С. Д. Івасишен, В. П. Лавренчук,

Г. П. Івасюк, Н. В. Рева

ОСНОВИ КЛАСИЧНОЇ ТЕОРІЇ РІВНЯНЬ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

Рекомендовано Вченою радою НТУУ "КПІ" як навчальний посібник для студентів, які навчаються за напрямом підготовки "Математика"

Видавничий дім
«РОДОВІД»
Чернівці
2015

УДК 517.95 (075.8)
ББК 22.161.68я73
О 751

Рецензенти:

Матійчук М. І., доктор фізико-математичних наук, професор (Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича);
Іванчов М. І., доктор фізико-математичних наук, професор (Львівський національний університет імені Івана Франка).

Рекомендовано Вченою радою НТУУ "КПІ" як навчальний посібник для студентів, які навчаються за напрямом підготовки "Математика" (витяг з протоколу № 3 від 6.04.15)

Івасишен С. Д., Лавренчук В. П., Івасюк Г. П., Рева Н. В.
О 751 Основи класичної теорії рівнянь математичної фізики: навчальний посібник. – Чернівці: Видавничий дім «РОДОВІД», 2015. – 358 с.

ISBN

У посібнику подано основні відомості з класичної теорії рівнянь математичної фізики. Розглянуто такі традиційні методи розв'язування задач математичної фізики, як методи характеристик, Фур'є, функцій Гріна, потенціалів. Окремо звернуто увагу на застосування спеціальних функцій при розв'язуванні задач математичної фізики.

Характерним для посібника є поєднання питань побудови математичних моделей конкретних задач фізики й механіки, описання методів дослідження цих моделей та аналізу одержаних розв'язків. Наявність у кожному розділі задач і вправ, разом з викладеною теорією, дає можливість повністю забезпечити аудиторні заняття та самостійну роботу студентів. Для студентів фізико-математичних та інженерно-технічних спеціальностей вишів.

УДК 517.95 (075.8)
ББК 22.161.68я73

ISBN

Передмова

Пропонований навчальний посібник написано авторами на основі лекцій, які вони читали студентам різних фізико-математичних та інженерно-технічних спеціальностей у Чернівецькому національному університеті, Національному технічному університеті України "КПІ" та інших вищих навчальних закладах. Він складається з семи розділів.

У першому розділі розглянуто деякі питання теорії лінійних і квазілінійних рівнянь із частинними похідними першого порядку, результати якого використовуються у другому розділі при зведенні до канонічного вигляду рівнянь із частинними похідними другого порядку та обгрунтуванні методу характеристик.

Третій розділ присвячено побудові математичних моделей деяких фізичних процесів.

У четвертому, п'ятому і шостому розділах вивчаються найпростіші представники відповідно гіперболічних, параболічних та еліптичних рівнянь. Розглянуто постановку основних задач для цих рівнянь та обгрунтовано найуживаніші методи їхнього розв'язування, а саме: метод характеристик, метод відокремлення змінних Фур'є, метод функцій Гріна та метод потенціалів.

Окремо виділено сьомий розділ, у якому вивчено деякі питання використання спеціальних функцій при розв'язуванні задач математичної фізики.

Автори намагалися знайти золоту середину при викладенні матеріалу, тобто уникнути спокуси навести великий обсяг фактів з математичної фізики, з одного боку, або написати посібник дуже стисло, що утруднило б доступність для користувачів, з другого боку. Тому в посібнику наведено різні вправи й задачі, що ілюструють теорію, а теоретичні питання не завжди розглядаються детально, але є посилання на книги, де можна знайти їхнє повне обгрунтування. Посібник побудовано так, що окремі його розділи можна вивчати, взагалі кажучи, незалежно один від одного. Наприклад, метод Фур'є викладено з однаковими деталями як у третьому, так і у четвертому та п'ятому розділах.

У кожному розділі зроблено підбірку задач і вправ, що дає можливість використовувати цей посібник поруч з посібником [10] при проведенні практичних занять і організації самостійної роботи студентів. Відповіді до вправ і задач містять певні пояснення, що дозволяє користувачеві краще зрозуміти суть самої задачі, а також вибрати метод її розв'язування.

Матеріал посібника розбито на розділи, номери яких одинарні. Кожний розділ містить підрозділи, їх номери подвійні, в яких перша цифра означає номер розділу. Підрозділ, як правило, складається з пунктів, номери яких потрійні, перші дві цифри означають номер підрозділу. Означення, формули, леми, зауваження і приклади нумеруються окремо в кожному підрозділі, а теореми – окремо в кожному розділі.

У тексті посібника використовуються наступні позначення і скорочення. Символ ":=" уживається для запису рівності за означенням, а символ "$\equiv$" – тотожної рівності. Частинна похідна $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ позначається символами $\partial_{x_i} u$ або u_{x_i}, а похідна від функції u у напрямку вектора $\vec{\nu}$ – символом $\partial_{\vec{\nu}} u$. Початок і кінець доведення твердження або розв'язування задачі відзначаються відповідно значками ◀ і ▶.

ВСТУП

Важливу роль при вивченні різних явищ і процесів відіграють математичні моделі. Математична модель реального процесу є його наближеним описанням. Побудова моделі передбачає, що в певному розумінні модель повинна враховувати всі основні фактори, які впливають на результати досліджуваного процесу. Оскільки модель лише частково відображає реальне явище, то необхідна перевірка ступеня відповідності або адекватності моделі процесу, який вивчається. Перевірку здійснюють, порівнюючи передбачувану або прогнозовану поведінку з фактичною при зміні значень зовнішніх впливів. Коректування може вимагати додаткових досліджень об'єкта, уточнення структури математичної моделі, зміни параметрів моделі тощо.

В основі багатьох математичних моделей, які описують фізичні, хімічні, біологічні, економічні та інші процеси лежать диференціальні рівняння з частинними похідними. Традиційно розділ математики, що вивчає такі моделі, називається **рівняннями математичної фізики**. Загалом під **математичною фізикою** розуміють теорію математичних моделей фізичних, у широкому сенсі, процесів і явищ.

У пропонованому посібнику розглядається в основному класичний варіант викладу матеріалу. Методика вивчення математичних моделей передбачає, що розробляються не тільки конкретні методи розв'язування рівнянь з частинними похідними, але й досліджується **коректність** постановки задачі, тобто існування розв'язку з певного класу функцій, його єдиність і стійкість стосовно малих змін даних задачі.

Диференціальними рівняннями називаються такі рівняння, в яких невідомими є функції однієї або декількох змінних, причому в рівняння входять не тільки самі функції та незалежні змінні, але й їхні похідні. Якщо невідомими є функції не менше двох змінних, то рівняння називаються **диференціальними рівняннями з частинними похідними**. Такі рівняння й вивчаються в цьому посібнику.

Порядком рівняння називається найвищий порядок похідної, яка входить до нього. Диференціальне рівняння з частинними похідними від невідомої функції u змінних $x_1, \ldots, x_n$ називається **рівнянням m-го порядку**, якщо воно містить принаймні одну частинну похідну порядку m і не містить жодної похідної вищого порядку. У загальному випадку таке рівняння має вигляд

$$F(x_1, \ldots, x_n, u, D_x^1 u, \ldots, D_x^m u) = 0, \tag{1}$$

де через $D_x^k u$, $x := (x_1, \ldots, x_n)$, $k \in \{1, \ldots, m\}$, позначено сукупність усіх частинних похідних від u за змінними $x_1, \ldots, x_n$ порядку k, а F – відома функція своїх аргументів.

Рівняння (1) називається **лінійним**, якщо F як функція $u, D_x^1 u, \ldots, D_x^m u$ є лінійною. Якщо F є лінійною лише відносно похідних порядку m, то воно називається **квазілінійним**.

Важливу роль у застосуваннях відіграють **лінійні диференціальні рівняння з частинними похідними другого порядку**, тобто рівняння вигляду

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\partial_{x_i}\partial_{x_j} u + \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\partial_{x_i} u + a(x)u = f(x), \tag{2}$$

де $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$. Функції a_{ij}, a_i і a називаються коефіцієнтами рівняння (2), а f – вільним членом або правою частиною рівняння. Якщо $f \equiv 0$, тобто є нульовою функцією, то рівняння (2) називається **однорідним**, а в противному випадку – **неоднорідним**. Прикладами таких рівнянь є **класичні рівняння математичної фізики**.

1) При вивченні різного роду хвиль – пружних, звукових, електромагнітних, а також інших коливних явищ – одержують **хвильове рівняння**

$$\partial_t^2 u = a^2(\partial_{x_1}^2 u + \partial_{x_2}^2 u + \partial_{x_3}^2 u) + f(x,t), \tag{3}$$

де a – швидкість поширення хвилі в даному середовищі.

2) Процеси поширення тепла в однорідному ізотропному тілі, так само як явище дифузії, описуються **рівнянням теплопровідності**

$$\partial_t u = a^2(\partial_{x_1}^2 u + \partial_{x_2}^2 u + \partial_{x_3}^2 u) + f(x,t). \tag{4}$$

3) При розгляді усталеного теплового стану в однорідному ізотропному тілі приходимо до **рівняння Пуассона**

$$\partial_{x_1}^2 u + \partial_{x_2}^2 u + \partial_{x_3}^2 u = g(x). \tag{5}$$

Якщо відсутні джерела тепла всередині тіла, то рівняння (5) набуває вигляду

$$\partial_{x_1}^2 u + \partial_{x_2}^2 u + \partial_{x_3}^2 u = 0 \tag{6}$$

і називається **рівнянням Лапласа**. Рівняння Лапласа задовольняють також потенціали поля тяжіння і стаціонарного електричного поля, в якому відсутні відповідно маси і електричні заряди.

У загальному випадку кожне з рівнянь (4) – (6) має безліч розв'язків. При розв'язуванні конкретної задачі необхідно з цих розв'язків вибрати той, який задовольняє деякі додаткові умови, що випливають із фізичного змісту задачі.

Поняття розв'язку рівняння вимагає відповідного уточнення. Це пов'язано з тим, що в сучасній теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними саме поняття похідної тлумачиться по-різному. Розглядають два види розв'язків: класичні та різні узагальнені. **Класичним або регулярним розв'язком** рівняння (2) називають функцію, неперервно диференційовну стільки разів, який порядок рівняння, і таку, що вона задовольняє рівняння у звичайному розумінні в кожній точці розглядуваної області Ω. Під **узагальненим розв'язком** розуміють функцію, яка задовольняє рівняння в певному узагальненому сенсі.

Задачі математичної фізики полягають у відшуканні розв'язків рівнянь математичної фізики, які задовольняють певні додаткові умови. Такими додатковими умовами найчастіше є **крайові умови**, тобто умови, задані на межі розглядуваного середовища, та **початкові умови**, які стосуються деякого моменту часу, з якого розпочинається вивчення даного нестаціонарного процесу (явища).

Задачу про знаходження розв'язку нестаціонарного диференціального рівняння, який задовольняє початкові та крайові умови, називають **мішаною** або **початково-крайовою задачею**.

Якщо з якихось причин можна знехтувати впливом режиму на межі області Ω, в якій розглядається задача, то природно припускати, що межі немає, а область Ω збігається з усім простором. У результаті виникає задача про знаходження розв'язку нестаціонарного рівняння в усьому просторі тільки за початковими умовами. Така задача називається **початковою задачею** або **задачею Коші**. Для стаціонарного рівняння початкові умови не ставляться, а ставляться лише крайові умови. У цьому випадку задачу називають **крайовою задачею**.

1 ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

У цьому розділі розглянемо основні поняття про рівняння з частинними похідними першого порядку, які використовуються при проведенні класифікації рівнянь із частинними похідними другого порядку. Теорія цих рівнянь тісно пов'язана з інтегруванням систем звичайних диференціальних рівнянь.

Загальний вигляд диференціального рівняння з частинними похідними першого порядку такий:

$$F(x_1, \ldots, x_n, u, \partial_{x_1} u, \ldots, \partial_{x_n} u) = 0,$$

де F – відома функція своїх аргументів.

Розв'язком цього рівняння називається функція

$$u = \varphi(x_1, \ldots, x_n),$$

яка визначена й неперервна разом з частинними похідними в деякій області Ω зміни x_1, ..., x_n і перетворює рівняння у тотожність в області Ω. При цьому передбачається, що значення x_1, ..., x_n, для яких визначена функція φ, і значення, яких набуває ця функція та її частинні похідні, знаходяться в області визначення функції F.

Для того щоб мати уяву про сукупність розв'язків диференціального рівняння з частинними похідними першого порядку, розглянемо наступний приклад.

Приклад. Знайти розв'язки рівняння

$$\partial_y u - \frac{1}{y} u = -x^2 y, \ \ y \neq 0.$$

◀ Якщо зафіксувати x, то задане рівняння можна розглядати як звичайне лінійне диференціальне рівняння першого порядку

$$\frac{du}{dy} - \frac{1}{y} u = -x^2 y.$$

Знайдемо спочатку загальний розв'язок відповідного лінійного однорідного рівняння:

$$\frac{du}{dy} = \frac{1}{y}u, \quad \frac{du}{u} = \frac{dy}{y}, \quad \ln|u| = \ln|y| + \ln|C|,$$

$$u = Cy,$$

де C, взагалі кажучи, залежить від x.

Загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння шукатимемо у вигляді

$$u(x,y) = z(y)y,$$

$$\frac{du}{dy} = \frac{dz}{dy}y + z, \quad \frac{dz}{dy}y + z - z = -x^2y, \quad \frac{dz}{dy} = -x^2,$$

$z(y) = -x^2y + \varphi(x)$, тоді $u(x,y) = \varphi(x)y - x^2y^2$, де φ – довільна неперервно диференційовна функція. Отже, сукупність розв'язків рівняння з частинними похідними першого порядку залежить від однієї довільної функції. ▶

1.1 Лінійне однорідне рівняння з частинними похідними першого порядку

1.1.1 Зв'язок між однорідним лінійним рівнянням із частинними похідними першого порядку і системою звичайних диференціальних рівнянь у симетричній формі, яка йому відповідає. Лінійним однорідним рівнянням із частинними похідними першого порядку називається рівняння вигляду

$$X_1(x_1,\ldots,x_n)\partial_{x_1}u + \ldots + X_n(x_1,x_2,\ldots,x_n)\partial_{x_n}u = 0. \qquad (1)$$

Припускатимемо, що коефіцієнти X_1, …, X_n рівняння (1) визначені й неперервні разом із частинними похідними за x_1, …, x_n в деякому околі D точки $(x_{10},\ldots,x_{n0})$ і, що вони не перетворюються в нуль у цій точці. Зокрема, вважатимемо, що

$$X_n(x_{10},\ldots,x_{n0}) \neq 0. \qquad (2)$$

Поряд із рівнянням (1) розглянемо систему звичайних диференціальних рівнянь у симетричній формі

$$\frac{dx_1}{X_1(x_1,\ldots,x_n)} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n(x_1,\ldots,x_n)}. \tag{3}$$

Ця система називається **системою звичайних диференціальних рівнянь у симетричній формі, що відповідає однорідному лінійному рівнянню з частинними похідними першого порядку (1), або системою рівнянь характеристик для (1).**

При зроблених припущеннях стосовно функцій X_1, …, X_n система (3) має $n-1$ незалежних перших інтегралів

$$\begin{array}{l} \psi_1(x_1,\ldots,x_n) = C_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \psi_{n-1}(x_1,\ldots,x_n) = C_{n-1}, \end{array} \tag{4}$$

де функції ψ_i, $i \in \{1,\ldots,n-1\}$, визначені й неперервні разом із частинними похідними в області D. Це випливає з того, що система (3) рівносильна такій нормальній системі рівнянь:

$$\frac{dx_1}{dx_n} = \frac{X_1(x_1,\ldots,x_n)}{X_n(x_1,\ldots,x_n)}, \quad \ldots, \quad \frac{dx_{n-1}}{dx_n} = \frac{X_{n-1}(x_1,\ldots,x_n)}{X_n(x_1,\ldots,x_n)}, \tag{5}$$

для якої виконуються умови теореми Коші, а отже, існують незалежні перші інтеграли.

Нагадаємо, що співвідношення $\psi(x_1,\ldots,x_n) = C$, де ψ – неперервно диференційовна та не рівна тотожно сталій функція в області D, а C – довільна стала, називається **першим інтегралом** системи (3), якщо в області D справджується рівність

$$X_1\partial_{x_1}\psi + \ldots + X_n\partial_{x_n}\psi = 0.$$

Незалежність перших інтегралів (4) означає, що принаймні один з мінорів $(n-1)$-го порядку матриці

$$\begin{pmatrix} \partial_{x_1}\psi_1 & \ldots & \partial_{x_n}\psi_1 \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \partial_{x_1}\psi_{n-1} & \ldots & \partial_{x_n}\psi_{n-1} \end{pmatrix}$$

не дорівнює нулю в області D.

Сукупність незалежних перших інтегралів (4) визначає загальний інтеграл системи (3).

Між першими інтегралами системи (3) і розв'язками рівняння (1) існує зв'язок, який опишемо нижче.

Нехай знайдено систему $n-1$ незалежних перших інтегралів (4) системи (3). У просторі точок $(x_1, \ldots, x_n)$ ця система визначає $(n-1)$-параметричну сім'ю ліній, які називаються **характеристиками** рівняння (1).

Теорема 1.1. *Ліва частина першого інтеграла*

$$\psi(x_1, \ldots, x_n) = C$$

системи (3) є розв'язком лінійного однорідного рівняння з частинними похідними (1).

◀ Справді, нехай $\psi(x_1, \ldots, x_n) = C$ є першим інтегралом системи (3), визначеним у деякому околі точки $(x_{10}, \ldots, x_{n0})$. Тоді повний диференціал функції ψ тотожно дорівнює нулю на розв'язках системи (3) або (5), тобто

$$\partial_{x_1}\psi\, dx_1 + \ldots + \partial_{x_1}\psi\, dx_n \equiv 0,$$

де диференціали dx_1, …, dx_{n-1} треба замінити виразами для них із системи (5), а саме:

$$dx_1 = \frac{X_1}{X_n} dx_n, \ldots, dx_{n-1} = \frac{X_{n-1}}{X_n} dx_n.$$

Тому матимемо тотожність

$$\left(\partial_{x_1}\psi \frac{X_1}{X_n} + \ldots + \partial_{x_n}\psi\right) dx_n \equiv 0$$

або після скорочення на dx_n і множення на X_n

$$X_1 \partial_{x_1}\psi + \ldots + X_n \partial_{x_n}\psi \equiv 0.$$

Ця тотожність й означає, що функція $u = \psi(x_1, \ldots, x_n)$ є розв'язком рівняння (1). ▶

Теорема 1.2. *Будь-який несталий розв'язок рівняння (1), прирівняний до довільної сталої C, є першим інтегралом системи (3).*

◀ Нехай $u = \psi(x_1, \ldots, x_n)$ – несталий розв'язок рівняння (1). Тоді

$$X_1\partial_{x_1}\psi + \ldots + X_n\partial_{x_n}\psi \equiv 0. \tag{6}$$

Обчислюючи повний диференціал функції ψ, аргументами якої є компоненти розв'язків системи (3) або, що те саме, системи (5), маємо

$$d\psi = (\partial_{x_1}\psi dx_1 + \ldots + \partial_{x_n}\psi dx_n) = \left(\partial_{x_1}\psi\frac{X_1}{X_n} + \ldots + \partial_{x_n}\psi\right)dx_n =$$

$$= (X_1\partial_{x_1}\psi + \ldots + X_n\partial_{x_n}\psi)\frac{1}{X_n}dx_n,$$

звідки згідно з тотожністю (6) одержуємо рівність $d\psi = 0$, тобто ψ є першим інтегралом системи (3). ▶

1.1.2 Побудова загального розв'язку однорідного лінійного рівняння. Правильною є наступна теорема.

Теорема 1.3. *Якщо*

$$\psi_1(x_1, \ldots, x_n) = C_1, \ldots, \psi_{n-1}(x_1, \ldots, x_n) = C_{n-1}$$

– незалежні перші інтеграли системи (3), то сукупність функцій вигляду

$$u = \Phi(\psi_1, \ldots, \psi_{n-1}), \tag{7}$$

де Φ – довільна функція, яка має неперервні частинні похідні за ψ_1, …, ψ_{n-1}, є загальним розв'язком рівняння (1).

◀ Доведемо, що функція (7), де Φ – довільно фіксована неперервно диференційовна функція, є розв'язком рівняння (1). Підставивши (7) в (1) і скориставшись тим, що ψ_1, …, ψ_{n-1} є розв'язками рівняння (1), дістанемо тотожність

$$X_1\partial_{x_1}\Phi + \ldots + X_n\partial_{x_n}\Phi = X_1\sum_{i=1}^{n-1}\partial_{\psi_i}\Phi\partial_{x_1}\psi_i + \ldots +$$

$$+X_n \sum_{i=1}^{n-1} \partial_{\psi_i} \Phi \partial_{x_n} \psi_i = \sum_{i=1}^{n-1} \partial_{\psi_i} \Phi (X_1 \partial_{x_1} \psi_i + \ldots + X_n \partial_{x_n} \psi_i) \equiv 0.$$

Доведення того, що вираз (7) визначає всі розв'язки рівняння (1), тобто будь-який розв'язок рівняння (1) одержується із (7) при відповідному виборі функції Φ, міститься в [22, с. 249–251].▶

Зауважимо, що на відміну від звичайних диференціальних рівнянь, загальний розв'язок (7) рівняння (1) із частинними похідними містить не довільну сталу, а довільну функцію.

Отже, *задача побудови загального розв'язку рівняння (1) рівносильна задачі знаходження $n-1$ незалежних перших інтегралів системи звичайних диференціальних рівнянь у симетричній формі (3), яка відповідає рівнянню (1).*

Нехай є тільки дві незалежні змінні. У цьому випадку, позначаючи шукану функцію через z, а незалежні змінні через x і y, матимемо рівняння

$$X(x,y)\partial_x z + Y(x,y)\partial_y z = 0. \tag{8}$$

Відповідна система (3) звичайних диференціальних рівнянь у симетричній формі містить тільки одне диференціальне рівняння

$$\frac{dx}{X(x,y)} = \frac{dy}{Y(x,y)}. \tag{9}$$

Якщо $\psi(x,y) = C$ є першим і, отже, загальним інтегралом цього рівняння, то

$$z = \Phi(\psi(x,y)), \tag{10}$$

де Φ – довільна неперервно диференційовна функція від ψ, визначає загальний розв'язок рівняння (8).

Якщо розглядати x, y і z як прямокутні координати точки тривимірного простору, то розв'язку $z = z(x,y)$ рівняння (8) відповідає деяка поверхня, яку називають **інтегральною поверхнею** рівняння (8).

Приклад 1. Розв'язати рівняння

$$(z-y)\partial_x u + (x-z)\partial_y u + (y-x)\partial_z u = 0. \tag{11}$$

◀ Система звичайних диференціальних рівнянь, що відповідає заданому рівнянню, має вигляд

$$\frac{dx}{z-y} = \frac{dy}{x-z} = \frac{dz}{y-x}. \tag{12}$$

Для знаходження незалежних перших інтегралів цієї системи утворимо інтегровні комбінації, скориставшись властивостями пропорцій.

Додаючи чисельники і знаменники, дістаємо

$$\frac{dx}{z-y} = \frac{dy}{x-z} = \frac{dz}{y-x} = \frac{dx+dy+dz}{0}.$$

Звідси випливає, що $dx+dy+dz = 0$ або $d(x+y+z) = 0$. Отже, першим інтегралом є

$$\psi_1(x,y,z) := x+y+z = C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}.$$

Для знаходження другого першого інтеграла помножимо чисельники та знаменники відношень (12) відповідно на $2x$, $2y$, $2z$ і додамо чисельники та знаменники одержаних відношень:

$$\frac{2xdx}{2x(z-y)} = \frac{2ydy}{2y(x-z)} = \frac{2zdz}{2z(y-x)} = \frac{d(x^2+y^2+z^2)}{0}.$$

Звідси отримуємо, що

$$\psi_2(x,y,z) := x^2+y^2+z^2 = C_2, \quad C_2 \in \mathbb{R},$$

є другим першим інтегралом.

Легко можна пересвідчитися, що знайдені перші інтеграли є незалежними, а тому загальним розв'язком заданого рівняння є сукупність функцій

$$u = \Phi(x+y+z, x^2+y^2+z^2),$$

де Φ – довільна неперервно диференційовна функція двох змінних.

Наприклад, розв'язками рівняння (11) є функції $u = x+y+z$, $u = x^2+y^2+z^2$, $u = (x+y+z)^2$ і т.п. ▶

Приклад 2. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y\partial_x z - x\partial_y z = 0. \tag{13}$$

◀ Система звичайних диференціальних рівнянь у симетричній формі для заданого рівняння (13) складається з одного рівняння

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x}.$$

Відокремивши змінні та зінтегрувавши, дістанемо загальний інтеграл

$$\psi(x, y) := x^2 + y^2 = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Тому загальний розв'язок рівняння має вигляд

$$z = \Phi(x^2 + y^2)$$

і є, як відомо, сім'єю поверхонь обертання з віссю обертання Oz. Зокрема, при $\Phi(\psi) = \psi$ дістаємо параболоїд обертання

$$z = x^2 + y^2,$$

при $\Phi(\psi) = \sqrt{R^2 - \psi}$ матимемо сферу

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2},$$

при $\Phi(\psi) = \sqrt{\psi}$ – конус

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}. \ ▶$$

1.1.3 Розв'язування задачі Коші для однорідного лінійного рівняння. Задача Коші для рівняння (1) полягає в знаходженні розв'язку цього рівняння

$$u = f(x_1, \ldots, x_n), \tag{14}$$

який задовольняє **початкову умову**

$$u = \varphi(x_1, \ldots, x_{n-1}) \quad \text{при} \quad x_n = x_{n0}$$

або в іншому вигляді

$$u|_{x_n=x_{n0}} = \varphi(x_1, \ldots, x_{n-1}), \tag{15}$$

де φ – задана неперервно диференційовна функція змінних x_1, …, x_{n-1}. Ця умова означає, що при фіксованому значенні аргументу x_n розв'язок (14) перетворюється в задану функцію решти аргументів.

У випадку рівняння (8), тобто коли шукана функція z залежить від двох змінних, задача Коші полягає в тому, щоб знайти розв'язок

$$z = f(x, y), \tag{16}$$

який задовольняє початкову умову

$$z|_{x=x_0} = \varphi(y), \tag{17}$$

де φ – задана неперервно диференційовна функція. Геометрично це означає, що серед усіх інтегральних поверхонь (10) треба виділити ту поверхню (16), яка проходить через задану криву (17), що лежить в площині $x = x_0$, паралельній до координатної площини Oyz.

З попереднього відомо, що загальний розв'язок рівняння (1) визначається формулою (7). Порівнюючи цю формулу з умовою (15), бачимо, що розв'язування задачі Коші зводиться до знаходження такої функції Φ, щоб

$$\Phi(\psi_1, \ldots, \psi_{n-1})|_{x_n=x_{n0}} = \varphi(x_1, \ldots, x_{n-1}). \tag{18}$$

Введемо позначення

$$\begin{cases} \psi_1(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_{n0}) = \overline{\psi}_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \psi_{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_{n0}) = \overline{\psi}_{n-1}, \end{cases} \tag{19}$$

тоді рівність (18) набуде вигляду

$$\Phi(\overline{\psi}_1, \ldots, \overline{\psi}_{n-1}) = \varphi(x_1, \ldots, x_{n-1}). \tag{20}$$

Розв'язуючи систему (19) відносно x_1, ..., x_{n-1}, що можливо, бо перші інтеграли ψ_1, ..., ψ_{n-1} незалежні, отримуємо

$$\begin{cases} x_1 = \omega_1(\overline{\psi}_1, \ldots, \overline{\psi}_{n-1}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_{n-1} = \omega_{n-1}(\overline{\psi}_1, \ldots, \overline{\psi}_{n-1}). \end{cases} \tag{21}$$

Якщо за функцію Φ взяти

$$\Phi(\psi_1, \ldots, \psi_{n-1}) = \varphi(\omega_1(\psi_1, \ldots, \psi_{n-1}), \ldots, \omega_{n-1}(\psi_1, \ldots, \psi_{n-1})), \tag{22}$$

то умова (18) виконуватиметься. Справді,

$$\Phi(\overline{\psi}_1, \ldots, \overline{\psi}_{n-1}) = \varphi(\omega_1(\overline{\psi}_1, \ldots, \overline{\psi}_{n-1}), \ldots, \omega_{n-1}(\overline{\psi}_1, \ldots, \overline{\psi}_{n-1})) =$$
$$= \varphi(x_1, \ldots, x_{n-1}).$$

Отже, функція

$$u = \varphi(\omega_1(\psi_1, \ldots, \psi_{n-1}), \ldots, \omega_{n-1}(\psi_1, \ldots, \psi_{n-1})) \tag{23}$$

є шуканим розв'язком задачі Коші.

З доведеного вище випливає таке правило розв'язування задачі Коші:

1) скласти відповідну систему звичайних диференціальних рівнянь і знайти $n-1$ незалежних перших інтегралів

$$\begin{cases} \psi_1(x_1, \ldots, x_n) = C_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \psi_{n-1}(x_1, \ldots, x_n) = C_{n-1}; \end{cases} \tag{24}$$

2) замінити в (24) незалежну змінну x_n заданим її значенням x_{n0}

$$\begin{cases} \psi_1(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_{n0}) = \overline{\psi}_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \psi_{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_{n0}) = \overline{\psi}_{n-1} \end{cases} \tag{25}$$

і розв'язати систему (25) відносно x_1, ..., x_{n-1}:

$$\begin{cases} x_1 = \omega_1(\overline{\psi}_1, \ldots, \overline{\psi}_{n-1}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_{n-1} = \omega_{n-1}(\overline{\psi}_1, \ldots, \overline{\psi}_{n-1}); \end{cases}$$

3) побудувати функцію

$$u = \varphi(\omega_1(\psi_1, \ldots, \psi_{n-1}), \ldots, \omega_{n-1}(\psi_1, \ldots, \psi_{n-1})),$$

яка і є розв'язком задачі Коші.

Приклад 3. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$(1 + x^2)\partial_x z + xy\partial_y z = 0$$

та визначити інтегральну поверхню, що проходить через криву $z = y^2$ у площині $x = 0$.

◀ Складемо систему звичайних диференціальних рівнянь у симетричній формі

$$\frac{dx}{1 + x^2} = \frac{dy}{xy}.$$

Інтегруючи це рівняння, знаходимо перший (загальний) інтеграл:

$$\frac{dy}{y} = \frac{xdx}{1 + x^2}, \quad \ln|y| = \frac{1}{2}\ln(x^2 + 1) + \ln|C_1|, \quad C_1 \neq 0,$$

$$y = C\sqrt{x^2 + 1}, \quad \frac{y}{\sqrt{x^2 + 1}} = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Отже, загальним розв'язком заданого рівняння є сукупність функцій вигляду

$$z = \Phi\Big(\frac{y}{\sqrt{x^2 + 1}}\Big),$$

де Φ – довільна неперервно диференційовна функція. З цієї сукупності треба виділити ту інтегральну поверхню, яка проходить через криву $z = y^2$ в площині $x = 0$. Якщо покласти $x = 0$ у вираз $\psi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + 1}}$, який є лівою частиною першого інтеграла, то одержимо $y = \overline{\psi}$. Підставивши це значення в рівність $z = y^2$ і знявши риску над ψ, дістанемо розв'язок задачі Коші

$$z = \frac{y^2}{x^2 + 1}. \ ▶$$

Приклад 4. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$x\partial_x u + y\partial_y u + \frac{z}{2}\partial_z u = 0$$

і розв'язок, який задовольняє початкову умову

$$u = y + z^2 \quad \text{при} \quad x = 1.$$

◀ Складемо систему звичайних диференціальних рівнянь у симетричній формі

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{\frac{z}{2}}$$

і знайдемо два незалежні перші інтеграли. Маємо

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}, \quad \ln|x| = \ln|y| - \ln|\overline{C}_1|, \quad \overline{C}_1 \neq 0,$$

або

$$\frac{y}{x} = C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R};$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{2dz}{z}, \quad \ln|x| = 2\ln|z| - \ln|\overline{C}_2|, \quad \overline{C}_2 \neq 0,$$

або

$$\frac{z^2}{x} = C_2, \quad C_2 \in \mathbb{R}.$$

Отже, знайдено два незалежні перші інтеграли

$$\psi_1(x,y) := \frac{y}{x} = C_1, \quad \psi_2(x,y) := \frac{z^2}{x} = C_2,$$

а тому загальним розв'язком рівняння є

$$u = \Phi\Big(\frac{y}{x}, \frac{z^2}{x}\Big),$$

де Φ – довільна неперервно диференційовна функція.

Знайдемо розв'язок, який задовольняє поставлену початкову умову. Покладаючи в перших інтегралах $x = 1$, дістаємо

$$y = \overline{\psi}_1, \quad z^2 = \overline{\psi}_2$$

або

$$y = \overline{\psi}_1, \quad z = \pm\sqrt{\overline{\psi}_2}.$$

Отже, шуканим розв'язком рівняння є

$$u = \psi_1 + \psi_2$$

або

$$u = \frac{y + z^2}{x}. \blacktriangleright$$

1.2 Лінійне неоднорідне рівняння з частинними похідними першого порядку

1.2.1 Побудова загального розв'язку неоднорідного лінійного рівняння. Рівняння вигляду

$$X_1(x_1, \ldots, x_n, u)\partial_{x_1}u + \ldots + X_n(x_1, \ldots, x_n, u)\partial_{x_n}u =$$
$$= R(x_1, \ldots, x_n, u) \quad (1)$$

називається **неоднорідним лінійним рівнянням із частинними похідними першого порядку**. Це рівняння називається також **квазілінійним**. Рівняння (1) відрізняється від рівняння, яке розглядалося в попередньому підрозділі, тим, що коефіцієнти X_k, $k \in \{1, \ldots, n\}$, можуть залежати від u і, крім того, є вільний член R. До цього ж типу відноситься рівняння, в якого $R \equiv 0$, але принаймні один з коефіцієнтів X_k, $k \in \{1, \ldots, n\}$, обов'язково залежить від u.

Шукатимемо розв'язок рівняння (1) у неявному вигляді

$$v(x_1, \ldots, x_n, u) = 0, \quad (2)$$

де функція v неперервна і має неперервні частинні похідні за всіма аргументами. Вважатимемо, що $\partial_u v \neq 0$ в області визначення коефіцієнтів і вільного члена рівняння (1). Це гарантує розв'язність рівняння (2) відносно u.

Вважаючи, що в рівності (2) функція u є розв'язком рівняння (1), продиференціюємо (2) за змінною x_k, $k \in \{1, \ldots, n\}$. Маємо

$$\partial_{x_k} v + \partial_u v \partial_{x_k} u = 0, \quad k \in \{1, \ldots, n\}, \tag{3}$$

звідки

$$\partial_{x_k} u = -\frac{\partial_{x_k} v}{\partial_u v}, \quad k \in \{1, \ldots, n\}. \tag{4}$$

Підставивши ці вирази для частинних похідних $\partial_{x_k} u$, $k \in \{1, \ldots, n\}$, у рівняння (1) і перенісши всі члени в ліву частину, одержимо

$$X_1(x_1, \ldots, x_n, u)\partial_{x_1} v + \ldots + X_n(x_1, \ldots, x_n, u)\partial_{x_n} v +$$

$$+ R(x_1, \ldots, x_n, u)\partial_u v = 0. \tag{5}$$

Рівняння (5) є лінійним однорідним рівнянням із частинними похідними першого порядку відносно функції v.

Складемо систему звичайних диференціальних рівнянь у симетричній формі, що відповідає рівнянню (5),

$$\frac{dx_1}{X_1} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n} = \frac{du}{R}. \tag{6}$$

Якщо знайдемо n незалежних перших інтегралів цієї системи

$$\begin{cases} \psi_1(x_1, \ldots, x_n, u) = C_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \psi_n(x_1, \ldots, x_n, u) = C_n, \end{cases} \tag{7}$$

то загальний розв'язок рівняння (5) визначається формулою

$$v = \Phi(\psi_1(x_1, \ldots, x_n, u), \ldots, \psi_n(x_1, \ldots, x_n, u)), \tag{8}$$

де Φ – довільна неперервно диференційовна функція аргументів ψ_1, …, ψ_n.

Прирівнявши функцію (8) до нуля, отримаємо, згідно з (2), вираз

$$\Phi(\psi_1(x_1, \ldots, x_n, u), \ldots, \psi_n(x_1, \ldots, x_n, u)) = 0. \tag{9}$$

який називається **загальним розв'язком** рівняння (1).

Систему (6) називають **системою звичайних диференціальних рівнянь у симетричній формі, що відповідає рівнянню (1)**.

Отже, *для знаходження загального розв'язку рівняння (1) складаємо відповідну йому систему звичайних диференціальних рівнянь (6), знаходимо її n незалежних перших інтегралів і прирівнюємо до нуля довільну диференційовну функцію від лівих частин цих інтегралів. Одержана рівність (9) і визначає загальний розв'язок рівняння (1) у неявному вигляді.* Якщо його можна розв'язати відносно u, то дістанемо загальний розв'язок у явному вигляді.

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$(z-y)\partial_x z + (x-z)\partial_y z = y - x.$$

◀ Складемо систему звичайних диференціальних рівнянь у симетричній формі, що відповідає заданому рівнянню,

$$\frac{dx}{z-y} = \frac{dy}{x-z} = \frac{dz}{y-x}. \tag{10}$$

Утворимо першу очевидну інтегровну комбінацію, додавши чисельники і знаменники цих відношень :

$$\frac{dx}{z-y} = \frac{dy}{x-z} = \frac{dz}{y-x} = \frac{dx+dy+dz}{0}.$$

Звідси випливає, що $dx + dy + dz = 0$ або $d(x + y + z) = 0$, а тому першим інтегралом є

$$\psi_1(x, y, z) := x + y + z = C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}.$$

Для утворення другої інтегровної комбінації помножимо чисельники та знаменники відношень (10) відповідно на x, y, z і додамо чисельники та знаменники одержаних відношень. Тоді одержимо

$$\frac{dx}{z-y} = \frac{dy}{x-z} = \frac{dz}{y-x} = \frac{xdx+ydy+zdz}{0}.$$

Це означає, що $xdx + ydy + zdz = 0$ або $d(x^2 + y^2 + z^2) = 0$. Звідси знаходимо другий перший інтеграл системи

$$\psi_2(x, y, z) := x^2 + y^2 + z^2 = C_2, \quad C_2 \in \mathbb{R}.$$

Згідно з (9) загальний розв'язок заданого рівняння визначається рівністю

$$\Phi(x + y + z, x^2 + y^2 + z^2) = 0,$$

де Φ – довільна неперервно диференційовна функція. ►

Приклад 2. Розв'язати рівняння

$$(1 + \sqrt{z - x - y})\partial_x z + \partial_y z = 2.$$

◄ Складемо систему звичайних диференціальних рівнянь (6):

$$\frac{dx}{1 + \sqrt{z - x - y}} = \frac{dy}{1} = \frac{dz}{2}. \tag{11}$$

З рівняння

$$\frac{dy}{1} = \frac{dz}{2}$$

одержуємо, що першим інтегралом є

$$\psi_1(x, y, z) := z - 2y = C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}.$$

Якщо відняти в системі (11) від чисельника та знаменника останнього відношення чисельники та знаменники перших двох відношень, то дістанемо

$$\frac{d(z - x - y)}{-\sqrt{z - x - y}} = \frac{dy}{1}.$$

Ця інтегровна комбінація дає другий перший інтеграл

$$\psi_2(x, y, z) := 2\sqrt{z - x - y} + y = C_2, \quad C_2 \in \mathbb{R}.$$

Тому загальний розв'язок заданого рівняння має вигляд

$$\Phi(z - 2y, 2\sqrt{z - x - y} + y) = 0, \tag{12}$$

де Φ – довільна неперервно диференційовна функція.

Безпосередньою перевіркою переконуємося, що функція

$$z = x + y$$

також є розв'язком заданого рівняння. Цей розв'язок не одержується з формули (12) і називається **спеціальним**. Отже, *рівняння з частинними похідними так само, як і звичайні диференціальні рівняння, можуть мати розв'язки, які не містяться в загальному розв'язку.* ▶

1.2.2 Задача Коші для неоднорідного лінійного рівняння. Задача Коші для неоднорідного рівняння (1) ставиться так само, як і для однорідного рівняння. Вона полягає в тому, що серед усіх розв'язків рівняння (1) треба вибрати такий розв'язок

$$u = f(x_1, \ldots, x_n), \tag{13}$$

який задовольняє початкову умову

$$u = \varphi(x_1, \ldots, x_{n-1}) \quad \text{при} \quad x_n = x_{n0}, \tag{14}$$

де φ – задана неперервно диференційовна функція від x_1, ..., x_{n-1}.

Покажемо, як із загального розв'язку (9) виділити розв'язок задачі Коші, тобто вибрати відповідним чином функцію Φ. Перепишемо початкову умову (14) у вигляді

$$u - \varphi(x_1, \ldots, x_{n-1}) = 0 \quad \text{при} \quad x_n = x_{n0} \tag{15}$$

і порівняємо з (9). Тоді одержимо, що функцію Φ треба вибрати так, щоб

$$\Phi(\overline{\psi}_1, \ldots, \overline{\psi}_n) = u - \varphi(x_1, \ldots, x_{n-1}), \tag{16}$$

де під $\overline{\psi}_1$, ..., $\overline{\psi}_n$ розумітимемо функції, які одержуються з лівих частин перших інтегралів системи (6) заміною x_n на x_{n0}, тобто

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_1(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_{n0}, u) = \overline{\psi}_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \psi_n(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_{n0}, u) = \overline{\psi}_n. \end{array} \right. \tag{17}$$

Розв'язавши систему (17) відносно $x_1, \ldots, x_{n-1}, u$, дістанемо

$$\begin{cases} x_1 = \omega_1(\overline{\psi}_1, \ldots, \overline{\psi}_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_{n-1} = \omega_{n-1}(\overline{\psi}_1, \ldots, \overline{\psi}_n), \\ u = \omega(\overline{\psi}_1, \ldots, \overline{\psi}_n). \end{cases} \tag{18}$$

Якщо тепер за функцію Φ взяти

$$\Phi(\psi_1, \ldots, \psi_n) = \omega(\psi_1, \ldots, \psi_n) - \varphi(\omega_1(\psi_1, \ldots, \psi_n), \ldots,$$
$$\omega_{n-1}(\psi_1, \ldots, \psi_n)), \tag{19}$$

то умова (16) виконуватиметься. Отже, *формулою*

$$\omega(\psi_1, \ldots, \psi_n) - \varphi(\omega_1(\psi_1, \ldots, \psi_n), \ldots,$$
$$\omega_{n-1}(\psi_1, \ldots, \psi_n)) = 0 \tag{20}$$

визначається шуканий розв'язок задачі Коші в неявному вигляді. Якщо рівняння (20) розв'язати відносно u, то одержимо розв'язок задачі Коші в явному вигляді.

Геометрично задача Коші для рівняння (1) полягає у знаходженні інтегральної поверхні (розв'язку), яка містить задану криву $\Gamma := \{(x_1, \ldots, x_n, u) \,|\, u = \varphi(x_1, \ldots, x_n), (x_1, \ldots, x_n) \in \gamma\}$ (рис. 1.1). Якщо лінія Γ гладка, $X_1, \ldots, X_n$ і R неперервно диференційовні, причому $X_1, \ldots, X_n$ одночасно не дорівнюють нулю, а інтегральні лінії системи (6) не дотичні до Γ, то розв'язок задачі (1), (14) локально існує і єдиний.

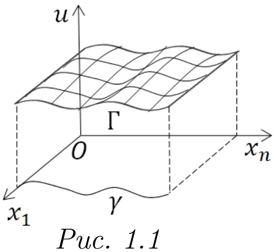

Рис. 1.1

Зауваження. Якщо треба знайти поверхню $z = z(x, y)$, яка є інтегральною поверхнею рівняння

$$X_1(x, y, z)\partial_x z + X_2(x, y, z)\partial_y z = R(x, y, z) \tag{21}$$

і проходить через задану лінію

$$x = u(t), \quad y = v(t), \quad z = w(t), \quad t \in (\alpha, \beta), \tag{22}$$

то знаходимо два незалежних перших інтеграли системи

$$\frac{dx}{X_1} = \frac{dy}{X_2} = \frac{dz}{R}. \tag{23}$$

У ці перші інтеграли

$$\psi_1(x, y, z) = C_1, \quad \psi_2(x, y, z) = C_2 \tag{24}$$

підставимо замість x, y, z їхні вирази (22). Тоді дістанемо два рівняння вигляду

$$\Psi_1(t) = C_1, \quad \Psi_2(t) = C_2. \tag{25}$$

Виключивши з них t, одержимо співвідношення

$$\Phi(C_1, C_2) = 0. \tag{26}$$

Підставивши сюди замість C_1 і C_2 ліві частини перших інтегралів (24), отримаємо шуканий розв'язок .

У тому випадку, коли в обидва рівняння (25) не входить t, лінія (22) є інтегральною кривою системи (23), тобто характеристикою рівняння (21), і задача Коші має безліч розв'язків.

Приклад 3. Знайти інтегральну поверхню рівняння

$$y^2 \partial_x z + xy \partial_y z = x,$$

яка проходить через криву $z = y^2$, $x = 0$.

◀ Складемо систему звичайних диференціальних рівнянь у симетричній формі

$$\frac{dx}{y^2} = \frac{dy}{xy} = \frac{dz}{x}.$$

З рівності першого і другого відношень знаходимо перший інтеграл:

$$\frac{dx}{y^2} = \frac{dy}{xy}, \quad xdx = ydy,$$

$$\psi_1(x, y, z) := y^2 - x^2 = C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}.$$

Для знаходження другого першого інтеграла розглянемо перше і третє відношення і скористаємося знайденим вище першим інтегралом:

$$\frac{dx}{y^2} = \frac{dz}{x}, \quad \frac{dx}{C_1 + x^2} = \frac{dz}{x}, \quad dz = \frac{xdx}{C_1 + x^2},$$

$$z = \frac{1}{2} \ln |x^2 + C_1| + \ln |\overline{C}_2|, \quad \overline{C}_2 \neq 0, \quad z = \ln |\overline{C}_2 \sqrt{x_2 + C_1}|,$$

$$z = \ln |\overline{C}_2 \sqrt{x^2 + y^2 - x^2}|, \quad z = \ln |\overline{C}_2 y|, \quad \overline{C}_2 \neq 0,$$

або

$$\psi_2(x, y, z) := \frac{e^{\,z}}{y} = C_2, \quad C_2 \in \mathbb{R}.$$

Отже, загальний розв'язок заданого рівняння має вигляд

$$\Phi\Big(y^2 - x^2, \frac{e^{\,z}}{y}\Big) = 0,$$

де Φ – довільна неперервно диференційовна функція.

Для того щоб знайти розв'язок, який задовольняє задану початкову умову, покладемо в перші інтеграли $x = 0$:

$$\overline{\psi}_1 = y^2, \quad \overline{\psi}_2 = \frac{e^{\,z}}{y}.$$

Звідси дістаємо, що

$$\overline{\psi}_2 \sqrt{\overline{\psi}_1} = e^{\,z} \quad \text{або} \quad z = \ln \overline{\psi}_2 + \frac{1}{2} \ln \overline{\psi}_1.$$

Оскільки згідно з умовою $z = y^2$ або $z = \overline{\psi}_1$, то маємо співвідношення

$$\overline{\psi}_1 = \ln \overline{\psi}_2 + \frac{1}{2} \ln \overline{\psi}_1.$$

Опустивши риски над ψ_1 і ψ_2 і підставивши замість ψ_1 і ψ_2 вирази для них, одержимо розв'язок задачі

$$y^2 - x^2 = \ln \frac{e^{\,z}}{y} + \frac{1}{2} \ln(y^2 - x^2)$$

або

$$z = y^2 - x^2 - \frac{1}{2}\ln(y^2 - x^2) + \ln y. \blacktriangleright$$

Приклад 4. Знайти інтегральну поверхню рівняння

$$z\partial_x z + (z^2 - x^2)\partial_y z + x = 0,$$

яка проходить через криву $y = x^2$, $z = 2x$.

$\blacktriangleleft$ Система звичайних диференціальних рівнянь у симетричній формі, яка відповідає заданому рівнянню, має вигляд

$$\frac{dx}{z} = \frac{dy}{z^2 - x^2} = \frac{dz}{-x}.$$

Якщо взяти перше і третє відношення, то одержимо перший інтеграл

$$\frac{dx}{z} = \frac{dz}{-x}, \quad xdx + zdz = 0,$$

$$\psi_1(x, y, z) := x^2 + z^2 = C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}.$$

Для знаходження другого першого інтеграла утворимо інтегровну комбінацію. З цією метою помножимо чисельник і знаменник першого відношення на z, третього – на x, додамо і прирівняємо до другого відношення:

$$\frac{zdx + xdz}{z^2 - x^2} = \frac{dy}{z^2 - x^2} \quad \text{або} \quad d(xz) = dy,$$

звідки

$$\psi_2(x, y, z) := xz - y = C_2, \quad C_2 \in \mathbb{R}.$$

Отже, загальний розв'язок вихідного рівняння визначається формулою

$$\Phi(x^2 + z^2, xz - y) = 0,$$

де Φ – довільна неперервно диференційовна функція.

Для того щоб знайти розв'язок задачі Коші, запишемо початкові умови в параметричній формі

$$x = t, \quad y = t^2, \quad z = 2t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Підставимо ці вирази в перші інтеграли і виключимо параметр t:

$$C_1 = 5t^2, \quad C_2 = t^2, \quad \text{звідки} \quad C_1 = 5C_2.$$

Повернувшись до перших інтегралів, одержимо

$$x^2 + z^2 = 5(xz - y).$$

Це і є розв'язок нашої задачі. ►

Приклад 5. Розв'язати задачу Коші

$$(x^2 + y^2)\partial_x z + 2xy\partial_y z = xz, \; x > 0, \, y > 0, \tag{27}$$

$$z(x, y)|_{x=0} = y. \tag{28}$$

◄ Система звичайних диференціальних рівнянь у симетричній формі, що відповідає рівнянню (27), має вигляд

$$\frac{dx}{x^2 + y^2} = \frac{dy}{2xy} = \frac{dz}{xz} \tag{29}$$

або

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x^2 + y^2}{2xy}, \quad \frac{dz}{dy} = \frac{z}{2y}.$$

Перші інтеграли цих рівнянь $\dfrac{y^2 - x^2}{2y} = C_1$ і $\dfrac{z^2}{y} = C_2$ або $(y - C_1)^2 - x^2 = C_1^2$ і $z^2 = C_2 y$. Перший з них – це сім'я гіперболічних циліндрів, що містить вісь Oz, а другий – сім'я параболічних циліндрів, що містить вісь Ox.

Загальний розв'язок рівняння (27) має вигляд

$$\Phi\Big(\frac{y^2 - x^2}{2y}, \frac{z^2}{y}\Big) = 0$$

або в частинному випадку $\dfrac{z^2}{y} = F^2\Big(\dfrac{y^2 - x^2}{2y}\Big)$, тобто

$$z = \sqrt{y}\, F\Big(\frac{y^2 - x^2}{2y}\Big), \tag{30}$$

де F – довільна неперервно диференційовна функція.

Задовольняючи (30) початкову умову (28), дістаємо $y = \sqrt{y}F\left(\frac{y}{2}\right)$ або $F\left(\frac{y}{2}\right) = \sqrt{2}\sqrt{\frac{y}{2}}$, тобто $F(t) = \sqrt{2t}$. Підставивши F в (30), одержимо, що $z = \sqrt{y^2 - x^2} > 0$. Отже, розв'язком задачі Коші (27), (28) є частина прямого кругового конуса

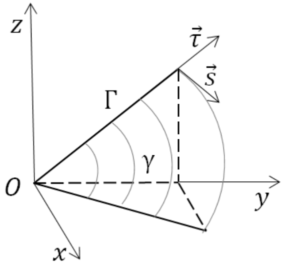

Рис. 1.2

$z^2 + x^2 = y^2$, що лежить у першому октанті (рис. 1.2). Розв'язок єдиний, оскільки на лінії $\Gamma = \{\,(0,0,t)\,|\,t > 0\}$ дотичний вектор $\vec{\tau} = (0,1,1)$ утворює з вектором $\vec{s} = (t^2,0,0)$, дотичним до інтегральної лінії системи (29), кут $\frac{\pi}{2}$, бо скалярний добуток $(\vec{\tau},\vec{s}) = 0$.

Якщо замість умови (28) взяти умову $z(x,y)|_{y=x} = \sqrt{x}$, то для знаходження функції F матимемо рівняння $\sqrt{x}F(0) = \sqrt{x}$, звідки F визначається неоднозначно. Очевидно, що на лінії $\Gamma = \{(t,t,\sqrt{t})\,|\,t > 0\}$ вектори $\vec{s} = (2t^2, 2t, t\sqrt{t})$ і $\vec{\tau} = \left(1, 1, \frac{1}{2\sqrt{t}}\right)$ при $t = 1$, тобто в точці $(1,1,1)$, колінеарні, а це означає, що інтегральні лінії системи (29) дотичні до Γ. ▶

Вправи до розділу 1

1. Зінтегрувати рівняння і, де вказано, знайти розв'язок, який задовольняє поставлену початкову умову:

1) $x\partial_x u + yz\partial_z u = 0$, $u = x^y$ при $z = 1$;
2) $(x + 2y)\partial_x z - y\partial_y z = 0$;
3) $x\partial_x u + y\partial_y u + z\partial_z u = 0$;
4) $x(y^2 - z^2)\partial_x u - y(x^2 + z^2)\partial_y u + z(x^2 + y^2)\partial_z u = 0$;
5) $\partial_x z + (2e^{\,x} - y)\partial_y z = 0$, $z = y$ при $x = 0$;
6) $(x - z)\partial_x u - (y - z)\partial_y u + 2z\partial_z u = 0$;
7) $x(y - z)\partial_x u - y(y + z)\partial_y u + z(y + z)\partial_z u = 0$, $u = y^2 - x$ при $z = 1$;
8) $y\partial_x u - xz\partial_y u = 0$;
9) $x\partial_x u - y\partial_y u + z\partial_z u = 0$, $u = y + z$ при $x = 1$;
10) $\partial_x u - (y + 2z)\partial_y u + (3y + 4z)\partial_z u = 0$;
11) $(z - y)^2\partial_x u + z\partial_y u + y\partial_z u = 0$, $u = 2y(y - z)$ при $x = 0$;

12) $y\partial_x u + z\partial_z u = 0$, $u = \ln z - \dfrac{1}{y}$ при $x = 1$;
13) $x\partial_x u + y\partial_y u + (z - \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})\partial_z u = 0$;
14) $2xy\partial_x z + (y^2 - x^2)\partial_y z = 0$, $z = \sqrt{2ax}$ при $y = 0$.

2. Знайти загальний розв'язок рівняння:
1) $x\partial_x z + 2y\partial_y z = x^2 y + z$;
2) $2y^4\partial_x z - xy\partial_y z = x\sqrt{z^2 + 1}$;
3) $\cos y\partial_x z + \cos x\partial_y z = \cos x \cos y$;
4) $yz\partial_x z - xz\partial_y z = e^{z}$;
5) $(y^2 + z^2 - x^2)\partial_x z - 2xy\partial_y z + 2xz = 0$;
6) $\sin^2 x\partial_x z + \operatorname{tg} z\partial_y z = \cos^2 z$;
7) $(x^3 + 3xy^2)\partial_x z + 2y^3\partial_y z = 2y^2 z$;
8) $(y + z + u)\partial_x u + (x + z + u)\partial_y u + (x + y + u)\partial_z u = x + y + z$;
9) $(x + z)\partial_x z + (y + z)\partial_y z = x + y$;
10) $x\partial_x u + y\partial_y u + z\partial_z u = x^2 + 2u$;
11) $\sqrt{x}\partial_x z + \sqrt{y}\partial_y z = \dfrac{1}{2}$;
12) $(z - y)\partial_x z + (x - z)\partial_y z + x - y = 0$.

3. Знайти загальний розв'язок і поверхню, яка проходить через задану криву:
1) $yz\partial_x z + x\partial_y z = 0$, $z = x^2$, $y = 0$;
2) $x\partial_x z + y\partial_y z = z - xy$, $z = y^2 + 1$, $x = 2$;
3) $x\partial_x z - y\partial_y z = z$, $z = x^3$, $y = x$;
4) $x\partial_x z + y\partial_y z = 2z$, $z = y$, $x = 1$;
5) $z(x + z)\partial_x z - y(y + z)\partial_y z = 0$, $z = \sqrt{y}$, $x = 1$;
6) $x\partial_x z - y\partial_y z = z^2(x - 3y)$, $yz + 1 = 0$, $x = 1$;
7) $x\partial_x z + (xz + y)\partial_y z = z$, $x + y = 2z$, $xz = 1$;
8) $x\partial_x z + z\partial_y z = y$, $y = 2z$, $x + 2y = z$;
9) $(x - z)\partial_x z + (y - z)\partial_y z = 2z$, $x - y = 2$, $z + 2x = 1$.

Відповіді до вправ з розділу 1

1. 1) $u = \Phi\Big(y, \dfrac{x^y}{z}\Big)$, $u = \dfrac{x^y}{z}$; 2) $z = \Phi(xy + y^2)$; 3) $u = \Phi\Big(\dfrac{y}{x}, \dfrac{z}{x}\Big)$; 4) $u = \Phi\Big(x^2 + y^2 + z^2, \dfrac{zy}{x^2}\Big)$; 5) $z = \Phi(ye^{-x} - e^{2x})$, $z = ye^{x} - e^{2x} + 1$; 6) $u = \Phi\Big(\dfrac{x - y}{z}, \dfrac{(x + y + 2z)^2}{z}\Big)$;

7) $u = \Phi(yz, x(y+z))$, $u = y^2z^2 - \dfrac{x(y+z)}{1+yz}$; 8) $u = \Phi(z, zx^2+y^2)$; 9) $u = \Phi\Big(xy, \dfrac{x}{z}\Big)$, $u = xy + \dfrac{z}{x}$; 10) $u = \Phi(e^{-2x}(y+z), e^{-x}(3y+2z))$; 11) $u = \Phi(y^2 - z^2, 2x + (z-y)^2)$, $u = 2(y(y-z)+x)$; 12) $u = \Phi\Big(y, \ln z - \dfrac{x}{y}\Big)$, $u = \ln z - \dfrac{x}{y}$; 13) $u = \Phi\Big(\dfrac{y}{x}, z + \sqrt{x^2+y^2+z^2}\Big)$; 14) $z = \Phi\Big(x + \dfrac{y^2}{x}\Big)$, $z^2x = 2a(x^2+y^2)$.

2. 1) $\Phi\Big(\dfrac{x^2}{y}, \dfrac{3z}{x} - xy\Big) = 0$; 2) $\Phi(x^2 + y^4, y(z + \sqrt{z^2+1})) = 0$; 3) $z = \sin y + F(\sin x - \sin y)$; 4) $\Phi\Big(x^2 + y^2, \arcsin\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + (z+1)e^{-z}\Big) = 0$; 5) $z^2 = yF\Big(\dfrac{y}{x}\Big) - x^2 - y^2$; 6) $\Phi\Big(\operatorname{tg} z + \operatorname{ctg} x, y - \dfrac{1}{2\cos^2 z}\Big) = 0$; 7) $z = yF\Big(\dfrac{y^3}{x^2} + y\Big)$; 8) $\Phi((x-u)\sqrt[3]{x+y+z+u}, (y-u)\sqrt[3]{x+y+z+u}, (z-u)\sqrt[3]{x+y+z+u}) = 0$; 9) $\Phi\Big(\dfrac{x+y+z}{(y-x)^2}, (y-x)(x+y-2z)\Big) = 0$; 10) $u^2 = x^2\ln x + x^2F\Big(\dfrac{y}{x}, \dfrac{z}{x}\Big)$; 11) $\Phi(z - \sqrt{x}, \sqrt{x} - \sqrt{y}) = 0$ або $z = \sqrt{x} + F(\sqrt{x} - \sqrt{y})$; 12) $\Phi(x+y+z, x^2+y^2+z^2) = 0$.

3. 1) $\Phi(z, x^2 - y^2z) = 0$, $z = \dfrac{x^2}{y^2}$; 2) $\Phi\Big(\dfrac{x}{y}, \dfrac{z}{x} + y\Big) = 0$, $2x(z + xy) = (x+2y)^2$; 3) $z = xF(xy)$, $z = x^2y$; 4) $\Phi\Big(\dfrac{y}{x}, \dfrac{z}{x^2}\Big) = 0$ або $z = x^2F\Big(\dfrac{y}{x}\Big)$, $z = xy$; 5) $z = F\Big(\dfrac{y(x+z)}{y+z}\Big)$, $z^2 = xy$; 6) $\Phi\Big(xy, x + 3y + \dfrac{1}{z}\Big) = 0$, $x + 3y + \frac{1}{z} = 1 + 2xy$; 7) $\Phi\Big(\dfrac{x}{z}, \dfrac{y - zx}{x}\Big) = 0$, $xz = (2z - x - y + zx)^2$; 8) $\Phi\Big(y^2 - z^2, \dfrac{y+z}{x}\Big) = 0$, $2x + y + z = 0$; 9) $\Phi\Big(\dfrac{(x-y)^2}{2}, \dfrac{z}{(x+z)^2}\Big) = 0$, $(x-y)(z+y) = 4z$.

2 КЛАСИФІКАЦІЯ ТА ЗВЕДЕННЯ ДО КАНОНІЧНОГО ВИГЛЯДУ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ

2.1 Класифікація диференціальних рівнянь із частинними похідними другого порядку

2.1.1 Випадок довільного числа незалежних змінних. Нехай $x := (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, Ω – область у $\mathbb{R}^n$. Розглянемо лінійне рівняння другого порядку

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) u_{x_i} + c(x) u = f(x),\ x \in \Omega, \qquad (1)$$

де $u_{x_i x_j} := \partial_{x_i} \partial_{x_j} u$, $u_{x_i} := \partial_{x_i} u$, a_{ij}, b_i та c – неперервні функції в області Ω, причому $a_{ij} = a_{ji}$. Вважатимемо, що всі функції в рівнянні (1) є дійснозначними.

Групу членів рівняння (1), яка містить усі похідні другого порядку від невідомої функції u, називають **головною частиною** або **групою старших** членів рівняння, а всі інші члени – **групою молодших** членів.

Проведемо класифікацію рівнянь вигляду (1). Довільно зафіксуємо точку $x^0 \in \Omega$ і розглянемо рівняння

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x^0) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) u_{x_i} + c(x) u = f(x),$$

якому поставимо у відповідність квадратичну форму

$$K(x^0, y) := \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x^0) y_i y_j,\ y := (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n. \qquad (2)$$

З алгебри відомо, що за допомогою лінійного невиродженого перетворення

$$y = Pz,\ \ y := \mathrm{colon}(y_1, \ldots, y_n),\ \ z := \mathrm{colon}(z_1, \ldots, z_n),$$

або

$$y_i = \sum_{k=1}^{n} p_{ik}\, z_k, \;\; i \in \{1, \dots, n\}, \tag{3}$$

де

$$P := (p_{ik})_{i,k=1}^{n}, \;\; \det P \neq 0,$$

квадратична форма (3) зводиться до канонічного вигляду

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j(x^0) z_j^2, \tag{4}$$

де $\lambda_j(x^0) \in \{-1, 0, 1\}$. При цьому число додатних і від'ємних $\lambda_j(x^0)$ не залежить від вибору перетворення (3) (закон інерції квадратичної форми).

Позначимо через $n^+ := n^+(x^0)$ число додатних $\lambda_j(x^0)$, $n^- := n^-(x^0)$ – число від'ємних $\lambda_j(x^0)$, а через $n^0 := n^0(x^0)$ – число нульових $\lambda_j(x^0)$. Очевидно, що $n^+ + n^- + n^0 = n$.

Тепер проведемо класифікацію рівнянь з частинними похідними другого порядку.

Означення 1. *Рівняння (1) в точці x^0 називається:*

1) **еліптичним** *або* **еліптичного** *типу, якщо $n^+ = n$ або $n^- = n$;*

2) **гіперболічним** *або* **гіперболічного** *типу, якщо $n^+ = n - 1$, $n^- = 1$ або $n^+ = 1$, $n^- = n - 1$;*

3) **параболічним** *або* **параболічного** *типу, якщо $n^0 = 1$, а $n^+ = n - 1$ або $n^- = n - 1$.*

Зауваження 1. Наведені співвідношення між n^+, n^- і n^0, очевидно, не вичерпують усіх можливих випадків. Тому рівняння (1) у точці x^0 може не належати до жодного із зазначених типів. У цьому випадку кажуть, що воно є **безтипним**. Серед безтипних у цьому розумінні рівнянь виділяють ультрагіперболічні та ультрапараболічні.

Означення 2. *Рівняння (1) у точці x^0 називається:*

1) **ультрагіперболічним**, якщо $n^0 = 0$, $n^+ \geq 2$, $n^- \geq 2$;

2) **ультрапараболічним**, якщо $n^0 \geq 2$, а $n^- = 0$ або $n^+ = 0$.

Означення 3. *Рівняння (1) називається еліптичним, гіперболічним, параболічним, ультрагіперболічним чи ультрапараболічним* **в області** Ω, *якщо воно є таким у кожній точці цієї області.*

Зауваження 2. З означення 3 випливає, що рівняння (1) може в різних підобластях області Ω належати до різних типів. Тоді воно називається рівнянням **мішаного типу**.

Наведемо приклади рівнянь, які належать до означених вище типів.

1) $\sum\limits_{j=1}^{n} \partial_{x_j}^2 u = f$ – еліптичне рівняння в $\mathbb{R}^n$, бо $K(x^0, y) = \sum\limits_{j=1}^{n} y_j^2$, а це означає, що $n^+(x^0) = n$ для всіх $x^0 \in \mathbb{R}^n$. Це рівняння називають **рівнянням Пуассона**.

2) $\sum\limits_{j=1}^{n-1} \partial_{x_j}^2 u - \partial_{x_n}^2 u = f$ – гіперболічне рівняння в $\mathbb{R}^n$, бо $K(x^0, y) = \sum\limits_{j=1}^{n-1} y_j^2 - y_n^2$, тобто $n^+(x^0) = n-1$, а $n^-(x^0) = 1$, для всіх $x^0 \in \mathbb{R}^n$. Воно називається **хвильовим рівнянням**.

3) Рівняння $\sum\limits_{j=1}^{n-1} \partial_{x_j}^2 u - \partial_{x_n} u = f$ є параболічним в $\mathbb{R}^n$, бо $K(x^0, y) = \sum\limits_{j=1}^{n-1} y_j^2$, тобто $n^0(x^0) = 1$, а $n^+(x^0) = n-1$ для будь-якого $x^0 \in \mathbb{R}^n$. Це рівняння називається рівнянням **теплопровідності** або **рівнянням дифузії**.

4) $\sum\limits_{j=1}^{2} \partial_{x_j}^2 u - \sum\limits_{j=3}^{5} \partial_{x_j}^2 u = f$ – ультрагіперболічне рівняння в $\mathbb{R}^5$, бо $K(x^0, y) = \sum\limits_{j=1}^{2} y_j^2 - \sum\limits_{j=3}^{5} y_j^2$, і, отже, $n^0(x^0) = 0$, $n^+(x^0) = 2$, $n^-(x^0) = 3$ для всіх $x^0 \in \mathbb{R}^5$.

5) Рівняння $\sum\limits_{j=1}^{n-2} \partial_{x_j}^2 u - x_{n-2}\, \partial_{x_{n-1}} u - \partial_{x_n} u = f$ є ультрапараболічним в $\mathbb{R}^n$, бо $n^0(x^0) = 2$, $n^+(x^0) = n-2$, $n^-(x^0) = 0$ для

будь-якого $x^0 \in \mathbb{R}^n$. Воно називається **рівнянням дифузії з інерцією Колмогорова**.

6) Рівняння $x_2\partial^2_{x_1}u + \partial^2_{x_2}u = f$ є рівнянням мішаного типу в $\mathbb{R}^2$. Справді, при $x^0_2 > 0$ маємо $K(x^0, y) = x^0_2\, y_1^2 + y_2^2 = = (\sqrt{x^0_2}y_1)^2 + y_2^2 = z_1^2 + z_2^2$, а отже, $n^+(x^0) = 2$, а $n^-(x^0) = 0$, а це означає, що рівняння еліптичне. Аналогічно, при $x^0_2 < 0$ $K(x^0, y) = -(\sqrt{-x^0_2}y_1)^2 + y_2^2 = -z_1^2 + z_2^2$, $n^+(x^0) = 1$, а $n^-(x^0) = = 1$, тобто рівняння гіперболічне. Якщо ж $x^0_2 = 0$, то $K(x^0, y) = y_2^2$, а отже, $n^0(x^0) = 1$, $n^+(x^0) = 1$, тобто рівняння параболічне (рис. 2.1). Розглянуте рівняння, яке називається **рівнянням Трикомі**, відіграє важливу роль, наприклад, у газовій динаміці колозвукових швидкостей. В області гіперболічності воно відповідає надзвуковому рухові, а в області еліптичності – дозвуковому рухові.

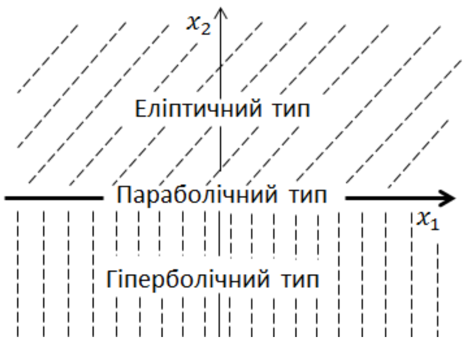

Рис. 2.1

Зауваження 3. Оскільки при класифікації рівнянь вигляду (1) бере участь лише група старших членів рівняння, то аналогічно класифікують квазілінійні рівняння з частинними похідними другого порядку вигляду

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{x_ix_j} + f(x, u, u_{x_1}, \ldots, u_{x_n}) = 0. \tag{4}$$

2.1.2 Випадок двох незалежних змінних. Розглянемо рівняння (4) у випадку двох незалежних змінних x_1, x_2, записавши його у вигляді

$$a(x)u_{x_1x_1} + 2b(x)u_{x_1x_2} + c(x)u_{x_2x_2}+$$
$$+f(x, u, u_{x_1}, u_{x_2}) = 0,\ x \in \Omega, \tag{5}$$

де $x := (x_1, x_2)$. Вважатимемо, що функції a, b, c неперервно диференційовні в Ω і такі, що $a^2(x) + b^2(x) + c^2(x) > 0$, $x \in \Omega$.

Для визначення типу рівняння (5) можна скористатися методикою, описаною в попередньому пункті. Ми скористаємося іншим способом, який пов'язаний з класифікацією ліній другого порядку.

Припустимо, що a, b, c – сталі, і введемо позначення $\delta := = b^2 - ac$. Розглянемо квадратичну форму

$$K(y) = ay_1^2 + 2by_1y_2 + cy_2^2, \;\; y \in \mathbb{R}^2,$$

і, припускаючи, що $a > 0$, запишемо її у вигляді

$$K(y) = \frac{1}{a}\left((ay_1 + by_2)^2 - (b^2 - ac)y_2^2\right), \;\; y \in \mathbb{R}^2.$$

Якщо $\delta > 0$, то, ввівши нові незалежні змінні z_1 і z_2 за формулами

$$z_1 = \frac{1}{\sqrt{a}}(ay_1 + by_2), \quad z_2 = \sqrt{\frac{\delta}{a}}\, y_2, \tag{6}$$

одержимо, що

$$K(z) = z_1^2 - z_2^2, \;\; z := (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2,$$

тобто $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, а це означає, що рівняння (5) гіперболічне.

Якщо $\delta < 0$, то запишимо K у вигляді

$$K(y) = \frac{1}{a}\left((ay_1 + by_2)^2 + (ac - b^2)y_2^2\right), \;\; y \in \mathbb{R}^2.$$

Заміна

$$z_1 = \frac{1}{\sqrt{a}}(ay_1 + by_2), \quad z_2 = \sqrt{-\frac{\delta}{a}}y_2$$

зводить квадратичну форму до вигляду

$$K(z) = z_1^2 + z_2^2, \;\; z \in \mathbb{R}^2.$$

Тут $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$, а це означає, що рівняння (5) є еліптичним.

У випадку $\delta = 0$ заміна

$$z_1 = \frac{1}{\sqrt{a}}(ay_1 + by_2), \quad z_2 = y_2$$

зводить квадратичну форму K до вигляду

$$K(z) = z_1^2, \quad z \in \mathbb{R}^2,$$

де $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$. Отже, рівняння (5) у цьому випадку параболічне.

Подібні міркування можна провести для випадку, коли $c > 0$. Інші випадки легко розглядаються або зводяться до розглянутих.

З цих міркувань випливає, що для рівняння (5) можна користуватись таким означенням.

Означення 4. *Рівняння (5) в області Ω називається:*

1) **еліптичним**, *якщо $\delta(x) := b^2(x) - a(x)c(x) < 0$, $x \in \Omega$;*

2) **гіперболічним**, *якщо $\delta(x) > 0$, $x \in \Omega$;*

3) **параболічним**, *якщо $\delta(x) = 0$, $x \in \Omega$.*

Зауваження 4. Як видно з наведеного означення, для визначення типу рівняння (5) в області Ω непотрібно попередньо знаходити його тип окремо в кожній точці цієї області. Серед рівнянь вигляду (5) уже немає безтипних рівнянь.

Зауваження 5. Добре відомо, що коли рівняння

$$ay_1^2 + 2by_1y_2 + cy_2^2 + dy_1 + ey_2 + f = 0$$

визначає деякий реальний геометричний об'єкт, то він у випадку $\delta < 0$ є кривою еліптичного типу, у випадку $\delta > 0$ – гіперболічного і у випадку $\delta = 0$ – параболічного. Цим і оправдані відповідні назви для типів рівняння (5).

2.2 Зведення диференціального рівняння з частинними похідними другого порядку до канонічного вигляду

2.2.1 Випадок довільного числа незалежних змінних. Розглянемо диференціальне рівняння з частинними похідними другого порядку вигляду

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{x_i x_j} + f(x, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}) = 0, \; x \in \Omega. \tag{1}$$

Це рівняння можна звести в кожній точці $x^0 \in \Omega$ до простішого або канонічного вигляду за допомогою деякого лінійного невиродженого перетворення.

Нехай x^0 – фіксована точка з області Ω. Розглянемо рівняння

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x^0)u_{x_i x_j} + f(x, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}) = 0 \tag{2}$$

і квадратичну форму

$$K(x^0, y) := \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x^0) y_i y_j, \;\; y \in \mathbb{R}^n. \tag{3}$$

Нехай $y = Pz$, $P := (p_{ik})_{i,k=1}^{n}$, або

$$y_i = \sum_{k=1}^{n} p_{ik} z_k, \; i \in \{1, \dots, n\}, \tag{4}$$

– лінійне невироджене перетворення, яке зводить квадратичну форму (3) до канонічного вигляду. Підставивши (4) в (3), дістанемо

$$K(x^0, y) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x^0) \sum_{k=1}^{n} p_{ik} z_k \sum_{l=1}^{n} p_{jl} z_l =$$

$$= \sum_{k,l=1}^{n} \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x^0) p_{ik} p_{jl} \right) z_k z_l$$

або

$$K(x^0, y) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k(x^0) z_k^2, \ \ \lambda_k(x^0) \in \{-1, 0, 1\},$$

оскільки

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x^0) p_{ik} p_{jl} = \delta_{kl} \lambda_k(x^0), \ \ \{k, l\} \subset \{1, \ldots, n\}, \qquad (5)$$

де δ_{kl} – символ Кронекера, тобто $\delta_{kl} := \begin{cases} 1, \ l = k, \\ 0, \ l \neq k. \end{cases}$

Тепер у рівнянні (2) зробимо заміну

$$\xi = P'x, \ \ \xi := \mathrm{colon}(\xi_1, \ldots, \xi_n), \ \ x := \mathrm{colon}(x_1, \ldots, x_n)$$

або

$$\xi_i = \sum_{k=1}^{n} p_{ki} x_k, \ \ i \in \{1, \ldots, n\}, \qquad (6)$$

де $P' := (p_{ki})_{i,k=1}^{n}$ – матриця, транспонована до P. При заміні (6) невідома функція $u = u(x)$ перейде в функцію $\widetilde{u} = \widetilde{u}(\xi)$, причому $u(x) = \widetilde{u}(P'x)$.

Знайдемо частинні похідні u_{x_i}, $u_{x_i x_j}$ з останнього співвідношення

$$u_{x_i} = \sum_{k=1}^{n} \widetilde{u}_{\xi_k} p_{ik}, \ \ u_{x_i x_j} = \sum_{k,l=1}^{n} \widetilde{u}_{\xi_k \xi_l} p_{ik} p_{jl}$$

і підставимо в рівняння (2). Тоді одержимо рівняння

$$\sum_{k,l=1}^{n} \widetilde{u}_{\xi_k \xi_l} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x^0) p_{ik} p_{jl} + \widetilde{f}(\xi, \widetilde{u}, \widetilde{u}_{\xi_1}, \ldots, \widetilde{u}_{\xi_n}) = 0,$$

яке згідно з рівністю (5) набуде вигляду

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k(x^0) \widetilde{u}_{\xi_k \xi_k} + \widetilde{f}(\xi, \widetilde{u}, \widetilde{u}_{\xi_1}, \ldots, \widetilde{u}_{\xi_n}) = 0. \qquad (7)$$

Рівняння (7) є **канонічним виглядом** рівняння (2), в якому коефіцієнти групи старших членів зафіксовані в точці x^0.

Отже, рівняння (1) в кожній точці області Ω можна за допомогою деякого невиродженого лінійного перетворення звести до канонічного вигляду (7). Очевидно, що зазначеним методом неможливо звести рівняння (1) до канонічного вигляду навіть у тій області $\Omega_0 \subset \Omega$, де воно зберігає свій тип, тобто зберігає ту саму кількість додатних, від'ємних і нульових значень коефіцієнтів $\lambda_k(x)$. Якщо спробувати зводити рівняння (1) до канонічного вигляду за допомогою заміни загального вигляду $\xi_k = \varphi_k(x)$, $k \in \{1, \ldots, n\}$, то простий підрахунок показує, що при цьому потрібно знищити $\frac{1}{2}(n^2 - n)$ коефіцієнтів при мішаних похідних (вважаємо, що $a_{ij} = a_{ji}$) і, крім того, зробити коефіцієнти при чистих других похідних, що залишились, рівними 1 або -1. Отже, треба задовольнити більше ніж $\frac{1}{2}(n^2 - n)$ співвідношень, щоб мати змогу вибрати n функцій φ_k. Оскільки нерівність $\frac{1}{2}(n^2 - n) < n$ можлива лише при $n = 2$ і неможлива при $n \geq 3$, то у випадку, коли незалежних змінних більше двох, вибрати ці функції, взагалі кажучи, неможливо. Оскільки випадок $n = 2$ сюди не потрапив, то дослідимо його окремо.

Приклад 1. Визначити тип і звести до канонічного вигляду рівняння

$$u_{x_1x_1} - 4u_{x_1x_2} + 2u_{x_1x_3} + 4u_{x_2x_2} + u_{x_3x_3} - 2x_1x_2u_{x_1} + 3x_1u = 0.$$

◀ Розглянемо квадратичну форму, складену за групою старших членів рівняння

$$K = y_1^2 - 4y_1y_2 + 2y_1y_3 + 4y_2^2 + y_3^2$$

і зведемо її до канонічного вигляду **методом Лагранжа виділення повних квадратів**. Маємо

$$K = (y_1 - 2y_2 + y_3)^2 + (y_2 + y_3)^2 - (y_2 - y_3)^2.$$

Якщо зробити перетворення

$$z_1 = y_1 - 2y_2 + y_3, \;\; z_2 = y_2 + y_3, \;\; z_3 = y_2 - y_3,$$

то квадратична форма набуде канонічного вигляду

$$K = z_1^2 + z_2^2 - z_3^2.$$

Оскільки $n^+ = 2$, $n^- = 1$, то рівняння гіперболічне в $\mathbb{R}^3$.

Матриця P перетворення, яке звело квадратичну форму до канонічного вигляду, є оберненою до матриці

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Для того щоб звести до канонічного вигляду рівняння, треба вибрати перетворення так, щоб його матриця була оберненою і транспонованою до матриці A. Такою є матриця

$$P' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 3/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Отже, шукане перетворення має вигляд

$$\xi_1 = x_1,\ \xi_2 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3,\ \xi_3 = \frac{3}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3$$

або

$$x_1 = \xi_1,\ x_2 = \xi_2 + \xi_3 - 2\xi_1,\ x_3 = \xi_2 - \xi_3 + \xi_1.$$

Згідно з описаним вище група старших членів у канонічній формі рівняння має вигляд

$$\widetilde{u}_{\xi_1\xi_1} + \widetilde{u}_{\xi_2\xi_2} - \widetilde{u}_{\xi_3\xi_3}.$$

Перетворимо групу молодших членів рівняння, використавши рівність

$$u_{x_1} = \widetilde{u}_{\xi_1}\partial_{x_1}\xi_1 + \widetilde{u}_{\xi_2}\partial_{x_1}\xi_2 + \widetilde{u}_{\xi_3}\partial_{x_1}\xi_3 = \widetilde{u}_{\xi_1} + \frac{1}{2}\widetilde{u}_{\xi_2} + \frac{3}{2}\widetilde{u}_{\xi_3}.$$

Тоді канонічний вигляд заданого рівняння такий:

$$\widetilde{u}_{\xi_1\xi_1} + \widetilde{u}_{\xi_2\xi_2} - \widetilde{u}_{\xi_3\xi_3} -$$

$$-2\xi_1(\xi_2 + \xi_3 - 2\xi_1)\left(\widetilde{u}_{\xi_1} + \frac{1}{2}\widetilde{u}_{\xi_2} + \frac{3}{2}\widetilde{u}_{\xi_3}\right) + 3\xi_1\widetilde{u} = 0$$

або

$$\widetilde{u}_{\xi_1\xi_1} + \widetilde{u}_{\xi_2\xi_2} - \widetilde{u}_{\xi_3\xi_3} + 2(2\xi_1 - \xi_2 - \xi_3)\widetilde{u}_{\xi_1} + (2\xi_1 - \xi_2 - \xi_3)\widetilde{u}_{\xi_2} +$$

$$+3(2\xi_1 - \xi_2 - \xi_3)\widetilde{u}_{\xi_3} + 3\xi_1\widetilde{u} = 0. \blacktriangleright$$

2.2.2 Випадок двох незалежних змінних. Розглянемо диференціальне рівняння з частинними похідними другого порядку у випадку двох незалежних змінних вигляду

$$a(x,y)u_{xx} + 2b(x,y)u_{xy} + c(x,y)u_{yy} +$$

$$+f(x,y,u,u_x,u_y) = 0, \ (x,y) \in \Omega, \tag{8}$$

і зробимо заміну змінних

$$\xi = \xi(x,y), \ \ \eta = \eta(x,y), \ \ (x,y) \in \Omega, \tag{9}$$

де $\{\xi,\eta\} \subset C^2(\Omega)$, причому в області Ω якобіан перетворення

$$J(x,y) := \frac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)} := \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} \neq 0 \tag{10}$$

(тобто перетворення (9) є невиродженим). З умови (10) випливає, що систему рівнянь (9) можна розв'язати відносно x і y, тобто знайти

$$x = x(\xi,\eta), \ \ y = y(\xi,\eta).$$

Позначимо через $\widetilde{u}(\xi,\eta)$ невідому функцію після заміни (9), тобто $u(x,y) = \widetilde{u}(\xi(x,y),\eta(x,y))$. Диференціюючи це співвідношення, знаходимо

$u_x = \widetilde{u}_\xi\xi_x + \widetilde{u}_\eta\eta_x, \ \ u_y = \widetilde{u}_\xi\xi_y + \widetilde{u}_\eta\eta_y,$

$u_{xx} = \widetilde{u}_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2\widetilde{u}_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + \widetilde{u}_{\eta\eta}\eta_x^2 + \widetilde{u}_\xi\xi_{xx} + \widetilde{u}_\eta\eta_{xx},$

$u_{xy} = \widetilde{u}_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + \widetilde{u}_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + \widetilde{u}_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + \widetilde{u}_\xi\xi_{xy} + \widetilde{u}_\eta\eta_{xy},$

$u_{yy} = \widetilde{u}_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2\widetilde{u}_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + \widetilde{u}_{\eta\eta}\eta_y^2 + \widetilde{u}_\xi\xi_{yy} + \widetilde{u}_\eta\eta_{yy}.$

Підставляючи одержані рівності в рівняння (8), зведемо його до вигляду

$$\tilde{a}(\xi,\eta)\widetilde{u}_{\xi\xi} + 2\tilde{b}(\xi,\eta)\widetilde{u}_{\xi\eta} + \tilde{c}(\xi,\eta)\widetilde{u}_{\eta\eta} + \widetilde{f}(\xi,\eta,\widetilde{u},\widetilde{u}_\xi,\widetilde{u}_\eta) = 0, \tag{11}$$

де

$$\tilde{a}(\xi,\eta) := (a\xi_x^2 + 2b\xi_x\xi_y + c\xi_y^2)\Big|_{\substack{x=x(\xi,\eta)\\ y=y(\xi,\eta)}},$$

$$\tilde{b}(\xi,\eta) := (a\xi_x\eta_x + b(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + c\xi_y\eta_y)\Big|_{\substack{x=x(\xi,\eta)\\ y=y(\xi,\eta)}},$$

$$\tilde{c}(\xi,\eta) := (a\eta_x^2 + 2b\eta_x\eta_y + c\eta_y^2)\Big|_{\substack{x=x(\xi,\eta)\\ y=y(\xi,\eta)}}. \tag{12}$$

Зауваження 1. Якщо рівняння (8) лінійне і має вигляд

$$Lu := a(x,y)u_{xx} + 2b(x,y)u_{xy} + c(x,y)u_{yy}+$$

$$+d(x,y)u_x + e(x,y)u_y + f(x,y)u = g(x,y),$$

то воно заміною (9) зводиться до рівняння

$$\tilde{a}(\xi,\eta)\widetilde{u}_{\xi\xi} + 2\tilde{b}(\xi,\eta)\widetilde{u}_{\xi\eta} + \tilde{c}(\xi,\eta)\widetilde{u}_{\eta\eta} + \tilde{d}(\xi,\eta)\widetilde{u}_{\xi}+$$

$$+\tilde{e}(\xi,\eta)\widetilde{u}_{\eta} + \tilde{f}(\xi,\eta)\widetilde{u} = \widetilde{g}(\xi,\eta),$$

в якому коефіцієнти $\tilde{a}$, $\tilde{b}$ і $\tilde{c}$ визначаються формулами (12), а $\tilde{d}$, $\tilde{e}$, $\tilde{f}$ і $\widetilde{g}$ – формулами

$$\tilde{d} := (L\xi - f\xi)\Big|_{\substack{x=x(\xi,\eta)\\ y=y(\xi,\eta)}}, \;\; \tilde{e} := (L\eta - f\eta)\Big|_{\substack{x=x(\xi,\eta)\\ y=y(\xi,\eta)}},$$

$$\tilde{f} := f\Big|_{\substack{x=x(\xi,\eta)\\ y=y(\xi,\eta)}}, \;\; \tilde{g} := g\Big|_{\substack{x=x(\xi,\eta)\\ y=y(\xi,\eta)}}. \tag{13}$$

Використовуючи (12), безпосереднім обчисленням легко переконуємося у правильності рівності

$$\tilde{b}^2 - \tilde{a}\tilde{c} = ((b^2 - ac)J^2)\Big|_{\substack{x=x(\xi,\eta),\\ y=y(\xi,\eta)}}. \tag{14}$$

Звідси випливає, що *невироджене перетворення незалежних змінних не змінює тип рівняння.*

Оскільки коефіцієнти $\tilde{a}$, $\tilde{b}$, $\tilde{c}$ визначаються перетворенням (9), то цим ми скористаємося для спрощення рівняння (11). Виявляється, що вибір перетворення пов'язаний з типом рівняння (8), тому розглянемо окремо випадок кожного типу.

1) Гіперболічний тип ($\delta > 0$). З'ясуємо якою повинна бути заміна (9), щоб коефіцієнти $\tilde{a} = 0$ і $\tilde{c} = 0$. Як випливає з (12), для цього досить розв'язати рівняння

$$a(x,y)z_x^2 + 2b(x,y)z_x z_y + c(x,y)z_y^2 = 0 \tag{15}$$

і за ξ, η взяти його незалежні розв'язки. Рівняння (15) є диференціальним рівнянням з частинними похідними першого порядку. Такі рівняння розглянуто детально в розділі 1.

Нехай $a \neq 0$ в області Ω. Тоді рівняння (15) можна подати у вигляді

$$\frac{1}{a}\left(\left((az_x)^2 + 2abz_x z_y + (bz_y)^2\right) - \delta z_y^2\right) = 0$$

або

$$(az_x + bz_y)^2 - \delta z_y^2 = 0.$$

Останнє рівняння рівносильне сукупності рівнянь

$$az_x + (b + \sqrt{\delta})z_y = 0, \tag{16}$$

$$az_x + (b - \sqrt{\delta})z_y = 0. \tag{17}$$

Для знаходження розв'язків рівнянь (16), (17) розглянемо звичайні диференціальні рівняння першого порядку

$$\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b + \sqrt{\delta}}, \quad \frac{dx}{a} = \frac{dy}{b - \sqrt{\delta}},$$

які запишемо у вигляді

$$ady - (b + \sqrt{\delta})dx = 0, \tag{18}$$

$$ady - (b - \sqrt{\delta})dx = 0. \tag{19}$$

Між рівняннями (16) і (18) існує зв'язок, який описується теоремами 1.1 і 1.2 підрозділу 1.1, а саме: *нехай* $\{a, b, c\} \subset C^1(\Omega)$, $a^2 + b^2 + c^2 > 0$ *і* $b^2 - ac > 0$ *в* Ω *і* $\varphi(x,y) = C_1$ *– перший інтеграл рівняння (18), тоді* $z = \varphi(x,y)$ *є розв'язком рівняння (16) і, навпаки, якщо* $z = \varphi(x,y)$ *– розв'язок рівняння (16), то* $\varphi(x,y) = C_1$ *є першим інтегралом рівняння (18).*

Аналогічне твердження правильне і для рівнянь (17) і (19), а оскільки рівняння (18), (19) можна об'єднати в одне рівняння

$$a(dy)^2 - 2bdxdy + c(dx)^2 = 0, \tag{20}$$

то воно виконується і для рівнянь (15), (20).

Отже, якщо

$$\varphi(x, y) = C_1, \;\; \psi(x, y) = C_2, \tag{21}$$

є перші інтеграли рівнянь (18), (19) або два незалежні перші інтеграли рівняння (20), то, взявши заміну (9) у вигляді

$$\xi = \varphi(x, y), \;\;\; \eta = \psi(x, y), \tag{22}$$

дістанемо $\tilde{a} = 0$, $\tilde{c} = 0$. Тоді рівняння (11) набуде вигляду

$$2\tilde{b}(\xi, \eta)\widetilde{u}_{\xi\eta} + \widetilde{f}(\xi, \eta, \widetilde{u}, \widetilde{u}_\xi, \widetilde{u}_\eta) = 0.$$

Якщо заміна (22) невироджена, то з (14) випливає, що $\tilde{b} \neq 0$. Тоді, поділивши останнє рівняння на $2\tilde{b} \neq 0$, одержимо канонічний вигляд рівняння (8)

$$\widetilde{u}_{\xi\eta} + \widetilde{f}_1(\xi, \eta, \widetilde{u}, \widetilde{u}_\xi, \widetilde{u}_\eta) = 0, \tag{23}$$

де $\tilde{f}_1 := \tilde{f}/(2\tilde{b})$.

Зауваження 2. Часто користуються іншим, ніж (23), канонічним виглядом рівняння гіперболічного типу. Якщо зробити заміну $\xi = \alpha + \beta$, $\eta = \alpha - \beta$, то рівняння (23) набуде вигляду

$$\widetilde{\widetilde{u}}_{\alpha\alpha} - \widetilde{\widetilde{u}}_{\beta\beta} + 4\widetilde{\widetilde{f}}_1(\alpha, \beta, \widetilde{\widetilde{u}}, \widetilde{\widetilde{u}}_\alpha, \widetilde{\widetilde{u}}_\beta) = 0.$$

Залишилось довести, що перетворення (22) невироджене. Оскільки φ є розв'язком рівняння (16), а ψ – розв'язком рівняння (17), то

$$a\varphi_x + (b + \sqrt{\delta})\varphi_y = 0,$$

$$a\psi_x + (b - \sqrt{\delta})\psi_y = 0. \tag{24}$$

Помноживши перше рівняння на ψ_y, а друге – на φ_y і віднявши від першого результату другий, одержимо

$$a(\varphi_x\psi_y - \varphi_y\psi_x) = -2\sqrt{\delta}\ \varphi_y\psi_y$$

або

$$a\ J = -2\sqrt{\delta}\ \varphi_y\psi_y.$$

Оскільки $a \neq 0$ в Ω, то рівність нулю якобіана J в деякій точці $(x^0, y^0) \in \Omega$ рівносильна тому, що $\varphi_y(x^0, y^0) = 0$ або $\psi_y(x^0, y^0) = 0$. Якщо, наприклад, $\varphi_y(x^0, y^0) = 0$, то з (24) випливає, що $\varphi_x(x^0, y^0) = 0$, а це суперечить тому, що $\varphi(x, y) = C_1$ – перший інтеграл, а отже, й загальний інтеграл рівняння (18), тобто загальний розв'язок в неявній формі.

Ми вважали, що $a \neq 0$ в області Ω. Аналогічно розглядається випадок, коли $c \neq 0$ в області Ω. Якщо ж $a = 0$ і $c = 0$ в Ω, то тоді обов'язково $b \neq 0$, а це означає, що рівняння (8) уже має канонічний вигляд типу (23).

Означення. *Лінії, що визначаються рівняннями (21), називаються* **характеристичними лініями** *або* **характеристиками** *рівняння (1), а рівняння (20) –* **рівнянням характеристик** *або* **характеристичним рівнянням***.*

Зауваження 3. Оскільки для *гіперболічного* рівняння (8) $\delta > 0$, то воно має *дві сім'ї дійсних характеристик.*

Зауваження 4. На практиці виписують характеристичне рівняння (20), знаходять його два незалежні перші інтеграли (21) і роблять заміну змінних (22), яка й зводить задане рівняння до канонічного вигляду.

Приклад 2. Звести до канонічного вигляду рівняння

$$u_{xx} - 2\sin x u_{xy} - \cos^2 x u_{yy} - \cos x u_y = 0.$$

◀ Для цього рівняння $a = 1$, $b = -\sin x$, $c = -\cos^2 x$, $d = 0$, $e = -\cos x$, $f = 0$, $g = 0$. Воно є рівнянням гіперболічного типу в $\mathbb{R}^2$, бо $\delta = (-\sin x)^2 - 1 \cdot (-\cos^2 x) = \sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Складаємо характеристичне рівняння

$$(dy)^2 + 2\sin x dx dy - \cos^2 x (dx)^2 = 0$$

або

$$dy + (1 + \sin x)dx = 0, \;\; dy - (1 - \sin x)dx = 0.$$

Зінтегрувавши ці рівняння, дістанемо

$$x + y - \cos x = C_1, \;\; x - y + \cos x = C_2.$$

Введемо нові змінні ξ і η за формулами

$$\xi = x + y - \cos x, \;\; \eta = x - y + \cos x.$$

Тоді згідно з теорією $\tilde{a} = 0$, $\tilde{c} = 0$. Коефіцієнти $\tilde{b}$, $\tilde{d}$, $\tilde{e}$, $\tilde{f}$ і $\tilde{g}$ знаходимо за формулами (12) і (13). Маємо

$\xi_x = 1 + \sin x, \quad \eta_x = 1 - \sin x, \quad \xi_y = 1, \quad \eta_y = -1,$

$\xi_{xx} = \cos x, \;\; \eta_{xx} = -\cos x, \;\; \xi_{xy} = 0, \;\; \eta_{xy} = 0, \;\; \xi_{yy} = 0, \;\; \eta_{yy} = 0,$

а тому

$\tilde{b} = (1 + \sin x)(1 - \sin x) - \sin x(-1 - \sin x + 1 - \sin x) +$
$\quad + \cos^2 x = 2,$

$\tilde{d} = \cos x - 2 \sin x \cdot 0 - \cos^2 x \cdot 0 - \cos x \cdot 1 = 0,$

$\tilde{e} = -\cos x - 2 \sin x \cdot 0 - \cos^2 x \cdot 0 + \cos x = 0,$

$\tilde{f} = f = 0, \; \tilde{g} = g = 0.$

Отже, задане рівняння в нових незалежних змінних має вигляд

$$4\widetilde{u}_{\xi\eta} = 0 \quad \text{або} \quad \widetilde{u}_{\xi\eta} = 0. \blacktriangleright$$

2) Параболічний тип ($\delta = 0$). Якщо попередній підхід використати і в цьому випадку, тобто виписати рівняння (20) і розв'язати його, то внаслідок умови параболічності одержимо тільки один перший інтеграл $\varphi(x, y) = C$ і, отже, зможемо визначити тільки одну з нових незалежних змінних $\xi = \varphi(x, y)$. Другу змінну $\eta = \psi(x, y)$ виберемо довільно, зберігаючи загальні вимоги, тобто функція ψ має бути двічі неперервно диференційовною, а заміна (22) – невиродженою. Тоді $\tilde{a} = 0$, як і у випадку рівнянь гіперболічного типу. З формули (14) випливає, що $\tilde{b} = 0$, і ми приходимо до рівняння

$$\tilde{c}(\xi, \eta)\widetilde{u}_{\eta\eta} + \widetilde{f}(\xi, \eta, \widetilde{u}, \widetilde{u}_\xi, \widetilde{u}_\eta) = 0. \qquad (25)$$

Коефіцієнт $\tilde{c}$, згідно з (12), набуває вигляду

$$\tilde{c} = \frac{1}{a}(a\psi_x + b\psi_y)^2, \;\; a \neq 0,$$

звідки випливає, що $\tilde{c} \neq 0$, бо в противному разі одержали б рівність

$$a\psi_x + b\psi_y = 0. \tag{26}$$

З вибору змінної ξ отримуємо

$$a\varphi_x + b\varphi_y = 0. \tag{27}$$

Оскільки якобіан $J \neq 0$, то з (26) і (27) випливає, що $a = 0$, $b = 0$, що суперечить припущенню $a \neq 0$.

