МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

В.В.Маринець, В.Л.Рего,
К.В.Маринець

ТЕОРІЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

УЖГОРОД 2013

ББК В161.61я73
М26
УДК 517.927(075.8)

Маринець В.В., Рего В.Л., Маринець К.В. **Теорія крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь**: Навчальний посібник. – Ужгород: Вид-во УжНУ «Говерла», 2013. – 196 с.

Викладено основні принципи дослідження крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь та їх спектральну теорію. Особлива увага звернена на аналітичні та чисельно-аналітичні методи інтегрування крайових задач.

Для студентів старших курсів та аспірантів математичних факультетів, а також для широкого кола фахівців, чиї наукові дослідження пов’язані зі звичайними диференціальними рівняннями.

Табл. 3. Рис. 13. Бібліогр. 39 назв.

Рецензенти
академік НАН України *М.О. Перестюк*
доктор фізико-математичних наук *М.Й. Ронто*

Рекомендовано до друку
Редакційно-видавничою радою університету
пр. №3 від 18 листопада 2013 р.

ISBN 978-966-2095-80-7

ЗМІСТ

ВСТУП

При дослідженні різних процесів та проблем в області механіки, фізики, електромеханіки, теорії управління, біології, медицини, економіки, соціології приходять до різних типів лінійних та нелінійних крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь. Теорія крайових задач для нелінійних диференціальних рівнянь є одним із актуальних розділів сучасної математики, оскільки запити практики і безліч ще не повністю розв'язаних теоретичних питань багато в чому стимулюють бурхливий розвиток даної області математики.

Пропонований увазі читачів навчальний посібник написаний на підставі прочитаних авторами лекцій для студентів старших курсів математичного факультету, котрі спеціалізуються з диференціальних рівнянь та їх застосувань.

У перших двох розділах посібника викладені основні поняття теорії крайових задач, встановлюються умови існування та єдиності розв'язку лінійних крайових задач, а також наведені методи їх зведення до еквівалентних задач Коші (методи допоміжних функцій, прогонки, стрільби).

Третій розділ присвячений спектральній теорії лінійних крайових задач. Встановлюються достатні умови існування та дійсності власних значень і власних функцій самоспряжених диференціальних операторів, розглядаються деякі питання теорії приєднаних функцій.

У четвертому розділі розглядається проблема обернення диференціального оператора (функція Ґріна лінійного диференціального оператора, умови існування та методи її побудови, узагальнена функція Ґріна, матриця Ґріна).

Наступні два розділи присвячені наближеним методам розв'язування нелінійних крайових задач і встановленню достатніх умов існування та єдиності їх розв'язку, а також деяким іншим питанням якісної теорії крайових задач. Викладені в цих розділах модифікації двостороннього методу та методу параметризації є результатами наукових досліджень авторів – В.В.Маринця та К.В.Маринець, тому видання назване навчальним посібником-монографією.

Чисельні методи розв'язування крайових задач у даному посібнику не викладені, оскільки вони вивчаються в нормативних курсах.

РОЗДІЛ I
ЕЛЕМЕНТАРНА ТЕОРІЯ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ ОПЕРАТОРІВ

§1.1. Основні поняття та означення теорії крайових задач

Розглянемо звичайне диференціальне рівняння n-го порядку $(n \geq 2)$

$$F\left[x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)\right] = 0, \quad x \in (a,b). \tag{1.1}$$

Нехай $\{x_i\}$ – деяка множина точок з проміжку $[a,b]$; $i = \overline{0,k}$, $k \geq 1$. Будемо вважати, що $x_0 = a$, $x_k = b$.

Введемо позначення: $y^{(s_i)}(x_i) = y_i^{(s_i)}$, де $s_i \leq n-1$.

Означення 1. Співвідношення вигляду

$$U_j\left[y(x), y_0, y_0', \dots, y_0^{(s_0)}, \dots, y_k, y_k', \dots, y_k^{(s_k)}\right] = 0, \quad j = \overline{1,m}, \tag{1.2}$$

де U_j – задані функціонали, називаються ***крайовими умовами***.

Означення 2. Розв'язок диференціального рівняння (1.1) називається ***регулярним***, якщо він належить класу $C^n_{(a,b)}$, тобто при $x \in (a,b)$ він є функцією, неперервною разом із похідними до n-го порядку включно.

Означення 3. Задача знаходження регулярного розв'язку рівняння (1.1), котрий справджував би крайові умови (1.2), називається ***крайовою задачею***.

У будь-якому зі співвідношень вигляду (1.2) похідні можуть мати різні порядки, проте обов'язково $s_{i,j} \leq n-1$ (порядок старшої похідної в крайовій умові завжди повинен бути меншим за порядок диференціального рівняння). При цьому кількість крайових умов m у крайовій задачі (1.1),(1.2) може бути довільною.

Якщо кількість точок x_i рівна 2 $(k=1)$, то крайова задача (1.1),(1.2) називається ***двоточковою***; якщо $k > 1$, то крайова задача (1.1),(1.2) називається ***багатоточковою***. Найбільш детально вивчені задачі для диференціального рівняння вигляду (1.1) другого порядку. Так, при $n = 2$ частинні випадки крайових умов (1.2) визначають конкретні крайові задачі для рівняння (1.1) зі вже усталеними назвами:

– першу крайову задачу

$$U_1(y) \equiv y(a) - \gamma_1 = 0, \quad U_2(y) \equiv y(b) - \gamma_2 = 0,$$

де γ_1, γ_2 – деякі сталі;

– мішану крайову задачу

$$U_1(y) \equiv y'(a) - \gamma_1 = 0, \quad U_2(y) \equiv y(b) - \gamma_2 = 0;$$

– крайову задачу Неймана

$$U_1(y) \equiv y'(a) - \gamma_1 = 0, \quad U_2(y) \equiv y'(b) - \gamma_2 = 0;$$

– періодичну крайову задачу

$$U_1(y) \equiv y(a) - y(b) = 0, \quad U_2(y) \equiv y'(a) - y'(b) = 0;$$

– крайові задачі з умовами на нескінченості

$$U_1(y) \equiv y'(a) - \gamma_1 = 0, \quad U_2(y) \equiv y(b) = \infty$$

або

$$U_1(y) \equiv y'(a) - \gamma_1 = 0, \quad U_2(y) \equiv \lim_{x \to \infty} y(x) = 0.$$

У випадку довільного n для рівняння (1.1) відомі:

– двоточкова крайова задача з нелінійними крайовими умовами

$$U_j(y) \equiv U_j\left[y(a), y'(a), ..., y^{(n-1)}(a), y(b), y'(b), ..., y^{(n-1)}(b)\right] = 0, \quad j = \overline{1,n};$$

– двоточкова крайова задача з лінійними крайовими умовами

$$U_j(y) \equiv \sum_{i=0}^{n-1}\left(\alpha_{ij} y^{(i)}(a) + \beta_{ij} y^{(i)}(b)\right) = \gamma_j, \quad j = \overline{1,n},$$

де α_{ij}, β_{ij}, γ_j – деякі сталі;

– $(k+1)$-точкова крайова задача з нелінійними крайовими умовами

$$U_j(y) \equiv U_j\left[y(x_0), ..., y^{(n-1)}(x_0), ..., y(x_k), ..., y^{(n-1)}(x_k)\right] = 0, \quad j = \overline{1,n};$$

– $(k+1)$-точкова крайова задача з лінійними крайовими умовами

$$U_j(y) \equiv \sum_{i=0}^{n-1}\left(\alpha_{ij}^{(0)} y^{(i)}(x_0) + \alpha_{ij}^{(1)} y^{(i)}(x_1) + ... + \alpha_{ij}^{(k)} y^{(i)}(x_k)\right) = \gamma_j, \quad j = \overline{1,n},$$

де $x_0 = a,\ x_k = b,\ x_1, x_2, ..., x_{k-1} \in (a,b)$;

– крайова задача Валле-Пуссена

$$U_j(y) \equiv y^{(j-1)}(x_i) = 0, \quad j = \overline{1,n_i}, \quad i = \overline{0,k}, \quad \sum_{i=0}^{k} n_i = n.$$

Якщо ж в (1.2) покласти $m = n$ і $k = 0$, то співвідношення (1.2) вироджуються в початкові умови в точці $x_0 = a$ й одержуємо задачу Коші для рівняння (1.1) вигляду

$$\begin{gathered} F\left[x, y(x), y'(x), ..., y^{(n)}(x)\right] = 0, \quad x \in (a,b); \\ U_j\left[y_0, y_0', ..., y_0^{(s)}\right] = 0, \quad j = \overline{1,n}, \quad s \le n-1. \end{gathered} \tag{1.3}$$

Як відомо з теорії звичайних диференціальних рівнянь, при виконанні умов теореми існування і єдиності розв’язку задачі Коші для рівняння (1.1) розв’язок задачі (1.3) існує і є єдиним. Цього не можна стверджувати щодо крайової задачі (1.1),(1.2).

ПРИКЛАД 1. Зінтегрувати задачу Коші

$$y'' + y = 0, \quad y = y(x), \quad x \in (a,b); \tag{1.4}$$

$$y(a) = A, \quad y'(a) = B, \tag{1.5}$$

де A, B – задані сталі.

Розв’язання. Загальним розв’язком рівняння (1.4) є функція

$$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x. \tag{1.6}$$

Із початкових умов (1.5) одержимо систему для визначення довільних сталих C_1 та C_2 :

$$\begin{cases} y(a) \equiv C_1 \cos a + C_2 \sin a = A; \\ y'(a) \equiv -C_1 \sin a + C_2 \cos a = B. \end{cases}$$

Детермінант цієї системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos a & \sin a \\ -\sin a & \cos a \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

а отже, система має єдиний розв'язок $C_1 = A\cos a - B\sin a,\ C_2 = B\cos a + A\sin a.$ Тоді задача Коші (1.4),(1.5) також матиме єдиний розв'язок вигляду

$$y(x) = \left(A\cos a - B\sin a\right)\cos x + \left(B\cos a + A\sin a\right)\sin x = A\cos(x-a) + B\sin(x-a).$$

ПРИКЛАД 2. Розглянемо подібну крайову задачу: знайти розв'язок рівняння (1.4), котрий справджував би крайові умови

$$y(a) = A, \quad y(b) = B. \tag{1.7}$$

Розв'язання. Враховуючи, що загальний розв'язок рівняння (1.4) має вигляд (1.6), із крайових умов (1.7) одержимо систему для визначення довільних сталих C_1 та C_2 :

$$\begin{cases} y(a) \equiv C_1 \cos a + C_2 \sin a = A; \\ y(b) \equiv C_1 \cos b + C_2 \sin b = B. \end{cases} \tag{1.8}$$

Детермінант цієї системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos a & \sin a \\ \cos b & \sin b \end{vmatrix} = \sin(b-a)$$

залежно від значень *a* і *b* може бути рівним нулеві чи відмінним від нуля.

Так, наприклад, при $a = 0,\ b = \frac{\pi}{4}$ $\Delta = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0$, і крайова задача (1.4), (1.7) матиме єдиний розв'язок

$$y(x) = A\cos x + \left(B\sqrt{2} - A\right)\sin x.$$

Зате при $a = 0, b = \pi$ будемо мати $\Delta = \sin\pi = 0$, а система (1.8) набуде вигляду

$$\begin{cases} C_1 = A; \\ -C_1 = B. \end{cases}$$

Звідси очевидно: якщо $B = -A,$ то крайова задача (1.4),(1.7) матиме безліч розв'язків вигляду

$$y(x) = A\cos x + C_2 \sin x,$$

де C_2 – довільна стала. Якщо ж $B \neq -A,$ то задача (1.4),(1.7) не має розв'язку.

Таким чином, якщо задача Коші при виконанні умов теореми існування та єдиності завжди має єдиний розв'язок, то на відміну від неї крайова задача може мати єдиний чи безліч розв'язків, або ж не мати жодного. Зауважимо, що заміною $\xi = x - a$ проміжок $[a,b]$ завжди можна перенести на проміжок $[0;l]$, де $l = b - a.$ Розв'язки багатьох крайових задач, які описують реальні процеси (зокрема, фізичних задач, де незалежною змінною виступає час), доводиться шукати, ведучи відлік від нуля. Тому, не зменшуючи загальності досліджень, можна в (1.1),(1.2) вважати $a = 0$.

Подібно до диференціального рівняння (1.1) ставляться крайові задачі і для систем диференціальних рівнянь. Розглянемо систему диференціальних рівнянь у нормальному вигляді

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}), \quad t \in (0; T), \tag{1.9}$$

де $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \dots & x_n(t) \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} f_1(t, \boldsymbol{x}) & f_2(t, \boldsymbol{x}) & \dots & f_n(t, \boldsymbol{x}) \end{pmatrix}$ – n-вимірні вектор-функції.

Для системи (1.9) крайові умови загального вигляду можна подати співвідношеннями:

$$\begin{gathered} \boldsymbol{U}(\boldsymbol{x}) \equiv \begin{pmatrix} U_1(\boldsymbol{x}) & U_2(\boldsymbol{x}) & \dots & U_n(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} = 0, \\ U_j(\boldsymbol{x}) \equiv U_j\big(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{x}(t_0), \boldsymbol{x}(t_1), \dots, \boldsymbol{x}(t_k)\big), \quad j = \overline{1, n}, \end{gathered} \tag{1.10}$$

де U_j – задані функціонали. Якщо функціонали U_j лінійні, то крайові умови (1.10) також називаються лінійними, а в протилежному випадку – нелінійними. Як і у випадку рівняння (1.1), розрізняють дво- та багатоточкові крайові умови залежно від кількості значень t_k незалежної змінної, які входять у (1.10). Задачу знаходження частинного розв'язку системи (1.9), котрий справджував би задані крайові умови (1.10), називають ***крайовою задачею***.

Деякі частинні випадки крайових умов (1.10) визначають для системи (1.9) відповідні класичні крайові задачі:

– двоточкову крайову задачу з нелінійними крайовими умовами
$$\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x}) \equiv \begin{pmatrix} U_1(\boldsymbol{x}(0), \boldsymbol{x}(T)) & U_2(\boldsymbol{x}(0), \boldsymbol{x}(T)) & \dots & U_n(\boldsymbol{x}(0), \boldsymbol{x}(T)) \end{pmatrix} = 0;$$

– двоточкову крайову задачу з лінійними крайовими умовами
$$\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x}) \equiv \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(0) + \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(T) - \boldsymbol{\gamma} = 0,$$

де $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{C}$ – сталі матриці розмірності $n \times n$, а $\boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \dots & \gamma_n \end{pmatrix}$ – сталий вектор;

– крайову задачу Коші-Ніколетті
$$U_j(\boldsymbol{x}) \equiv x_j(t_j) - \gamma_j = 0, \quad j = \overline{1, n},$$

де $0 \le t_1 \le t_2 \le \dots \le t_n = T$;

– крайову задачу інтерполяційного типу
$$U_j(\boldsymbol{x}) \equiv x_1(t_j) - \gamma_j = 0, \quad j = \overline{1, n},$$

де $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = T$;

– періодичну крайову задачу
$$U_j(\boldsymbol{x}) \equiv x_j(0) - x_j(T) = 0, \quad j = \overline{1, n};$$

– $(k+1)$-точкову крайову задачу з нелінійними крайовими умовами
$$U_j(\boldsymbol{x}) \equiv U_j\big(\boldsymbol{x}(t_0), \boldsymbol{x}(t_1), \dots, \boldsymbol{x}(t_k)\big) = 0, \quad j = \overline{1, n};$$

– $(k+1)$-точкову крайову задачу з лінійними крайовими умовами
$$\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x}) \equiv \sum_{i=0}^{k} \boldsymbol{B}_i \boldsymbol{x}(t_i) - \boldsymbol{\gamma} = 0, \quad 0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k = T,$$

де $\boldsymbol{B}_i$ – сталі матриці розмірності $n \times n$;

– $(k+1)$-точкову крайову задачу з функціональними крайовими умовами, наприклад

$$\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x}) \equiv \sum_{i=0}^{k} \boldsymbol{B}_i \boldsymbol{x}(t_i) + \int_0^T \rho(t)\boldsymbol{x}(t)dt - \boldsymbol{\gamma} = 0,$$

де $\rho(t)$ – задана неперервна функція;

– двоточкову крайову задачу з розмежованими крайовими умовами

$$U_i(\boldsymbol{x}) \equiv x_i(0) - \gamma_i = 0, \quad i = \overline{1,q},$$
$$U_j(\boldsymbol{x}) \equiv x_j(T) - \gamma_j = 0, \quad j = \overline{q+1,n}.$$

Очевидно, що властивості правої частини розглядуваних диференціальних рівнянь та систем і задані крайові умови значною мірою впливають на можливості конструктивної побудови наближених розв'язків або ж на дослідження розв'язності крайових задач.

§1.2. Задачі фізики та механіки, які приводять до крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь

Розподіл температури в однорідному стержні. Розглянемо тонкий однорідний металевий стержень довжини l, який знаходиться в стані теплової рівноваги (температура точок стержня не змінюється з бігом часу). Коефіцієнт внутрішньої теплопровідності стержня рівний λ. Випромінювання тепла через бічну поверхню стержня в довкілля температури $\theta_0 = const$ пропорційне різниці температур стержня і довкілля з коефіцієнтом теплопередачі α. Вважаючи температуру стержня у всіх точках поперечного перерізу сталою, визначити температуру стержня $\theta(x)$ як функцію координати, яка відраховується від одного з кінців, якщо на кінцях стержня підтримується стала температура – відповідно θ_1 та θ_2 (задані сталі).

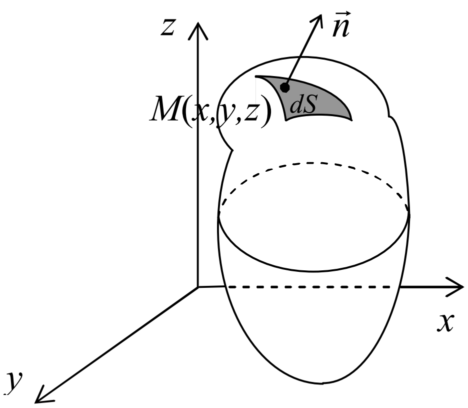

Рис. 1

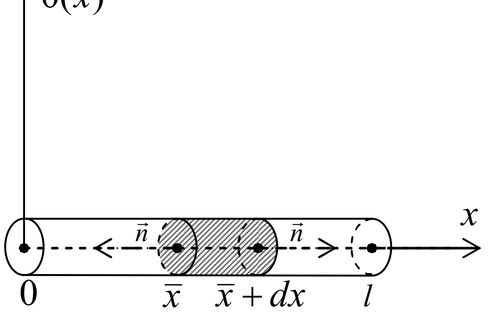

Рис. 2

Складемо математичну модель задачі. Для цього використаємо закон Фур'є: кількість тепла Q, яка пройде через поверхню dS у напрямі вектора $\vec{n}$ за проміжок часу dt при коефіцієнті теплопровідності λ, рівна

$$Q = -\lambda \frac{\partial U}{\partial \vec{n}} dSdt,$$

де $U(t,x,y,z)$ – температура в точці $M(x,y,z)$ в момент часу t, причому для випадку теплової рівноваги $U(t,x,y,z) \equiv U(x,y,z)$, а $\vec{n}$ – вектор зовнішньої нормалі до поверхні dS у точці M (рис. 1).

Розглянемо елемент стержня $[\bar{x}, \bar{x}+dx]$ довжини dx (рис. 2). Позначимо через S площу, а через P – периметр поперечного перерізу стержня. Згідно з законом Фур'є в точці $\bar{x}$ через поперечний переріз S за час dt у напрямі вектора зовнішньої нормалі $\vec{n}$ випромінюється кількість тепла

$$Q_1 = -\lambda S \frac{\partial \theta}{\partial \vec{n}}\bigg|_{\bar{x}} dt = \lambda S \frac{d\theta(\bar{x})}{dx} dt;$$

аналогічно в точці $\bar{x} + dx$:

$$Q_2 = -\lambda S \frac{\partial \theta}{\partial \vec{n}}\bigg|_{\bar{x}+dx} dt = -\lambda S \frac{d\theta(\bar{x}+dx)}{dx} dt.$$

Тоді кількість тепла Q, яку одержує елемент стержня $[\bar{x}, \bar{x}+dx]$ за час dt, рівна

$$Q = -Q_1 - Q_2 = \lambda S \left(\frac{d\theta(\bar{x}+dx)}{dx} - \frac{d\theta(\bar{x})}{dx} \right) dt,$$

або згідно з теоремою Лаґранжа про скінчені прирости

$$Q = \lambda S \frac{d^2\theta(x)}{dx^2} dt dx .$$

Оскільки стержень перебуває у стані теплової рівноваги, то кількість тепла, яка надходить в елемент стержня $[\bar{x}, \bar{x}+dx]$ через поперечні перерізи, повинна бути рівною тій кількості тепла, яка випромінюється через бічну поверхню, тобто за умовою задачі

$$Q = \alpha\big(\theta(x) - \theta_0\big) P dx dt.$$

Отже, для відшукання $\theta(x)$ одержуємо диференціальне рівняння

$$\lambda S \frac{d^2\theta(x)}{dx^2} dt dx = \alpha\big(\theta(x) - \theta_0\big) P dx dt,$$

або

$$\theta''(x) = a^2\big(\theta(x) - \theta_0\big), \quad x \in (0;l), \tag{2.1}$$

де $a^2 = \dfrac{P\alpha}{\lambda S}$. На кінцях стержня задані крайові умови

$$\theta(0) = \theta_1, \quad \theta(l) = \theta_2. \tag{2.2}$$

Математична модель задачі: знайти регулярний розв'язок рівняння (2.1), який справджує крайові умови (2.2).

Введемо заміну

$$y(x) = \theta(x) - \theta_0, \quad y''(x) = \theta''(x). \tag{2.3}$$

Тоді з (2.1),(2.2) одержимо крайову задачу вигляду

$$y''(x) - a^2 y(x) = 0, \quad x \in (0;l);$$

$$y(0) = \theta_1 - \theta_0, \quad y(l) = \theta_2 - \theta_0.$$

Загальний розв'язок рівняння є $y(x) = C_1 e^{ax} + C_2 e^{-ax}$. Із крайових умов

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = \theta_1 - \theta_0; \\ C_1 e^{al} + C_2 e^{-al} = \theta_2 - \theta_0. \end{cases}$$

Детермінант одержаної системи $\Delta = -2\operatorname{sh} al \neq 0$. Отже, поставлена крайова задача (2.1),(2.2) має єдиний розв'язок. З урахуванням (2.3) одержимо

$$\theta(x) = \frac{(\theta_2 - \theta_0)\operatorname{sh} ax + (\theta_1 - \theta_0)\operatorname{sh} a(l - x)}{\operatorname{sh} al}. \tag{2.4}$$

ПРИКЛАД. Нехай стержень мідний ($\lambda = 330$, $\alpha = 10$) довжини $l = 1$ м, його поперечний переріз – квадрат зі стороною $b = 0{,}0552$ м, $P/S = 72{,}5$; $\theta_0 = 0°C$, $\theta_1 = 200°C$, $\theta_2 = 100°C$. Знайти мінімальну температуру стержня.

Підклавши числові дані у (2.4), дістанемо:

$$\theta(x) = 47{,}9\operatorname{sh}1{,}48x + 95{,}8\operatorname{sh}1{,}48(1 - x).$$

Складемо таблицю значень температури в точках стержня з кроком $dx = 0{,}1$. Деякі з цих значень наведені нижче (таблиця 1).

x	0	0,2	0,4	0,6	0,8	0,9	1
$\theta(x)$	200	156,3	126,7	108,4	99,4	99,2	100

З таблиці видно, що мінімальне значення температури досягається поблизу правого кінця стержня.

Прогин двоопорного бруса. Горизонтальний однорідний сталевий брус довжини l, який вільно лежить на двох опорах, прогинається під дією власної ваги, рівної P кгс на одиницю довжини. Знайти рівняння пружної лінії (викривленої осі симетрії бруса) та максимальний прогин бруса.

В опорі матеріалів доводиться, що згинний момент $M(x)$ (алгебраїчна сума моментів тих сил, котрі діють по один бік від точки бруса з абсцисою x) пов'язаний з радіусом кривини пружної лінії R співвідношенням (див. [1], с. 69)

$$M(x) = \frac{1}{R} = EJ\frac{y''}{\left[1 + (y')^2\right]^{3/2}}, \tag{2.5}$$

де $y(x)$ – функція, що описує відхилення точки з абсцисою x від положення рівноваги (рівняння пружної лінії), E – модуль пружності Юнґа (залежить від матеріалу), а J – головний момент інерції поперечного перерізу в точці бруса з абсцисою x відносно горизонтальної прямої, яка проходить через центр ваги цього перерізу (характеризує форму поперечного перерізу). Добуток EJ називають жорсткістю згину; будемо надалі вважати цю величину сталою.

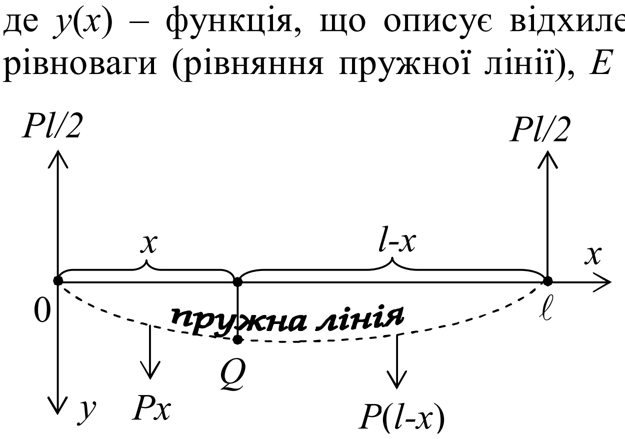

Рис. 3

Якщо припустити, що брус має невеликий прогин (як це часто трапляється на практиці), то кутовий коефіцієнт пружної лінії $y'(x)$ буде дуже малим і замість рівняння (2.5) можна розглядати простіше рівняння

$$M(x) = EJy''. \tag{2.6}$$

Знайдемо згинний момент $M(x)$ для поставленої вище задачі (рис. 3). Поскільки брус двоопорний, то кожна опора створює напрямлену вгору реакцію, рівну половині ваги бруса, тобто $Pl/2$. Ліворуч від точки Q з абсцисою x сила $Pl/2$ діє на брус знизу догори, створюючи від'ємний момент $-\frac{Pl}{2}x$; сила ж Px, яка діє на брус згори донизу на відстані $x/2$ від точки Q, створює додатний момент $Px \cdot \frac{x}{2}$. Тому сумарний згинний момент ліворуч від точки Q буде

$$M(x) = -\frac{Pl}{2}x + Px \cdot \frac{x}{2} = \frac{P}{2}\left(x^2 - lx\right).$$

Аналогічно підраховується згинний момент праворуч від точки Q:

$$M(x) = -\frac{Pl}{2}(l - x) + P(l - x) \cdot \frac{(l-x)}{2} = \frac{P}{2}\left(x^2 - lx\right).$$

Бачимо, що значення $M(x)$ ліворуч і праворуч від точки Q співпадають. Тоді рівняння (2.6) набуде вигляду

$$EJy''(x) = \frac{P}{2}\left(x^2 - lx\right). \tag{2.7}$$

Математична модель задачі: знайти регулярний розв'язок рівняння (2.7), котрий справджує крайові умови

$$y(0) = 0, \quad y(l) = 0 \tag{2.8}$$

(на кінцях брус не прогинається).

Розв'язком одержаної крайової задачі (2.7),(2.8) є функція

$$y(x) = \frac{P}{24EJ}\left(x^4 - 2lx^3 + l^3x\right),$$

котра й задає рівняння пружної лінії. Максимальний прогин бруса буде

$$y\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{5Pl^4}{384EJ},$$

де $E = 21 \cdot 10^5$ кгс/см^2, $J = 3 \cdot 10^4$ см^4.

Нехай до вільно опертого на двох опорах бруса в деякій його середній точці з абсцисою a прикладене зосереджене навантаження $\vec{P}$ (рис. 4). Тоді лінія прогину описується диференціальними рівняннями

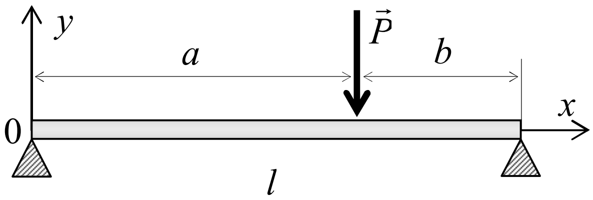

Рис. 4

$$EJy_1''(x) = \frac{Pb}{l}x, \quad x \le a;$$

$$EJy_2''(x) = \frac{Pb}{l}x - P(x - a), \quad x \ge a,$$

де $b = l - a$, з крайовими умовами

$$y_1(0) = 0, \quad y_2(l) = 0, \quad y_1(a) = y_2(a), \quad y_1'(a) = y_2'(a)$$

(див. [28], т. 1, с. 128).

Розв'язками наведеної крайової задачі є функції

$$y_1(x) = \tfrac{Pb}{6lEJ}\left[x^3 - \left(l^2 - b^2\right)x\right], \quad 0 \le x \le a;$$

$$y_2(x) = \tfrac{Pb}{6lEJ}\left[x^3 - lb^{-1}(x-a)^3 - \left(l^2 - b^2\right)x\right], \quad a \le x \le b.$$

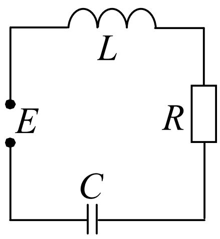

Рис. 5

Струм в електричному колі. Розглянемо електричний контур з послідовно з'єднаними елементами: індуктивністю $L = 1$ Генрі, опором $R = 1000$ Ом і конденсатором ємності $C = 6{,}25 \cdot 10^{-6}$ Ф (рис. 5). Початковий заряд в контурі рівний нулеві, а в момент часу $t = 0$ до нього прикладається стала електрорушійна сила $E = 24$ В. Вимагається визначити величину струму в момент часу $t = 0$, якщо відомо, що при $t = 0{,}001$ с сила струму рівна $0{,}031$ А.

З електротехніки відомо, що сила струму $I(t)$ і заряд $Q(t)$ конденсатора в будь-якому замкненому контурі, що складається з перелічених вище елементів, є розв'язками диференціальних рівнянь

$$Q'(t) = I(t), \quad LI'(t) + RI(t) + C^{-1}Q(t) = E. \tag{2.9}$$

З рівностей (2.9) для визначення заряду $Q(t)$ одержуємо рівняння другого порядку

$$LQ''(t) + RQ'(t) + C^{-1}Q(t) = E,$$

яке після підкладання числових даних з умови задачі набуває вигляду

$$Q''(t) + 10^3 \cdot Q'(t) + 16 \cdot 10^4 \cdot Q(t) = 24. \tag{2.10}$$

Із урахуванням (2.9) отримуємо крайові умови

$$Q(0) = 0, \quad Q'(0{,}001) = 0{,}031. \tag{2.11}$$

Крайова задача (2.10),(2.11) має єдиний розв'язок

$$Q(t) = \frac{\left(1{,}5e^{-0{,}2} - 1{,}55\right)e^{-800t} - \left(6e^{-0{,}8} - 1{,}55\right)e^{-200t}}{\left(4e^{-0{,}8} - e^{-0{,}2}\right)\cdot 10^4} + 1{,}5 \cdot 10^{-4}.$$

Тоді сила струму в момент часу $t = 0$ рівна

$$I(0) = Q'(0) = \frac{0{,}02}{4 - e^{0{,}6}}\left(6 - 6e^{0{,}6} + 4{,}65e^{0{,}8}\right) \approx 0{,}05 \text{ А}.$$

Задачі про потік рідини. В'язкопружна рідина – це рідина, яка володіє пам'яттю. При дослідженні потоку такої рідини вздовж нескінченої горизонтальної площини Ц.На і М.Сидом показали*, що цей процес описується крайовою задачею:

$$\nu F''(\eta) - \left(\lambda_0\beta^2 + \beta\right)F(\eta) = 0, \quad F(0) = U_0, \quad F(\infty) = 0,$$

* *T.Y.Na, M.M.Sidhom.* On Stokes' Problems for Linear Viscoelastic Fluids // J. Appl. Mech. **34**, p. 1040-1042 (1967).

де ν, λ_0, β, U_0 – задані сталі, які залежать від фізичних властивостей рідини. Наведена крайова задача має єдиний розв'язок

$$F(\eta) = U_0 \exp\left(-\sqrt{\frac{\lambda_0\beta^2 + \beta}{\nu}}\eta \right).$$

Розглянемо потік рідини між двома концентричними циліндрами, які обертаються (рис. 6). Як показано в роботі Г.Шліхтінґа (див. [38], с. 80-81), функція $p(r)$ розподілу тиску вздовж радіуса є розв'язком крайової задачі

$$\frac{d^2}{dr^2}\left(r\frac{dp}{dr} \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{d}{dr}\left(r^{-1}\frac{dp}{dr} \right)^{\frac{1}{2}} = 0;$$

$$\left.\frac{dp}{dr}\right|_{r=r_1} = \rho r_1\omega_1^2, \quad p(r_1) = p_1, \quad \left.\frac{dp}{dr}\right|_{r=r_2} = \rho r_2\omega_2^2,$$

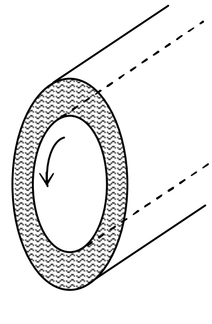

Рис. 6

де ρ – густина рідини; ω_1 і ω_2 – кутові швидкості, а r_1 і r_2 – радіуси внутрішнього та зовнішнього циліндрів відповідно; p_1 – тиск на поверхні внутрішнього циліндра. Наведена крайова задача має єдиний розв'язок

$$p(r) = p_1 + \frac{1}{2}\rho\alpha^2\left(r^2 - r_1^2\right) - 2\rho\alpha\beta\ln\frac{r}{r_1} - \frac{1}{2}\rho\beta^2\left(r^{-2} - r_1^{-2}\right),$$

де $\alpha = \dfrac{\omega_2 r_2^2 - \omega_1 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}$, $\beta = \dfrac{r_1^2 r_2^2(\omega_2 - \omega_1)}{r_2^2 - r_1^2}$.

Вправа. Розрахувати функцію розподілу тиску при значеннях: p_1=20, $\rho = 62$, $r_1 = 5$, $r_2 = 6$, $\omega_1 = 10$ об/хв, $\omega_2 = 30$ об/хв.

Зауважимо, що в наступних розділах наводитимуться деякі інші задачі практики, що приводять до крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь, а також подаватимуться відповідні математичні моделі та розв'язки.

§1.3. Лінійний простір. Основні поняття та означення

Сукупність елементів $\Lambda = \{x, y, z, ...\}$ довільної природи називається ***лінійним простором***, якщо:

1) на цій множині визначена операція додавання елементів, яка має наступні властивості:

а) $\forall x, y \in \Lambda, \quad x + y \in \Lambda$;

б) $\forall x, y \in \Lambda, \quad x + y = y + x$;

в) $\forall x, y, z \in \Lambda, \quad x + (y + z) = (x + y) + z$;

г) $\exists 0 \in \Lambda, \quad \forall x \in \Lambda, \quad x + 0 = x$;

2) на цій множині визначений добуток довільного її елемента на число $\lambda \in \Theta$ з наступними властивостями:

а) $\forall x \in \Lambda, \quad \forall \lambda \in \Theta, \quad \lambda x \in \Lambda;$

б) $\forall x \in \Lambda, \quad \forall \lambda, \mu \in \Theta, \quad \lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x;$

в) $\forall x \in \Lambda, \quad 1 \cdot x = x;$

г) $\forall x \in \Lambda, \quad 0 \cdot x = 0;$

д) $\forall x, y \in \Lambda, \quad \forall \lambda \in \Theta, \quad \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y;$

е) $\forall x \in \Lambda, \quad \forall \lambda, \mu \in \Theta, \quad x(\lambda + \mu) = \lambda x + \mu x.$

При цьому елемент $(-1) \cdot x$ позначаємо через $(-x)$. На підставі властивостей в), г), е) $x + (-x) = \left[1 + (-1)\right] \cdot x = 0 \cdot x = 0.$

Якщо в просторі Λ допускається множення на довільне дійсне число, то Λ називається дійсним простором; якщо ж допускається множення на довільне комплексне число, то простір Λ називається комплексним.

Елементи лінійного простору Λ називаються ***векторами*** і позначаються x_i, i=1,2,… Довільні числа в Λ позначаються C_i. Вираз вигляду

$$\sum_{i=1}^{n} C_i x_i, \tag{3.1}$$

де $x_i \in \Lambda$, називається ***лінійною комбінацією*** векторів лінійного простору. Лінійна комбінація називається ***тривіальною***, якщо всі числові коефіцієнти C_i рівні нулеві, і ***нетривіальною*** в протилежному випадку.

Вектори $\{x_i\}$, $i = \overline{1,n}$, називаються ***лінійно залежними***, якщо існує їх нетривіальна лінійна комбінація (3.1), рівна нулеві. Якщо такої комбінації не існує, то вектори називаються ***лінійно незалежними***. Максимальна кількість лінійно незалежних векторів простору Λ складає його ***базу***, а число векторів бази визначає його ***вимірність***. Якщо векторів бази є скінчена кількість, то простір Λ називається ***скінченовимірним*** (двовимірним, тривимірним тощо), в протилежному випадку – ***нескінченовимірним***. Будь-який вектор простору Λ завжди можна подати у вигляді лінійної комбінації векторів бази.

Множина $\Lambda_1 \subset \Lambda$ є ***лінійним підпростором*** лінійного простору Λ, якщо будь-яка лінійна комбінація двох елементів з Λ_1 також належить Λ_1. Якщо довільному елементові $x \in \Lambda_1$ за певним законом (правилом) поставлений у відповідність деякий елемент $y \in \Lambda$, то кажуть, що в просторі Λ заданий ***оператор*** $Ax = y$. При цьому множина значень x $D_A \subset \Lambda_1$ називається ***областю визначення***, а множина значень y $E_A \subset \Lambda$ – ***областю значень*** оператора A.

Оператори A і B, задані в лінійному просторі Λ, називаються ***співпадаючими***, якщо $D_A = D_B$ і для довільного x $Ax = Bx$. Оператор A є ***розширенням*** оператора B (або ж оператор B є ***звуженням*** оператора A, $A \supset B$), якщо $D_B \subset D_A$ і для довільного $x \in D_B$ $Ax = Bx$.

Оператор A називається ***лінійним***, якщо його область визначення D_A є лінійним підпростором лінійного простору Λ, причому мають силу наступні властивості:

а) $\forall x \in D_A, \quad \forall \lambda \in \Theta, \quad A(\lambda x) = \lambda A x;$

б) $\forall x, y \in D_A, \quad A(x + y) = Ax + Ay.$

§1.4. Лінійні диференціальні вирази та крайові умови

Нехай $p_k(x)$, $k = \overline{0, n}$ – довільні неперервні при $x \in (a, b)$ функції, причому $p_0(x) \neq 0$. Вираз вигляду

$$\ell_n(y) \equiv \sum_{k=0}^{n} p_k(x) y^{(n-k)}(x) \tag{4.1}$$

називається ***лінійним диференціальним виразом*** *n*-го порядку.

Будемо вважати $y(x) \in C^n_{(a,b)}$. Позначимо

$$U_j(y) = \sum_{s=0}^{n-1} \left(\alpha_{s,j} y^{(s)}(a) + \beta_{s,j} y^{(s)}(b) \right), \quad j = \overline{1, m}, \tag{4.2}$$

де $\alpha_{s,j}$, $\beta_{s,j}$ – задані сталі. Вважатимемо лінійні форми (4.2) незалежними. Тоді вирази вигляду

$$U_j(y) = \gamma_j, \quad j = \overline{1, m}, \tag{4.3}$$

де γ_j – задані числа, називаються ***лінійними крайовими умовами***. Крайові умови (4.3) називаються ***однорідними***, якщо всі γ_j рівні нулеві, і ***неоднорідними*** в протилежному випадку.

Позначимо через D_L множину функцій $y(x) \in C^n_{(a,b)} \cap C^{n-1}_{[a,b]}$, які справджують крайові умови (4.3). Довільній функції $y(x) \in D_L$ поставимо у відповідність деяку функцію $f(x) \in C_{(a,b)}$ за законом

$$\ell_n(y) = f(x), \tag{4.4}$$

тобто задамо в лінійному просторі $C_{(a,b)}$ оператор

$$Ly = f(x) \tag{4.5}$$

з областю визначення D_L, або ***лінійний диференціальний оператор***, породжений лінійним диференціальним виразом (4.1) і лінійними крайовими умовами (4.3). Операторне рівняння (4.5) еквівалентне крайовій задачі (4.4),(4.3).

Очевидно, що у випадку однорідних крайових умов (4.3) D_L є лінійним підпростором лінійного простору $C^n_{(a,b)} \cap C^{n-1}_{[a,b]}$, причому D_L може співпадати з $C^n_{(a,b)} \cap C^{n-1}_{[a,b]}$ тільки тоді, коли крайові умови (4.3) відсутні. Зауважимо, що один і той же диференціальний вираз може породжувати різні диференціальні оператори в залежності від умов (4.3).

§1.5. Спряжені диференціальні вирази

Розглянемо лінійний диференціальний вираз

$$\ell_n(y) \equiv \sum_{k=0}^{n} p_{n-k}(x) y^{(k)}(x), \quad x \in (a,b). \tag{5.1}$$

Будемо вважати, що коефіцієнти $p_{n-k}(x) \in C^k_{(a,b)}$, $k = \overline{0,n}$, причому $p_0(x) \neq 0$. Складемо інтеграл

$$I_k = \int_a^b p_{n-k}(x) z(x) y^{(k)}(x) dx; \quad z(x), y(x) \in C^n_{(a,b)}. \tag{5.2}$$

Обчислимо інтеграл (5.2) інтегруванням частинами k разів, беручи $u = [p_{n-k}(x)z(x)]^{(k-m)}$, $dv = y^{(m)}(x)dx$; $m = k, k-1, ..., 1$. Одержимо:

$$I_k = p_{n-k}(x) z(x) y^{(k-1)}(x)\Big|_a^b - \int_a^b [p_{n-k}(x) z(x)]' y^{(k-1)}(x) dx =$$

$$= \sum_{m=0}^{k-1} \Big[(-1)^m [p_{n-k}(x) z(x)]^{(m)} y^{(k-m-1)}(x)\Big]_a^b + (-1)^k \int_a^b [p_{n-k}(x) z(x)]^{(k)} y(x) dx.$$

Покладемо в останній рівності $k = n, n-1, ..., 0$ і просумуємо вирази I_k. Одержимо:

$$\int_a^b \ell_n(y) z(x) dx = P(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z}) + \int_a^b y(x) \ell^*_n(z) dx, \tag{5.3}$$

де $P(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z})$ – деяка білінійна форма з елементів векторів

$$\boldsymbol{Y} = \begin{pmatrix} y(a) & y'(a) & \ldots & y^{(n-1)}(a) & y(b) & y'(b) & \ldots & y^{(n-1)}(b) \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{Z} = \begin{pmatrix} z(a) & z'(a) & \ldots & z^{(n-1)}(a) & z(b) & z'(b) & \ldots & z^{(n-1)}(b) \end{pmatrix},$$

а

$$\ell^*_n(z) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k [p_{n-k}(x) z(x)]^{(k)}. \tag{5.4}$$

Формула (5.3) називається ***формулою Лаґранжа***, а диференціальний вираз (5.4) називається ***спряженим*** до диференціального виразу (5.1).

Із побудови спряженого диференціального виразу випливають наступні властивості:

$$\begin{aligned} &(\ell_n(y) + \ell_m(y))^* = \ell^*_n(y) + \ell^*_m(y); \\ &(C\ell_n(y))^* = C\ell^*_n(y); \\ &(\ell^*_n(y))^* = \ell_n(y). \end{aligned} \tag{5.5}$$

Означення. Лінійний диференціальний вираз називається ***самоспряженим***, якщо $\ell_n(y) = \ell^*_n(y)$. Якщо вирази $\ell_n(y)$ і $\ell_m(y)$ самоспряжені, то згідно з властивостями (5.5) самоспряженими будуть також вирази $\ell_n(y) + \ell_m(y)$ та $C\ell_n(y)$.

ТЕОРЕМА 1.1 ***(необхідна й достатня умова самоспряженості лінійного диференціального виразу).*** *Для того, щоб лінійний диференціальний вираз (5.1) був самоспряженим, необхідно й досить, аби його можна подати у вигляді*

$$\ell_{2m}(y) \equiv \sum_{j=0}^{m} \left[q_j(x) y^{(j)}(x)\right]^{(j)}. \tag{5.6}$$

Доведення. Нехай вираз (5.1) поданий у вигляді (5.6). Покажемо (достатність), що вираз (5.6) самоспряжений.

Розглянемо один доданок суми (5.6)

$$\ell_{2j}(y) = \left[q_j(x) y^{(j)}(x)\right]^{(j)}. \tag{5.7}$$

Побудуємо вираз, спряжений до виразу (5.7), зінтегрувавши $2j$ разів частинами подібно до (5.2) інтеграл

$$I_{2j} \equiv \int_a^b \left[q_j(x) y^{(j)}(x)\right]^{(j)} z(x) dx =$$

$$= \left\{ \left[q_j(x) y^{(j)}(x)\right]^{(j-1)} z(x) + \ldots + (-1)^{j-1} q_j(x) y^{(j)}(x) z^{(j-1)}(x) \right\}\Bigg|_a^b +$$

$$+ (-1)^j \int_a^b q_j(x) z^{(j)}(x) y^{(j)}(x) dx = \ldots = P(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z}) + (-1)^{2j} \int_a^b \left[q_j(x) z^{(j)}(x)\right]^{(j)} y(x) dx.$$

Отже, $\ell^*_{2j}(z) = \left[q_j(x) z^{(j)}(x)\right]^{(j)}$, а тому $\ell_{2j}(y) = \ell^*_{2j}(y)$, тобто вираз (5.7) самоспряжений. Але тоді згідно з властивостями (5.5) вираз (5.6) також буде самоспряженим як сума самоспряжених виразів вигляду (5.7).

Покажемо тепер (необхідність), що у випадку самоспряженості виразу (5.1) його завжди можна подати у вигляді (5.6).

Нехай вираз (5.1) самоспряжений. Тоді $\ell_n(y) = \ell^*_n(y)$, або

$$\sum_{k=0}^{n} p_{n-k}(x) y^{(k)}(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \left[p_{n-k}(x) y(x)\right]^{(k)}.$$

Останню рівність можна записати у вигляді

$$p_0(x) y^{(n)}(x) + p_1(x) y^{(n-1)}(x) + \ldots + p_n(x) y(x) = (-1)^n p_0(x) y^{(n)}(x) + \ell_{n-1}(y),$$

звідки випливає, що $p_0(x) = (-1)^n p_0(x)$, а отже, n – парне число. Покладемо $n = 2m$, $q_m(x) \equiv p_0(x)$ і віднімемо від $\ell_n(y)$ вираз $\left[q_m(x) y^{(m)}(x)\right]^{(m)}$, самоспряженість якого показана вище (див. достатність). Одержаний вираз $\ell_{n-1}(y)$ є самоспряженим як різниця самоспряжених виразів, тому згідно з наведеними вище міркуваннями коефіцієнт при $(n-1)$-й похідній $\overline{p}_1(x)$ повинен справджувати рівність $\overline{p}_1(x) = -\overline{p}_1(x)$, звідки $\overline{p}_1(x) \equiv 0$, тобто $\ell_{n-1}(y) \equiv \ell_{n-2}(y)$. Віднявши від $\ell_{n-2}(y)$ вираз $\left[q_{m-1}(x) y^{(m-1)}(x)\right]^{(m-1)}$, де $q_{m-1}(x) \equiv \overline{p}_2(x)$, одержимо самоспряжений вираз $\ell_{n-4}(y)$ і т.д. Послідовно віднімаючи від одержаних самоспряжених виразів доданки вигляду (5.7), на m-му кроці дістанемо самоспряжений вираз нульового порядку $\ell_0(y) \equiv q_0(x)y(x)$. Отже, увесь вираз (5.1) можна подати у вигляді (5.6). □

НАСЛІДОК. *Якщо в лінійний диференціальний вираз зі сталими коефіцієнтами входять похідні виключно парних порядків, то такий вираз є самоспряженим.*

Доведення. Розглянемо лінійний диференціальний вираз

$$\ell_{2m}(y) = \sum_{j=0}^{m} a_j y^{(2j)}(x), \quad a_j = const, \quad j = \overline{0,m}. \tag{5.8}$$

Очевидно, що (5.8) можна подати у вигляді

$$\ell_{2m}(y) = \sum_{j=0}^{m} \left[a_j y^{(j)}(x)\right]^{(j)},$$

тобто у вигляді (5.6). Тому на підставі Теореми 1.1 вираз (5.8) є самоспряженим. □

§1.6. Спряжені крайові умови

Нехай $P(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z})$ – білінійна форма з елементів векторів

$$\boldsymbol{Y} = \left(y(a) \quad y'(a) \quad \dots \quad y^{(n-1)}(a) \quad y(b) \quad y'(b) \quad \dots \quad y^{(n-1)}(b)\right),$$

$$\boldsymbol{Z} = \left(z(a) \quad z'(a) \quad \dots \quad z^{(n-1)}(a) \quad z(b) \quad z'(b) \quad \dots \quad z^{(n-1)}(b)\right),$$

яка входить у формулу Лаґранжа (5.3).

Припустимо, що задані деякі лінійно незалежні лінійні форми з елементів вектора $\boldsymbol{Y}$

$$U_j(y), \quad j = \overline{1,m}.$$

Доповнимо ці форми до системи $2n$ лінійно незалежних лінійних форм формами $U_{m+1}(y)$, $U_{m+2}(y)$, …, $U_{2n}(y)$. Оскільки ці $2n$ лінійних форм є незалежними, то з них можна визначити всі елементи вектора $\boldsymbol{Y}$ як функції цих форм. Підставивши ці функції у формулу Лаґранжа (5.3), подамо $P(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z})$ у вигляді

$$P(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z}) = U_1V_{2n} + U_2V_{2n-1} + \dots + U_{2n}V_1, \tag{6.1}$$

де $V_1(z)$, $V_2(z)$, …, $V_{2n}(z)$ – деякі лінійні форми з елементів вектора Z. Можна показати: якщо лінійні форми $U_1,\dots,U_{2n}$ є незалежними, то незалежними будуть і лінійні форми $V_1,\dots,V_{2n}$.

Розглянемо лінійні однорідні крайові умови

$$U_j(y) = 0, \quad j = \overline{1,m}. \tag{6.2}$$

Означення. Крайові умови

$$V_k(y) = 0, \quad k = \overline{1,2n-m} \tag{6.3}$$

і всякі їм еквівалентні називаються ***спряженими*** до крайових умов (6.2). Якщо крайові умови (6.2) і (6.3) еквівалентні (при цьому обов'язково $n = m$), то вони називаються ***самоспряженими***.

Враховуючи рівності (6.2) та (6.3), з (6.1) одержимо: $P(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z})=0.$ Останнє співвідношення зручно використовувати для побудови спряжених крайових умов (6.3) при заданих умовах (6.2).

§1.7. Спряжені крайові задачі

Нехай L – лінійний диференціальний оператор, породжений диференціальним виразом (5.1) і крайовими умовами (6.2), а L^* – оператор, породжений спряженим виразом (5.4) і спряженими крайовими умовами (6.3). Тоді L^* називається ***спряженим диференціальним оператором*** до оператора L, причому на підставі (5.3) з урахуванням (6.1)-(6.3) має силу рівність

$$\int_a^b z(x)Ly(x)dx=\int_a^b L^*z(x)y(x)dx. \tag{7.1}$$

Використавши позначення скалярного добутку двох функцій на проміжку $[a,b]$, (7.1) можна записати у вигляді

$$\left(z,Ly\right)=\left(L^*z,y\right).$$

Якщо оператор L самоспряжений, тобто $Ly(x)=L^*y(x)$, то остання рівність матиме вигляд $\left(z,Ly\right)=\left(Lz,y\right).$

Означення. Крайова задача $L^*z(x)=f(x)$ називається ***спряженою*** до крайової задачі $Ly(x)=f(x)$. Крайова задача, породжена самоспряженим диференціальним виразом і самоспряженими крайовими умовами, називається ***самоспряженою***.

З урахуванням Теореми 1.1 і рівності (7.1) можемо стверджувати: крайова задача вигляду

$$\begin{aligned}&\ell_{2m}(y)\equiv\sum_{j=0}^{m}(-1)^j\left[q_j(x)y^{(j)}(x)\right]^{(j)}=f(x),\\&U_k(y)=0,\quad k=\overline{1,2m}\end{aligned} \tag{7.2}$$

є самоспряженою, якщо для довільних функцій $y(x),z(x)\in C^{2m}_{(a,b)}$, які справджують крайові умови, виконується рівність

$$\int_a^b y(x)\ell_{2m}(z)dx=\int_a^b z(x)\ell_{2m}(y)dx. \tag{7.3}$$

Функції $y(x)$ і $z(x)$ називаються ***функціями порівняння*** задачі (7.2).

ПРИКЛАД 1. Показати, що крайова задача

$$\begin{aligned}&y''=-a^2y(x),\quad x\in(0;b);\\&y'(0)=Ay(0),\quad y'(b)=By(b)\end{aligned} \tag{7.4}$$

є самоспряженою.

Розв'язання. Лінійний диференціальний вираз $\ell_2(y) \equiv y'' + a^2 y$ зі сталими коефіцієнтами є самоспряженим на підставі наслідку з Теореми 1.1, оскільки містить похідні тільки парних порядків. Покажемо, що крайові умови також є самоспряженими.

Нехай $y(x)$, $z(x)$ – деякі функції порівняння задачі (7.4). Крайова задача (7.4) буде самоспряженою, якщо для цих функцій виконується умова (7.3), тобто

$$\int_0^b z(x)\left[y''(x) + a^2 y(x)\right]dx = \int_0^b y(x)\left[z''(x) + a^2 z(x)\right]dx. \tag{7.5}$$

Після спрощення та інтегрування частинами із (7.5) одержимо:

$$z(b)y'(b) - z(0)y'(0) = z'(b)y(b) - z'(0)y(0).$$

Оскільки функції $y(x)$ і $z(x)$ справджують крайові умови задачі (7.4), то останню рівність можна записати у вигляді

$$z(b)\cdot By(b) - z(0)\cdot Ay(0) = Bz(b)\cdot y(b) - Az(0)\cdot y(0).$$

З одержаної тотожності випливає, що крайова задача (7.4) є самоспряженою.

ПРИКЛАД 2. Побудувати спряжену крайову задачу до заданої:

$$\begin{gathered} y''' - 2y(x) = \sin x, \quad x \in (0;2); \\ y'(0) = y(0), \quad y''(0) = 0, \quad y'(2) = y''(2) = 0. \end{gathered} \tag{7.5}$$

Розв'язання. Нехай $y(x)$, $z(x)$ – деякі функції з класу $C^3_{(0;2)}$, причому $y(x)$ справджує крайові умови задачі (7.5). Запишемо для них формулу Лаґранжа (5.3), інтегруючи частинами з урахуванням крайових умов для функції $y(x)$:

$$\int_0^2 \left(y''' - 2y\right)z dx = y(0)\left[z'(0) - z''(0)\right] + y(2)z''(2) + \int_0^2 \left(-z''' - 2z\right)y dx,$$

звідки $\left(y''' - 2y\right)^* = -y''' - 2y.$ Вигляд двох спряжених крайових умов згідно з (6.1)-(6.3) визначаємо з рівності

$$P(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z}) \equiv y(0)\left[z'(0) - z''(0)\right] + y(2)z''(2) = 0,$$

звідки $z'(0) = z''(0),\ z''(2) = 0.$

Отже, спряжена до (7.5) крайова задача матиме вигляд:

$$\begin{gathered} y''' + 2y = -\sin x, \quad x \in (0;2); \\ y'(0) = y''(0), \quad y''(2) = 0. \end{gathered}$$

Спряжені крайові задачі в просторі вектор-функцій. Розглянемо лінійну однорідну крайову задачу для системи диференціальних рівнянь

$$y_i' = \sum_{j=1}^n p_{ij}(x) y_j(x), \quad i = \overline{1,n}, \quad x \in (a,b) \tag{7.6}$$

з крайовими умовами

$$U_i(\boldsymbol{y}) \equiv \sum_{j=1}^n [\alpha_{ij} y_j(a) + \beta_{ij} y_j(b)] = 0, \quad i = \overline{1,n}. \tag{7.7}$$

Система, спряжена до системи (7.6), має вигляд (див. [7], с. 249-250)

$$z_i' = -\sum_{j=1}^{n} p_{ji}(x) z_j(x), \quad i = \overline{1,n}, \quad x \in (a,b). \tag{7.8}$$

Будемо вважати, що $y_j(x), z_j(x) \in C^1_{(a,b)} \bigcap C_{[a,b]}$, $j = \overline{1,n}$. Складемо диференціальну форму $L_i(\boldsymbol{y}) \equiv y_i' - \sum_{j=1}^{n} p_{ij}(x) y_j(x)$, а також спряжену до неї форму $L_i^*(\boldsymbol{z}) \equiv -z_i' - \sum_{j=1}^{n} p_{ji}(x) z_j(x)$. Тоді ***формула Лаґранжа*** матиме вигляд:

$$\sum_{i=1}^{n} \int_a^b [z_i L_i(\boldsymbol{y}) - y_i L_i^*(\boldsymbol{z})] dx = \sum_{i=1}^{n} [y_i(b) z_i(b) - y_i(a) z_i(a)]. \tag{7.9}$$

Складемо лінійно незалежні лінійні форми $V_i(\boldsymbol{z}) = \sum_{j=1}^{n} [\gamma_{ij} z_j(a) + \delta_{ij} z_j(b)]$ і відповідні крайові умови

$$V_j(\boldsymbol{z}) = 0, \quad j = \overline{1,n}. \tag{7.10}$$

Крайова задача (7.8),(7.10) називається ***спряженою*** до задачі (7.6),(7.7), якщо для довільних двох систем чисел $\{y_1(a),\ \ldots,\ y_n(a),\ y_1(b),\ \ldots,\ y_n(b)\}$ та $\{z_1(a),\ \ldots,\ z_n(a),\ z_1(b),\ \ldots,\ z_n(b)\}$, перша з яких задовольняє крайові умови (7.7), а друга – крайові умови (7.10), вираз у правій частині рівності (7.9) обертається в нуль:

$$\sum_{i=1}^{n} [y_i(b) z_i(b) - y_i(a) z_i(a)] = 0.$$

Ця умова еквівалентна рівності

$$\sum_{k=1}^{n} (\alpha_{ik} \gamma_{jk} - \beta_{ik} \delta_{jk}) = 0 \quad (i, j = \overline{1,n}).$$

Крайові задачі (7.6),(7.7) і (7.8),(7.10) завжди або обидві нерозв’язні, або обидві розв’язні, причому з однією й тією ж кратністю.

ВПРАВИ ДО РОЗДІЛУ I

1. Побудувати спряжені вирази до заданих лінійних диференціальних виразів:
   а) $\ell_2(y) = xy'' + 2y' - xy$;
   б) $\ell_2(y) = y'' - 2\left(1 + \operatorname{tg}^2 x\right) y$;
   в) $\ell_3(y) = xy''' - y'' - xy' + y$;
   г) $\ell_3(y) = y''' - x^3 y'' + y \sin x$;
   д) $\ell_4(y) = y^{(4)} + 5y'' + 4y$;
   е) $\ell_5(y) = y^{(5)} - 6y^{(4)} + 9y'''$;
   є) $\ell_5(y) = y^{(5)} + 8y''' + 16y'$;
   ж) $\ell_6(y) = y^{(6)} + 64y$.

2. Перевірити на самоспряженість крайові задачі:

а) $$\begin{aligned}&y'' + xy = \sin x, \quad x \in (0;1);\\ &y(0) = 0, \quad y'(1) = 0.\end{aligned}$$

б) $$\begin{aligned}&y'' - xy = 9x - 7, \quad x \in (0;1);\\ &y(0) - y'(1) + y'(0) = 0, \quad y(1) = 0.\end{aligned}$$

в) $$\begin{aligned}&y^{(4)} - y'' = 0, \quad x \in (a,b);\\ &y(a) = y(b) = 0, \quad y''(a) = y''(b) = 0.\end{aligned}$$

г) $$\begin{aligned}&y^{(4)} - y'' + xy = 2x^2, \quad x \in (0;1);\\ &y(0) = y'(0) = y''(0) = 0, \quad y'''(1) = 0.\end{aligned}$$

3. Побудувати спряжену крайову задачу до заданої:

а) $$\begin{aligned}&xy'' + y' = 1, \quad x \in (1;2);\\ &y(1) = y'(2) = 0, \quad y(2) - y'(1) = 0.\end{aligned}$$

б) $$\begin{aligned}&y''' - xy = 4, \quad x \in (0;1);\\ &y(0) = y'(0) = 0, \quad y(1) = 0.\end{aligned}$$

в) $$\begin{aligned}&y''' - y'' = 1 + e^x, \quad x \in (-2;0);\\ &y''(0) - 2y'(0) + y(0) = 0, \quad y''(-2) - 2y'(-2) + y(-2) = 0.\end{aligned}$$

г) $$\begin{aligned}&xy^{(4)} - y'' = e^{3x}, \quad x \in (0;1);\\ &y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0, \quad y(1) = y'(1).\end{aligned}$$

РОЗДІЛ II
ЛІНІЙНІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ТА ЇХ ЗВ'ЯЗОК ІЗ ЗАДАЧАМИ КОШІ

§2.1. Лінійні однорідні крайові задачі

Лінійна однорідна крайова задача (ЛОКЗ) полягає у знаходженні регулярного на інтервалі (a,b) розв'язку лінійного диференціального рівняння

$$\ell_n(y) \equiv \sum_{k=0}^{n} p_k(x) y^{(n-k)}(x) = 0, \tag{1.1}$$

де $p_k(x) \in C_{(a,b)}$, $k = \overline{0,n}$, причому $p_0(x) \neq 0$, який справджує крайові умови

$$U_j(y) \equiv \sum_{s=0}^{n-1} \left(\alpha_{s,j} y^{(s)}(a) + \beta_{s,j} y^{(s)}(b) \right) = 0, \quad j = \overline{1,m}. \tag{1.2}$$

Задача (1.1),(1.2) може бути записана в операторному вигляді $Ly = 0$. Зазначимо, що у випадку ЛОКЗ область визначення D_L лінійного диференціального оператора L, породженого лінійним диференціальним виразом $\ell_n(y)$ і лінійними однорідними крайовими умовами (1.2), є лінійним підпростором лінійного простору $C^n_{(a,b)} \cap C^{n-1}_{[a,b]}$.

Очевидно, що ЛОКЗ (1.1),(1.2) завжди має тривіальний розв'язок $y(x) \equiv 0$, проте це не означає, що такий розв'язок завжди є єдиним. Дослідимо, при яких умовах задача (1.1),(1.2) матиме і нетривіальні розв'язки.

Позначимо через $\{y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)\}$ фундаментальну систему частинних розв'язків рівняння (1.1). Зауважимо, що внаслідок умов, накладених на коефіцієнти $p_k(x)$, фундаментальна система частинних розв'язків для рівняння (1.1) існує. Тоді загальний розв'язок цього рівняння запишеться у вигляді лінійної комбінації

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x), \tag{1.3}$$

де C_i – довільні сталі. ЛОКЗ (1.1),(1.2) матиме нетривіальний розв'язок, якщо можна підібрати такі C_i, не всі рівні нулеві, щоб функція (1.3) справджувала крайові умови (1.2). Підклавши (1.3) в (1.2), одержимо алгебраїчну систему рівнянь відносно невідомих сталих C_i вигляду

$$U_j\left(\sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x) \right) = 0, \quad j = \overline{1,m}. \tag{1.4}$$

Враховуючи лінійність крайових умов (1.2), із (1.4) одержимо:

$$\sum_{i=1}^{n} C_i U_j(y_i) = 0, \quad j = \overline{1,m}. \tag{1.5}$$

Позначимо через $\boldsymbol{U} \equiv \left\| U_j(y_i) \right\|$ матрицю системи (1.5), а через $s = \operatorname{rank} \boldsymbol{U}$ – ранг цієї матриці. Очевидно, що $s \leq n$ і не залежить від вибору фундаментальної системи частинних розв'язків (ФСЧР) рівняння (1.1).

Справді, нехай $\{\bar{y}_1(x), \bar{y}_2(x), \ldots, \bar{y}_n(x)\}$ – нова ФСЧР. Тоді ця система функцій є базою лінійного простору $C^n_{(a,b)}$, а тому можна подати стару ФСЧР $\{y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)\}$ через нову у вигляді

$$y_i(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\bar{y}_i(x), \quad i = \overline{1,n}, \tag{1.6}$$

причому детермінант матриці переходу $\boldsymbol{A} = \|a_{ij}\|$ відмінний від нуля. Підклавши (1.6) в (1.5), одержимо нову систему з матрицею $\overline{\boldsymbol{U}} = \boldsymbol{AU}$. Матриця $\boldsymbol{A}$ має ранг n, матриця $\boldsymbol{U}$ – ранг s. Поскільки $s \le n$, то $\operatorname{rank}\overline{\boldsymbol{U}} = s$, тобто ранг матриці системи (1.5) при переході до нової ФСЧР не змінюється. Число s називається рангом крайової задачі (1.1),(1.2).

Система (1.5) – а отже, і ЛОКЗ (1.1),(1.2) – матиме нетривіальний розв'язок, якщо ранг матриці системи $s < n$. Мають силу наступні критерії:

1. Якщо $s = n$, то ЛОКЗ (1.1),(1.2) має тільки тривіальний розв'язок.

2. Якщо $s < n$, то ЛОКЗ (1.1),(1.2) буде мати і нетривіальні розв'язки, причому число лінійно незалежних частинних розв'язків буде $n - s$. У цьому випадку кажуть, що задача є ($n - s$)-кратно розв'язною.

З наведених вище критеріїв очевидно:

а) якщо $m < n$, то ЛОКЗ (1.1),(1.2) завжди має нетривіальний розв'язок;

б) якщо $m = n$, то нетривіальний розв'язок існує тільки при виконанні умови $\det\boldsymbol{U} = 0$;

в) якщо $m > n$, то існування нетривіального розв'язку залежить від рангу крайової задачі (див. попередні критерії).

ПРИКЛАД 1. Дослідити лінійну однорідну крайову задачу:

$$y'' - 4y = 0, \quad y = y(x), \quad x \in (0;1);$$

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0.$$

Розв'язання. Загальний розв'язок рівняння є

$$y(x) = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x}.$$

Із крайових умов одержуємо систему

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0; \\ C_1e^2 + C_2e^{-2} = 0. \end{cases}$$

Маємо випадок $m = n$ (кількість крайових умов співпадає з порядком диференціального рівняння), причому

$$\det\boldsymbol{U} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^2 & e^{-2} \end{vmatrix} = -2\operatorname{sh}2 \ne 0.$$

Отже, наведена ЛОКЗ має тільки тривіальний розв'язок.

ПРИКЛАД 2. Дослідити лінійну однорідну крайову задачу:

$$y'' + 4y = 0, \quad y = y(x), \quad x \in (0;\pi);$$

$$y(0) = y(\pi) = 0, \quad y'(\pi/4) = 0.$$

Розв'язання. Загальний розв'язок рівняння є

$$y(x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x.$$

Із крайових умов одержуємо систему

$$\begin{cases} C_1 = 0; \\ C_1 = 0; \\ -2C_1 = 0. \end{cases} \quad \text{Матриця системи } \boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \operatorname{rank} \boldsymbol{U} = 1.$$

Маємо випадок $s < n$ ($s = 1$, $n = 2$). Отже, наведена ЛОКЗ має нетривіальні розв'язки вигляду $y(x) = C \sin 2x$, де $C = const$, серед яких лінійно незалежних є $n - s = 2 - 1 = 1$ (задача є однократно розв'язною).

ПРИКЛАД 3 (обертання тонкого валу). Знайти формулу критичних швидкостей тонкого валу довжини l, який обертається навколо осі, якщо модуль пружності матеріалу рівний E, а поперечний переріз валу є круг радіуса a.

Розв'язання. При збільшенні кутової швидкості валу під час обертання від $\omega = 0$ до деякого критичного значення $\omega = \omega_1$, яке називається критичним значенням кутової швидкості, вал зберігає прямолінійну форму (рис. 7). У момент досягнення ω_1 вал викривляється і починає бити. При подальшому збільшенні кутової швидкості вал перестає бити, але потім при досягненні деякого нового критичного значення ω_2 знову починає бити і т.д.

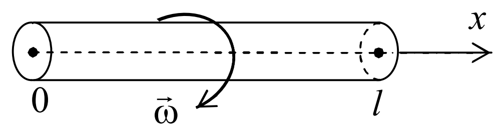

Рис. 7

Рівняння вигнутої поверхні стержня має вигляд

$$\frac{d^4 y}{dx^4} - \frac{P\omega^2}{EJgl} y(x) = 0, \tag{1.7}$$

де P – вага стержня, J – осьовий момент інерції поперечного перерізу, g – прискорення вільного падіння. Враховуючи форму валу, одержуємо: $J = 0{,}25\pi\rho a^4$, $P = mg = \pi\rho l a^2 g$ (ρ – густина, m – маса валу). Тому рівняння (1.7) можна записати через задані в умові задачі величини у вигляді

$$\frac{d^4 y}{dx^4} - \frac{4\omega^2}{Ea^2} y(x) = 0. \tag{1.8}$$

На опертих кінцях валу прогин і кривина відсутні, тому крайові умови матимуть вигляд $y(0) = y(l) = y''(0) = y''(l) = 0$.

Очевидно, що критичними будуть ті значення кутової швидкості, при яких вал губить прямолінійну форму. Отже, завдання полягає в наступному: знайти ті значення параметру ω, при яких має нетривіальний розв'язок ЛОКЗ

$$y^{(4)} - q^4 y = 0, \quad y = y(x), \quad x \in (0, l);$$

$$y(0) = y(l) = y''(0) = y''(l) = 0,$$

де згідно з (1.8) $q^4 = 4\omega^2 E^{-1} a^{-2}$.

Загальний розв'язок рівняння має вигляд

$$y(x) = C_1 e^{qx} + C_2 e^{-qx} + C_3 \sin qx + C_4 \cos qx.$$

Із крайових умов одержимо систему

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + C_4 = 0; \\ C_1 e^{ql} + C_2 e^{-ql} + C_3 \sin ql + C_4 \cos ql = 0; \\ q^2 C_1 + q^2 C_2 - q^2 C_4 = 0; \\ q^2 C_1 e^{ql} + q^2 C_2 e^{-ql} - q^2 C_3 \sin ql - q^2 C_4 \cos ql = 0, \end{cases}$$

звідки $C_1 = C_2 = C_4 = 0$, тобто $y(x) = C_3 \sin qx$. Маємо випадок $m = n = 4$, тому умова існування нетривіального розв'язку матиме вигляд

$$\det \boldsymbol{U} \equiv -8q^4 \operatorname{sh} ql \sin ql = 0,$$

звідки

$$q_k = \tfrac{k\pi}{l}, \quad y_k(x) = C_k \sin \tfrac{k\pi}{l} x, \quad k \in \mathrm{Z}.$$

Отже, критичними значеннями кутової швидкості будуть

$$\omega_k = 0{,}5 q_k^2 a \sqrt{E} = \frac{k^2 \pi^2 a \sqrt{E}}{2l^2}, \quad k = \overline{1, \infty}.$$

ПРИКЛАД 4 (стиснутий стержень на пружній поверхні). Стержень довжини l, який піддається дії осьової стискуючої сили величини P (рис. 8), лежить на пружній основі (залізнична рейка). Приймаємо гіпотезу Вінклера про те, що сила $p(x)$, яка діє на одиницю довжини стержня при прогині на величину $y(x)$, пропорційна величині прогину $y(x)$, тобто $p(x) = ky(x)$ (стала k називається коефіцієнтом постелі). Тоді при малому поздовжньому прогині рівняння пружної лінії має вигляд

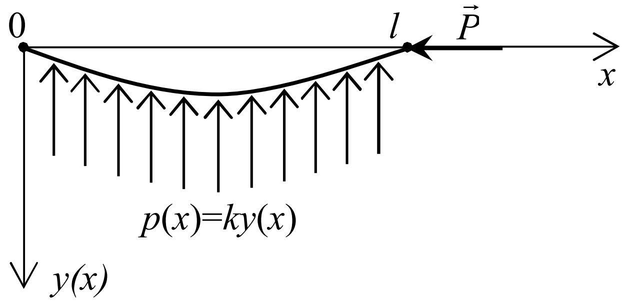

Рис. 8

$$Py(x) + \int_0^x k(x - \xi) y(\xi) d\xi = -\alpha y'', \quad \alpha = EJ,$$

або

$$\alpha y^{(4)} + Py'' + ky(x) = 0.$$

Кінці стержня шарнірно оперті, тому

$$y(0) = y(l) = y''(0) = y''(l) = 0.$$

Одержана ЛОКЗ залежно від значень α, P і k матиме різні розв'язки.

§2.2. Лінійні неоднорідні крайові задачі

Лінійна крайова задача називається ***неоднорідною*** (ЛНКЗ), якщо рівняння або крайові умови неоднорідні.

У загальному випадку ЛНКЗ полягає у знаходженні регулярного на інтервалі (a,b) розв'язку лінійного диференціального рівняння

$$\ell_n(y) \equiv \sum_{k=0}^{n} p_k(x) y^{(n-k)}(x) = f(x), \tag{2.1}$$

який справджує крайові умови

$$U_j(y) \equiv \sum_{s=0}^{n-1} \left(\alpha_{s,j} y^{(s)}(a) + \beta_{s,j} y^{(s)}(b) \right) = \gamma_j, \quad j = \overline{1,m}. \tag{2.2}$$

Якщо при $x \in (a,b)$ коефіцієнти рівняння (2.1) $p_k(x)$, $k = \overline{0,n}$ є неперервними функціями, причому $p_0(x) \neq 0$, тоді загальний розв'язок цього рівняння подається у вигляді суми загального розв'язку відповідного однорідного рівняння (1.1) і деякого частинного розв'язку рівняння (2.1):

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x) + y_0(x), \tag{2.3}$$

де $\{y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)\}$ – фундаментальна система частинних розв'язків однорідного рівняння (1.1).

Підклавши (2.3) у крайові умови (2.2), одержимо систему лінійних неоднорідних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих сталих вигляду

$$\sum_{i=1}^{n} C_i U_j(y_i) = \gamma_j - U_j(y_0), \quad j = \overline{1,m}. \tag{2.4}$$

Очевидно, що існування розв'язку ЛНКЗ (2.1),(2.2) визначатиметься розв'язністю системи (2.4).

Позначимо через $\boldsymbol{U}$ матрицю системи (2.4), а через $\boldsymbol{U_e}$ – відповідну розширену [стовпцем вільних членів $\gamma_j - U_j(y_0)$] матрицю системи. Тоді мають силу наступні твердження:

1. Якщо $m > n$, то можливі випадки:

а) $\operatorname{rank}\boldsymbol{U} = \operatorname{rank}\boldsymbol{U}_e = n$. Тоді система (2.4) має єдиний розв'язок;

б) $\operatorname{rank}\boldsymbol{U} = n$, $\operatorname{rank}\boldsymbol{U}_e = n+1$. Тоді система (2.4) не має розв'язку;

в) $\operatorname{rank}\boldsymbol{U} = s < n$. Тоді за виконання умови $\operatorname{rank}\boldsymbol{U}_e = s$ система (2.4) має безліч розв'язків, причому довільних сталих у розв'язку залишиться $n-s$; при $\operatorname{rank}\boldsymbol{U}_e \neq \operatorname{rank}\boldsymbol{U}$ система (2.4) не має розв'язку.

