МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

Л. Р. Ладієва

ОПТИМАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ СИСТЕМАМИ

Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для студентів,
які навчаються за спеціальністю 151
«Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології»

Київ
КПІ ім.. Ігоря Сікорського
2019

Рецензент: Карвацький А. Я., д-р техн. наук, проф.

Відповідальний редактор Жученко А.І., д-р техн. наук, проф.

Гриф надано Методичною радою КПІ ім.. Ігоря Сікорського (протокол № 8 від 25.04 . 2019р.)

За поданням Вченої ради інженернохімічного факультету (протокол № 4 від 22. 04. 2019р.)

Електронне мережне навчальне видання

Ладієва Леся Ростиславівна, канд..техн.наук, доц.

Оптимальне керування системами

Оптимальне керування системами.: навч. посіб. для студ. спеціальності 151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології» / Л. Р. Ладієва; КПІ ім.. Ігоря Сікорського. 2019, - 162с.

У навчальному посібнику дано систематизоване викладення питань сучасної теорії оптимального керування системами. Розглядається оптимальне керування при детермінованих вхідних сигналах системи з зосередженими і розподіленими параметрами. Результати теорії керування застосовуються для реальних об’єктів, що описуються диференціальними (лінійними і нелінійними, з аргументами, що запізнюються, у частинних похідних) рівняннями.

Навчальний посібник призначений студентам, аспірантам і інженерам, що спеціалізуються в області автоматизованого керування технологічними процесами та виробництвом, а також інших спеціальностей, які пов’язані з розробкою систем оптимального керування.

Вступ

Динамічна оптимізація - метод управління, при якому процес не тільки підтримується на оптимальному рівні в сталому режимі, але і перехід з одного режиму в інший, здійснюється найкращим чином. Функція оптимальності стає функцією часу, і завдання оптимального управління зводиться до максимізації або мінімізації певного критерію в часі. Динамічна оптимізація має деяку схожість із статичною, однак вона більш складна, так як пов'язана з необхідністю визначати функцію часу, а не окремі величини.

До динамічної оптимізації, згідно з визначенням, відносять завдання визначення значень керуючих впливів, що є функціями часу і забезпечують досягнення заданих критеріїв управління для технологічних процесів в перехідних режимах. визначати функцію часу, а не окремі величини.

У посібнику передбачається освоїти основні математичні методи, що застосовуються при вирішенні завдань динамічної оптимізації (варіаційне числення, принцип максимуму, динамічне програмування), а також вивчити, як вони застосовуються для різних завдань управління технологічними процесами.

Для рішення задачі оптимізації насамперед необхідно визначити цільову або вартісну функцію процесу, що оптимізується. При цьому потрібно дати відповідне формулювання задачі в фізичній формі і здійснити переклад фізичного опису на мову математики. Для здійснення ефективного управління процесом необхідно знати його поточний стан. Будемо називати це - задачею оцінки стану. Крім того, необхідно охарактеризувати процес за допомогою адекватної моделі, що залежить від різних чинників. Це називається ідентифікацією системи.

При умові знання функції вартості, стану і параметрів системи можна потім визначити найкраще управління, що мінімізує (або максимізує) функцію вартості.

Це може бути задача із замкненим або розімкненим контуром в залежності від того, чи є управління функцією стану системи.

1. Варіаційне числення в оптимальному управлінні

1.1. *Формулювання проблеми варіаційного числення*

Варіаційне числення являє собою розділ математичного аналізу, пов'язаний з проблемами оптимізації при умовах більш загального характеру, ніж ті, які розглядаються в звичайній теорії знаходження максимумів і мінімумів деяких функцій. Воно має справу з максимізацією або мінімізацією функціоналів, коли потрібно визначити не окремі значення функції, а всю функцію загалом.

Розроблено біля 150 років Ейлером. У варіаційному численні трьома основними проблемами є: задача Лагранжа, задача Майєра і задача Больца.

Задача Лагранжа з однією незалежною змінною пов'язана з визначенням функції *U(t), яка* забезпечує мінімум інтеграла від даної функції.

Сформулюємо цю задачу.

Дано: 1) Система диференціальних рівнянь

$$X' = f(\mathbf{X}, \mathbf{U}, \mathbf{t}) \tag{1.1.1}$$

або в більш загальній формі

$$\varphi_i(\mathbf{X}, \mathbf{X}', \mathbf{U}, t) = 0 \tag{1.1.2}$$

де X - $(n+1)$ - мірний вектор, а U - $(r+1)$ - мірний вектор;

2) Система початкових умов

$$x_i(t_0) = a_i, i = 1,2,\dots n \tag{1.1.3}$$

3) Критерій

$$I = \int_{t_0}^{t_f} F(\mathbf{X}, \mathbf{U}, t)dt \tag{1.1.4}$$

де $F(\mathbf{X}, \mathbf{U}, \mathbf{t})$ - *безперервна* функція аргументів.

Потрібно знайти функцію *U(t), яка* забезпечує мінімум I серед всіх функцій U(t), *що задовольняють* умовам, заданим рівняннями (1.1.1) і рівністю (1.1.3).

Задача Майєра пов'язана з визначенням функції *U(t),* що мінімізує дану функцію, що містить деякі змінні, кінцеві значення яких зазделегідь задані. Сформулюємо цю задачу.

Дано:

1) система диференціальних рівнянь вигляду (1.1.1)

2) система початкових умов вигляду (1.1.3)

3) система кінцевих умов

$$x_j(t_f)=b_j \qquad (1.1.5)$$

де j належить деякій підмножині цілих чисел $1,2,...m$, а t_f не задане;

4) критерій:

$$I = G(X(t),t)\Big|_{t_0}^{t_f} \qquad (1.1.6)$$

Потрібно визначити функцію *U(t)* мінімізуючу I серед всіх функцій U(t), що задовольняють умовам (1.1.1), (1.1.3) і (1.1.5).

А. Особливий випадок. Коли критерій має вигляд:

$$I = G(t)\Big|_{t_0}^{t_f} = t_f - t_0 \qquad (1.1.7)$$

задача зводиться до перетворення деякого початкового стану до бажаного кінцевого стану за мінімальний час.

Задача Больца пов'язана з визначенням функції *U(t), що мінімізує* суму, що складається з інтеграла від функції і функції, що обчислюється в кінцевій точці, причому ці функції містять деякі змінні, кінцеві величини яких зазделегідь не задані. Сформулюємо цю задачу.

Дано:

1) система диференціальних рівнянь (1.1.1)

2) система початкових умов (1.1.3)

3) система кінцевих умов (1.1.5)

4) критерій

$$I = G(\boldsymbol{X},\boldsymbol{U},t)\Big|_{t_0}^{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} F(\boldsymbol{X},\boldsymbol{U},t)dt \qquad (1.1.8)$$

Потрібно визначити функцію ***U(t)***, що мінімізує I відносно всіх функцій **U**(t), що задовольняють умовам (1.1.1), (1.1.3) і (1.1.5).

Якщо під $\boldsymbol{X}$ мати на увазі вектор стану процесу, а під $\boldsymbol{U}$ - вектор управління, то управління по мінімуму інтеграла зводиться до задачі Лагранжа. Точно так само управління кінцевим станом і управління по мінімуму часу перехідного процесу можна назвати задачею Майєра. До задачі Больца може бути зведене управління по мінімуму інтеграла при обмеженні кінцевого стану або управлінні по мінімуму часу переходу в кінцевий стан при наявності обмеження на величину інтеграла.

Із сказаного виходить, що формулювання задачі Больца є найбільш загальним, однак завжди можна ввести деякі допоміжні змінні, які перетворюють задачу Майєра і навпаки. Хоч існує багато проблем оптимального управління, які, як це здається на перший погляд не відносяться ні до однієї з трьох перерахованих проблем, однак завжди можна вдатися до того або іншого математичного прийому, що дозволяє звести первинну задачу до однієї з розглянутих вище.

1.2. Основна задача мінімізації. Випадок закріплених кінцевих точок

Розглянемо задачу мінімізації інтеграла:

$$I = \int_{t_0}^{t_f} f(x,x',t)dt, \tag{1.2.1}$$

де $x=x(t)$ - двічі диференційована функція, що задовольняє умовам $x(t_0)=x_0$ *і* $x(t_f)=x_{tf}$;

f - безперервна функція аргументів x, x', t.

Знайдемо функцію *x(t), що мінімізує* інтеграл в рівнянні (1.2.1). Геометрична інтерпретація задачі полягає у визначенні такої кривої *x(t),* що з'єднує точки $x(t_0)$ *і* x_{tf}, вздовж якої інтеграл від даної функції f(x, x', t) був би мінімальним.

У термінах теорії управління, якщо x - вихід керованої системи, то інтеграл (1.2.1) визначає якість управління системою, причому треба прагнути до того, щоб цей інтеграл мав мінімум. Інтервал часу, при якому інтеграл має мінімум, повинен бути вибраний. Мається на увазі будь-який інтеграл, протягом якого керована система переміситься від одного існуючого режиму роботи до іншого.

Такий істотний режим роботи являє собою особливі умови тільки для тих змінних, які повинні бути безперервні.

Нехай *x(t)* - функція, що забезпечує мінімум, а $\bar{x}(t)$ - функція, близька до *x(t).*

Тоді *x(t)* і $\bar{x}(t)$ зв′язані співвідношеннями:

$$\bar{x}(t) = x(t) + \varepsilon\omega(t); \tag{1.2.2}$$

$$\overline{x'}(t) = x'(t) + \varepsilon\omega'(t) \tag{1.2.3}$$

де ε - малий параметр, а ω - довільна функція, що диференціюється для якої:

$$\omega(t_0)=\omega(t_f)=0 \tag{1.2.4}$$

оскільки кінцева точка передбачається закріпленою як показано на рис 1.1.

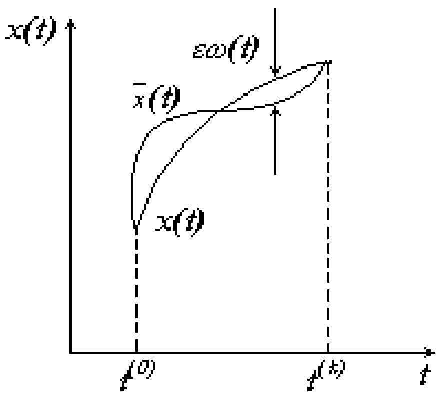


Рис. 1.1. Оптимальна траєкторія із закріпленими крайніми точками

З умови (1.2.4) слідує, що

$$\bar{x}(t_0) = x(t_0) = x_0$$
$$\bar{x}(x_f) = x(t_f) = x_{tf}$$

тобто всі функції близькі до *x(t), мають* необхідні кінцеві значення функцій, по відношенню до яких проводиться мінімізація. При відповідному виборі $\omega(t)$ *і* ε за допомогою виразу вигляду (1.2.2) можна представити будь-яку функцію, що диференціюється, що має необхідні кінцеві значення. Вертикальне відхилення довільної кривої $\bar{x}(t)$ від діючої кривої, що забезпечує мінімум, позначено на рис.1.1 через $\varepsilon\omega(t)$. Незалежно від вибору $\omega(t)$мінімізуюча функція x(t) *є* членом цього сімейства, якщо вибрати величину параметра ε, яка дорівнює нулю. Замінюючи x і x' в рівнянні (1.2.1) відповідно на $\overline{x}(t)$ і $\overline{x'}(t)$ отримуємо

$$I(\varepsilon) = \int_{t_0}^{t_f} f(x+\varepsilon\omega, x'+\varepsilon\omega', t)dt \tag{1.2.5}$$

Розкладаючи підінтегральний вираз в формі (1.2.5) в ряд Тейлора знайдемо

$$f(x + \varepsilon\omega, x + \varepsilon\omega', t) = f(x, x', t) + \varepsilon\omega \frac{\partial f}{\partial x} + \varepsilon\omega' \frac{\partial f}{\partial x'} + \text{ члени що утримують } \varepsilon^2, \varepsilon^3, \dots \tag{1.2.6}$$

Тоді функцію критерію можна переписати у вигляді:

$$I(\varepsilon) \int_{t_0}^{t_f} \left[f(x,x',t) + \varepsilon\omega \frac{\partial f}{\partial x} + \varepsilon\omega' \frac{\partial f}{\partial x'} + \text{ члени що містять } \varepsilon^2, \varepsilon^3, \dots \right] dt, \tag{1.2.7}$$

Необхідною умовою для максимуму або мінімуму I є

$$\left. \frac{\partial I(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = 0 \tag{1.2.8}$$

звідси витікає, що

$$\int_{t_0}^{t_f} \left(\omega \frac{\partial f}{\partial x} + \omega' \frac{\partial f}{\partial x'} \right) dt = 0 \tag{1.2.9}$$

Інтегрування за частинами другого члена в цьому інтегралі дає:

$$\int_{t_0}^{t_f} \omega' \frac{\partial f}{\partial x'} dt = \omega \frac{\partial f}{\partial x'} \Bigg|_{t_0}^{t_f} - \int_{t_0}^{t_f} \omega \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial x'} \right) dt \tag{1.2.10}$$

Звідки

$$I'(0) = \omega \frac{\partial f}{\partial x'} \Bigg|_{t_0}^{t_f} - \int_{t_0}^{t_f} \omega \left[\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial x'} \right) \right] dt \tag{1.2.11}$$

При цьому рівняння (1.2.11) зводиться до вигляду:

$$\int_{t_0}^{t_f} \omega \left[\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial x'} \right) \right] dt = 0 \tag{1.2.12}$$

Оскільки рівняння (1.2.12) повинне бути справедливе для всіх ω, то необхідна умова для екстремума I приймає вигляд:

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial x'} \right) = 0 \tag{1.2.14}$$

Це рівняння другого порядку відоме під назвою диференціального рівняння Ейлера-Лагранжа. Його рішення визначає функцію, що доставляє мінімум інтеграла, що розглядається, при умові, що цей мінімум існує. Рівняння

$$\omega(t)\frac{\partial f}{\partial x'} = 0 \qquad \text{для } t=t_0,t_f \tag{1.2.15}$$

називається умовою трансверсальності. Для випадку, коли *x*(t_0) *і* x(t_f) *фіксовані* $\omega(t_0) = \omega(t_f) = 0$. Рівняння (1.2.14), (1.2.15) визначають двоточкову крайову задачу (ДКТЗ), рішення якої представляє допустиму оптимальну траєкторію. Комбінації граничних умов представлені графічно на мал. 1.2.

Для багатомірного випадку отримаємо рівняння Ейлера-Лагранжа:

$$\nabla_x f \ - \frac{d}{dt}(\ \nabla_{x'} f) = 0 \tag{1.2.15}$$

де $\nabla_x f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ . \\ . \\ . \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix}$ $\quad \nabla_{x'} f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1{}'} \\ . \\ . \\ . \\ \frac{\partial f}{\partial x_n{}'} \end{bmatrix}$

Величина δI ,що дорівнює добутку $I'(0)\varepsilon$, представляє диференціал функції I(ε) при ε =*0* і називається першою варіацією функціонала *I.*

Оскільки можна припустити,що

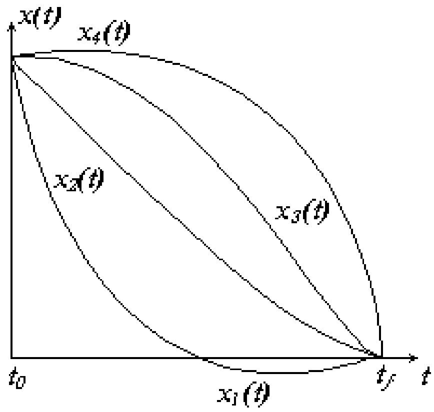
$$\varepsilon\omega(t) = \delta x, \tag{1.2.16}$$

тоді помноживши (1.2.11) на (отримаємо:

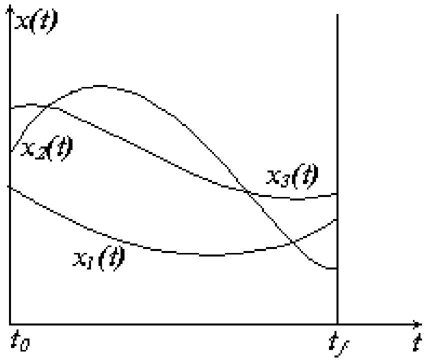
$$\delta I = I'(0)\varepsilon = \frac{\partial f}{\partial x'}\delta x\Big|_{t_0}^{t_f} + \int_{t_0}^{t_f}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial x'}\right)\delta x dt \tag{1.2.17}$$

де *x* - варіація функції *x(t).*

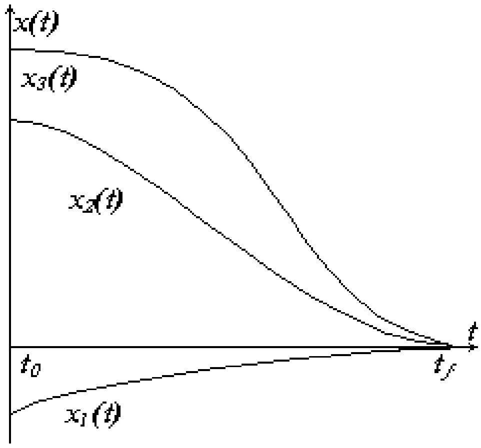
Умова того, що функція *x(t) -ек*стремаль функціонала I, *може* бути сформульована як вимога рівності нулю першої варіації функціонала δI .



а) $x(t_0)$ *і* $x(t_f)$ *фіксовані*



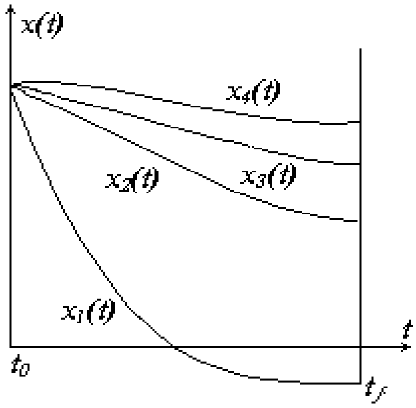
б) $x(t_0)$ *і* $x(t_f)$ *довільні*



в)

$x(t_0)$ - *довільне*

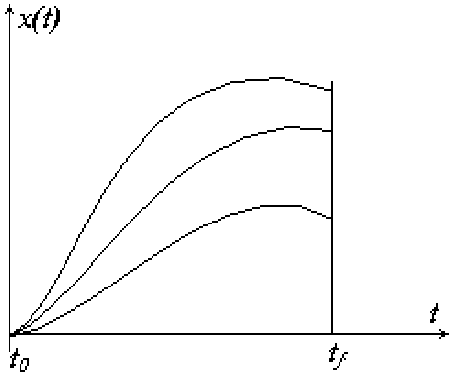
$x(t_f)$ - фіксоване



г)

$x(t_0)$ - фіксоване

$x(t_f)$ - довільне



д)

$x(t_0)$ - *фіксоване*, $x(t_f)$ - довільне (задача Майєра).

Рис.1.2. Різні комбінації граничних умов

Приклад 1.2.1. Потрібно знайти рівняння лінії, що мінімізує функціонал (граничні умови не визначені)

$$I(x) = \int_0^2 \left[\tfrac{1}{2} (x')^2 + xx' + x' + x \right] dt$$

Для цієї задачі рівняння Ейлера-Лагранжа має вигляд

$$x' + 1 - x' - x'' = 0 = 1 - x''$$

Розв′язок може бути отриманий безпосереднім інтегруванням:

$$x(t) = \frac{t^2}{2} + c_1 t + c_2$$

Тепер для визначення c_1 і c_2 потрібно додати умови трансверсальності до заданих граничних умов. Оскільки розглянута задача має змінні точки початку і досягнення, то

$$\frac{\partial F}{\partial x'} = x' + x + 1 = 0 \qquad \text{для } t=0,2.$$

Таким чином з розв*язку для x і її похідної отримаємо

$$\frac{\partial F}{\partial x'} = t + c_1 + \frac{t^2}{2} + c_1 t + c_2 + 1 = 0 \qquad \text{для } t=0,2.$$

Тепер з системи спільних рівнянь

$c_1 + c_2 = -1, \qquad 3c_1 + c_2 = -5$

можна знайти c_1 і c_2 , а саме: $c_1 = -2, c_2 = 1$. Таким чином екстремаль, що задовільняє даним граничним умовам, має вигляд

$x(t)=t\,2/2 - 2t + 1.$

Фактичне значення екстремума може бути отримане при підстановці в задану функцію вартості і виконання інтегрування при цьому $Imin$ = 3/4

Достатні умови Лежандра.

Якщо екстремаль функціонала (1.2.1) є мінімальною, то для будь-якої її точки виконується умова:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial (x')^2} \geq 0 \tag{1.2.18}$$

якщо екстремаль фунціонала - максималь, то

$$\frac{\partial^2 f}{\partial (x')^2} \le 0 \qquad (1.2.19)$$

Достатні умови можуть бути виражені через другу варіацію функціонала I

$$\delta^2 I = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}\left\{(\delta x)^2\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{d}{dt}\frac{\partial^2 f}{\partial (x')^2}\right] + (\delta x')\frac{\partial^2 f}{\partial (x')^2}\right\}dt \qquad (1.2.20)$$

тобто друга варіація являє собою квадратичний член в розкладі ΔI.

Якщо друга варіація $\delta^2 I < 0$ - максимум.

1.3. *Випадок рухомих кінцевих точок*

Розглянемо задачу мінімізації з кінцевою точкою траєкторії, що лежить на кривій. Протягом інтервалу часу управління зовнішні збурення передбачаються постійними. Нехай $\bar{x}(t)$ буде функцією , яка забезпечує мінімум інтегрального критерію (1.2.1).

Передбачається, що кінцева точка траєкторії лежить на кривій x= c(t). Нехай $\bar{x}(t)$ функція, мало відрізняється від x (t), взаємозв′язок x(t) і $\bar{x}(t)$ визначається рівняннями (1.2.2) і (1.2.3) .

Довільна функція ω(t) задовольняє початковій умові.

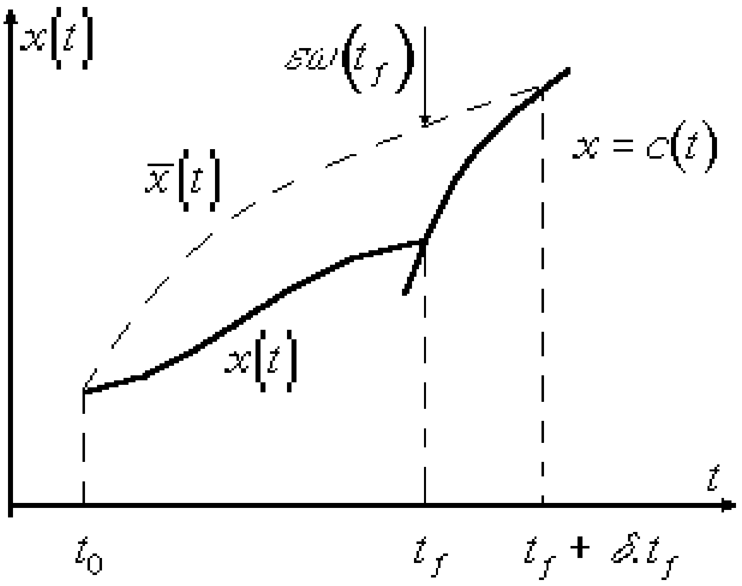


Рис.1.3. Оптимальна траєкторія з рухомими крайніми точками

$$\omega(t_0) = 0, \tag{1.3.1}$$

але кінцева умова ще не визначена. Це приводить до відповідних граничних умов для руху від одного стану до іншого.

Замінюючи в рівнянні (1.2.1) x і x' відповідно через $\bar{x}$ і $\bar{x}'$ і верхню границю інтегрування на $t_f + \varepsilon\delta t_f$ отримаємо :

$$I(\varepsilon) = \int_{t_0}^{t_f} f\left(x + \varepsilon\omega, x' + \varepsilon\omega', t_f + \varepsilon\delta t_f\right)dt \tag{1.3.2}$$

Варіація δt_f виникае тому, що кінцева точка траєкторії не закріплена , а лежить на кривій x=c(t).

Розкладемо в ряд Тейлора f обмежуючись першими похідними

$$I(\varepsilon) = \int_{t_0}^{t_f}\left[f\left(x, x', t_f\right) + \varepsilon\omega\frac{\partial f}{\partial x} + \varepsilon\omega'\frac{\partial f}{\partial x'} + \varepsilon\delta t_f\frac{\partial f}{\partial t_f}\right]dt = \tag{1.3.3}$$

$$= \int_{t_0}^{t_f}\left[f\left(x, x', t_f\right) + \varepsilon\omega\frac{\partial f}{\partial x} + \varepsilon\omega'\frac{\partial f}{\partial x'}\right]dt + \varepsilon\delta t_f f\left(t_f\right)$$

Слідуючи тим же міркуванням, що і у випадку із закріпленими кінцями, можна показати, що необхідною умовою для екстремума функціонала I є:

$$\left.\frac{\partial I}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = 0 = \int_{t_0}^{t_f}\left\{\omega\frac{\partial f}{\partial x} + \omega'\frac{\partial f}{\partial x'}\right\}dt + \delta t_f\, f\left(x, x', t_f\right) \tag{1.3.4}$$

Інтегруючи за частинами другий член підінтегрального виразу після деяких перетворень отримаємо:

$$\int_{t_0}^{t_f}\omega\left[\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial x'}\right)\right]dt + \omega\left(t_f\right)\left.\frac{\partial f}{\partial x'}\right|_{t_f} - \omega\left(t_0\right)\left.\frac{\partial f}{\partial x'}\right|_{t_0} + f\left(t_f\right)\delta t_f = 0 \tag{1.3.5}$$

Знайдемо відношення між $\delta t_f(t_f)$ і $\omega(t_f)$, що дає можливість отримати необхідні умови. В момент досягнення множини цілей лінія c(t) і оптимальна траєкторія x (t) перетинаються.

Тоді,використовуючи $\bar{x}$ (t) = x (t) + $\varepsilon\omega$ (t),

$\bar{t}_f = t_f + \varepsilon\delta t(t_f)$

отримаємо x $(t_f+\varepsilon\delta t_f)$ + $\varepsilon\omega(t_f+\varepsilon\delta t_f)$ = c$(t_f+\varepsilon\delta t_f)$

Продиференціюємо обидві частини останнього виразу по ε і , прирівнявши ε=0, отримаємо :

$$x'(t_f)\,\delta t_f+\omega(t_f)=c'(t_f)\,\delta t_f. \tag{1.3.6}$$

Виключаючи $\omega(t_f)$ із рівнянь (1.3.5) і (1.3.6), отримаємо :

$$\int_{t_0}^{t_f}\omega\left[\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial x'}\right)\right]dt+\left\{f(t_f)+\left[c'(t_f)-x'(t_f)\right]\frac{\partial f}{\partial x'}\bigg|_{t_f}\right\}\delta t_f-\omega(t_0)\frac{\partial f}{\partial x'}\bigg|_{t_0}=0. \tag{1.3.7}$$

Так як δt_f довільне, то із рівняння (1.3.7) слідує , що :

$$\int_{t_0}^{t_f}\omega\left[\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial x'}\right)\right]dt=0 \tag{1.3.8}$$

$$\left\{f(t_f)+\left[c'(t_f)-x'(t_f)\right]\frac{\partial f}{\partial x'}\bigg|_{t_f}\right\}\delta t_f-\omega(t_0)\frac{\partial f}{\partial x'}\bigg|_{t_0}=0 \tag{1.3.9}$$

Враховуючи, що рівняння (1.3.8) повинно бути справедливим для всіх (, отримаємо диференціальне рівняння Ейлера - Лагранжа для даної варіаційної задачі у вигляді:

$$\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial x'}\right)=0 \tag{1.3.10}$$

аналогічно рівнянню (1.2.4). Однак у разі незакріпленої кінцевої точки розв′язок рівняння Ейлера Лагранжа повинно задовольняти рівнянню (1.3.9). Якщо $\frac{\partial f}{\partial x'}$ має кінцеве значення при t = t_0, то рівняння (1.3.9) зводиться до

$$f(t_f)=\left[x'(t_f)-c'(t_f)\right]\frac{\partial f}{\partial x'}\bigg|_{t_f} \tag{1.3.11}$$

і називається **умовою трансверсальності.**

Відмітимо, що рівняння (1.3.11) може і не задовільнятися при t = t_0, тому що $\omega(t_0)=0$.Необхідно тільки, щоб при t = t_0 x було неперервним, а $\frac{\partial f}{\partial x'}$ скінченним.

В задачах регулювання, протягом деякого інтервалу часу, процес змінюється і спостерігається перехід від одного істотного робочого режиму до іншого. Таким чином, кінцева крива x = c (t) є горизонтальною прямою і

$$c'(t_f) = 0$$

(1.3.12)

Умова трансверсальності (1.3.11) тепер приймає вигляд:

$$f(t_f) = x'(t_f)\frac{\partial f}{\partial x'}\bigg|_{t_f} \tag{1.3.13}$$

Таким чином умова трансверсальності (1.3.11) встановлює зв'язок між кутовими коефіцієнтами дотичних до екстремалі x (t) і лінії x = ε (t).

*Приклад1.3.2***.** Потрібно мінімізувати

$$I(x) = \int_0^{t_f}\left[1+(x')^2\right]^{\frac{1}{2}}dt$$

при x(0) = 1 , так що x(t_f) = c(t_f) = 2 - t_f

Відмітимо, що функція вартості являє собою довжину дуги, а це означає, що повинна бути мінімізована відстань між точкою і лінією. Використовуючи рівняння Ейлера -Лагранжа, отримаємо, що оптимальна траєкторія має вигляд x = a t + b. Для оцінки довільних постійних a і b виберемо відповідним чином умови трансверсальності.

Потім приймемо x (0) = 1, тоді $\omega(t_0)$ = 0.

Оскільки t_f не визначене, то (v) переходить в

$$f(t_f) + (c'(t_f) - x'(t_f))\frac{\partial f}{\partial x'}\bigg|_{t_f} = 0$$

таким чином при невизначеному часі досягнення t_f нами отримано x' =1.

Із розв*язку рівняння Ейлера–Лагранжа при визначеній початковій умові отримаємо, що x(t=0)=1 тобто b=1 і x'(t=t_f)=a= 1.

Тому оптимальна траєкторія x(t)=t+1, а час досягнення t_f = 1/2.

Відмітимо, що оптимальна траєкторія перетинає безліч цілей під прямим кутом. Взагалі, оптимальна траєкторія не виявляється дотичною по відношенню до безлічі цілей. Ця умова відсутності дотичності фактично і є умова трансверсальності.

Розглянули умови наявності локального мінімуму.

Припустимо траєкторія $X^*(t)$ доставляє абсолютний мінімум функціоналу; тоді окрім виконання рівнянь Ейлера - Лагранжа і умови Лежандра, повинна виконуватися умова

$$\Delta I = \int_{t_0}^{t_f} f\left(X(t), X'(t), t\right)dt - \int_{t_0}^{t_f} f\left(X^*(t), X^{*'}(t), t\right)dt \geq 0 \tag{1.3.14}$$

відносно довільної траєкторії $X(t)$.

Припустимо ,що $X^*(t)$ - мінімізуюча траєкторія, тоді для траєкторії $X(t)$ виконується умова (1.3.14). Крім того, враховуючи міркування, які привели нас до виразу $\left.\frac{dI(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = 0$, отримаємо $\left.\frac{d\Delta I}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \geq 0$.

Якщо визначена так звана функція Вейерштрасса, тобто

$$E\left(X^*, X^{*'}, X', t\right) = f\left(X^*, X', t\right) - f\left(X^*, X^{*'}, t\right) - \left(X' - X^{*'}\right)\frac{\partial f}{\partial X'}\left(X^*, X^{*'}, t\right)$$

де X' – похідна неоптимальної функції, то можна показати , що необхідною умовою для $\Delta I \geq 0$ у виразі (1.3.4) є

$$E\left(X^*, X^{*'}, X', t\right) \geq 0 \tag{1.3.15}$$

на траєкторії $X^*(t)$ для довільного t.Вираз (1.3.15) являє собою умову Вейерштрасса. *Приклад 1.3.3.*

Функція задовольняє граничним умовам:

$x(0) = 0$ и $x(1) = 1$ і функціонал вигляду

$$I = \int_0^1 \frac{1}{x'}dt$$

де $f = \frac{1}{x'}$, $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial x'} = -\left(x'\right)^{-2}, x' = k$, к - стала, таким чином

$x = kt + x(0)$, граничні умови виконуються при к = 1, тому розв′язок x = t .

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial t}{\partial x'}\right) = 0$$

Припустимо отриманий розв*язок оптимальний, тоді він повинен бути таким, що мінімізує.

Умова Лежандра. $\frac{\partial^2 f}{\partial (x')^2} \geq 0$ приймає числові значення $\frac{\partial^2 f}{\partial (x')^2} = \frac{2}{(x')^3}$.

Вздовж оптимальної траєкторії, де x ′= 1 , $\frac{\partial^2 f}{\partial (x')^2} = 2$ умова Лежандра виконується .

Умова Вейерштрасса.

Функція Вейерштрасса

$$E = \frac{1}{x'} - 1 + (x' - 1) = \frac{1}{x'} + x' - 2$$

звідки видно, що умова E$\geq$ 0 не задовільняється , якщо x’ < 0.

Тому умова Вейевштрасса не виконується. Таким чином розв*язок x = t забезпечує локальний мінімум.

1.4. Динамічна оптимізація з обмеженнями в формі рівності і множники Лагранжа

Ситуація, коли на співвідношення між скалярними елементами траєкторії стану накладені обмеження -- ситуація, яка майже завжди виникає в фізичних задачах.

Розглянемо задачу оптимізації функції вартості

$$I = \int_{t_0}^{t_f} f(X, X', t)dt \tag{1.4.1}$$

з додатковими обмеженнями типу рівності в формі m-мірного векторного простору

$$\varphi_k\left[X(t), X'(t), t\right] = 0 \ , \ k = 1,\dots, m \quad \text{и} \ m < n \tag{1.4.2}$$

де функції φ_k двічі диференційовані.

Ця задача еквівалентна задачі мінімізації функціонала без обмежень,

$$I = \int_{t_0}^{t_f} \left[f\left(X, X^{/}, t\right) + \lambda^T(t)\varphi\left(X, X^{/}, t\right)\right] dt \qquad (1.4.3)$$

$$\Phi\left(X, X^{/}, \lambda(t), t\right) = f\left(X, X^{/}, t\right) + \lambda^T \varphi\left(X, X^{/}, t\right)$$

де m-мірний вектор $\lambda(t)$ — вектор, эквівалентний множнику Лагранжа, який розглядається як функція незалежної змінної t.

Для випадку без обмежень справедливо

$$\left.\frac{\partial I(\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\omega + \frac{\partial f}{\partial x^{/}}\omega^{/} \right) dt = 0 \qquad (1.4.4)$$

Однак функція X(t) задовільняє також $\varphi\left(X, X^{/}, t\right) = 0$.

Це означає, що $\omega(t)$ не може бути вибрана довільно.Вона повинна бути такою, що

$$\overline{\varphi}\left(x + \varepsilon\omega, x^{/} + \varepsilon\omega^{/}, t\right) = 0 \qquad (1.4.5)$$

Із рівняння (4) слідує $\left.\frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = 0$ або припустивши, як і раніше $x + \varepsilon\omega = \overline{x}$, $x^{/} + \varepsilon\omega = \overline{x}^{/}$, отримаємо

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \overline{X}}\frac{\partial \overline{X}}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial \varphi}{\partial X^{/}}\frac{\partial X^{/}}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial \varphi}{\partial X}\omega + \frac{\partial \varphi}{\partial X^{/}}\omega^{/} = 0 \qquad (1.4.6)$$

Тепер вирази (1.6.4) і (1.6.6) можна об*єднати, ввівши множник $\lambda(t)$ і створити єдину необхідну умову вигляду

$$\int_{t_0}^{t_f} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial X} + \lambda^T(t)\frac{\partial \varphi}{\partial X} \right)\omega(t) + \left(\frac{\partial f}{\partial X^{/}} + \lambda^T(t)\frac{\partial \varphi}{\partial X^{/}} \right)\omega^{/}(t) \right] dt = 0 \qquad (1.4.7)$$

Якщо $\lambda(t)$ вибрати так, що вираз із співмножником $\omega^{/}(t)$ дорівнює нулю, то перший доданок в інтегралі також повинен дорівнювати нулю, оскільки функція $\omega(t)$ довільна.

Необхідна умова (1.6.7) при інтегруванні за частинами перетворюється до вигляду

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i^{/}} \right) + \sum_{k=1}^{m} \left[\lambda_k \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i^{/}} \right) \right) - \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i^{/}}\lambda_k^{/}(t) \right] = 0 \qquad (1.4.8)$$

що відповідає $\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{X}} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{X}^{/}} \right) = 0$

Приклад 1.4.4. Задано диференціальне рівняння системи $\theta'' = u(t)$, яке можна інтерпретувати як момент інерції ракети у вільному просторі; потрібно мінімізувати $\mathrm{I} = \dfrac{1}{2}\int_0^2 (\theta'')^2 dt$ так, щоб $\theta(t=0)=1$, $\theta(t=2)=0$,

$$\theta'(t=0)=1 \quad , \quad \theta'(t=2)=0 .$$

Для того, щоб записати задачу в термінах простору станів, припустимо

$x_1(t) = \theta(t)$, $x_1' = x_2(t)$, $x_2' = u(t)$

Тепер диференціальне рівняння системи прийме вигляд

$$\mathbf{X}' = A\mathbf{X}(t) + b\,u(t),$$

де

$$\mathbf{X}^T = [x_1 x_2], \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad b^T = [0\ 1]$$

Якщо застосувати (1.6.3) ($u(t)$ розглядається як змінна стану x_3) задача зводиться до мінімізації функціоналу

$$\mathrm{I} = \int_0^2 \left\{ \frac{1}{2}u^2(t) + \lambda^T(t)\Big[A\mathbf{X}(t) + b\,u(t) - \mathbf{X}'\Big] \right\} dt = \int_0^2 \left\{ \frac{1}{2}u^2(t) + \lambda_1(t)[x_2(t) - x_1'] + \lambda_2(t)[u(t) - x_2'] \right\} dt$$

Рівняння Ейлера-Лагранжа приймуть вигляд

$\lambda_1' = 0$, $\lambda_2' = -\lambda_1(t)$, $u(t) = -\lambda_2(t)$

Остаточне рішення, отримане за допомогою диференціальних рівнянь і граничних умов, рівне

$$x_1 = \frac{1}{2}t^3 - \frac{7}{4}t^2 + t + 1,$$

$$x_2 = \frac{3}{2}t^2 - \frac{7}{2}t + 1, \quad u = 3t - \frac{7}{2}$$

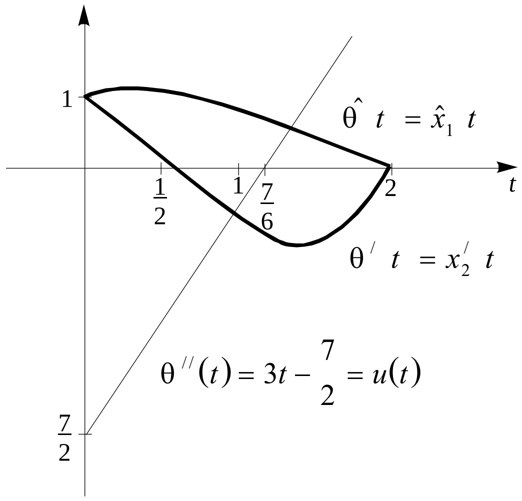


Рис.1.4. Структурна схема, оптимальне рівняння і змінні стани для системи.

1.5. Задача управління кінцевим станом

Розглянемо систему першого порядку $\varphi(x, x^{/}, t) = 0$ $(x' = f(x, u, t))$, яка починає рух із точки $x_1(t_0) = x_1$ і протягом заданого часу $[t_0, t_f]$ повинна керуватися так, щоб мінімізувати функцію $I = G\left(x_{t_f}\right)$.

При цьому кінцева точка $x_{t_f} = x\left(t_f\right)$ вважається вільною. Можна вважати, що справжня задача еквівалентна задачі знаходження траєкторії *x(t), яка* задовольняє заданим граничним умовам і мінімізує деякий еквівалентний показник якості

$$I_1 = G\left(x_{t_f}\right) + \int_{t_0}^{t_f} \lambda(t)\varphi\left(x, x^{/}, t\right)dt \tag{1.5.1}$$

Розглянемо варіації виду $\bar{x}(t) = x(t) + \varepsilon\omega(t)$, при $\omega(t_0) = 0$, знаходимо, що

$$I_1 = G\left[x_{t_f} + \varepsilon\omega\left(t_f\right)\right] + \int_{t_0}^{t_f} \lambda(t)\varphi[x + \varepsilon\omega, x' + \varepsilon\omega', t]dt$$

Прийнявши $\left.\frac{\partial I_1}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = 0$ і інтегруючи за частинами, отримуємо рівняння Ейлера-Лагранжа

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F_1}{\partial x'}\right) = 0 \tag{1.5.2}$$

$$\frac{\partial G}{\partial x}\omega(t)\bigg|_{t=t_f} + \frac{\partial F_1(x,x',t)}{\partial x'}\omega(t)\bigg|_{t=t_f} = 0 \qquad (1.5.3)$$

де $F_1 = \lambda(t)\varphi(x,x',t)$.