Якщо умова $a \neq 0$ не виконується, то припускаючи, що $c \neq 0$ в Ω, замість рівностей (26) і (27) дістанемо рівності

$$b\psi_x + c\psi_y = 0, \quad b\varphi_x + c\varphi_y = 0,$$

звідки аналогічно до попереднього приходимо до суперечності.

Випадок, коли одночасно $a = 0$ і $c = 0$ неможливий, бо з рівності $\delta = 0$ випливає, що $b = 0$, а це супуречить тому, що $a^2 + b^2 + c^2 > 0$.

Поділивши обидві частини рівняння (25) на $\tilde{c} \neq 0$, одержимо канонічний вигляд параболічного рівняння

$$\widetilde{u}_{\eta\eta} + \widetilde{F}(\xi, \eta, \widetilde{u}, \widetilde{u}_\xi, \widetilde{u}_\eta) = 0.$$

Очевидно, що *параболічне рівняння має одну сім'ю* $\varphi(x, y) = C$ *дійсних характеристик.*

Приклад 3. Звести до канонічного вигляду рівняння

$$x^2 u_{xx} - 2xyu_{xy} + y^2 u_{yy} + xu_x + yu_y = 0. \tag{28}$$

◄ Маємо $a = x^2$, $b = -xy$, $c = y^2$, $d = x$, $e = y$, $f = 0$, $g = 0$. Оскільки $\delta = x^2y^2 - x^2y^2 = 0$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, то рівняння є параболічним в $\mathbb{R}^2$.

Характеристичне рівняння має вигляд

$$x^2(dy)^2 + 2xydxdy + y^2(dx)^2 = 0$$

або

$$(x\,dy + y\,dx)^2 = 0.$$

Воно має одну сім'ю характеристик, яка визначається диференціальним рівнянням

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}.$$

Загальний інтеграл або сім'я характеристик цього рівняння $xy = C$. Це означає, що $\varphi(x, y) = xy$. За функцію $\psi(x, y)$ можна взяти довільну функцію, наприклад, $\psi(x, y) = y$, щоб якобіан $J \neq 0$. Отже, маємо перетворення

$$\xi = xy, \quad \eta = y.$$

Оскільки

$\xi_x = y, \quad \eta_x = 0, \quad \xi_y = x, \quad \eta_y = 1,$

$\xi_{xx} = 0, \quad \eta_{xx} = 0, \quad \xi_{xy} = 1, \quad \eta_{xy} = 0, \quad \xi_{yy} = 0, \quad \eta_{yy} = 0,$
то $\tilde{a} = 0$, $\tilde{b} = 0$, $\tilde{c} = y^2 = \eta^2$, $\tilde{d} = -2xy + xy + xy = 0$, $\tilde{e} = 0$, $\tilde{f} = f = 0$, $\tilde{g} = g = 0$.

Тому канонічний вигляд рівняння

$$\eta^2 \widetilde{u}_{\eta\eta} + \eta \widetilde{u}_\eta = 0$$

або

$$\eta \widetilde{u}_{\eta\eta} + \widetilde{u}_\eta = 0. \blacktriangleright$$

3) Еліптичний тип ($\delta < 0$). У цьому випадку рівняння характеристик (20) розпадається на два рівняння з комплексними коефіцієнтами. Розглянемо одне з них

$$a dy - (b + i\sqrt{-\delta}) dx = 0. \tag{29}$$

Очевидно, що його перший інтеграл буде комплекснозначним

$$\varphi(x, y) + i\psi(x, y) = C_1. \tag{30}$$

Розглянемо заміну змінних

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y). \tag{31}$$

Зауважимо, що розгляд іншого рівняння

$$ady - (b - i\sqrt{-\delta})dx = 0,$$

першим інтегралом якого є, очевидно,

$$\varphi(x, y) - i\psi(x, y) = C_2, \tag{32}$$

приводить фактично до такої самої заміни (з точністю до множника -1).

Для того щоб з'ясувати, якими будуть коефіцієнти рівняння (11) після заміни (31), скористаємося тим, що функція $z = \varphi + i\psi$ – розв'язок рівняння (15), тобто

$$a(\varphi_x + i\psi_x)^2 + 2b(\varphi_x + i\psi_x)(\varphi_y + i\psi_y) + c(\varphi_y + i\psi_y)^2 = 0.$$

Виділяючи в цій рівності дійсну та уявну частини, одержуємо

$$(a\varphi_x^2 + 2b\varphi_x\varphi_y + c\varphi_y^2) - (a\psi_x^2 + 2b\psi_x\psi_y + c\psi_y^2) +$$

$$+2i(a\varphi_x\psi_x + b(\varphi_x\psi_y + \varphi_y\psi_x) + c\varphi_y\psi_y) = 0.$$

Враховуючи формули (12), приходимо до рівностей

$$\tilde{a} = \tilde{c}, \quad \tilde{b} = 0,$$

причому при невиродженій заміні (31) з формули (14) випливає, що $\tilde{a} \neq 0$. Отже, одержуємо такий канонічний вигляд еліптичного рівняння:

$$\widetilde{u}_{\xi\xi} + \widetilde{u}_{\eta\eta} + \widetilde{F}(\xi, \eta, \widetilde{u}, \widetilde{u}_\xi, \widetilde{u}_\eta) = 0.$$

Залишилось довести, що вибрана заміна (31) невироджена. Оскільки $\varphi + i\psi$ є розв'язком рівняння (16), то

$$a(\varphi_x + i\psi_x) + (b + i\sqrt{-\delta})(\varphi_y + i\psi_y) = 0.$$

Прирівнюючи до нуля дійсну й уявну частину, одержуємо

$$\begin{aligned} a\varphi_x + b\varphi_y - \sqrt{-\delta}\psi_y &= 0, \\ a\psi_x + b\psi_y + \sqrt{-\delta}\varphi_y &= 0. \end{aligned} \tag{33}$$

Помножимо першу рівність на ψ_y, а другу на $-\varphi_y$ і результати додамо, тоді матимемо

$$a(\varphi_x\psi_y - \varphi_y\psi_x) = \sqrt{-\delta}(\varphi_y^2 + \psi_y^2). \tag{34}$$

З умови еліптичності рівняння (1) випливає, що $a \neq 0$. Якщо припустити, що в деякій точці $(x^0, y^0) \in \Omega$ виконується рівність

$$J = \varphi_x\psi_y - \varphi_y\psi_x = 0,$$

то з (34) випливає, що в цій точці $\varphi_y = 0$ і $\psi_y = 0$, а з рівнянь (33), що тоді й $\varphi_x = 0$, $\psi_x = 0$. Останнє суперечить тому, що (30) загальний інтеграл рівняння (29). Отже, заміна (31) невироджена.

З вищенаведеного видно, що *еліптичне рівняння має дві сім'ї (30) і (32) комплексних характеристик.*

Приклад 4. Звести до канонічного вигляду рівняння

$$u_{xx} + yu_{yy} + 3u_y = 0, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2_+ := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ y > 0\}.$$

◀ Маємо $a = 1$, $b = 0$, $c = y$, $d = 0$, $e = 3$, $f = 0$, $g = 0$. Тому $\delta = -y < 0$, а це означає, що рівняння еліптичне в $\mathbb{R}^2_+$.

Характеристичне рівняння

$$(dy)^2 + y(dx)^2 = 0$$

або

$$(dy - i\sqrt{y}dx)(dy + i\sqrt{y}dx) = 0$$

рівносильне сукупності рівнянь

$$\left[\begin{array}{l} dy = i\sqrt{y}dx, \\ dy = -i\sqrt{y}dx. \end{array}\right.$$

Перші інтеграли цих рівнянь мають вигляд $2\sqrt{y} + ix = C_1$, $2\sqrt{y} - ix = C_2$. Розглянемо перший з них і зробимо заміну $\xi = x$, $\eta = 2\sqrt{y}$.

Тоді $\xi_x = 1$, $\xi_y = 0$, $\xi_{xx} = 0$, $\xi_{xy} = 0$, $\xi_{yy} = 0$, $\eta_x = 0$, $\eta_y = y^{-\frac{1}{2}}$, $\eta_{xx} = 0$, $\eta_{xy} = 0$, $\eta_{yy} = -\frac{1}{2}y^{-\frac{3}{2}}$, а тому $\tilde{a} = \tilde{c} = 1$,

$\tilde{b} = 0, \quad \tilde{d} = 0, \quad \tilde{e} = y\big(-\frac{1}{2}y^{-\frac{3}{2}}\big) + 3y^{-\frac{1}{2}} \ = \ -\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}} + 3y^{-\frac{1}{2}} \ = $
$= \frac{5}{2}y^{-\frac{1}{2}} = \frac{5}{2\sqrt{y}} = \frac{5}{\eta}, \ \tilde{f} = 0, \ \tilde{g} = 0.$

Отже, канонічний вигляд рівняння

$$\widetilde{u}_{\xi\xi} + \widetilde{u}_{\eta\eta} + \frac{5}{\eta}\widetilde{u}_{\eta} = 0. \ \blacktriangleright$$

2.2.3 Про інтегрування диференціальних рівнянь із частинними похідними другого порядку. Відомо, що загальний розв'язок звичайного диференціального рівняння другого порядку залежить від двох довільних сталих. Вибираючи відповідним чином ці сталі, можна із загального розв'язку виділити будь-який частинний розв'язок, який задовольняє додаткові умови – початкові або крайові. Для рівнянь із частинними похідними поняття загального розв'язку в загальному випадку не вводиться. Проте, часто після зведення рівняння другого порядку до канонічного вигляду одержуємо рівняння, яке можна розв'язати за допомогою двох інтегрувань. Тоді одержимо розв'язок, який залежить від двох довільних функцій. У цьому випадку, за аналогією з теорією звичайних диференціальних рівнянь, розв'язок, який залежить від двох довільних функцій, називають загальним розв'язком диференціального рівняння з частинними похідними другого порядку.

Інколи вдається ввести нові незалежні змінні та нову функцію так, що рівняння після перетворень набуває вигляду, який дозволяє знайти його загальний розв'язок.

Приклад 5. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$u_{xx} - 4u_{xy} + 3u_{yy} - 2u_x + 6u_y = 0.$$

$\blacktriangleleft$ Спочатку зведемо задане рівняння до канонічного вигляду. Маємо $a = 1$, $b = -2$, $c = 3$, $d = -2$, $e = -6$, $f = 0$, $g = 0$, а тому $\delta = (-2)^2 - 1 \cdot 3 = 1 > 0$. Це означає, що рівняння гіперболічне в $\mathbb{R}^2$.

Рівняння характеристик $(dy)^2 + 4dxdy + 3(dx)^2 = 0$ рівносильне сукупності рівнянь $\frac{dy}{dx} = -1$, $\frac{dy}{dx} = -3$. Перші інтеграли (характеристики) мають вигляд $x + y = C_1$, $3x + y = C_2$.

Нові змінні введемо рівностями

$$\xi = x + y, \quad \eta = 3x + y.$$

Тоді $\xi_x = 1$, $\xi_y = 1$, $\xi_{xx} = 0$, $\xi_{xy} = 0$, $\xi_{yy} = 0$, $\eta_x = 3$, $\eta_y = 1$, $\eta_{xx} = 0$, $\eta_{xy} = 0$, $\eta_{yy} = 0$, а отже, $\tilde{a} = 0$, $\tilde{c} = 0$, $\tilde{b} = 1 \cdot 3 - 2(1 + + 3) + 3 \cdot 1 \cdot 1 = -2$, $\tilde{d} = -2 + 6 = 4$, $\tilde{e} = -6 + 6 = 0$, $\tilde{f} = 0$, $\tilde{g} = 0$. Звідси випливає, що рівняння набуває такого канонічного вигляду:

$$-4\widetilde{u}_{\xi\eta} + 4\widetilde{u}_{\xi} = 0 \quad \text{або} \quad \widetilde{u}_{\xi\eta} - \widetilde{u}_{\xi} = 0.$$

Запишемо це рівняння у вигляді

$$(\widetilde{u}_{\eta} - \widetilde{u})_{\xi} = 0.$$

Тоді одержуємо, що $\widetilde{u}_{\eta} - \widetilde{u}$ є функцією від η, тобто

$$\widetilde{u}_{\eta} - \widetilde{u} = \widetilde{\varphi}(\eta).$$

Отже, одержали лінійне неоднорідне рівняння при кожному можливому значенні ξ. Його загальним розв'язком є

$$\widetilde{u} = e^{\eta}\Big(\psi(\xi) + \int \widetilde{\varphi}(\eta)e^{-\eta}d\eta\Big).$$

Оскільки $\widetilde{\varphi}$ – довільна функція, то $e^{\eta}\int \widetilde{\varphi}(\eta)e^{-\eta}d\eta$ є також довільною функцією від η, яку позначимо через $\varphi(\eta)$. Тому

$$\widetilde{u}(\xi, \eta) = \varphi(\eta) + \psi(\xi)e^{\eta}.$$

Повернувшись до змінних x і y, дістанемо загальний розв'язок заданого рівняння

$$u(x, y) = \varphi(3x + y) + \psi(x + y)e^{3x+y},$$

де φ і ψ – довільні двічі неперервно диференційовні функції. ▶

Приклад 6. Знайти загальний розв'язок рівняння (28), тобто рівняння

$$x^2 u_{xx} - 2xyu_{xy} + y^2 u_{yy} + xu_x + yu_y = 0.$$

◀ У прикладі 3 задане рівняння за допомогою заміни $\xi = xy$, $\eta = y$ зведено до канонічного вигляду

$$\eta\widetilde{u}_{\eta\eta} + \widetilde{u}_{\eta} = 0.$$

Знайдемо загальний розв'язок цього рівняння. Зробимо в рівнянні заміну $\widetilde{u}_{\eta} = v$, тоді рівняння набуде вигляду

$$\eta\frac{dv}{d\eta} + v = 0.$$

Одержали звичайне диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними при кожному фіксованому ξ. Відокремивши змінні та зінтегрувавши, дістанемо:

$$\frac{dv}{v} = -\frac{d\eta}{\eta}, \quad \ln|v| = -\ln|\eta| + \ln|\varphi(\xi)|$$

або

$$v = \varphi(\xi)\frac{1}{\eta}.$$

Повернувшись до функції $\widetilde{u}$, отримаємо рівняння

$$\partial_{\eta}\widetilde{u} = \varphi(\xi)\frac{1}{\eta}.$$

Зінтегрувавши його, одержимо

$$\widetilde{u}(\xi, \eta) = \varphi(\xi)\ln|\eta| + \psi(\xi).$$

Звідси випливає, що загальний розв'язок вихідного рівняння має вигляд

$$u(x, y) = \varphi(xy)\ln|y| + \psi(xy),$$

де φ і ψ – довільні двічі неперервно диференційовні функції. ▶

Вправи до розділу 2

1. Визначити тип рівняння і звести його до канонічного вигляду:

1) $u_{xx} + 2u_{xy} - 2u_{xz} + 2u_{yy} + 6u_{zz} = 0;$

2) $u_{xy}+u_{xz}-u_{yz}-u_x+u_y=0$;
3) $4u_{xx}-4u_{xy}-2u_{yz}+u_x+u_z=0$;
4) $u_{xy}-u_{xz}+u_x+u_y-u_z=0$;
5) $u_{xy}-u_{xt}+u_{zz}-2u_{zt}+2u_{tt}=0$;
6) $u_{xx}+4u_{xy}-u_{zz}=0$;
7) $u_{xx}+2u_{xy}+2u_{yy}+4u_{yz}+5u_{zz}-xu_x+yu_z=0$;
8) $4u_{xx}+2u_{yy}-6u_{zz}+6u_{xy}+10u_{xz}+4u_{yz}+2u=0$.

2. У кожній області, де зберігається тип рівняння, звести його до канонічного вигляду:
1) $u_{xx}-2\cos x u_{xy}-(3+\sin^2 x)u_{yy}-yu_y=0$;
2) $u_{xx}-2xu_{xy}+x^2u_{yy}-2u_y=0$;
3) $(1+x^2)u_{xx}+(1+y^2)u_{yy}+xu_x+yu_y=0$;
4) $x^2u_{xx}-y^2u_{yy}-2yu_y=0$;
5) $\sin^2 x u_{xx}-2y\sin x u_{xy}+y^2u_{yy}=0$;
6) $y^2u_{xx}-2xyu_{xy}+x^2u_{yy}=0$;
7) $yu_{xx}+u_{yy}=0, \quad y>0$;
8) $u_{xx}-2\sin x u_{xy}+(2-\cos^2 x)u_{yy}=0$;
9) $u_{xx}-4u_{xy}+4u_{yy}+u_y-u_x=0$.

3. Знайти загальний розв'язок рівняння:
1) $u_{xx}-2\sin x u_{xy}-\cos^2 x u_{yy}-\cos x u_y=0$;
2) $3u_{xx}-5u_{xy}-2u_{yy}+3u_x+u_y=2$;
3) $e^{-2x}u_{xx}-e^{-2y}u_{yy}-e^{-2x}u_x+e^{-2y}u_y+8e^{y}=0$;
4) $x^2u_{xx}-y^2u_{yy}=0$;
5) $u_{xx}+2au_{xy}+a^2u_{yy}+u_x+au_y=0$;
6) $u_{xy}-2u_x-3u_y+6u=2e^{x+y}$;
7) $u_{xx}+4u_{xy}-5u_{yy}+u_x-u_y=0$;
8) $u_{yy}-2u_{xy}+2u_x-u_y=4e^{x}$.

Відповіді до вправ з розділу 2

1. 1) $\widetilde{u}_{\xi_1\xi_1}+\widetilde{u}_{\xi_2\xi_2}+\widetilde{u}_{\xi_3\xi_3}=0$, $\xi_1=x$, $\xi_2=-x+y$, $\xi_3=x-\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z$;
2) $\widetilde{u}_{\xi_1\xi_1}-\widetilde{u}_{\xi_2\xi_2}-\widetilde{u}_{\xi_3\xi_3}+2\widetilde{u}_{\xi_2}=0$, $\xi_1=x+y$, $\xi_2=-x+y$, $\xi_3=-x-y+z$;
3) $\widetilde{u}_{\xi_1\xi_1}-\widetilde{u}_{\xi_2\xi_2}+\widetilde{u}_{\xi_3\xi_3}+\widetilde{u}_{\xi_2}=0$, $\xi_1=\frac{x}{2}$, $\xi_2=\frac{x}{2}+y$, $\xi_3=-\frac{x}{2}-y+z$;

4) $\widetilde{u}_{\xi_1\xi_1} - \widetilde{u}_{\xi_2\xi_2} + 2\widetilde{u}_{\xi_1} = 0$, $\xi_1 = x + y$, $\xi_2 = -x + y$, $\xi_3 = y + z$;
5) $\widetilde{u}_{\xi_1\xi_1} - \widetilde{u}_{\xi_2\xi_2} + \widetilde{u}_{\xi_3\xi_3} + \widetilde{u}_{\xi_4\xi_4} = 0$, $\xi_1 = x + y$, $\xi_2 = -x + y$, $\xi_3 = z$, $\xi_4 = y + z + t$;
6) $\widetilde{u}_{\xi_1\xi_1} - \widetilde{u}_{\xi_2\xi_2} - \widetilde{u}_{\xi_3\xi_3} = 0$, $\xi_1 = x$, $\xi_2 = -x + \frac{y}{2}$, $\xi_3 = z$;
7) $\widetilde{u}_{\xi_1\xi_1} + \widetilde{u}_{\xi_2\xi_2} + \widetilde{u}_{\xi_3\xi_3} - \xi_1(\widetilde{u}_{\xi_1} - \widetilde{u}_{\xi_2}) + (\xi_1 + \xi_2)\widetilde{u}_{\xi_3} = 0$, $\xi_1 = x$, $\xi_2 = -x + y$, $\xi_3 = 2x - 2y + z$;
8) $\widetilde{u}_{\xi_1\xi_1} + \widetilde{u}_{\xi_2\xi_2} + 2\widetilde{u} = 0$, $\xi_1 = \frac{1}{2}x$, $\xi_2 = -\frac{3}{2}x + 2y$, $\xi_3 = 4x - 7y + z$.

2. 1) $\widetilde{u}_{\xi\eta} + \frac{\eta-\xi}{32}(\widetilde{u}_\xi - \widetilde{u}_\eta) = 0$, $\xi = 2x + \sin x + y$, $\eta = 2x - \sin x - y$;
2) $\widetilde{u}_{\eta\eta} - \widetilde{u}_\xi = 0$, $\xi = \frac{x^2}{2} + y$, $\eta = x$;
3) $\widetilde{u}_{\xi\xi} + \widetilde{u}_{\eta\eta} = 0$, $\xi = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$, $\eta = \ln(y + \sqrt{1 + y^2})$;
4) $\widetilde{u}_{\xi\eta} + \frac{1}{2\eta}\widetilde{u}_\xi = 0$, $\xi = xy$, $\eta = \frac{y}{x}$;
5) $\widetilde{u}_{\eta\eta} - \frac{2\xi}{\xi^2+\eta^2}\widetilde{u}_\xi = 0$, $\xi = y\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}$, $\eta = y$;
6) $\widetilde{u}_{\eta\eta} + \frac{2\xi}{\xi-\eta^2}\widetilde{u}_\xi = 0$, $\xi = x^2 + y^2$, $\eta = y$;
7) $\widetilde{u}_{\xi\xi} + \widetilde{u}_{\eta\eta} + \frac{1}{3\eta}\widetilde{u}_\eta = 0$, $\xi = x$, $\eta = \frac{2}{3}y^{3/2}$;
8) $\widetilde{u}_{\xi\xi} + \widetilde{u}_{\eta\eta} + \cos\xi\,\widetilde{u}_\eta = 0$, $\xi = x$, $\eta = y - \cos x$;
9) $\widetilde{u}_{\eta\eta} - \widetilde{u}_\xi - \widetilde{u}_\eta = 0$, $\xi = 2x + y$, $\eta = x$.

3. 1) $\widetilde{u}_{\xi\eta} = 0$, $u = f(x + y - \cos x) + g(x - y + \cos x)$;
2) $\widetilde{u}_{\xi\eta} + \frac{1}{7}\widetilde{u}_\eta = \frac{2}{49}$, $u = \frac{2}{7}(2x+y) + f(x-3y) + g(2x+y)e^{\frac{1}{7}(3y-x)}$;
3) $\widetilde{u}_{\xi\eta} = \xi + \eta$, $u = e^{y}(e^{2y} - e^{2x}) + f(e^{y} - e^{x}) + g(e^{y} + e^{x})$;
4) $\widetilde{u}_{\xi\eta} - \frac{1}{2\xi}\widetilde{u}_\eta = 0$, $u = \sqrt{xy}f(\frac{y}{x}) + g(xy)$;
5) $\widetilde{u}_{\xi\xi} + \widetilde{u}_\xi = 0$, $u = f(y - ax) + g(y - ax)e^{-x}$;
6) $u = e^{x+y} + (f(x) + g(y))e^{3x+2y}$;
7) $u = f(x + y) + e^{-(x+y)}g(5x - y)$;
8) $u = 2e^{x} + e^{\frac{x+2y}{2}}\varphi(x) + \psi(x + 2y)$.

3 МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ДЕЯКИХ ФІЗИЧНИХ ПРОЦЕСІВ

У цьому розділі розглянемо приклади задач природознавства, математичні моделі яких описуються диференціальними рівняннями з частинними похідними.

Для того щоб правильно скласти математичну модель фізичного процесу, слід спочатку з'ясувати суть даного процесу і вибрати функцію u, яка його однозначно описує. Далі треба використати один із законів природи, що характеризує процес, і застосувати його до довільної ділянки досліджуваного об'єкта. Використовуючи при цьому теореми математичного аналізу, одержуємо після відповідних перетворень, наприклад, співвідношення вигляду

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} dt \int\limits_{\Omega} F(x, t, u, u_{x_1}, \ldots, u_{x_3 x_3}, u_t, u_{tt})\, dx = 0.$$

Оскільки область інтегрування $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, та проміжок (t_1, t_2) довільні, а підінтегральна функція неперервна на $Q := \Omega \times (t_1, t_2)$, то вона в кожній точці області Q повинна дорівнювати нулю, тобто

$$F(x, t, u, u_{x_1}, \ldots, u_{x_3 x_3}, u_t, u_{tt}) = 0.$$

Це і є диференціальне рівняння процесу. Додаткові умови (початкові, крайові тощо) визначаємо з умов фізичного процесу.

У деяких випадках зручно поступати по-іншому. Замість того, щоб застосовувати закон природи до довільної ділянки, припускають, що змінні величини, які характеризують процес, є двічі неперервно диференційовними функціями, і застосовують закон фізики до малої ділянки об'єкта, обчислюючи значення фізичних характеристик у деяких середніх точках. Потім переходять до границі, стягуючи малу ділянку в точку. При цьому одержують рівняння розглядуваного процесу.

3.1 Рівняння коливань

Багато задач механіки (коливання струн, стержнів, мембран і тривимірних середовищ) і фізики (електромагнітні коливання) описуються **рівнянням коливань** (**хвильовим рівнянням**) вигляду

$$\rho\, u_{tt} = \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) - qu + F(x,t), \tag{1}$$

де $u = u(x,t)$ – невідома функція від n-вимірної просторової змінної $x := (x_1, \ldots, x_n)$, $n \in \mathbb{N}$, і одновимірної часової змінної t, коефіцієнти ρ, p і q визначаються властивостями середовища, де відбувається коливний процес, а вільний член F характеризує інтенсивність зовнішнього впливу. У рівнянні (1)

$$\operatorname{grad} u := (u_{x_1}, \ldots, u_{x_n}), \quad \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) = \sum_{j=1}^{n} (p\, u_{x_j})_{x_j}.$$

Зокрема, якщо ρ і p сталі, а $q = 0$, то, поклавши $a^2 := \dfrac{p}{\rho}$, $f(x,t) := \dfrac{F(x,t)}{\rho}$, одержимо n-вимірне хвильове рівняння

$$u_{tt} = a^2(u_{x_1x_1} + \ldots + u_{x_nx_n}) + f(x,t),$$

яке, ввівши позначення

$$\Delta := \partial_{x_1}^2 + \ldots + \partial_{x_n}^2,$$

запишемо у вигляді

$$u_{tt} = a^2 \Delta u + f(x,t).$$

3.1.1 Поперечні коливання струни. Виведемо рівняння малих поперечних коливань струни довжиною l.

Під струною розумітимемо тонку гнучку пружну нитку. Нехай у положенні рівноваги струна збігається з проміжком $(0,l)$ осі Ox. Гнучкість означає, що струна не чинить опору згину, якщо він не викликає її видовження. Математично це поняття полягає в тому, що коли подумки розрізати струну в точці x, то сила натягу $\overrightarrow{T}(x,t)$ напрямлена вздовж дотичної до профілю струни в момент часу t. Пружність означає, що сили, які виникають у струні, підпорядковані **закону Гука**, тобто натяг пропорційний відносному видовженню. Вивчатимемо малі поперечні коливання струни. Це означає, що всі точки струни здійснюють коливання в одній площині у напрямку, перпендикулярному до положення рівноваги, тобто до осі Ox. Тому коливання в кожний момент часу t повністю описується величиною відхилення кожної точки x від її положення рівноваги. Позначимо це відхилення через $u(x,t)$. Малість коливань означає, що ми нехтуватимемо величинами, які мають порядок мализни вищий, ніж $u_x = \operatorname{tg}\alpha$, де $\alpha = \alpha(x,t)$ – кут, який утворює дотична до миттєвого профілю струни в точці (x,t) з додатним напрямком осі Ox (рис. 3.1).

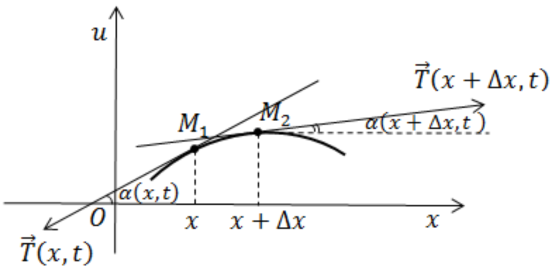

Рис. 3.1

Виділимо малу ділянку струни M_1M_2 і знайдемо суму всіх сил, які діють на неї. Згідно з **принципом Даламбера**, результуюча всіх цих сил, включаючи й силу інерції, дорівнює нулю.

Величина T сили натягу згідно з законом Гука пропорційна відносному видовженню ділянки. Доведемо, що ця сила при наших припущеннях не залежить ні від x, ні від t.

Розглянемо довільну ділянку $[x, x+\Delta x]$ струни, яка при коливанні деформується в ділянку M_1M_2. Довжина дуги цієї ділянки в момент часу t дорівнює $\int\limits_x^{x+\Delta x} \sqrt{1+u_\xi^2(\xi,t)}d\xi \approx \Delta x$, бо коливання малі й тому можна знехтувати величиною u_ξ^2. Це означає, що видовження ділянок струни в процесі коливання не відбувається і, отже, величина натягу T в кожній точці струни не змінюється з часом. Зауважимо, що величина натягу не залежить і від x, тобто $T = T_0$. Справді, оскільки ми вивчаємо лише поперечні коливання, то сила інерції і зовнішня сила напрямлені перпендикулярно до осі Ox, тому сума проекцій всіх сил на вісь Ox дорівнює

$$T(x + \Delta x, t)\, \cos\alpha(x + \Delta x, t) - T(x, t)\, \cos\alpha(x, t) = 0.$$

Оскільки коливання малі, то

$$\cos\alpha(x,t) = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha(x,t)}} = \frac{1}{\sqrt{1 + u_x^2(x,t)}} \approx 1$$

і, отже, $T(x,t) \approx T(x + \Delta x, t)$. Звідси, врахувавши довільність x і Δx, одержуємо, що величина натягу T не залежить від x. Отже, можна вважати, що $T \approx T_0$ для всіх значень x і t.

Сума проекцій на вісь Ou сил натягу, діючих у точках M_1 і M_2, дорівнює $Y = T_0\,(\sin\alpha(x+\Delta x, t) - \sin\alpha(x,t))$, але внаслідок наших припущень

$$\sin\alpha(x,t) = \frac{\operatorname{tg}\alpha(x,t)}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha(x,t)}} = \frac{u_x(x,t)}{\sqrt{1 + u_x^2(x,t)}} \approx u_x(x,t),$$

і, отже, $Y \approx T_0\,(u_x(x + \Delta x, t) - u_x(x,t))$. Зауваживши, що $u_x(x + \Delta x, t) - u_x(x,t) = u_{xx}(x + \theta_1 \Delta x, t)\, \Delta x$, де $\theta_1 \in (0,1)$, остаточно дістанемо

$$Y \approx T_0\, u_{xx}(x + \theta_1 \Delta x, t)\, \Delta x.$$

Позначимо через $p(x,t)$ густину зовнішньої сили, діючої у момент часу t на точку x струни паралельно осі Ou і розрахованої на одиницю довжини. Тоді проекція на вісь Ou зовнішньої сили, яка діє на ділянку M_1M_2 струни, дорівнюватиме

$$F_1 = p\,(x + \theta_2 \Delta x, t)\, \Delta x, \quad \theta_2 \in (0,1).$$

Вважатимемо, що коливання відбуваються в середовищі, яке чинить їм опір, який пропорційний швидкості, тобто густина сил опору дорівнює $-k(x) u_t(x,t)$. Тоді проекція цих сил на вісь Ou визначається рівністю

$$F_2 = -k(x + \theta_3 \Delta x)\, u_t(x + \theta_3 \Delta x, t) \Delta x, \quad \theta_3 \in (0,1).$$

Нехай $\rho(x)$ – лінійна густина маси струни в точці x. Тоді проекція сили інерції ділянки M_1M_2 струни на вісь Ou дорівнює

$$I = -\rho(x+\theta_4\Delta x)\, u_{tt}(x+\theta_4\Delta x, t)\Delta x,\ \ \theta_4 \in (0,1).$$

Згідно з принципом Даламбера $Y + F_1 + F_2 + I = 0$, тобто

$$\Big(T_0 u_{xx}(x+\theta_1\Delta x, t) + p(x+\theta_2\Delta x, t) - k(x+\theta_3\Delta x)\, u_t(x+\theta_3\Delta x, t) -$$

$$-\rho(x+\theta_4\Delta x)\, u_{tt}(x+\theta_4\Delta x, t)\Big)\Delta x = 0.$$

Якщо поділити цю рівність на Δx і перейти до границі при $\Delta x \to 0$, то дістанемо, що

$$\rho(x)\, u_{tt}(x,t) = T_0 u_{xx}(x,t) - k(x)\, u_t(x,t) + p(x,t),$$

$$0 < x < l,\ \ t > 0. \qquad (2)$$

Це і є шукане рівняння малих поперечних коливань струни.

Якщо $\rho(x) = \rho$ – стала, $k(x) = k$ – стала, то рівняння (2) набуде вигляду

$$u_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t) - b^2\, u_t(x,t) + f(x,t),\ 0 < x < l,\ t > 0, \quad (3)$$

де $a^2 := \dfrac{T_0}{\rho}$, $b^2 := \dfrac{k}{\rho}$, $f(x,t) := \dfrac{p(x,t)}{\rho}$.

У випадку, коли $f \not\equiv 0$, коливання називаються **вимушеними**, а при $f \equiv 0$ – **вільними**.

3.1.2 Поздовжні коливання стержня. Пружний прямолінійний стержень довжиною l виведено зі стану спокою наданням його поперечним перерізам у момент часу t малих поздовжніх зміщень і швидкостей. Припускаючи, що під час руху поперечні перерізи залишаються паралельними площині, яка перпендикулярна до осі стержня, вивести рівняння малих поздовжніх коливань стержня.

Нехай вісь стержня збігається з віссю Ox і нехай x – координата перерізу, коли він знаходиться у стані спокою (рис. 3.2).

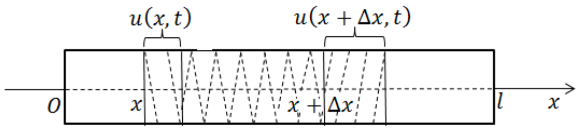

Рис. 3.2

Оскільки ми вивчаємо малі поздовжні коливання стержня, то це означає, що зовнішні сили і сили інерції напрямлені вздовж осі стержня. Позначимо через $u(x,t)$ зміщення вздовж осі Ox перерізу з координатою x у момент часу t. Для того щоб вивести рівняння малих поздовжніх коливань стержня, розглянемо ділянку стержня $(x, x+\Delta x)$ і врахуємо те, що згідно з принципом Даламбера сума всіх сил, які діють на цю ділянку у напрямку можливого переміщення, тобто вздовж осі Ox, включаючи й сили інерції, дорівнює нулю.

Вважаємо, що $\rho(x)$ – об'ємна густина маси стержня, а $p(x,t)$ – об'ємна густина зовнішніх сил, які діють вздовж осі Ox.

На виділену ділянку $(x, x+\Delta x)$ стержня діють такі сили: 1) $\overrightarrow{T}_{\text{л}}$ – натяг на лівому кінці, 2) $\overrightarrow{T}_{\text{п}}$ – натяг на правому кінці, 3) $\overrightarrow{F}$ – зовнішня сила, густина якої $p(x,t)$.

Згідно з законом Гука величина натягу $T(x,t)$ пропорційна відносному видовженню

$$T(x,t) = E(x)S(x)L(x,t),$$

де $E(x)$ – модуль пружності Юнга, $S(x)$ – площа поперечного перерізу з координатою x, $L(x,t)$ – відносне видовження в точці x. Ділянка $(x, x+\Delta x)$ у ненапруженому стані має довжину Δx, а в напруженому $\Delta x + u(x+\Delta x, t) - u(x,t)$. Тому абсолютне видовження дорівнює $u(x+\Delta x, t) - u(x,t)$, а відносне –

$$L(x,t) = \frac{u(x+\Delta x,t) - u(x,t)}{\Delta x} = u_x(x+\theta\Delta x, t)\,\frac{\Delta x}{\Delta x} =$$

$$= u_x(x+\theta\Delta x, t), \;\; \theta \in (0,1).$$

Якщо Δx – мале, то можна вважати, що

$$L(x,t) \approx u_x(x,t)$$

за умови, що u_x – неперервна функція.

Тепер знайдемо величини сил натягу, враховуючи напрямок кожної з них:

$$T_{\text{Л}} := T(x,t) \approx -S(x)E(x)u_x(x,t),$$
$$T_{\text{П}} := T(x+\Delta x,t) \approx S(x+\Delta x)E(x+\Delta x)u_x(x+\Delta x,t).$$

Врахувавши об'ємну густину зовнішніх сил, одержимо величину зовнішніх сил, що діють на ділянку $(x, x+\Delta x)$

$$F(x,t) \approx S(x)\, p(x,t)\, \Delta x.$$

Сила інерції дорівнює

$$I \approx -\rho(x)\, S(x)\, \Delta x\, u_{tt}(x,t).$$

Тому згідно з принципом Даламбера

$$T_{\text{Л}} + T_{\text{П}} + F + I = 0,$$

тобто

$$S(x+\Delta x)\, E(x+\Delta x)\, u_x(x+\Delta x,t) - S(x)\, E(x)\, u_x(x,t) +$$
$$+ S(x)\, p(x,t)\, \Delta x - S(x)\, \rho(x)\, u_{tt}(x,t)\, \Delta x = 0$$

або

$$\partial_x \Big(S(x)\, E(x)\, u_x(x,t) \Big) \Delta x + S(x)\, p(x,t)\, \Delta x -$$
$$- S(x)\, \rho(x)\, u_{tt}(x,t)\, \Delta x = 0.$$

Після скорочення на Δx дістанемо рівняння малих поздовжніх коливань стержня

$$S(x)\, \rho(x)\, u_{tt}(x,t) = (S(x)\, E(x)\, u_x(x,t))_x + S(x)\, p(x,t),$$
$$0 < x < l, \quad t > 0. \tag{4}$$

У випадку, коли стержень однорідний і має сталий переріз, тобто $\rho(x) = \rho_0$, $S(x) = S_0$ і $E(x) = E_0$, рівняння (4) набуде вигляду

$$u_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t) + f(x,t), \quad 0 < x < l,\ t > 0, \tag{5}$$

де $\quad a^2 := \dfrac{E_0}{\rho_0},\ f(x,t) := \dfrac{p(x,t)}{\rho_0}.$

3.1.3 Коливання важкої однорідної нитки. Гнучка однорідна нитка закріплена верхнім кінцем і під дією своєї ваги знаходиться у вертикальному положенні рівноваги. Знайдемо рівняння малих коливань нитки, яка виведена з цього положення рівноваги, а далі коливається під дією внутрішніх сил.

Як і у випадку малих поперечних коливань струни, коливання нитки описуються відхиленням $u(x,t)$ кожної точки x нитки від її положення рівноваги в момент часу t (рис. 3.3).

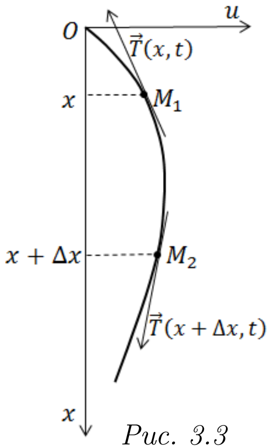

Рис. 3.3

Нехай довжина нитки l, а лінійна густина маси $\rho = \text{const}$. Натяг у точках M_1 і M_2 дорівнює відповідно $T(x,t) = \rho g(l-x)$, $T(x+\Delta x,t) = \rho g(l-x-\Delta x)$, де g – прискорення сили тяжіння, тобто вазі частини нитки, що знаходиться відповідно нижче точки x і $x+\Delta x$. Оскільки сила інерції напрямлена перпендикулярно до осі Ox, а зовнішня сила (вага ділянки M_1M_2) – паралельно осі Ox, то сума проекцій цих сил на вісь Ox дорівнює нулю:

$$-\rho g(l-x) + \rho g(l-x-\Delta x) + \rho g\Delta x = 0.$$

Будемо проектувати всі діючі сили на вісь Ou. Сума проекцій сил натягу в момент часу t, як і у випадку малих поперечних коливань струни, дорівнюватиме

$$Y = -\rho g(l-x)\sin\alpha(x,t) + \rho g(l-x-\Delta x)\sin\alpha(x+\Delta x,t) \approx$$

$$\approx \rho g((l-x-\Delta x)u_x(x+\Delta x,t) - (l-x)u_x(x,t)) =$$

$$= \rho g((l-x-\theta_1\Delta x)u_x(x+\theta_1\Delta x,t))_x\,\Delta x,$$

де $\alpha(x,t)$ – кут, утворений дотичною до профілю нитки в момент часу t, $\theta_1 \in (0,1)$.

Зовнішня сила $\overrightarrow{F}$ (вага ділянки M_1M_2) у момент часу t на вісь Ou проектується в нуль, а сила інерції згідно з другим законом Ньютона дорівнює

$$I = -\rho\, u_{tt}(x+\theta_2\Delta x,t)\,\Delta x, \quad \theta_2 \in (0,1).$$

На підставі принципу Даламбера $Y + F + I = 0$, тобто

$$\rho g((l - x - \theta_1 \Delta x) u_x(x + \theta_1 \Delta x, t))_x \, \Delta x - \rho u_{tt}(x + \theta_2 \Delta x, t) \, \Delta x = 0.$$

Звідси, скоротивши на $\rho \, \Delta x$ і перейшовши до границі при $\Delta x \to 0$, дістанемо шукане рівняння коливань важкої однорідної нитки

$$u_{tt}(x,t) = g((l - x) u_x(x,t))_x$$

або

$$u_{tt}(x,t) = a^2((l - x) u_x(x,t))_x, \quad 0 < x < l, \ t > 0, \tag{6}$$

де $a^2 := \sqrt{g}$.

Зауваження. Якщо нитка неоднорідна, тобто густина $\rho = \rho(x)$, то сила натягу T в точці M_1 визначається рівністю $T(x,t) = \int\limits_x^l \rho(\xi) d\xi$.

У випадку, коли коливання відбуваються в середовищі, яке чинить певний опір, то слід врахувати силу опору, що пропорційна, як правило, швидкості u_t.

3.1.4 Коливання мембрани. Під мембраною розуміють тонку плоску плівку, яка чинить опір розтягу і не опирається згину. Вважають, що мембрана в стані рівноваги займає деяку область Ω в площині Ox_1x_2. Розглядатимемо поперечні коливання мембрани, при яких кожна її точка рухається перпендикулярно до площини Ox_1x_2 паралельно осі Ou. Тоді зміщення u точки (x_1, x_2) мембрани буде функцією від x_1, x_2 і t тобто $u = u(x,t)$, де $x := (x_1, x_2)$.

Доведено [9, с. 16–18], що диференціальне **рівняння малих поперечних коливань мембрани** має вигляд

$$\rho(x) u_{tt} = T_0(u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2}) + p(x,t), \ x \in \Omega, \ t > 0, \tag{7}$$

де p – величина зовнішньої сили, розрахованої на одиницю площі і напрямленої паралельно осі Ou.

У випадку однорідної мембрани $\rho = \mathrm{const}$ рівняння малих поперечних коливань (7) можна записати у вигляді

$$u_{tt} = a^2(u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2}) + f(x,t), \ x \in \Omega, \ t > 0, \tag{8}$$

де

$$a := \sqrt{\frac{T_0}{\rho}}, \quad f(x,t) := \frac{p(x,t)}{\rho}.$$

Якщо зовнішня сила відсутня, тобто $p(x,t) \equiv 0$, то з рівняння (8) дістанемо **рівняння вільних коливань однорідної мембрани.**

3.1.5 Коливання тривимірного середовища. Доведено [9, с. 18–24], що малі пружні коливання твердих тіл, коливання газу, звукові коливання, електромагнітні коливання описуються неоднорідним хвильовим рівнянням (1). Зокрема, це рівняння задовольняє густина газу, його тиск і потенціал швидкостей, а також складові напруженості електричного та магнітного полів і відповідні потенціали.

3.2 Рівняння поширення тепла (рівняння дифузії)

Процеси поширення тепла або дифузії частинок у середовищі описуються загальним рівнянням

$$\rho\, u_t = \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) + F(x,t). \tag{1}$$

Розглянемо приклади конкретних задач, математичні моделі яких описуються рівняннями типу (1).

3.2.1 Поширення тепла в ізотропному твердому тілі. Позначимо через $u(x,t)$ температуру тіла D в точці $x := (x_1, x_2, x_3)$ у момент часу t. Вважаючи тіло ізотропним (властивості його в усіх напрямках однакові), позначимо через $\rho(x)$, $c(x)$ і $k(x)$ відповідно його густину маси, питому теплоємність і коефіцієнт теплопровідності в точці x. Нехай $F(x,t)$ – густина джерел тепла в точці x у момент часу t.

Якщо різні частини тіла мають різну температуру, то в тілі буде відбуватися рух тепла від більш нагрітих частин до менш нагрітих. Виведемо рівняння, яке описує цей процес. Для цього знайдемо баланс тепла в довільній підобласті $\Omega \subset D$ з гладкою межею S за довільний проміжок часу (t_1, t_2).

Використовуватимемо добре відомий в теорії теплопровідності **закон Фур'є**: *кількість тепла ΔQ, яка проходить через елемент поверхні $\Delta\sigma$ з площею ΔS за час Δt, пропорційна добутку $\Delta S \Delta t$ і похідній $\partial_{\vec{\nu}} u$ від температури u вздовж нормалі $\vec{\nu}$ до $\Delta\sigma$ у напрямку руху тепла, тобто*

$$\Delta Q = -k\,\Delta S \Delta t\,\partial_{\vec{\nu}}\,u = -k\,\Delta S \Delta t\,(\operatorname{grad} u)_{\overrightarrow{\nu}}, \tag{2}$$

де $(\operatorname{grad} u)_{\overrightarrow{\nu}}$ *– проекція вектора* $\operatorname{grad} u$ *на нормаль* $\overrightarrow{\nu}$, $k > 0$ *– коефіцієнт внутрішньої теплопровідності.*

Згідно з формулою (2) через поверхню S в область Ω за проміжок часу (t_1, t_2) надходить кількість тепла

$$Q_1 = \int\limits_{t_1}^{t_2} dt \int\limits_S k(x)\partial_{\vec{\nu}}\,u(x,t)\,dS = \int\limits_{t_1}^{t_2} dt \int\limits_S (k(x)\operatorname{grad} u(x,t), \vec{\nu}(x))\,dS,$$

де $\overrightarrow{\nu}$ – зовнішня нормаль до поверхні S, а $(\cdot,\,\cdot)$ – скалярний добуток в $\mathbb{R}^3$.

На підставі формули Остроградського–Ґауса величина Q_1 дорівнює

$$Q_1 = \int\limits_{t_1}^{t_2} dt \int\limits_\Omega \operatorname{div}(k(x)\operatorname{grad} u(x,t))\,dx.$$

За рахунок теплових джерел кількість тепла, яке виділилося або поглинулося в області Ω за проміжок часу (t_1, t_2), дорівнює

$$Q_2 = \int\limits_{t_1}^{t_2} dt \int\limits_\Omega F(x,t)dx.$$

Оскільки температура в області Ω за проміжок часу (t_1, t_2) змінилась на величину $u(x, t_2) - u(x, t_1)$, $x \in \Omega$, то для цього треба затратити кількість тепла

$$Q_3 = \int\limits_\Omega c(x)\rho(x)(u(x,t_2) - u(x,t_1))\,dx$$

або

$$Q_3 = \int\limits_{t_1}^{t_2} dt \int\limits_{\Omega} c(x)\rho(x)\, u_t(x,t)\, dx,$$

оскільки $u(x,t_2) - u(x,t_1) = \int\limits_{t_1}^{t_2} u_t(x,t)\, dt$.

Закон збереження енергії вимагає, щоб $Q_3 = Q_1 + Q_2$, тому одержуємо рівність

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} dt \int\limits_{\Omega} \Big(c(x)\rho(x)u_t(x,t) - \mathrm{div}(k(x)\mathrm{grad}\, u(x,t)) - F(x,t) \Big) dx = 0.$$

Якщо вважати, що підінтегральна функція неперервна, а область Ω і проміжок часу (t_1, t_2) довільні, то для будь-якої точки $x \in D$ і довільного моменту часу $t > 0$

$$c(x)\rho(x)u_t(x,t) = \mathrm{div}\,(k(x)\,\mathrm{grad}\, u(x,t)) + F(x,t). \qquad (3)$$

Це рівняння називається **рівнянням поширення тепла в неоднорідному ізотропному тілі.**

Якщо тіло однорідне, то c, ρ, k – сталі і тоді рівняння (3) можна записати у вигляді

$$u_t(x,t) = a^2(u_{x_1x_1}(x,t) + u_{x_2x_2}(x,t) + u_{x_3x_3}(x,t)) + f(x,t),$$
$$x \in D, \quad t > 0, \qquad (4)$$

де $a^2 := \dfrac{k}{c\rho}$, $f(x,t) := \dfrac{F(x,t)}{c\rho}$.

Якщо в розглядуваному тілі немає джерел тепла, тобто $F(x,t) = 0$, $x \in D$, $t > 0$, то дістанемо однорідне рівняння теплопровідності.

$$u_t(x,t) = a^2(u_{x_1x_1}(x,t) + u_{x_2x_2}(x,t) + u_{x_3x_3}(x,t)),$$
$$x \in D, \quad t > 0. \qquad (5)$$

3.2.2 Поширення тепла в стержні. Розглянемо неоднорідний ізотропний стержень довжиною l змінного перерізу і виведемо рівняння поширення тепла в ньому при наявності джерел тепла.

Нехай вісь стержня збігається з віссю Ox. Припускатимемо, що в будь-якому перерізі, перпендикулярному до осі Ox, температура однакова в усіх точках перерізу. Позначимо через $u(x,t)$ температуру в перерізі з абсцисою $x \in (0,l)$ у момент часу $t > 0$.

Нехай для поперечного перерізу стержня в точці x $\rho(x)$ – густина маси, $k(x)$ – коефіцієнт внутрішньої теплопровідності, $\chi(x)$ – коефіцієнт зовнішньої або конвективної теплопровідності (коефіцієнт теплообміну), $c(x)$ – питома теплоємність, $S(x)$ – площа і $\sigma(x)$ – довжина межі перерізу, $q(x,t)$ – густина джерел тепла, розрахована на одиницю об'єму, $u_0(t)$ – температура зовнішнього середовища.

Для виведення диференціального рівняння, яке задовольняє функція $u(x,t)$, виділимо довільну достатньо малу його частину Ω, що міститься між поперечними перерізами в точках x і $x+\Delta x$. В елементі Ω за проміжок часу $(t, t+\Delta t)$ з'явиться кількість тепла $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$, де Q_1 – кількість тепла, що надійшла через перерізи в точках x і $x+\Delta x$, Q_2 – кількість тепла, що надійшла через бічну поверхню, Q_3 – кількість тепла, що з'явилася внаслідок дії джерел тепла. Обчислимо наближені значення величин Q_1, Q_2 і Q_3.

Для знаходження Q_1 скористаємося законом Фур'є (2). Тоді одержимо, що

$$Q_1 = (k(x+\Delta x)\, S(x+\Delta x)\, u_x(x+\Delta x, \bar{t}) - k(x)\, S(x)\, u_x(x,\bar{t}))\Delta t =$$

$$= \left(k(\bar{x})\, S(\bar{x})\, u_x(\bar{x},\bar{t})\right)_x \Delta x\, \Delta t, \quad \bar{x} \in (x, x+\Delta x), \;\; \bar{t} \in (t, t+\Delta t).$$

Для знаходження Q_2 скористаємося **законом Ньютона**: *кількість тепла, що надходить через одиницю площі поверхні за одиницю часу, пропорційна різниці температур тіла і навколишнього середовища.* Згідно з цим законом

$$Q_2 = \Big(\chi(\bar{\bar{x}})\, \sigma(\bar{\bar{x}})\, (u_0(\bar{\bar{t}}) - u(\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{t}}))\Big)\, \Delta x\, \Delta t,$$

$$\bar{\bar{x}} \in (x, x+\Delta x), \;\; \bar{\bar{t}} \in (t, t+\Delta t).$$

За рахунок джерел тепла в області Ω впродовж проміжку часу $(t, t+\Delta t)$ виникне кількість тепла

$$Q_3 = q(\tilde{x}, \tilde{t}) S(\tilde{x}) \, \Delta x \, \Delta t, \quad \tilde{x} \in (x, x+\Delta x), \;\; \tilde{t} \in (t, t+\Delta t).$$

Отже, наближено

$$Q = \Big((k(\bar{x}) \, S(\bar{x}) \, u_x(\bar{x}, \bar{t}))_x + \chi(\bar{\bar{x}}) \, \sigma(\bar{\bar{x}}) \, (u_0(\bar{\bar{t}}) - u(\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{t}})) +$$

$$+ q(\tilde{x}, \tilde{t}) S(\tilde{x}) \Big) \, \Delta x \, \Delta t. \tag{6}$$

Ця кількість тепла витрачається на нагрівання елемента Ω стержня від температури $u(x, t)$ до $u(x, t+\Delta t)$. Вона , як відомо, наближено визначається за формулою

$$Q = \; c(\tilde{\tilde{x}}) \, \rho(\tilde{\tilde{x}}) \, S(\tilde{\tilde{x}}) \, \Big(u(\tilde{\tilde{x}}, t+\Delta t) - u(\tilde{\tilde{x}}, t) \Big) \, \Delta x =$$

$$= \; c(\tilde{\tilde{x}}) \, \rho(\tilde{\tilde{x}}) \, S(\tilde{\tilde{x}}) \, u_t(\tilde{\tilde{x}}, \tilde{\tilde{t}}) \Delta x \, \Delta t,$$

$$\tilde{\tilde{x}} \in (x, x+\Delta x), \quad \tilde{\tilde{t}} \in (t, t+\Delta t). \tag{7}$$

Оскільки ліві частини рівностей (6) і (7) однакові, то прирівняємо їхні праві частини. Якщо одержану рівність скоротити на Δx і Δt, а потім перейти до границі при $\Delta x \to 0$ і $\Delta t \to 0$, то дістанемо таке диференціальне рівняння для функції u:

$$c(x) \, \rho(x) \, S(x) \, u_t(x, t) = (k(x) \, S(x) \, u_x(x, t))_x -$$

$$- \chi(x) \, \sigma(x) \, (u(x, t) - u_0(t)) + S(x) q(x, t), \; x \in (0, l), \; t > 0. \tag{8}$$

Одержане рівняння називається **рівнянням поширення тепла в неоднорідному ізотропному стержні за наявності джерел тепла.**

Зокрема, якщо c, ρ, k, χ, S і σ – сталі, то рівняння (8) набуває вигляду

$$u_t(x, t) = a^2 u_{xx}(x, t) - b^2 \, u(x, t) + f(x, t), \; x \in (0, l), \; t > 0, \tag{9}$$

де $a^2 := \dfrac{k}{c\rho}$, $b^2 := \dfrac{\chi \, \sigma}{c\rho \, S}$, $f(x, t) := \dfrac{S \, q(x, t) + \chi \, \sigma \, u_0(t)}{c\rho \, S}$.

3.2.3 Рівняння дифузії. Знайдемо рівняння дифузії речовини в нерухомому середовищі, якщо ця речовина займає ділянку трубки змінного перерізу довжини l, за умови, що задано густину джерел речовини $p(x,t)$ і дифузія відбувається з поглинанням, де швидкість поглинання у кожній точці пропорційна густині дифундуючої речовини.

Нехай вісь трубки збігається з віссю Ox. Позначимо через $S(x)$ площу перерізу трубки площиною, перпендикулярною до осі Ox. Вважатимемо, що дифундуюча речовина рухається в трубці так, що її кількість однакова в усіх точках перерізу в даний момент часу. Позначимо через $u(x,t)$ концентрацію дифундуючої речовини в перерізі з абсцисою x у момент часу t.

Розглянемо елемент трубки, що міститься між перерізами в точках x і $x+\Delta x$ і складемо для нього баланс кількості дифундуючої речовини за проміжок часу $(t, t+\Delta t)$.

Для того щоб знайти кількість речовини, яка надійде у виділений елемент трубки через перерізи в точках x і $x+\Delta x$ за проміжок часу $(t, t+\Delta t)$, скористаємося **законом Нернста**: *кількість речовини, що проходить через елемент поверхні площею ΔS за одиницю часу дорівнює*

$$\Delta Q = -D(x)\, \partial_{\vec{\nu}}\, u(x,t)\, \Delta S,$$

де $D(x)$ – коефіцієнт дифузії, $\vec{\nu}$ – нормаль до поверхні в напрямку руху речовини, $u(x,t)$ – концентрація дифундуючої речовини.

Маємо

$$\begin{aligned} &Q(x,\bar{t}) = -D(x)\, \partial_x u(x,\bar{t})\, S(x)\, \Delta t, \\ &Q(x+\Delta x,\bar{t}) = D(x+\Delta x)\, \partial_x u(x+\Delta x,\bar{t})\, S(x+\Delta x)\, \Delta t, \end{aligned}$$

а тому за час Δt у виділений елемент трубки через бічні сторони надійде кількість речовини

$$Q_1 = (D(x+\Delta x)\, \partial_x u(x+\Delta x,\bar{t})\, S(x+\Delta x) - D(x)\, \partial_x u(x,\bar{t})\, S(x))\Delta t$$

або

$$Q_1 = \left(D(\bar{x})\, S(\bar{x})\, u_x(\bar{x},\bar{t})\right)_x \Delta x\, \Delta t, \;\; \bar{x} \in (x, x+\Delta x), \;\; \bar{t} \in (t, t+\Delta t).$$

Очевидно, що за рахунок джерел у виділеному елементі з'явиться кількість речовини

$$Q_2 = p(\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{t}})S(\bar{\bar{x}})\,\Delta x\,\Delta t,\ \ \bar{\bar{x}} \in (x, x+\Delta x),\ \ \bar{\bar{t}} \in (t, t+\Delta t).$$

Оскільки згідно з умовою відбувається поглинання речовини, то у виділеному елементі відбудеться зменшення кількості речовини на величину

$$Q_3 = -qu(\tilde{x}, \tilde{t})S(\tilde{x})\,\Delta x\,\Delta t,\ \tilde{x} \in (x, x+\Delta x),\ \tilde{t} \in (t, t+\Delta t).$$

Отже, за час Δt у виділеному елементі трубки кількість дифундуючої речовини становитиме

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3.$$

Якщо обчислити Q через приріст концентрації речовини на величину $u(\tilde{\tilde{x}}, t+\Delta t) - u(\tilde{\tilde{x}}, t)$, то дістанемо, що

$$Q = \rho(\tilde{\tilde{x}})\,(u(\tilde{\tilde{x}}, t+\Delta t) - u(\tilde{\tilde{x}}, t))\,S(\tilde{\tilde{x}})\,\Delta x$$

або

$$Q = \rho(\tilde{\tilde{x}})\,u_t(\tilde{\tilde{x}}, \tilde{\tilde{t}})\,S(\tilde{\tilde{x}})\,\Delta x\,\Delta t,\ \ \tilde{\tilde{x}} \in (x, x+\Delta x),\ \tilde{\tilde{t}} \in (t, t+\Delta t),$$

де $\rho(x)$ – коефіцієнт пористості речовини, тобто відношення площі пор до всієї площі перерізу.

Прирівнявши обидва вирази для Q, дістанемо рівність

$$\rho(\tilde{\tilde{x}})\,S(\tilde{\tilde{x}})\,u_t(\tilde{\tilde{x}}, \tilde{\tilde{t}})\,\Delta x\,\Delta t = \left(D(\bar{x})\,S(\bar{x})\,u_x(\bar{x}, \bar{t})\right)_x \Delta x\,\Delta t +$$
$$+\,p(\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{t}})S(\bar{\bar{x}})\,\Delta x\,\Delta t - qu(\tilde{x}, \tilde{t})S(\tilde{x})\,\Delta x\,\Delta t.$$

Після скорочення на Δx і Δt і переходу до границі при $\Delta x \to 0$ і $\Delta t \to 0$, дістаємо **рівняння дифузії**

$$\rho(x)\,S(x)\,u_t(x,t) = \left(D(x)\,S(x)\,u_x(x,t)\right)_x + p(x,t)S(x) -$$
$$-qS(x)\,u(x,t), \quad x \in (0, l),\ \ t > 0. \qquad (10)$$

Якщо ρ, S і D сталі, то рівняння (10) набуде вигляду

$$u_t(x,t) = a^2\,u_{xx}(x,t) - b^2\,u(x,t) + f(x,t),$$

де $a^2 := \dfrac{D_0}{\rho}$, $b^2 := \dfrac{q}{\rho}$, $f(x,t) := \dfrac{p(x,t)}{\rho}$.

3.3 Рівняння, які описують стаціонарні процеси

У випадку стаціонарних процесів функції, які беруть участь в їх описанні, не залежать від часу t. Рівняння для цих процесів одержуються з рівнянь, що описують коливні процеси або процеси поширення тепла за умови їхньої усталеності.

3.3.1 Розглянемо процес коливань, який описується хвильовим рівнянням

$$u_{tt} = a^2(u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + u_{x_3x_3}) + f(x,t). \tag{1}$$

Припустимо, що він усталився, тобто не залежить від часу. У цьому випадку функції u і f не залежать від t, тобто $u = u(x)$, $f = f(x)$, $x := (x_1, x_2, x_3)$, а тому $u_t = u_{tt} = 0$, і отже, рівняння (1) переходить у рівняння Пуассона

$$\Delta u(x) := u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + u_{x_3x_3} = f(x). \tag{2}$$

При цьому, якщо відсутнє зовнішнє збурення, тобто $f \equiv 0$, то дістанемо рівняння Лапласа

$$\Delta u(x) = 0. \tag{3}$$

3.3.2 Якщо розподіл температури в тілі усталився, тобто вона не залежить від часу, то $u_t = 0$ і рівняння теплопровідності (4) з пункту 3.2.1 перейде в рівняння Пуассона (2), а коли відсутні джерела тепла, тобто $f \equiv 0$, то дістанемо рівняння Лапласа (3).

3.3.3 Стаціонарний потік ідеальної, тобто нев'язкої, нестисненої рідини характеризується швидкістю v, для якої існує потенціал, а тому

$$v(x) = -\operatorname{grad} u(x).$$

Якщо відсутні джерела, то $\operatorname{div} v(x) = 0$. Підставляючи сюди вираз для v, дістанемо знову рівняння Лапласа для потенціалу швидкостей

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} u(x)) = 0 \quad \text{або} \quad \Delta u(x) = 0.$$

3.3.4 Якщо в однорідному провідному середовищі відсутні джерела струму і процес стаціонарний, то електричне поле буде потенціальним і його потенціал задовольняє рівняння Лапласа.

3.4 Постановка задач математичної фізики, поняття про їх коректність

3.4.1 Деякі означення та позначення. У просторі $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, точок $x := (x_1, \ldots, x_n)$ розглянемо область Ω з межею S. Нехай в цій області визначена функція f. Запис

$$f(x)\Big|_{x \in S} := f(x)\Big|_S = g(y), \quad y \in S,$$

означатиме, що

$$\lim_{\Omega \ni x \to y} f(x) = g(y), \quad y \in S.$$

Кажуть, що функція f неперервна в області Ω аж до межі S, якщо: 1) f неперервна в Ω; 2) $\lim\limits_{\Omega \ni y \to x} f(y) = g(x),\ x \in S$; 3) функція $F(x) := \begin{cases} f(x), & x \in \Omega, \\ g(x), & x \in S \end{cases}$ неперервна в $\overline{\Omega} := \Omega \cup S$. Записують цей факт так: $f \in C(\overline{\Omega})$.

Якщо f в області Ω неперервно диференційовна k разів, а її неперервне продовження на межу області має похідні до порядку $l \leq k$, то будемо записувати $f \in C^k(\Omega) \cap C^l(\overline{\Omega})$. Зокрема, запис $f \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ означає, що функція f неперервна в області Ω аж до її межі і двічі неперервно диференційовна в Ω.

Поверхню S називатимемо гладкою або поверхнею, що належить до класу C^1, якщо в малому околі кожної точки $x^0 \in S$ її можна подати у вигляді $\omega(x) = 0$, де функція ω неперервно диференційовна і $\operatorname{grad} \omega \neq 0$. У випадку, коли функція ω неперервна разом зі своїми похідними до порядку $k \geq 1$ включно, кажуть, що поверхня належить до класу C^k і записують $S \in C^k$. Якщо поверхня складається зі скінченного числа гладких кусків, то її називають кусково–гладкою.

Надалі, якщо не буде зумовлено протилежне, поверхню S будемо вважати замкненою і такою, що ділить $\mathbb{R}^n \setminus S$ на дві частини: обмежену область Ω^+, яка міститься в деякій кулі скінченного радіуса, і необмежену область Ω^-, яка містить нескінченно віддалену точку.

Якщо поверхня S є межею області Ω, то зовнішньою нормаллю $\vec{\nu}_y$ до поверхні S в точці $y \in S$ називають вектор нормалі, який виходить з області Ω.

Множину точок (x, t) таких, що $x \in \Omega$, $0 < t \leq T$, називатимемо циліндром і позначатимемо через Q_T, так що $Q_T := \Omega \times \times (0, T]$. Зокрема, якщо $n = 1$ і $\Omega = (a, b)$, то циліндр Q_T – це прямокутник на площині Oxt без нижньої і бічних сторін (рис. 3.4). У випадку, коли $n = 2$ і Ω – область на площині Ox_1x_2, Q_T – це циліндрична область висоти T з основою Ω в площині $\{t = 0\}$ і бічною межею, яка є циліндричною поверхнею з напрямною S і твірними, паралельними осі Ot. До Q_T не належать бічна межа та нижня основа (рис. 3.5).

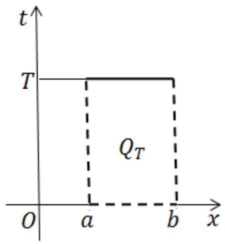

Рис.3.4

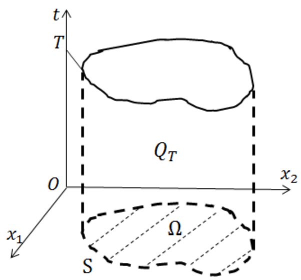

Рис.3.5

У розділах 1 і 2 було продемонстровано на конкретних прикладах, що диференціальне рівняння з частинними похідними, взагалі кажучи, має безліч розв'язків. Зокрема, сукупність розв'язків диференціального рівняння з частинними похідними першого порядку залежить від однієї довільної функції, а у випадку рівняння другого порядку – від двох довільних функцій.

Треба зазначити, що для диференціальних рівнянь з частинними похідними задача про знаходження загального розв'язку, тобто всієї сукупності розв'язків рівнянь, є, за окремими винятками, не природною і не може бути розв'язаною. Для таких рівнянь ставиться задача про відшукання розв'язків, які задовольняють певні додаткові умови. Характер цих умов істотно залежить від фізичного змісту процесу, який описується рівнянням, і отже, від типу рівняння.

Додаткові умови будемо ставити для рівняння коливань (гіперболічний тип)

$$\rho(x)u_{tt} = \operatorname{div}(p(x)\operatorname{grad} u) - q(x)u + F(x,t), \tag{1}$$

рівняння теплопровідності (параболічний тип)

$$\rho(x)u_t = \operatorname{div}(p(x)\operatorname{grad} u) - q(x)u + F(x,t), \tag{2}$$

стаціонарного рівняння (еліптичний тип)

$$\operatorname{div}(p(x)\operatorname{grad} u) - q(x)u + F(x) = 0, \tag{3}$$

де

$$\operatorname{div}(p(x)\operatorname{grad} u) := \sum_{k=1}^{n}(p(x)u_{x_k})_{x_k}, \ \ n \in \{1,2,3\}.$$

Коефіцієнти рівняння, згідно з фізичним змістом, будемо вважати такими: $\rho(x) > 0$, $p(x) > 0$, $q(x) \geq 0$, $\{\rho, q\} \subset C(\overline{\Omega})$, $p \in C^1(\overline{\Omega})$, де Ω – область зміни просторових змінних у рівняннях (1) – (3), тобто область, в якій відбувається процес.

Далі, якщо не зроблено додаткових застережень, під розв'язком рівняння розумітимемо його класичний розв'язок.

3.4.2 Задачі для рівняння гіперболічного типу. Спочатку розглянемо рівняння поперечних коливань струни, яка в положенні рівноваги збігається з відрізком $[0,l]$ осі Ox:

$$\rho(x)u_{tt}(x,t) = T_0 u_{xx}(x,t) - k(x)u_t(x,t) + p(x,t),$$

$$0 < x < l, \quad t > 0.$$

Якщо кінці струни закріплені, то повинні виконуватись крайові умови

$$u(x,t)|_{x=0} = 0, \quad u(x,t)|_{x=l} = 0, \quad t \geq 0. \tag{4}$$

Оскільки процес коливань струни залежить від її початкової форми і розподілу швидкостей, то треба задати початкові умови

$$u(x,t)|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t(x,t)|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in [0,l]. \tag{5}$$

Отже, додаткові умови включають крайові та початкові умови, де φ і ψ – задані функції. Пізніше буде доведено, що ці умови повністю визначають розв'язок рівняння коливань струни.

Якщо кінці струни рухаються за заданими законами, то крайові умови мають вигляд

$$u(x,t)|_{x=0} = \mu_1(t), \quad u(x,t)|_{x=l} = \mu_2(t), \quad t \geq 0, \tag{6}$$

де μ_1 і μ_2 – задані функції.

Аналогічні умови ставляться і для рівняння поздовжніх коливань стержня або пружини.

Можливі також інші типи крайових умов. Розглянемо, наприклад, задачу про пружні коливання стержня (пружини), один кінець якого закріплений, а другий вільний. У точці закріплення $x = 0$ стержня

$$u(x,t)|_{x=0} = 0, \quad t \geq 0,$$

а на вільному кінці $x = l$ натяг

$$T(l,t) := Eu_x(x,t)|_{x=l} = 0,$$

і тому

$$u_x(x,t)|_{x=l} = 0, \quad t \geq 0.$$

Якщо кінець $x = 0$ рухається за певним законом $\mu(t)$, а при $x = l$ діє поздовжня сила $\nu_1(t)$, $t \geq 0$, то

$$u(x,t)|_{x=0} = \mu(t), \quad u_x(x,t)|_{x=l} = \nu(t), \quad t \geq 0,$$

де $\nu(t) := \dfrac{1}{E}\,\nu_1(t)$.

Типовою є також умова пружного кріплення, наприклад, для $x = l$

$$Eu_x(x,t)\big|_{x=l} = -\alpha u(x,t)\big|_{x=l}$$

або

$$\Big(u_x(x,t) + h\,u(x,t)\Big)\Big|_{x=l} = 0, \quad t \geq 0,$$

де $h := \dfrac{\alpha}{E} > 0$, при якій кінець $x = l$ може переміщуватися, але пружна сила кріплення створює на цьому кінці натяг, який намагається повернути зміщений кінець у попереднє положення. Ця сила, за законом Гука, пропорційна зміщенню $u(l,t)$; коефіцієнт пропорційності α називають коефіцієнтом жорсткості кріплення.

Якщо точка, в якій є пружне кріплення, переміщується і її відхилення від початкового положення визначається функцією $\chi(t)$, то крайова умова набуває вигляду

$$\Big(u_x(x,t) + h(u(x,t) - \chi(t))\Big)\Big|_{x=l} = 0, \quad t \geq 0.$$

Очевидно, що умова пружного кріплення на лівому кінці $x = 0$ має вигляд

$$\Big(u_x(x,t) - h(u(x,t) - \chi(t))\Big)\Big|_{x=0} = 0, \quad t \geq 0.$$

Задача про знаходження розв'язку рівняння поперечних коливань струни, який задовольняє початкові умови (5) і деякі крайові умови, наприклад (6), називається **мішаною** або **початково-крайовою задачею**.

Мішана задача. В прямокутнику $Q_T := (0,l) \times (0,T]$ треба знайти розв'язок рівняння (1), неперервно диференційовний аж до межі, який задовольняє крайові умови

$$\begin{array}{l} (\gamma_1 u_x(x,t) + \delta_1 u(x,t))|_{x=0} = \mu_1(t), \\ (\gamma_2 u_x(x,t) + \delta_2 u(x,t))|_{x=l} = \mu_2(t), \end{array} \quad t \in [0,T], \tag{7}$$

де $\gamma_1^2 + \delta_1^2 \neq 0$, $\gamma_2^2 + \delta_2^2 \neq 0$, і початкові умови

$$u(x,t)|_{t=0} = \varphi(x), \;\; u_t(x,t)|_{t=0} = \psi(x), \;\; x \in [0,l]. \tag{8}$$

Щоб постановка задачі була несуперечливою, повинні виконуватися умови гладкості

$$F \in C(Q), \;\; \varphi \in C^1([0,l]), \;\; \psi \in C([0,l]), \;\; \{\mu_1, \mu_2\} \subset C([0,T])$$

і узгодженість додаткових умов

$$(\gamma_1 \varphi'(0) + \delta_1 \varphi(0)) = \mu_1(0), \;\; (\gamma_2 \varphi'(l) + \delta_2 \varphi(l)) = \mu_2(l).$$

Для рівняння (1), при довільному n, мішана задача формулюється так: *в області $Q_T = \Omega \times (0,T]$ знайти розв'язок рівняння (1), неперервно диференційовний аж до межі області, який задовольняє крайову умову*

$$\left(\gamma\, \partial_{\vec{\nu}_y} u(x,t) + \delta u(x,t)\right)\Big|_{x \in S} = \mu(y,t), \; y \in S, \; t \in [0,T],$$

де $\gamma^2 + \delta^2 \neq 0$, і початкові умови

$$u(x,t)|_{t=0} = \varphi(x), \;\; u_t(x,t)|_{t=0} = \psi(x), \;\; x \in \overline{\Omega}.$$

При цьому повинні виконуватися такі умови гладкості та узгодження:

$$\begin{aligned} &F \in C(Q), \;\; \varphi \in C^1(\overline{\Omega}), \;\; \psi \in C(\overline{\Omega}), \;\; \mu \in C(S \times [0,T]), \\ &\left(\gamma\, \partial_{\vec{\nu}_y} \varphi(x) + \delta \varphi(x)\right)\Big|_{x \in S} = \mu(y,t)|_{t=0}, \; y \in S. \end{aligned}$$

Задача (1), (7), (8) буде **однорідною**, коли F, μ_1, μ_2 тотожно дорівнюють нулю, і **неоднорідною** у випадку, коли принаймні одна з цих функцій не є нульовою.

У залежності від характеру крайових умов відповідні мішані задачі називають **першою, другою і третьою мішаними задачами** або **мішаними задачами першого, другого і третього роду**. Так, у випадку $n = 1$ і $\Omega = (0,l)$ задача (1), (7), (8) є мішаною задачею першого роду, якщо в (7) $\gamma_k = 0$, $\delta_k = 1$, $k \in \{1,2\}$, другого роду, якщо $\gamma_k = 1$, $\delta_k = 0$, $k \in \{1,2\}$, і третього роду, якщо $\gamma_k = 1$, $k \in \{1,2\}$, $\delta_1 = -h_1$, $\delta_2 = h_2$, $h_k > 0$, $k \in \{1,2\}$.

Треба зауважити, що можливі інші види крайових умов. Наприклад, у задачах про коливання кільця, коли $x = 0$ і $x = l$ є однією і тією ж точкою, крайові умови набувають вигляду

$$u(l,t) = u(0,t), \quad u_x(l,t) = u_x(0,t), \quad t \in [0,T],$$

тобто зводяться до вимоги неперервності функцій u і u_x.

Похідні від u за t також можуть уходити в крайові умови. Якщо кінець стержня (пружини) зазнає опору середовища, який пропорційний швидкості його руху, то крайова умова набуде вигляду

$$Eu_x(x,t)\Big|_{x=l} = -\alpha u_t(x,t)\Big|_{x=l}, \ t \in [0,T].$$

Якщо ж до кінця $x = l$ стержня (пружини) прикріплено вантаж маси m, то повинна виконуватись умова

$$m\, u_{tt}(x,t)\Big|_{x=l} = -Eu_x(x,t)\Big|_{x=l} + mg, \ t \in [0,T].$$

Розглянемо задачу про коливання важкої однорідної нитки, яка описується рівнянням (6) з пункту 3.1.3. Оскільки верхній кінець закріплений, то $u(x,t)|_{x=0} = 0$. Щоб дістати умову для нижнього кінця $x = l$, скористаємося тим, що коливання малі, і тому відхилення скінченне, тобто $|u(x,t)|_{x=l}| < +\infty$. Така умова оправдана тим, що хоча коефіцієнти рівняння (6) і гладкі, але коефіцієнт при старшій похідній u_{xx}, що дорівнює $l - x$, при $x = l$ перетворюється в нуль, тобто рівняння вироджується. Отже, крайові умови в цьому випадку мають такий вигляд:

$$u(x,t)\Big|_{x=0} = 0, \quad \Big|u(x,t)\Big|_{x=l}\Big| < +\infty, \quad t \in [0,T].$$

Задача Коші. Вважатимемо, що рівняння (1) описує процес в усьому просторі $\mathbb{R}^n$ змінних x (тобто $\Omega = \mathbb{R}^n$) і при довільному $t \in (0,T]$, тому, природно, ніяких крайових умов не повинно бути. Нехай $\Pi_T := \{(x,t) \,|\, x \in \mathbb{R}^n, \, t \in (0,T]\}$. Сформулюємо задачу Коші: *знайти функцію* $u \in C^2(\Pi_T) \cap C^1(\overline{\Pi}_T)$, *яка задовольняє рівняння (1) в області* Π_T *і початкові умови*

$$u(x,t)|_{t=0} = \varphi(x), \ \ u_t(x,t)|_{t=0} = \psi(x), \ \ x \in \mathbb{R}^n,$$

при цьому для функцій F, φ і ψ повинні виконуватись відповідні умови гладкості.

Задача Коші виникає тоді, коли проміжок часу, протягом якого вивчаються коливання, малий і нас цікавить процес коливання в точках, близьких до середини області, наприклад струни. Тоді за цей проміжок часу вплив крайових умов неістотний, бо коливання відбуваються зі скінченною швидкістю.

Якщо нас цікавить розв'язок задачі про коливання струни (стержня) поблизу одного із кінців за малий проміжок часу, то вплив коливань другого кінця буде незначним, а тому приходимо до задачі про коливання напівнеобмеженої струни (стержня). Тут повинні задаватися початкові умови і крайова умова на кінці струни (стержня).

У випадку, коли нас цікавить характер явища (процесу) в моменти часу, які достатньо далекі від початкового, то маємо **задачу Фур'є** або **задачу без початкових умов.**

3.4.3 Задачі для рівняння параболічного типу. Постановка мішаної задачі та задачі Коші для рівняння параболічного типу (2) відрізняється від відповідної постановки для рівняння гіперболічного типу (1) тим, що буде лише одна початкова умова

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = \varphi(x), \;\; x \in \overline{\Omega},$$

оскільки в рівняння входить похідна за t тільки першого порядку. Крім того, треба ще вимагати певної поведінки розв'язків при $|x| \to +\infty$.

Наведемо приклади крайових умов для конкретних випадків.

Якщо на поверхні S області Ω підтримується задана температура, то це означає, що

$$u(x,t)\Big|_{x\in S} = \mu(y,t), \;\; y \in S, \;\; t \geq 0.$$

Маємо **крайову умову першого роду.**

У випадку, коли на поверхні S задано тепловий потік (кількість тепла, яка проходить за одиницю часу через поверхню одиничної площі), маємо

$$\partial_{\vec{\nu}_y} u(x,t)\Big|_{x\in S} = \mu(y,t), \quad y \in S, \quad t \geq 0,$$

де $\vec{\nu}_y$ – вектор зовнішньої нормалі до поверхні S у точці y. Зокрема, якщо тіло теплоізольоване, то

$$\partial_{\vec{\nu}_y} u(x,t)\Big|_{x\in S} = 0, \quad y \in S, \quad t \geq 0.$$

Це **крайова умова другого роду.**

Розглянемо тепер випадок **крайової умови третього роду.** Нехай середовище, в якому знаходиться тіло Ω, має температуру $\chi(x,t)$, а між тілом Ω і навколишнім середовищем відбувається теплообмін за законом Ньютона, тобто тепловий потік Q через поверхню S у напрямку зовнішньої нормалі $\vec{\nu}$ пропорційний різниці температур

$$Q = \alpha(u(y,t) - \chi(y,t)), y \in S,$$

де $\alpha > 0$ – коефіцієнт теплообміну.

Оскільки з іншого боку, згідно з законом Фур'є, за одиницю часу через одиничну площу поверхні S у напрямку вектора $\vec{\nu}$ йде потік $Q = -k\,\partial_{\vec{\nu}}\, u$, то, прирівнявши ці вирази, дістанемо

$$(\partial_{\vec{\nu}_y} u(x,t) + hu(x,t))\Big|_{x\in S} = \mu(y,t), \ \ y \in S, \ \ t \geq 0,$$

де $h := \dfrac{\alpha}{k} > 0$, $\mu := \dfrac{\alpha\chi}{k}$.

У випадку, коли $\Omega = (0,l)$, маємо такі крайові умови третього роду:

$$\begin{aligned}(u_x(x,t) - h_1 u(x,t))|_{x=0} &= \mu_1(t), \\ (u_x(x,t) + h_2 u(x,t))|_{x=l} &= \mu_2(t), \ \ t \geq 0,\end{aligned}$$

де $h_1 > 0$, $h_2 > 0$.

3.4.4 Задачі для рівняння еліптичного типу. Розглянемо рівняння (3). Вважатимемо, що коефіцієнти рівняння визначені в обмеженій області $\Omega^+ \subset \mathbb{R}^n$ з межею S або в необмеженій області $\Omega^- := \mathbb{R}^n \backslash \overline{\Omega^+}$. У залежності від області Ω^+ або Ω^- і вигляду крайових умов розглядаються відповідні задачі.

Внутрішня крайова задача. *Знайти розв'язок рівняння (3) в області* Ω^+*, який належить до класу* $C^1(\overline{\Omega^+})$ *і задовольняє крайову умову*

$$\left(\gamma\partial_{\vec{\nu}_y}u(x)+\delta u(x)\right)\Big|_{x\in S}=\mu(y),\ y\in S, \tag{9}$$

де $\gamma^2+\delta^2\neq 0$*, а* $\vec{\nu}_y$ *– зовнішня щодо області* Ω^+ *нормаль у точці* $y\in S$*. При цьому вважають, що* $F\in C(\Omega^+)$*,* $\mu\in C(S)$*.*

Зовнішня крайова задача. *Знайти функцію* $u\in C^2(\Omega^-)\cap C^1(\overline{\Omega^-})$*, яка регулярна на нескінченності, тобто* $|u(x)|\leq\frac{A}{|x|^{n-2}}$ *при* $|x|\to\infty$*,* $A>0$*, задовольняє рівняння (3) в області* Ω^- *і крайову умову (9), в якій* $\vec{\nu}_y$ *– зовнішня щодо області* Ω^- *нормаль у точці* $y\in S$*.*

Регулярність функції u на нескінченності необхідна для єдиності розв'язку. Якщо умова регулярності відсутня, то єдиності може не бути.

У залежності від значень коефіцієнтів γ і δ розглядають різні крайові умови.

Крайова умова першого роду – це умова

$$u(x)\Big|_{x\in S}=\mu(y),\quad y\in S,$$

що відповідає випадку $\gamma=0$, $\delta=1$. Відповідну задачу називають **першою крайовою задачею.** Зокрема, коли рівняння (3) є рівнянням Пуассона $\Delta u=-F(x)$ чи Лапласа $\Delta u=0$, то крайову задачу в $\Omega^+(\Omega^-)$ з крайовими умовами першого роду називають **внутрішньою (зовнішньою) задачею Діріхле**.

Крайова умова другого роду – це умова

$$\partial_{\vec{\nu}_y}u(x)\Big|_{x\in S}=\mu(y),\quad y\in S,$$

тобто, коли $\gamma=1$, $\delta=0$. У цьому випадку крайову задачу називають **другою крайовою задачею.**

Для рівнянь Пуассона і Лапласа крайову задачу в $\Omega^+(\Omega^-)$ з крайовими умовами другого роду називають **внутрішньою (зовнішньою) задачею Неймана.**

Зауважимо, що у випадку задачі Неймана для рівняння Лапласа в Ω^+ необхідне виконання умови $\int\limits_S \mu(y)\, dS = 0$.

Крайова умова третього роду – це умова (9), в якій обидва коефіцієнти γ і δ не дорівнюють нулю. Відповідна задача називається **третьою крайовою задачею.**

3.4.5 Коректність задач математичної фізики. Оскільки задачі математичної фізики є математичними моделями реальних фізичних процесів, то їхні постановки повинні задовольняти такі природні вимоги:

1) розв'язок має існувати в певному класі функцій X_1;

2) розв'язок має бути єдиним у деякому класі функцій X_2;

3) розв'язок має неперервно залежати від даних задачі.

Перша вимога означає, що математична модель є несуперечливою, друга – що вона однозначно описує фізичний процес, і третя – що вона малочутлива до незначних похибок вимірювань фізичних величин.

Задача, яка задовольняє всі ці вимоги, називається **коректно поставленою** або **коректною за Адамаром**, а множина функцій $X_1 \cap X_2$ – **класом коректності**. Якщо не виконується хоча б одна з вимог 1) – 3), то кажуть, що задача некоректно поставлена.

Однією з причин некоректності задачі є невдало поставлені до рівняння додаткові умови.

Задачі, постановки яких наведені в попередніх пунктах, як ми пізніше переконаємося, є коректно поставленими. У той же час задача Коші для рівняння еліптичного типу не є коректною, що випливає з прикладу Адамара.

Приклад Адамара. Розглянемо задачу Коші для двовимірного рівняння Лапласа

$$u_{tt}(x,t) + u_{xx}(x,t) = 0, \ \ x \in \mathbb{R}, \ \ t > 0, \tag{10}$$

$$u(x,t)|_{t=0} = \varphi_1(x), \ \ u_t(x,t)|_{t=0} = \varphi_2(x), \ \ x \in \mathbb{R}. \tag{11}$$

Очевидно, що кожна з функцій

$$u_n(x,t) = e^{nt-\sqrt{n}} \sin nx, \ \ x \in \mathbb{R}, \ \ t > 0, \ \ n \in \mathbb{N},$$

задовольняє рівняння (10) і початкові умови (11) з

$$\varphi_1(x) = \varphi_1^{(n)}(x) := e^{-\sqrt{n}} \sin nx,$$
$$\varphi_2(x) = \varphi_2^{(n)}(x) := ne^{-\sqrt{n}} \sin nx.$$

Вважаючи, що $\|\varphi\|_{C(\mathbb{R})} := \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |\varphi(x)|$, маємо

$$\|\varphi_1^{(n)}\|_{C(\mathbb{R})} + \|\varphi_2^{(n)}\|_{C(\mathbb{R})} = e^{-\sqrt{n}}(1+n) \to 0 \text{ при } n \to \infty,$$

але для довільного $t > 0$

$$\|u_n(\cdot, t)\|_{C(\mathbb{R})} = e^{nt-\sqrt{n}} \to +\infty \text{ при } n \to \infty.$$

Отже, немає неперервної залежності розв'язків від початкових даних, а це означає, що задача некоректна.

Вправи до розділу 3

1. Сформулювати задачу про малі поздовжні коливання пружного однорідного стержня змінного перерізу $S(x)$ довжиною l при довільних початкових умовах для випадків, коли:

а) стержень має форму зрізаного конуса з радіусами основ r і R ($r < R$), які закріплені жорстко;

б) кінець стержня $x = 0$ закріплений пружно, а до кінця $x = l$, починаючи з моменту $t = 0$, прикладена сила $F(t)$, $t > 0$, на одиницю площі перерізу.

2. Абсолютно гнучка нитка довжиною l підвішена за кінець $x = l$, а на другому кінці $x = 0$, прикріплений вантаж масою M. Лінійна густина нитки ρ змінюється за законом $\rho(x) = \frac{A}{\sqrt{l_1+x}}$, $0 < x < l$, де сталі A і l_1 пов'язані з масою вантажу співвідношенням $M = 2A\sqrt{l_1}$. Довести, що рівняння малих коливань нитки навколо положення рівноваги має вигляд $u_{yy} = \frac{1}{a^2}u_{tt}$, $a := \sqrt{\frac{g}{2}}$, $y = \sqrt{l+l_1} - \sqrt{l_1+x}$.

3. Поставити мішану задачу для поперечних коливань важкої струни довжиною l, що обертається з кутовою швидкістю ω відносно вертикального положення рівноваги, верхній кінець якої жорстко закріплено, а нижній – вільний.

4. Дано тонкий однорідний стержень довжиною l, початкова температура якого $\varphi(x)$, $0 \le x \le l$. Поставити крайову задачу про визначення температури стержня, якщо на кінці $x = 0$ підтримується стала температура u_0, а на бічній поверхні і на кінці $x = l$ відбувається конвективний теплообмін за законом Ньютона з навколишнім середовищем, температура якого дорівнює нулю.

5. Неоднорідна нитка, густина якої змінюється за законом $\rho(x) = \frac{a}{\sqrt{b^2 - x^2}}$, $0 < x < l$, $a > 0$, $b > l$, прикріплена кінцем $x = 0$ до нерухомої осі, а на другому кінці $x = l$ прикріплена кулька, маса якої $M = \frac{a}{l}\sqrt{b^2 - l^2}$. Довести, що при обертанні нитки зі сталою кутовою швидкістю ω навколо вказаної осі рівняння малих коливань має вигляд $u_{tt} = \omega^2 u_{yy}$, де $y = \arcsin \frac{x}{b}$.

6. Поставити мішану задачу про малі поздовжні коливання однорідного пружного стержня довжиною l, один кінець якого закріплено жорстко, а другий – пружно, тобто зазнає опору, пропорційного швидкості. Опором середовища знехтувати.

Відповіді до вправ з розділу 3

1. а) $(r + \frac{R-r}{l}x)^2 u_{tt} = \frac{E}{\rho}((r + \frac{R-r}{l}x)^2 u_x)_x$, $0 < x < l$, $t > 0$;
$u(0,t) = 0$, $u(l,t) = 0$, $t \ge 0$;
$u(x,0) = \varphi(x)$, $u_t(x,0) = \psi(x)$, $0 \le x \le l$;

б) $\rho S u_{tt} = E(S u_x)_x$, $0 < x < l$, $t > 0$,
$S(0)Eu_x(0,t) - \sigma u(0,t) = 0$, $Eu_x(l,t) = F(t)$, $t \ge 0$,
$u(x,0) = \varphi(x)$, $u_t(x,0) = \psi(x)$, $0 \le x \le l$, σ – коефіцієнт жорсткості пружного кріплення.

2. Скористатися тим, що $T(x) = Mg + \int\limits_0^x \frac{Agd\xi}{\sqrt{l_1+\xi}}$ або $T(x) =
= 2Ag\sqrt{l_1 + x}$. Тоді рівняння коливань матиме вигляд

$$4\sqrt{l_1 + x}(\sqrt{l_1 + x}u_x)_x = \frac{2}{g}u_{tt}.$$

3. $u_{tt} = g((l - x)u_x)_x + \omega^2 u$, $0 < x < l$, $t > 0$;
$u(0,t) = 0$, $|u(l,t)| < +\infty$, $t \ge 0$;
$u(x,0) = \varphi(x)$, $u_t(x,0) = \psi(x)$, $0 \le x \le l$.

4. $u_t = a^2 u_{xx} - \frac{\alpha p}{c\rho S}u$, $0 < x < l$, $t > 0$;
$u(0,t) = u_0$, $u_x(l,t) + hu(l,t) = 0$, $t \ge 0$;

$u(x,0)=\varphi(x)$, $0\le x\le l$, p – периметр поперечного перерізу стержня, $h:=\frac{\alpha}{k}$.

5. Скориставшись вказівкою до задачі 2, матимемо рівняння

$$\sqrt{b^2-x^2}(\sqrt{b^2-x^2}u_x)_x=\frac{1}{\omega^2}u_{tt}.$$

6. $u_{tt}=a^2u_{xx}$, $0<x<l$, $t>0$, $a^2:=\frac{E}{\rho}$,

$u(0,t)=0$, $(ESu_x-ku_t)|_{x=l}=0$, $t\ge 0$;

$u(x,0)=\varphi(x)$, $u_t(x,0)=\psi(x)$, $0\le x\le l$, де k – коефіцієнт тертя для кінця стержня l.

4 ГІПЕРБОЛІЧНІ РІВНЯННЯ

4.1 Вивчення малих коливань струн (стержнів) методом характеристик

4.1.1 Коливання необмеженої струни. Розв'язки Даламбера. Нехай $\mathbb{R}^2_+ := \{(x,t) | \, x \in \mathbb{R}, t > 0\}$. Рівняння малих вільних коливань однорідної струни (стержня), тобто коливань, коли відсутні зовнішні збурення, має вигляд

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2_+. \tag{1}$$

Це однорідне гіперболічне рівняння. Для перевірки гіперболічності рівняння (1), запишемо його у вигляді

$$a^2 u_{xx} - u_{tt} = 0.$$

Тут коефіцієнти a, b, c із загального вигляду рівняння (8) із пункту 2.2.2, дорівнюють відповідно a^2, 0 і -1, а тому $\delta := b^2 - ac = a^2 > 0$, що й означає гіперболічність рівняння (1) в $\mathbb{R}^2_+$.

Зведемо рівняння (1) до канонічного вигляду. Для цього запишемо рівняння характеристик і знайдемо його перші інтеграли, тобто характеристики рівняння (1):

$$a^2 (dt)^2 - (dx)^2 = 0$$

або

$$a\,dt - dx = 0, \quad a\,dt + dx = 0,$$

тоді

$$x - at = C_1 \quad \text{і} \quad x + at = C_2$$

є характеристиками рівняння (1). Тепер у рівнянні (1) зробимо заміну змінних

$$\begin{cases} \xi = x - at, \\ \eta = x + at. \end{cases} \tag{2}$$

Тоді згідно з формулами (12) і (13) із пункту 2.2.2 маємо, що $\tilde{a} = \tilde{c} = 0$, $\tilde{b} = 2a^2$, $\tilde{d} = \tilde{e} = \tilde{f} = \tilde{g} = 0$, а тому канонічний вигляд рівняння (1) такий:

$$\widetilde{u}_{\xi\eta} = 0. \tag{3}$$

Розв'яжемо рівняння (3). Для цього запишемо його у вигляді

$$(\widetilde{u}_\xi)_\eta = 0$$

і зінтегруємо по η при кожному фіксованому ξ. Тоді одержимо, що

$$\widetilde{u}_\xi = \varphi(\xi),$$

а, отже,

$$\widetilde{u}(\xi, \eta) = \int \varphi(\xi)\, d\xi + g(\eta)$$

або

$$\widetilde{u}(\xi, \eta) = f(\xi) + g(\eta), \quad (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2, \tag{4}$$

де f і g – довільні функції з простору $C^2(\mathbb{R})$.

Формула (4) визначає загальний розв'язок рівняння (3). Якщо повернутися до змінних x і t, то дістанемо загальний розв'язок рівняння (1)

$$u(x, t) = f(x - at) + g(x + at), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^2_+, \tag{5}$$

де f і g – довільні функції з простору $C^2(\mathbb{R})$.

Розв'язки вигляду (5) називаються **розв'язками Даламбера**.

З'ясуємо фізичний зміст розв'язків Даламбера.

Розглянемо спочатку частинний випадок коливання струни, коли $g \equiv 0$, тобто коли зміщення струни визначається формулою

$$u(x, t) = f(x - at), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^2_+. \tag{6}$$

Припустимо, що спостерігач, вийшовши в початковий момент часу $t = 0$ з точки $x = c$ струни, рухається в додатному напрямку осі Ox зі швидкістю a, тобто його абсциса змінюється за законом $x = c + at$ або $x - at = c$. Для цього спостерігача зміщення струни, яке визначається формулою (6), буде весь час сталим, рівним $f(x - at) = f(c)$. Явище, описуване формулою (6), називається **поширенням прямої хвилі**. Отже, розв'язок (6) є **прямою хвилею**, яка поширюється в додатному напрямку осі Ox зі швидкістю a.