2. Якщо $m = n$, то можливі випадки:

а) $\det\boldsymbol{U} \neq 0$. Тоді система (2.4) має єдиний розв'язок;

б) $\det\boldsymbol{U} = 0$, $\operatorname{rank}\boldsymbol{U}_e \neq \operatorname{rank}\boldsymbol{U}$. Тоді система (2.4) не має розв'язку;

в) $\det\boldsymbol{U} = 0$, $\operatorname{rank}\boldsymbol{U}_e = \operatorname{rank}\boldsymbol{U} = s < n$. Тоді система (2.4) має безліч розв'язків, причому довільних сталих у розв'язку знову залишиться $n-s$.

3. Якщо $m < n$, то система (2.4) або має безліч розв'язків (якщо ранги матриць $\boldsymbol{U}$ та $\boldsymbol{U_e}$ рівні), або не має розв'язку (якщо ранги не співпадають).

ПРИКЛАД 1. Дослідити лінійну неоднорідну крайову задачу

$$y'' + y = \sin x, \quad y = y(x), \quad x \in (0;1);$$

$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0.$$

Розв'язання. Загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння є

$$\bar{y}(x) = C_1 \sin x + C_2 \cos x.$$

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо за допомогою методу невизначених коефіцієнтів у вигляді

$$y_0(x) = x(A\sin x + B\cos x).$$

Тоді $y_0''(x) = 2A\cos x - 2B\sin x - x(A\sin x + B\cos x)$. Із неоднорідного рівняння дістанемо $A = 0$, $B = -0{,}5$. Тоді $y_0(x) = -0{,}5x\cos x$ і

$$y(x) = \bar{y}(x) + y_0(x) = C_1 \sin x + C_2 \cos x - 0{,}5x\cos x. \tag{2.5}$$

Із крайових умов одержуємо систему

$$\begin{cases} C_2 = 0; \\ C_1 \sin 1 + C_2 \cos 1 = 0{,}5\cos 1. \end{cases}$$

Маємо випадок $m = n = 2$, $\det \boldsymbol{U} = -\sin 1 \neq 0$. Отже, ЛНКЗ повинна мати єдиний розв'язок. Визначивши сталі з системи та підклавши в (2.5), одержимо

$$y(x) = \bar{y}(x) + y_0(x) = 0{,}5(\operatorname{ctg} 1 \sin x - x\cos x).$$

ПРИКЛАД 2. Дослідити ЛНКЗ

$$y'' + \pi^2 y = 0, \quad y = y(x), \quad x \in (0;1);$$
$$y(0) = 1, \quad y(1) = -1.$$

Розв'язання. Загальний розв'язок рівняння є

$$y(x) = C_1 \sin \pi x + C_2 \cos \pi x. \tag{2.6}$$

Із крайових умов одержуємо систему:

$$\begin{cases} C_2 = 1; \\ -C_2 = -1. \end{cases}$$

Тут

$$\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{U}_e = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Маємо випадок $m = n = 2$, $\det U = 0$, причому ранг матриці системи співпадає з рангом розширеної матриці й рівний 1. Отже, ЛНКЗ повинна мати безліч розв'язків. Визначивши сталі з системи та підклавши в (2.6), одержимо

$$y(x) = C\sin \pi x + \cos \pi x,$$

де C – довільна стала.

ПРИКЛАД 3 (періодичні коливання пружного стержня). Однорідний пружний стержень довжини l із жорстко закріпленими кінцями коливається під дією періодичної зовнішньої сили $f(t,x) = (0{,}5l - x)\cos \omega t$, де $\omega = const \neq 0$. Знайти амплітуду $\tilde{u}(x)$ періодичних коливань стержня.

Розв'язання. З курсу математичної фізики відомо, що малі поздовжні коливання пружного стержня описуються диференціальним рівнянням з частинними похідними другого порядку вигляду (див. [26], с. 20)

$$\rho(x)U_{tt} = \frac{\partial}{\partial x}\left[E(x)U_x\right] + f(t,x), \qquad (2.7)$$

де $U(t,x)$ – зміщення точки стержня з координатою x від положення рівноваги в момент часу t; $\rho(x)$ – густина, $E(x)$ – модуль пружності Юнґа в точці стержня з координатою x; $f(t,x)$ – зовнішня сила.

Розглянемо періодичні коливання стержня, що відбуваються внаслідок дії періодичної зовнішньої сили $f(t,x) = \widetilde{f}(x)\cos\omega t$ (ω – частота). Будемо шукати розв'язок рівняння (2.7) також у періодичному вигляді: $U(t,x) = \widetilde{u}(x)\cos\omega t$. Тоді для амплітуди $\widetilde{u}(x)$ періодичних коливань, що встановилися в системі під дією періодичної зовнішньої сили, з (2.7) дістанемо звичайне диференціальне рівняння:

$$\left[E(x)\widetilde{u}'(x)\right]' + \omega^2\rho(x)\widetilde{u}(x) = -\widetilde{f}(x). \qquad (2.8)$$

Якщо стержень однорідний, то $E(x) \equiv E = const$, $\rho(x) \equiv \rho = const$; тоді рівняння (2.8) запишеться в простішому вигляді:

$$\widetilde{u}'' + \omega^2 E^{-1}\rho\widetilde{u} = -E^{-1}\widetilde{f}(x).$$

Введемо позначення: $\omega^2 E^{-1}\rho = a^2$. Враховуючи, що згідно з умовою задачі $\widetilde{f}(x) = 0{,}5l - x$, а $\widetilde{u}(0) = \widetilde{u}(l) = 0$ (кінці стержня закріплені), для визначення амплітуди $\widetilde{u}(x)$ одержимо крайову задачу:

$$\widetilde{u}'' + a^2\widetilde{u} = -E^{-1}(0{,}5l - x), \quad x \in (0;l);$$
$$\widetilde{u}(0) = 0, \quad \widetilde{u}(l) = 0.$$

Наведена крайова задача має єдиний розв'язок (перевірити!)

$$\widetilde{u}(x) = \frac{l}{2a^2E}\left(\cos ax - \frac{\cos al + 1}{\sin al}\sin ax + \frac{2x}{l} - 1\right), \text{ де } a = \omega\sqrt{\frac{\rho}{E}}.$$

ПРИКЛАД 4 (будівельна механіка). Циліндричний резервуар для зберігання рідини висоти H, товщина стінок d якого мала в порівнянні з середнім радіусом R, а меридіональний перетин стінки – прямокутник, піддається силовій дії тиску рідини. Знайти закон деформації стінок резервуару.

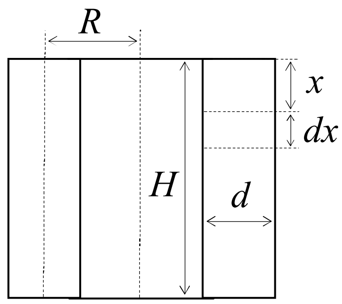

Рис. 9

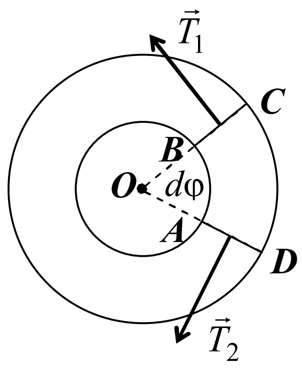

Рис. 10

Розв'язання. На елемент стінки з основою $ABCD$ і висотою dx, узятий на глибині x (рис. 9, 10) діють такі сили:

1) сила тиску рідини $\gamma xRd\varphi dx$, прикладена до грані AB (γ – вага одиниці маси рідини);

2) сили пружності $\vec{T}_1$ і $\vec{T}_2$, прикладені до граней *BC* і *AD*, причому в силу симетрії $\left|\vec{T}_1\right| = \left|\vec{T}_2\right|$.

Позначивши зміщення точок елемента стінки в радіальному напрямі (деформацію) через $y(x)$, можна показати, що ця функція повинна бути розв'язком диференціального рівняння

$$y^{(4)} + 4\alpha^4 y(x) = m^4 x, \qquad (2.9)$$

де $\alpha^4 = \frac{3}{R^2 d^2}$, $m^4 = \frac{12\gamma}{Ed^3}$, E – модуль пружності стінок.

Якщо денце резервуару не деформується, то $y(x)$ повинна справджувати крайові умови

$$y(0) = y(H) = y'(0) = y'(H) = 0. \qquad (2.10)$$

Вправа. Дослідити ЛНКЗ (2.9),(2.10).

Лінійні крайові задачі в просторі вектор-функцій. Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$y_i' = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}(x) y_j(x) + f_i(x), \quad i = \overline{1,n}, \quad x \in (a,b), \qquad (2.11)$$

де функції $p_{ij}(x), f_i(x) \in C_{(a,b)}$. За допомогою матриці зі сталими елементами рангу n

$$\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} & \beta_{11} & \dots & \beta_{1n} \\ & & \cdots & & & \\ \alpha_{m1} & \dots & \alpha_{mn} & \beta_{m1} & \dots & \beta_{mn} \end{vmatrix}$$

і заданих чисел γ_j, $j = \overline{1,n}$ складемо крайові умови

$$U_j(\boldsymbol{y}) = \gamma_j, \quad j = \overline{1,m}, \qquad (2.12)$$

де

$$U_j(\boldsymbol{y}) \equiv \sum_{k=1}^{n} [\alpha_{kj} y_k(a) + \beta_{kj} y_k(b)]. \qquad (2.13)$$

ЛНКЗ для системи рівнянь (2.11) полягає у знаходженні системи функцій $\{y_1(x), \ \dots, \ y_n(x)\}$, які справджують рівняння (2.11) і крайові умови (2.12). Крайова задача називається ***квазіоднорідною***, якщо всі $\gamma_j = 0$, і ***однорідною***, якщо, крім того, $f_i(x) \equiv 0$, $i = \overline{1,n}$. Отже, відповідна до (2.11),(2.12) ЛОКЗ має вигляд

$$y_i' = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}(x) y_j(x), \quad i = \overline{1,n}, \quad x \in (a,b), \qquad (2.14)$$

$$U_j(\boldsymbol{y}) = 0, \quad j = \overline{1,m}. \qquad (2.15)$$

Нехай $\boldsymbol{y}_j = \left(y_{j,1}(x), \ \dots, \ y_{j,n}(x)\right)$, $j = \overline{1,n}$ – фундаментальна система частинних розв'язків системи (2.14). Тоді однорідна задача (2.14),(2.15) має нетривіальні розв'язки за тих же умов, що й ЛОКЗ для звичайного диференціального рівняння (1.1) (див. §2.1).

Справді, загальний розв'язок системи (2.4) можна подати у вигляді

$$y_i(x) = \sum_{j=1}^{n} C_j y_{i,j}(x), \quad i = \overline{1,n}. \tag{2.6}$$

Підклавши (2.6) у (2.5), одержимо алгебраїчну систему

$$\sum_{i=1}^{n} C_i U_j(\boldsymbol{y}_i) = 0, \quad j = \overline{1,m}. \tag{2.7}$$

Позначимо через $\boldsymbol{U} = \left\| U_j(\boldsymbol{y}_i) \right\|$ матрицю системи (2.7). Тоді

– при $m < n$ ЛОКЗ (2.4),(2.5) завжди має нетривіальний розв'язок;
– якщо $m = n$, то нетривіальні розв'язки існують тільки при $\Delta = \det \boldsymbol{U} = 0$;
– при $m > n$ нетривіальні розв'язки існують, якщо ранг матриці $\boldsymbol{U}$ менший за порядок системи (2.4).

Якщо $\operatorname{rank} \boldsymbol{U} = k,$ то існує $n-k$ лінійно незалежних розв'язків однорідної задачі (2.4),(2.5). У цьому випадку ЛОКЗ (2.4),(2.5) називається $(n-k)$-кратно розв'язною.

Аналогічно: для неоднорідної крайової задачі (2.11),(2.12) мають силу ті ж критерії існування розв'язку, що й для задачі (2.1),(2.2).

§2.3. Зведення крайових задач до задач Коші. Метод допоміжних функцій (частинних розв'язків)

1. ***Випадок рівняння другого порядку.*** Розглянемо крайову задачу: знайти регулярний на інтервалі (a,b) розв'язок $y(x)$ лінійного диференціального рівняння другого порядку вигляду

$$p_0(x)y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y(x) = f(x), \tag{3.1}$$

де $p_i(x), f(x) \in C_{(a,b)}$, $i = \overline{0,2}$, причому $p_0(x) \neq 0$, який справджує крайові умови (y_a, y_b – задані сталі)

$$y(a) = y_a, \quad y(b) = y_b. \tag{3.2}$$

Припустимо, що задача (3.1),(3.2) має єдиний розв'язок при $x \in [a,b]$. Покажемо, що наведену задачу можна звести до задачі Коші.

Нехай функція $u(x)$ є розв'язком задачі Коші

$$\begin{aligned} &p_0(x)u'' + p_1(x)u' + p_2(x)u(x) = f(x), \quad x > a; \\ &u(a) = y_a, \quad u'(a) = 0, \end{aligned} \tag{3.3}$$

а функція $v(x)$ – розв'язок наступної задачі Коші:

$$\begin{aligned} &p_0(x)v'' + p_1(x)v' + p_2(x)v(x) = 0, \quad x > a; \\ &v(a) = 0, \quad v'(a) = 1. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Якщо функції $p_0(x)$, $p_1(x)$, $p_2(x)$ належать класу $C_{(a,b)}$ і $f(x)$ кусково неперервна на (a,b), тоді задачі Коші (3.3) і (3.4) матимуть єдиний розв'язок на проміжку $[a,b]$.

Очевидно, що функція $z(x) = u(x) + Cv(x)$, де C – довільна стала, буде розв'язком задачі Коші

$$p_0(x)z'' + p_1(x)z' + p_2(x)z(x) = f(x), \quad x > a; \tag{3.5}$$

$$z(a) = y_a, \quad z'(a) = C. \tag{3.6}$$

Розв'язок задачі (3.5),(3.6) буде справджувати першу з крайових умов (3.2) при довільному значенні сталої C. Підклавши $z(x) = u(x) + Cv(x)$ у другу крайову умову, одержимо $u(b) + Cv(b) = y_b$, або

$$C = \frac{y_b - u(b)}{v(b)}. \tag{3.7}$$

Отже, якщо в початкових умовах (3.6) сталу C визначити за допомогою формули (3.7), то задача Коші (3.5),(3.6) буде еквівалентною крайовій задачі (3.1),(3.2). При цьому зауважимо, що в силу єдиності розв'язку крайової задачі (3.1),(3.2) $v(b) \neq 0$.

ПРИКЛАД 1. Звести до задачі Коші ЛНКЗ

$$\begin{aligned} &y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y(x) = f(x), \quad x \in (a,b); \\ &\alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = 0, \quad \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = 0. \end{aligned} \tag{3.8}$$

де $p_1(x), p_2(x), f(x) \in C_{(a,b)}$; α_0, α_1, β_0, β_1 – задані сталі, причому $\alpha_0^2 + \alpha_1^2 \neq 0$, $\beta_0^2 + \beta_1^2 \neq 0$.

Розв'язання. Покладемо $y(x) = u(x) + Cv(x)$, де

$$u'' + p_1(x)u' + p_2(x)u(x) = f(x), \quad x > a; \tag{3.9}$$

$$v'' + p_1(x)v' + p_2(x)v(x) = 0, \quad x > a. \tag{3.10}$$

Будемо вимагати, щоб функція $y(x)$ справджувала першу з крайових умов при довільному значенні сталої C. Одержимо:

$$\alpha_0[u(a) + Cv(a)] + \alpha_1[u'(a) + Cv'(a)] = 0,$$

звідки

$$C[\alpha_0 v(a) + \alpha_1 v'(a)] + \alpha_0 u(a) + \alpha_1 u'(a) = 0,$$

тобто

$$\alpha_0 v(a) + \alpha_1 v'(a) = 0, \quad \alpha_0 u(a) + \alpha_1 u'(a) = 0.$$

Тоді для функцій $u(x)$ і $v(x)$ можна взяти початкові умови у вигляді

$$u(a) = m\alpha_1, \quad u'(a) = -m\alpha_0, \quad m \in \mathrm{R}; \tag{3.11}$$

$$v(a) = k\alpha_1, \quad v'(a) = -k\alpha_0, \quad k \in \mathrm{R} \setminus \{0\}. \tag{3.12}$$

Якщо $u(x)$ і $v(x)$ як розв'язки задач Коші (3.9),(3.11) та (3.10),(3.12) знайдені, то сталу C можна визначити з другої крайової умови:

$$\beta_0[u(b) + Cv(b)] + \beta_1[u'(b) + Cv'(b)] = 0,$$

звідки

$$C = -\frac{\beta_0 u(b) + \beta_1 u'(b)}{\beta_0 v(b) + \beta_1 v'(b)}. \tag{3.13}$$

Тоді задача Коші

$$\begin{aligned} &z'' + p_1(x)z' + p_2(x)z(x) = f(x), \quad x > a; \\ &z(a) = \alpha_1(m + kC), \quad z'(a) = -\alpha_0(m + kC), \end{aligned} \tag{3.14}$$

де m, k – коефіцієнти пропорційності з (3.11),(3.12), а стала C визначається з формули (3.13), буде еквівалентною крайовій задачі (3.8).

Має силу наступна

ТЕОРЕМА 2.1. *Для того, щоб крайова задача (3.8) мала єдиний розв'язок, необхідно й досить виконання умови*

$$\beta_0 v(b) + \beta_1 v'(b) \neq 0. \tag{3.15}$$

Доведення. Нехай виконується умова (3.15). Тоді стала C визначається однозначно з (3.13), а отже, однозначно визначаються й початкові умови задачі Коші (3.14). Тоді з урахуванням умов, накладених на коефіцієнти рівняння, задача Коші (3.14) матиме єдиний розв'язок. Оскільки задача Коші (3.14) є еквівалентною крайовій задачі (3.8), то й крайова задача (3.8) буде мати єдиний розв'язок.

Нехай крайова задача (3.8) має єдиний розв'язок. Тоді для будь-якої фундаментальної системи частинних розв'язків $\{y_1(x), y_2(x)\}$ рівняння (3.10)

$$\det \boldsymbol{U} = \begin{vmatrix} \alpha_0 y_1(a) + \alpha_1 y_1'(a) & \alpha_0 y_2(a) + \alpha_1 y_2'(a) \\ \beta_0 y_1(b) + \beta_1 y_1'(b) & \beta_0 y_2(b) + \beta_1 y_2'(b) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Знайдемо єдиний розв'язок задачі Коші (3.10),(3.12). Загальний розв'язок рівняння (3.10) $v(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$. Після підкладання в початкові умови (3.12) отримаємо

$$\begin{cases} v(a) \equiv C_1 y_1(a) + C_2 y_2(a) = k\alpha_1, \\ v'(a) \equiv C_1 y_1'(a) + C_2 y_2'(a) = -k\alpha_0, \end{cases}$$

звідки $C_1 = k\dfrac{\alpha_1 y_2'(a) + \alpha_0 y_2(a)}{y_1(a)y_2'(a) - y_2(a)y_1'(a)}$, $C_2 = -k\dfrac{\alpha_1 y_1'(a) + \alpha_0 y_1(a)}{y_1(a)y_2'(a) - y_2(a)y_1'(a)}$.

Тоді

$$\beta_0 v(b) + \beta_1 v'(b) = C_1[\beta_0 y_1(b) + \beta_1 y_1'(b)] + C_2[\beta_0 y_2(b) + \beta_1 y_2'(b)] =$$
$$= -\frac{k \det \boldsymbol{U}}{y_1(a)y_2'(a) - y_2(a)y_1'(a)} \neq 0. \qquad \square$$

2. ***Випадок рівняння третього порядку.*** Розглянемо ЛНКЗ

$$\ell_3(y) \equiv y''' + p_1(x)y'' + p_2(x)y' + p_3(x)y(x) = f(x), \quad x \in (a,b); \tag{3.16}$$

$$y(a) = y_a, \quad y'(a) = y_a', \quad y(b) = y_b, \tag{3.17}$$

де $p_1(x), p_2(x), p_3(x), f(x) \in C_{(a,b)}$, y_a, y_a', y_b – задані сталі.

Покладемо $y(x) = u(x) + Cv(x)$, де $u(x)$ і $v(x)$ – розв'язки задач Коші

$$\ell_3(u) = f(x), \quad u(a) = y_a, \quad u'(a) = y_a', \quad u''(a) = 0;$$

$$\ell_3(v) = 0, \quad v(a) = 0, \quad v'(a) = 0, \quad v''(a) = 1.$$

Тоді функція $y(x)$ справджуватиме дві перші крайові умови з (3.17) при довільному значенні сталої C. Із третьої крайової умови $u(b) + Cv(b) = y_b$, або

$$C = \frac{y_b - u(b)}{v(b)}.$$

Умова $v(b) \neq 0$ є необхідною і достатньою умовою єдиності розв'язку розглядуваної ЛНКЗ. Якщо ця умова виконується, то єдиний розв'язок крайової задачі (3.16),(3.17) одержуємо у вигляді

$$y(x) = u(x) + \frac{y_b - u(b)}{v(b)} v(x).$$

ПРИКЛАД 2. Шляхом зведення до задачі Коші розв'язати ЛНКЗ

$$y''' - 7y' + 6y(x) = 6, \quad x \in (0;1);$$

$$y(0) = y'(0) = y(1) = 0.$$

Покладемо $y(x) = u(x) + Cv(x)$, де

$$u''' - 7u' + 6u(x) = 6, \quad u(0) = u'(0) = u''(0) = 0;$$

$$v''' - 7v' + 6v(x) = 0, \quad v(0) = v'(0) = 0, \quad v''(0) = 1.$$

Розв'язками наведених задач Коші є функції

$$u(x) = 0{,}6e^{2x} - 1{,}5e^{x} - 0{,}1e^{-3x} + 1, \quad v(x) = 0{,}2e^{2x} - 0{,}25e^{x} + 0{,}05e^{-3x},$$

а сталу C знаходимо з третьої крайової умови $y(1) = 0$:

$$C = -\frac{u(1)}{v(1)} = \frac{15e^4 - 6e^5 - 10e^3 + 1}{2e^5 - 2{,}5e^4 + 0{,}5}.$$

Знаменник дробу не рівний нулеві, отже, крайова задача має єдиний розв'язок

$$y(x) = 0{,}6e^{2x} - 1{,}5e^{x} - 0{,}1e^{-3x} + 1 + \frac{15e^4 - 6e^5 - 10e^3 + 1}{2e^5 - 2{,}5e^4 + 0{,}5}\left(0{,}2e^{2x} - 0{,}25e^{x} + 0{,}05e^{-3x}\right).$$

3. ***Триточкова крайова задача. Метод суперпозиції (додаткових функцій).*** Розглянемо ЛНКЗ для того ж рівняння (3.16) із крайовими умовами, заданими в трьох точках, причому $c \in (a,b)$:

$$\ell_3(y) = f(x), \quad x \in (a,b);$$

$$y'(a) = y'_a, \quad y'(b) = y'_b, \quad y(c) = y_c. \tag{3.18}$$

Покладемо

$$y(x) = u(x) + C_1 v(x) + C_2 z(x), \tag{3.19}$$

де функції $u(x)$, $v(x)$ і $z(x)$ визначаються як розв'язки задач Коші

$$\ell_3(u) = f(x), \quad u(a) = u''(a) = 0, \quad u'(a) = y_a;$$

$$\ell_3(v) = 0, \quad v(a) = 1, \quad v'(a) = v''(a) = 0;$$

$$\ell_3(z) = 0, \quad z(a) = z'(a) = 0, \quad z''(a) = 1.$$

Тоді функція (3.19) справджуватиме першу з крайових умов (3.16) при довільних значеннях сталих C_1, C_2. Конкретні ж значення сталих C_1, C_2 визначаються з системи, одержаної підкладанням (3.19) у другу та третю крайові умови з (3.18):

$$\begin{cases} C_1 v'(b) + C_2 z'(b) = y'_b - u'(b); \\ C_1 v(c) + C_2 z(c) = y_c - u(c). \end{cases}$$

Звідси

$$C_1 = \frac{[y'_b - u'(b)]z(c) - [y_c - u(c)]z'(b)}{v'(b)z(c) - v(c)z'(b)}, \quad C_2 = -\frac{[y'_b - u'(b)]v(c) - [y_c - u(c)]v'(b)}{v'(b)z(c) - v(c)z'(b)}. \quad (3.20)$$

Із (3.20) очевидно, що для єдиності розв'язку крайової задачі (3.16),(3.18) необхідно й досить виконання умови $v'(b)z(c) - v(c)z'(b) \neq 0$. Якщо ця умова виконується, то єдиний розв'язок ЛНКЗ одержуємо у вигляді (3.19), де сталі C_1, C_2 визначаються формулами (3.20).

ПРИКЛАД 3 (розрахунок тришарового бруса). Тришаровий брус, рівномірно навантажений по всій довжині $[0,l]$, описується диференціальним рівнянням

$$y''' - k^2 y'(x) + a = 0,$$

де k^2, a – фізичні параметри, що характеризують пружні властивості шарів. Кінці бруса вільні, тобто момент сил у точках $x = 0$ і $x = l$ рівний нулеві: $y'(0) = y'(l) = 0$, а з умови симетрії одержимо третю крайову умову: $y(0{,}5l) = 0$.

Вправа. Застосувати метод суперпозиції у випадку ЛНКЗ, яка описує навантажений тришаровий брус.

4. ***Випадок рівняння n-го порядку.*** Розглянемо ЛНКЗ (2.1),(2.2) для випадку $m = n$:

$$\ell_n(y) \equiv \sum_{k=0}^{n} p_k(x) y^{(n-k)}(x) = f(x), \quad x \in (a,b); \quad (3.21)$$

$$U_j(y) = \gamma_j, \quad j = \overline{1,n}. \quad (3.22)$$

Якщо $p_k(x) \in C^{n-k}_{(a,b)}$, $k = \overline{0,n}$, причому $p_0(x) \neq 0$, а $f(x) \in C_{(a,b)}$, то задача Коші для рівняння (3.21) завжди має єдиний розв'язок. Будемо вважати, що наведена ЛНКЗ також має єдиний розв'язок. Тоді цей розв'язок можна подати у вигляді (2.3)

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x) + y_0(x),$$

де сталі C_i визначаються з системи (2.4) при $m = n$:

$$\sum_{i=1}^{n} C_i U_j(y_i) = \gamma_j - U_j(y_0), \quad j = \overline{1,n}. \quad (3.23)$$

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння (3.21) $y_0(x)$, очевидно, можна шукати як розв'язок задачі Коші

$$\ell_n(y_0) = f(x), \quad y_0^{(s)}(a) = 0, \quad s = \overline{0,n-1}. \quad (3.24)$$

Покажемо, що функції $y_i(x)$, $i = \overline{1,n}$, можна знайти як розв'язки задач Коші

$$\ell_n(y_i)=0,\quad y_i^{(s)}(a)=\begin{cases}1, & i=s+1;\\ 0, & i\neq s+1,\end{cases}\quad i=\overline{1,n},\quad s=\overline{0,n-1}. \qquad (3.25)$$

Розв'язки задач Коші (3.25) складають фундаментальну систему частинних розв'язків для однорідного рівняння $\ell_n(y)=0$, оскільки в точці $x=a$ детермінант Вронського

$$W[y_1,\ldots,y_n](a)=\begin{vmatrix}1 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & 1 & \ldots & 0\\ & & \ldots & \\ 0 & 0 & \ldots & 1\end{vmatrix}=1\neq 0,$$

а тому система функцій $\{y_1(x),y_2(x),\ldots,y_n(x)\}$ є лінійно незалежною.

Отже, для знаходження єдиного розв'язку поставленої ЛНКЗ (3.21),(3.22) достатньо зінтегрувати задачі Коші (3.24) і (3.25), знайти сталі C_i з системи (3.23) і підкласти знайдені значення у (2.3).

§2.4. Метод прогонки

Алгоритм методу прогонки для лінійних крайових задач, розроблений І.М.Гельфандом та О.В.Локуцієвським в Інституті математики АН СРСР, також є одним із шляхів зведення крайової задачі до задач Коші.

1. ***Випадок рівняння другого порядку.*** Для викладення ідеї методу покажемо спочатку, що лінійне диференціальне рівняння другого порядку можна подати у канонічному вигляді

$$y''+p(x)y(x)=q(x). \qquad (4.1)$$

Справді, нехай рівняння має вигляд

$$z''+p_1(x)z'+p_2(x)z(x)=f(x),\ \ x\in(a,b), \qquad (4.2)$$

де $p_1(x)\in C^1_{(a,b)}$, а $p_2(x),f(x)\in C_{(a,b)}$.

Покладемо $z(x)=y(x)v(x)$, де функції $y(x),v(x)\in C^2_{(a,b)}$; тоді маємо $z'=y'v+yv'$, $z''=y''v+2y'v'+yv''$. Після підкладання в (4.2) дістанемо:

$$vy''+\left(2v'+p_1v\right)y'+\left(v''+p_1v'+p_2v\right)y=f(x). \qquad (4.3)$$

Виберемо $v(x)$ таким чином, щоб у рівності (4.3) коефіцієнт при першій похідній перетворився в нуль, тобто як деякий частинний розв'язок рівняння

$$2v'+p_1(x)v(x)=0.$$

Зінтегрувавши наведене рівняння, одержимо $v(x)=\exp\left(-0{,}5\int p_1(x)dx\right)$. Такий вибір інваріанти $v(x)$ дозволяє одержати для функції $y(x)$ рівняння, яке не містить першої похідної. Отже, не зменшуючи загальності подальших міркувань, можемо розглядати рівняння другого порядку в канонічному вигляді (4.1).

Розглянемо крайову задачу: знайти регулярний на інтервалі (a,b) розв'язок рівняння (4.1), який справджує крайові умови

$$y'(a) + \alpha_{00} y(a) = \alpha_{10}; \tag{4.4}$$

$$y'(b) + \beta_{00} y(b) = \beta_{10}, \tag{4.5}$$

де α_{00}, α_{10}, β_{00}, β_{10} – задані сталі. Будемо вважати, що коефіцієнти рівняння (4.1) $p(x), q(x) \in C_{(a,b)}$ і припустимо, що наведена крайова задача має єдиний розв'язок.

Складемо лінійне рівняння першого порядку

$$y' + \alpha_0(x) y(x) = \alpha_1(x), \tag{4.6}$$

де $\alpha_1(x), \alpha_2(x)$ – довільні функції з класу $C^1_{(a,b)} \bigcap C_{[a,b]}$.

Виберемо в (4.6) коефіцієнти $\alpha_0(x)$ і $\alpha_1(x)$ таким чином, щоб розв'язок рівняння (4.6) був також і розв'язком рівняння (4.1). Продиференціювавши (4.6) за змінною x і підклавши в одержану рівність замість першої похідної її значення з (4.6), будемо мати:

$$y'' + \alpha_0' y + \alpha_0 y' = \alpha_1';$$

$$y'' + \left(\alpha_0' - \alpha_0^2\right) y = \alpha_1' - \alpha_0 \alpha_1. \tag{4.7}$$

Рівняння (4.1) та (4.7) будуть еквівалентними, якщо функції $\alpha_0(x)$, $\alpha_1(x)$ є розв'язками системи нелінійних рівнянь

$$\begin{cases} \alpha_0' - \alpha_0^2(x) = p(x); \\ \alpha_1' - \alpha_0 \alpha_1(x) = q(x). \end{cases} \tag{4.8}$$

Поклавши

$$\alpha_0(a) = \alpha_{00}, \quad \alpha_1(a) = \alpha_{10}, \tag{4.9}$$

одержимо, що розв'язок рівняння (4.6) справджує крайову умову (4.4).

Прямий хід прогонки полягає в інтегруванні задачі Коші (4.8),(4.9) від $x = a$ до $x = b$ та знаходженні значень $\alpha_0(b)$ і $\alpha_1(b)$. Підклавши одержані значення в (4.6), маємо

$$y'(b) + \alpha_0(b) y(b) = \alpha_1(b).$$

З іншого боку, крайова умова (4.5) дає

$$y'(b) + \beta_{00} y(b) = \beta_{10}.$$

Із останніх двох рівностей визначаємо значення $y(b)$ та $y'(b)$ (зауважимо, що в силу єдиності розв'язку розглядуваної крайової задачі $\beta_{00} - \alpha_0(b) \neq 0$):

$$y(b) = \frac{\beta_{10} - \alpha_1(b)}{\beta_{00} - \alpha_0(b)}, \quad y'(b) = \frac{\alpha_1(b)\beta_{00} - \alpha_0(b)\beta_{10}}{\beta_{00} - \alpha_0(b)}. \tag{4.10}$$

Тепер еквівалентну до крайової задачі (4.1),(4.4),(4.5) задачу Коші (4.1), (4.10) можна зінтегрувати назад від $x = b$ до $x = a$ (зворотний хід прогонки), одержавши єдиний розв'язок поставленої ЛНКЗ. Проте зворотний хід буде значно простішим, якщо за еквівалентну до заданої крайової задачі розглядати задачу Коші для рівняння першого порядку (4.6) при першій з початкових умов (4.10).

ПРИКЛАД 1. Застосувати метод прогонки до ЛНКЗ

$$y'' + y(x) = x\cos x, \quad x \in (0, \pi/2);$$

$$y'(0) - 3y(0) = 2, \quad y'(\pi/2) + 5y(\pi/2) = 2.$$

Точний розв'язок крайової задачі має вигляд

$$y(x) = -\frac{5\pi^2 + 2\pi + 108}{224}\cos x - \frac{15\pi^2 + 6\pi - 68}{224}\sin x + 0{,}25\left(x^2\sin x + x\cos x\right),$$

тобто в точці $x = \pi/2$

$$y(\pi/2) = \frac{68 - 6\pi - \pi^2}{224} \approx 0{,}17536; \quad y'(\pi/2) = \frac{108 + 30\pi + 5\pi^2}{224} \approx 1{,}12319.$$

Знайдемо ці значення за допомогою методу прогонки.

Для визначення коефіцієнтів $\alpha_0(x)$ і $\alpha_1(x)$ згідно з (4.8),(4.9) одержуємо наступну задачу Коші:

$$\begin{cases} \alpha_0' - \alpha_0^2(x) = 1, \quad \alpha_0(0) = -3; \\ \alpha_1' - \alpha_0\alpha_1(x) = x\cos x, \quad \alpha_1(0) = 2. \end{cases}$$

Її розв'язками будуть функції

$$\alpha_0(x) = \frac{\sin x - 3\cos x}{\cos x + 3\sin x}, \quad \alpha_1(x) = \frac{2x^2 + 15 + (1 - 6x)\cos 2x + (3 + 2x)\sin 2x}{8(\cos x + 3\sin x)}.$$

Тоді

$$\alpha_0(\pi/2) = \frac{1}{3}; \quad \alpha_1(\pi/2) = \frac{\pi^2 + 6\pi + 14}{48} \approx 1{,}18165.$$

Підклавши ці значення у формули (4.10), одержимо

$$y(\pi/2) = \frac{6 - 3\alpha_1(\pi/2)}{14} \approx 0{,}17536; \quad y'(\pi/2) = \frac{15\alpha_1(\pi/2) - 2}{14} \approx 1{,}12319.$$

2. ***Випадок рівняння третього порядку.*** Зауважимо, що лінійне диференціальне рівняння третього порядку

$$z''' + p_1(x)z'' + p_2(x)z' + p_3(x)z(x) = f(x),$$

де $p_1(x) \in C_{(a,b)}$, заміною $z(x) = \exp\left(-\frac{1}{3}\int p_1(x)dx\right)\cdot y(x)$ зводиться до рівняння вигляду

$$y''' + p(x)y' + q(x)y(x) = r(x), \tag{4.11}$$

яке не містить другої похідної,

Розглянемо крайову задачу: знайти регулярний на інтервалі (a,b) розв'язок $y(x)$ диференціального рівняння (4.11), який справджує крайові умови

$$\begin{aligned} &y''(a) + \alpha_{00}y'(a) + \alpha_{10}y(a) = \alpha_{20}; \\ &y''(b) + \beta_{00}y'(b) + \beta_{10}y(b) = \beta_{20}; \\ &y''(b) + \gamma_{00}y'(b) + \gamma_{10}y(b) = \gamma_{20}. \end{aligned} \tag{4.12}$$

При цьому припускаємо, що ЛНКЗ (4.11),(4.12) має єдиний розв'язок.

Складемо лінійне рівняння другого порядку

$$y'' + \alpha_0(x)y' + \alpha_1(x)y(x) = \alpha_2(x), \tag{4.13}$$

де $\alpha_i(x) \in C^1_{(a,b)}$, $i = \overline{0,2}$.

Якщо коефіцієнти рівняння (4.13) вибирати за тим же принципом, що й у попередньому випадку, то для визначення $\alpha_0(x)$, $\alpha_1(x)$ і $\alpha_2(x)$ одержимо наступну задачу Коші:

$$\begin{cases} \alpha_0' + \alpha_1 - \alpha_0^2(x) = p(x), \quad \alpha_0(a) = \alpha_{00}; \\ \alpha_1' - \alpha_0\alpha_1(x) = q(x), \quad \alpha_1(a) = \alpha_{10}; \\ \alpha_2' - \alpha_0\alpha_2(x) = r(x), \quad \alpha_2(a) = \alpha_{20}. \end{cases}$$

Поклавши в (4.13) $x = b$, маємо

$$y''(b) + \alpha_0(b)y'(b) + \alpha_1(b)y(b) = \alpha_2(b). \tag{4.14}$$

Тепер рівність (4.14) разом із двома крайовими умовами в точці $x = b$ з (4.12) можемо розглядати як систему для знаходження значень $y(b)$, $y'(b)$ та $y''(b)$. При цьому зауважимо, що на підставі єдиності розв'язку крайової задачі (4.11),(4.12) визначник цієї системи

$$\begin{vmatrix} \alpha_1(b) & \alpha_0(b) & 1 \\ \beta_{10} & \beta_{00} & 1 \\ \gamma_{10} & \gamma_{00} & 1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Приєднавши одержані значення $y(b)$, $y'(b)$ та $y''(b)$ до рівняння (4.11) або ж перші два з цих значень – до рівняння (4.13), дістанемо задачу Коші, еквівалентну крайовій задачі (4.11),(4.12).

Зауважимо, що аналогічні алгоритми можна побудувати і у випадку крайових задач для рівнянь більш високих порядків, якщо тільки крайові умови мають специфічний для даного методу вигляд.

3. ***Триточкова крайова задача.*** Розглянемо крайову задачу: знайти регулярний на інтервалі (a,b) розв'язок рівняння (4.11), який справджує крайові умови, задані в трьох точках:

$$y'(a) = \alpha_{00}y''(a) + \alpha_{10}y(a) + \alpha_{20}; \tag{4.15}$$

$$y(c) = \beta_{00}y''(c) + \beta_{10}y'(c) + \beta_{20}; \tag{4.16}$$

$$y'(b) = \gamma_{00}y''(b) + \gamma_{10}y(b) + \gamma_{20}, \tag{4.17}$$

де α_{00}, α_{10}, α_{20}, β_{00}, β_{10}, β_{20}, γ_{00}, γ_{10}, γ_{20} – задані сталі, $c \in (a,b)$. Будемо вважати, що коефіцієнти рівняння (4.11) $p(x), q(x), r(x) \in C_{(a,b)}$ і припустимо, що наведена крайова задача має єдиний розв'язок.

Розглянемо лінійне диференціальне рівняння другого порядку

$$y' = \alpha_0(x)y'' + \alpha_1(x)y(x) + \alpha_2(x), \tag{4.18}$$

де довільні поки що функції $\alpha_i(x) \in C^1_{(a,b)}$, $i = \overline{0,2}$. Виберемо їх таким чином, щоб розв'язок рівняння (4.18) був також і розв'язком рівняння (4.11). Продиференціювавши (4.18) за змінною x, розв'язавши одержану рівність відносно третьої похідної y''' і підклавши замість другої похідної y'' її значення з (4.18), будемо мати:

$$y'' = \alpha_0' y'' + \alpha_0 y'' + \alpha_1 y' + \alpha_1' y + \alpha_2';$$

$$y''' = \frac{1}{\alpha_0}\left\{\left(1-\alpha_0'\right)y'' - \alpha_1 y' - \alpha_1' y - \alpha_2'\right\};$$

$$y''' = \frac{1}{\alpha_0^2}\left\{\left(1-\alpha_1\alpha_0-\alpha_0'\right)y' - \left(\alpha_1-\alpha_1\alpha_0'+\alpha_1'\alpha_0\right)y - \alpha_2 + \alpha_2\alpha_0' - \alpha_2'\alpha_0\right\}. \quad (4.19)$$

Порівнюючи (4.19) з (4.11), а потім (4.18) з крайовою умовою (4.15), для визначення функцій $\alpha_0(x)$, $\alpha_1(x)$ і $\alpha_2(x)$ одержимо задачу Коші

$$\begin{cases} \alpha_0'(x) = 1 - \alpha_1\alpha_0 + p(x)\alpha_0^2, \quad \alpha_0(a) = \alpha_{00}; \\ \alpha_1'(x) = q(x)\alpha_0 + p(x)\alpha_0\alpha_1 - \alpha_1^2, \quad \alpha_1(a) = \alpha_{10}; \\ \alpha_2'(x) = -r(x)\alpha_0 + p(x)\alpha_0\alpha_2 - \alpha_1\alpha_2, \quad \alpha_2(a) = \alpha_{20}. \end{cases} \quad (4.20)$$

Введемо ще одне лінійне рівняння другого порядку

$$y(x) = \beta_0(x)y'' + \beta_1(x)y'(x) + \beta_2(x), \quad (4.21)$$

де функції $\beta_i(x) \in C^1_{(a,b)}$, $i=\overline{0,2}$. Виберемо їх таким чином, щоб розв’язок рівняння (4.21) також був розв’язком і рівняння (4.11). Продиференціювавши (4.21) за змінною x, розв’язавши одержану рівність відносно третьої похідної y''' і підклавши замість другої похідної y'' її значення з (4.21), будемо мати:

$$y' = \left(\beta_0' + \beta_1\right)y'' + \beta_0 y''' + \beta_1' y' + \beta_2';$$

$$y''' = \frac{1}{\beta_0}\left\{\left(1-\beta_1'\right)y' - \left(\beta_1+\beta_0'\right)y'' - \beta_2'\right\};$$

$$y''' = \frac{1}{\beta_0^2}\left\{\left(\beta_0 - \beta_1'\beta_0 + \beta_1\beta_0' + \beta_1^2\right)y' - \left(\beta_1+\beta_0'\right)y - \beta_2'\beta_0 + \beta_2\beta_0' + \beta_2\beta_1\right\}. \quad (4.22)$$

Порівнюючи (4.22) з (4.11), а потім (4.21) з крайовою умовою (4.16), для визначення функцій $\beta_0(x)$, $\beta_1(x)$ і $\beta_2(x)$ одержимо задачу Коші

$$\begin{cases} \beta_0'(x) = -\beta_1 + q(x)\beta_0^2, \quad \beta_0(c) = \beta_{00}; \\ \beta_1'(x) = 1 + q(x)\beta_1\beta_0 + p(x)\beta_0, \quad \beta_1(c) = \beta_{10}; \\ \beta_2'(x) = -r(x)\beta_0 - q(x)\beta_2\beta_0, \quad \beta_2(c) = \beta_{20}. \end{cases} \quad (4.23)$$

Прямий хід прогонки полягає в інтегруванні задач Коші (4.20) і (4.23) до точки $x=b$ та знаходженні значень $\alpha_i(b)$ та $\beta_i(b)$, $i=\overline{0,2}$. Нехай ці значення знайдені. Тоді, поклавши в (4.18) і (4.21) $x=b$, з урахуванням третьої крайової умови (4.17) одержимо:

$$\begin{aligned} &y'(b) = \alpha_0(b)y''(b) + \alpha_1(b)y(b) + \alpha_2(b); \\ &y(b) = \beta_0(b)y''(b) + \beta_1(b)y'(b) + \beta_2(b); \\ &y'(b) = \gamma_{00}y''(b) + \gamma_{10}y(b) + \gamma_{20}. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Із системи (4.24) знаходимо значення $y(b)$, $y'(b)$ та $y''(b)$. При цьому зауважимо, що в силу єдиності розв’язку розглядуваної крайової задачі визначник цієї системи

$$\begin{vmatrix} -\alpha_1(b) & 1 & -\alpha_0(b) \\ 1 & -\beta_1(b) & -\beta_0(b) \\ -\gamma_{10} & 1 & -\gamma_{00} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Приєднавши знайдені значення до рівняння (4.11), або ж значення $y(b)$ та $y'(b)$ – до одного з рівнянь (4.18) чи (4.21), одержимо еквівалентну до крайової задачі (4.11),(4.15)-(4.17) задачу Коші, яку можна зінтегрувати назад від $x = b$ до $x = a$ (зворотний хід прогонки), одержавши єдиний розв'язок поставленої триточкової задачі.

ПРИКЛАД 2. За допомогою методу прогонки звести до задачі Коші триточкову крайову задачу:

$$y''' = y'(x), \quad x \in (0,2);$$

$$y'(0) = -y''(0) + y(0) + 2, \quad y(1) = -1, \quad y'(2) = y(2) + 2.$$

Розв'язання. Знаходимо коефіцієнти $\alpha_i(x)$ та $\beta_i(x)$, $i = \overline{0,2}$, як розв'язки задач Коші (4.20), (4.23):

$$\begin{cases} \alpha_0'(x) = 1 - \alpha_0(\alpha_1 + \alpha_0), & \alpha_0(0) = -1; \\ \alpha_1'(x) = -\alpha_1(\alpha_1 + \alpha_0), & \alpha_1(0) = 1; \\ \alpha_2'(x) = -\alpha_2(\alpha_1 + \alpha_0), & \alpha_2(0) = 2; \end{cases} \qquad \begin{cases} \beta_0'(x) = -\beta_1, & \beta_0(1) = 0; \\ \beta_1'(x) = 1 - \beta_0, & \beta_1(1) = 0; \\ \beta_2'(x) = 0, & \beta_2(1) = -1. \end{cases} \tag{4.25}$$

Зінтегрувавши системи (4.25), одержимо:

$$\alpha_0(x) = \operatorname{th} x - \operatorname{sch} x; \qquad \beta_0(x) = 1 - \operatorname{ch}(x-1);$$

$$\alpha_1(x) = \operatorname{sch} x; \qquad \beta_1(x) = \operatorname{sh}(x-1);$$

$$\alpha_2(x) = 2\operatorname{sch} x; \qquad \beta_2(x) = -1.$$

Тоді система (4.24) для знаходження значень $y(2)$, $y'(2)$ та $y''(2)$ набуде вигляду:

$$\begin{cases} (\operatorname{sh} 2 - 1)y''(2) - \operatorname{ch} 2\, y'(2) + y(2) = -2; \\ (1 - \operatorname{ch} 1)y''(2) + \operatorname{sh} 1\, y'(2) - y(2) = 1; \\ y'(2) - y(2) = 2, \end{cases}$$

звідки одержуємо початкові умови для еквівалентних задач Коші. Зокрема, для вихідного рівняння третього порядку еквівалентна до заданої триточкової крайової задачі задача Коші матиме вигляд:

$$y''' - y'(x) = 0, \quad x \in (0;2);$$

$$y(2) = \frac{1 - 2\operatorname{sh} 1 + 2\operatorname{ch} 2 - 3\operatorname{sh} 2}{\operatorname{sh} 1 + \operatorname{sh} 2 - \operatorname{ch} 2}, \; y'(2) = \frac{1 - \operatorname{sh} 2}{\operatorname{sh} 1 + \operatorname{sh} 2 - \operatorname{ch} 2}, \; y''(2) = \frac{1 - \operatorname{ch} 2}{\operatorname{sh} 1 + \operatorname{sh} 2 - \operatorname{ch} 2}.$$

§2.5. Метод стрільби (балістичний) для систем диференціальних рівнянь

Ще один спосіб зведення крайової задачі до задач Коші дає так званий балістичний метод, або метод стрільби.

Розглянемо крайову задачу для системи двох диференціальних рівнянь першого порядку з нелінійними крайовими умовами:

$$\begin{aligned} u'(x) &= f_1(x,u,v), \\ v'(x) &= f_2(x,u,v), \end{aligned} \quad x \in (a,b); \tag{5.1}$$

$$\varphi[u(a),v(a)] = 0, \quad \psi[u(b),v(b)] = 0. \tag{5.2}$$

Виберемо довільне значення $u(a) = \eta$ і розглядатимемо першу з крайових умов (5.2) як алгебраїчне рівняння $\varphi[\eta, v(a)] = 0$, звідки визначимо $v(a) = \xi(\eta)$. Візьмемо значення $u(a) = \eta$, $v(a) = \xi$ за початкові умови задачі Коші для системи (5.1). Зінтегрувавши цю задачу, одержимо розв'язок, залежний від параметра: $u = u(x,\eta)$, $v = v(x,\eta)$. Знайдений розв'язок справджує першу з крайових умов (5.2), але, взагалі кажучи, не справджуватиме другу з цих умов.

Отже, параметр η слід підібрати таким чином, щоб

$$\overline{\psi}(\eta) \equiv \psi[u(b,\eta), v(b,\eta)] = 0. \tag{5.3}$$

Знайти корінь алгебраїчного рівняння (5.3) можна різними наближеними методами.

Метод дихотомії. Робимо «пробні постріли» – розрахунки з довільним чином вибраними значеннями η_i, допоки серед величин $\overline{\psi}(\eta_i)$ не буде різних за знаком. Пара відповідних їм значень параметра η_i та η_{i+1} утворять першу «вилку», в межах якої міститься корінь рівняння (5.3). Поділяючи «вилку» послідовно навпіл до одержання потрібної точності, здійснюємо «пристрілку» параметра η. Саме завдяки цьому процесу метод і одержав назву методу стрільби.

Однак знаходження кожного нового значення функції $\overline{\psi}(\eta)$ вимагає числового інтегрування системи (5.1), тобто є досить громіздким. Тому для відшукання кореня рівняння (5.3) доцільно застосовувати більш швидкі методи.

Метод січних. Перші два «постріли» η_0 та η_1 робимо навмання, а наступні значення обчислюємо згідно з формулою січних:

$$\eta_{i+1} = \eta_i - \frac{(\eta_i - \eta_{i-1})\overline{\psi}(\eta_i)}{\overline{\psi}(\eta_i) - \overline{\psi}(\eta_{i-1})}, \quad i = 1,2,... \tag{5.4}$$

Можна використовувати й інші подібні методи.

Особливо просто за допомогою методу стрільби розв'язуються лінійні крайові задачі. Справді, нехай задача (5.1),(5.2) є лінійною, тобто має вигляд

$$\begin{aligned} u'(x) &= p_1(x)u + q_1(x)v + r_1(x), \\ v'(x) &= p_2(x)u + q_2(x)v + r_2(x), \end{aligned} \quad x \in (a,b); \tag{5.5}$$

$$\alpha_1 u(a) + \beta_1 v(a) = \gamma_1, \quad \alpha_2 u(a) + \beta_2 v(a) = \gamma_2. \tag{5.6}$$

Тоді початковими значеннями відповідної задачі Коші будуть

$$u(a) = \eta, \quad v(a) = \xi \equiv \beta_1^{-1}(\gamma_1 - \alpha_1 \eta). \tag{5.7}$$

Легко бачити, що розв'язок задачі Коші (5.5),(5.7) лінійно залежатиме від параметра η, тому функція $\overline{\psi}(\eta)$ також буде лінійною. Але лінійна функція одного аргументу цілком визначається своїми значеннями в довільних двох точках η_0 і η_1, а її графіком є пряма, тобто вона співпадає зі своєю січною.

Тому знайдене за формулою (5.4) значення η_2 є точним коренем рівняння (5.3), тобто розрахунок із цим значенням дає шуканий розв'язок крайової задачі (5.5),(5.6). Отже, для розв'язання лінійної крайової задачі достатньо трикратного інтегрування задач Коші.

Зауважимо, що для лінійних задач можна суттєво зменшити обсяг розрахунків, врахувавши структуру загального розв'язку системи (5.5). Як відомо з курсу звичайних диференціальних рівнянь, загальний розв'язок лінійної неоднорідної системи рівний сумі загального розв'язку відповідної однорідної системи та деякого частинного розв'язку неоднорідної системи.

Знайдемо частинний розв'язок системи (5.5), що відповідає значенню $\eta_0 = 0$, і позначимо його через $u_0(x)$, $v_0(x)$. Розглянемо задачу Коші для відповідної однорідної системи вигляду

$$\begin{aligned} &u'(x) = p_1(x)u + q_1(x)v, \\ &v'(x) = p_2(x)u + q_2(x)v, \end{aligned} \quad x \in (a,b);$$
$$u(a) = \eta_1 = 1, \quad v(a) = -\alpha_1\beta_1^{-1},$$

знайдемо її розв'язок і позначимо його через $u_1(x)$, $v_1(x)$. Тоді загальним розв'язком неоднорідної системи, який справджуватиме першу з крайових умов (5.6), буде однопараметрична сім'я вигляду

$$u(x) = u_0(x) + Cu_1(x), \quad v(x) = v_0(x) + Cv_1(x). \tag{5.8}$$

Значення параметра C знаходимо з другої з крайових умов (5.6):

$$C = -\frac{\alpha_2 u_0(b) + \beta_2 v_0(b) - \gamma_2}{\alpha_2 u_1(b) + \beta_2 v_1(b)}.$$

Підклавши знайдене значення C в (5.8), одержимо розв'язок крайової задачі (5.5),(5.6).

Метод стрільби є простим і успішно застосовним до більшості крайових задач типу (5.1),(5.2), а також до звичайних диференціальних рівнянь: адже, як відомо, будь-яке диференціальне рівняння n-го порядку можна звести до системи n рівнянь першого порядку. Труднощі виникають тоді, коли крайова задача (5.1),(5.2) добре обумовлена, а відповідна їй задача Коші погано обумовлена. При цьому чисельне інтегрування задачі Коші визначає функцію $\overline{\psi}(\eta)$ з великою похибкою, що ускладнює організацію ітерацій. У такому випадку пробують задавати початкові умови на правому кінці заданого проміжку $x = b$, і інтегрувати справа наліво; нерідко при цьому стійкість схем покращується. Якщо й це не допомагає, то таку крайову задачу слід розв'язувати або спеціальними, або різницевими методами.

ПРИКЛАД. За допомогою методу стрільби знайти розв'язок крайової задачі:

$$y'' - 2x^{-2}y = 2x^{-1}, \quad x \in (1;2); \tag{5.9}$$

$$9y(1) - 5y'(1) = 0, \quad y(2) - y'(2) + 1 = 0. \tag{5.10}$$

Розв'язання. Задача (5.9),(5.10) є лінійною, тому згідно з алгоритмом методу стрільби для відшукання її розв'язку достатньо інтегрування трьох задач Коші для рівняння (5.9) з початковими умовами $y(1)=\eta_i$, $y'(1)=-1{,}8\eta_i$, $i=\overline{0{,}2}$; тут значення похідної в точці $x=1$ визначені з першої з крайових умов (5.10). Перші два «постріли» η_0 та η_1 робимо навмання, беручи довільні два числа, а значення η_2 обчислюємо за формулою січних (5.4), в якій з урахуванням другої з крайових умов (5.10) слід узяти $\overline{\psi}(\eta_i)=y_i(2)-y_i'(2)+1$, де $y_i(x)$ – розв'язок задачі Коші для рівняння (5.9) з параметром η_i.

Нехай зроблені «постріли», наприклад, $\eta_0=5$, $\eta_1=0$. Зінтегрувавши рівняння (5.9) спершу при початкових умовах $y_0(1)=5$, $y_0'(1)=9$, і вдруге – при початкових умовах $y_1(1)=0$, $y_1'(1)=0$, одержимо розв'язки відповідних задач Коші: $y_0(x)=\frac{2}{3}\left(8x^2+x^{-1}\right)-x$, $y_1(x)=\frac{1}{3}\left(2x^2+x^{-1}\right)-x$. Тоді згідно з формулою січних (5.4)

$$\eta_2=\eta_1-\frac{(\eta_1-\eta_0)\overline{\psi}(\eta_1)}{\overline{\psi}(\eta_1)-\overline{\psi}(\eta_0)}=\frac{5\left(y_1(2)-y_1'(2)+1\right)}{y_1(2)-y_1'(2)+1-\left(y_0(2)-y_0'(2)+1\right)}. \qquad (5.11)$$

Підклавши в (5.11) знайдені функції $y_0(x)$ та $y_1(x)$, одержимо значення $\eta_2=-5$. Зінтегрувавши рівняння (5.9) втретє, цього разу при початкових умовах $y_2(1)=-5$, $y_2'(1)=-9$, одержимо розв'язок відповідної задачі Коші

$$y_2(x)=-x(4x+1), \qquad (5.12)$$

який згідно з алгоритмом методу стрільби для лінійних крайових задач повинен бути розв'язком крайової задачі (5.9),(5.10). Безпосереднім підкладанням легко переконатися, що функція (5.12) дійсно справджує обидві крайові умови з (5.10). Отже, розв'язок крайової задачі (5.9),(5.10) $y(x)\equiv y_2(x)=-x(4x+1)$.

ВПРАВИ ДО РОЗДІЛУ ІІ

1. Дослідити лінійні однорідні крайові задачі:

а) $$\begin{aligned}&y''-4y'+4y=0, \quad y=y(x), \quad x\in(0;1);\\&y'(0)-2y(0)=0, \quad y'(1)-2y(1)=0.\end{aligned}$$

б) $$\begin{aligned}&(x-2)^2y''-3(x-2)y'+4y=0, \quad y=y(x), \quad x\in(0;1);\\&y(1)=0, \quad y'(0)+y(0)-2y'(1)=0.\end{aligned}$$

в) $$\begin{aligned}&y'''-8y=0, \quad y=y(x), \quad x\in\left(0;\tfrac{2\pi}{\sqrt{3}}\right);\\&y'(0)-2y(0)=0, \quad y'\left(\tfrac{2\pi}{\sqrt{3}}\right)-2y\left(\tfrac{2\pi}{\sqrt{3}}\right)=0.\end{aligned}$$

г) $$\begin{aligned}&y^{(4)}-\ln^2 2y''=0, \quad y=y(x), \quad x\in(0;3);\\&y(0)=0, \quad y'(1)=0, \quad y''(2)=0, \quad y'''(3)=0.\end{aligned}$$

д) $$\begin{aligned} & y^{(4)} + 2y'' + y = 0, \quad y = y(x), \quad x \in (0; \pi/2); \\ & y(0) = y'(0) = y(\pi/2) = y'(\pi/2) = 0, \quad y''(0) - y''(\pi/2) = 0. \end{aligned}$$

е) $$\begin{aligned} & y^{(5)} - 6y^{(4)} + 9y''' = 0, \quad y = y(x), \quad x \in (0;1); \\ & y(1) = y'(1) = y''(0) = y'''(0) = 0, \quad y^{(4)}(1) - 4e^3 y^{(4)}(0) = 0. \end{aligned}$$

є) $$\begin{cases} \dot{x} = 5x - 4y, \\ \dot{y} = x + y, \end{cases} \quad x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in \left(0; \tfrac{1}{2}\right);$$
$$x(0) = 0, \quad y\left(\tfrac{1}{2}\right) = 0.$$

ж) $$\begin{cases} \dot{x} = 2x + 8y, \\ \dot{y} = -x - 2y, \end{cases} \quad x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in (0; \pi/2);$$
$$x(0) = 0, \quad \dot{y}(0) - 2y\left(\pi/2\right) = 0.$$

з) $$\begin{cases} \dot{x} = 2x + 3y, \\ \dot{y} = 2x + y, \end{cases} \quad x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in (0;1);$$
$$\dot{x}(0) + x(0) = 0, \quad \dot{y}(1) + y\left(1\right) = 0.$$

2. Дослідити задачу про стиснутий стержень на пружній поверхні (див. §2.1, приклад 3) для наступних значень параметрів:
   а) $P = 2$, $\alpha = k = 1$; б) $P = 2$, $\alpha = l = 1$.

3. Дослідити лінійні неоднорідні крайові задачі:

а) $$\begin{aligned} & y'' + y = \csc x, \quad y = y(x), \quad x \in (\pi/4; \pi/2); \\ & y'(\pi/4) - y(\pi/4) = 0, \quad y'(\pi/2) = \pi/4. \end{aligned}$$

б) $$\begin{aligned} & y'' + 4y = 2\,\mathrm{tg}\, x, \quad y = y(x), \quad x \in (0; \pi/4); \\ & y(0) = 0, \quad y(\pi/4) = -0{,}5. \end{aligned}$$

в) $$\begin{aligned} & y'' - 4y' + 8y = e^{2x} + \sin 2x, \quad y = y(x), \quad x \in (0; \pi); \\ & y'(0) = 1, \quad y'(\pi) = 1. \end{aligned}$$

г) $$\begin{aligned} & y'' + 2y' + y = 3e^{-x}\sqrt{x+1}, \quad y = y(x), \quad x \in (0;24); \\ & y'(0) + y(0) = 0, \quad y(24) = 0. \end{aligned}$$

д) $$\begin{aligned} & x^2 y'' - 4xy' + 6y = 0, \quad y = y(x), \quad x \in (1;2); \\ & y'(1) - 2y(1) = 1, \quad y'(2) - y(2) = 4. \end{aligned}$$

е) $(x-2)^2 y'' - 3(x-2)y' + 4y = x, \quad y = y(x), \quad x \in (0;1);$
$y'(0) + y(0) = 0, \quad y'(1) + 2y(1) = -1.$

є) $y''' - y'' = 1 + e^x, \quad y = y(x), \quad x \in (-2;0);$
$y''(0) - 2y'(0) + y(0) = 0, \quad y''(-2) - 2y'(-2) + y(-2) = 0, \quad y''(0) + y''(-2) = 0.$

ж) $y''' - y'' - y' + y = 0, \quad y = y(x), \quad x \in (0;1);$
$y(0) + 2y'(0) = -2, \quad y''(0) = -2, \quad y''(1) - y(1) = -2e.$

з) $x^2 y''' - 2y' = 0, \quad y = y(x), \quad x \in (\frac{1}{2};1);$
$y(1) = 2, \quad y'(1) = -2, \quad y'(\frac{1}{2}) = \frac{5}{4}.$

и) $y''' + 4y'' + y' - 6y = 0, \quad y = y(x), \quad x \in (0;1);$
$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y'(1) = 1.$

і) $\begin{cases} \dot{x} = 4x - 4y + 3, \\ \dot{y} = -2x + 2y - 1, \end{cases} \quad x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in (0;1);$
$x(0) = -1, \quad \dot{y}(1) + y(0) = 0.$

ї) $\begin{cases} \dot{x} = -4y + e^t, \\ \dot{y} = x + 4y, \end{cases} \quad x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in (0;\ln 2);$
$x(0) = -2, \quad \dot{y}(\ln 2) - 2y(\ln 2) = 0.$

й) $\begin{cases} 3\dot{x} = 3x - 5y - 7e^{-t}, \\ \dot{y} = 3x - 3y - 4e^{-t}, \end{cases} \quad x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in (0;3\pi/2);$
$x(0) = y(0), \quad x(3\pi/2) = y(3\pi/2).$

к) $\begin{cases} \dot{x} = 6x - 4y - \sin t, \\ \dot{y} = 9x - 6y, \end{cases} \quad x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in (0;\pi/2);$
$x(0) - \dot{y}(\pi/2) = 1, \quad \dot{y}(0) = 0.$

4. Знайти розв'язок крайової задачі, яка описує деформацію стінок циліндричного резервуару (див. §2.2, приклад 3).

5. Шляхом зведення до задач Коші розв'язати крайові задачі:

а) $y'' - 4y = 8x, \quad y = y(x), \quad x \in (0;\ln 2);$
$y'(0) = -2, \quad y(\ln 2) = 0.$

б) $$\begin{gathered} y'' + 2y' + 2y = e^{-x}, \quad y = y(x), \quad x \in (0;2\pi); \\ y'(0) - 2y(0) = 0, \quad 2y'(2\pi) - y(2\pi) = 0. \end{gathered}$$

6. Застосувати метод суперпозиції до крайової задачі, яка описує навантажений тришаровий брус (див. §2.3, приклад 3).

7. Методом прогонки (див. §2.4) знайти розв'язки крайових задач:

а) $$\begin{gathered} y'' + y = x\sec x, \quad y = y(x), \quad x \in (0;\pi/4); \\ y'(0) = 2, \quad y'(\pi/4) + 5y(\pi/4) = 2. \end{gathered}$$

б) $$\begin{gathered} y'' = x - 2, \quad y = y(x), \quad x \in (0;1); \\ y'(0) + \tfrac{1}{2}y(0) = -1, \quad y'(1) + 2y(1) = 1. \end{gathered}$$

8. За допомогою методу стрільби (див. §2.5) побудувати розв'язки крайових задач:

а) $$\begin{gathered} x(x-1)y'' - xy' + y = 0, \quad y = y(x), \quad x \in (2;3); \\ y(2) = \ln 4, \quad y(3) - 3y'(3) = 4. \end{gathered}$$

б) $$\begin{gathered} y'' + 2(y')^2 + 1 = 0, \quad y = y(x), \quad x \in (0;1); \\ y'(0) = 0, \quad y(1) = 0. \end{gathered}$$

в) $$\begin{cases} \dot{x} = 2x + 2y + 4e^{-3t}, \\ \dot{y} = x - 5y - 2e^{-3t}, \end{cases} \quad x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in (0;\ln 2);$$
$$x(0) - 2y(0) = 0, \quad x(\ln 2) + 22y(\ln 2) = -1.$$

г) $$\begin{cases} \dot{x} = -0{,}5y\sin t, \\ \dot{y} = -4\sqrt{20 - 2x}, \end{cases} \quad x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in (0;\pi);$$
$$x(0) - y(0) = 2, \quad x(\pi) + 2y(\pi) = -6.$$

РОЗДІЛ III
СПЕКТРАЛЬНА ТЕОРІЯ ЛІНІЙНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ

§3.1. Основні поняття та означення

Нехай L – лінійний диференціальний оператор, породжений лінійним диференціальним виразом

$$\ell_n(y) \equiv \sum_{k=0}^{n} p_k(x) y^{(n-k)}(x), \quad x \in (a,b)$$

та лінійними крайовими умовами

$$U_j(y) \equiv \sum_{s=0}^{n-1} \left(\alpha_{s,j} y^{(s)}(a) + \beta_{s,j} y^{(s)}(b) \right) = 0, \quad j = \overline{1,m}.$$

Розглянемо операторне рівняння

$$Ly = \lambda y, \quad \lambda = const, \tag{1.1}$$

еквівалентне крайовій задачі

$$\ell_n(y) = \lambda y(x), \quad x \in (a,b); \tag{1.2}$$

$$U_j(y) = 0, \quad j = \overline{1,m}. \tag{1.3}$$

Рівняння (1.1) при різних значеннях параметра λ може мати чи не мати нетривіальні розв'язки $y(x) \neq 0$.

Означення 1. Ті значення параметра λ, при яких операторне рівняння (1.1) має нетривіальні розв'язки, називаються ***власними значеннями*** оператора L, а відповідні нетривіальні розв'язки називаються ***власними функціями***.

Означення 2. Уся множина власних значень називається ***спектром*** оператора L. Тому крайову задачу (1.2),(1.3), а також подібні до неї задачі знаходження власних значень і власних функцій часто називають ***спектральними задачами***.

Нехай $p_k(x) \in C_{(a,b)}$, $k = \overline{0,n}$. Тоді для довільного фіксованого значення λ рівняння (1.1), а отже, і крайова задача (1.2),(1.3), має не більш ніж n лінійно незалежних розв'язків.

Означення 3. Максимальна кількість лінійно незалежних власних функцій, які відповідають одному й тому ж власному значенню, називається ***кратністю*** цього власного значення. Кратність довільного власного значення не може перевищувати порядку диференціального рівняння (1.2).

Означення 4. Спектр оператора L називається ***дискретним***, якщо всі його власні значення однократні, тобто кожному власному значенню відповідає єдина лінійно незалежна власна функція.

Позначимо через $y_i(\lambda, x)$, $i = \overline{1,n}$, розв'язки задач Коші

$$\ell_n(y_i) = \lambda y_i(x), \quad x > a;$$

$$y_i^{(s)}(a) = \begin{cases} 1, & i = s+1; \\ 0, & i \neq s+1, \end{cases} \quad i = \overline{1,n}.$$

Очевидно, що наведені задачі Коші мають розв'язки і ці розв'язки єдині; лінійна незалежність системи функцій $\{y_i(\lambda, x)\}$ показана в §2.3. Тоді функція

$$y(\lambda, x) = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i(\lambda, x), \tag{1.4}$$

де C_i – довільні сталі, буде загальним розв'язком рівняння (1.2). Для існування власних значень необхідно, щоб із (1.4) можна було вибрати нетривіальний розв'язок, котрий справджував би крайові умови (1.2), тобто щоб існував нетривіальний розв'язок системи

$$\sum_{i=1}^{n} C_i U_j(y_i) = 0, \quad j = \overline{1, m}. \tag{1.5}$$

Мають силу наступні критерії:

1) якщо $m < n$, то система (1.5), а отже, й крайова задача (1.2),(1.3) має нетривіальні розв'язки при будь-яких значеннях параметра λ;

2) якщо $m = n$, то нетривіальні розв'язки існують тоді й тільки тоді, коли детермінант матриці системи (1.5) рівний нулеві:

$$\Delta(\lambda) \equiv \det \left\| U_j(y_i) \right\| = 0. \tag{1.6}$$

У цьому випадку рівняння (1.6) називається ***характеристичним***, а нулі функції $\Delta(\lambda)$ – тобто ті значення параметра λ, котрі справджують рівність (1.6) – є власними значеннями крайової задачі (1.2),(1.3). Кратність власного значення не може перевищувати кратності відповідного кореня характеристичного рівняння;

3) якщо $m > n$, то система (1.5) має нетривіальні розв'язки, коли ранг її матриці менший за *n*, тобто всі мінори *n*-го порядку рівні нулеві. Тут можливі два випадки:

а) усі мінори *n*-го порядку тотожно рівні нулеві при довільних значеннях параметра λ – тоді будь-яке значення λ буде власним;

б) серед мінорів *n*-го порядку є не рівні тотожно нулеві – тоді власними значеннями крайової задачі (1.2),(1.3) будуть ті значення параметра λ, при яких усі мінори *n*-го порядку перетворюються в нуль, а відповідні їм нетривіальні розв'язки будуть власними функціями.

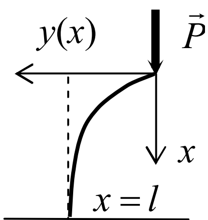

Рис. 11

ПРИКЛАД 1. Дано тонкий однорідний стержень довжини *l*, нерухомо закріплений на одному з кінців. На вільний кінець стержня діє стискуюча сила *P*. Завдання: визначити ту величину сили *P*, при якій стержень губить прямолінійну форму.

Розв'язання. Функція $y(x)$, яка описує форму зігнутого стержня (рис. 11), є розв'язком диференціального рівняння

$$Py(x) = -EJy'', \tag{1.7}$$

де J – осьовий момент інерції поперечного перерізу стержня, E – модуль пружності Юнґа. Вважаємо, що стержень однорідний і сталого перерізу: тоді

$EJ = const$. Позначимо $\lambda^2 = P(EJ)^{-1} \geq 0$, тоді з (1.7) одержимо диференціальне рівняння $y'' = -\lambda^2 y(x)$.

Із рис. 11 видно, що верхній кінець стержня $x = 0$ у вибраній системі координат не зміщується, тобто $y(0) = 0$, а в нижньому закріпленому кінці дотичні до профілю стержня завжди паралельні до осі Ox, тобто $y'(l) = 0$. У підсумку одержуємо наступну спектральну задачу (див. [8], с. 18-19):

$$y'' = -\lambda^2 y(x), \quad x \in (0,l); \tag{1.8}$$

$$y(0) = 0, \quad y'(l) = 0. \tag{1.9}$$

При $\lambda = 0$ загальний розв'язок рівняння (1.8) має вигляд $y(x) = C_1 x + C_2$. Із крайових умов (1.9) одержимо: $C_1 = C_2 = 0$, тобто задача має тільки тривіальний розв'язок. Отже, $\lambda = 0$ не буде власним значенням. Зауважимо, що з фізичної точки зору цей факт є очевидним, оскільки $\lambda = 0$ означає, що стержень не піддається дії сили, а отже займає прямолінійне положення.

Нехай $\lambda \neq 0$. Тоді загальний розв'язок рівняння (1.8) матиме вигляд $y(x) = C_3 \cos\lambda x + C_4 \sin\lambda x$. Із крайових умов (1.9) одержимо систему:

$$\begin{cases} C_3 = 0; \\ \lambda\left(-C_3 \sin\lambda l + C_4 \cos\lambda l\right) = 0. \end{cases}$$

Маємо випадок $m = n = 2$, тому для визначення власних значень потрібно знайти ненульові (адже $\lambda \neq 0$) корені характеристичного рівняння

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -\lambda \sin\lambda l & \lambda\cos\lambda l \end{vmatrix} \equiv \lambda\cos\lambda l = 0.$$

Звідси одержуємо множину власних значень

$$\lambda_k = \frac{\pi(2k+1)}{2l}, \quad k \in \mathrm{Z},$$

а відповідні власні функції матимуть вигляд

$$y_k(x) = C_k \sin\frac{\pi(2k+1)}{2l} x, \quad C_k = const.$$

Бачимо, що власні функції визначаються з точністю до сталого множника. Це означає, що спектр досліджуваної задачі є дискретним, тобто кожному власному значенню відповідає лише одна лінійно незалежна власна функція.

Оскільки власні значення відомі, то можна знайти і значення критичної сили:

$$P_k = EJ\lambda_k^2 = \frac{\pi^2(2k+1)^2}{4l^2} EJ, \quad k = \overline{0,\infty}.$$

На рис. 12 подані профілі стержня під дією критичної сили для деяких значень k у випадку $C_k > 0$. Якщо $C_k < 0$, то відповідний ґрафік буде симетричним відносно вертикальної осі, яка проходить через закріплений кінець стержня (на малюнках зображена пунктирною лінією).

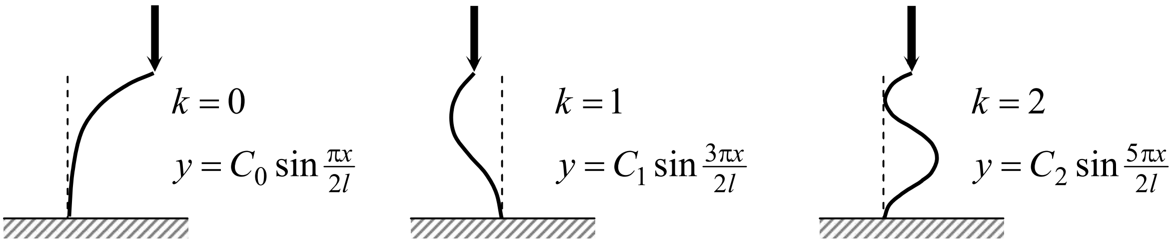

Рис. 12

Слід відзначити: якщо стержень неоднорідний або змінної товщини, то жорсткість згину *EJ* буде функцією координати і задача значно ускладниться.

Зауважимо, що не всяка спектральна задача має розв'язок, або ж її спектр є дискретним.

ПРИКЛАД 2. Дослідити спектральну задачу, вважаючи параметр λ дійсним:

$$y''=-\lambda y(x),\quad x\in(0,1); \tag{1.10}$$

$$y(0)-y(1)=0,\quad y'(0)-y'(1)=0. \tag{1.11}$$

Розв'язання. В залежності від знаку параметра λ загальний розв'язок рівняння (1.10) матиме різний вигляд. Тому для повного дослідження необхідно розглянути три можливі випадки.