Так як величина $\omega(t_f)$ довільна, отримуємо слідуючі умови трансверсальності

$$\frac{\partial G(x)}{\partial x}\bigg|_{t=t_f} = -\frac{\partial F_1(x,x',t)}{\partial x'}\bigg|_{t=t_f} \qquad (1.5.4)$$

Разом з умовами (1.4.2) і (1.4.4) повинна виконуватися також умова Вейєрштрасса $E \geq 0$.

Враховуючи вираз

$E(x^*, x^{*/}, x^/, t) = F(x^*, x^/, x, t) - F(x^*, x^{*/}, t) - (x^/ - x^{*/})\dfrac{\partial F}{\partial x^/}(x^*, x^{*/}, t)$ і (1.4.3) знайдемо

$$E = \lambda(t)\varphi(x^*, x^/, t) - \lambda(t)\varphi(x^*, x^{*/}, t) - (x^/ - x^{*/})\lambda(t) \qquad (1.5.5)$$

Для *n*-мірного простору $X = [x_1, x_2, ..., x_n]^T$, $\varphi(\mathbf{X}, \mathbf{X}^/, t) = 0$ перша необхідна умова оптимальності визначається сукупністю рівнянь Ейлера-Лагранжа

$$\frac{\partial F_1}{\partial \mathbf{X}} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F_1}{\partial \mathbf{X}^/}\right) = 0 \qquad (1.5.6)$$

де $F_1 = \lambda^T(t)\phi(\mathbf{X}, \mathbf{X}^/, t)$.

Умови трансверсальності

$$\frac{\partial G}{\partial \mathbf{X}}\bigg|_{t_f} = -\frac{\partial F}{\partial \mathbf{X}^/}\bigg|_{t_f} \qquad (1.5.7)$$

і умови Вейєрштрасса

$$E = \lambda^T(t)\phi(\mathrm{X}^*, \mathrm{X}^/, t) - \lambda^T(t)\phi(\mathrm{X}^*, \mathrm{X}^{*/}, t) - (\mathrm{X}^/ - \mathrm{X}^{*/})^T \lambda(t) \qquad (1.5.8)$$

Якщо *G* явно залежить від t_f, тобто кінцевий момент часу t_f наперед не визначений, тоді вираз (1.4.1) набуде вигляду

$$I_1 = G(\mathbf{X}_{t_f}, t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \lambda^T(t)\phi(\mathbf{X}, \mathbf{X}^/, t)dt \qquad (1.5.9)$$

Це означає, що можлива варіація t_f, позначена через δt_f.

Умови трансверсальності в граничній точці

$$\left[\frac{\partial G}{\partial t}+F_1-x^{/}\frac{\partial F_1}{\partial x^{/}}\right]\Bigg|_{t=t_f}\delta t_f+\left[\frac{\partial G}{\partial x}+\frac{\partial F_1}{\partial x^{/}}\right]\Bigg|_{t=t_f}\delta x_{t_f}=0 \qquad (1.5.10)$$

У разі *n* змінних умови трансверсальності запишуться

$$\left[\frac{\partial G(x,t)}{\partial t}+F_1-\sum_{i=1}^{n}x_i^{/}\frac{\partial F_1}{\partial x_i^{/}}\right]\Bigg|_{t_f}\delta t_f+\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial G}{\partial_i x}+\frac{\partial F_1}{\partial x_i^{/}}\right]\Bigg|_{t=t_f}\delta x_{t_{f_i}}=0 \qquad (1.5.11)$$

де $\delta x_{t_{f_i}}$ — *i*-та складова вектора δx_{t_f}.

Для задачі оптимальної швидкодії $G(X_{t_f},t_f)=t_f$ и $I_1=t_f+\int_{t_0}^{t_f}F_1(X,X^{/},t)dt$, де t_f невідомо і повинно бути знайдено, необхідні умови для цієї задачі ті ж, що і для задачі з фіксованим часом і функціоналом

$I_1=\int_{t_0}^{t_f}F(X,X^{/},t)dt$.

Відмінність в умові трансверсальності (1.4.11), то згідно з виразом (1.4.11) можна отримати умову

$$\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{/}\frac{\partial F_1}{\partial x_i^{/}}-F_1\right)\Bigg|_{t=t_f}=1, \qquad (1.5.12)$$

коли $X(t_f)$ фіксоване.

Якщо $\varphi_i=x_i^{/}-f_i(X,U,t)=0$, то вираз (1.4.12) зводится до вигляду

$$\left[\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(t)x_i^{/}(t)-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(t)\varphi_i(X,X^{/},t)\right]\Bigg|_{t=t_f}=1$$

або

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(t)f_i(x^*,u^*,t)\Big|_{t=t_f}=1 \qquad (1.5.13)$$

Дійсно, якщо функція $F_1(\lambda,\mathbf{X},\mathbf{X}^{/},u)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(x_i^{/}-f_i(\mathbf{X},\mathbf{U}))$ явно не залежить від часу, то із виразів (1.4.12), (1.4.13) слідує

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(t)f_i(\mathbf{X}^*,\mathbf{U}^*,t)\equiv 1 \quad , \quad t_0\le t\le t_f \qquad (1.5.14)$$

це справедливо, коли $f(\mathbf{X},\mathbf{U})$ не залежить явно від часу.

1.6.Задача оптимального управління з узагальненим показником якості. Задача Больца

Розглянемо системи вигляду

$X' = f(X,U,t), \qquad X(t_0) = X_0$ (1.6.1)

Потрібно знайти таку функцію управління на интервалі $t_0 \le t \le t_f$, яка по-перше, переводить систему із початкового стану в кінцевий, для якого зберігається умова

$$\rho\left[X(t_f), t_f\right] = 0 \tag{1.6.2}$$

і по-друге, забезпечує мінімум показника якості

$$I = G\left[X(t_f), t_f\right] + \int_{t_0}^{t_f} F(X,U,t)dt \tag{1.6.3}$$

$$F_1(X, X', U, \lambda, t) = F(X,U,t) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t)\varphi_i(X, X', U, t) \tag{1.6.4}$$

де $\varphi_i(X, X', U, t) = x_i' - f_i(X,U,t)$;

$\lambda_i(t)$ - множник Лагранжа.

1. Рівняння Ейлера-Лагранжа

Виписавши $\frac{\partial F_2}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x_i}\right) = 0$ в явном вигляді, отримаємо

$$\lambda_k' = \frac{\partial F}{\partial x_k} - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial F_i}{\partial x_k}, \quad k = 1,..., n, \quad \frac{\partial F_2}{\partial u_j} = 0, \quad j = 1,..., r \tag{1.6.5}$$

Ці $n+r$ рівнянь разом з n рівняннями системи (1.5.1) і умовою $\zeta(u) = 0$ дають $2n+r+1$ рівнянь для $2n+r+1$ невідомих $x_1,\dots,x_n,\lambda_1,\dots,\lambda_n,u_1,\dots,u_r$.

Якщо F_1 — відома функція часу, то

$$-F_1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_1}{\partial x_1'} x_i' = \text{const} \tag{1.6.6}$$

яке зводиться до наступного

$$-F_1 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i = \text{const} \tag{1.6.7}$$

2. **Умова Лежандра існування мінімуму функціонала**

$$\left\lfloor F_{2_{u_i u_j}} \right\rfloor \geq 0 \tag{1.6.8}$$

3. **Умова Вейєрштраса**

З виразів (1.5.4) і рівнянь (1.5.5) знайдемо

$$-F\left(\mathbf{X}^*, \mathbf{U}^*, t\right) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i\left(\mathbf{X}^*, \mathbf{U}^*, t\right) \geq -F\left(\mathbf{X}^*, \mathbf{U}^*, t\right) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i\left(\mathbf{X}^*, \mathbf{U}^*, t\right) \tag{1.6.9}$$

Це означає, що $\mathbf{U}^*$ потрібно вибирати так, щоб величина $H = -F + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i$ досягала максимума в кожній точці оптимальної траєкторії.

Останнє припущення, що функція H диференціюється, означає, що в кожній точці оптимальної траєкторії повинна виконуватися наступна умова:

$$\left. \left(-\frac{\partial F}{\partial u_i} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial u_i} \right) \right|_{u_i = u_i^*} = 0, \quad i = 1, \ldots, r \tag{1.6.10}$$

Рівняння (1.5.10) відповідає останнім r рівнянням Ейлера-Лагранжа (1.5.5). Крім того, вимога $\left. \frac{\partial^2 H}{\partial u^2} \right|_{u = u_i}$ дає умову Лежандра.

4. **Умови трансверсальності**

Якщо функції G і ρ не залежать від кінцевого часу t_f, то припустивши $R = G + \alpha\rho$ (де α — постійний множник), отримаємо умову трансверсальності при t_f

$$\left. \frac{\partial R}{\partial x_i} \right|_{t = t_f} = -\left. \frac{\partial F}{\partial x_i^{/}} \right|_{t = t_f} \tag{1.6.11}$$

Коли G і ρ залежать від t_f, виконується умова

$$\left[\delta R + \left(F_2 - \sum \frac{\partial F_i}{\partial x_i^{/}} x_i^{/} \right) \delta t + \sum \frac{\partial F_i}{\partial x_i^{/}} \delta x_i \right]_{t = t_f} = 0 \tag{1.6.12}$$

де $\delta R = \sum \frac{\partial R}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial R}{\partial t} \delta t$ для всіх нескінченно малих варіацій δx_i і δt з врахуванням $\rho\left[x\left(t_f\right), t_f \right] = 0$.

Звернемо увагу на одну граничну умову, яка витікає з умови трансверсальності (1.5.11).

Для класу задач, де $F \equiv 0$ і G не залежать від x_f і де кінцева точка повинна лежати на поверхні $\rho(x) = 0$, маємо

$$\left.\frac{\partial \rho}{\partial x_i}\right|_{t=t_f} = -\left.\frac{\partial F_1}{\partial x_i^{/}}\right|_{t=t_f} \quad \text{при} \quad F_1 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi_i \,.$$

Якщо $\varphi_i = x_i^{/} - f_i$, то маємо

$$\left.\frac{\partial \rho}{\partial x_i}\right|_{t=t_f} = -\lambda_i\left(t_f\right) \tag{1.6.13}$$

Це означає, що градієнт функції $\rho(x)$ повинен вказувати напрямок, протилежний вектору $\lambda\left(t_f\right)$.

Інакше кажучи , для цього класу задач гранична умова така, що $\lambda\left(t_f\right)$ перпендикулярно гіперповерхності $\rho\left(x_f\right)$.Приклад – задачі, оптимальні по швидкодії.

1.7. Лінійноквадратична оптимізація

Відома постановка задачі оптимального керування динамічними системами, що полягае в знаходженні траекторіі **U** (t) { t_0 < t < t_f } , яка приводить стан системи **X** (t) за допомогою міімізації функціоналу вартості або якості

$$\mathbf{I} = G[\mathbf{X}(t), t]\Big|_{t=t_0}^{t=t_f} + \int_{t=t_0}^{t=t_f} F[\mathbf{X}(t), \mathbf{U}(t), t]\,dt$$

з заданими початковими умовами **X(**t) = $\mathbf{X_0}$ в кінцеву умову **N**[**X**(t_f),t_f] = 0 оптимальним способом. З точки зору використання є два альтернативних варіанти отримання оптимальних результатів.

У випадку оптимального керування одержуємо оптимальну траєкторію керування, як постійну функцію часу, та в часовому проміжку оптимізації для реального процесу. Очевидно, що ця оптимальна траєкторія залежить від заданого початкового стану $\mathbf{X}_0$. З-за дії можливих перешкод або неточностей моделі, на які не зважають при оптимізації, буде перебігати стан **X**(t) , що відрізняється від очікуваного, отриманого по моделі **X** (t). При цьому також можливе відхилення кінцевих умов.

В випадку оптимального регулювання з необхідних умов випливає рішення так званої синтез-проблеми оптимального закону регулювання

U (t) = **R*** [**X** (t), t]

Ця формула використовується для прямих розрахунків керуючого впливу **U**(t) по виміряним величинам станів **X**(t) . Істотна властивість оптимального регулювання випливає з того, що закон регулювання є незалежним відносно можливих початкових станів $\mathbf{X_0}$. За відсутності несподіваних перешкод або неточностей моделі оптимальне керування та оптимальне регулювання для заданих початкових станів $\mathbf{X_0}$ дає однакові результати. Установлено, що при заданій постановці проблеми використання оптимального закону регулювання з-за своєї універсальності та легкості обчислень з точки зору практичного використання є більш бажаним, ніж застосування оптимальної траєкторії керування.

Важливим спеціальним випадком оптимального керування динамічними системами є лінійно-квадратична (ЛК) оптимізація (ЛКО), яка пов'язана з лінійними рівняннями станів та квадратичними функціоналами якості.

Розглянемо задачу оптимального керування , припустимо, що потрібно мінімізувати функцію вартості / при фіксованому t_f /

$$\mathbf{I} = \frac{1}{2}\int_{t_f}^{t_f} [\mathbf{X}^T(t)\mathbf{Q}(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{U}^T(t)\mathbf{R}(t)\mathbf{U}(t)]dt, \tag{1.7.1}$$

для узагальненої системи з змінними в часі параметрами і яка задається рівнянням

$$\mathbf{X}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{U}(t) \tag{1.7.2}$$

при умові, що $\mathbf{X}(t_0)=\mathbf{X_0}$- вектор початкового стану.

Об’єднаємо функцію вартості та обмеження у формі диференційного рівняння за допомогою множника Лагранжа. Тоді

$$\mathbf{I}' = \int_{t_o}^{t_f} \left\{ \frac{1}{2}\mathbf{X}^T(t)\mathbf{Q}(t)\mathbf{X}(t) + \frac{1}{2}\mathbf{U}^T(t)\mathbf{R}(t)\mathbf{U}(t) + \lambda^T(t)\left[\mathbf{A}(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{U}(t) - \mathbf{X}'\right] \right\} dt$$

(1.7.3)

Точний характер використаної функції вартості залежить від вигляду конкретної задачі, що розв`язується . Тому вагові матриці **R**(t) та **Q**(t) звичайно обираються з фізичних міркувань. Крім того, без втрати спільності припускається, що **R**(t) та **Q**(t) - симетричні. Вектор керування **U**(t) розглядаємо так само, якби це був вектор стану. Далі скористаємось рівняннями Ейлера-Лагранжа:

$$\frac{\partial \ \mathbf{\Phi}}{\partial \ \mathbf{X}} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial \ \Phi}{\partial \ \mathrm{X}'}\right) = 0, \quad \frac{\partial \ \mathbf{\Phi}}{\partial \ \mathbf{U}} - \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dt}}\left(\frac{\partial \ \mathbf{\Phi}}{\partial \ \mathbf{U}'}\right) = 0 \qquad (1.7.4)$$

де

$$\mathbf{\Phi} = \frac{1}{2}\mathbf{X}^{\mathrm{T}}(\mathrm{t})\mathbf{Q}(\mathrm{t})\mathbf{X}(\mathrm{t}) + \frac{1}{2}\mathbf{U}^{\mathrm{T}}(\mathrm{t})\mathbf{R}(\mathrm{t})\mathbf{U}(\mathrm{t}) + \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}(\mathrm{t})\ [\mathbf{A}(\mathrm{t})\mathbf{X}(\mathrm{t}) + \mathbf{B}(\mathrm{t})\mathbf{U}(\mathrm{t}) - \mathbf{X}'],$$

Тому що
$$\frac{\partial\mathbf{\Phi}}{\partial\mathbf{X}} = \mathbf{Q}(\mathrm{t})\mathbf{X}(\mathrm{t}) + \mathbf{A}^{\mathrm{T}}(\mathrm{t})\lambda(\mathrm{t}), \qquad \frac{\partial\mathbf{\Phi}}{\partial\mathbf{X}'} = -\lambda(\mathrm{t})$$
$$\frac{\partial\mathbf{\Phi}}{\partial\mathbf{U}} = \mathbf{R}(\mathrm{t})\mathbf{U}(\mathrm{t}) + \mathbf{B}^{\mathrm{T}}(\mathrm{t})\lambda(\mathrm{t}), \qquad \frac{\partial\mathbf{\Phi}}{\partial\mathbf{U}'} = 0$$

то рівняння Ейлера-Лагранжа для цієї задачі мають вигляд:

$$\lambda\,\mathbf{I}' = -\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{(t)}\lambda(t) - \mathbf{Q(t)X}(t) \qquad (1.7.5)$$

$$\mathbf{U}(t) = -\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^T(t)\lambda(t) \qquad (1.7.6)$$

Через те , що $\mathbf{X}(t_f)$ не визначений, умова трансверсальності в момент досягнення

$$\left.\frac{\partial\mathbf{\Phi}}{\partial\mathbf{X}}\right|_{\mathrm{t_f}} = \mathbf{I}(\mathrm{t_f}) = 0 \qquad (1.7.7)$$

Відмітимо, що рівняння для оптимального керування можливе при умові , що існує матриця , обернена матриці **R**(t)

Для отримання невід'ємної другої похідної необхідно, щоб **R**(t) та **Q**(t) були невід`ємно визначені. Таким чином, зрозуміло, що **R**(t) повинна бути додатньо визначеною.

Стан системи $\mathbf{X}(t_0)$ заданий при $t=t_0$, тоді як спряжений вектор $\lambda(t)$ визначений в момент досягнення $\lambda(t_f)=0$. Таким чином , перш ніж визначати оптимальне керування, необхідно вирішити двоточкову крайову задачу (ДТКЗ).

З′ясуємо, чи можливо перетворити керування (1.7.6) по замкненому контуру $\mathbf{U}(t)=\mathbf{K}(t)\mathbf{X}(t)$, тобто знайдемо оптимальний закон регулювання. Припустимо, що рішення для спряженого випадку

$$\lambda(t)=\mathbf{P}(t)\mathbf{X}(t)$$

Підставляючи (1.7.8) в (1.7.2) та(1.7.6), отримаємо

$$\mathbf{X}'=\mathbf{A}(t)\mathbf{X}(t)-\mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^{T}(t)\mathbf{P}(t)\mathbf{X}(t) \qquad (1.7.9)$$

Крім того, з (1.7.8) та (1.7.5) випливає

$$\lambda'=\mathbf{P}'\mathbf{X}(t)+\mathbf{P}(t)\mathbf{X}'=\mathbf{Q}(t)\mathbf{X}(t)-\mathbf{A}^{T}(t)\mathbf{P}(t)\mathbf{X}(t) \qquad (1.7.10)$$

Об`єднуючи /1.9/ та /1.10/ одержуємо

$$[\mathbf{P}'+\mathbf{P}(t)\mathbf{A}(t)+\mathbf{A}^{T}(t)\mathbf{P}(t)P(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^{T}(t)\mathbf{P}(t)+\mathbf{Q}(t)]\mathbf{X}(t)=0 \qquad (1.7.11)$$

Оскільки ця рівність повинна виконуватись для ненульових x(t), то множник [•] , що стоїть перед x(t) , повинен дорівнювати нулю. Таким чином матриця **P**, що є симетричною матрицею розмірності (nxn) і яка містить в собі n(n+1)/2 різних членів , повинна задовольняти матричному рівнянню Ріккаті:

$$\mathbf{P}'=-\mathbf{P}(t)\mathbf{A}(t)-\mathbf{A}^{T}(t)\mathbf{P}(t)+\mathbf{P}(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^{T}(t)\mathbf{P}(t)-\mathbf{Q}(t) \qquad (1.7.12)$$

при граничній умові $\mathbf{P}(t_f)=0$

Таким чином, розв`язання матричного рівняння Ріккаті можливо проводити в оберненому часі, від t_f до t_0, побудувавши матрицю

$$\mathbf{K}(t)=-\mathbf{P}^{-1}(t)\mathbf{B}^{T}(t)\mathbf{P}(t) \qquad (1.7.13)$$

і потім одержавши керування по замкненому контуру

$$\mathbf{U}(t)=\mathbf{K}(t)\mathbf{X}(t) \qquad (1.7.14)$$

Приклад1.7.5.:

Синтезувати систему оптимального керування об`єктом

$T_2X''+T_1X'+X=kU$, $X(t_0)=X_0$

з критерієм

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{t_f}(x^2 + rU^2)dt$$

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -\frac{1}{T_2}x_1 - \frac{T_1}{T_2}x_2 + \frac{k}{T_2}U \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{T_2} & -\frac{T_1}{T_2} \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k}{T_2} \end{bmatrix}$$

Далі використаємо рівняння Ейлера-Лагранжа:

$$\Phi = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}rU^2 + \lambda_1(x_2 - x_1') + \lambda_2(-\frac{1}{T_2}x_1 - \frac{T_1}{T_2}x_2 + \frac{k}{T_2}U - x_2')$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1'}\right) = 0, \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_2'}\right) = 0$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = x_1 - \frac{1}{T_2}\lambda_2, \frac{\partial \Phi}{\partial x_1'} = -\lambda_1, \lambda_1' = \frac{1}{T_2}\lambda_2 - x1,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_2} = \lambda_1 - \frac{T_1}{T_2}\lambda_2, \frac{\partial \Phi}{\partial x_2'} = -\lambda_2, \lambda_2' = -\lambda_1' + \frac{T_1}{T_2}\lambda_2$$

або $\quad \boldsymbol{\lambda}' = A^T\boldsymbol{\lambda}(t) - Q(t)\,\mathbf{X}(t)$

Тоді $\quad \lambda' = \begin{bmatrix} \lambda_1' \\ \lambda_2' \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{T_2} \\ 1 & -\frac{1}{T_2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda 1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} \lambda_1' = \frac{1}{T_2}\lambda_2 - x_2, & \frac{\partial \Phi}{\partial U} = rU + \lambda_2\frac{k}{T_2} = 0 \\ \lambda_2' = -\lambda_1' + \frac{T_1}{T_2}\lambda_2, & U = -\frac{1}{r}\frac{k}{T_2}\lambda_2 \end{cases}$$

Для оптимального закону регулювання

$$U = -\frac{1}{r}\frac{k}{T_2}(p_{12}x_1 + p_{22}x_2)$$

Матричне рівняння Ріккаті

$$P' = -PA - A^TP + PBR^{-1}B^TP - Q$$

запишемо в вигляді

$$\begin{bmatrix} P'_{11} & P'_{12} \\ P'_{21} & P'_{22} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{1}{T_2} & -\dfrac{T_1}{T_2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{1}{T_2} \\ 1 & -\dfrac{T_1}{T_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} +$$

$$+\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{k}{T_2} \end{bmatrix} r^{-1} \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{k}{T_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \qquad r = 1$$

$$\begin{cases} P'_{11} = \dfrac{2}{T_2} P_{12} + \left(\dfrac{k}{T_2}\right)^2 P_{12}^2 - 1 & P_{11}(t_f) = 0 \\ P'_{12} = -P_{11} + \left(\dfrac{T_1}{T_2}\right) P_{12} + \dfrac{1}{T_2} P_{22} + \left(\dfrac{k}{T_2}\right)^2 P_{12} P_{22} & P_{12}(t_f) = 0 \\ P'_{22} = \dfrac{2T_1}{T_2} P_{22} + \left(\dfrac{k}{T_2}\right)^2 P_{22}^2 - 2P_{12} & P_{22}(t_f) = 0 \end{cases}$$

$$U^*(t) = -\frac{1}{r}\frac{k}{T_2}(P_{12}x_1 + P_{22}x_2)$$

1.8. Динамічна оптимізація з обмеженнями в формі нерівностей

У багатьох фізичних задачах, що представляють інтерес для фахівців в області управління, є різні обмеження в формі нерівностей на вектор управління

$$\Gamma_{\min} \le \Gamma\left(X, X', t\right) \le \Gamma_{\max} \tag{1.8.1}$$

Для рішення задачі з обмеженнями в формі нерівностей є декілька методів, один з яких метод заміни змінних. Виконується перетворення обмеження (1.8.1) в обмеження типу рівності шляхом введення нових змінних стану γ_i, що задовільняють рівнянням

$$\left(\Gamma_{\max_i} - \Gamma_i\right)\left(\Gamma_i - \Gamma_{\min_i}\right) = \gamma_i^2, \quad i = 1,2,\ldots, \tag{1.8.2}$$

Легко довести, що рівняння (1.8.2) еквівалентно (1.8.1) і навпаки. Тепер, щоб ввести обмеження (1.6.2) і (1.8.2) в (1.6.1), можна використати множники Лагранжа. Далі стає можливим використати звичайні необхідні умови екстремума.

Приклад1.8.6.: Розглянемо ту ж динаміку системи, що і в попередньому прикладі:

$x_1^{/} = x_2(t)$, $x_2^{/} = u(t)$

при наявності початкових умов $x_1(t_0) = x_0$, $x_2(t_0) = v_0$ задача заключається в тому, щоб знайти таке управління, яке максимізує $x_1(t_f)$ для фіксованого t_f при граничній умові $x_2(t_f) = v_f$ і обмеженнях типу нерівність на скалярне управління $u_{\min} \le u \le u_{\max}$.

Перетворимо обмеження типу нерівність в обмеження типу рівність, ввівши нову змінну $\alpha(t)$: $(u - u_{\min})(u_{\max} - u) - \alpha^2 = 0$

Таким чином, задача може бути представлена як задача мінімізації $\mathrm{I} = -x_1(t_f)$ при наявності обмежень типу рівність

$x_1^{/} = x_2(t)$, $x_1(t_0) = x_0$, $x_1(t_f)$ — довільно,

$x_2^{/} = u(t)$, $x_2(t_0) = v_0$, $x_2(t_f) = v_f$, $(u - u_{\min})(u_{\max} - u) - \alpha^2 = 0$.

Функція вартості з множниками Лагранжа прийме вигляд

$$I_1 = -x_1(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \left(-x_1^{/} + \lambda_1(x_2 - x_1^{/}) + \lambda(u - x_2^{/}) + \lambda_3((u - u_{\min})(u_{\max} - u) - \alpha^2)\right)dt$$

Із рівняння Ейлера-Лагранжа $\frac{d}{dt}\frac{\partial \Phi}{\partial X^{/}} - \frac{\partial \Phi}{\partial X} = 0$ $X^T = [x_1, x_2, u]$

при $\Phi = \lambda_1(x_2 - x_1^{/}) + \lambda_2(u - x_2) + \lambda_3((u - u_{\min})(u_{\max} - u) - \alpha^2) - x_1^{/}$ знаходимо

$\lambda_2^{/} = 0$, $\lambda_2^{/} = -\lambda_1$

$0 = -\lambda_2 + \lambda_3(2u - u_{\max} - u_{\min})$, $0 = \alpha\lambda_3$.

Таким чином, ми прийшли до двоточечної крайової задачі, рішення якої визначає оптимальні змінні стану і управління:

$x_1^{/} = x_2(t)$, $x_1(t_0) = x_0$,

$x_2^{/} = x(t)$, $x_2(t_0) = v_0$,

$\lambda_1^{/} = 0$, $\lambda_1(t_f) = -1$,

$\lambda_2^{/} = -\lambda_1(t)$, $x_2(t_f) = v_f$,

$\alpha(t)\lambda_3(t) = 0$,

$\lambda_2(t) = \lambda_3(t)\left(2u(t) - u_{\max} - u_{\min}\right)$

$\alpha^2(t) = \left(u(t) - u_{\min}\right)\left(u_{\max} - u(t)\right)$

Дана ДТКЗ є нелінійною через введення останніх трьох рівнянь і отримати рішення аналітично вельми важко. В звичайному варіанті $u_{\min} = -1$, $u_{\max} = 1$.

В цьому випадку можна показати, що $\alpha(t) = 0$,

$u(t) = -sign\lambda_2(t)$,

де $sign\lambda_2 = +1$, $\lambda_2 > 0$,

$sign\lambda_2 = -1$, $\lambda_2 < 0$.

Облік обмежень на управління в формі нерівностей

$$g[X(t), U(t), t] \geq 0$$

можна здійснити також використовуючи метод функції штрафів, тобто введенням штрафу за порушення нерівності

$$\mathrm{I} = \int \ldots + g[\mathbf{X}(t), \mathbf{U}(t), t]^p H(g) dt$$

Тут p — довільне додатнє число; $H(g)$ — модифікована ступінчата функція Хевісайда

$$H(g) = \begin{cases} 0, & g \geq 0 \\ k, & g < 0 \end{cases}.$$

Шляхом вибору значень *p* і *k* можна змінити значення штрафу за порушення обмеження на управління

$$\left(u_{\max} - u\right)\left(u - u_{\min}\right) \geq 0$$

$$u_{\max} = 1, \quad u_{\min} = -1$$

$$(1-u)(u+1) = \left(1 - u^2\right) > 0$$

Функції штрафу на обмеження по управлінню може мати вигляд

$$\theta = \left[u(t) - u_b\right]^2 h\left[u(t) - u_b\right] + \left[u_H - u(t)\right]^2 h\left[u_H - u(t)\right],$$

h функція Хевісайда.

1.9. Варіаційний метод

В застосованому до цього часу методі при виведенні необхідних умов оптимальності траєкторії x вводилося відхилення від $\bar{x}$ на величину $\varepsilon\omega$, а потім визначались необхідні умови із рівняння

$$\left.\frac{\partial I}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = 0$$

яке повинно виконуватися незалежно від ω.

Другий метод, що називається варіаційним, заключається в виділенні лінійної частини $\Delta I = I(x+\varepsilon\omega) - I(x)$ і твердженні, що вона також повинна дорівнювати нулю при $\varepsilon = 0$ незалежно від ω. Лінійна частина ΔI, яку ми позначаємо δI, називається першою варіацією I (при x), диференціалом Гато.У варіаційному методі для визначення необхідних умов використовуються диференціали, а не похідні. Розглянемо виведення необхідних умов мінімуму функціонала варіаційним методом

$$\mathrm{I} = \int_{t_0}^{t_f} f\left(x, x', t\right) dt \qquad (1.9.1)$$

при фіксованому часі t_f закінчення.

Припускається, що $\bar{x}(t)$ і $\bar{x}'(t)$ представлені сімейством кривих

$$\bar{x}(t) = x(t) + \varepsilon\omega(t), \quad \bar{x}'(t) = x'(t) + \varepsilon\omega'(t) \qquad (1.9.2)$$

де $x(t)$ — оптимальна крива, а $\omega(t)$ — варіація від $\bar{x}(t)$, що залежить від *t*.

Підставивши (1.9.2) в (1.9.1) і розклавши $\varphi(x, x', t)$ в ряд Тейлора в околі точки $\varepsilon = 0$, отримаємо

$$f\left[x(t) + \varepsilon\omega(t), x'(t) + \varepsilon\omega'(t), t\right] = f\left(x, x', t\right) + \frac{\partial f}{\partial x}\varepsilon\omega(t) + \frac{\partial f}{\partial x'}\varepsilon\omega'(t) + 0\left(\omega, \omega'\right) \qquad (1.9.3)$$

де через $0\left(\omega, \omega'\right)$ позначаються члени високих порядків по $\omega(t)$ і $\omega'(t)$.

Відмітимо, що

$$\Delta I = \int_{t_0}^{t_f} \left\{ f\left[x(t) + \varepsilon\omega(t), x'(t) + \varepsilon\omega'(t), t\right] - f\left[x, x', t\right] \right\} dt =$$
$$= \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \frac{\partial f}{\partial x}\varepsilon\omega(t) + \frac{\partial f}{\partial x'}\varepsilon\omega'(t) + 0\left(\omega, \omega'\right) \right\} dt \qquad (1.9.4)$$

Визначимо тепер першу варіацію $x(t)$ і $x'(t)$

$$\varepsilon\omega(t) = \delta x\,, \quad \varepsilon\omega^{/}(t) = \delta x^{/} \tag{1.9.5}$$

Таким чином

$$\Delta I = \int_{t_0}^{t_f} \left[\frac{\partial f}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f}{\partial x^{/}}\delta x^{/} + 0\left(\omega, \omega^{/}\right) \right] dt \tag{1.9.6}$$

Перша варіація y має вигляд

$$\delta I = \int_{t_0}^{t_f} \left[\frac{\partial f}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f}{\partial x^{/}}\delta x^{/} \right] dt \tag{1.9.7}$$

Необхідна умова існування екстремума при $\bar{x}(t) = x(t)$, тобто при $\varepsilon = 0$, заключається в тому, що перша варіація δI повинна дорівнювати нулю.

Використовуючи цю умову у виразі (1.9.7), а також ввівши деякі спрощення при інтегруванні за частинами, отримаємо

$$\int_{t_0}^{t_f} \left[\frac{\partial f}{\partial f} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial x^{/}} \right) \right] \delta x dt + \frac{\partial f}{\partial x^{/}}\delta x \Bigg|_{t_0}^{t_f} = 0 \tag{1.9.8}$$

Для того, щоб (1.9.8) дорівнювало нулю незалежно від варіації, необхідно, щоб

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial x^{/}} \right) = 0 \tag{1.9.9}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x^{/}}\delta x = 0 \quad \text{для} \quad t = t_0, t_f \tag{1.9.10}$$

Аналогічно можна показати, що друга варіація (1.9.1), яка позначена $\delta^2 I$, має вигляд

$$\delta^2 I = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} \left\{ (\delta x)^2 \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \left(x^{/}\right)^2} \right) \right] + \left(\delta x^{/}\right)^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \left(x^{/}\right)^2} \right\} dt \tag{1.9.11}$$

тобто друга варіація представляє собою квадратичний член в розкладі ΔI (1.9.6).

Контрольні запитання до розділу 1.

1. Класичні задачі варіаційного числення.
2. Рівняння, які лежать у основі рішення варіаційних задач.
3. Які рівняння вирішують двоточкову крайову задачу?
4. Умови трансверсальності. Вірогідні комбінації граничних умов.
5. Достатні умови існування оптимума.

6. Необхідні умови оптимальності для задачі з змінним часом досягнення.
7. Векторна форма необхідних умов оптимальності.
8. Лагранжіан для задач з обмеженнями у формі рівностей. Спряжені змінні.
9. Лінійноквадратична оптимізація.
10. У чому різниця оптимального керування від оптимального регулювання?
11. Матричне нелінійне рівняння Ріккаті.
12. У чому суть варіаційного метода? Диференціал Гато.

2. Принцип максимума

Сформульований в 1956 р. академіком Л.С.Понтрягиним і його учнями В.Г.Болтянським і Р.В.Гамкрелідзе принцип максимума дає витончени

й спосіб отримання оптимального рішення для широкого класу динамічних процесів хімічної технології. Цей принцип дозволяє вирішити проблему оптимізації, що вимагає пошуку мінімуму або максимума функціонала, коли керуючі впливи, що відшукуються не належать до класу безперервних функцій або коли на змінні задачі накладені обмеження типу нерівностей.

Для процесів, що описуються системами нелінійних диференціальних рівнянь принцип максимума формулюється як необхідна ознака оптимальності. Для системи лінійних рівнянь принцип максимума є достатньою умовою оптимальності. Принцип максимума розповсюджується на процеси з розподіленими параметрами, які описуються рівняннями в частинних похідних.

З багатьох задач оптимального управління три основних типи задач: задача управління по максимальній швидкодії, задача управління кінцевим станом і задача управління по мінімуму інтеграла, мають особливо істотне значення і тому привернули до себе найбільшу увагу.

Математична модель системи описується обмеженнями вигляду

$$X'(t) = f[\mathbf{X}(t), \mathbf{U}(t), t] \tag{2.1}$$

де m-мірний вектор U являє собою керуючу функцію, яку потрібно вибрати, а n-мірний вектор X являє собою результуючу траєкторію. Припустимо, що f має безперервні похідні по X і U. Часто виявляється, що подібні припущення про гладкість є гарантією того, що для будь-якої частинно-безперервної функції U існує єдина допустима траєкторія X для (2.1).

2.1. Задача Больца, фіксовані моменти початку і моменти досягнення

Розглянемо тепер задачу визначення допустимої функції управління U з метою мінімізації функціонала

$$I = G[\mathbf{X}(t), t]\Big|_{t}^{tf} + \int_{t}^{tf} F[\mathbf{X}(t), \mathbf{U}(t), t]dt, \tag{2.1.1}$$

причому G і F мають безперервні частинні похідні по X і U.

Критерій якості (2.1.1) має досить загальний вигляд і застосовується при рішенні різних практичних задач.

В задачах управління функція G(.) може бути квадратичною нормою відхилення фактичного кінцевого стану $X(t_f)$ від заданого.

Інтегральна (тобто що залежить від всієї траєкторії) складова критерію дозволяє оцінити, наприклад, вартість витрачених ресурсів управління. Для того щоб в функції вартості врахувати системне обмеження задане у вигляді диференціального рівняння, скористаємося методом множників Лагранжа

$$I = G[\mathbf{X}(t), t]\Big|_{t0}^{tf} + \int_{t0}^{tf} \left\{F[\mathbf{X}(t), \mathbf{U}(t), t] + \lambda^T(t)\left[f(\mathbf{X}, \mathbf{U}, t) - \mathbf{X}'\right]\right\}dt \tag{2.1.2}$$

Визначимо скалярну функцію - гамільтоніан у вигляді

$$H[\mathbf{X}, \mathbf{U}, \boldsymbol{\lambda}, t] = F[\mathrm{X}, \mathrm{U}, t] + \lambda^T(t) \cdot f[\mathrm{X}, \mathrm{U}, t] \tag{2.1.3}$$

Таким чином функція вартості прийме вигляд

$$I = G[\mathbf{X}, t]\Big|_{t0}^{tf} + \int_{t0}^{tf} \left\{H[\mathbf{X}, \mathbf{U}, \boldsymbol{\lambda}, t] - \lambda^T(t)\mathbf{X}'\right\}dt \tag{2.1.4}$$

Проінтегрувавши останній член підінтегрального виразу (2.1.4), отримаємо

$$I = \left\{G[\mathbf{X}, t]\Big|_{t0}^{tf} - \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{X}(t)\right\}\Big|_{t0}^{tf} + \int_{t0}^{tf} \left\{H[\mathbf{X}, \mathbf{U}, \boldsymbol{\lambda}, t] + \lambda'^T \mathrm{X}(t)\right\}dt \tag{2.1.5}$$

Визначимо першу варіацію I

$$\delta I=\left\{\delta X^T\left[\frac{\partial G}{\partial X}-\lambda\right]\right\}\Bigg|_{t0}^{tf}+\int_{t0}^{tf}\left\{\delta X^T\left[\frac{\partial H}{\partial \mathbf{X}}+\lambda'\right]+\delta \mathbf{U}^T\left[\frac{\partial H}{\partial \mathbf{U}}\right]\right\}dt \qquad (2.1.6)$$

Необхідна умова мінімуму полягає в тому, що для довільних варіацій δX і δU перша варіація I повинна дорівнювати нулю.

Звідси отримується необхідна умова існування мінімуму

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{U}}=0 \qquad (2.1.7)$$

$$\lambda'=-\frac{\partial H}{\partial \mathbf{X}};\mathbf{X}'=f(X,U,t)=\frac{\partial H}{\partial \lambda} \qquad (2.1.8)$$

$$\delta \mathbf{X}^T\left[\frac{\partial G}{\partial \mathbf{X}}\right]=0 \quad \text{для} \quad t=t_0,t_f \qquad (2.1.9)$$

Розглянемо детальніше умови трансверсальності, задані виразом (2.1.9).

Для широкого класу задач оптимального управління початковий стан системи визначений, а стан в момент досягнення не визначений. У цьому випадку з (2.1.9) отримуємо наступну умову трансверсальності:

$$\mathbf{X}(t_0)=\mathbf{X}_0,\quad \lambda(t_f)=\frac{\partial G\left[\mathbf{X}(t_f),t_f\right]}{\partial \mathbf{X}(t_f)} \qquad (2.1.10)$$

оскільки $\delta \mathbf{X}(t_0)=0$,так як $\mathbf{X}(t_0)$-фіксоване,а $\delta \mathbf{X}(t_f)$- довільне.

В тому випадку, якщо $\mathbf{X}(t_0)$ і $\mathbf{X}(t_f)$ фіксовані, тоді $\delta \mathbf{X}(t_0)=0$ і $\delta X(t_f)=0$, а $\mathbf{X}(t_0)$ і $\mathbf{X}(t_f)$ є граничними умовами в двоточечній краєвій задачі. Для багатьох задач оцінки ні $\mathbf{X}(t_0)$, ні $\mathbf{X}(t_f)$ не фіксовані , а G=0.

В цьому випадку із (2.1.9) слідує, що $\lambda(t_0)=0; \lambda(t_f)=0$ - це і будуть граничні умови для даної задачі. В іншому випадку можемо мати $\mathbf{X}(t_0)=\mathrm{X}_0,\quad \|\mathbf{X}(t_f)\|^2=1$.

