

Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

В. Д. Романенко, Ю. Л. Мілявський

Теорія керування і прогнозування у складних системах

Підручник

*Затверджено Вченою радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як підручник для здобувачів ступеня магістра
за спеціальністю «Системний аналіз»*

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2024

УДК 62-50(075.8)
Р69

*Гриф надано Вченою радою
КПІ ім. Ігоря Сікорського
(протокол № 2 від 05.02.2024 р.)*

Рецензенти:

Дорофєєв Ю. І., д-р техн. наук, проф.,
завідувач кафедри Харківського національного технічного університету
Житецький Л. С., канд. техн. наук, ст. наук. співроб.,
завідувач відділу Міжнародного науково-навчального центру
інформаційних технологій і систем
Національної академії наук України і Міністерства освіти і науки України

Відповідальний редактор

Спекторський І. Я., канд.  наук, доц.,
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

Романенко В. Д.

Р69 Теорія керування і прогнозування у складних системах :
підручник / В. Д. Романенко, Ю. Л. Мілявський. – Київ : КПІ
ім. Ігоря Сікорського, Вид-во «Політехніка», 2024. – 404 с.

ISBN 978-966-990-122-4

Викладено методи керування та прогнозування у складних системах різної природи. Значну увагу приділено моделям імпульсних процесів когнітивних карт, які застосовують для моделювання динаміки фінансових, економічних, соціальних, екологічних, політичних та інших складних систем. Розглянуто методи стабілізації нестійких систем на основі відомих методів теорії автоматичного керування та їхніх модифікацій. Описано методи робастного керування і керування співвідношеннями, висвітлено проблему різномірного керування. Крім керування, у підручнику розглянуто також теорію ідентифікації у дискретних складних системах і методи адаптивного прогнозування у часових рядах з різноміровою дискретизацією. Наведено контрольні запитання та задачі для самостійного розв'язання.

Для здобувачів ступеня магістра, які навчаються за спеціальністю «Системний аналіз».

УДК 62-50(075.8)

ISBN 978-966-990-122-4

© В. Д. Романенко, Ю. Л. Мілявський, 2024
© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2024

ЗМІСТ

Список скорочень	10
Умовні позначення	11
Вступ.....	13
Розділ 1. Проблеми і принципи динамічного керування складними системами на основі моделей когнітивних карт	18
1.1. Застосування когнітивних карт для аналізу і моделювання складних систем	18
1.1.1. Характеристика складних систем.....	18
1.1.2. Поняття когнітивної карти. Основні типи когнітивних карт.....	19
1.1.3. Задачі когнітивного аналізу. Методика побудови когнітивних карт.....	22
1.1.4. Класифікація когнітивних карт.....	26
1.2. Математичні когнітивні моделі динамічних процесів у складних системах	28
1.2.1. Імпульсні процеси в когнітивних картах.....	29
1.2.2. Перехід від моделі розімкненої системи у просторі стану до моделі імпульсного процесу когнітивної карти.....	30
1.2.3. Перехід від моделі замкненої системи з регулятором стану до моделі, поданої у вигляді когнітивної карти.....	32
1.3. Принципи керування імпульсними процесами у когнітивних картах складних систем	35
1.4. Системний підхід до ідентифікації та керування імпульсними процесами у когнітивних картах	41
1.5. Аналіз лінійних дискретних систем у просторі стану.....	45
1.5.1. Опис лінійних дискретних систем у просторі стану	45
1.5.2. Стійкість лінійних дискретних систем	46
1.5.3. Керованість лінійних дискретних систем.....	50
1.5.4. Спостережуваність лінійних дискретних систем	51
1.6. Аналіз стійкості імпульсних процесів у когнітивних картах складних систем	53
Контрольні запитання	56
Задачі для самостійного розв'язання	57
Розділ 2. Методи стабілізації нестійких процесів у складних системах.....	62
2.1. Метод стабілізації нестійких імпульсних процесів в когнітивних картах на основі еталонних моделей.....	62

2.1.1. Розроблення моделі керованого імпульсного процесу когнітивної карти типу «вхід – вихід» під час формування зовнішніх керуючих дій	62
2.1.2. Розроблення замкненої системи стабілізації нестійкого імпульсного процесу когнітивної карти у приростах змінних.....	64
2.1.3. Метод стабілізації нестійкого перехідного процесу координат вершин когнітивної карти на заданих рівнях ...	66
2.2. Метод стабілізації нестійких імпульсних процесів у когнітивних картах на основі модального керування	67
2.3. Когнітивне моделювання динаміки прийняття рішень для стабілізації нестійких режимів у соціально-навчальному процесі студента	70
2.3.1. Когнітивна карта соціально-навчального процесу студента	70
2.3.2. Алгоритм стабілізації нестійких режимів у соціально-навчальному процесі студента на основі методу модального керування.....	74
2.4. Синтез слідкуючої системи керування нестійкими імпульсними процесами в ієрархічних когнітивних картах складних систем ...	77
2.5. Задачі стабілізації нестійких імпульсних процесів у когнітивній карті комерційного банку	80
2.5.1. Когнітивна карта комерційного банку	80
2.5.2. Стабілізація нестійких процесів у разі банкрутства комерційного банку	81
2.5.3. Моделювання слідкуючої системи керування нестійкими імпульсними процесами в ієрархічних когнітивних картах комерційних банків	85
2.6. Метод керування нестійкими імпульсними процесами в когнітивних картах із запізненнями	87
2.7. Проектування і дослідження системи стабілізації нестійкого курсу криптовалюти на основі моделі імпульсного процесу когнітивної карти.....	91
2.7.1. Побудова когнітивної карти застосування криптовалюти на фінансовому ринку	91
2.7.2. Синтез системи стабілізації нестійкого курсу криптовалюти.....	95
Контрольні запитання.....	102
Задачі для самостійного розв'язання	103

Розділ 3. Методи керування імпульсними процесами на основі варіювання вагових коефіцієнтів ребер когнітивних карт і ресурсів параметрів вершин.....	107
3.1. Синтез системи керування стійкими імпульсними процесами в когнітивних картах з варіюванням вагових коефіцієнтів на основі квадратичного критерію оптимальності	108
3.2. Комбіноване керування імпульсними процесами в когнітивній карті на основі варіювання вагових коефіцієнтів та ресурсами координат вершин	111
3.3. Синтез системи керування стійким соціально-навчальним процесом студента на основі варіювання вагових коефіцієнтів когнітивної карти	116
3.4. Автоматизація керування імпульсним процесом у когнітивній карті управління персоналом ІТ-компанії на основі синтезу приростів вагових коефіцієнтів та ресурсів координат вершин	120
3.5. Комбіноване керування імпульсним процесом у когнітивній карті водогосподарського балансу на досліджуваному масиві вод	126
3.5.1. Побудова й аналіз когнітивної карти водогосподарського балансу.....	127
3.5.2. Проектування і дослідження системи стабілізації водогосподарського балансу на основі моделі імпульсного процесу когнітивної карти	133
3.6. Дослідження комбінованої системи керування процесом застосування криптовалюти на основі удосконаленої когнітивної карти	138
Контрольні запитання	143
Задачі для самостійного розв'язання	143
Розділ 4. Автоматизація керування імпульсними процесами в когнітивних картах з приглушенням збурень на основі інваріантних еліпсоїдів ..	148
4.1. Математичний опис інваріантних еліпсоїдів	148
4.2. Приглушення обмежених зовнішніх збурень імпульсних процесів у когнітивних картах складних систем	152
4.3. Дослідження системи приглушення обмежених збурень імпульсних процесів у когнітивній карті розвитку ІТ-компанії	157
4.4. Робастне керування імпульсними процесами в когнітивних картах для приглушення обмежених збурень	164
4.5. Дослідження робастної системи керування із приглушення збурень імпульсних процесів в когнітивній карті застосування криптовалюти	170

Контрольні запитання	176
Задачі для самостійного розв'язання	176
Розділ 5. Методи координувального керування співвідношеннями координат у складних системах	181
5.1. Проектування комбінованої системи слідування і координації.....	181
5.1.1. Схеми координувального керування і формування критеріїв комбінованої системи слідування і координації.....	181
5.1.2. Проектування контурів керування комбінованої системи слідування і координації.....	184
5.1.3. Моделювання двовимірної комбінованої системи слідування і координації	188
5.2. Координація керування повільними та швидкими рухами у системах, що неявно функціонують у двох масштабах часу ...	193
5.2.1. Декомпозиція моделі складної системи у просторі стану в неперервному часі на повільно діючу та швидкодіючу підсистеми	193
5.2.2. Розроблення моделей типу «вхід – вихід» для повільно діючої та швидкодіючої підсистем з різномовною дискретизацією	195
5.2.3. Проектування системи регулювання та координації повільних і швидких рухів.....	196
5.2.4. Синтез і моделювання двовимірної системи керування з координацією повільних і швидких рухів	200
5.3. Координувальне керування співвідношеннями координат вершин взаємодійних когнітивних карт в режимі імпульсних процесів	206
5.3.1. Математичні моделі двох взаємодійних когнітивних карт...	207
5.3.2. Розроблення підсистем стабілізації імпульсних процесів взаємодійних когнітивних карт	208
5.3.3. Розроблення системи керування співвідношеннями між координатами вершин когнітивних карт.....	209
5.3.4. Дослідження процедури координувального керування двома когнітивними картами.....	210
5.4. Координувальне керування імпульсним процесом когнітивної карти у стохастичному середовищі	215
5.4.1. Розроблення алгоритму координувального керування у стохастичному середовищі	215

5.4.2. Метод умовної мінімізації дисперсії нев'язки співвідношень та узагальненої дисперсії вихідних координат вершин когнітивної карти.....	219
5.5. Координувальне керування співвідношеннями координат вершин когнітивної карти водогосподарського балансу	224
Контрольні запитання	229
Задачі для самостійного розв'язання	230
Розділ 6. Автоматизація керування імпульсними процесами в когнітивних картах складних систем з різноміною дискретизацією	236
6.1. Різномінова дискретизація дискретних систем у подвійному масштабі часу і проектування складеного регулятора стану	236
6.1.1. Проектування одномінового складеного дискретного регулятора з одним періодом дискретизацією.....	239
6.1.2. Паралельна стратегія проектування різномінового складеного дискретного регулятора.....	242
6.2. Різномінові спостерігачі векторів змінних стану в замкнених підсистемах керування	244
6.3. Синтез систем керування імпульсними процесами з різноміною дискретизацією для стабілізації координат вершин когнітивної карти складної системи	250
6.3.1. Керування імпульсними процесами з різноміною дискретизацією на основі варіювання ресурсів координат вершин	253
6.3.2. Комбіноване керування імпульсними процесами в когнітивних картах з різноміною дискретизацією на основі варіювання вагових коефіцієнтів ребер і ресурсів координат вершин.....	257
6.4. Приглушення обмежених внутрішніх збурень в імпульсному процесі когнітивних карт з різноміною дискретизацією за допомогою варіювання вагових коефіцієнтів когнітивних карт	267
6.5. Проектування і дослідження системи комбінованого керування імпульсними процесами з різноміною дискретизацією в когнітивній карті захворюваності на COVID-19	274
6.5.1. Розроблення моделей імпульсних процесів підсистем когнітивної карти з різноміною дискретизацією для швидковимірюваних і повільно вимірюваних координат	276

6.5.2. Автоматизація комбінованого керування імпульсними процесами з різномовною дискретизацією в когнітивній карті захворюваності на COVID-19	280
6.5.3. Експериментальні дослідження системи керування імпульсними процесами в когнітивних картах захворюваності на COVID-19	282
Контрольні запитання	285
Задачі для самостійного розв'язання	286
Розділ 7. Методи ідентифікації динамічних моделей складних систем.....	291
7.1. Ідентифікація коефіцієнтів матриці суміжності під час вимірювання всіх координат вершин когнітивної карти складної системи.....	291
7.1.1. Ідентифікація за відсутності шумів вимірювань	291
7.1.2. Ідентифікація за наявності шумів у вимірюваних координатах когнітивних карт на основі методів найменших квадратів	294
7.1.3. Ідентифікація вагових коефіцієнтів когнітивної карти комерційного банку під час вимірювання всіх координат вершин	296
7.2. Оцінювання коефіцієнтів матриці суміжності імпульсних процесів у когнітивних картах на основі рекурентного методу найменших квадратів	299
7.3. Параметрична ідентифікація у складних системах за наявності невимірюваних вихідних координат	304
7.4. Ідентифікація вагових коефіцієнтів матриці суміжності когнітивної карти ІТ-компанії за наявності невимірюваних координат вершин	315
7.5. Проблема вибору розмірності когнітивної карти системи та некоректності задачі ідентифікації	321
Контрольні запитання	328
Задачі для самостійного розв'язання	328
Розділ 8. Адаптивні системи прогнозування дисперсій у процесах з різномовною дискретизацією	332
8.1. Прогнозування умовної дисперсії гетероскедастичних процесів на основі моделі з одномовною дискретизацією з використанням побудови моделі ARCH.....	333
8.2. Прогнозування максимальної вибіркової умовної дисперсії гетероскедастичних процесів для моделей з одномовною дискретизацією	334

8.3. Розроблення моделей авторегресії і ковзного середнього з різномірною дискретизацією	336
8.4. Прогнозування умовної дисперсії на основі моделей авторегресії і ковзного середнього з різномірною дискретизацією	340
8.5. Розроблення узагальненої авторегресійної умовно гетероскедастичної моделі (GARCH) для періоду дискретизації $h = mT_0$	343
8.6. Адаптивне настроювання коефіцієнтів моделі GARCH	346
8.7. Адаптивне прогнозування максимальних вибірових умовних дисперсій багатовимірних процесів з різномірною дискретизацією	355
8.7.1. Метод прогнозування максимальних вибірових умовних дисперсій багатовимірних процесів з різномірною дискретизацією на основі моделей ARCH	355
8.7.2. Розроблення моделей GARCH для адаптивного прогнозування максимальних вибірових умовних дисперсій багатовимірних процесів для періоду дискретизації $h_i = m_iT_0$	359
8.7.3. Моделювання двовимірної системи прогнозування максимальних вибірових умовних дисперсій з різномірною дискретизацією	364
8.8. Прогнозування максимальних умовних дисперсій співвідношень вихідних координат багатовимірних процесів з різномірною дискретизацією	366
Контрольні запитання	373
Задачі для самостійного розв'язання	374
Список літератури	380
Додатки	388

СПИСОК СКОРОЧЕНЬ

АРКС	– авторегресія і ковзне середнє
ВГД	– водогосподарська ділянка
ЗНЧ	– зведені неперервні частини
КК	– когнітивна карта
ЛМН	– лінійна матрична нерівність
ЛПР	– людина, яка приймає рішення
МВ	– масив вод
МДПФ	– матрична дискретна передатна функція
МНК	– метод найменших квадратів
МФ	– модифікований граф
РВГ	– результат водогосподарського балансу
РМНК	– рекурентний метод найменших квадратів
4SID	– (<i>subspace state space system</i>) – метод виділеного підпростору
SVD	– (<i>singular value decomposition</i>) – сингулярний розклад
ARCH	– (<i>autoregressive conditional heteroskedasticity</i>) – авторегресійна умовно-гетероскедастична
GARCH	– (<i>generalized autoregressive conditional heteroskedasticity</i>) – узагальнена авторегресійна умовно-гетероскедастична

УМОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ

T_0 – період дискретизації

$k = 0, 1, 2, \dots$ – номер відліку дискретного часу

τ – час запізнення

t – поточний час

kT_0, nT_0 – дискретні часи

$\Delta Y(k)$ – перша різниця координати КК

$\Delta U(k)$ – перша різниця керуючої дії

A – матриця суміжності КК

$\det A$ – визначник матриці A

$\text{tr} A, \text{Sp} A$ – слід матриці A

A^T – транспонування матриці A , якщо $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times m}$, то $A^T = (a_{ji}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$

(a_{ij}) – матриця з елементами $a_{ij}, i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m$

I – одинична матриця (відповідної розмірності)

$W(z)$ – матрична дискретна передатна функція

$d = \left\lceil \frac{\tau}{T_0} \right\rceil$ – дискретне запізнювання за керуючою дією

$h = mT_0$ – період дискретизації для повільнозмінних координат КК за $m > 1$

$r = \left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor$ – ціле число від ділення k на m

$\Delta Y_s \left[\left\lceil \frac{k}{m} \right\rceil h \right]$ – перша різниця повільнозмінної координати КК з періодом дискретизації h

$\Delta Y_f(kT_0)$ – перша різниця швидкозмінної координати КК з періодом дискретизації T_0

$V(\bar{x})$ – функція Ляпунова

q^{-1} – оператор зворотного зсуву за часом на один період дискретизації

$A(q^{-1})$ – матричний поліном щодо оператора зворотного зсуву q^{-1}

$A_M(q^{-1})$ – дискретний поліном матричної еталонної моделі

$\text{diag} \{ q^{-d_j} \}$ – діагональна матриця з елементами $q^{-d_j}, j = 1, \dots, n$

F – матриця стану в моделі дискретної системи

B – матриця передачі керування в моделі імпульсного процесу КК

K_p – матриця закону керування регулятора стану

$|x|$ – абсолютна величина дійсного числа $x \in \mathbb{R}$

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0; \\ -x, & x < 0; \end{cases}$$

$\lambda_i(F)$ – i -те власне значення матриці $F(n \times n)$

$\rho(F)$ – спектральний радіус матриці F , тобто $\rho(F) = \max |\lambda_i(F)|$

$\|\bullet\|$ – норма функції (сигналу)

$E[\bullet]$ – оператор математичного сподівання

$\mathbb{R}^n$ – простір n -вимірних векторів-стовпців з дійсними елементами

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad x_i \in \mathbb{R}$$

$\mathbb{R}^{n \times m}$ – простір матриць розмірністю $(n \times m)$ з дійсними елементами, тобто

$$A = \begin{bmatrix} a_{n1} & \dots & a_{nm} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}, \quad a_{ij} \in \mathbb{R}$$

$\mathbb{C}^n$ – простір n -вимірних векторів-стовпців з комплексними елементами

$\mathbb{C}^{n \times m}$ – простір матриць розмірністю $(n \times m)$ з комплексними елементами

$\doteq$ – знак рівності за визначенням

z^* – комплексне спряження числа $z \in \mathbb{C}$, якщо $z = x + jy$, то $z^* \doteq x - jy$

ВСТУП

У підручнику застосовано системний підхід до проблеми динамічного прийняття рішень у складних системах, що описуються моделями імпульсних процесів когнітивних карт (КК). Когнітивні карти є популярним і зручним інструментом для опису, аналізу і моделювання складних багатовимірних, багатозв'язних систем різної природи.

З математичної точки зору КК – це зважений орієнтований граф, вершини якого співвідносяться з основними компонентами (концептами) складної системи, а ребра описують зв'язок між цими вершинами. Динаміка складної системи, що описується КК, може бути подана у вигляді моделі імпульсного процесу (рівняння Робертса), що являє собою векторне різницеве рівняння першого порядку.

У цьому підручнику викладено принципи, підходи й методи керування складними системами різної природи та їх ідентифікації на основі застосування й адаптації відомих методів теорії ідентифікації систем і теорії автоматичного керування, які були розроблені для керування технічними об'єктами і технологічними процесами. При цьому керуючі дії, які формуються цифровими регуляторами, реалізуються через варіювання ресурсами координат вершин або варіювання вагових коефіцієнтів КК. Коли кількість вершин і вагові коефіцієнти КК невідомі, у підручнику запропоновано методи ідентифікації розмірності та параметричної ідентифікації моделі імпульсного процесу КК на основі даних про вимірювані координати вершин КК з урахуванням похибок вимірювання.

Для стабілізації нестійких імпульсних процесів КК застосовуються методи модального керування та методи синтезу замкнених систем керування на основі еталонних моделей. Для стабілізації координат вершин КК на заданих рівнях використовується метод лінійно-квадратичного керування. Окремо в підручнику розглянуто проблеми керування імпульсними процесами КК з різнотемповою дискретизацією координат вершин, координувального керування співвідношеннями координат КК, проблеми приглушення невимірюваних обмежених збурень.

Підручник призначений для студентів вишів, які навчаються у магістратурі за освітньо-науковою програмою «Системний аналіз і управ-

ління», що акредитується за спеціальністю «Системний аналіз» і може застосовуватися аспірантами під час проєктування динамічних систем керування складними системами різної природи.

У цьому підручнику вперше в навчальній літературі викладено методи проєктування систем керування складними системами, а саме:

- розробка математичних моделей для опису динаміки багатовимірних процесів у складних системах різної природи у формі імпульсних процесів КК;

- синтез координувальних систем керування співвідношеннями координат у багатовимірних складних системах;

- методи синтезу керуючих дій дискретних регуляторів на основі варіювання ваговими коефіцієнтами ребер і ресурсів параметрів вершин у моделях імпульсних процесів КК складних систем:

- методи автоматизації керування імпульсними процесами в КК складних систем з різнотемповою дискретизацією координат;

- методи ідентифікації структури і параметрів моделей імпульсних процесів КК складених систем різної природи.

Підручник складається з восьми розділів і додатків.

У першому розділі викладено основні проблеми і принципи динамічного керування складними системами різної природи на основі математичних моделей імпульсних процесів КК через формування зовнішніх керуючих дій, які розраховуються дискретними регуляторами на основі методів теорії автоматичного керування. Реалізація керуючих дій у замкненій системі керування забезпечується варіюванням координатами вершин КК (ресурсами параметрів вершини) або можливим варіюванням ваговими коефіцієнтами КК. Реалізацію керуючих дій здійснює людина, яка приймає рішення (ЛПР), тобто ЛПР виконує функції виконавчого механізму звичайної системи автоматичного керування. У першому розділі також розглянуто застосування КК для аналізу і моделювання складних систем, методика побудови КК. Наведено правила переходу від моделей розімкненої і замкненої системи керування у просторі стану до моделей імпульсного процесу КК. Сформульовано системний підхід до ідентифікації та керування імпульсним процесом в КК складних систем.

Другий розділ присвячено проєктуванню замкнених систем керування для стабілізації нестійких імпульсних процесів у моделях КК

складних систем різної природи. Розглянуто методи стабілізації нестійких імпульсних процесів в КК на основі застосування еталонних моделей і методу модального керування. Досліджено проблему слідкуючого керування ієрархічними складними системами, в яких динаміку вільного руху на окремому ієрархічному рівні описано нестійкими імпульсними процесами в КК. При цьому задавальні дії для слідкуючої системи формуються на вищому рівні ієрархії. Розроблений закон керування дозволяє вихідним координатам КК відслідковувати змінювані задавальні дії. Як приклади розроблено алгоритми стабілізації нестійких режимів у соціально-навчальному процесі студента, а також досліджено динаміку прийняття рішень для стабілізації нестійких процесів в КК у разі банкрутства комерційного банку та виконано проєктування системи стабілізації нестійкого курсу криптовалюти на фінансових ринках.

Третій розділ присвячено теоретичним основам керування імпульсними процесами в замкнених системах на основі синтезу керуючих дій через варіювання ваговими коефіцієнтами ребер КК і ресурсів параметрів вершин на основі квадратичного критерію оптимальності. Виконано проєктування і дослідження систем керування персоналом ІТ-компанії, комбінованого управління стійким імпульсним процесом в КК застосування криптовалюти на фінансовому ринку.

У четвертому розділі розглянуто застосування методу інваріантних еліпсоїдів для приглушення обмежених збурень під час керування динамічними процесами у складних системах різної природи, які описані математичними моделями імпульсних процесів у КК. Під час розроблення алгоритмів приглушення обмежених збурень застосовано інструментарій лінійних матричних нерівностей, при цьому модель динаміки імпульсних процесів КК поділено на дві взаємопов'язані системи різницевих рівнянь відповідно до вимірюваних і невимірюваних координат вершин КК. Впливи невимірюваних координат КК враховуються як невимірювані збурення, які приглушуються завдяки впровадженню синтезованої системи керування.

У п'ятому розділі викладено методи координувального керування співвідношеннями координат у складних системах. Перший метод присвячено проєктуванню комбінованої системи слідкування і координації. У другому методі розроблено координацію керування повільними та

швидкими рухами в системах, що неявно функціонують у двох масштабах часу. У третьому методі на основі моделей імпульсних процесів двох взаємодійних КК розроблено систему керування співвідношеннями координат вершин у цих КК. У четвертому методі розглянуто проектування координувального керування співвідношеннями координат вершин КК у стохастичному середовищі. Як приклад виконано проектування координувальної системи керування координатами вершин КК водогосподарського балансу на заданому масиві води.

Шостий розділ присвячено розробленню систем керування імпульсними процесами в КК складних систем з різнотемповою дискретизацією координат на основі варіювання вагових коефіцієнтів і ресурсів параметрів вершин. Викладено метод синтезу дискретних регуляторів для приглушення обмежених внутрішніх збурень в імпульсному процесі КК з різнотемповою дискретизацією. Як приклад виконано проектування і дослідження системи комбінованого керування імпульсними процесами з різнотемповою дискретизацією в КК захворюваності на COVID-19.

Сьомий розділ присвячено методам ідентифікації вагових коефіцієнтів матриці суміжності КК складної системи у різних ситуаціях, а саме:

- за відсутності й наявності шумів у вимірюваних координатах вершин КК;
- за наявності невимірюваних окремих координат вершин КК.

Окремо розглянуто проблему структурної ідентифікації, коли розмірність КК складної системи є невизначеною і її треба оцінювати. При цьому наявність неконтрольованих збурень і похибок під час вимірювання координат вершин можна звести до некоректно поставленої задачі ідентифікації. У такому випадку розглядається регуляризований розв'язок задачі ідентифікації моделей імпульсних процесів КК, в якому розмірність КК виступає як параметр регуляризації.

Восьмий розділ присвячено задачам прогнозування змінних дисперсій у гетероскедастичних процесах складних систем з різнотемповою дискретизацією координат за допомогою традиційних моделей ARCH і GARCH. Вперше розглядається адаптивне настроювання коефіцієнтів моделі GARCH з метою збільшення точності прогнозування дисперсій.

У додатках наведено теоретичні питання з різних математичних розділів, на основі яких формуються і розроблюються основні методи

керування і прогнозування, викладені у підручнику, й уміщено доведення основних теорем.

У розробленні КК застосування криптовалюти на фінансових ринках (підрозд. 2.7.1, 3.6) брав участь аспірант Канцедал Г. О. Автори висловлюють вдячність члену-кореспонденту Національної академії наук України, професору Губареву В. Ф. за участь у розробленні методів ідентифікації динамічних моделей складних систем та професору Вінницького національного технічного університету Мокіну В. Б. за участь у розробленні КК водогосподарського балансу та надані цінні пропозиції.

Підручник написано відповідно до програми курсу «Теорія керування і прогнозування у складних системах», який читається для магістрів за спеціальністю «Системний аналіз» у навчально-науковому інституті прикладного системного аналізу Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського».

РОЗДІЛ 1. Проблеми і принципи динамічного керування складними системами на основі моделей когнітивних карт

1.1. Застосування когнітивних карт для аналізу і моделювання складних систем

1.1.1. Характеристика складних систем

Натепер сформувались дві групи визначень системи [9]. До першої належать визначення, які не характеризують цілісність системи. Друга група визначень включає цілісність як важливу властивість системи і систему можна визначити як множину взаємопов'язаних елементів, що утворюють цілісність, тобто систему розглядають як єдине ціле, що складається із сумісних частин, які взаємодіють між собою.

Елементом системи називають певний об'єкт (матеріальний, енергетичний, інформаційний, юридичний), внутрішня будова якого не стоюється мети дослідження і не підлягає подальшій декомпозиції у вибраній структурі системи.

У кожній системі встановлюються певні зв'язки (відношення) між елементами.

Функція елемента – це призначення і коло його діяльності, зовнішнє виявлення його властивостей у складі системи, сукупність його станів у просторі та часі.

Функція системи – це коло її діяльності та обсяг задач, які вона виконує чи повинна виконувати згідно зі своїм призначенням. Функція системи реалізується через матеріальні, енергетичні, інформаційні потоки та діяльність людей.

Структура системи – це множина елементів, які входять до її складу й перебувають у визначеній взаємодії та установленому порядку, потрібному для реалізації певних функцій. Структура може змінюватися в часі під впливом різних потоків або самотійно.

Система утворює особливу єдність із середовищем, яке являє собою сукупність всіх навколишніх об'єктів, зміна яких впливає на систему. При цьому система може бути пов'язана з середовищем під час реалізації окремих функцій.

Для оцінювання складної системи є різні підходи й одиниці вимірювання складності, які породжуються різними концепціями:

- теоретико-множинна концепція пов'язує складність системи з кількістю її елементів;
- алгоритмічна концепція пов'язує складність з довжиною алгоритму для відтворення системи;
- обчислювальна складність визначається проблемами реалізації алгоритмів засобами обчислень;
- інформаційна концепція характеризується рівнем невизначеностей характеру та інтенсивності зв'язків між різнорідними елементами системи, а також зміною цих зв'язків за часом.

Надалі систему будемо розглядати як реальний об'єкт певного призначення, модель якого буде використовуватися для системного дослідження й управління.

Складна система – це впорядкована множина структурно взаємопов'язаних і функціонально взаємозалежних систем, які відображають різноманітні й непорівнянні між собою характеристики об'єкта і побудовані для розв'язування багатоцільових задач.

1.1.2. Поняття когнітивної карти. Основні типи когнітивних карт

Когнітивна карта – це орієнтований граф, вершини (вузли) якого відображають деякі чинники (сутності, концепти (поняття), фактори), а ребра віддзеркалюють зв'язки між цими факторами. Вперше поняття «когнітивна карта» з'явилося у психології в роботі Толмена [10] й означало, власне, карту місцевості, але не реальну, а уявну, що формується в голові людини чи тварини. Аксельрод [11] використав поняття КК у політології й першим почав розглядати їх у звичній нам математичній формі знакового орієнтованого графа із плюсами й мінусами над ребрами. Знак «плюс» над ребром з вершини А у вершину Б означає, що збільшення значення координати у вершині А приводить до збільшення значення у вершині Б, а знак «мінус» означає, що збільшення в А веде до зменшення в Б. Ф. Робертс [3, 72] розробляв математичний апарат теорії графів для вирішення соціально-економічних завдань і запровадив математичний формалізм для опису КК, ввівши поняття імпульсного процесу та зваженої КК, коли над ребрами надписують не знаки «плюс» чи

«мінус», а числа (вагові коефіцієнти), які характеризують ступінь впливу фактора А на фактор Б.

Когнітивна карта дає можливість виявити й відобразити структуру причинових зв'язків між елементами системи, складного об'єкта та складовими частинами проблеми. Когнітивна карта – це суб'єктивна модель сприйняття людиною матеріального, енергетичного, інформаційного складного об'єкта, за допомогою якої вона (людина) хоче проаналізувати логіку закономірностей причиново-наслідкових зв'язків між частинами усього об'єкта.

Когнітивні карти застосовують для реалізації когнітивного моделювання складноструктурованих і слабоформалізованих задач. Когнітивне моделювання – це розділ когнітивної науки, що займається моделюванням ментальних процесів та вирішенням прикладних завдань людиною за допомогою спрощених (графових чи інших) моделей, що можуть бути комп'ютеризовані та автоматизовані. Це міждисциплінарна галузь, що перебуває на стику системного аналізу, комп'ютерних наук, математики, когнітивної психології та інших галузей когнітології (когнітивістики).

У роботах [43, 68, 69] розглянуто більш загальні задачі когнітивного моделювання, пов'язані не тільки з формалізацією та аналізом різноманітних КК, а й із загальною методологією їх побудови, автоматизації та практичного використання. Описано узагальнені когнітивні моделі:

- векторний функціональний граф (Ф-граф);
- параметричний векторний функціональний граф;
- модифікований граф (МФ),

при цьому класичні КК виявляються їхніми окремими випадками.

Векторний функціональний граф (Ф-граф) – це кортеж

$$\Phi = \langle X, G, F \rangle,$$

в якому $G = \langle V, E \rangle$ – орієнтований граф з вершинами V й ребрами E ;

X – множина параметрів V , $X = \{X^{(V_i)}\}$, $i = 1, 2, \dots, k$, $X^{(V_i)} = \{x_g^i\}$, $g = 1, 2, \dots, n$, тобто кожній вершині ставиться у відповідність вектор незалежних один від іншого параметрів $X^{(V_i)}$ (або один параметр, якщо $g = 1$), $X: V \rightarrow \mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}$ – множина дійсних чисел, $F = F(X, E) = F(x_i, x_{ij}, e_y)$,

$F : E \times X \rightarrow R$ – функціонал перетворення ребер, що ставить у відповідність кожному ребру знак або ваговий коефіцієнт, або функцію. Параметричний векторний функціональний граф включає також простір параметрів вершин Θ , тоді $F: E \times X \times \Theta \rightarrow R$.

Модифікований МФ-граф враховує також час T (найчастіше дискретний), його описують так:

$\text{МФ} = G, (X, Dp, PXV, PuV, \mu, \nu, Du, Pe), (h, W, Db), \varepsilon >$,
де $G = \langle V, E \rangle$ – оргграф (КК);

$(X, Dp, PXV, PuV, \mu, \nu, Du, Pe)$ – параметричні характеристики вершин і механізми перетворення збурень, де

$Dp : PXV \rightarrow P_{XV}$ – затримка реакції на імпульси, $\{Imp\}^*$ – множина всіх підмножин імпульсів;

$PXV: PUV \rightarrow P_{UV}$ – збурення, що надходить і впливає на параметр фактора;

$PuV: \{Imp\}^* \rightarrow Imp$ – збурення, що надходить і генерує збурення, яке передається;

$\mu: Imp \times X \rightarrow X$ – функції реакції на збурення;

$\nu: Imp \times X \rightarrow Imp$ – функції генерації збурення;

$Du: Imp \rightarrow \{Imp\}^*$ – затримка генерації;

$Pe: \{Imp\}^* \rightarrow Imp$ – передане збурення;

(h, W, De) – характеристики ребер,

де $h: E \rightarrow H$ – тип ребра, що відповідає зв'язкам між потоковими, перетворюючими або обчислюваними вершинами;

$W: E \times Imp \times X \rightarrow Imp$ – функція впливу ребра;

$De: Imp \rightarrow \{Imp\}^*$ – затримка впливу ребра;

ε – гранична точність обчислень.

Щоб виділити два самостійні механізми в системі – механізм реакції збурення, що надійшло, і механізм генерації збурення, – у МФ-графі поняття імпульсу у вершині розділено на три взаємопов'язані поняття: елементарне збурення, збурення, що надійшло, та генероване збурення. Елементарне збурення – це імпульс, який несе інформацію про вплив однієї вершини на іншу. Збурення, що надійшло (P_{XV}), – це сукупність імпульсів, які впливають на вершину в один і той самий момент часу. Генероване збурення (PuV) – це збурення, що формується у вершині для впливу на інші вершини через ребра.

Очевидно, що класичні КК мають ряд недоліків, згідно з [6] виділимо такі:

- 1) моделям КК не вистачає запізнень у взаємодії між вершинами;
- 2) ваги ребер лінійні;
- 3) КК не можуть представляти логічні оператори (І, АБО, НЕ та XOR) між вхідними вершинами;
- 4) КК не можуть моделювати багатозначні (сірі) середовища;
- 5) КК не охоплюють багатостанові (квантові) концепції;
- 6) КК не може обробляти більше ніж один зв'язок між вершинами;
- 7) багато реальних причиново-наслідкових зв'язків не є ані симетричними, ані монотонними, як у моделі КК;
- 8) динаміка КК має перший порядок, де наступний стан залежить тільки від попереднього;
- 9) КК не працює у стохастичному середовищі.

1.1.3. Задачі когнітивного аналізу.

Методика побудови когнітивних карт

У наш час під когнітивним моделюванням розуміємо рішення взаємозалежних системних задач когнітивного аналізу і синтезу [68].

Когнітивний аналіз включає такі етапи:

- розроблення когнітивної моделі;
- аналіз шляхів і циклів когнітивної моделі;
- аналіз спостережуваності й керованості системи;
- аналіз стійкості й можливості катастроф;
- сценарний аналіз;
- аналіз складності та зв'язаності системи;
- аналіз чутливості;
- аналіз можливостей адаптації й самоорганізації;
- прийняття рішення експертом.

На основі даних когнітивного аналізу розв'язують задачі когнітивного синтезу – декомпозиції і композиції моделі, оптимізації, синтезу системи з певними властивостями із простих когнітивних структур декомпозицією або добудовуванням вихідної структури, прийняття рішень. При цьому часто застосовують топологічний (або поліедральний) аналіз структури складної системи [76] – аналіз її q -зв'язаності, що полягає

в аналізі симпліціальних комплексів. У поліедральному аналізі система розглядається як відношення між елементами кінцевих множин – множини вершин і заданого сімейства непустих підмножин цих вершин – симплексів. Множини вершин і комплексів, які їм відповідають, утворюють симпліціальні комплекси. Будь-яке відношення в системі подають таким чином, що множину елементів, які належать до конкретної вершини, трактують як симплекс, а їх сукупність утворює симпліціальний комплекс. Таким чином, симпліціальний комплекс утворюється розбиттям деякого простору на підмножини, що перетинаються. Для коректного здійснення переходу від структури системи у вигляді графа до її симпліціального подання, що є ключовим моментом в поліедральному (симпліціальному) аналізі, експерт (дослідник, аналітик) має задати множину вершин симпліціального комплексу і визначити певне відношення або правило, згідно з яким вихідна множина вершин буде розбита на множину непорожніх підмножин – симплексів.

Основною відмінністю прогнозування та його результату – прогнозу, отриманого за допомогою когнітивної моделі, є те, що він характеризує тенденцію розвитку у системі, точніше, різні можливі тенденції розвитку у разі гіпотетичних змін факторів або їх сполучень в модельованому майбутньому, а не значення чисельних показників, отриманих обробленням даних у процесах, що вже відбулися. Таке прогнозування швидше можна назвати науковим передбаченням, відповіддю на запитання «а що буде, якщо?». Але завдання прогнозування за допомогою когнітивних моделей може бути поставлене по-іншому, якщо під час побудови когнітивної моделі спиратися переважно на чисельно представлені результати спостережень над об'єктом (статистичні дані). Тоді можна зіставляти і порівнювати результати прогнозів, отриманих статистичними методами і методом імпульсного моделювання на КК.

Дотримуючись підходу, який можна вважати загальним для побудови будь-якої моделі і використання її як прогнозової, пропонуємо діяти за такою схемою [76]:

1. Розроблення когнітивної моделі відповідно до наявної кількісної та якісної інформації.

2. Моделювання сценаріїв (методом імпульсного моделювання) на основі розробленої когнітивної моделі, що відбивають можливий розвиток ситуацій у системі – прогнозування розвитку ситуацій.

3. Порівняння результатів моделювання з даними спостережень.

4. Синтез іншої когнітивної структури, якщо не спостерігаються збіги результатів спостережень із прогнозованими.

Щодо когнітивного синтезу може бути два основні підходи до побудови системи із заданими властивостями. Систему можна конструювати з деяких більш простих елементів (із простих когнітивних структур) і декомпозицією або добудовуванням вже наявної структури (за результатами аналізу чутливості системи). Схема дій для реалізації першого підходу така:

1. Задання властивостей системи у вигляді бажаної тенденції розвитку (імпульсного процесу) і бажаних топологічних властивостей (властивостей зв'язності), які характеризують й інші властивості системи (стійкість, адаптованість та ін.).

2. Обрання критеріїв відповідності синтезованої структури бажаним властивостям.

3. Обрання простих когнітивних структур, з яких конструюється більш складна система.

4. «Склеювання» вершинами, ребрами, гранями простих структур за певними правилами, що впливають з їхніх властивостей.

5. Аналіз чутливості отриманої моделі до варіацій параметрів, внутрішніх і зовнішніх впливів, імпульсне моделювання, порівняння з бажаними характеристиками, прийняття рішень.

Розглянемо детальніше процес побудови КК для заданої складної системи. На основі [67] виділимо такі етапи.

I етап. Когнітивний аналіз складної ситуації (занурення у проблему, ідентифікація проблеми) складається з послідовності дій:

1) формулювання завдання і цілей дослідження, вивчення поточної ситуації або процесу (наприклад, соціально-економічного) з позиції поставленої мети;

2) збирання, систематизація, аналіз наявної статистичної та якісної інформації з проблем;

3) виділення основних характеристичних ознак досліджуваного процесу (досліджуваної ситуації) і виявлення взаємозв'язків між ними;

4) визначення дій основних об'єктивних законів (економічних, соціальних, політичних, екологічних) розвитку досліджуваної ситуації, що дозволить виділити об'єктивні залежності та тенденції у процесах, які відбуваються в цих ситуаціях;

5) визначення властивих досліджуваній ситуації вимог, умов, обмежень;

6) виділення основних соціально-політичних суб'єктів, пов'язаних із ситуацією, визначення їх суб'єктивних інтересів у розвитку розглядуваної ситуації, виділення чинників, на які реально можуть впливати суб'єкти ситуації;

7) визначення шляхів, механізмів дії, реалізації економічних і політичних інтересів основних соціально-політичних суб'єктів, що дозволить в майбутньому визначити стратегії поведінки і запобігання небажаним наслідкам розвитку ситуації.

II етап. Побудова когнітивної моделі проблемної ситуації складається з таких дій:

1) виділення факторів, що, на думку експертів, характеризують проблемну ситуацію;

2) групування факторів по блоках; в один блок об'єднуються фактори, що характеризують певну сферу проблеми і визначають процеси у цій сфері. Виділення у блоці групи інтегральних показників (чинників), за зміною яких можна робити висновки про загальні тенденції в досліджуваній сфері, виділення у блоці показників, які характеризують тенденції та процеси у цій сфері;

3) визначення зв'язків між факторами (не визначення зв'язків і взаємозв'язків між блоками факторів, що дозволить не визначити основні напрями впливу факторів різних блоків один на одного), визначення безпосередніх зв'язків факторів всередині блоку, визначення напряму впливів і взаємовпливів між факторами, визначення позитивності впливу (позитивний «+», негативний «-») і ступеня впливу («сильно», «слабо»), визначення зв'язків між факторами різних блоків;

4) побудова КК.

Поширені такі методи побудови КК.

1-й метод. Когнітивні карти будує сама людина, яка приймає рішення (ЛПР), на основі своїх знань та уявлень без залучення експертів і довідкових матеріалів. Перевага методу: швидкість побудови КК. Недолік методу: адекватність КК істотно залежить від кваліфікації ЛПР, її знань і вмінь відчувати характер відносин між концептами.

2-й метод. Побудова КК експертами на основі вивчення документів. Перевага методу: метод зручний і дозволяє використовувати дані, що застосовуються самою ЛПР. Недолік методу: вивчення документів експертами – тривалий і трудомісткий процес.

3-й метод. Побудова КК на основі опитування групи експертів, що мають можливість оцінювати причиново-наслідкові зв'язки. Перевага методу: можливість агрегувати індивідуальні думки та базування на більшому діапазоні оцінок, ніж можна отримати з досліджуваних документів. Недолік методу: трудомісткість.

4-й метод. Побудова КК, оснований на відкритих опитуваннях. Переваги методу: може бути використаний для побудови порівняльних КК, крім того, досліднику надається можливість вести активний діалог із джерелами інформації. Недолік методу: трудомісткість.

Під час побудови КК можна застосовувати поєднання цих методів.

1.1.4. Класифікація когнітивних карт

Розглянемо дві ознаки, що класифікують КК. Перша ознака – це метод експертного вимірювання параметрів КК, тобто вимірювання значень факторів ситуації або їх змін, а також сили причинового зв'язку між ними. Друга ознака – це інтерпретація змінюваних параметрів КК. Різноманітність КК визначається різними способами вимірювання параметрів КК і різною інтерпретацією ваг ребер і значень факторів КК. За цими двома ознаками виділені дві великі групи КК: детерміновані й недетерміновані, при цьому в кожній групі визначаються знакові, кількісні, якісні й нечіткі КК.

Коротко розглянемо характеристики виділених КК. У знакових КК фактори ситуації пов'язані причиново-наслідковими відношеннями, для яких визначено лише знак впливу: позитивний (+) або негативний (-). Детерміновані знакові КК запропонував Р. Аксельрод, недетерміновані знакові карти подані якісними ймовірнісними мережами (QPN). У кіль-

кісних КК визначають знак (+ або –) і вагу впливу, від якого залежить сила причинового зв'язку (Робертс). У якісних КК значення факторів і ваги дуг визначені на впорядкованій множині лінгвістичних значень. Недетерміновані нечіткі КК можна віднести до кількісних КК, якщо інтерпретувати вагу на дузі як ступінь приналежності. У детермінованих нечітких КК вага на дузі може бути задана лінгвістичним значенням із множини можливих значень.

Аналіз впливів у КК [75] спрямований на визначення знака і сили непрямого і сумарного впливу між будь-якою парою факторів КК. Найбільш відомі методи аналізу впливів у КК ґрунтуються на:

- 1) структурному аналізу КК;
- 2) каузальній алгебрі Аксельрода, що дозволяє визначити тільки знак впливу між факторами;
- 3) гіпотезі про те, що сила впливу між вершинами слабшає зі збільшенням довжини шляху, що пов'язує ці вершини;
- 4) каузальній алгебрі Б. Коско, що дозволяє визначити силу і знак впливу в нечітких КК.

Під час аналізу динаміки зміни стану ситуації аналізують поведінку ситуації – зміну значень усіх факторів у відповідь на зміну значень деяких з них – вхідних факторів. Для аналізу динаміки задають шкали факторів, що дозволяють виразити їх значення в числовому або лінгвістичному вигляді. Розглянемо дві групи моделей для аналізу динаміки зміни стану ситуації: недетерміновані й детерміновані моделі динаміки.

1. В недетермінованих моделях динаміки значення ваг на дугах КК інтерпретується як ступінь невизначеності впливу фактора на фактор. У цьому випадку на вхід КК надходить вектор ступенів невизначеності зміни вхідних факторів, а на виході отримуємо прогноз у вигляді вектора ступенів невизначеності зміни значень усіх факторів ситуації. Залежно від міри невизначеності, використовуваної під час побудови й налаштування КК, застосовують три моделі виведення прогнозу розвитку ситуації. Якщо значення на дугах інтерпретують як умовну ймовірність, то для отримання прогнозу використовують правило обчислення ймовірностей Байєса, а якщо як ступінь приналежності, то для виведення використовують композиційне правило виводу Л. Заде.

2. В детермінованих моделях динаміки ваги на дугах КК інтерпретують як передавальні коефіцієнти. У цьому випадку прогноз розвитку ситуації виражається в абсолютних значеннях факторів як реакція на абсолютні зміни значень факторів із вхідної множини.

Аналіз стійкості КК дозволяє [75]:

1) верифікувати КК, тобто виявити ті помилки експертів, які, побудувавши карту, спричинили її нестійкість;

2) знайти структурні рішення, тобто рішення, спрямовані на зміну структури карти.

Оскільки дуги КК відображають закони або закономірності предметної області, то зміну карти інтерпретують як рішення щодо зміни цих законів, тобто як структурні рішення. Для аналізу структурної стійкості КК використовують метод [3], оснований на поданні КК у вигляді узагальненої «рози», що прив'язує її стійкість до структури. Аналіз узагальненої «рози» дає змогу знайти зміни структури карти (структурні рішення), що дозволяє домогтися її стійкості. Для графових моделей, що включають велику кількість чинників і зв'язків між ними, застосовують метод, оснований на знаходженні сильних компонент графа. Також можна аналізувати стійкість КК на основі поліедрального аналізу їх структури.

Пояснення, оцінювання та інтерпретація прогнозів розвитку ситуації спрямовані на верифікацію КК і підтримку генерації управлінських рішень, а також вибір кращих рішень. В якісних КК, основаних на правилах, пояснення зводяться до знаходження шляху в оргграфі, що має максимальний вплив.

1.2. Математичні когнітивні моделі динамічних процесів у складних системах

Як засоби для моделювання складних систем різної природи великої вимірності використовують КК, які являють собою структурні схеми причиново-наслідкових зв'язків між компонентами (координатами, факторами, концептами) складної системи. Першим запропонованим варіантом КК був знаковий орієнтований граф, вершини (вузли) якого відображають координати складних систем, а ребра описують зв'язки

між цими координатами. Для нас більш цікавим є КК у вигляді зваженого орієнтованого графа, запропонованого Робертсом [3, 73], коли над ребрами надписуються числа, які характеризують ступінь впливу фактора А на фактор Б. Когнітивні карти будують експерти, що дозволяє якісно описувати взаємозв'язки між компонентами складної системи і кількісно відображати вплив кожної вершини КК на всі інші вершини за допомогою вагових коефіцієнтів зваженого орієнтованого графа.

1.2.1. Імпульсні процеси в когнітивних картах

У процесі функціонування складної системи з імпульсним характером поведінки під впливом зовнішніх збурень параметри вершин КК змінюються за часом, при цьому кожна вершина КК l_i набуває значення $Y_i(k)$ у дискретні моменти часу $k = 0, 1, 2, \dots$. На наступному періоді дискретизації значення $Y_i(k + 1)$ визначається попередньою величиною $Y_i(k)$ та інформацією про те, чи збільшили або зменшили свої значення інші вершини КК l_j , суміжні з l_i в момент часу k . Зміну параметра вершини l_j в момент часу k називають імпульсом, який позначають $P_j(k)$ і задають різницею $P_j(k) = Y_j(k) - Y_j(k - 1)$, $k > 0$. Імпульс $P_j(k)$, який надходить на одну з вершин l_j , буде поширюватись по ребрах КК на їхні вершини посилюючись чи затухаючи. Процес поширення збурень на вершини КК визначають різницеvim рівнянням [3]

$$Y_i(k + 1) = Y_i(k) + \sum_{j=1}^n a_{ij} P_j(k), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (1.1)$$

де a_{ij} – ваговий коефіцієнт дуги орієнтованого графа, яка з'єднує j -ту вершину з i -ю. Якщо дуги від вершини l_j до вершини l_i немає, то відповідний ваговий коефіцієнт $a_{ij} = 0$.

Правило зміни значень параметрів вершин КК (1.1) зазвичай формулюють у вигляді різницевого рівняння у приростах змінних:

$$\Delta Y_i(k + 1) = \sum_{j=1}^n a_{ij} \Delta Y_j(k), \quad (1.2)$$

яке описує динаміку імпульсного процесу в КК. При цьому перша різниця $\Delta Y_i(k) = Y_i(k) - Y_i(k - 1)$, $j = 1, 2, \dots, n$.

У векторній формі вираз (1.2) можна записати так:

$$\Delta \bar{Y}(k + 1) = A \Delta \bar{Y}(k), \quad (1.3)$$

де A – вагова матриця суміжності, а $\Delta \bar{Y}(k) = \bar{Y}(k) - \bar{Y}(k-1)$ – вектор приростів параметрів Y_i вершин КК за $i = 1, 2, \dots, n$. Надалі у викладках ми будемо використовувати саме це правило. Слід зазначити, що у правій частині рівності (1.2) може міститися складова з $\Delta Y_i(k)$, тобто в орієнтовному графі можливі петлі, а саме приріст параметра в i -й вершині може залежати від приросту в цій самій вершині на попередньому такті дискретизації.

1.2.2. Перехід від моделі розімкненої системи у просторі стану до моделі імпульсного процесу когнітивної карти

Розглянемо найпростішу двовимірну модель динаміки процесу у просторі стану:

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= f_{11}x_1(k) + f_{12}x_2(k) + g_1u(k), \\ x_2(k+1) &= f_{21}x_1(k) + f_{22}x_2(k) + g_2u(k), \\ z(k) &= c_1x_1(k) + c_2x_2(k). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Покажемо, яким чином цю модель можна подати у вигляді КК, яку описують моделлю (1.2) [44]. Якщо записати (1.4) зі зворотним зсувом на один період квантування й відняти $x_i(k+1) - x_i(k)$, $z(k) - z(k-1)$, то дістанемо модель процесу у приростах змінних [44]:

$$\begin{aligned} \Delta x_1(k+1) &= f_{11}\Delta x_1(k) + f_{12}\Delta x_2(k) + g_1\Delta u(k), \\ \Delta x_2(k+1) &= f_{21}\Delta x_1(k) + f_{22}\Delta x_2(k) + g_2\Delta u(k), \\ \Delta z(k) &= c_1\Delta x_1(k) + c_2\Delta x_2(k). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Запишемо рівняння вимірювання на один період дискретизації вперед, підставивши в нього рівняння стану:

$$\begin{aligned} \Delta z(k+1) &= (c_1f_{11} + c_2f_{21})\Delta x_1(k) + (c_1f_{12} + c_2f_{22})\Delta x_2(k) + \\ &+ (c_1g_1 + c_2g_2)\Delta u(k). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Припустимо, що маємо вектор $\bar{Y} = (u \ x_1 \ x_2 \ z)^T$. Далі будемо використовувати саме таку нумерацію вершин у графі – спочатку вершини керування, потім стану і вимірювання. Подамо (1.5), (1.6) у формі різницевого рівняння (1.3). У результаті дістанемо КК, яка показана на рис. 1.1.

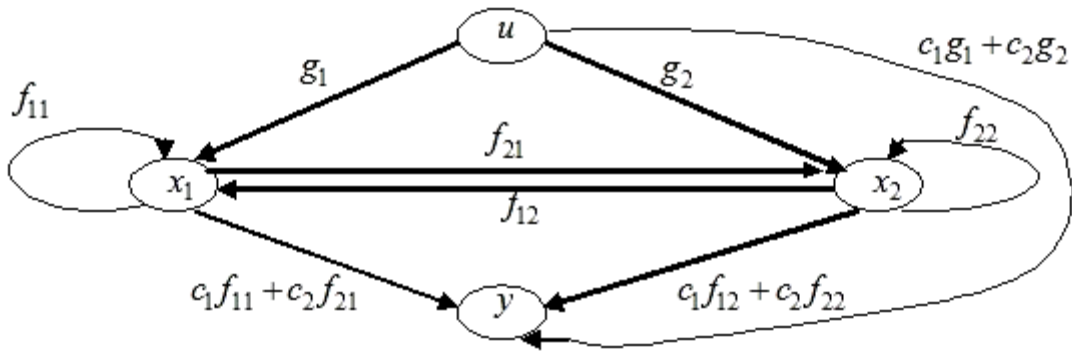


Рис. 1.1

Вагова матриця A імпульсного процесу (1.3) КК буде

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ g_1 & f_{11} & f_{12} & 0 \\ g_2 & f_{21} & f_{22} & 0 \\ (c_1g_1 + c_2g_2) & (c_1f_{11} + c_2f_{21}) & (c_1f_{12} + c_2f_{22}) & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.7)$$

Довільну модель динаміки системи у просторі стану

$$\begin{aligned} \bar{x}(k+1) &= F\bar{x}(k) + G\bar{u}(k); \\ \bar{Z}(k) &= C\bar{x}(k) \end{aligned} \quad (1.8)$$

можна подати у формі моделі імпульсного процесу КК (1.3). Для цього на основі (1.4), (1.5) запишемо (1.8) у приростах змінних:

$$\begin{aligned} \Delta\bar{x}(k+1) &= F\Delta\bar{x}(k) + G\Delta\bar{u}(k) \\ \Delta\bar{Z}(k) &= C\Delta\bar{x}(k), \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} \Delta\bar{x}(k) &= \bar{x}(k) - \bar{x}(k-1); \quad \Delta\bar{u}(k) = \bar{u}(k) - \bar{u}(k-1); \\ \Delta\bar{Z}(k) &= \bar{Z}(k) - \bar{Z}(k-1). \end{aligned}$$

Запишемо рівняння вимірювання на один період дискретизації вперед і підставимо в нього праву частину рівняння стану, після чого дістанемо

$$\begin{aligned} \Delta\bar{x}(k+1) &= F\Delta\bar{x}(k) + G\Delta\bar{u}(k) \\ \Delta\bar{Z}(k+1) &= CF\Delta\bar{x}(k) + CG\Delta\bar{u}(k) \end{aligned} \quad (1.9)$$

Щоб модель (1.9) була еквівалентна рівнянням у просторі стану (1.8), достатньо виконати такі умови:

$$\begin{aligned}\bar{x}(0) &= \bar{x}_0; & \bar{Z}(0) &= \bar{Z}_0 = C\bar{x}_0, \\ \bar{u}(0) &= \bar{u}_0; & \Delta\bar{x}(1) &= (F - I)\bar{x}_0 + G\bar{u}_0; \\ \Delta\bar{u}(1) &= 0; & \Delta\bar{Z}(1) &+ C\Delta\bar{x}(1),\end{aligned}$$

де $\bar{x}_0, \bar{u}_0, \bar{Z}_0$ – початкові значення в моделі (1.8). При цьому припускаємо, що на систему в майбутньому не діятимуть зовнішні імпульси, зокрема й керуючі дії, тобто $\bar{u}(k) = \bar{u}_0 \quad \forall k \geq 0$, або $\Delta\bar{u}(k) = 0 \quad \forall k > 0$. Варіант, коли керуючі дії формуються у замкненій системі, розглядатимемо далі.

Розглянемо випадок, коли в КК кількість вершин дорівнює кількості змінних. Залежно від належності до векторів $\bar{x}, \bar{u}, \bar{Z}$ ці змінні будемо називати вершинами стану, керування та вимірювання відповідно. Коефіцієнти матриці G є ваговими коефіцієнтами ребер КК, які ведуть від керуючих вершин стану. Коефіцієнти матриці F присвоюють ребрам КК, які пов'язують вершини стану між собою (діагональні елементи – ваги петель). Від вершин стану до вершин вимірювань ведуть ребра з вагами, які дорівнюють коефіцієнтам матриці CF , а від вершин керування до вершин вимірювання – з ваговими коефіцієнтами матриці CG . Оскільки система розімкнена і динаміка вектора керування не визначається системою (1.8), то у вершин керування немає вхідних ребер, тобто відповідні стовпці матриці суміжності дорівнюють нулю. Тоді рівняння імпульсного процесу КК (1.3) запишемо як

$$\begin{bmatrix} \Delta\bar{u}(k+1) \\ \Delta\bar{x}(k+1) \\ \Delta\bar{Z}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ G & F & 0 \\ CG & CF & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\bar{u}(k) \\ \Delta\bar{x}(k) \\ \Delta\bar{Z}(k) \end{bmatrix}.$$

Таким чином, виходячи з рівняння (1.3), матриця суміжності A відповідає (1.9).

1.2.3. Перехід від моделі замкненої системи з регулятором стану до моделі, поданої у вигляді когнітивної карти

Сучасна теорія керування основана на застосуванні регуляторів стану:

$$\bar{u}(k) = -K_p \bar{x}(k) \quad (1.10)$$

Розглянемо, яким чином систему з регулятором стану за заданої матриці підсилення регулятора K_p можна подати у вигляді КК [44].

Продовжимо попередній приклад (1.4), додавши до нього рівняння регулятора стану:

$$u(k) = -K_{p1}x_1(k) - K_{p2}x_2(k). \quad (1.11)$$

Запишемо цей закон керування у приростах змінних із зсувом вперед на один період дискретизацій, підставляючи у праву частину рівняння стану (1.5), (1.6):

$$\Delta x_1(k+1) = f_{11}\Delta x_1(k) + f_{12}\Delta x_2(k) + g_1\Delta u(k);$$

$$\Delta x_2(k+1) = f_{21}\Delta x_1(k) + f_{22}\Delta x_2(k) + g_2\Delta u(k);$$

$$\Delta z(k+1) = (c_1f_{11} + c_2f_{21})\Delta x_1(k) + (c_1f_{12} + c_2f_{22})\Delta x_2(k) + (c_1g_1 + c_2g_2)\Delta u(k); \quad (1.12)$$

$$\begin{aligned} \Delta u(k+1) = & -K_{p1}\Delta x_1(k) - K_{p2}\Delta x_2(k) = -(K_{p1}f_{11} + K_{p2}f_{21})\Delta x_1(k) - \\ & -(K_{p1}f_{12} + K_{p2}f_{22})\Delta x_2(k) - (K_{p1}g_1 + K_{p2}g_2)\Delta \bar{u}(k). \end{aligned}$$

Цю систему рівнянь можна подати у вигляді КК з імпульсним процесом (1.3), яку показано на рис. 1.2, з такою матрицею суміжності A :

$$A = \begin{bmatrix} -(K_{p1}g_1 + K_{p2}g_2) & -(K_{p1}f_{11} + K_{p2}f_{21}) & -(K_{p1}f_{12} + K_{p2}f_{22}) & 0 \\ g_1 & f_{11} & f_{12} & 0 \\ g_2 & f_{21} & f_{22} & 0 \\ (c_1g_1 + c_2g_2) & (c_1f_{11} + c_2f_{21}) & (c_1f_{12} + c_2f_{22}) & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.13)$$

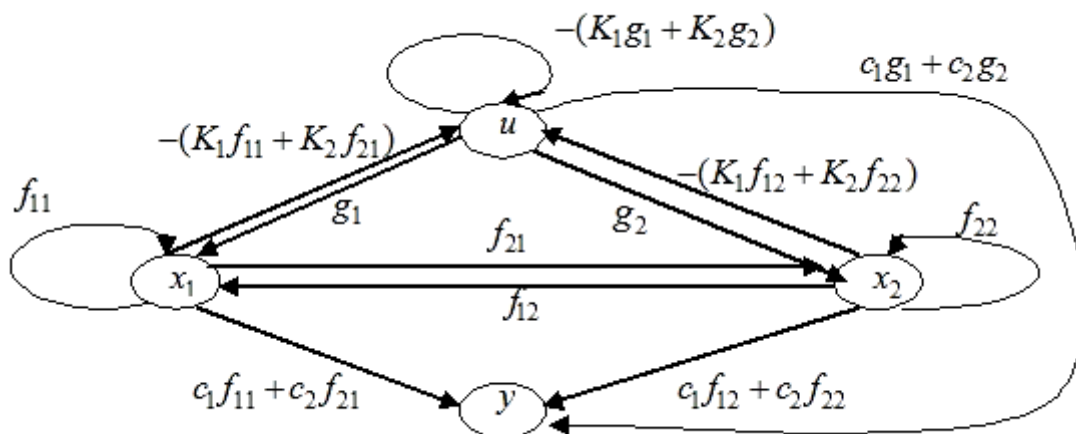


Рис. 1.2

У загальному випадку замкнену систему керування з регулятором стану описують рівняннями

$$\bar{x}(k+1) = F\bar{x}(k) + G\bar{u}(k), \quad (1.14)$$

$$\bar{z}(k) = C\bar{x}(k), \quad (1.15)$$

$$\bar{u}(k) = -K_p\bar{x}(k). \quad (1.16)$$

Запишемо рівняння вимірювання і регулятора стану на один період дискретизації вперед з такою підстановкою значення $\bar{x}(k+1)$ з рівняннями стану:

$$\Delta\bar{z}(k+1) = C\bar{x}(k+1) = CF\bar{x}(k) + CG\bar{u}(k),$$

$$\Delta\bar{u}(k+1) = -K_p\bar{x}(k+1) = -K_pF\Delta\bar{x}(k) - K_pG\bar{u}(k),$$

де $\bar{x}(0) = \bar{x}_0$, $\bar{z}(0) = C\bar{x}_0$, $u(0) = -K_p\bar{x}_0$, $\Delta\bar{x}(1) = (F - I)\bar{x}_0 + G\bar{u}(0)$,

$$\Delta\bar{u}(1) = -K_p\Delta\bar{x}(1), \quad \Delta\bar{z}(1) = C\Delta\bar{x}(1).$$

Ці умови потрібні для еквівалентності динаміки змінних на k -му і $(k+1)$ -му тактах дискретизації. Тоді динаміка імпульсних процесів (1.3) КК замкненої системи буде

$$\begin{bmatrix} \Delta\bar{u}(k+1) \\ \Delta\bar{x}(k+1) \\ \Delta\bar{z}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -K_pG & -K_pF & 0 \\ G & F & 0 \\ CG & CF & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\bar{u}(k) \\ \Delta\bar{x}(k) \\ \Delta\bar{z}(k) \end{bmatrix}. \quad (1.17)$$

Таким чином, введення до моделі у просторі стану (1.8) вектора керуючих дій приводить до появи додаткових ребер у КК.

Згідно з імпульсним процесом (1.17) КК замкненої системи буде мати вигляд, показаний на рис. 1.3.

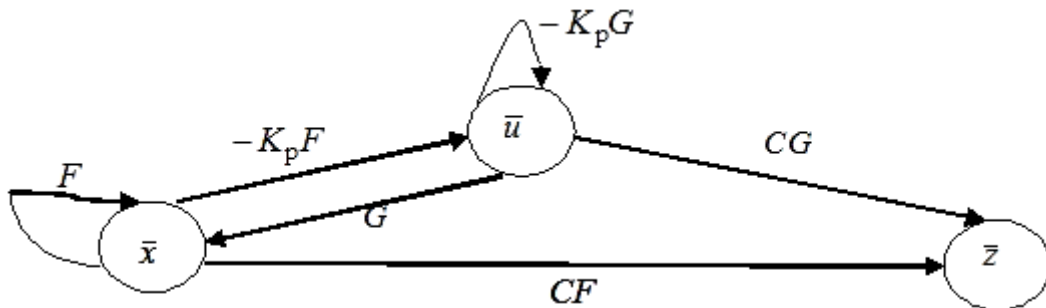


Рис. 1.3

1.3. Принципи керування імпульсними процесами у когнітивних картах складних систем

Різницеви рівняння імпульсних процесів в КК (1.2), (1.3) описують динаміку вільного руху процесів у складних системах різної природи, зображених у формі КК. Щоб керувати складною системою, треба мати можливість формувати зовнішні керуючі дії.

Розглянемо основні принципи [49, 50], на основі яких можна проектувати системи керування багатовимірними і багатозв'язними системами, динаміку яких можна описати моделями імпульсних процесів (1.3) в КК.

Перший принцип полягає в можливості формування зовнішнього вектора керування на основі варіювання параметрами вершин КК складної системи. Для цього потрібно сформувати керування вимушеного руху в імпульсному процесі (1.2) з допомогою рівняння

$$\Delta Y_i(k+1) = \sum_{j=1}^n a_{ij} \Delta Y_j(k) + b_i \Delta u_i(k),$$

де $\Delta u_i(k) = u_i(k) - u_i(k-1)$ – приріст зовнішньої керуючої дії. У векторній формі це рівняння можна записати так:

$$\Delta \bar{Y}(k+1) = A \Delta \bar{Y}(k) + B \Delta \bar{u}(k), \quad (1.18)$$

де $\Delta \bar{Y}$ – вектор приростів параметрів вершин КК; $\Delta \bar{u}$ – вектор приростів керуючих дій.

Цей принцип можливий тоді, коли в КК є деяка підмножина вершин, ресурсами яких можна варіювати ЛПР. У загальному випадку в різних КК складних систем різної природи є параметри вершин фінансового, адміністративного, економічного, енергетичного, інформаційного, соціального, наукового, політичного, екологічного, освітнього характеру, ресурсами яких можна варіювати на кожному періоді дискретизації, формуючи керуючі дії, які діють на конкретні вершини КК, змінюючи їх координати. При цьому ці зовнішні керування повинні мати однакову фізичну природу з вершинами, на які вони спрямовані. Матрицю B у (1.15) формує розробник системи керування. Зазвичай матриця B складається з одиниць і нулів, при цьому елементи матриці B , які відповідають керуючим діям, дорівнюють одиниці. Таким чином, під час

формування $\Delta \bar{u}$ треба обирати параметри вершин КК, на які може впливати ЛПР, змінюючи наявні ресурси. Наприклад, для складної системи соціально-економічного типу як керуючі дії можна застосовувати зміну:

- фінансових витрат (капіталовкладень);
- підвищення рівня наукових досліджень;
- часу виконання певної роботи;
- освоєння нових видів продукції;
- ціни на визначені товари;
- фінансового заохочення;
- задоволення потреб співробітників сфери діяльності, яка подана у формі КК.

Другий принцип керування імпульсними процесами в КК полягає в реалізації замкненої системи керування, яка включає синтезований на основі методів теорії автоматичного керування багатовимірний дискретний регулятор типу (1.16), який формує вектор керувань, що діють безпосередньо на вершини КК як на вихідні координати складної системи. Рівняння замкненої системи керування імпульсним процесом (1.18) з дискретним регулятором

$$\Delta \bar{u}(k) = -K_p \Delta \bar{Y}(k) \quad (1.19)$$

буде мати вигляд

$$\Delta \bar{Y}(k+1) = (A - BK_p) \Delta Y(k). \quad (1.20)$$

Другий принцип керування дає можливість проектувати матрицю підсилення K_p регулятора (1.19) на основі відомих методів теорії автоматичного керування для реалізації задач керування складними системами на основі моделей імпульсних процесів КК (1.18).

Третій принцип керування імпульсними процесами в КК полягає у можливості формування керуючих дій $\Delta u_i(k)$ на основі варіювання вагових коефіцієнтів матриці суміжності A КК (1.18) у замкненій системі керування. Цей принцип слід використовувати у випадках, коли під час формування $\Delta \bar{u}_i(k)$ неможливо або небажано варіювати параметри вершин КК (ресурси) відповідно до першого та другого принципів.

Варіювання вагового коефіцієнта a_{ij} можливе тоді, коли можна змінювати ступінь чутливості впливу однієї вершини КК на іншу. Людина,

яка приймає рішення, може реалізувати цей принцип, змінюючи коефіцієнти передачі адміністративних, наукових, фінансових, політичних, освітніх, інформаційних взаємодій між координатами складної системи, поданих вершинами КК. Під час керування імпульсним процесом КК варіюванням вагових коефіцієнтів матриці A змінюється ступінь впливу координат ΔY_j в (1.2) на координату ΔY_i . При цьому величина керуючої дії $\Delta u_i(k)$ формується не за рахунок зміни ресурсів ΔY_j , що безпосередньо діють на вершину ΔY_i , а за рахунок зміни впливу решти змін параметрів ΔY_j на заміну параметра ΔY_i .

Для реалізації трьох вищенаведених принципів керування потрібно точно вимірювати (фіксувати) усі параметри вершин КК, однак багато вершин КК неможливо формалізувати, їх важко виміряти або визначити їх зміну в реальному масштабі часу. До них можна віднести, наприклад:

- конкурентоспроможність продукції;
- рівень розвитку технологій;
- тіньові зв'язки політики й бізнесу;
- ефективність ведення інформаційної пропаганди;
- рівень демократизації суспільства;
- захищеність кордонів держави та інші.

Для цього випадку пропонується **четвертий принцип** керування імпульсними процесами КК, який полягає в декомпозиції вихідної КК на дві частини. *Першу частину* КК створюють для вимірюваних параметрів вершин вихідної КК, а в *другу частину* входять невимірювані параметри вершин. Тоді для першої частини КК складають першу модель, яка описує імпульсний процес вимірюваних координат:

$$\Delta Y_i(k+1) = \sum_{j=1}^p a_{ij} \Delta Y_j(k) + \sum_{\mu=p+1}^n a_{i\mu} \Delta Y_\mu(k), \quad (1.21)$$

де Y_i , ($i = 1, 2, \dots, p$) – вимірювані координати КК в реальному масштабі часу, а Y_μ , ($\mu = p+1, \dots, n$) – невимірювані координати вершин вихідної КК.

Другу модель створюють для опису імпульсного процесу невимірюваних параметрів вершин КК:

$$\Delta Y_\mu(k+1) = \sum_{j=p+1}^n a_{\mu j} \Delta Y_j(k) + \sum_{j=1}^p a_{\mu j} \Delta Y_\mu(k), \quad (1.22)$$

при цьому невимірювані параметри вершин розглядають як збурення в першій моделі (1.21), а вимірювані – у другій моделі (1.22).

Вирази (1.21), (1.22), відповідно, можна записати у векторно-матричній формі:

$$\Delta \bar{Y}_1(k+1) = A_{11} \Delta \bar{Y}_1(k) + A_{12} \Delta \bar{Y}_2(k), \quad (1.23)$$

$$\Delta \bar{Y}_2(k+1) = A_{21} \Delta \bar{Y}_1(k) + A_{22} \Delta \bar{Y}_2(k), \quad (1.24)$$

де $\bar{Y}_1$ – вектор вимірюваних, а $\bar{Y}_2$ – вектор невимірюваних параметрів; матриці A_{11} , A_{12} , A_{21} , A_{22} , відповідно, мають вимірність $(p \times p)$, $p \times (n-p)$, $(n-p) \times p$, $(n-p) \times (n-p)$ і є складовими матриці суміжності A в моделі (1.3):

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}.$$

Надалі для керування будемо використовувати модель імпульсного процесу (1.23) для першої частини КК.

У моделі імпульсного процесу КК (1.18) застосовано однотемпову дискретизацію з одним періодом T_0 , який обираємо відповідно до теореми Котельникова–Шеннона,

$$T_0 = \frac{\pi}{\omega_{\max}} = \frac{1}{2f_{\max}}, \quad (1.25)$$

де $\omega_{\max}$ – максимальна частота у спектрах усіх параметрів КК (якщо прив'язуватись до найбільш швидкозмінної координати Y_i КК). Але у складі КК є повільнозмінні вершини, параметри яких неможливо або дуже важко виміряти у дискретні моменти часу з малим періодом дискретизації T_0 . Тому для частини вершин КК під час вимірювання їх параметрів треба застосовувати збільшений період дискретизації $h = m T_0$, де m – ціле число, $m > 1$.

П'ятий принцип керування імпульсними процесами КК полягає у різнотемповій дискретизації координат вершин КК, коли для реалізації моделі (1.18) неможливо вимірювати усі параметри Y_i КК з одним періодом T_0 .

З математичної точки зору в теорії різницевих рівнянь не розглядають задачу вибору періоду дискретизації, при цьому перехід від диференціальних до різницевих рівнянь виконують за уніфікованого періоду

дискретизації $T_0 = 1$. Однак координати вершин складної системи, модель якої задано у формі КК, змінюються зі швидкостями, які відповідають інерційностям цих параметрів вершин. У процесі функціонування складної системи ці параметри можна вимірювати (фіксувати) в дискретні моменти часу з різними періодами дискретизації.

Щоб визначити ці періоди, треба мати інформацію про можливі швидкості зміни кожної координати Y_i складної системи. Тоді період T_0 обирають на основі [12]

$$T_{0\min} \leq \frac{\varepsilon}{\left| \frac{dY_i(t)}{dt} \right|_{\max}},$$

де ε – задана абсолютна похибка координати параметра Y_i , яка виникає внаслідок квантування неперервної функції $Y_i(t)$. Величина ε має вимірність параметра Y_i .

Розглянемо модель імпульсного процесу КК складної системи, яка має властивість функціонувати у двох масштабах часу. При цьому одну частину параметрів вимірюють з періодом T_0 , а іншу – з періодом $h = m T_0$, де m – ціле число, більше за одиницю.

Припустимо, що в моделі (1.2) n координат параметрів вершин можна розділити на p координат, які вимірюють у дискретні моменти часу з періодом T_0 , а інші $(n - p)$ координат необхідно вимірювати з періодом дискретизації h . Тоді вихідну модель (1.2) для кожної швидкозмінної координати Y_{fi} можна записати як

$$\Delta Y_{fi}(k+1) = \sum_{j=1}^p a_{ij} \Delta Y_{fj}(k) + \sum_{\mu=p+1}^n a_{i\mu} \Delta Y_{s\mu}(k). \quad (1.26)$$

Динаміка повільнозмінних координат Y_{sl} може бути подана у вигляді різницевого рівняння

$$\Delta Y_{sl}(k+1) = \sum_{\eta=1}^p a_{l\eta} \Delta Y_{f\eta}(k) + \sum_{\gamma=p+1}^n a_{l\gamma} \Delta Y_{s\gamma}(k). \quad (1.27)$$

Вирази (1.26), (1.27) для усіх координат КК можна записати у векторно-матричній формі:

$$\Delta \bar{Y}_f(k+1) = W_{11} \Delta \bar{Y}_f(k) + W_{12} \Delta \bar{Y}_s(k); \quad (1.28)$$

$$\Delta \bar{Y}_s(k+1) = W_{21} \Delta \bar{Y}_f(k) + W_{22} \Delta \bar{Y}_s(k), \quad (1.29)$$

де матриці W_{11} , W_{12} , W_{21} , W_{22} мають вимірність, відповідно, $(p \times p)$, $p \times (n-p)$, $(n-p) \times p$, $(n-p) \times (n-p)$. Підсистеми (1.28), (1.29) взаємозв'язані.

Якщо припустити, що координати $\bar{Y}_f$ вимірюють у дискретні моменти часу з періодом T_0 , а координати $\bar{Y}_s$ – з періодом $h = m T_0$, тоді модель (1.28) можна подати з різнотемповою дискретизацією:

$$\Delta \bar{Y}_f[rh + (l+1)T_0] = W_{11} \Delta \bar{Y}_f(rh + lT_0) + W_{12} \Delta \bar{Y}_s(rh),$$

де $r = \left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor$ – ціле число від ділення k на m ; $l = 0, 1, \dots, (m-1)$.

Модель (1.29) для повільновимірюваних координат КК з однотемповою дискретизацією можна записати у проміжній формі:

$$\Delta \bar{Y}_s[rh + (i+1)T_0] = W_{21} \Delta \bar{Y}_f(rh + iT_0) + W_{22} \Delta \bar{Y}_s(rh + iT_0). \quad (1.30)$$

Для теоретичного переведення цієї моделі в дискретну форму з великим періодом дискретизації $h = mT_0$ для змінних вектора $\bar{Y}_s$ розглянемо ітераційну процедуру за умови, що $\Delta \bar{Y}_s(rh + iT_0) = \Delta \bar{Y}_s(rh)$, $i = 0, 1, \dots, (m-1)$. Матимемо:

а) якщо $i = 0$, то

$$\Delta \bar{Y}_s[rh + 1T_0] = W_{21} \Delta \bar{Y}_f(rh + 0T_0) + W_{22} \Delta \bar{Y}_s(rh + 0T_0);$$

б) якщо $i = 1$, з урахуванням попереднього кроку дістанемо

$$\Delta \bar{Y}_s[rh + 2T_0] = \sum_{i=0}^1 W_{22}^i W_{21} \Delta \bar{Y}_f[rh + (1-i)T_0] + W_{22}^2 \Delta \bar{Y}_s(rh);$$

в) якщо $i = 2$, з урахуванням попереднього кроку дістанемо

$$\Delta \bar{Y}_s[rh + 3T_0] = \sum_{i=0}^2 W_{22}^i W_{21} \Delta \bar{Y}_f[rh + (2-i)T_0] + W_{22}^3 \Delta \bar{Y}_s(rh).$$

Продовжуючи ітераційну процедуру до $i = (m-1)$, дістанемо модель підсистеми КК для повільновимірюваних координат вершин:

$$\Delta \bar{Y}_s[(r+1)h] = W_{22}^m \Delta \bar{Y}_s(rh) + \sum_{i=0}^{m-1} W_{22}^i W_{21} \Delta \bar{Y}_f[rh + (m-1-i)T_0]. \quad (1.31)$$

Вагові коефіцієнти a_{ij} в матриці суміжності A в моделі імпульсного процесу КК (1.3) визначаються застосуванням експертних оцінок. У процесі функціонування складної системи, яку описують моделлю (1.3), коефіцієнти a_{ij} змінюються за часом, тому для керування імпульсним процесом КК невідомі та змінювані коефіцієнти матриці A треба оцінювати в реальному масштабі часу на основі відомої структури КК і вимірюваних координат вершин КК.

Отже, *шостий принцип* адаптивного керування імпульсними процесами КК полягає в ідентифікації вагових коефіцієнтів матриці суміжності A КК (1.3), які змінюються за часом в реальній складній системі різної природи.

1.4. Системний підхід до ідентифікації та керування імпульсними процесами в когнітивних картах

Основне призначення когнітивної моделі полягає в допомозі експерту у формуванні правильного управлінського рішення [16], тому її використовують у системах підтримки прийняття рішень. Когнітивна модель візуалізує і впорядковує інформацію про обстановку, задум, мету і дії. Візуалізація відіграє важливу когнітивну функцію, ілюструючи не тільки результати дій суб'єкта управління, а й показуючи йому способи аналізу і генерування варіантів рішень. Когнітивна модель пояснює, на який чинник або взаємозв'язок факторів треба вплинути, з якою силою і в якому напрямі, щоб отримати бажану зміну цільових факторів, тобто щоб досягти мети групування з найменшими затратами. Керуючі впливи можуть бути короткочасними (імпульсними) або тривалими (неперервними), що діють навіть до досягнення мети. Можливе також спільне використання імпульсних і неперервних управлінських дій.

Основне завдання цього навчального курсу полягає в розробленні системної методології, яка дозволить вирішувати проблему прийняття рішень у динаміці під час функціонування складної системи довільної природи, що подана у формі динамічної моделі імпульсного процесу КК (1.18) з метою досягнення поставлених цілей керування цією системою на основі методів теорії автоматичного керування й теорії ідентифікації систем.

З точки зору системного аналізу можна констатувати такі види невизначеностей для розв'язання проблеми керування складною системою на основі динамічних моделей імпульсних процесів КК:

1. Концептуальна невизначеність на початку дослідження, коли КК ще не сформована. Вона включає:

- невизначеність факторів (соціальних, економічних, інформаційних, фінансових, політичних, технічних, організаційних, гуманітарних, медичних, екологічних, військових, освітніх, психологічних, сільськогосподарських, комерційних і под. щодо наявності їх взаємних впливів, постійної або тимчасової взаємодії, характеру перехідних процесів між ними;

- невизначеність структури КК, яка включає кількість вершин (розмірність КК) та наявність можливих прихованих факторів для цієї досліджуваної області складної системи різної природи.

2. Ситуаційна невизначеність, до якої можна віднести невизначеність знань щодо невимірюваних або важковимірюваних координат вершин КК та визначення їх резервів, наявності збурень і точок їх можливого прикладання у складній системі та їх ймовірнісних характеристик.

3. Параметрична невизначеність, коли немає інформації про інтервали зміни вагових коефіцієнтів КК під час функціонування складної системи (інтервальна невизначеність).

4. Невизначеність цілей, якщо неочевидно, чого саме треба досягти в результаті керування.

Системний підхід до розкриття цих невизначеностей та розв'язання в цілому системної задачі динамічного прийняття рішень у складних системах, що описуються на основі моделей КК, допомагає послідовно виконувати комплекс задач, які показано на рис. 1.4:

а) якщо усі координати вершин КК вимірюються, то для ідентифікації вагових коефіцієнтів доцільно застосовувати алгоритми оцінювання на основі методу найменших квадратів або комбінаторний метод гарантованих інтервалів [2, 5, 6, 7, 20, 22, 64, 65];

б) якщо в КК є невимірювані вершини, то треба оцінити розмірність КК для цієї системи й одночасно застосувати методи на основі 4SID [23, 24].

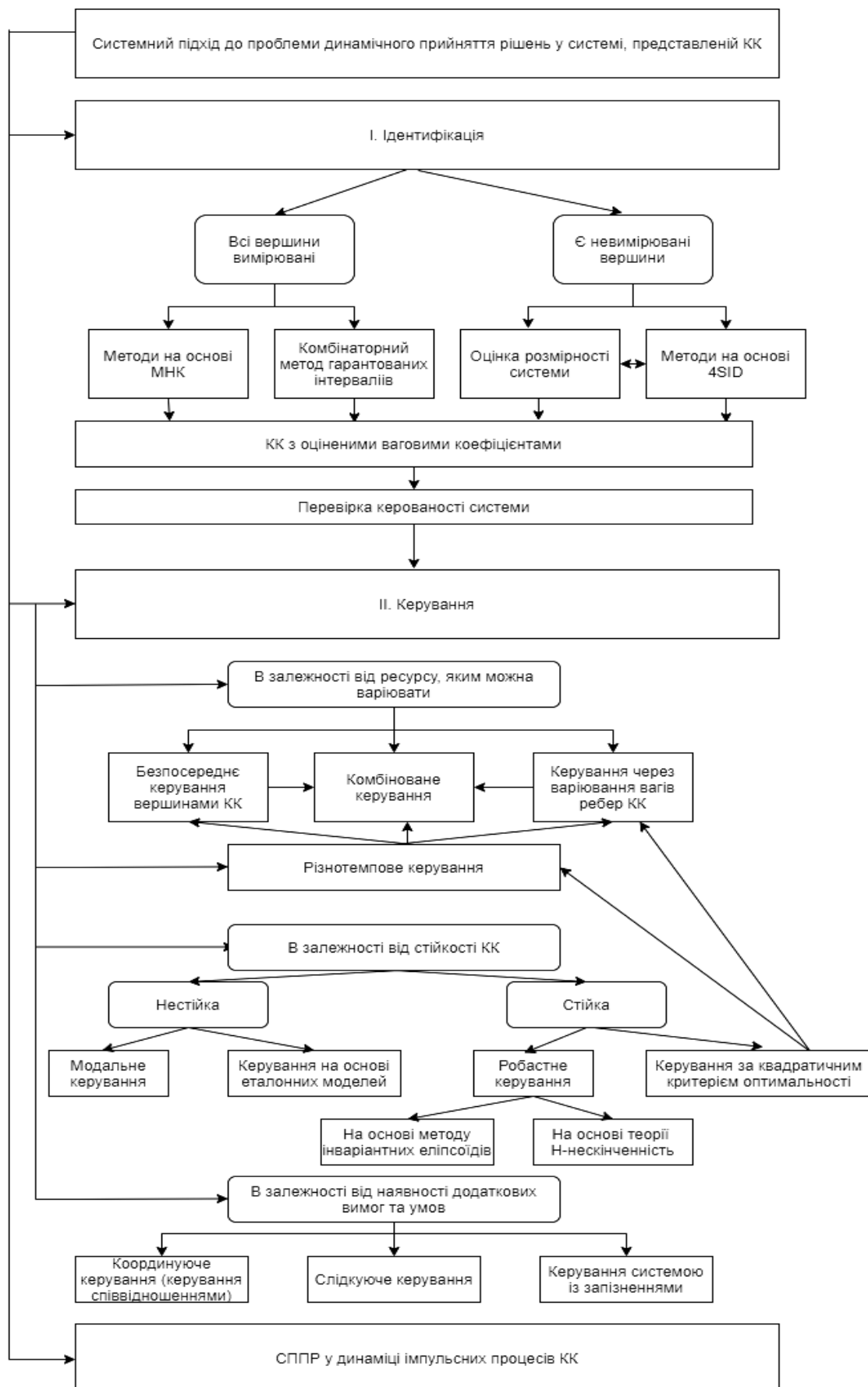


Рис. 1.4

1. Ідентифікація:

а) якщо усі координати вершин КК вимірюються, то для ідентифікації вагових коефіцієнтів доцільно застосовувати алгоритми оцінювання на основі методу найменших квадратів або комбінаторний метод гарантованих інтервалів [2, 5, 6, 7, 20, 22, 64, 65];

б) якщо в КК є невимірювані вершини, то необхідно виконати оцінку розмірності КК для даної системи і паралельно застосувати методи на основі 4SID [23, 24].

2. Перевірка керованості системи:

а) встановлення можливості формувати зовнішній вектор керування на основі варіювання координатами вершин КК (ресурсами факторів) або варіювати вагові коефіцієнти КК, що зможе здійснювати ЛПР. Якщо в КК таких вершин або вагових коефіцієнтів немає, то проектування системи керування виконати неможливо;

б) формування моделі керованого імпульсного процесу і виконання аналізу керованості моделі.

3. Реалізація системи керування в дискретному часі за різних властивостей КК:

а) залежно від ресурсу зовнішнього вектора керування проєктують систему керування на основі:

- варіювання ресурсами координат вершин КК;
- варіювання вагових коефіцієнтів КК;
- комбінованого керування;

б) реалізація системи керування за однотемпової або різнотемпової дискретизації координат вершин КК залежно від відповідної наявності усіх швидковимірюваних вершин або частин швидковимірюваних і повільновимірюваних вершин;

в) залежно від стійкості КК застосовують такі методи теорії автоматичного керування:

- для стабілізації нестійкої складної системи використовують метод модального керування або метод керування на основі еталонних моделей;
- для приглушення збурень у стійких складних системах для реалізації системи керування застосовують метод інваріантних еліпсоїдів або методи теорії H -нескінченності, які належать до робастного керування;
- залежно від наявності додаткових вимог та умов під час проєкування системи керування застосовують координувальне керування

(керування співвідношеннями координат складної системи), слідкуюче керування та керування системи із запізненням;

д) для стабілізації координат вершин КК стійкої складної системи або переведення координат вершин на інші рівні в автоматичному режимі використовують метод лінійно-квадратичного керування з квадратичним критерієм оптимальності під час проєктування систем керування з однотемповою і різнотемповою дискретизацією координат вершин КК і керуючих дій.

1.5. Аналіз лінійних дискретних систем у просторі стану

У підрозд. 1.2 розглянуто методику опису дискретних математичних моделей об'єктів керування і замкнених систем у просторі стану через моделі імпульсних процесів у КК. Це дає можливість під час проєктування систем керування складними системами на основі моделей імпульсних процесів в КК застосовувати відомі методи теорії математичного керування.

1.5.1. Опис лінійних дискретних систем у просторі стану

Лінійну дискретну систему керування описують різницеvim рівнянням

$$\bar{x}(k+1) = F\bar{x}(k) + G\bar{u}(k) + \Phi\bar{\xi}(k), \quad (1.32)$$

де індекс k відображає дискретний час, $t = kT_0$; $\bar{x}(k) \in \mathbb{R}^n$ – вектор стану системи; $\bar{u}(k) \in \mathbb{R}^m$ – вектор керування (керуюча дія); $\bar{\xi}(k) \in \mathbb{R}^p$ – вектор зовнішніх збурень. Керування $\bar{u}(k)$ і збурення $\bar{\xi}(k)$ є вхідними сигналами системи. В реальних системах вектор стану повністю невідомий, тобто складові $x_i(k)$ вектора $\bar{x}(k)$ вимірюють неповністю. Тому для опису системи вводять рівняння вимірювання

$$\bar{y}(k) = C\bar{x}(k) + D\bar{v}(k), \quad (1.33)$$

де $\bar{y}(k) \in \mathbb{R}^l$ – вектор вимірюваних вихідних координат за $l \leq n$, а $\bar{v}(k)$ – шум вимірювання. Динамічні властивості системи (1.32), (1.33) відображають матрицями $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$; $G \in \mathbb{R}^{n \times m}$; $\Phi \in \mathbb{R}^{n \times p}$; $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$; $D \in \mathbb{R}^{l \times p}$. Якщо матриці F, G, Φ, C, D не змінюються за числом, то систему (1.32), (1.33) називають стаціонарною.

Система керування буде повністю визначеною, якщо матриці F, G, Φ, C, D задані. Різницеве рівняння (1.32) називають рівнянням стану системи керування, а простір $\mathbb{R}^n$ будемо називати простором стану.

Якщо немає керування $\bar{u}(k)$, розімкнена дискретна система набуває вигляду

$$\begin{aligned}\bar{x}(k+1) &= F\bar{x}(k) + \Phi\bar{\xi}(k), \\ \bar{y}(k) &= C\bar{x}(k) + D\bar{v}(k).\end{aligned}\tag{1.34}$$

За початкової умови $\bar{x}(0)$ траєкторія руху стану системи (1.34) може бути записана у формі

$$\bar{x}(k) = F^k \bar{x}(0) + \sum_{i=0}^{k-1} F^{k-i-1} \Phi \xi(i).\tag{1.35}$$

1.5.2. Стійкість лінійних дискретних систем

Для лінійних стаціонарних систем ідея стійкості полягає у прагненні траєкторії руху вектора стану до нуля без зовнішніх збурень, тобто в досягненні асимптотичної стійкості.

Розглянемо лінійну систему у просторі стану $\bar{x}(k) \in \mathbb{R}^n$ для вільного руху

$$\bar{x}(k+1) = F\bar{x}(k)\tag{1.36}$$

за початкових умов $\bar{x}(0) = \bar{a}$. Якщо змінимо початкові умови $x^0(0) = b$, то

$$\bar{x}^0(k+1) = F\bar{x}^0(k).\tag{1.37}$$

З різниці $\tilde{x}(k) = \bar{x}(k) - \bar{x}^0(k)$ згідно з (1.36), (1.37) отримуємо різницеве рівняння

$$\tilde{x}(k+1) = F\tilde{x}(k) \text{ при } \tilde{x}(0) = \bar{a} - \bar{b}.\tag{1.38}$$

Це рівняння має розв'язок

$$\bar{x}(k) = F^k \tilde{x}(0).\tag{1.39}$$

Якщо матрицю F можна звести до діагональної форми,

$$Ft = T F T^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} = \Lambda,$$

то розв'язок (1.39) буде лінійною комбінацією λ_i^k , де $\lambda_i, i=1, \dots, n$ – власні значення матриці стану F_t і матриці F . Для досягнення асимптотичної стійкості усі розв'язки (1.39) мають рухатися до нуля за $k \rightarrow \infty$. Таким чином, лінійна стаціонарна система (1.36) буде асимптотично стійкою тоді і тільки тоді, коли усі власні значення матриці стану F лежать строго всередині круга одиничного радіуса, тобто

$$|\lambda_i| < 1, i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.40)$$

Введемо поняття про *стійкість матриць*.

Визначення. Матрицю F називають стійкою за Шуром (Шуровським), якщо всі її власні значення за абсолютною величиною будуть меншими за одиницю:

$$|\lambda_i(F)| < 1, i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.41)$$

Якщо матриця F є стійкою за Шуром, то величину $\sigma(F)$ за визначенням

$$\sigma(F) = 1 - \max_i |\lambda_i(F)| > 0$$

називають ступенем стійкості. При цьому величину

$$\rho(F) = \max_i |\lambda_i(F)| \quad (1.42)$$

називають спектральним радіусом матриці F . Таким чином, стійкість за Шуром означає, що $\rho(F) < 1$.

Надалі стійкість за Шуром будемо називати дискретною стійкістю.

Аналіз стійкості лінійних дискретних систем на основі функції Ляпунова

Розглянемо рівняння стану незбуреної лінійної дискретної системи (1.36). Цю систему називатимемо дискретно стійкою, якщо $\bar{x}(k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$ для будь-якого початкового стану $\bar{x}(0)$.

Введемо визначення функції Ляпунова.

Визначення. Скалярну функцію від векторного аргумента $V(\bar{X})$ називають функцією Ляпунова для системи $\bar{x}(k+1) = F\bar{x}(k)$, якщо вона має такі властивості:

- 1) $V(\bar{X})$ неперервна за $\bar{X}$;
- 2) $V(\bar{X}) > 0$ за всіх значень $\bar{X} > 0$ і $V(\bar{X}) = 0$ лише за $\bar{X} = 0$;

3) $\Delta V[\bar{X}(k)] = V[\bar{X}(k+1)] - V[\bar{X}(k)] < 0$, $k = 1, 2, \dots$, де $\bar{X}(k) \neq 0$, є розв'язок системи (1.36).

Для лінійної системи (1.36) функцію Ляпунова обирають у вигляді квадратичної форми:

$$V(\bar{X}) = \bar{X}^T Q \bar{X}, \quad Q > 0. \quad (1.43)$$

Унаслідок додатної визначеності матриці Q друга властивість функції Ляпунова $V(\bar{X}) > 0$ виконується для усіх $(\bar{X}) > 0$. Щоб задовольнити третю властивість, обчислимо $V[\bar{X}(k+1)] = \bar{X}^T(k+1)Q\bar{X}(k+1)$ із застосуванням рівняння стану (1.36):

$$V[\bar{X}(k+1)] = \bar{X}^T(k)F^T Q F \bar{X}(k).$$

Тоді перша різниця

$$\begin{aligned} \Delta V[\bar{X}(k)] &= V[\bar{X}(k+1)] - V[\bar{X}(k)] = \bar{X}^T(k)F^T Q F \bar{X}(k) - \\ &- \bar{X}^T(k)Q\bar{X}(k) = \bar{X}^T(k)[F^T Q F - Q]\bar{X}(k) = -\bar{X}^T(k)P\bar{X}(k). \end{aligned}$$

Отже, щоб приріст $\Delta V[\bar{X}(k)]$ був від'ємно визначеним, необхідно і достатньо, щоб існувала додатно визначена матриця Q , яка задовольняє рівняння

$$F^T Q F - Q = -P, \quad (1.44)$$

де P – додатно визначена матриця.

Це рівняння називають дискретним рівнянням Ляпунова відносно матриці Q . Воно завжди має розв'язок, якщо лінійна дискретна система (1.36) є стійкою. Справді, якщо матриця P є додатно визначеною, то $\Delta V[\bar{X}(k)] = -\bar{X}^T(k)P\bar{X}(k) < 0$, коли $V[\bar{X}(k+1)] < 0$, тобто відбувається спадання функції $\Delta V[\bar{X}(k)]$, тоді траєкторія руху системи прямує до початку координат.

Зазначимо, що обидві матриці (Q та P) є симетричними, що можна показати таким чином: якщо матриця Q симетрична, тобто $Q^T = Q$, тоді з рівняння Ляпунова.

$$P^T = -\left(F^T Q F - Q\right)^T = -\left(F^T Q^T F - Q^T\right) = -\left(F^T Q F - Q\right) = P.$$

Таким чином, третя властивість функції Ляпунова є еквівалентною щодо виконання умови $\Delta V[\bar{X}(k)] = \bar{X}^T(k)[F^T Q F - Q]\bar{X}(k) < 0$ для всіх $\bar{X}(k) \neq 0$, тобто виконання дискретної матричної нерівності Ляпунова:

$$F^T Q F - Q < 0. \quad (1.45)$$

У різних розробках теорії керування використовують дискретну нерівність Ляпунова

$$F^T Q F - Q \leq 0 \quad (1.46)$$

або її еквівалентну форму запису

$$F R F^T - R \leq 0. \quad (1.47)$$

Кожна форма запису (1.46), (1.47) є лінійною матричною нерівністю відносно $Q > 0$ та $R > 0$ відповідно.

Еквівалентність форм запису (1.46) і (1.47) можна довести на основі леми Шура, наведеної в дод. 5. Для цього першу нерівність (1.46) перемножимо зліва і справа на $R = Q^{-1}$, тоді дістанемо

$$R F^T R^{-1} F R - R \leq 0. \quad (1.48)$$

Позначимо $R = M_{11} = M_{22}$, де $M_{12} = F R$. Тоді згідно з лемою Шура за $M_{22} - M_{12}^T M_{11}^{-1} M_{12} > 0$ нерівність (1.48) буде еквівалентна запису у вигляді блочної матричної нерівності відносно R , а саме

$$\begin{bmatrix} R & F R \\ R F^T & R \end{bmatrix} \geq 0.$$

Перемножимо цю блочну нерівність зліва і справа на блочно-діагональну матрицю $\begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix}$. Тоді за умови $R = Q^{-1}$ дістанемо еквівалентну нерівність

$$\begin{bmatrix} Q & Q F \\ F^T Q & Q \end{bmatrix} \geq 0.$$

Знову скористаємось лемою Шура у вихідній постановці, що $M > 0$, коли $M_{22} > 0$ та $M_{11} - M_{12} M_{22}^{-1} M_{12}^T > 0$, тоді за $M_{11} = Q = M_{12}^T$ та $M_{22} = Q = M_{22}^T$ дістанемо другу еквівалентну нерівність Ляпунова (1.47).

1.5.3. Керованість лінійних дискретних систем

Розглянемо систему зі скалярним входом:

$$\bar{x}(k+1) = F\bar{x}(k) + Gu(k). \quad (1.49)$$

Припустимо, що для неї задано довільний початковий стан $\bar{x}(0)$. Тоді стан цієї системи $\bar{X}(N)$ на кінцевому обмеженому інтервалі часу, що дорівнює N періодів дискретизації, можна визначити на основі рекурентної процедури до рівняння (1.49) за $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$:

$$\begin{aligned} \bar{x}(N) &= F^N \bar{x}(0) + F^{N-1}Gu(0) + F^{N-2}Gu(1) + \dots + Gu(N-1) = F^N \bar{x}(0) + \\ &+ \begin{bmatrix} G & FG & F^2G & \dots & F^{N-1}G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(N-1) & u(N-2) & u(N-3) & \dots & u(0) \end{bmatrix}^T. \end{aligned} \quad (1.50)$$

Лінійну динамічну систему, описувану рівнянням (1.49), називають керованою, якщо існує послідовність керуючих дій $u(k)$, яка дає змогу перевести систему з довільного початкового стану $\bar{x}(0)$ в кінцевий стан (початок координат) за обмежений час.

Складену матрицю

$$R_c = \begin{bmatrix} G & FG & F^2G & \dots & F^{N-1}G \end{bmatrix} \quad (1.51)$$

називають матрицею керованості.

З керованістю тісно пов'язане поняття досяжності.

Модель системи, що описується рівнянням (1.49), буде досяжною тоді і тільки тоді, коли матриця R_c має ранг $\text{rank } R_c = n$, де n – розмірність вектора стану $\bar{X}$. На підставі (1.50) можна визначити складений вектор керуючих дій

$$U_n = \begin{bmatrix} u(n-1) & u(n-2) & \dots & u(0) \end{bmatrix}^T$$

таким чином:

$$U_n = R_c^{-1} \left[\bar{x}(n) - F^n \bar{x}(0) \right]. \quad (1.52)$$

Коли R_c має ранг n , то з (1.52) дістанемо n рівнянь для визначення послідовності керуючих дій, за допомогою яких система перейде з початкового $\bar{x}(0)$ у бажаний кінцевий стан $\bar{x}(n)$. Якщо $k < n$, то розв'язку рівняння (1.52) не існує. Також, коли $\text{rank } R_c < n$, то обернення її неможливе і система буде некерованою.

Приклад. Дискретну модель системи, що описується рівнянням (1.49), задано у вигляді

$$\bar{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0,5 \end{bmatrix} \bar{x}(k) + \begin{bmatrix} 1,5 \\ -2 \end{bmatrix} u(k)$$

при $\bar{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2,5 \end{bmatrix}$

Знайдемо послідовність керуючих дій, яка переводить систему у кінцевий стан $\bar{x}^T(2) = [-1 \ 1]$. Із (1.50) випливає, що $\bar{x}(2) = F^2\bar{x}(0) + FG u(0) + Gu(1)$. Матриця керованості (1.51) матиме вигляд

$$R_c = \begin{bmatrix} 1,5 & 3 \\ -2 & -2,5 \end{bmatrix}; \det R_c = 2,25,$$

а вектор керуючих дій на підставі (1.52) буде

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} u(1) \\ u(0) \end{bmatrix} &= R_c^{-1} [\bar{x}(2) - F^2\bar{x}(0)] = \\ &= \begin{bmatrix} 1,5 & 3 \\ -2 & -2,5 \end{bmatrix}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2,5 \end{bmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

Звідси дістаємо $u(0) = -2,528$; $u(1) = 1,722$.

Таким чином, послідовність керуючих дій існує. Система буде керованою і досяжною, тому що матриця R_c має ранг 2.

1.5.4. Спостережуваність лінійних дискретних систем

Розглянемо модель системи керування у просторі стану

$$\begin{aligned} \bar{x}(k+1) &= F\bar{x}(k) + Gu(k) \\ y(k) &= C\bar{x}(k) \end{aligned} \tag{1.53}$$

зі скалярним входом $u(k)$ і скалярним виходом $y(k)$.

Припустимо, що задано послідовність вихідних вимірювань $y(0)$, $y(1)$, ..., $y(n-1)$ у дискретному часі. Використовуючи модель системи (1.53), сформуємо послідовність рівнянь

$$\begin{aligned} y(0) &= C\bar{x}(0); \\ y(1) &= C\bar{x}(1) = CF\bar{x}(0) + CGu(0); \\ y(2) &= C\bar{x}(2) = CF^2\bar{x}(0) + CFGu(0) + CGu(1); \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$y(n-1) = CF^{n-1}\bar{x}(0) + \begin{bmatrix} 0 & CG & CFG & \dots & CF^{n-2}G \end{bmatrix} \times \\ \times \begin{bmatrix} u(n-1) & \dots & u(2) & u(1) & u(0) \end{bmatrix}^T,$$

які можна записати у векторно-матричній формі:

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(n-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CF \\ CF^2 \\ \vdots \\ CF^{n-1} \end{bmatrix} \bar{x}(0) + \\ + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & CG \\ 0 & 0 & 0 & \dots & CG & CFG \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & CG & CFG & \dots & CF^{n-3}G & CF^{n-2}G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(n-1) \\ u(n-2) \\ u(n-3) \\ \vdots \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix}.$$

Цю систему рівнянь можна записати у вигляді

$$\bar{Y}_n = W_c \bar{x}(0) + Q \bar{U}_n, \quad (1.54)$$

де $\bar{Y}_n^T = [Y(0) \ Y(1) \ Y(2) \ \dots \ Y(N-1)]$;

$$\bar{U}_n^T = [U(n-1) \ U(n-2) \ U(n-3) \ \dots \ U(0)].$$

Матрицю $W_c = [C \ CF \ CF^2 \ \dots \ CFG^{n-1}]^T$ називають матрицею спостережуваності. З рівняння (1.54) знайдемо початковий вектор стану $\bar{x}(0)$. Матимемо

$$\bar{x}(0) = W_c^{-1} [\bar{Y}_n - Q \bar{U}_n]. \quad (1.55)$$

Розв'язок (1.55) існує тільки тоді, коли $\det W_c \neq 0$, тобто коли матриця спостережуваності W_c має повний ранг і в цьому випадку система (1.53) буде спостережувана, а маючи послідовності $\bar{Y}_n$, $\bar{U}_n$, можна визначити початковий стан (1.55).

Приклад. Розглянемо систему

$$\bar{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 1,1 & -0,3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \bar{x}(k) + \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,2 \end{bmatrix} u(k), \\ y(k) = [1 \quad -0,5] \bar{x}(k).$$

Матриця спостережуваності має вигляд

$$W_c = \begin{bmatrix} C \\ CF \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -0,5 \\ 0,6 & -0,3 \end{bmatrix},$$

$\det W_c = 0$. Система неспостережувана. Ранг матриці $W_c = 1$ й спостережувані змінні стану належать нуль простору W_c , тобто $[0,5 \ 1]$.

Визначення. Система (1.53) буде спостережуваною, якщо існує таке кінцеве значення n , за якого послідовностей $\bar{U}_n$ і $\bar{Y}_n$ достатньо для визначення початкового стану $\bar{x}(0)$.

1.6. Аналіз стійкості імпульсних процесів у когнітивних картах складних систем

Для опису динаміки імпульсних процесів у КК застосовують модель (1.2)

$$\Delta Y_i(k+1) = \sum_{j=1}^n a_{ij} \Delta Y_j(k), \quad (1.56)$$

$$i = 1, 2, \dots, n; \quad j = 1, 2, \dots, n;$$

де зміна параметра i -ї вершини в момент часу k позначається імпульсом $P_i(k) = Y_i(k) - Y_i(k-1) = \Delta Y_i(k)$. Стійкість процесів, які описані моделлю (1.56), забезпечується тоді, коли за обмежених вхідних імпульсів $\Delta Y_i(k)$, $j = 1, 2, \dots, n$ буде обмежений імпульс $\Delta Y_i(k+1)$, який відображає швидкість зміни параметра i -ї вершини КК. Назвемо цю властивість *імпульсною стійкістю*. Отже, за імпульсної стійкості приріст параметра $Y_i(k)$, тобто імпульс $P_i(k)$, не має нескінченно зростати.

Вершину $Y_i(k)$ називають імпульсно стійкою в імпульсному процесі (1.56), якщо послідовність $\{|\Delta Y_i(k)| : k = 1, 2, \dots\}$ буде обмеженою, тобто знайдеться додатне число M , за якого $|\Delta Y_i(k)| < M$ для усіх k .

Виконаємо в (1.56) заміну $\Delta Y_i(k+1) = Y_i(k+1) - Y_i(k)$, а $\Delta Y_i(k) = Y_i(k) - Y_i(k-1)$. Тоді дістанемо рівняння

$$Y_i(k+1) = (1 + a_{ii})Y_i(k) - a_{ii}Y_i(k-1) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij} \Delta Y_j(k),$$

в якому значення координати Y_i відповідає величині параметра i -ї вершини КК. Якщо запишемо це рівняння на k -му періоді дискретизації,

$$\Delta Y_i(k) = (1 + a_{ii})Y_i(k-1) - a_{ii}Y_i(k-2) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij}\Delta Y_j(k-1),$$

то його можна подати у такій формі:

$$\left[1 - (1 + a_{ii})q^{-1} + a_{ii}q^{-2}\right] Y_i(k) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij}\Delta Y_j(k-1), \quad (1.57)$$

де q^{-1} – оператор зворотного зсуву на один період дискретизації. У цьому випадку стійкість параметра $Y_i(k)$ буде визначатися розподілом коренів характеристичного полінома $A(q^{-1}) = 1 - (1 + a_{ii})q^{-1} + a_{ii}q^{-2} = 0$ та імпульсною стійкістю приростів $\Delta Y_j(k-1)$ інших параметрів $j = 1, 2, \dots, n$; $j \neq i$ КК.

Стійкість повних координат $Y_i(k)$ імпульсного процесу (1.57) назовемо «позиційною» стійкістю зваженого орієнтованого графа (КК) в імпульсному процесі. Вершина КК буде позиційно стійкою, якщо послідовність $\{|Y_i(k)| : k = 0, 2, \dots\}$ буде обмеженою.

У будь-якому імпульсному процесі КК «позиційна» стійкість в i -й вершині означає також імпульсну стійкість у цій самій вершині, тому що за $k > 0$

$$|\Delta Y_i(k)| = |Y_i(k) - Y_i(k-1)| \leq |Y_i(k)| + |Y_i(k-1)|.$$

Таким чином, якщо послідовність $\{|Y_i(k)|\}$ обмежена числом M , то $|Y_i(k)|$ і $|Y_i(k-1)| < M$, а тому послідовність $\{Y_i(k) - Y_i(k-1)\}$ буде обмеженою числом $2M$.

У векторній формі запису рівняння імпульсного процесу (1.56) має вигляд (1.3), тобто

$$\Delta \bar{Y}(k+1) = A \Delta \bar{Y}(k), \quad (1.58)$$

де $\Delta \bar{Y}(k) = \bar{Y}(k) - \bar{Y}(k-1) = P(k)$.

Забезпечення імпульсної стійкості КК полягає в тому, що послідовність вектора імпульсів $\{|\bar{P}(k)| = |\Delta \bar{Y}(k)| : k = 1, 2, \dots\}$ має бути обмеженою, тобто $|\Delta \bar{Y}(k)| < \bar{M}$.

Якщо в моделі (1.58) вектор імпульсів $\bar{Y}(k)$ позначити вектором змінних стану $\bar{X}(k)$, то дістанемо різницеве рівняння (1.36) у просторі стану:

$$\bar{X}(k+1) = A\bar{X}(k),$$

яке буде асимптотично стійким тоді і тільки тоді, коли усі власні значення матриці A лежатимуть точно всередині кола одиничного радіуса $|\lambda_i| < 1$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Таким чином, КК буде імпульсно стійкою, якщо матриця суміжності A імпульсного процесу (1.58) буде мати всі власні значення за модулем, менші за одиницю, тобто матриця A має бути стійкою за Шуром.

Для аналізу «позиційної» стійкості розглянемо рівняння імпульсного процесу (1.57) у повних координатах вершини Y_i КК.

«Позиційну» стійкість i -ї координати визначають коренем характеристичного рівняння $\left[1 - (1 + a_{ii})q - 1 + a_{ii}q^{-2}\right] = 0$.

Перший корінь цього рівняння $q_1 = \bar{1}$, а другий корінь $q_2 = a_{ii}$, таким чином за обмеженої правої частини рівняння (1.57) й за $|a_{ii}| < 1$ імпульсний процес (1.57) буде перебувати на межі стійкості.

Якщо маємо імпульсний процес КК (1.58), то у повних координатах вершин $\bar{Y}(k)$ на k -му періоді дискретизації його рівняння буде мати вигляд

$$\left[I - (I + A)q^{-1} + Aq^{-2}\right]\bar{Y}(k) = 0. \quad (1.59)$$

«Позиційну» стійкість координат вершин $\bar{Y}(k)$ визначають коренями характеристичного рівняння $\det\left[I - (I + A)q^{-1} + Aq^{-2}\right] = 0$. При цьому один із коренів за i -м каналом буде дорівнювати одиниці, тобто за стійкого імпульсного процесу (1.58), коли власні значення матриці A будуть $|\lambda_i| < 1$, імпульсний процес КК у повних значеннях координат вершин КК теоретично буде перебувати на межі стійкості.

Контрольні запитання

1. Дайте визначення складної системи.
2. Які можливості має КК для дослідження складних систем?
3. У чому полягає ідея імпульсного процесу зваженого орієнтованого графа (КК) для опису динаміки процесів у складних системах?
4. Які є методи побудови КК складних систем?
5. Сформулюйте етапи процесу побудови КК складних систем.
6. Які недоліки мають класичні КК для застосування їх під час дослідження складних систем?
7. У чому полягає відмінність векторного функціонального графа від параметричного векторного функціонального графа?
8. Які є можливості для реалізації зовнішніх керуючих дій під час проектування системи керування на основі моделей імпульсних процесів у КК?
9. Які є невизначеності під час розв'язання проблеми керування складними системами на основі моделей імпульсних процесів у КК?
10. У чому полягають схожість і відмінність моделі динаміки системи у просторі стану $\bar{x}(k+1) = F\bar{x}(k)$ та моделі імпульсного процесу КК $\Delta\bar{Y}(k+1) = A\Delta\bar{Y}(k)$?
11. За якої умови динаміка дискретної системи у просторі стану $\bar{x}(k+1) = F\bar{x}(k)$ буде стійкою?
12. У чому полягає ідея дослідження стійкості лінійних дискретних систем на основі функцій Ляпунова?
13. Чим різняться дослідження імпульсної стійкості динамічної моделі зваженого орієнтованого графа (КК) від «позиційної» стійкості?
14. За якої умови динамічна модель КК $\Delta\bar{Y}(k+1) = A\Delta\bar{Y}(k)$ буде імпульсно стійкою?
15. У чому полягає ідея керованості дискретної системи $\bar{x}(k+1) = F\bar{x}(k) + Gu(k)$? За якої умови ця система буде керованою?
16. У чому полягає ідея спостережуваності дискретної системи
$$\bar{x}(k+1) = F\bar{x}(k) + Gu(k);$$
$$y(k) = C\bar{x}(k)?$$
 За якої умови ця система буде спостережуваною?

17. За якої умови модель імпульсного процесу КК складної системи буде неможливо використовувати для проектування системи керування цією системою?

Задачі для самостійного розв'язання

1.1. Задано таку КК (рис. 1.5).

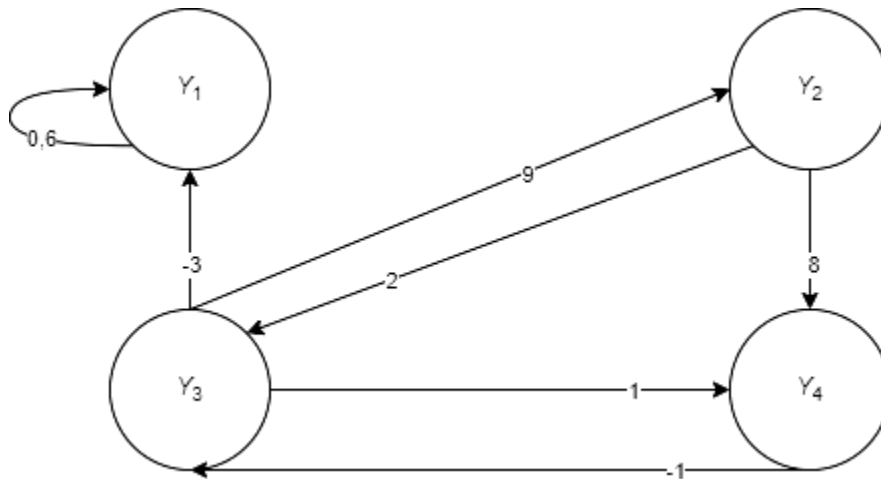


Рис. 1.5

Завдання.

- Скласти рівняння імпульсного процесу для цієї КК.
- Визначити значення параметра вершини Y_4 в момент часу $k = 1$, якщо параметр вершини Y_2 в момент часу $k = 0$ збільшився на одиницю.
- Визначити значення параметра вершини Y_1 в момент часу $k = 1$, якщо значення параметрів вершин Y_3 та Y_4 збільшилися на одиницю в момент часу $k = 0$.

1.2. Модель рівняння стану дискретної системи описується системою різницьових рівнянь

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} Y(k).$$

Завдання.

- Проаналізувати стійкість дискретної системи.
- Дослідити керованість цієї системи.

1.3. Задано таку модель дискретної системи у просторі стану:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix};$$

$$Y(k) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}.$$

Також задано послідовність вихідних вимірювань $Y(0) = 0$; $Y(1) = 1$.

Завдання.

Дослідити спостережуваність цієї системи. Визначити $x_1(0)$ і $x_2(0)$.

1.4. Задано таку КК (рис. 1.6).

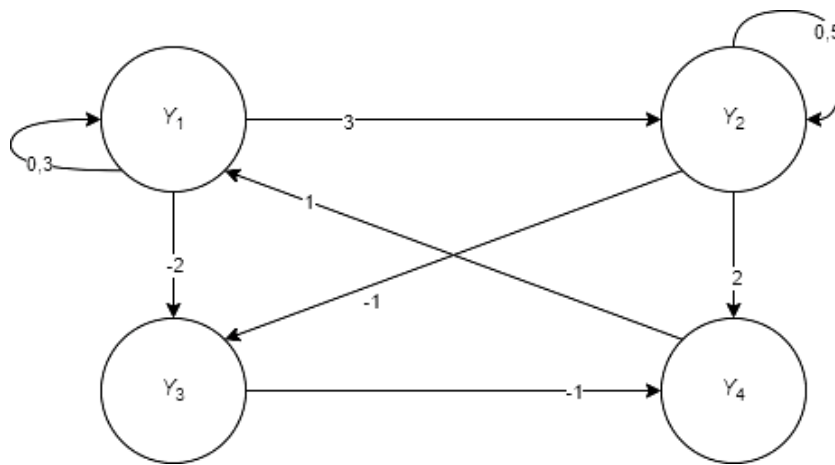


Рис. 1.6

Завдання.

- Записати рівняння імпульсного процесу КК у формі (1.3).
- Проаналізувати імпульсну стійкість цього процесу.

1.5. Задано рівняння імпульсного процесу КК $\Delta \bar{Y}(k+1) = A \Delta \bar{Y}(k)$, де матриця суміжності

$$A = \begin{bmatrix} 0,7 & 0 & 0,6 & -1,2 \\ 0,3 & 0,4 & -1 & 0 \\ 0 & 1,5 & 0,35 & 0,1 \\ 0,4 & -0,2 & -0,1 & 0,5 \end{bmatrix}.$$

Завдання.

- Побудувати КК.
- Дослідити імпульсну стійкість цього процесу.

1.6. Задано таку КК системи (рис. 1.7).

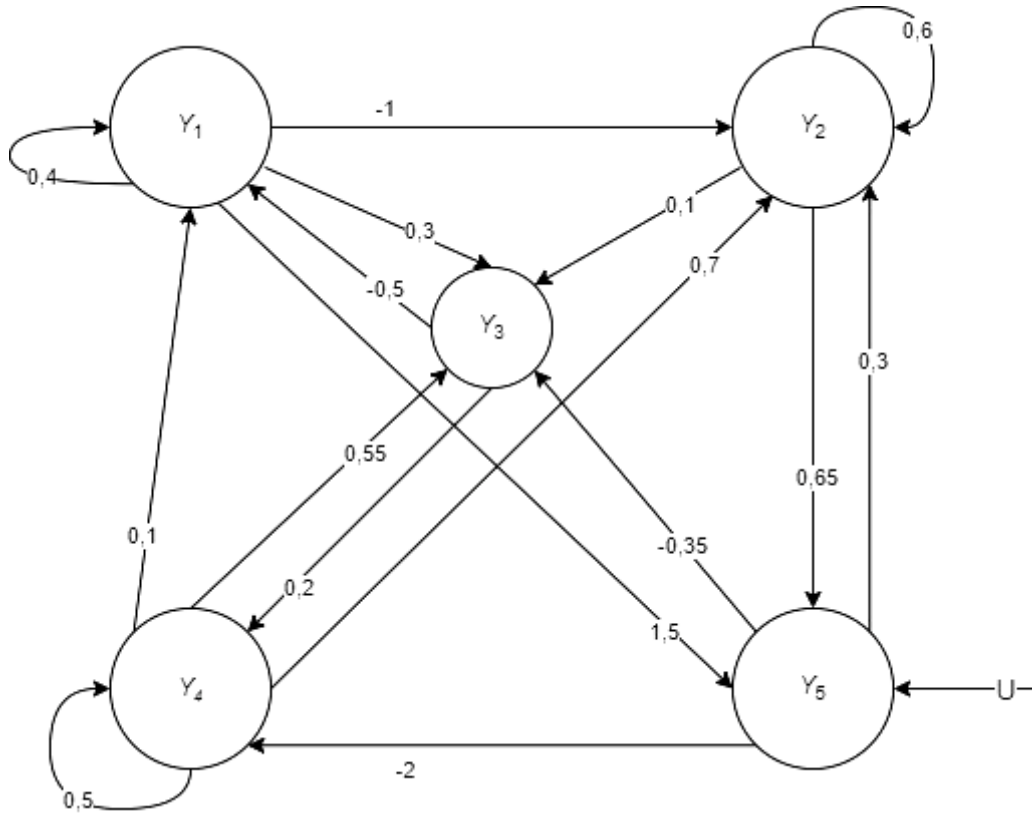


Рис. 1.7

Керуюча дія U подається на 5-ту вершину КК Y_5 .

Завдання.

- Записати рівняння вимушеного руху імпульсного процесу КК у формі $\Delta \bar{Y}(k+1) = A \Delta \bar{Y}(k) + B \Delta U(k)$.
- Дослідити імпульсну стійкість.
- Дослідити керованість вимушеного руху імпульсного процесу.

1.7. Задано дві взаємопов'язані КК (рис. 1.8), де вектори параметрів вершин $\bar{X} = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T$; $Y = [Y_1 \ Y_2 \ Y_3]^T$.

Завдання.

- Записати рівняння імпульсних процесів кожної КК у формі

$$\begin{aligned}\Delta \bar{X}(k+1) &= A_{11} \Delta \bar{X}(k) + A_{12} \Delta \bar{Y}(k); \\ \Delta \bar{Y}(k+1) &= A_{21} \Delta \bar{X}(k) + A_{22} \Delta Y(k).\end{aligned}$$

- Дослідити імпульсну стійкість кожної КК.

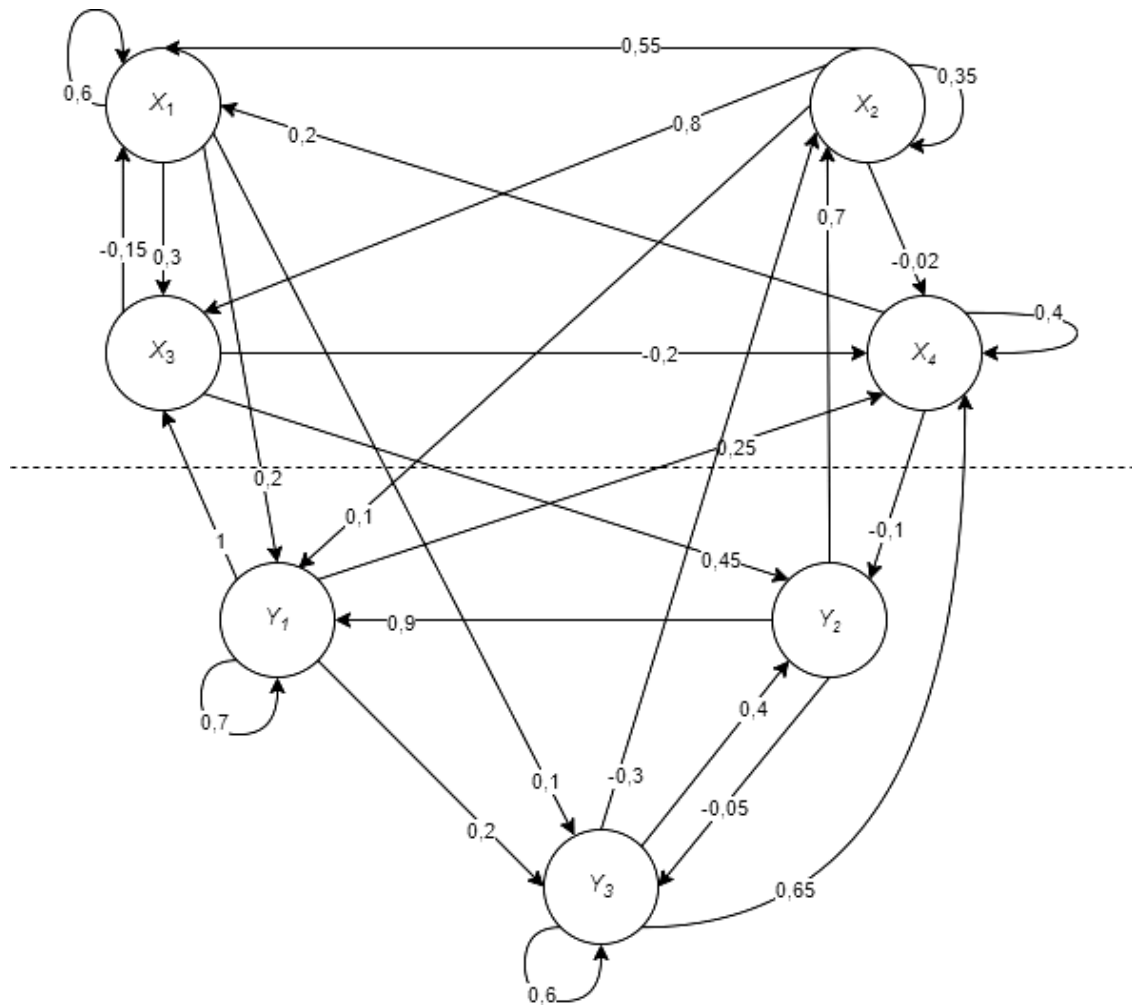


Рис. 1.8

1.8. Задано таку КК (рис. 1.9), в якій параметри вершин $\bar{Y}_1 = [Y_1 \ Y_2 \ Y_3 \ Y_4]^T$ є вимірюваними, а параметри вершин $\bar{Y}_2 = [Y_5 \ Y_6]$ виміряти неможливо.