Нехай $\lambda<0$. Тоді загальний розв'язок рівняння (1.10) матиме вигляд $y(x)=C_1e^{\sqrt{-\lambda}x}+C_2e^{-\sqrt{-\lambda}x}$. Із крайових умов (1.11) одержимо систему:

$$\begin{cases} C_1\left(1-e^{\sqrt{-\lambda}}\right)+C_2\left(1-e^{-\sqrt{-\lambda}}\right)=0; \\ C_1\sqrt{-\lambda}\left(1-e^{\sqrt{-\lambda}}\right)-C_2\sqrt{-\lambda}\left(1-e^{-\sqrt{-\lambda}}\right)=0. \end{cases}$$

Характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 1-e^{\sqrt{-\lambda}} & 1-e^{-\sqrt{-\lambda}} \\ \sqrt{-\lambda}\left(1-e^{\sqrt{-\lambda}}\right) & \sqrt{-\lambda}\left(e^{-\sqrt{-\lambda}}-1\right) \end{vmatrix}\equiv 4\sqrt{-\lambda}\left(\operatorname{ch}\sqrt{-\lambda}-1\right)=0$$

не має від'ємних коренів. Отже, $C_1=C_2=0$, тобто крайова задача має тільки тривіальний розв'язок, а тому при $\lambda<0$ власних значень не існує.

Нехай $\lambda=0$. Тоді загальний розв'язок рівняння (1.10) матиме вигляд $y(x)=C_3x+C_4$. Ця функція справджує крайові умови (1.11) при довільному значенні C_4, якщо тільки $C_3=0$. Отже, $\lambda=0$ буде власним значенням, якому відповідатиме власна функція $y(x)=C_4\neq 0$.

Нехай $\lambda>0$. Тоді загальний розв'язок рівняння (1.10) матиме вигляд $y(x)=C_5\cos\sqrt{\lambda}x+C_6\sin\sqrt{\lambda}x$. Із крайових умов (1.11) одержимо систему:

$$\begin{cases} C_5\left(\cos\sqrt{\lambda}-1\right)+C_6\sin\sqrt{\lambda}=0; \\ C_5\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}-C_6\sqrt{\lambda}\left(\cos\sqrt{\lambda}-1\right)=0. \end{cases} \tag{1.12}$$

Характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} \cos\sqrt{\lambda}-1 & \sin\sqrt{\lambda} \\ \sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda} & \sqrt{\lambda}\left(1-\cos\sqrt{\lambda}\right) \end{vmatrix} \equiv 2\sqrt{\lambda}\left(\cos\sqrt{\lambda}-1\right)=0$$

має додатні корені вигляду $\lambda_k = 4\pi^2 k^2$, $k=\overline{1,\infty}$, які й будуть шуканими власними значеннями. Для цих значень обидва рівняння системи (1.12) перетворюються в тотожності, тому відповідні власні функції запишуться у вигляді $y_k(x) = C_5\cos 2\pi kx + C_6\sin 2\pi kx$. Це означає, що кожному додатному власному значенню відповідатимуть дві лінійно незалежні власні функції, тобто спектр у випадку крайової задачі (1.10),(1.11) не є дискретним.

Об'єднавши випадки $\lambda=0$ і $\lambda>0$, можна записати всю множину власних значень і власних функцій крайової задачі (1.10),(1.11):

$$\lambda_k = 4\pi^2k^2, \quad y_k(x) = A_k\cos 2\pi kx + B_k\sin 2\pi kx, \quad k=\overline{0,\infty}.$$

Тут A_k, B_k – довільні сталі, причому $A_0\neq 0$, $A_k^2+B_k^2\neq 0$, $k=\overline{1,\infty}$.

ПРИКЛАД 3. Дослідити спектральну задачу, вважаючи параметр λ дійсним:

$$y^{(4)} = -\lambda y''(x), \quad x\in(0,1); \tag{1.13}$$

$$y''(0) = y'''(0) = 0, \quad y(1) = y'(1) = 0. \tag{1.14}$$

Розв'язання. Як і в попередньому прикладі, для повного дослідження необхідно розглянути три можливі випадки.

Нехай $\lambda=0$. Тоді загальний розв'язок рівняння (1.13) має вигляд $y(x) = C_1x^3 + C_2x^2 + C_3x + C_4$. Із крайових умов (1.14) одержимо систему:

$$\begin{cases} 2C_2 = 0; \\ 6C_1 = 0; \\ C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = 0; \\ 3C_1 + 2C_2 + C_3 = 0, \end{cases}$$

звідки $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 0$, тобто крайова задача має тільки тривіальний розв'язок, а тому $\lambda=0$ не є власним значенням.

Нехай $\lambda<0$. Тоді загальний розв'язок рівняння (1.13) має вигляд $y(x) = C_5 + C_6x + C_7e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_8e^{-\sqrt{-\lambda}x}$. Із крайових умов (1.14) одержимо систему:

$$\begin{cases} -\lambda\left(C_7 + C_8\right) = 0; \\ -\lambda\sqrt{-\lambda}\left(C_7 - C_8\right) = 0; \\ C_5 + C_6 + C_7e^{\sqrt{-\lambda}} + C_8e^{-\sqrt{-\lambda}} = 0; \\ C_6 + \sqrt{-\lambda}\left(C_7e^{\sqrt{-\lambda}} + C_8e^{-\sqrt{-\lambda}}\right) = 0, \end{cases}$$

звідки при від'ємних λ $C_5 = C_6 = C_7 = C_8 = 0$, тобто крайова задача знову має тільки тривіальний розв'язок. Отже, при $\lambda<0$ власних значень не існує.

Нехай $\lambda > 0$. Тоді загальний розв'язок рівняння (1.13) має вигляд $y(x) = C_9 + C_{10}x + C_{11}\cos\sqrt{\lambda}x + C_{12}\sin\sqrt{\lambda}x.$ Із крайових умов (1.14) одержимо систему:

$$\begin{cases} -\lambda C_{11} = 0; \\ -\lambda\sqrt{\lambda}C_{12} = 0; \\ C_9 + C_{10} + C_{11}\cos\sqrt{\lambda} + C_{12}\sin\sqrt{\lambda} = 0; \\ C_{10} - \sqrt{\lambda}\left(C_{11}\sin\sqrt{\lambda} - C_{12}\cos\sqrt{\lambda}\right) = 0, \end{cases}$$

звідки при додатних λ $C_9 = C_{10} = C_{11} = C_{12} = 0,$ тобто крайова задача знову має тільки тривіальний розв'язок. Тому при $\lambda > 0$ власних значень також не існує.

Отже, крайова задача (1.13),(1.14) взагалі не має нетривіальних розв'язків.

ПРИКЛАД 4. Дослідити спектральну задачу, вважаючи параметр λ дійсним:

$$y'' = -\lambda^2 y(x), \quad x \in (0,1); \tag{1.15}$$

$$y(0) = 0, \quad y(1) = P(\lambda)\,y'(1), \tag{1.16}$$

де $P(\lambda)$ – деякий многочлен, залежний від параметра.

Розв'язання. Як і в прикладі 1, для повного дослідження необхідно розглянути два можливі випадки.

Нехай $\lambda = 0$. Тоді загальний розв'язок рівняння (1.15) має вигляд $y(x) = C_1x + C_2$. Із крайових умов (1.16) одержуємо:

$$\begin{cases} C_2 = 0; \\ C_1 + C_2 = C_1P(0). \end{cases}$$

Наведена система має нетривіальний розв'язок, коли $P(0) = 1$. Якщо ця умова виконується, то $\lambda = 0$ буде власним значенням, якому відповідатиме власна функція $y(x) = C_1x$.

Нехай $\lambda \neq 0$. Тоді загальний розв'язок рівняння (1.15) має вигляд $y(x) = C_3\cos\lambda x + C_4\sin\lambda x.$ Із крайових умов (1.16) одержуємо:

$$\begin{cases} C_3 = 0; \\ C_3\cos\lambda + C_4\sin\lambda = P(\lambda)\cdot\lambda\left(C_4\cos\lambda - C_3\sin\lambda\right). \end{cases}$$

Наведена система має нетривіальний розв'язок при виконанні умови

$$\sin\lambda = P(\lambda)\cdot\lambda\cos\lambda. \tag{1.17}$$

Отже, якщо рівняння (1.17) має ненульові корені, то вони будуть власними значеннями крайової задачі; тоді їм відповідатимуть власні функції $y(x) = C_4\sin\lambda x.$

Спектральні задачі в просторі вектор-функцій. Нехай задані функції $g_{ij}(x) \in C_{(a,b)}$, не всі тотожно рівні нулеві, а λ – параметр. Складемо спектральну задачу

$$\begin{cases} y_i'(x) = \sum\limits_{j=1}^{n}\left[p_{ij}(x) + \lambda g_{ij}(x)\right] y_j, \quad x \in (a,b), \quad i = \overline{1,n}; \\ U_j(\boldsymbol{y}) \equiv \sum\limits_{k=1}^{n}\left[\alpha_{kj} y_k(a) + \beta_{kj} y_k(b)\right] = 0, \quad j = \overline{1,n}. \end{cases} \tag{1.18}$$

Ті значення параметру λ, для яких однорідна задача (1.18) має нетривіальний розв'язок $\boldsymbol{y} = (y_1(x) \quad \ldots \quad y_n(x))$, називаються ***власними значеннями***, а відповідні нетривіальні розв'язки – ***власними векторами***. Власне значення має кратність *k*, якщо йому відповідають *k* лінійно незалежних власних векторів.

Нехай $\varphi_i = (\varphi_{i,1}(x,\lambda) \quad \ldots \quad \varphi_{i,n}(x,\lambda))$, $i = \overline{1,n}$ – фундаментальна система частинних розв'язків системи рівнянь задачі (1.18), причому для кожного λ функції φ_{ij} вибрані так, щоб

$$\varphi_{ij}(a,\lambda) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \quad i, j = \overline{1,n},$$

тоді детермінант $\Delta(\lambda) = \det\left\| U_j(\varphi_i) \right\|$ є функцією параметра λ, нулі якої є власними значеннями задачі (1.18). Якщо $\Delta(\lambda) \equiv 0$, то будь-яке значення параметра λ є власним.

§3.2. Існування власних значень загальної спектральної задачі. Теорія приєднаних функцій

Розглянемо спектральну задачу

$$\ell_n(y) \equiv \sum_{k=0}^{n} p_k(\lambda, x) y^{(n-k)}(x) = 0, \quad x \in (a,b); \tag{2.1}$$

$$U_j(y) \equiv \sum_{s=0}^{n-1}\left(\alpha_{s,j} y^{(s)}(a) + \beta_{s,j} y^{(s)}(b)\right) = 0, \quad j = \overline{1,m}. \tag{2.2}$$

Будемо вважати, що коефіцієнти $p_k(\lambda, x)$ лінійного диференціального виразу $\ell_n(y)$, а також коефіцієнти лінійних форм $U_j(y)$ є неперервними функціями параметра λ.

Якщо за змінною *x* коефіцієнти $p_k(\lambda, x) \in C_{(a,b)}$, причому $p_0(\lambda, x) \neq 0$, то існує фундаментальна система $\{y_1(\lambda, x), y_2(\lambda, x), \ldots, y_n(\lambda, x)\}$ неперервно залежних від параметра λ частинних розв'язків рівняння (2.1). Тоді загальний розв'язок цього рівняння запишеться у вигляді

$$y(\lambda, x) = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i(\lambda, x).$$

Із крайових умов (2.2) одержимо систему алгебраїчних рівнянь відносно невідомих сталих C_i:

$$\sum_{i=1}^{n} C_i U_j(y_i) = 0, \quad j = \overline{1,m}.$$

Остання система, а отже, і крайова задача (2.1),(2.2), має нетривіальні розв'язки тоді й тільки тоді, коли ранг її матриці менший за кількість невідомих n, тобто за порядок диференціального рівняння (2.1). Тому для загальної спектральної задачі (2.1),(2.2) матимуть силу критерії існування власних значень, сформульовані в попередньому параграфі для задачі (1.1),(1.2):

1) при $m < n$ будь-яке значення параметра λ буде власним значенням задачі (2.1),(2.2);

2) при $m = n$ власними значеннями задачі (2.1),(2.2) будуть корені характеристичного рівняння

$$\Delta(\lambda) \equiv \det\left\|U_j(y_i)\right\| = 0, \tag{2.3}$$

причому у випадку $\Delta(\lambda) \equiv 0$ власним значенням буде будь-яке значення параметра λ;

3) при $m > n$ власними значеннями задачі (2.1),(2.2) будуть ті значення параметра λ, для яких усі мінори n-го порядку перетворюються в нуль; якщо ж усі мінори n-го порядку тотожно рівні нулеві при довільних значеннях параметра λ – тоді будь-яке значення λ буде власним.

Розглянемо детальніше спектральну задачу (2.1),(2.2) у випадку $m = n$ з урахуванням наведених вище припущень щодо коефіцієнтів рівняння та крайових умов.

Згідно зі сформульованим вище критерієм при $m = n$ задача (2.1),(2.2) матиме нетривіальні розв'язки тільки для тих значень параметра λ, які є коренями характеристичного рівняння (2.3). Нехай λ_0 – один із нулів характеристичної функції $\Delta(\lambda)$, а $\varphi_0(x)$ – відповідна йому власна функція.

Означення 1. Система функцій $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_k(x)$ називається ***ланцюжком приєднаних функцій*** до власної функції $\varphi_0(x)$ на інтервалі (a,b), якщо функції $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_k(x)$ при $x \in (a,b)$ і $\lambda = \lambda_0$ є розв'язками диференціальних рівнянь

$$\ell_n(\varphi_q) + \frac{1}{1!}\frac{\partial}{\partial\lambda}\ell_n(\varphi_{q-1}) + \ldots + \frac{1}{q!}\frac{\partial^q}{\partial\lambda^q}\ell_n(\varphi_0) = 0, \quad q = \overline{1,k} \tag{2.4}$$

і справджують крайові умови

$$U_j(\varphi_q) + \frac{1}{1!}\frac{\partial}{\partial\lambda}U_j(\varphi_{q-1}) + \ldots + \frac{1}{q!}\frac{\partial^q}{\partial\lambda^q}U_j(\varphi_0) = 0, \quad j = \overline{1,n}, \quad q = \overline{1,k}. \tag{2.5}$$

Тут $\partial^q \ell_n / \partial\lambda^q$ означає диференціальний вираз, а $\partial^q U_j / \partial\lambda^q$ означає крайову форму з коефіцієнтами, рівними похідним порядку q за змінною λ від відповідних коефіцієнтів $\ell_n(y)$ і $U_j(y)$.

ЛЕМА 1. *Нехай при* $a \le x \le b$ *функція* $\Phi(\lambda, x)$ *розкладається в степеневий ряд*

$$\Phi(\lambda, x) = \varphi_0(x) + \varphi_1(x)(\lambda - \lambda_0) + \varphi_2(x)(\lambda - \lambda_0)^2 + \ldots, \tag{2.6}$$

збіжний в деякому околі точки λ_0. *Для того, щоб функції* $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_k(x)$ *справджували рівняння (2.4) і (2.5), необхідно і досить, щоб* λ_0 *при* $a \le x \le b$ *було нулем кратності, більшої за k, кожної з функцій* $\ell_n(\Phi)$ *і* $U_j(\Phi)$, $j = \overline{1,n}$.

Доведення. Ліва частина рівності (2.4) рівна коефіцієнту при $(\lambda - \lambda_0)^q$ в розкладі $\ell_n(\Phi)$ за степенями $(\lambda - \lambda_0)$:

$$\ell_n[\Phi(\lambda, x)] = \ell_n[\Phi(\lambda_0, x)] + \left.\frac{\partial \ell_n[\Phi(\lambda, x)]}{\partial \lambda}\right|_{\lambda=\lambda_0} \cdot (\lambda - \lambda_0) + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{q!}\left.\frac{\partial^q \ell_n[\Phi(\lambda, x)]}{\partial \lambda^q}\right|_{\lambda=\lambda_0} \cdot (\lambda - \lambda_0)^q + \ldots = \ell_n(\varphi_0) + \left[\ell_n(\varphi_1) + \frac{\partial \ell_n(\varphi_0)}{\partial \lambda}\right](\lambda - \lambda_0) + \ldots +$$

$$+ \left[\ell_n(\varphi_q) + \frac{\partial \ell_n(\varphi_{q-1})}{\partial \lambda} + \ldots + \frac{1}{q!}\frac{\partial^q \ell_n(\varphi_0)}{\partial \lambda^q}\right](\lambda - \lambda_0)^q + \ldots$$

Якщо λ_0 – нуль кратності, більшої за *k*, функції $\ell_n(\Phi)$, то всі коефіцієнти розкладу $\ell_n(\Phi)$ до $q = k$ перетворюються в нуль при $\lambda = \lambda_0$, а це означає, що функції $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_k(x)$ при $\lambda = \lambda_0$ є розв'язками рівнянь (2.4).

Аналогічні міркування проводимо й відносно рівнянь (2.5). □

ЛЕМА 2. *Нехай функції* $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_k(x)$ *є розв'язками рівнянь (2.4), а функція* $\Phi(\lambda, x)$ *визначається формулою (2.6). Якщо* $y(\lambda, x)$ *– розв'язок рівняння* $\ell_n(y) = 0$ *при* $a \le x \le b$, *який в точці* $x = a$ *справджує ті ж початкові умови, що й функція* $\Phi(\lambda, x)$, *то в розкладах функцій* $y(\lambda, x)$ *і* $\Phi(\lambda, x)$ *за степенями* $(\lambda - \lambda_0)$ *перші* $(k+1)$ *членів співпадають.*

Доведення. Згідно з умовою леми

$$\begin{aligned} &\ell_n[y(\lambda, x)] = 0, \quad x \in [a, b]; \\ &y^{(q)}(\lambda, a) = \Phi^{(q)}(\lambda, a), \quad q = \overline{0, n-1}, \end{aligned} \tag{2.7}$$

де

$$y(\lambda, x) = y(\lambda_0, x) + \left.\frac{\partial y(\lambda, x)}{\partial \lambda}\right|_{\lambda=\lambda_0} \cdot (\lambda - \lambda_0) + \ldots + \frac{1}{q!}\left.\frac{\partial^q y(\lambda, x)}{\partial \lambda^q}\right|_{\lambda=\lambda_0} \cdot (\lambda - \lambda_0)^q + \ldots,$$

а функція $\Phi(\lambda, x)$ визначається формулою (2.6). Із (2.7), поклавши $\lambda = \lambda_0$, одержимо:

$$\begin{aligned} &\ell_n[y(\lambda_0, x)] = 0, \quad x \in [a, b]; \\ &y^{(q)}(\lambda_0, a) = \Phi^{(q)}(\lambda_0, a), \quad q = \overline{0, n-1}. \end{aligned}$$

З іншого боку, для власної функції $\varphi_0(x)$ з урахуванням (2.6) маємо:

$$\begin{aligned} &\ell_n[\varphi_0(x)] = 0, \quad x \in [a, b]; \\ &\varphi_0^{(q)}(a) = \Phi^{(q)}(\lambda_0, a), \quad q = \overline{0, n-1}. \end{aligned}$$

З одержаних задач Коші на підставі теореми про єдиність розв'язку задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь випливає, що $y(\lambda_0,x)\equiv\varphi_0(x)$ при $a\le x\le b$, тобто перші члени розкладів функцій $y(\lambda,x)$ і $\Phi(\lambda,x)$ співпадають. Співпадіння наступних коефіцієнтів розкладу доводиться аналогічним чином за допомогою співвідношень, які одержуються з (2.7) диференціюванням по λ. Справді, продиференціювавши (2.7) по λ і поклавши в одержаних рівностях $\lambda=\lambda_0$ з урахуванням того, що $y(\lambda_0,x)\equiv\varphi_0(x)$, дістанемо:

$$\ell_n\left[\left.\frac{\partial y(\lambda,x)}{\partial\lambda}\right|_{\lambda=\lambda_0}\right]+\frac{\partial\ell_n(\varphi_0)}{\partial\lambda}=0,\quad x\in[a,b];$$

$$\left.\frac{\partial y^{(q)}(\lambda,x)}{\partial\lambda^q}\right|_{\lambda=\lambda_0}=\left.\frac{\partial\Phi^{(q)}(\lambda,x)}{\partial\lambda^q}\right|_{\lambda=\lambda_0},\quad q=\overline{0,n-1}.$$

З іншого боку, для першої приєднаної функції $\varphi_1(x)$ з урахуванням (2.6) маємо:

$$\ell_n(\varphi_1)+\frac{\partial\ell_n(\varphi_0)}{\partial\lambda}=0,\quad x\in[a,b];$$

$$\varphi_1^{(q)}(a)=\left.\frac{\partial\Phi^{(q)}(\lambda,x)}{\partial\lambda^q}\right|_{\lambda=\lambda_0},\quad q=\overline{0,n-1}.$$

З одержаних задач Коші випливає співпадіння других членів розкладів функцій $y(\lambda,x)$ і $\Phi(\lambda,x)$ при $a\le x\le b$, і т.д. □

НАСЛІДОК. *Нехай для функції $y(\lambda,x)$ виконуються умови Леми 2 і, крім того, функції $\varphi_0(x),\varphi_1(x),\ldots,\varphi_k(x)$ є розв'язками рівнянь (2.4),(2.5). Тоді λ_0 є нулем кратності, більшої за k, кожної з функцій $U_j(y)$, $j=\overline{1,n}$.*

Доведення. Сформульоване твердження безпосередньо випливає з Леми 1, якщо врахувати, що згідно з Лемою 2 перші $(k+1)$ членів в розкладі функції $y(\lambda,x)$ за степенями $(\lambda-\lambda_0)$ мають вигляд (2.6). □

Означення 2. Власна функція $\varphi_0(x)$ називається ***s-кратною***, якщо існує ланцюжок приєднаних до неї функцій, який складається з $(s-1)$ функції, але немає такого ланцюжка, який складався б із s приєднаних функцій.

Має силу наступна

ТЕОРЕМА 3.1. *Якщо λ_0 – нуль функції $\Delta(\lambda)$ кратності r, то кратність довільної власної функції, яка відповідає власному значенню λ_0, не перевищує r.*

Доведення. Нехай $\varphi_0(x)$ – відповідна до власного значення λ_0 власна функція кратності s; $k=s-1$ і $\varphi_1(x),\varphi_2(x),\ldots,\varphi_k(x)$ – відповідний ланцюжок приєднаних функцій. Покладемо $y_1(\lambda,x)=y(\lambda,x)$, де $y(\lambda,x)$ – функція, для якої виконуються умови Леми 2. Позначимо через $y_2(\lambda,x),\ldots,y_n(\lambda,x)$ деякі функції, які складають разом із $y_1(\lambda, x)$ фундаментальну систему частинних розв'язків рівняння $\ell_n(y) = 0$ в околі точки $\lambda = \lambda_0$. На підставі попереднього наслідку λ_0 буде нулем кратності, більшої за k, відповідного визначника $\Delta(\lambda)$. Отже, $r > k$, тобто $s \le r$. □

Припустимо, що λ_0 є p-кратним власним значенням задачі (2.1),(2.2). Тоді йому відповідатимуть p лінійно незалежних власних функцій $y_1(x)$, $y_2(x)$, …, $y_p(x)$. Позначимо кратність власної функції $y_j(x)$ через s_j, а відповідний ланцюжок приєднаних до неї функцій через $y_{j,1}(x), y_{j,2}(x), \ldots, y_{j,s_j-1}(x)$. Будемо вважати, що власні функції занумеровані таким чином, щоб $s_1 \ge s_2 \ge \ldots \ge s_p$. Одержана система функцій $\left\{ y_j(x), y_{j,1}(x), y_{j,2}(x), \ldots, y_{j,s_j-1}(x);\ \ j = \overline{1,p} \right\}$ називається ***канонічною системою власних і приєднаних функцій*** для власного значення λ_0. Має силу наступна

ТЕОРЕМА 3.2. *Якщо коефіцієнти диференціального рівняння та крайових умов задачі (2.1),(2.2) є неперервно-диференційовними по* λ *і неперервними по* x *на інтервалі* (a,b)*, то сума кратностей лінійно незалежних власних функцій, які відповідають одному й тому ж власному значенню* λ_0*, рівна кратності відповідного нуля функції* $\Delta(\lambda)$*:*

$$\sum_{j=1}^{p} s_j = r,$$

тобто λ_0 *буде* r*-кратним коренем характеристичного рівняння (2.3).*

Наведена вище теорія приєднаних функцій належить М.В.Келдишу (О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряжённых уравнений // ДАН СССР, **77** (1951), с. 11-14).

ПРИКЛАД. Побудувати канонічну систему власних і приєднаних функцій для власного значення $\lambda_0 = 0$ спектральної задачі

$$\begin{aligned} &\ell_2(\lambda, y) \equiv y'' - 6\lambda y' + 5\lambda^2 y(x) = 0, \quad x \in (0;1); \\ &U_1(\lambda, y) \equiv y(0) - 3\lambda y'(0) = 0, \quad U_2(\lambda, y) \equiv y(1) - y'(1) = 0. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Розв'язання. Підклавши $\lambda = 0$ у (2.5), для визначення відповідної власної функції одержуємо крайову задачу

$$y''(x) = 0, \quad x \in (0;1);$$
$$y(0) = 0, \quad y(1) - y'(1) = 0,$$

розв'язок якої має вигляд $y(x) = Ax$. Отже власному значенню $\lambda_0 = 0$ спектральної задачі (2.5) відповідатиме одна лінійно незалежна власна функція вигляду $y_0(x) = Ax$, де A – деяка стала, відмінна від нуля.

Згідно з означенням перша приєднана функція з ланцюжка $y_{0,1}(x)$ повинна бути розв'язком крайової задачі

$$\ell_2(0,y_{0,1})+\frac{\partial}{\partial\lambda}\ell_2(0,y_0)=0,\quad x\in(0;1);$$

$$U_1(0,y_{0,1})+\frac{\partial}{\partial\lambda}U_1(0,y_0)=0,\quad U_2(0,y_{0,1})+\frac{\partial}{\partial\lambda}U_2(0,y_0)=0,$$

яка після виконання всіх підкладань запишеться у вигляді

$$y''_{0,1}(x)=6A,\quad x\in(0;1);$$

$$y_{0,1}(0)=3A,\quad y_{0,1}(1)-y'_{0,1}(1)=0.$$

Остання крайова задача має розв'язок $y_{0,1}(x)=A\left(3x^2+Bx+3\right)$, де B – нова довільна стала.

Покажемо, що ланцюжок приєднаних функцій до власної функції $y_0(x)$ складається лише з однієї функції $y_{0,1}(x)$. Справді, згідно з означенням наступна приєднана функція з ланцюжка $y_{0,2}(x)$ повинна бути розв'язком крайової задачі

$$\ell_2(0,y_{0,2})+\frac{\partial}{\partial\lambda}\ell_2(0,y_{0,1})+\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}\ell_2(0,y_0)=0,\quad x\in(0;1);$$

$$U_1(0,y_{0,2})+\frac{\partial}{\partial\lambda}U_1(0,y_{0,1})+0{,}5\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}U_1(0,y_0)=0;$$

$$U_2(0,y_{0,2})+\frac{\partial}{\partial\lambda}U_2(0,y_{0,1})+0{,}5\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}U_2(0,y_0)=0,$$

яка після виконання всіх підкладань запишеться у вигляді

$$y''_{0,2}(x)=A(31x+6),\quad x\in(0;1);$$

$$y_{0,2}(0)=3A,\quad y_{0,2}(1)-y'_{0,2}(1)=0.$$

Наведена крайова задача розв'язку не має.

Отже, канонічна система власних і приєднаних функцій для власного значення λ_0=0 спектральної задачі (2.5) має вигляд:

$$y_0(x)=Ax,\ \ y_{0,1}(x)=A\left(3x^2+Bx+3\right).$$

§3.3. Самоспряжені спектральні задачі

Розглянемо спектральну задачу:

$$\ell_n(y)-\lambda\ell_m(y)=0,\quad n>m,\quad y=y(x),\quad x\in(a,b);\tag{3.1}$$

$$U_j(y)\equiv\sum_{s=0}^{n-1}\left(\alpha_{s,j}y^{(s)}(a)+\beta_{s,j}y^{(s)}(b)\right)=0,\quad j=\overline{1,n},\tag{3.2}$$

де лінійні диференціальні вирази $\ell_n(y)$ і $\ell_m(y)$, а також лінійні форми $U_j(y)$ не залежать від параметра λ.

У випадку, коли диференціальні вирази $\ell_n(y)$, $\ell_m(y)$ і крайові умови самоспряжені, задача (3.1),(3.2) була детально досліджена Е.Камке [7].

Означення 1. Дві функції $y_1(x)$ і $y_2(x)$ називаються ***ортогональними*** на проміжку $[a,b]$, якщо їх скалярний добуток

$$\int_a^b y_1(x)y_2(x)dx = 0.$$

Означення 2. Дві функції $y_1(x)$ і $y_2(x)$ називаються ***ортогональними з вагою*** $p(x)$ на проміжку $[a,b]$, якщо виконується умова

$$\int_a^b p(x)y_1(x)y_2(x)dx = 0.$$

Означення 3. Функції $y_1(x)$ і $y_2(x)$ будемо називати ***ортогональними в узагальненому розумінні*** на проміжку $[a,b]$, якщо для них справджується умова

$$\int_a^b y_1\ell_m(y_2)dx = 0. \qquad (3.3)$$

ТЕОРЕМА 3.3 ***(про узагальнену ортогональність власних функцій самоспряженої спектральної задачі).*** *Якщо спектральна задача (3.1),(3.2), в якій диференціальні вирази $\ell_n(y)$, $\ell_m(y)$ і крайові умови самоспряжені, має два різні власні значення, то відповідні їм власні функції є ортогональними в узагальненому розумінні на проміжку $[a,b]$.*

Доведення. Припустимо, що задача (3.1),(3.2) має два різні власні значення λ_1 і λ_2. Позначимо відповідні їм власні функції через $y_1(x)$ і $y_2(x)$.

Оскільки вираз $\ell_n(y)$ і крайові умови (3.2) є самоспряженими, а функції $y_1(x)$ і $y_2(x)$ є функціями порівняння, то для них виконується умова (див. §1.7)

$$\int_a^b y_2\ell_n(y_1)dx = \int_a^b y_1\ell_n(y_2)dx. \qquad (3.4)$$

Враховуючи, що згідно з (3.1) $\ell_n(y_1) = \lambda_1\ell_m(y_1)$, $\ell_n(y_2) = \lambda_2\ell_m(y_2)$, із рівності (3.4) одержимо

$$\lambda_1\int_a^b y_2\ell_m(y_1)dx = \lambda_2\int_a^b y_1\ell_m(y_2)dx. \qquad (3.5)$$

Оскільки вираз $\ell_m(y)$ також самоспряжений, то для нього також виконується аналогічна до (3.4) умова

$$\int_a^b y_2\ell_m(y_1)dx = \int_a^b y_1\ell_m(y_2)dx. \qquad (3.6)$$

Але тоді з (3.5) для різних власних значень $\lambda_1 \neq \lambda_2$ одразу одержуємо рівність (3.3), тобто власні функції $y_1(x)$ і $y_2(x)$ будуть ортогональними в узагальненому розумінні на проміжку $[a,b]$. □

Зауваження. Якщо λ_1 і λ_2 – два різні власні значення задачі (3.1),(3.2), жодне з яких не рівне нулеві, то для відповідних їм власних функцій $y_1(x)$ і $y_2(x)$ буде виконуватися також умова

$$\int_a^b y_1 \ell_n(y_2)dx = 0.$$

Останню рівність легко одержати, якщо в (3.3) з урахуванням рівняння (3.1) покласти $\ell_m(y) = \dfrac{\ell_n(y)}{\lambda}$.

ПРИКЛАД 1. Показати, що власні функції дослідженої вище (див. приклад 2 з §3.1) спектральної задачі (1.10),(1.11)

$$y'' = -\lambda y(x), \quad x \in (0,1);$$
$$y(0) - y(1) = 0, \quad y'(0) - y'(1) = 0$$

є ортогональними в узагальненому розумінні.

Розв'язання. Маємо: $\ell_n(y) \equiv \ell_2(y) = y''$, $\ell_m(y) \equiv \ell_0(y) = y$. Згідно з наслідком із Теореми 1.1 (див. §1.5) обидва вирази є самоспряженими, оскільки містять похідні тільки парних порядків.

Перевіримо самоспряженість крайових умов. Нехай $y_1(x)$ і $y_2(x)$ – деякі функції, які справджують крайові умови (1.11). Очевидно, що для них виконується умова (3.6). Покажемо, що виконується й умова (3.4):

$$\int_0^1 [y_2\ell_2(y_1) - y_1\ell_2(y_2)]dx = \int_0^1 (y_2 y_1'' - y_1 y_2'')dx = y_1' y_2\Big|_0^1 - y_2' y_1\Big|_0^1 = 0.$$

Отже, для задачі (1.10),(1.11) виконуються всі умови Теореми 3.3, тому всякі дві її власні функції, які відповідають різним власним значенням, повинні бути ортогональними в узагальненому розумінні.

Дійсно, візьмемо два різні власні значення спектральної задачі (1.10), (1.11) $\lambda_1 = (2\pi k)^2$ і $\lambda_2 = (2\pi p)^2$, де $k \neq p$. Відповідні власні функції матимуть вигляд: $y_1(x) = A_k \cos 2\pi kx + B_k \sin 2\pi kx$, $y_2(x) = A_p \cos 2\pi px + B_p \sin 2\pi px$. Підклавши ці функції в рівність (3.3), дістанемо:

$$\int_0^1 y_1\ell_0(y_2)dx = \int_0^1 y_1 y_2 dx = \int_0^1 (A_k \cos 2\pi kx + B_k \sin 2\pi kx)(A_p \cos 2\pi px + B_p \sin 2\pi px)dx = 0$$

при $k \neq p$.

ТЕОРЕМА 3.4 ***(про ортогональність похідних власних функцій самоспряженої спектральної задачі).*** *Нехай при виконанні умов Теореми 3.3 в задачі (3.1),(3.2)* $\ell_m(y) \equiv \ell_{2j}(y) = \left[p(x)y^{(j)}(x)\right]^{(j)}$, *а перші m крайових умов мають вигляд*

$$y(a) = y(b) = y'(a) = y'(b) = \ldots = y^{(j-1)}(a) = y^{(j-1)}(b) = 0.$$

Тоді j-ві похідні власних функцій, які відповідають різним власним значенням спектральної задачі, є ортогональними з вагою $p(x)$ *на проміжку* $[a,b]$.

Доведення. Припустимо, що задача (3.1),(3.2), для якої виконані умови теореми, має два різні власні значення λ_1 і λ_2. Позначимо відповідні їм власні функції через $y_1(x)$ і $y_2(x)$. Згідно з Теоремою 3.3 ці функції повинні бути ортогональними в узагальненому розумінні, отже, для них справджується умова (3.3) у вигляді

$$\int_a^b y_1 \ell_m(y_2)dx \equiv \int_a^b y_1 \left[p(x)y_2^{(j)}\right]^{(j)} dx = 0. \tag{3.7}$$

Візьмемо останній інтеграл j разів частинами (очевидно, що з урахуванням вигляду крайових умов усі вставки дорівнюватимуть нулеві):

$$\int_a^b y_1 \left[p(x)y_2^{(j)}\right]^{(j)} dx = -\int_a^b y_1' \left[p(x)y_2^{(j)}\right]^{(j-1)} dx = \ldots = (-1)^j \int_a^b y_1^{(j)} p(x) y_2^{(j)} dx.$$

Тоді з (3.7) матимемо

$$\int_a^b p(x) y_1^{(j)} y_2^{(j)} dx = 0, \tag{3.8}$$

тобто j-ві похідні (m=2j) власних функцій $y_1(x)$ і $y_2(x)$ ортогональні з вагою $p(x)$ на проміжку $[a,b]$. □

НАСЛІДОК. *Нехай при виконанні умов Теореми 3.3 в задачі (3.1),(3.2)* $\ell_m(y) \equiv \ell_0(y) = p(x)y(x)$. *Тоді власні функції, які відповідають різним власним значенням спектральної задачі, є ортогональними з вагою* $p(x)$ *на проміжку* $[a,b]$ *незалежно від вигляду самоспряжених крайових умов (3.2).*

Доведення. Потрібна рівність безпосередньо випливає з (3.8), якщо покласти j=0. Зауважимо лишень, що при j=0 рівність (3.8) є тотожною рівності (3.7), а остання справджується для самоспряжених крайових умов будь-якого вигляду. □

ТЕОРЕМА 3.5 ***(про дійсність власних значень самоспряженої крайової задачі).*** *Якщо в спектральній задачі (3.1),(3.2) диференціальні вирази* $\ell_n(y)$, $\ell_m(y)$ *і крайові умови є самоспряженими з дійсними коефіцієнтами, причому для довільної нетривіальної дійсної функції* $y(x)$*, яка справджує крайові умови (3.2), вираз* $\int_a^b y\ell_m(y)dx$ *зберігає знак, то всі власні значення цієї задачі є дійсними.*

Доведення. Припустимо, що в спектральній задачі (3.1),(3.2) коефіцієнти диференціальних виразів $\ell_n(y)$, $\ell_m(y)$ і крайових умов (3.2) є дійсними. Тоді з рівності

$$\lambda = \frac{\ell_n(y)}{\ell_m(y)}$$

випливає, що дійсній власній функції обов’язково відповідатиме дійсне власне значення. Отже, комплексному власному значенню $\lambda = \sigma + i\tau$ відповідатиме комплексна власна функція $y(x) = u(x) + iv(x)$, дійсна і уявна частини якої також справджують крайові умови (3.2).

Припустимо, що існує деяке комплексне власне значення $\lambda = \sigma + i\tau$ ($\tau \neq 0$) спектральної задачі (3.1),(3.2), а $y(x) = u(x) + iv(x)$ – відповідна йому власна функція. Очевидно, тоді комплексно спряжене число $\overline{\lambda} = \sigma - i\tau$ також буде власним значенням цієї задачі, якому відповідатиме комплексно спряжена власна функція $\bar{y}(x)=u(x)-iv(x)$.

Справді, якщо $\ell_n(u+iv)=(\sigma+i\tau)\ell_m(u+iv)$, то з урахуванням лінійності виразів $\ell_n(y)$ і $\ell_m(y)$ маємо: $\ell_n(u)=\sigma\ell_m(u)-\tau\ell_m(v)$, $\ell_n(v)=\sigma\ell_m(v)+\tau\ell_m(u)$. А тоді

$$\ell_n(u-iv)=\ell_n(u)-i\ell_n(v)=\sigma\ell_m(u)-\tau\ell_m(v)-i[\sigma\ell_m(v)+\tau\ell_m(u)]=(\sigma-i\tau)\ell_m(u-iv).$$

Згідно з Теоремою 3.3 власні функції $y(x)$ і $\bar{y}(x)$, які відповідають різним власним значенням λ і $\bar{\lambda}$, повинні бути ортогональними в узагальненому розумінні:

$$\int_a^b y\ell_m(\bar{y})dx=0.$$

З іншого боку,

$$\int_a^b y\ell_m(\bar{y})dx=\int_a^b(u+iv)\ell_m(u-iv)dx=\int_a^b[u\ell_m(u)+v\ell_m(v)]dx+i\int_a^b[v\ell_m(u)-u\ell_m(v)]dx.$$

Уявна частина одержаного виразу рівна нулеві, оскільки диференціальний вираз $\ell_m(y)$ є самоспряженим, а функції $u(x)$ і $v(x)$ справджують крайові умови (3.2). Проте дійсна частина рівною нулеві бути не може, адже згідно з умовою теореми для довільної нетривіальної дійсної функції $y(x)$, яка справджує крайові умови (3.2), вираз $\int_a^b y\ell_m(y)dx$ зберігає знак.

Отже, припускаючи, що $\lambda\neq\bar{\lambda}$, ми дійшли до протиріччя. Отож $\lambda=\bar{\lambda}$, тобто будь-яке власне значення задачі (3.1),(3.2) є дійсним. □

ПРИКЛАД 2. Довести дійсність власних значень і дослідити спектральну задачу

$$y^{(4)}=-\lambda y''(x),\quad x\in(0;1);\tag{3.9}$$

$$y(0)=y'(0)=0,\quad y(1)=y'(1)=0.\tag{3.10}$$

Розв'язання. Маємо: $\ell_n(y)\equiv\ell_4(y)=y^{(4)}$, $\ell_m(y)\equiv\ell_2(y)=-y''$. Обидва вирази є самоспряженими, оскільки містять похідні тільки парних порядків (див. приклад 1).

Перевіримо виконання критерію самоспряженості крайових задач для обох виразів, тобто умов (3.4) і (3.6). Нехай $y_1(x)$ і $y_2(x)$ – деякі функції, які справджують крайові умови (3.10). Тоді

$$\int_0^1[y_2\ell_4(y_1)-y_1\ell_4(y_2)]dx=\int_0^1\left(y_1y_2^{(IV)}-y_2y_1^{(IV)}\right)dx=y_1y_2'''\big|_0^1-y_2y_1'''\big|_0^1-y_1'y_2''\big|_0^1+y_2'y_1''\big|_0^1=0;$$

$$\int_0^1[y_2\ell_2(y_1)-y_1\ell_2(y_2)]dx=\int_0^1(y_1y_2''-y_2y_1'')dx=y_2'y_1\big|_0^1-y_1'y_2\big|_0^1=0.$$

Отже, для крайової задачі (3.9),(3.10) виконуються умови Теореми 3.3, а тому всякі дві її власні функції, які відповідають різним власним значенням, повинні бути ортогональними в узагальненому розумінні.

Перевіримо виконання критерію дійсності власних значень (Теорема 3.5). Нехай $y(x)$ – деяка нетривіальна функція, яка справджує крайові умови (3.10). Тоді вираз

$$\int_0^1 y\ell_2(y)dx = -\int_0^1 yy''dx = \int_0^1 y'^2 dx$$

буде завжди додатним (зберігатиме знак). Отже, згідно з Теоремою 3.5 всі власні значення задачі (3.9),(3.10) будуть дійсними.

Дослідження для дійсних власних значень проводимо аналогічно до прикладу 3 з §3.1. Для повного дослідження необхідно розглянути три можливі випадки.

Нехай $\lambda = 0$. Тоді загальний розв'язок рівняння (3.9) має вигляд $y(x) = C_1x^3 + C_2x^2 + C_3x + C_4$. Підклавши цю функцію в крайові умови (3.10), одержимо систему

$$\begin{cases} C_4 = 0; \\ C_3 = 0; \\ C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = 0; \\ 3C_1 + 2C_2 + C_3 = 0, \end{cases}$$

звідки $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 0,$ тобто крайова задача має тільки тривіальний розв'язок, а тому $\lambda = 0$ не є власним значенням.

Нехай $\lambda < 0.$ Тоді загальний розв'язок рівняння (3.9) має вигляд $y(x) = \overline{C}_5 + \overline{C}_6x + \overline{C}_7e^{\sqrt{-\lambda}x} + \overline{C}_8e^{-\sqrt{-\lambda}x}.$ Задля зручності запишемо його в еквівалентному вигляді $y(x) = C_5 + C_6x + C_7\,\mathrm{sh}\sqrt{-\lambda}x + C_8\,\mathrm{ch}\sqrt{-\lambda}x.$ Із крайових умов (3.10) одержуємо систему

$$\begin{cases} C_5 + C_8 = 0; \\ C_6 + \sqrt{-\lambda}C_7 = 0; \\ C_5 + C_6 + C_7\,\mathrm{sh}\sqrt{-\lambda} + C_8\,\mathrm{ch}\sqrt{-\lambda} = 0; \\ C_6 + \sqrt{-\lambda}\left(C_7\,\mathrm{ch}\sqrt{-\lambda} + C_8\,\mathrm{sh}\sqrt{-\lambda}\right) = 0. \end{cases}$$

Детермінант одержаної системи

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \sqrt{-\lambda} & 0 \\ 1 & 1 & \mathrm{sh}\sqrt{-\lambda} & \mathrm{ch}\sqrt{-\lambda} \\ 0 & 1 & \sqrt{-\lambda}\,\mathrm{ch}\sqrt{-\lambda} & \sqrt{-\lambda}\,\mathrm{sh}\sqrt{-\lambda} \end{vmatrix} = 2\sqrt{-\lambda}\left(\mathrm{ch}\sqrt{-\lambda} - 1\right) + \lambda\,\mathrm{sh}\sqrt{-\lambda} \neq 0$$

для від'ємних λ, тому $C_5 = C_6 = C_7 = C_8 = 0,$ тобто крайова задача знову має тільки тривіальний розв'язок. Отже, при $\lambda < 0$ власних значень не існує.

Нехай $\lambda > 0.$ Тоді загальний розв'язок рівняння (3.9) має вигляд $y(x) = C_9 + C_{10}x + C_{11}\sin\sqrt{\lambda}x + C_{12}\cos\sqrt{\lambda}x.$ Із крайових умов (3.10) одержуємо систему

$$\begin{cases} C_9 + C_{12} = 0; \\ C_{10} + \sqrt{\lambda} C_{11} = 0; \\ C_9 + C_{10} + C_{11} \sin\sqrt{\lambda} + C_{12} \cos\sqrt{\lambda} = 0; \\ C_{10} + \sqrt{\lambda}\left(C_{11} \cos\sqrt{\lambda} - C_{12} \sin\sqrt{\lambda}\right) = 0. \end{cases} \tag{3.11}$$

Тоді характеристичне рівняння для знаходження власних значень матиме вигляд

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \sqrt{\lambda} & 0 \\ 1 & 1 & \sin\sqrt{\lambda} & \cos\sqrt{\lambda} \\ 0 & 1 & \sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda} & \sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda} \end{vmatrix} = 2\sqrt{\lambda}\left(\cos\sqrt{\lambda} - 1\right) + \lambda \sin\sqrt{\lambda} = 0.$$

Останнє рівняння після скорочення на ненульовий множник $\sqrt{\lambda}$ можна записати у вигляді

$$\sin\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\left(\sqrt{\lambda}\cos\frac{\sqrt{\lambda}}{2} - 2\sin\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\right) = 0.$$

Із рівняння $\sin\frac{\sqrt{\lambda}}{2} = 0$ одержимо власні значення $\lambda_k = (2\pi k)^2$, $k = \overline{1,\infty}$; підклавши ці значення в систему (3.11) і розв'язавши її, із загального розв'язку рівняння (3.9) одержимо відповідні власні функції $y_k(x) = C_5(1 - \cos 2\pi kx)$.

Трансцендентне рівняння $\sqrt{\lambda} - 2\mathrm{tg}\frac{\sqrt{\lambda}}{2} = 0$ має зліченну множину додатніх коренів, що можна легко показати графічно. Позначимо ці корені через $\lambda_j = \mu_j^2$, $j = \overline{1,\infty}$. Підклавши ці значення в систему (3.11) і розв'язавши її, із загального розв'язку рівняння (3.9) одержимо відповідні власні функції

$$y_j(x) = C_{11}\left(\mu_j \sin^2\frac{\mu_j}{2}x + \sin\mu_j x - \mu_j x\right).$$

Отже, повний спектр задачі (3.9),(3.10) складається з двох множин власних значень і власних функцій:

1) $\lambda_k = (2\pi k)^2$, $y_k(x) = A_k \sin^2 \pi kx$, $k \in \mathrm{N}$;

2) $\lambda_j = \mu_j^2$, $y_j(x) = B_j\left(\mu_j \sin^2\frac{\mu_j}{2}x + \sin\mu_j x - \mu_j x\right)$, $j \in \mathrm{N}$, де μ_j – додатні корені рівняння $\mu_j - 2\mathrm{tg}\frac{\mu_j}{2} = 0$.

ПРИКЛАД 3 (***приклад Віландта***, див. [8], с. 71). Перевірити дійсність власних значень спектральної задачі

$$y''(x) + \frac{\cos^2 x}{1+\cos^2 x}y(x) = \lambda\frac{\cos x}{1+\cos^2 x}y(x), \quad x \in (0,\pi);$$
$$y'(0) = y'(\pi) = 0.$$

Розв'язання. Задача є самоспряженою, оскільки для будь-яких функцій порівняння $y(x)$ і $z(x)$

$$\int_0^{\pi}\left[z\left(y''+\frac{\cos^2 x}{1+\cos^2 x}y\right)-y\left(z''+\frac{\cos^2 x}{1+\cos^2 x}z\right)\right]dx=\left(zy'-yz'\right)\Big|_0^{\pi}=0.$$

Для будь-якої функції порівняння $y(x)$ на підставі узагальненої теореми про середнє

$$\int_0^{\pi}\frac{\cos x}{1+\cos^2 x}y^2(x)dx=\frac{\cos\xi}{1+\cos^2\xi}\int_0^{\pi}y^2(x)dx,\text{ де }\xi\in(0,\pi).$$

Залежно від вибору функції порівняння значення ξ буде різним на $(0,\pi)$, але на цьому інтервалі функція $\cos\xi\left(1+\cos^2\xi\right)^{-1}$ є знакозмінною. Наприклад, $y=\cos x$ є функцією порівняння, але

$$\int_0^{\pi}\frac{\cos x}{1+\cos^2 x}\cos^2 x dx=\int_0^{\pi}\cos x dx-\int_0^{\pi}\frac{\cos x}{1+\cos^2 x}dx=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}+\sin x}{\sqrt{2}-\sin x}\Big|_0^{\pi}=0.$$

Отже, друга умова Теореми 3.5 не виконується, тобто задача має і комплексні власні значення. Покажемо, що $\lambda=i$ є власним значенням, а $y=i+\cos x$ – відповідна власна функція. Дійсно: $y'=-\sin x$, $y''=-\cos x$ і

$$-\cos x+\frac{\cos^2 x}{1+\cos^2 x}(i+\cos x)=i\frac{\cos x}{1+\cos^2 x}(i+\cos x).$$

§3.4. Задача Штурма-Ліувілля

Розглянемо самоспряжену крайову задачу вигляду

$$\left[p(x)y'\right]'-q(x)y+\lambda\rho(x)y=f(x),\quad y=y(x),\quad x\in(a,b); \tag{4.1}$$

$$A_0y(a)+B_0y'(a)=0,\quad A_1y(b)+B_1y'(b)=0. \tag{4.2}$$

Будемо надалі вважати, що $p(x)\in C^1_{(a,b)}$, а $q(x),\rho(x),f(x)\in C_{(a,b)}$, причому $p(x)>p_0>0$, $\rho(x)>\rho_0>0$.

Зауважимо, що будь-яке лінійне диференціальне рівняння другого порядку $A(x)y''+B(x)y'+C(x)y+\lambda R(x)y=F(x)$ можна подати у вигляді (4.1) множенням на величину $p(x)A^{-1}(x)$, де $p(x)=\exp\left\lfloor\int B(x)A^{-1}(x)dx\right\rfloor$, якщо тільки на розглядуваному інтервалі $A(x)\neq 0$. При цьому $q(x)=-p(x)A^{-1}(x)C(x)$, а $\rho(x)=p(x)A^{-1}(x)R(x)$.

Відзначимо також, що крайову задачу для рівняння (4.1) з неоднорідними крайовими умовами

$$A_0y(a)+B_0y'(a)=C_0,\quad A_1y(b)+B_1y'(b)=C_1 \tag{4.3}$$

завжди можна звести до задачі (4.1),(4.2) за допомогою заміни невідомої функції $y(x)=z(x)+\omega(x)$, де $\omega(x)$ – довільна з класу $C^2_{(a,b)}$ функція, яка справджує крайові умови (4.3), а $z(x)$ – нова невідома функція, яка, вочевидь, повинна справджувати відповідні однорідні умови (4.2). Зауважимо, що після введення такої заміни рівняння для $z(x)$ матиме, як правило, іншу праву частину.

Розглянемо відповідну до (4.1),(4.2) однорідну крайову задачу

$$\begin{aligned} &[p(x)y']' - q(x)y + \lambda\rho(x)y = 0, \quad y = y(x), \quad x \in (a,b); \\ &A_0 y(a) + B_0 y'(a) = 0, \quad A_1 y(b) + B_1 y'(b) = 0. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Якщо при фіксованому значенні параметра λ задача (4.4) має тільки тривіальний розв'язок, тоді неоднорідна задача (4.1),(4.2) має єдиний розв'язок для будь-якої правої частини рівняння $f(x)$; якщо ж задача (4.4) має нетривіальні розв'язки, тоді неоднорідна задача (4.1),(4.2) розв'язна не для всіх правих частин, а у випадку існування розв'язку він не визначається однозначно. Тому при дослідженні неоднорідної задачі важливо знати власні значення відповідної однорідної задачі (4.4).

Означення. Задача знаходження власних значень і власних функцій крайової задачі (4.4) називається ***задачею Штурма-Ліувілля (ЗШЛ)***.

Зауважимо, що крайова задача (4.4) є частинним випадком дослідженої в §3.3 спектральної задачі (3.1),(3.2) при $\ell_n(y) \equiv \ell_2(y) = [p(x)y']' - q(x)y(x)$, $\ell_m(y) \equiv \ell_0(y) = -\rho(x)y(x)$. Тому до неї застосовні доведені вище Теореми 3.3-3.5.

Наведемо основні властивості власних значень і власних функцій задачі Штурма-Ліувілля (4.4).

1. Усі власні значення ЗШЛ (4.4) є дійсними й утворюють зростаючу послідовність чисел $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \ldots$, яка прямує до нескінченості при $n \to \infty$.

Дійсність власних значень ЗШЛ випливає з Теореми 3.5. Справді, вираз $\int_a^b y\ell_m(y)dx \equiv -\int_a^b \rho(x)y^2 dx < 0$ зберігає знак для довільної нетривіальної дійсної функції $y(x)$, яка справджує крайові умови (4.2).

2. Спектр ЗШЛ (4.4) є дискретним, тобто кожному власному значенню відповідає одна лінійно незалежна власна функція.

3. Якщо λ_1 і λ_2 – два різні власні значення ЗШЛ (4.4), то відповідні власні функції $y_1(x)$ і $y_2(x)$ ортогональні з вагою $\rho(x)$ на проміжку $[a,b]$.

Справді, згідно з Теоремою 3.3 власні функції $y_1(x)$ і $y_2(x)$ повинні справджувати рівність (3.3), звідки, поклавши $\ell_m(y) = -\rho(x)y(x)$, одержимо сформульовану вище властивість.

4. Якщо в задачі (4.4) коефіцієнти рівняння $p(x)$ і $q(x)$ замінити на $\widetilde{p}(x) \geq p(x)$ і $\widetilde{q}(x) \geq q(x)$, то власні значення не зменшаться (тобто $\widetilde{\lambda}_n \geq \lambda_n$); якщо ж замінити коефіцієнт $\rho(x)$ на $\widetilde{\rho}(x) \geq \rho(x)$, то $\widetilde{\lambda}_n \leq \lambda_n$ (власні значення не збільшаться). При цьому власні значення λ_n ЗШЛ (4.4) неперервно залежать від коефіцієнтів рівняння.

5. При зменшенні довжини відрізка $[a,b]$ власні значення ЗШЛ (4.4) не зменшуються, а при збільшенні відповідно – не збільшуються.

6. Власна функція $y_n(x)$ ЗШЛ (4.4), яка відповідає власному значенню λ_n (n=0,1,2,…), має рівно n нулів на інтервалі (a,b).

7. Якщо функція $g(x)\in C^1_{[a,b]}$ і справджує крайові умови (4.2), то її можна розкласти в ряд Фур'є за системою власних функцій $\{y_n(x)\}$ ЗШЛ (4.4):

$$g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n y_n(x),\quad \text{де}\quad \alpha_n=\frac{\int_a^b g(x)\rho(x)y_n(x)dx}{\int_a^b \rho(x)y_n^2(x)dx}\;\; –$$

коефіцієнти Фур'є, причому цей ряд збігається абсолютно й рівномірно до функції $g(x)$.

Задачі типу (4.4) часто виникають при застосуванні методу Фур'є до розв'язування задач математичної фізики. При цьому крайові умови можуть набувати вигляду, відмінного від (4.2), зокрема

$$y(a)=y(b),\quad p(a)y'(a)=p(b)y'(b). \tag{4.5}$$

Умови (4.5) у випадку $p(a)=p(b)$ можна розглядати як умови періодичності. Зауважимо, що для ЗШЛ з крайовими умовами вигляду (4.5) мають силу всі наведені вище властивості, окрім пункту 2 (тобто спектр задачі не обов'язково буде дискретним).

8. Розглянемо задачу (4.4) задля скорочення записів в операторному вигляді

$$Ly=-\lambda\rho(x)y.$$

Нагадаємо, що для неї існує зліченна множина власних значень $\lambda_0<\lambda_1<\lambda_2<\ldots<\lambda_n<\ldots$, кожному з яких відповідає єдина лінійно незалежна власна функція $y_n(x)$, $n=\overline{0,\infty}$. Будемо вважати ці функції ортонормованими з вагою $\rho(x)$ на проміжку $[a,b]$, тобто

$$\int_a^b \rho(x)y_n^2(x)dx=1,\quad n=\overline{0,\infty}.$$

Нехай функція $g(x)\in C^1_{[a,b]}$ і справджує крайові умови (4.2). Подамо її у вигляді абсолютно й рівномірно збіжного ряду Фур'є за системою ортонормованих власних функцій $\{y_n(x)\}$ ЗШЛ (4.4):

$$g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n y_n(x),\qquad \alpha_n=\int_a^b g(x)\rho(x)y_n(x)dx.$$

Враховуючи ортогональність з вагою $\rho(x)$ власних функцій, які відповідають різним власним значенням, обчислимо скалярні добутки:

$$(g,g)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n y_n,\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n y_n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n^2;$$

$$\left(Lg,g\right)=\left(L\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n y_n,\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n y_n\right)=\left(-\rho(x)\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n\alpha_n y_n,\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n y_n\right)\le-\rho_0\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n\alpha_n^2,$$

де $\rho(x)>\rho_0>0$.

Тоді

$$\lambda_0\rho_0\left(g,g\right)=\lambda_0\rho_0\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n^2<\rho_0\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n\alpha_n^2\le-\left(Lg,g\right).$$

Звідси одержуємо:

$$\lambda_0<-\frac{1}{\rho_0}\frac{\left(Lg,g\right)}{\left(g,g\right)}. \tag{4.6}$$

Нерівність (4.6) має назву ***принципу Релея*** для задачі Штурма-Ліувілля (4.4). Якщо $\rho_0=1$, то з (4.6) дістанемо простішу нерівність

$$\lambda_0<-\frac{\left(Lg,g\right)}{\left(g,g\right)}.$$

ПРИКЛАД. Для ілюстрації наведених властивостей розглянемо відому з курсу математичної фізики задачу Штурма-Ліувілля, узявши для визначеності l=2:

$$y''+\lambda y(x)=0,\quad x\in(0;2); \tag{4.7}$$

$$y(0)=0,\quad y(2)=0. \tag{4.8}$$

Тут $p(x)$=1, $q(x)$=0, $\rho(x)$=1.

Якщо почати перерахунок власних значень із n=0, то їх можна записати у вигляді $\lambda_n=0{,}25\pi^2(n+1)^2$, $n=\overline{0,\infty}$. Очевидно, що всі ці числа є дійсними, причому для будь-якого натурального n $\lambda_n>\lambda_{n-1}$.

Власному значенню $\lambda_n=0{,}25\pi^2(n+1)^2$ відповідає власна функція $y_n(x)=C_n\sin\left[0{,}5\pi(n+1)x\right]$. Очевидно, що кратність кожного власного значення рівна 1, а

$$\int_a^b\rho(x)y_k(x)y_p(x)dx=C_kC_p\int_0^2\sin\frac{\pi(k+1)x}{2}\sin\frac{\pi(p+1)x}{2}dx=0,$$

якщо $k\ne p$.

Замінимо в рівнянні (4.7) коефіцієнт $p(x)$=1 на $\widetilde{p}(x)=2>p(x)$. Задача

$$2y''+\lambda y(x)=0;\quad y(0)=0,\quad y(2)=0$$

матиме власні значення $\widetilde{\lambda}_n=0{,}5\pi^2(n+1)^2>\lambda_n$.

Якщо ж у рівнянні (4.7) замінити коефіцієнт $\rho(x)$=1 на $\widetilde{\rho}(x)=2>\rho(x)$, то одержана задача

$$y''+2\lambda y(x)=0;\quad y(0)=0,\quad y(2)=0$$

матиме власні значення $\widetilde{\lambda}_n=0{,}125\pi^2(n+1)^2<\lambda_n$.

Задача для зменшеного вдвічі відрізка вигляду

$$y''+\lambda y(x)=0,\quad x\in(0;1);$$

$$y(0)=0,\quad y(1)=0$$

матиме власні значення $\widetilde{\lambda}_n=\pi^2(n+1)^2>\lambda_n$.

Задля зручності надалі будемо вважати власні функції $y_n(x)$ ортонормованими, тоді C_n=1.

На рис. 13 наведені графіки ортонормованих власних функцій задачі (4.7), (4.8) для n=0,1,2. Нулі функцій на інтервалі (0;2) відзначені заштрихованими кружечками. Бачимо, що кількість таких нулів у кожному з наведених випадків рівна порядковому номеру власної функції.

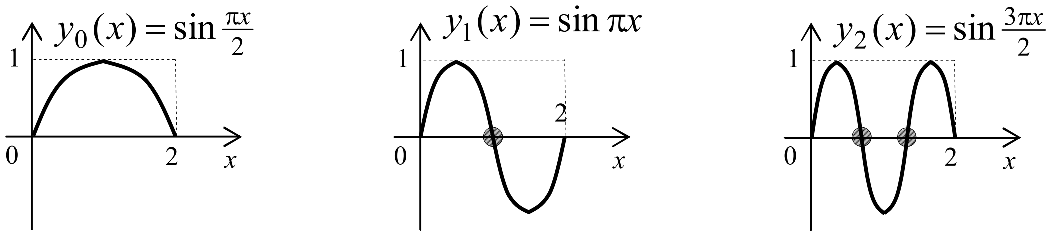

Рис. 13

Функція $g(x)=x^2-2x$ належить класу $C^1_{[0;2]}$ і справджує крайові умови (4.8). Її ряд Фур'є за системою власних функцій ЗШЛ (4.7),(4.8) має вигляд

$$g(x)=-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{32}{\pi^3(2k+1)^3}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2} \tag{4.9}$$

(тільки по парних n=2k). Позначимо через

$$g_p(x)=-\sum_{k=0}^{p}\frac{32}{\pi^3(2k+1)^3}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2}$$

суму $(p+1)$ перших членів ряду Фур'є (4.9). Складемо таблицю значень функцій $g(x)$ і $g_p(x)$ з кроком h=0,2 на проміжку [0;1] (таблиця 2):

x	$g(x)$	$g_0(x)$	$g_1(x)$	$g_2(x)$	$g_3(x)$	$g_4(x)$	$g_5(x)$	$g_6(x)$	$g_7(x)$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,2	-0,36	-0,31892	-0,34984	-0,3581	-0,36053	-0,36097	-0,36073	-0,36035	-0,36004
0,4	-0,64	-0,60662	-0,64298	-0,64298	-0,64011	-0,63928	-0,63974	-0,64019	-0,64019
0,6	-0,84	-0,83494	-0,84676	-0,83850	-0,83943	-0,84058	-0,83995	-0,83980	-0,84011
0,8	-0,96	-0,98154	-0,95907	-0,95907	-0,96084	-0,95949	-0,96023	-0,95995	-0,95995
1	-1	-1,03204	-0,99382	-1,00208	-0,99907	-1,00048	-0,99971	-1,00018	-0,99987

На проміжку (1;2] значення повторюватимуться, оскільки $g(2\text{-}x)=g(x)$. Бачимо, що з ростом p значення $g_p(x)$ стають все ближчими до значень $g(x)$, причому на кожному наступному кроці похибка зменшується, тобто ряд Фур'є (4.9) рівномірно збігається до функції $g(x)$.

Перевіримо, нарешті, виконання принципу Релея (4.6) для задачі (4.7), (4.8). Узявши ту ж функцію $g(x)=x^2-2x$ і врахувавши, що для розглядуваної ЗШЛ $\rho_0=1$, $\lambda_0=0{,}25\pi^2$, маємо:

$$(g,g)=\int_0^2\left(x^2-2x\right)^2dx=\frac{16}{15};\quad (Lg,g)=\int_0^2 g''(x)g(x)dx=2\int_0^2\left(x^2-2x\right)dx=-\frac{8}{3};$$

$$-\frac{(Lg,g)}{(g,g)}=\frac{5}{2}>\frac{\pi^2}{4}=\lambda_0,$$

тобто нерівність (4.6) виконується.

§3.5. Теореми про власні значення і власні функції спряжених операторів

Нехай L – лінійний диференціальний оператор, породжений лінійним диференціальним виразом

$$\ell_n(y)\equiv\sum_{k=0}^{n}p_k(x)y^{(n-k)}(x),\quad x\in(a,b)$$

та лінійними крайовими умовами

$$U_j(y)\equiv\sum_{s=0}^{n-1}\Big(\alpha_{s,j}y^{(s)}(a)+\beta_{s,j}y^{(s)}(b)\Big)=0,\quad j=\overline{1,n}.$$

Розглянемо операторне рівняння

$$Ly=\lambda y,\quad \lambda=const,\tag{5.1}$$

еквівалентне крайовій задачі

$$\begin{aligned}&\ell_n(y)=\lambda y(x),\quad x\in(a,b);\\&U_j(y)=0,\quad j=\overline{1,n}.\end{aligned}\tag{5.2}$$

Зауважимо, що крайова задача (5.2) одержується з дослідженої в §3.1 задачі (1.2),(1.3) при $m=n$.

Позначимо через L^* оператор, спряжений до оператора L, тобто породжений спряженим диференціальним виразом $\ell_n^*(y)$ і спряженими крайовими умовами $V_j(y)=0,\ j=\overline{1,n}$ (див. розділ I).

ТЕОРЕМА 3.6 ***(про власні значення спряжених операторів).*** *Якщо λ – власне значення оператора L кратності p, то $\overline{\lambda}$ буде власним значенням оператора L^* тієї ж кратності p.*

Доведення. Покладемо $\ell_{1,n}(y)=\ell_n(y)-\lambda y$, тоді буде $\ell_{1,n}^*(y)=\ell_n^*(y)-\overline{\lambda}y$. Якщо λ – власне значення оператора L кратності p, то крайова задача

$$\ell_{1,n}(y)=0,\quad U_j(y)=0,\quad j=\overline{1,n}$$

має p лінійно незалежних розв'язків. Але тоді крайова задача

$$\ell_{1,n}^*(y)=0,\quad V_j(y)=0,\quad j=\overline{1,n}$$

має також p лінійно незалежних розв'язків, поскільки ранги матриць прямої та спряженої крайових задач r і r^* зв'язані співвідношенням $r^*=n-m+r$, де m – кількість крайових умов (1.3), а отже, при $m=n$ $r=r^*$. Це й означає, що $\overline{\lambda}$ буде власним значенням оператора L^* тієї ж кратності p. □

ТЕОРЕМА 3.7 ***(про власні функції спряжених операторів).*** *Власні функції операторів L і L^*, які відповідають власним значенням λ і μ відповідно, є ортогональними при $\lambda \neq \overline{\mu}$.*

Доведення. Позначимо через $y(x)$ власну функцію оператора L, яка відповідає власному значенню λ, а через $z(x)$ – власну функцію спряженого оператора L^*, яка відповідає власному значенню μ. Тоді $Ly=\lambda y$, $L^*z=\mu z$. Звідси

$$(Ly,z)=(\lambda y,z)=\lambda(y,z); \quad (y,L^*z)=(y,\mu z)=\overline{\mu}(y,z). \tag{5.3}$$

Але $(Ly,z)=(y,L^*z)$ за означенням спряженого оператора, тому з (5.3) дістанемо

$$(\lambda-\overline{\mu})(y,z)=0,$$

звідки при $\lambda \neq \overline{\mu}$ буде $(y,z)=0$, тобто функції $y(x)$ і $z(x)$ є ортогональними. □

ТЕОРЕМА 3.8 ***(про власні значення самоспряженого оператора).*** *Усі власні значення самоспряженого оператора є дійсними.*

Доведення. Позначимо через $y(x)$ власну функцію оператора L, яка відповідає власному значенню λ. Оскільки оператор L самоспряжений, то повинна справджуватися рівність $(Ly,y)=(y,Ly)$. Але $(y,Ly)=\overline{(Ly,y)}$, тому скалярний добуток (Ly,y) є дійсним числом.

Враховуючи рівняння (5.1), одержуємо $(Ly,y)=(\lambda y,y)=\lambda(y,y)$. Звідси

$$\lambda=\frac{(Ly,y)}{(y,y)}.$$

Оскільки чисельник і знаменник одержаного дробу – дійсні числа, причому для $y(x)$ як власної функції $(y,y)\neq 0$, то й власне значення λ, вочевидь, буде дійсним числом. □

ТЕОРЕМА 3.9 ***(про власні функції самоспряженого оператора).*** *Власні функції самоспряженого оператора, які відповідають різним власним значенням, є ортогональними.*

Доведення. Нехай λ і μ – два різні власні значення самоспряженого оператора L. Згідно з Теоремою 3.8 вони є дійсними числами. Тоді нерівність $\lambda\neq\mu$ можна записати у вигляді $\lambda\neq\overline{\mu}$. Застосувавши Теорему 3.7 з урахуванням того, що $L=L^*$ за означенням самоспряженого оператора, одразу одержуємо ортогональність відповідних власних функцій. □

ВПРАВИ ДО РОЗДІЛУ III

1. Дослідити спектральні задачі, вважаючи параметр λ дійсним:

а) $\begin{array}{l} y''+\lambda y=0, \quad y=y(x), \quad x\in(0;2\pi); \\ y(0)=0, \quad y(2\pi)=0. \end{array}$

б) $\begin{array}{l} y'' + \lambda y' = 0, \quad y = y(x), \quad x \in (0;1); \\ y(0) = 0, \quad y'(1) = 0. \end{array}$

в) $\begin{array}{l} y'' + 2y' + \lambda y = 0, \quad y = y(x), \quad x \in (0;1); \\ y'(0) + y(0) = 0, \quad y'(1) + y(1) = 0. \end{array}$

г) $\begin{array}{l} 2y'' - 8y' + \lambda y = 0, \quad y = y(x), \quad x \in (0;1); \\ y'(0) - 2y(0) = 0, \quad y'(1) - 2y(1) = 0. \end{array}$

д) $\begin{array}{l} y''' + \lambda y' = 0, \quad y = y(x), \quad x \in (0;\pi/6); \\ y(0) = y'(0) = 0, \quad y'(\pi/6) = 0. \end{array}$

е) $\begin{array}{l} y''' + \lambda y'' = 0, \quad y = y(x), \quad x \in (0;1); \\ y(0) = y''(0) = 0, \quad y''(1) = 0. \end{array}$

є) $\begin{array}{l} y^{(4)} - \lambda^4 y = 0, \quad y = y(x), \quad x \in (-1;1); \\ y(-1) = y(1), \quad y'(-1) = y'(1), \quad y''(-1) = y''(1), \quad y'''(-1) = y'''(1). \end{array}$

ж) $\begin{array}{l} y^{(4)} - \lambda^4 y = 0, \quad y = y(x), \quad x \in (-1;1); \\ y(-1) = -y(1), \quad y'(-1) = -y'(1), \quad y''(-1) = -y''(1), \quad y'''(-1) = -y'''(1). \end{array}$

з) $\begin{array}{l} y^{(4)} - \lambda^3 y' = 0, \quad y = y(x), \quad x \in (0;1); \\ y(0) = 0, \quad y'(1) = 0. \end{array}$

2. Довести дійсність власних значень і дослідити спектральні задачі:

а) $\begin{array}{l} y'' - \lambda y = 0, \quad y = y(x), \quad x \in (0;1); \\ y'(0) = y(0), \quad y(1) = 0. \end{array}$

б) $\begin{array}{l} y'' + \lambda y = 0, \quad y = y(x), \quad x \in (0;2\pi); \\ y(0) = y(2\pi), \quad y'(0) = y'(2\pi). \end{array}$

в) $\begin{array}{l} x^2 y'' + 2xy' + \lambda y = 0, \quad y = y(x), \quad x \in (1;2); \\ y(1) = 0, \quad y(2) = 0. \end{array}$

г) $\begin{array}{l} x^2 y'' + xy' + \lambda y = 0, \quad y = y(x), \quad x \in (a,b); \\ y(a) = y(b) = 0, \quad 0 < a < b. \end{array}$

3. Вважаючи параметр λ дійсним, знайти нетривіальні розв’язки крайових задач для систем диференціальних рівнянь:

а) $\begin{cases} \dot{x} = \lambda x + y, \\ \dot{y} = -x + \lambda y, \end{cases}$ $x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in (-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4});$

$x(-\frac{\pi}{4}) = 0, \quad y(\frac{\pi}{4}) = 0.$

б) $\begin{cases} \dot{x} = \lambda x + y, \\ \dot{y} = -x - \lambda y, \end{cases}$ $x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in (0;1);$

$x(0) = 0, \quad y(1) = 0.$

в) $\begin{cases} \dot{x} = x - \lambda y, \\ \dot{y} = x + y, \end{cases}$ $x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in (0;1);$

$x(1) = y(1), \quad y(0) = 0.$

4. Перевірити дійсність власних значень спектральної задачі:

$$\frac{1}{6}\left[\left(-\frac{146}{7}x^4 + 21x^2 - 5\right)y''\right]'' + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1891}{7}x^2 - 1\right)y'\right]' + 167y = \lambda\left\{\frac{1}{2}\left[\left(-9x^2 + 121\right)y'\right]' + 189y\right\},$$

$y(-1) = y'(-1) = y(1) = y'(1) = 0.$

РОЗДІЛ IV
ОБЕРНЕННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА. ФУНКЦІЯ ҐРІНА

§4.1. Обернений оператор

Позначимо через D_A область визначення, а через E_A – множину значень оператора A.

Означення. Оператор B називається ***оберненим*** до оператора A, якщо $D_B = E_A$ і для довільного $x \in D_A$ $BAx = x$. Такий оператор B позначається A^{-1}.

Наведемо основні властивості оберненого оператора.

ТЕОРЕМА 4.1. *Якщо для оператора A існує обернений оператор* A^{-1}, *то* $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.

Доведення. Із означення оберненого оператора A^{-1} випливає, що $E_{A^{-1}} = D_A$. Покажемо, що для довільного $y \in D_{A^{-1}}$ $AA^{-1}y = y$.

Справді, для довільного $x \in D_A$ $AA^{-1}Ax = Ax \in E_A = D_{A^{-1}}$; звідси, позначивши $Ax=y$, одержимо потрібну рівність. □

ТЕОРЕМА 4.2. *Якщо оператор A є лінійним і має обернений, то оператор* A^{-1} *також є лінійним.*

Доведення. Покажемо, що для довільних чисел α_1, α_2 і $y_1, y_2 \in E_A$ справджується рівність $A^{-1}(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 A^{-1} y_1 + \alpha_2 A^{-1} y_2$.

Справді, оскільки оператор A лінійний, то згідно з означенням лінійного оператора (див. §1.3)

$$A\left(\alpha_1 A^{-1} y_1 + \alpha_2 A^{-1} y_2\right) = \alpha_1 AA^{-1} y_1 + \alpha_2 AA^{-1} y_2 = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2.$$

Подіявши на ліву й праву частини останньої рівності оператором A^{-1}, одержимо $\alpha_1 A^{-1} y_1 + \alpha_2 A^{-1} y_2 = A^{-1}(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)$, що й потрібно було довести. □

ТЕОРЕМА 4.3. *Для існування оберненого оператора до лінійного оператора A необхідно й достатньо, щоб рівняння*

$$Ax = 0 \tag{1.1}$$

мало тільки тривіальний розв'язок.