При цьому легко показати, що остаточні умови трансверсальності виконуються, якщо розв*язати два скалярних рівняння:

$$\delta \mathbf{X}^T(t_f)\mathbf{X}(t_f)=0,\quad \delta \mathbf{X}^T(t_f)\lambda(t_f)=0 \qquad (2.1.11)$$

Дамо більш точне і загальне формулювання умов трансверсальності. У загальному випадку, коли в початковому положенні

$$M[\mathbf{X}(t_0), t_0] = 0, \qquad (2.1.12)$$

а в кінцевому

$$N[\mathbf{X}(t_f), t_f] = 0 \qquad (2.1.13)$$

введемо останні дві умови в функцію G за допомогою множників Лагранжа ξ и ν.

Тоді функція вартості має наступний вигляд:

$$I = G[\mathbf{X}(t), t]\Big|_{t_0}^{t_f} - \xi^T M[\mathbf{X}(t_0), t_0] + \nu^T N[\mathbf{X}(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} \{H[\mathbf{X}(t), \mathbf{U}(t), \lambda(t), t] - \lambda^T(t)\mathbf{X}'\} dt$$

(2.1.14)

Для отримання умов трансверсальності в початковий момент часу скористаємося звичайними варіаційними методами:

$$\lambda(t_0) = \frac{\partial G}{\partial \mathbf{X}} + \left(\frac{\partial M^T}{\partial \mathbf{X}}\right)\xi, \; M[\mathbf{X}(t), t] = 0 \qquad при \quad t = t_0 \qquad (2.1.15)$$

Аналогічно n умов в момент досягнення отримуються з

$$\lambda(t_f) = \frac{\partial G}{\partial \mathbf{X}} + \left(\frac{\partial N^T}{\partial \mathbf{X}}\right)\nu, \; N[\mathbf{X}(t), t] = 0 \qquad при \quad t = t_f \,. \qquad (2.1.16)$$

при q параметрах ν так, щоб виконувалось q умов (2.1.13)

Умовою мінімуму I є невід*ємність другої варіації I вздовж всіх траєкторій так, щоб було справедливо (2.0.1) .

Потрібно прирівняти нулю варіацію від рівняння (2.0.1)

$$\delta\mathbf{X}' - \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{X}}\right)\delta\mathbf{X} - \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{U}}\right)\delta\mathbf{U} = 0$$

Використовуючи цю умову і обмежуючись квадратичним членом розкладу в ряд Тейлора $I(\mathbf{X} + \delta\mathbf{X}, \mathbf{U} + \delta\mathbf{U}) - I(\mathbf{X}, \mathbf{U})$, отримаємо для другої варіації вирази

$$\delta^2 I = 1/2\left[\delta\mathbf{X}^T \frac{\partial^2 G}{\partial \mathbf{X}^2}\delta\mathbf{X}\right]\Bigg|_{t=t_0}^{t=t_f} + 1/2\int_{t_0}^{t_f}\left[\delta\mathbf{X}^T \; \delta\mathbf{U}^T\right]\cdot\begin{bmatrix}\dfrac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{X}^2} & \dfrac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{X}\partial \mathbf{U}} \\ \dfrac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{U}\partial \mathbf{X}} & \dfrac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{U}^2}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\delta\mathbf{X} \\ \delta\mathbf{U}\end{bmatrix} dt$$

Властивості функції H

Функція H, що розглядається як функція незалежної змінної t, вздовж траєкторії процесу при оптимальному управлінні $U_{опт}(t)$ неперервна і , крім того, зберігає стале значення вздовж_траєкторії.

Постійність функції H легко може бути доведена таким чином. Повна похідна від функції $H(X,\lambda,U)$ за незалежною змінною t , має вигляд

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{X}} \cdot \frac{d\mathbf{X}}{dt} + \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\lambda}} \cdot \frac{d\lambda}{dt} + \frac{\partial H}{\partial \mathrm{U}} \cdot \frac{d\mathbf{U}}{dt}, \qquad (2.1.17)$$

Приймаючи до уваги вирази (2.1.10) і (2.1.12) для похідних $\frac{d\boldsymbol{\lambda}}{dt}$ і $\frac{d\mathbf{X}}{dt}$ неважко побачити, що перші дві складові в співвідношенні(2.1.17) взаємно скорочуються, в результаті чого воно приймає вигляд

$$\frac{\mathrm{dH}}{\mathrm{dt}} = \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \mathbf{U}} \cdot \frac{\mathrm{d}\mathbf{U}}{\mathrm{dt}}, \qquad (2.1.18)$$

Якщо оптимальне значення вектора управління $U_{опт}$ знаходиться всередині області U, то максимальне значення H відповідає точці екстремума цієї функції, для якої виконується умова

$$\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \mathbf{U}} = 0, \qquad (2.1.19)$$

еквівалентна в звичайній формі запису системи рівнянь

$$\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \mathbf{U}_l} = 0, \quad \text{где } l=1,2,...,r \qquad (2.1.20)$$

Якщо ж оптимальне управління знаходиться на границі області U, заданої системою нерівностей $-\mathrm{U}_{0l} \le \mathrm{U}_l \le \mathrm{U}_{0l}$, де l=1,2,...,r, то виконується умова

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{U}}{\mathrm{dt}} = 0. \qquad (2.1.21)$$

У будь-якому з відмічених випадків з урахуванням співвідношень (2.1.19) і (2.1.21) повна похідна по t від функції H, яка визначена виразом (2.1.17), рівна нулю, звідки слідує, що функція H має постійне значення на оптимальній траєкторії, тобто

$$\mathrm{H}(\mathbf{X},\boldsymbol{\lambda},\mathbf{U}) = \mathrm{const}\ . \qquad (2.1.22)$$

Приклад 2.1.1.

Задана система диференціальних рівнянь, що описує три послідовно з*єднаних інтегратора:

$$x'_1 = x_2,\quad x_1(0) = 0$$

$$x'_2 = x_3,\quad x_2(0) = 0$$

$$x'_3 = \mathbf{U},\quad x_3(0) = 0$$

Потрібно знайти таке управління, яке приводить до границі

$$x_1^2(1) + x_2^2(1) = 1,$$

так щоб функція вартості була мінімальна

$$I = 1/2 \int_0^1 U^2 dt$$

Визначимо гамільтоніан

$$H = 1/2U^2 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 x_3 + \lambda_3 U,$$

рівняння зв'язку

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{U}} = U + \lambda_3 = 0$$

і спряжені

$$\lambda_1^{/} = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0,\quad \lambda_2^{/} = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\lambda_1,\quad \lambda_3^{/} = -\frac{\partial H}{\partial x_3} = -\lambda_2$$

Умова трансверсальності в момент досягнення

$$x_1^2(1) + x_2^2(1) = 1$$

має вигляд
$$\lambda(1) = \frac{\partial G}{\partial \mathbf{X}} + \left(\frac{\partial N^T}{\partial \mathbf{X}}\right)\nu,\quad t = t_f$$

де
$$N[\mathbf{X}(t_f), t_f] = x_1^2(t_f) + x_2^2(t_f) - 1 = 0,\quad t_f = 1$$

Таким чином
$$\boldsymbol{\lambda}(1) = \begin{bmatrix} \lambda_1(1) \\ \lambda_2(1) \\ \lambda_3(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1(1)\nu \\ 2x_2(1)\nu \\ 0 \end{bmatrix}$$

У даному прикладі задача знаходження оптимального управління і відповідних траєкторій приводиться до розв*язку наступної крайової двоточечної задачі:

$$x_1^{/} = x_2, \quad x_1(0) = 0$$

$$x_2^{/} = x_3, \quad x_2(0) = 0$$

$$x_3^{/} = -\lambda_3, x_3(0) = 0$$

$$\begin{aligned} &\lambda_1^{/} = 0 && \left.\begin{aligned}\lambda_1(1) = 2x_1(1)\nu \\ \lambda_2(1) = 2x_2(1)\nu\end{aligned}\right\} x_1^2(1) + x_2^2(1) = 1 \\ &\lambda_2^{/} = -\lambda_1, && \\ &\lambda_3^{/} = -\lambda_2, && \lambda_3(1) = 0 \end{aligned}$$

2.2. Задачі безперервного оптимального управління - фіксовані моменти початку і невизначені моменти досягнення

Легко узагальнити викладений матеріал, коли час досягнення не визначений. Функція вартості (2.1.16) буде мати вигляд

$$I = G[\mathbf{X}(t_f), t_f] + \nu^T N[\mathbf{X}(t_f), t_f] - \boldsymbol{\lambda}^T(t_f)\mathbf{X}(t_f) + \boldsymbol{\lambda}^T(t_0)\mathbf{X}(t_0) + \int_{t_0}^{t_f} \left\{H[\mathbf{X}(t), \mathbf{U}(t), \boldsymbol{\lambda}(t), t] + \boldsymbol{\lambda}^{/T}\mathbf{X}(t)\right\} dt$$

(2.2.1)

Перша варіація, як і раніше, виходить при

$$\overline{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{X}(t) + \delta\mathbf{X}, \overline{\mathbf{U}}(t) = \mathbf{U}(t) + \delta\mathbf{U} \quad , \quad \bar{t}_f = t_f + \delta t_f \tag{2.2.2}$$

$$\begin{aligned}\delta I = \delta t_f &\left\{H(\mathbf{X}, \mathbf{U}, \boldsymbol{\lambda}(t_f), t_f) + \frac{\partial G}{\partial t_f} + \left(\frac{\partial N}{\partial t_f}\right)^T \nu\right\} + \delta\mathbf{X}(t_f)\left\{\frac{\partial G}{\partial \mathbf{X}} + \left(\frac{\partial N}{\partial \mathbf{X}}\right)^T \nu - \boldsymbol{\lambda}(t_f)\right\} + \\ &+ \int_{t_0}^{t_f} \left\{\delta\mathbf{X}^T\left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{X}} + \boldsymbol{\lambda}^{/}\right) + \delta\mathbf{U}^T\left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{U}}\right)\right\} dt\end{aligned} \tag{2.2.3}$$

Для отримання необхідної умови мінімуму слідує

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{X}} = -\boldsymbol{\lambda}^{/}, \frac{\partial H}{\partial \mathbf{U}} = 0 \tag{2.2.4}$$

$$\mathbf{X}^{/} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} \tag{2.2.5}$$

Умови в початковий момент

$$\mathbf{X}(t_0)=\mathbf{X}_0$$

в кінцевий момент

$$\boldsymbol{\lambda}(t_f)=\frac{\partial G}{\partial \mathbf{X}(t_f)}+\left[\frac{\partial N}{\partial \mathbf{X}(t_f)}\right]\nu \tag{2.2.6}$$

$$N[\mathbf{X}(t_f),t_f]=0$$

$$H[\mathbf{X},\mathbf{U},\boldsymbol{\lambda},t_f]=-\frac{\partial G}{\partial t_f}-\left(\frac{\partial N}{\partial t_f}\right)^T\nu \tag{2.2.7}$$

Приклад2.2.2. Розглянемо так звану задачу про мінімальний час

$$G[\mathbf{X}(t_f),t_f]=t_f, \quad F=0$$

Тоді граничні умови

$$\mathbf{X}(t_0)=\mathbf{X}_0$$

$$\boldsymbol{\lambda}(t_f)=\frac{\partial N}{\partial \mathbf{X}(t_f)}\nu$$

$$N[\mathbf{X}(t_f),t_f]=0$$

$$H[\mathbf{X}(t_f),\mathbf{U}(t_f),t_f]=-1-\left(\frac{\partial N}{\partial t_f}\right)\nu$$

У багатьох випадках представляє інтерес визначення моменту часу переходу системи в стан рівноваги, так що

$$N[\mathbf{X}(t_f),t_f]=\mathbf{X}(t_f)=0$$

Тоді $\quad H[\mathbf{X}(t),\mathbf{U}(t),t]=-1$

Потрібно підкреслити, що не вирішуємо звичайну задачу про мінімальний час, так як на змінні управління (або стану) не накладено ніяких обмежень в формі нерівностей. Можна розглянути і інший варіант задачі, в якому G=0, F=1. При цьому гамільтоніан зміниться, а оптимальні управління і вектор стану не міняються.

Приклад 2.2.3. Для системи

$x_1^{/} = x_2; \quad x_1(0) = 10$

$x_2^{/} = U; \quad x_2(0) = 0$

знайти управління і траєкторію, які мінімізують

$$I = t_f^2 + 1/2\int_0^{t_f} U^2 dt$$

якщо заданий кінцевий стан

$$x_1(t_f) = x_2(t_f) = 0$$

Розв*язок

$$I = t_f^2 + 1/2 S_{11} x_1^2(t_f) + 1/2 S_{22} x_2^2(t_f) + 1/2\int_0^{t_f} U^2 dt$$

$$H = 1/2U^2 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 U$$

$$U + \lambda_2 = 0; \quad U = -\lambda_2$$

$$\begin{cases} \lambda_1^{/} = 0 & \lambda_1(t_f) = S_{11} x_1(t_f) \\ \lambda_2^{/} = -\lambda_1 & \lambda_2(t_f) = S_{22} x_2(t_f) \end{cases}$$

$$H + \frac{\partial G}{\partial t_f} = 0$$

$$2t_f + \left(1/2U^2 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 U\right)\Big|_{t_f} = 2t_f + 1/2\lambda_2^2 +$$
$$+ \lambda_1(t_f)x_2(t_f) - \lambda_2^2(t_f) = 2t_f - 1/2\lambda_2^2(t_f) + \lambda_1(t_f)x_2(t_f) = 0$$

2.3. *Принцип максимума при обмеженнях в формі нерівностей на управління*

Задача Больца з обмеженнями в формі нерівностей

Розглянемо визначення допустимої функції управління, що мінімізує критерій (2.1.1) при обмеженні в формі рівності (диференціального рівняння) і обмеженні на управління

$$\mathbf{U}(t) \in \Omega, \quad t \in [t_0, t_f] \tag{2.3.1}$$

Припустимо також, що початковий стан $\mathbf{X}(t_0)=\mathbf{X}_0$ і початковий момент часу t_0 фіксовані, а час досягнення t_f визначається векторним рівнянням

$$N[\mathbf{X}(t_f),t_f]=0 \tag{2.3.2}$$

Припустимо, що управління **U** відповідної траєкторії **X** оптимальне на інтервалі $[t_0,t_f]$.

Тоді використовуючи визначення гамільтоніана (2.1.3) отримаємо

$$H[\mathbf{X},\mathbf{U},\boldsymbol{\lambda},t]\le H[\mathbf{X},\nu,\boldsymbol{\lambda}(t)] \quad \nu\in\Omega \tag{2.3.3}$$

$$\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\lambda}}=\mathbf{X}^{/}$$

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{X}}=-\boldsymbol{\lambda}^{/}$$

при граничних умовах

$$\mathbf{X}(t_0)=\mathbf{X}_0,\quad N[\mathbf{X}(t_f),t_f]=0$$

$$\mathbf{X}(t_0)=\mathbf{X}_0,\quad N[\mathbf{X}(t_f),t_f]=0$$

$$\frac{\partial G}{\partial \mathbf{X}}+\left(\frac{\partial N}{\partial \mathbf{X}}^{T}\right)\nu-\boldsymbol{\lambda}=0 \quad \text{при} \quad t=t_f \tag{2.3.4}$$

$$\frac{\partial G}{\partial t_f}+\left(\frac{\partial N}{\partial t_f}^{T}\right)\nu+H=0 \quad \text{при} \quad t=t_f \tag{2.3.5}$$

Часто потрібно здійснити перехід системи на початок за мінімальний час так, що

$$N[\mathbf{X}(t_f),t_f]=0=\mathbf{X}(t_f)$$

$$G[\mathbf{X}(t_f),t_f]=t_f,\quad F=0$$

У цьому окремому випадку умови трансверсальності мають вигляд

$$\mathbf{X}(t_0)=\mathbf{X}_0,\mathbf{X}(t_f)=0, H=-1 \quad \text{при} \quad t=t_f$$

Приклад2.3.4. Знайти управління, що забезпечує мінімум

$$I=1/2\int_0^{\infty}\left(x^2+\mathbf{U}^2\right)dt$$

для системи

$$x' = U,\ x(0) = x_0,\ |\mathbf{U}(t)| \le 1$$

<u>Розв′язок</u>

$$H = 1/2\left(x^2 + U^2\right) + \lambda U; \quad \lambda' = -\frac{\partial H}{\partial x} = -x$$

$$U(t) = \begin{cases} -\operatorname{sign}(\boldsymbol{\lambda}) \text{ при } |\boldsymbol{\lambda}| > 1 \\ -\boldsymbol{\lambda} \text{ при } |\boldsymbol{\lambda}| \le 1 \end{cases}$$

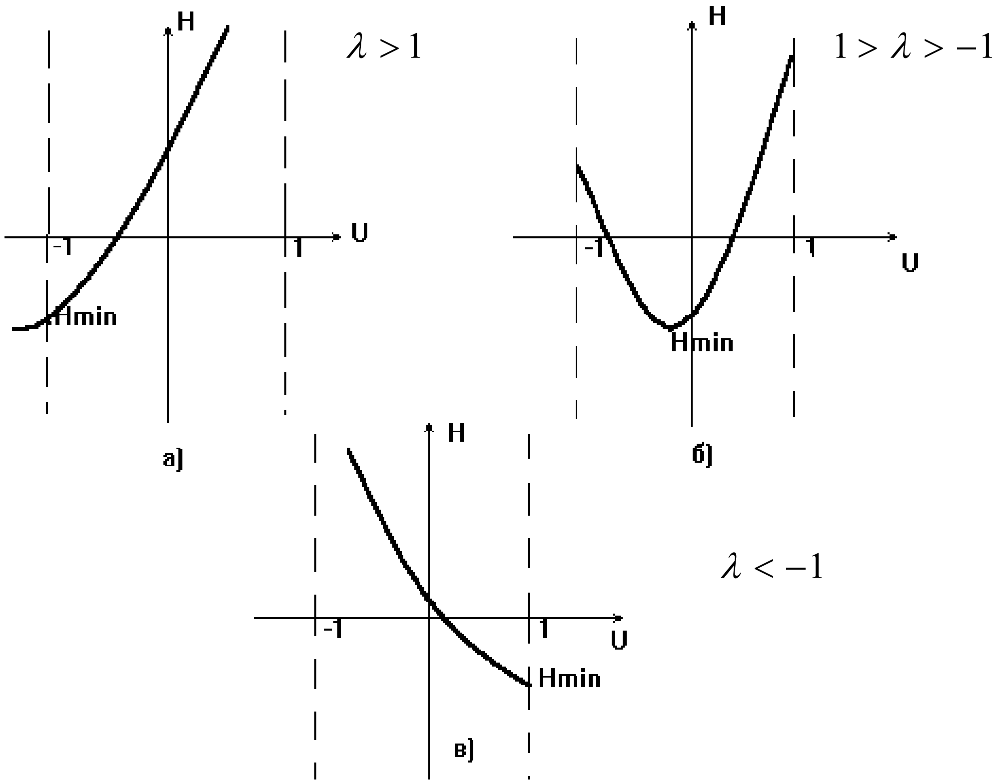


Рис. 2.1.

$$\frac{\partial H}{\partial U} = \begin{cases} <0 & U = U_{max}(\mathbf{X},t) \\ =0 & U_{min}(\mathbf{X},t) \le U \le U_{max} \\ >0 & U = U_{min}(\mathbf{X},t) \end{cases}$$

Приклад 2.3.5. Стисло розглянемо задачу опти ного управління для лінійної інваріантної в ча системи при умові, що довжина вектора управління обмеже Потрібно мінімізувати $I = t_f$

для системи

$$\mathbf{X}' = A\mathbf{X}(t) + B\mathbf{U}(t); \quad \mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0$$

де обмеження $\mathbf{U}(t)\in\Omega$ має вигляд $|\mathbf{U}|\le 1.$

Гамільтоніан

$$H[\mathbf{X}(t),\mathbf{U}(t),\boldsymbol{\lambda}(t),t]=\boldsymbol{\lambda}^T(t)[A\mathbf{X}(t)+B\mathbf{U}(t)]$$

Для того, щоб H був по можливості найменшим при вибраному **U**(t), потрібно щоб

$$\mathbf{U}(t)=-B^T\boldsymbol{\lambda}(t)\Big/\left\|B^T\boldsymbol{\lambda}(t)\right\|$$

Канонічна форма рівняння має вигляд

$$\frac{\partial H}{\partial\boldsymbol{\lambda}}=\mathbf{X}'=A\mathbf{X}(t)+B\mathbf{U}(t),\quad \frac{\partial H}{\partial\mathbf{X}}=-\boldsymbol{\lambda}'=A^T\boldsymbol{\lambda}(t)$$

при граничних умовах

$$\mathbf{X}(t_0)=\mathbf{X}_0,\mathbf{X}(t_f)=0$$

де t_f визначається із рівняння

$$H[\mathbf{X}(t_f),\boldsymbol{\lambda}(t_f),\mathbf{U}(t_f)]=-1.$$

Так як гамільтоніан явно не залежить від t, то $dH/dt=0$.Таким чином

$$H[\mathbf{X}(t),\mathbf{U}(t),\boldsymbol{\lambda}(t)]=-1=\boldsymbol{\lambda}^T(t)[A\mathbf{X}(t)+B\mathbf{U}(t)]$$

це і буде додаткове співвідношення, необхідне для визначення часу досягнення.

Часто вираз (2.3.1) можна записати в більш зручній формі, використовуючи сімейство нерівностей вигляду

$$g[\mathbf{U}(t),t]\ge 0. \qquad (2.3.6)$$

Можна представити (2.3.6) у вигляді обмеження в формі рівності

$$\left(Z_i'\right)^2=g_i[\mathbf{U}(t),t],Z_i(t_0)=0, i=1,2,\ldots, r \qquad (2.3.7)$$

або у вигляді

$$(y_i)^2=g_i[\mathbf{U}(t),t],i=1,2,\ldots, r \qquad (2.3.8)$$

Приклад2.3.6. Якщо для скалярного управління U потрібно, щоб $U_{\min}\le U\le U_{\max}$, то можна записати

$$g_1[U(t),t] = U_{max} - U \geq 0, \quad g_2[U(t),t] = U - U_{min} \geq 0,$$

а ввівши

$$(y_1)^2 = U_{max} - U; \quad (y_2)^2 = U - U_{min},$$

перейти в обмеженнях від нерівностей до рівності

$$(y_1 \cdot y_2)^2 = (U_{max} - U)(U - U_{min}).$$

Для задачі, що досліджується введемо в (2.1.1) за допомогою множників Лагранжа обмеження (2.3.1), (2.3.2) і (2.3.6).

Тоді

$$I = G[\mathbf{X}(t_f),t_f] + \nu^T N[\mathbf{X}(t_f),t_f] + \int_{t_0}^{t_f} \Big\{ H\left[\mathbf{X}(t),W^/(t),\boldsymbol{\lambda}(t),t\right] -$$

$$-\boldsymbol{\lambda}^T(t)\mathbf{X}^/ - д^T(t)\left\{g\left[W^/(t),t\right] - \left(z^/\right)^2\right\}\Big\}dt,$$

де $\left(Z^2\right)^T = \left[Z_1^2, Z_2^2, Z_3^2, \ldots, Z_r^2\right],$

$$H\left[\mathbf{X}(t),W^/(t),\boldsymbol{\lambda}(t),t\right] = \Phi\left[\mathbf{X}(t),W^/(t),t\right] + \boldsymbol{\lambda}^T(t) f\left[\mathbf{X}(t),W^/(t),t\right],$$

$$W^/ = \mathbf{U}(t), \quad W(t_0) = 0$$

Для наведеної вище функції вартості можна скористатися рівняннями Ейлера-Лагранжа або взяти першу варіацію з метою отримання необхідних умов мінімуму.

Таким чином, визначимо скалярну функцію Ф, лагранжіан, у вигляді

$$\Phi\left[\mathbf{X}(t),\mathbf{X}^/(t),W^/(t),\boldsymbol{\lambda}(t),д(t),z^/(t),t\right] =$$
$$= H\left[\mathbf{X}(t),W^/(t),\boldsymbol{\lambda}(t),t\right] - \boldsymbol{\lambda}^T(t)\mathbf{X}^/ - д^T(t)\left\{g\left[W^/(t),t\right] - Z^{/2}\right\} \tag{2.3.9}$$

Оскільки в (2.3.8) члени, що містять W(t) і Z(t), відсутні, то можна записати рівняння Ейлера-Лагранжа у вигляді

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{X}^/} - \frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{X}} = 0 \tag{2.3.10}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial W^/}\right) = 0 \tag{2.3.11}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial Z^{/}}\right)=0 \qquad (2.3.12)$$

Функція Ф повинна володіти лише частинною гладкістю і відповідно до рівнянь Ейлера-Лагранжа потрібно, щоб кожна ділянка екстремальної траєкторії, на якій перші похідні від Ф безперервні, представляла розв*язок рівняння Ейлера-Лагранжа.

Умови трансверсальності співпадають з (2.3.2), початковими умовами і

$$\frac{\partial G}{\partial t_f}+\left(\frac{\partial N}{\partial t_f}\right)^T \nu+\Phi-\mathbf{X}^{/T}\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{X}^{/}}=0 \quad \text{для} \quad t=t_f$$

$$\frac{\partial G}{\partial \mathbf{X}}+\left(\frac{\partial N}{\partial \mathbf{X}}\right)^T \nu-\boldsymbol{\lambda}=0, \quad t=t_f$$

Крім того можна записати

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z^{/}}=0, \quad \text{для} \quad [t_0,t_f]$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial W^{/}}=0, \quad \text{для} \quad [t_0,t_f]$$

Також можна скористатися методом штрафів і ввести штраф за порушення нерівності (2.3.6). Функція вартості має вигляд

$$I=\ldots+\int_{t_0}^{t_f}\sum_{i=1}^{r}\left|g_i[\mathbf{X}(t),\mathbf{U}(t),t]\right|^P H(g_i)dt+\ldots \qquad (2.3.13)$$

Тут Р- довільне додатнє число, яке повинно бути вибране; $H(g_i)$-ступінчата функція, яка визначається співвідношенням

$$H(g_i)=\begin{cases}0, & g_i\ge 0\\ k_i, & g_i<0\end{cases} \qquad (2.3.14)$$

Шляхом вибору значень p и k_i , можна змінити значення штрафа за порушення обмеження на управління в формі нерівності.

Наприклад для обмеження виду $\mathbf{U}_{min}\le\mathbf{U}\le\mathbf{U}_{max}$ в функцію вартості можна ввести функцію штрафа

$$Q=[\mathbf{U}(t)-\mathbf{U}_{min}]^2 h[\mathbf{U}(t)-\mathbf{U}_{min}]+[\mathbf{U}_{max}-\mathbf{U}(t)]^2 h[\mathbf{U}_{max}-\mathbf{U}(t)] \qquad (2.3.15)$$

де h-функція Хевісайда.

2.4. *Принцип максимума при наявності обмежень в формі нерівностей на змінні стану і управління*

Представимо обмеження в формі нерівностей на деякі або всі змінні стану в формі нерівностей за допомогою s-мірного векторного рівняння.

$$h[\mathbf{X}(t), t] \geq 0 \tag{2.4.1}$$

при цьому передбачається, що кожна складова h диференціюється в просторі станів. Існує декілька методів за допомогою яких можна здійснити перетворення виразу (2.4.1) в обмеження в формі рівності. Введемо нову змінну x_{n+1}:

$$\begin{aligned} x'_{n+1} &= f_{n+1} = [h_1(X,t)]^2 H(h_1) + [h_2(X,t)]^2 H(h_2) + \ldots + \\ &+ [h_s(X,t)]^2 H(h_s), \end{aligned} \tag{2.4.2}$$

де $H[h_s(X,t)]$-модифікована функція Хевісайда:

$$H[h_s(X,t)] = \begin{cases} 0, h_s(X,t) \geq 0, \\ k_s, h_s(X,t) < 0, \end{cases} \tag{2.4.3}$$

$k_s > 0, s = 1,2,\ldots, s$

при початковій умові

$X_{n+1}(t_0) = 0.$

Таким чином видно, що $X_{n+1}(t_f)$є безпосереднім способом включення обмеження в формі нерівності, накладеного на змінну стану

$$x_{n+1}(t_f)=\int_{t_0}^{t_f} x'_{n+1}(t)dt=\int_{t_0}^{t_f}\left\{[h_1(X,t)]^2 H(h_1)+...+[h_s(X,t)]^2 H(h_s)\right\}dt$$

Потрібно, щоб $x_{n+1}(t_f)=0$

Такий підхід представляє модифікацію процедури Келлі [ ], виконану Мак-Гиллом [ ], яка дозволяє перетворити s обмежень в формі нерівностей в s обмежень в формі рівності вигляду

$$x'_{n+1}=[h_1(X,t)]^2 H(h_1), \quad x_{n+1}(t_0)=0$$

$$x'_{n+2}=[h_2(X,t)]^2 H(h_2), \quad x_{n+2}(t_0)=0$$

....

$$x'_{n+s}=[h_s(X,t)]^2 H(h_s), \quad x_{n+s}(t_0)=0,$$

які потім додамо до функції вартості, внаслідок чого отримаємо

$$I_{мод}=I_{nex}+\sum_{j=1}^{s} x_{n+j}(t_f)$$

Таким чином, множники k_s є функціями штрафів, а

$I_{мод}$ мінімізується так, що область обмеження порушується слабо або зовсім не змінюється.

Якщо потрібно, щоб $x_{n+j}(t_f)=0$ для $j=1,2,...,s$ обмеження зовсім не підсилюється. Можна дещо модифікувати підхід, що розглядається, якщо ввести s нових змінних стану:

$$\left(x'_{n+1}\right)^2=k_1 h_1(\mathbf{X},t), \quad x_{n+1}(t_0)=0$$

$$\left(x'_{n+2}\right)^2=k_2 h_2(\mathbf{X},t), \quad x_{n+2}(t_0)=0$$

....

$$\left(x'_{n+s}\right)^2=k_s h_s(\mathbf{X},t), \quad x_{n+s}(t_0)=0$$

Рівняння Ейлера-Лагранжа можна використати для знаходження диференціальних умов екстремума, а відповідні умови трансверсальності- для визначення граничних значень. Можна використати і формулювання Гамільтона.

Для задачі, що розглядається лагранжіан записується у вигляді

$$\overline{\Phi} = \Phi + \lambda_{n+1}\left[f_{n+1} - x'_{n+1}\right]$$
$$\overline{\Phi} = H - \lambda^T X' + \lambda_{n+1}\left[f_{n+1} - x'_{n+1}\right] \tag{2.4.4}$$

де Ф- лагранжіан для випадку, коли обмеження в формі нерівностей на стан відсутнє. Скористаємося обмеженнями в формі рівності, записаної у вигляді (2.4.2) і (2.4.3). Рівняння Ейлера-Лагранжа записуються у вигляді

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{X}'} - \frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{X}} - \frac{\partial f_{n+1}}{\partial\mathbf{X}}\lambda_{n+1} = 0$$
$$\frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{U}} = 0 \tag{2.4.5}$$

Крім того, видно, що

$$\frac{d}{dt}\lambda_{n+1}(t) = 0$$

при цьому умови трансверсальності залишаються такими ж, як і раніше, і крім того

$$x_{n+1}(t_0) = x_{n+1}(t_f) = 0$$

Корисно отримати отримані результати через гамільтоніан, об'єднавши (2.4.4) і (2.4.5). В результаті отримаємо

$$\boldsymbol{\lambda}' = \frac{d\,\lambda(t)}{dt} = -\frac{\partial H'}{\partial\mathbf{X}} - \frac{\partial f_{n+1}(\mathbf{X}(t),t)}{\partial\mathbf{X}}\lambda_{n+1},$$
$$\mathbf{X}' = \frac{\partial H}{\partial\boldsymbol{\lambda}}$$

$$x'_{n+1} = \frac{dx_{n+1}}{dt} = f_{n+1} = \left[h_1(X,t)\right]^2 H(h_1) + \ldots + \left[h_s(X,t)\right]^2 H(h_s),$$
$$\lambda'_{n+1} = \frac{d\lambda_{n+1}}{dt} = 0$$

Де
$$H\left[\mathbf{X}(t),\mathbf{U}(t),\boldsymbol{\lambda}(t),t\right] = \Phi\left[\mathbf{X}(t),\mathbf{U}(t),t\right] + \boldsymbol{\lambda}^T(t) f\left[\mathbf{X}(t),\mathbf{U}(t),t\right],$$
$$H\left[\mathbf{X}(t),\mathbf{U}^*(t),\boldsymbol{\lambda}(t),t\right] \le H\left[\mathbf{X}(t),\mathbf{U}(t),\boldsymbol{\lambda}(t),t\right]$$

при граничних умовах

$$\mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0$$
$$N\left[\mathbf{X}(t_f),t_f\right] = 0$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial G}{\partial t_f} + \left(\frac{\partial N}{\partial t_f}\right)^T \nu + H = 0 \\ &\frac{\partial G}{\partial X} + \left(\frac{\partial N}{\partial X}\right)^T \nu - \lambda = 0 \end{aligned}\right\} \text{ при } \; t = t_f$$

$$\mathbf{X}_{n+1}(t_0) = \mathbf{X}_{n+1}(t_f) = 0$$

2.5. Дослідження оптимальної системи керування із зворотнім зв'язком з використанням принципу максимума

Почнемо дослідження окремої задачі керування, рішення якої дає закон лінійного керування з зворотнім зв`язком. Хай існує лінійна система, що характеризується диференційним рівнянням

$$\mathbf{X}' = \mathbf{A}(t) * \mathbf{X} + \mathbf{B}(t) * \mathbf{U}, \quad \mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0 \tag{2.5.1}$$

і потрібно знайти керування, що мінімізує функцію вартості (при фіксованому t_f).

$$\mathbf{J} = \frac{1}{2} * \mathbf{x}^{\mathbf{T}}(\mathbf{t_f}) * \mathbf{S} * \mathbf{X}(t_f) + \frac{1}{2} * \int_{t_0}^{t_f} [\mathbf{x}^{\mathbf{T}}(\mathbf{t}) * \mathbf{Q}(t) * \mathbf{X}(t) * \mathbf{U}^T(t) * \mathbf{R}(t) * \mathbf{U}(t)] dt \tag{2.5.2}$$

Зрозуміло, що без втрати єдності можна припустити, що матриці **Q**, **R**, **S** - симетричні. Рішення цієї задачі можливо отримати за допомогою принципу максимума або рівняння Гамільтона-Якобі.

Використаємо перший метод. Гамільтоніан має вигляд:

$$\mathbf{H}[\mathbf{X}(t), \mathbf{U}(t), \boldsymbol{\lambda}(t), t] = 1/2 * \mathbf{X}^T * \mathbf{Q} * \mathbf{X} + 1/2 * \mathbf{U}^T * \mathbf{R} * \mathbf{U} + \boldsymbol{\lambda}^T * \mathbf{A} * \mathbf{X} + \boldsymbol{\lambda}^T * \mathbf{B} * \mathbf{U} \tag{2.5.3}$$

Для того, щоб скористатись принципом максимума, необхідно,щоб для оптимального керування

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{U}} = 0 = \mathbf{R}(\mathbf{t})\mathbf{U}(t) + \mathbf{B}^{\mathbf{T}}(t)\lambda(t) \tag{2.5.4}$$

та

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{X}} = -\lambda' = \mathbf{Q}(\mathbf{t})\mathbf{X}(t) + \mathbf{A}^{\mathbf{T}}(\mathbf{t})\lambda(t) \tag{2.5.5}$$

при граничній умові

$$\lambda(t_f) = \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{X}(\mathbf{t_f})} = \mathbf{S}\mathbf{X}(t_f) \tag{2.5.6}$$

Далі вважаємо , що

$$\mathbf{U}(t)=-\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^{T}(t)\boldsymbol{\lambda}(t) \qquad (2.5.7)$$

та з`ясуємо, чи можна перетворити цей вираз в керування по замкненому контуру. Припустимо , що рішення для спряженого випадку аналогічно (2.5.6) :

$$\boldsymbol{\lambda}(t)=\mathbf{P}(t)\mathbf{X}(t) \qquad (2.5.8)$$

Підставляючи (2.5.8) в (2..5.1) та (2.5.7) отримаємо

$$\mathbf{X}'=\mathbf{A}(t)\mathbf{X}(t)-\mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^{T}(t)\mathbf{P}(t)\mathbf{X}(t) \qquad (2.5.9)$$

Крім того, з (2.5.8) та (2.5.5) випливає

$$\boldsymbol{\lambda}'=\mathbf{P}'\mathbf{X}(t)+\mathbf{P}(t)\mathbf{X}'=-\mathbf{Q}(t)\mathbf{X}(t)-\mathbf{A}^{T}(t)\mathbf{P}(t)\mathbf{X}(t) \qquad (2.5.10)$$

Об`єднуючи (2.5.9) та (2.5.10) одержуємо

$$[\mathbf{P}'+\mathbf{P}(t)\mathbf{A}(t)+\mathbf{A}^{\mathbf{T}}(t)\mathbf{P}(t)-\mathbf{P}(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{-\lambda}(t)\mathbf{B}^{\mathbf{T}}(t)\mathbf{P}(t)+\mathbf{Q}(t)]\mathbf{X}(t)=0 \qquad (2.5.11)$$

Поскільки це рівняння повинно виконуватись для ненульових **X**(t), множник, що стоїть перед **X**(t), повинен дорівнювати нулю.

Таким чином матриця **P** , яка є симетричною матрицею розмірності (n x n) і яка містить в собі n(n+n)/2 різних членів, повинна задовольняти матричному рівнянню Ріккаті :

$$\mathbf{P}'=-\mathbf{P}(t)\mathbf{A}(t)-\mathbf{A}^{T}(t)\mathbf{p}(t)+\mathbf{P}(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{-\lambda}(t)\mathbf{B}^{T}(t)\mathbf{P}t)-\mathbf{Q}(t) \qquad (2.5.12)$$

при граничній умові, заданої (2.5.6) та (2.5.8) :

$$\mathbf{P}(t_f)=\mathbf{S} \qquad (2.5.13)$$

Таким чином рішення матричного рівняння Ріккаті можна провести у зворотньому напрямку, від t_f до t_0 , побудувавши матрицю

$$\mathbf{K}(t)=-\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^{T}(t)\mathbf{P}(t) \qquad (2.5.14)$$

і потім одержавши керування по замкненому контуру з

$$\mathbf{U}(t)=\mathbf{K}(t)\mathbf{X}(t) \qquad (2.5.15)$$

Важливо відмітити, що всі складові вектора стану повинні бути досягаєми. На рис.2.2. показана структурна схема пристрою, що реалізує отримане рішення задачі про регулятор.

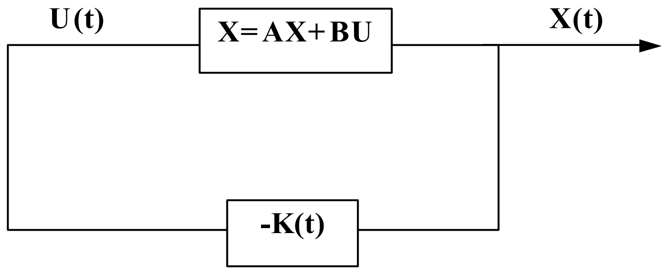


Рис.2.2. Оптимальний лінійний регулятор

Отримані залежності визначають пропорційний лінійний регулятор з залежним від часу матричним коефіцієнтом підсилення **К**(t).

Цей регулятор мінімізує функцію вартості на траєкторіях системи.

При цьому :

1. Матричний коефіцієнт підсилення може бути визначений один раз поза контуром керування, тому що він не залежить від **X**(t) та від **U**(t) ; для визначення К(t) необхідно вирішити рівняння Ріккаті в зворотньому часі.

2. При постійних матрицях **A, B, R, Q** та при $t \to \infty$ **P**(t) прагне до усталеного значення , яке можна знайти при рішенні алгебраїчного матричного рівняння:

$$\mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^{T}\mathbf{P}-\mathbf{P}\mathbf{A}-\mathbf{A}^{T}\mathbf{P}-\mathbf{Q}=0 \qquad (2.5.16)$$

3. З`ясуємо зміст критерію якості - функції вартості. Зрозуміло, що квадратичне зваження кінцевого стану дозволяє досягнути бажаної якості керування, однак квадратичне зваження не настільки обгрунтовано, особливо якщо вартість ресурсів керування невелика. В деяких випадках квадратичне зваження замінює собою явні обмеження на величину керуючих впливів і дозволяє отримати оптимальний закон зворотнього зв`язку в аналітичному вигляді. Крім того, задання дуже великих вагових матриць **R** викликає відхилення фактичного кінцевого стану від заданого, а дуже малих - приводить до неприпустимо великих значень **U**(t).

Основними обмеженнями є умова додатньої визначеності **R** та неможливість задання явних обмежень на **X**(t) та **U**(t).