Аналогічно розв'язок

$$u(x,t) = g(x+at), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2_+,$$

є **зворотною хвилею**, яка поширюється у від'ємному напрямку осі Ox зі швидкістю a.

Тому кожний розв'язок вигляду (5) є сумою прямої і зворотної хвиль.

Звідси випливає графічний метод побудови форми струни в будь-який момент часу t. Будуємо криві $u = f(x)$ і $u = g(x)$, які зображують пряму і зворотну хвилі в початковий момент часу $t = 0$, і потім, не змінюючи форми, пересуваємо їх одночасно зі швидкістю a у різні боки: $u = f(x)$ – вправо, а $u = g(x)$ – вліво. Щоб одержати тепер графік струни, досить побудувати алгебраїчні суми ординат розсунених кривих.

Розглянемо верхню півплощину $\mathbb{R}^2_+$ площини Oxt, в якій осі Ox відповідає положення струни в момент часу $t = 0$. Будь-яка точка $(x,t) \in \mathbb{R}^2_+$ характеризує певну точку x струни в момент часу t. Легко знайти при цьому графічно ті точки струни, початкові збурення яких дійшли в момент часу t_0 до точки x_0.

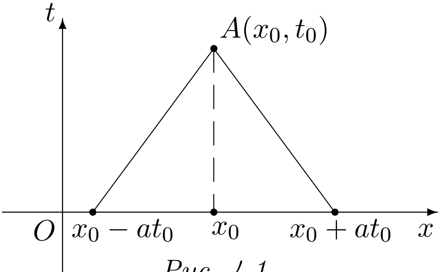

Рис. 4.1

Це будуть, згідно з попереднім, точки з абсцисами $x_0 \pm at_0$, оскільки a – це швидкість поширення хвиль. Для знаходження цих точок на осі Ox досить провести через точку $A(x_0,t_0)$ дві характеристики

$$x - at = C_1, \;\; x + at = C_2 \tag{7}$$

і в перетині їх з віссю Ox одержуються шукані точки (рис. 4.1).

Вздовж першої характеристики (7) $f(x - at)$ зберігає стале значення, те саме, що й при $x = x_0$ і $t = t_0$. Друга характеристика відіграє ту саму роль для зворотної хвилі $g(x + at)$. Коротко можна сказати, що збурення поширюються вздовж характеристик.

4.1.2 Задача Коші для однорідного рівняння коливань струни (стержня). Формула Даламбера та її фізичний зміст. Задача Коші для рівняння коливань струни (стержня) полягає у знаходженні в $\mathbb{R}^2_+$ розв'язку рівняння (1), який задовольняє умови

$$\begin{aligned} &u(x,t)|_{t=0} = \varphi(x),\ x \in \mathbb{R}, \\ &u_t(x,t)|_{t=0} = \psi(x),\ x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{8}$$

Припустимо, що виконуються умови

$$\varphi \in C^2(\mathbb{R}), \quad \psi \in C^1(\mathbb{R}). \tag{9}$$

Оскільки всі розв'язки рівняння (1) визначаються формулою (5), то розв'язування задачі (1), (8) зводиться до знаходження таких функцій f і g, щоб виконувалися умови (8). Маємо

$$\begin{cases} f(x) + g(x) = \varphi(x), \\ -af'(x) + ag'(x) = \psi(x),\ x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

звідки, зінтегрувавши другу рівність, дістанемо

$$\begin{cases} f(x) + g(x) = \varphi(x), \\ f(x) - g(x) = -\frac{1}{a}\int\limits_0^x \psi(\xi)d\xi + C, \end{cases} \tag{10}$$

де C – довільна стала.

З рівностей (10) знаходимо

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2a}\int\limits_0^x \psi(\xi)d\xi + \frac{C}{2}, \\ g(x) &= \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2a}\int\limits_0^x \psi(\xi)d\xi - \frac{C}{2}. \end{aligned} \tag{11}$$

Підставивши (11) у (5), одержимо

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(\varphi(x-at) + \varphi(x+at)) + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)d\xi, (x,t) \in \mathbb{R}^2_+. \tag{12}$$

Ця формула називається **формулою Даламбера**.

Отже, якщо u – розв'язок задачі (1), (8) в $\mathbb{R}^2_+$, то він однозначно визначається формулою (12). Навпаки, легко перевірити, що при виконанні умов (9) формула (12) визначає розв'язок задачі (1), (8) з класу $C^2(\mathbb{R}^2_+)$. Це означає, що за умов (9) існує єдиний розв'язок задачі (1), (8) із класу $C^2(\mathbb{R}^2_+)$.

Доведемо, що цей розв'язок неперервно залежить від початкових даних у такому **розумінні** S: *нехай* u_1 *і* u_2 *– розв'язки задачі (1), (8), побудовані відповідно за початковими даними* φ_1, ψ_1 *і* φ_2, ψ_2, *тоді для довільних* $\varepsilon > 0$ *і* $T > 0$ *існує* δ *таке, що з виконання нерівностей*

$$|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| < \delta, \ \ |\psi_1(x) - \psi_2(x)| < \delta, \ \ x \in \mathbb{R},$$

випливає, що для довільних $x \in \mathbb{R}$ *і* $t \in (0, T]$ *правильна нерівність* $|u_1(x,t) - u_2(x,t)| < \varepsilon$.

Справді, згідно з лінійністю задачі, функція $u := u_1 - u_2$ є розв'язком задачі (1), (8) з $\varphi := \varphi_1 - \varphi_2$ і $\psi := \psi_1 - \psi_2$, який визначається формулою (12). Тому

$$|u(x,t)| = \Big|\frac{1}{2}(\varphi(x-at) + \varphi(x+at)) + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)d\xi\Big| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\Big(|\varphi(x-at)| + |\varphi(x+at)|\Big) + \frac{1}{2a}\Big|\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)d\xi\Big| \leq$$

$$\leq \delta + \frac{1}{2a}\delta \cdot 2at \leq (1+T)\delta < \varepsilon, \quad x \in \mathbb{R}, \ t \in (0,T],$$

якщо $\delta < \dfrac{\varepsilon}{1+T}$.

Отже, доведена така теорема.

Теорема 4.1. *Якщо виконуються умови (9), то формула (12) визначає єдиний розв'язок задачі (1), (8), який належить до класу* $C^2(\mathbb{R}^2_+)$ *і неперервно залежить від початкових даних у розумінні* S.

З'ясуємо **фізичний зміст формули (12)**. Для цього розглянемо два частинні випадки.

1) Початкові швидкості точок струни дорівнюють нулю, а початкове зміщення має місце лише на обмеженому проміжку $(-\alpha, \alpha)$ *струни,* тобто $\psi = 0$ на $\mathbb{R}$, $\varphi(x) = 0$ при $x \in \mathbb{R} \setminus [-\alpha, \alpha]$. Розв'язок (12) у цьому випадку такий:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(\varphi(x - at) + \varphi(x + at)), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2_+. \tag{13}$$

Він є сумою двох хвиль, які поширюються направо і наліво зі швидкістю a. Нехай точка x струни лежить правіше проміжку $(-\alpha, \alpha)$, тобто $x > \alpha$ (рис. 4.2). При $t < t_1 := (x - \alpha)/a$ з формули (13) випливає, що $u(x,t) = 0$, бо в цьому випадку $\varphi(x - at) = 0$ і $\varphi(x + at) = 0$. Це означає, що до точки x хвиля ще не дійшла. З моменту часу t_1 точка x почне коливатися (момент проходження **переднього фронту** прямої хвилі). При $t > t_2 := (x + \alpha)/a$ знову $u(x,t) = 0$. Моменту часу t_2 відповідає проходження **заднього фронту** прямої хвилі через точку x, після чого в цій точці $u(x,t) = 0$.

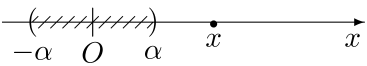

Рис. 4.2

Аналогічні міркування можна провести для точок струни, які лежать у середині $(-\alpha, \alpha)$ або лівіше від цього проміжку. *Отже, в кожній точці струни після проходження обох хвиль, а для точок, які лежать поза областю початкового зміщення, після проходження лише однієї, наступає спокій.*

2) Початкове зміщення дорівнює нулю, а початкова швидкість, тобто функція ψ, *відмінна від нуля лише на обмеженому проміжку* $(-\alpha, \alpha)$. У цьому випадку кажуть, що струні надано тільки початковий імпульс. Розв'язок (12) має вигляд

$$u(x,t) = \frac{1}{2a} \int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2_+, \tag{14}$$

або

$$u(x,t) = \omega(x + at) - \omega(x - at), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2_+,$$

де

$$\omega(x) := \frac{1}{2a} \int\limits_0^x \psi(\xi) d\xi, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Це означає, що вздовж струни поширюються дві хвилі – пряма і зворотна.

Дослідимо детальніше розв'язок (14). Нехай $x > \alpha$ (рис. 4.3). При $t = 0$ проміжок інтегрування $(\,x-at,\ x+at\,)$ вироджується в точку x, а потім при зростанні t розширюється в обидва боки зі швидкістю a. При $t < t_1 := (x-\alpha)/a$ він не матиме спільних точок з $(-\alpha, \alpha)$ і формула (14) дає $u(x,t) = 0$, тобто точка x перебуває в стані спокою. Починаючи з моменту t_1 проміжок $(x-at, x+at)$ буде накладатися на $(-\alpha,\alpha)$, де функція $\psi \neq 0$, і точка x почне коливатися. Отже, t_1 – момент проходження переднього фронту хвилі через точку x. Нарешті, при $t > (x+\alpha)/a$ проміжок $(x-at, x+at)$ повністю накриває $(-\alpha,\alpha)$, а тому інтегрування по $(x-at, x+at)$ в (14) зводиться до інтегрування по проміжку $(-\alpha,\alpha)$, оскільки поза ним $\psi = 0$, тобто, при цих значеннях t маємо стале відхилення

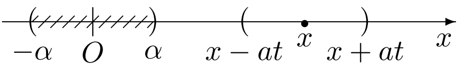

Рис. 4.3

$$u(x,t) = \frac{1}{2a}\int\limits_{-\alpha}^{\alpha} \psi(\xi)d\xi. \tag{15}$$

Отже, дія початкового імпульсу зводиться до того, що з часом точки струни зсуваються на відрізок, довжина якого виражається інтегралом (15), і залишаються без руху в цьому новому положенні. Хвилі залишають після себе немов би слід свого проходження.

4.1.3 Задача Коші для неоднорідного рівняння коливань струни (стержня). Принцип Дюамеля. Розглянемо задачу про коливання однорідної струни (стержня) при наявності зовнішньої збурюючої сили та відомих початкових положеннях і початкових імпульсах. Математична модель цієї задачі така:

$$\begin{aligned} &u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2_+, \\ &u(x,t)|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t(x,t)|_{t=0} = \psi(x),\ x \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{16}$$

де припускаємо, що $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$, $\psi \in C^1(\mathbb{R})$, $\{f, f_x\} \subset C(\mathbb{R}^2_+)$.

Розв'язок задачі (16) шукатимемо у вигляді

$$u = v + w,$$

де v – розв'язок задачі

$$\begin{array}{l} v_{tt} = a^2 v_{xx}, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2_+, \\ v(x,t)|_{t=0} = \varphi(x), \quad v_t(x,t)|_{t=0} = \psi(x),\ x \in \mathbb{R}, \end{array} \tag{17}$$

а w – розв'язок задачі

$$\begin{array}{l} w_{tt} = a^2 w_{xx} + f(x,t), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2_+, \\ w(x,t)|_{t=0} = 0, \quad w_t(x,t)|_{t=0} = 0,\ x \in \mathbb{R}. \end{array} \tag{18}$$

Розв'язок задачі (17) визначається формулою Даламбера

$$v(x,t) = \frac{1}{2}(\varphi(x-at) + \varphi(x+at)) + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)d\xi, (x,t) \in \mathbb{R}^2_+. \tag{19}$$

Для одержання розв'язку задачі (18) скористаємося **принципом Дюамеля**: *якщо* $G(x,t;\tau)$, $x \in \mathbb{R}$, $t > \tau \geq 0$, *– розв'язок задачі*

$$\begin{array}{l} G_{tt} = a^2 G_{xx}, \quad x \in \mathbb{R},\ t > \tau, \\ G(x,t;\tau)|_{t=\tau} = 0,\ G_t(x,t;\tau)|_{t=\tau} = f(x,\tau),\ x \in \mathbb{R}, \tau \geq 0, \end{array} \tag{20}$$

то розв'язок задачі (18) визначається формулою

$$w(x,t) = \int\limits_0^t G(x,t;\tau)d\tau, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2_+. \tag{21}$$

◀ Доведемо, що функція (21) є розв'язком задачі (18). Маємо

$$w_t(x,t) = G(x,t;\tau)|_{\tau=t} + \int\limits_0^t G_t(x,t;\tau)d\tau = \int\limits_0^t G_t(x,t;\tau)d\tau,$$

$$w_{tt}(x,t) = G_t(x,t;\tau)|_{\tau=t} + \int\limits_0^t G_{tt}(x,t;\tau)d\tau =$$

$$= f(x,t) + \int\limits_0^t G_{tt}(x,t;\tau)d\tau,$$

$$w_{xx}(x,t) = \int\limits_0^t G_{xx}(x,t;\tau)d\tau.$$

Тут ми скористалися правилом диференціювання власного інтеграла за параметром і умовами (20).

Тому

$$w_{tt} - a^2 w_{xx} = f(x,t) + \int\limits_0^t \Big(G_{tt}(x,t;\tau) - a^2 G_{xx}(x,t;\tau)\Big)d\tau =$$

$$= f(x,t), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2_+,$$

а це означає, що w є розв'язком неоднорідного рівняння коливань.

Очевидно, що w задовольняє також нульові початкові умови, бо

$$w(x,t)|_{t=0} = \int\limits_0^0 G(x,t;\tau)d\tau = 0,$$

$$w_t(x,t)|_{t=0} = \int\limits_0^0 G_t(x,t;\tau)\Big|_{t=0} d\tau = 0.$$

Оскільки, згідно з попереднім, розв'язком задачі (20) є функція

$$G(x,t;\tau) = \frac{1}{2a} \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)d\xi, \;\; x \in \mathbb{R}, \;\; t > \tau \geq 0, \qquad (22)$$

то тим самим знайдено розв'язок задачі (18). ►

З (19), (21) і (22) випливає така формула для розв'язку задачі (16):

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\Big(\varphi(x-at) + \varphi(x+at)\Big) + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)d\xi +$$

$$+\frac{1}{2a}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)d\xi, \ \ (x,t) \in \mathbb{R}^2_+. \tag{23}$$

Цю формулу називають **формулою Даламбера для неоднорідного рівняння коливань струни** (стержня).

Приклад 1. Розв'язати задачу Коші:

$$u_{tt} = u_{xx} + xt^2, \ \ x \in \mathbb{R}, \ \ t > 0,$$
$$u(x,t)|_{t=0} = 0, \ \ u_t(x,t)|_{t=0} = x+1, \ \ x \in \mathbb{R}.$$

◀ Скористаємося формулою (23). У нашому випадку $a = 1$, $\varphi = 0$, $\psi(x) = x+1$, $f(x,t) = xt^2$. Тому

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(0+0) + \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t}(\xi+1)d\xi + \frac{1}{2}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} \xi\tau^2 d\xi =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{(\xi+1)^2}{2}\Bigg|_{x-t}^{x+t} + \frac{1}{2}\int\limits_0^t \tau^2 \frac{\xi^2}{2}\Bigg|_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} d\tau = t(x+1)+$$

$$+x\int\limits_0^t \tau^2(t-\tau)d\tau = t(x+1) + \frac{1}{12}xt^4, \, x \in \mathbb{R}, \, t > 0. \ ▶$$

Зауваження 1. Розглянутий в попередніх пунктах метод знаходження розв'язку задачі Коші називається **методом характеристик**. Ця назва пов'язана з тим, що для знаходження загального розв'язку рівняння треба інтегрувати рівняння за змінними ξ і η, які є характеристиками.

4.1.4 Поняття про узагальнений розв'язок задачі Коші. Розглянемо задачу Коші (1), (8), але щодо функцій φ і ψ припускатимемо, що вони фінітні, тобто не дорівнюють нулю тільки на обмежених інтервалах, $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$, $\psi \in C(\mathbb{R})$.

Відомо, що такі функції можна рівномірно апроксимувати функціями $\varphi_k \in C^2(\mathbb{R})$ і $\psi_k \in C^1(\mathbb{R})$, $k \in \mathbb{N}$, так, що рівномірно на $\mathbb{R}$

$$\varphi_k \to \varphi, \quad \psi_k \to \psi \text{ при } k \to \infty.$$

Якщо в задачі (1), (8) взяти за початкові функції φ_k і ψ_k, то згідно з теоремою 4.1 існує єдиний розв'язок $u_k \in C^2(\mathbb{R}^2_+)$. Доведемо, що послідовність $\{u_k,\, k \in \mathbb{N}\}$ рівномірно фундаментальна на $\mathbb{R} \times [0, T]$, де T – довільно фіксоване додатне число. З рівномірної збіжності послідовностей $\{\varphi_k \,|\, k \in \mathbb{N}\}$ і $\{\psi_k \,|\, k \in \mathbb{N}\}$ випливає, що для довільного $\varepsilon > 0$ і $T > 0$ існує число k_0 таке, що для будь-яких $k \geq k_0$ і $m \in \mathbb{N}$ справджуються нерівності

$$|\varphi_k(x) - \varphi_{k+m}(x)| < \frac{\varepsilon}{1+T},$$

$$|\psi_{k+m}(x) - \psi_k(x)| < \frac{\varepsilon}{1+T}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Тоді згідно з неперервною залежністю розв'язків u_k від φ_k і ψ_k в розумінні S (див. теорему 4.1) випливає, що

$$|u_{k+m}(x,t) - u_k(x,t)| < (1+T)\frac{\varepsilon}{1+T} = \varepsilon,$$

$$x \in \mathbb{R}, \quad t \in (0, T], \quad k \geq k_0, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Це означає, що послідовність розв'язків $\{u_k,\, k \in \mathbb{N}\}$ рівномірно фундаментальна і, отже, рівномірно збігається у вказаній області зміни x і t до деякої функції u. Ця функція називається **узагальненим розв'язком** задачі Коші (1), (8) в $\mathbb{R} \times (0, T]$, причому

$$u(x,t) = \lim_{k\to\infty} u_k(x,t) = \frac{1}{2}\lim_{k\to\infty}\Big(\varphi_k(x-at) + \varphi_k(x+at)\Big) +$$

$$+\frac{1}{2a}\lim_{k\to\infty}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi_k(\xi)d\xi,\ (x,t) \in \mathbb{R} \times (0, T],$$

або

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\Big(\varphi(x-at) + \varphi(x+at)\Big) + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi,\ (x,t) \in \mathbb{R}^2_+.$$

Отже у розглянутому випадку формула Даламбера також визначає розв'язок задачі Коші, але вже узагальнений.

4.1.5 Загальна постановка задачі Коші. Задача Гурса. Розглянемо рівняння з двома незалежними змінними

$$a(x,y)u_{xx} + 2b(x,y)u_{xy} + c(x,y)u_{yy} + d(x,y)u_x +$$

$$+e(x,y)u_y + f(x,y)u = g(x,y), \quad (x,y) \in \Omega, \qquad (24)$$

де Ω – область у $\mathbb{R}^2$, коефіцієнти рівняння і права частина g є досить гладкими функціями в Ω, причому виконується в Ω умова гіперболічності, тобто $b^2 - ac > 0$ в Ω.

Нехай Γ – деяка лінія, яка лежить в $\overline{\Omega}$ і задовольняє умови:

1) Γ – достатньо гладка (регулярна) лінія,

2) Γ не є характеристикою і не дотикається до характеристик рівняння (24).

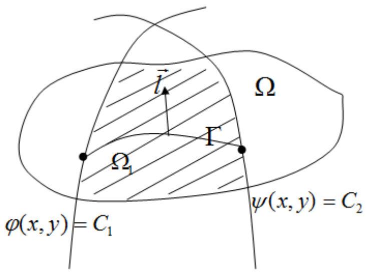

Рис. 4.4

Задамо на лінії Γ такі умови:

$$u\Big|_{\Gamma} = \varphi, \quad \partial_{\vec{l}} u\Big|_{\Gamma} = \psi, \qquad (25)$$

де вектор $\vec{l}$ не є дотичним до Γ (рис. 4.4).

Доведено [9, с. 75–79], що при достатньо гладких φ і ψ в області $\Omega_1 \subset \Omega$, обмеженій характеристиками рівняння (24), які проходять через кінці кривої Γ, існує єдиний розв'язок задачі (24), (25). Задача (24), (25) називається **загальною задачею Коші**.

Приклад 2. Розв'язати задачу Коші

$$u_{xy} + u_x = 0, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

$$u|_{y=x} = \sin x, \quad u_x|_{y=x} = 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

◀ Характеристичним є рівняння $dxdy = 0$, а отже, характеристиками є $x = C_1$, $y = C_2$. Оскільки рівняння має канонічний вигляд, то знайдемо його загальний розв'язок.

Маємо

$$(u_y + u)_x = 0,$$

звідки випливає, що

$$u_y + u = \varphi(y),$$

де φ – довільна функція. Отже, одержали лінійне неоднорідне рівняння. Спочатку розв'яжемо відповідне лінійне однорідне рівняння:

$$u_y + u = 0,\ \frac{du}{u} = -dy,\ \ln|u| = -y + \ln|C_1|,\ C_1 \neq 0,$$
$$u = C\,e^{-y},\ C \in \mathbb{R}.$$

Загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння шукатимемо у вигляді $u = C(y)\,e^{-y}$, де $C(y)$ – невідома функція.

Тоді

$$u_y = C'(y)e^{-y} - C(y)\,e^{-y},$$

$$C'(y)e^{-y} - C(y)\,e^{-y} + C(y)\,e^{-y} = \varphi(y),\ \ C'(y) = \varphi(y)e^{y},$$

$$C(y) = \int \varphi(y)e^{y}dy + f(x) = \psi(y) + f(x), \text{де } \{f, \psi\} \subset C^2(\mathbb{R}).$$

Отже, загальний розв'язок рівняння

$$u(x, y) = f(x)e^{-y} + g(y), \quad \{f, g\} \subset C^2(\mathbb{R}).$$

Задовольнимо початкові умови:

$$\begin{cases} \sin x = f(x)e^{-x} + g(x), \\ 1 = f'(x)e^{-x}. \end{cases}$$

З другого рівняння випливає, що $f'(x) = e^{x}$, а тому

$$f(x) = e^{x} + C.$$

Тоді

$$g(x) = \sin x - 1 - Ce^{-x}.$$

Звідси одержимо, що розв'язком задачі є функція

$$u(x, y) = e^{x-y} + \sin y - 1.$$

Очевидно, що цей розв'язок визначений в області $\Omega_1 = \mathbb{R}^2$. ▶

Для рівняння (24) розглядають також **задачу Гурса**, яка полягає у знаходженні розв'язку цього рівняння, який набуває заданих значень на ділянках двох характеристик $\varphi(x,y)=C_1$ і $\psi(x,y)=C_2$, які перетинаються під ненульовим кутом (рис. 4.5). Якщо дані задачі достатньо гладкі та узгоджені, тобто збігаються в точці перетину характеристик, то задача Гурса має єдиний розв'язок в області Ω, яка обмежена цими характеристиками [13, с. 100–105].

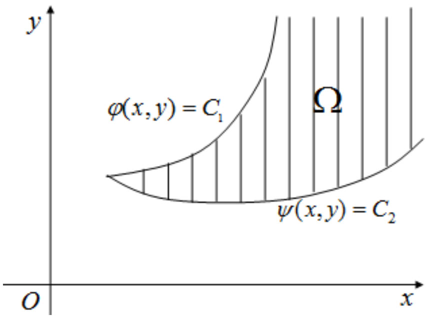

Рис.4.5

Приклад 3. Розв'язати задачу

$$x^2\,u_{xx}-y^2\,u_{yy}-2y\,u_y=0,\quad (x,y)\in\Omega,$$

$$u\Big|_{\frac{x}{y}=1}=x^3,\ u\Big|_{xy=1}=x,\ x>0,$$

де $\Omega:=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|\ x>0,\ y>0\}$.

◀ Оскільки $\delta:=b^2-ac=x^2y^2>0$, $(x,y)\in\Omega$, то рівняння є гіперболічним в першому квадранті Ω (рис. 4.6).

Рівняння характеристик має вигляд

$$x^2(dy)^2-y^2(dx)^2=0$$

і воно рівносильне сукупності рівнянь $xdy-ydx=0$, $xdy+ydx=0$. Звідси знаходимо, що характеристиками є $\dfrac{x}{y}=C_1$, $xy=C_2$. Отже, наша задача є задачею Гурса, бо додаткові умови задані на характеристиках $\dfrac{x}{y}=1$ і $xy=1$, $(x,y)\in\Omega$ (рис. 4.6).

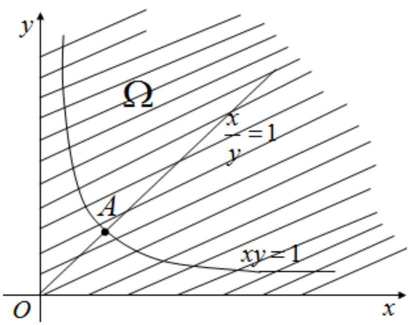

Рис. 4.6

У точці $A(1,1)$ перетину характеристик дані задачі узгоджені, бо $x^3|_{x=1}=x|_{x=1}=1$. Заміною $\xi=\dfrac{x}{y}$, $\eta=xy$ рівняння зводиться до канонічного вигляду

$$\widetilde{u}_{\xi\eta} - \frac{1}{2\xi}\widetilde{u}_{\eta} = 0.$$

Загальний розв'язок цього рівняння

$$\widetilde{u}(\xi, \eta) = \sqrt{\xi}(f_1(\xi) + f_2(\eta)),$$

а тому загальним розв'язком заданого рівняння є сукупність функцій

$$u(x, y) = \sqrt{\frac{x}{y}}\Big(f_1\Big(\frac{x}{y}\Big) + f_2(xy)\Big), \quad (x, y) \in \Omega,$$

де f_1 і f_2 – довільні двічі неперервно диференційовні функції.

Задовольнимо крайові умови, врахувавши умову узгодження $u(1, 1) = 1$:

$$\begin{cases} x^3 = f_1(1) + f_2(x^2), \\ x = (f_1(x^2) + f_2(1))\sqrt{x^2}, \;\; x > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^3 = f_1(1) + f_2(x^2), \\ \sqrt{z} = (f_1(z) + f_2(1))\sqrt{z}; \end{cases} \qquad \begin{cases} x^3 = f_1(1) + f_2(x^2), \\ 1 = f_1(z) + f_2(1); \end{cases}$$

$$f_1(z) = 1 - f_2(1), \; f_2(z) = z^{3/2} - f_1(1).$$

Тоді, враховуючи, що $u(1, 1) = f_1(1) + f_2(1) = 1$, одержуємо шуканий розв'язок

$$u(x, y) = \sqrt{\frac{x}{y}}\Big(1 - f_2(1) + (xy)^{3/2} - f_1(1)\Big) = \sqrt{\frac{x}{y}}\,(xy)^{3/2} =$$

$$= x^2 y, \quad (x, y) \in \Omega. \blacktriangleright$$

4.1.6 Задачі на півпрямій та обмеженому проміжку. Мішані задачі для гіперболічних рівнянь можна звести до задачі Коші, продовжуючи коефіцієнти рівняння й початкові дані через межу області так, щоб виконувались задані крайові умови. Застосовуючи після цього продовження метод характеристик, можна таким способом розв'язати й відповідні мішані задачі.

1) Задачі на півпрямій. Розглянемо крайові задачі на півпрямій, але попередньо доведемо дві леми.

Лема 1. *Якщо в задачі Коші (1), (8) функції φ і ψ непарні відносно $x = 0$, то розв'язок цієї задачі u дорівнює нулю при $x = 0$, тобто*

$$u(0, t) = 0, \quad t > 0. \tag{26}$$

◀ Взявши у формулі Даламбера (12) $x = 0$, одержимо

$$u(0, t) = \frac{1}{2}(\varphi(-at) + \varphi(at)) + \frac{1}{2a}\int_{-at}^{at} \psi(\xi)d\xi.$$

Оскільки φ – непарна функція, то $\varphi(-at) = -\varphi(at)$, а тому $\varphi(-at) + \varphi(at) = 0$. Для непарної функції ψ інтеграл $\int_{-at}^{at} \psi(\xi)d\xi = 0$. Звідси випливає, що $u(0, t) = 0$, $t > 0$. ▶

Лема 2. *Якщо в задачі Коші (1), (8) функції φ і ψ парні відносно $x = 0$, то похідна u_x від розв'язку цієї задачі дорівнює нулю при $x = 0$, тобто*

$$u_x(0, t) = 0, \quad t > 0.$$

◀ Доведення аналогічне доведенню леми 1. ▶

Розглянемо мішану задачу

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^2_{++},$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x) \quad x \in \mathbb{R}_+,$$

$$u|_{x=0} = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{27}$$

де $\mathbb{R}_+ := (0, +\infty)$, $\mathbb{R}^2_{++} := \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 |\, x > 0, \ t > 0\}$. Вважатимемо, що $\varphi(0) = \psi(0) = 0$.

Скористатися безпосередньо формулою Даламбера не можна, оскільки різниця $x - at$ може бути від'ємною, а для від'ємних значень аргументів початкові функції φ і ψ не визначені. Тому продовжимо функції φ і ψ непарно на від'ємну частину осі Ox і позначимо через φ_1 і ψ_1 ці продовження, тобто

$$\varphi_1(x) := \begin{cases} \varphi(x), & x \geq 0, \\ -\varphi(-x), & x < 0; \end{cases} \qquad \psi_1(x) := \begin{cases} \psi(x), & x \geq 0, \\ -\psi(-x), & x < 0. \end{cases}$$

Тоді функція

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(\varphi_1(x-at)+\varphi_1(x+at))+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi_1(\xi)d\xi,\ (x,t)\in\mathbb{R}^2_{++},$$

є розв'язком задачі (27).

Справді, вона задовольняє однорідне рівняння коливань, оскільки є сумою прямої і зворотної хвиль. Крайову умову ця функція задовольняє згідно з лемою 1. Перевіримо виконання початкових умов:

$$u|_{t=0} = \frac{1}{2}(\varphi_1(x)+\varphi_1(x))+\frac{1}{2a}\int\limits_{x}^{x}\psi_1(\xi)d\xi =$$
$$= \varphi_1(x) = \varphi(x),\ x\geq 0,$$
$$u_t|_{t=0} = \frac{1}{2}(-a\varphi_1'(x)+a\varphi_1'(x))+\frac{1}{2a}[a\psi_1(x)+a\psi_1(x)] =$$
$$= \psi_1(x) = \psi(x),\ x\geq 0.$$

Аналогічно розв'язується крайова задача

$$u_{tt} = a^2u_{xx},\quad (x,t)\in\mathbb{R}^2_{++},$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x),\ \ u_t|_{t=0} = \psi(x),\ \ x\in\mathbb{R}_+,$$

$$u_x|_{x=0} = 0,\ \ t\in\mathbb{R}_+,$$

де $\varphi'(0) = \psi'(0)$. При цьому функції φ і ψ продовжують парно на від'ємну частину осі Ox і використовують лему 2.

2) Задачі на обмеженому проміжку. Методом характеристик можна також побудувати розв'язок мішаної задачі на обмеженому проміжку з однорідними крайовими умовами першого і другого типів. Для прикладу розглянемо першу крайову задачу

$$u_{tt} = a^2u_{xx},\quad x\in(0,l),\ \ t>0,$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x),\ \ u_t|_{t=0} = \psi(x),\ \ x\in[0,l],$$

$$u|_{x=0} = 0,\ \ u|_{x=l} = 0,\ \ t\geq 0. \tag{28}$$

Для того щоб побудувати розв'язок цієї задачі, продовжимо початкові функції φ і ψ на $\mathbb{R}$ непарно відносно точок $x=0$ і

$x = l$. Позначимо одержані при цьому продовження відповідно через φ_2 і ψ_2. Тоді функція

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(\varphi_2(x-at) + \varphi_2(x+at)) + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi_2(\xi)d\xi, \qquad (29)$$

$$x \in (0,l), \quad t > 0,$$

є розв'язком задачі (28). Крайові умови ця функція задовольняє згідно з лемою 1, а виконання початкових умов перевіряється безпосередньо, як і у випадку задачі на півпрямій.

Зауваження 2. *Якщо функція φ непарна (парна) відносно двох точок $x = 0$ і $x = l$, то вона періодична з періодом $2l$.*

Справді, за властивістю непарності функції φ відносно $x = l$ маємо рівність $\varphi(l-z) = -\varphi(z+l)$, $z \in \mathbb{R}$. Поклавши в цій рівності $z = x + l$, дістанемо $\varphi(-x) = -\varphi(x+2l)$, $x \in \mathbb{R}$. Оскільки $\varphi(-x) = -\varphi(x)$, $x \in \mathbb{R}$, то $\varphi(x+2l) = \varphi(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Тому початкові функції φ і ψ треба продовжити непарно на проміжок $(-l, 0)$, а потім періодично з періодом $2l$ на всю числову вісь $\mathbb{R}$.

Зауваження 3. Щоб розв'язок (29) належав до класу $C^2([0,l] \times [0,+\infty))$ треба вимагати відповідної гладкості функцій φ і ψ та узгодженості початкових і крайових умов:

$$\varphi \in C^2([0,l]), \quad \psi \in C^1([0,l]),$$
$$\varphi(0) = \varphi(l) = 0, \quad \varphi''(0) = \varphi''(l), \quad \psi(0) = \psi(l) = 0.$$

Зауваження 4. З'ясуємо, як впливають закріплені кінці струни на її коливаня. Для цього смугу $[0,l] \times [0,+\infty)$ в площині Oxt розділимо на області I, II, III, IV, ... характеристиками, які проведено через точки $x = 0$ і $x = l$ до зустрічі з протилежними межами смуги, потім з цих точок перетину знову проводимо характеристики і т. д. (рис. 4.7).

Точки області I відповідають тим моментам часу, коли до точок x струни доходять пряма і зворотна хвилі, які вийшли в початковий момент часу з внутрішніх точок струни. Отже, фіктивно додані необмежені частини струни ще на процес коливання не впливають. Очевидно, що відхилення визначається формулою

$$u(x,t) = f(x - at) + g(x + at). \qquad (30)$$

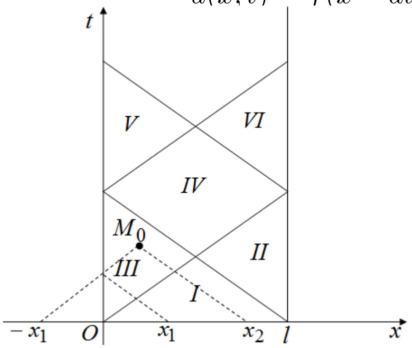

Рис. 4.7

Точки поза областю I відповідають тим моментам часу, коли до точок x струни доходять уже хвилі, які вийшли в початковий момент часу з фіктивної частини струни. Візьмемо, наприклад, точку $M_0(x^0, t^0)$ в області III. З (30) випливає, що пряма хвиля виходить з точки $-x_1 = x^0 - at^0$, а зворотна – з точки $x_2 = x^0 + at^0$, причому x_2 є реальною точкою струни, а $-x_1$ – фіктивною. Покажемо, що пряма хвиля, яка виходить з фіктивної точки $-x_1$, є насправді зворотною хвилею, яка вийшла з реальної точки x_1 в момент часу $t = 0$, і, дійшовши до точки $x = 0$, в момент часу t_1 відбилась і, змінивши напрямок і знак на протилежний, в момент часу t^0 попала в точку x^0. Справді,

$$u(x,t) = f(x - at) + g(x + at),$$

а оскільки кінець $x = 0$ закріплений, то

$$0 = f(-at) + g(at) \text{ або } f(-z) = -g(z),\ z \geq 0,$$

а це означає, що $f(-x_1) = -g(x_1)$.

Отже, дія закріпленого кінця $x = 0$ звелася до відбивання хвилі відхилення зі збереженням величини відхилення, але зі зміною його знака на протилежний.

Те саме явище маємо і для хвиль, які дійшли до кінця $x = l$. У точках області II також матимемо пряму і зворотну хвилі, де остання є відбитою прямою хвилею від кінця $x = l$. У точках областей IV, V, VI, ... дістанемо хвилі, які зазнали декілька таких відбиттів від обох кінців струни.

З попередніх міркувань випливає, що коливання струни, закріпленої на кінцях, є періодичними з періодом $2l/a$.

Приклад 4. На кінці $x = 0$ циліндричного стержня, настільки довгого, що можна його вважати напівобмеженим, діє збурююча сила $A\sin\omega t$. Довести, що відносне зміщення перерізу стержня з абсцисою x виражається формулою

$$u(x,t) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } t < \frac{x}{a}, \\ A\sin\frac{\omega}{a}(at - x), & \text{якщо } t \geq \frac{x}{a}. \end{cases} \tag{31}$$

◀ Якщо скористатися міркуваннями, які проводилися в розділі 3 при побудові математичних моделей конкретних реальних процесів, то одержимо, що математична модель нашої фізичної задачі має вигляд

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}_+, \ t > 0, \tag{32}$$

$$u|_{t=0} = 0, \ u_t|_{t=0} = 0, \ x \in \overline{\mathbb{R}_+}, \tag{33}$$

$$u|_{x=0} = A\sin\omega t, \ t \geq 0. \tag{34}$$

Згідно з пунктом 4.1.1 розв'язками рівняння (32) є розв'язки Даламбера

$$u(x,t) = f(x - at) + g(x + at), \, x \in \mathbb{R}_+, \, t > 0, \, \{f, g\} \subset C^2(\mathbb{R}). \tag{35}$$

Підберемо функції f і g так, щоб виконувалися початкові та крайова умови.

Задовольняючи умови (33), дістаємо

$$\begin{cases} f(x) + g(x) = 0, \\ -af'(x) + ag'(x) = 0 \end{cases} \text{або} \begin{cases} f'(x) + g'(x) = 0, \\ -f'(x) + g'(x) = 0, \end{cases}$$

звідки знаходимо, що $g'(x) = 0$, а отже, $g(x) = C$, $x \in \mathbb{R}_+$, а тому $f(x) = -C$, $x \in \mathbb{R}_+$. Тоді з (35) випливає, що

$$u(x,t) = f(x - at) + g(x + at) = -C + C = 0$$

для випадку, коли $x - at > 0$ або $t < \frac{x}{a}$.

Якщо ж $x - at \leq 0$, то $f(x - at)$ – невідоме, а $g(x + at) = C$ і тому

$$u(x,t) = f(x - at) + C.$$

Скориставшись крайовою умовою, дістанемо

$$f(-at) = A\sin\omega t - C \quad \text{або} \quad f(z) = A\sin\Big(-\frac{\omega}{a}z\Big) - C,$$

а тому

$$u(x,t) = f(x-at) + C = A\sin\frac{\omega}{a}(at-x),$$

якщо $x - at \le 0$ або $t \ge \dfrac{x}{a}$.

Отже, справджується формула (31). ►

Приклад 5. Однорідна струна довжиною l, яка закріплена на кінцях $x = 0$ і $x = l$, у початковий момент часу $t = 0$ мала форму параболи, яка симетрична відносно перпендикуляра, проведеного через середину проміжку $(0, l)$. Знайти форму струни в моменти часу $t_1 = \frac{l}{2a}$ і $t_2 = \frac{l}{a}$, якщо початкові швидкості відсутні.

◄ Математична модель задачі має вигляд

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad x \in (0,l), \;\; t > 0,$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \;\; u_t|_{t=0} = 0, \;\; x \in [0,l],$$

$$u|_{x=0} = 0, \;\; u|_{x=l} = 0, \;\; t \ge 0.$$

де φ – парабола.

Знайдемо форму параболи, тобто функцію φ, яка має вигляд $\varphi = Ax^2 + Bx + C$ і проходить через точки $(0,0)$, $(\frac{l}{2}, h)$, $(l, 0)$. Маємо

$$\begin{cases} 0 = C, \\ 0 = Al^2 + Bl, \\ h = A\frac{l^2}{4} + B\frac{l}{2} \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} C = 0, \\ B = -Al, \\ A\frac{l}{2} + B = \frac{2h}{l}. \end{cases}$$

Тоді $C = 0$, $A = -\dfrac{4h}{l^2}$, $B = \dfrac{4h}{l}$, а тому

$$\varphi(x) = \frac{4h}{l^2}x(l-x), \;\; x \in [0,l].$$

Скористаємося формулою Даламбера

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\Big(\varphi(x-at) + \varphi(x+at)\Big),$$

продовживши відповідним чином функцію φ (рис. 4.8). При $t = t_1 := \frac{l}{2a}$ маємо

$$u(x, \frac{l}{2a}) = \frac{1}{2}\Big(\varphi(x - \frac{l}{2}) + \varphi(x + \frac{l}{2})\Big).$$

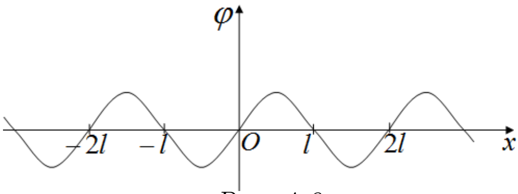

Рис. 4.8

Якщо $x \in [0, l]$, то $\varphi(x) = \frac{4h}{l^2}x(l-x)$. Оскільки у цьому випадку $-\frac{l}{2} < x - \frac{l}{2} < \frac{l}{2}$, а $\frac{l}{2} < x + \frac{l}{2} < \frac{3l}{2}$, то треба продовжити φ непарно відносно точок $x = 0$ і $x = l$. Тоді $\varphi_1(x) = -\varphi(-x)$ для $-l \le x < 0$, а $\varphi_2(l-x) = -\varphi(l+x) = \frac{4h}{l^2}(l+x)(-x)$ для $l < x \le 2l$ або $\varphi_2(z) = \frac{4h}{l^2}(2l-z)(l-z)$.

Для $x \in [0, \frac{l}{2}]$ маємо $-\frac{l}{2} \le x - \frac{l}{2} \le 0$, $\frac{l}{2} \le x + \frac{l}{2} \le l$, тому

$$u(x, \frac{l}{2a}) = \frac{1}{2}\Big(\frac{4h}{l^2}(x - \frac{l}{2})(x + \frac{l}{2}) + \frac{4h}{l^2}(x + \frac{l}{2})(\frac{l}{2} - x)\Big) = 0.$$

Аналогічно одержуємо, що $u(x, \frac{l}{2a}) = 0$ і при $\frac{l}{2} < x \le l$.

У випадку $t_2 = \frac{l}{a}$ маємо

$$u(x, \frac{l}{a}) = \frac{1}{2}(\varphi(x-l) + \varphi(x+l)).$$

Якщо $0 \le x \le l$, то $-l \le x - l \le 0$, $l \le x + l \le 2l$, а тому

$$u(x, \frac{l}{a}) = \frac{1}{2}\Big(\frac{4h}{l^2}(l-x)x + \frac{4h}{l^2}(l-x)x\Big) = -\frac{4h}{l^2}(x-l)x.$$

Отже,

$$u(x, \frac{l}{2a}) = 0, \quad u(x, \frac{l}{a}) = -\frac{4h}{l^2}(x-l)x,\ x \in [0, l]. \ \blacktriangleright$$

4.2 Задача Коші для хвильового рівняння в просторі та на площині

4.2.1 Постановка задачі в просторі. Сферичні середні та їх властивості. Розглянемо задачу Коші для однорідного хвильового рівняння в тривимірному просторі

$$u_{tt} = a^2 \Delta_x u, \ \ (x, t) \in \mathbb{R}^4_+, \qquad (1)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \ \ u_t|_{t=0} = \psi(x), \ \ x \in \mathbb{R}^3, \qquad (2)$$

де $x := (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^4_+ := \{(x,t) \mid x \in \mathbb{R}^3,\ t > 0\}$, $\Delta_x := = \partial^2_{x_1} + \partial^2_{x_2} + \partial^2_{x_3}$ – тривимірний оператор (операція) Лапласа за змінною x. Припускатимемо, що $\varphi \in C^3(\mathbb{R}^3)$ і $\psi \in C^2(\mathbb{R}^3)$.

Задачу (1), (2) будемо розв'язувати **методом Пуассона**, який дозволяє звести цю задачу до задачі про коливання напівобмеженої струни. При цьому використовуватимемо властивість сферичної симетрії оператора Лапласа Δ_x.

Введемо поняття **сферичного середнього** неперервної функції та вивчимо його властивості.

Нехай $S_r(x)$ – сфера в $\mathbb{R}^3$ радіуса r з центром в точці x і функція $h \in C(\mathbb{R}^3)$. **Середнім значенням** функції h по сфері $S_r(x)$ називається функція

$$\overline{h}(x;r) := \frac{1}{4\pi r^2} \int\limits_{S_r(x)} h(\xi) d_\xi S_r, \ \ x \in \mathbb{R}^3, \ \ r > 0, \tag{3}$$

де, як відомо, $4\pi r^2$ – площа поверхні сфери $S_r(x)$.

Якщо в (3) зробити заміну

$$\xi = x + ry, \tag{4}$$

то перейдемо від інтегрування по сфері $S_r(x)$ до інтегрування по сфері $S_1(0)$:

$$\overline{h}(x;r) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{S_1(0)} h(x + ry) d_y S_1, \ \ x \in \mathbb{R}^3, \ \ r > 0, \tag{5}$$

бо $d_\xi S_r = r^2 d_y S_1$. Вважатимемо, що $\overline{h}(x;0) \equiv h(x)$.

Інтеграли (3), (5) є звичайними інтегралами, залежними від параметрів x і r. Вони мають наступні властивості.

1⁰. *Якщо* $h \in C^m(\mathbb{R}^3)$, *то* $\overline{h} \in C^m(\mathbb{R}^3 \times (0, +\infty))$.

◀ Ця властивість випливає з властивостей інтегралів. ▶

2⁰. *Справджується співвідношення*

$$\lim_{r \to 0} \overline{h}(x;r) = h(x), \ \ x \in \mathbb{R}^3.$$

◀ Скориставшись рівністю (5), дістанемо

$$\lim_{r\to 0}\overline{h}(x;r) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{S_1(0)} \lim_{r\to 0} h(x+ry)d_yS_1 =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int\limits_{S_1(0)} h(x)d_yS_1 = \frac{1}{4\pi}h(x)\,4\pi = h(x), \;\; x\in\mathbb{R}^3. \blacktriangleright$$

3⁰. *Якщо* $h\in C^2(\mathbb{R}^3)$, *то*

$$\Delta_x(r\overline{h}(x;r)) = \partial_r^2(r\overline{h}(x;r)), \;\; x\in\mathbb{R}^3, \;\; r>0. \tag{7}$$

◀ Запишемо (3) у вигляді рівності

$$4\pi r^2\overline{h}(x;r) = \int\limits_{S_r(x)} h(\xi)d_\xi S_r,$$

яку зінтегруємо за $r\in[0,R]$, де R – довільно фіксоване додатне число. Маємо

$$4\pi\int\limits_0^R r^2\overline{h}(x;r)dr = \int\limits_{K_R(x)} h(\xi)d\xi = \int\limits_{K_R(0)} h(x+y)dy$$

(якщо зробити заміну $\xi = x+y$), де $K_R(x)$ – куля в $\mathbb{R}^3$ радіуса R з центром у точці x. Застосуємо до обох частин цієї рівності оператор Δ_x:

$$4\pi\Delta_x\int\limits_0^R r^2\overline{h}(x;r)dr = \int\limits_{K_R(0)} \Delta_x h(x+y)dy = \int\limits_{K_R(0)} \Delta_y h(x+y)dy =$$

$$= \int\limits_{K_R(0)} \operatorname{div}(\operatorname{grad}_y h(x+y))dy,$$

де $\operatorname{grad}_y h := \Big(\partial_{y_1}h,\, \partial_{y_2}h,\, \partial_{y_3}h\Big)$.

Скориставшись формулою Остроградського–Ґауса, одержимо

$$4\pi\Delta_x \int_0^R r^2\overline{h}(x;r)dr = \int_{S_R(0)} \sum_{j=1}^{3} \partial_{y_j} h(x+y)\cos(\widehat{\vec{\nu_y}, y_j})d_y S_R =$$

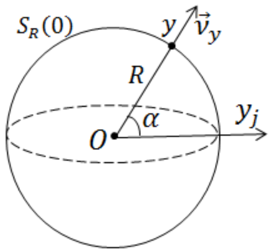

Рис. 4.9

$$= \int_{S_R(0)} \sum_{j=1}^{3} \partial_{x_j} h(x+y)\frac{y_j}{R}d_y S_R,$$

де $\vec{\nu_y}$ – зовнішня нормаль до сфери $S_R(0)$ у точці y і $\cos(\widehat{\vec{\nu_y}, y_j}) = \cos\alpha = \frac{y_j}{R}$ (рис. 4.9). Здійснимо в останньому інтегралі заміну $y_j = R\xi_j$, $j \in \{1,2,3\}$, $d_y S_R = R^2 d_\xi\, S_1$, використаємо рівність $\sum\limits_{j=1}^{3} \partial_{x_j} h(x+R\xi)\xi_j = \partial_R h(x+R\xi)$ і формулу (5), тоді прийдемо до рівності

$$\Delta_x \int_0^R r^2\overline{h}(x;r)dr = R^2\partial_R\overline{h}(x;R).$$

Продиференціювавши цю рівність за R, дістанемо

$$\Delta_x(R^2\overline{h}(x;R)) = \partial_R(R^2\partial_R\overline{h}(x;R)) =$$

$$= 2R\partial_R\overline{h}(x;R) + R^2\partial_R^2\overline{h}(x;R) = R\partial_R^2\Big(R\overline{h}(x;R)\Big)$$

або

$$\Delta_x(R\overline{h}(x;R)) = \partial_R^2\Big(R\overline{h}(x;R)\Big), \ \ R>0.$$

Оскільки R – довільне число, то, взявши $R=r$, дістанемо рівність (7). ►

4.2.2 Формула Кірхгофа. Нехай $u(x,t)$, $(x,t) \in \mathbb{R}^4_+$, – розв'язок задачі (1), (2), який належить до простору $C^2(\mathbb{R}^4_+)$. Розглянемо середнє значення цього розв'язку по $S_r(x)$:

$$\overline{u}(x,t;r) := \frac{1}{4\pi r^2}\int_{S_r(x)} u(\xi,t)d_\xi S_r$$

або

$$\overline{u}(x,t;r) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{S_1(0)} u(x+ry,t)d_y S_1.$$

Нехай $v(x,t;r) := r\overline{u}(x,t;r)$. Очевидно, що

$$\Big(\partial_t^2 - a^2\Delta_x\Big)v = \partial_t^2 v - a^2\Delta_x v$$

або, якщо скористатися (7),

$$\Big(\partial_t^2 - a^2\Delta_x\Big)v = \partial_t^2 v - a^2\partial_r^2 v.$$

У той же час

$$\Big(\partial_t^2 - a^2\Delta_x\Big)v = \Big(\partial_t^2 - a^2\Delta_x\Big)(r\overline{u}) = r\left(\partial_t^2 - a^2\Delta_x\right)\overline{u} =$$

$$= \frac{r}{4\pi} \int\limits_{S_1(0)} \Big(\partial_t^2 - a^2\Delta_x\Big)u(x+ry,t)d_y S_1 = 0,$$

бо u є розв'язком рівняння (1).

Тому

$$v_{tt} = a^2 v_{rr}, \ \ r > 0, \ \ t > 0, \ \ x \in \mathbb{R}^3, \tag{8}$$

тобто для кожного фіксованого $x \in \mathbb{R}^3$ функція $v(x,\cdot;\cdot)$ є розв'язком рівняння коливань напівобмеженої струни.

Оскільки u задовольняє умови (2), то v задовольнятиме умови

$$\begin{gathered}
v|_{t=0} = (r\overline{u})|_{t=0} = r\overline{\varphi}(x;r) =: \Phi(r), \\
v_t|_{t=0} = \partial_t(r\overline{u})\Big|_{t=0} = r\overline{u}_t|_{t=0} = r\overline{\psi}(x;r) =: \Psi(r), \\
x \in \mathbb{R}^3, \ r \geq 0, \\
v|_{r=0} = \lim_{r\to 0}(r\overline{u}(x,t;r)) = \lim_{r\to 0} r \lim_{r\to 0} \overline{u}(x,t;r) = \\
= 0 \cdot u(x,t) = 0, \ \ t \geq 0,
\end{gathered}$$

або

$$\left\{ \begin{array}{l} v|_{t=0} = \Phi(r), \\ v_t|_{t=0} = \Psi(r), \ \ r \geq 0, \end{array} \right. \tag{9}$$

$$v|_{r=0} = 0, \quad t \geq 0. \tag{10}$$

Отже, якщо u – розв'язок задачі (1), (2), то v – розв'язок задачі (8) – (10), яка є задачею про коливання напівобмеженої струни. Розв'язок задачі (8) – (10), згідно з пунктом 4.1.6, визначається формулою Даламбера, якщо функції Φ і Ψ продовжити непарно для $r < 0$:

$$v(x,t;r) = \frac{1}{2}(\Phi_1(r-at) + \Phi_1(r+at)) + \frac{1}{2a}\int\limits_{r-at}^{r+at} \Psi_1(\xi)d\xi, \quad (11)$$

де

$$\Phi_1(r) := \begin{cases} \Phi(r), \ r \ge 0, \\ -\Phi(-r), \ r < 0, \end{cases} \qquad \Psi_1(r) := \begin{cases} \Psi(r), \ r \ge 0, \\ -\Psi(-r), \ r < 0. \end{cases} \quad (12)$$

З (11) випливає, що

$$\overline{u}(x,t;r) = \frac{1}{2r}(\Phi_1(r-at) + \Phi_1(r+at)) + \frac{1}{2ar}\int\limits_{r-at}^{r+at} \Psi_1(\xi)d\xi.$$

Оскільки нас цікавить $\lim\limits_{r\to 0} \overline{u}(x,t;r) = u(x,t)$, то можна вважати, що r досить мале, а саме $0 < r \le at$. Тоді згідно з (12) маємо

$$\overline{u}(x,t;r) = \frac{1}{2r}(\Phi(at+r) - \Phi(at-r)) + \frac{1}{2ar}\int\limits_{at-r}^{at+r} \Psi(\xi)d\xi$$

або

$$\overline{u}(x,t;r) = \frac{(at+r)\overline{\varphi}(x;at+r) - (at-r)\overline{\varphi}(x;at-r))}{2r} +$$

$$+\frac{1}{2ar}\int\limits_{at-r}^{at+r} \xi\overline{\psi}(x;\xi)d\xi. \quad (13)$$

Очевидно, що в (13) маємо невизначеність типу $\frac{0}{0}$ при $r \to 0$. Розкриємо її за допомогою правила Лопіталя:

$$u(x,t) = \lim_{r\to 0} \overline{u}(x,t;r) = \Big(\frac{\overline{\varphi}(x;at+r) + (at+r)\overline{\varphi}_2'(x;at+r)}{2} +$$

$$+\frac{\overline{\varphi}(x;at-r)+(at-r)\overline{\varphi}_2'(x;at-r)}{2}\Big)\Big|_{r=0}+$$

$$+\frac{1}{2a}\Big((at+r)\overline{\psi}(x;at+r)+(at-r)\overline{\psi}(x;at-r)\Big)\Big|_{r=0}=\overline{\varphi}(x;at)+$$

$$+at\,\overline{\varphi}_2'(x;at)+t\,\overline{\psi}(x;at)=\partial_t(t\,\overline{\varphi}(x;at))+t\,\overline{\psi}(x;at),$$

де через $\overline{\varphi}_2'$ позначено похідну від $\overline{\varphi}$ за другим аргументом.

Скориставшись означенням (3) середнього значення функції, дістанемо

$$u(x,t)=\frac{1}{4\pi a^2}\partial_t\Big(\frac{1}{t}\int\limits_{S_{at}(x)}\varphi(\xi)d_\xi S_{at}\Big)+\frac{1}{4\pi a^2 t}\int\limits_{S_{at}(x)}\psi(\xi)d_\xi S_{at},$$

$$(x,t)\in\mathbb{R}^4_+, \tag{14}$$

або після заміни (4) з $r=at$

$$u(x,t)=\frac{1}{4\pi}\partial_t\Big(t\int\limits_{S_1(0)}\varphi(x+aty)d_yS_1\Big)+\frac{t}{4\pi}\int\limits_{S_1(0)}\psi(x+aty)d_yS_1,$$

$$(x,t)\in\mathbb{R}^4_+. \tag{15}$$

Отже, якщо розв'язок задачі Коші (1), (2) існує, то він зображується формулою (14) або (15), яка називається **формулою Кірхгофа.**

4.2.3 Коректна розв'язність задачі Коші для хвильового рівняння в просторі. З виведення формули Кірхгофа випливає єдиність розв'язку задачі (1), (2) в класі $C^2(\mathbb{R}^4_+)$. Легко переконатися, що за умов $\varphi\in C^3(\mathbb{R}^3)$ і $\psi\in C^2(\mathbb{R}^3)$ функція, яка визначається формулою Кірхгофа, є розв'язком задачі (1), (2) з класу $C^2(\mathbb{R}^4_+)$. Цей розв'язок неперервно залежить від початкових даних у такому **розумінні S:** *якщо* u_j, $j\in\{1,2\}$, *– розв'язки, побудовані за даними* φ_j *і* ψ_j, $j\in\{1,2\}$, *то для довільних* $\varepsilon>0$ *і* $T>0$ *існує* $\delta>0$ *таке, що з нерівностей* $|\varphi_1(x)-\varphi_2(x)|<\delta$, $\Big|\partial_{x_j}\varphi_1(x)-\partial_{x_j}\varphi_2(x)\Big|<\delta$, $j\in\{1,2,3\}$, $|\psi_1(x)-\psi_2(x)|<\delta$ *для всіх* $x\in\mathbb{R}^3$ *випливає нерівність* $|u_1(x,t)-u_2(x,t)|<\varepsilon$ *для всіх* $x\in\mathbb{R}^3$ *і довільних* $t\in(0,T]$.

Справді, для $u := u_1 - u_2$, $\varphi := \varphi_1 - \varphi_2$ і $\psi := \psi_1 - \psi_2$, згідно з пунктом 4.2.2, є правильною формула (15), з якої випливає, що

$$|u(x,t)| = \Big|\frac{1}{4\pi}\int\limits_{S_1(0)} \varphi(x+aty)d_yS_1 + \frac{t}{4\pi}\int\limits_{S_1(0)} \sum_{j=1}^{3} \partial_{x_j}\varphi(x+aty)\times$$

$$\times ay_j\, d_yS_1 + \frac{t}{4\pi}\int\limits_{S_1(0)} \psi(x+aty)d_yS_1\Big| \le \delta + 3aT\,\delta + T\delta =$$

$$= (1+3aT+T)\delta < \varepsilon,\;\; x \in \mathbb{R}^3,\;\; t \in (0,T],$$

якщо $\delta < \dfrac{\varepsilon}{1+3aT+T}$.

Отже, доведена теорема.

Теорема 4.2. *Якщо $\varphi \in C^3(\mathbb{R}^3)$, $\psi \in C^2(\mathbb{R}^3)$, то формула Кірхгофа (14) або (15) визначає єдиний розв'язок задачі (1), (2), який належить до класу $C^2(\mathbb{R}^4_+)$ і неперервно залежить від початкових даних у розумінні S.*

Зауваження 1. Скориставшись принципом Дюамеля (див. пункт 4.1.3), можна довести, що розв'язок задачі Коші для неоднорідного хвильового рівняння

$$\begin{aligned}&u_{tt} = a^2\Delta_x u + f(x,t), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^4_+,\\ &u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x),\;\; x \in \mathbb{R}^3,\end{aligned}$$

визначається формулою

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi a^2}\partial_t\Big(\frac{1}{t}\int\limits_{S_{at}(x)} \varphi(\xi)d_\xi S_{at}\Big) + \frac{1}{4\pi a^2 t}\int\limits_{S_{at}(x)} \psi(\xi)d_\xi S_{at} +$$

$$+\frac{1}{4\pi a^2}\int\limits_0^t \frac{d\tau}{t-\tau}\int\limits_{S_{a(t-\tau)}(x)} f(\xi,\tau)d_\xi S_{a(t-\tau)},\;\; (x,t) \in \mathbb{R}^4_+, \qquad (16)$$

або

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi}\partial_t\Big(t\int\limits_{S_1(0)} \varphi(x+aty)d_yS_1\Big) + \frac{t}{4\pi}\int\limits_{S_1(0)} \psi(x+aty)d_yS_1 +$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_0^t (t-\tau)\,d\tau \int_{S_1(0)} f(x+a(t-\tau)y,\tau)d_yS_1, \quad (x,t)\in\mathbb{R}^4_+. \quad (17)$$

4.2.4 Задача Коші для хвильового рівняння на площині. Метод спуску Адамара. З формули Кірхгофа можна одержати також формулу для розв'язку задачі Коші для однорідного хвильового рівняння на площині

$$u_{tt} = a^2\Delta_x u, \quad (x,t)\in\mathbb{R}^3_+, \tag{18}$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), \ \ x\in\mathbb{R}^2, \tag{19}$$

де $x := (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3_+ := \{\,(x,t) \in \mathbb{R}^3 |\ x\in\mathbb{R}^2,\ t>0\,\}$, $\Delta_x := \partial^2_{x_1} + \partial^2_{x_2}$ – двовимірний оператор Лапласа.

Оскільки функції φ і ψ не залежать від x_3, то й розв'язок задачі (18), (19) не залежить від x_3, а тільки від $x\in\mathbb{R}^2$. Це дозволяє плоску задачу (18), (19) розглядати в просторі $\mathbb{R}^3$, але при цьому початкові функції і розв'язок u треба вважати сталими (при кожному фіксованому t) на кожній прямій, паралельній осі Ox_3. Використовуючи цей підхід, у рівнянні (18) можна додати доданок $u_{x_3x_3} = 0$, а тоді дістанемо задачу Коші для хвильового рівняння в $\mathbb{R}^3$. Розв'язок такої задачі визначається формулою

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi a^2}\partial_t\Big(\frac{1}{t}\int_{S_{at}(x)} \varphi(\xi)d_{\tilde\xi}S_{at}\Big) + \frac{1}{4\pi a^2 t}\int_{S_{at}(x)} \psi(\xi)d_{\tilde\xi}S_{at},$$

$$(x,t)\in\mathbb{R}^3_+, \tag{20}$$

де $x := (x_1, x_2, 0)$, $\tilde\xi := (\xi_1,\xi_2,\xi_3) := (\xi,\xi_3)$.

Інтеграли по сфері $S_{at}(x)$ у формулі (20) можна звести до інтегралів по кругу $K_{at}(x) := \{\xi \in \mathbb{R}^2 |\, |\xi - x| \le at\}$, який лежить в площині $O\xi_1\xi_2$ (рис. 4.10). Такий метод одержання розв'язку задачі (18), (19) називається **методом спуску Адамара**.

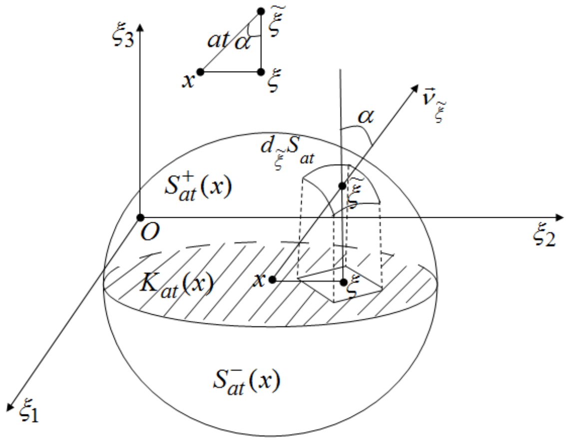

Рис. 4.10

Розітнемо сферу $S_{at}(x)$ площиною $\xi_3 = 0$ на дві півсфери $S_{at}^{+}(x)$ і $S_{at}^{-}(x)$ і розглянемо інтеграл по одній із них, наприклад, по $S_{at}^{+}(x)$. Спроектуємо елемент поверхні $d_{\tilde{\xi}}S_{at}$ на площину $\xi_3 = 0$. При цьому

$$d_{\tilde{\xi}}S_{at} = \frac{d\xi}{\cos\alpha},$$

де $\alpha := (\widehat{\vec{\nu}_{\tilde{\xi}}, \xi_3})$. Оскільки $\cos\alpha = \dfrac{\xi_3}{at} = \dfrac{\sqrt{(at)^2 - |x-\xi|^2}}{at}$, то

$$\frac{1}{at} \int\limits_{S_{at}^{+}(x)} \varphi(\xi) d_{\tilde{\xi}}S_{at} = \int\limits_{K_{at}(x)} \frac{\varphi(\xi)\, d\xi}{\sqrt{(at)^2 - |x-\xi|^2}}.$$

Аналогічно одержуємо

$$\frac{1}{at} \int\limits_{S_{at}^{-}(x)} \varphi(\xi) d_{\tilde{\xi}}S_{at} = \int\limits_{K_{at}(x)} \frac{\varphi(\xi)\, d\xi}{\sqrt{(at)^2 - |x-\xi|^2}}.$$

Застосовуючи такі самі перетворення до другого інтеграла в формулі (20), дістанемо розв'язок

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi a}\, \partial_t \int\limits_{K_{at}(x)} \frac{\varphi(\xi)\, d\xi}{\sqrt{(at)^2 \;-\; |x-\xi|^2}} +$$

$$+\frac{1}{2\pi a}\int\limits_{K_{at}(x)}\frac{\psi(\xi)\,d\xi}{\sqrt{(at)^2\,-\,|x-\xi|^2}},\quad (x,t)\in\mathbb{R}^3_+. \tag{21}$$

Формула (21) називається **формулою Пуассона**. Вона визначає розв'язок задачі (18), (19), якщо $\varphi\in C^3(\mathbb{R}^2)$ і $\psi\in C^2(\mathbb{R}^2)$.

Зауваження 2. Методом спуску Адамара з формули (21) можна одержати формулу Даламбера для розв'язку задачі Коші для рівняння коливань струни.

Зауваження 3. Неважко розв'язати задачу Коші для неоднорідного рівняння коливань на площині. Така задача зводиться до задачі (18), (19) і до задачі Коші для неоднорідного рівняння з нульовими початковими даними. Остання фактично зводиться до задачі типу (18), (19) за допомогою принципу Дюамеля, який описаний в пункті 4.1.3.

Формула для розв'язку задачі

$$\begin{aligned}&u_{tt}=a^2\Delta_x u+f(x,t),\quad (x,t)\in\mathbb{R}^3_+,\\&u|_{t=0}=\varphi(x),\quad u_t|_{t=0}=\psi(x),\ \ x\in\mathbb{R}^2,\end{aligned} \tag{22}$$

має вигляд

$$u(x,t)=\frac{1}{2\pi a}\,\partial_t\int\limits_{K_{at}(x)}\frac{\varphi(\xi)\,d\xi}{\sqrt{(at)^2-|x-\xi|^2}}+$$

$$+\frac{1}{2\pi a}\int\limits_{K_{at}(x)}\frac{\psi(\xi)\,d\xi}{\sqrt{(at)^2\,-\,|x-\xi|^2}}+$$

$$+\frac{1}{2\pi a}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{K_{a(t-\tau)}(x)}\frac{f(\xi,\tau)\,d\xi}{\sqrt{(a(t-\tau))^2\,-\,|x-\xi|^2}},\quad (x,t)\in\mathbb{R}^3_+. \tag{23}$$

4.2.5 Фізичний зміст формул Кірхгофа та Пуассона. Наведемо фізичну інтерпретацію формул (14) і (21).

1) Формула Кірхгофа (14). Ця формула допомагає дати фізичне тлумачення поширенню в просторі явищ, описуваних розв'язком задачі Коші для хвильового рівняння. Нехай почат-

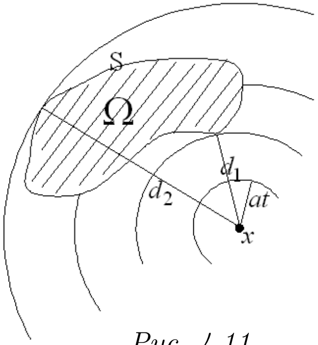

Рис. 4.11

кове збурення локалізоване в просторі $\mathbb{R}^3$, тобто функції φ і ψ дорівнюють нулю поза деякою обмеженою областю Ω з межею S. Зафіксуємо точку $x \notin \overline{\Omega}$ і запровадимо позначення $d_1 := \min\limits_{y\in\Omega} |x-y|$, $d_2 := \max\limits_{y\in\Omega} |x-y|$, тобто d_1 – відстань від точки x до найближчої точки поверхні S, а d_2 – до найвіддаленішої точки S (рис. 4.11). Значення функції u в точці x у момент часу t визначається формулою (14). Якщо t достатньо мале таке, що $at < d_1$, то сфера $S_{at}(x)$ не перетинає область Ω, тому φ і ψ дорівнюють нулю, а отже, $u(x,t) = 0$ і в точці x буде спокій, тобто початкові збурення ще не дійшли до цієї точки. Для моментів часу $t \in (t_1, t_2)$, де $t_1 := d_1/a$, $t_2 := d_2/a$, сфера $S_{at}(x)$ перетинатиме область Ω. Тому для таких t $u(x,t) \neq 0$, а це означає, що точка x знаходиться у збудженому стані. З моменту часу $t > t_2$ сфера $S_{at}(x)$ не перетинатиме область Ω, і отже, $u(x,t) = 0$, а це означає, що точка x знову знаходиться в стані спокою.

Якщо уявити собі, що з кожної точки області Ω у всіх напрямках поширюються хвилі (збурення) зі швидкістю a, то описані вище зміни u з часом з точки зору фізики можна тлумачити так: для $t < t_1$ хвилі ще не дійшли до точки x; у момент часу t_1 **передній фронт** хвилі досягає точки x; протягом проміжку часу $[t_1, t_2]$ через точку x проходить хвиля; у момент часу t_2 проходить **задній фронт** хвилі, і з цього моменту часу середовище в точці x залишається в стані спокою.

Отже, для процесу поширення хвиль у просторі має місце **принцип Гюйгенса**: *якщо початкове збурення локалізоване в просторі, то поширення цього збурення має передній і задній фронти хвилі, і збурення в кожній точці локалізоване в часі.*

Хвилі у випадку простору $\mathbb{R}^3$ називаються **сферичними**.

2) Формула Пуассона (21). Нехай $\varphi \neq 0$ і $\psi \neq 0$ лише в області $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ з межею Γ (рис. 4.12). Візьмемо будь-яку точку

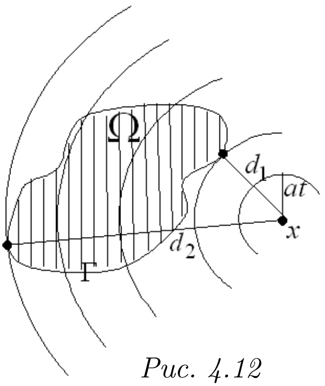

Рис. 4.12

$x \notin \Omega$. Збурення $u(x,t)$ у точці x в момент часу t визначається формулою (21), де інтегрування проводиться по кругу $K_{at}(x)$. Якщо $t < t_1 := d_1/a$, то круг $K_{at}(x)$ не перетинається з областю Ω, а тому $u(x,t) = 0$. Для всіх $t > t_1$ маємо, що $K_{at}(x) \cap \Omega \neq \emptyset$, і тоді $u(x,t) \neq 0$, бо $\varphi \neq 0$ і $\psi \neq 0$. Отже, процес поширення збурення має **передній фронт** хвилі, що відповідає моменту часу t_1, і не має **заднього фронту** хвилі, він розмитий, сигнал не зникає з ростом t, а слабне, оскільки знаменник в (21) зростає. Відсутність заднього фронту хвилі можна пояснити, якщо розглядати формулу Пуассона, як частинний випадок формули Кірхгофа, що описує явище поширення хвиль в $\mathbb{R}^3$, де немає локалізації початкових умов, оскільки φ і ψ відмінні від нуля в області Ω, а в $\mathbb{R}^3$ це буде нескінченний циліндр з основою Ω і твірними, паралельними осі Ox_3 (рис. 4.13). Хвилі у випадку площини $\mathbb{R}^2$ називаються **циліндричними**.

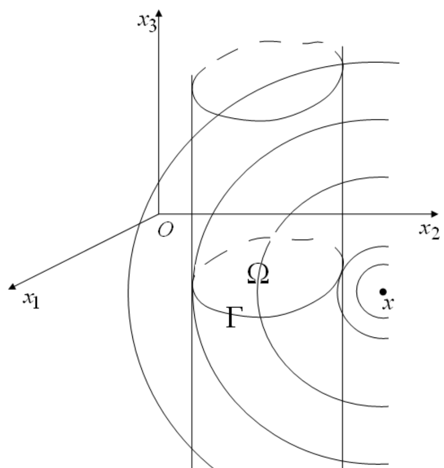

Рис. 4.13

Приклад. Розв'язати задачу Коші для тривимірного рівняння коливань

$$u_{tt} = u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + u_{x_3x_3}, \ \ (x,t) \in \mathbb{R}^4_+,$$
$$u|_{t=0} = x_3, \ \ u_t|_{t=0} = x_1 + x_3, \ \ x \in \mathbb{R}^3.$$

◀ Скористаємося формулою Кірхгофа (14), де $a = 1$, $\varphi(x) = x_3$, $\psi(x) = x_1 + x_3$. Тоді

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi}\partial_t \int\limits_{S_t(x)} \frac{\xi_3}{t} d_\xi S_t + \frac{1}{4\pi} \int\limits_{S_t(x)} \frac{\xi_1 + \xi_3}{t} d_\xi S_t,$$

де сфера $S_t(x)$ визначається рівнянням $(\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2 + (\xi_3 - x_3)^2 = t^2$. Спороектуємо цю сферу на площину $O\xi_1\xi_2$. Позначимо через $K_t(x)$ круг, у який проектується сфера. Зведемо поверхневі інтеграли, які стоять у правій частині, до подвійних, що беруться по кругу $K_t(x)$:

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi}\partial_t \Big(\int\limits_{K_t(x)} \frac{x_3 + \sqrt{t^2 - (\xi_1 - x_1)^2 - (\xi_2 - x_2)^2}}{t\sqrt{t^2 - (\xi_1 - x_1)^2 - (\xi_2 - x_2)^2}}\, t d\xi_1 d\xi_2 +$$

$$+ \int\limits_{K_t(x)} \frac{x_3 - \sqrt{t^2 - (\xi_1 - x_1)^2 - (\xi_2 - x_2)^2}}{t\sqrt{t^2 - (\xi_1 - x_1)^2 - (\xi_2 - x_2)^2}}\, t d\xi_1 d\xi_2 \Big) +$$

$$+ \frac{1}{4\pi}\Big(\int\limits_{K_t(x)} \frac{\xi_1 + x_3 + \sqrt{t^2 - (\xi_1 - x_1)^2 - (\xi_2 - x_2)^2}}{t\sqrt{t^2 - (\xi_1 - x_1)^2 - (\xi_2 - x_2)^2}}\, t d\xi_1 d\xi_2 +$$

$$+ \int\limits_{K_t(x)} \frac{\xi_1 + x_3 - \sqrt{t^2 - (\xi_1 - x_1)^2 - (\xi_2 - x_2)^2}}{t\sqrt{t^2 - (\xi_1 - x_1)^2 - (\xi_2 - x_2)^2}}\, t d\xi_1 d\xi_2 \Big).$$

Перші доданки в дужках – інтеграли, взяті по верхній половині сфери $\xi_3 = x_3 + \sqrt{t^2 - (\xi_1 - x_1)^2 - (\xi_2 - x_2)^2}$, а другі – по нижній половині сфери $\xi_3 = x_3 - \sqrt{t^2 - (\xi_1 - x_1)^2 - (\xi_2 - x_2)^2}$. Перейдемо в подвійних інтегралах по кругу $K_t(x)$ до полярних координат: $\xi_1 - x_1 = \rho\cos\varphi$, $\xi_2 - x_2 = \rho\sin\varphi$, $0 < \rho < t$,

$0 < \varphi \le 2\pi$. Тоді

$$u(x,t) = \frac{x_3}{2\pi}\partial_t \int\limits_0^t \frac{\rho d\rho}{\sqrt{t^2-\rho^2}} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi + \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^t \frac{(x_1+x_3)\rho d\rho}{\sqrt{t^2-\rho^2}} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi =$$

$$= \frac{x_3}{2\pi}\partial_t(-\sqrt{t^2-\rho^2})\Big|_0^t 2\pi + \frac{1}{2\pi}(x_1+x_3)(-\sqrt{t^2-\rho^2})\Big|_0^t 2\pi =$$

$$= x_3\partial_t t + (x_1+x_3)t = x_3 + (x_1+x_3)t, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^4_+. \blacktriangleright$$

4.3 Розв'язування мішаних задач для рівняння коливань струни методом Фур'є (відокремлення змінних)

Метод Фур'є або **метод відокремлення змінних** є одним з найпоширеніших методів розв'язування задач для рівнянь із частинними похідними. Застосуємо цей метод до першої мішаної задачі для рівняння коливань однорідної струни.

4.3.1 Вільні коливання обмеженої струни із закріпленими кінцями. Розглянемо задачу про вільні коливання однорідної струни довжини l, кінці якої закріплено. Математична модель цієї задачі така:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \ \ (x,t) \in Q_{t_0}, \tag{1}$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \ \ u_t|_{t=0} = \psi(x), \ \ x \in [0,l], \tag{2}$$

$$u|_{x=0} = 0, \ \ u|_{x=l} = 0, \ \ t \in [0,t_0]. \tag{3}$$

Тут $Q_{t_0} := \{(x,t) \,|\, x \in (0,l),\, t \in (0,t_0]\,\}$, де t_0 – задане додатне число або $t_0 = +\infty$ (рис. 4.14) .

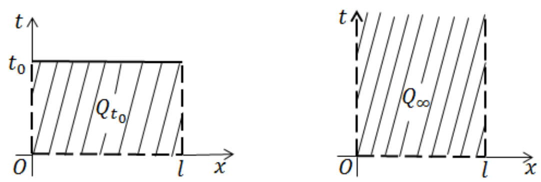

Рис. 4.14

Вважатимемо, що φ і ψ мають потрібну гладкість та узгоджені при $x = 0$ і $x = l$ з нулем.

Шукатимемо частинні розв'язки рівняння (1), які задовольняють крайові умови (3), у вигляді добутку

$$u(x,t) = X(x)T(t), \;\; (x,t) \in Q_{t_0}. \tag{4}$$

При цьому нас цікавлять тільки ненульові розв'язки.

Підставивши (4) в (1), дістанемо

$$X(x)T''(t) = a^2 X''(x)T(t),$$

або, після відокремлення змінних, тотожну рівність

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{a^2 T(t)}, \;\; (x,t) \in Q_{t_0}. \tag{5}$$

Ліва частина в цій рівності не залежить від t і вона дорівнює правій, а тому й права не залежить від t; права частина не залежить від x і вона дорівнює лівій, а тому й ліва не залежить від x. Звідси випливає, що рівність (5) можлива лише тоді, коли ці відношення дорівнюють сталій, яку позначимо через $-\lambda$, тобто

$$T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0, \; t \in (0, t_0], \tag{6}$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \; x \in (0, l). \tag{7}$$

Отже, для знаходження функцій T і X одержали два звичайні диференціальні рівняння.

Підставляючи (4) в крайові умови (3), дістаємо

$$X(0)T(t) = 0, \; X(l)T(t) = 0, \; t \in (0, t_0].$$

Оскільки $T(t) \not\equiv 0$, бо в противному разі ми мали б тривіальний розв'язок, то

$$X(0) = 0, \;\; X(l) = 0. \tag{8}$$

Задача (7), (8) є крайовою задачею з параметром λ для звичайного диференціального рівняння другого порядку. Ця задача не при кожному λ має ненульові розв'язки. Ті значення λ, при яких задача (7), (8) має ненульові розв'язки, називаються **власними числами** (**власними значеннями**), а самі ці ненульові розв'язки – **власними функціями** задачі. Задачу (7), (8) називають при цьому **задачею на власні числа та власні функції** або **задачею Штурма–Ліувілля**.

Розв'язуватимемо задачу (7), (8) стандартним способом, знаходячи загальний розв'язок рівняння (7) і задовольняючи ним крайові умови (8). Розглянемо окремо три можливі випадки залежно від знака параметра λ, оскільки від цього залежить вигляд загального розв'язку.

1) Нехай $\lambda < 0$. У цьому випадку характеристичне рівняння $\mu^2 + \lambda = 0$ має два різні корені і загальний розв'язок рівняння (7) визначається формулою

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}, \;\; x \in (0, l).$$

Задовольнивши крайові умови (8), одержимо

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ C_1 e^{\sqrt{-\lambda}l} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}l} = 0. \end{cases}$$

Визначник цієї системи не дорівнює нулю, тому $C_1 = C_2 = 0$. Отже, в цьому випадку задача (7), (8) не має ненульових розв'язків, тобто власні числа задачі (7), (8) не можуть бути від'ємними.

2) Нехай $\lambda = 0$. Загальний розв'язок рівняння (7) у цьому випадку має вигляд

$$X(x) = C_1 + C_2 x, \;\; x \in (0, l),$$

і умови (8) задовольняються, коли

$$\begin{cases} C_1 + C_2 \cdot 0 = 0, \\ C_1 + C_2 \cdot l = 0, \end{cases} \quad \text{тобто } C_1 = C_2 = 0.$$

Отже, $X(x) = 0$, а це означає, що $\lambda = 0$ не є власним числом задачі (7), (8).

3) Нехай $\lambda > 0$. Загальний розв'язок рівняння (7) має вигляд

$$X(x) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x, \;\; x \in (0, l).$$

Задовольняючи умови (8), одержуємо

$$\begin{cases} C_1 = 0, \\ C_2 \sin\sqrt{\lambda}l = 0. \end{cases}$$

З першого рівняння випливає, що $C_1 = 0$, а з другого – $C_2 \sin\sqrt{\lambda}l = 0$. Треба взяти $C_2 \neq 0$, оскільки в противному разі $X(x) = 0$. Тому $\sin\sqrt{\lambda}l = 0$, тобто $\sqrt{\lambda} = \frac{n\pi}{l}$, $n \in \mathbb{N}$. Отже, нетривіальні розв'язки задачі (7), (8) можливі лише при значеннях

$$\lambda_n = (\frac{n\pi}{l})^2, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Цим власним значенням відповідають власні функції

$$X_n(x) = C_{2n} \sin\frac{n\pi x}{l}, \ \ x \in (0, l), \ \ n \in \mathbb{N}.$$

Зважаючи на те, що власні функції внаслідок однорідності задачі (7), (8) визначаються з точністю до сталого множника, можна зафіксувати значення C_{2n}, взявши, наприклад, $C_{2n} = 1$, а тоді

$$X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{l}, \ \ x \in (0, l), \ \ n \in \mathbb{N}.$$

Розв'яжемо рівняння (6), замінивши в ньому λ на λ_n, $n \in \mathbb{N}$. Одержимо

$$T_n(t) = A_n \cos\frac{an\pi}{l}t + B_n \sin\frac{an\pi}{l}t, \ \ t \in (0, t_0],$$

де A_n, B_n – довільні сталі.

Отже, функції

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = \Big(A_n \cos\frac{an\pi}{l}t + B_n \sin\frac{an\pi}{l}t\Big) \sin\frac{n\pi x}{l},$$

$$(x,t) \in Q_{t_0}, \ n \in \mathbb{N},$$

є розв'язками рівняння (1), які задовольняють крайові умови (3).

Оскільки рівняння (1) є лінійним і однорідним, то довільна скінченна сума розв'язків буде також розв'язком. Те саме властиве й сумі ряду

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(A_n\cos\frac{an\pi}{l}t+B_n\sin\frac{an\pi}{l}t\Big)\sin\frac{n\pi x}{l},\qquad (x,t)\in\overline{Q}_{t_0}, \tag{9}$$

якщо він рівномірно збігається разом зі своїми формальними похідними другого порядку за x і t. Оскільки кожний доданок у (9) задовольняє крайові умови (3), то ці умови задовольнятиме й сума ряду, тобто функція u.

Залишилося визначити сталі A_n і B_n так, щоб задовольнялись і початкові умови (2). Підставивши (9) в (2), дістанемо

$$\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\frac{n\pi x}{l}=\varphi(x),\ \ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{an\pi}{l}\,B_n\,\sin\frac{n\pi x}{l}=\psi(x),\ \ x\in[0,l]. \tag{10}$$

Ці формули дають розклад початкових функцій φ і ψ у ряди Фур'є за синусами в інтервалі $(0,l)$. Оскільки коефіцієнти c_n і d_n розкладів функцій у ряди за синусами визначаються формулами

$$c_n=\frac{2}{l}\int\limits_0^l\varphi(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{l}\,d\xi,\ \ d_n=\frac{2}{l}\int\limits_0^l\psi(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{l}\,d\xi,\ \ n\in\mathbb{N}, \tag{11}$$

то з (10) і (11) випливають рівності

$$A_n=c_n,\ \ \frac{an\pi}{l}B_n=d_n,\ \ n\in\mathbb{N},$$

або

$$A_n=\frac{2}{l}\int\limits_0^l\varphi(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{l}\,d\xi,\ \ B_n=\frac{2}{an\pi}\int\limits_0^l\psi(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{l}\,d\xi,\ \ n\in\mathbb{N}. \tag{12}$$

Отже, розв'язок задачі (1) – (3) визначається рядом (9), де коефіцієнти A_n і B_n знаходяться за формулами (12).

Залишилося з'ясувати, за яких умов на φ і ψ ряд (9) і його формальні похідні другого порядку за x і t збігаються рівномірно в $\overline{Q}_{t_0}$.

Теорема 4.3. *Нехай виконуються умови:*

1) функція φ на $[0,l]$ двічі неперервно диференційовна, має кусково-неперервну третю похідну і задовольняє умови

$$\varphi(0)=\varphi(l)=0,\ \ \varphi''(0)=\varphi''(l)=0; \tag{13}$$

2) функція ψ на $[0,l]$ неперервно диференційовна, має кусково-неперервну другу похідну і задовольняє умови

$$\psi(0)=\psi(l)=0. \tag{14}$$

Тоді сума ряду (9) є класичним розв'язком задачі (1) – (3).

◀ Для доведення теореми треба переконатися, що ряд (9) і його формальні похідні другого порядку за x і t збігаються рівномірно в $\overline{Q}_{t_0}$.

Перетворимо спочатку ряд (9). Інтегруючи (12) частинами і беручи до уваги (13) і (14), отримуємо

$$A_n=\frac{2}{l}\int\limits_0^l\varphi(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{l}\,d\xi=-\frac{2}{n\pi}\int\limits_0^l\varphi(\xi)\,d\cos\frac{n\pi\xi}{l}=$$

$$=-\frac{2}{n\pi}\Big(\varphi(\xi)\,\cos\frac{n\pi\xi}{l}\Big)\Big|_0^l+\frac{2}{n\pi}\int\limits_0^l\varphi'(\xi)\,\cos\frac{n\pi\xi}{l}d\xi=$$

$$=\frac{2l}{(n\pi)^2}\int\limits_0^l\varphi'(\xi)\,d\sin\frac{n\pi\xi}{l}=\frac{2l}{(n\pi)^2}\Big(\Big(\varphi'(\xi)\,\sin\frac{n\pi\xi}{l}\Big)\Big|_0^l-$$

$$-\int\limits_0^l\varphi''(\xi)\,\sin\frac{n\pi\xi}{l}\,d\xi\Big)=\frac{2l^2}{(n\pi)^3}\int\limits_0^l\varphi''(\xi)\,d\cos\frac{n\pi\xi}{l}=$$

$$= \frac{2l^2}{(n\pi)^3}\Big(\Big(\varphi''(\xi)\cos\frac{n\pi\xi}{l}\Big)\Big|_0^l - \int\limits_0^l \varphi'''(\xi)\cos\frac{n\pi\xi}{l}\,d\xi\Big) =$$

$$= -(\frac{l}{n\pi})^3\, B_n^{(3)}, \;\; B_n^{(3)} := \frac{2}{l}\int\limits_0^l \varphi'''(\xi)\cos\frac{n\pi\xi}{l}\,d\xi;$$

$$B_n = (-\frac{l}{n\pi})^3\, A_n^{(2)}, \;\; A_n^{(2)} := \frac{2}{l}\int\limits_0^l \frac{\psi''(\xi)}{a}\sin\frac{n\pi\xi}{l}\,d\xi.$$

Підставивши одержані вирази для A_n і B_n у формулу (9), дістанемо

$$u(x,t) = -\Big(\frac{l}{\pi}\Big)^3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\Big(B_n^{(3)}\cos\frac{an\pi}{l}t + A_n^{(2)}\sin\frac{an\pi}{l}t\Big)\sin\frac{n\pi x}{l},$$

$$(x,t)\in\overline{Q}_{t_0}. \tag{15}$$

Доведемо, що ряд (15) і його формальні похідні другого порядку за x і t збігаються рівномірно в $\overline{Q}_{t_0}$. Для цього скористаємося мажорантною ознакою Вейєрштрасса. Мажорантним рядом для ряду (15) є

$$\Big(\frac{l}{\pi}\Big)^3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}(|B_n^{(3)}| + |A_n^{(2)}|), \tag{16}$$

а для рядів, одержаних формальним диференціюванням двічі за x і t ряду (15), є ряд

$$M\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(|B_n^{(3)}| + |A_n^{(2)}|), \;\; M - \text{ стала.} \tag{17}$$

Ряд (16), очевидно, збігається. Для доведення збіжності ряду (17), досить довести, що збігаються ряди

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|A_n^{(2)}|}{n}, \;\; \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|B_n^{(3)}|}{n}.$$

Збіжність цих рядів випливає з того, що

$$\frac{|A_n^{(2)}|}{n} \le \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{n^2} + |A_n^{(2)}|^2\Big), \ \frac{|B_n^{(3)}|}{n} \le \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{n^2} + |B_n^{(3)}|^2\Big),$$

бо $ab \le \dfrac{1}{2}(a^2+b^2)$ – нерівність Коші, а ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |A_n^{(2)}|^2$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |B_n^{(3)}|^2$ збігаються.

Отже, ряд (9) і його формальні похідні другого порядку за x і t збігаються абсолютно й рівномірно в області $\overline{Q}_{t_0}$. ▶

Зауваження 1. *Фізична інтерпретація розв'язку (9).* Розглянемо ряд (9) і введемо позначення

$$A_n = a_n \sin\varphi_n, \ \ B_n = a_n \cos\varphi_n,$$

де $a_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}$, $\operatorname{tg}\varphi_n = \frac{A_n}{B_n}$. Тоді, якщо скористатися формулою

$$\cos\frac{an\pi}{l}t\,\sin\varphi_n + \sin\frac{an\pi}{l}t\,\cos\varphi_n = \sin\Big(\frac{an\pi}{l}t + \varphi_n\Big),$$

ряд (9) можна подати у вигляді

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi x}{l}\sin\Big(\frac{an\pi}{l}t + \varphi_n\Big), \ \ (x,t) \in \overline{Q}_{t_0}. \qquad (18)$$

Кожний член ряду (18) є так званою **стоячою хвилею**

$$u_n(x,t) = a_n \sin\frac{n\pi x}{l}\sin\Big(\frac{an\pi}{l}t + \varphi_n\Big),$$

при якій точки струни здійснюють гармонічні коливання з однією і тією самою частотою $\omega_n := \frac{an\pi}{l}$ і фазою φ_n, а амплітуди коливання $a_n \sin\frac{n\pi x}{l}$ залежать від абсциси x точки струни. При такому коливанні всі точки струни одночасно досягають свого максимального відхилення в той чи інший бік і одночасно проходять положення рівноваги.

Точки $x = \frac{ml}{n}$, $m \in \{1, \ldots, n-1\}$, в яких $\sin\frac{n\pi}{l}x = 0$, протягом усього процесу залишаються нерухомими і називаються **вузлами стоячої хвилі** u_n. Точки $x = \frac{(2m+1)l}{2n}$, $m \in$

$\{0, 1, \ldots, n-1\}$, в яких $\sin \frac{n\pi x}{l} = \pm 1$ здійснюють коливання з максимальною амплітудою і називаються **пучностями стоячої хвилі**.

Розв'язок (18) є сумою окремих стоячих хвиль u_n, причому, беручи до уваги, що

$$a_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2} = \left(\frac{l}{n\pi}\right)^3 \sqrt{(B_n^{(3)})^2 + (A_n^{(2)})^2},$$

дістаємо $u_n \to 0$ при $n \to \infty$ рівномірно. Звідси випливає, що основну роль у хвильовому процесі відіграють перші члени ряду (18).

При коливаннях струна видає звук. Звуки можна класифікувати на музичні й немузичні. Перші називаються **нотами**, а другі – **шумами**. Ноти розміщуються в певному порядку за їхньою висотою. Ті ноти, які вухо не спроможне розрізняти за висотою, називаються **тонами**.

Висота звучання залежить від частоти ω_n, а сила тону – від амплітуди. Частота **основного** (**найнижчого**) тону $\omega_1 = \dfrac{a\pi}{l}$. Основний тон описується першою гармонікою $u_1(x,t) = a_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) \sin \frac{\pi x}{l}$, його вузлами є точки $x = 0$ і $x = l$, а пучністю – середина струни $x = \frac{l}{2}$. Тони, які відповідають гармонікам, кратним першій, тобто мають частоти $\omega_k = k\omega_1$, називаються **обертонами**.

Зауваження 2. *Поняття про узагальнений розв'язок задачі (1) – (3).* При побудові розв'язку (9) задачі (1)–(3) на функції φ і ψ накладались жорсткі умови гладкості. Ці обмеження викликані необхідністю диференціювати почленно ряд (9).

Відомо, що закони природи носять інтегральний характер. При виведенні рівнянь коливань часто спочатку записують його в інтегральній формі, а вже потім переходять до диференціальної форми запису, накладаючи тим самим додаткове обмеження диференційовності. Крім того, початкові функції φ і ψ беруться наближено з експерименту, тому закономірно ввести поняття узагальненого розв'язку задачі (1)–(3).

Нехай функції φ_k і ψ_k, $k \in \mathbb{N}$, задовольняють умови теореми

4.3, а u_k, $k \in \mathbb{N}$, – відповідні класичні розв'язки задач (1)–(3), в яких замість φ і ψ взяті φ_k і ψ_k. Якщо функціональні послідовності $\{\varphi_k,\, k \in \mathbb{N}\}$ і $\{\psi_k,\, k \in \mathbb{N}\}$ збігаються в $L_2((0,l))$ відповідно до φ і ψ, тобто

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_0^l (\varphi_k(x) - \varphi(x))^2\, dx = 0, \quad \lim_{k\to\infty} \int\limits_0^l (\psi_k(x) - \psi(x))^2\, dx = 0,$$

то рівномірна границя

$$u(x,t) := \lim_{k\to\infty} u_k(x,t), \quad (x,t) \in \overline{Q}_{t_0},$$

називається **узагальненим розв'язком** задачі (1)–(3).

Якщо задача (1)–(3) має класичний розв'язок, то він збігається з узагальненим.

Зауваження 3. У випадку крайових умов іншого вигляду, ніж (3), схема розв'язування відповідної крайової задачі не змінюється. При цьому іншими будуть власні числа та власні функції задачі Штурма–Ліувілля. Відзначимо, що для застосування методу Фур'є, як видно з вищенаведеного, рівняння та крайові умови мають бути однорідними.

Приклад 1. Знайти відхилення $u(x,t)$ від положення рівноваги точок однорідної горизонтальної струни, закріпленої на кінці $x = 0$, правий кінець якої $x = l$ переміщується так, що дотична до струни залишається весь час горизонтальною. У початковий момент часу струна мала форму $\varphi(x) = 20 \sin \frac{11\pi x}{2l} \cos \frac{4\pi x}{2l}$, а початкові швидкості дорівнювали нулю.