Доведення. Нехай для оператора A існує обернений оператор A^{-1}. Подіявши на ліву й праву частини рівності (1.1) оператором A^{-1}, одержимо $A^{-1}Ax = A^{-1}(0)$, тобто $x = 0$. Зауважимо, що згідно з Теоремою 4.2 оператор A^{-1} є лінійним, тому $A^{-1}(0) = 0$. Отже, рівняння (1.1) має тільки тривіальний розв'язок.

Припустимо тепер, що рівняння (1.1) має тільки тривіальний розв'язок. Тоді для довільного $y \in E_A$ рівняння

$$Ax = y \tag{1.2}$$

матиме єдиний розв'язок. Справді, якщо x_1, x_2 – два різні розв'язки рівняння (1.2), то, використавши лінійність оператора A, одержимо $A(x_1 - x_2) = 0$, тобто рівняння (1.1) буде мати нетривіальний розв'язок, що суперечить припущенню.

Задамо на множині E_A оператор B наступним чином: довільному $y \in E_A$ поставимо у відповідність певне значення $x \in D_A$, а саме єдиний розв'язок рівняння (1.2). Очевидно, що $D_B = E_A$, а $ABy = Ax = y$ згідно з (1.2), тому оператор B є оберненим оператором до оператора A. □

§4.2. Функція Ґріна лінійного диференціального оператора та її побудова

Нехай L – лінійний диференціальний оператор, породжений лінійним диференціальним виразом

$$\ell_n(y) \equiv \sum_{k=0}^{n} p_{n-k}(x) y^{(k)}(x), \quad x \in (a,b),$$

де $p_0(x) \neq 0,$ і лінійними крайовими умовами

$$U_j(y) = \sum_{s=0}^{n-1} \left(\alpha_{s,j} y^{(s)}(a) + \beta_{s,j} y^{(s)}(b) \right) = 0, \quad j = \overline{1,n}.$$

Припустимо, що операторне рівняння $Ly = 0$, еквівалентне крайовій задачі

$$\ell_n(y) \equiv \sum_{k=0}^{n} p_k(x) y^{(n-k)}(x) = 0, \tag{2.1}$$

$$U_j(y) = 0, \quad j = \overline{1,n}, \tag{2.2}$$

має тільки тривіальний розв'язок, тобто для будь-якої фундаментальної системи частинних розв'язків $\{y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)\}$ рівняння (2.1)

$$\det \left\| U_j(y_i) \right\| \neq 0.$$

Тоді згідно з Теоремою 4.3 оператор L має обернений L^{-1}. Щоб побудувати оператор L^{-1}, введемо поняття функції Ґріна.

Означення. Функція $G(x,\xi)$, визначена в прямокутнику $D = \{(x,\xi) \mid a \le x, \xi \le b\}$, називається ***функцією Ґріна*** оператора L, якщо

а) вона неперервна разом з похідними до (n–2)-го порядку включно в області D;

б) при $x \neq \xi$ $G(x,\xi)$ має неперервні похідні до n-го порядку включно в області D, а при $x = \xi$ її (n–1)-а похідна має розрив першого роду зі стрибком $p_0^{-1}(\xi)$:

$$\left.\frac{\partial^{(n-1)}G}{\partial x^{n-1}}\right|_{x=\xi_+}-\left.\frac{\partial^{(n-1)}G}{\partial x^{n-1}}\right|_{x=\xi_-}=\frac{1}{p_0(\xi)}.$$

в) при $x\neq\xi$ $G(x,\xi)$ як функція змінної x є розв'язком рівняння (2.1) і справджує крайові умови (2.2):

$$\ell_n\left[G(x,\xi)\right]=0;\quad U_j\left[G(x,\xi)\right]=0,\quad j=\overline{1,n}\quad (x\neq\xi).$$

ТЕОРЕМА 4.4 ***(про існування функції Ґріна лінійного диференціального оператора).*** *Якщо крайова задача (2.1),(2.2) має тільки тривіальний розв'язок, то існує функція Ґріна оператора L, яка визначається однозначно.*

Доведення. Нехай $\{y_1(x),y_2(x),\ldots,y_n(x)\}$ – деяка фундаментальна система частинних розв'язків рівняння (2.1). Тоді будь-який інший розв'язок $y(x)$ цього рівняння можна подати у вигляді лінійної комбінації

$$y(x)=\sum_{i=1}^{n}C_i y_i(x),$$

Оскільки функція Ґріна $G(x,\xi)$ є розв'язком рівняння (2.1) як функція змінної x при $x\neq\xi$, то вона повинна мати вигляд

$$G(x,\xi)=\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{n}a_i(\xi)y_i(x), & a\le x<\xi;\\ \sum\limits_{i=1}^{n}b_i(\xi)y_i(x), & \xi<x\le b,\end{cases}\qquad (2.3)$$

де $a_i(\xi)$, $b_i(\xi)$ – довільні функції змінної ξ. Очевидно, що вираз (2.3) як функція змінної x буде справджувати рівняння (2.1). Будемо вибирати коефіцієнти $a_i(\xi)$ і $b_i(\xi)$ таким чином, щоб для виразу (2.3) виконувалися й інші умови з означення функції Ґріна.

Із перших двох умов одержимо наступну систему:

$$\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{n}a_i(\xi)y_i^{(s)}(\xi)=\sum\limits_{i=1}^{n}b_i(\xi)y_i^{(s)}(\xi), & s=\overline{0,n-2};\\ \sum\limits_{i=1}^{n}b_i(\xi)y_i^{(n-1)}(\xi)-\sum\limits_{i=1}^{n}a_i(\xi)y_i^{(n-1)}(\xi)=p_0^{-1}(\xi).\end{cases}\qquad (2.4)$$

Введемо позначення:

$$c_i(\xi)=b_i(\xi)-a_i(\xi).\qquad (2.5)$$

Тоді (2.4) можна записати у вигляді

$$\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{n}c_i(\xi)y_i^{(s)}(\xi)=0, & s=\overline{0,n-2};\\ \sum\limits_{i=1}^{n}c_i(\xi)y_i^{(n-1)}(\xi)=p_0^{-1}(\xi).\end{cases}\qquad (2.6)$$

Визначником системи (2.6) є детермінант Вронського для фундаментальної системи частинних розв'язків рівняння (2.1) $W[y_1,\ldots,y_n]\neq0$, тому розв'язок системи існує і є єдиним. Отже, функції $c_i(\xi)$ визначаються з системи

(2.6) однозначно. Такий вибір функцій $c_i(\xi)$ забезпечує для виразу (2.3) виконання перших двох умов означення функції Ґріна.

Визначимо, нарешті, коефіцієнти $a_i(\xi)$ і $b_i(\xi)$ таким чином, щоб вираз (2.4) справджував і крайові умови (2.2). Для цього подамо лінійні форми $U_j(y)$ у вигляді

$$U_j(y) = U_{ja}(y) + U_{jb}(y), \quad j = \overline{1,n},$$

де $U_{ja}(y)$ містять значення функції $y(x)$ та її похідних до $(n-1)$-го порядку включно в точці $x=a$, а $U_{jb}(y)$ – у точці $x=b$. Тоді після підстановки (2.3) у (2.2) одержимо:

$$U_{ja}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i(\xi) y_i\right) + U_{jb}\left(\sum_{i=1}^{n} b_i(\xi) y_i\right) = 0, \quad j = \overline{1,n},$$

або, враховуючи лінійність форм $U_{ja}(y)$ і $U_{jb}(y)$,

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(\xi) U_{ja}(y_i) + \sum_{i=1}^{n} b_i(\xi) U_{jb}(y_i) = 0, \quad j = \overline{1,n}.$$

Згідно з (2.5) $a_i(\xi)=b_i(\xi) - c_i(\xi)$, отже,

$$\sum_{i=1}^{n} \left\{ \left[b_i(\xi) - c_i(\xi) \right] U_{ja}(y_i) + b_i(\xi) U_{jb}(y_i) \right\} = 0, \quad j = \overline{1,n},$$

або

$$\sum_{i=1}^{n} b_i(\xi) U_j(y_i) = \sum_{i=1}^{n} c_i(\xi) U_{ja}(y_i), \quad j = \overline{1,n}. \tag{2.7}$$

Одержана система алгебраїчних рівнянь відносно $b_i(\xi)$ (2.7) має єдиний розв’язок, оскільки її визначник $\det\left\| U_j(y_i) \right\| \neq 0$, адже задача (2.1),(2.2) має тільки тривіальний розв’язок. Отже, коефіцієнти $b_i(\xi)$ визначаються з системи (2.7) однозначно. Оскільки функції $c_i(\xi)$ визначаються однозначно як розв’язки системи (2.6), то коефіцієнти $a_i(\xi)$ також можна однозначно визначити з рівностей (2.5). Підклавши знайдені коефіцієнти у вираз (2.3), однозначно визначимо функцію Ґріна оператора L. □

Зауважимо, що доведення даної теореми дає одночасно й метод побудови функції Ґріна лінійного диференціального оператора.

ПРИКЛАД. Побудувати функцію Ґріна для оператора L, породженого лінійним диференціальним виразом

$$\ell_4(y) = y^{(4)} + 5y'' - 36y(x), \quad x \in (0;1),$$

і крайовими умовами

$$y(0) = y''(0) = 0, \quad y'(1) = y'''(1) = 0.$$

Розв’язання. Доведемо спочатку існування функції Ґріна: покажемо, що однорідна крайова задача

$$y^{(4)} + 5y'' - 36y(x) = 0, \quad x \in (0;1),$$

$$y(0) = y''(0) = 0, \quad y'(1) = y'''(1) = 0$$

має тільки тривіальний розв’язок.

Справді, загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд $y(x)=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}+C_3\cos 3x+C_4\sin 3x.$ Підклавши цю функцію в крайові умови, одержимо систему

$$\begin{cases}C_1+C_2+C_3=0;\\ 4C_1+4C_2-9C_3=0;\\ 2C_1e^2-2C_2e^{-2}-3C_3\sin 3+3C_4\cos 3=0;\\ 8C_1e^2-8C_2e^{-2}+27C_3\sin 3-27C_4\cos 3=0.\end{cases}$$

Детермінант цієї системи $\Delta=2028\operatorname{ch}2\cos 3\neq 0,$ тобто $C_1=C_2=C_3=C_4=0$ і $y(x)\equiv 0$. Тому згідно з доведеною вище теоремою функція Ґріна існує й визначається однозначно. Для її побудови використаємо алгоритм, викладений у доведенні теореми про існування функції Ґріна.

Отже, будемо шукати функцію Ґріна у вигляді

$$G(x,\xi)=\begin{cases}a_1(\xi)e^{2x}+a_2(\xi)e^{-2x}+a_3(\xi)\cos 3x+a_4(\xi)\sin 3x, & 0\le x<\xi;\\ b_1(\xi)e^{2x}+b_2(\xi)e^{-2x}+b_3(\xi)\cos 3x+b_4(\xi)\sin 3x, & \xi<x\le 1.\end{cases}\qquad(2.8)$$

Введемо позначення: $c_i(\xi)=b_i(\xi)-a_i(\xi),\ i=\overline{1,4}.$ Система (2.6) для визначення функцій $c_i(\xi)$ матиме вигляд

$$\begin{cases}c_1(\xi)e^{2\xi}+c_2(\xi)e^{-2\xi}+c_3(\xi)\cos 3\xi+c_4(\xi)\sin 3\xi=0;\\ 4c_1(\xi)e^{2\xi}+4c_2(\xi)e^{-2\xi}-9c_3(\xi)\cos 3\xi-9c_4(\xi)\sin 3\xi=0;\\ 2c_1(\xi)e^{2\xi}-2c_2(\xi)e^{-2\xi}-3c_3(\xi)\sin 3\xi+3c_4(\xi)\cos 3\xi=0;\\ 8c_1(\xi)e^{2\xi}-8c_2(\xi)e^{-2\xi}+27c_3(\xi)\sin 3\xi-27c_4(\xi)\cos 3\xi=1,\end{cases}$$

звідки

$$c_1(\xi)=\frac{e^{-2\xi}}{52},\quad c_2(\xi)=-\frac{e^{2\xi}}{52},\quad c_3(\xi)=\frac{\sin 3\xi}{39},\quad c_4(\xi)=-\frac{\cos 3\xi}{39}.$$

Крайові умови для $G(x,\xi)$ дають

$$a_1(\xi)+a_2(\xi)+a_3(\xi)=0;$$
$$4a_1(\xi)+4a_2(\xi)-9a_3(\xi)=0;$$
$$2b_1(\xi)e^2-2b_2(\xi)e^{-2}-3b_3(\xi)\sin 3+3b_4(\xi)\cos 3=0;$$
$$8b_1(\xi)e^2-8b_2(\xi)e^{-2}+27b_3(\xi)\sin 3-27b_4(\xi)\cos 3=0.$$

Поклавши в одержаних рівностях $a_i(\xi)=b_i(\xi)-c_i(\xi)$, дістанемо систему (2.7) для визначення коефіцієнтів $b_i(\xi)$ у вигляді

$$\begin{cases}b_1(\xi)+b_2(\xi)+b_3(\xi)=\frac{\sin 3\xi}{39}-\frac{\operatorname{sh}2\xi}{26};\\ 4b_1(\xi)+4b_2(\xi)-9b_3(\xi)=-\frac{3\sin 3\xi+2\operatorname{sh}2\xi}{13};\\ 2b_1(\xi)e^2-2b_2(\xi)e^{-2}-3b_3(\xi)\sin 3+3b_4(\xi)\cos 3=0;\\ 8b_1(\xi)e^2-8b_2(\xi)e^{-2}+27b_3(\xi)\sin 3-27b_4(\xi)\cos 3=0,\end{cases}$$

звідки

$$b_1(\xi) = -\frac{\operatorname{sh} 2\xi}{52e^2 \operatorname{ch} 2}, \quad b_2(\xi) = -\frac{e^2 \operatorname{sh} 2\xi}{52 \operatorname{ch} 2}, \quad b_3(\xi) = \frac{\sin 3\xi}{39}, \quad b_4(\xi) = \frac{\operatorname{tg} 3 \sin 3\xi}{39}.$$

Тоді з рівностей $a_i(\xi)=b_i(\xi) - c_i(\xi)$ можемо визначити коефіцієнти $a_i(\xi)$:

$$a_1(\xi) = -\frac{\operatorname{ch} 2(\xi-1)}{52 \operatorname{ch} 2}, \quad a_2(\xi) = \frac{\operatorname{ch} 2(\xi-1)}{52 \operatorname{ch} 2}, \quad a_3(\xi) = 0, \quad a_4(\xi) = \frac{\cos 3(\xi-1)}{52 \operatorname{ch} 2}.$$

Підклавши, нарешті, одержані коефіцієнти у вираз (2.8), одержимо функцію Ґріна заданого оператора L:

$$G(x,\xi) = \begin{cases} \dfrac{\cos 3(\xi-1)\sin 3x}{39\cos 3} - \dfrac{\operatorname{ch} 2(\xi-1)\operatorname{sh} 2x}{26 \operatorname{ch} 2}, & 0 \le x < \xi; \\ \dfrac{\cos 3(x-1)\sin 3\xi}{39\cos 3} - \dfrac{\operatorname{ch} 2(x-1)\operatorname{sh} 2\xi}{26 \operatorname{ch} 2} & \xi < x \le 1. \end{cases}$$

Бачимо, що функція Ґріна є симетричною в квадраті $0 \le x, \xi \le 1$.

§4.3. Обернення диференціального оператора за допомогою функції Ґріна

Нехай потрібно знайти розв’язок операторного рівняння

$$Ly = f(x), \tag{3.1}$$

де L – лінійний диференціальний оператор, породжений лінійним диференціальним виразом

$$\ell_n(y) \equiv \sum_{k=0}^{n} p_{n-k}(x) y^{(k)}(x), \quad x \in (a,b),$$

та крайовими умовами

$$U_j(y) \equiv \sum_{s=0}^{n-1} \left(\alpha_{s,j} y_a^{(s)} + \beta_{s,j} y_b^{(s)} \right) = 0, \quad j = \overline{1,n}. \tag{3.2}$$

Припустимо, що відповідна однорідна крайова задача Ly=0 має тільки тривіальний розв’язок. Тоді згідно з Теоремою 4.3 задача (3.1) матиме єдиний розв’язок і існуватиме оператор L^{-1}. Оскільки на підставі (3.1) $L^{-1}Ly = L^{-1}f(x)$, а $L^{-1}Ly = y$ згідно з означенням оберненого оператора, то розв’язком задачі (3.1), вочевидь, буде функція

$$y(x) = L^{-1} f(x).$$

Покажемо, що оператор L^{-1} можна побудувати за допомогою функції Ґріна.

ТЕОРЕМА 4.5 ***(про обернення диференціального оператора за допомогою функції Ґріна).*** *Якщо однорідна крайова задача Ly=0 при $x \in [a,b]$ має тільки тривіальний розв’язок, то для довільної функції $f(x) \in C_{(a,b)}$ розв’язок крайової задачі (3.1) дається формулою*

$$y(x) = \int_a^b f(\xi) G(x,\xi) d\xi, \tag{3.3}$$

тобто

$$L^{-1} f(x) = \int_a^b f(\xi) G(x,\xi) d\xi.$$

Доведення. Покажемо, що функція (3.3) є розв'язком крайової задачі (3.1). Для цього обчислимо похідні:

$$y^{(s)}(x) = \int_a^b \frac{\partial^s G(x,\xi)}{\partial x^s} f(\xi) d\xi, \quad s = \overline{1, n-1}.$$

Оскільки (n–1)-а похідна функції Ґріна має розрив при x=ξ, то для знаходження n-ї похідної необхідно подати $y^{(n-1)}(x)$ у вигляді

$$y^{(n-1)}(x) = \int_a^x \frac{\partial^{n-1} G(x,\xi)}{\partial x^{n-1}} f(\xi) d\xi + \int_x^b \frac{\partial^{n-1} G(x,\xi)}{\partial x^{n-1}} f(\xi) d\xi;$$

тоді інтегруванням частинами одержимо:

$$y^{(n)}(x) = \frac{\partial^{n-1} G(x,x_-)}{\partial x^{n-1}} f(x) + \int_a^x \frac{\partial^n G(x,\xi)}{\partial x^n} f(\xi) d\xi - \frac{\partial^{n-1} G(x,x_+)}{\partial x^{n-1}} f(x) +$$

$$+ \int_x^b \frac{\partial^n G(x,\xi)}{\partial x^n} f(\xi) d\xi = \frac{f(x)}{p_0(x)} + \int_a^b \frac{\partial^n G(x,\xi)}{\partial x^n} f(\xi) d\xi.$$

Підклавши знайдені похідні у вираз $\ell_n(y) \equiv \sum_{k=0}^n p_k(x) y^{(n-k)}(x)$, дістанемо

$$\ell_n(y) = p_0(x) y^{(n)}(x) + \sum_{k=1}^n p_k(x) \int_a^b \frac{\partial^{(n-k)} G(x,\xi)}{\partial x^{(n-k)}} f(\xi) d\xi =$$

$$= f(x) + \sum_{k=0}^n p_k(x) \int_a^b \frac{\partial^{(n-k)} G(x,\xi)}{\partial x^{(n-k)}} f(\xi) d\xi = f(x) + \int_a^b \ell_n \left[G(x,\xi) \right] f(\xi) d\xi = f(x),$$

оскільки згідно з означенням $G(x,\xi)$ як функція змінної x є розв'язком однорідного рівняння $\ell_n \left[G(x,\xi) \right] = 0$. Отже, функція (3.3) є розв'язком рівняння $\ell_n(y) = f(x)$.

Перевіримо виконання крайових умов. Підставимо (3.3) у (3.2):

$$U_j \left[\int_a^b G(x,\xi) f(\xi) d\xi \right] = \int_a^b U_j \left[G(x,\xi) \right] f(\xi) d\xi = 0, \quad j = \overline{1,n},$$

оскільки U_j – лінійні форми, а $G(x,\xi)$ як функція змінної x справджує умови (3.2). Зауважимо, що умови (3.2) містять похідні лише до (n–1)-го порядку включно, тому розрив (n–1)-ї похідної функції Ґріна не впливає на одержану рівність.

Отже, формула (3.3) за умови існування функції Ґріна визначає єдиний розв'язок крайової задачі (3.1). □

ПРИКЛАД 1. Методом функції Ґріна розв'язати крайову задачу

$$y''' + 2\operatorname{tg} 2x y''(x) = 2\cos 2x, \quad x \in (0;1);$$

$$y(0) = y'(0) = 0, \quad y''(1) = 0.$$

Розв'язання. Будуючи функцію Ґріна за допомогою алгоритму, викладеного в §4.2, одержимо:

$$G(x,\xi) = \begin{cases} -\dfrac{\sin^2 x}{2\cos 2\xi}, & 0 \le x < \xi \le 1; \\ \dfrac{(\xi - x)\sin 2\xi - \sin^2 \xi}{2\cos 2\xi}, & 0 \le \xi < x \le 1. \end{cases}$$

Тоді згідно з Теоремою 4.5 розв'язок крайової задачі дається формулою (3.3) при $f(x) = 2\cos 2x$:

$$y(x) = \int_0^1 G(x,\xi)\cdot 2\cos 2\xi d\xi = \int_0^x \left[(\xi - x)\sin 2\xi - \sin^2 \xi\right] d\xi - \int_x^1 \sin^2 \xi d\xi =$$

$$= \sin x(\cos x - \sin x) - x\cos^2 x.$$

За допомогою формули обернення (3.3) в деяких простіших випадках вдається побудувати функцію Ґріна.

Справді, розглянемо крайову задачу

$$y^{(n)}(x) = f(x), \quad x \in (0,l); \tag{3.4}$$

$$U_j(y) = 0, \quad j = \overline{1,n}. \tag{3.5}$$

Загальний розв'язок рівняння (3.4) дається відомою формулою Коші

$$y(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x (x-\xi)^{n-1} f(\xi)d\xi + \sum_{i=0}^{n-1} C_i x^i. \tag{3.6}$$

Припустимо, що крайова задача (3.4),(3.5) має єдиний розв'язок. Тоді, підклавши (3.6) у (3.5), однозначно визначимо сталі C_i. Підкладемо одержані значення C_i у (3.6) і подамо цю функцію у вигляді

$$y(x) = \int_0^x g_1(x,\xi) f(\xi)d\xi + \int_x^l g_2(x,\xi) f(\xi)d\xi.$$

Тоді згідно з формулою (3.3) функція Ґріна повинна мати вигляд

$$G(x,\xi) = \begin{cases} g_1(x,\xi), & 0 \le \xi < x; \\ g_2(x,\xi), & x < \xi \le l. \end{cases}$$

ПРИКЛАД 2. За допомогою формули Коші побудувати функцію Ґріна оператора L, породженого диференціальним виразом

$$\ell_3(y) = y'''(x), \quad x \in (0;1);$$

і крайовими умовами

$$y(0) = y'(0) = 0, \quad y'(1) = 0.$$

Розв'язання. Загальний розв'язок рівняння $\ell_3(y) = f(x)$ для довільної функції $f(x) \in C_{(0;1)}$ дається формулою Коші

$$y(x) = \frac{1}{2}\int_0^x (x-\xi)^2 f(\xi)d\xi + C_0 + C_1 x + C_2 x^2.$$

Із крайових умов одержуємо:

$$C_0 = 0, \quad C_1 = 0, \quad C_2 = 0{,}5\int_0^1 (\xi - 1) f(\xi)d\xi.$$

Отже, крайова задача має єдиний розв'язок

$$y(x) = \frac{1}{2}\left\{\int_0^x (x-\xi)^2 f(\xi)d\xi + x^2\int_0^1 (\xi-1) f(\xi)d\xi\right\} =$$

$$= 0{,}5\left\{\int_0^x \left[(x-\xi)^2 + x^2(\xi-1)\right] f(\xi)d\xi + \int_x^1 x^2(\xi-1) f(\xi)d\xi\right\}.$$

Згідно з формулою обернення (3.3)

$$y(x) = \int_0^1 f(\xi) G(x,\xi)d\xi.$$

Прирівнявши значення $y(x)$ з двох останніх рівностей, одержимо функцію Ґріна для заданого оператора L у вигляді

$$G(x,\xi) = \begin{cases} 0{,}5\xi\left(\xi - 2x + x^2\right), & 0 \le \xi < x; \\ 0{,}5x^2(\xi - 1), & x < \xi \le 1. \end{cases}$$

§4.4. Функція Ґріна самоспряженого диференціального оператора

Нехай крайова задача $Ly = f(x)$ є самоспряженою. Тоді має силу

ТЕОРЕМА 4.6 ***(про функцію Ґріна самоспряженого оператора).*** *Функція Ґріна самоспряженого лінійного диференціального оператора є симетричною в розглядуваній області, тобто $G(x,\xi) = G(\xi,x)$ при $a \le x, \xi \le b$.*

Доведення. Позначимо через $u(x)$ розв'язок операторного рівняння

$$Lu = s(x), \quad s(x) \ne 0, \tag{4.1}$$

а через $v(x)$ – розв'язок рівняння

$$Lv = r(x), \quad r(x) \ne 0. \tag{4.2}$$

Тоді згідно з критерієм самоспряженості крайової задачі (див. §1.7)

$$\int_a^b \left(uLv - vLu\right)dx = 0. \tag{4.3}$$

Із (4.1) та (4.2) згідно з формулою обернення крайових задач (3.3) маємо:

$$u(x) = \int_a^b r(\xi) G(x,\xi)d\xi, \quad v(x) = \int_a^b s(\xi) G(x,\xi)d\xi.$$

Тоді з (4.3) на підставі (4.1) та (4.2) одержимо:

$$\int_a^b \left\{ r(x)\int_a^b s(\xi)G(x,\xi)d\xi - s(x)\int_a^b r(\xi)G(x,\xi)d\xi \right\} dx = 0.$$

Оскільки межі інтегрування по x і по ξ рівні, то в другому інтегралі змінимо місцями x та ξ, а також порядок інтегрування:

$$\int_a^b \left\{ r(x)\int_a^b s(\xi)G(x,\xi)d\xi \right\} dx - \int_a^b \left\{ s(\xi)\int_a^b r(x)G(\xi,x)d\xi \right\} dx = 0.$$

На підставі довільності функцій $s(x)$ і $r(x)$ остання рівність виконується лише тоді, коли підінтегральна функція рівна нулеві. Але $s(\xi)r(x)\neq 0$, оскільки (4.1) і (4.2) – неоднорідні рівняння. Звідси випливає, що $G(x,\xi)= G(\xi,x)$, тобто функція Ґріна самоспряженого диференціального оператора є симетричною в прямокутнику $a \le x,\xi \le b$. □

Враховуючи Теорему 4.6, у випадку самоспряженої крайової задачі можна значно спростити алгоритм відшукання функції Ґріна. Справді, оскільки функція Ґріна є симетричною в прямокутнику $a \le x,\xi \le b$, то вона має вигляд

$$G(x,\xi) = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} a_i(\xi) y_i(x), & a \le x < \xi; \\ \sum\limits_{i=1}^{n} a_i(x) y_i(\xi), & \xi < x \le b, \end{cases} \tag{4.4}$$

де $\{y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)\}$ і $\{a_1(x), a_2(x), \ldots, a_n(x)\}$ – деякі фундаментальні системи частинних розв'язків (ФСЧР) відповідного однорідного рівняння. Тоді задача відшукання функції Ґріна полягатиме в наступному: задавши деяку ФСЧР $\{y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)\}$, визначити іншу ФСЧР таким чином, щоб вираз (4.4) справджував усі умови в означенні функції Ґріна.

Зауваження. Для несамоспряжених крайових задач має силу наступне твердження [7]: якщо $G(x,\xi)$ є функцією Ґріна лінійного диференціального оператора L, то $G(\xi,x)$ буде функцією Ґріна спряженого оператора L^*.

ПРИКЛАД. Методом функції Ґріна розв'язати самоспряжену крайову задачу

$$y'' + y(x) = 4\sin x, \quad x \in (0;\pi/2); \tag{4.5}$$

$$y(0) - y'(0) = 0, \quad y(\pi/2) - y'(\pi/2) = 0. \tag{4.6}$$

Розв'язання. Зауважимо, що самоспряженість аналогічної задачі показана в прикладі з §1.7.

Загальний розв'язок відповідного однорідного до (4.5) рівняння є

$$y(x) = C_1 \sin x + C_2 \cos x.$$

Підклавши його у крайові умови (4.6), одержимо $C_1=C_2=0$, тобто $y(x)\equiv 0$. Тому згідно теореми 4.4 функція Ґріна існує і визначається однозначно. Будемо шукати її в симетричному вигляді (4.4), причому покладемо $y_1(x) = \sin x$,

$y_2(x) = \cos x$, а функції іншої ФСЧР запишемо у вигляді лінійної комбінації: $a_1(x) = A\sin x + B\cos x$, $a_2(x) = C\sin x + D\cos x$, де A,B,C,D – невідомі сталі:

$$G(x,\xi) = \begin{cases} (A\sin\xi + B\cos\xi)\sin x + (C\sin\xi + D\cos\xi)\cos x, & 0 \le x < \xi; \\ (A\sin x + B\cos x)\sin\xi + (C\sin x + D\cos x)\cos\xi, & \xi < x \le \pi/2. \end{cases} \quad (4.7)$$

Вираз (4.7) задає неперервну функцію в прямокутнику $0 \le x,\xi \le \pi/2$, яка є розв'язком відповідного до (4.5) однорідного рівняння за змінною x. Оскільки $G(x,\xi)$ як функція змінної x повинна справджувати і крайові умови, то після підкладання (4.7) у (4.6) одержимо:

$$G(0,\xi) - G'_x(0,\xi) \equiv (C - A)\sin\xi + (D - B)\cos\xi = 0;$$

$$G(\pi/2,\xi) - G'_x(\pi/2,\xi) \equiv (A + B)\sin\xi + (C + D)\cos\xi = 0,$$

звідки $C = A$, $B = D = -A$. З урахуванням останніх рівностей вираз (4.4) набуде вигляду

$$G(x,\xi) = \begin{cases} A[\sin(\xi - x) + \cos(\xi + x)], & 0 \le x < \xi; \\ A[\sin(x - \xi) + \cos(x + \xi)], & \xi < x \le \pi/2. \end{cases}$$

Невідомий коефіцієнт A визначаємо з умови розриву першої похідної функції Ґріна при x=ξ:

$$G'_x(\xi_+,\xi) - G'_x(\xi_-,\xi) \equiv A(1 - \sin 2\xi) - A(-1 - \sin 2\xi) = 1,$$

звідки A=0,5. Отже, функція Ґріна для наведеної самоспряженої крайової задачі матиме вигляд

$$G(x,\xi) = \begin{cases} 0{,}5[\sin(\xi - x) + \cos(\xi + x)], & 0 \le x < \xi; \\ 0{,}5[\sin(x - \xi) + \cos(x + \xi)], & \xi < x \le \pi/2. \end{cases}$$

Очевидно, що $G(x,\xi)$= $G(\xi,x)$, тобто побудована функція Ґріна є симетричною в прямокутнику $0 \le x,\xi \le \pi/2$.

Для знаходження розв'язку задачі (4.5),(4.6) застосуємо формулу (3.3):

$$y(x) = 4\int_0^{\pi/2} \sin\xi\, G(x,\xi)\,d\xi =$$

$$= 2\int_0^x \sin\xi[\sin(x - \xi) + \cos(x + \xi)]d\xi + 2\int_x^{\pi/2} \sin\xi[\sin(\xi - x) + \cos(\xi + x)]d\xi.$$

Після обчислення всіх інтегралів одержимо шуканий розв'язок

$$y(x) = \left(\tfrac{\pi}{2} + 1\right)\sin x + \left(\tfrac{\pi}{2} - 1 - 2x\right)\cos x.$$

§4.5. Узагальнена функція Ґріна

Нехай L – лінійний диференціальний оператор, породжений лінійним диференціальним виразом

$$\ell_n(y) \equiv \sum_{k=0}^{n} p_k(x)y^{(n-k)}(x), \quad x \in (a,b),$$

та крайовими умовами

$$U_j(y) \equiv \sum_{s=0}^{n-1}\left(\alpha_{s,j}y^{(s)}(a)+\beta_{s,j}y^{(s)}(b)\right)=0, \quad j=\overline{1,n}, \tag{5.1}$$

де $p_k(x)\in C_{(a,b)}$, $k=\overline{0,n}$, причому $p_0(x)\neq 0$; $\alpha_{s,j}$, $\beta_{s,j}$ – відомі сталі.

Будемо вважати, що $\ell_n(y)$ і крайові умови (5.1) є самоспряженими, тобто для довільних функцій порівняння $y(x)$, $z(x)$

$$\int_a^b [z\ell_n(y)-y\ell_n(z)]dx=0. \tag{5.2}$$

Припустимо, що крайова задача

$$Ly(x)=0 \tag{5.3}$$

має нетривіальні розв'язки $\varphi_1(x),...,\varphi_m(x)$, які є лінійно незалежними при $x\in[a,b]$. Застосовуючи до них процес ортогоналізації Ґрама-Шмідта

$$v_1(x)=\varphi_1(x); \quad u_i(x)=\frac{v_i(x)}{\sqrt{\int_a^b v_i^2(x)dx}}, \quad i=\overline{1,m};$$

$$v_{i+1}(x)=\varphi_{i+1}(x)-\sum_{k=1}^{i}u_k(x)\int_a^b u_k(\xi)\varphi_{i+1}(\xi)d\xi, \quad i=\overline{1,m-1},$$

одержимо відповідну ортонормовану систему функцій $u_1(x),...,u_m(x)$ на $[a,b]$. У зв'язку з цим будемо вважати, що функції $\varphi_s(x)$, $s=\overline{1,m}$, уже є ортонормованими.

ТЕОРЕМА 4.7. *Якщо оператор L є самоспряженим, то необхідною умовою розв'язності крайової задачі*

$$Ly=f(x) \tag{5.4}$$

є ортогональність функції $f(x)$ *до всіх нетривіальних розв'язків* $\varphi_s(x)$, $s=\overline{1,m}$, *задачі (5.3).*

Доведення. Нехай $y(x)$ – розв'язок задачі (5.4). Оскільки $y(x)$ і $\varphi_s(x)$ є функціями порівняння, то на підставі (5.2)

$$\int_a^b [\varphi_s(x)\ell_n(y)-y(x)\ell_n(\varphi_s)]dx \equiv \int_a^b f(x)\varphi_s(x)dx=0, \quad s=\overline{1,m}, \tag{5.5}$$

і теорема доведена. □

Надалі вважатимемо, що умова (5.5) виконується. Покажемо, що в цьому випадку розв'язок задачі (5.4) існує і може бути побудований за допомогою відповідним чином визначеної функції Ґріна.

Зауважимо: якщо $\widetilde{y}(x)$ – розв'язок задачі (5.4), то довільна функція вигляду

$$y(x)=\widetilde{y}(x)+\sum_{s=1}^{m}C_s\varphi_s(x),$$

де C_s довільні сталі, також є розв'язком задачі (5.4). Для визначення єдиного розв'язку задачі (5.4) його потрібно піддати деяким додатковим умовам. Такими умовами є

$$\int_a^b y(x)\varphi_s(x)dx = 0, \quad s = \overline{1,m}. \tag{5.6}$$

ТЕОРЕМА 4.8. *Однорідна крайова задача (5.3),(5.6) має тільки тривіальний розв'язок.*

Доведення. Усі розв'язки задачі (5.3) можна подати у вигляді

$$y(x) = \sum_{s=1}^{m} C_s\varphi_s(x).$$

На підставі (5.6) маємо:

$$0 = \int_a^b \varphi_k(x)\sum_{s=1}^{m} C_s\varphi_s(x)dx = \sum_{s=1}^{m} C_s\int_a^b \varphi_k(x)\varphi_s(x)dx = \begin{cases} 0, & k \neq s; \\ C_s, & k = s. \end{cases}$$

Отже, всі $C_s = 0$, і теорема доведена. □

Таким чином, неоднорідна крайова задача (5.4),(5.6) має єдиний розв'язок.

Означення. Функція $G(x,\xi)$, визначена в прямокутнику $D=\{(x,\xi) \mid a \le x,\xi \le b\}$, називається ***узагальненою функцією Ґріна*** оператора L, якщо

а) $G(x,\xi)$ як функція змінної x неперервна разом з похідними до $(n–2)$-го порядку включно в області D;

б) при $x\neq\xi$ $G(x,\xi)$ має неперервні похідні до n-го порядку включно в області D і

$$\ell_n[G(x,\xi)] = -\sum_{s=1}^{m}\varphi_s(\xi)\varphi_s(x), \tag{5.7}$$

$$U_j[G(x,\xi)] = 0, \quad j = \overline{1,n}; \tag{5.8}$$

в) при $x=\xi$ її $(n–1)$-а похідна має розрив першого роду зі стрибком $p_0^{-1}(\xi)$:

$$\left.\frac{\partial^{(n-1)}G}{\partial x^{n-1}}\right|_{x=\xi_+} - \left.\frac{\partial^{(n-1)}G}{\partial x^{n-1}}\right|_{x=\xi_-} = \frac{1}{p_0(\xi)}.$$

г) $\int_a^b G(x,\xi)\varphi_s(x)dx = 0, \quad s = \overline{1,m}.$

Для побудови узагальненої функції Ґріна виберемо деякий частинний розв'язок рівняння

$$\ell_n[\omega(x,\xi)] = -\sum_{s=1}^{m}\varphi_s(\xi)\varphi_s(x),$$

наприклад, розв'язок, який справджує початкові умови $\omega(a,\xi) = \omega_0(\xi)$, … , $\omega^{(n-1)}(a,\xi) = \omega_{n-1}(\xi)$. Поряд із функціями $\varphi_s(x)$, $s = \overline{1,m}$, розглянемо лінійно незалежні розв'язки $\varphi_{m+1}(x),...,\varphi_n(x)$ рівняння $\ell_n(y) = 0$.

Шукаємо узагальнену функцію Ґріна у вигляді:

$$G(x,\xi)=\omega(x,\xi)+\overline{G}(x,\xi)=\omega(x,\xi)+\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{n}a_i(\xi)\varphi_i(x), & a\le x<\xi;\\ \sum\limits_{i=1}^{n}b_i(\xi)\varphi_i(x), & \xi<x\le b.\end{cases}\tag{5.9}$$

Тоді $\ell_n\left[\overline{G}(x,\xi)\right]=0.$ Згідно з умовами а) і в) означення

$$\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{n}\big(b_i(\xi)-a_i(\xi)\big)\varphi_i^{(r)}(\xi)=0, & r=\overline{0,n-2};\\ \sum\limits_{i=1}^{n}\big(b_i(\xi)-a_i(\xi)\big)\varphi_i^{(n-1)}(\xi)=p_0^{-1}(\xi).\end{cases}\tag{5.10}$$

Система (5.10) має єдиний розв’язок $b_i(\xi)-a_i(\xi)=c_i(\xi).$ На підставі (5.8) маємо:

$$U_{ja}\left[\omega(a,\xi)\right]+\sum_{i=1}^{n}\left\{U_{ja}\left[\varphi_i(a)\right]a_i(\xi)\right\}+U_{jb}\left[\omega(b,\xi)\right]+\sum_{i=1}^{n}\left\{U_{jb}\left[\varphi_i(b)\right]b_i(\xi)\right\}=0,$$

або, поклавши $b_i(\xi)=a_i(\xi)+c_i(\xi),$

$$\sum_{i=1}^{n}U_j\left[\varphi_i(x)\right]a_i(\xi)=-U_j\left[\omega(x,\xi)\right]-\sum_{i=1}^{n}U_{jb}\left[\varphi_i(x)\right]c_i(\xi),\quad j=\overline{1,n}.$$

Оскільки для всіх $i=\overline{1,m}$ $U_j\left[\varphi_i(x)\right]=0,$ то остання рівність запишеться у вигляді

$$\sum_{i=m+1}^{n}U_j\left[\varphi_i(x)\right]a_i(\xi)=-U_j\left[\omega(x,\xi)\right]-\sum_{i=1}^{n}U_{jb}\left[\varphi_i(x)\right]c_i(\xi),\quad j=\overline{1,n}.\tag{5.11}$$

Згідно з умовою г) означення узагальненої функції Ґріна

$$\int_a^b\omega(x,\xi)\varphi_s(x)dx+\int_a^{\xi}\varphi_s(x)\sum_{i=1}^{n}a_i(\xi)\varphi_i(x)dx+\int_{\xi}^{b}\varphi_s(x)\sum_{i=1}^{n}b_i(\xi)\varphi_i(x)dx=0,$$

або

$$\int_a^{\xi}\varphi_s(x)\sum_{i=1}^{n}a_i(\xi)\varphi_i(x)dx+\int_{\xi}^{b}\varphi_s(x)\sum_{i=1}^{n}a_i(\xi)\varphi_i(x)dx=$$

$$=\Omega_s(\xi)\equiv-\int_a^b\omega(x,\xi)\varphi_s(x)dx-\int_{\xi}^{b}\varphi_s(x)\sum_{i=1}^{n}c_i(\xi)\varphi_i(x)dx.$$

Звідси $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i(\xi)\int\limits_a^b\varphi_s(x)\varphi_i(x)dx=\Omega_s(\xi),$ або

$$a_s(\xi)+\sum_{i=m+1}^{n}a_i(\xi)\int_a^b\varphi_s(x)\varphi_i(x)dx=\Omega_s(\xi),\quad s=\overline{1,m}.\tag{5.12}$$

Вважаємо, що крайові умови занумеровані таким чином, що

$$\det\left\|U_j\left[\varphi_i(x)\right]\right\|\ne 0,\quad i,j=\overline{m+1,n}.$$

Тоді з системи (5.11),(5.12) однозначно знаходимо $a_s(\xi)$, після чого визначаємо $b_i(\xi)=a_i(\xi)+c_i(\xi)$, $i=\overline{1,n}$. Зауважимо, що функції $\varphi_{m+1}(x),...,\varphi_n(x)$ не справджують крайові умови (5.1).

Нехай узагальнена функція Ґріна $G(x,\xi)$ оператора L побудована. Тоді має силу наступна

ТЕОРЕМА 4.9. *Якщо для крайової задачі (5.4),(5.6) виконується умова (5.5), то єдиний розв'язок цієї крайової задачі дається формулою*

$$y(x)=\int_a^b G(x,\xi)f(\xi)d\xi. \tag{5.13}$$

Доведення. На підставі Теорем 4.7 і 4.8 крайова задача (5.4),(5.6) при виконанні умови (5.5) має єдиний розв'язок. Проводячи відносно функції (5.13) міркування, аналогічні наведеним у доведенні теореми 4.5, з урахуванням (5.7) одержимо:

$$\ell_n(y)=f(x)+\int_a^b \ell_n\left[G(x,\xi)\right]f(\xi)d\xi=f(x)-\int_a^b f(\xi)\sum_{s=1}^m \varphi_s(\xi)\varphi_s(x)d\xi=f(x)$$

згідно (5.5), а з урахуванням (5.8)

$$U_j\left[\int_a^b G(x,\xi)f(\xi)d\xi\right]=\int_a^b U_j\left[G(x,\xi)\right]f(\xi)d\xi=0,\quad j=\overline{1,n}.$$

Отже, функція (5.13) є розв'язком рівняння $\ell_n(y)=f(x)$ і справджує крайові умови (5.1). Покажемо, що для функції (5.13) виконується умова (5.6):

$$\int_a^b y(x)\varphi_s(x)dx=\int_a^b\int_a^b G(x,\xi)f(\xi)\varphi_s(x)d\xi dx=0,\quad s=\overline{1,m},$$

згідно з умовою г) означення узагальненої функції Ґріна, і теорема доведена. □

ПРИКЛАД 1. Побудувати узагальнену функцію Ґріна для диференціального оператора L, породженого диференціальним виразом $\ell_2(y)\equiv y''(x)$ та крайовими умовами $y(a)-y(b)=0$, $y'(a)-y'(b)=0$, де $b>a$.

Розв'язання. Для однорідного рівняння $\ell_2(\varphi)=0$ маємо: $\varphi(x)=C_1x+C_2$. Згідно крайових умов $C_1=0$. Отже, $\varphi(x)=C_2$. Нормуємо:

$$\int_a^b \varphi^2(x)dx=1\Rightarrow C_2=\frac{1}{\sqrt{b-a}}\Rightarrow\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{b-a}}.$$

Розв'язок крайової задачі $Ly=f(x)$ є єдиним при виконанні умов (5.5) та (5.6):

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx=0,\ \int_a^b y(x)\varphi(x)dx=0.$$

Будуємо узагальнену функцію Ґріна.

$$\ell_2\left[\omega(x,\xi)\right]=-\varphi(x)\varphi(\xi)=-\frac{1}{b-a}\Rightarrow\omega(x,\xi)=-\frac{x^2}{2(b-a)}+C_1x+C_2.$$

Покладемо $C_1 = C_2 = 0$, тоді $\omega(x,\xi) = -\dfrac{x^2}{2(b-a)}$ і

$$G(x,\xi) = -\frac{x^2}{2(b-a)} + \begin{cases} (b-a)^{-\frac{1}{2}} a_i(\xi) + a_2(\xi)x, & a \le x < \xi; \\ (b-a)^{-\frac{1}{2}} b_i(\xi) + b_2(\xi)x, & \xi < x \le b. \end{cases}$$

Позначимо через $c_i(\xi) = b_i(\xi) - a_i(\xi)$, $i = 1,2$. Тоді система (5.10) запишеться у вигляді

$$\begin{cases} (b-a)^{-\frac{1}{2}} c_1(\xi) + \xi c_2(\xi) = 0; \\ c_2(\xi) = 1, \end{cases}$$

звідки $c_2(\xi) = 1$, $c_1(\xi) = -\xi\sqrt{b-a}$. Тоді $b_1(\xi) = a_1(\xi) - \xi\sqrt{b-a}$, $b_2(\xi) = a_2(\xi) + 1$.

Із крайових умов для $G(x,\xi)$ маємо:

$$\begin{cases} \dfrac{a^2}{2(a-b)} + \dfrac{a_1(\xi)}{\sqrt{b-a}} + a \cdot a_2(\xi) = \dfrac{b^2}{2(a-b)} + \dfrac{b_1(\xi)}{\sqrt{b-a}} + b \cdot b_2(\xi); \\ \dfrac{a}{a-b} + a_2(\xi) = \dfrac{b}{a-b} + b_2(\xi). \end{cases}$$

Звідси $a_2(\xi) = \dfrac{\xi}{b-a} - \dfrac{1}{2}$, $b_2(\xi) = \dfrac{\xi}{b-a} + \dfrac{1}{2}$. Із умови ортогональності г) означення узагальненої функції Ґріна маємо:

$$\int_a^b \frac{x^2}{2(a-b)} \cdot \frac{1}{\sqrt{b-a}} dx + a_1(\xi)\int_a^\xi \frac{dx}{b-a} + a_2(\xi)\int_a^\xi \frac{xdx}{\sqrt{b-a}} + b_1(\xi)\int_\xi^b \frac{dx}{b-a} + b_2(\xi)\int_\xi^b \frac{xdx}{\sqrt{b-a}} = 0.$$

Після обчислення всіх інтегралів визначаємо:

$$a_1(\xi) = \frac{1}{2\sqrt{b-a}}\left[(b-a)\xi - \xi^2 - \frac{(b-a)^2}{6}\right],\ b_1(\xi) = \frac{1}{2\sqrt{b-a}}\left[(a-b)\xi - \xi^2 - \frac{(b-a)^2}{6}\right].$$

Підклавши знайдені коефіцієнти у вираз для $G(x,\xi)$, одержимо:

$$G(x,\xi) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left[\xi - x - \dfrac{(x-\xi)^2}{b-a} - \dfrac{b-a}{6}\right], & a \le x < \xi; \\ \dfrac{1}{2}\left[x - \xi - \dfrac{(x-\xi)^2}{b-a} - \dfrac{b-a}{6}\right], & \xi < x \le b. \end{cases} \tag{5.14}$$

Покажемо, що вигляд узагальненої функції Ґріна не залежить від вибору частинного розв'язку $\omega(x,\xi)$ рівняння $\ell_2[\omega(x,\xi)] = -\varphi(x)\varphi(\xi)$. Візьмемо частинний розв'язок цього рівняння у вигляді

$$\omega(x,\xi) = -\frac{x^2}{2(b-a)} + x.$$

Тоді

$$G(x,\xi)=-\frac{x^2}{2(b-a)}+x+\begin{cases}(b-a)^{-\frac{1}{2}}a_i(\xi)+a_2(\xi)x, & a\le x<\xi;\\ (b-a)^{-\frac{1}{2}}b_i(\xi)+b_2(\xi)x, & \xi<x\le b.\end{cases}$$

Очевидно, що система (5.10) матиме аналогічний до попереднього випадку вигляд, тому $b_1(\xi)=a_1(\xi)-\xi\sqrt{b-a}$, $b_2(\xi)=a_2(\xi)+1$. Крайові умови дають:

$$\begin{cases}\dfrac{a^2}{2(a-b)}+a+\dfrac{a_1(\xi)}{\sqrt{b-a}}+a\cdot a_2(\xi)=\dfrac{b^2}{2(a-b)}+b+\dfrac{b_1(\xi)}{\sqrt{b-a}}+b\cdot b_2(\xi);\\ \dfrac{a}{a-b}+a_2(\xi)=\dfrac{b}{a-b}+b_2(\xi),\end{cases}$$

звідки $a_2(\xi)=\dfrac{\xi}{b-a}-\dfrac{3}{2}$, $b_2(\xi)=\dfrac{\xi}{b-a}-\dfrac{1}{2}$. Із умови ортогональності

$$\frac{1}{\sqrt{b-a}}\int_a^b\left(x-\frac{x^2}{2(a-b)}\right)dx+a_1(\xi)\int_a^\xi\frac{dx}{b-a}+a_2(\xi)\int_a^\xi\frac{xdx}{\sqrt{b-a}}+$$
$$+b_1(\xi)\int_\xi^b\frac{dx}{b-a}+b_2(\xi)\int_\xi^b\frac{xdx}{\sqrt{b-a}}=0.$$

Після обчислення всіх інтегралів визначаємо:

$$a_1(\xi)=\frac{1}{2\sqrt{b-a}}\left[(b-a)\xi-\xi^2-\frac{(b-a)^2}{6}\right],\ b_1(\xi)=\frac{1}{2\sqrt{b-a}}\left[(a-b)\xi-\xi^2-\frac{(b-a)^2}{6}\right].$$

Підклавши знайдені коефіцієнти у вираз для $G(x,\xi)$, одержимо узагальнену функцію Ґріна у тому ж вигляді (5.14).

ПРИКЛАД 2. За допомогою узагальненої функції Ґріна побудувати розв'язок крайової задачі

$$y''(x)=\cos\tfrac{2\pi x}{b-a},\quad x\in(a,b);$$
$$y(a)-y(b)=0,\quad y'(a)-y'(b)=0.$$

Розв'язання. Перевіряємо виконання необхідної умови (5.5) розв'язності крайової задачі:

$$\int_a^b\frac{1}{\sqrt{b-a}}\cos\tfrac{2\pi x}{b-a}dx=\frac{\sqrt{b-a}}{\pi}\cos\tfrac{\pi(a+b)}{b-a}\sin\pi=0.$$

Тоді згідно з Теоремою 4.9 єдиний розв'язок крайової задачі, який справджує умову (5.6), дається формулою (5.13), де $G(x,\xi)$ має вигляд (5.14). Отже,

$$y(x)=\int_a^b G(x,\xi)\cos\tfrac{2\pi\xi}{b-a}d\xi=\frac{1}{2}\int_a^x\left[x-\xi-\frac{(x-\xi)^2}{b-a}-\frac{b-a}{6}\right]\cos\tfrac{2\pi\xi}{b-a}d\xi+$$
$$+\frac{1}{2}\int_x^b\left[\xi-x-\frac{(x-\xi)^2}{b-a}-\frac{b-a}{6}\right]\cos\tfrac{2\pi\xi}{b-a}d\xi=-\frac{(b-a)^2}{4\pi^2}\cos\tfrac{2\pi x}{b-a}.$$

§4.6. Матриця Ґріна

Розглянемо крайову задачу для системи диференціальних рівнянь

$$\boldsymbol{Y}'(x)=\boldsymbol{P}(x)\boldsymbol{Y}(x),\quad x\in(a,b),\tag{6.1}$$

де $\boldsymbol{Y}(x)=\begin{pmatrix}y_1(x) & \dots & y_n(x)\end{pmatrix}$ − вектор-функція, а $\boldsymbol{P}(x)=\|p_{ij}(x)\|$ − матриця розмірності $n\times n$ із неперервними при $x\in(a,b)$ елементами. Будемо вважати, що $y_i(x)\in C^1_{[a,b]}$, $i=\overline{1,n},$ і складемо однорідні крайові умови

$$\boldsymbol{U}(\boldsymbol{Y})\equiv\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}(a)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{Y}(b)=0,\tag{6.2}$$

де $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{Y})=\begin{pmatrix}\boldsymbol{U}_1(\boldsymbol{Y}) & \dots & \boldsymbol{U}_n(\boldsymbol{Y})\end{pmatrix}$, а $\boldsymbol{A}=\|\alpha_{ij}\|$ і $\boldsymbol{B}=\|\beta_{ij}\|$ − матриці розмірності $n\times n$ зі сталими елементами, тоді

$$\boldsymbol{U}_i(\boldsymbol{Y})\equiv\sum_{j=1}^{n}[\alpha_{ij}y_j(a)+\beta_{ij}y_j(b)],\quad i=\overline{1,n}.$$

Означення. Матриця

$$\boldsymbol{G}(x,\xi)=\begin{pmatrix}g_{1,1}(x,\xi) & \dots & g_{1,n}(x,\xi)\\ & \dots & \\ g_{n,1}(x,\xi) & \dots & g_{n,n}(x,\xi)\end{pmatrix}\tag{6.3}$$

називається ***матрицею Ґріна*** крайової задачі (6.1),(6.2), якщо її n рядків утворюють фундаментальну систему частинних розв'язків системи (6.1), причому для довільного ξ її елементи як функції змінної x справджують крайові умови (6.2), а при $x=\xi$ виконується умова «стрибка» у вигляді

$$\boldsymbol{G}(\xi_+,\xi)-\boldsymbol{G}(\xi_-,\xi)=\boldsymbol{E},\tag{6.4}$$

де $\boldsymbol{E}$ − одинична матриця.

Із означення випливає, що матриця Ґріна (6.3) як функція змінної x повинна бути розв'язком однорідної системи

$$\boldsymbol{G}'_x(x,\xi)=\boldsymbol{P}(x)\boldsymbol{G}(x,\xi)\tag{6.5}$$

і справджувати крайові умови (6.2), тобто

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}(a,\xi)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{G}(b,\xi)=0.\tag{6.6}$$

Наведемо деякі інші властивості матриці Ґріна.

1. Матриця Ґріна існує тоді й тільки тоді, коли однорідна задача (6.1),(6.2) має тільки тривіальний розв'язок, причому в цьому випадку існує єдина матриця Ґріна.
2. Розв'язок крайової задачі для відповідної до (6.1) неоднорідної системи

$$\boldsymbol{Y}'(x)=\boldsymbol{P}(x)\boldsymbol{Y}(x)+\boldsymbol{F}(x),\tag{6.7}$$

де $\boldsymbol{F}(x)=\begin{pmatrix}f_1(x) & \dots & f_n(x)\end{pmatrix}$ − вектор-функція з неперервними при $x\in(a,b)$ елементами, з крайовими умовами (6.2), дається формулою

$$\boldsymbol{Y}(x)=\int_a^b\boldsymbol{G}(x,\xi)\boldsymbol{F}(\xi)d\xi\tag{6.8}$$

або

$$y_i(x) = \sum_{j=1}^{n} \int_a^b g_{ij}(x,\xi) f_j(\xi) d\xi, \quad i = \overline{1,n}.$$

3. Якщо $\boldsymbol{G}(x,\xi)$ − матриця Ґріна задачі (6.1),(6.2), то матриця $\boldsymbol{G}^T(\xi,x)$ є матрицею Ґріна спряженої крайової задачі.

Якщо матриця Ґріна задачі (6.1),(6.2) існує, то всі її елементи можна однозначно визначити з умов (6.4), (6.5) та (6.6).

ПРИКЛАД. За допомогою матриці Ґріна побудувати розв'язок крайової задачі

$$\begin{cases} y_1'(x) = y_2 + 1, \\ y_2'(x) = y_1, \end{cases} \quad x \in (0;1); \quad y_1(1) = 0, \quad y_2(0) = 0. \tag{6.9}$$

Розв'язання. Загальний розв'язок відповідної до (6.9) однорідної системи є $y_1(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$, $y_2(x) = C_1 e^x - C_2 e^{-x}$. На підставі заданих крайових умов $C_1 = C_2 = 0$, отже, матриця Ґріна (6.3) існує і визначається однозначно. Для її побудови використаємо властивості (6.4), (6.5) та (6.6).

1. $\boldsymbol{G}(x,\xi)$ є розв'язком відповідної до (6.9) однорідної системи, тому шукаємо її у вигляді

$$\boldsymbol{G}(x,\xi) = \begin{bmatrix} g_{1,1} = \begin{cases} a_1(\xi)e^x + a_2(\xi)e^{-x}, & 0 \le x < \xi, \\ b_1(\xi)e^x + b_2(\xi)e^{-x}, & \xi < x \le 1; \end{cases} & g_{1,2} = \begin{cases} a_3(\xi)e^x + a_4(\xi)e^{-x}, & 0 \le x < \xi, \\ b_3(\xi)e^x + b_4(\xi)e^{-x}, & \xi < x \le 1; \end{cases} \\ g_{2,1} = \begin{cases} a_1(\xi)e^x - a_2(\xi)e^{-x}, & 0 \le x < \xi, \\ b_1(\xi)e^x - b_2(\xi)e^{-x}, & \xi < x \le 1; \end{cases} & g_{2,2} = \begin{cases} a_3(\xi)e^x - a_4(\xi)e^{-x}, & 0 \le x < \xi, \\ b_3(\xi)e^x - b_4(\xi)e^{-x}, & \xi < x \le 1 \end{cases} \end{bmatrix}.$$

2. Із крайових умов одержимо:

$$g_{1,1}(1,\xi) = g_{1,2}(1,\xi) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} b_1 e + b_2 e^{-1} = 0, \\ b_3 e + b_4 e^{-1} = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} b_2 = -b_1 e^2, \\ b_4 = -b_3 e^2; \end{cases}$$

$$g_{2,1}(0,\xi) = g_{2,2}(0,\xi) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a_1 - a_2 = 0, \\ a_3 - a_4 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a_1 = a_2, \\ a_3 = a_4. \end{cases}$$

Отже,

$$\boldsymbol{G}(x,\xi) = \begin{bmatrix} g_{1,1} = \begin{cases} a_1(\xi)(e^x + e^{-x}), & 0 \le x < \xi, \\ b_1(\xi)(e^x - e^{2-x}, & \xi < x \le 1; \end{cases} & g_{1,2} = \begin{cases} a_3(\xi)(e^x + e^{-x}), & 0 \le x < \xi, \\ b_3(\xi)(e^x - e^{2-x}), & \xi < x \le 1; \end{cases} \\ g_{2,1} = \begin{cases} a_1(\xi)(e^x - e^{-x}), & 0 \le x < \xi, \\ b_1(\xi)(e^x + e^{2-x}), & \xi < x \le 1; \end{cases} & g_{2,2} = \begin{cases} a_3(\xi)(e^x - e^{-x}), & 0 \le x < \xi, \\ b_3(\xi)(e^x + e^{2-x}), & \xi < x \le 1 \end{cases} \end{bmatrix}.$$

3. Умову «стрибка» (6.4) запишемо у вигляді

$$\frac{\partial g_{ij}(\xi_+,\xi)}{\partial x}-\frac{\partial g_{ij}(\xi_-,\xi)}{\partial x}=\begin{cases}1, & i=j;\\ 0, & i\neq j.\end{cases}$$

Тоді маємо:

$$\begin{cases}b_1(\xi)(e^{\xi}-e^{2-\xi})-a_1(\xi)(e^{\xi}+e^{-\xi})=1,\\ b_1(\xi)(e^{\xi}+e^{2-\xi})-a_1(\xi)(e^{\xi}-e^{-\xi})=0\end{cases}\Rightarrow\quad a_1(\xi)=-\frac{e^{\xi}+e^{2-\xi}}{2(1+e^2)},\quad b_1(\xi)=\frac{e^{-\xi}-e^{\xi}}{2(1+e^2)};$$

$$\begin{cases}b_3(\xi)(e^{\xi}-e^{2-\xi})-a_3(\xi)(e^{\xi}+e^{-\xi})=0,\\ b_3(\xi)(e^{\xi}+e^{2-\xi})-a_3(\xi)(e^{\xi}-e^{-\xi})=1\end{cases}\Rightarrow\quad a_3(\xi)=\frac{e^{\xi}-e^{2-\xi}}{2(1+e^2)},\quad b_3(\xi)=\frac{e^{\xi}+e^{-\xi}}{2(1+e^2)},$$

і матриця Ґріна запишеться у вигляді $\boldsymbol{G}(x,\xi)=\begin{cases}\boldsymbol{G}_1(x,\xi), & 0\le x<\xi;\\ \boldsymbol{G}_2(x,\xi), & \xi<x\le 1,\end{cases}$ де

$$\boldsymbol{G}_1(x,\xi)=\begin{pmatrix}-\dfrac{e^{\xi}+e^{2-\xi}}{2(1+e^2)}(e^{x}+e^{-x}) & \dfrac{e^{\xi}-e^{2-\xi}}{2(1+e^2)}(e^{x}+e^{-x})\\ -\dfrac{e^{\xi}+e^{2-\xi}}{2(1+e^2)}(e^{x}-e^{-x}) & \dfrac{e^{\xi}-e^{2-\xi}}{2(1+e^2)}(e^{x}-e^{-x})\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{G}_2(x,\xi)=\begin{pmatrix}\dfrac{e^{\xi}-e^{-\xi}}{2(1+e^2)}(e^{x}-e^{2-x}) & \dfrac{e^{\xi}+e^{-\xi}}{2(1+e^2)}(e^{x}-e^{2-x})\\ -\dfrac{e^{\xi}-e^{-\xi}}{2(1+e^2)}(e^{x}+e^{2-x}) & \dfrac{e^{\xi}+e^{-\xi}}{2(1+e^2)}(e^{x}+e^{2-x})\end{pmatrix}.$$

Для побудови розв’язку крайової задачі (6.9) застосуємо формулу (6.8). Враховуючи, що в нашому випадку $\boldsymbol{F}(x)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, отримаємо:

$$\boldsymbol{Y}(x)=\begin{pmatrix}y_1(x)\\ y_2(x)\end{pmatrix}=\int_0^1\boldsymbol{G}(x,\xi)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}d\xi=\int_0^x\boldsymbol{G}_2(x,\xi)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}d\xi+\int_x^1\boldsymbol{G}_1(x,\xi)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}d\xi.$$

Звідси

$$y_1(x)=\frac{e^{x}-e^{2-x}}{2(1+e^2)}\int_0^x(e^{-\xi}-e^{\xi})d\xi-\frac{e^{x}+e^{-x}}{2(1+e^2)}\int_x^1(e^{\xi}+e^{2-\xi})d\xi=\frac{e^{x}-e^{2-x}}{1+e^2},$$

$$y_2(x)=\frac{e^{x}+e^{2-x}}{2(1+e^2)}\int_0^x(e^{-\xi}-e^{\xi})d\xi-\frac{e^{x}-e^{-x}}{2(1+e^2)}\int_x^1(e^{\xi}+e^{2-\xi})d\xi=\frac{e^{x}+e^{2-x}}{1+e^2}-1,$$

що співпадає з точним розв’язком задачі.

§4.7. Зведення крайових задач, залежних від параметра, до інтегральних рівнянь. Метод послідовних наближень для інтегральних рівнянь

Розглянемо операторне рівняння

$$Ly=\lambda y+f(x), \tag{7.1}$$

де λ – параметр, еквівалентне крайовій задачі

$$\ell_n(y)\equiv\sum_{k=0}^{n}p_k(x)y^{(n-k)}(x)=\lambda y+f(x),\quad x\in(a,b);$$

$$U_j(y)\equiv\sum_{s=0}^{n-1}\left(\alpha_{s,j}y^{(s)}(a)+\beta_{s,j}y^{(s)}(b)\right)=0,\quad j=\overline{1,n}.$$

де $f(x)\in C_{(a,b)}$. Припустимо, що рівняння $Ly=0$ має тільки тривіальний розв'язок. Тоді оператор L має обернений L^{-1}, і на підставі (7.1) одержимо

$$L^{-1}Ly=L^{-1}\lambda y+L^{-1}f(x),$$

або

$$y=L^{-1}\lambda y+L^{-1}f(x). \tag{7.2}$$

Згідно з Теоремою 4.5

$$L^{-1}y=\int_a^b y(\xi)G(x,\xi)d\xi,\qquad L^{-1}f(x)=\int_a^b f(\xi)G(x,\xi)d\xi.$$

Введемо позначення: $\varphi(x)=L^{-1}f(x)$ (відома функція). Тоді на підставі (7.2)

$$y(x)=\lambda\int_a^b y(\xi)G(x,\xi)d\xi+\varphi(x). \tag{7.3}$$

Співвідношення (7.3) є ***інтегральне рівняння*** типу Фредгольма другого роду, еквівалентне операторному рівнянню (7.1). Тут ядром інтегрального рівняння є функція Ґріна диференціального оператора L, а функція $\varphi(x)$ називається вільним членом інтегрального рівняння. Ті комплексні значення параметра λ, при яких відповідне до (7.3) однорідне (при $\varphi(x)\equiv0$) інтегральне рівняння має нетривіальні розв'язки, називаються ***характеристичними числами*** ядра $G(x,\xi)$, а відповідні нетривіальні розв'язки – ***власними функціями*** цього ядра. Легко бачити, що характеристичні числа ядра $G(x,\xi)$ співпадають із власними значеннями оператора L і обернені до власних значень оператора L^{-1}, але при цьому відповідні власні функції не змінюються.

Подання задачі (7.1) у вигляді (7.3) широко використовується при побудові різноманітних алгоритмів наближеного інтегрування крайових задач.

Аналогічним чином крайова задача $Ly=\lambda g(y)+f(x)$ може бути зведена до нелінійного інтегрального рівняння

$$y(x)=\lambda\int_a^b g\left[y(\xi)\right]G(x,\xi)d\xi+\varphi(x).$$

Якщо $g(y)$ є лінійний диференціальний вираз $\ell_k(y)$ $(k<n)$, то аналогічним шляхом одержимо лінійне інтегральне рівняння, в якому під знаком інтеграла будуть похідні. Таке рівняння називають ***інтегро-диференціальним***.

Будемо шукати розв'язок рівняння (7.3) за допомогою методу послідовних наближень. Задля зручності запишемо рівняння (7.3) у вигляді

$$y(x) = \lambda K y + \varphi, \quad K \equiv L^{-1}. \tag{7.4}$$

Візьмемо за початкове наближення $y_0 = \varphi$, а наступні ітерації шукатимемо шляхом послідовних наближень згідно з формулою

$$y_{p+1} = \lambda K y_p + \varphi, \quad p = 1,2,3,... \tag{7.5}$$

Покажемо, що ітерації (7.5) можна шукати у вигляді

$$y_p = \sum_{n=0}^{p} \lambda^n K^n \varphi, \quad p = \overline{0,\infty}, \tag{7.6}$$

де $K^n\varphi = K\left(K^{n-1}\varphi\right)$ – степені оператора *K*, причому $K^0\varphi = \varphi$, $K^1\varphi = K\varphi$ тощо.

Справді, при p=0 формула (7.6) вірна: y_0 =φ. Припускаючи, що формула (7.6) справджується для деякого $p > 0$, на підставі (7.5) одержимо:

$$y_{p+1} = \lambda K y_p + \varphi = \lambda K \sum_{n=0}^{p} \lambda^n K^n \varphi + \varphi = \sum_{n=1}^{p+1} \lambda^n K^n \varphi + \lambda^0 K^0 \varphi = \sum_{n=0}^{p+1} \lambda^n K^n \varphi,$$

звідки згідно з методом математичної індукції робимо висновок, що формула (7.6) справджується для довільного натурального *p*.

Спрямувавши в (7.6) $p \to \infty$, одержимо ряд

$$y_p \to \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n K^n \varphi, \tag{7.7}$$

який називається ***рядом Неймана***.

Введемо позначення:

$$M = \max_{a \le x,\xi \le b} \left|G(x,\xi)\right|, \quad V = b - a.$$

Тоді має силу

ТЕОРЕМА 4.10 ***(про збіжність методу послідовних наближень).*** *Якщо $\varphi(x) \in C_{[a,b]}$, то при $|\lambda| < (MV)^{-1}$ ряд Неймана (7.7) збігається регулярно на проміжку $x \in [a,b]$ і визначає єдиний розв'язок $y(x) \in C_{[a,b]}$ інтегрального рівняння (1.4), тобто послідовні наближення $y_p(x)$ при $p \to \infty$ рівномірно прямують до єдиного регулярного розв'язку рівняння (7.4).*

Доведення. Якщо $\varphi(x) \in C_{[a,b]}$, то й ітерації цієї функції $K^n\varphi$ будуть неперервними функціями на проміжку $x \in [a,b]$, причому справджуватиметься нерівність

$$\|K\varphi\| \equiv \max_{a \le x \le b} |K\varphi| = \max_{a \le x \le b} \left| \int_a^b \varphi(\xi) G(x,\xi) d\xi \right| \le MV \cdot \max_{a \le x \le b} |\varphi(x)| \equiv MV \|\varphi\|.$$

Тоді

$$\left\|K^n\varphi\right\| = \left\|K\left(K^{n-1}\varphi\right)\right\| \le MV \left\|K^{n-1}\varphi\right\| \le (MV)^2 \left\|K^{n-2}\varphi\right\| \le ... \le (MV)^n \|\varphi\|,$$

тобто

$$\left\|K^n\varphi\right\| \le (MV)^n\|\varphi\|, \quad n = 0,1,2,... \tag{7.8}$$

З останньої оцінки випливає, що ряд Неймана (7.7) мажорується числовим рядом

$$\|\varphi\|\sum_{n=0}^{\infty}|\lambda|^n(MV)^n = \frac{\|\varphi\|}{1-|\lambda|MV},$$

який збігається в крузі $|\lambda| < (MV)^{-1}$. Тому для цих λ ряд Неймана (7.7) збігається регулярно на проміжку $x \in [a,b]$ і визначає деяку неперервну на цьому проміжку функцію $y(x)$. Отже, при $p \to \infty$ послідовні наближення $y_p(x)$ рівномірно прямують до функції $y(x)$, причому справджується оцінка:

$$\|y\| \le \frac{\|\varphi\|}{1-|\lambda|MV}.$$

Покажемо, що функція $y(x)$ є розв'язком інтегрального рівняння (7.4). Для цього перейдемо в рекурентній формулі (7.5) до границі при $p \to \infty$ і скористаємося рівномірною збіжністю послідовності $\{y_p(x)\}$:

$$y(x) = \lim_{p\to\infty} y_p(x) = \lambda\int_a^b G(x,\xi)\cdot \lim_{p\to\infty} y_{p-1}(\xi)d\xi + \varphi(x) = \lambda\int_a^b G(x,\xi)y(\xi)d\xi + \varphi(x).$$

Покажемо, нарешті, що функція $y(x)$ є єдиним розв'язком інтегрального рівняння (7.4). Для цього достатньо показати (див. теорему 4.3), що однорідне рівняння $y = \lambda Ky$ в класі неперервних на проміжку $x \in [a,b]$ функцій має тільки тривіальний розв'язок. Справді, для будь-якого розв'язку $y_0(x)$ наведеного однорідного рівняння, враховуючи (7.8), одержимо оцінку:

$$\|y_0\| = |\lambda|\cdot\|Ky_0\| \le |\lambda|MV\|y_0\|,$$

звідки при $|\lambda|MV < 1$ маємо $\|y_0\| = 0$, тобто $y_0(x) \equiv 0$. □

ПРИКЛАД. Звівши крайову задачу до інтегрального рівняння, застосувати метод послідовних наближень:

$$\begin{gathered} y'' = \lambda y + 2, \quad x \in (0;1); \\ y(0) = 0, \quad y'(1) = 0. \end{gathered} \tag{7.9}$$

Розв'язання. Зведемо задачу до еквівалентного інтегрального рівняння вигляду (7.3). Спочатку побудуємо функцію Ґріна у симетричному вигляді, адже крайова задача (7.9) є самоспряженою (перевірити!):

$$G(x,\xi) = \begin{cases} A + B\xi + (C + D\xi)x, & 0 \le x < \xi; \\ A + Bx + (C + Dx)\xi, & \xi < x \le 1. \end{cases}$$

Шукаючи невідомі коефіцієнти аналогічно до прикладу з §4.4, одержимо:

$$G(x,\xi) = \begin{cases} -x, & 0 \le x < \xi; \\ -\xi, & \xi < x \le 1. \end{cases}$$

Далі знаходимо:

$$\varphi(x)=\int_0^1 G(x,\xi)\cdot 2d\xi = x^2-2x,\quad M=\max_{0\le x,\xi\le 1}\left|G(x,\xi)\right|=1,\quad V=1.$$

Отже, еквівалентне інтегральне рівняння для крайової задачі (7.9) запишеться у вигляді

$$y(x)=\lambda\int_0^1 y(\xi)G(x,\xi)d\xi + x^2-2x. \tag{7.10}$$

Візьмемо за початкове наближення $y_0=\varphi(x)\equiv x^2-2x.$ Для побудови першої ітерації використаємо рекурентну формулу (7.5):

$$y_1=\lambda K y_0+\varphi=\lambda\int_0^1\left(\xi^2-2\xi\right)G(x,\xi)d\xi + x^2-2x=\frac{\lambda}{12}\left(x^4-4x^3+8x\right)+x^2-2x.$$

Наступне наближення побудуємо за допомогою формули (7.6):

$$y_2=\sum_{n=0}^{2}\lambda^n K^n\varphi=\varphi+\lambda K\varphi+\lambda^2K^2\varphi=y_1+\lambda^2K(Ky_0)=y_1+\frac{\lambda^2}{12}\int_0^1\left(\xi^4-4\xi^3+8\xi\right)G(x,\xi)d\xi.$$

Виконавши всі обчислення та підкладання, одержимо:

$$y_2=\frac{\lambda^2}{360}\left(x^6-6x^5+40x^3-96x\right)+\frac{\lambda}{12}\left(x^4-4x^3+8x\right)+x^2-2x.$$

Задля унаочнення результатів складемо для значення параметру $\lambda=-\pi^2/16$ таблицю значень точного розв’язку крайової задачі (7.9)

$$y(x)=\frac{32}{\pi^2}\left(1-\cos\frac{\pi x}{4}-\sin\frac{\pi x}{4}\right)$$

та знайдених послідовних наближень y_0, y_1, y_2 на проміжку $x\in[0;1]$ з кроком h=0,1 (таблиця 3):

x	$y(x)$	y_0	y_1	y_2
0	0	0	0	0
0,1	-0,244392	-0,19	-0,230922	-0,235954
0,2	-0,467286	-0,36	-0,440684	-0,450494
0,3	-0,667310	-0,51	-0,628235	-0,642326
0,4	-0,843231	-0,64	-0,792650	-0,810292
0,5	-0,993962	-0,75	-0,933127	-0,953375
0,6	-1,118576	-0,84	-1,048989	-1,070708
0,7	-1,216304	-0,91	-1,139679	-1,161579
0,8	-1,286543	-0,96	-1,204766	-1,225439
0,9	-1,328861	-0,99	-1,243942	-1,261902
1	-1,342996	-1	-1,257021	-1,270761

Оскільки значення $\lambda=-\pi^2/16$ справджує умову $\left|\lambda\right|<(MV)^{-1}\equiv 1$, то згідно з доведеною вище теоремою ітерації методу послідовних наближень повинні рівномірно прямувати до єдиного регулярного на проміжку $x\in[0;1]$ розв’язку інтегрального рівняння (7.10), а отже, й крайової задачі (7.9). Із наведеної таблиці видно, що кожне наступне наближення справді дає значення, дедалі ближчі до точного розв'язку $y(x)$, причому різниця $\left|y_{p+1} - y_p\right|$ з ростом p постійно зменшується, тобто збіжність є рівномірною.

