^2 + \gamma^2) + \gamma}{2}$.

$$(III-III) \quad y''(x) + \mu y(x) = 0, \quad y'(0) - \gamma_1 y(0) = 0, \quad y'(l) + \gamma_2 y(l) = 0 \quad (\gamma_1, \gamma_2 > 0). \quad (3.28.5)$$

Власні значення $\mu_n = \lambda_n^2$ – розв’язки рівняння $\gamma_1 + \gamma_2 = \left(\sqrt{\mu_n} - \frac{\gamma_1 \gamma_2}{\sqrt{\mu_n}} \right) \cdot \operatorname{tg} \sqrt{\mu_n} l$;

власні функції $y_n(x) = \lambda_n \cos \lambda_n x + \gamma_1 \sin \lambda_n x, \quad n \in \mathbb{N}$;

квадрат норми $\|y_n(x)\|^2 = \frac{l(\lambda_n^2 + \gamma_1^2)^2(\lambda_n^2 + \gamma_2^2) + (\gamma_1 + \gamma_2)(\lambda_n^2 + \gamma_1^2)(\lambda_n^2 + \gamma_1 \gamma_2)}{2(\lambda_n^2 + \gamma_1^2)(\lambda_n^2 + \gamma_2^2)},$

а якщо $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$, то $\|y_n(x)\|^2 = \frac{l(\lambda_n^2 + \gamma^2) + 2\gamma}{2}$.

Зауваження 5. В кожній з наведених задач Штурма–Ліувілля з крайовими умовами першого (I), другого (II) та третього (III) роду власні функції ортогональні одна одній з вагою $\rho(x) = 1$ на відрізку $[0, l]$, але в залежності від умов розрізняються квадратами норм.

Задачі для самостійного розв’язування до розділу 3

1. Знайти власні числа та власні функції задачі Штурма–Ліувілля і побудувати графіки перших трьох власних функцій:

a) $y''(x) + \lambda^2 y(x) = 0, \quad y\left(\frac{1}{2}\right) = y'\left(\frac{3}{2}\right) = 0;$

b) $y''(x) + \lambda^2 y(x) = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = y'\left(\frac{5\pi}{4}\right) = 0;$

c) $y''(x) + \lambda^2 y(x) = 0, \quad y'(1) = y(5) = 0;$

$$d) \quad y''(x) + \lambda^2 y(x) = 0, \quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = y\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 0;$$

$$e) \quad y''(x) + \lambda^2 y(x) = 0, \quad y'\left(\frac{3}{2}\right) = y(2) = 0;$$

$$f) \quad y''(x) + \lambda^2 y(x) = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

2. Знайти власні числа та власні функції задачі Штурма-Ліувілля і побудувати графіки перших трьох власних функцій:

$$a) \quad y''(x) + 2y'(x) + \mu y(x) = 0, \quad y(0) = y(l) = 0;$$

$$b) \quad y''(x) - y'(x) + \mu y(x) = 0, \quad y(0) = y(1) = 0;$$

$$c) \quad x^2 y''(x) + xy' + \mu y(x) = 0, \quad y(0) = y(l) = 0;$$

$$d) \quad y''(x) + \lambda y(x) = 0, \quad y(-l) = y(l) = 0.$$

3. Розв'язати задачі Штурма-Ліувілля (3.27.1)- 3.27.4) і (3.28.1)-(3.28.5), якщо:

$$a) \quad x \in [a, b];$$

$$b) \quad x \in [-1, 1].$$

4. Розв'язком задачі Штурма-Ліувілля з періодичними граничними умовами

$$y''(x) + \mu y(x) = 0, \quad y(l) = y(-l), \quad y'(l) = y'(-l)$$

є власні значення $\mu_n = \lambda^2 = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$, ($n = \overline{1, \infty}$). Числу $\mu_0 = 0$ відповідає власна функція $y_0(x) \equiv 1$; кожному μ_n ($n \geq 1$) відповідають дві власні функції $y_n^{(1)}(x) = \cos \lambda_n x$ і $y_n^{(2)}(x) = \sin \lambda_n x$.

Переконатися в правильності цього розв'язку і пояснити результат (чи немає тут протиріччя з наведеними вище властивостями?)

Відповіді до задач

$$1. a) \quad y_n(x) = \sin \frac{(2n+1)\pi}{2} \left(x - \frac{1}{2}\right), \quad \lambda_n = \frac{(2n+1)\pi}{2} \quad (n = \overline{1, \infty});$$

$$b) \quad y_n(x) = \sin \frac{2(2n+1)}{3} \left(x - \frac{\pi}{2}\right), \quad \lambda_n = \frac{2(2n+1)}{3} \quad (n = \overline{1, \infty});$$

$$c) \quad y_n(x) = \cos \frac{(2n-1)\pi}{8} (x-1), \quad \lambda_n = \frac{(2n-1)\pi}{8} \quad (n = \overline{1, \infty});$$

$$d) \quad y_n(x) = \cos 2(2n+1) \left(x - \frac{\pi}{2}\right), \quad \lambda_n = 2(2n+1) \quad (n = \overline{1, \infty});$$