4. Якщо ввести більш загальний, ніж функція вартості, критерій якості

$$\mathbf{I}=\frac{1}{2}\mathbf{X}^{\mathbf{T}}\mathbf{S}\mathbf{X}\Big|_{t=t_f}+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}(\mathbf{X}^{\mathbf{T}}\mathbf{U}^{T})\begin{bmatrix}\mathbf{Q(t)} & \mathbf{N(t)}\\ \mathbf{N^T(t)} & \mathbf{R(t)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{X}\\ \mathbf{U}\end{bmatrix}dt \qquad (2.5.17)$$

який враховує взаємозв`язок між керуваннями та станами, то можна показати, що оптимальний регулятор визначається, як і раніше, виразом

U(t) = -**K**(t)***X**(t) з коефіцієнтом підсилення

$$\mathbf{K}(t)=\mathbf{R}^{-1}(\mathbf{N}^{T}+\mathbf{B}^{T}\mathbf{P}) \qquad (2.5.18)$$

причому P визначається рівнянням Ріккаті

$$\mathbf{P}'=-\mathbf{PA}-\mathbf{A}^{T}\mathbf{P}+(\mathbf{PB}+\mathbf{N})\mathbf{R}^{-1}(\mathbf{N}^{T}+\mathbf{B}^{T}\mathbf{P})-\mathbf{Q} \qquad (2.5.19)$$

$$\mathbf{P}(\mathbf{t_f})=\mathbf{S} \qquad (2.6.20)$$

це більш загальний вираз для оптимального закону регулювання може бути використаний для синтезу нелінійних регуляторів.

Можна помітити, що задачі синтезу оптимального в квадратичному значенні закону керування для лінійної системи мають рішення в вигляді пропорційних регуляторів, які. як відомо з класичної теорії керування, не забезпечують відстеження зміни установок або збурюючих впливів по навантаженню в системі.

Тому бажано переформулювати постановку задачі синтезу таким чином, щоб у керуванні з`явилась інтегральна складова, яка знижує помилки регулювання. це можна зробити декількома способами.

Один з них - введення похідної **U** безпосе- редньо в критерій оптимальності:

$$\mathbf{I}=\frac{1}{2}\mathbf{X^{T}SX}(t_f)+\frac{1}{2}\int_0^{t_f}(\mathbf{X^{T}QX}+\mathbf{U'^{T}RU'})dt \qquad (2.5.21)$$

При цьому необхідно продиференціювати рівняння динаміки процесу :

$$\mathbf{X}''=\mathbf{AX}'+\mathbf{BU}'$$

Після заміни змінних

$$\mathbf{V(t)}=\mathbf{U}';\quad \mathbf{W_1}=\mathbf{X_1};\quad \mathbf{W_2}=\mathbf{X}';\quad \mathbf{W}=\begin{bmatrix}\mathbf{W_1}\\ \mathrm{L}\\ \mathbf{W_n}\end{bmatrix} \qquad (2.5.22)$$

перейдемо до рівняння

$$\mathbf{W}' = \left[\begin{array}{c:c} 0 & I \\ \hdashline 0 & A \end{array}\right]\mathbf{W} + \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix}\mathbf{V} \tag{2.5.23}$$

та критерію оптимальності

$$\mathbf{I} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{W}^T \left[\begin{array}{c:c} S & 0 \\ \hdashline 0 & 0 \end{array}\right] \mathbf{W}\right)_{t=t_f} + \frac{1}{2}\int_0^{t_f}\left(\mathbf{W}^T \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{W} + \mathbf{V^T R V}\right) dt \tag{2.5.24}$$

Використавши вираз оптимального закону керування (2.5.14), отримаємо

$$\mathbf{V}(t) = -k(t)\mathbf{W} = -\begin{bmatrix} k_1 & \cdots & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{W_1} \\ \cdots \\ \mathbf{W_2} \end{bmatrix} \tag{2.5.25}$$

або через вихідні змінні

$$\mathbf{U}(t) = -k_2\mathbf{X}(t) - \int_0^{t_f}(k_1 - k_2')\mathbf{X}(t)dt \tag{2.5.26}$$

що задає складний-таки пропорційно-інтегральний регулятор.

В усталеному стані при $t_f \to \infty$ к$_1$ та к$_2$ будуть постійними, і оптимальний регулятор прийме вигляд

$$\mathbf{U}(t) = -k_2\mathbf{X}(t) - k_1\int_0^{t_f}\mathbf{X}(t)dt \tag{2.5.27}$$

тобто буде звичайним ПІ-регулятором.

Приведений аналіз, між іншим, залишає нез`ясованим фізичне значення мінімізації похідної керування в виразу (2.5.21) та зв`язок її з якістю регулювання.

Інший спосіб одержання інтегральної складової - розширення стану шляхом додавання до n початкових змінних p нових змінних

$$\mathbf{Z}(t)\text{ , де }\mathbf{Z} = \mathbf{C}\ \mathbf{X} \tag{2.5.28}$$

тобто змінні стану, для яких бажано мати інтегральний керуючий вплив.

Розширений стан тепер є (n + p) -мірним вектором

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} X \\ Z \end{bmatrix} \qquad (2.5.29)$$

а критерій оптимальності задається рівнянням

$$\mathbf{I} = \frac{1}{2}\mathbf{X}^{\mathbf{T}}\mathbf{S}\mathbf{X}(t_f) + \frac{1}{2}\int_0^{t_f}(\mathbf{X}^{\mathbf{T}}\mathbf{Q}\mathbf{X} + \mathbf{U}^{\mathbf{T}}\mathbf{R}\mathbf{U})dt$$

Відповідний оптимальний регулятор має вигляд

$$\mathbf{U}(t) = -k_1\mathbf{X}(t) - k_2 C\int \mathbf{X}dt = k_1\mathbf{X} - k_2\mathbf{Z}$$

Необхідною умовою існування такого регулятора є виконання умови, що число змінних стану, для яких вводиться інтегральний керуючий вплив, не може бути більше числа змінних керування.

Якщо вихідною величиною системи є стан, що спостерігається,то рівняння вимірювання

$\mathbf{Y}(t)=\mathbf{C}\mathbf{X}(t)$

де $\mathbf{Y}(t)$ - спостерігаємий вектор, $q < n$, та вектор керування:

$$\mathbf{U}(t) = -k_1\mathbf{X}(t) - k_2\int \mathbf{Y}(t)dt$$

На рис.2.3. показана структурна схема оптимального ПІ-регулятора

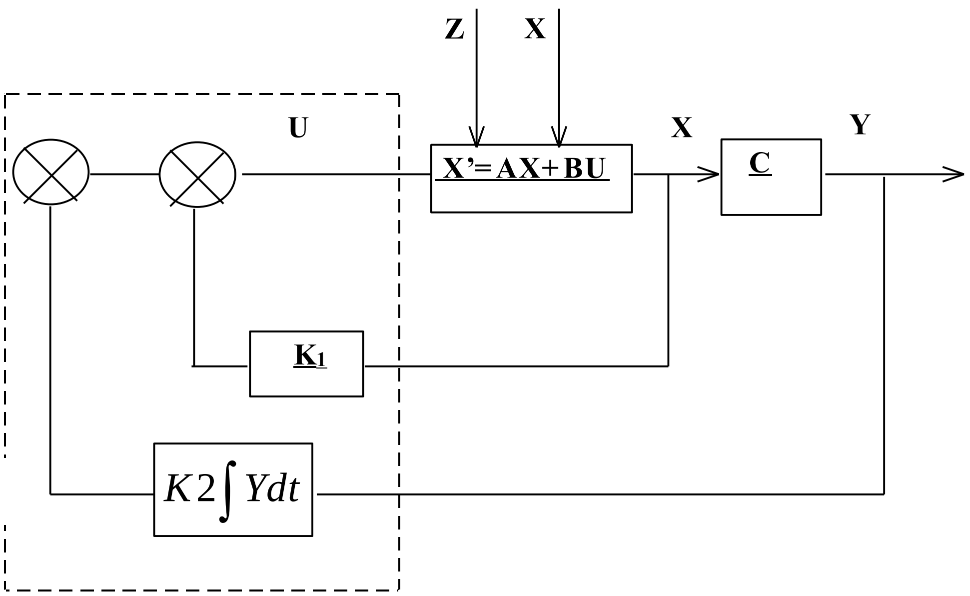


Рис.2.3. Оптимальний ПІ-регулятор

Ще один спосіб синтезу оптимального ПІ-регулятора пов`язаний з теорією стохастичного керування , де інтегральна складова з`являється як засіб придушення випадкових завад.

2.6. Стохастичне керування для систем з зосередженими параметрами

Стохастичним називається керування системами, що описуються стохастичними диференціальними рівняннями, що зв'язують стани і виходи з випадковими збуреннями у процесі і з шумами у вимірювальних приладах, Значна частина теорії стохастичного керування пов'язана з синтезом оптимальних регуляторів, що діють в умовах випадкових збурень і перешкод [1-4]. Основна задача полягає в тому, щоб визначити, чим стохастичний регулятор повинен відрізнятися від звичайного, детермінованого. У випадку лінійних систем ця різниця не велика, але в нелінійних задачах вона стає значною. Для випадку білих гауссових збурень і перешкод задана лінійна система

$$dX/dt = AX + BU + W(t), \tag{2.6.1}$$

$$Y(t) = CX + V(t), \tag{2.6.2}$$

де $W(t), V(t)$ – некорельовані між собою випадкові збурення і шуми вимірювань типу білого гауссового шуму з нульовим середнім і коваріацією;

$$E\left[W(t)W^T(\tau)\right] = Q(t)\delta(t-\tau) \tag{2.6.3}$$

$$E\left[V(t)V^T(\tau)\right] = R(t)\delta(t-\tau) \tag{2.6.4}$$

Критерієм оптимальності при наявності випадкових збурень і перешкод є середнє значення квадратичного функціоналу якості;

$$\min_{U(t)}\left\{I = E\left[1/2\, X^T\left(t_f\right)S_f X\left(t_f\right) + 1/2\int_{t_0}^{t_f}\left(X^T FX + U^T EU\right)dt\right]\right\} \tag{2.6.5}$$

де $E[.]$ – символ математичного сподівання. Можна показати, що детерміноване керування незсунене і оптимальне і для стохастичної постановки [1-4], тому алгоритм керування має наступну структуру:

$$U(t) = -K(t)X(t), \tag{2.6.6}$$

де $K(t) = E^{-1}B^T S(t),$ (2.6.7)

$$\frac{ds}{dt} = -SA - A^T S + SBE^{-1}B^T S - f, S\left(t_f\right) = S_f \tag{2.6.8}$$

Якщо вимірюються всі координати вектора стану, тобто $C = I$, стохастичний закон регулювання збігається з детермінованим. Якщо ж вимірюванню доступні не всі координати стану, оптимальний стохастичний регулятор повинен бути якимось чином зв'язаний з системою оцінювання станів. У цьому випадку, вважаючи початковий стан $X(t_0)$ некорельованим з $W(t)$ i $V(t)$, і розподіленим за нормальним законом середнім:

$$E(X(t_0)) = \hat{X}_0 \tag{2.6.9}$$

і матрицею коваріації

$$E\left(\left(X(t_0) - \hat{X}_0\right)\left(X(t_0) - \hat{X}_0\right)^T\right) = P_0 \tag{2.6.10}$$

отримаємо наступний оптимальний закон регулювання:

$$U(t) = -K(t)\hat{X}(t) \tag{2.6.11}$$

$$\frac{d\hat{X}}{dt} = A\hat{X} + BU + PC^T R^{-1}\left(Y - C\hat{X}\right) \tag{2.6.12}$$

де матричний коефіцієнт підсилення $K(t)$ задається рівнянням

$$\frac{dP}{dt} = PA^T + AP - PC^T R^{-1}CP + Q\,,\, P(t_0) = P_0 \tag{2.6.13}$$

У відповідності з отриманими виразами оптимальне стохастичне керування реалізується у вигляді послідовно з'єднаних оптимального фільтра, що оцінює стан об'єкту керування і оптимального детермінованого регулятора, що використовує отримані оцінки замість істинних станів. Цей результат, відомий як принцип поділення чи принцип визначеної еквівалентності, що може бути застосованим до широкого класу лінійних систем (у загальному випадку за його допомогою можуть бути отримані різні субоптимальні алгоритми керування), але не може бути застосованим до нелінійних систем.

2.7. Задача про мінімальний час

Розглянемо лінійне диференціальне рівняння системи, в яке рівняння входить лінійно

$$\mathbf{X}' = f[\mathbf{X}(t), t] + D[\mathbf{X}(t), t]\mathbf{U}(t), \mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0\,, \tag{2.7.1}$$

$$a_i \le \mathbf{U}_i \le b_i \tag{2.7.2}$$

і припустимо, що критерій якості також містить тільки лінійні члени змінної рівняння, так що гамільтоніан також виявиться лінійним по **U**(t). Маємо

$$I = G[\mathbf{X}(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} \{F[\mathbf{X}(t), t] + h^T[\mathbf{X}(t), t]\mathbf{U}(t)\}dt\,, \tag{2.7.3}$$

$$H[\mathbf{X}(t), \mathbf{U}(t), \boldsymbol{\lambda}(t), t] = F[\mathbf{X}(t), t] + h^T[\mathbf{X}(t), t]\mathbf{U}(t) +$$

$$+ \boldsymbol{\lambda}^T(t)\{f[\mathbf{X}(t), t] + D[\mathbf{X}(t), t]\mathbf{U}(t)\} \tag{2.7.4}$$

Внаслідок лінійної залежності гамільтоніана від вектора управління **U**(t) для його мінімізації по U(t) необхідно, щоб

$$\mathbf{U}_i = \begin{cases} a_i, при & \left\{h^T\left[\mathbf{X}(t),t\right] + \boldsymbol{\lambda}^T(t)D\left[\mathbf{X}(t),t\right]\right\}_i \rangle 0 \\ b_i, при & \left\{h^T\left[\mathbf{X}(t),t\right] + \boldsymbol{\lambda}^T(t)D\left[\mathbf{X}(t),t\right]\right\}_i \langle 0 \end{cases}. \tag{2.7.5}$$

Єдиним винятком буде, коли

$$h^T\left[\mathbf{X}(t),t\right] + \boldsymbol{\lambda}^T(t)D\left[\mathbf{X}(t),t\right] = 0, \tag{2.7.6}$$

тобто коли гамільтоніан не залежить від U(t) і не може бути мінімізований по **U**(t). Якщо рівняння (6) задовільняється не тільки в ізольованих у часі точках, то говорять задача мінімізації володіє сингулярним рішенням.

Запишемо для розгляду задачі канонічні рівняння

$$\mathbf{X}' = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = f\left[\mathbf{X}(t),t\right] + D\left[\mathbf{X}(t),t\right]\mathbf{U}(t), \tag{2.7.7}$$

$$\begin{gathered} -\boldsymbol{\lambda}' = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial F\left[\mathbf{X}(t),t\right]}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial h^T\left[\mathbf{X}(t),t\right]}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{U}(t) + \\ + \frac{\partial f^T\left[\mathbf{X}(t),t\right]}{\partial \mathbf{x}}\boldsymbol{\lambda}(t) + \frac{\partial\left\{D\left[\mathbf{X}(t),t\right],\mathbf{U}(t)\right\}^T}{\partial \mathbf{x}(t)}\boldsymbol{\lambda}(t) \end{gathered}, \tag{2.7.8}$$

де **U**(t) визначається з (2.7.5).

Якщо буде задано необхідний стан в момент досягнення і вектор початкових умов, то приходимо, як і раніше, до двоточечної крайової задачі, половина умов для якої задана для початкового моменту, а половина - для моменту досягнення. Один з методів розв*язку канонічних рівнянь при такому формулюванні полягає в оберненні часу, що входить в канонічні рівняння. Почнемо з вектора кінцевого стану, який часто є початком координат, потім проінтегруємо в зворотному напрямі від цієї точки при постійному управлінні до отримання з (2.7.5) точки перемикання.

Проілюструємо управління в задачі про мінімальний час на прикладі лінійної системи з постійними параметрами і скалярним вхідним сигналом.

Потрібно перевести систему , що описується п- мірним векторним диф. рівнянням

$$\mathbf{X}' = A\mathbf{X}(t) + b\mathrm{u}(t), \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \tag{2.7.9}$$

в початок координат $X(t_f) = 0$ за мінімальний час.

Таким чином функція вартості дорівнює

$$I = \int_{t_0}^{t_f} 1 \cdot dt = t_f - t_0 \tag{2.7.10}$$

при обмеженні $-1 \le u(t) \le 1$ (2.7.11)

Гамільтоніан має вигляд

$$\mathrm{H}[\mathbf{X}(\mathrm{t}), \mathbf{U}(\mathrm{t}), \boldsymbol{\lambda}(\mathrm{t})] = 1 + \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}(\mathrm{t})\mathrm{A}\mathbf{X}(\mathrm{t}) + \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}(\mathrm{t})\mathrm{bu}(\mathrm{t}) \tag{2.7.12}$$

Мінімізація гамільтоніана відносно **U**(t) забезпечується при

$$\mathrm{u}(t) = -sign[\boldsymbol{\lambda}^T(t)b]. \tag{2.7.13}$$

Таким чином при оптимальному управлінні гамільтоніан H дорівнює

$$H[\mathbf{X}(t), \boldsymbol{\lambda}(t)] = 1 + \boldsymbol{\lambda}(t)A\mathbf{X}(t) - \left|\boldsymbol{\lambda}^T(t)b\right| \tag{2.7.14}$$

Так як час досягнення не фіксується і H в явному вигляді від t не залежить, то з урахуванням

$$\frac{dH}{dt} = \frac{dF}{dt} + \boldsymbol{\lambda}^T \frac{\partial f}{\partial t} + \mathrm{u}^T \frac{\partial H}{\partial \mathrm{u}} \quad \text{і} \quad H[\mathbf{X}(t_f), \mathbf{U}(t_f), \boldsymbol{\lambda}(t_f), t_f] + \frac{\partial g}{\partial t_f} + \left(\frac{\partial N^T}{\partial t_f}\right)\nu = 0$$

знаходимо вздовж оптимальної траєкторії

$$H[\mathbf{X}(t), \boldsymbol{\lambda}(t)] = 0 \;, \quad t \in [t_0, t_f] \tag{2.7.15}$$

Канонічні рівняння мають вигляд

$$\mathbf{X}' = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = A\mathbf{X}(t) + b\mathbf{U}(t) = A(t)\mathbf{X}(t) - bsign[\boldsymbol{\lambda}^T(t)b] \tag{2.7.16}$$

$$\boldsymbol{\lambda}' = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} = -A^T\boldsymbol{\lambda}(t) \tag{2.7.17}$$

Для виключенння сингулярного розв*язку потрібно впевнитися, що величина λ^T(t)b не може дорівнювати нулю, якщо часовий інтервал не дорівнює нулю.

Із (2.7.17) видно, що сингулярність буде мати місце, якщо $\lambda(t_0)$ тотожньо дорівнює нулю, що неможливо. Крім того, система повинна бути керована.

Якщо система не керована, то неможливо здійснити її перехід в початок координат.

Розв*язок рівняння (2.7.17) має вигляд

$$\boldsymbol{\lambda}(t) = e^{-A^T(t-t_f)}\boldsymbol{\lambda}(t_f)\,. \tag{2.7.18}$$

Перепишемо рівняння (2.7.16), припустивши $t_0 = 0$ і здійснючи заміну змінної

$$\tau = t_f - t \tag{2.7.19}$$

$$\text{і } \zeta(\tau) = \mathbf{X}(t) = \mathbf{X}(t_f - \tau) \tag{2.7.20}$$

у вигляді

$$\frac{d\zeta}{d\tau} = -A\zeta(\tau) + bsign\left[\boldsymbol{\lambda}^T(t_f)e^{A\tau}b\right]. \tag{2.7.21}$$

Розв*язок цього при $\zeta(0) = X(t_f) = 0$ дорівнює

$$\xi(t) = \int_0^t e^{-A(t-p)}b\ \ sign\left[\boldsymbol{\lambda}^T(t_f)e^{Ap}b\right]\ dp\,. \tag{2.7.22}$$

Тепер можна отримати стан $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ із якого за визначений мінімальний час t_f можливий перехід в початок координат, якщо підставити в (2.7.22) $\boldsymbol{\lambda}(t_f)$ і обчислити $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}(0) = \zeta(t_f)$. Це встановлює співвідношення між $\mathbf{x}(t_0)$ і $\boldsymbol{\lambda}(t_f)$, в зв′язку з яким величину λ можна назвати “функцією впливу”. Так як ясно, що знак $\left[\lambda^T(t_f)e^{Ap}b\right]$ визначається напрямком, а не величиною вектора $\lambda\ (t_f)$, всі стани, які можуть досягатися за даний мінімальний час, можуть бути визначені, якщо припустити, що всі значення $\lambda\ (t_f)$ лежать поза одиничною сферою.

Теорема про n інтервалів управлення Фельдбаума говорить, що **якщо об'єкт управління описується лінійним диференціальним рівнянням n-го порядку з постійними коефіцієнтами і корені його характеристичного рівняння дійсні, негативні або нульові, то для оптимального управління**

необхідно і достатньо n інтервалів максимального значення управління Umax, а знаки на інтервалах повинні чергуватися.

Приклад 2.7.8. Динаміка системи описується

$$\begin{bmatrix} x'1(t) \\ x'2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \quad \begin{matrix} x_1(0) = x_{10} \\ x_2(0) = x_{20} \end{matrix}.$$

Потрібно обчислити матрицю переходів

$$e^{At} = e^{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} t} = I + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + _{...} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Таким чином з (2.7.22) маємо

$$\zeta(t) = \begin{bmatrix} 1 & -\tau \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \int_0^\tau \begin{bmatrix} p \\ 1 \end{bmatrix} \operatorname{sign} \left[\lambda_1(t_f)p + \lambda_2(t_f)\right] dp .$$

Для фіксованого $\lambda(t_f)$ перемикання може виникнути тільки при $\tau_s = -\lambda_2(t_f)/\lambda_1(t_f)$, що відповідає твердженню про те, що в об*єкті з n дійсними полюсами може виникнути саме больше n-1 перемикань.

Якщо розрахувати лінію перемикання, то в точці перемикання отримаємо

$$X(t_s) = \zeta(\tau_s) = \begin{bmatrix} 1 & -\tau_s \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \int_0^{\tau_s} \begin{bmatrix} p \\ 1 \end{bmatrix} \operatorname{sign} \left[\lambda_1(t_f)[p - \tau_s]\right] dp =$$

$$= -\begin{bmatrix} 1 & -\tau_s \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \int_0^{\tau_s} \begin{bmatrix} q \\ 1 \end{bmatrix} \operatorname{sign} \left[\lambda_1(t_f)\right] dq = \{\operatorname{sign} \lambda_1(t_f)\} \begin{bmatrix} \dfrac{\tau_s^2}{2} \\ -\tau_s \end{bmatrix}$$

Таким чином бачимо, що якщо $\lambda_1(t_f) > 0$, то точка перемикання

$x_1 = \tau_s^2/2,\ x_2 = -\tau_s$; якщо $\lambda_1(t_f) < 0$,то $x_1 = -\dfrac{\tau_s^2}{2},\ x_2 = \tau_s$.

Таким чином границя перемикання задовільняє рівності

$$x_1 + \frac{1}{2} x_2 |x_2| = 0.$$

Закон управління

$$U = -sign\left[x_1(t) + \frac{1}{2}x(t)\left|x_2(t)\right|\right].$$

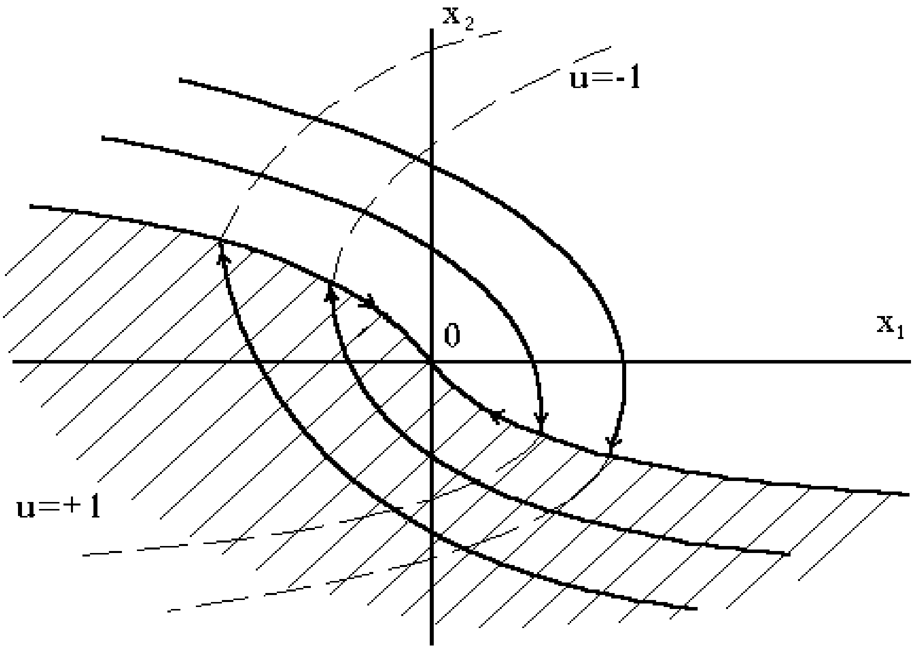


Рис. 2.5. Крива перемикання і траєкторії для мінимального часу

2.8. Сингулярні розв'язки

Розглянемо задачу визначення оптимального управління, мінімізуючого критерій якості

$$I = \frac{1}{2}\int_0^2 x^2 dt \tag{2.8.1}$$

для системи, що характеризується лінійним диф. рівнянням

$$x' = U(t), \quad x(0) = 1, \tag{2.8.2}$$

де управленне обмежене $|U(t)| \le 1$.

У цьому прикладі гамільтоніан дорівнює

$$H[X(t), U(t), \lambda(t)] = \frac{1}{2}X(t) + \lambda(t)u(t) , \tag{2.8.3}$$

і ясно, що при $\lambda(t) \neq 0$

$$u^*(t) = -\text{sign}\,\lambda(t) = \begin{cases} +1, & \lambda(t) < 0 \\ -1, & \lambda(t) > 0 \end{cases} \tag{2.8.4}$$

Результат показує, що оптимальне управління відповідає граничним значенням. Однак може бути, що управління всередині інтервалу ± 1, при цьому

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 = \lambda(t) \ . \tag{2.8.5}$$

Таким чином видно, що можливе існування розв*язку $\lambda \ (t) = 0$,

при цьому гамільтоніан не залежить від u(t). Задачі подібні цій називаються сингулярними. У загальному випадку екстремальна крива в задачі оптимального управління є сингулярною, якщо детермінант матриці Huu перетворюється в нуль в будь-якій точці екстремума.

Сформульована сингулярна задача може бути вирішена

таким чином. Запишемо канонічні рівняння

$$x' = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = u(t), \qquad \lambda' = -\frac{\partial H}{\partial X} = -x(t) \ . \tag{2.8.6}$$

Припустимо, що початкове $\lambda \ (t)$ додатнє, так що

$u(t) = -\text{sign} \ \lambda(t) = -1$.

Рівняння руху

$$x(t) = 1 - t; \quad \lambda(t) = \lambda(0) - t + \frac{t^2}{2} . \tag{2.8.7}$$

Знайдемо, що для сингулярної кривої $\lambda \ (t) = 0$, а для цього потрібно, щоб λ' і $x(t)$ дорівнювали нулю.

Але з попереднього видно, що X(t) дорівнює нулю при t=1, і умова існування сингулярного розв′язку при $t \in [1 \quad 2]$ зводиться до вимоги. $\lambda(t_0) = \frac{1}{2}$

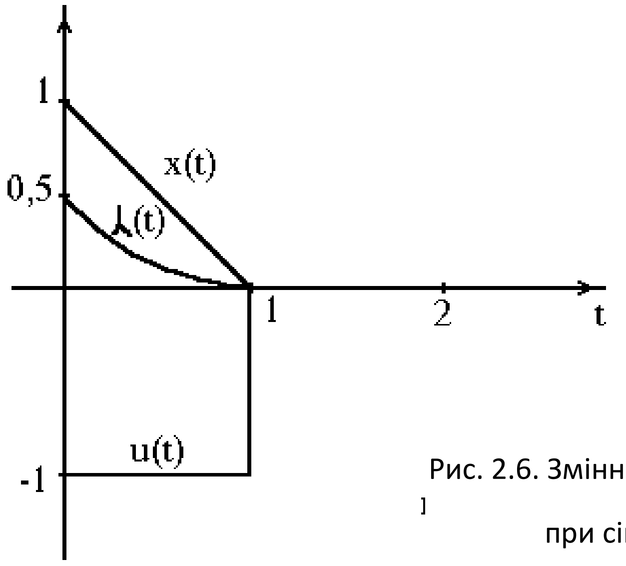


Рис. 2.6. Змінні стану та керування

при сінгулярном рішенні

Ясно, що при цьому виконується умова трансверсальності $\lambda\ (2) = 0$ (рис 2.6).

Інший метод розв*язку задачі полягає в перетворенні обмежень в формі нерівностей на управління в обмеження в формі рівності.

Тоді скористаємося рівністю $1 - \mathbf{U}^2(t) = \alpha^2(t)$,

запишемо гамільтоніан

$$H\left[\mathbf{X}(t), \mathbf{U}(t), \boldsymbol{\lambda}(t), \alpha(t)\right] = \frac{1}{2}\mathbf{X}^2(t) + \boldsymbol{\lambda}_1(t)\mathbf{U}(t) + \boldsymbol{\lambda}_2(t)\left[1 - \mathbf{U}^2(t) - \alpha^2(t)\right] \tag{2.8.8}$$

знайдемо

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 = \lambda_1(t) - 2\lambda_2(t)u(t)\ , \tag{2.8.9}$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} = -\lambda_1' = x(t)\ , \tag{2.8.10}$$

$$\frac{\partial H}{\partial \alpha} = 0 = 2\lambda_2(t)\alpha(t). \tag{2.8.11}$$

Таким чином , потрібно розв*язати наступні рівняння:

$x' = u\ ,\quad x(0) = 1,\quad \lambda_1' = -x(t),\quad \lambda_1(2) = 0,$

$$1 - u^2(t) = \alpha^2(t), \qquad (2.8.12)$$

$\lambda_2(t)\alpha t)\alpha = 0, \quad \lambda_1(t) = 2\lambda_2(t)u(t).$

Результати, отримані з цих рівнянь, виявляються точно такими ж, як і при введенні обмеження в формі нерівності в принципі максимума. Єдиною відмінністю є те, що при чисельному розв*язку задачі сингулярне рівняння не виникає, за винятком випадку, коли розв*язок стане точним (на практиці) при

$\lambda_2(t) = \lambda_1(t) = \alpha$ при $t \in [1,2]$.

Інший спосіб виключення сингулярного розв*язку складається у використанні методу функції штрафів і запису функції вартості у вигляді

$$Y = \frac{1}{2}x^2(t_f)s + \frac{1}{2}\int_0^2 x_1^2(t)dt \qquad (2.8.13)$$

для системи (в якій відсутнє обмеження в формі нерівності на рівняння і в якої H означає одиничну функцію Хевісайда), що описується системою рівнянь

$$x_1' = U \quad , \quad x_1(0) = 1 \ , \qquad x' = U, \qquad (2.8.14)$$

$$x_2{}' = kH(1 - U^2), \ x_2(0) = 0 \,, \qquad (2.8.15)$$

$$k > 0, \ H(a) = \begin{cases} 1, & a > 0 \\ 0, & a < 0 \end{cases}.$$

Узагальнимо для більш складної системи і критерію якості. Для нелінійної задачі загального вигляду, в якій управління входить в гамільтоніан в лінійному вигляді. Сингулярний розв*язок виникає при

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{U}} = 0 = h[\mathbf{X}(t), t] + D^T[\mathbf{X}(t), t]\boldsymbol{\lambda}(t) = 0 \qquad (2.8.16)$$

так що гамільтоніан не залежить від U(t):

$$H[\mathbf{X}(t), \boldsymbol{\lambda}(t), t] = F[\mathbf{X}(t), t] + \boldsymbol{\lambda}^T(t) f[\mathbf{X}(t), t]. \qquad (2.8.17)$$

Якщо для будь-якого кінцевого інтервалу часу гамільтоніан не залежить від управління, то фактично з'являється сингулярне рішення. Звичайно легко перевірити існує чи ні сингулярне рішення. Значно важче буває визначити оптимальне сингулярне рішення.

Узагальнимо результати на лінійну систему з параметрами, що міняються у часі і на критерій якості, що залежить від квадратичної форми змінних стану.

Потрібно знайти U(t), що мінімізує

$$I = \frac{1}{2}\mathbf{X}^T(t_f)S\mathbf{X}(t_f) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}\mathbf{X}^T(t)Q(t)\mathbf{X}(t)dt \qquad (2.8.18)$$

для суми $X' = A(t)\mathbf{X}(t) + B(t)\mathbf{U}(t) \quad \mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0$.,

(2.8.19)

де t_f фіксоване і вектор управління обмежений.

Гамільтоніан

$$H[\mathbf{X}(t), \mathbf{U}(t), \boldsymbol{\lambda}(t), t] = \frac{1}{2}\mathbf{X}^T(t)Q(t)\mathbf{X}(t) + \boldsymbol{\lambda}^T(t)A(t)\mathbf{X}(t) + \boldsymbol{\lambda}^T(t)B(t)\mathbf{U}(t) \qquad (2.8.20)$$

знову виявляється лінійним відносно змінних управління

і для не нульового $\lambda^T(t)B(t)$.

Відомо, що **U**(t) знаходиться на границі допустимої множини.

Однак $$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{U}} = 0 = B^T(t)\boldsymbol{\lambda}(t)$$

(2.8.21)

може бути розв*язком, що мінімізує гамільтоніан. У цьому випадку маємо

$$H[\mathbf{X}(t), \boldsymbol{\lambda}(t), t] = \frac{1}{2}\mathbf{X}^T(t)Q(t)\mathbf{X}(t) + \boldsymbol{\lambda}^T(t)A(t)\mathbf{X}(t) \qquad (2.8.22)$$

і якщо H на деякому кінцевому інтервалі U(t) не залежить від t, то є сингулярне рішення.

2.9. Дискретний принцип максимуму

Застосуємо метод Гамільтона для дискретних задач з обмеженнями у формі рівностей

$$\mathbf{X}_{k+1} = f(\mathbf{X}_k, \mathbf{U}_k, k), \quad k = k_0, ..., k_f - 1 \qquad (2.9.1)$$

та у формі нерівностей к=кТ , Т– період квантування

$$\mathbf{U}_k \in \Omega, \qquad (2.9.2)$$

де Ω – задана множність,

k_0 и k_f – фіксовані цілі числа.

Задача полягає у визначенні допустимої послідовності $U_k, k = k_0,..., k_f - 1$ тобто $U_k \in \Omega,$ для всіх k, для мінімізації критерію

$$J = G(\mathbf{X}_k, r)\Big|_{k_0}^{k_f - 1} + \sum_{k=k_0}^{k_f - 1} F(\mathbf{X}_k, \mathbf{U}_k, k) \tag{2.9.3}$$

при умові (2.9.1) по множності всіх послідовностей припустимих керувань.

Функція Гамільтона має вигляд

$$H(\mathbf{X}_k, \mathbf{U}_k, \boldsymbol{\lambda}_{k+1}, k) = F(\mathbf{X}_k, \mathbf{U}_k, k) + \boldsymbol{\lambda}_{k+1}^T f(\mathbf{X}_k, \mathbf{U}_k, k) \tag{2.9.4}$$

Вводячи гамільтоніан (2.9.4) отримаємо

$$\begin{aligned} J' &= G(\quad_k, K)\Big|_{k_0}^{k_f} + \sum_{k=k_0}^{k_f - 1} \left\{ F(\quad_k, \quad_k, K) - \quad_{k+1}^T [\quad_{k+1} - f(\mathbf{X}_k, \mathbf{U}_k, k)] \right\} = \\ &= G(\mathbf{X}_k, K)\Big|_{k_0}^{k_f} + \sum_{k=k_0}^{k_f - 1} \left[H_k - \boldsymbol{\lambda}_{k+1}^T \mathbf{X}_{k+1} \right] \end{aligned} \tag{2.9.5}$$

Необхідні умови

$$\frac{\partial H_k}{\partial \mathbf{U}_k} = 0 \qquad k = k_0,..., k_f - 1 \qquad)$$

$$\lambda_k = \frac{\partial H(\mathbf{X}_k, \mathbf{U}_k, \boldsymbol{\lambda}_{k+1}, k)}{\partial \mathbf{X}_k} \qquad k = k_0,..., k_f - 1$$

$$\boldsymbol{\lambda}_{k_0} = \frac{\partial G_{k_0}}{\partial \mathbf{X}_{k_0}}$$

$$\boldsymbol{\lambda}_{k_0} = \frac{\partial G_{k_f}}{\partial \mathbf{X}_{k_f}}$$

Нехай $\overline{\mathbf{X}}_k = \mathbf{X}_k + \varepsilon \boldsymbol{\omega}_k$, $\overline{\mathbf{X}}_{k+1} = \mathbf{X}_k + \varepsilon \boldsymbol{\omega}_{k+1}$, $\overline{\mathbf{U}}_k = \mathbf{U}_k + \varepsilon \boldsymbol{\Omega}_k$

Відмітимо, що збурення по різним крокам незалежні, звідси ϖ_k , ϖ_{k+1} та Ω_k є взаємонезалежними.

$$\begin{aligned} J' &= G\left(\mathbf{X}_{k_f} + \varepsilon \boldsymbol{\omega}_{k_f}, k_f\right) - G\left(X_{k_0} + \varepsilon\, \boldsymbol{\omega}_{k_0}, k_0\right) + \\ &\sum_{k=k_0}^{k_f - 1} \left[H\left(\mathbf{X}_{k_f} + \varepsilon \boldsymbol{\omega}_k, \mathbf{U}_k + \mathbf{U}_{k_f} + \varepsilon\; \Omega_k, \boldsymbol{\lambda}_{k+1}, k\right) - \lambda_{k+1}^T [\mathbf{X}_{k+1} + \varepsilon\, \boldsymbol{\omega}_{k+1}] \right] \end{aligned} \tag{2.9.6}$$

Для існування мінімуму необхідно

$$\frac{\partial J'}{\partial \varepsilon} = 0, \qquad \frac{\partial^2 J'}{\partial \varepsilon^2} > 0$$

для $\varepsilon = 0$ незалежно від варіації тобто

$$\left(\frac{\partial G_{kf}}{\partial \mathbf{X}_{kf}}\right)^T \boldsymbol{\omega}_{k_f} - \left(\frac{\partial G}{\partial \mathbf{X}_{kf}}\right)^T \boldsymbol{\omega}_{k_0} + \sum_{k=k_0}^{k_f-1}\left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{X}_k}\right)^T \boldsymbol{\omega}_k = \sum_{k=k_0}^{k_f-1} \boldsymbol{\lambda}_{k+1}^T \boldsymbol{\omega}_{k+1} + \sum_{k=k_0}^{k_f-1}\left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{U}_k}\right)^T \Omega_k = 0 \quad (2.9.7)$$

Застосовуючи дискретний аналог інтегрування по частях, запишемо четвертий член (2.9.7) у вигляді

$$-\sum_{k=k_0}^{k_f-1} \boldsymbol{\lambda}_{k+1}^T \boldsymbol{\omega}_{k+1} = -\sum_{k=k_0-1}^{k_f} \boldsymbol{\lambda}_k^T \boldsymbol{\omega}_k = -\sum_{k=k_0}^{k_f-1}\left[\boldsymbol{\lambda}_k^T \boldsymbol{\omega}_k\right] - \boldsymbol{\lambda}_{k_f}^T \boldsymbol{\omega}_{k_f} + \boldsymbol{\lambda}_{k_0}^T \boldsymbol{\omega}_{k_0} \quad (2.9.8)$$

Використовуючи (2.9.7) та (2.9.8) звівши подібні члени, отримаємо

$$\left[\left(\frac{\partial G_{k_f}}{\partial \mathbf{X}_{k_f}}\right)^T - \boldsymbol{\lambda}_{k_f}^T\right]\boldsymbol{\omega}_{k_f} - \left[\frac{\partial G_{k_0}}{\partial \mathbf{X}_{k_0}} - \boldsymbol{\lambda}_{k_0}^T\right]\boldsymbol{\omega}_{k_0} + \sum_{k=k_0}^{k_{f-1f}}\left[\left(\frac{\partial H_k}{\partial \mathbf{X}_k}\right)^T - \boldsymbol{\lambda}_k^T\right]\boldsymbol{\omega}_k + $$
$$+ \sum_{k=k_0}^{k_0}\left(\frac{\partial H_k}{\partial \mathbf{U}_k}\right)^T \boldsymbol{\Omega}_k = 0 \quad (2.9.9)$$

Необхідні умови виконуються завдяки взаємній незалежності варіації в (2.9.9).

Дискретний лінійний регулятор

Розглянемо спільну дискретну систему, яка характеризується рівнянням

$$\mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{X}_k + \mathbf{B}\mathbf{U}_k \qquad \mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0, \qquad k = 0,1,2,\ldots,k_f$$

де **A** і **B** можуть бути функціями k .

Функція вартості

$$I_k = 1/2\left\|\mathbf{X}_{k_f}\right\|_{\mathbf{S}}^2 + 1/2\sum_{k=0}^{k_f-1}\left\{\left\|\mathbf{X}_k\right\|_{\mathbf{Q}}^2 + \left\|\mathbf{U}_k\right\|_{\mathbf{R}}^2\right\} \ ,$$

де вагові матриці **Q** та **R** можуть бути функціями k.