ВПРАВИ ДО РОЗДІЛУ IV

1. Побудувати функцію Ґріна лінійного диференціального оператора, породженого заданими лінійним диференціальним виразом і крайовими умовами:

а) $\ell_2(y) = y'' + n^2 y, \quad n \in \mathrm{N}, \quad y = y(x), \quad x \in (0;l);$
$y(0) - y(l) = 0, \quad y'(0) - y'(l) = 0.$

б) $\ell_2(y) = \left[-f_1(x)y'(x)\right]', \quad x \in (0;l);$
$y(0) = 0, \quad y(l) + Cy'(l) = 0, \quad C = const \neq 0.$

в) $\ell_3(y) = y''' - y'' + 4y' - 4y, \quad y = y(x), \quad x \in (0;1);$
$y(0) = y''(0) = 0, \quad y'(1) = 0.$

г) $\ell_3(y) = y''' + y'' 2\operatorname{tg} 2x, \quad y = y(x), \quad x \in (0;1);$
$y(0) = y'(0) = 0, \quad y''(1) = 0.$

д) $\ell_4(y) = y^{(4)} - n^4 y, \quad n \in \mathrm{N}, \quad y = y(x), \quad x \in (0;l);$
$y(0) = y''(0) = 0, \quad y(l) = y''(l) = 0.$

е) $\ell_4(y) = \left[f_2(x)y''(x)\right]'', \quad x \in (0;l);$
$y(0) = y'(0) = 0, \quad y''(l) = y'''(l) = 0.$

2. Методом функції Ґріна розв'язати крайові задачі:

а) $x^2 y'' + xy' - 4y = 34x^3, \quad y = y(x), \quad x \in (1;2);$
$y(1) = 0, \quad y'(2) = 0.$

б) $y'' - 4y = 49e^{2x}, \quad y = y(x), \quad x \in (0;\ln 2);$
$y(0) = y'(0), \quad y(\ln 2) = 0.$

в) $\left[-(x+1)y'(x)\right]' = 1, \quad x \in (0;1);$
$y(0) = 0, \quad y(1) + 2y'(1) = 0.$

г) $\begin{array}{l} y^{(4)} + y'' = \sin x - \cos x, \quad y = y(x), \quad x \in (0;\pi); \\ y(0) = y'(0) = y''(0) = 0, \quad y'(\pi) = y''(\pi). \end{array}$

3. Побудувати узагальнену функцію Ґріна для оператора L, породженого
   а) лінійним диференціальним виразом $\ell_2(y) = y'' + y$ і крайовими умовами
   $y(0) + y(\pi) = 0, \quad y'(0) + y'(\pi) = 0.$

   б) лінійним диференціальним виразом $\ell_2(y) = y'' - y$ і крайовими умовами
   $y(0) - y'(0) = 0, \quad y(1) - y'(1) = 0.$

   в) лінійним диференціальним виразом $\ell_4(y) = y^{(4)}$ і крайовими умовами
   $y^{(s)}(a) - y^{(s)}(b) = 0, \quad s = \overline{0,3} \quad (b > a).$

4. За допомогою узагальненої функції Ґріна побудувати розв'язок крайової задачі при додаткових умовах (5.6):

   а) $\begin{array}{l} y''(x) = 3x^2 + 2x - 10, \quad x \in (1;2); \\ y(1) - y(2) = 0, \quad y'(1) - y'(2) = 0. \end{array}$

   Вказівка: використати узагальнену функцію Ґріна у вигляді (5.14).

   б) $\begin{array}{l} y'' - y(x) = \pi\cos\pi x + \sin\pi x, \quad x \in (0;1); \\ y(0) - y'(0) = 0, \quad y(1) - y'(1) = 0. \end{array}$

   в) $\begin{array}{l} y'' + y(x) = x^2 - \pi x + 2, \quad x \in (0;\pi); \\ y(0) + y(\pi) = 0, \quad y'(0) + y'(\pi) = 0. \end{array}$

   г) $\begin{array}{l} y^{(4)} = \dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} b - \operatorname{sh} a} - (b-a)^{-1}, \quad x \in (a,b); \\ y(a) = y(b), \quad y'(a) = y'(b), \quad y''(a) = y''(b), \quad y'''(a) = y'''(b). \end{array}$

5. За допомогою матриці Ґріна побудувати розв'язки крайових задач для систем диференціальних рівнянь:

   а) $\begin{cases} \dot{x}(t) = y + \operatorname{tg}^2 t - 1; \\ \dot{y}(t) = -x + \operatorname{tg} t, \end{cases} \quad x(0) = 0, \quad 4y\left(-\frac{\pi}{3}\right) - 3y(0) = 0.$

   б) $\begin{cases} \dot{x}(t) = 3x - 2y; \\ \dot{y}(t) = 2x - y + 15e^t\sqrt{t}, \end{cases} \quad x(0) = 0, \quad y(1) = 0.$

в) $\begin{cases} \dot{x}(t) = -4x - 2y + 2(e^t - 1)^{-1}; \\ \dot{y}(t) = 6x + 3y - 3(e^t - 1)^{-1}, \end{cases}$ $\quad 2x(\ln\frac{3}{2}) + y(\ln\frac{3}{2}) = 0, \quad x(\ln 2) = 0.$

6. Звівши крайову задачу до еквівалентного інтегрального рівняння, застосувати метод послідовних наближень:

а) $y'' - y = \lambda y + e^{0,5x}, \quad \lambda = const, \quad y = y(x), \quad x \in (0, \ln 4);$
$y(0) = 0, \quad y'(\ln 4) = 0.$

б) $y'' + y = \lambda y + 1, \quad \lambda = const, \quad y = y(x), \quad x \in (0, \pi);$
$y'(0) = 0, \quad y(\pi) = 0.$

в) $y'' - y' = \lambda y + 2(1 - x), \quad \lambda = const, \quad y = y(x), \quad x \in (0;1);$
$y(0) = 0, \quad y(1) = 0.$

РОЗДІЛ V
НАБЛИЖЕНІ МЕТОДИ ІНТЕГРУВАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ

§5.1. Крайові задачі для систем диференціальних рівнянь. Метод А.М.Самойленка

Розглянемо крайову задачу для системи диференціальних рівнянь вигляду

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}); \tag{1.1}$$

$$\boldsymbol{Ax}(0) + \boldsymbol{Bx}(T) = \boldsymbol{\gamma}, \tag{1.2}$$

де $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{f}$ – точки n-вимірного евклідового простору E^n; $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ – сталі матриці розмірності $n \times n$, причому $\det \boldsymbol{B} \neq 0$.

Будемо шукати неперервно-диференційовний розв’язок $\boldsymbol{x}^*(t)$ крайової задачі (1.1),(1.2) за наступних умов:

а) функція $\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})$ визначена й неперервна по обидвох аргументах в області $\Omega = \{(t, \boldsymbol{x}) | 0 \le t \le T, \boldsymbol{x} \in \mathrm{D}\}$, де D – деяка замкнена й обмежена область простору E^n;

б) $\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})$ обмежена вектором $\boldsymbol{M}$ в області Ω і справджує умову Ліпшиця з матрицею $\boldsymbol{K} = \{k_{ij} \ge 0; i, j = \overline{1, n}\}$:

$$|\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})| \le \boldsymbol{M}, \quad (t, \boldsymbol{x}) \in \Omega;$$

$$|\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}_1) - \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}_2)| \le \boldsymbol{K} |\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2|, \quad t \in [0, T], \quad \boldsymbol{x} \in \mathrm{D}.$$

Зауважимо, що тут і в подальшому через $|\boldsymbol{x}(t)|$ позначаємо вектор

$$|\boldsymbol{x}(t)| = (|x_1(t)| \quad \ldots \quad |x_n(t)|),$$

де $x_i(t)$ – i-ва координата вектора $\boldsymbol{x}(t)$.

Позначимо через D_β множину точок $\boldsymbol{x}_0 \in \mathrm{D}$, які містяться в D разом зі своїм $\boldsymbol{\beta}$-околом, де $\boldsymbol{\beta} = 0{,}5T\boldsymbol{M} + \boldsymbol{\beta}_1(\boldsymbol{x}_0)$, $\boldsymbol{\beta}_1(\boldsymbol{x}_0) = \left|\boldsymbol{B}^{-1}[\boldsymbol{\gamma} - (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})\boldsymbol{x}_0]\right|$. Будемо вважати, що

в) $\mathrm{D}_\beta \neq \varnothing$ і найбільше з власних значень матриці $\boldsymbol{Q} = \frac{T}{\pi}\boldsymbol{K}$ $\lambda(\boldsymbol{Q}) < 1$.

Розглянемо послідовність функцій, які справджують умови (1.2):

$$\begin{gathered}\boldsymbol{x}_m(t, \boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{x}_0 + \int_0^t \left[\boldsymbol{f}(\tau, \boldsymbol{x}_{m-1}) - \frac{1}{T}\int_0^T \boldsymbol{f}(\tau, \boldsymbol{x}_{m-1}) d\tau \right] d\tau + \\ + \frac{t}{T}\left\{\boldsymbol{B}^{-1}[\boldsymbol{\gamma} - (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})\boldsymbol{x}_0]\right\}, \quad m = 1, 2, \ldots, \quad \boldsymbol{x}_0 \in \mathrm{D}_\beta .\end{gathered} \tag{1.3}$$

Тоді має силу наступна

ТЕОРЕМА 5.1. *Якщо для крайової задачі (1.1),(1.2) виконані умови а)-в), то послідовність функцій (1.3) при* $m\to\infty$ *рівномірно збігається в області* $\Omega_\beta=\{(t,\boldsymbol{x}_0)|0\le t\le T,\boldsymbol{x}_0\in \mathrm{D}_\beta\}$ *до граничної функції* $\boldsymbol{x}^*(t,\boldsymbol{x}_0)$, *де* $\boldsymbol{x}^*(0,\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{x}_0$, *яка є розв'язком інтегрального рівняння*

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{x}_0+\int_0^t\left[\boldsymbol{f}(\tau,\boldsymbol{x}(\tau))-\frac{1}{T}\int_0^T\boldsymbol{f}(\tau,\boldsymbol{x}(\tau))d\tau+\frac{1}{T}\left\{\boldsymbol{B}^{-1}\left[\boldsymbol{\gamma}-(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}_0\right]\right\}\right]d\tau. \qquad (1.4)$$

Окрім того, $\boldsymbol{x}^*(t,\boldsymbol{x}_0)$ *справджує крайову умову (1.2) і є розв'язком крайової задачі, яку одержуємо з (1.4) диференціюванням по змінній t:*

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})+\Delta(\boldsymbol{x}_0),\quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(0)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}(T)=\boldsymbol{\gamma}, \qquad (1.5)$$

де $\Delta(\boldsymbol{x}_0)=\frac{1}{T}\left\{\boldsymbol{B}^{-1}\left[\boldsymbol{\gamma}-(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}_0\right]\right\}-\frac{1}{T}\int_0^T\boldsymbol{f}(\tau,\boldsymbol{x}(\tau))d\tau$. *При цьому відхилення граничної функції* $\boldsymbol{x}^*(t,\boldsymbol{x}_0)$ *від кожного з наближень (1.3) покоординатно оцінюється нерівністю:*

$$\left|\boldsymbol{x}^*(t,\boldsymbol{x}_0)-\boldsymbol{x}_m(t,\boldsymbol{x}_0)\right|\le\alpha_1(t)\boldsymbol{W}_m(\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{\varepsilon}\left(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{x}_m\right), \qquad (1.6)$$

де $\alpha_1(t)=2t\left(1-\frac{t}{T}\right)$, $\boldsymbol{W}_m(\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{Q}^m(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{Q})^{-1}\boldsymbol{M}+\boldsymbol{K}\boldsymbol{Q}^{m-1}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{Q})^{-1}\boldsymbol{\beta}_1(\boldsymbol{x}_0)$.

Доведення. Покажемо, що послідовні наближення (1.3) не виходять за межі області D. Зауважимо, що має силу очевидна

ЛЕМА. Якщо $f(t)\in C_{[0;T]}$, то для всіх $t\in[0;T]$

$$\left|\int_0^t\left[f(\tau)-\tfrac{1}{T}\int_0^T f(\tau)d\tau\right]d\tau\right|\le\left(1-\tfrac{t}{T}\right)\int_0^t|f(\tau)|d\tau+\tfrac{t}{T}\int_t^T|f(\tau)|d\tau\le\alpha_1(t)\max_{[0;T]}|f(t)|,$$

де $\alpha_1(t)\le 0{,}5T$.

Позначимо через $\boldsymbol{r}_{m+1}=|\boldsymbol{x}_{m+1}(t,\boldsymbol{x}_0)-\boldsymbol{x}_m(t,\boldsymbol{x}_0)|$ різницю між двома послідовними наближеннями (1.3). Тоді з урахуванням умови Ліпшиця та наведеної леми одержимо оцінку:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}_{m+1}&=\left|\int_0^t\left[\boldsymbol{f}(\tau,\boldsymbol{x}_m)-\boldsymbol{f}(\tau,\boldsymbol{x}_{m-1})-\tfrac{1}{T}\int_0^T\{\boldsymbol{f}(\tau,\boldsymbol{x}_m)-\boldsymbol{f}(\tau,\boldsymbol{x}_{m-1})\}d\tau\right]d\tau\right|\le\\&\le\left(1-\tfrac{t}{T}\right)\int_0^t|\boldsymbol{f}(\tau,\boldsymbol{x}_m)-\boldsymbol{f}(\tau,\boldsymbol{x}_{m-1})|d\tau+\tfrac{t}{T}\int_0^T|\boldsymbol{f}(\tau,\boldsymbol{x}_m)-\boldsymbol{f}(\tau,\boldsymbol{x}_{m-1})|d\tau\le \qquad (1.7)\\&\le\boldsymbol{K}\left[\left(1-\tfrac{t}{T}\right)\int_0^t\boldsymbol{r}_m d\tau+\tfrac{t}{T}\int_t^T\boldsymbol{r}_m d\tau\right].\end{aligned}$$

При $m=0$ із (1.3) згідно з наведеною лемою одержимо:

$$\boldsymbol{r}_1=|\boldsymbol{x}_1(t,\boldsymbol{x}_0)-\boldsymbol{x}_0(t,\boldsymbol{x}_0)|\le\left|\int_0^t\left[\boldsymbol{f}(\tau,\boldsymbol{x}_0)-\tfrac{1}{T}\int_0^T\boldsymbol{f}(\tau,\boldsymbol{x}_0)d\tau\right]d\tau+\boldsymbol{\beta}_1(\boldsymbol{x}_0)\right|\le\alpha_1(t)\boldsymbol{M}+\boldsymbol{\beta}_1(\boldsymbol{x}_0).$$

З урахуванням останньої нерівності та позначень

$$\alpha_{m+1}(t)=\left(1-\tfrac{t}{T}\right)\int_0^t \alpha_m(\tau)d\tau+\tfrac{t}{T}\int_t^T \alpha_m(\tau)d\tau, \quad m=0,1,2,...,$$

де $\alpha_0(t)=1,$ із (1.7) матимемо:

$$\boldsymbol{r}_{m+1}\le \boldsymbol{K}^m\left[\alpha_{m+1}(t)\boldsymbol{M}+\alpha_m(t)\boldsymbol{\beta}_1(\boldsymbol{x}_0)\right], \quad m=0,1,2,...,$$

або в межах наших позначень

$$\boldsymbol{r}_{m+1}\le \alpha_1(t)\left[\boldsymbol{Q}^m\boldsymbol{M}+\boldsymbol{K}\boldsymbol{Q}^{m-1}\boldsymbol{\beta}_1(\boldsymbol{x}_0)\right], \quad m=0,1,2,...$$

Оскільки $\boldsymbol{x}_{m+j}(t,\boldsymbol{x}_0)-\boldsymbol{x}_m(t,\boldsymbol{x}_0)=\left(\boldsymbol{x}_{m+j}-\boldsymbol{x}_{m+j-1}\right)+...+\left(\boldsymbol{x}_{m+1}-\boldsymbol{x}_m\right), \quad j\in \mathrm{N},$ то справджується оцінка

$$\begin{aligned}\left|\boldsymbol{x}_{m+j}-\boldsymbol{x}_m\right| &\le \sum_{i=1}^{j}\boldsymbol{r}_{m+i}\le \alpha_1(t)\left[\sum_{i=0}^{j-1}\left\{\boldsymbol{Q}^{m+i}\boldsymbol{M}+\boldsymbol{K}\boldsymbol{Q}^{m+i-1}\boldsymbol{\beta}_1(\boldsymbol{x}_0)\right\}\right]=\\ &=\alpha_1(t)\left[\boldsymbol{Q}^m\sum_{i=0}^{j-1}\boldsymbol{Q}^i\boldsymbol{M}+\boldsymbol{Q}^{m-1}\boldsymbol{K}\sum_{i=0}^{j-1}\boldsymbol{Q}^i\boldsymbol{\beta}_1(\boldsymbol{x}_0)\right].\end{aligned} \tag{1.8}$$

Оскільки за умовою теореми $\lim\limits_{m\to\infty}\boldsymbol{Q}^m=0,$ то з нерівності (1.8) випливає, що послідовність $\{\boldsymbol{x}_m(t,\boldsymbol{x}_0)\}$ ітерацій (1.3) є фундаментальною в просторі $C_{[0;T]}$. Тоді згідно з критерієм Коші ця послідовність рівномірно збігається в області Ω_β до деякої граничної функції $\boldsymbol{x}^*(t,\boldsymbol{x}_0)$. Оскільки всі ітерації (2.3) справджують крайові умови (1.2), то й гранична функція справджуватиме ці умови. Тоді з (1.8), спрямувавши $j\to\infty,$ одержимо оцінку (1.6). Якщо ж у рівності (1.3) спрямувати $m\to\infty,$ то відносно граничної функції $\boldsymbol{x}^*(t,\boldsymbol{x}_0)$ дістанемо інтегральне рівняння (1.4), з якого диференціюванням по змінній t одержимо відповідну крайову задачу (1.5). □

Можна показати, що в праву частину системи (1.1) завжди можна ввести керівний параметр таким чином, щоб розв'язок визначеної задачі Коші для одержаної системи справджував вихідні крайові умови. Це вказує

ТЕОРЕМА 5.2. *Нехай виконуються умови Теореми 5.1. Тоді для довільної точки* $\boldsymbol{x}_0\in \mathrm{D}_\beta$ *можна вказати таке єдине значення керівного параметру* $\boldsymbol{\mu}=\left(\mu_1 \quad \mu_2 \quad ... \quad \mu_n\right)$

$$\boldsymbol{\mu}=\frac{1}{T}\left\{\boldsymbol{B}^{-1}\left[\boldsymbol{\gamma}-(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}_0\right]\right\}-\frac{1}{T}\int_0^T \boldsymbol{f}\left(\tau,\boldsymbol{x}^*(\tau,\boldsymbol{x}_0)\right)d\tau, \tag{1.9}$$

де $\boldsymbol{x}^*(t,\boldsymbol{x}_0)$ *– гранична функція послідовності (1.3), що розв'язок* $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t)$ *задачі Коші для системи диференціальних рівнянь з параметром*

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})+\boldsymbol{\mu}; \tag{1.10}$$

$$\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0, \quad \boldsymbol{x}_0\in \mathrm{D}_\beta \tag{1.11}$$

буде одночасно розв'язком крайової задачі (1.10),(1.2) і $\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{x}^*(t,\boldsymbol{x}_0)$.

Доведення. Згідно з теоремою 5.1 функція $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}^*(t, \boldsymbol{x}_0)$ є розв'язком задачі Коші

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}) + \frac{1}{T}\left\{\boldsymbol{B}^{-1}\left[\boldsymbol{\gamma} - (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})\boldsymbol{x}_0\right]\right\} - \frac{1}{T}\int_0^T \boldsymbol{f}\left(\tau, \boldsymbol{x}^*(\tau, \boldsymbol{x}_0)\right)d\tau, \quad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0,$$

тобто задачі (1.10),(1.11) з параметром (1.9), і справджує крайові умови (1.2). Покажемо, що значення (1.9) для керівного параметра $\boldsymbol{\mu}$ є єдиним. Справді, припустимо, що в умовах теореми існують два керівні параметри $\overline{\boldsymbol{\mu}} \neq \overline{\overline{\boldsymbol{\mu}}}$. Тоді з (1.4) одержимо:

$$\boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{x}_0, \overline{\overline{\boldsymbol{\mu}}}) - \boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{x}_0, \overline{\boldsymbol{\mu}}) = \int_0^t \Bigg[\boldsymbol{f}\left(\tau, \boldsymbol{x}(\tau, \boldsymbol{x}_0, \overline{\overline{\boldsymbol{\mu}}})\right) - \boldsymbol{f}\left(\tau, \boldsymbol{x}(\tau, \boldsymbol{x}_0, \overline{\boldsymbol{\mu}})\right) -$$

$$- \frac{1}{T}\int_0^T \left\{\boldsymbol{f}\left(\tau, \boldsymbol{x}(\tau, \boldsymbol{x}_0, \overline{\overline{\boldsymbol{\mu}}})\right) - \boldsymbol{f}\left(\tau, \boldsymbol{x}(\tau, \boldsymbol{x}_0, \overline{\boldsymbol{\mu}})\right)\right\}d\tau \Bigg] d\tau.$$

Введемо позначення: $\boldsymbol{r}(t) = \left|\boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{x}_0, \overline{\overline{\boldsymbol{\mu}}}) - \boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{x}_0, \overline{\boldsymbol{\mu}})\right|$, тоді з урахуванням умови Ліпшиця маємо:

$$\boldsymbol{r}(t) \leq \boldsymbol{K}\left[\left(1 - \tfrac{t}{T}\right)\int_0^t \boldsymbol{r}(\tau)d\tau + \tfrac{t}{T}\int_t^T \boldsymbol{r}(\tau)d\tau\right].$$

Позначимо через $r_n(t)$ n-ну координату вектора $\boldsymbol{r}(t)$, а через $|\boldsymbol{r}_0(t)|$ – вектор $|\boldsymbol{r}_0(t)| = \left(\sup\limits_{0 \leq t \leq T}|r_1(t)| \quad \ldots \quad \sup\limits_{0 \leq t \leq T}|r_n(t)|\right)$. Тоді, враховуючи лему та оцінки $\alpha_m(t)$ в області Ω_β з Теореми 5.1, із останньої нерівності одержимо:

$$\boldsymbol{r}(t) \leq \alpha_m(t)\boldsymbol{K}|\boldsymbol{r}_0(t)|, \quad m = 1,2,\ldots,$$

звідки для довільного $m \in \mathrm{N}$

$$|\boldsymbol{r}_0(t)| \leq \alpha_1(t)\boldsymbol{K}\boldsymbol{Q}^m|\boldsymbol{r}_0(t)| \leq \frac{\pi T}{6}\boldsymbol{K}\boldsymbol{Q}^m|\boldsymbol{r}_0(t)|.$$

Але, оскільки $\lambda(\boldsymbol{Q}) < 1$, то остання нерівність може справджуватися лише при $|\boldsymbol{r}_0(t)| = 0$, тобто при $\overline{\boldsymbol{\mu}} = \overline{\overline{\boldsymbol{\mu}}}$. □

Теорема 5.2 дає зв'язок розв'язку крайової задачі (1.1),(1.2) з розв'язком задачі Коші (1.10),(1.11). Наведемо необхідні й достатні умови того, щоб гранична функція послідовності (1.3) була розв'язком задачі (1.1),(1.2).

ТЕОРЕМА 5.3. *Нехай виконуються умови Теореми 5.1. Тоді розв'язок* $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^*(t)$ *задачі Коші*

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0 \tag{1.12}$$

буде одночасно розв'язком крайової задачі (1.1),(1.2) тоді й тільки тоді, коли x_0 *є розв'язком рівняння*

$$\Delta^*(\boldsymbol{x}_0) \equiv \frac{1}{T}\left\{\boldsymbol{B}^{-1}\left[\boldsymbol{\gamma} - (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}_0\right]\right\} - \frac{1}{T}\int_0^T \boldsymbol{f}\left(\tau, \boldsymbol{x}^*(t, \boldsymbol{x}_0)\right)d\tau = 0, \tag{1.13}$$

де $\boldsymbol{x}^*(t,\boldsymbol{x}_0)$ *– гранична функція послідовності (1.3). Більше того,* $\boldsymbol{x}^*(t) = \boldsymbol{x}^*(t,\boldsymbol{x}_0)$ *і відхилення наближеного розв'язку* $\boldsymbol{x}_m(t,\boldsymbol{x}_0)$ *вигляду (1.3) від точного розв'язку* $\boldsymbol{x}^*(t) = \boldsymbol{x}^*(t,\boldsymbol{x}_0)$ *крайової задачі (1.1),(1.2) оцінюється нерівністю (1.6).*

Доведення. Достатність умови (1.13) випливає з того, що згідно з Теоремою 5.1 функція $\boldsymbol{x}^*(t,\boldsymbol{x}_0)$, яка справджує початкову умову $\boldsymbol{x}^*(0,\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{x}_0$, є розв'язком крайової задачі (1.5). Але як тільки $\Delta^*(\boldsymbol{x}_0) = 0$, то розв'язок задачі (1.5) співпадатиме з розв'язком крайової задачі (1.1),(1.2) та задачі Коші (1.10).

Необхідність того, щоб точка $\boldsymbol{x}_0$ була розв'язком рівняння $\Delta^*(\boldsymbol{x}_0) = 0$, випливає з Теореми 5.2. Справді, якщо $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^*(t)$ як розв'язок задачі Коші (1.12) є також розв'язком крайової задачі (1.1),(1.2), то розв'язок $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t,\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{\mu})$ задачі (1.10),(1.11) справджуватиме крайові умови (1.2) тільки при єдиному значенні $\boldsymbol{\mu} \equiv \Delta^*(\boldsymbol{x}_0) = 0,$ оскільки в цьому випадку $\boldsymbol{x}(t,\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{\mu}) = \boldsymbol{x}^*(t) = \boldsymbol{x}^*(t,\boldsymbol{x}_0)$. □

Для крайової задачі (1.1),(1.2) алгоритм чисельно-аналітичного методу послідовних наближень А.М.Самойленка полягає в наступному:

1) при $\boldsymbol{x}_0 \in D_\beta$ згідно з (1.3) будують послідовність функцій $\boldsymbol{x}_m(t,\boldsymbol{x}_0)$, залежну від $\boldsymbol{x}_0$ як від параметра;

2) знаходять граничну функцію $\boldsymbol{x}^*(t,\boldsymbol{x}_0)$ послідовності $\boldsymbol{x}_m(t,\boldsymbol{x}_0)$;

3) за знайденою граничною функцією $\boldsymbol{x}^*(t,\boldsymbol{x}_0)$ складають визначену функцію $\Delta^*(\boldsymbol{x}_0)$ і знаходять розв'язок $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{x}_0^*$ рівняння (1.13);

4) розв'язують задачу Коші для системи (1.1) з початковою умовою $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0^*$ на відрізку $t \in [0,T]$. Одержана функція є розв'язком крайової задачі (1.1),(1.2), а за її наближений розв'язок можна вибрати $\boldsymbol{x}_m\left(t,\boldsymbol{x}_0^*\right)$ вигляду (1.3).

Зауважимо, що схема алгоритму, викладеного для систем, застосовна і в одновимірному випадку.

ПРИКЛАД. За допомогою методу А.М.Самойленка побудувати розв'язок крайової задачі

$$\dot{x} = 0{,}25x + t, \quad x = x(t), \quad t \in (0;1);$$
$$x(0) - x(1) = 0.$$

Розв'язання. Маємо: $f(t,x) = 0{,}25x + t,\;\; A = 1,\;\; B = -1,\;\; T = 1,\;\; \gamma = 0.$ Побудуємо послідовність (1.3):

$$x_m(t,x_0) = x_0 + \int_0^t \left[\frac{1}{4}x_{m-1} + \tau - \int_0^1 \left(\frac{1}{4}x_{m-1} + \tau\right)d\tau\right]d\tau, \quad m = 1,2,... \tag{1.14}$$

Тоді для деякого $x_0 = const$

$$x_1(t,x_0) = x_0 + \int_0^t \left[\frac{x_0}{4} + \tau - \int_0^1 \left(\frac{x_0}{4} + \tau \right) d\tau \right] d\tau = x_0 + \frac{t^2 - t}{2}.$$

Вважатимемо $x^*(t,x_0) = x_1(t,x_0)$. Тоді

$$\Delta^*(x_0) = -\int_0^1 \left(\frac{x_1(\tau,x_0)}{4} + \tau \right) d\tau = -\int_0^1 \left(\frac{x_0}{4} + \frac{\tau^2 + 7\tau}{8} \right) d\tau = -\frac{x_0}{4} - \frac{23}{48},$$

і з рівняння $\Delta^*(x_0) = 0$ одержимо $x_0 = -\dfrac{23}{12}$.

Розв'яжемо задачу Коші

$$\dot{x} = 0{,}25x + t;$$
$$x(0) = x_0 = -\tfrac{23}{12}.$$

Тоді $x(t) = \dfrac{169}{12} e^{0{,}25t} - 4(t+4)$. Згідно з теорією одержана функція повинна бути розв'язком вихідної крайової задачі. Перевіримо це, побудувавши точний розв'язок крайової задачі; тоді $x^*(t) = \dfrac{4}{\sqrt[4]{e} - 1} e^{0{,}25t} - 4(t+4)$. Бачимо, що функції $x(t)$ та $x^*(t)$ є дуже близькими, адже $\dfrac{169}{12} \approx 14{,}083333$, $\dfrac{4}{\sqrt[4]{e} - 1} \approx 14{,}083252$. Для досягнення більшої точності можна за допомогою формул (1.14) уточнити розв'язок, побудувавши наступні наближення до деякого $m > 1$. Тоді, поклавши $x^*(t,x_0) = x_m(t,x_0)$ і визначивши нове значення x_0, з відповідної задачі Коші одержимо функцію $x(t)$, яка більш точно наближає розв'язок крайової задачі.

Ідеї запропонованого А.М.Самойленком методу знайшли своє втілення при дослідженні широкого кола задач, у тому числі крайових задач для диференціальних рівнянь та систем з параметрами [25], а також триточкових крайових задач. Зауважимо, що деякі модифікації методу А.М.Самойленка детальніше досліджені в розділі VI, автором якого є К.В.Маринець.

§5.2. Монотонний двосторонній метод наближеного інтеґрування крайових задач

У 1919 році академік С.О.Чаплигін в роботі «Основания нового способа приближённого интегрирования дифференциальных уравнений» виклав новий метод побудови наближеного розв'язку задачі Коші у випадку звичайного квазілінійного диференціального рівняння першого порядку [29]. Суть методу полягає в тому, що на кожному кроці ітераційного процесу будується пара функцій, яка все щільніше охоплює шуканий розв'язок у «вилку» і цим самим дає можливість одержувати зручну апостеріорну оцінку похибки послідовних наближень.

Після того, як академіком М.М.Лузіним [15] була показана надзвичайна швидкість збіжності методу С.О.Чаплигіна (збіжність типу $C \cdot 2^{-2^n}$), він набув широкого і дуже плідного застосування як в теорії диференціальних, інтегральних, інтегро-диференціальних рівнянь, так і в теорії загальних операторних рівнянь.

Фундаментальні результати із застосування ідей С.О.Чаплигіна в теорії звичайних диференціальних рівнянь викладені в монографіях М.С.Курпеля, Б.А.Шувара [12], Я.Д.Мамедова [16], Р.Рабчука [34], В.Вальтера [39] та інших.

В даному розділі викладений один підхід до побудови двостороннього методу наближеного інтегрування крайових задач у випадку квазілінійних диференціальних рівнянь довільного порядку.

1. Постановка задачі та основні позначення.

Розглянемо крайову задачу [18]

$$L_n y(x) = f\left[y(x)\right], \quad x \in [a,b], \quad 0 \le a < b, \tag{2.1}$$

де L_n – лінійний диференціальний оператор, породжений диференціальним виразом

$$\ell_n(y) \equiv \sum_{k=0}^{n} p_k(x) y^{(n-k)}(x), \quad x \in (a,b)$$

і лінійно незалежними крайовими умовами

$$U_j(y) \equiv \sum_{s=0}^{n-1} \left[\alpha_{s,j} y^{(s)}(a) + \beta_{s,j} y^{(s)}(b)\right] = 0, \quad j = \overline{1,n}, \tag{2.2}$$

а $p_k(x) \in C_{[a,b]}$, $k = \overline{0,n}$, $p_0(x) \neq 0$, $f\left[y(x)\right] \equiv f\left(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-2)}(x)\right)$, $\alpha_{s,j}$, $\beta_{s,j}$ – відомі сталі.

Надалі будемо вважати, що $f\left[y(x)\right] \in C\left(\overline{D}\right)$, де $\overline{D} \subset \mathrm{R}_n$ – замкнута область, проекцією якої на вісь Ox є відрізок $[a,b] \subset \overline{D}$, а однорідна крайова задача

$$L_n y(x) = 0$$

має тільки тривіальний розв’язок при $x \in [a,b]$.

Тоді, як відомо [22], існує єдина функція Ґріна $G(x,\xi)$, за допомогою якої крайову задачу (2.1) можна подати в еквівалентній інтегральній формі:

$$y(x) = \int_a^b G(x,\xi) f\left[y(\xi)\right] d\xi \equiv \mathrm{T} f\left[y(\xi)\right], \quad x \in [a,b]. \tag{2.3}$$

Враховуючи властивості функції $G(x,\xi)$ (див. розділ IV), її завжди можна подати у вигляді

$$G(x,\xi) = G_1(x,\xi) + G_2(x,\xi), \quad G_1(x,\xi), G_2(x,\xi) \in C^{(n-2)}(\overline{B}),$$

де

$$\frac{\partial^r G_1(x,\xi)}{\partial x^r} \ge 0, \quad \frac{\partial^r G_2(x,\xi)}{\partial x^r} \le 0, \quad r = \overline{0, n-2}. \tag{2.4}$$

Дійсно, оскільки $G(x,\xi) \in C^{(n-2)}(\overline{B})$, $\overline{B} = \{(x,\xi) | a \le x, \xi \le b\}$, то існують такі невід'ємні сталі N_r, що

$$\frac{\partial^r G(x,\xi)}{\partial x^r} \le N_r, \quad r = \overline{0, n-2}.$$

Але тоді

$$G(x,\xi) = \sum_{r=0}^{n-2} N_r \frac{(x-a)^r}{r!} + G(x,\xi) - \sum_{r=0}^{n-2} N_r \frac{(x-a)^r}{r!} \equiv G_1(x,\xi) + G_2(x,\xi),$$

де

$$G_1(x,\xi) = \sum_{r=0}^{n-2} N_r \frac{(x-a)^r}{r!} + G(x,\xi), \quad G_2(x,\xi) = -\sum_{r=0}^{n-2} N_r \frac{(x-a)^r}{r!}.$$

Очевидно, що $G_1(x,\xi), G_2(x,\xi) \in C^{(n-2)}(\overline{B})$ і справджують умови (2.4). Тоді рівняння (2.3) запишеться у вигляді

$$y(x) = \int_a^b G_1(x,\xi) f[y(\xi)] d\xi + \int_a^b G_2(x,\xi) f[y(\xi)] d\xi \equiv \mathrm{T}_1 f[y(\xi)] + \mathrm{T}_2 f[y(\xi)]. \tag{2.5}$$

Нехай $f[y(x)] \in C_1(\overline{D})$, де $C_1(\overline{D})$ – простір функцій, для яких виконуються наступні умови:

а) $f[y(x)] \in C(\overline{D})$;

б) функцію $f[y(x)]$ можна подати у вигляді

$$f\left[y^+(x); y^-(x)\right] \in C(\overline{D}_1), \quad \overline{D}_1 \subset \mathrm{R}_{2n-1},$$

таким чином, що для довільних з простору $C^n_{(a,b)} \cap C^{n-1}_{[a,b]}$ функцій $z(x)$, $z^*(x)$, $v(x)$, $v^*(x) \in \overline{D}_1$, які справджують нерівності

$$\frac{d^r}{dx^r}[z(x) - z^*(x)] \ge 0, \quad \frac{d^r}{dx^r}[v(x) - v^*(x)] \le 0, \quad x \in [a,b], \quad r = \overline{0, n-2},$$

виконується умова

$$f[z(x); v(x)] \ge f[z^*(x); v^*(x)] \tag{2.6}$$

(якщо $y^+(x) \equiv y^-(x)$, то $f[y(x)] \equiv f\left[y^+(x); y^-(x)\right]$);

в) функція $f\left[y^+(x); y^-(x)\right]$ в області її визначення $\overline{D}_1$ справджує умову Ліпшиця зі сталою K:

$$\left| f[z(x); v(x)] - f[z^*(x); v^*(x)] \right| \le K \sum_{r=0}^{n-2} \left[\left| z^{(r)}(x) - z^{*(r)}(x) \right| + \left| v^{(r)}(x) - v^{*(r)}(x) \right| \right]. \tag{2.7}$$

Зауважимо при цьому: якщо $f[y(x)] \in C(\overline{D})$ і має обмежені частинні похідні першого порядку по всіх своїх аргументах, розпочинаючи з другого, то завжди $f[y(x)] \in C_1(\overline{D})$, оскільки в цьому випадку праву частину рівняння (2.1) можна подати у вигляді

$$f[y(x)] \equiv f\left[y^{+}(x)\right] + \sum_{r=0}^{n-2} N_r y^{+(r)}(x) - \sum_{r=0}^{n-2} N_r y^{-(r)}(x) f\left[y^{+}(x); y^{-}(x)\right],$$

де $\sup\limits_{\overline{D}} \left| \dfrac{\partial f[y(x)]}{\partial y^{(r)}(x)} \right| \le N_r, \quad r = \overline{0, n-2}.$

Очевидно, що $\dfrac{\partial f\left[y^{+}(x); y^{-}(x)\right]}{\partial y^{+(r)}(x)} \ge 0, \; \dfrac{\partial f\left[y^{+}(x); y^{-}(x)\right]}{\partial y^{-(r)}(x)} \le 0,$ а отже, всі умови визначення простору $C_1\left(\overline{D}\right)$ виконуються.

Введемо позначення:

$w_p(x) = z_p(x) - v_p(x), \quad p = 0,1,2,..., \quad z_p(x), v_p(x) \in C^{n}_{(a,b)} \cap C^{n-1}_{[a,b]},$

$f^{p}(x) \equiv f\left[z_p(x); v_p(x)\right], \quad f_p(x) \equiv f\left[v_p(x); z_p(x)\right].$

2. Побудова монотонного двостороннього методу.

Побудуємо послідовності функцій $\{z_p(x)\}$ та $\{v_p(x)\}$ згідно з законом

$$\begin{aligned} z_{p+1}(x) &= \mathrm{T}_1 f^{p}(\xi) + \mathrm{T}_2 f_p(\xi), \\ v_{p+1}(x) &= \mathrm{T}_1 f_p(\xi) + \mathrm{T}_2 f^{p}(\xi), \end{aligned} \tag{2.8}$$

де функції нульового наближення вибираємо таким чином, щоб в області $\overline{D}_1$ виконувались умови:

$$\begin{aligned} &\frac{d^r}{dx^r}\left[z_0(x) - \mathrm{T}_1 f^{0}(\xi) - \mathrm{T}_2 f_0(\xi)\right] \ge 0, \quad w_0^{(r)}(x) \ge 0, \\ &\frac{d^r}{dx^r}\left[v_0(x) - \mathrm{T}_1 f_0(\xi) - \mathrm{T}_2 f^{0}(\xi)\right] \le 0, \quad r = \overline{0, n-2}. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Зауважимо при цьому: якщо функції

$$z_0(x) = \mathrm{T}_1 M + \mathrm{T}_2 m, \quad v_0(x) = \mathrm{T}_1 m + \mathrm{T}_2 M, \tag{2.10}$$

де $M = \sup\limits_{\overline{D}_1} f\left[y^{+}(x); y^{-}(x)\right], \quad m = \inf\limits_{\overline{D}_1} f\left[y^{+}(x); y^{-}(x)\right],$ належать області $\overline{D}_1$, то для них виконуються умови (2.9). Дійсно, із (2.10) з урахуванням (2.4) маємо:

$$w_0^{(r)}(x) = \frac{d^r}{dx^r}\left[(\mathrm{T}_1 - \mathrm{T}_2)(M - m)\right] \ge 0, \quad r = \overline{0, n-2};$$

$$\frac{d^r}{dx^r}\left[z_0(x) - \mathrm{T}_1 f^{0}(\xi) - \mathrm{T}_2 f_0(\xi)\right] = \frac{d^r}{dx^r}\left[\mathrm{T}_1\left(M - f^{0}(\xi)\right) + \mathrm{T}_2\left(m - f_0(\xi)\right)\right] \ge 0;$$

$$\frac{d^r}{dx^r}\left[v_0(x) - \mathrm{T}_1 f_0(\xi) - \mathrm{T}_2 f^{0}(\xi)\right] = \frac{d^r}{dx^r}\left[\mathrm{T}_1\left(m - f_0(\xi)\right) + \mathrm{T}_2\left(M - f^{0}(\xi)\right)\right] \ge 0.$$

Таким чином, якщо функції $z_0(x)$ і $v_0(x)$, визначені згідно з формулою (2.10), належать області $\overline{D}_1$, то множина функцій нульового наближення, для яких виконуються умови (2.9), не є порожньою.

Нехай

$$\alpha_p(x) = z_p(x) - \mathrm{T}_1 f^p(\xi) - \mathrm{T}_2 f_p(\xi), \quad \beta_p(x) = v_p(x) - \mathrm{T}_1 f_p(\xi) - \mathrm{T}_2 f^p(\xi). \quad (2.11)$$

Згідно з (2.9) $\alpha_0^{(r)}(x) \geq 0$, $\beta_0^{(r)}(x) \leq 0$, $r = \overline{0, n-2}$. Із (2.8) і (2.11) маємо:

$$w_{p+1}(x) = (\mathrm{T}_1 - \mathrm{T}_2)(f^p(\xi) - f_p(\xi)); \quad (2.12)$$

$$z_p(x) - z_{p+1}(x) = \alpha_p(x), \quad v_p(x) - v_{p+1}(x) = \beta_p(x); \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} \alpha_{p+1}(x) &= \mathrm{T}_1\left(f^p(\xi) - f^{p+1}(\xi)\right) + \mathrm{T}_2\left(f_p(\xi) - f_{p+1}(\xi)\right), \\ \beta_{p+1}(x) &= \mathrm{T}_1\left(f_p(\xi) - f_{p+1}(\xi)\right) + \mathrm{T}_2\left(f^p(\xi) - f^{p+1}(\xi)\right) \end{aligned} \quad (2.14)$$

Беручи до уваги, що $\frac{d^r}{dx^r}\left[G_1(x,\xi) - G_2(x,\xi)\right] \geq 0$, $r = \overline{0, n-2}$, і враховуючи (2.6), (2.9), із (2.12), (2.13) одержимо:

$$w_1^{(r)}(x) \geq 0, \quad \frac{d^r}{dx^r}\left[z_0(x) - z_1(x)\right] \geq 0, \quad \frac{d^r}{dx^r}\left[v_0(x) - v_1(x)\right] \leq 0,$$

тобто при $x \in [a,b]$ мають силу нерівності

$$v_0^{(r)}(x) \leq v_1^{(r)}(x) \leq z_1^{(r)}(x) \leq z_0^{(r)}(x), \quad r = \overline{0, n-2},$$

а отже, якщо $z_0(x), v_0(x) \in \overline{D}_1$, то і $z_1(x), v_1(x) \in \overline{D}_1$. Але тоді на підставі (2.6) в області $\overline{D}_1$ виконуються нерівності

$$f^0(x) - f^1(x) \geq 0, \quad f_0(x) - f_1(x) \leq 0,$$

а отже, із (2.14) при $p = 0$ маємо:

$$\alpha_1^{(r)}(x) \geq 0, \quad \beta_1^{(r)}(x) \leq 0, \quad r = \overline{0, n-2}.$$

Беручи функції $z_1(x)$ і $v_1(x)$ за вихідні і повторюючи попередні міркування, методом математичної індукції переконуємося в справедливості нерівностей

$$v_p^{(r)}(x) \leq v_{p+1}^{(r)}(x) \leq z_{p+1}^{(r)}(x) \leq z_p^{(r)}(x), \quad p = 0,1,2,\ldots, \quad r = \overline{0, n-2} \quad (2.15)$$

для довільних $x \in [a,b]$.

Визначимо достатні умови рівномірної збіжності побудованих послідовностей функцій $\{z_p(x)\}$ і $\{v_p(x)\}$ до єдиного в просторі $C_{(a,b)}^n \cap C_{[a,b]}^{n-1}$ розв'язку крайової задачі (2.1).

Нехай

$$\begin{aligned} 0{,}5\varepsilon &= \max_r \sup_{[a,b]} \left|w_0^{(r)}(x)\right|, \\ R &= \max_r \sup_{\overline{B}} \left|\frac{\partial^r}{\partial x^r}\left[G_1(x,\xi) - G_2(x,\xi)\right]\right|, \end{aligned} \qquad r = \overline{0, n-2}.$$

Тоді з (2.12) при $p = 0$ з урахуванням (2.7) маємо:

$$\left|w_1^{(r)}(x)\right| \leq KR(b-a)(n-1)\varepsilon.$$

Методом математичної індукції переконуємося в справедливості оцінки

$$\left| w_p^{(r)}(x) \right| \le \left[KR(b-a)(n-1) \right]^p \varepsilon, \quad r = \overline{0, n-2}, \tag{2.16}$$

для довільних натуральних p і $x \in [a,b]$. Якщо $KR(b-a)(n-1) < 1$, то із (2.16) випливає, що $\lim\limits_{p\to\infty} w_p^{(r)}(x) = 0$ в області $\overline{D}_1$. На підставі (2.15) маємо:

$$\lim_{p\to\infty} v_p^{(r)}(x) = \lim_{p\to\infty} z_p^{(r)}(x) = y^{(r)}(x), \quad r = \overline{0, n-2}.$$

Покажемо, що гранична функція $y(x)$ є розв'язком крайової задачі (2.1). З цією метою подамо ітераційний процес (2.8) у вигляді

$$z_{p+1}(x) = \mathrm{T} f^p(\xi) - \mathrm{T}_2 \left(f^p(\xi) - f_p(\xi) \right),$$

$$v_{p+1}(x) = \mathrm{T} f_p(\xi) + \mathrm{T}_2 \left(f^p(\xi) - f_p(\xi) \right).$$

Перейдемо в останніх рівностях до границі, коли $p \to \infty$. Тоді, враховуючи, що $\lim\limits_{p\to\infty} \left[f^p(x) - f_p(x) \right] = 0$, в області $\overline{D}_1$ одержимо:

$$y(x) = \mathrm{T} f\left[y(\xi); y(\xi) \right] \equiv \mathrm{T} f[y(\xi)],$$

а отже, на підставі (2.3) можемо стверджувати, що $y(x)$ є розв'язком крайової задачі (2.1).

ТЕОРЕМА 5.4. *Нехай в задачі (2.1) функція* $f[y(x)] \in C_1(\overline{D})$, *а функції нульового наближення* $z_0(x), v_0(x) \in C^n_{(a,b)} \cap C^{n-1}_{[a,b]}$ *вибрані таким чином, що в області* $\overline{D}_1$ *виконуються умови (2.9). Тоді послідовності функцій* $\{z_p^{(r)}(x)\}$ *і* $\{v_p^{(r)}(x)\}$, *побудовані згідно з законом (2.8), при* $qKR(b-a)(n-1) < 1$, $x \in [a,b]$ *збігаються рівномірно до* $y^{(r)}(x)$, *де* $y(x)$ *– єдиний в просторі функцій* $C^n_{(a,b)} \cap C^{n-1}_{[a,b]}$ *розв'язок задачі (2.1), причому в області* $\overline{D}_1$ *для довільних* $p \in \mathrm{N}$ *мають силу нерівності*

$$v_p^{(r)}(x) \le v_{p+1}^{(r)}(x) \le y^{(r)}(x) \le z_{p+1}^{(r)}(x) \le z_p^{(r)}(x), \quad r = \overline{0, n-2}. \tag{2.17}$$

Доведення. Покажемо, що виконуються нерівності (2.17). З цією метою припустимо, що для деякого номера p в точці $x_0 \in (a,b)$ $y(x_0) < v_p(x_0)$. Тоді на підставі умов (2.15) в околі точки x_0 $y(x) < v_p(x) \le v_{p+q}(x)$ для довільних $q \in \mathrm{N}$. Але це означає, що в околі точки x_0 послідовність $\{v_{p+q}(x)\}$ при $q \to \infty$ не збігається до розв'язку крайової задачі (2.1), що суперечить доведеному вище. Аналогічно можна показати виконання нерівностей (2.17) і для довільних $r = \overline{1, n-2}$ та функцій $z_p^{(r)}(x)$.

Єдиність розв'язку крайової задачі (2.1) при $KR(b-a)(n-1) < 1$ доводиться методом від супротивного. □

Із доведеної теореми випливає наступний

НАСЛІДОК. *Нехай у крайовій задачі (2.1)* $f[y(x)] \in C_1(\overline{D})$ *і в просторі* $C^n_{(a,b)} \cap C^{n-1}_{[a,b]}$ *існує така функція* $v_0(x)$ $(z_0(x))$, *яка справджує умови (2.2) і*

$$v_0^{(r)}(x) \le 0, \quad \frac{d^r}{dx^r}\{\mathrm{T}_1 f[0; v_0(\xi)] + \mathrm{T}_2 f[v_0(\xi); 0]\} \le 0,$$

$$\frac{d^r}{dx^r}\{v_0(x) - \mathrm{T}_1 f[v_0(\xi); 0] - \mathrm{T}_2 f[0; v_0(\xi)]\} \le 0, \quad r = \overline{0, n-2}$$

$$\frac{d^r}{dx^r}\{v_0(x) - \mathrm{T}_1 f[v_0(\xi); 0] - \mathrm{T}_2 f[0; v_0(\xi)]\} \le 0, \quad r = \overline{0, n-2}$$

$$\left(\begin{aligned} & z_0^{(r)}(x) \ge 0, \quad \frac{d^r}{dx^r}\{\mathrm{T}_1 f[0; z_0(\xi)] + \mathrm{T}_2 f[z_0(\xi); 0]\} \ge 0, \\ & \frac{d^r}{dx^r}\{z_0(x) - \mathrm{T}_1 f[z_0(\xi); 0] - \mathrm{T}_2 f[0; z_0(\xi)]\} \ge 0, \quad r = \overline{0, n-2}. \end{aligned} \right)$$

Тоді для розв'язку крайової задачі (2.1) в області $\overline{D}_1$ *виконуються нерівності*

$$y^{(r)}(x) \le 0 \quad \left(y^{(r)}(x) \ge 0\right), \quad r = \overline{0, n-2}.$$

Основними недоліками розглянутої модифікації двостороннього методу (2.8),(2.9) є відсутність практичного методу побудови функцій першої вилки та порівняно повільна збіжність. У зв'язку з цим у наступному параграфі розглянемо один підхід до прискорення збіжності ітераційного процесу (2.8),(2.9), який базується на ідеї В.Я.Стеценка прискорення збіжності методу послідовних наближень для лінійних операторних рівнянь (див. [10]).

§5.3. Прискорення збіжності монотонного двостороннього методу

Введемо позначення:

$$\bar{z}_p(x) = z_p(x) - d_p w_p(x), \quad \bar{v}_p(x) = v_p(x) + d_p w_p(x),$$

$$F^p(x) = f[\bar{z}_p(x); \bar{v}_p(x)], \quad F_p(x) = f[\bar{v}_p(x); \bar{z}_p(x)],$$

де d_p – невід'ємні сталі, причому

$$0 \le d_p \le 0{,}5 \tag{3.1}$$

Побудуємо послідовності функцій $\{z_p(x)\}$ і $\{v_p(x)\}$ згідно з формулами

$$\begin{aligned} z_{p+1}(x) &= T_1\left[F^p(\xi) - c_p(\xi)\left(F^p(\xi) - F_p(\xi)\right)\right] + T_2\left[F_p(\xi) + c_p(\xi)\left(F^p(\xi) - F_p(\xi)\right)\right], \\ v_{p+1}(x) &= T_1\left[F_p(\xi) + c_p(\xi)\left(F^p(\xi) - F_p(\xi)\right)\right] + T_2\left[F^p(\xi) - c_p(\xi)\left(F^p(\xi) - F_p(\xi)\right)\right], \end{aligned} \tag{3.2}$$

де $c_p(x) \in C_{[a,b]}$ – довільні поки що функції, для яких при $x \in [a,b]$ і довільних $p \in \mathrm{N}$ виконуються нерівності

$$0 \le c_p(x) \le \tfrac{1}{2}, \tag{3.3}$$

а функції нульового наближення вибираємо таким чином, щоб виконувалися нерівності (2.9).

Нехай

$$\overline{\alpha}_p(x) = z_p(x) - T_1 F^p(\xi) - T_2 F_p(\xi), \quad \overline{\beta}_p(x) = v_p(x) - T_1 F_p(\xi) - T_2 F^p(\xi). \quad (3.4)$$

Оскільки $v_0^{(r)}(x) \le v_0^{(r)} + d_0 w_0^{(r)}(x) \le z_0^{(r)}(x) - d_0 w_0^{(r)}(x) \le z_0^{(r)}(x)$, то на підставі (2.9) і (2.6)

$$\overline{\alpha}_0^{(r)}(x) \ge 0, \quad \overline{\beta}_0^{(r)}(x) \le 0, \quad \overline{r = 0, n-2}. \quad (3.5)$$

Із (3.2) і (3.4) маємо:

$$w_{p+1}(x) = (T_1 - T_2)\left[(1 - 2c_p(\xi))(F^p(\xi) - F_p(\xi))\right]; \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} z_p(x) - z_{p+1}(x) &= \overline{\alpha}_p(x) + (T_1 - T_2)\left[c_p(\xi)(F^p(\xi) - F_p(\xi))\right], \\ v_p(x) - v_{p+1}(x) &= \overline{\beta}_p(x) - (T_1 - T_2)\left[c_p(\xi)(F^p(\xi) - F_p(\xi))\right]; \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} \overline{\alpha}_{p+1}(x) = T_1 &\left[F^p(\xi) - F^{p+1}(\xi) - c_p(\xi)(F^p(\xi) - F_p(\xi))\right] + \\ &+ T_2\left[F_p(\xi) - F_{p+1}(\xi) + c_p(\xi)(F^p(\xi) - F_p(\xi))\right], \\ \overline{\beta}_{p+1}(x) = T_1 &\left[F_p(\xi) - F_{p+1}(\xi) + c_p(\xi)(F^p(\xi) - F_p(\xi))\right] + \\ &+ T_2\left[F^p(\xi) - F^{p+1}(\xi) - c_p(\xi)(F^p(\xi) - F_p(\xi))\right]. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Враховуючи (2.6), (3.1), (3.3), (3.5), із (3.6), (3.7) при $p = 0$ одержимо:

$$w_1^{(r)}(x) \ge 0, \quad z_0^{(r)}(x) - z_1^{(r)}(x) \ge 0, \quad v_0^{(r)}(x) - v_1^{(r)}(x) \le 0, \quad x \in [a,b],$$

звідки випливає справедливість нерівності

$$v_0^{(r)}(x) \le v_1^{(r)} \le z_1^{(r)}(x) \le z_0^{(r)}(x), \quad r = \overline{0, n-2}.$$

Вибираємо сталу d_0 таким чином, щоб при $x \in [a,b]$ виконувались умови

$$z_0^{(r)}(x) - z_1^{(r)}(x) - d_0 w_0^{(r)}(x) \ge 0, \quad v_0^{(r)}(x) - v_1^{(r)} + d_0 w_0^{(r)}(x) \le 0.$$

Тоді $F^0(x) - F^1(x) \ge 0$, $F_0(x) - F_1(x) \le 0$, а отже, якщо вибрати функцію $c_0(x)$ таким чином, щоб в області $\overline{D}_1$

$$F^0(x) - F^1(x) - c_0(x)(F^0(x) - F_0(x)) \ge 0, \; F_0(x) - F_1(x) + c_0(x)(F^0(x) - F_0(x)) \le 0,$$

то із (4.8) при $p = 0$ матимемо:

$$\overline{\alpha}_1^{(r)}(x) \ge 0, \quad \overline{\beta}_1^{(r)}(x) \le 0, \quad \overline{r = 0, n-2}.$$

Беручи одержані функції $z_1(x)$ і $v_1(x)$ за вихідні і повторюючи наведені вище міркування, методом математичної індукції переконуємося: якщо на кожному кроці ітерацій (3.2) сталі d_p та функції $c_p(x)$ $(p = 0,1,2,...)$ вибирати таким чином, щоб в області $\overline{D}_1$ виконувались умови

$$\begin{aligned} &z_p^{(r)}(x) - z_{p+1}^{(r)}(x) - d_p w_p^{(r)}(x) \ge 0, \quad v_p^{(r)}(x) - v_{p+1}^{(r)} + d_p w_p^{(r)}(x) \le 0, \\ &F^p(x) - F^{p+1}(x) - c_p(x)(F^p(x) - F_p(x)) \ge 0, \quad F_p(x) - F_{p+1}(x) + c_p(x)(F^p(x) - F_p(x)) \ge 0, \end{aligned} \quad (3.9)$$

то при $x \in [a,b]$ мають силу нерівності (2.15).

Як і у §5.2, легко переконатись у справедливості оцінок

$$\left| w_p^{(r)}(x) \right| \le \left[q^2 KR(b-a)(n-1) \right]^p \varepsilon, \quad r = \overline{0, n-2},$$

де $q = \max\limits_p \sup\limits_{[a,b]} \left\{ \left(1 - 2c_p(x)\right), \quad \left(1 - 2d_p\right) \right\}$.

Таким чином, якщо $q^2 KR(b-a)(n-1) < 1$, то на підставі виконання нерівностей (2.15) і в цьому випадку маємо:

$$\lim_{p\to\infty} v_p^{(r)}(x) = \lim_{p\to\infty} z_p^{(r)}(x) = y^{(r)}(x), \quad r = \overline{0, n-2}.$$

ТЕОРЕМА 5.5. *Нехай виконуються умови Теореми 5.4. Якщо сталі d_p і функції $c_p(x)$, які справджують умови (3.1) і (3.3) відповідно, вибирати на кожному кроці ітерацій таким чином, щоб в області $\overline{D}_1$ виконувалися нерівності (3.9), то:*

1) послідовності функцій $\{z_p^{(r)}(x)\}$ і $\{v_p^{(r)}(x)\}$, побудовані згідно з формулами (3.2), при $q^2 KR(b-a)(n-1) < 1$, $x \in [a,b]$ збігаються рівномірно до $y^{(r)}(x)$, де $y(x)$ – єдиний в просторі функцій $C_{(a,b)}^n \cap C_{[a,b]}^{n-1}$ розв'язок задачі (2.1);

2) мають силу нерівності (2.17);

3) збіжність ітераційного процесу (3.2),(2.9),(3.9) не повільніша за збіжність методу (2.8),(2.9).

Доведення. Доведення перших двох тверджень проводиться аналогічно, як і в Теоремі 5.1. Для доведення третього твердження припустимо, що якимнебудь двостороннім методом побудовані двосторонні наближення до розв'язку задачі (2.1) $z_p(x)$ і $v_p(x)$, для яких виконуються умови

$$w_p^{(r)}(x) \ge 0, \quad \alpha_p^{(r)}(x) \ge 0, \quad \beta_p^{(r)}(x) \le 0, \quad r = \overline{0, n-2}.$$

Позначимо через $z_{p,1}(x)$ та $v_{p,1}(x)$ наступні двосторонні наближення до розв'язку задачі (2.1), побудовані згідно з формулами (2.8), а через $z_{p,2}(x)$ і $v_{p,2}(x)$ – двосторонні наближення, побудовані згідно з (3.2),(3.9). Маємо:

$$z_{p,1}(x) - z_{p,2}(x) = T_1\left[f^p(\xi) - F^p(\xi) + c_p(\xi)\left(F^p(\xi) - F_p(\xi)\right)\right] +$$
$$+ T_2\left[f_p(\xi) - F_p(\xi) - c_p(\xi)\left(F^p(\xi) - F_p(\xi)\right)\right] \ge 0,$$

аналогічно $v_{p,1}(x) - v_{p,2}(x) \le 0$, отже, при $x \in [a,b]$

$$v_{p,1}(x) \le v_{p,2}(x) \le z_{p,2}(x) \le z_{p,1}(x),$$

що й потрібно було довести. □

Зауважимо, що в залежності від правил вибору сталих d_p і функцій $c_p(x)$ можна отримати різні методи.

§5.4. Альтернуючий двосторонній метод

Нехай

$$0 \le d_p \le \tfrac{1}{2}, \quad \tfrac{1}{2} \le c_p(x) \le 1, \quad p = 0,1,2,... \tag{4.1}$$

Тоді з урахуванням (2.6), (3.5), із (3.6), (3.7) при $p = 0$ одержимо:

$$w_1^{(r)}(x) \le 0, \quad z_0^{(r)}(x) - z_1^{(r)}(x) \ge 0, \quad v_0^{(r)}(x) - v_1^{(r)}(x) \le 0, \quad r = \overline{0, n-2}.$$

Із (3.2), (3.4) випливає справедливість рівностей

$$\begin{aligned} z_p(x) - v_{p+1}(x) &= \overline{\alpha}_p(x) + (T_1 - T_2)\Big[\big(1 - c_p(\xi)\big)\big(F^p(\xi) - F_p(\xi)\big)\Big], \\ v_p(x) - z_{p+1}(x) &= \overline{\beta}_p(x) - (T_1 - T_2)\Big[\big(1 - c_p(\xi)\big)\big(F^p(\xi) - F_p(\xi)\big)\Big], \end{aligned} \tag{4.2}$$

а отже, при $p = 0$ одержуємо:

$$z_0^{(r)}(x) - v_1^{(r)}(x) \ge 0, \quad v_0^{(r)}(x) - z_1^{(r)} \le 0.$$

Із останніх нерівностей та (4.2) одержуємо:

$$v_0^{(r)}(x) \le z_1^{(r)}(x) \le v_1^{(r)}(x) \le z_0^{(r)}(x), \quad r = \overline{0, n-2}, \quad x \in [a,b].$$

Виберемо сталу d_0 таким чином, щоб при $x \in [a,b]$ виконувались умови

$$v_0^{(r)}(x) - z_1^{(r)}(x) + d_0 w_0^{(r)}(x) \le 0, \quad z_0^{(r)}(x) - v_1^{(r)} - d_0 w_0^{(r)}(x) \ge 0.$$

Тоді на підставі (2.6) і (4.1) $c_0(x)$ вибираємо таким чином, щоб в області $\overline{D_1}$ виконувалися нерівності

$$F^0(x) - F^1(x) - c_0(x)\big(F^0(x) - F_0(x)\big) = F_0(x) - F^1(x) + \big(1 - c_0(x)\big)\big(F^0(x) - F_0(x)\big) \le 0,$$

$$F_0(x) - F_1(x) + c_0(x)\big(F^0(x) - F_0(x)\big) = F^0(x) - F_1(x) - \big(1 - c_0(x)\big)\big(F^0(x) - F_0(x)\big) \ge 0,$$

тобто для всіх $x \in [a,b]$ із (3.8) при $p = 0$ маємо $\overline{\alpha}_1^{(r)}(x) \le 0$, $\overline{\beta}_1^{(r)}(x) \ge 0$, а отже, із (3.6), (3.7) і (4.2) при $p = 1$ одержуємо:

$$\begin{aligned} &w_2^{(r)}(x) \ge 0, \quad z_1^{(r)}(x) - z_2^{(r)}(x) \le 0, \quad v_1^{(r)}(x) - v_2^{(r)}(x) \ge 0, \\ &v_1^{(r)}(x) - v_2^{(r)}(x) \ge 0, \quad r = \overline{0, n-2}, \quad x \in [a,b]. \end{aligned}$$

Таким чином, в області $\overline{D_1}$ мають силу нерівності

$$v_0^{(r)}(x) \le z_1^{(r)}(x) \le v_2^{(r)}(x) \le z_2^{(r)}(x) \le v_1^{(r)}(x) \le z_0^{(r)}(x), \quad r = \overline{0, n-2}, \quad x \in [a,b].$$

Вибираємо сталу d_1 і функцію $c_1(x)$ таким чином, щоб в області $\overline{D_1}$

$$v_1^{(r)}(x) - z_2^{(r)}(x) + d_1 w_1^{(r)}(x) \ge 0, \quad z_1^{(r)}(x) - v_2^{(r)} - d_1 w_1^{(r)}(x) \le 0,$$

$$F^1(x) - F^2(x) - c_1(x)\big(F^1(x) - F_1(x)\big) \ge 0, \quad F_1(x) - F_2(x) + c_1(x)\big(F^1(x) - F_1(x)\big) \le 0.$$

Тоді із (3.8) при $p = 1$ і $x \in [a,b]$ маємо $\overline{\alpha}_2^{(r)}(x) \ge 0$, $\overline{\beta}_2^{(r)}(x) \le 0$. Методом математичної індукції можна показати: якщо сталі d_p і функції $c_p(x)$ на кожному кроці ітерацій (3.2) вибирати таким чином, щоб в області $\overline{D_1}$ виконувались умови

$$v_p^{(r)}(x) - z_{p+1}^{(r)}(x) + d_p w_p^{(r)}(x) \le (\ge) 0, \quad z_p^{(r)}(x) - v_{p+1}^{(r)} - d_p w_p^{(r)}(x) \ge (\le) 0,$$
$$F^p(x) - F^{p+1}(x) - c_p(x)\left(F^p(x) - F_p(x)\right) \le (\ge) 0, \tag{4.3}$$
$$F_p(x) - F_{p+1}(x) + c_p(x)\left(F^p(x) - F_p(x)\right) \ge (\le) 0$$

для p парних (непарних), то послідовності функцій $\{z_p^{(r)}(x)\}$ і $\{v_p^{(r)}(x)\}$ при $q^2 KR(b-a)(n-1) < 1$ будуть справджувати нерівності

$$\begin{aligned} v_{2p}^{(r)}(x) \le z_{2p+1}^{(r)}(x) \le v_{2p+2}^{(r)}(x) \le z_{2p+3}^{(r)}(x) \le y^{(r)}(x) \le v_{2p+3}^{(r)}(x) \le z_{2p+2}^{(r)}(x) \le \\ \le v_{2p+1}^{(r)}(x) \le z_{2p}^{(r)}(x), \quad x \in [a,b], \quad r = \overline{0, n-2}, \quad p = 0,1,2,..., \end{aligned} \tag{4.4}$$

де $y(x)$ – єдиний в просторі функцій $C_{(a,b)}^n \cap C_{[a,b]}^{n-1}$ розв'язок крайової задачі (2.1). Таким чином, нами доведена наступна

ТЕОРЕМА 5.6. *Нехай для $f[y(x)]$ і функцій нульового наближення $z_0(x)$ та $v_0(x)$ виконуються умови Теореми 5.4. Тоді, якщо сталі d_p і функції $c_p(x)$, які задовольняють умови (4.1), на кожному кроці ітерацій (4.2) вибирати таким чином, щоб в області $\overline{D}_1$ виконувалися нерівності (4.3), то послідовності функцій $\{z_p^{(r)}(x)\}$ і $\{v_p^{(r)}(x)\}$, побудовані згідно з формулами (3.2), збігаються рівномірно при $q^2 KR(b-a)(n-1) < 1$ до $y^{(r)}(x)$, де $y(x)$ – єдиний в просторі функцій $C_{(a,b)}^n \cap C_{[a,b]}^{n-1}$ розв'язок крайової задачі (2.1), причому в області $\overline{D}_1$ мають силу нерівності (4.4).*

Зауваження. Ітераційний процес (3.2) можна подати у вигляді

$$z_{p+1}(x) = T\left[F^p(\xi) - c_p(\xi)\left(F^p(\xi) - F_p(\xi)\right)\right] - T_2\left[\left(1 - 2c_p(\xi)\right)\left(F^p(\xi) - F_p(\xi)\right)\right],$$
$$v_{p+1}(x) = T\left[F_p(\xi) + c_p(\xi)\left(F^p(\xi) - F_p(\xi)\right)\right] + T_2\left[\left(1 - 2c_p(\xi)\right)\left(F^p(\xi) - F_p(\xi)\right)\right],$$

звідки випливає, що функції $z_{p+1}(x)$ і $v_{p+1}(x)$ не справджують усі крайові умови (2.2). Тому за p-е наближення беремо функцію $0{,}5\left[z_{p+1}(x) + v_{p+1}(x)\right]$, яка справджує всі крайові умови (2.2).

ПРИКЛАД. Розглянемо крайову задачу

$$L_4 y(x) = f\left(x, y(x), y'(x), y''(x)\right) \equiv f[y(x)],$$

де L_4 – диференціальний оператор, породжений диференціальним виразом $\ell_4\left(y(x)\right) \equiv y^{(4)}(x)$ і крайовими умовами $y(0) = y'(0) = y(b) = y'(b) = 0 \quad (b > 0)$.

Крайова задача $L_4 y(x) = 0$ має тільки тривіальний розв'язок, а отже, розглядувана задача може бути подана в еквівалентній інтегральній формі

$$y(x) = \int_0^b G(x,\xi) f[y(\xi)] d\xi,$$

де

$$G(x,\xi)=\begin{cases}\dfrac{\xi^2(x-b)^2}{6b^3}(3bx-2x\xi-b\xi), & 0\le\xi<x,\\ \dfrac{x^2(\xi-b)^2}{6b^3}(3b\varsigma-2x\xi-bx), & x<\xi\le b.\end{cases}$$

Двосторонні наближення будуємо за формулами (3.2), де

$$G_1(x,\xi)=G(x,\xi)-G_2(x,\xi),\quad G_2(x,\xi)=-\frac{b}{16}(x-\xi)^2.$$

Таким чином,

$$z_{p+1}(0)=-v_{p+1}(0)=\frac{b}{16}\int_0^b\xi^2\big(1-2c_p(\xi)\big)\big(F^p(\xi)-F_p(\xi)\big)d\xi,$$

$$z'_{p+1}(0)=-v'_{p+1}(0)=-\frac{b}{8}\int_0^b\xi\big(1-2c_p(\xi)\big)\big(F^p(\xi)-F_p(\xi)\big)d\xi,$$

$$z_{p+1}(b)=-v_{p+1}(b)=\frac{b}{16}\int_0^b(b-\xi)^2\big(1-2c_p(\xi)\big)\big(F^p(\xi)-F_p(\xi)\big)d\xi,$$

$$z'_{p+1}(0)=-v'_{p+1}(0)=\frac{b}{8}\int_0^b(b-\xi)\big(1-2c_p(\xi)\big)\big(F^p(\xi)-F_p(\xi)\big)d\xi,$$

тобто функція $0{,}5\big[z_{p+1}(x)+v_{p+1}(x)\big]$ справджує всі крайові умови розглядуваної задачі.

§5.5. Багатоточкові крайові задачі

Покажемо, що викладені в §§5.2-5.4 результати поширюються і на багатоточкові задачі. Для прикладу розглянемо задачу Валле-Пуссена: в просторі функцій $C_1[0,l]\equiv C^4_{(0,l)}\cap C_{[0,l]}$ знайти розв'язок диференціального рівняння

$$y^{(4)}(x)=f\big(x,y(x)\big)\equiv f\big[y(x)\big],\tag{5.1}$$

який справджує крайові умови

$$y(0)=a_1,\quad y\big(\tfrac{l}{3}\big)=a_2,\quad y\big(\tfrac{2l}{3}\big)=a_3,\quad y(l)=a_4,\tag{5.2}$$

де a_s, $s=\overline{1,4}$ – задані сталі.

Як і в попередніх параграфах, будемо вважати, що $f\big[y(x)\big]\in C_1\big(\overline{D}\big)$, $f:\overline{D}\to[0,l]$. Тоді задачу (5.1),(5.2) можна подати у вигляді [18]

$$y(x)=\Omega(x)-\frac{81}{8l^6}\int_0^l G(x,\xi)f\big[y(\xi)\big]d\xi\equiv\Omega(x)-\mathrm{H}f\big[y(\xi)\big],\tag{5.3}$$

де

$$\Omega(x)=a_1+\frac{243}{4l^6}\begin{vmatrix} x & 0 & x^2 & x^3 \\ \frac{1}{3}l & a_2-a_1 & \frac{1}{9}l^2 & \frac{1}{27}l^3 \\ \frac{2}{3}l & a_3-a_1 & \frac{4}{9}l^2 & \frac{8}{27}l^3 \\ l & a_4-a_1 & l^2 & l^3 \end{vmatrix}, \quad G(x,\xi)=\begin{cases} G_1(x,\xi), & 0\le x\le \frac{l}{3}, \\ G_2(x,\xi), & \frac{l}{3}\le x\le \frac{2l}{3}, \\ G_3(x,\xi), & \frac{2l}{3}\le x\le l, \end{cases}$$

а

$$G_k(x,\xi)=\begin{cases} R_{k,1}(x,\xi), & 0\le \xi\le x, \\ R_{k,2}(x,\xi), & x\le \xi\le \frac{l}{3}, \\ R_{k,3}(x,\xi), & \frac{l}{3}\le \xi\le \frac{2l}{3}, \\ R_{k,4}(x,\xi), & \frac{2l}{3}\le \xi\le l, \end{cases} \quad k=\overline{1,3},$$

$$R_{k,1}(x,\xi)=\begin{vmatrix} x & (x-\xi)^3 & x^2 & x^3 \\ \frac{1}{3}l & \left(\frac{l}{3}-\xi\right)^3 & \frac{1}{9}l^2 & \frac{1}{27}l^3 \\ \frac{2}{3}l & \left(\frac{2l}{3}-\xi\right)^3 & \frac{4}{9}l^2 & \frac{8}{27}l^3 \\ l & (l-\xi)^3 & l^2 & l^3 \end{vmatrix}, \quad R_{k,4}(x,\xi)=\begin{vmatrix} x & 0 & x^2 & x^3 \\ \frac{1}{3}l & 0 & \frac{1}{9}l^2 & \frac{1}{27}l^3 \\ \frac{2}{3}l & 0 & \frac{4}{9}l^2 & \frac{8}{27}l^3 \\ l & (l-\xi)^3 & l^2 & l^3 \end{vmatrix}, \quad k=\overline{1,3},$$

$$R_{1,2}(x,\xi)=\begin{vmatrix} x & 0 & x^2 & x^3 \\ \frac{1}{3}l & \left(\frac{l}{3}-\xi\right)^3 & \frac{1}{9}l^2 & \frac{1}{27}l^3 \\ \frac{2}{3}l & \left(\frac{2l}{3}-\xi\right)^3 & \frac{4}{9}l^2 & \frac{8}{27}l^3 \\ l & (l-\xi)^3 & l^2 & l^3 \end{vmatrix}, \quad R_{2,3}(x,\xi)=\begin{vmatrix} x & (x-\xi)^3 & x^2 & x^3 \\ \frac{1}{3}l & 0 & \frac{1}{9}l^2 & \frac{1}{27}l^3 \\ \frac{2}{3}l & 0 & \frac{4}{9}l^2 & \frac{8}{27}l^3 \\ l & (l-\xi)^3 & l^2 & l^3 \end{vmatrix},$$

$$R_{2,2}(x,\xi)=R_{3,2}(x,\xi)=\begin{vmatrix} x & (x-\xi)^3 & x^2 & x^3 \\ \frac{1}{3}l & 0 & \frac{1}{9}l^2 & \frac{1}{27}l^3 \\ \frac{2}{3}l & \left(\frac{2l}{3}-\xi\right)^3 & \frac{4}{9}l^2 & \frac{8}{27}l^3 \\ l & (l-\xi)^3 & l^2 & l^3 \end{vmatrix},$$

$$R_{1,3}(x,\xi)=R_{3,3}(x,\xi)=\begin{vmatrix} x & 0 & x^2 & x^3 \\ \frac{1}{3}l & 0 & \frac{1}{9}l^2 & \frac{1}{27}l^3 \\ \frac{2}{3}l & \left(\frac{2l}{3}-\xi\right)^3 & \frac{4}{9}l^2 & \frac{8}{27}l^3 \\ l & (l-\xi)^3 & l^2 & l^3 \end{vmatrix}.$$

Нехай $z_0(x)$ і $v_0(x)$ – довільні з простору $C_1[0,l]$ функції, які справджують умови (6.2), а

$$w_0(x)=z_0(x)-v_0(x)=\begin{cases} \le 0, & x\in\left[0,\frac{l}{3}\right)\cup\left(\frac{2l}{3},l\right], \\ \ge 0, & x\in\left[\frac{l}{3},\frac{2l}{3}\right], \end{cases} \tag{5.4}$$

$$w_0^{(\mathrm{IV})}(x)\le 0, \quad x\in(0,l).$$

Надалі такі функції $z_0(x)$ і $v_0(x)$ будемо називати функціями порівняння задачі (5.1),(5.2). Побудуємо послідовності функцій $\{z_p(x)\}$ і $\{v_p(x)\}$ згідно з законом

$$\begin{aligned} z_{p+1}(x) &= \Omega(x) - \mathrm{H}\left[F^p(\xi) - c_p(\xi)\left(F^p(\xi) - F_p(\xi)\right)\right], \\ v_{p+1}(x) &= \Omega(x) - \mathrm{H}\left[F_p(\xi) + c_p(\xi)\left(F^p(\xi) - F_p(\xi)\right)\right], \end{aligned} \tag{5.5}$$

де $F^p(x)$, $F_p(x)$, $\bar{z}_p(x)$, $\bar{v}_p(x)$ визначаються, як і в §5.3, тільки $d_p = d_p(x)$ є функціями, які справджують умови (3.1) для всіх $x \in [0,l]$.