Завдання.

а) Сформувати імпульсний процес цієї КК у формі рівнянь (1.23), (1.24):

$$\begin{aligned} \Delta \bar{Y}_1(k+1) &= A_{11} \Delta \bar{Y}_1(k) + A_{12} \Delta \bar{Y}_2(k); \\ \Delta \bar{Y}_2(k+1) &= A_{21} \Delta \bar{Y}_1(k) + A_{22} \Delta \bar{Y}_2(k). \end{aligned}$$

б) Дослідити імпульсну стійкість кожної частини КК, а також імпульсну стійкість всієї КК:

$$\begin{bmatrix} \Delta Y_1(k+1) \\ \Delta Y_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta Y_1(k) \\ \Delta Y_2(k) \end{bmatrix}.$$

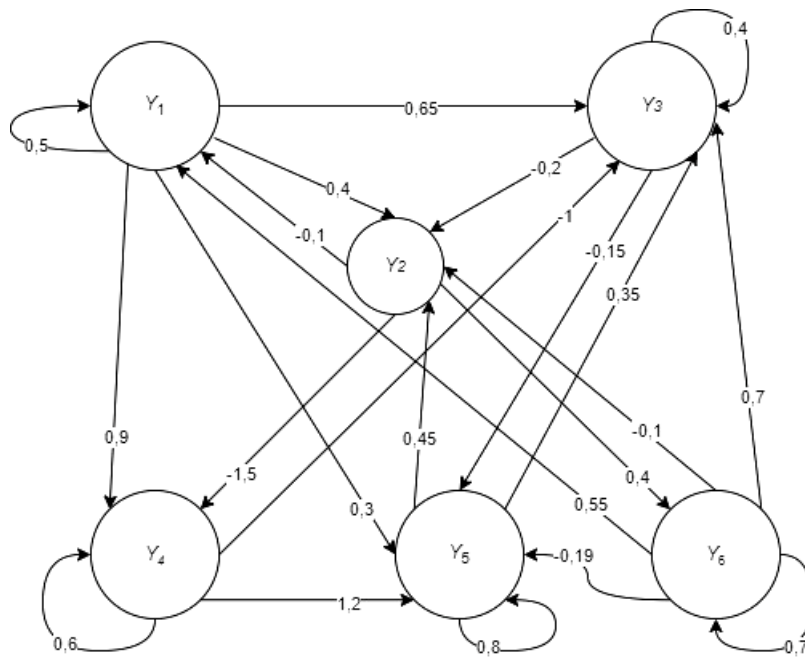


Рис. 1.9

1.9. Задано таку КК (рис. 1.10).

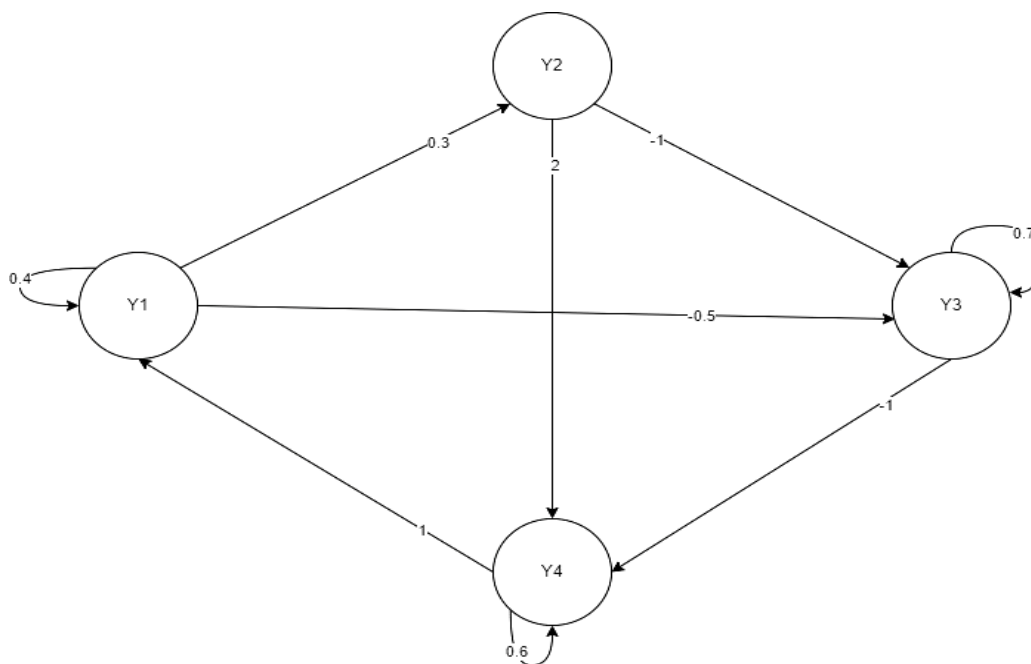


Рис. 1.10

Завдання.

а) Скласти рівняння імпульсного процесу КК.

б) Дослідити імпульсну стійкість КК.

в) Дослідити «позиційну» стійкість імпульсного процесу на основі

моделі $\bar{Y}(k+1) = \left[I - (I + A)q^{-1} + Aq^{-2} \right] \bar{Y}(k).$

РОЗДІЛ 2. Методи стабілізації нестійких процесів у складних системах

2.1. Метод стабілізації нестійких імпульсних процесів в когнітивних картах на основі еталонних моделей

З точки зору теорії керування КК в динамічному режимі (1.3)

$$\Delta \bar{Y}(k+1) = A \Delta \bar{Y}(k) \quad (2.1)$$

належить до класу багатовимірних дискретних процесів зі складною динамікою між вихідними координатами Y_i ($i = 1, 2, \dots, n$) без зовнішніх керуючих дій, тобто імпульсний процес (2.1) являє собою вільний рух деякої ізольованої складної системи. Якщо власні значення матриці суміжності A за модулем більше одиниці $|\lambda_i| > 1$, то КК (2.1) буде нестійкою: наприклад, комерційний банк (рис. 2.6) перебуває на стадії банкрутства або соціально-навчальний процес студента (КК на рис. 2.2) перебуває під загрозою відрахування з вищого навчального закладу.

Завдання полягає у стабілізації нестійкого процесу, описаного за допомогою математичної моделі імпульсного процесу КК (2.1) через синтез оптимального закону керування в замкненій системі, який забезпечує [45]

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Delta Y_i(k) = 0.$$

2.1.1. Розроблення моделі керованого імпульсного процесу когнітивної карти типу «вхід – вихід» під час формування зовнішніх керуючих дій

Під час використання оператора зворотного зсуву q^{-1} модель вільного руху імпульсного процесу (1.2) для i -ї координати Y_i можна подати у вигляді

$$\Delta Y_i(k) = \sum_{j=1}^n a_{ij} \Delta Y_i(k-1) = \sum_{j=1}^n a_{ij} q^{-1} \Delta Y_i(k), \quad (2.2)$$
$$i = 1, \dots, n.$$

Запишемо цей вираз в розгорнутій формі для моделі (2.1):

$$\begin{bmatrix} (1-a_{11}q^{-1}) & -a_{12}q^{-1} & \dots & -a_{1n}q^{-1} \\ -a_{21}q^{-1} & (1-a_{22}q^{-1}) & \dots & -a_{2n}q^{-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n1}q^{-1} & -a_{n2}q^{-1} & \dots & (1-a_{nn}q^{-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta Y_1(k) \\ \Delta Y_2(k) \\ \dots \\ \Delta Y_n(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

Після введення матричного полінома $A(q^{-1})$ відносно оператора зворотного зсуву q^{-1}

$$A(q^{-1}) = \begin{bmatrix} (1-a_{11}q^{-1}) & -a_{12}q^{-1} & \dots & -a_{1n}q^{-1} \\ -a_{21}q^{-1} & (1-a_{22}q^{-1}) & \dots & -a_{2n}q^{-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n1}q^{-1} & -a_{n2}q^{-1} & \dots & (1-a_{nn}q^{-1}) \end{bmatrix}$$

вираз (2.3) можна записати як

$$A(q^{-1}) \times \Delta \bar{Y}(k) = 0. \quad (2.4)$$

Якщо корені рівняння $\det A(q^{-1}) = 0$ будуть за модулем, більшими за одиницю, то система (2.4) буде нестійкою.

Припустимо, що ресурсами всіх вершин КК Y_i можна варіювати зовні, наприклад під час моделювання динаміки фінансових процесів. Тоді для розроблення системи керування імпульсним процесом КК доповнимо модель вільного руху (2.4) дією зовнішніх сил у вигляді вектора приростів керувань $\Delta \bar{u}(k) = \bar{u}(k) - \bar{u}(k-1)$, які діють безпосередньо на вершини КК. У результаті модель керованого імпульсного процесу КК типу «вхід – вихід» можна записати у вигляді [45]

$$(I - A_1 q^{-1}) \Delta \bar{Y}(k) = q^{-1} B_1 \Delta \bar{u}(k). \quad (2.5)$$

При цьому для формування зовнішніх керуючих дій, які будуть діяти на всі вершини КК, діагональну матрицю B_1 в загальному випадку можна вибрати у формі одиничної матриці $B_1 = I$. Відповідно до (2.3), (2.5) матриці A_1 та B_1 мають вигляд

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}; \quad B_1 = \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & b_{nn} \end{bmatrix}. \quad (2.6)$$

Відповідно до (2.5), (2.6) приріст кожної координати КК $Y_i(k)$ будемо визначати як

$$\Delta Y_i(k) = a_{ii} \Delta Y_i(k-1) + \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^n a_{ij} \Delta Y_j(k-1) + b_{ii} \Delta u_i(k-1), \quad (2.7)$$

$$i = 1, \dots, n; \quad j = 1, \dots, n.$$

2.1.2. Розроблення замкненої системи стабілізації нестійкого імпульсного процесу когнітивної карти у приростах змінних

Для моделі керованого імпульсного процесу (2.5) сформулюємо закон дискретного керування у приростах змінних у загальному вигляді:

$$\Delta \bar{u}(k) = D(q^{-1}) \left[I + F(q^{-1}) \right]^{-1} \left[\Delta \bar{G}(k) - \Delta \bar{Y}(k) \right], \quad (2.8)$$

де $\Delta \bar{G}(k)$ – вектор приростів задавальних дій, на практиці для систем стабілізації $\Delta \bar{G}(k) = 0$. Для моделі (2.5) структура складових закону керування (2.8) буде така:

$$D(q^{-1}) = D_0; \quad F(q^{-1}) = q^{-1} F_1. \quad (2.9)$$

Підставимо (2.8), (2.9) в (2.5):

$$(I - A_1 q^{-1}) \Delta \bar{Y}(k) = q^{-1} B_1 D_0 \left[I + F_1 q^{-1} \right]^{-1} \left[\Delta \bar{G}(K) - \Delta \bar{Y}(k) \right].$$

Тоді після перетворень дістанемо рівняння багатовимірної замкненої системи керування за каналом « $\Delta \bar{G} \rightarrow \Delta \bar{Y}$ »:

$$\begin{aligned} \Delta \bar{Y}(k) = (I + F_1 q^{-1}) \left[(I - A_1 q^{-1})(I + F_1 q^{-1}) + q^{-1} B_1 D_0 \right] \times \\ \times B_1 D_0 (I + F_1 q^{-1})^{-1} q^{-1} \Delta \bar{G}(k), \end{aligned} \quad (2.10)$$

з якого виділимо характеристичне рівняння замкненої системи:

$$\det \left[(I - A_1 q^{-1})(I + F_1 q^{-1}) + q^{-1} B_1 D_0 \right] = 0. \quad (2.11)$$

Щоб забезпечити стійкість замкненої системи (2.10) за нестійкого імпульсного процесу КК (2.4), сформуємо еталонну модель характеристичного полінома дискретної передатної функції замкненої системи (2.11):

$$I + A_M(q^{-1}) = (I - A_1 q^{-1})(I + F_1 q^{-1}) + q^{-1} B_1 D_0. \quad (2.12)$$

Корені еталонної моделі $\det \left[(I + A_M(q^{-1})) \right] = 0$ обирають за модулем, меншим за одиницю. Для забезпечення рівності (2.12) порядок еталонної моделі має дорівнювати двом, тобто

$$I + A_{M1} q^{-1} + A_{M2} q^{-2} = (I - A_1 q^{-1})(I + F_1 q^{-1}) + q^{-1} B_1 D_0. \quad (2.13)$$

Після перемноження і зведення подібних членів у правій частині, прирівнюючи коефіцієнти з відповідними степенями, дістанемо

$$A_{M1} = -A_1 + F_1 + B_1 D_0$$

$$A_{M2} = -A_1 F_1.$$

Із цих рівностей визначаємо параметри закону керування (2.9) [24]:

$$F_1 = -A_1^{-1}A_{M2}, \quad (2.14)$$

$$D_0 = B_1^{-1}(A_1 + A_1^{-1}A_{M2} + A_{M1}). \quad (2.15)$$

Таким чином, на кожному періоді дискретизації за вимірних приростів координат вершин КК $\Delta\bar{Y}_i(k)$ на основі закону керування (2.8) і параметрів регулятора (2.14), (2.15) знаходять прирости керуючих дій $\Delta\bar{u}(k)$ за $\Delta\bar{G}(k) = 0$:

$$\Delta\bar{u}(k) = -B_1^{-1}(A_1 + A_1^{-1}A_{M2} + A_{M1})(I - A_1^{-1}A_{M2}q^{-1})^{-1}\Delta\bar{Y}_i(k). \quad (2.16)$$

Замкнену систему керування імпульсним процесом КК, яка реалізується на основі (2.5), (2.9), зображено на рис. 2.1.

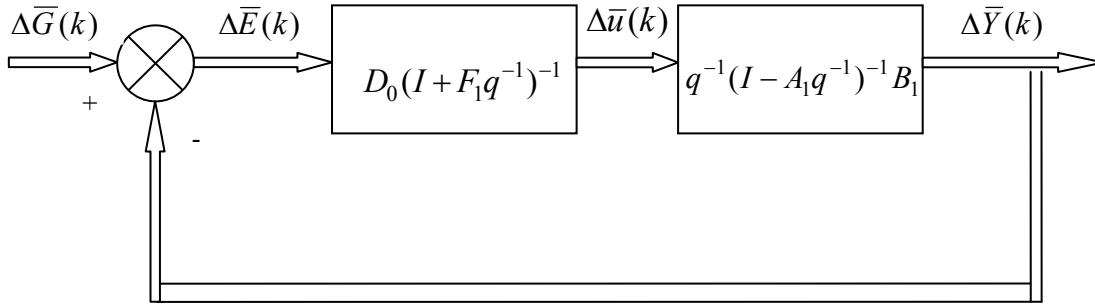


Рис. 2.1

Після перетворень приріст керуючої дії (2.16) в явному вигляді можна записати так:

$$\begin{aligned} \Delta\bar{u}(k) = & B^{-1}(A_1 + A_1^{-1}A_{M2} + A_{M1}) \times \\ & \times [A_1^{-1}A_{M2}(A_1 + A_1^{-1}A_{M2} + A_{M1})^{-1}B_1\Delta\bar{u}(k-1) - \Delta\bar{Y}(k)]. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Щоб перейти від рівнянь (2.5), (2.17), які описують замкнену систему керування, назад до КК, запишемо її в такому вигляді:

$$\begin{aligned} \Delta\bar{Y}(k) = & A_1\Delta\bar{Y}(k-1) + B_1\Delta\bar{u}(k-1); \\ \Delta\bar{u}(k) = & B^{-1}(A_1 + A_1^{-1}A_{M2} + A_{M1}) \times \\ & \times [A_1^{-1}A_{M2}(A_1 + A_1^{-1}A_{M2} + A_{M1})^{-1}B_1\Delta\bar{u}(k-1) - A_1\Delta\bar{Y}(k-1) - B_1\Delta\bar{u}(k-1)], \end{aligned}$$

або інакше

$$\begin{aligned} \Delta\bar{Y}(k) = & A_1\Delta\bar{Y}(k-1) + B_1\Delta\bar{u}(k-1); \\ \Delta\bar{u}(k) = & B^{-1}(A_1 + A_1^{-1}A_{M2} + A_{M1}) \times \\ & \times [A_1^{-1}A_{M2}(A_1 + A_1^{-1}A_{M2} + A_{M1})^{-1} - I]B_1\Delta\bar{u}(k-1) - \\ & - B^{-1}(A_1 + A_1^{-1}A_{M2} + A_{M1})A_1\Delta\bar{Y}(k-1). \end{aligned}$$

Тоді динаміку КК замкненої системи можна подати так:

$$\begin{bmatrix} \Delta \bar{Y}(k) \\ \Delta \bar{u}(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ -B_1^{-1}RA_1 & B_1^{-1}R(A_1^{-1}A_{M2}R^{-1} - I)B_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \bar{Y}(k-1) \\ \Delta \bar{u}(k-1) \end{bmatrix},$$

де $R = A_1 + A_1^{-1}A_{M2} + A_{M1}$. Таким чином, у загальному випадку матриця суміжності КК відповідної замкненої системи керування буде мати вигляд

$$\begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ -B_1^{-1}RA_1 & B_1^{-1}R(A_1^{-1}A_{M2}R^{-1} - I)B_1 \end{bmatrix}.$$

2.1.3. Метод стабілізації нестійкого перехідного процесу координат вершин когнітивної карти на заданих рівнях

Розглянемо рівняння вільного руху імпульсного процесу КК (2.1), поданого не у приростах змінних, а в повних значеннях координат вершин. Його можна записати у такому вигляді:

$$\left[I - (I + A_1)q^{-1} + A_1q^{-2} \right] \bar{Y}(k) = 0, \quad (2.18)$$

де q^{-1} – оператор зворотного зсуву на один період дискретизації.

За умови, що $\lim_{k \rightarrow \infty} \Delta Y_i(k) = 0$, для стабілізації координат вершин КК Y_i на заданих рівнях G_i треба сформувати зовнішні керуючі дії u_i , які за синтезованим законом керування діють безпосередньо на вершини КК. При цьому припускаємо, що вільний рух КК (2.18) є нестійким, тобто серед коренів $\det \left[I - (I + A_1)q^{-1} + A_1q^{-2} \right] = 0$ є корені, які за модулем більші за одиницю.

Динаміку вимушеного руху вершини КК під впливом дії зовнішніх керувань можна подати за допомогою моделі

$$\left[I - (I + A_1)q^{-1} + A_1q^{-2} \right] \bar{Y}(k) = B_1q^{-1}\bar{u}(k). \quad (2.19)$$

Закон керування в загальному вигляді сформуємо таким чином:

$$\bar{u}(k) = (D_0 + D_1q^{-1})(I + F_1q^{-1})^{-1} \left[\bar{G}(k) - \bar{Y}(k) \right]. \quad (2.20)$$

Підставивши (2.20) у (2.19), після перетворень дістанемо рівняння замкненої системи керування:

$$\begin{aligned}\bar{Y}(k) = & \left(I + F_1 q^{-1} \right) \times \\ & \times \left\{ \left(I - (I + A_1) q^{-1} + A_1 q^{-2} \right) \left(I + F_1 q^{-1} \right) + B_1 q^{-1} \left(D_0 + D_1 q^{-1} \right) \right\}^{-1} \times \\ & \times B_1 q^{-1} \left(D_0 + D_1 q^{-1} \right) \left(I + F_1 q^{-1} \right)^{-1} \bar{G}(k).\end{aligned}\quad (2.21)$$

Для характеристичного полінома замкненої системи (2.21) сформуємо таку еталонну модель:

$$\begin{aligned}I + A_{M1} q^{-1} + A_{M2} q^{-2} + A_{M3} q^{-3} = \\ = \left[I - (I + A_1) q^{-1} + A_1 q^{-2} \right] \left(I + F_1 q^{-1} \right) + B_1 q^{-1} \left(D_0 + D_1 q^{-1} \right),\end{aligned}\quad (2.22)$$

де корені полінома $\det \left[I + A_{M1} q^{-1} + A_{M2} q^{-2} + A_{M3} q^{-3} \right]$ обирають за модулем, меншими за одиницю. Після перемноження виразів у правій частині (2.22) і зведення подібних членів, прирівнюючи коефіцієнти при відповідних степенях, дістанемо такі рівності:

$$\begin{aligned}A_{M1} &= F_1 + B_1 D_0 - I - A_1; \\ A_{M2} &= A_1 - (I + A_1) F_1 + B_1 D_1; \\ A_{M3} &= A_1 F_1,\end{aligned}$$

з яких визначають параметри закону керування (2.20):

$$\begin{aligned}F_1 &= A_1^{-1} A_{M3}; \\ D_0 &= B_1^{-1} \left[I + A_1 + A_{M1} - A_1^{-1} A_{M3} \right]; \\ D_1 &= B_1^{-1} \left[(I + A_1) A_1^{-1} A_{M3} - A_1 + A_{M2} \right].\end{aligned}$$

Розглянутий метод стабілізації нестійких процесів в КК на основі еталонних моделей можна застосовувати за умови, що всі вершини Y_i КК можна змінювати під час формування керуючих дій через варіювання ресурсів указаних вершин.

2.2. Метод стабілізації нестійких імпульсних процесів у когнітивних картах на основі модального керування

Під час формування керуючих дій в більшості КК складних систем різної природи можна варіювати тільки частиною координат вершин КК. У таких випадках для розроблення систем стабілізації нестійких процесів у КК доцільно застосовувати метод модального керування [47].

Розглянемо модель керованого імпульсного процесу КК (1.18)

$$\Delta \bar{Y}(k+1) = A \Delta \bar{Y}(k) + B \Delta \bar{u}(k), \quad (2.23)$$

де $\Delta \bar{Y}(k)$ – вектор приростів координат вершин КК вимірності n , а $\Delta \bar{u}(k)$ – вектор приростів керуючих дій. Модель (2.23) є нестійкою, тобто окремі власні значення матриці стану $|\lambda_i| > 1$. Для стабілізації нестійкого процесу (2.23) синтезуємо вектор керування:

$$\Delta \bar{u}(k) = -K_p \Delta \bar{Y}(k), \quad (2.24)$$

який приводить імпульсний процес КК (2.23) до стійкого статичного стану. Підставивши (2.24) у (2.23), дістанемо рівняння замкненої системи керування:

$$\Delta \bar{Y}(k+1) = (A - BK_p) \Delta \bar{Y}(k). \quad (2.25)$$

Припустимо, що в (2.23) $\dim \bar{u}(k) < \dim \bar{Y}(k)$. Для синтезу модального регулятора (2.24) задамо спектр власних значень матриці стану $(A - BK_p)$ замкненої проєктованої системи $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n1}$, де всі значення за модулем менші від одиниці, при цьому корені $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n1}$ різні між собою і серед $\lambda_j (j=1, 2, \dots, n)$ немає власних значень матриці A . Для простоти задамо дійсний спектр λ_j .

Припустимо, що вектор керування $\bar{u}$ має вимірність m , де $m \leq n$. Введемо до розгляду вектори $\bar{R}_j, j=1, \dots, n$, які є власними векторами матриці стану замкненої системи $A - BK_p$, тобто вектори, для яких виконуються співвідношення $(A - BK_p) \bar{R}_j = \lambda_j \bar{R}_j$. Цю рівність можна записати так:

$$(A - \lambda_j I) \bar{R}_j = BK_p \bar{R}_j = B \bar{P}_j, \quad (2.26)$$

де вектори-стовпці $\bar{P}_j = K_p \bar{R}_j, j=1, \dots, n$, мають вимірність m .

Задамо довільну матрицю P з вимірністю $m \times n$ таким чином, щоб вона мала повний ранг і не мала нульових стовпців, $P = (\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots, \bar{P}_n)$. Тоді з виразу (2.26) можна знайти n векторів:

$$\bar{R}_j = (A - \lambda_j I)^{-1} B P_j, j=1, \dots, n \quad (2.27)$$

і сформувати матрицю $R = (\bar{R}_1, \bar{R}_2, \dots, \bar{R}_n)$ вимірності $n \times n$, яка буде не-виродженою. Тоді, оскільки $\bar{P}_j = K_p \bar{R}_j$, матрицю зворотного зв'язку замкненої системи можна обчислити так:

$$K_p = PR^{-1}. \quad (2.28)$$

За будовою K_p забезпечує бажаний набір коренів $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ характеристичного рівняння замкненої системи керування:

$$\det[Iq - A + BK_p] = 0.$$

Вибір матриці P впливає на характер керуючих дій, але спектр $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ замкненої системи буде інваріантним щодо P .

Розглянутий метод можливий, якщо $(A - \lambda_j I)^{-1}$ існує, тобто якщо серед λ_j немає власних значень матриці A .

Сформоване керування (2.24) подається безпосередньо на вершини КК. За потреби його можна відобразити на графі КК. Для цього запишемо (2.24) на один період вперед $\Delta \bar{u}(k+1) = -K_p \Delta \bar{Y}(k+1)$ і підставимо (2.23) $\Delta \bar{u}(k+1) = -K_p A \Delta \bar{Y}(k) - K_p B \Delta \bar{u}(k)$, що є рівнянням імпульсного процесу для вектора керування.

Якщо в КК є невимірювані вершини, то доцільно додатково ввести до рівняння стану (2.23) алгебричне рівняння вимірювання:

$$\Delta \bar{Z}(k) = C \Delta \bar{Y}(k). \quad (2.29)$$

Якщо вершини КК пронумеровані таким чином, щоб спочатку йшли вимірювані, а потім невимірювані вершини, тоді матриця C має вигляд $C = [I \ 0]$. Вектор $\Delta \bar{Z}(k)$ є вектором приростів вимірюваних координат КК ΔY_i . Тоді рівняння регулятора (2.24) перетворюється до вигляду

$$\Delta \bar{u}(k) = -K_p \Delta \hat{\bar{Y}}(k), \quad (2.30)$$

де $\Delta \hat{\bar{Y}}(k)$ – оцінка приростів координат вершин КК. Якщо система спостережувана, то оцінювання можна виконати за допомогою спостерігача Люена

$$\Delta \hat{\bar{Y}}(k+1) = A \Delta \hat{\bar{Y}}(k) + B \Delta \bar{u}(k) + L [\Delta \bar{Z}(k) - C \Delta \hat{\bar{Y}}(k)], \quad (2.31)$$

де L обирають за умови, що власні значення матриці $(A - LC)$ за модулем мають бути меншими за одиницю.

2.3. Когнітивне моделювання динаміки прийняття рішень для стабілізації нестійких режимів у соціально-навчальному процесі студента

2.3.1. Когнітивна карта соціально-навчального процесу студента

Соціально-навчальний процес студента – це складна динамічна система, яка включає багато факторів, що взаємодіють між собою та змінюються в часі. Це пов'язано з тим, що, крім навчання, студент, як правило, має родину, роботу (особливо на старших курсах), хобі тощо. Водночас часові, фізичні, матеріальні та інтелектуальні ресурси студента обмежені й тому, наприклад, збільшення часу, який студент виділяє на роботу, спричиняє зменшення часу, який він виділяє для навчання, а це, у свою чергу, викликає зниження успіхів у навчанні, що згодом може призвести і до зниженні успіхів у роботі тощо. Таким чином навіть у першому наближенні для опису життя студента потрібно застосувати модель, яка б враховувала численні взаємозв'язки між окремими факторами як у статистиці, так і в динаміці. Когнітивна карта найкраще придатна на цю роль.

Запропонуємо такі вершини КК, які найбільш повно описують життєві аспекти соціально-навчального процесу студента і є найважливішими для його моделювання [28]:

- 1) час, витрачений на навчання;
- 2) успіхи у навчанні;
- 3) час, витрачений на роботу;
- 4) успіхи в роботі;
- 5) гроші, отримані за роботу;
- 6) рівень здоров'я студента (час та фінансування на підтримку здоров'я);
- 7) сімейне благополуччя (бюджет родини);
- 8) хобі (час та гроші, витрачені на відпочинок та розваги).

У когнітивному моделюванні зазвичай зводять усі координати КК, що відображають фактори різної фізичної природи, до єдиної шкали. Справді, оскільки потрібно будувати зважений орієнтовний граф, експерти не зможуть коректно виставити ваги ребер між вершинами, якщо

їх треба вимірювати у різних одиницях – годинах, гривнях, оцінках за навчання тощо. Тому запропоновано запровадити десятибальну шкалу для вимірювання усіх вершин КК, де нуль балів означає відсутність певного фактора (не виділяється час для навчання, немає грошей за роботу тощо), а 10 балів означає максимально можливий рівень цього фактора (лише відмінні оцінки за навчання, весь денний час виділяється на роботу тощо). Очевидно, що під час встановлення значення фактора на цій шкалі виникає певний суб'єктивізм, який при цьому не заважає моделювати поведінку системи та керувати нею в цілому, оскільки головною метою когнітивного моделювання є не отримання точних числових значень, а виявлення тенденцій.

Експертним аналізом можна встановити такі логічні взаємозв'язки між вершинами КК:

1. Зростання успіхів у навчанні та збільшення часу, витраченого на роботу та на хобі, ведуть до певного зменшення часу, витраченого на навчання.

2. Збільшення часу на навчання та покращення здоров'я підвищують успіхи в навчанні, а збільшення часу, витраченого на роботу, знижує успіхи у навчанні; крім того, успіхи у навчанні мають тенденцію до збереження попередньої динаміки (продовжують зростати у разі попереднього зростання та спадають у разі попереднього спадання).

3. Збільшення часу, витраченого на навчання, та зростання сімейного благополуччя можуть скорочувати час, витрачений на роботу.

4. Підвищення успіхів у роботі веде до збільшення кількості коштів, отриманих за роботу.

5. Збільшення часу та успіхів у навчанні, а також часу, витраченого на роботу, й поліпшення здоров'я підвищують успіхи в роботі; крім того, зростання часу, витраченого на хобі, знижує успіхи в роботі, а успіхи в роботі мають тенденцію до збереження попередньої динаміки.

6. Збільшення часу, витраченого на роботу та навчання, веде до зменшення часу, що виділяється на підтримку здоров'я, а збільшення часу, що виділяється на відпочинок, може сприяти підвищенню здоров'я.

7. Збільшення кількості коштів, отриманих за роботу, може привести до покращення фінансування на підтримку здоров'я, а стан здоров'я має тенденцію до збереження попередньої динаміки.

8. Зростання суми грошей, отриманих за роботу, сприяє зростанню сімейного благополуччя, яке, до того ж, також має тенденцію до збереження попередньої динаміки.

9. Збільшення часу, що виділяється на роботу і навчання, веде до зменшення часу на хобі, а зростання кількості коштів, отриманих за роботу, підвищує можливості виділення грошей на хобі й відпочинок.

На основі наведених правил для моделювання побудовано КК у вигляді зваженого графа (рис. 2.2) згідно з [46].

Вагові коефіцієнти a_{ij} ($i = 1, 2, \dots, 8$; $j = 1, \dots, 8$) на КК чисельно відображають величину впливу кожної вершини на іншу або ступінь важливості цих взаємозв'язків. Імпульсний процес у системі, зображеної цією КК, має динаміку, яку описують рівнянням (2.1), або для оцінених вагових коефіцієнтів a_{ij} матриці A :

$$\begin{bmatrix} \Delta Y_1(k+1) \\ \Delta Y_2(k+1) \\ \Delta Y_3(k+1) \\ \Delta Y_4(k+1) \\ \Delta Y_5(k+1) \\ \Delta Y_6(k+1) \\ \Delta Y_7(k+1) \\ \Delta Y_8(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0,2 & -0,25 & 0 & 0 & 0 & 0,7 & -0,15 \\ 0,8 & 0,8 & -0,4 & 0 & 0 & 0,4 & 0 & 0 \\ -0,6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,3 & 0 \\ 0,2 & 0 & 0,8 & 0,75 & 0 & 0,5 & 0 & -0,3 \\ 0 & 0 & 0 & 0,7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,5 & 0 & -0,4 & 0 & 0,2 & 0,8 & 0 & 0,7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0,65 & -0,3 \\ -0,3 & 0 & -0,6 & 0 & 0,3 & 0 & 0,4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta Y_1(k) \\ \Delta Y_2(k) \\ \Delta Y_3(k) \\ \Delta Y_4(k) \\ \Delta Y_5(k) \\ \Delta Y_6(k) \\ \Delta Y_7(k) \\ \Delta Y_8(k) \end{bmatrix}, \quad (2.32)$$

де $\Delta \bar{Y}(k) = \bar{Y}(k) - \bar{Y}(k-1)$ – вектор приросту параметрів вершин.

Система (2.32) є нестійкою, тому що серед власних значень матриці A є за модулем більші за одиницю, а саме: власні значення матриці A дорівнюють $1,15$; $0,84 \pm j0,52$; $0,18 \pm j0,56$; $-0,48$; $-0,19$; $0,44$. Це означає, що після будь-якого, навіть незначного, зовнішнього збурення, коли система перейде у режим імпульсного процесу, соціально-навчальний стан студента почне різко змінюватись за усіма «координатами» одночасно, що може спричинити вкрай негативні наслідки. Такий процес можна спостерігати на прикладі студентів, у яких після тривалого усталеного стану раптово починаються проблеми у навчанні, роботі, сім'ї тощо.

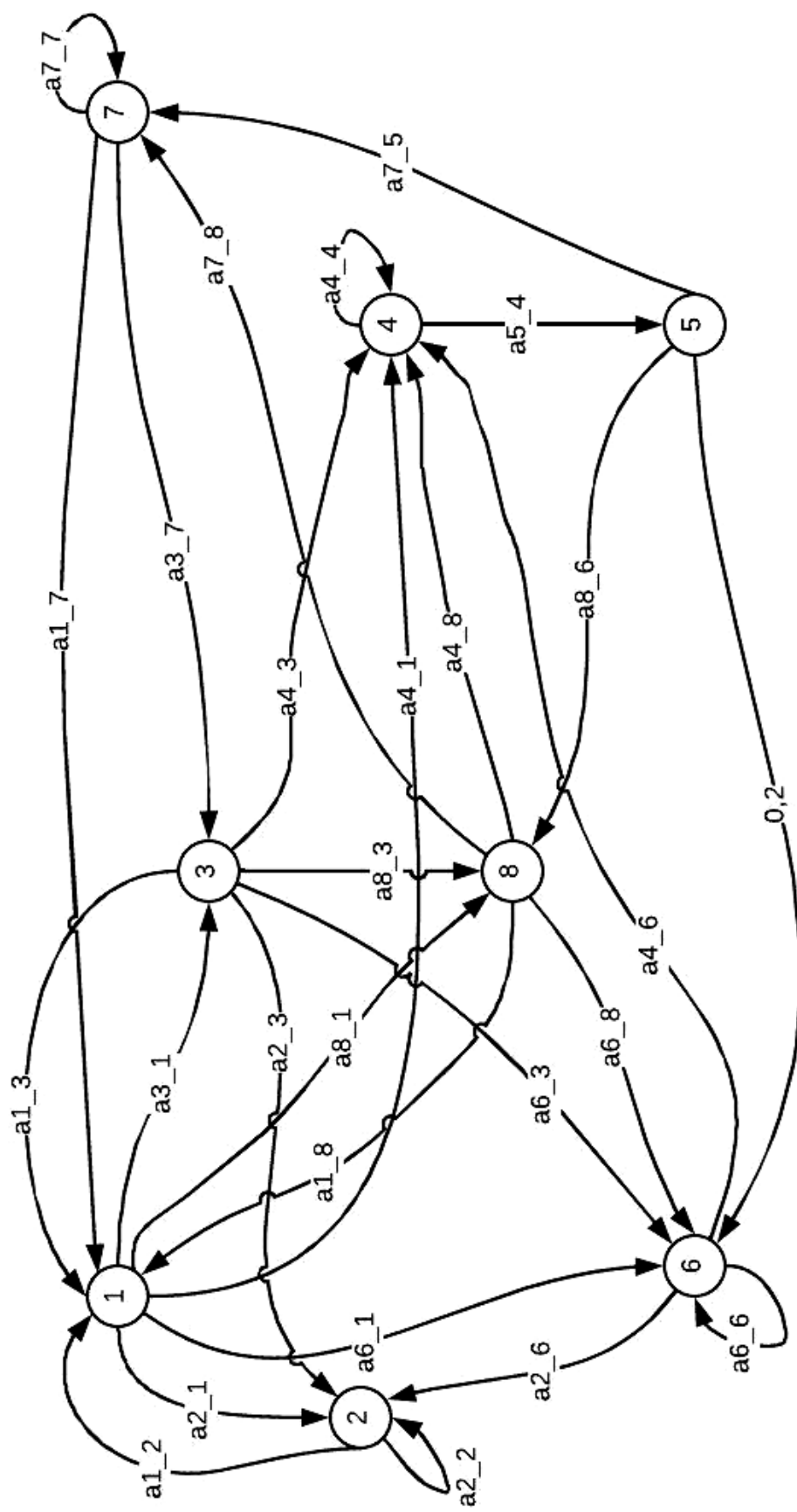


Рис. 2.2

2.3.2. Алгоритм стабілізації нестійких режимів у соціально-навчальному процесі студента на основі методу модального керування

У моделі імпульсного процесу (2.32) спочатку виділимо вершини Y_i , на які можна впливати безпосередньо через варіювання відповідними ресурсами. У цьому випадку це такі вершини: 1 (час, витрачений на навчання), 3 (час, витрачений на роботу), 6 (рівень здоров'я – час та фінансування на підтримку здоров'я), 8 (хобі – час та кошти на відпочинок і розваги). Студент як ЛПР може варіювати цими ресурсами (у розумних межах). Таким чином алгоритм керування, який треба розробити, можна трактувати як інструкцію з використання цих ресурсів у дискретні моменти часу з періодом квантування T_0 таким чином, щоб стабілізувати нестійкий соціально-навчальний процес.

На основі методу, викладеного в підрозд. 2.2, алгоритм побудови закону керування буде мати такий вигляд:

1. Формуємо матрицю керування B відповідно до обраних керованих вершин вимірністю $n \times m$, де $m = 4$ кількість керуючих дій; а $n = 8$ – кількість вершин. Таким чином, керовану систему описуватимемо рівнянням (2.23)

$$\Delta \bar{Y}(k+1) = A \Delta \bar{Y}(k) + B \Delta \bar{Y}(k),$$

де матриця керування

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Обираємо бажаний спектр власних значень стійкої замкненої системи (коренів характеристичного рівняння $\det[ZI - A + BK_p] = 0$) за модулем, меншим за одиницю. Для простоти поставимо обмеження, що ці власні значення мають бути дійсними та не дорівнюватимуть

власним значенням матриці A . Наприклад, у такому разі вектор $\bar{\lambda} = (0,25 \ 0,55 \ 0,3 \ 0,2 \ 0,1 \ 0,35 \ 0,7 \ 0,6)^T$.

3. Задаємо матрицю P вимірністю $m \times n$, тобто (4×8) , що має повний ранг і не має нульових стовпців, наприклад

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

4. Обчислюємо матрицю R як набір із $n = 8$ стовпців $\bar{R}j = (A - \lambda_j I)^{-1} B P j$, $j = 1, \dots, n$, де λ_j – власні значення з п. 2, а $\bar{P}j$ – стовпці матриці P з п. 3. Вектори $\bar{R}j$ – це власні вектори матриці стану замкненої системи $A - B K_p$. У цьому прикладі маємо

$$R = \begin{bmatrix} 2,03 & -0,93 & 4,11 & 3,12 & 2,71 & -0,78 & 0,64 & 0,85 \\ -2,25 & 7,07 & -10,26 & -6,24 & -4,55 & 3,02 & -4,34 & -3,34 \\ 0,21 & 1,00 & -2,68 & -1,90 & -1,58 & 0,80 & -0,19 & -0,06 \\ 0,62 & -0,39 & 0,57 & 0,37 & 0,21 & -0,38 & -0,59 & 0,38 \\ 1,73 & -0,50 & 1,33 & 1,30 & 1,50 & -0,76 & -0,59 & 0,44 \\ -0,76 & -1,56 & 1,92 & 1,22 & 0,96 & -1,05 & -0,40 & -0,08 \\ -0,91 & 0,04 & -2,20 & -1,63 & -1,55 & 0,62 & -0,84 & -1,58 \\ 1,67 & -0,83 & -0,35 & -0,28 & -0,36 & -0,64 & -0,85 & 0,47 \end{bmatrix}.$$

5. Обчислимо матрицю зворотного зв'язку $K_p = P R^{-1}$. У цьому прикладі матимемо

$$K_p = \begin{bmatrix} 11,04 & 1,77 & 17,76 & -10,11 & -6,63 & 15,12 & -3,19 & 3,09 \\ -8,39 & -1,30 & -14,39 & 8,51 & 5,32 & -12,66 & 2,22 & -2,37 \\ 4,53 & 0,53 & 7,36 & -3,38 & -2,41 & 5,33 & -0,68 & 0,10 \\ -6,33 & -1,04 & -9,44 & 7,18 & 3,76 & -8,96 & 1,15 & -1,93 \end{bmatrix}.$$

6. На кожному періоді дискретизації здійснюватимемо керування за законом синтезованого регулятора стану:

$$\Delta \bar{u}(k) = -K_p \Delta \bar{Y}(k). \quad (2.33)$$

Цифрове моделювання, проведене на основі алгоритму 1 – 6, продемонструвало ефективність запропонованого методу стабілізації нестійкого імпульсного соціально-навчального процесу студента (рис. 2.3, 2.4).

Початковий імпульс полягає у зменшенні координати вершини 2 (успіхи в навчанні) з 5 до 4. У результаті керування за законом (2.33) досягнуто стабілізації, причому у цьому випадку успіхи в навчанні, зрештою, зросли (як і час, витрачений на навчання), а час, витрачений на роботу, скоротився (з дуже незначним зниженням успіхів та кількості коштів). Здоров'я та сімейне благополуччя покращились, і лише час та ресурси на хобі довелося скоротити.

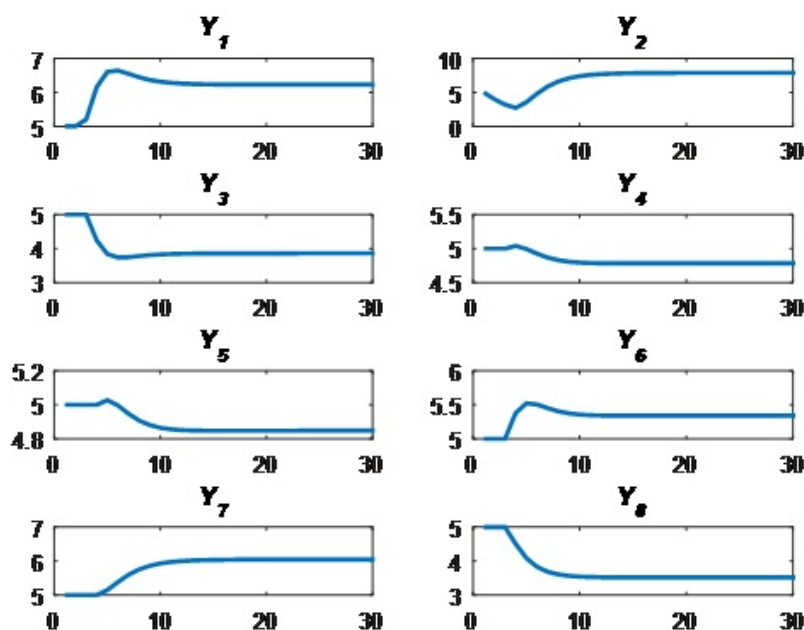


Рис. 2.3. Результати моделювання координат вершин КК студента

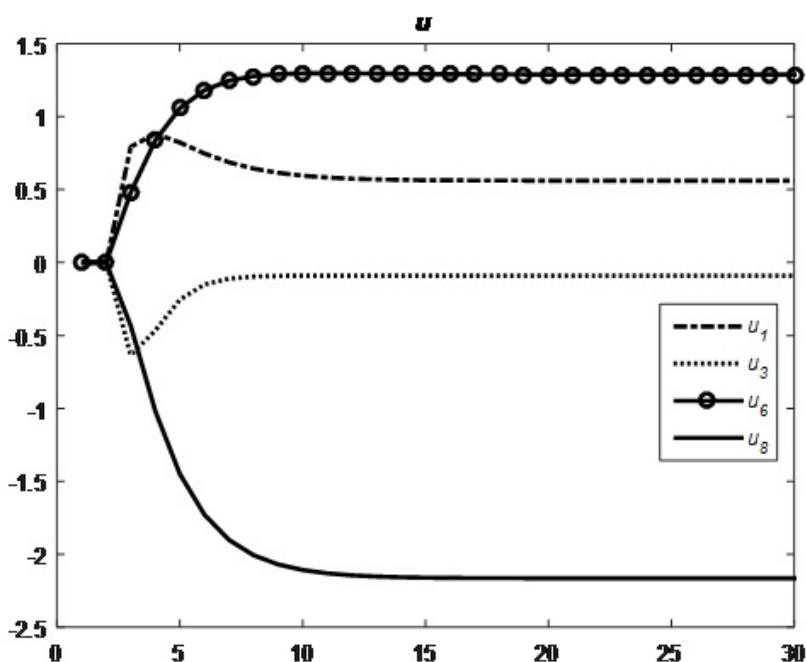


Рис. 2.4. Керування для стабілізації КК студента

2.4. Синтез слідкуючої системи керування нестійкими імпульсними процесами в ієрархічних когнітивних картах складних систем

Модель імпульсного процесу КК $\Delta \bar{Y}(k+1) = A\Delta \bar{Y}(k)$, де $\Delta \bar{Y}(k) = \bar{Y}(k) - \bar{Y}(k-1)$, запишемо у повних координатах вершин КК:

$$\left[I - (I + A)q^{-1} + Aq^{-2} \right] \bar{Y}(k) = 0, \quad (2.34)$$

де q^{-1} – оператор зворотного зсуву на один період дискретизації. При цьому корені $\det \left[I - (I + A)q^{-1} + Aq^{-2} \right] = 0$ за модулем можуть бути більшими від одиниці, що спричиняє нестійкий імпульсний процес КК. Для стабілізації координат процесу (2.34) слід сформувати вектор зовнішніх керувань, які у замкненій системі керування діють безпосередньо на вершини КК $Y_i(k)$, змінюючи їх ресурси, відповідно до синтезованого закону керування. Динаміку вимушеного руху вершин КК під час імпульсного процесу під дією зовнішніх керувань може бути подано так:

$$\left[I - (I + A)q^{-1} + Aq^{-2} \right] \bar{Y}(k) = q^{-1}B\bar{u}(k), \quad (2.35)$$

де діагональну матрицю B вибирає проєктувальник системи й на початковому етапі проєктування $B = I$.

Взаємодію процесів у складних системах можна описати ієрархічними когнітивними моделями [51]. В ієрархічних когнітивних моделях складних систем виникає необхідність негайної реалізації на заданому рівні ієрархії командних сигналів, які формуються на більш високому рівні ієрархії. Завдання полягає в розробленні слідкуючої системи керування, яка забезпечує відслідковування координатами вершин Y_i КК на заданому рівні ієрархії стрибкоподібних змін задавальних дій G_i , що формуються на більш високому ієрархічному рівні. При цьому припускають, що вихідна модель імпульсного процесу (2.34), (2.35) в КК на заданому рівні ієрархії є нестійкою.

Запишемо модель імпульсного процесу (2.35) через оператор прямого зсуву q у вигляді

$$\left[Iq^2 - (I + A)q + A \right] \bar{Y}(k) = qB\bar{u}(k), \quad (2.36)$$

на основі цієї моделі матрична дискретна передатна функція КК у режимі імпульсних процесів матиме вигляд

$$W(z) = [Iz^2 - (I + A)z + A]^{-1} zB, \quad (2.37)$$

де z – оператор z -перетворення.

Щоб реалізувати слідкуючу систему керування, необхідно виконати синтез замкнутого контура керування координатами вершин КК на заданих рівнях у вигляді структурної схеми (рис. 2.5).

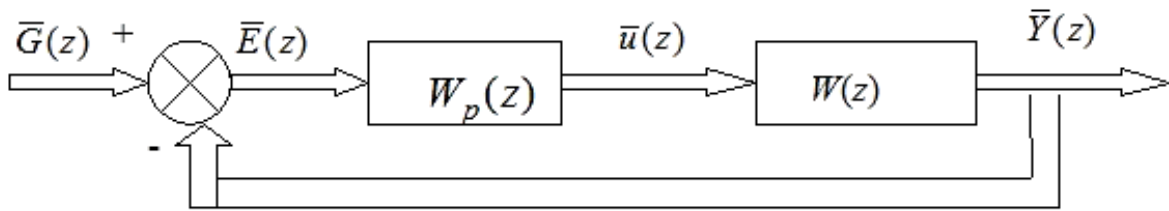


Рис. 2.5. Контур керування КК слідкуючої системи:

$W_p(z)$ – матрична дискретна передатна функція синтезованого слідкуючого регулятора;

$\bar{G}(z)$ – вектор задавальних дій, які формуються на більш високому рівні ієрархічної когнітивної моделі

Складові вектора $\bar{G}(z)$ (рис. 2.5) змінюються стрибкоподібно, як командний сигнал з більш високого рівня ієрархії. Цю зміну задавальних дій слід виконувати негайно. Математична модель стрибкоподібної зміни i -ї складової вектора $\bar{G}(z)$ у формі z -перетворення має вигляд

$$G_i(z) = \frac{\Delta G_i z}{z - 1}, \quad (2.38)$$

де ΔG_i – величина стрибкоподібної зміни G_i .

Полюс передатної функції $G_i(z)$ дорівнює одиниці, що характеризує зміну функції $G_i(z)$ на межі стійкості. Оскільки імпульсний процес в КК на цьому рівні є нестійким, то зміна командного сигналу $G_i(z)$ на межі стійкості внесе додаткову дестабілізацію в динаміку керованої системи імпульсним процесом КК.

Матрична дискретна передатна функція замкнутої системи по каналу « $\bar{G}(z) \rightarrow \bar{E}(z)$ »

$$W_E(z) = [I + W(z)W_p(z)]^{-1}. \quad (2.39)$$

З урахуванням (2.37) функцію (2.39) можна записати так:

$$W_E(z) = \left[I + \left(Iz^2 - (I + A)z + A \right)^{-1} zBWp(z) \right]^{-1}. \quad (2.40)$$

Якщо взяти до уваги, що матричний поліном

$$Iz^2 - (I + A)z + A = (z - 1)(zI - A), \quad (2.40a)$$

то вираз (2.40) після перетворень набуде вигляду

$$W_E(z) = \left[(z - 1)(zI - A) + zBWp(z) \right]^{-1} (zI - A)(z - 1), \quad (2.41)$$

де $(z - 1)(zI - A) + zBWp(z)$ – характеристичний матричний поліном замкненої системи керування.

Введемо еталонну матричну модель характеристичного полінома [51]:

$$A_M(z) = (z - 1)(zI - A) + zBWp(z), \quad (2.42)$$

в якій корені $\det A_M(z) = 0$ обирає проєктувальник системи в межах $|z_i| < 1$, щоб еталонна модель була стійкою. Тоді матричну дискретну передатну функцію (2.41) можна записати так:

$$W_E(z) = A_M^{-1}(z) (zI - A) (z - 1). \quad (2.43)$$

Якщо врахувати, що $\bar{E}(z) = W_E(z)\bar{G}(z)$, то під час застосування моделі (2.38) у замкненій системі (2.43) буде нейтралізований вплив коренів $z_i = 1$, які з'являються у разі ступінчатої зміни задавальних дій G_i .

Дискретний регулятор синтезуємо на основі рівності (2.39):

$$W_p(z) = W^{-1}(z)W_E^{-1}(z)[I - W_E(z)].$$

Підставимо у цю рівність вирази (2.37), (2.43), враховуючи, що $(zI - A)(z - 1) = Iz^2 - (I + A)z + A$. Після перетворень дістанемо

$$W_p(z) = z^{-1}B^{-1}[A_M(z) - (zI - A)(z - 1)]. \quad (2.44)$$

Відповідно до структури характеристичного полінома (2.42) сформуємо структуру еталонної моделі:

$$A_M(z) = z^2I + A_{M_1}z + A_{M_2}.$$

Тоді закон керування слідкуючого дискретного регулятора (2.44) набуває такої форми [51]:

$$\begin{aligned} \bar{u}(z) &= z^{-1}B^{-1} \left[z^2I + A_{M_1}z + A_{M_2} - z^2I + (I + A)z - A \right] \bar{E}(z) = \\ &= B^{-1} \left[(A_{M_2} - A)z^{-1} + (I + A + A_{M_1}) \right] \bar{E}(z). \end{aligned}$$

Цей закон керування можна записати у часовій області у формі різницевого рекурентного виразу

$$\bar{u}(k) = B^{-1} \left[(A_{M_2} - A) \bar{E}(k-1) + (I + A + A_{M_1}) \bar{E}(k) \right], \quad (2.45)$$

на основі якого формується траєкторія керуючих дій слідкуючої системи керування імпульсним процесом КК.

Щоб дослідити якість функціонування замкненої слідкуючої системи керування по каналу «вектор задавальних дій $\bar{G}(k) \rightarrow$ вектор вихідних керованих координат КК $\bar{Y}(k)$ », у (2.35) підставимо значення сформованого вектора $\bar{u}(k)$ (2.45). Враховуючи, що $\bar{E}(\bullet) = \bar{G}(\bullet) - \bar{Y}(\bullet)$, після перетворень дістанемо траєкторію слідкування вектора $\bar{Y}(k)$ за зміною задавальних дій $\bar{G}(k)$:

$$\begin{aligned} \bar{Y}(k) = & -A_{M_1} \bar{Y}(k-1) - A_{M_2} \bar{Y}(k-2) + \\ & + \left[I + A + A_{M_1} \right] \bar{G}(k-1) + (A_{M_2} - A) \bar{G}(k-2). \end{aligned} \quad (2.46)$$

2.5. Задачі стабілізації нестійких імпульсних процесів у когнітивній карті комерційного банку

2.5.1. Когнітивна карта комерційного банку

Розглянемо роботу комерційного банку як складну динамічну систему, функціонування якої можна подати у вигляді КК, яка відображає взаємозв'язок основних фінансових показників, факторів, ризиків тощо. Основні вершини КК і взаємозв'язок між ними показано на рис. 2.6 [45].

Введено такі означення вершин КК: 1 (регіональна мережа); 2 (капітал); 3 (кредити); 4 (депозити); 5 (ліквідні активи); 6 (міра ризику стабільності); 7 (міра ризику ліквідності).

Вагова матриця суміжності імпульсного процесу $\Delta \bar{Y}(k+1) = A \Delta \bar{Y}(k)$ має вигляд

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0,15 & 0 & 0 & 0,1 & 0 & 0 \\ -0,2 & 0 & 0,13 & -0,2 & 0,03 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0,95 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0,8 & 0 & -0,5 & 0 \\ 0 & 0,85 & -0,95 & 0,9 & 0 & 0 & -0,8 \\ 0 & -0,5 & 0,3 & 0 & 0 & 1,05 & 0 \\ 0 & 0 & 0,1 & -0,2 & 0,8 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

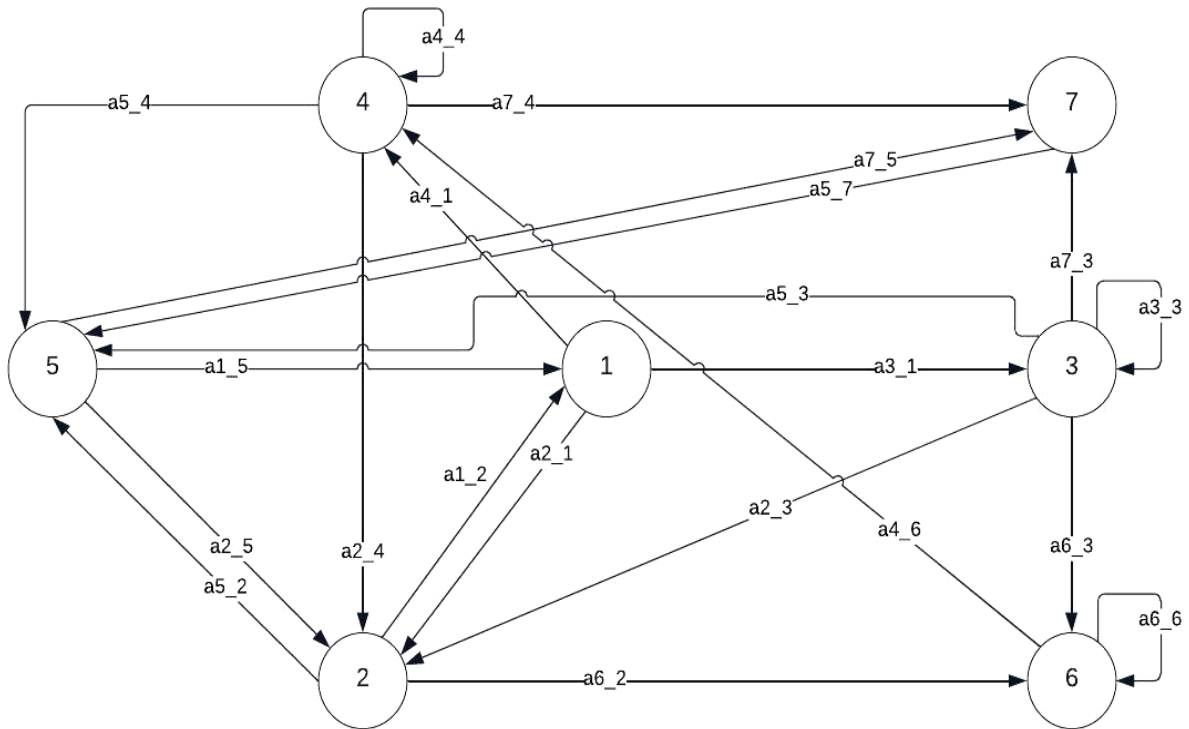


Рис. 2.6. Когнітивна карта комерційного банку

Ця система є нестійкою тому, що власні значення матриці A дорівнюють $0,1127 \pm 0,7289j$; $-0,0873 \pm j0,1701$; $0,6415$; $1,0538 \pm j0,3134$ (останні два значення за модулем більші від одиниці). Три вершини КК мають інерційність, яку на КК позначено петлями: 2 (кредити), 4 (депозити) і 6 (міра ризику стабільності) мають тенденції до збереження попередньої динаміки, тобто продовжують зростати у разі попереднього зростання або спадають у разі попереднього спадання.

2.5.2. Стабілізація нестійких процесів у разі банкрутства комерційного банку

Щоб розробити систему стабілізації нестійких імпульсних процесів КК комерційного банку, застосуємо метод модального керування, описаний в підрозд. 2.2.

Розглянемо два варіанти проєктування системи стабілізації.

Перший варіант полягає в тому, що керуюча дія $u(k)$ подається в моделі імпульсного процесу $\Delta \bar{Y}(k+1) = A \Delta \bar{Y}(k) + B \Delta u(k)$ тільки на одну вершину КК «3 – кредити». Тобто припустимо, що єдиною керуючою дією є змінювання обсягу кредитного портфеля. Тоді, відповідно до обраної керуючої дії, вектор $B = [0010000]^T$.

Обираємо бажаний спектр власних значень стійкої замкненої системи (коренів характеристичного рівняння $\det[zI - A + BK_p] = 0$ за модулем, менших за одиницю):

$$\lambda_1 = 0,5; \lambda_2 = 0,4; \lambda_3 = 0,3; \lambda_4 = 0,2; \lambda_5 = -0,3; \lambda_6 = -0,5; \lambda_7 = -0,7.$$

Вектор коефіцієнтів регулятора $\Delta u(k) = \bar{K}_p \Delta \bar{Y}(k)$ має вигляд

$$\bar{K}^T = [K_7 \ K_6 \ K_5 \ K_4 \ K_3 \ K_2 \ K_1].$$

Визначимо цей вектор за заданих коренів характеристичного рівняння замкненої системи керування. За однієї керуючої дії $u(k)$ ця задача розв'язується однозначно:

$$\det[zI - A + BK] = (z - 0,5)(z - 0,4)(z - 0,3)(z - 0,2)(z + 0,3)(z + 0,5)(z + 0,7).$$

Перемноживши і прирівнявши коефіцієнти з відповідними степенями z^i у лівій і правій частинах цієї рівності, отримуємо систему рівнянь, з якої дістаємо відповідний вектор $\bar{K}_p$ закону керування:

$$\bar{K}_p = [2,5973 \ 4,4349 \ -2,85 \ 2,4876 \ 0,7215 \ -4,0154 \ -1,2948].$$

Результати моделювання перехідних процесів у замкненій системі керування показано на рис. 2.7.

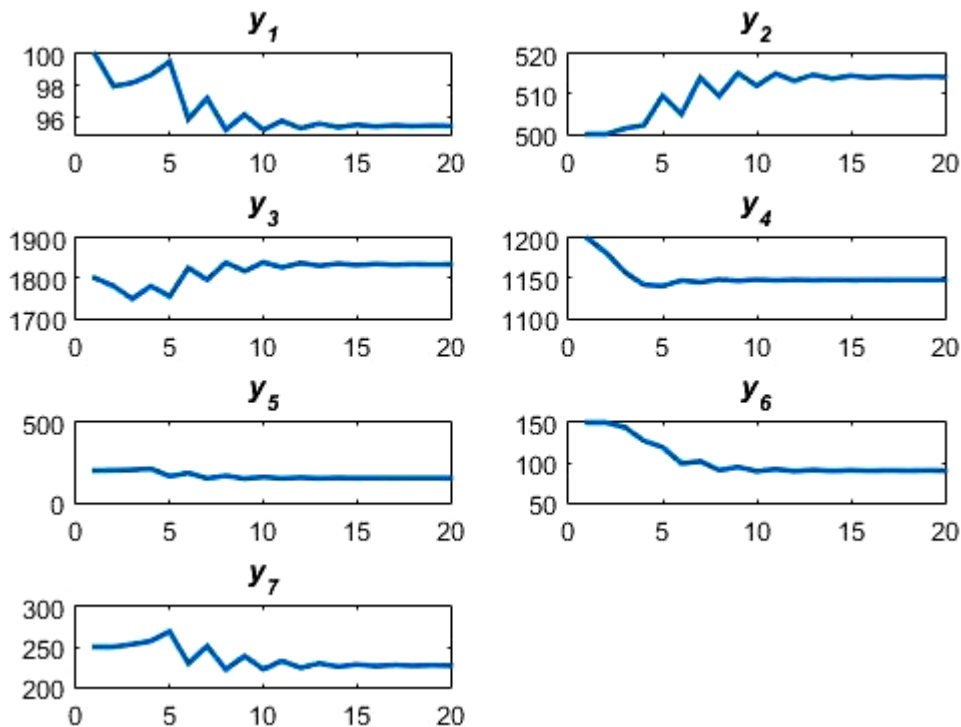


Рис. 2.7. Динаміка зміни координат вершин КК за однієї керуючої дії

Перехідний процес керуючої дії $u(k)$ після стабілізації імпульсного процесу в КК зображено на рис. 2.8.

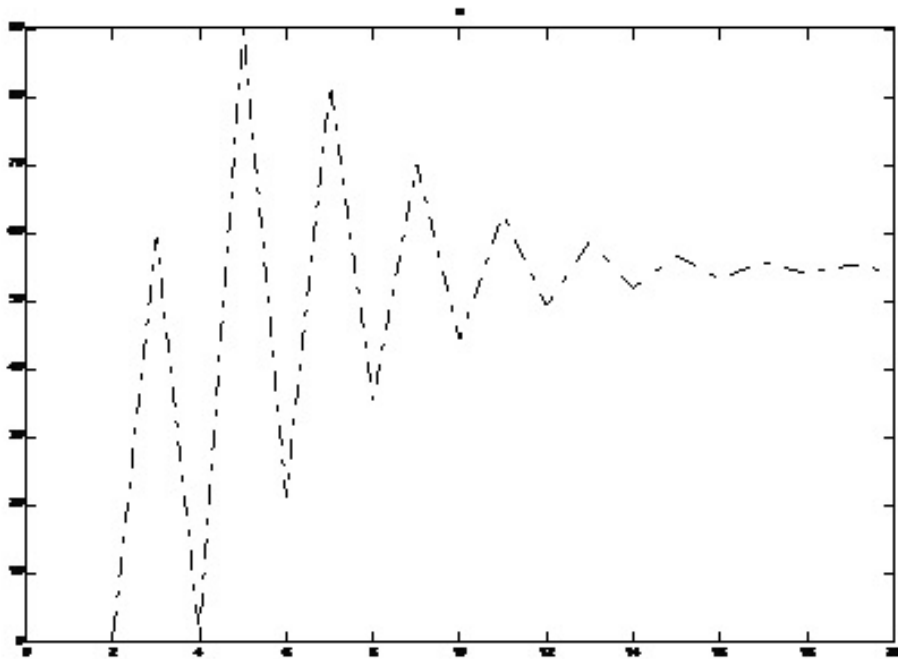


Рис. 2.8. Динаміка зміни однієї керуючої дії

Із рис. 2.8 видно великі коливання $u(k)$ під час стабілізації нестійкого процесу в комерційному банку за рахунок варіації кредитів.

Розглянемо другий варіант, коли дію нестійкого процесу реалізують варіюванням трьох вершин КК: 3 (кредити), 4 (депозити), 5 (ліквідні активи). Для порівняння з першим варіантом задамо такий самий спектр власних значень замкненої системи:

$$\bar{\lambda} = [0,5 \quad 0,4 \quad 0,3 \quad 0,2 \quad -0,3 \quad -0,5 \quad -0,7]^T.$$

Сформуємо матрицю керування B (7×3) відповідно до обраних керуваних вершин:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Задамо допоміжну матрицю P (3×7), що має повний ранг і не має нульових стовпців:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Обчислюючи матрицю R як набір з $n = 7$ стовпців, $\bar{R}j = (A - \lambda_i I)^{-1} B P_j$, де λ_i – значення j -го коефіцієнта вектора $\bar{\lambda}$, визначимо матрицю закону керування $K_p = P R^{-1}$ модального регулятора $\Delta \bar{u}(k) = -K_p \Delta \bar{Y}(k)$:

$$K = \begin{bmatrix} -5,8598 & 0,1261 & -0,8622 & -2778 & -0,1907 & -1,3266 & 0,1016 \\ -2,2380 & -0,6768 & 0,0947 & -0,6815 & -0,0780 & 0,1143 & 0,0293 \\ 1,1015 & -1,4347 & 0,1766 & 0,3720 & -1,3063 & 1,2721 & 0,0877 \end{bmatrix}.$$

Результати моделювання перехідних процесів координат вершин КК у разі застосування трьох керуючих дій показано на рис. 2.9.

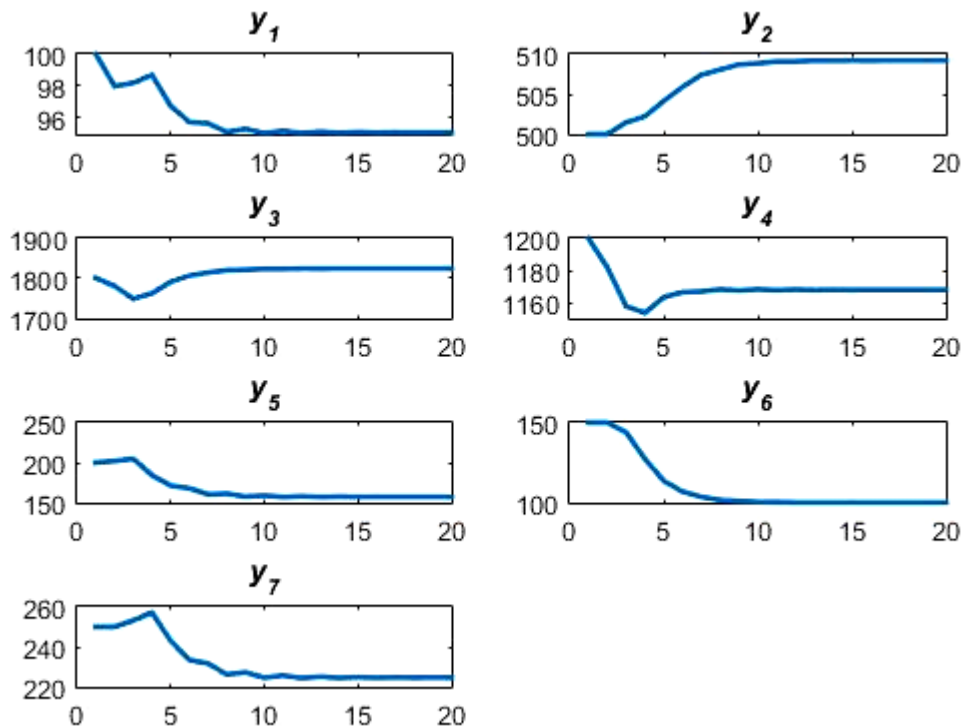


Рис. 2.9. Динаміка зміни координат вершин КК з трьома керуючими діями

Динаміку зміни керуючих дій під час стабілізації нестійких процесів показано на рис. 2.10.

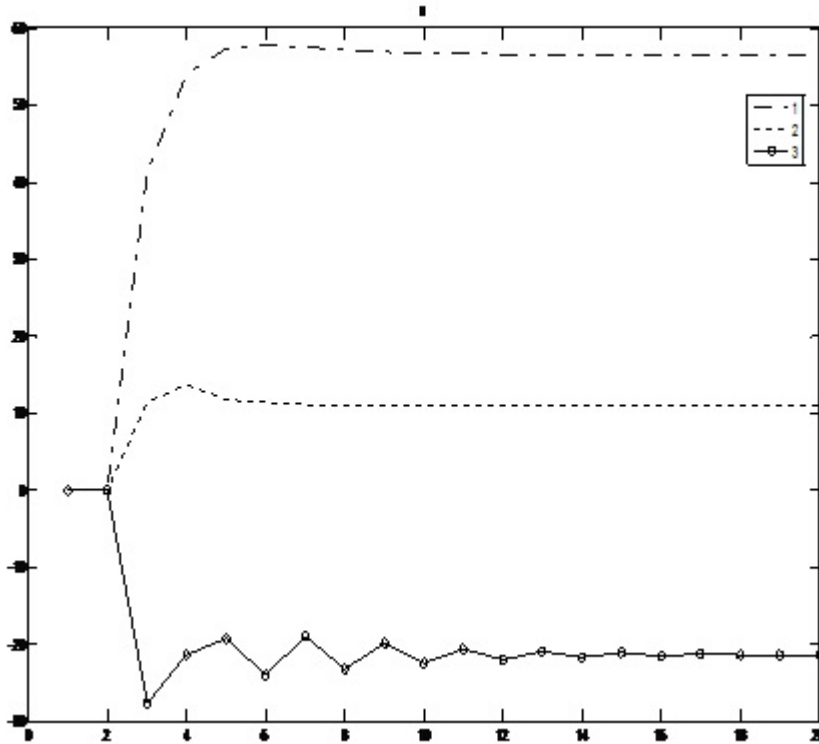


Рис. 2.10. Графіки перехідних процесів керуючих дій: u_1 – кредити (вершина 3), u_2 – депозити (вершина 4), u_3 – ліквідні активи (вершина 5)

2.5.3. Моделювання слідкуючої системи керування нестійкими імпульсними процесами в ієрархічних когнітивних картах комерційних банків

Припустимо, що КК на рис. 2.6 описує окрему філію банку в банківській групі. Тоді її можна розглядати як нижній рівень ієрархії у складній ієрархічній системі. Нехай під час моделювання слідкуючої системи керування як задавальні дії $\bar{G}(k)$, які формуються на верхньому рівні ієрархії (головного офісу банку або банківської групи), на КК нижнього рівня (рис. 2.5) подається серія ступінчатих сигналів. Тоді на регулятор (2.46) буде подаватися помилка регулювання $\bar{E}(k) = \bar{G}(k) - \bar{Y}(k)$, і закон керування регулятора в різницевій формі матиме вигляд [51]

$$\bar{u}(k) = (I + A + A_{M_1})\bar{E}(k) + (A_{M_2} - A)\bar{E}(k - 1). \quad (2.47)$$

Динаміку вимушеного руху вершин КК комерційного банку під час імпульсного процесу (2.35) подамо у формі

$$\bar{Y}(k) = (I + A)\bar{Y}(k - 1) - A\bar{Y}(k - 2) + B\bar{u}(k - 1).$$

Матрицю суміжності A імпульсного процесу КК беремо у вигляді, запропонованому в підрозд. 2.5.1, із власними значеннями $0,1127 \pm 0,7289j$; $-0,0873 \pm 0,1701j$; $0,6415$; $1,0538 \pm j0,3134$, тобто КК є нестійкою. Для моделювання візьмемо такі початкові значення координат вершин КК: $Y_{1\text{поч}} = 100$; $Y_{2\text{поч}} = 500$; $Y_{3\text{поч}} = 1500$; $Y_{4\text{поч}} = 1000$; $Y_{5\text{поч}} = 200$; $Y_{6\text{поч}} = 150$; $Y_{7\text{поч}} = 250$.

Як еталонну модель замкненої системи (характеристичний поліном (2.40a)) оберемо діагональний матричний поліном з поліномами другого порядку в головній діагоналі з такими коренями: $0,1$; $0,1$; $0,3$; $0,4$; $0,2$; $0,2$; $0,2$; $0,3$; $0,5$; $0,6$; $0,1$; $0,1$; $0,5$; $0,6$. У результаті моделювання побудуємо графіки зміни координат вершин КК Y_i , (рис. 2.11, суцільна лінія) і задавальних дій G_i ($i = 1, 2, \dots, 7$) (рис. 2.11, пунктирна лінія).

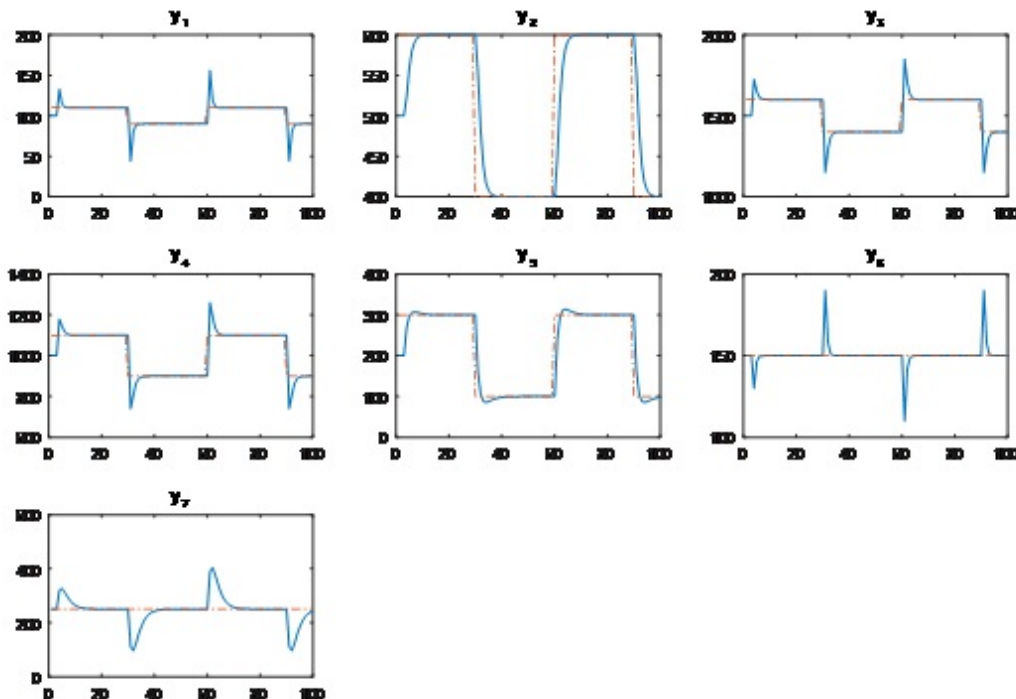


Рис. 2.11. Графіки перехідних процесів координат вершин КК комерційного банку під час моделювання слідкуючої системи керування

Із графіків можна зробити висновки, що всі змінні задавальних дій G_i відслідковуються досить швидко і точно. Коливання вершин Y_6 та Y_7 , якщо немає відповідних змін задавальних дій G_6 і G_7 , з'являються тому, що ризики стабільності й ліквідності не можуть не коливатися зі зміною останніх вершин КК. Однак ці вершини залишаються на вихідних стабільних рівнях.

2.6. Метод керування нестійкими імпульсними процесами в когнітивних картах із запізненнями

У попередніх дослідженнях було зроблено припущення, що всі взаємодії в КК відбуваються без затримок, тобто імпульси, які подаються на одні вершини КК, спричиняють імпульси в сусідніх вершинах вже в наступному періоді дискретизації. На практиці в реальних системах наявні запізнення, особливо у прийнятті рішень, коли керуючі дії $\bar{u}(k)$ виконує із запізненням ЛПР.

Під час розроблення системи керування імпульсними процесами в КК слід розглянути два види запізнень [17]:

- а) запізнення за керуванням;
- б) запізнення, що виникають під час взаємодії між вершинами КК.

Керування імпульсними процесами когнітивних карт з різними запізненнями в каналах керування

Нехай імпульсний процес КК описуємо різницеvim рівнянням першого порядку у приростах змінних (2.1):

$$\Delta \bar{Y}(k+1) = A \Delta Y(k),$$

де $\Delta \bar{Y}(k) = \bar{Y}(k) - \bar{Y}(k-1)$, а матриця суміжності A має розмірність $n \times n$. Запишемо це рівняння у повних значеннях координат вершин КК:

$$\left[I - (I + A)q^{-1} + Aq^{-2} \right] \bar{Y}(k) = 0, \quad (2.48)$$

де q^{-1} – оператор зворотного зсуву на один період дискретизації.

Розглянемо КК, на вершини якої можна діяти за допомогою зовнішніх керувань. Тоді модель вимушеного руху імпульсного процесу можна записати у вигляді моделі типу «вхід – вихід» (2.19):

$$\left[I - (I + A)q^{-1} + Aq^{-2} \right] \bar{Y}(k) = q^{-1} B \bar{u}(k), \quad (2.49)$$

де матрицю B вибирає ЛПР. Якщо $\dim \bar{u} = \dim \bar{Y}$, матрицю B зазвичай беруть одиничною: $B = I$.

Введемо в модель (2.49) запізнення за керуванням [17]:

$$\left[I - (I + A)q^{-1} + Aq^{-2} \right] \bar{Y}(k) = q^{-1} B \text{diag} \left\{ q^{-d_j} \right\} \bar{u}(k), \quad (2.50)$$

де

$$\text{diag}\{q^{-d_j}\} = \begin{bmatrix} q^{-d_1} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & q^{-d_n} \end{bmatrix}, \quad j = 0, \dots, n,$$

$d_j = \left\lceil \frac{\tau_j}{T_0} \right\rceil$ – ціле число від ділення часу запізнення τ_j на період дискретизації T_0 . При цьому $0 \leq d_j \leq d_{\max}$, де $d_{\max}$ – максимально можливе запізнення. Модель (2.50) відображає те, що керування $\bar{u}(k)$ спричиняють зміни у вершинах з деякою затримкою, позаяк керуючі дії $\bar{u}_j(k)$ виконує ЛПР, то запізнення d_j з виконанням цих рішень є відомим.

Закон керування регулятора для моделі (2.49) без запізнень може бути вибраний у формі

$$\bar{u}(k) = (P_1 + P_2 q^{-1}) [\bar{G} - \bar{Y}(k)], \quad (2.51)$$

де вектор задавальних дій $\bar{G}$ обирають для бажаних значень, на яких мають стабілізуватися координати $\bar{Y}(k)$ вершин КК, а матриці P_1, P_2 треба спроектувати.

Для системи із запізненням (2.50) закон керування пропонуємо задати у такій формі:

$$\text{diag}\{q^{d_{\max} - d_j}\} \bar{u}(k) = (P_1 + P_2 q^{-1}) [\bar{G} - \bar{Y}(k + d_{\max})], \quad (2.52)$$

тобто в момент часу k обчислюють вектор майбутніх керувань,

$$\begin{bmatrix} u_1(k + d_{\max} - d_1) \\ \dots \\ u_n(k + d_{\max} - d_n) \end{bmatrix}.$$

Щоб отримати рівняння динаміки замкненої системи керування, помножимо ліву і праву частини (2.52) на $q^{-d_{\max}}$,

$$\text{diag}\{z^{-d_j}\} \bar{u}(k) = (P_1 + P_2 q^{-1}) [\bar{G} - \bar{Y}(k)],$$

і підставимо в (2.50):

$$[I - (I + A)q^{-1} + Aq^{-2}] \bar{Y}(k) = q^{-1} B (P_1 + P_2 q^{-1}) [\bar{G} - \bar{Y}(k)].$$

Після зведення подібних членів і спрощення дістанемо рівняння замкненої системи керування:

$$\left[I + (BP_1 - I - A)q^{-1} + (BP_2 + A)q^{-2} \right] \bar{Y}(k) = q^{-1}B(P_1 + P_2q^{-1})\bar{G}. \quad (2.53)$$

Характеристичне рівняння замкненої системи має вигляд

$$\det \left[I + (BP_1 - I - A)q^{-1} + (BP_2 + A)q^{-2} \right] = 0. \quad (2.54)$$

Для проєктування регулятора (2.52) задамо еталонну модель бажаного характеристичного рівняння (2.54) у вигляді

$$\det \left(I + A_{M_1} q^{-1} + A_{M_2} q^{-2} \right) = 0, \quad (2.55)$$

корені якого обирають за модулем, меншим від одиниці, щоб замкнена система була стійкою.

Щоб характеристичне рівняння (2.54) відповідало еталонному рівнянню, достатньо вибрати P_1 і P_2 таким чином, щоб

$$I + A_{M_1} q^{-1} + A_{M_2} q^{-2} = I + (BP_1 - I - A)q^{-1} + (BP_2 + A)q^{-2},$$

звідки отримуємо матриці P_1, P_2 регулятора (2.52):

$$\begin{aligned} P_1 &= B^{-1} (I + A + A_{M_1}); \\ P_2 &= B^{-1} (A_{M_2} - A). \end{aligned} \quad (2.56)$$

Для застосування закону керування (2.52) в момент K треба знати, крім коефіцієнтів (2.56), прогнозоване значення вектора майбутніх координат вершин $\bar{Y}(k + d_{\max})$. Оскільки система є детермінованою, це можна виконати таким чином. Перемножимо ліву і праву частини моделі (2.50) на оператор прямого зсуву $q^{d_{\max}}$, тоді (2.50) можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} \bar{Y}(k + d_{\max}) &= (I + A)\bar{Y}(k + d_{\max} - 1) - A\bar{Y}(k + d_{\max} - 2) + \\ &+ B \text{diag} \{ q^{d_{\max} - d_i} \} \bar{u}(k - 1), \end{aligned} \quad (2.57)$$

де $\bar{Y}(k + d_{\max} - 1)$, $\bar{Y}(k + d_{\max} - 2)$, $\text{diag} \{ q^{d_{\max} - d_i} \} \bar{u}(k - 1)$ були аналогічно обчислені на попередніх кроках за формулами (2.52) й (2.57). Початкові значення керувань для цієї рекурентної процедури нульові. Тоді початкові значення для координат вершин КК знаходять на основі (2.48).

Приклад. Розглянемо КК комерційного банку, наведену в підрозд. 2.5.1. Зауважимо, що імпульсний процес цієї КК є нестійким, тому що серед власних значень матриці A є такі, що за модулем перевищують одиницю. На всі вершини КК можна впливати зовні, але очевидно, що ці впливи діють із різними запізненнями. Якщо, наприклад, капітал (вершина 2) можна змінити одразу (якщо це взагалі можливо), то для нарощування кредитного чи депозитного портфелю до заданого обсягу від моменту прийняття рішення має пройти певний час. Тому будемо описувати динаміку банку в імпульсному процесі за допомогою моделі (2.50), де запізнення $d_1 = d_2 = 0$; $d_3 = d_4 = 2$; $d_5 = 1$; $d_6 = d_7 = 3$. Тобто матриця запізнення

$$\text{diag}\{q^{-d_j}\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q^{-2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q^{-2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q^{-3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q^{-3} \end{bmatrix}.$$

Нехай початкові значення вершин

$$\bar{Y}(0) = [100, 500, 1500, 1000, 200, 150, 250]^T,$$

а початкові прирости

$$\Delta \bar{Y}(1) = [-2, 0, -20, -18, 2, 0, 0]^T.$$

Задамо діагональні матриці еталонної моделі A_{M_1} , A_{M_2} таким чином, щоб усі корені характеристичного рівняння дорівнювали 0,1 й 0,2. Тоді $A_{M_1} = -0,3I$, $A_{M_2} = 0,02I$. Задамо бажані значення вершин КК, на які планується перевести режим комерційного банку, встановивши вектор задавальних дій: $\bar{G} = [200, 1000, 1500, 600, 100, 100, 300]^T$.

На рис. 2.12 показано результати моделювання з формулами (2.50), (2.52), (2.56) та (2.57).

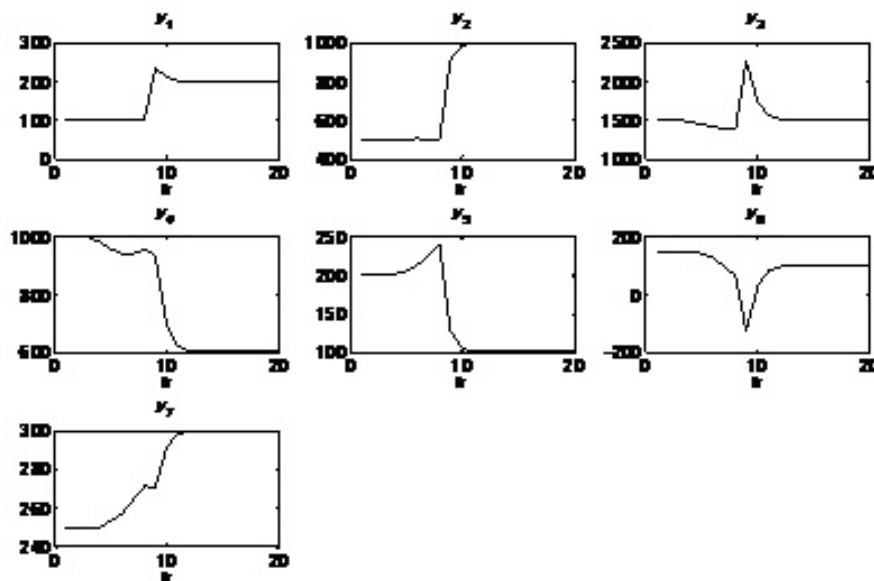


Рис. 2.12. Графіки перехідних процесів координат комерційного банку під час моделювання системи керування імпульсного процесу КК з різними запізненнями в каналах керування

2.7. Проектування і дослідження системи стабілізації нестійкого курсу криптовалюти на основі моделі імпульсного процесу когнітивної карти

2.7.1. Побудова когнітивної карти застосування криптовалюти на фінансовому ринку

Криптовалюта (зокрема, біткоїн) займає проміжне місце між звичайною валютою та цінними паперами. У біткоїна є користувачі, які неофіційно створюють своєрідний «валовий внутрішній продукт», а також є компанії, які приймають платежі у цій валюті. Кількість користувачів можна оцінити за кількістю операцій між «гаманцями» і з перерахування фінансів між ними. Це доступна інформація, згідно з якою можна побачити перерахування, виконані через біткоїни, однак при цьому немає прив'язки «гаманця» до конкретної людини. Для проведення операцій з криптовалютою, укладання контрактів на придбання біткоїнів та отримання кредитів створюється біржа, на якій є визначена кількість користувачів і кожний день витрачається певна сума коштів (обсяг торгів). Також можуть функціонувати і декілька бірж. Кожна біржа являє собою звичайну компанію, якій користувачі довірили свої гроші й фактично

підтримують її розвиток. На біржі створюється ціна біткоїна. Під час формування початкової ціни біткоїна (під час майнінгу) біткоїн має ціну в інтервалі від 2000 до 3000 доларів, але очікування від введення його як звичайної платіжної системи дозволяє підтримувати його ціну більш ніж 10 000 доларів. Однак будь-яка фінансова новина приводить до значного коливання ціни біткоїна [55].

На процеси застосування криптовалюти діють різні збурення, які направлені на зниження рівня довіри до її використання. Тому у фінансових операціях із криптовалютою виникають такі ризики:

а) ризик втрати користувачів, який приводить до зменшення ціни біткоїна;

б) ризики, пов'язані з некоректними загальними очікуваннями багатьох користувачів одночасно, які створюються маніпулюванням трейдерів на біржах;

в) ризик різкого обвалу ціни криптовалюти в результаті звичайних махінацій на біржах, до яких можна віднести високочастотний трейдинг, який полягає у великій швидкості купівлі грошових активів до приходу інвестора і продажі їх йому ж, доки інформація про купівлю дійде до інших бірж;

г) ризик, пов'язаний з відсутністю гарантій на цілісність капіталу, який вкладений у купівлю криптовалюти, що приводить до певної істерії користувачів у процесі проведення торгів на біржах.

На рис 2.13 зображено схему КК, розроблену на основі причинно-наслідкових зв'язків. Вершини КК мають такі значення: 1 – попит на криптовалюту; 2 – курс криптовалюти (вартість біткоїна); 3 – обсяг торгів криптовалюти; 4 – обсяг капіталізації; 5 – кількість користувачів криптовалюти; 6 – обсяг інвестицій (інтерес інституційних інвесторів до біткоїна); 7 – обсяг спекуляцій криптовалютою; 8 – опосередкований прибуток; 9 – рівень довіри до криптовалюти; 10 – пропозиція криптовалюти; 11 – дисперсія курсу криптовалюти; 12 – рівень ризиків під час застосування криптовалюти. Усі вершини КК вимірюють або оцінюють. Наприклад, рівень довіри (вершина 9) оцінюють, а дисперсію курсу (вершина 11) обчислюють за таким алгоритмом на інтервалі NT_0 :

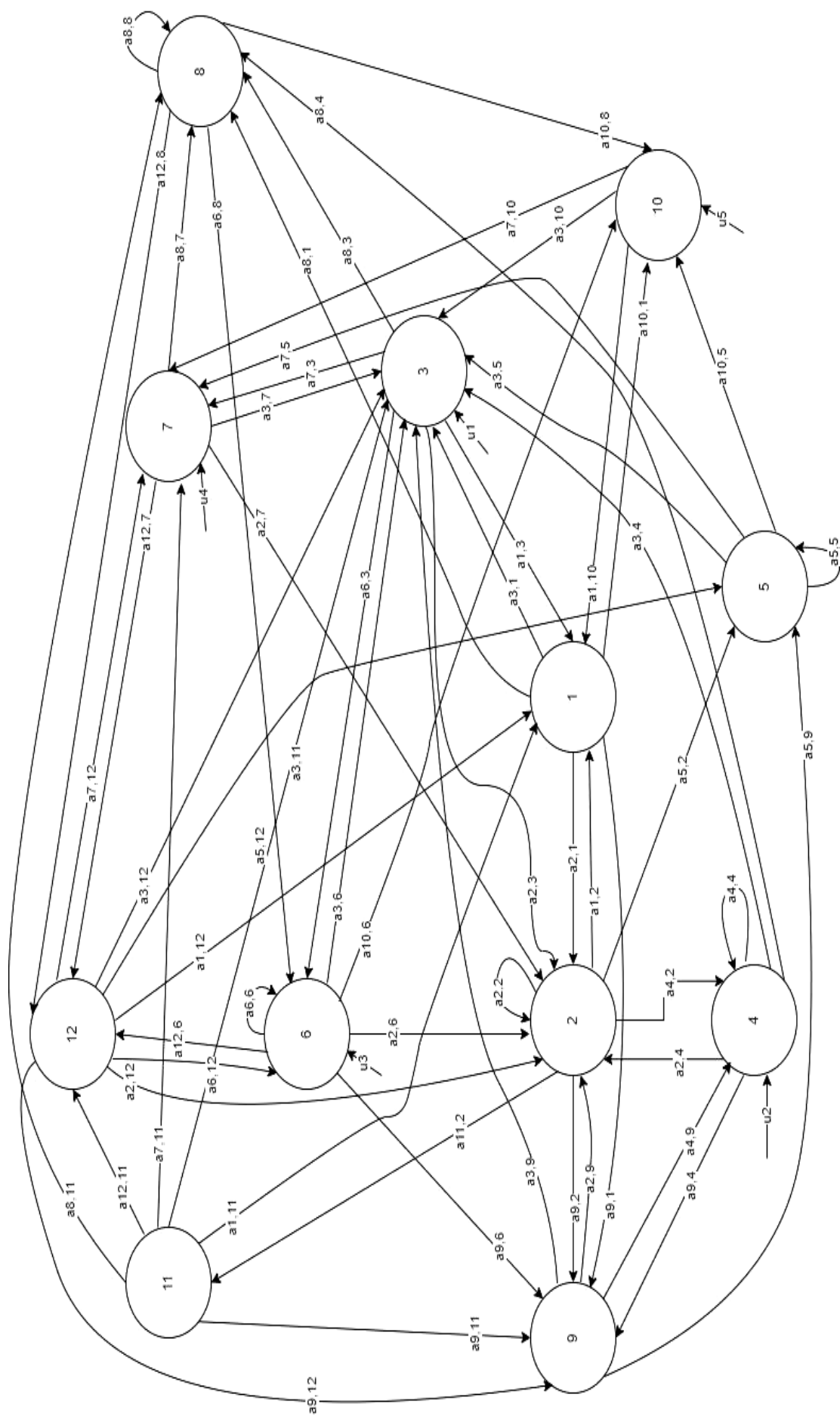


Рис. 2.13. Когнітивна карта застосування криптовалют

$$\begin{aligned} & \text{var} \left\{ Y_{11}(kT_0) \middle| Y_{11}[(k-1)T_0], \dots, Y_{11}[(k-1)T_0] \right\} = \\ & = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left\{ Y_{11}[(k-i)T_0] - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Y_{11}[(k-i)T_0] \right\}^2, \end{aligned} \quad (2.58)$$

де інтервал часу вибірки NT_0 підбирають експериментально. Для обчислення максимальної вибіркової умовної дисперсії використовують ковзне «вікно» $N_{\min}T_0 \leq NT_0 \leq N_{\max}T_0$. Для кожного значення N в указаному діапазоні з дискретністю в один період дискретизації T_0 обчислюють вибірку умовну дисперсію (2.58) і визначають її максимальне значення:

$$\begin{aligned} & \sup \text{var} \left\{ Y_{11}(kT_0) \middle| Y_{11}[(k-1)T_0], \dots, Y_{11}[(k-N)T_0] \right\} \\ & N_{\min} \leq N \leq N_{\max}. \end{aligned}$$

Як керуючі дії $\bar{u}(k)$ в моделі імпульсного процесу КК

$$\Delta \bar{Y}(k+1) = A \Delta \bar{Y}(k) + B \Delta \bar{u}(k) \quad (2.59)$$

використовують:

- варіювання обсягом торгів криптовалютою ($\Delta u_1(k)$);
- варіювання обсягом капіталізації криптовалюти ($\Delta u_2(k)$);
- варіювання обсягом інвестицій ($\Delta u_3(k)$);
- варіювання обсягом спекуляцій ($\Delta u_4(k)$);
- варіювання пропозицією криптовалюти ($\Delta u_5(k)$). Матриця сумі-

жності A має вигляд

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0,05 & 0,8 & 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0,7 & -0,3 & -0,4 \\ 0,2 & 1,3 & 0,25 & 0,15 & 0,4 & 0,5 & 0,3 & 0 & 0,4 & 0 & 0 & -0,5 \\ 0,8 & 0 & 0 & 0,15 & 0,2 & 0,1 & 0,7 & 0 & 0,7 & 0,7 & -0,4 & -0,5 \\ 0 & 0,5 & 0 & 0,9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,65 & 0 & 0 & 0,85 & 0 & 0 & 0 & 0,7 & 0 & 0 & -0,7 \\ 0 & 0 & 0,4 & 0 & 0 & 0,9 & 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & -0,4 \\ 0 & 0 & 0,7 & 0 & 0,4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,75 & -0,2 & -0,5 \\ 0,1 & 0 & 0,7 & 0,1 & 0 & 0 & 0,5 & 0,9 & 0 & 0 & -0,5 & 0 \\ 0,4 & 0,5 & 0 & 0,2 & 0 & 0,3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,3 & -0,5 \\ 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0,4 & 0,4 & 0 & 0,3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,4 & 0,6 & -0,2 & 0 & 0 & 0,4 & 0 \end{bmatrix}$$

2.7.2. Синтез системи стабілізації нестійкого курсу криптовалюти

Легко впевнитися, що КК застосування криптовалюти в імпульсному процесі (2.59) є нестійкою, тому що власні значення матриці A , відповідно, дорівнюють $2,352$; $1,011$; $0,95 \pm j0,2921$; $0,5277 \pm j0,4123$; $-0,6412 \pm j0,1454$; $-0,0753$, $\pm j0,3622$; $-0,0208 \pm j0,0849$ (перші два власні значення за модулем більші від одиниці). Матриця B формується залежно від кількості керуючих дій, причому $m < n$, тобто найбільша розмірність вектора керування

$$\Delta \bar{u}(k) = [\Delta \bar{u}_1(k) \ \Delta \bar{u}_2(k) \ \Delta \bar{u}_3(k) \ \Delta \bar{u}_4(k) \ \Delta \bar{u}_5(k)]$$

менша від розмірності вектора координат вершин КК.

Тому до стабілізації нестійкого курсу криптовалюти застосуємо метод модального керування, викладений у підрозд. 2.2.

Під час моделювання задаємо такий бажаний спектр власних значень λ_i матриці стану $(A - BK_p)$ замкненої системи керування (2.25):

$$\lambda_1 = -0,6; \ \lambda_2 = -0,5; \ \lambda_3 = -0,4; \ \lambda_4 = -0,3;$$

$$\lambda_5 = -0,2; \ \lambda_6 = -0,1; \ \lambda_7 = 0,1; \ \lambda_8 = 0,2;$$

$$\lambda_9 = 0,3; \ \lambda_{10} = 0,4; \ \lambda_{11} = 0,5; \ \lambda_{12} = 0,6,$$

які за модулем менші від одиниці.

Використовуючи моделювання синтезованої системи керування, розглянемо і порівняємо три варіанти.

1. Розглянемо варіант, коли керуючі дії $\Delta \bar{u}_1(k)$ і $\Delta \bar{u}_2(k)$ подаються, відповідно, на вершину 3 (обсяг торгів) і вершину 4 (обсяг капіталізації). Тоді для моделі імпульсного процесу (2.59) матриця B матиме вигляд

$$B^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Для синтезу модального регулятора (2.24), (2.28) формується така довільна матриця P :

$$P = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 & 0,5 & 0,5 & 0,5 & 0,5 & 0,5 & 0,5 & 0,5 & 0,5 & 0,5 & 0,5 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

з розмірністю (2×12) , яка має повний ранг і не має нульових стовпців. Тоді на основі (2.27) знаходимо матрицю $R = [R_1 \ R_2 \ \dots \ R_{12}]$ власних векторів R_j , $j = 1, \dots, 12$ матриці стану замкненої системи. У результаті обчислюємо матрицю K_p модального регулятора стану (2.28):

$$K_p = \begin{bmatrix} -0,216 & 2,312 & -1,621 & -0,061 & 1,334 & 0,535 & -1,712 & -1,811 & 0,657 & -0,94 & 0,892 & -0,863 \\ -4,036 & -19,68 & -4,085 & -3,228 & -8,336 & -14,013 & 0,899 & -2,95 & -8,61 & -0,23 & 3,94 & 13,475 \end{bmatrix}.$$

На рис. 2.14 показано результати моделювання керуючих дій $\Delta u_1(k)$ та $\Delta u_2(k)$ на основі закону керування (2.24), (2.28):

$$\Delta \bar{u}(k) = -K_p \Delta \bar{Y}(k) = -PR^{-1} \Delta \bar{Y}(k).$$

На рис. 2.15 показано зміни приростів координат вершин КК $\Delta \bar{Y}(k)$ у замкненій системі керування $\Delta \bar{Y}(k+1) = (A - BK_p) \Delta \bar{Y}(k)$ у разі зсуву на q^{-1} .

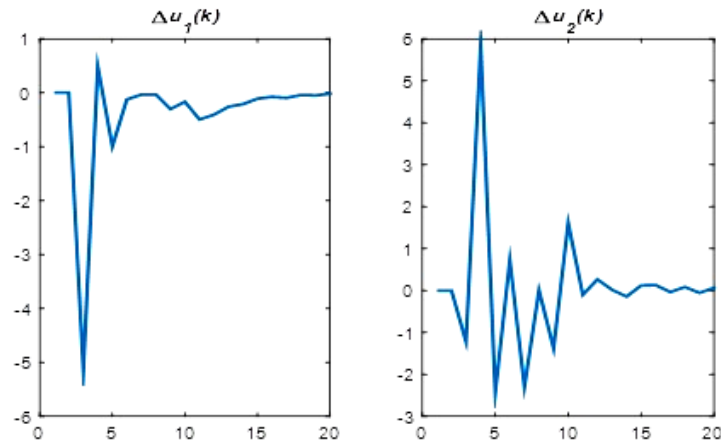


Рис. 2.14. Динаміка зміни приростів керуючих дій $\Delta \bar{u}_1(k)$ і $\Delta \bar{u}_2(k)$

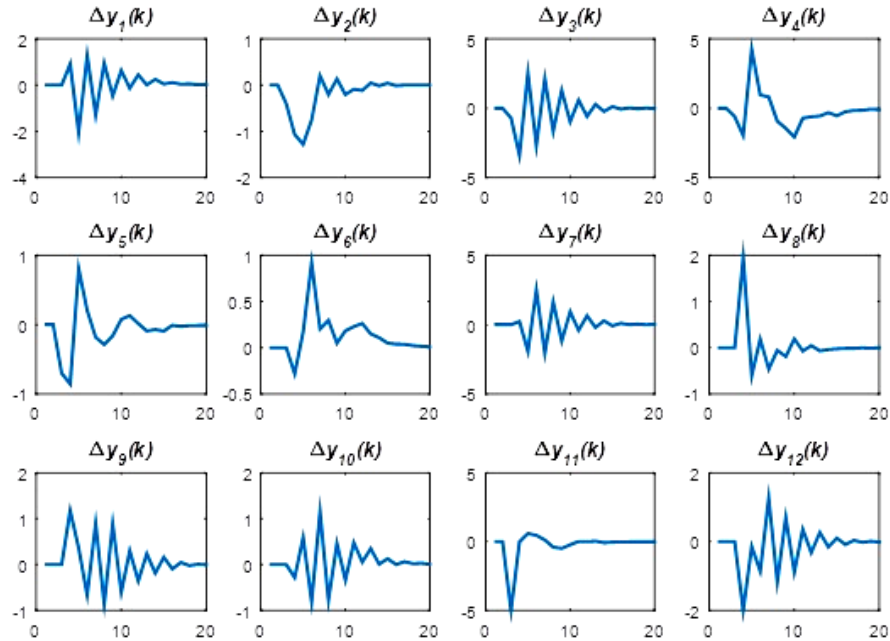


Рис. 2.15. Динаміка зміни приростів координат вершин КК $\Delta \bar{Y}(k)$

у замкненій системі керування під час стабілізації нестійкого імпульсного процесу

На рис. 2.16 показано графіки моделювання повних координат вершин КК $\bar{Y}(k)$ у замкненій системі керування на основі рівняння (2.60) з врахуванням, що $\Delta\bar{Y}(k) = \bar{Y}(k) - \bar{Y}(k-1)$,

$$\bar{Y}(k) = (I + A - BK_p) \bar{Y}(k-1) - (A - BK_p) \bar{Y}(k-2). \quad (2.60)$$

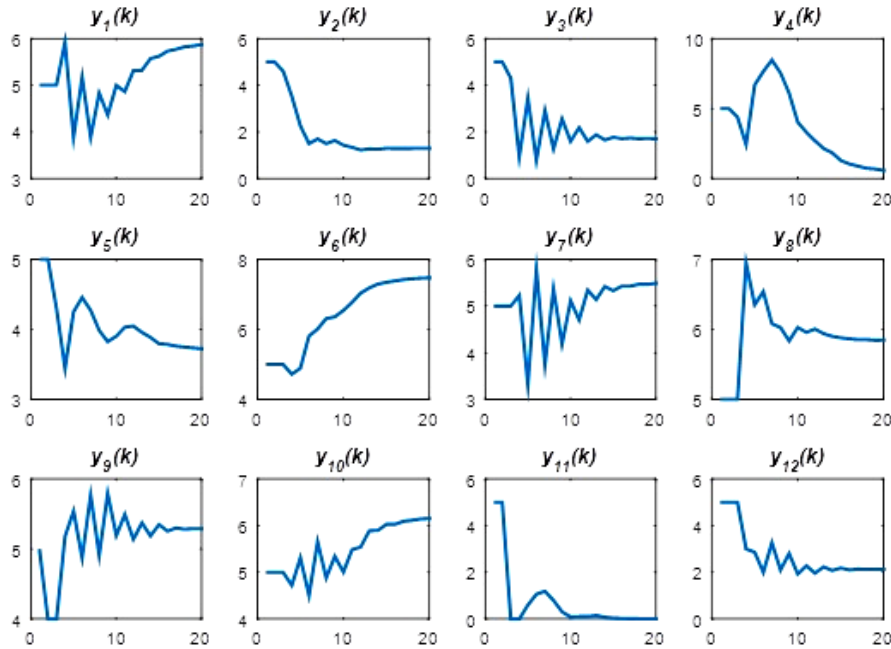


Рис. 2.16. Динаміка зміни повних координат вершин КК під час моделювання замкненої системи керування під дією керуючих дій $\Delta\bar{u}_1(k)$ і $\Delta\bar{u}_2(k)$

2. Розглянемо варіант, коли керуючі дії $\Delta\bar{u}_1(k)$, $\Delta\bar{u}_2(k)$, $\Delta\bar{u}_3(k)$ подаються на три вершини КК, відповідно на вершину 3 (обсяг торгів), 4 (обсяг капіталізації), 6 (обсяг інвестиції). Тоді матриця B набуває такого вигляду:

$$B^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Для синтезу регулятора (2.24), (2.28) матриця P сформована у вигляді

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

із розмірністю (3×12) , яка має повний ранг і не має нульових стовпців. Матрицю власних векторів R матриці стану замкненої системи обчислюємо на основі (2.27), тобто $R_j = (A - \lambda_j I)^{-1} B P j$, $j = 1, \dots, 12$. У результаті матриця K_p модального регулятора $K_p = P R^{-1}$ відповідно до (2.28) буде

$$K_p = \begin{bmatrix} -1,326 & -0,478 & -1,066 & -0,215 & -1,092 & -0,85 & -0,519 & -0,859 & -0,96 & -1,499 & 1,437 & 1,475 \\ -2,146 & -9,119 & 3,747 & -1,837 & -5,49 & -5,42 & 5,526 & 4,167 & -5,122 & 0,354 & 0,468 & 6,461 \\ -0,533 & -1,997 & -1,202 & -0,23 & -0,625 & -1,946 & -0,399 & -1,518 & -0,715 & 0,037 & 0,967 & 1,369 \end{bmatrix}.$$

На рис. 2.17 подано графіки перехідних процесів приростів керуючих дій $\Delta \bar{u}_1(k)$, $\Delta \bar{u}_2(k)$ і $\Delta \bar{u}_3(k)$, синтезованих на основі закону керування $\Delta \bar{u}(k) = -K_p \Delta \bar{Y}(k) = -PR^{-1} \Delta \bar{Y}(k)$.

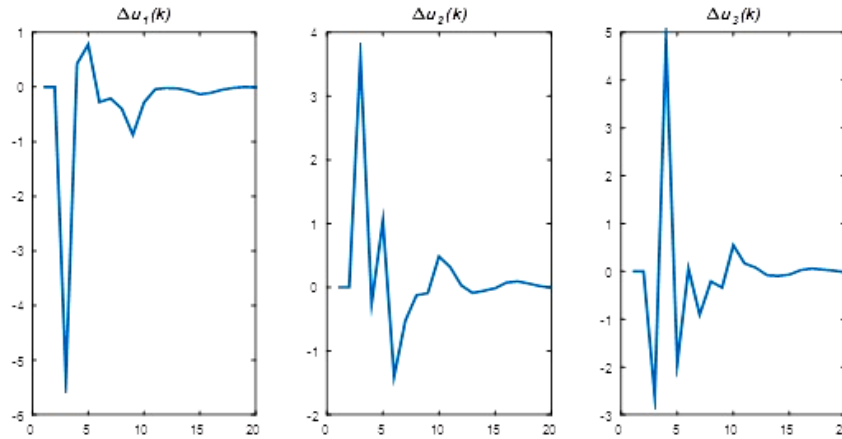


Рис. 2.17. Динаміка зміни приростів керуючих дій $\Delta \bar{u}_1(k)$, $\Delta \bar{u}_2(k)$, $\Delta \bar{u}_3(k)$ для стабілізації нестійкого імпульсного процесу КК застосування криптовалюти

На рис. 2.18 показано графіки стабілізації приростів координат вершин КК $\Delta \bar{Y}(k)$ у замкненій системі керування під дією керування $\Delta \bar{u}_1(k)$, $\Delta \bar{u}_2(k)$ і $\Delta \bar{u}_3(k)$.

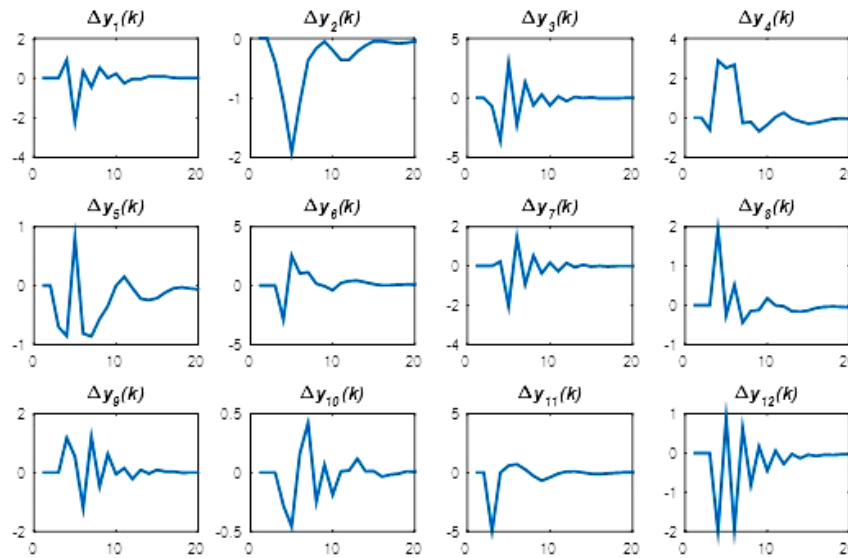


Рис. 2.18. Динаміка стабілізації приростів координат вершин КК $\Delta \bar{Y}(k)$ у замкненій системі керування під дією трьох керуючих дій $\Delta \bar{u}_1(k)$, $\Delta \bar{u}_2(k)$, $\Delta \bar{u}_3(k)$

На рис. 2.19 подано графіки моделювання повних координат вершин $\bar{Y}(k)$ на основі рівняння замкненої системи керування:

$$\bar{Y}(k) = (I + A - BK_p) \bar{Y}(k-1) - (I - BK_p) \bar{Y}(k-2).$$

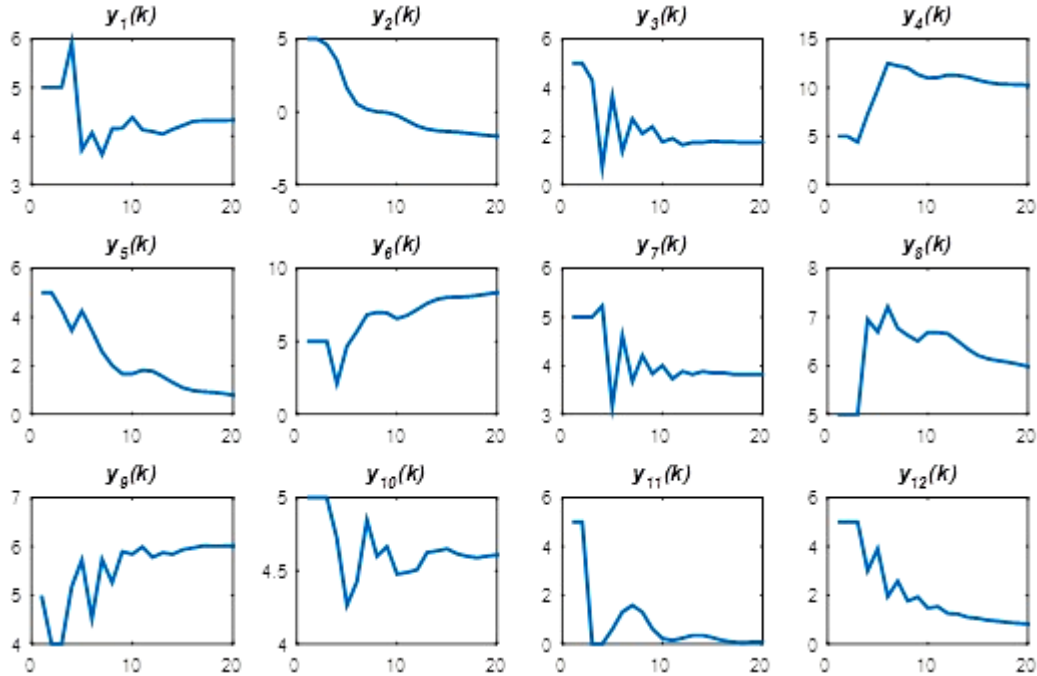


Рис. 2.19. Динаміка зміни повних координат вершин КК $\Delta \bar{Y}(k)$ під час моделювання замкненої системи керування під дією трьох керуючих дій $\Delta \bar{u}_1(k)$, $\Delta \bar{u}_2(k)$, $\Delta \bar{u}_3(k)$

3. Розглянемо варіант, коли керуючі дії $\Delta \bar{u}_1(k)$, $\Delta \bar{u}_2(k)$, $\Delta \bar{u}_3(k)$, $\Delta \bar{u}_4(k)$, $\Delta \bar{u}_5(k)$ подаються, відповідно, на такі вершини КК: 3 (обсяг торгів), 4 (обсяг капіталізації), 6 (обсяг інвестицій), 7 (обсяг спекуляцій) і 10 (пропозиції криптовалюти). У цьому варіанті матриця B у моделі вимушеного руху імпульсного процесу (2.59) має вигляд

$$B^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Матриця P для синтезу модального регулятора формується таким чином:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

На основі методики (2.26), (2.27) матрицю зворотного зв'язку модального регулятора K_p (2.28) обчислюємо у вигляді

$$K_p = \begin{bmatrix} -1,444 & -2,188 & -2,917 & -0,911 & -0,056 & -0,759 & -2,521 & -2,697 & -0,772 & -1,364 & 2,419 & 0,914 \\ -1,011 & -3,269 & -2,114 & -1,188 & -0,535 & -1,065 & -1,252 & -1,186 & -0,833 & -1,058 & 1,706 & 1,587 \\ -0,432 & -2,659 & 0,005 & -0,171 & -1,722 & -2,573 & 0,908 & 0,186 & -1,467 & 0,116 & 0,071 & 2,525 \\ 0,349 & 0,964 & 1,349 & 0,497 & -1,005 & -0,149 & 1,418 & 1,893 & -0,305 & -0,099 & -1,300 & 0,849 \\ 0,436 & 2,531 & 1,897 & 0,552 & 0,387 & 1,094 & 0,852 & 1,324 & 0,47 & 0,41 & -1,466 & -1,667 \end{bmatrix}.$$

У результаті моделювання синтезованої системи стабілізації нестійкого імпульсного процесу в КК застосування криптовалюти побудовано такі графіки.

На рис. 2.20 подано графіки перехідних процесів п'ятих керуючих дій $\Delta \bar{u}_1(k)$, $\Delta \bar{u}_2(k)$, $\Delta \bar{u}_3(k)$, $\Delta \bar{u}_4(k)$, $\Delta \bar{u}_5(k)$, синтезованих на основі закону керування

$$\Delta \bar{u}(k) = -K_p \Delta \bar{Y}(k) = -PR^{-1} \Delta \bar{Y}(k).$$

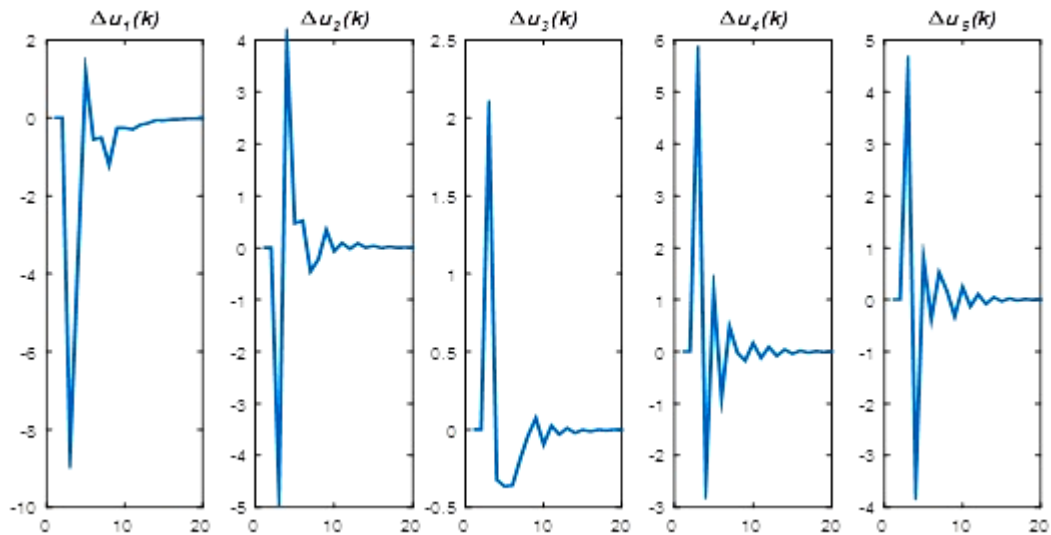


Рис. 2.20. Динаміка зміни приростів керуючих дій $\Delta \bar{u}_1(k)$, $\Delta \bar{u}_2(k)$, $\Delta \bar{u}_3(k)$, $\Delta \bar{u}_4(k)$, $\Delta \bar{u}_5(k)$, синтезованих для стабілізації нестійкого імпульсного процесу в КК застосування криптовалюти

На рис. 2.21 показано графіки стабілізації приростів координат КК $\Delta \bar{Y}(k)$ під дією $\Delta \bar{u}_1(k)$, $\Delta \bar{u}_2(k)$, $\Delta \bar{u}_3(k)$, $\Delta \bar{u}_4(k)$, $\Delta \bar{u}_5(k)$.

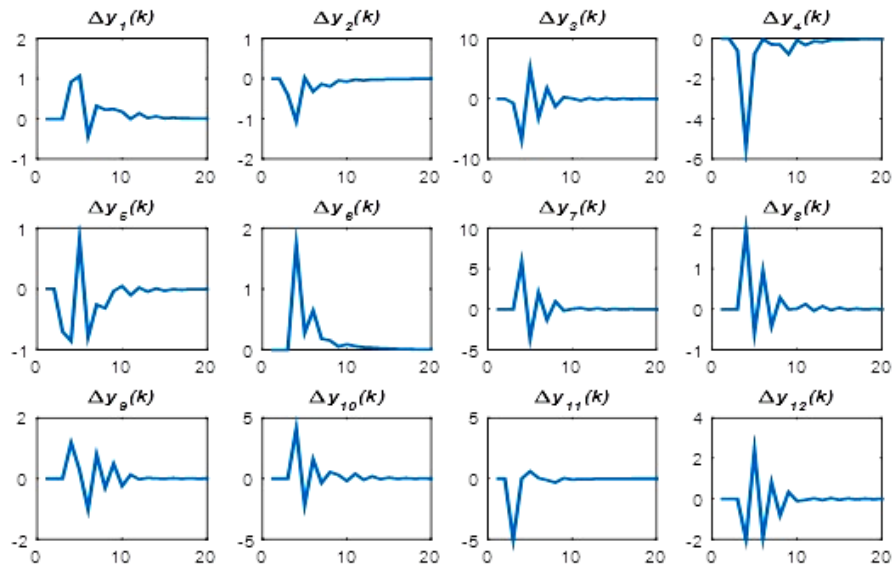


Рис. 2.21. Динаміка стабілізації приростів координат вершин КК $\Delta \bar{Y}(k)$ під дією п'ятьох керуючих дій в замкненій системі керування

На рис. 2.22 подано графіки моделювання повних координат вершин КК $\Delta \bar{Y}(k)$ на основі рівняння замкненої системи керування (2.60).

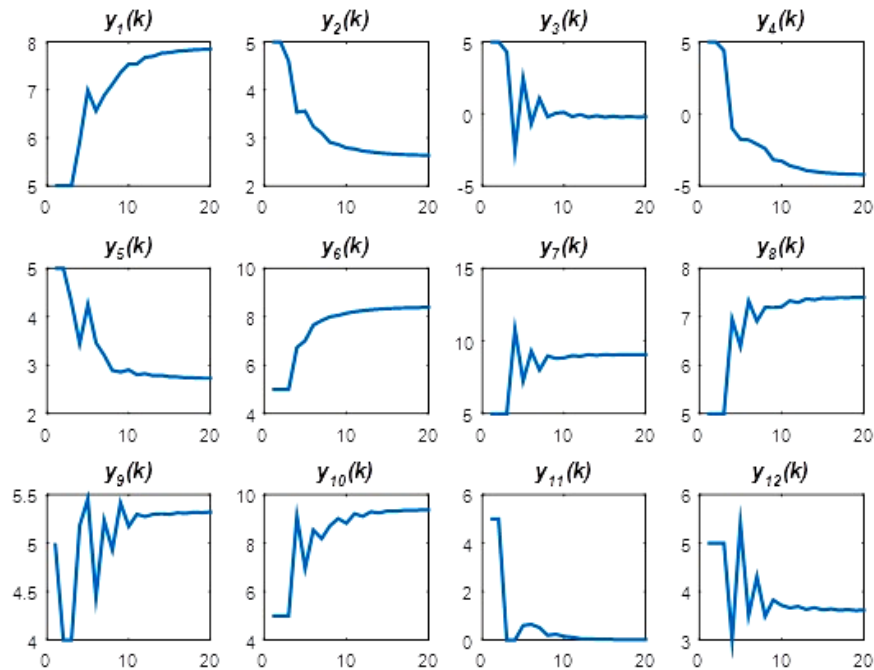


Рис. 2.22. Динаміка зміни повних координат вершин КК під час моделювання замкненої системи під дією п'ятьох керуючих дій $\Delta \bar{u}_1(k)$, $\Delta \bar{u}_2(k)$, $\Delta \bar{u}_3(k)$, $\Delta \bar{u}_4(k)$, $\Delta \bar{u}_5(k)$,

На основі аналізу графіків (рис. 2.14 – 2.22) можна констатувати такі закономірності зміни керуючих дій, координат вершин КК та їх приростів:

а) В усіх варіантах прирости керуючих дій $\Delta \bar{u}_i(k)$ збігаються до нуля після стабілізації координат вершин Y_i , $i = 1, \dots, 12$.

б) В усіх варіантах прирости координат вершин ΔY_i , $i = 1, \dots, 12$ протягом перехідних процесів під час стабілізації збігаються до нуля, тобто всі збурення приглушуються.

в) У третьому варіанті у разі використання п'ятих керуючих дій $\Delta \bar{u}_1(k)$, $\Delta \bar{u}_2(k)$, $\Delta \bar{u}_3(k)$, $\Delta \bar{u}_4(k)$, $\Delta \bar{u}_5(k)$ швидкодія перехідних процесів координат вершин $\bar{Y}(k)$ та їх приростів $\Delta \bar{Y}(k)$ збільшується приблизно у 2 рази порівняно з першим і другим варіантами.

г) Для всіх варіантів вибору складових вектора керуючих дій $\bar{u}_1(k)$:
– збільшились координати Y_9 (рівень довіри), Y_{10} (пропозиція криптовалюти) та Y_8 (опосередкований прибуток);

– зменшились координати Y_2 (курс криптовалюти), Y_3 (обсяг торгів), Y_5 (кількість користувачів криптовалюти), Y_{11} (дисперсія курсу) та Y_{12} (рівень ризиків).

Контрольні запитання

1. Як формується вимушений рух імпульсних процесів в КК складних систем?

2. Які критерії оптимальності використовують під час проєктування замкнених систем стабілізації нестійких імпульсних процесів?

3. Як формується еталонна модель для стабілізації нестійких імпульсних процесів у КК складних систем?

4. Чим відрізняється система стабілізації від слідкуючої системи керування?

5. У чому полягає критерій оптимальності під час проєктування системи стабілізації нестійких імпульсних процесів на основі методу модального керування?

6. Чим різняться методи стабілізації нестійких імпульсних процесів у КК на основі еталонних моделей і на основі модального керування?

7. Для яких нестійких імпульсних процесів КК неможливо застосувати метод стабілізації на основі еталонних моделей?

8. Які запізнення можуть виникати між координатами в моделях імпульсних процесів КК?

9. За якої умови матриця R в модальному керуванні, яка складається із власних векторів $\bar{R}_j$ матриці стану проєктованої замкненої системи керування, буде невиродженою?

10. Чим різняться задачі стабілізації нестійких імпульсних процесів, наведених у підрозд. 2.1.1; 2.1.2 та 2.1.3?