◀ Припускаючи, що коливання струни малі, дістаємо таку мішану задачу: знайти розв'язок рівняння вільних коливань струни

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad (x,t) \in Q_\infty,$$

який задовольняє початкові

$$u|_{t=0} = 20 \sin \frac{11\pi x}{1l} \cos \frac{4\pi x}{2l}, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad x \in [0,l],$$

та крайові умови

$$u|_{x=0} = 0, \quad u_x|_{x=l} = 0, \quad t \geq 0.$$

Шукатимемо ненульові розв'язки рівняння, які задовольняють нульові крайові умови у вигляді $u(x,t) = X(x)T(t)$. Тоді для знаходження T матимемо рівняння

$$T''(t) + a^2\lambda^2 T(t) = 0,$$

а для знаходження X – крайову задачу

$$\begin{array}{l} X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \\ X(0) = 0, \ X'(l) = 0. \end{array}$$

Знайдемо власні числа та власні функції задачі Штурма–Ліувілля. Загальний розв'язок рівняння

$$X(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x,$$

а тому

$$X'(x) = -C_1 \lambda \sin \lambda x + C_2 \lambda \cos \lambda x.$$

Задовольняючи нульові крайові умови, маємо

$$C_1 = 0, \ \ -C_1 \lambda \sin \lambda l + C_2 \lambda \cos \lambda l = 0.$$

Оскільки нас цікавлять ті значення λ, яким відповідають ненульові розв'язки, то одержимо, що $\cos \lambda l = 0$, бо $C_1 = 0$, $C_2 \neq 0$ і $\lambda \neq 0$. Тому $\lambda l = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{N}$, або $\lambda = \lambda_n := \frac{(2n+1)\pi}{2l}$, $n \in \mathbb{N}$, – власні числа задачі. Звідси випливає, що власними функціями задачі є

$$X_n(x) = \sin \frac{(2n+1)\pi}{2l} x, \ \ x \in [0, l].$$

Розв'язуючи диференціальне рівняння для T при $\lambda = \lambda_n$, дістаємо

$$T_n(t) = A_n \cos \frac{(2n+1)\pi a}{2l} t + B_n \sin \frac{(2n+1)\pi a}{2l} t, \ \ n \in \mathbb{N}.$$

Тоді розв'язок мішаної задачі шукаємо у вигляді ряду

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(A_n \cos \frac{(2n+1)\pi a}{2l} t + B_n \sin \frac{(2n+1)\pi a}{2l} t \Big) \times$$

$$\times \sin \frac{(2n+1)\pi}{2l} x, (x,t) \in \overline{Q}_\infty.$$

Задовольняючи цим рядом початкові умови, одержуємо

$$\begin{cases} \sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{(2n+1)\pi}{2l} x = 20 \sin \frac{11\pi x}{2l} \cos \frac{4\pi x}{2l}, \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{2l} \pi a\, B_n \sin \frac{(2n+1)\pi}{2l} x = 0, \;\; x \in [0,l]. \end{cases}$$

З другої рівності випливає, згідно з єдиністю розкладу функції в ряд Фур'є, що $B_n = 0$, $n \in \mathbb{N}$.

Першу умову запишемо у вигляді

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{(2n+1)\pi}{2l} x = 10(\sin \frac{7\pi x}{2l} + \sin \frac{15\pi x}{2l}), \;\; x \in [0,l].$$

Звідси випливає, що $A_n = 0$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{3,7\}$, а $A_3 = A_7 = 10$.

Отже, розв'язком задачі є функція

$$u(x,t) = 10\Big(\cos \frac{7\pi at}{2l} \sin \frac{7\pi x}{2l} + \cos \frac{15\pi at}{2l} \sin \frac{15\pi x}{2l}\Big), \; (x,t) \in \overline{Q}_\infty. \blacktriangleright$$

4.3.2 Вимушені коливання струни із закріпленими кінцями. Розглянемо задачу про коливання однорідної струни, закріпленої на кінцях $x = 0$ і $x = l$, під дією зовнішньої сили $p(x,t)$, розрахованої на одиницю довжини. Математична модель задачі така:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t), \;\; (x,t) \in Q_{t_0}, \tag{19}$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \;\; u_t|_{t=0} = \psi(x), \;\; x \in [0,l], \tag{20}$$

$$u|_{x=0} = 0, \;\; u|_{x=l} = 0, \;\; t \in [0,t_0], \tag{21}$$

де $f(x,t) := \dfrac{p(x,t)}{\rho}$ – інтенсивність зовнішньої сили.

Вважатимемо, що функції φ і ψ задовольняють умови теореми 4.3, а функція f є неперервною, має неперервну похідну f_{xx} і задовольняє умови

$$f(0,t) = f(l,t) = 0, \;\; t \in [0,t_0].$$

Шукатимемо розв'язок задачі (19)–(21) у вигляді суми функцій
$$u = v + w, \tag{22}$$
де v – розв'язок задачі
$$v_{tt} = a^2 v_{xx}, \ \ (x,t) \in Q_{t_0},$$
$$v|_{t=0} = \varphi(x), \ \ v_t|_{t=0} = \psi(x), \ \ x \in [0,l],$$
$$v|_{x=0} = 0, \ \ v|_{x=l} = 0, \ \ t \in [0,t_0]. \tag{23}$$
Задача (23) є задачею типу (1)–(3), розв'язком якої є функція
$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(A_n \cos\frac{an\pi}{l}t + B_n \sin\frac{an\pi}{l}t\Big) \sin\frac{n\pi x}{l}, \ (x,t) \in \overline{Q}_{t_0},$$
де коефіцієнти A_n і B_n визначаються формулами (12).

Для w одержуємо задачу
$$w_{tt} = a^2 w_{xx} + f(x,t), \ \ (x,t) \in Q_{t_0}, \tag{24}$$
$$w|_{t=0} = 0, \ \ w_t|_{t=0} = 0, \ \ x \in [0,l], \tag{25}$$
$$w|_{x=0} = 0, \ \ w|_{x=l} = 0, \ \ t \in [0,t_0]. \tag{26}$$
Розв'язок w описує **вимушені коливання** струни, тобто коливання, які спричинені лише зовнішньою збурюючою силою (за відсутності початкових відхилень та імпульсів).

Шукатимемо розв'язок задачі (24)–(26) у вигляді ряду Фур'є за власними функціями відповідної однорідної задачі (23), тобто у вигляді
$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t) \sin\frac{n\pi x}{l}, \ (x,t) \in \overline{Q}_{t_0}. \tag{27}$$

Якщо ряд (27) збігається рівномірно в $\overline{Q}_{t_0}$, то крайові умови (26) задовольняються, бо $\sin\frac{n\pi x}{l}$, $n \in \mathbb{N}$, – власні функції.

Визначимо функції g_n, $n \in \mathbb{N}$, так, щоб задовольнялись рівняння(24) і початкові умови (25).

Підставивши (27) у (24), дістанемо

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Big(g_n''(t)+(\frac{an\pi}{l})^2 g_n(t)\Big)\sin\frac{n\pi x}{l}=f(x,t),\ (x,t)\in\overline{Q}_{t_0}. \quad (28)$$

Розкладемо f на $[0,l]$ в ряд Фур'є за системою функцій $\{\sin\frac{n\pi x}{l},\ n\in\mathbb{N}\}$:

$$f(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l},\ (x,t)\in\overline{Q}_{t_0}, \quad (29)$$

де

$$f_n(t):=\frac{2}{l}\int\limits_0^l f(\xi,t)\sin\frac{n\pi\xi}{l}\,d\xi,\ \ t\in[0,t_0],\ n\in\mathbb{N}. \quad (30)$$

З (28), (29) випливають рівності

$$g_n''(t)+\Big(\frac{an\pi}{l}\Big)^2 g_n(t)=f_n(t),\ \ t\in[0,t_0],\ n\in\mathbb{N}. \quad (31)$$

Щоб сума ряду (27) задовольняла початкові умови (25), функції $g_n(t)$, $n\in\mathbb{N}$, повинні задовольняти умови

$$g_n|_{t=0}=0,\ \ g_n'|_{t=0}=0,\ \ n\in\mathbb{N}. \quad (32)$$

Розв'язки задач Коші (31), (32), як відомо з теорії звичайних диференціальних рівнянь, визначаються формулами

$$g_n(t)=\frac{l}{an\pi}\int\limits_0^t f_n(\tau)\sin\frac{an\pi}{l}(t-\tau)\,d\tau,\ n\in\mathbb{N},$$

або, якщо скористатися формулою (30) для f_n, $n\in\mathbb{N}$,

$$g_n(t)=\frac{2}{an\pi}\int\limits_0^t\Big(\int\limits_0^l f(\xi,\tau)\sin\frac{n\pi\xi}{l}\,d\xi\Big)\sin\frac{an\pi}{l}\,(t-\tau)\,d\tau, \quad (33)$$

$$t \in [0, t_0] \ n \in \mathbb{N}.$$

Підставивши (33) в (27), дістанемо розв'язок задачі (24)–(26), якщо ряд (27) і його формальні похідні другого порядку за x і t збігаються рівномірно в $\overline{Q}_{t_0}$. Це виконується, якщо f задовольняє наведені вище умови.

Отже, розв'язок задачі (19)–(21) має вигляд

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(A_n \cos \frac{an\pi}{l} t + B_n \sin \frac{an\pi}{l} t \Big) \sin \frac{n\pi x}{l} +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l}, \ (x,t) \in \overline{Q}_{t_0}, \tag{34}$$

де коефіцієнти A_n, B_n і g_n визначаються формулами (12) і (33).

Зауваження 4. У багатьох задачах у рівності (22) функцію w можна вибрати так, щоб вона задовольняла неоднорідне рівняння (19) і нульові крайові умови (21). Тоді для v дістанемо задачу типу (23). Зокрема, цим методом зручно користуватися, коли $f(x,t) = h(x)g(t)$.

Приклад 2. Розв'язати задачу

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + bx(x-l), \ (x,t) \in Q_\infty,$$

$$u|_{t=0} = 0, \ u_t|_{t=0} = 0, \ x \in [0,l],$$

$$u|_{x=0} = 0, \ u|_{x=l} = 0, \ t \in [0, \infty).$$

◀ Шукатимемо розв'язок цієї задачі у вигляді (22), де функція w вибрана так, що вона задовольняє неоднорідне рівняння і нульові крайові умови. Оскільки неоднорідність рівняння не залежить від t, то можна вважати, що $w(x,t) \equiv w(x)$. Для знаходження w маємо задачу

$$w''(x) + bx(x-l) = 0,$$

$$w(0) = 0, \ w(l) = 0.$$

Тоді $w'(x) = -\dfrac{b}{3}x^3 + \dfrac{bl}{2}x^2 + C_1$, а $w(x) = -\dfrac{b}{12}x^4 + \dfrac{bl}{6}x^3 + C_1x + C_2$. Задовольнивши крайові умови, дістанемо

$$C_2 = 0, \;\; -\frac{b}{12}l^4 + \frac{b}{6}l^4 + C_1 l = 0,$$

або $C_1 = -\dfrac{bl^3}{12}$, $C_2 = 0$.

Отже,

$$w(x) = -\frac{b}{12}x(x^3 - 2x^2 l + l^3), \;\; x \in [0, l].$$

Для функції v матимемо задачу

$$v_{tt} = v_{xx}, \;\; (x, t) \in Q_\infty,$$

$$v|_{t=0} \equiv -w|_{t=0} = \frac{b}{12}(x^4 - 2l\,x^3 + l^3 x),$$

$$v_t|_{t=0} \equiv -w_t|_{t=0} = 0, \;\; x \in [0, l],$$

$$v|_{x=0} = 0, \;\; v|_{x=l} = 0, t \in [0, +\infty),$$

яка аналогічна задачі (1)–(3). Її розв'язок визначається рядом

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos\frac{n\pi t}{l} + B_n \sin\frac{n\pi t}{l} \right) \sin\frac{n\pi x}{l}, \; (x, t) \in \overline{Q}_\infty,$$

де A_n і B_n обчислюються за формулами (12), тобто

$$A_n = \tfrac{2}{l}\int\limits_0^l \tfrac{b}{12}(\xi^4 - 2l\,\xi^3 + l^3\,\xi)\sin\tfrac{n\pi\xi}{l}\,d\xi =$$

$$= \begin{cases} \frac{8l^4}{(2k-1)^5\,\pi^5}, & \text{якщо } n = 2k - 1, \\ 0, & \text{якщо } n = 2k, \;\; k \in \mathbb{N}; \end{cases}$$

$$B_n = \frac{2}{n\pi}\int\limits_0^l 0 \cdot \sin\frac{n\pi\xi}{l}\,d\xi = 0, \; n \in \mathbb{N}.$$

Тоді одержуємо, що

$$v(x, t) = \frac{8l^4}{\pi^5}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^5}\cos\frac{(2k-1)\pi t}{l} \times$$

$$\times \sin \frac{(2k-1)\pi x}{l}, \ (x,t) \in \overline{Q}_\infty.$$

Отже, розв'язок вихідної задачі має вигляд

$$u(x,t) = -\frac{b}{12} x(x^3 - 2x^2 l + l^3) +$$

$$+ \frac{8l^4}{\pi^5} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^5} \cos \frac{(2k-1)\pi t}{l} \sin \frac{(2k-1)\pi x}{l}, \ \ (x,t) \in \overline{Q}_\infty. \ \blacktriangleright$$

4.3.3 Коливання струни з рухомими кінцями. Розглянемо задачу про коливання однорідної струни під дією зовнішньої збурюючої сили, коли кінці струни не закріплені, а рухаються за певними законами. Математична модель цієї задачі така:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t), \ \ (x,t) \in Q_{t_0}, \tag{35}$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \ \ u_t|_{t=0} = \psi(x), \ \ x \in [0,l], \tag{36}$$

$$u|_{x=0} = \mu_1(t), \ \ u|_{x=l} = \mu_2(t), \ \ t \in [0,t_0]. \tag{37}$$

Задача (35)–(37) легко зводиться до задачі з однорідними крайовими умовами. Справді, введемо допоміжну функцію

$$w(x,t) := \mu_1(t) + (\mu_2(t) - \mu_1(t)) \frac{x}{l}, \ \ (x,t) \in \overline{Q}_{t_0}. \tag{38}$$

Очевидно, що

$$w|_{x=0} = \mu_1(t), \ \ w|_{x=l} = \mu_2(t), \ \ t \in [0,t_0]. \tag{39}$$

Розв'язок задачі (35)–(37) шукатимемо у вигляді

$$u = v + w, \tag{40}$$

де v – невідома функція. Оскільки u задовольняє умови (37), а w – умови (39), то функція v задовольняє нульові крайові умови

$$v|_{x=0} = 0, \ \ v|_{x=l} = 0.$$

Далі, легко бачити, що

$$v|_{t=0} = u|_{t=0} - w|_{t=0} = \varphi(x) - \mu_1(0) + (\mu_2(0) - \mu_1(0)) \frac{x}{l} =: \varphi_1(x),$$

$$v_t|_{t=0} = u_t|_{t=0} - w_t|_{t=0} = \psi(x) - \mu_1'(0) + (\mu_2'(0) - \mu_1'(0))\frac{x}{l} =: \psi_1(x),$$
$$x \in [0, l].$$

Підставляючи (40) в рівняння (35), дістаємо

$$v_{tt} = a^2 v_{xx} + f_1(x,t), \ \ (x,t) \in Q_{t_0},$$

де $f_1(x,t) := f(x,t) + a^2 w_{xx} - w_{tt} = f(x,t) - \mu_1''(t) - (\mu_2''(t) - \mu_1''(t))\frac{x}{l}$.

Отже, одержуємо таку задачу для функції v:

$$v_{tt} = a^2 v_{xx} + f_1(x,t), \ \ (x,t) \in Q_{t_0},$$

$$v|_{t=0} = \varphi_1(x), \ \ v_t|_{t=0} = \psi_1(x), \ \ x \in [0,l],$$
$$v|_{x=0} = 0, \ \ v|_{x=l} = 0, \ \ t \in [0, t_0].$$

Ця задача розв'язана в пункті 4.3.2.

Зауваження 5. Функцію w, яка задовольняє тільки крайові умови, можна знаходити різними способами. Зокрема, її зручно шукати у вигляді $w(x,t) = A(t)x^2 + B(t)x + C(t)$. Задовольняючи крайові умови, дістанемо систему двох рівнянь з трьома невідомими A, B, C. Вибравши одне з них довільно, керуючись міркуваннями простоти викладок, знайдемо два інших. Наведемо один із можливих виглядів функцій w для найпоширеніших крайових умов:

1) $w|_{x=0} = \mu_1(t)$, $w|_{x=l} = \mu_2(t) \Rightarrow$
$$w(x,t) = \mu_1(t) + \frac{x}{l}(\mu_2(t) - \mu_1(t));$$
2) $w|_{x=0} = \mu_1(t)$, $w_x|_{x=l} = \mu_2(t) \Rightarrow w(x,t) = \mu_1(t) + x\,\mu_2(t)$;
3) $w|_{x=0} = \mu_1(t)$, $(w_x + hw)|_{x=l} = \mu_2(t) \Rightarrow$
$$w(x,t) = \mu_1(t) + x\,\frac{\mu_2(t) - h\mu_1(t)}{1 + lh};$$
4) $(w_x - hw)|_{x=0} = \mu_1(t)$, $(w_x + hw)|_{x=l} = \mu_2(t) \Rightarrow$
$$w(x,t) = x^2\,\frac{\mu_2(t) - (1 + hl)\mu_1(t)}{(2 + hl)l} + x\mu_1(t);$$
5) $w_x|_{x=0} = \mu_1(t)$, $w_x|_{x=l} = \mu_2(t) \Rightarrow$
$$w(x,t) = x\,\mu_1(t) + x^2\,\frac{\mu_2(t) - \mu_1(t)}{2l};$$

6) $w_x|_{x=0} = \mu_1(t)$, $w|_{x=l} = \mu_2(t) \Rightarrow$
$$w(x,t) = \mu_2(t) + (x-l)\mu_1(t);$$
7) $(\alpha w_x - \beta w)|_{x=0} = \mu_1(t)$, $(\gamma w_x + \delta w)|_{x=l} = \mu_2(t) \Rightarrow$
$$w(x,t) = x^2\,\frac{\mu_2(t)\alpha - (\gamma+\delta l)\mu_1(t)}{\alpha l(2\gamma+\delta l)} + x\,\frac{\mu_1(t)}{\alpha}.$$

Приклад 3. Знайти розв'язок крайової задачі
$$u_{tt} = u_{xx} - 2u_t + 8u + 2x(1-4t) + \cos 3x,\ x \in \Big(0, \tfrac{\pi}{2}\Big),\ t \in (0, t_0],$$
$$u|_{t=0} = 0,\ \ u_t|_{t=0} = x,\ \ x \in [0, \tfrac{\pi}{2}],$$
$$u_x|_{x=0} = t,\ \ u|_{x=\frac{\pi}{2}} = \tfrac{\pi t}{2},\ \ t \in [0, t_0].$$

◀ Шукатимемо розв'язок цієї задачі у вигляді
$$u = v + w,$$
де функція w вибрана згідно з випадком 6) зауваження 5, тобто
$$w(x,t) = \tfrac{\pi t}{2} + (x - \tfrac{\pi}{2})t = xt.$$

Тоді для v матимемо задачу
$$v_{tt} = v_{xx} - 2v_t + 8v + \cos 3x,\ \ x \in (0, \tfrac{\pi}{2}),\ t \in (0, t_0),$$
$$v|_{t=0} = 0,\ \ v_t|_{t=0} = 0,\ \ x \in [0, \frac{\pi}{2}],$$
$$v_x|_{x=0} = 0,\ \ v|_{x=\frac{\pi}{2}} = 0,\ \ t \in [0, t_0].$$

Розв'язок одержаної задачі шукатимемо у вигляді ряду Фур'є за власними функціями відповідної однорідної задачі. Тому спочатку знайдемо власні функції задачі
$$v_{tt} = v_{xx} - 2v_t + 8v,\ \ x \in (0, \frac{\pi}{2}),\ t \in (0, t_0),$$
$$v_x|_{x=0} = 0,\ \ v|_{x=\frac{\pi}{2}} = 0,\ \ t \in [0, t_0].$$

Нехай $v = X(x)T(t)$. Якщо підставити v в рівняння і задовольнити крайові умови, то дістанемо задачу Штурма–Ліувілля:
$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0,$$
$$X'(0) = 0,\ \ X(\tfrac{\pi}{2}) = 0.$$

Загальним розв'язком рівняння є функція $X(x) = C_1\cos\lambda x + {}$ $+ C_2 \sin\lambda x$. Задовольняючи ним крайові умови, одержуємо

$$\begin{cases} -C_1\lambda\sin(\lambda\cdot 0)+C_2\lambda\cos(\lambda\cdot 0)=0,\\ C_1\cos\lambda\frac{\pi}{2}+C_2\sin\lambda\frac{\pi}{2}=0,\end{cases}$$

звідки випливає, що $C_2=0$, $C_1\neq 0$ і $\cos\lambda\frac{\pi}{2}=0$. Тому

$$\lambda\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}+n\pi \text{ або } \lambda_n=(2n+1),\ n\in\mathbb{Z}_+,$$

є власними числами задачі. Власними функціями задачі є

$$X_n(x)=\cos(2n+1)x,\ \ n\in\mathbb{Z}_+.$$

Розв'язок неоднорідної крайової задачі для v шукатимемо у вигляді ряду

$$v(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}g_n(t)\cos(2n+1)x,\ x\in[0,\frac{\pi}{2}],\ t\in[0,t_0].$$

Задовольнимо цим рядом рівняння і початкові умови, вважаючи, що сам ряд і його формальні похідні другого порядку за x і t збігаються рівномірно для $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$, $t\in[0,t_0]$. Крайові умови задовольняються, бо $\cos(2n+1)x$, $n\in\mathbb{Z}_+$, є власними функціями відповідної однорідної задачі .

Маємо

$$\sum_{n=0}^{\infty}(g_n''(t)+2g_n'(t)+((2n+1)^2-8)g_n(t))\cos(2n+1)x=\cos 3x,$$
$$x\in(0,\tfrac{\pi}{2}),\quad t\in(0,t_0].$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{n=0}^{\infty}g_n(0)\cos(2n+1)x=0,\\ \sum\limits_{n=0}^{\infty}g_n'(0)\cos(2n+1)x=0,\ x\in[0,\frac{\pi}{2}].\end{cases}$$

Звідси випливає, що $g_n(t)$ повинні бути розв'язками задач:

$$1)\begin{cases} g_n''(t)+2g_n'(t)+((2n+1)^2-8)g_n(t)=0,\\ g_n(0)=0,\ g_n'(0)=0,\ n\in\mathbb{Z}_+\setminus\{1\};\end{cases}$$

$$2)\begin{cases} g_1''(t)+2g_1'(t)+g_1(t)=1,\\ g_1(0)=0,\ g_1'(0)=0.\end{cases}$$

У випадку 1) маємо, що $g_n(t)=0$, $n\in\mathbb{Z}_+\setminus\{1\}$. Для задачі 2) можна легко знайти розв'язок, розв'язавши задачу Коші для g_1,

$$g_1(t) = 1 - e^{-t} - te^{-t}.$$

Отже,

$$v(x,t) = (1 - e^{-t} - te^{-t}) \cos 3x,$$

а тому

$$u(x,t) = xt + (1 - e^{-t} - te^{-t}) \cos 3x,\ x \in [0, \tfrac{\pi}{2}],\ t \in [0, t_0]. \ \blacktriangleright$$

4.4 Загальна схема методу Фур'є

4.4.1 Постановка задачі. Застосуємо метод Фур'є до розв'язування мішаних і крайових задач для рівнянь із частинними похідними зі змінними коефіцієнтами. При цьому рівняння можуть бути гіперболічного, параболічного чи еліптичного типів.

Розглянемо рівняння

$$A(t)u_{tt} + B(t)u_t + C(t)u = \frac{1}{\rho(x)}((p(x)\, u_x)_x - q(x)\, u), \qquad (1)$$

де A, B, C – неперервні функції на $[0, t_0]$, а ρ, p, p' і q – неперервні функції на $[0, l]$, причому $\rho > 0$, $p > 0$ і $q \geq 0$. За таких припущень стосовно ρ і p тип рівняння (41) визначається знаком A, а саме: якщо $A(t) > 0$, $t \in [0, t_0]$, то рівняння гіперболічне; якщо $A(t) = 0$, $t \in [0, t_0]$, то рівняння параболічне; якщо $A(t) < 0$, $t \in [0, t_0]$, то рівняння еліптичне. У гіперболічному і параболічному випадках змінна t є часовою змінною.

Основні рівняння математичної фізики є частинними випадками рівняння (1).

Розглядатимемо задачу про знаходження функції $u(x,t)$, $(x,t) \in \overline{Q}_{t_0}$, яка є розв'язком рівняння (1) в Q_{t_0}, задовольняє однорідні крайові умови при $x = 0$ і $x = l$

$$(\alpha u_x + \beta u)|_{x=0} = 0,\ \ (\gamma u_x + \delta u)|_{x=l} = 0,\ \ t \in [0, t_0], \qquad (2)$$

і неоднорідні крайові умови за змінною t:

1) при $A > 0$ (гіперболічний випадок)

$$u|_{t=0} = \varphi(x),\ \ u_t|_{t=0} = \psi(x),\ \ x \in [0, l]; \qquad (3)$$

2) при $A = 0$ (параболічний випадок)

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \;\; x \in [0, l]; \tag{4}$$

3) при $A < 0$ (еліптичний випадок)

$$(\alpha_1 u_t + \beta_1 u)|_{t=0} = \varphi(x), \;\; (\gamma_1 u_t + \delta_1 u)|_{t=t_0} = \psi(x), \;\; x \in [0, l], \tag{5}$$

де α, β, γ, δ, α_1, β_1, γ_1 і δ_1 – сталі, які задовольняють умови $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, $\gamma^2 + \delta^2 \neq 0$, $\alpha_1^2 + \beta_1^2 \neq 0$, $\gamma_1^2 + \delta_1^2 \neq 0$.

4.4.2 Перший етап методу Фур'є. Властивості власних чисел і власних функцій. Побудову розв'язку сформульованої в пункті 4.4.1 задачі розіб'ємо на два етапи. На першому етапі шукаємо ненульові розв'язки рівняння (1), які задовольняють умови (2), у вигляді

$$u(x, t) = X(x)T(t), \;\; (x, t) \in Q_{t_0}. \tag{6}$$

Підстановка (6) у рівняння (1) дає, після відокремлення змінних,

$$\frac{A(t)T''(t) + B(t)T'(t) + C(t)T(t)}{T(t)} = \frac{(p(x)X'(x))' - q(x)X(x)}{\rho(x)X(x)},$$

$$(x, t) \in Q_{t_0}.$$

Ліва частина цієї тотожності не залежить від x, а права – від t, а тому така рівність можлива тільки у випадку, коли її ліва і права частини дорівнюють сталій. Якщо позначити цю сталу через $-\lambda$, то одержимо два звичайні диференціальні рівняння

$$A(t)T''(t) + B(t)T'(t) + (C(t) + \lambda)T(t) = 0, \; t \in [0, t_0], \tag{7}$$

$$(p(x)X'(x))' + (\lambda\rho(x) - q(x))X(x) = 0, \; x \in [0, l]. \tag{8}$$

Розв'язки (6) повинні задовольняти крайові умови (2) , тому

$$(\alpha X' + \beta X)|_{x=0} = 0, \;\; (\gamma X' + \delta X)|_{x=l} = 0. \tag{9}$$

Крайова задача (8), (9), як і в пункті 4.3.1, називається **задачею Штурма–Ліувілля**. Вона має нетривіальні розв'язки не при всіх значеннях λ. Ті значення λ, при яких вона має ненульові розв'язки, називаються **власними числами** (**власними значеннями**), а відповідні їм нетривіальні розв'язки X – **власними функціями** задачі Штурма–Ліувілля.

Наведемо основні властивості власних чисел і власних функцій.

$\mathbf{1^0}$. *Власні функції, які відповідають одному й тому самому власному числу, лінійно залежні.*

◀ Нехай X_1 і X_2 – власні функції, які відповідають власному числу λ. Тоді $\alpha X_1'(0) + \beta X_1(0) = 0$, $\alpha X_2'(0) + \beta X_2(0) = 0$. Оскільки $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, то маємо

$$\begin{vmatrix} X_1'(0) & X_1(0) \\ X_2'(0) & X_2(0) \end{vmatrix} = 0.$$

Цей визначник є вронскіаном для розв'язків X_1 і X_2 в точці $x = 0$. Відомо, що з рівності вронскіана нулю в точці $x = 0$ випливає, що він дорівнює нулю на відрізку $[0, l]$. Це означає, що функції X_1 і X_2 лінійно залежні , тобто

$$X_2(x) = CX_1(x), \;\; x \in [0, l]. \;▶$$

Зауваження 1. Власні функції X_k, які відповідають даному власному числу, визначені з точністю до сталого множника, який можна вибрати так, щоб

$$\|X_k\|_\rho := \Big(\int\limits_0^l \rho(x) X_k^2(x) dx \Big)^{1/2} = 1. \tag{10}$$

Власні функції, які задовольняють умову (10), називаються **нормованими**.

Усяка власна функція X_k стає нормованою, якщо її поділити на норму $\|X_k\|_\rho$. Надалі всі власні функції вважатимемо нормованими.

$\mathbf{2^0}$. *Власні функції X_k і X_m, які відповідають різним власним числам λ_k і λ_m, ортогональні з вагою ρ, тобто*

$$(X_k, X_m)_\rho := \int\limits_0^l \rho(x) X_k(x) X_m(x) dx = 0, \;\; k \neq m. \tag{11}$$

◀ Маємо

$$(pX_k')' - qX_k + \lambda_k\rho X_k = 0,$$
$$(pX_m')' - qX_m + \lambda_m\rho X_m = 0.$$

Якщо першу рівність помножити на X_m, а другу – на X_k і від першої відняти другу та зінтегрувати по $[0, l]$, то одержимо

$$(\lambda_k - \lambda_m)(X_k, X_m)_\rho = \int_0^l (X_k(pX_m')' - X_m(p(X_k')')\,dx =$$

$$= \int_0^l (pX_kX_m' - pX_k'X_m)'\,dx \;=\; p(x)(X_kX_m' - X_k'X_m)(x)\Big|_0^l = 0,$$

бо вронскіан розв'язків X_k і X_m дорівнює нулю при $x = 0$ і $x = l$, оскільки вони задовольняють умови (2). З останньої рівності випливає рівність (11), бо $\lambda_k - \lambda_m \neq 0$. ▶

3⁰. *Усі власні числа задачі (8), (9) є дійсними числами.*

◀ Нехай λ_k – деяке власне число і X_k – власна функція, що йому відповідає. Припустимо, що λ_k – комплексне число, тоді $\bar{\lambda}_k$ буде також власним числом задачі, а $\bar{X}_k$ – відповідна йому власна функція, бо коефіцієнти рівняння (8) і умов (9) дійсні. Згідно з властивістю **2⁰** маємо

$$0 = (X_k, \bar{X}_k)_\rho = \int_0^l \rho(x)X_k(x)\bar{X}_k(x)dx = \int_0^l \rho(x)|X_k(x)|^2dx.$$

Звідси випливає, що $X_k = 0$ на $[0, l]$, а це суперечить тому, що X_k є власною функцією. Отже, наше припущення , що число λ_k є комплексним, не правильне. ▶

4⁰. *Крайова задача (8), (9) має зліченну множину власних чисел, які можна розмістити в порядку зростання* $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_k < \ldots$, *причому* $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k = +\infty$.

◀ Доведення властивості наведено в [16]. ▶

5⁰. *Якщо крайові умови такі, що*

$$p(x)X_k(x)X_k'(x)\Big|_0^l \leq 0, \;\; x \in [0, l], \;\; k \in \mathbb{N}, \tag{12}$$

то всі власні числа λ_k *невід'ємні.*

◀ Нехай λ_k – власне число, а X_k – власна функція, яка йому відповідає. Тоді

$$(pX_k')' - qX_k + \lambda_k \rho X_k = 0 \text{ на } [0, l].$$

Помножимо цю рівність на X_k і зінтегруємо результат по відрізку $[0, l]$, тоді матимемо

$$\lambda_k \int_0^l \rho(x) X_k^2(x) dx = -\int_0^l \Big(X_k(x)(p(x)X_k')' - q(x)X_k^2(x) \Big) dx =$$
$$= -\Big(p(x) X_k(x) X_k' \Big)\Big|_0^l + \int_0^l p(x)(X_k')^2(x) dx + \int_0^l q(x) X_k^2(x) dx.$$

Звідси, згідно з (10) і (12), дістаємо

$$\lambda_k = \int_0^l \Big(p(x)(X_k')^2(x) + q(x)X_k^2(x) \Big) dx - \Big(p(x) X_k(x) X_k'(x) \Big)\Big|_0^l \geq 0. \text{ ▶}$$

Зауваження 2. Можна довести, що умова (12) виконується, якщо крайові умови мають такий вигляд:

1) $X(0) = 0$, $X(l) = 0$ ($\alpha = 0$, $\beta = 1$, $\gamma = 0$, $\delta = 1$);

2) $X'(0) = 0$, $X'(l) = 0$ ($\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\gamma = 1$, $\delta = 0$);

3) $X'(0) - h_1 X(0) = 0$, $X'(l) + h_2 X(l) = 0$ ($\alpha = 1$, $\beta = -h_1$, $\gamma = 1$, $\delta = h_2$), якщо $h_1 > 0$, $h_2 > 0$.

При цьому для задач з крайовими умовами 1) і 3) всі $\lambda_k > 0$, а $\lambda = 0$ є власним числом для задачі Штурма–Ліувілля з крайовими умовами 2) лише тоді, коли $q \equiv 0$.

Зауваження 3. З властивостей $\mathbf{1^0} - \mathbf{4^0}$ випливає, що власні функції X_k, $k \in \mathbb{N}$, задачі (8), (9) утворюють ортонормовану систему, за якою можна розкладати функції в ряд Фур'є. Наступна властивість дає достатні умови розкладу функцій в рівномірно збіжний ряд Фур'є.

$\mathbf{6^0}$ **(теорема Стеклова).** *Якщо функція f:*

1) має на відрізку $[0, l]$ неперервну першу похідну і кусково-неперервну другу похідну;

2) задовольняє крайові умови (9),

то вона розкладається в абсолютно й рівномірно збіжний на

$[0,l]$ ряд Фур'є за ортонормованою системою власних функцій X_k, $k \in \mathbb{N}$, задачі (8), (9):

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k X_k(x), \;\; x \in [0,l], \tag{13}$$

де

$$c_k := \int_0^l \rho(x) f(x) X_k(x)\, dx. \tag{14}$$

◀ З доведенням теореми Стеклова можна ознайомитися у посібнику [16, с. 186–191].▶

Зауваження 4. Властивість $\mathbf{6^0}$ правильна й у випадку, коли крайові умови мають характер періодичності

$$X(0) = X(l), \;\; X'(0) = X'(l).$$

Зауваження 5. Кінцева точка відрізка $[0,l]$ називається сингулярною, якщо в цій точці коефіцієнт при старшій похідній в рівнянні дорівнює нулю. Крайова умова в сингулярному кінці довільно задаватися не може і, як правило, зводиться до обмеженості розв'язку.

Тепер розглянемо рівняння (7). При $\lambda = \lambda_k$, $k \in \mathbb{N}$, воно набуває вигляду

$$A(t)T_k'' + B(t)T_k' + (C(t) + \lambda_k)T_k = 0, \;\; k \in \mathbb{N}. \tag{15}$$

Якщо $A(t) \neq 0$, $t \in [0, t_0]$, тобто маємо гіперболічний або еліптичний випадки, то загальний розв'язок рівняння (15) має вигляд

$$T_k(t) = A_k T_{1k} + B_k T_{2k}(t), \;\; t \in [0, t_0], \;\; k \in \mathbb{N},$$

де $\{T_{1k}, T_{2k}\}$ – фундаментальна система розв'язків, а A_k і B_k – довільні сталі.

У параболічному випадку, коли $A(t) = 0$ і $B(t) \neq 0$, $t \in [0, t_0]$, загальний розв'язок рівняння (15) визначається формулою

$$T_k(t) = A_k T_{1k}(t) := A_k \exp\{-\int_0^t \frac{C(\tau) + \lambda_k}{B(\tau)}\, d\tau\}, \;\; t \in [0, t_0], \;\; k \in \mathbb{N},$$

Знайдені X_k і T_k підставляємо в (6) і одержуємо розв'язки $u_k(x,t)$, $(x,t) \in \overline{Q}_{t_0}$, $k \in \mathbb{N}$, рівняння (1), які задовольняють крайові умови (2). При цьому

$$u_k(x,t) = \begin{cases} (A_k T_{1k} + B_k T_{2k}(t)) X_k(x), \text{ якщо } A \neq 0; \\ A_k T_{1k}(t) X_k(x), \text{ якщо } A = 0,\ B \neq 0. \end{cases}$$

4.4.3 Другий етап методу Фур'є. За допомогою знайдених на першому етапі ненульових розв'язків u_k, $k \in \mathbb{N}$, будуємо розв'язок поставленої в пункті 4.4.1 задачі.

Для цього розглянемо ряд із функцій u_k, $k \in \mathbb{N}$:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x,t),\ (x,t) \in \overline{Q}_{t_0}, \tag{16}$$

який у випадку, коли $A \neq 0$, має вигляд

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k T_{1k}(t) + B_k T_{2k}(t)) X_k(x),\ (x,t) \in \overline{Q}_{t_0}, \tag{17}$$

а якщо $A = 0$, $B \neq 0$, то вигляд

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k T_{1k}(t) X_k(x),\ (x,t) \in \overline{Q}_{t_0}. \tag{18}$$

Якщо ряд (16) збігається рівномірно в $\overline{Q}_{t_0}$ разом з рядами, які одержуються з нього почленним диференціюванням двічі за x і t, то його сума є розв'язком рівняння (1) і задовольняє крайові умови (2), бо таку властивість мають члени ряду u_k. Щоб знайти коефіцієнти A_k, B_k із (17) і (18), треба задовольнити функцією u, яка визначається рівністю (16), умови (3)–(5) за змінною t. У залежності від типу рівняння (1) матимемо різні ситуації.

1) Гіперболічний випадок ($A > 0$). Підставивши (17) у (3), дістанемо

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} (A_k T_{1k}(0) + B_k T_{2k}(0)) X_k(x), \\ \psi(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} (A_k T'_{1k}(0) + B_k T'_{2k}(0)) X_k(x),\ x \in [0,l]. \end{aligned} \tag{19}$$

Якщо функції φ і ψ можна розкласти в ряд Фур'є за системою власних функцій $\{X_k,\ k \in \mathbb{N}\}$, то

$$\begin{cases} A_k T_{1k}(0) + B_k T_{2k}(0) = \int\limits_0^l \rho(x)\varphi(x) X_k(x)\, dx, \\ A_k T'_{1k}(0) + B_k T'_{2k}(0) = \int\limits_0^l \rho(x)\psi(x) X_k(x)\, dx,\ \ k \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{20}$$

Знайшовши A_k і B_k з цієї системи, підставимо їх у ряд (17). Як результат дістанемо розв'язок задачі (1)–(3).

2) Параболічний випадок ($A = 0$, $B \neq 0$). Для знаходження коефіцієнтів A_k, $k \in \mathbb{N}$, треба задовольнити рядом (18) умову (4):

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k T_{1k}(0) X_k(x),\ \ x \in [0, l],$$

або

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k X_k(x),\ \ x \in [0, l],$$

бо $T_{1k}(0) = 1$. Звідси випливає, що

$$A_k = \int\limits_0^l \rho(x)\varphi(x) X_k(x)\, dx,\ \ \ k \in \mathbb{N}.$$

Підставивши ці значення в (18), дістанемо розв'язок задачі (1), (2), (4).

3) Еліптичний випадок ($A < 0$). Розв'язок рівняння (1), який задовольняє крайові умови (2), як і в гіперболічному випадку, знаходиться у вигляді ряду (17). Задовольнивши цим рядом крайові умови (5), дістанемо систему рівнянь, аналогічну (20), з якої знайдемо коефіцієнти A_k і B_k, $k \in \mathbb{N}$. Підстановка їх у (17) дає розв'язок задачі (1), (2), (5).

4.5 Єдиність та неперервна залежність від початкових даних розв'язків мішаних задач для гіперболічних рівнянь. Інтеграл енергії

4.5.1 Єдиність розв'язку. Для простоти викладу розглянемо мішану задачу

$$\rho(x)u_{tt} = (p(x)u_x)_x - q(x)u + f(x,t), \ (x,t) \in Q_{t_0}, \qquad (1)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \ u_t|_{t=0} = \psi(x), \ x \in [0,l], \qquad (2)$$

$$u|_{x=0} = \mu_1(t), \ u|_{x=l} = \mu_2(t), \ t \in [0,t_0], \qquad (3)$$

де ρ, p, p', q – неперервні на $[0,l]$ функції, причому для всіх x з цього відрізка $\rho(x) \geq \rho_0 > 0$, $p(x) \geq p_0 > 0$, $q(x) \geq 0$; функції f, φ, ψ, μ_1, μ_2 достатньо гладкі і такі, що виконуються умови узгодження

$$\varphi(0) = \mu_1(0), \varphi(l) = \mu_2(0), \psi(0) = \mu_1'(0), \psi(l) = \mu_2'(0).$$

Теорема 4.4. *Розв'язок задачі (1)–(3) єдиний в класі* $C^2(Q_{t_0})$.

◀ Нехай u_1, u_2 – розв'язки задачі (1)–(3) з класу $C^2(Q_{t_0})$, тоді $u := u_1 - u_2$ – розв'язок з цього ж класу однорідної задачі

$$\rho(x)u_{tt} = (p(x)u_x)_x - q(x)u, \ (x,t) \in Q_{t_0}, \qquad (4)$$

$$u|_{t=0} = 0, \ u_t|_{t=0} = 0, \ x \in [0,l], \qquad (5)$$

$$u|_{x=0} = 0, \ u|_{x=l} = 0, \ t \in [0,t_0]. \qquad (6)$$

Доведемо, що $u(x,t) = 0$ в $\overline{Q}_{t_0}$.

Розглянемо **інтеграл енергії** [13, с. 150–152]

$$E_u(t) := \frac{1}{2}\int_0^l (\rho(x)u_t^2 + p(x)u_x^2 + q(x)u^2)\,dx, \qquad (7)$$

де $u \in C^2(Q_{t_0})$. Доведемо, що для розв'язку u задачі (4)–(6) $E_u(t) = 0$, $t \in [0,t_0]$.

Згідно з умовами (5) $E_u(0) = 0$. Доведемо, що $E_u(t)$ не залежить від t для довільного розв'язку рівняння (4), який задовольняє крайові умови (6).

Маємо

$$\frac{dE_u(t)}{dt} = \int_0^l (\rho(x)u_t u_{tt} + p(x)u_x u_{xt} + q(x)uu_t)\,dx.$$

Оскільки

$$\int_0^l p(x)u_x u_{xt}\,dx = -\int_0^l (p(x)u_x)_x u_t dx + \Big(p(x)u_x u_t\Big)\Big|_{x=0}^{x=l} =$$
$$= -\int_0^l (p(x)u_x)_x u_t dx,$$

якщо врахувати (6), то

$$\frac{dE_u(t)}{dt} = \int_0^l \Big(\rho(x)u_{tt} - (p(x)u_x)_x + q(x)u\Big)u_t\,dx = 0,$$

бо u є розв'язком рівняння (4).

Отже, $\dfrac{dE_u(t)}{dt} = 0$, $t \in [0, t_0]$, а тому E_u – стала на $[0, t_0]$. Оскільки $E_u(0) = 0$, то $E_u(t) = 0$, $t \in [0, t_0]$. Тоді з (7) одержуємо, що $u_x = 0$, $u_t = 0$ в $\overline{Q}_{t_0}$, а це означає, що u – стала в $\overline{Q}_{t_0}$. З того, що $u(x, 0) = 0$, $x \in [0, l]$, згідно з умовою (5), випливає $u = 0$ скрізь в $\overline{Q}_{t_0}$, що й треба було довести. ▶

4.5.2 Неперервна залежність розв'язку від початкових даних. Правильна така теорема.

Теорема 4.5. *Нехай u_1 і u_2 – розв'язки рівняння (1), які задовольняють умови (3) та початкові умови*

$$\begin{aligned} &u_1|_{t=0} = \varphi_1(x),\;\; u_{1t}|_{t=0} = \psi_1(x),\\ &u_2|_{t=0} = \varphi_2(x),\;\; u_{2t}|_{t=0} = \psi_2(x),\;\; x \in [0, l]. \end{aligned}$$

Нехай, далі, $u := u_1 - u_2$, $\varphi := \varphi_1 - \varphi_2$, $\psi := \psi_1 - \psi_2$. Тоді для довільного $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$ таке, що як тільки $|\varphi(x)| < \delta$, $|\psi(x)| < \delta$ і $|\varphi'(x)| < \delta$, $x \in [0, l]$, то $|u(x, t)| < \varepsilon$, $(x, t) \in \overline{Q}_{t_0}$.

◀ Очевидно, що функція u є розв'язком однорідного рівняння (4), задовольняє однорідні крайові умови (6) і початкові умови (2). Інтеграл енергії для u має стале значення $E_u(0)$, тому для будь-якого $t \in [0, t_0]$ маємо

$$E_u(t) = E_u(0) = \frac{1}{2}\int\limits_0^l \Big(\rho(x)\psi^2(x) + p(x)(\varphi'(x))^2 + q(x)\varphi^2(x)\Big)\,dx \le$$

$$\le \frac{1}{2}M_0\int\limits_0^l \Big(\psi^2(x) + (\varphi'(x))^2 + \varphi^2(x)\Big)\,dx \le \frac{3l\,M_0}{2}\,\delta^2 = M\delta^2.$$

де $M_0 := \max\Big\{\max\limits_{[0,l]}\rho, \max\limits_{[0,l]}p, \max\limits_{[0,l]}q\Big\}$, $M := \frac{3l\,M_0}{2}$.

З цієї нерівності випливає, зокрема, що

$$\int\limits_0^l p(x)u_x^2(x,t)dx \le 2M\delta^2. \tag{8}$$

Оскільки

$$u(x,t) = u(x,t) - u(0,t) = \int\limits_0^x u_\xi(\xi,t)\,d\xi,$$

то

$$|u(x,t)| = \left|\int\limits_0^x u_\xi(\xi,t)\,d\xi\right| \le \int\limits_0^x |u_\xi(\xi,t)|\,d\xi \le \int\limits_0^l |u_\xi(\xi,t)|\,d\xi =$$

$$= \int\limits_0^l \frac{1}{\sqrt{p(\xi)}}\Big(\sqrt{p(\xi)}|u_\xi(\xi,t)|\Big)\,d\xi.$$

Застосуємо до останнього інтеграла нерівність Коші–Буняковського

$$\left|\int\limits_0^l f(\xi)g(\xi)\,d\xi\right| \le \Big(\int\limits_0^l f^2(\xi)\,d\xi\Big)^{1/2}\Big(\int\limits_0^l g^2(\xi)\,d\xi\Big)^{1/2},$$

взявши в ній $f(\xi) = \frac{1}{\sqrt{p(\xi)}}$ і $g(\xi) = \sqrt{p(\xi)}|u_\xi(\xi,t)|$.

Тоді, врахувавши оцінку (8), для будь-яких $(x,t) \in \overline{Q}_{t_0}$ отримаємо

$$|u(x,t)| \le \Big(\int\limits_0^l \frac{d\xi}{p(\xi)}\Big)^{1/2} \Big(\int\limits_0^l p(\xi)|u_\xi^2(\xi,t)|\,d\xi\Big)^{1/2} \le$$

$$\le \ L\sqrt{2M\delta^2} =: M_1\delta < \varepsilon,$$

якщо $\delta < \frac{\varepsilon}{M_1}$, де $L := \Big(\int\limits_0^l \frac{d\xi}{p(\xi)}\Big)^{1/2}$. ▶

Зауваження. Єдиність і неперервну залежність від початкових даних розв'язку можна довести і при загальніших крайових умовах, наприклад, коли умови мають вигляд

$$(u_x - h_1 u)|_{x=0} = 0, \ \ (u_x + h_2 u)|_{x=l} = 0,$$

де h_1 і h_2 – невід'ємні сталі.

4.6 Метод Фур'є у багатовимірному випадку. Вільні коливання прямокутної мембрани

Метод Фур'є можна застосувати і у випадку, коли невідома функція u залежить від багатьох просторових змінних $x_1, \dots, x_n$.

Для прикладу розглянемо задачу про вільні коливання однорідної мембрани, яка в стані рівноваги збігається з прямокутником Ω зі сторонами p і q (рис. 4.15) та закріплена по контуру, якщо відоме початкове відхилення і початкові швидкості точок мембрани. Ця задача зводиться до розв'язування двовимірного хвильового рівняння

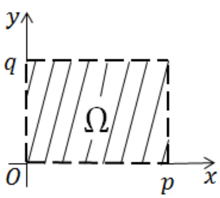

Рис. 4.15

$$u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}), \ (x,y,t) \in Q_{t_0}, \quad (1)$$

де $Q_{t_0} := \Omega \times (0, t_0] := \{ (x, y, t) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in (0, p),\ y \in (0, q),$ $t \in (0, t_0]\}$, за початкових

$$u|_{t=0} = \varphi(x, y),\ \ u_t|_{t=0} = \psi(x, y),\ \ (x, y) \in \overline{\Omega}, \tag{2}$$

і крайових умов

$$\begin{aligned} &u|_{x=0} = 0,\ u|_{x=p} = 0,\ y \in [0, q],\ t \in [0, t_0], \\ &u|_{y=0} = 0,\ u|_{y=q} = 0,\ x \in [0, p],\ t \in [0, t_0]. \end{aligned} \tag{3}$$

Шукаємо ненульові частинні розв'язки рівняння (1), які задовольняють крайові умови (3) у вигляді

$$u(x, y, t) = V(x, y)T(t),\ (x, y, t) \in Q_{t_0}. \tag{4}$$

Підставивши (4) в рівняння (1) і відокремивши змінні, дістанемо

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{V_{xx} + V_{yy}}{V} = -\lambda^2$$

або

$$T''(t) + a^2\lambda^2 T(t) = 0,\ \ t \in (0, t_0), \tag{5}$$

$$V_{xx} + V_{yy} + \lambda^2 V = 0,\ (x, y) \in \Omega, \tag{6}$$

Оскільки u повинна задовольняти крайові умови (3), то матимемо крайові умови для V

$$\begin{aligned} &V|_{x=0} = 0,\ V|_{x=p} = 0,\ y \in [0, q],\ t \in [0, t_0], \\ &V|_{y=0} = 0,\ V|_{y=q} = 0,\ x \in [0, p],\ t \in [0, t_0]. \end{aligned} \tag{7}$$

Знайдемо власні числа і власні функції задачі (6), (7). Ненульові розв'язки цієї задачі шукатимемо у вигляді

$$V(x, y) = X(x)Y(y),\ \ (x, y) \in \Omega. \tag{8}$$

Підставивши (8) у (6), дістанемо

$$\frac{Y''(y)}{Y(y)} + \lambda^2 = -\frac{X''(x)}{X(x)} = \mu^2,$$

звідки одержуємо два звичайні диференціальні рівняння

$$X''(x) + \mu^2 X(x) = 0, \;\; x \in (0,p), \tag{9}$$

$$Y''(y) + \kappa^2 Y(y) = 0, \;\; y \in (0,q), \; \kappa^2 := \lambda^2 - \mu^2. \tag{10}$$

Якщо задовольнити функцією (8) крайові умови (7), то матимемо

$$X(0) = 0, \;\; X(p) = 0, \tag{11}$$

$$Y(0) = 0, \;\; Y(q) = 0. \tag{12}$$

Отже, одержали дві задачі Штурма–Ліувілля (9), (11) і (10), (12), які розв'язувались нами в пункті 4.3.1. Тому можемо зразу записати їхні власні числа і власні функції:

$$\begin{array}{l} \mu_m = \frac{m\pi}{p}, \; X_m(x) = \sin\frac{m\pi x}{p}, x \in [0,p], \; m \in \mathbb{N}; \\ \kappa_n = \frac{n\pi}{q}, \; Y_n(y) = \sin\frac{n\pi y}{q}, y \in [0,q], \; n \in \mathbb{N}. \end{array}$$

Тоді власними числами і власними функціями задачі (6), (7) є відповідно

$$\lambda_{mn}^2 = \left(\tfrac{m^2}{p^2} + \tfrac{n^2}{q^2}\right)\pi^2,$$

$$V_{mn}(x,y) = \sin\tfrac{m\pi x}{p}\,\sin\tfrac{n\pi y}{q}, \; (x,y) \in \overline{\Omega}, \; \{m,n\} \subset \mathbb{N}.$$

Підставимо $\lambda = \lambda_{mn}$ в (5), тоді рівняння набуде вигляду

$$T''_{mn}(t) + a^2\lambda_{mn}^2\, T_{mn}(t) = 0.$$

Загальний розв'язок цього рівняння

$$T_{mn}(t) = A_{mn}\cos a\lambda_{mn}t + B_{mn}\sin a\lambda_{mn}t,$$

$$t \in [0,t_0], \; \{m,n\} \subset \mathbb{N}.$$

Отже, частинні розв'язки рівняння (1), які задовольняють крайові умови (3), мають вигляд

$$u_{mn}(x,y,t) = (A_{mn}\cos a\lambda_{mn}t + B_{mn}\sin a\lambda_{mn}t)\,\sin\frac{m\pi x}{p}\,\sin\frac{n\pi y}{q},$$

$$(x,y) \in \overline{\Omega}, \; \{m,n\} \subset \mathbb{N}.$$

Щоб задовольнити початкові умови (2), складемо ряд

$$u(x,y,t) = \sum_{m,n=1}^{\infty} (A_{mn} \cos a\lambda_{mn} t + B_{mn} \sin a\lambda_{mn} t) \times$$
$$\times \sin \frac{m\pi x}{p} \sin \frac{n\pi y}{q}, \quad (x,y,t) \in \overline{Q}_{t_0}. \tag{13}$$

Якщо цей ряд разом з рядами, які одержуються з нього почленним диференціюванням двічі за x, y і t, збігаються рівномірно в $\overline{Q}_{t_0}$, то його сума є розв'язком рівняння (1) і задовольняє умови (3). Для виконання умов (2) необхідно, щоб

$$\begin{cases} \varphi(x,y) = \sum\limits_{m,n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{p} \sin \frac{n\pi y}{q}, \\ \psi(x,y) = \sum\limits_{m,n=1}^{\infty} a\lambda_{mn} B_{mn} \sin \frac{m\pi x}{p} \sin \frac{n\pi y}{q}, \ (x,y) \in \overline{\Omega}. \end{cases} \tag{14}$$

Формули (14) є розкладами функцій φ і ψ в подвійний ряд Фур'є за синусами. Коефіцієнти цих розкладів визначаються формулами

$$\begin{cases} A_{mn} = \frac{4}{pq} \int\limits_0^p \int\limits_0^q \varphi(x,y) \sin \frac{m\pi x}{p} \sin \frac{n\pi y}{q} \, dx dy, \\ a\lambda_{mn} B_{mn} = \frac{4}{pq} \int\limits_0^p \int\limits_0^q \psi(x,y) \sin \frac{m\pi x}{p} \sin \frac{n\pi y}{q} \, dx dy. \end{cases} \tag{15}$$

Підставивши значення A_{nm} і B_{nm} із (15) в (13), дістанемо розв'язок задачі (1)–(3).

Зауваження. Метод Фур'є застосовний і для розв'язування неоднорідних мішаних задач.

Приклад. Однорідна квадратна мембрана, яка в початковий момент часу $t = 0$ має форму $\varphi(x,y) = Axy(b-x)(b-y)$, A – стала, $0 < x < b$, $0 < y < b$, почала коливатися без початкової швидкості. Вивчити вільні коливання мембрани, закріпленої по контуру.

◄ Задача зводиться до розв'язування рівняння (1) в $Q_{t_0} := \{ (x,y,t) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x \in (0,b),\ y \in (0,b),\ t \in (0,t_0] \}$, при початкових

$$u|_{t=0} = \varphi(x,y) = Axy(b-x)(b-y), \quad u_t|_{t=0} = 0,$$
$$x \in [0,b], \;\; y \in [0,b],$$
і крайових умовах (3), де $p = q = b$.

Згідно з розглянутим вище розв'язок цієї задачі визначається рядом (13) з $p = q = b$, де коефіцієнти A_{mn} і B_{mn} знаходяться за формулами (15), тобто

$$A_{mn} = \frac{4}{b^2}\int\limits_0^b\int\limits_0^b Axy(b-x)(b-y)\sin\frac{m\pi x}{b}\sin\frac{n\pi y}{b}\,dxdy =$$

$$= \begin{cases} \frac{64Ab^4}{m^3n^3\pi^6}, & m = 2k+1, \; n = 2l+1, \\ 0, & m = 2k, \; n = 2l, \; \{k,l\} \subset \mathbb{Z}_+, \end{cases}$$

бо

$$\int\limits_0^b x(b-x)\sin\tfrac{m\pi x}{b}\,dx = \tfrac{b}{m\pi}\int\limits_0^b (x^2-bx)d\cos\tfrac{m\pi x}{b} =$$
$$= \tfrac{b}{m\pi}\left((x^2-bx)\cos\tfrac{m\pi x}{b}\Big|_0^b - \int\limits_0^b (2x-b)\cos\tfrac{m\pi x}{b}\,dx\right) =$$
$$= -\tfrac{b^2}{(m\pi)^2}\int\limits_0^b (2x-b)d\sin\tfrac{m\pi x}{b} = -\tfrac{b^2}{(m\pi)^2}\left((2x-b)\sin\tfrac{m\pi x}{b}\Big|_0^b - \right.$$
$$\left. -2\int\limits_0^b \sin\tfrac{m\pi x}{b}dx\right) = -\tfrac{2b^3}{(m\pi)^3}\;\cos\tfrac{m\pi x}{b}\Big|_0^b =$$
$$= -\tfrac{2b^3}{(m\pi)^3}\left((-1)^m - 1\right) = \begin{cases} \frac{4b^3}{(m\pi)^3}, & m = 2k+1, \\ 0, & m = 2k, k \in \mathbb{Z}_+, \end{cases}$$

і

$$\int\limits_0^b y(b-y)\sin\frac{n\pi y}{b}\,dy = \begin{cases} \frac{4b^3}{(n\pi)^3}, & n = 2k+1, \\ 0, & n = 2k, k \in \mathbb{Z}_+, \end{cases}$$

а $B_{mn} = 0$.

Підставивши знайдені коефіцієнти A_{mn} і B_{mn} в ряд (13), одержимо

$$u(x,y,t) = \frac{64Ab^4}{\pi^6}\sum_{k,l=0}^{\infty}\frac{\sin\frac{(2k+1)\pi x}{b}\sin\frac{(2l+1)\pi y}{b}}{(2k+1)^3(2l+1)^3}\times$$

$$\times \cos\frac{\sqrt{(2k+1)^2+(2l+1)^2}a\pi t}{b},\ (x,y,t)\in\overline{Q}_{t_0}. \blacktriangleright$$

Вправи до розділу 4

1. Знайти розв'язок задачі Коші:

1) $u_{tt}=u_{xx},\ u|_{t=0}=x^2,\ u_t|_{t=0}=x;$

2) $u_{tt}=u_{xx}+\sin x,\ u|_{t=0}=\sin x,\ u_t|_{t=0}=0;$

3) $u_{tt}=9u_{xx}+\sin x,\ u|_{t=0}=1,\ u_t|_{t=0}=1;$

4) $u_{tt}=u_{xx}+e^{x},\ u|_{t=0}=\sin x,\ u_t|_{t=0}=x+\cos x;$

5) $u_{tt}=u_{xx},\ u|_{t=0}=\dfrac{\sin x}{x},\ u_t|_{t=0}=\dfrac{x}{1+x^2};$

6) $u_{tt}=u_{xx},\ u|_{t=0}=\dfrac{x}{1+x^2},\ u_t|_{t=0}=\sin x.$

2. В області $\mathbb{R}^2_{++}:=\{(x,t)\in\mathbb{R}^2\,|\,x>0,\,t>0\}$ знайти розв'язок задачі, скориставшись методом продовження і формулою Даламбера:

1) $u_{tt}=a^2u_{xx},\ u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=\sin x, u_x(0,t)=0;$

2) $u_{tt}=4u_{xx},\ u(x,0)=e^{-x^2},\ u_t(x,0)=\sin x, u_x(0,t)=0;$

3) $u_{tt}=u_{xx}+2,\ u(x,0)=x+\cos x,\ u_t(x,0)=1, u_x(0,t)=1;$

4) $u_{tt}=4u_{xx}+16t^2,\ u(x,0)=\dfrac{x^4}{6},\ u_t(x,0)=2\sin x, u_x(0,t)=4t^4.$

3. Знайти розв'язок загальної задачі Коші:

1) $u_{xx}+2\cos x\,u_{xy}-\sin^2 x\,u_{yy}-\sin x\,u_y=0,$
$$u|_{y=\sin x}=x+\cos x,\ u_y|_{y=\sin x}=\sin x;$$

2) $e^{y}u_{xy}-u_{yy}+u_y=0,\ u|_{y=0}=-\dfrac{x^2}{2},\ u_y|_{y=0}=-\sin x;$

3) $u_{xy}+y\,u_x+xu_y+xyu=0,\ u|_{y=3x}=0,\ u_y|_{y=3x}=e^{-5x^2};$

4) $u_{xx}+2u_{xy}-3u_{yy}=2,\ u|_{y=0}=0,\ u_y|_{y=0}=x+\cos x;$

5) $u_{xx}+2(1+2x)\,u_{xy}+4x(1+x)u_{yy}+2u_y=0,$
$$u|_{x=0}=y,\ u_x|_{x=0}=2.$$

4. Розв'язати задачу Гурса:

1) $u_{xy}+x^2y\,u_x=0,\ x>0,\ y>0,\ u|_{x=0}=0,\ u|_{y=0}=x;$

2) $u_{xy}-e^{x}u_{yy}=0,\ x>0,\ y>-e^{x},$

$u|_{x=0} = y^2,\ u|_{y=-e^x} = 1 + x^2;$

3) $u_{xy} + u_x = x,\ x > 0,\ y > 0,\ u|_{x=0} = y^2,\ u|_{y=0} = x^2;$

4) $x^2 u_{xx} - y^2 u_{yy} = 0,\ x > 1,\ y > x,\ u|_{x=1} = 1,\ u|_{y=x} = x;$

5) $x u_{xx} + (x - y) u_{xy} - y u_{yy} = 0,\ x > 0,\ 0 < y < x,$
$u|_{y=0} = 0,\ u|_{y=x} = x.$

5. Розв'язати мішану задачу:

1) $u_{tt} = a^2 u_{xx},\ 0 < x < l,\ t > 0,\ u(0,t) = 0,\ u(l,t) = 0, t \geq 0,$
$u(x,0) = 0,\ \ u_t(x,0) = \sin \frac{2\pi x}{l},\ 0 \leq x \leq l;$

2) $u_{tt} = a^2 u_{xx},\ 0 < x < l,\ t > 0,\ u(0,t) = 0,\ u_x(l,t) = 0, t \geq 0,$
$u(x,0) = \sin \dfrac{5\pi}{2l} x,\ \ u_t(x,0) = \sin \dfrac{\pi}{2l} x,\ 0 \leq x \leq l;$

3) $u_{tt} + 2u_t = u_{xx} + u,\ 0 < x < \pi,\ t > 0,$
$u_x(0,t) = 0,\ u(\pi,t) = 0, t \geq 0,$
$u(x,0) = 0,\ \ u_t(x,0) = x,\ 0 \leq x \leq \pi;$

4) $u_{tt} = 9u_{xx},\ 0 < x < 4,\ t > 0,$
$u_x(0,t) = 0,\ u(4,t) = 0, t \geq 0,$
$u(x,0) = 0,\ \ u_t(x,0) = 16 - x^2,\ 0 \leq x \leq 4;$

5) $u_{tt} = u_{xx} + 10u,\ 0 < x < \dfrac{\pi}{2},\ t > 0,$
$u(0,t) = 0,\ u_x(\frac{\pi}{2}, t) = 0, t \geq 0,$
$u(x,0) = \dfrac{1}{9}\ \sin x + \sin 3x,\ \ u_t(x,0) = 0,\ 0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2};$

6) $u_{tt} = a^2 u_{xx},\ 0 < x < l,\ t > 0,$
$u(0,t) = 0,\ u(l,t) = 0, t \geq 0,$
$$u(x,0) = \begin{cases} \frac{hx}{c},\ 0 \leq x \leq c, \\ \frac{h(l-x)}{c},\ c < x \leq l, \end{cases},\ \ u_t(x,0) = 0,\ 0 \leq x \leq l;$$

7) $u_{tt} = a^2 u_{xx},\ 0 < x < l,\ t > 0,$
$u(0,t) = 0,\ u(l,t) = 0, t \geq 0,$
$u(x,0) = 0,\ 0 \leq x \leq l,$
$$u_t(x,0) = \begin{cases} 0,\ \ 0 \leq x \leq \alpha, \\ v_0,\ \alpha < x \leq \beta, \\ 0,\ \ \beta < x \leq l. \end{cases}$$

6. Розв'язати неоднорідну мішану задачу:

1) $u_{tt} = a^2 u_{xx} + Ae^{-t} \sin \dfrac{\pi x}{l}$, $0 < x < l$, $t > 0$,

$u(0,t) = 0$, $u(l,t) = 0$, $t \geq 0$,
$u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = 0$, $0 \leq x \leq l$;

2) $u_{tt} = a^2 u_{xx}$, $0 < x < l$, $t > 0$,

$u(0,t) = 0$, $u_x(l,t) = A$, $t \geq 0$,
$u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = 0$, $0 \leq x \leq l$;

3) $u_{tt} - u_{xx} - 2u_t = 4t(\sin x - x)$, $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$, $t > 0$,

$u(0,t) = 3$, $u_x(\dfrac{\pi}{2}, t) = t^2 + t$, $t \geq 0$,
$u(x,0) = 3$, $u_t(x,0) = x + \sin x$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$;

4) $u_{tt} - 3u_t = u_{xx} + u - x(4 + t) + \cos \dfrac{3x}{2}$, $0 < x < \pi$, $t > 0$,

$u_x(0,t) = t + 1$, $u(\pi,t) = \pi(t + 1)$, $t \geq 0$,
$u(x,0) = x$, $u_t(x,0) = x$, $0 \leq x \leq \pi$;

5) $u_{tt} = a^2 u_{xx} + \sin 2t$, $0 < x < l$, $t > 0$,
$u_x(0,t) = 0$, $u_x(l,t) = \dfrac{2}{a} \sin \dfrac{2l}{a} \sin 2t$, $t \geq 0$,
$u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = -2 \cos \frac{2x}{a}$, $0 \leq x \leq l$;

6) $u_{tt} - 7u_t = u_{xx} + 2u_x - 2t - 7x - e^{-x} \sin 3x$, $0 < x < \pi$, $t > 0$,

$u(0,t) = 0$, $u(\pi,t) = \pi t$, $t \geq 0$,
$u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = x$, $0 \leq x \leq \pi$;

7) $u_{tt} = u_{xx}$, $0 < x < 1$, $t > 0$,

$u(0,t) = t + 1$, $u(l,t) = t^3 + 2$, $t \geq 0$,
$u(x,0) = x + 1$, $u_t(x,0) = 0$, $0 \leq x \leq 1$;

8) $u_{tt} = u_{xx} + u$, $0 < x < 2$, $t > 0$,

$u(0,t) = 2t$, $u(2,t) = 0$, $t \geq 0$,
$u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = 0$, $0 \leq x \leq 2$.

7. В однорідній прямокутній мембрані $\{0 \leq x \leq s,\ 0 \leq y \leq p\}$ частина межі $\{x = 0,\ 0 \leq y < p\}$ вільна, а інша частина закріплена жорстко. Нехтуючи реакцією навколишнього середовища, знайти поперечні коливання точок мембрани, які викликані початковими відхиленнями

$$u(x, y, 0) = A \cos \frac{\pi x}{2s} \sin \frac{\pi y}{p},$$

за умови, що початкові швидкості дорівнюють нулю.

8. Знайти поздовжні коливання стержня $\{0 \leq x \leq l\}$, кінець $x = 0$ якого закріплений жорстко, а кінець $x = l$, починаючи з моменту $t = 0$, рухається за законом $u(l, t) = A \sin \omega t$, $t \geq 0$, $\omega \neq \frac{a\pi n}{l}$, $n \in \mathbb{N}$. Середовище не чинить опору коливанням.

9. Стержень довжиною l, кінець якого $x = 0$ закріплений, знаходиться у стані спокою. У момент часу $t = 0$ до вільного кінця прикладена сила F (на одиницю площі), напрямлена вздовж стержня. Знайти зміщення $u(x, t)$ точок x стержня у будь-який момент часу $t > 0$.

10. Розв'язати мішану задачу:

1) $u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy})$, $0 < x < l$, $0 < y < p$, $t > 0$,
$u_x(0, y, t) = 0$, $u(l, y, t) = 0$, $0 \leq y \leq p$, $t \geq 0$,
$u(x, 0, t) = 0$, $u(x, p, t) = 0$, $0 \leq x \leq l$, $t \geq 0$,
$u(x, y, 0) = 0$, $u_t(x, y, 0) = A(l - x) \sin \frac{\pi y}{p}$,
$0 \leq x \leq l$, $0 \leq y \leq p$;

2) $u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}) + \cos 2x \sin \pi y$, $0 < x < \pi$, $0 < y < 1$, $t > 0$,
$u_x(0, y, t) = 0$, $u_x(\pi, y, t) = 0$, $0 \leq y \leq 1$, $t \geq 0$,
$u(x, 0, t) = A$, $u(x, 1, t) = 2A$, $0 \leq x \leq \pi$, $t \geq 0$,
$u(x, y, 0) = A(y^2 + 1)$, $u_t(x, y, 0) = 0$, $0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq y \leq 1$;

3) $u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy})$, $0 < x < l$, $0 < y < p$, $t > 0$,
$u(0, y, t) = 0$, $u_x(l, y, t) = 0$, $0 \leq y \leq p$, $t \geq 0$,
$u(x, 0, t) = 0$, $u_y(x, p, t) = 0$, $0 \leq x \leq l$, $t \geq 0$,
$u(x, y, 0) = Axy$, $u_t(x, y, 0) = 0$, $0 \leq x \leq l$, $0 \leq y \leq p$.

Відповіді до вправ з розділу 4

1. 1) $u = x^2 + xt + t^2$; 2) $u = \sin x$; 3) $u = 1 + t +$
$+ \frac{1}{9}(1 - \cos 3t) \sin x$; 4) $u = xt + \sin(x + t) - (1 - \frac{e^{t} + e^{-t}}{2})\, e^{x}$;
5) $u = \frac{x \sin x \cos t - t \cos x \sin t}{x^2 - t^2} + \frac{1}{4} \ln \frac{1 + (x+t)^2}{1 + (x-t)^2}$;
6) $u = \frac{1}{2}\left(\frac{x+t}{1+(x+t)^2} + \frac{x-t}{1+(x-t)^2}\right) + \sin x \sin t$.

2. 1) $u(x,t)=\begin{cases} \frac{1}{a}\sin x\sin at,\ at<x<+\infty, \\ \frac{1}{a}(1-\cos x\cos at),\ 0\le x\le at; \end{cases}$

2) $u(x,t)=e^{-x^2+4t^2}\frac{e^{4xt}+e^{-4xt}}{2}+$
$+\begin{cases} \frac{1}{2}(1-\cos x\cos 2t),\ 0\le x\le 2t, \\ \frac{1}{2}\sin x\sin 2t,\ x>2t; \end{cases}$

3) $u=x+t+t^2+\cos x\cos t$; 4) $u=4t^4+4t^2x^2+\frac{1}{6}x^4+\sin x\sin 2t$.

3. 1) $u=x+\cos(x+\sin x-y)$;
2) $u=-\frac{x^2}{2}-\cos x+\cos(x+e^{y}-1)$;
3) $u=(y-3x)e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$; 4) $u=xy+\frac{3}{2}\sin\frac{2y}{3}\cos(x+\frac{y}{3})$;
5) $u=2x+y-x^2$.

4. 1) $u(x,y)=\int\limits_0^l e^{-y^2\frac{z^2}{2}}\,dz$; 2) $u(x,y)=x^2+(y+e^{x}-1)^2$;
3) $u(x,y)=y^2+\frac{1}{2}x^2(1+e^{-y})$; 4) $u(x,y)=x$; 5) $u(x,y)=y$.

5. 1) $u(x,t)=\frac{l}{2\pi a}\sin\frac{2\pi a}{l}t\,\sin\frac{2\pi}{l}x$;
2) $u(x,t)=\frac{2l}{a\pi}\sin\frac{a\pi t}{2l}\,\sin\frac{\pi x}{2l}+\cos\frac{5a\pi t}{2l}\sin\frac{5\pi x}{2l}$;
3) $u(x,t)=8e^{-t}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\left((-1)^n-\frac{2}{\pi(2n+1)}\right)\sin\frac{2n+1}{2}t\,\cos\frac{2n+1}{2}x$;
4) $u(x,t)=\frac{4096}{3\pi^4}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^4}\,\sin\frac{3\pi(2n+1)t}{8}\,\cos\frac{\pi(2n+1)x}{8}$;
5) $u(x,t)=\frac{1}{18}(e^{3t}+e^{-3t})\,\sin x+\frac{1}{2}(e^{t}+e^{-t})\,\sin 3x$;
6) $u(x,t)=\frac{2hl^2}{\pi^2c(l-c)}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\,\sin\frac{k\pi c}{l}\,\sin\frac{k\pi x}{l}\,\cos\frac{ak\pi t}{l}$. Зокрема, якщо $c=\frac{l}{2}$, то $u(x,t)=\frac{8h}{\pi^2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\,\cos\frac{a(2n+1)\pi t}{l}\,\sin\frac{(2n+1)\pi x}{l}$;
7) $u(x,t)=\frac{2v_0l}{\pi^2a}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{k\pi\alpha}{l}-\cos\frac{k\pi\beta}{l}}{k^2}\,\sin\frac{k\pi x}{l}\,\sin\frac{ak\pi t}{l}$. Зокрема, якщо $u_t(x,0)=v_0$, $0\le x\le l$, тобто $\alpha=0$, $\beta=l$, то $u(x,t)=\frac{4lv_0}{\pi^2a}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\,\sin\frac{a(2n+1)\pi t}{l}\,\sin\frac{(2n+1)\pi x}{l}$.

6. 1) $u(x,t)=\frac{Al^2}{l^2+(a\pi)^2}\left(e^{-t}-\cos\frac{a\pi t}{l}+\frac{l}{a\pi}\sin\frac{a\pi t}{l}\right)\,\sin\frac{\pi x}{l}$;
2) $u(x,t)=Ax-\frac{8Al}{\pi^2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^4}\,\cos\frac{a(2n+1)t}{2l}\,\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}$;
3) $u(x,t)=3+x(t+t^2)+(5te^{t}-8e^{t}+4t+8)\,\sin x$;
4) $u(x,t)=x(t+1)+(\frac{1}{5}e^{\frac{5t}{2}}-e^{\frac{t}{2}}+\frac{4}{5})\,\cos\frac{3x}{2}$;
5) $u(x,t)=\frac{t}{2}-(\frac{1}{4}+\cos\frac{2x}{a})\,\sin 2t$;

6) $u(x,t)=xt+(\frac{1}{6}e^{2t}-\frac{1}{15}e^{5t}-\frac{1}{10})\,e^{-x}\sin 3x$;

7) $u(x,t)=t+1+x(t^3-t+1)+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\Big(\frac{2}{(\pi k)^2}(\frac{6(-1)^{k+1}}{(\pi k)^2}-1)\sin\pi kt+$
$+\frac{(-1)^k 12t}{\pi^3k^3}\Big)\sin\pi kx$;

8) $u(x,t)=(2-x)t+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\frac{4t}{k\pi\mu_k^2}-\frac{4}{k\pi\mu_k}\left(1+\frac{1}{\mu^2}\right)\sin\mu_k t\right)\sin\frac{k\pi x}{2}$,

де $\mu_k^2=\left(\frac{k\pi}{2}\right)^2-1$.

7. $u_{tt}=a^2(u_{xx}+u_{yy}),\ 0<x<s,\ 0<y<p,\ t>0,$
$u_x(0,y,t)=0,\ u(s,y,t)=0,\ 0\le y\le p,\ t\ge 0,$
$u(x,0,t)=0,\ u(x,p,t)=0,\ 0\le x\le s,\ t\ge 0,$
$u(x,y,0)=A\cos\frac{\pi x}{2s}\sin\frac{\pi y}{p},\ u_t(x,y,0)=0,$
$0\le x\le s,\ 0\le y\le p;$
$u(x,y,t)=A\cos\sqrt{\frac{1}{4s^2}+\frac{1}{p^2}}\;a\pi t\cos\frac{\pi x}{2s}\sin\frac{\pi y}{p}.$

8. Математична модель задачі така:
$u_{tt}=a^2u_{xx},\ 0<x<l,\ t>0,\ u(0,t)=0,\ u(l,t)=A\sin\omega t,\ t\ge 0,$
$u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=0,\ 0\le x\le l.$
$u(x,t)=\frac{A\sin\frac{\omega}{a}x\,\sin\omega t}{\sin\frac{\omega}{a}l}+\frac{2A\omega a}{l}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\omega^2-(\frac{an\pi}{l})^2}\sin\frac{an\pi t}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}.$

9. Математична модель задачі така:
$u_{tt}=a^2u_{xx},\ 0<x<l,\ t>0,\ u(0,t)=0,\ u_x(l,t)=\frac{F}{E},\ t\ge 0,$
$u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=0,\ 0\le x\le l.$
$u(x,t)=\frac{Fx}{E}-\frac{8Fl}{\pi^2E}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\cos\frac{a(2k+1)\pi t}{2l}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2l},$
де E – модуль пружності.

10. 1) $u(x,y,t)=\frac{8Al}{a\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2\omega_n}\sin a\omega_n t\,\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2l}\,\sin\frac{\pi y}{p}$,
де $\omega_n=\pi\sqrt{\frac{(2n-1)^2}{4l^2}+\frac{1}{p^2}}$;

2) $u(x,y,t)=A(y+1)+\frac{1-\cos a\sqrt{4+\pi^2}t}{a^2(4+\pi^2)}\cos 2x\,\sin\pi y-$
$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{8A}{(2k-1)^3}\cos a\pi(2k-1)t\,\sin\pi(2k-1)y$;

3) $u(x,t)=\frac{64Alp}{\pi^4}\sum\limits_{m=1}^{\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+n}}{(2m-1)^2(2n-1)^2}\cos(a\sqrt{\lambda_{mn}}t)\sin\frac{(2m-1)\pi x}{2l}\times$
$\times\sin\frac{(2n-1)\pi y}{2p}$, де $\lambda_{mn}=\frac{(2m-1)^2\pi^2}{4l^2}+\frac{(2n-1)^2\pi^2}{4p^2}$.

5 ПАРАБОЛІЧНІ РІВНЯННЯ

5.1 Рівняння теплопровідності та постановка основних задач для нього

У розділі 3 розглянуто деякі задачі фізики, математичні моделі яких описуються диференціальними рівняннями з частинними похідними другого порядку параболічного типу, та описано постановку основних задач для них. Тут ми коротко нагадаємо все це.

5.1.1 Рівняння теплопровідності. Процес поширення тепла в однорідному ізотропному тілі $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ описується функцією $u(x,t)$, $x := (x_1, x_2, x_3) \in \Omega$, $t > 0$, яка задовольняє рівняння

$$u_t = a^2(u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + u_{x_3x_3}) + f(x,t), \tag{1}$$

де $a^2 := \dfrac{\kappa}{c\rho}$, $f(x,t) := \dfrac{F(x,t)}{c\rho}$, κ – коефіцент внутрішньої теплопровідності, ρ – густина маси і c – теплоємність тіла, $F(x,t)$ – густина розподілу теплових джерел, розрахована на одиницю об'єму.

У випадку, коли вивчається процес поширення тепла в тонкій пластинці, функція $u(x,t)$, $x := (x_1, x_2) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$, $t > 0$, задовольняє рівняння

$$u_t = a^2(u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2}) + f(x,t). \tag{2}$$

Рівняння, яке описує поширення тепла в тонкому однорідному стержні довжиною l, має вигляд

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), \;\; x \in (0,l), \;\; t > 0. \tag{3}$$

Рівняння (1) називається тривимірним, рівняння (2) – двовимірним і (3) – одновимірним **рівнянням теплопровідності** або **дифузії**.

Кожне з рівнянь (1), (2), (3), як ми бачили раніше, має безліч розв'язків. Тому для однозначного описання поширення тепла в конкретному процесі треба задавати додаткові умови, а саме: тепловий режим на межі середовища (крайові умови) і початковий розподіл температури (початкова умова).

5.1.2 Основні типи задач для рівняння теплопровідності. Ними є наступні задачі.

а) Мішана задача. В області $Q_T := \Omega \times (0, T]$, де $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, $T > 0$, треба знайти регулярний (класичний) розв'язок рівняння (1), тобто розв'язок u, що має неперервні другі похідні за x і першу похідну за t, який задовольняє крайову умову

$$\left(\alpha\partial_{\vec{\nu}_y}u(x,t) + \beta u(x,t)\right)\Big|_{x\in S} = \mu(y,t),\ (y,t) \in S_T, \qquad (4)$$

де $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, S – межа області Ω, $S_T := S \times (0, T]$, $\vec{\nu}_y$ – вектор зовнішньої нормалі до S у точці $y \in S$, і початкову умову

$$u(x,t)|_{t=0} = \varphi(x),\ \ x \in \Omega. \qquad (5)$$

Кажуть, що крайова умова (4) є умовою:

1) першого роду (умовою Діріхле), коли $\alpha = 0$, тобто задано температуру на межі S

$$u(x,t)|_{x\in S} = \mu(y,t),\ (y,t) \in S_T; \qquad (6)$$

2) другого роду (умовою Неймана), якщо $\beta = 0$, тобто на поверхні S задано тепловий потік; зокрема, коли тіло теплоізольоване, то потік тепла через поверхню S дорівнює нулю і тоді

$$\partial_{\vec{\nu}_y}u(x,t)|_{x\in S} = 0,\ (y,t) \in S_T; \qquad (7)$$

3) третього роду, якщо $\alpha \neq 0$ і $\beta \neq 0$, тобто відбувається теплообмін через поверхню S з навколишнім середовищем за законом Ньютона.

Зауважимо, що у випадку, коли $\Omega = (0, l)$, тобто маємо тонкий теплоізольований з бічної поверхні стержень довжини l, то крайові умови третього роду мають вигляд

$$\begin{aligned} &u_x(0,t) - h_1u(0,t) = \mu_1(t), \\ &u_x(l,t) + h_2u(l,t) = \mu_2(t),\ t \in (0,T], \end{aligned}$$

де $h_1 > 0$, $h_2 > 0$.

б) Задача Коші. У випадку, коли стержень довгий, а нам треба знайти розподіл температури десь в околі його середини за малий проміжок часу, тобто вплив теплового режиму на кінцях стержня не встигне істотно проявитися, розподіл температури буде в основному визначатися початковою умовою. Тому вважають, що стержень нескінченний і розглядають **задачу Коші**: в смузі $\Pi_T := \{\,(x,t)\,|\,x \in \mathbb{R},\ t \in (0,T]\,\}$ треба знайти розв'язок рівняння (3), який задовольняє початкову умову (5) з $\Omega = \mathbb{R}$.

Якщо нам треба знайти розподіл температури в околі одного з кінців стержня за малий проміжок часу, то вплив теплового режиму на другому кінці істотного значення не матиме, тоді приходимо до **задачі на півпрямій**: у півсмузі $\Pi_T^+ := \{\,(x,t)\,|\,x \in \mathbb{R}_+,\ t \in (0,T]\,\}$ треба знайти розв'язок рівняння (3), який задовольняє крайову умову

$$(\alpha u_x(x,t) + \beta u(x,t))|_{x=0} = \mu_1(t),\ \ t \in (0,T],$$

$\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, і початкову умову (5) з $\Omega = \mathbb{R}_+$.

Можливі також інші постановки задач для рівняння теплопровідності.

5.2 Принцип максимуму для рівняння теплопровідності та наслідки з нього

Раніше було зазначено, що одним з основних питань при розгляді задач математичної фізики є їхня коректність, тобто існування розв'язку, його єдиність і неперервна залежність від даних задачі. Нижче буде доведено, що єдиність і неперервна залежність розв'язку від даних задачі для рівняння теплопровідності випливає з принципу максимуму.

5.2.1 Принцип максимуму. Нехай Ω – обмежена область в $\mathbb{R}^n$, $n \in \{1,2,3\}$, з межею S, $T > 0$, $Q_T := \Omega \times (0,T]$ – циліндрична область, $S_T := S \times (0,T]$ – її бічна межа, $Q_0 := \Omega \times \{t = 0\}$ – нижня основа Q_T, $\Gamma := S_T \cup Q_0$. Зокрема, при $n = 1$ $\Omega = (0,l)$, $Q_T := (0,l) \times (0,T]$ – прямокутник, доповнений верхньою основою, Γ – частина межі прямокутника, яка складається з нижньої основи і бічних сторін (рис. 5.1). Множина Γ називається **параболічною межею області** Q_T.

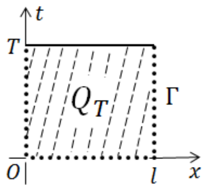

Рис. 5.1

Нехай $u = u(x,t)$, $(x,t) \in Q_T$. Через $C^{2,1}(\overline{Q}_T)$ $(C^{2,1}(Q_T))$ позначатимемо сукупність неперервних в $\overline{Q}_T$ (в Q_T) функцій, які мають в цій області неперервні частинні похідні до другого порядку включно за x_i, $i \in \{1,\ldots,n\}$, і першу частинну похідну за t.

Теорема 5.1 (принцип максимуму). *Регулярний розв'язок u однорідного рівняння теплопровідності в області Q_T, який належить до класу $C(\overline{Q}_T)$, своїх найбільшого й найменшого значень досягає на параболічній межі Γ області Q_T.*

◀ З фізичних міркувань принцип очевидний: тепло поширюється від більш нагрітих місць до менш нагрітих, тому якщо максимальна температура в тілі при $t = 0$ була u_1, а на межі тіла – u_2 при $t \in (0,T]$ і $\max\{u_1, u_2\} = u_0$, то в жодній точці $x \in \Omega$ при $t \in (0,T]$ температура не може бути вищою за u_0, бо тепло в точку x надійшло від більш нагрітих місць.

Доведення проведемо від супротивного для випадку $n = 1$, тобто, коли $\Omega = (0,l)$.

Оскільки $u \in C(\overline{Q}_T)$, то згідно з теоремою Веєрштрасса $\max\limits_{\overline{Q}_T} u =: M$ досягається в деякій точці $\overline{Q}_T$. Нехай $M = u(x_0,t_0)$, $x_0 \in (0,l)$, $0 < t_0 \le T$, а $\max\limits_{\Gamma} u =: m < M$.

Розглянемо допоміжну функцію

$$v(x,t) := u(x,t) + \frac{M-m}{2l^2}\,(x-x_0)^2, \ \ (x,t) \in Q_T.$$

Маємо $v(x_0,t_0) = M$, $v|_\Gamma \le \max\limits_\Gamma u + \max\limits_\Gamma \frac{M-m}{2l^2}\,(x-x_0)^2 \le m + \frac{M-m}{2l^2} l^2 = \frac{M+m}{2} < M$. Тому свого найбільшого значення v досягає у внутрішній точці Q_T або при $t = T$. Нехай максимум досягається у точці $(x_1,t_1) \in Q_T$, тоді з необхідних і достатніх умов максимуму маємо

$$v_t(x_1,t_1) \ge 0,\ v_x(x_1,t_1) = 0,\ u_{xx}(x_1,t_1) \le 0.$$

Звідси випливає, що

$$(v_t - a^2 v_{xx})\Big|_{(x,t)=(x_1,t_1)} \ge 0.$$

З іншого боку, підставивши в однорідне рівняння теплопровідності функцію v і, врахувавши те, що u є розв'язком цього рівняння, дістанемо

$$v_t - a^2 v_{xx} = (u_t - a^2 u_{xx}) - a^2 \tfrac{M-m}{l^2} < 0.$$

Отже, одержали суперечність, а це означає, що припущення про те, що максимум досягається у внутрішній точці (x_0, t_0) неправильне.

Доведення того, що найменше значення розв'язку u досягається також на Γ, дістанемо, якщо замінити u на $-u$ і повторити проведені вище міркування. ►

5.2.2 Наслідки з принципу максимуму. Розглянемо першу мішану задачу

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), \;\; (x,t) \in Q_T, \tag{1}$$

$$u(0,t) = \mu_1(t), \; u(l,t) = \mu_2(t), \; t \in [0,T], \tag{2}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \;\; x \in [0,l]. \tag{3}$$

Теорема 5.2 (єдиність розв'язку першої мішаної задачі). *Регулярний розв'язок u задачі (1)–(3) з класу $C(\overline{Q}_T)$, тобто $u \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(\overline{Q}_T)$, єдиний.*

◄ Припустимо, що є два розв'язки u_1 і u_2 з $C(\overline{Q}_T)$ задачі (1)–(3). Тоді $u := u_1 - u_2$ – розв'язок однорідного рівняння в Q_T, який на Γ дорівнює нулю. На підставі теореми 5.1 звідси випливає, що $u = 0$ в Q_T, тобто $u_1 = u_2$ в Q_T. ►

Теорема 5.3 (неперервна залежність розв'язку першої мішаної задачі від крайових і початкових функцій). *Регулярний розв'язок задачі (1)–(3) з класу $C(\overline{Q}_T)$ неперервно залежить від даних задачі, а саме: якщо u – розв'язок з класу $C(\overline{Q}_T)$ задачі (1)–(3), а $\overline{u}$ – розв'язок з класу $C(\overline{Q}_T)$ рівняння (1), який задовольняє умови*

$$\overline{u}(0,t) = \overline{\mu}_1(t), \; \overline{u}(l,t) = \overline{\mu}_2(t), \; t \in [0,T],$$

$$\overline{u}(x,0) = \overline{\varphi}(x), \; x \in [0,l],$$

де

$$|\overline{\mu}_i(t) - \mu_i(t)| < \varepsilon, \; t \in [0,T], \; i \in \{1,2\},$$

$$|\overline{\varphi}(x) - \varphi(x)| < \varepsilon, x \in [0, l],$$

тобто

$$|\overline{u}(x,t) - u(x,t)| < \varepsilon,\ (x,t) \in \Gamma,$$

то

$$|\overline{u}(x,t) - u(x,t)| < \varepsilon,\ (x,t) \in Q_T.$$

Тут ε – довільно взяте додатне число.

◀ Функція $v := \overline{u} - u$ є розв'язком однорідного рівняння (1), який на межі Γ задовольняє умову

$$|v(x,t)| < \varepsilon,\ \ (x,t) \in \Gamma.$$

Звідси, згідно з принципом максимуму, одержуємо

$$|v(x,t)| < \varepsilon,\ \ (x,t) \in Q_T. \ ▶$$

5.3 Розв'язування першої мішаної задачі для рівняння теплопровідності

5.3.1 Формальний розв'язок однорідної задачі. Розглянемо однорідну першу мішану задачу для одновимірного рівняння теплопровідності, тобто задачу

$$u_t = a^2 u_{xx},\ \ (x,t) \in Q_T, \tag{1}$$

$$u(0,t) = 0,\ u(l,t) = 0,\ t \in [0,T], \tag{2}$$

$$u(x,0) = \varphi(x),\ \ x \in [0,l], \tag{3}$$

де $Q_T := (0,l) \times (0,T]$, T – задане додатне число або $T = +\infty$. Не дотримуючись математичної строгості в міркуваннях, побудуємо формальний розв'язок цієї задачі методом Фур'є.

Шукатимемо ненульові розв'язки рівняння (1), які задовольняють крайові умови (2) у вигляді

$$u(x,t) = X(x)T(t),\ (x,t) \in Q_T. \tag{4}$$

Підставивши (4) в (1) і, відокремивши змінні, дістанемо

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2$$

або
$$T''(t)+a^2\,\lambda^2 T(t)=0,\ \ t\in[0,T], \tag{5}$$
$$X''(x)+\lambda^2 X(x)=0,\ \ x\in[0,l]. \tag{6}$$
Задовольняючи функцією (4) крайові умови (2), одержуємо, що
$$X(0)=0,\ \ X(l)=0. \tag{7}$$

Задача (6), (7) є задачею Штурма–Ліувілля, яка розглянута в пункті 4.3.1. Власними числами цієї задачі є $\lambda_n=\frac{n\pi}{l}$, $n\in\mathbb{N}$, а власними функціями – $X_n(x)=\sin\frac{n\pi x}{l}$, $n\in\mathbb{N}$.

При $\lambda=\lambda_n$ рівняння (5) має вигляд
$$T_n'(t)+\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 T_n(t)=0,\ \ n\in\mathbb{N},$$
загальним розв'язком якого є
$$T_n(t)=A_n e^{-\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 t},\ \ t>0,\ \ n\in\mathbb{N}.$$

Розв'язок задачі (1)–(3) шукаємо у вигляді ряду
$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 t}\sin\frac{n\pi x}{l},\ \ (x,t)\in\overline{Q}_T. \tag{8}$$

Задовольнивши функцією u, яка визначається формулою (8), початкову умову (3), дістанемо
$$\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty} A_n\,\sin\frac{n\pi x}{l},\ \ x\in[0,l].$$
Розглядаючи цю рівність, як розклад функції φ в ряд Фур'є на проміжку $[0,l]$ за системою функцій $\{\sin\frac{n\pi x}{l},\ n\in\mathbb{N}\}$, знайдемо
$$A_n=\frac{2}{l}\int\limits_0^l \varphi(\xi)\,\sin\frac{n\pi\xi}{l}\,d\xi,\ \ n\in\mathbb{N}. \tag{9}$$

Підставивши (9) у (8), одержимо формальний розв'язок задачі (1)–(3)

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\,\sin\frac{n\pi\xi}{l}\,d\xi\Big) e^{-\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 t} \sin\frac{n\pi x}{l},\ (x,t) \in \overline{Q}_T. \tag{10}$$

5.3.2 Регулярність розв'язку однорідної задачі. Знайдемо умови на φ, за яких формальний розв'язок (10) буде регулярним у Q_T з класу $C(\overline{Q}_T)$, тобто $u \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(\overline{Q}_T)$.

Умова неперервності розв'язку в $\overline{Q}_T$ вимагає неперервності φ на відрізку $[0,l]$ і необхідності узгодження крайових і початкових умов. З умов (2) випливає, що $u(0,0) = 0$, $u(l,0) = 0$, а з (3) – $u(0,0) = \varphi(0)$, $u(l,0) = \varphi(l)$, а тому $\varphi(0) = 0$, $\varphi(l) = 0$.

Теорема 5.4. *Якщо φ неперервна, має кусково-неперервну похідну на $[0,l]$ і $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$, то функція u, яка визначається рівністю (10), є регулярним розв'язком задачі (1) – (3), який належить до класу $C(\overline{Q}_T) \cap C^{\infty}(Q_T)$.*

◀ Досить переконатися у тому, що ряд (8), в якому коефіцієнти A_n, $n \in \mathbb{N}$, визначені формулами (9), збігається рівномірно в $\overline{Q}_T$ і ряди, одержані почленним диференціюванням цього ряду довільну кількість разів, збігаються рівномірно в $[0,l] \times [t_0, T]$ для будь-якого $t_0 \in (0,T)$.

Оскільки

$$\left| e^{-(\frac{an\pi}{l})^2 t} \sin\tfrac{n\pi x}{l} \right| \le 1,\ (x,t) \in \overline{Q}_T,$$

то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |A_n|$ є мажорантним для ряду (8) в $\overline{Q}_T$ і за умови

$$\sum_{n=1}^{\infty} |A_n| < +\infty \tag{11}$$

на підставі ознаки Вейєрштрасса ряд (8) рівномірно збігається в $\overline{Q}_T$.

Розглянемо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n (-1)^m \Big(\frac{n\pi}{l}\Big)^{2m+k} a^{2m}\, e^{-(\frac{an\pi}{l})^2 t} \sin\big(\frac{n\pi}{l}x + k\frac{\pi}{2}\big), \tag{12}$$

одержаний почленним диференціюванням ряду (8) k разів за x і m разів за t. Цей ряд в області $[0,l] \times [t_0,T]$ мажорується рядом

$$C_1 \sum_{n=1}^{\infty} |A_n| n^{k+2m} e^{-(\frac{an\pi}{l})^2 t_0},$$

який зважаючи на те, що для довільного $n \in \mathbb{N}$ справджується оцінка

$$n^{k+2m} e^{-(\frac{an\pi}{l})^2 t_0} \le C_0$$

зі сталою $C_0 > 0$, не залежною від n, мажорується рядом

$$C_1 C_0 \sum_{n=1}^{\infty} |A_n|.$$

Звідси випливає, що за умови (11) ряд (12) збігається рівномірно в області $[0,l] \times [t_0,T]$.

Отже, виконання умови (11) достатнє для рівномірної збіжності рядів (8) та (12) у відповідних областях і тим самим правильності твердження теореми. Умова (11) виконується для функції φ, яка задовольняє сформульовані в теоремі умови. Це доводиться так само, як у пункті 4.3.1. ▶

5.3.3 Однорідна функція Гріна (функція точкового джерела) першої мішаної задачі для рівняння теплопровідності. При доведенні теореми 5.4 встановлено, що ряд (10) збігається рівномірно в $\overline{Q}_T$, тому можна поміняти місцями операції підсумовування та інтегрування. Після здійснення цього одержимо формулу

$$u(x,t) = \int_0^l \Big(\frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(\frac{an\pi}{l})^2 t} \sin\frac{n\pi x}{l} \sin\frac{n\pi\xi}{l}\Big)\varphi(\xi)\, d\xi,\ (x,t) \in Q_T,$$

або

$$u(x,t) = \int_0^l G(x,\xi,t)\varphi(\xi)\, d\xi,\ \ (x,t) \in Q_T, \qquad (13)$$

де

$$G(x,\xi,t) := \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty} \exp\left\{-\frac{a^2n^2\pi^2}{l^2}t\right\}\sin\frac{n\pi x}{l}\,\sin\frac{n\pi\xi}{l},$$

$$\{x,\xi\}\subset[0,l],\ t>0. \tag{14}$$

Функцію (14) називають **однорідною функцією Гріна** або **функцією точкового джерела задачі (1)–(3).**

Функція $G(x,\xi,t)$, якщо її розглядати як функцію x, визначає розподіл температури в стержні довжини l у момент часу t, яке викликане дією миттєвого джерела тепла потужності $Q = c\rho$, розміщеного в момент часу $t = 0$ в точці $x = \xi$ проміжку $(0,l)$ у випадку, коли на кінцях стержня весь час підтримується нульова температура.