За початкові наближення у (5.5) вибираємо функції порівняння задачі (5.1),(5.2), для яких виконуються нерівності

$$\alpha_0(x) = z_0^{(4)}(x) - F^0(x) \ge 0, \quad \beta_0(x) = v_0^{(4)}(x) - F_0(x) \le 0, \quad x \in [0,l]. \tag{5.6}$$

Тоді, беручи до уваги, що при $0 \le x, \xi \le l$ функції $G_1(x,\xi) \ge 0$, $G_2(x,\xi) \le 0$, $G_3(x,\xi) \ge 0$, а

$$\begin{aligned} &v_0(x) \le \bar{v}_0(x) \le \bar{z}_0(x) \le z_0(x), \quad x \in \left[\tfrac{l}{3}, \tfrac{2l}{3}\right], \\ &z_0(x) \le \bar{z}_0(x) \le \bar{v}_0(x) \le v_0(x), \quad x \in \left[0, \tfrac{l}{3}\right) \cup \left(\tfrac{2l}{3}, l\right], \end{aligned}$$

із (5.5) при $p = 0$ дістанемо

$$\begin{aligned} &w_1(x) = -\mathrm{H}\left[\left(1 - 2c_0(\xi)\right)\left(F^0(\xi) - F_0(\xi)\right)\right] \ge (\le) 0, \\ &z_1(x) - z_0(x) = -\mathrm{H}\left[-\alpha_0(\xi) - c_0(\xi)\left(F^0(\xi) - F_0(\xi)\right)\right] \le (\ge) 0, \\ &v_1(x) - v_0(x) = -\mathrm{H}\left[-\beta_0(\xi) + c_0(\xi)\left(F^0(\xi) - F_0(\xi)\right)\right] \ge (\le) 0, \quad x \in \left[\tfrac{l}{3}, \tfrac{2l}{3}\right] \quad \left(x \in \left[0, \tfrac{l}{3}\right) \cup \left(\tfrac{2l}{3}, l\right]\right), \end{aligned}$$

тобто мають силу нерівності

$$\begin{aligned} &v_0(x) \le v_1(x) \le z_1(x) \le z_0(x), \quad x \in \left[\tfrac{l}{3}, \tfrac{2l}{3}\right], \\ &z_0(x) \le z_1(x) \le v_1(x) \le v_0(x), \quad x \in \left[0, \tfrac{l}{3}\right) \cup \left(\tfrac{2l}{3}, l\right]. \end{aligned}$$

Вибираємо функції $d_p(x)$ і $c_p(x)$, які справджують умови відповідно (3.1) та (3.3), таким чином, щоб виконувалися нерівності

$$\begin{aligned} &z_0(x) - z_1(x) - d_0(x) w_0(x) \ge (\le) 0, \\ &v_0(x) - v_1(x) + d_0(x) w_0(x) \le (\ge) 0, \quad x \in \left[\tfrac{l}{3}, \tfrac{2l}{3}\right] \quad \left(x \in \left[0, \tfrac{l}{3}\right) \cup \left(\tfrac{2l}{3}, l\right]\right); \\ &F^0(x) - F^1(x) - c_0(x)\left(F^0(x) - F_0(x)\right) \ge 0, \quad F_0(x) - F_1(x) - c_0(x)\left(F^0(x) - F_0(x)\right) \ge 0. \end{aligned}$$

Тоді

$$\alpha_1(x) = z_1^{(4)}(x) - F^1(x) \ge 0, \quad \beta_1(x) = v_1^{(4)}(x) - F_1(x) \le 0, \quad x \in [0,l].$$

Методом математичної індукції переконуємося: якщо на кожному кроці ітерацій (5.5) функції $d_p(x)$ і $c_p(x)$ вибирати таким чином, щоб виконувалися нерівності

$$
\begin{aligned}
&z_p(x) - z_{p+1}(x) - d_p(x)w_p(x) \ge (\le) 0,\\
&v_p(x) - v_{p+1}(x) + d_p(x)w_p(x) \le (\ge) 0, \quad x \in \left[\tfrac{l}{3}, \tfrac{2l}{3}\right] \quad \left(x \in \left[0, \tfrac{l}{3}\right) \cup \left(\tfrac{2l}{3}, l\right]\right);\\
&F^p(x) - F^{p+1}(x) - c_p(x)\left(F^p(x) - F_p(x)\right) \ge 0,\\
&F_p(x) - F_{p+1}(x) - c_p(x)\left(F^p(x) - F_p(x)\right) \ge 0,
\end{aligned}
\tag{5.7}
$$

то для довільного $p \in \mathrm{N}$ мають силу нерівності:

$$
\begin{aligned}
&v_p(x) \le v_{p+1}(x) \le z_{p+1}(x) \le z_p(x), \quad x \in \left[\tfrac{l}{3}, \tfrac{2l}{3}\right],\\
&z_p(x) \le z_{p+1}(x) \le v_{p+1}(x) \le v_p(x), \quad x \in \left[0, \tfrac{l}{3}\right) \cup \left(\tfrac{2l}{3}, l\right]
\end{aligned}
$$

Введемо позначення: $\sup\limits_{[0,l]}\left|w_0(x)\right| \le \varepsilon, \quad \max\limits_{[0,l]}\int\limits_0^l \left|G(x,\xi)\right| d\xi = \dfrac{4l^{10}}{3^7} = \gamma.$

Тоді із (5.5) випливає справедливість оцінки

$$
\left|w_p(x)\right| \le \varepsilon\left(\frac{81}{8l^6} K\gamma q^2\right)^p = \varepsilon\left(\frac{l^4}{54} Kq^2\right)^p.
$$

Як і в попередніх параграфах, з урахуванням наведених вище міркувань легко переконатися, що має силу наступна

ТЕОРЕМА 5.7. *Нехай $f\left[y(x)\right] \in C_1\left(\overline{D}\right)$, а для функцій порівняння задачі (5.1),(5.2) $z_0(x)$ і $v_0(x)$ виконуються умови (5.6). Тоді послідовності функцій $\{z_p(x)\}$ і $\{v_p(x)\}$, побудовані згідно з законом (5.5),(5.7), при $l^4 Kq^2 < 54$ збігаються абсолютно й рівномірно до єдиного в просторі функцій $C_1[0,l]$ розв'язку $y(x)$ задачі (5.1),(5.2), причому в області $\overline{D}_1$ мають силу нерівності*

$$
\begin{aligned}
&v_p(x) \le v_{p+1}(x) \le y(x) \le z_{p+1}(x) \le z_p(x), \quad x \in \left[\tfrac{l}{3}, \tfrac{2l}{3}\right],\\
&z_p(x) \le z_{p+1}(x) \le y(x) \le v_{p+1}(x) \le v_p(x), \quad x \in \left[0, \tfrac{l}{3}\right) \cup \left(\tfrac{2l}{3}, l\right]
\end{aligned}
$$

для довільного $p \in \mathrm{N}$.

Як і в §5.4, можна побудувати також альтернуючий двосторонній метод наближеного інтегрування задачі (5.1),(5.2).

§5.6. Двосторонній функціонально-дискретний метод інтегрування крайових задач для диференціальних рівнянь другого порядку

Нехай L – лінійний диференціальний оператор, породжений диференціальним виразом другого порядку

$$
\ell_2(y) \equiv y''(x) - p(x)y(x), \quad x \in (0;1)
$$

і крайовими умовами

$$
U_1(y) = 0, \quad U_2(y) = 0,
$$

де $U_1(y)$, $U_2(y)$ – незалежні лінійні функціонали, які можуть містити значення функції $y(x)$ та її похідної $y'(x)$ в кількох (загалом не менш ніж двох) точках проміжку [0;1].

Розглянемо крайову задачу

$$Ly(x) = -f(x). \qquad (6.1)$$

Будемо вважати, що існує функція Ґріна оператора L і позначимо цю функцію через $G(x,\xi,p)$. Припустимо, що (припущення 1):

а) функція Ґріна $G(x,\xi,p)$ оператора L неперервна і невід’ємна в квадраті $D = \{(x,\xi) \mid 0 \le x,\xi \le 1\}$;

б) $G(x,\xi,p)$ може перетворюватися в нуль лише на межі квадрата D для функції $p(x)$, невід’ємної і кусково-неперервної на проміжку $x \in [0;1]$, яка має на цьому проміжку скінчену кількість розривів першого роду.

Введемо рівномірну сітку $\varpi = \{x_i = in^{-1}, \quad i = \overline{0,n}\}$, де n вибираємо таким чином, щоб усі точки розриву функції $p(x)$ увійшли в множину вузлів сітки ϖ. Апроксимуємо функцію $p(x)$ знизу кусково-сталою функцією $\overline{p}(x)$, яку визначимо, наприклад, наступним чином:

$$\overline{p}(x) = \min_{x \in [x_{i-1}, x_i]} p(x), \quad i = \overline{1,n}.$$

Наведемо загальну схему побудови функціонально-дискретного методу (ФД-методу) для задачі (6.1), запропонованого В.Л.Макаровим (Доклады АН СССР. – 1991. – **320**, №3. – С. 31-39) і дослідженого на двосторонність та реалізованого для деяких конкретних крайових умов у роботі [13].

Розглядаємо більш загальну задачу вигляду

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} Y(x,t) - \omega(x,t) Y(x,t) = -f(x), \quad x \in (0;1), \qquad (6.2)$$

$$U_1(Y) = 0, \quad U_2(Y) = 0, \qquad (6.3)$$

де

$$\omega(x,t) = \overline{p}(x) + t\left[p(x) - \overline{p}(x)\right]. \qquad (6.4)$$

Із (6.4) очевидно, що $Y(x,1) = y(x)$. Якщо покласти $t = 0$, то задача (6.2), (6.3) перейде в так звану базову задачу

$$y_0''(x) - \overline{p}(x) y_0(x) = -f(x), \quad x \in (0;1), \quad U_1(y_0) = 0, \quad U_2(y_0) = 0,$$

для диференціального рівняння з кусково-сталим коефіцієнтом $\overline{p}(x)$, розв’язок якого можна знайти в явному вигляді.

Введемо позначення:

$$y_j(x) = \frac{1}{j!} \left. \frac{\partial^j Y(x,t)}{\partial t^j} \right|_{t=0}, \quad j = 0,1,2,...$$

Тоді легко переконатися, що можливе подання функції $y(x)$ у вигляді

$$y(x) = \sum_{j=0}^{m} y_j(x) + R_m(x) \equiv \upsilon_m(x) + R_m(x), \quad R_m(x) = \frac{1}{m!} \int_0^1 (1-s)^m \frac{\partial^{m+1} Y(x,s)}{\partial s^{m+1}} ds, \ (6.5)$$

де функції $y_j(x)$ є розв'язками рекурентної послідовності крайових задач

$$\begin{aligned} & y''_{j+1}(x) - \overline{p}(x) y_{j+1}(x) = \left[p(x) - \overline{p}(x)\right] y_j(x), \quad x \in (0;1), \\ & U_1(y_{j+1}) = 0, \quad U_2(y_{j+1}) = 0, \quad j = 0,1,... \end{aligned} \tag{6.6}$$

Згідно з ФД-методом за наближення m-го порядку для шуканого розв'язку $y(x)$ крайової задачі (6.1) береться функція

$$\upsilon_m(x) = \sum_{j=0}^{m} y_j(x). \tag{6.7}$$

Позначимо через $\Re^1_{(0;1)}$ клас функцій, абсолютно інтегровних на інтервалі (0;1). Має силу наступна

ТЕОРЕМА 5.8. *Нехай для довільного $t \in [0;1]$ виконані припущення 1 відносно функції $\omega(x,t)$, а функція $f(x)$ є невід'ємною і $f(x) \in \Re^1_{(0;1)}$, Тоді ФД-метод має властивість двосторонності:*

$$\upsilon_{2m-1}(x) \le y(x) \le \upsilon_{2m}(x), \quad m = 0,1,2,..., \quad \upsilon_{-1} \equiv 0. \tag{6.8}$$

Доведення. Розв'язок задачі (6.2)-(6.4) подається у вигляді

$$Y(x,t) = \int_0^1 G(x,\xi,\omega) f(\xi) d\xi.$$

Позначимо через $G^{(j)}(x,\xi,t) = \dfrac{\partial^j}{\partial t^j} G(x,\xi,\omega(t)).$ Тоді для залишкового члена в (6.5) маємо формулу

$$R_m(x) = \int_0^1 \frac{(1-s)^m}{m!} \int_0^1 G^{(m+1)}\left(x,\xi,s\right) f(\xi) d\xi ds \tag{6.9}$$

і стаємо перед необхідністю дослідження знакосталості при $0 \le t,x,\xi \le 1$ функції $G^{(m+1)}(x,\xi,t),$ яка визначається через розв'язки рекурентної послідовності крайових задач

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} G^{(j+1)}(x,\xi,t) - \omega(t,x) G^{(j+1)}(x,\xi,t) = (j+1)\left[p(x) - \overline{p}(x)\right] G^{(j)}(x,\xi,t), \quad 0 < x < 1,$$

$$U_1\left(G^{(j+1)}\right) = U_2\left(G^{(j+1)}\right) = 0, \quad 0 \le \xi,t \le 1, \quad j = \overline{0,m},$$

або

$$G^{(j+1)}(x,\xi,t) = -(j+1)\int_0^1 \left[p(\eta) - \overline{p}(\eta)\right] G(x,\eta,\omega) G^{(j)}(\eta,\xi,t) d\eta, \quad j = \overline{0,m}. \tag{6.10}$$

Із (6.9) за допомогою індукції з урахуванням припущення 1 дістанемо:

$$(-1)^{j+1} G^{(j+1)}(x,\xi,t) \ge 0, \quad 0 \le x,\xi,t \le 1. \tag{6.11}$$

Оскільки функція $f(x)$ є невід'ємною при $0 \le x \le 1,$ то співвідношення (6.5), (6.9), (6.11) приводять до нерівностей (6.8), і теорема доведена. □

При розв'язуванні задачі (6.1) з конкретними крайовими умовами за допомогою ФД-методу і використанні для його обґрунтування Теореми 5.8

потрібно визначити, чи є функція Ґріна $G(x,\xi,\omega)$ невід'ємною для довільного $t \in [0;1]$. Однак у більшості випадків цього зробити не вдається, тому доцільно використовувати наступне твердження:

ТЕОРЕМА 5.9. *Нехай для функції Ґріна $G(x,\xi,\overline{p})$ виконані умови припущення 1 і функція $\overline{p}(x)$ наближає $p(x)$ знизу таким чином, що*

$$p(x) - \overline{p}(x) \ge 0, \quad 0 \le x \le 1.$$

Тоді для того, щоб ФД-метод давав монотонні двосторонні наближення до невід'ємного розв'язку задачі (6.1), тобто вилка (6.8) не розширювалася з ростом m, необхідно і досить, щоб для довільної невід'ємної функції $f(x) \in \Re^1_{(0;1)}$ виконувалася нерівність

$$G(x,\xi,\overline{p}) - \int_0^1 G(x,\eta,\overline{p})[p(x)-\overline{p}(x)]G(\eta,\xi,\overline{p})d\eta \ge 0, \quad 0 \le x,\xi \le 1. \qquad (6.12)$$

Доведення. Нехай виконується нерівність (6.12). Розглянемо дві послідовності функцій $\{\upsilon_{2m-1}(x)\}$ та $\{\upsilon_{2m}(x)\}$, $m = 1,2,...$, члени яких визначаються формулами (6.7), де згідно з (6.6)

$$y_0(x) = \int_0^1 G(x,\xi,\overline{p}) f(\xi)d\xi, \quad y_j(x) = -\int_0^1 G(x,\xi,\overline{p})[p(x)-\overline{p}(x)]y_{j-1}(\xi)d\xi, \quad j = 1,2,...$$

Тоді з урахуванням (6.12) дістанемо

$$\upsilon_1(x) \le \upsilon_3(x) \le ... \le \upsilon_{2m-1}(x) \le ... \le \upsilon_{2m}(x) \le ... \le \upsilon_4(x) \le \upsilon_2(x) \le \upsilon_0(x),$$

тобто послідовність $\{\upsilon_{2m-1}(x)\}$ монотонно зростає і обмежена згори, а послідовність $\{\upsilon_{2m}(x)\}$ обмежена знизу і монотонно спадає. Тому обидві послідовності монотонно збігаються і мають спільну границю $y(x)$, яка є розв'язком інтегрального рівняння

$$y(x) = -\int_0^1 G(x,\xi,\overline{p})[p(x)-\overline{p}(x)]y(\xi)d\xi + \int_0^1 G(x,\xi,\overline{p}) f(\xi)d\xi,$$

тобто розв'язком крайової задачі (6.1).

Нехай для довільної невід'ємної функції $f(x) \in \Re^1_{(0;1)}$ вилка (6.8) не розширюється з ростом m. Тоді, поклавши в (6.8) $m = 1$, дістанемо $0 \le y_1(x) \le y(x)$. Звідси випливає, що $y_0(x) - y_1(x) \ge 0$ або

$$\int_0^1 \left\{ G(x,\xi,\overline{p}) - \int_0^1 G(x,\eta,\overline{p})[p(x)-\overline{p}(x)]G(\eta,\xi,\overline{p})d\eta \right\} f(\xi)d\xi \ge 0, \quad 0 \le x,\xi \le 1,$$

звідки одразу одержуємо (6.12).

Дослідимо збіжність побудованого ФД-методу. Розглянемо лінійний оператор

$$Ay = \int_0^1 G(x,\xi,\overline{p}) y(\xi)d\xi,$$

який діє з $C_{[0;1]}$ в $C_{[0;1]}$. В теорії лінійних операторів [10] доводиться існування скінченої границі $r_0(\overline{p}) = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left\|A^n\right\|}$. Це число називається спектральним радіусом лінійного обмеженого оператора *A*. Для цілковито неперервного лінійного оператора *A* буде $r_0(\overline{p}) = \left|\lambda_0(\overline{p})\right|^{-1}$, де $\lambda_0(\overline{p})$ – найбільше за модулем власне значення оператора *A*.

Має силу

ТЕОРЕМА 5.10. *Нехай функція Ґріна* $G(x,\xi,\overline{p})$ *справджує умови припущення 1 для фіксованої кусково-сталої функції* $\overline{p}(x)$ *і існує максимальна додатна стала* α *така, що*

$$G_\alpha(x,\xi,\overline{p}) \equiv G(x,\xi,\overline{p}) - \alpha\int\limits_0^1 G(x,\eta,\overline{p})G(\eta,\xi,\overline{p})d\eta \geq 0, \quad 0 \leq x,\xi \leq 1. \tag{6.13}$$

Тоді справджується нерівність $\alpha r_0(\overline{p}) \leq 1$.

Доведення. З умов теореми випливає виконання нерівностей

$$\int\limits_0^1 G(x,\xi,\overline{p})d\xi \geq \alpha\int\limits_0^1\int\limits_0^1 G(x,\eta_1,\overline{p})G(\eta_1,\xi,\overline{p})d\eta_1 \geq \ldots \geq$$

$$\geq \alpha^n \underbrace{\int\limits_0^1\ldots\int\limits_0^1}_{n+1} G(x,\eta_1,\overline{p})G(\eta_1,\eta_2,\overline{p})\ldots G(\eta_n,\xi,\overline{p})d\eta_n d\eta_{n-1}\ldots d\eta_1 d\xi.$$

Позначимо через x^*_{n+1} точку, для якої виконується рівність

$$\left\|A^{n+1}\right\| = \underbrace{\int\limits_0^1\ldots\int\limits_0^1}_{n+1} G(x^*_{n+1},\eta_1,\overline{p})G(\eta_1,\eta_2,\overline{p})\ldots G(\eta_n,\xi,\overline{p})d\eta_n d\eta_{n-1}\ldots d\eta_1 d\xi, \quad n = 0,1,\ldots$$

Тоді очевидно, що

$$\left\|A\right\| = \int\limits_0^1 G(x^*_1,\xi,\overline{p})d\xi \geq \alpha\int\limits_0^1\int\limits_0^1 G(x,\eta_1,\overline{p})G(\eta_1,\xi,\overline{p})d\eta_1 = \alpha\left\|A^2\right\| \geq \ldots \geq$$

$$\geq \alpha^n \underbrace{\int\limits_0^1\ldots\int\limits_0^1}_{n+1} G(x^*_{n+1},\eta_1,\overline{p})G(\eta_1,\eta_2,\overline{p})\ldots G(\eta_n,\xi,\overline{p})d\eta_n d\eta_{n-1}\ldots d\eta_1 d\xi = \alpha^n\left\|A^{n+1}\right\|.$$

Звідси одержуємо нерівність $\alpha^{(1-\nu)}\left\|A^{n+1}\right\|^\nu \leq \left\|A\right\|^\nu$, де $\nu = (n+1)^{-1}$. Переходячи в ній до границі при $n \to \infty$, дістанемо потрібну нерівність $\alpha r_0(\overline{p}) \leq 1$. □

НАСЛІДОК. *Нехай виконані умови припущення 1 для фіксованої кусково-сталої функції* $\overline{p}(x)$ *і*

$$\left\|p - \overline{p}\right\|_\infty r_0(\overline{p}) < 1, \quad \left\|p - \overline{p}\right\|_\infty = \max_{x\in[0;1]}\left|p(x) - \overline{p}(x)\right|. \tag{6.14}$$

Тоді ФД-метод буде збіжним.

Доведення. Справді, для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке натуральне число N, що для будь-яких $n \ge N$ матимемо

$$\max_{x\in[0;1]}\underbrace{\int_0^1\ldots\int_0^1}_{n+1} G(x,\eta_1,\bar{p})\prod_{i=1}^{n} G(\eta_i,\eta_{i+1},\bar{p})\left[p(\eta_i)-\bar{p}(\eta_i)\right]d\eta_i d\xi \le$$

$$\le \|A\|\left[\|p-\bar{p}\|_\infty \|A^n\|\right] \le \|A\|\left[\|p-\bar{p}\|_\infty (r_0(\bar{p})+\varepsilon)\right]^n, \qquad \eta_{n+1}=\xi,$$

звідки випливає, що при виконанні умови (6.14) ФД-метод буде збіжним. □

Зауважимо, що для двосторонності ФД-методу умови (6.14) недостатньо. Необхідним є виконання всіх умов теореми 5.9, хоча замість нерівностей (6.12) можна розглядати більш жорстку нерівність (6.13) із $\alpha = \|p-\bar{p}\|_\infty$.

ПРИКЛАД. Розглянемо задачу (6.1) з крайовими умовами Діріхле-квазіперіодичності (типу Іонкіна-Самарського), де

$$U_1(y) = y(0), \quad U_2(y) = y'(0) - 2y'(1). \tag{6.15}$$

Візьмемо в ФД-методі $\bar{p}(x) \equiv 0$. Тоді $G(x,\xi,0) = x + 0{,}5(x+\xi-|x-\xi|) \ge 0$ і

$$G_\alpha(x,\xi,0) = G(x,\xi,0) - \alpha\int_0^1 G(x,\eta,0)G(\eta,\xi,0)d\eta = (1-\alpha)x - 2x\xi\alpha + \frac{1}{2}(x+\xi-|x-\xi|) +$$

$$+\frac{\alpha}{6}\left[x^3 + \left(\frac{x+\xi-|x-\xi|}{2}\right)^3\right] + \frac{\alpha}{2}\left[x\xi^2 + \left(\frac{x+\xi+|x-\xi|}{2}\right)^2\left(\frac{x+\xi-|x-\xi|}{2}\right)\right].$$

При $\alpha = 0$ функція $G_0(x,\xi,0) = 0$. Звідси випливає, що згідно з (6.13) необхідно знайти найбільше додатне число $\alpha_{\max}$, для якого виконується нерівність $G_\alpha(x,\xi,0) \ge 0$ при всіх $x,\xi \in [0;1]$. В роботі [13] за допомогою засобів математичного пакету *Maple V* знайдене ймовірне значення $\alpha_{\max} = 1$. Отже, якщо в задачі (6.1),(6.15) $0 \le p(x) \le 1$, то будуть виконані всі умови теореми 5.9 для $\bar{p}(x) \equiv 0$ і відповідна функція Ґріна буде невід'ємною.

Щоб знайти спектральний радіус оператора

$$Ay = \int_0^1 G(x,\xi,0)y(\xi)d\xi,$$

потрібно дослідити спектральну задачу

$$y''(x) + \lambda y(x) = 0, \quad x \in (0;1), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) - 2y'(1) = 0.$$

Власними значеннями наведеної спектральної задачі є числа $\lambda_1 = (\pi/3)^2$, $\lambda_{2k+1} = (\pi/3 + 2\pi k)^2$, $\lambda_{2k} = (-\pi/3 + 2\pi k)^2$, $k = \overline{1,\infty}$, а відповідні ортонормовані власні функції мають вигляд $y_n(x) = \sqrt{2}\sin\sqrt{\lambda_n}x$, $n = \overline{1,\infty}$. Таким чином, найбільшим власним значенням оператора *A*, тобто його спектральним радіусом, є $r_0(0) = \lambda_1^{-1} = (3/\pi)^2$. На підставі наслідку з теореми 5.10 можемо стверджувати, що ФД-метод буде збіжним при виконанні умови $\|p\|_\infty < (\pi/3)^2$. Однак для забезпечення двосторонності необхідне виконання умови $\|p\|_\infty \le 1$.

§5.7. Поняття про асимптотичні методи в теорії крайових задач. Метод збурень (метод малого параметра)

Багато прикладних задач (задачі механіки рідини або газу, квантової механіки тощо) приводять до диференціальних чи інтегро-диференціальних рівнянь, які містять деякі параметри, що характеризують певні властивості фізичного процесу. Ці рівняння здебільшого не інтегруються в квадратурах, тому їх розв'язки будують за допомогою різноманітних наближених методів. Зокрема, для наближеного інтегрування таких рівнянь успішно застосовуються асимптотичні методи – методи, які описують поведінку досліджуваних функцій, коли деякі з параметрів, від яких вони залежать, прямують до певної границі (скінченої чи нескінченої).

Ще на початку XIX сторіччя С.Д.Пуассон запропонував шукати розв'язок рівняння коливань маятника у вигляді ряду по степенях малого параметра ε. Одними з перших робіт, де вивчалися сингулярно збурені диференціальні рівняння, були роботи Ж.Ліувілля (1838), Л.Шлезінґера (1907), Дж.Д.Біркгофа (1908), В.А.Стеклова (1909), П.П.Ноайона (1912) та інших учених. Характерною рисою цих робіт була побудова фундаментальної системи розв'язків для певного класу звичайних диференціальних рівнянь та систем. В усіх цих роботах розглядалися рівняння, які містять параметр $\lambda \to \infty$, однак одержані результати неважко перекласти на сингулярно збурені рівняння, які залежать від малого параметра $\varepsilon \to 0$. Бурхливий розвиток асимптотичного аналізу почався в кінці 1940-х років з робіт А.М.Тихонова (1948, 1952). З того часу для розв'язування широкого класу збурених задач розроблені різноманітні асимптотичні методи, в чому є велика частка й українських учених. Зокрема, засновник визнаної у всьому світі київської математичної школи академік М.М.Крилов та його учень М.М.Боголюбов [11] заклали основи асимптотичного аналізу задач нелінійної механіки; ряд нових асимптотичних методів в теорії нелінійних коливань розробив учень М.М.Боголюбова Ю.О.Митропольський [4] та його послідовники. Відомі також методи М.І.Шкіля [30] для лінійних диференціальних рівнянь із повільно-змінними коефіцієнтами, Й.З.Штокало [31] для лінійних рівнянь із квазіперіодичними коефіцієнтами тощо. Зараз існує чимало спеціальної літератури з асимптотичних методів в теорії звичайних диференціальних рівнянь, тому в даному посібнику обмежимося викладом основних понять та означень теорії збурень та деяких простіших методів інтегрування крайових задач, які використовують ідею асимптотичних методів.

Нехай деяке диференціальне рівняння, яке є математичною моделлю певного фізичного процесу, містить параметр ε (вважатимемо цю величину безрозмірною, що завжди можна зробити). Цей параметр може входити в рівняння регулярно або нерегулярно (сингулярно). Якщо рівняння записане в нормальній формі (себто розв'язане відносно старшої похідної), і при цьому його права частина неперервно залежить від параметра, то кажуть, що параметр ε входить у задане рівняння ***регулярно***; якщо ж права частина має розрив при деякому значенні параметра $\varepsilon = \varepsilon_0$, то кажуть, що в околі цього значення параметр ε входить у задане рівняння ***сингулярно***. Наприклад, у рівняння

$y'' = \varepsilon y' + \varepsilon^2 y$ параметр ε входить регулярно, а у рівняння $y'' = \varepsilon^{-1} y' + f(x)$ або $\varepsilon y'' = y' + \varepsilon f(x)$ той же параметр входить сингулярно в околі точки $\varepsilon = 0$. У нерегулярному випадку диференціальне рівняння зазвичай записують із параметром при старшій похідній, як це зроблено вище.

Означення 1. Кажуть, що $f(x) = O(g(x))$ при $x \to x_0$ [нескінчено велика відносно $g(x)$], якщо існує такий окіл U_{x_0} точки x_0 і стала $C > 0$, що для всіх $x \in U_{x_0}$ і $x \neq x_0$ виконується нерівність $|f(x)| \leq C|g(x)|$.

Означення 2. Кажуть, що $f(x) = o(g(x))$ при $x \to x_0$ [нескінчено мала відносно $g(x)$], якщо $g(x) \neq 0$ в деякому околі U_{x_0} точки $x = x_0$ (за винятком, можливо, самої точки x_0) і

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Означення 3. Послідовність $\{\varphi_j(x)\}$ називається ***асимптотичною послідовністю*** при $x \to x_0$, якщо $\varphi_{j+1}(x) = o(\varphi_j(x))$ при $x \to x_0$, тобто

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\varphi_{j+1}(x)}{\varphi_j(x)} = 0, \quad \forall j = 0,1,2,\ldots \quad \left(\varphi_j(x) \neq 0, \quad \forall x \in U_{x_0} \setminus \{x_0\}\right).$$

Означення 4. Нехай $\{\varphi_j(x)\}$ – асимптотична послідовність при $x \to x_0$. Ряд $\sum_{j=0}^{\infty} a_j \varphi_j(x)$ називається ***асимптотичним рядом*** для функції $f(x)$ при $x \to x_0$, якщо для кожного фіксованого $m = 0,1,2,\ldots$ має силу співвідношення

$$f(x) - \sum_{j=0}^{m} a_j \varphi_j(x) = o(\varphi_m(x)) \text{ при } x \to x_0.$$

У цьому випадку зазвичай пишуть $f(x) \sim \sum_{j=0}^{\infty} a_j \varphi_j(x)$ при $x \to x_0$, і кажуть, що ряд $\sum_{j=0}^{\infty} a_j \varphi_j(x)$ збігається до $f(x)$ асимптотично при $x \to x_0$. У теорії асимптотичних методів, де всі ряди вважаються асимптотичними, замість знаку ~ часто вживають знак рівності =.

Надалі використовуватимемо лише степеневі асимптотичні ряди за асимптотичною послідовністю $\{\varepsilon^j\}$ при $\varepsilon \to 0$, де ε – параметр, який входить у задане рівняння, причому коефіцієнти цих рядів будуть функціями однієї чи багатьох змінних. Для повноти викладу наведемо відповідне означення, котре мало чим відрізняється від попереднього.

Означення 5. Нехай функція $f(t_1,\ldots,t_n,\varepsilon)$ визначена в деякому околі точки $\varepsilon = 0$ для всіх $(t_1,\ldots,t_n)$ із деякої області $D \subset \mathrm{R}^n$. Тоді ряд

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j(t_1,...,t_n)\varepsilon^n \qquad (7.1)$$

називається асимптотичним для функції $f(t_1,...,t_n,\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$, якщо виконується співвідношення

$$f(\boldsymbol{t},\varepsilon) - \sum_{j=0}^{m} a_j(\boldsymbol{t})\varepsilon^n = o(\varepsilon^m) \text{ при } \varepsilon \to 0$$

для всіх упорядкованих наборів $\boldsymbol{t} = (t_1,...,t_n) \in D$ і всіх фіксованих $m = 0,1,2,...$ Якщо вказане співвідношення виконується рівномірно для $\boldsymbol{t} \in D$, то кажуть, що ряд (7.1) є рівномірним асимптотичним наближенням функції $f(\boldsymbol{t},\varepsilon)$ при $\varepsilon = 0$. Якщо задана вектор-функція $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t},\varepsilon) = (f_1(\boldsymbol{t},\varepsilon) \; ... \; f_n(\boldsymbol{t},\varepsilon))$, то асимптотичні ряди будуються для кожної її компоненти $f_i(\boldsymbol{t},\varepsilon)$; одержаний таким чином векторний ряд називається асимптотичним рядом для вектор-функції $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t},\varepsilon)$.

Загальна ідея асимптотичних методів полягає в наступному. Нехай задане рівняння містить параметр ε, який змінюється в деякому околі точки $\varepsilon = 0$ (можна, звичайно, брати й будь-яку іншу точку $\varepsilon_0 \neq 0$). Покладемо в цьому рівнянні $\varepsilon = 0$, дістанемо так зване ***граничне рівняння***. Припустимо, що граничне рівняння має деякий розв'язок. Чи можна стверджувати, що вихідне рівняння має розв'язок, близький до граничного? Якщо це так, то розв'язок вихідного рівняння можна шукати у вигляді суми граничного розв'язку і деякої функції, яка прямує до нуля при $\varepsilon \to 0$. Більше того, якщо права частина розкладається в ряд по цілих невід'ємних степенях ε, то в цьому випадку розв'язок вихідного рівняння також можна шукати у вигляді подібного ряду, вільним членом якого буде розв'язок граничного рівняння. Випадок, коли розв'язок вихідного рівняння прямує на всій множині свого існування до розв'язку граничного рівняння, називають ***класичним***, а відповідну теорію – класичною, або ***регулярною теорією збурень***. Цей випадок завжди має силу, якщо параметр ε входить у рівняння регулярно і виконуються деякі умови, аналогічні умовам теореми існування і єдиності розв'язку диференціального рівняння. Цей випадок не діє, коли параметр ε входить у рівняння сингулярно. Однак і в нерегулярному випадку, який досить часто зустрічається на практиці, існує теорія, яка дозволяє знайти розв'язок вихідного рівняння, який прямує в певному сенсі до розв'язку граничного рівняння при $\varepsilon \to 0$. Ця теорія суттєво відрізняється від теорії регулярних збурень (зокрема, в нерегулярному випадку не можна шукати розв'язок вихідної задачі у вигляді ряду по невід'ємних степенях ε) і дістала назву ***теорії сингулярних збурень***.

Метод збурень (метод малого параметра). Застосування методу збурень є зручним тоді, коли для розглядуваної крайової задачі відомий розв'язок близької задачі, коефіцієнти якої мало відрізняються від заданих. Задля простоти викладу вважатимемо, що крайові умови обох задач співпадають.

Нехай потрібно знайти розв'язок диференціального рівняння

$$F\left(x, y, y',..., y^{(n)}\right) = 0, \quad x \in (a,b), \qquad (7.2)$$

який справджує лінійні крайові умови (при цьому задане рівняння може бути нелінійним)

$$U_j(y) \equiv \sum_{s=0}^{n-1}\left(\alpha_{sj} y^{(s)}(a) + \beta_{sj} y^{(s)}(b)\right) = \gamma_j, \quad j = \overline{1,n}, \tag{7.3}$$

де α_{sj}, β_{sj}, γ_j – задані сталі. Будемо вважати, що крайова задача (7.2),(7.3) має єдиний розв'язок.

Суть методу збурень полягає в наступному. Вводимо параметр збурень ε і складаємо допоміжне рівняння

$$\Phi\left(\varepsilon, x, y, y', ..., y^{(n)}\right) = 0 \tag{7.4}$$

з урахуванням наступних вимог:

а) при $\varepsilon = 1$ рівняння (7.4) співпадає з рівнянням (7.2);

б) розв'язок рівняння (7.4) при $\varepsilon = 0$ відомий або легко знаходиться.

Припустимо, що розв'язок $y(x, \varepsilon)$ допоміжної крайової задачі

$$\Phi\left(\varepsilon, x, y, y', ..., y^{(n)}\right) = 0, \quad U_j(y) = \gamma_j, \quad j = \overline{1,n} \tag{7.5}$$

розкладається в збіжний ряд по степенях ε вигляду

$$y(x, \varepsilon) = y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \varepsilon^2 y_2(x) + ..., \tag{7.6}$$

де $y_0(x)$ – відомий розв'язок задачі (7.5) при $\varepsilon = 0$, а $y_i(x)$, $i \in \mathrm{N}$ – невідомі функції, які справджують однорідні крайові умови

$$U_j(y_i) = 0, \quad \overline{j = 1, n}, \quad i = \overline{1, \infty}. \tag{7.7}$$

Виконання умов (7.7) забезпечує виконання умов (7.3) для функції $y(x, \varepsilon)$.

Підклавши (7.6) у рівняння (7.4), дістанемо

$$\Phi\left(\varepsilon, x, \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k y_k(x), \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k y_k'(x), ..., \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k y_k^{(n)}(x)\right) = 0\,. \tag{7.8}$$

Подавши ліву частину рівності (7.8) у вигляді ряду за степенями ε (вважаємо це можливим), дістанемо

$$\sum_{p=0}^{\infty} \varepsilon^p \Phi_p = 0, \tag{7.9}$$

де Φ_p – відомі диференціальні вирази, які можна виписати в явній формі, наприклад:

$$\Phi_0 = \Phi\left(0, x, y_0(x), y_0'(x), ..., y_0^{(n)}(x)\right),$$

$$\Phi_1 = \left\{\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon} + y_1(x)\frac{\partial \Phi}{\partial y} + y_1'(x)\frac{\partial \Phi}{\partial y'} + ... + y_1^{(n)}(x)\frac{\partial \Phi}{\partial y^{(n)}}\right\}_{\varepsilon=0}$$

тощо. Таким чином, вираз Φ_0 містить лише $y_0(x)$, вираз Φ_1 містить $y_0(x)$ і $y_1(x)$, загалом вираз Φ_p містить $y_0(x)$, $y_1(x)$, …, $y_p(x)$, причому всі функції $y_i(x)$, $i \in \mathrm{N}$ справджують крайові умови (7.7). Для виконання умови (7.9) достатньо вимагати, щоб

$$\Phi_0 = \Phi_1 = ... = \Phi_p = 0. \tag{7.10}$$

Розв'язуючи тепер послідовно задачі

$$\Phi_0 \equiv \Phi\left(0, x, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n)}\right) = 0, \quad U_j(y_0) = \gamma_j, \quad j = \overline{1,n};$$

$$\Phi_i = 0, \quad U_j(y_i) = 0, \quad j = \overline{1,n}, \quad i = 1,2,\dots,$$

шуканий розв'язок задачі (7.2),(7.3) з урахуванням того, що при $\varepsilon = 1$ рівняння (7.4) співпадає з рівнянням (7.2), дістаємо у вигляді

$$y(x) \equiv y(x,1) = y_0(x) + y_1(x) + y_2(x) + \dots \tag{7.11}$$

За наближений розв'язок задачі (7.2),(7.3) можна взяти скінчену кількість членів ряду (7.11).

ПРИКЛАД. За допомогою методу збурень розв'язати крайову задачу

$$\begin{aligned} & y'' + \left(1 + x^2\right)y = -1, \quad x \in (-1;1); \\ & y(-1) = 0, \quad y(1) = 0. \end{aligned} \tag{7.12}$$

Розв'язання. Запишемо допоміжну крайову задачу

$$y'' + \left(1 + \varepsilon x^2\right)y = -1, \quad y(-1) = y(1) = 0, \tag{7.13}$$

яка при $\varepsilon = 1$ співпадає з заданою, а при $\varepsilon = 0$ переходить у наступну просту для інтегрування задачу

$$y_0'' + y_0 = -1, \quad y_0(-1) = y_0(1) = 0,$$

єдиним розв'язком якої є функція

$$y_0(x) = \frac{\cos x}{\cos 1} - 1.$$

Розв'язок допоміжної задачі шукатимемо у вигляді (7.6). Підклавши (7.6) у (7.13), дістанемо:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \left(y_k'' + y_k\right) + x^2 \varepsilon \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k y_k = -1.$$

Прирівнюючи до нуля коефіцієнти при однакових степенях малого параметра ε за винятком нульового (y_0 – відома функція), приходимо до послідовності крайових задач

$$y_k'' + y_k + x^2 y_{k-1} = 0, \quad y_k(-1) = y_k(1) = 0, \quad k = 1,2,\dots$$

Розв'язуючи послідовно ці крайові задачі, можна знайти потрібну кількість членів ряду (7.10). Так, для визначення функції $y_1(x)$ потрібно розв'язати крайову задачу

$$y_1'' + y_1 = x^2\left(1 - \frac{\cos x}{\cos 1}\right), \quad y_1(-1) = y_1(1) = 0,$$

звідки

$$y_1(x) = x^2 - 2 - \frac{\left(3x - 2x^3\right)\sin x - \left(3x^2 - \mathrm{tg}1 + 15\right)\cos x}{12\cos 1}.$$

Отже, за перше наближення до розв'язку задачі (7.12) згідно з (7.11) беремо функцію

$$y(x) = y_0(x) + y_1(x).$$

Щоб мати уявлення про точність одержаного наближеного розв'язку, наведемо числові дані для нього посередині заданого відрізка в точці $x = 0$, де числові методи дають значення розв'язку задачі (7.12) $y(0) \approx 1$. Для нульового наближення маємо $y(0) = y_0(0) = \cos^{-1} 1 - 1 \approx 0{,}8508$, а для першого наближення $y(0) = y_0(0) + y_1(0) \approx 0{,}9241$.

§5.8. Сингулярно збурені задачі

До сингулярно збурених відносять задачі, в яких, якщо покласти значення малого параметра рівним нулеві, понижується порядок рівняння або виникають особливості у виродженому рівнянні.

Розглянемо лінійне диференціальне рівняння вигляду

$$L_\varepsilon y(x,\varepsilon) \equiv \sum_{i=1}^{k} \varepsilon^i p_{m+i}(x,\varepsilon) y^{(m+i)}(x,\varepsilon) + \sum_{j=0}^{m} p_j(x,\varepsilon) y^{(j)}(x,\varepsilon) = f(x,\varepsilon), \ \ x \in [a,b], \quad (8.1)$$

де $\varepsilon > 0$ – малий параметр, $f(x,\varepsilon)$ і $p_s(x,\varepsilon)$, $s = \overline{0, m+k}$ – задані обмежені функції на проміжку $x \in [a,b]$, які можна подати у вигляді розкладів

$$f(x,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i f_i(x), \quad p_s(x,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i p_{s,i}(x), \quad s = \overline{0, m+k}, \quad (8.2)$$

де $f_i(x), p_{s,i}(x) \in C^{\infty}_{[a,b]}$. Задля простоти викладу вважатимемо $p_{m+k}(x,\varepsilon) = 1$, тоді $p_{m,0}(x) \neq 0$ при $x \in [a,b]$.

Задамо $(m+k)$ двоточкових чи $(m+k)$-точкових крайових умов, які задля скорочення записів позначимо через

$$U_\varepsilon\big(y(x,\varepsilon)\big) = 0, \quad (8.3)$$

і розглянемо одержану крайову задачу (8.1),(8.3).

Покладаючи в (8.1) $\varepsilon = 0$, одержимо рівняння

$$L_0 \omega(x) \equiv \sum_{j=0}^{m} p_{j,0}(x) \omega^{(j)}(x) = f_0(x), \quad (8.4)$$

розв'язок якого може справджувати лише m крайових умов вигляду

$$U_0\big(\omega(x)\big) = 0, \quad (8.5)$$

тобто розв'язок $\omega(x)$ рівняння (8.4), взагалі кажучи, не справджуватиме k умов із (8.3). Тому функція $\omega(x)$ не може бути рівномірним наближенням до розв'язку $y(x,\varepsilon)$ на всьому проміжку $x \in [a,b]$.

Означення 1. Якщо розв'язок $\omega(x)$ виродженої крайової задачі (8.4),(8.5) не належить області визначення $D(L_\varepsilon)$ збуреної задачі (8.1),(8.3), то кажуть, що збурена задача є сингулярною по ε при $\varepsilon \to 0$. Якщо ж $\omega(x) \in D(L_\varepsilon)$, то збурена задача (8.1),(8.3) залежить від ε регулярно.

У теорії сингулярних збурень важливу роль відіграють корені характеристичного рівняння вигляду

$$\sum_{i=1}^{k} \varepsilon^i p_{m+i}(x) \lambda^{m+i} + \sum_{j=0}^{m} p_j(x) \lambda^j = 0.$$

Означення 2. Рівняння

$$\sum_{i=0}^{k} p_{m+i,0}(x)\nu^i = 0, \quad \nu = \varepsilon\lambda. \tag{8.6}$$

називатимемо ***додатковим характеристичним рівнянням***.

Означення 3. Під ***побудовою асимптотики*** розв’язку задачі (8.1),(8.3) будемо розуміти подання розв’язку у вигляді ряду по степенях ε:

$$y(x,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^i y_i(x,\varepsilon) + R_{n+1}(x,\varepsilon) \equiv y_{\varepsilon,n}(x,\varepsilon) + R_{n+1}(x,\varepsilon), \tag{8.7}$$

де $y_{\varepsilon,n}(x,\varepsilon)$ – сума *n* перших членів ряду (8.7), а $R_{n+1}(x,\varepsilon)$ – залишковий член асимптотики розв’язку. Тут функція $y_i(x,\varepsilon)$ залежить від ε сингулярно.

Означення 4. Часткова сума $y_{\varepsilon,n}(x,\varepsilon)$ ряду (8.7) називається ***формальним асимптотичним n-розв’язком*** крайової задачі (8.1),(8.3), якщо

1) $L_\varepsilon y_{\varepsilon,n}(x,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^i f_i(x) + O\left(\alpha\varepsilon^{n+1}\right);$

2) $y_{\varepsilon,n}(x,\varepsilon) \in D\left(L_\varepsilon\right), \quad \forall n \in \mathrm{N} \cup \{0\},$

де α – деяка характеристика росту функції $y_{\varepsilon,n}(x,\varepsilon)$ в розглядуваній області. Якщо, крім того, для достатньо малих $\varepsilon > 0$ виконується нерівність

$$\left\| y(x,\varepsilon) - y_{\varepsilon,n}(x,\varepsilon) \right\|_C \le \left(C_0 + \alpha C_1\right)\varepsilon^{n+1}, \tag{8.8}$$

де $y(x,\varepsilon)$ – точний розв’язок задачі (9.1),(9.3), а C_0, C_1 не залежать від *x* і ε, то функція $y_{\varepsilon,n}(x,\varepsilon)$ називається ***асимптотичним розв’язком*** задачі (8.1),(8.3). При цьому функцію $y_{\varepsilon,0}(x,\varepsilon)$ називають ***головним членом асимптотики***.

При виконанні певних умов, накладених на корені характеристичного рівняння, характеристика росту α є обмеженою. Тоді нерівність (8.8) набуває вигляду

$$\left\| y(x,\varepsilon) - y_{\varepsilon,n}(x,\varepsilon) \right\|_C \le C\varepsilon^{n+1}.$$

У цьому випадку асимптотична збіжність ряду (8.7) переходить у звичайну збіжність при $\varepsilon \to 0$.

Розглянемо відповідне до (8.1) однорідне диференціальне рівняння

$$\sum_{i=1}^{k} \varepsilon^i p_{m+i}(x,\varepsilon) y^{(m+i)}(x,\varepsilon) + \sum_{j=0}^{m} p_j(x,\varepsilon) y^{(j)}(x,\varepsilon) = 0. \tag{8.9}$$

Має силу наступна

ТЕОРЕМА 5.11 ***(теорема Шлезінґера-Біркгофа-Ноайона).*** *Нехай коефіцієнти* $p_s(x,\varepsilon)$ *рівняння (8.9) рівномірно обмежені, тобто* $|\, p_s(x,\varepsilon)| \le M$, $\forall x \in [a,b]$, $0 \le \varepsilon \le \varepsilon_0$, $s = \overline{0, m+k}$, *і розкладаються в рівномірно збіжні ряди*

$$p_s(x,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i p_{s,i}(x), \quad p_{s,j}(x) \in C^{\infty}_{[a,b]}, \quad s = \overline{0, m+k},$$

при $0 \le \varepsilon \le \varepsilon_0$. *Далі, нехай всі корені* $\nu_i(x,\varepsilon)$ *характеристичного рівняння (8.6) при кожному значенні* $x \in [a,b]$ *є різними і для них виконуються нерівності*

$$\mathrm{Re}\,\nu_1 \le \ldots \le \mathrm{Re}\,\nu_r \le 0 \le \mathrm{Re}\,\nu_{r+m+1} \le \ldots \le \mathrm{Re}\,\nu_{m+k}, \quad 0 < r < m+k.$$

Тоді при достатньо малих $\varepsilon > 0$ *існує фундаментальна система частинних розв'язків (ФСЧР)* $\{y_i(x,\varepsilon)\}$, $i = \overline{1, m+k}$, *рівняння (8.9) і для довільного* $n \in N \cup \{0\}$ *виконуються співвідношення:*

$$y_i(x,\varepsilon) = \omega_i(x,\varepsilon) + O\left(\alpha_i \varepsilon^{n+1}\right), \quad \overline{i = 1, m+k},$$

$$\frac{d^j y_i(x,\varepsilon)}{dx^j} = \frac{d^j \omega_i(x,\varepsilon)}{dx^j} + O\left(\alpha_i \varepsilon^{n-j+1}\right), \quad j = \overline{1, m+k-1},$$

де

а) $\omega_i(x,\varepsilon) = \alpha_i(x,\varepsilon) \sum\limits_{j=0}^{n} \varepsilon^j \omega_{i,j}(x)$;

б) $\alpha_i(x,\varepsilon) = \exp\left(\dfrac{1}{\varepsilon} \int\limits_{x_i}^{x} \nu_i(t,\varepsilon)dt \right)$, $x_i \in [a,b]$, *але* $\alpha_i(x,\varepsilon) \equiv 0$ *для* $i = \overline{r+1, r+m}$;

в) *функції* $\omega_{i,j}(x) \in C^{\infty}_{[a,b]}$, *причому* $\omega_{i,0}(x)$, $i = \overline{1,r}, \overline{r+m+1, m+k}$, *є нетривіальними розв'язками однорідного диференціального рівняння першого порядку і тому не перетворюються в нуль ніде на проміжку* $x \in [a,b]$, *а функції* $\omega_{i,0}(x)$, $i = \overline{r+1, r+m}$, *утворюють ФСЧР рівняння* $\sum\limits_{j=0}^{m} p_{j,0}(x)\omega^{(j)}(x) = 0$;

г) *функції* $\omega_{i,j}(x)$ $(j > 0)$ *є розв'язками лінійних неоднорідних рівнянь першого порядку при* $i = \overline{1,r}, \overline{r+m+1, m+k}$, *і порядку m при* $i = \overline{r+1, r+m}$; *праві частини цих рівнянь є лінійними комбінаціями функцій* $\omega_{i,j}(x)$ $(j \le r-1)$ *та їх похідних.*

Зазначимо, що для випадку $m = 0$ теорема 5.11 була вперше доведена Л.Шлезінґером у 1907 році (уздовж променя $\arg\varepsilon = \varepsilon_0$), а в 1908 році Дж.Д.Біркгоф довів справедливість цієї теореми в секторі $\varphi \le \arg\varepsilon \le Q$ з дійсним x і комплексним параметром $\lambda \to \infty$.

Означення 5. Кажуть, що сингулярно збурена задача (8.1),(8.3) регулярно вироджується в задачу (8.4),(8.5), якщо кількість коренів додаткового характеристичного рівняння (8.6) з від'ємною дійсною частиною співпадає з кількістю втрачених умов на лівому кінці відрізка, а кількість коренів з додатною дійсною частиною співпадає з кількістю умов, втрачених на правому кінці відрізка.

Означення 6. Функція $V(x,\varepsilon)$, визначена в області $B = \{a \le x \le b, 0 < \varepsilon \le \varepsilon_0\}$, називається ***функцією граничного шару*** *k*-го порядку в околі точки $x = 0$, якщо

а) $V(x,\varepsilon)$ як функція змінної *x* належить класу $C^r(B)$, де $r > k$;

б) $V(x,\varepsilon)$ і її похідні $V_x^{(j)}(x,\varepsilon)$, $j = \overline{1,r}$, рівномірно прямують до нуля при $\varepsilon \to 0$ на довільній замкнутій підмножині, яка не містить точки $x = 0$;

в) похідна $V_x^{(k)}(x,\varepsilon)$ обмежена в області B при $\varepsilon \to 0$, тоді як $V_x^{(k+1)}(x,\varepsilon)$ прямує до нескінченості при $\varepsilon \to 0$;

г) $V(x,\varepsilon)$ і її похідні $V_x^{(j)}(x,\varepsilon)$, $j=\overline{1,k-1}$, прямують до нуля при $\varepsilon \to 0$ в області B.

Функцією граничного шару k-го порядку в околі точки $x=0$ є, наприклад, функція $V(x,\varepsilon)=\varepsilon^k \exp\left(-\lambda\varepsilon^{-1}x\right)$, якщо $\lambda>0$. Аналогічно дається означення функції граничного шару в околі точки $x=1$.

ПРИКЛАД. Розглянемо [3] особливості, які виникають при розв'язуванні сингулярно збурених рівнянь, для випадку простішої крайової задачі вигляду

$$\varepsilon y'' + ay' + by(x,\varepsilon) = 0, \quad x \in (0;1); \tag{8.10}$$

$$y(0,\varepsilon)=\gamma_0, \quad y(1,\varepsilon)=\gamma_1, \tag{8.11}$$

де a, b, γ_1, γ_2 – задані сталі.

Поклавши в (8.10) $\varepsilon=0$, дістанемо вироджене рівняння

$$a\omega' + b\omega = 0, \tag{8.12}$$

загальним розв'язком якого є функція $\omega(x)=C\exp\left(-ba^{-1}x\right)$. Ця функція може слугувати за деяке наближення до розв'язку крайової задачі (8.10),(8.11), але для цього потрібно відповідним чином вибрати значення константи C. Для визначення константи C використовуємо одну з крайових умов: $\omega(0)=\gamma_0$ або $\omega(1)=\gamma_1$. Щоб упевнитися, яку з цих умов слід використати, потрібно дослідити, на якому з кінців відрізка [0;1] виникає явище граничного шару.

Відомо, що загальним розв'язком рівняння (8.10) є функція

$$y(x,\varepsilon)=C_1(\varepsilon)e^{k_1(\varepsilon)x}+C_2(\varepsilon)e^{k_2(\varepsilon)x}, \tag{8.13}$$

де $k_1(\varepsilon)$, $k_2(\varepsilon)$ – корені характеристичного рівняння

$$\varepsilon k^2 + ak + b = 0,$$

тобто

$$k_1(\varepsilon)=\frac{-a-\sqrt{a^2-4b\varepsilon}}{2\varepsilon}=-a\varepsilon^{-1}+ba^{-1}+O(\varepsilon), \quad k_2(\varepsilon)=\frac{-a+\sqrt{a^2-4b\varepsilon}}{2\varepsilon}=-ba^{-1}+O(\varepsilon).$$

Визначимо сталі $C_1(\varepsilon)$, $C_2(\varepsilon)$ з крайових умов (8.11) і підкладемо одержані значення у вираз (8.13). Дістанемо:

$$y(x,\varepsilon)=\frac{\gamma_0 e^{k_2(\varepsilon)}-\gamma_1}{e^{k_2(\varepsilon)}-e^{k_1(\varepsilon)}}e^{k_1(\varepsilon)x}+\frac{\gamma_1-\gamma_0 e^{k_1(\varepsilon)}}{e^{k_2(\varepsilon)}-e^{k_1(\varepsilon)}}e^{k_2(\varepsilon)x}.$$

Випадок 1. Нехай $a>0$. Тоді з урахуванням того, що

$$\exp\{k_1(\varepsilon)\}\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{}0, \quad \exp\{k_2(\varepsilon)\}\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{}\exp\left\{-ba^{-1}\right\},$$

маємо:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\gamma_0 e^{k_2(\varepsilon)}-\gamma_1}{e^{k_2(\varepsilon)}-e^{k_1(\varepsilon)}}e^{k_1(\varepsilon)x}=\frac{\gamma_0 e^{-ba^{-1}}-\gamma_1}{e^{-ba^{-1}}}\equiv\gamma_0-\gamma_1 e^{ba^{-1}},$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\gamma_1-\gamma_0 e^{k_1(\varepsilon)}}{e^{k_2(\varepsilon)}-e^{k_1(\varepsilon)}}e^{k_2(\varepsilon)x}=\gamma_1 e^{-ba^{-1}(x-1)}\equiv\omega_2(x),\quad x\in[0;1].$$

Легко бачити, що функція $\omega_2(x)=\gamma_1\exp\left\{-ba^{-1}(x-1)\right\}$ є розв'язком рівняння (8.12), який справджує умову $\omega(1)=\gamma_1$. Таким чином, якщо $a>0$, то у задачі (8.10),(8.11) при достатньо малих $\varepsilon>0$

а) явище граничного шару виникає в правому околі точки $x=0$, причому граничний шар має нульовий порядок;

б) $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}y(x,\varepsilon)=\omega_2(x),\quad x\in(0;1]$.

Отже, у цьому випадку рівняння (8.12) слід розв'язувати за умови $\omega(1)=\gamma_1$, а в околі точки $x=0$ потрібно будувати функцію граничного шару нульового порядку.

Випадок 2. Якщо $a<0$, то

$$\exp\{k_1(\varepsilon)\}\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{}\infty,\quad \exp\{k_2(\varepsilon)\}\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{}\exp\left\{-ba^{-1}\right\},$$

тоді

$$\frac{\gamma_0 e^{k_2(\varepsilon)}-\gamma_1}{e^{k_2(\varepsilon)}-e^{k_1(\varepsilon)}}e^{k_1(\varepsilon)x}\approx\left[\gamma_1-\gamma_0 e^{-ba^{-1}}\right]e^{k_1(\varepsilon)(x-1)},$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\gamma_1-\gamma_0 e^{k_1(\varepsilon)}}{e^{k_2(\varepsilon)}-e^{k_1(\varepsilon)}}e^{k_2(\varepsilon)x}=\gamma_0 e^{-ba^{-1}x}\equiv\omega_1(x),\quad x\in[0;1].$$

Величина $\left[\gamma_1-\gamma_0 e^{-ba^{-1}}\right]e^{k_1(\varepsilon)(x-1)}$ є функція граничного шару нульового порядку в лівому околі точки $x=1$, а $\omega_1(x)=\gamma_0\exp\left\{-ba^{-1}x\right\}$ є розв'язком рівняння (8.12), який справджує умову $\omega(0)=\gamma_0$. Таким чином, якщо $a<0$, то у задачі (8.10),(8.11) при достатньо малих $\varepsilon>0$

а) явище граничного шару виникає в лівому околі точки $x=1$;

б) $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}y(x,\varepsilon)=\omega_1(x),\quad x\in[0;1)$.

Зауваження. Якщо в рівнянні (8.10) узяти праву частину $f(x)\neq 0$, то неважко показати, що виникнення явища граничного шару не залежатиме від цієї функції.

Таким чином, одна з основних проблем теорії сингулярних збурень полягає в тому, щоб визначити, в околі якої з точок виникає явище граничного шару, характер цього явища і справедливість граничного співвідношення

$$\lim_{\varepsilon\to 0}y(x,\varepsilon)=y_0(x),\tag{8.14}$$

де $y(x,\varepsilon)$ – розв'язок збуреної задачі, а $y_0(x)$ – розв'язок виродженої задачі. Після цього можна братися до побудови асимптотики розв'язку досліджуваної сингулярно збуреної задачі, обґрунтувавши попередньо існування розв'язків вихідної та виродженої задач. Зауважимо при цьому: якщо побудовано асимптотику розв'язку збуреної задачі і зроблено оцінку залишкового члена, то граничне співвідношення (8.14) одержується з асимптотичного ряду при $\varepsilon=0$.

Розглянутий приклад – крайова задача для найпростішого диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами, для якого відома ФСЧР у вигляді простих експоненціальних функцій. Для рівнянь зі змінними коефіцієнтами ФСЧР визначається згідно з теоремою Шлезінґера-Біркгофа-Ноайона у вигляді нескінченого ряду. Тому ми повинні обірвати ряд ФСЧР на деякому кроці і оперувати зі скінченими сумами. Практична реалізація знаходження загального розв’язку таким шляхом призводить до складних розрахунків. Для вивчення виникнення граничного шару достатньо в ФСЧР взяти тільки головний член цього ряду. При побудові асимптотики розв’язку приходимо до рівнянь нижчих порядків, іноді до рівнянь першого порядку чи навіть до алгебраїчних рівнянь, що значно спрощує відшукання розв’язку.

РОЗДІЛ VI

МЕТОД ПАРАМЕТРИЗАЦІЇ ДОСЛІДЖЕННЯ НЕЛІНІЙНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ

§ 6.1. Крайові задачі з нелінійними двоточковими крайовими умовами з виділеною лінійною частиною

Розглянемо систему нелінійних диференціальних рівнянь

$$\frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}(t)), \tag{1.1}$$

підпорядковану нелінійним двоточковим крайовим умовам вигляду:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(0) + \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(T) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(0), \boldsymbol{x}(T)) = \boldsymbol{d}, \tag{1.2}$$

де $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{C} \in \Im(\mathsf{R})^n$ – задані матриці, причому $\det \boldsymbol{C} \neq 0$, а $\boldsymbol{d}$ – заданий n-вимірний вектор.

Тут $\Im(\mathsf{R})^n$ – алгебра n-вимірних квадратних матриць з дійсними компонентами.

Припустимо, що вектор-функції $\boldsymbol{f} : [0,T] \times D \to \mathsf{R}^n$, із системи диференціальних рівнянь (1.1), та $\boldsymbol{g} : D \times D \to \mathsf{R}^n$ $(n \geq 2)$, з нелінійних крайових умов (1.2), неперервні, де $D \subset \mathsf{R}^n$ – замкнена обмежена область.

Задача полягає у відшуканні розв'язку системи диференціальних рівнянь (1.1), який задовольняє нелінійні крайові умови (1.2), у класі неперервно диференційовних функцій $\boldsymbol{x} : [0,T] \to D$.

Покажемо, що замість задачі (1.1), (1.2) доцільно розглядати систему диференціальних рівнянь (1.1) при певних параметризованих лінійних двоточкових крайових умовах, до яких треба приєднати відповідну систему алгебраїчних чи трансцендентних рівнянь для визначення числових значень введених параметрів.

Для переходу до задачі з лінійними крайовими умовами замінимо значення компонент розв'язку (1.1), (1.2) у точці T параметрами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{z} &:= \boldsymbol{x}(0) = \operatorname{col}(x_1(0), x_2(0), \ldots, x_n(0)) = \operatorname{col}(z_1, z_2, \ldots, z_n), \\ \boldsymbol{\lambda} &:= \boldsymbol{x}(T) = \operatorname{col}(x_1(T), x_2(T), \ldots, x_n(T)) = \operatorname{col}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n). \end{aligned} \tag{1.3}$$

Із використанням параметризації (1.3) нелінійні крайові умови (1.2) запишуться у вигляді:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(0)+\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(T)=\boldsymbol{d}-\boldsymbol{g}(z,\lambda). \tag{1.4}$$

Введемо позначення

$$\boldsymbol{d}(z,\lambda):=\boldsymbol{d}-\boldsymbol{g}(z,\lambda),$$

тоді параметризовані умови (1.4) виглядатимуть наступним чином:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(0)+\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(T)=\boldsymbol{d}(z,\lambda). \tag{1.5}$$

Зауваження 6.1. *Множина розв'язків нелінійної двоточкової крайової задачі (1.1), (1.2) співпадає з множиною тих розв'язків задачі (1.1), (1.5), які задовольняють додаткові умови (1.3).*

Отже, замість крайової задачі (1.1), (1.2) будемо розглядати еквівалентну їй параметризовану задачу (1.1), (1.5) з лінійними крайовими умовами, до якої потрібно приєднати (1.3).

Для дослідження модифікованої задачі (1.1), (1.5) обґрунтуємо відповідну чисельно-аналітичну схему.

На основі заданої функції $\boldsymbol{f}$ у правій частині системи диференціальних рівнянь (1.1) та області визначення D введемо у розгляд вектор:

$$\delta_D(\boldsymbol{f}):=\frac{1}{2}\left[\max_{(t,\boldsymbol{x})\in[0,T]\times D}\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})-\min_{(t,\boldsymbol{x})\in[0,T]\times D}\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})\right], \tag{1.6}$$

та припустимо, що:

I. Функція $\boldsymbol{f}$ у правій частині системи диференціальних рівнянь (1.1) непе-рервна в $[0,T]\times D$ і задовольняє умову Ліпшиця вигляду:

$$|\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{u})-\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{v})|\le \boldsymbol{K}|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}|, \tag{1.7}$$

для всіх $t\in[0,T]$, $\{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\}\subset D$, де $\boldsymbol{K}=(k_{ij})_{i,j=1}^{n}$ – деяка стала матриця з невід'ємними компонентами.

II. Для спектрального радіуса $r(\boldsymbol{K})$ виконується нерівність:

$$r(\boldsymbol{K})<\frac{10}{3T}. \tag{1.8}$$

III. Параметризована крайова задача (1.1), (1.5) така, що множина

$$D_\beta := \left\{ \boldsymbol{z} \in D : B\left(\boldsymbol{z} + \frac{t}{T}\left[\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{d}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{\lambda}) - (\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{I}_n)\boldsymbol{z} \right], \frac{T}{2}\boldsymbol{\delta}_D(\boldsymbol{f}) \right) \subset D, \forall \boldsymbol{\lambda} \in D \right\} \qquad (1.9)$$

непорожня, тобто для всіх $\boldsymbol{\lambda} \in D$ задовольняє умову:

$$D_\beta \neq \varnothing. \qquad (1.10)$$

Для дослідження розв'язків параметризованої крайової задачі (1.1), (1.5) будуємо послідовність функцій $\{\boldsymbol{x}_m\}$, що визначається рекурентним співвідношенням:

$$\boldsymbol{x}_m(t,\boldsymbol{z},\boldsymbol{\lambda}) := \boldsymbol{z} + \int_0^t \boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{x}_{m-1}(s,\boldsymbol{z},\boldsymbol{\lambda}))ds - \frac{t}{T}\int_0^T \boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{x}_{m-1}(s,\boldsymbol{z},\boldsymbol{\lambda}))ds +$$

$$+\frac{t}{T}\left[\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{d}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{\lambda}) - (\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{I}_n)\boldsymbol{z} \right], \qquad m \in \mathbb{N}, \qquad (1.11)$$

$$\boldsymbol{x}_m(t,\boldsymbol{z},\boldsymbol{\lambda}) = \mathrm{col}\left(x_{m,1}(t,\boldsymbol{z},\boldsymbol{\lambda}), x_{m,2}(t,\boldsymbol{z},\boldsymbol{\lambda}), \ldots, x_{m,n}(t,\boldsymbol{z},\boldsymbol{\lambda}) \right),$$

$$\boldsymbol{x}_0(t,\boldsymbol{z},\boldsymbol{\lambda}) = \boldsymbol{z} + \frac{t}{T}\left[\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{d}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{\lambda}) - (\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{I}_n)\boldsymbol{z} \right] \in D_\beta,$$

де $\boldsymbol{z}$ та $\boldsymbol{\lambda}$ розглядаються як параметри.

Легко переконатися, що для всіх $m \geq 1$, $\boldsymbol{z} \in D_\beta$ та $\boldsymbol{\lambda} \in D$, функції $\boldsymbol{x}_m$ задовольняють лінійні двоточкові крайові умови (1.5) та початкові умови

$$\boldsymbol{x}_m(0,\boldsymbol{z},\boldsymbol{\lambda}) = \boldsymbol{z}.$$

Встановимо рівномірну збіжність послідовності (1.11) та відношення її граничної функції до розв'язку вихідної нелінійної крайової задачі (1.1), (1.2).

Теорема 6.1. *Нехай функція* $\boldsymbol{f} : [0,T] \times D \to \mathbb{R}^n$ *у правій частині системи диференціальних рівнянь (1.1), а також параметризовані крайові умови (1.5) задовольняють умови **I-III**.*

Тоді при всіх фіксованих $\boldsymbol{z} \in D_\beta$, $\boldsymbol{\lambda} \in D$:

1. *Функції (1.11) неперервно диференційовні і задовольняють лінійні крайові умови:*

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_m(0,\boldsymbol{z},\boldsymbol{\lambda}) + \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}_m(T,\boldsymbol{z},\boldsymbol{\lambda}) = \boldsymbol{d}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{\lambda}), \quad m = 1,2,3,\ldots \qquad (1.12)$$

2. *Послідовність функцій (1.11) рівномірно збігається відносно* $t \in [0,T]$ *при* $m \to \infty$ *до граничної функції*

$$\boldsymbol{x}^*(t,\boldsymbol{z},\boldsymbol{\lambda}) = \lim_{m\to\infty} \boldsymbol{x}_m(t,\boldsymbol{z},\boldsymbol{\lambda}). \tag{1.13}$$

3. *Гранична функція* $\boldsymbol{x}^*$ *задовольняє початкові умови*

$$\boldsymbol{x}^*(0,\boldsymbol{z},\boldsymbol{\lambda}) = \boldsymbol{z},$$

а також параметризовані лінійні двоточкові крайові умови

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^*(0,\boldsymbol{z},\boldsymbol{\lambda}) + \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}^*(T,\boldsymbol{z},\boldsymbol{\lambda}) = \boldsymbol{d}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{\lambda}).$$

4. *Функція (1.13) для всіх* $t\in[0,T]$ *є єдиним неперервно диференційовним розв'язком інтегрального рівняння*

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{z} + \int_0^t \boldsymbol{f}(s,\boldsymbol{x}(s))ds - \frac{t}{T}\int_0^T \boldsymbol{f}(s,\boldsymbol{x}(s))ds + \frac{t}{T}\left[\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{d}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{\lambda}) - (\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{I}_n)\boldsymbol{z}\right] \tag{1.14}$$

або еквівалентної йому задачі Коші (1.15), (1.16) для модифікованої системи диференціальних рівнянь вигляду:

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}) + \Delta(\boldsymbol{z},\boldsymbol{\lambda}), \tag{1.15}$$

$$\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{z}, \tag{1.16}$$

де $\Delta : D_\beta \times D \to \mathrm{R}^n$ *– відображення, визначене формулою:*

$$\Delta(\boldsymbol{z},\boldsymbol{\lambda}) := \frac{1}{T}\left[\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{d}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{\lambda}) - (\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{I}_n)\boldsymbol{z}\right] - \frac{1}{T}\int_0^T \boldsymbol{f}(s,\boldsymbol{x}(s))ds, \tag{1.17}$$

а підмножина D_β *має вигляд (1.9).*

5. *Справедлива оцінка відхилення функції* $\boldsymbol{x}^*$ *від її m-го наближення для всіх* $t\in[0,T]$*:*

$$\left|\boldsymbol{x}^*(t,\boldsymbol{z},\boldsymbol{\lambda}) - \boldsymbol{x}_m(t,\boldsymbol{z},\boldsymbol{\lambda})\right| \le \frac{20}{9} t\left(1 - \frac{t}{T}\right)\boldsymbol{Q}^m(\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{Q})^{-1}\boldsymbol{\delta}_D(\boldsymbol{f}), \tag{1.18}$$

де матриця $\boldsymbol{Q}$ *має вигляд:*

$$\boldsymbol{Q} := \frac{3T}{10}\boldsymbol{K}, \tag{1.19}$$

а вектор $\boldsymbol{\delta}_D(\boldsymbol{f})$ *визначений згідно з (1.6).*

Сформулюємо деякі додаткові леми, які надалі будуть використовуватись при доведенні даної теореми.

Лема 6.1. *Для будь-якої неперервної функції* $\boldsymbol{f}:[0,T]\to D$ *має силу оцінка:*

$$\left|\int_0^t\left[\boldsymbol{f}(\tau)-\frac{1}{T}\int_0^T\boldsymbol{f}(s)ds\right]d\tau\right|\le\frac{1}{2}\alpha_1(t)\left[\max_{t\in[0,T]}\boldsymbol{f}(t)-\min_{t\in[0,T]}\boldsymbol{f}(t)\right], \qquad (1.20)$$

де

$$\alpha_1(t)=2t\left(1-\frac{t}{T}\right). \qquad (1.21)$$

Лема 6.2. *Нехай послідовність функцій* $\{\alpha_m\}$ *визначається рекурентним співвідношенням:*

$$\alpha_{m+1}(t)=\left(1-\frac{t}{T}\right)\int_0^t\alpha_m(s)ds+\frac{t}{T}\int_t^T\alpha_m(s)ds, \qquad (1.22)$$

де $\alpha_0(t)=1$.

Тоді мають силу оцінки:

$$\begin{aligned}\alpha_{m+1}(t)&\le\left(\frac{3T}{10}\right)^m\alpha_m(t), \quad m\ge 2,\\ \alpha_{m+1}(t)&\le\frac{10}{9}\left(\frac{3T}{10}\right)^m\alpha_1(t), \quad m>0,\end{aligned} \qquad (1.23)$$

де $\alpha_1(t)$ *визначена згідно з (1.21).*

Доведення теореми. Покажемо, що послідовність функцій (1.11) є послідовністю Коші у Банаховому просторі $C([0,T],\mathrm{R}^n)$.