Задачі для самостійного розв'язання

2.1. Задано матрицю суміжності нестійкого імпульсного процесу КК

$$A = \begin{bmatrix} 0,9 & 0 & 0,5 \\ 0,1 & 1,2 & 0,3 \\ 0,05 & 0,4 & 0,6 \end{bmatrix}.$$

Вектори приростів координат вершин і керування

$$\Delta \bar{Y}(k) = \begin{bmatrix} \Delta Y_1(k) \\ \Delta Y_2(k) \\ \Delta Y_3(k) \end{bmatrix}; \quad \bar{u}(k) = \begin{bmatrix} \Delta u_1(k) \\ \Delta u_2(k) \\ \Delta u_3(k) \end{bmatrix}.$$

Завдання.

а) Сформувати еталонну модель $I + A_{M_1}q^{-1} + A_{M_2}q^{-2}$ для стабілізації нестійкого імпульсного процесу.

б) Визначити закон керування (2.8), (2.9) регулятора для стабілізації нестійкого імпульсного процесу на основі (2.14), (2.15).

в) Дослідити перехідні процеси приростів координат вершин КК у замкненій системі керування, підставивши в рівняння імпульсного процесу (2.5) вирази (2.8), (2.9), (2.14), (2.15), тобто

$$\Delta \bar{Y}(k) = A_1 \Delta \bar{Y}(k-1) - (A_1 + A_1^{-1}A_{M_2} + A_{M_1}) \left[I - A_1^{-1}A_{M_2} \right]^{-1} \Delta \bar{Y}(k-1).$$

2.2. Для стабілізації нестійкого імпульсного процесу з матрицею суміжності попереднього прикладу

$$A = \begin{bmatrix} 0,9 & 0 & 0,5 \\ 0,1 & 1,2 & 0,3 \\ 0,05 & 0,4 & 0,6 \end{bmatrix}.$$

Сформовано вимушений рух

$$\Delta \bar{Y}(k+1) = A \Delta \bar{Y}(k) + B \Delta \bar{u}(k),$$

де вектор керуючих дій $\Delta \bar{u}(k) = [\Delta u_1(k) \quad \Delta u_2(k)]^T$, в якому керуючі дії подаються, відповідно, на вершини Y_1 та Y_3 . Визначити матрицю B .

Завдання.

а) Виконати аналіз керованості $[A, B]$ вимушеного руху імпульсного процесу.

б) Застосувати для стабілізації імпульсного процесу регулятор стану

$$\Delta \bar{u}(k) = -K_p \Delta \bar{Y}(k).$$

в) На основі методу модального керування (2.25) – (2.28) виконати проектування матриці K_p регулятора стану.

г) Використовуючи моделювання замкненої системи $\Delta \bar{Y}(k+1) = (A - K_p) \Delta \bar{Y}(k)$, побудувати графіки перехідних процесів повних координат вершин КК $Y_1(k)$, $Y_2(k)$, $Y_3(k)$ і приростів змінних $\Delta Y_1(k)$, $\Delta Y_2(k)$, $\Delta Y_3(k)$ під час подачі одиничного ступінчатого збурення на вершину Y_2 КК.

Побудувати графіки керуючих дій $\Delta u_1(k)$, $\Delta u_2(k)$ для перехідного процесу.

2.3. Задано математичну модель вільного руху імпульсного процесу КК $\Delta \bar{Y}(k+1) = A \Delta \bar{Y}(k)$, де матриця суміжності й вершини КК мають вигляд

$$A = \begin{bmatrix} 1,3 & 0,4 & -0,2 & 0,1 \\ -0,15 & 0 & -0,3 & 0,5 \\ 0,05 & 0,15 & 1,2 & 0,6 \\ 0,35 & -0,25 & 0,1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \Delta \bar{Y}(k) = \begin{bmatrix} \Delta Y_1(k) \\ \Delta Y_2(k) \\ \Delta Y_3(k) \\ \Delta Y_4(k) \end{bmatrix}.$$

Завдання 1.

а) Побудувати КК імпульсного процесу.

б) Виконати аналіз стійкості вільного руху імпульсного процесу.

в) Сформувати вимушений рух імпульсного процесу, якщо керуючі дії $u_1(k)$, $u_2(k)$ подаються, відповідно, на вершини Y_2 і Y_4 . Для цього сформувати матрицю керування B .

г) Виконати аналіз керованості (A, B) вимушеного руху імпульсного процесу.

д) Для стабілізації імпульсного процесу застосувати регулятор стану $\Delta \bar{u}(k) = -K_p \Delta \bar{Y}(k)$.

е) Виконати проєктування матриці K_p регулятора стану на основі методу модального керування, тобто застосувати алгоритм (2.25) – (2.28).

ж) Виконати дослідження перехідних процесів координат вершин КК, провівши цифрове моделювання замкненої системи керування (2.25) з подаванням на вершину Y_2 одиничного ступінчатого збурення.

и) Побудувати графіки перехідних процесів координат $Y_1(k)$, $Y_2(k)$, $Y_3(k)$, $Y_4(k)$ і приростів координат $\Delta Y_1(k)$, $\Delta Y_2(k)$, $\Delta Y_3(k)$, $\Delta Y_4(k)$ КК.

к) Побудувати графіки перехідних процесів керуючих дій $\Delta u_1(k)$, $\Delta u_2(k)$.

Завдання 2.

Виконати програму досліджень від (в) до (к) (завдання 1) з вибором вектора керуючих дій $\Delta \bar{u}(k) = [\Delta \bar{u}_1(k) \ \Delta \bar{u}_2(k) \ \Delta \bar{u}_3(k)]^T$, якщо керуючі дії подаються, відповідно, на вершини Y_1 , Y_3 , Y_4 .

2.4. Виконати синтез слідкуючого регулятора для керування нестійким імпульсним процесом з матрицею суміжності та вектором вихідних координат КК:

$$A = \begin{bmatrix} 1,3 & 0,4 & -0,2 & 0,1 \\ -0,15 & 0 & -0,3 & 0,5 \\ 0,05 & 0,15 & 1,2 & 0,6 \\ 0,35 & -0,25 & 0,1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \Delta \bar{Y}(k) = \begin{bmatrix} \Delta Y_1(k) \\ \Delta Y_2(k) \\ \Delta Y_3(k) \\ \Delta Y_4(k) \end{bmatrix}.$$

При цьому змінюваний вектор задавальних дій $\bar{G}(k) = \text{var}$.

Завдання 1.

а) Сформувати матрицю керування B вимушеного руху імпульсного процесу (2.35) за вектора керуючих дій

$$\bar{u}(k) = [u_1(k) \ u_2(k) \ u_3(k) \ u_4(k)]^T.$$

б) Визначити матричну дискретну передатну функцію $W(k)$ КК в режимі імпульсного процесу на основі (2.37).

в) Сформулювати еталонну модель $A_M(z) = Iz^2 + A_{M_1}z + A_{M_2}$ характеристичного матричного полінома другого порядку дискретної передатної функції замкненої системи $W_E(z)$ (2.41), в якій корені $\det A_M(z) = 0$ обирають за модулем, меншим від одиниці. Для цього як еталонну модель $A_M(z)$ обирають діагональний матричний поліном, в головній діагоналі якого вставляються поліноми другого порядку відносно z з коренями, меншими за одиницю.

г) На основі (2.43) визначити бажану матричну дискретну передатну функцію замкненої системи $W_E(z)$.

д) Виконати проектування слідкуючого регулятора $W_p(z)$ на основі (2.44) і записати закон керування регулятора у різницевій формі (2.45).

е) Виконати дослідження якості функціонування спроектованої слідкуючої системи керування на основі рівняння замкненої системи (2.46) за подавання на вхід $\bar{G}(k)$ змінного сигналу типу «меандр».

ж) Побудувати графіки перехідних процесів $Y_1(k)$, $Y_2(k)$, $Y_3(k)$, $Y_4(k)$, які позначити суцільною лінією, а складові $G_1(k)$, $G_2(k)$, $G_3(k)$, $G_4(k)$ – пунктирною лінією.

Завдання 2.

На основі алгоритму а) – е) виконати проектування і дослідження слідкуючої системи керування для нестійкого імпульсного процесу КК з матрицею суміжності

$$A = \begin{bmatrix} 1,3 & 0,4 & -0,2 \\ -0,15 & 0 & -0,3 \\ 0,05 & 0,15 & 1,2 \end{bmatrix}$$

зі змінюваним вектором задавальних дій $\bar{G}(k) = [G_1(k) \ G_2(k) \ G_3(k)]^T$ із застосуванням вектора керуючих дій $\bar{u}(k) = [u_1(k) \ u_2(k) \ u_3(k)]^T$.

РОЗДІЛ 3. Методи керування імпульсними процесами на основі варіювання вагових коефіцієнтів ребер когнітивних карт і ресурсів координат вершин

У розд. 2 припускалось, що управління імпульсним процесом КК можна здійснювати, безпосередньо впливаючи на всі або окремі координати вершин КК, тобто варіюючи ресурсами цих вершин. Але цього, очевидно, можна досягти далеко не завжди тому, що на практиці штучна зміна координат вершин КК (фінансових показників, обсягу випуску продукції, соціальних гарантій, часових інтервалів виконання окремих завдань, дозвіл або заборона на виконання певних обов'язків тощо) можлива тільки в разі виникнення надзвичайних обставин у різних галузях або у державі в цілому.

У цьому розділі запропонуємо інший підхід до управління імпульсним процесом КК складної системи, який полягає у варіюванні вагових коефіцієнтів ребер КК [19] під час формування керуючих дій $u(k)$. Варіювання вагового коефіцієнта можливе тоді, коли можна змінювати ступінь чутливості до впливу однієї вершини КК на іншу. Людина, яка приймає рішення, може реалізувати цей принцип, змінюючи коефіцієнти передачі адміністративних, наукових, фінансових, політичних, освітніх, інформаційних взаємодій на координати складної системи, представлені вершинами КК. Під час варіювання імпульсним процесом КК через варіювання вагових коефіцієнтів a_{ij} змінюється ступінь впливу на координату ΔY_i інших координат ΔY_j . При цьому величина керуючого впливу $\Delta u_i(k)$ формується не за рахунок зміни ресурсів вершини $\Delta Y_i(k+1)$.

Розглянемо рівняння вільного руху імпульсного процесу КК не у приростах координат вершин, а в повних координатах (у скалярній та векторній формах):

$$Y_i(k+1) = Y_i(k) + (1 - q^{-1}) \sum_{j=1}^n a_{ij} Y_j(k), \quad i = 1, \dots, n;$$
$$\bar{Y}(k+1) = (I + A - Aq^{-1}) \bar{Y}(k), \quad (3.1)$$

де q^{-1} – оператор зворотного зсуву на один період дискретизації.

За умови, що $\lim \Delta Y_i(k) = 0$, для стабілізації координат вершин КК Y_i на заданих рівнях G_i треба формувати керування, що впливають на вершини КК на кожному періоді дискретизації через варіювання вагових коефіцієнтів $\Delta a_{ij}(k)$.

3.1. Синтез системи керування стійкими імпульсними процесами в когнітивних картах з варіюванням вагових коефіцієнтів на основі квадратичного критерію оптимальності

Припустимо, що для кожного $Y_i(k+1)$ в КК існує не більше одного вагового коефіцієнта $a_{i\mu_l}$, яким можна варіювати, і що цей коефіцієнт має змінювану частину $\Delta a_{i\mu_l}(k)$, завдяки якій змінюється величина впливу координати $Y_{\mu_l}(k)$ на $Y_i(k)$. Тоді рівняння вимушеного руху для керованої координати КК Y_i запишемо так [19]:

$$Y_i(k+1) = Y_i(k) + (1 - q^{-1}) \sum_{j=1}^n a_{ij} Y_j(k) + \Delta a_{i\mu_l}(k) Y_{\mu_l}(k) + \xi_i(k), \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.2)$$

де $\Delta a_{i\mu_l} = a_{i\mu_l}(k) - a_{i\mu_l}(k-1)$;

$\xi_i(k)$ – некерований випадковий шум з нульовим середнім.

У векторній формі рівняння вимушеного руху імпульсного процесу КК може бути записане у вигляді

$$\bar{Y}(k+1) = (I + A - Aq^{-1})\bar{Y}(k) + L(k)\Delta\bar{a}(k) + \bar{\xi}(k). \quad (3.3)$$

Матриця $L(k)$ складається з вимірюваних координат вершин КК $Y_{\mu_l}(k)$, які впливають на вершини $Y_i(k+1)$, $i = 1, 2, \dots, n$ через ребра зі змінними коефіцієнтами $\Delta a_{i\mu_l}(k)$, що виступають тут в ролі керувань. Сформулюємо правила формування вектора приростів вагових коефіцієнтів $\Delta\bar{a}(k)$ і матриці $L(k)$ в (3.3).

Правило 3.1. Вектор приростів вагових коефіцієнтів $\Delta\bar{a}(k)$ має розмірність $m \leq n$, при цьому він включає тільки ненульові елементи

$\Delta a_{i\mu}(k) \neq 0$, де μ – номер вершини КК, яка через дугу з коефіцієнтом $a_{i\mu}$ впливає на i -ту вершину Y_i , а $l = 1, 2, \dots, m$ – порядковий номер цього коефіцієнта у векторі $\Delta \bar{a}(k)$. Якщо якийсь ваговий коефіцієнт КК не варіюється, тоді приріст $\Delta a_{i\mu}(k) = 0$ не включається до вектора $\Delta \bar{a}(k)$.

Правило 3.2. Матриця $L(k)$ має розмірність $n \times m$ і містить не більше одного ненульового елемента в кожному i -му рядку, що дорівнює $Y_{i\mu}$, який впливає на вершину Y_i через приріст вагового коефіцієнта $\Delta a_{i\mu}$. Номер стовпця цього елемента в матриці $L(k)$ дорівнює номеру елемента $\Delta a_{i\mu}$ у векторі $\Delta \bar{a}(k)$. Якщо вершина Y_i КК не має вхідних ребер, якими можна варіювати зміною вагового коефіцієнта, тоді всі елементи i -го рядка матриці $L(k)$ дорівнюватимуть нулю.

Правило 3.3. Синтез оптимального вектора керування $\Delta \bar{a}(k)$ виконується мінімізацією квадратичного критерію оптимальності:

$$J(k+1) = E \left\{ \left[\bar{Y}(k+1) - \bar{G} \right]^T \left[\bar{Y}(k+1) - \bar{G} \right] + \Delta \bar{a}^T(k) R \Delta \bar{a}(k) \right\}, \quad (3.4)$$

де E – оператор умовного математичного сподівання в момент часу kT_0 ; $\bar{G}$ – вектор бажаних значень стабілізації координат КК на заданих рівнях; R – діагональна додатно визначена матриця вагових коефіцієнтів.

Мінімізуємо критерій (3.4) з використанням (3.3):

$$\frac{\partial J(k+1)}{\partial \Delta \bar{a}(k)} = 2L^T(k) \left[\left(I + A - Aq^{-1} \right) \bar{Y}(k) + L(k) \bar{a}(k) + \bar{\xi}(k) - \bar{G} \right] + 2R \Delta \bar{a}(k) = 0, \quad (3.5)$$

звідки отримуємо закон управління багатовимірною оптимальною регулятором

$$\Delta \bar{a}(k) = - \left(L^T(k) L(k) + R \right)^{-1} L^T(k) \left[\left(I + A - Aq^{-1} \right) \bar{Y}(k) + \bar{\xi}(k) - \bar{G} \right]. \quad (3.6)$$

Якщо збурення $\bar{\xi}(k)$ не вимірюється, тоді (3.6) наближено можна обчислити так:

$$\Delta \bar{a}(k) = - \left(L^T(k) L(k) + R \right)^{-1} L^T(k) \left[\left(I + A - Aq^{-1} \right) \bar{Y}(k) - \bar{G} \right].$$

На основі рівнянь (3.3) та (3.6) отримуємо таке рівняння замкненої системи керування імпульсним процесом КК:

$$\begin{aligned} \bar{Y}(k+1) = & \left\{ I - L(k) \left[L^T(k)L(k) + R \right]^{-1} L^T(k) \right\} \left(I + A - Aq^{-1} \right) \bar{Y}(k) + \\ & + L(k) \left[L^T(k)L(k) + R \right]^{-1} L^T(k) \bar{G} + \left\{ I - L(k) \left[L^T(k)L(k) + R \right]^{-1} L^T(k) \right\} \bar{\xi}(k) \end{aligned} \quad (3.7)$$

Проаналізуємо стійкість замкненої системи керування (3.7).

Твердження 3.1. Нехай рівняння вимушеного руху імпульсного процесу КК описуються виразом (3.3), де $\Delta \bar{a}(k) - m$ – вимірний вектор приростів вагових коефіцієнтів, а $L(k)$ – матриця розмірністю $n \times m$, що формується на кожному періоді дискретизації з координат $Y_{\mu_l}(k)$ згідно з правилом 3.2 ($l = 1, \dots, m$ – номери відповідних приростів у векторі $\Delta \bar{a}(k)$). Тоді матриця $L^T(k)L(k)$ розмірністю $m \times m$ у законі керування (3.6) буде діагональною з елементами $Y_{\mu_l}^2(k)$, $l = 1, \dots, m$.

Доведення. Згідно з правилом 3.2 матриця $L(k)$ містить $Y_{\mu_l}(k)$ в l -му стовпці, а всі інші елементи цього стовпця нульові. Після транспонування елемент Y_{μ_l} опиниться в l -му рядку у $L^T(k)$. Тоді після перемноження $L^T(k)L(k)$ отримаємо елемент $Y_{\mu_l}^2(k)$ у l -му рядку та в l -му стовпці для всіх m рядків і стовпців, а всі інші елементи будуть нульові.

Наслідок 3.1. Оскільки матриця R у (3.4) – m -вимірна, діагональна і додатно визначена, то обернена матриця $\left[L^T(k)L(k) + R \right]^{-1}$ у (3.7) буде діагональною з елементами $\frac{1}{Y_{\mu_l}^2(k) + R_{ll}}$, $l = 1, \dots, m$, які завжди додатні.

Наслідок 3.2. Матриця $B(k) = I - L(k) \left[L^T(k)L(k) + R \right]^{-1} L^T(k)$ у рівнянні замкненої системи (3.7) є діагональною матрицею розмірністю $n \times n$ з елементами на головній діагоналі, які дорівнюють $1 - \frac{Y_{\mu_l}^2(k)}{Y_{\mu_l}^2(k) + R_{ll}} = \frac{R_{ll}}{Y_{\mu_l}^2(k) + R_{ll}}$ у рядках, що відповідають ненульовим значенням $L(k)$, і дорівнюють одиниці в інших випадках. Отже, власні числа $B(k)$ завжди $0 < \lambda_i \leq 1$, $i = 1, \dots, n$.

Важливо зазначити, що, незважаючи на те, що матриця $B(k)$ буде змінною за часом і нелінійною відносно $\bar{Y}(k)$, вона ніколи не буде нестійкою тому, що її власні числа додатні й не більші за одиницю.

Розглянемо стійку КК, тобто таку, в якій власні значення матриці суміжності A за модулем менші за одиницю. Замкнена система (3.7) є стійкою, якщо модулі коренів її характеристичного рівняння також менші за одиницю. При цьому характеристичне рівняння запишемо так:

$$\det \left[I - B(k) \left(I + A - Aq^{-1} \right) q^{-1} \right] = 0,$$

де $B(k) = I - L(k) \left[L^T(k)L(k) + R \right]^{-1} L^T(k)$.

Нам відомо, що $B(k)$ є діагональною з елементами в інтервалі $[0; 1]$. Якщо $B(k)$ одинична, то система не може бути нестійкою, тому що матричний поліном $I - \left(I + A - Aq^{-1} \right) q^{-1} = \left(I - q^{-1} \right) \left(I - Aq^{-1} \right)$, а корені $\det \left(I - Aq^{-1} \right) = 0$ – це стійкі власні значення матриці A . Якщо замість одиничної матриці помножити той самий вираз на діагональну матрицю з елементами не більшими за одиницю, то очевидно, що це не приведе до нестійкого стану замкненої системи керування.

3.2. Комбіноване керування імпульсними процесами в когнітивній карті на основі варіювання вагових коефіцієнтів та ресурсів координат вершин

Метод керування імпульсними процесами в КК, запропонований в підрозд. 3.1, є альтернативою «класичному» підходу, коли керування складною системою здійснюється через безпосередній вплив керуючих сигналів $\bar{u}(k)$ на вершини КК (варіювання ресурсами, як це було розглянуто в розд. 2). Але на практиці для більшості КК складних систем різної природи часто можливостей для керування не вистачає, тобто і варіювання ресурсів, і варіювання впливів між вершинами КК (ваговими коефіцієнтами) можливе лише для невеликої кількості вершин. Це призводить до великої різниці між розмірністю n вектора вихідних координат $\bar{Y}$ і розмірністю m вектора керуючих дій $\bar{u}$. Тобто постає за-

вдання об'єднання двох підходів, що полягає у формуванні зовнішнього вектора керування через одночасне варіювання ресурсів координат вершини КК і вагових коефіцієнтів у замкненій системі управління. Це дозволяє збільшити загальну кількість керуючих дій у КК і поліпшити якість керування.

Після об'єднання цих двох підходів для синтезу дискретного регулятора загальну математичну модель імпульсного процесу КК у векторно-матричній формі у певних координатах вершин подамо у такій формі [54]:

$$\bar{Y}(k+1) = (I + A - Aq^{-1})\bar{Y}(k) + [B \quad L(k)] \begin{bmatrix} \Delta\bar{u}(k) \\ \Delta\bar{a}(k) \end{bmatrix} + \bar{\xi}(k). \quad (3.8)$$

Сформулюємо правила синтезу комбінованого дискретного регулятора через формування векторів приростів $\Delta\bar{u}(k)$ і $\Delta\bar{a}(k)$, а також матриць B і $L(k)$ в моделі (3.8).

Правило 3.4. На кожну вершину КК Y_i ($i = 1, \dots, n$) можна впливати тільки одним сигналом керування через варіювання ресурсів цієї вершини $\Delta u_i(k)$ або за допомогою варіювання вагового коефіцієнта $\Delta a_{i\mu}(k)$.

Унаслідок цього гарантується автономність системи керування.

Правило 3.5. Вектор приростів вагових коефіцієнтів $\Delta\bar{a}(k)$ розмірності m за $m < n$ містить тільки ненульові елементи $\Delta a_{i\mu}(k) \neq 0$, де μ – номер вершини КК, яка через дугу з коефіцієнтом $a_{i\mu}$ впливає на i -ту вершину Y_i , а $l = 1, 2, \dots, m$ – порядковий номер цього коефіцієнта у векторі $\Delta\bar{a}(k)$. Якщо ваговий коефіцієнт $a_{i\mu}$ для дуги КК, що входить у вершину Y_i , не можна варіювати, то приріст $\Delta a_{i\mu}(k) = 0$ і у векторі $\Delta\bar{a}(k)$ не враховуємо.

Правило 3.6. Матрицю B формує проєктувальник системи керування імпульсним процесом КК. Ця матриця призначена для забезпечення масштабування і комутування синтезованого керування $\Delta\bar{u}_i$, $i = 1, \dots, p$. Розмірність матриці B становить $n \times p$, n – розмірність КК, а p – розмірність вектора $\Delta\bar{u}(k)$. Елементами B можуть бути одиниці або нулі. Таким чином, у кожному рядку матриці B тільки один

елемент може дорівнювати одиниці, а інші елементи будуть дорівнювати нулю.

Правило 3.7. Матриця $L(k)$ розмірністю $n \times m$ в кожному i -му рядку містить тільки один елемент, значення якого дорівнює вимірюваній координаті $Y_{\mu_l}(k)$, що розміщується в l -му рядку, де l – порядковий номер приросту $\Delta a_{i\mu_l}(k)$ у векторі $\Delta \bar{a}(k)$, а μ – номер вершини КК, яка через приріст вагового коефіцієнта $\Delta a_{i\mu_l}(k)$ керує вершиною Y_i КК.

Правило 3.8. Усі елементи в i -му рядку матриці $L(k)$ дорівнюють нулю, якщо в i -ту вершину Y_i не входить дуга КК з варійованим коефіцієнтом, тобто $\Delta a_{i\mu} = 0$. Таким чином, загальна кількість керуючих дій КК може становити $p + m \leq n$.

Синтез комбінованого вектора оптимального керування $\begin{bmatrix} \Delta \bar{u}(k) \\ \Delta \bar{a}(k) \end{bmatrix}$ реалізується на основі мінімізації такого квадратичного критерію оптимальності:

$$J(k+1) = E \left\{ \left[\bar{Y}(k+1) - \bar{G} \right]^T \left[\bar{Y}(k+1) - \bar{G} \right] + \begin{bmatrix} \Delta \bar{u}(k) \\ \Delta \bar{a}(k) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \bar{u}(k) \\ \Delta \bar{a}(k) \end{bmatrix} \right\}, \quad (3.9)$$

де E – оператор математичного сподівання;

$\bar{G}$ – вектор задавальних дій для стабілізації координат вершин КК на заданих рівнях;

$R_1(p \times p)$, $R_2(m \times m)$ – діагональні додатно визначені вагові матриці.

Мінімізацію критерію (3.9) щодо вектора комбінованого керування

$\begin{bmatrix} \Delta \bar{u}(k) \\ \Delta \bar{a}(k) \end{bmatrix}$ з урахуванням (3.8) виконаємо таким чином:

$$\begin{aligned} \frac{\partial J(k+1)}{\partial \begin{bmatrix} \Delta \bar{u}(k) \\ \Delta \bar{a}(k) \end{bmatrix}} &= 2 \begin{bmatrix} B^T \\ L^T(k) \end{bmatrix} \left\{ \left[I + A - Aq^{-1} \right] \bar{Y}(k) + \begin{bmatrix} B & L(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \bar{u}(k) \\ \Delta \bar{a}(k) \end{bmatrix} + \bar{\xi}(k) - \bar{G} \right\} + \\ &+ 2 \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \bar{u}(k) \\ \Delta \bar{a}(k) \end{bmatrix} = 0, \end{aligned} \quad (3.10)$$

звідки отримуємо закон комбінованого оптимального керування імпульсним процесом КК:

$$\begin{bmatrix} \Delta \bar{u}(k) \\ \Delta \bar{a}(k) \end{bmatrix} = - \left[\begin{bmatrix} B^T \\ L^T(k) \end{bmatrix} [B \quad L(k)] + \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} \right]^{-1} \cdot \\ \cdot \begin{bmatrix} B^T \\ L^T(k) \end{bmatrix} \left\{ [I + A - Aq^{-1}] \bar{Y}(k) + \bar{\xi}(k) - \bar{G} \right\}. \quad (3.11)$$

На основі рівнянь (3.8), (3.11) можна скласти рівняння динаміки замкненої системи керування імпульсним процесом КК:

$$\begin{aligned} \bar{Y}(k+1) = & \left\{ I - [B \quad L(k)] \left[\begin{bmatrix} B^T B & B^T L(k) \\ L^T(k) B & L^T(k) L(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} \right]^{-1} \begin{bmatrix} B^T \\ L^T(k) \end{bmatrix} \right\} \cdot \\ & \cdot (I + A - Aq^{-1}) \bar{Y}(k) + [B \quad L(k)] \left[\begin{bmatrix} B^T B & B^T L(k) \\ L^T(k) B & L^T(k) L(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} \right]^{-1} \cdot \begin{bmatrix} B^T \\ L^T(k) \end{bmatrix} \bar{G} + \\ & + \left\{ I - [B \quad L(k)] \left[\begin{bmatrix} B^T B & B^T L(k) \\ L^T(k) B & L^T(k) L(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} \right]^{-1} \begin{bmatrix} B^T \\ L^T(k) \end{bmatrix} \right\} \cdot \bar{\xi}(k). \quad (3.12) \end{aligned}$$

Стійкість замкненої системи керування (3.12) визначають власними значеннями нелінійного змінного за часом матричного виразу

$$I - [B \quad L(k)] \left[\begin{bmatrix} B^T B & B^T L(k) \\ L^T(k) B & L^T(k) L(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} \right]^{-1} \begin{bmatrix} B^T \\ L^T(k) \end{bmatrix}. \quad (3.13)$$

Твердження 3.2. Обернена матриця $\left[\begin{bmatrix} B^T B & B^T L(k) \\ L^T(k) B & L^T(k) L(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} \right]^{-1}$

у виразі (3.13) є діагональною і додатно визначеною.

Доведення. Матриця $\begin{bmatrix} B^T B & B^T L(k) \\ L^T(k) B & L^T(k) L(k) \end{bmatrix}$ є діагональною, тому що

на основі наведених вище правил формування матриці B та $L(k)$ отримуємо, що $B^T L(k) = 0$, $L^T(k) B = 0$. Тому обернена матриця (3.13) має вигляд

$$\begin{bmatrix} B^T B + R_1 & 0 \\ 0 & L^T(k) L(k) + R_2 \end{bmatrix}^{-1}.$$

Згідно із твердженням 3.1 добуток матриць $L^T(k)L(k)$ є діагональною матрицею розмірністю $m \times m$ з елементами $Y_{\mu_l}^2(k)$ в l -му рядку і l -му стовпці. Добуток $B^T B$ також є діагональною матрицею розмірністю $p \times p$ з елементами $b_{ii} = 1$. У результаті для діагональних і додатно визначених матриць R_1, R_2 отримуємо, що матриці $(B^T B + R_1)^{-1}$ та $[L^T(k)L(k) + R_2]^{-1}$ є діагональними з елементами $\frac{1}{1 + R_{ii}}$ і $\frac{1}{Y_{\mu_l}^2(k) + R_{ll}}$, якщо $i = 1, \dots, p$; $l = 1, \dots, m$ відповідно.

Наслідок. Добуток матриць

$$\begin{bmatrix} B & L(k) \end{bmatrix} \left[\begin{bmatrix} B^T B & B^T L(k) \\ L^T(k) B & L^T(k) L(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} \right]^{-1} \begin{bmatrix} B^T \\ L^T(k) \end{bmatrix}$$

у (3.13) є діагональною матрицею розмірністю $n \times n$

$$\begin{bmatrix} B(B^T B + R_1)^{-1} B^T & 0 \\ 0 & L(k)[L^T(k)L(k) + R_2]^{-1} L^T(k) \end{bmatrix}$$

з додатними елементами на головній діагоналі $\frac{1}{1 + R_{ii}} > 0$ і

$\frac{1}{Y_{\mu_l}^2(k) + R_{ll}} > 0$, а власні числа матриці

$$I - \begin{bmatrix} B(B^T B + R_1)^{-1} B^T & 0 \\ 0 & L(k)[L^T(k)L(k) + R_2]^{-1} L^T(k) \end{bmatrix}$$

будуть за модулем менші за одиницю. Звідси випливає висновок, що замкнена система керування імпульсним процесом КК (3.12) буде стійкою.

3.3. Синтез системи керування стійким соціально-навчальним процесом студента на основі варіювання вагових коефіцієнтів когнітивної карти

У підрозд. 2.3 було розглянуто КК соціально-навчального процесу студента закладу вищої освіти. При цьому було розроблено систему стабілізації нестійкого імпульсного процесу КК із застосуванням методу модального керування. Припустимо, що соціально-навчальний процес студента є стійким, а завдання управління полягає не в стабілізації, а в покращенні певних цільових показників, тобто в динамічному переведенні координат вершини КК з одного рівня на інший.

Когнітивна карта (2.32) для стійкого імпульсного процесу буде видозмінена таким чином:

$$\begin{bmatrix} \Delta Y_1(k+1) \\ \Delta Y_2(k+1) \\ \Delta Y_3(k+1) \\ \Delta Y_4(k+1) \\ \Delta Y_5(k+1) \\ \Delta Y_6(k+1) \\ \Delta Y_7(k+1) \\ \Delta Y_8(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0,2 & -0,25 & 0 & 0 & 0 & 0,7 & -0,15 \\ 0,8 & 0,4 & -0,4 & 0 & 0 & 0,4 & 0 & 0 \\ -0,6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,3 & 0 \\ 0,2 & 0 & 0,8 & 0,4 & 0 & 0,5 & 0 & -0,3 \\ 0 & 0 & 0 & 0,4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,5 & 0 & 0,4 & 0 & 0,2 & 0,8 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0,65 & -0,3 \\ -0,3 & 0 & -0,6 & 0 & 0,3 & 0 & 0,4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta Y_1(k) \\ \Delta Y_2(k) \\ \Delta Y_3(k) \\ \Delta Y_4(k) \\ \Delta Y_5(k) \\ \Delta Y_6(k) \\ \Delta Y_7(k) \\ \Delta Y_8(k) \end{bmatrix},$$

де вершини КК, відповідно, означають: Y_1 – час, витрачений на навчання; Y_2 – успіхи в навчанні; Y_3 – час, витрачений на роботу; Y_4 – успіхи в роботі; Y_5 – гроші, отримані за роботу; Y_6 – рівень здоров'я (час та фінансування на підтримку здоров'я); Y_7 – сімейний добробут (бюджет родини); Y_8 – хобі (час та гроші на відпочинок і розваги).

Як і в підрозд. 2.3, знову запровадимо десятибальну шкалу для вимірювання усіх координат вершин КК.

Щоб обрати керуючі дії через варіювання ваговими коефіцієнтами КК, припустимо, що студент може змінювати такі важелі впливу:

a_{13} – як час, витрачений на роботу, впливає на час, витрачений на навчання;

a_{23} – як час, витрачений на роботу, впливає на успіхи в навчанні;

a_{31} – як час, витрачений на навчання, впливає на час, витрачений на роботу;

a_{41} – як час, витрачений на навчання, впливає на успіхи в роботі;

a_{65} – як зароблені гроші впливають на рівень здоров'я;

a_{75} – як зароблені гроші впливають на сімейний бюджет;

a_{83} – як час, витрачений на роботу, впливає на хобі.

Тоді вектор приростів керуючих дій буде мати такий вигляд:

$$\Delta \bar{a} = (\Delta a_{13} \ \Delta a_{23} \ \Delta a_{31} \ \Delta a_{41} \ \Delta a_{65} \ \Delta a_{75} \ \Delta a_{83})^T,$$

а матрицю $L(k)$ запишемо так:

$$L(k) = \begin{bmatrix} Y_3(k) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y_3(k) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Y_1(k) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Y_1(k) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Y_5(k) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Y_5(k) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Y_3(k) \end{bmatrix}.$$

Для моделювання замкненої системи керування припустимо, що показники координат вершин Y_2 та Y_6 (успіхи в навчанні й рівень здоров'я) знизились з рівня 5 до рівня 4, а нашою метою є підвищення їх до рівня 6.

За законом керування (3.6) за відсутності збурень $\bar{\xi}(k)$ обчислимо вектор приростів керуючих дій:

$$\Delta \bar{a}(k) = - \left[L^T(k) L(k) + R \right]^{-1} L^T(k) \left[I + A - Aq^{-1} \right] \bar{Y}(k) - \bar{G}. \quad (3.14)$$

Тоді зі зміною складових вектора задавальних дій G_2 і G_6 з рівня 4 до рівня 6 усі координати КК в замкненій системі будуть змінюватися згідно із графіками, поданими на рис. 3.1. На рис. 3.2 показано графіки зміни вагових коефіцієнтів КК як керуючих дій згідно із законом керування (3.14). Можна бачити, що мета управління досягається, а решта координат вершин ($Y_1, Y_3, Y_4, Y_5, Y_7, Y_8$) фактично не змінюється.

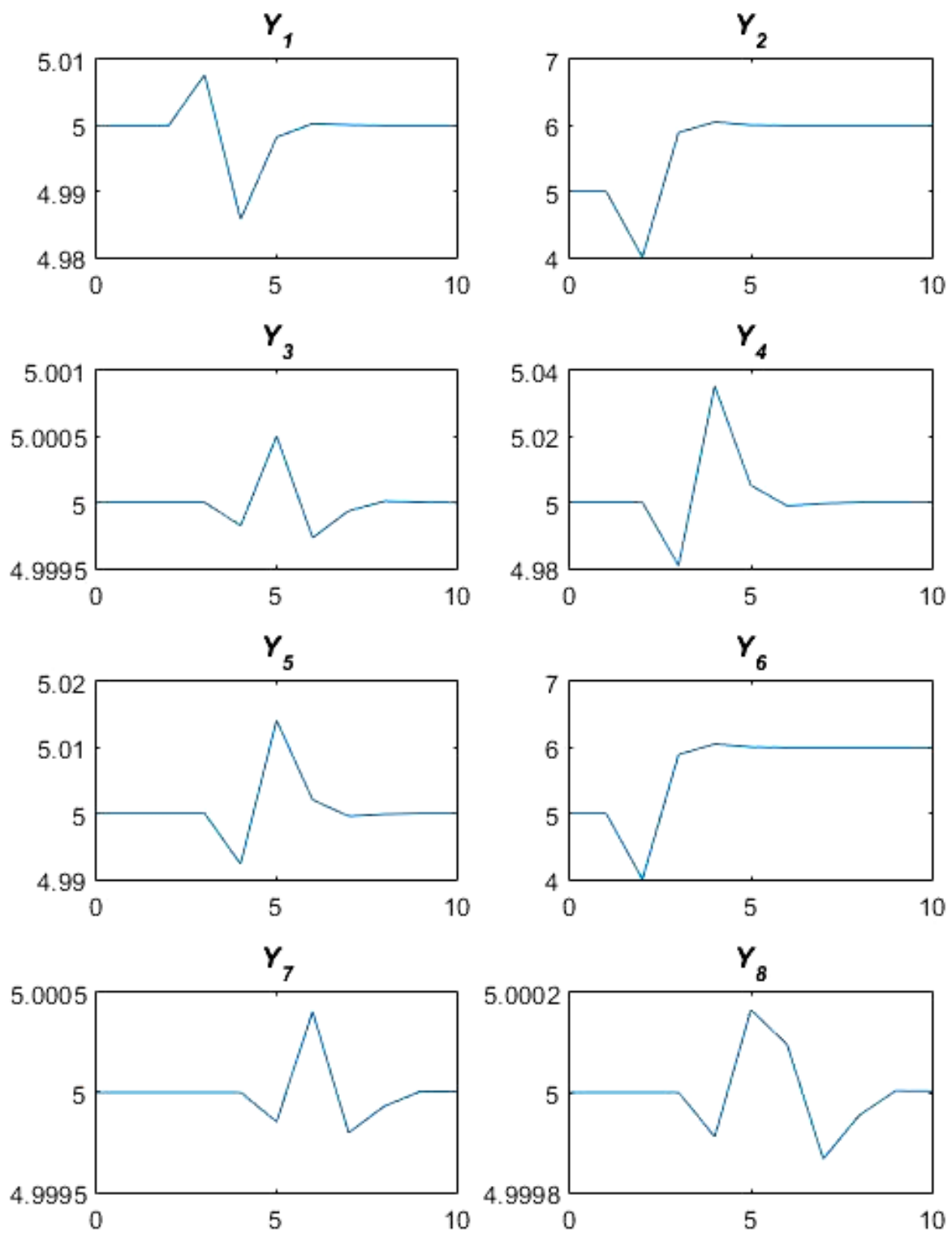
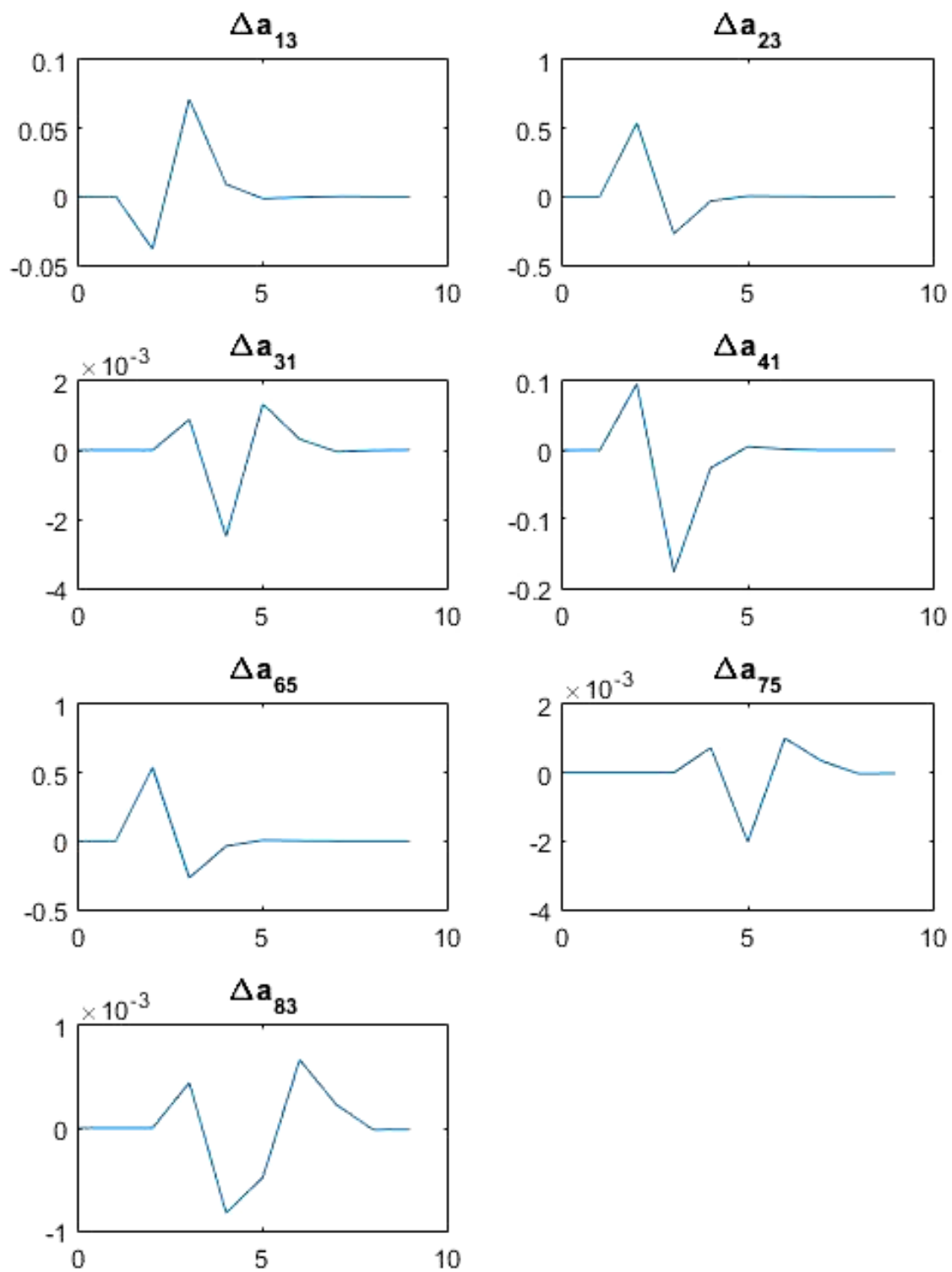


Рис. 3.1. Графіки моделювання координат вершин КК у замкненій системі керування імпульсними процесами у разі зміни задавальних дій G_2 та G_6



*Рис. 3.2. Графіки зміни вагових коефіцієнтів КК
як керуючих дій дискретного регулятора*

3.4. Автоматизація керування імпульсним процесом у когнітивній карті управління персоналом ІТ-компанії на основі синтезу приростів вагових коефіцієнтів та ресурсів координат вершин

На рис. 3.3 показано КК, на якій відображено один аспект діяльності ІТ-компанії – управління персоналом (*human resources management*) [56].

Вершини КК на рис. 3.3 відображають такі показники:

- Y_1 – управління кар’єрою та кадровим резервом;
- Y_2 – переатестація персоналу;
- Y_3 – управління премією за дострокове виконання роботи;
- Y_4 – управління премією за засвоєння нових знань та умінь;
- Y_5 – рівень контролю;
- Y_6 – планування процесу навчання персоналу;
- Y_7 – середня заробітна плата;
- Y_8 – фінанси компанії на одного співробітника;
- Y_9 – задоволеність роботою;
- Y_{10} – перспективи кар’єрного зростання;
- Y_{11} – рівень фінансування фізкультури і спорту;
- Y_{12} – підвищення кваліфікації персоналу без зміни основної спеціальності;
- Y_{13} – перепідготовка кадрів зі зміною основної спеціальності;
- Y_{14} – рівень професійних умінь і навичок персоналу;
- Y_{15} – рівень інноваційності продукції;
- Y_{16} – навчання допоміжного персоналу;
- Y_{17} – витрати на науково-технічні роботи;
- Y_{18} – ефективність роботи аспірантури.

На основі причинно-наслідкових зв’язків експертним шляхом встановлено значення елементів матриці суміжності. Вагові коефіцієнти кожного ребра визначені відповідно до величини впливу однієї вершини КК на іншу. При цьому матриця суміжності КК, зображена на рис. 3.3, має вигляд

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0,4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,2 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0,2 & 0,2 & 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0,05 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,2 & 0,1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,4 & 0 & 0 & 0,2 & 0,3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,4 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0,4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,4 & 0 & 0 & 0,4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,4 & 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,4 & 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,4 & 0 & 0,1 & 0,4 & 0,4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,3 & 0 & 0 & 0 & 0,15 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,3 & 0 & 0,25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,3 & 0,4 \end{bmatrix}.$$

Легко переконатися, що така КК є стійкою, тобто власні значення матриці A за модулем менші від одиниці.

Поставимо задачу керування імпульсним процесом цієї КК, яка полягає в тому, щоб установити координати деяких вершин КК на бажаних рівнях. Для цього спочатку припустимо, що деякими вершинами КК можна керувати безпосередньо через варіювання їх ресурсами, а деякими – через варіювання ваговими коефіцієнтами, тобто ступенем впливу одних вершин на інші [19].

Керуючи ресурсами КК, можна здійснювати варіювання координатами вершин $Y_1, Y_2, Y_5, Y_6, Y_{13}$. Також виділимо вершини, якими можна керувати за допомогою варіювання вагових коефіцієнтів $\Delta \bar{a}(k)$.

У розглядуваний КК це можна робити:

а) керуючи премією за освоєння нових знань та умінь (вершина Y_4) за допомогою варіювання коефіцієнта $\Delta a_{4,5}$;

б) керуючи премією за дострокове виконання роботи (вершина Y_3) за допомогою зміни коефіцієнта $\Delta a_{3,5}$;

в) керуючи рівнем середньої заробітної плати (вершина Y_7) за допомогою зміни коефіцієнта $\Delta a_{7,8}$;

г) керуючи перспективою кар'єрного росту (вершина Y_{10}) за допомогою зміни коефіцієнта $\Delta a_{10,1}$;

д) керуючи рівнем фінансування фізкультури і спорту (вершина Y_{11}) за допомогою зміни коефіцієнта $\Delta a_{11,8}$;

е) керуючи рівнем підвищення кваліфікації персоналу без зміни основної спеціальності (вершина Y_{12}) за допомогою зміни коефіцієнта $\Delta a_{12,6}$;

ж) керуючи рівнем професійних умінь та навичок персоналу (вершина Y_{14}) за допомогою зміни коефіцієнта $\Delta a_{14,2}$;

и) керуючи навчанням допоміжного персоналу (вершина Y_{16}) за допомогою зміни коефіцієнта $\Delta a_{16,6}$.

Некерованими вершинами залишаються $Y_8, Y_9, Y_{15}, Y_{17}, Y_{18}$.

Вектор керування розмірністю $p = 5$ через варіювання ресурсами координат вершин буде мати вигляд

$$\Delta \bar{u} = (\Delta u_1 \quad \Delta u_2 \quad \Delta u_5 \quad \Delta u_6 \quad \Delta u_{13})^T,$$

а матрицю керування B буде формувати проєктувальник системи на основі правила 3.6:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Матриця B має розмірність 18×5 .

Другий вектор керування на основі приростів вагових коефіцієнтів $\Delta \bar{a}$ згідно з правилами 3.5, 3.7 матиме вигляд

$$\Delta \bar{a} = [\Delta a_{3,5} \quad \Delta a_{4,5} \quad \Delta a_{7,8} \quad \Delta a_{10,1} \quad \Delta a_{11,8} \quad \Delta a_{12,6} \quad \Delta a_{14,3} \quad \Delta a_{16,6}]^T.$$

Тоді матриця керування $L(k)$ розмірністю 18×8 буде формуватися згідно з правилами 3.7, 3.8:

$$L(k) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Y_5(k) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y_5(k) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Y_8(k) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Y_1(k) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Y_8(k) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Y_6(k) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Y_2(k) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Y_6(k) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

У результаті перемноження матриця $L^T(k)L(k)$ буде діагональною з розмірністю 8×8 .

Для моделювання системи керування скористаємося методом комбінованого керування, розробленого у підрозд. 3.2; застосувавши закон керування (3.11)

$$\begin{bmatrix} \Delta \bar{u}(k) \\ \Delta \bar{a}(k) \end{bmatrix} = - \left[\begin{bmatrix} B^T \\ L^T(k) \end{bmatrix} [B \quad L(k)] + \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} \right]^{-1} \cdot \begin{bmatrix} B^T \\ L^T(k) \end{bmatrix} \left\{ [I + A - Aq^{-1}] \bar{Y}(k) + \bar{\xi}(k) - \bar{G} \right\},$$

виконаємо моделювання замкненої системи керування (3.12) із переведення координат вершин Y_7 , Y_{10} , Y_{14} з рівня 5 на більш високий рівень 7.

При цьому початкові значення координат вершин КК, що вимірюються за умовною 10-бальною шкалою, перебувають на середньому рівні 5.

Динаміку перехідних процесів координат КК показано на рис. 3.4.

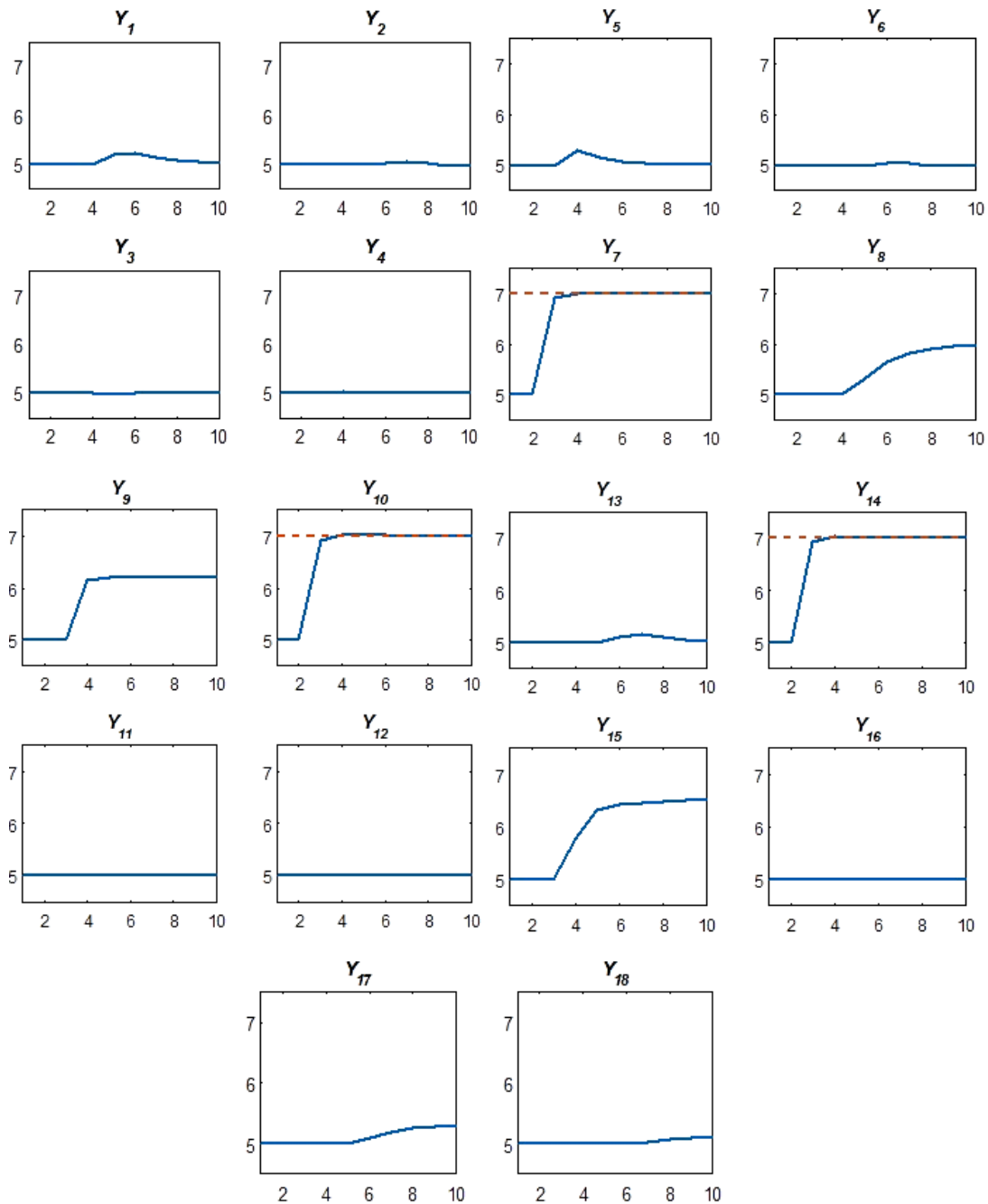


Рис. 3.4. Графіки перехідних процесів координат вершин КК управління персоналом ІТ-компанії під час переведення Y_7 , Y_{10} , Y_{14} на нові рівні стабілізації

На основі аналізу графіків можна зробити висновок, що значення координат вершин Y_7 , Y_{10} , Y_{14} після зміни задавальних дій G_7 , G_{10} , G_{14}

з рівня 5 на рівень 7 чітко переходять у замкненій системі керування на нові рівні. Водночас координати вершин Y_8 (фінанси компанії на одного співробітника), Y_9 (задоволеність роботою) та Y_{15} (рівень інноваційності продукції) мимоволі зростає завдяки зростанню координат вершин Y_7, Y_{10}, Y_{14} .

3.5. Комбіноване керування імпульсним процесом у когнітивній карті водогосподарського балансу на досліджуваному масиві вод

Структура водогосподарського балансу на водогосподарській ділянці (ВГД) поєднує дохідну і витратну частини, а також результат водогосподарського балансу.

Складові балансу ВГД відображають інженерні рішення, які пов'язані з раціональним водокористуванням, регулюванням стоку, його територіальним перерозподілом у разі обмеження забруднення води на певному масиві вод (МВ). Результат водогосподарського балансу (РВБ) характеризується наявністю резервів води.

Для розрахунку водогосподарського балансу у статичному режимі на ВГД використовують таку рівність в одиницях води за розрахунковий період:

$$\begin{aligned} \text{ВГД} = & (W_{\text{вх}} + W_{\text{бок}}) + (W_{\text{пзв}} - W_{\text{нов}} - W_3) + \\ & + (W_{\text{дот}} - W_{\text{пер}}) + W_{\text{зв}} - W_{\text{вип}} - W_{\text{ф}} \pm V - W_{\text{сеп}}, \end{aligned} \quad (3.15)$$

де $(W_{\text{вх}} + W_{\text{бок}})$ – стік річок, який складається з об'єму стоку $W_{\text{вх}}$, що надходить за розрахунковий період з водогосподарських ділянок, які знаходяться вище, а $W_{\text{бок}}$ – об'єм бокового притоку, який формується в межах ВГД;

$(W_{\text{пзв}} - W_{\text{нов}} - W_3)$ – загальний об'єм водозабору, який складається з об'єму водозабору $W_{\text{пзв}}$ з підземних водних об'єктів у межах ВГД, з об'єму забору з поверхневих водних об'єктів і зі зменшення річного стоку W_3 , який спричинений водозабором з підземних вод, що мають гідравлічний зв'язок з поверхневими водними об'єктами;

$(W_{\text{дот}} - W_{\text{пер}})$ – об’єм перекиду стоку, який складається з дотацій $(+)W_{\text{дот}}$ або відданого об’єму води $(-)W_{\text{пер}}$ за рахунок зовнішніх і внутрібасейнових перекидів стоку;

$W_{\text{зв}}$ – об’єм води, яка повертається у зворотному напрямку на розрахунковий ВГД;

$(-)W_{\text{вип}}$ – втрати на додаткове випарювання з поверхні водосховищ і ставків у межах ВГД;

$(-)W_{\text{ф}}$ – фільтраційні втрати з водосховищ і ставків;

$\pm V$ – спрацювання $(+)$ або наповнення $(-)$ водосховищ і ставків у межах ВГД;

$W_{\text{сеп}}$ – величина санітарно-екологічного спуску, який задає витрати води у річці, менше яких за жодних умов допускати не можна, інакше це буде мати негативні наслідки для водних екосистем і населення, яке проживає в басейні річки.

Отже, якщо встановлюються суворіші санітарно-екологічні вимоги, то меншим буде резерв води.

3.5.1. Побудова й аналіз когнітивної карти водогосподарського балансу

На рис. 3.5 зображено схему КК господарського водообміну на ВГД, яка розроблена експертами на основі рівності (3.15) і причиново-наслідкових зв’язків [29].

Вершини КК мають такі значення:

- об’єм води масиву вод ВГД у наземних водосховищах для питного водозабору (вершина 1);
- стік річок (вершина 2);
- об’єм води, який відбирають підприємства для функціонування технологічного процесу та комунальні організації (вершина 3);
- об’єм зворотних та стічних вод підприємств (індустріальні відходи) та комунальних організацій (вершина 4);
- об’єм стоку води прибічного (бокового) притоку, який формується в межах ВГД (вершина 5);

- загальний об'єм води, який перекидається з сусіднього ВГД на другому МВ у водосховища аналізованого ВГД (вершина 6);
- об'єм води, який техногенно відбирається у водосховища з підземних джерел (вершина 7);
- ступінь очистки індустріальних відходів (вершина 8);
- інтегральний індекс забруднення води на аналізованому масиві вод (вершина 9);
- об'єм води аналізованого масиву вод, який випаровується в атмосферу протягом певного часу (вершина 10);
- об'єм води, який осаджується у вигляді атмосферних опадів (вершина 11);
- об'єм сільськогосподарських стоків (вершина 12);
- об'єм води в підземних водосховищах на аналізованій ВГД (вершина 13);
- об'єм води у ґрунті під час фільтрації з водойм (вершина 14);
- об'єм підземних вод, які гідравлічно пов'язані зі стоком річок (вершина 15).

Інтегральний індекс забруднення води на аналізованому масиві вод складається з таких надходжень:

- а) забруднення, спричинені індустріальними відходами підприємств і комунальних організацій, що надходять зі стічними водами;
- б) забруднення, які надходять у складі сільськогосподарських стоків (гербіциди, пестициди тощо), при цьому їх коефіцієнт впливу підвищується з урахуванням сезонних стоків (навесні та восени);
- в) забруднення, які потрапляють у воду з атмосфери (вихлопні гази від автомобілів та викиди промислових підприємств).

Під час створення КК було обрано та враховано найважливіші фактори, які впливають на зміни водного балансу та водної екосистеми в цілому на заданій ВГД. Взаємозв'язки між цими факторами було встановлено за допомогою експертних оцінок з урахуванням історичних даних. Зауважимо, що усі вершини цієї КК вимірюються в однакових одиницях (кубометрах), оскільки однаковим є фізичний сенс факторів, позначених через вершини КК (об'єми вод). Таким чином, для цієї КК, за умови правильної побудови, має виконуватись закон збереження, згідно з яким загальний об'єм води у системі не повинен змінюватись у часі, а має лише перерозподілятися між вершинами.

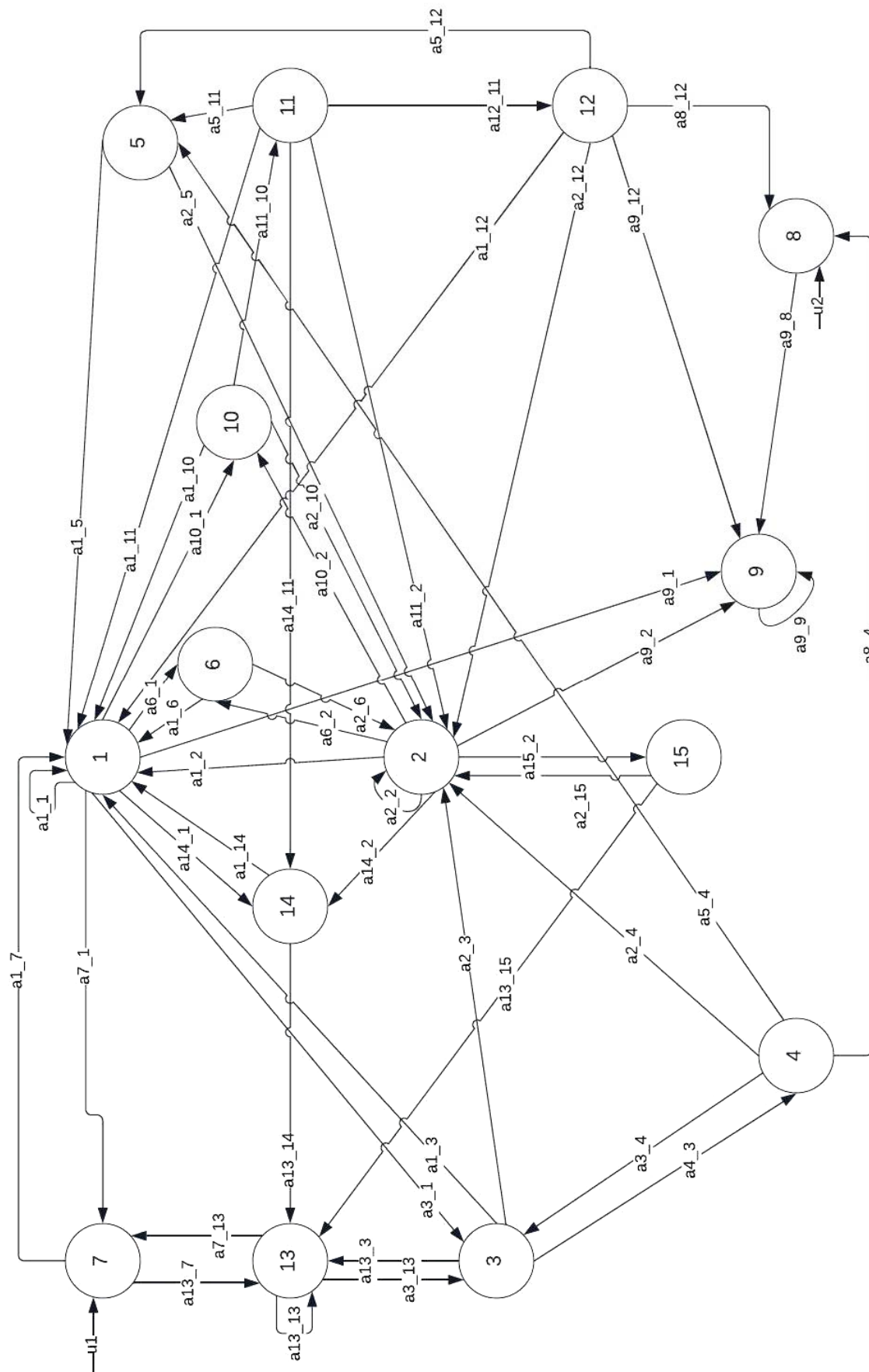


Рис. 3.5. Когнітивна карта водогосподарської ділянки

Для розроблення системи керування динамікою водогосподарського балансу треба враховувати і розкривати такі невизначеності:

1. Концептуальну невизначеність, яка полягає в наявності прихованих факторів щодо інтенсивності скидань шкідливих речовин на певній ВГД, які підвищують інтегральний індекс забруднення (вершина 9).

2. Ситуаційну невизначеність щодо об'єму резервів води у підземних водосховищах, а також:

- появу збурень від руйнування гідротехнічних споруд, стихійних зливів, обмілілих річок та заболочення водойм, спричинених впливом населення з окремих міст і сіл;

- забруднення загального об'єму води, яке потрапляє у масив вод від невимірюваних об'ємів води сільськогосподарських стоків;

- загальні втрати води від її випарювання в атмосферу з поверхні водосховищ у спекотний період.

3. Параметричну невизначеність, яка полягає у браку інформації про деякі невимірювані координати вершин КК та про інтервали зміни певних вагових коефіцієнтів КК щодо функціонування водогосподарської системи, наприклад, коефіцієнта a_{912} , який відображає величину впливу невимірюваного об'єму сільськогосподарських стоків (вершина 12) та вмісту в них шкідливих речовин на інтегральний індекс забруднення води на цьому масиві вод (вершина 9).

Координати вершин КК з 1-ї до 9-ї належать до вимірюваних, тобто є відомими під час проведення аналізу і подальшої реалізації системи керування.

До невимірюваних координат вершин КК протягом часу, який визначає інерційність процесів у разі їх зміни, слід віднести і об'єм води аналізованого масиву вод, який випаровується в атмосферу (вершина 10); об'єм води, який осаджується у вигляді атмосферних опадів (вершина 11); об'єм сільськогосподарських стоків (вершина 12); об'єм води у підземних водосховищах (вершина 13); об'єм води у ґрунті під час фільтрації з водойм (вершина 14) та об'єм підземних вод, які гідравлічно пов'язані зі стоком річок (вершина 15).

Як керуючі дії $\bar{u}(k)$ в моделі імпульсного процесу КК можна використати:

- варіювання об'єму води, який техногенно відбирається у водосховища з підземних джерел $\Delta\bar{u}_1(k)$ (вершина 7);
- варіювання ступенем очищення індустріальних відходів $\Delta\bar{u}_2(k)$ (вершина 8).

Крім того як керуючі дії можна використовувати варіювання такими складовими вектора вагових коефіцієнтів $\Delta\bar{a}(k)$ КК, а саме:

- варіювання коефіцієнта Δa_{13} , який відображає величину впливу об'єму води, який використовують підприємства та комунальні організації (вершина 3) на об'єм води у наземних водосховищах для питного водозабору (вершина 1);
- варіювання вагового коефіцієнта Δa_{23} , який відображає величину впливу об'єму використання води підприємствами і комунальними організаціями (вершина 3) на об'єм води стоку річок (вершина 2);
- варіювання вагового коефіцієнта Δa_{34} , який описує вплив об'єму зворотних та стічних вод (вершина 4) на об'єм води, який використовують підприємства і комунальні організації (вершина 3).

Позначимо вектор вимірюваних координат вершин від першої до дев'ятої через $\bar{X} = (x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5 \ x_6 \ x_7 \ x_8 \ x_9)^T$, а вектор невимірюваних координат вершин від 10-ї до 15-ї через $\bar{Y} = (Y_{10} \ Y_{11} \ Y_{12} \ Y_{13} \ Y_{14} \ Y_{15})^T$.

Тоді рівняння імпульсного процесу КК можна записати у формі двох різницевих рівнянь:

$$\Delta\bar{X}(k+1) = A_1\Delta\bar{X}(k) + D\Delta\bar{Y}(k); \quad (3.16)$$

$$\Delta\bar{Y}(k+1) = C\Delta\bar{Y}(k) + \Psi\Delta\bar{X}(k), \quad (3.17)$$

де матриці $A_1(9 \times 9)$, $D(9 \times 6)$, $C(6 \times 6)$, $\Psi(6 \times 9)$ вагових коефіцієнтів відображають динамічні властивості водогосподарської системи на ВГД.

На основі причинно-наслідкових зв'язків експертним шляхом установлено значення коефіцієнтів матриць A_1 , D , C , Ψ відповідно до КК, зображеної на рис. 3.5:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,1 & -0,15 & 0 & 0,1 & \pm 0,1 & 0,05 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & -0,1 & 0,02 & 0,1 & \pm 0,1 & 0 & 0 & 0 \\ 0,1 & 0 & 0 & -0,2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,15 & 0,1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,02 & -0,02 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,1 & 0,1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,3 & 0,5 \end{bmatrix};$$

$$D = \begin{bmatrix} -0,2 & 0,2 & 0,1 & 0 & -0,1 & 0 \\ -0,15 & 0,2 & 0,1 & 0 & 0 & -0,05 \\ 0 & 0 & 0 & 0,02 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,3 & 0,1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,15 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,4 & 0,2 & 0,1 \\ 0 & 0 & 0 & 0,1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,3 \end{bmatrix};$$

$$\Psi = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,01 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,1 & 0 & 0 \\ 0,1 & 0,1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

3.5.2. Проектування і дослідження системи стабілізації водогосподарського балансу на основі моделі імпульсного процесу когнітивної карти

Проектування системи стабілізації будемо виконувати на основі моделі імпульсного процесу КК (3.16) для підсистеми з вимірюваними координатами вершин $\bar{x}$. Тоді вплив невимірюваних параметрів $D\Delta\bar{y}(k) = \bar{\xi}(k)$ будемо враховувати як невимірювані збурення, тобто

$$\Delta\bar{x}(k+1) = A_1\Delta\bar{x}(k) + \Delta\bar{\xi}(k). \quad (3.18)$$

Легко переконатися, що імпульсний процес (3.18) є стійким, тобто власні значення матриці суміжності A_1 за модулем менші від одиниці.

Для стабілізації вектора координат вершин КК $\bar{x}$ на заданих рівнях сформуємо зовнішній вектор керуючих дій через одночасне варіювання ресурсів координат деяких вершин КК $\Delta\bar{u}(k)$ і вагових коефіцієнтів $\Delta\bar{a}(k)$, які були обрані в п. 3.5.1, тобто

$$\Delta\bar{u}(k) = [\Delta u_1(k) \quad \Delta u_2(k)]^T;$$

$$\Delta\bar{a}(k) = [\Delta a_{1_3}(k) \quad \Delta a_{2_3}(k) \quad \Delta a_{3_4}(k)]^T,$$

де $\Delta u_1(k)$ – варіювання координати вершини 7, тобто об'єму води, який техногенно вибирається у водосховища ВГД з підземних джерел, а $\Delta u_2(k)$ – варіювання ступеня очищення індустриальних відходів (вершина 8).

Якщо записати в моделі (3.18) перші різниці $\Delta\bar{x}(k+1) = \bar{x}(k+1) - \bar{x}(k)$, $\Delta\bar{x}(k) = \bar{x}(k) - \bar{x}(k-1)$ та враховуючи зовнішнє керування у формі (3.8), модель керованого імпульсного процесу буде мати вигляд

$$\bar{x}(k+1) = (I + A_1 - A_1 q^{-1})\bar{x}(k) + [B \quad L(k)] \begin{bmatrix} \Delta\bar{u}(k) \\ \Delta\bar{a}(k) \end{bmatrix} + \bar{\xi}(k). \quad (3.19)$$

Матриця керування (9×2) формується на основі правила 3.6 з одиниць і нулів:

$$B^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Матриця $L(k)$ розмірністю (9×3) буде формуватися згідно з правилами 3.7 і 3.8 на основі дискретних відліків $x_3(k)$ і $x_4(k)$ таким чином:

$$L(k) = \begin{bmatrix} x_3(k) & 0 & 0 \\ 0 & x_3(k) & 0 \\ 0 & 0 & x_4(k) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

У результаті перемноження матриці $L^T(k)L(k)$ дістанемо діагональну матрицю розмірністю (3×3) :

$$L^T(k)L(k) = \begin{bmatrix} x_3^2(k) & 0 & 0 \\ 0 & x_3^2(k) & 0 \\ 0 & 0 & x_4^2(k) \end{bmatrix}.$$

Синтез комбінованого вектора керуючих дій $\begin{bmatrix} \Delta \bar{u}(k) \\ \Delta \bar{a}(k) \end{bmatrix}$ реалізується на основі мінімізації квадратичного критерію оптимальності (3.9) для моделі (3.19):

$$J(k+1) = E \left\{ \left[\bar{x}(k+1) - \bar{G} \right]^T \left[\bar{x}(k+1) - \bar{G} \right] + \begin{bmatrix} \Delta \bar{u}(k) \\ \Delta \bar{a}(k) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \bar{u}(k) \\ \Delta \bar{a}(k) \end{bmatrix} \right\}, \quad (3.20)$$

що є узагальненою дисперсією.

Вагові матриці R_1 (2×2) та R_2 (3×3) , які є діагональними та додатно визначеними, формує проєктувальник системи для обмеження дисперсії варіювання складових векторів керуючих дій $\Delta \bar{u}(k)$ і $\Delta \bar{a}(k)$.

Мінімізація критерію (3.20) за вектором комбінованого керування $\begin{bmatrix} \Delta \bar{u}(k) \\ \Delta \bar{a}(k) \end{bmatrix}$ з урахуванням (3.19) згідно з методикою (3.10) дозволяє

отримати закон комбінованого оптимального керування імпульсним процесом (3.19):

$$\begin{bmatrix} \Delta \bar{u}(k) \\ \Delta \bar{a}(k) \end{bmatrix} = - \left[\begin{bmatrix} B^T \\ L^T(k) \end{bmatrix} [B \quad L(k)] + \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} \right]^{-1} \begin{bmatrix} B^T \\ L^T(k) \end{bmatrix} \bullet \\ \bullet \{ (I + A_1 - A_1 q^{-1}) \bar{x}(k) + \bar{\xi}(k) - \bar{G} \}, \quad (3.21)$$

де $\bar{G}$ – вектор задавальних дій для стабілізації координат вершин $\bar{x}$ КК для моделі (3.19) на заданих рівнях.

Поставимо задачу керування імпульсним процесом (3.19) у виконанні стабілізації координат вершин $\bar{x}$ на заданих рівнях $\bar{G}$ під дією випадкових збурень $D\Delta \bar{y}(k) = \bar{\xi}(k)$ які спричинені зміною невимірюваних координат вершин $\bar{y}(k)$.

Дослідження системи керування виконаємо моделюванням замкненої системи типу (3.12):

$$\begin{aligned} \bar{x}(k+1) = & \left\{ I - [B \quad L(k)] \left[\begin{bmatrix} B^T B & B^T L(k) \\ L^T(k) B & L^T(k) L(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} \right]^{-1} \begin{bmatrix} B^T \\ L^T(k) \end{bmatrix} \right\} \bullet \\ & \bullet (I + A_1 - A_1 q^{-1}) \bar{x}(k) + [B \quad L(k)] \left[\begin{bmatrix} B^T B & B^T L(k) \\ L^T(k) B & L^T(k) L(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} \right]^{-1} \bullet \\ & \bullet \begin{bmatrix} B^T \\ L^T(k) \end{bmatrix} \bar{G} + \left\{ I - [B \quad L(k)] \left[\begin{bmatrix} B^T B & B^T L(k) \\ L^T(k) B & L^T(k) L(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} \right]^{-1} \begin{bmatrix} B^T \\ L^T(k) \end{bmatrix} \right\} \bar{\xi}(k). \quad (3.22) \end{aligned}$$

На рис. 3.6 зображено графіки перехідних процесів координат вершин $\bar{x}$ та $\bar{y}$ КК за різкого випадіння атмосферних опадів y_{11} (вершина 11) з рівня 5 на рівень 7. При цьому різко збільшуються об'єми води у водосховищах x_1 та річках x_2 . Також на вершини y_{12} , y_{13} , y_{14} подаються збурення типу рівномірного шуму в діапазоні $-1, \dots, +1$. (На рис. 3.6 пунктиром зображено графіки збільшення координат КК без автоматичного керування.)

Суцільними лініями на графіках показано зміну координат x_1 та x_2 під час стабілізації об'ємів води на основі автоматичного керування (3.21) за задавальних дій $G_i = 5, i = 1, 2, \dots, 9$.

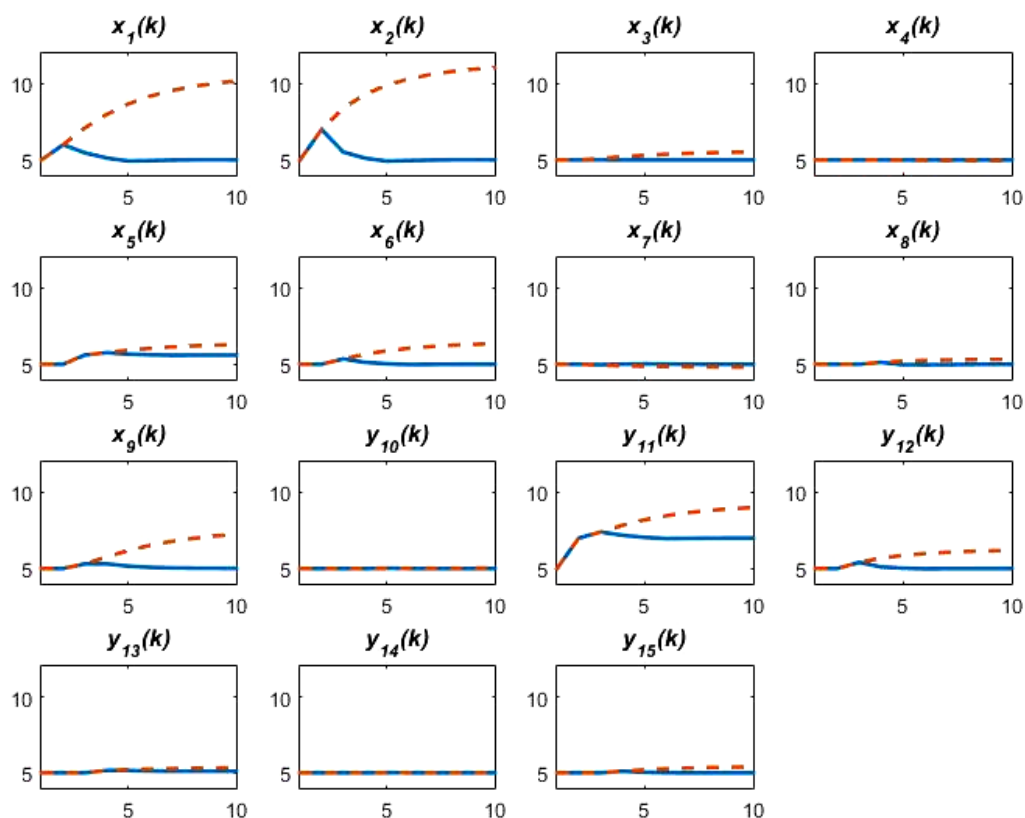


Рис. 3.6. Графіки перехідних процесів координат вершин $\bar{x}$ і $\bar{y}$ КК під час різкого випадіння атмосферних опадів u_{11}

На рис. 3.7 зображено графіки приростів $\Delta\bar{x}$ та $\Delta\bar{y}$ координат вершин КК під час перехідних процесів, які відображають швидкість зміни об'ємів води (координат вершин КК).

Характерними є зміни координат x_1 та x_2 без автоматичного керування (пунктирні лінії) і з автоматичним керуванням (суцільні лінії). У разі різкого збільшення атмосферних опадів без автоматичного керування об'єми води у водосховищах і в річках значно збільшуються, що зазвичай призводить до підтоплення місцевості. З автоматичним керуванням указані об'єми води (координати x_1 та x_2) стабілізуються, при цьому прирости координат $\Delta\bar{x}$ і $\Delta\bar{y}$ без автоматичного керування значно збільшуються (пунктирні лінії на рис. 3.7), а з автоматичним керуванням, відповідно, зменшуються.

На рис. 3.8 показано графіки перехідних процесів керуючих дій $\Delta u_1(k)$, $\Delta u_2(k)$, що являють собою варіювання ресурсами, вершини КК 7 (об'єм води, який техногенно відбирається у водосховища з підземних джерел) та вершини 8 (ступінь очищення індустриальних відходів),

а також керуючих дій $\Delta a_{13}(k)$, $\Delta a_{23}(k)$, $\Delta a_{34}(k)$, які відображають зміну впливів координат вершин 3 і 4 на координати вершин 1, 2 та 3.

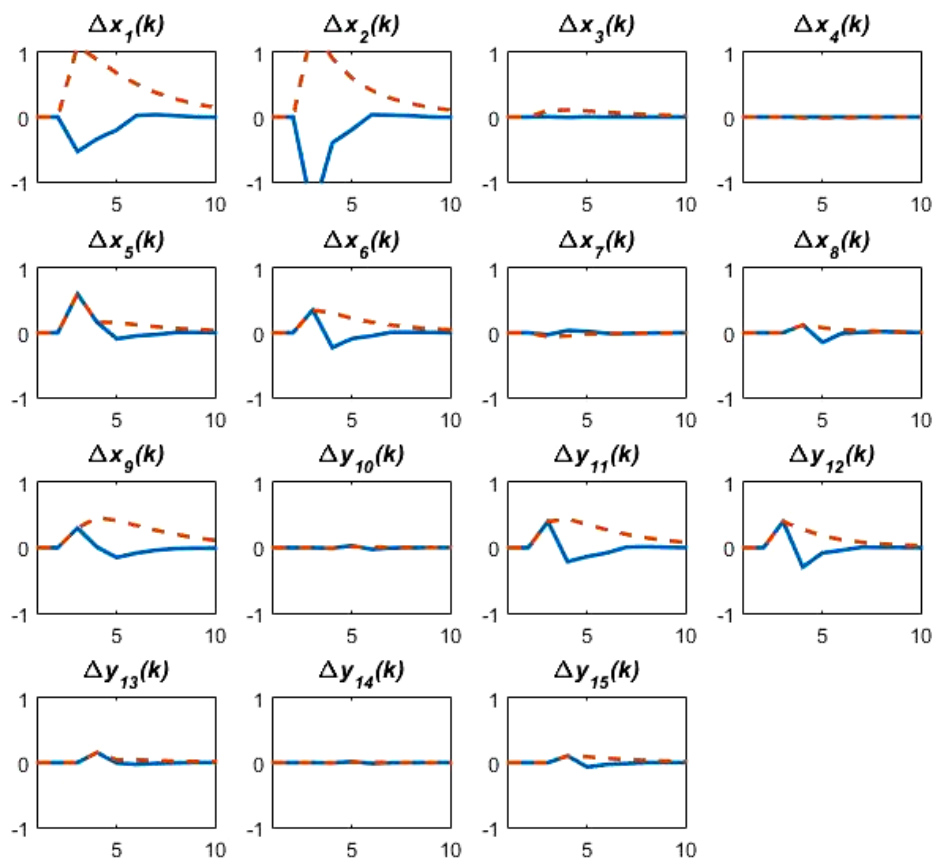


Рис. 3.7. Графіки приростів $\Delta \bar{x}$ та $\Delta \bar{y}$ координат вершин КК під час перехідних процесів

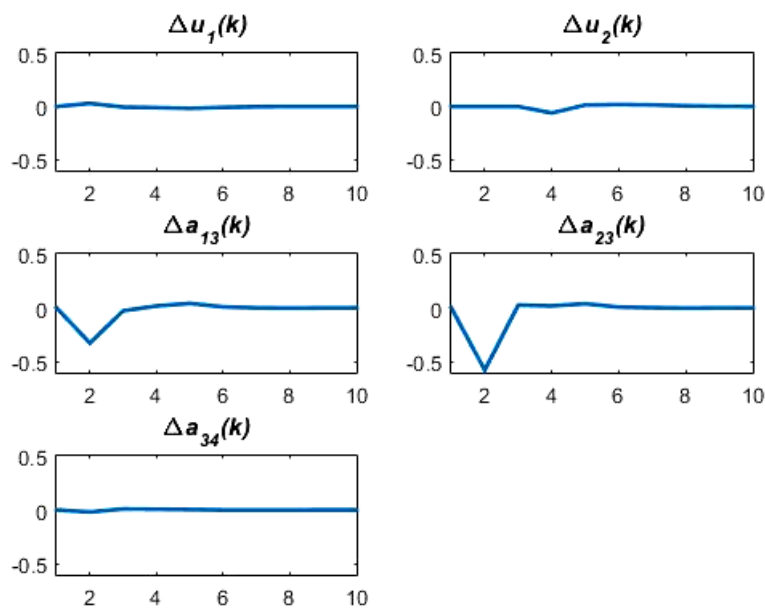


Рис. 3.8. Графіки перехідних процесів керуючих дій

3.6. Дослідження комбінованої системи керування процесом застосування криптовалюти на основі удосконаленої когнітивної карти

У підрозд. 2.7 було розглянуто КК застосування криптовалюти на фінансовому ринку (див. рис. 2.13) для нестійкого імпульсного процесу. При цьому робилось припущення, що всі координати вершин вимірюються, оцінюються або обчислюються.

У цьому підрозділі розглянемо удосконалену КК застосування криптовалюти для стійкого імпульсного процесу, але при цьому припускаємо, що частина координат КК вимірюється, а частина вчасно не вимірюється.

На рис. 3.9 показано схему КК [30], для якої введено такі позначення вершин: 1 – курс криптовалюти; 2 – обсяг торгів криптовалютою; 3 – обсяг капіталізації; 4 – кількість користувачів криптовалюти; 5 – обсяг інвестицій; 6 – обсяг спекуляцій криптовалютою; 7 – пропозиція криптовалюти; 8 – дисперсія курсу криптовалюти; 9 – попит на криптовалюту; 10 – опосередкований прибуток; 11 – рівень довіри до криптовалюти; 12 – інтегральний рівень ризиків під час застосування криптовалюти.

Координати вершин 1-8 вимірюються або обчислюються. Вершини 9-12 належать до невимірюваних або важковимірюваних зі значними похибками, які зазвичай оцінюють експерти.

Проектування і дослідження системи стабілізації координат вершин когнітивної карти криптовалюти на заданих рівнях

Як керуючі дії на основі варіювання ресурсів координат вершин КК можна використовувати:

$\Delta u_1(k)$ – варіювання обсягів торгів криптовалютою (вершина 2);

$\Delta u_2(k)$ – варіювання обсягу капіталізації (вершина 3);

$\Delta u_3(k)$ – варіювання об'єму інвестицій (вершина 5);

$\Delta u_4(k)$ – варіювання об'єму спекуляцій (вершина 6).

Другий вектор керуючих дій на основі приростів вагових коефіцієнтів $\Delta \bar{a}$ буде мати вигляд $\Delta \bar{a} = \begin{bmatrix} \Delta a_{15} & \Delta a_{35} \end{bmatrix}^T$, тобто на основі впливів

об'єму інвестицій (вершина 5) відповідно на курс криптовалюти (вершина 1) і на обсяг капіталізації (вершина 3).

Для синтезу системи стабілізації оберемо структуру моделі імпульсного процесу КК у формі (3.16), (3.17), тобто

$$\Delta \bar{X}(k+1) = A_1 \Delta \bar{X}(k) + D \Delta \bar{Y}(k); \quad (3.23)$$

$$\Delta \bar{Y}(k+1) = C \Delta \bar{Y}(k) + \Psi \Delta \bar{X}(k), \quad (3.24)$$

де $\bar{X} (8 \times 1)$ – вектор вимірюваних або обчислюваних координат вершин КК;

$\bar{Y} (4 \times 1)$ – вектор невимірюваних координат.

Згідно зі схемою КК (рис. 3.9) матриці A_1 , D , C і Ψ в моделях (3.23), (3.24) становитимуть:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0,3 & 0,1 & 0,15 & 0,2 & 0,2 & 0,3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,1 & 0,1 & 0,1 & 0,35 & 0,35 & 0 \\ 0,25 & 0 & 0,5 & 0 & 0,1 & 0 & 0 & 0 \\ 0,4 & 0 & 0 & 0,3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0 & 0 & 0,4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 & 0,2 & 0 & 0 & 0,6 & -0,2 \\ 0 & 0 & 0 & 0,35 & 0,3 & 0 & 0 & 0 \\ -0,3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$D = \begin{bmatrix} 0,2 & 0 & 0,3 & -0,3 \\ -0,3 & 0 & 0,3 & -0,2 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0,2 & -0,2 \\ 0 & 0,4 & 0 & -0,3 \\ 0 & 0 & 0 & -0,4 \\ 0,5 & 0,2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -0,4 \\ 0,1 & 0,9 & 0,05 & 0 \\ 0,4 & 0 & 0 & -0,5 \\ 0 & -0,2 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\Psi = \begin{bmatrix} 0,05 & 0,8 & 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0,7 & -0,3 \\ 0 & 0,7 & 0,1 & 0 & 0 & 0,5 & 0 & -0,5 \\ 0,5 & 0 & 0,5 & 0 & 0,3 & 0 & 0 & -0,5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,4 & 0,6 & 0 & 0,4 \end{bmatrix}.$$

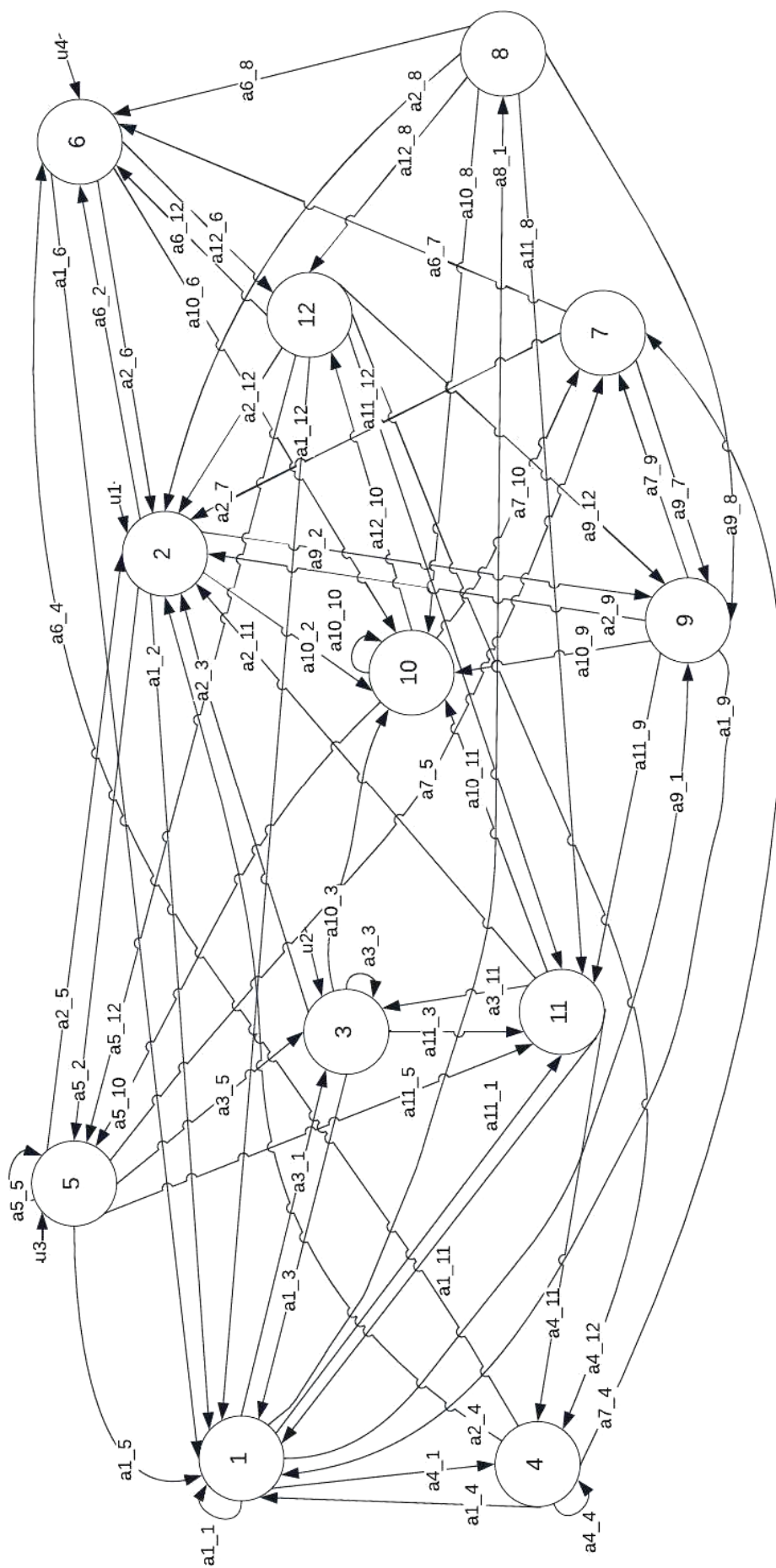


Рис. 3.9. Схема когнітивної карти

Власні значення матриць A_1 і C за модулем менші від одиниці, тому вихідні підсистеми (3.23), (3.24) є стійкими.

Для синтезу системи керування будемо використовувати модель (3.23) для підсистеми КК з вимірюваними координатами вершин $\bar{X}$.

Під час формування вектора керуючих дій

$$\Delta \bar{u}(k) = [\Delta u_1(k) \quad \Delta u_2(k) \quad \Delta u_3(k) \quad \Delta u_4(k)]^T \text{ і } \Delta \bar{a}(k) = [\Delta a_{1_5}(k) \quad \Delta a_{3_5}(k)]^T.$$

Керована модель імпульсного процесу буде мати вигляд

$$\Delta \bar{X}(k+1) = A_1 \Delta \bar{X}(k) + B \Delta \bar{u}(k) + L(k) \Delta \bar{a}(k) + D \Delta \bar{Y}(k).$$

Переходячи до повних координат вершин $\bar{x}$, цю модель подамо у формі (3.3):

$$\bar{X}(k+1) = (I + A_1 - A_1 q^{-1}) \bar{X}(k) + B \Delta \bar{u}(k) + L(k) \Delta \bar{a}(k) + \Delta \bar{\xi}(k), \quad (3.25)$$

де q^{-1} – оператор зворотного зсуву на один період дискретизації T_0 , а $\Delta \bar{\xi}(k) = D \Delta \bar{Y}(k)$.

З обраним вектором керування $\Delta \bar{u}(k)$, який діє на вершини 2, 3, 5, 6, матрицю B з розмірністю (8×4) формуємо таким чином:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

У разі застосування другого вектора керуючих дій $\Delta \bar{a}(k) = [\Delta a_{1_5}(k) \quad \Delta a_{3_5}(k)]^T$ матриця керування $L(k)$ в моделі (3.25), яка складається на основі правил 3.7 і 3.8, становитиме

$$L(k) = \begin{bmatrix} x_5(k) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_5(k) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T.$$

У результаті перемноження матриць $B^T B$ дістанемо одиничну матрицю (4×4) , а після перемноження $L^T L$ дістанемо діагональну матрицю (2×2) :

$$L^T(k)L(k) = \begin{bmatrix} x_5^2(k) & 0 \\ 0 & x_5^2(k) \end{bmatrix}.$$

Синтез системи стабілізації координат вершин КК застосування криптовалюти на заданих рівнях виконуємо на основі мінімізації, квадратичного критерію оптимальності (3.20) для моделі (3.25), що дозволяє отримати закон комбінованого оптимального керування (3.21).

Завдання дослідження полягає в моделюванні замкненої системи керування (3.22) під час переведення деяких координат x_i КК на нові бажані рівні.

Нехай початкові значення усіх координат вершин КК, які вимірюються за 10-бальною шкалою, перебувають на рівні 5. Припустимо, що треба перевести координати вершини x_1 (курс криптовалюти) і x_3 (обсяг капіталізації) на більш високий рівень 7. Застосувавши закон керування (3.21), дістанемо динаміку координат вершин КК, яку зображено на графіках на рис. 3.10.

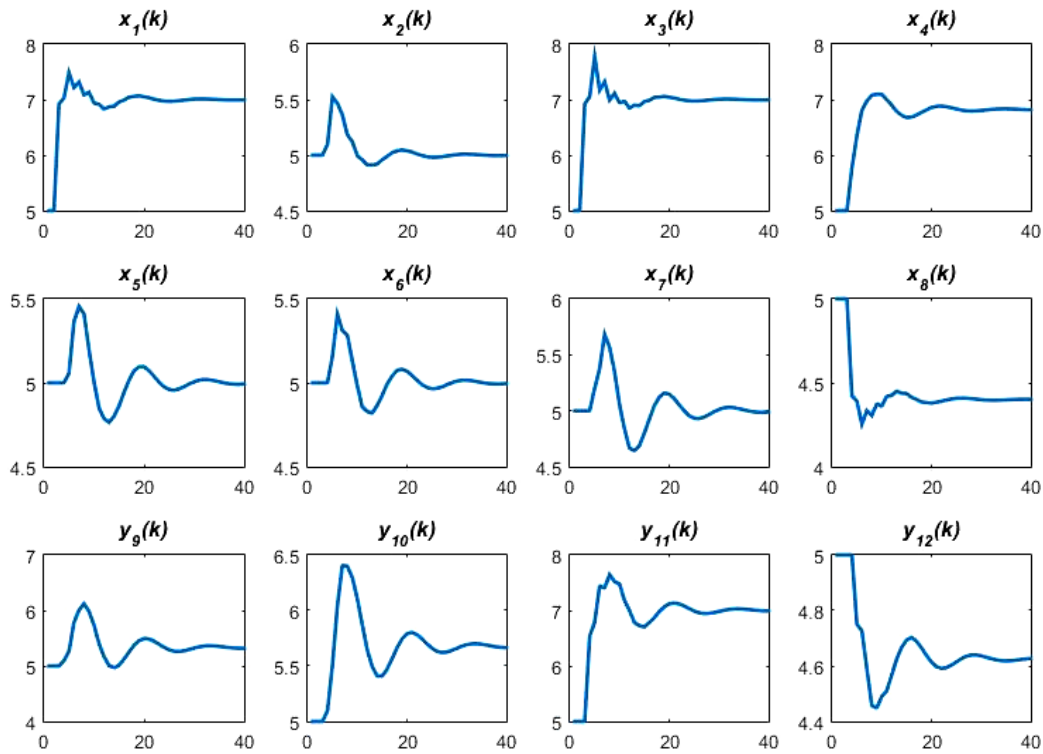


Рис. 3.10. Динаміка координат вершин КК

Контрольні запитання

1. Як формується матриця керування $L(k)$ у рівнянні імпульсного процесу КК?

2. У чому полягає ідея використання варіювання вагових коефіцієнтів $\Delta\bar{a}(k)$ КК як формування керуючих дій в імпульсному процесі?

3. Сформулюйте переваги комбінованого керування імпульсним процесом з одночасним формуванням керуючих дій $\Delta\bar{u}(k)$ і $\Delta\bar{a}(k)$.

4. У чому полягає принцип формування приростів вагових коефіцієнтів $\Delta\bar{a}(k)$ в моделі імпульсних процесів КК для використання їх як керуючих дій?

5. Як формуються стовпці елементів матриці керування $L(k)$ в моделі вимушеного руху імпульсного процесу КК?

6. Що являє собою критерій оптимальності

$$J(k+1) = E \left\{ \left[\bar{Y}(k+1) - \bar{G} \right]^T \left[\bar{Y}(k+1) - \bar{G} \right] + \Delta\bar{a}^T(k) R \Delta\bar{a}(k) \right\}$$

для моделі імпульсного процесу КК

$$\bar{Y}(k+1) = \left(I + A - Aq^{-1} \right) \bar{Y}(k) + L(k) \Delta\bar{a}(k) + \bar{\xi}(k)$$

з точки зору теорії ймовірностей?

7. Як впливає вибір вагової матриці R у критерії оптимальності на обмеження вектора керуючих дій $\Delta\bar{u}(k)$ або $\Delta\bar{a}(k)$?

8. Сформулюйте правила синтезу комбінованого дискретного регулятора шляхом формування векторів приростів $\Delta\bar{u}(k)$ і $\Delta\bar{a}(k)$.

9. Чим відрізняється вільний рух імпульсного процесу КК від вимушеного руху?

Задачі для самостійного розв'язання

3.1. Перевести різницеве рівняння вільного руху імпульсного процесу у приростах змінних $\Delta\bar{X}(k+1) = A\Delta\bar{X}(k)$ у форму різницевого рівняння у повних координатах $\bar{X}$ вершин КК.

3.2. Задано математичну модель вимушеного руху імпульсного процесу КК

$$\bar{Y}(k+1) = \left(I + A - Aq^{-1} \right) \bar{Y}(k) + L(k) \Delta\bar{a}(k) + \bar{\xi}(k),$$

$$\text{де } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}; \quad \bar{Y}(k) = \begin{bmatrix} Y_1(k) \\ Y_2(k) \\ Y_3(k) \end{bmatrix}.$$

Вектор керування за рахунок варіювання вагових коефіцієнтів КК становить

$$\Delta \bar{a}(k) = \begin{bmatrix} \Delta a_{12}(k) \\ \Delta a_{23}(k) \end{bmatrix}.$$

Завдання.

- а) На основі моделі імпульсного процесу побудувати КК.
- б) Визначити розмірність і сформулювати матрицю керування $L(k)$.
- в) Показати, що $L^T(k)L(k)$ є діагональною матрицею.

3.3. Задано модель вимушеного руху «позиційного» імпульсного процесу КК:

$$\bar{Y}(k+1) = (I + A - Aq^{-1})\bar{Y}(k) + B\Delta \bar{u}(k) + L(k)\Delta \bar{a}(k) + \bar{\xi}(k),$$

де матриця суміжності та вектор координат КК

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{34} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{44} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}; \quad \bar{Y}(k) = \begin{bmatrix} Y_1(k) \\ Y_2(k) \\ Y_3(k) \\ Y_4(k) \end{bmatrix}.$$

Вектори керування обрано таким чином:

$$\Delta \bar{a}(k) = \begin{bmatrix} \Delta a_{24}(k) \\ \Delta a_{41}(k) \end{bmatrix}, \quad \text{а } \Delta \bar{u}(k) = \begin{bmatrix} \Delta u_1(k) \\ \Delta u_3(k) \end{bmatrix},$$

де керуючі дії $\Delta u_1(k)$ та $\Delta u_3(k)$ подаються, відповідно, на першу і третю вершини КК.

Завдання.

- а) На основі заданого імпульсного процесу побудувати КК.
- б) Сформулювати матриці керування B та $L(k)$.
- в) Показати, що матриці B^TB та $L^T(k)L(k)$ є діагональними.

3.4. Задано математичну модель вимушеного руху «позиційного» імпульсного процесу КК у повних координатах вершин

$$\bar{Y}(k+1) = (I + A - Aq^{-1})\bar{Y}(k) + B\Delta\bar{u}(k) + \bar{\xi}(k),$$

де матриця суміжності та вершин КК

$$A = \begin{bmatrix} 0,6 & 0,2 & 0 & -0,15 \\ 0 & 0,7 & 0,3 & 0 \\ -0,4 & -0,1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,25 & 0,03 & 0 \end{bmatrix}; \quad \bar{Y}(k) = \begin{bmatrix} Y_1(k) \\ Y_2(k) \\ Y_3(k) \\ Y_4(k) \end{bmatrix}.$$

Вектор керування $\Delta\bar{u}(k)$ становить $\Delta\bar{u}(k) = \begin{bmatrix} \Delta u_1(k) \\ \Delta u_2(k) \end{bmatrix}$, де керуючі дії

$\Delta u_1(k)$ і $\Delta u_2(k)$ подаються на вершини, відповідно, $Y_2(k)$ і $Y_3(k)$.

$$\text{Матриця керування } B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Завдання.

а) Дослідити «позиційну» стійкість імпульсного процесу.

б) Визначити закон керування імпульсним процесом на основі $\frac{\partial J(k+1)}{\partial \Delta\bar{u}(k)} = 0$, де критерій оптимальності $J(k+1)$ становить

$$J(k+1) = E \left\{ \bar{Y}^T(k+1)\bar{Y}(k+1) + \Delta\bar{u}^T(k)R\Delta\bar{u}(k) \right\}.$$

в) Побудувати КК на основі моделі вимушеного руху імпульсного процесу і дослідити замкнену систему керування.

3.5. Задано математичну модель вимушеного руху «позиційного» імпульсного процесу КК у повних координатах вершин:

$$\bar{Y}(k+1) = (I + A - Aq^{-1})\bar{Y}(k) + L(k)\Delta\bar{a}(k) + \bar{\xi}(k), \quad (*)$$

де матриця суміжності і вершини КК

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -0,15 & 0,3 & 0 \\ 0,2 & 0,65 & 0 & -0,1 \\ 0 & 0,25 & 0,7 & -0,2 \\ 0,1 & 0 & 0,4 & 0 \end{bmatrix}; \quad \bar{Y}(k) = \begin{bmatrix} Y_1(k) \\ Y_2(k) \\ Y_3(k) \\ Y_4(k) \end{bmatrix}.$$

Завдання.

а) Побудувати КК.

б) Виконати дослідження «позиційної» стійкості імпульсного процесу (*) і дослідити імпульсну стійкість, коли модель імпульсного процесу КК записано у формі $\bar{Y}(k+1) = A\Delta\bar{Y}(k) + L(k)\Delta\bar{a}(k) + \bar{\xi}(k)$.

в) Сформувати матрицю керування $L(k)$ за вектора керуючих дій

$$\Delta\bar{a}(k) = \begin{bmatrix} \Delta a_{32}(k) \\ \Delta a_{43}(k) \end{bmatrix}.$$

г) Для критерію оптимальності

$$J(k+1) = E \left\{ \bar{Y}^T(k+1)\bar{Y}(k+1) + \Delta\bar{a}^T(k)R\Delta\bar{a}(k) \right\}$$

визначити закон керування (3.6) імпульсним процесом на основі мінімізації критерію $\frac{\partial J(k+1)}{\partial \Delta\bar{a}(k)} = 0$ згідно з (3.5).

д) Виконати дослідження замкненої системи керування імпульсним процесом через цифрове моделювання (3.7) за $\bar{\xi}(k) = 0$ і $\bar{\xi}(k) \neq 0$. Побудувати графіки перехідних процесів.

3.6. Задано математичну модель вимушеного руху «позиційного» імпульсного процесу КК у повних координатах вершин на основі синтезу приростів вагових коефіцієнтів $\Delta\bar{a}(k)$ і варіювання ресурсів координат вершин згідно з (3.8):

$$\bar{Y}(k+1) = \left(I + A - Aq^{-1} \right) \bar{Y}(k) + B\Delta\bar{u}(k) + L(k)\Delta\bar{a}(k) + \bar{\xi}(k),$$

де вектор $\bar{Y}(k)$ і матриця A задані у попередньому прикладі.

Вектор керування $\Delta\bar{u}(k)$ складається у формі $\Delta\bar{u}(k) = \begin{bmatrix} \Delta u_1(k) \\ \Delta u_2(k) \end{bmatrix}$, де

керуючі дії $\Delta u_1(k)$, $\Delta u_2(k)$ подаються, відповідно, на вершини $Y_1(k)$ і $Y_2(k)$.

Вектор керування $\Delta\bar{a}(k)$ реалізується варіюванням вагових коефіцієнтів $\Delta a_{32}(k)$ і $\Delta a_{43}(k)$.

Завдання.

а) Сформувати матрицю керування B та $L(k)$.

б) Для критерію оптимальності (3.9), тобто

$$J(k+1) = E \left\{ \left[\bar{Y}(k+1) - \bar{G} \right]^T \left[\bar{Y}(k+1) - \bar{G} \right] + \begin{bmatrix} \Delta \bar{u}(k) \\ \Delta \bar{a}(k) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \bar{u}(k) \\ \Delta \bar{a}(k) \end{bmatrix} \right\}.$$

Визначити закон керування (3.11) імпульсним процесом на основі мінімізації критерію $\frac{\partial J(k+1)}{\partial \begin{bmatrix} \Delta \bar{u}(k) \\ \Delta \bar{a}(k) \end{bmatrix}} = 0$.

в) Виконати дослідження динаміки замкненої системи керування (3.12) через цифрове моделювання за заданого вектора $\bar{G}$ задавальних дій і заданого вектора збурень $\bar{\xi}(k)$. Побудувати і проаналізувати графіки перехідних процесів.

РОЗДІЛ 4. Автоматизація керування імпульсними процесами в когнітивних картах з приглушенням збурень на основі інваріантних еліпсоїдів

4.1. Матричний опис інваріантних еліпсоїдів

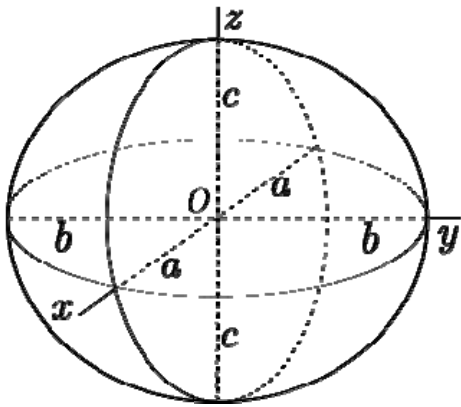


Рис. 4.1

Еліпсоїд, зображений на рис. 4.1, є поверхнею другого порядку із центром симетрії на початку координат і описується рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad (4.1)$$

де a, b, c – півосі.

Переріз еліпсоїда будь-якою площиною є еліпсом (в окремому випадку – колом). Об'єм еліпсоїда становить $\frac{4}{3}\pi abc$.

Рівняння еліпсоїда (4.1) можна подати у формі

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 1. \quad (4.2)$$

Якщо координати еліпсоїда записати у векторній формі $\bar{x} = [x \ y \ z]^T$, тоді рівняння (4.2) набуде вигляду

$$\bar{x}^T P^{-1} \bar{x} = 1, \quad (4.3)$$

де $P = \begin{bmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 \end{bmatrix}$ є матрицею еліпсоїда.

Надалі ми також будемо мати справу з еліпсоїдами, центр яких збігається з початком координат, а розмірність вектора $\bar{x}$ дорівнює n .

Для застосування у проєктуванні систем керування складними системами образ еліпсоїда можна записати в загальному вигляді:

$$\varepsilon_{\bar{x}} = \left\{ \bar{x} \in \mathbb{R}^n : \bar{x}^T P^{-1} \bar{x} \leq 1 \right\} \quad (4.4)$$

Ця форма є найбільш зручною з точки зору побудови квадратичних функцій Ляпунова. Розмір еліпсоїда можна охарактеризувати величиною суми квадратів довжин його півосей, яка щодо виразу (4.3) дорівнює сліду матриці еліпсоїда P :

$$\text{tr}P = a^2 + b^2 + c^2.$$

Розглянемо лінійну дискретну систему у просторі стану в дискретному часі:

$$\begin{aligned} \bar{x}(k+1) &= F\bar{x}(k) + \Phi\bar{\xi}(k), \\ \bar{y}(k) &= C\bar{x}(k), \end{aligned} \quad (4.5)$$

де $\bar{x}(k) \in \mathbb{R}^n$ – фазовий стан системи;

$\bar{y}(k) \in \mathbb{R}^l$ – вектор вихідних вимірювань;

$\bar{\xi}(k) \in \mathbb{R}^r$ – вектор зовнішніх збурень, обмежених на всьому часовому інтервалі,

$$\|\bar{\xi}(k)\|_{\infty} \leq 1, \quad k = 1, 2, \dots \quad (4.6)$$

за нормою l_{∞} , відповідно до дод. 3.

Спочатку будемо припускати, що система (4.5) є стійкою, тобто матриця F є стійкою за Шуром і її власні значення лежать всередині круга одиничного радіуса, а матриця C має максимальний ранг. Визначимо сімейство інваріантних еліпсоїдів цієї системи (4.5).

Визначення. Еліпсоїд з центром на початку координат

$$\varepsilon_{\bar{x}} = \left\{ \bar{x} \in \mathbb{R}^n : \bar{x}^T P^{-1} \bar{x} \leq 1 \right\}, \quad P > 0, \quad (4.7)$$

називають інваріантним за станом $\bar{x}(k)$ для дискретної динамічної системи (4.5), якщо за умови $\bar{x}(0) \in \varepsilon_{\bar{x}}$ слідує виконання умови $\bar{x}(k) \in \varepsilon_{\bar{x}}$ для усіх дискретних моментів часу $k = 1, 2, 3, \dots$. Матрицю P будемо називати матрицею еліпсоїда $\varepsilon_{\bar{x}}$.

Якщо для системи (4.5) $\varepsilon_{\bar{x}}$ визначає інваріантний еліпсоїд (4.7) за станом $\bar{x}(k)$ з матрицею P , то еліпсоїд

$$\varepsilon_{\bar{y}} = \left\{ \bar{y}(k) \in \mathbb{R}^l : \bar{y}^T(k) (CPC^T)^{-1} \bar{y}(k) \leq 1 \right\} \quad (4.8)$$

з матрицею $CPCT^T$ буде інваріантним за виходом системи $\bar{Y}(k)$. При цьому допускаємо, що початковий стан $\bar{x}(0)$ міститься в еліпсоїді ε_0 .

Теорема 4.1. Еліпсоїд $\varepsilon_{\bar{x}}$ у вигляді (4.7) буде інваріантним для динамічної дискретної системи (4.5) з l_∞ -обмеженими зовнішніми збуреннями тоді і тільки тоді, коли матриця P буде задовольняти лінійну матричну нерівність [31, 49]

$$\frac{1}{\alpha}FPF^T - P + \frac{1}{(1-\alpha)}\Phi\Phi^T \leq 0, \quad P \geq P(0) \quad (4.9)$$

за деякого скалярного параметра $\alpha \in (0,1)$.

Доведення. Введемо до розгляду квадратичну функцію

$$V(\bar{x}(k+1)) = \bar{x}^T(k)Q\bar{x}(k)$$

при $Q > 0$, яка побудована на розв'язках системи (4.5). Щоб траєкторії системи (4.5) не виходили за межі еліпсоїда,

$$\varepsilon_{\bar{x}} = \left\{ \bar{x}(k) \in \mathbb{R}^n : V(\bar{x}(k)) \leq 1 \right\}, \quad (4.10)$$

необхідно і достатньо виконання умови $V(\bar{x}(k+1)) \leq 1$ за $V(\bar{x}(k)) \leq 1$ та $\bar{\xi}^T(k)\bar{\xi}(k) \leq 1$, тобто

$$\bar{x}^T(k+1)Q\bar{x}(k+1) = [F\bar{x}(k) + \Phi\bar{\xi}(k)]^T Q [F\bar{x}(k) + \Phi\bar{\xi}(k)] \leq 1 \quad (4.11)$$

за умови, що $\bar{x}^T(k)Q\bar{x}(k) \leq 1$ та $\bar{\xi}^T(k)\bar{\xi}(k) \leq 1$. Після перемноження членів нерівність (4.11) набуде вигляду

$$\bar{x}^T(k+1)Q\bar{x}(k+1) = \begin{bmatrix} \bar{x}^T(k) & \bar{\xi}^T(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F^T Q F & F^T Q \Phi \\ \Phi^T Q F & \Phi^T Q \Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}(k) \\ \bar{\xi}(k) \end{bmatrix} \leq 1. \quad (4.12)$$

Введемо до розгляду вектор $\bar{S} = \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{\xi} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+r}$ та матриці

$$M_0 = \begin{bmatrix} F^T Q F & F^T Q \Phi \\ \Phi^T Q F & \Phi^T Q \Phi \end{bmatrix}; \quad M_1 = \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}.$$

Тоді умови (4.11) можуть бути подані у вигляді квадратичних форм [31] $f_0(\bar{S}) = \bar{S}^T M_0 \bar{S} \leq 1$; при $f_1(\bar{S}) = \bar{S}^T M_1 \bar{S} \leq 1$; та $f_2(\bar{S}) = \bar{S}^T M_2 \bar{S} \leq 1$.

Скористаємося S -процедурою (див. дод. 4). Якщо існують дійсні числа $\tau_i \geq 0$, $i = 1, 2$, то будемо мати $M_0 = \sum_{i=1}^2 \tau_i M_i$, тобто

$$\begin{bmatrix} F^T Q F & F^T Q \Phi \\ \Phi^T Q F & \Phi^T Q \Phi \end{bmatrix} \leq \tau_1 \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \tau_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix},$$

або у вигляді

$$\begin{bmatrix} F^T Q F - \tau_1 Q & F^T Q \Phi \\ \Phi^T Q F & \Phi^T Q \Phi - \tau_2 I_2 \end{bmatrix} \leq 0. \quad (4.13)$$

Якщо використати лему Шура (див. дод. 5), нерівність (4.13) набуде такого вигляду:

$$F^T Q F - \tau_1 Q \leq F^T Q \Phi \left[\Phi^T Q \Phi - \tau_2 I_2 \right]^{-1} \Phi^T Q F. \quad (4.14)$$

На основі S -процедури (див. дод. 4) має бути $\Phi^T Q \Phi - \tau_2 I_2 < 0$ і для мінімізації еліпсоїда має виконуватись вимога $\tau_2 = 1 - \tau_1$.

Нерівність (4.14) можна перетворити до такого вигляду:

$$\tau_1 Q \geq F^T \left[Q - Q \left(\Phi^T Q \Phi - \tau_2 I_2 \right)^{-1} \Phi^T Q \right] F.$$

За $\tau_2 = (1 - \tau_1)$ дістанемо

$$\tau_1 Q \geq F^T \left[Q + Q \left[(1 - \tau_1) I_2 - \Phi^T Q \Phi \right]^{-1} \Phi^T Q \right] F. \quad (4.15)$$

Застосуємо лему про обернення матриць [73] до виразу

$$Q + Q \left[(1 - \tau_1) I_2 - \Phi^T Q \Phi \right]^{-1} \Phi^T Q = \left[Q^{-1} - (1 - \tau_1)^{-1} \Phi \Phi^T \right]^{-1}.$$

Тоді нерівність (4.15) можна записати

$$\tau_1 Q \geq F^T \left[Q^{-1} - (1 - \tau_1)^{-1} \Phi \Phi^T \right]^{-1} F.$$

За $Q^{-1} = P$ дістанемо

$$\tau_1 P^{-1} \geq F^T \left[P - (1 - \tau_1)^{-1} \Phi \Phi^T \right]^{-1} F.$$

Після обернення лівої і правої частин будемо мати

$$\frac{P}{\tau_1} \leq F^{-1} \left[P - (1 - \tau_1)^{-1} \Phi \Phi^T \right]^{-1} (F^T)^{-1}.$$

Перемножимо спочатку зліва на F , а потім справа на F^T і зробимо заміну $\tau_1 = \alpha$. Тоді попередня лінійна матрична нерівність (ЛМН) може бути записана в кінцевому вигляді

$$\frac{1}{\alpha} F P F^T - P + \frac{\Phi \Phi^T}{(1 - \alpha)} \leq 0, \quad (4.16)$$

що є доведенням теореми 4.1.

4.2. Приглушення обмежених зовнішніх збурень імпульсних процесів у когнітивних картах складних систем

Не всі координати вершин КК для різних складних систем можна виміряти. Наприклад, неможливо точно виміряти рівень здоров'я в якомусь регіоні, рівень корупції або тіньової економіки, рівень демократизації суспільства, рівень політичної або економічної активності населення, конкурентоспроможність продукції тощо. В теорії автоматичного керування в дискретному часі невимірювані змінні стану математичної моделі багатовимірного об'єкта (4.5) у стохастичному середовищі рекомендується оцінювати за допомогою фільтра Калмана. Використовувати цей підхід для реалізації систем керування імпульсними процесами в КК складних систем різної природи на практиці неможливо, тому що під час оцінювання змінних стану за допомогою фільтра Калмана треба мати інформацію про дисперсію збурень. Для складних систем, моделі яких подано у вигляді КК, цю інформацію дістати або визначити неможливо. Якщо модель імпульсного процесу КК подано у просторі стану в детермінованому середовищі, то невимірювані змінні стану оцінюють за допомогою спостерігача Люенбергера [3, 5, 6]. При цьому робиться припущення, що в системі немає випадкових збурень. Однак на координати складних систем завжди діють збурення, які слід враховувати під час оцінювання невимірюваних координат в моделі імпульсного процесу КК (рівнянні Робертса),

$$\Delta Z_i(k+1) = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \Delta Z_j(k), \quad (4.17)$$

де $\Delta Z_i(k) = Z_i(k) - Z_i(k-1)$, а n – кількість вершин КК. У векторно-матричній формі вираз (4.17) може бути записаний у формі

$$\Delta \bar{Z}(k+1) = A \Delta \bar{Z}(k), \quad (4.18)$$

де $\Delta\bar{Z}(k)$ – вектор приростів вимірюваних і невимірюваних координат вершин КК Z_i ($i = 1, 2, \dots, n$), а A – вагова матриця суміжності КК.

Розглянемо підхід, в якому невимірювані координати в моделі (4.18) переводять у категорію збурень. Для цього виконують декомпозицію загальної вихідної моделі КК (4.18) складної системи на дві взаємопов’язані КК. При цьому n вершин Z_i вихідної КК розділяють на p вимірюваних вершин x_i ($i = 1, 2, \dots, p$) та $(n - p)$ невимірюваних вершин Y_l ($l = p + 1, \dots, n$). Тоді модель імпульсного процесу (4.17) взаємопов’язаних імпульсних процесів

$$\Delta x_i(k+1) = \sum_{j=1}^p a_{ij} \Delta x_j(k) + \sum_{j=p+1}^n d_{ij} \Delta Y_j(k), \quad i = 1, \dots, p; \quad (4.19)$$

$$\Delta Y_l(k+1) = \sum_{j=p+1}^n c_{li} \Delta Y_j(k) + \sum_{j=1}^p \Psi_{lj} \Delta x_j(k), \quad l = p+1, \dots, n; \quad (4.20)$$

а рівності (4.19), (4.20) можна записати у векторно-матричній формі:

$$\Delta\bar{X}(k+1) = A_1 \Delta\bar{X}(k) + D \Delta\bar{Y}(k), \quad (4.21)$$

$$\Delta\bar{Y}(k+1) = C \Delta\bar{Y}(k) + \Psi \Delta\bar{x}(k), \quad (4.22)$$

де $\bar{X}$ – вектор вимірюваних координат вершин КК;

$\bar{Y}$ – вектор невимірюваних координат вершин КК.

Матриці суміжності $A_1(p \times p)$ і $C((n-p)(n-p))$ складаються, відповідно, з коефіцієнтів a_{ij} і C_{lj} , а матриці $D(p \times (n-p))$ і $\Psi((n-p) \times p)$ – з коефіцієнтів d_{ij} і Ψ_{lj} . При цьому матриці D і Ψ відображають взаємозв’язки між першою (4.21) і другою (4.22) частинами вихідної моделі (4.18). Для першої частини моделі КК (4.21) вплив вершин $\Delta\bar{Y}(k)$ можна розглядати як невимірювані збурення з невідомими ймовірнісними характеристиками. Надалі будемо робити припущення, що з математичної точки зору збурення $\Delta\bar{Y}(k)$ не є випадковими і гармонічними. На ці збурення будемо накладати тільки обмеження на їх величину. В літературі [52] розроблено методи теорії робастного керування, в яких множину можливих значень $\Delta\bar{Y}(k)$, які є збуреннями у моделі (4.21), запропоновано обмежити за нормою l_∞ :

$$\|\Delta\bar{Y}(k)\|_\infty = \sup [\Delta\bar{Y}^T(k) \Delta\bar{Y}(k)]^{1/2} \leq 1, \quad (4.23)$$

$$k \geq 0.$$

Щоб описати характеристики впливу збурень (4.23) на траєкторію руху динамічної дискретної системи (4.21) з вимірюваними змінними стану $\bar{X}(k)$, можна запропонувати інваріантні еліпсоїди типу (4.7), які для змінних стану $\Delta\bar{X}(k)$ моделі (4.21) будуть мати вигляд

$$\varepsilon_{\Delta\bar{X}} = \left\{ \Delta\bar{X}(k) \in \mathbb{R}^n : \Delta\bar{X}^T(k) P^{-1} \Delta\bar{X}(k) \leq 1 \right\}, \quad P > 0, \quad (4.24)$$

якщо за умови $\Delta\bar{X}(0) \in \varepsilon_{\Delta\bar{X}}$ слідує виконання умови $\Delta\bar{X}(k) \in \varepsilon_{\Delta\bar{X}}$ для усіх дискретних моментів часу $k = 1, 2, 3, \dots$. Матрицю P називають матрицею еліпсоїда $\varepsilon_{\Delta\bar{X}}$. У підрозд. 4.1 наведено доведення теореми 4.1, на основі якої можна зробити висновок, що еліпсоїд $\varepsilon_{\Delta\bar{X}}$ (4.24) буде інваріантним для динамічної системи (4.21) з l_∞ -обмеженими збуреннями (4.23) тоді і тільки тоді, коли матриця P задовольняє ЛНР

$$\frac{1}{\alpha} A_1 P A_1^T - P + \frac{D D^T}{(1 - \alpha)} \leq 0, \quad P \geq P_0, \quad (4.25)$$

якщо $\alpha \in (0, 1)$.

Для приглушення обмежених збурень $\Delta\bar{Y}(k)$ у рівнянні (4.21) з вимірюваними змінними стану $\Delta\bar{X}(k)$ введемо вектор керування $\Delta\bar{u}(k)$:

$$\Delta\bar{X}(k+1) = A_1 \Delta\bar{X}(k) + B \Delta\bar{u}(k) + D \Delta\bar{Y}(k), \quad (4.26)$$

де $\dim \Delta\bar{u}(k) \leq p$.

Синтез вектора керування $\Delta\bar{u}(k) = \bar{u}(k) - \bar{u}(k-1)$ виконують варіюванням ресурсів координат вершин $\Delta\bar{X}$ КК в замкненій системі керування.

Матриця B складається з одиниць і нулів, її визначає проєктувальник системи автоматизації керування складною системою.

Для реалізації вектора керуючих дій $\Delta\bar{u}(k)$ проєктують регулятор стану

$$\Delta\bar{u}(k) = -K_p \Delta\bar{X}(k), \quad (4.27)$$

який реалізує статичний зворотний зв'язок за станом $\Delta\bar{X}(k)$.

У роботі [52] виконано синтез закону керування (4.27), який мінімізує розмір інваріантного еліпсоїда (4.24) динамічної системи (4.21). При цьому завдання синтезу зводиться до виконання еквівалентних умов у вигляді лінійних матричних нерівностей (4.25), які розв'язують чисельними методами.

Слід зазначити, що в моделі імпульсного процесу КК (4.26) як у рівнянні стану складові вектора $\Delta\bar{X}(k)$ вимірюється повністю, тому для класичної моделі у просторі стану (4.2) у цьому випадку немає потреби застосовувати рівняння вимірювання.

Регулятор стану (4.27) має реалізовувати оптимальну залежність швидкості зміни вектора керування $\bar{u}(k)$ у формі першої різниці $\Delta\bar{u}(k)$ від швидкості зміни $\Delta\bar{X}(k)$ вимірюваних координат вершин $\bar{X}(k)$ КК. Тому, якщо координати $\bar{X}(k)$ не змінюються, то приріст $\Delta\bar{u}(k)$ дорівнюватиме нулю. Таким чином, керування $\Delta\bar{u}(k)$ призначене для стабілізації перехідного процесу в динаміці складної системи, яка описана у формі моделі імпульсного процесу КК (4.26) під дією невимірюваних збурень $\Delta\bar{Y}(k)$ в обмеженому діапазоні (4.23).

