МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
Фізико-технічний інститут

$$i^i = e^{\frac{\pi(2n-1)}{2}}, \ \operatorname{Arccos} 2 = 2\pi n \pm i \ln(2+\sqrt{3}), \ n \in Z$$

П. О. Наказной

Комплексний аналіз
Збірник задач

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_C \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi$$

КИЇВ 2021

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
ІМЕНІ ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

П. О. Наказной

КОМПЛЕКСНИЙ АНАЛІЗ
ЗБІРНИК ЗАДАЧ

Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра
за освітньо-професійною програмою «Прикладна фізика»
спеціальності 105 «Прикладна фізика та наноматеріали»

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2021

УДК 517.53(075.8)

Рецензент: Е. В. Горбар, д.ф.-м.н., проф. каф. квантової теорії поля КНУ імені Тараса Шевченка

Відповідальний редактор: С. А. Смирнов, к.ф.-м.н., голова методичної комісії ФТІ

Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського (протокол №6 від 25.02.21) за поданням Вченої ради Фізико-технічного інституту (протокол №1 від 11.01.2021)

Електронне мережне навчальне видання

Наказной Павло Олександрович

КОМПЛЕКСНИЙ АНАЛІЗ
ЗБІРНИК ЗАДАЧ

Комплексний аналіз. Збірник задач [Електронний ресурс]: навч. посіб. для студ. спеціальності 105 «Прикладна фізика та наноматеріали» / П. О. Наказной; КПІ ім. Ігоря Сікорського. — Електронні текстові дані (1 файл: 292 кБ). — Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. – 48 с.

Наведено 418 задач з курсу «Комплексний аналіз». Задачі різного рівня складності охоплюють теми комплексного аналізу, які необхідно засвоїти кожному майбутньому фізику та деякі їх застосунки до задач різних розділів математики та фізики. До задач на обчислення подано відповіді.

Для студентів Фізико-технічного інституту КПІ ім. Ігоря Сікорського, які навчаються за освітньо-професійною програмою «Прикладна фізика» спеціальності 105 «Прикладна фізика та наноматеріали».

Верстка тексту проведена в видавничій системі $\LaTeX\,2_\varepsilon$ (компілятор XƎLaTeX).

Оглавление

Передмова

Теорія функцій комплексної змінної (ТФКЗ) або по-іншому комплексний аналіз є потужним математичним апаратом, що з необхідністю використовується у різних розділах фізики: квантовій механіці та теорії поля, електриці, оптиці тощо. Тому її вивчення є обов'язковим кроком у розвитку не лише майбутніх математиків, але й фізиків та інженерів.

У даному задачнику наведено 418 задач з теорії функцій комплексної змінної та відповіді до них. Більшість задач узято із класичних задачників та підручників (див. список літератури), деякі складені упорядником. Вони підібрані за результатами викладання даного курсу у студентів спеціальності «Прикладна фізика та наноматеріали» Фізико-технічного інституту КПІ ім. Ігоря Сікорського та покликані допомагати у послідовному засвоєнні матеріалу в необхідному для фізиків обсязі.

У задачнику присутні задачі з тем «ряди Фур'є» та «перетворення Фур'є», які історично вивчаються в курсі ТФКЗ у ФТІ та, навпаки, відсутні з тем «перетворення Лапласа» та «комформні перетворення», а також обмаль на інтегрування методом лишків багатозначних функцій, оскільки, у зв'язку із браком часу, дані теми пропускались під час викладання, як найбільш специфічні у стандартних університетських курсах ТФКЗ. Тем не менш, в задачнику наведено задач більше ніж зазвичай можна розглянути на практичних заняттях. Це дозволить викладачу обрати ті з них що відповідають часовим можливостям та мірі засвоєння матеріалу під час вивчення даної дисципліни, а інші віднести до факультативного або самостійного опанування зацікавленими студентами. Деякі задачі, що вимагають для свого розв'язку громіздких обчислень або нестандартного підходу, помічені зірочкою та можуть бути пропущені без шкоди для розуміння подальшого матеріалу. Вважається що студенти, які розпочинають роботу над збірником, вже опанували основні поняття математичного аналізу. Тем не менш, деякі основні формули наведено у додатку.

Упорядник хоче висловити подяки доценту кафедри фізико-енергетичних систем С. М. Пономаренку за допомогу у верстці цього видання та доценту кафедри інформаційної безпеки Г. О. Южаковій за поради під час роботи над збірником.

Тема №1 | Комплексні числа та дії над ними

Число $z = x + iy$, $x, y \in R$, $i^2 = -1$ *називається комплексним якщо:*
1. $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$
2. $z_1 \cdot z_2 = x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1)$.
При цьому $x \equiv \operatorname{Re} z$ *називається дійсною частиною,* $y \equiv \operatorname{Im} z$ *— уявною. Комплексні числа* z *з* $\operatorname{Im} z = 0$ *називаються дійсними, з* $\operatorname{Re} z = 0$ *— уявними. Число* $\overline{z} = x - iy$ *називається комплексно спряженим до* $z = x + iy$.

Окрім алгебраїчної форми $z = x + iy$ *комплексне число можна представити у тригонометричній формі* $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, *де* ρ, φ *— полярні координати точки, що має декартові координати* $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$ $(\rho \equiv |z| \geqslant 0, \varphi \in R)$, *причому, зважаючи на неоднозначність* φ *вводять поняття головного значення аргументу* $\arg z \in (-\pi, \pi]$. *Тоді множина всіх значень аргументів даного комплексного числа має вигляд:* $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi n$, $n \in Z$. *Формула Ойлера надає показникову форму комплексного числа:* $z = \rho\, e^{i\varphi}$.

Два комплексних числа z_1 *та* z_2 *рівні якщо* $x_1 = x_2, y_1 = y_2$ *або* $\rho_1 = \rho_2$, $\varphi_1 = \varphi_2 + 2\pi n$.

Коренем порядку $n \in N$ *з комплексного числа* z *називається множина* $\sqrt[n]{z}$ *всіх розв'язків* ω_k *рівняння* $\omega^n = z$. *Вона утворена елементами з* $\rho = \sqrt[n]{\rho}$, $\varphi_k = \dfrac{2\pi k}{n}$, $k = \overline{0, n-1}$.

Кубічне рівняння $y^3 + ay^2 + by + c = 0$ *за допомогою підстанови* $y = x - \dfrac{a}{3}$ *зводиться до вигляду* $x^3 + px + q = 0$. *Корені отриманого приведеного рівняння можуть бути обраховані за формулами Кардано:*

$$x_1 = u + v,\ x_{2,3} = \frac{1}{2}\left(-(u+v) \pm i\sqrt{3}(u-v)\right),$$

де через u та v позначені головні значення кубічних коренів ($k = 0$):

$$u, v = \left(-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}\right)^{1/3}.$$

Обрахувати:

1.1. $\left(1 + i\sqrt{3}\right)^3$ **1.2.** $\frac{1}{i}$ **1.3.** $\frac{2}{1 - 3i}$ **1.4.** $\frac{1 - i}{1 + i}$

1.5. $\frac{1}{(a + ib)^2} + \frac{1}{(a - ib)^2}$ **1.6.** $\frac{\sqrt{1 + x^2} + ix}{x - i\sqrt{1 + x^2}}$, $x \in R$

Розвинути на множники:

1.7. $\alpha^2 + \beta^2$ **1.8.*** $\alpha^3 + \beta^3$

Знайти дійсні значення x, y за яких

1.9. $(3x - i)(2 + i) + (x - iy)(1 + 2i) = 5 + 6i$

1.10. $(x - iy)(a - ib) = i^5$, $\{a, b\} \subset R$

1.11. $z_1 = x^2 + 15iy^{15}$, $z_2 = 2x - 1 - 5iy^7, z_1 = \overline{z_2}$

Розв'язати рівняння:

1.12. $z|z| + 2z + i = 0$ **1.13.** $\frac{1}{z} + \frac{1}{a + ib} = 1$, $\{a, b\} \subset R$ **1.14.** $\frac{1}{z - i} + \frac{2 + i}{1 + i} = \sqrt{2}$

Знайти модуль, головне значення аргументу та представити число у показниковій формі:

1.15. 1 **1.16.** -1 **1.17.** i

1.18. $3i$ **1.19.** $-i$ **1.20.** -2

1.21. $bi,\ b \in R$

1.22. $1+i$

1.23. $1-i$

1.24. $-1+i$

1.25. $-1-i$

1.26. $-1-i\sqrt{3}$

1.27. $-\sqrt{2}+i\sqrt{2}$

1.28. $2+5i$

1.29. $2-5i$

1.30. $-2+5i$

1.31. $-2-5i$

1.32. $-\cos\dfrac{\pi}{8}-i\sin\dfrac{\pi}{8}$

1.33. $\sin\alpha-i\cos\alpha$, $0<\alpha<\pi$

1.34. $1-\sin\alpha+i\cos\alpha$, $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$

1.35. $\dfrac{1+\cos\alpha+i\sin\alpha}{1+\cos\alpha-i\sin\alpha}$, $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$

Знайти модуль та головне значення аргументу:

1.36. $z=e^{2+i}$

1.37. $z=e^{2-3i}$

1.38. $z=e^{3+4i}$

1.39. $z=e^{-3-4i}$

1.40. $z=e^{-i\varphi},\ |\varphi|\leqslant\pi$

1.41. $z=-ae^{-i\varphi},\ a>0, |\varphi|\leqslant\pi$

1.42. $z=e^{i\alpha}-e^{i\beta},\ 0\leqslant\beta<\alpha\leqslant\pi$

Довести:

1.43. $\left(\dfrac{1+i\operatorname{tg}\alpha}{1-i\operatorname{tg}\alpha}\right)^n=\dfrac{1+i\operatorname{tg}n\alpha}{1-i\operatorname{tg}n\alpha}$

1.44. $(\cos\alpha+x\sin\alpha)^n-\cos n\alpha-x\sin n\alpha \,\vdots\, x^2+1$ (многочлен у лівій частині ділиться без залишку на многочлен у правій частині)

Спростити:

1.45. $\sin 3\varphi$

1.46. $\cos 3\varphi$

1.47. $\sin 4\varphi$

1.48. $\cos 5\varphi$

Знайти:

1.49. $\sum\limits_{k=0}^{n}\cos kx$

1.50. $\sum\limits_{k=1}^{n}\sin kx$

1.51. $\sum\limits_{k=1}^{n}\sin(2k-1)x$

1.52. $\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\sin kx$

1.53. $\sum\limits_{k=0}^{n}\cos(\alpha+k\beta)$

Обрахувати:

1.54. $(\sqrt{3}-3i)^6$ **1.55.** $(2-2i)^7$ **1.56.** $\left(-1+i\sqrt{3}\right)^{60}$ **1.57.** $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^8$

1.58. $\frac{(1+i)^8}{(1-i)^6}$ **1.59.** $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{40}$

Розв'язати рівняння:

1.60. $\bar{z}=z^{n-1},\ n\in N,\ n\neq 2$

Знайти усі значення коренів та побудувати їх на координатній площині:

1.61. $\sqrt{i}$ **1.62.** $\sqrt[3]{1}$ **1.63.** $\sqrt[3]{i}$ **1.64.** $\sqrt[4]{1}$

1.65. $\sqrt[4]{-1}$ **1.66.** $\sqrt[4]{-i}$ **1.67.** $\sqrt[6]{-8}$ **1.68.** $\sqrt[8]{1}$

1.69. $\sqrt{2-2\sqrt{3}i}$ **1.70.** $\sqrt{1-i}$ **1.71.** $\sqrt[3]{-1-i}$ **1.72.** $\sqrt[3]{-2+2i}$

1.73. $\sqrt[4]{i(3+i\sqrt{3})}$

Знайти усі значення коренів без пошуку їх аргументів:

1.74*. $\sqrt{3+4i}$ **1.75*.** $\sqrt[3]{2+11i}$

Знайти розв'язки:

1.76. $x^2+x+1=0$ **1.79.** $x^3-15x-126=0$ **1.82.** $x^3-6x-40=0$

1.77. $x^6+2x^3-3=0$ **1.80.** $x^3+x^2+x-3=0$

1.78. $x^3-4x^2-4x-5=0$ **1.81.** $x^3-6x-4=0$ **1.83*.** $x^3-15x-4=0$

Тема №2 | Геометрія на комплексній площині

Формули додавання та множення на дійсне число комплексних чисел в алгебраїчній формі тотожні формулам для векторів у декартових координатах на площині. Це дозволяє зіставити комплексному числу z *вектор на так званій відкритій комплексній площині (або просто комплексній площині), що проведений з початку координат у точку з декартовими координатами* (x, y)*. Отриманий вектор має довжину* $|z|$ *та створює кут* $\arg z$ *з додатнім напрямком вісі* x*. Деякі співвідношення для комплексних чисел зручно доводити у векторному представленні.*