Зауваження 1. Розв'язок (13) задачі (1)–(3) побудовано за припущення неперервності та кускової гладкості функції φ, а також узгодженості крайових і початкової умов. Не всі ці припущення на практиці виконуються, але й в такому випадку задача (1)–(3) може бути розв'язною, а саме, правильна теорема.

Теорема 5.5. *Якщо φ кусково-неперервна (має розриви першого роду) на $[0,l]$, то функція (13) є розв'язком рівняння (1), який обмежений в $\overline{Q}_T$, задовольняє крайові умови (2), а при $t = 0$ неперервний в точках неперервності φ і в цих точках $u(x,0) = \varphi(x)$.*

5.3.4 Неоднорідна перша мішана задача. Розв'язування методом Фур'є неоднорідних крайових задач детально описано для гіперболічних рівнянь. Єдина відмінність, яка буде в параболічному випадку, полягає в тому, що старша похідна за t буде першого, а не другого порядку. Коротко нагадаємо схему розв'язування.

Розглянемо першу мішану задачу

$$u_t = a^2u_{xx} + f(x,t),\ \ (x,t)\in Q_T, \tag{15}$$

$$u(0,t) = \mu_1(t),\ u(l,t) = \mu_2(t),\ t\in[0,T], \tag{16}$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\ \ x\in[0,l]. \tag{17}$$

Розв'язок задачі (15)–(17) шукаємо у вигляді

$$u(x,t)=v(x,t)+w(x,t),\ \ (x,t)\in Q_T, \tag{18}$$

де функція w вибрана так, щоб вона задовольняла умови (16):

$$w(x,t)=\mu_1(t)+\frac{x}{l}(\mu_2(t)-\mu_1(t)),\ \ (x,t)\in Q_T.$$

Для v дістаємо задачу

$$v_t=a^2v_{xx}+\overline{f}(x,t),\ \ (x,t)\in Q_T, \tag{19}$$

$$v(0,t)=0,\ v(l,t)=0,\ t\in[0,T], \tag{20}$$

$$v(x,0)=\overline{\varphi}(x),\ \ x\in[0,l]. \tag{21}$$

де

$$\overline{f}(x,t):=f(x,t)-w_t(x,t),\ \overline{\varphi}(x):=\varphi(x)-w(x,0).$$

Розв'язок задачі (19)–(21) шукаємо у вигляді

$$v(x,t)=v^{(1)}(x,t)+v^{(2)}(x,t),\ \ (x,t)\in Q_T,$$

де $v^{(1)}$ і $v^{(2)}$ є розв'язками таких задач:

$$\begin{gathered} v_t^{(1)}=a^2v_{xx}^{(1)},\ \ (x,t)\in Q_T,\\ v^{(1)}(0,t)=0,\ v^{(1)}(l,t)=0,\ t\in[0,T],\\ v^{(1)}(x,0)=\overline{\varphi}(x),\ \ x\in[0,l]; \end{gathered} \tag{22}$$

$$\begin{gathered} v_t^{(2)}=a^2v_{xx}^{(2)}+\overline{f}(x,t),\ \ (x,t)\in Q_T,\\ v^{(2)}(0,t)=0,\ v^{(2)}(l,t)=0,\ t\in[0,T],\\ v^{(2)}(x,0)=0,\ \ x\in[0,l]. \end{gathered} \tag{23}$$

Розв'язок задачі (22), згідно з пунктами 5.3.1 – 5.3.3, визначається формулою (13), тобто

$$v^{(1)}(x,t)=\int\limits_0^l G(x,\xi,t)\,\overline{\varphi}(\xi)\,d\xi,\ \ (x,t)\in Q_T.$$

Розв'язок задачі (23) шукаємо у вигляді ряду

$$v^{(2)}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l}, \ \ (x,t) \in Q_T, \tag{24}$$

за власними функціями однорідної задачі (22). Якщо цей ряд збігається рівномірно, то $v^{(2)}$ задовольняє нульові крайові умови, бо кожний член ряду задовольняє ці умови.

Розкладемо тепер функцію $\overline{f}$ у ряд Фур'є

$$\overline{f}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \frac{n\pi x}{l}, \ (x,t) \in Q_T, \tag{25}$$

де

$$f_n(t) := \frac{2}{l} \int\limits_0^l \overline{f}(\xi,t) \sin \frac{n\pi\xi}{l}\, d\xi, \ \ t \in (0,T], \ n \in \mathbb{N}, \tag{26}$$

та підставимо (24) і (25) у рівняння із задачі (23). Тоді одержимо, що

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big(g_n'(t) + \Big(\frac{an\pi}{l}\Big)^2 g_n(t) - f_n(t) \Big) \sin \frac{n\pi x}{l} = 0, \ (x,t) \in Q_T,$$

звідки випливають рівняння

$$g_n'(t) + \Big(\frac{an\pi}{l}\Big)^2 g_n(t) = f_n(t), \ \ t \in (0,T], \ \ n \in \mathbb{N}. \tag{27}$$

Якщо задовольнити рядом (24) нульову початкову умову, то дістанемо, що

$$g_n(0) = 0, \ \ n \in \mathbb{N}. \tag{28}$$

Розв'язавши задачі Коші (27), (28), одержимо

$$g_n(t) = \int\limits_0^t f_n(\tau) \exp\{-\Big(\frac{an\pi}{l}\Big)^2 (t-\tau)\}\, d\tau,$$

$$t \in (0,T], \ \ n \in \mathbb{N}. \tag{29}$$

Якщо підставити (29) у (24), то дістанемо розв'язок задачі (23)

$$v^{(2)}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\int_0^t f_n(\tau) \exp\{-\Big(\frac{an\pi}{l}\Big)^2 (t-\tau)\} d\tau \Big) \sin \frac{n\pi x}{l},$$

$$(x,t) \in Q_T,$$

а помінявши місцями інтегрування і підсумовування та використавши рівності (26), запишемо його у вигляді

$$v^{(2)}(x,t) = \int_0^t d\tau \int_0^l \Big(\frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \exp\{-\Big(\frac{an\pi}{l}\Big)^2 (t-\tau)\} \times$$

$$\times \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{n\pi \xi}{l} \Big) \overline{f}(\xi,t) d\xi, \ (x,t) \in Q_T.$$

Якщо скористатись позначенням (14), то остаточно одержимо

$$v^{(2)}(x,t) = \int_0^t d\tau \int_0^l G(x,\xi,t-\tau) \overline{f}(\xi,t) d\xi, \ (x,t) \in Q_T. \qquad (30)$$

Ця формула для розв'язку задачі (23) має простий **фізичний зміст**: функція $G(x,\xi,t-\tau)$ визначає розподіл тепла, що відповідає одиничному миттєвому джерелу в момент часу $t=\tau$ у точці $x=\xi$, а функція $\overline{f}(x,t)$ в рівнянні із задачі (23) стверджує, що джерела розподілені по довжині та в часі з густиною $\overline{f}(x,t)$, тому, згідно з принципом накладання, температура в точці x у момент часу t знаходиться за допомогою підсумовування елементів

$$G(x,\xi,t-\tau)\overline{f}(\xi,t) d\xi d\tau$$

по області $(0,l) \times (0,t)$ і граничного переходу, тобто у вигляді інтеграла (30).

Зауваження 2. Метод Фур'є використовується також при розв'язуванні мішаних задач для рівняння теплопровідності з крайовими умовами другого або третього роду.

Зауваження 3. У випадку стаціонарних (не залежних від часу) неоднорідностей в задачі (15)–(17) інколи вдається побудувати стаціонарний розв'язок $w(x)$ рівняння (15), який задовольняє умови (16). Тоді заміна $u(x,t) = v(x,t) + w(x)$, $(x,t) \in \overline{Q}_T$, зводить задачу (15)–(17) до однорідної задачі, розглянутої в пунктах 5.3.1 – 5.3.3.

Приклад 1. Знайти розв'язок мішаної задачі

$$u_t - u_{xx} + 2u_x - u = e^x \sin x - t,\ x \in (0,\pi),\ t \in (0,t_0],$$

$$u(0,t) = 1 + t,\ u(\pi,t) = 1 + t,\ t \in [0,t_0],$$

$$u(x,0) = 1 + e^x \sin 2x,\ x \in [0,\pi].$$

◀ Шукатимемо розв'язок задачі у вигляді $u = v + w$, де функцію w виберемо так, щоб вона задовольняла ненульові крайові умови. Скориставшись зауваженням 5 із пункту 4.3.3, маємо

$$w(x,t) = 1 + t,\ x \in [0,\pi],\ t \in [0,t_0].$$

Тоді для v дістанемо задачу

$$v_t - v_{xx} + 2v_x - v = e^x \sin x,\ x \in (0,\pi),\ t \in (0,t_0],$$

$$v(0,t) = 0,\ v(\pi,t) = 0,\ t \in [0,t_0],$$

$$v(x,0) = 1 + e^x \sin 2x,\ x \in [0,\pi].$$

Оскільки рівняння неоднорідне, а початкова умова ненульова, то v шукаємо у вигляді

$$v(x,t) = v^{(1)}(x,t) + v^{(2)}(x),\ x \in (0,\pi),\ t \in (0,t_0].$$

Функцію $v^{(2)}$ виберемо так, щоб вона задовольняла неоднорідне рівняння і нульові крайові умови, тобто знайдемо її як розв'язок задачі

$$v^{(2)}_{xx} - 2v^{(2)}_x + v^{(2)} = -e^x \sin x,\ x \in (0,\pi),$$

$$v^{(2)}(0) = 0,\ v^{(2)}(\pi) = 0.$$

Загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння має вигляд $v^{(2)}(x) = C_1 e^{\,x} + C_2 x e^{\,x}$, а частинний розв'язок неоднорідного рівняння $\widetilde{v}^{(2)}(x) = e^{\,x}\sin x$. Тому загальним розв'язком останнього рівняння є

$$v^{(2)}(x) = C_1 e^{\,x} + C_2 x e^{\,x} + e^{\,x}\sin x.$$

Задовольнивши нульові крайові умови, дістанемо, що $C_1 = 0$, $C_2 = 0$, а тому

$$v^{(2)}(x) = e^{\,x}\sin x,\ x \in (0, \pi).$$

Для функції $v^{(1)}$ маємо задачу

$$v_t^{(1)} - v_{xx}^{(1)} + 2v_x^{(1)} - v^{(1)} = 0,\ x \in (0, \pi),\, t \in (0, t_0],$$

$$v^{(1)}(0, t) = 0,\ v^{(1)}(\pi, t) = 0,\ t \in [0, t_0],$$

$$v(x, 0) = e^{\,x}\sin 2x - e^{\,x}\sin x,\ x \in [0, \pi].$$

Шукатимемо розв'язок цієї задачі у вигляді

$$v^{(1)}(x, t) = X(x)T(t).$$

Підставляючи $v^{(1)}$ в рівняння і задовольняючи нульові крайові умови, одержимо

$$T'(t) + \lambda^2 T(t) = 0,\ \ t \in [0, t_0],$$

$$\begin{cases} X''(x) - 2X'(x) + (\lambda^2 + 1)X(x) = 0,\ x \in [0, \pi], \\ X(0) = 0,\ \ X(\pi) = 0. \end{cases}$$

Знайдемо власні числа і власні функції останньої задачі. Загальний розв'язок рівняння має вигляд

$$X(x) = C_1 e^{\,x}\cos\lambda x + C_2 e^{\,x}\sin\lambda x.$$

Задовольняючи нульові крайові умови, дістаємо

$$C_1 = 0,\ \ C_2 \neq 0,\ \ \sin\lambda\pi = 0,$$

звідси випливає, що $\lambda_n = n$, $n \in \mathbb{N}$, – власні числа, а $X_n = e^x \sin nx$, $n \in \mathbb{N}$, – власні функції задачі.

Тоді рівняння для T має вигляд

$$T_n'(t) + n^2 T_n(t) = 0,\ \ t \in [0, t_0],\ \ n \in \mathbb{N},$$

і його загальним розв'язком є

$$T_n(t) = A_n e^{-n^2 t},\ \ t \in [0, t_0],\ \ n \in \mathbb{N}.$$

Тому

$$v^{(1)}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-n^2 t} e^x \sin nx,\ \ x \in [0, \pi],\ \ t \in [0, t_0].$$

Якщо задовольнити цим рядом початкову умову, то одержимо, що

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n e^x \sin nx = e^x \sin 2x - e^x \sin x,\ \ x \in [0, \pi].$$

Звідси випливає, що $A_n = 0$, $n \in \mathbb{N} \backslash \{1, 2\}$, $A_1 = -1$, $A_2 = 1$, а тому

$$v^{(1)}(x,t) = -e^{-t} e^x \sin x + e^{-4t} e^x \sin 2x,\ \ x \in [0, \pi],\ \ t \in [0, t_0].$$

Якщо повернутися до вихідної задачі, то одержимо, що її розв'язком є функція

$$u(x,t) = (1 + t) + e^x \sin x + (-e^{-t} e^x \sin x + e^{-4t} e^x \sin 2x),$$

$$x \in [0, \pi],\ \ t \in [0, t_0].\ \blacktriangleright$$

Зауваження 4. Методом Фур'є можна розв'язувати мішані задачі для рівняння теплопровідності й у випадку декількох просторових змінних.

Приклад 2. Знайти розподіл температури з часом у кожній точці квадратної однорідної пластини, контур якої підтримується при нульовій температурі, а початковий розподіл температури визначається функцією $\varphi(x, y) = 2xy(p - x)(p - y)$,

$x \in [0,p]$, $y \in [0,p]$, за умови, що бічна поверхня теплоізольована.

◀ Згідно з попереднім, математична модель задачі така:

$$u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy}),\ x \in (0,p),\ y \in (0,p),\ t > 0, \tag{31}$$

$$\begin{gathered} u(0,y,t) = 0,\ u(p,y,t) = 0,\ y \in [0,p],\ t \geq 0, \\ u(x,0,t) = 0,\ u(x,p,t) = 0,\ x \in [0,p],\ t \geq 0, \end{gathered} \tag{32}$$

$$u(x,y,0) = 2xy(p-x)(p-y),\ x \in [0,p],\ y \in [0,p]. \tag{33}$$

Скористаємося методом Фур'є і шукатимемо ненульові розв'язки рівняння (31), які задовольняють крайові умови (32) у вигляді $u(x,y,t) = X(x)Y(y)T(t)$ (див. підрозділ 4.6). Тоді для функцій X, Y і T одержимо такі рівняння:

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \quad Y''(y) + \mu^2 Y(y) = 0,$$

$$T'(t) = a^2(\lambda^2 + \mu^2)T(t),$$

де λ^2 і μ^2 – сталі.

Загальні розв'язки цих рівнянь мають відповідно вигляд

$$X(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x, \quad Y(y) = C_3 \cos \mu y + C_4 \sin \mu y,$$

$$T(t) = Ae^{-a^2(\lambda^2+\mu^2)t}.$$

Для виконання крайових умов (32) треба взяти

$$C_1 = 0,\ C_3 = 0,\ \lambda_m = \frac{m\pi}{p},\ \mu_n = \frac{n\pi}{p},\ \{m,n\} \subset \mathbb{N}.$$

Тому частинними розв'язками рівняння (31), які задовольняють крайові умови (32), є функції

$$u_{mn}(x,y,t) = A_{mn} e^{-a^2(\lambda_m^2+\mu_n^2)t} \sin \frac{m\pi x}{p} \sin \frac{n\pi y}{p}.$$

Розглянемо ряд

$$u(x,y,t) = \sum_{m,n=1}^{\infty} A_{mn} e^{-a^2(\lambda_m^2+\mu_n^2)t} \sin \frac{m\pi x}{p} \sin \frac{n\pi y}{p} \tag{34}$$

і задовольнимо ним початкову умову (33). Тоді дістанемо рівність

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} A_{mn} \sin\frac{m\pi x}{p} \sin\frac{n\pi y}{p} = 2xy(p-x)(p-y),\ x \in [0,p], y \in [0,p],$$

яка є розкладом функції $\varphi(x,y) = 2xy(p-x)(p-y)$ у подвійний ряд Фур'є. Коефіцієнти A_{mn} цього розкладу визначаються формулами

$$A_{mn} = \frac{4}{p^2} \int_0^p \int_0^p 2xy(p-x)(p-y) \sin\frac{m\pi x}{p} \sin\frac{n\pi y}{p}\, dxdy =$$

$$= \frac{8}{p^2} \int_0^p x(p-x) \sin\frac{m\pi x}{p}\, dx \int_0^p y(p-y) \sin\frac{n\pi y}{p} dy =$$

$$= \begin{cases} \frac{128p^4}{m^3 n^3 \pi^6},\ m = 2k+1,\ n = 2l+1, \\ \ 0, \quad m = 2k,\ n = 2l,\ \{k,l\} \subset \mathbb{Z}_+, \end{cases}$$

оскільки $\int\limits_0^p z(p-z) \sin\frac{n\pi z}{p}\, dz = \begin{cases} \frac{4p^3}{(n p)^3},\ n = 2l+1, \\ 0,\ n = 2l,\ l \in \mathbb{Z}_+. \end{cases}$ Підставивши ці коефіцієнти в ряд (34), одержимо розв'язок задачі (31)–(33) у вигляді

$$u(x,y,t) = \sum_{k,l=0}^{\infty} \frac{128p^4}{(2k+1)^3(2l+1)^3\pi^6}\, e^{-(\frac{a\pi}{p})^2((2k+1)^2+(2l+1)^2)t} \times$$

$$\times \sin\frac{(2k+1)\pi x}{p} \sin\frac{(2l+1)\pi y}{p},\ \ x \in [0,p],\ \ y \in [0,p],\ \ t \geq 0. \blacktriangleright$$

5.4 Задача Коші для рівняння теплопровідності

5.4.1 Перетворення Фур'є та його основні властивості. Для одержання розв'язку задачі Коші для рівняння теплопровідності користуватимемося перетворенням Фур'є.

Перетворенням Фур'є функції $f \in L_1(\mathbb{R})$ називається функція

$$F[f](\sigma) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} f(x) e^{ix\sigma} dx, \ \ \sigma \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

а **оберненим перетворенням Фур'є** – функція

$$F^{-1}[f](x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} f(\sigma) e^{-ix\sigma} d\sigma, \ \ x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

З формул (1) і (2) випливає, що для $f \in L_1(\mathbb{R})$ правильні рівності

$$F^{-1}[f](x) = F[f](-x) = F[f(-\sigma)](x), \ \ x \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Розглянемо деякі властивості перетворення Фур'є.

$\mathbf{1^0}$. *Якщо $f \in L_1(\mathbb{R})$, то для перетворення Фур'є правильні твердження:*

1) $F[f]$ обмежена,

2) $F[f]$ неперервна на $\mathbb{R}$,

3) $F[f](\sigma) \to 0$ при $|\sigma| \to +\infty$.

◀ Перше твердження випливає з оцінки

$$|F[f](\sigma)| \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} |f(x)| dx =: C, \ \ \sigma \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Для доведення другого твердження скористаємося властивостями рівномірно збіжних невласних інтегралів, залежних від параметра. З ознаки Вейєрштрасса рівномірної збіжності та нерівності (4) випливає рівномірна збіжність інтеграла (1), а отже, неперервність $F[f]$ на $\mathbb{R}$.

Щоб дістати третє твердження, треба довести, що для довільного $\varepsilon > 0$ існує $n_0 \in \mathbb{N}$ таке, що для будь-якого $\sigma \in \mathbb{R}$ такого, що $|\sigma| > n_0$, правильна нерівність $|F[f](\sigma)| < \varepsilon$.

Маємо

$$F[f](\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-A}^{A} f(x) e^{ix\sigma} dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\{|x|>A\}} f(x) e^{ix\sigma} dx =$$

$$=: I'_A(\sigma) + I''_A(\sigma).$$

Оскільки $f \in L_1(\mathbb{R})$ і для довільного $\sigma \in \mathbb{R}$ $|I''_A(\sigma)| \le$ $\le \int\limits_{\{|x|>A\}} |f(x)|dx$, то існує $A > 0$ таке, що $|I''_A(\sigma)| < \frac{\varepsilon}{2}$, $\sigma \in \mathbb{R}$. Для $I'_A(\sigma)$ при фіксованому $A > 0$, на підставі леми Рімана [7, с. 261], маємо співвідношення $I'_A(\sigma) \to 0$ при $|\sigma| \to +\infty$, з якого випливає існування $n_0 \in \mathbb{N}$ такого, що для всіх $\sigma \in \mathbb{R}$, $|\sigma| > n_0$, справджується нерівність $|I'_A(\sigma)| < \frac{\varepsilon}{2}$. ►

2⁰. *1) Якщо $f \in L_1(\mathbb{R})$ і f задовольняє умову Діні в точці $x \in \mathbb{R}$, тобто існує $\delta > 0$ таке, що*

$$\int\limits_{-\delta}^{\delta} \frac{|f(x+t) - f(x)|}{|t|}\, dt \;<\; +\infty,$$

то

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{A\to\infty} \int\limits_{-A}^{A} e^{\,-ix\sigma} F[f](\sigma) d\sigma. \qquad (5)$$

2) Якщо $F[f] \in L_1(\mathbb{R})$, то формула (5) набуває вигляду

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{\,-ix\sigma} F[f](\sigma) d\sigma.$$

◄ Доведення цієї властивості наведено в [21, с. 355–358]. ►

3⁰. *Якщо для деякого $n \in \mathbb{N}$*

$$\int\limits_{\mathbb{R}} (1 + |x|^n)|f(x)|dx < +\infty,$$

*то існують похідні $(F[f])^{(k)}$, $k \in \{1, \ldots, n\}$, причому кожна з них має властивість **1⁰** і справджуються рівності*

$$(F[f])^{(k)}(\sigma) = F[(ix)^k f](\sigma), \;\; \sigma \in \mathbb{R}, \;\; k \in \{1, \ldots, n\}. \qquad (6)$$

◀ Твердження є результатом послідовного застосування теореми про диференційовність за параметром невласного інтеграла. ▶

4^0. *Якщо* $f \in L_1(\mathbb{R})$ *та існують похідні* $f^{(k)} \in L_1(\mathbb{R})$, $k \in \{1, \ldots, n\}$, *то*

$$(F[f^{(k)}])(\sigma) = (-i\sigma)^k F[f](\sigma), \ \ \sigma \in \mathbb{R}. \tag{7}$$

◀ Доведення проведемо для випадку $n = 1$. Оскільки $f' \in L_1(\mathbb{R})$, то функція

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(\xi) d\xi, \ x \in \mathbb{R},$$

має границю при $|x| \to +\infty$. Ця границя може бути тільки нулем, бо інакше f не була б інтегровною на $\mathbb{R}$. Отже,

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0 \ \ i \ \ \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

або

$$\lim_{|x| \to +\infty} f(x) = 0. \tag{8}$$

Скориставшись формулою інтегрування частинами і рівністю (8), дістанемо

$$F[f'](\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{ix\sigma} f'(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Big(f(x) e^{ix\sigma} \Big|_{x=-\infty}^{x=+\infty} -$$

$$- \int_{\mathbb{R}} i\sigma e^{ix\sigma} f(x) dx \Big) = (-i\sigma) F[f](\sigma). \ ▶$$

5^0. *Нехай* $\{f_1, f_2\} \subset L_1(\mathbb{R})$. *Тоді справджується формула*

$$\sqrt{2\pi} F[f_1](\sigma) F[f_2](\sigma) = F[f_1 * f_2](\sigma), \ \ \sigma \in \mathbb{R}, \tag{9}$$

де

$$(f_1 * f_2)(x) := \int_{\mathbb{R}} f_1(x - \xi) f_2(\xi) d\xi, \ \ x \in \mathbb{R}.$$

Функція $f_1 * f_2$ *називається* **згорткою функцій** f_1 *і* f_2.

◀ За допомогою теореми Фубіні про зв'язок між кратним та повторним інтегралами і формули (1), одержуємо

$$\sqrt{2\pi}F[f_1](\sigma)F[f_2](\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_{\mathbb{R}} f_1(\eta)f_2(\xi)e^{\,i\sigma(\eta+\xi)}d\eta d\xi =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{\,ix\sigma}\Big(\int\limits_{\mathbb{R}} f_1(x-\xi)f_2(\xi)d\xi\Big)dx = F[f_1 * f_2](\sigma), \;\; \sigma \in \mathbb{R}.$$

У першому інтегралі здійснено заміну $\eta + \xi = x$. ▶

Зауваження 1. Якщо скористатися рівностями (3), то легко переконатися, що властивості, аналогічні до властивостей $\mathbf{1^0} - \mathbf{5^0}$, має й обернене перетворення Фур'є. Зокрема, формули (6), (7) і (9) мають для F^{-1} відповідно такий вигляд:

$$(F^{-1}[f])^{(k)}(\sigma) = F^{-1}[(-ix)^k f](\sigma), \;\; \sigma \in \mathbb{R}, \;\; k \in \{1, \ldots, n\}, \quad (10)$$

$$(F^{-1}[f^{(k)}])(\sigma) = (i\sigma)^k F^{-1}[f](\sigma), \;\; \sigma \in \mathbb{R}, \quad (11)$$

$$\sqrt{2\pi}F^{-1}[f_1](\sigma)F^{-1}[f_2](\sigma) = F^{-1}[f_1 * f_2](\sigma), \;\; \sigma \in \mathbb{R}. \quad (12)$$

Приклад 1. Знайти $F^{-1}[e^{\,-\alpha x^2}]$, $\alpha > 0$.

◀ Маємо

$$\psi(\sigma) := F^{-1}[e^{\,-\alpha x^2}](\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{\,-i\sigma x - \alpha x^2} dx, \, \sigma \in \mathbb{R}.$$

Цей вираз є інтегралом від аналітичної функції

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\,-i\sigma z - \alpha z^2}, \;\; z := x + iy,$$

по дійсній осі. Оскільки

$$|e^{\,-i\sigma(x+iy) - \alpha(x+iy)^2}| \le e^{\,-\alpha x^2 + \alpha y^2 + \sigma y},$$

то в будь-якій горизонтальній смузі $\{z := x + iy \,|\, x \in \mathbb{R}, \, |y| \le b\}$, $b > 0$, підінтегральна функція при $|x| \to +\infty$ прямує до нуля рівномірно стосовно y. Тому, використовуючи теорему Коші, можна при інтегруванні перейти на довільну паралельну пряму в z-площині, не міняючи результату:

$$\psi(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-i\sigma(x+iy)-\alpha(x+iy)^2} dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\alpha x^2+\alpha y^2+\sigma y-2\alpha ixy-i\sigma x} dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\alpha y^2+\sigma y} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\alpha x^2-ix(2\alpha y+\sigma)} dx.$$

Візьмемо $y = -\dfrac{\sigma}{2\alpha}$, тоді $\alpha y^2+\sigma y = -\dfrac{\sigma^2}{4\alpha}$ і за допомогою відомої формули $\displaystyle\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$ одержуємо

$$\psi(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\sigma^2}{4\alpha}} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} e^{-\frac{\sigma^2}{4\alpha}}.$$

Отже,

$$F^{-1}[e^{-\alpha x^2}](\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}\, e^{-\frac{\sigma^2}{4\alpha}}, \ \ \sigma \in \mathbb{R}. \blacktriangleright \qquad (13)$$

5.4.2 Формальний розв'язок задачі Коші для однорідного рівняння теплопровідності. Нехай $\Pi_T := \{(x,t)\,|\, x \in \mathbb{R},\, t \in (0,T]\,\}$, $\Pi_\infty := \{(x,t)\,|\, x \in \mathbb{R},\, t > 0\,\}$. Розглянемо задачу Коші

$$u_t = a^2 u_{xx}, \ \ (x,t) \in \Pi_\infty, \qquad (14)$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \ x \in \mathbb{R}, \qquad (15)$$

вважаючи функцію φ такою, що всі наступні в цьому пункті міркування мають зміст.

Для розв'язування задачі (14), (15) використовуватимемо метод перетворення Фур'є. Згідно з цим методом розв'язок шукатимемо у вигляді

$$u(x,t) = F^{-1}[v(\sigma,t)](x,t), \ \ (x,t) \in \Pi_\infty. \qquad (16)$$

Оскільки

$$u_t = \partial_t F^{-1}[v(\sigma,t)] = F^{-1}[v_t(\sigma,t)],$$

$$u_{xx} = \partial_x^2 F^{-1}[v(\sigma,t)] = F^{-1}[(-i\sigma)^2 v(\sigma,t)],$$

то підставивши (16) у (14), дістанемо

$$F^{-1}[v_t + a^2\sigma^2 v] = 0,$$

звідки випливає, що

$$v_t + a^2\sigma^2 v = 0, \ \ \sigma \in \mathbb{R}, \ \ t > 0. \tag{17}$$

Задовольняючи функцією (16) початкову умову (15), одержуємо

$$F^{-1}[v(\sigma,0)] = \varphi(x) = F^{-1}[\psi(\sigma)]$$

або

$$v(\sigma,0) = \psi(\sigma), \ \ \sigma \in \mathbb{R}, \tag{18}$$

де

$$\psi(\sigma) := F[\varphi](\sigma). \tag{19}$$

Для невідомої функції v маємо задачу Коші для звичайного диференціального рівняння першого порядку з параметром $\sigma \in \mathbb{R}$. Розв'язком задачі (17), (18) є функція

$$v(\sigma,t) = e^{-a^2\sigma^2 t}\psi(\sigma), \ \ \sigma \in \mathbb{R}, \ \ t > 0. \tag{20}$$

Підставимо (20) в (16). Тоді за допомогою формули (9) одержимо, що

$$u(x,t) = F^{-1}[e^{-a^2\sigma^2 t}\psi(\sigma)] = F^{-1}[F[\sqrt{2\pi}Z(x,t)]F[\varphi]] =$$

$$= F^{-1}[F[Z(x,t) * \varphi(x)]] = Z(x,t) * \varphi(x), \ \ (x,t) \in \Pi_\infty,$$

$$Z(x,t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} F^{-1}[e^{-a^2\sigma^2 t}](x,t). \tag{21}$$

Отже, для розв'язку задачі (14), (15) отримали формулу

$$u(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}} Z(x-\xi,t)\varphi(\xi)d\xi, \ \ (x,t) \in \Pi_\infty, \tag{22}$$

яка називається **формулою Пуассона**, а інтеграл в ній – **інтегралом Пуассона**.

Якщо скористатися рівністю (13) з $\alpha = a^2 t$, то для Z дістанемо вираз

$$Z(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \exp\Big\{-\frac{x^2}{4a^2 t}\Big\},\ (x,t) \in \Pi_\infty. \qquad (23)$$

Функція Z називається **фундаментальним розв'язком задачі Коші** для рівняння теплопровідності.

5.4.3 Властивості фундаментального розв'язку задачі Коші. Наведемо властивості функції (23).

1^0. *Функція Z є розв'язком однорідного рівняння теплопровідності в Π_∞, тобто*

$$Z_t(x,t) = a^2 Z_{xx}(x,t),\ (x,t) \in \Pi_\infty.$$

◀ Доводиться ця властивість безпосередньою перевіркою. ▶

2^0. *$Z \in C^\infty(\Pi_\infty)$ і правильні оцінки*

$$\Big|\partial_t^{k_0}\, \partial_x^k Z(x,t)\Big| \le C_{k_0 k} t^{-k_0-\frac{k+1}{2}} \exp\{-c\frac{x^2}{t}\},$$

$$(x,t) \in \Pi_\infty,\ \{k_0, k\} \subset \mathbb{Z}_+, \qquad (24)$$

де $C_{k_0 k}$ і c – додатні сталі, причому $c < \dfrac{1}{4a^2}$.

◀ Досить довести правильність оцінок (24) для $k_0 = 0$, бо згідно з властивістю **1^0** похідні за t від Z виражаються через похідні за x від Z.

Користуватимемось таким очевидним твердженням: *для будь-якого $m > 0$ існує $C_m > 0$ таке, що для довільного $z \in \mathbb{R}$ правильна нерівність*

$$|z^m| \exp\Big\{-\frac{z^2}{4a^2}\Big\} \le C_m \exp\{-cz^2\}, \qquad (25)$$

де c – фіксована стала з проміжку $(0, \dfrac{1}{4a^2})$.

Доведемо (24) для $k_0 = 0$ і $k = 1$. Маємо

$$\Big|\partial_x Z(x,t)\Big| = \Big|\frac{-x}{a\sqrt{\pi t}\,4a^2t}\exp\Big\{-\frac{x^2}{4a^2t}\Big\}\Big| = \frac{t^{-1}}{4a^3\sqrt{\pi}}\Big(\frac{|x|}{\sqrt{t}}\Big)\times$$

$$\times\exp\Big\{-\frac{1}{4a^2}\Big(\frac{x}{\sqrt{t}}\Big)^2\Big\} \le C_{01}t^{-1}\exp\Big\{-c\frac{x^2}{t}\Big\},\ \ (x,t)\in\Pi_\infty.$$

Тут ми скористалися нерівністю (25) з $z = \frac{x}{\sqrt{t}}$, $m = 1$. Аналогічно розглядаються випадки, коли $k > 1$. ▶

3^0. *Для довільної точки* $(x,t)\in\Pi_\infty$ *правильна рівність*

$$\int_{\mathbb{R}} Z(x-\xi,t)d\xi = 1. \tag{26}$$

◀ З формули (23), за допомогою заміни $\xi = x + 2a\sqrt{t}y$, одержуємо

$$\int_{\mathbb{R}} Z(x-\xi,t)d\xi = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\exp\Big\{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\Big\}d\xi =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2}dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\sqrt{\pi} = 1,\ \ (x,t)\in\Pi_\infty. ▶$$

4^0. *Правильна формула згортки (рівняння Чепмена–Колмогорова)*

$$Z(x-\xi,t-\tau) = \int_{\mathbb{R}} Z(x-y,t-\beta)Z(y-\xi,\beta-\tau)dy,$$

$$\tau < \beta < t,\ \ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}. \tag{27}$$

◀ Якщо в інтегралі з формули (27), який позначимо через I, покласти $y - \xi = \eta$, $\beta - \tau = \lambda$, то він набуде вигляду

$$I = \int_{\mathbb{R}} Z(x-\xi-\eta,t-\tau-\lambda)Z(\eta,\lambda)d\eta =$$

$$= \Big(Z(\cdot, t-\tau-\lambda) * Z(\cdot, \lambda)\Big)(x-\xi, t-\tau, \lambda).$$

Скориставшись рівностями (9) і (21) отримаємо

$$I = \sqrt{2\pi} F^{-1}[F[Z(\cdot, t-\tau-\lambda)](\sigma) F[Z(\cdot, \lambda)](\sigma)](x-\xi, t-\tau, \lambda) =$$

$$= \sqrt{2\pi} F^{-1}[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\,-a^2\sigma^2(t-\tau-\lambda)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\,-a^2\sigma^2\lambda}](x-\xi, t-\tau, \lambda) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} F^{-1}[e^{\,-a^2\sigma^2(t-\tau)}](x-\xi, t-\tau) = Z(x-\xi, t-\tau).$$

Звідси випливає рівність (27). ►

Позначимо через $C_0(\mathbb{R})$ клас усіх неперервних й обмежених на $\mathbb{R}$ функцій.

5^0. *Для довільної функції $\varphi \in C_0(\mathbb{R})$ і для будь-якого $x \in \mathbb{R}$*

$$\Big(Z(\cdot, t) * \varphi(\cdot)\Big)(x, t) := \int\limits_{\mathbb{R}} Z(x-\xi, t)\varphi(\xi)d\xi \underset{t\to 0}{\longrightarrow} \varphi(x). \qquad (28)$$

◄ Врахувавши рівність (26), запишемо

$$\int\limits_{\mathbb{R}} Z(x-\xi, t)\varphi(\xi)d\xi - \varphi(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} Z(x-\xi, t)(\varphi(\xi) - \varphi(x))d\xi =$$

$$= \int\limits_{\{|x-\xi|\le\delta\}} Z(x-\xi, t)(\varphi(\xi) - \varphi(x))d\xi +$$

$$+ \int\limits_{\{|x-\xi|>\delta\}} Z(x-\xi, t)(\varphi(\xi) - \varphi(x))d\xi =: I_1(x, t) + I_2(x, t). \quad (29)$$

Оскільки φ неперервна, то для довільного $\xi \in [x-\delta, x+\delta]$ справджується нерівність $|\varphi(\xi) - \varphi(x)| \le \omega(\delta)$, де $\lim\limits_{\delta\to 0} \omega(\delta) = 0$.

Нехай задано $\varepsilon > 0$. Виберемо $\delta > 0$ так, щоб $\omega(\delta) < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Тоді згідно з рівністю (26) маємо

$$|I_1(x, t)| \le \omega(\delta) \int\limits_{\mathbb{R}} Z(x-\xi, t)d\xi = \omega(\delta) < \frac{\varepsilon}{2},\ (x, t) \in \Pi_\infty. \quad (30)$$

Оскільки функція φ обмежена, тобто $|\varphi(x)| \leq M$, $x \in \mathbb{R}$, то $|\varphi(\xi) - \varphi(x)| \leq 2M$, $\{x, \xi\} \subset \mathbb{R}$. Скориставшись оцінкою (24), одержимо, що

$$|I_2(x,t)| \leq 2MC_{00}t^{-\frac{1}{2}} \int\limits_{\{|x-\xi|>\delta\}} \exp\{-c\frac{(x-\xi)^2}{t}\}d\xi \leq$$

$$\leq 2MC_{00}t^{-\frac{1}{2}} \exp\{-\frac{c\delta^2}{2t}\} \int\limits_{\mathbb{R}} \exp\{-\frac{c(x-\xi)^2}{2t}\}d\xi.$$

Якщо в останньому інтегралі здійснити заміну $\xi = x + \sqrt{t}y$, то дістанемо нерівності

$$|I_2(x,t)| \leq 2MC_{00} \exp\{-\frac{c\delta^2}{2t}\} \int\limits_{\mathbb{R}} \exp\{-\frac{c}{2}y^2\}dy =$$

$$= C \exp\{-\frac{c\delta^2}{2t}\} < \frac{\varepsilon}{2} \tag{31}$$

для всіх досить малих $t > 0$.

З (29)–(31) випливає існування для довільного $\varepsilon > 0$ такого числа $\gamma > 0$, що для будь-якого $t \in (0, \gamma)$ справджується нерівність

$$\Big|\int\limits_{\mathbb{R}} Z(x-\xi,t)\varphi(\xi)d\xi - \varphi(x)\Big| < \varepsilon,$$

тобто виконується (28). ►

5.4.4 Існування та неперервна залежність від початкової функції розв'язку задачі Коші для однорідного рівняння теплопровідності. Наведемо відповідну теорему.

Теорема 5.6. *Якщо $\varphi \in C_0(\mathbb{R})$, то формула Пуассона (22) визначає регулярний розв'язок и задачі (14), (15), який належить до класу $C^\infty(\Pi_\infty) \cap C(\overline{\Pi}_\infty)$ і неперервно залежить від початкової функції в такому розумінні: для довільно взятого числа $\varepsilon > 0$ з того, що $|\varphi(x)| < \varepsilon$, $x \in \mathbb{R}$, випливає, що*

$$|u(x,t)| < \varepsilon, \ \ (x,t) \in \Pi_\infty. \tag{32}$$

◀ Для доведення теореми, врахувавши властивості $\mathbf{1^0}$, $\mathbf{2^0}$ і $\mathbf{5^0}$ фундаментального розв'язку задачі Коші, досить довести, що: 1) інтеграл Пуассона з (22) збігається рівномірно в $\overline{\Pi}_\infty$, а інтеграли, одержані з нього диференціюванням під знаком інтеграла довільне число разів за x і t, збігаються рівномірно в $\Pi_{[t_0,\infty)} := \mathbb{R}\times[t_0,+\infty)$ для довільного $t_0 > 0$; 2) справджується нерівність (32).

Маємо для довільних $\{k_0, k\} \subset \mathbb{N}$

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \partial_t^{k_0}\partial_x^k Z(x-\xi,t)\varphi(\xi)d\xi =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} \sqrt{t}\Big(\partial_t^{k_0}\partial_x^k Z(x-\xi,t)\Big)\Big|_{\xi=x+\sqrt{t}y}\varphi(x+\sqrt{t}y)dy. \qquad (33)$$

На підставі оцінок (24) та обмеженості φ одержуємо

$$\Big|\sqrt{t}\Big(\partial_t^{k_0}\partial_x^k Z(x-\xi,t)\Big)\Big|_{\xi=x+\sqrt{t}y}\varphi(x+\sqrt{t}y)\Big| \le$$

$$\le C\, t_0^{-k_0-\frac{k}{2}}\exp\{-cy^2\},\ \ (x,t)\in\Pi_{[t_0,\infty)}.$$

Оскільки

$$C\, t_0^{-k_0-\frac{k}{2}}\int\limits_{\mathbb{R}}\exp\{-cy^2\}dy \le C_1\, t_0^{-k_0-\frac{k}{2}},$$

то, згідно з ознакою Вейєрштрасса рівномірної збіжності [7, с. 114–115], інтеграл (33) збігається рівномірно в $\Pi_{[t_0,\infty)}$. Якщо $k_0 = k = 0$, то одержуємо рівномірну збіжність інтеграла в $\overline{\Pi}_\infty$.

Залишилося довести правильність нерівності (32). Вона випливає з оцінки

$$|u(x,t)| = \Big|\int\limits_{\mathbb{R}} Z(x-\xi,t)\varphi(\xi)d\xi\Big| \le \varepsilon\int\limits_{\mathbb{R}} Z(x-\xi,t)d\xi = \varepsilon,\ (x,t)\in\Pi_\infty,$$

якщо врахувати рівність (26). ▶

Зауваження 1. *Фізичний наслідок з формули Пуассона.* З формули (22) випливає, що тепло в стержні поширюється з нескінченною швидкістю або миттєво. Справді, якщо взяти функцію φ неперервною на $\mathbb{R}$, додатною на проміжку (α, β) і рівною нулю поза ним, то яким би не було великим за абсолютною величиною x і малим $t > 0$ температура в точці x у момент часу t дорівнюватиме

$$u(x,t) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} Z(x-\xi,t)\varphi(\xi)d\xi \, > \, 0.$$

Такого насправді в природі немає. Це пов'язано з недосконалістю рівняння теплопровідності, неточністю фізичних припущень, які використовуються при виведенні даного рівняння.

5.4.5 Задача Коші для неоднорідного рівняння теплопровідності. Розглянемо задачу Коші для неоднорідного рівняння теплопровідності

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), \;\; (x,t) \in \Pi_T, \tag{34}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \;\; x \in \mathbb{R}. \tag{35}$$

Її розв'язок шукатимемо у вигляді

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t), \;\; (x,t) \in \Pi_T. \tag{36}$$

де v – розв'язок задачі

$$\begin{cases} v_t = a^2 v_{xx}, \;\; (x,t) \in \Pi_T, \\ v(x,0) = \varphi(x), \; x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{37}$$

Тоді для w матимемо задачу

$$\begin{cases} w_t = a^2 w_{xx} + f(x,t), \;\; (x,t) \in \Pi_T, \\ w(x,0) = 0, \; x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{38}$$

Згідно з попереднім

$$v(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}} Z(x-\xi,t)\varphi(\xi)d\xi, \;\; (x,t) \in \Pi_T. \tag{39}$$

Розв'язок задачі (38), скориставшись принципом Дюамеля, запишемо у вигляді

$$w(x,t) = \int\limits_0^t G(x,t;\tau)d\tau, \ \ (x,t) \in \Pi_T, \tag{40}$$

де G – розв'язок задачі Коші

$$\begin{array}{l} G_t = a^2 G_{xx}, \ \ x \in \mathbb{R}, \, t > \tau, \\ G(x,\tau;\tau) = f(x,\tau), \ x \in \mathbb{R}, \end{array} \tag{41}$$

який має вигляд

$$G(x,t;\tau) = \int\limits_{\mathbb{R}} Z(x-\xi, t-\tau) f(\xi,\tau) d\xi, \ x \in \mathbb{R}, \, t > \tau. \tag{42}$$

З формул (40) і (42) випливає, що розв'язком задачі (38) є функція

$$w(x,t) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}} Z(x-\xi, t-\tau) f(\xi,\tau) d\xi, \ \ (x,t) \in \Pi_T. \tag{43}$$

Отже, розв'язок задачі (34), (35), згідно з (36), (39) і (43), визначається формулою

$$u(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}} Z(x-\xi,t)\varphi(\xi)d\xi + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}} Z(x-\xi, t-\tau) f(\xi,\tau) d\xi,$$

$$(x,t) \in \Pi_T. \tag{44}$$

5.4.6 Єдиність розв'язку задачі Коші для рівняння теплопровідності. Доведемо єдиність розв'язку задачі (34), (35) в класі обмежених функцій.

Теорема 5.7. *Регулярний розв'язок задачі Коші (34), (35), який належить до простору $C(\overline{\Pi}_T)$ і є обмеженим, єдиний.*

◀ Нехай є два розв'язки u_1 і u_2 задачі (34), (35), які обмежені й неперервні в $\overline{\Pi}_T$. Тоді $u := u_1 - u_2$ – розв'язок однорідного рівняння теплопровідності, який задовольняє нульову початкову умову, належить до $C(\overline{\Pi}_T)$ і задовольняє нерівність

$$|u(x,t)| = |u_1(x,t) - u_2(x,t)| \le |u_1(x,t)| + |u_2(x,t)| \le 2M,$$

$$(x,t) \in \overline{\Pi}_T,$$

де M – така стала, що $|u_1(x,t)| \le M$ і $|u_2(x,t)| \le M$, $(x,t) \in \overline{\Pi}_T$.

Скористатися принципом максимуму для u не можна, бо область Π_T необмежена і максимум може не досягатися.

Побудуємо допоміжний розв'язок однорідного рівняння теплопровідності

$$v(x,t) := \frac{4M}{L^2}\Big(\frac{x^2}{2} + a^2 t\Big), \;\; x \in \mathbb{R}, \;\; t > 0,$$

і розглянемо його в прямокутнику $Q_{LT} := \{\,(x,t)\,|\,x \in (-L,L), t \in (0,T]\,\}$ (рис. 5.2). Маємо

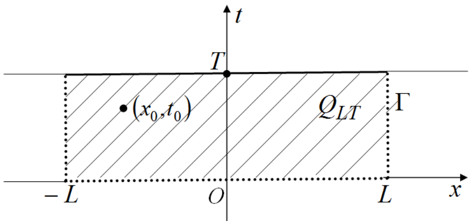

Рис. 5.2

$$v(x,t)|_{t=0} = \frac{2Mx^2}{L^2} \ge 0,$$

$$v(x,t)|_{x=\pm L} = \frac{4M}{L^2}\Big(\frac{L^2}{2} + a^2 t\Big) = 2M + a^2\frac{4M}{L^2}t \;\ge\; 2M.$$

Порівнюючи це з тим, що $u(x,t)|_{t=0} = 0$, $|u(x,t)| \le 2M$, $(x,t) \in \overline{\Pi}_T$, одержуємо, що

$$|u|\Big|_\Gamma \le v\Big|_\Gamma, \text{ тобто } (v-u)\Big|_\Gamma \ge 0 \text{ і } (v+u)\Big|_\Gamma \ge 0,$$

де Γ – параболічна межа Q_{LT}. Звідси на підставі принципу максимуму для обмеженої області Q_{LT} випливає, що

$$|u(x,t)| \le v(x,t), \;\; (x,t) \in \overline{Q}_{LT},$$

або

$$|u(x,t)| \le \frac{4M}{L^2}\Big(\frac{x^2}{2} + a^2 t\Big), \;\; (x,t) \in \overline{Q}_{LT}.$$

Зафіксуємо довільно в Π_T точку (x_0, t_0) і вважатимемо L таким, що $(x_0, t_0) \in Q_{LT}$. У нерівності

$$|u(x_0, t_0)| \leq \frac{4M}{L^2}\Big(\frac{x_0^2}{2} + a^2 t_0\Big)$$

перейдемо до границі при $L \to +\infty$. Тоді одержимо, що $u(x_0, t_0) = 0$, тобто $u_1(x_0, t_0) = u_2(x_0, t_0)$. Оскільки (x_0, t_0) – довільна точка Π_T, то звідси випливає, що $u_1 = u_2$ в Π_T. ▶

Зауваження 2. А. М. Тихонов у 1935 році довів, що розв'язок задачі Коші єдиний в класі функцій, які задовольняють умову

$$|u(x,t)| \leq Ce^{\alpha x^2}, \ \ \alpha > 0, \ (x,t) \in \Pi_T,$$

і єдиності немає в класі функцій, для яких

$$|u(x,t)| \leq Ce^{\alpha x^{2+\varepsilon}}, \ \ (x,t) \in \Pi_T,$$

де $\varepsilon > 0$.

Є загальніший результат С. Теклінда: якщо

$$|u(x,t)| \leq Ce^{xh(x)}, \ \ (x,t) \in \Pi_T,$$

і $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dr}{h(r)} = +\infty$, то розв'язок єдиний, а якщо $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dr}{h(r)} < +\infty$, то єдиності немає.

Приклад 2. Розв'язати задачу Коші

$$\begin{aligned} &u_t = 4u_{xx} + t + e^t, \ \ (x,t) \in \Pi_\infty, \\ &u|_{t=0} = 2, \ \ x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

◀ Скористаємося формулами (23) і (44), в яких $a = 2$, $f(x,t) = t + e^t$, $\varphi(x) = 2$. Тоді матимемо

$$u(x,t) = \frac{1}{4\sqrt{\pi t}} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{16t}} 2d\xi + \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{16(t-\tau)}} \times$$

$$\times (\tau + e^\tau) d\xi =: I_1 + I_2.$$

Обчислимо кожний з інтегралів. За допомогою відповідно замін $\frac{\xi-x}{4\sqrt{t}}=y$ і $\frac{\xi-x}{4\sqrt{t-\tau}}=y$ маємо

$$I_1=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{16t}}d\xi=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int\limits_{\mathbb{R}} 4\sqrt{t}e^{-y^2}dy=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-y^2}dy=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\sqrt{\pi}=2;$$

$$I_2=\frac{1}{4\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t(\tau+e^{\tau})d\tau\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{1}{\sqrt{t-\tau}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{16(t-\tau)}}d\xi=$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t(\tau+e^{\tau})d\tau\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{1}{\sqrt{t-\tau}}e^{-y^2}4\sqrt{t-\tau}dy=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t(\tau+e^{\tau})d\tau\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-y^2}dy=\int\limits_0^t(\tau+e^{\tau})d\tau=$$

$$=\frac{\tau^2}{2}\Big|_0^t+e^{\tau}\Big|_0^t=\frac{t^2}{2}+e^t-1.$$

Тому

$$u(x,t)=2+\frac{t^2}{2}+e^t-1$$

або

$$u(x,t)=\frac{t^2}{2}+e^t+1,\ \ (x,t)\in\Pi_\infty. \blacktriangleright$$

Зауваження 3. Оскільки неоднорідність рівняння і початкова функція задачі з прикладу 2 не залежать від x, то її розв'язок можна шукати у вигляді

$$u(x,t)=g(t).$$

Задовольнивши цією функцією рівняння і початкову умову, дістанемо задачу

$$\begin{cases} g'(t)=t+e^t,\ \ t>0,\\ g(0)=2.\end{cases}$$

Загальний розв'язок рівняння $g(t) = \frac{t^2}{2} + e^{\,t} + C$, $C \in \mathbb{R}$. З початкової умови випливає, що $2 = 1 + C$, тобто $C = 1$. Тому $u(x,t) = \frac{t^2}{2} + e^{\,t} + 1$, $(x,t) \in \Pi_\infty$. Цей розв'язок збігається з одержаним вище, що випливає з єдиності розв'язку задачі Коші.

5.4.7 Фундаментальний розв'язок рівняння теплопровідності та його фізичний зміст. Фундаментальним розв'язком рівняння теплопровідності називається функція

$$\Gamma(x,t) := \begin{cases} Z(x,t), \ x \in \mathbb{R}, \ t > 0, \\ 0, \ \ x \in \mathbb{R}, \ t < 0 \ i \ x \neq 0, t = 0. \end{cases}$$

З властивостей фундаментального розв'язку задачі Коші Z (див. пункт 5.4.3) випливає, що Γ є нескінченно диференційовною функцією, якщо $x \neq 0$ і $t \neq 0$. Точка $(0,0)$ є істотно особливою точкою функції Γ. Інші властивості Γ є наслідком відповідних властивостей Z.

З'ясуємо фізичний зміст фундаментального розв'язку Γ. Припустимо, що в початковий момент часу $t = 0$ у точці $x = x_0$ було зосереджене миттєве точкове джерело тепла потужністю $Q = c\rho$. Знайдемо розподіл температури нескінченного стержня в момент часу $t > 0$.

Миттєве точкове джерело тепла – це уявне поняття. Реально його можна реалізувати так: в момент $t = 0$ у малому околі $(x_0 - h, x_0 + h)$ точки x_0 стержня була температура u_0 така, що $Q = 2hc\rho\, u_0$, тобто $u_0 = \frac{1}{2h}$. Якщо $h \to 0$, то $u_0 \to +\infty$, але так, що $2h\, u_0 = 1$. Щоб знайти розподіл температури, викликаний цим джерелом, треба знайти $u_h(x,t)$, $x \in \mathbb{R}, t > 0$, – розв'язок задачі Коші для однорідного рівняння теплопровідності з початковою умовою (рис. 5.3)

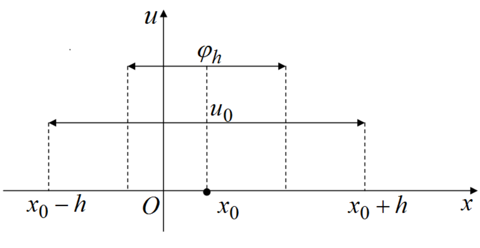

Рис. 5.3

$$u_h|_{t=0} = \varphi_h(x) := \begin{cases} u_0 = \frac{1}{2h}, \ x \in (x_0 - h, x_0 + h), \\ 0, \ \ x \,\overline{\in}\, (x_0 - h, x_0 + h), \end{cases}$$

і знайти $\lim\limits_{h\to 0} u_h$. Згідно з формулою Пуассона (22) маємо

$$u_h(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}} Z(x-\xi,t)\varphi_h(\xi)d\xi = \frac{1}{2h}\int\limits_{x_0-h}^{x_0+h} Z(x-\xi,t)d\xi$$

або на підставі теореми про середнє значення для інтеграла

$$u_h(x,t) = Z(x-\overline{\xi},t), \ \overline{\xi} \in (x_0 - h, x_0 + h).$$

Тоді

$$\lim_{h\to 0} u_h(x,t) = \lim_{h\to 0} Z(x-\overline{\xi},t) = Z(x-x_0,t) = \Gamma(x-x_0,t),$$

$$x \in \mathbb{R}, \ t > 0.$$

Отже, фундаментальний розв'язок $\Gamma(x-x_0,t)$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$, описує розподіл температур у некінченному стержні для $t > 0$, спричинений тим, що при $t = 0$ у точці x_0 стержня було зосереджено миттєве точкове джерело тепла потужністю $Q = c\rho$.

Зауваження 4. Властивість $\mathbf{5^0}$ функції Z, з якої, зокрема, випливає, що

$$\int\limits_{\mathbb{R}} Z(x,t)\varphi(x)\,dx \underset{t\to 0}{\longrightarrow} \varphi(0),$$

означає, що $Z(x,t)|_{t=0} = \delta(x)$, тобто $Z(x,t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} \delta(x)$ (збіжність у розумінні теорії узагальнених функцій), де δ – дельта-функція Дірака, яка означується як функціонал, який кожній гладкій і фінітній функції φ ставить у відповідність $\varphi(0)$.

Фундаментальний розв'язок задачі Коші Z для рівняння теплопровідності можна означити як розв'язок у сенсі теорії узагальнених функцій задачі Коші

$$(\partial_t - a^2\partial_x^2)Z(x,t) = 0, \ x \in \mathbb{R}, \ t > 0; \ Z(x,t)|_{t=0} = \delta(x),$$

а фундаментальний розв'язок Γ рівняння теплопровідності – як розв'язок рівняння

$$(\partial_t - a^2\partial_x^2)\Gamma(x,t) = \delta(x,t).$$

Детальніше про це можна дізнатися з підручника [4].

Зауваження 5. Все, що було викладено в цьому підрозділі для одновимірного рівняння теплопровідності, правильне і для n-вимірного рівняння

$$u_t = a^2\Delta u + f(x,t),\ \ x \in \mathbb{R}^n,\ \ t > 0,$$

де $\Delta := \sum\limits_{j=1}^{n} \partial_{x_j}^2$, $x := (x_1, \ldots, x_n)$, $n \geq 2$.

Зокрема, фундаментальний розв'язок задачі Коші визначається формулою

$$Z(x,t) := \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^n} \exp\Big\{ -\frac{|x|^2}{4a^2 t}\Big\},\ \ x \in \mathbb{R}^n,\ \ t > 0,$$

де $|x| := (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{1/2}$.

5.5 Поширення тепла в напівнескінченному стержні

Розглянемо задачу про поширення тепла в напівнескінченному стержні $(0, +\infty)$, бічна поверхня якого теплоізольвана, а кінець $x = 0$ підтримується при заданій температурі, яка може змінюватися з часом. Математична модель задачі така:

$$u_t = a^2 u_{xx},\ \ (x,t) \in \Pi_T^+, \tag{1}$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x),\ \ x \in \mathbb{R}_+, \tag{2}$$

$$u|_{x=0} = \mu(t),\ \ t \in [0,T], \tag{3}$$

де $\mathbb{R}_+ := (0, +\infty)$, $\Pi_T^+ := \mathbb{R}_+ \times (0,T]$.

Розв'язок задачі (1) – (3) шукатимемо у вигляді

$$u = v + w, \tag{4}$$

де v – розв'язок задачі

$$
\begin{gathered}
v_t = a^2 v_{xx}, \;\; (x,t) \in \Pi_T^+, \\
v|_{t=0} = \varphi(x), \;\; x \in \mathbb{R}_+, \\
v|_{x=0} = 0, \;\; t \in [0,T],
\end{gathered} \tag{5}
$$

а w – розв'язок задачі

$$
\begin{gathered}
w_t = a^2 w_{xx}, \;\; (x,t) \in \Pi_T^+, \\
w|_{t=0} = 0, \;\; x \in \mathbb{R}_+, \\
w|_{x=0} = \mu(t), \;\; t \in [0,T],
\end{gathered} \tag{6}
$$

Розв'яжемо спочатку задачу (5). Шукатимемо її розв'язок за допомогою інтеграла Пуассона

$$
v(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}} Z(x-\xi,t)\overline{\varphi}(\xi)d\xi, \;\; (x,t) \in \Pi_T^+, \tag{7}
$$

де $\overline{\varphi}$ – непарне продовження φ на $\mathbb{R}$, тобто

$$
\overline{\varphi}(x) := \begin{cases} \;\;\varphi(x), \;\; x \in [0,+\infty), \\ -\varphi(-x), \;\; x \overline{\in} [0,+\infty). \end{cases} \tag{8}
$$

Запишемо рівність (7) у вигляді

$$
v(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{0} Z(x-\xi,t)\overline{\varphi}(\xi)d\xi + \int\limits_{0}^{+\infty} Z(x-\xi,t)\overline{\varphi}(\xi)d\xi =
$$

$$
= \int\limits_{0}^{+\infty} Z(x+\xi,t)\overline{\varphi}(-\xi)d\xi + \int\limits_{0}^{+\infty} Z(x-\xi,t)\overline{\varphi}(\xi)d\xi =
$$

або

$$
v(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{0}^{+\infty} \Big(\exp\Big\{ -\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t} \Big\} \overline{\varphi}(\xi) +
$$

$$+\exp\Big\{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}\Big\}\overline{\varphi}(-\xi)\Big)d\xi.$$

Якщо скористатися (8), то одержимо

$$v(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_0^{+\infty}\Big(\exp\Big\{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\Big\}-$$

$$-\exp\Big\{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}\Big\}\Big)\varphi(\xi)d\xi,\quad (x,t)\in\Pi_T^+. \qquad (9)$$

Очевидно, що функція (9) задовольняє нульову крайову умову. Справді,

$$v|_{x=0}=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_0^{+\infty}\Big(e^{-\frac{\xi^2}{4a^2t}}-e^{-\frac{\xi^2}{4a^2t}}\Big)\varphi(\xi)d\xi=0,\ t\in[0,T].$$

Отже, формула (9) визначає розв'язок задачі (5).

Введемо позначення

$$G_0(x,\xi,t):=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\Big(\exp\{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\}-\exp\{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}\}\Big),$$

$$\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}_+,\ t>0, \qquad (10)$$

тоді

$$v(x,t)=\int\limits_0^{+\infty}G_0(x,\xi,t)\varphi(\xi)d\xi,\ (x,t)\in\Pi_T^+. \qquad (11)$$

Функція G_0 називається **однорідною функцією Гріна** задачі (1) – (3).

Розглянемо частинний випадок, коли початкова температура стала, тобто

$$v|_{t=0}=\varphi_0,\ \ x\in\mathbb{R}_+.$$

Тоді формула (9) набуде вигляду

$$v(x,t)=\frac{\varphi_0}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_0^{+\infty}\Big(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}-e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}}\Big)d\xi$$

або

$$v(x,t)=\frac{\varphi_0}{2a\sqrt{\pi t}}\Big(\int\limits_0^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}d\xi-\int\limits_0^{+\infty} e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}}d\xi\Big)=$$

$$=:\frac{\varphi_0}{2a\sqrt{\pi t}}(I_1+I_2). \qquad (12)$$

Якщо в інтералі I_1 здійснити заміну $\frac{\xi-x}{a\sqrt{2t}}=y$, а в інтегралі I_2 – заміну $\frac{\xi+x}{a\sqrt{2t}}=y$, то одержимо, що

$$I_1=a\sqrt{2t}\int\limits_{-\frac{x}{a\sqrt{2t}}}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}dy,\ \ I_2=a\sqrt{2t}\int\limits_{\frac{x}{a\sqrt{2t}}}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}dy.$$

Тоді формула (12) набуде вигляду

$$v(x,t)=\frac{\varphi_0}{\sqrt{2\pi}}\Big(\int\limits_{-\frac{x}{a\sqrt{2t}}}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}dy-\int\limits_{\frac{x}{a\sqrt{2t}}}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}dy\Big)=$$

$$=\frac{\varphi_0}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\frac{x}{a\sqrt{2t}}}^{\frac{x}{a\sqrt{2t}}} e^{-\frac{y^2}{2}}dy=\frac{2\varphi_0}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^{\frac{x}{a\sqrt{2t}}} e^{-\frac{y^2}{2}}dy$$

або

$$v(x,t)=\varphi_0\Phi(\frac{x}{a\sqrt{2t}}), \qquad (13)$$

де

$$\Phi(z):=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^z e^{-\frac{y^2}{2}}dy,\ \ z>0,$$

– функція Лапласа (інтеграл помилок), яка часто використовується у теорії ймовірностей.

Тепер розглянемо задачу (6). Розпочнемо з випадку, коли $\mu(t)=1$, $t\in(0,T]$. Очевидно, що функція

$$w(x,t)=1-\Phi(\frac{x}{a\sqrt{2t}}),\ \ (x,t)\in\Pi_T^+, \qquad (14)$$

є розв'язком задачі (6) у цьому випадку. Нехай тепер на кінці $x = 0$ температура підтримувалась до моменту τ нульовою, а потім рівною одиниці. У цьому випадку розв'язок позначимо через $w(x,t,\tau)$. Тоді до моменту $t = \tau$ $w(x,t,\tau) = 0$, а для $t > \tau$ $w(x,t,\tau)$ збігається з розв'язком (14), якщо там замінити t на $t-\tau$, тому

$$w(x,t,\tau) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } 0 \le t \le \tau, \\ 1 - \Phi(\frac{x}{a\sqrt{2(t-\tau)}}), \text{ якщо } t > \tau. \end{cases}$$

Якщо ж на кінці $x = 0$ одинична температура підтримувалася тільки протягом час $(\tau, \tau + d\tau)$, а весь інший час вона дорівнювала нулю, то розподіл температур вздовж стержня матиме вигляд

$$w(x,t,\tau) - w(x,t,\tau + d\tau) \approx -\partial_\tau w(x,t,\tau)d\tau.$$

Якщо ж на кінці $x = 0$ протягом проміжку часу $(\tau, \tau + d\tau)$ підтримувалась температура, яка дорівнює $\mu(\tau)$, а не одиниці, то дістанемо

$$-\mu(\tau)\partial_\tau w(x,t,\tau)d\tau, \tag{15}$$

звідки випливає, що коли на кінці $x = 0$ підтримувати температуру $\mu(\tau)$ при всіх $\tau \in (0,t)$, то підсумувавши всі елементарні ефекти (15), дістанемо

$$w(x,t) = -\int\limits_0^t \mu(\tau)\partial_\tau w(x,t,\tau)d\tau.$$

Оскільки

$$-\partial_\tau w(x,t,\tau) = \partial_\tau \Phi(\frac{x}{2a\sqrt{t-\tau}}) = \partial_\tau\Big(\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^{\frac{x}{a\sqrt{2(t-\tau)}}} e^{-\frac{y^2}{2}}dy\Big) =$$

$$= \frac{x}{2a\sqrt{\pi}(t-\tau)^{3/2}}\, e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}},$$

то

$$w(x,t)=\int\limits_0^t \frac{x}{2a\sqrt{\pi}(t-\tau)^{3/2}}\,e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}}\mu(\tau)d\tau,\ \ (x,t)\in\Pi_T^+. \quad (16)$$

Зробивши в інтегралі (16) заміну $\beta=\frac{x}{2a\sqrt{t-\tau}}$, дістанемо

$$w(x,t)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{+\infty} e^{-\beta^2}\mu\Big(t-\frac{x^2}{4a^2\beta^2}\Big)d\beta.$$

Звідки при $x=0$, одержуємо

$$w(0,t)=\mu(t)\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty} e^{-\beta^2}d\beta=\mu(t)\frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\mu(t),\ \ t\in[0,T],$$

тобто розв'язок (16) задовольняє крайову умову (3).

Запишемо (16) у вигляді

$$w(x,t)=\int\limits_0^t G_1(x,t-\tau)\mu(\tau)d\tau,\ (x,t)\in\Pi_T^+, \quad (17)$$

де функція

$$G_1(x,t):=\frac{x}{2a\sqrt{\pi}}t^{-\frac{3}{2}}\exp\Big\{-\frac{x^2}{4a^2t}\Big\},\ \ x>0,\ t>0, \quad (18)$$

називається **ядром Пуассона задачі (1)–(3).**

Отже, розв'язком задачі (1) – (3) є функція

$$u(x,t)=\int\limits_0^{+\infty} G_0(x,\xi,t)\varphi(\xi)d\xi+\int\limits_0^t G_1(x,t-\tau)\mu(\tau)d\tau,$$

$$(x,t)\in\Pi_T^+,$$

яка одержується з формул (4), (11) і (17).

Можна довести, що розв'язок задачі

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t),\ \ (x,t) \in \Pi_T^+,$$
$$u|_{t=0} = \varphi(x),\ \ x \in \mathbb{R}_+,$$
$$u|_{x=0} = \mu(t),\ \ t \in [0,T],$$

дається формулою

$$u(x,t) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_0^{+\infty} G_0(x,\xi,t-\tau) f(\tau,\xi) d\xi +$$

$$+ \int\limits_0^{+\infty} G_0(x,\xi,t)\varphi(\xi)d\xi + \int\limits_0^t G_1(x,t-\tau)\mu(\tau)d\tau,\ (x,t) \in \Pi_T^+,$$

де G_0 і G_1 визначаються формулами (10), (18).

Приклад 3. Розв'язати задачу

$$\begin{aligned} &u_t = u_{xx} + 2e^{-t}\sin x,\ (x,t) \in \Pi_T^+, \\ &u|_{t=0} = 3(1-\cos x),\ x \in \mathbb{R}_+, \\ &u|_{x=0} = 0,\ t \in [0,T]. \end{aligned} \tag{19}$$

◀ Шукатимемо розв'язок задачі у вигляді суми $u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$, $(x,t) \in \Pi_T^+$, де v – розв'язок задачі

$$\begin{aligned} &v_t = v_{xx},\ (x,t) \in \Pi_T^+, \\ &v|_{t=0} = 3(1-\cos x),\ x \in \mathbb{R}_+, \\ &v|_{x=0} = 0,\ t \in [0,T], \end{aligned} \tag{20}$$

а w – розв'язок задачі

$$\begin{aligned} &w_t = w_{xx} + 2e^{-t}\sin x,\ (x,t) \in \Pi_T^+, \\ &w|_{t=0} = 0,\ x \in \mathbb{R}_+, \\ &w|_{x=0} = 0,\ t \in [0,T]. \end{aligned} \tag{21}$$

Задача (20) аналогічна до задачі (5), а тому її розв'язок визначається формулою (9), де $\varphi(\xi) = 3(1-\cos\xi)$:

$$v(x,t) = \frac{3}{2\sqrt{\pi t}} \int\limits_0^{+\infty} \Big(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4t}}\Big)(1-\cos\xi)d\xi =$$

$$= \frac{3}{2\sqrt{\pi t}} \int\limits_0^{+\infty} \Big(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4t}} \Big) d\xi -$$

$$- \frac{3}{2\sqrt{\pi t}} \int\limits_0^{+\infty} \Big(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4t}} \Big) \cos\xi d\xi =$$

$$= 3\Phi\Big(\frac{x}{\sqrt{2t}}\Big) - \frac{3}{2\sqrt{\pi t}} \int\limits_0^{+\infty} \Big(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4t}} \Big) \cos\xi d\xi. \qquad (22)$$

Тут використано формулу (13).

Розв'язок задачі (21) шукаємо у вигляді

$$w(x,t) = f(t)\sin x,\ \ (x,t) \in \Pi_T^+. \qquad (23)$$

Очевидно, що функція (23) задовольняє нульову крайову умову, а тому задовольнимо неоднорідне рівняння і нульову початкову умову. Тоді одержимо, що f є розв'язком задачі Коші для звичайного диференціального рівняння

$$\begin{cases} f'(t) + f(t) = 2e^{-t},\ \ t > 0, \\ f(0) = 0, \end{cases}$$

тобто

$$f(t) = 2te^{-t}.$$

Тому

$$w(x,t) = 2te^{-t}\sin x,\ \ (x,t) \in \Pi_T^+. \qquad (24)$$

Отже, розв'язком задачі (19) є сума функцій, які визначаються формулами (22) і (24):

$$u(x,t) = 2te^{-t}\sin x + 3\Phi\Big(\frac{x}{\sqrt{2t}}\Big) -$$

$$- \frac{3}{2\sqrt{\pi t}} \int\limits_0^{+\infty} \Big(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4t}} \Big) \cos\xi d\xi,\ \ (x,t) \in \Pi_T^+. \ \blacktriangleright$$

Вправи до розділу 5

1. Розв'язати мішану задачу:

1) $u_t = u_{xx} - 4u,\ 0 < x < \pi,\ t > 0,$
$u(x,0) = x^2 - \pi x,\ 0 \le x \le \pi,$
$u(0,t) = 0,\ u(\pi,t) = 0,\ t \ge 0;$

2) $u_t = u_{xx} - 2u_x + x + 2t,\ 0 < x < 1,\ t > 0,$
$u(x,0) = e^{x} \sin \pi x,\ 0 \le x \le 1,$
$u(0,t) = 0,\ u(1,t) = t,\ t \ge 0;$

3) $u_t = u_{xx} + 4u + x^2 - 2t - 4x^2 t + 2\cos^2 x,\ 0 < x < \pi,\ t > 0,$
$u(x,0) = 0,\ 0 \le x \le \pi,$
$u_x(0,t) = 0,\ u_x(\pi,t) = 2\pi t,\ t \ge 0;$

4) $u_t = u_{xx} + 6u + x^2(1-6t) - 2(t+3x) + \sin 2x,\ 0 < x < \pi,\ t > 0,$
$u(x,0) = x,\ 0 \le x \le \pi,$
$u_x(0,t) = 1,\ u_x(\pi,t) = 2\pi t + 1,\ t \ge 0;$

5) $u_t = 16u_{xx} + 2,\ 0 < x < 7,\ t > 0,$
$u(x,0) = 0,\ 0 \le x \le 7,$
$u_x(0,t) = 0,\ u(7,t) = 0,\ t \ge 0;$

6) $u_t = u_{xx} + 6u + 2t(1-3t) - 6x + 2\cos x \cos 2x,\ 0 < x < \frac{\pi}{2},\ t > 0,$
$u(x,0) = x,\ 0 \le x \le \frac{\pi}{2},$
$u_x(0,t) = 1,\ u_x(\frac{\pi}{2},t) = t^2 + \frac{\pi}{2},\ t \ge 0;$

7) $u_t = u_{xx} - 2u_x,\ 0 < x < 1,\ t > 0,$
$u(x,0) = e^{x} \sin \pi x,\ 0 \le x \le 1,$
$u(0,t) = 0,\ u(1,t) = 0,\ t \ge 0;$

8) $u_t = 36u_{xx} + \frac{\pi}{10} \cos \frac{\pi x}{2},\ 0 < x < 2,\ t > 0,$
$u(x,0) = 0,\ 0 \le x \le 2,$
$u(0,t) = 0,\ u_x(2,t) = 0,\ t \ge 0;$

9) $u_t = 3u_{xx} - 6u,\ 0 < x < 2,\ t > 0,$

$u(x,0) = x^2 - \frac{3}{2}x + 1,\ 0 \le x \le 2,$
$u(0,t) = 1,\ u(2,t) = 2,\ t \ge 0;$

10) $u_t = a^2 u_{xx},\ 0 < x < l,\ t > 0,$
$u(x,0) = u_0 \frac{x^2}{l^2},\ 0 \le x \le l,$
$u_x(0,t) = 0,\ u(l,t) = u_0,\ t \ge 0.$

2. Розв'язати задачу:

1) $u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy}) + A \sin \frac{\pi x}{p} \sin \frac{\pi y}{2s},$
$0 < x < p,\ 0 < y < s,\ t > 0,$
$u(x,y,0) = 0,\ 0 \le x \le p,\ 0 \le y \le s,$
$u(0,y,t) = u(p,y,t) = 0,\ 0 \le y \le s,\ t \ge 0,$
$u(x,0,t) = u(x,s,t) = 0,\ 0 \le x \le p,\ t \ge 0;$

2) $u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy}) + A \sin \frac{3\pi x}{2p} \cos \frac{\pi y}{2s},$
$0 < x < p,\ 0 < y < s,\ t > 0,$
$u(x,y,0) = B \sin \frac{\pi x}{2p} \cos \frac{3\pi y}{2s},\ 0 \le x \le p,\ 0 \le y \le s,$
$u(0,y,t) = u_x(p,y,t) = 0,\ 0 \le y \le s,\ t \ge 0,$
$u_y(x,0,t) = u(x,s,t) = 0,\ 0 \le x \le p,\ t \ge 0;$

3) $u_t = u_{xx} + u_{yy} + 2x(y + (x-1)\cos t \sin 4\pi y),$
$0 < x < 1,\ 0 < y < 2,\ t > 0,$
$u(x,y,0) = 0,\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2,$
$u(0,y,t) = 0,\ u(1,y,t) = 2ty,\ 0 \le y \le 2,\ t \ge 0,$
$u(x,0,t) = 0,\ u(x,2,t) = 4tx,\ 0 \le x \le 1,\ t \ge 0.$

3. Розв'язати задачу Коші:

1) $u_t = u_{xx} + 3t^2,\ x \in \mathbb{R},\ t > 0,$
$u(x,0) = \sin x,\ x \in \mathbb{R};$

2) $u_t = u_{xx} + e^{-t} \cos x,\ x \in \mathbb{R},\ t > 0,$
$u(x,0) = \cos x,\ x \in \mathbb{R}.$

4. Розв'язати задачу:

1) $u_t = u_{xx} - 2e^{-t}(e^{-x} + 1),\ x > 0,\ t > 0,$
$u(x,0) = e^{-x},\ x \ge 0,$
$u_x(0,t) = -e^{-t},\ t \ge 0;$

2) $u_t = a^2 u_{xx},\ x > 0,\ t > 0,$
$u(x,0) = \varphi(x),\ x \geq 0,$
$(u_x - hu)|_{x=0} = 0,\ h > 0$ – стала, $t \geq 0.$

Відповіді до вправ з розділу 5

1. 1) $u(x,t) = -\frac{8}{\pi}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^3}e^{-((2k+1)^2+4)t}\sin(2k+1)x;$

2) $u(x,t) = xt + \sin\pi x e^{x-\pi^2 t - t};$

3) $u(x,t) = tx^2 + \frac{1}{4}(e^{4t} - 1) + t\cos 2x;$

4) $u(x,t) = x^2 t + x + \sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{c_{2k-1}}{(2k-1)^2-6}(1 - e^{-6(2k-1)^2 t})\cos(2k-1)x,$

$$c_{2k-1} := \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k-3}\right),\ k \in \mathbb{N};$$

5) $u(x,t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\, 98}{(2n+1)^3\pi^3}(1 - e^{-(\frac{2(2n+1)\pi}{7})^2 t})\cos\frac{(2n+1)\pi x}{14};$

6) $u(x,t) = x + t^2 + \frac{1}{5}(e^{5t} - 1)\cos x + \frac{1}{3}(1 - e^{-3t})\cos 3x;$

7) $u(x,t) = e^{-(\pi^2+1)t}e^{x}\sin\pi x;$

8) $u(x,t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{2k+1}{360(k^2+k-\frac{3}{4})(\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2})^2}\left(1 - e^{-36(\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2})^2 t}\right)\times$
$\times\sin(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2})x;$

9) $u(x,t) = 1 + \frac{x}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{16(1-2\cos k\pi)}{k\pi(8+k^2\pi^2)}(1 - e^{-\frac{3}{4}(8+k^2\pi^2)t}) -\right.$
$\left.-\frac{16(1-\cos k\pi)}{k^3\pi^3}e^{-\frac{3}{4}(8+k^2\pi^2)t}\right)\sin\frac{k\pi x}{2};$

10) $u(x,t) = \frac{u_0 x^2}{l^2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{32u_0(-1)^{k-1}}{(2k-1)^3\pi^3}\left(1 - e^{-\frac{a^2(2k-1)^2\pi^2 t}{4l^2}}\right)\times$
$\times\cos\frac{(2k-1)\pi x}{2l}.$

2. 1) $u(x,y,t) = \frac{A}{q-1}(e^{-t} - e^{-qt})\sin\frac{\pi x}{p}\sin\frac{\pi y}{2s},$

$$q := a^2\pi^2(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{4s^2});$$

2) $u(x,y,t) = Be^{-\frac{a^2\pi^2}{4}(\frac{1}{p^2}+\frac{9}{s^2})t}\sin\frac{\pi x}{2p}\cos\frac{3\pi y}{2s} + \frac{4A}{a^2\pi^2(\frac{9}{p^2}+\frac{1}{s^2})}\times$
$\times(1 - e^{-\frac{a^2\pi^2}{4}(\frac{9}{p^2}+\frac{1}{s^2})})\sin\frac{3\pi x}{2p}\sin\frac{\pi y}{2s};$

3) $u(x,y,t) = 2txy - \sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{16}{\pi^3(2k-1)^3(1+\lambda_k)}\left(\sin t + \lambda_k\cos t -\right.$
$\left.-\lambda_k e^{-\lambda_k t}\right)\sin 4\pi y,\ \lambda_k = \pi^2((2k-1)^2 + 16).$

3. 1) $u(x,t) = t^3 + e^{-t}\sin x$; 2) $u(x,t) = (1+t)e^{-t}\cos x$.

4. 1) $u(x,t) = e^{-t}(2 + e^{-x}) - 2$;

2) $u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_0^{+\infty} \Big(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}} -$

$- 2h \int\limits_0^{+\infty} e^{-\frac{(x+\xi+\eta)^2}{4a^2t} - h\eta} d\eta \Big) \varphi(\xi) d\xi.$

6 ЕЛІПТИЧНІ РІВНЯННЯ

6.1 Постановка основних задач для еліптичних рівнянь. Фундаментальний розв'язок рівняння Лапласа

6.1.1 Оператор Лапласа. Найпростішим рівнянням другого порядку еліптичного типу є **рівняння Пуассона**

$$\Delta u = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

або відповідне йому однорідне рівняння – **рівняння Лапласа**

$$\Delta u = 0, \tag{2}$$

де $\Delta := \Delta_x := \sum\limits_{j=1}^{n} \partial_{x_j}^2$ – **оператор Лапласа** (операція Лапласа), $n \geq 2$.

Ці рівняння описують стаціонарні, тобто незмінні з часом, процеси. У розділі 3 було наведено приклади, як можна одержати рівняння (1) і (2) з рівняння теплопровідності у випадку стабілізації температури в тілі або з хвильового рівняння у випадку незалежності зміщень від часу. Незалежність від часу процесів, які описуються рівняннями еліптичного типу, має наслідком те, що для них відсутні початкові умови, а отже, неможливість постановки задачі Коші для них. Тому для еліптичних рівнянь природними є **крайові задачі**.

Можна довести, що в будь-якій прямокутній декартовій системі координат оператор Лапласа має один і той самий вигляд. Якщо ж перейти від прямокутної декартової системи координат до ортогональної криволінійної системи координат, то вигляд оператора Лапласа змінюється. Розглянемо це на прикладі сферичної, циліндричної та полярної систем координат.

1) Якщо в $\mathbb{R}^3$ перейти до **сферичної системи** координат

$$x_1 = r\cos\varphi\sin\theta, \quad x_2 = r\sin\varphi\sin\theta, \quad x_3 = r\cos\theta,$$

$$r > 0, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad 0 \leq \theta \leq \pi,$$

то Δ_x набуде вигляду

$$\Delta_{r,\varphi,\theta} := \frac{1}{r^2}\partial_r(r^2\partial_r) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\,\partial_\theta(\sin\theta\,\partial_\theta) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\,\partial^2_\varphi. \qquad (3)$$

2) Якщо ж в $\mathbb{R}^3$ перейти до **циліндричної системи** координат

$$x_1 = r\cos\varphi,\ x_2 = r\sin\varphi,\ x_3 = z,$$

$$r > 0,\ 0 \le \varphi < 2\pi,\ -\infty < z < \infty,$$

то Δ_x матиме вигляд

$$\Delta_{r,\varphi,z} := \frac{1}{r}\partial_r(r\partial_r) + \frac{1}{r^2}\partial^2_\varphi + \partial^2_z. \qquad (4)$$

3) У випадку $\mathbb{R}^2$, при переході до **полярної системи** координат

$$x_1 = r\cos\varphi, \quad x_2 = r\sin\varphi, \quad r > 0, \quad 0 \le \varphi < 2\pi,$$

Δ_x набуде вигляду

$$\Delta_{r,\varphi} := \frac{1}{r}\partial_r(r\partial_r) + \frac{1}{r^2}\partial^2_\varphi. \qquad (5)$$

Розглянемо детально випадок двовимірного оператора Лапласа

$$\Delta_x u = \partial^2_{x_1} u + \partial^2_{x_2} u. \qquad (6)$$

Зробимо заміну декартових координат x_1 і x_2 полярними r і φ за формулами

$$x_1 = r\cos\varphi, \quad x_2 = r\sin\varphi. \qquad (7)$$

Якщо у функцію $u(x_1, x_2)$ підставити замість x_1 і x_2 їх вирази, то дістанемо функцію $u(r\cos\varphi, r\sin\varphi) := \tilde{u}(r,\varphi)$. Виразивши другі похідні від функції u за x_1 і x_2 через похідні за r і φ та підставивши знайдені вирази у формулу (6), дістанемо оператор Лапласа в полярних координатах.

Згідно з правилом диференціювання складеної функції

$$\partial_{x_1} u = \partial_r\tilde{u}\,\partial_{x_1} r + \partial_\varphi\tilde{u}\,\partial_{x_1}\varphi,\ \ \partial_{x_2} u = \partial_r\tilde{u}\,\partial_{x_2} r + \partial_\varphi\tilde{u}\,\partial_{x_2}\varphi. \qquad (8)$$

Для знаходження частинних похідних від r і φ за x_1 і x_2, знайдемо з формул (7) r і φ. Оскільки $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, то

$$\partial_{x_1} r = \frac{x_1}{r} = \cos\varphi, \quad \partial_{x_2} r = \frac{x_2}{r} = \sin\varphi. \tag{9}$$

Очевидно, що $\mathrm{tg}\varphi = \dfrac{x_2}{x_1}$, а тому

$$\frac{1}{\cos^2\varphi}\,\partial_{x_1}\varphi = -\frac{x_2}{x_1^2}, \quad \frac{1}{\cos^2\varphi}\,\partial_{x_2}\varphi = \frac{1}{x_1}.$$

Замінивши x_1 і x_2 за формулами (7), дістанемо

$$\partial_{x_1}\varphi = -\frac{\sin\varphi}{r} \quad \text{і} \quad \partial_{x_2}\varphi = \frac{\cos\varphi}{r}. \tag{10}$$

Підставивши (9) і (10) у рівності (8), знайдемо, що

$$\partial_{x_1} u = \partial_r \tilde{u}\cos\varphi - \partial_\varphi \tilde{u}\,\frac{\sin\varphi}{r}, \ \partial_{x_2} u = \partial_r \tilde{u}\sin\varphi + \partial_\varphi \tilde{u}\,\frac{\cos\varphi}{r}. \tag{11}$$

Тепер знайдемо другі похідні. Застосуємо до похідної $\partial_{x_1} u$ знову правило диференціювання складеної функції

$$\partial_{x_1}^2 u = \partial_r(\partial_{x_1} u)\,\partial_{x_1} r + \partial_\varphi(\partial_{x_1} u)\,\partial_{x_1}\varphi.$$

З рівностей (11) одержуємо, що

$$\partial_r(\partial_{x_1} u) = \partial_r^2 \tilde{u}\cos\varphi - \partial_\varphi(\partial_r \tilde{u})\,\frac{\sin\varphi}{r} + \partial_\varphi \tilde{u}\,\frac{\sin\varphi}{r^2},$$

$$\partial_\varphi(\partial_{x_1} u) = \partial_r(\partial_\varphi \tilde{u})\cos\varphi - \partial_r \tilde{u}\sin\varphi - \partial_\varphi^2 \tilde{u}\,\frac{\sin\varphi}{r} - \partial_\varphi \tilde{u}\,\frac{\cos\varphi}{r}.$$

Помножимо першу рівність на $\partial_{x_1} r = \cos\varphi$, а другу на $\partial_{x_1}\varphi = -\dfrac{\sin\varphi}{r}$ і додамо. Звівши подібні члени, дістанемо

$$\partial_{x_1}^2 u = \partial_r^2 \tilde{u}\,\cos^2\varphi - 2\partial_\varphi(\partial_r \tilde{u})\,\frac{\sin\varphi\,\cos\varphi}{r} + 2\partial_\varphi \tilde{u}\,\frac{\sin\varphi\,\cos\varphi}{r^2} +$$

$$+ \partial_r \tilde{u}\,\frac{\sin^2\varphi}{r} + \partial_\varphi^2 \tilde{u}\,\frac{\sin^2\varphi}{r^2}. \tag{12}$$

Аналогічно, скориставшись співвідношенням

$$\partial^2_{x_2} u = \partial_r(\partial_{x_2} u)\,\partial_{x_2} r + \partial_\varphi(\partial_{x_2} u)\,\partial_{x_2}\varphi,$$

знайдемо, що

$$\partial^2_{x_2} u = \partial^2_r \tilde{u}\,\sin^2\varphi + 2\partial_r(\partial_\varphi \tilde{u})\,\frac{\sin\varphi\,\cos\varphi}{r} - 2\partial_\varphi \tilde{u}\,\frac{\sin\varphi\,\cos\varphi}{r^2} +$$

$$+\,\partial_r \tilde{u}\,\frac{\cos^2\varphi}{r} + \partial^2_\varphi \tilde{u}\,\frac{\cos^2\varphi}{r^2}. \qquad (13)$$

Додавши (12) і (13), дістанемо вираз для оператора Лапласа в полярних координатах:

$$\Delta_x u := \partial^2_{x_1} u + \partial^2_{x_2} u = \partial^2_r \tilde{u} + \frac{1}{r}\partial_r \tilde{u} + \frac{1}{r^2}\partial^2_\varphi \tilde{u} =: \Delta_{r,\varphi}\tilde{u}. \qquad (14)$$

Часто $\Delta_{r,\varphi}$ записують у вигляді (5).

Формули (3) і (4) доводяться аналогічно.

6.1.2 Постановка основних крайових задач для рівняння Лапласа. Нехай Ω – область в $\mathbb{R}^n$, $n \in \{2, 3\}$. Називатимемо її обмеженою, якщо існує $R > 0$ таке, що $\Omega \subset K_R(0)$ – куля радіуса R з центром у початку координат, а в противному разі – необмеженою (область містить нескінченно віддалену точку). Однозв'язна замкнена поверхня (крива) ділить простір $\mathbb{R}^3$ ($\mathbb{R}^2$) на дві області: Ω^+ – внутрішню і Ω^- – зовнішню, що містить нескінченно віддалену точку. Якщо S є межею області Ω, то під вектором зовнішньої нормалі до S у точці $y \in S$ розумітимемо одиничний вектор $\vec{\nu}_y$, який виходить з Ω. Крайові задачі в області Ω^+ називатимемо **внутрішніми**, а в області Ω^- – **зовнішніми**.

У класичній постановці внутрішні крайові задачі для рівняння Пуассона зводять до таких.

1) Внутрішня задача Діріхле або внутрішня перша крайова задача для рівняння Пуассона полягає в знаходженні функції u, яка належить до класу $C^2(\Omega^+) \cap C(\overline{\Omega^+})$ і задовольняє рівняння (1) в області Ω^+, а на її межі S крайову умову Діріхле

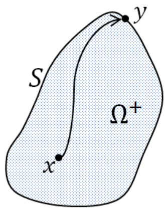

Рис. 6.1

$$u|_S = \mu, \quad \mu \in C(S), \tag{15}$$

тобто для довільного $y \in S$ справджується рівність $\lim\limits_{\substack{x\to y\\ x\in\Omega}} u(x) = \mu(y)$ (рис. 6.1).

2) Внутрішня задача Неймана або внутрішня друга крайова задача для рівняння Пуассона полягає в знаходженні функції u з класу $C^2(\Omega^+) \cap C^1(\overline{\Omega^+})$, яка задовольняє рівняння (1) в області Ω^+, а на її межі S крайову умову Неймана

$$\partial_{\vec{\nu}}\, u|_S = \mu, \quad \mu \in C(S), \tag{16}$$

де $\partial_{\vec{\nu}}$ – похідна в напрямку зовнішньої нормалі $\vec{\nu}$, а рівність (16) розуміють так само, як і в (15).

3) Внутрішня третя крайова задача для рівняння Пуассона полягає в знаходженні функції u з класу $C^2(\Omega^+) \cap C^1(\overline{\Omega^+})$, яка задовольняє рівняння (1) в області Ω^+, а на її межі S третю крайову умову

$$(\partial_{\vec{\nu}}\, u + \alpha u)\Big|_S = \mu, \quad \mu \in C(S). \tag{17}$$

Аналогічно ставляться зовнішні крайові задачі, але для них треба задавати ще поведінку розв'язку на нескінченності.

4) Зовнішня задача Діріхле або зовнішня перша крайова задача полягає в знаходженні функції u з класу $C^2(\Omega^-) \cap C(\overline{\Omega^-})$, яка задовольняє рівняння (1) в області Ω^-, крайову умову (15) на її межі S, де $\lim\limits_{\substack{x\to y\\ x\in\Omega^-}} u(x) = \mu(y)$, та умову **поведінки u на нескінченності:**

$$\begin{aligned}
&\textit{для } n \ge 3 \lim_{|x|\to+\infty} u(x) = 0;\\
&\textit{для } n = 2 \textit{ існує така стала } M > 0, \textit{ що для}\\
&\textit{будь-яких } x \in \Omega^- \textit{ справджується нерівність}\\
&|u(x)| \le M.
\end{aligned} \tag{18}$$

5) Зовнішня задача Неймана або зовнішня друга крайова задача полягає в знаходженні функції $u \in C^2(\Omega^-) \cap C^1(\overline{\Omega^-})$, яка задовольняє рівняння (1) в області Ω^-, на межі S крайову умову (16), де $\overrightarrow{\nu}$ – зовнішня нормаль для Ω^- (рис. 6.2), та умову (18) на нескінченності.

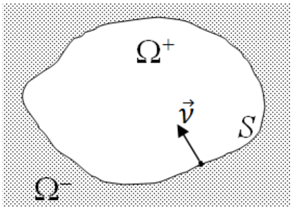

Рис. 6.2

6) Зовнішня третя крайова задача полягає в знаходженні функції $u \in C^2(\Omega^-) \cap C^1(\overline{\Omega^-})$, яка задовольняє рівняння (1) в області Ω^-, крайову умову (16), де $\overrightarrow{\nu}$ – зовнішня нормаль для Ω^-, та умову (18) на нескінченності.

Наведені вище задачі є коректними, а задача Коші для рівняння Лапласа не є коректною, про що свідчить приклад Адамара, розглянутий в пункті 3.4.5.

6.1.3 Фундаментальний розв'язок рівняння Лапласа. При дослідженні крайових задач для рівняння Лапласа та Пуассона важливу роль відіграє **фундаментальний розв'язок** $E_n(x, \xi)$ рівняння Лапласа, який є функцією основної змінної $x \in \mathbb{R}^n$ та параметричної змінної $\xi \in \mathbb{R}^n$, задовольняє рівняння Лапласа (2) як функція x при $x \neq \xi$ і залежить лише від відстані між точками x і ξ

$$r := r_{x\xi} := |x - \xi| := \left(\sum_{j=1}^{n} (x_j - \xi_j)^2 \right)^{1/2}.$$

Знайдемо E_n для випадків $n = 2$ і $n = 3$.

1) Нехай $n = 2$. Ввівши нові змінні r і φ за формулами

$$x_1 = \xi_1 + r\cos\varphi, \quad r_2 = \xi_2 + r\sin\varphi$$

і скориставшись формулою (5), запишемо рівняння Лапласа у вигляді

$$\frac{1}{r}\partial_r(r\partial_r\,\tilde{u}) + \frac{1}{r^2}\partial_\varphi^2\tilde{u} = 0. \tag{19}$$

Оскільки фундаментальний розв'язок залежить лише від r, то $\partial_\varphi^2\tilde{u} = 0$. Для такого розв'язку рівняння (19) набуває вигляду

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\tilde{u}}{dr}\right) = 0.$$

Звідси випливає, що $r\dfrac{d\tilde{u}}{dr} = C_1$, а отже, $\tilde{u}(r) = C_1 \ln r + C_2$. Взявши $C_1 = \dfrac{1}{2\pi}$, $C_2 = 0$, одержимо фундаментальний розв'язок у вигляді

$$E_2(x,\xi) = -\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r}, \quad r \neq 0.$$

2) Нехай $n = 3$. Якщо ввести сферичну систему координат

$$x_1 = \xi_1 + r\cos\varphi\sin\theta, \quad r_2 = \xi_2 + r\sin\varphi\sin\theta, \quad x_3 = \xi_3 + r\cos\theta,$$

то, згідно з формулою (3), тривимірне рівняння Лапласа набуде вигляду

$$\frac{1}{r^2}\partial_r(r^2\partial_r\tilde{u}) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\partial_\theta(\sin\theta\partial_\theta\tilde{u}) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\partial_\varphi^2\tilde{u} = 0.$$

Для випадку $\tilde{u} = \tilde{u}(r)$ маємо $\dfrac{1}{r^2}\dfrac{d}{dr}\left(r^2\dfrac{d\tilde{u}}{dr}\right) = 0$, звідки випливає, що $r^2\dfrac{d\tilde{u}}{dr^2} = C_1$, а отже, $\tilde{u} = -\dfrac{C_1}{r} + C_2$. Якщо $C_1 = \dfrac{1}{4\pi}$, $C_2 = 0$, то $\tilde{u} = -\dfrac{1}{4\pi r}$, $r \neq 0$, а тому

$$E_3(x,\xi) = -\frac{1}{4\pi r}, \quad r \neq 0.$$

Можна довести, що у випадку $n > 3$

$$E_n(x,\xi) = -\frac{1}{(n-2)\omega_n r^{n-2}}, \quad r \neq 0,$$

де ω_n – площа сфери одиничного радіуса в $\mathbb{R}^n$.

Отже,

$$E_n(x,\xi) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi}\ln\dfrac{1}{|x-\xi|}, & n = 2, \\ -\dfrac{1}{(n-2)\omega_n|x-\xi|^{n-2}}, & n \geq 3, x \neq \xi. \end{cases} \tag{20}$$

Зауваження 1. Вибір сталих множників у (20) зумовлений рівністю

$$\Delta_x E_n(x,\xi) = \delta(x-\xi),$$

де δ – дельта-функція Дірака (див. пункт 5.4.7 і [4]).