Алгоритм реалізації закону керування імпульсним процесом (4.27) для моделі (4.26) розробляють на основі критерію оптимальності

$$\text{tr}P(\alpha) \rightarrow \min, \quad \alpha^* \leq \alpha < 1, \quad (4.28)$$

який забезпечує мінімізацію розміру інваріантного еліпсоїда (4.24) з максимальним приглушенням збурень $\Delta\bar{Y}(k)$ різної природи, які можна обмежити тільки максимальним діапазоном (4.23). Природно, оптимізація розміру інваріантного еліпсоїда еквівалентна задачі мінімізації сліду матриці (4.28) за обмеження типу лінійної матричної нерівності (4.25).

Алгоритм синтезу регулятора стану імпульсного процесу КК (4.27) виконують таким чином. На основі моделі (4.26) і закону керування (4.27) рівняння замкненої системи керування імпульсним процесом запишемо як

$$\Delta\bar{X}(k+1) = (A_1 - BK_p)\Delta\bar{X}(k) + D\Delta\bar{Y}(k). \quad (4.29)$$

Припускаємо, що пара (A_1, B) в моделі (4.26) є керованою. Тоді лінійна матрична нерівність (4.25) для замкненої системи (4.29) набуває вигляду

$$\frac{1}{\alpha}(A_1 - BK_p)P(A_1 - BK_p)^T - P + \frac{DD^T}{(1-\alpha)} \leq 0, \quad (4.30)$$

а після перемноження членів

$$\frac{1}{\alpha} \left(A_1 P A_1^T - B K_p P A_1^T - A_1 P K_p^T B^T + B K_p P K_p^T B^T \right) - P + \frac{D D^T}{(1 - \alpha)} \leq 0. \quad (4.31)$$

Нерівність (4.31) є нелінійною відносно P і K_p . У роботі [52] запропоновано для лінеаризації заміну $L = K_p P$, а також введення матриці $R = R^T$, для якої виконується додаткове обмеження

$$\begin{bmatrix} R & L \\ L^T & P \end{bmatrix} \geq 0. \quad (4.32)$$

Оскільки за формулою Шура (див. дод. 5) за $P > 0$ нерівність (4.32) буде еквівалентною $R \geq L P^{-1} L^T = K_p P K_p^T$, то для виконання нерівності (4.31) достатньо, щоб

$$\frac{1}{\alpha} \left(A_1 P A_1^T - P L A_1^T - A_1 L^T B^T + B R B^T \right) - P + \frac{D D^T}{(1 - \alpha)} \leq 0. \quad (4.33)$$

Мінімізацію критерію (4.28) за обмежень (4.32) і (4.33) виконують за змінними P, L, R за методом напіввизначеного програмування з використанням SeDuMi Toolbox на базі Matlab. Нехай $\hat{\alpha}, \hat{P}, \hat{L}, \hat{R}$ забезпечують мінімум критерію (4.28) за обмежень (4.32), (4.33). Тоді матрицю $\hat{K}_P$ оптимального регулятора (4.27) визначають так:

$$\hat{K}_P = \hat{L} \hat{P}^{-1}. \quad (4.34)$$

У цьому алгоритмі для синтезу матриці $\hat{K}_P$ не введено обмеження на величину синтезованого вектора керування $\Delta \bar{u}(k)$. Отже, у разі досягнення мінімальних значень критерію (4.28) можуть формуватися великі значення керуючих дій $\Delta \bar{u}(k)$ відповідно до формул (4.27), (4.34). Ці значення буває фізично неможливо реалізовувати, тому під час синтезу регулятора (4.27) потрібно ввести обмеження на керування:

$$\|\Delta \bar{u}(k)\| \leq \gamma, \quad \gamma > 0, \quad (4.35)$$

де $\|\bullet\|$ – евклідова норма.

Забезпечення цього обмеження можна звести до виконання для матриць P, L лінійної матричної нерівності

$$\begin{bmatrix} R & L^T \\ L & \gamma^2 I \end{bmatrix} \geq 0. \quad (4.36)$$

Таким чином, у цьому випадку під час синтезу оптимальної матриці регулятора (4.34) мінімізація критерію (4.28) за змінними P , L , R проводиться за суміжних обмежень (4.32), (4.33) і (4.36).

4.3. Дослідження системи приглушення обмежених збурень імпульсних процесів у когнітивній карті розвитку ІТ-компанії

На рис. 4.2 зображено КК розвитку ІТ-компанії [52], яка відображає завдання розробки інформаційних технологій з точки зору взаємодії інтелектуальних активів, фінансових засобів, якості й конкурентоспроможності проєктів, отримання максимального прибутку, функціонування персоналу. Вершини КК відображають такі фактори:

- 1 – тривалість розробки проєкту;
- 2 – витрати на інновації;
- 3 – заробітна плата;
- 4 – бюджет проєкту;
- 5 – прибуток;
- 6 – витрати на функціонування групи менеджерів;
- 7 – витрати на маркетинг;
- 8 – продаж однотипних проєктів;
- 9 – витрати на проведення переатестації персоналу;
- 10 – витрати на підвищення кваліфікації;
- 11 – технічний контроль;
- 12 – інтелектуальні активи;
- 13 – якість продукції;
- 14 – конкурентоспроможність;
- 15 – задоволеність роботою;
- 16 – обмін досвідом, інформаційна взаємодія.

Ребра між вершинами КК визначені на основі причиново-наслідкових зв'язків, а вагові коефіцієнти для кожного ребра ідентифіковані експертами відповідно до рівня впливу однієї вершини на іншу. Також визначені вимірювані й невимірювані координати вершин КК. До вимірюваних належать вершини 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Тоді вектор

вимірюваних вершин відповідно до моделі імпульсного процесу (4.22) буде мати такі координати:

$$\Delta\bar{X} = (\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3, \Delta x_4, \Delta x_5, \Delta x_6, \Delta x_7, \Delta x_8, \Delta x_9, \Delta x_{10})^T.$$

До невимірюваних відносять вершини 11, 12, 13, 14, 15, 16, а вектор невимірюваних вершин у моделі (4.22)

$$\Delta\bar{Y} = (\Delta Y_{11}, \Delta Y_{12}, \Delta Y_{13}, \Delta Y_{14}, \Delta Y_{15}, \Delta Y_{16})^T.$$

Серед вимірюваних вершин обрано вектор керування $\Delta\bar{u}$, який має такі складові:

$$\Delta\bar{u} = (\Delta u_2, \Delta u_3, \Delta u_4, \Delta u_6, \Delta u_7, \Delta u_9, \Delta u_{10})^T,$$

в якому Δu_i , що діють безпосередньо на відповідну i -ту вершину КК через зміну ресурсів цієї вершини. Відповідно до КК (рис. 4.2) матриці A_1 , B , D у моделі (4.21)

$$\Delta\bar{X}(k+1) = A_1\Delta\bar{X}(k) + B\Delta\bar{u}(k) + D\Delta\bar{Y}(k)$$

становитимуть

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & -0,4 & -0,4 & 0 & 0 & -0,2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,2 & 0,3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,2 & 0,2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,3 & 1 & 0,2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,1 & 0,2 \\ -0,5 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0,8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,15 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,05 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & -0,3 & 0 & 0 & -0,2 & 0 \\ 0 & 0,3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0,6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

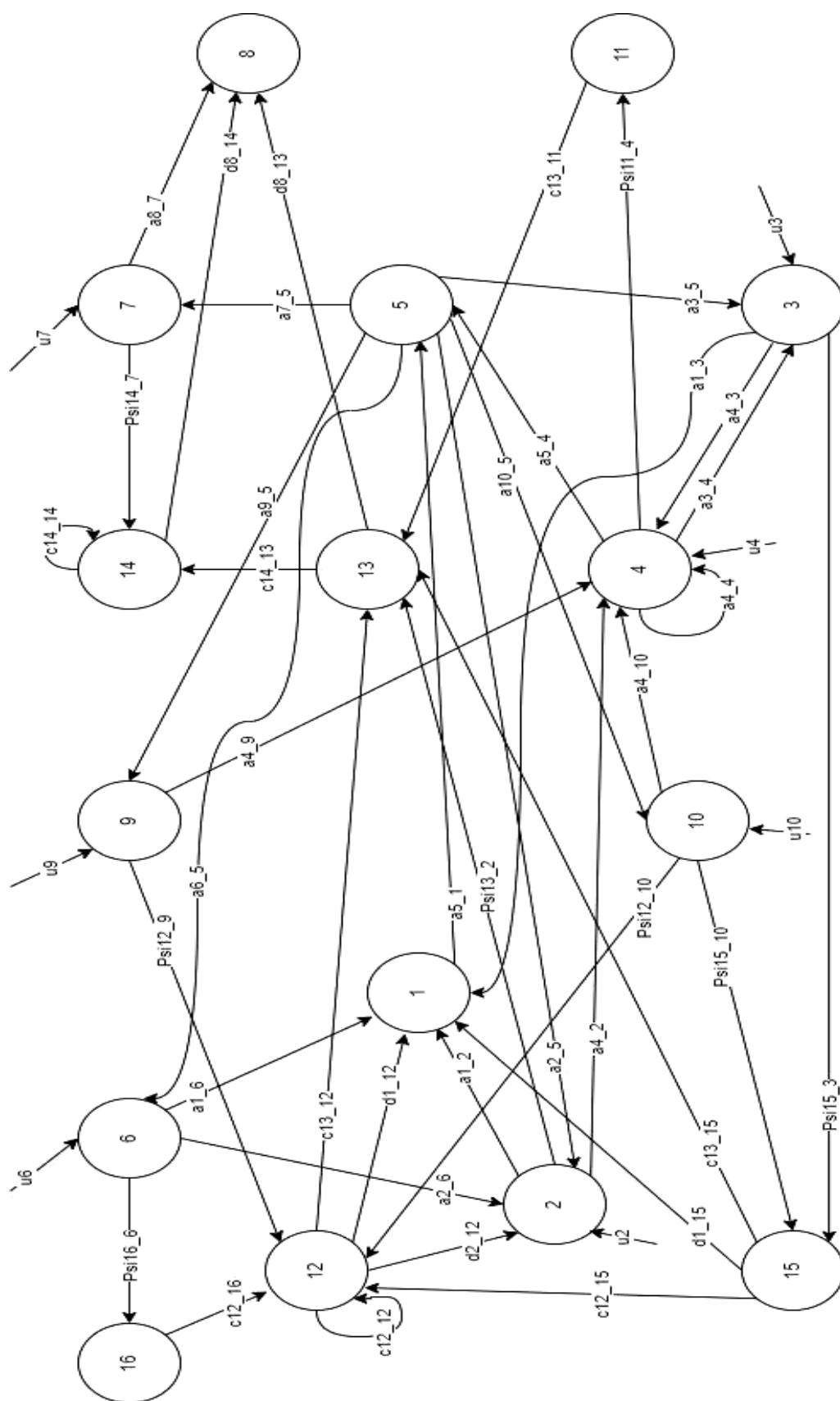


Рис. 4.2. Когнітивна карта розвитку ІТ-компанії

У матрицях A_1 і D є від'ємні вагові коефіцієнти, які мають таке логічне пояснення. Так, коефіцієнт $a_{12} = -0,4$ означає, що зі збільшенням витрат на інновації (вершина 2) зменшується тривалість розробки проєкту (вершина 1), а коефіцієнт $a_{51} = -0,5$ показує, що зі збільшенням тривалості розробки проєкту (вершина 1) зменшується прибуток ІТ-компанії.

У матриці D причиново-наслідковий зв'язок між вершинами 12 та 1 з коефіцієнтом $a_{12} = -0,3$ означає, що зі збільшенням інтелектуальних активів (вершина 12) зменшується тривалість розробки проєкту (вершина 1) і под.

У моделі (4.21) вектор $\Delta\bar{Y}$ передає зовнішні для моделі неконтрольовані, обмежені за амплітудою збурення. Пара (A_1, B) є керованою, тобто матриця керованості $R_c = \begin{pmatrix} B & A_1 B & A_1^2 B & \dots & A_1^9 B \end{pmatrix}$ має повний ранг, який дорівнює 10.

Для моделі другої частини КК (4.22) з невимірюваними координатами $\Delta\bar{Y}$ вершин КК $\Delta\bar{Y}(k+1) = C\Delta\bar{Y}(k) + \Psi\Delta\bar{X}(k)$ відповідно до КК матриці C і Ψ становлять

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0 & 0 & 0,4 & 0,25 \\ 0,3 & 0,5 & 0 & 0 & 0,4 & 0 \\ 0 & 0 & 0,8 & 0,2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Psi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0,05 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,3 & 0,25 & 0 \\ 0 & 0,7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Моделювання замкненої системи керування (4.29) разом із взаємопов'язаною моделлю (4.22) для невимірюваних координат проведено з подаванням ступінчастих збурень на вершину 12 (інтелектуальні активи) і на вершину 14 (конкурентоспроможність).

Графіки перехідних процесів координат вершин КК x_i ($i = 1, \dots, 10$) та Y_j ($j = 11, \dots, 16$) з подаванням ступінчастого збурення на вершину 12 у бік зменшення інтелектуальних активів показано на рис. 4.3. Пунктиром позначено перехідні процеси у разі відсутності керуючих дій $\Delta \bar{u}$ відповідно до моделі (4.21), а суцільними лініями показано координати вершин відповідно до моделі замкненої системи керування (4.29) під час подавання обмежених (відповідно до нерівностей (4.35), (4.36)) синтезованих керуючих дій $\Delta \bar{u}(k)$, графіки яких зображено на рис. 4.4.

На рис. 4.5 показано графіки перехідних процесів координат вершин КК під час подавання ступінчастого збурення на вершину 14 (конкурентоспроможність) у бік зменшення. При цьому на синтезовані керуючі дії $\Delta \bar{u}$ також введено обмеження відповідно до нерівностей (4.35), (4.36). Графіки обмежених за амплітудою керуючих дій зображено на рис. 4.6.

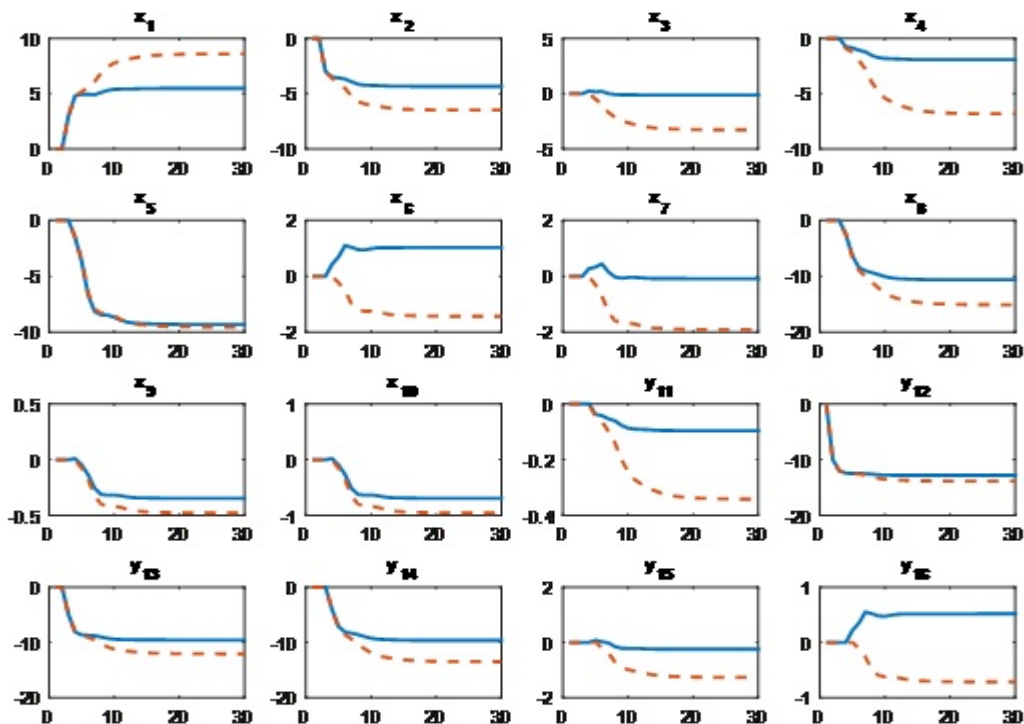


Рис. 4.3. Графіки керованих і некерованих координат вершин КК під час подавання збурення на вершину 12

Вибір вершин 12 і 14 для подавання збурень не випадковий, оскільки зменшення інтелектуальних активів (звільнення співробітників) та зниження конкурентоспроможності ІТ-продукції досить поширені явища у сучасному житті.

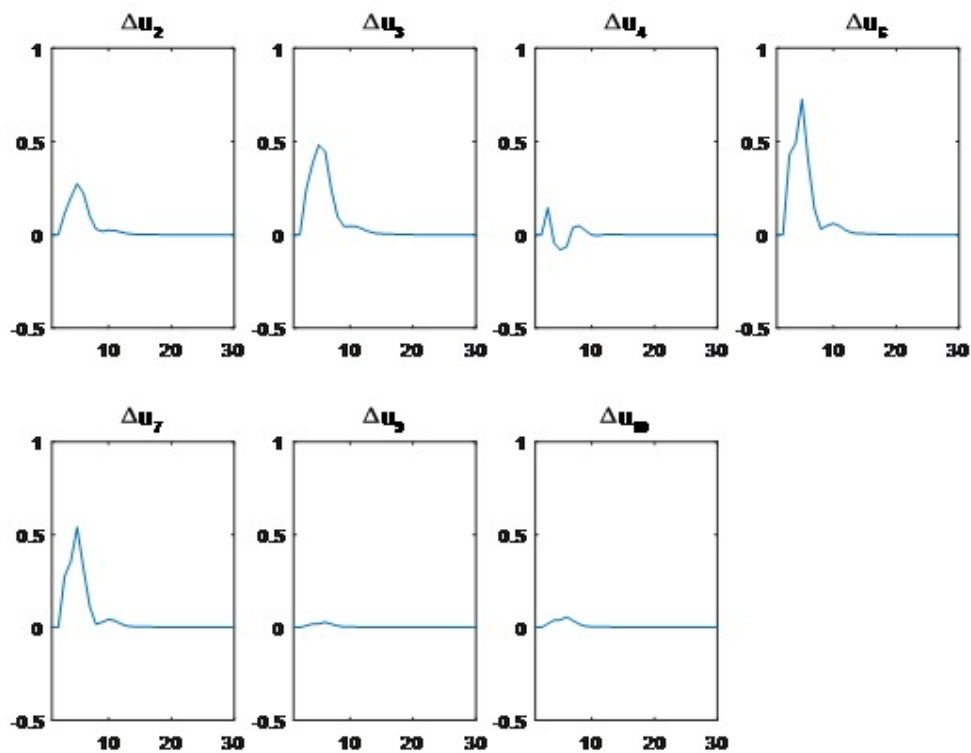


Рис. 4.4. Графіки синтезованих керуючих дій під час подавання збурення на вершину 12

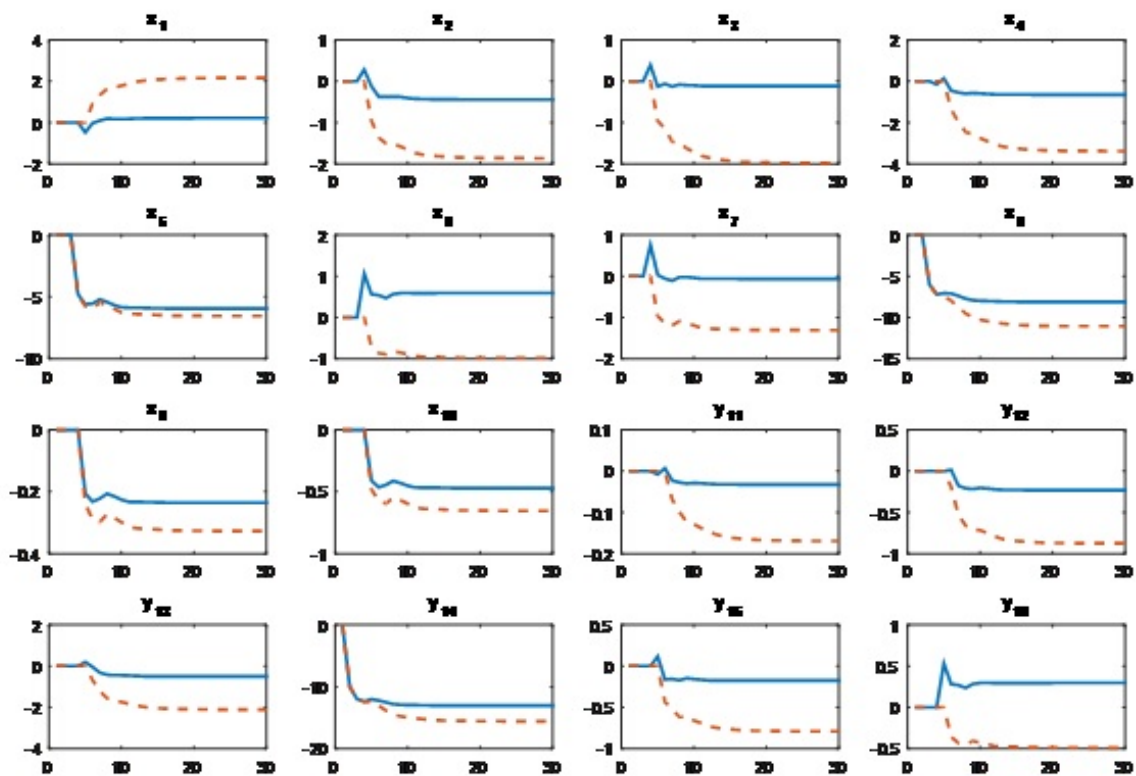


Рис. 4.5. Графіки керованих перехідних процесів координат вершин КК під час подавання збурення на вершину 14

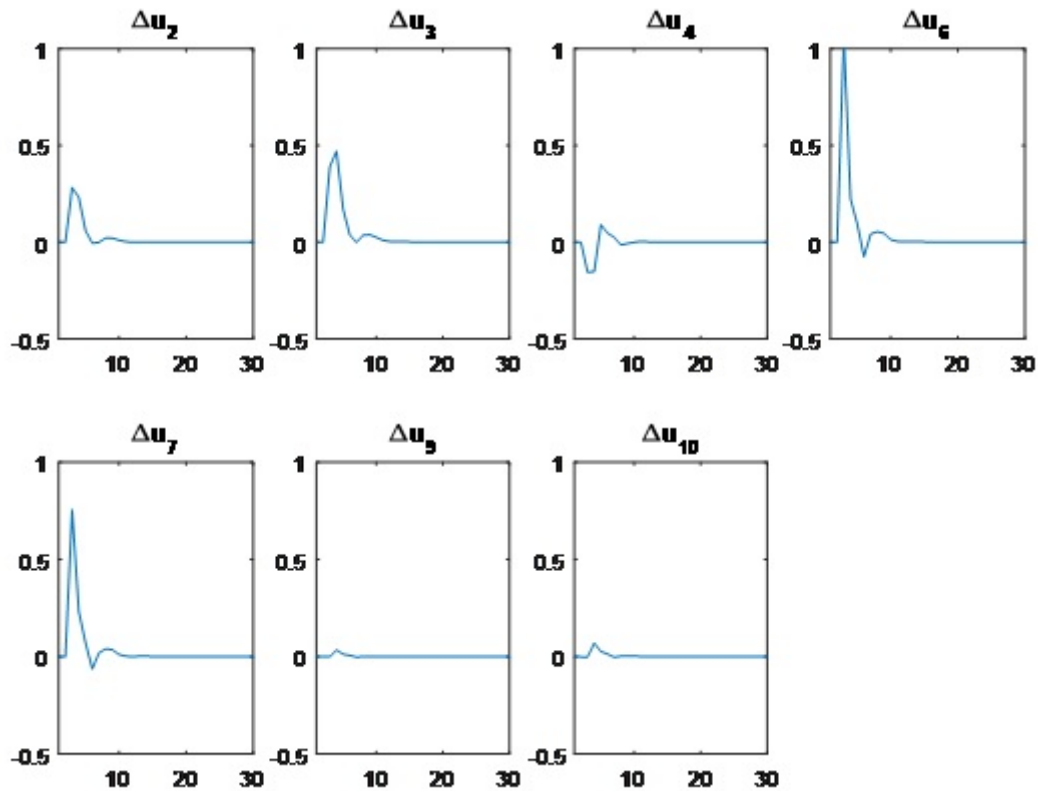


Рис. 4.6. Графіки синтезованих обмежених керуючих дій під час подавання збурення на вершину 14

Проаналізувавши графіки на рис. 4.3 і 4.5, можна зробити такі висновки:

1. Якщо немає керування (пунктирні лінії на графіках), зі зниженням інтелектуальних активів (у першому варіанті) та зі зниженням конкурентоспроможності різко збільшується тривалість розроблення проєкту (вершина 1) та різко зменшуються:

- зарплата (вершина 3);
- бюджет проєкту (вершина 4);
- продаж однотипних проєктів (вершина 8).

2. У разі подавання синтезованих керуючих дій $\Delta \bar{u}(k)$ відбулось приглушення поданих збурень на вершини 12 і 14, що привело до значного покращення наведених вище показників.

4.4. Робастне керування імпульсними процесами в когнітивних картах для приглушення обмежених збурень

На відміну від попередніх розділів, де розглядалися моделі імпульсних процесів КК із заданою матрицею суміжності A , ми будемо розглядати цілі сімейства матриць, які будуть відповідати вихідній (номінальній) матриці A за наявних параметричних невизначеностей.

У літературі розглядаються такі параметричні сімейства матриць:

а) інтервальне сімейство, яке задають у формі

$$A = (a_{ij}), \quad \underline{a}_{ij} \leq a_{ij} \leq \bar{a}_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad (4.37)$$

або

$$A = A_1 + \Delta A_1, \quad |\Delta A_1| \leq \gamma; \quad (4.38)$$

б) афінне сімейство

$$A(q) = A_1 + \sum_{i=1}^l q_i \Delta A_i, \quad (4.39)$$

$$|q_i| \leq \gamma \quad i = 1, \dots, l.$$

Для дискретної системи сімейство називають робастно стійким, якщо будуть стійкими усі його елементи, тобто

$$|\lambda_i| < 1, \quad i = 1, \dots, n.$$

для усіх ΔA_1 , або для усіх q_i із припустимої множини, де λ_i – власні значення матриці A .

У складних системах різної природи, динамічна модель яких подана у формі імпульсного процесу КК, величини впливу кожної вершини КК на інші змінюються за часом у процесі функціонування системи. Тому матрицю суміжності A_1 в моделі (4.26) для вимірюваних координат вершин ΔX

$$\Delta \bar{X}(k+1) = A_1 \Delta \bar{X}(k) + B \Delta \bar{u}(k) + D \Delta \bar{Y}(k) \quad (4.40)$$

запропоновано подавати у формі інтервального сімейства матриць (4.38) $A = A_1 + \Delta A_1$, $|\Delta A_1| \leq \gamma$, де A_1 – базове відоме значення матриці суміжності, яке встановлюють експерти або оцінюють методами ідентифікації, наведеними у розд. 7, а ΔA_1 – обмежена невідома зміна матриці

суміжності A_1 у процесі функціонування складної системи. Тоді модель (4.40) може бути подана у вигляді

$$\Delta\bar{X}(k+1) = (A_1 + \Delta A_1)\Delta\bar{X}(k) + B\Delta\bar{u}(k) + D\Delta\bar{Y}(k), \quad (4.41)$$

де $\Delta\bar{X}(k)$ – прирости вектора вимірюваних координат вершин КК з $\dim\Delta\bar{X} = n$, а $\Delta\bar{Y}(k)$ – прирости невимірюваних координат з $\dim\bar{Y} = P$; $A_1(n \times n)$, $D(n \times p)$, $B(n \times m)$ – матриці суміжності, керування і збурень відповідно.

У цьому методі можливу зміну вагових коефіцієнтів ΔA_1 матриці суміжності КК відносно базових значень A_1 запропоновано враховувати в моделі імпульсного процесу (4.41) з допомогою додаткових внутрішніх збурень $\Delta\bar{w}(k) = \Delta A_1 \Delta\bar{X}(k)$. Тоді рівняння керованого імпульсного процесу (4.41) набуде такого вигляду:

$$\Delta\bar{X}(k+1) = A_1\Delta\bar{X}(k) + B\Delta\bar{u}(k) + \begin{pmatrix} I_1 & D \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\bar{w}(k) \\ \Delta\bar{Y}(k) \end{bmatrix}, \quad (4.42)$$

де I_1 – одинична матриця розмірністю $(n \times n)$, а $\Delta\bar{Y}(k)$ – вектор невимірюваних координат згідно з (4.22).

Припускаємо, що збурення $\Delta\bar{w}(k)$ і $\Delta\bar{Y}(k)$ разом обмежені за нормою l_∞ , тобто

$$\left\| \begin{bmatrix} \Delta\bar{w}(k) \\ \Delta\bar{Y}(k) \end{bmatrix} \right\|_\infty = \sup_{k \geq 0} \left\{ \begin{bmatrix} \Delta\bar{w}^T(k) & \Delta\bar{Y}^T(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\bar{w}(k) \\ \Delta\bar{Y}(k) \end{bmatrix} \right\}^{1/2} \leq 1. \quad (4.43)$$

Щоб описати характеристики впливу збурень типу (4.43) на траєкторію руху динамічної дискретної системи (4.42), застосуємо інваріантні еліпсоїди за змінними стану (4.24), тобто

$$\varepsilon_{\Delta\bar{X}} = \left\{ \Delta\bar{X}(k) \in \mathbb{R}^n : \Delta\bar{X}^T(k) P^{-1} \Delta\bar{X}(k) \leq 1 \right\}, \quad P > 0, \quad (4.44)$$

якщо за умови $\Delta\bar{X}(0) \in \varepsilon_{\Delta\bar{X}}$ слідує виконання умови $\Delta\bar{X}(k) \in \varepsilon_{\Delta\bar{X}}$ для всіх дискретних моментів часу $k = 1, 2, 3, \dots$. Матрицю P називають матрицею еліпсоїда, вона містить інформацію про розмір еліпсоїда.

Доведемо умови інваріантності еліпсоїда (4.44) під дією збурень (4.43). Для цього, як і в підрозд. 4.1, введемо до розгляду квадратичну функцію Ляпунова $V(\Delta\bar{X}(k)) = \Delta\bar{X}^T(k) Q \Delta\bar{X}(k)$ при $Q > 0$, яка побудована на

розв'язках системи (4.42). Щоб траєкторія $\Delta\bar{X}(k)$ системи (4.42) не виходила за межі еліпсоїда,

$$\varepsilon_{\Delta\bar{X}} = \left\{ \Delta\bar{X}(k) \in \mathbb{R}^n : V(\Delta\bar{X}(k)) \leq 1 \right\},$$

вимагається виконання $V(\Delta\bar{X}(k+1)) \leq 1$ при $V(\Delta\bar{X}(k)) \leq 1$, та

$$\begin{bmatrix} \Delta\bar{w}^T(k) & \Delta\bar{Y}^T(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\bar{w}(k) \\ \Delta\bar{Y}(k) \end{bmatrix} \leq 1, \quad (4.45)$$

тобто

$$\begin{aligned} \Delta\bar{X}^T(k+1)Q\Delta\bar{X}(k+1) &= \left[\Delta\bar{X}^T(k)A_1^T + \begin{bmatrix} \Delta\bar{w}^T(k) & \Delta\bar{Y}^T(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ D^T \end{bmatrix} \right] \cdot \\ &\cdot Q \left[A_1\Delta\bar{X}(k) + \begin{bmatrix} I_1 & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\bar{w}(k) \\ \Delta\bar{Y}(k) \end{bmatrix} \right] \leq 1. \end{aligned}$$

Після перемноження дістанемо

$$\begin{aligned} \Delta\bar{X}^T(k+1)Q\Delta\bar{X}(k+1) &= \begin{bmatrix} \Delta\bar{X}^T(k) & \begin{bmatrix} \Delta\bar{w}(k) & \Delta\bar{Y}(k) \end{bmatrix} \end{bmatrix} \cdot \\ &\cdot \begin{bmatrix} A_1^TQA_1 & A_1^TQ(I_1 \ D) \\ \begin{bmatrix} I_1 \\ D^T \end{bmatrix}QA_1 & \begin{bmatrix} I_1 \\ D^T \end{bmatrix}Q(I_1 \ D) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\bar{X}(k) \\ \begin{bmatrix} \Delta\bar{w}(k) \\ \Delta\bar{Y}(k) \end{bmatrix} \end{bmatrix} \leq 1. \end{aligned} \quad (4.46)$$

Введемо до розгляду вектор

$$\bar{S}(k) = \begin{bmatrix} \Delta\bar{X}(k) \\ \begin{bmatrix} \Delta\bar{w}(k) \\ \Delta\bar{Y}(k) \end{bmatrix} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n+p}$$

та такі матриці:

$$\begin{aligned} M_0 &= \begin{bmatrix} A_1^TQA_1 & A_1^TQ(I_1 \ D) \\ \begin{bmatrix} I_1 \\ D^T \end{bmatrix}QA_1 & \begin{bmatrix} I_1 \\ D^T \end{bmatrix}Q(I_1 \ D) \end{bmatrix}, \\ M_1 &= \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Тоді умови (4.45), (4.46) можна записати у вигляді квадратичних форм [53] $f_0(\bar{S}) = \bar{S}^T M_0 \bar{S} \leq 1$; при виконанні $f_1(\bar{S}) = \bar{S}^T M_1 \bar{S} \leq 1$ та $f_2(\bar{S}) = \bar{S}^T M_2 \bar{S}$, тобто в розгорнутому вигляді:

$$\begin{aligned}
f_0(\bar{S}) &= \begin{bmatrix} \Delta \bar{X}^T(k) & \begin{bmatrix} \Delta \bar{w}^T(k) & \Delta \bar{Y}^T(k) \end{bmatrix} \end{bmatrix} \cdot \\
&\cdot \begin{bmatrix} A_1^T Q A_1 & A_1^T Q(I_1 \ D) \\ \begin{bmatrix} I_1 \\ D^T \end{bmatrix} Q A_1 & \begin{bmatrix} I_1 \\ D^T \end{bmatrix} Q(I_1 \ D) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \bar{X}(k) \\ \begin{bmatrix} \Delta \bar{w}(k) \\ \Delta \bar{Y}(k) \end{bmatrix} \end{bmatrix} \leq 1; \\
f_1(\bar{S}) &= \begin{bmatrix} \Delta \bar{X}^T(k) & \begin{bmatrix} \Delta \bar{w}^T(k) & \Delta \bar{Y}^T(k) \end{bmatrix} \end{bmatrix} \cdot \\
&\cdot \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \bar{X}(k) \\ \begin{bmatrix} \Delta \bar{w}(k) \\ \Delta \bar{Y}(k) \end{bmatrix} \end{bmatrix} \leq 1; \\
f_2(\bar{S}) &= \begin{bmatrix} \Delta \bar{X}^T(k) & \begin{bmatrix} \Delta \bar{w}^T(k) & \Delta \bar{Y}^T(k) \end{bmatrix} \end{bmatrix} \cdot \\
&\cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \bar{X}(k) \\ \begin{bmatrix} \Delta \bar{w}(k) \\ \Delta \bar{Y}(k) \end{bmatrix} \end{bmatrix} \leq 1,
\end{aligned}$$

де I_2 – одинична матриця $(n+p)(n+p)$.

Відповідно до S -процедури (див. дод. 4), якщо існують дійсні числа

$\tau_i \geq 0, i = 1, 2, \dots$, то будемо мати $M_0 \geq \sum_{i=1}^2 \tau_i M_i$, тобто

$$\begin{bmatrix} A_1^T Q A_1 & A_1^T Q(I_1 \ D) \\ \begin{bmatrix} I_1 \\ D^T \end{bmatrix} Q A_1 & \begin{bmatrix} I_1 \\ D^T \end{bmatrix} Q(I_1 \ D) \end{bmatrix} \leq \tau_1 \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \tau_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix}$$

або

$$\begin{bmatrix} A_1^T Q A_1 - \tau_1 Q & A_1^T Q(I_1 \ D) \\ \begin{bmatrix} I_1 \\ D^T \end{bmatrix} Q A_1 & \begin{bmatrix} I_1 \\ D^T \end{bmatrix} Q(I_1 \ D) - \tau_2 I_2 \end{bmatrix} \leq 0. \quad (4.47)$$

З використанням леми Шура (див. дод. 5) нерівність (4.47) набуде такого вигляду:

$$A_1^T Q A_1 - \tau_1 Q \leq A_1^T Q(I_1 \ D) \left[\begin{bmatrix} I_1 \\ D^T \end{bmatrix} Q(I_1 \ D) - \tau_2 I_2 \right]^{-1} \begin{bmatrix} I_1 \\ D^T \end{bmatrix} Q A_1. \quad (4.48)$$

На основі S -процедури має бути

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ D^T \end{bmatrix} Q(I_1 \ D) - \tau_2 I_2 < 0$$

та для мінімізації еліпсоїда повинна виконуватися умова $\tau_2 = 1 - \tau_1$.

Після виконання перетворень ЛМН (4.48) можна звести до вигляду

$$\tau_1 Q \geq A_1^T \left[Q - Q(I_1 \ D) \begin{bmatrix} I_1 \\ D^T \end{bmatrix} Q(I_1 \ D) - \tau_2 I_2 \right]^{-1} \begin{bmatrix} I_1 \\ D^T \end{bmatrix} Q \right] A_1,$$

а за $\tau_2 = 1 - \tau_1$ дістанемо

$$\tau_1 Q \geq A_1^T \left[Q + Q(I_1 \ D) \left[(1 - \tau_1) I_2 - \begin{bmatrix} I_1 \\ D^T \end{bmatrix} Q(I_1 \ D) \right]^{-1} \begin{bmatrix} I_1 \\ D^T \end{bmatrix} Q \right] A_1. \quad (4.49)$$

Відповідно до леми про обернення матриць [51] будемо мати

$$\begin{aligned} Q + Q(I_1 \ D) \left[(1 - \tau_1) I_2 - \begin{bmatrix} I_1 \\ D^T \end{bmatrix} Q(I_1 \ D) \right]^{-1} \begin{bmatrix} I_1 \\ D^T \end{bmatrix} Q = \\ = \left[Q^{-1} - (1 - \tau_1)^{-1} (I_1 \ D) \begin{bmatrix} I_1 \\ D^T \end{bmatrix} \right]^{-1}. \end{aligned}$$

Тоді нерівність (4.49) можна записати як

$$\tau_1 Q \geq A_1^T \left[Q^{-1} - (1 - \tau_1)^{-1} (I_1 \ D) \begin{bmatrix} I_1 \\ D^T \end{bmatrix} \right]^{-1} A_1.$$

Виконаємо елементарні перетворення за $P = Q^{-1}$:

$$\tau_1 P^{-1} \geq \left[A_1^{-1} \left[P - (1 - \tau_1)^{-1} (I_1 \ D) \right] \begin{bmatrix} I_1 \\ D^T \end{bmatrix} (A_1^T)^{-1} \right]^{-1}.$$

Після обернення лівої і правої частин дістанемо

$$\frac{P}{\tau_1} \leq A_1^{-1} \left[P - (1 - \tau_1)^{-1} (I_1 \ D) \begin{bmatrix} I_1 \\ D^T \end{bmatrix} \right] (A_1^T)^{-1}.$$

Помножимо спочатку зліва на A_1 , а потім справа на A_1^T та перепозначимо $\tau_1 = \alpha$. Тоді лінійна матрична нерівність набуде кінцевого вигляду:

$$\frac{1}{\alpha} A_1 P A_1^T - P + \frac{I_1 + D D^T}{(1 - \alpha)} \leq 0. \quad (4.50)$$

У разі виконання цієї нерівності еліпсоїд (4.44) буде інваріантним за визначеної матриці P .

Для приглушення збурень в моделі імпульсного процесу (4.42) застосуємо регулятор стану із законом керування

$$\Delta \bar{u}(k) = -K_p \Delta \bar{X}(k), \quad (4.51)$$

який діє безпосередньо на вимірювані координати вершин $\bar{X}$ згідно з рівнянням імпульсного процесу (4.42). Тоді рівняння замкненої системи керування після підстановки (4.51) в (4.42) запишемо таким чином:

$$\Delta \bar{X}(k+1) = (A_1 - BK_p) \Delta \bar{X}(k) + (I_1 \quad D) \begin{bmatrix} \Delta \bar{w}(k) \\ \Delta \bar{Y}(k) \end{bmatrix}. \quad (4.52)$$

Розглянемо імпульсний процес (4.42), в якому пара (A_1, B) є керованою, тобто матриця $R_c = \begin{bmatrix} B & A_1 B & A_1^2 B & \dots & A_1^{n-1} B \end{bmatrix}$ має повний ранг, який дорівнює n , де $n = \dim \bar{X}$. Тоді лінійна матрична нерівність (4.50) для замкненої системи набуває відповідної форми:

$$\frac{1}{\alpha} (A_1 - BK_p) P (A_1 - BK_p)^T - P + \frac{I_1 + DD^T}{(1-\alpha)} \leq 0. \quad (4.53)$$

Для синтезу регулятора (4.51) як критерію оптимальності, як і в підрозд. 4.2, використовують вимогу мінімізації сліду матриці еліпсоїда (4.44), що забезпечує мінімізацію розміру інваріантного еліпсоїда з найбільшим приглушенням збурень $\begin{bmatrix} \Delta \bar{w}(k) \\ \Delta \bar{Y}(k) \end{bmatrix}$, які обмежуються тільки максимальним діапазоном (4.43) за нормою l_∞ .

Після перемноження співмножників у нерівності (4.53) дістанемо

$$\frac{1}{\alpha} (A_1 P A_1^T - BK_p P A_1^T - A_1 P K_p^T B^T + BK_p P K_p^T B^T) - P + \frac{I_1 + DD^T}{(1-\alpha)} \leq 0. \quad (4.54)$$

Нерівність (4.54) є нелінійною відносно P і K_p , які треба оптимізувати. Виконаємо заміну $L = K_p P$, а також введемо додаткове обмеження

$$\begin{bmatrix} R & L \\ L^T & P \end{bmatrix} \geq 0, \quad (4.55)$$

де $R = R^T$. Ця нерівність еквівалентна нерівності $R \geq LP^{-1}L^T = K_p PK_p^T$ відповідно до формули Шура (див. дод. 5) за $P > 0$. Тоді для виконання нерівності (4.54) достатньо, щоб

$$\frac{1}{\alpha} \left(A_1 P A_1^T - B L A_1^T - A_1 L^T B^T + B R B^T \right) - P + \frac{I_1 + D D^T}{(1 - \alpha)} \leq 0. \quad (4.56)$$

Мінімізацію критерію оптимальності (4.28)

$$\text{tr}P(\alpha) \rightarrow \min, \quad \alpha^* \leq \alpha < 1$$

за обмежень (4.55), (4.56) виконуємо за змінними P, L, R методом напів-визначеного програмування з використанням SeDuMi Toolbox на базі Matlab. Тоді з оціненими значеннями $\hat{\alpha}, \hat{P}, \hat{L}, \hat{R}$ матрицю $\hat{K}_p$ оптимального регулятора стану (4.51) визначимо таким чином:

$$\hat{K}_p = \hat{L} \hat{P}^{-1}. \quad (4.57)$$

4.5. Дослідження робастної системи керування із приглушення збурень імпульсних процесів у когнітивній карті застосування криптовалюти

У підрозд. 3.6 було проведено удосконалення КК складних процесів під час застосування криптовалюти на фінансових ринках і досліджено систему стабілізації параметрів вершин цієї КК на заданих рівнях. При цьому імпульсний процес (3.23) КК був стійким, а синтез вектора керування реалізовувався на основі мінімізації квадратичного критерію оптимальності (3.20) у формі узагальненої дисперсії координат вершин КК і керуючих дій. Для реалізації цієї системи потрібно мати достовірну інформацію про матрицю суміжності A_1 в моделі імпульсного процесу (3.23) для вимірюваних координат $\bar{X}(k)$ КК. Для розв'язання цієї задачі потрібно регулярно проводити ідентифікацію вагових коефіцієнтів a_{ij} КК, тобто матриці A_1 , на основі методів теорії ідентифікації.

У цьому підрозділі виконаємо експериментальне дослідження робастної системи керування імпульсним процесом КК застосування криптовалюти (3.23) за параметричної невизначеності матриці A_1 , яка задана інтервальним сімейством (4.38) [30].

Розглянемо вихідну модель КК застосування криптовалюти (рис. 3.6) у формі імпульсного процесу:

$$\Delta \bar{Z}(k+1) = A \Delta \bar{Z}(k), \quad (4.58)$$

де вектор параметрів $Z = \begin{bmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \end{bmatrix}$ має розмірність (12×1) .

Вектор $\bar{X}$ розмірністю (8×1) належить до вимірюваних параметрів вершин КК, а вектор $\bar{Y}(4 \times 1)$ – до невимірюваних параметрів.

Як вимірювані та обчислювані параметри $\bar{X}$ використовують координати вершин 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 КК, яка зображена на рис. 3.6. У групу невимірюваних або важковимірюваних параметрів $\bar{Y}$ включені такі координати вершин:

- попит на криптовалюту (вершина 9);
- опосередкований прибуток (вершина 10);
- рівень довіри (вершина 11);
- інтегральний рівень ризиків (вершина 12).

Тоді після декомпозиції модель (4.58) можна записати у формі (3.23), (3.24), тобто

$$\begin{bmatrix} \Delta \bar{X}(k+1) \\ \Delta Y(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & D \\ \Psi & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \bar{X}(k) \\ \Delta Y(k) \end{bmatrix}. \quad (4.59)$$

Очевидно, що значення матриць A_1, D, Ψ, C , становитимуть

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0,9 & 0,25 & 0,15 & 0,4 & 0,6 & 0,3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,15 & 0,2 & 0,1 & 0,7 & 0,7 & -0,4 \\ 0,5 & 0 & 0,9 & 0 & 0,4 & 0 & 0 & 0 \\ 0,65 & 0 & 0 & 0,85 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0 & 0 & 0,9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,7 & 0 & 0,4 & 0 & 0 & 0,75 & -0,2 \\ 0 & 0 & 0 & 0,4 & 0,4 & 0 & 0 & 0 \\ 0,3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$D = \begin{bmatrix} 0,2 & 0 & 0,4 & -0,5 \\ 0,8 & 0 & 0,7 & -0,5 \\ 0 & 0 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0 & 0,7 & -0,7 \\ 0 & 0,5 & 0 & -0,4 \\ 0 & 0 & 0 & -0,5 \\ 0,5 & 0,3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -0,4 \\ 0,1 & 0,9 & 0,05 & 0 \\ 0,4 & 0 & 0 & -0,5 \\ 0 & -0,2 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\Psi = \begin{bmatrix} 0,05 & 0,8 & 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0,7 & -0,03 \\ 0 & 0,7 & 0,1 & 0 & 0 & 0,5 & 0 & -0,5 \\ 0,5 & 0 & 0,5 & 0 & 0,3 & 0 & 0 & -0,5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,4 & 0,6 & 0 & 0,4 \end{bmatrix}.$$

Матриця A_1 є шуровською, тобто стійкою, з модулями власних значень 0,9321; 0,4376; 0,3874; 0,3874; 0,1803; 0,0512; 0,4281; 0,4692, а отже, імпульсний процес для вимірюваних параметрів $\bar{X} \Delta \bar{X}(k+1) = A_1 \Delta \bar{X}(k)$ є стійким. Але модель імпульсного процесу повної КК (4.59) з урахуванням невимірюваних параметрів $\bar{Y}$, що виступають у ролі збурень, буде нестійкою, тому що модулі власних значень матриці $\begin{bmatrix} A_1 & D \\ \Psi & C \end{bmatrix}$ становитимуть 1,3692; 0,6271; 0,6271; 0,6097; 0,4480; 0,4480; 0,3685; 0,1286; 0,1286; 0,3706; 0,3700; 0,2535 і значення модуля $1,3692 > 1$.

Розглянемо варіант керування імпульсним процесом

$$\Delta \bar{X}(k+1) = A_1 \Delta \bar{X}(k) + D \Delta \bar{Y}(k) + B \Delta \bar{u}(k), \quad (4.60)$$

коли керуючі дії

$$\Delta \bar{u}(k) = [\Delta u_1(k) \ \Delta u_2(k) \ \Delta u_3(k) \ \Delta u_4(k) \ \Delta u_5(k)]^T$$

подаються безпосередньо на такі вершини КК: 2 – обсяг торгів; 3 – обсяг капіталізації; 5 – обсяг інвестицій; 6 – обсяг спекуляцій; 7 – пропозиція криптовалюти, якими можна варіювати під час керування. Тоді матриця B в моделі керованого імпульсного процесу (4.60)

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Припустимо, що у процесі функціонування процесу застосування криптовалюти матриця суміжності A_1 змінюється відповідно до (4.38), тобто

$$A_1(k) = A_1 + \Delta A_1(k), \quad (4.61)$$

де A_1 – відома й задана, а $\Delta A_1(k) = (\Delta a_{ij}(k))$, якщо $\underline{\Delta a_{ij}} \leq \Delta a_{ij}(k) \leq \bar{\Delta a_{ij}}$, $i, j = 1, 2, \dots, 8$. Тоді модель імпульсного процесу (4.60) можна записати як

$$\Delta \bar{X}(k+1) = (A_1 + \Delta A_1(k)) \Delta \bar{X}(k) + B \Delta \bar{u}(k) + D \Delta \bar{Y}(k). \quad (4.62)$$

Нехай усі коефіцієнти матриці A_1 зросли на $\Delta A_1(k)$, що становить 10 % від основної частини A_1 , при цьому $\Delta A_1(k)$ є невідомою під час синтезу регулятора (4.51), (4.57). У результаті цього коливання матриці $\Delta A_1(k)$ в імпульсному процесі $\Delta \bar{X}(k+1) = (A_1 + \Delta A_1(k)) \Delta \bar{X}(k)$ для вимірювання частини параметрів також з'явилась нестійкість, тому що модулі власних значень матриці $(A_1 + \Delta A_1(k))$ дорівнюватимуть 1,0253; 0,4813; 0,4261; 0,4261; 0,1983; 0,0563; 0,4709; 0,5161, а модулі власних значень матриці суміжності повної КК (4.59), тобто

$$\begin{bmatrix} (A_1 + \Delta A_1) & D \\ \Psi & C \end{bmatrix},$$

стануть ще більшими, тобто 1,4346; 0,6441; 0,6441; 0,3791; 0,3791; 0,2693; 0,6597; 0,4731; 0,4731; 0,1431; 0,1431; 0,3307.

Без керування під час подавання одиничних імпульсів на вершини 10 і 11 імпульсний процес у КК буде нестійким, що показано на графіках рис. 4.7.

Із застосуванням робастного регулятора стану $\Delta \bar{u}(k) = -K_p \Delta \bar{X}(k)$ рівняння замкненої системи керування (4.52) має вигляд [30]

$$\Delta \bar{X}(k+1) = (A_1 - BK_p) \Delta \bar{X}(k) + \begin{bmatrix} I_1 & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \bar{w}(k) \\ \Delta \bar{Y}(k) \end{bmatrix}, \quad (4.63)$$

де внутрішні збурення $\Delta \bar{w}(k) = \Delta A_1(k) \Delta \bar{X}(k)$ формуються за рахунок невимірюваних параметрів вершин $\bar{Y}$ КК. Матрицю K_p робастного регулятора визначають на основі методики (4.50), (4.52), (4.53), (4.54), (4.55) і (4.56), згідно з якою передбачено придушення збурень $\Delta \bar{u}(k)$.

Під час моделювання замкненої системи керування (4.63) подаються зовнішні збурення у формі ступінчастих сигналів з амплітудою 1, які діють у початковий момент часу на дві невимірювані вершини: опосередкований прибуток (вершина 10) і рівень довіри (вершина 11) у бік зменшення.

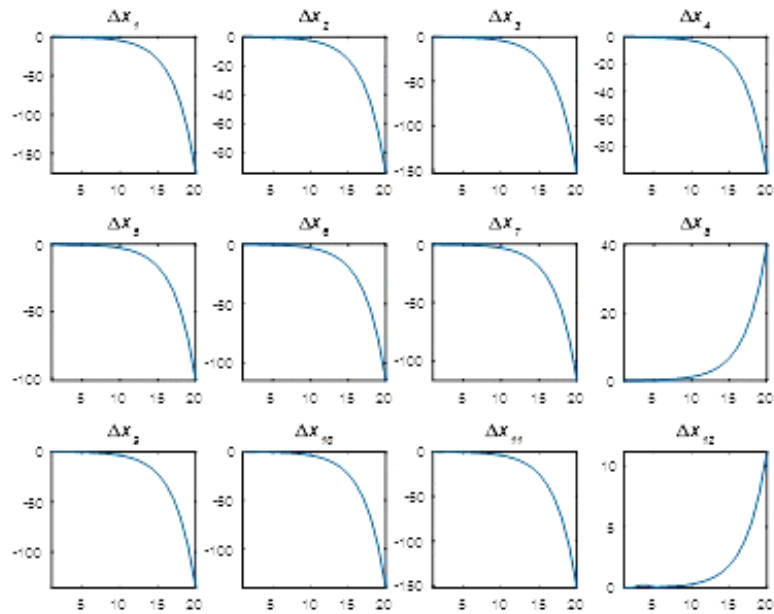


Рис. 4.7

Під час застосування робастного регулятора, синтезованого на основі інваріантних еліпсоїдів, отримуємо стійку замкнену систему керування, де матриця $(A_1 + \Delta A_1 - BK_p)$ має такі значення модулів власних значень, менших за одиницю: 0,3977; 0,1662; 0,1662; 0,0828; 0,0828; 0,1121; 0,1121; 0,0794. Графіки перехідних процесів координат параметрів вершин у приростах змінних зображено на рис. 4.8.

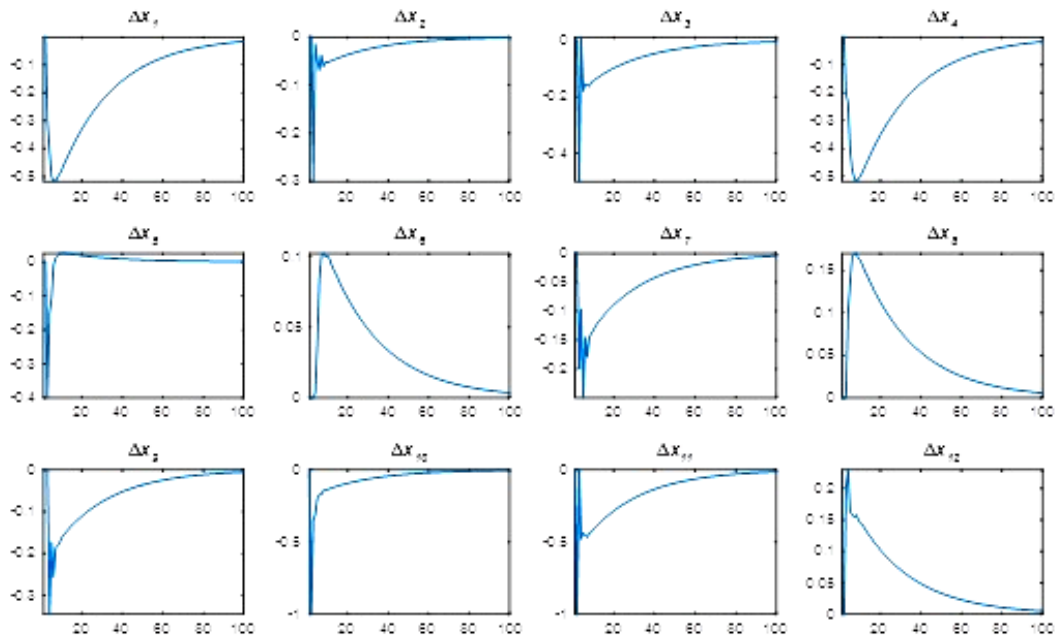


Рис. 4.8. Графіки перехідних процесів координат параметрів вершин у приростах змінних

У процесі моделювання замкненої системи керування робастним регулятором формуються керуючі дії, графіки яких показано на рис. 4.9.

У разі зростання коливання ΔA_1 матриці A_1 на 15 % перехідний процес координат $\Delta \bar{X}(k)$ у замкненій системі керування залишається стійким, але стабілізація сповільнюється, тобто відбувається вже не за 100 періодів дискретизації, як на рис. 4.8, а більше, що показано на графіках рис. 4.10.

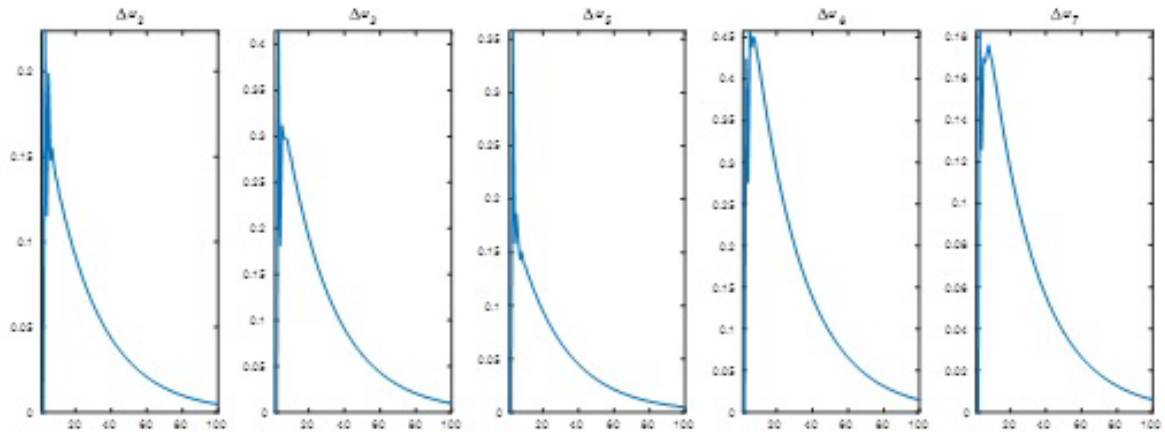


Рис. 4.9. Керуючі дії, що формуються у процесі моделювання замкненої системи керування робастним регулятором

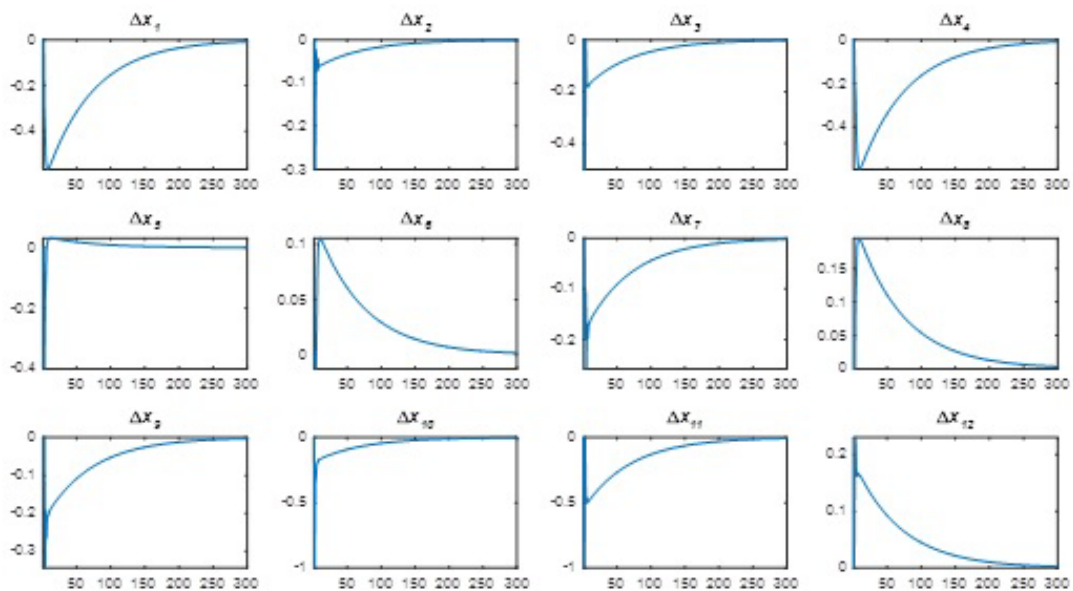


Рис. 4.10

Контрольні запитання

1. У чому полягає умова інваріантності еліпсоїда?
2. Яке інтервальне сімейство матриць називають робастно стійким?
3. Чим різняться норма L_∞ і l_∞ ?
4. Яким чином інваріантні еліпсоїди характеризують вплив зовнішніх збурень на траєкторію динамічної системи?
5. У чому полягає відмінність задачі робастного керування від задачі оптимального керування?
6. Яким чином слід $\text{tr}P$ характеризує розмір інваріантного еліпсоїда?
7. У чому полягає відмінність евклідової норми від норми l_∞ для послідовності вектора збурень $\{\bar{\xi}(k)\}$?
8. Як визначаються l_2 -норма і l_∞ -норма для послідовності $\{\bar{w}(k)\}$?
9. Як задають обмеження збурень за нормою l_∞ ?
10. У чому полягає ідея S -процедури?
11. Як синтез оптимального регулятора стану $\Delta \bar{u}(k) = -K_p \Delta \bar{X}(k)$ зводиться до пошуку найменшого інваріантного еліпсоїда замкненої системи керування?

Задачі для самостійного розв'язання

4.1. Імпульсний процес КК описують системами різницевих рівнянь

$$\begin{aligned}\Delta \bar{X}(k+1) &= A_1 \Delta \bar{X}(k) + B \Delta \bar{u}(k) + D \Delta \bar{Y}(k), \\ \Delta \bar{Y}(k+1) &= C \Delta \bar{Y}(k) + \Psi \Delta \bar{X}(k),\end{aligned}\quad (*)$$

де $\Delta \bar{X}(k) = \begin{bmatrix} \Delta X_1(k) \\ \Delta X_2(k) \\ \Delta X_3(k) \end{bmatrix}$ – вектор приростів вимірюваних координат вершин КК, а

$\Delta \bar{Y}(k) = \begin{bmatrix} \Delta Y_1(k) \\ \Delta Y_2(k) \end{bmatrix}$ – вектор приростів невимірюваних координат вершин КК.

Матриці A_1, D, C, Ψ

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0,65 & 0,2 & -0,1 \\ 0,15 & 0,7 & -0,3 \\ 0,05 & 0,12 & 0,4 \end{bmatrix}; \quad D = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,05 \\ -0,2 & 0,3 \\ 0,01 & 0,04 \end{bmatrix};$$

$$C = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,45 \\ 0,15 & -0,3 \end{bmatrix}; \quad \Psi = \begin{bmatrix} 0 & 0,1 & 0 \\ 0,2 & -0,25 & 0,4 \end{bmatrix}.$$

Для першого рівняння імпульсного процесу вектор $\Delta\bar{Y}(k)$ є невимірюваним збуренням.

Вектор керування $\Delta\bar{u}(k)$ складається з керуючих дій $\Delta\bar{u}(k) = \begin{bmatrix} \Delta u_1(k) \\ \Delta u_2(k) \end{bmatrix}$, які формуються через зміну ресурсів вершин x_2 і x_3 КК відповідно.

Завдання.

а) Дослідити стійкість імпульсного процесу.

б) Побудувати КК.

в) Дослідити керованість $[A_1, B]$ першого рівняння імпульсного процесу, де матриця керування $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

г) Виконати синтез (4.34) матриці керування $\hat{K}_p = \hat{L}\hat{P}^{-1}$ регулятора стану $\Delta\bar{u}(k) = -K_p\Delta\bar{X}(k)$ за методом навіввизначеного програмування з використанням SeDuMi Toolbox в системі Matlab на основі мінімізації критерію оптимальності (4.28) $trP(\alpha) \rightarrow \min$, $\alpha^* \leq \alpha < 1$ за обмежень (4.32), (4.33).

д) З допомогою цифрового моделювання дослідити динаміку замкненої системи керування (4.29) разом із взаємопов'язаними другим різницеvim рівнянням (*) із приглушення збурень $D\Delta\bar{Y}(k)$ під час подавання одиничного ступінчатого збурення на вершину Y_1 КК. Побудувати графіки перехідних процесів координат вершин КК.

е) Порівняти результати дослідження із приглушення збурень згідно з попереднім пунктом, з моделюванням некерованого імпульсного процесу КК під час подавання ступінчатого збурення на вершину Y_1 КК.

4.2. Математичну модель імпульсного процесу КК задано в такій формі:

$$\Delta\bar{X}(k+1) = (A_1 + \Delta A_1(k))\Delta\bar{X}(k) + B\Delta\bar{u}(k) + D\Delta\bar{Y}(k), \quad (*)$$

$$\Delta\bar{Y}(k+1) = C\Delta\bar{Y}(k) + \Psi\Delta\bar{X}(k), \quad (**)$$

де

$$\Delta\bar{X}(k) = \begin{bmatrix} \Delta X_1(k) \\ \Delta X_2(k) \\ \Delta X_3(k) \\ \Delta X_4(k) \end{bmatrix}; \quad \Delta\bar{Y}(k) = \begin{bmatrix} \Delta Y_1(k) \\ \Delta Y_2(k) \end{bmatrix},$$

$\Delta\bar{X}(k)$ – вектор приростів вимірюваних координат вершин КК, а $\Delta\bar{Y}(k)$ – вектор приростів невимірюваних координат вершин КК.

Матриці A_1, D, C, Ψ

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0,7 & 0 & 0,15 & -0,2 \\ -0,3 & 0,55 & 0 & 0,4 \\ 0,4 & 0,25 & 0 & 0,17 \\ 0 & 0,35 & -0,1 & 0,6 \end{bmatrix}; \quad D = \begin{bmatrix} 0,12 & -0,2 \\ 0,3 & 0,1 \\ 0 & -0,25 \\ -0,1 & 0,15 \end{bmatrix};$$

$$C = \begin{bmatrix} 0,27 & 0,1 \\ 0,3 & 0,2 \end{bmatrix}; \quad \Psi = \begin{bmatrix} -0,1 & 0 & 0,15 & 0,3 \\ 0,2 & 0,35 & -0,4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Для першого рівняння (*) імпульсного процесу вектор $\Delta\bar{Y}(k)$ є невимірюваним збуренням. Вектор керування $\Delta\bar{u}(k)$ формується варіюванням ресурсів вершин КК, а його складові $\Delta\bar{u}(k) = [\Delta u_1(k) \quad \Delta u_2(k) \quad \Delta u_3(k)]^T$ подаються, відповідно, на вершини x_1, x_2 і x_4 КК.

Під час синтезу регулятора параметричну зміну ΔA_1 не враховувати.

Завдання 1.

а) Побудувати КК.

б) Дослідити загальну стійкість імпульсного процесу (*) і (**) й окремо – стійкість імпульсного процесу (*).

в) Дослідити керованість $[A_1, B]$ першого рівняння (*) імпульсного процесу, де матриця керування

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

г) За $\Delta A_1 = 0$ виконати синтез матриці підсилення $\hat{K}_p = \hat{L}\hat{P}^{-1}$ регулятора стану $\Delta \bar{u}(k) = -K_p \Delta \bar{X}(k)$ за методом напіввизначеного програмування з використанням SeDuMi Toolbox в системі Matlab на основі мінімізації критерію оптимальності (4.28) $\text{tr}P(\alpha) \rightarrow \min, \alpha^* \leq \alpha < 1$ за обмежень (4.32), (4.33).

д) Дослідити динаміку зміни координат $\Delta \bar{X}(k), \Delta \bar{Y}(k)$ під час некеруваного імпульсного процесу ($\Delta \bar{u}(k) = 0$) (*) (**) під час подавання одиничного ступінчатого збурення на вершину Y_1 КК.

е) Дослідити динаміку замкненої системи керування (4.29) із приглушення збурень $D\Delta \bar{Y}(k)$ разом із взаємопов'язаним другим різнице-вим рівнянням (**) під час подавання ступінчатого збурення на вершину Y_1 КК.

ж) Порівняти результати досліджень за пунктами «д» та «е».

Завдання 2.

Нехай усі коефіцієнти матриці A_1 в рівнянні (*) зросли за абсолютною величиною на ΔA_1 , що становить 10 % від основної частини A_1 . При цьому ΔA_1 є невідомою під час синтезу матриці $\hat{K}_p$ в (4.57) регулятора стану $\Delta \bar{u}(k) = -K_p \Delta \bar{X}(k)$ (4.51).

и) Дослідити загальну стійкість імпульсного процесу (*), (**) й окремо – стійкість імпульсного процесу (*).

к) Виконати синтез матриці регулятора $\hat{K}_p = \hat{L}\hat{P}^{-1}$ мінімізацією критерію $\text{tr}P(\alpha) \rightarrow \min, \alpha^* \leq \alpha < 1$ за змінними $\hat{P}, \hat{L}, \hat{R}$ за обмежень (4.55), (4.56) методом напіввизначеного програмування на основі застосування SeDuMi Toolbox на базі технології Matlab.

л) Дослідити динаміку замкненої системи (4.29) із приглушення збурень $D\Delta \bar{Y}(k)$ разом із взаємопов'язаним другим різнице-вим рівнянням (**) під час подавання ступінчатого збурення на вершину Y_1 КК.

м) Порівняти результати досліджень за пунктами «е» та «л».

Завдання 3.

Нехай усі коефіцієнти матриці A_1 у рівнянні (*) зросли за абсолютною величиною на ΔA_1 , що становить 20 % від основної частини A_1 .

Виконати програму пунктів «и», «к», «л» та «м».

Завдання 4.

Виконати попередні дослідження, коли усі коефіцієнти матриці A_1 в рівнянні (*) зросли за абсолютною величиною на ΔA_1 , що становить 30 % від основної частини A_1 .

РОЗДІЛ 5. Методи координувального керування співвідношеннями координат у складних системах

Проблема керування співвідношеннями координат виникає у багатовимірних системах автоматичного керування. Найпростіша реалізація керування співвідношеннями вихідних координат багатовимірного об'єкта або окремих одновимірних об'єктів виконується за принципом відпрацювання задавальних дій для регуляторів у контурах автоматичного керування для стабілізації указаних вихідних координат на заданих рівнях. При цьому устанавлюється необхідне співвідношення між задавальними діями, яке автоматично відпрацьовується між відповідними вихідними керованими координатами. Якщо потрібно змінити співвідношення між вихідними координатами, то зазвичай змінюються відповідні задавальні дії для регуляторів, які стабілізують ці координати в замкнених системах автоматичного керування.

5.1. Проектування комбінованої системи слідування і координації

5.1.1. Схеми координувального керування і формування критеріїв комбінованої системи слідування і координації

Розглянемо дискретний багатовимірний об'єкт керування з n входами і n виходами. Динаміку цього об'єкта задамо у вигляді матричної дискретної передатної функції (МДПФ) $W(z)$, де

$$W_{ij}(z) = \frac{Y_i(z)}{U_j(z)}; \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Розглянемо проблему синтезу регулятора для цього об'єкта, що має забезпечити виконання двох задач, які надалі будемо називати задачею слідування і задачею координації.

Під задачею слідування будемо розуміти задачу зведення вихідного сигналу $\bar{Y}$ до рівня сигналу задавальної дії $\bar{G} = (g_1, \dots, g_n)^T$.

Під задачею координації будемо розуміти вимогу виконання в динаміці системи лінійних співвідношень між вихідними координатами [11]

$$A\bar{Y} = \bar{b}, \quad (5.1)$$

де $\bar{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)^T$, $\bar{b} = (b_1, \dots, b_r)^T$ – заданий вектор; A – задана матриця розмірністю $r \times n$, де $r < n$, що має повний ранг.

Очевидно, що для того, щоб задачі слідкування і координації були узгодженими, задавальну дію $\bar{G}$ слід подавати спеціальним чином. Запропонуємо дві схеми.

Згідно з першою схемою (рис. 5.1) задавальні дії одразу формуються так, щоб задовольнити співвідношення (5.1), тобто $A\bar{G}(k) = \bar{b}$. При цьому вони формуються без зворотного зв'язку.

Перевагою першої схеми є простота і «чистота» задавальних сигналів $\bar{G}$, не пов'язаних з якістю роботи системи, тобто при цьому неможливо безпосередньо контролювати співвідношення у перехідному режимі, тому що помилки їх регулювання явно не вводяться в закон керування. У першій схемі задавальні дії не враховують, чи виконуються реально співвідношення між вихідними координатами, тобто реалізується виконання співвідношення між ідеальними, бажаними сигналами, а не між дійсними.



Рис. 5.1. Схема 1 координувального керування

Згідно з другою схемою координувального керування (рис. 5.2) із фізичних міркувань серед вихідних координат $Y_i (i = 1, \dots, n)$ обирають $(n - M)$ ведучих і M ведених координат.

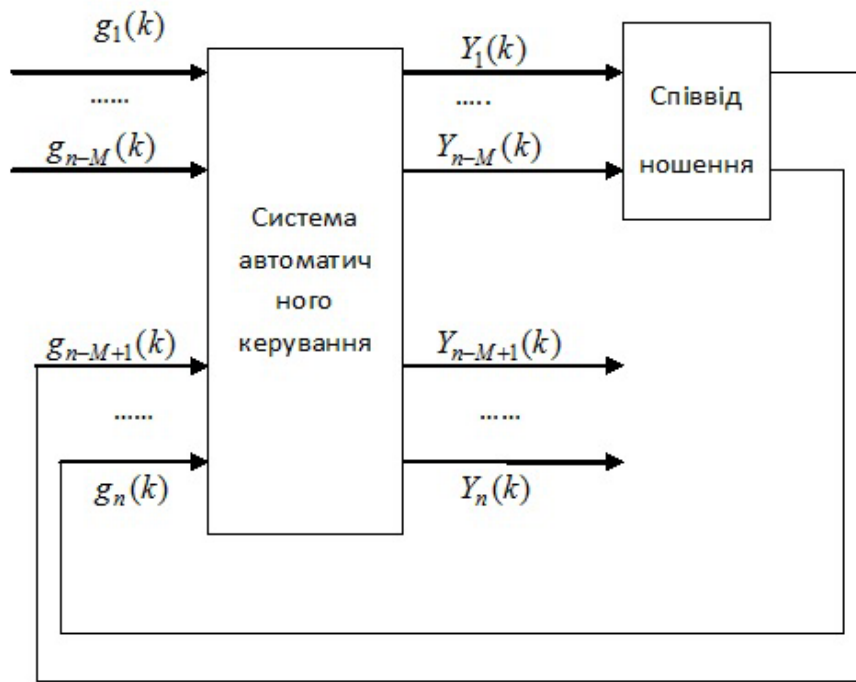


Рис. 5.2. Схема 2 координувального керування

Оскільки, за припущенням, усі співвідношення лінійно незалежні, то ведені координати можна виразити однозначно як лінійні комбінації ведучих. По прямих каналах ведучих координат подаються певні задавальні дії (без обмежень), а замість задавальних дій для ведених координат подаються відповідні лінійні комбінації ведучих вихідних координат (рис. 5.2).

Перевагою другої схеми є те, що ми в явному вигляді вимагаємо від системи, щоб ведені координати відповідали потрібним співвідношенням ведучих вихідних координат, тобто виконання співвідношення тепер є не додатковою умовою поряд з відпрацюванням вхідних сигналів, а основною умовою. Недоліком схеми є відносна складність та внесення деякого запізнення у формування задавальних дій по ведених каналах керування внаслідок інерційності системи. Якщо застосовувати другу схему для обчислення задавальних дій для ведених вихідних координат, доведеться шукати лінійні комбінації ведучих вхідних координат. Для простоти будемо припускати, що вони не змінюють свого значення у проміжку часу між моментами дискретизації.

Для синтезу регулятора необхідно задати критерій оптимальності. У цьому методі синтез регулятора виконується на основі еталонної моделі замкненої системи.

Для першої і другої схеми як еталонну модель обираємо бажану МДПФ замкненої системи, яку для методу безпосереднього синтезу регулятора беремо діагональною, тобто за i -м каналом,

$$W_{3_i}(z) = \frac{Y_i(z)}{g_i(z)}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Конкретний вигляд бажаної МДПФ замкненої системи для слідкуючого контура найчастіше обирають у формі динамічної ланки, яка забезпечуватиме аперіодичний перехідний процес у замкненій системі керування, тобто

$$W_{3_i}(s) = \frac{1}{T_i s + 1}, \quad (5.2)$$

де T_i – стала часу, яку обирають з міркувань швидкодії перехідного процесу в замкненій системі. За умови, що в слідкуючій дискретній системі задавальна дія $g_i(k)$ може змінюватися в дискретні моменти з періодом дискретизації T_0 , дискретним аналогом динамічної ланки (5.2) буде

$$W_{3_i}(z) = \frac{Y_i(z)}{g_i(z)} = \frac{(1 - e^{-\lambda_i T_0}) z^{-1}}{1 - e^{-\lambda_i T_0} z^{-1}}, \quad (5.3)$$

де $\lambda_i = \frac{1}{T_i}$ згідно з [2]. Величину λ_i обирає проєктувальник системи керування, при цьому вибір λ_i не залежить від вибору періоду дискретизації T_0 .

5.1.2. Проєктування контурів керування комбінованої системи слідкування і координації

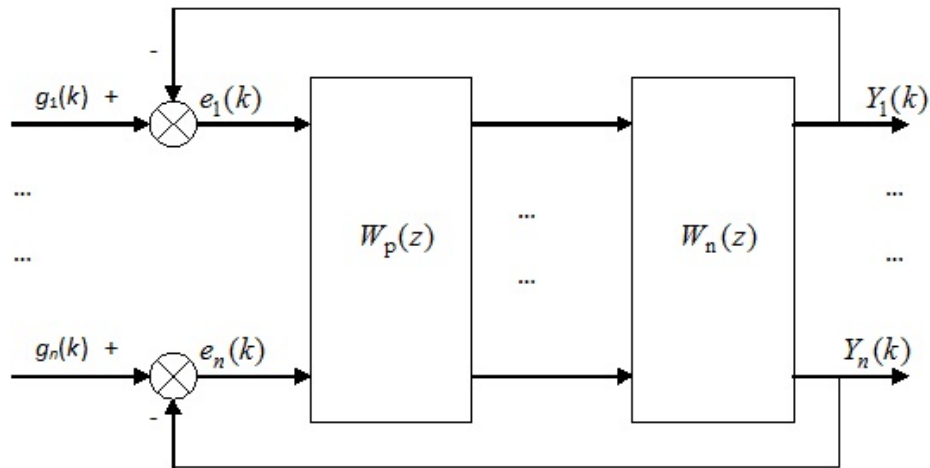
Багатовимірний контур слідкуючої системи керування зображено на рис. 5.3.

Матрична дискретна передатна функція замкненої системи

$$W_3(z) = [I + W_n(z)W_p(z)]^{-1} W_n(z)W_p(z). \quad (5.4)$$

За заданої бажаної МДПФ $W_3(z)$ з рівняння (5.4) визначаємо

$$W_p(z) = W_n^{-1}(z)[I - W_3(z)]^{-1} W_3(z). \quad (5.5)$$



$W_p(z)$ – матрична дискретна передатна функція багатовимірного регулятора;

$W_n(z)$ – матрична дискретна передатна функція зведеної
неперервної частини об'єкта керування;

$\bar{E}(k) = [e_1(k), \dots, e_n(k)]^T = \bar{G}(k) - \bar{Y}(k)$ – вектор помилок керування

Рис. 5.3. Багатовимірний контур слідкуючої системи керування

Цей регулятор має забезпечувати відслідковування вихідними координатами $\bar{Y}$ зміну задавальних дій $\bar{G}$. Але задачу координації вирішено тільки частково, а саме в усталеному стані, оскільки задавальні дії $\bar{G}$ відповідають співвідношенню (5.1), тому що після завершення перехідного процесу виконується $\bar{Y} = \bar{G}$. Але цього, як правило, недостатньо. На практиці найчастіше вимагається, щоб співвідношення (5.1) виконувалося і під час перехідного процесу, а не в усталеному стані. Інакше кажучи, задача координації має вищий пріоритет і тому має бути вирішена «швидше», ніж задача слідкування. Для цього треба синтезувати додатковий контур координації.

Введемо до розгляду уявний об'єкт керування з МДПФ $AW_\Pi(z)$. Оскільки за визначенням виконується $\bar{Y}(k) = W_\Pi(z)\bar{U}(k)$, де $\bar{U}(k) = [U_1(k), \dots, U_n(k)]^T$ – вектор керування, то вихідним сигналом уявного об'єкта буде вектор сигналів $A\bar{Y}(k) = AW_\Pi(z)\bar{U}(k)$.

Розглянемо контур координації, в якому вектор $\bar{b}$ буде відігравати роль задавальної дії, а уявлений об'єкт – роль об'єкта керування. Тоді вектор $E_k(k) = [e_{k_1}(k), \dots, e_{k_n}(k)]^T = \bar{b} - A\bar{Y}(k)$ – це вектор помилок керування (рис. 5.4).

Необхідно синтезувати координувальний регулятор $W_{pk}(z)$, який буде підтримувати «вихідні координати» уявного об'єкта $A\bar{Y}(k)$ на рівні задавальних дій $\bar{b}$, тобто виконання вимоги (5.1). Для цього оберемо бажану МДПФ замкненого контуру координації:

$$H_{\kappa}(z) = \text{diag} \{ H_{\kappa_s}(z) \}, \quad s = 1, \dots, r, \quad (5.6)$$

де

$$H_{\kappa_s}(z) = \frac{x_s(z)}{b_s},$$

$$A\bar{Y}(z) = [x_1(z), x_2(z), \dots, x_r(z)]^T; \quad \bar{b} = [b_1, \dots, b_r]^T.$$

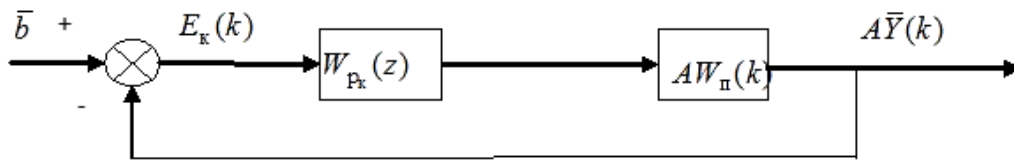


Рис. 5.4. Контур координації

Суттєвою особливістю цього контура є те, що уявний об'єкт і регулятор мають різні кількості входів та виходів, а саме n входів і r виходів. При цьому $r < n$. Отже, не існує оберненої матриці до $AW_{\Pi}(z)$ і метод безпосереднього синтезу за аналогією із (5.5) застосувати неможливо.

Оберемо деяку опорну матрицю C розмірністю $(n \times r)$ таким чином, щоб забезпечувалася розмірність $\det[AW_{\Pi}(z)C] \neq 0$. Запропонуємо такий координувальний регулятор:

$$W_{pk}(z) = C[AW_{\Pi}(z)C]^{-1}[I - H_k(z)]^{-1}H_k(z). \quad (5.7)$$

Тоді МДПФ замкненого контуру координації (рис. 5.4) буде

$$\begin{aligned} & [I + AW_{\Pi}(z)W_{pk}(z)]^{-1}AW_{\Pi}(z)W_{pk}(z) = \\ & = \left\{ I + AW_{\Pi}(z)C(AW_{\Pi}(z)C)^{-1}[I - H_k(z)]^{-1}H_k(z) \right\}^{-1} \cdot \\ & \quad \cdot AW_{\Pi}(z)C(AW_{\Pi}(z)C)^{-1}[I - H_k(z)]^{-1}H_k(z) = \\ & = \left[I + (I - H_k(z))^{-1}H_k(z) \right]^{-1} (I - H_k(z))^{-1}H_k(z) = \\ & = \left[(I - H_k(z)) \left[I + (I - H_k(z))^{-1}H_k(z) \right] \right]^{-1} H_k(z) = \\ & = [I - H_k(z) + H_k(z)]^{-1}H_k(z) = H_k(z). \end{aligned}$$

Отже, регулятор (5.7) забезпечує через вибір $H_k(z)$ задану динаміку контуру координації, тобто як еталонну модель замкненого контуру координації (рис. 5.4) будемо задавати бажану передатну функцію

$$H_k(z) = \text{diag} \{ H_{k_i}(z) \}, \quad i = 1, \dots, r,$$

де

$$H_{k_i}(z) = \frac{(1 - e^{-\lambda_i^k T_0}) z^{-1}}{1 - e^{-\lambda_i^k T_0} z^{-1}},$$

де $\lambda_i^k = \frac{1}{T_i^k}$; T_i^k – стала часу i -го каналу замкненого контуру координації.

Бажана передатна функція $H_{k_i}(z)$ буде забезпечувати аперіодичний перехідний процес у контурі (рис. 5.4).

Тепер об'єднаємо контури слідкування (рис. 5.3) і координації в єдину замкнену комбіновану систему керування (рис. 5.5).

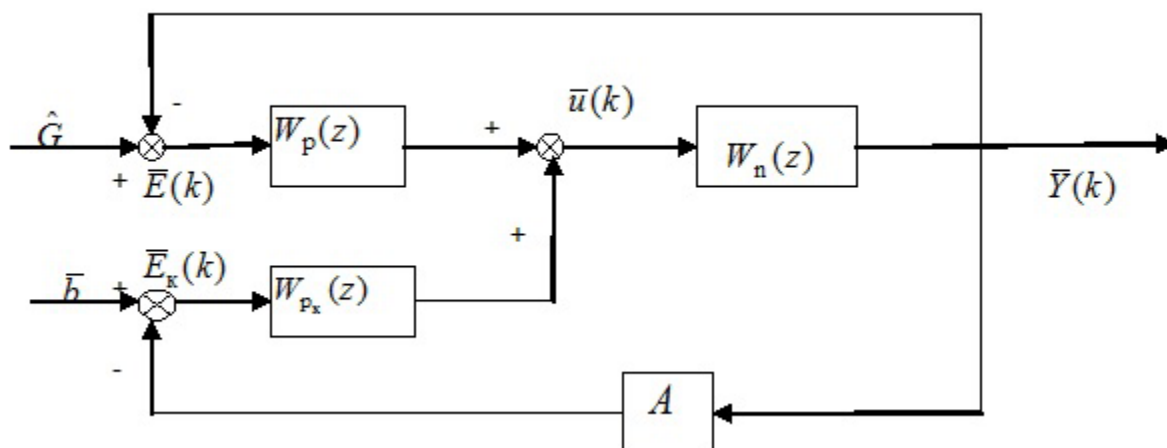


Рис. 5.5. Комбінований контур керування

На вхід реального об'єкта будемо подавати суму керуючих дій, що формується слідкуючим регулятором $W_p(z)$ і координувальним регулятором $W_{pk}(z)$, тобто

$$\bar{U}(k) = W_p(z) \bar{E}(k) + W_{pk}(z) \bar{E}_k(k).$$

Головна умова, яка має виконуватися у двоконтурній системі керування – це забезпечення стійкості. Очевидно, що контури слідкування і координації окремо є стійкими за будовою, тому що бажані МДПФ $W_3(z)$ і $H_k(z)$ обираються стійкими. Але після їх об'єднання система

може втратити стійкість. Щоб знайти умови стійкості комбінованого контура керування, спочатку виведемо його рівняння динаміки:

$$\begin{aligned} Y(z) &= W_{\Pi}(z)\bar{U}(k) = W_{\Pi}(z)\left[W_p(z)\bar{E}(z) + W_{pk}(z)\bar{E}_k(z)\right] = \\ &= W_{\Pi}(z)\left[W_p(z)(\bar{G}(z) - \bar{Y}(z)) + W_{pk}(z)(\bar{b} - A\bar{Y}(z))\right] = \\ &= W_{\Pi}(z)W_p(z)\bar{G}(z) + W_{\Pi}(z)W_{pk}(z)\bar{b} - \\ &- \left[W_{\Pi}(z)W_p(z) + W_{\Pi}(z)W_{pk}(z)A\right]\bar{Y}(z), \end{aligned}$$

звідси знайдемо рівняння замкненої комбінованої системи керування (слідкування і координації):

$$\begin{aligned} Y(z) &= \left[I + W_{\Pi}(z)W_p(z) + W_{\Pi}(z)W_{pk}(z)A\right]^{-1} \cdot \\ &\cdot \left[W_{\Pi}(z)W_p(z)\bar{G}(z) + W_{\Pi}(z)W_{pk}(z)\bar{b}\right]. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Отже, характеристичне рівняння замкненої комбінованої системи керування має вигляд

$$\det\left[I + W_{\Pi}(z)W_p(z) + W_{\Pi}(z)W_{pk}(z)A\right] = 0,$$

або, після підстановки (5.5), (5.7), отримаємо

$$\begin{aligned} \det\left\{I + \left[I - W_3(z)\right]^{-1}W_3(z) + W_{\Pi}(z)C\left(AW_{\Pi}(z)C\right)^{-1} \cdot \right. \\ \left. \cdot \left[I - H_k(z)\right]^{-1}H_k(z)A\right\} = 0. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Тоді стійкість замкненої комбінованої системи керування (5.8) буде забезпечуватися розміщенням коренів характеристичного рівняння (5.9) всередині круга одиничного радіуса.

5.1.3. Моделювання двовимірної комбінованої системи слідкування і координації

Розглянемо для прикладу двовимірний об'єкт керування з матричною дискретною передатною функцією зведеної неперервної частини:

$$W_{\Pi}(z) = \begin{bmatrix} W_{11}(z) & W_{12}(z) \\ W_{21}(z) & W_{22}(z) \end{bmatrix},$$

де

$$W_{11}(z) = \frac{Y_1(z)}{U_1(z)} = \frac{0,013z^{-1} + 0,0114z^{-2}}{1 - 1,6456z^{-1} + 0,67z^{-2}},$$

$$W_{12}(z) = \frac{Y_1(z)}{U_2(z)} = \frac{0,039z^{-1} + 0,016z^{-2}}{1 - 1,2875z^{-1} + 0,373z^{-2}},$$

$$W_{21}(z) = \frac{Y_2(z)}{U_1(z)} = \frac{0,021z^{-1} + 0,032z^{-2}}{1 - 1,165z^{-1} + 0,249z^{-2}},$$

$$W_{22}(z) = \frac{Y_2(z)}{U_2(z)} = \frac{0,04z^{-1} + 0,018z^{-2}}{1 - 1,367z^{-1} + 0,449z^{-2}}.$$

Нехай задавальна дія g_1 для першої координати Y_1 є незалежною, а задавальну дію g_2 для другої координати Y_2 обчислимо як лінійну функцію від координати Y_2 (друга схема координації). Оберемо для двовимірної замкненої системи слідкування бажану МДПФ:

$$W_3(z) = \begin{bmatrix} W_{31}(z) & 0 \\ 0 & W_{32}(z) \end{bmatrix},$$

складові якої беремо у формі (5.3), тобто

$$W_3(z) = \begin{bmatrix} \frac{(1 - e^{-\lambda_1 T_0})z^{-1}}{1 - e^{-\lambda_1 T_0} z^{-1}} & 0 \\ 0 & \frac{(1 - e^{-\lambda_2 T_0})z^{-1}}{1 - e^{-\lambda_2 T_0} z^{-1}} \end{bmatrix}.$$

Таким чином, за формулою (5.5) можна синтезувати слідкуючий регулятор $W_p(z)$.

Нехай треба забезпечити виконання співвідношення вихідних координат $Y_1(k) - 2Y_2(k) = 1$, тобто $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix}$, а $b = 1$.

Побудуємо контур координації. Знову оберемо бажану передатну функцію замкненого контуру координації (що у цьому прикладі виявився одновимірним):

$$H_k = \frac{(1 - e^{-\lambda_k T_0})z^{-1}}{1 - e^{-\lambda_k T_0} z^{-1}},$$

де $\lambda_k = \frac{1}{T_k}$; T_k – стала часу контура координації.

Далі синтезуємо координувальний регулятор $W_{p_k}(z)$ за формулою (5.7). Матрицю C , а також параметри $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_k$ обираємо таким чином,

щоб задовольнялось $\det[AW_{\Pi}(z)C] \neq 0$ і виконувалась умова (5.9). У цьому приладі беремо $C = (2 \ 1)^T$, $\lambda_1 = 0,3$; $\lambda_2 = 0,6$; $\lambda_k = 1$, де виконуються умови $\lambda_k > \lambda_1$; $\lambda_k > \lambda_2$, чим забезпечується більша швидкодія контура координації порівняно зі слідкуючим контуром.

Схему комбінованого контура зображено на рис. 5.6.

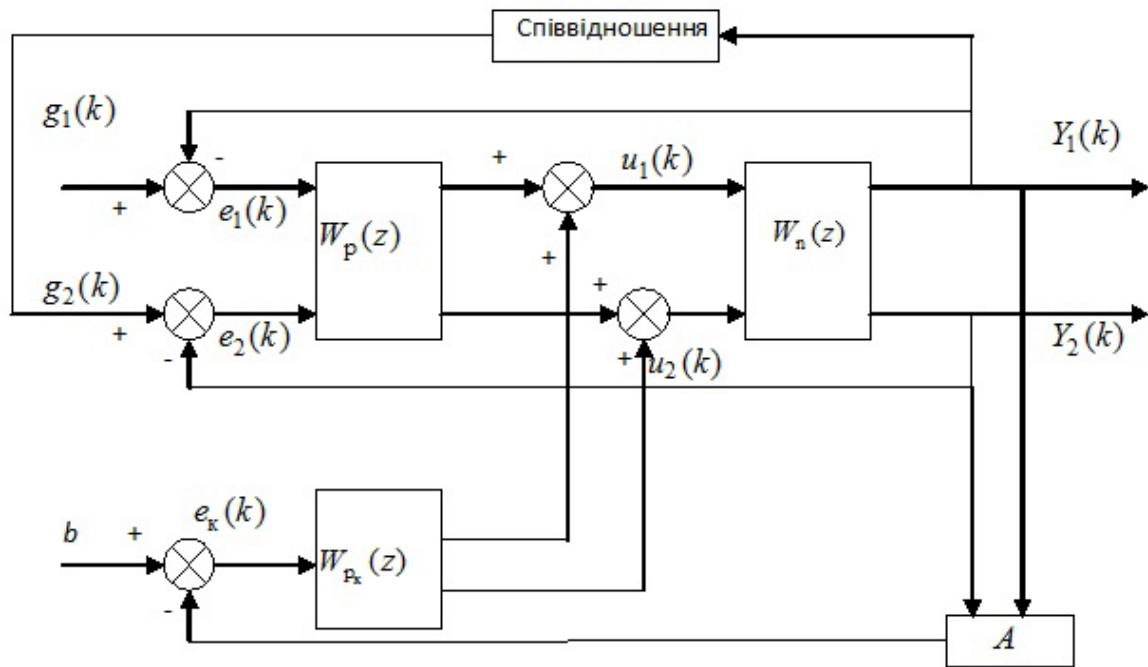


Рис. 5.6. Схема двовимірного комбінованого контура керування

а) Нехай першою задавальною дією $g_1(k)$ є синусоїдальний сигнал, а друга задавальна дія формується згідно із другою схемою координації, тобто на основі співвідношення $g_2(k) = \frac{[Y_1(k) - 1]}{2}$.

На рис. 5.7 показано графіки ведучої координати $Y_1(k)$ та її задавальної дії $g_1(k)$, а на рис. 5.8 подано графіки веденої координати $Y_2(k)$ та її задавальної дії $g_2(k)$. На рис. 5.9 показано похибку співвідношення

$$e_k(k) = 1 - Y_1(k) + Y_2(k).$$

Щоб переконатись у доцільності запропонованого додаткового контура координації, на рис. 5.10–5.12 показано результати моделювання для тієї ж системи, але без додаткового контура координації.

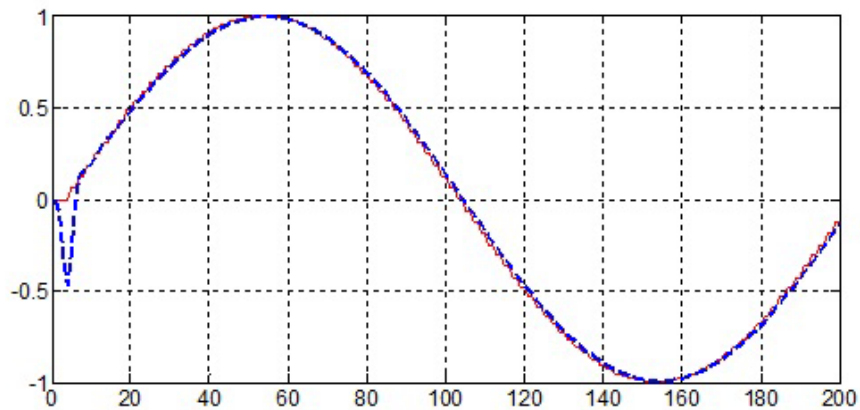


Рис. 5.7. Результати моделювання (неперервна лінія – задавальна дія $g_1(k)$ й пунктир – вихідна координата) для першого каналу $Y_1(k)$ за наявності контура координації

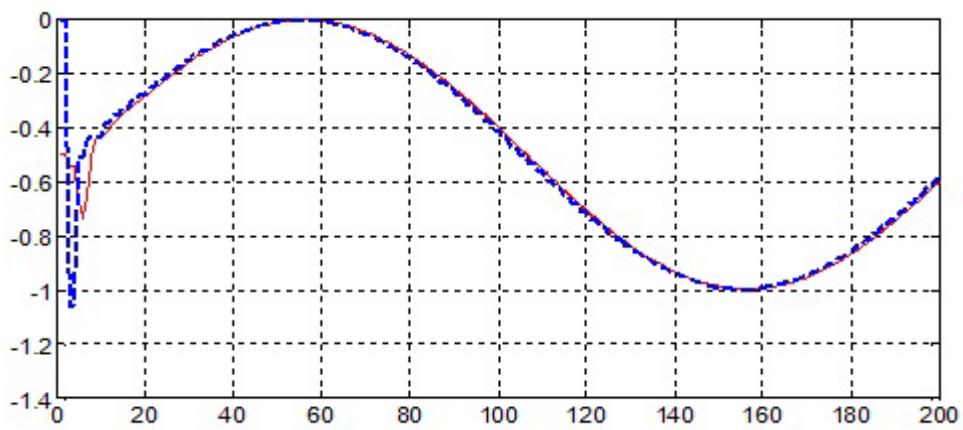


Рис. 5.8. Результати моделювання (неперервна лінія – задавальна дія $g_2(k)$ й пунктир – вихідна координата) для першого каналу $Y_2(k)$ за наявності контура координації

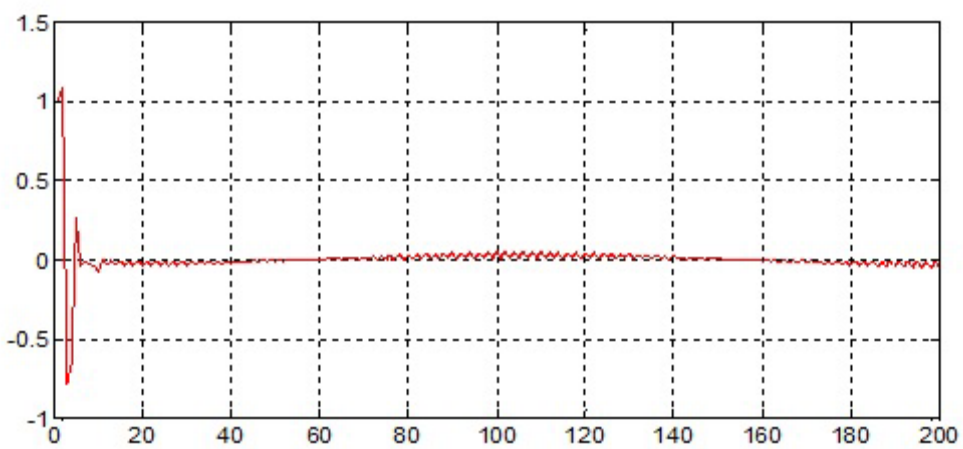


Рис. 5.9. Результати моделювання: графік похибки співвідношення $e_k(k)$ за наявності контура координації

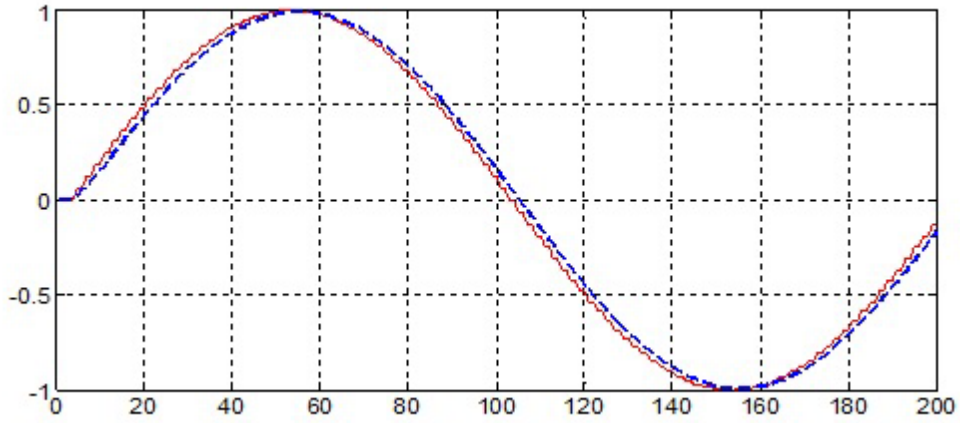


Рис. 5.10. Результати моделювання (неперервна лінія – задавальна дія, пунктир – вихідна координата) для першого каналу без координації

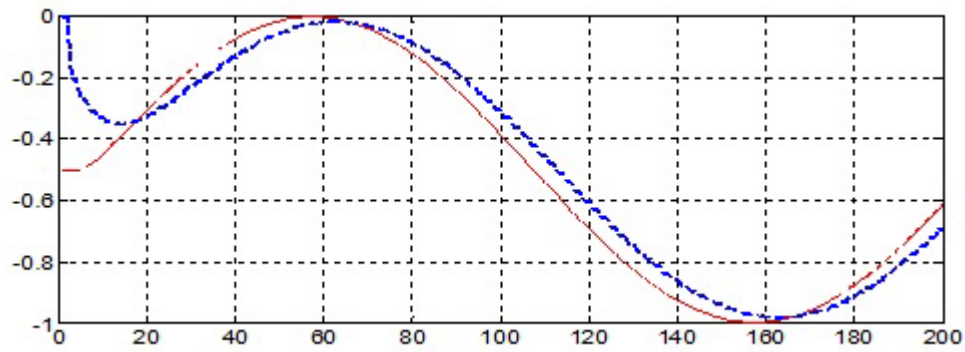


Рис. 5.11. Результати моделювання (неперервна лінія – задавальна дія, пунктир – вихідна координата) для другого каналу без координації

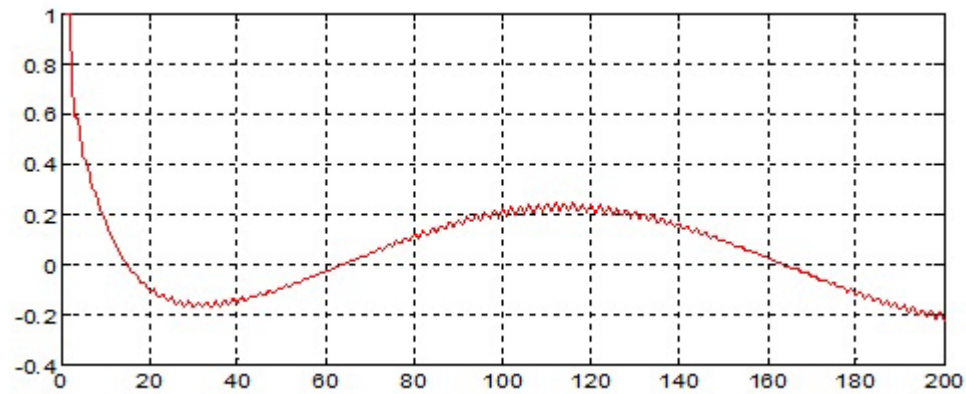


Рис. 5.12. Результати моделювання: графік похибки співвідношення без координації

На рис. 5.12 зображено графік похибки співвідношення $e_k(kT_0) = 1 - Y_1(kT_0) + 2Y_2(kT_0)$ без контура координації.

З отриманих результатів випливає, що контур координації значно зменшує похибку співвідношення (приблизно у 10 разів). Окрім того виявляється, що якість слідування не тільки не погіршується, а навіть покращується, оскільки задавальні дії задовільняють співвідношення, і тому задачі слідування в координації не суперечать, а доповнюють одна одну.

5.2. Координація керування повільними та швидкими рухами у системах, що неявно функціонують у двох масштабах часу

5.2.1. Декомпозиція моделі складної системи у просторі стану в неперервному часі на повільно діючу та швидкодіючу підсистеми

Складні системи різної природи мають неявно виражену властивість функціонування в декількох масштабах часу. Це проявляється в тому, що в системі відбуваються дуже швидкодіючі, швидкодіючі, повільно діючі й дуже повільно діючі процеси, які пов'язані між собою. Якщо припустити, що математична модель системи у просторі стану є лінійною, то цю модель можна поділити на підсистеми, які, відповідно, будуть описувати дуже швидкодіючі, швидкодіючі, повільно діючі та дуже повільно діючі рухи.

Розглянемо систему, яка має неявно виражену властивість функціонувати у двох масштабах часу, тобто в системі функціонують швидкодіючі і повільно діючі процеси, які пов'язані між собою. Динаміка таких систем може бути описана у просторі стану сингулярно збуреними рівняннями:

$$\dot{\bar{x}}_1(t) = A_{11}\bar{x}_1(t) + A_{12}\bar{x}_2(t) + B_1\bar{u}(t), \quad (5.10)$$

$$\mu\dot{\bar{x}}_2(t) = A_{21}\bar{x}_1(t) + A_{22}\bar{x}_2(t) + B_2\bar{u}(t), \quad (5.11)$$

$$\bar{y}(t) = C_1\bar{x}_1(t) + C_2\bar{x}_2(t), \quad (5.12)$$

де $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{u}, \bar{y}$ – векторні змінні стану, керування та вимірювання відповідно;

μ – малий скалярний параметр;

A_{22} – невідроджена матриця із власними значеннями в лівій комплексній півплощині.

Система (5.10)–(5.12) функціонує у двох масштабах часу. При цьому припускається, що з вектором змінних стану $\bar{x}_1(t)$ пов'язані повільні рухи в системі, а з $\bar{x}_2(t)$ – швидкі рухи.

Декомпозиція моделі системи на повільно діючу і швидкодіючу підсистеми починається з рівняння (5.11). Припустимо, що $\mu \rightarrow 0$. Тоді динаміка, описана рівнянням (5.11), переходить у квазіусталений стан

$$0 = A_{21}\bar{\bar{x}}_1(t) + A_{22}\bar{\bar{x}}_2(t) + B_2\bar{\bar{u}}(t), \quad (5.13)$$

звідки можна знайти квазіусталене значення вектора $\bar{\bar{x}}_2$:

$$\bar{\bar{x}}_2(t) = -A_{22}^{-1} [A_{21}\bar{\bar{x}}_1(t) + B_2\bar{\bar{u}}(t)]. \quad (5.14)$$

Запишемо рівняння (5.10), (5.12) у квазіусталеному стані та підставимо у них значення $\bar{\bar{x}}_2$. У результаті отримаємо опис повільно діючої підсистеми:

$$\dot{\bar{x}}_s(t) = A_s\bar{x}_s(t) + B_s\bar{u}_s(t), \quad (5.15)$$

$$\bar{Y}_s(t) = C_s\bar{x}_s(t) + D_s\bar{u}_s(t), \quad (5.16)$$

де

$$A_s = A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21};$$

$$B_s = B_1 - A_{12}A_{22}^{-1}B_2;$$

$$C_s = C_1 - C_2A_{22}^{-1}A_{21};$$

$$D_s = -C_2A_{22}^{-1}B_2;$$

$$\bar{x}_s = \bar{\bar{x}}_1; \quad \bar{u}_s = \bar{\bar{u}}; \quad \bar{Y}_s = \bar{\bar{Y}}.$$

Додатково припустимо, що власні значення матриці A_s лежать у лівій комплексній півплощині.

Щоб отримати опис швидкодіючої підсистеми з моделі (5.10), (5.12), припустимо, що повільно діючі змінні стану $\bar{x}_s(t) = \bar{\bar{x}}_1(t)$ не змінюються під час перехідних процесів швидких змінних $\bar{x}_2(t)$. Тоді, віднімаючи від рівняння (5.11) його складові у квазіусталеному стані за умови, що похідна від квазіусталених складових швидкодіючих змінних $\dot{\bar{\bar{x}}}_2(t) = 0$, отримаємо

$$\mu\dot{\bar{x}}_f(t) = A_{22}\bar{x}_f(t) + B_2\bar{u}_f(t), \quad (5.17)$$

де

$$\bar{x}_f(t) = \bar{x}_2(t) - \bar{\bar{x}}_2(t);$$

$$\bar{u}_f(t) = \bar{u}(t) - \bar{\bar{u}}_2(t).$$

Отже, $\bar{x}_f(t)$ і $\bar{u}_f(t)$ є відхиленнями вектора стану $\bar{x}_2$ і вектора керування $\bar{u}(t)$ від їх усталених значень.

Введемо такі матриці:

$$\tilde{A}_{22} = \frac{A_{22}}{\mu}; \quad \tilde{B}_2 = \frac{B_2}{\mu}. \quad (5.18)$$

Із цих рівностей визначаємо A_{22} і B_2 , які підставляємо в (5.17). Тоді дістанемо рівняння стану швидкодіючої підсистеми:

$$\dot{\bar{x}}_f(t) = \tilde{A}_{22}\bar{x}_f(t) + \tilde{B}_2\bar{u}_f(t). \quad (5.19)$$

Рівняння вимірювання швидкодіючої підсистеми визначаємо відніманням від рівняння (5.12) його складових у квазіусталеному стані:

$$\bar{\bar{y}}(t) = C_1\bar{\bar{x}}_1(t) + C_2\bar{\bar{x}}_2(t)$$

за умови, що протягом швидкодіючих перехідних процесів вектор $\bar{x}_1(t)$ не змінюється. У результаті отримуємо

$$\bar{Y}_f(t) = \bar{Y}(t) - \bar{\bar{Y}}(t) = C_2\bar{x}_f(t). \quad (5.20)$$

5.2.2. Розроблення моделей типу «вхід – вихід» повільно діючої та швидкодіючої підсистем з різномірною дискретизацією

Розглянемо новий метод керування, який дозволяє забезпечити регулювання і координацію усталених станів невимірюваних повільно діючих та швидкодіючих складових вектора вихідних вимірюваних координат у системах, що неявно функціонують у двох масштабах часу. Для цього пропонуємо перейти до моделей типу «вхід – вихід» окремо для повільно діючої і швидкодіючої підсистем [57].

Для підсистем (5.15), (5.16) та (5.19), (5.20) визначимо матричні передатні функції по каналах « $\bar{U}_s(t) \rightarrow \bar{Y}_s(t)$ », « $\bar{U}_f(t) \rightarrow \bar{Y}_f(t)$ » за нульових початкових умов:

$$W_s(p) = C_s(pI - A_s)^{-1}B_s + D_s, \quad (5.21)$$

$$W_f(p) = C_2(pI - \tilde{A}_{22})^{-1}\tilde{B}_2, \quad (5.22)$$

де p – оператор Лапласа.

Для подальшого проектування дискретних регуляторів визначимо МДПФ зведених неперервних частин (ЗНЧ) повільно діючої та швидко-

дійної підсистем. За обраного періоду дискретизації T_0 МДПФ ЗНЧ швидкодійної підсистеми визначимо так:

$$W_{п_f}(z) = \frac{(z-1)}{z} Z \left\{ \frac{W_f(p)}{p} \right\} = \frac{(z-1)}{z} Z \left\{ \frac{C_2(pI - \tilde{A}_{22})^{-1} B_2}{p} \right\}, \quad (5.23)$$

де z – операція z -перетворення із періодом дискретизації T_0 .

Для передатної функції повільно діючої підсистеми (5.21) оберемо довший період дискретизації $h = mT_0$, $m > 1$, де m – ціле число.

Матричні дискретні передатні функції ЗНЧ повільно діючої підсистеми визначимо таким чином:

$$W_{п_s}(z) = \frac{(z_1-1)}{z_1} Z_1 \left\{ \frac{W_s(p)}{p} \right\} = \frac{(z_1-1)}{z_1} Z_1 \left\{ \frac{C_s(pI - A_s)^{-1} B_s + D_s}{p} \right\}, \quad (5.24)$$

де Z_1 – операція z -перетворення з періодом дискретизації $h = mT_0$, а оператор $z_1 = e^{ph} = z^m$.

5.2.3. Проектування системи регулювання та координації повільних і швидких рухів

Проектування повільно діючого та швидкодійного дискретних регуляторів для дискретних підсистем відповідно до (5.24) і (5.23) виконують за методом прямого синтезу (5.5). При цьому бажані матричні дискретні передатні функції (еталонні моделі) замкнених підсистем $W_{3_s}(z_1)$ і $W_{3_f}(z)$ обирають таким чином, щоб забезпечити аперіодичні перехідні процеси у повільно діючій та швидкодійній замкнених підсистемах з поданням на задавальні дії регуляторів ступінчатих збурень протягом періодів дискретизації h і T_0 . Для цього бажану матричну дискретну передатну функцію повільно діючої замкненої підсистеми керування подамо у формі діагональної матриці $W_{3_s}(z_1)$ з елементами

$$W_{3_{sii}}(z_1) = \frac{Y_{s_i}(z_1)}{G_{s_i}(z_1)} = \frac{(1 - e^{-(h/T_s)}) z_1^{-1}}{1 - e^{-(h/T_s)} z_1^{-1}}, \quad i = 1, \dots, n_1, \quad (5.25)$$

де n_1 – розмірність вектора Y , а T_s – стала часу повільно діючої підсистеми.

Бажану матричну дискретну передатну функцію замкненої швидкокодійної підсистеми керування $W_{3_f}(z)$ також обираємо діагональною з елементами

$$W_{3_{si}}(z_1) = \frac{Y_{f_i}(z_1)}{G_{f_i}(z_1)} = \frac{(1 - e^{-T_0/T_f})z_1^{-1}}{1 - e^{-T_0/T_f}z_1^{-1}}, i = 1, \dots, n_1, \quad (5.26)$$

де T_f – стала часу швидкокодійної замкненої підсистеми керування. Слід обирати T_s і T_f таки чином, щоб синтезована замкнена система керування (відносно змінних стану $\bar{x}_1(t)$, $\bar{x}_2(t)$) зберігала властивість функціонування у двох масштабах часу. Зокрема, потрібно, щоб виконувалась умова $T_s > T_f$.

Під час розробки неперервних моделей типу «вхід – вихід» (5.21), (5.22) і їх дискретних реалізацій (5.23), (5.24) припускалось, що $\dim \bar{u} = \dim \bar{Y}$, тобто матричні дискретні передатні функції $W_{\pi_s}(z)$ і $W_{\pi_f}(z)$ будуть квадратними.

За умови, що вони невиврожені, за методом прямого синтезу (за аналогією з перетвореннями (5.4), (5.5)) розраховуємо матричні дискретні передатні функції регуляторів

$$W_{p_s}(z_1) = W_{\pi_s}^{-1}(z_1) \left[I - W_{3_s}(z_1) \right]^{-1} W_{3_s}(z_1), \quad (5.27)$$

$$W_{p_f}(z) = W_{\pi_f}^{-1}(z) \left[I - W_{3_f}(z) \right]^{-1} W_{3_f}(z). \quad (5.28)$$

У загальному випадку, коли $\dim \bar{u} \neq \dim \bar{Y}$, обираємо опорні матриці R_s, R_f розмірністю $n \times r$, $\dim \bar{u} = r$, таким чином, щоб матриці $W_{\pi_s}(z_1)R_s$ і $W_{\pi_f}(z)R_f$ були невивроженими. Тоді, також за аналогією з (2.5), передатні функції дискретних регуляторів можна синтезувати таким чином:

$$W_{p_s}(z_1) = R_s \left[W_{\pi_s}(z_1)R_s \right]^{-1} \left[I - W_{3_s}(z_1) \right]^{-1} W_{3_s}(z_1);$$

$$W_{p_f}(z) = R_f \left[W_{\pi_f}(z)R_f \right]^{-1} \left[I - W_{3_f}(z) \right]^{-1} W_{3_f}(z).$$

Отже, вектори керування повільно діючої та швидкокодійної підсистем будемо обчислювати так:

$$\bar{U}_s(z_1) = W_{p_s}(z_1)\bar{e}_s(z_1) = W_{p_s}(z_1)[\bar{G}_s(z_1) - \bar{Y}_s(z_1)], \quad (5.29)$$

$$\bar{U}_f(z) = W_{p_f}(z)\bar{e}_f(z) = W_{p_f}(z)[\bar{G}_f(z) - \bar{Y}_f(z)], \quad (5.30)$$

де $\bar{G}_s, \bar{G}_f$ – задавальні дії для координат $\bar{Y}_s$ і $\bar{Y}_f$, а $\bar{e}_s$ і $\bar{e}_f$ – помилки регулювання повільно діючої та швидкодіючої підсистем.

У часовій області вектора керування $\bar{U}_s(z_1)$ відповідає вектор $\bar{U}_s\left[\left[\frac{k}{m}\right]h\right]$, де $\left[\frac{k}{m}\right]$ – ціла частина від ділення номера дискретного відліку k на m за $h = mT_0$. Вектору керування $\bar{U}_f(z)$ швидкодіючої підсистеми в часовій області відповідає $\bar{U}_f(kT_0)$.

Складений вектор керування, який подається на систему (5.10)–(5.12), формується підсумовуванням повільно діючого та швидкодіючого векторів керування:

$$\bar{U}\left[\left[\frac{k}{m}\right]h + iT_0\right] = \bar{U}_s\left[\left[\frac{k}{m}\right]h\right] + \bar{U}_f\left[\left[\frac{k}{m}\right]h + iT_0\right], \quad (5.31)$$

$$i = 0, 1, \dots, m-1.$$

Закони керування (5.29), (5.30) регулюють усталені вихідні координати $\bar{Y}_s(z_1)$ і $\bar{Y}_f(z)$ на рівнях задавальних дій $\bar{G}_s$ і $\bar{G}_f$, тому можна досягти виконання деякого заданого співвідношення між вихідними векторами $\bar{Y}_s$ і $\bar{Y}_f$, тобто координувати співвідношення повільних і швидких рухів у системі (5.10) – (5.12). Наприклад, якщо потрібно, щоб дотримувалося певне співвідношення $\bar{Y}_f = f(\bar{Y}_s)$, де f – відома вектор-функція, то достатньо задавати $\bar{G}_f = f(\bar{G}_s)$, або $\bar{G}_f = f(\bar{Y}_s)$ і закони керування (5.29), (5.30) забезпечать у статиці потрібне співвідношення.

Для реалізації законів керування (5.29), (5.30) потрібна інформація про повільнозмінні $\bar{Y}_s$ і швидкозмінні $\bar{Y}_f$ складові вектора вихідних вимірювань $\bar{Y}$, які технічно невимірювані. Вектори $\bar{Y}_s$ і $\bar{Y}_f$ є результатом математичного розкладу єдиного процесу (5.10)–(5.12) на підсистеми (5.15), (5.16) й (5.19), (5.20). Тому складові $\bar{Y}_s$ і $\bar{Y}_f$ потрібно оцінювати на основі вимірювання вектора вихідних координат $\bar{Y}$ й оцінювання векторів $\hat{x}_s$ і $\hat{x}_f$ за допомогою спостерігача Люенбергера. Для проєктування

спостерігача модель швидкодіючої підсистеми (5.19), (5.20) переводять у дискретну форму:

$$\bar{x}_f[(k+1)T_0] = F_f \bar{x}_f(kT_0) + H_f U_f(kT_0), \quad (5.32)$$

$$\bar{Y}_f(kT_0) = C_2 \bar{x}_f(kT_0), \quad (5.33)$$

де $F_f = e^{\tilde{A}_{22}T_0}$;

$$H_f = \tilde{A}_{22}^{-1}(F_f - I)\tilde{B}_2 = A_{22}^{-1}(F_f - I)B_2.$$

Тоді на кожному малому періоді дискретизації T_0 можна оцінювати швидкозмінний вектор стану на основі спостерігача стану Люенбергера

$$\begin{aligned} \hat{x}_f[kT_0|(k-1)T_0] &= F_f \hat{x}_f[(k-1)T_0|(k-2)T_0] + H_f \bar{U}_f[(k-1)T_0] + \\ &+ L_f \left\{ \hat{Y}_f[(k-1)T_0] - C_2 \hat{x}_f[(k-1)T_0|(k-2)T_0] \right\}, \end{aligned} \quad (5.34)$$

де матрицю L_f обирають на основі бажаного розміщення власних значень матриці $(F_f - L_f C_2)$ всередині круга одиничного радіуса, тобто за модулем вони мають бути менші за одиницю.

Щоб оцінити $\hat{Y}_f(kT_0)$ і $\hat{Y}_s\left[\left[\frac{k}{m}\right]h\right]$, які потрібні для реалізації законів керування (5.29), (5.30), пропонуємо таку рекурентну процедуру:

а) оцінювання вектора стану $\hat{x}_f(kT_0)$ на кожному періоді дискретизації T_0 на основі спостерігача (5.34);

б) обчислення оцінки $\hat{Y}_f(kT_0) = \bar{Y}(kT_0) - \hat{Y}_s\left[\left[\frac{k}{m}\right]h\right]$ за k , некрatного m ;

в) обчислення оцінки $\hat{Y}_f\left[\left[\frac{k}{m}\right]h\right] = C_2 \hat{x}_f\left[\left[\frac{k}{m}\right]h\right]$ за відліку k , кратного m ;

г) обчислення оцінки повільно змінної складової вектора вихідних вимірювань:

$$\begin{aligned} \hat{Y}_s\left[\left[\frac{k}{m}\right]h\right] &= \bar{Y}\left[\left[\frac{k}{m}\right]h\right] - \hat{Y}_f\left[\left[\frac{k}{m}\right]h\right] = \\ &= \bar{Y}\left[\left[\frac{k}{m}\right]h\right] - C_2 \hat{x}_f\left[\left[\frac{k}{m}\right]h\right]. \end{aligned}$$

5.2.4. Синтез і моделювання двовимірної системи керування з координацією повільних і швидких рухів

Розглянемо приклад двовимірної системи, що функціонує у двох масштабах часу:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= A_{11}x_1(t) + A_{12}x_2(t) + B_1u(t), \\ \mu\dot{x}_2(t) &= A_{21}x_1(t) + A_{22}x_2(t) + B_2u(t), \\ y(t) &= x_1(t) + x_2(t),\end{aligned}\tag{5.35}$$

де $A_{11} = -0,1$; $A_{12} = -0,05$; $A_{21} = -0,001$; $A_{22} = -0,005$; $B_1 = 0,1$; $B_2 = 0,005$; $\mu = 0,01$.

Для моделювання переведемо модель (5.35) у дискретну форму з періодом дискретизації $T_0 = 0,1$:

$$\begin{aligned}\bar{x}[(k+1)T_0] &= F\bar{x}(kT_0) + Hu(kT_0), \\ y(kT_0) &= x_1(kT_0) + x_2(kT_0),\end{aligned}\tag{5.36}$$

де

$$\begin{aligned}\bar{x} &= (x_1 \quad x_2)^T; \\ F &= e^{AT_0}; \\ A &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix}; \\ \tilde{A}_{21} &= \frac{A_{21}}{\mu} = 0,1; \\ \tilde{A}_{22} &= \frac{A_{22}}{\mu} = -0,5; \\ \tilde{B}_2 &= \frac{B_2}{\mu} = 0,5; \\ H &= A^{-1}(F - I) \begin{bmatrix} B_1 \\ \tilde{B}_2 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Щоб переконатися, що система має неявну властивість функціонування у двох масштабах часу, подамо на вхід U одиничне ступінчате збурення. З рис. 5.13 видно, що змінна x_1 приблизно у п'ять разів повільніша, ніж x_2 .