Комплексна площина з приєднаною нескінченно віддаленою точкою називається повною комплексною площиною. За допомогою променя, що з'єднує точку z *на комплексній площині та північний полюс сфери, яка дотикається площини в точці* $z = 0$ *південним полюсом, здійснюється стереографічна проекція, яка встановлює еквівалентність між повною комплексною площиною та сферою. Нескінченно віддаленій точці при цьому відповідає північний полюс сфери.*

Довести геометрично та алгебраїчно (2.1-2.4), геометрично (2.5), алгебраїчно (2.6-2.7). З'ясувати коли має місце рівність:

2.1. $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$

2.2. $|z_1 - z_2| \geqslant ||z_1| - |z_2||$

2.3. $\left|\dfrac{z}{|z|} - 1\right| \leqslant |\arg z|$

2.4. $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2\left(|z_1|^2 + |z_2|^2\right)$

2.5. $|z - 1| \leqslant ||z| - 1| + |z||\arg z|$

2.6. $|1 - \overline{z_1} z_2|^2 - |z_1 - z_2|^2 = \left(1 - |z_1|^2\right)\left(1 - |z_2|^2\right)$

2.7. $|z_1 + z_2| \geqslant \dfrac{1}{2}\left(|z_1| + |z_2|\right)\left|\dfrac{z_1}{|z_1|} + \dfrac{z_2}{|z_2|}\right|$

Знайти область на площині, що задається співвідношенням:

2.8. $\operatorname{Re} z \geqslant C, \ C \in R$

2.9. $\operatorname{Im} z < C, \ C \in R$

2.10. $|z-1| \leqslant |z+1|$

2.11. $0 < \operatorname{Re}(iz) < 1$

2.12. $\alpha < \arg z < \beta,$ $(-\pi < \alpha < \beta \leqslant \pi)$

2.13. $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant \arg(z+1-i) \leqslant \dfrac{3}{4}\pi$

2.14. $|z-z_0| = R, |z-z_0| < R,$ $|z-z_0| > R$

2.15. $|z-2| + |z+2| = 5$

2.16. $|z-z_1| = |z-z_2|$

2.17. $|z-2| - |z+2| = 3, |z-2| - |z+2| > 3, |z-2| - |z+2| < 3$

2.18. $\operatorname{Im} z^2 = iC, \ C \in R$

2.19. $\operatorname{Im} \overline{(z^2-\bar{z})} = 2 - \operatorname{Im} z$

2.20. $\operatorname{Re} \left(z^2 - \bar{z}\right) = 0$

2.21. $z^2 + \bar{z}^2 = 1$

2.22. $\operatorname{Re} z^2 = C, \ C \in R$

2.23. $\operatorname{Im} z^2 = C, \ C \in R$

2.24. $|z| = \operatorname{Re} z + 1$

2.25. $2z\bar{z} + (2+i)z + (2-i)\bar{z} = 2$

2.26. $|z-2| = |1-2\bar{z}|$

2.27. $\operatorname{Re} \dfrac{1}{z} = C, \ C \in R$

2.28. $\operatorname{Im} \dfrac{1}{z} = C, \ C \in R$

2.29. $1 \leqslant |z+2+i| \leqslant 2$

2.30. $\dfrac{1}{4} < \operatorname{Re} \dfrac{1}{\bar{z}} + \operatorname{Im} \dfrac{1}{\bar{z}} < \dfrac{1}{2}$

Скільки розв‘язків має система рівнянь:

2.31. $\begin{cases} |z| = 2 \\ |z+2i| = 1 \end{cases}$

Визначити тип кривої на комплексній площині:

2.32. $z(t) = 2e^{it} + \dfrac{3}{e^{it}}$

2.33. $z(t) = \operatorname{tg} t - 2 + \dfrac{2i}{\cos t}$

2.34. $z(t) = 2 + \operatorname{ch} 2t - i(1 + \operatorname{ch} t)$

Тема №3 | Функції комплексної змінної

Околом або ε-околом точки z називається множина точок комплексної площини, що задовольняють умові $|z-a|<\varepsilon$.

Однозв'язною областю D на комплексній площині називається множина точок, якщо:

1. *в кожному околі будь-якої точки області є безліч точок цієї області*
2. *будь-які дві точки області можна з'єднати лінією, всі точки якої належать цій області .*

Точка називається межовою точкою області, якщо в будь-якому її околі є точки які належать області та які не належать. Сукупність всіх межових точок складає межу області. Сукупність області D та її межі утворює замкнену область $\overline{D}$. Додатнім напрямком обходу межі області називається той, при якому область знаходиться ліворуч.

Тригонометричними функціями комплексної змінної z називаються функції:

$$\sin z=\frac{1}{2i}\left(e^{iz}-e^{-iz}\right),\ \cos z=\frac{1}{2}\left(e^{iz}+e^{-iz}\right),\ \operatorname{tg} z=\frac{\sin z}{\cos z},\ \operatorname{ctg} z=\frac{\cos z}{\sin z}.$$

Гіперболічними функціями комплексної змінної z називаються функції:

$$\operatorname{sh} z=\frac{1}{2}\left(e^{z}-e^{-z}\right),\ \operatorname{ch} z=\frac{1}{2}\left(e^{z}+e^{-z}\right),\ \operatorname{th} z=\frac{\sin z}{\cos z},\ \operatorname{cth} z=\frac{\cos z}{\sin z}.$$

Арксинусом $\operatorname{Arcsin} z$ комплексної змінної z називається множина ω_k коренів рівняння $\sin\omega=z$. Інші обернені тригонометричні та гіперболічні функції вводяться аналогічно.

Логарифмом $\operatorname{Ln} z$ комплексної змінної $z=\rho\, e^{i\varphi}$ називається множина ω_k коренів рівняння $e^{\omega}=z$. Вона складається з елементів $\omega_k=\ln z+2\pi k i$, де $\ln z=\ln\rho+i\varphi$ — головне значення логарифму.

Довести:

3.1. $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$

3.2. $\sin z = \cos\left(\frac{\pi}{2} - z\right)$

3.3. $\sin(z_1 + z_2) =$
$= \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$

3.4. $\cos(z_1 + z_2) =$
$= \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$

3.5. $\operatorname{tg} 2z = \dfrac{2 \operatorname{tg} z}{1 - \operatorname{tg}^2 z}$

3.6. $\sin iz = i \operatorname{sh} z$

3.7. $\cos iz = \operatorname{ch} z$

3.8. $\operatorname{tg} iz = i \operatorname{th} z$

3.9. $\operatorname{ctg} iz = -i \operatorname{cth} z$

3.10. $\operatorname{Arcsin} z = -i \operatorname{Ln} i\left(z \pm \sqrt{z^2 - 1}\right)$

3.11. $\operatorname{Arccos} z = -i \operatorname{Ln}\left(z \pm \sqrt{z^2 - 1}\right) =$
$= \pm i \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right)$

3.12. $\operatorname{Arctg} z = \dfrac{i}{2} \operatorname{Ln} \dfrac{i + z}{i - z} =$
$= \dfrac{1}{2i} \operatorname{Ln} \dfrac{1 + iz}{1 - iz}$

3.13. $\operatorname{Arcctg} z = \dfrac{i}{2} \operatorname{Ln} \dfrac{z - i}{z + i}$

3.14. $\operatorname{Arsh} z = \operatorname{Ln}\left(z \pm \sqrt{z^2 + 1}\right)$

3.15. $\operatorname{Arch} z = \operatorname{Ln}\left(z \pm \sqrt{z^2 - 1}\right)$

3.16. $\operatorname{Arth} z = \dfrac{1}{2} \operatorname{Ln} \dfrac{1 + z}{1 - z}$

3.17. $\operatorname{Arcth} z = \dfrac{1}{2} \operatorname{Ln} \dfrac{z + 1}{z - 1}$

Виразити через функції дійсного аргументу від дійсної та уявної частин:

3.18. $\sin z$

3.19. $\cos z$

3.20. $\operatorname{tg} z$

3.21. $\operatorname{sh} z$

3.22. $\operatorname{ch} z$

3.23. $\operatorname{th} z$

Знайти:

3.24. $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - i \ln 2\right)$

3.25. $\operatorname{th}\left(\ln 3 + \frac{\pi i}{4}\right)$

3.26. $\operatorname{cth}(2 + i)$

3.27. $\operatorname{Ln} 4$

3.28. $\operatorname{Ln}(-1)$

3.29. $\operatorname{Ln} i$

3.30. $\operatorname{Ln} \dfrac{1 \pm i}{\sqrt{2}}$

3.31. $\operatorname{Ln}(2 - 3i)$

3.32. $\operatorname{Ln}(-2 + 3i)$

3.33. $\operatorname{Ln}\left(\dfrac{-1 - i\sqrt{3}}{2 + 2i}\right)$

3.34. $\operatorname{Arcsin} \dfrac{1}{2}$

3.35. $\operatorname{Arccos}\dfrac{1}{2}$

3.36. $\operatorname{Arccos}2$

3.37. $\operatorname{Arcsin}i$

3.38. $\operatorname{Arctg}(1+2i)$

3.39. $\operatorname{Arch}2i$

3.40. $\operatorname{Arth}(1-i)$

3.41. $1^{\sqrt{2}}$

3.42. 1^{-i}

3.43. 2^{i}

3.44. i^{i}

3.45. $(-2)^{\sqrt{2}}$

3.46. $\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{1+i}$

3.47. $(3-4i)^{1+i}$

3.48. $(-3+4i)^{1+i}$

3.49. $\left(-\sqrt{3}-i\right)^{2i-1}$

3.50. $\sqrt[i-1]{-\sqrt{3}+i}$

Розв'язати рівняння:

3.51. $\operatorname{Ln}(z+i)=0$

3.52. $\operatorname{Ln}(i-z)=1$

3.53. $e^{ix}=\cos\pi x,\ \ x\in R$

3.54. $\operatorname{ch}z-\operatorname{sh}z=1$

3.55. $\operatorname{sh}z-\operatorname{ch}z=2i$

3.56. $\cos z=\operatorname{ch}z$

3.57. $\sin z=i\operatorname{sh}z$

3.58. $\cos z=i\operatorname{sh}2z$

3.59. $\sin z+\cos z=2$

3.60. $\sin z-\cos z=3$

3.61. $2\operatorname{ch}z+\operatorname{sh}z=i$

3.62. $\sin z-\cos z=i$

Тема №4 | Аналітичні функції

Якщо дійсні функції $u(x,y)$ *та* $v(x,y)$ *диференційовані в точці* (x,y), *то однозначна функція комплексної змінної* $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ *називається* $R-$*диференційованою, причому* $df=\dfrac{\partial f}{\partial z}dz+\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}}d\overline{z}$. *Якщо* $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}}=0$, *то* $f(z)$ *називається* $C-$ *диференційованою в точці* z, *або просто диференційованою. Означення* $C-$*диференційованості в точці рівносильно умовам Коші-Рімана:* $u'_x=v'_y$, $u'_y=-v'_x$ *в декартових координатах* (x,y) *та*

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi},\ \frac{\partial v}{\partial r}=-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}.$$

в полярних координатах (ρ,φ); *якщо функцію представлено у показниковій формі* $f(z)=R(x,y)e^{i\Phi(x,y)}$, *то в декартових та полярних координатах відповідно:*

$$\frac{\partial R}{\partial x}=R\frac{\partial \Phi}{\partial y},\ \frac{\partial R}{\partial y}=-R\frac{\partial \Phi}{\partial x};\ \frac{\partial R}{\partial r}=\frac{R}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi},\ R\frac{\partial \Phi}{\partial r}=-\frac{1}{r}\frac{\partial R}{\partial \varphi}.$$

Похідна $f'(z)$ *диференційованої в точці* $z=x+iy$ *знаходиться за формулою:*

$$f'(z)=u'_x+iv'_x=v'_y+iv'_x=u'_x-iu'_y=v'_y-iu'_y$$

Функція називається аналітичною в точці, якщо вона диференційована в деякому околі цієї точки. Точка в якій функція аналітична називається правильною точкою цієї функції.

Дійсна функція $u(x,y)$ *називається гармонічною якщо:*

$$\Delta u\equiv\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

Дійсна та уявна частини однозначної та аналітичної в деякій області функції гармонічні в цій області. Дві функції $u(x,y)$ *та* $v(x,y)$, *що зв'язані в деякій області умовами Коші-Рімана, називаються спряженими. Для* *кожної гармонічної в однозв'язній області функції існує функція, спряжена з нею.*

Знайти значення сталих, за яких функція буде аналітичною та її явний вигляд:

4.1. $f(z) = x + ay + i\,(bx + cy)$.