$$\text{e) } y_n(x) = \cos(2n+1)\pi\left(x - \frac{3}{2}\right), \quad \lambda_n = (2n+1)\pi \quad (n = \overline{1, \infty});$$

$$\text{f) } y_n(x) = \sin 2(2n+1)\left(x - \frac{\pi}{4}\right), \quad \lambda_n = 2(2n+1) \quad (n = \overline{1, \infty}).$$

$$2. \text{ a) } y_n(x) = e^{-x} \sin \frac{\pi n x}{l}, \quad \mu_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 + 1 \quad (n = \overline{1, \infty});$$

$$\text{b) } y_n(x) = e^{x/2} \sin \pi n x, \quad \mu_n = (n\pi)^2 + \frac{1}{4} \quad (n = \overline{1, \infty});$$

$$\text{c) } y_n(x) = \sin \lambda_n \ln x, \quad \mu_n = \lambda_n^2 = \left(\frac{n\pi}{\ln l}\right)^2 \quad (n = \overline{1, \infty});$$

$$\text{d) } y_n(x) = \frac{1}{\sqrt{l}} \sin \frac{\pi n(x+l)}{2l}, \quad \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{2l}\right)^2 \quad (n = \overline{1, \infty}); \text{ Зручно зробити заміну } z = x + l.$$

Література

1. Герасимчук В.С. Методи математичної фізики: Частина 1. Вступ до теорії диференціальних рівнянь у частинних похідних [Електронний ресурс]: навч. посіб. для студ. спеціальностей 104 Фізика та астрономія, 111 Математика / КПІ ім. Ігоря Сікорського; уклад.: В.С. Герасимчук. – Електронні текстові дані. – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. – 25 с. – Доступ: <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/46092>
2. Герасимчук В.С. Методи математичної фізики: Частина 2. Математичні моделі деяких поширених фізичних процесів [Електронний ресурс]: навч. посіб. для студ. спеціальностей 104 Фізика та астрономія, 111 Математика / КПІ ім. Ігоря Сікорського; уклад.: В.С. Герасимчук. – Електронні текстові дані. – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2022. – 38 с. – Доступ: <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/46095>
3. Tikhonov A.N. and Samarskiĭ A.A. Equations of mathematical physics. – Courier Corporation, 2013. – 800 p.
4. Перестюк М.О., Маринець В.В. Теорія рівнянь математичної фізики. – Київ: Либідь, 2001. – 333 с.
5. Шалдырван В.А., Герасимчук В.С. Методы математической физики. – М.: Вузовская книга, 2006. – 512 с.
6. Івасишен С.Д., Лавренчук В.П., Івасюк Г.П., Рева Н.В. Основи класичної теорії рівнянь математичної фізики. – Чернівці: Вид. дім «Родовід», 2015. – 358 с.
7. Вірченко Н.О. Основні методи розв'язання задач математичної фізики. – К.: Інрес: Воля, 2006. – 332 с.
8. Журавська Г.В., Качаєнко О.Б., Кузьма О.В., Рева Н.В., Стогній В.І. Методи розв'язування задач математичної фізики: навч. посіб. для інженер. спец. – К.: НТУУ «КПІ», 2015. – 228 с. – Доступ: <https://ela.kpi.ua/handle/123456789/19879>
9. Герасимчук В.С., Васильченко Г.С., Кравцов В.І. *Вища математика. Повний курс у прикладах і задачах*. Невизначений, визначений та невластні інтеграли. Звичайні диференціальні рівняння. Прикладні задачі. Навч. посіб. – Вид. 2-е, випр. – К.: Книги України ЛТД, 2014. – 470 с.
10. Герасимчук В.С., Васильченко Г.С., Кравцов В.І. *Вища математика. Повний курс у прикладах і задачах*. Кратні, криволінійні та поверхневі інтеграли. Елементи теорії поля. Ряди. Прикладні задачі. Навч. посіб. – Вид. 2-е, випр. – К.: Книги України ЛТД, 2014. – 400 с.

11. Герасимчук В.С., Васильченко Г.С., Кравцов В.І. *Вища математика. Повний курс у прикладах і задачах*. Лінійна й векторна алгебра. Аналітична геометрія. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне числення функції однієї та багатьох змінних. Прикладні задачі. Навч. посіб. – Вид. 2-е, випр. – К.: Книги України ЛТД, 2014. – 578 с.

Зміст

1. Розв’язування першої мішаної задачі методом Фур’є	3
1.1. Розв’язування першої мішаної задачі для хвильового рівняння	4
1.2. Розв’язування першої мішаної задачі для рівняння теплопровідності	17
1.3. Обґрунтування розв’язання мішаних крайових задач	20
1.4. Приклад розв’язування крайової задачі	25
1.5. Однорідна мішана задача або повздовжні коливання стержня	29
1.6. Задачі для самостійного розв’язування до розділу 1	33
2. Крайові задачі для звичайних ДР другого порядку	35
2.1. Самоспряжені ДР другого порядку	36
2.2. Постановка спектральних задач	37
3. Задача Штурма-Ліувілля без особливої точки	39
3.1. Властивості власних значень і власних функцій	48
3.2. Стандартні задачі Штурма-Ліувілля	53
3.3. Задачі для самостійного розв’язування до розділу 3	55