Зауваження 2. Безпосередньою перевіркою можна переконатися, що функція $E_n(x,\xi)$ при $x \neq \xi$ є розв'язком рівняння Лапласа не тільки як функція x, але й як функція ξ, тобто

$$\Delta_x E_n(x,\xi) = \Delta_\xi E_n(x,\xi) = 0, \quad x \neq \xi, n \in \{2,3\}.$$

6.2 Формули Гріна. Інтегральне зображення гладких функцій

6.2.1 Перша і друга формули Гріна. Нехай в області $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ з кусково-гладкою межею S, задані функції $w_j \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, $j \in \{1,2,3\}$. Тоді, як відомо, правильна формула Остроградського–Гауса

$$\int\limits_\Omega \sum_{j=1}^{3} \partial_{x_j} w_j(x) dx = \int\limits_S \sum_{j=1}^{3} w_j(x) \cos(\widehat{\vec{\nu}, x_j}) d_x S. \tag{1}$$

Нехай маємо функції $\{u,v\} \subset C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$. У формулі (1) покладемо $w_j = u\, \partial_{x_j} v$, тоді одержимо

$$\int\limits_\Omega \sum_{j=1}^{3} \partial_{x_j}(u\, \partial_{x_j} v)(x) dx = \int\limits_S \sum_{j=1}^{3} (u\, \partial_{x_j} v)(x) \cos(\widehat{\vec{\nu}, x_j}) d_x S =$$

$$= \int\limits_S (u\, \partial_{\vec{\nu}} v)(x) d_x S, \tag{2}$$

бо $\sum\limits_{j=1}^{3} \partial_{x_j} v \cos(\widehat{\vec{\nu}, x_j}) = \partial_{\vec{\nu}} v(x)$.

Тепер за допомогою рівності (2) перетворимо інтеграл

$$\int\limits_\Omega \sum_{j=1}^{3} (\partial_{x_j} u\, \partial_{x_j} v)(x) dx = \int\limits_\Omega \sum_{j=1}^{3} \partial_{x_j}(u\, \partial_{x_j} v)(x) dx -$$

$$-\int\limits_{\Omega}\sum_{j=1}^{3}(u\,\partial^2_{x_j}v)(x)dx = \int\limits_{S}(u\,\partial_{\vec{\nu}}v)(x)d_xS - \int\limits_{\Omega}(u\Delta v)(x)dx.$$

Отже, одержали формулу

$$\int\limits_{\Omega}\sum_{j=1}^{3}(\partial_{x_j}u\,\partial_{x_j}v)(x)dx = \int\limits_{S}(u\,\partial_{\vec{\nu}}v)(x)d_xS - \int\limits_{\Omega}(u\Delta v)(x)dx, \quad (3)$$

яка називається **першою формулою Гріна**.

Оскільки функції u та v рівноправні, то правильною є і така формула:

$$\int\limits_{\Omega}\sum_{j=1}^{3}(\partial_{x_j}u\,\partial_{x_j}v)(x)dx = \int\limits_{S}(v\,\partial_{\vec{\nu}}u)(x)d_xS - \int\limits_{\Omega}(v\Delta u)(x)dx. \quad (4)$$

Із рівностей (3) і (4) випливає формула

$$\int\limits_{\Omega}(u\Delta v - v\Delta u)(x)dx = \int\limits_{S}\Big(u\,\partial_{\vec{\nu}}v - v\,\partial_{\vec{\nu}}u\Big)(x)d_xS. \qquad (5)$$

Ця формула називається **другою формулою Гріна**.

Зауважимо, що формула (5) правильна й тоді, коли Ω – багатозв'язна область, але інтеграл у правій частині треба брати по повній межі цієї області.

6.2.2 Формули інтегрального зображення гладких функцій. За допомогою формули (5) можна одержати інтегральне зображення довільної гладкої функції.

Теорема 6.1. *Для довільної функції* $u \in C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$ *правильне зображення*

$$u(x) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{S}\Big(\frac{1}{r}\partial_{\vec{\nu}}u(\xi) - u(\xi)\partial_{\vec{\nu}}\Big(\frac{1}{r}\Big)\Big)d_\xi S -$$

$$-\frac{1}{4\pi}\int\limits_{S}\frac{1}{r}\Delta_\xi u(\xi)d\xi, \quad x\in\Omega, \qquad (6)$$

де $r := |x-\xi|$.

◀ Застосуємо формулу (5) до заданої функції u і функції $v = \dfrac{1}{r}$. Оскільки $v \to +\infty$ при $\xi \to x$, то безпосередньо застосовувати цю формулу не можна. Тому розглянемо довільно фіксовану точку $x \in \Omega$, оточимо її кулею $K_\varepsilon(x)$ малого радіуса ε і запишемо формулу (5) для області $\Omega_\varepsilon := \Omega \setminus K_\varepsilon(x)$, межею якої є $S \cup S_\varepsilon$ (рис. 6.3). Маємо

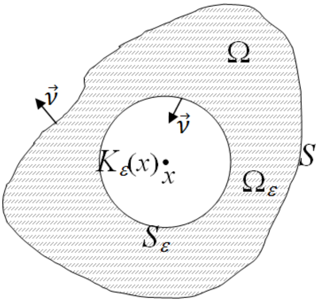

Рис. 6.3

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon}\Big(u\Delta_\xi\Big(\frac{1}{r}\Big)-\frac{1}{r}\Delta_\xi u\Big)(\xi)d\xi =$$

$$=\int\limits_{S}\Big(u\,\partial_{\vec{\nu}}\Big(\frac{1}{r}\Big)-\frac{1}{r}\partial_{\vec{\nu}}u\Big)(\xi)d_\xi S+$$

$$+\int\limits_{S_\varepsilon}\Big(u\,\partial_{\vec{\nu}}\Big(\frac{1}{r}\Big)-\frac{1}{r}\partial_{\vec{\nu}}u\Big)(\xi)d_\xi S_\varepsilon. \quad (7)$$

Оскільки в області Ω_ε $\xi \neq x$, то

$$\Delta_\xi\Big(\frac{1}{r}\Big)=0, \quad \xi\in\Omega_\varepsilon. \quad (8)$$

Розглянемо інтеграл по S_ε із формули (7) і перетворимо його. Оскільки $\partial_{\vec{\nu}}\Big(\dfrac{1}{r}\Big)\Big|_{S_\varepsilon} = -\partial_r\Big(\dfrac{1}{r}\Big)\Big|_{r=\varepsilon} = \dfrac{1}{\varepsilon^2}$, то за допомогою теореми про середнє значення для інтеграла маємо

$$\int\limits_{S_\varepsilon}\Big(u\,\partial_{\vec{\nu}}\Big(\frac{1}{r}\Big)\Big)(\xi)d_\xi S_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^2}\int\limits_{S_\varepsilon}u(\xi)d_\xi S_\varepsilon =$$

$$=\frac{1}{\varepsilon^2}u(\overline{\xi})4\pi\varepsilon^2 = 4\pi u(\overline{\xi}) \longrightarrow 4\pi u(x) \ \text{ при } \ \varepsilon\to 0. \quad (9)$$

Аналогічно одержуємо

$$\int\limits_{S_\varepsilon}\Big(\frac{1}{r}\,\partial_{\vec{\nu}}u\Big)(\xi)d_\xi S_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{S_\varepsilon}\partial_{\vec{\nu}}u(\xi)d_\xi S_\varepsilon =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon}\, \partial_{\vec{\nu}} u(\overline{\xi}) \cdot 4\pi\varepsilon^2 = 4\pi\varepsilon\, \partial_{\vec{\nu}} u(\overline{\xi}) \to 0 \text{ при } \varepsilon \to 0. \tag{10}$$

У рівності (7) перейдемо до границі при $\varepsilon \to 0$. Згідно з (9) і (10) права частина в (7) має границю, бо перший інтеграл не залежить від ε, а другий прямує до $4\pi u(x)$. Тому має границю й ліва частина, причому, з урахуванням (8), справджується рівність

$$-\int\limits_{\Omega} \Big(\frac{1}{r}\Delta_\xi u\Big)(\xi) d\xi = \int\limits_{S} \Big(u\, \partial_{\vec{\nu}}\Big(\frac{1}{r}\Big) - \frac{1}{r}\, \partial_{\vec{\nu}} u\Big)(\xi) d_\xi S + 4\pi u(x).$$

Звідси випливає формула (6). ▶

Теорема 6.2. *Якщо u – розв'язок рівняння Лапласа в області Ω з класу $C^1(\overline{\Omega})$, то правильне зображення*

$$u(x) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{S} \Big(\frac{1}{r}\, \partial_{\vec{\nu}} u(\xi) - u(\xi) \partial_{\vec{\nu}}\Big(\frac{1}{r}\Big)\Big) d_\xi S, \quad x \in \Omega. \tag{11}$$

◀ Формула (11) випливає з (6), якщо врахувати те, що $\Delta_\xi u(\xi) = 0$, $\xi \in \Omega$. ▶

6.3 Означення та властивості гармонічних функцій

6.3.1 Означення гармонічних функцій. Функція u називається **гармонічною в області** Ω, якщо вона задовольняє такі умови:

1) $u \in C^2(\Omega)$; 2) $\Delta u = 0$ в Ω.

Зауважимо, що не всі розв'язки рівняння Лапласа є гармонічними функціями. Наприклад, функція

$$u(x_1, x_2) = \begin{cases} \operatorname{Re} \exp\Big\{ -\dfrac{1}{z^4}\Big\}, & z = x_1 + i x_2 \neq 0, \\ 0, & z = 0, \end{cases}$$

скрізь в $\mathbb{R}^2$ задовольняє рівняння Лапласа, але ця функція в точці $(0, 0)$ розривна.

6.3.2 Основні властивості гармонічних функцій. Використовуючи інтегральне зображення гармонічної функції і формули Гріна, вивчимо найпростіші властивості гармонічних функцій.

1^0 (нескінченна диференційовність). *Якщо функція u гармонічна в області Ω, то вона нескінченно диференційовна в цій області, тобто $u \in C^\infty(\Omega)$.*

◀ Досить довести, що $u \in C^\infty(\Omega_0)$ для будь-якої строго внутрішньої підобласті Ω_0 області Ω. Розглянемо підобласть Ω_1 з межею S_1 таку, що $\overline{\Omega}_0 \subset \Omega_1$, $\overline{\Omega}_1 \subset \Omega$ (рис. 6.4).

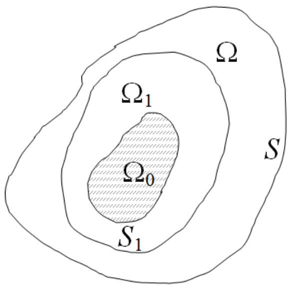

Рис. 6.4

Згідно з формулою (11) з пункту 6.2.2 маємо для $x \in \Omega_0$

$$u(x) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{S_1}\Big(\frac{1}{r}\,\partial_{\vec{\nu}}u(\xi) - $$

$$-u(\xi)\partial_{\vec{\nu}}\Big(\frac{1}{r}\Big)\Big)d_\xi S_1.$$

Інтеграл у правій частині цієї рівності є власним інтегралом, залежним від параметра x. Оскільки для $x \in \Omega_0$ і $\xi \in S_1$ $r := |x-\xi| \geq d > 0$, то підінтегральна функція неперервно диференційовна довільне число разів за x, а тому допустиме диференціювання цього інтеграла під знаком інтеграла будь-яке число разів за x. ▶

2^0 (інтеграл від нормальної похідної). *Якщо гармонічна в області Ω функція $u \in C^1(\overline{\Omega})$, то інтеграл від нормальної похідної від u по S дорівнює нулю, тобто*

$$\int\limits_S \partial_{\vec{\nu}}u(\xi)d_\xi S = 0. \qquad (1)$$

◀ Формула (1) випливає з першої формули Гріна (4) з пункту 6.2.1, якщо в ній покласти $v = 1$. ▶

Наслідок. *Для розв'язності внутрішньої задачі Неймана для рівняння Лапласа*

$$\Delta u(x) = 0,\ x \in \Omega, \quad \partial_{\vec{\nu}_y}u\Big|_S = \mu(y),\ y \in S,$$

необхідне виконання умови

$$\int\limits_S \mu(\xi) d_\xi S = 0. \qquad (2)$$

Зауваження. Можна довести [13, с. 254], що умова (2) є необхідною і для розв'язності зовнішньої задачі Неймана в $\mathbb{R}^2$. У випадку $\mathbb{R}^3$ ця умова не є необхідною.

3^0 (про середнє арифметичне гармонічної функції). *Якщо функція u гармонічна в кулі $K_R(x)$ і неперервна в замкненій кулі $\overline{K_R(x)}$, то середнє значення функції u на сфері $S_R(x)$ дорівнює її значенню в центрі сфери, тобто*

$$u(x) = \frac{1}{4\pi R^2} \int\limits_{S_R(x)} u(\xi) d_\xi S_R. \qquad (3)$$

◀ Очевидно, що для довільного $R_1 < R$ функція $u \in C^1(\overline{K_{R_1}(x)})$ (рис. 6.5), а тому для неї правильне інтегральне зображення (11) з пункту 6.2.2:

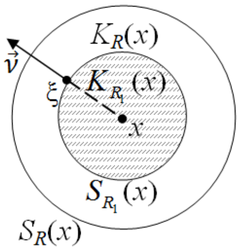

Рис. 6.5

$$u(x) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{S_{R_1}(x)} \left(\frac{1}{r}\, \partial_{\vec{\nu}} u(\xi) - \right.$$

$$\left. - u(\xi)\, \partial_{\vec{\nu}} \left(\frac{1}{r} \right) \right) d_\xi S_{R_1}. \qquad (4)$$

Обчислимо інтеграли з правої частини формули (4). Згідно з властивістю $\mathbf{2^0}$ маємо

$$\int\limits_{S_{R_1}(x)} \frac{1}{r}\, \partial_{\vec{\nu}} u(\xi) d_\xi S_{R_1} = \frac{1}{R_1} \int\limits_{S_{R_1}(x)} \partial_{\vec{\nu}} u(\xi) d_\xi S_{R_1} = 0.$$

Оскільки $\partial_{\vec{\nu}} \left(\frac{1}{r} \right) \Big|_{S_{R_1}(x)} = \partial_r \left(\frac{1}{r} \right) \Big|_{r=R_1} = -\frac{1}{R_1^2}$, то

$$\int\limits_{S_{R_1}(x)} u(\xi) \partial_{\vec{\nu}} \left(\frac{1}{r} \right) d_\xi S_{R_1} = -\frac{1}{R_1^2} \int\limits_{S_{R_1}(x)} u(\xi) d_\xi S_{R_1}.$$

Тому одержуємо для довільного $R_1 \in (0, R)$ рівність

$$u(x) = \frac{1}{4\pi R_1^2} \int\limits_{S_{R_1}(x)} u(\xi) d_\xi S_{R_1},$$

з якої після переходу до границі при $R_1 \to R$ випливає формула (3). ►

Наслідок. *Оскільки формула (3) правильна для довільного $\rho \in (0, R)$, тобто справджується рівність*

$$4\pi\rho^2 u(x) = \int\limits_{S_\rho(x)} u(\xi) d_\xi S_\rho, \quad \rho \in (0, R),$$

то, зінтегрувавши цю рівність за ρ від 0 до R, одержимо

$$\frac{4\pi R^3}{3} u(x) = \int\limits_{K_R(x)} u(\xi) d\xi$$

або

$$u(x) = \frac{3}{4\pi R^3} \int\limits_{K_R(x)} u(\xi) d\xi. \tag{5}$$

Права частина формули (5) визначає середнє значення гармонічної функції по кулі $K_R(x)$, бо $\dfrac{3}{4\pi R^3} = \dfrac{1}{|K_R(x)|}$, де $|K_R(x)|$ – об'єм кулі.

4^0 (принцип максимуму). *Якщо функція u гармонічна в обмеженій області Ω і неперервна в $\overline{\Omega}$, то вона або стала в $\overline{\Omega}$, або своїх найбільшого і найменшого в $\overline{\Omega}$ значень досягає на межі S області Ω.*

◄ Нехай твердження властивості не справджується і деяка гармонічна функція, яка не дорівнює тотожно сталій, досягає свого максимального в $\overline{\Omega}$ значення в деякій внутрішній точці $x^0 \in \Omega$. Розглянемо кулю $K_{R_0}(x^0) \subset \Omega$ (рис. 6.6) і використаємо формулу (5):

$$u(x^0) = \frac{3}{4\pi R_0^3} \int\limits_{K_{R_0}(x^0)} u(\xi) d\xi$$

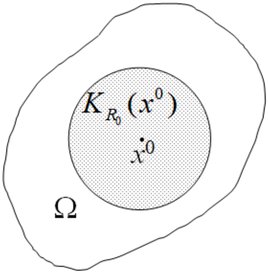

Рис. 6.6

або

$$\frac{3}{4\pi R_0^3}\int\limits_{K_{R_0}(x^0)}(u(x^0)-u(\xi))d\xi=0,$$

бо $\int\limits_{K_{R_0}(x^0)} d\xi=\frac{4\pi R_0^3}{3}$. Оскільки функція u неперервна і $u(x^0)-u(\xi)\geq 0$, $\xi\in K_{R_0}(x^0)$, то $u(\xi)-u(x^0)=0$ або $u(\xi)=u(x^0)$, $\xi\in K_{R_0}(x^0)$.

Нехай тепер y – довільна точка області Ω. Доведемо, що $u(y)=u(x^0)$, тобто задана гармонічна функція є сталою в Ω. Сполучимо точки x^0 і y кривою L, відстань від якої до поверхні S не менша деякого числа $d>0$ (рис. 6.7). Позначимо через x^1 точку перетину L з $S_{R_0}(x^0)$. Функція u в точці x^1 набуває, згідно з доведеним вище, максимального в $\overline{\Omega}$ значення $M:=u(x^0)$. Тоді існує куля $K_{R_1}(x^1)\subset\Omega$, в якій $u=M$. Позначимо через x^2 точку перетину кривої L зі сферою $S_{R_1}(x^1)$, яка розташована ближче до y ніж x^0. Повторивши попередні міркування, одержимо, що $u=M$ в крузі $K_{R_2}(x^2)$. Через скінченну кількість кроків, яка залежить від діаметра області Ω та числа d, точка y попаде в одну з таких куль і, отже, $u(y)=M$.

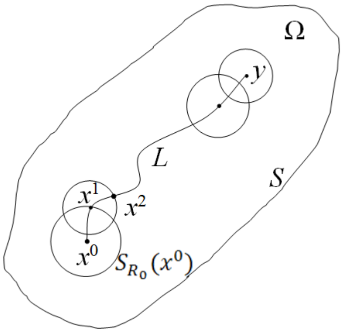

Рис. 6.7

Доведення для випадку найменшого в $\overline{\Omega}$ значення m функції u випливає з попереднього, якщо розглянути функцію $-u$, для якої $-m$ є найбільшим значенням. ►

6.3.3 Наслідки з принципу максимуму для гармонічних функцій. Наведемо деякі наслідки з принципу максимуму для розв'язків рівнянь Лапласа та Пуассона.

Теорема 6.3 (єдиність розв'язку внутрішньої задачі Діріхле). *Внутрішня задача Діріхле не може мати більше* *одного розв'язку.*

◀ Внутрішня задача Діріхле полягає в знаходженні функції $u \in C^2(\Omega^+) \cap C(\overline{\Omega^+})$, яка задовольняє рівняння $\Delta u = f$ в Ω і крайову умову $u\Big|_S = \mu$.

Доведення проведемо від супротивного. Нехай є два розв'язки цієї задачі u_1 і u_2. Тоді $u := u_1 - u_2 \in C^2(\Omega^+) \cap C(\overline{\Omega^+})$ і задовольняються умови

$$\Delta u = 0, \quad u|_S = 0.$$

Отже, u – гармонічна функція в Ω^+ і неперервна в $\overline{\Omega^+}$. Згідно з принципом максимуму u досягає своїх найбільшого і найменшого значень в $\overline{\Omega^+}$ на межі S, які дорівнюють нулю. Тому $u = 0$ в $\overline{\Omega^+}$. ▶

Теорема 6.4 (єдиність розв'язку зовнішньої задачі Діріхле). *Зовнішня задача Діріхле не може мати більше одного розв'язку.*

◀ Треба довести, що задача про знаходження функції $u \in C^2(\Omega^-) \cap C(\overline{\Omega^-})$, яка задовольняє такі умови: $\Delta u = 0$ в Ω^-, $u\Big|_S = 0$, $\lim\limits_{|x| \to +\infty} u(x) = 0$, коли $n \geq 3$, або $|u(x)| \leq M$, $x \in \Omega^-$, коли $n = 2$, має тільки нульовий розв'язок. Нехай це не так і для деякої точки $x^0 \in \Omega^-$ маємо $u(x^0) = \alpha > 0$. Розглянемо випадок $n \geq 3$. З умови $\lim\limits_{|x| \to +\infty} u(x) = 0$ випливає, що існує число $R > 0$ таке, що $\overline{\Omega} \subset K_R(0)$, $|u(x)| < \dfrac{\alpha}{2}$, $x \in S_R(0)$, $R > |x^0|$ (рис. 6.8). В обмеженій області $\Omega^- \cap K_R(0)$ u є гармонічною і до неї можна застосувати принцип максимуму, згідно з яким у цій області $0 < u < \dfrac{\alpha}{2}$, а це суперечить тому, що $u(x^0) = \alpha$. ▶

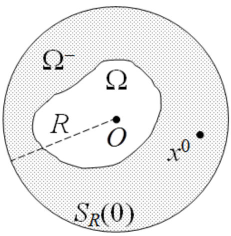

Рис.6.8

Теорема 6.5 (неперервна залежність розв'язку внутрішньої задачі Діріхле від крайової функції). *Нехай функція* u *гармонічна в* Ω^+, *неперервна в* $\overline{\Omega^+}$ *і* $u|_S = \mu$, $\mu \in C(S)$. *Тоді як тільки для довільно взятого* $\varepsilon > 0$ $|\mu(y)| < \varepsilon$, $y \in S$, *то* $|u(x)| < \varepsilon$, $x \in \Omega^+$.

◀ Оскільки $-\varepsilon < \mu(y) < \varepsilon$, $y \in S$, то згідно з принципом максимуму $-\varepsilon < u(x) < \varepsilon$, $x \in \Omega^+$, а це й означає неперервну залежність розв'язку від крайової функції. ▶

Теорема 6.6 (про усувну особливість). *Якщо* u *гармонічна в* $\Omega \setminus \{x^0\}$ *та обмежена в проколотому околі точки* x^0, *то функцію* u *можна довизначити так, що вона буде гармонічною в* Ω.

◀ Доведення є в книзі [16]. ▶

Зауваження про множину розв'язків внутрішньої задачі Неймана для рівняння Пуассона. Розглянемо внутрішню задачу Неймана

$$\Delta u = f \ \text{ в } \ \Omega^+, \quad \partial_{\vec{\nu}} u\Big|_S = \mu. \tag{6}$$

Очевидно, що коли u – розв'язок задачі (6), то $v = u + C$, де C – довільна стала, також є розв'язком цієї задачі. Нехай u_1, u_2 – розв'язки задачі (6), тоді $u_1 - u_2 = C$, C – деяка стала. Справді, функція $u := u_1 - u_2$ є розв'язком задачі

$$\Delta u = 0, \quad \partial_{\vec{\nu}} u\Big|_S = 0. \tag{7}$$

Візьмемо в першій формулі Гріна (3) з пункту 6.2.1 $v = u$ і скористаємося (7). Тоді

$$\int\limits_{\Omega^+} \sum_{j=1}^{3} (\partial_{x_j} u(x))^2 dx = 0,$$

а тому $\partial_{x_j} u = 0$ в Ω^+, $j \in \{1, 2, 3\}$, звідки випливає, що $u = C$ в Ω^+.

6.4 Функція Гріна крайових задач для рівняння Лапласа

6.4.1 Означення функції Гріна задачі Діріхле. Нехай задано обмежену область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ з гладкою межею S і функцію $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$. Для такої функції правильна формула (теорема 6.1)

$$u(x) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_S \Big(\frac{1}{r_{x\xi}} \partial_{\vec{\nu}_\xi} u(\xi) - u(\xi) \partial_{\vec{\nu}_\xi} \Big(\frac{1}{r_{x\xi}} \Big) \Big) d_\xi S -$$

$$- \frac{1}{4\pi} \int\limits_\Omega \frac{1}{r_{x\xi}} \Delta_\xi u(\xi) d\xi, \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

де $r_{x\xi} := |x - \xi|$.

Якщо u гармонічна в Ω, то $\Delta_\xi u(\xi) = 0$, $\xi \in \Omega$, і рівність (1) дає інтегральне зображення гармонічної функції u в області Ω, якщо відомі $u|_S$ і $\partial_{\vec{\nu}_\xi} u\Big|_S$, а саме

$$u(x) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_S \Big(\frac{1}{r_{x\xi}} \partial_{\vec{\nu}_\xi} u(\xi) - u(\xi) \partial_{\vec{\nu}_\xi} \Big(\frac{1}{r_{x\xi}} \Big) \Big) d_\xi S, \quad x \in \Omega. \tag{2}$$

Оскільки в задачі Діріхле на межі задається $u|_S$, а значення $\partial_{\vec{\nu}_\xi} u\Big|_S$ не відоме, то виникає запитання, чи не можна перетворити (2) так, щоб позбутися виразу з $\partial_{\vec{\nu}_\xi} u\Big|_S$.

Розглянемо гармонічну стосовно змінної ξ в Ω функцію $g(x, \cdot) \in C^1(\overline{\Omega})$, залежну від параметричної точки x. Застосувавши до функцій $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ і $g(x, \cdot)$ другу формулу Гріна (формулу (5) з пункту 6.2.1), дістанемо

$$0 = \int\limits_S \Big(g(x,\xi) \partial_{\vec{\nu}_\xi} u(\xi) - u(\xi) \partial_{\vec{\nu}_\xi} g(x,\xi) \Big) d_\xi S - \int\limits_\Omega g(x,\xi) \Delta_\xi u(\xi) d\xi,$$

$$x \in \Omega. \tag{3}$$

Додамо ліві і праві частини рівностей (1) і (3). Тоді одержимо

$$u(x) = \int\limits_S \Big(G(x,\xi)\partial_{\vec{\nu}_\xi} u(\xi) - u(\xi)\partial_{\vec{\nu}_\xi} G(x,\xi) \Big) d_\xi S -$$

$$- \int\limits_\Omega G(x,\xi)\Delta_\xi u(\xi) d\xi, \quad x \in \Omega, \tag{4}$$

де

$$G(x,\xi) := \frac{1}{4\pi r_{x\xi}} + g(x,\xi), \quad x \in \overline{\Omega}, \xi \in \overline{\Omega}, x \neq \xi. \tag{5}$$

Якщо тепер підібрати функцію g так, щоб $G(x,\cdot)|_S = 0$, то тоді позбудемося в (4) доданка з $\partial_{\vec{\nu}_\xi} u\Big|_S$.

Означення 1. *Функція $G(x,\xi)$, $x \in \overline{\Omega}$, $\xi \in \overline{\Omega}$, $x \neq \xi$, називається* **функцією Гріна задачі Діріхле** *для рівняння Лапласа в області Ω, якщо:*

1) як функція ξ G гармонічна скрізь в області Ω, за винятком точки x, причому $G(x,\xi) \to +\infty$ при $\xi \to x \in \Omega$;

2) на межі S області Ω задовольняється умова $G(x,\xi)|_{\xi \in S} = 0$, $x \in \Omega$;

3) скрізь в Ω G зображується у вигляді (5), де $g(x,\xi)$ є гармонічною як функція ξ при кожному фіксованому $x \in \Omega$ і $g(x,\cdot) \in C^1(\overline{\Omega})$.

Якщо в (4) G є функцією Гріна, то для довільної функції $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ правильна формула

$$u(x) = -\int\limits_S u(x)\partial_{\vec{\nu}_\xi} G(x,\xi) d_\xi S - \int\limits_\Omega G(x,\xi)\Delta_\xi u(\xi) d\xi, x \in \Omega. \tag{6}$$

З формули (6) випливають наступні очевидні наслідки, за умови, що існує функція Гріна G.

Наслідок 1. *Нехай u – розв'язок внутрішньої задачі Діріхле для рівняння Пуассона*

$$\Delta u = f \ \text{ в } \Omega, \quad u|_S = \mu,$$

який належить до $C^1(\overline{\Omega})$, тоді правильне зображення

$$u(x) = -\int\limits_S \mu(\xi)\partial_{\vec{\nu}_\xi} G(x,\xi) d_\xi S - \int\limits_\Omega G(x,\xi) f(\xi) d\xi, x \in \Omega. \quad (7)$$

Наслідок 2. *Якщо u – розв'язок внутрішньої задачі Діріхле для рівняння Лапласа*

$$\Delta u = 0 \ \text{ в } \Omega, \quad u|_S = \mu,$$

який належить до $C^1(\overline{\Omega})$, то правильна формула

$$u(x) = -\int\limits_S \mu(\xi)\partial_{\vec{\nu}_\xi} G(x,\xi) d_\xi S, \quad x \in \Omega. \quad (8)$$

Зауваження 1. При виведенні формул (7) і (8) припускалося, що розв'язок $u \in C^1(\overline{\Omega})$. Можна довести, що вони правильні й у випадку, коли $u \in C(\overline{\Omega})$, якщо S є поверхнею Ляпунова, тобто має певну гладкість.

6.4.2 Властивості функції Гріна задачі Діріхле. Наведемо основні властивості функції Гріна G.

1^0. *Для довільних $x \in \Omega$ функція G є гармонічною як функція ξ в $\Omega \setminus \{x\}$, тобто*

$$\Delta_\xi G(x,\xi) = 0, \quad \xi \in \Omega \setminus \{x\}.$$

2^0. *Побудова функції Гріна зводиться до розв'язування внутрішньої задачі Діріхле*

$$\Delta_\xi g(x,\xi) = 0, \quad \xi \in \Omega, \quad (9)$$

$$g(x,\xi)|_{\xi \in S} = -\frac{1}{4\pi r_{x\xi}}\Big|_{\xi \in S}, \quad x \in \Omega. \quad (10)$$

3^0. *Якщо функція Гріна існує, то вона єдина.*

◄ Припустимо, що є дві функції Гріна G_1 і G_2:

$$G_j(x,\xi) = \frac{1}{4\pi r_{x\xi}} + g_j(x,\xi), \quad x \in \overline{\Omega}, \xi \in \overline{\Omega} \setminus \{x\}, j \in \{1,2\}.$$

Тоді функція

$$g(x,\xi) := G_1(x,\xi) - G_2(x,\xi) = g_1(x,\xi) - g_2(x,\xi),$$

$$x \in \overline{\Omega},\ \xi \in \overline{\Omega} \setminus \{x\},$$

як функція ξ гармонічна в Ω і $g(x,\xi)|_{\xi \in S} = 0$, $x \in \overline{\Omega}$. Згідно з теоремою 6.3, маємо, що $g(x,\xi) = 0$, $x \in \Omega$, $\xi \in \overline{\Omega} \setminus \{x\}$, тобто $G_1 = G_2$. ►

4⁰. *Функція Гріна задовольняє нерівності*

$$0 < G(x,\xi) < \frac{1}{4\pi r_{x\xi}}, \quad x \in \Omega, \xi \in \Omega \setminus \{x\}. \tag{11}$$

◄ Нехай x –довільно фіксована точка з Ω. Оскільки $G(x,\xi) \to +\infty$ при $\xi \to x$, то існує сфера $S_{\delta_1}(x) \subset \Omega$ така, що $G(x,\xi)|_{\xi \in S_{\delta_1}(x)} > 0$ (рис. 6.9). Згідно з означенням функції Гріна $G(x,\xi)|_{\xi \in S} = 0$. Звідси на підставі принципу максимуму маємо $0 < G(x,\xi)$, $\xi \in \Omega_{\delta_1} := \{\xi \in \Omega \setminus K_{\delta_1}(x)\}$. Очевидно, що для довільного $\delta < \delta_1$ правильна нерівність $0 < G(x,\xi)$, $\xi \in \Omega_\delta$, а тому

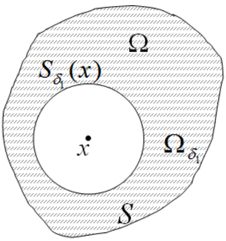

Рис. 6.9

$$0 < G(x,\xi), \quad \xi \in \Omega \setminus \{x\}.$$

Права нерівність в (11) одержується, коли скористатися рівністю (5) і застосувати принцип максимуму до функції g, яка є розв'язком задачі (9), (10), звідки випливає, що $g(x,\xi) < 0$, $x \in \Omega$, $\xi \in \Omega \setminus \{x\}$. ►

5⁰. *Функція Гріна симетрична, тобто* $G(x,\xi) = G(\xi,x)$, $\{x,\xi\} \subset \Omega$, $x \neq \xi$.

◄ Довільно зафіксуємо дві точки x і ξ з області Ω, причому $x \neq \xi$. Розглянемо кулі $K_\delta(x)$ і $K_\delta(\xi)$ такі, що вони належать до Ω і не перетинаються (рис. 6.10). Нехай $\Omega_\delta := \Omega \setminus \{K_\delta \cup K_\delta(\xi)\}$. Розглянемо функції $u(y) = G(x,y)$ і $v(y) = G(\xi,y)$, $y \in \Omega_\delta$, які гармонічні в цій області. Застосуємо до них в Ω_δ другу формулу Гріна (формулу (5) з пункту 6.2.1), врахувавши те, що u і v –

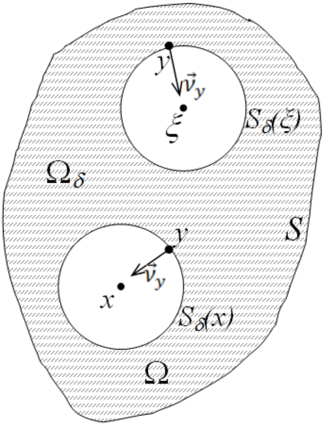

Рис. 6.10

це функції Гріна. Тоді одержимо

$$\int\limits_{S_\delta(x)} \Big(G(x,y)\partial_{\vec{\nu}_y}G(\xi,y)-$$

$$-G(\xi,y)\partial_{\vec{\nu}_y}G(x,y)\Big)d_yS_\delta+$$

$$+\int\limits_{S_\delta(\xi)} \Big(G(x,y)\partial_{\vec{\nu}_y}G(\xi,y)-$$

$$-G(\xi,y)\partial_{\vec{\nu}_y}G(x,y)\Big)d_yS_\delta=0.$$

Якщо перейти в цій рівності до границі при $\delta\to 0$, то, як доведено в [13, с. 291-293], одержимо рівність $G(x,\xi)=G(\xi,x)$. ▶

Зауваження 2. З означення функції Гріна та властивості $\mathbf{5^0}$ випливає, що функція Гріна задовольняє рівняння Лапласа за координатами кожної точки при фіксованій другій точці, тобто

$\Delta_\xi G(x,\xi)=0$, $\xi\in\Omega\setminus\{x\}$, де x – довільно фіксована точка $\overline{\Omega}$;
$\Delta_x G(x,\xi)=0$, $x\in\Omega\setminus\{\xi\}$, де ξ – довільно фіксована точка $\overline{\Omega}$.

Зауваження 3. Поняття функції Гріна задачі Діріхле поширюється і на інші крайові задачі.

Розглянемо задачу

$$\Delta u(x)=f(x),\quad x\in\Omega,$$

$$\Big(\alpha u(x)+\beta\partial_{\vec{\nu}_y}u(x)\Big)\Big|_{x\in S}=\mu(y),\quad y\in S, \tag{12}$$

де Ω – двовимірна або тривимірна область з межею S; $\vec{\nu}$ – зовнішня нормаль до S. При $\alpha=1$, $\beta=0$ маємо першу крайову задачу або задачу Діріхле, при $\alpha=0$, $\beta=1$ – другу крайову задачу або задачу Неймана, а при $\alpha\beta>0$ – третю крайову задачу.

Означення 2. Функцією Гріна (функцією джерела, впливу) *задачі (12) називається функція* $G(x,\xi)$, $\{x,\xi\}\subset\overline{\Omega}$, $x\neq\xi$, *яка задовольняє такі умови:*

1) як функція ξ G є гармонічною в області $\Omega \setminus \{x\}$ і при $\xi \to x$ $G(x,\xi) \to +\infty$;

2) G задовольняє крайову умову

$$\left(\alpha G(x,\xi) + \beta \partial_{\vec{\nu}_\xi} G(x,\xi)\right)\Big|_{\xi \in S} = 0, \;\; x \in \Omega;$$

3) в області Ω функція G допускає зображення:

а) для $\Omega \subset \mathbb{R}^3$

$$G(x,\xi) = \frac{1}{4\pi r_{x\xi}} + g(x,\xi), \quad x \in \overline{\Omega}, \xi \in \overline{\Omega} \setminus \{x\},$$

б) для $\Omega \subset \mathbb{R}^2$

$$G(x,\xi) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r_{x\xi}} + g(x,\xi), \quad x \in \overline{\Omega}, \xi \in \overline{\Omega} \setminus \{x\},$$

де g як функція ξ є гармонічною функцією в Ω.

При відповідній гладкості поверхні S та функцій f і μ розв'язок першої, другої і третьої крайових задач для тривимірного випадку записується відповідно у вигляді

$$u(x) = -\int\limits_S \partial_{\vec{\nu}_\xi} G(x,\xi)\mu(\xi) d_\xi S - \int\limits_\Omega G(x,\xi) f(\xi) d\xi, \; x \in \Omega, \quad (13)$$

$$u(x) = \int\limits_S G(x,\xi)\mu(\xi) d_\xi S - \int\limits_\Omega G(x,\xi) f(\xi) d\xi, \; x \in \Omega, \quad (14)$$

і

$$u(x) = \int\limits_S G(x,\xi)\frac{\mu(\xi)}{\beta} d_\xi S - \int\limits_\Omega G(x,\xi) f(\xi) d\xi, \; x \in \Omega. \quad (15)$$

Аналогічні формули правильні й у випадку площини.

Зауваження 4. Щодо функції Гріна задачі Неймана і розв'язку цієї задачі, вираженого формулою (14), треба зробити таке застереження. Річ у тому, що для випадку обмежених областей функція Гріна другої крайової задачі, в зазначеному вище розумінні, не існує, бо не виконується, взагалі кажучи, умова $\int\limits_S \partial_{\vec{\nu}_\xi} G(x,\xi) d_\xi S = 0$. Існування такої функції можливе лише для областей, межа яких містить нескінченно віддалену точку. Тому, щоб формула (14) визначала розв'язок задачі Неймана і для випадку обмеженої області, узагальнимо поняття функції Гріна другої крайової задачі. Під узагальненою функцією Гріна G задачі Неймана для обмеженої просторової області Ω розумітимемо функцію (5) з g, яка при кожному фіксованому $x \in \Omega$ є розв'язком задачі

$$\Delta_\xi g(x,\xi) = 0,\ \xi \in \Omega,\ \partial_{\vec{\nu}_\xi} g(x,\xi)\Big|_{\xi\in S} = -\frac{1}{P} - \partial_{\vec{\nu}_\xi}\Big(\frac{1}{4\pi r_{x\xi}}\Big)\Big|_{\xi\in S},$$

де P – площа межі S області Ω.

Якщо $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, то g повинна бути розв'язком задачі

$$\Delta_\xi g(x,\xi) = 0,\ \xi \in \Omega,\ \partial_{\vec{\nu}_\xi} g(x,\xi)\Big|_{\xi\in\Gamma} = -\frac{1}{l} - \partial_{\vec{\nu}_\xi}\Big(\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{x\xi}}\Big)\Big|_{\xi\in\Gamma},$$

де l – довжина межі Γ області Ω.

Зауваження 5. Як і у властивості $\mathbf{5^0}$ функції Гріна задачі Діріхле можна довести симетричність функції Гріна задачі (12).

6.4.3 Побудова функції Гріна задачі Діріхле для рівняння Лапласа в кулі. Розглянемо внутрішню задачу Діріхле в кулі $K_R(x^0)$ з межею $S_R(x^0)$

$$\Delta u = 0, \quad \text{в } K_R(x^0), \tag{16}$$

$$u|_{S_R(x^0)} = \mu, \tag{17}$$

де $\mu \in C(S_R(x^0))$, і побудуємо її функцію Гріна за допомогою методу відображень.

Нехай $x := (x_1, x_2, x_3)$ – фіксована точка з $K_R(x^0)$, а $\xi := (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ – довільна точка з $\mathbb{R}^3$. Візьмемо точку $x^1 := (x_1^1, x_2^1, x_3^1)$, інверсну до точки x відносно сфери $S_R(x^0)$, тобто

$$\rho\rho_1 = R^2, \tag{18}$$

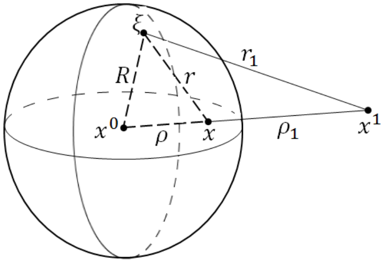

Рис. 6.11

де $\rho := |x - x^0|$, $\rho_1 := |x^1 - x^0|$. Точки x і x^1 лежать на промені, що виходить з центра кулі x^0 (рис. 6.11).

Нехай $r := |x - \xi|$, $r_1 := |x^1 - \xi|$. Розглянемо випадок, коли $\xi \in S_R(x^0)$. Оскільки з (18) випливає, що $\dfrac{\rho}{R} = \dfrac{R}{\rho_1}$, то трикутники $\triangle x^0 x^1 \xi$ і $\triangle x^0 x \xi$ подібні, бо мають спільний кут, а сторони, які утворюють цей кут, пропорційні. Тому

$$\frac{r}{r_1} = \frac{\rho}{R}$$

або

$$\frac{1}{r} = \frac{R}{\rho} \cdot \frac{1}{r_1}.$$

Якщо помножити цю рівність на $\dfrac{1}{4\pi}$, то матимемо

$$\frac{1}{4\pi r} - \frac{R}{4\pi \rho r_1} = 0, \quad \xi \in S_R(x^0). \tag{19}$$

Тепер розглянемо функцію

$$G(x,\xi) := \frac{1}{4\pi r} - \frac{R}{4\pi \rho r_1}, x \in \overline{K_R(x^0)}, \xi \in \overline{K_R(x^0)}, x \neq \xi. \tag{20}$$

Очевидно, що це і є функція Гріна задачі Діріхле. Справді, правильним є зображення (5), де $g(x,\xi) := -\dfrac{R}{4\pi \rho r_1}$ як функція ξ гармонічна в $K_R(x^0)$ і, крім того, згідно з (19)

$$G(x,\xi)|_{\xi \in S_R(x^0)} = \left(\frac{1}{4\pi r} - \frac{R}{4\pi \rho r_1} \right)\Big|_{\xi \in S_R(x^0)} = 0.$$

6.4.4 Інтегральне зображення розв'язку задачі (16), (17). Інтеграл і ядро Пуассона. Нехай u є розв'язком задачі

(16), (17) з простору $C^1(\overline{K_R(x^0)})$. Згідно з наслідком 2 з пункту 6.4.1 цей розв'язок зображується у вигляді (8), тобто

$$u(x) = -\int\limits_{S_R(x^0)} \partial_{\vec{\nu}_\xi}\Big(\frac{1}{4\pi r} - \frac{R}{4\pi\rho r_1}\Big)\mu(\xi)d_\xi S_R, \quad x \in K_R(x^0). \quad (21)$$

Обчислимо $\partial_{\vec{\nu}_\xi}\Big(\frac{1}{4\pi r} - \frac{R}{4\pi\rho r_1}\Big)$. Ураховуючи те, що напрям $\vec{\nu}_\xi$ збігається з напрямом радіуса $\vec{r}$ (рис. 6.12), а $r = \Big(\sum\limits_{i=1}^{3}(\xi_i - x_i)^2\Big)^{1/2}$ і $\frac{\xi_j - x_j}{r} = \cos(\widehat{\xi_j, \vec{r}})$, маємо

$$\partial_{\vec{\nu}_\xi}\Big(\frac{1}{r}\Big) = \sum_{j=1}^{3}\partial_{\xi_j}\Big(\frac{1}{r}\Big)\cos(\widehat{\vec{\nu}_\xi, \xi_j}) = \sum_{j=1}^{3}\Big(-\frac{1}{r^2}\Big)\frac{1}{2r}2(\xi_j - x_j)\times$$

$$\times\cos(\widehat{\vec{\nu}_\xi, \xi_j}) = -\frac{1}{r^2}\sum_{j=1}^{3}\cos(\widehat{\vec{\nu}_\xi, \xi_j})\cos(\widehat{\xi_j, \vec{r}}) = -\frac{1}{r^2}\cos(\widehat{\vec{\nu}_\xi, \vec{r}}).$$

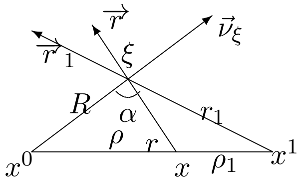

Рис.6.12

Аналогічно

$$\partial_{\vec{\nu}_\xi}\Big(\frac{1}{r_1}\Big) = -\frac{1}{r_1^2}\cos(\widehat{\vec{\nu}_\xi, \vec{r}_1}).$$

З $\triangle x^0\xi x$ згідно з теоремою косинусів одержуємо

$$\cos(\widehat{\vec{\nu}_\xi, \vec{r}}) = \cos\alpha = \frac{R^2 - \rho^2 + r^2}{2Rr},$$

а з $\triangle x^0\xi x^1$ –

$$\cos(\widehat{\vec{\nu}_\xi, \vec{r}_1}) = \frac{R^2 - \rho_1^2 + r_1^2}{2Rr_1}.$$

Тому

$$\partial_{\vec{\nu}_\xi}\Big(\frac{1}{r}\Big) = -\frac{1}{2R}\frac{R^2 + r^2 - \rho^2}{r^3},$$

$$\partial_{\vec{\nu}_\xi}\Big(\frac{1}{r_1}\Big) = -\frac{1}{2R}\frac{R^2 + r_1^2 - \rho_1^2}{r_1^3}, \quad (22)$$

а отже,

$$\partial_{\vec{\nu}_\xi}\Big(\frac{1}{4\pi r}-\frac{R}{4\pi\rho r_1}\Big)=-\frac{1}{8\pi R}\Big(\frac{R^2+r^2-\rho^2}{r^3}-\frac{R}{\rho}\times$$

$$\times\frac{R^2+r_1^2-\rho_1^2}{r_1^3}\Big)=-\frac{1}{8\pi R}\Big(\frac{R^2-\rho^2}{r^3}+\frac{1}{r}-\frac{R}{\rho r_1}-$$

$$-\frac{R(R^2-\rho_1^2)}{\rho r_1^3}\Big)=-\frac{1}{8\pi R}\Big(\frac{R^2-\rho^2}{r^3}+\frac{1}{r}-$$

$$-\frac{R\rho}{\rho R r}-\frac{R\rho^3}{\rho R^3 r^3}\Big(R^2-\frac{R^4}{\rho^2}\Big)\Big)=-\frac{R^2-\rho^2}{4\pi R r^3},$$

оскільки $\rho_1=\dfrac{R^2}{\rho}$ і $\dfrac{1}{r_1}=\dfrac{\rho}{Rr}$. Звідси і з (21) випливає така формула для зображення розв'язку задачі (16), (17):

$$u(x)=\int\limits_{S_R(x^0)}G_1(x,\xi)\mu(\xi)d_\xi S_R,\quad x\in K_R(x^0),\tag{23}$$

де

$$G_1(x,\xi):=\frac{R^2-\rho^2}{4\pi R r^3}\tag{24}$$

або

$$G_1(x,\xi):=\frac{R^2-|x-x^0|^2}{4\pi R\,|x-\xi|^3},x\in K_R(x^0),\xi\in S_R(x^0).\tag{25}$$

Формула (23) називається **формулою Пуассона**, інтеграл в ній – **інтегралом Пуассона**, а функція G_1 – **ядром Пуассона**.

Ядро Пуассона має наступні властивості .

1^0. *Функція G_1 є розв'язком рівняння Лапласа, тобто $\Delta_x G_1(x,\xi)=0$, $x\in K_R(x^0)$, $\xi\in S_R(x^0)$.*

◄ Оскільки $\Delta_x\Big(\dfrac{1}{r}\Big)=0,\ x\neq\xi$, і згідно з (22)

$$\frac{R^2+r^2-\rho^2}{r^3}=-2R\partial_{\vec{\nu}_\xi}\Big(\frac{1}{r}\Big),$$

то

$$\Delta_x G_1(x,\xi)=\frac{1}{4\pi R}\Delta_x\Big(\frac{R^2-\rho^2}{r^3}\Big)=\frac{1}{4\pi R}\Big(\Delta_x\Big(\frac{R^2+r^2-\rho^2}{r^3}\Big)-$$

$$-\Delta_x\Big(\frac{1}{r}\Big)\Big)=\frac{1}{4\pi R}\Delta_x\Big(-2R\partial_{\vec{\nu}_\xi}\Big(\frac{1}{r}\Big)\Big)=-\frac{1}{2\pi}\partial_{\vec{\nu}_\xi}\Delta_x\Big(\frac{1}{r}\Big)=0.\ \blacktriangleright$$

2⁰. *Справджується рівність*

$$\int\limits_{S_R(x^0)} G_1(x,\xi)d_\xi S_R=1,\ \ x\in K_R(x^0). \qquad (26)$$

◀ Розглянемо задачу (16), (17) з $\mu=1$. Очевидно, що $u=1$ є розв'язком цієї задачі, для якого, як вище доведено, правильною є формула (23), тобто формула (26). ▶

6.4.5 Однозначна розв'язність задачі (16), (17). Доведемо, що формула (23) визначає розв'язок задачі (16), (17), якщо $\mu\in C(S_R(x^0))$. Для цього треба переконатися, що інтеграл з (23) задовольняє рівняння (16) і крайову умову (17).

Якщо $x\in K_R(x^0)$, а $\xi\in S_R(x^0)$, то $r>0$ і інтеграл з (23) є власним інтегралом, залежним від параметра x. Тому згідно з властивістю **1⁰** функції G_1 маємо, що $\Delta u=0$ в $K_R(x^0)$, тобто інтеграл Пуассона є розв'язком рівняння Лапласа в $K_R(x^0)$.

Тепер доведемо, що інтеграл Пуассона (23) задовольняє крайову умову (17), тобто

$$\lim_{K_R(x^0)\ni x\to y} u(x)=\mu(y),$$

$$y\in S_R(x^0). \qquad (27)$$

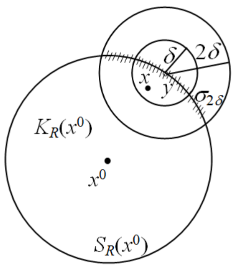

Рис. 6.13

Нехай $y\in S_R(x^0)$, $\delta>0$, $K_{2\delta}(y)$ – куля з центром у точці y і радіуса 2δ, $\sigma_{2\delta}:=S_R(x^0)\cap K_{2\delta}(y)$ (рис. 6.13). Розглянемо різницю $u(x)-\mu(y)$ і запишемо її, скориставшись рівностями (23) і (26), у вигляді

$$u(x)-\mu(y)=\int\limits_{S_R(x^0)} G_1(x,\xi)\mu(\xi)d_\xi S_R-\int\limits_{S_R(x^0)} G_1(x,\xi)\mu(y)d_\xi S_R=$$

$$= \int\limits_{S_R(x^0)} G_1(x,\xi)(\mu(\xi)-\mu(y))d_\xi S_R = \int\limits_{\sigma_{2\delta}} G_1(x,\xi)(\mu(\xi)-$$

$$-\mu(y))d_\xi \sigma_{2\delta} + \int\limits_{S_R(x^0)\setminus\sigma_{2\delta}} G_1(x,\xi)(\mu(\xi)-\mu(y))d_\xi S_R =$$

$$=: J_1 + J_2. \qquad (28)$$

Оскільки нас цікавить випадок, коли точка x близька до точки y, то вважатимемо, що $x \in K_\delta(y)$, а δ досить мале. Візьмемо довільно $\varepsilon > 0$ і, скориставшись неперервністю функції μ, виберемо $\delta > 0$ так, щоб $|\mu(\xi) - \mu(y)| < \varepsilon/2$, $\xi \in \sigma_{2\delta}$. Тоді за допомогою рівності (26)

$$|J_1| \leq \frac{\varepsilon}{2} \int\limits_{\sigma_{2\delta}} G_1(x,\xi)d_\xi \sigma_{2\delta} \leq \frac{\varepsilon}{2} \int\limits_{S_R(x^0)} G_1(x,\xi)d_\xi S_R = \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (29)$$

В інтегралі J_2 $\xi \in S_R(x^0) \setminus \sigma_{2\delta}$, $x \in K_R(x^0)$, а тому $r = |x-\xi| > \delta$. Урахувавши обмеженість функції μ сталою M, одержимо, що $|\mu(\xi)-\mu(y)| \leq |\mu(\xi)| + |\mu(y)| \leq 2M$ і тому

$$|J_2| \leq \frac{1}{4\pi R}\frac{R^2-\rho^2}{\delta^3} 2M \int\limits_{S_R(x^0)\setminus\sigma_{2\delta}} d_\xi S_R \leq$$

$$\leq \frac{R^2-\rho^2}{2\pi R\delta^3} M \int\limits_{S_R(x^0)} d_\xi S_R = \frac{R^2-\rho^2}{2\pi R\delta^3} 4\pi R^2 M =$$

$$= \frac{2MR}{\delta^3}(R^2-\rho^2) \to 0 \text{ при } x \to y,$$

тобто існує $\delta_1 > 0$ таке, що як тільки $|x-y| < \delta_1$, то

$$|J_2| < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (30)$$

З (28)–(30) одержуємо, що для довільного $\varepsilon > 0$ існує $\delta_0 := \min\{\delta, \delta_1\} > 0$ таке, що з нерівності $|x-y| < \delta_0$ випливає нерівність $|u(x) - \mu(y)| < \varepsilon$, тобто виконується умова (27).

Отже, формулою (23) визначається розв'язок задачі (16), (17), який належить до класу $C(\overline{K_R(x^0)})$ і згідно з теоремою 6.3 є єдиним. Тим самим доведено таку теорему.

Теорема 6.7. *Якщо $\mu \in C(S_R(x^0))$, то задача Діріхле (16), (17) для рівняння Лапласа в кулі $K_R(x^0)$ має єдиний розв'язок, який визначається формулою Пуассона (23).*

Зауваження 6. Аналогічно розв'язується зовнішня задача Діріхле. Її розв'язок для області, зовнішньої до кулі $K_R(x^0)$, і $\mu \in C(S_R(x^0))$ визначається формулою

$$u(x) = \frac{1}{4\pi R} \int\limits_{S_R(x^0)} \frac{\rho^2 - R^2}{r^3} \mu(\xi) d_\xi S_R, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus K_R(x^0).$$

Зауваження 7. Іноді зручно записувати формулу Пуассона в сферичних координатах. Так, якщо ввести сферичну систему координат з початком у точці x^0, то формулу (23) можна переписати у вигляді

$$u(\rho, \varphi, \theta) = \frac{R}{4\pi} \int\limits_0^{\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{R^2 - \rho^2}{(R^2 + \rho^2 - 2R\rho\cos\gamma)^{3/2}} \mu(\varphi', \theta') \times$$

$$\times \sin\theta' d\varphi' d\theta', \quad 0 \le \rho < R, \varphi \in [0, 2\pi], \theta \in [0, \pi],$$

де (ρ, φ, θ) і (R, φ', θ') – координати відповідно точок x і ξ, а γ – кут між напрямками $\overrightarrow{x^0 x}$ і $\overrightarrow{x^0 \xi}$, так що $\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi - \varphi')$.

Зауваження 8. Можна довести, що функція Гріна задачі Діріхле для рівняння Лапласа в крузі $K_R(x^0) \subset \mathbb{R}^2$ має вигляд

$$G(x, \xi) := \frac{1}{2\pi} \ln\frac{1}{r} - \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{R}{\rho r_1}\right), x \in \overline{K_R(x^0)}, \xi \in \overline{K_R(x^0)} \setminus \{x\},$$

а формула Пуассона записується так:

$$u(x) = \frac{1}{2\pi R} \int\limits_{C_R(x^0)} \frac{R^2 - \rho^2}{r^2} \mu(\xi) d_\xi C_R, \quad x \in K_R(x^0),$$

або

$$u(\rho,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{R^2-\rho^2}{R^2+\rho^2-2R\rho\cos(\varphi-\varphi')}\mu(\varphi')d\varphi',$$

де $C_R(x^0)$ – межа круга $K_R(x^0)$, тобто коло радіуса R з центром у точці x^0, (ρ,φ) і (R,φ') – полярні координати (з центром у точці x^0) відповідно точок x і ξ.

Приклад 1. За допомогою функції Гріна розв'язати задачу Діріхле для рівняння Лапласа в півпросторі $\Pi^+ := \{x := (x_1,x_2,x_3)\,\big|\,(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2, x_3>0\}$.

◀ Треба знайти розв'язок задачі

$$\Delta u(x)=0,\quad x\in\Pi^+,$$

$$u(x)|_{x_3=0}=\mu(x_1,x_2),\quad (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2.$$

Побудуємо спочатку функцію Гріна цієї задачі. Шукатимемо її у вигляді (5), а це означає, що треба підібрати функцію g так, щоб вона як функція ξ була гармонічною в області Π^+ і набувала при $\xi_3=0$ значення $-\dfrac{1}{4\pi r_{x\xi}}\Big|_{\xi_3=0}$. Скористаємося для знаходження функції g методом відображень.

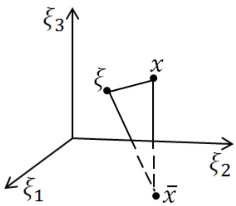

Рис. 6.14

Нехай $x := (x_1,x_2,x_3)$ і $\xi := (\xi_1,\xi_2,\xi_3)$ – точки з Π^+, а $\overline{x}$ – точка, симетрична точці x відносно площини $\{\xi_3=0\}$, тобто $\overline{x}=(x_1,x_2,-x_3)$ (рис. 6.14). Розглянемо функцію $g(x,\xi) := -\dfrac{1}{4\pi r_{\overline{x}\xi}}$, $\{x,\xi\}\subset\Pi^+$. Вона гармонічна при $\xi_3>0$ і дорівнює $-\dfrac{1}{4\pi r_{x\xi}}$ при $\xi_3=0$, бо $r_{\overline{x}\xi}=r_{x\xi}$ при $\xi_3=0$.

Отже, для півпростору Π^+ функція Гріна задачі Діріхле для рівняння Лапласа має вигляд

$$G(x,\xi)=\frac{1}{4\pi r_{x\xi}}-\frac{1}{4\pi r_{\overline{x}\xi}},\quad x\in\overline{\Pi^+},\xi\in\overline{\Pi^+}\setminus\{x\}.$$

Тепер запишемо розв'язок задачі, скориставшись формулою (8). Маємо

$$u(x) = -\int\limits_{\{\xi_3=0\}} \partial_{\vec{\nu}_\xi} G(x,\xi)\mu(\xi_1,\xi_2)d\xi_1 d\xi_2 =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^2} \partial_{\xi_3} G(x,\xi)\Big|_{\xi_3=0} \mu(\xi_1,\xi_2)d\xi_1 d\xi_2, \quad x \in \Pi^+.$$

Знак плюс взято перед останнім інтегралом тому, що напрямок зовнішньої нормалі до площини $\{\xi_3 = 0\}$ протилежний напрямку осі $O\xi_3$. Обчислимо $\partial_{\xi_3} G(x,\xi)\Big|_{\xi_3=0}$:

$$\partial_{\xi_3} G(x,\xi)\Big|_{\xi_3=0} = \frac{1}{4\pi}\partial_{\xi_3}\Big(\frac{1}{\sqrt{(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2+(x_3-\xi_3)^2}} -$$

$$-\frac{1}{\sqrt{(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2+(x_3+\xi_3)^2}}\Big)\Big|_{\xi_3=0} =$$

$$= \frac{x_3}{2\pi((x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2+x_3^2)^{3/2}}.$$

Тоді одержимо, що розв'язком задачі є функція

$$u(x) = \frac{x_3}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{\mu(\xi_1,\xi_2)d\xi_1 d\xi_2}{((x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2+x_3^2)^{3/2}}, \quad x \in \Pi^+. \ \blacktriangleright$$

Приклад 2. Побудувати функцію Гріна задачі Діріхле в півкрузі K_R^+ радіуса R.

◀ Згідно із зауваженням 8 функція Гріна задачі Діріхле в крузі K_R з межею C_R має вигляд

$$G_K(x,\xi) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{x\xi}} - \frac{1}{2\pi}\ln\frac{R}{\rho r_{\overline{x}\xi}}, \ x \in \overline{K_R}, \ \xi \in \overline{K_R}\setminus\{x\}.$$

Позначимо верхню межу півкруга K_R^+ через C_R^+, а нижню (відрізок прямої) – через l (рис. 6.15). Відомо, що $G_K(x,\xi) = 0$, $\xi \in C_R^+ \cup C_R^-$. Введемо позначення $G_l := G_K(x,\xi)|_{\xi\in l}$. Шукана

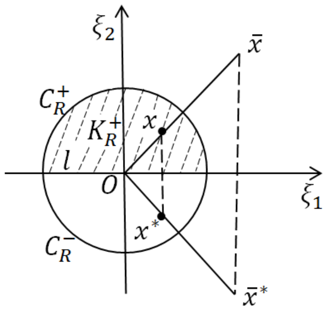

Рис.6.15

функція Гріна G повинна задовольняти умови

$$\begin{cases} G(x,\xi)|_{\xi\in C_R^+} = 0, \\ G(x,\xi)|_{\xi\in l} = 0. \end{cases}$$

Нехай x^* – точка, симетрична x відносно l, а $\overline{x}^*$ – симетрична x^* відносно C_R^-. Розглянемо $G_K(x^*,\xi)$. Оскільки $|x-\xi| = |x^*-\xi|$ для всіх $\xi \in l$, то $G_K(x,\xi)|_{\xi\in C_R} = 0$, тому $G_K(x^*,\xi)|_{\xi\in C_R^+} = 0$.

Переконаємося, що різниця

$$G(x,\xi) := G_K(x,\xi) - G_K(x^*,\xi),\ x \in \overline{K_R^+},\ \xi \in \overline{K_R^+} \setminus \{x\},$$

і є шуканою функцією Гріна. Справді, $G(x,\xi)|_{\xi\in l} = G_l - G_l = 0$,

$$G(x,\xi)|_{\xi\in C_R^+} = G_K(x,\xi)|_{\xi\in C_R} - G_K(x^*,\xi)|_{\xi\in C_R^+} = 0,$$

а це означає, що G як функція ξ дорівнює нулю скрізь на межі півкруга $\overline{K_R^+}$. Очевидно, що ця функція гармонічна скрізь у K_R^+, крім точки x.

Отже, функцією Гріна задачі Діріхле в півкрузі K_R^+ є функція

$$G(x,\xi) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{x\xi}} - \frac{1}{2\pi}\ln\frac{R}{\rho r_{\overline{x}\xi}} - \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{x^*\xi}} +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\ln\frac{R}{\rho r_{\overline{x}^*\xi}},\ x \in \overline{K_R^+},\ \xi \in \overline{K_R^+} \setminus \{x\}. \blacktriangleright$$

6.4.6 Наслідки з формули Пуассона.

Формула Пуассона (23) для випадку простору $\mathbb{R}^3$ та аналогічна формула із зауваження 8 для площини $\mathbb{R}^2$ дозволяють довести наступні твердження, що стосуються подальших властивостей гармонічних функцій. Ці твердження наведено тільки для випадку простору $\mathbb{R}^3$.

Наслідок 1 (нерівності Гарнака). *Якщо u – невід'ємна гармонічна функція в області Ω, то її значення в довільній точці $x \in K_R(x^0) \subset \Omega$ задовольняє нерівності*

$$\frac{R(R-\rho)}{(R+\rho^2)}u(x^0) \le u(x) \le \frac{R(R+\rho)}{(R-\rho)^2}u(x^0). \qquad (31)$$

◀ Розглянемо кулю $K_R(x^0) \subset \Omega$ і зафіксуємо точку $x \in \in K_R(x^0)$ (рис. 6.16). З $\triangle x^0 \xi x$ випливають нерівності

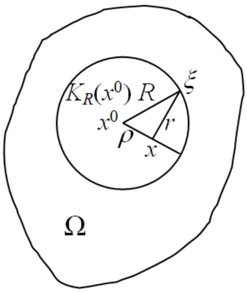

Рис. 6.16

$$R-\rho < r < R+\rho,$$

а отже,

$$\frac{1}{R+\rho} < \frac{1}{r} < \frac{1}{R-\rho}. \qquad (32)$$

Розглянемо ядро Пуассона (24) та оцінимо його, скориставшись (32):

$$\frac{R^2-\rho^2}{4\pi R(R+\rho)^3} < G_1(x,\xi) < \frac{R^2-\rho^2}{4\pi R(R-\rho)^3}$$

або

$$\frac{R-\rho}{4\pi R(R+\rho)^2} < G_1(x,\xi) < \frac{R+\rho}{4\pi R(R-\rho)^2}.$$

Помножимо всі частини нерівностей на $u(\xi) \ge 0$:

$$\frac{R(R-\rho)}{(R+\rho)^2}\frac{1}{4\pi R^2}u(\xi) < G_1(x,\xi)u(\xi) < \frac{R(R+\rho)}{(R-\rho)^2}\frac{1}{4\pi R^2}u(\xi).$$

Зінтегрувавши ці нерівності по сфері $S_R(x^0)$, отримаємо

$$\frac{R(R-\rho)}{(R+\rho)^2}\frac{1}{4\pi R^2}\int\limits_{S_R(x^0)} u(\xi)d_\xi S_R \le \int\limits_{S_R(x^0)} G_1(x,\xi)u(\xi)d_\xi S_R \le$$

$$\le \frac{R(R+\rho)}{(R-\rho)^2}\frac{1}{4\pi R^2}\int\limits_{S_R(x^0)} u(\xi)d_\xi S_R.$$

Звідси за допомогою формули (23) та властивості $\mathbf{2^0}$ з пункту 6.3.2 про середнє арифметичне гармонічної функції випливають нерівності (31). ►

Наслідок 2 (теорема Ліувілля). *Якщо в усьому просторі* $\mathbb{R}^3$ *функція* u *гармонічна та обмежена зверху або знизу, то вона є сталою в* $\mathbb{R}^3$.

◄ Нехай, наприклад, $u(x) \le M$, $x \in \mathbb{R}^3$. Розглянемо функцію $v(x) := M - u(x)$, $x \in \mathbb{R}^3$, яка є гармонічною і невід'ємною. Застосувавши для неї нерівності Гарнака в кулі $K_R(0)$ довільного радіуса $R > 0$, дістанемо

$$\frac{R(R-\rho)}{(R+\rho)^2}v(0) \le v(x) \le \frac{R(R+\rho)}{(R-\rho)^2}v(0),\ x \in K_R(0).$$

Зафіксуємо точку x і перейдемо до границі при $R \to +\infty$. Тоді одержимо, що

$$v(0) \le v(x) \le v(0),$$

тобто $v(x) = v(0)$, $x \in \mathbb{R}^3$. Звідси випливає, що $u(x) = u(0)$, $x \in \mathbb{R}^3$.

Аналогічно розглядається випадок, коли $u(x) \ge M$, $x \in \mathbb{R}^3$, при цьому треба взяти $v = u - M$. ►

Наслідок 3 (теорема Гарнака). *Нехай* $\{u_k, k \in \mathbb{N}\}$ *– послідовність гармонічних в* Ω *і неперервних в* $\overline{\Omega}$ *функцій. Якщо ця послідовність збігається рівномірно на межі* S *області* Ω, *то вона рівномірно збігається в* $\overline{\Omega}$ *і її границя* u *є гармонічною в* Ω *і неперервною в* $\overline{\Omega}$ *функцією.*

◄ З рівномірної збіжності послідовності $\{u_k, k \in \mathbb{N}\}$ на S, згідно з критерієм Коші, одержуємо, що для довільного $\varepsilon > 0$ існує номер $k_0 \in \mathbb{N}$ такий, що для будь-яких $k \ge k_0$ і $m \ge k_0$ виконується нерівність $|u_k(x) - u_m(x)| < \varepsilon$ для всіх $x \in S$. Оскільки найбільше та найменше значення гармонічної в області Ω і неперервної в $\overline{\Omega}$ функції досягається на межі S області Ω, то правильною є нерівність $|u_k(x) - u_m(x)| < \varepsilon$ для всіх $x \in \overline{\Omega}$ та довільних $k \ge k_0$ і $m \ge k_0$. Це означає, що для послідовності $\{u_k, k \in \mathbb{N}\}$ в області $\overline{\Omega}$ виконуються умови критерію Коші рівномірної збіжності функціональної послідовності, тому вона збігається рівномірно в $\overline{\Omega}$ і її границя u є неперервною функцією, тобто $u \in C(\overline{\Omega})$.

Доведемо, що u є гармонічною функцією в Ω. Візьмемо довільну точку $x^0 \in \Omega$ і розглянемо кулю $K_R(x^0) \subset \Omega$ з межею $S_R(x^0)$. Тоді гармонічні функції u_k, $k \in \mathbb{N}$, можна зобразити у вигляді інтегралів Пуассона

$$u_k(x) = \int\limits_{S_R(x^0)} G_1(x,\xi) u_k(\xi) d_\xi S_R, \quad x \in K_R(x^0).$$

Якщо перейти до границі при $k \to \infty$, що можливо, бо $\{ u_k,\, k \in \mathbb{N} \}$ збігається рівномірно в $\overline{\Omega}$, то дістанемо рівність

$$u(x) = \int\limits_{S_R(x^0)} G_1(x,\xi) u(\xi) d_\xi S_R, \quad x \in K_R(x^0).$$

Звідси випливає, що функція u гармонічна в $K_R(x^0)$, де $K_R(x^0)$ – довільна куля, що міститься в Ω, тому u є гармонічною в Ω. ▶

6.5 Застосування методу Фур'є до розв'язування крайових задач для рівнянь еліптичного типу

У попередніх розділах ми неодноразово використовували метод Фур'є відокремлення змінних при розв'язуванні мішаних задач для рівнянь гіперболічного та параболічного типів. Тут застосуємо цей метод до розв'язування крайових задач для рівнянь еліптичного типу.

6.5.1 Задача Діріхле для рівняння Лапласа в прямокутнику. Нехай $\Pi := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \big| 0 < x < p,\, 0 < y < q\}$. Розглянемо задачу про знаходження функції $u \in C^2(\Pi) \cap C(\overline{\Pi})$, яка задовольняє рівняння Лапласа

$$\Delta_{x,y} u := (\partial_x^2 + \partial_y^2) u = 0, \quad (x,y) \in \Pi, \tag{1}$$

і крайові умови

$$u|_{y=0} = f_1(x), \quad u|_{y=q} = f_2(x), \quad x \in [0,p], \tag{2}$$

$$u|_{x=0} = g_1(y), \quad u|_{x=p} = g_2(y), \quad y \in [0, q]. \tag{3}$$

При цьому припускається, що функції f_1, f_2, g_1, g_2 неперервні й узгоджені, тобто їхні значення збігаються у вершинах прямокутника.

Розв'язок задачі (1)–(3) шукатимемо у вигляді

$$u(x, y) = v(x, y) + w(x, y),\ (x, y) \in \Pi, \tag{4}$$

де за функцію v береться розв'язок задачі

$$\Delta_{x,y} v = 0, \quad (x, y) \in \Pi, \tag{5}$$

$$v|_{y=0} = f_1(x), \quad v|_{y=q} = f_2(x), \quad x \in [0, p], \tag{6}$$

$$v|_{x=0} = 0, \quad v|_{x=p} = 0, \quad y \in [0, q]. \tag{7}$$

Тоді функція w повинна бути розв'язком задачі

$$\Delta_{x,y} w = 0, \quad (x, y) \in \Pi, \tag{8}$$

$$w|_{y=0} = 0, \quad w|_{y=q} = 0, \quad x \in [0, p], \tag{9}$$

$$w|_{x=0} = g_1(y), \quad w|_{x=p} = g_2(y), \quad y \in [0, q]. \tag{10}$$

Розв'язуватимемо задачу (5)–(7) методом відокремлення змінних, згідно з яким шукатимемо ненульові розв'язки рівняння (5), які задовольняють крайові умови (7), у вигляді

$$v(x, y) = X(x)Y(y). \tag{11}$$

Тоді, подібно до того, як було раніше у випадку гіперболічних та параболічних рівнянь, для функції X маємо задачу Штурма–Ліувілля

$$\begin{gathered} X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \\ X(0) = 0, \quad X(p) = 0, \end{gathered} \tag{12}$$

а Y є розв'язком рівняння

$$Y''(y) - \lambda^2 Y(y) = 0. \tag{13}$$

Відомо, що власними числами задачі (12) є $\lambda_k = \dfrac{k\pi}{p}$, $k \in \mathbb{N}$, а відповідними власними функціями – $X_k = \sin\dfrac{k\pi x}{p}$, $k \in \mathbb{N}$. Загальний розв'язок рівняння (13) при $\lambda = \lambda_k$ має вигляд

$$Y_k(y) = A_k e^{\frac{k\pi y}{p}} + B_k e^{-\frac{k\pi y}{p}}, \quad k \in \mathbb{N},$$

де A_k і B_k – довільні сталі. Тому розв'язок задачі (5)–(7) шукаємо у вигляді

$$v(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty}(A_k e^{\frac{k\pi y}{p}} + B_k e^{-\frac{k\pi y}{p}}) \sin\frac{k\pi x}{p}, (x,y) \in \Pi. \tag{14}$$

Якщо ряд (14) збігається рівномірно в $\overline{\Pi}$, а ряди, одержані почленним диференціюванням цього ряду двічі за x і y, збігаються рівномірно в Π, то сума v ряду (14) задовольняє рівняння (5) і крайові умови (7), бо таку властивість мають члени ряду. Задовольнивши функцією v умови (6), дістанемо таку систему рівнянь для знаходження коефіцієнтів A_k і B_k:

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(A_k + B_k) \sin\frac{k\pi x}{p} = f_1(x), \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(A_k e^{\frac{k\pi q}{p}} + B_k e^{-\frac{k\pi q}{p}}) \sin\frac{k\pi x}{p} = f_2(x), \quad x \in [0,p]. \end{cases}$$

Звідси випливає, що

$$\begin{cases} A_k + B_k = \dfrac{2}{p}\displaystyle\int_0^p f_1(x) \sin\frac{k\pi x}{p} dx, \\ A_k e^{\frac{k\pi q}{p}} + B_k e^{-\frac{k\pi q}{p}} = \dfrac{2}{p}\displaystyle\int_0^p f_2(x) \sin\frac{k\pi x}{p} dx, k \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{15}$$

Розв'язавши цю систему, знайдемо A_k і B_k, $k \in \mathbb{N}$, а підставивши їх у ряд (14), дістанемо формальний розв'язок задачі (5)–(7).

Повторивши наведені вище міркування, знайдемо формальний розв'язок задачі (8)–(10)

$$w(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}(C_k e^{\frac{k\pi x}{q}}+D_k e^{-\frac{k\pi x}{q}})\sin\frac{k\pi y}{q},\ (x,y)\in\Pi, \qquad (16)$$

$$\begin{cases} C_k+D_k=\dfrac{2}{q}\displaystyle\int_0^q g_1(y)\sin\frac{k\pi y}{q}dy, \\ C_k e^{\frac{k\pi p}{q}}+D_k e^{-\frac{k\pi p}{q}}=\dfrac{2}{q}\displaystyle\int_0^q g_2(y)\sin\frac{k\pi y}{q}dy, k\in\mathbb{N}. \end{cases} \qquad (17)$$

Використовуючи (4), (14) і (16), дістаємо формальний розв'язок задачі (1)–(3).

Якщо функції f_1, f_2, g_1, g_2 такі, що ряди (14), (16) з коефіцієнтами, які визначаються з систем (15) і (17), збігаються рівномірно в $\overline{\Pi}$, а ряди, одержані їх почленним диференціюванням двічі за x і y, збігаються рівномірно в Π, то функція $u=v+w$ буде розв'язком задачі (1)–(3) з класу $C^2(\Pi)\cap C(\overline{\Pi})$.

Зауваження 1. Аналогічно розв'язуються крайові задачі для рівняння Лапласа (1) з іншими крайовими умовами. Природно, що при цьому власні числа та власні функції будуть, узагалі кажучи, іншими.

Приклад 1. У прямокутнику Π знайти розв'язок рівняння Лапласа (1), який задовольняє крайові умови

$$u_x(0,y)=0,\quad u_x(p,y)=0,\quad y\in[0,q],$$

$$u(x,0)=A,\quad u(x,q)=Bx,\quad x\in[0,p].$$

◀ Оскільки крайові умови за x нульові, то задачу розв'язуватимемо методом Фур'є, тобто шукатимемо ненульові розв'язки рівняння, які задовольняють нульові крайові умови, у вигляді $u(x,y)=X(x)Y(y)$. Тоді дістанемо для знаходження функції Y рівняння

$$Y''(y)-\lambda^2 Y(y)=0,\quad y\in[0,q],$$

а функції X – задачу Штурма–Ліувілля

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, & x \in [0,p], \\ X'(0) = 0, \quad X'(p) = 0. \end{cases}$$

Розв'язуючи задачу Штурма–Ліувілля, одержуємо:

$$X(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x, \quad X'(x) = -C_1 \lambda \sin \lambda x + C_2 \lambda \cos \lambda x;$$

$$\begin{cases} 0 = C_2 \lambda, & C_2 \neq 0, \\ 0 = C_1 \lambda \sin \lambda p, & C_1 \neq 0, \end{cases} \sin \lambda p = 0;$$

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{p}, \quad X_n(x) = \cos \frac{n\pi x}{p}, \quad x \in [0,p], \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Тоді $Y_n(y) = C_n e^{\frac{n\pi y}{p}} + D_n e^{-\frac{n\pi y}{p}}$, $n \in \mathbb{N}$, а $Y_0(y) = C_0 + D_0 y$, $y \in [0,q]$.

Запишемо ряд

$$u(x,y) = C_0 + D_0 y + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n e^{\frac{n\pi y}{p}} + D_n e^{-\frac{n\pi y}{p}}) \cos \frac{n\pi x}{p}, (x,y) \in \Pi,$$

і задовольнимо ненульові крайові умови:

$$\begin{cases} A = C_0 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (C_n + D_n) \cos \dfrac{n\pi x}{p}, \\ Bx = C_0 + D_0 q + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (C_n e^{\frac{n\pi q}{p}} + D_n e^{-\frac{n\pi q}{p}}) \cos \frac{n\pi x}{p}, \quad x \in [0,p]. \end{cases}$$

Звідси, скориставшись формулами для знаходження коефіцієнтів ряду Фур'є, дістанемо

$$C_0 = A, \; C_n + D_n = 0, \; C_0 + D_0 q = \frac{1}{p} \int\limits_0^p Bx dx = \frac{pB}{2},$$

$$C_n e^{\frac{n\pi q}{p}} + D_n e^{-\frac{n\pi q}{p}} = \frac{2}{p} \int\limits_0^p Bx \cos \frac{n\pi x}{p} dx =$$

$$= \frac{2Bp}{(n\pi)^2}((-1)^n - 1) = \begin{cases} 0, & n = 2k, \\ -\dfrac{4Bp}{(2k-1)^2\pi^2}, & n = 2k-1, k \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

а отже, $C_0 = A$, $D_0 = \dfrac{Bp - 2A}{2q}$,

$$C_n = D_n = \begin{cases} 0, & n = 2k, \\ -\dfrac{4Bp}{(2k-1)^2 \operatorname{sh} \frac{(2k-1)\pi q}{p}}, & n = 2k-1,\ k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Тоді розв'язком вихідної задачі є функція

$$u(x,y) = A + \frac{Bp - 2A}{2q} y - \frac{4Bp}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \frac{\operatorname{sh} \frac{(2k-1)\pi y}{p}}{\operatorname{sh} \frac{(2k-1)\pi q}{p}} \times$$

$$\times \cos \frac{(2k-1)\pi}{p} x, \quad (x,y) \in \Pi,$$

де $\operatorname{sh} \alpha := \dfrac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{2}$. ▶

6.5.2 Задача Діріхле для рівняння Пуассона в прямокутнику. В прямокутнику Π такому, як у пункті 6.5.1, розглянемо задачу про знаходження функції $u \in C^2(\Pi) \cap C(\overline{\Pi})$, яка задовольняє рівняння

$$\Delta_{x,y} u = F(x,y), \quad (x,y) \in \Pi, \tag{18}$$

і крайові умови

$$u|_{y=0} = f_1(x), \quad u|_{y=q} = f_2(x), \quad x \in [0,p], \tag{19}$$

$$u|_{x=0} = g_1(y), \quad u|_{x=p} = g_2(y), \quad y \in [0,q]. \tag{20}$$

Шукатимемо розв'язок задачі (18) – (20) у вигляді суми

$$u(x,y) = v(x,y) + w(x,y), \ \ (x,y) \in \Pi, \tag{21}$$

де функція v є розв'язком задачі

$$\begin{array}{c} \Delta_{x,y} v = 0, \quad (x,y) \in \Pi, \\ v|_{y=0} = f_1(x), \quad v|_{y=q} = f_2(x), \quad x \in [0,p], \\ v|_{x=0} = g_1(y), \quad u|_{x=p} = g_2(y), \quad y \in [0,q], \end{array} \tag{22}$$

а функція w – розв'язком задачі

$$\Delta_{x,y} w = F(x,y), \quad (x,y) \in \Pi, \tag{23}$$

$$w|_{y=0} = 0, \quad w|_{y=q} = 0, \quad x \in [0,p], \tag{24}$$

$$w|_{x=0} = 0, \quad w|_{x=p} = 0, \quad y \in [0,q]. \tag{25}$$

Задача (22) розв'язана в попередньому пункті. Залишилося розв'язати задачу (23)–(25), тобто знайти розв'язок неоднорідного рівняння (23), який задовольняє нульові крайові умови (24), (25). При розв'язуванні цієї задачі можливі два різних підходи.

1) Розв'язок задачі (23)–(25) шукатимемо у вигляді ряду за власними функціями відповідної одновимірної задачі Штурма–Ліувілля, тобто ряду

$$w(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} Y_k(y) \sin \frac{k\pi x}{p}, \quad (x,y) \in \Pi. \tag{26}$$

Очевидно, що функція w задовольняє нульові крайові умови (25) при довільному $y \in [0,q]$, бо цю властивість мають функції $\sin \dfrac{k\pi x}{p}$, $k \in \mathbb{N}$. Задовольнимо функцією w рівняння (23) і крайові умови (24). Підставляючи (26) у рівняння (23) та розкладаючи функцію F у ряд Фур'є за системою $\left\{ \sin \dfrac{k\pi x}{p}, k \in \mathbb{N} \right\}$, дістаємо

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Big(Y_k''(y) - \Big(\frac{k\pi}{p}\Big)^2 Y_k(y) \Big) \sin \frac{k\pi x}{p} = \sum_{k=1}^{\infty} h_k(y) \sin \frac{k\pi x}{p},$$

$$(x,y) \in \Pi,$$

де

$$h_k(y) := \frac{2}{p} \int\limits_0^p F(x,y) \sin \frac{k\pi x}{p} dx, \quad y \in [0,q].$$

З єдиності розкладу функції в ряд Фур'є випливає, що Y_k, $k \in \mathbb{N}$, є розв'язками рівняння

$$Y_k''(y) - \Big(\frac{k\pi}{p}\Big)^2 Y_k(y) = h_k(y), \quad y \in [0,q], k \in \mathbb{N}. \tag{27}$$

Задовольнивши рядом (26) крайові умови (24), одержимо, що

$$Y_k(0) = 0, \quad Y_k(q) = 0. \tag{28}$$

Якщо $\tilde{Y}_k(y)$ – частинний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння (27), то загальний розв'язок цього рівняння має вигляд

$$Y_k(y) = C_k e^{\frac{k\pi y}{p}} + D_k e^{-\frac{k\pi y}{p}} + \tilde{Y}_k(y), \quad y \in [0,q]. \tag{29}$$

Функція (29) повинна задовольняти умови (28), а тому

$$\begin{cases} C_k + D_k + \tilde{Y}_k(0) = 0, \\ C_k e^{\frac{k\pi q}{p}} + D_k e^{-\frac{k\pi q}{p}} + \tilde{Y}_k(q) = 0. \end{cases}$$

Знайшовши звідси значення C_k, D_k, $k \in \mathbb{N}$, і, підставивши їх в (29), а потім Y_k – в (26), дістанемо формальний розв'язок задачі (23)–(25). Цей розв'язок належатиме до класу $C^2(\Pi) \cap C(\overline{\Pi})$, якщо ряд (26) збігається рівномірно в $\overline{\Pi}$ та його можна почленно диференціювати двічі за x і y в Π.

2) Другий підхід передбачає використання власних функцій двовимірної задачі Штурма–Ліувілля, як це було при розв'язуванні задачі про коливання прямокутної мембрани в підрозділі 4.6. Для крайової задачі

$$\Delta_{x,y} w = -\lambda^2 w,$$

$$w|_{y=0} = 0, \quad w|_{y=q} = 0,$$

$$w|_{x=0} = 0, \quad w|_{x=p} = 0$$

власними числами та власними функціями є відповідно

$$\lambda_{kl}^2 = \Big(\frac{k\pi}{p}\Big)^2 + \Big(\frac{l\pi}{q}\Big)^2$$

та

$$X_{kl}(x,y)=\sin\frac{k\pi x}{p}\sin\frac{l\pi y}{q},\quad \{k,l\}\subset\mathbb{N}.$$

Розв'язок задачі (23) – (25) шукаємо у вигляді ряду за системою власних функцій $\{X_{kl},\{k,l\}\subset\mathbb{N}\}$, тобто

$$w(x,y)=\sum_{k,l=1}^{\infty}A_{kl}\sin\frac{k\pi x}{p}\sin\frac{l\pi y}{q},\ (x,y)\in\Pi. \tag{30}$$

Якщо підставити (30) у рівняння (23) і подати функцію F у вигляді ряду за цією самою системою, то дістанемо

$$-\sum_{k,l=1}^{\infty}A_{kl}\left(\left(\frac{k\pi}{p}\right)^2+\left(\frac{l\pi}{q}\right)^2\right)\sin\frac{k\pi x}{p}\sin\frac{l\pi y}{q}=$$

$$=\sum_{k,l=1}^{\infty}F_{kl}\sin\frac{k\pi x}{p}\sin\frac{l\pi y}{q}, \tag{31}$$

де F_{kl} – коефіцієнти Фур'є функції F, тобто

$$F_{kl}=\frac{4}{pq}\int\limits_0^p dx\int\limits_0^q F(x,y)\sin\frac{k\pi x}{p}\sin\frac{l\pi y}{q}dy.$$

На підставі єдиності розкладу функції в ряд Фур'є з (31) знаходимо

$$A_{kl}=-\frac{1}{\lambda_{kl}^2}F_{kl},\quad \{k,l\}\subset\mathbb{N}.$$

Підставивши ці значення A_{kl} в (30), дістанемо формальний розв'язок задачі (23)–(25). Цей розв'язок належить до класу $C^2(\Pi)\cap C(\overline{\Pi})$, якщо ряд (30) збігається рівномірно в $\overline{\Pi}$ і його можна почленно диференціювати двічі за x і y в Π.

Зауваження 2. Якщо неоднорідність у рівнянні (18) залежить лише від однієї змінної, наприклад, від x, то задачу (18)–(20) можна звести до задачі Діріхле для рівняння Лапласа за допомогою заміни

$$u(x,y)=v(x,y)+w(x),\ \ (x,y)\in\Pi,$$

де w – розв'язок рівняння (23), який задовольняє крайові умови (25).

Приклад 2. Знайти розв'язок рівняння Пуассона

$$\Delta_{x,y}u = -2,\ (x,y) \in \Pi' := \Big\{(x,y)\,\Big|\, x \in (0,a), y \in \Big(-\frac{b}{2},\frac{b}{2}\Big)\Big\},$$

який на межі прямокутника Π' дорівнює нулю.

◀ Математична модель задачі така:

$$\Delta_{x,y}u = -2, \quad (x,y) \in \Pi',$$

$$u(0,y) = 0, u(a,y) = 0, \quad y \in \Big[-\frac{b}{2},\frac{b}{2}\Big],$$

$$u\Big(x,-\frac{b}{2}\Big) = 0, u\Big(x,\frac{b}{2}\Big) = 0, \quad x \in [0,a].$$

Шукатимемо розв'язок цієї задачі у вигляді

$$u(x,y) = v(x,y) + w(x,y), \quad (x,y) \in \Pi',$$

де w – розв'язок задачі

$$\Delta_{x,y}w = -2, \quad (x,y) \in \Pi',$$

$$w(0,y) = 0, w(a,y) = 0, \quad y \in \Big[-\frac{b}{2},\frac{b}{2}\Big].$$

Згідно з зауваженням 2, можна взяти $w = f(x)$, $x \in [0,a]$. Тоді для f маємо задачу

$$f''(x) = -2, \quad f(0) = 0,\ f(a) = 0.$$

Очевидно, що $f(x) = -x^2 + C_1x + C_2$. Задовольнивши нульові крайові умови, дістанемо $C_2 = 0$, $C_1 = a$. Тому

$$w = -x^2 + ax \ \text{ або } \ w = x(a-x).$$

Для функції v матимемо задачу

$$\Delta_{x,y}v = 0, \quad (x,y) \in \Pi',$$

$$v(0,y)=0,\ v(a,y)=0,\quad y\in\Big[-\frac{b}{2},\frac{b}{2}\Big],$$

$$v\Big(x,-\frac{b}{2}\Big)=x^2-ax,\ v\Big(x,\frac{b}{2}\Big)=x^2-ax,\quad x\in[0,a].$$

Цю задачу розв'язуватимемо методом Фур'є, згідно з яким

$$v(x,y)=X(x)Y(y),$$

де Y є розв'язком рівняння

$$Y''(y)-\lambda^2 Y(y)=0,$$

а X – ненульовий розв'язок задачі Штурма–Ліувілля (12).

Як відомо з попереднього, власними числами такої задачі є $\lambda_n=\dfrac{n\pi}{a}$, а власними функціями – $X_n(x)=\sin\dfrac{n\pi x}{a}$, $x\in[0,a]$, $n\in\mathbb{N}$.

При $\lambda=\lambda_n$ розв'язками рівняння для функції Y є

$$Y_n(y)=A_n e^{\frac{n\pi y}{a}}+B_n e^{-\frac{n\pi y}{a}},\quad y\in\Big[-\frac{b}{2},\frac{b}{2}\Big].$$

Далі розглянемо ряд

$$v(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}(A_n e^{\frac{n\pi y}{a}}+B_n e^{-\frac{n\pi y}{a}})\sin\frac{n\pi x}{a},(x,y)\in\Pi',$$

і задовольнимо ненульові крайові умови. Тоді дістанемо

$$\begin{cases} x^2-ax=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(A_n e^{-\frac{n\pi b}{2a}}+B_n e^{\frac{n\pi b}{2a}})\sin\frac{n\pi x}{a},\\ x^2-ax=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(A_n e^{\frac{n\pi b}{2a}}+B_n e^{-\frac{n\pi b}{2a}})\sin\frac{n\pi x}{a},\quad x\in[0,a],\end{cases}$$

звідки випливає, що

$$\begin{cases} A_n e^{-\frac{n\pi b}{2a}}+B_n e^{\frac{n\pi b}{2a}}=C_n,\\ A_n e^{\frac{n\pi b}{2a}}+B_n e^{-\frac{n\pi b}{2a}}=C_n,\quad n\in\mathbb{N},\end{cases}$$

а отже, $A_n = B_n = \dfrac{\operatorname{sh}\frac{\pi n b}{2a}}{\operatorname{sh}\frac{\pi n b}{a}} C_n$, де

$$C_n = \frac{2}{a}\int_0^a (x^2 - ax)\sin\frac{n\pi x}{a}dx =$$

$$= \begin{cases} 0, & n = 2k, \\ -\dfrac{8a^2}{((2k-1)\pi)^3}, & n = 2k-1, k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Тому остаточно маємо, що

$$v(x,y) = -\frac{8a^2}{\pi^3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{(2k-1)^3}\frac{\operatorname{sh}\frac{(2k-1)\pi b}{2a}}{\operatorname{sh}\frac{(2k-1)\pi b}{a}}\times$$

$$\times \operatorname{ch}\frac{(2k-1)\pi y}{a}\sin\frac{(2k-1)\pi x}{a}$$

або

$$v(x,y) = -\frac{8a^2}{\pi^3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^3}\frac{\operatorname{ch}\frac{(2k-1)\pi y}{a}}{\operatorname{ch}\frac{(2k-1)\pi b}{2a}}\sin\frac{(2k-1)\pi x}{a},$$

$$(x,y) \in \Pi',$$

оскільки $\operatorname{sh} 2\alpha = 2\operatorname{sh}\alpha\ \operatorname{ch}\alpha$, $\operatorname{ch}\alpha := \dfrac{e^{\,\alpha} + e^{\,-\alpha}}{2}$.

Розв'язком вихідної задачі є функція

$$u(x,y) = x(a-x) - \frac{8a^2}{\pi^3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^3}\frac{\operatorname{ch}\frac{(2k-1)\pi y}{a}}{\operatorname{ch}\frac{(2k-1)\pi b}{2a}}\sin\frac{(2k-1)\pi x}{a},$$

$$(x,y) \in \Pi'. \blacktriangleright$$

6.5.3 Задача Діріхле для рівняння Лапласа в крузі. Нехай K_R – круг в $\mathbb{R}^2$ радіуса R з центром у точці O, а S_R – його межа, тобто коло радіуса R з центром в точці O (рис. 6.17).

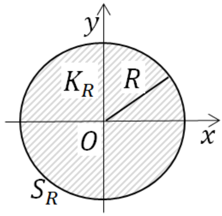

Рис. 6.17

Розглянемо внутрішню задачу Діріхле

$$\Delta_{x,y} u = 0 \text{ в } K_R, \tag{32}$$

$$u|_{S_R} = \mu. \tag{33}$$

Перейдемо від координат декартових x, y до полярних r, φ згідно з формулами $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, скористаємося виразом (5) з пункту 6.1.1 для оператора Лапласа і запишемо задачу (32), (33) у вигляді

$$r(ru_r)_r + u_{\varphi\varphi} = 0, \quad (r, \varphi) \in (0, R) \times [0, 2\pi], \tag{34}$$

$$u(r, \varphi)|_{r=R} = \mu(\varphi), \quad \varphi \in [0, 2\pi]. \tag{35}$$

При цьому для функцій u і μ ми не змінили позначення. З вимоги неперервності та регулярності розв'язку випливають умови

$$u(r, 0) = u(r, 2\pi), \quad r \in (0, R],$$

$$|u(r, \varphi)| \leq M, \quad (r, \varphi) \in (0, R] \times [0, 2\pi]. \tag{36}$$

Розв'язуватимемо задачу (34)–(36) методом Фур'є. Згідно з цим методом шукатимемо ненульові розв'язки рівняння (34), які задовольняють умови (36), у вигляді

$$u(r, \varphi) = X(r)\Phi(\varphi), \quad (r, \varphi) \in (0, R] \times [0, 2\pi]. \tag{37}$$

Підставляючи (37) у (34) і відокремлюючи змінні, дістаємо

$$\frac{r(rX'(r))'}{X(r)} = -\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = \lambda^2.$$

Звідси одержуємо два звичайних диференціальних рівняння, а з умови (36) відповідні умови до них:

$$r(rX'(r))' - \lambda^2 X(r) = 0, \quad r \in (0, R],$$

$$|X(r)| \leq M, \quad r \in (0, R], \tag{38}$$

$$\Phi''(\varphi) + \lambda^2 \Phi(\varphi) = 0, \quad \varphi \in [0, 2\pi], \tag{39}$$

$$\Phi(0) = \Phi(2\pi). \tag{40}$$

Задача (39), (40) є задачею Штурма–Ліувілля. Загальний розв'язок рівняння (39) визначається формулами

$$\Phi(\varphi) = C_1 \cos \lambda\varphi + C_2 \sin \lambda\varphi, \quad \lambda \neq 0,$$

$$\Phi(\varphi) = C_3 + C_4\varphi, \quad \lambda = 0. \tag{41}$$

З умови (40) випливає, що

$$C_1 \cos 0 + C_2 \cdot 0 = C_1 \cos 2\pi\lambda + C_2 \sin 2\pi\lambda,$$

тобто

$$\begin{cases} \sin 2\pi\lambda = 0, \\ \cos 2\pi\lambda = 1 \end{cases} \quad \text{або} \ \ \lambda_n = n, n \in \mathbb{N};$$

$$C_3 + C_4 \cdot 0 = C_3 + C_4 \cdot 2\pi,$$

звідки $C_4 = 0$, $\lambda_0 = 0$. Отже, власними числами задачі (39), (40) є $\lambda_n = n$, $n \in \mathbb{Z}_+$, а власними функціями – функції

$$\Phi_0(\varphi) = A_0,$$

$$\Phi_n(\varphi) = A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi, \ n \in \mathbb{N}, \ \varphi \in [0, 2\pi]. \tag{42}$$

Розглянемо тепер задачу (38). При $\lambda = \lambda_n$, $n \in \mathbb{N}$, маємо рівняння

$$r^2 X_n''(r) + r X_n'(r) + n^2 X_n(r) = 0,$$

яке є рівнянням Ейлера. Шукатимемо його частинні розв'язки у вигляді $X_n(r) = r^\alpha$. Тоді дістанемо

$$\alpha(\alpha - 1) + \alpha - n^2 = 0, \quad \alpha = \pm n.$$

Тому лінійно незалежними розв'язками рівняння є $X_{n1}(r) = r^n$ і $X_{n2} = r^{-n}$, а загальний розв'язок визначається формулою

$$X_n(r) = C_n r^n + D_n r^{-n}, \quad r > 0, \ n \in \mathbb{N}. \tag{43}$$

де C_n і D_n – довільні сталі. Якщо ж $\lambda = 0$, то маємо рівняння

$$r^2 X_0''(r) + r X_0'(r) = 0 \ \text{ або } \ r X_0''(r) + X_0'(r) = 0,$$

загальним розв'язком якого є

$$X_0(r) = C_0 + D_0 \ln r, \quad r > 0. \tag{44}$$

З умови обмеженості функцій X_n, $n \in \mathbb{Z}_+$, випливає, що $D_n = 0$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Покладемо для зручності в (43) і (44) $C_n = \dfrac{1}{R^n}$ і $C_0 = \dfrac{1}{2}$.