Далі складемо гамільтоніан

$$H_k = 1/2\, X_k^T \mathbf{Q}\mathbf{X}_k + 1/2\, \mathbf{U}_k^T \mathbf{R}\mathbf{U}_k + \boldsymbol{\lambda}_{k+1}^T\left[\mathbf{A}\mathbf{X}_k + \mathbf{B}\mathbf{U}_k\right].$$

Спряжене векторне рівняння записується у вигляді

$$\boldsymbol{\lambda}_k = \mathbf{Q}\mathbf{X}_k + \mathbf{A}^T \boldsymbol{\lambda}_{k+1}$$

Видно, що $\boldsymbol{\lambda}_{k+1}$ неможна виразити через $\boldsymbol{\lambda}_k$, якщо $\mathbf{A}^{-1}$ не існує, так як **A**-матриця переходів стану, то вона завжди обернена.

Оскільки кінцевий стан не визначено, гранична умова визначається з

$$\left[\boldsymbol{\lambda}_{k_f}^T - \frac{\partial G_{k_f}}{\partial \mathbf{X}_{k_f}}\right]^T \omega_{k_f} = 0$$

як $\boldsymbol{\lambda}(k_f) = S\mathbf{X}(K_f)$

маємо $\dfrac{\partial H}{\partial \mathbf{U}_k} = \mathbf{RU}_k + \mathbf{B}^T\boldsymbol{\lambda}_{k+1} = 0$

Таким чином, для отримання оптимального лінійного рівняння по замкнутому контуру необхідно вирішити лінійні різницеві рівняння

$$\mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{AX}_k - \mathbf{BR}^{-1}\mathbf{B}^T\boldsymbol{\lambda}_{k+1} \qquad , \mathbf{X}(k_0) = \mathbf{X}_0$$

$$\boldsymbol{\lambda}_k = \mathbf{QX}_k + \mathbf{A}^T\boldsymbol{\lambda}_{k+1} \qquad , \boldsymbol{\lambda}(k_f) = \mathbf{SX}(K_f)$$

Припустимо, що розв’язок цих рівнянь має вигляд

$\boldsymbol{\lambda}_k = \mathbf{P}_k\mathbf{X}_k$.

Для виключення λ підставимо ці рішення в рівняння.

Це дасть

$$\mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{AX}_k - \mathbf{BR}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}_{k+1}\mathbf{X}_{k+1},$$
$$\mathbf{P}_k\mathbf{X}_k = \mathbf{QX}_k + \mathbf{A}^T\mathbf{P}_{k+1}\mathbf{X}_{k+1}.$$

Вирішуючи ці рівняння відносно змінної X_{k+1} та виключаючи цю змінну з останніх двох співвідношень, отримаємо

$$\mathbf{P}_k\mathbf{X}_k = \mathbf{QX}_k + \mathbf{A}^T\mathbf{P}_{k+1}\left[I + \mathbf{BR}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}_{k+1}\right]^{-1}\mathbf{AX}_k,$$

що задовольняє для довільного $\mathbf{X}_k$, якщо тільки

$$\mathbf{P}_k = \mathbf{Q} + \mathbf{A}^T\mathbf{P}_{k+1}\left[I + \mathbf{BR}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}_{k+1}\right]^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{Q} + \mathbf{A}^T\left[\mathbf{P}_{k+1}^{-1} + \mathbf{BR}^{-1}\mathbf{B}^T\right]^{-1}\mathbf{A},$$

при умові на кінцевому кроці $\mathbf{P}_{k_f} = \mathbf{S}$.

При вирішенні матричних різницевих рівнянь Рікатті в від’ємному у часі напрямку від $k = k_f$ та $k = 0$ будуть отримані декотрі функції «посилення», які побудовані після попереднього розрахунку та які використовуються у фізичній системі **по мере** їх отримання в реальному часі (рис.2.7.).

Рівняння по замкнутому контуру записується у вигляді

$$\mathbf{U}_k = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{A}^{-T}[\mathbf{P}_k - \mathbf{Q}]\mathbf{X}_k = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\left[\mathbf{P}_{k+1} + \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\right]^{-1}\mathbf{A}\mathbf{X}_k,$$

що досить схоже з методом отримання оптимального керування по замкнутому контуру для безперервного лінійного регулятора. Більша частина зауважень, зроблених відносно лінійного регулятора, може бути використана і тут.

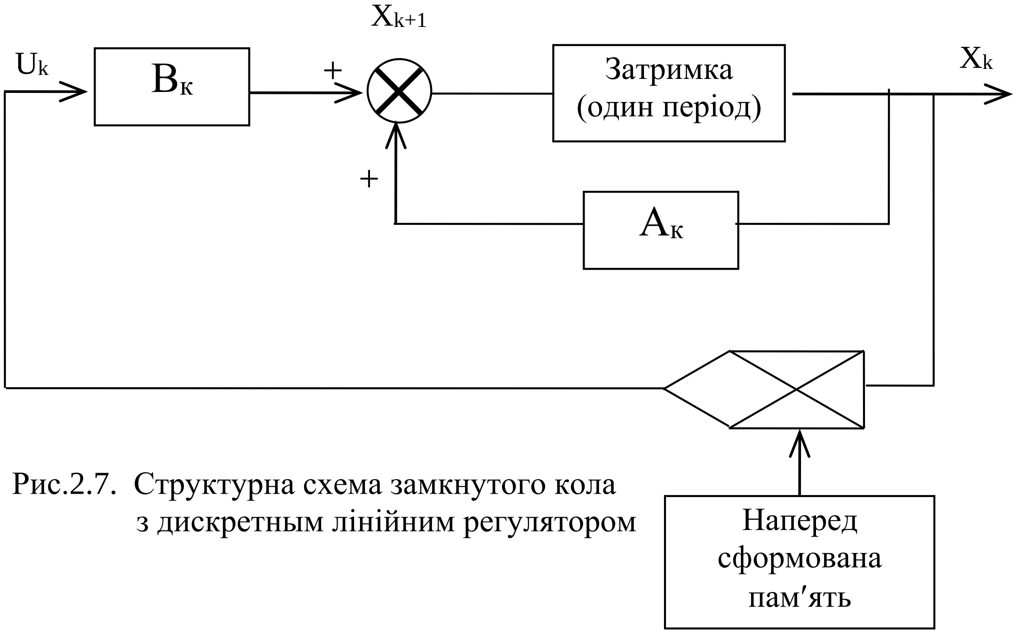


Рис.2.7. Структурна схема замкнутого кола з дискретным лінійним регулятором

Скористаємось ріняннням

$$\mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{X}_k - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}_{k+1}\mathbf{X}_{k+1} \quad \text{звідки}$$

$$\mathbf{X}_{k+1} = \left[I + \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}_{k+1}\right]^{-1}\mathbf{A}\mathbf{X}_k.$$

Тоді оптимальне управління має вигляд

$$\mathbf{U}_k = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}_{k+1}\mathbf{X}_{k+1} = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}_{k+1}\left[I + \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}_{k+1}\right]^{-1}\mathbf{A}\mathbf{X}_k =$$
$$= -\mathbf{R}^{-1}\left[I + \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}_{k+1}\right]^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}_{k+1}\mathbf{A}\mathbf{X}_k = -\left[\mathbf{R} + \mathbf{B}^T\mathbf{P}_{k+1}\mathbf{B}\right]^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}_{k+1}\mathbf{A}\mathbf{X}_k;$$
$$\mathbf{G} = \left[\mathbf{R} + \mathbf{B}^T\mathbf{P}_{k+1}\mathbf{B}\right]^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}_{k+1}\mathbf{A}$$

Можна також показати, що дискретне матричне рівняння Рікатті для задачі про регулятор також має вигляд

$$\mathbf{P}_k = \mathbf{A}^T\mathbf{P}_{k+1}\mathbf{A} - \mathbf{A}^T\mathbf{P}_{k+1}\mathbf{B}\left[\mathbf{B}^T\mathbf{P}_{k+1}\mathbf{B} + \mathbf{R}\right]^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}_{k+1}\mathbf{A} + \mathbf{Q}.$$

Що значно спрощує розрахунок при оберненні матриць, якщо різниця ***U*** менша різниці ***X***.

2.9.2. Порівняння дискретного та безперервного принципів максимуму

Припустимо, що як безперервний, так і дискретний принцип максимуму дають дуже схожі (а можливо і однакові) рішення данної задачі. Рішення дискретних двокрапкових крайових задач (ДККЗ) в кожному випадку різні. При підходящому періоді квантовання, однак обчислювальні методи будуть, по суті, однакові.

Розглянемо задачу Лагранжа варіаціонного обчислення. Потрібно мінімізувати функціонал

$$J = \int_{t_0}^{t_f} F(\mathbf{X}, \mathbf{U}, t) dt \tag{2.9.1.1}$$

при наявності (векторного) обмеження у формі рівності

$$\mathbf{X}' = f(\mathbf{X}, \mathbf{U}, t) \tag{2.9.1.2}$$

$$\mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0 \tag{2.9.1.3}$$

Рішення ДККЗ виходить з принципу максимуму наступним чином. Визначимо гамільтоніан

$$H(\mathbf{X}, \mathbf{U}, \boldsymbol{\lambda}, t) = F(\mathbf{X}, \mathbf{U}, t) + \boldsymbol{\lambda}^T(t) f(\mathbf{X}, \mathbf{U}, t). \tag{2.9.1.4}$$

Оптимальне управління визначимо з умови

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{U}} = 0 = \frac{\partial F(\mathbf{X}, \mathbf{U}, t)}{\partial \mathbf{U}} + \left[\frac{\partial f^T(\mathbf{X}, \mathbf{U}, t)}{\partial \mathbf{U}}\right] \boldsymbol{\lambda}(t). \tag{2.9.1.5}$$

Спряжені рівняння і відповідні граничні умови мають вигляд

$$-\boldsymbol{\lambda}' = \frac{\partial H}{\partial X} = \frac{\partial F(\mathbf{X}, \mathbf{U}, t)}{\partial \mathbf{X}} + \left[\frac{\partial f^T(\mathbf{X}, \mathbf{U}, t)}{\partial \mathbf{X}}\right] \boldsymbol{\lambda}(t) \tag{2.9.1.6}$$

$$\boldsymbol{\lambda}(t_f) = 0. \tag{2.9.1.7}$$

Таким чином треба вирішити безперервну ДККЗ, яка задана рівняннями (2.9.1.2) та (2.9.1.6) при наявності граничних умов (2.9.1.3) та (2.9.1.7) і рівняння зв'язку (2.9.1.5). Якщо при вирішенні цієї нелінійної ДККЗ використовується ЕЦОМ, то похідні X' та λ' апроксимуються різницями першого порядку

$$\mathbf{X}'\big|_{t=kT} = \frac{\mathbf{X}_{k+1} - \mathbf{X}_k}{T} = \frac{\mathbf{X}(\overline{k+1}\ T) - \mathbf{X}(kT)}{T}, \tag{2.9.1.8}$$

$$\boldsymbol{\lambda}'\big|_{t=kT} = \frac{\boldsymbol{\lambda}_{k+1} - \boldsymbol{\lambda}_k}{T} = \frac{\boldsymbol{\lambda}(\overline{k+1}\ T) - \boldsymbol{\lambda}(kT)}{T} \tag{2.9.1.9}$$

В результаті отримуємо дискретну ДККЗ

$$\mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{X}_k + Tf\left(\mathbf{X}_k, \mathbf{U}_k, k\right) \tag{2.9.1.10}$$

$$\boldsymbol{\lambda}_{k+1} = \boldsymbol{\lambda}_k - T\frac{\partial F\left(\mathbf{X}_k, \mathbf{U}_k, k\right)}{\partial \mathbf{X}_k} - T\left[\frac{\partial f\left(\mathbf{X}_k, \mathbf{U}_k, k\right)}{\partial \mathbf{X}_k}\right]\boldsymbol{\lambda}_k \tag{2.9.1.11}$$

$$\mathbf{X}_{k_0} = \mathbf{X}_0 \tag{2.9.1.12}$$

$$\boldsymbol{\lambda}_{k_f} = 0 \tag{2.9.1.13}$$

$$\frac{\partial F\left(\mathbf{X}_k, \mathbf{U}_k, k\right)}{\partial \mathbf{U}_k} + \left[\frac{\partial f^T\left(\mathbf{X}_k, \mathbf{U}_k, k\right)}{\partial U_k}\right]\boldsymbol{\lambda}_k = 0 \tag{2.9.1.14}$$

Приведемо інший метод використання дискретного принципу максимуму. Апроксимація різницею першого порядку обмеження у формі рівності дає

$$\mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{X}_k + Tf\left(\mathbf{X}_k, \mathbf{U}_k, k\right), \tag{2.9.1.15}$$

$$\mathbf{X}_{k_0} = \mathbf{X}_0 \tag{2.9.1.16}$$

В результаті дискретизації функції вартості отримуємо

$$J = T\sum_{k=k_0}^{k_f-1} F\left(\mathbf{X}_k, \mathbf{U}_k, k\right), \tag{2.9.1.17}$$

Таким чином для дискретного принципу максимуму гамільтоніан має вигляд

$$H_k = TF\left(\mathbf{X}_k, \mathbf{U}_k, k\right) + \boldsymbol{\lambda}_{k+1}^T\left[\mathbf{X}_k + T\ f\left(\mathbf{X}_k, \mathbf{U}_k, k\right)\right] \tag{2.9.1.18}$$

Вектор управління визначається з рівняння

$$\frac{\partial H_k}{\partial \mathbf{U}_k} = 0 = T\frac{\partial F\left(\mathbf{X}_k, \mathbf{U}_k, k\right)}{\partial \mathbf{U}_k} + T\left[\frac{\partial f^T\left(\mathbf{X}_k, \mathbf{U}_k, k\right)}{\partial \mathbf{U}_k}\right]\boldsymbol{\lambda}_{k+1} \tag{2.9.1.19}$$

Спряжене рівняння та відповідна умова трансверсальності мають вигляд

$$\boldsymbol{\lambda}_k = \frac{\partial H_k}{\partial \mathbf{X}_k} = T\frac{\partial F\left(\mathbf{X}_k, \mathbf{U}_k, k\right)}{\partial \mathbf{X}_k} + \left[I + T\frac{\partial f^T\left(\mathbf{X}_k, \mathbf{U}_k, k\right)}{\partial \mathbf{X}_k}\right]\boldsymbol{\lambda}_{k+1} \tag{2.9.1.20}$$

$$\boldsymbol{\lambda}_{k_f} = 0 \tag{2.9.1.21}$$

Таким чином необхідно вирішити рівняння (2.9.1.15) та (2.9.1.20), котрі представляють дискретні нелінійні різницеві рівняння з двокрапковою краєвою умовою. Граничні умови задані рівняннями (2.9.1.16) та (2.9.1.21) і рівнянням зв’язку (2.9.1.19). Очевидно, що ці рівняння не ідентичні рівнянням, отриманим після дискретизації безперервної нелінійної ДККЗ (рівняння (2.9.1.10) та (2.9.1.14)). Обмеження у формі рівнянь (2.9.1.10) та (2.9.1.15), і початкові умови (2.9.1.12) та (2.9.1.16) однакові, як і умови на кінці. Недивлячись на схожість спряжене рівняння та рівняння зв’язку різні. Якщо член $\boldsymbol{\lambda}_{k+1}$ в рівнянні зв’язку (2.9.1.19) замінити на $\boldsymbol{\lambda}_k$, то два рівняння зв’язку будуть однакові. Для «достатньо малого» періоду квантовання це не така вже й нераціональна апроксимація, оскільки $\boldsymbol{\lambda}_k$ не буде сильно змінюватись від одного кроку до другого.

Контрольні запитання до розділу 2.

1. Принцип максимуму. Канонічні рівняння Гамільтона. Умови трансверсальності.
2. Властивості функції Гамільтона.
3. Умови трансверсальності для задачі Больца при невизначеному моменті досягнення.
4. Принцип максимуму при наявності обмежень у формі нерівностей на керування.
5. Синтез оптимальних П і ПІ регуляторів з використанням принципу максимуму.
6. Аналітичне рішення задачі про мінімальнийчас.
7. Теорема про n інтервалів керування.
8. Сінгулярні випадки. Способи виключення сінгулярного розв′язку.
9. Необхідні умови оптимальності при використанні дискретного принципу максимуму.
10. Дискретне матричне рівняння Ріккаті і способи його рішення.

3. Розрахункові методи в задачах оптимального керування

3.1. Застосування градієнтних методів для розв'язання задач оптимального керування

Для лінійних систем з квадратичними функціями вартості отримана двоточкова крайова задача (ДТКЗ), яка є лінійною та може бути розв'язана шляхом використання принципу суперпозицій або шляхом переходу до нелінійного рівняння Ріккати, яке має обмеження лише у кінцевий момент часу. Для нелінійних систем відповідні ДТКЗ є нелінійними. Для розв'язання таких задач у загальному випадку повинні використовуватись ітеративні методи, наприклад градієнтні. Для нелінійних систем керування у загальному випадку неможливо оптимальний закон регулювання подати у вигляді добутку вектора стану та залежного від часу коефіцієнту підсилення. Більш того, оптимальне керування звичайно залежить, причому нелінійно, від початкового значення $\mathbf{X}(t_0)$ вектора стану. Це означає, що для більшості нелінійних систем керування доступними виявляються тільки такі закони керування, які не мають петлі зворотнього зв'язку.

Будемо мінімізувати функціонал

$$\mathbf{I} = G[\mathbf{X}(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} F[\mathbf{X(t)}, \mathbf{U}(t), t]dt \tag{3.1.1}$$

для системи

$$\mathbf{X}' = f[\mathbf{X}(t), \mathbf{U}(t), t], \ \mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0 \tag{3. 1.2}$$

Почнемо з визначення гамільтоніана

$$\mathbf{H}[\mathbf{X}(t), \mathbf{U}(t), \boldsymbol{\lambda}(t), t] = F[\mathbf{X}(t), \mathbf{U}(t), t] + \lambda^T(t) f[\mathbf{X}(t), \mathbf{U}(t), t] \tag{3.1.3}$$

Потім вважаємо умову:

$$\frac{\partial \ \mathbf{H}}{\partial \ \mathbf{X}} = -\lambda' = \frac{\partial \ \mathbf{F(X,U,t)}}{\partial \ \mathbf{X}} + \left[\frac{\partial \ \mathbf{f^T(X,U,t)}}{\partial \ \mathbf{X}}\right] \lambda(t); \tag{3.1.4}$$

з граничною умовою

$$\lambda(t_f) = \frac{\partial \; G[\mathbf{X}(t_f), t_f]}{\partial \; \mathbf{X}(t_f)}; \qquad (3.1.5)$$

Отже, необхідно мінімізувати визначений гамільтоніан шляхом вибору значення **U.** В таких випадках, коли будь-яке керування є припустимим, вихідним є рівняння

$$\frac{\partial \; \mathbf{H}}{\partial \; \mathbf{U}} = 0 = \frac{\partial \; F(\mathbf{X},\mathbf{U},t)}{\partial \; \mathbf{U}} + \frac{\partial \; f^T(\mathbf{X},\mathbf{U},t)}{\partial \; \mathbf{U}} \; \lambda \; (t) \qquad (3.1.6)$$

Виберемо деяке керування замість невідомого оптимального керування; при цьому, звичайно, не буде виконуватись умова d**H**/d**U**=0. Задане обмеження у формі системи дифференційних рівняннь (3.1.2) будемо розв'язувати відносно **X** при цьому вибраному керуванні **U**; будемо також розв'язувати приєднану систему (3.1.4) в зворотньому часі від t_f до t_o з граничними умовами (3.1.5). Приріст першого порядку функції вартості (3.1.1) при відхиленні керування на Δ**U**(t) від значення **U**(t), як це неважко помітити з (3.1.4), можно записати у вигляді :

$$\Delta \mathbf{I} = \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \frac{\partial \; \mathbf{H}[\mathbf{X}(t), \mathbf{U}(t), \lambda(t), t]}{\partial \; \mathbf{U}(t)} \right\}^T \Delta \mathbf{U}(t) dt; \qquad (3.1.7)$$

Якщо бажано забезпечити одержання найбільшого змінення Δ**I**, потрібно обчислити градієнт ∂**H**/∂**U** і потім приріст Δ**U** вибрати таким чином, щоб він був протилежним напрямку цього градієнту

$$\Delta \mathbf{U}(t) = -k(t) \frac{\partial \; \mathbf{H}[\mathbf{X}(t), \mathbf{U}(t), \lambda \; (t), t]}{\partial \; \mathbf{U}(t)} \qquad (3.1.8)$$

Відзначимо, що таке змінення забезпечує менше значення **I** при k(t)>0, що і потрібно, тому що необхідно забезпечити мінімум значення **I**. Щоб почати пошук оптимального рішення, припустимо, що маємо деяке неоптимальне керування $U^N(t)$. В результаті розв'язку (3.1.2) знайдемо

$X^N(t)$, а із (3.1.4) з граничними умовами (3.1.5) отримаємо $\boldsymbol{\lambda}^N(t)$. Потім у відвідності з (3.1.6) визначаємо вираз для $\partial \mathbf{H}/\partial \mathbf{U}^N(t)$, котрий приймає вигляд

$$\frac{\partial \; \mathbf{H}}{\partial \; \mathbf{U}^\mathbf{N}} = \frac{\partial \; F(\mathbf{X}^\mathbf{N},\mathbf{U}^N,t)}{\partial \; \mathbf{U}^N} + \frac{\partial \; f^T(\mathbf{X}^\mathbf{N},\mathbf{U}^\mathbf{N},t)}{\partial \; \mathbf{U}^N} \boldsymbol{\lambda}^{\;N} \qquad (3.1.9)$$

Після цього за (3.1.8) визначаємо приріст $\Delta\mathbf{U}(t)$, де k(t) - невід'ємна функція часу. Перший приріст $\Delta\mathbf{I}^N$ функції **I**, якщо він є необхідним, обчислюється за формулою (3.1.7). Нове значення $\mathbf{U}^{N+1}(t)$ керування **U** обчислюється звичайним чином *:*

$$\mathbf{U}^{N+1}(t)=\mathbf{U}^{N}(t)+\Delta\mathbf{U}^{N}(t) \qquad (3.1.10)$$

Ця процедура повторюється доти, поки або керування, або функція вартості стануть змінюватись лише незначно від ітерації до ітерації.Викладену послідовність обчислень з використанням градієнтного методу першого порядку в задачі з неперервним часом можна представити так :

1. Визначаємо гамільтоніан

$\mathbf{H}=F[\mathbf{X}(t),\mathbf{U}(t),t]+\boldsymbol{\lambda}^T(t)f[\mathbf{X}(t),\mathbf{U}(t),t]$

2. Вибираємо початкове значення $\mathbf{U}(t)$,$\mathbf{X}(t_0)$

3. Для значень $\mathbf{U}^N(t)$ та $\mathbf{X}^N(t_0)$, які ми маємо, знаходимо $\mathbf{X}^N(t)$ як розв'язок системи (3.1.2).

4. У зворотньому часі вирішуємо систему приєднаних рівнянь

$$\boldsymbol{\lambda}'^N = -\frac{\partial\ \mathbf{H}}{\partial\ \mathbf{X}^N(t)};\ \boldsymbol{\lambda}^{\mathbf{N}}(t_f) = \frac{\partial\ G[\mathbf{X}^{\mathbf{N}}(t_f)]}{\partial\ \mathbf{X}^N(t_f)};$$

5. Знаходимо приріст керування

$$\Delta\mathbf{U}^N(t) = -k^N \frac{\partial\mathbf{H}}{\partial\mathbf{U}^N(t)}$$

6. Обчислюємо чергове значення керування

$$\mathbf{U}^{N+1}(t) = \mathbf{U}^{\mathbf{N}}\mathbf{(t)} + \Delta\mathbf{U}^N(t)$$

7. Повторюємо обчислення, починаючи з п.3. Обчислення повторюються доти, поки зміни керування від ітерації до ітерації не стануть незначними. Узагальнимо знайдені співвідношення для випадку, коли на деякі складові вектора стану накладені обмеження у фіксований кінцевий момент часу. Для цього розглянемо задачу мінімізації функції часу

$$\mathbf{I} = G[\mathbf{X}(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} F[\mathbf{X(t)}, \mathbf{U}(t), t]dt \qquad (3.1.11)$$

для системи, задано рівнянням

$$\mathbf{X}^{-1}=f[\mathbf{X}(t),\mathbf{U}(t),t]; \qquad \mathbf{X}(t_0)=\mathbf{X}_0 \qquad (3.1.12)$$

Фінальні значення деяких складових вектора стану фіксовані шляхом введення обмеження у формі q-мірного векторного рівняння

$$N[\mathbf{X}(t_f),t_f]=0 \qquad (3.1.13)$$

Можна сформулювати принцип максимуму для ціє задачі та одержати в результаті звичайним способом градієнтну процедуру. Головні труднощі при цьому полягають у тому, що розв'язок $\mathbf{X}^N(t)$ рівняння (3.1.12) при заданому законі керування $U^N(t)$ не буде задовольняти умові (3.1.13). Тому обмеження (3.1.13) треба ввести в градієнтну процедуру. Для того, щоб одержати розв'язок цієї задачі з фіксованим кінцевим значенням, можна скористатися методом функції штрафів. Для цього необхідно до функції вартості (3.1.11) додати штраф за порушення обмеження, що визначає кінцеве значення вектора стану. Таким чином, мінімізації підлягає значення нової функції вартості:

$$\mathbf{I} = \mathbf{N}^T[\mathbf{X}(t_f), t_f]\theta\mathbf{N}[\mathbf{X}(t_f), t_f] - \boldsymbol{G}[\mathbf{X}(t_f), t_f] + \int_{t_0}^{t_f} F[\mathbf{X(t)}, \mathbf{U}(t), t]dt; \qquad (3.1.14)$$

з обмеженням у формі рівності :

$$\mathbf{X}'=f[\mathbf{X}(t),\mathbf{U}(t),t], \qquad \mathbf{X}(t_0)=\mathbf{X}_0 \qquad (3.1.15)$$

Тут θ - додатньо визначена діагональна вагова матриця. При цьому очікується, що при необмеженому збільшенні θ наслідки порушення обмеження N=0 будуть ставати більш незначними. Невирішеною тут залишається така проблема : яким великим має бути значення θ ? У загальному випадку відповідь може бути отримана тільки на основі числових розрахунків. Градієнтні методи можна використовувати для розв'язання задач з нефіксованим кінцевим моментом часу та з обмеженнями на змінні стану або керування у формі нерівності. Рівняння, до яких приводить принцип максимуму при розв'язанні задач із змінним кінцевим моментом часу, мають наступні співвідношення (з невідомим значенням t_f)

$$H[\mathbf{X}(t_f),\mathbf{U}(t_f),\lambda(t_f),t_f]+\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t_f}+\frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial t_f}\nu=0$$

$$\mathbf{I}(t_f)=\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{X}(\mathbf{t_f})}+\frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial \mathbf{X}(t_f)}\nu=0; \tag{3.1.17}$$

$$N[\mathbf{X}(t_f),t_f]=0;$$

При кожній ітерації градієнтної процедури неможливо ввести умову $\mathbf{N}[\mathbf{X}(t_f),t_f]=0$ навіть для фіксованого значення t_f. Можливо врахувати це кінцеве обмеження у формі рівняння шляхом введення штрафів, після чого в переформульованій задачі вважати, що подібне кінцеве обмеження у формі рівняння відсутнє. Аналогічно рівняння (3.1.16) та (3.1.17) не можуть бути використані безпосередньо у градієнтній процедурі тому, що для визначення **H** відповідні спряжені рівняння необхідно інтегрувати у зворотньому часі від моменту t_f, а цей момент невідомий доти, поки не буде розв'язане рівняння (3.1.16).

Оскільки кінцевий момент часу невизначений, пропонується вибирати таке його значення, при якому функція вартості мінімальна по цій змінній, тобто $d\mathbf{I}/dt=0$. Може бути, що момент часу, визначений із умови $d\mathbf{I}/dt=0$, не є кінцевим і максимізує значення функці вартості, а не мінімізує його. Якщо виникають такі сумніви, можна знайти знак другої похідної $d^2\mathbf{I}/dt^2\mathbf{I}$ для точки, де $d\mathbf{I}/dt=0$. Таким чином, вихідну задачу мінімізаці функції вартості

$$\mathbf{I}=G[\mathbf{X}(t_f),t_f]+\int_{t_0}^{t_f}F[\mathbf{X}(t),\mathbf{U}(t),t]dt; \tag{3.1.19}$$

для системи

$$\mathbf{X}'=f[\mathbf{X}(t),\mathbf{U}(t),t]; \quad \mathbf{X}(t_0)=\mathbf{X}_0 \tag{3.1.20}$$

з кінцевими значеннями

$$\mathbf{N}[\mathbf{X}(t_f),t_f]=0 \tag{3.1.21}$$

де t_f - не визначено, треба переформулювати в іншу задачу, тобто: потрібно розглянути задачу мінімізації модифікованої функції вартості :

$$\mathbf{I}'=\frac{1}{2}\left\|N[\mathbf{X}(t_f),t_f\right\|_0^2+G[\mathbf{X}(t_f),t_f]+\int_{t_0}^{t_f}F[\mathbf{X}(t),\mathbf{U}(t),t]dt \tag{3.1.22}$$

для систем, що описуються рівнянням (3.1.20),де t_f визначається з рівняння (3.1.23)

$$\frac{\mathbf{dI}}{\mathbf{dt_f}} = 0 = \left\{ \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial t_f} + \left[\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \mathbf{X}(t_f)} \right]^T \mathbf{X}'(t_f) \right\} \theta \mathbf{N} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t_f} + \left[\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{X}(t_f)} \right]^T \mathbf{X}'(t_f) + F[\mathbf{X}(t_f), \mathbf{U}(t_f), t_f];$$

(3.1.23)

Необхідні обчислення при цьому виконуються звичайним чином як для градієнтної процедури у функціональному просторі, описано раніше. Розглянемо градієнтні процедури з обмеженими на керування у формі нерівності :

$$g[\mathbf{X}(t), \mathbf{U}(t), t] \geq 0 \tag{3.1.24}$$

та на змінні стану

$$h[\mathbf{X}(t), t] \geq 0 \tag{3.1.25}$$

Можливий спосіб урахування подібних обмежень полягає в тому, щоб перетворити їх у еквівалентні обмеження у формі рівняннь. Наприклад, обмеження (3.1.24) можна замінити таким :

$$(y_i)^2 = g_i[\mathbf{X}(t), \mathbf{U}(t), t], \qquad i = 1,2,3,\ldots,r; \tag{3.1.26}$$

яке приводить до того, що y_i буде більше або дорівнювати нулю тому, що величина $(y_i)^2$ невід'ємна. Змінна y_i розглядається як додаткова змінна керування, далі задача розв'язується звичайним чином. Тут немає можливості використати це рівняння безпосередньо тому, що неможливо для g_i забезпечити значення більше нуля. Маємо деяке значення $\mathbf{U}^N$ і розв'язуємо рівняння $\mathbf{X}'^N=f^N$, щоб знайти $\mathbf{X}^N$, яке визначає значення g. Проте можна ввести штраф за порушення цієї нерівності. В результаті рівняння (3.1.26) замінюється штрафом у функції вартості, тому одержуємо

$$\mathbf{I} = \ldots + \int_{t_0}^{t_f} \sum_{i=1}^{r} \left| g_i[\mathbf{X}(t), \mathbf{U}(t), t] \right|^P \mathbf{H}(g_i) dt + \ldots \tag{3.1.27}$$

Тут P - будь-яке додатнє число, яке повинно бути вибране, $H(g_i)$ - ступінчаста функція, визначена співвідношенням:

$$\mathbf{H}(g_i) = \begin{cases} 0 & g_i \ge 0 \\ k_i & g_i < 0 \end{cases} \qquad (3.1.28)$$

Шляхом вибору значень **P** та K_i можна змінювати значення штрафу за порушення обмеження на керування у формі нерівності. Врахування обмежень у формі нерівності на значення змінних стану здійснюється по-іншому, тобто замість рівняння (3.1.27) розглянемо диференційне рівняння

$\mathbf{x}'_{n+1}=f_{n+1}=|h_1(\mathbf{X},t)|^{P1}\mathbf{H}(h_1)+|h_2(\mathbf{X},t)|^{P2}\mathbf{H}(h_2)+...+|h_s(\mathbf{X},t)|^{Ps}\mathbf{H}(h_s)$, $\mathbf{X}_{\mathbf{n+1}}(t_0)=0$, $\mathbf{X}_{\mathbf{n+1}}(t_f)=0$. (3.1.29)

або диференційни рівняння

$$\begin{aligned} &\mathbf{x'}_{\mathbf{n+1}}=|h_1(\mathbf{X},t)|^{P1}\mathbf{H}(h_1),\ \mathbf{x}_{\mathbf{n+1}}(t_0)=0,\ \mathbf{x}_{\mathbf{n+1}}(t_f)=0 \\ &\mathbf{x'}_{\mathbf{n+2}}=|h_2(\mathbf{X},t)|^{P2}\mathbf{H}(h_2),\ \mathbf{x}_{\mathbf{n+2}}(t_0)=0,\ \mathbf{x}_{\mathbf{n+2}}(t_f)=0 \qquad (3.1.30) \\ &\text{---} \\ &\mathbf{x'}_{\mathbf{n+s}}=|h_s(\mathbf{X},t)|^{Ps}\mathbf{H}(h_s),\ \mathbf{x}_{\mathbf{n+s}}(t_0)=0,\ \mathbf{x}_{\mathbf{n+s}}(t_f)=0 \end{aligned}$$

Рівняння (3.1.29),(3.1.30) знову не можна використати у градієнтній процедурі, оскільки немає способу, який забезпечує виконання вказаних обмежень. Тому кінцеве значення змінних вводимо у функці штрафів; в результаті відповідну частину модифікованої функції вартості можна представити в один із способів:

$$\mathbf{I}=...+|\mathbf{x}_{n+1}(t_f)|^{P}\mathbf{K}+...,\ \mathbf{x}_{n+1}(t_0)=0, \qquad (3.1.31)$$

$$\mathbf{I} = ... + \sum_{i=1}^{s} |\,\mathbf{x}_{n+1}(t_f)\,|^{Pi}\,\mathbf{K}_i + ..., \mathbf{x}_{\mathbf{n+i}}(t_0) = 0, i = 1,2,..., s. \qquad (3.1.32)$$

Для зручності обчислень значення степенів P часто

приймають рівними 2, хоч це і не обов'язково. Після цього градієнтна процедура використовується звичайним способом.

Приклад 1.

Нехай система описується рівнянням: $x' = -x^2 + U$, $x(0)=10$

Потрібно знайти керування,котре забезпечить мінімальне значення функції вартості

$$I = \frac{1}{2}\int_0^1 (x^2 + U^2)dt$$

Знаходимо гамільтоніан

$$H = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}U^2 - \lambda x^2 + \lambda U$$

Приєднане рівняння приймає вигляд $\lambda' = -x + 2\lambda x$

з граничною умовою, а рівнняня для градієнта

$$\frac{\partial H}{\partial U} = U + \lambda$$

.

Візьмемо в якості початкового значення керування Приймаємо K=1 Для реалізації градієнтного методу виконаємо наступні обчислення.

1. Для рівняння, що маємо $U^N(t)$, $t\epsilon[0,1]$,знаходимо $x^N(t)$ шляхом розв'язання рівняння

$x'^N = -[x^N(t)]^2 + U^N(t)$, $x^N(0) = 10$

2. При знайденому $X^N(t)$ визначимо $\lambda^N(t)$ з рівняння

$\lambda'^N = -x^N(t) + 2\lambda^N(t)x^N(t)$, $\lambda^N(1) = 0$

3. Обчислюємо

$$\frac{\partial H}{\partial U^N} = U^N(t) + \lambda(t)$$

4.Знаходимо приріст $\Delta U^N(t)$ та зміну $\Delta \mathbf{I}^N$ по наступним формулам:

$$\Delta U^N(t) = -k\frac{\partial H}{\partial U^N} = -kU^N(t) - k\lambda^N(t)$$

$$\Delta I^N(t) = -k\int_0^1 \left[\frac{\partial H}{\partial U^N}\right]^2 dt = -k\int_0^1 \left[U^N(t) + \lambda^N(t)\right]^2 dt$$

5. Обчислюємо закон керування для наступної ітерації:

$U^{N+1}(t) = U^N(t) + \Delta U^N(t)$

6. Заміняємо $U^N(t)$ новим значенням та повторюємо обчислення, починаючи з пункта 1, до тих пір, поки прирощення $\Delta U^N(t)$ або $\Delta I^N(t)$ не стане досить малим від ітерації до ітерації.

Приклад 2.

Розглянемо розв'язок задачі про брахистохрон, тобто падіння частинки в постійному гравітаційному полі g в продовж фіксованого часу t_f з завданою початковою швидкістю $x_3(0)$. Необхідно встановити такий шлях частинки, при якому фінальне значення горизонтальної координати $x_1(t_f)$ виявиться найбільшим. Значення вертикальної координати $x_2(t)$ в фінальний момент часу невизначено. Необхідно знайти оптимальний шлях при наступному обмеженні в формі нерівності на значення змінних стану: $x_2 -0.4x_1 -0.2\leq 0$ для системи, що описується рівняннями:

$$x'_1=x_3\cos U,\quad X_1(0)=0$$

$$x'_2=x_3\sin U,\quad x_2(0)=0$$

$$x'_3=g\sin U,\quad x_3(0)=0.07195$$

$$g=1,\quad t_f=1.720$$

Перетворимо завдане в формі нерівності обмеження на змінні стану в диференційне рівняння,покладаючи що

$x'_4=[X_2(t)-0.4x_1(t)-0.2]^2H(0.2+0.4x_1-x_2)$, $x_4(0)=0$ де $H(g)=0$,коли $g>0$ та $H(g)=1$, коли $g<0$.

Тут не слід вважати $x_4(t_f)=0$ так як штраф вводиться в тому випадку, коли значення $x_4(t_f)$ більше нуля. Модифікована функція вартості має вигляд

$$Y=-X_1(t_f)+1/2SX^4{}_2(t_f),\quad t_f=1.720$$

Розрахунки з використаннам градієнтного методу виконуються звичайно.

Розглянемо розв'язки задачі про мінімізацію часу переведення нелінійної системи за допомогою градієнтного методу.

Приклад 3.

Нормалізоване рівняння динаміки та граничні умови приймались наступні:

$$x'_1=x_2,\quad x'_2=\frac{x_3^2}{x_1}-\frac{1}{x_1}+\frac{0.14\sin U}{1+0.075t},$$

$$x_3' = \frac{-x_2 x_3}{x_1} + \frac{0.14 \sin U}{1 + 0.075\,t},$$

$x_1(t_0)=1$, $x_2(t_0)=0$, $x_3(t_0)=1$,

$x_1(t_f)=1.525$, $x_2(t_f)=0$, $x_3(t_f)=0.8098$

В якості функції вартості для данної задачі з додаванням функції штрафів можна вибрати наступною:

$I=t_f+1/2S_{11}[x_1(t_f)1.525]^2x'_1(t_f)+S_{22}(x_2(t_f))^2x'_1(t_f)+S_{33}[x_3(t_f)-0.8098]$

Рівнняння для визначення часу переходу при цьому приймає вигляд:

$$\frac{\partial I}{\partial t_f} = 0=1+S_{11}[x_1(t_f)-1.525]x'_1(t_f)+S_{22}x_2(t_f)x'_2(t_f)+S_{33}[x_3(t_f)-0.8098]x'_3(t_f)$$

де всі похідні визначені вище.

Розв'язок задачі починаємо з введення припущення, що початкове керування має вигляд U (t), для цього керування визна чаємо початкову траєкторію X (t) та розраховуємо похідну вартості dY/dt_f. Момент проходження цієї похідної через нуль (при умові, що друга похідна при цьому додатня) приймається в якості фінального часу на першій ітерації. З цим отриманим фінальним моментом t_f і знайденим значенням X (t) вирішуємо відповідні спряженні рівняння в зворотньому часі від t_f до t_0 з фінальними умовами:

$[\lambda^0(t_f)]^T=[S_{11}(x_1(t_f)-1.525),\ S_{22}x_2(t_f),\ S_{22}(x_3(t_f)-0.8098)]$

В результаті отримуємо усі необхідні дані для розрахунку градієнту dH/dU^0 і визначення приросту керування

$$\Delta U^0(t)=-k\left[\frac{\partial H}{\partial U^0}\right]$$

Закон керування для наступного кроку знаходиться звичайним способом:

$U^\lambda(t)=U^0(t)+\Delta U^0(t)$

Цей процес обчисленнь повторюється декілька разів, поки не буде забезпечена збіжність до оптимального розв'язку. Використання данної градієнтної схеми спряженне з труднощами визначення кінця обчислень, так як збіжність процедури може виявитись повільною при приближенні траєкторії та керування до оптимальних.

Приклад 4.