4.2. $f(z) = \cos x\,(\operatorname{ch} y + a \operatorname{sh} y) + i \sin x\,(\operatorname{ch} y + b \operatorname{sh} y)$.

Дослідити функцію на диференційованість та аналітичність. Якщо функція диференційована в одній точці знайти значення похідної у ній

4.3. $f(z) = \sin 3z - i$.

4.4. $f(z) = e^{z^2}$.

4.5. $f(z) = ze^z$

4.6. $f(z) = \bar{z}$

4.7. $f(z) = z^2\bar{z}$

4.8. $f(z) = |z|^2$

4.9. $f(z) = |z|\bar{z}$

4.10. $f(z) = z \operatorname{Re} z$

Чи існує аналітична функція $f(z) = u + iv$, якщо:

4.11. $u = e^{y/x}$.

4.12. $v = \ln\left(x^2 + y^2\right) - x^2 + y^2$

Знайти аналітичну функцію $f(z) = u + iv$ або $f(z) = \rho e^{i\theta}$, якщо:

4.13. $u = x^2 - y^2 + 2x,\ \ f(i) = 2i - 1$

4.14. $u = x^3 - 3xy^2 + 2y$

4.15. $v = 2\,(2 \operatorname{sh} x \sin y + xy)\,,\ \ f(0) = 3$

4.16. $v = y \cos(x+1) \operatorname{ch} y - - x \sin(x+1) \operatorname{sh} y$

4.17. $u = \dfrac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$

4.18. $u = x^2 - y^2 + 5x + y - \dfrac{y}{x^2 + y^2}$

4.19. $v = \ln\left(x^2 + y^2\right) + x - 2y$

4.20. $\rho = \left(x^2 + y^2\right) e^x$

4.21. $\rho = e^{r^2 \cos 2\varphi}$

4.22. $\theta = xy$

4.23. $\theta = \varphi + r \sin \varphi$.

Тема №5 | Інтегрування функцій комплексної змінної

Якщо C — кусково-гладка крива, $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ — кусково-неперервна та обмежена функція, то згідно теореми існування криволінійного інтегралу від функцій дійсних змінних існує

$$\int\limits_C f(z)\,dz = \int\limits_C u\,dx - v\,dy + i\int\limits_C u\,dy + v\,dx,$$

причому, у загальному випадку, його значення залежить від $f(z)$, C та напряму обходу C.

Теорема Коші: Для функції $f(z)$, що аналітична у однозв'язній області D та для всіх замкнених кривих C, що лежать у цій області:

$$\int\limits_C f(z)\,dz = 0.$$

Знайти:

5.1. $\displaystyle\int\limits_{1-i}^{2+i} (3z^2 + 2z)dz$

5.2. $\displaystyle\int\limits_0^i z\cos z dz$

5.3. $\displaystyle\int\limits_C z\,\mathrm{Im}\,z^2 dz,\ C$ — $|z|=1$, $-\pi \leqslant \mathrm{Arg}\,z \leqslant 0$[1]

5.4. $\displaystyle\int\limits_C e^{|z|^2}\,\mathrm{Re}\,z dz,\ C$ — відрізок прямої між точками $z_0=0$ та $z_1=1+i$

Знайти $\int(1 + i - 2\bar{z})dz$ за наступними шляхами між точками $z_0 = 0$ та $z_1=1+i$:

[1] Напрям руху скрізь додатний

5.5. За відрізком прямої

5.6. За параболою $y = x^2$

5.7. За ланками ламаної $z_0 z_2 z_1$, $z_2 = 1$

Знайти $\int x dz$ за наступними шляхами:

5.8. За радіус-вектором точки $z = 2 + i$

5.9. $|z| = 1$, $0 \leqslant \arg z \leqslant \pi$

5.10. $|z - z_0| = R$

‘

Знайти $\int y dz$ за наступними шляхами:

5.11. За радіус-вектором точки $z = 2 + i$

5.12. $|z| = 1$, $0 \leqslant \arg z \leqslant \pi$

5.13. $|z - z_0| = R$

Знайти $\int |z| dz$ за наступними шляхами:

5.14. За радіус-вектором точки $z = 2 - i$

5.15. $|z| = 1$, $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant \arg z \leqslant \dfrac{\pi}{2}$

5.16. $|z| = R$.

Знайти:

5.17. $\displaystyle\oint_C |z| \bar{z}\, dz$, C — замкнений контур, що складається з верхнього півкола $|z| = 1$ та відрізку $y = 0$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$

5.18. $\displaystyle\oint_C \frac{z}{\bar{z}}\, dz$, C — півкільце, що складається з верхніх півкіл $|z| = 1$, $|z| = 2$ та відрізків дійсної вісі

Знайти $\int (z - a)^n dz, n \in Z$ за наступними контурами:

5.19. $|z - a| = R$, $0 \leqslant \arg(z - a) \leqslant \pi$

5.20. $|z - a| = R$

5.21*. За периметром квадрату з центром у точці a та сторонами, що паралельні осям координат

Знайти:

5.22. $\oint\limits_{|z|=1} a^z dz$

5.23. $\oint\limits_{|z|=1} z^\alpha dz, \alpha \in C,\ 1^\alpha = 1$

Знайти $\int \dfrac{dz}{\sqrt{z}}$ за наступними контурами:

5.24. $|z| = 1,\ y \geqslant 0,\ \sqrt{1} = 1$

5.25. $|z| = 1,\ y \geqslant 0,\ \sqrt{1} = -1$

5.26. $|z| = 1,\ y \leqslant 0,\ \sqrt{1} = 1$

5.27. $|z| = 1,\ \sqrt{1} = 1$

5.28. $|z| = 1,\ \sqrt{-1} = i$

Знайти $\oint \operatorname{Ln} z\, dz$ за наступними контурами:

5.29. $|z| = 1,\ \operatorname{Ln} 1 = 0$

5.30. $|z| = R,\ \operatorname{Ln} R = \ln R$

5.31. $|z| = 1,\ \operatorname{Ln} i = \dfrac{\pi}{2}$

5.32. $|z| = R,\ \operatorname{Ln} R = \ln R + 2\pi i$

Знайти:

5.33. $\oint\limits_{|z|=1} z^n \operatorname{Ln} z dz, n \in Z,\ \operatorname{Ln} 1 = 0$

5.34. $\int\limits_1^i \dfrac{\ln^3 z}{z} dz,\ |z| = 1$

Тема №6 | Інтегральна формула Коші

Для $f(z)$, що аналітична в області D та неперервна в $\overline{D}$ а кожній точці D існує $f^{(n)}(z)$ будь-якого порядку n, причому

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}}\, d\xi,$$

де напрям обходу межі C області D — додатній.

Обрахувати $\oint\limits_C \dfrac{dz}{z^2+9}$, якщо:

6.1. Точка $3i$ лежить всередині контуру C, а точка $-3i$ – ззовні

6.2. Точка $-3i$ лежить всередині контуру C, а точка $3i$ – ззовні

6.3. Точки $\pm 3i$ лежать всередині контуру C

6.4. Обрахувати усі можливі значення інтегралу $\oint\limits_C \dfrac{dz}{z(z^2-1)}$, якщо контур C не проходить скрізь точки 0 та ± 1

6.5. Обрахувати $\oint\limits_C \dfrac{e^z dz}{z^2+a^2}$, якщо круг $|z| \leqslant a$ лежить всередині контуру C

Обрахувати $\oint\limits_C \dfrac{e^{z^2}}{z^2-6z} dz$ за контуром C:

6.6. $|z-2|=1$ **6.7.** $|z-2|=3$ **6.8.** $|z-2|=5$

Обрахувати:

6.9. $\displaystyle\oint\limits_{|z-a|=a} \frac{z\,dz}{z^4-1}$, $a>1$

6.10. $\displaystyle\oint\limits_{C} \frac{ze^z dz}{(z-a)^3}$, якщо точка a лежить всередині контуру C

6.11. $\displaystyle\oint\limits_{|z-1|=1} \frac{\sin\frac{\pi}{4}z}{(z-1)^2(z-3)}\,dz$

6.12. $\displaystyle\oint\limits_{|z|=2} \frac{\operatorname{ch} z\,dz}{(z+1)^3(z-1)}$

Обрахувати $\displaystyle\oint\limits_{C} \frac{e^z dz}{z(1-z)^3}$, якщо:

6.13. Точка 0 лежить всередині контуру C, а точка 1 – ззовні

6.14. Точка 1 лежить всередині контуру C, а точка 0 – ззовні

6.15. Точки 0 та 1 лежать всередині контуру C

6.16*. Оцінкою інтегралу $\displaystyle\oint\limits_{|z|=R} \frac{f(z)dz}{(z-a)(z-b)}$, $a\neq b$ при $R\to\infty$ та порівнянням із його обрахунком згідно формули Коші довести теорему Ліувілля: функція, що аналітична та обмежена у всій комплексній площині є сталою

6.17*. Обрахувати $\displaystyle\oint\limits_{|z|=2} \frac{z\,dz}{z^2-1}$ безпосередньо за допомогою формули Коші та після попереднього внесення z під диференціал. Чому формальне виконання останньої операції призводить до помилкової відповіді?

6.18. Довести, що при довільному виборі гілки $\operatorname{Ln} z$:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{C} f'(z)\operatorname{Ln} z\,dz = f(z_0) - f(0),$$

де z_0 – початкова точка інтегрування, $f(z)$ – функція, яка аналітична всередині контуру C, що вміщує в себе початок координат

Обрахувати $\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{C} z^2 \operatorname{Ln}\frac{z+1}{z-1}dz$ за контуром C:

6.19. $|z|=2$

6.20. $|z-1|=1,\ z_0=1+i$

Тема №7 | Ряди

Теорема Абеля: Степеневий ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$*, що збігається в точці* $z_0 \neq a$*, є абсолютно збіжним в будь-якій точці* $z : |z-a| < |z_0 - a|$*, причому в будь-якому колі* $|z-a| \leqslant k|z_0 - a|$*, де* $0 < k < 1$*, збіжність рівномірна. Максимальний радіус кола* $|z-a| < R$ *всередині якого ряд буде збіжним називається радіусом збіжності. Його можна обрахувати з ознак збіжності рядів д'Аламбера чи Коші (формула Коші-Адамара) відповідно:*

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}}$$

На межі кола з радіусом збіжності ряд може бути як збіжним, так й розбіжним.

Для будь-якої функції $f(z)$*, що аналітична всередині кола* $|z-a| < R$*, всередині цього кола:*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n,$$

причому у будь-якій замкненій області, що належить цьому колу, ряд збігається рівномірно.

Теорема Лорана: будь-яку однозначну та аналітичну в кільці $D : r < |z-a| < R$ *функцію* $f(z)$ *можна представити в* D *у вигляді ряду:*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n,\ c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}}\, d\zeta,\ \Gamma : |z - z_0| = \lambda,\ r < \lambda < R.$$

Частинні варіанти кільця D *: коло з виколотим центром* $(r = 0, R < \infty)$*, зовнішність кола з виколотою нескінченно віддаленою точкою* $(0 < r,\ R = \infty)$*, комплексна площина з виколотими точками* $z = a$ *та нескінченно віддаленою точкою* $(r = 0,\ R = \infty)$*. Нескінченна частина* *ряду з невід'ємними показниками степенів $z-a$ називається правильною частиною, з від'ємними — головною.*

Рядом Лорана в околі нескінченно віддаленої точки називається ряд Лорана для $f(\zeta)$, $\zeta = 1/z$ в околі $\zeta = 0$, тому означення головної та правильної частин тут міняються місцями.