Згідно з методикою (5.15), (5.16) та (5.19), (5.20) виконаємо декомпозицію моделі (5.35) на повільно діючу і швидкодіючу підсистеми:

$$\begin{aligned}\dot{x}_s(t) &= A_s x_s(t) + B_s U_s(t), \\ Y_s(t) &= C_s x_s(t) + D_s U_s(t),\end{aligned}\tag{5.37}$$

$$\dot{x}_f(t) = \tilde{A}_{22}x_f(t) + \tilde{B}_2U_f(t), \quad (5.38)$$

$$Y_f(t) = x_f(t),$$

де

$$A_s = A_{11} - \frac{A_{12} A_{21}}{A_{22}};$$

$$B_s = B_1 - \frac{A_{12} B_2}{A_{22}};$$

$$C_s = 1 - \frac{A_{21}}{A_{22}};$$

$$D_s = -\frac{B_2}{A_{22}}.$$

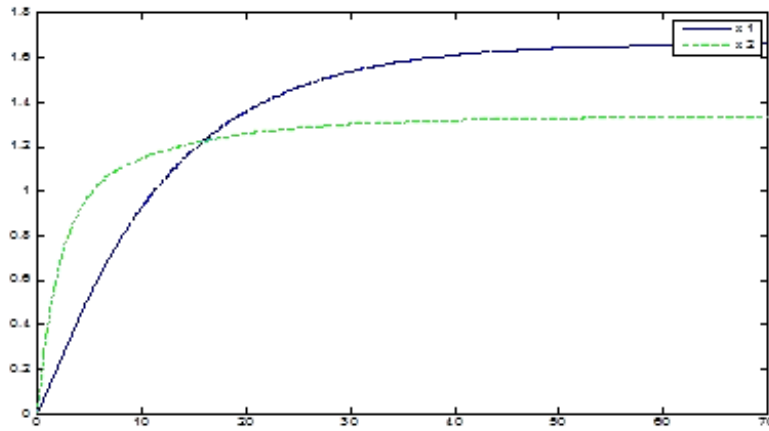


Рис. 5.13. Динаміка змінних стану в моделі (5.36)

Згідно з (5.21), (5.22) отримаємо передатні функції

$$W_s(p) = \frac{C_s B_s}{p - A_s} + D_s; \quad (5.39)$$

$$W_f(p) = \frac{\tilde{B}_2}{p - \tilde{A}_{22}}$$

і знайдемо дискретну передатну функцію швидкодіючої підсистеми:

$$\begin{aligned} W_{n_f} &= \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{W_f(p)}{p} \right\} = \frac{z-1}{z} Z \left\{ \frac{\tilde{B}_2}{p(p - \tilde{A}_{22})} \right\} = \\ &= -\frac{(z-1)\tilde{B}_2}{\tilde{A}_{22}z} Z \left\{ \frac{-\tilde{A}_{22}}{p(p - \tilde{A}_{22})} \right\} = \frac{(z-1)\tilde{B}_2(1 - e^{\tilde{A}_{22}T_0})}{\tilde{A}_{22}z(z-1)(z - e^{\tilde{A}_{22}T_0})} = \\ &= -\frac{\tilde{B}_2(1 - e^{\tilde{A}_{22}T_0})}{\tilde{A}_{22}(z - e^{\tilde{A}_{22}T_0})} = -\frac{B_2(1 - e^{\tilde{A}_{22}T_0})z^{-1}}{A_{22}(1 - e^{\tilde{A}_{22}T_0}z^{-1})}, \end{aligned}$$

де

$$z^{-1} = e^{-pT_0}.$$

Оберемо великий період дискретизації $h = 5$, $T_0 = 0,5$ й обчислимо дискретну передатну функцію повільно діючої підсистеми:

$$\begin{aligned} W_{n_s} &= \frac{z_1 - 1}{z_1} Z_1 \left\{ \frac{W_s(p)}{p} \right\} = \frac{z_1 - 1}{z_1} Z_1 \left\{ \frac{C_s B_s + D_s(p - A_s)}{p(p - A_s)} \right\} = \\ &= \frac{z_1 - 1}{z_1} \left[Z_1 \left\{ \frac{D_s}{p - A_s} \right\} + Z_1 \left\{ \frac{C_s B_s - D_s A_s}{p(p - A_s)} \right\} \right] = \frac{(z_1 - 1)}{z_1} \frac{D_s z_1}{(z_1 - e^{A_s h})} - \\ &\quad - \frac{(z_1 - 1)}{z_1} \frac{(C_s B_s - D_s A_s)}{A_s} \frac{(1 - e^{A_s h}) z_1}{(z_1 - 1)(z_1 - e^{A_s h})}. \end{aligned}$$

Після ряду елементарних перетворень отримаємо

$$W_{n_s}(z_1) = \frac{D_s + P_s z_1^{-1}}{1 - e^{A_s h} z_1^{-1}},$$

де

$$z_1^{-1} = e^{-ph};$$

$$P_s = \frac{C_s B_s}{A_s} (e^{A_s h} - 1) - D_s e^{A_s h}.$$

Отже,

$$W_{n_s}(z_1) = \frac{D_s + P_s z_1^{-1}}{1 - e^{A_s h} z_1^{-1}}, \quad (5.40)$$

$$W_{n_f}(z) = -\frac{B_2(1 - e^{\tilde{A}_{22} T_0}) z^{-1}}{A_{22}(1 - e^{\tilde{A}_{22} T_0} z^{-1})}.$$

Оберемо бажані передатні функції замкнених систем (еталонні моделі):

$$W_{3_s}(p) = \frac{1}{T_s p + 1} = \frac{\lambda_s}{p + \lambda_s}, \quad (5.41)$$

$$W_{3_f}(p) = \frac{1}{T_f p + 1} = \frac{\lambda_f}{p + \lambda_f},$$

де $\lambda_s = \frac{1}{T_s} = 0,2$; $\lambda_f = \frac{1}{T_f} = 1$.

У дискретній формі з періодами дискретизації h та T_0 еталонні моделі (5.41) будуть мати вигляд, відповідно, (5.25) і (5.26), тобто

$$\begin{aligned} W_{3_s}(z_1) &= \frac{(1 - e^{-(h/T_s)}) z_1^{-1}}{1 - e^{-(h/T_s)} z_1^{-1}} = \frac{(1 - e^{-\lambda_s h}) z_1^{-1}}{(1 - e^{-\lambda_s h} z_1^{-1})}, \\ W_{3_f}(z) &= \frac{(1 - e^{-(T_0/T_f)}) z_1^{-1}}{1 - e^{-(T_0/T_f)} z_1^{-1}} = \frac{(1 - e^{-\lambda_f T_0}) z_1^{-1}}{1 - e^{-\lambda_f T_0} z_1^{-1}}. \end{aligned} \quad (5.42)$$

Підставимо (5.40) й (5.42) у формули дискретних передатних функцій регуляторів (5.27) і (5.28). Тоді після перетворень будемо мати такі дискретні передатні функції регуляторів для повільно діючої та швидкодіючої підсистем:

$$W_{p_s}(z_1) = \frac{(1 - e^{A_s h} z_1^{-1})(1 - e^{-\lambda_s h}) z_1^{-1}}{(D_s + P_s z_1^{-1})(1 - z_1^{-1})} = \frac{(1 - e^{A_s h} z_1^{-1})(z_1^{-1} - e^{-\lambda_s h} z_1^{-2})}{D_s + (P_s - D_s) z_1^{-1} - P_s z_1^{-2}}, \quad (5.43)$$

$$W_{p_f}(z) = \frac{A_{22}(1 - e^{-\lambda_f T_0})(1 - e^{-\tilde{A}_{22} T_0} z^{-1})}{B_2(1 - e^{-\tilde{A}_{22} T_0})(1 - z^{-1})}. \quad (5.44)$$

Беручи до уваги, що z^{-1} і z_1^{-1} – оператори зворотного зсуву на один період дискретизації T_0 і h відповідно, на основі (5.29) і (5.43) можна записати закон керування повільно діючого регулятора:

$$U_s(rh) = (1 - \frac{P_s}{D_s})U_s((r-1)h) + \frac{P_s}{D_s}U_s((r-2)h) + \\ + (1 - e^{-\lambda_s h})e_s((r-1)h) - e^{A_s h}e_s((r-2)h), \quad (5.45)$$

$$\text{де } m = \frac{h}{T_0}, \quad r = \left\lceil \frac{k}{m} \right\rceil.$$

На основі (5.30) і (5.44) запишемо закон керування швидкодіючого регулятора:

$$U_f(kT_0) = \\ = U_f((k-1)T_0) - \frac{A_{22}(1 - e^{-\lambda_f T_0})}{B_2(1 - e^{-\tilde{A}_{22} T_0})}[e_f(kT_0) - e^{-\tilde{A}_{22} T_0}((k-1)T_0)]. \quad (5.46)$$

Для обчислення помилок керування

$$e_s(rh) = G_s(rh) - Y_s(rh), \\ e_f(kT_0) = G_f(kT_0) - Y_f(kT_0) \quad (5.47)$$

треба оцінювати повільнозмінну $Y_s(rh)$ і швидкозмінну $Y_f(kT_0)$ складові у вимірюваній вихідній координаті $Y[rh + iT_0]$, де $i = 0, 1, \dots, (m-1)$, а $r = \left\lceil \frac{k}{m} \right\rceil$. У законах керування (5.45) і (5.46) та в (5.47) $\hat{Y}_s(rh)$ і $\hat{Y}_f(kT_0)$ оцінюють за допомогою спостерігача стану (5.34) та рекурентної

процедури (а) – (г) у підрозд. 5.2.3. При цьому $C_2 = 1$; $F_f = e^{\tilde{A}_{22}T_0}$;

$$H_f = \frac{(F_f - 1)B_2}{A_{22}}; \quad L_f = 0,1.$$

Нехай потрібно, щоб виконувалось співвідношення

$$Y_f(kT_0) = \frac{Y_s(rh)}{10}.$$

Для прикладу призначимо задавальну дію $G_s = 5$. Щоб визначити задавальну дію G_f , є два варіанти або можливості:

а) $G_f = \frac{G_s}{10} = 0,5$ (варіант 1);

б) $G_f = \frac{Y_s(rh)}{10}$ (варіант 2).

На рис. 5.14 – 5.17 показано результати моделювання системи (5.36) під час формування керування $U(kT_0) = U_s(rh) + U_f(kT_0)$, де керуючі дії $U_s(kT_0)$ і $U_f(rh)$ визначають за законами керування (5.45) і (5.46) для обох варіантів. На рис. 5.14, 5.15 показано реальні значення змінних стану і вихідної координати для варіантів 1 і 2 відповідно, а на рис. 5.16, 5.17 – значення для повільно діючої та швидкодіючої складових вихідної координати.

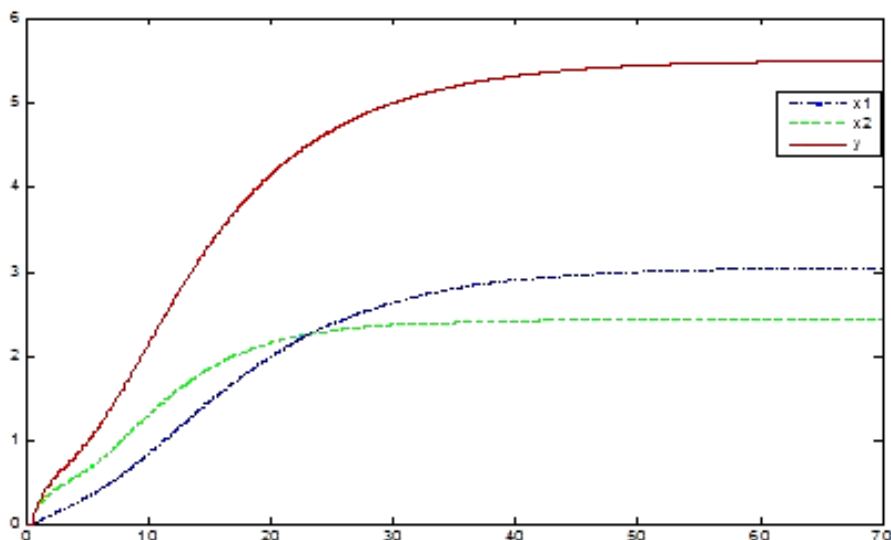


Рис. 5.14. Динаміка системи під час керування відповідно до варіанта 1

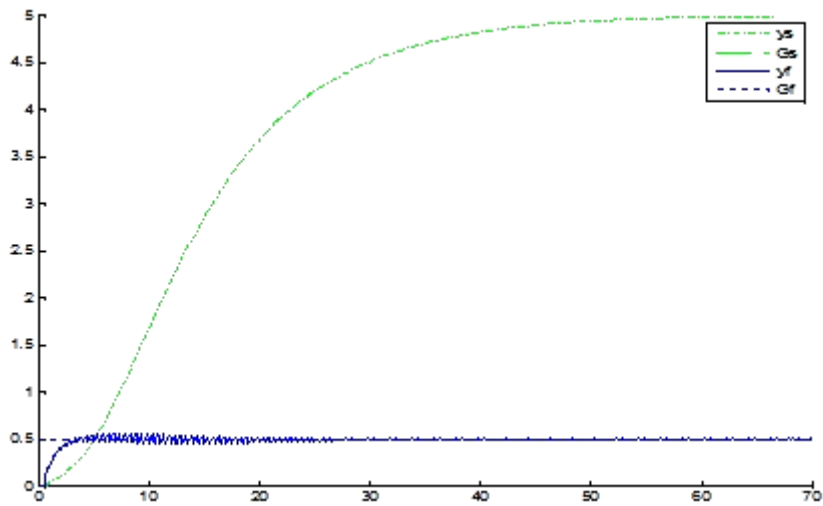


Рис. 5.15. Динаміка повільно діючої та швидкодіючої складових під час керування відповідно до варіанта 1

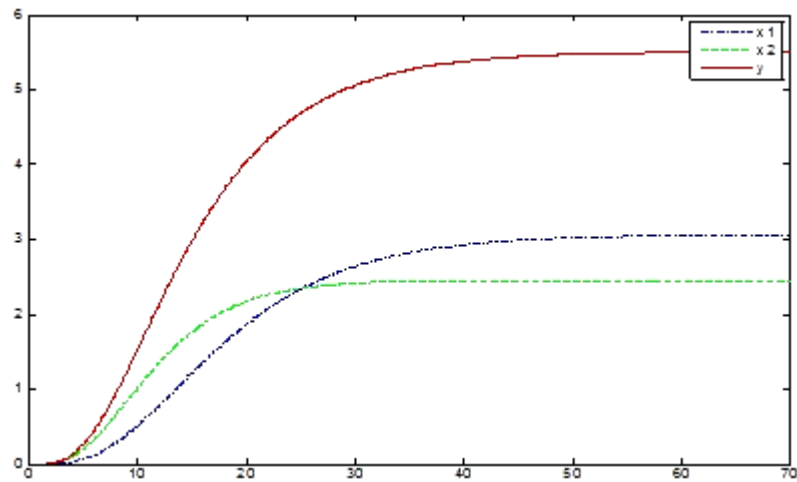


Рис. 5.16. Динаміка системи під час керування відповідно до варіанта 2

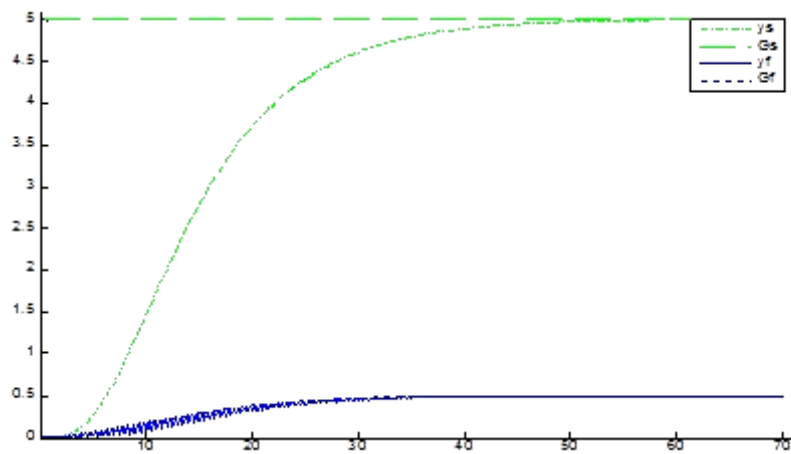


Рис. 5.17. Динаміка повільно діючої та швидкодіючої складових під час керування відповідно до варіанта 2

На основі аналізу рис. 5.15 і 5.17 можна зробити висновок, що задане співвідношення між складовими виходу $Y_f(kT_0) = \frac{Y_s(rh)}{10}$ в обох варіантах виконується із задовільною точністю, тобто система регулювання та координації повільних і швидких рухів дозволяє забезпечити стабілізацію повільних і швидких рухів на заданих рівнях із заданим співвідношенням між ними.

5.3. Координувальне керування співвідношеннями координат вершин взаємодійних когнітивних карт в режимі імпульсних процесів

Розглянемо проблему керування декількома складними системами, які описуються КК. Особливу увагу приділимо питанням координації між цими системами, тобто керуванню співвідношеннями між координатами двох складних систем [48].

У складних системах різної природи (соціальних, економічних, політичних, фінансових, адміністративних, екологічних) виникає необхідність координувати зміну деяких важливих координат, тобто забезпечувати під час перехідних процесів задані співвідношення між окремими координатами вершин у різних КК. Наприклад, треба координувати співвідношення між об'єктом випуску промислової продукції в заданому регіоні, розвиток економіки якого описано в першій КК, із забрудненням навколишнього середовища, яке подано окремою координатою у складі другої КК, в якій відображено екологічну підсистему цього промислового регіону.

Для розв'язання задачі керування співвідношеннями координат взаємодійних КК потрібно розробити математичні моделі взаємодійних складних систем, динаміка яких може бути подана в режимі імпульсних процесів КК, які взаємодіють між собою. При цьому припускаємо, що системи достатньо автономні й для кожної з них було складено окремі когнітивні моделі. Однак між ними існують взаємозв'язки – імпульси в окремих вершинах однієї КК впливають на окремі вершини другої КК. Об'єднати дві різнорідні системи або системи, що функціонують роздільно, в одну суперсистему часто буває недоцільним.

5.3.1. Математичні моделі двох взаємодійних когнітивних карт

Розглянемо динаміку двох КК, які взаємодіють між собою. Імпульсні процеси цих КК можна описати різницевими рівняннями

$$\Delta x_i(k+1) = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \Delta x_j(k) + \sum_{j=1}^p \beta_{ij} \Delta Y_j(k), \quad (5.48)$$

$$\Delta Y_i(k+1) = \sum_{j=1}^p \phi_{ij} \Delta Y_j(k) + \sum_{j=1}^n \psi_{ij} \Delta x_j(k), \quad (5.49)$$

$$i = 1, \dots, p,$$

де координати x_i належать до першої КК, а Y_i – до другої. При цьому $\Delta x_i(k) = x_i(k) - x_i(k-1)$, $\Delta Y_i(k) = Y_i(k) - Y_i(k-1)$ – перші різниці.

Запишемо рівняння (5.48), (5.49) у матричній формі:

$$\Delta \bar{X}(k+1) = W_1 \Delta \bar{X}(k) + V_1 \Delta \bar{Y}(k), \quad (5.50)$$

$$\Delta \bar{Y}(k+1) = W_2 \Delta \bar{Y}(k) + V_2 \Delta \bar{X}(k), \quad (5.51)$$

де $\bar{X}, \bar{Y}$ – вектори координат вершин першої і другої КК відповідно, а W_1, W_2 – їх матриці суміжності. Матриці V_1 і V_2 складаються із коефіцієнтів β_{ij} і ψ_{ij} відповідно, які відображають взаємозв'язки між двома КК.

Введемо позначення:

$$\Delta \bar{v}(k) = V_1 \Delta \bar{Y}(k), \quad (5.52)$$

$$\Delta \bar{\xi}(k) = V_2 \Delta \bar{X}(k). \quad (5.53)$$

Тоді вирази (5.50), (5.51), які описують динаміку імпульсних процесів у просторі стану, будуть мати вигляд

$$\Delta \bar{X}(k+1) = W_1 \Delta \bar{X}(k) + \Delta \bar{v}(k), \quad (5.54)$$

$$\Delta \bar{Y}(k+1) = W_2 \Delta \bar{Y}(k) + \Delta \bar{\xi}(k). \quad (5.55)$$

При цьому вплив імпульсів однієї КК на іншу $V_1 \Delta \bar{Y}(k)$ і $V_2 \Delta \bar{X}(k)$ подані у формі векторів збурень $\Delta \bar{v}(k)$ і $\Delta \bar{\xi}(k)$.

Надалі під час реалізації систем керування робимо припущення, що обидві КК є стійкими (тобто власні значення матриць суміжності W_1 і W_2 будуть за модулем менші від одиниці), а також, що перехресні зв'язки між КК не вносять нестійкість. Для цього введемо додаткову

вимогу, що блочна матриця $\begin{bmatrix} W_1 & V_1 \\ W_2 & V_2 \end{bmatrix}$ має власні значення, які за модулем менші за одиницю.

Вектори $\Delta \bar{v}(k)$ і $\Delta \bar{\xi}(k)$ можна розглядати як вимірювані збурення з нульовим середнім, через які в моделях (5.54), (5.55) і відбувається взаємозв'язок між когнітивними картами.

5.3.2. Розроблення підсистем стабілізації імпульсних процесів взаємодійних когнітивних карт

Моделі імпульсних процесів взаємодійних КК (5.54), (5.55) описують вільний рух координат вершин КК у просторі стану з точки зору сучасної теорії керування.

Припустимо, що на деякі вершини КК (змінні стану $\Delta \bar{X}(k)$, $\Delta \bar{Y}(k)$) ЛПР, може діяти ззовні. Тоді для розроблення системи керування імпульсними процесами КК потрібно моделі (5.54) і (5.55) доповнити зовнішніми впливами у формі векторів приростів змінних керування $\Delta \bar{U}_1(k)$, $\Delta \bar{U}_2(k)$, які діють безпосередньо на вершини КК. У результаті моделі (5.54), (5.55) матимуть вигляд

$$\Delta \bar{X}(k+1) = W_1 \Delta \bar{X}(k) + G_1 \Delta \bar{U}_1(k) + \Delta \bar{v}(k), \quad (5.56)$$

$$\Delta \bar{Y}(k+1) = W_2 \Delta \bar{Y}(k) + G_2 \Delta \bar{U}_2(k) + \Delta \bar{\xi}(k). \quad (5.57)$$

Матриці G_1 , G_2 формує розробник системи керування окремо для кожної КК, і ці матриці, здебільшого, складаються з нулів і одиниць.

Оскільки моделі (5.56), (5.57) по суті являють собою рівняння стану під час дії вимірюваних збурень $\Delta \bar{v}(k)$, $\Delta \bar{\xi}(k)$ з нульовими середніми, то для стабілізації імпульсних процесів КК можна використовувати метод синтезу регуляторів стану на основі квадратичних критеріїв оптимальності у формі узагальнених дисперсій [48]:

$$J_1(k+1) = E\{\Delta \bar{X}^T(k+1)\Delta \bar{X}(k+1) + \Delta \bar{U}_1^T(k+1)R_1\Delta \bar{U}_1(k)\}, \quad (5.58)$$

$$J_2(k+1) = E\{\Delta \bar{Y}^T(k+1)\Delta \bar{Y}(k+1) + \Delta \bar{U}_2^T(k+1)R_2\Delta \bar{U}_2(k)\}, \quad (5.59)$$

де E – оператор математичного сподівання, а R_1 , R_2 – додатно визначені матриці. У результаті мінімізації критеріїв (5.58), (5.59) з використанням (5.56), (5.57) дістанемо

$$\frac{\partial J_1(k+1)}{\partial \Delta U_1(k)} = 2G_1^T [W_1 \Delta \bar{X}(k) + G_1 \Delta \bar{U}_1(k) + \Delta \bar{v}(k)] + 2R_1 \Delta \bar{U}_1(k) = 0,$$

$$\frac{\partial J_2(k+1)}{\partial \Delta U_2(k)} = 2G_2^T [W_2 \Delta \bar{X}(k) + G_2 \Delta \bar{U}_2(k) + \Delta \bar{\xi}(k)] + 2R_2 \Delta \bar{U}_2(k) = 0.$$

Тоді закони керування багатовимірних регуляторів стану з мінімізацією узагальнених дисперсій (5.58), (5.59) для першої та другої КК відповідно будуть мати вигляд

$$\Delta \bar{U}_1(k) = -\left(G_1^T G_1 + R_1\right)^{-1} G_1^T [W_1 \Delta \bar{x}(k) + \Delta \bar{v}(k)], \quad (5.60)$$

$$\Delta \bar{U}_2(k) = -\left(G_2^T G_2 + R_2\right)^{-1} G_2^T [W_2 \Delta \bar{y}(k) + \Delta \bar{\xi}(k)]. \quad (5.61)$$

За допомогою матриць R_1 , R_2 можна регулювати допустимі значення змін приростів векторів керуючих дій $\Delta \bar{U}_1(k)$, $\Delta \bar{U}_2(k)$, що забезпечує їх фізичну реалізацію під час стабілізації імпульсних процесів у КК.

5.3.3. Розроблення системи керування співвідношеннями між координатами вершин когнітивних карт

Співвідношення між координатами вершин першої і другої КК задають у такій формі [48]:

$$S \Delta \bar{X}(k) = f[\Delta \bar{Y}(k)], \quad (5.62)$$

де S – задана матриця розмірністю $s \times n$, де $s < n$; $f: R^p \rightarrow R^s$ – деяка вектор-функція від вектора приростів координат вершин другої КК.

Задача координувального керування полягає в тому, щоб забезпечити максимальну швидкодію виконання системи співвідношень (5.62) під час імпульсного процесу двох взаємодійних КК.

Припустимо, що друга КК функціонує в режимі вільного руху. Тоді синтез регулятора стану для першої КК, яка описується рівнянням (5.56), виконуємо на основі мінімізації такого квадратичного критерію оптимальності:

$$J(k+1) = E \left\{ \left[S \Delta \bar{X}(k+1) - f(\Delta \bar{Y}(k)) \right]^T \left[S \Delta \bar{X}(k+1) - f(\Delta \bar{Y}(k)) \right] + \Delta \bar{U}_1^T(k) R \Delta \bar{U}_1(k) \right\}. \quad (5.63)$$

Застосовуюючи модель (5.56), знаходимо першу похідну від критерію (5.63) за вектором керування і прирівнюємо її до нуля:

$$\frac{\partial J_1(k+1)}{\partial \Delta \bar{U}_1(k)} = 2G_1^T S^T [SW_1 \Delta \bar{X}(k) + SG_1 \Delta \bar{U}_1(k) + S\Delta \bar{v}(k) - f[\Delta \bar{Y}(k)]] + 2R\Delta \bar{U}_1(k) = 0,$$

звідки визначаємо закон координувального керування для досягнення співвідношення (5.62):

$$\Delta \bar{U}_1(k) = -\left(G_1^T S^T SG_1 + R\right)^{-1} G_1^T S^T [SW_1 \Delta \bar{X}(k) - S\Delta \bar{v}(k) - f[\Delta \bar{Y}(k)]] \quad (5.64)$$

Завдяки вибору ненульової матриці R розв'язання задачі мінімізації критерію (5.63) буде однозначним. Оскільки модель імпульсних процесів (5.56), (5.57) записана у приростах змінних, задача координації не суперечить задачі стабілізації, тому що в усталеному стані прирости змінних $\Delta \bar{X}(k)$, $\Delta \bar{Y}(k)$ дорівнюють нулю і співвідношення (5.62) виконується.

5.3.4. Дослідження процедури координувального керування двома когнітивними картами

Розглянемо КК комерційного банку, яка зображена на рис. 2.6 в розд. 2.

Припустимо, що імпульсний процес КК є стійким, а його матриця суміжності має вигляд

$$W = \begin{bmatrix} 0 & 0,15 & 0 & 0 & 0,1 & 0 & 0 \\ -0,2 & 0 & 0,13 & -0,2 & 0,03 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0,75 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0,8 & 0 & -0,5 & 0 \\ 0 & 0,85 & -0,95 & 0,9 & 0 & 0 & -0,7 \\ 0 & -0,5 & 0,3 & 0 & 0 & 0,7 & 0 \\ 0 & 0 & 0,1 & -0,2 & 0,8 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Вершини КК упорядковані таким чином: 1 – регіональна мережа; 2 – капітал; 3 – кредити; 4 – депозити; 5 – ліквідні активи; 6 – міра ризику стабільності; 7 – міра ризику ліквідності.

Маємо два схожі банки (у межах однієї групи банків) з однаковими КК, які мають матриці суміжності $W_1 = W_2 = W$.

Припустимо, що обсяги кредитного та депозитного портфелів взаємопов'язані таким чином, що збільшення портфеля в одному банку приводить до зменшення відповідного портфеля другого банку.

Наприклад, у виразах (5.50), (5.51) маємо

$$V_1 = V_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Легко впевнитися, що власні значення матриці $\begin{bmatrix} W_1 & V_1 \\ V_2 & W_2 \end{bmatrix}$ за модулем менші від одиниці.

Для моделювання припустимо, що початкове значення вектора координат вершин $\bar{X}$ першої КК дорівнюють

$$\bar{X}(0) = [100 \ 500 \ 1500 \ 1200 \ 200 \ 150 \ 250]^T,$$

а початковий імпульс $\Delta \bar{X}(0) = [-2 \ 0 \ -20 \ -18 \ 2 \ 0 \ 0]^T$.

Аналогічно для другої КК початкові значення координат вершин $\bar{Y}$ дорівнюють

$$\bar{Y}(0) = [120 \ 550 \ 1400 \ 1000 \ 240 \ 150 \ 250]^T,$$

а початковий імпульс $\Delta \bar{Y}(0) = [-5 \ 0 \ -25 \ -10 \ 3 \ 0 \ 0]^T$.

На рис. 5.18 показано графіки динамічних процесів повних координат вершин першого банку за відсутності керування під впливом початкових імпульсів.

Розглянемо задачу стабілізації імпульсного процесу першого банку. Другий банк функціонує в режимі вільного руху і за інструкцією ми не можемо на нього впливати.

Припустимо, що в моделі імпульсного процесу (5.56) матриці $G_1 = I$ – одинична квадратна матриця. На основі аналізу керованості (див. підрозд. 1.5.3) можна впевнитися, що імпульсний процес (5.56) є керованим.

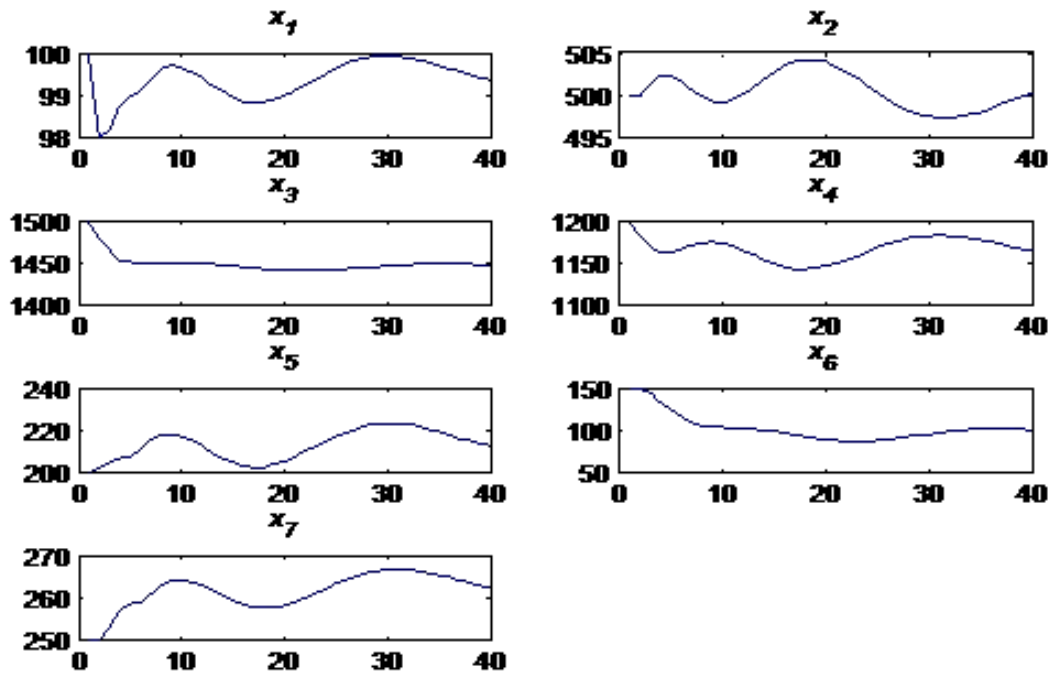


Рис. 5.18. Динаміка координат банку без керування

Оберемо критерій оптимальності (5.58), де вагова матриця $R = I$. За допомогою закону керування (5.60) реалізуємо стабілізацію координат вершин імпульсного процесу, графіки яких показано на рис. 5.19.

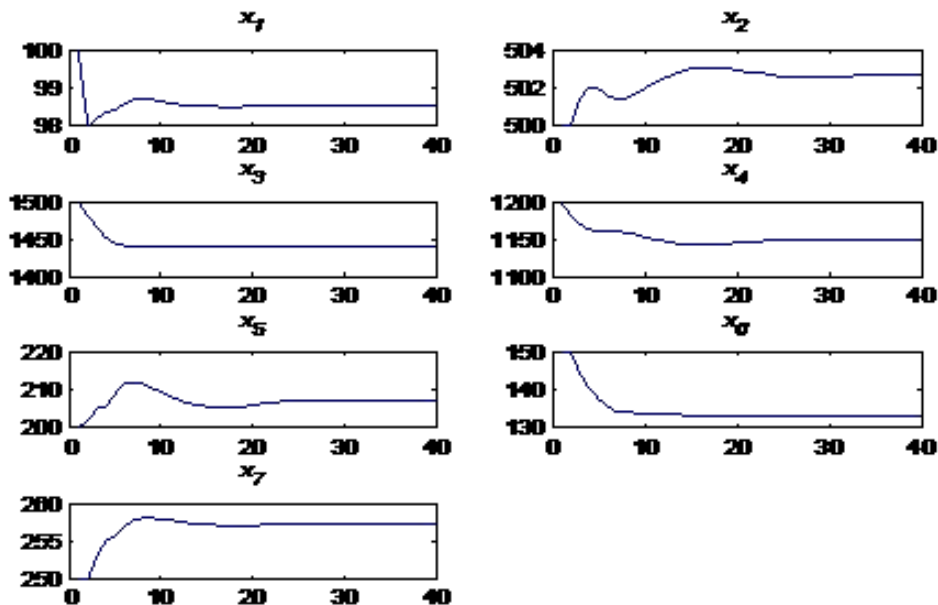


Рис. 5.19. Динаміка координат першого банку під час стабілізації

Розглянемо задачу координації за таких заданих співвідношень координат вершин КК, які мають дотримуватись між двома банками, що входять в одну групу банків:

$$\Delta X_1(k) = \frac{1}{2} \Delta Y_1(k);$$

$$\Delta X_3(k) - \Delta X_4(k) = -\Delta Y_7(k).$$

Ці співвідношення можна подати у формі (5.62) таким чином:

$$S = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$f(\Delta \bar{Y}) = \begin{bmatrix} \Delta Y_1 \\ -\Delta Y_7 \end{bmatrix}.$$

Мета координації у тому, щоб нев'язки співвідношень

$$\bar{e}(k) = f[\Delta \bar{Y}(k)] - S\Delta \bar{X}(k) \quad (5.65)$$

збігалась до нуля.

Динаміку нев'язок співвідношень (5.65) під час стабілізуючого керування (5.60) без координувального керування показано на рис. 5.20.

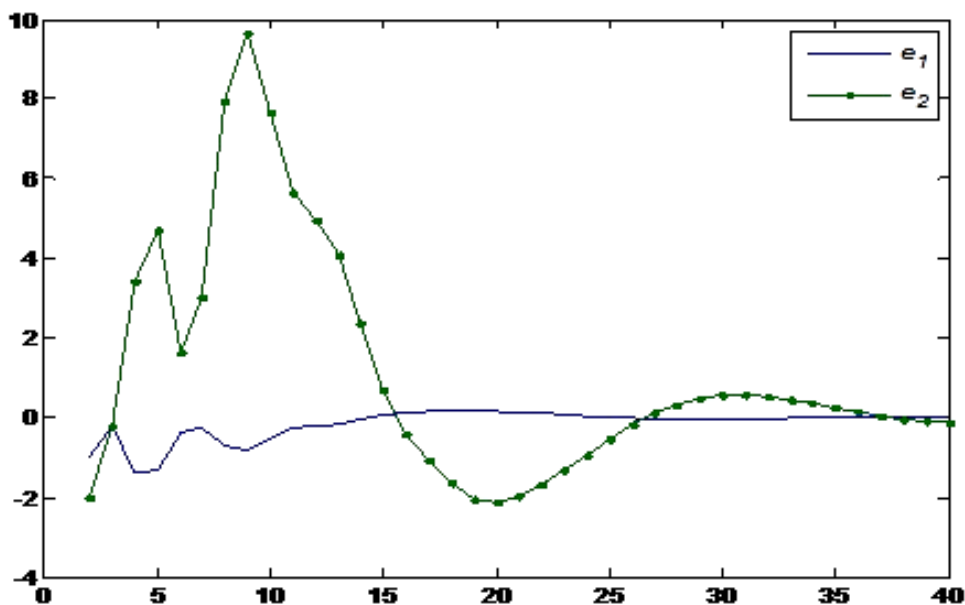


Рис. 5.20. Динаміка нев'язок співвідношень (5.65) під час стабілізуючого керування

Якщо замість закону керування (5.60) застосувати координувальний закон керування (5.64), то нев'язки співвідношень (5.65) збігаються до нуля значно швидше, що показано на рис. 5.21.

На рис. 5.22 зображено графіки координат вершин КК під час координувального керування на основі закону (5.64).

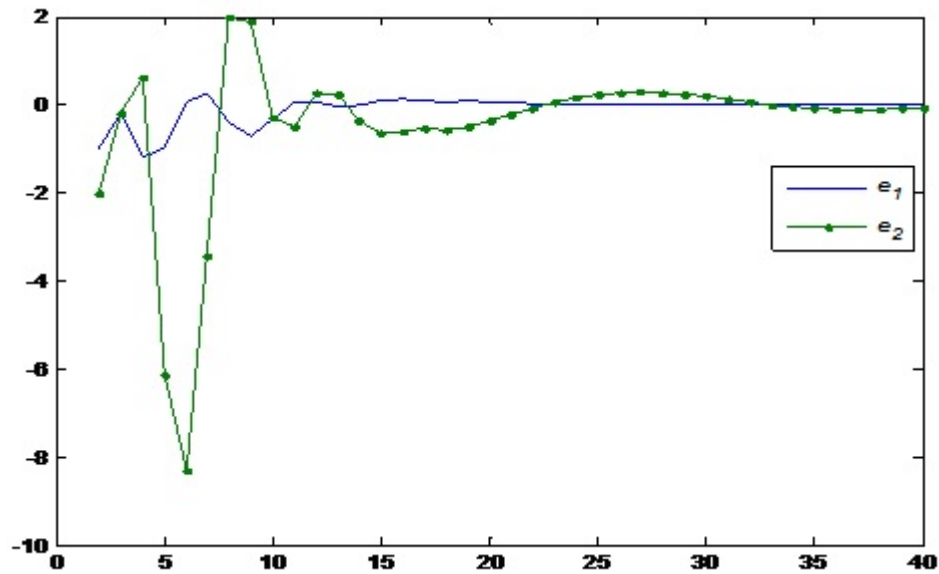


Рис. 5.21. Динаміка нев'язок співвідношень під час координувального керування у двох взаємопов'язаних когнітивних картах комерційних банків

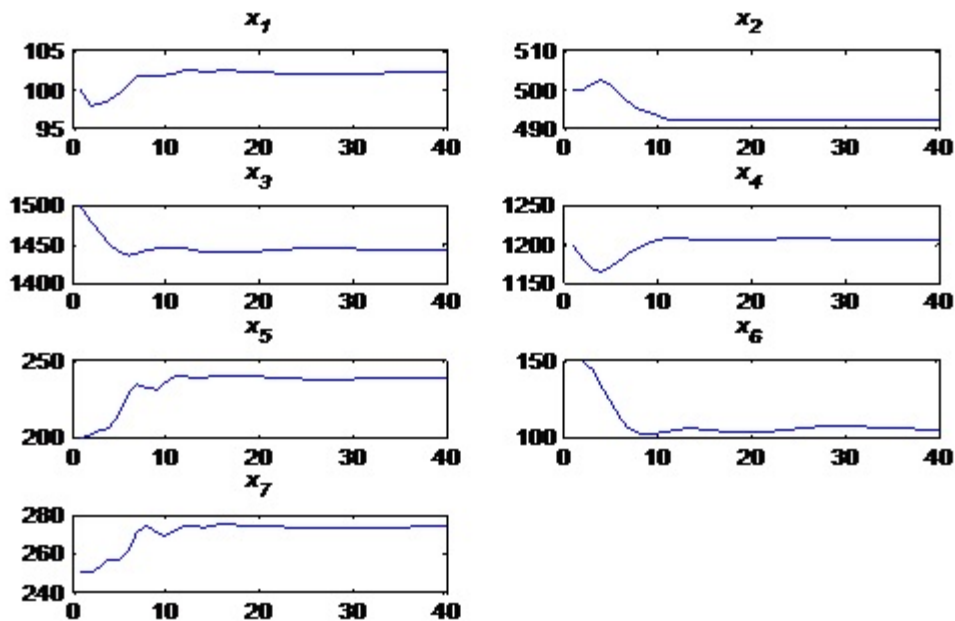


Рис. 5.22. Координати вершин КК під час координувального керування на основі закону (5.64)

Порівнюючи графіки координат вершин КК на рис. 5.19 і 5.22 можна зробити висновок, що якість стабілізації під час координувального керування (5.64) фактично не погіршилась порівняно із законом керування (5.60) в алгоритмі стабілізації.

5.4. Координувальне керування імпульсним процесом когнітивної карти у стохастичному середовищі

Велику кількість складних систем, що описуються КК, треба описувати у стохастичному середовищі. Це обґрунтовано такими обставинами:

1. Вихідні координати соціально-економічних, політичних, економічних та інших систем зазвичай не піддаються точному вимірюванню.

2. В КК складних систем є параметри вершин, які взагалі неможливо вимірювати в реальному масштабі часу, їх можна враховувати тільки як стохастичне збурення.

Слід зазначити, що методи, розроблені для координувального керування співвідношеннями координат у детермінованих об'єктах, складно пристосувати до стохастичного випадку. Це пов'язано насамперед з тим, що в цьому випадку неможливо вимагати чіткого виконання заданих співвідношень між координатами, оскільки усі сигнали є випадковими. Тому логічно запропонувати критерій мінімізації дисперсії заданого співвідношення координат за аналогією з широкоживаним критерієм мінімізації дисперсії власне вихідної координати об'єкта чи системи. Зрозуміло, що розв'язок задачі мінімізації дисперсії співвідношення буде не єдиним, тому, крім мінімізації цього базового критерію, для однозначності розв'язку треба додатково застосувати допоміжний критерій. Природним критерієм є загальноприйнятий критерій мінімуму дисперсії різниці вихідних координат та задавальних дій, але в загальному випадку ці два критерії (за дисперсією співвідношення та дисперсією вихідної координати) мають різні точки мінімуму. Отже, виникає задача багатокритеріальної оптимізації у стохастичному середовищі.

5.4.1. Розроблення алгоритму координувального керування у стохастичному середовищі

Розглянемо керований імпульсний процес у КК у повних координатах вершин [26]:

$$\left[I - (I + A)q^{-1} + Aq^{-2} \right] \bar{Y}(k) = Bq^{-1} \Delta \bar{U}(k) + \bar{\xi}(k), \quad (5.66)$$

де q^{-1} – оператор зворотного зсуву на один період дискретизації;

$\bar{Y}(k)$ – вектор координат вершин КК з розмірністю $n \times 1$;

$\Delta\bar{U}(k)$ – вектор приростів керуючих дій $n \times 1$;

$\bar{\xi}(k)$ – вектор стохастичних збурень (або похибок вимірювань координат вершин) у вигляді дискретного білого шуму, некорельованого з вихідними координатами $\bar{Y}(k)$ і керуючими діями.

Матриця суміжності $A(n \times n)$ має всі власні значення, які за модулем менші за одиницю (стійка система). Матриці керування найчастіше обирає проєктувальник у вигляді $B = I$.

Для зручності подальших викладок введемо до розгляду таку координату:

$$\tilde{Y}(k+1) = (I + A)\bar{Y}(k) - A\bar{Y}(k-1),$$

яка є відомою частиною вектора $\bar{Y}(k+1)$ на момент k .

Застосуємо спочатку критерій оптимальності у формі мінімуму узагальненої дисперсії нев'язок між вектором вихідних координат $\bar{Y}(k+1)$ і вектором задавальних дій $\bar{G}$ та приростів керуючих дій

$$J_G(k+1) = E \left\{ \left[\Delta\bar{Y}(k+1) - \bar{G}(k) \right]^T \left[\bar{Y}(k+1) - \bar{G}(k) \right] + \Delta\bar{U}^T(k) R \Delta\bar{U}(k) \right\} \rightarrow \min. \quad (5.67)$$

На кожному кроці під вектором E будемо розуміти умовне математичне сподівання щодо всієї інформації, яка доступна на момент часу k включно. Матрицю R у критерії (5.67) обираємо симетричною, додатно визначеною і такою, що $(B^T B + R)$ є невироджена.

Для подальшої мінімізації критерію (5.67) подамо модель (5.66) на $(k+1)$ кроці у формі суми відомої і невідомої частин:

$$\bar{Y}(k+1) = \tilde{Y}(k+1) + B\Delta\bar{U}(k) + \bar{\xi}(k+1). \quad (5.68)$$

Тоді критерій (5.67) можна записати так:

$$\begin{aligned} J_G(k+1) = & \left[\tilde{Y}(k+1) - \bar{G}(k) + B\Delta\bar{U}(k) \right]^T \left[\tilde{Y}(k+1) - \bar{G}(k) + B\Delta\bar{U}(k) \right] + \\ & + \Delta\bar{U}^T(k) R \Delta\bar{U}(k) + 2E \left\{ \left[\tilde{Y}(k+1) - \bar{G}(k) + B\Delta\bar{U}(k) \right]^T \bar{\xi}(k+1) \right\} + \\ & + E \left\{ \bar{\xi}^T(k+1) \bar{\xi}(k+1) \right\}. \end{aligned} \quad (5.69)$$

При цьому маємо на увазі, що для відомої суми $\tilde{Y}(k+1) - \bar{G}(k) + B\Delta\bar{U}(k)$ буде виконуватися

$$E \left\{ \left[\tilde{Y}(k+1) - \bar{G}(k) + B\Delta\bar{U}(k) \right]^T \left[\tilde{Y}(k+1) - \bar{G}(k) + B\Delta\bar{U}(k) \right] \right\} = \\ = \left[\tilde{Y}(k+1) - \bar{G}(k) + B\Delta\bar{U}(k) \right]^T \left[\tilde{Y}(k+1) - \bar{G}(k) + B\Delta\bar{U}(k) \right].$$

Останній доданок в (5.69) не залежить від $\Delta\bar{U}(k)$, і тому похідна від нього за $\Delta\bar{U}(k)$ дорівнює нулю. Передостанній доданок буде дорівнювати нулю тому, що за припущенням вхідний шум $\tilde{\xi}(k)$ має нульове середнє, некорельований і не залежить від решти змінних, отже перший співмножник цього доданка можна винести за оператор математичного сподівання, а математичне сподівання від другого співмножника буде дорівнювати нулю.

Щоб мінімізувати критерій (5.69), тобто щоб взяти похідну від першого доданка за $\Delta\bar{U}(k)$, скористаємося методикою взяття похідної від квадратичної форми типу $(B\bar{U} + \bar{C})^T Q(B\bar{U} + \bar{C})$, описаною в [74],

$$\frac{\partial \left\{ (B\bar{U} + \bar{C})^T Q(B\bar{U} + \bar{C}) \right\}}{\partial \bar{U}} = 2B^T Q(B\bar{U} + \bar{C}).$$

Отже, мінімізацію критерію (5.69) виконуємо таким чином:

$$\frac{\partial J_G(k+1)}{\partial \Delta\bar{U}(k)} = 2B^T \left[B\Delta\bar{U}(k) + \tilde{Y}(k+1) - \bar{G}(k) \right] + 2R\Delta\bar{U}(k) = 0. \quad (5.70)$$

Ця рівність являє собою рівняння регулятора, з допомогою якого виконується стабілізація вектора координат $\bar{Y}$ на заданому рівні $\bar{G}$. Закон керування регулятора (5.70) буде мати вигляд

$$\Delta\bar{U}_G(k) = - \left(B^T B + R \right)^{-1} B^T \left[\tilde{Y}(k+1) - \bar{G}(k) \right]. \quad (5.71)$$

Покажемо, що значення $\Delta\bar{U}_G(k)$ із цього виразу є точкою мінімуму критерію (5.67). Справді, $\frac{\partial^2 J_G(k+1)}{\partial \Delta\bar{U}^2(k)} = 2(B^T B + R)$, а $B^T B \geq 0$; $R > 0$, тому $B^T B + R \geq 0$, і за умовою $B^T B + R$ – невироджена матриця. Тому друга похідна $\frac{\partial^2 J_G(k+1)}{\partial \Delta\bar{U}^2(k)}$ – додатно визначена. Отже, визначене значення $\Delta\bar{U}(k)$ на основі закону керування (5.71) є точкою мінімуму критерію (5.67).

Розглянемо безпосередньо задачу координувального керування. Припустимо, що набір співвідношень координат вершин КК M задано у вигляді

$$S\bar{Y}(k) = \bar{b}, \quad (5.72)$$

де $\bar{b}$ – заданий вектор розмірністю M ;

S – задана матриця розмірністю $(M \times m)$, причому $\text{rank}(SB) = M$. Вимога координувального керування полягає в тому, що співвідношення (5.72) має виконуватися якомога точніше на кожному періоді дискретизації.

Введемо критерій мінімізації дисперсії нев'язки співвідношень:

$$J_b(k+1) = E \left\{ [S\bar{Y}(k+1) - \bar{b}]^T [S\bar{Y}(k+1) - \bar{b}] \right\} \rightarrow \min. \quad (5.73)$$

Розглянемо варіант, коли вектор задавальних дій $\bar{G}$ визначений наперед, але при цьому має задовольнятися співвідношення (5.72) на основі $S\bar{G}(k) = \bar{b}$.

Розв'яжемо задачу мінімізації критерію (5.73) за $\Delta U(k)$, застосувавши попередню методику (5.68), (5.69), тобто

$$J_b(k+1) = [S\tilde{Y}(k+1) + SB\Delta\bar{U}(k) - \bar{b}]^T [S\tilde{Y}(k+1) + SB\Delta\bar{U}(k) - \bar{b}] + \\ + 2E \left\{ [S\tilde{Y}(k+1) + SB\Delta\bar{U}(k) - \bar{b}]^T S\bar{\xi}(k+1) \right\} + E \left\{ \bar{\xi}(k+1) S^T S\bar{\xi}(k+1) \right\}. \quad (5.74)$$

Останній доданок не залежить від $\Delta U(k)$ і тому під час мінімізації критерію його можна не враховувати.

Передостанній доданок дорівнює нулю, тому що за припущенням вхідний шум $\bar{\xi}(k)$ має нульове середнє, некорельований і не залежить від решти змінних. Отже, перший співмножник у цьому доданку можна винести за оператор математичного сподівання, а другий співмножник після цього дорівнюватиме нулю. Перший доданок у критерії (5.74) дорівнює квадрату евклідової норми вектора $S\bar{Y}(k+1) + SB\Delta\bar{U}(k) - \bar{b}$. Відомо, що квадрат норми вектора невід'ємний і дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли вектор нульовий. Тому, якщо рівняння $SB\Delta\bar{U}(k) = -[S\tilde{Y}(k+1) - \bar{b}]$ має розв'язок, то цей розв'язок є точкою глобального мінімуму критерію. За умовою вектор $\Delta U(k)$ має вимір-

ність n , а вектор $-\left[S\tilde{Y}(k+1) - \bar{b}\right]$ – вимірність $(M < n)$ і $\text{rank}(SB) = M$.

Тому за теоремою Кронекера–Капеллі (див. дод. 7) це рівняння має мно-
жину розв’язків, на яких і досягається мінімум критерію (5.73), а саме

$$SB\Delta\bar{U}(k) = -\left[S\tilde{Y}(k+1) - \bar{b}\right]. \quad (5.75)$$

Взагалі керування (5.71) не задовольняє рівність (5.75). Таким чи-
ном, маємо багатокритеріальну задачу оптимізації під час формування
 $\Delta U(k)$ за критеріями (5.67) і (5.73) (причому виконання критерію (5.73)
є умовою більш пріоритетною), але має неоднозначний розв’язок.

5.4.2. Метод умовної мінімізації дисперсії нев’язки співвідношень та узагальненої дисперсії вихідних координат вершин когнітивної карти

Для розроблення методу розв’язання поставленої задачі будемо
розглядати рівність (5.75) як обмеження, що має обов’язково виконува-
тися під час мінімізації критерію оптимальності (5.67), тобто зведемо
задачу безумовної багатокритеріальної оптимізації до задачі умовної
однокритеріальної оптимізації.

Задачу умовної оптимізації будемо розв’язувати методом множни-
ків Лагранжа, а потім застосуємо теорему Фробеніуса для обернення
блочної матриці (див. дод. 8). У результаті отримаємо таку теорему.

Теорема. Нехай імпульсний процес КК задано у вигляді (5.66) і на
кожному кроці необхідно формувати такий вектор керуючих дій, який
буде мінімізувати критерії оптимальності (5.73) і (5.67), причому крите-
рію (5.73) надається більший пріоритет. Тоді оптимальне значення
 $\Delta\bar{U}(k)$ будемо визначати таким чином:

$$\Delta\bar{U}(k) = -\left(B^T B + R\right)^{-1} \left\{ \left[I - B^T S^T L^{-1} S B \left(B^T B + R \right)^{-1} \right] \cdot \right. \\ \left. \cdot \left[B^T \left(\tilde{Y}(k+1) - \bar{G}(k) \right) \right] + B^T S^T L^{-1} \left[S\tilde{Y}(k+1) - \bar{b} \right] \right\}, \quad (5.76)$$

якщо $\left(B^T B + R\right)$ та $L = S B \left(B^T B + R \right)^{-1} B^T S^T$ – невироджені, а $\tilde{Y}(k+1) =$
 $= (I + A)\bar{Y}(k) - A\bar{Y}(k-1)$.

Доведення.

Згідно з методом множників Лагранжа для розв'язання задачі мінімізації критерію (5.67) за обмеження (5.75) вводимо функцію Лагранжа

$$\Phi[\Delta\bar{U}(k), \bar{\lambda}] = J_G(k+1) + \bar{\lambda}^T [SB\Delta\bar{U}(k) - \bar{b} + S\tilde{Y}(k+1)],$$

де $\bar{\lambda}$ – невідомий вектор-стовпець розмірністю M . Скориставшись правилами матричного диференціювання, візьмемо такі похідні й прирівняємо їх до нуля:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \Delta\bar{U}(k)} = 2[B^T B + R]\Delta\bar{U}(k) + 2B^T [\tilde{Y}(k+1) - \bar{G}(k) + B^T S^T \bar{\lambda}] = 0,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{\lambda}} = SB\Delta\bar{U}(k) - \bar{b} + S\tilde{Y}(k+1) = 0.$$

Щоб розв'язати цю систему, подамо її у блочно-матричній формі:

$$\begin{bmatrix} 2(B^T B + R) & B^T S^T \\ SB & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\bar{U}(k) \\ \bar{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2B^T [\tilde{Y}(k+1) - \bar{G}(k)] \\ -S\tilde{Y}(k+1) - \bar{b} \end{bmatrix},$$

з якої визначаємо

$$\begin{bmatrix} \Delta\bar{U}(k) \\ \bar{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(B^T B + R) & B^T S^T \\ SB & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -2B^T [\tilde{Y}(k+1) - \bar{G}(k)] \\ -S\tilde{Y}(k+1) - \bar{b} \end{bmatrix}. \quad (5.77)$$

Скориставшись теоремою Фробеніуса про обернення блочної матриці, у загальному вигляді маємо

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1}(I + BK^{-1}CA^{-1}) & A^{-1}BK^{-1} \\ -K^{-1}CA^{-1} & K^{-1} \end{bmatrix},$$

де вимагається невиродженість матриці A та її доповнення Шура $K = D - CA^{-1}B$.

Отже, на основі сформульованої вище формули обернення будемо мати:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 2(B^T B + R) & B^T S^T \\ SB & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \\ & = \begin{bmatrix} 0,5(B^T B + R)^{-1} \left[I + 0,5B^T S^T K^{-1} SB (B^T B + R)^{-1} \right] & -0,5(B^T B + R)^{-1} B^T S^T K^{-1} \\ -0,5K^{-1} SB (B^T B + R)^{-1} & K^{-1} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$K = -0,5SB\left(B^T B + R\right)^{-1} B^T S^T. \quad (5.78)$$

Зауважимо, що для вже виконаної вимоги невиродженості матриці $(B^T B + R)$ додалась вимога невиродженості матриці K .

Значення множників Лагранжа $\bar{\lambda}$ нас не цікавлять, тому випишемо тільки формулу для визначення $\Delta U(k)$ на основі (5.77) з використанням (5.78)

$$\begin{aligned} \Delta \bar{U}(k) = & -0,5\left(B^T B + R\right)^{-1} \left\{ \left[I + 0,5B^T S^T K^{-1} SB\left(B^T B + R\right)^{-1} \right] \cdot \right. \\ & \left. \cdot 2\left[B^T \left(\tilde{Y}(k+1) - G(k)\right)\right] + B^T S^T K^{-1} \left[S\tilde{Y}(k+1) - \bar{b}\right] \right\}. \end{aligned}$$

Щоб позбавитись множників 2 і 0,5, позначимо $L = SB\left(B^T B + R\right)^{-1} B^T S^T$ й після елементарних перетворень отримаємо шукану формулу (5.76).

Теорему доведено.

Розглянемо частковий випадок, коли R – нульова матриця, а $L = SB\left(B^T B + R\right)^{-1} B^T S^T = SS^T$ є невиродженою матрицею. Тоді за формулою (5.76) у цьому окремому випадку, враховуючи $\left(B^T B + R\right)^{-1} B^T = B^{-1}$, після ряду перетворень отримуємо закон координувального керування

$$\Delta \bar{U}(k) = \Delta \bar{U}_G(k) - B^{-1} S^T \left(SS^T\right)^{-1} \left[S\bar{G}(k) - \bar{b}\right], \quad (5.79)$$

де $\Delta \bar{U}_G(k)$ визначаємо за формулою (5.71).

Якщо вектор задавальних дій $\bar{G}(k)$ задовольняє співвідношення (5.72), тобто $S\bar{G}(k) = \bar{b}$, то з (5.79) випливає, що в розглянутому окремому випадку $\Delta \bar{U}(k) = \Delta \bar{U}_G(k)$, тобто розв'язок задачі мінімізації (5.67) лежить на лінійному багатовиді розв'язків задачі мінімізації (5.73). Це легко зрозуміти – коли немає обмежень на керування ($R = 0$), критерій (5.67) зводиться до того, щоб якнайкраще наблизити вихідні координати $\bar{Y}$ до вектора задавальних дій $\bar{G}$, а коли задавальні дії задовольняють співвідношення (5.72), то під час оптимального керування за критерієм

(5.67) ці співвідношення також будуть задовольнятися якнайкраще, тобто критерій (5.73) мінімізуватиметься автоматично. Втім, на практиці найчастіше доводиться накладати обмеження на керування, тому матриця R відмінна від нульової і тоді під час керування за законом (5.71) координувальний критерій оптимальності (5.73) може не досягти свого мінімуму. Оскільки ж за умовою задача координації є більш пріоритетною, і насамперед треба досягти саме мінімуму (5.73), а вже потім за можливості мінімізувати критерій (5.67), то в загальному випадку отриманий розв'язок (5.76) є оптимальним для розв'язуваної задачі в цілому.

Приклад і аналіз результатів

Розглянемо стійку когнітивну модель діяльності комерційного банку, яка була використана в підрозд. 5.3.4 для дослідження процедури координувального керування двома когнітивними картами. Матриця суміжності імпульсного процесу КК, зображена на рис. 2.6, має вигляд

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0,15 & 0 & 0 & 0,1 & 0 & 0 \\ -0,2 & 0 & 0,13 & -0,2 & 0,03 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0,75 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0,8 & 0 & -0,5 & 0 \\ 0 & 0,85 & -0,95 & 0,9 & 0 & 0 & -0,7 \\ 0 & -0,5 & 0,3 & 0 & 0 & 0,7 & 0 \\ 0 & 0 & 0,1 & -0,2 & 0,8 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Вершини КК відображають такі параметри $\bar{Y}$ комерційного банку:

Y_1 – регіональна мережа;

Y_2 – капітал;

Y_3 – кредити;

Y_4 – депозити;

Y_5 – ліквідні активи;

Y_6 – міра ризику стабільності;

Y_7 – міра ризику ліквідності.

Припустимо, що всі координати вимірюються і всіма можна безпосередньо керувати варіюванням параметрів вершин КК. Задача полягає в координації співвідношення $Y_3 = 1,5Y_4$ (обсяг депозитів має на 50 %

перевищувати обсяг кредитів), тобто в (5.72) $S = [0; 0; 1; 1,5; 0; 0; 0]$, а вектор $\bar{b} = 0$.

Нехай початкові значення координат вершин КК

$$\bar{Y}(0) = [1 \ 5 \ 18 \ 12 \ 2 \ 1,5 \ 2,5]^T,$$

а бажані значення вектора задавальних дій

$$\bar{G} = [1 \ 5 \ 15 \ 10 \ 3 \ 1,5 \ 2,5]^T.$$

Припустимо, що шум вимірювань $\bar{\xi}(k)$ є нормальним з нульовим середнім та одиничною дисперсією. У критерії оптимальності (5.67) обираємо вагову матрицю $R = I$.

На рис. 5.23 зображено графіки приростів керуючих дій $\Delta \bar{U}(k)$, які були визначені на основі закону керування з координацією (5.76), а на рис. 5.24 подано графік нев'язок співвідношень $[S\bar{Y}(k+1) - \bar{b}]$, де суцільною лінією показано нев'язку співвідношень під час застосування закону керування з координацією (5.76), а пунктирною лінією – під час застосування закону керування (5.71) без координації.

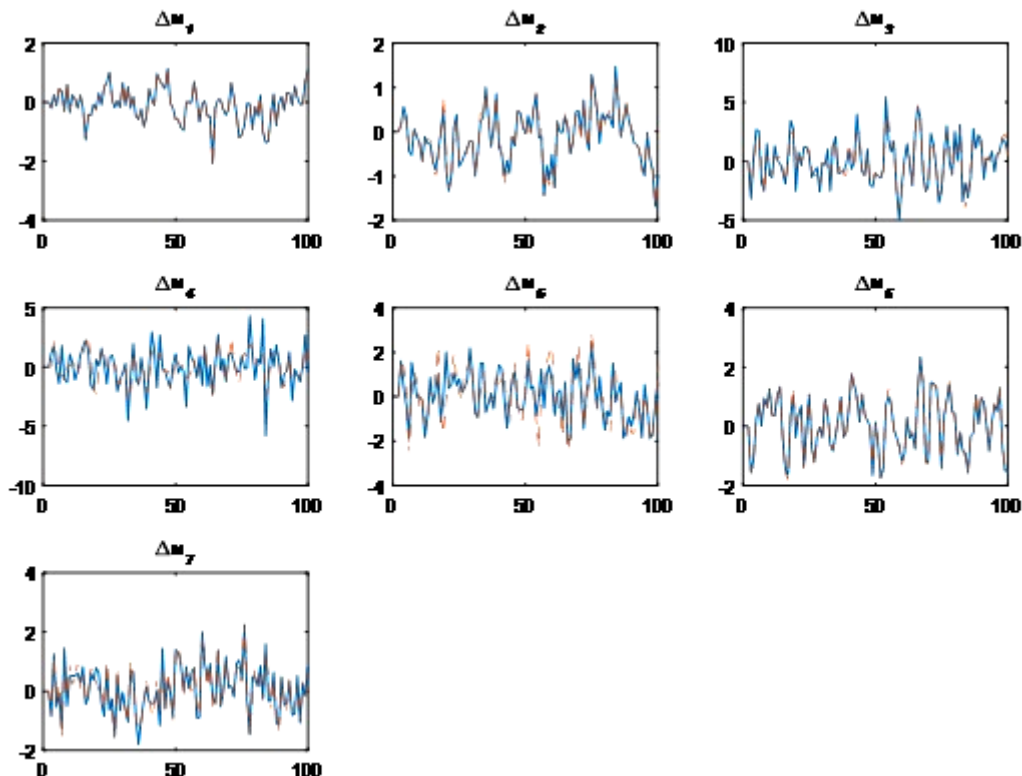


Рис. 5.23. Графіки приростів керуючих дій під час координувального керування у стохастичному середовищі

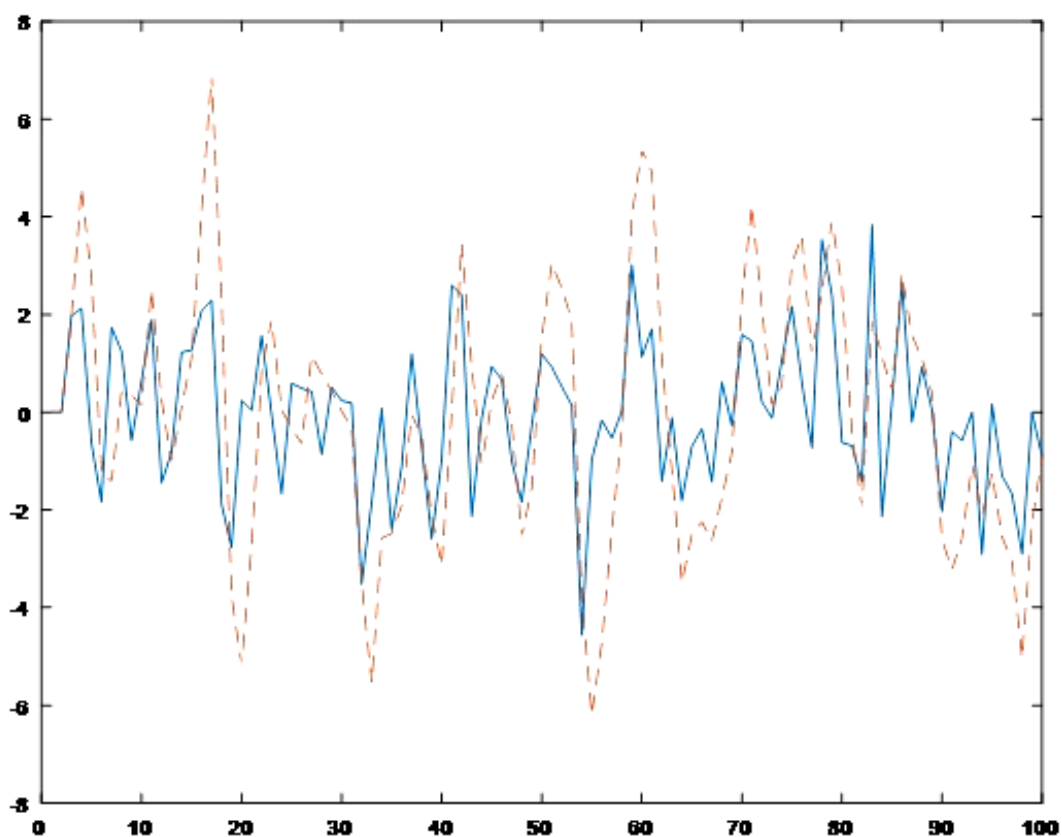


Рис. 5.24. Графіки нев'язок співвідношень під час координувального керування

5.5. Координувальне керування співвідношеннями координат вершин когнітивної карти водогосподарського балансу

У підрозд. 3.5 розроблено КК господарського водообміну (рис. 3.5) на ВГД та проведено дослідження системи стабілізації водогосподарського балансу на основі моделі імпульсного процесу КК (3.16) і (3.17), а саме:

$$\Delta \bar{X}(k+1) = A_1 \Delta \bar{X}(k) + D \Delta \bar{Y}(k), \quad (5.80)$$

$$\Delta \bar{Y}(k+1) = C \Delta \bar{Y}(k) + \Psi \Delta \bar{X}(k), \quad (5.81)$$

де $\bar{X} = (x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5 \ x_6 \ x_7 \ x_8 \ x_9)^T$ – вектор вимірюваних координат, до якого входять параметри вершин КК;

x_1 – об'єм питної води у наземних водосховищах ВГД;

x_2 – стік річок;

x_3 – об'єм води, який відбирають підприємства та комунальні організації;

x_4 – об’єм зворотних та стічних вод підприємств та комунальних організацій;

x_5 – об’єм води прибічного (бокового) притоку, який формується в межах ВГД;

x_6 – загальний об’єм води, який перекидається із сусіднього ВГД у водосховища розглядуваного ВГД (або зворотньо);

x_7 – об’єм води, який відбирається у водосховища з підземних джерел;

x_8 – ступінь очистки індустріальних відходів (зворотних та стічних вод);

x_9 – інтегральний індекс забруднення відходів на певному масиві вод.

До вектора $\bar{Y} = (Y_{10} \ Y_{11} \ Y_{12} \ Y_{13} \ Y_{14} \ Y_{15})^T$ в моделях (5.80), (5.81) належать такі невимірювані параметри вершин КК:

Y_{10} – об’єм води розглядуваного масиву вод, який випаровується в атмосферу протягом певного часу;

Y_{11} – об’єм води, який осаджується у вигляді атмосферних опадів;

Y_{12} – об’єм сільськогосподарських стоків;

Y_{13} – об’єм води в підземних водосховищах;

Y_{14} – об’єм води у ґрунті під час фільтрації з водойм;

Y_{15} – об’єм підземних вод, які гідравлічно пов’язані зі стоком річок.

Завдання полягає в розробленні системи координувального керування співвідношенням координати x_1 (об’єму питної води у наземних водосховищах) до координати x_9 (інтегрального індексу забруднення води на розглядуваному масиві вод).

В інтегральному індексі забруднень враховано сумарні забруднення, які спричиняються сільськогосподарськими стоками, індустріальними відходами, шкідливими речовинами, що потрапляють у воду з атмосфери, та іншими джерелами забруднень на певній ВГД.

У підрозд. 3.5.2 на основі моделі (5.80) виконано проектування і дослідження системи стабілізації водогосподарського балансу, де невимірювані координати $\bar{Y}(k)$ функціонують як збурення. Як керуючі дії було обрано комбіновані керування через варіювання координат вершин і вагових коефіцієнтів КК. Для цього модель імпульсного процесу (5.80) подано у формі керованого імпульсного процесу у повних значеннях координат вершин $\bar{x}$:

$$\bar{x}(k+1) = \left(I + A_1 - A_1 q^{-1} \right) \bar{x}(k) + \begin{bmatrix} B & L(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \bar{U}(k) \\ \Delta \bar{a}(k) \end{bmatrix} + \bar{\xi}(k), \quad (5.82)$$

де $\bar{\xi}(k) = D\Delta \bar{Y}(k)$ – вектор збурень;

$\Delta \bar{U}(k) = \begin{bmatrix} \Delta \bar{U}_1(k) & \Delta \bar{U}_2(k) \end{bmatrix}^T$ – вектор керувань, який реалізується через варіювання ресурсів вершини x_7 , тобто об'ємом води, який вибирається у водосховища ВГД з підземних джерел (керуюча дія $\Delta \bar{U}_1(k)$), та варіювання ресурсів вершини x_8 , а саме ступенем очищення індустріальних відходів (керуюча дія $\Delta \bar{U}_2(k)$).

Вектор керування $\Delta \bar{a}(k)$ реалізується варіюванням вагових коефіцієнтів $\Delta \bar{a}_{13}(k)$, $\Delta \bar{a}_{23}(k)$ і $\Delta \bar{a}_{34}(k)$. Вибір матриць A_1 , B і $L(k)$ наведено в підрозд. 3.5.1 та 3.5.2.

Для стабілізації вимірюваних координат $\bar{x}$ на основі мінімізації критерію оптимальності (3.20) для моделі (5.82) був синтезований закон комбінованого керування (3.19) у вигляді

$$\begin{bmatrix} \Delta \bar{U}(k) \\ \Delta \bar{a}(k) \end{bmatrix} = - \left\{ \begin{bmatrix} B^T \\ L^T(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B & L(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} \right\}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} B^T \\ L^T(k) \end{bmatrix} \left\{ \left(I + A_1 - A_1 q^{-1} \right) \bar{x}(k) + \bar{\xi}(k) - \bar{G}(k) \right\}, \quad (5.83)$$

де $\bar{G}(k)$ – вектор задавальних дій.

Керування співвідношеннями $\frac{x_1(k)}{x_9(k)}$ виконаємо за другою схемою координувального керування, яку зображено на рис. 5.2. При цьому ведучою координатою виступає $x_9(k)$ (інтегральний індекс забруднень). Тоді ведена координата $x_1(k)$ буде стабілізуватись завдяки вибору співвідношення між задавальною дією $G_1(k)$ для стабілізації координати $x_9(k)$ і показником забруднень $x_9(k)$, тобто $G_1(k) = f[x_9(k)]$.

Для моделювання системи координувального керування усі координати вершин КК промасштабовані в інтервалі від 0 до 15. Оберемо в цьому масштабі співвідношення між $x_1(k)$ та $x_9(k)$ як 1:1. Тобто зі збільшенням інтегрального індексу забруднення $x_9(k)$ система повинна підвищувати

об'єм питної води $x_1(k)$ у водосховищах. Тоді на кожному дискретному відліку з періодом дискретизації T_0 задавальна дія $G_1(k)$ для координати $x_1(k)$ буде відслідковувати поточне значення координати вершини $x_9(k)$. Припустимо, що під час моделюванні всі інші задавальні дії установлюються на рівні 5. Тоді вектор задавальних дій буде формуватися таким чином:

$$\bar{G}(k) = [x_9(k), 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5]^T.$$

Для моделювання перехідних процесів припустимо, що на початковому кроці інтегральний індекс забруднень $x_9(k)$ виріс із 5 до 12, а всі інші задавальні дії залишаються на початковому рівні 5.

На рис. 5.25 подано графік відслідковування співвідношення $\frac{x_1(k)}{x_9(k)}$.

Як завжди, пунктирна лінія показує співвідношення без керування, а суцільна лінія – з керуванням.

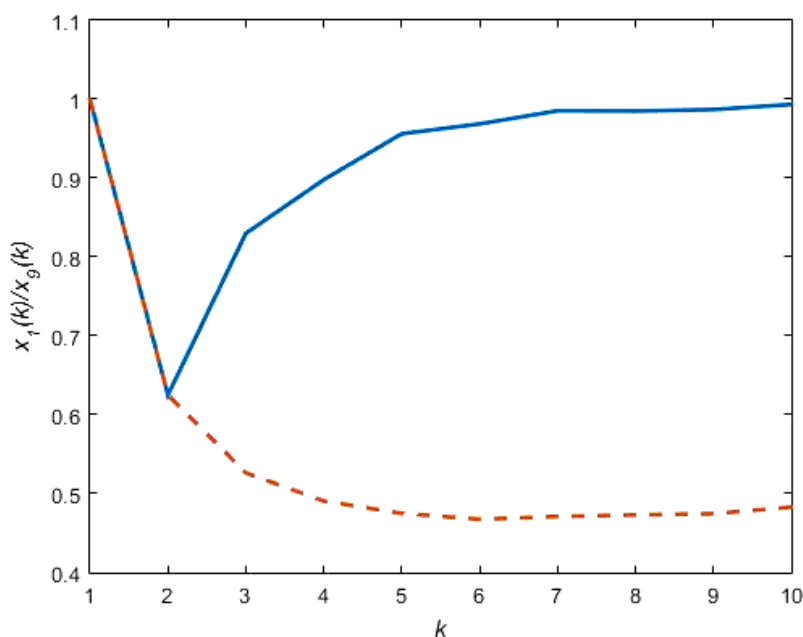


Рис. 5.25. Графік координувального керування співвідношенням $\frac{x_1(k)}{x_9(k)}$

На рис. 5.26 зображено графіки перехідних процесів координат вершин $x_i (i = 1, 2, \dots, 9)$ КК. На рис. 5.27 зображено графіки зміни приростів $\Delta x_i(k), \Delta Y_i(k)$ координат вершин, які збігаються до нульових рівнів, а на рис. 5.28 – графіки приростів керуючих дій $\Delta \bar{U}(k)$ і $\Delta \bar{a}(k)$, які формуються на основі закону керування (5.83).

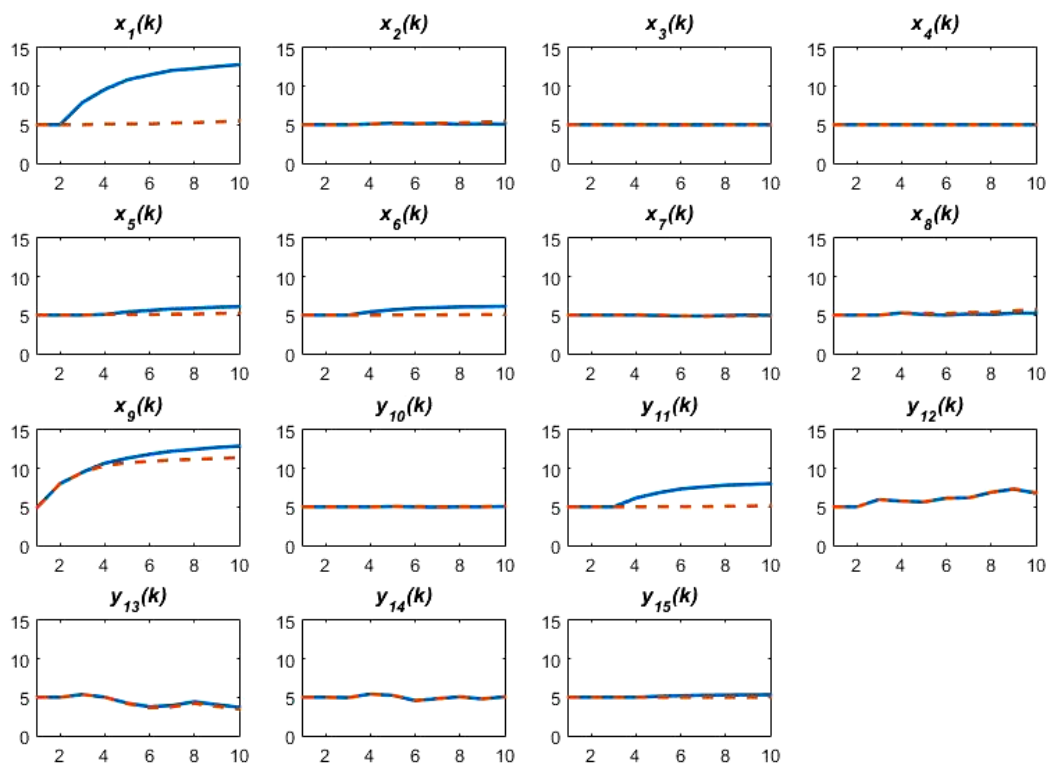


Рис. 5.26. Графіки перехідних процесів координат вершин $\Delta x_i(k), \Delta Y_i(k)$

під час координування співвідношення $\frac{x_1(k)}{x_9(k)}$

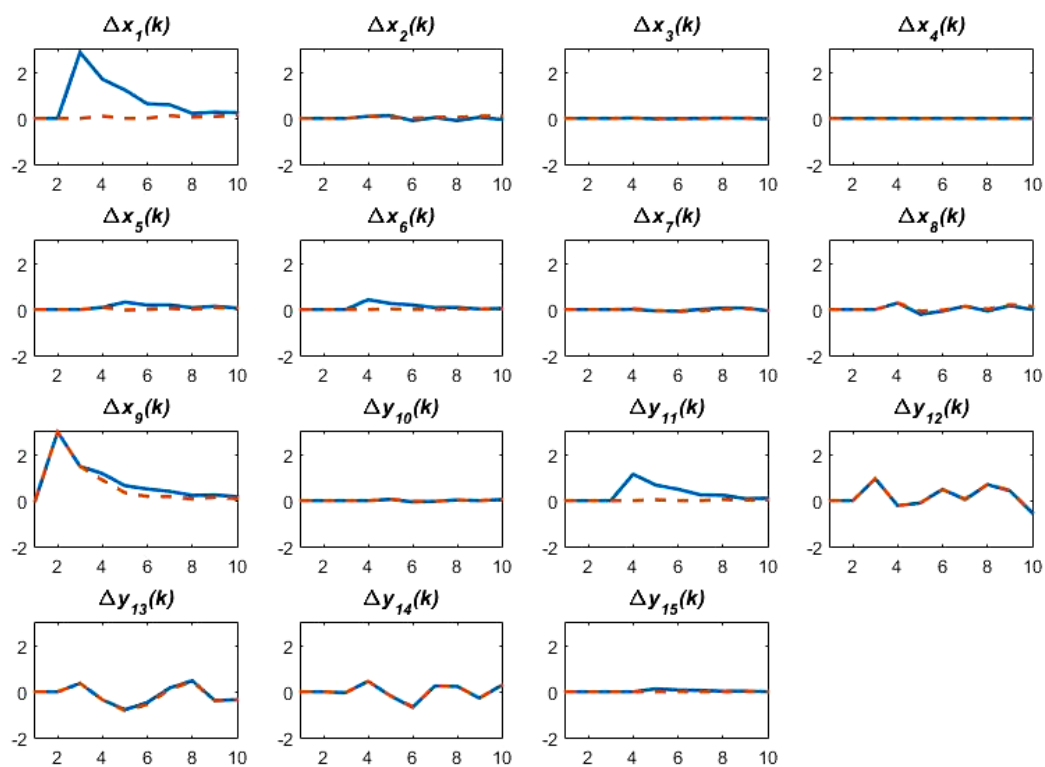


Рис. 5.27. Графіки зміни приростів $\Delta x_i(k), \Delta Y_i(k)$ координат вершин КК

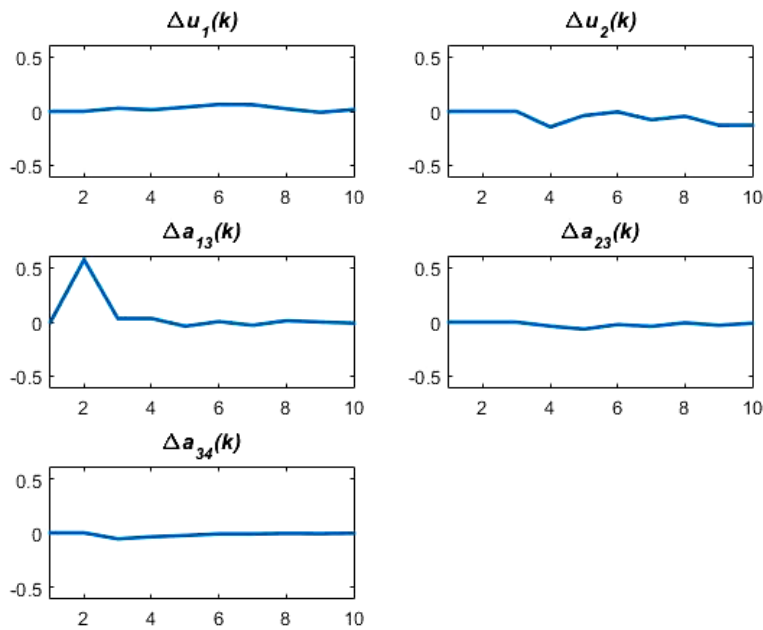


Рис. 5.28. Графіки зміни приростів керуючих дій
під час координування співвідношення координат КК $\frac{x_1(k)}{x_9(k)}$

Контрольні запитання

1. Які є форми задавання співвідношень у координувальних системах керування?
2. Як можна описати динаміку імпульсного процесу КК у формі моделі типу «вхід – вихід» у повних значеннях координат вершин КК?
3. У чому полягають недоліки керування співвідношеннями координат вершин КК через формування вектора задавальних дій замкненої системи у вигляді $A\bar{G}(k) = \bar{b}$?
4. Як формується бажана дискретна матрична передатна функція замкненої системи під час синтезу координувальної системи керування?
5. Чим різняться критерії оптимальності під час проєктування стабілізуючого і координувального регуляторів?
6. Як виконують мінімізацію квадратичного критерію оптимальності у формі узагальненої дисперсії під час синтезу стабілізуючого регулятора імпульсного процесу КК у стохастичному середовищі?
7. Яким чином формується критерій оптимальності, який включає задане співвідношення між координатами вершин взаємодійних КК?

8. Як взаємодіють слідкуючий і координувальний регулятори під час функціонування комбінованої системи слідкування і координації?

9. Чим відрізняються сингулярні збурення від регулярних?

10. У чому полягає ідея квазіусталеного стану під час декомпозиції моделі складної системи у просторі стану в неперервному часі на повільно діючу і швидкодіючу підсистеми?

Задачі для самостійного розв'язання

5.1. Виконати проєктування і дослідження двовимірної слідкуючої системи керування, зображеної на рис. 5.3, якщо матрична дискретна передатна функція зведеної неперервної частини об'єкта має вигляд

$$W_{\Pi}(z) = \begin{bmatrix} W_{11}(z) & W_{12}(z) \\ W_{21}(z) & W_{22}(z) \end{bmatrix},$$

де

$$W_{11}(z) = \frac{Y_1(z)}{U_1(z)} = \frac{0,04z^{-1} + 0,02z^{-2}}{1 - 1,25z^{-1} + 0,36z^{-2}};$$

$$W_{12}(z) = \frac{Y_1(z)}{U_2(z)} = \frac{0,027z^{-1} + 0,01z^{-2}}{1 - 1,35z^{-1} + 0,42z^{-2}};$$

$$W_{21}(z) = \frac{Y_2(z)}{U_1(z)} = \frac{0,017z^{-1} + 0,01z^{-2}}{1 - 1,4z^{-1} + 0,48z^{-2}};$$

$$W_{22}(z) = \frac{Y_2(z)}{U_2(z)} = \frac{0,035z^{-1} + 0,02z^{-2}}{1 - 1,19z^{-1} + 0,28z^{-2}}.$$

Бажану матричну дискретну передатну функцію замкненої системи слідкування за каналом « $\bar{G} - \bar{Y}$ »

$$W_3(z) = \begin{bmatrix} W_{3_1}(z) & 0 \\ 0 & W_{3_2}(z) \end{bmatrix}$$

взято в такій формі:

$$W_{3_1}(z) = \frac{(1 - e^{-\lambda_1 T_0})z^{-1}}{(1 - e^{-\lambda_1 T_0} z^{-1})};$$

$$W_{3_2}(z) = \frac{(1 - e^{-\lambda_2 T_0}) z^{-1}}{(1 - e^{-\lambda_2 T_0} z^{-1})},$$

де період дискретизації $T_0 = 1$ с, а $\lambda_1 = 0,02$; $\lambda_2 = 0,015$.

Завдання.

а) Виконати проектування матричної дискретної передатної функції слідкуючого регулятора на основі (5.5), тобто

$$W_p(z) = W_{\Pi}^{-1}(z) [I - W_3(z)]^{-1} W_3(z).$$

б) Використовуючи оператор зворотного зсуву $\bar{Y}(k-i) = z^{-i} Y(k)$, визначити закон керування слідкуючого регулятора

$$\bar{U}(z) = W_p(z) [\bar{G}(z) - \bar{Y}(z)] \quad (*)$$

у формі кінцево-різницевого рівняння.

в) Описати динаміку замкненої системи керування

$$\bar{Y}(z) = [I + W_{\Pi}(z) W_p(z)]^{-1} W_{\Pi}(z) W_p(z) \bar{G}(z)$$

у формі кінцево-різницевого рівняння $\bar{Y}(k) = f[\bar{G}(k)]$.

г) Виконати моделювання замкненої слідкуючої системи керування у разі синусоїдальної зміни задавальних дій $G_1(k)$ і $G_2(k)$.

д) На основі закону керування (*) виконати моделювання траєкторії зміни керуючих дій $U_1(k)$, $U_2(k)$ з відслідковуванням змінюваних задавальних дій $G_1(k)$ і $G_2(k)$.

5.2. На основі розрахункової формули

$$W_{\Pi}(z) = \left(\frac{z-1}{z} \right) z \left\{ \frac{W_0(s)}{s} \right\}$$

визначити дискретні передатні функції зведеної неперервної частини об'єктів, якщо їх передатні функції мають такий вигляд:

$$\text{а) } W_0(s) = \frac{K}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)} = \frac{Y(s)}{U(s)};$$

$$\text{б) } W_0(s) = \frac{K e^{-\tau s}}{(T_1 s + 1)};$$

$$\text{в) } W_0(s) = \frac{Ke^{-\tau s}}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)};$$

$$\text{г) } W_0(s) = \frac{K(1 - T_1s)}{(T_2s + 1)(T_2s + 1)}.$$

5.3. Виконати проєктування і дослідження двовимірної координувальної системи керування двовимірним об'єктом, матрична дискретна передатна функція $W_{\Pi}(z)$ якого і слідкуючий регулятор $W_p(z)$ наведені в першому прикладі.

Завдання.

а) Виконати проєктування контура координації (див. рис. 5.4), для чого до розгляду введемо уявний об'єкт керування $AW_{\Pi}(z)$.

Оберемо бажану передатну функцію контура координації

$$H_k(z) = \frac{(1 - e^{-\lambda_k T_0})z^{-1}}{1 - e^{-\lambda_r T_0}z^{-1}},$$

де період дискретизації $T_0 = 1$ с, а $\lambda_k > \lambda_1$, $\lambda_k > \lambda_2$, тобто оберемо $\lambda_k = 0,1$.

Введемо вимогу до виконання співвідношення вихідних координат

$$b = A \begin{bmatrix} Y_1(k) \\ Y_2(k) \end{bmatrix}$$

у формі $Y_1(k) - 3Y_2(k) = 2$, тобто $A = [1 \quad -3]$, а $b = 2$.

Далі за формулою (5.7) синтезуємо координувальний регулятор

$$W_{p_k}(z) = C[AW_{\Pi}(z)C]^{-1}[1 - H_k(z)]^{-1}H_k(z),$$

де C – вектор з розмірністю (2×1) , який обираємо за умовою $[AW_{\Pi}(z)C] \neq 0$.

У цьому прикладі беремо $C = [3 \quad 1]^T$.

б) Виконати дослідження двомірного комбінованого контура керування (рис. 5.6), де на задавальну дію $g_1(k)$ подається синусоїдальний сигнал, а друга задавальна дія $g_2(k)$ формується на основі співвідношення

$$g_2(k) = \frac{[Y_1(k) - 2]}{3}.$$

На основі рівняння замкненої комбінованої системи слідування і координатії (5.8) через цифрове моделювання побудувати графіки перехідних процесів, а саме графік ведучої координати $Y_1(k)$ і її задавальної дії $g_1(k)$, а також графік веденої координати $Y_2(k)$ та її задавальної дії $g_2(k)$. На окремому графіку дослідити перехідний процес похибки співвідношення

$$b_k(k) = b - A \begin{bmatrix} Y_1(k) \\ Y_2(k) \end{bmatrix},$$

тобто

$$b_k(k) = 2 - Y_1(k) + 3Y_2(k).$$

5.4. Виконати дослідження процедури координувального керування співвідношення між двома взаємодійними когнітивними картами.

Імпульсні процеси двох КК описано таким чином:

$$\begin{aligned} \Delta \bar{X}(k+1) &= W_1 \Delta \bar{X}(k) + B_1 \Delta \bar{U}_1(k) + V_1 \Delta \bar{Y}(k); \\ \Delta \bar{Y}(k+1) &= W_2 \Delta \bar{Y}(k) + B_2 \Delta \bar{U}_2(k) + V_2 \Delta \bar{X}(k), \end{aligned}$$

де $\bar{X}$ і $\bar{Y}$ – вектори координат вершин двох КК з відповідними розмірностями (5×1) і (3×1) .

Імпульсний процес першої КК має таку матрицю суміжності:

$$W_1 = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,3 & 0,05 & -0,25 & 0 \\ 0,2 & 0,5 & 0,4 & -0,2 & 0 \\ 0 & 0,15 & 0,6 & 0,35 & -0,7 \\ 0 & 0 & -0,3 & 0 & -0,1 \\ 2 & 0 & 0,1 & -0,05 & 0,4 \end{bmatrix},$$

а матриця суміжності імпульсного процесу другої КК

$$W_2 = \begin{bmatrix} 0,5 & -0,4 & 0,2 \\ 0,2 & 0,25 & 0 \\ 0 & -0,3 & 0,6 \end{bmatrix}.$$

Матриці взаємодії КК V_1 і V_2 складемо таким чином:

$$V_1 = \begin{bmatrix} 0,15 & 0 & 0,2 \\ 0 & 0 & -0,1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,3 & 0 \\ 0 & 0 & 0,15 \end{bmatrix}; \quad V_2 = \begin{bmatrix} 0 & -0,4 & 0,15 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,3 & 0 \end{bmatrix},$$

тобто блочна матриця двох КК $W = \begin{bmatrix} W_1 & V_1 \\ V_2 & W_2 \end{bmatrix}$.

Стабілізація координат вершин КК виконується через формування векторів керування $\Delta \bar{U}_1 = [\Delta U_1 \quad \Delta U_2 \quad \Delta U_3]^T$ та $\Delta \bar{U}_2 = [\Delta U_4 \quad \Delta U_5]^T$. При цьому складові першого вектора керування $\Delta U_1, \Delta U_2, \Delta U_3$ подано відповідно на вершини x_2, x_3 і x_4 першої КК, а складові другого вектора керування ΔU_4 і ΔU_5 подано, відповідно, на вершини другої КК Y_2 і Y_3 відповідно.

Матриці керування обирають таким чином:

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Для моделювання взято початкове значення вектора координат $\bar{x}$ першої КК таким чином:

$$\bar{x}(0) = [100 \quad 50 \quad 70 \quad 120 \quad 80]^T,$$

а початковий імпульс

$$\Delta \bar{x}(0) = [-5 \quad 0 \quad 5 \quad 2 \quad 0]^T.$$

Аналогічно для другої КК початкові значення координат вершин $\bar{Y}(0) = [80 \quad 60 \quad 100]^T$, а початкові імпульси $\Delta \bar{Y}(0) = [-2 \quad 0 \quad 10]^T$.

Завдання.

а) На основі заданих імпульсних процесів нарисувати загальну КК двох взаємопов'язаних КК.

б) Дослідити стійкість імпульсних процесів через визначення власних значень матриць суміжності W_1 і W_2 кожної КК, а також блочної матриці

$$W = \begin{bmatrix} W_1 & V_1 \\ V_2 & W_2 \end{bmatrix}.$$

в) Виконати стабілізацію координат вершин КК на рівні задавальних дій

$$\bar{G}_1 = [90 \quad 80 \quad 80 \quad 100 \quad 90]^T,$$

$$\bar{G}_2 = [70 \quad 70 \quad 90]^T$$

через формування векторів керування $\Delta \bar{U}_1(k)$ і $\Delta \bar{U}_2(k)$ відповідно на основі законів керування (5.60), (5.61).

г) Виконати координацію керування двох КК за таких співвідношень координат вершин:

$$5.4.1) \Delta x_2 = \frac{1}{3} \Delta Y_3;$$

$$\Delta x_1 - \Delta x_3 = -\Delta Y_3;$$

$$\Delta x_4 + \Delta x_5 = \Delta Y_2;$$

$$5.4.2) \Delta x_1 = \frac{1}{2} \Delta Y_1;$$

$$\Delta x_5 = \frac{1}{4} \Delta Y_3;$$

$$\Delta x_2 + \Delta x_3 = \Delta Y_1;$$

$$5.4.3) \Delta x_3 = \frac{1}{3} \Delta Y_1;$$

$$\Delta x_4 = \frac{1}{2} \Delta Y_2;$$

$$\Delta x_4 + \Delta x_5 = \Delta Y_3$$

через формування відповідних законів координувального керування (5.64) на основі мінімізації критерію оптимальності (5.63).

д) Побудувати графіки перехідних процесів під час стабілізації координат вершин двох КК і графіки нев'язок відповідних співвідношень:

$$\bar{e}_i(k) = \bar{f}_i \left[\Delta \bar{Y}_i(k) - S_i \Delta \bar{X}_i(k) \right].$$

РОЗДІЛ 6. Автоматизація керування імпульсними процесами в когнітивних картах складних систем з різнотемповою дискретизацією

6.1. Різнотемпова дискретизація дискретних систем у подвійному масштабі часу і проектування складеного регулятора стану

Розглянемо випадки, коли необхідно застосовувати різнотемпову дискретизацію в різних каналах багатовимірної і багатозв'язної системи керування.

1. У складних системах різної природи відбуваються динамічні процеси, які функціонують в декількох масштабах часу, наприклад:

а) у когнітивні карті розвитку ІТ-компанії (див. підрозд. 4.3) функціонують повільно діючі і швидкодіючі процеси. До повільно діючих процесів можна віднести тривалість розробки проєкту (вершина 1), професійний рівень співробітників (вершина 12 – інтелектуальні активи), конкурентоспроможність продукції (вершина 14). Швидкодіючими процесами в цій КК є витрати на проведення переатестації (вершина 9), витрати на інновації та маркетинг (вершини 2 і 7), обмін досвідом та інформаційна взаємодія (вершина 16).

Для моделі імпульсного процесу КК найменший (базовий) період дискретизації T_0 обирають на основі класичних методів [41] за умови невикривлення неперервних змінних координат вершин КК $\bar{x}(t)$ через їх подання дискретною послідовністю імпульсів $x(kT_0)$. При цьому мінімальний період дискретизації T_0 обирають на основі інформації про можливі максимальні швидкості зміни $\left. \frac{dx_f(t)}{dt} \right|_{\max}$ швидкодіючих координат вершин КК. Водночас для повільно діючих координат $x_s(t)$ можна обирати значно більший період дискретизації $h = mT_0$, де m – ціле число, більше від одиниці.

б) У складі КК складних систем є вершини, координати яких неможливо або дуже важко з технічних причин вимірювати (фіксувати)

в дискретні моменти часу з малим періодом T_0 , тому для частини вершин КК для вимірювання їх координат треба застосовувати збільшений період дискретизації $h = mT_0$. Наприклад, до складу КК застосування криптовалюти на фінансових ринках (див. підрозд. 2.7) входять такі вершини із швидковимірюваними координатами:

- курс криптовалюти (вершина 2);
- обсяг торгів криптовалютою (вершина 3);
- пропозиція криптовалюти (вершина 10);
- обсяг спекуляцій із криптовалютою (вершина 7).

До складу повільновимірюваних координат вершин входять:

- кількість користувачів криптовалюти (вершина 5);
- обсяг інвестицій (інтерес до біткоїну від інституційних інвесторів) (вершина 6);
- обсяг капіталізації (вершина 4).

Відповідно до швидковимірюваних координат доцільно застосовувати малий період дискретизації T_0 , а до повільновимірюваних координат – великий період дискретизації $h = mT_0$.

Розглянемо лінійну інваріантну за часом дискретну модель об'єкта керування або складної системи у просторі стану, яка має властивість функціонувати у двох масштабах часу:

$$\bar{x}_1[(k+1)T_0] = F_1\bar{x}_1(kT_0) + F_2\bar{x}_2(kT_0) + G_1\bar{U}(kT_0); \quad (6.1)$$

$$\bar{x}_2[(k+1)T_0] = F_3\bar{x}_1(kT_0) + F_4\bar{x}_2(kT_0) + G_2\bar{U}(kT_0); \quad (6.2)$$

$$\bar{Y}(kT_0) = C_1\bar{x}_1(kT_0) + C_2\bar{x}_2(kT_0), \quad (6.3)$$

де $\bar{x}(kT_0)$ – n -вимірний вектор стану, що складається з n_1 -вимірного вектора стану $\bar{x}_1(kT_0)$ та n_2 -вимірного вектора стану $\bar{x}_2(kT_0)$;

$\bar{U}(kT_0)$ – l -вимірний вектор керування;

$\bar{Y}(kT_0)$ – p -вимірний вектор вихідних вимірюваних координат.

Припустимо, що система може функціонувати у двох масштабах часу, при цьому n власних значень її можна поділити на n_1 повільних мод, пов'язаних, відповідно, з векторами стану $\bar{x}_1(kT_0)$ і n_2 швидких мод, пов'язаних з $\bar{x}_2(kT_0)$. Асимптотично стійкі швидкі моди діють тільки протягом короткого початкового часу, після чого перехідні процеси, що їм

відповідають, досягають усталеного стану, і режим роботи системи можна повністю відобразити повільними модами.

Якщо в системі швидкодійні перехідні процеси закінчуються, то можна вважати, що у квазіусталеному стані $\bar{x}_2[(k+1)T_0] = \bar{x}_2(kT_0)$. Тоді рівняння (6.2) зводиться до алгебричного співвідношення

$$\bar{\bar{x}}_2(kT_0) = F_3\bar{\bar{x}}_1(kT_0) + F_4\bar{\bar{x}}_2(kT_0) + G_2\bar{\bar{U}}(kT_0). \quad (6.4)$$

За умови, що матриця $(I - F_4)$ невироджена, вектор $\bar{\bar{x}}_2(kT_0)$ можна визначити у вигляді

$$\bar{\bar{x}}_2(kT_0) = (I - F_4)^{-1} [F_3\bar{x}_s(kT_0) + G_2\bar{U}_s(kT_0)], \quad (6.5)$$

де $\bar{x}_s = \bar{\bar{x}}_1$, $\bar{U}_s = \bar{\bar{U}}$ – повільно діючі складові частини відповідних векторів у (6.1) – (6.3).

Якщо тепер вираз (6.5) підставити у (6.1) і (6.3), то повільно діюча підсистема об'єкта керування може бути описана рівняннями

$$\bar{x}_s[(k+1)T_0] = F_s\bar{x}_s(kT_0) + G_s\bar{U}_s(kT_0), \quad (6.6)$$

$$\bar{Y}_s(kT_0) = C_s\bar{x}_s(kT_0) + D_s\bar{U}_s(kT_0), \quad (6.7)$$

де $\bar{Y}_s$ – повільно діюча складова вектора вихідних вимірюваних координат, а матриці:

$$F_s = F_1 + F_2(I - F_4)^{-1}F_3; \quad (6.8)$$

$$G_s = G_1 + F_2(I - F_4)^{-1}G_2;$$

$$C_s = C_1 + C_2(I - F_4)^{-1}F_3;$$

$$D_s = C_2(I - F_4)^{-1}G_2.$$

Для визначення швидкодійної підсистеми в моделі об'єкта керування припустимо, що протягом швидкодійних перехідних процесів повільно діючі вектори $\bar{x}_s$ будуть сталими. Відповідно до виразу (6.4) це означає, що $\bar{\bar{x}}_2[(k+1)T_0] = \bar{\bar{x}}_2(kT_0)$.

Віднявши від рівняння (6.2) відповідні члени співвідношення (6.4), дістанемо математичний опис швидкодійної підсистеми, а саме

$$\bar{x}_f[(k+1)T_0] = F_4\bar{x}_f(kT_0) + G_2\bar{U}_f(kT_0). \quad (6.9)$$

Запишемо рівняння вимірювання (6.3) у квазіусталеному стані

$$\bar{\bar{Y}}(kT_0) = C_1\bar{\bar{x}}_1(kT_0) + C_2\bar{\bar{x}}_2(kT_0)$$

й віднімемо відповідні члени цього рівняння від (6.3), тоді дістанемо

$$Y_f(kT_0) = C_2 \bar{x}_f(kT_0), \quad (6.10)$$

де

$$\bar{x}_f(kT_0) = \bar{x}_2(kT_0) - \bar{\bar{x}}_2(kT_0);$$

$$\bar{U}_f(kT_0) = \bar{U}(kT_0) - \bar{\bar{U}}(kT_0) = \bar{U}(kT_0) - \bar{U}_s(kT_0);$$

$$\bar{Y}_f(kT_0) = \bar{Y}(kT_0) - \bar{\bar{Y}}(kT_0) = \bar{Y}(kT_0) - \bar{Y}_s(kT_0),$$

тобто являють собою відхилення від квазіусталених координат.

6.1.1. Проєктування однотемпового складеного дискретного регулятора з одним періодом дискретизації

На підставі рівнянь (6.6), (6.7), (6.9) і (6.10) можна синтезувати складений дискретний регулятор із законом керування

$$U_{\text{скл}}(kT_0) = \bar{U}_s(kT_0) + \bar{U}_f(kT_0). \quad (6.11)$$

Лінійний зворотний зв'язок за станом у кожній підсистемі керування визначають такими рівняннями регуляторів стану:

$$\bar{U}_s(kT_0) = -K_s \bar{x}_s(kT_0); \quad (6.12)$$

$$\bar{U}_f(kT_0) = -K_f \bar{x}_f(kT_0) = K_f [\bar{x}_2(kT_0) - \bar{\bar{x}}_2(kT_0)]. \quad (6.13)$$

Якщо (6.12), (6.13) підставити, відповідно, у (6.6) і (6.9), то дістанемо рівняння, що описують динаміку замкнених контурів керування:

$$\bar{x}_s[(k+1)T_0] = [F_s - G_s K_s] \bar{x}_s(kT_0); \quad (6.14)$$

$$\bar{x}_f[(k+1)T_0] = [F_4 - G_2 K_f] \bar{x}_f(kT_0). \quad (6.15)$$

Завдяки розподілу мод складений дискретний регулятор із законом керування (6.11) можна синтезувати незалежно для повільно діючої $\bar{U}_s(kT_0)$ та швидкодіючої $\bar{U}_f(kT_0)$ складових вектора керування, при цьому матриці підсилення K_s і K_f проєктуються окремо.

Якщо (6.5) підставити у (6.13) і замінити $\bar{x}_s$ на $\bar{x}_1$, то складений регулятор стану (6.11) матиме закон керування з однотемповою дискретизацією:

$$\bar{U}_{\text{скл}}(kT_0) = - \left[K_s - K_f (I - F_4)^{-1} (F_3 - G_2 K_s) \right] \bar{x}_1(kT_0) - K_f x_2(kT_0). \quad (6.16)$$

Оскільки математична модель об'єкта керування відображається у вигляді повільно діючої (6.6), (6.7) і швидкодіючої (6.9), (6.10) підсистем,

то дискретний регулятор стану також проєктують у формі двох дискретних регуляторів.

Перший регулятор (повільно діючий) проєктують на підставі математичного опису повільно діючої підсистеми (6.6), (6.7) через визначення вектора керування $\bar{U}_s(kT_0)$, який мінімізує критерій оптимальності на нескінченному горизонті

$$J_s = \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \bar{Y}_s^T(kT_0) \bar{Y}_s(kT_0) + U_s^T(kT_0) R \bar{U}_s(kT_0) \right\}. \quad (6.17)$$

Після підстановки (6.7) у (6.17) матимемо

$$J_s = \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \bar{x}_s^T(kT_0) C_s^T C_s \bar{x}_s(kT_0) + \right. \\ \left. + 2\bar{U}_s^T(kT_0) D_s^T C_s \bar{x}_s(kT_0) + U_s^T(kT_0) R_s \bar{U}_s(kT_0) \right\}. \quad (6.18)$$

Для проєктування законів керування повільно діючого та швидкодіючого регуляторів стану, сформулюємо такі визначення.

Визначення 6.1. Повільно діюча та швидкодіюча підсистеми (6.6), (6.7) та (6.9), (6.10) об'єкта керування (6.1) – (6.3) будуть стабілізованими, якщо вони мають некеровані моди з відповідними власними значеннями, які містяться всередині круга одиничного радіуса.

Визначення 6.2. Повільно діюча та швидкодіюча підсистеми (6.6), (6.7) та (6.9), (6.10) об'єкта керування (6.1) – (6.3) будуть такими, що розкриваються, якщо вони мають неспостережувані моди з відповідними власними значеннями, які містяться всередині круга одиничного радіуса.

Якщо повільно діюча підсистема (F_s, G_s, C_s) , яка відповідає (6.6), (6.7), буде такою, що стабілізується і розкривається, то на основі теореми (див. дод. 6) під час синтезу лінійно-квадратичного регулятора стану буде існувати додатно визначена матриця L_s , яку можна знайти, розв'язавши алгебричне рівняння Ріккаті:

$$L_s = \left(F_s^T L_s F_s + C_s^T C_s \right) - \left(G_s^T L_s F_s + D_s^T C_s \right)^T \cdot \\ \cdot \left(R_s + G_s^T L_s G_s \right)^{-1} \left(G_s^T L_s F_s + D_s^T C_s \right). \quad (6.19)$$

Тоді закон керування лінійного повільно діючого дискретного регулятора стану на основі теореми (див. дод. 6) матиме вигляд

$$\bar{U}_s(kT_0) = -\left(R_s + G_s^T L_s G_s\right)^{-1} \left(G_s^T L_s F_s + D_s^T C_s\right) \bar{x}_s(kT_0). \quad (6.20)$$

Другий регулятор (швидкодійний) проєктується на підставі математичного опису швидкодійної підсистеми (6.9), (6.10) через визначення вектора керування $\bar{U}_f(kT_0)$, який мінімізує квадратичний критерій оптимальності,

$$J_f = \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \bar{Y}_f^T(kT_0) \bar{Y}_f(kT_0) + \bar{U}_f^T(kT_0) R \bar{U}_f(kT_0) \right\}. \quad (6.21)$$

Після підстановки (6.10) у (6.21) дістанемо

$$J_f = \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \bar{x}_f^T(kT_0) C_2^T C_2 \bar{x}_f(kT_0) + \bar{U}_f^T(kT_0) R \bar{U}_f(kT_0) \right\}. \quad (6.22)$$

Якщо швидкодійна підсистема (F_4, G_2, C_2) відповідно до (6.9), (6.10) є такою, що стабілізується і розкривається, то на основі теореми (див. дод. 6) буде існувати додатно визначена матриця L_f , яку можна знайти, розв'язавши алгебричне рівняння Ріккати:

$$J_f = \left[F_4^T L_f F_4 + C_2^T C_2 \right] - F_4^T L_f G_2 \left(R + G_2^T L_f G_2 \right)^{-1} G_2^T L_f F_4. \quad (6.23)$$

Тоді закон оптимального керування лінійного швидкодійного дискретного регулятора матиме вигляд

$$U_f(kT_0) = -\left(R + G_2^T L_f G_2 \right)^{-1} G_2^T L_f F_4 \bar{x}_f(kT_0). \quad (6.24)$$

Закони керування (6.20), (6.24) є оптимальними щодо векторів стану повільно діючої та швидкодійної підсистем керування, причому визначити їх значно простіше, ніж закон оптимального керування всієї системи (6.1) – (6.3), оскільки єдині у своєму роді матриці L_s, L_f взаємно незалежні.

Порівнявши (6.20) і (6.24), відповідно, з (6.12) і (6.13), визначимо матриці підсилення дискретних регуляторів стану:

$$K_s = \left(R_s + G_s^T L_s G_s \right)^{-1} \left(G_s^T L_s F_s + D_s^T C_s \right), \quad (6.25)$$

$$K_f = \left(R + G_2^T L_f G_2 \right)^{-1} G_2^T L_f F_4, \quad (6.26)$$

що дає змогу сформулювати закон складеного керування згідно з рівнянням (6.16) у вигляді

$$\begin{aligned}
\bar{U}_{\text{скл}}(kT_0) = & - \left\{ \left(R_s + G_s^T L_s G_s \right)^{-1} \left(G_s^T L_s F_s + D_s^T C_s \right) - \right. \\
& \left. - \left(R + G_2^T L_f G_2 \right)^{-1} G_2^T L_f F_4 (I - F_4)^{-1} \cdot \right. \\
& \cdot \left[F_3 - G_2 \left(R_s + G_s^T L_s G_s \right)^{-1} \left(G_s^T L_s F_s + D_s^T C_s \right) \right] \left. \right\} \bar{x}_1(kT_0) - \\
& - \left(R + G_2^T L_f G_2 \right)^{-1} G_2^T L_f F_4 \bar{x}_2(kT_0). \tag{6.27}
\end{aligned}$$

6.1.2. Паралельна стратегія проєктування різнотемпового складеного дискретного регулятора

Задача проєктування такого регулятора полягає у формуванні різнотемпового закону керування під час виконання вимірювань вихідних координат об'єкта з різними періодами дискретизації. В об'єктах, де діють «повільні» і «швидкі» рухи, доцільно застосовувати різнотемпову стратегію керування. Основою для її реалізації є попереднє розкладання математичної моделі об'єкта (6.1) – (6.3) на повільно діючу (6.6), (6.7) і швидкодіючу (6.9), (6.10) підсистеми.

Припустимо, що основний малий період дискретизації T_0 підходить для швидкодіючої підсистеми (6.9), (6.10). Тоді природно вважати, що більш низький темп дискретизації за часом можна застосувати для повільно діючої підсистеми (6.6), (6.7). Нехай цей довший період дискретизації h буде кратним коротшому періоду T_0 , тобто

$$h = mT_0, \tag{6.28}$$

де m – ціле число, більше від одиниці.

Повільно діючий вектор керування в підсистемі (6.6)

$$\bar{U}_s(kT_0) = \bar{U}_s(rh + iT_0), \quad 0 \leq i < m$$

протягом великого періоду дискретизації h буде незмінним, тобто

$$\bar{U}_s(rh + iT_0) = \bar{U}_s(rh), \tag{6.29}$$

де $r = \left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor$ – ціле число від ділення k на m .

Застосувавши до повільно діючої підсистеми (6.6) збільшений період (6.28) після m ітерацій з малим періодом T_0 і взявши до уваги

(6.29), запишемо рівняння (6.6) у повільному масштабі часу з періодом дискретизації h , тобто [2]

$$\bar{x}_s[(r+1)h] = F_s^m \bar{x}_s(rh) + \sum_{i=0}^{m-1} F_s^i G_s \bar{U}_s(rh). \quad (6.30)$$

Рівняння вимірювання повільно діючої підсистеми (6.7) з однотемповою дискретизацією є алгебричним, тому в повільно діючій підсистемі його записують з відліками змінних з великим періодом дискретизації таким чином:

$$\bar{Y}_s(rh) = C_s \bar{x}_s(rh) + D_s \bar{U}_s(rh).$$

Під час проектування повільно діючого дискретного регулятора стану також виходимо з використання лінійного зворотного зв'язку щодо вектора стану

$$\bar{U}_s(rh) = -K_s \bar{x}_s(rh). \quad (6.31)$$

Якщо (6.31) підставити в (6.30), то дістанемо рівняння, що описує динаміку замкненого контура керування, а саме

$$\bar{x}_s[(r+1)h] = \left[F_s^m - \sum_{i=0}^{m-1} F_s^i G_s K_s \right] \bar{x}_s(rh). \quad (6.32)$$

Таким чином, корені цього повільно діючого контура визначаються власними значеннями матриці $\left[F_s^m - \sum_{i=0}^{m-1} F_s^i G_s K_s \right]$ системи (6.32).

Для синтезу оптимального повільно діючого регулятора (6.31) застосуємо квадратичний критерій оптимальності в повільному масштабі часу:

$$J_s = \sum_{r=0}^{\infty} \begin{bmatrix} \bar{X}_s^T(rh) & \bar{U}_s(rh) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 & Q_{12} \\ Q_{12}^T & Q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_s(rh) \\ \bar{U}_s(rh) \end{bmatrix}. \quad (6.33)$$

Тоді проектування матриці K_s виконують на основі мінімізації критерію (6.33) за вектором $\bar{U}_s(rh)$ через застосування теореми про синтез лінійно-квадратичного оптимального регулятора стану, наведеної в додатку (див. дод. 6):

$$K_s = \left[Q_2 + \left(\sum_{i=0}^{m-1} F_s^i G_s \right)^T L_s \left(\sum_{i=0}^{m-1} F_s^i G_s \right) \right]^{-1} \left[\left(\sum_{i=0}^{m-1} F_s^i G_s \right)^T L_s F_s^m + Q_{12}^T \right]. \quad (6.34)$$

Додатно визначену матрицю L_s можна знайти, розв'язавши алгебричне рівняння Ріккати:

$$L_s = \left(F_s^m \right)^T L_s F_s^m + Q_1 - \left[\left(\sum_{i=0}^{m-1} F_s^i G_s \right)^T L_s F_s^m + Q_{12}^T \right]^T \cdot \\ \cdot \left[\left(\sum_{i=0}^{m-1} F_s^i G_s \right)^T L_s \left(\sum_{i=0}^{m-1} F_s^i G_s \right) + Q_2 \right]^{-1} \left[\left(\sum_{i=0}^{m-1} F_s^i G_s \right)^T L_s F_s^m + Q_{12}^T \right]. \quad (6.35)$$

Синтез швидкодіючого дискретного регулятора (6.13) виконують на основі мінімізації квадратичного критерію (6.22), використовуючи процедуру (6.23), (6.24). Тоді реалізацію складного дискретного різнотемпового регулятора будемо виконувати таким чином

$$\bar{U}_{\text{скл}}(rh + iT_0) = U_s(rh) + U_f(rh + iT_0) = \\ = - \left[Q_2 + \left(\sum_{i=0}^{m-1} F_s^i G_s \right)^T L_s \left(\sum_{i=0}^{m-1} F_s^i G_s \right) \right]^{-1} \cdot \\ \cdot \left[\left(\sum_{i=0}^{m-1} F_s^i G_s \right)^T L_s F_s^m + Q_{12}^T \right] \bar{x}_s(rh) - \\ - \left(R + Q_2^T L_f G_2 \right)^{-1} Q_2^T L_f F_4 \bar{x}_f(rh + iT_0), \quad (6.36)$$

$i = 0, 1, \dots, (m - 1)$.

Порівняно з однотемповим складеним регулятором (6.27) обчислювальна процедура (6.36) потребує значно менших витрат машинного часу, тому що повільно діюча складова $\bar{U}_s(rh)$ вектора керування $\bar{U}_{\text{скл}}(rh + iT_0)$ визначається m разів рідше, ніж відповідна складова $U_s(kT_0)$ регулятора (6.27). Окрім того, різнотемпова дискретизація змінних стану дає можливість використовувати в контурах керування повільно вимірювані $\bar{x}_s$ координат вершин КК складних систем різної природи.

6.2. Різнотемпові спостерігачі векторів змінних стану в замкнених підсистемах керування

У підрозд. 6.1 викладено методику розкладання математичної моделі об'єкта (6.1) – (6.3) на повільно діючу та швидкодіючу підсистеми. Першу з періодом дискретизації $h = mT_0$ описують рівнянням

$$\bar{x}_s[(r+1)h] = F_s^m \bar{x}_s(rh) + \sum_{i=0}^{m-1} F_s^i G_s \bar{U}_s(rh); \quad (6.37)$$

$$\bar{Y}_s(rh) = C_s \bar{x}_s(rh) + D_s \bar{U}_s(rh), \quad (6.38)$$

де матриці F_s, G_s, C_s, D_s визначаються виразами (6.8).

Швидкодійну підсистему (6.9), (6.10) можна записати в такій формі:

$$\bar{x}_s[rh + (i+1)T_0] = F_4 \bar{x}_f(rh + iT_0) + \bar{G}_2 \bar{U}_f(rh + iT_0); \quad (6.39)$$

$$\bar{Y}_f(rh + iT_0) = C_2 \bar{x}_f(rh + iT_0), \quad (6.40)$$

де $h = mT_0, i = 0, 1, 2, \dots, (m-1)$.

Для більшості об'єктів керування і складних систем вектори змінних стану $\bar{x}_s(rh)$ і $\bar{x}_f(rh + iT_0)$ у разі різнотемпового квантування повністю виміряти неможливо, тому їх треба оцінювати за допомогою різнотемпових спостерігачів стану на основі вимірюваних векторів $\bar{Y}$ і $\bar{U}$. При цьому $\bar{Y}_s$ є повільно діючим вектором вихідних вимірюваних координат, який під час зміни швидких мод в дискретні моменти kT_0 залишається сталим і визначається в моменти часу $t = rh$, а $\bar{Y}_f = \bar{Y} - \bar{Y}_s$ є швидкодійним вектором у складі названих координат.

Припустимо, що повільно діючий вектор змінних стану $\bar{x}_s$ можна виразити через його оцінку $\hat{\bar{x}}_s$ таким чином:

$$\hat{\bar{x}}_s[(r+1)h] = F_s^m \hat{\bar{x}}_s(rh) + \sum_{i=0}^{m-1} F_s^i G_s \bar{U}_s(rh). \quad (6.41)$$

Увівши зворотний зв'язок за різницею вимірюваного вихідного сигналу $\bar{Y}_s(rh)$ і його оцінкою $\hat{\bar{Y}}_s(rh) = C_s \hat{\bar{x}}_s(rh) + D_s \bar{U}_s(rh)$, реалізуємо спостерігача повільно діючого вектора стану $\hat{\bar{x}}_s[(r+1)h|rh]$ за такою рекуррентною процедурою:

$$\begin{aligned} \hat{\bar{x}}_s[(r+1)h|rh] &= F_s^m \hat{\bar{x}}_s[rh|(r-1)h] + \sum_{i=0}^{m-1} F_s^i \bar{G}_s \bar{U}_s(rh) + \\ &+ M_s \{ \bar{Y}_s(rh) - C_s \hat{\bar{x}}_s[rh|(r-1)h] - D_s \bar{U}_s(rh) \}. \end{aligned} \quad (6.42)$$

Спостерігач (6.42) відновлює невимірюваний повільно діючий вектор стану $\bar{x}_s$ на основі відомих вимірювань вхідних $\bar{U}_s(rh)$ і вихідних $\bar{Y}_s(rh)$ сигналів.

Якщо швидкокодійний вектор стану $\bar{x}_f$ виразити через його оцінку $\hat{x}_s$,

$$\hat{x}_f[rh + (i+1)T_0] = F_4 \hat{x}_f(rh + iT_0) + G_2 \bar{U}_f(rh + iT_0), \quad (6.43)$$

то відновлення цього невимірюваного вектора можна досягти, ввівши спостерігач стану у вигляді рекурентного рівняння

$$\begin{aligned} \hat{x}_f[rh + (i+1)T_0 | rh + iT_0] = & F_4 \hat{x}_f[rh + iT_0 | rh + (i-1)T_0] + \\ & + G_2 \bar{U}_f(rh + iT_0) + M_f \left\{ \bar{Y}_f(rh + iT_0) - C_2 \hat{x}_f[rh + iT_0 | rh + (i-1)T_0] \right\}, \end{aligned} \quad (6.44)$$

відповідно до якого оцінка $\hat{x}_f[rh + (i+1)T_0 | rh + iT_0]$ залежить тільки від вимірних векторів $\bar{Y}_f(rh + iT_0)$, $\bar{U}_f(rh + iT_0)$ на момент часу $(rh + iT_0)$, де $i = 0, 1, 2, \dots, (m-1)$.

Проаналізуємо збіжності рекурентних процедур (6.42) і (6.44). Віднявши від (6.37), відповідно, ліву і праву частини рівняння (6.42), дістанемо помилку відновлення повільно діючого вектора стану, а саме

$$\begin{aligned} \tilde{x}_s[(r+1)h | rh] = & \bar{x}_s[(r+1)h] - \hat{x}_s[(r+1)h | rh] = \\ = & [F_s^m - M_s C_s] \tilde{x}_s[rh | (r-1)h], \end{aligned} \quad (6.45)$$

яка залежить тільки від початкового значення помилки оцінки $\tilde{x}_s(0)$.

Помилку відновлення швидкокодійного вектора стану можна визначити, віднявши від (6.39) ліву і праву частини рівняння спостерігача (6.44). У результаті будемо мати

$$\begin{aligned} \tilde{x}_f[rh + (i+1)T_0 | rh + iT_0] = & \bar{x}_f[rh + (i+1)T_0] - \\ & - \hat{x}_f[rh + (i+1)T_0 | rh + iT_0] = \\ = & [F_4 - M_f C_2] \tilde{x}_f[rh + iT_0 | rh + (i-1)T_0], \end{aligned} \quad (6.46)$$

тобто ця помилка не залежить від сигналу керування $\bar{U}_f(rh + iT_0)$, а залежить тільки від початкового значення помилки $\tilde{x}_f(0)$.

Рівняння (6.45) і (6.46) є рівняннями замкнених систем щодо помилок оцінювання $\tilde{x}_i$ і $\tilde{x}_f$, при цьому корені характеристичних рівнянь замкнених систем (6.45) і (6.46)

$$\begin{aligned} \det[z_1 I - F_s^m + M_s C_s] &= 0; \\ \det[z_2 I - F_4 + M_f C_2] &= 0, \end{aligned} \quad (6.47)$$

мають лежати на полі круга одиничного радіуса, тобто за модулем мають бути меншими за одиницю. Цього досягають вибором матриць M_s і M_f за яких однорідні різниці рівняння (6.45) і (6.46) будуть асимптотично стійкими, а процес відновлення векторів стану $\bar{x}_s, \bar{x}_f$ збігатиметься, тобто

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \tilde{\bar{x}}_s(rh) = 0; \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \tilde{\bar{x}}_f(rh + iT_0) = 0.$$

Якщо повільно діючий вектор стану $\bar{x}_s$ відновлюється за допомогою спостерігача (6.42), то закон керування повільно діючого регулятора стану за умови (6.29) матиме вигляд

$$\bar{U}_s(rh) = -K_s \hat{\bar{x}}_s[rh|(r-1)h]. \quad (6.48)$$

Тоді рівняння повільно діючої замкненої підсистеми керування на основі (6.37), (6.45), (6.48) можна записати так:

$$\begin{aligned} \bar{x}_s[(r+1)h] &= F_s^m \bar{x}_s(rh) + \sum_{i=0}^{m-1} F_s^i G_s \bar{U}_s(rh) = \\ &= F_s^m \bar{x}_s(rh) - \sum_{i=0}^{m-1} F_s^i G_s K_s \hat{\bar{x}}_s[rh|(r-1)h] = \\ &= F_s^m \bar{x}_s(rh) - \sum_{i=0}^{m-1} F_s^i G_s K_s \{ \bar{x}_s(rh) - \tilde{\bar{x}}_s[rh|(r-1)h] \} = \\ &= \left[F_s^m - \sum_{i=0}^{m-1} F_s^i G_s K_s \right] \bar{x}_s(rh) + \sum_{i=0}^{m-1} F_s^i G_s K_s \tilde{\bar{x}}_s[rh|(r-1)h]. \end{aligned} \quad (6.49)$$

З урахуванням (6.38), (6.45), (6.48), (6.49) повну систему рівнянь повільно діючої підсистеми керування зі спостерігачем повільно діючого вектора стану в матричній формі можна подати так:

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} \bar{x}_s(rh) \\ \tilde{\bar{x}}_s[(r+1)h|rh] \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \left(F_s^m - \sum_{i=0}^{m-1} F_s^i G_s K_s \right) & \sum_{i=0}^{m-1} F_s^i G_s K_s \\ 0 & (F_s^m - M_s C_s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_s(rh) \\ \tilde{\bar{x}}_s[rh|(r-1)h] \end{bmatrix}; \end{aligned} \quad (6.50)$$

$$\begin{aligned}\bar{Y}_s(rh) &= \begin{bmatrix} C_s & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_s(rh) \\ \tilde{\bar{x}}_s[rh|(r-1)h] \end{bmatrix} + D_s \bar{U}_s(rh) = \\ &= \begin{bmatrix} C_s - D_s K_s & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_s(rh) \\ \tilde{\bar{x}}_s[rh|(r-1)h] \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (6.51)$$

На основі відновлення швидкодіючого вектора стану $\bar{x}_f$ за допомогою спостерігача (6.44) закон керування (6.13) швидкодіючого регулятора стану набуває вигляду

$$\bar{U}_f(rh + iT_0) = -K_f \hat{\bar{x}}_f[rh + iT_0 | rh + (i-1)T_0]. \quad (6.52)$$

Рівняння швидкодіючої замкненої підсистеми керування з урахуванням (6.43), (6.46), (6.52) можна записати так:

$$\begin{aligned}\bar{x}_f[rh + (i+1)T_0] &= F_4 \bar{x}_f[rh + iT_0] + G_2 \bar{U}_f(rh + iT_0) = \\ &= F_4 \bar{x}_f(rh + iT_0) - G_2 K_f \hat{\bar{x}}_f[rh + iT_0 | rh + (i-1)T_0] = \\ &= F_4 \bar{x}_f(rh + iT_0) - G_2 K_f \{ \bar{x}_f(rh + iT_0) - \\ &- \tilde{\bar{x}}_f[rh + iT_0 | rh + (i-1)T_0] \} = [F_4 - G_2 K_f] \bar{x}_f(rh + iT_0) + \\ &+ G_2 K_f \tilde{\bar{x}}_f[rh + iT_0 | rh + (i-1)T_0]. \end{aligned} \quad (6.53)$$

Повна схема рівнянь швидкодіючої замкненої підсистеми керування зі спостерігачем швидкодіючого вектора стану, враховуючи (6.40), (6.45), (6.52), у матричній формі має вигляд

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \bar{x}_f[rh + (i+1)T_0] \\ \tilde{\bar{x}}_f[rh + (i+1)T_0 | rh + iT_0] \end{bmatrix} = \\ & \begin{bmatrix} (F_4 - G_2 K_f) & G_2 K_f \\ 0 & (F_4 - M_f C_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_f[rh + iT_0] \\ \tilde{\bar{x}}_f[rh + iT_0 | rh + (i-1)T_0] \end{bmatrix}; \quad (6.54) \\ & \bar{Y}_f(rh + iT_0) = \begin{bmatrix} C_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_f[rh + iT_0] \\ \tilde{\bar{x}}_f[rh + iT_0 | rh + (i-1)T_0] \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Характеристичне рівняння повільно діючої замкненої підсистеми керування (6.50) зі спостерігачем повільно діючого вектора $\hat{\bar{x}}_s$ набуває вигляду

$$\det \left[z_1 I - F_s^m + \sum_{i=0}^{m-1} F_s^i G_s K_s \right] \det [z_1 I - F_s^m + M_s C_s] = 0. \quad (6.55)$$

Корені цієї підсистеми визначають власний рух підсистеми.