Отже, ненульові розв'язки рівняння (34), які задовольняють умови (36), визначаються формулами

$$u_n(r,\varphi) = \left(\frac{r}{R}\right)^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi), \quad n \in \mathbb{N},$$

$$u_0(r,\varphi) = \frac{1}{2} A_0, \ \ (r,\varphi) \in [0,R] \times [0,2\pi].$$

Щоб задовольнити умову (35), розглянемо ряд

$$u(r,\varphi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi),$$

$$(r,\varphi) \in [0,R] \times [0,2\pi]. \tag{45}$$

Якщо цей ряд збігається рівномірно в області $[0,R]\times[0,2\pi]$ і допускає почленне диференціювання двічі за r і φ в середині цієї області, то його сума є розв'язком рівняння (34) і задовольняє умови (36). За цих припущень з умови (35) випливає рівність

$$\mu(\varphi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi), \varphi \in [0,2\pi],$$

з якої одержуємо, що

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \mu(\varphi) \cos n\varphi \, d\varphi, \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \mu(\varphi) \sin n\varphi \, d\varphi, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{46}$$

Отже, ряд (45) з коефіцієнтами (46) визначає формальний розв'язок задачі (34)–(36).

Дослідимо ряд (45). Згідно з ознакою Вейєрштрасса він збігається абсолютно й рівномірно, а його сума неперервна в області $[0,R]\times[0,2\pi]$, якщо збігається такий числовий ряд, який його мажорує:

$$\frac{1}{2}|A_0| + \sum_{n=1}^{\infty}(|A_n| + |B_n|). \tag{47}$$

Більше того, умова збіжності ряду (47) забезпечує неперервну диференційовність ряду (45) двічі за r і φ в області $[0,R_0]\times[0,2\pi]$, де R_0 – довільно взяте число з проміжку $(0,R)$. Справді, при двократному почленному диференціюванні ряду (45) за r і φ одержимо ряди

$$\frac{1}{R^2}\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\Big(\frac{r}{R}\Big)^{n-2}(A_n\cos\varphi + B_n\sin\varphi),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2\Big(\frac{r}{R}\Big)^{n}(-A_n\cos n\varphi - B_n\sin n\varphi),$$

мажорантним для яких є збіжний числовий ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} n^2\Big(\frac{R_0}{R}\Big)^{n}(|A_n| + |B_n|), \quad R_0\in(0,R). \tag{48}$$

Легко бачити, що ряд (48) збігається, якщо збігається ряд (47). Останній, як було доведено в пункті 4.3.1 для гіперболічного випадку, збігається, коли виконуються умови:

1) функція μ неперервна та має кусково-неперервну першу похідну на $[0,2\pi]$;

2) $\mu(0)=\mu(2\pi)$.

Отже, за цих умов функція u, яка визначається рівністю (45), є розв'язком задачі (34)–(36) і тим самим є правильною така теорема.

Теорема 6.8. *Якщо виконуються умови 1), 2) для функції μ, то формулою (45) визначається єдиний розв'язок задачі (34)–(36), а отже, й розв'язок задачі (32), (33).*

◀ Існування розв'язку доведено вище, а єдиність встановлено в пункті 6.3.3. ▶

Зауваження 3. Аналогічно розв'язується зовнішня задача Діріхле, тобто задача (32), (33) зовні кулі K_R, яка в полярних координатах має вигляд

$$r(ru_r)_r + u_{\varphi\varphi} = 0, \quad (r, \varphi) \in (R, +\infty) \times [0, 2\pi],$$

$$u(r, \varphi)|_{r=R} = \mu(\varphi), \quad \varphi \in [0, 2\pi].$$

Розв'язок цієї задачі визначається рядом

$$u(r, \varphi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi),$$

$$(r, \varphi) \in [R, +\infty) \times [0, 2\pi],$$

коефіцієнти якого обчислюються за формулами (46).

Зауваження 4. Задача Діріхле для рівняння Лапласа в полярній системі координат у кільці $[R_1, R_2] \times [0, 2\pi]$ має вигляд

$$r(ru_r)_r + u_{\varphi\varphi} = 0, \quad (r, \varphi) \in (R_1, R_2) \times [0, 2\pi],$$

$$u(r, \varphi)|_{r=R_1} = \mu_1(\varphi), u(r, \varphi)|_{r=R_2} = \mu_2(\varphi), \varphi \in [0, 2\pi].$$

Розв'язок цієї задачі знаходиться у вигляді

$$u(r, \varphi) = A_0 \ln r + B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} ((A_n r^n + C_n r^{-n}) \cos n\varphi +$$

$$+(B_n r^n + D_n r^{-n}) \sin n\varphi), \quad (r, \varphi) \in (R_1, R_2) \times [0, 2\pi], \qquad (49)$$

де коефіцієнти визначаються за формулами, аналогічними до (46).

Зауваження 5. Розв'язок задачі (34)–(36), який визначається рядом (45), можна зобразити в інтегральному вигляді, тобто у формі інтеграла Пуассона. Справді, підставимо (46) в (45)

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mu(\alpha) d\alpha + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n \int_0^{2\pi} \mu(\alpha) \cos n(\varphi - \alpha) d\alpha =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \Big(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n \cos n(\varphi - \alpha)\Big)\mu(\alpha)d\alpha. \qquad (50)$$

Усі операції законні, бо ряд збігається рівномірно при $\frac{r}{R} \leq \frac{R_0}{R} < 1$, де R_0 – будь-яке число з $(0, R)$.

Перетворимо вираз у дужках з формули (50). Використовуючи те, що $\left|\left(\frac{r}{R}\right)^n e^{in(\varphi-\alpha)}\right| \leq \left(\frac{r}{R}\right)^n \leq \left(\frac{R_0}{R}\right)^n < 1$, маємо

$$1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n \cos n(\varphi - \alpha) = -1 + 2\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n \cos n(\varphi - \alpha) =$$

$$= -1 + 2\mathrm{Re}\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n e^{in(\varphi-\alpha)} = -1 + 2\mathrm{Re}\frac{1}{1 - \frac{r}{R}e^{i(\varphi-\alpha)}} =$$

$$= -1 + 2\mathrm{Re}\frac{R^2 - Rr\cos(\varphi - \alpha) + iRr\sin(\varphi - \alpha)}{(R - r\cos(\varphi - \alpha))^2 + r^2\sin^2(\varphi - \alpha)} =$$

$$= -1 + 2\frac{R^2 - Rr\cos(\varphi - \alpha)}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\varphi - \alpha)} = \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\varphi - \alpha)}.$$

Тому

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{(R^2 - r^2)\mu(\alpha)d\alpha}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\varphi - \alpha)}, \ (r, \varphi) \in [0, R) \times [0, 2\pi],$$

тобто одержали формулу Пуассона.

Приклад 3. Знайти функцію u, гармонічну всередині кільця $K_{1,2}(0) := \left\{(r, \varphi) \,\middle|\, 1 \leq r \leq 2, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\right\}$, яка задовольняє крайові умови

$$u(1, \varphi) = 0, \quad u(2, \varphi) = 2A\sin\varphi, \quad \varphi \in [0, 2\pi].$$

◄ Математична модель задачі має вигляд

$$r(ru_r)_r + u_{\varphi\varphi} = 0, \quad (r, \varphi) \in K_{1,2}(0),$$

$$u(1,\varphi)=0, u(2,\varphi)=2A\sin\varphi, \ \ \varphi\in[0,2\pi],$$
$$u(r,0)=u(r,2\pi), \quad r\in[1,2].$$

Шукатимемо розв'язок цієї задачі у вигляді ряду (49), де $R_1=1$, $R_2=2$. Задовольняючи цим рядом крайові умови, дістаємо

$$\begin{cases} 0=B_0+\sum\limits_{n=1}^{\infty}((A_n+C_n)\cos n\varphi+(B_n+D_n)\sin n\varphi), \\ 2A\sin\varphi=A_0\ln 2+B_0+\sum\limits_{n=1}^{\infty}((A_n2^n+C_n2^{-n})\cos n\varphi+ \\ \qquad +(B_n2^n+D_n2^{-n})\sin n\varphi), \ \varphi\in[0,2\pi]. \end{cases}$$

Якщо прирівняти в цих рівностях коефіцієнти при $\cos n\varphi$, $\sin n\varphi$, $n\in\mathbb{N}$, і вільні члени, то одержимо

$$\begin{cases} B_0=0, \\ A_0\ln 2+B_0=0; \end{cases} \quad \begin{cases} A_n+C_n=0, \\ A_n2^n+B_n2^{-n}=0, \quad n\in\mathbb{N}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} B_n+D_n=0, \\ B_n2^n+D_n2^{-n}=0, \quad n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}; \end{cases} \quad \begin{cases} B_1+D_1=0, \\ 2B_1+D_1/2=2A. \end{cases}$$

Звідси випливає, що $A_0=B_0=0$, $A_n=C_n=0$, $n\in\mathbb{N}$, $B_n=D_n=0$, $n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$, $B_1=\dfrac{4}{3}A$, $D_1=-\dfrac{4}{3}A$.

Якщо підставити ці коефіцієнти у формулу (49), то дістанемо розв'язок задачі

$$u(r,\varphi)=\left(\frac{4}{3}Ar-\frac{4}{3}Ar^{-1}\right)\sin\varphi=\frac{4A}{3}\left(r-\frac{1}{r}\right)\sin\varphi, (r,\varphi)\in K_{1,2}(0). \ \blacktriangleright$$

Приклад 4. У круговому секторі $D := \left\{(r,\varphi)\,\middle|\, r\in(0,R),\ \varphi\in(0,\alpha)\right\}$ знайти гармонічну функцію, яка задовольняє крайові умови

$$u_\varphi(r,0)=0, \quad u_\varphi(r,\alpha)=0, \quad r\in[0,R],$$

$$u(R,\varphi)=u_0\varphi, \quad \varphi\in[0,\alpha].$$

◀ Згідно з умовою задачі, треба знайти обмежений розв'язок рівняння

$$r(ru_r)_r + u_{\varphi\varphi} = 0, \quad (r,\varphi) \in D, \tag{51}$$

який задовольняє крайові умови

$$u_\varphi(r,0) = 0, \quad u_\varphi(r,\alpha) = 0, \quad r \in [0,R], \tag{52}$$

$$u(R,\varphi) = u_0\varphi, \quad \varphi \in [0,\alpha]. \tag{53}$$

Оскільки рівняння і крайові умови за змінною φ однорідні, то розв'язуватимемо задачу методом Фур'є. Тому шукатимемо ненульові частинні розв'язки рівняння (51), які задовольняють крайові умови (52) у вигляді

$$U(r,\varphi) = X(r)Y(\varphi),\ (r,\varphi) \in D. \tag{54}$$

Підставивши (54) у рівняння (51) і задовольнивши крайові умови (52), дістанемо такі дві задачі:

$$\begin{cases} Y''(\varphi) + \lambda^2 Y(\varphi) = 0, \quad \varphi \in [0,\alpha], \\ Y'(0) = 0,\ \ Y'(\alpha) = 0; \end{cases} \tag{55}$$

$$\begin{cases} r^2 X'(r) + rX'(r) - \lambda^2 X(r) = 0,\ r \in (0,R], \\ |X(0)| < +\infty. \end{cases} \tag{56}$$

Розв'язавши задачу Штурма–Ліувілля (55), одержимо, що її власними числами є $\lambda_n = \dfrac{n\pi}{\alpha}$, а відповідними власними функціями – функції $Y_n(\varphi) = \cos\dfrac{n\pi\varphi}{\alpha}$, $\varphi \in [0,\alpha]$, $n \in \mathbb{Z}_+$.

Розв'язком задачі (56), як доведено вище при розв'язуванні задачі (32)–(33), є функції

$$X_n(r) = A_n r^{\frac{n\pi}{\alpha}}, \quad r \in [0,R],\ n \in \mathbb{Z}_+.$$

Тоді розв'язок задачі (51)–(53) шукатимемо у вигляді

$$u(r,\varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n r^{\frac{n\pi}{\alpha}} \cos\frac{n\pi\varphi}{\alpha}, \quad (r,\varphi) \in D.$$

Задовольнивши цією функцією крайову умову (53), дістанемо

$$u_0\varphi = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n R^{\frac{n\pi}{\alpha}} \cos\frac{n\pi\varphi}{\alpha}, \quad \varphi \in [0, \alpha].$$

Звідси одержуємо, що

$$A_0 = \frac{1}{\alpha}\int\limits_0^{\alpha} u_0\varphi d\varphi = \frac{u_0\alpha}{2},$$

$$A_n = \frac{2}{\alpha}\frac{u_0}{R^{\frac{n\pi}{\alpha}}}\int\limits_0^{\alpha}\varphi\cos\frac{n\pi\varphi}{\alpha}d\varphi = \frac{2u_0\,\alpha}{\alpha R^{\frac{n\pi}{\alpha}}\,n\pi}\int\limits_0^{\alpha}\varphi d\sin\frac{n\pi\varphi}{\alpha} =$$

$$= \frac{2u_0}{n\pi R^{\frac{n\pi}{\alpha}}}\left(\varphi\sin\frac{n\pi\varphi}{\alpha}\Big|_0^{\alpha} - \int\limits_0^{\alpha}\sin\frac{n\pi\varphi}{\alpha}d\varphi\right) =$$

$$= \frac{2u_0\alpha}{(n\pi)^2 R^{\frac{n\pi}{\alpha}}}\cos\frac{n\pi\varphi}{\alpha}\Big|_0^{\alpha} = \frac{2u_0\alpha}{(n\pi)^2 R^{\frac{n\pi}{\alpha}}}((-1)^n - 1) =$$

$$= \begin{cases} 0, & n = 2k, \\ -\dfrac{4u_0\alpha}{(n\pi)^2 R^{\frac{n\pi}{\alpha}}}, & n = 2k-1, k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Отже, роз'язком задачі (51)–(53) є функція

$$u(r,\varphi) = \frac{u_0\alpha}{2} - \frac{4u_0\alpha}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{(2k-1)\pi}{\alpha}}\cos\frac{(2k-1)\pi\varphi}{\alpha},$$

$$(r,\varphi) \in D. \blacktriangleright$$

6.6 Теорія потенціалу

Якщо відомий потенціал деякого векторного поля, то це дозволяє краще вивчити процес, який описується цим полем. Крім того, знання потенціалу дає можливість зводити крайову задачу для еліптичного рівняння до інтегрального рівняння.

Оскільки для інтегральних рівнянь добре вивчені їхні методи розв'язування, то це дає можливість використовувати нові підходи до розв'язування крайових задач математичної фізики.

6.6.1 Означення потенціалів. Нехай у точці $\xi := (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ з $\mathbb{R}^3$ розміщено точковий заряд величиною q. Як відомо, цей заряд створює електростатичне поле, однією з характеристик якого є напруженість $\vec{E}(x)$ поля в точці $x \neq \xi$:

$$\vec{E}(x) = q\frac{\vec{r}_{x\xi}}{r^3} = \left(q\frac{x_1 - \xi_1}{r^3}, q\frac{x_2 - \xi_2}{r^3}, q\frac{x_3 - \xi_3}{r^3}\right) =$$

$$= \text{grad}_x(-\frac{q}{r}) = \text{grad}_x(-u(x)). \qquad (1)$$

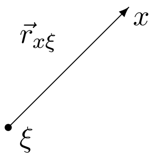

Рис. 6.18

В (1) і далі $\vec{r}_{x\xi}$ – вектор з початком у точці ξ і кінцем у точці x, $|\vec{r}_{x\xi}| = r = |x - \xi|$ (рис. 6.18). Функцію $u(x) := \frac{q}{r}$, $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\xi\}$, називають **потенціалом** електростатичного поля, створеного точковим зарядом у точці ξ.

Якщо є декілька точкових зарядів, то створений системою цих зарядів потенціал знаходиться як сума потеціалів, створених кожним із зарядів. Ця властивість дає можливість побудувати потенціал, який створюється зарядами, що неперервно розподілені з деякою густиною по області або по поверхні.

Якщо електричні заряди розподілені з густиною ρ по області $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, то розіб'ємо цю область гладкими поверхнями на n елементарних частин Ω_i з об'ємом Δv_i, $i \in \{1, \ldots, n\}$. Тоді потенціал u у точці x, що створений зарядами, розподіленими по елементарній частині Ω_i, наближено дорівнює

$$\frac{\rho(\xi^i)\Delta v_i}{r_i},\ \xi^i \in \Omega_i,\ r_i := |x - \xi^i|,\ x \neq \xi^i,$$

а зарядами, розподіленими по всій області Ω, –

$$u(x) \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{\rho(\xi^i)\Delta v_i}{r_i}.$$

Перейшовши в цій рівності до границі при прямуванні до нуля найбільшого діаметра множин Ω_i, $i \in \{1, \ldots, n\}$, дістанемо, що

$$u(x) = \int\limits_{\Omega} \frac{\rho(\xi)}{r} d\xi, \ \ x \in \mathbb{R}^3. \tag{2}$$

Функцію u, яка визначається рівністю (2), називають **об'ємним потенціалом** або потенціалом зарядженого тіла, що займає область Ω.

Якщо електричні заряди розподілені з густиною η по кусково-гладкій поверхні S, то повторивши подібні міркування, одержимо, що потенціал поля, створюваного цими зарядами, визначається формулою

$$v(x) = \int\limits_{S} \frac{\eta(\xi)}{r} d_\xi S, \ \ x \in \mathbb{R}^3. \tag{3}$$

Інтеграл у формулі (3) називають **потенціалом простого шару**.

Нехай в точках $\xi^{(1)}$ і $\xi^{(2)}$ осі $\vec{l}$ на відстані h одна від одної розміщені заряди величиною $-q$ і q та нехай ξ – деяка точка відрізка $\xi^{(1)}\xi^{(2)}$ (рис. 6.19). Потенціал поля, створеного цими зарядами, в точці $x \neq \xi^i$, $i \in \{1, 2\}$, дорівнює $u(x) = q(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1})$. Якщо точки $\xi^{(1)}$ і $\xi^{(2)}$ з відповідними зарядами спрямувати до точки ξ так, щоб величина $\mu := qh$ була сталою, тобто спрямувати h до 0, відповідно збільшуючи величину q зарядів, то отримаємо

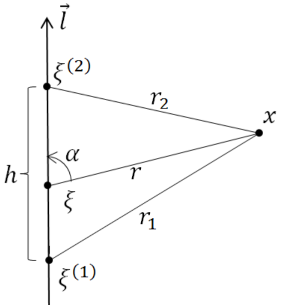

Рис. 6.19

$$u(x) = \lim_{h\to 0} q(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}) =$$

$$= \mu \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}}{h} = \mu \partial_{\vec{l}}\Big(\frac{1}{r}\Big) = -\frac{\mu}{r^2}\partial_{\vec{l}} r = -\frac{\mu}{r^2}\sum_{j=1}^{3} \partial_{\xi_j} r \cos(\widehat{\vec{l}, \xi_j}) =$$

$$= \frac{\mu}{r^2}\sum_{j=1}^{3} \frac{x_j - \xi_j}{r}\cos(\widehat{\vec{l}, \xi_j}) = \frac{\mu}{r^2}\sum_{j=1}^{3} \cos(\widehat{\vec{r}_{x\xi}, \xi_j})\cos(\widehat{\vec{l}, \xi_j}) =$$

$$= \frac{\mu}{r^2}\cos(\widehat{\vec{r}_{x\xi}, \vec{l}}) = \frac{\mu}{r^2}\cos\alpha. \qquad (4)$$

Розглянуте граничне розміщення зарядів у фізиці називається **диполем** у точці ξ, μ – **моментом диполя**, $\vec{l}$ – **віссю диполя**. Потенціал поля, створеного цим диполем, знаходиться за формулою (4).

Практично здійснити диполь можна лише наближено, розмістивши достатньо близько один від одного два великі заряди протилежних знаків.

Розглянемо орієнтовану поверхню S, тобто таку, на якій вказані внутрішня і зовнішня сторони. Нехай на S розподілені диполі з густиною моментів μ і віссю, напрямок якої збігається з вектором зовнішньої нормалі $\vec{\nu}$. Тоді потенціал поля, створений таким розподілом диполів, визначається формулою

$$w(x) = \int\limits_S \frac{\cos(\widehat{\vec{r}_{x\xi}, \vec{\nu}_\xi})}{r^2}\mu(\xi)d_\xi S, \quad x \in \mathbb{R}^3. \qquad (5)$$

Цей інтеграл називають **потенціалом подвійного шару**, тому що розглядуваний розподіл диполів може бути наближено здійснений як два накладених на поверхню S розподіли зарядів з густиною $\frac{\mu}{h}$ і $-\frac{\mu}{h}$ на дуже малій відстані h (по нормалі до S) один від одного.

6.6.2 Поверхні Ляпунова. Розглянемо клас поверхонь, для яких вивчатимемо властивості потенціалів подвійного та простого шарів.

Означення. *Обмежену замкнену поверхню S називатимемо* **поверхнею Ляпунова**, *якщо існують числа $\delta > 0$, $A > 0$ і $\alpha \in (0,1]$ такі, що виконуються умови:*

1) у кожній точці $z \in S$ існує нормаль $\vec{\nu}_z$;

2) для кожної точки $z \in S$ прямі, паралельні до нормалі $\vec{\nu}_z$, перетинають частину поверхні $S_\delta := S \cap K_\delta(z)$ тільки в одній точці;

3) для довільних двох точок $\{x, \xi\} \subset S$ таких, що $|x-\xi| < \delta$, справджується нерівність $\gamma(x,\xi) \le A|x-\xi|^\alpha$, де $\gamma(x,\xi)$ – кут між нормалями $\vec{\nu}_x$, $\vec{\nu}_\xi$ (рис. 6.20).

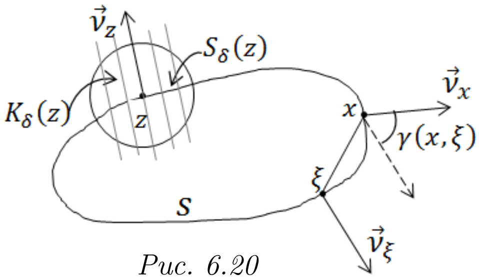

Рис. 6.20

Пояснимо детальніше умови 1), 2), 3). Умова 1) дає можливість, вибравши за початок будь-яку точку $z \in S$, ввести локальну систему координат (y_1, y_2, y_3) так, щоб осі y_1 і y_2 розміщувалися в дотичній площині до S в точці z, а вісь y_3 була спрямована вздовж нормалі $\vec{\nu}_z$.

Умова 2) дозволяє записати рівняння куска поверхні S_δ в локальній системі координат у вигляді $y_3 = f(y_1, y_2)$, де f – деяка відома функція, яка внаслідок умови 3) є неперервно диференційовною в області, що є проекцією S_δ на площину $\{y_3 = 0\}$.

Доведено, що поверхня Ляпунова S належить до класу C^1, а будь-яка поверхня з класу C^2 є поверхнею Ляпунова.

Скориставшись локальною системою координат, можна переконатись, що коли S поверхня Ляпунова, то для будь-яких точок $\{x, \xi\} \subset S$ таких, що $|x - \xi| < \delta$, справджується оцінка

$$|\cos(\widehat{\vec{r}_{x\xi}, \vec{\nu}_\xi})| \le C|x - \xi|^\alpha, \tag{6}$$

де δ – досить мале число, C – деяка додатна стала, $\alpha \in (0, 1]$.

6.6.3 Інтеграли, залежні від параметра. Потенціали (2), (3) і (5) є власними чи невласними інтегралами, залежними від параметра x. При дослідженні їх властивостей використовуватимемо властивості кратних і поверхневих інтегралів, залежних від параметра. Наведемо деякі твердження щодо таких інтегралів, які можна знайти в підручниках з математичного аналізу, а в найбільш адаптованому до наших потреб вигляді – в посібнику [13].

Нехай D і Ω – обмежені області, а S – обмежена поверхня в просторі $\mathbb{R}^3$. Розглядатимемо кратний інтеграл

$$I_1(x) := \int_\Omega E(x, \xi)\mu(\xi)d\xi, \; x \in D,$$

і поверхневий інтеграл

$$I_2(x) := \int\limits_S E(x,\xi)\mu(\xi)d_\xi S,\ x \in D,$$

які для зручності об'єднаємо спільним записом

$$I(x) := \int\limits_P E(x,\xi)\mu(\xi)dp(\xi),\ x \in D. \tag{7}$$

Інтеграл I_1 одержується при $P = \Omega$ і $dp(\xi) = d\xi$ (елемент об'єму області Ω), а інтеграл I_2 – при $P = S$ і $dp(\xi) = d_\xi S$ (елемент площі поверхні S).

Якщо припускати, що функція μ інтегровна та обмежена на множині P, а функція $E(x,\xi)$, $x \in \overline{D}$, $\xi \in \overline{P}$, $x \neq \xi$, неперервна та необмежена в околі точки $x = \xi$, то при $\overline{D} \cap \overline{P} = \varnothing$ інтеграл I буде власним, а при $\overline{D} \cap \overline{P} \neq \varnothing$ цей інтеграл у розумінні Рімана не існує (бо підінтегральна функція має особливість у точці $x = \xi$, в околі якої вона не обмежена) і ми приходимо до поняття невласних кратного та поверхневого інтегралів.

Потрібні нам властивості власних інтегралів (7) описуються в наступних лемах.

Лема 1. *Якщо функція μ інтегровна та обмежена на множині P, а $E \in C(\overline{D} \times \overline{P})$, то $I \in C(\overline{D})$.*

Лема 2. *Якщо функції μ і E такі, як у лемі 1, та, крім того, існують похідні $\partial_{x_j} E \in C(\overline{D} \times \overline{P})$, $j \in \{1,2,3\}$, то $I \in C^1(\overline{D})$ і справджуються рівності*

$$\partial_{x_j} I(x) = \int\limits_P \partial_{x_j} E(x,\xi)\mu(\xi)dp(\xi),\ x \in D, j \in \{1,2,3\}. \tag{8}$$

Переходимо до означення невласного інтеграла (7) в ситуації, коли $\overline{D} \cap \overline{P} \neq \varnothing$. Для цього візьмемо фіксовану точку $x \in \overline{P}$, кулю $K_\delta(x)$ малого радіуса $\delta > 0$ з центром у точці x і множину $P_\delta := P \setminus (P \cap K_\delta(x))$. Невласний інтеграл (7), підінтегральна функція якого має особливість у фіксованій точці

$\xi = x$, означимо як границю

$$\lim_{\delta \to 0} \int\limits_{P_\delta} E(x, \xi)\mu(\xi)dp(\xi).$$

Якщо така границя існує і скінченна, то кажуть, що інтеграл (7) збігається в точці x, а в противному разі – розбігається.

У випадку, коли x може набувати різних значень з множини $\overline{P}$, приходимо до невласного інтеграла з рухомою особливістю. Тут важливу роль відіграє поняття рівномірної збіжності інтеграла.

Не вдаючись у деталі означення та ознак рівномірної збіжності невласного інтеграла, сформулюємо твердження, аналогічні до лем 1 і 2, для невласного інтеграла (7), в якому D замінено на P.

Говоритимемо, що функція $E(x, \xi)$, $\{x, \xi\} \subset P$, $x \neq \xi$, належить до класу $Q_\beta(P)$, і писатимемо $E \in Q_\beta(P)$, якщо ця функція неперервна та існують сталі $B > 0$ і $\beta > 0$ такі, що

$$|E(x, \xi)| \leq B|x - \xi|^{-\beta}, \ \{x, \xi\} \subset P, x \neq \xi.$$

У наступних лемах P – обмежена область Ω або поверхня Ляпунова S, $\dim P$ – розмірність множини P, яка для $P = \Omega$ дорівнює три, а для $P = S$ – два.

Лема 3. *Якщо μ – інтегровна та обмежена на множині P функція, $E \in Q_\beta(P)$ з $\beta < \dim P$, то інтеграл (7) визначає неперервну на P функцію I.*

Лема 4. *Якщо виконуються умови леми 3 та, крім того, існують похідні $\partial_{x_j} E \in Q_\gamma(P)$ з $\gamma < \dim P$, $j \in \{1, 2, 3\}$, то функція I має неперервні на P похідні $\partial_{x_j} I$, $j \in \{1, 2, 3\}$, які обчислюються за формулами (8), в яких $x \in P$.*

6.6.4 Властивості об'ємного потенціалу. Розглянемо потенціал зарядженого тіла, що займає обмежену область Ω,

$$u(x) = \int\limits_{\Omega} \frac{\rho(\xi)}{r_{x\xi}} d\xi, \tag{9}$$

де ρ – функція, яка визначена в Ω. Межу S області Ω вважатимемо кусково-гладкою поверхнею в $\mathbb{R}^3$.

Теорема 6.9. *Якщо ρ – інтегровна та обмежена функція в Ω, то потенціал $u \in C^1(\mathbb{R}^3)$, причому похідні $\partial_{x_j} u$, $j \in \{1, 2, 3\}$, знаходяться диференціюванням під знаком інтеграла.*

◀ Нехай Ω_1 – будь-яка обмежена область така, що $\Omega \subset \Omega_1$. Візьмемо функцію ρ_1, яка збігається з ρ в $\overline{\Omega}$, а в $\Omega_1 \setminus \overline{\Omega}$ $\rho_1 = 0$, і запишемо інтеграл (9) у вигляді

$$u(x) = \int\limits_{\Omega_1} \frac{\rho_1(\xi)}{r_{x\xi}} d\xi.$$

Для цього інтеграла $E(x, \xi) = r_{x\xi}^{-1}$ і $\partial_{x_j} E(x, \xi) = -(x_j - \xi_j) r_{x\xi}^{-3}$, $j \in \{1, 2, 3\}$, тому

$$|E(x, \xi)| \leq r_{x\xi}^{-1}, \;\; |\partial_{x_j} E(x, \xi)| \leq r_{x\xi}^{-2}, \;\; j \in \{1, 2, 3\},$$

і, отже, $E \in Q_1(\Omega_1)$ і $\partial_{x_j} E \in Q_2(\Omega_1)$, $j \in \{1, 2, 3\}$. Звідси на підставі лем 3 і 4 випливає, що функція u неперервна в Ω_1 та існують її неперервні похідні першого порядку, які знаходяться диференціюванням під знаком інтеграла. Отже, $u \in C^1(\Omega_1)$, але оскільки Ω_1 – довільна область в $\mathbb{R}^3$, то $u \in C^1(\mathbb{R}^3)$. ▶

Теорема 6.10. *Якщо густина ρ є інтегровною та обмеженою функцією в Ω, то об'ємний потенціал u є гармонічною функцією в зовнішній області $\Omega^- := \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$, яка задовольняє умову регулярності на нескінченності, тобто існує стала $A > 0$ така, що*

$$|u(x)| \leq \frac{A}{|x|}, \;\; x \in \Omega^-. \tag{10}$$

◀ Якщо точка $x \in \Omega^-$, то в цьому випадку (9) є власним інтегралом, залежним від параметра x, оскільки $\xi \neq x$. Тоді він згідно з лемою 2 має такі самі властивості, що й підінтегральна функція, а остання є нескінченно диференційовною за x. Це означає, що в цьому випадку (9) є неперервною функцією і має неперервні частинні похідні довільного порядку, які знаходяться безпосереднім диференціюванням під знаком інтеграла.

Оскільки $\Delta_x\Big(\frac{1}{r_{x\xi}}\Big) = 0$ при $x \neq \xi$, то маємо

$$\Delta_x u(x) = \Delta_x \int\limits_\Omega \frac{\rho(\xi)}{r_{x\xi}} d\xi = \int\limits_\Omega \Delta_x\Big(\frac{1}{r_{x\xi}}\Big)\rho(\xi) d\xi = 0,\, x \in \Omega^-,$$

тобто u – гармонічна функція в Ω^-.

Доведемо правильність нерівності (10). Досить її встановити для великих $|x|$. Нехай точка x така, що $|x| \geq 2d$, де d – діаметр області Ω (рис. 6.21). Тоді $r_{x\xi} > |x| - |\xi| > |x| - d \geq$

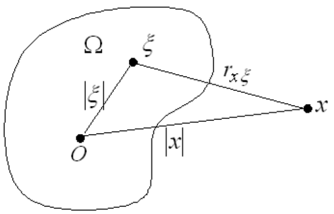

Рис. 6.21

$\geq |x| - \frac{|x|}{2} = \frac{|x|}{2}$ і тому

$$|u(x)| = \Big|\int\limits_\Omega \frac{\rho(\xi)}{r_{x\xi}} d\xi\Big| \leq$$

$$\leq \frac{2}{|x|}\int\limits_\Omega |\rho(\xi)| d\xi = \frac{A}{|x|},$$

де $A := 2\int\limits_\Omega |\rho(\xi)| d\xi$. Отже, нерівність (10) справджується. ▶

Зауваження 1. Існування похідних другого порядку від потенціалу (9) в області Ω вже вимагає додаткових умов на густину ρ. Це пов'язано з тим , що в цьому випадку застосування лем 3 і 4, як це було при доведенні теореми 6.9, неможливе, бо порядок особливості підінтегральної функції для других похідних дорівнює $\dim \Omega = 3$. Наступна теорема містить умову на ρ, за якої існують похідні другого порядку від потенціалу (9).

Теорема 6.11. *Якщо $\rho \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, то об'ємний потенціал (9) має в Ω неперервні частинні похідні другого порядку і задовольняє рівняння Пуассона*

$$\Delta u(x) = -4\pi\rho(x), \;\; x \in \Omega. \tag{11}$$

◀ Нехай x^0 – довільно взята точка області Ω. Візьмемо кулю $K_\delta(x^0)$, яка лежить в області Ω (рис. 6.22). Запишемо об'ємний потенціал (9) у вигляді

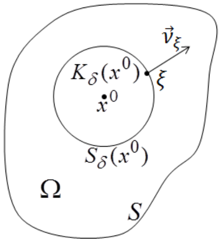

Рис. 6.22

$$u(x) = \int\limits_{K_\delta(x^0)} \frac{\rho(\xi)}{r_{x\xi}} d\xi + \int\limits_{\Omega_1} \frac{\rho(\xi)}{r_{x\xi}} d\xi =$$

$$=: u_1(x) + u_2(x), \text{ де } \Omega_1 := \Omega \setminus \overline{K_\delta(x^0)}. \tag{12}$$

На підставі теореми 6.9 і того, що $\partial_{x_j}\Big(\dfrac{1}{r_{x\xi}}\Big) = -\partial_{\xi_j}\Big(\dfrac{1}{r_{x\xi}}\Big)$, $j \in \{1,2,3\}$, маємо

$$\partial_{x_j} u(x) = \int\limits_{K_\delta(x^0)} \partial_{x_j}\Big(\frac{1}{r_{x\xi}}\Big)\rho(\xi)d\xi + \int\limits_{\Omega_1} \partial_{x_j}\Big(\frac{1}{r_{x\xi}}\Big)\rho(\xi)d\xi =$$

$$= -\int\limits_{K_\delta(x^0)} \partial_{\xi_j}\Big(\frac{1}{r_{x\xi}}\Big)\rho(\xi)d\xi + \int\limits_{\Omega_1} \partial_{x_j}\Big(\frac{1}{r_{x\xi}}\Big)\rho(\xi)d\xi, \ j \in \{1,2,3\}.$$

Застосувавши до першого інтеграла формулу Остроградського–Ґауса, дістанемо

$$\partial_{x_j} u(x) = \int\limits_{\Omega_1} \partial_{x_j}\Big(\frac{1}{r_{x\xi}}\Big)\rho(\xi)d\xi + \int\limits_{K_\delta(x^0)} \frac{1}{r_{x\xi}} \partial_{\xi_j}\rho(\xi)d\xi -$$

$$- \int\limits_{S_\delta(x^0)} \frac{\rho(\xi)}{r_{x\xi}} \cos(\widehat{\vec{\nu}_\xi, \xi_j}) d_\xi S, \ j \in \{1,2,3\}, \tag{13}$$

де $S_\delta(x^0)$ – межа кулі $K_\delta(x^0)$, $\vec{\nu}_\xi$ – зовнішня нормаль до сфери $S_\delta(x^0)$ у точці ξ.

Перший доданок справа в (13) є власним інтегралом, залежним від параметра, коли $x \in K_\delta(x^0)$, бо $x \neq \xi$, а тому він має в $K_\delta(x^0)$ похідні будь-якого порядку. Те саме стосується й третього доданка, оскільки точка $\xi \in S_\delta(x^0)$, а точка $x \in K_\delta(x^0)$

і тому $x \neq \xi$. Другий доданок є об'ємним потенціалом з неперервною густиною $\partial_{\xi_j}\rho$, а тому згідно з теоремою 6.9 він має неперервні частинні похідні першого порядку в $\mathbb{R}^3$.

Отже, функції $\partial_{x_j}u$, $j \in \{1,2,3\}$, які визначаються рівностями (13), мають неперервні частинні похідні першого порядку в $K_\delta(x^0)$. Оскільки точка x^0 є довільною точкою з області Ω, то можна стверджувати, що $\partial_{x_j}u$, $j \in \{1,2,3\}$, мають неперервні частинні похідні першого порядку в Ω, а це означає, що об'ємний потенціал (9) має скрізь в Ω неперервні частинні похідні другого порядку.

Доведемо, що u задовольняє в Ω рівняння Пуассона (11). Очевидно, що u_2 з (12) є гармонічною функцією в $K_\delta(x^0)$, тобто $\Delta u_2(x) = 0$, $x \in K_\delta(x^0)$. Тому $\Delta u(x) = \Delta u_1(x)$, $x \in K_\delta(x^0)$.

Маємо

$$\Delta u(x^0) = \Delta u_1(x^0) = \sum_{j=1}^{3} \int\limits_{K_\delta(x^0)} \frac{\xi_j - x_j^0}{r^3_{x^0\xi}}\, \partial_{\xi_j}\rho(\xi)\, d\xi -$$

$$-\sum_{j=1}^{3} \int\limits_{S_\delta(x^0)} \frac{\xi_j - x_j^0}{r^3_{x^0\xi}}\, \rho(\xi)\, \cos(\widehat{\vec{\nu}_\xi, \xi_j})\, d_\xi S =: H_1 - H_2.$$

Ця формула правильна при довільному виборі δ такому, що куля $K_\delta(x^0) \subset \Omega$, і величина $\Delta u(x^0)$ не залежить від вибору δ. Доведемо, що $H_1 \to 0$ при $\delta \to 0$. Справді, нехай $C := \max\limits_{\xi \in K_\delta(x^0), j \in \{1,2,3\}} |\partial_{\xi_j}\rho(\xi)|$, тоді, взявши до уваги те, що $\dfrac{|\xi - x^0|}{r_{x^0\xi}} \leq 1$, і здійснивши заміну змінних інтегрування за формулами

$$\begin{gathered}\xi_1 = x_1^0 + r\cos\varphi\sin\theta,\;\; \xi_2 = x_2^0 + r\sin\varphi\sin\theta,\;\; \xi_3 = x_3^0 + r\cos\theta,\\ 0 \leq r \leq \delta,\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi,\ 0 \leq \theta \leq \pi,\ r_{x^0\xi} = r,\ d\xi = r^2\sin\theta dr\, d\varphi\, d\theta,\end{gathered}$$

одержимо

$$|H_1| \leq 3C \int\limits_{K_\delta(x^0)} \frac{d\xi}{r^2_{x^0\xi}} =$$

$$= 3C \int\limits_0^{\delta} dr \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \sin\theta d\theta = 12\pi C\delta \to 0 \text{ при } \delta \to 0.$$

Розглянемо H_2. Оскільки $\frac{\xi_j - x_j^0}{r_{x^0\xi}} = \cos(\widehat{\vec{\nu}_\xi, \xi_j})$, $j \in \{1, 2, 3\}$, бо $\vec{\nu}_\xi = -\vec{r}_{x^0\xi}$, то

$$H_2 = \int\limits_{S_\delta(x^0)} \frac{\rho(\xi)}{r^2_{x^0\xi}} \sum_{j=1}^{3} \cos^2(\widehat{\vec{\nu}_\xi, \xi_j}) d_\xi S = \int\limits_{S_\delta(x^0)} \frac{\rho(\xi)}{\delta^2} d_\xi S =$$

$$= \frac{1}{\delta^2} \int\limits_{S_\delta(x^0)} \rho(\xi) d_\xi S = \frac{1}{\delta^2} 4\pi\delta^2 \rho(\bar{\xi}) = 4\pi\rho(\bar{\xi}) \to 4\pi\rho(x^0) \text{ при } \delta \to 0.$$

Тут використано теорему про середнє значення для інтеграла, $\bar{\xi}$ – деяка точка на сфері $S_\delta(x^0)$.

Отже, при $\delta \to 0$, маємо $\Delta u(x^0) = -4\pi\rho(x^0)$, що й треба було довести. ▶

Зауваження 2. Властивості об'ємного потенціалу дають змогу звести крайову задачу для рівняння Пуассона до відповідної задачі для рівняння Лапласа. Справді, маючи задачу

$$\Delta u = f \text{ в } \Omega, \;\; Bu|_S = \mu,$$

де $f \in C^1(\overline{\Omega})$, B – диференціальний вираз, що задає крайову умову, то подаючи розв'язок цієї задачі у вигляді $u = v + w$, де

$$w(x) := -\frac{1}{4\pi} \int\limits_{\Omega} \frac{f(\xi)}{r_{x\xi}} d\xi,$$

для функції v матимемо задачу

$$\Delta v = 0 \text{ в } \Omega, \;\; Bv|_S = \mu - Bw|_S.$$

Приклад 1. Знайти об'ємний потенціал рівномірно зарядженої кулі $K_R(x^0)$ зі сталою об'ємною густиною ρ_0.

◀ Очевидно, що шуканий потенціал є функцією відстані $r = |x - x^0|$, тобто $u(x) = u(r)$.

Поза кулею $K_R(x^0)$ справджується рівність $\Delta u(x) = 0$, тому

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\Big(r^2\frac{du}{dr}\Big) = 0.$$

Звідси випливає, що $r^2\dfrac{du}{dr} = C_1$, а отже, $u(r) = -\dfrac{C_1}{r} + C_2$. Оскільки $u(r) \to 0$ при $r \to +\infty$, то $C_2 = 0$. Тому

$$u(x) \equiv u(r) = -\frac{C_1}{r}, \;\; x \,\overline{\in}\, K_R(x^0).$$

Якщо ж $x \in K_R(x^0)$, то згідно з рівністю (11), $\Delta u(x) = -4\pi\rho_0$ або

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\Big(r^2\frac{du}{dr}\Big) = -4\pi\rho_0.$$

Звідси випливає, що

$$\frac{d}{dr}\Big(r^2\frac{du}{dr}\Big) = -4\pi\rho_0 r^2,$$

$$r^2\frac{du}{dr} = -\frac{4}{3}\pi\rho_0 r^3 + A,$$

$$\frac{du}{dr} = -\frac{4}{3}\pi\rho_0 r + \frac{A}{r^2}, \;\; u(r) = -\frac{2}{3}\pi\rho_0 r^2 - \frac{A}{r} + B, \;\; \{A, B\} \subset \mathbb{R}.$$

Оскільки об'ємний потенціал повинен бути обмеженим при $r \to 0$, то $A = 0$, а тому

$$u(r) = -\frac{2}{3}\pi\rho_0 r^2 + B.$$

З умови неперервності об'ємного потенціалу та його похідної при $r = R$, одержуємо, що

$$-\frac{2}{3}\pi\rho_0 R^2 + B = -\frac{C_1}{R}, \;\; -\frac{4}{3}\pi\rho_0 R = \frac{C_1}{R^2},$$

тобто

$$C_1 = -\frac{4}{3}\pi R^3\rho_0, \;\; B = 2\pi R^2\rho_0.$$

Отже,

$$u(x) \equiv u(r) = \begin{cases} \dfrac{2}{3}\pi(3R^2 - r^2)\rho_0, & r \le R, \\ \dfrac{4}{3}\pi R^3 \dfrac{\rho_0}{r}, & r > R. \blacktriangleright \end{cases}$$

6.6.5 Властивості потенціалу подвійного шару. Розглянемо потенціал подвійного шару, який визначається рівністю

$$w(x) = \int\limits_S \frac{\cos(\widehat{\vec{r}_{x\xi}, \vec{\nu}_\xi})}{r_{x\xi}^2} \mu(\xi) d_\xi S, \ x \in \mathbb{R}^3, \tag{14}$$

де $\vec{r}_{x\xi}$ – вектор, напрямлений від точки ξ до точки x, $r_{x\xi} = |x-\xi|$ – його довжина, $\vec{\nu}_\xi$ – зовнішня нормаль у точці $\xi \in S$. Оскільки

$$\partial_{\vec{\nu}_\xi}\Big(\frac{1}{r_{x\xi}}\Big) = \sum_{j=1}^{3} \partial_{\xi_j}\Big(\frac{1}{r_{x\xi}}\Big)\cos(\widehat{\vec{\nu}_\xi, \xi_j}) = -\frac{1}{r_{x\xi}^2}\sum_{j=1}^{3}\frac{\xi_j - x_j}{r_{x\xi}}\times$$

$$\times\cos(\widehat{\vec{\nu}_\xi, \xi_j}) = \frac{1}{r_{x\xi}^2}\sum_{j=1}^{3}\cos(\widehat{\vec{r}_{x\xi}, \xi_j})\cos(\widehat{\vec{\nu}_\xi, \xi_j}) = \frac{\cos(\widehat{\vec{r}_{x\xi}, \vec{\nu}_\xi})}{r_{x\xi}^2},$$

то потенціал подвійного шару набуває ще такого вигляду

$$w(x) = \int\limits_S \partial_{\vec{\nu}_\xi}\Big(\frac{1}{r_{x\xi}}\Big)\mu(\xi) d_\xi S, \ x \in \mathbb{R}^3. \tag{15}$$

Теорема 6.12. *Якщо функція μ інтегровна та обмежена на поверхні Ляпунова S, то потенціал подвійного шару є гармонічною функцією в $\mathbb{R}^3$, крім точок поверхні S, і регулярний на нескінченності.*

◀ Якщо $x \overline{\in} S$, то для $\xi \in S$ правильна нерівність $r_{x\xi} > 0$, а це означає, що підінтегральна функція в (15) інтегровна за ξ і як функція x належить до $C^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus S)$. Оскільки в цьому випадку (15) є власним інтегралом, залежним від параметра x, то диференціювання можна здійснювати під знаком інтеграла, тому

$$\Delta w(x) = \int\limits_S \Delta_x\Big(\partial_{\vec{\nu}_\xi}\Big(\frac{1}{r_{x\xi}}\Big)\Big)\mu(\xi) d_\xi S =$$

$$= \int\limits_S \partial_{\vec{\nu}_\xi}\Big(\Delta_x\Big(\frac{1}{r_{x\xi}}\Big)\Big)\mu(\xi)d_\xi S = 0, \ \ x \in \mathbb{R}^3 \setminus S.$$

Доведемо, що $w(x) \to 0$ при $|x| \to +\infty$. Для цього виберемо $R > 0$ настільки великим, щоб $\overline{\Omega} \subset K_R(O)$ (рис. 6.23). Для довільних $x \overline{\in} K_{2R}(O)$ і $\xi \in S$ маємо

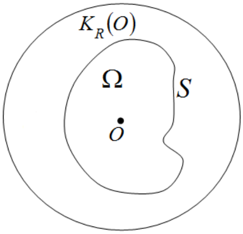

Рис. 6.23

$$r_{x\xi} = |x - \xi| > |x| - |\xi| \geq$$

$$\geq |x| - R \geq |x| - \frac{|x|}{2} = \frac{|x|}{2}.$$

Тому для будь-якого $x \overline{\in} K_{2R}(O)$ правильна нерівність

$$|w(x)| \leq \max_{\xi \in S} |\mu(\xi)| \int\limits_S \frac{4}{|x|^2} d_\xi S \leq \frac{C}{|x|^2} \to 0 \text{ при } |x| \to +\infty. \ ▶$$

Теорема 6.13. *Якщо S – поверхня Ляпунова, а функція μ інтегровна та обмежена на S, то потенціал подвійного шару w є неперервною функцією на S.*

◀ Як було відзначено в пункті 6.6.2, для поверхні Ляпунова S справджується оцінка (6) для будь-яких близьких між собою точок x і ξ поверхні S. Звідси випливає, що для таких точок виконується нерівність

$$|E(x,\xi)| = \frac{|\cos(\widehat{\vec{r}_{x\xi}, \vec{\nu}_\xi})|}{r_{x\xi}^2} \leq \frac{C}{r_{x\xi}^{2-\alpha}},$$

тобто $E \in Q_{2-\alpha}(S)$, де $2 - \alpha < 2 = \dim S$. Застосувавши до інтеграла (14) лему 3, переконаємось у правильності твердження теореми 6.13. ▶

З теорем 6.12 і 6.13 випливає, що потенціал подвійного шару визначений в усьому просторі $\mathbb{R}^3$ і неперервний окремо в областях Ω і Ω^- та на поверхні S. Виникає запитання, як поводиться потенціал подвійного шару при переході через поверхню S.

Якщо $x^0 \in S$, то, як зазначено вище, $w(x^0)$ існує і називається **прямим значенням** потенціалу подвійного шару. Нехай тепер точка $x \overline{\in} S$ прямує до точки $x^0 \in S$. Якщо при цьому виявиться, що потенціал подвійного шару w прямує до деякої скінченної границі, то кажуть, що потенціал подвійного шару набуває в точці x^0 **граничного значення**. Нижче буде доведено, що, взагалі кажучи, внутрішнє граничне значення

$$w_{\text{В}}(x^0) := \lim_{\Omega \ni x \to x^0 \in S} \int\limits_S \frac{\cos(\widehat{\vec{r}_{x\xi}, \vec{\nu}_\xi})}{r_{x\xi}^2} \mu(\xi) d_\xi S$$

не збігається із зовнішнім граничним значенням

$$w_{\text{З}}(x^0) := \lim_{\Omega^- \ni x \to x^0 \in S} \int\limits_S \frac{\cos(\widehat{\vec{r}_{x\xi}, \vec{\nu}_\xi})}{r_{x\xi}^2} \mu(\xi) d_\xi S$$

і вони не дорівнюють прямому значенню $w(x^0)$, тобто потенціал подвійного шару терпить розрив першого роду при переході через поверхню S.

Розглянемо спочатку потенціал подвійного шару з одиничною густиною, тобто інтеграл

$$w_1(x) := \int\limits_S \frac{\cos(\widehat{\vec{r}_{x\xi}, \vec{\nu}_\xi})}{r_{x\xi}^2} d_\xi S,$$

який називається **інтегралом Ґауса**.

Доведено [8, 14], що

$$w_1(x) = \int\limits_S \frac{\cos(\widehat{\vec{r}_{x\xi}, \vec{\nu}_\xi})}{r_{x\xi}^2} d_\xi S = \int\limits_S \partial_{\vec{\nu}_\xi} \Big(\frac{1}{r_{x\xi}}\Big) d_\xi S =$$

$$= \begin{cases} -4\pi, & x \in \Omega, \\ -2\pi, & x \in S, \\ 0, & x \in \Omega^-, \end{cases} \tag{16}$$

а це означає, що потенціал подвійного шару зі сталою густиною μ_0 на поверхні S має розрив першого роду. Доведемо, що такого самого типу будуть розриви і в потенціалі зі змінною густиною μ.

Теорема 6.14. *Якщо* $\mu \in C(S)$ *і* S *– поверхня Ляпунова, то для потенціалу подвійного шару (14) існують скінченні внутрішнє* $w_{\text{В}}(x^0)$ *і зовнішнє* $w_{\text{З}}(x^0)$ *граничні значення, для яких правильні такі формули стрибка:*

$$\begin{aligned} w_{\text{В}}(x^0) &= w(x^0) - 2\pi\mu(x^0), \\ w_{\text{З}}(x^0) &= w(x^0) + 2\pi\mu(x^0). \end{aligned} \tag{17}$$

◀ Опираючись на рівності (16), доведемо теорему в припущенні, що для поверхні S виконується умова

$$\int\limits_S \frac{|\cos(\widehat{\vec{r}_{x\xi}, \vec{\nu}_\xi})|}{r_{x\xi}^2} d_\xi S \le B < +\infty, \ \ x \in \mathbb{R}^3. \tag{18}$$

Це припущення має технічний характер і спрощує виведення формул (17).

Нехай x^0 – фіксована точка поверхні S. Запишемо інтеграл (14) у вигляді

$$w(x) = \int\limits_S (\mu(\xi) - \mu(x^0)) \frac{\cos(\widehat{\vec{r}_{x\xi}, \vec{\nu}_\xi})}{r_{x\xi}^2} d_\xi S +$$

$$+\mu(x^0) \int\limits_S \frac{\cos(\widehat{\vec{r}_{x\xi}, \vec{\nu}_\xi})}{r_{x\xi}^2} d_\xi S =: w_0(x) + \mu(x^0) w_1(x). \tag{19}$$

Поведінка w_1 при переході через поверхню S визначається рівністю (16). Тому треба вивчити поведінку w_0. Доведемо, що функція w_0 є неперервною в точці $x = x^0$. Нехай $\varepsilon > 0$ задано. Згідно з неперервністю функції μ на S існує $\delta_0 > 0$ таке, що

$$|\mu(\xi) - \mu(x^0)| < \frac{\varepsilon}{4B}, \ \ \xi \in S_{\delta_0},$$

де B – стала із (18), $S_{\delta_0} := S \cap K_{\delta_0}(x^0)$.

Запишемо $w_0(x)$ у вигляді

$$w_0(x) = \int\limits_{S_{\delta_0}} (\mu(\xi) - \mu(x^0)) \frac{\cos(\widehat{\vec{r}_{x\xi}, \vec{\nu}_\xi})}{r_{x\xi}^2} d_\xi S +$$

$$+\int\limits_{S\setminus S_{\delta_0}}(\mu(\xi)-\mu(x^0))\frac{\cos(\widehat{\vec{r}_{x\xi},\vec{\nu}_\xi})}{r_{x\xi}^2}d_\xi S =: w_0'(x)+w_0''(x).$$

При будь-якому розміщенні точки x за допомогою нерівності (18) маємо

$$|w_0'(x)|\le\int\limits_{S_{\delta_0}}|\mu(\xi)-\mu(x^0)|\frac{|\cos(\widehat{\vec{r}_{x\xi},\vec{\nu}_\xi})|}{r_{x\xi}^2}d_\xi S\le$$

$$\le\frac{\varepsilon}{4B}\int\limits_S\frac{|\cos(\widehat{\vec{r}_{x\xi},\vec{\nu}_\xi})|}{r_{x\xi}^2}d_\xi S\le\frac{\varepsilon}{4}.$$

Розглянемо різницю

$$w_0(x)-w_0(x^0)=w_0'(x)-w_0'(x^0)+w_0''(x)-w_0''(x^0).$$

Тоді

$$|w_0(x)-w_0(x^0)|\le|w_0'(x)|+|w_0'(x^0)|+|w_0''(x)-w_0''(x^0)|\le$$

$$\le\frac{\varepsilon}{2}+|w_0''(x)-w_0''(x^0)|.$$

В інтегралі, яким визначається w_0'', змінна інтегрування $\xi\in S\setminus S_\delta$, тому для точок $x\in K_\delta(x^0)$, де $\delta\in(0,\delta_0)$, цей інтеграл є власним інтегралом, залежним від параметра, і він є неперервною функцією в $K_\delta(x^0)$, бо таку властивість має підінтегральна функція. Це дозволяє вибрати таке $\delta>0$, що

$$|w_0''(x)-w_0''(x^0)|<\frac{\varepsilon}{2},\ \ x\in K_\delta(x^0).$$

Отже, існує число $\delta>0$ таке, що $|w_0(x)-w_0(x^0)|<\varepsilon$, $x\in K_\delta(x^0)$, тобто функція w_0 є неперервною в точці x^0.

Використовуючи це та рівності (16) і (19), отримуємо

$$w_{\text{В}}(x^0)=\lim_{\Omega\ni x\to x^0\in S}w(x)=w_0(x^0)-4\pi\mu(x^0),\qquad(20)$$

$$w_{\text{З}}(x^0)=\lim_{\Omega^-\ni x\to x^0\in S}w(x)=w_0(x^0).\qquad(21)$$

Якщо в (19) точка x збігається з точкою $x^0 \in S$, то дістаємо

$$w(x^0) = w_0(x^0) - 2\pi\mu(x^0). \tag{22}$$

З рівностей (20) і (22) випливає перша рівність із (17), а з рівностей (21) і (22) – друга рівність. ►

6.6.6 Властивості потенціалу простого шару. Потенціал простого шару визначається рівністю

$$v(x) = \int\limits_S \frac{\eta(\xi)}{r_{x\xi}} d_\xi S, \ \ x \in \mathbb{R}^3. \tag{23}$$

Припускатимемо, що S – поверхня Ляпунова.

Властивості цього потенціалу описано в наступній теоремі.

Теорема 6.15. *Якщо функція η інтегровна та обмежена на S, то потенціал простого шару v має такі властивості:*

1) $v \in C(\mathbb{R}^3)$;

2) v – гармонічна функція в Ω і Ω^-;

3) функція v є регулярною на нескінченності, тобто існує така стала $A > 0$, що справджується оцінка

$$|v(x)| \le \frac{A}{|x|}, \ \ x \in \Omega^-. \tag{24}$$

◄ 1) Існування потенціалу v і його неперервність при $x \overline{\in} S$ випливає з неперервності $\frac{1}{r_{x\xi}}$ при $\xi \neq x$ і леми 1. У випадку, коли $x \in S$, інтеграл (23) є невласним інтегралом, залежним від параметра x. Оскільки функція $E(x,\xi) = \frac{1}{r_{x\xi}}$, $\{x,\xi\} \subset S$, $x \neq \xi$, належить до класу $Q_1(S)$, то згідно з лемою 3 функція v неперервна на S.

2) Якщо $x \overline{\in} S$, то інтеграл (23) власний і згідно з лемою 2 його можна диференціювати за x будь-яке число разів під знаком інтеграла. Тому

$$\Delta_x v(x) = \Delta_x \int\limits_S \frac{\eta(\xi)}{r_{x\xi}} d_\xi S = \int\limits_S \Delta_x \Big(\frac{1}{r_{x\xi}}\Big) \eta(\xi) d_\xi S = 0,$$

бо $\dfrac{1}{r_{x\xi}}$ є гармонічною функцією при $\xi \neq x$.

3) Оцінка (24) встановлюється подібно до оцінки (10) для об'ємного потенціалу. ▶

Дослідження крайових задач для рівняння Лапласа вимагає вивчення поведінки нормальної похідної від потенціалу простого шару. Переходимо до такого вивчення.

Нехай $\vec{\nu}_{x^0}$ – вектор зовнішньої нормалі до поверхні S у фіксованій точці x^0 (рис. 6.24). Продиференціюємо потенціал простого шару (23) в точці $x \overline{\in} S$ за напрямом нормалі $\vec{\nu}_{x^0}$. Цю операцію можна здійснити під знаком інтеграла, бо інтеграл є власним, оскільки $x \overline{\in} S$ і, отже, $x \neq \xi$. Маємо

$$\partial_{\vec{\nu}_{x^0}} v(x) = \int\limits_S \partial_{\vec{\nu}_{x^0}} \Big(\frac{1}{r_{x\xi}}\Big) \eta(\xi) d_\xi S$$

або

$$\partial_{\vec{\nu}_{x^0}} v(x) = \int\limits_S \frac{\cos(\widehat{\vec{r}_{\xi x}, \vec{\nu}_{x^0}})}{r^2_{\xi x}} \eta(\xi) d_\xi S. \tag{25}$$

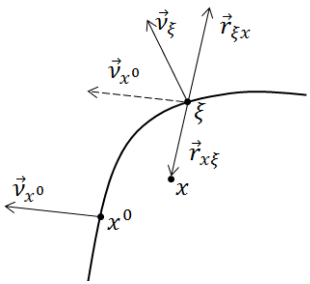

Рис. 6.24

Інтеграл (25) подібний до потенціалу подвійного шару (14), але між ними є різниця: у (25) косинус кута між вектором $\vec{r}_{\xi x}$ і вектором нормалі $\vec{\nu}_{x^0}$ у фіксованій точці $x^0 \in S$, а в (14) – між вектором $\vec{r}_{x\xi}$ і вектором нормалі $\vec{\nu}_\xi$ у змінній точці інтегрування $\xi \in S$ (рис. 6.24).

Так само, як для потенціалу подвійного шару, можна довести, що інтеграл (25) існує в усьому просторі $\mathbb{R}^3$ і є неперервною функцією окремо в Ω, Ω^- і на S.

Значення функції $\partial_{\vec{\nu}_{x^0}} v$, яке одержується з (25) заміною x на x^0, називають **прямим значенням** нормальної похідної і записують у вигляді

$$\partial_{\vec{\nu}_{x^0}} v(x^0) = \int\limits_S \frac{\cos(\widehat{\vec{r}_{\xi x^0}, \vec{\nu}_{x^0}})}{r^2_{\xi x^0}} \eta(\xi) d_\xi S.$$

Нас цікавитиме поведінка нормальної похідної потенціалу простого шару (25) при наближенні x до x^0 по нормалі $\vec{\nu}_{x^0}$ зсередини та зовні поверхні S. Позначимо через

$$(\partial_{\vec{\nu}_{x^0}} v(x^0))_{\text{в}} \ \text{ і } \ (\partial_{\vec{\nu}_{x^0}} v(x^0))_{\text{з}} \tag{26}$$

граничні значення потенціалу простого шару, тобто границі $\partial_{\vec{\nu}_{x^0}} v(x)$, коли $x \to x^0$ відповідно зсередини і зовні поверхні S.

Теорема 6.16. *Якщо $\eta \in C(S)$ і S – поверхня Ляпунова, то для нормальної похідної потенціалу простого шару в довільній точці $x^0 \in S$ існують границі (26) і для них правильні формули*

$$\begin{aligned} (\partial_{\vec{\nu}_{x^0}} v(x^0))_{\text{в}} &= \int\limits_S \frac{\cos(\widehat{\vec{r}_{\xi x^0}, \vec{\nu}_{x^0}})}{r^2_{\xi x^0}} \eta(\xi) d_\xi S + 2\pi\eta(x^0), \\ (\partial_{\vec{\nu}_{x^0}} v(x^0))_{\text{з}} &= \int\limits_S \frac{\cos(\widehat{\vec{r}_{\xi x^0}, \vec{\nu}_{x^0}})}{r^2_{\xi x^0}} \eta(\xi) d_\xi S - 2\pi\eta(x^0). \end{aligned} \tag{27}$$

◀ Доведення цієї теореми є у посібниках [8, 13, 14]. ▶

Приклад 2. Знайти потенціал простого шару, розподіленого зі сталою густиною η_0 на сфері $S_R(O)$.

◀ *Перший спосіб.* Оскільки згідно з умовою задачі маємо сферичну симетрію, то потенціал простого шару залежить лише від $\rho = |x|$, тобто $v = v(\rho)$. Знайдемо v, користуючись формулою (23):

$$v(\rho) = \int\limits_{S_R(O)} \eta_0 \frac{d_\xi S}{r_{x\xi}}. \tag{28}$$

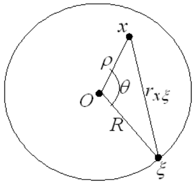

Рис. 6.25

Введемо сферичну систему координат. Як видно з рисунка 6.25, $r_{x\xi} = \sqrt{R^2+\rho^2-2R\rho\cos\theta}$. Крім того, відомо, що $d_\xi S = R^2\sin\theta d\varphi d\theta$. Тоді інтеграл (28) можна легко обчислити. Маємо

$$v(\rho) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \frac{\eta_0 R^2 \sin\theta d\theta}{\sqrt{R^2+\rho^2-2R\rho\cos\theta}}.$$

Далі за допомогою заміни $\cos\theta = t$, $\sin\theta d\theta = -dt$, де $t = 1$, коли $\theta = 0$, і $t = -1$, якщо $\theta = \pi$, отримуємо

$$v(\rho) = 2\pi\eta_0 R^2 \int_{-1}^{1} \frac{dt}{\sqrt{R^2+\rho^2-2R\rho t}} =$$

$$= -\frac{\pi R\eta_0}{\rho}\int_{-1}^{1}(R^2+\rho^2-2R\rho t)^{-1/2} d(R^2+\rho^2-2R\rho t) =$$

$$= -\frac{2\pi R\eta_0}{\rho}(R^2+\rho^2-2R\rho t)^{1/2}\Big|_{-1}^{1} = -\frac{2\pi R\eta_0}{\rho}(\sqrt{(R-\rho)^2} -$$

$$-\sqrt{(R+\rho)^2}) = \begin{cases} 4\pi R\eta_0, & \rho \le R, \\ 4\pi R^2\rho^{-1}\eta_0, & \rho > R. \end{cases}$$

Другий спосіб. Шукатимемо потенціал v як розв'язок рівняння

$$\Delta v(\rho) = 0, \ \ \rho \ne R,$$

який неперервний скрізь в $\mathbb{R}^3$, зокрема і при $\rho = R$:

$$v_1(\rho)|_{\rho=R} = v_2(\rho)|_{\rho=R}, \tag{29}$$

а його нормальні похідні при $\rho = R$ мають, згідно з (27), розрив

$$\frac{dv_2(\rho)}{d\rho}\Big|_{\rho=R} - \frac{dv_1(\rho)}{d\rho}\Big|_{\rho=R} = 4\pi\eta_0, \tag{30}$$

де v_1 – розв'язок рівняння $\Delta v = 0$ зовні сфери ($\rho > R$), v_2 – розв'язок цього самого рівняння всередині сфери ($\rho < R$).

Маємо

$$\Delta v(\rho) \equiv \frac{1}{\rho^2}\frac{d}{d\rho}\Big(\rho^2\frac{dv(\rho)}{d\rho}\Big) = 0$$

і, отже, $v_1 = -C_1\rho^{-1} + C_2$, $v_2 = -C_3\rho^{-1} + C_4$. З обмеженості v_2 при $\rho = 0$ випливає, що $C_3 = 0$, а з умови $v_1(\rho) \to 0$ при $\rho \to +\infty$, дістаємо, що $C_2 = 0$. Згідно з умовами (29) і (30) правильні рівності $-C_1R^{-1} = C_4$, $-C_1R^{-2} = 4\pi\eta_0$, тобто $C_1 = -4\pi R^2\eta_0$, $C_4 = 4\pi R\eta_0$.

Отже,

$$v(\rho) = \begin{cases} 4\pi R\eta_0, & \rho \le R, \\ 4\pi R^2\rho^{-1}\eta_0, & \rho > R. \blacktriangleright \end{cases}$$

Зауваження 3. Для випадку двовимірного простору $\mathbb{R}^2$ (площини) об'ємний потенціал має вигляд

$$u(x) = \int\limits_{\Omega} \rho(\xi)\ln\frac{1}{r_{x\xi}}d\xi, \ , \ x \in \mathbb{R}^2, \tag{31}$$

і його називають **логарифмічним потенціалом площі**. Інтеграл (31) має в основному ті самі властивості, що й потенціал об'єму, але $u(x) \to +\infty$ при $|x| \to +\infty$ як $\ln|x|$ і

$$\Delta u(x^0) = -2\pi\rho(x^0), \ \ x^0 \in \Omega \subset \mathbb{R}^2.$$

Потенціал подвійного шару на площині визначається формулою

$$w(x) = \int\limits_C \partial_{\vec{\nu}_\xi}\Big(\ln\frac{1}{r_{x\xi}}\Big)\mu(\xi)d_\xi C = \int\limits_C \frac{\cos(\widehat{\vec{r}_{x\xi}, \vec{\nu}_\xi})}{r_{x\xi}}\mu(\xi)d_\xi C, \tag{32}$$

де C – контур, на якому розміщені диполі, і називається **логарифмічним потенціалом подвійного шару**. Можна довести, що властивості логарифмічного потенціалу подвійного шару аналогічні до властивостей потенціалу подвійного шару (14), а

$$w_{\text{В}}(x^0) - w_{\text{З}}(x^0) = -2\pi\mu(x^0), \ \ x^0 \in C.$$

Потенціал простого шару в $\mathbb{R}^2$ має вигляд

$$v(x) = \int\limits_C \ln \frac{1}{r_{x\xi}} \eta(\xi) d_\xi C, \quad x \in \mathbb{R}^2, \tag{33}$$

його називають **логарифмічним потенціалом простого шару**. Властивості інтеграла (33) аналогічні до властивостей інтеграла (23), але при $|x| \to +\infty$ він прямує до ∞ як $\ln|x|$ і

$$(\partial_{\vec{\nu}_{x^0}} v(x^0))_{\text{в}} - (\partial_{\vec{\nu}_{x^0}} v(x^0))_{\text{з}} = 2\pi\eta(x^0), \quad x^0 \in C.$$

Приклад 3. Знайти логарифмічний потенціал подвійного шару для відрізка $I := \{(x_1, x_2) \mid -a \le x_1 \le a,\ x_2 = 0\}$ з густиною $\mu(x) = x_1$.

◀ Скористаємося формулою (32), яка в цьому випадку набуває вигляду

$$w(x) = \int\limits_{-a}^{a} \frac{\cos(\widehat{\vec{r}_{x\xi}, \vec{\nu}_\xi})}{r_{x\xi}} \mu((\xi_1, 0)) d\xi_1.$$

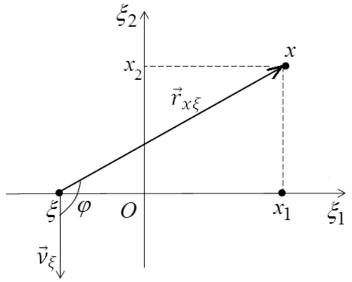

Рис.6.26

Обчислимо $\cos\varphi := = \cos(\widehat{\vec{r}_{x\xi}, \vec{\nu}_\xi})$, коли точка ξ знаходиться на прямій $\{\xi_2 = 0\}$. З рисунка 6.26 видно, що $\cos\varphi = -\frac{x_2}{r_{x\xi}} = = -\frac{x_2}{\sqrt{(x_1-\xi_1)^2 + x_2^2}}$.

Оскільки $\mu(\xi) = \xi_1$, то $w(x) = -x_2 \int\limits_{-a}^{a} \frac{\xi_1 d\xi_1}{(x_1-\xi_1)^2 + x_2^2}$,

$$w(x) = -x_2 \Big(\int\limits_{-a}^{a} \frac{x_1\, d\xi_1}{(x_1 - \xi_1)^2 + x_2^2} - \int\limits_{-a}^{a} \frac{(x_1 - \xi_1) d\xi_1}{(x_1 - \xi_1)^2 + x_2^2} \Big) =$$

$$= x_2 \Big(\frac{x_1}{x_2} \operatorname{arctg} \frac{x_1 - \xi_1}{x_2} \Big|_{-a}^{a} - \frac{1}{2} \ln((x_1 - \xi_1)^2 + x_2^2) \Big|_{-a}^{a} \Big) =$$

$$= -x_1 \Big(\operatorname{arctg} \frac{x_1 + a}{x_2} - \operatorname{arctg} \frac{x_1 - a}{x_2} \Big) - \frac{x_2}{2} \ln \frac{(x_1 - a)^2 + x_2^2}{(x_1 + a)^2 + x_2^2}$$

для всіх $x_2 \neq 0$.

Якщо ж $x_2 = 0$, то тоді точка (x_1, x_2) лежить на осі ξ_1 і, як видно з рисунка 6.26, $\cos\varphi = 0$. Тому $w(x) = 0$ для $x_2 = 0$.

Вивчимо поведінку w при $x_2 \to 0 \pm 0$. Формули стрибка у випадку логарифмічного потенціалу подвійного шару при $x \in C$ мають вигляд

$$w_{\text{В}}(x) = \int\limits_C \frac{\cos\varphi}{r_{x\xi}}\mu(\xi)d_\xi C - \pi\mu(x),$$

$$w_{\text{З}}(x) = \int\limits_C \frac{\cos\varphi}{r_{x\xi}}\mu(\xi)d_\xi C + \pi\mu(x).$$

У нашому випадку контур C збігається з відрізком I і $\cos\varphi = 0$. Тому $w_{\text{В}}(x) = -\pi x_1$, а $w_{\text{З}}(x) = \pi x_1$.

Отже, шуканий логарифмічний потенціал подвійного шару такий:

$$w(x) = -x_1\Big(\operatorname{arctg}\frac{x_1 + a}{x_2} + \operatorname{arctg}\frac{x_1 - a}{x_2}\Big) + \frac{x_2}{2}\ln\frac{(x_1 - a)^2 + x_2^2}{(x_1 + a)^2 + x_2^2}$$

для $x_2 \neq 0$; $w(x) = 0$ при $x_2 = 0$; $w(x) \to \mp\pi x_1$ при $x_2 \to 0 \pm 0$. ▶

6.6.7 Зведення крайових задач для рівняння Лапласа до інтегральних рівнянь. Використовуючи теорію потенціалу, зведемо крайові задачі для рівняння Лапласа в $\mathbb{R}^3$ до інтегральних рівнянь.

Нехай S – поверхня Ляпунова, яка ділить простір $\mathbb{R}^3$ на обмежену область Ω^+ і необмежену область Ω^-. Розглядатимемо задачі Діріхле та Неймана для рівняння Лапласа в областях Ω^+ і Ω^-.

1) Внутрішня задача Діріхле (задача D^+). Треба знайти розв'язок рівняння Лапласа

$$\Delta u = 0 \ \text{ в } \Omega^+, \tag{34}$$

який задовольняє крайову умову

$$u|_S = \varphi, \ \ \varphi \in C(S). \tag{35}$$

Згідно з теоремою 6.12 потенціал подвійного шару є гармонічною функцією в $\Omega^+ \cup \Omega^-$, а тому природно шукати розв'язок задачі (34), (35) у вигляді потенціалу подвійного шару з невідомою густиною $\mu \in C(S)$

$$u(x) = \int\limits_S \frac{\cos(\widehat{\vec{r}_{x\xi}, \vec{\nu}_\xi})}{r_{x\xi}^2} \mu(\xi) d_\xi S. \tag{36}$$

Оскільки функція (36) є розв'язком рівняння (34) для будь-якої функції $\mu \in C(S)$, то для одержання розв'язку задачі (34), (35) треба підібрати функцію μ так, щоб задовольнити умову (35), тобто умову

$$u_{\text{B}}(y) := \lim_{\Omega^+ \ni x \to y} u(x) = \varphi(y), \;\; y \in S.$$

Якщо скористатися теоремою 6.14, то з попередньої рівності дістанемо інтегральне рівняння для знаходження функції μ

$$\int\limits_S \frac{\cos(\widehat{\vec{r}_{y\xi}, \vec{\nu}_\xi})}{r_{y\xi}^2} \mu(\xi) d_\xi S - 2\pi\mu(y) = \varphi(y), \; y \in S,$$

або

$$\mu(y) = g(y) + \int\limits_S K_1(y, \xi) \mu(\xi) d_\xi S, \;\; y \in S, \tag{37}$$

де

$$g(y) := -\frac{\varphi(y)}{2\pi}, \quad K_1(y, \xi) := \frac{\cos(\widehat{\vec{r}_{y\xi}, \vec{\nu}_\xi})}{2\pi r_{y\xi}^2}.$$

2) Зовнішня задача Діріхле (задача D^-). Треба знайти розв'язок рівняння $\Delta u = 0$ в Ω^-, який задовольняє крайову умову $u|_S = \varphi$, $\varphi \in C(S)$ і є регулярним на нескінченності.

Розв'язок цієї задачі так само шукатимемо у вигляді потенціалу подвійного шару (36) з невідомою густиною μ. За допомогою теорем 6.12–6.14 приходимо до рівняння

$$\mu(y) = g(y) + \int\limits_S K_2(y, \xi) \mu(\xi) d_\xi S, \;\; y \in S, \tag{38}$$

де

$$g(y) := \frac{\varphi(y)}{2\pi}, \quad K_2(y,\xi) := -\frac{\cos(\widehat{\vec{r}_{y\xi}, \vec{\nu}_\xi})}{2\pi r_{y\xi}^2}.$$

3) Внутрішня задача Неймана (задача N^+). Треба знайти розв'язок рівняння Лапласа $\Delta u = 0$ в Ω^+, який задовольняє крайову умову

$$\partial_{\vec{\nu}} u\Big|_S = \varphi, \;\; \varphi \in C(S).$$

З пункту 6.6.6 відомо, що потенціал простого шару (23) визначений в $\mathbb{R}^3$, гармонічний в $\Omega^+ \cup \Omega^-$, регулярний на нескінченності і має нормальну похідну, якщо густина $\eta \in C(S)$. Тому шукатимемо розв'язок задачі N^+ у вигляді потенціалу простого шару

$$u(x) = \int\limits_S \frac{\eta(\xi)}{r_{x\xi}} d_\xi S \tag{39}$$

з невідомою густиною $\eta \in C(S)$.

За допомогою теорем 6.15 і 6.16 одержимо для визначення невідомої густини η інтегральне рівняння

$$\eta(y) = g(y) + \int\limits_S K_3(y,\xi)\eta(\xi) d_\xi S, \;\; y \in S, \tag{40}$$

де

$$g(y) := \frac{\varphi(y)}{2\pi}, \quad K_3(y,\xi) := -\frac{\cos(\widehat{\vec{r}_{\xi y}, \vec{\nu}_y})}{2\pi r_{\xi y}^2}.$$

4) Зовнішня задача Неймана (задача N^-). Треба знайти розв'язок рівняння Лапласа $\Delta u = 0$ в Ω^-, який задовольняє крайову умову

$$\partial_{\vec{\nu}} u\Big|_S = \varphi, \;\; \varphi \in C(S),$$

та умову регулярності на нескінченності.

Якщо шукати розв'язок цієї задачі у вигляді потенціалу простого шару (39) з невідомою густиною $\eta \in C(S)$, то, скориставшись теоремами 6.15 і 6.16, дістанемо інтегральне рівняння для η

$$\eta(y) = g(y) + \int\limits_S K_4(y,\xi)\eta(\xi)d_\xi S, \ \ y \in S, \tag{41}$$

де

$$g(y) := -\frac{\varphi(y)}{2\pi}, \ \ K_4(y,\xi) := \frac{\cos(\widehat{\vec{r}_{\xi y}, \vec{\nu}_y})}{2\pi r_{\xi y}^2}.$$

Рівняння (37), (38), (39) і (40) є **інтегральними рівняннями Фредгольма другого роду**, ядра яких мають інтегровну особливість, оскільки

$$|K_j(y,\xi)| \leq \frac{C}{r_{y\xi}^{2-\alpha}}, \ \{y,\xi\} \subset S, \, y \neq \xi, \, j \in \{1,\ldots,4\},$$

бо для поверхні Ляпунова справджується оцінка (6).

Очевидно, що

$$K_1(y,\xi) = K_4(\xi,y), \ \ K_2(y,\xi) = K_3(\xi,y).$$

Це означає, що рівняння (37), (41) і (38), (40) є парами спряжених інтегральних рівнянь.

6.6.8 Теореми Фредгольма. Як у попередньому пункті встановлено, крайові задачі D^+, D^-, N^+ і N^- зводяться до інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду на множині S (поверхні для простору і контурі для площини) з ядрами, що мають інтегровну особливість. Дослідження таких рівнянь проводиться за допомогою теорем Фредгольма. Сформулюємо ці теореми.

Розглянемо такі інтегральні рівняння:

1) пряме неоднорідне рівняння

$$u(x) = h(x) + \int\limits_S K(x,\xi)u(\xi)d_\xi S, \ x \in S; \tag{42}$$

2) пряме однорідне рівняння

$$u_0(x) = \int\limits_S K(x,\xi)u_0(\xi)d_\xi S, \ x \in S; \tag{43}$$

3) спряжене неоднорідне рівняння

$$v(x) = g(x) + \int\limits_S K^*(x,\xi)v(\xi)d_\xi S,\ x \in S; \qquad (42^*)$$

4) спряжене однорідне рівняння

$$v_0(x) = \int\limits_S K^*(x,\xi)v_0(\xi)d_\xi S,\ x \in S. \qquad (43^*)$$

У цих рівняннях u, u_0, v і v_0 – невідомі функції з простору $C(S)$; K – ядро, яке належить до класу $Q_\beta(S)$ з $\beta < \dim S$, тобто функція $K(x,\xi)$, $\{x,\xi\} \subset S$, $x \neq \xi$, неперервна та задовольняє умову

$$|K(x,\xi)| \leq B|x-\xi|^{-\beta},\ \{x,\xi\} \subset S,\ x \neq \xi,$$

з деякими сталими $B > 0$ і $\beta \in (0, \dim S)$; K^* – спряжене з K ядро, тобто $K^*(x,\xi) = K(\xi,x)$, $\{x,\xi\} \subset S$, $x \neq \xi$; h і g – вільні члени або неоднорідності рівнянь, які належать до простору $C(S)$.

Для цих рівнянь є правильними наступні теореми.

Перша теорема Фредгольма (альтернатива Фредгольма). *Можливий один з таких двох випадків:*

A) або ріняння (42) *має єдиний неперервний розв'язок* u *при довільному неперервному вільному члені* h,

B) або рівняння (43^*) *має нетривіальні розв'язки.*

Друга теорема Фредгольма. *У випадку A альтернативи рівняння* (42^*) *також має єдиний неперервний розв'язок* v *при довільному вільному членові* g. *У випадку B альтернативи рівняння* (43) *має нетривіальні розв'язки та кількість лінійно незалежних розв'язків рівнянь* (43), (43^*) *скінченна й однакова.*

Третя теорема Фредгольма. *У випадку B альтернативи рівняння* (42) *має неперервні розв'язки тоді й тільки тоді, коли його вільний член* h *ортогональний до довільного нетривіального розв'язку* v_0 *рівняння* (43^*), *тобто*

$$\int\limits_S h(\xi)v_0(\xi)d_\xi S = 0.$$

Необхідною і достатньою умовою існування неперервного розв'язку v рівняння (42*) *у випадку B є ортогональність g до довільного розв'язку u_0 рівняння* (43), *тобто*

$$\int\limits_S g(\xi)u_0(\xi)d_\xi S = 0.$$

Наслідки. Використовуючи ці теореми, а також властивості потенціалів простого та подвійного шарів, можна провести дослідження інтегральних рівнянь, які відповідають задачам D^+, D^-, N^+ і N^-. У результаті такого дослідження отримуються такі наслідки (див., наприклад, [8, с. 170–176]).

$\mathbf{1^0}$. *Внутрішня задача Діріхле для рівняння Лапласа (задача D^+) має єдиний розв'язок при довільній неперервній крайовій функції.*

$\mathbf{2^0}$. *Зовнішня задача Неймана для рівняння Лапласа (задача N^-) має єдиний розв'язок при довільній неперервній крайовій функції.*

$\mathbf{3^0}$. *Для існування розв'язку внутрішньої задачі Неймана (задачі N^+) необхідно й досить, щоб крайова функція φ задовольняла умову*

$$\int\limits_S \varphi(\xi)d_\xi S = 0.$$

$\mathbf{4^0}$. *Розв'язок зовнішньої задачі Діріхле (задачі D^-) існує і єдиний при довільній неперервній крайовій функції.*

Приклад 4. Розв'язати внутрішню задачу Діріхле для рівняння Лапласа в крузі K_R з межею C_R (рис. 6.27).

◀ Шукатимемо розв'язок задачі

$$\begin{aligned}
&\Delta u(x) = 0,\ \ x \in K_R,\\
&u(x)|_{C_R} = g(y),\ y \in C_R,\ g \in C(C_R),
\end{aligned}$$

у вигляді логарифмічного потенціалу подвійного шару

$$u(x) = \int\limits_{C_R} \partial_{\vec{\nu}_\xi}\Big(\ln\frac{1}{r_{x\xi}}\Big)\mu(\xi)d_\xi C_R = \int\limits_{C_R} \frac{\cos\varphi}{r_{x\xi}}\mu(\xi)d_\xi C_R,\ x \in K_R. \tag{44}$$

Для точок x і ξ кола C_R $\cos\varphi = \cos(\pi - \psi) = -\cos\psi$, а згідно з теоремою косинусів $2R\cos\psi = r_{x\xi}$, тому

$$\frac{\cos\varphi}{r_{x\xi}} = -\frac{1}{2R}. \tag{45}$$

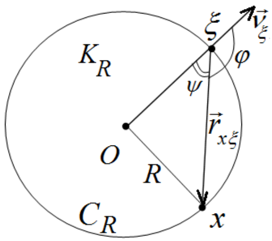

Рис.6.27

Потенціал (44) є гармонічною функцією в K_R. Якщо задовольнити крайову умову, то, скориставшись формулою стрибка

$$g(x) = \int\limits_{C_R} \frac{\cos\varphi}{r_{x\xi}} \mu(\xi) d_\xi C_R - \pi\mu(x), \ \ x \in C_R,$$

і рівністю (45), дістанемо інтегральне рівняння

$$\frac{1}{2R} \int\limits_{C_R} \mu(\xi) d_\xi C_R + \pi\mu(x) = -g(x), \ \ x \in C_R. \tag{46}$$

Позначимо через θ і α кути, які утворюють радіуси-вектори Ox і $O\xi$ з віссю Ox_1. Тоді $d_\xi C_R = R d\alpha$, а функцію точки $x \in C_R$ можна розглядати як функцію змінної θ. Відповідно до цього писатимемо $\eta(\theta)$ замість $\eta(x)$ і $\eta(\alpha)$ замість $\eta(\xi)$. Отже, (46) можна записати у вигляді

$$\mu(\theta) + \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \mu(\alpha) d\alpha = -\frac{1}{\pi} g(\theta). \tag{47}$$

Покладемо $\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \mu(\alpha) d\alpha =: C$, тоді з (47) одержимо, що

$\mu(\theta) = -\frac{1}{\pi} g(\theta) - C$. Тому $C = -\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{1}{\pi} g(\alpha) + C\right) d\alpha =$

$= -\frac{1}{2\pi^2} \int\limits_0^{2\pi} g(\alpha) d\alpha - C$. Звідси випливає, що $C = -\frac{1}{4\pi^2} \int\limits_0^{2\pi} g(\alpha) d\alpha$. Отже,

$$\mu(\theta) = -\frac{1}{\pi} g(\theta) + \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_0^{2\pi} g(\alpha) d\alpha. \tag{48}$$

Підставивши (48) в (44), дістанемо розв'язок нашої задачі

$$u(x)=\int\limits_{C_R}\Big(-\frac{1}{\pi}g(\alpha)+\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_0^{2\pi}g(\alpha)d\alpha\Big)\partial_{\vec{\nu}_\xi}\Big(\ln\frac{1}{r_{x\xi}}\Big)d_\xi C_R=$$

$$=-\frac{1}{\pi}\int\limits_{C_R}g(\alpha)\partial_{\vec{\nu}_\xi}\Big(\ln\frac{1}{r_{x\xi}}\Big)d_\xi C_R+\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_0^{2\pi}g(\alpha)d\alpha\times$$

$$\times\int\limits_{C_R}\partial_{\vec{\nu}_\xi}\Big(\ln\frac{1}{r_{x\xi}}\Big)d_\xi C_R=-\frac{R}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}g(\alpha)\partial_{\vec{\nu}_\xi}\Big(\ln\frac{1}{r_{x\xi}}\Big)\Big|_{\xi\in C_R}d\alpha+$$

$$+\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_0^{2\pi}g(\alpha)d\alpha\int\limits_{C_R}\partial_{\vec{\nu}_\xi}\Big(\ln\frac{1}{r_{x\xi}}\Big)d_\xi C_R,\ x\in K_R.$$

Оскільки

$$\int\limits_{C_R}\partial_{\vec{\nu}_\xi}\Big(\ln\frac{1}{r_{x\xi}}\Big)d_\xi C_R=-2\pi,\ x\in K_R, \tag{49}$$

то остаточно матимемо

$$u(x)=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\Big(2R\partial_{\vec{\nu}_\xi}\Big(\ln\frac{1}{r_{x\xi}}\Big)+1\Big)g(\alpha)d\alpha,\ x\in K_R. \tag{50}$$

Рівність (49) випливає з формули

$$u(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{C_R}\Big(\ln\frac{1}{r_{x\xi}}\partial_{\vec{\nu}_\xi}u(\xi)-u(\xi)\partial_{\vec{\nu}_\xi}\Big(\ln\frac{1}{r_{x\xi}}\Big)\Big)d_\xi C_R,\, x\in K_R,$$

якщо в ній покласти $u\equiv 1$. Остання формула є аналогом для площини формули (11) з пункту 6.2.2.

Переконаємося, що інтеграл (50) – це той самий інтеграл Пуассона, який одержано раніше (див. зауваження 5 у пункті 6.5.3). Справді,

$$\partial_{\vec{\nu}_\xi}\Big(\ln\frac{1}{r_{x\xi}}\Big)=\frac{1}{r_{x\xi}^2}\Big((x_1-\xi_1)\cos(\widehat{\vec{\nu}_\xi,\xi_1})+(x_2-\xi_2)\cos(\widehat{\vec{\nu}_\xi,\xi_2})\Big)=$$

$$= \frac{1}{Rr_{x\xi}^2}\Big((x_1-\xi_1)\xi_1 + (x_2-\xi_2)\xi_2\Big) = \frac{-R^2 + (x_1\xi_1 + x_2\xi_2)}{Rr_{x\xi}^2}.$$

Оскільки $r_{x\xi}^2 = (x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2 = R^2+\rho^2-2(x_1\xi_1+x_2\xi_2)$, де $\rho^2 = x_1^2+x_2^2$, то $2R\partial_{\vec{\nu}_\xi}\Big(\ln\dfrac{1}{r_{x\xi}}\Big)+1 = \dfrac{-R^2+\rho^2}{r_{x\xi}^2}$. Звідси випливає, що (50) можна подати у вигляді

$$u(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{R^2-\rho^2}{r_{x\xi}^2}g(\alpha)d\alpha,\ \ x\in K_R,$$

або

$$u(\rho,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{R^2-\rho^2}{R^2+\rho^2-2R\rho\cos(\theta-\alpha)}g(\alpha)d\alpha,$$

$$(\rho,\theta)\in[0,R)\times[0,2\pi]. \blacktriangleright$$

Вправи до розділу 6

1. Знайти гармонічну функцію u всередині прямокутника $\Pi := \{(x,y)|\, 0\le x\le a,\ 0\le y\le b\}$, яка задовольняє крайові умови:

1) $u_x(0,y)=0$, $u_x(a,y)=0$, $y\in[0,b]$,
$u(x,0)=A$, $u(x,b)=B$, $x\in[0,a]$;

2) $u(0,y)=0$, $u(a,y)=0$, $y\in[0,b]$,
$u(x,0)=2\sin\dfrac{\pi x}{a}$, $u(x,b)=0$, $x\in[0,a]$;

3) $u_x(0,y)=0$, $u_x(a,y)=0$, $y\in[0,b]$,
$u(x,0)=A$, $u(x,b)=B\cos\dfrac{3\pi x}{a}$, $x\in[0,a]$;

4) $u(0,y)=Ay(b-y)$, $u(a,y)=0$, $y\in[0,b]$,
$u(x,0)=B\sin\dfrac{\pi x}{a}$, $u(x,b)=0$, $x\in[0,a]$.

2. Знайти розв'язок рівняння Лапласа в області D, якщо:

1) $D=\{(x,y): 0<x<a,\ y>0\}$,
$u(0,y)=0$, $u(a,y)=0$, $y\ge 0$,
$u(x,0)=-\sin\dfrac{8\pi}{a}x$, $\lim\limits_{y\to+\infty}u(x,y)=0$, $0\le x\le a$.

2) $D=\{(x,y): x>0,\, 0<y<b\}$,
$u(0,y)=A(y^2-b^2)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x,y)=0$, $0\le y\le b$,
$u_y(x,0)=0$, $u(x,b)=0$, $x\ge 0$.

3. Знайти гармонічну всередині круга $K_R(0) := \{(r,\varphi)\,|\; 0<r<R,\ 0<\varphi<2\pi\}$ функцію, яка задовольняє умову:
1) $u(R,\varphi)=A+B\sin\varphi$, $0\le\varphi\le 2\pi$;
2) $u_r(R,\varphi)=\sin^3\varphi$, $0\le\varphi\le 2\pi$;
3) $u_r(R,\varphi)=A\sin\varphi+B\sin^3\varphi$, $0\le\varphi\le 2\pi$.

4. Зовні круга $K_R(0)$ знайти розв'язок рівняння Лапласа, який задовольняє крайову умову:
1) $u(R,\varphi)=u_0\sin\dfrac{\varphi}{2}$; 2) $u_r(R,\varphi)=\dfrac{3}{2}R^2\cos 2\varphi$, $0\le\varphi\le 2\pi$.

5. У крузі радіуса R з центром у початку координат, знайти розв'язок рівняння Пуассона

$$u_{xx}(x,y)+u_{yy}(x,y)=-Axy,$$

який задовольняє крайову умову $u(x,y)|_{C_R}=0$.

6. Розв'язати задачу:
1) $u_{xx}+u_{yy}=2x(a-x)$, $0<x<a$, $0<y<b$,
$u(0,y)=0$, $u(a,y)=0$, $0\le y\le b$,
$u_y(x,0)=0$, $u_y(x,b)=0$, $0\le x\le a$.
2) $u_{xx}+u_{yy}=A\cos\frac{\pi x}{2a}$, $0<x<a$, $0<y<b$,
$u(0,y)=0$, $u(a,y)=0$, $0\le y\le b$,
$u_y(x,0)=0$, $u(x,b)=0$, $0\le x\le a$.

7. Знайти функцію, яка гармонічна в кільці $K_{1,2}(0) := \{(r,\varphi)|\, 1<r<2,\ 0<\varphi<2\pi\}$ і така, що $u(1,\varphi)=1+\cos^2\varphi$, $u(2,\varphi)=\sin^2\varphi$, $0\le\varphi\le 2\pi$.

8. Розв'язати рівняння Пуассона $u_{xx}+u_{yy}=12(x^2-y^2)$ у кільці $K_{a,b}(0) := \{(x,y)\,|\,a^2<x^2+y^2<b^2\}$, якщо $u(x,y)|_{C_a}=0$; $\partial_{\vec{\nu}}(x,y)\Big|_{C_b}=0$.

9. У круговому секторі $D := \{(r,\varphi)|\,0<r<R,\ 0<\varphi<\alpha\}$ знайти гармонічну функцію, яка задовольняє крайові умови:
1) $u(r,0)=0$, $u(r,\alpha)=0$, $0\le r\le R$,
$u(R,\varphi)=A\varphi$, $0\le\varphi\le\alpha$;

2) $u(r,0)=0$, $u(r,\alpha)=0$, $0\le r\le R$,
$u_r(R,\varphi)=B$, $0\le\varphi\le\alpha$.

10. За допомогою функції Гріна розв'язати задачу Діріхле для рівняння Лапласа в півплощині $D:=\{\,(x_1,x_2)\mid x_1\in\mathbb{R},\ x_2>0\,\}$.

11. Знайти стаціонарний розподіл температури в півплощині $D:=\{(x_1,x_2)\,|\,x_1\in\mathbb{R},\ x_2>0\}$, межа якої, вісь Ox_1, підтримується при нульовій температурі, коли $|x_1|>R$, і при температурі, що дорівнює одиниці, коли $|x_1|\le R$.

12. Знайти функцію Гріна другої внутрішньої крайової задачі для рівняння Лапласа в кулі радіуса R з центром у початку координат і записати розв'язок цієї задачі в інтегральній формі.

13. Знайти розв'язок рівняння $\Delta u(x_1,x_2)=0$ у першому квадранті $D:=\{(x_1,x_2)\,|\,x_1>0,\ x_2>0\}$ з такими крайовими умовами:
1) $u(x_1,x_2)|_{x_1=0}=0$, $u(x_1,x_2)|_{x_2=0}=1$;
2) $u(x_1,x_2)|_{x_1=0}=a$, $u(x_1,x_2)|_{x_2=0}=b$.

14. У півпросторі $\Pi^+:=\{(x_1,x_2,x_3)\,|\,(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2,\ x_3>0\}$ знайти стаціонарний розподіл температури, якщо:

1) $u(x)|_{x_3=0}=\begin{cases}0, & x_1\le 0,\ x_2\in\mathbb{R},\\ 1, & x_1>0,\ x_2\in\mathbb{R};\end{cases}$

2) $u(x)|_{x_3=0}=\begin{cases}0, & (x_1,x_2)\overline{\in}K_R(0),\\ 1, & (x_1,x_2)\in K_R(0).\end{cases}$

15. Знайти логарифмічний потенціал подвійного шару для відрізка $I:=\{(x_1,x_2)\,|\,-a\le x_1\le a,\ x_2=0\}$ з густиною диполя $\mu=-\mu_0$, $-a\le x_1<0$ і $\mu=\mu_0$, $0<x_1\le a$.