Дослідити ряд на збіжність:

7.1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{e^{in}}{n^2}$

7.2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{e^{2in}}{n\sqrt{n}}$

7.3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{e^{i\pi/n}}{\sqrt{n}}$

7.4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{e^{i\frac{\pi}{n}}}{n}$

7.5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos in}{2^n}$

7.6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n \sin in}{3^n}$

7.7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos in^2}{5^{n^2}}$

7.8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(1+i)^n}{2^{n/2} \cos in}$

7.9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\operatorname{sh} i\sqrt{n}}{\sin in}$

7.10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{\operatorname{tg} i\pi n}$

7.11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln n}{\operatorname{sh} in}$

7.12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\operatorname{ch} i\pi/n}{n^{\ln n}}$

Знайти радіус збіжності ряду:

7.13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{z^n}{n}$

7.14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{2^n} z^n$

7.15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{n^n} z^n$

7.16. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (n + a^n)\, z^n$

7.17. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{n!}$

7.18. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \operatorname{ch} \dfrac{i}{n} \cdot z^n$

7.19. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} i^n z^n$

7.20. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} e^{in} z^n$

7.21. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\dfrac{z}{1-i} \right)^n$

7.22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \cos in \cdot z^n$

7.23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^n z^n$

7.24. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^{n!}$

7.25. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$

7.26. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n z^{n!}$

7.27. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (3 + (-1)^n)^n z^n$

Дослідити збіжність ряду на межі кола збіжності:

7.28. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{z^n}{n^2}$

7.29. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{z^{n!}}{n^2}$

7.30. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$

7.31. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{z^n}{n}$

7.32. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} z^n$

Розвинути функцію в степеневий ряд у вказаному околі та знайти радіус збіжності:

7.33. $\sin^2 z, z=0$

7.34. $\cos^2 \dfrac{iz}{2},\ z=0$

7.35. $\operatorname{ch}^2 z,\ z=0$

7.36. $\dfrac{z}{z^2+i},\ z=0$

7.37. $\dfrac{z+1}{z^2+4z-5},\ z=0$

7.38. $\dfrac{z}{z^2-4z+13},\ z=0$

7.39. $\dfrac{z}{(z^2+1)(z^2+4)},\ z=0$

7.40. $\dfrac{z^2}{(z+1)^2},\ z=0$

7.41. $\dfrac{1}{(1+z)(1+z^2)^2},\ z=0$

7.42. $\dfrac{z}{\sqrt{1-z^2}},\ z=0$

7.43. $\ln\dfrac{1+z}{1-z},\ z=0$

7.44. $\dfrac{1}{3z+1},\ z=-2$

7.45. $\dfrac{z}{z+2},\ z=1$

7.46. $\dfrac{z}{z^2-2z+5},\ z=1$

7.47. $\dfrac{z^2+1}{z^2-4z+5},\ z=2$

7.48. $\dfrac{z^2}{(z+1)^2},\ z=1$

Розвинути в ряд Лорана в околі вказаних точок (знайти радіус збіжності) та/або в кільці, в околі особливих точок (7.52), або всі лоранові розвинення за степенями z (7.54):

7.49. $\dfrac{1}{z-2},\ z=0,\infty$

7.50. $\dfrac{1}{z(1-z)},\ z=0,1,\infty$

7.51. $\dfrac{1}{(z-a)(z-b)},\ 0<|a|<|b|,$
$z=0,a,\infty,\ |a|<|z|<|b|$

7.52. $\dfrac{2z-3}{z^2-3z+2}$

7.53. $\dfrac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)},\ z=2,\ 1<|z|<2$

7.54. $\dfrac{2z+1}{z^2+z-2}$

7.55. $z^2\sin\dfrac{1}{z-1},\ z=1$

7.56. $\cos\dfrac{z^2-4z}{(z-2)^2},\ z=2$

7.57. $z^2e^{1/z},\ z=0,\infty$

7.58. $e^{1/(1-z)},\ z=1$

7.59*. $e^{z+\frac{1}{z}},\ 0<|z|<\infty$

7.60. $\dfrac{1}{(z-a)^k}, a\neq 0, k\in N,\quad z=0,\infty$

7.61. $\dfrac{1}{(z^2+1)^2},\ z=i,\infty$

Тема №8 | Особливі точки та лишки

Точка a називається особливою точкою функції $f(z)$, якщо в ній порушується аналітичність $f(z)$.

Якщо при цьому існує окіл $0 < |z-a| < R$, в якому $f(z)$ аналітична, то така особлива точка a називається ізольованою особливою точкою та відноситься до одного з наступних типів:

- *усувна особлива точка, якщо існує скінчена границя $\lim\limits_{z\to a} f(z)$ — в її околі ряд Лорану не містить головної частини*
- *полюс порядку n, якщо існує нескінчена границя $\lim\limits_{z\to a} f(z)$ — в її околі ряд Лорану містить доданки $c_{-k}(z-a)^{-k}$, $k=\overline{1,n}$, $c_n \neq 0$ у головній частині*
- *суттєво особлива точка, якщо границя $\lim\limits_{z\to a} f(z)$ не існує — в її околі головна частина ряду Лорану містить безліч доданків.*

Неізольовані особливі точки можуть бути граничними для полюсів, утворювати лінії тощо.

Лишком $\operatorname{Res} f(a)$ функції $f(z)$ в ізольованій особливій точці a називається коефіцієнт c_{-1} в ряді Лорана $f(z)$ в околі скінченої точки a та $-c_{-1}$ в околі нескінченно віддаленої. Для неізольованої особливої точки лишок не визначається.

Якщо $f(z)$ має в повній комплексній площині скінчену кількість n особливих точок a_k, то

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res} f(a_k) + \operatorname{Res}(\infty) = 0.$$

Знайти особливі точки та лишки в них, у нескінченно віддаленій точці визначити поведінку функції та лишок (окрім граничної для полюсів):

8.1. $\dfrac{1}{z-z^3}$ **8.2.** $\dfrac{z^4}{1+z^4}$ **8.3.** $\dfrac{z^5}{(1-z)^2}$

8.4. $\dfrac{e^z}{1+z^2}$

8.5. ze^{-z}

8.6. $\dfrac{e^z}{z\,(1-e^{-z})}$

8.7. $\dfrac{1}{z^3(2-\cos z)}$

8.8. e^{-1/z^2}

8.9. $e^{z/(1-z)}$

8.10. $\dfrac{e^{1/(z-1)}}{e^z-1}$

8.11. $\dfrac{\cos z}{z^2}$

8.12. $\operatorname{tg}^2 z$

8.13. $\operatorname{ctg} z - \dfrac{1}{z}$

8.14. $\sin\dfrac{z}{z+1}$

8.15. $\dfrac{\sin z}{\sin(1/z)}$

8.16. $\dfrac{1}{z(z^2+4)^2}$

8.17. $(z^2+1)e^{-z}$

8.18. $\dfrac{1}{e^z-1} - \dfrac{1}{z}$

8.19. $\dfrac{1-e^z}{2+e^z}$

8.20. $\operatorname{th} z$

8.21. $ze^{1/z}$

8.22. $e^{z-1/z}$

8.23. $\dfrac{1}{\sin z}$

8.24. $\operatorname{tg} z$

8.25. $\dfrac{\operatorname{ctg} z}{z^2}$

8.26. $\operatorname{ctg} z - \dfrac{2}{z}$

8.27. $\dfrac{1}{\cos z - 2}$

Тема №9 | Обрахунок інтегралів методом лишків

Теорема Коші про лишки: для функції $f(z)$, що неперервна на межі C області D та аналітична всередині цієї області скрізь окрім скінченої кількості n особливих точок a_k:

$$\int\limits_C f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res} f(a_k),$$

де обхід межі C здійснюється у додатному напрямку.

Обрахувати інтеграл за замкненим контуром:

9.1. $\dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_C \sin\dfrac{1}{z}dz,\ C — |z|=r$

9.2. $\dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_C \sin^2\dfrac{1}{z}dz,\ C — |z|=r$

9.3. $\oint\limits_C \dfrac{dz}{z^4+1},\ C — x^2+y^2=2x$

9.4. $\oint\limits_C \dfrac{dz}{(z-3)(z^5-1)},\ C — |z|=2$

9.5. $\oint\limits_C \dfrac{z^3dz}{2z^4+1},\ C — |z|=1$

9.6. $\oint\limits_C \dfrac{zdz}{(z-1)(z-2)^2},\ C — |z-2|=\dfrac{1}{2}$

9.7. $\oint\limits_C \dfrac{e^z}{z^2(z^2-9)}dz,\ C — |z|=1$

9.8.* $\oint\limits_C (1+z+z^2)\cdot$
$\cdot\left(e^{1/z}+e^{1/(z-1)}+e^{1/(z-2)}\right)dz,$
$C — |z|=3$

Обрахувати визначений інтеграл:

9.9. $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{a+\cos\varphi},\ a>1$

9.10. $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(2+\cos\varphi)^2}$

Довести що $\int\limits_C f(z)e^{i\alpha z}dz = 0$, якщо $f(z)$ неперервна на межі, аналітична всередині окрім скінченої кількості полюсів та $|z| \to \infty \Rightarrow |f(z)| \to 0$ за жордановими контурами C, що утворені перетином кола $|z| = R \to \infty$ та:

9.11. $y = 0, \alpha > 0$

9.12. $\operatorname{Im} z > -a > 0, \alpha > 0$

9.13. $\operatorname{Im} z > a > 0, \alpha > 0$

Довести що $\int\limits_C e^{px}F(p)dp = 0$, якщо $F(p)$ неперервна на межі, аналітична всередині окрім скінченої кількості полюсів та $|z| \to \infty \Rightarrow |f(z)| \to 0$ за жордановими контурами C, що утворені перетином кола $|p| = R \to \infty$ та:

9.14. $\operatorname{Re} p < a, x > 0$

9.15. $\operatorname{Re} p > a, x < 0$

Довести (сума лишків береться по всіх полюсах що лежать у верхній півплощині окрім (9.19) та $|z| \to \infty \Rightarrow |f(z)| \to 0$):

9.16. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum \operatorname{Res}[f(z)]$, якщо $f(x)$ – раціональна функція, що не має полюсів на дійсній вісі, причому степінь знаменника перевищує степінь чисельника не менш ніж на 2

9.17. $\displaystyle\int\limits_{0}^{\infty} \cos\alpha x f(x)dx = \pi i \sum \operatorname{Res}[e^{i\alpha z}f(z)]$ якщо $f(x) = f(-x)$

9.18. $\displaystyle\int\limits_{0}^{\infty} \sin\alpha x f(x)dx = \pi \sum \operatorname{Res}[e^{i\alpha z}f(z)],\ \alpha > 0$, якщо $f(x) = -f(-x)$

9.19. v.p. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\alpha x}dx = \pi i \left(2\sum_{j=1}^{m} \operatorname{Res}[e^{i\alpha z_j}f(z_j)] + \sum_{z=1}^{n} \operatorname{Res}[e^{i\alpha z_k}f(z_k)] \right),\ \alpha > 0,$ де $f(z)$ — аналітична у верхній півплощині окрім m особливих точок z_j та на дійсній вісі окрім n простих полюсів z_k

Обрахувати невласні інтеграли:

9.20. $\int\limits_0^\infty \frac{x \sin ax}{b^2+x^2}\,dx,\;\; a,b>0$

9.21. $\int\limits_0^\infty \frac{\cos ax}{b^2+x^2}\,dx,\;\; a,b>0$

9.22. $\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{x\cos x\,dx}{x^2-2x+10}$

9.23. $\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{x\sin x\,dx}{x^2-2x+10}$

9.24. $\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{x\sin x dx}{x^2+4x+20}$

9.25. $\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{xdx}{(x^2+4x+13)^2}$

9.26. $\int\limits_0^\infty \frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^2},\;\; a>0$

9.27. $\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{e^{itx}}{x}\,dx,\;\; t\in R$

9.28. $\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{x\cos x}{x^2-5x+6}\,dx$

9.29. $\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{\sin x}{(x^2+4)(x-1)}\,dx$

9.30. $\int\limits_0^\infty \frac{x^2-b^2}{x^2+b^2}\frac{\sin ax}{x}\,dx,\;\; a,b>0$

9.31. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin ax}{x(x^2+b^2)}\,dx,\;\; a,b>0$

9.32. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin ax}{x(x^2+b^2)^2}\,dx,\;\; a>0$

Обрахувати невласні інтеграли за наведеними контурами (рис. 1 та 2)

9.33. $\int\limits_0^\infty \sin x^2dx,\;\; \int\limits_0^\infty \cos x^2dx$

9.34. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x}dx,\;\; 0<a<1$

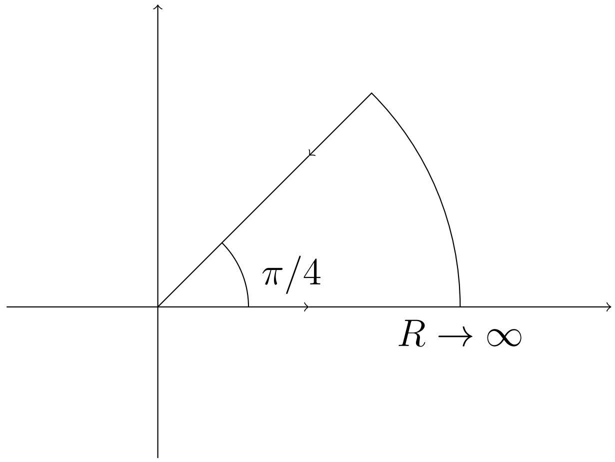

Рис. 1. Контур інтегрування для №9.33 (інтеграл Френеля)