Доведемо, що $\boldsymbol{x}_m(t,\boldsymbol{z},\boldsymbol{\lambda})\in D$, для всіх $(t,\boldsymbol{z},\boldsymbol{\lambda})\in[0,T]\times D_\beta\times D$, $m\in\mathrm{N}$.

Справді, з використанням оцінок Леми 6.1 та Леми 6.2, а також співвідношення (1.11), при $m=0$ отримаємо:

$$\left|\boldsymbol{x}_1(t,\boldsymbol{z},\boldsymbol{\lambda})-\boldsymbol{x}_0(t,\boldsymbol{z},\boldsymbol{\lambda})\right|\le\left|\int_0^t\left[\boldsymbol{f}(s,\boldsymbol{x}_0(s,\boldsymbol{z},\boldsymbol{\lambda}))-\frac{1}{T}\int_0^T\boldsymbol{f}(s,\boldsymbol{x}_0(s,\boldsymbol{z},\boldsymbol{\lambda}))ds\right]ds\right|\le$$

$$\le \alpha_1(t)\boldsymbol{\delta}_D(\boldsymbol{f}) \le \frac{T}{2}\boldsymbol{\delta}_D(\boldsymbol{f}). \tag{1.24}$$

Виходячи з нерівності (1.24), можемо зробити висновок, що $\boldsymbol{x}_1(t,\boldsymbol{z},\boldsymbol{\lambda}) \in D$, коли $(t,\boldsymbol{z},\boldsymbol{\lambda}) \in [0,T] \times D_\beta \times D$.

За індукцією не важко показати, що всі функції $\boldsymbol{x}_m$, визначені згідно з (1.11), також належать множині D, $\forall m \in \mathbb{N}$, $t \in [0,T]$, $\boldsymbol{z} \in D_\beta$, $\boldsymbol{\lambda} \in D$.

Розглянемо різницю:

$$\boldsymbol{x}_{m+1}(t,\boldsymbol{z},\boldsymbol{\lambda}) - \boldsymbol{x}_m(t,\boldsymbol{z},\boldsymbol{\lambda}) = \int_0^t [\boldsymbol{f}(s,\boldsymbol{x}_m(s,\boldsymbol{z},\boldsymbol{\lambda})) - \boldsymbol{f}(s,\boldsymbol{x}_{m-1}(s,\boldsymbol{z},\boldsymbol{\lambda}))]ds -$$

$$-\frac{t}{T}\int_0^T [\boldsymbol{f}(s,\boldsymbol{x}_m(s,\boldsymbol{z},\boldsymbol{\lambda})) - \boldsymbol{f}(s,\boldsymbol{x}_{m-1}(s,\boldsymbol{z},\boldsymbol{\lambda}))]ds, \quad m \in \mathbb{N}. \tag{1.25}$$

Позначимо: $\boldsymbol{r}_m(t,\boldsymbol{z},\boldsymbol{\lambda}) := |\boldsymbol{x}_m(t,\boldsymbol{z},\boldsymbol{\lambda}) - \boldsymbol{x}_{m-1}(t,\boldsymbol{z},\boldsymbol{\lambda})|$, $m \in \mathbb{N}$.

Використовуючи оцінку (1.20), та беручи до уваги умову Ліпшиця (1.7), отримаємо:

$$\boldsymbol{r}_{m+1}(t,\boldsymbol{z},\boldsymbol{\lambda}) \le \boldsymbol{K}\left[\left(1-\frac{t}{T}\right)\int_0^t \boldsymbol{r}_m(s,\boldsymbol{z},\boldsymbol{\lambda})ds + \frac{t}{T}\int_t^T \boldsymbol{r}_m(s,\boldsymbol{z},\boldsymbol{\lambda})ds\right], \quad \forall m \in \mathbb{N}. \tag{1.26}$$

На підставі нерівності (1.24) одержимо:

$$\boldsymbol{r}_1(t,\boldsymbol{z},\boldsymbol{\lambda}) = |\boldsymbol{x}_1(t,\boldsymbol{z},\boldsymbol{\lambda}) - \boldsymbol{x}_0(t,\boldsymbol{z},\boldsymbol{\lambda})| \le \alpha_1(t)\boldsymbol{\delta}_D(\boldsymbol{f}). \tag{1.27}$$

На основі оцінок Леми 6.2, з урахуванням рекурентного співвідношення (1.22), із (1.26) при $m = 1$ випливає:

$$\boldsymbol{r}_2(t,\boldsymbol{z},\boldsymbol{\lambda}) \le \boldsymbol{K}\,\boldsymbol{\delta}_D(\boldsymbol{f})\left[\left(1-\frac{t}{T}\right)\int_0^t \alpha_1(s)ds + \frac{t}{T}\int_t^T \alpha_1(s)ds\right] \le \boldsymbol{K}\alpha_2(t)\boldsymbol{\delta}_D(\boldsymbol{f}).$$

За індукцією можна показати, що справедлива оцінка:

$$\boldsymbol{r}_{m+1}(t,\boldsymbol{z},\boldsymbol{\lambda}) \le \boldsymbol{K}^m \alpha_{m+1}(t)\boldsymbol{\delta}_D(\boldsymbol{f}), \tag{1.28}$$

$m = 0,1,2,\ldots$, де $\alpha_{m+1}(t)$, $\alpha_m(t)$ обчислюються за формулою (1.22), а $\boldsymbol{\delta}_D(\boldsymbol{f})$ визначена згідно з (1.6).

З урахуванням (1.23), із співвідношення (1.28) одержимо:

$$\boldsymbol{r}_{m+1}(t,\boldsymbol{z},\boldsymbol{\lambda}) \le \frac{10}{9}\alpha_1(t)\boldsymbol{Q}^m\,\boldsymbol{\delta}_D(\boldsymbol{f}), \tag{1.29}$$

$\forall m = 1,2,3,\ldots$, де матриця $\boldsymbol{Q}$ має вигляд (1.19).

Тоді, беручи до уваги нерівність (1.29), розглянемо різницю:

$$\left|\boldsymbol{x}_{m+j}(t,\boldsymbol{z},\boldsymbol{\lambda}) - \boldsymbol{x}_m(t,\boldsymbol{z},\boldsymbol{\lambda})\right| \le \left|\boldsymbol{x}_{m+j}(t,\boldsymbol{z},\boldsymbol{\lambda}) - \boldsymbol{x}_{m+j-1}(t,\boldsymbol{z},\boldsymbol{\lambda})\right| +$$

$$+\left|\boldsymbol{x}_{m+j-1}(t,\boldsymbol{z},\boldsymbol{\lambda}) - \boldsymbol{x}_{m+j-2}(t,\boldsymbol{z},\boldsymbol{\lambda})\right| + \ldots + \left|\boldsymbol{x}_{m+1}(t,\boldsymbol{z},\boldsymbol{\lambda}) - \boldsymbol{x}_m(t,\boldsymbol{z},\boldsymbol{\lambda})\right| =$$

$$= \sum_{i=1}^{j}\boldsymbol{r}_{m+i}(t,\boldsymbol{z},\boldsymbol{\lambda}) \le \frac{10}{9}\alpha_1(t)\sum_{i=1}^{j}\boldsymbol{Q}^{m+i}\,\boldsymbol{\delta}_D(\boldsymbol{f}) = \frac{10}{9}\alpha_1(t)\boldsymbol{Q}^m\sum_{i=0}^{j-1}\boldsymbol{Q}^i\,\boldsymbol{\delta}_D(\boldsymbol{f}). \tag{1.30}$$

На підставі умови **II**, спектральний радіус матриці $\boldsymbol{Q}$ вигляду (1.19) не перевищує 1.

Тоді маємо:

$$\sum_{i=0}^{j-1}\boldsymbol{Q}^i \le \left(\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{Q}\right)^{-1}, \quad \lim_{m\to\infty}\boldsymbol{Q}^m = \boldsymbol{O}_n.$$

Отже, із нерівності (1.30) можемо зробити висновок, що, згідно з критерієм Коші, послідовність $\{\boldsymbol{x}_m\}$, яка задається формулою (1.11), рівномірно збігається на множині $[0,T]\times D_\beta \times D$ до деякої граничної функції $\boldsymbol{x}^*$.

Оскільки функції $\boldsymbol{x}_m$ послідовності (1.11) задовольняють крайові умови (1.5) при довільних значеннях параметрів, $\boldsymbol{x}^*$ також їх задовольняє. Переходячи у співвідношенні (1.11) до границі при $m\to\infty$, отримуємо, що гранична функція задовольняє інтегральне рівняння (1.14), а отже, є розв'язком задачі Коші (1.15), (1.16), де Δ – відображення, визначене згідно з (1.17).

Оцінка (1.18) є безпосереднім наслідком нерівності (1.30). □

Поряд із системою (1.1) розглянемо задачу Коші (1.31), (1.16) для системи диференціальних рівнянь із постійним збуренням у правій частині вигляду:

$$\frac{d\,\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{\mu}, \tag{1.31}$$

де $t\in[0,T]$, а $\boldsymbol{\mu} = \mathrm{col}(\mu_1,\ldots,\mu_n)$ є керівним параметром.

Покажемо, що для всіх фіксованих $z \in D_\beta$, $\lambda \in D$ параметр μ можна вибрати так, щоб розв'язок $x = x(t, z, \lambda, \mu)$ задачі Коші (1.31), (1.16) у той же час був розв'язком двоточкової параметризованої крайової задачі (1.31), (1.5).

Теорема 6.2. *Нехай $z \in D_\beta$, $\lambda \in D$ та $\mu \in \mathrm{R}^n$ – довільно задані вектори. Припустимо, що для системи диференціальних рівнянь (1.1) виконуються всі умови Теореми 6.1.*

Тоді для того, щоб розв'язок задачі Коші (1.31), (1.16) задовольняв також і двоточкові параметризовані крайові умови (1.5), необхідно і достатньо, щоб параметр $\mu = \mu_{z,\lambda}$ у правій частині (1.31) був заданий рівністю:

$$\mu_{z,\lambda} := \frac{1}{T}\left[C^{-1} d(z,\lambda) - (C^{-1} A + I_n) z\right] - \frac{1}{T}\int_0^T f(s, x^*(s, z, \lambda))ds. \tag{1.32}$$

При цьому

$$x(t, z, \lambda, \mu) = x^*(t, z, \lambda), \tag{1.33}$$

де $x^*(\cdot, z, \lambda)$ *— гранична функція послідовності (1.11).*

***Доведення**. Достатність.* Нехай у правій частині системи диференціальних рівнянь (1.31) $\mu = \mu_{z,\lambda}$ має вигляд (1.32). Із Теореми 1.1 випливає, що при заданих z і λ гранична функція (1.13) послідовності (1.11) є єдиним розв'язком крайової задачі (1.31), (1.5), коли $\mu = \mu_{z,\lambda}$. Крім того, x^* задовольняє і початкові умови (1.16), тобто є розв'язком задачі Коші (1.31), (1.16) при $\mu = \mu_{z,\lambda}$. Таким чином, знайдене значення μ вигляду (1.32), для якого має силу (1.33).

Необхідність. Покажемо, що значення параметра μ вигляду (1.32) єдине, оскільки для будь-якого іншого $\mu = \bar{\mu} \neq \mu_{z,\lambda}$ розв'язок $x(t, z, \lambda, \bar{\mu})$ задачі Коші (1.34), (1.16)

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) + \bar{\mu} \tag{1.34}$$

не задовольняє крайові умови (1.5).

Доведення проведемо від супротивного. Нехай існують хоча б два значення $\mu_{z,\lambda}$ та $\bar{\mu}$ ($\mu_{z,\lambda} \neq \bar{\mu}$) такі, що розв'язки $x = x(t, z, \lambda, \mu_{z,\lambda}) = x_{z,\lambda}(t)$ та

$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(t,\boldsymbol{z},\boldsymbol{\lambda},\overline{\boldsymbol{\mu}})=\overline{\boldsymbol{x}}(t)$ задач Коші (1.31), (1.16), (1.32) і (1.34), (1.16) відповідно у той же час задовольняють двоточкові крайові умови (1.5).

Очевидно, що функції $\boldsymbol{x}_{z,\lambda}$ та $\overline{\boldsymbol{x}}$ є розв'язками інтегральних рівнянь:

$$\boldsymbol{x}_{z,\lambda}(t)=\boldsymbol{z}+\int_0^t \boldsymbol{f}(s,\boldsymbol{x}_{z,\lambda}(s))ds+\boldsymbol{\mu}_{z,\lambda}\,t, \tag{1.35}$$

$$\overline{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{z}+\int_0^t \boldsymbol{f}(s,\overline{\boldsymbol{x}}(s))ds+\overline{\boldsymbol{\mu}}\,t \tag{1.36}$$

відповідно.

За припущенням, $\boldsymbol{x}_{z,\lambda}$, $\overline{\boldsymbol{x}}$ задовольняють як крайові умови (1.5), так і початкові умови (1.16). Тому мають силу співвідношення:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_{z,\lambda}(0)+\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}_{z,\lambda}(T)=\boldsymbol{d}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{\lambda}), \tag{1.37}$$

$$\boldsymbol{x}_{z,\lambda}(0)=\boldsymbol{z}, \tag{1.38}$$

$$\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{x}}(0)+\boldsymbol{C}\overline{\boldsymbol{x}}(T)=\boldsymbol{d}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{\lambda}), \tag{1.39}$$

$$\overline{\boldsymbol{x}}(0)=\boldsymbol{z}, \tag{1.40}$$

звідки отримуємо, що

$$\boldsymbol{x}_{z,\lambda}(T)=\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{d}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{\lambda})-\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{z}, \tag{1.41}$$

$$\overline{\boldsymbol{x}}(T)=\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{d}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{\lambda})-\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{z}. \tag{1.42}$$

При цьому з рівностей (1.35), (1.36) при $t=T$ маємо:

$$\boldsymbol{\mu}_{z,\lambda}=\frac{1}{T}[\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{d}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{\lambda})-(\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}_n)\boldsymbol{z}]-\frac{1}{T}\int_0^{\mathrm{T}} \boldsymbol{f}(s,\boldsymbol{x}_{z,\lambda}(s))ds, \tag{1.43}$$

$$\overline{\boldsymbol{\mu}}=\frac{1}{T}[\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{d}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{\lambda})-(\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}_n)\boldsymbol{z}]-\frac{1}{T}\int_0^T \boldsymbol{f}(s,\overline{\boldsymbol{x}}(s))ds. \tag{1.44}$$

Підставивши (1.43), (1.44) в інтегральні рівняння (1.35), (1.36), одержуємо, що для всіх $t\in[0,T]$

$$\boldsymbol{x}_{z,\lambda}(t)=\boldsymbol{z}+\int_0^t \boldsymbol{f}(s,\boldsymbol{x}_{z,\lambda}(s))ds-\frac{t}{T}\int_0^T \boldsymbol{f}(s,\boldsymbol{x}_{z,\lambda}(s))ds+$$

$$+\frac{t}{T}[\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{d}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{\lambda})-(\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}_n)\boldsymbol{z}], \tag{1.45}$$

$$\overline{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{z}+\int_0^t \boldsymbol{f}(s,\overline{\boldsymbol{x}}(s))ds-\frac{1}{T}\int_0^T \boldsymbol{f}(s,\overline{\boldsymbol{x}}(s))ds+$$

$$+\frac{t}{T}[\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{d}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{\lambda})-(\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}_n)\boldsymbol{z}]. \tag{1.46}$$

Через те, що $\boldsymbol{z}\in D_\beta$ і $\boldsymbol{\lambda}\in D$, то, аналогічно до доведення Теореми 6.1, виходячи з вигляду рівнянь (1.45), (1.46) та визначення множини D_β, можна встановити, що всі значення функцій $\boldsymbol{x}_{z,\lambda}(t)$, $\overline{\boldsymbol{x}}(t)$ при $t\in[0,T]$ містяться в області D.

Із співвідношень (1.45), (1.46) очевидно, що

$$\boldsymbol{x}_{z,\lambda}(t)-\overline{\boldsymbol{x}}(t)=\int_0^t[\boldsymbol{f}(s,\boldsymbol{x}_{z,\lambda}(s))-\boldsymbol{f}(s,\overline{\boldsymbol{x}}(s))]ds-$$

$$-\frac{t}{T}\int_0^T[\boldsymbol{f}(s,\boldsymbol{x}_{z,\lambda}(s))-\boldsymbol{f}(s,\overline{\boldsymbol{x}}(s))]ds. \tag{1.47}$$

Із формули (1.47), з урахуванням умови Ліпшиця (1.7), маємо, що функція

$$\omega(t)=|\boldsymbol{x}_{z,\lambda}(t)-\overline{\boldsymbol{x}}(t)|,\quad t\in[0,T] \tag{1.48}$$

задовольняє інтегральні нерівності:

$$\omega(t)\le\boldsymbol{K}\left[\int_0^t\omega(s)ds+\frac{t}{T}\int_0^T\omega(s)ds\right]\le\boldsymbol{K}\alpha_1(t)\max_{s\in[0,T]}\omega(s),\quad t\in[0,T], \tag{1.49}$$

де $\alpha_1(t)$ має вигляд (1.21).

Використовуючи (1.49) рекурентно, приходимо до оцінки:

$$\omega(t)\le\boldsymbol{K}^m\alpha_m(t)\max_{s\in[0,T]}\omega(s),\quad t\in[0,T], \tag{1.50}$$

де $m\in\mathrm{N}$, а функції α_m задаються за допомогою співвідношення (1.23).

З урахуванням (1.24), з нерівності (1.50) для кожного $m\in\mathrm{N}$ отримаємо:

$$\omega(t) \le \boldsymbol{K}\alpha_1(t)\frac{10}{9}\left(\frac{3T}{10}\boldsymbol{K}\right)^{m-1}\max_{s\in[0,T]}\omega(s), \quad t\in[0,T]. \tag{1.51}$$

Спрямовуючи в останній оцінці $m\to\infty$, і враховуючи властивість **II**, приходимо до висновку, що

$$\max_{s\in[0,T]}\omega(s) \le \boldsymbol{Q}^m \max_{s\in[0,T]}\omega(s) \underset{m\to\infty}{\to} 0.$$

Це означає, згідно з (1.47), що функція $\boldsymbol{x}_{z,\lambda}$ співпадає з $\overline{\boldsymbol{x}}$, і тому, на підставі формул (1.43) та (1.44), маємо, що $\boldsymbol{\mu}_{z,\lambda} = \overline{\boldsymbol{\mu}}$.

Одержане протиріччя завершує доведення теореми. □

З'ясуємо відношення граничної функції $\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{x}^*(t,\boldsymbol{z},\boldsymbol{\lambda})$ послідовності (1.11) до розв'язку параметризованої крайової задачі (1.1), (1.5) або еквівалентної їй задачі (1.1), (1.2).

Теорема 6.3. *Нехай для крайової задачі (1.1), (1.2) виконуються умови* ***I-III****.*

Тоді пара $(\boldsymbol{x}^*(\cdot,\boldsymbol{z}^*,\boldsymbol{\lambda}^*),\boldsymbol{\lambda}^*)$ *є розв'язком параметризованої крайової задачі (1.1), (1.5) тоді і тільки тоді, коли* $\boldsymbol{z}^* = (z_1^*, z_2^*, \ldots, z_n^*)$, $\boldsymbol{\lambda}^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \ldots, \lambda_n^*)$ *задовольнятимуть систему визначальних алгебраїчних чи трансцендентних рівнянь:*

$$\Delta(\boldsymbol{z},\boldsymbol{\lambda}) = 0, \tag{1.52}$$

$$\boldsymbol{x}^*(T,\boldsymbol{z},\boldsymbol{\lambda}) - \boldsymbol{\lambda} = 0, \tag{1.53}$$

де Δ *– вектор-функція вигляду (1.17).*

Доведення. Для доведення Теореми 6.3 достатньо застосувати Теорему 6.2 і зауважити, що диференціальне рівняння (1.15) співпадає з (1.1) тоді і тільки тоді, коли пара $(\boldsymbol{z}^*,\boldsymbol{\lambda}^*)$ задовольняє рівняння

$$\Delta(\boldsymbol{z}^*,\boldsymbol{\lambda}^*) = 0.$$

Враховуючи (1.3), та еквівалентність задач (1.1), (1.2) і (1.1), (1.5), очевидно, що $\left(\boldsymbol{x}^*(\cdot,\boldsymbol{z}^*,\boldsymbol{\lambda}^*),\boldsymbol{\lambda}^*\right)$ збігається з розв'язком параметризованої крайової задачі (1.1), (1.3), (1.5) тоді і тільки тоді, коли $\left(\boldsymbol{x}^*(\cdot,\boldsymbol{z}^*,\boldsymbol{\lambda}^*),\boldsymbol{\lambda}^*\right)$ задовольнятиме рівняння

$$\boldsymbol{x}^*\left(T, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{\lambda}^*\right) - \boldsymbol{\lambda}^* = 0.$$

Тобто пара $\left(\boldsymbol{x}^*(\cdot, \boldsymbol{z}^*, \boldsymbol{\lambda}^*), \boldsymbol{\lambda}^*\right)$ є розв'язком параметризованої задачі (1.1), (1.5) тоді і тільки тоді, коли виконується (1.52), (1.53). □

Наступне твердження доводить, що визначальна система рівнянь (1.52), (1.53) виявляє усі можливі розв'язки задачі (1.1), (1.2) з нелінійними крайовими умовами.

Лема 6.3. *Нехай виконуються всі умови Теореми 6.1. Крім того, існують деякі вектори $\boldsymbol{z} \in D_\beta$ і $\boldsymbol{\lambda} \in D$, які задовольняють систему визначальних рівнянь (1.52), (1.53).*

Тоді нелінійна крайова задача (1.1), (1.2) має розв'язок $\boldsymbol{x}(\cdot)$ вигляду:

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}^*(t, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{\lambda}), \quad t = [0, T], \tag{1.54}$$

такий, що:

$$\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{z}, \quad \boldsymbol{x}(T) = \boldsymbol{\lambda}, \tag{1.55}$$

де $\boldsymbol{x}^*$ є граничною функцією послідовності (1.11).

І навпаки: якщо крайова задача (1.1), (1.2) має розв'язок $\boldsymbol{x}(\cdot)$, тоді він обов'язково має вигляд (1.54), і система визначальних рівнянь (1.52), (1.53) задовольняється при

$$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x}(0), \quad \boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{x}(T).$$

Доведення. Будемо застосовувати Теорему 6.2 і Теорему 6.3. Якщо існують $\boldsymbol{z} \in D_\beta$ і $\boldsymbol{\lambda} \in D$, які задовольняють систему визначальних рівнянь (1.52), (1.53), то, на підставі Теореми 6.3, функція (1.54) є розв'язком вихідної крайової задачі (1.1), (1.2). З іншого боку, якщо $\boldsymbol{x}(\cdot)$ є розв'язком (1.1), (1.2), тоді ця функція є розв'язком задачі Коші (1.31), (1.16) при

$$\boldsymbol{\mu} = 0, \quad \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x}(0).$$

Оскільки $\boldsymbol{x}(\cdot)$ задовольняє крайові умови (1.2), а отже, і параметризовані умови (1.5), при виборі параметрів $\boldsymbol{z}$ та $\boldsymbol{\lambda}$ згідно з (1.3), то з Теореми 6.3 випливає, що має силу рівність (1.54). Крім того,

$$\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_{z,\lambda} = 0, \quad \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x}(0). \tag{1.56}$$

Однак, $\boldsymbol{\mu}_{z,\lambda}$ має вигляд (1.32), тому перше рівняння (1.52) визначальної системи задовольняється, якщо

$$z = x(0), \quad \lambda = x(T):$$

$$\Delta(z, \lambda) = 0. \tag{1.57}$$

Зрештою, зі співвідношення (1.3) безпосередньо випливає, що друге рівняння (1.53) визначальної системи також має силу. Таким чином, ми вказали пари $(z, \lambda) = (x(0), x(T))$, які задовольняють систему визначальних рівнянь (1.52), (1.53), що і завершує доведення. □

Зауваження 6.2. *При деякому* $m \geq 1$ *визначимо функцію*

$$\Delta_m : D_\beta \times D \to \mathbb{R}^n$$

згідно з формулою:

$$\Delta_m(z, \lambda) := \frac{1}{T}\left[C^{-1} d(z, \lambda) - \left(C^{-1} A + I_n\right) z\right] - \frac{1}{T}\int_0^T f(s, x_m(s, z, \lambda))\, ds, \tag{1.58}$$

де z та λ *мають вигляд (1.3), а підмножина* D_β *визначена згідно з (1.9).*

Для дослідження розв’язності параметризованої крайової задачі (1.1), (1.5) розглядатимемо наближену визначальну систему алгебраїчних чи трансцендентних рівнянь, що має вигляд:

$$\Delta_m(z, \lambda) = 0, \tag{1.59}$$

$$x_m(T, z, \lambda) - \lambda = 0, \tag{1.60}$$

де Δ_m – відображення вигляду (1.58), а x_m – вектор-функція, задана рекурентним співвідношенням (1.11).

Відзначимо, що, на відміну від (1.52), (1.53), система (1.59), (1.60) конструктивно будується на основі функції $x_m(\cdot, z, \lambda)$ і не містить невідомих членів. Це означає, що за відповідних умов функція

$$X_m(t) := x_m(t, \bar{z}, \bar{\lambda}), \quad t \in [0, T],$$

де $\bar{z}$, $\bar{\lambda}$ – розв’язки системи (1.59), (1.60), може бути прийнята за m-ве наближення до точного розв’язку задачі (1.1), (1.2).

Природно очікувати, що за відповідних умов зі зростанням m системи рівнянь (1.52), (1.53) та (1.59), (1.60) будуть достатньо близькими, і цим самим забезпечуватиметься потрібна точність відшукання наближеного розв’язку вихідної задачі (1.1), (1.2).

Приклад. Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_2 (:= f_1(t, x_1, x_2)), \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -\dfrac{1}{2}x_2^2 - \dfrac{1}{2}x_1 + \dfrac{t}{8}x_2 + \dfrac{t^2}{16} + \dfrac{9}{32} (:= f_2(t, x_1, x_2)), \end{cases} \quad t \in [0,1] \qquad (1.61),$$

з нелінійними двоточковими крайовими умовами вигляду:

$$\begin{cases} x_1(0) + x_1(1) - [x_2(1)]^2 = \dfrac{3}{16}, \\ x_2(0) + x_1(1) - x_2(1) = -\dfrac{1}{16}. \end{cases} \qquad (1.62)$$

Зауважимо, що точним розв’язком задачі (1.61), (1.62) є:

$$\begin{cases} x_1^* = \dfrac{t^2}{8} + \dfrac{1}{16}, \\ x_2^* = \dfrac{t}{4}. \end{cases}$$

Припустимо, що крайова задача (1.61), (1.62) визначена на множині:

$$D := \left\{ (x_1, x_2) : |x_1| \le 1, |x_2| \le \frac{3}{4} \right\}.$$

Крайові умови (1.62) можна записати у матрично-векторній формі, а саме:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(0) + \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(1) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(0), \boldsymbol{x}(1)) = \boldsymbol{d}, \qquad (1.63)$$

де $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} 3/16 \\ -1/16 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(0), \boldsymbol{x}(1)) = \begin{pmatrix} -[x_2(1)]^2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Для переходу до задачі з лінійними крайовими умовами введемо наступні параметри:

$$\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{z} := \mathrm{col}(z_1, z_2), \quad \boldsymbol{x}(1) = \boldsymbol{\lambda} := \mathrm{col}(\lambda_1, \lambda_2). \qquad (1.64)$$

Із використанням параметризації (1.64), умови (1.63) запишуться у вигляді лінійної параметризованої крайової умови:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(0) + \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(1) = \boldsymbol{d} - \boldsymbol{g}(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{\lambda}). \qquad (1.65)$$

Безпосередніми обчисленнями отримуємо:

$$\boldsymbol{d}(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{\lambda}) := \boldsymbol{d} - \boldsymbol{g}(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{\lambda}) = \begin{pmatrix} \lambda_2^2 + \dfrac{3}{16} \\ -\dfrac{1}{16} \end{pmatrix}. \qquad (1.66)$$

З урахуванням позначення (1.66), умови (1.65) виглядатимуть наступним чином:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(0)+\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(1)=\boldsymbol{d}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{\lambda}). \tag{4.115}$$

За матрицю $\boldsymbol{K}$, яка фігурує в умові Ліпшиця $\boldsymbol{I}$, можна взяти матрицю:

$$\boldsymbol{K}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1/2 & 7/8\end{pmatrix},$$

причому має силу нерівність:

$$r(\boldsymbol{K})<1.27.$$

Вектори $\boldsymbol{\delta}_D(\boldsymbol{f})$ та β виберемо наступним чином:

$$\boldsymbol{\delta}_D(\boldsymbol{f})\le\begin{pmatrix}3/4\\ 355/512\end{pmatrix},\quad \beta\le\begin{pmatrix}3/8\\ 355/1024\end{pmatrix}.$$

Параметризована задача (1.61), (1.65) є такою, що множина D_β визначається нерівностями:

$$\left|z_1+t\left(\frac{3}{16}+\lambda_2^2-2z_1\right)-\frac{3}{8}\right|\le 1,\quad \left|z_2+t\left(\frac{1}{4}+\lambda_2^2-z_1\right)-\frac{355}{1024}\right|\le\frac{3}{4}.$$

Тобто, умова непорожності D_β також виконується.

Послідовні наближення (1.11) для крайової задачі (1.61), (1.65) мають вигляд:

$$x_{m,1}(t,\boldsymbol{z},\boldsymbol{\lambda}):=z_1+\int_0^t f_1(s,x_{m-1,1}(s,\boldsymbol{z},\boldsymbol{\lambda}))ds-$$

$$-t\int_0^1 f_1(s,x_{m-1,1}(s,\boldsymbol{z},\boldsymbol{\lambda}))ds+t\left(\frac{3}{16}+\lambda_2^2-2z_1\right),$$

$$x_{m,2}(t,\boldsymbol{z},\boldsymbol{\lambda}):=z_2+\int_0^t f_2(s,x_{m-1,2}(s,\boldsymbol{z},\boldsymbol{\lambda}))ds-$$

$$-t\int_0^1 f_2(s,x_{m-1,2}(s,\boldsymbol{z},\boldsymbol{\lambda}))ds+t\left(\frac{1}{4}+\lambda_2^2-z_1\right),$$

$m=1,2,3,\ldots,$ де

$$x_{0,1}(t,\boldsymbol{z},\boldsymbol{\lambda}):=z_1+t\left(\frac{3}{16}+\lambda_2^2-2z_1\right),$$

$$x_{0,2}(t,\boldsymbol{z},\boldsymbol{\lambda}) := z_2 + t\left(\frac{1}{4} + \lambda_2^2 - z_1\right).$$

При цьому m-а наближена визначальна система рівнянь буде наступною:

$$\Delta_{m,1}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{\lambda}) := \frac{3}{16} + \lambda_2^2 - 2z_1 - \int_0^1 f_1(s, x_{m-1,1}(s,\boldsymbol{z},\boldsymbol{\lambda}))ds = 0,$$

$$\Delta_{m,2}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{\lambda}) := \frac{1}{4} + \lambda_2^2 - z_1 - \int_0^1 f_2(s, x_{m-1,2}(s,\boldsymbol{z},\boldsymbol{\lambda}))ds = 0,$$

$$x_{m,1}(1,\boldsymbol{z},\boldsymbol{\lambda}) - \lambda_1 = 0,$$

$$x_{m,2}(1,\boldsymbol{z},\boldsymbol{\lambda}) - \lambda_2 = 0.$$

Використовуючи пакет символьної математики Maple, одержуємо, що результатом першої ітерації з невідомими шуканими параметрами є такі значення компонент наближеного розв’язку:

$$x_{11} = (-0.5z_1 + 0.5\lambda_2^2 + 0.125)t^2 + (-1.5z_1 + 0.5\lambda_2^2 + 0.0625)t + z_1,$$

$$\begin{aligned} x_{12} = (&-0.1666666666z_1^2 + 0.041666666666z_1 - 0.1666666666\lambda_2^4 - \\ &- 0.041666666666\lambda_2^2 + 0.3333333333\lambda_2^2 z_1 + 0.02083333333)t^3 + \\ &+ (0.5z_1 - 0.0625z_2 + 0.5z_1 z_2 - 0.25\lambda_2^2 - 0.5z_2\lambda_2^2 - 0.046875)t^2 + \\ &+ (0.1666666667z_1^2 - 1.541666667z_1 + 0.0625z_2 - 0.5z_2 z_1 + \\ &+ 0.1666666667\lambda_2^4 + 1.291666667\lambda_2^2 - 0.3333333334\lambda_2^2 z_1 + \\ &+ 0.5z_2\lambda_2^2 + 0.2760416667)t + z_1. \end{aligned}$$

Розв’язками системи визначальних рівнянь в першій ітерації є:

$$\lambda_1 = \lambda_{11} = 0.1875172131,$$
$$\lambda_2 = \lambda_{12} = 0.2500279256,$$
$$z_1 = z_{11} = 0.06249675048,$$
$$z_2 = z_{12} = 0.00001071250609.$$

Значення наближеного розв’язку у першій апроксимації є наступними:

$$x_{11}(t) = 0.1250086066t^2 + 0.00001185607t + 0.06249675048,$$

$$x_{12}(t) = 0.02083261607t^3 - 0.03125578528t^2 +$$
$$+ 0.2604403824t + 0.00001071250609.$$

Максимальне відхилення точного розв'язку від його першого наближення при $t \in [0,1]$ дається нерівностями:

$$\max_{t\in[0,1]} \left| x_1^*(t) - x_{11}(t) \right| \le 3.3 \cdot 10^{-6},$$

$$\max_{t\in[0,1]} \left| x_2^*(t) - x_{12}(t) \right| \le 9.8 \cdot 10^{-4}.$$

На другій апроксимації отримуємо такі значення похибки:

$$\max_{t\in[0,1]} \left| x_1^*(t) - x_{21}(t) \right| \le 7.03 \cdot 10^{-5},$$

$$\max_{t\in[0,1]} \left| x_2^*(t) - x_{22}(t) \right| \le 1.1 \cdot 10^{-4}.$$

Максимальне відхилення точного розв'язку від його третього наближення дається нерівностями:

$$\max_{t\in[0,1]} \left| x_1^*(t) - x_{31}(t) \right| \le 1.4 \cdot 10^{-6},$$

$$\max_{t\in[0,1]} \left| x_2^*(t) - x_{32}(t) \right| \le 1.3 \cdot 10^{-5}.$$

Розрахунки показують доцільність та ефективність розв'язання розглядуваної задачі з використанням модифікації чисельно-аналітичного алгоритму.

§ 6.2. Двоточкові крайові задачі з нелінійними крайовими умовами

Розглянемо нелінійну систему диференціальних рівнянь (1.1), підпорядковану нелінійним крайовим умовам:

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(0), \boldsymbol{x}(T)) = 0, \tag{2.1}$$

де функції $\boldsymbol{f} : [0,T] \times D \to \mathsf{R}^n$ та $\boldsymbol{g} : D \times D \to \mathsf{R}^n$ $(n \ge 2)$ неперервні, $D \subset \mathsf{R}^n$ – замкнена обмежена область.

Задача полягає у відшуканні розв'язку системи диференціальних рівнянь (1.1), що задовольняє нелінійні крайові умови (2.1) у класі неперервно диференційовних функцій $\boldsymbol{x} : [0,T] \to D$.

Для переходу до лінійних крайових умов у (2.1), замінимо значення розв'язку крайової задачі (1.1), (2.1) у точках $t = 0$, $t = T$ параметрами z_1, z_2, ..., z_n та λ_1, λ_2 , ..., λ_n:

$$\begin{gathered}\boldsymbol{x}(0) = \operatorname{col}\left(x_1(0), x_2(0), \ldots, x_n(0)\right) = \operatorname{col}\left(z_1, z_2, \ldots, z_n\right),\\ \boldsymbol{x}(T) = \operatorname{col}\left(x_1(T), x_2(T), \ldots, x_n(T)\right) = \operatorname{col}\left(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\right).\end{gathered} \tag{2.2}$$

Крайові умови (2.1) перепишемо у вигляді:

$$\boldsymbol{x}(T) + \boldsymbol{g}\left(\boldsymbol{x}(0), \boldsymbol{x}(T)\right) = \boldsymbol{x}(T). \tag{2.3}$$

Із використанням параметризації (2.2), нелінійні крайові умови (2.3) запишуться наступним чином:

$$\boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{g}\left(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{\lambda}\right) = \boldsymbol{x}(T). \tag{2.4}$$

Параметризовані крайові умови (2.4) можуть бути записані у вигляді лінійних розділених крайових умов:

$$\begin{gathered}\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{z},\\ \boldsymbol{x}(T) = \boldsymbol{d}(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{\lambda}).\end{gathered} \tag{2.5}$$

де $\boldsymbol{d}(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{\lambda}) := \boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{g}\left(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{\lambda}\right)$.

Таким чином, замість вихідної крайової задачі (1.1), (2.1) будемо досліджувати еквівалентну їй параметризовану задачу з лінійними розділеними крайовими умовами (1.1), (2.5).

Зауваження 6.3. *Множина розв'язків нелінійної крайової задачі (1.1), (2.1) співпадає з множиною тих розв'язків задачі (1.1), (2.5), що задовольняють додат-кові умови (2.2).*

Нехай функція $\boldsymbol{f}$ та крайові умови (2.1) такі, що мають силу умови **I-III,** де підмножина D_β має вигляд:

$$D_\beta := \left\{ \boldsymbol{z} \in D : B\left(\boldsymbol{z} + \frac{t}{T}\left[\boldsymbol{d}(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{\lambda}) - \boldsymbol{z}\right], \frac{T}{2}\boldsymbol{\delta}_D(\boldsymbol{f}) \right), \forall\, \boldsymbol{\lambda} \in D \right\}. \tag{2.6}$$

Для параметризованої крайової задачі (1.1), (2.5) побудуємо послідовність функцій, визначену рекурентним співвідношенням:

$$\boldsymbol{x}_m(t, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{\lambda}) := \boldsymbol{z} + \int_0^t \boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{x}_{m-1}(s, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{\lambda}))ds -$$

$$-\frac{t}{T}\int_0^T f(s, \boldsymbol{x}_{m-1}(s, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{\lambda}))ds + \frac{t}{T}[\boldsymbol{d}(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{\lambda}) - \boldsymbol{z}], \tag{2.7}$$

де $m = 1,2,3,\ldots$,

$$\boldsymbol{x}_0(t, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{\lambda}) = \boldsymbol{z} + \frac{t}{T}[\boldsymbol{d}(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{\lambda}) - \boldsymbol{z}] \in D_\beta, \tag{2.8}$$

$\boldsymbol{\lambda} = \mathrm{col}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in D$, $\boldsymbol{x}_m(t, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{\lambda}) = \mathrm{col}(x_{m,1}(t, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{\lambda}), x_{m,2}(t, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{\lambda}), \ldots, x_{m,n}(t, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{\lambda}))$ та $\boldsymbol{z}, \boldsymbol{\lambda}$ розглядаються як параметри.

Легко переконатися, що функції $\boldsymbol{x}_m(t, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{\lambda})$ задовольняють лінійні крайові умови (2.5) для всіх $m \geq 1$, $\boldsymbol{\lambda} \in D$ і $\boldsymbol{z} \in D_\beta$.

Наступна теорема встановлює збіжність послідовності (2.7) та її відношення до розв'язку вихідної крайової задачі (1.1), (2.1).

Теорема 6.4. *Нехай функція $\boldsymbol{f} : [0, T] \times D \to \mathbb{R}^n$ у правій частині системи диференціальних рівнянь (1.1) та параметризовані крайові умови (2.5) задовольняють умови I–III.*

Тоді для всіх фіксованих $\boldsymbol{\lambda} \in D$, $\boldsymbol{z} \in D_\beta$:

***1.** Функції послідовності (2.7) неперервно диференційовні та задовольняють параметризовані крайові умови:*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}_m(0, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{\lambda}) &= \boldsymbol{z}, \\ \boldsymbol{x}_m(T, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{\lambda}) &= \boldsymbol{d}(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{\lambda}), \end{aligned} \quad m = 1,2,3,\ldots \tag{2.9}$$

***2.** Послідовність функцій (2.7) для $t \in [0, T]$ рівномірно збігається при $m \to \infty$ до граничної функції*

$$\boldsymbol{x}^*(t, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{\lambda}) = \lim_{m\to\infty} \boldsymbol{x}_m(t, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{\lambda}). \tag{2.10}$$

***3.** Гранична функція $\boldsymbol{x}^*$ задовольняє параметризовані лінійні крайові умови:*

$$\boldsymbol{x}^*(0, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{\lambda}) = \boldsymbol{z},$$

$$\boldsymbol{x}^*(T, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{\lambda}) = \boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{\lambda}).$$

***4.** Гранична функція (2.10) для всіх $t \in [0, T]$ є єдиним неперервно диференційовним розв'язком інтегрального рівняння*

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{z} + \int_0^t \boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{x}(s))ds - \frac{t}{T}\int_0^T \boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{x}(s))ds + \frac{t}{T}\left[\boldsymbol{d}(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{\lambda}) - \boldsymbol{z}\right], \tag{2.11}$$

або розв'язком задачі Коші (2.12), (1.16) для модифікованої системи диференціальних рівнянь:

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}) + \Delta(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{\lambda}), \tag{2.12}$$

де

$$\Delta(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{\lambda}) := \frac{1}{T}\left[\boldsymbol{d}(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{\lambda}) - \boldsymbol{z}\right] - \frac{1}{T}\int_0^T \boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{x}(s))ds. \tag{2.13}$$

5. *Має силу оцінка:*

$$\left|\boldsymbol{x}^*(t, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{\lambda}) - \boldsymbol{x}_m(t, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{\lambda})\right| \le \frac{20}{9} t\left(1 - \frac{t}{T}\right)\boldsymbol{Q}^m(\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{Q})^{-1}\boldsymbol{\delta}_D(\boldsymbol{f}), \tag{2.14}$$

де матриця $\boldsymbol{Q}$ визначена згідно з (1.19).

Теорема 6.5. *Нехай $\boldsymbol{z} \in D_\beta$, $\boldsymbol{\lambda} \in D$ і $\boldsymbol{\mu} \in \mathsf{R}^n$ задані вектори. Припустимо, що для системи диференціальних рівнянь (1.1) виконуються всі умови Теореми 6.4.*

Для того, щоб розв'язок $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$ задачі Коші (2.12), (1.16) задовольняв також і параметризовані крайові умови (2.5), необхідно і достатньо, щоб параметр $\boldsymbol{\mu}$ був заданий формулою:

$$\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_{z,\lambda} = \frac{1}{T}\left[\boldsymbol{d}(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{\lambda}) - \boldsymbol{z}\right] - \frac{1}{T}\int_0^T \boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{x}^*(s, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{\lambda}))ds. \tag{2.15}$$

Тоді розв'язок

$$\boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = \boldsymbol{x}^*(t, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{\lambda}) = \lim_{m \to \infty} \boldsymbol{x}_m(t, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{\lambda}), \tag{2.16}$$

де $\boldsymbol{x}_m(\cdot, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{\lambda})$ – послідовність функцій, задана співвідношенням (2.7).

Теорема 6.6. *Нехай для крайової задачі (1.1), (2.1) з множиною D_β мають силу умови **I-III**.*

Тоді пара $(\boldsymbol{x}^*(\cdot, \boldsymbol{z}^*, \boldsymbol{\lambda}^*), \boldsymbol{\lambda}^*)$ буде розв'язком параметризованої крайової задачі (1.1), (2.5) тоді і тільки тоді, коли $\boldsymbol{z}^* = (z_1^*, z_2^*, \ldots, z_n^*)$,

$\boldsymbol{\lambda}^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \ldots, \lambda_n^*)$ *задовольняють систему визначальних алгебраїчних і трансцендентних рівнянь*

$$\Delta(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{\lambda}) = \frac{1}{T}\left[\boldsymbol{d}(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{\lambda}) - \boldsymbol{z}\right] - \frac{1}{T}\int_0^T \boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{x}^*(s, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{\lambda}))ds = 0, \tag{2.17}$$

$$\boldsymbol{x}^*\left(T, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{\lambda}\right) = \boldsymbol{\lambda}. \tag{2.18}$$

Лема 6.4. *Нехай мають силу умови Теореми 6.4. Крім того, існують вектори* $\boldsymbol{z} \in D_\beta$ *і* $\boldsymbol{\lambda} \in D$, *що задовольняють систему визначальних рівнянь (2.17), (2.18).*

Тоді нелінійна крайова задача (1.1), (2.1) має розв'язок $\boldsymbol{x}(\cdot)$ *такий, що:*

$$\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{z}, \quad \boldsymbol{x}(T) = \boldsymbol{\lambda}. \tag{2.19}$$

Крім того, він задається формулою

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}^*(t, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{\lambda}), \quad t = [0, T], \tag{2.20}$$

де $\boldsymbol{x}^*(t, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{\lambda})$ *гранична функція послідовності (2.7).*

І якщо крайова задача (1.1), (2.1) має розв'язок $\boldsymbol{x}(\cdot)$, *тоді він заданий формулою (2.20), а система визначальних рівнянь (2.17), (2.18) задовольняється при*

$$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x}(0), \quad \boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{x}(T).$$

Зауваження 6.4. *Для всякого* $m \geq 1$ *визначимо функцію* $\Delta_m : D_\beta \times D \to \mathsf{R}^n$ *згідно з формулою:*

$$\Delta_m\left(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{\lambda}\right) := \frac{1}{T}\left[\boldsymbol{d}(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{\lambda}) - \boldsymbol{z}\right] - \frac{1}{T}\int_0^T \boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{x}_m(s, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{\lambda}))ds, \tag{2.21}$$

де $\boldsymbol{z}$ *і* $\boldsymbol{\lambda}$ *задаються співвідношеннями (2.2). Для дослідження розв'язності параметризованої крайової задачі (1.1), (2.5) розглядаємо наближену визначальну систему алгебраїчних чи трансцендентних рівнянь вигляду:*

$$\Delta_m\left(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{\lambda}\right) = \frac{1}{T}\left[\boldsymbol{d}(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{\lambda}) - \boldsymbol{z}\right] - \frac{1}{T}\int_0^T \boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{x}_m(s, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{\lambda}))ds = 0, \tag{2.22}$$

$$\boldsymbol{x}_m\left(T, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{\lambda}\right) = \boldsymbol{\lambda}, \tag{2.23}$$

де $\boldsymbol{x}_m(\cdot, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{\lambda})$ *вектор-функція, задана рекурентною формулою (2.7).*

Збільшуючи m, системи (2.17), (2.18) і (2.22), (2.23) будуть достатньо близькими для забезпечення необхідної точності відшукання наближеного розв'язку вихідної крайової задачі (1.1), (2.1).

§6.3. Крайові задачі з триточковими нелінійними крайовими умовами

Розглянемо крайову задачу для системи нелінійних диференціальних рівнянь (1.1) з нелінійними триточковими крайовими умовами:

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(0), \boldsymbol{x}(t_1), \boldsymbol{x}(T)) = 0, \quad t_1 \in (0, T). \tag{3.1}$$

Припустимо, що функції $\boldsymbol{f} : [0,T] \times D \to \mathrm{R}^n$ і $\boldsymbol{g} : D \times D \times D \to \mathrm{R}^n$ $(n \geq 2)$ неперервні, де $D \subset \mathrm{R}^n$ – замкнена обмежена область.

Задача полягає у відшуканні розв'язку системи диференціальних рівнянь (1.1), що задовольняє нелінійні триточкові крайові умови (3.1) у класі неперервно-диференційовних функцій $\boldsymbol{x} : [0,T] \to D$.

Для переходу до задачі з лінійними двоточковими крайовими умовами, замінимо значення компонент розв'язку крайової задачі (1.1), (3.1) у точках $t = 0$, $t = t_1$ і $t = T$ параметрами:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{z} &:= \boldsymbol{x}(0) = \mathrm{col}(x_1(0), x_2(0), \ldots, x_n(0)) = \mathrm{col}(z_1, z_2, \ldots, z_n), \\ \boldsymbol{\eta} &:= \boldsymbol{x}(t_1) = \mathrm{col}(x_1(t_1), x_2(t_1), \ldots, x_n(t_1)) = \mathrm{col}(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n), \\ \boldsymbol{\lambda} &:= \boldsymbol{x}(T) = \mathrm{col}(x_1(T), x_2(T), \ldots, x_n(T)) = \mathrm{col}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Перепишемо крайові умови (3.1) у вигляді:

$$\boldsymbol{Ax}(0) + \boldsymbol{Cx}(T) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(0), \boldsymbol{x}(t_1), \boldsymbol{x}(T)) = \boldsymbol{Ax}(0) + \boldsymbol{Cx}(T), \tag{3.3}$$

де $\boldsymbol{A} \in \Im^n$ – довільна матриця, а $\boldsymbol{C} \equiv \boldsymbol{I}_n$, де $\boldsymbol{I}_n \in \Im^n$ — одинична матриця.

З використанням параметризації (3.2), нелінійні триточкові крайові умови (3.3) запишуться у вигляді двоточкових:

$$\boldsymbol{Ax}(0) + \boldsymbol{x}(T) = \boldsymbol{Az} + \boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{g}(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\lambda}). \tag{3.4}$$

Покладемо:

$$\boldsymbol{d}(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\lambda}) := \boldsymbol{Az} + \boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{g}(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\lambda}). \tag{3.5}$$

Беручи до уваги (3.5), параметризовані крайові умови (3.4) запишуться у вигляді:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(0)+\boldsymbol{x}(T)=\boldsymbol{d}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\lambda}). \tag{3.6}$$

Розглянемо спеціальний випадок (3.6), коли за матрицю $\boldsymbol{A}$ беремо нульову матрицю:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(0)&=\boldsymbol{z},\\ \boldsymbol{x}(T)&=\boldsymbol{d}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\lambda}).\end{aligned} \tag{3.7}$$

Таким чином, замість крайової задачі з нелінійними триточковими крайовими умовами (1.1), (3.1) розглядатимемо еквівалентну їй параметризовану двоточкову задачу з лінійними розділеними крайовими умовами (1.1), (3.7).

Зауваження 6.5. *Множина розв'язків нелінійної триточкової крайової задачі (1.1), (3.1) співпадає з множиною тих розв'язків двоточкової задачі (1.1), (3.7), що задовольняють додаткові умови (3.2).*

Для вихідної крайової задачі (1.1), (3.1) мають силу умови **I-III**, де підмножина D_β визначена згідно з формулою:

$$D_\beta := \left\{\boldsymbol{z}\in D : B\left(\boldsymbol{z}+\left|\boldsymbol{z}+\frac{t}{T}\left[\boldsymbol{d}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\lambda})-\boldsymbol{z}\right]\right|,\frac{T}{2}\boldsymbol{\delta}_D(\boldsymbol{f})\right)\subset D, \forall\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\lambda}\in D\right\}.$$

Пов'яжемо з параметризованою крайовою задачею (1.1), (3.7) послідовність функцій вигляду:

$$\boldsymbol{x}_m(t,\boldsymbol{z},\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\lambda}) := \boldsymbol{z}+\int_0^t \boldsymbol{f}(s,\boldsymbol{x}_{m-1}(s,\boldsymbol{z},\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\lambda}))ds -$$

$$-\frac{t}{T}\int_0^T \boldsymbol{f}(s,\boldsymbol{x}_{m-1}(s,\boldsymbol{z},\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\lambda}))ds+\frac{t}{T}\left[\boldsymbol{d}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\lambda})-\boldsymbol{z}\right], \tag{3.8}$$

де $m=1,2,3,\ldots$,

$$\boldsymbol{x}_0(t,\boldsymbol{z},\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\lambda})=\boldsymbol{z}+\frac{t}{T}\left[\boldsymbol{d}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\lambda})-\boldsymbol{z}\right]\in D_\beta, \tag{3.9}$$

$$\boldsymbol{\eta}=\mathrm{col}(\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_n)\in D,\ \boldsymbol{\lambda}=\mathrm{col}(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)\in D,$$

$\boldsymbol{x}_m(t,\boldsymbol{z},\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\lambda})=\mathrm{col}\left(x_{m,1}(t,\boldsymbol{z},\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\lambda}),x_{m,2}(t,\boldsymbol{z},\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\lambda}),\ldots,x_{m,n}(t,\boldsymbol{z},\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\lambda})\right)$, а $\boldsymbol{z}$, $\boldsymbol{\eta}$, $\boldsymbol{\lambda}$ розглядаються як параметри.

Легко перевірити, що усі функції $\boldsymbol{x}_m(t,\boldsymbol{z},\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\lambda})$ задовольняють лінійні параметризовані крайові умови (3.7) для всіх $m \ge 1$, $\boldsymbol{z} \in D_\beta$, $\boldsymbol{\eta} \in D$, $\boldsymbol{\lambda} \in D$.

Теорема 6.7. *Нехай функція* $\boldsymbol{f}:[0,T]\times D \to \mathbb{R}^n$ *у правій частині системи диференціальних рівнянь (1.1) та параметризовані крайові умови (3.7) задовольняють умови **I-III**.*

Тоді для всіх фіксованих $\boldsymbol{z} \in D_\beta$, $\boldsymbol{\eta} \in D$, $\boldsymbol{\lambda} \in D$:

1. *Усі функції послідовності (3.8) неперервно диференційовні та задовольняють параметризовані крайові умови*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}_m(0,\boldsymbol{z},\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\lambda}) &= \boldsymbol{z}, \\ \boldsymbol{x}_m(T,\boldsymbol{z},\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\lambda}) &= \boldsymbol{d}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\lambda}), \end{aligned} \qquad m = 1,2,3,\ldots \tag{3.10}$$

2. *Послідовність функцій (3.7) для* $t \in [0,T]$ *рівномірно збігається при* $m \to \infty$ *до граничної функції*

$$\boldsymbol{x}^*(t,\boldsymbol{z},\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\lambda}) = \lim_{m\to\infty} \boldsymbol{x}_m(t,\boldsymbol{z},\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\lambda}). \tag{3.11}$$

3. *Гранична функція* $\boldsymbol{x}^*$ *задовольняє параметризовані лінійні двоточкові крайові умови:*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}^*(0,\boldsymbol{z},\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\lambda}) &= \boldsymbol{z}, \\ \boldsymbol{x}^*(T,\boldsymbol{z},\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\lambda}) &= \boldsymbol{d}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\lambda}). \end{aligned}$$

4. *Гранична функція (3.11) для всіх* $t \in [0,T]$ *є єдиним неперервно диференційовним розв'язком інтегрального рівняння*

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{z} + \int_0^t \boldsymbol{f}(s,\boldsymbol{x}(s))ds - \frac{t}{T}\int_0^T \boldsymbol{f}(s,\boldsymbol{x}(s))ds + \frac{t}{T}\left[\boldsymbol{d}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\lambda}) - \boldsymbol{z}\right], \tag{3.12}$$

або, що те ж саме, є розв'язком задачі Коші (3.13), (1.16) для модифікованої системи диференціальних рівнянь:

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}) + \Delta(\boldsymbol{z},\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\lambda}), \tag{3.13}$$

де

$$\Delta(\boldsymbol{z},\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\lambda}) := \frac{1}{T}\left[\boldsymbol{d}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\lambda}) - \boldsymbol{z}\right] - \frac{1}{T}\int_0^T \boldsymbol{f}(s,\boldsymbol{x}(s))ds. \tag{3.14}$$

5. *Має силу оцінка:*

$$\left| \boldsymbol{x}^*(t, z, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\lambda}) - \boldsymbol{x}_m(t, z, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\lambda}) \right| \le \frac{20}{9} t \left(1 - \frac{t}{T} \right) \boldsymbol{Q}^m (\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{Q})^{-1} \boldsymbol{\delta}_D(\boldsymbol{f}), \qquad (3.15)$$

де матриця $\boldsymbol{Q}$ *визначена згідно з (1.19).*

Теорема 6.8. *Нехай мають силу умови Теореми 6.7.*

Розв'язок $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\cdot, z, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$ *задачі Коші (1.31), (1.16) задовольняє крайові умови (3.7) тоді і тільки тоді, коли* $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\cdot, z, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$ *співпадає з граничною функцією* $\boldsymbol{x}^*(\cdot, z, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$ *послідовності (3.8). Крім того,*

$$\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_{z,\eta,\lambda} = \frac{1}{T}\left[\boldsymbol{d}(z, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\lambda}) - z \right] - \frac{1}{T} \int_0^T \boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{x}^*(s, z, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\lambda})) ds. \qquad (3.16)$$

Теорема 6.9. *Нехай для вихідної крайової задачі (1.1), (3.1) мають силу умови* ***I-III***.

Трійка $(\boldsymbol{x}^*(\cdot, z^*, \boldsymbol{\eta}^*, \boldsymbol{\lambda}^*), \boldsymbol{\eta}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$ *буде розв'язком параметризованої крайової задачі (1.1), (3.8) тоді і тільки тоді, коли* $z^* = (z_1^*, z_2^*, \ldots, z_n^*)$, $\boldsymbol{\eta}^* = (\eta_1^*, \eta_2^*, \ldots, \eta_n^*)$, $\boldsymbol{\lambda}^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \ldots, \lambda_n^*)$ *задовольнятимуть систему визначальних алгебраїчних чи трансцендентних рівнянь:*

$$\Delta(z, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\lambda}) = \frac{1}{T}\left[\boldsymbol{d}(z, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\lambda}) - z \right] - \frac{1}{T} \int_0^T \boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{x}^*(s, z, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\lambda})) ds, \qquad (3.17)$$

$$\boldsymbol{x}^*(t_1, z, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\lambda}) = \boldsymbol{\eta}, \qquad (3.18)$$

$$\boldsymbol{x}^*(T, z, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\lambda}) = \boldsymbol{\lambda}. \qquad (3.19)$$

Лема 6.5. *Нехай мають силу умови Теореми 6.7. Крім того, існують вектори* $z \in D_\beta$, $\boldsymbol{\eta} \in D$ *і* $\boldsymbol{\lambda} \in D$, *які задовольняють систему визначальних рівнянь (3.17)-(3.19).*

Тоді нелінійна триточкова крайова задача (1.1), (3.1) має розв'язок $\boldsymbol{x}(\cdot)$ *такий, що:*

$$\boldsymbol{x}(0) = z, \quad \boldsymbol{x}(t_1) = \boldsymbol{\eta}, \quad \boldsymbol{x}(T) = \boldsymbol{\lambda}. \qquad (3.20)$$

Більше того, він задається формулою:

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}^*(t, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\lambda}), \quad t = [0, T], \tag{3.21}$$

де $\boldsymbol{x}^*(t, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\lambda})$ *– гранична функція послідовності (3.8).*

І навпаки: якщо крайова задача (1.1), (3.1) має розв'язок $\boldsymbol{x}(\cdot)$, *тоді він має вигляд (3.21), а система визначальних рівнянь (3.17)-(3.19) задовольняється при*

$$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x}(0), \quad \boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{x}(t_1), \quad \boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{x}(T).$$

Зауваження 6.6. *Для будь-якого* $m \geq 1$ *визначимо функцію* $\Delta_m : D_\beta \times D \times D \to \mathsf{R}^n$ *згідно з формулою:*

$$\Delta_m(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\lambda}) := \frac{1}{T}\left[\boldsymbol{d}(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{\lambda}) - \boldsymbol{z}\right] - \frac{1}{T}\int_0^T \boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{x}_m(s, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\lambda}))ds, \tag{3.22}$$

де $\boldsymbol{z}$, $\boldsymbol{\eta}$ *і* $\boldsymbol{\lambda}$ *мають вигляд (3.2). Для дослідження розв'язності параметризованої крайової задачі (1.1), (3.8) розглядатимемо наближену визначальну систему алгебраїчних чи трансцендентних рівнянь:*

$$\Delta_m(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\lambda}) = \frac{1}{T}\left[\boldsymbol{d}(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{\lambda}) - \boldsymbol{z}\right] - \frac{1}{T}\int_0^T \boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{x}_m(s, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\lambda}))ds = 0, \tag{3.23}$$

$$\boldsymbol{x}_m(t_1, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\lambda}) = \boldsymbol{\eta}, \tag{3.24}$$

$$\boldsymbol{x}_m(T, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\lambda}) = \boldsymbol{\lambda}, \tag{3.25}$$

де $\boldsymbol{x}_m(\cdot, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\lambda})$ *– вектор-функція, визначена рекурентним співвідношенням (3.9). При збільшенні m системи (3.17)-(3.19) і (3.23)-(3.25) будуть достатньо близькими для забезпечення необхідної точності відшукання наближеного розв'язку вихідної крайової задачі (1.1), (3.1).*

§6.4. Крайові задачі з інтегральними крайовими умовами з виділеною лінійною частиною

Розглянемо нелінійну систему диференціальних рівнянь (1.1), підпорядковану інтегральним крайовим умовам вигляду:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(0) + \int_0^T \boldsymbol{P}(s)\boldsymbol{x}(s)ds + \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(T) = \boldsymbol{d}, \tag{4.1}$$

де $\boldsymbol{A} \in \Im(\mathsf{R}^n)$ – довільна матриця, $\boldsymbol{C} \in \Im(\mathsf{R}^n)$ – деяка задана вироджена матриця вигляду:

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & O_{n-p} \end{pmatrix},$$

де $\boldsymbol{C}_{11} \in \Im(\mathsf{R}^p)$, $\det \boldsymbol{C}_{11} \neq 0$, $\boldsymbol{C}_{12}$ і $\boldsymbol{C}_{21}$ – матриці розмірності $p \times (n-p)$ та $(n-p) \times p$ відповідно, а $\boldsymbol{P} : [0,T] \to \Im(\mathsf{R}^n)$ – неперервна матрична функція.

Припустимо, що матриці, які фігурують у крайових умовах (4.1), задовольняють нерівність:

$$\det(\boldsymbol{I}_{n-p} - \boldsymbol{C}_{21}\boldsymbol{C}_{11}^{-1}\boldsymbol{C}_{12}) \neq 0. \tag{4.2}$$

Нехай вектор-функція $\boldsymbol{f} : [0,T] \times D \to \mathsf{R}^n$ у правій частині системи диференціальних рівнянь (1.1) неперервна, де $D \subset \mathsf{R}^n$ – замкнена й обмежена область.

Задача полягає у відшуканні розв’язку системи диференціальних рівнянь (1.1), що задовольняє інтегральні крайові умови (4.1), у класі неперервно диференційовних функцій $\boldsymbol{x} : [0,T] \to D$.

Для переходу до лінійних двоточкових крайових умов у (4.1), введемо параметри:

$$\boldsymbol{z} := \boldsymbol{x}(0) = \operatorname{col}(x_1(0), x_2(0), \ldots, x_n(0)) = \operatorname{col}(z_1, z_2, \ldots, z_n),$$

$$\boldsymbol{\lambda} := \int_0^T \boldsymbol{P}(s)\boldsymbol{x}(s)ds = \operatorname{col}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n),$$

$$\boldsymbol{\eta} := \operatorname{col}\left(\underbrace{0,0,\ldots,0}_{p}, x_{p+1}(T), x_{p+2}(T), \ldots, x_n(T)\right) = \operatorname{col}\left(\underbrace{0,0,\ldots,0}_{p}, \eta_{p+1}, \eta_{p+2}, \ldots, \eta_n\right).$$

(4.3)

З використанням (4.3), інтегральні крайові умови (4.1) можуть бути записані у вигляді лінійних:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(0) + \boldsymbol{C}_1\boldsymbol{x}(T) = \boldsymbol{d} - \boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\eta}, \tag{4.4}$$

де $\boldsymbol{C}_1 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{C}_{11} & \boldsymbol{C}_{12} \\ \boldsymbol{C}_{21} & \boldsymbol{I}_{n-p} \end{pmatrix}$, а $\boldsymbol{\lambda}$ і $\boldsymbol{\eta}$ – параметри, визначені співвідношеннями (4.3).

Покладаючи $\boldsymbol{d}(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\eta}) := \boldsymbol{d} - \boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\eta}$, параметризовані крайові умови (4.4) запишуться у вигляді:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(0) + \boldsymbol{C}_1\boldsymbol{x}(T) = \boldsymbol{d}(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\eta}). \tag{4.5}$$

Зауваження 6.7. *Якщо умова (4.2) не виконується, то завжди можна у замість* $\boldsymbol{I}_{n-p}$ *підібрати матрицю* $\boldsymbol{C}_{22} \in \Im(\mathsf{R}^{n-p})$ *таким чином, щоб*

$$\det(\boldsymbol{C}_{22} - \boldsymbol{C}_{21}\boldsymbol{C}_{11}^{-1}\boldsymbol{C}_{12}) \neq 0.$$

Зауваження 6.8. *Множина розв'язків нелінійної задачі з інтегральними крайовими умовами (1.1), (4.1) збігається з множиною розв'язків параметризованої задачі (1.1), (4.5), яка містить лінійні крайові умови, при виконанні (4.3).*

Таким чином, замість крайової задачі з інтегральними крайовими умовами (1.1), (4.1) досліджуємо еквівалентну їй задачу (1.1), (4.5), яка містить лінійні умови.

Нехай для вихідної крайової задачі мають силу умови **I-III**, де підмножина D_β має вигляд:

$$D_\beta := \left\{ \boldsymbol{z} \in D : B\left(\boldsymbol{z} + \frac{t}{T}\boldsymbol{C}_1^{-1}\left[\boldsymbol{d}(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\eta}) - \left(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{C}_1\right)\boldsymbol{z}\right], \frac{T}{2}\boldsymbol{\delta}_D(\boldsymbol{f}) \right) \right\},$$

і покладемо $\mathsf{P} := \left\{ \int_0^T \boldsymbol{P}(s)\boldsymbol{x}(s)ds : x \in C\big([0,T], D\big) \right\}$.

Для дослідження розв'язків параметризованої крайової задачі (1.1), (4.5) введемо у розгляд наступну послідовність функцій:

$$\boldsymbol{x}_m(t,\boldsymbol{z},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\eta}) := \boldsymbol{z} + \int_0^t \boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{x}_{m-1}(s,\boldsymbol{z},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\eta}))ds - \frac{t}{T}\int_0^T \boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{x}_{m-1}(s,\boldsymbol{z},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\eta}))ds +$$

$$+ \frac{t}{T}\boldsymbol{C}_1^{-1}\left[\boldsymbol{d}(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\eta}) - \left(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{C}_1\right)\boldsymbol{z}\right], \quad m \in \mathsf{N}, \tag{4.6}$$

$$\boldsymbol{x}_m(t,\boldsymbol{z},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\eta}) = \operatorname{col}\big(x_{m,1}(t,\boldsymbol{z},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\eta}), x_{m,2}(t,\boldsymbol{z},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\eta}), \ldots, x_{m,n}(t,\boldsymbol{z},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\eta})\big),$$

$$\boldsymbol{x}_0(t,\boldsymbol{z},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\eta}) := \boldsymbol{z} + \frac{t}{T}\boldsymbol{C}_1^{-1}\left[\boldsymbol{d}(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\eta}) - \left(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{C}_1\right)\boldsymbol{z}\right],$$

де $t \in [0,T]$, а $\boldsymbol{z}$, $\boldsymbol{\lambda}$ та $\boldsymbol{\eta}$ розглядаються як параметри.

Легко перевірити, що функції $\boldsymbol{x}_m$ задовольняють лінійні параметризовані крайові умови (4.5) для всіх $m \geq 1$, $\boldsymbol{z} \in D_\beta$, $\boldsymbol{\eta} \in D$, $\boldsymbol{\lambda} \in \mathsf{P}$.

Встановимо рівномірну збіжність послідовності (4.6).

Теорема 6.10. *Нехай мають силу умови **I-III**.*

Тоді для всіх фіксованих $\boldsymbol{z} \in D_\beta$, $\boldsymbol{\lambda} \in \mathsf{P}$ *та* $\boldsymbol{\eta} \in D$:

1. *Функції (4.6) неперервно диференційовні та задовольняють параметризовані крайові умови:*

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_m(0, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\eta}) + \boldsymbol{C}_1\boldsymbol{x}_m(T, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\eta}) = \boldsymbol{d}(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\eta}),$$

для всіх $m \in \mathsf{N}$.

2. *Послідовність функцій (4.6) для* $t \in [0, T]$ *рівномірно збігається при* $m \to \infty$ *до граничної функції:*

$$\boldsymbol{x}^*(t, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\eta}) = \lim_{m \to \infty} \boldsymbol{x}_m(t, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\eta}). \tag{4.7}$$

3. *Гранична функція* $\boldsymbol{x}^*$ *задовольняє параметризовані лінійні двоточкові крайові умови:*

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^*(0, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\eta}) + \boldsymbol{C}_1\boldsymbol{x}^*(T, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\eta}) = \boldsymbol{d}(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\eta}).$$

4. *Функція (4.7) для всіх* $t \in [0, T]$ *є єдиним неперервно диференційовним розв'язком інтегрального рівняння*

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{z} + \int_0^t \boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{x}(s))ds - \frac{t}{T}\int_0^T \boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{x}(s))ds +$$

$$+ \frac{t}{T}\boldsymbol{C}_1^{-1}\left[\boldsymbol{d}(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\eta}) - \left(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{C}_1\right)\boldsymbol{z}\right], \tag{4.8}$$

або, що те ж саме, є розв'язком задачі Коші (4.9), (1.16) для модифікованої системи диференціальних рівнянь:

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}) + \Delta(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\eta}), \tag{4.9}$$

де $\Delta : D_\beta \times \mathsf{P} \times D \to \mathsf{R}^n$ *– відображення, визначене співвідношенням:*

$$\Delta(z,\lambda,\eta):=\frac{1}{T}\left[C_1^{-1}[d(\lambda,\eta)-(A+C_1)z]-\int_0^T f(s,x(s))ds\right] \tag{4.10}$$

5. *Має силу оцінка:*

$$\left|x^*(t,z,\lambda,\eta)-x_m(t,z,\lambda,\eta)\right|\le\frac{20}{9}t\left(1-\frac{t}{T}\right)Q^m(I_n-Q)^{-1}\delta_D(f), \tag{4.11}$$

де Q – *матриця вигляду (1.19), а вектор* $\delta_D(f)$ *визначений згідно з (1.6).*

Теорема 6.11. *Нехай* $z\in D_\beta$, $\lambda\in P$, $\eta\in D$ *і* $\mu\in R^n$ – *задані вектори. Припустимо, що для системи диференціальних рівнянь (1.1) виконуються всі умови Теореми 6.10.*

Для того, щоб розв'язок $x=x(t,z,\lambda,\eta,\mu)$ *задачі Коші (1.31), (1.16) задовольняв параметризовані крайові умови (4.5), необхідно і достатньо, щоб контрольний параметр* μ *мав вигляд:*

$$\mu_{z,\lambda,\eta}:=\frac{1}{T}C_1^{-1}[d(\lambda,\eta)-(A+C_1)z]-\frac{1}{T}\int\limits_0^T f(s,x^*(s,z,\lambda,\eta))ds. \tag{4.12}$$

У цьому випадку

$$x(t,z,\lambda,\eta,\mu)=x^*(t,z,\lambda,\eta), \tag{4.13}$$

де $x^*(\cdot,z,\lambda,\eta)$ – *функція вигляду (4.7).*

Теорема 6.12. *Нехай для вихідної задачі (1.1), (4.1) виконуються умови* ***I-III***.

Функція $x^*(\cdot,z^*,\lambda^*,\eta^*)$ *є розв'язком крайової задачі з інтегральними крайовими умовами (1.1), (4.1) тоді і тільки тоді, коли трійка*

$$z^*=\mathrm{col}(z_1^*,z_2^*,\dots,z_n^*),$$
$$\eta^*=\mathrm{col}(\underbrace{0,0,\dots,0}_{p},\eta_{p+1}^*,\eta_{p+2}^*,\dots,\eta_n^*),$$
$$\lambda^*=\mathrm{col}(\lambda_1^*,\lambda_2^*,\dots,\lambda_n^*)$$

задовольняє систему визначальних алгебраїчних чи трансцендентних рівнянь:

$$\Delta(z,\lambda,\eta)=0, \tag{4.14}$$

$$V(z,\lambda,\eta)=0, \tag{4.15}$$

$$x_i^*(T, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\eta}) - \eta_i = 0, \quad i = \overline{p+1, n}, \tag{4.16}$$

де

$$\Delta(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\eta}) := \frac{1}{T} \boldsymbol{C}_1^{-1} \left[\boldsymbol{d}(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\eta}) - (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{C}_1) \boldsymbol{z} \right] - \frac{1}{T} \int_0^T \boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{x}^*(s, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\eta})) ds,$$

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\eta}) := \int_0^T \boldsymbol{P}(s) \boldsymbol{x}^*(s, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\eta}) ds - \boldsymbol{\lambda}.$$

Лема 6.6. *Нехай мають силу умови Теореми 6.10 та існують вектори* $\boldsymbol{z} \in D_\beta$, $\boldsymbol{\lambda} \in \mathrm{P}$ *і* $\boldsymbol{\eta} \in D$, *які задовольняють систему визначальних рівнянь (4.14)-(4.16).*

Тоді:

1. *Нелінійна крайова задача з інтегральними крайовими умовами (1.1), (4.1) має розв'язок* $\boldsymbol{x}(\cdot)$ *такий, що:*

$$\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{z},$$

$$\int_0^T \boldsymbol{P}(s) \boldsymbol{x}(s) ds = \boldsymbol{\lambda},$$

$$x_i(T) = \eta_i, \quad i = \overline{p+1, n}.$$

Більше того, він заданий формулою:

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}^*(t, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\eta}), \quad t = [0, T], \tag{4.17}$$

де $\boldsymbol{x}^*$ *- гранична функція послідовності (4.6).*

2. *Якщо крайова задача (1.1), (4.1) має розв'язок* $\boldsymbol{x}(\cdot)$, *тоді він має вигляд (4.17), і система визначальних рівнянь (4.14)-(4.16) задовольняється при*

$$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x}(0),$$

$$\boldsymbol{\lambda} = \int_0^T \boldsymbol{P}(s) \boldsymbol{x}(s) ds,$$

$$\eta_i = x_i(T), \quad i = \overline{p+1, n}.$$

Зауваження 6.9. *Хоча Теорема 6.12 дає необхідні й достатні умови розв'язності та побудови розв'язку заданої крайової задачі, їх застосування стикається з труднощами, тому що функції вигляду*

$$\Delta : D_\beta \times \mathsf{P} \times D \to \mathsf{R}^n,$$

$$\boldsymbol{V} : D_\beta \times \mathsf{P} \times D \to \mathsf{R}^n,$$

$$\boldsymbol{x}^*(\cdot, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\eta}) = \lim_{m \to \infty} \boldsymbol{x}_m(\cdot, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\eta})$$

у рівняннях (4.14)-(4.16) зазвичай невідомі.

Цього можна уникнути, використовуючи властивості $\boldsymbol{x}_m(\cdot, z, \lambda, \eta)$ *вигляду (4.6) для певного фіксованого* m*, що дасть змогу замість точної визначальної системи (4.14)-(4.16) ввести у розгляд* m*-у наближену систему визначальних рівнянь вигляду:*

$$\Delta_m(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\eta}) = 0, \tag{4.18}$$

$$\boldsymbol{V}_m(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\eta}) = 0, \tag{4.19}$$

$$x_{m,i}(T, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\eta}) - \eta_i = 0, \quad i = \overline{p+1, n}, \tag{4.20}$$

де $\Delta_m : D_\beta \times \mathsf{P} \times D \to \mathsf{R}^n$ *і* $\boldsymbol{V}_m : D_\beta \times \mathsf{P} \times D \to \mathsf{R}^n$ *визначені згідно з формулами:*

$$\Delta_m(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\eta}) := \frac{1}{T}[\boldsymbol{C}_1^{-1}\left[\boldsymbol{d}(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\eta}) - (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{C}_1)\boldsymbol{z}\right] - \int_0^T \boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{x}_m(s, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\eta}))ds], \tag{4.21}$$

$$\boldsymbol{V}_m(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\eta}) := \int_0^T \boldsymbol{P}(s)\boldsymbol{x}_m(s, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\eta})ds - \boldsymbol{\lambda}, \tag{4.22}$$

а $\boldsymbol{x}_m(\cdot, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\eta})$ *– вектор-функція, задана рекурентним співвідношенням (4.6).*

Важливо відзначити, що, на відміну від точної визначальної системи (4.14)-(4.16), m-а наближена система (4.21)-(4.22) містить тільки вирази відносно функції $\boldsymbol{x}_m(\cdot, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\eta})$, а отже, побудована явно.