Для швидкодіючої замкненої системи керування зі спостерігачем швидкодіюного вектора (6.54) характеристичне рівняння має вигляд

$$\det[z_2 I - F_4 + G_2 K_f] \det[z_2 I - F_4 + M_f C_2] = 0. \quad (6.56)$$

Таким чином, повний набір коренів (полюсів) повільно діючої та швидкодіючої підсистем керування зі спостерігачем (6.55), (6.56) складатиметься з коренів замкнених підсистем керування без спостерігачів і полюсів спостерігачів (6.47). Тому корені підсистем керування з характеристичними рівняннями

$$\det \left[z_1 I - F_s^m + \sum_{i=0}^{m-1} F_s^i G_s K_s \right] = 0;$$

$$\det[z_2 I - F_4 + G_2 K_f] = 0$$

і корені (полюси) спостерігачів (6.47) можна визначати незалежно, оскільки вони не впливають одне на одного.

Для реалізації спостерігачів повільно діючих (6.42) і швидкодіючих (6.44) векторів стану необхідно, щоб повільно діюча (6.37), (6.38) і швидкодіюча (6.39), (6.40) підсистеми були повністю спостережуваними.

Відновлення невимірюваних повільно діючих $\hat{x}_s[(\kappa+1)h]$ і швидкодіючих $\hat{x}_f[rh + (i+1)T_0]$ векторів змінних стану за допомогою спостерігачів (6.42) і (6.44) виконується на основі інформації про вихідні координати складної системи $\bar{Y}_s(rh)$ та $\bar{Y}_f(rh + iT_0)$. Ці змінні визначають повільно- і швидкозмінні складові у складі вимірюваного вектора вихідних координат $\bar{Y}(t) = \bar{Y}_s(t) + \bar{Y}_f(t)$.

Щоб визначити невимірювані складові $\bar{Y}_s(rh)$ і $\bar{Y}_f(rh + iT_0)$ у дискретні моменти часу $t = rh$ і $t = (rh + iT_0)$, $i = 0, 1, 2, \dots, (m-1)$, будемо оцінювати їх на основі моделей (6.38), (6.40), спостерігачів (6.42) і (6.44) та закону керування (6.48), тобто

$$\begin{aligned} \hat{\bar{Y}}_s(rh) &= \bar{Y}(rh) - \hat{\bar{Y}}_f(rh) = \bar{Y}(rh) - C_2 \hat{x}_f(rh); \\ \hat{\bar{Y}}_f(rh + iT_0) &= \bar{Y}(rh + iT_0) - \hat{\bar{Y}}_s(rh) = \\ &= \bar{Y}(rh + iT_0) - (C_2 - D_s K_s) \hat{x}_s(rh). \end{aligned}$$

6.3. Синтез систем керування імпульсними процесами з різнометровою дискретизацією для стабілізації координат вершин когнітивної карти складної системи

У підрозд. 6.1 розглядалась проблема проектування різнометрових регуляторів стану для керування складною системою, яка має властивість функціонувати у двох масштабах часу, тобто координати складної системи мають різні інерційності. Частина координат була віднесена до швидкозмінних, а інша частина координат змінювалась у повільному масштабі часу. Але в реальних складних системах, динамічна модель яких описується імпульсним процесом КК, частина координат може вимірюватися з малим періодом дискретизації T_0 , а інша частина координат може бути виміряна в дискретні моменти часу зі збільшеним періодом $h = mT_0$, де m – ціле число, більше від одиниці. Тому виникає потреба побудувати модель імпульсного процесу КК, в якій різні частини координат мають різні періоди дискретизації.

Припустимо, що в КК складної системи розмірністю n існує p координат вершин $\bar{Y}_i$, що вимірюються з періодом дискретизації T_0 , а $n - p$ координат на практиці можна виміряти зі збільшеним періодом $h = mT_0$. Тоді модель імпульсного процесу КК має бути описана з різнометровою дискретизацією таким чином:

$$\Delta Y_i \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + (l+1)T_0 \right] = \sum_{j=1}^p a_{ij} \Delta Y_j \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right] + \sum_{\gamma=1}^{n-p} a_{i\gamma} \Delta \tilde{Y}_{p+\gamma} \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right]; \quad (6.57)$$

$$\Delta Y_\eta \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] + 1 \right) h \right] = \sum_{j=1}^p a_{\eta j} \Delta \tilde{Y}_j \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right] + \sum_{\varphi=1}^{n-p} a_{\eta\varphi} \Delta Y_{p+\varphi} \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right], \quad (6.58)$$

де $i = 1, 2, \dots, p$; $\eta = (p+1), \dots, n$; $l = 0, 1, \dots, (m-1)$,

$$\Delta \tilde{Y}_{p+\gamma} \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] = Y_{p+\gamma} \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] - Y_{p+\gamma} \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - 1 \right) h \right],$$

а

$$\Delta Y_i \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right] = Y_i \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right] - Y_i \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + (l-1)T_0 \right].$$

Співвідношення (6.57), (6.58) можуть бути записані в узагальненій векторно-матричній формі:

$$\Delta \bar{Y}_1 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + (l+1)T_0 \right] = A_{11} \Delta \tilde{Y}_1 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right] + A_{12} \Delta \bar{Y}_2 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right]; \quad (6.59)$$

$$\Delta \bar{Y}_2 \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] + 1 \right) h \right] = A_{21} \Delta \tilde{Y}_1 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right] + A_{22} \Delta \bar{Y}_2 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right], \quad (6.60)$$

де матриці мають розмірність $A_{11}(p \times p)$, $A_{12}(p \times (n-p))$, $A_{21}((n-p) \times p)$, $A_{22}((n-p) \times (n-p))$.

Координати вектора $\bar{Y}_2$, що вимірюються з періодом дискретизації h , будуть сталими протягом часу

$$\left[\frac{k}{m} \right] h \leq t < \left(\left[\frac{k}{m} \right] + 1 \right) h.$$

Сформулюємо таке твердження.

Твердження 6.1. Під час обчислення вектора $\Delta \bar{Y}_2 \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] + 1 \right) h \right]$ в

моделі (6.60) складову $\Delta \tilde{Y}_1 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right]$ враховують за формулою

$$\Delta \tilde{Y}_1 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right] = \bar{Y}_1 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + (m-1)T_0 \right] - \bar{Y}_1 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h - T_0 \right]. \quad (6.61)$$

Доведення. Вплив швидкодіяних складових $\Delta \tilde{Y}_1 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right]$ за

$l = 0, 1, 2, \dots, (m-1)$ у складі вектора $\Delta \bar{Y}_2 \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] + 1 \right) h \right]$ в моделі (6.60)

можна подати такою сумою:

$$\begin{aligned} & \Delta \bar{Y}_1 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] + \Delta \bar{Y}_1 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + T_0 \right] + \Delta \bar{Y}_1 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + 2T_0 \right] + \dots \\ & + \Delta \bar{Y}_1 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + (m-2)T_0 \right] + \Delta \bar{Y}_1 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + (m-1)T_0 \right]. \end{aligned}$$

Після розкриття різниць ця сума буде

$$\begin{aligned} & \bar{Y}_1 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] - \bar{Y}_1 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h - T_0 \right] + \bar{Y}_1 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + T_0 \right] - \bar{Y}_1 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] + \\ & + \bar{Y}_1 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + 2T_0 \right] - \bar{Y}_1 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + T_0 \right] + \dots + \bar{Y}_1 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + (m-2)T_0 \right] - \\ & - \bar{Y}_1 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + (m-3)T_0 \right] + \bar{Y}_1 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + (m-1)T_0 \right] - \bar{Y}_1 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + (m-2)T_0 \right]. \end{aligned}$$

Звівши подібні члени, отримаємо твердження 6.1.

Твердження 6.2. Якщо перші зворотні різниці у (6.59)

$$\begin{aligned} \Delta Y_i \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + (l+1)T_0 \right] &= Y_i \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + (l+1)T_0 \right] - Y_i \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right], \quad (6.62) \\ l &= 0, 1, \dots, (m-1), \end{aligned}$$

то перехід цих різниць до подавання з великим періодом дискретизації h може бути виконаний на основі

$$\Delta Y_i \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] + 1 \right) h \right] = \sum_{\mu=1}^m \Delta Y_i \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + \mu T_0 \right]. \quad (6.63)$$

Доведення. Розглянемо послідовність перших різниць $\Delta Y_i \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + (l+1)T_0 \right]$ за $l = 0, 1, \dots, (m-1)$:

$$\begin{aligned} \Delta Y_i \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + T_0 \right] &= Y_i \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + T_0 \right] - Y_i \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right]; \\ \Delta Y_i \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + 2T_0 \right] &= Y_i \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + 2T_0 \right] - Y_i \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + T_0 \right]; \\ &\dots \dots \dots \\ \Delta Y_i \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + (m-1)T_0 \right] &= Y_i \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + (m-1)T_0 \right] - Y_i \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + (m-2)T_0 \right]; \\ \Delta Y_i \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + m T_0 \right] &= Y_i \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + m T_0 \right] - Y_i \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + (m-1)T_0 \right]. \end{aligned}$$

Після додавання правих і лівих частин і зведення подібних членів отримаємо

$$\sum_{\mu=1}^m \Delta Y_i \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + \mu T_0 \right] = Y_i \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + m T_0 \right] - Y_i \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] = \Delta Y_i \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] + 1 \right) h \right],$$

що є доведенням (6.63).

Припустимо, що на різнометрову систему (6.59), (6.60) можуть діяти зовнішні керуючі дії. Логічно формувати їх таким чином, щоб на швидковимірювані вершини КК діяли керування $\Delta \bar{U}_1$ з малим періодом дискретизації T_0 , а на повільновимірювані $\Delta \bar{U}_2$ з великим періодом дискретизації h . Тоді керований імпульсний процес (6.59), (6.60) запишемо так:

$$\begin{aligned} \Delta \bar{Y}_1 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + (l+1)T_0 \right] &= A_{11} \Delta \bar{Y}_1 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right] + \\ &+ A_{12} \Delta \tilde{Y}_2 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] + B_{11} \Delta \bar{U}_1 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right]; \\ \Delta \bar{Y}_2 \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] + 1 \right) h \right] &= A_{21} \Delta \tilde{Y}_1 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right] + \\ &+ A_{22} \Delta \bar{Y}_2 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] + B_{22} \Delta \bar{U}_2 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right], \end{aligned} \quad (6.64)$$

де $l = 0, 1, \dots, (m-1)$.

6.3.1. Керування імпульсними процесами з різнометровою дискретизацією на основі варіювання ресурсів координат вершин

З метою стабілізації координат вершин КК на заданих рівнях подамо динаміку векторів $\bar{Y}_1, \bar{Y}_2$ у повних координатах у моделі імпульсного процесу КК (6.64) з різнометровою дискретизацією:

$$\begin{aligned} \bar{Y}_1 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + (l+1)T_0 \right] &= (I_{11} + A_{11} - A_{11}q_1^{-1}) \bar{Y}_1 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right] + \\ &+ B_{11} \Delta \bar{U}_1 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right] + A_{12} \Delta \tilde{Y}_2 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] + \Delta \bar{\xi}_1 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right]; \end{aligned} \quad (6.65)$$

$$\begin{aligned} \bar{Y}_2 \left[\left(\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor + 1 \right) h \right] = & \left(I_{22} + A_{22} - A_{22} q_2^{-1} \right) \bar{Y}_2 \left[\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor h \right] + \\ & + B_{22} \Delta \bar{U}_2 \left[\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor h \right] + A_{21} \Delta \tilde{\bar{Y}}_1 \left[\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor h + l T_0 \right] + \Delta \xi_2 \left[\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor h \right], \end{aligned} \quad (6.66)$$

де q_1^{-1} , q_2^{-1} – оператори зворотного зсуву на періоди дискретизації T_0 і $h = m T_0$ відповідно, при цьому враховано наявність зовнішніх стохастичних збурень $\Delta \bar{\xi}_1 \left[\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor h + l T_0 \right]$ і $\Delta \bar{\xi}_2 \left[\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor h \right]$.

У рівняннях (6.65), (6.66) члени $A_{12} \Delta \tilde{\bar{Y}}_2 \left[\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor h \right]$ і $A_{21} \Delta \tilde{\bar{Y}}_1 \left[\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor h + l T_0 \right]$ виступають як збурення разом зі стохастичними збуреннями $\Delta \bar{\xi}_1 \left[\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor h + l T_0 \right]$, $\Delta \bar{\xi}_2 \left[\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor h \right]$.

Припустимо, що система (6.65), (6.66) є стійкою. Для синтезу першого вектора керування $\Delta \bar{U}_1 \left[\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor h + l T_0 \right]$, який реалізується з періодом дискретизації T_0 за $l = 0, 1, \dots, (m-1)$, сформуємо квадратичний критерій оптимальності:

$$\begin{aligned} J_1 \left[\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor h + (l+1) T_0 \right] = & E \left\{ \left[\bar{Y}_1 \left[\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor h + (l+1) T_0 \right] - \bar{G}_1 \right]^T \cdot \right. \\ & \cdot \left. \left[\bar{Y}_1 \left[\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor h + (l+1) T_0 \right] - \bar{G}_1 \right] + \Delta \bar{U}_1^T \left[\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor h + l T_0 \right] R_1 \Delta \bar{U}_1 \left[\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor h + l T_0 \right] \right\}, \end{aligned} \quad (6.67)$$

де $\bar{G}_1$ – вектор задавальних дій (бажаних значень) для керування координатами вершин КК $\bar{Y}_1$, а E – оператор математичного сподівання.

Критерій оптимальності J_1 являє собою узагальнену дисперсію вектора помилки керування $\left[\bar{Y}_1 \left[\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor h + (l+1) T_0 \right] - \bar{G}_1 \right]$ і $\Delta \bar{U}_1 \left[\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor h + l T_0 \right]$.

На основі мінімізації цього критерію за вектором керуючих дій $\Delta \bar{U}_1$ з урахуванням (6.65) отримаємо рівняння першого оптимального регулятора:

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_1 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + (l+1)T_0 \right]}{\partial \Delta \bar{U}_1^T \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right]} = 2B_{11}^T \left\{ \left(I_{11} + A_{11} - A_{11}q_1^{-1} \right) \bar{Y}_1 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right] + \right. \\ \left. + B_{11} \Delta \bar{U}_1 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right] + A_{12} \Delta \tilde{\bar{Y}}_2 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] + \right. \\ \left. + \Delta \bar{\xi}_1 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right] - \bar{G}_1 \right\} + 2R_1 \Delta \bar{U}_1 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right] = 0, \end{aligned}$$

звідки визначаємо закон керування першого регулятора у приростах змінних для першої підсистеми (6.65):

$$\begin{aligned} \Delta \bar{U}_1 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right] = - \left(B_{11}^T B_{11} + R_1 \right)^{-1} B_{11}^T \left\{ \left(I_{11} + A_{11} - A_{11}q_1^{-1} \right) \cdot \right. \\ \left. \cdot \bar{Y}_1 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right] + A_{12} \Delta \tilde{\bar{Y}}_2 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] + \Delta \bar{\xi}_1 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right] - \bar{G}_1 \right\}, \quad (6.68) \\ l = 0, 1, \dots, (m-1), \end{aligned}$$

який, після розкриття різниці $\Delta \bar{U}_1$, можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} \bar{U}_1 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right] = \bar{U}_1 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + (l-1)T_0 \right] - \left(B_{11}^T B_{11} + R_1 \right)^{-1} B_{11}^T \left\{ \left(I_{11} + A_{11} - A_{11}q_1^{-1} \right) \cdot \right. \\ \left. \cdot \bar{Y}_1 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right] + A_{12} \Delta \tilde{\bar{Y}}_2 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] + \Delta \bar{\xi}_1 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right] - \bar{G}_1 \right\}. \quad (6.69) \end{aligned}$$

Для синтезу другого вектора керування $\Delta \bar{U}_2 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right]$, який реалізу-

ється з періодом $h = mT_0$, сформулюємо другий квадратичний критерій оптимальності:

$$\begin{aligned} J_2 \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] + 1 \right) h \right] = E \left\{ \left[\bar{Y}_2 \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] + 1 \right) h \right] - \bar{G}_2 \right]^T \cdot \right. \\ \left. \cdot \left[\bar{Y}_2 \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] + 1 \right) h \right] - \bar{G}_2 \right] + \Delta \bar{U}_2^T \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] R_2 \Delta \bar{U}_2 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] \right\}, \quad (6.70) \end{aligned}$$

де $\bar{G}_2$ – вектор задавальних дій для керування координатами вершин КК $\bar{Y}_2$. Критерій J_2 також являє собою узагальнену дисперсію вектора

помилки керування $\left[\bar{Y}_2 \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] + 1 \right) h \right] - \bar{G}_2 \right]$ і зваженого вектора $\Delta \bar{U}_2 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right]$.

На основі мінімізації критерію (6.70) за вектором керування $\Delta \bar{U}_2$ з урахуванням (6.66) синтезуємо рівняння другого регулятора:

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_2 \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] + 1 \right) h \right]}{\partial \Delta \bar{U}_2 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right]} = 2B_{22}^T \left\{ \left(I_{22} + A_{22} - A_{22}q_2^{-1} \right) \bar{Y}_2 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] + \right. \\ \left. + B_{22} \Delta \bar{U}_2 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] + A_{21} \Delta \tilde{\bar{Y}}_1 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right] + \right. \\ \left. + \Delta \bar{\xi}_2 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] - \bar{G}_2 \right\} + 2R_2 \Delta \bar{U}_2 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] = 0, \end{aligned}$$

звідки визначимо закон керування другого регулятора:

$$\begin{aligned} \bar{U}_2 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] = \bar{U}_2 \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - 1 \right) h \right] - \left(B_{22}^T B_{22} + R_2 \right)^{-1} B_{22}^T \left\{ \left(I_{22} + A_{22} - A_{22}q_2^{-1} \right) \cdot \right. \\ \left. \cdot \bar{Y}_2 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] + A_{21} \Delta \bar{Y}_1 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right] + \Delta \bar{\xi}_2 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] - \bar{G}_2 \right\}. \quad (6.71) \end{aligned}$$

У моделі імпульсного процесу (6.66), в якій вектор $\bar{Y}_2$ вимірюється в дискретні моменти часу, кратні h , часто вимірювані координати $\Delta \tilde{\bar{Y}}_1 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right]$ треба враховувати на основі твердження 6.1 згідно з (6.61).

Коефіцієнти матриць $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}$ керованих моделей імпульсних процесів (6.64) з різнотемповою дискретизацією складно оцінити експертно, до того ж, вони можуть змінюватися за часом. Тому пропонуємо оцінювати їх на основі рекурентного методу найменших квадратів, як буде описано в підрозд. 7.2.

6.3.2. Комбіноване керування імпульсними процесами в когнітивних картах з різнометровою дискретизацією на основі варіювання вагових коефіцієнтів ребер і ресурсів координат вершин

Під час різнометрової дискретизації координат вершин КК для керування імпульсним процесом буває недостатньо кількості вершин, ресурси яких можна варіювати для формування керуючих дій, тобто через зовнішній вплив на вершини. У разі недостатньої кількості таких вершин пропонуємо використовувати комбінований підхід до синтезу керуючих дій, що додатково включає варіювання вагових коефіцієнтів ребер КК, тобто керування через зміну ступеня впливу одних вершин на інші [34]. Спочатку розглянемо, як реалізувати керування тільки через варіювання ваг ребер КК у різнометровому випадку, а потім, як реалізувати комбіноване керування.

Запишемо аналог рівнянь 6.64 під дією зовнішніх збурень $\Delta \bar{\xi}$ під час формування керуючих дій варіюванням вагових коефіцієнтів:

$$\begin{aligned} \Delta \bar{Y}_1 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + (l+1)T_0 \right] &= A_{11} \Delta \bar{Y}_1 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right] + A_{12} \Delta \bar{Y}_2 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] + \\ &+ L_{11} \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right] \Delta \bar{a}_1 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right] + \Delta \bar{\xi}_1 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right]; \\ \Delta \bar{Y}_2 \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] + 1 \right) h \right] &= A_{21} \Delta \bar{Y}_1 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right] + A_{22} \Delta \bar{Y}_2 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] + \\ &+ L_{22} \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] \Delta \bar{a}_2 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] + \Delta \bar{\xi}_2 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right], \end{aligned} \quad (6.72)$$

де $\Delta \bar{a}_1 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right]$, $\Delta \bar{a}_2 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right]$ – вектори приростів вагових коефіцієнтів, які можна варіювати, що включають тільки ненульові елементи, а матриці $L_{11} \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right]$, $L_{22} \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right]$ складаються з тих вимірюваних координат, на які можна впливати за допомогою цих коефіцієнтів, причому у кожному рядку цих матриць може бути не більше одного ненульового елемента. Спосіб формування цих матриць повністю аналогічний до описаного в підрозд. 3.1. Для простоти будемо вважати, що варіювати

можна лише ті коефіцієнти ребер, які з'єднують між собою дві повільно діючі або дві швидкодіючі координати. Це дозволяє зберегти декомпозицію системи на швидкодіючу і повільно діючу підсистеми та визначити вектори $\Delta \bar{a}_1 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right]$, $\Delta \bar{a}_2 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right]$ незалежно один від одного. Задача керування, як і раніше, полягає у виведенні вихідних координат вершин $\bar{Y}_1$ і $\bar{Y}_2$ на задані рівні $\bar{G}_1$ і $\bar{G}_2$.

Розпишемо рівняння (6.72) у повних значеннях координат вершин аналогічно до того, як було зроблено у (6.65), (6.66):

$$\begin{aligned} \bar{Y}_1 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + (l+1)T_0 \right] = & \left(I_{11} + A_{11} - A_{11}q_1^{-1} \right) \bar{Y}_1 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right] + \\ & + A_{12} \Delta \bar{Y}_2 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] + L_{11} \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right] \cdot \\ & \cdot \Delta \bar{a}_1 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right] + \Delta \bar{\xi}_1 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right]; \end{aligned} \quad (6.73)$$

$$\begin{aligned} \bar{Y}_2 \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] + 1 \right) h \right] = & \left(I_{22} + A_{22} - A_{22}q_2^{-1} \right) \Delta \bar{Y}_2 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] + \\ & + A_{21} \Delta \bar{Y}_1 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right] + L_{22} \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] \cdot \\ & \cdot \Delta \bar{a}_2 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] + \Delta \bar{\xi}_2 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right]. \end{aligned} \quad (6.74)$$

Тут I_{11} , I_{22} – одиничні матриці відповідних розмірностей, узгоджених з кількістю швидко- і повільновимірюваних координат, а q_1^{-1} , q_2^{-1} – оператори зворотних зсувів на періоди дискретизації T_0 і h відповідно.

Введемо два квадратичні критерії оптимальності для підсистеми зі швидко- і повільновимірюваними координатами вершин:

$$\begin{aligned} J_1 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + (l+1)T_0 \right] = & E \left\{ \left[\bar{Y}_1 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + (l+1)T_0 \right] - \bar{G}_1 \right]^T \cdot \right. \\ & \cdot \left. \left[\bar{Y}_1 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + (l+1)T_0 \right] - \bar{G}_1 \right] + \Delta \bar{a}_1^T \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right] R_1 \Delta \bar{a}_1 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right] \right\}; \end{aligned}$$

$$J_2 \left[\left(\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor + 1 \right) h \right] = E \left\{ \left[\bar{Y}_2 \left[\left(\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor + 1 \right) h \right] - \bar{G}_2 \right]^T \cdot \right. \\ \left. \cdot \left[\bar{Y}_2 \left[\left(\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor + 1 \right) h \right] - \bar{G}_2 \right] + \Delta \bar{a}_2^T \left[\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor h \right] R_2 \Delta \bar{a}_2 \left[\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor h \right] \right\}. \quad (6.75)$$

Після взяття похідних

$$\frac{\partial J_1 \left[\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor h + (l+1)T_0 \right]}{\partial \bar{a}_1 \left[\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor h + lT_0 \right]} = 0; \quad \frac{\partial J_2 \left[\left(\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor + 1 \right) h \right]}{\partial \bar{a}_2 \left[\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor h \right]} = 0,$$

дістанемо рівняння різнотемпових регуляторів, з яких отримаємо закони керування:

$$\Delta \bar{a}_1 \left[\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor h + lT_0 \right] = - \left\{ L_{11}^T \left[\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor h + lT_0 \right] L_{11} \left[\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor h + lT_0 \right] + R_1 \right\}^{-1} \cdot \\ \cdot L_{11}^T \left[\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor h + lT_0 \right] \left\{ \left(I_{11} + A_{11} - A_{11}q^{-1} \right) \bar{Y}_1 \left[\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor h + lT_0 \right] + \right. \\ \left. + A_{12} \Delta \bar{Y}_2 \left[\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor h \right] + \Delta \bar{\xi}_1 \left[\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor h + lT_0 \right] - \bar{G}_1 \right\}; \\ \Delta \bar{a}_2 \left[\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor h \right] = \left\{ L_{22}^T \left[\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor h \right] L_{22} \left[\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor h \right] + R_1 \right\}^{-1} \cdot \\ \cdot L_{22}^T \left[\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor h \right] \left\{ \left(I_{22} + A_{22} - A_{22}q^{-1} \right) \bar{Y}_2 \left[\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor h \right] + \right. \\ \left. + A_{21} \Delta \bar{Y}_1 \left[\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor h + lT_0 \right] + \Delta \bar{\xi}_2 \left[\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor h \right] - \bar{G}_2 \right\}.$$

Перейдемо до варіанта комбінованого керування. Нехай серед повільновимірюваних і швидковимірюваних вершин КК складної системи є і такі, на які можна впливати варіюванням їх ресурсів, і такі, якими можна керувати через варіювання ступеня впливу на них інших вершин КК, тобто через варіювання вагові коефіцієнтів КК. Тоді динаміку

керуваного різнотемпового імпульсного процесу КК можна записати так [34]:

$$\begin{aligned}
\Delta \bar{Y}_1 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + (l+1)T_0 \right] &= A_{11} \Delta \bar{Y}_1 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right] + \\
&+ A_{12} \Delta \tilde{\bar{Y}}_2 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] + \left\{ B_{11} \quad L_{11} \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right] \right\} \cdot \\
&\cdot \begin{bmatrix} \bar{U}_1 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right] \\ \Delta \bar{a}_1 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right] \end{bmatrix} + \Delta \bar{\xi}_1 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right]; \\
\Delta \bar{Y}_2 \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] + 1 \right) h \right] &= A_{22} \Delta \bar{Y}_2 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] + \\
&+ A_{21} \Delta \tilde{\bar{Y}}_2 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right] + \left\{ B_{22} \quad L_{22} \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] \right\} \cdot \\
&\cdot \begin{bmatrix} \Delta \bar{U}_2 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] \\ \Delta \bar{a}_2 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] \end{bmatrix} + \Delta \bar{\xi}_2 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right].
\end{aligned}$$

Перехід до повних координат вершин КК здійснюємо так, як описано вище:

$$\begin{aligned}
\bar{Y}_1 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + (l+1)T_0 \right] &= \left(I_{11} + A_{11} - A_{11} q_1^{-1} \right) \bar{Y}_1 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right] + \\
&+ A_{12} \Delta \tilde{\bar{Y}}_2 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] + \left[B_{11} \quad L_{11} \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right] \right] \cdot \\
&\cdot \begin{bmatrix} \Delta \bar{U}_1 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right] \\ \Delta \bar{a}_1 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right] \end{bmatrix} + \Delta \bar{\xi}_1 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right]; \tag{6.76}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{Y}_2 \left[\left(\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor + 1 \right) h \right] &= (I_{22} + A_{22} - A_{22} q_2^{-1}) \bar{Y}_2 \left[\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor h \right] + \\
&+ A_{21} \Delta \bar{Y}_1 \left[\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor h + l T_0 \right] + \left\{ B_{22} \quad L_{22} \left[\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor h \right] \right\} \cdot \\
&\cdot \begin{bmatrix} \Delta \bar{U}_2 \left[\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor h \right] \\ \Delta \bar{a}_2 \left[\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor h \right] \end{bmatrix} + \Delta \bar{\xi}_2 \left[\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor h \right]. \quad (6.77)
\end{aligned}$$

Критерій оптимальності для обох підсистем (6.76), (6.77) не має принципової відмінності між безпосереднім керуванням ресурсами вершин КК (6.67), (6.70) та варіюванням вагових коефіцієнтів (6.75), їх можна сформулювати таким чином:

$$\begin{aligned}
J_1 \left[\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor h + (l+1) T_0 \right] &= E \left\{ \left[\bar{Y}_1 \left[\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor h + (l+1) T_0 \right] - \bar{G}_1 \right]^T \cdot \right. \\
&\cdot \left[\bar{Y}_1 \left[\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor h + (l+1) T_0 \right] - \bar{G}_1 \right] + \begin{bmatrix} \Delta \bar{U}_1 \left[\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor h + l T_0 \right] \\ \Delta \bar{a}_1 \left[\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor h + l T_0 \right] \end{bmatrix}^T \cdot \\
&\cdot \begin{bmatrix} R_{11} & 0 \\ 0 & R_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \bar{U}_1 \left[\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor h + l T_0 \right] \\ \Delta \bar{a}_1 \left[\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor h + l T_0 \right] \end{bmatrix} \Bigg\}; \quad (6.78)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_2 \left[\left(\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor + 1 \right) h \right] &= E \left\{ \left[\bar{Y}_2 \left[\left(\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor + 1 \right) h \right] - \bar{G}_2 \right]^T \cdot \right. \\
&\cdot \left[\bar{Y}_2 \left[\left(\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor + 1 \right) h \right] - \bar{G}_2 \right] + \begin{bmatrix} \Delta \bar{U}_2 \left[\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor h \right] \\ \Delta \bar{a}_2 \left[\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor h \right] \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} R_{21} & 0 \\ 0 & R_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \bar{U}_2 \left[\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor h \right] \\ \Delta \bar{a}_2 \left[\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor h \right] \end{bmatrix} \Bigg\}. \quad (6.79)
\end{aligned}$$

Будемо мінімізувати їх за комбінованими векторами керувань через варіювання ресурсів координат вершин і варіювання вагових коефіцієнтів КК, а саме

$$\frac{\partial J_1 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + (l+1)T_0 \right]}{\partial \begin{bmatrix} \Delta \bar{U}_1 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right] \\ \Delta \bar{a}_1 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right] \end{bmatrix}} = 0; \quad \frac{\partial J_2 \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] + 1 \right) h \right]}{\partial \begin{bmatrix} \Delta \bar{U}_2 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] \\ \Delta \bar{a}_2 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] \end{bmatrix}} = 0,$$

у результаті чого отримуємо рівняння різнотемпових регуляторів:

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_1 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + (l+1)T_0 \right]}{\partial \begin{bmatrix} \Delta \bar{U}_1 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right] \\ \Delta \bar{a}_1 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right] \end{bmatrix}} &= 2 \begin{bmatrix} B_{11}^T \\ L_{11}^T \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right] \end{bmatrix} \cdot \\ &\left\{ \left(I_{11} + A_{11} - A_{11}q_1^{-1} \right) \bar{Y}_1 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right] + \right. \\ &+ \begin{bmatrix} B_{11} & L_{11} \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \bar{U}_1 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right] \\ \Delta \bar{a}_1 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right] \end{bmatrix} + \\ &+ \Delta \bar{\xi}_1 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right] - \bar{G}_1 \left. \right\} + 2 \begin{bmatrix} R_{11} & 0 \\ 0 & R_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \bar{U}_1 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right] \\ \Delta \bar{a}_1 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right] \end{bmatrix} = 0; \quad (6.80) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial J_2 \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] + 1 \right) h \right]}{\partial \begin{bmatrix} \Delta \bar{U}_2 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] \\ \Delta \bar{a}_2 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] \end{bmatrix}} = 2 \begin{bmatrix} B_{22}^T \\ L_{22}^T \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] \end{bmatrix} \cdot \\
& \left\{ \left(I_{22} + A_{22} - A_{22} q^{-1} \right) \bar{Y}_2 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] + \begin{bmatrix} B_{22} & L_{22} \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{U}_2 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] \\ \Delta \bar{a}_2 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] \end{bmatrix} + \right. \\
& \left. + \Delta \bar{\xi}_2 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] - \bar{G}_2 \right\} + 2 \begin{bmatrix} R_{21} & 0 \\ 0 & R_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \bar{U}_1 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] \\ \Delta \bar{a}_2 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] \end{bmatrix} = 0. \quad (6.81)
\end{aligned}$$

Розв'язуючи рівняння (6.80), (6.81), отримаємо закони різнотемпового комбінованого оптимального керування для підсистем (6.76), (6.77) зі швидковимірюваними і повільновимірюваними координатами вершин КК:

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} \Delta \bar{U}_1 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right] \\ \Delta \bar{a}_1 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right] \end{bmatrix} = - \left\{ \begin{bmatrix} B_{11}^T \\ L_{11}^T \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & L_{11} \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right] \end{bmatrix} + \right. \\
& \left. + \begin{bmatrix} R_{11} & 0 \\ 0 & R_{12} \end{bmatrix} \right\}^{-1} \begin{bmatrix} B_{11}^T \\ L_{11}^T \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right] \end{bmatrix} \left\{ \left(I_{11} + A_{11} - A_{11} q_1^{-1} \right) \bar{Y}_1 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right] + \right. \\
& \left. + A_{12} \Delta \bar{Y}_2 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] + \Delta \bar{\xi}_1 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right] - \bar{G}_1 \right\}; \quad (6.82)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \Delta \bar{U}_2 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] \\ \Delta \bar{a}_2 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] \end{bmatrix} &= - \left\{ \begin{bmatrix} B_{22}^T \\ L_{22}^T \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{22} & L_{22} \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right] \end{bmatrix} \right\} + \\
&+ \left\{ \begin{bmatrix} R_{21} & 0 \\ 0 & R_{22} \end{bmatrix} \right\}^{-1} \begin{bmatrix} B_{22}^T \\ L_{22}^T \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] \end{bmatrix} \left\{ \left(I_{22} + A_{22} - A_{22}q_2^{-1} \right) \bar{Y}_2 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] + \right. \\
&\left. + A_{21} \Delta \bar{\tilde{Y}}_1 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right] + \Delta \bar{\xi}_2 \left[\frac{k}{m} \right] h - \bar{G}_2 \right\}. \quad (6.83)
\end{aligned}$$

За аналогією з аналізом стійкості, наведеним у підрозд. 3.2 для замкненої системи комбінованого керування з однотемповою дискретизацією, можна вивести, що для діагональних і додатно визначених вагових

матриць $\begin{bmatrix} R_{11} & 0 \\ 0 & R_{12} \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} R_{21} & 0 \\ 0 & R_{22} \end{bmatrix}$ обидві замкнені підсистеми керування

будуть стійкими, а саме:

а) для швидковимірюваних координат вершин (6.76), (6.82) рівняння замкненої системи буде мати вигляд

$$\begin{aligned}
\bar{Y}_1 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + (l+1)T_0 \right] &= \left\{ I_{11} - \begin{bmatrix} B_{11} & L_{11} \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right] \end{bmatrix} \right\} \cdot \\
&\left\{ \begin{bmatrix} B_{11}^T B_{11} & B_{11}^T L_{11} \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right] \\ L_{11}^T \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right] B_{11} & L_{11}^T \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right] L_{11} \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right] \end{bmatrix} \right\} + \\
&+ \left\{ \begin{bmatrix} R_{11} & 0 \\ 0 & R_{12} \end{bmatrix} \right\}^{-1} \begin{bmatrix} B_{11}^T \\ L_{11}^T \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right] \end{bmatrix} \left\{ \left(I_{11} + A_{11} - A_{11}q^{-1} \right) \cdot \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \bar{Y}_1 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right] + \left\{ I_{11} - \begin{bmatrix} B_{11} & L_{11} \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right] \end{bmatrix} \right\} \cdot \\
& \cdot \left[\begin{array}{cc} B_{11}^T B_{11} & B_{11}^T L_{11} \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right] \\ L_{11}^T \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right] B_{11} & L_{11}^T \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right] L_{11} \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right] \end{array} \right] + \\
& + \left[\begin{array}{cc} R_{11} & 0 \\ 0 & R_{12} \end{array} \right]^{-1} \left[\begin{array}{c} B_{11}^T \\ L_{11}^T \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right] \end{array} \right] \left\{ A_{12} \Delta \tilde{\bar{Y}}_2 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] + \right. \\
& \left. + \left\{ I_{11} - \begin{bmatrix} B_{11} & L_{11} \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right] \end{bmatrix} \right\} \cdot \right. \\
& \cdot \left[\begin{array}{cc} B_{11}^T B_{11} & B_{11}^T L_{11} \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right] \\ L_{11}^T \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right] B_{11} & L_{11}^T \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right] L_{11} \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right] \end{array} \right] + \\
& \left. + \left[\begin{array}{cc} R_{11} & 0 \\ 0 & R_{12} \end{array} \right]^{-1} \left[\begin{array}{c} B_{11}^T \\ L_{11}^T \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right] \end{array} \right] \right\} \cdot \\
& \cdot \Delta \bar{\xi}_1 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right] + \begin{bmatrix} B_{11} & L_{11} \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right] \end{bmatrix} \cdot \\
& \cdot \left[\begin{array}{cc} B_{11}^T B_{11} & B_{11}^T L_{11} \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right] \\ L_{11}^T \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right] B_{11} & L_{11}^T \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right] L_{11} \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right] \end{array} \right] + \\
& + \left[\begin{array}{cc} R_{11} & 0 \\ 0 & R_{12} \end{array} \right]^{-1} \left[\begin{array}{c} B_{11}^T \\ L_{11}^T \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right] \end{array} \right] \bar{G}_1; \tag{6.84}
\end{aligned}$$

б) рівняння замкненої підсистеми керування для повільновимірюваних координат вершин КК на основі (6.77), (6.83) матиме вигляд

$$\begin{aligned}
\bar{Y}_2 \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] + 1 \right) h \right] &= \left\{ I_{22} - \begin{bmatrix} B_{22} & L_{22} \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] \end{bmatrix} \right\} \cdot \\
&\cdot \left\{ \begin{bmatrix} B_{22}^T B_{22} & B_{22}^T L_{22} \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] \\ L_{22}^T \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] B_{22} & L_{22}^T \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] L_{22} \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] \end{bmatrix} \right\} + \\
&+ \left\{ \begin{bmatrix} R_{21} & 0 \\ 0 & R_{22} \end{bmatrix} \right\}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} B_{22}^T \\ L_{22}^T \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] \end{bmatrix} \right\} \left(I_{22} + A_{22} - A_{22} q_2^{-1} \right) \cdot \\
&\cdot \bar{Y}_2 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] + \left\{ I_2 - \begin{bmatrix} B_{22} & L_2 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] \end{bmatrix} \right\} \cdot \\
&\cdot \left\{ \begin{bmatrix} B_{22}^T B_{22} & B_{22}^T L_{22} \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] \\ L_{22}^T \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] B_{22} & L_{22}^T \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] L_{22} \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] \end{bmatrix} \right\} + \left\{ \begin{bmatrix} R_{21} & 0 \\ 0 & R_{22} \end{bmatrix} \right\}^{-1} \cdot \\
&\cdot \left\{ \begin{bmatrix} B_{22}^T \\ L_{22}^T \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] \end{bmatrix} \right\} \Delta \tilde{Y}_1 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + l T_0 \right] + \\
&+ \left\{ I_2 - \begin{bmatrix} B_{22} & L_{22} \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] \end{bmatrix} \right\} \cdot \\
&\cdot \left\{ \begin{bmatrix} B_{22}^T B_{22} & B_{22}^T L_{22} \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] \\ L_{22}^T \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] B_{22} & L_{22}^T \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] L_{22} \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] \end{bmatrix} \right\} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \begin{bmatrix} R_{21} & 0 \\ 0 & R_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} B_{22}^T \\ L_{22}^T \left[\begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} h \right] \end{bmatrix} \Bigg\} \cdot \\
& \cdot \Delta \bar{\xi}_2 \left[\begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} h \right] + \begin{bmatrix} B_{22} & L_{22} \left[\begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} h \right] \end{bmatrix} \cdot \\
& \cdot \begin{bmatrix} B_{22}^T B_{22} & B_{22}^T L_{22} \left[\begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} h \right] \\ L_{22}^T \left[\begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} h \right] B_{22} & L_{22}^T \left[\begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} h \right] L_{22} \left[\begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} h \right] \end{bmatrix} + \\
& + \begin{bmatrix} R_{21} & 0 \\ 0 & R_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} B_{22}^T \\ L_{22}^T \left[\begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} h \right] \end{bmatrix} \bar{G}_2. \tag{6.85}
\end{aligned}$$

6.4. Приглушення обмежених внутрішніх збурень в імпульсному процесі когнітивних карт з різнотемповою дискретизацією за допомогою варіювання вагових коефіцієнтів когнітивних карт

Розглянемо моделі (6.72) різнотемпових імпульсних процесів КК для швидковимірюваних і повільновимірюваних координат вершин без зовнішніх збурень $\bar{\xi}$ з формуванням керуючих дій тільки через прирости вагових коефіцієнтів ребер КК:

$$\begin{aligned}
& \Delta \bar{Y}_1 \left[\begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} h + (l+1)T_0 \right] = A_{11} \Delta \bar{Y}_1 \left[\begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} h + lT_0 \right] + \\
& + A_{12} \Delta \bar{\tilde{Y}}_2 \left[\begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} h \right] + L_{11} \left[\begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} h + lT_0 \right] \Delta \bar{a}_1 \left[\begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} h + lT_0 \right]; \tag{6.86}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \Delta \bar{Y}_2 \left[\left(\left[\begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} \right] + 1 \right) h \right] = A_{21} \Delta \bar{\tilde{Y}}_1 \left[\begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} h + lT_0 \right] + \\
& + A_{22} \Delta \bar{Y}_2 \left[\begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} h \right] + L_{22} \left[\begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} h \right] \Delta \bar{a}_2 \left[\begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} h \right]; \tag{6.87}
\end{aligned}$$

У складних системах різної природи природа збурень не є гармонічною або стохастичною, тобто вплив збурень не є близьким до білого шуму, а його розподіл невідомий.

Найпоширенішим завданням у складних системах є приглушення внутрішніх збурень. За умови, що ці збурення обмежені за нормою l_∞ (4.23), скористаємось методикою приглушення збурень, розробленою в розд. 4 на основі методу інваріантних еліпсоїдів. При цьому треба адаптувати підхід, наведений у підрозд. 4.2, до особливостей поставленої задачі, а саме, до різнотемпової дискретизації частин координат вершин КК та до формування керуючих дій варіюванням вагових коефіцієнтів ребер КК. Зауважимо, що в ролі обмежених внутрішніх збурень тут виступають коливання повільно діючої координати $\Delta \tilde{\bar{Y}}_2$ у моделі (6.86) для швидковимірюваних координат $\bar{Y}_1$, а у моделі (6.87) для повільновимірюваних координат внутрішніми збуреннями є коливання швидковимірюваних координат $\Delta \tilde{\bar{Y}}_1$.

Інваріантний еліпсоїд для швидковимірюваного вектора $\Delta \bar{Y}_1$ в моделі (6.86) запишемо таким чином [21]:

$$\varepsilon_{\Delta \bar{Y}_1} = \left\{ \Delta \bar{Y}_1 \left[\begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} h + lT_0 \right] \in \mathbb{R}^p : \Delta \bar{Y}_1^T \left[\begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} h + lT_0 \right] P_1^{-1} \Delta \bar{Y}_1 \left[\begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} h + lT_0 \right] \leq 1 \right\}, \quad (6.88)$$

$$P_1 > 0.$$

Цей еліпсоїд буде інваріантним для вектора $\Delta \bar{Y}_1$, якщо з $\Delta \bar{Y}_1(0) \in \xi_{\Delta \bar{Y}_1}$ випливає, що $\Delta \bar{Y}_1 \left[\begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} h + lT_0 \right] \in \varepsilon_{\Delta \bar{Y}_1}$ для усіх моментів часу.

Внутрішні збурення $\Delta \tilde{\bar{Y}}_2 \left[\begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} h \right]$ в моделі (6.86) мають бути обмеженими, тобто

$$\|\Delta \bar{Y}_2\|_\infty = \sup_{k \geq 0} \left\{ \Delta \tilde{\bar{Y}}_2^T \left[\begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} h \right] \Delta \tilde{\bar{Y}}_2 \left[\begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} h \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \leq 1. \quad (6.89)$$

Інваріантний еліпсоїд для повільновимірюваного вектора $\Delta \bar{Y}_2$ в моделі (6.87) запишемо так:

$$\varepsilon_{\Delta \bar{Y}_2} = \left\{ \Delta \bar{Y}_2 \left[\begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} h \right] \in \mathbb{R}^{n-p} : \Delta \bar{Y}_2^T \left[\begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} h \right] P_2^{-1} \Delta \bar{Y}_2 \left[\begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} h \right] \leq 1 \right\}, \quad (6.90)$$

$$P_2 > 0.$$

Цей еліпсоїд буде інваріантним для вектора $\Delta \bar{Y}_2$, якщо $\Delta \bar{Y}_2(0) \in \mathcal{E}_{\Delta \bar{Y}_2}$, і з цього випливає $\Delta \bar{Y}_2 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] \in \mathcal{E}_{\Delta \bar{Y}_2}$ для всіх моментів часу. Внутрішні збурення $\Delta \tilde{Y}_1 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right]$ в моделі (6.87) мають бути $l\infty$ -обмеженими [21], тобто

$$\|\Delta \bar{Y}_1\|_\infty = \sup_{k \geq 0} \left\{ \Delta \tilde{Y}_1^T \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right] \Delta \bar{Y}_1 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \leq 1. \quad (6.91)$$

У моделі (6.86) обмежені внутрішні збурення $\Delta \tilde{Y}_2 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right]$ будемо приглушувати за допомогою варіювання вектора $\Delta \bar{a}_1 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right]$, що буде формуватися швидкодіючим регулятором стану

$$\Delta \bar{a}_1 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right] = -K_f \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right] \Delta \bar{Y}_1 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right]. \quad (6.92)$$

Цей регулятор має забезпечувати оптимальну швидкість зміни вагових коефіцієнтів ребер КК $\Delta \bar{a}_1$, які є керуючими діями, залежно від швидкості зміни швидкозмірюваних координат вершин $\Delta \bar{Y}_1$.

Також будемо приглушувати обмежені швидкозмінні збурення $\Delta \tilde{Y}_1 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right]$ у моделі (6.87) за допомогою варіювання вектора $\Delta \bar{a}_2 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right]$, який буде формуватись повільно діючим регулятором стану

$$\Delta \bar{a}_2 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] = -K_s \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] \Delta \bar{Y}_2 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right]. \quad (6.93)$$

Якщо прирости координат $\Delta \bar{Y}_1, \Delta \bar{Y}_2$ у законах керування (6.92), (6.93) лишаються незмінними, то і прирости $\Delta \bar{a}_1, \Delta \bar{a}_2$ будуть нульовими.

Таким чином, вектори керуючих дій $\Delta \bar{a}_1 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right], \Delta \bar{a}_2 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right]$ призначені для стабілізації перехідного процесу у динаміці складної

системи, поданої моделями імпульсних процесів КК (6.86), (6.87) під дією збурень $\Delta\tilde{Y}_2\left[\left[\frac{k}{m}\right]h\right]$, $\Delta\tilde{Y}_1\left[\left[\frac{k}{m}\right]h+lT_0\right]$, обмежених згідно з (6.89), (6.91).

Алгоритми для законів керування (6.92), (6.93) ґрунтуються на мінімізації критеріїв оптимальності

$$\text{tr}P_1 \rightarrow \min, \quad (6.94)$$

$$\text{tr}P_2 \rightarrow \min, \quad (6.95)$$

де P_1 – матриця еліпсоїда (6.88), а P_2 – еліпсоїда (6.90). Критерії (6.94), (6.95) забезпечують мінімальні розміри інваріантних еліпсоїдів (6.88), (6.90) з максимальним приглушенням збурень, обмежених тільки діапазонами (6.89) і (6.91).

На основі моделей імпульсних процесів з різнотемповою дискретизацією (6.86), (6.87) та законів керування (6.92), (6.93) рівняння замкнених контурів швидкодіючої і повільно діючої підсистем керування можна записати таким чином:

$$\begin{aligned} \Delta\bar{Y}_1\left[\left[\frac{k}{m}\right]h+(l+1)T_0\right] &= \left\{ A_{11} - L_{11}\left[\left[\frac{k}{m}\right]h+lT_0\right] \cdot \right. \\ &\cdot K_f\left[\left[\frac{k}{m}\right]h+lT_0\right] \left. \right\} \Delta\bar{Y}_1\left[\left[\frac{k}{m}\right]h+lT_0\right] + A_{12}\Delta\tilde{Y}_2\left[\left[\frac{k}{m}\right]h\right]; \end{aligned} \quad (6.96)$$

$$\begin{aligned} \Delta\bar{Y}_2\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right]+1\right)h\right] &= \left\{ A_{22} - L_{22}\left[\left[\frac{k}{m}\right]h\right] \cdot K_s\left[\left[\frac{k}{m}\right]h\right] \right\} \cdot \\ &\cdot \Delta\bar{Y}_2\left[\left[\frac{k}{m}\right]h\right] + A_{21}\Delta\tilde{Y}_1\left[\left[\frac{k}{m}\right]h+lT_0\right]. \end{aligned} \quad (6.97)$$

Припустимо, що обидві підсистеми (6.86), (6.87) є керованими. За методикою, наведеною в підрозд. 4.2, запишемо лінійні матричні нерівності для замкнених систем (6.96), (6.97):

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\alpha_1} \left\{ A_{11} - L_{11}\left[\left[\frac{k}{m}\right]h+lT_0\right] K_f\left[\left[\frac{k}{m}\right]h+lT_0\right] \right\} \cdot \\ &\cdot \bar{P}_1\left[\left[\frac{k}{m}\right]h+lT_0\right] \left\{ \left\{ A_{11} - L_{11}\left[\left[\frac{k}{m}\right]h+lT_0\right] K_f\left[\left[\frac{k}{m}\right]h+lT_0\right] \right\}^T - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \bar{P}_1\left[\left[\frac{k}{m}\right]h+lT_0\right] + \frac{A_{12}A_{12}^T}{(1-\alpha_1)} \right\} \leq 0; \end{aligned} \quad (6.98)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\alpha_2} \left\{ A_{22} - L_{22} \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] K_s \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] \right\} \bar{P}_2 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] \cdot \\
& \cdot \left\{ A_{22} - L_{22} \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] K_s \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] \right\}^T - \\
& - \bar{P}_2 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] + \frac{A_{21} A_{21}^T}{(1 - \alpha_2)} \leq 0,
\end{aligned} \tag{6.99}$$

де $0 < \alpha_1 < 1$; $0 < \alpha_2 < 1 \dots$ Після перемноження отримаємо

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\alpha_1} \left\{ A_{11} P_1 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right] A_{11}^T - L_{11} \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right] K_f \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right] \right\} \cdot \\
& \cdot P_1 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right] A_{11}^T - A_{11} P_1 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right] K_f^T \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right] \cdot \\
& \cdot L_{11}^T \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right] + L_{11} \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right] K_f \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right] \cdot \\
& \cdot P_1 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right] K_f^T \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right] L_{11}^T \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right] \left\{ - \right. \\
& \left. - P_1 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right] + \frac{A_{12} A_{12}^T}{(1 - \alpha_1)} \leq 0; \right.
\end{aligned} \tag{6.100}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\alpha_2} \left\{ A_{22} P_2 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] A_{22}^T - L_{22} \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] K_s \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] \right\} \cdot \\
& \cdot P_2 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] A_{22}^T - A_{22} P_2 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] K_s^T \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] \cdot \\
& \cdot L_{22}^T \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] + L_{22} \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] K_s \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] \cdot \\
& \cdot P_2 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] K_s^T \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] L_{22}^T \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] \left\{ - \right. \\
& \left. - P_2 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] + \frac{A_{21} A_{21}^T}{(1 - \alpha_2)} \leq 0. \right.
\end{aligned} \tag{6.101}$$

Ці нерівності, відповідно, будуть нелінійними щодо $K_f \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right]$,
 $P_1 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right]$ та $K_s \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right]$, $P_2 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right]$.

Для лінеаризації пропонуємо такі змінні:

$$M_1 = K_f P_1; \quad M_2 = K_s P_2 \quad (6.102)$$

Також введемо допоміжні матриці $D_1 = D_1^T$; $D_2 = D_2^T$, такі що

$$\begin{bmatrix} D_1 & M_1 \\ M_1^T & P_1 \end{bmatrix} \geq 0; \quad (6.103)$$

$$\begin{bmatrix} D_2 & M_2 \\ M_2^T & P_2 \end{bmatrix} \geq 0. \quad (6.104)$$

За формулою Шура (див. дод. 5), якщо $P_1 > 0$, $P_2 > 0$, то нерівності (6.103), (6.104), відповідно, еквівалентні:

$$D_1 \geq M_1 P_1^{-1} M_1^T = K_f P_1 K_f^T;$$

$$D_2 \geq M_2 P_2^{-1} M_2^T = K_s P_2 K_s^T.$$

Тоді, щоб нерівностей (6.100), (6.101) було дотримано, достатньо, щоб

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\alpha_1} \left\{ A_{11} P_1 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right] A_{11}^T - L_{11} \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right] M_1 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right] A_{11}^T - \right. \\ & \quad \left. - A_{11} M_1^T \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right] L_{11}^T \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right] + L_{11} \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right] \cdot \right. \\ & \quad \left. \cdot D_1 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right] L_{11}^T \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right] \right\} - \\ & \quad - P_1 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right] + \frac{A_{12} A_{12}^T}{(1 - \alpha_1)} \leq 0; \end{aligned} \quad (6.105)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\alpha_2} \left\{ A_{22} P_2 \left[\begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} h \right] A_{22}^T - L_{22} \left[\begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} h \right] M_2 \left[\begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} h \right] A_{22}^T - \right. \\
& \quad \left. - A_{22} M_2^T \left[\begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} h \right] L_{22}^T \left[\begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} h \right] + L_{22} \left[\begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} h \right] \cdot \right. \\
& \quad \left. \cdot D_2 \left[\begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} h \right] L_{22}^T \left[\begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} h \right] \right\} - P_2 \left[\begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} h \right] + \frac{A_{21} A_{21}^T}{(1 - \alpha_2)} \leq 0; \quad (6.106)
\end{aligned}$$

Для синтезу швидкодійного регулятора (6.92) мінімізуємо критерій оптимальності (6.94) для швидкодійної підсистеми (6.96) за обмежень (6.103) на основі розв'язання нерівності (6.105) щодо змінних $P_1 \left[\begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} h + lT_0 \right], M_1 \left[\begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} h + lT_0 \right], D_1 \left[\begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} h + lT_0 \right]$ за допомогою напіввизначеного програмування з використанням SeDuMi Toolbox на базі Matlab.

Якщо визначено матриці $\hat{P}_1 \left[\begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} h + lT_0 \right], \hat{M}_1 \left[\begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} h + lT_0 \right], \hat{D}_1 \left[\begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} h + lT_0 \right]$ є точкою мінімуму, тоді оптимальний коефіцієнт $\hat{K}_f$ матриці швидкодійного регулятора (6.92) можна розраховувати на основі (6.102) як

$$\hat{K}_f \left[\begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} h + lT_0 \right] = \hat{M}_1 \left[\begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} h + lT_0 \right] \hat{P}_1^{-1} \left[\begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} h + lT_0 \right].$$

Аналогічно мінімізуємо критерій оптимальності (6.95) для підсистеми (6.97) з повільно вимірюваними координатами $\bar{Y}_2 \left[\begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} h \right]$ за обмежень (6.104), (6.106) щодо змінних $P_2 \left[\begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} h \right], M_2 \left[\begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} h \right], D_2 \left[\begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} h \right]$ на основі напіввизначеного програмування. Якщо $\hat{P}_2 \left[\begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} h \right], \hat{M}_2 \left[\begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} h \right], \hat{D}_2 \left[\begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} h \right]$ забезпечують мінімум (6.95), тоді оптимальний

коефіцієнт матриці K_s повільно діючого регулятора (6.93) будемо визначати на основі (6.102):

$$\hat{K}_s \left[\begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} h \right] = \hat{M}_2 \left[\begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} h \right] \hat{P}_2^{-1} \left[\begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} h \right].$$

Таким чином, для приглушення обмежених внутрішніх збурень використовують варіації вагових коефіцієнтів $\Delta \bar{a}_1$ і $\Delta \bar{a}_2$ у замкнених підсистемах керування з різноміжною дискретизацією на основі синтезу регуляторів стану (6.92), (6.93).

6.5. Проектування і дослідження системи комбінованого керування імпульсними процесами з різноміжною дискретизацією в когнітивній карті захворюваності на COVID-19

На рис. 6.1 зображено КК причинно-наслідкових зв'язків у процесі поширення захворюваності населення на COVID-19 у конкретному регіоні [27]. До складу КК входять такі вершини:

- 1 – кількість щоденно виявлених інфікованих хворих;
- 2 – кількість населення певного регіону, яке щоденно вакцинується;
- 3 – кількість хворих, які щоденно помирають від коронавірусу;
- 4 – кількість хворих, які перебувають в ізоляції у певному регіоні;
- 5 – кількість населення, яке вилікувалося від коронавірусу;
- 6 – кількість інфікованих пасажирів, які виявлені після прибуття з-за кордону;
- 7 – кількість хворих, які перебувають в лікарнях у певному регіоні;
- 8 – рівень інтенсивності контактів, установлений для населення в певному регіоні, у виробничих, навчальних, громадсько-побутових приміщеннях;
- 9 – рівень контактної захисту населення від зараження;
- 10 – кількість неізольованих хворих, які вільно переміщуються (зокрема й ті, які прибули з-за кордону і не були виявлені на кордоні);
- 11 – природа і небезпечність штаму вірусу.

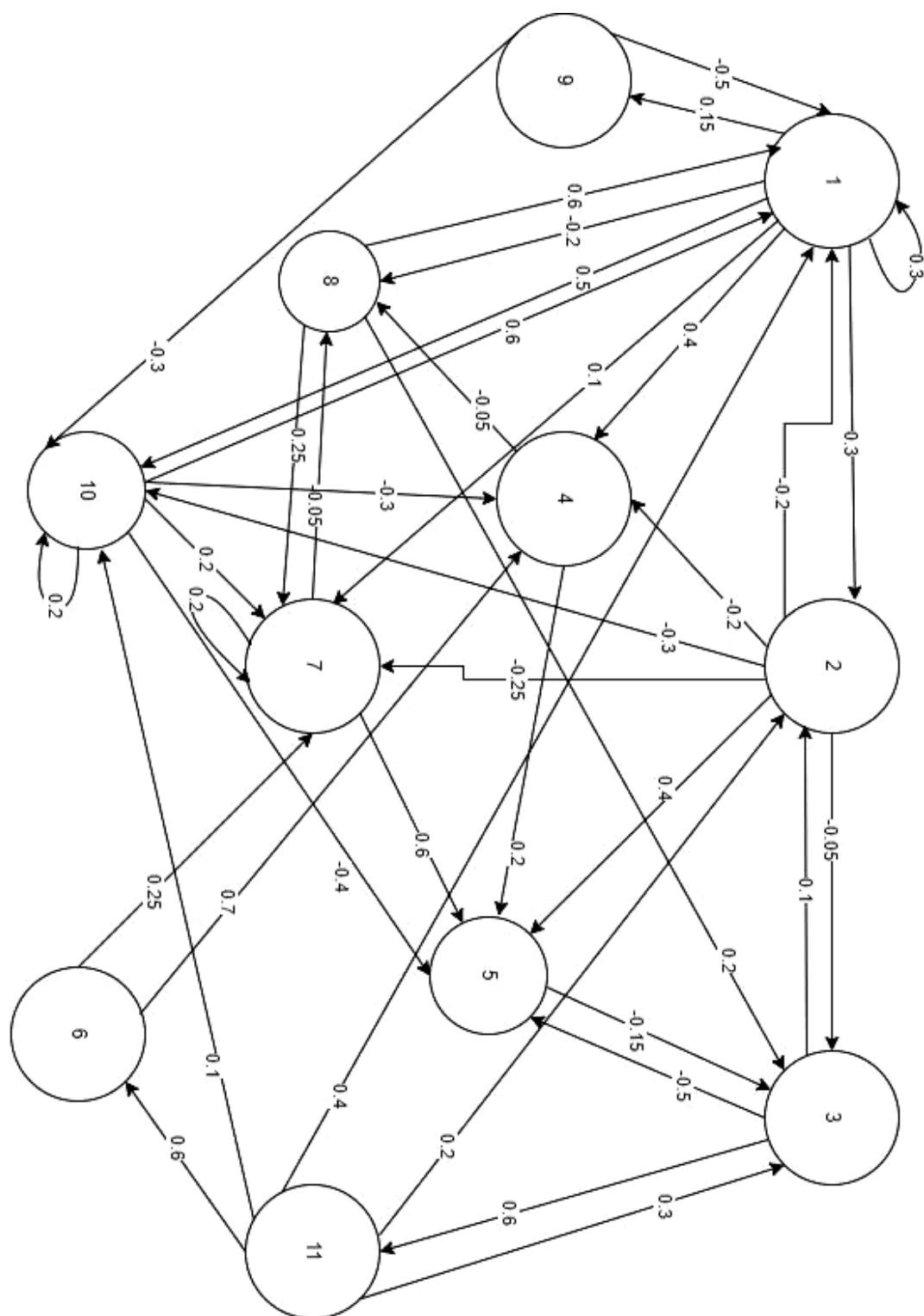


Рис. 6.1. Когнітивна карта причинно-наслідкових зв'язків у процесі поширення захворюваності населення на COVID-19 в конкретному регіоні

Кожна вершина КК впливає на інші вершини. Величину впливу оцінюють ваговими коефіцієнтами, які можуть мати додатний або від'ємний знак. Наприклад, вплив вершини 2 на вершину 10 визначається ваговим коефіцієнтом $-0,3$, тому що збільшення кількості населення, яке щоденно проходить вакцинацію, зумовлює зменшення кількості заражених неізолюваних хворих, які вільно пересуваються, а збільшення рівня небезпеки штаму вірусу (вершина 11) викликає збільшення кількості щоденно виявлених інфікованих хворих (вершина 1) з коефіцієнтом $0,4$.

Для реалізації когнітивного моделювання усі координати вершин КК, які відображають фактори різної фізичної природи, зазвичай зводять до єдиної шкали. Справді, під час побудови зваженого орієнтованого графа експерти не зможуть коректно виставити вагові коефіцієнти ребер між вершинами КК, якщо вони будуть вимірюватися в різних одиницях, як от рівень контактної захисту, кількість хворих, природа та небезпечність вірусу. Тому запропоновано застосувати десятибальну шкалу для вимірювання усіх координат вершини КК, де 0 балів буде характеризувати відсутність визначеного фактора, а 10 балів буде відображати максимально можливий рівень цього фактора на заданому часовому інтервалі. Ціну одного бала для кожної вершини КК визначають масштабуванням. Очевидно, що під час установлення значення фактора за цією шкалою може виникнути певний суб'єктивізм, який при цьому не завадить моделювати систему або керувати її поведінкою в цілому.

6.5.1. Розроблення моделей імпульсних процесів підсистем когнітивної карти з різнотемповою дискретизацією для швидковимірюваних і повільно вимірюваних координат

До швидковимірюваних координат вершин $\bar{x}_f$ КК належать вершини 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 (рис. 6.1). Для цих вершин буде застосовуватися малий період дискретизації T_0 . Повільно вимірюваною вершиною КК x_s є вершина 8 (рівень інтенсивності контактів для населення в певному регіоні). Координату цієї вершини вимірюють і фіксують у дискретні моменти часу з періодом дискретизації $h = mT_0$. Тоді попередню модель керованого імпульсного процесу на основі вагових коефіцієнтів КК можна подати у проміжній формі з однотемповою дискретизацією в загально-

му вигляді припускаючи, що всі координати вершин $\bar{x}_f$ і x_s можуть бути виміряні з періодом T_0 :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \Delta \bar{X}_f[(k+1)T_0] \\ \Delta \bar{X}_s[(k+1)T_0] \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{11_f} & A_{11_{fs}} \\ A_{11_{sf}} & A_{11_{ss}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \bar{X}_f(kT_0) \\ \Delta \bar{X}_s(kT_0) \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} B_f & 0 \\ 0 & B_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \bar{U}_f(kT_0) \\ \Delta \bar{U}_s(kT_0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_f(kT_0) & 0 \\ 0 & L_s(kT_0) \end{bmatrix} \cdot \\ &\cdot \begin{bmatrix} \Delta \bar{a}_f[(k+1)T_0] \\ \Delta \bar{a}_s[(k+1)T_0] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{12_f} \\ A_{12_s} \end{bmatrix} \Delta \bar{Y}(kT_0). \end{aligned} \quad (6.107)$$

До вектора $\bar{Y}$ входять невимірювані координати вершин КК, до яких належать вершини 9, 10, 11. Щоб сформувати керуючі дії, можна використовувати варіювання ресурсів координат вершин 2, 4, 8, відповідно

$$\Delta \bar{U}_f(kT_0) = \begin{bmatrix} \Delta U_2(kT_0) \\ \Delta U_4(kT_0) \end{bmatrix} \text{ і } \Delta U_s(kT_0) = \Delta U_8(kT_0). \text{ Для формування керуючих дій на основі варіювання вагових коефіцієнтів можна використати варіювання вагового коефіцієнта } \Delta a_{67}(kT_0) \text{ для швидковимірюваної підсистеми, тобто } \Delta a_f(kT_0) = \Delta a_{67}(kT_0). \text{ Тоді розмірності векторів у моделі (6.107) будуть } \dim \bar{x}_f = 7; \dim \bar{x}_s = 1; \dim \bar{U}_f = 2; \dim \bar{U}_s = 1; \dim \bar{Y} = 3.$$

Відповідно до КК на рис. 6.1 матриці в моделі (6.107) будуть мати такий вигляд:

$$A_{11_f} = \begin{bmatrix} 0,3 & -0,2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,3 & 0 & 0,1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,05 & 0 & 0 & -0,15 & 0 & 0 \\ 0,4 & -0,2 & 0 & 0 & 0 & 0,7 & 0 \\ 0 & 0,4 & -0,5 & 0,2 & 0 & 0 & 0,6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,1 & -0,25 & 0 & 0 & 0 & 0,25 & 0,2 \end{bmatrix};$$

$$A_{11_{fs}} = [0,6 \quad 0 \quad 0,2 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0,25]^T;$$

$$A_{11_{sf}} = [-0,2 \quad 0 \quad 0 \quad -0,05 \quad 0 \quad 0 \quad -0,05];$$

$$A_{11_{ss}} = 0.$$

Матрицю B_f формує проєктувальник системи керування імпульсним процесом КК. Вона призначена для забезпечення масштабування і

комутації синтезованих керуючих дій $\Delta \bar{U}_f(kT_0) = \begin{bmatrix} \Delta U_2(kT_0) \\ \Delta U_4(kT_0) \end{bmatrix}$. Елемен-

тами матриці B_f обирають нулі або одиниці. Елемент матриці $b_{i_\mu} = 1$, якщо на i -ту вершину КК діє μ -та складова вектора керування $\Delta \bar{U}_f(kT_0)$. Таким чином, у кожному рядку матриці B_f тільки один елемент може дорівнювати одиниці, а інші елементи будуть дорівнювати нулю. Розмірність матриці B_f для певної КК (6.107) становить (7×2) , де 7 і 2 розмірності, відповідно, векторів $\bar{x}_f$ і $\bar{U}_f$. Тоді

$$B_f = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T.$$

Правила формування $L_f(kT_0)$ наведено в підрозд. 3.1. Для моделі (6.107) матриця $L_f(kT_0)$ має розмірність (7×1) ,

$$L_f(kT_0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Delta x_{6_f}(kT_0) & 0 \end{bmatrix}^T.$$

Невимірювані координати вершин КК Y_9, Y_{10}, Y_{11} в моделі (6.107) входять у склад вектора $\Delta \bar{Y}(k)$ як невимірювані збурення. Тоді матриця A_{12_f} згідно з КК (рис. 6.1) буде

$$A_{12_f} = \begin{bmatrix} -0,5 & 0,6 & 0,4 \\ 0 & 0 & 0,2 \\ 0 & 0 & 0,3 \\ 0 & -0,3 & 0 \\ 0 & -0,4 & 0 \\ 0 & 0 & 0,6 \\ 0 & 0,2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Повільно діючою координатою в (6.107) X_s є тільки одна координата вершини 8 КК, на яку можна впливати керуючою дією U_s з періодом дискретизації $h = mT_0$ через зміну ресурсів вершини 8. Тоді в моделі (6.107) $B_s = 1$; $\Delta \bar{a}_s(k) = 0$ і $L_s(k) = 0$. На вершину 8 не впливають невимірювані координати 9, 10, 11, тобто $A_{12_f} = 0$.

Таким чином, модель імпульсного процесу (6.107) поділяють на дві частини. Першу частину, яка описує динаміку швидковимірюваних координат КК з періодом T_0 , можна записати у формі

$$\begin{aligned} \Delta \bar{x}_f \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + (l+1)T_0 \right] &= A_{11_f} \Delta \bar{x}_f \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right] + A_{11_{fs}} \Delta \bar{X}_s \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] + \\ &+ \left[B_f \quad L_f \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right] \right] \begin{bmatrix} \Delta \bar{U}_f \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right] \\ \Delta a_f \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right] \end{bmatrix} + \Delta \bar{\xi}_f \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right], \end{aligned} \quad (6.108)$$

де $\left[\frac{k}{m} \right]$ – ціле число від ділення k на m ;

$l = 0, 1, \dots, (m-1)$.

Перша різниця $\Delta \bar{x}_f \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right] = \bar{x}_f \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right] - \bar{x}_f \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + (l-1)T_0 \right]$.

Вектор збурень $\Delta \bar{\xi}_f \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right] = A_{12_f} \Delta \bar{Y} \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right]$ формується на основі невимірюваних координат вершин $\Delta \bar{Y}$ КК 9, 10, 11.

Друга частина моделі (6.107) описує динаміку повільно вимірюваної координати 8 КК, яка у проміжній формі з однотемповою дискретизацією на основі моделі (6.107) може бути записана у формі

$$\begin{aligned} \Delta x_s \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + (l+1)T_0 \right] &= A_{11_{sf}} \Delta \bar{X}_f \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right] + \\ &+ b_s \Delta U_s \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right]. \end{aligned} \quad (6.109)$$

На основі ітераційної процедури за $l = 0, 1, \dots, (m-1)$ модель (6.109) можна перевести до вигляду із зображенням координати x_s у дискретній формі з великим періодом дискретизації $h = mT_0$ за умови, що керуюча

дія $\Delta U_s = \text{const}$ протягом періоду h , тобто $\Delta U_s \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right] = \Delta U_s \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right]$, $l = 0, 1, \dots, (m-1)$. При цьому період h обирають на практиці з міркувань можливості вибору інтервалу, через який можна вимірювати (фіксувати) рівень інтенсивності контактів для населення в певному регіоні. Після ітераційної процедури модель (6.109) буде мати вигляд

$$\Delta x_s \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] + 1 \right) h \right] = A_{11_{sf}} \Delta \bar{X}_f \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + (m-1)T_0 \right] + b_s \Delta U_s \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right]. \quad (6.110)$$

6.5.2. Автоматизація комбінованого керування імпульсними процесами з різномовною дискретизацією в когнітивній карті захворюваності на COVID-19

Для проектування алгоритмів автоматизованого керування імпульсними процесами в КК динамічні вектори $\bar{x}_f$ і $\bar{x}_s$ в моделях (6.108), (6.110) необхідно треба подати у повних значеннях координат вершин, тобто

$$\begin{aligned} \bar{x}_f \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + (l+1)T_0 \right] &= \left(I_{11} + A_{11_f} - A_{11_f} q^{-1} \right) \bar{x}_f \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right] + \\ &+ A_{11_{fs}} \Delta \bar{X}_s \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] + \left[B_f \quad L_f \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right] \right] \cdot \\ &\cdot \begin{bmatrix} \Delta \bar{U}_f \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right] \\ \Delta a_f \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right] \end{bmatrix} + \Delta \bar{\xi}_f \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right]; \end{aligned} \quad (6.111)$$

$$\begin{aligned} x_s \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] + 1 \right) h \right] &= x_s \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] + \\ &+ A_{11_{sf}} \Delta \bar{X}_f \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + (m-1)T_0 \right] + b_s \Delta U_s \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right], \end{aligned} \quad (6.112)$$

де q_1^{-1} – оператор зворотного зсуву на один період дискретизації T_0 .

Для синтезу швидкодійних керуючих дій $\Delta \bar{U}_f$ і Δa_f пропонується критерій оптимальності типу (6.78):

$$\begin{aligned}
J_f \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + (l+1)T_0 \right] &= E \left\{ \left[\bar{x}_f \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + (l+1)T_0 \right] - \bar{G}_f \right]^T \cdot \right. \\
&\cdot \left[\bar{x}_f \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + (l+1)T_0 \right] - \bar{G}_f \right] + \left[\Delta \bar{U}_1^T \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right] \Delta a_f \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right] \right]^T \cdot \\
&\cdot \left[\begin{array}{cc} R_{f1} & 0 \\ 0 & r_{f2} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \Delta \bar{U}_f \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right] \\ \Delta a_f \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right] \end{array} \right] \left. \right\}, \tag{6.113}
\end{aligned}$$

де E – оператор математичного сподівання;

$\bar{G}_f$ – вектор задавальних дій для стабілізації координат $\bar{x}_f$ вершин КК.

На основі мінімізації критерію (6.113) за вектором $\begin{bmatrix} \Delta \bar{U}_f \\ \Delta a_f \end{bmatrix}$ з використанням моделі (6.111) за методикою (6.80) визначають оптимальний швидкодійний комбінований вектор керування

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \Delta \bar{U}_f \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right] \\ \Delta a_f \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right] \end{bmatrix} &= - \left\{ \begin{bmatrix} B_f^T \\ L_f^T \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right] \end{bmatrix} \right\} \cdot \\
&\cdot \left\{ \begin{bmatrix} B_f & L_f \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_{f1} & 0 \\ 0 & r_{f2} \end{bmatrix} \right\}^{-1} \cdot \\
&\cdot \begin{bmatrix} B_f^T \\ L_f^T \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right] \end{bmatrix} \left\{ \left(I_{11} + A_{11f} - A_{11f} q^{-1} \right) \bar{x}_f \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right] + \right. \\
&\left. + A_{11fs} \Delta X_s \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] + \Delta \bar{\xi}_f \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right] - \bar{G}_f \right\}, \tag{6.114}
\end{aligned}$$

який діє на вершини $\bar{x}_f$ КК відповідно до (6.111).

Для синтезу повільно діючої керуючої дії ΔU_s сформулюємо другий критерій оптимальності:

$$J_s \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] + 1 \right) h \right] = E \left\{ \left[x_s \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] + 1 \right) h \right] - G_s \right]^2 + r_s \Delta U_s^2 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] \right\}, \quad (6.115)$$

що є узагальненою дисперсією помилки керування $x_s \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] + 1 \right) h \right] - \bar{G}_s$

і зваженої керуючої дії $\Delta U_s \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right]$.

На основі мінімізації критерію (6.115) за керуючою дією ΔU_s з використанням моделі (6.112) визначають повільно діючу керуючу дію $\Delta U_s \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right]$ на основі закону керування

$$\begin{aligned} \Delta U_s \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] = & - \frac{b_s}{b_s^2 + r_s} \left\{ x_s \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] + \right. \\ & \left. + A_{1fs} \Delta \bar{X}_f \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + (m-1)T_0 \right] - G_s \right\}, \end{aligned} \quad (6.116)$$

яка подається на вершину 8 (рівень інтенсивності контактів для населення).

6.5.3. Експериментальні дослідження системи керування імпульсними процесами в когнітивних картах захворюваності на COVID-19

Під час проведення досліджень початкові значення координат вершин КК були установлені на умовних рівнях $x_i = 50$, $i = 1, 2, \dots, 11$.

Постановка задачі досліджень полягає в переведенні координат вершин x_2 , x_4 , x_7 та x_8 на нові рівні $G_2 = 60$, $G_4 = 40$, $G_7 = 48$, $G_8 = 40$ відповідно, тобто припускаємо, що треба збільшити кількість населення певного регіону, яке щоденно вакцинується (координата x_2), зменшити кількість хворих, які перебувають в ізоляції (координата x_4), зменшити кількість хворих, які перебувають у лікарнях (координата x_7) і зменшити інтенсивність контактів, установлену в певному регіоні у виробничих,

навчальних та громадсько-побутових приміщеннях (координата x_8). Для цього на основі законів керування (6.114), (6.116) формують в дискретні моменти часу керуючі дії. При цьому в законі керування швидкодіючого регулятора (6.114) вектор керування складається з керуючих дій

$$\Delta \bar{U}_f \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right] = \begin{bmatrix} \Delta U_2 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right] \\ \Delta U_4 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right] \end{bmatrix}$$

та

$$\Delta a_f \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right] = \Delta a_{67} \left[\left[\frac{k}{m} \right] h + lT_0 \right],$$

а в законі керування повільно діючого регулятора (6.116) формується тільки одна керуюча дія $\Delta U_s(rh) = \Delta U_8(rh)$, де $r = \left[\frac{k}{m} \right]$.

Співвідношення між періодами дискретизації координат швидкодіючої і повільно діючої підсистем $h = mT_0$ беруть із коефіцієнтом $m = 6$.

На рис. 6.2 зображено графіки результатів моделювання координат вершин КК $x_1, \dots, x_{11}$, а на рис 6.3 показано графіки сформованих приростів керуючих дій $\Delta U_2(kT_0)$, $\Delta U_4(kT_0)$, $\Delta a_{67}(kT_0)$ і $\Delta U_8(rh)$ на основі законів керування (6.114) і (6.116).

На основі аналізу графіків можна констатувати такі закономірності зміни координат вершин КК та приростів керуючих дій з різноміною дискретизацією:

1. Координати вершин КК x_2, x_4, x_7 та x_8 , на які подаються керуючі дії $\Delta U_2(kT_0)$, $\Delta U_4(kT_0)$, $\Delta a_{67}(kT_0)$ і $\Delta U_8(rh)$, переходять з великою швидкістю на нові рівні $G_2 = 60$, $G_4 = 40$, $G_7 = 48$ та $G_8 = 40$.

2. Координати вершин КК x_1, x_3, x_5, x_6 , на які не подаються керуючі дії, переходять з меншою швидкістю на нові логічні рівні, тобто координати x_1, x_3, x_6 зменшуються, а координата x_5 збільшується.

3. Керуючі дії у формі приростів $\Delta U_2(kT_0)$, $\Delta U_4(kT_0)$, $\Delta a_{67}(kT_0)$, $\Delta U_8(rh)$ у кінці перехідних процесів устанавлюються на нульових рівнях.

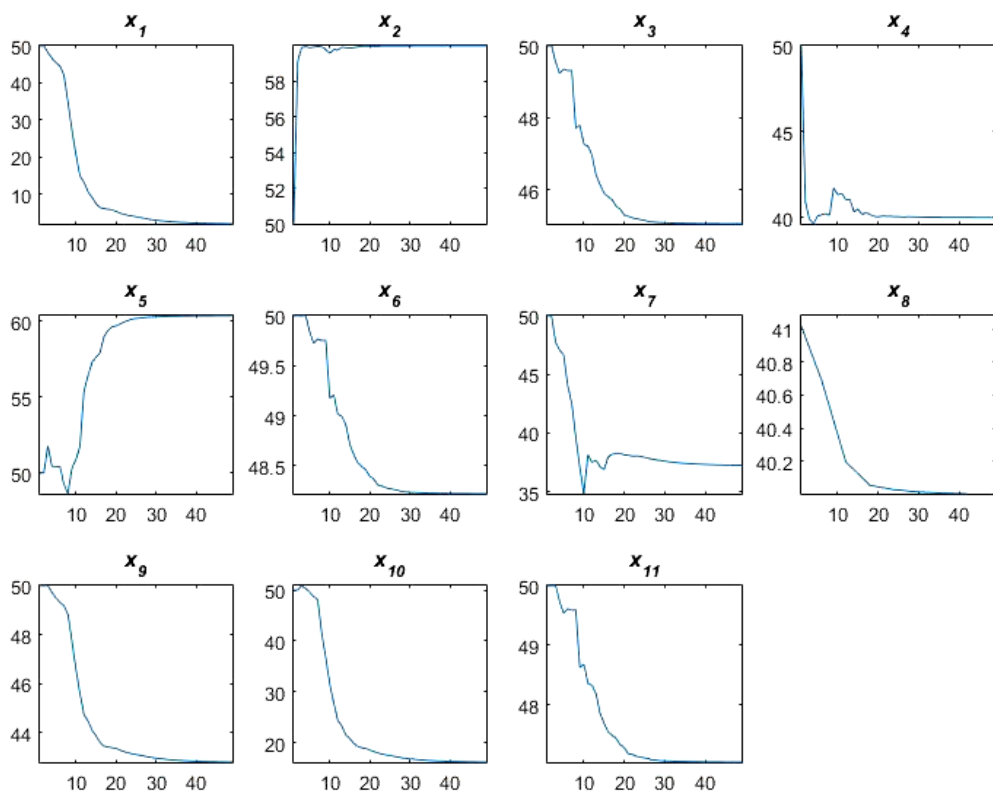


Рис. 6.2. Графіки результатів моделювання координат вершин когнітивної карти

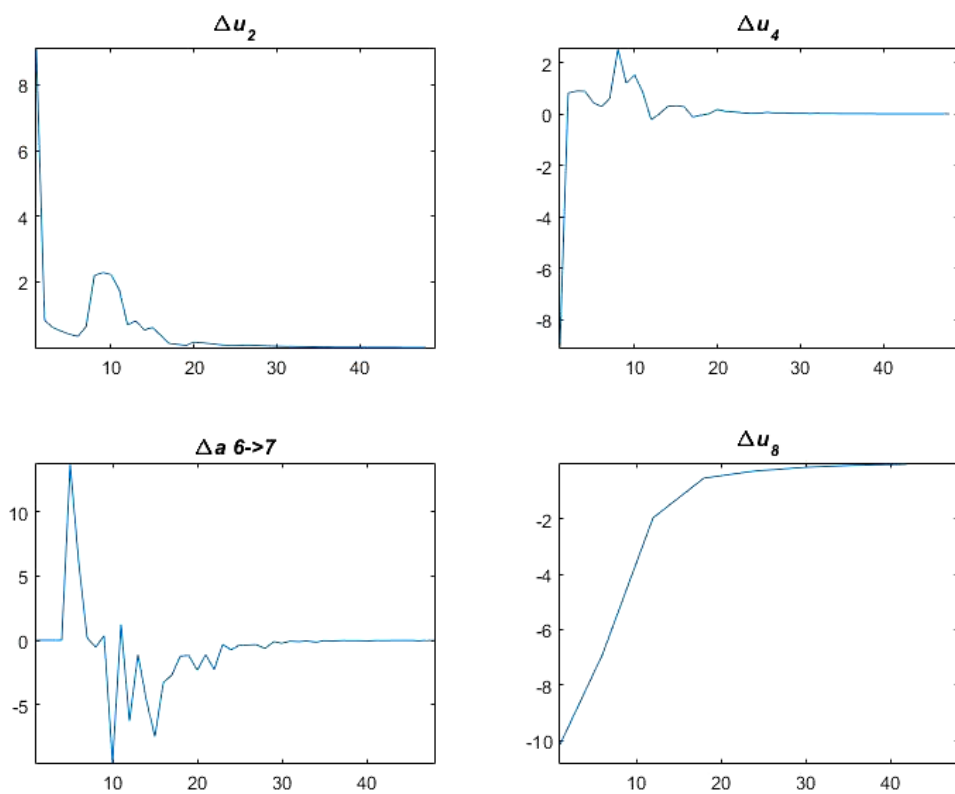


Рис. 6.3. Графіки сформованих приростів керуючих дій

Контрольні запитання

1. Як виконується декомпозиція моделі системи з неявно вираженими властивостями функціонування й у двох масштабах часу на повільно діючу і швидкодіючу підсистеми?
2. У чому полягає ідея квазіусталеного стану у складних системах, які мають властивість функціонування у двох масштабах часу?
3. Чим викликана необхідність застосування різнотемпової дискретизації координат вершин КК в моделі імпульсних процесів у разі їх використання для керування складними системами різної природи?
4. Як виконується аналіз керованості швидкодіючої і повільно діючої підсистем керування з різнотемповою дискретизацією?
5. Як формуються критерії оптимальності для повільно діючої і швидкодіючої підсистем керування?
6. Як реалізуються закони керування швидкодіючого і повільно діючого регуляторів зі спостерігачами стану?
7. Для чого проєктують спостерігачі векторів змінних стану з різнотемповою дискретизацією?
8. За яких умов виконується збіжність рекурентних процедур для оцінювання швидкозмінних $\bar{x}_f(kT_0)$ і повільнозмінних $\bar{x}_s(rh)$ векторів змінних стану у спостерігачах з різнотемповою дискретизацією?
9. Як виконується аналіз спостережуваності моделей швидкодіючої і повільно діючої підсистем керування з різнотемповою дискретизацією?
10. Як записують рівняння імпульсних процесів КК у повних значеннях координат вершин для підсистем із швидковимірюваними і повільновимірюваними координатами за різнотемповою дискретизацією?
11. У чому полягає ідея лінійно-квадратичного керування під час різнотемпової дискретизації?
12. Як записати l_2 -норму і l_∞ -норму для послідовності швидко- і повільновимірюваних координат КК з різнотемповою дискретизацією?

Задачі для самостійного розв'язання

6.1. Повільно діюча підсистема (6.6) описана рівнянням у просторі стану

$$\bar{x}_s[(k+1)T_0] = F_s \bar{x}_s(kT_0) + G_s \bar{U}_s(kT_0) \quad (*)$$

із різнометровою дискретизацією із швидкодіючою підсистемою (6.9).

Завдання.

а) З використанням рекурентної процедури перевести повільно діючу підсистему до більш низького темпу дискретизації з періодом $h = T_0$ на основі запису рівняння (*) у проміжній формі

$$\bar{x}_s[rh + (i+1)T_0] = F_s \bar{x}_s(rh + iT_0) + G_s \bar{u}_s(rh + iT_0),$$

де $i = 0, 1, 2, 3, 4$ за умови

$$\bar{u}_s(rh + iT_0) = \bar{u}(rh), \text{ а } r = \left\lfloor \frac{k}{5} \right\rfloor.$$

Матриці F_s і G_s становлять

$$F_s = \begin{bmatrix} 0,6 & -0,2 & 0 \\ -0,3 & 0,8 & -0,5 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad G_s = \begin{bmatrix} 0,1 & 1,3 \\ 0,2 & -0,1 \\ -0,3 & 0,4 \end{bmatrix},$$

якщо вектор стану $\bar{x}_s = [x_{s_1} \ x_{s_2} \ x_{s_3}]^T$ і вектор керування

$$\bar{U}_s = [U_{s_1} \ U_{s_2}]^T.$$

б) Проаналізувати стійкість і керованість новоутвореної повільно діючої підсистеми з періодом дискретизації $h = 5T_0$.

6.2. Рівняння вимушеного руху повільно діючої і швидкодіючої підсистем імпульсних процесів КК, відповідно, мають вигляд

$$\Delta \bar{Y}_s \left[\left(\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor + 1 \right) h \right] = F_s \Delta \bar{Y}_s \left[\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor h \right] + G_s \Delta \bar{U}_s \left[\left\lfloor \frac{k}{m} \right\rfloor h \right];$$

$$\Delta \bar{Y}_f[(k+1)T_0] = F_f \Delta \bar{Y}_f(kT_0) + G_f \Delta \bar{U}_f(kT_0).$$

Завдання.

Записати рівняння імпульсних процесів у повних координатах вершин КК.

6.3. Рівняння вимушеного руху імпульсних процесів КК підсистеми з повільно вимірюваними координатами вершин КК має вигляд

$$\Delta \bar{Y}_s[(r+1)h] = F_s \Delta \bar{Y}_s(rh) + B_s \Delta \bar{U}_s(rh) + \Delta \bar{\xi}(rh),$$

де вектор повільно вимірюваних координат вершин $\bar{Y}_s = [Y_{s_1} \ Y_{s_2} \ Y_{s_3} \ Y_{s_4}]^T$,

а вектор керуючих дій $\Delta \bar{U}_s = [\Delta U_{s_1} \ \Delta U_{s_2} \ \Delta U_{s_3}]^T$ реалізується варіюванням ресурсів вершин КК. Матриця стану F_s і керування B_s

$$F_s = \begin{bmatrix} 0,6 & 0 & 0,2 & -0,5 \\ 0,4 & 0,3 & -0,15 & -0,2 \\ 0 & 0,35 & 0,4 & -0,1 \\ -0,25 & -0,45 & 0,1 & 0,7 \end{bmatrix}; \quad B_s = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Завдання.

а) Записати рівняння імпульсного процесу у повних координатах вершин КК.

б) Сформулювати квадратичний критерій оптимальності $J_s[(r+1)h]$ типу (6.70) за $G_s = I$.

в) Виконати мінімізацію критерію $\frac{\partial J_s[(r+1)h]}{\partial \Delta \bar{U}_s(rh)} = 0$ і синтезувати рівняння регулятора для моделі імпульсних процесів.

г) Визначити закон керування регулятора, скласти рівняння замкненої системи і виконати дослідження процесу стабілізації імпульсного процесу при заданому початковому векторі $\bar{Y}_{s_{\text{поч}}} = [0,9 \ 1,2 \ 1 \ 0,8]^T$ і при дії випадкових збурень $\Delta \bar{\xi}(rh) = [\Delta \xi_1(rh) \ \Delta \xi_2(rh) \ \Delta \xi_3(rh) \ \Delta \xi_4(rh)]^T$, які генеруються генератором дискретного «білого» шуму.

6.4. Рівняння вимушеного руху імпульсного процесу підсистеми зі швидко вимірюваними координатами вершин КК має вигляд

$$\begin{aligned} \Delta \bar{Y}_f[rh(l+1)T_0] &= F_f \Delta \bar{Y}_f(rh + lT_0) + \\ &+ L_f(rh + lT_0) \Delta \bar{a}_f(rh + lT_0) + \Delta \bar{\xi}(rh + lT_0), \end{aligned}$$

де вектор координат швидко вимірюваних вершин $\bar{Y}_f = [Y_{f1} \ Y_{f2} \ Y_{f3}]^T$, а вектор керування $\Delta \bar{a}_f = [\Delta \bar{a}_{f12} \ \Delta \bar{a}_{f23}]^T$ реалізується варіюванням вагових коефіцієнтів a_{12} і a_{23} . Матриця стану

$$F_f = \begin{bmatrix} 0,3 & 0,4 & -0,2 \\ -0,3 & 0 & 0,5 \\ 0,15 & 0,25 & 0 \end{bmatrix}.$$

Період дискретизації $h = 5T_0$, а $l = 0, 1, 2, 3, 4$.

Завдання.

а) На основі правил 3.1–3.3, наведених в підрозд. 3.1, сформувати матрицю $L_f(rh + lT_0)$.

б) Записати рівняння імпульсного процесу у повних координатах вершин КК.

в) Сформувати квадратичний критерій оптимальності $J_f[rh + (l+1)T_0]$ типу (6.75) за $G_f = I$.

г) Виконати мінімізацію критерію $\frac{\partial J_f[rh + (l+1)T_0]}{\partial \Delta \bar{a}_f(rh + lT_0)} = 0$ і синтезувати

рівняння регулятора для наведеної вище моделі імпульсних процесів.

д) Визначити закон керування регулятора, скласти рівняння замкненої системи і дослідити процес стабілізації імпульсного процесу при заданому початковому векторі $\bar{Y}_{f\text{поч}} = [0,8 \ 0,9 \ 1,1]^T$ і при дії випадкових збурень, які генеруються генератором дискретного «білого» шуму.

6.5. Рівняння вимушеного руху імпульсних процесів КК з різною темповою дискретизацією мають вигляд

$$\Delta \bar{Y}_s[(r+1)h] = F_s \Delta \bar{Y}(rh) + B_s \Delta \bar{U}_s(rh) + A_{21} \Delta \bar{Y}_f(rh + lT_0); \quad (*)$$

$$\Delta \bar{Y}_f[rh + (l+1)T_0] = F_f \Delta \bar{Y}_f(rh + lT_0) + B_f \Delta \bar{U}_f(rh + lT_0) + A_{12} \Delta \bar{Y}_s(rh), \quad (**)$$

де координати векторів повільно- і швидко вимірюваних вершин

$$\bar{Y}_s = [Y_{s1} \ Y_{s2} \ Y_{s3} \ Y_{s4}]^T, \quad \bar{Y}_f = [Y_{f1} \ Y_{f2} \ Y_{f3}]^T.$$

Вектор повільно діючих керуючих дій $\Delta\bar{U}_s = [\Delta U_{s_1} \quad \Delta U_{s_2} \quad \Delta U_{s_3}]^T$ реалізується варіюванням, відповідно, ресурсів вершин КК Y_{s_1} , Y_{s_2} і Y_{s_3} , тобто матриця керування

$$B_s = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Вектор швидкодійних керуючих дій $\Delta\bar{U}_f = [\Delta U_{f_1} \quad \Delta U_{f_2}]^T$ реалізується варіюванням, відповідно, вершин Y_{f_1} і Y_{f_3} , тобто матриця B_f має вигляд

$$B_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Матриці стану $F_s(4 \times 4)$ і $F_f(3 \times 3)$ наведені, відповідно, у задачах 6.3, 6.4. Матриці взаємодійних впливів:

$$A_{21} = \begin{bmatrix} 0,1 & 0 & 0,05 \\ -0,15 & 0,2 & 0 \\ 0 & -0,3 & 0 \\ 0,04 & 0,4 & -0,1 \end{bmatrix}; \quad A_{12} = \begin{bmatrix} 0,15 & 0 & 0 & 0,2 \\ 0 & -0,05 & 0,3 & 0 \\ 0,05 & 0 & 0,25 & 0,3 \end{bmatrix}.$$

Завдання.

- а) Побудувати КК на основі імпульсних процесів (*), (**).
- б) Записати рівняння імпульсних процесів у повних координатах вершин КК.
- в) Сформувати квадратичні критерії оптимальності $J_s[(r+1)h]$ за $G_s = I$ типу (6.70) і $J_f[rh + (l+1)T_0]$ за $G_f = I$ відповідно до виразу (6.67).
- г) Виконати мінімізацію критеріїв

$$\frac{\partial J_s[(r+1)h]}{\partial \Delta\bar{U}_s(rh)} = 0; \quad \frac{\partial J_f[rh + (l+1)T_0]}{\partial \Delta\bar{U}_f(rh + lT_0)} = 0$$

і для відповідних моделей імпульсних процесів (*) та (**) синтезувати рівняння повільно діючого і швидкодіючого регуляторів.

д) Визначити закони керування повільно діючого і швидкодіючого регуляторів типу (6.71) і (6.69) та скласти рівняння замкнених підсистем керування.

е) З допомогою цифрового моделювання дослідити перехідні процеси у замкнених підсистемах керування з різнотемповою дискретизацією за $h = 3T_0$ і за заданих початкових значень координат вершин КК

$$\bar{Y}_{s_{\text{поч}}} = [0,8 \quad 1 \quad 1,2 \quad 0,8]^T; \quad \bar{Y}_{f_{\text{поч}}} = [0,9 \quad 1,2 \quad 0,8]^T.$$

ж) Побудувати графіки перехідних процесів.

РОЗДІЛ 7. Методи ідентифікації динамічних моделей складних систем

7.1. Ідентифікація коефіцієнтів матриці суміжності під час вимірювання всіх координат вершин когнітивної карти складної системи

Для проведення параметричної ідентифікації під час повного вимірювання координат математичну модель подають у вигляді різницевого рівняння першого порядку у приростах змінних із тестовим вхідним сигналом, що діє безпосередньо на деякі координати [20, 22]:

$$\Delta Y_i(k+1) = \sum_{j=1}^n a_{ij}(\Delta Y_j(k) + \Delta q_j(k)), \quad (7.1)$$

де $Y_i(k)$ – значення координати i -ї вершини в момент часу k , $\Delta Y_i(k) = Y_i(k) - Y_i(k-1)$ – величина приросту (імпульсу) в i -й вершині, $i = 1, \dots, n$, n – розмірність системи, $q_j(k)$ – відомий тестовий сигнал, що діє на j -ту вершину для проведення ідентифікації. В цілому процес можна записати у векторно-матричній формі:

$$\Delta \bar{Y}(k+1) = A(\Delta \bar{Y}(k) + \Delta \bar{Q}(k)), \quad (7.2)$$

де A – транспонована вагова матриця суміжності КК, $\Delta \bar{Y}(k)$ – вектор приростів координат вершин, $\Delta \bar{Q}(k)$ – вектор приростів відомих тестових сигналів за заданою програмою.

7.1.1. Ідентифікація за відсутності шумів вимірювань

Для дискретних моментів часу $k = 0, 1, \dots, K-1$ рівняння імпульсного процесу (7.2) можна подати у вигляді послідовності систем рівнянь

$$\begin{aligned} \Delta \bar{Y}(1) &= A(\Delta \bar{Y}(0) + \Delta \bar{Q}(0)), \\ \Delta \bar{Y}(2) &= A(\Delta \bar{Y}(1) + \Delta \bar{Q}(1)), \\ &\dots \\ \Delta \bar{Y}(K) &= A(\Delta \bar{Y}(K-1) + \Delta \bar{Q}(K-1)). \end{aligned} \quad (7.3)$$

На основі цієї розширеної системи рівнянь можна розв'язати задачу з визначення матриці A за даними вимірювань $\Delta \bar{Y}(0), \dots, \Delta \bar{Y}(K-1)$.

Розглянемо спочатку цей розв'язок для випадку відсутності шумів вимірювань. Тоді достатньо взяти $K = n$. Із системи (7.3) можна легко побудувати n незалежних систем лінійних алгебричних рівнянь для визначення елементів матриці A , що містяться у першому, другому і до n -го рядка:

$$\begin{aligned}\Delta Y_1(1) &= a_{11}(\Delta Y_1(0) + \Delta q_1(0)) + a_{12}(\Delta Y_2(0) + \Delta q_2(0)) + \dots + a_{1n}(\Delta Y_n(0) + \Delta q_n(0)), \\ \Delta Y_1(2) &= a_{11}(\Delta Y_1(1) + \Delta q_1(1)) + a_{12}(\Delta Y_2(1) + \Delta q_2(1)) + \dots + a_{1n}(\Delta Y_n(1) + \Delta q_n(1)), \\ &\dots \\ \Delta Y_1(n) &= a_{11}(\Delta Y_1(n-1) + \Delta q_1(n-1)) + a_{12}(\Delta Y_2(n-1) + \Delta q_2(n-1)) + \dots + a_{1n}(\Delta Y_n(n-1) + \Delta q_n(n-1));\end{aligned}\quad (7.4)$$

$$\begin{aligned}\Delta Y_2(1) &= a_{21}(\Delta Y_1(0) + \Delta q_1(0)) + a_{22}(\Delta Y_2(0) + \Delta q_2(0)) + \dots + a_{2n}(\Delta Y_n(0) + \Delta q_n(0)), \\ \Delta Y_2(2) &= a_{21}(\Delta Y_1(1) + \Delta q_1(1)) + a_{22}(\Delta Y_2(1) + \Delta q_2(1)) + \dots + a_{2n}(\Delta Y_n(1) + \Delta q_n(1)), \\ &\dots \\ \Delta Y_2(n) &= a_{21}(\Delta Y_1(n-1) + \Delta q_1(n-1)) + a_{22}(\Delta Y_2(n-1) + \Delta q_2(n-1)) + \dots + a_{2n}(\Delta Y_n(n-1) + \Delta q_n(n-1));\end{aligned}\quad (7.5)$$

$$\begin{aligned}&\dots \\ \Delta Y_n(1) &= a_{n1}(\Delta Y_1(0) + \Delta q_1(0)) + a_{n2}(\Delta Y_2(0) + \Delta q_2(0)) + \dots + a_{nn}(\Delta Y_n(0) + \Delta q_n(0)), \\ \Delta Y_n(2) &= a_{n1}(\Delta Y_1(1) + \Delta q_1(1)) + a_{n2}(\Delta Y_2(1) + \Delta q_2(1)) + \dots + a_{nn}(\Delta Y_n(1) + \Delta q_n(1)), \\ &\dots \\ \Delta Y_n(n) &= a_{n1}(\Delta Y_1(n-1) + \Delta q_1(n-1)) + a_{n2}(\Delta Y_2(n-1) + \Delta q_2(n-1)) + \dots + a_{nn}(\Delta Y_n(n-1) + \Delta q_n(n-1)).\end{aligned}\quad (7.6)$$

Усі системи рівнянь можна записати в уніфікованій формі:

$$\Delta \bar{Y}_i = (\Delta Y + \Delta Q) \bar{a}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (7.7)$$

де вектор для відображення динаміки i -ї вершини КК від першого до n -го періоду дискретизації

$$\Delta \bar{Y}_i^T = (\Delta Y_i(1) \Delta Y_i(2) \dots \Delta Y_i(n)), \quad (7.8)$$

а $\bar{a}_i^T = (a_{i1} \ a_{i2} \ \dots \ a_{in})$ – вектор, що складається з елементів i -го рядка матриці A . Тут матриця ΔY формується з дискретних вимірювань координат вершин КК від нульового до $(n-1)$ -го періодів дискретизації так:

$$\Delta Y = \begin{pmatrix} \Delta Y_1(0) & \Delta Y_2(0) & \dots & \Delta Y_n(0) \\ \Delta Y_1(1) & \Delta Y_2(1) & \dots & \Delta Y_n(1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Delta Y_1(n-1) & \Delta Y_2(n-1) & \dots & \Delta Y_n(n-1) \end{pmatrix}. \quad (7.9)$$

Матриця тестових відомих сигналів ΔQ у (7.7) формується так:

$$\Delta Q = \begin{pmatrix} \Delta q_1(0) & \Delta q_2(0) & \dots & \Delta q_n(0) \\ \Delta q_1(1) & \Delta q_2(1) & \dots & \Delta q_n(1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Delta q_1(n-1) & \Delta q_2(n-1) & \dots & \Delta q_n(n-1) \end{pmatrix}. \quad (7.10)$$

Таким чином, згідно з (7.7) вагові коефіцієнти матриці суміжності A знаходять на основі

$$\bar{a}_i = (\Delta Y + \Delta Q)^{-1} \Delta \bar{Y}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (7.11)$$

Розв'язок (7.11) існує, коли $\det(\Delta Y + \Delta Q) \neq 0$.

Згідно з алгоритмом (7.3) – (7.11) для ідентифікації матриці A потрібно сформувати масив вимірювань усіх координат вершин $Y_i, i = 1, \dots, n$ протягом проміжку часу від прийнятого нульового до n -го періодів дискретизації. При цьому припускаємо, що на цьому часовому інтервалі елементи матриці A не змінюються. Якщо матриця A може змінюватись повільно порівняно з тривалістю інтервалу спостереження $[0, n]$, то у міру накопичення інформації її можна уточнювати. Для цього пропонують реалізувати адаптивний алгоритм уточнення матриці A . Використовуючи дані для моментів часу $n+1, n+2$ тощо, будемо зсувати на одиницю часу процедуру формування системи рівнянь (7.7). У результаті для компонент вектора $\bar{a}_i$ будемо формувати такі системи рівнянь:

$$\begin{pmatrix} \Delta Y_i(2) \\ \Delta Y_i(3) \\ \dots \\ \Delta Y_i(n+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta Y_1(1) + \Delta q_1(1) & \Delta Y_2(1) + \Delta q_2(1) & \dots & \Delta Y_n(1) + \Delta q_n(1) \\ \Delta Y_1(2) + \Delta q_1(2) & \Delta Y_2(2) + \Delta q_2(2) & \dots & \Delta Y_n(2) + \Delta q_n(2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Delta Y_1(n) + \Delta q_1(n) & \Delta Y_2(n) + \Delta q_2(n) & \dots & \Delta Y_n(n) + \Delta q_n(n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ \dots \\ a_{in} \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} \Delta Y_i(3) \\ \Delta Y_i(4) \\ \dots \\ \Delta Y_i(n+2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta Y_1(2) + \Delta q_1(2) & \Delta Y_2(2) + \Delta q_2(2) & \dots & \Delta Y_n(2) + \Delta q_n(2) \\ \Delta Y_1(3) + \Delta q_1(3) & \Delta Y_2(3) + \Delta q_2(3) & \dots & \Delta Y_n(3) + \Delta q_n(3) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Delta Y_1(n+1) + \Delta q_1(n+1) & \Delta Y_2(n+1) + \Delta q_2(n+1) & \dots & \Delta Y_n(n+1) + \Delta q_n(n+1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ \dots \\ a_{in} \end{pmatrix}$$

тощо. При цьому розв'язок на основі такої системи має незначно різнитись від попереднього. Таким чином, можна виконати рекурентну оцінку змінюваних вагових коефіцієнтів матриці суміжності A .

Під час формування векторів сигналів тестування $\bar{Q}_i, i = 1, \dots, n$ слід враховувати, що не всі координати можна варіювати за встановленою програмою. У цьому випадку деякі q_i в рівнянні (7.1) будуть дорівнювати нулю і на оцінку коефіцієнтів матриці впливати не будуть. Тоді відповідні координати Y_i під час проведення ідентифікації будуть змінюватись тільки через вагові коефіцієнти a_{ij} під час варіювання координат Y_j , на які подаватимуться тестові сигнали q_j .

7.1.2. Ідентифікація за наявності шумів у вимірюваних координатах когнітивних карт на основі методів найменших квадратів

За наявності шумів у вимірюваних координатах вершин КК пропонується використовувати звичайний або зважений метод найменших квадратів (МНК). Побудуємо замість (7.7) перевизначену систему рівнянь

$$\Delta \tilde{\tilde{Y}}_i = \Delta \tilde{Y}_1 \hat{a}_i, \quad (7.12)$$

де $\Delta \tilde{Y}_1 = \Delta \tilde{Y} + \Delta Q$, $\Delta \tilde{\tilde{Y}}_i = (\Delta \tilde{Y}_i(1) \dots \Delta \tilde{Y}_i(K))^T$, $\hat{a}_i^T = (a_{i1} \ a_{i2} \dots a_{in})$ – вектор, що складається з елементів i -го рядка матриці A ,

$$\Delta \tilde{Y} = \begin{pmatrix} \Delta \tilde{Y}_1(0) & \Delta \tilde{Y}_2(0) & \dots & \Delta \tilde{Y}_n(0) \\ \Delta \tilde{Y}_1(1) & \Delta \tilde{Y}_2(1) & \dots & \Delta \tilde{Y}_n(1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Delta \tilde{Y}_1(K-1) & \Delta \tilde{Y}_2(K-1) & \dots & \Delta \tilde{Y}_n(K-1) \end{pmatrix},$$

$$\Delta Q = \begin{pmatrix} \Delta q_1(0) & \Delta q_2(0) & \dots & \Delta q_n(0) \\ \Delta q_1(1) & \Delta q_2(1) & \dots & \Delta q_n(1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Delta q_1(K-1) & \Delta q_2(K-1) & \dots & \Delta q_n(K-1) \end{pmatrix}.$$

При цьому зробимо припущення, що вхідні імпульси $\Delta q_i(k)$ відомі з високою точністю. Однак всі результати, викладені в подальшому, будуть справедливими і в тому випадку, якщо замість ΔQ будемо мати наближену матрицю $\Delta \tilde{Q}$.

Якщо використовувати МНК для розв'язання перевизначеної системи лінійних алгебричних рівнянь з наближеною правою частиною $\Delta \tilde{\tilde{Y}}_i$ і матрицями $\Delta \tilde{Y}$ та ΔQ , слід помножити ліву і праву частини (7.12) на $\Delta \tilde{Y}_1^T = (\Delta \tilde{Y} + \Delta Q)^T$ зліва:

$$(\Delta \tilde{Y} + \Delta Q)^T (\Delta \tilde{Y} + \Delta Q) \hat{a}_i = (\Delta \tilde{Y} + \Delta Q)^T \Delta \tilde{\tilde{Y}}_i.$$

Тоді, оскільки $(\Delta \tilde{Y} + \Delta Q)^T (\Delta \tilde{Y} + \Delta Q)$ квадратна, оцінку вектора $\hat{a}_i$ визначають співвідношенням

$$\hat{a}_i = ((\Delta \tilde{Y} + \Delta Q)^T (\Delta \tilde{Y} + \Delta Q))^{-1} (\Delta \tilde{Y} + \Delta Q)^T \Delta \tilde{\tilde{Y}}_i. \quad (7.13)$$

Відомо, що отримана таким чином оцінка $\hat{a}_i$ задовольняє критерій оптимальності

$$\|(\Delta\tilde{Y} + \Delta Q)\bar{a}_i - \Delta\tilde{Y}_i\|^2 \rightarrow \min,$$

тобто мінімізує квадрат норми (суму квадратів координат) вектора похибки (нев'язки) між спостережуваним та оціненим векторами. Тому цей метод і називають методом найменших квадратів.

Під час використання *зваженого МНК*, в якому вагові коефіцієнти задаються елементами матриці D (діагональної з розмірністю K), (7.12) слід помножити на вираз $(\Delta\tilde{Y} + \Delta Q)^T D$ й тоді розв'язок набуде вигляду

$$\hat{a}_i = ((\Delta\tilde{Y} + \Delta Q)^T D (\Delta\tilde{Y} + \Delta Q))^{-1} (\Delta\tilde{Y} + \Delta Q)^T D \Delta\tilde{Y}_i. \quad (7.14)$$

Ці методи будуть найбільш ефективними, коли матриця ΔQ сформована із *постійно збуджувальних* вхідних імпульсних збурень. Щодо розглядуваної задачі ці збурення визначають таким чином.

Нехай маємо послідовність вхідних імпульсів $\Delta\bar{Q}$, подану у вигляді

$$\Delta\bar{Q}^T = (\Delta q_1(0) \dots \Delta q_n(0) \Delta q_1(1) \dots \Delta q_n(1) \dots \Delta q_1(K-1) \dots \Delta q_n(K-1)).$$

Послідовність $\Delta\bar{Q}$ будемо вважати постійно збуджувальною порядку K , якщо

$$\text{rank}(\Delta\bar{Q}\Delta\bar{Q}^T) = nK.$$

Коли сигнали $\Delta\bar{Q}$ подані стаціонарним «білим» шумом з нульовим середнім, то послідовність $\Delta\bar{Q}(j)$ матиме статистичну властивість

$$E \left[\begin{pmatrix} \Delta\bar{Q}(j) \\ \Delta\bar{Q}(j+1) \\ \dots \\ \Delta\bar{Q}(j+k-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\bar{Q}^T(j) & \Delta\bar{Q}^T(j+1) & \dots & \Delta\bar{Q}^T(j+k-1) \end{pmatrix} \right] = \sigma_u^2 \begin{pmatrix} I_n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & I_n & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & I_n \end{pmatrix},$$

де $\Delta\bar{Q}(j) = (\Delta q_1(j) \dots \Delta q_n(j))^T$, E – математичне сподівання випадкової послідовності, а σ_u^2 – дисперсія, тобто білий шум є постійно збуджувальним сигналом. Якщо вхідний сигнал буде далеким від постійно збуджувального, матриця $(\Delta\tilde{Y} + \Delta Q)^T (\Delta\tilde{Y} + \Delta Q)$ чи $(\Delta\tilde{Y} + \Delta Q)^T D (\Delta\tilde{Y} + \Delta Q)$ може виявитись виродженою або близькою до виродженої, що унеможливить розв'язок цим методом. Більше про це буде сказано під час розгляду задачі ідентифікації з невимірюваними вершинами.

7.1.3. Ідентифікація вагових коефіцієнтів когнітивної карти комерційного банку під час вимірювання всіх координат вершин

Розглянемо КК банку, зображену на рис. 2.6, у стійкому режимі. Нагадаємо сенс вершин:

- 1 – регіональна мережа,
- 2 – капітал,
- 3 – кредити,
- 4 – депозити,
- 5 – ліквідні активи,
- 6 – міра ризику стабільності,
- 7 – міра ризику ліквідності.

Припустимо спочатку, що усі вершини вимірюються (у випадку банку це можливо, хоч і не завжди). Задача полягає в тому, щоб знайти оцінки усіх вагових коефіцієнтів у загальному випадку, включно з нульовими, оскільки експерти можуть деякі зв'язки не виявити або виявити неправильно. Для цього будемо подавати відомі тестові сигнали $\Delta \bar{Q}(k)$ як послідовність нормально розподілених незалежних векторів з параметрами $(0, 1)$, тобто білий шум. Для моделювання похибок вимірювання застосуємо такий підхід. Знаходимо $\Delta Y_{\max}$ – максимум модуля з-поміж усіх значень $\Delta \bar{Y}$, причому не окремо для кожної з 7 координат, а в цілому, тому що в алгоритмах будемо використовувати загальне обмеження для всіх шумів. Задаємо деяку точність ζ , яку з метою експерименту будемо змінювати від 0 до 0,1 із кроком 0,01. Для кожного значення ζ визначаємо $\varepsilon = \zeta \cdot \Delta Y_{\max}$ і вводимо випадковий вектор $\bar{\xi}$, усі координати якого незалежні й рівномірно розподілені в інтервалі $[-\varepsilon, \varepsilon]$. Отже, протягом деякого періоду спостереження (було обрано $K = 40$) маємо послідовність приростів вимірюваних координат вершин КК банку $\Delta Y_1(k), \dots, \Delta Y_7(k), k = 1, \dots, K$ (з похибками), а також послідовність тестових сигналів (на практиці це, найімовірніше, не тестові сигнали, а відомі зовнішні збурення, які діяли на систему в минулому). Для ідентифікації застосуємо МНК (7.13). Для цього сформуємо матриці

$$\Delta \tilde{Y} = \begin{pmatrix} \Delta \tilde{Y}_1(0) & \Delta \tilde{Y}_2(0) & \dots & \Delta \tilde{Y}_7(0) \\ \Delta \tilde{Y}_1(1) & \Delta \tilde{Y}_2(1) & \dots & \Delta \tilde{Y}_7(1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Delta \tilde{Y}_1(K-1) & \Delta \tilde{Y}_2(K-1) & \dots & \Delta \tilde{Y}_7(K-1) \end{pmatrix},$$

$$\Delta Q = \begin{pmatrix} \Delta q_1(0) & \Delta q_2(0) & \dots & \Delta q_7(0) \\ \Delta q_1(1) & \Delta q_2(1) & \dots & \Delta q_7(1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Delta q_1(K-1) & \Delta q_2(K-1) & \dots & \Delta q_7(K-1) \end{pmatrix}.$$

Для кожного рядка матриці суміжності $\bar{a}_i^T = (a_{i1} \ a_{i2} \ \dots a_{i7})$, $i = 1, \dots, 7$, знайдемо оцінку:

$$\hat{a}_i = ((\Delta \tilde{Y} + \Delta Q)^T (\Delta \tilde{Y} + \Delta Q))^{-1} (\Delta \tilde{Y} + \Delta Q)^T \tilde{\tilde{Y}}_i.$$

Оскільки під час моделювання (на відміну від реальності) відомі справжні значення вагових коефіцієнтів матриці суміжності КК (у тому числі нульові), можна легко оцінити точність отриманих оцінок. Проведемо дослідження, як ця точність залежить від похибки вимірювання ζ . На рис. 7.1 показано графіки залежності оцінених значень усіх ваг ребер КК (усі 49 значень, включно з нульовими) від точності ζ (пунктирні лінії – істинні значення).

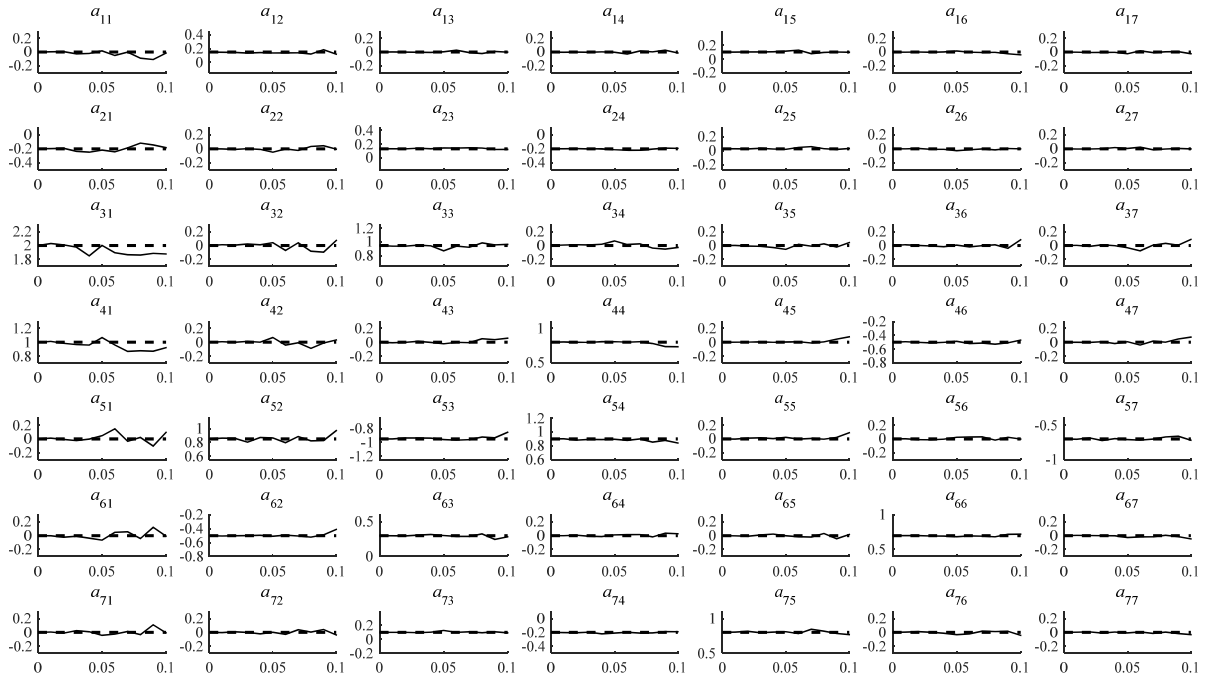


Рис. 7.1. Оцінки ваг ребер когнітивної карти залежно від точності для 40 вимірів

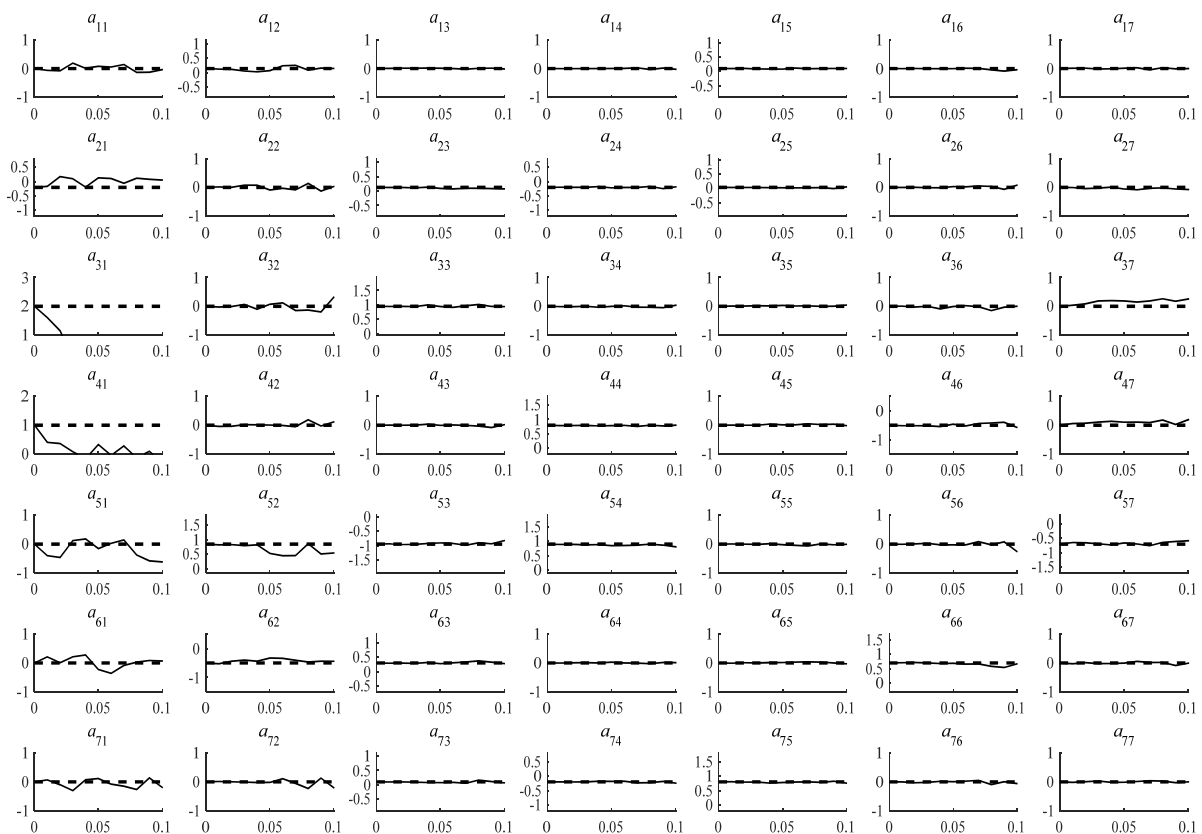


Рис. 7.3. Оцінки ваг ребер когнітивної карти залежно від точності для 40 вимірів під час подавання тестового сигналу тільки на обрані вершини

7.2. Оцінювання коефіцієнтів матриці суміжності імпульсних процесів у когнітивних картах на основі рекурентного методу найменших квадратів

Недоліком усіх описаних вище методів є вимога, щоб на момент оцінювання вже існувало достатньо даних. У деяких випадках потрібно оцінювати вагові коефіцієнти матриці A (ребер КК), не чекаючи накопичення історичних даних, одночасно з реалізацією керування. Також, якщо самі коефіцієнти змінюються в часі, зручно мати алгоритм, який буде вчасно переоцінювати коефіцієнти під час надходження нових даних. У цих випадках пропонується застосовувати *рекурентний МНК*.

Рекурентний метод найменших квадратів (РМНК) застосовують для оцінювання коефіцієнтів a_{ij} математичної моделі імпульсних процесів КК на поточному періоді дискретизації на підставі їх оцінки на попередньому періоді.