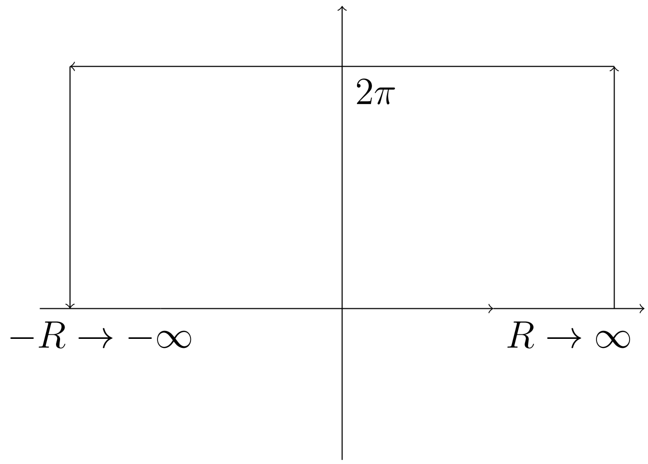

Рис. 2. Контур інтегрування для №9.34 (інтеграл Ейлера)

Обрахувати визначені інтеграли[1] (x_1, x_2 — корені підінтегрального виразу):

9.35. $\displaystyle\int\limits_{x_1}^{x_2} \sqrt{\frac{2\beta}{x} - \alpha^2 - \frac{\gamma^2}{x^2}}\, dx, \quad \alpha, \beta, \gamma > 0,\ \beta > \alpha\gamma$

9.36. $\displaystyle\int\limits_{x_1}^{x_2} \sqrt{\alpha - \beta^2 x^2}\, dx,\ \ \alpha, \beta > 0$

9.37. $\displaystyle\int\limits_{x_1}^{x_2} \sqrt{\alpha - \frac{\beta^2}{x^2} - \gamma^2 x^2}\, dx,$ $\displaystyle\alpha, \gamma > 0,\ \ \beta < \frac{\alpha}{2\gamma}$

[1]Такі інтеграли виникають при розв'язанні задач класичної механіки методом змінних «дія-кут», див. наприклад, [1, гл. 15.1]

Тема №10 | Ряди Фур'є

Функцію $f(x)$, що кусково-неперервна в інтервалі $(-l, l)$, причому в усіх точках розриву ζ_k : $f(\zeta_k) = \frac{1}{2}\left[f(\zeta_k - 0) + f(\zeta_k + 0)\right]$, можна розвинути в тригонометричний ряд Фур'є на цьому інтервалі :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi n x}{l} + b_n \sin\frac{\pi n x}{l},$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}\,dx,\;\; b_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}\,dx.$$

або у комплексній формі

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{i\pi n x}{l}},\;\; c_n = \frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l} f(x) e^{-\frac{i\pi n x}{l}}\,dx.$$

На інтервалі $(0, l)$ функцію $f(x)$ можна розвинути також лише за косинусами або синусами, продовжуючи $f(x)$ на інтервал $(-l, 0)$ у парний, або непарний способи відповідно.

Ряд Фур'є можна почленно інтегрувати. Якщо $f'(x)$ також кусково-неперервна, а також $f(-l) = f(l)$, $f'(-l) = f'(l)$, то ряд Фур'є для $f(x)$ можна почленно диференціювати.

Ряд Лорана для функції $f(z)$ на колі $z = e^{it}$ є рядом Фур'є для функції $\varphi(t) = f(e^{it})$.

Розвинути в ряд Фур'є:

10.1. $f(x) = \begin{cases} A, & 0 < x < l; \\ 0, & l < x < 2l. \end{cases}$

10.2. $f(x) = x,\; x \in [-\pi, \pi]$

10.3. $f(x) = \frac{1}{2}(\pi - x),\;\; x \in (0, 2\pi)$

10.4. $f(x) = \cos ax,\;\; x \in (-\pi, \pi),\;\; a \overline{\in} Z$

10.5. $f(x) = e^{ax},\ x \in (-h, h)$

10.6. $f(x) = x \sin x,\ x \in (-\pi, \pi)$

10.7. $f(x) = |\sin x|$

10.8. $\begin{cases} x, & 0 \leqslant x \leqslant 1; \\ 1, & 1 < x < 2; \\ 3 - x, & 2 \leqslant x \leqslant 3. \end{cases}$

Знайти розвинення в ряд Фур'є функції $f(x)=x^2$ (№10.9-10.11) та обрахувати суми (№10.12-10.14):

10.9. за косінусами $x \in (-\pi, \pi)$

10.10. за сінусами $x \in (0, \pi)$

10.11. $x \in (0, 2\pi)$

10.12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$

10.13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2}$

10.14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2n-1)^2}$

10.15. Розвинути в ряд Фур'є $f(x) = |x|$, $x \in [-\pi, \pi]$ та з отриманого ряду знайти ряд Фур'є для

$$F(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & -\pi \leqslant x \leqslant 0 \\ 1, & 0 < x \leqslant \pi \end{cases}$$

10.16. З використанням рядів з №10.2 та №10.9 отримати ряд для $f(x) = x^3$, $x \in [-\pi, \pi]$

Розвинути в ряд Фур'є:

10.17.* $\dfrac{q \sin x}{1 - 2q \cos x + q^2},\ |q| < 1$

Тема №11 | Перетворення Фур'є

Функції $f(k)$ та $f(x)$, що задані при $x, k \in R$, називаються, відповідно, зображенням (перетворенням Фур'є) та оригіналом (оберненим перетворенням Фур'є), якщо:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(k)e^{ikx}\,dx,\ \ f(k) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx}\,dk$$

та обидва інтеграли існують.

Зображення дійсної функції задовільняє співвідношенню: $f(-k) = \overline{f(k)}$.

Парну або непарну функцію $f(x)$ можна розвинути у косинус- або синус-перетворення Фур'є відповідно:

$$f(k) = 2\int\limits_{0}^{\infty} f(x)\cos kx\,dx,\ \ f(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty} f(k)\cos kx\,dk,$$

$$f(k) = 2\int\limits_{0}^{\infty} f(x)\sin kx\,dx,\ \ f(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty} f(k)\sin kx\,dk.$$

Для існування прямого та оберненого перетворень Фур'є оригінал $f(x)$ та образ $f(k)$ мають бути локалізованими (так званими пакетами), причому стала пакету C, що є добутком характерних розмірів $\Delta x \cdot \Delta k$, не залежить від ширини пакету та є порядку 1.

За допомогою правил $f^{(n)}(x) \to (ik)^n f\, x^n f(x) \to i^n f^{(n)}(k)$ інколи можна розв'язувати деякі крайові задачі на інтервалі $x \in R$. Для цього необхідно виконати перетворення Фур'є диференціального рівняння, знайти з нього образ та виконати обернене перетворення.

Дельта-функцією $\delta(x)$ (функцією Дірака) називається функція, Фур'є образ якої рівен 1 :

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}\,dk.$$

Дельта-функція є узагальненою функцією, тобто функціоналом, що зіставляє кожній неперервній функції $f(x)$ число $f(0)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)\,dx = f(0).$$

Методом Фур'є-перетворення можна шукати функцію Гріна, що є за означенням розв'язком рівняння $\hat{L}G(x) = \delta(x)$. Коли вона знайдена, розв'язок рівняння $\hat{L}y(x) = f(x)$ з довільною $f(x)$ праворуч може бути знайдений як $y(x) = \int G(x-s)\,\delta(s)$.

Тривимірне пряме та обернене перетворення Фур'є визначаються наступним чином:

$$f(\boldsymbol{k}) = \int f(\boldsymbol{r})e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\,d\boldsymbol{r},\;\; f(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int f(\boldsymbol{k})e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\,d\boldsymbol{k},$$

де інтегрування за всім простором. Оскільки скалярні добутки інваріантні при заміні координат, для обрахунку даних інтегралів можна використовувати будь-яку зручну систему координат. Для отримання Фур'є образів диференціальних операцій слід замінити функцію на її Фур'є-образ, а оператор $\nabla \to i\boldsymbol{k}$.

Тривимірна δ-функція визначається як

$$\delta(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\,d\boldsymbol{r}.$$

Знайти перетворення Фур'є $f(k)$ функції $f(x)$, її розвинення у інтеграл Фур'є та сталу пакету $C = \Delta x\Delta k$, де $2\Delta x$ та $2\Delta k$ — характерні розміри функції та її образу:

11.1. $f(x) = \begin{cases} \sin x, & |x| \leqslant \pi \\ 0, & |x| > \pi. \end{cases}$

11.2. $f(x) = \begin{cases} A, & |x| \leqslant L \\ 0, & |x| > L \end{cases}$

11.3. $f(x) = e^{-\alpha|x|},\;\alpha > 0$

11.4. $f(x) = e^{-\alpha x^2/2},\;\alpha > 0$

Знайти спектральну потужність енергії $|f(\omega)|^2$ у наближенні $|\omega-\omega_0| \sim \gamma \ll \omega_0, \omega$ (Лоренцову криву) та її сталу пакету:

11.5. $f(t)=\begin{cases} 0, & t<0 \\ f_0 e^{-\gamma t}\sin\omega_0 t, & t \geqslant 0. \end{cases}$

Знайти обернене перетворення Фур'є:

11.6. $f(k)=\dfrac{\pi}{a}\, e^{-a|k|},\ a>0$

Знайти перетворення Фур'є у тривимірному просторі:

11.7. $f(\boldsymbol{r})=\left(\dfrac{2}{\pi a^2}\right)^{3/4} e^{-r^2/a^2}$

11.8. $\varphi(\boldsymbol{r})=\dfrac{e^{-\alpha r}}{r}$

11.9. $\varphi(\boldsymbol{r})=\dfrac{1}{r}$

11.10. Довести що Фур'є-перетворення рівнянь Максвелла для електромагнітного поля с зарядами у вакуумі наступне:

$$\begin{cases} i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E} = 4\pi\rho \\ i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{H} = 0 \\ i\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E} = -\dfrac{1}{c}\,\boldsymbol{H} \\ i\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{H} = \dfrac{4\pi}{c}\,\boldsymbol{j} + \dfrac{1}{c}\,\dfrac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} \end{cases}$$

Знайти обернене перетворення Фур'є у тривимірному просторі:

11.11. $f(\boldsymbol{k})=\begin{cases} a, & k \leqslant q \\ 0, & k > q \end{cases}$

Довести співвідношення за допомогою δ-функції:

11.12. Рівність Парсеваля

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\, dx = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(k)|^2\, dk$$

11.13. Рівність Парсеваля для $f(x) \in R$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left|f^2(x)\right| \, dx = \frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{\infty} |f(k)|^2 \, dk$$

11.14. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)} \, dx = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(k)\overline{g(k)} \, dk$

11.15. Теорема про згортку

$$f(\omega) = \varepsilon(\omega) \, \varphi(\omega), \;\; \partial e \;\, f(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(t-\tau)\varphi(\tau) \, d\tau$$

11.16. Довести $\delta(ax) = \dfrac{\delta(x)}{|a|}$

11.17. Знайти силу $F(t)$, що діє на частинку під час миттєвого удару в момент t_0, якщо переданий при цьому імпульс $\Delta p = mv_0$

11.18. Знайти обмежений розв'язок рівняння Ері: $y'' = xy$

11.19. Знайти розв'язок рівняння теплопровідності $T(x,t)$ у нескінченному одновимірному середовищі для $t > 0$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \text{ якщо при } t = 0: \; T(x,0) = g(x).$$

Знайти функцію Гріна:

11.20. $n''(x) - \mu^2 n(x) = -f(x)$

11.21. $\Delta G(\boldsymbol{r}) = -4\pi\delta(\boldsymbol{r})$

11.22. Розвинути дельта-функцію $\delta(x)$ в ряд Фур'є у дійсній та комплексних формах на інтервалі $x \in [-\pi, \pi]$

Часто вживані математичні формули

1. Сума арифметичної прогресії ($a_n = a_{n-1} + d = a_1 + nd$):
$\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = \frac{n}{2}\left(2a_1 + d(n-1)\right) = \frac{n}{2}\left(a_1 + a_n\right)$
2. Сума геометричної прогресії ($b_n = b_{n-1}q = b_1 q^{n-1}$):
$\sum\limits_{k=1}^{n} b_k = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q},\ q \neq 1$

Тригонометричні формули:

3. $\left|\sin\frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$
4. $\left|\cos\frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$
5. $\cos x - \cos y = 2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{y-x}{2}$
6. $\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$
7. $\sin x - \sin y = 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}$

Гіперболічні формули:

8. $\operatorname{sh}(z_1+z_2) = \operatorname{sh} z_1 \operatorname{ch} z_2 + \operatorname{ch} z_1 \operatorname{sh} z_2$
9. $\operatorname{ch}(z_1+z_2) = \operatorname{ch} z_1 \operatorname{ch} z_2 + \operatorname{sh} z_1 \operatorname{sh} z_2$
10. $\operatorname{sh} 2z = 2\operatorname{sh} z \operatorname{ch} z$
11. $\operatorname{ch} 2z = 2\operatorname{sh}^2 z + 1 = 2\operatorname{ch}^2 z - 1$

Ряди Маклорена:

12. $e^z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!},\ R = \infty$
13. $\operatorname{sh} z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!},\ R = \infty$
14. $\operatorname{ch} z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!},\ R = \infty$
15. $\sin z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!},\ R = \infty$
16. $\cos z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!},\ R = \infty$
17. $-\ln(1-z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n},\ R = 1$
18. $(1+z)^\alpha = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n,\ R = 1,$
$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}$
19. $\frac{1}{1-z} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n,\ R = 1$

Відповіді

1.1. -8 **1.2.** $-i$ **1.3.** $\frac{1}{5}(1+3i)$ **1.4.** $-i$ **1.5.** $\frac{2(a^2-b^2)}{(a^2+b^2)^2}$ **1.6.** i
1.7. $(\alpha+i\beta)(\alpha-i\beta)$ **1.8.** $(\alpha+\beta)(\frac{\alpha+\beta}{2}+i\frac{\alpha-\beta}{2}\sqrt{3})(\frac{\alpha+\beta}{2}-i\frac{\alpha-\beta}{2}\sqrt{3})$
1.9. $x=\frac{20}{17}, y=-\frac{36}{17}$ **1.10.** $x=-\frac{b}{a^2+b^2}, y=-\frac{a}{a^2+b^2}$
1.11. $x=1, y=0, \pm 5^{1/8}$ **1.12.** $z=i(1-\sqrt{2})$
1.13. $x=\frac{a^2-a+b^2}{(a-1)^2+b^2}, y=-\frac{b}{(a-1)^2+b^2}$
1.14. $x=\frac{1}{3}(3-\sqrt{2}), y=\frac{1}{3}(1-2\sqrt{2})$ **1.15.** $e^{i\cdot 0}$ **1.16.** $e^{i\pi}$
1.17. $e^{i\pi/2}$ **1.18.** $3e^{i\pi/2}$ **1.19.** $e^{-i\pi/2}$ **1.20.** $2e^{-i\pi}$ **1.21.** $be^{i\,\mathrm{sgn}\, b\pi/2}$
1.22. $\sqrt{2}e^{i\pi/4}$ **1.23.** $\sqrt{2}e^{-i\pi/4}$ **1.24.** $\sqrt{2}e^{3i\pi/4}$
1.25. $\sqrt{2}e^{-3i\pi/4}$ **1.26.** $2e^{-2i\pi/3}$ **1.27.** $2e^{3i\pi/4}$ **1.28.** $\sqrt{29}e^{i\,\mathrm{arctg}(5/2)}$
1.29. $\sqrt{29}e^{-i\,\mathrm{arctg}(5/2)}$ **1.30.** $\sqrt{29}e^{i(\pi-\mathrm{arctg}(5/2))}$ **1.31.** $\sqrt{29}e^{i(\mathrm{arctg}(5/2)-\pi)}$
1.32. $e^{-7i\pi/8}$ **1.33.** $e^{i(\alpha-\pi/2)}$ **1.34.** $\sqrt{2(1-\sin\alpha)}e^{i(\pi/4+\alpha/2)}$ **1.35.** $e^{i\alpha}$
1.36. $|z|=e^2, \arg z=1$ **1.37.** $|z|=e^2, \arg z=-3$
1.38. $|z|=e^3, \arg z=4-2\pi$ **1.39.** $|z|=e^{-3}, \arg z=2\pi-4$
1.40. $|z|=1, -\pi\leqslant\varphi<\pi : \arg z=-\varphi, \varphi=\pi : \arg z=\pi$
1.41. $|z|=a, 0<\varphi\leqslant\pi : \arg z=\varphi-\pi, -\pi\leqslant\varphi\leqslant 0 : \arg z=\varphi+\pi$
1.42. $|z|=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}, \alpha+\beta\leqslant\pi : \arg z=\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\pi),$
$\alpha+\beta>\pi : \arg z=\frac{1}{2}(\alpha+\beta-3\pi)$ **1.45.** $3\cos^2\varphi\sin\varphi-\sin^3\varphi$
1.46. $\cos^3\varphi-3\cos\varphi\sin^2\varphi$ **1.47.** $4\cos^3\varphi\sin\varphi-4\cos\varphi\sin^3\varphi$
1.48. $\cos^5\varphi-10\cos^3\varphi\sin^2\varphi+5\cos\varphi\sin^4\varphi$ **1.49.** $\dfrac{\sin\frac{(n+1)x}{2}\cos\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$
1.50. $\dfrac{\sin\frac{(n+1)x}{2}\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$ **1.51.** $\dfrac{\sin^2 nx}{\sin x}$

1.52. $\dfrac{\sin\frac{x}{2}-(-1)^n\sin\frac{2n+1}{2}x}{2\cos\frac{x}{2}}$,

n – непарне: $\dfrac{\cos\frac{nx}{2}\sin\frac{n+1}{2}x}{\cos\frac{x}{2}}$, n – парне: $-\dfrac{\sin\frac{nx}{2}\cos\frac{n+1}{2}x}{\cos\frac{x}{2}}$

1.53. $\dfrac{\sin\frac{n+1}{2}\beta\,\cos\left(\alpha+\frac{n\beta}{2}\right)}{\sin\frac{\beta}{2}}$ **1.54.** 1728 **1.55.** $1056(1+i)$ **1.56.** 2^{60}

1.57. 1 **1.58.** -2i **1.59.** $2^{19}(-1+i\sqrt{3})$ **1.60.** $e^{2i\pi k/n}, k\in Z$

1.61. $\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$

1.62. $1, -\dfrac{1}{2}\pm i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **1.63.** $-i, \dfrac{1}{2}(\pm\sqrt{3}+i)$ **1.64.** $\pm1, \pm i$

1.65. $\pm\dfrac{1\pm i}{\sqrt{2}}$

1.66. $\pm(\cos\frac{\pi}{8}-i\sin\frac{\pi}{8}), \pm(\sin\frac{\pi}{8}+i\cos\frac{\pi}{8}), \cos\frac{\pi}{8}=\dfrac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}$,

$\sin\frac{\pi}{8}=\dfrac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}$ **1.67.** $\pm\sqrt{2}i, \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{\pm}i)$ **1.68.** $\pm1, \pm i, \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1\pm i)$

1.69. $\pm\left(\sqrt{3}-i\right)$

1.70. $\pm2^{\frac{1}{4}}\left(\cos\frac{\pi}{8}-i\sin\frac{\pi}{8}\right)=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{\sqrt{2}+1}-i\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)$

1.71. $2^{-1/3}(1-i),\ \pm2^{-5/6}\left(\sqrt{2\mp\sqrt{3}}+i\sqrt{2\pm\sqrt{3}}\right)$

1.72. $\dfrac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{3(2-\sqrt{3})}+i\left(\sqrt{3(2+\sqrt{3})}-\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)\right)$,

$\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{2\mp\sqrt{3}}-i\sqrt{2\pm\sqrt{3}}\right)$

1.73. $\pm\left(\dfrac{3}{64}\right)^{\frac{1}{8}}\left(\sqrt{3}+i\right),\ \pm\left(\dfrac{3}{64}\right)^{\frac{1}{8}}\left(1-i\sqrt{3}\right)$ **1.74.** $\pm(2+i)$

1.75. $(2+i), -1/2(1+\sqrt{3}+i(1-2\sqrt{3})), 1/2(\sqrt{3}-2-i(1+2\sqrt{3}))$

1.76. $\dfrac{1}{2}(-1\pm i\sqrt{3})$ **1.77.** $1, \dfrac{1}{2}(-1\pm i\sqrt{3}), \dfrac{\sqrt[3]{3}}{2}(1\pm i\sqrt{3}), -\sqrt[3]{3}$

1.78. $5, \dfrac{1}{2}(-1\pm\sqrt{3})$ **1.79.** $6,\ -3\pm2\sqrt{3}i$ **1.80.** $x=1,\ -1\pm i\sqrt{2}$

1.81. $-2,\ 1\pm\sqrt{3}$ **1.82.** $4,\ -2+\pm i\sqrt{6}$ **1.83.** $4,\ -2\pm\sqrt{3}$
2.8. Пряма $x=C$ та півплощина праворуч від неї
2.9. Півплощина під прямою $y=C$
2.10. Пряма $x=0$ та півплощина праворуч від неї
2.11. Смуга $-1<y<0$
2.12. Частина комплексної площини, що обмежена променями, які проведені з початку координат під кутами α та β та що містить промені з кутами $\varphi:\ \alpha<\varphi<\beta$
2.13. Частина комплексної площини, що обмежена променями, які проведені з точки $-1+i$ під кутами $-\dfrac{\pi}{2}$ та $\dfrac{3}{4}\pi$ та що містить початок координат
2.14. Коло, внутрішність та зовнішність кола радіусом R з центром в z_0
2.15. Еліпс $\dfrac{4x^2}{25}+\dfrac{4y^2}{9}=1$
2.16. Серединний перпендикуляр до відрізку між точками z_1 та z_2
2.17. Гіпербола $\dfrac{4x^2}{9}+\dfrac{4y^2}{7}=1$, внутрішня частина лівої гілки, внутрішня частина правої гілки та між гілками **2.18.** Гіпербола $y=\dfrac{C}{2x}$
2.19. Гіпербола $y=-\dfrac{1}{x}$ **2.20.** Гіпербола $\left(2\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\right)^2-(2y)^2=1$
2.21. Гіпербола $2x^2-2y^2=1$
2.22. $C\neq 0:$ гіпербола $\left(\dfrac{x}{\sqrt{|C|}}\right)^2-\left(\dfrac{y}{\sqrt{C}}\right)^2=\operatorname{sgn}C$,
$C=0:$ прямі $x=\pm y$ **2.23.** Гіпербола $y=C/(2x)$
2.24. Парабола $y^2=2x+1$ **2.25.** Коло $(x+1)^2+(y-\dfrac{1}{2})^2=\dfrac{9}{4}$
2.26. Коло $x^2+y^2=1$
2.27. $C\neq 0:$ коло $(x-\tilde{C})^2+y^2=\tilde{C}^2, \tilde{C}=1/2C,\ C=0:$ пряма $x=0$
2.28. $C\neq 0:$ коло $x^2+(y)+\tilde{C}^2=\tilde{C}^2, \tilde{C}=1/2C,\ C=0:$ пряма $y=0$
2.29. Замкнуте кільце, що обмежене колами $(x+2)^2+(y+1)^2=1$ та $(x+2)^2+(y+1)^2=1$
2.30. Область що складається з круга $(x-2)^2+(y-2)^2=8$ з виключеним кругом $(x-1)^2+(y-1)^2=2$
2.31. 2 **2.32.** Еліпс $(x/5)^2+y^2=1$
2.33. Гіпербола $(y/2)^2-(x+2)^2=1$ **2.34.** Парабола $x=2y^2+4y+3$
3.18. $\sin x\operatorname{ch}y+i\cos x\operatorname{sh}y$ **3.19.** $\cos x\operatorname{ch}y-i\sin x\operatorname{sh}y$