Використаємо метод функції штрафів при градієнтному методі пошуку екстремума для розрахунку керування та траєкторії при переведенні лінійної системи $x'_1=x_2(t)$, $x_2=U(t)$, $|U(t)|\le 1$, з стану $x_1(0)=10$, $x_2(0)=0$ в початок координат $x_1(t_f)=x_2(t_f)=0$ за мінімальний час. Ця задача розв'язується як задача мінімалізації функції вартості

$$I=\frac{1}{2}S_{11}x^2{}_1(t_f)+\frac{1}{2}S_{12}x^2{}_2(t_f)+t_f+\frac{1}{2}\int_0^{t_f}Q\,[U^2(t)-1]H[1-U^2(t)]dt$$

Рівняння для вектора стану, приєднані рівняння, а також вираз для $\frac{\partial H}{\partial U}$ мають вигляд:

$$\mathbf{X}'^N=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\mathbf{X}^N(t)+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}U^N(t),\ \ \mathbf{X}^N(0)=\begin{bmatrix}10\\ 0\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\lambda}'^N=-\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{\lambda}^N(t),\ \ \boldsymbol{\lambda}^N(t_f)=\begin{bmatrix}S_{11} & X_1^N(t_f)\\ S_{22} & X_2^N(t_f)\end{bmatrix};$$

$$\frac{\partial H}{\partial U^N}=\lambda^N{}_2(t)-QU^N(t)H(1-[U^N(t)]^2)$$

Крім того, так як фінальний момент часу невідомий, для його визначення маємо додаткові співвідношення $H+dG/dt_f=0$. Таким чином

$$\lambda^N{}_1(t_f)x^N{}_2(t_f)+\lambda^N{}_2(t_f)U(t_f)+1/2Q\{[U^N(t_f)]^2-1\}H\{1-[U^N(t_f)]^2\}$$

В якості критерія зупинки ітераційного процесу використовуємо:

$$\frac{dI^N}{dt_f}=0=S_{11}x^N{}_1(t_f)x'^N{}_1(t_f)+S_{22}x^N{}_2(t_f)x'^N{}_2(t)+1+1/2Q\{[U^N(t_f)]^2-1\},\qquad \{[1-U^N(t_f)]^2\}$$

Припустимо, що в якості початкового вибрали керування $U^0=-1$. Розв'язуючи відповідну систему рівняннь, отримаємо:

$U^0(t)=-1,\ x^0{}_1(t)=10-\frac{t^2}{2},\ x^0{}_2(t)=-t,\ 0<t<\sqrt{10}$

Припустимо, що це керування використовується на інтервалі часу тривалістю $\sqrt{10}$ c , потім керування змінюється та приймає значення +1. Рівняння для керування та вектора стану при цьому приймуть вигляд:

$U^0(t)=1,\ x^0{}_1(t)=(t-2\sqrt{10})^2/2,\ x_2{}^0(t)=1-2\sqrt{10},\ t>\sqrt{10}$

Похідні по часу функції вартості, що розглядаємо записується наступним чином:

$$\frac{d\mathrm{I}^0}{dt}=S_{11}\left(\frac{t^2}{2}-10t\right)+S_{22}t+1,\ 0<t<\sqrt{10}$$

$$\frac{d\mathrm{I}^0}{dt}=S_{11}(t-2\sqrt{10})^3/2+S_{22}(t-2\sqrt{10})+1,\ t<\sqrt{10}$$

Значення t при якому похідна дорівнює нулю, може бути прийняте в якості значення фінального момента часу. Коли початкове керування не співпадає з оптимальним, значення вектору стану в знайдений фінальний момент часу не є нульовим, тоді розв'язуємо приєднані рівняння:

$\lambda'_1=0,\ \lambda'_2=-l_1=(t),\ \lambda^0{}_1(t_f)=S_{11}x^0{}_1(t_f),\quad \lambda^0{}_2(t_f)=S_{22}x^0{}_2(t_f)$

в зворотньому часі від t_f до 0. Після чого визначаємо числове значення градієнта dH/dU^0 та знайдемо наступне значення керування:

$$U'(t)=U^0(t)=k\left[\frac{\partial H}{\partial U^0(t)}\right]$$

Цей процес розрахунків повторюється доки, доти не буде забеспечений малий приріст керуваннь.

3.2. Оптимальне управління системами з розподіленими параметрами

Як модель об'єкта управління візьмемо рівняння з частинними похідними:

$$A\left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t}\right)=f\left[\mathbf{X},\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial z},\frac{\partial^2 \mathbf{X}}{\partial z^2},\mathbf{U}\right],\begin{cases}0\le t\le t_f\\ 0\le z\le L\end{cases} \tag{3.2.1}$$

де **X**(z, t) - розподілений стан, n-мірний вектор, **U**(z, t) - розподілене управління, m-мірний вектор,

А - матриця розмірністю (nxn).

Обмежимося для простоти випадком двох незалежних змінних, $0\le t\le t_f, 0\le z\le L,$ поскільки перехід до більш високих розмірностей не зв*язаний з якими-небуть принциповими ускладненнями .

Рівнянням типу (3.2.1) можна описати цілий ряд реальних технологічних процесів, наприклад процес сушки пористих матеріалів, процеси в хімічних реакторах, процес нагріву.

Крайові умови визначаються конкретним фізичним змістом задач, що вирішуються;

початкові умови, як правило, задаються у вигляді фіксованого початкового стану (розподілу).

$$X(z,0)=W(z) \tag{3.2.2}$$

яке може бути іноді використане як керуючий вплив. (Так в задачі нагріву, початковим розподілом температури можна управляти шляхом попереднього нагріву).

Граничні умови можуть мати різну структуру. Будемо розглядати три типи граничних умов, що застосовуються в задачах оптимального управління:

Тип 1. Деякі змінні стану x_s задовільняють умовам :

$$\left.\left(\frac{\partial x_S}{\partial z}\right)\right|_{Z=0}=g_S(\mathbf{X},\mathbf{V}(t)), \tag{3.2.3а}$$

$$\left.\left(\frac{\partial x_S}{\partial z}\right)\right|_{z=L}=h_S(\mathbf{X},\mathbf{Y}(t)). \tag{3.2.3б}$$

У такій формі часто задається конвективний або променистий потік тепла на кордонах системи.

Тип 2. Другі змінні стану x_f задовільняють умовам:

$$\chi_r(0,t) = const, \tag{3.2.3в}$$

$$\chi_r(L,t) = const. \tag{3.2.3г}$$

Тип 3. Нарешті , треті змінні стану χ_p , задовільняють умовам :

$$x_p(0,t) = V_p(t) \tag{3.2.4а}$$

$$x_p(L,t) = Y_p(t) \tag{3.2.4б}$$

де **V**(t), **Y**(t) - відповідно керуючі впливи, прикладені відповідно z=0, z=L.

Координати вектора стану, підлеглі граничним умовам

типу 1 означаємо індексом s

типу 2 означаємо індексом r

типу 3 означаємо індексом p.

Задача оптимального управління для прогресу, що задається рівнянням (3.2.1) і крайовими умовами (3.2.2)-(3.2.4) може бути сформульована як задача мінімізації (максимізації) функціонала якості I вибором управлінь **U**(z, t), **V**(t), **Y**(t), **W**(z), де

$$I[\mathbf{U}(z,t),\mathbf{V}(t),\mathbf{Y}(t),\mathbf{W}(z)] = \int_0^L G_1[\mathbf{X}(t_f,z),\mathbf{W}(z)]dz +$$
$$+\int_0^{t_f} G_2[\mathbf{X}(L,t),\mathbf{X}(0,t),\mathbf{Y},\mathbf{V}]dt + \int_0^L\int_0^{t_f} G\left[\mathbf{X},\mathbf{U},\left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial z}\right),\left(\frac{\partial^2 \mathbf{X}}{\partial z^2}\right)\right]dtdz \tag{3.2.5}$$

<u>Необхідні умови оптимальності</u>

Також як і в випадку звичайних диф. рівнянь , припустимо, що нам відома сукупність підозрілих на оптимальність управлінь $\mathbf{U}(z,t),\mathbf{V}(t),\mathbf{Y}(t),\mathbf{W}(t)$. Розкладаючи (3.2.1) в степеневий ряд в околі оптимальної траєкторії і откидуючи члени розкладу выще першого порядку малості отримаємо рівняння в варіаціях :

$$A_{ij}\frac{\partial(\delta x_j)}{\partial t}=\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)\delta x_j+\left(\frac{\partial f_i}{\partial U_k}\right)\delta U_k+\left(\frac{\partial f_i}{\partial x'_j}\right)\delta x'_j+\left(\frac{\partial f_i}{\partial x''_j}\right)\delta x''_j \qquad (3.2.6)$$

де $x'_j=\frac{\partial x_j}{\partial z}, x''_j=\frac{\partial^2 x_j}{\partial z^2}$, а наявність двічі повтореного індексу в якому-небуть доданку означає додавання по цьому індексу. $\frac{\partial f_i}{\partial x_k}\delta x_k\equiv\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x_k}\delta x_k=\frac{\partial f_i}{\partial x_1}\delta x_1+\frac{\partial f_i}{\partial x_2}\delta x_2+\ldots+\frac{\partial f_i}{\partial x_n}\delta x_n.$

Відповідно до цих позначень рівняння (6) можна записати у вигляді:

$$A_{ij}\frac{\partial(\partial x_j)}{\partial t}=\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_k}\right)\delta x_k+\left(\frac{\partial f}{\partial U_k}\right)\delta U_k+\left(\frac{\partial f_i}{\partial x'_j}\right)\left[\frac{\partial(\delta x_j)}{\partial z}\right]+\left[\frac{\partial f_i}{\partial x''_j}\right]\frac{\partial^2(\delta x_j)}{\partial z^2}$$

(3.2.7)

Аналогічно для варіації критерію оптимальності отримаємо:

$$\delta I=\int_0^L\left\{\left[\frac{\partial G_1}{\partial x_k(z,t_f)}\right]\delta x_k(z,t_f)+\left[\frac{\partial G_1}{\partial w_j(z)}\right]\delta w_j(z)\right\}dz+ \qquad (3.2.8)$$

$$+\int_0^{t_f}\left\{\left[\frac{\partial G_2}{\partial x_k(L,t)}\right]\delta x_k(L,t)+\left[\frac{\partial G_2}{\partial x_k(0,t)}\right]\delta x_k(0,t)+\left(\frac{\partial G_2}{\partial y_j(t)}\right)\delta y_j(t)+\left[\frac{\partial G_2}{\partial V_j(t)}\right]\delta V_j(t)\right\}dt+$$

$$+\int_0^{t_f}\int_0^L\left\{\left(\frac{\partial G}{\partial x_k}\right)\delta x_k+\left(\frac{\partial G}{\partial U_i}\right)\partial U_i+\left[\frac{\partial G}{\partial(x'_j)}\right]\frac{\partial(\delta x_j)}{\partial z}+\left[\frac{\partial G}{\partial x''_j}\right]\frac{\partial^2(\delta x_j)}{\partial z^2}\right\}dzdt$$

Введемо розподілені зв'язані змінні або множники Лагранжа за допомогою виразу:

$$\int_0^{t_f}\int_0^L(\lambda_i(z,t))\left\{A_{ij}\frac{\partial(\delta x_j)}{dt}-\left(\frac{\delta f_i}{\partial x_k}\right)\delta x_k-\left(\frac{\partial f_i}{\partial U_k}\right)\delta U_k-\left[\frac{\partial f_i}{\partial x'_j}\right]*\right.$$

$$\left.\frac{\partial\left(\delta x_j\right)}{\partial z}-\left[\frac{\partial f_i}{\partial\left(x_j^{//}\right)}\right]\frac{\partial^2\left(\delta x_j\right)}{\partial z^2}\right\}\Bigg)dzdt=0 \tag{3.2.9}$$

Враховуючи (3.2.9) із (3.2.8) отримаємо для δI

$$\delta I=\int_0^{t_f}\left\{\left[\frac{\partial G_2}{\partial x_k(L,t)}\right]\delta x_k(L,t)+\left[\frac{\partial G_2}{\partial x_k(0,t)}\right]\delta x_k(0,t)+\right.$$

$$\left.+\left[\frac{\partial G_2}{\partial y_j(t)}\right]\delta y_j(t)+\left[\frac{\partial G_2}{\partial V_j(t)}\right]\delta V_j(t)\right\}dt+\int_0^L\left\{\left[\frac{\partial G_1}{\partial x_k\left(z,t_f\right)}\right]\delta x_k\left(z,t_f\right)+\right.$$

$$\left.+\left[\frac{\partial G_1}{\partial w_j(z)}\right]\delta\omega_j(z)\right\}dz+\int_0^{t_f}\int_0^L\left(\frac{\partial H}{\partial x_k}\right)\delta x_k+\left(\frac{\partial H}{\partial U_i}\right)\delta U_i+\left[\frac{\partial H}{\partial\left(x_j^{/}\right)}\right]\frac{\partial\left(\delta x_j\right)}{\partial z}+$$

$$\left.+\left[\frac{\partial H}{\partial\left(x_j^{//}\right)}\right]\frac{\partial^2\left(\delta x_j\right)}{\partial z^2}-\lambda_i\left[A_{ij}\frac{\partial\left(\delta x_j\right)}{dt}\right]\right\}dzdt \tag{3.2.10}$$

де гамільтоніан H визначається по формулі:

$$H=G+\lambda_i f_i \tag{3.2.11}$$

Проінтегруємо за частинами три останніх доданки в третьому підінтегральному виразі (3.2.10):

$$\int_0^{t_f}\int_0^L\left[\frac{\partial H}{\partial x_j^{/}}\ \frac{\partial\left(\delta x_j\right)}{\partial z}\right]dzdt=\int_0^{t_f}\left\{\frac{\partial H}{\partial x_j^{/}}\delta x_j\Bigg|_0^L-\int_0^L\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial H}{\partial x_j^{/}}\right)\delta x_j dz\right\}dt \tag{3.2.12}$$

$$\int_0^{t_f}\int_0^L\left[\frac{\partial H}{\partial(x_j^{//})}.\frac{\partial^2\left(\delta x_j\right)}{\partial z^2}\right]dzdt=\int_0^{t_f}\left\{\frac{\partial H}{\partial\left(x_j^{//}\right)}\frac{\partial\left(\delta x_j\right)}{\partial z}\Bigg|_0^L-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial H}{\partial x_j^{//}}\right)\delta x_j\Big|_0^L+\int_0^L\frac{\partial^2\left(\partial H/\partial x_j^{//}\right)}{\partial z^2}\{\delta x dz\}\right\}dt$$

(3.2.13)

$$\int_0^{t_f}\int_0^L \lambda_i\left[A_{ij}\frac{\partial(\delta x_j)}{\partial t}\right]dtdz=\int_0^L\left\{\lambda_i A_{ij}\delta x_j\Big|_0^{t_f}-\int_0^{t_f}\frac{\partial(\lambda_i A_{ij})}{\partial t}\delta x_j dt\right\}dz \qquad (3.2.14)$$

Підставляючи (3.2.12) - (3.2.14) в (3.2.10), отримаємо

$$\partial I=\int_0^{t_f}\int_0^L\left(\left\{\left[\left(\frac{\partial H}{\partial x_k}\right)-\frac{\partial\left(\partial H/\partial x_k\right)}{\partial z}+\frac{\partial^2\left(\partial H/\partial x_k'\right)}{\partial z^2}+\frac{\partial(\lambda_i A_{ik})}{\partial t}\right]\delta x_k\right\}+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial H}{\partial U_i}\right)\delta U_i\right)dzdt+\int_0^{t_f}\left(\left\{\left[\frac{\partial G_2}{\partial x_K(L,t)}\right]+\left(\frac{\partial H}{\partial x_K'}\right)-\frac{\partial\left(\partial H/\partial x_K''\right)}{\partial z}\right\}\delta x_K(L,t)+\right.$$

$$+\left(\frac{\partial G_2}{\partial y_j}\right)\delta.y_j(t)+\left[\frac{\partial G_2}{\partial V_j(t)}\right]\delta V_j(t)+\left[\frac{\partial H}{\partial(x_j'')}\right]\left[\frac{\partial(\partial x_j)}{\partial Z}\right]\Bigg|_0^L+$$

$$\left.+\left\{\left[\frac{\partial G_2}{\partial x_j(0,t)}\right]-\left(\frac{\partial H}{\partial x_j''}\right)+\frac{\partial}{\partial Z}\left(\frac{\partial H}{\partial x_j''}\right)\right\}\delta x_j(0,t)\right)dt+$$

$$+\int_0^L\left(\left\{\left[\frac{\partial G_1}{\partial x_k(t_f,z)}\right]-\lambda_i A_{ik}\right\}\delta x_k(z,t_f)+\left\{\left[\frac{\partial G_1}{\partial\omega_k(z)}\right]+\lambda_i A_{ik}\right\}\delta\,\omega_k(z)\right)dz \qquad (3.2.15)$$

Із (3.2.15) зрозуміло, що явна залежність δI від $\delta.\mathbf{x}(z,t)$ зникає, якщо $\lambda_i(z,t)$ задовільняє умові:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\lambda_i A_{ik})=-\left[\left(\frac{\partial H}{\partial x_k}\right)-\frac{\partial\left(\partial H/\partial x_k'\right)}{\partial z}+\frac{\partial^2\left(\partial H/\partial x_k''\right)}{\partial z^2}\right],\ \text{k=1,2,...,п.}$$

(3.2.16)

так як при цьому дорівнює нулю вираз в квадратних дужках в першому інтегральному доданку.

Розглянемо всі три можливих типи граничних умов (3.2.2)-(3.2.4)

Тип 1. Для варіації граничних умов (3.2.3а), (3.2.4а) отримаємо вирази:

$$\frac{\partial\left(\delta x_i(0\ ,\ t)\right)}{\partial z}=\left\{\left[\frac{\partial g_i}{\partial x_j(0\ ,\ t)}\right]\delta x_j(0\ ,\ t)+\left[\frac{\partial g_i}{\partial V_j(t)}\right]\delta V_j(t)\right\} \qquad (3.2.17)$$

$$\frac{\partial\left(\delta x_i(L,t)\right)}{\partial z}=\left\{\left[\frac{\partial h_i}{\partial x_j(L,t)}\right]\delta x_j(L,t)+\left[\frac{\partial h_i}{\partial y_j(t)}\right]\delta y_j(t)\right\} \qquad (3.2.18)$$

Тип 2. Для варіації граничних умов (3.2.3б), (3.2.4б) отримаємо, що $\left[{}^{\partial(\delta x_i)}\!\big/_{\partial z}\right]\Big|_0^L$ довільне, а $\delta x_i(0,t)=\delta x_i(L,t)$.

Тип 3. Для варіації граничних умов (3.2.3а), (3.2.4в) отримаємо, що

$$\delta x_i(0,t)=\delta V_i(t)\ ,\ \delta x_i(L,t)=\delta y_i(t)\ ,\left[{}^{\partial(\delta x_i)}\!\big/_{\partial z}\right]\Big|_0^L \qquad (3.2.19)$$

довільне. Якщо тепер координати вектора стану, які підчиняються граничним умовам типу 1 позначити індексами S, типу 2 - індексом r, типу 3 - індексом p, то вираз для δI (3.2.15) матиме вигляд :

$$\delta I=\int_0^{t_f}\int_0^L\left(\frac{\partial H}{\partial U_i}\right)\delta U_i\,dzdt+\int_0^L\left(\left\{\left[\frac{\partial G_1}{\partial x_k(z,t_f)}\right]-\lambda_i A_{ik}\right\}\delta x_k(z,t_f)+\right.$$

$$\left.+\left\{\left[\frac{\partial G_1}{\partial\omega_k(z)}\right]+\lambda_i A_{ik}\right\}\delta\omega k(z)\right)dz+\int_0^{t_f}\left(\left(\left(\frac{\partial H_2}{\partial V_s}\right)\delta V_s(t)+\left(\frac{\partial H_3}{\partial y_s}\right)\delta y_s\right.\right.+$$

$$+\left\{\left[\frac{\partial H_2}{\partial x_S(0,t)}\right]-\left[\frac{\partial H(0,t)}{\partial x_S'}\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial H}{\partial x_S''}\right)\right\}\delta x_S(0,t)+$$

$$\left.+\left\{\left[\frac{\partial H_3}{\partial x_S(L,t)}\right]-\left[\frac{\partial H(L,t)}{\partial x_S'}\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial H}{\partial x_S''}\right)\right\}\delta x_S(L,t)\right)dt+$$

$$+\int_0^{t_f}\left(\left\{\left[\frac{\partial G_2}{\partial x_r(0,t)}\right]-\left(\frac{\partial H}{\partial x_r'}\right)+\frac{\partial H}{\partial x_r''}\right\}\delta x_r(0,t)+\right.$$

$$\left.+\left\{\left[\frac{\partial G_2}{\partial x_r(L,t)}\right]+\left(\frac{\partial H}{\partial x_r'}\right)-\frac{\partial\left({}^{\partial H}\!\big/_{\partial x_r''}\right)}{\partial z}\right\}\delta x_r(L,t)+\left(\frac{\partial H}{\partial x_r''}\right)\frac{\partial(\delta x_r)}{\partial z}\Big|_0^L\right)dt+$$

$$+\int_0^{t_f}\left(\left\{\left[\frac{\partial G_2}{\partial V_p}\right]-\left(\frac{\partial H}{\partial x_p'}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial H}{\partial x_p''}\right)\right\}\delta V_p(t)+\right.$$

$$+\left\{\left\{\left[\frac{\partial G_2}{\partial y_p}\right]+\left(\frac{\partial H}{\partial X''_p}\right)-\frac{\partial\left(\partial H/\partial x''_p\right)}{\partial Z}\right\}\delta y_p(t)+\left(\frac{\partial H}{\partial x''_p}\right)\frac{\partial(\delta x_p)}{\partial Z}\Big|_0^L\right\}dt \quad (3.2.20)$$

де через H_1, H_2, H_3 позначені допоміжні гамільтони:

$$H_1 \equiv G_1 + \lambda_i A_{ik}\omega_k, \quad (3.2.21)$$

$$H_2 \equiv G_2 + \left(\partial H/\partial x''_i\right)(0,t)g_i, \quad (3.2.22)$$

$$H_3 \equiv G_2 + \left(\partial H/\partial x''_i\right)(L,t)h_i \quad (3.2.23)$$

Із виразу (3.2.20) видно, що позбавитися від впливу довільних варіацій $\delta x_s(0,t), \delta x_s(L,t), \left[\partial(\delta x_r)/\partial z\right]\Big|_0^L, \left[\partial(\delta x_p)/\partial z\right]\Big|_0^L, \left[\partial(\delta x_p)/\partial z\right]\Big|_0^L$ на варіацію критерія оптимальності можна, якщо ввести для спряжених змінних слідуючі граничні умови:

Тип 1:

$$\left\{\frac{\partial H_2}{\partial x_s(0,t)}-\frac{\partial H(0,t)}{\partial x'_s}+\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial H(0,t)}{\partial x''_s}\right]\right\}=0 \quad (3.2.24)$$

$$\left\{\frac{\partial H_3}{\partial x_s(L,t)}+\frac{\partial H(L,t)}{\partial x'_s}-\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial H(L,t)}{\partial x''_s}\right]\right\}=0 \quad (3.2.25)$$

Типи 2 і 3:

$$\partial H/\partial x''_r\Big|_0^L = \partial H/\partial x''_p\Big|_0^L = 0 \quad (3.2.26)$$

Якщо при цьому кінцевий стан $X(Z,t_f)$ є вільним, то необхідно додати граничні умови на λ в кінцевий момент часу

$$\lambda_i(z,t_f)A_{ik} = \frac{\partial G_1}{\partial x_k(z,t_f)}, \quad \text{k=1,2,...,п.} \quad (3.2.27)$$

Замітимо, що якщо порядок початкових рівнянь процесу в частинних похідних відносно деяких координат стану $x_q(z,t)$ меньше двох, то $\partial H/\partial x''_q \equiv 0$ і граничні умови типу 2 або 3 можливі тільки з одної із сторін.Якщо наприклад,

$x_q(L,t)$ є невизначеним, то коефіцієнт при $\delta.X_q(L,t)$ в (3.2.20) повинен дорівнювати нулю. Гранична умова на $\lambda_q(L,t)$ прийме вигляд:

$$\left[\partial G_2 / \partial x_q (L,t)\right] + \left(\partial H / \partial x'_q\right) = 0 \tag{3.2.28}$$

Кінцевий вираз для $\delta I I$ має вигляд:

$$\delta I = \int_0^{t_f}\int_0^L \left(\frac{\partial H}{\partial U_i}\right)\delta U_i \, dZdt + \int_0^{t_f}\left\{\left[\frac{\partial H_2}{\partial V_S(t)}\right]\delta V_S(t) + \left[\frac{\partial H_3}{\partial y_S(t)}\right]\delta y_S(t)\right\}dt +$$

$$+\int_0^{t_f}\left\{\left[\frac{\partial G_2}{\partial V_P} - \frac{\partial H}{\partial x'_P} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial H}{\partial x''_P}\right)\right]\delta V_P(t) +\right.$$

$$\left.+\left\{\left[\frac{\partial G_2}{\partial y_P} - \frac{\partial H}{\partial x'_P} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial H}{\partial x''_P}\right)\right]\right\}\delta y_P(t)\right\}dt +$$

$$+\int_0^L\left\{\left[\frac{\partial H_1}{\partial \omega_i(Z)}\right]\delta\omega_i(Z)\right\}dZ \tag{3.2.29}$$

Тепер вплив варіацій $\delta\mathbf{U}, \delta\mathbf{Y}, \delta\mathbf{V}, \delta\mathbf{W}$ на варіацію δI явно виражений.

Поскільки припускалось, що варіації $\delta\mathbf{U}_i, \delta\mathbf{Y}_k, \delta\mathbf{V}_j, \delta\mathbf{W}_e$ довільні необхідним умовам невід*ємності $\delta I I$ і оптимальності U, V, Y, W є рівність нулю коефіцієнтів при цих варіаціях. Отриманий результат можна сформулювати у вигляді:

Для того щоб управління U, V, Y, W були оптимальними для задачі (3.2.1) - (3.2.5) з урахуванням обмежень

$$\begin{gathered} U_{i\min} \le U_i \le U_{i\max}, U_{j\min} \le U_j \le U_{j\max}, \\ y_{k\min} \le y_k \le y_{k\max}, y_{l\min} \le y_l \le y_{l\max}. \end{gathered} \tag{3.2.30}$$

необхідно щоб виконувалася рівність $\frac{\partial H}{\partial U_i} = 0$

(3.2.31)

при управлінні всередині області обмежень (3.2.30) або щоб досягався максимум H на границях області обмежень (3.2.30)

Відмітимо, що в тому випадку, коли $\mathrm{U}_i(z,t)$ залежить тільки від z, необхідні умови оптимальності мають вигляд

$$\int_0^{t_f}\left(\frac{\partial H}{\partial U_i}\right)dt = 0 \tag{3.2.32}$$

без обмежень на управління і $\int_0^{t_f} Hdt \to \max,$ якщо такі є.

Аналогічно, якщо $\overline{U}$ залежить тільки від t

$$\int_0^{L}\left(\frac{\partial H}{\partial U_i}\right)dz = 0 \tag{3.2.33}$$

без обмежень на управління і $\int_0^{L} Hdz \to \max,$ якщо такі є.

Далі, необхідно, щоб для всіх функцій, на які не накладаються обмеження, $\omega_{\cdot e}(Z), V_S(t), V_p(p), y_S(t), y_p(t)$ виконувались слідуючі умови:

$$\left(\frac{\partial H_1}{\partial \omega_l}\right) = 0 \tag{3.2.34}$$

$$\left(\frac{\partial H_2}{\partial Vs}\right) = 0 \tag{3.2.35}$$

$$\frac{\partial G_2}{\partial V_p} - \frac{\partial H(0,t)}{\partial x'_p} + \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial H(0,t)}{\partial x''_p}\right] = 0 \tag{3.2.36}$$

$$\left(\frac{\partial H_3}{\partial y_S}\right) = 0 \tag{3.2.37}$$

$$\frac{\partial G_2}{\partial y_p} + \frac{\partial H(L,t)}{\partial x'_p} - \frac{\partial}{\partial z}\left(\partial H(L,t)\big/\partial x''_p\right) = 0 \tag{3.2.38}$$

а якщо обмеження є, то відповідні величини в лівих частинах рівності (3.2.34) - (3.2.38) повинні бути непозитивними у разі досягнення управліннями верхніх границь. Якщо деякі із функцій $\omega_{\cdot e}, V_S, V_p, y_S, y_p$ є просто константами і не зв*язані обмеженнями, необхідні умови перетворюються в вирази:

$$\int_0^{L}\left(\frac{\partial H_1}{\partial \omega_e}\right)dz = 0 \tag{3.2.39}$$

$$\int_0^{t_f}\left(\frac{\partial H_2}{\partial V_s}\right)dt = 0 \tag{3.2.40}$$

$$\int_0^{t_f}\left(\frac{\partial G_2}{\partial V_p} - \frac{\partial H(0,t)}{\partial x'_p} + \frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{\partial H(0,t)}{\partial x''_p}\right\}\right)dt = 0 \tag{3.2.41}$$

$$\int_0^{t_f}\left(\frac{\partial H_3}{\partial y_s}\right)dt = 0 \tag{3.2.42}$$

$$\int_0^{t_f}\left(\frac{\partial G_2}{\partial y_p} - \frac{\partial H(L,t)}{\partial x'_p} + \frac{\partial\left[\partial H(L,t)/\partial x''_p\right]}{\partial z}\right)dt = 0 \tag{3.2.43}$$

Гамільтоніани H_1, H_2, H_3 знаходятся за допомогою рівнянь (3.2.11) і (3.2.21) -(3.2.23).

Застосування градієнтного пошуку.

Ідея методу полягає в тому, що, якщо управління $\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{Y}, \mathbf{W}$ не є оптимальними, рух і напрямок градієнта, який визначається виразами:

$$\delta U_i(z,t) = \varepsilon_0\left(\frac{\partial H}{\partial U_i}\right) \tag{3.2.44}$$

$$\delta\omega_l(z) = \varepsilon_1\left(\frac{\partial H}{\partial \omega l}\right) \tag{3.2.45}$$

$$\delta V_s(t) = \varepsilon_2\left(\frac{\partial H_2}{\partial V_s}\right) \tag{3.2.46}$$

$$\delta V_p(t) = \varepsilon_3\left(\frac{\partial G_2}{\partial V_p} - \frac{\partial H}{\partial x'_p} + \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial H}{\partial x''_p}\right]\right) \tag{3.2.47}$$

$$\delta y_s(t) = \varepsilon_4\left(\frac{\partial H_3}{\partial y_s}\right) \tag{3.2.48}$$

$$\delta y_p(t) = \varepsilon_3\left(\frac{\partial G_2}{\partial y_p} + \frac{\partial H}{\partial x'_p} - \frac{\partial\left(\partial H/\partial x''_p\right)}{\partial z}\right) \tag{3.2.49}$$

забезпечить найбільше локальне покращення δI при достатньо малих $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5$..

Алгоритм градієнтного пошуку полягає в наступному:

1) задати початкове значення управлінь

$U_i(Z,t),\ V_j(t),\ y_k(t),\ \omega_e(t),\ 0 \le z \le L,\ 0 \le t \le t_f;$

2) розв*язати рівняння динаміки (3.2.1) спільно з крайовими умовами (3.2.2)-(3.2.4), розрахувати значення критерію I по (3.2.5)

3) розв*язати рівняння для спряжених змінних (3.2.16) в зворотньому часі спільно з граничними умовами (3.2.24)-(3.2.28)

4) провести локальне покращення управлінь $U_i(Z,t), V_j(t), y_k(t), \omega_{\cdot e}(t)$ відповідно з (3.2.44)-(3.2.49), максимізуючи I вибором ε_i (це можна зробити або яким-небудь методом багатомірного пошуку, або одномірним пошуком по ε_0 при умові, що $\varepsilon_i = a_i \varepsilon_0$, i-1,2,...,5, a_i - масштабні коефіцієнти)

5) якщо умови не виконані, повернутися до кроку 2

Такий алгоритм володіє хорошою збіжністю на початкових ітераціях, однак при підході до оптимуму збіжність значно сповільнюється, тому стараються використати методи пошуку другого порядку і спряжені градієнти.

Приклад 3.1. Керування теплообмінним апаратом.

Нехай теплообмінник має постійні фізичні властивості, незначну теплоємкість стінки труби, дифузій-ний перенос енергії в осьовому напрямку і рівномірний температурний профіль в радіальному.

Згідно з цим припущенням процес передачі тепла від теплоносія до рухаючогося продукту описується диференціальним рівнянням у безвимірній формі вигляду:

$$\frac{\partial T}{\partial i} = \frac{1}{\beta}\frac{\partial^2 T}{\partial i^2} - \frac{\partial T}{\partial z} + K(U - T) \qquad (3.2.50)$$

при початкових та граничних умовах

$$\left.\begin{aligned} &T(t,z)\Big|_{t=0} = 0; \\ &\frac{\partial T}{\partial z} = \beta T, z = 0, t > 0; \\ &\frac{\partial t}{\partial z} = 0, z = z_k, t > 0, \end{aligned}\right\} \qquad (3.2.51)$$

де $T(t,z)$ - приведена температура рідини що рухається; β - число Пекле; К – константа, залежна від фізичних властивостей системи; $U(t)$ - приведена температура стінки труби.

Для об’єкту, описуваного співвідношенням(3.2.50), (3.2.51), необхідно визначити таку стратегію керування $U(t)$, яка з урахуванням обмежень по рівню, накладаємих на керуючий вплив, мінімізувала функціонал:

$$I(U) = \int_0^{z_k} [T(t_f, z) - T_{зад}(z)]^2 \, dz, \qquad (3.2.52)$$

де $T_{зад}(z)$ - заданий температурний профіль.

Функція Гамільтона, згідно рівнянню, визначається:

$$H = \lambda \frac{1}{\beta} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - \frac{\partial T}{\partial z} + K(U - T). \qquad (3.2.53)$$

Сполучена змінна λ задовольняє наступному диференціальному рівнянню:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} = -\frac{1}{\beta} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial z^2} - \frac{\partial \lambda}{\partial z} + K\lambda \qquad (3.2.54)$$

з граничними умовами

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \lambda}{\partial z} = 0, z = 0, t > 0; \\ &\frac{\partial \lambda}{\partial z} + \beta\lambda = 0, z = z_k, t > 0. \end{aligned}\right\} \qquad (3.2.55)$$

Кінцева умова має вигляд

$\lambda = 2[T(t_f, z) - T_{зад}], t = t_k.$

Враховуючи , що Н є лінійною функцією від U, закон оптимального керуван-ня має вигляд

$$U(t) = \begin{cases} U_н, якщо & \int_0^{z_k} K\lambda dz > 0; \\ U_в, якщо & \int_0^{z_k} K\lambda dz < 0, \end{cases}$$

де $U_в$, $U_н$ - відповідно верхня та нижня границі зміни керуючого впливу. Так, як рівняння(3.2.50), (3.2.51) та (3.2.54), (3.2.55) лінійні, то вони можуть бути подані за допомогою дискретних моделей. Рівняння (3.2.50), (3.2.51) прораховуваються «вперед у часі» від t=0 до $t=t_f$ потім сполучену змінну шукаємо у зворотному напрямку від $t=t_f$, до t=0 з рівнянь(3.2.54), (3.2.55).

Після отримання рішення λ можна обчислити поліпшену функцію керуван-ня.

Завдання з обмеженням на дію керування можливо перетворити в завдання без обмеження, якщо ввести у критерій якості функцію штрафу

$$Q = [U(t) - U_в]^2 h[U(t) - U_в] + [U_н - U(t)]^2 h[U_н - U(t)], \tag{3.2.56}$$

де h – функція Хевисайда.

Прирощення δU, згідно рівняння, має вигляд

$$\delta U_\varepsilon(t) = -a\left[\int_0^{z_k} H_U dz + \frac{2}{\varepsilon}\{(U - U_в) \times h(U - U_в) - (U_н - U)h(U_н - U)\}\right]. \tag{3.2.57}$$

Таким чином, нова функція керування визначається так:

$U(t)_{нов} = U(t)_{стар} + \delta U_\varepsilon(t).$

Необхідна температура Тзад(z) отримана при вирішенні рівнянь для сталого стану при U=0,5.

Обмеження, накладене на величину керування, має вигляд $0{,}0 \le U \le 4{,}0$, а час перебування матеріалу в теплообміннику tк =0,5. Крім того, Uн=0,5; Uв=4,0.

На рис.3.1. зображені криві функції оптимального керування, отримані за допомогою дискретного принципу максимуму і методу градієнта у функціональному просторі.

Для визначення оптимального розміру шагу **а** використан метод золотого перетину для одночасного пошуку[ ]. На рис 3.1 приведені також результати для різних значень числа Пекле: β=0; β=5; β=10; $\beta=\infty$. При β=0 має місце режим ідеального перемішування, а при $\beta=\infty$ режим ідеального витиснення.

Траєкторії оптимального керування, отримані за допомогою дискретного принципу максимуму і методу градієнта у функціональному просторі, приводять до керування, ближчим до двохпозиційного.

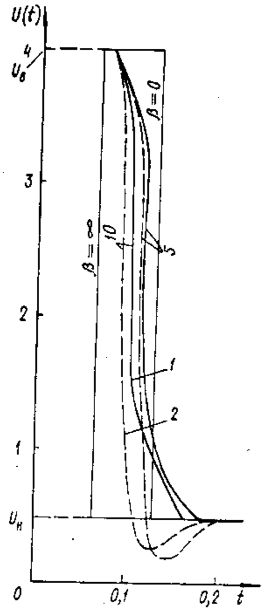


Рис.3.1. Оптимальна стратегія керування теплообмінником: 1 – метод градієнта у функціональному просторі; 2 – дискретний принцип максимуму.

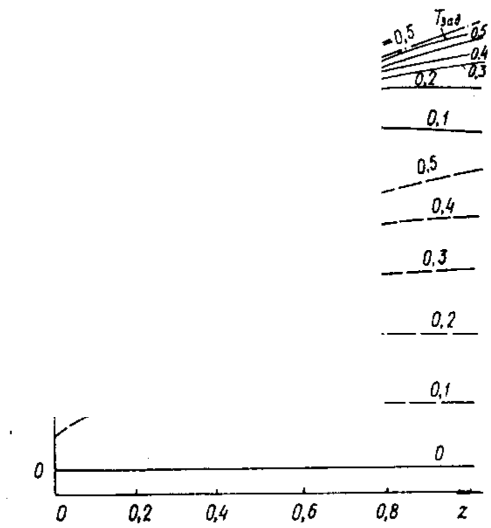


Рис.3.2. Температурні профілі у теплообміннику: 1 – принцип максимуму; 2 – метод градієнта; 3 – релейне керування.

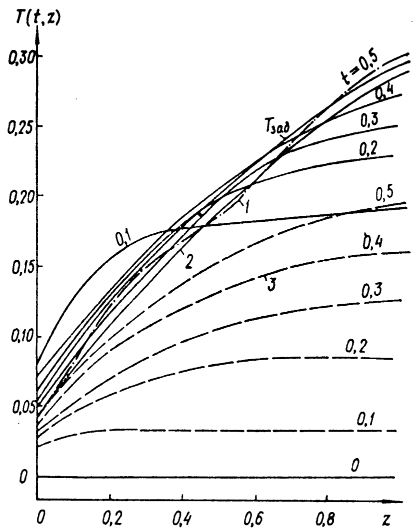


Рис.3.3. Температурні профілі у теплообміннику: 1 – принцип максимуму; 2 – метод градієнта; 3 – релейне керування (β =10,0).

На рис.3.2 і 3.3 відповідно зображені оптимальні температурні характеристики системи з числом Пекле що дорівнює 5 і 10, а також температурні характеристики для простого релейного керування (перемикання в момент часу t=0). З рисунків видно, що оптимальне керування при використанні обох методів дає температурні характеристики, найбільш найближені до бажаних, ніж у випаду використання простого релейного керування.

Контрольні запитання до розділу 3.

1. Нелінійні системи керування. Методи розв′язку задач оптимального керування.
2. Алгоритм застосування градієнтного методу першого порядку для задачі оптимального керування.
3. Використання градієнтних методів для задач із змінним кінцевим моментом часу.
4. Можливі способи урахування обмежень на керування у формі нерівності і на змінні стану.
5. Застосування методу штрафів при градієнтному способі пошуку екстремуму при переводі лінійної системи за мінімальний час.

6. Збіжність градієнтної процедури при наближенні траєкторії та керування до оптимальних.

7. Моделі систем з розподільними параметрами і відповідні рівняння для спряжених змінних.

8. Можливі граничні умови для спряжених змінних.

9. Необхідні умови оптимальності при керуванні системами з розподільними параметрами.

4. Динамічне програмування

Простий та в то й же час дуже ефективний метод багатошагового рішення варіаційних задач, розроблений Річардом Белманом.

Ідеєю методу є вираз концепції інваріантного вкладення, згідно якої початкова проблема замінюється певним класом найбільш простих проблем. У таких випадках використовується принцип оптимальності, що формується у наступному вигляді : ***оптимальна стратегія володіє такими якостями, що, який би не був початковий стан або початкове рішення, наступні рішення повинні прийматися, виходячи із оптимальної стратегії відносно стану, що отримується в результаті першого рішення.***

Метод динамічного програмування (ДП) припускає разбиття аналізуючого процесу часу або простору на стадії або ступені. В якості стадії або ступеня можна прийняти одиницю часу, одиничний елемент обладнання.