Приклад. Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 0.05x_2 + x_1x_2 - 0.005t^2 - 0.01t^3 + 0.1(:= f_1(t, x_1, x_2)), \\ \dfrac{dx_2}{dt} = 0.5x_1 - x_2^2 + 0.01t^4 + 0.15t(:= f_2(t, x_1, x_2)), \end{cases} \tag{4.23}$$

підпорядковану інтегральним крайовим умовам вигляду:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(0)+\int_0^{1/2}\boldsymbol{P}(s)\boldsymbol{x}(s)ds+\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}\left(\frac{1}{2}\right)=\boldsymbol{d}, \tag{4.24}$$

де $t\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$, $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{P}(t)=\begin{pmatrix}0 & t/2\\ 1/2 & 1/4\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\equiv \boldsymbol{I}_2$, $\boldsymbol{d}=\begin{pmatrix}13/256\\ 7/960\end{pmatrix}$.

Легко переконатися, що точним розв'язком інтегральної задачі (4.23), (4.24) є система функцій:

$$\begin{cases}x_1^*=0.1t,\\ x_2^*=0.1t^2.\end{cases}$$

Припустимо, що крайова задача (4.23), (4.24) розглядається в області

$$D=\{(x_1,x_2):|x_1|\le 0.42,|x_2|\le 0.4\}.$$

Для переходу до задачі з лінійними крайовими умовами, введемо параметри:

$$\boldsymbol{z}:=\boldsymbol{x}(0)=\operatorname{col}(x_1(0),x_2(0))=\operatorname{col}(z_1,z_2),$$

$$\boldsymbol{\lambda}:=\int_0^T\boldsymbol{P}(s)\boldsymbol{x}(s)ds=\operatorname{col}(\lambda_1,\lambda_2), \tag{4.25}$$

$$\eta_2:=x_2\left(\frac{1}{2}\right).$$

Із використанням (4.25), крайові умови (4.24) можуть бути записані як лінійні з невиродженою матрицею $\boldsymbol{C}_1$:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(0)+\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{x}\left(\frac{1}{2}\right)=\boldsymbol{d}(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\eta}), \tag{4.26}$$

де $\boldsymbol{\eta}=col(0,\eta_2)$, $\boldsymbol{C}_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{d}(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\eta}):=\boldsymbol{d}-\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\eta}$.

Легко переконатися, що матриця $\boldsymbol{K}$, яка фігурує в умові Ліпшиця **I**, матиме вигляд

$$\boldsymbol{K}=\begin{pmatrix}0 & 0.05\\ 0.5 & 0.8\end{pmatrix},$$

і має силу нерівність:

$$r(\boldsymbol{K}) < 0.84,$$

де $T = \dfrac{1}{2}$.

Вектори $\boldsymbol{\delta}_D(\boldsymbol{f})$ та β можна вибрати наступним чином:

$$\boldsymbol{\delta}_D(\boldsymbol{f}) \le \begin{pmatrix} 0.18925 \\ 0.3278125 \end{pmatrix}, \quad \beta \le \begin{pmatrix} 0.0473125 \\ 0.081953125 \end{pmatrix}.$$

Множина D_β визначена нерівностями:

$$|z_1 + 2t(0.05078125000 - \lambda_1 - z_1) - 0.0473125| \le 0.42,$$

$$|z_2 + 2t(0.007291666667 - \lambda_2 + \eta_2 - 2z_2) - 0.081953125| \le 0.4,$$

$\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathsf{P}$, $\eta_2 \in D$, а P така, що

$$\mathsf{P} = \{(\lambda_1, \lambda_2) : |\lambda_1| \le 0.11, |\lambda_2| \le 0.31\}.$$

Функції послідовності (4.6) для системи диференціальних рівнянь (4.23), підпорядкованої лінійним параметризованим крайовим умовам (4.26), мають вигляд:

$$\begin{aligned} x_{m,1}(t, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\eta}) := z_1 &+ \int_0^t f_1(s, x_{m-1,1}(s, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\eta}), x_{m-1,2}(s, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\eta}))ds - \\ &- 2t \int_0^{1/2} f_1(s, x_{m-1,1}(s, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\eta}), x_{m-1,2}(s, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\eta}))ds + \\ &+ 2t(0.05078125 - \lambda_1 - z_1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{m,2}(t, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\eta}) := z_2 &+ \int_0^t f_2(s, x_{m-1,1}(s, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\eta}), x_{m-1,2}(s, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\eta}))ds - \\ &- 2t \int_0^{1/2} f_2(s, x_{m-1,1}(s, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\eta}), x_{m-1,2}(s, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\eta}))ds + \\ &+ 2t(0.007291666667 - \lambda_2 + \eta_2 - 2z_2), \end{aligned}$$

де $m = 1,2,3,\ldots$,

$$x_{0,1}(t, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\lambda}) = z_1 + 2t(0.05078125 - \lambda_1 - z_1),$$

$$x_{0,2}(t, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\lambda}) = z_2 + 2t(0.007291666667 - \lambda_2 + \eta_2 - 2z_2).$$

Наближена система визначальних рівнянь вигляду (4.21)-(4.22) є наступною:

$$\Delta_{m,1}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\eta}) := -2\int_0^{1/2} f_1\big(s, x_{m-1,1}(s,\boldsymbol{z},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\eta}), x_{m-1,2}(s,\boldsymbol{z},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\eta})\big)ds + \\ + 2(0.05078125 - \lambda_1 - z_1) = 0,$$

$$\Delta_{m,2}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\eta}) := -2\int_0^{1/2} f_2\big(s, x_{m-1,1}(s,\boldsymbol{z},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\eta}), x_{m-1,2}(s,\boldsymbol{z},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\eta})\big)ds + \\ + 2(0.007291666667 - \lambda_2 + \eta_2 - 2z_2) = 0,$$

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\eta}) := \int_0^{1/2} \boldsymbol{P}(s)\boldsymbol{x}_m(s,\boldsymbol{z},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\eta})ds - \boldsymbol{\lambda} = 0,$$

$$x_{m,2}\left(\frac{1}{2},\boldsymbol{z},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\eta}\right) - \eta_2 = 0,$$

$m = 1,2,3,\ldots$

За допомогою *Maple 13* отримано перше наближення до точного розв'язку, для всіх $t \in \left[0,\frac{1}{2}\right]$:

$$x_{11} = -0.0025t^4 + 0.1019859484t + 1.333333333t^3\lambda_1\lambda_2 - \\ -1.333333333t^3\lambda_1\eta_2 + 2.666666666t^3\lambda_1 z_2 + 1.333333333t^3 z_1\lambda_2 - \\ -1.333333333t^3 z_1\eta_2 + 2.666666666t^3 z_1 z_2 + t^2 z_1\eta_2 - t^2 z_1\lambda_2 - \\ -3t^2 z_1 z_2 - t^2\lambda_1 z_2 - 0.3333333334t\lambda_1\lambda_2 + \\ +0.3333333334t\lambda_1\eta_2 - 0.1666666667t\lambda_1 z_2 + 0.1666666666tz_1\lambda_2 - \\ -0.1666666666tz_1\eta_2 - 2.001215278tz_1 - 0.6770833333t^3\lambda_2 + \\ +0.06770833333t^3\eta_2 - 0.1354166667t^3 z_2 - 0.009722222219t^3\lambda_1 - \\ -0.009722222219t^3 z_1 - 0.05t^2\lambda_2 + 0.05t^2\eta_2 - 0.04921875t^2 z_2 + \\ +0.007291666665t^2 z_1 + 0.04192708333t\lambda_2 - 0.04192708333t\eta_2 - \\ -1.997569444t\lambda_1 + 0.0003645833334t^2 - 0.001172960069t^3 + z_1,$$

$$x_{12} = -0.03571925636t - 1.333333333t^3\lambda_2^2 - 1.333333333t^3\eta_2^2 -$$
$$- 5.333333333t^3z_2^2 - 0.5t^2\lambda_1 + 4t^2z_2^2 + 0.3333333334t\lambda_2^2 +$$
$$+ 0.3333333334t\eta_2^2 + 0.25tz_1 + 0.01944444444t^3\lambda_2 -$$
$$- 0.01944444444t^3\eta_2 + 0.03888888888t^3z_2 - 0.01458333333t^2z_2 - 0.5t^2z_1 -$$
$$- 2.004861111t\lambda_2 + 2.004861111t\eta_2 + 0.25t\lambda_1 + 0.002t^5 +$$
$$+ 2.666666666t^3\lambda_2\eta_2 - 5.333333333t^3\lambda_2z_2 +$$
$$+ 5.333333333t^3\eta_2z_2 + 2t^2\lambda_2z_2 - 2t^2\eta_2z_2 - 0.6666666667t\lambda_2\eta_2 +$$
$$+ 0.3333333334t\lambda_2z_2 - 0.3333333334t\eta_2z_2 +$$
$$+ 0.100390625t^2 - 0.00007089120366t^3 + z_2.$$

Обчислення показують, що наближеними розв'язками системи визначальних рівнянь (5.65)-(5.68) при $m = 1$ є значення параметрів:

$$z_1 := z_{11} = -4.253290711 \cdot 10^{-7},$$
$$z_2 := z_{12} = 7.295492706 \cdot 10^{-7},$$
$$\lambda_1 := \lambda_{11} = 0.0007814848293,$$
$$\lambda_2 := \lambda_{12} = 0.007290937121,$$
$$\eta_2 := \eta_{12} = 0.0249993271.$$

Перше наближення компонент розв'язку має вигляд:

$$x_{11} = -0.0025t^4 - 8.714713042 \cdot 10^{-8}t^3 + 0.001249955722t^2 +$$
$$+ 0.09968792498t - 4.253290711 \cdot 10^{-7},$$

$$x_{12} = 0.002t^5 - 0.0008332398387t^3 + 0.1000000588t^2 +$$
$$+ 0.00008047566353t + 7.295492706 \cdot 10^{-7}.$$

Похибка першої апроксимації є наступною:

$$\max_{t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]} \left| x_1^*(t) - x_{11}(t) \right| \le 2.1 \cdot 10^{-5},$$

$$\max_{t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]} \left| x_2^*(t) - x_{12}(t) \right| \le 2.2 \cdot 10^{-6}.$$

На другому кроці ітерації отримано таке максимальне відхилення точного та наближеного розв'язку:

$$\max_{t\in\left[0,\frac{1}{2}\right]}\left|x_1^*(t)-x_{21}(t)\right|\le -4.03\cdot 10^{-8},$$

$$\max_{t\in\left[0,\frac{1}{2}\right]}\left|x_2^*(t)-x_{22}(t)\right|\le 1.2\cdot 10^{-6}.$$

§6.5. Нелінійні крайові задачі з інтегральними крайовими умовами

Розглянемо систему нелінійних диференціальних рівнянь (1.1), підпорядковану інтегральним крайовим умовам вигляду:

$$\int_0^T \boldsymbol{B}(s)\boldsymbol{x}(s)ds=\boldsymbol{d}, \tag{5.1}$$

де $t\in[0,T]$, функція $\boldsymbol{f}:[0,T]\times D\to \mathrm{R}^n$ – неперервна, $D\subset \mathrm{R}^n$ – замкнена обмежена область, $\boldsymbol{B}:[0,T]\to \Im(\mathrm{R}^n)$ – задана неперервна матрична функція, а $\boldsymbol{d}$ – заданий n-вимірний вектор.

Задача полягає у відшуканні розв'язку системи диференціальних рівнянь (1.1), який задовольняє інтегральні крайові умови (5.1), у класі неперервно диференційовних функцій $\boldsymbol{x}:[0,T]\to D$.

Крайові умови (5.1) перепишемо наступним чином:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(0)+\int_0^T \boldsymbol{B}(s)\boldsymbol{x}(s)ds+\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(T)=\boldsymbol{d}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(0)+\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(T), \tag{5.2}$$

де $\boldsymbol{A}\in\Im(\mathrm{R}^n)$ – довільна задана матриця, $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{C}_{11} & \boldsymbol{C}_{12}\\ \boldsymbol{C}_{21} & \boldsymbol{I}_{n-p}\end{pmatrix}\in\Im(\mathrm{R}^n)$ – деяка невироджена матриця, $\boldsymbol{C}_{11}\in\Im(\mathrm{R}^p)$, $\det\boldsymbol{C}_{11}\ne 0$, $\boldsymbol{C}_{12}$, $\boldsymbol{C}_{21}$ – матриці розмірності $p\times(n-p)$ та $(n-p)\times p$ відповідно.

Для переходу до задачі з лінійними двоточковими крайовими умовами введемо наступні параметри:

$$\boldsymbol{z}:=\boldsymbol{x}(0)=\mathrm{col}(x_1(0),x_2(0),...,x_n(0))=\mathrm{col}(z_1,z_2,...,z_n),$$

$$\boldsymbol{\lambda}:=\int_0^T \boldsymbol{B}(s)\boldsymbol{x}(s)ds=\mathrm{col}(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n), \tag{5.3}$$

$$\boldsymbol{\eta}:=\mathrm{col}(x_1(T),x_2(T),...,x_n(T))=\mathrm{col}(\eta_1,\eta_2,...,\eta_n).$$

З використанням параметризації (5.3) інтегральні крайові умови (5.2) запишуться у вигляді лінійних двоточкових параметризованих умов:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(0)+\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(T)=\boldsymbol{d}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{z}-\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{C}\boldsymbol{\eta}. \tag{5.4}$$

Розглянемо спеціальний випадок крайових умов (5.4), поклавши $\boldsymbol{A}\equiv\boldsymbol{O}_n$, $\boldsymbol{C}\equiv\boldsymbol{I}_n$.

Таким чином, замість задачі (1.1), (5.1) з інтегральними крайовими умовами розглядаємо еквівалентну їй параметризовану задачу (1.1), (5.5) з лінійними розділеними двоточковими крайовими умовами:

$$\begin{cases}\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{z},\\ \boldsymbol{x}(T)=\boldsymbol{d}(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\eta}),\end{cases} \tag{5.5}$$

де $\boldsymbol{d}(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\eta}):=\boldsymbol{d}-\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\eta}$, до якої потрібно приєднати певну систему визначальних алгебраїчних чи трансцендентних рівнянь.

Множина розв'язків нелінійної крайової задачі (1.1), (5.1) збігається з множиною тих розв'язків задачі (1.1), (5.5), які задовольняють додаткові умови (5.3).

Для дослідження розв'язків модифікованої крайової задачі (1.1), (5.5) обґрунтуємо відповідну чисельно-аналітичну схему.

Нехай для задачі (1.1), (5.5) мають силу умови **I-III,** де множина

$$D_\beta:=\left\{\boldsymbol{z}\in D: B\left(\boldsymbol{z}+\frac{t}{T}\left[\boldsymbol{d}(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\eta})-\boldsymbol{z}\right],\frac{T}{2}\boldsymbol{\delta}_D(\boldsymbol{f})\right)\subset D\right\}\neq\varnothing,$$

для всіх $\boldsymbol{\lambda}\in D_0$, $\boldsymbol{\eta}\in D$, $t\in[0,T]$, і покладемо

$$D_0:=\left\{\int_0^T \boldsymbol{B}(s)\boldsymbol{x}(s)ds:\boldsymbol{x}\in C([0,T],D)\right\}.$$

Для дослідження розв'язків параметризованої крайової задачі (1.1), (5.5) побудуємо послідовність функцій $\{\boldsymbol{x}_m\}$ згідно з рекурентним співвідношенням:

$$\boldsymbol{x}_{m+1}(t,\boldsymbol{z},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\eta}):=\boldsymbol{z}+\int_0^t \boldsymbol{f}(s,\boldsymbol{x}_m(s,\boldsymbol{z},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\eta}))ds-$$

$$-\frac{t}{T}\int_0^T \boldsymbol{f}(s,\boldsymbol{x}_m(s,\boldsymbol{z},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\eta}))ds+\frac{t}{T}\left[\boldsymbol{d}(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\eta})-\boldsymbol{z}\right], \tag{5.6}$$

де $m=0,1,2,\ldots$,

$$\boldsymbol{x}_0(t,\boldsymbol{z},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\eta})=\boldsymbol{z}+\frac{t}{T}\left[\boldsymbol{d}(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\eta})-\boldsymbol{z}\right]\in D_\beta, \tag{5.7}$$

а $\boldsymbol{z}$, $\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\eta}$ розглядаються як параметри.

Теорема 6.13. *Припустимо, що параметризована крайова задача (1.1), (5.5) задовольняє умови I-III.*

Тоді для всіх фіксованих $\boldsymbol{z}\in D_\beta$, $\boldsymbol{\lambda}\in D_0$, $\boldsymbol{\eta}\in D$*:*

1. *Функції послідовності (5.6) неперервно диференційовні і задовольняють параметризовані крайові умови:*

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}_m(0,\boldsymbol{z},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\eta}) = \boldsymbol{z}, \\ \boldsymbol{x}_m(T,\boldsymbol{z},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\eta}) = \boldsymbol{d}(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\eta}), \end{cases} \quad m = 0,1,2,\ldots \tag{5.8}$$

2. *Послідовність функцій (5.6) рівномірно збігається відносно* $t \in [0,T]$ *при* $m \to \infty$ *до граничної функції*

$$\boldsymbol{x}^*(t,\boldsymbol{z},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\eta}) = \lim_{m\to\infty} \boldsymbol{x}_m(t,\boldsymbol{z},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\eta}). \tag{5.9}$$

3. *Гранична функція* $\boldsymbol{x}^*$ *задовольняє параметризовані двоточкові лінійні крайові умови:*

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}^*(0,\boldsymbol{z},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\eta}) = \boldsymbol{z}, \\ \boldsymbol{x}^*(T,\boldsymbol{z},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\eta}) = \boldsymbol{d}(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\eta}). \end{cases} \tag{5.10}$$

4. *Гранична функція (5.9) для всіх* $t \in [0,T]$ *є єдиним неперервно диференційовним розв'язком інтегрального рівняння*

$$\boldsymbol{x}(t) := \boldsymbol{z} + \int_0^t \boldsymbol{f}(s,\boldsymbol{x}(s))ds - \frac{t}{T}\int_0^T \boldsymbol{f}(s,\boldsymbol{x}(s))ds + \\ + \frac{t}{T}[\boldsymbol{d}(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\eta}) - \boldsymbol{z}], \quad t \in [0,T], \tag{5.11}$$

або еквівалентної йому задачі Коші (5.12), (1.16) для модифікованої системи диференціальних рівнянь вигляду:

$$\boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}(t)) + \Delta(\boldsymbol{z},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\eta}), \tag{5.12}$$

де $\Delta : D_\beta \times D_0 \times D \to \mathsf{R}^n$ *— відображення, визначене формулою:*

$$\Delta(\boldsymbol{z},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\eta}) := \frac{1}{T}[\boldsymbol{d}(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\eta}) - \boldsymbol{z}] - \frac{1}{T}\int_0^T \boldsymbol{f}(s,\boldsymbol{x}^*(s,\boldsymbol{z},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\eta}))ds. \tag{5.13}$$

5. *Справедлива оцінка відхилення функції* $\boldsymbol{x}^*$ *від її* m*-го наближення для всіх* $t \in [0,T]$*:*

$$|\, \boldsymbol{x}^*(t,\boldsymbol{z},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\eta}) - \boldsymbol{x}_m(t,\boldsymbol{z},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\eta}) \,| \le \frac{20t}{9}\left(1 - \frac{t}{T}\right)\boldsymbol{Q}^m(\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{Q})^{-1}\boldsymbol{\delta}_D(\boldsymbol{f}).$$

Теорема 6.14. *Нехай* $\boldsymbol{z} \in D_\beta$, $\boldsymbol{\lambda} \in D_0$, $\boldsymbol{\eta} \in D$ *і* $\boldsymbol{\mu} \in \mathsf{R}^n$ *– задані вектори. Припустимо, що для системи диференціальних рівнянь (1.1) мають силу умови Теореми 6.13.*

Тоді для того, щоб розв'язок задачі Коші (1.31), (1.16), задовольняв також і параметризовані крайові умови (5.5), необхідно і достатньо, щоб параметр $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_{z,\lambda,\eta}$ *був заданий рівністю:*

$$\boldsymbol{\mu}_{z,\lambda,\eta} := \frac{1}{T}\left[[\boldsymbol{d}(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\eta}) - \boldsymbol{z}] - \int_0^T \boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{x}^*(s, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\eta}))ds\right]. \quad (5.14)$$

У цьому випадку

$$\boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\mu}) = \boldsymbol{x}^*(t, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\eta}), \quad t \in [0, T], \quad (5.15)$$

де $\boldsymbol{x}^*$ *– функція вигляду (5.9).*

Теорема 6.15. *Нехай для крайової задачі (1.1) (5.1) виконуються умови I-III.*

Тоді пара $(\boldsymbol{x}^*(\cdot, \boldsymbol{z}^*, \boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\eta}^*), \boldsymbol{\lambda}^*)$ *є розв'язком параметризованої крайової задачі (1.1), (5.5), тоді і тільки тоді, коли*

$$\boldsymbol{z}^* = \mathrm{col}(z_1^*, z_2^*, ..., z_n^*),$$
$$\boldsymbol{\eta}^* = \mathrm{col}(\eta_1^*, \eta_2^*, ..., \eta_n^*),$$
$$\boldsymbol{\lambda}^* = \mathrm{col}(\lambda_1^*, \lambda_2^*, ..., \lambda_n^*)$$

задовольнятимуть систему визначальних алгебраїчних чи трансцендентних рівнянь вигляду:

$$\Delta(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\eta}) = 0, \quad (5.16)$$

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\eta}) = 0, \quad (5.17)$$

$$\boldsymbol{x}^*(T, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\eta}) - \boldsymbol{\eta} = 0, \quad (5.18)$$

де

$$\Delta(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\eta}) := [\boldsymbol{d}(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\eta}) - \boldsymbol{z}] - \frac{1}{T}\int_0^T \boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{x}^*(s, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\eta}))ds,$$

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\eta}) := \int_0^T \boldsymbol{B}(s)\boldsymbol{x}^*(s, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\eta})ds - \boldsymbol{\lambda}.$$

Лема 6.7. *Нехай виконуються всі умови Теореми 6.13. Крім того, існують вектори* $\boldsymbol{z} \in D_\beta$, $\boldsymbol{\lambda} \in D_0$, $\boldsymbol{\eta} \in D$, *які задовольняють систему визначальних рівнянь (5.16)-(5.18).*

Тоді:

1. *Нелінійна крайова задача (1.1), (5.1) має розв'язок* $\boldsymbol{x}(\cdot)$ *такий, що*

$$\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{z},$$

$$\int_0^T \boldsymbol{B}(s)\boldsymbol{x}(s)ds = \boldsymbol{\lambda},$$

$$\boldsymbol{x}(T) = \boldsymbol{\eta}.$$

Крім того, цей розв'язок задається формулою:

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}^*(t, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\eta}), \quad t \in [0, T], \quad (5.19)$$

де $\boldsymbol{x}^*$ *є граничною функцією послідовності (5.6).*

***2.** Якщо крайова задача (1.1), (5.1) має розв'язок $\boldsymbol{x}(\cdot)$, то він задається формулою (5.19), і система визначальних рівнянь (5.16)-(5.18) задовольняється при*

$$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x}(0),$$
$$\boldsymbol{\lambda} = \int_0^T \boldsymbol{B}(s)\boldsymbol{x}(s)ds,$$
$$\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{x}(T).$$

Зауваження 6.10. *При деякому $m \geq 1$ введемо у розгляд функції $\Delta_m : D_\beta \times D_0 \times D \to \mathsf{R}^n$, $V_m : D_\beta \times D_0 \times D \to \mathsf{R}^n$ згідно з формулами:*

$$\Delta_m(\boldsymbol{z},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\eta}) := \frac{1}{T}[\boldsymbol{d}(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\eta}) - \boldsymbol{z}] - \frac{1}{T}\int_0^T \boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{x}_m(s,\boldsymbol{z},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\eta}))ds, \tag{5.20}$$

$$\boldsymbol{V}_m(\boldsymbol{z},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\eta}) := \int_0^T \boldsymbol{B}(s)\boldsymbol{x}_m(s,\boldsymbol{z},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\eta})ds - \boldsymbol{\lambda}, \tag{5.21}$$

де $\boldsymbol{z}$, $\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\eta}$ визначені згідно зі співвідношеннями (5.3).

Для дослідження розв'язності параметризованої крайової задачі (1.1), (5.5) розглядатимемо наближену визначальну систему алгебраїчних чи трансцендентних рівнянь вигляду:

$$\begin{aligned} \Delta_m(\boldsymbol{z},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\eta}) &= 0, \\ \boldsymbol{V}_m(\boldsymbol{z},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\eta}) &= 0, \\ \boldsymbol{x}_m(T,\boldsymbol{z},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\eta}) - \boldsymbol{\eta} &= 0. \end{aligned} \tag{5.22}$$

Відзначимо, що на відміну від системи (5.16)-(5.18), наближена система конструктивно будуєтьтя на основі функції $\boldsymbol{x}_m$ та не містить невідомих членів. Це означає, що за відповідних умов функція $\overline{\boldsymbol{X}}_m(t) = \boldsymbol{x}_m(t,\bar{\boldsymbol{z}},\bar{\boldsymbol{\lambda}},\bar{\boldsymbol{\eta}})$, де $\bar{\boldsymbol{z}}$, $\bar{\boldsymbol{\lambda}}$, $\bar{\boldsymbol{\eta}}$ є розв'язками системи (5.22), може бути прийнята за m-ве наближення до точного розв'язку вихідної крайової задачі (1.1), (5.1) з інтегральними крайовими умовами.

Зауважимо, що зі зростанням m системи (5.16)-(5.18) та (5.22) будуть достатньо близькими, і цим самим забезпечуватиметься необхідна точність відшукання наближеного розв'язку крайової задачі (1.1), (5.1).

ВАРІАНТИ ІНДИВІДУАЛЬНИХ ЗАВДАНЬ З КУРСУ ЗА ВИБОРОМ «ТЕОРІЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ»

ВАРІАНТ 1

1. Дослідити лінійну неоднорідну крайову задачу:
$$y'' + 2y' = 4, \quad y = y(x), \quad x \in (0;1);$$
$$y(0) = 0, \quad y(1) = 0, \quad y'(0) = y'(1) - 4.$$
2. Дослідити спектральну задачу:
$$y^{(4)} = \lambda^2 y, \quad \lambda \geq 0, \quad y = y(x), \quad x \in (0;\pi);$$
$$y(0) = y'(0) = y''(0) = 0, \quad y'''(\pi) = 0.$$
3. Шляхом зведення до задач Коші розв'язати крайову задачу:
$$y'' + 0{,}25y = x, \quad y = y(x), \quad x \in (0;\pi);$$
$$y(0) = 1, \quad y(\pi) = 4\pi.$$

ВАРІАНТ 2

1. Дослідити лінійну однорідну крайову задачу:
$$y^{(4)} - \ln 2\, y''' = 0, \quad y = y(x), \quad x \in (0;2);$$
$$y'(0) = y(1), \quad y''(1) = y''(2), \quad y(0) = y'(2).$$
2. Знайти власні значення та власні функції крайової задачі:
$$y'' - \lambda^2 y = 0, \quad \lambda \geq 0, \quad y = y(x), \quad x \in (0;1);$$
$$y(0) - y'(0) = 0, \quad y(1) - y'(1) = 0.$$
3. Побудувати функцію Ґріна диференціального оператора, породженого лінійним диференціальним виразом $\ell_2(y) = y'' - 4y' + 5y$ і крайовими умовами $y(0) = 0,\ y(\pi/2) = 0.$

ВАРІАНТ 3

1. Дослідити лінійну неоднорідну крайову задачу:
$$y^{(4)} + y'' = 0, \quad y = y(x), \quad x \in (0;\pi/2);$$
$$y(0) - y(\pi/2) = \pi/2, \quad y'(0) + y'(\pi/2) = -2, \quad y''(0) = y''(\pi/2), \quad y'''(0) = -y'''(\pi/2).$$
2. Дослідити спектральну задачу:
$$y'' + \lambda^2 y = 0, \quad \lambda \geq 0, \quad y = y(x), \quad x \in (0;2\pi);$$
$$y'(0) = 0, \quad y'(2\pi) = 0.$$
3. Шляхом зведення до задач Коші розв'язати крайову задачу:
$$y'' + 4y = x, \quad y = y(x), \quad x \in (0;\pi);$$
$$y(0) + y'(0) = 0, \quad y'(\pi) - y(\pi) = 0.$$

ВАРІАНТ 4

1. Дослідити лінійну однорідну крайову задачу:
$$y''' + 2y'' - 3y' = 0, \quad y = y(x), \quad x \in (0;1);$$
$$y(0) = y(1), \quad y'(0) = y'(1), \quad y''(0) = y''(1).$$
2. Знайти власні значення та власні функції крайової задачі:
$$y'' - 6y' = \lambda y, \quad y = y(x), \quad x \in (0;\pi);$$
$$y(0) = 0, \quad y'(\pi) = 3y(\pi).$$
3. Побудувати спряжену крайову задачу до заданої:
$$y'' - e^x y = 0, \quad y = y(x), \quad x \in (0;1);$$
$$y'(0) = 0, \quad y(1) = 0.$$

ВАРІАНТ 5

1. Дослідити лінійну неоднорідну крайову задачу:
$$y'' + y' = 4e^x, \quad y = y(x), \quad x \in (0;\ln 2);$$
$$y(0) = y'(0), \quad y(\ln 2) = 0.$$
2. Дослідити спектральну задачу:
$$y'' - 2y' = \lambda y, \quad y = y(x), \quad x \in (0;1);$$
$$y(0) = y'(0), \quad y(1) = y'(1).$$
3. Перевірити на самоспряженість крайову задачу:
$$y^{(4)} = y, \quad y = y(x), \quad x \in (0;1);$$
$$y(0) = y'''(0), \quad y''(0) = 2y'(0), \quad y(1) = -y'''(1), \quad y'(1) = y''(1).$$

ВАРІАНТ 6

1. Дослідити лінійну однорідну крайову задачу:
$$y'' + 4y' + 4y = 0, \quad y = y(x), \quad x \in (0;1);$$
$$y(0) - y'(0) = 0, \quad y(1) = 0.$$
2. Знайти власні значення та власні функції крайової задачі:
$$y^{(4)} = \lambda^2 y'', \quad \lambda \geq 0, \quad y = y(x), \quad x \in (0;1);$$
$$y(0) = y'(0) = y''(0) = 0, \quad y'(1) = 3y(1).$$
3. Побудувати функцію Ґріна диференціального оператора, породженого лінійним диференціальним виразом $\ell_2(y) = y'' + y' - 2y$ і крайовими умовами $y(0) = y'(0)$, $y'(\ln 2) = 0$.

ВАРІАНТ 7

1. Дослідити лінійну неоднорідну крайову задачу:
$$y'' + 4y = \cos 4x, \quad y = y(x), \quad x \in (0; \pi/4);$$
$$y(0) = 2, \quad y'(\pi/4) = 0.$$
2. Дослідити спектральну задачу:
$$y'' = -\lambda y, \quad y = y(x), \quad x \in (0;1);$$
$$y'(0) - 2y(0) = 0, \quad y'(1) - 2y(1) = 0.$$
3. Перевірити існування функції Ґріна для диференціального оператора, породженого лінійним диференціальним виразом $\ell_4(y) = y^{(4)} - y$ і крайовими умовами $y(0) = y''(0)$, $y'(0) = 0$, $y(\pi) = y''(\pi)$, $y'(\pi) = 0$.

ВАРІАНТ 8

1. Дослідити лінійну однорідну крайову задачу:
$$y''' + 2y'' + 2y' = 0, \quad y = y(x), \quad x \in (0; \pi);$$
$$y'(0) = 0, \quad y'(\pi) = 0.$$
2. Знайти власні значення та власні функції крайової задачі:
$$y'' + 2y' = \lambda y, \quad y = y(x), \quad x \in (0;1);$$
$$y(0) = 0, \quad y(1) = -y'(1).$$
3. Методом функції Ґріна розв'язати крайову задачу:
$$y'' + 4y = 1, \quad y = y(x), \quad x \in (0; \pi/4);$$
$$y(0) = 0, \quad y(\pi/4) = 0.$$

ВАРІАНТ 9

1. Дослідити лінійну неоднорідну крайову задачу:
$$y'' - 4y' + 4y = e^x, \quad y = y(x), \quad x \in (0;1);$$
$$y'(0) - y(0) = 0, \quad y(1) = e, \quad y'(1) = 0.$$
2. Дослідити спектральну задачу:
$$y'' = \lambda y, \quad y = y(x), \quad x \in (0;l), \quad l > 0;$$
$$y'(0) = 0, \quad y(l) = 0.$$
3. Шляхом зведення до задач Коші розв'язати крайову задачу:
$$y'' - y = e^x, \quad y = y(x), \quad x \in (0;1);$$
$$y'(0) + y(0) = 0, \quad y'(1) + 2y(1) = e.$$

ВАРІАНТ 10

1. Дослідити лінійну однорідну крайову задачу:
$$y^{(4)} - 6y''' + 10y'' = 0, \quad y = y(x), \quad x \in (0;\pi);$$
$$y(0) = y''(\pi), \quad y'(0) = y'''(0).$$
2. Знайти власні значення та власні функції крайової задачі:
$$y'' - \lambda y = 0, \quad y = y(x), \quad x \in (0;\pi/4);$$
$$y'(0) = 0, \quad y'(\pi/4) = 0.$$
3. Побудувати спряжену крайову задачу до заданої:
$$y'' + 4y' = 0, \quad y = y(x), \quad x \in (0;2);$$
$$y(0) = 0, \quad y'(2) = 0.$$

ВАРІАНТ 11

1. Дослідити лінійну неоднорідну крайову задачу:
$$y'' + y = 4\cos x, \quad y = y(x), \quad x \in (0;\pi);$$
$$y(0) = y'(\pi), \quad y'(0) = y(\pi) + 2\pi.$$
2. Дослідити спектральну задачу:
$$y'' = \lambda y, \quad y = y(x), \quad x \in (0;0{,}25);$$
$$y(0) = 0, \quad y'(0{,}25) = 0.$$
3. Побудувати функцію Ґріна диференціального оператора, породженого лінійним диференціальним виразом $\ell_2(y) = y'' + 4y$ і крайовими умовами $y'(\pi/2) + y(-\pi/2) = 0,\ y'(-\pi/2) - y(\pi/2) = 0.$

ВАРІАНТ 12

1. Дослідити лінійну неоднорідну крайову задачу:
$$y'' - 8y' + 16y = 32, \quad y = y(x), \quad x \in (0;1);$$
$$y(0) = 10, \quad y'(1) = 4y(1).$$
2. Знайти власні значення та власні функції крайової задачі:
$$y'' + 6y' = \lambda y, \quad y = y(x), \quad x \in (0;1);$$
$$y'(0) = 0, \quad y'(1) = 0.$$
3. За допомогою формули Коші побудувати функцію Ґріна диференціального оператора, породженого лінійним диференціальним виразом $\ell_3(y) = y'''$ і крайовими умовами $y'(0) = y(0),\ y'(1) = 2y(1),\ y''(0) = 0.$

ВАРІАНТ 13

1. Дослідити лінійну однорідну крайову задачу:
$$y''' + y'' + y' + y = 0, \quad y = y(x), \quad x \in (0;2\pi);$$
$$y(0) = -y'(0), \quad y(2\pi) = -y'(2\pi).$$
2. Дослідити спектральну задачу:
$$y'' = \lambda y, \quad y = y(x), \quad x \in (0;\pi/2);$$
$$y(0) + y'(0) = 0, \quad y'(\pi/2) + y(\pi/2) = 0.$$
3. Побудувати спряжену крайову задачу до заданої:
$$y'' - 6y' + 5y = 0, \quad y = y(x), \quad x \in (0;3);$$
$$y'(0) = 0, \quad y'(3) = 0.$$

ВАРІАНТ 14

1. Дослідити лінійну однорідну крайову задачу:
$$y^{(4)} - 5y'' + 4y = 0, \quad y = y(x), \quad x \in (0;\ln 2);$$
$$y(0) = 0, \quad y''(0) = 0, \quad y(\ln 2) = 0.$$
2. Знайти власні значення та власні функції крайової задачі:
$$y''' - \lambda y' = 0, \quad y = y(x), \quad x \in (0;2);$$
$$y(0) + 2y''(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y(2) = 0.$$
3. За допомогою формули Коші побудувати функцію Ґріна диференціального оператора, породженого лінійним диференціальним виразом $\ell_2(y) = y''$ і крайовими умовами $y(0) = 0,\ y(2) = 0$.

ВАРІАНТ 15

1. Дослідити лінійну неоднорідну крайову задачу:
$$xy'' - (2x+1)y' + 2y = 0, \quad y = y(x), \quad x \in (1;2);$$
$$y'(1) = 2, \quad y'(2) = 2.$$
2. Дослідити спектральну задачу:
$$y''' - \lambda^2 y' = 0, \quad y = y(x), \quad x \in (0;3);$$
$$y(0) = y(3), \quad y'(0) = y'(3), \quad y''(0) = y''(3).$$
3. За допомогою методу стрільби знайти значення $y(\pi)$ з крайової задачі:
$$y'' + y = 1, \quad y = y(x), \quad x \in (0;\pi);$$
$$y(0) + y'(0) = 0, \quad y(\pi) - y'(\pi) = \pi.$$

ВАРІАНТ 16

1. Дослідити лінійну однорідну крайову задачу:
$$(2x+1)y'' + 4xy' - 4y = 0, \quad y = y(x), \quad x \in (0;2);$$
$$y(0) = y'(0), \quad y(2) + 2y'(2) = 0.$$
2. Знайти власні значення та власні функції крайової задачі:
$$y'' = -\lambda^2 y, \quad y = y(x), \quad x \in (0;2\pi);$$
$$y(0) = y(\pi) - y(2\pi), \quad y'(0) = y'(\pi) - y'(2\pi).$$
3. За допомогою методу стрільби знайти значення $y(\pi)$ з крайової задачі:
$$y'' - y = 2\cos x, \quad y = y(x), \quad x \in (0;\pi);$$
$$y'(0) = y(0), \quad y'(\pi) - 2y(\pi) = 2.$$

ВАРІАНТ 17

1. Дослідити лінійну неоднорідну крайову задачу:
$$x^2 y'' + xy' + 4y = 10x, \quad y = y(x), \quad x \in (1;e);$$
$$y(1) = 0, \quad y'(1) = 2 + 4\cos 2, \quad y'(e) = 2.$$
2. Дослідити спектральну задачу:
$$y'' = \lambda y, \quad y = y(x), \quad x \in (0;2);$$
$$y(0) = y(1), \quad y'(0) = y'(2).$$
3. Перевірити на самоспряженість крайову задачу:
$$y'' - 5xy = \ln x, \quad y = y(x), \quad x \in (1;10);$$
$$y(1) = y'(1) - y'(10), \quad y(10) = 0.$$

ВАРІАНТ 18

1. Дослідити, при якому значенні параметра a має розв’язок крайова задача:
$$y'' + 4y = 2\operatorname{tg} x, \quad y = y(x), \quad x \in (0;\pi/4);$$
$$y(0) = y(\pi/4) = 0, \quad y'(0) = a.$$
2. Знайти власні значення та власні функції крайової задачі:
$$y^{(4)} + 2\lambda y'' + \lambda^2 y = 0, \quad y = y(x), \quad x \in (0;\pi);$$
$$y(0) = y'(0) = y''(0) = 0, \quad y(\pi) = 0.$$
3. Перевірити існування функції Ґріна для диференціального оператора, породженого лінійним диференціальним виразом $\ell_3(y) = y''' + y' - 2y$ і крайовими умовами $y'(0) = y(0), \quad y''(0) = 0, \quad y'(1) = y(1).$

ВІДПОВІДІ ДО ВПРАВ

РОЗДІЛ I

1. а) $\ell_2^*(y) = xy'' - xy$; б) вираз самоспряжений; в) $\ell_3^*(y) = -xy''' - 4y'' + xy' + 2y$;
   г) $\ell_3^*(y) = -y''' - x^3 y'' - 6x^2 y' + (\sin x - 6x)y$; д) вираз самоспряжений;
   е) $\ell_5^*(y) = -y^{(5)} - 6y^{(4)} - 9y'''$; є) $\ell_5^*(y) = -\ell_5(y)$; ж) вираз самоспряжений.
2. а) самоспряжена; б) не є самоспряженою; в) самоспряжена; г) не є самоспряженою.
3. а) $xy'' + y' = 1,\ \ y(1) + 2y'(2) = 0$; б) $y''' - xy = 4,\ \ y(0) = y'(0),\ \ y(1) = 0$;
   в) $y''' + y'' = -1 - e^x,\ \ y(0) = y'(0),\ \ y''(0) = 0,\ \ y''(-2) = 0,\ y(-2) = y'(-2)$;
   г) $xy^{(4)} + 4y''' - y'' = e^{3x},\ \ y'(0) = 0,\ \ y''(0) = 0,\ \ y(1) = -y'(1),\ y'''(1) = -2y''(1)$.
   Примітка. Крайові умови спряжених задач можуть мати й інший вигляд, проте повинні бути еквівалентними до вказаних.

РОЗДІЛ II

1. а) $y = Ce^{2x}$; б) $y = C(x-2)^2 \ln|x-2|$;
   в) $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}\left[\cos\sqrt{3}x + \sqrt{3}\sin\sqrt{3}x\right]$;
   г) тільки тривіальний розв'язок; д) тільки тривіальний розв'язок;
   е) $y = C\left[\left(e^{3x} - e^3\right)(1-x) - \frac{3}{2}(x-1)^2\right]$; є) $x = -4Cte^{3t},\ \ y = C(1-2t)e^{3t}$;
   ж) $x = -4C\sin 2t,\ \ y = C(\sin 2t - \cos 2t)$; з) $x = Ce^{-t},\ \ y = -Ce^{-t}$.
2. а) при $l = \pi n,\ \ n \in \mathrm{N}\ \ y = C\sin x$; б) тільки тривіальний розв'язок.
3. а) $y = \left(C + \ln|\sin x|\right)\sin x + \left(\frac{\pi}{4} - x\right)\cos x$; б) $y = \dfrac{\sin 2x}{2}\left(\ln\dfrac{\mathrm{tg}^2\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}{\mathrm{tg}^2\,\frac{3\pi}{8}} - 1\right) - x\cos 2x$;
   в) задача не має розв'язку; г) $y = e^{-x}\left[0{,}8(x+1)^{\frac{5}{2}} - 2x - 2202\right]$;
   д) $y = Cx^2 + x^3$; е) $y = (x-2)^2\left(C_1 + 2\ln|x-2| + x - 1{,}5\right)$; є) $y = 1 + xe^x - 0{,}5x^2$;
   ж) задача не має розв'язку; з) $y = 3 - x^3 + \ln|x|$;
   и) $y = \dfrac{6\left(e^3 + e - 1\right)e^x + 3\left(e^4 - 8e^3 - 1\right)e^{-2x} - 2\left(e^3 - 9e^2 - 1\right)e^{-3x+1}}{6\left(e^4 + 8e - 9\right)}$;
   і) $x = \frac{1}{3}(t-3),\ \ y = \frac{1}{3}(t-1)$; ї) $x = e^{2t}(1-t) - 3e^t,\ \ y = e^t + 0{,}25e^{2t}(2t-1)$;
   й) $x = e^{-t}(2 - \cos t - 2\sin t),\ \ y = e^{-t}(1 - 3\sin t)$;
   к) $x = \cos t + 6\sin t - 6t - 9,\ \ y = 9\sin t - 9t - 12$.
4. $y = \dfrac{m^4}{4\alpha^6\left(\mathrm{sh}^2\gamma - \sin^2\gamma\right)}\Big\{\left[\sin^2\gamma - H\left(\sin\gamma\,\mathrm{ch}\,\gamma + \cos\gamma\,\mathrm{sh}\,\gamma\right)\right]\mathrm{sh}\,\alpha x\cos\alpha x +$

$$+\left[(\operatorname{ch}\gamma-\cos\gamma)(\operatorname{sh}\gamma+\sin\gamma)-2H\sin\gamma\operatorname{sh}\gamma\right]\operatorname{sh}\alpha x\sin\alpha x-$$

$$-\left[\operatorname{sh}^2\gamma+\sin\gamma\operatorname{sh}\gamma-H(\sin\gamma\operatorname{ch}\gamma+\cos\gamma\operatorname{sh}\gamma)\right]\operatorname{ch}\alpha x\sin\alpha x\Big\}+\frac{m^4}{4\alpha^4}x,\ \text{де } \gamma=\alpha H.$$

5. а) $y=\frac{16}{17}\ln 2\operatorname{ch}2x-2x$; б) $y=e^{-x}(1-\cos x)$.

6. $u=\dfrac{a}{k^3}(\operatorname{sh}kx-kx)$, $v=1$, $z=\dfrac{1}{k^2}(1+\operatorname{ch}kx)$, $y=\dfrac{a}{k^2}\left(x-\frac{l}{2}\right)+\dfrac{a}{k^3}\left(\operatorname{th}\frac{kl}{2}\operatorname{ch}kx-\operatorname{sh}kx\right)$.

7. а) $\alpha_0(x)=\operatorname{tg}x$, $\alpha_1(x)=\cos x\left(2+0{,}5x^2\right)$, $y(\pi/4)=\frac{1}{128}\left(64-64\sqrt{2}-\pi^2\sqrt{2}\right)$.

   б) $\alpha_0(x)=\dfrac{1}{2-x}$, $\alpha_1(x)=\dfrac{30+(x-2)^3}{3(2-x)}$, $y(1)=-\dfrac{29}{3}$.

8. а) $y'(2)=\ln 2-1$ (стрільбу слід вести по значенню $y'(2)$), точний розв'язок $y(x)=(3\ln 2+1)x-2(x\ln x+1)$;

   б) $y(0)\approx 0{,}92913$; точний розв'язок $y(x)=0{,}5\ln\dfrac{\cos\sqrt{2}x}{\cos\sqrt{2}}$;

   в) $x(0)=-\frac{2}{3}$, $y(0)=-\frac{1}{3}$, $x(t)=-\frac{2}{3}e^{-3t}$, $y(t)=-\frac{1}{3}e^{-3t}$;

   г) $x(0)=10$, $y(0)=8$, $x(t)=9+\cos 2t$, $y(t)=8\cos t$.

РОЗДІЛ III

1. а) $\lambda_n=0{,}25n^2$, $y_n(x)=C_n\sin(0{,}5nx)$, $n=\overline{1,\infty}$; б) тільки тривіальний розв'язок; в) $\lambda_n=(\pi n)^2+1$, $y_n(x)=C_ne^{-x}\cos\pi nx$, $n=\overline{0,\infty}$; г) $\lambda_n=2(\pi n)^2+8$, $y_n(x)=C_ne^{2x}\cos\pi nx$, $n=\overline{0,\infty}$; д) $\lambda_n=(6n)^2$, $y_n(x)=C_n\sin^2 3nx$, $n\in\mathrm{N}$; е) $y=Cx$ для довільного λ; є) $\lambda_n=\pi n$, $y_n(x)=A_n\cos\pi nx+B_n\sin\pi nx$, $n\in\mathrm{Z}$; ж) $\lambda_n=\frac{\pi(2n-1)}{2}$, $y_n(x)=A_n\cos\frac{\pi(2n-1)}{2}x+B_n\sin\frac{\pi(2n-1)}{2}x$, $n\in\mathrm{Z}$; з) будь-яке значення λ буде власним: при $\lambda=0$ $y(x)=A\left(x^2-2x\right)+B\left(x^3-3x\right)$, при $\lambda\neq 0$ $y(x)=C\left\{\frac{1+\sqrt{3}}{2}e^{\frac{3+\sqrt{3}}{2}\lambda}\left(e^{-\lambda x}-1\right)+e^{\frac{1+\sqrt{3}}{2}\lambda x}-1\right\}+D\left\{\frac{1-\sqrt{3}}{2}e^{\frac{3-\sqrt{3}}{2}\lambda}\left(e^{-\lambda x}-1\right)+e^{\frac{1-\sqrt{3}}{2}\lambda x}-1\right\}$.

2. а) $\lambda_n=-\mu_n^2$, $y_n(x)=C_n(\mu_n\cos\mu_nx+\sin\mu_nx)$, де μ_n – додатні корені рівняння $\operatorname{tg}\mu_n=-\mu_n$, $n\in\mathrm{N}$; б) $\lambda_n=n^2$, $y_n(x)=A_n\cos nx+B_n\sin nx$, $n=\overline{0,\infty}$; в) $\lambda_n=\left(\frac{\pi n}{\ln 2}\right)^2+\frac{1}{4}$, $y_n(x)=C_nx^{-\frac{1}{2}}\sin\frac{\pi n\ln x}{\ln 2}$, $n\in\mathrm{N}$; г) $\lambda_n=\left(\frac{\pi n}{\ln a-\ln b}\right)^2$, $y_n(x)=C_n\sin\frac{\pi n(\ln x-\ln a)}{\ln a-\ln b}$, $n\in\mathrm{N}$.

3. а) $\lambda\in\mathrm{R}$, $x(t)=Ce^{\lambda t}(\cos t+\sin t)$, $y(t)=Ce^{\lambda t}(\cos t-\sin t)$; б) $\lambda=1$, $x(t)+Ct$, $y(t)=C(1-t)$. *Примітка.* Рівняння $\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\operatorname{th}x$ при $x>1$ не має коренів, оскільки тоді $\operatorname{th}x<1$, а ліва частина рівності перевищує 1. Рівняння $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=\operatorname{tg}x$ не має коренів при $x\in(0;1)$, бо значення функції $\operatorname{tg}x$ на цьому

інтервалі не досягають значень лівої частини рівності; в) $\lambda = 0$, $x(t) = Ce^t$, $y(t) = Cte^t$; для додатних коренів рівняння $\sqrt{\lambda} = \mathrm{tg}\sqrt{\lambda}$ $x(t) = Ce^t\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}t$, $y(t) = Ce^t\sin\sqrt{\lambda}t$.

4. Задача має і комплексні власні значення: наприклад, власному значенню $\lambda = i$ відповідає власна функція $y(x) = \left(x^2 - 1\right)^2\left(x^2 + i\right)$.

РОЗДІЛ IV

1. а) $$G(x,\xi) = \begin{cases} \dfrac{\cos n(0{,}5l + x - \xi)}{2n\sin(0{,}5nl)}, & 0 \le x < \xi; \\ \dfrac{\cos n(0{,}5l + \xi - x)}{2n\sin(0{,}5nl)}, & \xi < x \le l. \end{cases}$$

б) $$G(x,\xi) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{f_1(l)\Phi(\xi)}{C + f_1(l)\Phi(l)}\right)\Phi(x), & 0 \le x < \xi; \\ \left(1 - \dfrac{f_1(l)\Phi(x)}{C + f_1(l)\Phi(l)}\right)\Phi(\xi), & \xi < x \le l, \end{cases}$$ де $\Phi(z) = \int\limits_0^z \dfrac{dt}{f_1(t)}$.

в) $$G(x,\xi) = \begin{cases} \dfrac{\cos 2(\xi + 1) + 2\sin 2(\xi - 1) - e^{1-\xi}}{10\sin 2}\sin 2x, & 0 \le x < \xi; \\ 0{,}2e^{x-\xi} + \dfrac{[\sin 2\xi - 2\cos 2\xi]\cos 2(x+1) - e^{1-\xi}\sin 2x}{10\sin 2}, & \xi < x \le 1. \end{cases}$$

г) $$G(x,\xi) = \begin{cases} -\dfrac{\sin^2 x}{2\cos 2\xi}, & 0 \le x < \xi; \\ \dfrac{(\xi - x)\sin 2\xi - \sin^2\xi}{2\cos 2\xi}, & \xi < x \le 1. \end{cases}$$

д) $$G(x,\xi) = \begin{cases} \dfrac{1}{2n^3}\left[\dfrac{\mathrm{sh}\, nx\,\mathrm{sh}\, n(\xi - l)}{\mathrm{sh}\, nl} + \dfrac{\sin nx \sin n(l - \xi)}{\sin nl}\right], & 0 \le x < \xi; \\ \dfrac{1}{2n^3}\left[\dfrac{\mathrm{sh}\, n\xi\,\mathrm{sh}\, n(x - l)}{\mathrm{sh}\, nl} + \dfrac{\sin n\xi \sin n(l - x)}{\sin nl}\right], & \xi < x \le l. \end{cases}$$

е) $$G(x,\xi) = \begin{cases} \int\limits_0^x \dfrac{(x - z)(z - \xi)}{f_2(z)}dz, & 0 \le x < \xi; \\ \int\limits_0^\xi \dfrac{(\xi - z)(z - x)}{f_2(z)}dz, & \xi < x \le l. \end{cases}$$

2\. а) $G(x,\xi)=\begin{cases}-\dfrac{\xi^4+16}{68\xi^3}\left(x^2-x^{-2}\right), & 1\le x<\xi;\\ -\dfrac{\xi^4-1}{68\xi^3}\left(x^2+16x^{-2}\right), & \xi<x\le 2,\end{cases}$ $y(x)=12{,}8x^{-2}-19{,}6x^2+6{,}8x^3.$

б) $G(x,\xi)=\begin{cases}\dfrac{\left(e^{2\xi}-16e^{-2\xi}\right)\left(3e^{2x}+e^{-2x}\right)}{196}, & 0\le x<\xi;\\ \dfrac{\left(e^{2x}-16e^{-2x}\right)\left(3e^{2\xi}+e^{-2\xi}\right)}{196}, & \xi<x\le \ln 2,\end{cases}$

$y(x)=\left(12{,}25x-12\ln 2-0{,}25\right)e^{2x}+4(1-\ln 2)e^{-2x}.$

в) $G(x,\xi)=\begin{cases}\left(1-\dfrac{\ln(\xi+1)}{1+\ln 2}\right)\ln(x+1), & 0\le x<\xi;\\ \left(1-\dfrac{\ln(x+1)}{1+\ln 2}\right)\ln(\xi+1), & \xi<x\le 1,\end{cases}$ $y(x)=\dfrac{2\ln|x+1|}{1+\ln 2}-x.$

г) $G(x,\xi)=\begin{cases}0{,}5(\sin\xi+\cos\xi)(\sin x-x), & 0\le x<\xi;\\ 0{,}5(\sin\xi-\cos\xi)\sin x+\sin\xi\cos x-0{,}5(\sin\xi+\cos\xi)x, & \xi<x\le\pi,\end{cases}$

$y(x)=\frac{x}{2}\left(\pi+\sin x+\cos x\right)+\cos x-\frac{\pi+1}{2}\sin x-1.$

3\. а) $G(x,\xi)=\begin{cases}\pi^{-1}\left[(\xi-x)\sin(x-\xi)-\cos(x-\xi)-\sin^2\xi\cos(x+\xi)\right], & 0\le x<\xi;\\ \pi^{-1}\left[(\xi-x+\pi)\sin(x-\xi)-\cos(x-\xi)-\sin^2\xi\cos(x+\xi)\right] & \xi<x\le\pi.\end{cases}$

б) $G(x,\xi)=\begin{cases}\dfrac{2e^{\xi+x}(x-\xi+1)+e^{\xi-x}-e^{2-\xi+x}}{2\left(e^2-1\right)}, & 0\le x<\xi;\\ \dfrac{2e^{\xi+x}(x-\xi+1)-e^{x-\xi}+e^{2+\xi-x}}{2\left(e^2-1\right)}, & \xi<x\le 1.\end{cases}$

в) $G(x,\xi)=\begin{cases}\dfrac{(\xi-x)^2(\xi-x+a-b)^2}{24(a-b)}-\dfrac{(a-b)^3}{720}, & a\le x<\xi;\\ \dfrac{(x-\xi)^2(x-\xi+a-b)^2}{24(a-b)}-\dfrac{(a-b)^3}{720}, & \xi<x\le b.\end{cases}$

4\. а) $y(x)=\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{x^3}{3}-5x^2+\dfrac{107}{24}x+\dfrac{551}{120}$; б) $y(x)=-\dfrac{\pi\cos\pi x+\sin\pi x}{\pi^2+1}$;

в) $y(x)=\dfrac{8}{\pi}\sin x+x^2-\pi x$; г) $y(x)=\dfrac{\operatorname{ch}x}{\operatorname{sh}b-\operatorname{sh}a}+\dfrac{b^5-a^5-5x^4}{120(b-a)}-1.$

5\. а) $\boldsymbol{G}(t,\xi)=\begin{cases}\boldsymbol{G}_1(t,\xi), & -\frac{\pi}{3}\le t<\xi;\\ \boldsymbol{G}_2(t,\xi), & \xi<t\le 0,\end{cases}$ де

$$\boldsymbol{G}_1(t,\xi)=\begin{pmatrix}-(2\sqrt{3}\cos\xi+3\sin\xi)\sin t-\cos\xi\cos t & (2\sqrt{3}\sin\xi-3\cos\xi)\sin t+\sin\xi\cos t\\ -(2\sqrt{3}\cos\xi+3\sin\xi)\cos t+\cos\xi\sin t & (2\sqrt{3}\sin\xi-3\cos\xi)\cos t-\sin\xi\sin t\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{G}_2(t,\xi)=\begin{pmatrix}-2(\sin\xi+\sqrt{3}\cos\xi)\sin t & 2(\sqrt{3}\sin\xi-\cos\xi)\sin t\\ -2(\sin\xi+\sqrt{3}\cos\xi)\cos t & 2(\sqrt{3}\sin\xi-\cos\xi)\cos t\end{pmatrix},$$

$$x(t)=2\sin t+\operatorname{tg} t,\quad y(t)=2\cos t+2.$$

б) $\boldsymbol{G}(t,\xi)=\begin{cases}\boldsymbol{G}_1(t,\xi), & 0\le t<\xi;\\ \boldsymbol{G}_2(t,\xi), & \xi<t\le 1,\end{cases}$ де

$$\boldsymbol{G}_1(t,\xi)=\begin{pmatrix}4t(\xi-1)e^{t-\xi} & 2t(1-2\xi)e^{t-\xi}\\ 2(\xi-1)(2t-1)e^{t-\xi} & (1-2\xi)(2t-1)e^{t-\xi}\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{G}_2(t,\xi)=\begin{pmatrix}(2t-1)(2\xi-1)e^{t-\xi} & 2\xi(1-2t)e^{t-\xi}\\ 2(2\xi-1)(t-1)e^{t-\xi} & 4\xi(1-t)e^{t-\xi}\end{pmatrix};$$

$$x(t)=4e^{t}(t-2t^{5/2}),\quad y(t)=2e^{t}(5t^{3/2}-4t^{5/2}-1+2t).$$

в) $\boldsymbol{G}(t,\xi)=\begin{cases}\boldsymbol{G}_1(t,\xi), & \ln\frac{3}{2}\le t<\xi;\\ \boldsymbol{G}_2(t,\xi), & \xi<t\le \ln 2,\end{cases}$ де

$$\boldsymbol{G}_1(t,\xi)=\begin{pmatrix}3-2e^{\xi} & 2-e^{\xi}\\ 4e^{\xi}-6 & 2e^{\xi}-4\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{G}_2(t,\xi)=\begin{pmatrix}2e^{\xi}(2e^{-t}-1) & e^{\xi}(2e^{-t}-1)\\ 2e^{\xi}(2-3e^{-t}) & e^{\xi}(2-3e^{-t})\end{pmatrix};$$

$$x(t)=(1-2e^{t})\ln 2+2e^{-t}\ln\left|e^{t}-1\right|,\quad y(t)=(3e^{-t}-2)\ln 2-3e^{-t}\ln\left|e^{t}-1\right|.$$

6. а) $y_0(x)=4\left(e^{0,5x}-x-1\right)$; для всіх $|\lambda|<\frac{60}{257\ln 2}$

$$y_1(x)=-\frac{2\lambda}{15}\left[40e^{0,5x}-30(x+1)-\frac{1}{6}(451e^{x}+511e^{-x})-257\ln 2\operatorname{ch} x\right]+y_0(x).$$

б) $y_0(x)=\cos x+1$; для всіх $|\lambda|<\frac{1}{\pi}$ $\quad y_1(x)=\lambda\left[\frac{x}{2}\sin x+\cos x+1\right]+y_0(x).$

в) $y_0(x)=\dfrac{e^{x}-1}{1-e}+x^2$; для всіх $|\lambda|<1$

$$y_1(x)=\frac{\lambda}{e-1}\left[\frac{7-13e}{3(1-e)}(e^{x}-1)+(1-e)\left(\frac{x^3}{3}+x^2\right)-x(2e+e^{x})\right]+y_0(x).$$

ВАРІАНТИ ІНДИВІДУАЛЬНИХ ЗАВДАНЬ

ВАРІАНТ 1: 1) $y=2x+\dfrac{2\left(1-e^{-2x}\right)}{e^{-2}-1}$; 2) тільки тривіальний розв'язок;

3) $u(x)=4x+\cos\frac{x}{2}-8\sin\frac{x}{2}$, $v(x)=2\sin\frac{x}{2}$, C=4, $y(x)=u(x)+Cv(x)$.

ВАРІАНТ 2: 1) $y=C\left(x^5-5x-1\right)$; 2) $\lambda_1=1$, $y_1(x)=C_1e^{x}$; $\lambda_2=-1$, $y_2(x)=C_2e^{-x}$;

3) $G(x,\xi)=\begin{cases} -e^{2(x-\xi)}\cos\xi\sin x, & 0\le x<\xi; \\ -e^{2(x-\xi)}\sin\xi\cos x, & \xi<x\le\frac{\pi}{2}. \end{cases}$

ВАРІАНТ 3: 1) $y=C_1+C_2(\sin x+\cos x)-x$; 2) $\lambda_n=\left(\frac{\pi n}{2}\right)^2$, $y_n(x)=C_n\cos\frac{\pi n}{2}x$, $n=\overline{0,\infty}$; 3) якщо для функції $v(x)$ узяти початкові умови $v(0)=1$, $v'(0)=-1$, то $u(x)=\frac{x}{4}-\frac{\sin 2x}{8}$, $v(x)=\cos 2x-\frac{\sin 2x}{2}$, $C=\frac{\pi}{8}$, $y(x)=u(x)+Cv(x)$.

ВАРІАНТ 4: 1) $y=C$; 2) $\lambda_n=-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2-9$, $y_n(x)=C_n e^{3x}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x$, $n=\overline{0,\infty}$; 3) крайова задача є самоспряженою, тобто співпадає зі спряженою до неї.

ВАРІАНТ 5: 1) $y=\frac{8}{3}\left(e^{-x}-2\right)+2e^x$; 2) $\lambda_n=-(\pi n)^2-1$, $y_n(x)=C_n e^x\cos\pi nx$, $n=\overline{0,\infty}$; 3) крайова задача є самоспряженою.

ВАРІАНТ 6: 1) тільки тривіальний розв'язок; 2) $\lambda=0$, $y(x)=Cx^3$;

3) $G(x,\xi)=\begin{cases} -\frac{2}{3}e^x\operatorname{ch}\xi, & 0\le x<\xi; \\ -\frac{1}{3}e^{2\xi}\left(e^x+8e^{-2x}\right), & \xi<x\le\ln 2. \end{cases}$

ВАРІАНТ 7: 1) розв'язку не існує; 2) $\lambda_0=-4$, $y_0(x)=C_0e^{2x}$; $\lambda_n=(\pi n)^2$, $y_n(x)=C_n\left(\frac{\pi n}{2}\cos\pi nx+\sin\pi nx\right)$, $n=\overline{1,\infty}$; 3) функція Ґріна не існує, оскільки відповідна однорідна крайова задача має нетривіальний розв'язок

$$y=C\left(e^x+e^{\pi-x}+\frac{e^{2\pi}-1}{e^{\pi}+1}\right)\sin x.$$

ВАРІАНТ 8: 1) $y=C_1+C_2e^{-x}(\sin x+\cos x)$; 2) $\lambda_n=-\left(\frac{\pi}{2}+\pi n\right)^2-1$, $y_n(x)=C_n e^{-x}\sin\left(\frac{\pi}{2}+\pi n\right)x$, $n=\overline{0,\infty}$; 3) $y=-0{,}25(\cos 2x+\sin 2x-1)$,

$G(x,\xi)=\begin{cases} -0{,}5\cos 2\xi\sin 2x, & 0\le x<\xi; \\ -0{,}5\sin 2\xi\cos 2x, & \xi<x\le\frac{\pi}{4}. \end{cases}$

ВАРІАНТ 9: 1) $y=e^x+(1-x)e^{2x-1}$, 2) $\lambda_n=-\left(\frac{\pi[2n+1]}{2l}\right)^2$, $y_n(x)=C_n\cos\frac{(2n+1)\pi}{2l}x$, $n=\overline{0,\infty}$; 3) $\alpha_0(x)=1$, $\alpha_1(x)=xe^x$, тоді початкові умови для відповідної задачі Коші матимуть вигляд: $y(1)=0$, $y'(1)=e$.

ВАРІАНТ 10: 1) $y=C_1\left(e^{3x}\sin x+25x-6e^{3\pi}\right)+C_2\left(e^{3x}\cos x+15x-8e^{3\pi}-1\right)$; 2) $\lambda_n=-16n^2$, $y_n(x)=C_n\cos 4nx$, $n=\overline{0,\infty}$; 3) $y''-4y'=0$, $y(0)=0$, $y'(2)-4y(2)=0$ (крайові умови можуть мати й інший вигляд, проте повинні бути еквівалентними до наведених).

ВАРІАНТ 11: 1) $y=(2x+2\pi)\sin x+C(\cos x-\sin x)$; 2) $\lambda_n=-\pi^2(4n+2)^2$, $y_n(x)=C_n\sin(4n+2)\pi x$, $n=\overline{0,\infty}$;

$$3)\ G(x,\xi)=\begin{cases}-\dfrac{\cos 2(x+\xi)+\sin 2(x+\xi)}{4\cos 4\xi}, & -\frac{\pi}{2}\le x<\xi;\\ -\dfrac{\cos 2(x+\xi)-\sin 2(x+\xi)}{4\cos 4\xi}, & \xi<x\le\frac{\pi}{2}.\end{cases}$$

ВАРІАНТ 12: 1) $y=2+8e^{4x}+8xe^{4(x-1)}$; 2) $\lambda_n=(\pi n)^2+9$, $y_n(x)=C_n e^{-3x}\left(\frac{\pi n}{3}\cos\frac{\pi n}{3}x+\sin\frac{\pi n}{3}x\right)$, $n=\overline{1,\infty}$;

$$3)\ G(x,\xi)=\begin{cases}\frac{1}{3}\left(\xi-\xi^2\right)(1+x), & 0\le x<\xi;\\ \frac{1}{6}\left(\xi^2+2\xi\right)(1-2x), & \xi<x\le 1.\end{cases}$$

ВАРІАНТ 13: 1) $y=C_1e^{-x}+C_2(\sin x-\cos x)$; 2) $\lambda_n=-(2n)^2$, $y_n(x)=C_n(\sin 2nx-2n\cos 2nx)$, $n=\overline{1,\infty}$; 3) $y''+6y'+5y=0$, $y'(0)=-6y(0)$, $y'(3)=-6y(3)$ (крайові умови можуть мати й інший вигляд, проте повинні бути еквівалентними до наведених).

ВАРІАНТ 14: 1) $y=C(2\operatorname{sh}2x-5\operatorname{sh}x)$; 2) $\lambda=0$, $y(x)=C\left(x^2-4\right)$;

$$3)\ G(x,\xi)=\begin{cases}0{,}5\xi(x-2), & 0\le x<\xi;\\ 0{,}5(\xi-2)x, & \xi<x\le 2.\end{cases}$$

ВАРІАНТ 15: 1) $y=C(2x+1)$; 2) тільки тривіальний розв'язок; 3) $y(\pi)=-\frac{1}{2}$.

ВАРІАНТ 16: 1) тільки тривіальний розв'язок; 2) $\lambda_n=2n\pm\frac{1}{3}$, $y_n(x)=A_n\cos\left(2n\pm\frac{1}{3}\right)x+B_n\sin\left(2n\pm\frac{1}{3}\right)x$, $n\in\mathrm{Z}$; $\lambda_k=k-\frac{1}{4}$, $y_k(x)=C_k\left[\cos\left(k-\frac{1}{4}\right)x+\sin\left(k-\frac{1}{4}\right)x\right]$, $k\in\mathrm{Z}$; 3) $y(\pi)=\dfrac{\operatorname{th}\pi+2}{\operatorname{th}\pi-1}$.

ВАРІАНТ 17: 1) $y=2[\cos 2\sin(2\ln|x|)-\cos(2\ln|x|)+x]$; 2) $\lambda=0$, $y_0(x)=C_0$; $\lambda_n=-(\pi n)^2$, $y_n(x)=C_n\sin\pi nx$, $n=\overline{1,\infty}$; 3) крайова задача не є самоспряженою.

ВАРІАНТ 18: 1) $a=\ln 2-1$, $y=\sin 2x\ln\left(\sqrt{2}\,|\cos x|\right)-x\cos 2x$; 2) $\lambda_n=\mu_n^2$, де μ_n, $n=\overline{1,\infty}$ – додатні корені рівняння $\operatorname{tg}(\pi\mu_n)=\pi\mu_n$, $y_n(x)=C_n(\sin\mu_n x-\mu_n x\cos\mu_n x)$; 3) функція Гріна існує, оскільки відповідна однорідна крайова задача має тільки тривіальний розв'язок.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Амелькин В.В.* Дифференциальные уравнения в приложениях. – М.: Наука, 1987. – 160 с.
2. *Березин И.С., Жидков Н.П.* Методы вычислений, т.II. – М.: Физматгиз, 1962. – 640 с.
3. *Бобочко В.Н., Маркуш И.И.* Асимптотические методы в теории линейных сингулярно возмущённых интегро-дифференциальных уравнений. – Ужгород: УжГУ, 1977. – 72 с.
4. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Физматгиз, 1958. – 408 с.
5. *Бронштейн И.Н., Семендяев К.А.* Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. – М.: Физматгиз, 1962. – 608 с.
6. *Калиткин Н.М.* Численные методы. – М.: Наука, 1978. – 512 с.
7. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1971. – 584 с.
8. *Коллатц Л.* Задачи на собственные значения. – М.: Наука, 1968. – 504 с.
9. *Коллатц Л.* Функциональный анализ и вычислительная математика. – М.: Мир, 1969. – 448 с.
10. *Красносельский М.А., Войникко Г.М., Забрейко П.П., Рутицкий Л.Б., Стеценко В.Я.* Приближённое решение операторных уравнений. – М.: Наука, 1969. – 456 с.
11. *Крылов Н.М., Боголюбов Н.Н.* Введение в нелинейную механику. – К.: АН УССР, 1937.
12. *Курпель Н.С., Шувар Б.А.* Двусторонние операторные неравенства и их приложения. – К.: Наукова думка, 1980. – 268 с.
13. *Лазурчак И.И., Макаров В.Л.* Двусторонний функционально-дискретный метод для дифференциальных уравнений второго порядка с общими краевыми условиями // Дифф. уравнения. – 2004. – Т. 40, №7. – С. 964-977.
14. *Ломов С.А.* Введение в общую теорию сингулярных возмущений. – М.: Наука, 1981. – 400 с.
15. *Лузин Н.Н.* О методе приближённого интегрирования академика С.А.Чаплыгина // Тр. ЦАГИ, вып. 141. – 1932.
16. *Мамедов Я.Д.* Приближённые методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. – Баку: МААРИФ. – 1974. – 176 с.
17. *Маринец В.В., Маринец Т.И.* Дифференциальные неравенства. – Деп. в ВИНИТИ. – 1982, №5897-82Деп., 103 с.
18. *Маринец В.В., Шомоди О.О.* Двусторонние методы интегрирования краевых задач // Наук. вісник Ужгород. ун-ту, серія "Математика і інформатика". – 2000. – Вип. 5. – С. 63-74.
19. *Маринець К. В.* Про дослідження крайових задач з нелінійними граничними умовами // Науковий вісник Ужгородського університету. Серія: математика і інформатика. – 2011. – **22**, №1. – С. 79-92.
20. *Маринець К. В., Варга Я. В.* Про один підхід дослідження розв’язків нелінійних крайових задач з інтегральними крайовими умовами // Науковий

вісник Ужгородського університету. Серія: математика і інформатика. – 2013. – **24**, №1. – С. 101-116.

21. *На Ц.* Вычислительные методы решения прикладных граничных задач. – М.: Мир, 1982. – 296 с.
22. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. – М.: Наука, 1969. – 528 с.
23. *Пономарёв К.К.* Составление и решение дифференциальных уравнений инженерно-технических задач. – М.: Учпедгиз, 1962. – 184 с.
24. *Ронто Н. И., Маринец Е. В.* Применение параметризации при численно-аналитическом исследовании решений нелинейных краевых задач // Доповіді національної академії наук України. – 2012. – №4. – С. 34-38.
25. *Самойленко А.М., Ронто Н.И.* Численно-аналитические методы в теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений. – К.: Наукова думка, 1992. – 280 с.
26. *Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г.* Дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1998. – 233 с.
27. *Тимошенко С.П.* Колебания в инженерном деле. – М.: Физматгиз, 1967. – 444 с.
28. *Тимошенко С.П.* Сопротивление материалов. 2-е изд., в 2-х томах. – М.: Наука, 1965. – Т.1: 364 с. Т.2: 480 с.
29. *Чаплыгин С.А.* Новый метод приближённого интегрирования дифференциальных уравнений // Избр. тр. по механике и математике. – М.-Л.: 1948. – С. 347-444.
30. *Шкіль М.І.* Асимптотичні методи в диференціальних рівняннях. – К.: Вища школа, 1971. – 228 с.
31. *Штокало И.З.* Линейные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами. – К.: АН УССР, 1960.
32. *Эльсгольц Л.Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – М.: Наука, 1969. – 424 с.
33. *Marynets K.* On the parametrization of nonlinear boundary value problems with nonlinear boundary conditions // Miskolc Mathematical Notes. – 2011. – **12**, No. 2. – P. 209-223.
34. *Rabczuk R.* Elementy nierówności różniczkowych. – Warszawa: Państwowe wydawnictwo naukowe, 1976. – S. 270.
35. *Ronto M.* Parametrization for non-linear problems with integral boundary conditions / M. Ronto, K. Marynets // Electronic Journal of Quallitative Theory of Differential Equations, QTDE. – 2012. – № 99. – P. 1–23, http://www.math. u-szeged.hu/ejqtde.
36. *Ronto M., Marynets K.* On the parametrization of boundary-value problems with three-point non-linear restrictions // Miskolc Mathematical Notes. – 2012. – **13**, No. 1. – P. 91-106.
37. *Ronto M. I., Marynets' K. V.* On the parametrization of boundary-value problems with two-point nonlinear boundary conditions // Nonlinear Oscillations. – 2012. – **14**, No. 3. – P. 379-413.
38. *Schlichting H.* Boundary layer theory. – New York: McGraw-Hill, 1968. – P.747.

39. *Walter W.* Differential and integral inequalities. – Berlin-Heidelberg-New York: Springer, 1970. – P. 355.