3.20. $\dfrac{\sin 2x + i\,\mathrm{sh}\,2y}{\mathrm{ch}\,2y + \cos 2x}$ **3.21.** $\mathrm{sh}\,x\cos y + i\,\mathrm{ch}\,x\sin y$ **3.22.** $\mathrm{ch}\,x\cos y + i\,\mathrm{sh}\,x\sin y$
3.23. $\dfrac{\mathrm{sh}\,2x + i\sin 2y}{\mathrm{ch}\,2x + \cos 2y}$ **3.24.** $(8{+}15i)/17$ **3.25.** $(40{+}9i)/41$ **3.26.** $\dfrac{\mathrm{sh}\,4 - i\sin 2}{\mathrm{ch}\,4 - \cos 2}$
3.27. $2\ln 2 + 2\pi ni$ **3.28.** $i\pi(1+2n)$ **3.29.** $i\pi(1/2+2n)$ **3.30.** $\pm i\dfrac{\pi}{4} + 2\pi ni$
3.31. $\dfrac{1}{2}\ln 13 + i(-\operatorname{arctg}\dfrac{3}{2} + 2\pi n)$ **3.32.** $\dfrac{1}{2}\ln 13 + i\left(\pi - \operatorname{arctg}\dfrac{3}{2} + 2\pi n\right)$
3.33. $-\dfrac{1}{2}\ln 2 - \dfrac{11}{12}\pi i + 2\pi n$ **3.34.** $(-1)^n\pi/6 + \pi n$ **3.35.** $\pm\pi/3 + 2\pi n$
3.36. $2\pi n \pm i\ln(2+\sqrt{3})$ **3.37.** $2\pi n + i\ln(\sqrt{2}+1), \pi + 2\pi n - i\ln(1+\sqrt{2})$
3.38. $\pi\left(n+\dfrac{1}{2}\right) - \dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2} + \dfrac{i}{4}\ln 5$ **3.39.** $\pm\ln(\sqrt{5}+2) + i(2\pi n \pm \pi/2)$
3.40. $\dfrac{1}{4}\ln 5 + i\left(\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg} 2 + \left(n+\dfrac{1}{2}\right)\pi\right)$ **3.41.** $\cos\left(2\pi n\sqrt{2}\right) + i\sin\left(2\pi n\sqrt{2}\right)$
3.42. $e^{2\pi n}$ **3.43.** $e^{2\pi n}(\cos\ln 2 + i\sin\ln 2)$ **3.44.** $e^{\pi(2n-1/2)}$
3.45. $2^{\sqrt{2}}\left(\cos\left(\pi\sqrt{2}(1+2n)\right) + i\sin\left(\pi\sqrt{2}(1+2n)\right)\right)$
3.46. $e^{\pi(2n+1/4)}\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}$
3.47. $5e^{2\pi n+\operatorname{arctg}4/3}[\cos(\ln 5 - \operatorname{arctg}(4/3)) + i\sin(\ln 5 - \operatorname{arctg}(4/3))]$
3.48. $-5e^{\operatorname{arctg}(4/3)-\pi(1+2n)}[\cos(\ln 5 - \operatorname{arctg}(4/3)) + i\sin(\ln 5 - \operatorname{arctg}(4/3))]$
3.49. $-1/4\,e^{(5/3+4n)\pi}\left[\sqrt{3}\cos(2\ln 2) + \sin(2\ln 2) + i(\sqrt{3}\sin(2\ln 2) - \cos(2\ln 2))\right]$
3.50. $1/(2\sqrt{2})\,e^{(5/12+n)\pi}(\sqrt{2-\sqrt{3}}\cos(\ln 2/2) - \sqrt{2+\sqrt{3}}\sin(\ln 2/2) -$
$- i(\sqrt{2-\sqrt{3}}\sin(\ln 2/2) + \sqrt{2+\sqrt{3}}\cos(\ln 2/2)))$
3.51. $1-i$ **3.52.** $-e+i$ **3.53.** 0 **3.54.** $2\pi ni$ **3.55.** $-\ln 2 + \pi/2i + 2\pi ni$
3.56. $\pi n(1\pm i)$ **3.57.** $\pi/2n\,(1+(-1)^n i)$ **3.58.** $\pi/10(1+4n)(\pm 1 - 2i)$
3.59. $\dfrac{\pi}{4} + 2\pi n \pm i\ln(\sqrt{2}+1)$ **3.60.** $\dfrac{3}{4}\pi + 2\pi n - i\ln\dfrac{3\pm\sqrt{7}}{\sqrt{2}}$
3.61. $\ln 3 + i(\pi/2 + 2\pi n), i\pi(-1/2+2n)$
3.62. $\dfrac{\pi}{4} + \pi n + (-1)^n i\ln\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$
4.1. $a=-b, c=1, f(z)=(1-ia)z$ **4.2.** $a=b=-1, f(z)=e^{iz}$
4.3. $f'(z)=3\cos 3z$ **4.4.** $f'(z)=2ze^{z^2}$ **4.5.** $f'(z)=(1+z)e^z$
4.6. Недиференційована в жодній точці **4.7.** $f'(0)=0$ **4.8.** $f'(0)=0$
4.9. $f'(0)=0$ **4.10.** $f'(0)=0$ **4.11.** Не існує **4.12.** Існує **4.13.** z^2+2z
4.14. $z^3-2iz+iC$ **4.15.** $z^2+4\,\mathrm{ch}\,z-1$ **4.16.** $z\cos(z+1)+C$ **4.17.** $\frac{1}{z^2}+iC$
4.18. $z^2+(5-i)z+i(c-1/z)$ **4.19.** $2i\ln z + (i-2)z + C$ **4.20.** $z^2e^ze^{iC}$

4.21. e^{z^2+iC} **4.22.** $Ce^{z^2/2}$ **4.23.** Cze^z

5.1. $7+19i$ **5.2.** $(1-e)/e$ **5.3.** $-\pi/2$ **5.4.** $(e^2-1)(1+i)/4$ **5.5.** $2i-1$
5.6. $-2+4/3i$ **5.7.** -2 **5.8.** $2+i$ **5.9.** $i\pi/2$ **5.10.** $i\pi R^2$
5.11. $1+i/2$ **5.12.** $-\pi/2$ **5.13.** $-\pi R^2$ **5.14.** $(2-i)\sqrt{5}/2$ **5.15.** $2i$
5.16. 0 **5.17.** $i\pi$ **5.18.** $4/3$ **5.19.** $n\neq-1:\ \dfrac{R^{n+1}}{n+1}\left((-1)^{n+1}-1\right), n=-1:\ i\pi$
5.20. $n\neq-1:\ 0, n=-1:\ 2\pi i$ **5.21.** $n\neq-1:\ 0, n=-1:\ 2\pi i$ **5.22.** 0
5.23. $\alpha\neq-1:\dfrac{1}{\alpha+1}\left(e^{2\pi\alpha i}-1\right), \alpha=-1:2\pi i$ **5.24.** $2(i-1)$ **5.25.** $2(1-i)$
5.26. $2(1+i)$ **5.27.** -4 **5.28.** $4i$ **5.29.** $2\pi i$ **5.30.** $2\pi iR$ **5.31.** -2π
5.32. $2\pi Ri$ **5.33.** $n\neq-1:\ \dfrac{2\pi i}{n+1},\ n=-1:\ -2\pi^2$ **5.34.** $\pi^4/64$

6.1. $\pi/3$ **6.2.** $-\pi/3$ **6.3.** 0 **6.4.** $(-2\pi i,-\pi i,0,\pi i,2\pi i)$ **6.5.** $2\pi i\sin a/a$
6.6. 0 **6.7.** $-\pi i/3$ **6.8.** $(e^{36}-1)\pi i/3$ **6.9.** $\pi/2$ **6.10.** $\pi i(a+2)e^a$
6.11. $-\pi(\pi+2)\sqrt{2}i/8$ **6.12.** $-\pi/(2e)$ **6.13.** $2\pi i$ **6.14.** $-\pi ei$ **6.15.** $(2-e)\pi i$
6.17. $2\pi i$ **6.19.** $2/3$ **6.20.** $1-2i/3$

7.1. Зб. абс. **7.2.** Зб. абс. **7.3.** Розб. **7.4.** Розб. **7.5.** Розб.
7.6. Зб. абс. **7.7.** Зб. абс. **7.8.** Зб. абс. **7.9.** Зб. абс. **7.10.** Розб.
7.11. Розб. **7.12.** Зб. абс. **7.13.** 1 **7.14.** 2 **7.15.** e
7.16. $1/|a|, |a|\geqslant 1;\ 1, |a|\leqslant 1$ **7.17.** ∞ **7.18.** 1 **7.19.** 1 **7.20.** 1
7.21. $\sqrt{2}$ **7.22.** $1/e$ **7.23.** 0 **7.24.** 1 **7.25.** 1 **7.26.** 1 **7.27.** $1/4$
7.28. Зб. абс. **7.29.** Зб. абс. **7.30.** Розб. **7.31.** Зб. ум. окрім $z=0$
7.32. Зб. ум. окрім $z=-1$ **7.33.** $\sum_1^\infty(-1)^{n+1}2^{2n-1}z^{2n}/(2n)!,\ R=\infty$
7.34. $1+1/2\cdot\sum_{n=1}^\infty z^{2n}/(2n)!,\ R=\infty$ **7.35.** $1+\sum_{n=1}^\infty 2^{2n-1}z^{2n}/(2n)!,\ R=\infty$
7.36. $-\sum_0^\infty i^{n+1}z^{2n+1},\ R=1$
7.37. $1/3\cdot\sum_{n=0}^\infty(2(-1)^n/5^{n+1}-1)z^n,\ R=1$
7.38. $(i/6)\sum_1^\infty[(2-3i)^n-(2+3i)^n]z^n/13^n,\ R=\sqrt{13}$
7.39. $1/3\sum_{n=0}^\infty(-1)^n(1-1/4^{n+1})z^{2n+1},\ R=1$
7.40. $\sum_{n=2}^\infty(n-1)(-1)^n z^n,\ R=1$
7.41. $\sum_{n=0}^\infty(n+1)\left(z^{4n}-z^{4n+1}-z^{4n+2}+z^{4n+3}\right),\ R=1$
7.42. $z+\sum_{n=1}^\infty(2n-1)!!/(2^n n!)z^{2n+1},\ R=1$ **7.43.** $2\sum_{n=1}^\infty z^{2n+1}/(2n+1),\ R=1$
7.44. $-\sum_0^\infty 3^n(z+2)^n/5^{n+1},\ R=5/3$
7.45. $1/3+2\sum_1^\infty(-1)^{n+1}(z-1)^n/3^{n+1},\ R=3$
7.46. $\sum_0^\infty((-1)^n/4^{n+1})[(z-1)^{2n}+(z-1)^{2n+1}],\ R=2$
7.47. $5+\sum_{n=1}^\infty(-1)^n\left((z-2)^{2n}+(z-2)^{2n+1}\right),\ R=1$
7.48. $1/4+1/4\cdot\sum_{n=1}^\infty(n-3)(-1)^n(z-1)^n/2^n,\ R=2$

7.49. $-(1/2)\sum_0^\infty (z/2)^n,\ |z|<2;\ (1/2)\sum_1^\infty (2/z)^n,\ |z|>2$
7.50. $\sum_{-1}^\infty z^n,\ 0<|z|<1;\ \sum_{-1}^\infty (-1)^n(z-1)^n,\ 0<|z-1|<1;$
$-\sum_2^\infty 1/z^n,\ |z|>1$
7.51. $1/(b-a)\cdot\sum_{n=0}^\infty \left(1/a^{n+1}-1/b^{n+1}\right) z^n,\ |z|<a;$
$-1/(b-a)^2\cdot\sum_{n=-1}^\infty (z-a)^n/(b-a)^n,\ 0<|z-a|<|b-a|;$
$1/(b-a)\cdot\sum_{n=2}^\infty (b^{n-1}-a^{n-1})/z^n,\ |z|>|b|;$
$-1/(b-a)\cdot\left(\sum_{n=0}^\infty z^n/b^{n+1}+\sum_{n=1}^\infty a^{n-1}/z^n\right),\ |a|<|z|<|b|$
7.52. $1/(z-1)-\sum_0^\infty (z-1)^n,\ 0<|z-1|<1;\ \sum_{-1}^\infty (-1)^n(z-2)^n,\ 0<|z-2|<1$
7.53. $1/(z-2)+i\sum_o^\infty[(2+i)^{n+1}-(2-i)^{n+1}(-1)^n](z-2)^n/5^{n+1},$
$0<|z-2|<\sqrt{5};-\sum_0^\infty z^n/2^{n+1}+2\sum_1^\infty (-1)^n/z^{2n},\ 1<|z|<2$
7.54. $\sum_0^\infty[(-1)^n/2^{n+1}-1]z^n,\ |z|<1;\ \sum_0^\infty (-1)^n z^n/2^{n+1}+\sum_1^\infty 1/z^n,\ 1<|z|<2;$
$\sum_1^\infty[1+(-1)^{n+1}2^{n-1}]/z^n,\ |z|>2$
7.55. $(z-1)+2+\sum_1^\infty (-1)^n/[(2n+1)!(z-1)^{2n}]+$
$+\sum_1^\infty (-1)^{n+1}(4n^2+2n-1)/[(2n+1)!(z-1)^{2n-1}],\ 0<|z-1|<\infty$
7.56. $\cos 1\sum_0^\infty(-1)^n 4^{2n}/((2n)!(z-2)^{4n})+$
$+\sin 1\sum_0^\infty (-1)^n 4^{2n+1}/((2n+1)!(z-2)^{4n+2}),\ 0<|z-2|<\infty$
7.57. $\sum_{-2}^\infty 1/[(n+2)!z^n],\ 0<|z|<\infty$
7.58. $\sum_0^\infty (-1)^n/(n!(z-1)^n),\ 0<|z-1|<\infty$
7.59. $\sum_{n=0}^\infty c_n(z^n+1/z^n),\ c_n=\sum_{k=0}^\infty 1/(k!(n+k)!)$
7.60. $((-1)^k/a^k)\sum_{n=0}^\infty C_{n+k-1}^{k-1}(z/a)^n,\ |z|<|a|;$
$(1/z^k)\sum_{n=0}^\infty C_{n+k-1}^{k-1}(a/z)^n,\ |z|>|a|$
7.61. $\sum_{-2}^\infty(n+3)i^n(z-i)^n/2^{n+4},\ |z-i|!<2;\ \sum_2^\infty(n-1)/z^{2n},\ |z|>1$