Стадія або ступінь - математична абстракція, що приймається для представлення у дискретному вигляді безперервної змінної.

Багатокрокові процеси рішення та функціональне керування

Приклад. Рада директорів фірми вивчає пропозиції по нарощуванню виробничих потужностей на трьох підприємствах, що належать фірмі. Для розширення усіх трьох підприємств фірма виділяє кошти в обсязі 5 млн. гривень. Кожне підприємство представляє на розгляд проекти, які характеризуються величинами сумарных витрат (C) та доходів (R), зв`язаних з реалізацією кожного з проектів. Відповідні дані наведені в таблиці 4.1, в яку включені також проекти з нульовими витратами.

Таблиця 4.1

Проект	**Підприємство 1**		**Підприємство 2**		**Підприємство 3**	
	C_1	R_1	C_2	R_2	C_3	R_3
1	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**

2	**1**	**5**	**2**	**8**	**1**	**3**
3	**2**	**6**	**3**	**9**	**-**	**-**
4	**-**	**-**	**4**	**12**	**-**	**-**

Задача має 3*4*2=24 ймовірних рішення, причому деякі з них не є допустимими, тому що передбачають асигнування більше 5 млн. гривень. Оптимальним буде допустиме рішення, що забезпечує отримання прибутку. Затрати на реалізацію проектів 2, 3 та 1 для підприємств дорівнюють 4млн. гривень (<5), сумарний прибуток рівний 4 млн. гривень. З другого боку, набір проектів 3, 4, 2 не є допустимим, так як об`єм затрат в цьому випадку дорівнює 7 млн.грн.

Розглянемо сітьовую модель, що відповідає умовам сформульованої задачі і покажемо, що знаходження найбільш довгого шляху (максимального прибутку) між крайніми вузлами сітки приводить до отримання оптимального рішення вихідної задачі.

Для побудови сітки слід визначити етапи вирішення задачі.

Кожному з підприємств ставиться у відповідність деякий етап.

Введемо следуюючі визначення :

x_1- об`єм капіталовкладень, розподілених на етапі 1,

x_2- об`єм капіталовкладень, розподілений на етапі 1 та 2,

x_3- об`єм капіталовкладень, розподілених на етапі 1, 2 та 3.

Конкретні значення x_1 та x_2 заздалегідь невідомі, однак знаємо, що ці значення лежать в інтервалі між 0 та 5. Так як затрати на реалізацію кожного з проектів виражаються цілими числами, значення x_1 та x_2 можуть бути рівними 1, 2, 3, 4 та 5. З іншого боку значення змінної x_3, котра виражає об`єм капіталовкладень, розподілених на всіх трьох етапах дорівнює 5.

Початковий етап j=0 введений на розглядання для зручності обчислення. Довжини дуг, з`єднуючих вузли на деякому етапі з вузлами на слідуючому етапі, чисельно дорівнюють прибуткам від реалізації найкращого допустимого проекта.

Дуга (0,0) (котра з`єднує вузли 0 на етапі j=0 та 0 на етапі j=1) відповідає випадку, коли засоби на етапі 1 не виділяються.

Припустимо тут з`являється проект 1 з R_1=0, і дузі (0,0) приписується довжина $R_1(0,0)=0$. Для дуги (0,1) допустимими є проекти 1 та 2, що визначає вибір проекта 2 з більш високим рівнем прибутку R_1=5, дузі (0,1) приписується довжина 5. Значення $x_1=3$, 4 та 5 відповідають “надмірним” варіантам, для яких в кращому випадку $R_1=6$. Дуги, що з`єднують вузли на етапі 1 з вузлами на етапі 2, задаються вузлами $x_1$ та $x_2$. Величина $x_2$ - $x_1$ по визначенню дорівнює об`єму капіталовкладень, розподілених тільки на етапі 2. Довжина дуги (x_1, x_2) дорівнює найбільшому значенню R_2 для всіх таких проектів. З визначення величин x_1, x_2 та x_3 виплавє, що любий зв`язаний шлях з вузла 0 на етапі j=0 в узел 5 на етапі j=3 відповідає допустимій комбінації проектів. Деякі дуги можна відкинути як заздалегідь неоптимальні.

Наприклад можливо виключити дугу (0,1) між етапами j=1 и j=2 так як асигнування x_2-x_1=1 млн. гривень на етапі 2 не приносить ніякого прибутку, оскільки ця сума не є достатньою для реалізації проекта 2.

Позначимо $f_j(x_j)$- величину самого довшого шляху, що веде до вузла x_j на етапі j. Оскільки j=0 вихідний етап, $f_0(0) \equiv 0$

Етап 1. Так як вузол 0 на етапі j =0 з кожним з шести вузлів x_1=0,1,2,3,4 та 5 на етапі j=1 з`єднує лише одна дуга, найдовший шлях до вузла x_1 визначається формулою

$$f_1(x_1) = f_0(0) + R_1(0, x_1),$$

де $R_1(0, x_1)$ - довжина (прибуток) дуги (0, x_1). Маємо

$f_1(0)=0+0=0,\qquad f_1(3)=0+6=6;$

$f_1(1)=0+5=5,\qquad f_1(4)=0+6=6;$

$f_1(2)=0+6=6,\qquad f_1(5)=0+6=6.$

Одержані результати представлені на рис 2.

Вказане на кожній дузі число в круглих дужках представляє собою номер проекта. Числа над колами вкзуют значення відстані найбільш довгого шляху до відповідного вузла.

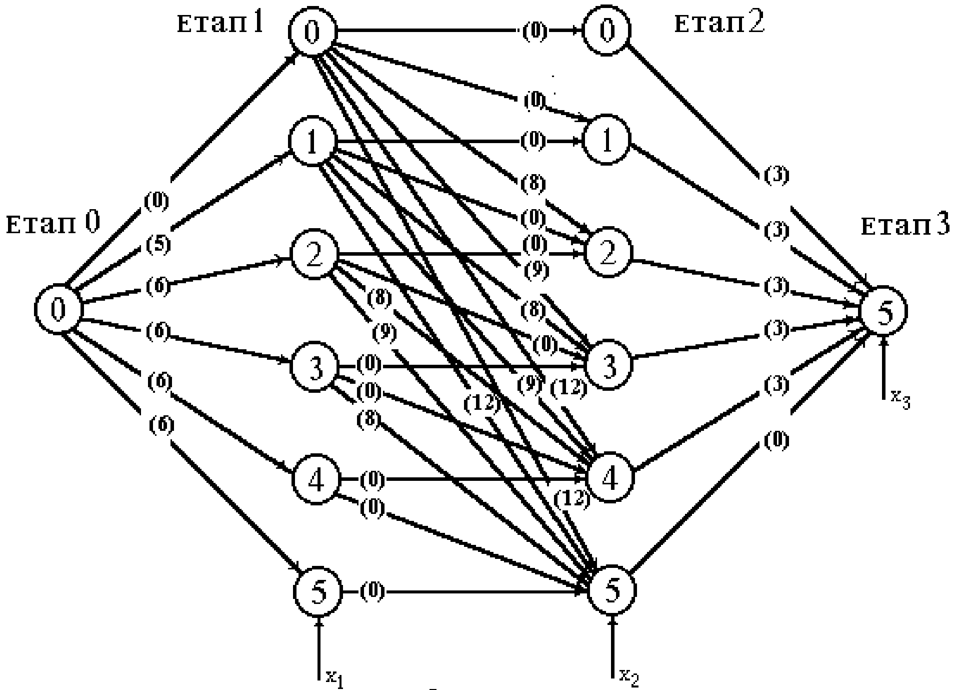


Рис 4.1. Ілюстрація сітьової моделі

Етап 2. На відміну від етапу 1 кількість дуг, що входять в один із вузлів на етапі, може перебільшувати 1.

$f_2(x_2) = \max\{f_1(x_1) + R_2(x_1, x_2)\}$;

по допустимим дугам (x_1,x_2)

$f_2(0) = 0+0=\mathbf{0}$;

$f_2(1) = \max\{0+0; \mathbf{5}+\mathbf{0}\}=\mathbf{5}$;

$f_2(2) = \max\{\mathbf{0}+\mathbf{8}; 5+0; 6+0\}=\mathbf{8}$;

$f_2(3) = \max\{0+9; \mathbf{5}+\mathbf{8}; 6+0; 6+0\}=\mathbf{13}$;

$f_2(4) = \max\{0+12; \mathbf{5}+\mathbf{9}; \mathbf{6}+\mathbf{8}; 6+0; 6+0\}=\mathbf{14}$;

$f_2(5) = \max\{0+12; \mathbf{5}+\mathbf{12}; 6+9; 6+8; 6+0; 6+0\}=\mathbf{17}$;

Етап 3. $f_3(x_3) = \max\{f_2(x_2) + R_3(x_2, x_3)\}$

$f_3(5) = \max\ \{0+3; 5+3; 8+3; 13+3; 14+3; 17+0\} = 17$

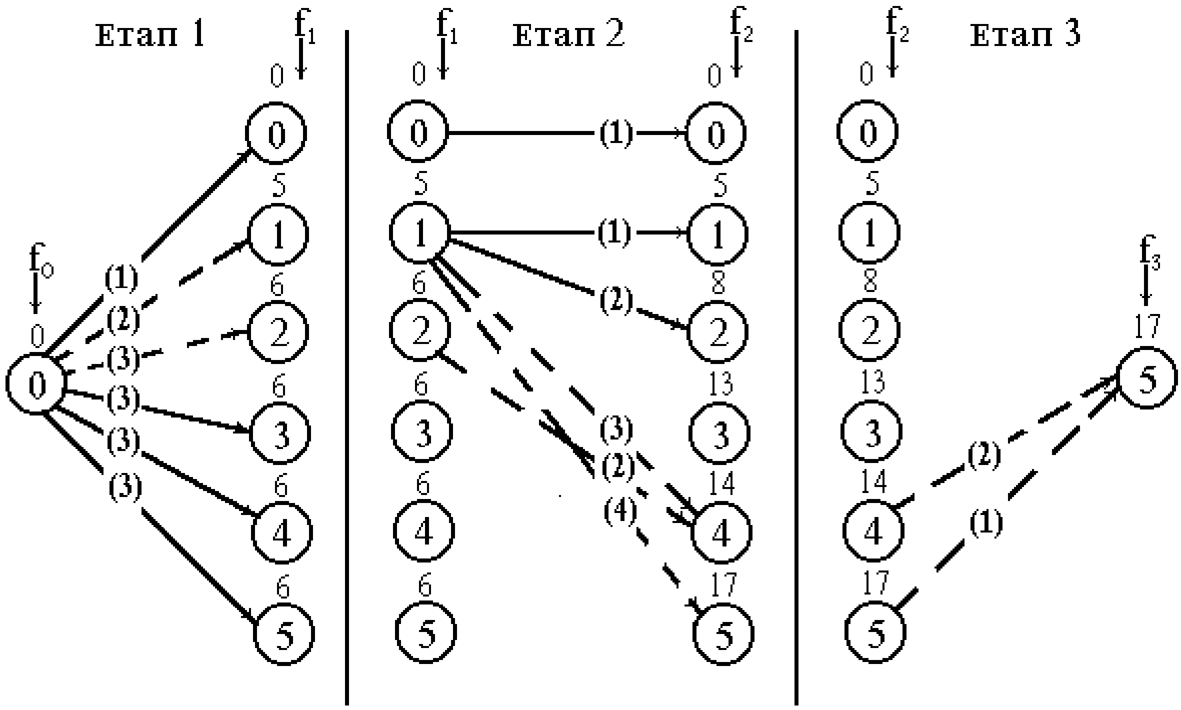


Рис.4.2. Оптимальні дуги відповідають обчисленому значенню $f_3(5)$.

Любий зв`язаний шлях від вузла 0 на етапі j = 0 до вузла 5 на етапі j = 3 визначає оптимальне рішення

Оптимальний шлях	Оптимальний набір проектів
(0,1),(1,4),(4,5)	(2,3,2)
(0,1),(1,5),(5,5)	(2,4,1)
(0,2),(2,4),(4,5)	(3,2,2)

Якщо скористуватися позначеннями, що введені при розгляданні сетьової моделі, можна записати рекурентні співвідношення ДП в слідуючомум вигляди:

$f_i(x_j)= \max\{R_j(\kappa_j)+f_{j-1}(x_{j-1})\}$ j = 1,2,3,

для всіх допустимих k_j

де $f_0(x_0) \equiv 0$ по визначенню.

Зауважимо, що $f_i(x_j)$ є функцією одиничного аргумента x_j. Звідси слідує, що права частна рекурентного співвідношення повинна бути виражена через x_j, а не через x_{j-1}. По сітьовій моделі, різниця між x_j та x_{j-1} дорівнює величині витрат (c_j) на реалізацію проекта k_j на этапі j, тобто

$c_j(k_j) = x_j - x_{j-1}$

Заміна $x_{j-1} = x_j - c_j(k_j)$ забезпечить більш коректний математичний запис рекурентного співвідношення.

Для виконання умови $x_{j-1} \geq 0$ слідує $x_j - c_j(k_j) \geq 0$ або $c_j(k_j) \leq x_j$.

Рекурентне співвідношення ДП має слідуючий вигляд

$f_0(x_0) \equiv 0$

$f_j(x_j) = \max\{R_j(k_j) + f_{j-1}(x_j - c_j(k_j))\}$ j= 1,2,3,

$c_j(k_j) \leq x_j$

В ДП звичайно використовується таблична форма запису числових результатів.

Етап 1.

$$f_1(x_1) = \max\{R_1(k_1)\},$$
$$c_1(k_1) \leq x_{1,}$$
$$k_1 = 1,2,3$$

	$R_1(k_1)$			Оптимальні рішення	
x_1	$k_1=1$	$k_1=2$	$k_1=3$	$f_1(x_1)$	k_1^*
0	0	-	-	0	1
1	0	5	-	5	2
2	0	5	6	6	3
3	0	5	6	6	3
4	0	5	6	6	3
5	0	5	6	6	3

Етап 2.

$$f_2(x_2) = \max\{R_2(k_2) + f_1(x_2 - c_2(k_2)),$$
$$c_2(k_2) \leq x_{2,}$$
$$k_2 = 1,2,3,x$$

x_2	$R_2(k_2) + f_1(x_2 - c_2(k_2))$				Оптимальні рішення	
	$k_2=1$	$k_2=2$	$k_3=3$	$k_2=4$	$f_2(x_2)$	k_2^*
0	0+0=0	-	-	-	0	1
1	0+5=5	-	-	-	5	1
2	0+6=6	8+0=8	-	-	8	2
3	0+6=6	8+5=13	9+0=9	-	13	2
4	0+6=6	8+6=14	9+5=14	12+0=12	14	2 або 3
5	0+6=6	8+6=14	9+6=16	12+5=17	17	4

Етап 3.

$$f_3(x_3) = \max\{R_3(k_3) + f_2(x_3 - c_3(k_3))\},$$

$$c_3(k_3) \le x_3,$$

$$k = 1,2$$

x_3	$R_3(k_3)+f_2(x_3-c_3(k_3))$		Оптимальні рішення	
	$k_3=1$	$k_3=2$	$f_3(x_3)$	k_3^*
5	0+17=17	3+14=17	17	1 або 2

Оптимальне рішення можна знайти безпосередньо з таблиць.

Спочатку розглянемо таблицю побудовану на етапі 3. При x_3=5 оптимальний проект має або k_3^* = 1 або k_3^* = 2. Нехай спочатку k_3^* =1, так як $c_3(1)$ = 0, на етапах 2 і 1 $x_2 = x_3 - c_3(1)$ = 5. Легко бачити, що на етапі 2 з x_2 = 5 слідує $k_2^* = 4$. Далі $c_2(4) = 4$, звідки $x_1 = 5 - 4 = 1$. На этапі 1 з $x_1 = 1$ виходить $k_1^* = 2$. Таким чином (2,4,1) - оптимальний набір проектів для етапів 1, 2 і 3.

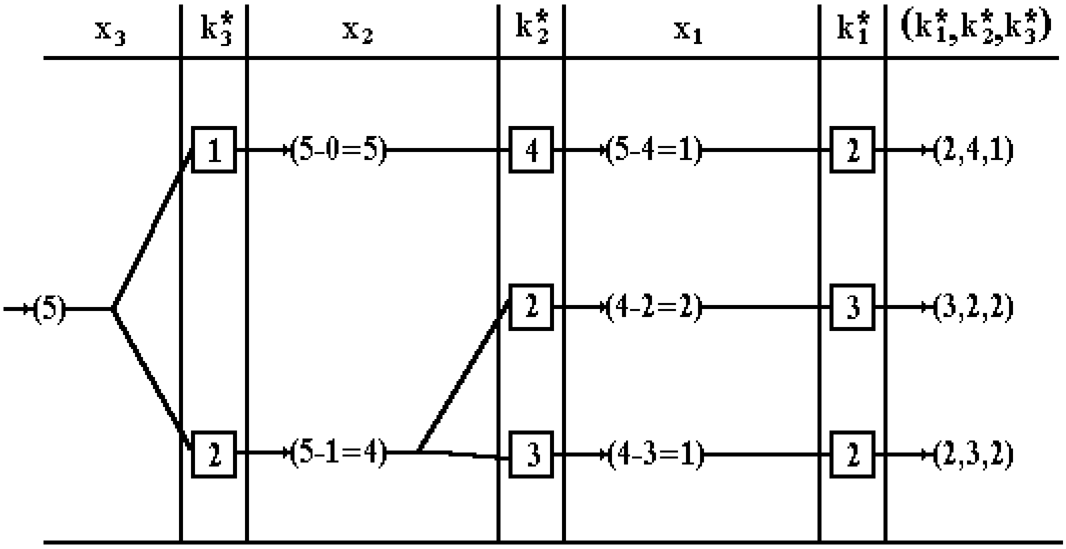


Рис.4.3. Схема визначення різних оптимальних наборів пректів

4.1 Рекурентне співвідношення для процедури зворотньої прогонки

Обчислення проводились для прикладу в такій послідовности:

$f_1 \rightarrow f_2 \rightarrow f_3$.

Такий метод обчислення відомий як алгоритм прямої прогонки, оскільки розрахунки виконувались в натуральному порядку руху етапів. Однак в ДП розглядаються рекурентні співвідношення, які наказують починати обчислення з останнього етапа і потім рухатися назад до етапу 1. Такий метод обчислення відомий як алгоритм зворотньої прогонки.

Основна різниця між процедурами прямої та зворотньої прогонки полягає в засобах визначення стану системи.

Для процедури зворотньої прогонки

y_1 - об`єм капіталовкладень, розподілених на етапах 1,2,3,

y_2 - об`єм капіталовкладень, розподілених на етапах 2 та 3,

y_3 - об`єм капіталовкладень, розподілених на етапі 3.

Рекурентне співвідношення для процедури зворотньої прогонки записується в слідуючому вигляді: $f_4(y_4) \equiv 0$,

$$f_j(y_j) = \max_{\substack{k_j, \\ c_j(k_j) \le y_j}} \{R_j(k_j) + f_{j+1}(y_j - c_j(k_j))\}, \quad j = 1,2,3,$$

Порядок поетапних обчислень $f_3 \rightarrow f_2 \rightarrow f_1$.

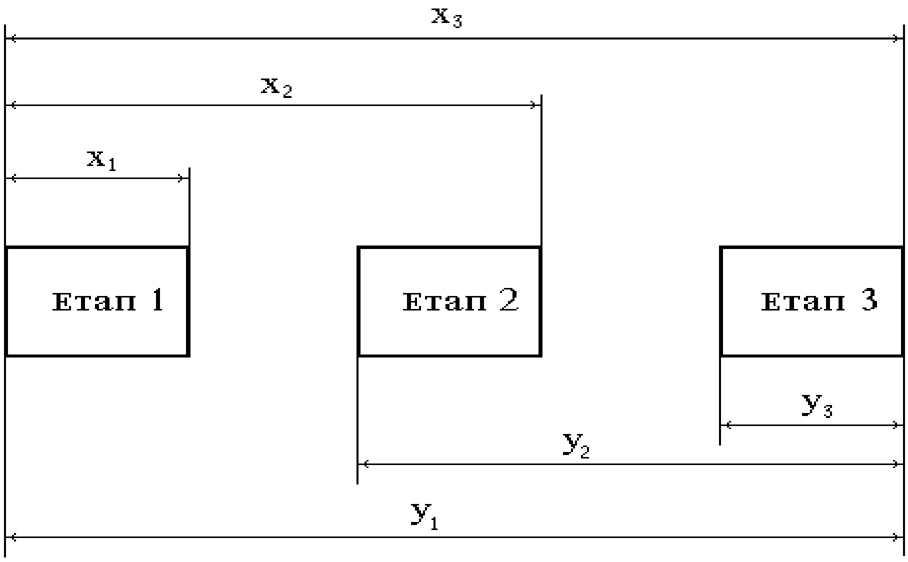


Рис. 4.4. Відмінності між визначеннями станів Xj і Yj в процедурах прямої і зворотньої прогонки.

В розглянутому прикладі ДП для опису станів системи використовувалась тільки одна змінна. В моделях ДП стани можуть бути описані за допомогою $n(\ge 1)$ змінних, що утворюють вектор стану, що викликає зростання числа можливих варіантів вирішення та можливість переповнення пам`яті ЕОМ. Виникає так звана проблема розмірності (або прокляття розмірності за виразом Р. Беллмана), котра є серйозною перешкодою при вирішення ДП середньої та великої розмірності.

Метод ДП використовується для оптимізації функцій, але нічого не каже про те, як виконувати оптимізацію. Перевага - метод ДП належить до числа небагатьох методів оптимізації, при використанні яких одержання рішення відповідає глобальному оптимуму.

4.2 Рівняння Гамільтона-Якобі та неперервне динамічне програмування

Повернемося до задачі мінімізації функціонала

$$I = G\left[X(t),t\right]\Big|_{t_0}^{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} F\left[X(t),U(t),t\right]\,dt\,,$$

з точки зору теорії динамічного програмування причому G та F мають неперервні частинні похідні по X та U при обмеженні в формі рівності

$$X'(t) = f\left[X(t),U(t),t\right] \quad , \qquad (4.2.1)$$

де m - мірний вектор U представляє керуючу функцію, яку слід вибрати, а n - мірний вектор X представляє результуючу траєкторію та обмеження на керування

$$U(t) \in \Omega, \quad t \in \left[t_0, t_f\right] \quad , \qquad (4.2.2)$$

де Ω - задана множина R^m.

Обмеження (4.2.2) може мати вигляд $|\mathbf{U}| \le M$.Визначимо

$$V\left[\mathbf{X}(t),t\right] = \min_{U_t}\left\{G\left[\mathbf{X}(t_f),t_f\right] + \int_t^{t_f} F\left[\mathbf{X}(s),\mathbf{U}(s),s\right]ds\right\}, \qquad (4.2.3)$$

де $\mathbf{U}_t = \left\{\mathbf{U}(s), t \le s \le t_f\right\}$, $\mathbf{X}(s), t \le s \le t_f$ - траєкторія зв`язана з оптимальною керуючою функцією на інтервалі [t, t_f] при заданій початковій умові **X**(t). Тому функція V є оптимальною функцією вартості на інтервалі [t, t_f] при заданій початковій умові **X**(t). Зрозуміло, що V повинна відповідати заданій умові

$$V\left[\mathbf{X}(t_f),t_f\right] = G\left[\mathbf{X}(t_f),t_f\right]. \qquad (4.2.4)$$

для всіх пар $\left(\mathbf{X}(t_f),t_f\right)$в момент досягнення

$t=t_f$ відповідних векторному рівнянню

$$N\left[\mathbf{X}(t_f),t_f\right] = 0\,.$$

Передбачається, що V існує, неперервна та має неперервні перші та другі частинні похідні для всіх точок множини R^{n+1}.

З (4.2.1) випливає, що $\mathbf{U}(t_1)$, $t \le t_1$ не впливає на **X**(s), $s \le t$; таким чином можна змінити порядок мінімізації та інтегрування

$$V[\mathbf{X}(t),t] = \min_{U(\tau)}\left\{ \int_t^{t+\Delta t} F[\mathbf{X}(\tau),\mathbf{U}(\tau),\tau]\, dt + \min_{U_t+\Delta t}\{G[\mathbf{X}(t_f),t_f]+\right.$$

$$+\int_{t+\Delta t}^{t_f} F[\mathbf{X}(s),\mathbf{U}(s),s]\, ds\ \}\} \cong \min_{U(\tau)}\{F[\mathbf{X}(t),\mathbf{U}(t),t]\ \Delta t + V[\mathbf{X}(t+\Delta t),t+\Delta t]\ \} = \qquad (4.2.5)$$

$$= \min_{U(\tau)}\{F[\mathbf{X}(t),\mathbf{U}(t),t]\ \Delta t + V[\mathbf{X}(t),t] + \frac{\partial V[\mathbf{X}(t),t]}{\partial\ t}\Delta t + \left[\frac{\partial V[\mathbf{X}(t),t]}{\partial X}\right]^T *$$

$$f[\mathbf{X}(t),\mathbf{U}(t),t]\ \Delta t + 0(\Delta t)\ \}\quad ,$$

де в останній рівності ми розклали $V[\mathbf{X}(t+\Delta t),t+\Delta t]$ в ряд Тейлора, а мінімізація проводиться на інтервалі $\tau \in [t,t+\Delta t]$.

Рівняння дає змогу приміняти для його обчислення принцип оптимальності. Оптимальне керування $\mathbf{U}^*$(t) на інтервалі $[t,t_f]$ має слідуючі властивості: для любого $t+\Delta t$, замкненого в інтервалі $t \prec t+\Delta t \prec t_f$, незалежно від значень, які рівняння $\mathbf{U}^*(t)$ приймало на інтервалі $[t,t+\Delta t]$, та отож незалежно від значення $\mathbf{X}(t+\Delta t)$ воно повинно залишатися оптимальним на інтервалі часу $[t+\Delta t,t_f]$.

Використовуючи пропозиції про гладкість та змінивши порядок операцій мінімізації та переходу до межі при $\Delta t \to 0$, отримаєм, що V повинно задовільняти рівнянню в частиних похідних

$$\frac{-\partial V[\mathbf{X}(t),t]}{\partial\ t} = \min\left\{F[\mathbf{X}(t),\mathbf{U},t] + \left[\frac{\partial V[\mathbf{X}(t),t]}{\partial\ t}\right]^T f[\mathbf{X}(t),\mathbf{U},t]\right\}, \qquad (4.2.6)$$

що зветься рівнянням Гамільтона - Якобі чи рівнянням Гамільтона - Якобі - Белмана.

В тих випадках коли це рівняння можна примінити, воно забезпечує необхідну умову оптимальності. При відсутності обмежень на величину **U** та при умові, що функції F та f мають частинні похідні по **U**, оптимальне керування $\mathbf{U}^*$(t) можна знайти диференцюючи вираз в фігурних дужках

$$\left[\frac{\partial F}{\partial \mathbf{U}} + \sum \frac{\partial V}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{U}}\right] = 0 \quad \text{для всіх} \quad t \in [t\ \ t_f].$$

Повторення приведених роздумів для заданої функції оптимального керування **U** дає

$$\frac{-\partial V_1[\mathbf{X}(t),t]}{\partial t} = F[\mathbf{X}(t),\mathbf{U}(t),t] + \left[\frac{\partial V[\mathbf{X}(t),t]}{\partial x}\right]^T f[\mathbf{X}(t),\mathbf{U}(t),t] \qquad (4.2.7)$$

Тому необхідно, щоб **U** задовільняло (2.3.3) для всіх

$$t \in [t_0, t_f]$$

Хоч розв`язання рівняння Гамільтона - Якобі в загальному вигляді зв`язано з великими труднощами, у випадку, коли воно розв`язується, отримують оптимальне рівняння як функцію від траєкторії стану, що є бажаною формою зворотнього зв`язку.

Розглянемо лінійний об'єкт керування, який описується рівнянням $\mathbf{X}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{X} + \mathbf{B}(t)\mathbf{U}$ з початковою умовою $\mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X_0}$ і з незаданим кінцевим станом $\mathbf{X}(t_f)$. Необхідно знайти $\mathbf{U^*}(t)$ на інтервалі $[t_0\ \ t_f]$, що мінімізує функціонал

$$I = 1/2\mathbf{X^T}(t_f)\mathbf{S}\mathbf{X}(t_f) + 1/2\int_{t_0}^{t_f}[\mathbf{X}^T(t)\ \mathbf{Q}(t)\ \mathbf{X}(t)\ + \mathbf{U}^T(t)\ \mathbf{R}(t)\ \mathbf{U}(t)]dt \qquad (4.2.8)$$

де $\mathbf{S}, \mathbf{Q}(t), \mathbf{R}(t)$ — симетричні матриці, причому, $\mathbf{Q}(t)$ і $\mathbf{R}(t)$ є додатньо визначеними і мають безперервні другі похідні по t. **S** — знакододатня постійна матриця (щоб гарантувати єдиний мінімум).

Рівняння Белмана має вигляд

$$-\frac{\partial V}{\partial t} = \left[\frac{1}{2}\mathbf{X}^T(t)\ \mathbf{Q}(t)\ \mathbf{X}(t)\ + \frac{1}{2}\mathbf{U}^{*T}(t)\ \mathbf{R}(t)\ \mathbf{U}^*(t)\ + \left(\frac{\partial V}{\partial \mathbf{X}}\right)^T (\mathbf{A}(t)\ \mathbf{X} + \mathbf{B}(t)\ \mathbf{U}^*)\right] \qquad (4.2.9)$$

Гранична умова, що витікає з рівнянь

$$\lim_{t \to t_f} V^*(\mathbf{X}, t) = \frac{1}{2}\mathbf{X}^T(t_f)\mathbf{S}\mathbf{X}(t_f) \qquad (4.2.10)$$

Процес мінімізації призводить до умови

$$\left.\frac{\partial F}{\partial \mathbf{U}}\right|_{U=U^*} + \left.\frac{\partial}{\partial \mathbf{U}}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial \mathbf{X}}\right)^T (\mathbf{A}(t)\mathbf{X} + \mathbf{B}(t)\mathbf{U})\right]\right|_{U=U^*} = 0 \qquad (4.2.11)$$

де **F** - підінтегральний вираз в рівнянні (4.2.8). З останнього слідує

$$\mathbf{U^*}(t) = -\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}(t)\left(\frac{\partial V}{\partial \mathbf{X}}\right)$$

Якщо хочемо синтезувати лінійне керування як функцію координат, то слід в якості критерія якості прийняти квадратичну форму

$\mathbf{V^*}(\mathbf{X},t)=1/2\mathbf{X}^T\mathbf{P}(t)\mathbf{X}$

де $\mathbf{P}(t)$ - симетрична матриця розмірністю (n x n).

$\mathbf{V}_x(x,t)=\mathbf{P}(t)\mathbf{X}(t)$ $\qquad\qquad$ $\mathbf{V}_t(x,t)=1/2\mathbf{X}^T\mathbf{P}'(t)\mathbf{X}(t)$

одержимо

$$\mathbf{P}'=-\mathbf{Q}-\mathbf{PA}-\mathbf{A}^T\mathbf{P}+\mathbf{PBR}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}$$

з граничною умовою $\mathbf{P}(t_f)=\mathbf{S}$.

Єдиний абсолютний мінімум функціонала виходить тільки в тому випадку, якщо матричне рівняння Риккаті має одне рішення. Калман доказав слідуючу теорему.

Теорема.

Відповідно до прийнятих пропозицій, рівняння Ріккаті з граничною умовою $\mathbf{P}(t_f)=\mathbf{S}$ має єдине рішення для матриці $\mathbf{P}(t)$, при цьому керування є оптимальним по відношенню до критерію оптимальності **I**. Іншими словами, рівняння Белмана (4.2.7) забезпечує для цього випадку достатню умову оптимальності.

Підкреслимо алгоритмічні особливості методу динамічного програмування на відміну від принципу максимума.

1. Вимоги гладкості функцій $\mathbf{F}(\mathbf{X},\mathbf{U},t)$ і $f(\mathbf{X},\mathbf{U},t)$ по **X** зняті і не доводиться вирішувати краєву задачу. Рішення одержуються в формі синтезу, і дозволяють знайти не тільки оптимальне управління, але і побудувати керуючий пристрій , працюючи по принципу оберненого зв’язку. Одержане рішення забезпечує для кожного початкового змісту абсолютний мінімум I на безлічі допустимих рішень D.

2. Існування функції $\mathbf{V}(\mathbf{X},t)$, задовольняючій умовам (2), (3) в загальному випадку не гарантовано.

Саме розв`язання рівняння Белмана, якщо воно існує, одержати набагато складніше, чим рішення системи звичайних диференційних рівняннь. Прямим методом рішення диференційних рівнянь у часткових похідних є метод дискретного динамічного програмування, котрий являється послідовним повторюванним крок за кроком вживанням рівняння Гамільтона-Якобі або принципу оптимальності Белмана.

Приклад 4.1

Дискретний варіант динамічного програмування. Сформулюємо задачу синтезу лінійного оптимального цифрового регулятора.

Знайти керування $\mathbf{Uk}_{kf-1}$, $k=0,1,2,....,k-1$ таке, щоб

$I_{kf}=\mathbf{G}[\mathbf{X}(k_f)]+\sum_{k=0}^{kf-1} \mathbf{F}_k[\mathbf{X}_k,\mathbf{U}_k]\rightarrow \min$

де $\mathbf{G}[\mathbf{X}_k,\mathbf{U}_k]=1/2\mathbf{X}^T_{kf}\mathbf{S}\mathbf{X}_{kf}$ (4.2.12)

$$\mathbf{F}_k[\mathbf{X}_k,\mathbf{U}_k]=1/2\mathbf{X}^T_k\mathbf{Q}\mathbf{X}_k+1/2\mathbf{U}^T_k\mathbf{R}\mathbf{U}_k \qquad (4.2.13)$$

Позначимо через $I_{kf-i}[\mathbf{X}(i)]$ критерій якості на інтервалі $[i, k_f]^f$, тобто на останніх k_f-1 інтервалах , або кроках. Тоді

$$I_{kf-i}[\mathbf{X}_i]=\mathbf{G}[\mathbf{X}_{kf}]+\sum_{k=1}^{kf-1} \mathbf{F}_\mathbf{k}[\mathbf{X}_\mathbf{k}, \mathbf{U}_k];\ i=0,1,2,...,k_f \qquad (4.2.14)$$

Нехай мінімальне значення $I_{kf-i}[\mathbf{X}_i]$ описується виразом

$$\mathbf{V}_{kf-i}[\mathbf{X}_i]=\min I_{kf-i}[\mathbf{X}_i] \qquad (4.2.15)$$

При $i=k_f$ останній вираз представляє собою критерій якості, або виграш на останньому /нульовому/ кроці, який є не що інше, як термінальна складова. Тому

$$\mathbf{V}_0[\mathbf{X}_{kf}]=\mathbf{G}[\mathbf{X}_{kf}]=1/2\mathbf{X}^T_{kf}\mathbf{S}\mathbf{X}_{kf} \qquad (4.2.16)$$

При $i=k_f-1$ одержуємо однокроковий процес, або процес з одним інтервалом керування, який співпадає з останнім кроком. Тоді оптимальне значення критерію якості

$$V_1[\mathbf{X}_{kf-1}]=\min I_f[\mathbf{X}_{kf-1}]=\min [G[\mathbf{X}_{kf}]+\mathbf{F}_{kf-1}[\mathbf{X}_{kf-1}, \mathbf{U}_{kf-1}]] \qquad (4.2.17)$$

Підставляючи співвідношення (4.2.10) і (4.2.11)

$$G[\mathbf{X}_{kf}]=1/2[\mathbf{A}\mathbf{X}_{kf-1}+\mathbf{B}\mathbf{U}_{kf-1}]^T\mathbf{S}[\mathbf{A}\mathbf{X}_{kf-1}+\mathbf{B}\mathbf{U}_{kf-1}] \qquad (4.2.18)$$

і спрощуючи, одержимо

$$\mathbf{V}_1[\mathbf{X}_{kf-1}]=\min_{\mathbf{U}_{kf-1}}[1/2\mathbf{X}_{kf-1}(\mathbf{Q}+\mathbf{A}^T\mathbf{S}\mathbf{A})\mathbf{X}_{kf-1}+\mathbf{X}^T{}_{kf-1}1/2\mathbf{A}^T\mathbf{S}\mathbf{B}\mathbf{U}_{kf-1}+1/2\mathbf{U}^T{}_{kf-1}\mathbf{B}^T\mathbf{S}\mathbf{A}\mathbf{X}_{kf-1}+1/2\mathbf{U}^T{}_{kf-1}(\mathbf{R}+\mathbf{B}^T\mathbf{S}\mathbf{B})\mathbf{U}_{kf-1}]=\min_{\mathbf{U}_{kf-1}} I_1[\mathbf{X}_{kf-1}] \quad (4.2.18)$$

Запишемо умову мінімума $I_1[\mathbf{X}_{kf-1}]$

$$\frac{\partial I_1[\mathbf{X}_{kf-1}]}{\partial \mathbf{U}_{kf-1}}=0 \quad (4.2.19)$$

Описане рівняння має вигляд

$$\mathbf{U}_{kf-1}=-(\mathbf{R}+\mathbf{B}^T\mathbf{S}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{S}\mathbf{A}\mathbf{X}_{kf-1} \quad (4.2.20)$$

Підставивши (19) в (17) для $\mathbf{X}_{kf-1}$, після спрощення знайдемо

$$\mathbf{V}_1[\mathbf{X}_{kf-1}]=1/2\mathbf{X}_{kf-1}[\mathbf{Q}+\mathbf{A}^T\mathbf{S}\mathbf{A}-(\mathbf{R}+\mathbf{B}^T\mathbf{S}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{S}\mathbf{A})\mathbf{X}_{kf-1}] \quad (4.2.21)$$

Введемо позначення

$$\mathbf{P}_{kf}=\mathbf{S} \quad (4.2.22)$$

$$\mathbf{P}_{kf-1}=\mathbf{Q}+\mathbf{A}^T\mathbf{P}_{kf}\mathbf{A}-\mathbf{B}^T\mathbf{S}\mathbf{A}(\mathbf{R}+\mathbf{B}^T\mathbf{P}_{kf}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}_{kf}\mathbf{A} \quad (4.2.23)$$

Оптимальні значення виграшу згідно з виразом (14) і (15) набувають вигляду

$$\mathbf{V}_0[\mathbf{X}_{kf}]=1/2\mathbf{X}^T{}_{kf}\mathbf{P}_{kf}\mathbf{X}_{kf} \quad (4.2.24)$$

$$\mathbf{V}_1[\mathbf{X}_{kf-1}]=1/2\mathbf{X}^T{}_{kf-1}\mathbf{P}_{kf-1}\mathbf{X}_{kf-1} \quad (4.2.25)$$

Продовжуючи процес, покладемо $i=k_f-2$, тобто розглянемо задачу оптимізації , що складається з двох останніх кроків. Запишемо оптимальне значення критерія якості для двокрокового процесу

$$\mathbf{V}_2[\mathbf{X}_{kf-2}]=\min_{\substack{\mathbf{U}_{kf-2}\\ \mathbf{U}_{kf-1}}} I_2[\mathbf{X}_{kf-2}]=\min_{\substack{\mathbf{U}_{kf-2}\\ \mathbf{U}_{kf-1}}}[\mathbf{F}_{kf-2}[\mathbf{X}_{kf-2},\mathbf{U}_{kf-2}]+\mathbf{F}_{kf-1}[\mathbf{X}_{kf-1},\mathbf{U}_{kf-1}]+\mathbf{G}[\mathbf{X}_{kf}]] \quad (4.2.26)$$

Згідно з принципом оптимальності , для того, щоб двокроковий процес був оптимальним незалежно від стратегії керування на першому кроці, останній крок повинен бути оптимальним сам по собі. Тому

$$\mathbf{V}_2[\mathbf{X}_{kf-2}]=\min_{U_{kf-2}}[\mathbf{F}_{kf-2}[\mathbf{X}_{kf-2},\mathbf{U}_{kf-2}]+\mathbf{V}_1[\mathbf{X}_{kf--2}]] \tag{4.2.27}$$

де $\mathbf{V}_1[\mathbf{K}_{kf-1}]$ - оптимальний виграш на останньому кроці, що описується виразом (24).