Розглянемо модель імпульсного процесу (1.21):

$$\Delta Y_i(k+1) = \sum_{j=1}^p a_{ij} \Delta Y_j(k) + \sum_{\mu=p+1}^n a_{i\mu} \Delta Y_\mu(k), \quad (7.15)$$

де $Y_i(k), i=1,2,\dots,p$ – вимірювані координати вершин КК в реальному масштабі часу, а $Y_\mu(k), \mu=p+1,\dots,n$ – невимірювані координати вершин. Цю модель легко розширити на випадок наявності вимірюваних зовнішніх впливів (керувань чи тестових сигналів), але в цьому підрозділі ми не робитимемо це заради простоти. Запишемо цю модель зі зсувом назад на один період дискретизації:

$$\Delta Y_i(k) = \sum_{j=1}^p a_{ij} \Delta Y_j(k-1) + \Delta \xi_i(k), \quad (7.16)$$

де $\Delta \xi_i(k) = \sum_{\mu=p+1}^n a_{i\mu} \Delta Y_\mu(k-1)$ – збурення, спричиняювані невимірюваними координатами вершин КК $Y_\mu(k)$ у моделі (7.15) за $\mu=p+1,\dots,n$. Для розроблення алгоритму РМНК запишемо модель (7.16) у формі

$$\Delta Y_i(k) = \bar{X}^T(k) \bar{\Theta}_i + \Delta \xi_i(k), \quad (7.17)$$

де

$$\bar{X}(k) = [\Delta Y_1(k-1), \Delta Y_2(k-1), \dots, \Delta Y_p(k-1)]^T, \quad (7.18)$$

а вектор оцінюваних вагових коефіцієнтів i -го рядка транспонованої матриці суміжності КК

$$\bar{\Theta}_i = [a_{i,1}, a_{i,2}, \dots, a_{i,p}]^T. \quad (7.19)$$

Припускаємо, що оцінюванню підлягають усі елементи матриці суміжності КК. Але у КК між деякими вершинами немає ребер, тобто відповідні елементи матриці дорівнюють нулю. Якщо експерти впевнені у правильності побудови КК, зокрема у відсутності зв'язків між певними вершинами (що, зазначимо, не завжди так), тоді відповідні елементи можна не оцінювати і таким чином зменшити кількість оцінюваних величин та покращити точність оцінювання. А саме, нехай в i -ту вершину КК входять ребра з вершин з номерами $i_1, i_2, \dots, i_{p_i}$. Тоді рівняння (7.17) – (7.19) набувають вигляду

$$\Delta Y_i(k) = \bar{X}_i^T(k) \bar{\Theta}_i + \Delta \xi_i(k),$$

$$\bar{X}_i(k) = [\Delta Y_{i_1}(k-1), \Delta Y_{i_2}(k-1), \dots, \Delta Y_{i_{p_i}}(k-1)]^T,$$

$$\bar{\Theta}_i = [a_{i,i_1}, a_{i,i_2}, \dots, a_{i,i_{p_i}}]^T.$$

На сам алгоритм РМНК це не впливає, тому надалі для простоти користуватимемось позначеннями (7.17) – (7.19), але зауважимо, що на практиці, якщо зменшувати описаним вище способом кількість оцінюваних коефіцієнтів, якість оцінювання зростає. Зокрема, якщо початкові значення для алгоритму РМНК досить далекі від істинних, то в результаті оцінювання повної матриці суміжності може виявитись, що нульовий коефіцієнт буде ідентифіковано як суттєво ненульовий. Утім, навіть і в цьому випадку ідентифікація зазвичай дає якісну модель «вхід – вихід», тобто за однакових вхідних впливів вихідні координати початкової та ідентифікованої моделей збігаються із задовільною точністю.

Середнє квадратичне оцінювання вектора $\hat{\bar{\Theta}}_i$ за методом найменших квадратів у разі N спостережень, як і раніше, виконують таким чином, щоб критерій

$$J_N = \sum_{k=1}^N (\Delta Y_i(k) - \bar{X}^T(k) \bar{\Theta}_i)^2 \quad (7.20)$$

досягав мінімуму. Тому вектор $\bar{\Theta}_i$ необхідно визначити, виходячи з мінімізації критерію J_N , яку здійснюють диференціюванням його за вектором $\bar{\Theta}_i$ і прирівнюванням похідних до нуля. Ця операція після перетворень дає таку систему нормальних рівнянь:

$$\sum_{k=1}^N \Delta Y_i(k) \bar{X}(k) = \left(\sum_{k=1}^N \bar{X}(k) \bar{X}^T(k) \right) \hat{\bar{\Theta}}_i(N). \quad (7.21)$$

Тут $\hat{\bar{\Theta}}_i(N)$ – точка мінімуму критерію J_N за $\bar{\Theta}_i$. Введемо такі позначення:

$$\Delta \bar{Y}_i(N) = [\Delta Y_{i_1}, \Delta Y_{i_2}, \dots, \Delta Y_{i_N}]^T, \quad (7.22)$$

$$\bar{\Psi}(N) = [\bar{X}(1), \bar{X}(2), \dots, \bar{X}(N)]^T. \quad (7.23)$$

де виконано перепозначення $\Delta Y_{i_1} = \Delta Y_i(1), \dots, \Delta Y_{i_N} = \Delta Y_i(N)$. Тоді складові системи рівнянь (7.21) можна записати у вигляді

$$\sum_{k=1}^N \Delta Y_i(k) \bar{X}(k) = \bar{\Psi}(N) \Delta \bar{Y}_i(N); \quad (7.24)$$

$$\sum_{k=1}^N \bar{X}(k) \bar{X}^T(k) = \bar{\Psi}(N) \bar{\Psi}^T(N). \quad (7.25)$$

Сформулюємо теорему.

Теорема. Якщо матриця $\bar{\Psi}(N)\bar{\Psi}^T(N)$ додатно визначена, то з урахуванням (7.17) – (7.19), (7.21) – (7.25) середнє квадратичне оцінювання вектора вагових коефіцієнтів $\hat{\Theta}_i$ можна реалізувати на підставі рекурентних рівнянь:

$$\begin{aligned}\hat{\Theta}_i(k) &= \hat{\Theta}_i(k-1) + \bar{K}(k)(\Delta Y_{i_k} - \bar{X}^T(k)\hat{\Theta}_i(k-1)); \\ \bar{K}(k) &= P(k-1)\bar{X}(k)(1 + \bar{X}^T(k)P(k-1)\bar{X}(k))^{-1}; \\ P(k) &= P(k-1) - P(k-1)\bar{X}(k)(1 + \bar{X}^T(k)P(k-1)\bar{X}(k))^{-1}\bar{X}^T(k)P(k-1).\end{aligned}\quad (7.26)$$

Для доведення теореми вихідні масиви (7.22), (7.23) запишемо у формі

$$\bar{\Psi}^T(N) = \begin{pmatrix} \bar{\Psi}^T(N-1) \\ \bar{X}^T(N) \end{pmatrix}; \Delta \bar{Y}_i(N) = \begin{pmatrix} \Delta \bar{Y}_i(N-1) \\ \Delta Y_{i_N} \end{pmatrix}. \quad (7.27)$$

Тоді праву частину рівняння (7.24) можна записати у вигляді

$$\bar{\Psi}(N)\Delta \bar{Y}_i(N) = \bar{\Psi}(N-1)\Delta \bar{Y}_i(N-1) + \bar{X}(N)\Delta Y_{i_N}. \quad (7.28)$$

На підставі (7.24), (7.25) систему рівнянь (7.21) подамо у вигляді

$$\bar{\Psi}(N)\bar{\Psi}^T(N)\hat{\Theta}_i(N) = \bar{\Psi}(N)\Delta \bar{Y}_i(N). \quad (7.29)$$

Тоді на основі (7.29), поклавши $N-1$ замість N , праву частину рівності (7.28) запишемо так:

$$\begin{aligned}\bar{\Psi}(N-1)\Delta \bar{Y}_i(N-1) + \bar{X}(N)\Delta Y_{i_N} &= \bar{\Psi}(N-1)\bar{\Psi}^T(N-1)\hat{\Theta}_i(N-1) + \bar{X}(N)\Delta Y_{i_N} = \\ &= (\bar{\Psi}(N)\bar{\Psi}^T(N) - \bar{X}(N)\bar{X}^T(N))\hat{\Theta}_i(N-1) + \bar{X}(N)\Delta Y_{i_N} = \\ &= \bar{\Psi}(N)\bar{\Psi}^T(N)\hat{\Theta}_i(N-1) - \bar{X}(N)\bar{X}^T(N)\hat{\Theta}_i(N-1) + \bar{X}(N)\Delta Y_{i_N}.\end{aligned}\quad (7.30)$$

Враховуючи (7.28), підставимо вираз (7.30) у праву частину рівняння (7.29):

$$\begin{aligned}\bar{\Psi}(N)\bar{\Psi}^T(N)\hat{\Theta}_i(N) &= \bar{\Psi}(N)\bar{\Psi}^T(N)\hat{\Theta}_i(N-1) - \bar{X}(N)\bar{X}^T(N)\hat{\Theta}_i(N-1) + \bar{X}(N)\Delta Y_{i_N} = \\ &= \bar{\Psi}(N)\bar{\Psi}^T(N)\hat{\Theta}_i(N-1) + \bar{X}(N)(\Delta Y_{i_N} - \bar{X}^T(N)\hat{\Theta}_i(N-1)).\end{aligned}\quad (7.31)$$

Введемо позначення

$$P(N) = (\bar{\Psi}(N)\bar{\Psi}^T(N))^{-1}. \quad (7.32)$$

Тоді вираз (7.31) можна перетворити до вигляду

$$\hat{\Theta}_i(N) = \hat{\Theta}_i(N-1) + P(N)\bar{X}(N)(\Delta Y_{i_N} - \bar{X}^T(N)\hat{\Theta}_i(N-1)), \quad (7.33)$$

де матриця $P(N)$ буде пропорційною коваріаційній матриці помилок під час оцінювання вектора параметрів $\hat{\Theta}_i$. Позначимо $\bar{K}(N) = P(N)\bar{X}(N)$. Тоді із (7.32) визначимо рівність

$$P^{-1}(N) = \bar{\Psi}(N)\bar{\Psi}^T(N) = \bar{\Psi}(N-1)\bar{\Psi}^T(N-1) + \bar{X}(N)\bar{X}^T(N) = P^{-1}(N-1) + \bar{X}(N)\bar{X}^T(N),$$

перемноживши ліву і праву частини якої спочатку зліва на $P(N)$, а потім справа на $P(N-1)$, дістанемо

$$P(N-1) = P(N) + P(N)\bar{X}(N)\bar{X}^T(N)P(N-1). \quad (7.34)$$

Після цього домножимо обидві частини цієї рівності на $\bar{X}(N)$:

$$\begin{aligned} P(N-1)\bar{X}(N) &= P(N)\bar{X}(N) + P(N)\bar{X}(N)\bar{X}^T(N)P(N-1)\bar{X}(N) = \\ &= P(N)\bar{X}(N)(1 + \bar{X}^T(N)P(N-1)\bar{X}(N)). \end{aligned}$$

Із цього рівняння можна визначити вектор корекції:

$$\bar{K}(N) = P(N)\bar{X}(N) = P(N-1)\bar{X}(N)(1 + \bar{X}^T(N)P(N-1)\bar{X}(N))^{-1}. \quad (7.35)$$

З урахуванням (7.34), (7.35) будемо мати

$$\begin{aligned} P(N) &= P(N-1) - P(N)\bar{X}(N)\bar{X}^T(N)P(N-1) = \\ &= P(N-1) - P(N-1)\bar{X}(N)(1 + \bar{X}^T(N)P(N-1)\bar{X}(N))^{-1}\bar{X}^T(N)P(N-1). \end{aligned} \quad (7.36)$$

Якщо у виразах (7.33), (7.35), (7.36) замість $N, N-1$ поставити номери відліків часу $k, k-1$ відповідно, то дістанемо рекурентну обчислювальну процедуру (7.26) для оцінювання вектора $\hat{\Theta}_i$ на основі визначення середньої квадратичної оцінки вектора параметрів $\bar{\Theta}_i$ за рекурентним методом найменших квадратів. *Теорему доведено.*

У ролі початкових даних для застосування рекурентної процедури оцінювання в загальному випадку беруть $P(0) = \alpha I$, де α – досить велике додатне число, I – одинична матриця $p \times p$, а $\hat{\Theta}_i(0) = \bar{\Theta}_{i_{\text{поч}}}$ – початкове значення оцінки вектора вагових коефіцієнтів, яке, коли немає інформації про можливі значення цих коефіцієнтів, можна брати як нульовий вектор.

Під час розроблення рекурентної процедури оцінювання вектора $\bar{\Theta}_i$ згідно з (7.26) застосовували критерій (7.20) методу найменших квадратів, в якому було зроблено припущення, що протягом N періодів дискретизації вагові коефіцієнти $\bar{\Theta}_i$ не змінювались. Однак у реальних

складних системах, описаних моделями імпульсних процесів КК, вагові коефіцієнти a_{ij} у матрицях суміжності можуть змінюватись протягом N дискретних відліків. Для врахування цих змін вводять фактор експоненціального забування застарілих даних на основі застосування критерію

$$J_N = \sum_{k=1}^N \beta^{N-k} (\Delta Y_i(k) - \bar{X}^T(k) \bar{\Theta}_i)^2 \quad (7.37)$$

замість критерію (7.20). Тоді обчислювальна рекурентна процедура (7.26) для оцінювання вагових коефіцієнтів $\bar{\Theta}_i$ під час застосування критерію (7.37) набуває вигляду

$$\begin{aligned} \hat{\bar{\Theta}}_i(k) &= \hat{\bar{\Theta}}_i(k-1) + \bar{K}(k)(\Delta Y_{i_k} - \bar{X}^T(k) \hat{\bar{\Theta}}_i(k-1)); \\ \bar{K}(k) &= P(k-1) \bar{X}(k) (\beta + \bar{X}^T(k) P(k-1) \bar{X}(k))^{-1}; \\ P(k) &= (I - K(k) \bar{X}^T(k)) P(k-1) / \beta, \end{aligned} \quad (7.38)$$

де фактор експоненціального забування звичайно обирають у межах $0,9 \leq \beta \leq 0,95$

Процедура РМНК виконується оцінюванням елементів кожного i -го рядка матриці A .

7.3. Параметрична ідентифікація у складних системах за наявності невимірюваних вихідних координат

Розглянемо дискретну модель імпульсного процесу КК у просторі станів:

$$\begin{aligned} \Delta x(k+1) &= A \Delta x(k) + B u(k), \\ y(k) &= C \Delta x(k). \end{aligned} \quad (7.39)$$

Тут Δx – вектор приростів координат вершин КК, u – вимірюваний вектор зовнішніх тестових (збуджувальних) сигналів або керувань (аналог ΔQ з попереднього пункту), y – вектор приростів координат тільки вимірюваних вершин. Нехай розмірність вектора Δx дорівнює n , розмірність вектора y дорівнює $m < n$, розмірність вектора u дорівнює $r < n$. У випадку КК, коли вектор y є підвектором вектора Δx (тобто деякі координати вимірюються, а деякі ні), і зовнішні дії u подаються безпосередньо на координати, матриці B, C складаються з нулів та одиниць. (У загальному випадку матриці A, B, C можуть бути довільними.) Задача

ідентифікації полягає в тому, що за історичними послідовностями векторів вимірюваних координат y та зовнішніх збуджень u потрібно знайти матриці A, B, C , тобто побудувати модель динамічної системи, що породила ці послідовності. У випадку КК найважливіше знайти матрицю A , яка є транспонованою матрицею суміжності КК і визначає вагові коефіцієнти ребер КК. Припускається, що жодної додаткової інформації про систему немає, крім, можливо, розмірності вектора Δx (у випадку КК це загальна кількість вершин, включаючи невимірювані). Також припускається, що вимірювання y є неточними (зашумленими), але про стохастичну природу цих збурень нічого невідомо, можливо, є тільки інформація про їх діапазон (максимальне значення).

Складність задачі полягає в тому, що опис у просторі станів не є єдиним у тому значенні, що одній і тій самій системі у формі «вхід – вихід» відповідає множина моделей у просторі станів, кожна з яких характеризується своїми змінними стану. Тобто, маючи послідовність вхідних і вихідних сигналів, неможливо говорити про якийсь один розв’язок задачі ідентифікації. Якщо під час цифрового моделювання відома «справжня» система, яка згенерувала дані (що, втім, неможливо в реальних задачах), немає сенсу порівнювати поелементно «справжні» та отримані в результаті ідентифікації матриці A, B, C , оскільки вони майже напевно будуть зовсім різними. Щоб зрозуміти це і знайти вихід, виконаємо такі прості перетворення над (7.39). Візьмемо довільну невідроджену квадратну матрицю T і запровадимо новий вектор $\Delta x' = T\Delta x$. Підставимо $\Delta x = T^{-1}\Delta x'$ в обидва рівняння (7.39), а також помножимо ліву і праву частини першого рівняння на T зліва, отримаємо

$$\Delta x'(k+1) = TAT^{-1}\Delta x'(k) + TBu(k),$$

$$y(k) = CT^{-1}\Delta x'(k).$$

Тепер запровадимо нові матриці:

$$A' = TAT^{-1}, \quad B' = TB, \quad C' = CT^{-1}. \quad (7.40)$$

Як бачимо, система (7.39) перетворилась на систему

$$\Delta x'(k+1) = A'\Delta x'(k) + B'u(k),$$

$$y(k) = C'\Delta x'(k),$$

яка повністю еквівалентна (7.39) за входом і виходом, але її матриці стану, керування і спостереження пов’язані з початковими матрицями

співвідношеннями (7.40), де T – довільна невироджена матриця. Кажуть, що це інша *реалізація* тієї самої динамічної системи. Із цього можна зробити висновок, що в результаті ідентифікації можна відтворити матрицю стану A з точністю до перетворення подібності $A' = TAT^{-1}$. Але, як відомо з курсу лінійної алгебри, перетворення подібності не змінює власних чисел матриці, тому яку б реалізацію ми не знайшли у результаті (коректної, правильно здійсненої) ідентифікації, ми завжди отримаємо ті самі власні числа матриці стану, що мають збігатися із власними числами «початкової» матриці A (у межах точності, що задається похибками вимірювання). Кажуть, що власні числа матриці A є *інваріантами* динамічної системи, бо вони, на відміну від елементів матриць, не залежать від конкретної реалізації. Саме за цими інваріантами і слід оцінювати якість будь-якого методу ідентифікації моделей у просторі станів.

Корисно також дослідити взаємозв'язок між матрицями керованості та спостережуваності у різних реалізаціях. Нагадаємо, що матриця спостережуваності за Калманом для системи порядку n становить

$$\Gamma = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (\text{розмірністю } nm \times n), \quad \text{а матриця керованості}$$

$$\Omega = [B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B] \quad (\text{розмірністю } n \times rn). \quad \text{Для іншої реалізації}$$

$$\Gamma' = \begin{bmatrix} C' \\ C'A' \\ \vdots \\ C'A'^{n-1} \end{bmatrix}, \quad \Omega' = [B' \quad A'B' \quad \dots \quad A'^{n-1}B'].$$

Підставивши співвідношення (7.40) у ці формули і скориставшись тим, що $(TAT^{-1})^k = TA^kT^{-1}$, отримаємо (переконайтесь самостійно!), що

$$\Gamma' = \Gamma T^{-1}, \quad \Omega' = T\Omega. \quad (7.41)$$

Оскільки T невироджена, зрозуміло, що ранги матриць керованості й спостережуваності не залежать від реалізації, тобто система є керованою чи спостережуваною незалежно від того, яку її реалізацію розглядають.

Також в подальшому важливо враховувати властивість *зсувної інваріантності* матриці спостережуваності, а саме,

$$\Gamma((m+1):nm) = \Gamma(1:(n-1)m)A, \quad (7.42)$$

де $\Gamma_n(a:b)$ – рядки матриці Γ_n з a до b . Це впливає з того, що

$$\Gamma((m+1):nm) = \begin{bmatrix} CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}, \quad \Gamma(1:(n-1)m) = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-2} \end{bmatrix}.$$

Для наступних викладок також знадобиться запис розв’язку системи (7.39) щодо залежності між вхідними і вихідними (вимірюваними) координатами:

$$y(i) = CA^{i-1}\Delta x(0) + CBu(i-2) + CABu(i-3) + \dots + CA^{i-3}Bu(1) + CA^{i-2}Bu(0), i \geq 2.$$

Це впливає з відомого розв’язку рівняння стану (7.2.1) та зі співвідношення $y(k) = Cx(k)$. Послідовність матриць $h(j) = CA^jB, j \geq 0$, які називають імпульсними матрицями відгуку, є також інваріантною щодо реалізації системи. Справді, підставивши (7.40) у вираз $C'A'^jB'$, знову отримаємо CA^jB . Це і зрозуміло, оскільки всі реалізації описують одну і ту саму систему «вхід – вихід», подану формулою вище. Її також можна записати з довільним зсувом у часі:

$$y(k+i) = CA^{i-1}\Delta x(k) + CBu(k+i-2) + \\ + CABu(k+i-3) + \dots + CA^{i-3}Bu(k+1) + CA^{i-2}Bu(k). \quad (7.43)$$

Є багато методів ідентифікації систем у просторі станів. Частина з них називають «методи виділеного підпростору», або англійською *4SID-методами* (аббревіатура походить від чотирьох літер S у словосполученні Subspace State Space System IDentification). У свою чергу, вони також мають багато версій і модифікацій, з яких розглянемо докладно лише одну [7]. За основу всіх 4SID-методів беруть певне інваріантне співвідношення між входами і виходами системи, яке будемо виводити з (7.43).

Задамось довільним $L \geq 2$ і розпишемо (7.43) для різних $i = 0, 1, \dots, L-1$:

$$y(k) = C\Delta x(k),$$

$$y(k+1) = CA\Delta x(k) + CBu(k),$$

...

$$y(k+L-1) = CA^{L-1}\Delta x(k) + CA^{L-2}Bu(k) + CA^{L-3}Bu(k+1) + \dots + CBu(k+L-2).$$

Сформуємо комбіновані вектори $y(k, L) = [y^T(k) \ y^T(k+1) \ \dots \ y^T(k+L-1)]^T$ і $u(k, L) = [u^T(k) \ u^T(k+1) \ \dots \ u^T(k+L-1)]^T$. Тоді, записавши попередні викладки у блочній векторно-матричній формі, отримаємо

$$y(k, L) = \Gamma \cdot \Delta x(k) + \Phi \cdot u(k, L), \quad (7.44)$$

де, як і раніше, $\Gamma = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{L-1} \end{bmatrix}$ – матриця спостережуваності, а

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ CB & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ CA^{L-2}B & CA^{L-3}B & \dots & CAB & CB \end{bmatrix} \text{ – блочна нижньотрикутна матриця,}$$

яку називають матрицею Тепліца. Очевидно, що Φ теж є інваріантою щодо реалізації.

Тепер введемо деяке T і нові матриці, що складаються з таких стовпців:

$$Y = [y(0, L), y(1, L), \dots, y(T-1, L)],$$

$$U = [u(0, L), u(1, L), \dots, u(T-1, L)], \quad (7.45)$$

$$X = [\Delta x(0), \Delta x(1), \dots, \Delta x(T-1)].$$

Інакше кажучи,

$$Y = \begin{bmatrix} y(0) & y(1) & \dots & y(T-1) \\ y(1) & y(2) & \dots & y(T) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y(L-1) & y(L) & \dots & y(L+T-2) \end{bmatrix} \text{ (розмірністю } Lm \times T),$$

$$U = \begin{bmatrix} u(0) & u(1) & \dots & u(T-1) \\ u(1) & u(2) & \dots & u(T) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u(L-1) & u(L) & \dots & u(L+T-2) \end{bmatrix} \text{ (розмірністю } Lr \times T).$$

Із (7.44), (7.45) за $k = 0, 1, \dots, T-1$ випливає, що

$$Y = \Gamma X + \Phi U. \quad (7.46)$$

Власне, на рівнянні (7.46) і ґрунтуються 4SID-методи. Маючи відомі матриці вимірювань і тестових сигналів Y, U , потрібно знайти інваріантні матрицю спостережуваності та матрицю Тепліца, які задовольнятимуть (7.46), а на їх основі – якісь набори A, B, C (деяку реалізацію), як буде показано далі.

Якщо існує можливість подавати тестові сигнали певного вигляду (прямокутні, гармонічні) і чергувати інтервали їх подання з інтервалами релаксації (без тестових сигналів), тобто відбувається «активний експеримент», можна застосовувати одні 4SID-методи (в яких на інтервалах релаксації інваріантне рівняння (7.46) зводиться до простішого $Y = \Gamma X$), а якщо цього робити не можна («пасивний експеримент»), то інші. Правда, і в пасивному експерименті є певні вимоги до вхідного сигналу, які розглянемо згодом. А поки що опишемо один із 4SID-методів для пасивного експерименту, при цьому для простоти розглянемо спочатку випадок системи зі скалярними входом та виходом, тобто $m = r = 1$, а потім узагальнимо.

Отже, оберемо деякі L, T (є певні умови для їх вибору, але головне, щоб вони були досить великими), введемо комбіновану матрицю $\begin{bmatrix} U \\ Y \end{bmatrix}$ і здійснимо її RQ-розклад:

$$\begin{bmatrix} U \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & 0 \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix}. \quad (7.47)$$

Тут всі матриці R_{ij} квадратні розмірністю L , а матриці Q_i прямокутні розмірністю $L \times T$. З лінійної алгебри відомо, що такий розклад існує, а також, що матриці Q_i ортогональні, тобто $Q_2 Q_1^T = 0$ та $Q_1 Q_1^T = I_L$, матриця I_L – одинична. Для математичних викладок сформуємо також матрицю $\begin{bmatrix} U \\ X \end{bmatrix}$ і виконаємо також її RQ-розклад:

$$\begin{bmatrix} U \\ X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & 0 \\ R_{x1} & R_{x2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_x \end{bmatrix}, \quad (7.48)$$

де R_{11} , Q_1 – ті самі матриці, що і у (7.47), а R_{x1} , R_{x2} , Q_x мають розмірність $n \times L$, $n \times n$ і $n \times T$ відповідно. Цей розклад не потрібно робити під

час практичної реалізації методу, але він потрібний для його теоретичного виведення.

Розклади (7.47), (7.48) і рівняння (7.46) дозволяють отримати такі рівняння:

$$\begin{aligned} \Gamma X &= Y - \Phi U = R_{21}Q_1 + R_{22}Q_2 - \Phi R_{11}Q_1 = \\ &= (R_{21} - \Phi R_{11})Q_1 + R_{22}Q_2, \\ \Gamma X &= \Gamma(R_{x1}Q_1 + R_{x2}Q_x). \end{aligned} \quad (7.49)$$

Прирівнюючи праві частини в (7.49), отримаємо

$$\Gamma R_{x1}Q_1 + \Gamma R_{x2}Q_x = (R_{21} - \Phi R_{11})Q_1 + R_{22}Q_2. \quad (7.50)$$

Помноживши (7.50) справа на матрицю Q_1^T , отримуємо рівняння

$$\Gamma R_{x1} = R_{21} - \Phi R_{11}. \quad (7.51)$$

Під час виведення (7.51) було використано властивість ортогональності матриць Q_i , а саме $Q_2Q_1^T = 0$, $Q_xQ_1^T = 0$ і $Q_1Q_1^T = I_L$. Порівнюючи (7.50) і (7.51), маємо

$$\Gamma R_{x2}Q_x = R_{22}Q_2. \quad (7.52)$$

Домножимо (7.52) справа на Q_2^T і, з урахуванням ортогональності ($Q_2Q_2^T = I_L$), отримаємо

$$\Gamma R_{x2}Q_xQ_2^T = R_{22}. \quad (7.53)$$

Рівняння (7.53) було проміжною метою викладок (7.48)–(7.52). Враховуючи, що матриця спостережуваності залежить від реалізації (див. (7.41)), можна стверджувати на основі (7.53), що будь-яке подання матриці R_{22} у вигляді добутку двох повнорангових матриць дозволяє першу (ліву) з них вважати матрицею спостережуваності Γ для деякої реалізації системи. Отже, щоб отримати матрицю спостережуваності (що, нагадаємо, і було метою, оскільки саме на її основі далі шукають усі інші матриці), треба якось (зручно) розкласти матрицю R_{22} , отриману в результаті RQ -розкладу (7.47) комбінованої матриці вхідних і вихідних координат $\begin{bmatrix} U \\ Y \end{bmatrix}$.

Як такий зручний розклад пропонується взяти *сингулярний розклад*, відомий також як *SVD (Singular Value Decomposition)*. Для довільної матриці W розмірністю $m \times n$ сингулярний розклад – це подання у вигляді $W = U\Sigma V^T$, де U розмірністю $m \times m$ і V розмірністю $n \times n$ – ортогональні

матриці, а матриця Σ містить ненульові елементи тільки на головній діагоналі, причому ці елементи σ_i , які називають *сингулярними числами* матриці W , є додатними і розміщені у незростаючому порядку (див. дод. 9). Цей розклад є широко відомим і застосовуваним у лінійній алгебрі, теорії ідентифікації, машинному навчанні та інших науках, а сингулярні числа є у певному сенсі аналогами власних чисел для прямокутних матриць, тобто характеризують найважливіші їх властивості.

Докладний аналіз усіх властивостей такого розкладу виходить за межі цього підручника, вкажемо лише декілька з них без доведення. По-перше, сингулярні числа матриці W є квадратними коренями власних чисел матриці $W^T W$, а отже, якщо W – квадратна і симетрична з невід’ємними власними числами (тобто невід’ємно визначена), то її власні і сингулярні числа збігаються. По-друге, відношення максимального сингулярного числа до мінімального називають *числом обумовленості* матриці W , і чим воно більше, тим ближче матриця $W^T W$ до виродженої. По-третє, якщо u_i і v_i – вектори-стовпці матриць U, V , то для будь-якого $k < \text{rank} W$, якщо задати матрицю W_k як $W_k = \sum_{i=1}^k \sigma_i u_i v_i^T$, отримаємо

$$\min_{\text{rank}(Z)=k} \|W - Z\|_2 = \|W - W_k\|_2 = \sigma_{k+1}.$$

Це означає, що сингулярне число σ_{k+1} дорівнює відстані між W і множиною всіх матриць рангу k , причому проєкцією W на цю множину є саме матриця W_k .

У розглядуваній задачі виконаємо SVD-розклад матриці R_{22} :

$$R_{22} = U \Sigma V^T, \quad (7.54)$$

де (для скалярних входів і виходів) усі матриці квадратні розмірністю $L \times L$. Можна було б, враховуючи (7.53), взяти в ролі матриці спостережуваності Γ матрицю U . Але, враховуючи розмірність U , це б означало, що можна ідентифікувати систему розмірністю L , а це не так. Припустимо, що відома істинна розмірність системи n (якщо ні, задача значно ускладнюється), і $L > n$ (це забезпечується початковим вибором інтервалу L). Тоді можна виконати блочне розбиття

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & \Sigma_2 \end{bmatrix}, \quad U = [U_1 \ U_2], \quad V = [V_1 \ V_2],$$

де Σ_1 має розмірність $n \times n$, $\Sigma_2 - (L-n) \times (L-n)$, і решта підматриць мають такі розмірності, щоб можна було записати (7.54)

$$R_{22} = U_1 \Sigma_1 V_1^T + U_2 \Sigma_2 V_2^T. \quad (7.55)$$

За вищенаведеною властивістю SVD-розкладу перший доданок $U_1 \Sigma_1 V_1^T$ є матрицею рангу n , найближчою за 2-нормою до матриці R_{22} . Тобто, по суті, ми можемо і повинні відкинути другий доданок $U_2 \Sigma_2 V_2^T$ як «шумовий», тобто такий, що не несе в собі корисної інформації, якщо знати, що істинна розмірність дорівнює n . Тоді, взявши $R_{22} \approx U_1 \Sigma_1 V_1^T$, враховуючи усі наведені вище міркування, візьмемо U_1 розмірністю $L \times n$ як матриці спостережуваності Γ для деякої реалізації системи:

$$\Gamma = U_1. \quad (7.56)$$

Звідси автоматично знаходимо деяку реалізацію матриці C як перший рядок матриці U_1 за визначенням матриці спостережуваності у скалярному випадку.

На основі властивості зсувної інваріантності (7.42) у скалярному випадку можна знайти деяку реалізацію матриці A як розв'язок такого матричного рівняння:

$$U_1(2:L) = U_1(1:(L-1))A. \quad (7.57)$$

Рівняння (7.57) можна розв'язати, наприклад, методом найменших квадратів, тобто як

$$A = (U_1^T(1:(L-1))U_1(1:(L-1)))^{-1}U_1^T(1:(L-1))U_1(2:L).$$

Якщо матриця $U_1^T(1:(L-1))U_1(1:(L-1))$ близька до виродженої (тобто якщо $U_1(1:(L-1))$, як кажуть, погано обумовлена), потрібно застосовувати відомі методи регуляризації, що виходить за межі розгляду цього підручника.

Далі можна знайти матрицю B , хоча це робити складніше. Із (7.46) та (7.47) випливає, що

$$Y = \Gamma X + \Phi U = R_{11}Q_1 + R_{22}Q_2.$$

Беручи до уваги (7.56), $U = R_{11}Q_1$ і $R_{22} \approx U_1 \Sigma_1 V_1^T$, отримуємо

$$U_1 X + \Phi R_{11} Q_1 = R_{21} Q_1 + U_1 \Sigma_1 (V_1)^T Q_2.$$

Помножимо це рівняння зліва на $(U_2)^T$ і врахуємо ортогональність матриць $(U_2)^T$ і U_1 , тобто $(U_2)^T U_1 = 0$ (що випливає із властивостей SVD-розкладу), отримаємо $(U_2)^T \Phi R_{11} Q_1 = (U_2)^T R_{21} Q_1$, а звідси

$$(U_2)^T \Phi R_{11} = (U_2)^T R_{21}. \quad (7.58)$$

Матрицю R_{11} у разі правильного вибору інтервалу збудження можна вважати невинудженою. Тоді рівняння (7.58) можна записати як

$$(U_2)^T \Phi = (U_2)^T R_{21} R_{11}^{-1}. \quad (7.59)$$

Із (7.59) та структури $\Phi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ CB & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ CA^{L-2}B & CA^{L-3}B & \dots & CAB & CB \end{bmatrix}$ можна

знайти B , розв'язавши відповідну перевизначену систему рівнянь методом найменших квадратів [7].

У багатовимірному (загальному) випадку логіка виведення залишається такою самою, але розмірності матриць змінюються. Тепер, враховуючи (7.56), матрицю вимірювань оцінюють як перші m рядків матриці спостережуваності $C = \Gamma_L(1:m)$, а рівняння (7.57) перетворюють на

$$U_1((m+1):nm) = U_1(1:(n-1)m)A,$$

звідки знаходять A звичайним чи зваженим методом найменших квадратів, можливо, з регуляризацією. Технічно дещо більш громіздким стає також знаходження матриці B на основі (7.59) [7]. На щастя, у більшості випадків немає потреби у власноручному програмуванні алгоритму 4SID для практичних цілей, оскільки він існує як програмні реалізації в різних середовищах та на різних мовах програмування, зокрема, в пакеті System Identification Toolbox у Matlab.

Нагадаємо, що в результаті ідентифікації можна отримати якусь одну реалізацію системи із множини можливих. У загальному випадку це не створює жодних проблем, оскільки всі реалізації еквівалентні за входом і виходом, а «справжня» реалізація все одно невідома – це просто математична абстракція. Але у деяких випадках, зокрема у випадку

КК, будуть відомі матриці B , C конкретної структури, а саме $B = \begin{pmatrix} I_r \\ 0 \end{pmatrix}$ і $C = (I_m \quad 0)$, а матриці, отримані в результаті роботи алгоритму, описаного вище, мають зовсім іншу структуру. Отже, в цьому разі треба перейти до такої реалізації, в якій ці матриці будуть такі, як потрібно. Для цього скористаємось рівняннями (7.40). Щоб знайти матрицю T , що пов'язує бажану реалізацію (A, B, C) й отриману реалізацію (A', B', C') , треба розв'язати систему рівнянь

$$B' = TB, \quad C = C'T, \quad (7.60)$$

де невідомою матрицею є тільки T розмірністю $n \times n$. Система (7.60) недовизначена, якщо кількість невідомих більша за кількість вимірювань, тобто в цьому разі за $n^2 > n + m$, що виконується майже завжди. Отже, достатньо знайти будь-який розв'язок із множини розв'язків (7.60), щоб отримати T , після чого знайти A з $A' = TAT^{-1}$, тобто $A = T^{-1}A'T$. Технічно, щоб знайти якийсь розв'язок недовизначеної системи, можна скористатись пакетами програм для умовної оптимізації, поклавши (7.60) як рівняння обмежень, а в ролі цільової функції для оптимізації покласти, наприклад, $\|T\| \rightarrow \min$ [23] або щось інше, може навіть «фіктивну» функцію у вигляді константи, це неважливо.

Окреме питання, яке виникає в контексті ідентифікації, стосується того, якими мають бути зовнішні збуджувальні сигнали u . В ідеалі вони мають бути постійно збуджувальними, як і під час оцінювання на основі МНК. У більш загальному випадку інформативність сигналів можна оцінити за рангом матриці U , який має бути не меншим за L . Важливо також, наскільки вона близька до матриці неповного рангу, якщо вона досить близька, то задача ідентифікації може виявитись некоректною. Дослідити це можна на основі SVD-розкладу, тобто за її сингулярними числами, адже доцільно обирати такий інтервал спостереження для ідентифікації, на якому порядок збуджувального впливу, що визначається кількістю істотних сингулярних чисел матриці U , буде найбільшим. Можна скористатись деякими «видимими» проявами інформативності сигналу. Відомо, що інформативними сигналами є сигнали типу «білого» шуму та δ -функції. Тоді перевіряти на інформативність слід ті інтервали, які містять вхідні сигнали, що зовні найбільше схожі на них. Ті

інтервали, де вхідні сигнали або малі за амплітудою, або слабо змінюються, можна одразу вилучати з розгляду. Можна формувати матриці U і, відповідно, Y зі стовпців, зсув між якими є більшим за одиницю, якщо це збільшує інформативність.

Досі мова не йшла про похибки у вимірюваних даних. Перевагою 4SID-методів є відсутність припущень про стохастичний характер цих похибок. Зазвичай припускають лише, що ці похибки обмежені за якоюсь нормою. Взагалі описаний вище алгоритм не залежить напряду від цих обмежень але, звичайно ж, наявність похибок впливає на «якість» ідентифікації. У кращому випадку різниця між істинними та оціненими власними числами матриці A буде того ж порядку, що й похибки вимірювання. Між тим основна проблема полягає в тому, що наявні експериментальні дані, якщо їх вимірюють із похибками, можуть не давати достатньої інформації для коректної ідентифікації. Під коректністю тут розуміємо властивість, яка полягає в тому, що під час різних реалізацій вектора вимірювань (що різняться у межах похибки) отримуємо близькі результати ідентифікації, а саме узгоджені щодо точності з похибкою цих вимірювань. Інакше кажучи, задача стає поставленою некоректно, якщо шум вимірювань такий великий, що результати ідентифікації (власні числа та інші інваріанти) суттєво залежать від конкретної реалізації похибок вихідних даних, тобто за різних реалізацій похибок отримуємо зовсім різні моделі. Зрозуміло, що якщо це так, ідентифікацію не можна вважати успішною. Ще однією практичною вимогою до результату ідентифікації, окрім коректності отримуваних результатів, є керованість і спостережуваність ідентифікованої системи, оскільки в разі відсутності цих властивостей використання моделі в задачах прогнозування і керування стане проблематичним.

7.4. Ідентифікація вагових коефіцієнтів матриці суміжності когнітивної карти ІТ-компанії за наявності невимірюваних координат вершин

Розглянемо КК ІТ-компанії (рис. 4.2), де вимірювані вершини такі:

- 1 – тривалість розробки проєкту,
- 2 – витрати на інновації,
- 3 – зарплата, премії, бонуси,

- 4 – бюджет проєкту,
- 5 – прибуток,
- 6 – витрати на функціонування групи менеджерів,
- 7 – витрати на маркетинг,
- 8 – продаж проєктів,
- 9 – витрати на проведення переатестації,
- 10 – витрати на підвищення кваліфікації.

Невимірювані координати:

- 11 – технічний контроль,
- 12 – інтелектуальні активи,
- 13 – якість проєкту,
- 14 – конкурентоспроможність,
- 15 – задоволеність роботою,
- 16 – обмін досвідом, інформаційна взаємодія.

Тестові сигнали можуть подаватись на вершини 2, 3, 4, 6, 7, 9 та 10. Тоді матриці керування і вимірювання в моделі у просторі станів мають вигляд

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Задача полягає в оцінюванні вагових коефіцієнтів ребер цієї КК, тобто елементів матриці суміжності (матриці стану A) [23]. Нехай спочатку всі координати вимірюються точно. Для моделювання будемо подавати тестові сигнали у вигляді «білого» шуму з одиничною дисперсією на 7 дозволених вершин і будемо вимірювати 10 вихідних координат КК протягом L періодів дискретизації. За основу візьмемо модель (7.39), де $u(k)$ – збудження (тестові, керуючі сигнали), $y(k)$ – послідовність приростів вимірюваних координат вершин КК. Щоб знайти якусь реалізацію системи за допомогою 4SID-методу у MatLab, сформуємо допоміжні матриці $\tilde{U} = [u(1), \dots, u(L)]$, $\tilde{Y} = [y(1), \dots, y(L)]$, стовпці яких – 7-вимірні вектори тестових сигналів і 10-вимірні вектори вихідних сигналів відповідно у моменти часу $1, 2, \dots, L$ (у коді нижче ці матриці називають u, y , вони будуть транспоновані). Отримаємо результат (матриці A_{hat} , B_{hat} , C_{hat} , тобто оцінені A', B', C' за допомогою такого програмного коду (тут враховано, що розмірність системи відома і дорівнює 16):

```
data = iddata(y', u', 1);
sys = n4sid (data, 16, 'Ts', 1, 'DisturbanceModel', 'none', 'InitialState',
'zero', 'Feedthrough', false);
[Ahat,Bhat,Chat] = idssdata(sys);
```

Далі можна перейти до реалізації з «правильними» матрицями B, C , розв'язавши якимось способом систему рівнянь (7.60) $B' = TB$, $C = C'T$ щодо елементів матриці T розмірністю 16×16 , а далі застосувавши перетворення $A = T^{-1}A'T$. Це необхідно робити для практичного використання моделі, але непотрібно для оцінювання точності ідентифікації.

По-перше, переконаємося, що ідентифікована КК відповідає реальній по виходу в режимі імпульсних процесів (на рис. 7.4 суцільна лінія – реальна система, пунктирна лінія – ідентифікована). Для цього подамо ті самі входні сигнали, які подавали для ідентифікації, на вхід оціненої системи (можна брати A', B', C'), і порахуємо, як виглядають в цьому випадку вихідні координати. Нехай $L = 500$.

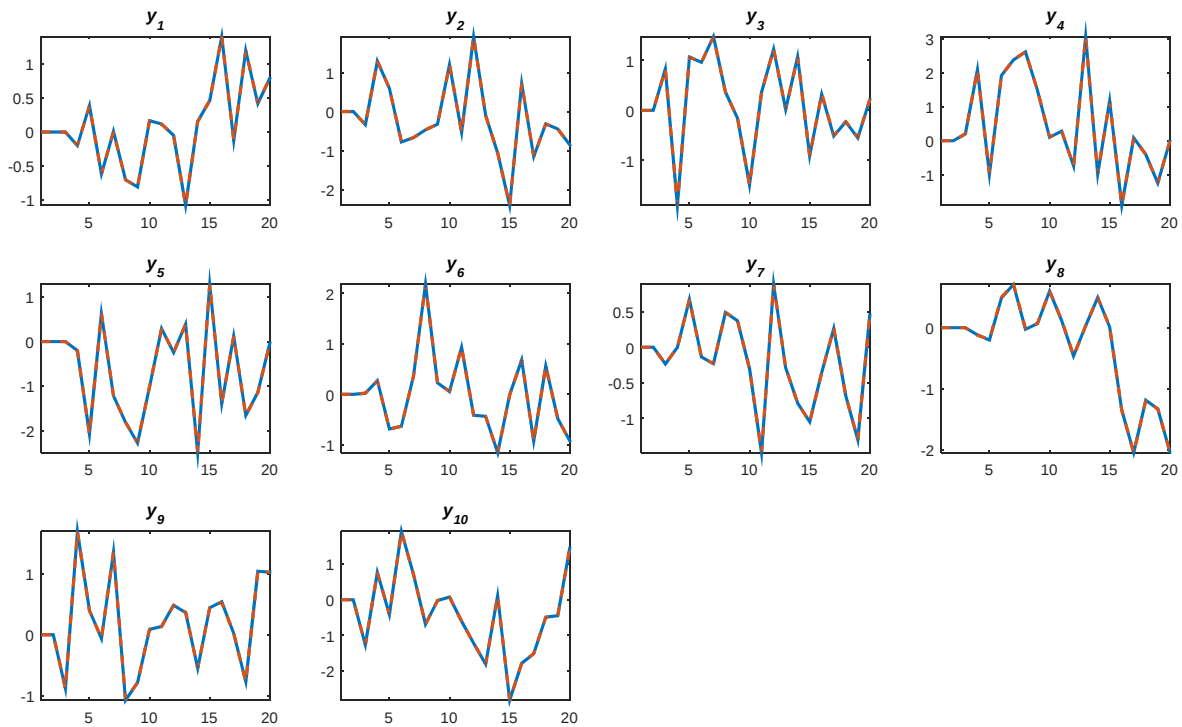


Рис. 7.4. Порівняння імпульсного процесу з точними та ідентифікованими коефіцієнтами

Далі розглянемо основні інваріанти – власні числа матриці суміжності КК. У вихідній (реальній) системі вони такі:

$0,730$;
 $0,280 + 0,546i$;
 $0,288 - 0,546i$;
 $0,505$;
 $-0,595$;
 $0,053 + 0,390i$;
 $0,053 - 0,390i$;
 $-0,275 + 0,213i$;
 $-0,275 - 0,213i$;

$-0,210;$
 $0,037;$
 $-1,955e-16 + 9,036e-10i;$
 $-1,955e-16 - 9,036e-10i;$
 $1,713e-16;$
 $-2,827e-16;$
 $7,562e-17.$

Ймовірно, що останні 5 власних чисел вище насправді є нулем кратності 5, що істотно ускладнює порівняння інваріантів. Тому надалі під час аналізу насамперед будемо розглядати перші 11 власних значень як визначальних для динаміки імпульсного процесу КК.

Будемо порівнювати інваріантний вектор власних чисел ідентифікованої (A') та вихідної (A) КК при різних умовах. Для порівняння пропонуємо таку метрику. Обидва вектори відсортовано за абсолютними значеннями, знаходять їх різницю і беруть максимальне за модулем значення вектора різниць. Якщо структуру власних значень не порушено, ця метрика показує максимальне відхилення отриманих значень від справжніх.

На рис. 7.5 показано залежність для цієї метрики якості ідентифікації на основі точності визначення власних чисел від тривалості ідентифікації L . Для 500 вимірювань похибка склала 0,059. Істотне зростання похибки починається, коли кількість вимірювань стає менше 400.

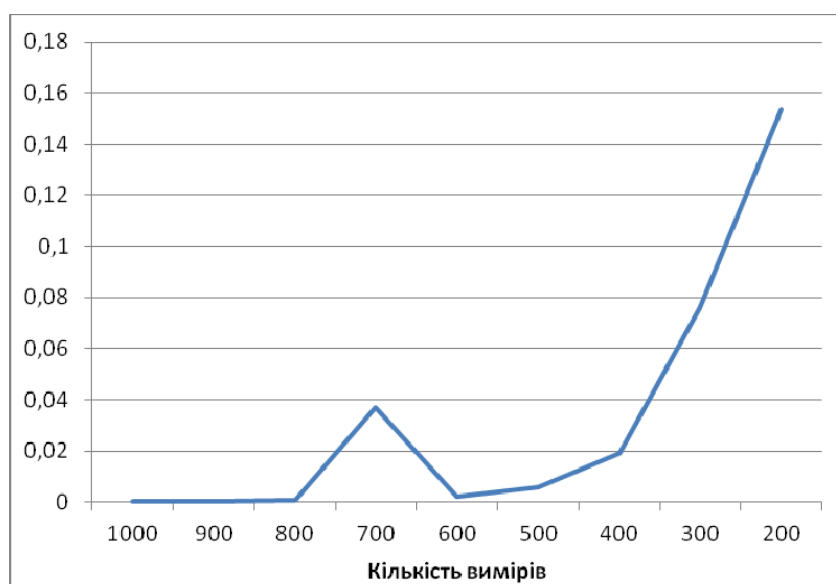


Рис. 7.5. Залежність похибки від кількості вимірювань

На рис. 7.6 показано залежність від шуму вимірювань (у попередніх дослідженнях він дорівнював нулю). Будемо подавати рівномірно розподілений випадковий шум на всі вершини з амплітудою, яка залежить від максимального значення корисного сигналу, тобто будемо досліджувати залежність похибки ідентифікації від відношення шуму до корисного сигналу (для 500 вимірів).

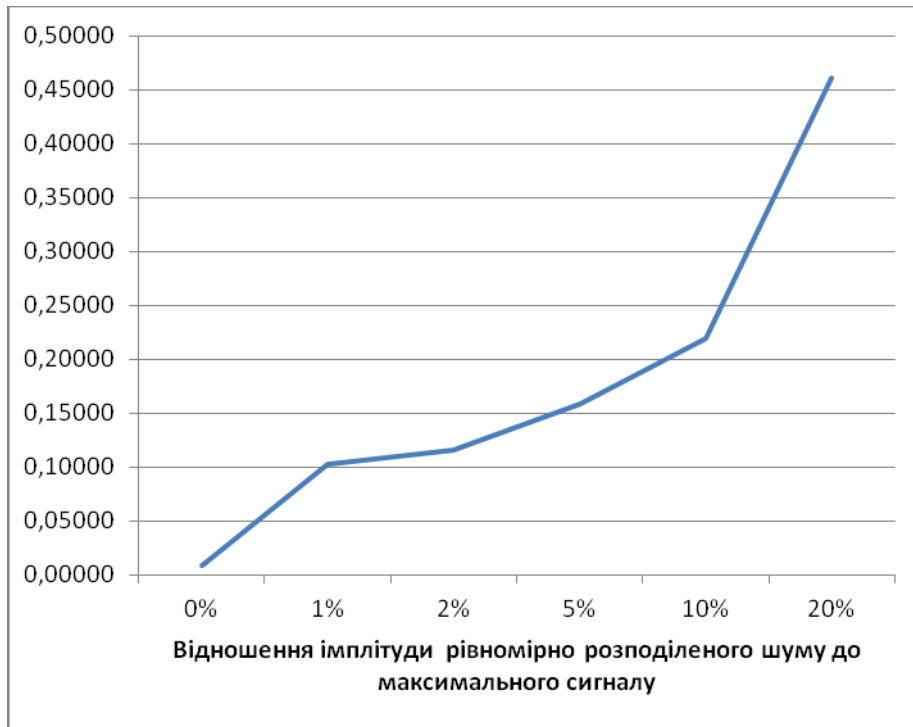


Рис. 7.6. Залежність похибки від шуму

Залежність від шуму вимірювань особливо важлива, тому подамо результати також у табличній формі (табл. 7.1), вказавши не максимальну похибку, а самі ідентифіковані моди системи. У «шапці» таблиці наведено абсолютні значення амплітуди шуму.

Отже, починаючи з шуму порядку 10^{-5} , похибка за деякими модами стає значною, далі починає розпадатися структура власних значень (комплексні пари перетворюються в дійсні власні значення тощо).

У результаті дослідження можна зробити висновок, що метод працює ефективно, але тільки за певних умов і обмежень. Його ефективність багато в чому залежить від кількості вимірювань, кількості вимірюваних координат вузлів й особливо від шуму вимірювань. Насправді навіть без шуму вимірювань ідентифікація не є абсолютно точною через обчислювальні похибки, істотні для багатовимірних складних систем

(наприклад, 16-вимірної КК). Коли шум перевищує певний поріг (близько 10^{-5} для цього випадку, але в загальному випадку це залежить від структури КК), точна ідентифікація стає неможливою. Це не є недоліком розглядуваного методу, але неминучою властивістю будь-якого методу ідентифікації, оскільки, починаючи з деякого порога, задача стає некоректною. Таким чином, запропонований метод рекомендовано застосовувати для ідентифікації КК з достатньою кількістю вимірювань з низьким рівнем шуму.

Таблиця 7.1. Власні числа ідентифікованої системи за різного рівня шуму

0	10^{-14}	10^{-10}	10^{-5}
0,730	0,730	0,730	0,730
$0,289 + 0,5469i$	0,5049	$0,2889 + 0,546i$	$0,289 + 0,546i$
$0,289 - 0,5469i$	$0,289 + 0,546i$	$0,288 - 0,546i$	$0,289 - 0,546i$
0,504	$0,289 - 0,546i$	0,505	0,504
-0,595	-0,595	-0,595	-0,595
$0,053 + 0,390i$	$0,053 + 0,390i$	$0,053 + 0,390i$	$0,053 + 0,390i$
$0,053 - 0,390i$	$0,053 - 0,390i$	$0,053 - 0,390i$	$0,053 - 0,390i$
$-0,275 + 0,213i$	$-0,275 + 0,213i$	$-0,275 + 0,212i$	$-0,275 + 0,213i$
$-0,275 - 0,213i$	$-0,275 - 0,213i$	$-0,275 - 0,212i$	$-0,275 - 0,213i$
-0,211	-0,211	-0,209	-0,211
0,037	0,037	0,037	0,037
0,00085	0,00085	-0,00808	-0,00138
-0,00076	-0,00076	0,00770	0,00100
$-3,46e-13$	$-1,14e-15$	$3,62e-10$	0,00024
$-8,38e-15$	$5,45e-14 + 3,19e-14i$	$-2,45e-11$	$1,07e-06$
$-9,65e-17$	$5,45e-14 - 3,19e-14i$	$-1,43e-11$	$6,04e-06$

7.5.* Проблема вибору розмірності когнітивної карти системи та некоректності задачі ідентифікації

Як було сказано вище, за наявності похибок у вимірюваних даних (а вони насправді є завжди, навіть якщо це обчислювальна похибка комп'ютера) задача ідентифікації може стати некоректно поставленою, тобто такою, що її результати суттєво залежать від конкретної реалізації

шуму вимірювань. Це відома проблема і зазвичай її намагаються вирішувати, застосовуючи методи регуляризації (за Тихоновим), але більшість цих методів передбачає, що шум вимірювань має стохастичний характер і відомі якісь його стохастичні характеристики (розподіл, дисперсія тощо). У цьому підручнику на початку було прийнято, що ми не робитимемо жодних припущень такого плану, окрім, можливо, обмеженості збурень за амплітудою (нормою).

У цьому випадку одним із способів є зменшення розмірності n ідентифікованої системи, тому що відомо, що збільшення розмірності шуканої моделі викликає збільшення чутливості розв'язку до похибок даних [7, 24, 25]. У разі дуже великої розмірності навіть маленька обчислювальна похибка комп'ютера вже може призвести до некоректності. З одного боку, відомо, що зі збільшенням розмірності моделі зменшується відхилення вимірюваного виходу від відповідного вихідного сигналу моделі з однаковим входом. Але водночас, з другого боку, збільшення розмірності шуканої моделі зумовлює збільшення чутливості рішення до похибок даних. За певної розмірності настає рівність похибок, обумовлених зазначеними факторами. Саме її доцільно вважати оптимальною, оскільки подальше збільшення розмірності призведе до великих помилок параметрів моделі. На жаль, фактично неможливо в реальних умовах точно визначити цю ефективну з точки зору якості моделі розмірність. Тому наразі це відкрите наукове питання, деякі підходи до вирішення якого лише коротко буде описано в цьому підрозділі.

Перш ніж описувати ці підходи варто зазначити, що це означає з практичної точки зору. Тут можливі два варіанти.

Перший варіант – коли насправді розмірність системи відома точно, наприклад, є КК зі, звичайно ж, відомою кількістю вершин, хоча деякі з них не вимірюються. Що в цьому випадку означає вибір розмірності у процесі ідентифікації? Це означає, що за певного рівня шуму вимірювань можна стверджувати, що коректно (правильно) ідентифікувати повну систему відомої розмірності неможливо. Натомість ми пропонуємо замінити її на іншу систему меншої розмірності, яка буде еквівалентна їй за входом і виходом, тобто яка на ті самі вхідні сигнали буде реагувати тими самими (з точністю до рівня похибок) значеннями вихідних координат (вимірюваних вершин). По суті це означає, що ми

згрупуємо деякі («близькі») вершини КК, швидше за все невимірювані, в одну вершину і таким чином зменшимо розмірність. При цьому ця нова система буде вже ідентифікуватись коректно, тобто не буде суттєво варіюватись залежно від реалізації шуму. Зменшення розмірності (об'єднання вершин) є «платою» за коректність ідентифікації.

Другий варіант – це коли насправді розмірність системи невідома. У випадку КК це може означати, що ми не знаємо, які ще фактори впливають на складну систему, описувану імпульсним процесом КК, і скільки всього та які існують невимірювані вершини. У такому разі вибір розмірності у процесі ідентифікації означає, що ми виявляємо деякі кластери факторів, не знаючи їхнього сенсу, які впливають на вимірювані вершини певним відомим чином. Тобто якщо ми, наприклад, вимірюємо 7 вершин, а оцінена у процесі ідентифікації розмірність дорівнює 9, це означає, що крім цих відомих 7 вершин у КК є ще дві невимірювані «вершини», які насправді є, швидше за все, двома групами зовнішніх факторів невідомої природи, які, втім, суттєво впливають на динаміку системи.

Якщо ж подивитись на проблему із суто математичної точки зору, то в обох випадках відбувається один і той самий процес: об'єднання між особою близьких власних чисел матриці A . Якщо на комплексній площині насправді 15 власних чисел, але похибки такі, що можна коректно оцінити всі 15, згрупуємо сусідні власні числа у «кластери», отримаємо, наприклад, 9 «кластерів», й оцінюватимемо центри цих 9 кластерів як 9 власних чисел нової редукованої системи. Знову-таки, ця втрата точності є «платою» за коректність, а точніше наслідком того, що за наявності певного шуму у нас просто немає даних для того, щоб розрізнити між собою «сусідні» власні числа.

Перший спосіб знаходження регуляризованої розмірності можна запропонувати у випадку, коли інтервал спостережень дуже довгий. Наявні дані розбиваємо на два приблизно рівних інтервали. На першому з них задаємо деяку розмірність n_0 шуканої моделі й методом 4SID знаходимо тільки матрицю A для деякої реалізації. Обчислюємо її власні значення. Потім зсуваємо перший інтервал на q кроків вправо і для нових даних обчислюємо матрицю A та її власні значення тим же способом. Після цього знову зсуваємо інтервал на q кроків і знаходимо для нього власні значення. Продовжуємо цю процедуру до того моменту,

коли зсунутий інтервал фактично збігається із другим інтервалом даних вихідного розбиття. Для отриманої таким чином множини власних значень проводимо оцінювання їх розкиду. Якщо розкид виявиться невеликим, то збільшуємо на одиницю і виконуємо ті самі дії з визначенням розкиду власних значень. Якщо ж для початкової розмірності розкид виявився великим, то зменшуємо розмірність моделі. Процес встановлення порядку наближеної моделі закінчується після знаходження межі стійкості. Гранично допустима умовою стійкості розмірність дає її квазі-оптимальне значення. Для неї одним із 4SID-методів обчислюють усі параметри наближеної моделі. Такий підхід має два недоліки. По-перше, він вимагає, як було сказано, тривалого інтервалу спостереження. По-друге, в його основі лежить погано формалізоване поняття розкиду власних значень. Рекомендовано, приміром, вважати розкид великим, коли змінюється структура власних значень, наприклад, коли пара дійсних значень перетворюється в комплексну пару або змінюється знак власного числа, а також коли два дуже близьких власних числа починають швидко розбігатись. Коли ж цього немає, можна рекомендувати таку процедуру визначення розкиду власних чисел: обчислити модулі власних значень і впорядкувати їх за спаданням; сформувати з них у стійкій області кластери близьких значень; потім у міру збільшення розмірності відстежувати їхню поведінку до появи ознак нестійкості, тобто істотного збільшення розмірів якогось із кластерів.

Розглянемо для прикладу КК комерційного банку, коли вимірюють не всі вершини, зокрема, нехай невимірюваними будуть вершини 6 і 7 (ризики). Також припустимо, що розмірність системи невідома і треба її оцінити [24]. Проведемо обчислювальні експерименти з визначення розмірності, що відповідає регуляризованому розв'язку на довгому інтервалі, який містить 600 точок. Було обрано 295 точок, які ковзали по цьому інтервалу. Розв'язок знаходили для 5 варіантів задачі ідентифікації, тобто мали 5 наборів власних чисел для кожної обраної розмірності. З табл. 7.2 і 7.3 можна побачити, що для розмірності $n=7$ власні числа цих 5 моделей різняться несуттєво. Водночас для розмірності $n=8$ з'являється одне власне число (в останньому рядку табл. 7.3), яке поводить себе нестійко, тобто регуляризований розв'язок відповідає моделі з $n=7$.

Таблиця 7.2. Власні числа для розмірності 7

$0,8377 + 0,2661i$	$0,8376 + 0,2660i$	$0,8376 + 0,2661i$	$0,8376 + 0,2661i$	$0,8376 + 0,2661i$
$0,8377 - 0,2661i$	$0,8376 - 0,2660i$	$0,8376 - 0,2661i$	$0,8376 - 0,2661i$	$0,8376 - 0,2661i$
$0,0933 + 0,7130i$	$0,0932 + 0,7129i$	$0,0932 + 0,7131i$	$0,0933 + 0,7131i$	$0,0933 + 0,7133i$
$0,0933 - 0,7130i$	$0,0932 - 0,7129i$	$0,0932 - 0,7131i$	$0,0933 - 0,7131i$	$0,0933 - 0,7133i$
0,6162	0,6159	0,6162	0,6163	0,6163
$-0,1136 + 0,2285i$	$-0,1133 + 0,2285i$	$-0,1140 + 0,2283i$	$-0,1139 + 0,2283i$	$-0,1142 + 0,2278i$
$-0,1136 - 0,2285i$	$-0,1133 - 0,2285i$	$-0,1140 - 0,2283i$	$-0,1139 - 0,2283i$	$-0,1142 - 0,2278i$

Таблиця 7.3. Власні числа для розмірності 8

$0,8377 + 0,2660i$	$0,8377 + 0,2660i$	$0,8376 + 0,2661i$	$0,8376 + 0,2661i$	$0,8376 + 0,2661i$
$0,8377 - 0,2660i$	$0,8377 - 0,2660i$	$0,8376 - 0,2661i$	$0,8376 - 0,2661i$	$0,8376 - 0,2661i$
$0,0934 + 0,7130i$	$0,0932 + 0,7129i$	$0,0932 + 0,7131i$	$0,0932 + 0,7132i$	$0,0934 + 0,7133i$
$0,0934 - 0,7130i$	$0,0932 - 0,7129i$	$0,0932 - 0,7131i$	$0,0932 - 0,7132i$	$0,0934 - 0,7133i$
0,6162	0,6159	0,6162	0,6163	0,6163
$-0,1136 + 0,2284i$	$-0,1132 + 0,2285i$	$-0,1140 + 0,2283i$	$-0,1139 + 0,2282i$	$-0,1141 + 0,2277i$
$-0,1136 - 0,2284i$	$-0,1132 - 0,2285i$	$-0,1140 - 0,2283i$	$-0,1139 - 0,2282i$	$-0,1141 - 0,2277i$
-0,6844	-0,4930	-0,5196	-0,7922	-0,7931

Інший спосіб можна запропонувати у випадку, коли шуми вимірювання дуже малі чи їх зовсім немає, але розмірність невідома. Тоді варто звернути увагу на структуру матриці Σ з розкладу (7.54), що, нагадаємо, є діагональною із сингулярними числами на головній діагоналі у незростаючому порядку. Є велика ймовірність, що буде помітний розрив між великим сингулярними числами і маленькими, тобто, наприклад, послідовність сингулярних чисел виглядатиме як 100; 90; 10; 5; 0,001; 0,0005; 0,0004; 0,0001. Очевидно, що між четвертим і п'ятим сингулярними числами в цьому прикладі є розрив. У такому разі пропонується взяти розмірність системи $n = 4$, відповідно, віднести їх до матриці Σ_1 , а усі сингулярні числа, починаючи з п'ятого, вважати несуттєвими, «шумовими», і віднести їх до матриці Σ_2 . Далі можна продовжувати діяти за наведеним вище алгоритмом. За наявності шумів вимірювання цей підхід іноді також може «працювати», у цьому разі можна побачити, що, починаючи з деякого номера, усі сингулярні числа приблизно однакові й містяться на рівні шуму, цей момент виходу на «плато»

і є регуляризованою розмірністю. Звичайно ж, недоліком цього підходу є важка формалізація поняття «розрив» і складність у випадку, коли розрив є нечітко вираженим, плавним. Тоді у виборі розмірності проявляється певна довільність.

Опишемо ще й третій підхід, який можна застосувати у випадку, коли відоме максимальне абсолютне значення шуму вимірювань $|\xi_i(k)| \leq \varepsilon$ [24, 25]. Тоді застосуємо алгоритм такого типу. Для кожного потенційного значення розмірності n , починаючи з кількості вимірюваних координат вершин КК m і до максимального розумного числа, ідентифікуємо систему одним із 4SID-методів. Для кожної ідентифікованої системи (для кожної розмірності n) проводимо обчислювальний експеримент: моделюємо поведінку вимірюваних координат $y_{i,n}^s(k)$ з тими самими вхідними (тестуючими або керуючими) сигналами та початковими умовами, які були використані для отримання фактичних вимірюваних координат $y_i(k)$, що використовуються для ідентифікації. Обчислимо нев'язки,

$$\varepsilon_{i,n}(k) = |y_i(k) - y_{i,n}^s(k)|,$$

для всіх $i = 1, \dots, m, k = 1, \dots, L$.

Для кожної ідентифікованої системи перевіримо, чи виконується

$$\varepsilon_i(n) \leq \varepsilon, \quad i = 1, \dots, m,$$

де

$$\varepsilon_i(n) = \max_{k=1, \dots, N} \varepsilon_{i,n}(k).$$

Якщо починаючи з деякої розмірності n^* ця умова виконується, то перша така розмірність і є шуканою (з точки зору регуляризації за Тихоновим). Якщо такого немає, то можна застосувати якусь метрику, наприклад максимальну нев'язку за всіма координатами і відліками часу $M(n) = \max_{i=1, \dots, m} \varepsilon_i(n)$. Для послідовності метрик $\{M(n), n > m\}$, обчислити послідовність $\Delta M(n) = M(n-1) - M(n)$ і знайти таке n^* , що $\Delta M(n^*)$ – останнє достатньо велике значення в послідовності $\Delta M(n)$, тобто усі наступні за ним близькі до нуля (порівняно з попередніми) і/або змінюють знак. Якщо жодне значення не є достатньо великим, взяти $n^* = m$.

Для прикладу знайдемо регуляризований розв'язок задачі ідентифікації КК банку за даними на короткому інтервалі з тестовим впливом у вигляді «білого» шуму. При цьому шум вимірювань належить інтервалу $[-0,01; 0,01]$, а кількість вимірів становить 300. Розмірність варіювалася, починаючи з $n = 5$. Обчислювальні експерименти показали, що для цього випадку не існує розмірності, за якої $\varepsilon_i(n) \leq \varepsilon$ виконувалося б для всіх координат у всіх точках, тому розмірність оцінювали за показником $M(n) = \max_{i=1, \dots, m} \varepsilon_i(n)$ (рис. 7.7).

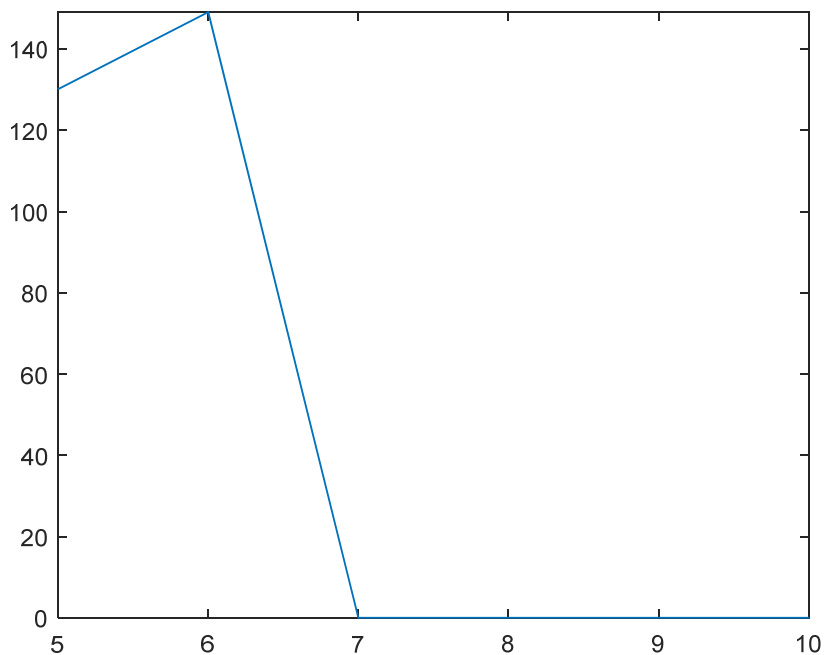


Рис. 7.7. Показник M для методу ідентифікації на короткому інтервалі

Із графіка (рис. 7.7) видно, що розмірність моделі $n = 7$ визначається однозначно – є очевидний розрив між значеннями метрики M для розмірностей 6 і 7, усі наступні прирости цієї метрик $\Delta M(n)$ є дуже малими. Отже, знайдена розмірність збігається з розмірністю генеруючої системи. З підвищенням рівня шуму до інтервалу $[-0.5, 0.5]$ шукана розмірність стала $n = 6$ (переконайтесь самостійно!).

Більш докладний розгляд вирішення проблеми некоректності, зокрема через обрання розмірності системи як параметра регуляризації, виходить за межі цього підручника.

Контрольні запитання

1. Які методи ідентифікації складних системи ви знаєте?
2. Що є критерієм оптимальності у методі найменших квадратів? У чому відмінність між рекурентним і нерекурентним МНК?
3. Сформулюйте основні правила застосування РМНК для оцінювання параметрів дискретних моделей об'єктів керування.
4. Як застосовувати РМНК для оцінювання параметрів нестационарних моделей?
5. Чим різниться параметрична ідентифікація від структурної ідентифікації у складних системах?
6. Які сигнали називають постійно збуджувальними?
7. У чому полягає ідея 4SID-методів? У якому випадку слід застосовувати ці методи ідентифікації?
8. Що мають на увазі, коли говорять про різні реалізації однієї і тієї самої системи у просторі станів? Що таке інваріанти системи і які інваріанти ви знаєте?
9. Що таке активний і пасивний експерименти під час ідентифікації?
10. Що таке SVD-розклад матриці? Які його властивості ви знаєте?
11. Що таке число обумовленості матриці? Які матриці називають погано обумовленими? Що це означає на практиці?
12. Що розуміють під некоректністю задачі ідентифікації? У яких випадках задача ідентифікації може виявитись некоректно поставленою?

Задачі для самостійного розв'язання

7.1. Дано КК ІТ-компанії (див. рис. 4.2). Припустимо, що вершин 9–16 немає (вони не впливають на систему).

Завдання.

- а) Записати матрицю суміжності A цієї «скороченої» КК.
- б) Здійснити оцінювання вагових коефіцієнтів матриці суміжності на основі нерекурентного МНК за формулою (7.13) для кожного рядка матриці. Знайти абсолютні похибки оцінювання для всіх 64 коефіцієнтів (включно з нульовими). Взяти кількість періодів дискретизації (тривалість

експерименту) $K=100$, імпульси $\Delta q_i(k)$ подавати у вигляді «білого» шуму з нульовим середнім та одиничною дисперсією на всі вершини протягом усього періоду оцінювання.

в) Проаналізувати похибки оцінювання залежно від таких параметрів:

– K : крім 100, взяти 10, 50, 200, 1000;

– дисперсія тестових імпульсів у вигляді «білого» шуму: крім 1, взяти 0,5, 5, 10;

– тип тестових імпульсів: крім білого шуму, взяти рівномірно розподілений випадковий вектор в діапазоні $(-1, 1)$;

– тривалість подання тестових імпульсів: покласти $\Delta q_i(k)$ протягом останніх K_1 періодів дискретизації рівними нулю, де $K_1 = K/3, K/2, K-1$;

– кількість вершин КК, на які подається тестовий імпульс: припустити, що $\Delta q_i(k)=0$ на всіх періодах дискретизації для останніх i_1 вершин, де $i_1 = 2, 5, 7$.

Зробити висновки щодо чутливості якості ідентифікації до цих параметрів.

7.2. У підрозд. 5.3.4 розглянуто стійкий імпульсний процес КК діяльності комерційного банку $\Delta \bar{X}(k+1) = W \Delta \bar{X}(k) + \Delta \bar{V}(k)$, де матриця суміжності

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 0,15 & 0 & 0 & 0,1 & 0 & 0 \\ -0,2 & 0 & 0,13 & -0,2 & 0,03 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0,75 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0,8 & 0 & -0,5 & 0 \\ 0 & 0,85 & -0,95 & 0,9 & 0 & 0 & -0,7 \\ 0 & -0,5 & 0,3 & 0 & 0 & 0,7 & 0 \\ 0 & 0 & 0,1 & -0,2 & 0,8 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для проведення процедури оцінювання вагових коефіцієнтів a_{ij} матриці W припустимо, що початкове значення вектора координат вершин КК $\bar{X}(0) = (100; 500; 1500; 1200; 200; 150; 250)^T$, а початковий вектор імпульсів $\Delta \bar{X}(0) = (-2; 0; -20; -18; 2; 0; 0)^T$. Також припустимо, що початкові значення оцінюваних коефіцієнтів $\hat{a}_{ij}$ різняться від заданих коефіцієнтів a_{ij} матриці W на 50 %. У ролі збурень $\Delta \bar{V}(k)$ можна подавати дискретний «білий» шум.

Завдання.

а) На основі рекурентної процедури (7.26) методу найменших квадратів оцінити вагові коефіцієнти $\hat{a}_{ij}$ щодо кожного i -го рядка матриці W .

б) Побудувати графіки перехідних процесів кожного оцінюваного коефіцієнта $\hat{a}_{ij}(k)$ й виконати аналіз похибок оцінювання $\delta_{ij}(k) = a_{ij} - \hat{a}_{ij}(k)$.

в) Побудувати графік сліду матриці $\text{Sp}P$.

7.3. Припустимо, що у КК із завдання 7.2 є дві невимірювані вершини – ризики стабільності та ліквідності 6 і 7, тобто матриця C має розмірність 5×7 з одиницями на головній діагоналі та нулями поза нею. На всі п'ять інших (вимірюваних) вершин можна подавати тестові сигнали, тобто матриця B має розмірність 7×5 з одиницями на головній діагоналі й нулями поза нею.

Завдання.

а) Ідентифікувати систему на основі 4SID-методу, скориставшись Matlab або іншими програмними реалізаціями. При цьому припустити, що розмірність системи відома ($n = 7$), усі вимірювані координати вимірюються точно, а всі збуджувальні (керуючі) сигнали мають вигляд «білого» шуму і діють протягом усього періоду оцінювання $L = 500$.

б) Порівняти матриці A, B, C , отримані в результаті ідентифікації, з істинними матрицями A, B, C . Переконатись, що вони різні, але власні числа істинної та оціненої матриць A фактично збігаються.

в) Здійснити моделювання імпульсного процесу КК з оціненими матрицями A, B, C замість істинних за тих же вхідних сигналів і початкових умов. Порівняти отримані графіки координат вершин КК з тими (істинними) значеннями, що використовувались для проведення ідентифікації, переконатись, що вони фактично збігаються.

г) Повторити пп. а) – в) з неточним вимірюванням координат вершин, а саме, коли на вихідні координати подається булий шум з дисперсіями 1, 5, 10, 100. Прослідкувати, як зростає похибка оцінювання власних чисел у б) на вихідних координатах та у в) після зростання шуму вимірювань.

7.4. В умовах завдання 7.3 припустити, що розмірність системи n невідома для особи, що здійснює ідентифікацію.

Завдання.

У припущеннях про розмірність $\hat{n} = 5, 6, 8, 9$:

а) Ідентифікувати систему на основі 4SID-методу, скориставшись Matlab або іншими програмними реалізаціями. При цьому припустити, що всі вимірювані координати вимірюються точно, а всі збуджувальні (керуючі) сигнали мають вигляд білого шуму і діють протягом усього періоду оцінювання $L = 500$.

б) Нарисувати на комплексній площині власні матриці A , отримані в результаті ідентифікації, позначивши їх значком «х» ($\hat{n}$ штук), та істинні власні числа матриці A , позначивши їх значком «о» (7 штук). Чи можна стверджувати, що «х» та «о» у певному сенсі відображають один і той самий набір власних чисел, але з різною «деталізацією»? У чому відмінність між випадками $\hat{n} < n$ та $\hat{n} > n$?

в) Здійснити моделювання імпульсного процесу КК з оціненими матрицями A, B, C замість істинних для тих самих вхідних сигналів і початкових умов. Порівняти отримані графіки координат вершин КК з тими (істинними) значеннями, що використовувались для проведення ідентифікації.

РОЗДІЛ 8. Адаптивні системи прогнозування дисперсій у процесах з різнотемповою дискретизацією

Під час дослідження фінансово-економічних процесів дисперсію та стандартне відхилення використовують як міру волатильності (мінливості) процесу і як міру ризику. Дисперсія фінансово-економічних і соціальних процесів може змінюватися в часі. Процеси зі змінною за часом дисперсією називають гетероскедастичними. Ці процеси відносять до широкого класу нестационарних процесів, таких як:

- процеси зі змінною дисперсією;
- процеси, які характеризуються змінними за часом дисперсією та математичним сподіванням одночасно;
- процеси за змінною коваріацією;
- процеси з детермінованими і стохастичними трендами.

Оскільки дисперсія змінюється за часом, то треба мати таку математичну модель, яка дозволить адекватно описувати динаміку зміни дисперсії і прогнозувати її значення на один або більше періодів дискретизації вперед.

Під час прогнозування дисперсій віддають перевагу умовному прогнозуванню, яке ґрунтується на відомих поточних та минулих значеннях дискретного ряду.

Одним із простих підходів для опису динаміки умовної дисперсії основної змінної є моделі авторегресії (АР) (q) до квадратів оцінок залишків, наприклад [35]:

$$\hat{\xi}^2(k) = a_1 \hat{\xi}^2(k-1) + a_2 \hat{\xi}^2(k-2) + \dots + a_q \hat{\xi}^2(k-q) + a_0 + v(k), \quad (8.1)$$

де $v(k)$ – процес дискретного «білого» шуму з нульовим середнім. Це рівняння можна використовувати для прогнозування умовної дисперсії на один період дискретизації T_0 вперед, тобто

$$E_k \left[\hat{\xi}^2(k+1)T_0 \right] = a_1 \hat{\xi}^2(k) + a_2 \hat{\xi}^2(k-1) + \dots + a_q \hat{\xi}^2(k-q+1) + a_0, \quad (8.2)$$

де E_k – оператор умовного математичного сподівання.

Оскільки рівняння (8.1) може бути побудоване за умови, що $\text{var}\{Y(k)\} \neq \text{const}$, то його називають *autoregressive conditional heteroskedasticity* (ARCH). Цю модель використовують для прогнозування (8.2) умовних дисперсій вихідних координат процесів.

8.1. Прогнозування умовної дисперсії гетероскедастичних процесів на основі моделі з однотемповою дискретизацією з використанням побудови моделі ARCH

Розглянемо процес, динаміка якого описана моделлю авторегресії і ковзного середнього (ARKC) (2,2),

$$Y(kT_0) = a_1 Y[(k-1)T_0] + a_2 Y[(k-2)T_0] + \xi(kT_0) + b_1 \xi[(k-1)T_0] + b_2 \xi[(k-2)T_0] + \delta, \quad (8.3)$$

де $E\{\xi(kT_0)\} = 0$; $E\{\xi^2(kT_0)\} = \sigma_\xi^2$; $E\{\xi(kT_0)Y[(k-1)T_0]\} = 0$, $l > 0$

(E – оператор математичного сподівання).

Алгоритм прогнозування умовної дисперсії послідовності $\{Y(kT_0)\}$ виконують на основі такої рекурентної процедури:

а) визначення умовного математичного сподівання для послідовності $\{Y(kT_0)\}$:

$$E_{k-1}\{Y(kT_0)\} = a_1 Y[(k-1)T_0] + a_2 Y[(k-2)T_0] + b_1 \xi[(k-1)T_0] + b_2 \xi[(k-2)T_0] + \delta; \quad (8.4)$$

б) обчислення умовної дисперсії для послідовності $\{Y(kT_0)\}$:

$$\begin{aligned} E_{k-1}\left\{\left[Y(kT_0) - E_{k-1}\{Y(kT_0)\}\right]^2\right\} &= \text{var}\left\{Y(kT_0) \mid Y[(k-1)T_0], Y[(k-2)T_0]\right\} = \\ &= E_{k-1}\left\{\left[Y(kT_0) - a_1 Y[(k-1)T_0] - a_2 Y[(k-2)T_0] - b_1 \xi[(k-1)T_0] - \right. \right. \\ &\left. \left. - b_2 \xi[(k-2)T_0] - \delta\right]^2\right\} = \hat{\xi}^2(kT_0); \end{aligned} \quad (8.5)$$

в) обчислення ряду умовних дисперсій для послідовностей $\{Y[(k-1)T_0]\}$, $\{Y[(k-2)T_0]\}$, ..., $\{Y[(k-q)T_0]\}$:

$$\begin{aligned} E_{k-2}\left\{\left[Y[(k-1)T_0] - E_{k-2}\{Y[(k-1)T_0]\}\right]^2\right\} &= \\ &= E_{k-2}\left\{\left[Y[(k-1)T_0] - a_1 Y[(k-2)T_0] - a_2 Y[(k-3)T_0] - \right. \right. \\ &\left. \left. - b_1 \xi[(k-2)T_0] - b_2 \xi[(k-2)T_0] - \delta\right]^2\right\} = \hat{\xi}^2[(k-1)T_0]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& E_{k-3} \left\{ \left[Y[(k-2)T_0] - E_{k-3} \{ Y[(k-2)T_0] \} \right]^2 \right\} = \\
& = E_{k-3} \left\{ \left[Y[(k-2)T_0] - a_1 Y[(k-3)T_0] - a_2 Y[(k-4)T_0] - \right. \right. \\
& \left. \left. - b_1 \xi[(k-3)T_0] - b_2 \xi[(k-4)T_0] - \delta \right]^2 \right\} = \hat{\xi}^2[(k-2)T_0];
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& E_{k-q-1} \{ [Y[(k-q)T_0] - E_{k-q-1} \{ Y[(k-q)T_0] \}]^2 \} = \\
& = E_{k-q-1} \{ [Y[(k-q)T_0] - a_1 Y[(k-q-1)T_0] - a_2 Y[(k-q-2)T_0] - \\
& - b_1 \xi[(k-q-1)T_0] - b_2 \xi[(k-q-2)T_0] - \delta]^2 \} = \hat{\xi}^2[(k-q)T_0];
\end{aligned}$$

г) на основі даних обчисленого ряду умовних дисперсій побудувати математичну модель динаміки умовних дисперсій у вигляді АР (q) із застосуванням МНК:

$$\begin{aligned}
\hat{\xi}^2(kT_0) &= \hat{\alpha}_1 \hat{\xi}^2((k-1)T_0) + \hat{\alpha}_2 \hat{\xi}^2((k-2)T_0) + \dots + \\
&+ \hat{\alpha}_q \hat{\xi}^2((k-q)T_0) + v(kT_0) + \hat{\gamma},
\end{aligned} \tag{8.6}$$

де $v(kT_0)$ – процес дискретного «білого» шуму з нульовим середнім.

Позаяк модель (8.6) може бути побудована за умови, що $\text{var}\{Y(k)\} \neq \text{const}$, то рівняння (8.6) називають авторегресійним умовно гетероскедастичним (ARCH);

д) на основі моделі (8.6) виконання прогнозування умовної дисперсії на один період дискретизації T_0 :

$$\begin{aligned}
\hat{\xi}^2[(k+1)T_0] &= \hat{\alpha}_1 \hat{\xi}^2(kT_0) + \hat{\alpha}_2 \hat{\xi}^2[(k-1)T_0] + \\
&+ \dots + \hat{\alpha}_q \hat{\xi}^2[(k-q+1)T_0] + \hat{\gamma}.
\end{aligned} \tag{8.7}$$

8.2. Прогнозування максимальної вибіркової умовної дисперсії гетероскедастичних процесів для моделей з однотемповою дискретизацією

Під час прогнозування ризиків потрібно мати інформацію про тенденцію зміни максимальних вибірових умовних дисперсій вихідних координат гетероскедастичних процесів.

У разі змінної дисперсії її максимальне значення треба обчислювати на деякому змінному проміжку часу $t = lT_0$, тобто за змінної дискретної виборки, при цьому вибірка вхідних і вихідних координат процесу буде

змішуватися вперед із кожним періодом T_0 і дисперсія буде перераховуватися на кожному періоді дискретизації.

Динаміка процесу описана моделлю АРКС (2,2) відповідно до (8.3). Тоді вибіркове умовне математичне сподівання вихідної координати протягом обсягу вибірки l будемо визначати таким чином:

$$\begin{aligned} \frac{1}{l} \sum_{i=k-l+1}^k E_{i-1} \{Y(iT_0)\} &= \frac{1}{l} \{a_1 Y[(k-1)T_0] + a_2 Y[(k-2)T_0] + \\ &+ b_1 \xi[(k-1)T_0] + b_2 \xi[(k-2)T_0] + \dots + \{a_1 Y[(k-l)T_0] + \\ &+ a_2 Y[(k-l-1)T_0] - b_1 \xi[(k-l)T_0] + b_2 \xi[(k-l-1)T_0] + l\delta\}. \end{aligned} \quad (8.8)$$

Вибіркову умовну дисперсію послідовності $\{Y(lT_0)\}$ обчислюють за формулою

$$\begin{aligned} \text{var} \{Y(kT_0)\} | Y[(k-1)T_0], Y[(k-2)T_0], \dots, Y[(k-l)T_0] &= \\ = \frac{1}{l} \sum_{i=k-l+1}^k \left\{ Y(iT_0) - \frac{1}{l} \sum_{i=k-l+1}^k E_{i-1} \{Y(iT_0)\} \right\}^2. \end{aligned} \quad (8.9)$$

Для обчислення максимальної вибіркової умовної дисперсії (8.9) потрібно використовувати ковзну довжину «вікна» $l_{\min} T_0 \leq l T_0 \leq l_{\max} T_0$. Для кожного значення l в указаному діапазоні з дискретністю в один період дискретизації T_0 визначають вибірккову умовну дисперсію (8.9) й вибирають її максимальне значення з певним значенням вибірки l :

$$\begin{aligned} \sup_{l_{\min} \leq l \leq l_{\max}} \text{var} \{Y(kT_0)\} | Y[(k-1)T_0], Y[(k-2)T_0], \dots, Y[(k-l)T_0] &= \\ \sup_{l_{\min} \leq l \leq l_{\max}} \frac{1}{l} \sum_{i=k-l+1}^k \left\{ Y(iT_0) - \frac{1}{l} \sum_{i=k-l+1}^k E_{i-1} \{Y(iT_0)\} \right\}^2 &= \hat{\xi}_{\max}^2(kT_0). \end{aligned} \quad (8.10)$$

Максимальне значення вибірки $l_{\max}$ знаходять з розрахунку $l_{\max} T_0 = T_{\text{пост}}$, де $T_{\text{пост}}$ – постійна часу процесу, яка характеризує його інерційність.

Для прогнозування максимальної вибіркової умовної дисперсії треба розробити її динамічну модель. Для цього на основі (8.8) – (8.10)

будують ряд максимальних умовних дисперсій на попередніх періодах дискретизації:

$$\begin{aligned} & \sup_{l_{\min} \leq l \leq l_{\max}} \text{var} \left\{ Y[(k-1)T_0] \middle| Y[(k-2)T_0], \dots, Y[(k-l-1)T_0] \right\} = \\ & = \sup_{l_{\min} \leq l \leq l_{\max}} \frac{1}{l} \sum_{i=k-l}^{k-1} \left\{ Y(iT_0) - \frac{1}{l} \sum_{i=k-l}^{k-1} E_{i-1} \{ Y(iT_0) \} \right\}^2 = \hat{\xi}_{\max}^2 [(k-1)T_0]; \\ & \sup_{l_{\min} \leq l \leq l_{\max}} \text{var} \left\{ Y[(k-2)T_0] \middle| Y[(k-3)T_0], Y[(k-3)T_0], \dots \right. \\ & \quad \left. \dots, Y[(k-l-2)T_0] \right\} = \hat{\xi}_{\max}^2 [(k-2)T_0]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sup_{l_{\min} \leq l \leq l_{\max}} \text{var} \left\{ Y[(k-q)T_0] \middle| Y[(k-q-1)T_0], \dots \right. \\ & \quad \left. \dots, Y[(k-l-q)T_0] \right\} = \hat{\xi}_{\max}^2 [(k-q)T_0]. \end{aligned} \quad (8.11)$$

На основі побудованого ряду (8.10), (8.11) за методом найменших квадратів розробляють математичну модель динаміки максимальної вибіркової умовної дисперсії у формі моделі ARCH:

$$\begin{aligned} \hat{\xi}_{\max}^2 (kT_0) = & \hat{\alpha}_1 \hat{\xi}_{\max}^2 [(k-1)T_0] + \dots + \hat{\alpha}_q \hat{\xi}_{\max}^2 [(k-q)T_0] + \\ & + \hat{\gamma} + v_1(kT_0). \end{aligned} \quad (8.12)$$

Тоді на основі моделі (8.12) виконують прогнозування максимальної вибіркової умовної дисперсії на один період T_0 :

$$\hat{\xi}_{\max}^2 [(k+1)T_0] = \hat{\alpha}_1 \hat{\xi}_{\max}^2 [kT_0] + \dots + \hat{\alpha}_q \hat{\xi}_{\max}^2 [(k-q+1)T_0] + \hat{\gamma}. \quad (8.13)$$

Рекурентну процедуру прогнозування (8.8) – (8.13) повторюють на кожному наступному періоді дискретизації T_0 .

8.3. Розроблення моделей авторегресії і ковзного середнього з різноміжною дискретизацією

Методики прогнозування умовних дисперсій для моделей процесів з однотемповою дискретизацією, описані в підрозд 8.1 й 8.2, дають можливість на основі моделей ARCH (8.6), (8.12) прогнозувати умовні дисперсії на один період дискретизації T_0 , тобто на невеликий проміжок часу. Щоб збільшити цей проміжок часу, слід використовувати вихідні

моделі процесу АРКС з різнотемповою дискретизацією [36, 58], коли вхідний сигнал $\xi(kT_0)$ надходить з малим періодом дискретизації T_0 , а вихідний сигнал $Y(rh)$ фіксується з великим періодом дискретизації $h = mT_0$, де $m > 1$.

1. Щоб розробити модель АРКС з різнотемповою дискретизацією, розглянемо спочатку вихідну однотемпову модель АРКС (1, p_b) у вигляді

$$(1 + a_1 z^{-1})Y(kT_0) = (1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_{p_b} z^{-p_b})\xi(kT_0) + \delta, \quad (8.14)$$

де $\{\xi(kT_0)\}$ – послідовність вхідних збурень у вигляді дискретного білого шуму з нульовим середнім. Параметр δ визначає рівень процесу $Y(kT_0)$.

Для вихідної координати Y оберемо збільшений період дискретизації h , який визначають співвідношенням

$$h = mT_0, \quad (8.15)$$

де T_0 – базовий період дискретизації;

m – ціле число, яке є більшим за одиницю.

Розглянемо рекурентну процедуру перетворення вихідної моделі (8.14) у різнотемпову під час дискретизації вихідної координати Y з періодом дискретизації h . Для цього модель (8.14) запишемо в різницевій формі:

$$Y(kT_0) = a_1 Y[(k-1)T_0] + \xi(kT_0) + b_1 \xi[(k-1)T_0] + \\ + b_2 \xi[(k-2)T_0] + \dots + b_{p_b} \xi[(k-p_b)T_0] + \delta$$

і обчислюємо:

а) за $k = 1$ будемо мати

$$Y(1T_0) = -a_1 Y(0T_0) + \xi(1T_0) + b_1 \xi(0T_0) + \delta;$$

б) за $k = 2$ після врахування попереднього кроку

$$Y(2T_0) = -a_1 Y(1T_0) + \xi(2T_0) + b_1 \xi(1T_0) + b_2 \xi(0T_0) + \delta = \\ = a_1^2 Y(0T_0) + \xi(2T_0) + (b_1 - a_1) \xi(1T_0) + (b_2 - a_1) \xi(0T_0) + (1 - a_1) \delta;$$

в) за $k = 3$ після врахування попереднього кроку за умови $p_b \geq 3$ будемо мати

$$Y(3T_0) = -a_1 Y(2T_0) + \xi(3T_0) + b_1 \xi(2T_0) + b_2 \xi(1T_0) + b_3 \xi(0T_0) + \delta = \\ = -a_1^2 Y(0T_0) + \xi(3T_0) + (b_1 - a_1) \xi(2T_0) + (a_1^2 - a_1 b_1 + b_2) \xi(1T_0) + \\ + (a_1^2 b_1 - a_1 b_2 + b_3) \xi(0T_0) + [1 - a_1(1 - a_1)] \delta.$$

Продовжуючи рекурентну процедуру до $k = m$ за умови, що $m \geq p_b$, дістанемо модель АРКС з різнотемповою дискретизацією у різницевій формі:

$$Y\left[\left[\frac{k}{m}\right]h\right] = -\alpha_1 Y\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right]-1\right)h\right] + \xi(kT_0) + C_1 \xi[(k-1)T_0] + \\ + C_2 \xi[(k-2)T_0] + \dots + C_m \xi[(k-m)T_0] + \alpha_0, \quad (8.16)$$

де $\left[\frac{k}{m}\right]$ – ціле число від ділення номера дискретного відліку k на коефіцієнт m . Вираз (8.16) можна записати в такому вигляді:

$$A(z_1^{-1})Y(rh) = C(z^{-1})\xi(kT_0) + \alpha_0; \quad (8.17)$$

де

$$A(z_1^{-1}) = 1 + \alpha_1 z_1^{-1}; \quad (8.18)$$

$$C(z^{-1}) = 1 + C_1 z^{-1} + C_2 z^{-2} + \dots + C_m z^{-m}. \quad (8.19)$$

Співвідношення операторів зворотного зсуву в поліномах (8.18), (8.19) на основі виразу (8.15) буде

$$z_1^{-1} = z^{-m}. \quad (8.20)$$

Тоді рівність (8.18) набуде вигляду

$$A(z^{-1}) = 1 + \alpha_1 z^{-m}. \quad (8.21)$$

2. Розглянемо розроблення моделі АРКС з різнотемповою дискретизацією на основі однотемпової моделі АРКС (2,2):

$$(1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2})Y(kT_0) = (1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2})\xi(kT_0) + \delta, \quad (8.22)$$

де $\{\xi(kT_0)\}$ – послідовність входних збурень у вигляді дискретного «білого» шуму з нульовим середнім.

а) Застосуємо рекурентну процедуру перетворення вихідної моделі (8.22) у різнотемпову модель під час дискретизації вихідної координати Y з періодом $h = 2T_0$ на основі методики, описаної в п. 1. Для цього модель (8.22) запишемо в різницевій формі:

$$Y(kT_0) = -a_1 Y[(k-1)T_0] - a_2 Y[(k-2)T_0] + \xi(kT_0) + \\ + b_1 \xi[(k-1)T_0] + b_2 \xi[(k-2)T_0] + \delta. \quad (8.23)$$

Тоді на основі рекурентної процедури різнотемпова модель буде мати такий вигляд:

$$\begin{aligned}
Y\left[\left[\frac{k}{m}\right]T_0\right] = & -\alpha'_1 Y\left[\left(\left[\frac{k}{2}\right]-1\right)h\right] + \alpha'_2 Y\left[\left(\left[\frac{k}{2}\right]-2\right)h\right] + \xi\left[\left[\frac{k}{2}\right]h\right] + \\
& + C'_1 \xi\left[\left[\frac{k}{2}\right]h - T_0\right] + C'_2 \xi\left[\left[\frac{k}{2}\right]h - 2T_0\right] + C'_3 Y\left[\left[\frac{k}{2}\right]h - 3T_0\right] + \\
& + C'_4 \xi\left[\left[\frac{k}{2}\right]h - 4T_0\right] = \alpha_0,
\end{aligned} \tag{8.24}$$

де $\left[\frac{k}{2}\right]$ – ціле число від ділення номера дискретного відліку k на 2.

Коефіцієнти цієї моделі $\alpha'_1 = (a_1^2 - 2a_2)$; $\alpha'_2 = a_2^2$; $C'_1 = b_1 - a_1$; $C'_2 = (-a_1b_1 + a_2 + b_2)$; $C'_3 = (a_2b_1 + a_1b_2)$; $C'_4 = a_2b_2$; $\alpha_0 = (1 - a_1 - a_2)\delta$.

Координати $Y\left[\left[\frac{k}{2}\right]h\right]$ різнотемпової моделі (8.24) та $Y(kT_0)$ вихідної моделі (8.22) будуть збігатися у вузлових дискретних відліках $\left[\frac{k}{2}\right]h$.

Далі на основі методики, описаної в п. 1, модель (8.24) можна перетворити на різнотемпову за $h = 4T_0$.

б) Застосуємо рекуренту процедуру перетворення однотемпової моделі (8.22) у різнотемпову модель під час дискретизації вихідної координати Y з періодом дискретизації $h = 3T_0$, у результаті чого модель АРКС з різнотемповою дискретизацією буде мати вигляд

$$\begin{aligned}
Y\left[\left[\frac{k}{3}\right]h\right] = & \alpha''_1 Y\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right]-1\right)h\right] + \alpha''_2 Y\left[\left(\left[\frac{k}{3}\right]-2\right)h\right] + \xi\left[\left[\frac{k}{3}\right]h\right] + \\
& + C''_1 \xi\left[\left[\frac{k}{3}\right]h - T_0\right] + C''_2 \xi\left[\left[\frac{k}{3}\right]h - 2T_0\right] + C''_3 Y\left[\left[\frac{k}{3}\right]h - 3T_0\right] + \\
& + C''_4 \xi\left[\left[\frac{k}{3}\right]h - 4T_0\right] + C''_5 \xi\left[\left[\frac{k}{3}\right]h - 5T_0\right] + C''_6 \xi\left[\left[\frac{k}{3}\right]h - T_0\right] + \alpha''_0,
\end{aligned}$$

де $\left[\frac{k}{3} \right]$ – ціле число від ділення номера дискретного відліку k на 3. Коефіцієнти цієї моделі

$$\begin{aligned}\alpha_1'' &= -a_1^3 - 3a_1a_2; \quad \alpha_2'' = -a_2^3; \quad C_1'' = (b_1 - a_1); \\ C_2'' &= -(a_1^2 - a_1b_1 - a_2 + b_2); \quad C_3'' = (a_1^2b_1 - a_1a_2 - a_2b_1 - a_1b_2); \\ C_4'' &= (a_2^2 - a_1a_2b_1 + a_1^2b_2 - a_2b_2); \quad C_5'' = (-a_1a_2b_2 + a_2^2b_1); \quad C_6'' = a_2^2b_2; \\ \alpha_0'' &= (a_1^2 + a_2^2 - a_1a_2 - a_1 - a_2 + 1)\delta.\end{aligned}$$

На основі запропонованої методики у п. 1 можна перетворити модель (8.22) на різнотемпову за $h = 6T_0$ або за $h = 9T_0$.

У загальному випадку для вихідної моделі АРКС (2,2) згідно з (8.22) різнотемпова модель за $h = mT_0$ буде мати такий вигляд [59]:

$$\begin{aligned}Y\left[\left[\frac{k}{m}\right]h\right] &= \alpha_1 Y\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right]-1\right)h\right] + \alpha_2 Y\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right]-2\right)h\right] + \xi\left[\left[\frac{k}{m}\right]h\right] + \\ &+ C_1 \xi\left[\left[\frac{k}{m}\right]h - T_0\right] + C_2 \xi\left[\left[\frac{k}{m}\right]h - 2T_0\right] + \dots + C_{2m} \xi\left[\left[\frac{k}{m}\right]h - 2mT_0\right].\end{aligned}\quad (8.25)$$

8.4. Прогнозування умовної дисперсії на основі моделей авторегресії і ковзного середнього з різнотемповою дискретизацією

Алгоритм прогнозування умовної дисперсії для послідовності $\left\{ Y\left[\left[\frac{k}{m}\right]h\right] \right\}$, динаміку якої описано на основі моделі АРКС (2,2) з різнотемповою дискретизацією відповідно до (8.25), виконують на основі рекурентної процедури:

а) визначаємо умовне математичне сподівання для послідовності $\left\{ Y\left[\left[\frac{k}{m}\right]h\right] \right\}$:

$$\begin{aligned}
E_{\left[\frac{k}{m}\right]-1} \left\{ Y \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] \right\} &= \alpha_1 Y \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - 1 \right) h \right] + \alpha_2 Y \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - 2 \right) h \right] + \\
&+ C_m \xi \left[\left[\frac{k}{m} \right] h - mT_0 \right] + \dots + C_{2m} \xi \left[\left[\frac{k}{m} \right] h - 2mT_0 \right] + \alpha_0; \quad (8.26)
\end{aligned}$$

б) обчислюємо умовну дисперсію для послідовності $\left\{ Y \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] \right\}$

за $h = mT_0$:

$$\begin{aligned}
&E_{\left[\frac{k}{m}\right]-1} \left\{ Y \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] - E_{\left[\frac{k}{m}\right]-1} \left\{ Y \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] \right\} \right\}^2 = \\
&= \text{var} \left\{ Y \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] \middle| Y \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - 1 \right) h \right], Y \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - 2 \right) h \right] \right\} = \\
&= E_{\left[\frac{k}{m}\right]-1} \left\{ Y \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] - \alpha_1 Y \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - 1 \right) h \right] - \alpha_2 Y \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - 2 \right) h \right] - \right. \\
&- C_m \xi \left[\left[\frac{k}{m} \right] h - mT_0 \right] - C_{m+1} \xi \left[\left[\frac{k}{m} \right] h - (m+1)T_0 \right] - \dots - \\
&\left. - C_{2m} \xi \left[\left[\frac{k}{m} \right] h - 2mT_0 \right] - \alpha_0 \right\}^2 = \tilde{\xi}^2 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right]; \quad (8.27)
\end{aligned}$$

в) обчислюємо ряд умовних дисперсій (8.26), (8.27) для попередніх віддіків послідовностей $\left\{ Y \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - 1 \right) h \right] \right\}, \dots, \left\{ Y \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - \mu \right) h \right] \right\}$:

$$\begin{aligned}
&E_{\left[\frac{k}{m}\right]-2} \left\{ Y \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - 1 \right) h \right] - E_{\left[\frac{k}{m}\right]-2} \left\{ Y \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - 1 \right) h \right] \right\} \right\}^2 = \\
&= \tilde{\xi}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - 1 \right) h \right];
\end{aligned}$$

$$E_{\left[\frac{k}{m}\right]-3} \left\{ Y \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - 2 \right) h \right] - E_{\left[\frac{k}{m}\right]-3} \left\{ Y \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - 2 \right) h \right] \right\} \right\}^2 =$$

$$= \tilde{\xi}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - 2 \right) h \right];$$

$$E_{\left[\frac{k}{m}\right]-\mu-1} \left\{ Y \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - \mu \right) h \right] - E_{\left[\frac{k}{m}\right]-\mu-1} \left\{ Y \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - \mu \right) h \right] \right\} \right\}^2 =$$

$$= \tilde{\xi}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - \mu \right) h \right]; \quad (8.27a)$$

г) на основі даних обчисленого ряду побудуємо модель динаміки умовних дисперсій із застосуванням методу найменших квадратів:

$$\tilde{\xi}^2 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] = \hat{\beta}_1 \tilde{\xi}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - 1 \right) h \right] + \hat{\beta}_2 \tilde{\xi}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - 2 \right) h \right] + \dots +$$

$$+ \hat{\beta}_\mu \tilde{\xi}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - \mu \right) h \right] + \hat{\gamma} + w \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right], \quad (8.28)$$

де $w \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right]$ – процес дискретного «білого» шуму з нульовим середнім.

Рівняння (8.28) є авторегресивною умовно гетероскедастичною моделлю ARCH для моделей процесів (8.25) з різнотемповою дискретизацією;

д) на основі моделі ARCH (8.28) виконуємо прогнозування умовної дисперсії (8.27) на один великий період дискретизації $h = mT_0$:

$$\hat{\xi}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] + 1 \right) h \right] = \hat{\beta}_1 \hat{\xi}^2 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] + \hat{\beta}_2 \hat{\xi}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - 1 \right) h \right] + \dots +$$

$$+ \hat{\beta}_\mu \hat{\xi}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - \mu + 1 \right) h \right] + \hat{\gamma}. \quad (8.29)$$

8.5. Розроблення узагальненої авторегресійної умовно гетероскедастичної моделі (GARCH) з періодом дискретизації $h = mT_0$

Математичну модель ARCH (8.28), яка описує динаміку змінюваних умовних дисперсій, оновлюють за рекурентною процедурою (8.26) – (8.28) на кожному періоді дискретизації $h = mT_0$.

Для розроблення моделі GARCH введемо нові змінні:

$$\tilde{\xi} \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] = \sqrt{H \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right]} \cdot v \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right], \quad (8.30)$$

де $v \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right]$ – нормальна послідовність з нульовим середнім та одиничною дисперсією, тобто

$$E \left\{ v \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] \right\} = 0; \quad E \left\{ v^2 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] \right\} = 1. \quad (8.31)$$

Якщо в моделі (8.28)

$$\begin{aligned} H \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] &= \beta_1 \tilde{\xi}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - 1 \right) h \right] + \beta_2 \tilde{\xi}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - 2 \right) h \right] + \dots + \\ &+ \beta_\mu \tilde{\xi}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - \mu \right) h \right] + \hat{\gamma}, \end{aligned} \quad (8.32)$$

то відповідно до (8.30), (8.31) можна записати:

$$\begin{aligned} &\left\{ \tilde{\xi}^2 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] \middle| \tilde{\xi}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - 1 \right) h \right], \tilde{\xi}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - 2 \right) h \right], \dots \right\} = \\ &= \beta_1 \tilde{\xi}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - 1 \right) h \right] + \beta_2 \tilde{\xi}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - 2 \right) h \right] + \dots + \beta_\mu \tilde{\xi}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - \mu \right) h \right] + \hat{\gamma}. \end{aligned}$$

Якщо підставити (8.32) у вираз (8.28), то дістанемо

$$\tilde{\xi}^2 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] = H \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] + w \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right], \quad (8.33)$$

тобто $H \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right]$ є прогнозом для умовної дисперсії $\tilde{\xi}^2 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right]$.

Враховуючи (8.30), інновацію $w\left[\left[\frac{k}{m}\right]h\right]$ у рівнянні ARCH (8.28)

можна виразити як

$$w\left[\left[\frac{k}{m}\right]h\right] = \tilde{\xi}^2\left[\left[\frac{k}{m}\right]h\right] - H\left[\left[\frac{k}{m}\right]h\right]. \quad (8.34)$$

Водночас якщо безумовна дисперсія послідовності $\left\{w\left[\left[\frac{k}{m}\right]h\right]\right\}$ є постійною, умовна дисперсія згідно з (8.34) змінюється за часом.

Запишемо формулу (8.32) у формі

$$H\left[\left[\frac{k}{m}\right]h\right] = (\beta_1 z^{-1} + \beta_2 z^{-2} + \dots + \beta_\mu z^{-\mu}) \tilde{\xi}^2\left[\left[\frac{k}{m}\right]h\right] + \gamma, \quad (8.35)$$

де z^{-1} – оператор зворотного зсуву (8.35) на період дискретизації $h = mT_0$.

Запишемо поліном $(\beta_1 z^{-1} + \beta_2 z^{-2} + \dots + \beta_\mu z^{-\mu})$ у вигляді відношення

$$(\beta_1 z^{-1} + \beta_2 z^{-2} + \dots + \beta_\mu z^{-\mu}) = \frac{(r_1 z^{-1} + r_2 z^{-2} + \dots + r_\mu z^{-(\mu+n)})}{(1 - \sigma_1 z^{-1} - \sigma_2 z^{-2} - \dots - \sigma_n z^{-n})}, \quad (8.36)$$

в якому корені рівняння

$$(1 - \sigma_1 z^{-1} - \sigma_2 z^{-2} - \dots - \sigma_n z^{-n}) = 0$$

мають міститися в середині круга одиничного радіуса.

Застосовуючи вираз (8.36), рівність (8.35) можна записати у формі кінцево-різницевого рівняння

$$H\left[\left[\frac{k}{m}\right]h\right] = \sigma_1 H\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right] - 1\right)h\right] + \sigma_2 H\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right] - 2\right)h\right] + \dots + \sigma_n H\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right] - n\right)h\right] + \\ + r_1 \tilde{\xi}^2\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right] - 1\right)h\right] + r_2 \tilde{\xi}^2\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right] - 2\right)h\right] + r_{\mu+n} \tilde{\xi}^2\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right] - \mu - n\right)h\right] + \lambda,$$

де $\lambda = (1 - \sigma_1 - \sigma_2 - \dots - \sigma_n)\gamma$.

Додамо до обох частин попередньої рівності $\tilde{\xi}^2\left[\left[\frac{k}{m}\right]h\right]$. Тоді з використанням рівності (8.34) виконаємо таке перетворення:

$$\begin{aligned}
H\left[\left[\frac{k}{m}\right]h\right] + \tilde{\xi}^2\left[\left[\frac{k}{m}\right]h\right] = & \lambda - \sigma_1 w\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right] - 1\right)h\right] - \sigma_2 w\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right] - 2\right)h\right] - \dots - \\
& - \sigma_n w\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right] - n\right)h\right] + (\sigma_1 + r_1)\tilde{\xi}^2\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right] - 1\right)h\right] + (\sigma_2 + r_2)\tilde{\xi}^2\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right] - 2\right)h\right] + \\
& + \dots + (\sigma_n + r_n)\tilde{\xi}^2\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right] - n\right)h\right] + r_{n+1}\tilde{\xi}^2\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right] - n - 1\right)h\right] + \dots + \\
& + r_{\mu+n}\tilde{\xi}^2\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right] - \mu - n\right)h\right] + \tilde{\xi}^2\left[\left[\frac{k}{m}\right]h\right].
\end{aligned}$$

За $w\left[\left[\frac{k}{m}\right]h\right] = \tilde{\xi}^2\left[\left[\frac{k}{m}\right]h\right] - H\left[\left[\frac{k}{m}\right]h\right]$ виконаємо перетворення попереднього виразу до такого вигляду:

$$\begin{aligned}
\tilde{\xi}^2\left[\left[\frac{k}{m}\right]h\right] = & \lambda + (\sigma_1 + r_1)\tilde{\xi}^2\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right] - 1\right)h\right] + (\sigma_2 + r_2)\tilde{\xi}^2\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right] - 2\right)h\right] + \\
& + \dots + (\sigma_n + r_n)\tilde{\xi}^2\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right] - n\right)h\right] + r_{n+1}\tilde{\xi}^2\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right] - n - 1\right)h\right] + \dots + \\
& + r_{\mu+n}\tilde{\xi}^2\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right] - \mu - n\right)h\right] + w\left[\left[\frac{k}{m}\right]h\right] - \\
& - \sigma_1 w\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right] - 1\right)h\right] - \dots - \sigma_n w\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right] - n\right)h\right], \tag{8.37}
\end{aligned}$$

де збурення визначають так:

$$\begin{aligned}
w\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right] - 1\right)h\right] &= \tilde{\xi}^2\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right] - 1\right)h\right] - H\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right] - 1\right)h\right]; \\
w\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right] - 2\right)h\right] &= \tilde{\xi}^2\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right] - 2\right)h\right] - H\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right] - 2\right)h\right];
\end{aligned}$$

$$w\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right] - n\right)h\right] = \tilde{\xi}^2\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right] - n\right)h\right] - H\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right] - n\right)h\right].$$

Вираз (8.37) являє собою узагальнену авторегресійну умовно гетероскедастичну модель (GARCH) для описання динаміки умовної дисперсії послідовності $\left\{Y\left[\left[\frac{k}{m}\right]h\right]\right\}$, яку подано за допомогою моделі ARKC (8.25) з різнотемповою дискретизацією. В моделі (GARCH) враховано динаміку зміни четвертого моменту $(1 - \sigma_1 z^{-1} - \sigma_2 z^{-2} - \dots - \sigma_n z^{-n}) w\left[\left[\frac{k}{m}\right]h\right]$.

На основі GARCH (8.37) можна прогнозувати умовну дисперсію на один великий період дискретизації $h = mT_0$:

$$\begin{aligned} \hat{\xi}^2\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right]+1\right)h\right] &= \lambda + (\sigma_1 + r_1)\tilde{\xi}^2\left[\left[\frac{k}{m}\right]h\right] + (\sigma_2 + r_2)\tilde{\xi}^2\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right]-1\right)h\right] + \\ &+ \dots + (\sigma_n + r_n)\tilde{\xi}^2\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right]-n+1\right)h\right] + r_{n+1}\tilde{\xi}^2\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right]-n\right)h\right] + \dots + \\ &+ r_{\mu+n}\tilde{\xi}^2\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right]-\mu-n-1\right)h\right] - \sigma_1 w\left[\left[\frac{k}{m}\right]h\right] - \dots - \sigma_n w\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right]-n+1\right)h\right]. \end{aligned} \quad (8.38)$$

8.6. Адаптивне настроювання коефіцієнтів моделі GARCH

Експериментально встановлено, що вибір коефіцієнтів $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ у співвідношенні (8.36) значно впливає на точність прогнозування умовних дисперсій згідно з (8.38) під час виконання умови, що корені рівняння

$$(1 - \sigma_1 z^{-1} - \sigma_2 z^{-2} - \dots - \sigma_n z^{-n}) = 0$$

обирають за модулем, меншим за одиницю. Тому для досягнення максимальної точності прогнозування згідно з (8.38) треба виконувати адаптивне настроювання коефіцієнтів моделей GARCH за умовою мінімізації критерію оптимальності:

$$J_N = \sum_{\left[\frac{k}{m}\right]=1}^N \left\{ \tilde{\xi}^2\left[\left[\frac{k}{m}\right]h\right] - \hat{\xi}^2\left[\left[\frac{k}{m}\right]h\right] \right\}^2, \quad (8.39)$$

де $\tilde{\xi}^2 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right]$ – обчислене значення умовної дисперсії на основі (8.27);

$\hat{\xi}^2 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right]$ – умовна дисперсія, яку визначають на основі моделі GARCH (8.37).

Розглянемо різні варіанти настроювання коефіцієнтів GARCH на основі мінімізації критерію (8.39) [60, 61].

Варіант 1.

Розглянемо модель GARCH (8.37):

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}^2 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] = & \lambda + (\sigma_1 + r_1) \tilde{\xi}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - 1 \right) h \right] + (\sigma_2 + r_2) \tilde{\xi}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - 2 \right) h \right] + \\ & + \dots + (\sigma_n + r_n) \tilde{\xi}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - n \right) h \right] + r_{n+1} \tilde{\xi}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - n - 1 \right) h \right] + \dots + \\ & + r_{\mu+n} \tilde{\xi}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - \mu - n \right) h \right] + w \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] - \\ & - \sigma_1 w \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - 1 \right) h \right] - \dots - \sigma_n w \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - n \right) h \right]. \end{aligned}$$

Запишемо цей вираз у векторній формі

$$\tilde{\xi}^2 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] = \bar{X}^T \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] \hat{\theta} + w \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right], \quad (8.40)$$

де вектор обчислюваних координат має вигляд

$$\begin{aligned} \bar{X}^T \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] = & \left\{ \tilde{\xi}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - 1 \right) h \right], \tilde{\xi}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - 1 \right) h \right], \dots \right. \\ & \dots, \tilde{\xi}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - n \right) h \right], \tilde{\xi}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - n - 1 \right) h \right], \dots \\ & \dots, \tilde{\xi}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - \mu - n \right) h \right], -w \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - 1 \right) h \right], \dots, -w \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - n \right) h \right], 1 \left. \right\}, \quad (8.41) \end{aligned}$$

а вектор оцінюваних коефіцієнтів згідно з моделлю (8.37) запишемо таким чином:

$$\hat{\theta} = \left[(\sigma_1 + r_1), \dots, (\sigma_n + r_n), r_{n+1}, \dots, r_{\mu+n}, \sigma_1, \dots, \sigma_n, \lambda \right]^T. \quad (8.42)$$

Для оцінювання вектора бажаних коефіцієнтів $\hat{\theta}$ (8.42), за яких мінімізується критерій (8.39), застосовують (РМНК):

$$\begin{aligned} \hat{\theta} \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] &= \hat{\theta} \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - 1 \right) h \right] + K \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] \cdot \\ &\cdot \left\{ \tilde{\xi}^2 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] - \bar{X}^T \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] \hat{\theta} \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - 1 \right) h \right] \right\}; \\ K \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] &= P \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - 1 \right) h \right] + \bar{X} \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] \cdot \\ &\cdot \left\{ 1 + \bar{X}^T \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] P \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - 1 \right) h \right] \bar{X} \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] \right\}^{-1}; \\ P \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] &= P \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - 1 \right) h \right] - P \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - 1 \right) h \right] \bar{X} \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] \cdot \\ &\cdot \left\{ 1 + \bar{X}^T \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] P \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - 1 \right) h \right] \bar{X} \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] \right\}^{-1} \cdot \\ &\cdot \bar{X}^T \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] P \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - 1 \right) h \right]. \end{aligned} \quad (8.43)$$

Правила застосування РМНК описано в підрозд. 7.2.

Алгоритм оцінювання коефіцієнтів моделі GARCH (8.40) – (8.43) забезпечує мінімізацію критерію (8.39), але не дає можливості оцінювати конкретно коефіцієнти $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ під час формування співвідношення (8.36).

Варіант 2.

Як результат врахування співвідношення (8.36) модель GARCH (8.37) може бути перетворена до такого вигляду:

$$\begin{aligned}
\hat{\xi}^2 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] = & \left\{ \tilde{\xi}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - 1 \right) h \right] - \beta_1 \tilde{\xi}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - 2 \right) h \right] - \beta_2 \tilde{\xi}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - 3 \right) h \right] - \dots - \right. \\
& - \beta_\mu \tilde{\xi}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - \mu - 1 \right) h \right] - w \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - 1 \right) h \right] \left. \right\} \sigma_1 + \left\{ \tilde{\xi}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - 2 \right) h \right] - \right. \\
& - \beta_1 \tilde{\xi}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - 3 \right) h \right] - \beta_2 \tilde{\xi}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - 4 \right) h \right] - \dots - \beta_\mu \tilde{\xi}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - \mu - 2 \right) h \right] - \\
& - w \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - 2 \right) h \right] \sigma_2 + \left\{ \tilde{\xi}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - 3 \right) h \right] - \beta_1 \tilde{\xi}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - 4 \right) h \right] - \right. \\
& - \beta_2 \tilde{\xi}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - 5 \right) h \right] - \dots - \beta_\mu \tilde{\xi}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - \mu - 3 \right) h \right] - w \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - 3 \right) h \right] \left. \right\} \sigma_3 - \dots - \\
& - \left\{ \tilde{\xi}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - n \right) h \right] - \beta_1 \tilde{\xi}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - n - 1 \right) h \right] - \beta_2 \tilde{\xi}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - n - 2 \right) h \right] - \dots - \right. \\
& - \beta_\mu \tilde{\xi}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - n - \mu \right) h \right] - w \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - n \right) h \right] \left. \right\} \sigma_n + \left\{ \lambda + \beta_1 \tilde{\xi}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - 1 \right) h \right] + \right. \\
& + \beta_2 \tilde{\xi}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - 2 \right) h \right] + \dots + - \beta_\mu \tilde{\xi}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - \mu \right) h \right] \left. \right\} + w \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right].
\end{aligned} \tag{8.44}$$

Запишемо цей вираз у векторній формі (8.40), тобто

$$\hat{\xi}^2 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] = \bar{X}^T \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] \hat{\theta} + w \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right], \tag{8.45}$$

де вектор обчислюваних координат подамо таким чином:

$$\begin{aligned}
\bar{X}^T \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] = & \left\{ \left\{ \tilde{\xi}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - 1 \right) h \right] - \beta_1 \tilde{\xi}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - 2 \right) h \right] - \beta_2 \tilde{\xi}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - 3 \right) h \right] - \dots - \right. \right. \\
& - \beta_\mu \tilde{\xi}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - \mu - 1 \right) h \right] - w \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - 1 \right) h \right] \left. \right\}, \tilde{\xi}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - 2 \right) h \right] - \\
& - \beta_1 \tilde{\xi}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - 3 \right) h \right] - \beta_2 \tilde{\xi}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - 4 \right) h \right] - \dots - \beta_\mu \tilde{\xi}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - \mu - 1 \right) h \right] - \dots -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -w\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right]-2\right)h\right]\}, \dots, \left\{\tilde{\xi}^2\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right]-n\right)h\right]-\beta_1\tilde{\xi}^2\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right]-n-1\right)h\right]-\right. \\
& \left.-\beta_2\tilde{\xi}^2\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right]-n-2\right)h\right]-\dots-\beta_\mu\tilde{\xi}^2\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right]-n-\mu\right)h\right]-w\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right]-n\right)h\right]\right\}, \\
& \left\{\lambda+\beta_1\tilde{\xi}^2\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right]-1\right)h\right]+\beta_2\tilde{\xi}^2\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right]-2\right)h\right]+\dots+\beta_\mu\tilde{\xi}^2\left[\left(\left[\frac{k}{m}\right]-\mu\right)h\right]\right\},
\end{aligned}$$

при цьому вектор оцінюваних коефіцієнтів

$$\hat{\bar{\theta}} = [\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2, \dots, \hat{\sigma}_n, 1]^T. \quad (8.46)$$

Тоді критерій оптимальності (8.39) набуде вигляду

$$J_N = \sum_{\left[\frac{k}{m}\right]-1}^N \left\{ \tilde{\xi}^2 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] - \bar{X}^T \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] \hat{\bar{\theta}} \right\}^2. \quad (8.47)$$

Для оцінювання невідомих коефіцієнтів $\hat{\bar{\theta}}$ відповідно до (8.46), за яких мінімізується критерій (8.47), застосовують рекурентний метод найменших квадратів, рекурентна процедура якого подана у вигляді рівнянь (8.43). Початкове значення коефіцієнтів вектора $\hat{\bar{\theta}}(0)$ формують на основі обраних коренів полінома $(1 - \sigma_1 z^{-1} - \sigma_2 z^{-2} - \dots - \sigma_n z^{-n}) = 0$ в середині круга одиничного радіуса, тобто $|z_i| < 1, i = 1, 2, \dots, n$ на основі $(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n) = 0$.

Приклад. Вихідна модель АРКС з різнотемповою дискретизацією типу (8.16) за $h = 11T_0$ має вигляд

$$\begin{aligned}
Y\left[\left[\frac{k}{11}\right]h\right] = & a_1 Y\left[\left(\left[\frac{k}{11}\right]-1\right)h\right] + \xi(kT_0) + C_1 \xi[(k-1)T_0] + C_2 \xi[(k-2)T_0] + \\
& + C_3 \xi[(k-3)T_0] + C_4 \xi[(k-4)T_0] + C_5 \xi[(k-5)T_0] + C_6 \xi[(k-6)T_0] + \\
& + C_7 \xi[(k-7)T_0] + C_8 \xi[(k-8)T_0] + C_9 \xi[(k-9)T_0] + C_{10} \xi[(k-10)T_0] + \\
& + C_{11} \xi[(k-11)T_0] + a_0,
\end{aligned}$$

де коефіцієнти: $a_1 = 0,80253$; $C_1 = 0,9802$; $C_2 = 0,96$; $C_3 = 0,94$; $C_4 = 0,923$; $C_5 = 0,905$; $C_6 = 0,887$; $C_7 = 0,87$; $C_8 = 0,852$; $C_9 = 0,835$; $C_{10} = 0,818$; $C_{11} = 0,79$; $C_6 = 0$, $a_0 = 0,197$.