16. За допомогою потенціалів подвійного чи простого шарів знайти стаціонарну температуру точок півплощини $\Pi^+:=$ $=\{(x_1,x_2)\,|\,x_1\in\mathbb{R},\ x_2>0\}$ за відсутності джерел тепла, якщо:
1) на межі $\Gamma:=\{(x_1,x_2)\,|\,x_1\in\mathbb{R},\ x_2=0\}$ підтримується температура $u_0(x_1)$, $x_1\in\mathbb{R}$;
2) на межі Γ підтримується заданий потік тепла, тобто $\partial_{\vec{\nu}}u(x)\Big|_{x_2=0}=u_1(x_1)$, $x_1\in\mathbb{R}$.

17. Знайти розв'язки внутрішньої і зовнішньої задач Неймана для кулі $K_R := \{ (x_1, x_2, x_3) \,|\, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \le R^2 \}$, які задовольняють крайову умову $\partial_{\vec{\nu}} u(x)\Big|_{S_R} = a$, $a \neq 0$ – стала.

Відповіді до вправ з розділу 6

1. 1) $u(x,y) = A + \dfrac{B-A}{b}y$; 2) $u(x,y) = 2\dfrac{\operatorname{sh}\frac{\pi}{a}(b-y)}{\operatorname{sh}\frac{\pi b}{a}}\sin\dfrac{\pi x}{a}$;
3) $u(x,y) = A - \dfrac{A}{b}y + B\dfrac{\operatorname{sh}\frac{3\pi y}{a}}{\operatorname{sh}\frac{3\pi b}{a}}\cos\dfrac{3\pi x}{a}$; 4) $u(x,y) = B\dfrac{\operatorname{sh}\frac{\pi(b-y)}{a}}{\operatorname{sh}\frac{\pi b}{a}}\times$
$\times \sin\frac{\pi x}{a} + \frac{8Ab^2}{\pi^3}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\frac{\operatorname{sh}\frac{(2n-1)\pi(a-x)}{b}}{\operatorname{sh}\frac{(2n-1)\pi a}{b}}\sin\frac{(2n-1)\pi y}{b}$.

2. 1) $u(x,y) = -e^{-\frac{8\pi}{a}y}\sin\dfrac{8\pi}{a}x$;
2) $u(x,y) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{32Ab^2}{(2n-1)^3\pi^3}e^{-\frac{(2n-1)\pi}{2b}x}\cos\dfrac{(2n-1)\pi}{2b}y$.

3. 1) $u(r,\varphi) = A + \dfrac{B}{R}r\sin\varphi$; 2) $u(r,\varphi) = \dfrac{1}{4}(3r\sin\varphi - \dfrac{r^3}{3R^2}\times$
$\times\sin 3\varphi) + C$, C – стала; 3) $u(r,\varphi) = A_0 + (A + \dfrac{3}{4}B)r\sin\varphi -$
$-\dfrac{B}{12R^2}r^3\sin 3\varphi$, A_0 – стала.

4. 1) $u(r,\varphi) = \dfrac{2u_0}{\pi} + \dfrac{4u_0}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{1-4k^2}\left(\dfrac{R}{r}\right)^k\cos k\varphi$;
2) $u(r,\varphi) = -\dfrac{3}{2}\dfrac{R^5}{r^2}\cos 2\varphi + A_0$, $A_0 \in \mathbb{R}$.

5. $u(r,\varphi) = \dfrac{Ar^2}{24}(R^2 - r^2)\sin 2\varphi$. Розв'язок шукати у вигляді $u = v + w$, де $w = -\dfrac{Axy}{12}(x^2+y^2) = -\dfrac{Ar^4\sin 2\varphi}{24}$ – частинний розв'язок рівняння Пуассона, а v – розв'язок рівняння Лапласа, який задовольняє відповідну крайову умову.

6. 1) $u(x,y) = -\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{16a^4}{\pi^5(2k-1)^5}\sin\dfrac{(2k-1)\pi x}{a}x$;
2) $u(x,y) = \dfrac{16Aa^2b^2}{\pi^3}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)(b^2-(2n-1)^2a^2)}\Big(\cos\dfrac{\pi x}{2a} -$

$$-\frac{\operatorname{sh}\frac{(2n-1)\pi(a-x)}{2b}}{\operatorname{sh}\frac{(2n-1)\pi a}{2b}}\Bigg)\cos\frac{(2n-1)\pi y}{2b}.$$

7. $u(r,\varphi)=\dfrac{3}{2}-\dfrac{\ln r}{\ln 2}+\Big(\dfrac{2}{3r^2}-\dfrac{1}{6}r^2\Big)\cos 2\varphi.$

8. $u(r,\varphi)=\Big((a^4+b^4)r^4-(a^6+2b^6)r^2-(a^2-2b^2)\dfrac{a^4b^4}{r^2}\Big)\dfrac{\cos 2\varphi}{a^4+b^4}.$

9. 1) $u(r,\varphi)=\dfrac{2A\alpha}{\pi}\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k+1}}{k}\Big(\dfrac{r}{R}\Big)^{\frac{k\pi}{\alpha}}\sin\dfrac{k\pi\varphi}{\alpha};$

2) $u(r,\varphi)=\dfrac{4\alpha BR}{\pi^2}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2k+1)^2}\Big(\dfrac{r}{R}\Big)^{\frac{(2k+1)\pi}{\alpha}}\sin\dfrac{(2k+1)\pi\varphi}{\alpha}.$

10. $u(x_1,x_2)=\dfrac{x_2}{\pi}\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{\varphi(\xi_1)}{(x_1-\xi_1)^2+x_2^2}d\xi_1.$

11. $u(x_1,x_2)=\dfrac{1}{\pi}\Big(\operatorname{arctg}\dfrac{R-x_1}{x_2}+\operatorname{arctg}\dfrac{R+x_1}{x_2}\Big)$. Скористатись формулою з вправи 10.

12. $\Delta u=0$, $\partial_{\vec{\nu}}u\Big|_{S_R}=\varphi$, $G(x,\xi)=\dfrac{1}{4\pi}\Big(\dfrac{1}{r_{x\xi}}+\dfrac{R}{\rho r_{x\xi^*}}-\dfrac{1}{R}\times$

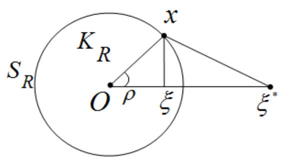

Рис. 6.28

$\times\ln\dfrac{R^2-\rho\rho^*\cos\gamma+\rho r_{x\xi^*}}{2R^2}\Big)$, де ξ^* – точка, інверсна з точкою ξ відносно межі S кулі, $\gamma=(\widehat{\vec{Ox},\vec{O\xi}})$, $\rho=|\xi|$, $\rho^*=|\xi^*|$ (рис. 6.28). $G(x,\xi)=$
$=\dfrac{1}{4\pi}\Big(\dfrac{2}{r_{x\xi}}-\dfrac{1}{R}\ln\dfrac{R-\rho\cos\gamma+r_{x\xi}}{2R}\Big).$

Шуканий розв'язок

$$u(x)=\frac{1}{4\pi}\int\limits_S\Big(\frac{2}{r_{x\xi}}-\frac{1}{R}\ln\frac{R-\rho\cos\gamma+r_{x\xi}}{2R}\Big)\varphi(\xi)d_\xi S,\ x\in K_R.$$

13. 1) $u(x)=\dfrac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\dfrac{x_1}{x_2}$; 2) $u(x)=\dfrac{2}{\pi}(a\operatorname{arctg}\dfrac{x_2}{x_1}+b\operatorname{arctg}\dfrac{x_1}{x_2}).$

14. 1) $u(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{x_1}{x_3}$. Скористатись формулою

$$u(x)=\frac{x_3}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mu(\xi_1,\xi_2)\,d\xi_1\,d\xi_2}{((x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2+x_3^2)^{3/2}}$$

з прикладу 1 пункту 6.4.5. Зробивши в цій формулі заміну $x_2 - \xi_2 = z$ і підставивши замість μ його значення, дістанемо, що

$$u(x) = \frac{x_3}{2\pi} \int\limits_0^{+\infty} d\xi_1 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{((x_1 - \xi_1)^2 + z^2 + x_3^2)^{3/2}}.$$

Обчислимо спочатку внутрішній інтеграл за допомогою підстановки $z = \lambda \mathrm{tg} t$, $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$, де $\lambda^2 = (x_1 - \xi_1)^2 + x_3^2$:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{(z^2 + \lambda^2)^{3/2}} = \frac{1}{\lambda^2} \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos t dt = \frac{2}{\lambda^2}.$$

Тоді

$$u(x) = \frac{x_3}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} \frac{d\xi_1}{(x_1 - \xi_1)^2 + x_3^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \mathrm{arctg} \frac{x_1}{x_3}.$$

2) $u(x) = 1 - \dfrac{x_3}{\sqrt{R^2 + x_3^2}}$.

Зручно скористатися формулою, наведеною вище, записавши її у вигляді

$$u(r, \varphi, x_3) = \frac{x_3}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} d\psi \int\limits_0^{+\infty} \frac{\mu(\rho, \psi)\, \rho d\rho}{(r^2 + \rho^2 - 2\rho r \cos(\psi - \varphi) + x_3^2)^{3/2}}.$$

Згідно з осьовою симетрією u не залежатиме від φ, а тому

$$u(r, x_3) = \frac{x_3}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} d\psi \int\limits_0^{R} \frac{\rho\, d\rho}{(r^2 + \rho^2 - 2\rho r \cos\psi + x_3^2)^{3/2}}.$$

Оскільки r на осі Oz дорівнює нулю, то

$$u(0, x_3) = \frac{x_3}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} d\psi \int\limits_0^{R} \frac{\rho\, d\rho}{(\rho^2 + x_3^2)^{3/2}} = 1 - \frac{x_3}{\sqrt{R^2 + x_3^2}}.$$

15. $w(x) = \begin{cases} -\mu_0\Big(2\mathrm{arctg}\frac{x_1}{x_2} - \mathrm{arctg}\frac{x_1+a}{x_2} + \mathrm{arctg}\frac{a-x_1}{x_2}\Big), x_2 \neq 0, \\ 0, \qquad x_2 = 0, \end{cases}$

$w(x) \to \pi\mu_0$, $x_2 \to 0 \pm 0$, $0 < x_1 < a$; $w(x) \to \pm\pi\mu_0$, $x_2 \to 0 \pm 0$, $-a \leq x_1 < 0$.

16. 1) $u(x) = \dfrac{x_2}{\pi}\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{u_0(\xi)d\xi}{(x_1-\xi)^2 + x_2^2}$;

2) $u(x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_1(\xi)\ln\frac{1}{\sqrt{(x_1-\xi)^2 + x_2^2}}d\xi.$

17. Внутрішня задача Неймана розв'язку не має, а розв'язком зовнішньої задачі Неймана є $u(x) = -\dfrac{aR^2}{|x|}$, $|x| > R$.

7 СПЕЦІАЛЬНІ ФУНКЦІЇ В ЗАДАЧАХ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

При розв'язуванні задач математичної фізики методом Фур'є ми одержували задачу Штурма–Ліувілля. Якщо областю, в якій розглядається задача, є відрізок, прямокутник, паралелепіпед, то рівнянням у цій задачі є диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Якщо ж областю, де розв'язується рівняння, є круг, циліндр, куля, то маємо задачу Штурма–Ліувілля для лінійного диференціального рівняння зі змінними коефіцієнтами. Особливістю цих рівнянь є перетворення в нуль коефіцієнта при старшій похідній принаймні в одній точці області визначення коефіцієнтів або її межі. Такими рівняннями, зокрема, є рівняння Бесселя (рівняння циліндричних функцій) і рівняння Лежандра.

Наведені в цьому розділі відомості про спеціальні функції у повнішому вигляді можна знайти в посібниках [1, 9].

7.1 Функції Бесселя та їхні властивості

7.1.1 Рівняння Бесселя. Розглянемо рівняння

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

де ν – стала. Це рівняння називається **рівнянням Бесселя**. При $x = 0$ рівняння (1) вироджується, а тому шукатимемо його частинний розв'язок у вигляді узагальненого степеневого ряду

$$y = x^\rho(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_kx^k + \ldots), \tag{2}$$

де $a_0 \neq 0$.

Перепишемо ряд (2) у вигляді

$$y = a_0x^\rho + a_1x^{\rho+1} + a_2x^{\rho+2} + \ldots + a_kx^{\rho+k} + \ldots, \tag{2'}$$

і продиференціюємо $(2')$ двічі:

$$y' = a_0\rho x^{\rho-1} + a_1(\rho+1)x^\rho + a_2(\rho+2)x^{\rho+1} + \ldots +$$

$$+a_k(\rho+k)x^{\rho+k-1}+\ldots, \tag{3}$$

$$y''=a_0\rho(\rho-1)x^{\rho-2}+a_1(\rho+1)\rho x^{\rho-1}+a_2(\rho+2)(\rho+1)x^{\rho}+$$
$$+\ldots+a_k(\rho+k)(\rho+k-1)x^{\rho+k-2}+\ldots\ . \tag{4}$$

Підставивши $(2')$, (3), (4) в рівняння (1), дістанемо

$$a_0(\rho^2-\nu^2)x^{\rho}+a_1((\rho+1)^2-\nu^2)x^{\rho+1}+\ldots+$$
$$+(a_k((\rho+k)^2-\nu^2)+a_{k-2})x^{\rho+k}+\ldots=0,\ \ x\in\mathbb{R}.$$

Остання рівність можлива, якщо коефіцієнти при всіх степенях x дорівнюють нулю, тобто

$$\begin{array}{l} a_0(\rho^2-\nu^2)=0,\\ a_1((\rho+1)^2-\nu^2)=0,\\ a_2((\rho+2)^2-\nu^2)+a_0=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_k((\rho+k)^2-\nu^2)+a_{k-2}=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \tag{5}$$

Оскільки $a_0\neq 0$, то з першої рівності випливає, що $\rho=\pm\nu$, а з другої – $a_1=0$. Далі маємо

$$\begin{array}{l} a_2=-\dfrac{a_0}{(\rho+2)^2-\nu^2},\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_k=-\dfrac{a_{k-2}}{(\rho+k)^2-\nu^2},\ \ k\in\{2,3,\ldots\}. \end{array} \tag{6}$$

Нехай $\rho=\nu$, тоді з (6) одержуємо, що всі коефіцієнти з непарними індексами дорівнюють нулю, тобто

$$a_{2k+1}=0,\ \ k\in\mathbb{Z}_+.$$

Знайдемо коефіцієнти з парними індексами:

$$\begin{array}{l} a_2=-\dfrac{a_0}{(\nu+2)^2-\nu^2}=-\dfrac{a_0}{2^2\cdot 1!(\nu+1)},\\ a_4=-\dfrac{a_2}{(\nu+4)^2-\nu^2}=-\dfrac{a_2}{2^2\cdot 2(\nu+2)}=\dfrac{a_0}{2^4\cdot 2!(\nu+1)(\nu+2)},\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{2k}=(-1)^k\dfrac{a_0}{2^{2k}\cdot k!(\nu+1)(\nu+2)\ldots(\nu+k)},\ \ k\in\mathbb{N}. \end{array} \tag{7}$$

Коефіцієнт a_0 до цих пір був довільним ненульовим числом. Візьмемо

$$a_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu+1)}, \tag{8}$$

де $\Gamma(\nu)$ – гамма-функція, тобто $\Gamma(\nu) := \int\limits_0^{+\infty} x^{\nu-1} e^{-x} dx$, $\nu > 0$. Відомо, що $\Gamma(\nu+1) = \nu\Gamma(\nu)$, $\Gamma(\nu+k+1) = (\nu+1)(\nu+2)\dots(\nu+k)\Gamma(\nu+1)$, $\Gamma(n+1) = n!$.

Скориставшись рівностями (7), (8) і властивостями гамма-функції, дістанемо, що

$$a_{2k} = (-1)^k \frac{1}{2^{2k+\nu}(\nu+1)\dots(\nu+k)\Gamma(\nu+1)k!} =$$

$$= (-1)^k \frac{1}{2^{2k+\nu} k! \Gamma(\nu+k+1)}, \; k \in \mathbb{Z}_+. \tag{9}$$

Підставивши вирази для коефіцієнтів a_{2k} і a_{2k+1} у (2), одержимо

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\frac{x}{2})^{2k+\nu}}{k!\Gamma(\nu+k+1)}. \tag{10}$$

За допомогою ознаки Даламбера можна переконатися, що ряд (10) збігається на всій числовій осі та є диференційовною функцією при $x > 0$, а отже, є розв'язком рівняння (1).

Знайдений розв'язок (10) називають **функцією Бесселя** або **циліндричною функцією першого роду порядку** ν і позначають символом $J_\nu(x)$, тобто

$$J_\nu(x) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\frac{x}{2})^{2k+\nu}}{k!\Gamma(\nu+k+1)}, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{11}$$

Якщо взяти $\rho = -\nu$, то, повторивши попередні міркування, знайдемо ще один розв'язок рівняння (1)

$$J_{-\nu}(x) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\frac{x}{2})^{2k-\nu}}{k!\Gamma(-\nu+k+1)}, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{12}$$

У випадку, коли ν не є цілим числом, частинні розв'язки J_ν і $J_{-\nu}$ є лінійно незалежними, оскільки один із них в околі нуля поводиться як x^ν, а другий – як $x^{-\nu}$. Тому для цього випадку загальний розв'язок рівняння (1), а отже, й довільну циліндричну функцію порядку ν можна подати у вигляді

$$y_\nu(x) = C_1 J_\nu(x) + C_2 J_{-\nu}(x),$$

де C_1 і C_2 – довільні сталі.

Якщо ж ν дорівнює цілому числу n, то

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Справді,

$$J_{-n}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\frac{x}{2})^{2k-n}}{k!\Gamma(-n+k+1)} = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k (\frac{x}{2})^{2k-n}}{k!\Gamma(-n+k+1)},$$

бо $\Gamma(-n+k+1) = +\infty$, $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. В останній сумі індекс підсумовування k замінимо на $s+n$. Тоді одержимо

$$J_{-n}(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+s} (\frac{x}{2})^{2s+n}}{s!\Gamma(n+s+1)} = (-1)^n J_n(x), \;\; x \in \mathbb{R}.$$

Отже, для цілих значень ν функції J_ν і $J_{-\nu}$ лінійно залежні, тому за їхньою допомогою не можна дістати загальний розв'язок рівняння (1). У цьому випадку вводять **функцію Неймана** (**функцію Вебера**) або **функцію Бесселя другого роду порядку** ν

$$Y_\nu(x) := \frac{J_\nu(x)\cos\nu\pi - J_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi}, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{13}$$

яка є розв'язком рівняння Бесселя.

Підстановка у формулу (13) замість ν цілого числа n дає справа невизначеність типу $\frac{0}{0}$, оскільки $\sin n\pi = 0$, $\cos n\pi = (-1)^n$, $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$. Для таких значень функція $Y_n(x)$ визначається як границя

$$Y_n(x) = \lim_{\nu\to n} Y_\nu(x) = \lim_{\nu\to n} \frac{J_\nu(x)\cos\nu\pi - J_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi}.$$

Доведено, що функції J_ν і Y_ν лінійно незалежні при довільних значеннях ν на будь-якому відрізку числової осі. Тому загальний розв'язок рівняння (1) визначається формулою

$$Y(x) = C_1 J_\nu(x) + C_2 Y_\nu(x), \quad \{C_1, C_2\} \subset \mathbb{R}. \tag{14}$$

7.1.2 Основні властивості функцій Бесселя. Наведемо без доведень основні властивості функцій Бесселя. За допомогою безпосереднього диференціювання рядів, якими визначаються функції Бесселя, одержуємо такі **рекурентні співвідношення**:

$$J'_\nu(x) = J_{\nu-1}(x) - \frac{\nu}{x} J_\nu(x), \tag{15}$$

$$J'_\nu(x) = -J_{\nu+1}(x) + \frac{\nu}{x} J_\nu(x). \tag{16}$$

Якщо відняти від рівності (15) рівність (16), то дістанемо рівність

$$J_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} J_\nu(x) - J_{\nu-1}(x). \tag{17}$$

Такі самі співвідношення правильні й для функцій Бесселя другого роду порядку ν:

$$Y'_\nu(x) = Y_{\nu-1}(x) - \frac{\nu}{x} Y_\nu(x),$$

$$Y'_\nu(x) = -Y_{\nu+1}(x) + \frac{\nu}{x} Y_\nu(x),$$

$$Y_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} Y_\nu(x) - Y_{\nu-1}(x). \tag{18}$$

З рівностей (17) і (18) випливає, що для знаходження функцій Бесселя порядку $\pm n$, $\pm n + \frac{1}{2}$ досить знати ці функції для випадків, коли $\nu = 0$, $\nu = 1$ і $\nu = \pm\frac{1}{2}$.

Знайдемо функції Бесселя першого роду порядку $\pm\frac{1}{2}$. Оскільки $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$, $\Gamma(\nu + k + 1) = \nu(\nu+1)\ldots(\nu+k)\Gamma(\nu)$, то з формули (11) випливає, що

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \ldots \frac{2k+1}{2} \sqrt{\pi}} \frac{x^{2k}}{2^{2k}} =$$

$$= \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

або

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x,$$

бо

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\ x^{2k+1} = \sin x.$$

Аналогічно одержуємо, що

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x.$$

З'ясуємо, як поводяться функції Бесселя при $x \to 0$ і при $|x| \to +\infty$. Скориставшись рівностями (11), (12) і (13), виявимо таку поведінку функцій J_ν і Y_ν в околі точки $x = 0$:

$$\lim_{x \to 0} J_\nu(x) = \begin{cases} +\infty, & \nu < 0, \\ 1\,, & \nu = 0, \\ 0\,, & \nu > 0 \end{cases} \qquad \lim_{x \to 0} Y_\nu(x) = +\infty. \tag{19}$$

Доводиться, що в околі нескінченності правильні такі асимптотичні зображення:

$$J_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O(x^{-3/2}),$$

$$J_{-\nu}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x + \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O(x^{-3/2}),$$

де $O(x^{-3/2})$ містить доданки, які мають на нескінченності порядок мализни не нижче ніж $x^{-3/2}$.

З асимптотичного зображення функції J_ν бачимо, що при необмеженому зростанні x другий доданок прямує до нуля як $x^{-3/2}$, а $\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$ змінює знак безліч разів і прямує до нуля як $x^{-1/2}$. Звідси випливає, що функція J_ν має зліченну множину додатних нулів. Якщо $\mu > 0$ є нулем функції J_ν, то, як випливає з (11), $-\mu$ так само буде нулем $J_\nu(x)$. Точка $\mu = 0$ є нулем функції Бесселя J_ν при $\nu > 0$. Доводиться, що всі нулі функції Бесселя прості та є дійсними числами при дійсному $\nu > -1$.

Розглянемо рівняння

$$\alpha J_\nu(x) + \beta x J_\nu'(x) = 0, \tag{20}$$

де α і β – задані числа.

Доведено, що при $\nu > -1$ і $\frac{\alpha}{\beta} + \nu \geq 0$ всі корені рівняння (20) дійсні.

7.1.3 Розклад функцій в ряд Фур'є за функціями Бесселя. При розв'язуванні крайових задач методом Фур'є одержуємо задачу Штурма–Ліувілля

$$x^2 y'' + xy' + (\lambda^2 x^2 - \nu^2)y = 0, \;\; 0 < x < l, \tag{21}$$

$$|y(0)| < +\infty, \quad y(l) = 0. \tag{22}$$

Точка $x = 0$ для рівняння (21) є особливою, бо коефіцієнт при y'' дорівнює нулю. Тому крайову умову в цій точці довільно задавати не можна. Доводиться, що крайова умова зводиться до вимоги обмеженості розв'язку при $x = 0$.

Зробимо в рівнянні (21) заміну $t = \lambda x$. Тоді $dt = \lambda dx$, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d\tilde{y}}{dt}\lambda$, $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{d^2\tilde{y}}{dt^2}\lambda^2$. Підставивши ці вирази в (21), дістанемо рівняння Бесселя

$$t^2 \frac{d^2\tilde{y}}{dt^2} + t\frac{d\tilde{y}}{dt} + (t^2 - \nu^2)\tilde{y} = 0.$$

Загальний розв'язок цього рівняння має вигляд

$$\tilde{y}(t) = C_1 J_\nu(t) + C_2 Y_\nu(t).$$

Звідси випливає, що загальний розв'язок рівняння (21) визначається формулою

$$y(x) = C_1 J_\nu(\lambda x) + C_2 Y_\nu(\lambda x), \;\; 0 < x < l, \; \{C_1, C_2\} \subset \mathbb{R}. \tag{23}$$

Отже, функція $J_\nu(\lambda x)$, $x \in (0, l)$, є розв'язком рівняння

$$x^2 \frac{d^2 J_\nu(\lambda x)}{dx^2} + x \frac{dJ_\nu(\lambda x)}{dx} + (\lambda^2 x^2 - \nu^2) J_\nu(\lambda x) = 0,$$

яке, поділивши на $x \neq 0$, запишемо у вигляді

$$\frac{d}{dx}\Big(x \frac{dJ_\nu(\lambda x)}{dx}\Big) + \Big(\lambda^2 x - \frac{\nu^2}{x}\Big) J_\nu(\lambda x) = 0. \tag{24}$$

Задовольнимо функцією (23) крайові умови (22). Тоді одержимо, що

$$|y(0)| = |C_1 J_\nu(\lambda x) + C_2 Y_\nu(\lambda x)|\Big|_{x=0} < +\infty,$$

якщо $C_2 = 0$, бо $\lim\limits_{x \to 0} Y_\nu(\lambda x) = +\infty$.

З умови $y(l) = 0$ випливає рівність

$$C_1 J_\nu(\lambda l) = 0.$$

Оскільки $C_1 \neq 0$, бо тоді розв'язок є тривіальним, то

$$J_\nu(\lambda l) = 0. \tag{25}$$

Відомо, що рівняння (25) має зліченну множину додатних коренів $\{\mu_k,\ k \in \mathbb{N}\}$. Тому власними числами задачі (21), (22) є $\lambda_k = \frac{\mu_k}{l},\ k \in \mathbb{N}$, а власними функціями – $J_\nu(\frac{\mu_k}{l} x),\ k \in \mathbb{N}$.

Ми розглянули тільки додатні корені μ_k, $k \in \mathbb{N}$, бо симетричним від'ємним нулям $-\mu_k$, $k \in \mathbb{N}$, відповідають власні функції $J_\nu(-\frac{\mu_k}{l} x)$, які є лінійно залежними з функціями $J_\nu(\frac{\mu_k}{l} x)$, а тому вони нам не підходять.

Якщо порівняти рівняння (24) з рівнянням (8) пункту 4.4.2, то бачимо що задача Штурма–Ліувілля (21), (22) подібна до задачі (8), (9) з цього пункту, де $p(x) = x$, $\rho(x) = x$, $q(x) = -\frac{\nu^2}{x}$. Оскільки $x = 0$ є особливою точкою для рівняння (21), то без перевірки переносити властивості власних чисел і власних функцій, установлені в пункті 4.4.2, на випадок задачі (21), (22) не можна.

Доведемо ортогональність функцій Бесселя $J_\nu(\frac{\mu_k}{l}x), k \in \mathbb{N}$, на відрізку $[0, l]$.

Візьмемо два різних значення λ_1 і λ_2 і запишемо для них тотожності (24):

$$\tfrac{d}{dx}\Big(x\tfrac{dJ_\nu(\lambda_1 x)}{dx}\Big) + \Big(\lambda_1^2 x - \tfrac{\nu^2}{x}\Big)J_\nu(\lambda_1 x) = 0,$$

$$\tfrac{d}{dx}\Big(x\tfrac{dJ_\nu(\lambda_2 x)}{dx}\Big) + \Big(\lambda_2^2 x - \tfrac{\nu^2}{x}\Big)J_\nu(\lambda_2 x) = 0.$$

Помножимо першу тотожність на $J_\nu(\lambda_2 x)$, а другу – на $J_\nu(\lambda_1 x)$ і віднімемо від першої другу. Після відповідних перетворень, дістанемо

$$(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)xJ_\nu(\lambda_1 x)J_\nu(\lambda_2 x) = \frac{d}{dx}\Big(xJ_\nu(\lambda_2 x)\frac{dJ_\nu(\lambda_1 x)}{dx} - $$

$$-xJ_\nu(\lambda_1 x)\frac{dJ_\nu(\lambda_2 x)}{dx}\Big). \tag{26}$$

Якщо скористатися формулою (11), то переконаємося, що вираз, який стоїть у круглих дужках справа, можна розкласти за степенями x, причому найнижчий степінь x буде $x^{2(\nu+1)}$. Звідси одержуємо, що цей вираз дорівнює нулю при $x = 0$, якщо $\nu > -1$. Взявши це до уваги, зінтегруємо рівність (26) по відрізку $[0, l]$. Тоді дістанемо

$$(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)\int\limits_0^l xJ_\nu(\lambda_1 x)J_\nu(\lambda_2 x)dx = l\Big(\lambda_1 J_\nu'(\lambda_1 l)J_\nu(\lambda_2 l) - $$

$$-\lambda_2 J_\nu'(\lambda_2 l)J_\nu(\lambda_1 l)\Big), \tag{27}$$

де значком $'$ позначаємо похідну функції за її аргументом.

Якщо $\lambda_1 = \dfrac{\mu_k}{l}$, $\lambda_2 = \dfrac{\mu_m}{l}$, де μ_k і μ_m – різні корені рівняння

$$J_\nu(x) = 0, \quad \nu > -1, \tag{28}$$

то з формули (27) випливає **властивість ортогональності функцій Бесселя**:

$$\int_0^l x\,J_\nu(\frac{\mu_k}{l}x)J_\nu(\frac{\mu_m}{l}x)dx = 0, \quad k \neq m. \tag{29}$$

Нехай $\lambda_1 = \lambda$, а λ_2 вважатимемо змінним і спрямуємо його до λ. Якщо $\lambda = \dfrac{\mu}{l}$, де μ – додатний корінь рівняння (28), то з формули (27) дістанемо

$$\int_0^l x\,J_\nu(\lambda x)J_\nu(\lambda_2 x)dx = \frac{l\lambda J_\nu'(\lambda x)J_\nu(\lambda_2 x)}{\lambda_2^2 - \lambda^2}.$$

При $\lambda_2 \to \lambda$ права частина цієї рівності є невизначеністю, оскільки чисельник і знаменник прямують до нуля. Розкривши цю невизначеність за правилом Лопіталя, одержимо

$$\int_0^l xJ_\nu^2\Big(\frac{\mu}{l}x\Big)dx = \frac{l^2}{2}J'^2_\nu(\mu). \tag{30}$$

Взявши у формулі (16) $x = \mu$ і врахувавши те, що μ є коренем рівняння (28), матимемо

$$J_\nu'(\mu) = -J_{\nu+1}(\mu),$$

а тому формула (30) набуде вигляду

$$\int_0^l xJ_\nu^2\Big(\frac{\mu}{l}x\Big)dx = \frac{l^2}{2}J_{\nu+1}^2(\mu).$$

Отже,

$$\int_0^l xJ_\nu\Big(\frac{\mu_k}{l}x\Big)J_\nu\Big(\frac{\mu_m}{l}x\Big)dx = \begin{cases} 0, & k \neq m, \\ \dfrac{l^2}{2}J'^2_\nu(\mu_k) = \dfrac{l^2}{2}J_{\nu+1}^2(\mu_k), & k = m, \end{cases} \tag{31}$$

де μ_k і μ_m – додатні корені рівняння (28).

Якщо ж μ_k і μ_m – додатні корені рівняння (20), де $\nu > -1$, а $\dfrac{\alpha}{\beta} + \nu \geq 0$, то аналогом (31) є рівність

$$\int\limits_0^l xJ_\nu\Big(\frac{\mu_k}{l}x\Big)J_\nu\Big(\frac{\mu_m}{l}x\Big)dx = \begin{cases} 0, & k \neq m, \\ \frac{l^2}{2}\Big(1 + \frac{\alpha^2-\beta^2\nu^2}{\beta^2\mu_k^2}\Big)J_\nu^2(\mu_k), & k = m. \end{cases} \tag{32}$$

Нехай деяка функція f задана рядом

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k J_\nu\Big(\frac{\mu_k}{l}x\Big),\ x \in [0, l],\ \nu > -1, \tag{33}$$

де μ_k, $k \in \mathbb{N}$, – додатні корені рівняння (28), розміщені в порядку їх зростання.

Для знаходження коефіцієнтів a_k, $k \in \mathbb{N}$, помножимо обидві частини розкладу (33) на $xJ_\nu\Big(\frac{\mu_m}{l}x\Big)$ і зінтегруємо по відрізку $[0, l]$, вважаючи, що інтегрування можливе. Тоді за допомогою формули (31) знайдемо, що

$$a_k = \frac{2}{l^2 J_{\nu+1}^2(\mu_k)} \int\limits_0^l xf(x)J_\nu\Big(\frac{\mu_k}{l}x\Big)dx, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{34}$$

Розклад (33), в якому коефіцієнти a_k знаходяться за формулою (34), називається **розкладом функції f у ряд Фур'є–Бесселя**.

У задачах математичної фізики часто зустрічаються ряди за функціями Бесселя вигляду

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k J_\nu\Big(\frac{\mu_k}{l}x\Big), \tag{35}$$

де μ_k, $k \in \mathbb{N}$, – додатні корені рівняння (20), розміщені в порядку їх зростання, причому $\frac{\alpha}{\beta} + \nu > 0$. Коефіцієнти цього розкладу визначаються за формулами

$$b_k = \frac{2}{l^2\Big(1 + \frac{\alpha^2-\beta^2\nu^2}{\beta^2\mu_k^2}\Big)J_\nu^2(\mu_k)} \int\limits_0^l xf(x)J_\nu\Big(\frac{\mu_k}{l}x\Big)dx, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{36}$$

Розклад (35), у якому коефіцієнти знаходяться за формулами (36), називається **розкладом функції в ряд Діні–Бесселя**.

Якщо $\frac{\alpha}{\beta} + \nu = 0$, то замість розкладу (35) треба брати

$$f(x) = b_0 x^{\nu} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k J_{\nu}\Big(\frac{\mu_k}{l} x\Big), \tag{37}$$

де

$$b_0 = \frac{2(\nu+1)}{l^{2(\nu+1)}} \int_0^l x^{\nu+1} f(x) dx,$$

а коефіцієнти b_k, $k \in \mathbb{N}$, знаходяться за формулами (36).

Доведено, що *функція f розкладається в ряд Фур'є – Бесселя (33), якщо вона неперервна на $[0, l]$, має кусково-неперервну похідну на $(0, l)$ і задовольняє крайові умови (22).*

Зауваження. При розкладанні функцій в ряд Фур'є–Бесселя доводиться обчислювати інтеграли, які містять функції Бесселя. Наведемо вирази для деяких із них:

1) $\int_0^x z J_0(z) dz = x J_1(x)$;

2) $\int_0^x z^3 J_0(z) dz = 2x^2 J_0(x) + (x^3 - 4x) J_1(x)$;

3) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-ax} J_{\nu}(bx) x^{\nu+1} dx = \frac{a 2 (2b)^{\nu} \Gamma(\nu + \frac{3}{2})}{\sqrt{\pi}(a^2 + b^2)^{\nu + \frac{3}{2}}}$, $\nu > -1$;

4) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-a^2 x^2} x^{\nu+1} J_{\nu}(bx) dx = \frac{(b)^{\nu}}{(2a^2)^{\nu+1}} e^{-\frac{b^2}{4a^2}}$.

Приклад 1. Вивчити поперечні коливання круглої однорідної мембрани радіуса R, які викликані початковою швидкістю

$$\psi(r) = \begin{cases} u_0, \ 0 \le r < \frac{R}{2}, \\ 0\,, \ \frac{R}{2} \le r \le R, \end{cases}$$

якщо край мембрани закріплено жорстко.

◀ Математична модель задачі така:

$$u_{tt} = a^2\Big(u_{rr} + \frac{1}{r}u_r\Big),\ \ r \in (0, R),\ \ t > 0, \tag{38}$$

$$u(r, 0) = 0,\ \ u_t(r, 0) = \psi(r),\ \ r \in [0, R], \tag{39}$$

$$|u(0, t)| < +\infty,\ \ u(R, t) = 0,\ \ t \geq 0. \tag{40}$$

Шукатимемо ненульові частинні розв'язки рівняння (38), які задовольняють крайові умови (40), у вигляді

$$u(r, t) = X(r)T(t).$$

Задовольняючи цією функцією рівняння (38) і крайові умови (40), дістанемо, що T є розв'язком рівняння

$$T''(t) + a^2\lambda^2 T(t) = 0, \tag{41}$$

а X – ненульовим розв'язком задачі

$$X''(r) + \frac{1}{r}X'(r) + \lambda^2 X(r) = 0, \tag{42}$$

$$|X(0)| < +\infty,\ \ X(R) = 0. \tag{43}$$

Рівняння (42) є рівнянням Бесселя з $\nu = 0$. Його загальний розв'язок має вигляд

$$X(r) = C_1 J_0(\lambda r) + C_2 Y_0(\lambda r). \tag{44}$$

Якщо задовольнити функцією (44) умови (43), то дістанемо: $C_2 = 0$, бо $Y_0(\lambda r) \to +\infty$ при $r \to 0$; $C_1 J_0(\lambda R) = 0$ і оскільки $C_1 \neq 0$, то $J_0(\lambda R) = 0$. Останнє рівняння має зліченну кількість додатних коренів μ_k, $k \in \mathbb{N}$. Тому власними числами задачі (42), (43) є

$$\lambda_k = \frac{\mu_k}{R}, \quad k \in \mathbb{N},$$

а власними функціями –

$$X_k(r) = J_0\Big(\frac{\mu_k}{R}r\Big), \quad r \in [0, R],\ k \in \mathbb{N}.$$

Розв'язавши рівняння (41) при $\lambda = \lambda_k$, одержимо

$$T_k(t) = A_k \cos\frac{a\mu_k t}{R} + B_k \sin\frac{a\mu_k t}{R}, \quad k \in \mathbb{N},$$

де A_k і B_k – довільні сталі.

Розглянемо ряд

$$u(r,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\Big(A_k \cos\frac{a\mu_k t}{R} + B_k \sin\frac{a\mu_k t}{R}\Big)J_0\Big(\frac{\mu_k r}{R}\Big) \tag{45}$$

і задовольнимо ним початкові умови (39):

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k J_0\Big(\frac{\mu_k r}{R}\Big) = 0, \\ \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{a\mu_k}{R} B_k J_0\Big(\frac{\mu_k r}{R}\Big) = \psi(r),\ r \in [0,R]. \end{cases}$$

Звідси одержуємо, що $A_k = 0$, $k \in \mathbb{N}$,

$$B_k \frac{a\mu_k}{R} = \frac{2}{R^2 J_1^2(\mu_k)} \int\limits_0^R r\psi(r) J_0\Big(\frac{\mu_k r}{R}\Big)dr =$$

$$= \frac{2}{R^2 J_1^2(\mu_k)} \int\limits_0^{R/2} u_0 r J_0\Big(\frac{\mu_k r}{R}\Big)dr.$$

Після здійснення в останньому інтегралі заміни $\frac{\mu_k r}{R} = z$ приходимо до рівностей

$$B_k \frac{a\mu_k}{R} = \frac{2u_0}{R^2 J_1^2(\mu_k)} \frac{R^2}{\mu_k^2} \int\limits_0^{\frac{\mu_k}{2}} z J_0(z)dz = \frac{2u_0}{\mu_k^2 J_1^2(\mu_k)} \frac{\mu_k}{2} J_1\Big(\frac{\mu_k}{2}\Big)$$

або

$$B_k = \frac{R u_0}{a\mu_k^2 J_1^2(\mu_k)} J_1\Big(\frac{\mu_k}{2}\Big),\ k \in \mathbb{N}.$$

Підставивши знайдені коефіцієнти в ряд (45), дістанемо розв'язок нашої задачі

$$u(r,t) = \frac{u_0 R}{a} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_0(\frac{\mu_k}{R} r)}{\mu_k^2 J_1(\mu_k)} \sin \frac{a\mu_k t}{R}, \; r \in (0,R), \, t > 0. \blacktriangleright$$

Приклад 2. Розв'язати задачу

$$u_t = x u_{xx} + u_x - \frac{1}{4x} u + t J_1(\mu_m \sqrt{x}), \; x \in (0,1), \; t > 0,$$

$$u(x,0) = 0, \quad x \in [0,1],$$

$$|u(0,t)| < +\infty, \quad u(1,t) = 0, \; t \geq 0,$$

де μ_m – додатний корінь рівняння $J_1(\mu) = 0$.

◀ Знайдемо спочатку власні функції відповідної однорідної задачі:

$$u_t = x u_{xx} + u_x - \frac{1}{4x} u, \quad x \in (0,1), \, t > 0,$$

$$|u(0,t)| < +\infty, \quad u(1,t) = 0, \; t \geq 0.$$

Нехай $u(x,t) = X(x)T(t)$, тоді після підстановки в рівняння і задоволення крайових умов, дістанемо таку задачу Штурма–Ліувілля:

$$x\, X'' + X' - (\frac{1}{4x} + \lambda^2) X = 0, \tag{46}$$

$$|X(0)| < +\infty, \quad X(1) = 0. \tag{47}$$

Зробимо в рівнянні (46) заміну $x = z^2$, $dx = 2z dz$,

$$\frac{dX}{dx} = \frac{d\widetilde{X}}{dz} \cdot \frac{1}{2z}; \quad \frac{d^2 X}{dx^2} = \frac{d^2 \widetilde{X}}{dz^2} \Big(\frac{1}{2z}\Big)^2 - \frac{1}{2z^2} \frac{d\widetilde{X}}{dz}.$$

Тоді одержимо рівняння Бесселя з $\nu = 1$

$$\frac{d^2 \widetilde{X}}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{d\widetilde{X}}{dz} - \Big(4\lambda^2 + \frac{1}{z^2}\Big) \widetilde{X} = 0.$$

Загальним розв'язком цього рівняння є функція

$$\widetilde{X}(z) = C_1 J_1(2\lambda z) + C_2 Y_1(2\lambda z).$$

Повернувшись до старої змінної, знайдемо загальний розв'язок рівняння (46)

$$X(x) = C_1 J_1(2\lambda\sqrt{x}) + C_2 Y_1(2\lambda\sqrt{x}).$$

Задовольнимо цією функцією крайові умови (47). Тоді одержимо, що $C_2 = 0$, бо $Y_1(2\lambda\sqrt{x}) \to +\infty$ при $x \to 0$. Оскільки $C_1 \neq 0$, то $J_1(2\lambda) = 0$. Звідси випливає, що $2\lambda = \mu_k$, де μ_k – додатні корені рівняння $J_1(\mu) = 0$, а тому $\lambda_k = \frac{\mu_k}{2}$, $k \in \mathbb{N}$. Власними функціями є

$$X_k(x) = J_1(\mu_k\sqrt{x}), \quad x \in [0,1], \ k \in \mathbb{N}.$$

Розв'язок вихідної задачі шукатимемо у вигляді ряду Фур'є за власними функціями відповідної однорідної задачі, тобто

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(t) J_1(\mu_k\sqrt{x}). \tag{48}$$

Якщо цей ряд збігається рівномірно разом зі своїми формальними похідними другого порядку за x і першого за t, то його сума задовольняє крайові умови та має похідні за x і t відповідних порядків, які можна знаходити почленним диференціюванням ряду. Задовольнимо рівняння і початкову умову, вибравши відповідним чином g_k, $k \in \mathbb{N}$. Маємо

$$\sum_{k=1}^{\infty} g_k'(t) J_1(\mu_k\sqrt{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} \Big(x \frac{d^2 J_1(\mu_k\sqrt{x})}{dx^2} + \frac{dJ_1(\mu_k\sqrt{x})}{dx} -$$

$$- \frac{1}{4x} J_1(\mu_k\sqrt{x}) \Big) g_k(t) + t J_1(\mu_m\sqrt{x}).$$

Скористаємося тим, що

$$x \frac{d^2 J_1(\mu_k\sqrt{x})}{dx^2} + \frac{dJ_1(\mu_k\sqrt{x})}{dx} - \frac{1}{4x} J_1(\mu_k\sqrt{x}) = -\Big(\frac{\mu_k}{2}\Big)^2 J_1(\mu_k\sqrt{x}),$$

$$k \in \mathbb{N}.$$

Тоді одержимо рівність

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Big(g_k'(t) + \frac{\mu_k^2}{4} g_k(t) \Big) J_1(\mu_k\sqrt{x}) = t J_1(\mu_m\sqrt{x}), \ x \in (0,1), \ t > 0,$$

з якої випливає, що

$$g_k'(t) + \frac{\mu_k^2}{4} g_k(t) = 0, \quad k \in \mathbb{N} \setminus \{m\}, \tag{49}$$

$$g_m'(t) \ + \ \frac{\mu_m^2}{4} \ g_m(t) = t. \tag{50}$$

Задовольнивши рядом (48) нульову початкову умову, дістанемо рівність

$$\sum_{k=1}^{\infty} g_k(0) J_1(\mu_k \sqrt{x}) = 0,$$

або

$$g_k(0) = 0, \quad k \in \mathbb{N} \setminus \{m\}, \tag{51}$$

$$g_m(0) = 0. \tag{52}$$

Очевидно, що розв'язком задачі (49), (51) є $g_k(t) = 0$, $k \in \mathbb{N} \setminus \{m\}$, $t \geq 0$.

Знайдемо розв'язок задачі (50), (52). Загальним розв'язком рівняння (50) є функція

$$g_m(t) = Ce^{-\frac{\mu_m^2}{4} t} + \frac{4}{\mu_m^2}\Big(t - \frac{4}{\mu_m^2}\Big). \tag{53}$$

Задовольнивши умову (52), дістанемо

$$0 = C - \frac{16}{\mu_m^2} \quad \text{або} \quad C = \frac{16}{\mu_m^2}.$$

Тому

$$g_m(t) = \frac{16}{\mu_m^2} e^{-\frac{\mu_m^2}{4} t} + \frac{4}{\mu_m^2}\Big(t - \frac{4}{\mu_m^2}\Big).$$

Підставивши знайдені коефіцієнти в ряд (48), одержимо розв'язок нашої задачі

$$u(x,t) = \Big(\frac{16}{\mu_m^2} e^{-\frac{\mu_m^2}{4} t} + \frac{4}{\mu_m^2}\Big(t - \frac{4}{\mu_m^2}\Big)\Big) J_1(\mu_m \sqrt{x}),$$

$$x \in (0,1), \ t > 0. \ \blacktriangleright$$

7.2 Поліноми Лежандра

7.2.1 Рівняння Лежандра та його розв'язки. Рівнянням Лежандра називається рівняння вигляду

$$\frac{d}{dx}\Big((1-x^2)\frac{dy}{dx}\Big)+\lambda y=0,\quad x\in\mathbb{R}, \tag{1}$$

де λ – параметр. При $x=\pm1$ рівняння вироджується. Розглянемо для цього рівняння таку крайову задачу: *знайти ті значення параметра λ, при яких на проміжку $(-1,1)$ існує ненульовий розв'язок рівняння (1), який обмежений в околах особливих точок $x=\pm1$.*

Шукатимемо розв'язок рівняння Лежандра у вигляді степеневого ряду

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n. \tag{2}$$

Підставляючи (2) в (1), дістаємо

$$\sum_{n=0}^{\infty}x^n\Big((n+2)(n+1)a_{n+2}-n(n-1)a_n-2na_n+\lambda a_n\Big)=0.$$

Звідси випливає, що

$$(n+2)(n+1)a_{n+2}-(n(n+1)-\lambda)a_n=0$$

або

$$a_{n+2}=\frac{n(n+1)-\lambda}{(n+2)(n+1)}\;a_n,\; n\in\mathbb{Z}_+. \tag{3}$$

При цьому коефіцієнти a_0 і a_1 вважаємо довільними. Якщо $a_0\neq0$, $a_1=0$, то частинний розв'язок рівняння (1) міститиме тільки парні степені x, а якщо $a_0=0$, $a_1\neq0$, то – непарні степені x.

Очевидно, що при $\lambda=n(n+1)$ рівняння (1) має розв'язками многочлени степеня n, які обмежені в околах особливих точок $x=\pm1$. Знайдемо їх, тобто знайдемо розв'язки рівняння

$$\frac{d}{dx}\Big((1-x^2)\frac{dy}{dx}\Big)+n(n+1)y=0, \tag{4}$$

які є многочленами степеня n.

Розглянемо многочлен степеня $2n$

$$z = (x^2 - 1)^n.$$

Безпосередньою підстановкою переконуємося, що ця функція задовольняє рівняння

$$(x^2 - 1)\frac{dz}{dx} - 2nxz = 0. \tag{5}$$

Якщо продиференціювати (5) n разів за x, скориставшись формулою Лейбніца, то дістанемо

$$(x^2 - 1)\frac{dz^{(n)}}{dx} + n \cdot 2x \cdot \frac{dz^{(n-1)}}{dx} + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 2 \cdot \frac{dz^{(n-2)}}{dx} -$$

$$- 2nx\frac{dz^{(n-1)}}{dx} - 2n^2\frac{dz^{(n-2)}}{dx} = 0$$

або

$$(1 - x^2)\frac{dz^{(n)}}{dx} + n(n+1)z^{(n-1)} = 0.$$

Продиференціювавши одержану рівність за x, знайдемо, що $z^{(n)}$ задовольняє рівняння Лежандра

$$\frac{d}{dx}\left((1 - x^2)\frac{dz^{(n)}}{dx}\right) + n(n+1)z^{(n)} = 0.$$

Звідси випливає, що $y = z^{(n)}$ є розв'язком рівняння (4), а оскільки це рівняння однорідне, то й $y = Cz^{(n)}$, C – стала, є також розв'язком.

Отже, рівняння (4) має розв'язки

$$y = C\,\frac{d^n(x^2 - 1)^n}{dx^n}.$$

Якщо взяти $C = \frac{1}{2^n \cdot n!}$, то дістанемо

$$y = P_n(x) := \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n(x^2 - 1)^n}{dx^n},\ \ n \in \mathbb{Z}_+,\ \ x \in [-1, 1]. \tag{6}$$

Це і є **поліноми Лежандра**, які визначають розв'язки рівняння (1) при $\lambda = n(n+1)$.

Формула (6) називається **формулою Родріга**.

Отже, поліноми Лежандра є власними функціями задачі, яку ми розглядаємо. Вони відповідають власним числам $\lambda_n = n(n+1)$, $n \in \mathbb{Z}_+$.

Обчислюючи за формулою (6), дістаємо вирази для деяких поліномів Лежандра:

$$P_0(x) = 1,\ \ P_1(x) = x,\ \ P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1),\ \ P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x),$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3),\ \ P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x),$$

$$P_6(x) = \frac{1}{16}(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5).$$

7.2.2 Властивості поліномів Лежандра. Наведемо деякі властивості поліномів Лежандра, які використовуються при розв'язуванні задач математичної фізики.

1) *Поліном Лежандра n-го степеня є функцією тієї самої парності, що й n, тобто*

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x),\ \ x \in [-1, 1]. \tag{7}$$

◀ Ця властивість випливає безпосередньо з формули (6), якщо зауважити, що $(x^2-1)^n$ функція парна, а кожне диференціювання змінює її парність. ▶

2) *Справджуються рівності*

$$P_{2n-1}(0) = 0,\ \ P_{2n}(0) = (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}. \tag{8}$$

◀ Перша з цих рівностей випливає з рівності (7). Очевидно, що значення многочлена при $x = 0$ – це його вільний член. Оскільки при n-кратному диференціюванні степінь кожного доданка зменшується на n одиниць, то вільний член многочлена P_{2n}, тобто $P_{2n}(0)$ одержується при диференціюванні доданка, що містить x^{2n} многочлена $(x^2-1)^{2n}$. Цей доданок, очевидно, дорівнює $(-1)^n \frac{(2n)!}{(n!)^2} x^{2n}$. Продиференціювавши його $2n$ разів і помноживши на $\frac{1}{2^{2n}(2n)!}$, дістанемо другу формулу з (8). ►

3) *Правильні рівності*

$$P_n(1) = 1, \ \ P_n(-1) = (-1)^n. \tag{9}$$

◄ Для доведення перепишемо формулу (6) у вигляді

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \Big((x+1)^n (x-1)^n \Big)$$

і застосуємо формулу Лейбніца для знаходження похідної n-го порядку від добутку двох функцій. Тоді одержимо

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \Big((x+1)^n \frac{d^n (x-1)^n}{dx^n} + n \frac{d(x+1)^n}{dx} \frac{d^{n-1}(x-1)^n}{dx^{n-1}} + \dots \Big).$$

Оскільки

$$\frac{d^n (x-1)^n}{dx^n} = n! \ \ \text{i} \ \ \frac{d^{n-k}(x-1)^n}{dx^{n-k}} \Big|_{x=1} = 0, \ k \in \{1, \dots, n\},$$

то

$$P_n(1) = 1.$$

Друга рівність із (9) одержується з першої за допомогою (7). ►

4) *Всі корені полінома Лежандра $P_n(x)$ дійсні, різні та лежать в інтервалі* $(-1, 1)$.

◄ Це твердження випливає з формули (6) і теореми Ролля. Справді, многочлен $\frac{d(x^2-1)^n}{dx}$ степеня $2n-1$ має корені $x = \pm 1$ кратності $n-1$ і за теоремою Ролля має ще один корінь x_1 всередині відрізка $[-1, 1]$. Це і є всі корені цього многочлена. Далі поліном $\frac{d^2(x^2-1)^n}{dx^2}$ степеня $2n-2$ має корені $x = \pm 1$ кратності $n-2$ і, крім того, за теоремою Ролля має два дійсні корені: один всередині $[-1, x_1]$ і другий всередині $[x_1, 1]$. Продовжуючи так далі, переконуємося, що $P_n(x)$ має n різних коренів всередині $[-1,1]$. ►

5) *Для полінома Лежандра правильне інтегральне зображення*

$$P_n(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi (x+\sqrt{x^2-1}\cos\varphi)^n d\varphi \tag{10}$$

або

$$P_n(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi (x+i\sqrt{1-x^2}\cos\varphi)^n d\varphi, \;\; i := \sqrt{-1}.$$

З формули (10) випливає, що

$$|P_n(x)| \le 1, \quad x \in [-1,1].$$

6) *Для многочленів Лежандра і їх похідних виконуються такі рекурентні співвідношення:*

$$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0, \; n \in \mathbb{N},$$

$$P_1(x) - xP_0(x) = 0,$$

$$(2n+1)P_n(x) = \frac{dP_{n+1}(x)}{dx} - \frac{dP_{n-1}(x)}{dx}, \; n \in \mathbb{Z}_+, \tag{11}$$

якщо

$$\frac{dP_{-1}(x)}{dx} = 0.$$

Покладаючи замість n в (11) $0, 1, \ldots, n$ *і додаючи одержані рівності, дістанемо*

$$\sum_{k=0}^{n}(2k+1)P_k(x) = \frac{dP_{n+1}(x)}{dx} + \frac{dP_n(x)}{dx}.$$

7) *Справджуються рівності*

$$\int\limits_0^1 P_n(x)dx = \begin{cases} 1 & \textit{при } n = 0, \\ 0 & \textit{при } n = 2k, \\ (-1)^k \dfrac{(2k)!}{2^{2k+1}k!(k+1)!} & \textit{при } n = 2k+1, \; k \in \mathbb{N}; \end{cases}$$

$$\int_0^1 xP_n(x)dx = \begin{cases} 0 \quad \text{при } n = 2k+1, \\ (-1)^k \dfrac{(2k-2)!}{2^{2k}(k-1)!(k+1)!} \ \text{при } n = 2k,\ k \in \mathbb{N}; \end{cases}$$

$$\int_{-1}^1 x^k P_n(x)dx = 0 \ \text{ при } k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}.$$

7.2.3 Ортогональність поліномів Лежандра. Розклад функцій у ряд Фур'є за поліномами Лежандра.

Доведемо, що поліноми Лежандра різних порядків ортогональні на інтервалі $(-1, 1)$. Запишемо рівняння (1) для двох різних поліномів Лежандра:

$$\begin{aligned} &\tfrac{d}{dx}\Big((1-x^2)P_m'(x)\Big) + \lambda_m P_m(x) = 0, \\ &\tfrac{d}{dx}\Big((1-x^2)P_n'(x)\Big) + \lambda_n P_n(x) = 0,\ m \neq n. \end{aligned}$$

Помножимо першу рівність на $P_n(x)$, а другу – на $P_m(x)$, віднімемо від першої рівності другу, і зінтегруємо одержану рівність за x у межах від -1 до 1. Тоді одержимо

$$(\lambda_m - \lambda_n) \int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x)dx =$$

$$= \int_{-1}^1 \Big(P_m(x)\frac{d}{dx}((1-x^2)P_n'(x)) - P_n(x)\frac{d}{dx}((1-x^2)P_m'(x))\Big)dx =$$

$$= \int_{-1}^1 \frac{d}{dx}\Big((1-x^2)(P_m(x)P_n'(x) - P_n(x)P_m'(x))\Big)dx =$$

$$= \Big((1-x^2)(P_m(x)P_n'(x) - P_n(x)P_m'(x))\Big)\Big|_{-1}^1 = 0.$$

Отже,

$$(\lambda_m - \lambda_n) \int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x)dx = 0$$

або

$$\int\limits_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx = 0,\ \ m \neq n,$$

тобто поліноми Лежандра ортогональні на інтервалі $(-1, 1)$.

Обчислимо інтеграл

$$I_n := \int\limits_{-1}^{1} P_n^2(x)dx = \frac{1}{2^{2n}(n!)^2} \int\limits_{-1}^{1} \frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n} \frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n} dx.$$

Інтегруючи частинами n разів і беручи до уваги те, що кожного разу позаінтегральний вираз дорівнює нулю, дістаємо

$$I_n = \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} \int\limits_{-1}^{1} (x^2-1)^n \frac{d^{2n}(x^2-1)^n}{dx^{2n}} dx$$

або

$$\int\limits_{-1}^{1} P_n^2(x)dx = \frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \int\limits_{-1}^{1} (x^2-1)^n dx.$$

Оскільки

$$\int\limits_{-1}^{1} (x^2-1)^n dx = (-1)^n\, 2\, \frac{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2n}{3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n+1)},$$

то

$$\int\limits_{-1}^{1} P_n^2(x)dx = \frac{2}{2n+1}.$$

Отже,

$$\int\limits_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx = \begin{cases} 0,\ m \neq n, \\ \frac{2}{2n+1},\ m = n. \end{cases} \tag{12}$$

Доведено, що система ортогональних поліномів Лежандра $\{P_n(x),\ n \in \mathbb{Z}_+\}$ на $(-1,1)$ є *замкненою*, а отже, й *повною системою*. Звідси випливає, *що сукупність поліномів Лежандра вичерпує всі неперервні та обмежені на* $[-1,1]$ *розв'язки рівняння Лежандра.*

Нехай деяка функція f зображується на $[-1,1]$ у вигляді ряду за поліномами Лежандра

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x). \tag{13}$$

Припустивши, що цей ряд збігається рівномірно на $[-1,1]$, помножимо рівність (13) на $P_m(x)$ і зінтегруємо за x по цьому відрізку. Тоді згідно з (12) дістанемо, що

$$a_n = \frac{2n+1}{2} \int\limits_{-1}^{1} f(x) P_n(x) dx. \tag{14}$$

Відповідь на те, коли правильною є формула (13) з коефіцієнтами (14), дає така теорема.

Теорема. *Якщо функція f кусково-неперервна на $[-1,1]$ разом зі своєю похідною f', то ряд (13) з коефіцієнтами (14) збігається до функції $\frac{1}{2}(f(x-0)+f(x+0))$ на $[-1,1]$. У випадку, коли функція f та її похідні f' і f'' неперервні на $[-1,1]$, ця збіжність буде рівномірною на $[-1,1]$.*

Зауваження 1. У застосуваннях поліномів Лежандра часто розглядається випадок, коли $x = \cos\theta$. Тоді

$$P_0(\cos\theta) = 1,\ P_1(\cos\theta) = \cos\theta,\ P_2(\cos\theta) = \frac{1}{4}(3\cos 2\theta + 1),$$

$$P_3(\cos\theta) = \frac{1}{8}(5\cos 3\theta + 3\cos\theta),\ P_4(\cos\theta) = \frac{1}{64}(35\cos 4\theta +$$

$$+20\cos 2\theta + 9),\ P_5(\cos\theta) = \frac{1}{128}(63\cos 5\theta + 35\cos 3\theta + 30\cos\theta),$$

$$P_6(\cos\theta) = \frac{1}{512}(231\cos 6\theta + 126\cos 4\theta + 105\cos 2\theta + 50);$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} P_{2n}(\cos\theta)d\theta = \Big(\frac{C_{2n}^n}{2^{2n}}\Big)^2,$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} P_{2n+1}(\cos\theta)\cos\theta d\theta = \frac{C_{2n}^n C_{2n+2}^{n+1}}{2^{4n+2}}.$$

Приклад 1. Знайти функцію u, гармонічну всередині кулі радіуса R_0 з центром у початку координат і таку, що $u(r,\theta)|_{r=R_0} = \cos^2\theta$.

◀ Задача зводиться до знаходження розв'язку рівняння

$$\partial_r(r^2\,\partial_r u) + \frac{1}{\sin\theta}\partial_\theta\Big(\sin\theta\partial_\theta u\Big) = 0,\ r \in (0,R_0),\ \theta \in (0,\pi), \quad (15)$$

який задовольняє крайові умови

$$|u(0,\theta)| < +\infty,\ u(r,\theta)|_{r=R_0} = \cos^2\theta,\ \theta \in [0,\pi], \quad (16)$$

бо крайова функція не залежить від змінної φ.

Шукатимемо ненульові обмежені розв'язки рівняння (15) у вигляді

$$u(r,\theta) = X(r)Y(\theta). \quad (17)$$

Після підстановки в рівняння (15), дістанемо

$$\frac{(r^2X'(r))'}{X(r)} = -\frac{\frac{1}{\sin\theta}(\sin\theta Y'(\theta))'}{Y(\theta)} = \lambda^2.$$

Звідси випливає, що для знаходження X і Y, з врахуванням обмеженості розв'язку, одержуємо дві задачі:

$$(r^2X'(r))' - \lambda^2X(r) = 0,\ |X(0)| < +\infty,\ r \in [0,R_0], \quad (18)$$

$$\frac{1}{\sin\theta}(\sin\theta Y'(\theta))' + \lambda^2Y(\theta) = 0,\ |Y(\theta)| < +\infty,\ \theta \in [0,\pi]. \quad (19)$$

Розглянемо спочатку задачу (19). Зробимо заміну змінної $x = \cos\theta,\ \ \theta \in [0,\pi]$. Тоді дістанемо, що $dx = -\sin\theta\,d\theta,\ \frac{dY}{d\theta} =$

$= -\sin\theta \frac{d\widetilde{Y}}{dx}$ і тому $\sin\theta \frac{dY}{d\theta} = (x^2-1)\frac{d\widetilde{Y}}{dx}$, $x \in [-1,1]$. Звідси одержуємо, що задача (19) набуде вигляду

$$\frac{d}{dx}\Big((1-x^2)\frac{d\widetilde{Y}}{dx}\Big) + \lambda^2\widetilde{Y} = 0, \quad x \in [-1,1],$$

$$|\widetilde{Y}(x)| < +\infty, \quad x \in [-1,1].$$

Ця задача, як доведено в пункті 7.2.1, має обмежені розв'язки тільки при $\lambda^2 = n(n+1)$ і цими розв'язками є поліноми Лежандра

$$\widetilde{Y}_n(x) = P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n((x^2-1)^n)}{dx^n}.$$

Тому

$$Y_n(\theta) = P_n(\cos\theta), \;\; n \in \mathbb{Z}_+.$$

При $\lambda^2 = n(n+1)$ задача (18) має вигляд

$$r^2X_n''(r) + 2rX_n'(r) - n(n+1)X_n(r) = 0, \;\; r \in [0, R_0], \tag{20}$$

$$|X_n(0)| < +\infty. \tag{21}$$

Рівняння (20) є рівнянням Ейлера, яке заміною $x = e^{\,t}$ зводиться до рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$\widetilde{X}_n''(t) + \widetilde{X}_n'(t) - n(n+1)\widetilde{X}_n(t) = 0.$$

Розв'язки цього рівняння визначаються формулою

$$\widetilde{X}_n(t) = A_n e^{\,nt} + B_n e^{\,-(n+1)t},$$

а тому загальний розв'язок рівняння (20) має вигляд

$$X_n(r) = A_n r^n + B_n r^{-(n+1)}.$$

З умови обмеженості (21) випливає, що $B_n = 0$, а тому

$$X_n(r) = A_n r^n.$$

Задовольнимо крайову умову (16) за допомогою ряду

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n P_n(\cos\theta). \tag{22}$$

Тоді дістанемо рівність

$$\cos^2\theta = \sum_{n=0}^{\infty} A_n R_0^n P_n(\cos\theta), \ \ \theta \in [0,\pi]. \tag{23}$$

Згідно з зауваженням 1 маємо

$$\cos^2\theta = \frac{1}{3}(P_0(\cos\theta) + 2P_2(\cos\theta)).$$

Тоді рівність (23) набуде вигляду

$$\frac{1}{3}(P_0(\cos\theta) + 2P_2(\cos\theta)) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n R_0^n P_n(\cos\theta).$$

Звідси випливає, що $A_0 = \frac{1}{3}$, $A_2 = \frac{2}{3}R_0^{-2}$, $A_n = 0$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,2\}$.

Підставивши знайдені коефіцієнти в ряд (22), дістанемо розв'язок нашої задачі

$$u(r,\theta) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3R_0^2} r^2 P_2(\cos\theta)$$

або

$$u(r,\theta) = \frac{1}{3}\Big(1 - \frac{r^2}{R_0^2}\Big) + \frac{r^2}{R_0^2}\cos^2\theta, \ r \in [0,R_0], \ \theta \in [0,\pi]. \ \blacktriangleright$$

Зауваження 2. З прикладу 1 випливає, що розв'язок зовнішньої задачі Діріхле, коли крайові умови задані на сфері $\{r = R_0\}$, слід шукати у вигляді

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n r^{-(n+1)} P_n(\cos\theta), \ r > R_0, \ 0 < \theta < \pi.$$

У випадку крайової задачі в кульовому шарі $K := \{(r,\varphi,\theta) \mid R_1 < r < R_2, \ 0 < \varphi < 2\pi, \ 0 < \theta < \pi\}$, коли крайові функції залежать лише від θ, розв'язок задачі Діріхле матиме вигляд

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n r^n + B_n r^{-(n+1)}) P_n(\cos\theta).$$

Коефіцієнти A_n і B_n, $n \in \mathbb{Z}_+$, визначаються з рівнянь, які одержуються, коли задовольняти наведеними вище рядами крайові умови.

7.2.4 Приєднані поліноми Лежандра. У багатьох випадках при знаходженні розв'язку крайової задачі для рівняння Лапласа в сферичних координатах за допомогою методу Фур'є одержуємо таку задачу Штурма–Ліувілля: знайти обмежені розв'язки на відрізку $[-1, 1]$ рівняння

$$\frac{d}{dx}\Big((1-x^2)\frac{dy}{dx}\Big) + \Big(\lambda - \frac{m^2}{1-x^2}\Big)y = 0, \quad |x| \le 1. \tag{24}$$

У рівнянні (24) зробимо заміну невідомої функції за формулою

$$y = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} z(x). \tag{25}$$

Після підстановки (25) у (24) дістанемо рівняння

$$\frac{d}{dx}\Big((1-x^2)^{m+1}\frac{dz}{dx}\Big) + (\lambda - m(m+1))(1-x^2)^m z = 0. \tag{26}$$

Таке ж рівняння одержується, коли рівняння Лежандра (1) продиференціювати m разів.

Оскільки рівняння Лежандра має довільне число разів неперервно диференційовні на відрізку $[-1, 1]$ розв'язки тільки при $\lambda = n(n+1)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, і цими розв'язками є поліноми Лежандра P_n, то звідси випливає, що неперервними розв'язками рівняння (26) є похідна m-го порядку від P_n, якщо $\lambda = n(n+1)$, $n \in \mathbb{Z}_+$.

Тому **загальне рівняння Лежандра (24)** має обмежені розв'язки на відрізку $[-1, 1]$ при $\lambda = n(n+1)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, і ними є функції

$$y(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m P_n(x)}{dx^m},$$

які називаються **приєднаними поліномами Лежандра.**

Позначають приєднані поліноми Лежандра символом $P_n^m(x)$. Тому

$$P_n^m(x) := (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m P_n(x)}{dx^m}, \quad x \in [-1, 1],\ n \in \mathbb{Z}_+. \tag{27}$$

Очевидно, що $P_n^0 \equiv P_n$, $n \in \mathbb{Z}_+$, а $P_n^m \equiv 0$, якщо $m > n$.

Приєднані поліноми Лежандра ортогональні на відрізку $[-1,1]$ з вагою $\rho \equiv 1$, тобто

$$\int_{-1}^{1} P_k^m(x)P_n^m(x)dx = \begin{cases} 0, & k \neq n, \\ \frac{2(n+m)!}{(2n+1)(n-m)!}, & k = n. \end{cases}$$

Це дозволяє довільну гладку функцію розкладати в ряд Фур'є за приєднаними поліномами Лежандра на відрізку $[-1,1]$.

Запишемо вирази для найпоширеніших приєднаних поліномів Лежандра:

$$P_1^1(\cos\theta) = \sin\theta,\ P_2^1(\cos\theta) = 3\sin\theta\cos\theta,$$

$$P_3^1(\cos\theta) = \sin\theta\frac{15\cos^2\theta - 3}{2},\ P_2^2(\cos\theta) = 3\sin^2\theta,$$

$$P_3^2(\cos\theta) = 15\sin^2\theta\cos\theta,\ P_3^3(\cos\theta) = 15\sin^3\theta,$$

$$P_n^n(\cos\theta) = \frac{(2n)!}{2^n \cdot n!}\sin^n\theta.$$

Приклад 2. Знайти функцію, яка гармонічна в кулі $K_1(0)$ і задовольняє крайову умову

$$u|_{C_1(0)} = \cos(2\varphi + \frac{\pi}{3})\sin^2\theta.$$

◀ Задача зводиться до знаходження розв'язку рівняння Лапласа в сферичних координатах

$$\frac{1}{r^2}\partial_r\Big(r^2\partial_r u\Big) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\Big(\partial_\theta(\sin\theta\partial_\theta u) + \frac{1}{\sin\theta}\partial_\varphi^2 u\Big) = 0, \qquad (28)$$

$$(r,\varphi,\theta) \in \Omega := (0,1)\times(0,2\pi)\times(0,\pi),$$

який задовольняє умови

$$|u(r,\varphi,\theta)| < +\infty, \quad (r,\varphi,\theta) \in \Omega, \qquad (29)$$

$$u(r,0,\theta) = u(r,2\pi,\theta), \quad (r,\theta) \in [0,1]\times[0,\pi], \qquad (30)$$

$$u(1,\varphi,\theta)=\cos(2\varphi+\frac{\pi}{3})\sin^2\theta,\quad (\varphi,\theta)\in[0,2\pi]\times[0,\pi]. \qquad (31)$$

Шукатимемо ненульові розв'язки рівняння (28), які задовольняють умови (29) і (30), у вигляді

$$u(r,\varphi,\theta)=X(r)Y(\varphi,\theta),\ (r,\varphi,\theta)\in\Omega. \qquad (32)$$

Підставивши (32) в (28) і врахувавши умови (29) і (30), дістанемо такі дві задачі:

$$r^2X''(r)+2rX'(r)-\lambda^2X(r)=0,\ r\in(0,1),$$

$$|X(0)|<+\infty; \qquad (33)$$

$$\partial^2_\varphi Y+\sin\theta\partial_\theta\Big(\sin\theta\partial_\theta Y\Big)+\lambda^2\sin^2\theta\, Y=0,\ (\varphi,\theta)\in(0,2\pi)\times(0,\pi),$$

$$|Y(\varphi,0)|<+\infty,\ \varphi\in[0,2\pi],\ Y(0,\theta)=Y(2\pi,\theta),\ \theta\in[0,\pi]. \qquad (34)$$

Ненульові розв'язки задачі (34) шукатимемо у вигляді

$$Y(\varphi,\theta)=\Phi(\varphi)Z(\theta),\ (\varphi,\theta)\in(0,2\pi)\times(0,\pi).$$

Тоді одержимо ще такі задачі:

$$\Phi''(\varphi)+\mu^2\Phi(\varphi)=0,\ \ \varphi\in(0,2\pi),$$

$$\Phi(0)=\Phi(2\pi); \qquad (35)$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\Big(\sin\theta\frac{dZ}{d\theta}\Big)+(\lambda^2-\frac{\mu^2}{\sin^2\theta})Z(\theta)=0,$$

$$|Z(\theta)|<+\infty,\ \theta\in(0,\pi). \qquad (36)$$

З попереднього випливає, що задача (35) має ненульові розв'язки при $\mu=m$, $m\in\mathbb{Z}_+$, і цими розв'язками є

$$\Phi_m(\varphi)=C_m\cos m\varphi+D_m\sin m\varphi,\ \varphi\in[0,2\pi]. \qquad (37)$$

У задачі (36) зробимо заміну незалежної змінної θ за формулою $\cos\theta=x$, де $\theta\in[0,\pi]$, $x\in[-1,1]$. Тоді аналогічно до того, як у прикладі 1, дістанемо задачу

$$\frac{d}{dx}\Big((1-x^2)\frac{d\widetilde{Z}}{dx}\Big)+\Big(\lambda^2-\frac{m^2}{1-x^2}\Big)\widetilde{Z}=0,\ x\in(-1,1),$$

$$|\widetilde{Z}(x)|<+\infty,\ x\in[-1,1].$$

Ця задача, як доведено вище, має обмежені розв'язки лише при $\lambda = n(n+1)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, і цими розв'язками є приєднані поліноми Лежандра, тобто $\widetilde{Z}_n(x) = P_n^m(x)$ або

$$Z_{mn}(\theta) = P_n^m(\cos\theta), \;\; \theta \in [0,\pi], \, \{m,n\} \subset \mathbb{Z}_+.$$

Тому розв'язками задачі (34) є функції

$$Y_{mn}(\varphi,\theta) = (C_m \cos m\varphi + D_m \sin m\varphi) P_n^m(\cos\theta),$$

$$(\varphi,\theta) \in [0,2\pi] \times [0,\pi].$$

Обмеженими розв'язками задачі (33) при $\lambda = n(n+1)$, як установлено в прикладі 1, є функції

$$X_n(r) = A_n r^n, \;\; r \in [0,1].$$

Тоді згідно з одержаними результатами дістанемо, що функції

$$u_{mn}(r,\varphi,\theta) = A_n r^n (C_{mn} \cos m\varphi + D_{mn} \sin m\varphi) P_n^m(\cos\theta),$$

$$(r,\varphi,\theta) \in \overline{\Omega},$$

або

$$u_{mn}(r,\varphi,\theta) = r^n (a_{mn} \cos m\varphi + b_{mn} \sin m\varphi) P_n^m(\cos\theta), \; (r,\varphi,\theta) \in \overline{\Omega},$$

задовольняють рівняння (28) та умови (29) і (30).

Щоб задовольнити крайову умову (31), розглянемо ряд

$$u(r,\varphi,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} r^n (a_{mn} \cos m\varphi + b_{mn} \sin m\varphi) P_n^m(\cos\theta),$$

$$(r,\varphi,\theta) \in \Omega. \tag{38}$$

Якщо цей ряд збігається рівномірно, то з умови (31) одержуємо рівність

$$\cos(2\varphi + \frac{\pi}{3}) \sin^2\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (a_{mn} \cos m\varphi + b_{mn} \sin m\varphi) P_n^m(\cos\theta). \tag{39}$$

Оскільки

$$\cos(2\varphi + \frac{\pi}{3}) \sin^2\theta = (\cos 2\varphi \cos\frac{\pi}{3} - \sin 2\varphi \sin\frac{\pi}{3}) \sin^2\theta =$$

$$= (\frac{1}{2}\cos 2\varphi - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\varphi)\frac{1}{3}P_2^2(\cos\theta),$$

то рівність (39) набуває вигляду

$$\frac{1}{6}\cos 2\varphi P_2^2(\cos\theta) - \frac{1}{2\sqrt{3}}\sin 2\varphi P_2^2(\cos\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}(a_{mn}\cos m\varphi +$$

$$+ b_{mn}\sin m\varphi)P_n^m(\cos\theta).$$

Звідси випливає, що

$$a_{22} = \frac{1}{6},\ b_{22} = -\frac{1}{2\sqrt{3}},\ a_{nm} = 0,\ b_{nm} = 0,\ \{n, m\} \subset \mathbb{R} \setminus \{2\}.$$

Підставивши знайдені коефіцієнти в ряд (38), одержимо, що розв'язком нашої задачі є функція

$$u(r,\varphi,\theta) = r^2(\frac{1}{6}\cos 2\varphi - \frac{1}{2\sqrt{3}}\sin 2\varphi)P_2^2(\cos\theta),\ \ (r,\varphi,\theta) \in \overline{\Omega},$$

або

$$u(r,\varphi,\theta) = r^2\cos(2\varphi + \frac{\pi}{3})\sin^2\theta,\ \ (r,\varphi,\theta) \in \overline{\Omega}. \blacktriangleright$$

Вправи до розділу 7

1. Розв'язати мішану задачу:

1) $u_{tt} = u_{xx} + \frac{1}{x}u_x + 2\cos 2t,\ x \in (0,1),\ t > 0,$
$|u(0,t)| < +\infty,\ u(1,t) = 0,\ t \geq 0,$
$u(x,0) = \frac{1}{2}\left(\frac{J_0(2x)}{J_0(2)} - 1\right) + J_0(\mu_1 x),$
$u_t(x,0) = 0,\ x \in [0,1],$
де μ_1 – додатний корінь рівняння $J_0(\mu) = 0$;

2) $u_{tt} = u_{xx} + \frac{1}{x}u_x - \frac{u}{x^2} + e^{\,t}J_1(\mu_k x),\ x \in (0,1),\ t > 0,$
$|u(0,t)| < +\infty,\ u(1,t) = 0,\ t \geq 0,$
$u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = 0,\ x \in [0,1],$
де μ_k – додатний корінь рівняння $J_1(\mu) = 0$;

3) $u_{tt} = u_{xx} + \frac{1}{x}u_x - \frac{9u}{x^2},\ x \in (0,1),\ t > 0,$
   $|u(0,t)| < +\infty,\ u(1,t) = 0,\ t \geq 0,$
   $u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = J_3(\mu_1 x),\ x \in [0,1],$
де μ_1 – додатний корінь рівняння $J_3(\mu) = 0$;
4) $u_{tt} = u_{xx} + \frac{1}{x}u_x - u,\ x \in (0,1),\ t > 0,$
   $|u(0,t)| < +\infty,\ u(1,t) = \cos 2t + \sin 3t,\ t \geq 0,$
   $u(x,0) = \frac{J_0(x\sqrt{3})}{J_0(\sqrt{3})},\ u_t(x,0) = \frac{3J_0(2x\sqrt{2})}{J_0(2\sqrt{2})},\ x \in [0,1];$
5) $u_t = xu_{xx} + u_x - \frac{u}{x^2} + \sin t J_1(\mu_k x),\ x \in (0,1),\ t > 0,$
   $|u(0,t)| < +\infty,\ u(1,t) = 0,\ t \geq 0,$
   $u(x,0) = 0,\ x \in [0,1],$
де μ_k – додатний корінь рівняння $J_1(\mu) = 0$;
6) $u_t = u_{xx} + \frac{1}{x}u_x - \frac{u}{x^2} + e^{-t}J_1(\mu_k x),\ x \in (0,1),\ t > 0,$
   $|u(0,t)| < +\infty,\ u(1,t) = 0,\ t \geq 0,$
   $u(x,0) = 0,\ x \in [0,1],$
де μ_k – додатний корінь рівняння $J_1(\mu) = 0$;
7) $u_t = xu_{xx} + u_x - \frac{9}{4x}u,\ x \in (0,1),\ t > 0,$
   $|u(0,t)| < +\infty,\ u(1,t) = 0,\ t \geq 0,$
   $u(x,0) = J_3(\mu_k\sqrt{x}),\ x \in [0,1],$
де μ_k – додатний корінь рівняння $J_3(\mu) = 0$.

2. Кругла однорідна мембрана радіуса R закріплена по контуру і знаходиться в стані рівноваги при натягові T. У момент часу $t = 0$ до поверхні мембрани прикладена рівномірно розподілена сила $F = P_0 \sin \omega t$. Знайти радіальні коливання мембрани.

3. Знайти температуру необмеженого кругового циліндра радіуса R, якщо його початкова температура дорівнює u_0, а на поверхню зовні подається з моменту часу $t = 0$ тепловий потік густиною q.

4. Однорідна куля радіуса R підтримується при нульовій температурі. Починаючи з моменту часу $t = 0$, температура навколишнього середовища зростає лінійно з часом так, що $u_c = bt$, де b – стала. Теплообмін між поверхнею і середовищем відбувається за законом Ньютона. Нагрівання відбувається рівномірно (симетрична задача). Знайти радіальний розподіл температури в кулі при $t > 0$.

5. Бічна поверхня циліндра, радіус основи якого R і висота l, охолоджується в повітрі з температурою u_0. Температура нижньої основи дорівнює нулю, а на верхню основу подається нормальний потік тепла з густиною q. Знайти стаціонарну температуру внутрішніх точок циліндра.

6. Знайти функцію, гармонічну всередині кулі $K_R(0)$ і таку, що $(u(r,\theta)+u_r(r,\theta))|_{r=R}=1+\cos^2\theta$.

7. Знайти функцію, гармонічну зовні кулі $K_R(0)$ і таку, що $(u(r,\theta)-u_r(r,\theta))|_{r=R}=\sin^2\theta$.

8. Знайти функцію, гармонічну всередині кругового шару $K:=\{(r,\varphi,\theta)\,|\,1<r<2,\,0<\varphi<2\pi,\,0<\theta<\pi\}$ і таку, що $u(r,\theta)|_{r=1}=\cos^2\theta$, $u(r,\theta)|_{r=2}=4\cos^2\theta-\frac{4}{3}$.

9. Знайти функцію, гармонічну всередині кулі $K_R(0)$ і таку, що $u(r,\varphi,\theta)|_{r=R}=\sin(2\varphi+\frac{\pi}{6})\sin^2\theta\cos\theta$.

10. Знайти функцію, гармонічну зовні кулі $K_R(0)$ і таку, що $u(r,\varphi,\theta)=\sin^3\theta\cos\theta\cos(3\varphi+\frac{\pi}{4})$.

11. Знайти функцію, гармонічну всередині кульового шару $K:=\{(r,\varphi,\theta)\,|\,1<r<2,\,0<\varphi<2\pi,\,0<\theta<\pi\}$ і таку, що $u(r,\varphi,\theta)|_{r=1}=7\sin\theta\cos\varphi$, $u(r,\varphi,\theta)|_{r=2}=7\cos\theta$.

Відповіді до вправ з розділу 7

1. 1) $u(x,t)=-\frac{1}{2}\left(\frac{J_0(2x)}{J_0(2)}-1\right)\cos 2t+J_0(\mu_1 x)\cos\mu_1 t$;
2) $u(x,t)=\frac{1}{1+\mu_k^2}(e^{\,t}-\cos\mu_k t-\frac{1}{\mu_k}\sin\mu_k t)J_1(\mu_k x)$;
3) $u(x,t)=\frac{1}{\mu_1}J_3(\mu_1 x)\sin\mu_1 t$;
4) $u(x,t)=\frac{J_0(x\sqrt{3})}{J_0(\sqrt{3})}\cos 2t+\frac{J_0(2x\sqrt{2})}{J_0(2\sqrt{2})}\sin 3t$;
5) $u(x,t)=\frac{1}{1+\mu_k^4}(e^{\,-\mu_k^2 t}+\mu_k^2\sin t-\cos t)J_1(\mu_k x)$;
6) $u(x,t)=\frac{1}{\mu_k^2-1}(e^{\,-t}-e^{\,-\mu_k^2 t})J_1(\mu_k x)$;
7) $u(x,t)=e^{\,-\frac{\mu_k^2 t}{4}}J_3(\mu_k\sqrt{x})$.

2. Шукати розв'язок задачі

$$\begin{aligned}&u_{rr}+\frac{1}{r}u_r-\frac{1}{a^2}u_{tt}=-\frac{P_0}{T}\sin\omega t,\ 0<r<R,\ t>0,\\&|u(0,t)|<+\infty,\ u(R,t)=0,\ t\ge 0,\\&u(r,0)=0,\ u_t(r,0)=0,\ 0\le r\le R,\end{aligned}$$

у вигляді $u(t,r) = v(r,t) + w(r,t)$, де v – розв'язок задачі

$$\begin{array}{l} v_{rr} + \frac{1}{r}v_r - \frac{1}{a^2}v_{tt} = -\frac{P_0}{T}\sin\omega t, \\ |v(0,t)| < +\infty,\ v(R,t) = 0, \end{array}$$

а w – розв'язок задачі

$$\begin{array}{l} w_{rr} + \frac{1}{r}w_r - \frac{1}{a^2}w_{tt} = 0, \\ |w(0,t)| < +\infty,\ w(R,t) = 0, \\ w(r,0) = -v(r,0),\ w_t(r,0) = -v_t(r,0). \end{array}$$

Тоді $v(r,t) = \dfrac{a^2P_0}{T\omega^2}\Big(\dfrac{J_0(\frac{\omega}{a}r)}{J_0(\frac{\omega}{a}R)} - 1\Big)\sin\omega t$,

$$w(r,t) = -\frac{2aP_0R^3\omega}{T}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{a\mu_k t}{R}J_0(\frac{\mu_k}{R}r)}{\mu_k^2(\omega^2R^2 - a^2\mu_k^2)J'_0(\mu_k)},$$

де μ_k, $k \in \mathbb{N}$, – додатні корені рівняння $J_0(\mu) = 0$.

3. Треба знайти розв'язок задачі

$$\begin{array}{l} u_t = a^2(u_{rr} + \frac{1}{r}u_r),\ 0 < r < R,\ t > 0, \\ |u(0,t)| < +\infty,\ u_r(R,t) = \frac{q}{k},\ t \geq 0, \\ u(r,0) = 0,\ 0 \leq r \leq R. \end{array}$$

Зручно його шукати у вигляді $u(t,r) = v(r,t) + w(r,t)$, де v – розв'язок задачі

$$\begin{array}{l} v_t = a^2(v_{rr} + \frac{1}{r}v_r), \\ |v(0,t)| < +\infty,\ v_r(R,t) = \frac{q}{k}, \end{array}$$

а w – розв'язок задачі

$$\begin{array}{l} w_t = a^2(w_{rr} + \frac{1}{r}w_r), \\ |w(0,t)| < +\infty,\ w_r(R,t) = 0, \\ w(r,0) = u_0 - v(r,0). \end{array}$$

Розв'язком задачі для v є $v(r,t) = At + Cr^2$, де $A = \dfrac{2a^2q}{kR}$, $C = \dfrac{q}{k}$, тобто $v(r,t) = \dfrac{q}{kR}\Big(2a^2t + \dfrac{r^2}{2}\Big)$.

Задача для w розв'язується методом Фур'є та одержується, що

$$w(r,t) = u_0 - \frac{qR}{4k} - \frac{2Rq}{k}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0(\frac{\mu_n}{R}r)}{\mu_n^2 J_0(\mu_n)}\, e^{-\left(\frac{a\mu_n}{R}\right)^2 t},$$
де μ_n, $n \in \mathbb{N}$, – додатні корені рівняння $J_1(\mu) = 0$.

4. Оскільки розподіл температури радіальний, то u залежить лише від r, t і є розв'язком задачі

$$\begin{array}{l} u_t = a^2(u_{rr} + \frac{2}{r}u_r),\ 0 < r < R,\ t > 0, \\ |u(0,t)| < +\infty,\ (u_r + H(u - bt)|_{r=R} = 0,\ t \geq 0, \\ u(r,0) = 0,\ 0 \leq r \leq R. \end{array}$$

Заміною $v(r,t) = ru(r,t)$ ця задача зводиться до такої:

$$\begin{array}{l} v_t = a^2 v_{rr},\ 0 < r < R,\ t > 0, \\ v(0,t) = 0,\ v_r(R,t) + (H - \frac{1}{R})v(R,t) = HRbt,\ t \geq 0, \\ u(r,0) = 0,\ 0 \leq r \leq R. \end{array}$$

Нехай $v(r,t) = f(r,t) + g(r,t)$, де f – розв'язок задачі

$$\begin{array}{l} f_t = a^2 f_{rr}, \\ f(0,t) = 0,\ f_r(R,t) + (H - \frac{1}{R})f(R,t) = HRbt,\ t \geq 0, \\ f(r,0) = 0,\ 0 \leq r \leq R, \end{array}$$

який можна шукати у вигляді $f(r,t) = \alpha(r) + \beta(r)t$. Тоді одержується, що $\alpha(r) = \frac{br^3}{6a^2} - \frac{bR^2}{6a^2}\Big(\frac{2}{HR} + 1\Big)r$, $\beta(r) = br$, а тому

$$f(r,t) = \frac{br^3}{6a^2} - \frac{bR^2}{6a^2}\Big(\frac{2}{HR} + 1\Big)r + brt.$$

Для g отримується задача

$$\begin{array}{l} g_t = a^2 g_{rr}, \\ g(0,t) = 0,\ g_r(R,t) + (H - \frac{1}{R})g(R,t) = 0,\ t \geq 0, \\ g(r,0) = -\frac{br^3}{6a^2} + \frac{bR^2}{6a^2}\Big(\frac{2}{HR} + 1\Big)r,\ 0 \leq r \leq R, \end{array}$$

розв'язок якої знаходиться методом Фур'є і визначається формулою

$$g(r,t) = \frac{2bR^3}{a^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\mu_n - \mu_n\cos\mu_n}{\mu_n^3(\mu_n - \sin\mu_n\cos\mu_n)}\, e^{-\frac{a^2\mu_n^2}{R^2}t}\sin\frac{\mu_n r}{R},$$

де μ_n, $n \in \mathbb{N}$, – додатні корені рівняння

$$\mu\cos\mu + p\sin\mu = 0,\ p = HR - 1,\ \mu = \lambda R.$$

5. Розв'язком задачі

$$u_{rr}(r,z) + \tfrac{1}{r}u(r,z) + u_{zz}(r,z) = 0,\ r \in (0,R),\ z \in (0,l),$$

$$|u(0,z)| < +\infty,\ u_r(R,z) + hu(R,z) = hu_0,\ z \in (0,l),$$
$$u(r,0) = 0,\ u_z(r,l) = \tfrac{q}{K},\ r \in [0,R],$$

є

$$u(r,z) = u_0 + 2\sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\frac{\mu_i}{R}r)}{\mu_i(J_1^2(\mu_i) + J_0^2(\mu_i))}\times$$
$$\times\left(\frac{qR\mathrm{sh}\frac{\mu_i}{R}z}{K\mu_i\mathrm{ch}\frac{\mu_i}{R}l} - u_0\frac{\mathrm{ch}\frac{\mu_i}{R}(z-l)}{\mathrm{ch}\frac{\mu_i}{R}l}\right),$$

де μ_i, $i \in \mathbb{N}$, – додатні корені рівняння $\mu J_0'(\mu) + hRJ_0(\mu) = 0$.

6. $u(r,\theta) = \frac{4}{3} + \frac{2r^2}{3R(R+2)}P_2(\cos\theta)$.

7. $u(r,\theta) = C + (\frac{2}{3} - C)\frac{R^2}{r(R+1)} - \frac{R^4}{(R+3)r^3}(\cos^2\theta - \frac{1}{3})$, $C \in \mathbb{R}$.

8. $u(r,\theta) = \frac{1}{3}(\frac{2}{r} - 1 + r^2(3\cos^2\theta - 1))$.

9. $u(r,\varphi,\theta) = \left(\frac{r}{R}\right)^3 \sin(2\varphi + \frac{\pi}{6})\sin^2\theta\cos\theta$.

10. $u(r,\varphi,\theta) = \left(\frac{r}{R}\right)^5 \sin^3\theta\cos\theta\cos(3\varphi + \frac{\pi}{4})$.

11. $u(r,\varphi,\theta) = 4(r - \frac{1}{r^2})\cos\theta + (\frac{8}{r^2} - r)\sin\theta\cos\varphi$.

Література

1. *Арсенин В. А.* Методы математической физики и специальные функции / *В. А. Арсенин.* – М.: Наука, 1974. – 432 с.

2. *Бицадзе А. В.* Сборник задач по уравнениям математической физики /*А. В. Бицадзе, Д. Ф. Калиниченко.* – М.: Наука, 1985. – 310 с.

3. *Вірченко Н. О.* Основні методи розв'язання задач математичної фізики: Навчальний посібник /*Н. О. Вірченко.* – К.: КПІ, 1997. – 370 с.

4. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики /*В. С. Владимиров.* – М.: Наука, 1988. – 512 с.

5. *Владимиров В. С.* Сборник задач по уравнениям математической физики /*В. С. Владимиров, В. П. Михайлов.* – М.: Наука, 1982. – 256 с.

6. *Гончаренко В. М.* Основи теорії рівнянь з частинними похідними /*В. М. Гончаренко.* – К.: Вища школа, 1996. – 311 с.

7. *Дороговцев А. Я.* Математичний аналіз. Частина 2 /*А. Я. Дороговцев.* – К.: Либідь, 1994. – 304 с.

8. *Іванчов М. І.* Вступ до теорії рівнянь у частинних похідних: Курс лекцій /*М. І. Іванчов.* – Львів: Тріада плюс, 2004. – 178 с.

9. *Кошляков Н. С.* Уравнения в частных производных математической физики /*Н. С. Кошляков, Э. Б. Глинер, М. М. Смирнов.* – М.: Высшая школа, 1970. – 712 с.

10. *Лавренчук В. П.* Диференціальні рівняння математичної фізики: Навчальний посібник / *В. П. Лавренчук, С. Д. Івасишен, В. С. Дронь, Т. І. Готинчан.* – Чернівці: Рута, 2008. – 192 с.

11. *Лопушанська Г. П.* Диференціальні рівняння та рівняння математичної фізики: підручник /*Г. П. Лопушанська, О. М. Бугрій, А. О. Лопушанський.* – Львів: Видавець І. Е. Чижиков, 2012. – 362 с.

12. *Михайлов В. П.* Дифференциальные уравнения в частных производных /*В. П. Михайлов.* – М.: Наука, 1976. – 392 с.

13. *Николенко В. Н.* Уравнения математической физики: Учебно-методическое пособие /*В. Н. Николенко.* – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1981. – 392 с.

14. *Перестюк М. О.* Теорія рівнянь математичної фізики: Навч. посібник /*М. О. Перестюк, В. В. Маринець.* – К.: Либідь, 2001. – 336 с.

15. *Перестюк М. О.* Збірник задач з математичної фізики: навч. посібник /*М. О. Перестюк, В. В. Маринець, В. Л. Рего.* – Кам'янець-Подільський: Аксіома, 2012. – 252 с.

16. *Петровский И. Г.* Лекции об уравнениях с частными производными /*И. Г. Петровский.* – М.: Физматгиз, 1961. – 400 с.

17. *Положій Г. М.* Рівняння математичної фізики /*Г. М. Положій.* – К.: Радянська школа, 1959. – 478 с.

18. *Смирнов М. М.* Задачи по уравнениям математической физики /*М. М. Смирнов.* – М.: Наука, 1975. – 128 с.

19. *Тихонов А. Н.* Уравнения математической физики / *А. Н. Тихонов, А. А. Самарский.* – М.: Наука, 1966. – 724 с.

20. *Шалдырван В. А.* Методы математической физики: Учебное пособие /*В. А. Шалдырван, В. С. Герасимчук.* – М.: Вузовская книга, 2006. – 512 с.

21. *Шилов Г. Е.* Математический анализ. Специальный курс /*Г. Е. Шилов.* – М.: Физматгиз, 1961. – 436 с.

22. *Эльсгольц Л. Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление /*Л. Э. Эльсгольц.* – М.: Наука, 1965. – 424 с.

Предметний покажчик

Зміст

ДЛЯ НОТАТОК

ДЛЯ НОТАТОК

Навчальне видання

Івасишен Степан Дмитрович
Лавренчук Володимир Петрович
Івасюк Галина Петрівна
Рева Надія Віталіївна

ОСНОВИ КЛАСИЧНОЇ ТЕОРІЇ РІВНЯНЬ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

Навчальний посібник

Літературний редактор: *Івасишен С. Д.*
Комп'ютерний набір, верстка: *Івасюк Г.П.*
Дизайн обкладинки:

Свідоцтво про державну реєстрацію ДК №** від **.**.20**р.

Підписано до друку 20.06.2015. Формат $60 \times 84 \setminus 16$.
Папір офсетний. Друк офсетний. Умов. друк. арк. 19,7.
Обл.-вид. арк. 21,18. Зам.***. Тираж 100.
Видавничий дім «РОДОВІД»