Позначення: п.т. – правильна точка, с.о.т. – суттєво особлива точка, н.о.т. – неізольована особлива точка (гранична для полюсів), P^n та 0^n – відповідно полюс та нуль порядку n

8.1. $\{0,\pm1\}\to P^1,\infty\to 0^3;\ \mathrm{Res}(0)=1,\mathrm{Res}(\pm1)=-1/2,\mathrm{Res}(\infty)=0$
8.2. $z_n\equiv e^{i(\pi/4+\pi n/2)}\to P^1,\infty\to$ п.т.; $\mathrm{Res}\,z_n=z_n/4,\mathrm{Res}(\infty)=0$
8.3. $1\to P^2,\infty\to P^3;\ \mathrm{Res}(1)=-\mathrm{Res}(\infty)=5$
8.4. $\pm i\to P^1,\infty\to$ с.о.т.; $\mathrm{Res}(\pm i)=1/2\cdot(\sin 1\mp i\cos 1),\mathrm{Res}(\infty)=-\sin 1$
8.5. $\infty\to$ с.о.т.; $\mathrm{Res}(\infty)=0$
8.6. $0\to P^2, z_n\equiv 2\pi ni\to P^1\ (n\neq 0),\infty\to$ н.о.т.; $\mathrm{Res}(0)=0,$
$\mathrm{Res}(2\pi ni)=1/z_n$
8.7. $0\to P^3, z_n\equiv 2\pi n\pm i\ln(2+\sqrt{3})\to P^1,\infty\to$ н.о.т.; $\mathrm{Res}(0)=0,$
$\mathrm{Res}(z_n)=1/(z_n^3\sin z_n)$ **8.8.** $0\to$ с.о.т., $\infty\to$ п.т.; $\mathrm{Res}(0)=\mathrm{Res}(\infty)=0$

8.9. $1 \to$ с.о.т., $\infty \to$ п.т.; $\mathrm{Res}(1) = -\mathrm{Res}(\infty) = -1/e$
8.10. $1 \to$ с.о.т., $z_n \equiv 2\pi ni \to P^1, \infty \to$ н.о.т.; $\mathrm{Res}\,1 = 1, \mathrm{Res}\,z_n = e^{1/(z_n-1)}$
8.11. $0 \to P^2, \infty \to$ с.о.т.; $\mathrm{Res}(0) = \mathrm{Res}(\infty) = 0$
8.12. $z_n \equiv \pi/2 + \pi n \to P^2, \infty \to$ н.о.т.; $\mathrm{Res}(z_n) = 0$
8.13. $0 \to$ п.т., $z_n \equiv \pi n \to P^1, \infty \to$ н.о.т.; $\mathrm{Res}(0) = 0, \mathrm{Res}(z_n) = 1$
8.14. $-1 \to$ с.о.т., $\infty \to$ п.т.; $\mathrm{Res}(-1) = -\mathrm{Res}(\infty) = -\cos 1$
8.15. $z_n \equiv 1/(\pi n) \to P^1, 0 \to$ н.о.т.; $\mathrm{Res}(z_n) = (-1)^{n+1} z_n^2 \sin z_n$
8.16. $0 \to P^1, \pm 2i \to P^2, \infty \to 0^5$; $\mathrm{Res}(0) = 1/16, \mathrm{Res}(\pm 2i) = -1/32$, $\mathrm{Res}(\infty) = 0$ **8.17.** $\infty \to$ с.о.т.; $\mathrm{Res}(\infty) = 0$
8.18. $0 \to$ п.т., $z_n \equiv 2\pi ni \to P^1\,(n \in Z/0), \infty \to$ н.о.т.; $\mathrm{Res}(0) = 0, \mathrm{Res}(z_n) = 1$
8.19. $z_n \equiv \ln 2 + i\pi(1+2n)\,(n \in Z) \to P^1, \infty \to$ н.о.т.; $\mathrm{Res}(z_n) = -3/2$
8.20. $z_n \equiv i\pi(1/2+n)\,(n \in Z) \to P^1, \infty \to$ н.о.т.; $\mathrm{Res}(z_n) = 1$
8.21. $0 \to$ с.о.т., $\infty \to P^1$; $\mathrm{Res}(0) = -\mathrm{Res}(\infty) = 1/2$
8.22. $\{0, \infty\} \to$ с.о.т; $\mathrm{Res}(0) = -\mathrm{Res}(\infty) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1}/(n!(n+1)!)$
8.23. $z_n \equiv \pi n\,(n \in Z) \to P^1, \infty \to$ н.о.т.; $\mathrm{Res}(z_n) = (-1)^n$
8.24. $z_n \equiv \pi(1/2+n)\ (n \in Z) \to P^1, \infty \to$ н.о.т.; $\mathrm{Res}(z_n) = -1$
8.25. $0 \to P^3, z_n \equiv \pi n\ (n \in Z/0) \to P^1, \infty \to$ н.о.т.; $\mathrm{Res}(0) = 0$, $\mathrm{Res}(z_n) = 1/z_n^2$
8.26. $z_n = \pi n\,(n \in Z) \to P^1, \infty \to$ н.о.т.; $\mathrm{Res}(z_0) = -1, \mathrm{Res}(z_n) = 1\ (n \in Z/0)$
8.27. $z_n \equiv 2\pi n \pm i\ln(2+\sqrt{3}) \to P^1, \infty \to$ н.о.т.; $\mathrm{Res}(z_n) = \pm i/\sqrt{3}$
9.1. 1 **9.2.** 0 **9.3.** $-\pi i/\sqrt{2}$ **9.4.** $-\pi i/121$ **9.5.** πi **9.6.** $-2\pi i$ **9.7.** $-2\pi i/9$
9.8. $32\pi i$ **9.9.** $2\pi/\sqrt{a^2-1}$ **9.10.** $4\pi\sqrt{3}/3$ **9.20.** $1/2 \cdot \pi e^{-ab}$ **9.21.** $\dfrac{\pi e^{-ab}}{2b}$
9.22. $\pi(\cos 1 - 3\sin 1)/(3e^3)$ **9.23.** $\pi(\sin 1 + 3\cos 1)/(3e^3)$
9.24. $\dfrac{\pi}{2e^4}(\sin 2 + 2\cos 2)$ **9.25.** $-\pi/27$ **9.26.** $\pi/(4a)$
9.27. $t>0:\ \pi i,\ t<0:\ -\pi i,\ t=0:\ 0$ **9.28.** $\pi(2\sin 2 - 3\sin 3)$
9.29. $\pi(\cos 1 - e^{-2})/5$ **9.30.** $\pi(e^{-ab} - 1/2)$ **9.31.** $\dfrac{\pi}{2b^2}(1 - e^{-ab})$
9.32. $\dfrac{\pi}{4b^4}(2 - (2+ab)e^{-ab})$ **9.33.** $\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$ **9.34.** $\dfrac{\pi}{\sin \pi a}$ **9.35.** $\pi(\beta/\alpha - \gamma)$
9.36. $\dfrac{\pi\alpha}{2\beta}$ **9.37.** $\dfrac{\pi}{2}\left(\dfrac{\alpha}{2\gamma} - |\beta|\right)$
10.1. $\dfrac{A}{2} + \dfrac{2A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n-1}\sin\dfrac{(2n-1)\pi x}{l}$ **10.2.** $2\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}\sin nx$

10.3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ **10.4.** $\frac{2\sin\pi a}{\pi}\left(\frac{1}{2a}+a\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{a^2-n^2}\right)$

10.5. $\frac{\operatorname{sh} ha}{ha}\left[1+2ha\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(ah)^2+(n\pi)^2}\left(ha\cos\frac{n\pi x}{h}-n\pi\sin\frac{n\pi x}{h}\right)\right]$

10.6. $1-\frac{1}{2}\cos x+2\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2-1}\cos nx$ **10.7.** $\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}\cos 2nx$

10.8. $\frac{3}{\pi^2n^2}\left(\cos\frac{2\pi n}{3}-1\right)$ **10.9.** $\frac{\pi^2}{3}+4\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos nx}{n^2}$

10.10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\pi^2(-1)^{n+1}+\frac{4}{\pi n^3}((-1)^n-1)\sin nx\right)$

10.11. $\frac{4\pi^2}{3}+4\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}-4\pi\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ **10.12.** $\pi^2/6$ **10.13.** $\pi^2/12$

10.14. $\pi^2/8$ **10.15.** $|x|=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}$, $\operatorname{sgn} x=\frac{4}{\pi}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$

10.16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{12}{n^3}-\frac{2\pi^2}{n}\right)\sin nx$ **10.17.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}q^n\sin nx$

11.1. $f(k)=\frac{2k\sin\pi k}{1-k^2},\ f(x)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{k\sin\pi k}{1-k^2}\sin kx\,dk,\ C=1$

11.2. $f(k)=2A\frac{\sin kL}{k},\ f(x)=\frac{2A}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{\sin kL}{k}\cos kx\,dk,\ C=1$

11.3. $f(k)=\frac{2\alpha}{\alpha^2+k^2},\ f(x)=\frac{2\alpha}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{\cos kx}{\alpha^2+k^2}dk,\ C=1$

11.4. $f(k)=\sqrt{\frac{2\pi}{\alpha}}e^{-\frac{k^2}{2\alpha}},\ f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi\alpha}}\int\limits_0^{\infty}e^{-\frac{k^2}{2\alpha}}\cos kx\,dk,\ C=2$

11.5. $|f(\omega)|^2=\frac{f_0^2/4}{|\omega-\omega_0-i\gamma|^2},\ C=1$ **11.6.** $\frac{1}{a^2+x^2}$ **11.7.** $(2\pi a^2)^{3/4}e^{-\frac{k^2a^2}{4}}$

11.8. $\frac{4\pi}{k^2+\alpha^2}$ **11.9.** $\frac{4\pi}{k^2}$ **11.11.** $\frac{a}{2\pi^2r^3}(\sin qr-qr\cos qr)$ **11.17.** $mv_0\delta(t_0)$

11.18. $y(x)=\frac{C}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{i(k^3/3+kx)}\,dk$ **11.19.** $\frac{1}{2\sqrt{\pi a^2t}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}g(x')e^{-\frac{(x-x')^2}{4a^2t}}\,dx'$

11.20. $\dfrac{e^{-\mu|x-x'|}}{2\mu}$ **11.21.** $\dfrac{4\pi}{k^2}$ **11.22.** $\delta(x) = \dfrac{1}{2\pi} + \dfrac{1}{\pi}\sum_{1}^{\infty} \cos nx = \dfrac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} e^{inx}$

Література

1. *Іро Г.* Класична механіка. — Львів : ЛНУ ім. Івана Франка, 1999.
2. *Маркушевич А. И.* Краткий курс теории аналитических функций. 4-е изд., испр. и доп. — М. : Наука, 1978.
3. *Лаврентьев М. А.*, *Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. 4-е изд., перераб. и доп. — М. : Наука, 1973.
4. *Краснов М. Л.*, *Киселев А. И.*, *Макаренко Г. И.* Функции комплексного переменного. Задачи и примеры с подробными решениями. — М. : Едиториал «УРСС», 2003.
5. *Волковыский Л. И.*, *Лунц Г. Л.*, *Араманович И. Г.* Сборник задач по теории функций комплексного переменного. Издание 4-е, перераб. — М. : Физматлит, 2006.
6. *Сандаков Е. Б.*, *Селиванова С. Г.* Сборник домашних заданий по теории функций комплексного переменного. — М. : МИФИ, 2009.
7. *Демидович Б. П.* Сборник задач и упражнений по математическому анализу. — М. : АСТ; Астрель, 2005.
8. *Asmar N. H.*, *Grafakos L.* Complex Analysis with Applications. — Springer, 2018.
9. *Serov V.* Fourier Series, Fourier Transform and Their Applications to Mathematical Physics. — Springer, 2017.