Умовну дисперсію (8.27) для послідовності $\left\{ Y \left[\left[\frac{k}{11} \right] h \right] \right\}$ обчислюють за формулою

$$\begin{aligned}
 E_{\left[\frac{k}{11} \right]^{-1}} \left\{ Y \left[\left[\frac{k}{11} \right] h \right] - E_{\left[\frac{k}{11} \right]^{-1}} \left\{ Y \left[\left[\frac{k}{11} \right] h \right] \right\} \right\}^2 = \\
 \left\{ Y \left[\left[\frac{k}{11} \right] h \right] - a_1 Y \left[\left(\left[\frac{k}{11} \right] - 1 \right) h \right] - C_1 \xi \left[(k-1) T_0 \right] - \right. \\
 - C_2 \xi \left[(k-2) T_0 \right] - C_3 \xi \left[(k-3) T_0 \right] - \\
 - C_4 \xi \left[(k-4) T_0 \right] - C_5 \xi \left[(k-5) T_0 \right] - \\
 - C_6 \xi \left[(k-6) T_0 \right] - C_7 \xi \left[(k-7) T_0 \right] - \\
 - C_8 \xi \left[(k-8) T_0 \right] - C_9 \xi \left[(k-9) T_0 \right] - \\
 \left. - C_{10} \xi \left[(k-10) T_0 \right] - C_{11} \xi \left[(k-11) T_0 \right] - a_0 \right\}^2 = \tilde{\xi}^2 \left[\left[\frac{k}{11} \right] h \right]. \quad (8.48)
 \end{aligned}$$

На основі ряду умовних дисперсій (8.27), (8.27а) за методом найменших квадратів на кожному періоді дискретизації h формують модель ARCH (8.28):

$$\begin{aligned}
 \hat{\xi}^2 \left[\left[\frac{k}{11} \right] h \right] = \hat{\beta}_1 \tilde{\xi}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{11} \right] - 1 \right) h \right] + \hat{\beta}_2 \tilde{\xi}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{11} \right] - 2 \right) h \right] + \\
 + \hat{\beta}_3 \tilde{\xi}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{11} \right] - 3 \right) h \right] + \hat{\beta}_4 \tilde{\xi}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{11} \right] - 4 \right) h \right] + \hat{\gamma} + w \left[\left[\frac{k}{11} \right] h \right],
 \end{aligned}$$

на основі якої за методикою (8.30) – (8.37) формують модель GARCH із $\mu = 4$ та $n = 3$. Отримують

$$\begin{aligned}
\tilde{\xi}^2 \left[\left[\frac{k}{11} \right] h \right] &= (\sigma_1 + r_1) \tilde{\xi}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{11} \right] - 1 \right) h \right] + (\sigma_2 + r_2) \tilde{\xi}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{11} \right] - 2 \right) h \right] + \\
&+ (\sigma_3 + r_3) \tilde{\xi}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{11} \right] - 3 \right) h \right] + r_4 \tilde{\xi}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{11} \right] - 4 \right) h \right] + r_5 \tilde{\xi}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{11} \right] - 5 \right) h \right] + \\
&+ r_6 \tilde{\xi}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{11} \right] - 6 \right) h \right] + r_7 \tilde{\xi}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{11} \right] - 7 \right) h \right] + w \left[\left[\frac{k}{11} \right] h \right] - \\
&- \sigma_1 w \left[\left(\left[\frac{k}{11} \right] - 1 \right) h \right] - \sigma_2 w \left[\left(\left[\frac{k}{11} \right] - 2 \right) h \right] - \sigma_3 w \left[\left(\left[\frac{k}{11} \right] - 3 \right) h \right]. \tag{8.49}
\end{aligned}$$

На основі перетворення (8.44) цю модель можна записати у формі

$$\begin{aligned}
\hat{\xi}^2 \left[\left[\frac{k}{11} \right] h \right] &= \left\{ \tilde{\xi}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{11} \right] - 1 \right) h \right] - \beta_1 \tilde{\xi}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{11} \right] - 2 \right) h \right] - \beta_2 \tilde{\xi}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{11} \right] - 3 \right) h \right] - \right. \\
&- \beta_3 \tilde{\xi}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{11} \right] - 4 \right) h \right] - \beta_4 \tilde{\xi}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{11} \right] - 5 \right) h \right] - w \left[\left(\left[\frac{k}{11} \right] - 1 \right) h \right] \left. \right\} \sigma_1 + \\
&+ \left\{ \tilde{\xi}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{11} \right] - 2 \right) h \right] - \beta_1 \tilde{\xi}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{11} \right] - 3 \right) h \right] - \beta_2 \tilde{\xi}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{11} \right] - 4 \right) h \right] - \right. \\
&- \beta_3 \tilde{\xi}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{11} \right] - 5 \right) h \right] - \beta_4 \tilde{\xi}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{11} \right] - 6 \right) h \right] - w \left[\left(\left[\frac{k}{11} \right] - 2 \right) h \right] \left. \right\} \sigma_2 + \\
&+ \left\{ \tilde{\xi}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{11} \right] - 3 \right) h \right] - \beta_1 \tilde{\xi}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{11} \right] - 4 \right) h \right] - \beta_2 \tilde{\xi}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{11} \right] - 5 \right) h \right] - \right. \\
&- \beta_3 \tilde{\xi}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{11} \right] - 6 \right) h \right] - \beta_4 \tilde{\xi}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{11} \right] - 7 \right) h \right] - w \left[\left(\left[\frac{k}{11} \right] - 3 \right) h \right] \left. \right\} \sigma_3 + \\
&+ \left\{ \lambda + \beta_1 \tilde{\xi}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{11} \right] - 1 \right) h \right] + \beta_2 \tilde{\xi}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{11} \right] - 2 \right) h \right] + \beta_3 \tilde{\xi}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{11} \right] - 3 \right) h \right] + \right. \\
&+ \beta_4 \tilde{\xi}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{11} \right] - 4 \right) h \right] \left. \right\} + w \left[\left[\frac{k}{11} \right] h \right].
\end{aligned}$$

На основі РМНК (8.43) оцінюють оптимальні значення коефіцієнтів $\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2, \hat{\sigma}_3$ з точки зору мінімізації критерію (8.47). Процес адаптивного оцінювання цих коефіцієнтів показано на рис. 8.1, 8.2 та 8.3.

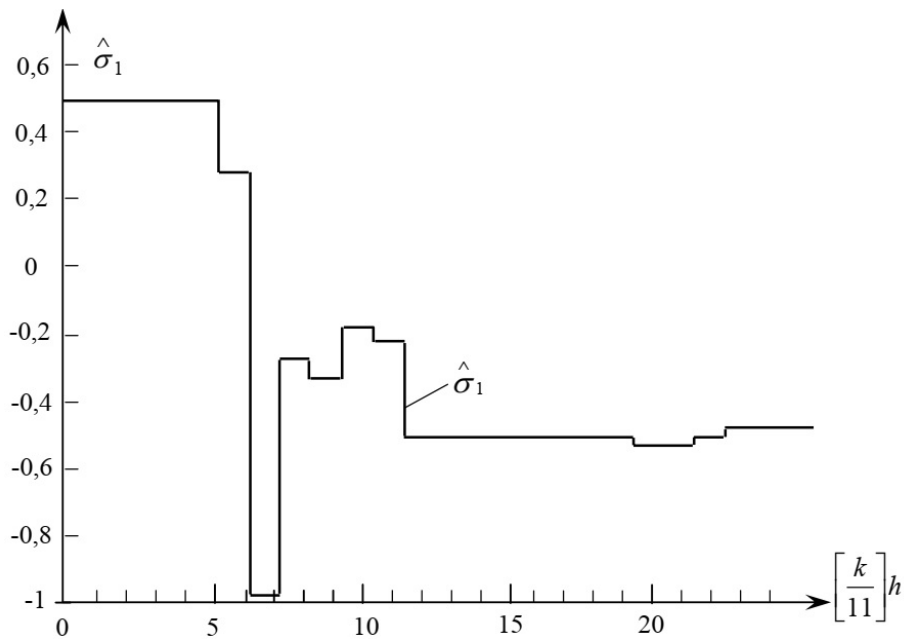


Рис. 8.1. Графік адаптивного настроювання коефіцієнта $\hat{\sigma}_1$ за РМНК

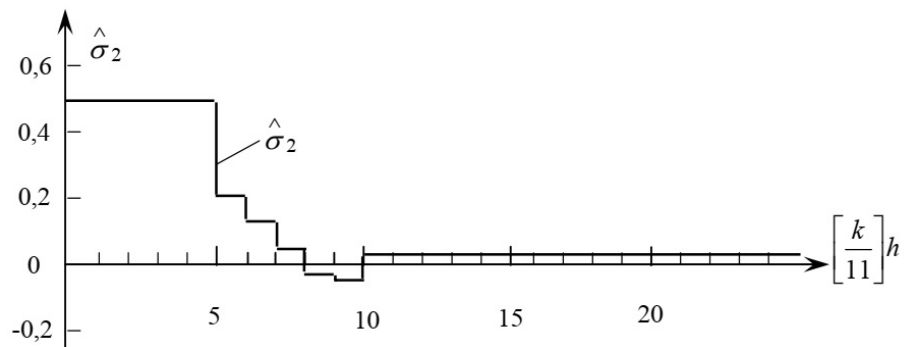


Рис. 8.2. Графік адаптивного настроювання коефіцієнта $\hat{\sigma}_2$ за РМНК

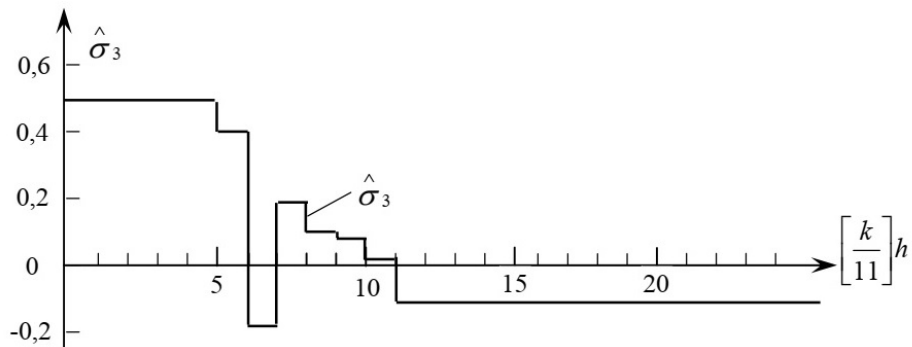


Рис. 8.3. Графік адаптивного настроювання коефіцієнта $\hat{\sigma}_3$ за РМНК

Прогнозування умовної дисперсії виконують на основі моделі GARCH (8.49). Під час моделювання як збурення $\xi(kT_0)$ було використано процес авторегресії першого порядку

$$\xi(kT_0) = g\xi[(k-1)T_0] + v(kT_0),$$

де $v(kT_0)$ – гауссівський «білий» шум, а $g \approx 0,8 \dots 0,9$ – відомий скалярний коефіцієнт.

На рис. 8.4 показано результати цифрового моделювання для обчислення умовної дисперсії $\xi^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] + 1 \right) h \right]$ на основі (8.48) та її прогнозування $\hat{\xi}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] + 1 \right) h \right]$ на основі моделі GARCH (8.49) за оптимальних значень коефіцієнтів $\hat{\sigma}_{1\text{опт}} = -0,4766$; $\hat{\sigma}_{2\text{опт}} = -0,0213$; $\hat{\sigma}_{3\text{опт}} = -0,1190$ для дискретних відліків $\left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] + 1 \right) h \right]$.

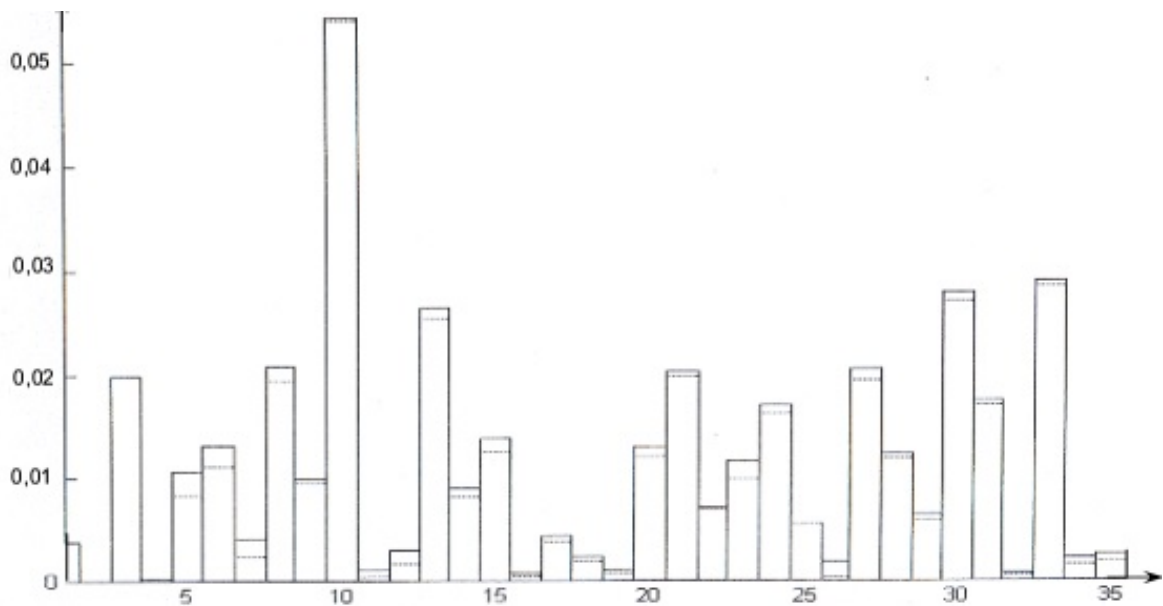


Рис. 8.4. Графіки обчислення (_____) та прогнозування (.....) умовної дисперсії

$$\xi^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] + 1 \right) h \right].$$

8.7. Адаптивне прогнозування максимальних вибірових умовних дисперсій багатовимірних процесів з різнотемповою дискретизацією

8.7.1. Метод прогнозування максимальних вибірових умовних дисперсій багатовимірних процесів з різнотемповою дискретизацією на основі моделей ARCH

Вихідна модель процесів авторегресії і ковзного середнього (АРКС) з різнотемповою дискретизацією має вигляд [60]

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} A_{11}(z_1^{-1}) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_{22}(z_1^{-1}) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & A_{nn}(z_n^{-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1(r_1 h_1) \\ Y_2(r_2 h_2) \\ \vdots \\ Y_n(r_n h_n) \end{bmatrix} = \\
 & = \begin{bmatrix} C_{11}(z^{-1}) & C_{12}(z^{-1}) & \dots & C_{1n}(z^{-1}) \\ C_{21}(z^{-1}) & C_{22}(z^{-1}) & \dots & C_{2n}(z^{-1}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n1}(z^{-1}) & C_{n2}(z^{-1}) & \dots & C_{nn}(z^{-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1(kT_0) \\ \xi_2(kT_0) \\ \vdots \\ \xi_n(kT_0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{0_1} \\ a_{0_2} \\ \vdots \\ a_{0_n} \end{bmatrix}. \quad (8.50)
 \end{aligned}$$

Тут

$$h_i = m_i T_0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (8.51)$$

$$\begin{aligned}
 r_i &= \left\lfloor \frac{k}{m_i} \right\rfloor, \quad m_i > 1 \\
 z_i^{-1} &= z^{-m_i}. \quad (8.52)
 \end{aligned}$$

Структуру поліномів у (8.50) можна подати у загальному вигляді:

$$A_{ii}(z_i^{-1}) = 1 + a_{1_i} z_i^{-1} + a_{2_i} z_i^{-2}; \quad (8.53)$$

$$C_{ij}(z^{-1}) = 1 + C_{1_{ij}} z^{-1} + C_{q_{ij}} z^{-q_i}, \quad (8.54)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n), (j = 1, 2, \dots, n),$$

при цьому a_{0_i} – зміщення i -ї вихідної координати. Модель АРКС (8.50) можна подати у різницевій формі для кожної вихідної координати:

$$\begin{aligned}
Y_i \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i \right] = & -a_{1_i} Y_i \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - 1 \right) h_i \right] - a_{2_i} Y_i \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - 2 \right) h_i \right] + \xi_1 \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i \right] + \\
& + C_{1_{i1}} \xi_1 \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i - T_0 \right] + \dots + C_{m_{i1}} \xi_1 \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i - m_i T_0 \right] + C_{q_{i1}} \xi_1 \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i - q_i T_0 \right] + \\
& + \xi_2 \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i \right] + C_{1_{i2}} \xi_2 \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i - T_0 \right] + \dots + C_{m_{i2}} \xi_2 \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i - m_i T_0 \right] + \\
& + \dots + C_{q_{i2}} \xi_2 \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i - q_i T_0 \right] + \dots + \xi_n \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i \right] + C_{1_{in}} \xi_n \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i - T_0 \right] + \dots + \\
& + C_{m_{in}} \xi_n \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i - m_i T_0 \right] + \dots + C_{q_{in}} \xi_n \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i - q_i T_0 \right] + a_{0_i};
\end{aligned}
\tag{8.55}$$

$(i=1, 2, \dots, n).$

Відмінність цього методу прогнозування умовних дисперсій полягає в тому, щоб обчислювати не класичні умовні дисперсії, як це розглянуто в підрозд. 8.4, а максимальні умовні дисперсії на деяких інтервалах дискретного часу, тобто «вікнах», тривалість яких під час обчислення умовних дисперсій змінюється від h_i до $P_{i\max} h_i$ при $i=1, 2, \dots, n$. Найбільшу тривалість «вікна» доцільно брати рівною найбільшій сталій часу процесу за певним каналом $P_{i\max} h_i = T_i$, яка характеризує інерційність процесу.

Алгоритм прогнозування максимальної вибіркової умовної дисперсії багатовимірного процесу для послідовності вимірів $Y_i \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i \right]$ виконують на основі такої рекурентної процедури:

1. Визначаємо вибіркове умовне математичне сподівання вихідної координати Y_i протягом «вікна» тривалістю $P_i h_i$:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{p_i} \sum_{j=\left[\frac{k}{m_i}\right]-p_i-1}^{\left[\frac{k}{m_i}\right]} E_{j-1}\{Y_i(jh)\} = \\
& = \frac{1}{p_i} \left\{ -a_{1_i} Y_i \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - 1 \right) h \right] - a_{2_i} Y_i \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - 2 \right) h_i \right] + \dots + \right. \\
& + C_{m_{i_1}} \xi_1 \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i - m_i T_0 \right] + \dots + C_{q_{i_j}} \xi_1 \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i - q_i T_0 \right] + \\
& + C_{m_{i_2}} \xi_2 \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i - m_i T_0 \right] + \dots + C_{q_{i_2}} \xi_2 \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i - q_i T_0 \right] + \dots + \\
& + C_{m_{i_n}} \xi_n \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i - m_i T_0 \right] + \dots + C_{q_{i_n}} \xi_n \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i - q_i T_0 \right] - \\
& - a_{1_i} Y_i \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - p_i \right) h_i \right] - a_{2_i} Y_i \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - p_i \right) h_i \right] + \\
& + C_{m_{i_1}} \xi_1 \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - p_i + 1 \right) h_i - m_i T_0 \right] + \dots + \\
& + C_{q_{i_1}} \xi_1 \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - p_i + 1 \right) h_i - q_i T_0 \right] + \\
& + \dots + C_{m_{i_n}} \xi_n \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - p_i + 1 \right) h_i - m_i T_0 \right] + \\
& + C_{q_{i_n}} \xi_n \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - p_i + 1 \right) h_i - q_i T_0 \right] + p_i a_{0_i} \left. \right\}. \tag{8.56}
\end{aligned}$$

2. Обчислюємо вибірккову умовну дисперсію на інтервалі $P_i h_i$ для послідовності $\left\{ Y_i \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i \right] \right\}$. Маємо

$$\begin{aligned}
& \text{var} \left\{ Y_i \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i \right] \middle| Y_i \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - 1 \right) h_i \right], \dots, Y_i \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - p_i \right) h_i \right] \right\} = \\
& = \frac{1}{p_i} \sum_{j=\left[\frac{k}{m_i}\right]-P_i-1}^{\left[\frac{k}{m_i}\right]} \left\{ Y_i(jh_i) - \frac{1}{p_i} \sum_{s=\left[\frac{k}{m_i}\right]-P_i-1}^{\left[\frac{k}{m_i}\right]} E_{s-1} \{ Y_i(sh_i) \} \right\}^2 \quad (8.57) \\
& \quad (i = 1, 2, \dots, n).
\end{aligned}$$

3. Визначаємо максимальне значення вибіркової умовної дисперсії у разі зміни значення P_i в інтервалі $1 \leq P_i \leq P_{i\max}$ на основі (8.56), (8.57):

$$\begin{aligned}
& \sup_{1 \leq p_i \leq p_{i\max}} \text{var} \left\{ Y_i \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i \right] \middle| Y_i \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - 1 \right) h_i \right], \dots, Y_i \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - p_i \right) h_i \right] \right\} = \\
& = \bar{\xi}_{i\max}^2 \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i \right], \quad (8.58)
\end{aligned}$$

де, як було показано вище, величину $p_{i\max}$ встановлюємо згідно з рівністю $p_{i\max} h_i = T_i$, де T_i – стала часу, що характеризує інерційність координати Y_i .

4. Обчислюємо ряд l_i максимальних вибірових умовних дисперсій за $i = 1, 2, \dots, n$ на основі виразів

$$\begin{aligned}
& \bar{\xi}_{i\max}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - 1 \right) h_i \right] = \sup_{1 \leq p_i \leq p_{i\max}} \text{var} \left\{ Y_i \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - 1 \right) h_i \right] \middle| Y_i \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - 2 \right) h_i \right], \dots \right. \\
& \left. \dots, Y_i \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - p_i - 1 \right) h_i \right] \right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \bar{\xi}_{i\max}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - l_i \right) h_i \right] = \sup_{1 \leq p_i \leq p_{i\max}} \text{var} \left\{ Y_i \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - l_i \right) h_i \right] \middle| Y_i \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - l_i - 1 \right) h_i \right], \dots \right. \\
& \left. \dots, Y_i \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - l_i - p_i \right) h_i \right] \right\}.
\end{aligned}$$

5. Будуємо математичну модель ARCH динаміки максимальних вибірових умовних дисперсій для кожної координати Y_i на основі обчислених рядів із застосуванням, наприклад, методу найменших квадратів:

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_{i_{\max}}^2 \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i \right] &= \hat{\beta}_{1i} \bar{\xi}_{i_{\max}}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - 1 \right) h_i \right] + \dots + \\ &+ \hat{\beta}_{\mu_i} \bar{\xi}_{i_{\max}}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - \mu_i \right) h_i \right] + w_i \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i \right] + \hat{\gamma}_i, \end{aligned} \quad (8.59)$$

де $w_i \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i \right]$ – дискретний «білий» шум з нульовим середнім.

Рівняння (8.59) являє собою авторегресійну умовно гетероскедастичну модель (ARCH), на основі якої можна виконувати прогнозування максимальної вибіркової умовної дисперсії (8.58) на один великий період дискретизації $h_i = m_i T_0$:

$$\begin{aligned} \hat{\xi}_{i_{\max}}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] + 1 \right) h_i \right] &= \hat{\beta}_{1i} \bar{\xi}_{i_{\max}}^2 \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i \right] + \hat{\beta}_{2i} \bar{\xi}_{i_{\max}}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - 1 \right) h_i \right] + \dots \\ &\dots + \hat{\beta}_{\mu_i} \bar{\xi}_{i_{\max}}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - \mu_i + 1 \right) h_i \right] + \hat{\gamma}_i. \end{aligned} \quad (8.60)$$

8.7.2. Розроблення моделі GARCH для адаптивного прогнозування максимальних вибірових умовних дисперсій багатовимірних процесів для періоду дискретизації $h_i = m_i T_0$

Виконаємо розроблення переходу від моделі ARCH (8.59) до моделі GARCH для максимальних умовних дисперсій.

Введемо нові змінні:

$$\bar{\xi}_{i_{\max}}^2 \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i \right] = \sqrt{H_{i_{\max}} \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i \right]} v_i \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i \right], \quad (8.61)$$

де $v_i \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i \right]$ – нормальна послідовність з нульовим середнім та одиничною дисперсією:

$$E \left\{ v_i \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i \right] \right\} = 0,$$

$$E \left\{ v_i^2 \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i \right] \right\} = 1.$$

На основі (8.61) для максимальної вибіркової умовної дисперсії можна записати

$$\bar{\bar{\xi}}_{i_{\max}}^2 \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i \right] = H_{i_{\max}} \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i \right] v_i^2 \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i \right]. \quad (8.62)$$

Якщо в моделі ARCH (8.59) припустити, що

$$\begin{aligned} H_{i_{\max}} \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i \right] &= \beta_{1i} \bar{\bar{\xi}}_{i_{\max}}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - 1 \right) h_i \right] + \dots + \\ &+ \beta_{\mu_i} \bar{\bar{\xi}}_{i_{\max}}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - \mu_i \right) h_i \right] + \gamma_i, \end{aligned} \quad (8.63)$$

то згідно з (8.61) отримаємо

$$\begin{aligned} &\left\{ \bar{\bar{\xi}}_{i_{\max}}^2 \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i \right] \middle| \bar{\bar{\xi}}_{i_{\max}}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - 1 \right) h_i \right], \bar{\bar{\xi}}_{i_{\max}}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - 2 \right) h_i \right], \dots \right\} = \\ &= \beta_{1i} \bar{\bar{\xi}}_{i_{\max}}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - 1 \right) h_i \right] + \dots + \beta_{\mu_i} \bar{\bar{\xi}}_{i_{\max}}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - \mu_i + 1 \right) h_i \right] + \gamma_i. \end{aligned}$$

Якщо підставити вирази (8.62), (8.63) у вираз (8.59), то отримаємо

$$\begin{aligned} \hat{\bar{\bar{\xi}}}_{i_{\max}}^2 \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i \right] &= H_{i_{\max}} \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i \right] v_i^2 \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i \right] = \\ &= H_{i_{\max}} \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i \right] + w_i \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i \right]. \end{aligned} \quad (8.64)$$

Отже, значення $H_{i_{\max}} \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i \right]$ є лінійною проекцією максимального

значення квадрата похибки $\hat{\bar{\bar{\xi}}}_{i_{\max}}^2 \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i \right]$, тобто є прогнозом для максимальної умовної дисперсії.

Враховуючи (8.59), (8.63), можна обчислити похибку $w_i \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i \right]$

у рівнянні авторегресії (8.59):

$$w_i \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i \right] = \bar{\bar{\xi}}_{i_{\max}}^2 \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i \right] - H_{i_{\max}} \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i \right]. \quad (8.65)$$

Запишемо формулу (8.63) так:

$$H_{i_{\max}} \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i \right] = \left(\beta_{1i} z_i^{-1} + \beta_{2i} z_i^{-2} + \dots + \beta_{\mu_i} z_i^{-\mu_i} \right) \bar{\bar{\xi}}_{i_{\max}}^2 \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i \right] + \gamma_i, \quad (8.66)$$

де z_i^{-1} – оператор зворотного зсуву на період $h_i = m_i T_0$. Запишемо поліном:

$$\left(\beta_{1i} z_i^{-1} + \beta_{2i} z_i^{-2} + \dots + \beta_{\mu_i} z_i^{-\mu_i} \right) = \frac{r_{1i} z_i^{-1} + r_{2i} z_i^{-2} + \dots + r_{(\mu_i+n_i)i} z_i^{-(\mu_i+n_i)}}{1 - \sigma_{1i} z_i^{-1} - \sigma_{2i} z_i^{-2} - \dots - \sigma_{n_i} z_i^{-n_i}}. \quad (8.67)$$

При цьому корені рівняння

$$1 - \sigma_{1i} z_i^{-1} - \sigma_{2i} z_i^{-2} - \dots - \sigma_{n_i} z_i^{-n_i} = 0$$

мають міститися всередині круга одиничного радіуса. Застосовуючи (8.67), можна подати рівність (8.66) у формі скінченно-різницевого рівняння

$$\begin{aligned} H_{i_{\max}} \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i \right] &= \lambda_i + \sigma_{1i} H_{i_{\max}} \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - 1 \right) h_i \right] + \\ &+ \sigma_{2i} H_{i_{\max}} \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - 2 \right) h_i \right] + \dots + \sigma_{n_i} H_{i_{\max}} \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - n_i \right) h_i \right] + \\ &+ r_{1i} \bar{\bar{\xi}}_{i_{\max}}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - 1 \right) h_i \right] + r_{2i} \bar{\bar{\xi}}_{i_{\max}}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - 2 \right) h_i \right] + \dots + \\ &+ r_{(\mu_i+n_i)i} \bar{\bar{\xi}}_{i_{\max}}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - \mu_i - n_i \right) h_i \right], \end{aligned} \quad (8.68)$$

де $\lambda_i = (1 - \sigma_{1i} - \sigma_{2i} - \dots - \sigma_{n_i}) \gamma_i$.

Виконаємо ряд елементарних перетворень на (8.68) з урахуванням (8.64). У результаті отримаємо модель GARCH для опису динаміки максимальних вибірових умовних дисперсій для кожної координати Y_i :

$$\begin{aligned}
& \bar{\bar{\xi}}_{i_{\max}}^2 \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i \right] = \lambda_i + (\sigma_{1_i} + r_{1_i}) \bar{\bar{\xi}}_{i_{\max}}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - 1 \right) h_i \right] + \\
& + (\sigma_{2_i} + r_{2_i}) \bar{\bar{\xi}}_{i_{\max}}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - 2 \right) h_i \right] + \dots + (\sigma_{n_{i_i}} + r_{n_{i_i}}) \cdot \\
& \cdot \bar{\bar{\xi}}_{i_{\max}}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - n_i \right) h_i \right] + r_{(n_i+1)i} \bar{\bar{\xi}}_{i_{\max}}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - n_i - 1 \right) h_i \right] + \\
& + \dots + r_{(\mu_i+n_i)i} \bar{\bar{\xi}}_{i_{\max}}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - \mu_i - n_i \right) h_i \right] + w_i \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i \right] - \\
& - \sigma_{1_i} w_i \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - 1 \right) h_i \right] - \dots - \sigma_{n_{i_i}} w_i \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - n_i \right) h_i \right],
\end{aligned}$$

де збурення визначають так:

$$w_i \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - 1 \right) h_i \right] = \bar{\bar{\xi}}_{i_{\max}}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - 1 \right) h_i \right] - H_{i_{\max}} \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - 1 \right) h_i \right];$$

$$w_i \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - n_i \right) h_i \right] = \bar{\bar{\xi}}_{i_{\max}}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - n_i \right) h_i \right] - H_{i_{\max}} \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - n_i \right) h_i \right]. \quad (8.69)$$

На основі моделі GARCH (8.69) можна прогнозувати максимальну вибірккову умовну дисперсію на один великий період дискретизації $h_i = m_i T_0$ за i -м каналом:

$$\begin{aligned}
& \hat{\bar{\bar{\xi}}}_{i_{\max}}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] + 1 \right) h_i \right] = \lambda_i + (\sigma_{1_i} + r_{1_i}) \bar{\bar{\xi}}_{i_{\max}}^2 \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i \right] + \\
& + (\sigma_{2_i} + r_{2_i}) \bar{\bar{\xi}}_{i_{\max}}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - 1 \right) h_i \right] + \dots + (\sigma_{n_{i_i}} + r_{n_{i_i}}) \cdot \\
& \cdot \bar{\bar{\xi}}_{i_{\max}}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - n_i + 1 \right) h_i \right] + r_{(n_i+1)i} \bar{\bar{\xi}}_{i_{\max}}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - n_i \right) h_i \right] + \\
& + \dots + r_{(\mu_i+n_i)i} \bar{\bar{\xi}}_{i_{\max}}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - \mu_i - n_i + 1 \right) h_i \right] - \\
& - \sigma_{1_i} w_i \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i \right] - \dots - \sigma_{n_{i_i}} w_i \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - n_i + 1 \right) h_i \right]. \quad (8.70)
\end{aligned}$$

На практиці немає потреби переходити від моделі ARCH до моделі GARCH описаним способом, позаяк одразу можна розробляти більш загальну модель з адаптивним оцінюванням її коефіцієнтів. Щоб цього досягти, запровадимо критерій оптимальності для оцінювання параметрів моделі через мінімізацію дисперсії похибки прогнозу:

$$J_{N_i} = \sum_{\left[\frac{k}{m_i}\right]=1}^N \left\{ \bar{\xi}_{i_{\max}}^2 \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i \right] - \hat{\xi}_{i_{\max}}^2 \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i \right] \right\}^2, \quad (8.71)$$

де $\bar{\xi}_{i_{\max}}^2 \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i \right]$ – обчислене значення максимальної вибіркової умовної дисперсії за i -м каналом на основі (8.57), (8.58), а $\hat{\xi}_{i_{\max}}^2 \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i \right]$ – дисперсія, яку визначають за моделлю GARCH (8.69).

Для розроблення процедури адаптивного оцінювання коефіцієнтів моделі (8.69) подамо критерій (8.71) у формі

$$J_{N_i} = \sum_{\left[\frac{k}{m_i}\right]=1}^N \left\{ \bar{\xi}_{i_{\max}}^2 \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i \right] - \bar{X}_i^T \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i \right] \hat{\theta}_i \right\}^2, \quad (8.72)$$

де вектор оцінюваних коефіцієнтів $\hat{\theta}_i$ згідно з (8.69) можна записати таким чином:

$$\hat{\theta}_i = \left[\left(\sigma_{1_i} + r_{1_i} \right), \dots, \left(\sigma_{n_{i_i}} + r_{n_{i_i}} \right), r_{(n_i+1)}, \dots, r_{(\mu_i+n_{i_i})}, \sigma_{1_i}, \dots, \sigma_{n_{i_i}}, \lambda_i \right]^T, \quad (8.73)$$

а вектор обчислюваних координат формуємо на кожному періоді дискретизації $h_i = m_i T_0$ таким чином:

$$\begin{aligned} \bar{X}_i^T \left[\left[\frac{k}{m_i} \right] h_i \right] = & \left\{ \bar{\xi}_{i_{\max}}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - 1 \right) h_i \right], \bar{\xi}_{i_{\max}}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - 2 \right) h_i \right], \dots, \right. \\ & \bar{\xi}_{i_{\max}}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - n_i \right) h_i \right], \bar{\xi}_{i_{\max}}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - n_i - 1 \right) h_i \right], \dots, \bar{\xi}_{i_{\max}}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - \mu_i - n_i \right) h_i \right], \\ & \left. -w_i \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - 1 \right) h_i \right], \dots, -w_i \left[\left(\left[\frac{k}{m_i} \right] - n_i \right) h_i \right], 1 \right\}. \end{aligned}$$

Для оцінювання оптимальних коефіцієнтів $\hat{\theta}_i$, за яких мінімізується критерій (8.72), можна застосувати рекурентний метод найменших квадратів (8.43), рекурентна процедура якого повторюється на кожному періоді дискретизації n разів для оцінювання $\hat{\theta}_i$ щодо кожного каналу багатовимірного процесу.

8.7.3. Моделювання двовимірної системи прогнозування максимальних вибірових умовних дисперсій з різнотемповою дискретизацією

Розглянемо для прикладу модель ARКС двовимірний процесу з різнотемповою дискретизацією за $h_1 = 5T_0, h_2 = 10T_0$:

$$\begin{bmatrix} A_{11}(z_1^{-1}) & 0 \\ 0 & A_{22}(z_2^{-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \left[\left[\frac{k}{5} \right] h_1 \right] \\ Y_2 \left[\left[\frac{k}{10} \right] h_2 \right] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}(z^{-1}) & C_{12}(z^{-1}) \\ C_{21}(z^{-1}) & C_{22}(z^{-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1(kT_0) \\ \xi_2(kT_0) \end{bmatrix},$$

де z^{-1} – оператор зворотного зсуву на один період дискретизації T_0 ;

z_1^{-1} – оператор зворотного зсуву на один період дискретизації $h_1 = 5T_0$;

z_2^{-1} – оператор зворотного зсуву на один період дискретизації $h_2 = 10T_0$.

Поліноми моделі становлять:

$$A_{11}(z_1^{-1}) = 1 - 0,9048 z_1^{-1} \quad z_1^{-1} = 1 - 0,9048 z^{-5};$$

$$A_{22}(z_2^{-1}) = 1 - 0,9044 z_2^{-1} \quad z_2^{-1} = 1 - 0,9044 z^{-10};$$

$$C_{11}(z^{-1}) = 1 + 0,48z^{-1} + 0,47z^{-2} + 0,462z^{-3} + 0,452z^{-4} + 0,461z^{-5};$$

$$C_{12}(z^{-1}) = 1 + 1,58z^{-1} + 1,5489z^{-2} + 1,518z^{-3} + 1,488z^{-4} + 0,553z^{-5};$$

$$C_{21}(z^{-1}) = 1 + 0,29z^{-1} + 0,28z^{-2} + 0,2842z^{-3} + 0,281z^{-4} + 0,2785z^{-5} + \\ + 0,255z^{-6} + 0,283z^{-7} + 0,27z^{-8} + 0,267z^{-9} + 0,265z^{-10};$$

$$C_{22}(z^{-1}) = 1 + 0,54z^{-1} + 0,534z^{-2} + 0,529z^{-3} + 0,53z^{-4} + 0,52z^{-5} + \\ + 0,513z^{-6} + 0,508z^{-7} + 0,503z^{-8} + 0,498z^{-9} + 0,41107z^{-10}.$$

Модель GARCH (8.69) для першого і другого каналів отримуємо в такій формі:

$$\begin{aligned}\bar{\xi}_{1\max}^2 \left[\left[\frac{k}{5} \right] h_1 \right] &= (\sigma_{1_1} + r_{1_1}) \bar{\xi}_{1\max}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{5} \right] - 1 \right) h_1 \right] + r_{2_1} \bar{\xi}_{1\max}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{5} \right] - 2 \right) h_1 \right] + \\ &+ r_{3_1} \bar{\xi}_{1\max}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{5} \right] - 3 \right) h_1 \right] + w_1 \left[\frac{k}{5} \right] h_1 - \sigma_{1_1} w_1 \left[\left(\left[\frac{k}{5} \right] - 1 \right) h_1 \right] + \lambda_1; \\ \bar{\xi}_{2\max}^2 \left[\left[\frac{k}{10} \right] h_2 \right] &= (\sigma_{1_2} + r_{1_2}) \bar{\xi}_{2\max}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{10} \right] - 1 \right) h_2 \right] + r_{2_2} \bar{\xi}_{2\max}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{10} \right] - 2 \right) h_2 \right] + \\ &+ r_{3_2} \bar{\xi}_{2\max}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{10} \right] - 3 \right) h_2 \right] + w_2 \left[\frac{k}{10} \right] h_2 - \sigma_{1_2} w_2 \left[\left(\left[\frac{k}{10} \right] - 1 \right) h_2 \right] + \lambda_2.\end{aligned}$$

На рис. 8.5 та 8.6 показано результати цифрового моделювання із прогнозування максимальних умовних дисперсій:

$$\hat{\bar{\xi}}_{1\max}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{5} \right] + 1 \right) h_1 \right] \text{ і } \hat{\bar{\xi}}_{2\max}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{10} \right] + 1 \right) h_2 \right]$$

(білого кольору), які порівнюємо з обчисленими за формулами (8.57), (8.58)

$\bar{\xi}_{1\max}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{5} \right] + 1 \right) h_1 \right]$ і $\bar{\xi}_{2\max}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{10} \right] + 1 \right) h_2 \right]$ значеннями (чорного кольору) за

$P_{1\max} = 12, P_{1\max} = 6$.

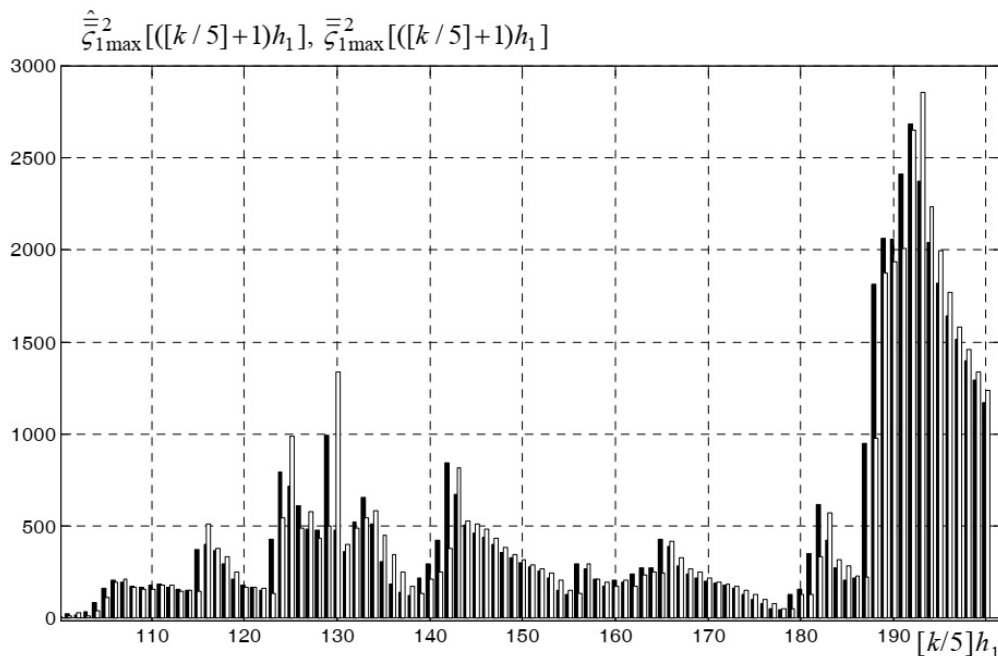


Рис. 8.5. Графіки обчислення (чорний колір) та прогнозування (білий колір)

максимальної умовної дисперсії $\bar{\xi}_{1\max}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{5} \right] + 1 \right) h_1 \right]$

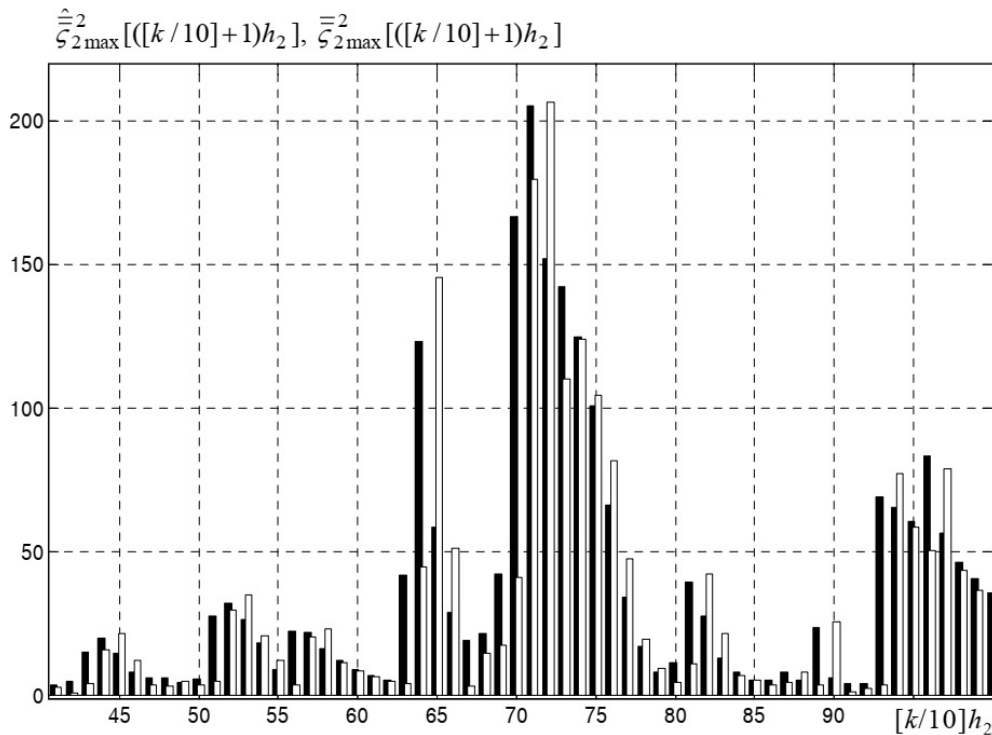


Рис. 8.6. Графіки обчислення (чорний колір) та прогнозування (білий колір)

$$\text{максимальної умовної дисперсії } \bar{\bar{\xi}}_{2\max}^2 \left[\left(\left\lceil \frac{k}{10} \right\rceil + 1 \right) h_2 \right]$$

8.8. Прогнозування максимальних умовних дисперсій співвідношень вихідних координат багатовимірних процесів з різномовною дискретизацією

Розглянемо задачу обчислення та прогнозування максимальних умовних вибірових дисперсій нев'язок співвідношень між координатами багатовимірного процесу у стохастичному середовищі [33]. Так само, як дисперсія, помилки регулювання є однією з мір якості керування, так і дисперсію нев'язки співвідношень можна розглядати як міру якості координувального керування.

Крім того, волатильність співвідношення може бути корисною інформацією і поза контекстом координувального керування як суттєва характеристика процесу, для якого важливу роль відіграє певне співвідношення окремих координат, наприклад, співвідношення між попитом і пропозицією криптовалюти на фінансових ринках. Переваги максимальних вибірових умовних дисперсій координат, які були виявлені в попередніх підрозділах, зберігаються і у випадках максимальних умовних

дисперсій їх співвідношень, тому пропонуємо розглядати і прогнозувати не просто дисперсії співвідношень, а максимальні умовні дисперсії цих співвідношень.

Розглянемо модель АРКС для опису динаміки багатовимірного процесу з різнотемповою дискретизацією у вигляді

$$\begin{bmatrix} A_{11}(z_1^{-1}) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_{22}(z_1^{-1}) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & A_{nn}(z_n^{-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] \\ Y_2 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] \\ \vdots \\ Y_n \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}(z^{-1}) & C_{12}(z^{-1}) & \dots & C_{1n}(z^{-1}) \\ C_{21}(z^{-1}) & C_{22}(z^{-1}) & \dots & C_{2n}(z^{-1}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n1}(z^{-1}) & C_{n2}(z^{-1}) & \dots & C_{nn}(z^{-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1(kT_0) \\ \xi_2(kT_0) \\ \vdots \\ \xi_n(kT_0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{0_1} \\ a_{0_2} \\ \vdots \\ a_{0_n} \end{bmatrix}. \quad (8.74)$$

Не зменшуючи узагальнення, припустимо, що співвідношення періодів дискретизації вихідних і вхідних координат буде однаковим:

$$h = mT_0, \quad (8.75)$$

де m – ціле число, більше за одиницю, а в цьому випадку співвідношення операторів зворотного зсуву буде $z_1^{-1} = z^{-m}$. Структура поліномів у моделі (8.74) має вигляд

$$\begin{aligned} A_i(z_1^{-1}) &= 1 + a_{1_i} z_1^{-1} + \dots + a_{s_i} z_1^{-s_i}; \\ C_{ij}(z^{-1}) &= C_{0ij} z^{-1} + C_{1ij} z^{-1} + \dots + C_{qij} z^{-q}; \\ i &= q, 2, \dots, n; \quad j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (8.76)$$

Множину співвідношень між вихідними координатами багатовимірного процесу може бути задано у вигляді системи лінійних рівнянь

$$S\bar{Y} \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] = \bar{b}, \quad (8.77)$$

де $\bar{Y}[y_1, y_2, \dots, y_n]^T$ – вектор вихідних координат;

S – матриця розмірністю $l \times n$, $l < n$; $\text{rank}(s) = l$;

$\bar{b}$ – вектор-стовпець розмірністю l .

Лінійні співвідношення (8.77) мають виконуватися у кожний момент часу, але за наявності стохастичних збурень досягти цього неможливо, тому введемо вектор нев'язок співвідношень

$$\bar{e} \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] = S \bar{Y} \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] - \bar{b}. \quad (8.78)$$

Дисперсії координат вектора $\bar{e}$ є мірами якості керування співвідношеннями (8.78), оскільки чим менша дисперсія i -ї координати нев'язки e_i ($i = 1, 2, \dots, l$), тим з більшою точністю виконується i -те співвідношення $S_i \bar{Y} - b_i$.

Умовне математичне сподівання нев'язки співвідношень

$$E_{j-1}[e(jh)] = E_{j-1}[S \bar{Y}(jh) - \bar{b}] = S[E_{j-1}\bar{Y}(jh)] - \bar{b} \quad (8.79)$$

для довільного моменту часу jh .

Щоб знайти $E_{j-1}[e(jh)]$, спочатку треба обчислити умовне математичне сподівання вектора вихідних координат:

$$E_{j-1}\{\bar{Y}(jh)\} = [E_{j-1}\{Y_1(jh)\}, \dots, E_{j-1}\{Y_n(jh)\}]^T.$$

Для цього модель (8.74) треба записати у різницевій формі для i -ї вихідної координати:

$$\begin{aligned} Y_i \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] = & -a_{1_i} Y_i \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - 1 \right) h \right] - \dots - a_{s_i} Y_i \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - s \right) h \right] + \\ & + C_{0i_1} \xi_1 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] + C_{1i_1} \xi_1 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h - T_0 \right] + \dots + C_{m_{i_1}} \xi_1 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h - mT_0 \right] + \\ & + \dots + C_{q_{i_1}} \xi_1 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h - qT_0 \right] + C_{0i_2} \xi_2 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] + C_{1i_2} \xi_2 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h - T_0 \right] + \\ & + \dots + C_{m_{i_2}} \xi_2 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h - mT_0 \right] + \dots + C_{q_{i_2}} \xi_2 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h - qT_0 \right] + \dots + \\ & + C_{0i_n} \xi_n \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] + C_{1i_n} \xi_n \left[\left[\frac{k}{m} \right] h - T_0 \right] + \dots + C_{m_{i_n}} \xi_n \left[\left[\frac{k}{m} \right] h - mT_0 \right] + \\ & + \dots + C_{q_{i_n}} \xi_n \left[\left[\frac{k}{m} \right] h - qT_0 \right] + a_{0_i}, \end{aligned} \quad (8.80)$$

($i = 1, 2, \dots, n$).

Пропонуємо розглянути поширений на практиці випадок, коли збурення можна подати у формі процесу авторегресії першого порядку

$$\bar{\xi}(kT_0) = g\bar{\xi}[(k-1)T_0] + \bar{v}(kT_0), \quad (8.81)$$

де $\bar{v}(kT_0)$ – векторний незалежний гауссівський дискретний «білий» шум. Якщо $g = 0,8 \dots 0,9$, у спектрі сигналу $\bar{\xi}(kT_0)$ будуть переважно виражені низькочастотні складові [61, 71].

Для подальших обчислень корисно знайти умовне математичне сподівання $E_{k-i}\{\bar{\xi}(kT_0)\}$ відносно інформації, наявної на момент часу $(k-i)T_0$. Запишемо (8.81) таким чином:

$$\begin{aligned} \bar{\xi}(kT_0) &= g\bar{\xi}[(k-1)T_0] + \bar{v}(kT_0) = g[g\bar{\xi}[(k-2)T_0] + \bar{v}[(k-1)T_0]] + \\ &+ \bar{v}(kT_0) = g\{g\bar{\xi}[(k-3)T_0] + \bar{v}[(k-2)T_0] + \bar{v}[(k-1)T_0]\} + \\ &+ \bar{v}(kT_0) = \dots = g\{g[\dots[g\bar{\xi}[(k-i)T_0] + \bar{v}[(k-i+1)T_0]] + \\ &+ \bar{v}[(k-i+2)T_0]] + \dots + \bar{v}[(k-1)T_0]\} + \bar{v}(kT_0). \end{aligned}$$

Тоді, враховуючи рівності

$$E_{k-i}\bar{v}[(k-i+1)T_0] = E_{k-i}\bar{v}[(k-i+2)T_0] = \dots = E_{k-i}\bar{v}(kT_0) = 0,$$

отримаємо $E_{k-i}\bar{\xi}(kT_0) = g^i\bar{\xi}[(k-i)T_0]$.

З урахуванням цієї рівності та формули (8.80) знайдемо умовне математичне сподівання вихідної координати $Y_i(jh)$ для довільного j та кожного $(i = 1, 2, \dots, n)$:

$$\begin{aligned} E_{j-1}Y_i(jh) &= -a_{1_i}Y_i[(j-1)h] - \dots - a_{s_i}Y_i[(j-s)h] + \\ &+ \left(C_{0i_1}g^m + C_{1i_1}g^{m-1} + \dots + C_{m-1i_1}g + C_{mi_1}\right)\xi_1[jh - mT_0] + \\ &+ C_{m+1i_1}\xi_1[jh - (m-1)T_0] + \dots + C_{qi_1}\xi_1[jh - qT_0] + \\ &+ \left(C_{0i_2}g^m + C_{1i_2}g^{m-1} + \dots + C_{m-1i_2}g + C_{mi_2}\right) \cdot \\ &\cdot \xi_2[jh - mT_0] + C_{m+1i_2}\xi_2[jh - (m+1)T_0] + \dots + C_{qi_2}\xi_2[jh - qT_0] + \\ &+ \dots + \left(C_{0i_n}g^m + C_{1i_n}g^{m-1} + \dots + C_{m-1i_n}g + C_{mi_n}\right) \cdot \\ &\cdot \xi_n[jh - mT_0] + C_{m+1i_n}\xi_n[jh - (m+1)T_0] + \dots + \\ &+ C_{qi_n}\xi_n[jh - qT_0] + a_{0_i}. \end{aligned} \quad (8.82)$$

Обираємо вибіркове умовне математичне сподівання нев'язки співвідношення e_i протягом «вікна» тривалістю ph :

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} \sum_{j=\left[\frac{k}{m}\right]-p+1}^{\left[\frac{k}{m}\right]} E_{j-1}\{e_i(jh)\} &= \frac{1}{p} \left(\sum_{j=\left[\frac{k}{m}\right]-p+1}^{\left[\frac{k}{m}\right]} S_i E_{j-1}\{\bar{Y}(jh)\} - pb_i \right) = \\ &= \frac{1}{p} S_i \sum_{j=\left[\frac{k}{m}\right]-p+1}^{\left[\frac{k}{m}\right]} E_{j-1}\{Y(jh)\} - pb_i, \end{aligned}$$

де $E_{j-1}\{\bar{Y}(jh)\}$ – вектор-стовпець, що складається з умовних математичних сподівань вихідних координат, які розраховані на основі (8.81).

Визначаємо вибірккову умовну дисперсію на інтервалі ph для послідовності нев'язки $\left\{e_i\left[\left[\frac{k}{m}\right]h\right]\right\}$, $i=1, 2, \dots, l$:

$$\begin{aligned} \text{var}_p \left\{e_i\left[\left[\frac{k}{m}\right]h\right]\right\} &= \frac{1}{p} \sum_{j=\left[\frac{k}{m}\right]-p+1}^{\left[\frac{k}{m}\right]} \left\{e_i(jh) - \frac{1}{p} \sum_{u=\left[\frac{k}{m}\right]-p+1}^{\left[\frac{k}{m}\right]} E_{j-1}\{e_i(uh)\}\right\}^2 = \\ &= \frac{1}{p} \sum_{j=\left[\frac{k}{m}\right]-p+1}^{\left[\frac{k}{m}\right]} \left\{S_i \bar{Y}(jh) - b_i - \frac{1}{p} S_i \sum_{u=\left[\frac{k}{m}\right]-p+1}^{\left[\frac{k}{m}\right]} E_{u-1}\{\bar{Y}(uh)\} - b_i\right\}^2 = \\ &= \frac{1}{p} \sum_{j=\left[\frac{k}{m}\right]-p+1}^{\left[\frac{k}{m}\right]} \left\{S_i \left[\bar{Y}(jh) - \frac{1}{p} \sum_{u=\left[\frac{k}{m}\right]-p+1}^{\left[\frac{k}{m}\right]} E_{u-1}\{\bar{Y}(uh)\} \right]\right\}^2. \end{aligned}$$

Тепер можна визначити максимальну вибірккову умовну дисперсію нев'язки співвідношення в разі зміни коефіцієнта p в інтервалі $1 \leq p \leq p_{\max}$ на основі виразів (8.81), (8.82):

$$\bar{\bar{\xi}}_{i\max}^2 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] = \sup_{1 \leq p \leq p_{\max}} \text{var}_p \left\{ e_i \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] \right\}, \quad (8.83)$$

де $p_{\max}$ установлюють залежно від інерційності процесу, $i = 1, 2, \dots, l$.

Обчислюємо на основі (8.81), (8.82), (8.83) ряд μ максимальних вибірових умовних дисперсій співвідношень за $i = 1, 2, \dots, l$ на основі виразів

$$\bar{\bar{\xi}}_{i\max}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - 1 \right) h \right] = \sup_{1 \leq p \leq p_{\max}} \text{var}_p \left\{ e_i \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - 1 \right) h \right] \right\},$$

$$\bar{\bar{\xi}}_{i\max}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - \mu_i \right) h_i \right] = \sup_{1 \leq p \leq p_{\max}} \text{var}_p \left\{ e_i \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - \mu_i \right) h \right] \right\}.$$

На основі ряду обчислених максимальних вибірових умовних дисперсій співвідношень будуємо модель ARCH, застосовуючи метод найменших квадратів для кожної нев'язки e_i :

$$\begin{aligned} \bar{\bar{\xi}}_{i\max}^2 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] &= \hat{\beta}_{1_i} \bar{\bar{\xi}}_{i\max}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - 1 \right) h \right] + \dots + \hat{\beta}_{\mu_i} \bar{\bar{\xi}}_{i\max}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - \mu_i \right) h \right] + \\ &+ w_i \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] + \hat{\gamma}_i, \quad i = 1, 2, \dots, l, \end{aligned} \quad (8.84)$$

де $w_i \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right]$ – дискретний «білий» шум з нульовим середнім.

На основі рівняння (8.84) виконуємо прогнозування максимальної вибірової умовної дисперсії (8.83) на один великий період дискретизації $h = mT_0$:

$$\begin{aligned} \bar{\bar{\xi}}_{i\max}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] + 1 \right) h \right] &= \hat{\beta}_{1_i} \bar{\bar{\xi}}_{i\max}^2 \left[\left[\frac{k}{m} \right] h \right] + \hat{\beta}_{2_i} \bar{\bar{\xi}}_{i\max}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - 1 \right) h \right] + \\ &+ \dots + \hat{\beta}_{\mu_i} \bar{\bar{\xi}}_{i\max}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{m} \right] - \mu_i + 1 \right) h \right] + \hat{\gamma}_i. \end{aligned}$$

Приклад. Моделювання двовимірної системи прогнозування максимальних умовних дисперсій співвідношень.

Задано математичну модель АРКС двовимірного процесу з різномпоровою дисперсією:

$$\begin{bmatrix} A_{11}(z_1^{-1}) & 0 \\ 0 & A_{22}(z_1^{-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \left[\left[\frac{k}{2} \right] h \right] \\ Y_2 \left[\left[\frac{k}{2} \right] h \right] \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} C_{11}(z^{-1}) & C_{12}(z^{-1}) \\ C_{21}(z^{-1}) & C_{22}(z^{-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1(kT_0) \\ \xi_2(kT_0) \end{bmatrix},$$

де z^{-1} – оператор зворотного зсуву на один період дискретизації T_0 ;

z_1^{-1} – оператор зворотного зсуву на один період дискретизації $h_1 = 2T_0$.

Поліноми моделі:

$$A_{11}(z_1^{-1}) = 1 - 1,01 z_1^{-1} + 0,118 z_1^{-2};$$

$$A_{22}(z_1^{-1}) = 1 - 0,788 z_1^{-1} + 0,118 z_1^{-2}$$

$$C_{11}(z^{-1}) = 1 + 1,433z^{-1} + 0,345z^{-2} + 0,174z^{-3} + 0,0578z^{-4};$$

$$C_{12}(z^{-1}) = 1 + 2,133z^{-1} + 1,579z^{-2} + 0,486z^{-3} + 0,053z^{-4};$$

$$C_{21}(z^{-1}) = 1 + 0,555z^{-1} - 0,36z^{-2} - 0,11z^{-3} + 0,033z^{-4};$$

$$C_{22}(z^{-1}) = 1 + 1,005z^{-1} - 0,019z^{-2} - 0,203z^{-3} + 0,037z^{-4}.$$

На вхід подаємо випадковий сигнал (8.81) типу авторегресії першого порядку із $g = 0,9$. Дисперсія збурення $v(kT_0)$ дорівнює 0,01.

Задача полягає у прогнозуванні дисперсії одного співвідношення

$$Y_1 \left[\left[\frac{k}{2} \right] h \right] - 2Y_2 \left[\left[\frac{k}{2} \right] h \right] = 1,$$

тобто в системі лінійних рівнянь, які описують співвідношення координат (8.77), маємо $S = \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix}$; $b = 1$, $l = 1$.

Щоб визначити максимальну умовну дисперсію нев'язки співвідношення (8.78), тобто

$$e \left[\left[\frac{k}{2} \right] h \right] = S \bar{Y} \left[\left[\frac{k}{2} \right] h \right] - b,$$

обираємо «вікно» ph , де $p_{1\max} = 8$.

На основі методики (8.82) – (8.84) розроблено модель ARCH, відповідно до якої було проведено прогнозування максимальної умовної дисперсії $\text{var}_{p_{\max}} \left\{ e \left[\left[\frac{k}{2} \right] h \right] \right\}$ протягом $N = 500$ періодів дискретизації $h_1 = 2T_0$.

На рис. 8.7 показано результати комп'ютерного моделювання для прогнозування умовної вибіркової дисперсії співвідношення, де пунктирною лінією позначено прогнозні значення. Можна бачити, що якість прогнозування досить висока.

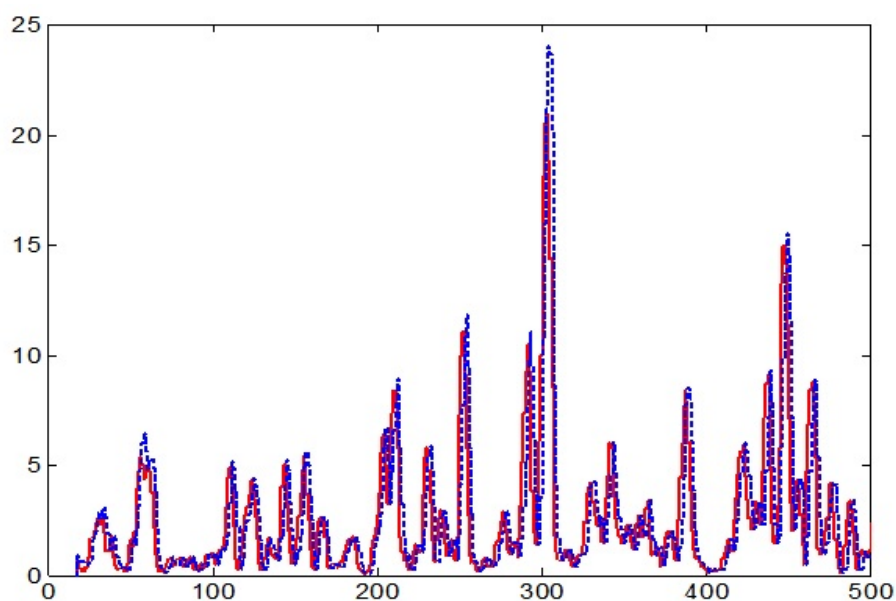


Рис. 8.7. Графіки обчислення $\bar{\xi}_{i_{\max}}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{2} \right] + 1 \right) h \right]$ (суцільна лінія)

та прогнозування $\hat{\xi}_{i_{\max}}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{2} \right] + 1 \right) h \right]$ (пунктирна лінія) максимальної умовної дисперсії співвідношення координат

Контрольні запитання

1. Як виконати перехід від однотемпової моделі АРКС до моделі АРКС з різнотемповою дискретизацією?
2. У чому полягає відмінність між моделями ARCH і GARCH для опису динаміки умовної дисперсії?
3. У чому полягають недоліки теоретичних моделей ARCH і GARCH під час їх застосування на практиці?

4. Чому під час розроблення моделі ARCH використовують умовне, а не безумовне математичне сподівання?

5. За яких умов можна виконати перетворення моделі ARCH у модель GARCH?

6. Які переваги під час прогнозування умовних дисперсій мають моделі ARCH і GARCH, розроблені на основі АРКС гетероскедастичних процесів з різнотемповою дискретизацією припорівняно з аналогічними моделями, розробленими на основі моделі АРКС з однотемповою дискретизацією?

7. У чому полягає ідея адаптивного оцінювання коефіцієнтів $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ полінома $(1 - \sigma_1 z^{-1} - \sigma_2 z^{-2} - \dots - \sigma_n z^{-n}) = 0$ під час розроблення моделі GARCH?

8. У чому полягає ідея визначення максимальних вибірових умовних дисперсій вихідних координат моделей АРКС з різнотемповою дискретизацією?

9. Чому точність прогнозування умовних дисперсій за допомогою моделі ARCH значно збільшується у разі застосування у вихідній моделі АРКС збурення у формі сигналу авторегресії першого порядку (8.81)

$$\xi(kT_0) = g\xi[(k-1)T_0] + v(kT_0),$$

замість сигналу $\xi(kT_0)$ у вигляді дискретного «білого» шуму?

10. Як визначають умовну дисперсію нев'язки співвідношення

$$\bar{e}\left[\left[\frac{k}{2}\right]h\right] = S\bar{Y}\left[\left[\frac{k}{2}\right]h\right] - \bar{b}$$

вихідних координат $\bar{Y}$ багатовимірного процесу?

Задачі для самостійного розв'язання

8.1. Модель авторегресії і ковзного середнього з однотемповою дискретизацією має вигляд

$$(1 - 0,8z^{-1})Y(kT_0) = (1 + 0,7z^{-1} + 0,65z^{-2} + 0,56z^{-3} + 0,45z^{-4} + 0,35z^{-5})\xi(kT_0).$$

Завдання.

На основі методики, описаної в підрозд. 8.3, розробити модель АРКС з різнотемповою дискретизацією

$$A(z_1^{-1})Y\left[\left[\frac{k}{5}\right]h\right] = C(z^{-1})\xi(kT_0),$$

де z_1^{-1} – оператор зворотного зсуву на один період дискретизації $h = 5T_0$;
 z^{-1} – оператор зворотного зсуву на один період дискретизації T_0 .

8.2. Задано динамічну модель процесу у формі різницевого рівняння

$$\begin{aligned} Y(kT_0) = & 0,8Y[(k-1)T_0] + \xi(kT_0) + 0,7\xi[(k-1)T_0] + \\ & + 0,65\xi[(k-2)T_0] + 0,56\xi[(k-3)T_0] + 0,45\xi[(k-4)T_0] + \\ & + 0,35\xi[(k-5)T_0], \end{aligned}$$

де $\xi(kT_0)$ – дискретний «білий» шум з нульовим середнім.

Завдання.

а) На основі методики, описаної в підрозд. 8.3, розробити модель ARCH для опису динаміки умовної дисперсії у формі (8.6).

б) На основі моделі ARCH виконати прогнозування умовної дисперсії на один період дискретизації T_0 .

в) Визначити точність прогнозування умовної дисперсії на основі критерію

$$\begin{aligned} RSME\left\{\hat{\xi}^2[(k+1)T_0]\right\} = \\ = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left\{\hat{\xi}^2[(k+1)T_0] - \xi^2[(k+1)T_0]\right\}^2}, \end{aligned} \quad (8.86)$$

де $\hat{\xi}^2[(k+1)T_0]$ – прогнозоване значення умовної дисперсії на основі (8.7);

$\xi^2[(k+1)T_0]$ – розраховане значення умовної дисперсії на основі формули (8.5).

г) Побудувати графіки обчисленої $\xi^2[(k+1)T_0]$ і прогнозованої $\hat{\xi}^2[(k+1)T_0]$ умовної дисперсії.

д) Застосувати в моделі (8.85) як вхідний сигнал $\xi(kT_0)$ згенерований випадковий сигнал на основі авторегресії першого порядку

$$\xi(kT_0) = g\xi[(k-1)T_0] + v(kT_0), \quad (8.87)$$

де $g = 0,8$, а $v(kT_0)$ – дискретний «білий» шум з нульовим середнім.

е) Виконати попереднє завдання, сформульоване в п.п. а), б), в), тобто розробити модель ARCH, виконати прогнозування умовної дисперсії на один період дискретизації T_0 та визначити точність прогнозування на основі критерію (8.86).

ж) Побудувати графіки обчисленої $\xi^2[(k+1)T_0]$ та прогнозованої $\hat{\xi}^2[(k+1)T_0]$ умовної дисперсії.

и) Порівняти точність прогнозування (8.86), яку було визначено в п.п. в) та е).

8.3. Для моделі процесу у формі різницевого рівняння (8.85) за методикою, описаною в підрозд. 8.2, розробити модель ARCH (8.12) для опису динаміки максимальної вибіркової умовної дисперсії.

Завдання.

а) Виконати рекурентну процедуру прогнозування (8.8) – (8.13) максимальної вибіркової умовної дисперсії щодо кожного $[(k+1)T_0]$ -го відліку дискретного часу із застосуванням як вхідного сигналу $\xi(kT_0)$ в моделі (8.85) випадкового збурення (8.87).

б) Визначити точність прогнозування максимальної вибіркової умовної дисперсії на основі критерію

$$RSME\{\hat{\xi}^2[(k+1)T_0]\} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left\{ \hat{\xi}_{\max}^2[(k+1)T_0] - \xi_{\max}^2[(k+1)T_0] \right\}^2}.$$

в) Побудувати графіки обчисленої $\xi_{\max}^2[(k+1)T_0]$ за формулою (8.10) та прогнозованої $\hat{\xi}_{\max}^2[(k+1)T_0]$ максимальної вибіркової умовної дисперсії (8.13).

8.4. Вихідна модель ARKC (2, 2) з однотемповою дискретизацією має вигляд

$$(1 + \alpha_1 z^{-1} + \alpha_2 z^{-2})Y(kT_0) = (1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2})\xi(kT_0) + \delta, \quad (8.88)$$

де $\alpha_1 = -1,2726$; $\alpha_2 = 0,3328$; $b_1 = -0,5$; $b_2 = 0,2$; $\delta = 0,0602$.

Завдання.

а) На основі вихідної моделі (8.88) розробити модель з різнотемпо-вою дискретизацією за $h = 2T_0$, використовуючи методику підрозд. 8.3.

Записати цю модель у формі різницевого рівняння

$$\begin{aligned} Y\left[\left[\frac{k}{2}\right]h\right] = & a_1 Y\left[\left[\left(\frac{k}{2}\right) - 1\right]h\right] + a_2 Y\left[\left[\left(\frac{k}{2}\right) - 2\right]h\right] + \xi\left[\left[\frac{k}{2}\right]h\right] + \\ & + C_1 \xi\left[\left[\frac{k}{2}\right]h - T_0\right] + C_2 \xi\left[\left[\frac{k}{2}\right]h - 2T_0\right] + C_3 \xi\left[\left[\frac{k}{2}\right]h - 3T_0\right] + \\ & + C_4 \xi\left[\left[\frac{k}{2}\right]h - 4T_0\right] + a_0. \end{aligned}$$

б) Обчислити умовне математичне сподівання $E_{\left[\frac{k}{2}\right]-1}\left\{Y\left[\left[\frac{k}{2}\right]h\right]\right\}$.

в) Визначити умовну дисперсію

$$E_{\left[\frac{k}{2}\right]-1}\left\{Y\left[\left[\frac{k}{2}\right]h\right] - E_{\left[\frac{k}{2}\right]-1}\left\{Y\left[\left[\frac{k}{2}\right]h\right]\right\}\right\}^2. \quad (8.89)$$

г) Обчислити ряд умовних дисперсій:

$$\begin{aligned} & E_{\left[\frac{k}{2}\right]-2}\left\{Y\left[\left[\left(\frac{k}{2}\right) - 1\right]h\right] - E_{\left[\frac{k}{2}\right]-2}\left\{Y\left[\left[\left(\frac{k}{2}\right) - 1\right]h\right]\right\}\right\}^2; \\ & E_{\left[\frac{k}{2}\right]-3}\left\{Y\left[\left[\left(\frac{k}{2}\right) - 2\right]h\right] - E_{\left[\frac{k}{2}\right]-3}\left\{Y\left[\left[\left(\frac{k}{2}\right) - 2\right]h\right]\right\}\right\}^2; \end{aligned}$$

$$E_{\left[\frac{k}{2}\right]-\mu-1}\left\{Y\left[\left[\left(\frac{k}{2}\right) - \mu\right]h\right] - E_{\left[\frac{k}{2}\right]-\mu-1}\left\{Y\left[\left[\left(\frac{k}{2}\right) - \mu\right]h\right]\right\}\right\}^2.$$

д) На основі обчисленого ряду із застосуванням МНК побудувати модель ARCH

$$\begin{aligned} \bar{\xi}^2\left[\left[\frac{k}{2}\right]h\right] = & \hat{\beta}_{1_i} \hat{\xi}^2\left[\left[\left(\frac{k}{2}\right) - 1\right]h\right] + \dots + \hat{\beta}_{\mu} \hat{\xi}^2\left[\left[\left(\frac{k}{2}\right) - \mu\right]h\right] + \\ & + \hat{\gamma} + w\left[\left[\frac{k}{2}\right]h\right]. \end{aligned}$$

е) Застосувавши в моделі (8.88) як збурення сигналу $\xi(kT_0)$, згенерованого на основі порядку (8.87), виконати прогнозування умовної дисперсії

$$\hat{\xi}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{2} \right] + 1 \right) h \right] = \hat{\beta}_1 \hat{\xi}^2 \left[\left[\frac{k}{2} \right] h \right] + \dots + \hat{\beta}_\mu \hat{\xi}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{2} \right] - \mu + 1 \right) h \right] + \hat{\gamma}. \quad (8.90)$$

ж) Побудувати графіки обчисленої на основі (8.89) умовної дисперсії $\tilde{\xi}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{2} \right] + 1 \right) h \right]$ та прогнозованої (8.90) умовної дисперсії $\hat{\xi}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{2} \right] + 1 \right) h \right]$.

и) На основі критерію

$$\sqrt{\frac{1}{N} \sum_{\left[\frac{k}{2} \right]=1}^N \left\{ \hat{\xi}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{2} \right] + 1 \right) h \right] - \tilde{\xi}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{2} \right] + 1 \right) h \right] \right\}^2} \quad (8.91)$$

визначити точність прогнозування умовної дисперсії.

к) На основі методики (8.30) – (8.38) із застосуванням відношення (8.36) у вигляді

$$\left(\beta_1 z^{-1} + \beta_2 z^{-2} + \dots + \beta_\mu z^{-\mu} \right) = \frac{\left(r_1 z^{-1} + r_2 z^{-2} + \dots + r_\mu z^{-(\mu+2)} \right)}{\left(1 - \sigma_1 z^{-1} + \sigma_2 z^{-2} \right)}$$

розробити модель GARCH (8.37) у вигляді

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}^2 \left[\left[\frac{k}{2} \right] h \right] &= \lambda + (\sigma_1 + r_1) \tilde{\xi}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{2} \right] - 1 \right) h \right] + (\sigma_2 + r_2) \tilde{\xi}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{2} \right] - 2 \right) h \right] + \\ &+ r_3 \tilde{\xi}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{2} \right] - 3 \right) h \right] + \dots + r_{\mu+2} \tilde{\xi}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{2} \right] - \mu - 2 \right) h \right] + w \left[\left[\frac{k}{2} \right] h \right] - \\ &- \sigma_1 w \left[\left(\left[\frac{k}{2} \right] - 1 \right) h \right] - \sigma_2 w \left[\left(\left[\frac{k}{2} \right] - 2 \right) h \right], \end{aligned} \quad (8.92)$$

де збурення визначено як

$$w \left[\left(\left[\frac{k}{2} \right] - 1 \right) h \right] = \tilde{\xi}^2 \left[\left(\left[\frac{k}{2} \right] - 1 \right) h \right] - H \left[\left(\left[\frac{k}{2} \right] - 1 \right) h \right];$$

$$w\left[\left(\left[\frac{k}{2}\right]-2\right)h\right]=\tilde{\xi}^2\left[\left(\left[\frac{k}{2}\right]-2\right)h\right]-H\left[\left(\left[\frac{k}{2}\right]-2\right)h\right].$$

л) На основі моделювання GARCH (8.92) виконати прогнозування умовної дисперсії $\hat{\xi}^2\left[\left(\left[\frac{k}{2}\right]+1\right)h\right]$.

м) На основі критерію (8.91) визначити точність прогнозування умовної дисперсії на основі моделі GARCH.

н) Записати модель GARCH (8.92) у векторній формі (8.40):

$$\tilde{\xi}^2\left[\left[\frac{k}{2}\right]h\right]=\bar{X}^T\left[\left[\frac{k}{2}\right]h\right]\hat{\theta}+w\left[\left[\frac{k}{2}\right]h\right].$$

п) Використовуючи рекурентну процедуру МНК (8.43), виконати настроювання коефіцієнтів моделі GARCH (8.92):

$$\hat{\theta}=\left[(\sigma_1+r_1), (\sigma_2+r_2), r_3, r_4, \dots, r_{\mu+2}, \sigma_1, \sigma_2, \lambda\right]^T.$$

Результати рекурентної процедури оцінювання коефіцієнтів показати на графіках.

р) Виконати прогнозування умовної дисперсії за моделлю GARCH (8.92) для оцінених оптимальних значень коефіцієнтів $\hat{\theta}_{\text{опт}}$.

с) За критерієм аналізу точності прогнозування (8.91) визначити точність прогнозу для N використаних прогнозованих значень умовної дисперсії для оптимально оцінених коефіцієнтів $\hat{\theta}_{\text{опт}}$ моделі GARCH.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

Рекомендована література

1. Згуровський М. З. Основи системного аналізу : підруч. для студ. вищих навч. закл. / М. З. Згуровський, Н. Д. Панкратова. – Київ : Вид. група BHV, 2007. – 544 с.
2. Романенко В. Д. Методи автоматизації прогресивних технологій : підруч. для студ. вищих навч. закл. / В. Д. Романенко. – Київ : Вища шк., 1995. – 519 с.
3. Roberts F. S. Discrete mathematical models with application to social, biological and environmental problems / F. S. Roberts // Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey, 1976.
4. Gubarev V. Identification of cognitive maps under uncertainties / V. Gubarev, V. Romanenko, Y. Miliavskiy // Proceedings XXXII International Conference «Problems of decision making under uncertainties», August 27–31, 2018. – Prague. – P. 20–27.
5. Isermann R. Digital Control Systems / R. Isermann. – Berlin : Springer-Verlag; New York: Heidelberg, 1981. – 506 p.
6. Åström K. J. Computer Controlled Systems. Theory and Design / K. Åström, B. Wittenmark. – Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, 1984. – 475 p.
7. Губарев В. Ф. Моделювання та ідентифікація складних систем / В. Ф. Губарев. – Київ : Наук. думка, 2019. – 247 с.
8. Згуровський М. З. Основи системного аналізу : підручник / М. З. Згуровський, Н. Д. Панкратова. – Київ : Вид. група BHV, 2007. – 543 с.
9. Катренко А. В. Системний аналіз об'єктів та процесів комп'ютеризації : навч. посіб. для студ. вузів / А. В. Катренко. – Львів : «Новий світ – 2000», 2003. – 424 с.
10. Tolman E. C. Cognitive maps in rats and men / E. C. Tolman // Psychological Review. – 1948. – No 55 (4). – P. 189–208.
11. Axelrod R. The structure of Decision: Cognitive Maps of Political Elites / R. Axelrod // Princeton University Press – 1976. – 404 p.

12. Gubarev V. Regularized Identification of Impulse Processes in Cognitive Maps with Structural Uncertainty / V. Gubarev, V. Romanenko, Y. Miliavskiy // IEEE 2nd International Conference on System Analysis & Interlligent Computing (SAIC), 6–9 Jctober, 2020. – Kyiv, Ukraine. – P. 95–100.

13. Панкратова Н. Д. Системний аналіз. Теорія і застосування : підручник / Н. Д. Панкратова. – Київ : Наук. думка, 2018. – 346 с.

14. Згуровський М. З. Байєсівські мережі в системах підтримки прийняття рішень / М. З. Згуровський, П. І. Бідюк, Т. І. Просянкіна-Жарова. – Київ : ТОВ «Видавниче Підприємство Едельвейс», 2015. – 300 с.

15. Жалдак М. І. Основи теорії і методів оптимізації : навч. посіб. / М. І. Жалдак, Ю.В. Триус. – Черкаси : Брама-Україна, 2005. – 608 с.

16. Ткаченко О. Когнітивне моделювання складних систем / О. Ткаченко // Цифрова платформа: інформаційні технології в соціокультурній сфері. – 2019. – Т. 2. – № 117. – С. 11–19.

17. Романенко В. Д. Методи керування імпульсними процесами когнітивних карт з запізненнями / В. Д. Романенко, Ю. Л. Мілявський // Наук. вісті НТУУ «КПІ». – 2015. – № 5. – С. 57–63.

18. Романенко В. Д. Координуюче керування багатовимірним об'єктом з різнотемповою дискретизацією у стохастичному середовищі / В. Д. Романенко, Ю. Л. Мілявський // Системні дослідження та інформаційні технології. – 2011. – № 32. – С. 7–20.

19. Romanenko V. Control method in cognitive maps based on weights increments / V. Romanenko, Y. Milyavsky // Кибернетика и вычислительная техника. – 2016. – Вып. 184. – С. 44–55.

20. Gubarev V. Identification in Cognitive Maps in the Impulse Processes Mode with Full Information / V. Gubarev, V. Romanenko, Y. Miliavskiy // Journal of Automation and Information Sciences. – 2018. – Vol. 50. – No 8. – P. 1–15.

21. Romanenko V. Automation of Impulse Processes Control in Cognitive Maps with Multirate Sampling Based on Weights Varying / V. Romanenko, Y. Miliavskiy // V. A. Sadovnichiy, M. Zgurovsky (eds). – Modern Mathematics and Challenges. Springer Series. – Springer, 2019. – P. 425–443.

22. Gubarev V. Identification and Control Automation of Cognitive Maps in Impulse Process Mode / V. Gubarev, V. Romanenko, Y. Miliavskyi ; V. Kuntsevich, V. Gubarev (eds) // Control Systems: Theory and Application. – River Publishers, 2018. – P. 43–64.
23. Miliavskyi Yu. L. Identification in cognitive maps in impulse process mode with incomplete measurement of nodes coordinates / Yu. Miliavskyi // Кибернетика и вычислительная техника. – 2019. – No 1 (195). – С. 49–63.
24. Gubarev V. F. Methods for Finding a Regularized Solution When Identifying Linear Multivariable Multiconnected Discrete Systems / V. F. Gubarev, V. D. Romanenko, Yu. L. Miliavskyi // Cybernetics and Systems Analysis. – 2019. – Vol. 55. – Is. 6. – P. 881–893.
25. Gubarev V. Advanced Identification of Impulse Processes in Cognitive Maps / V. Gubarev, V. Romanenko, Y. Miliavskyi ; Y. Kondratenko, V. Kuntsevich, A. Chikrii, V. Gubarev (eds). // Advanced Control Systems: Theory and Applications. – River Publishers, 2021. – P. 231–256.
26. Романенко В. Д. Координуюче керування імпульсним процесом КК у стохастичному середовищі / В. Д. Романенко, Ю. Л. Мілявський // Проблеми керування та інформатики. – 2022. – № 4. – С. 49–58.
27. Romanenko V. Combined control of multirate Impulse processes in a cognitive map of Covid-19 morbidity / V. Romanenko, Y. Miliavskyi // System Research & Information technologies. – 2022. – No 3. – С. 48–53.
28. Романенко В. Д. Когнітивне моделювання динаміки прийняття рішень для стабілізації нестійких режимів у соціально-навчальному процесі студента / В. Д. Романенко, Ю. Л. Мілявський // Наук. вісті НТУУ «КПІ». – 2016. – № 5. – С. 48–53.
29. Романенко В. Д. Автоматизація управління водним балансом водогосподарської ділянки з нейтралізацією обмежених природних збурень на основі когнітивних моделей / В. Д. Романенко, В. Б. Мокін, Ю. Л. Мілявський // 19-th International conference «System analysis and information technologies (SAIT)», 22–25 трав. 2017, Київ. – С. 111–112.
30. Romanenko V. Automation Control Problem for Dynamic Processes Applied to Cryptocurrency in Financial Markets / V. Romanenko, Y. Miliavskyi, G. Kantsedal // Recent Developments in Automatic Control Systems. Series in Automathion, Control and Robotics. – Denmark, River Publishers, 2022. – P. 417–442.

31. Romanenko V. Application of Impulse Process Models with Multirate Sampling in Cognitive Maps of Cryptocurrency for Dynamic Decision Making / V. Romanenko, Y. Miliavskyi, H. Kantsedal ; M. Zgurovsky, N. Pankratova (eds). // System Analysis & Intelligent Computing ; Theory and Application. – Springer, 2022. – P. 115–137.
32. Romanenko V. Systematization of Methods of automated control in cognitive maps impulse processes for complex systems / V. Romanenko, Y. Miliavskyi // IEEE First Ukraine Conference on Electrical and Computer Engineering (UKRCON), Kyiv, May 29 – June 2. – 2017. – P. 776–782.
33. Романенко В. Д. Метод адаптивного прогнозування максимальних умовних дисперсій співвідношень вихідних координат процесу з різнотемповою дискретизацією // Наук. вісті НТУУ «КПІ». – 2011. – № 5. – С. 59–64.
34. Romanenko V. Combined Control of Impulse Processes in Complex Systems Cognitive Maps with Multirate Sampling / V. Romanenko, Y. Miliavskyi // IEEE 9-th International Conference on Intelligent Data Acquisition and Advanced Computing Systems : Technology and Applications (IDAACS), Bucharest, September 21–23, 2017. – Н. 8–13.
35. Бідюк П. І. Методи прогнозування. У 2-х т. Т. 1. / П. І. Бідюк, О. С. Меньяйленко, О. В. Половцев. – Луганськ : Альма-матер, 2008. – 301 с.
36. Бідюк П. І. Аналіз часових рядів : навч. посіб. / П. І. Бідюк, В. Д. Романенко, О. Л. Тимощук. – Київ : НТУУ "КПІ", 2013. – 600 с.
37. Box G. E. P. Time series analysis forecasting and control / G. E. P. Box, G. M. Jenkins. – Holden-Day, San Francisco, Cambridge London, Amsterdam, 1970. – 406 p.

Використана література

38. Згуровский М. З. Современная теория управления : учеб. пособие / М. З. Згуровский. – Киев : УМК ВО, 1989. – 196 с.
39. Згуровский М. З. Системы фильтрации и управления с разделяющимися разнотемповыми движениями / М. З. Згуровский, В. Д. Романенко. – Киев : Наук. думка, 1998. – 375 с.
40. Романенко В. Д. Разнотемповые дискретные системы управления (основные подходы к проектированию) / В. Д. Романенко // Проблемы управления и информатики. – 1996. – № 6. – С. 32–43.

41. Романенко В. Д. Адаптивное управление технологическими процессами на базе микроЭВМ / В. Д. Романенко, Б. В. Игнатенко. – Киев : Вища шк., 1990. – 334 с.
42. Романенко В. Д. Координация управления медленными и быстрыми движениями в разнотемповых системах // В. Д. Романенко, Ю. Л. Милявский // Проблемы управления и информатики. – 2012. – № 3. – С. 5–13.
43. Инновационное развитие социально-экономических систем на основе методологий предвидения и когнитивного моделирования / Под ред. Г. В. Гореловой, Н. Д. Панкратовой. – Київ : Наук. думка, 2015. – 464 с.
44. Романенко В. Д. Обеспечение устойчивости импульсных процессов в когнитивных картах на основе моделей в пространстве состояний / В. Д. Романенко, Ю. Л. Милявский // Системні дослідження та інформаційні технології. – 2014. – № 1. – С. 26–42.
45. Романенко В. Д. Метод адаптивного управления неустойчивыми импульсными процессами в когнитивных картах на основе эталонных моделей / В. Д. Романенко, Ю. Л. Милявский, А. А. Реутов // Проблемы управления и информатики. – 2015. – № 2. – С. 35–45.
46. Романенко В. Д. Управление соотношениями координат когнитивной модели сложной системы при неустойчивом импульсном процессе / В. Д. Романенко, Ю. Л. Милявский // Системні дослідження та інформаційні технології. – 2015. – № 1. – С. 121–129.
47. Романенко В. Д. Стабилизация импульсных процессов в когнитивных картах сложных систем на основе модальных регуляторов состояния / В. Д. Романенко, Ю. Л. Милявский // Кибернетика и вычислительная техника. – 2015. – Вып. 179. – С. 43–55.
48. Романенко В. Д. Адаптивное координирующее управление соотношениями координат вершин взаимодействующих когнитивных карт в режиме импульсных процессов / В. Д. Романенко, Ю. Л. Милявский // Системні дослідження та інформаційні технології. – 2015. – № 3. – С. 109–120.
49. Згуровский М. З. Принципы и методы управления импульсными процессами в когнитивных картах сложных систем. В 2-х ч. Ч. 1. / М. З. Згуровский, В. Д. Романенко, Ю. Л. Милявский // Проблемы управления и информатики. – 2016. – № 2. – С. 21–29.

50. Згуровский М. З. Принципы и методы управления импульсными процессами в когнитивных картах сложных систем. В 2-х ч. Ч. 2. / М. З. Згуровский, В. Д. Романенко, Ю. Л. Милявский // Проблемы управления и информатики. – 2016. – № 4. – С. 7–17.

51. Романенко В. Д. Синтез следящей системы управления неустойчивыми импульсными процессами в иерархических когнитивных картах сложных систем / В. Д. Романенко, Ю. Л. Милявский // Системні дослідження та інформаційні технології. – 2016. – № 4. – С. 7–13.

52. Романенко В. Д. Автоматизация управления импульсными процессами в когнитивных картах с подавлением ограниченных возмущений на основе метода инвариантных эллипсоидов / В. Д. Романенко, Ю. Л. Милявский // Системні дослідження та інформаційні технології. – 2017. – № 2. – С. 29–39.

53. Романенко В. Д. Подавление ограниченных внутренних и внешних возмущений при управлении импульсными процессами в когнитивных картах сложных систем / В. Д. Романенко, Ю. Л. Милявский // Системні дослідження та інформаційні технології. – 2018. – № 4. – С. 104–114.

54. Романенко В. Д. Метод автоматизации управления в когнитивных картах на основе синтеза приращений весовых коэффициентов и координат вершин / В. Д. Романенко, Ю. Л. Милявский // Системні дослідження та інформаційні технології. – 2019. – № 3. – С. 89–99.

55. Романенко В. Д. Адаптивная система стабилизации неустойчивого курса криптовалюты на основе модели импульсного процесса когнитивной карты / В. Д. Романенко, Ю. Л. Милявский, Г. О. Канцедал // Проблемы управления и информатика. – 2021. – № 2. – С. 11–23.

56. Романенко В. Д. Инструментарий управления развитием IT-компаний на основе приращений весовых коэффициентов когнитивных карт с разнотемповой дискретизацией / В. Д. Романенко, Ю. Л. Милявський // Междунар. науч.-техн. семинар «Экономика и знания». Тез. докл., 22 апр. 2016, Днепропетровск. – С. 92–100.

57. Романенко В. Д. Координация управления медленными и быстрыми движениями в разнотемповых системах / В. Д. Романенко, Ю. Л. Милявский // Проблемы управления и информатики. – 2012. – № 3. – С. 5–13.

58. Романенко В. Д. Прогнозирование динамических процессов на основе математических моделей временных рядов с разнотемповой дискретизацией / В. Д. Романенко // Системні дослідження та інформаційні технології. – 2005. – № 2. – С. 23–41.

59. Романенко В. Д. Прогнозирование и минимизация дисперсий гетероскедастических процессов на основе моделей с разнотемповой дискретизацией / В. Д. Романенко // Системні дослідження та інформаційні технології. – 2007. – № 2. – С. 115–130.

60. Романенко В. Д. Прогнозирование максимальных условных дисперсий многомерных процессов с разнотемповой дискретизацией на основе адаптивных моделей GARCH / В. Д. Романенко, Ю. Л. Мильявский // Системні дослідження та інформаційні технології. – 2009. – № 4. – С. 92–108.

61. Романенко В. Д. Синтез и адаптивная настройка моделей GARCH для прогнозирования дисперсий гетероскедастических процессов с разнотемповой дискретизацией / В. Д. Романенко, А. В. Билый // Системні дослідження та інформаційні технології. – 2008. – № 1. – С. 114–126.

62. Поляк Б. Т. Робастная устойчивость и управление / Б. Т. Поляк, П. С. Щербаков. – М. : Наука, 2002. – 303 с.

63. Изерман Р. Цифровые системы управления / К. Острем, Б. Виттенмарк ; пер. с англ. – М. : Мир, 1987. – 480 с.

64. Острем К. Системы управления с ЭВМ / К. Острем, Б. Виттенмарк ; пер. с англ. – М. : Мир, 1987. – 480 с.

65. Методы классической и современной теории автоматического управления : учеб. В 3-х т. Т. 2 : Синтез регуляторов и теория оптимизации систем автоматического управления / Под ред. Н. Д. Егупова. – М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2000. – 736 с.

66. Бойчук Л. М. Синтез координирующих систем автоматического управления / Л. М. Бойчук. – М. : Энергоатомиздат, 1991. – 160 с.

67. Горелова Г. В. Исследование слабоструктурированных проблем социально-экономических задач / Г. В. Горелова, Е. Н. Захарова, С. А. Радченко. – Ростов н/Д. : Изд-во РГУ, 2006. – 332 с.

68. Горелова Г. В. Когнитивный анализ и моделирование устойчивого развития социально-экономических систем / Г. В. Горелова, Е. Н. Захарова, Л. А. Гинис. – Ростов н/Д. : Изд-во РГУ, 2005. – 288 с.

69. Назин С. А. Подавление ограниченных внешних возмущений с помощью метода инвариантных эллипсоидов / С. А. Назин, Б. Т. Поляк, М. В. Топунов // Автоматика и телемеханика. – 2007. – № 3. – С. 106–125.
70. Хорн Р. Матричный анализ / Р. Хорн, Ч. Джонсон ; пер. с англ. – М. : Мир, 1989.
71. Бокс Д. Анализ временных рядов, прогноз и управление / Д. Бокс, Г. Дженкинс. – М. : Мир, 1974. – Вып. 1. – 406 с.
72. Робертс Ф. С. Дискретные математические модели с приложениями к социальным, биологическим и экологическим задачам / Ф. С. Робертс. – М. : Наука, Гл. ред. физ-мат л-ры, 1986. – 496 с.
73. Магнус Я. Р. Матричное дифференциальное исчисление с приложениями к статистике и эконометрике / Я. Р. Магнус, Х. Нейдекер. – М. : Физматгиз, 2002. – 495 с.
74. Сухарев А. Г. Курс методов оптимизации // А. Г. Сухарев, А. В. Тимохов, В. В. Федоров. – М. : Наука, 1986. – 248 с.
75. Кулинич А. А. Когнитивные карты в поддержке принятия решений. В 4 т. Т. 1. / А. А. Кулинич // Тр. Конгресса по интеллектуальным системам и информационным технологиям «IS&IT'11». – М.: Физматлит, 2011. – С. 557–564.
76. Горелова Г. В. Когнитивный анализ, синтез, прогнозирование развития больших систем в интеллектуальных РИУС / Г. В. Горелова, Э. В. Мельник, Я. С. Коровин // Штучний інтелект. – 2010. – № 3. – С. 61–72.

ДОДАТКИ

Додаток 1

Елементарні властивості матриць

Властивості визначника матриць із $\mathbb{C}^{n \times m}$:

1) $\det AB = \det BA = \det A \det B$.

2) Якщо матриця A невироджена, то

$$\det A^{-1} = (\det A)^{-1}.$$

3) $\det A = \prod_{i=1}^n \lambda_i$, де λ_i - власні значення матриці A .

4) Для будь-яких матриць $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{C}^{n \times m}$ виконується рівність

$$\det(I + AB) = \det(I + BA).$$

5) Об'єм n -вимірного еліпсоїда $\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n : \bar{x}^T P^{-1} \bar{x} \leq 1\}$, $P > 0$ дорівнює $VOL(\varepsilon) = C_n \det P$, де C_n - об'єм одиничної кулі в $\mathbb{R}^n$.

Характеристичним поліномом матриці $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ називають поліном

$$P(\lambda) = \det[\lambda I - A] = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0,$$

корені λ_i якого називають власними значеннями матриці A .

Теорема Д.1 (Келі–Гамільтона).

Матриця $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ задовольняє своє характеристичне рівняння:
якщо

$$P(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0,$$

то

$$P(A) = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \dots + a_1A + a_0I = 0.$$

Наслідок. Матриця A^n , а отже, і A^m при $m \geq n$ виражається у вигляді лінійної комбінації нижніх степенів A^k , $k = 0, 1, \dots, n-1$.

Із корисних властивостей характеристичного полінома зазначимо такі:

$$a_{n-1} = -\operatorname{tr} A,$$

$$a_0 = \det A.$$

Зазначимо такі корисні властивості сліду матриць із простору $\mathbb{C}^{n \times n}$:

$$\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^n \lambda_i, \text{ де } \lambda_i - \text{власні значення } A,$$

$$\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA),$$

$$\operatorname{tr}(A+B) = \operatorname{tr} A + \operatorname{tr} B.$$

Симетричну матрицю A називають додатно визначеною і позначають через $A > 0$, якщо

$$\bar{X}^T A \bar{X} > 0, \quad \forall \bar{X} \in \mathbb{R}^n, \quad \bar{X} \neq 0.$$

Матрицю називають невід'ємно визначеною і позначають через $A \geq 0$, якщо

$$\bar{X}^T A \bar{X} \geq 0, \quad \forall \bar{X} \in \mathbb{R}^n.$$

При цьому запис $A > B$, означає, що $A - B > 0$.

Наведемо деякі важливі властивості матриць:

1) якщо A і B – матриці однакової вимірності, при цьому $A \leq 0$ і $B \leq 0$, то $A + B \leq 0$;

2) якщо A і B – матриці однакової вимірності, при цьому $A < 0$ і $B < 0$, то $A + B < 0$;

3) якщо A, B, C, D – матриці однакової вимірності, при цьому $A \leq B$ і $C \leq D$, то $A + C \leq B + D$;

4) якщо A, B, C, D – матриці однакової вимірності, при цьому $A < B$ і $C < D$, то $A + C < B + D$;

5) для будь-якої матриці $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ буде правильною $A^T A \geq 0$ і $AA^T \geq 0$. При цьому, якщо матриця A є квадратною і невиродженою, то $A^T A > 0$ і $AA^T > 0$;

6) якщо $A > 0$ і матриця B повного рядкового рангу, то $BAB^T > 0$, тобто строгу матричну нерівність можна одночасно помножити зліва на матрицю повного рядкового рангу B і справа на B^T ;

7) якщо $A \geq 0$, то для довільної матриці B буде правильно $BAB^T \geq 0$, тобто нестрогу матричну нерівність можна одночасно помножити зліва на довільну матрицю B і справа на B^T ;

8) для матриці $A > 0$ існує єдина матриця $B > 0$, така, що $BB = A$; цю матрицю називають квадратним коренем матриці A і позначають через $B = A^{\frac{1}{2}}$;

9) для симетричної матриці A буде правильним $\lambda_{\min}(A)I \leq A \leq \lambda_{\max}(A)I$;

10) якщо $0 \leq A \leq B$, то $\lambda_{\max}(A) \leq \lambda_{\max}(B)$.

У деяких випадках ці позначення використовуються в дещо іншому сенсі. Називатимемо матрицю $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ невід'ємною і запишемо $A \geq 0$, якщо всі її елементи є невід'ємні, а матрицю додатною ($A > 0$), якщо всі її елементи є додатними. Аналогічно $A \leq 0$ означає недодатну матрицю, в якій елементи є недодатними, а $A < 0$ означає від'ємність її елементів (тобто A – від'ємна матриця). Інакше кажучи, нерівності $\geq, \leq; > \text{ і } <$ для матриць будемо розуміти поелементно.

Додаток 2

Норми матриць

Розглядатимемо квадратні матриці $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$.

Визначення. Функцію $\|\cdot\|: \mathbb{C}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ називають матричною нормою, якщо для будь-яких матриць $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ виконуються такі аксіоми [62]:

- 1) $\|A\| \geq 0$;
- 2) $\|A\| = 0$, тоді і тільки тоді, коли $A = 0$;
- 3) $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|$ будь-якого $\alpha \in \mathbb{C}$;
- 4) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$;
- 5) $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$.

Найбільш вживаними є такі норми матриць:

– рядкова норма:

$$\|A\|_1 \doteq \max_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right);$$

– спектральна норма:

$$\|A\|_2 \doteq \max_{1 \leq i \leq n} \lambda_i^{1/2}(A^*A),$$

де λ_i – i -те власне значення матриці $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$;

A^* – комплексне спряження та транспонування матриці, якщо

$$A^* = (a_{ji}^*) \in \mathbb{C}^{m \times n};$$

– стовпцева норма (∞ -норма):

$$\|A\|_\infty \doteq \max_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right);$$

– фробеніусова норма:

$$\|A\|_F \doteq \left(\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Між матричними нормами є такі співвідношення:

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_1 \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{n} \|A\|_1;$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_\infty \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{n} \|A\|_\infty;$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_F \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{n} \|A\|_F;$$

$$\frac{1}{n} \|A\|_\infty \leq \|A\|_1 \leq n \|A\|_\infty;$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_F \leq \|A\|_1 \leq \sqrt{n} \|A\|_F;$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_F \leq \|A\|_\infty \leq \sqrt{n} \|A\|_F.$$

Величину $\rho(A) \doteq \max_i |\lambda_i(A)|$ називають спектральним радіусом матри-

ці A . Для будь-якої матричної норми справедлива нерівність $\rho(A) \leq \|A\|$.

Норми функцій і сигналів

Розглянемо основні функціональні простори функцій і сигналів та їх відповідні норми. Це потрібно для подання зовнішніх збурень в системах керування як функцій та сигналів. Будемо вважати, що всі сигнали визначені за $0 \leq t \leq \infty$.

1) L_2 – простір інтегрованих з квадратом функцій. Простір складається із вимірюваних функцій $w(t)$, які задаються в межах $0 \leq t \leq \infty$ і мають аналітичну другу норму

$$\|\bar{w}\|_2 \doteq \left(\int_0^\infty |\bar{w}(t)|_2^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} < \infty,$$

де $|\bar{w}(t)|_2$ – евклідова норма вектора $\bar{w}(t) \in \mathbb{R}^m$;

2) L_∞ – простір істотно обмежених функцій, у нього входять вимірювані функції $w(t)$ з обмеженою ∞ -нормою:

$$\|\bar{w}\|_\infty = \text{ess sup}_{0 \leq t < \infty} |\bar{w}(t)|,$$

де $|\cdot|$ – векторна ∞ -норма або 2-норма в $\mathbb{R}^m$. При цьому ess sup – істотна верхня межа функцій. Зазвичай $\|\bar{w}\|_\infty$ характеризує інтенсивність сигналу. Таким чином, L_∞ називають простором сигналів обмеженої інтенсивності;

3) L_1 – простір абсолютно інтегрованих функцій, до нього належать вимірювані функції з обмеженою 1-нормою:

$$\|\bar{w}\|_1 = \int_0^\infty |\bar{w}(t)| dt < \infty,$$

де $|\bar{w}(t)|$ – деяка норма вектора;

$|\bar{w}(t)| \in \mathbb{R}^m$ (найчастіше 1-норма).

Аналогічні простори та норми вводять для дискретного часу, при цьому розглядають не вектор-функції $\bar{w}(t)$, а послідовність дискретних відліків векторів $\{\bar{w}(k)\}$:

1) l_2 – простір сумовних з квадратом послідовностей. Він складається із послідовностей $\{\bar{w}(k)\}$, які мають обмежену 2-норму:

$$\|\bar{w}\|_2 \doteq \left(\sum_{k=0}^{\infty} |\bar{w}(k)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty;$$

2) l_{∞} – простір істотно обмежених послідовностей, який складається із послідовностей $\{\bar{w}(k)\}$ з обмеженою ∞ -нормою:

$$\|\bar{w}\|_{\infty} \doteq \sup_{0 \leq k < \infty} |\bar{w}(k)| < \infty;$$

3) l_1 – простір абсолютно сумовних послідовностей. Він складається із послідовностей $\{\bar{w}(k)\}$, які мають обмежену 1-норму:

$$\|\bar{w}\|_1 \doteq \sum_{k=0}^{\infty} |\bar{w}(k)| < \infty.$$

Додаток 4

S-процедура

Теорема Д.4.1. Нехай задано однорідні квадратичні форми

$$f_i(\bar{X}) = \bar{X}^T A_i \bar{X}, i = 0, 1, \dots, m,$$

де $\bar{X} \in R^n$, $A_i = A_i^T \in R^{n \times n}$, а також числа $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m$. Якщо існують такі числа $\tau_i \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, m$, такі, що

$$A_0 \leq \sum_{i=1}^m \tau_i A_i, \quad \alpha_0 \geq \sum_{i=1}^m \tau_i \alpha_i, \quad (\text{Д.4.1})$$

то нерівності

$$f_i(\bar{X}) \leq \alpha_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (\text{Д.4.2})$$

тягнуть за собою таку нерівність:

$$f_0(\bar{X}) \leq \alpha_0. \quad (\text{Д.4.3})$$

Зворотно справедливо, якщо із (Д.4.2) слідує (Д.4.3) і виконується кожна з умов:

а) $m = 1$;

б) $m = 2$, $n \geq 3$, а також існують такі числа $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$, а також вектор $\bar{X}^0 \in \mathbb{R}^n$, що

$$\mu_1 A_1 + \mu_2 A_2 > 0, f_1(\bar{X}^0) < \alpha_1, f_2(\bar{X}^0) < \alpha_2, \quad (\text{Д.4.4})$$

то існують числа $\tau_i \geq 0, i = 1, \dots, m$, за яких буде справедливою нерівність (Д.4.1).

Теорема Д.4.2. Нехай задано однорідні квадратичні форми

$$f_i(\bar{X}) = \bar{X}^T A_i \bar{X}, \quad i = 0, 1, \dots, m,$$

де $\bar{X} \in \mathbb{R}^n$, $A_i = A_i^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Якщо існують такі числа $\tau_i \geq 0, i = 1, \dots, m$, такі, що

$$A_0 \leq \sum_{i=1}^m \tau_i A_i, \quad (\text{Д.4.5})$$

то нерівності

$$f_i(\bar{X}) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad (\text{Д.4.6})$$

тягнуть за собою нерівність

$$f_0(\bar{X}) < 0 \quad (\text{Д.4.7})$$

для всіх $\bar{X} \neq 0$.

Зворотно справедливо, якщо із (Д.4.6) слідує (Д.4.7) і виконується кожна із умов, то:

а) $m = 1$;

б) $m = 2, n \geq 3$, та існує вектор $\bar{X}^0 \in \mathbb{R}^n$, такий, що $f_1(\bar{X}^0) < 0$, $f_2(\bar{X}^0) < 0$, то знайдуться числа $\tau_i \geq 0, i = 1, \dots, m$, такі, що буде виконуватися нерівність (Д.4.5).

Додаток 5

Лема Шура

Нехай маємо

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{12}^T & M_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+m) \times (n+m)}.$$

Тут $M_{11} = M_{11}^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$; $M_{12} \in \mathbb{R}^{n \times m}$; $M_{22} = M_{22}^T \in \mathbb{R}^{m \times m}$.

Тоді будемо мати $M > 0$ тоді і тільки тоді, коли $M_{22} > 0$; $M_{11} - M_{12} M_{22}^{-1} M_{12}^T > 0$.

Доведення.

Введемо до розгляду вектор

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+m},$$

розбиття якого відповідає розбиттю матриці M . Тоді квадратична форма

$$\begin{aligned} \bar{x}^T M \bar{x} &= \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{12}^T & M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} = \\ &= \bar{x}_1^T M_{11} \bar{x}_1 + \bar{x}_1^T M_{12} \bar{x}_2 + \bar{x}_2^T M_{12}^T \bar{x}_1 + \bar{x}_2^T M_{22} \bar{x}_2 = \\ &= (M_{22}^{-1} M_{12}^T \bar{x}_1 + \bar{x}_2)^T M_{22} (M_{22}^{-1} M_{12}^T \bar{x}_1 + \bar{x}_2) + \\ &+ \bar{x}_1^T (M_{11} - M_{12} M_{22}^{-1} M_{12}^T) \bar{x}_1. \end{aligned}$$

Таким чином, робимо висновок, що $M > 0$ тоді і тільки тоді, коли $M_{22} > 0$ та $M_{11} - M_{12} M_{22}^{-1} M_{12}^T > 0$.

Матрицю $M_{11} - M_{12} M_{22}^{-1} M_{12}^T$ називають доповненням за Шуром до блоку M_{22} в матриці M .

Лему Шура застосовують найчастіше у задачах зведення нелінійних матричних нерівностей до лінійних.

Із леми Шура випливає важливий наслідок, який використано в підрозд. 4.1, 4.3.

Наслідок. Нехай матриця $\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{12}^T & M_{22} \end{bmatrix} \leq 0$, причому $M_{22} < 0$, а

M_{12} – матриця максимального рядкового рангу. Тоді $M_{11} < 0$.

Додаток 6

Теорема про синтез лінійно-квадратичного регулятора стану

Нехай математичну модель об'єкта керування у просторі стану описують різницеvim рівнянням

$$\bar{x}(k+1) = F\bar{x}(k) + G\bar{u}(k), \quad (\text{Д.6.1})$$

де F , G – сталі матриці, а вектор стану має початкове значення $\bar{x}(0) \neq 0$. Вважатимемо, що змінні стану $\bar{x}(k)$ можна виміряти точно. Виходячи з мінімізації квадратичного критерію оптимальності

$$J = \left\{ \bar{x}^T(n) Q_1 \bar{x}(n) + \sum_{k=0}^{m-1} \left[\bar{x}^T(k) Q_2 \bar{x}(k) + \bar{u}^T(k) Q_3 \bar{u}(k) \right] \right\}, \quad (\text{Д.6.2})$$

де $k = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$.

Визначимо оптимальний закон керування:

$$\bar{u}(k) = -K_p(k) \bar{x}(k), \quad (\text{Д.6.3})$$

відповідно до якого на основі вектора змінних стану $\bar{x}(k)$ формується вектор змінних керування $\bar{u}(k)$, який переводить систему з початкового стану $\bar{x}(0)$ до кінцевого стану $\bar{x}(n) = 0$. При цьому у формуванні зворотних зв'язків вихідні вимірювані змінні $\bar{Y}(k)$ об'єкта керування на застосовують, тобто стабілізація роботи об'єкта керування та зміна його власних рухів виконуються тільки завдяки зворотним зв'язкам за вектором змінних стану $\bar{x}(k)$.

Теорема. Нехай $\bar{u}(k)$ є функцією $\bar{x}(k), \bar{x}(k-1), \dots$. Якщо модель об'єкта у просторі стану (Д.6.1.) буде керованою й такою, що розкривається, то існує єдиний допустимий вектор керування $\bar{u}(k)$ (Д.6.3), який мінімізує критерій (Д.6.3) за умови, що матрицю регулятора K_p визначають так:

$$K_p(k) = \left[Q_3 + G^T L(k+1) G \right]^{-1} G^T L(k+1) F, \quad (\text{Д.6.4})$$

де матрицю L обчислюють за рекурентною процедурою

$$\begin{aligned} L(k) &= F^T L(k+1) F + Q_2 - K_p^T(k) \left[Q_3 + G^T L(k+1) G \right] K_p(k) = \\ &= F^T L(k+1) F + Q_2 - F^T L(k+1) G \left[Q_3 + G^T L(k+1) G \right]^{-1} \cdot \\ &\quad \cdot G^T L(k+1) F, \end{aligned} \quad (\text{Д.6.5})$$

коли $L(n) = Q_1$.

Для мінімізації критерію (Д.6.2) на основі рекурентної процедури (Д.6.4), (Д.6.5) необхідно, щоб матриці $Q_1 \geq 0, Q_2 \geq 0$, а матриця $Q_3 > 0$. При цьому виконуються умови $\bar{x}^T Q_1 \bar{x} \geq 0$; $\bar{x}^T Q_2 \bar{x} \geq 0$; $\bar{u}^T Q_3 \bar{u} > 0$.

Доведення. Припустимо, що матриця $L(k)$ має невід'ємно визначений розв'язок, а матриця $Q_3 + G^T L(k) G$ додатно визначена. Для доведення теореми застосуємо метод динамічного програмування. Виходячи з критерію (Д.6.2), введемо принцип оптимальності

$$V_k = \min_{\bar{u}(k), \dots, \bar{u}(n-1)} \left\{ \bar{x}^T(n) Q_1 x(n) + \sum_{i=k}^{n-1} \left[\bar{x}^T(i) Q_2 x(i) + \bar{u}(i) Q_3 \bar{u}(i) \right] \right\},$$

а для $k = n$, коли $L(n) = Q_1$, візьмемо

$$V_n = \bar{x}^T(n) L(n) \bar{x}(n).$$

Тоді для $k = (n - 1)$ будемо мати

$$V_{n-1} = \min_{\bar{u}(n-1)} \left\{ V_n + \bar{x}^T(n-1) Q_2 \bar{x}(n-1) + \bar{u}^T(n-1) Q_3 \bar{u}(n-1) \right\}, \quad (\text{Д.6.6})$$

І скориставшись рівнянням (Д.6.1), дістанемо

$$\begin{aligned} V_{n-1} &= \min_{\bar{u}(n-1)} \left\{ [F\bar{x}(n-1) + G\bar{u}(n-1)]^T L(n) [F\bar{x}(n-1) + G\bar{u}(n-1)] + \right. \\ &\quad + \bar{x}^T(n-1) Q_2 \bar{x}(n-1) + \bar{u}^T(n-1) Q_3 \bar{u}(n-1) = \\ &= \min_{\bar{u}(n-1)} \left\{ \bar{x}^T(n-1) \left[Q_2 + F^T L(n) F \right] \bar{x}(n-1) + \right. \\ &\quad + \bar{x}^T(n-1) F^T L(n) G \bar{u}(n-1) + \bar{u}^T(n-1) G^T L(n) F \bar{x}(n-1) + \\ &\quad \left. + \bar{u}^T(n-1) \left[G^T L(n) G + Q_3 \right] \bar{u}(n-1) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{Д.6.7})$$

Розглянемо у виразі (Д.6.7) суму трьох останніх членів, яку можна перетворити таким чином:

$$\begin{aligned} V_{n-1}^* &= \bar{x}^T(n-1) F^T L(n) G \bar{u}(n-1) + \bar{u}^T(n-1) G^T L(n) F \bar{x}(n-1) + \\ &+ \bar{u}^T(n-1) \left[G^T L(n) G + Q_3 \right] \bar{u}(n-1) = \bar{u}^T(n-1) \left[G^T L(n) G + Q_3 \right] \bar{u}(n-1) + \\ &+ \bar{x}^T(n-1) F^T L(n) G \bar{u}(n-1) + \bar{u}^T(n-1) G^T L(n) F \bar{x}(n-1) + \\ &+ \bar{x}^T(n-1) F^T L(n) G \left[G^T L(n) \bar{G} + Q_3 \right]^{-1} G^T L(n) F \bar{x}(n-1) - \\ &- \bar{x}^T(n-1) F^T L(n) G \left[G^T L(n) \bar{G} + Q_3 \right]^{-1} G^T L(n) F \bar{x}(n-1) = \\ &= \left\{ \bar{u}^T(n-1) \left[G^T L(n) G + Q_3 \right]^{-1} G^T L(n) F \bar{x}(n-1) \right\}^T \cdot \\ &\cdot \left[G^T L(n) G + Q_3 \right] \left\{ \bar{u}(n-1) + \left[G^T L(n) \bar{G} + Q_3 \right]^{-1} G^T L(n) F \bar{x}(n-1) \right\} - \\ &- \bar{x}^T(n-1) F^T L(n) G \left[G^T L(n) \bar{G} + Q_3 \right]^{-1} G^T L(n) F \bar{x}(n-1). \end{aligned}$$

Оскільки за визначенням перший член невід'ємний, мінімуму суми V_{n-1}^* досягають тоді, коли

$$\bar{u}(n-1) = - \left[G^T L(n) \bar{G} + Q_3 \right]^{-1} G^T L(n) F \bar{x}(n-1), \quad (\text{Д.6.8})$$

причому його значення становить

$$\left(V_{n-1}^* \right)_{\min} = - \bar{x}^T (n-1) F^T L(n) G \left[G^T L(n) \bar{G} + Q_3 \right]^{-1} G^T L(n) F \bar{x}(n-1). \quad (\text{Д.6.9})$$

Рівність (Д.6.8) можна записати у вигляді

$$\bar{u}(n-1) = - K_p(n-1) \bar{x}(n-1),$$

де

$$K_p(n-1) = \left[G^T L(n) G + Q_3 \right]^{-1} G^T L(n) F. \quad (\text{Д.6.10})$$

З урахуванням (Д.6.9) мінімальне значення функції V_{n-1} щодо (Д.6.7) визначають за виразом

$$\left(V_{n-1} \right)_{\min} = - \bar{x}^T (n-1) L(n-1) \bar{x}(n-1),$$

де

$$L(n-1) = F^T L(n) F + Q_2 - F^T L(n) G \left[G^T L(n) G + Q_3 \right]^{-1} G^T L(n) F. \quad (\text{Д.6.11})$$

На підставі названих вище викладок за $k = n - 2$ будемо мати рівність

$$\left(V_{n-2} \right)_{\min} = \min_{\bar{u}(n-2)} \left\{ \bar{x}^T (n-2) Q_2 \bar{x}(n-2) + \bar{u}^T (n-2) Q_3 \bar{u}(n-2) + V_{n-1} \right\},$$

яка збігається з (Д.6.6), за винятком того, що відліки дискретного часу різняться на одиницю. При цьому мінімальне значення функції V_{n-2} визначають виразом

$$\left(V_{n-2} \right)_{\min} = \bar{x}^T (n-2) L(n-2) \bar{x}(n-2),$$

де

$$L(n-2) = F^T L(n-1) F + Q_2 - F^T L(n-1) G \cdot \left[G^T L(n-1) G + Q_3 \right]^{-1} G^T L(n-1) F.$$

Повторюючи рекурентну процедуру, дістанемо

$$\min J = \left(V_0 \right)_{\min} = \bar{x}^T (0) L(0) \bar{x}(0).$$

У критерії оптимальності (Д.6.2) для оптимізації задано відрізок часу, який дорівнює n періодам дискретизації. Це доцільно робити, коли в моделі об'єкта керування (Д.6.1) матриці F і G змінюються за часом.

У постійних матрицях F і G для синтезу матриці керування K_p в (Д.6.3) використовують критерій оптимальності

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} [\bar{x}^T(k) Q_1 \bar{x}(k) + \bar{u}^T(k) R \bar{u}(k)], \quad (\text{Д.6.12})$$

де $Q_1 \geq 0, R > 0$.

На основі мінімізації критерію (Д.6.12) існує додатно визначена матриця L , яку знаходять через розв'язання алгебричного рівняння Ріккати

$$L = F^T L F Q_1 - F^T L G [R + G^T L G]^{-1} G^T L F.$$

Тоді матрицю керування K_p закону оптимального керування (Д.6.3) розраховують таким чином:

$$K_p = (R + G^T L G)^{-1} G^T L F.$$

Додаток 7

Теорема Кронера–Капеллі

Система лінійних алгебричних рівнянь $A\bar{X} = \bar{b}$ має розв'язки тоді і тільки тоді, коли ранг її матриці A дорівнює рангу розширеної матриці $(A \ \bar{b})$. При цьому система має єдиний розв'язок, якщо цей ранг дорівнює кількості невідомих, і нескінченно багато розв'язків, якщо цей ранг менший від кількості невідомих.

Доведення. Якщо система сумісна, тобто існує розв'язок, тоді права частина є лінійною комбінацією стовпців матриці A , тому ранг не змінюється.

Достатність впливає з теореми про базисний мінор. Як відомо, базисним мінором ненульової матриці називають мінор, який не дорівнює нулю, а всі мінори, що його оточують, дорівнюють нулю або їх не існує. Теорема про базисний мінор стверджує, що всі стовпці (або рядки), на яких будується базисний мінор, є лінійно незалежними, а всі інші стовпці (або рядки) лінійно виражаються через них. Отже, оскільки ранги матриці A і розширеної матриці $(A \ \bar{b})$ однакові, то будь-який базисний

мінор матриці A буде також базисним і для розширеної матриці, а отже стовпець $\bar{b}$ буде лінійною комбінацією стовпців цього мінора. Тоді відповідні коефіцієнти цієї лінійної комбінації будуть розв'язком системи лінійних алгебричних рівнянь.

Додаток 8

Теорема Фробеніуса про обернення блочної матриці

Нехай невироджена квадратна матриця M розбита на блоки таким чином:

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix},$$

де розмірності блоків $A(n \times n)$, $B(n \times q)$, $C(q \times n)$, $D(q \times q)$. Припустимо також, що A теж невироджена. Тоді обернена матриця

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} + A^{-1}BK^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}BK^{-1} \\ -K^{-1}CA^{-1} & K^{-1} \end{bmatrix},$$

де $K = D - CA^{-1}B$.

Доведення. Застосуємо узагальнений алгоритм Гаусса до матриці M , який полягає у зведенні матриці до блочно-діагонального вигляду через множення одного рядка матриці не допоміжну матрицю і додавання до іншого рядка так само, як це робиться у класичному алгоритмі Гаусса з курсу лінійної алгебри для зведення до діагонального вигляду. А саме, віднімемо від другого блочного рядка матриці M перший рядок, помножений зліва на CA^{-1} . З використанням множення блочних матриць можна безпосередньо переконатись, що це еквівалентно множенню M

зліва на матрицю $\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -CA^{-1} & I_q \end{bmatrix}$.

Тому

$$\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -CA^{-1} & I_q \end{bmatrix} M = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{bmatrix}. \quad (\text{Д.8.1})$$

Введемо позначення $K = D - CA^{-1}B$ і зазначимо, що з рівності (Д.8.1) випливає

$$\det M = \det A \det K. \quad (\text{Д.8.2})$$

Тому, оскільки матриця M не вироджена, тобто $\det M \neq 0$, то і $\det K \neq 0$.
Переходячи до обернених матриць у рівності (Д.8.1), отримаємо

$$M^{-1} \cdot \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -CA^{-1} & I_q \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & K \end{bmatrix}^{-1}. \quad (\text{Д.8.3})$$

Обернену матрицю для матриці $\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & K \end{bmatrix}$ будемо шукати у вигляді $\begin{bmatrix} A^{-1} & U \\ 0 & K^{-1} \end{bmatrix}$. Тоді з рівності $\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^{-1} & U \\ 0 & K^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$ знаходимо, що $U = -A^{-1}BK^{-1}$.

Таким чином,

$$\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & K \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BK^{-1} \\ 0 & K^{-1} \end{bmatrix}. \quad (\text{Д.8.4})$$

Тоді з рівності (Д.8.3) знаходимо

$$\begin{aligned} M^{-1} &= \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & K \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -CA^{-1} & I_q \end{bmatrix}^{-1} = \\ &= \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BK^{-1} \\ 0 & K^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -CA^{-1} & I_q \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{Д.8.5})$$

Перемножимо блочні матриці у правій частині рівності (Д.8.5), отримаємо формулу Фробеніуса

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} + A^{-1}BK^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}BK^{-1} \\ -K^{-1}CA^{-1} & K^{-1} \end{pmatrix}$$

Сингулярний розклад (Singular value decomposition, SVD)

Теорема. Нехай A – дійсна $(m \times n)$ матриця рангу $\text{rank}(A) = r > 0$. Тоді існують:

$(m \times r)$ матриця S така, що $S^T S = I_r$,

$(n \times r)$ матриця T така, що $T^T T = I_r$,

$(r \times r)$ матриця λ – діагональна з діагональними елементами,

$$A = S \lambda^{\frac{1}{2}} T^T.$$

Доведення. Оскільки AA^T – дійсна симетрична квадратна додатно визначена матриця вимірністю $(m \times m)$, яка теж має ранг r (бо відомо з лінійної алгебри, що ранги A і AA^T збігаються), то всі її власні значення λ_i додатні. Справді, за визначенням власного значення $AA^T \bar{x} = \lambda_i \bar{x}$. Тоді $\bar{x}^T A^T A \bar{x} = \lambda_i \bar{x}^T \bar{x}$, але $\bar{x}^T A^T A \bar{x} > 0$ і $\bar{x}^T \bar{x} > 0$. Отже, $\lambda_i > 0$.

Як відомо з лінійної алгебри, кожен дійсний симетричний квадратний матрицю X вимірністю $(m \times m)$ можна звести до діагональної форми (аналог жорданової форми для цього окремого випадку). Таким чином $S_X^T X S_X = \lambda_X$, де S_X – ортогональна матриця вимірністю $(m \times m)$ ($S_X^T S_X = S_X S_X^T = I_m$) із власних векторів матриці X , а λ_X – діагональна матриця із власними значеннями матриці X щодо головної діагоналі (тоді зазначимо $X S_X = S_X \lambda_X$).

Застосуємо цей розклад до $X = AA^T$, але оскільки ранг $r \leq m$, в загальному випадку частина матриці λ_X буде нульовою (відповідно, $m - r$ нульових власних значень). Відповідно, запишемо $S_X = (S \ S_*)$, де S складається із r лінійно незалежних стовпців, а S_* – із решти $(m - r)$ стовпців, а також $\lambda_X = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, де λ – діагональна матриця із r ненульовими (а саме, додатними) власними значеннями матриці $X = AA^T$.

Із тотожності $S_X^T S_X = I_m$ після підстановки $S_X = \begin{pmatrix} S & S_* \end{pmatrix}$ випливає, що

$$S^T S = I_r. \quad (\text{Д.9.1})$$

З рівностей $X S_X = S_X \lambda_X$ і $S_X S_X^T = I_m$ випливає, що

$$A A^T S = S \lambda \quad (\text{Д.9.2})$$

$$A A^T S_* = 0 \quad (\text{Д.9.3})$$

$$S S^T + S_* S_*^T = I_m. \quad (\text{Д.9.4})$$

Позначимо $T = A^T S \lambda^{-\frac{1}{2}}$, тоді, як можна безпосередньо переконатися, врахувавши (Д.9.1) і (Д.9.2), що

$$A^T A T = T \lambda \quad (\text{Д.9.5})$$

$$T^T T = I_r. \quad (\text{Д.9.6})$$

Із рівності (Д.9.3) випливає, що $A^T S_* = 0$. Справді, якщо $\forall \bar{x} \ A A^T S_* \bar{x} = 0$, то $\bar{x}^T S_*^T A A^T S_* \bar{x} = 0$, а $\bar{x}^T S_*^T A A^T S_* \bar{x} = (A^T S_* \bar{x})^T (A^T S_* \bar{x}) = 0$, отже, $\forall \bar{x} \ A^T S_* \bar{x} = 0$. Відповідно і $S_*^T A = 0$.

Тоді з (Д.9.4) з використанням підстановки й елементарних перетворень випливає

$$\begin{aligned} A &= (S S^T + S_* S_*^T) A = S S^T A = \\ &= S \lambda^{\frac{1}{2}} \left(A^T S \lambda^{-\frac{1}{2}} \right)^T = S \lambda^{\frac{1}{2}} T^T. \end{aligned} \quad (\text{Д.9.7})$$

Рівності (Д.9.1), (Д.9.6), (Д.9.7) з урахуванням обґрунтування додатності елементів λ , яке наведено вище, і є твердженням теореми [74].

Навчальне видання

Романенко Віктор Демидович
Мілявський Юрій Леонідович

Теорія керування і прогнозування у складних системах

Підручник

Коректура *Н. Мурашової*
Комп'ютерне верстання *А. Мушницького*

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
Свідоцтво про державну реєстрацію: серія ДК № 5354 від 25.05.2017 р.
просп. Берестейський, 37, м. Київ, 03056

Підп. до друку 07.06.2024. Формат 60×84¹/₁₆. Папір офс. Гарнітура Times.
Спосіб друку – електрографічний. Ум. друк. арк. 23,48. Обл.-вид. арк. 21,76.
Поз. 24-1-1-005. Наклад 300 пр. Зам. № 24-022.

Видавництво «Політехніка» КПІ ім. Ігоря Сікорського
вул. Політехнічна, 14, корп. 15
03056, м. Київ
тел. (044) 204-81-78