Підставляючи співвідношення

$$\mathbf{F}_{kf-2}[\mathbf{X}_{kf-2},\mathbf{U}_{kf-2}]=1/2\mathbf{X}^{T}_{kf-2}\mathbf{Q}\mathbf{X}_{kf-2}+1/2\mathbf{U}^{T}_{kf-2}\mathbf{R}\mathbf{U}_{kf-2} \tag{4.2.28}$$

$$\mathbf{V}_1[\mathbf{X}_{kf-1}]=1/2[\mathbf{A}\mathbf{X}_{kf-2}+\mathbf{B}\mathbf{U}_{kf-2}]^{T}\mathbf{P}_{kf-1}[\mathbf{A}\mathbf{X}_{kf-2}+\mathbf{B}\mathbf{U}_{kf-2}] \tag{4.2.29}$$

в вираз (26), перепозначаючи члени і вроховуючи

$$\frac{\partial I_3[X_{kf-2}]}{\partial U_{kf-2}}=0 \tag{4.2.30}$$

можна показати, що оптимальне керуваня має вигляд

$$\mathbf{U}_{kf-2}=-[\mathbf{R}+\mathbf{B}^{T}\mathbf{P}_{kf-1}\mathbf{B}]^{-1}\mathbf{B}^{T}\mathbf{P}_{kf-1}\mathbf{A}\mathbf{X}_{kf-2} \tag{4.2.31}$$

$$\mathbf{V}_2[\mathbf{X}_{kf-2}]=1/2\mathbf{X}^{T}_{kf-2}[\mathbf{Q}+\mathbf{A}^{T}\mathbf{P}_{kf-1}\mathbf{A}-\mathbf{B}^{T}\mathbf{P}_{kf-1}\mathbf{A}][\mathbf{R}+\mathbf{B}^{T}\mathbf{P}_{kf-1}\mathbf{B}]^{-1}\mathbf{B}^{T}\mathbf{P}_{kf-1}\mathbf{A}]\mathbf{X}_{kf-2} \tag{4.2.32}$$

Враховуючи

$$\mathbf{P}_{kf-2}=\mathbf{Q}+\mathbf{A}^{T}\mathbf{P}_{lf-1}\mathbf{A}-\mathbf{B}^{T}\mathbf{P}_{kf-1}\mathbf{A}[\mathbf{R}-\mathbf{B}^{T}\mathbf{P}_{kf-1}\mathbf{B}]^{-1}\mathbf{B}^{T}\mathbf{P}_{kf-1}\mathbf{A} \tag{4.2.33}$$

запишемо співвідношення (31) в більш компактній формі

$$\mathbf{V}_2[\mathbf{X}_{kf-2}]=1/2\mathbf{X}^{T}_{kf-2}\mathbf{P}_{kf-2}\mathbf{X}_{kf-2} \tag{4.2.34}$$

Методом індукції можна показати, що в загальному випадку

$$\mathbf{V}_{kf-1}[\mathbf{X}(i)]=1/2\mathbf{X}^{T}_{i}\mathbf{P}_{i}\mathbf{X}_{i} \tag{4.2.35}$$

де

$$\mathbf{P}_i=\mathbf{Q}+\mathbf{A}^{T}\mathbf{P}_{i+1}\mathbf{A}-\mathbf{B}^{T}\mathbf{P}_{i+1}\mathbf{A}[\mathbf{R}+\mathbf{B}^{T}\mathbf{P}_{i+1}\mathbf{B}]^{-1}\mathbf{B}^{T}\mathbf{P}_{i+1}\mathbf{A} \tag{4.2.36}$$

Оптимальне керування

$$\mathbf{U}_1=-[\mathbf{R}+\mathbf{B}^{T}\mathbf{P}_{i+1}\mathbf{B}]^{-1}\mathbf{B}^{T}\mathbf{P}_{i+1}\mathbf{A}\mathbf{X}_{i} \tag{4.2.37}$$

При використанні методу динамічного програмування не потребує, щоб матриця **R** була додатньо визначеною, оскільки відсутнє обчислення $\mathbf{R}^{-1}$. Більш того, **R** може бути нульовою матрицею. Однак матриця $\mathbf{R}+\mathbf{B}^T\mathbf{P}_{i+1}\mathbf{B}$ повинна мати зворотню матрицю.

4.3 Зв`язок динамічного програмуванняз з принципом максимуму

Слід звернути увагу на збіжність виразів

$$-\frac{\partial V}{\partial t} = \min\left\{F\left[\mathbf{X}(t),\mathbf{U}(t),t\right] + \left[\frac{\partial V}{\partial \mathbf{X}}\right]^T f(\mathbf{X},\mathbf{U},t)\right\} \tag{4.3.1}$$

та виразу зв`язаного з мінімізацією функції Гамільтона у формуванні задачі оптимального керування на основі принципу максимума. Якщо вздовж оптимальної траєкторії вектор $\partial V/\partial X$ ототожнювати з спряженим вектором λ, то величина, в фігурних дужках (4.3.1), є гамільтоніаном Н для принципа максимума. В цьому випадку

$$-\frac{\partial V}{\partial t} = H(\mathbf{X},^* \mathbf{U},^* t) \ , \tag{4.3.2}$$

$$\frac{\partial V}{\partial \mathbf{X}} = \boldsymbol{\lambda}(t) \ . \tag{4.3.3}$$

Таким чином спряженний вектор, відповідний оптимальній траєкторії, представляє собою вектор, що направлений в бік, протилежний напрямку градієнта критерія оптимальності $\mathbf{V}[X(t),t]$. Так як вектор градієнта направлений в бік швидкого збільшення функції, то вектор λ розташовується в кожний момент часу в напрямку швидкого зменшення критерія оптимальності. З виразу (4.3.2) видно, що оптимальна функція Гамільтона $H(\mathbf{X},^* \mathbf{U},^* \boldsymbol{\lambda},t)$ дорівнює швидкості зменшення критерія оптимальності при відрахунку часу від зворотньої початкової точки.

Приклад 4.2.

Розглянемо систему:

$$x' = x^3 + U \ , \quad x(0) = x_0$$

для якої функція вартості

$$I = \frac{1}{2}\int_0^\infty (x^2 + U^2)dt \to \min \ .$$

Потрібно визначити оптимальне керування зі зворотнім зв`язком.

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \min H\left(x, U, \frac{\partial V}{\partial X}\right) = 0 \ , \qquad \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \,,$$

$$H\left(X, U, \frac{\partial V}{\partial X}\right) = \frac{1}{2}(x^2 + U^2) + \lambda(x^3 + U)\,,$$

$$\frac{\partial H}{\partial U} = U + \lambda = 0\,, \qquad U = -\lambda = -\frac{\partial V}{\partial X}\,,$$

$$H^*\left(X, \frac{\partial V}{\partial X}\right) = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial X}\right)^2 + \frac{\partial V}{\partial X}x^3 + \frac{1}{2}x^2\,,$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial X}\right)^2 - 2x^3\frac{\partial V}{\partial X} - x^2 = 0\,, \qquad V\left[x(t_0), t_0\right] = 0\,,$$

$$\frac{\partial V}{\partial X} = \frac{2x^3 \pm \sqrt{4x^6 + 4x^2}}{2} = x^3 \pm x\sqrt{x^4 + 1}\,,$$

$$U^* = -\frac{\partial V}{\partial X} = -x^3 - x\sqrt{x^4 + 1}\,, \qquad x' = x^3 + U = -x\sqrt{x^4 + 1} \ ,$$

Також розв`язання звичайного диференціального рівняння можна розкласти в степеневий ряд: $V(x) = p_0 + p_1 x + \frac{1}{2!}p_2 x^2 + \frac{1}{3!}p_3 x^3 + \frac{1}{4!}p_4 x^4\,,$

$$\frac{\partial V}{\partial X} = p_1 + p_2 x + \frac{1}{2!}p_3 x^2 + \frac{1}{3!}p_4 x^3\,,$$

Якщо обмежити ряд членом четвертого порядку, підставити можливе рішення в диференціальне рівняння та прирівняти члени з однаковими степенями x, то отримаємо рішення

$$p_1 = 0;\ \ p_2 = 1;\ \ p_3 = 0;\ \ p_4 = 6;\ \ \frac{\partial V}{\partial X} = x + x^3.$$

До цих пір передбачалось, що час досягнення t_f фіксований. Можна зняти це обмеження та як і до цього використовувати рівняння Гамільтона - Якобі. Початковою умовою для рівняння Гамільтона - Якобі як і раніше буде

$$V\left[\mathbf{X}(t_f), t_f\right] = G\left[\mathbf{X}(t_f), t_f\right].$$

Крім цього, час досягнення визначається з рівності

$$H\left(\mathbf{X},\frac{\partial V}{\partial \mathbf{X}},t\right)+1=0 \qquad t=t_f,$$

яка має місце в задачах про мінімальний час, коли

$$V[\mathbf{X},t]=t_f-t.$$

Далі якщо система інваріантна в часі, гамільтоніан на оптимальній траекторії в любий момент часу дорівнює -1.

Формально можна отримати принцип максимума Понтрягіна, обчислюючи відповідні частинні похідні в рівнянні Гамільтона - Якобі. Однак отриману в результаті форму запису принципу максимума неможна використовувати в більш широкому класі задач. Причина полягає в принципі гладкості V[**X**,t] або, іншими словами, в тому, що V[**X**,t] повинна бути два рази неперервно диференційована по **X** для отримання канонічних рівнянь Гамільтона в принципі максимума. Зауважимо, що навіть в простій задачі оптимального по швидкодії керування лінійним стаціонарним об`єктом, частинні похідні V[**X**,t] по **X** розривні.

Ті випадки, в яких похідна $\partial V/\partial \mathbf{X}$ має розриви можна розглядати за допомогою більш загального рівняння Беллмана

$$\min\left\{\left[\frac{dV}{dt}\right]_{U,t}+F[\mathbf{X}(t),\mathbf{U}(t),t]\right\}=0.$$

Це рівняння і є функціональним рівнянням Беллмана в загальній формі. Воно виражає необхідну умову оптимальности. Зазначимо, хоч в задачі про швидкодію $\frac{\partial V}{\partial \mathbf{X}}$ і є розривною вздовж лінії перемикання повна похідна $\left[\frac{dV}{\partial t}\right]$ вздовж оптимальної траекторії неперервна. Дійсно, якщо навіть $\partial V/\partial \mathbf{X}$ та $f(\mathbf{X},\mathbf{U},t)$ не є неперервними на траекторії $\mathbf{X}^*$(t) в точці $\mathbf{X}^*(\tau)$, то поки виконується умова

$$\lim_{t\to\tau^+}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial X}\right)^T f(\mathbf{X},\mathbf{U},t)\right]=\lim_{t\to\tau^-}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial X}\right)^T f(\mathbf{X},\mathbf{U},t)\right]$$

величина $\left[\frac{dV}{dt}\right]$ залишається неперервною при t=τ.

Обгрунтованість рівняння Белмана в загальному випадку доведена багатьма авторами, наприклад, [ ],[ ]. При достатньо загальних умовах, які виконуються для всіх задач, якщо при деякому керуванні $\mathbf{U}^*$ керування Белмана справедливе поблизу лінії або поверхні перемикання , де $\frac{\partial V}{\partial \mathbf{X}}$ не визначена, то $\mathbf{U}^*$ представляє собою оптимальну функцію керування. Далі, якщо існують односторонні границі для похідної $\frac{\partial V}{\partial \mathbf{X}}$, то її можна розглядати як спряженний вектор λ у всьому просторі, де останній визначений.

4.4 Динамічне програмування як достатня умова оптимальности

Теорема

Нехай область цілі представляє собою множину S, а кінцевий момент часу t_f не заданий. Позначимо через V відкриту область в якій V(**X**,t) визначається наступним чином:

1) $\frac{\partial V}{\partial t}$ неперервна по **X** та t, а $\frac{\partial V}{\partial X}$ або неперервна по **X** та t або задовільняє умові

$$\lim_{t\to\tau^+}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial \mathbf{X}}\right)^T f\right]=\lim_{t\to\tau^-}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial \mathbf{X}}\right)^T f\right]$$

в любий момент часу t= τ , коли ${\partial V}/{\partial \mathbf{X}}$ або f(X,U,t) розривні;

2) для кжного **X** в V в кожний момент часу t функція Гамільтона $H\left(\mathbf{X},\mathbf{U},t;{\partial V}/{\partial \mathbf{X}}\right)$ має абсолютний мінімум при $\mathbf{U}=\mathbf{U}^*$ з множини допустимих функцій керування. Крім того $\mathbf{U}^*$(t) визначає лише одну траекторію системи $\mathbf{X}^*$(t).

3) на кінцевій множині S V(X;t)=0.

Приклад 4.1.

Динаміку лінеаризованого об`єкта можна виразити

$$X_1' = X_2, \quad X_2' = \frac{k_1}{k_2 - t} X_3, \quad X_3' = U \qquad .$$

Припустимо, використовуючи функціонал

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{\tau} \left(\mathbf{X}^T \mathbf{Q} \mathbf{X} + r\mathbf{U}^2 \right) dt,$$

де r=10, T=250c,

$$Q(t) = \frac{1}{(300 - t)^2} \begin{bmatrix} 5 \cdot 10^{-7} & 0 & 0 \\ 0 & 10^{-3} & 0 \\ 0 & 0 & 10^3 \end{bmatrix},$$

$X_1(0)=3000$, $X_2(0)=800$, $X_3(0)=12$,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{k_1}{k_2 - t} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \qquad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$ гранична умова p(T)=0.

Дивлячись на те, що $r^{-1}B^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/10 \end{bmatrix}$ маємо

$$U*(X,t) = -\frac{1}{10}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{10}\begin{bmatrix} p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}$$

Виходячи з матричного характеру рівняння можна показати, що необхідно розв`язати слідуючі шість зв`язаних нелінійних диференціальних рівняння з граничними умовами в одній точці:

$$\begin{bmatrix} p'_{11} & p'_{12} & p'_{13} \\ p'_{21} & p'_{22} & p'_{23} \\ p'_{31} & p'_{32} & p'_{33} \end{bmatrix} = -\frac{1}{300-t^2}\begin{bmatrix} 5\cdot 10^{-7} & 0 & 0 \\ 0 & 10^{-3} & 0 \\ 0 & 0 & 10^3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{k_1}{k_2-t} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$-\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{k_1}{k_2-t} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} +$$

$$+\frac{1}{10}\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{300-t^2}\begin{bmatrix} 5\cdot 10^{-7} & 0 & 0 \\ 0 & 10^{-3} & 0 \\ 0 & 0 & 10^3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & p_{11} & p_{12}\dfrac{k_1}{k_2-t} \\ 0 & p_{21} & p_{22}\dfrac{k_1}{k_2-t} \\ 0 & p_{31} & p_{32}\dfrac{k_1}{k_2-t} \end{bmatrix} -$$

$$-\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21}\dfrac{k_1}{k_2-t} & p_{22}\dfrac{k_1}{k_2-t} & p_{23}\dfrac{k_1}{k_2-t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{13}p_{31} & p_{13}p_{32} & p_{13}p_{33} \\ p_{23}p_{31} & p_{23}p_{32} & p_{23}p_{33} \\ p_{33}p_{31} & p_{33}p_{32} & p_{33}p_{33} \end{bmatrix};$$

$$p'_{11} = \frac{1}{10}p_{13}^2 - \frac{5\cdot 10^{-7}}{(300-t)^2},$$

$$p'_{12} = \frac{1}{10}p_{13}p_{23} - p_{11},$$

$$p'_{13} = \frac{1}{10}p_{13}p_{33} - \frac{k_1}{k_2-t}p_{12},$$

$$p'_{22} = \frac{1}{10}p_{23}{}^2 - 2p_{12} - \frac{10^{-3}}{(300-t)^2},$$

$$p'_{23} = \frac{1}{10}p_{23}p_{33} - \frac{k_1}{k_2-t}p_{22} - p_{13},$$

$$p'_{33} = \frac{1}{10}p_{33} - 2\frac{k_1}{k_2-t}p_{23} - \frac{10^3}{(300-t)^2}.$$

Результати розрахунків, залежних від часу коефіцієнтів $p_{11}(t), p_{23}(t), p_{33}(t)$ та відповідні їм стани показані на рис. 4.5 .

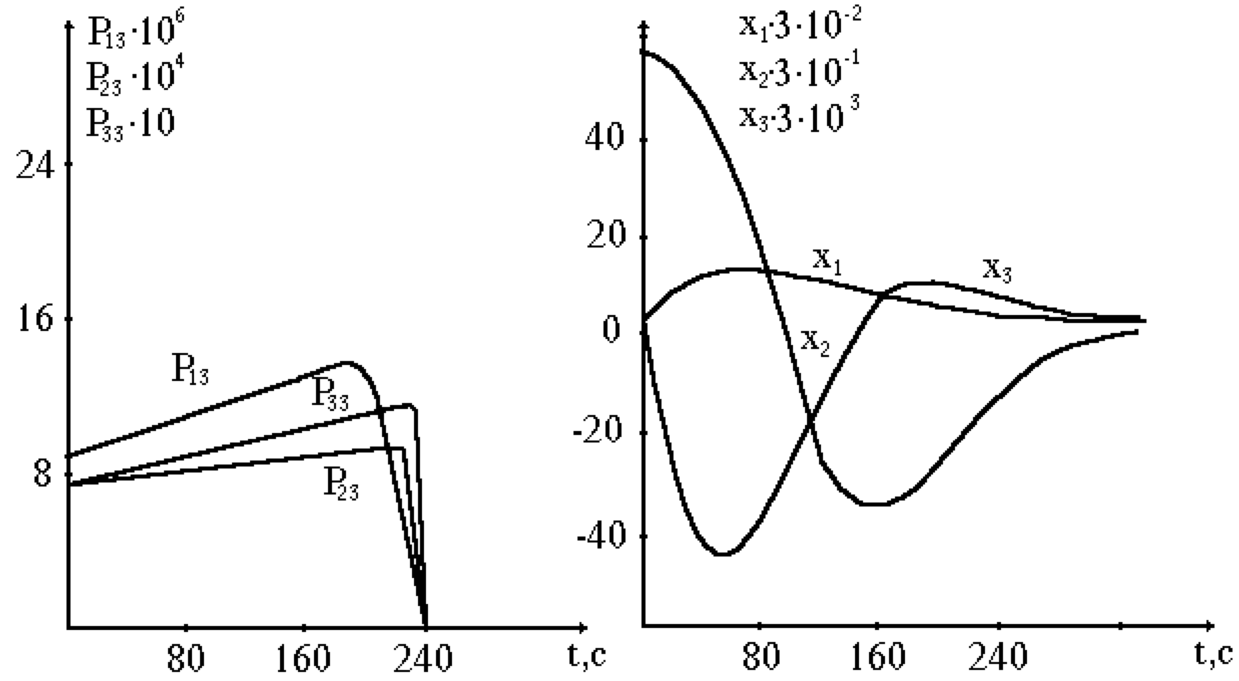


Рис. 4.5 Характеристики лінійного квадратичного оптимального регулятора.

Висновки.

Переваги методу ДП в тому, що основні диференціальні рівняння достатньо просто виводяться на основі принципу оптимальності, згідно з яким люба частина оптимальної траекторії (та зв`язана з нею функція керування) повинна бути оптимальною.

Основне функціональне рівняння, що називається рівнянням Белмана, представляє собою нелінійне диференціальне рівняння першого порядку в частинних похідних відносно оптимальної функції $V[\mathbf{X}(t),t]$. Гранична умова задається в одній точці. В загальному випадку рівняння справедливе в усьому просторі станів, за виключенням, можливо, лінії або площини перемикання. Більш загальна форма рівняння Белмана справедлива в усьому просторі станів.

ДП зручно використовувати при вирішенні оптимальних задач для лінійних систем керування та квадратичного критерія якості. При вирішенні інших задач ДП меньш ефективно в порівнянні з принципом максимума, оскільки потрібно розв`язувати диференціальні рівняння в частинних похідних. В тих випадках, коли $\partial V / \partial \mathbf{X}$ не є неперервною по **X**, використовується загальна форма рівняння

Белмана, яка використовується, коли на функцію керування **U**(t) накладені обмеження типу нерівність.

Контрольні запитання до розділу 4.

1. Принцип оптимальності Белмана.
2. Рекурентне співвідношення для процедури зворотньої прогонки.
3. Рівняння Гамільтона-Якобі і проблеми рішення його.
4. Метод дискретного динамічного програмування.
5. Вимоги до оптимальної функції V[X,t].
6. Функціональне рівняння Белмана у загальній формі.
7. Достатні умови оптимальності.

5. *Нелінійні системи керування*

5.1 Оптимальне керування зі зворотнім зв`язком для нелінійних систем по квадратичному критерію

Розглянемо нелінійную систему вида

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = f(\mathbf{X},\mathbf{U}), \ \ \mathbf{X}(t_0) = X_0, \tag{5.1.1}$$

з критерієм оптимальності $I[U(t)] = G[\mathbf{X}(t_f)] + \int_0^{t_f} F(\mathbf{X},\mathbf{U},t)dt$.

(5.1.2)

Розкладаючи функціонал (5.1.2) в ряд вздовж номінальної траєкториї X(t), U(t), відкидаючи члени вище другого порядку малості та враховуючи обмеження у вигляді рівняння динаміки (5.1.1),отримаємо для варіації δ I наступний вираз:

$$\begin{aligned}\delta I &= \left(\frac{\partial G}{\partial \mathbf{X}}\right)_{tf} \delta\mathbf{X}(t_f) + \frac{1}{2}\delta^T\mathbf{X}(t_f)\left(\frac{\partial^2 G}{\partial \mathbf{X}^2}\right)_{tf} \delta\mathbf{X}(t_f) - \boldsymbol{\lambda}^T(t_f)\delta\mathbf{X}(t_f) + \\ &+ \boldsymbol{\lambda}^T(t_0)\delta\mathbf{X}(t_0) + \int_{t_0}^{t_f}\left[\left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{U}}\right)\delta\mathbf{U} + \frac{1}{2}\delta\mathbf{U}^T\left(\frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{U}^2}\right)\delta\mathbf{U} + \left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{X}}\right)\delta\mathbf{X} + \right. \\ &\left. + \frac{1}{2}\delta\mathbf{X}^T\left(\frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{X}^2}\right)\delta\mathbf{X} + \delta\mathbf{X}^T\left(\frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{X}\partial \mathbf{U}}\right)\delta\mathbf{U} + \left(\frac{d\boldsymbol{\lambda}^T}{dt}\right)\delta\mathbf{X}\right]dt\end{aligned} \tag{5.1.3}$$

де $\delta\mathbf{X} = \mathbf{X} - \overline{\mathbf{X}}$, $\delta\mathbf{U} = \mathbf{U} - \overline{\mathbf{U}}$, $H = F + \lambda^T f$

Нехай номінальне керування та траєкторія задовольняють необхідим умовам оптимальності першого порядку

$$\frac{\partial H}{\partial U}=0 \quad \frac{d\lambda}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial X}, \quad \lambda^T\left(t_f\right)=\frac{\partial G}{\partial X\left(t_f\right)} \;, \tag{5.1.4}$$

причому припускається, що $\mathbf{X}(t_0)$ задано $\left(X(t_0)=\bar{X}_0\right)$, а $X(t_f)$ вільнє. У цьому випадку **X**, **U** визначають оптимальну програму та оптимальну траєкторію відповідно, що визначені для початкового стану X_0. Тепер вираз (5.1.3) перетворюється у вигляд

$$\delta\ I=\int_{t_0}^{t_f}\left[\tfrac{1}{2}\delta\,\mathbf{U}^T\left(\partial^2 H/\partial\mathbf{U}^2\right)\delta\,\mathbf{U}+\delta\mathbf{X}^T\left(\delta^2 H/\delta\,\mathbf{X}\delta\,\mathbf{U}\right)\delta\,\mathbf{U}+\tfrac{1}{2}\delta\,\mathbf{X}^T\left(\delta^2 H/\delta\,\mathbf{X}^2\right)\delta\,\mathbf{X}\right]dt$$
$$+\tfrac{1}{2}\delta\,X^T\left(t_f\right)\left(\partial^2 G/\partial\,\mathbf{X}^2\right)\Big|_{t_f}\delta\,X\left(t_f\right)$$

(5.1.5)

Відмітимо, що при зміненні початкового стану $\mathbf{X}_0$ усю оптимальну програму потрібно перерахувати, оскільки на відміну від лінійного випадку, де принцип суперпозиції для початкових умов дозволяє врахувати якізавгодно змінення, в нелінійному випадку рішення задачі оптимального управління, що залежать від початкового стану, також нелінійні. Для рішення цього можна скористатися підходом, заснованом на теорії збурень.

Якщо лінеаризувати рівняння динаміки системи в околишній оптимальній програмній стратегії при фіксованих початкових умовах $\mathbf{X}(t_0)=\overline{\mathbf{X}}(t_0)$, то отримаємо рівняння у варіаціях для збуренного руху

$$d\left(\delta\,\mathbf{X}(t)\right)/dt=\left(\partial f/\partial X\right)\delta X+\left(\partial f/\partial U\right)\delta\,\mathbf{U}, \quad \delta\,\mathbf{X}(t_0)=\delta\,\mathbf{X}_0 \tag{5.1.6}$$

Це рівняння описує рух системти для вимог, що були взяті в достатньо малому колі $\overline{\mathbf{X}}_0$, тобто при $\left|\delta\,\mathbf{X}(t_0)\right|\prec\varepsilon$. Змінення якості керування, обгрунтоване цим збуренням можна підрахувати по (5.1.5). Таким чином рівняння (5.1.5) та (5.1.6) визначають лінійну задачу оптимального керування з квадратичним критерієм, рішення якої $\delta\overline{\mathbf{U}}(t),\delta\overline{\mathbf{X}}(t)$ являється корекцією оптимальної програми $\overline{\mathbf{X}}(t),\overline{\mathbf{U}}(t)$. Оптимальна корекция $\delta\,\overline{\mathbf{U}}(t),\delta\,\overline{\mathbf{X}}(t)$ формується по принципу зворотнього зв`язку. Цей результат для системи з одномірним станом та керуванням ілюструє рисунок 5.1 , на якому вказані номінальне керування та траєкторії, що виходять а також оптимальна корекція $\delta\mathbf{U}(t), \delta\mathbf{X}(t)$,що визивається збуренням початкового стану.

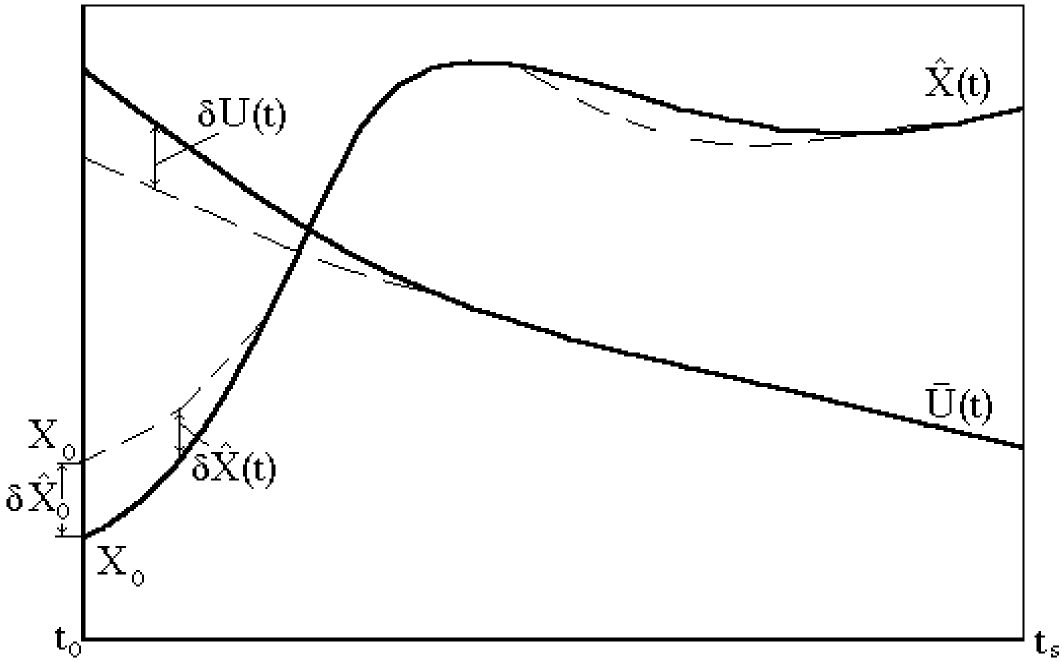


Рис.5.1 Оптимальне керування оптимальними системами при малих збуреннях.

Рішення задачи синтезу оптимального закону регулювання дається формулами, якщо ввести обозначення

$$\mathbf{A}(t)=\frac{\partial f}{\partial \mathbf{X}}; \quad \mathbf{B}(t)=\frac{\partial f}{\partial \mathbf{U}}; \quad Q(t)=\frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{X}^2}; \quad ;\mathbf{R}(t)=\frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{U}^2};$$
$$\mathbf{N}(t)=\frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{X}\partial \mathbf{U}}; \quad \mathbf{S}_f=\frac{\partial^2 G}{\partial \mathbf{X}^2} \tag{5.1.7}$$

Для критерія якості

$$I=\frac{1}{2}\mathbf{X}^T(t_f)\mathbf{S}_f\mathbf{X}(t_f)+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}\left[\mathbf{X}^T\mathbf{U}^T\right]\begin{bmatrix}\mathbf{Q}(t) & \mathbf{N}(t)\\ \mathbf{N}(t) & \mathbf{R}(t)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{X}\\ \mathbf{U}\end{bmatrix}dt \tag{5.1.8}$$

для $\delta\mathbf{U}(t)=-\mathbf{K}(t)\delta\mathbf{X}(t)$, (5.1.9)

де $\mathbf{K}(t)=\mathbf{R}^{-1}(\mathbf{N}^T+\mathbf{B}^T\mathbf{S})$, (5.1.10)

звідки

$$\mathbf{U}(t)=\overline{\mathbf{U}}(t)+\mathbf{K}(t)\left[\mathbf{X}(t)-\overline{\mathbf{X}}(t)\right] \tag{5.1.11}$$

Розглянута методика може бути реалізована у вигляді слідуючій процедури:

1)розрахувати та запам`ятати набір оптимальных программ $\overline{\mathbf{U}}(t), \overline{\mathbf{X}}(t)$ для достатньо грубої мережі початкових умов X_0;

2) розрахувати та запам`ятати матричні коефіцієнти **K**(t) пілсилення регуляторів, що забезпечують оптимальну коррекцію для кожної початкової вимоги;

3) сформувати поточний керуючий вплив, визначив найбільш близьку до фактичної початкову вимогу з числа заповнених та використовуючи відповідну матрицю **K**(t).

Приклад5.1.

Розглянемо задачу керування температурою у хімічному реакторі з безперервним змішуванням , в якому йде реакція нульового порядку. Керуючим впливом є швидкість підводу охолоджуючого середовища. Модель процесу виводиться на основі теплового балансу:

$$\rho C_p V\left(\frac{dT}{dt'}\right) = \rho C_p F\left(T_f - T\right) + \left(-\Delta H\right) V k_0 e^{-E/RT} - Q \quad , \tag{5.1.12}$$

де T_f - температура початкового продукту в реакторі ,

$(-\Delta H)$=q - екзотермічний ефект реакції нульового порядку,

$Q' = kF(T - T_x)$ -кількість тепла, що відводиться хладогентом у кожусі,

$T(0)=T_0$.

Вводячи безрозмірні змінні $x = T/T_f$, $t = t'F/V$,

$a = (-\Delta \mathrm{H}) k_0 V/\rho C_p T_f F$; $\gamma = E/R T_f$, $u = Q'/\rho C_p F T_f$;

$x_0 = T_0/T_f$;

$xd = Td/Tf$ прийдемо до рівняння

$$x' = 1 - x + a e^{-\gamma/x} - u \, , \quad x(0) = x_0 \tag{5.1.13}$$

Будемо вирішувати задачу синтезу регулятора, мінімізуючого критерий

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{t_f}\left[(x - x_d)^2 + \alpha u^2\right]dt \qquad (5.1.14)$$

Припустимо, що стратегія оптимального програмування $u^*(t), x^*(t)$ для фіксованого початкового стану побудована за допомогою процедури градієнтного пошуку , що включає наступні кроки:

1) задати початкову програму $u_0(t)$;

2) проінтегрувати (5.1.12) від x_0 до x_f, получити траєкторію x(t);

3) $$\lambda' = -(x - x_d) + \lambda\left[1 - \left(\alpha\gamma e^{-\gamma/x} / x^2\right)\right], \qquad (5.1.15)$$

проінтегрувати у зворотньому часу рівняння (5.1.15)

4) визначити нову програму керування

$u_{нов}(t)=u_{стар}(t)+\varepsilon\left(\partial H/\partial u\right), \varepsilon \prec 0$, де

$H = \frac{1}{2}\left[(x - x_d)^2 + \alpha u^2\right] + \lambda\left(1 - x + ae^{-\gamma/x} - u\right)$ та

$\frac{\partial H}{\partial u} = \alpha u - \lambda$ та повернутися до кроку 2.

Повторюючи цю процедуру для сітки початкових умов, що визначаються диапазоном змінення очікуваних збурень , отримаємо сукупність оптимальних програмних стратегій $U^*(t), X^*(t)$.

Лінеаризований критерій та динаміка задаються матрицями

$$A = \left(\partial f / \partial x\right) = \left[-1 + \left(a\gamma / x^2\right)e^{-\gamma/x}\right], \quad B = \frac{\partial f}{\partial u} = -1,$$

$$Q = \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = 1 + \lambda\left[\left(a\gamma / \bar{x}^4\right) - \left(2a\gamma / \bar{x}^3\right)\right]e^{-\gamma/\bar{x}} .$$

Рівняння Ріккаті має вигляд для S(t):

$$S' = -2S\left(-1 + \frac{a\gamma}{x^2}e^{-\gamma/\bar{x}}\right) - \left[1 + \bar{\lambda}\left(\frac{a\gamma^2}{\bar{x}^4} - \frac{2a\gamma}{\bar{x}^3}\right)e^{-\gamma/\bar{x}}\right] + \frac{S^2}{\alpha}, \quad S(t_f)=0$$

або з урахуванням того, що $\bar{\lambda} = \alpha\bar{U}$,ї

$$\frac{dS}{dt} = -2\left[\frac{a\gamma}{x^2}e^{-\gamma/x} - 1\right]S + \frac{S^2}{\alpha} - 1 - \alpha u\left(\frac{a\gamma^2}{x^4} - \frac{2a\gamma}{x^3}\right)e^{-\gamma/x},$$

- - S(t_f)=0, $k(t) = -{S(t)}/{\alpha}$.

Звідти вираз для оптимального регулятора

$$u(t) = \bar{u}(t) - k(t)\left[x(t) - \bar{x}(t)\right].$$

5.2 Нелінійні багатовимірні системи керування.

Параметризація регуляторів

Більшість існуючих заходів проектування систем керування можуть застосовуватися в окремих вузьких класах нелінійних процесів. Серед цих процесів є так званий метод параметризації управлінь, котрий може бути застосований практично для будь-яких нелінійних об`єктів керування.

Визначимо структуру регулятора

$$\mathbf{U} = g(\mathbf{y}, \mathbf{b}), \qquad (5.2.1)$$

де вектор параметрів b потрібно підбирати таким чином, щоб забеспечити мінімальне значення критерія оптимальности

$$I = G(\mathbf{Y}(t_f)) + \int_0^{t_f} F(\mathbf{Y}(t), U(t))dt\ . \qquad (5.2.2)$$

Хоча при цьому методі потрібно знову визначати оптимальне значення вектора **b**, при будь-якій зміні початкового стану системи, досвід показує, що залежність **b** початкового стану слабка, тому можливо знайти глобальне оптимальне значення вектора параметрів.

Приклад5.2..

Задача синтеза пропорціонального регулятора для процесу в ізотермічному хімічному реакторі з перемішуванням.

Нехай маємо ізотермічний хімічний реактор з перемішуванням, в якому проходять незворотні реакції: $A \to B$ має порядок 2, а реакція $B \to C$ порядок ${1}/{2}$, де k_1, k_3 - сталі швидкості реакції. Модель процеса в цьому випадку задається слідуючими рівняннями

$$V\left(\frac{dc_A}{dt}\right) = F\left(c_{Af} - c_A\right) - Vk_1c^2{}_A,$$

$$V\left(\frac{dc_B}{dt}\right)=F\left(c_{Bf}-c_B\right)+Vk_1c^2{}_A-Vk_3c_B{}^{1/2},$$

де F- об`ємна витрата,

V- об`єм реакціі маси

і після введення безрозмірних змінних

$$x_1=c_A/c_{Aref}, \qquad x_2=c_B/c_{Aref}, \qquad u_1=c_{Af}/c_{Aref}, \qquad u_2=c_{Bf}/c_{Aref},$$

$$D_{a1}=k_1c_{Aref}\,V/F; \qquad D_{a3}=k_3\,V/F;(c_{Aref})^{1/2}; \qquad t=t'\,F/V$$

C_{Aref}- деяке дозвільно вибране базове значення концентрації C_A.

Математична модель представлена у вигляді:

$$\frac{dx_1}{dt}=-x_1-Da_1x^2{}_1+u_1, \tag{5.2.3}$$

$$\frac{dx_2}{dt}=Da_1x_1^2-x_2Da_3(x_2)^{1/2}+u_2.$$

Будемо вважати, що задані уставки як на x_1, так і на x_2, а також структура регулювання

$$\overline{U}=K(X-X_S), \tag{5.2.4}$$

де $K=\begin{bmatrix}k_{11} & k_{12}\\ k_{21} & k_{22}\end{bmatrix}$ є матричний коефіцієнт підсилення, параметри якого можна підібрати, щоб

$$I=\int_0^{t_f}\left[(x_1-x_{1S})^2+\alpha(x_2-x_{2S})^2+\beta(u_2)^2\right]dt. \tag{5.2.5}$$

На u_1, u_2 накладені обмеження

$0\le u_1\le 2{,}0;$

$0\le u_2\le 1{,}0;$

u_2 -подача реагента В.

Синтез може бути виконан слідуючим чином :

1) задати початкове значення єлементів K;

2) обчислити рівняння (5.2.3), (5.2.4), (5.2.5);

3) мінімізуючи I завдяки якій-небудь багатовимірній процедурі пошуку по K_{ij}, отримати нові значення єлементів K.

Наприклад, якщо використовується градієнтна процедура

$k_{21нов}=k_{21стар}-\ \varepsilon\frac{\partial I}{\partial k_{21}}$; $\quad k_{22нов}=k_{22стар}-\ \varepsilon_1\frac{\partial I}{\partial k_{22}}$;

4) повернутися до пункту 2 і повторювати до тих пір поки не буде отримано прийнятне значення K.

Контрольні запитання до розділу 5.

1. Чи залежить рішення задачі оптимального управління від початкового стану для нелінійних систем?
2. Рівняння Ріккаті для оптимального нелінійного регулятора.
3. Методика оптимального керування з зворотнім зв′язком для нелінійних систем.
4. Метод параметризації керувань.

6. Оптимальне керування систем з розподіленими параметрами

6.1 Оптимальне керування систем з запізнюванням

Одним з найголовніших класів систем з розподіленими параметрами є системи з наслідком чи з запізнюванням, які використовуються при описуванні промислових об`єктів керування, в тому числі хімічні реактори, дистиляційні колони, папероперобні машини. Наявність запізнювання в контурі керування веде до зростання фазового зрушення, що може призвести до нестійкої замкненої системи навіть при невеликих коефіцієнтах підсилення регулятора, тому керуючий вплив в цьому випадку потрібно обмежити.

Більшості процедур синтезу керуючих пристроїв для процесів з запізнюванням (виключаючі ті, котрі зв`язані з оптимальними методами) характерне використання прогнозуючого блока для компенсації запізнювань в контурі керування (наприклад - прогнозатор Сміта).

Розглянемо систему, обмежуючись випадком постійного запізнювання:

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = f(\mathbf{X}(t); \mathbf{X}(t - \alpha_1),..., \mathbf{X}(t - a_\delta)\mathbf{U}(t), \mathbf{U}(t - \beta_1)..., \mathbf{U}(t - \beta_\mu))$$

(6.1.1)

$$-a_\delta \le t \le 0,$$
$$-\beta_\mu \le t \le 0,$$

де α_i, β_j - постійні запізнювання за станами та керуванням відповідно.

Необхідна умова оптимальності системи (6.1.1) тобто мінімум критерія

$$I = G[\mathbf{X}(t_f)] + \int_0^{t_f} F[\mathbf{X}(t), \mathbf{X}(t-\alpha_1),..., \mathbf{X}(t-\alpha_\delta), \mathbf{U}(t), \mathbf{U}(t-\beta_1),..., \mathbf{U}(t-\beta_\mu)]dt \quad (6.1.2)$$

задається наступною теоремою.

Теорема. Для того, щоб керування ***U(t)***, що належить множині допустимих керувань Ω, було оптимальним для системи (6.1.1) для мінімума критерія (6.1.2), необхідно, щоб виконувались наступні умови:

$$\frac{\partial H(t)}{\partial \mathbf{U}(t)} + \sum_{j=1}^{\mu} \left[\frac{\partial H(\tau)}{\partial \mathbf{U}(\tau - \beta_j)} \right]_{\tau = t + \beta_j} = 0 \qquad 0 < t < t_f - \beta_\mu$$

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{U}(t)} + \sum_{j=1}^{\mu-k} \left[\frac{\partial H(\tau)}{\partial \mathbf{U}(\tau - \beta_j)} \right]_{\tau = t + \beta_j} = 0 \qquad t_f - \beta_{\mu+1-k} < t < t_f - \beta_{\mu-k} \qquad (6.1.3)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{U}(t)} = 0 \qquad t_f - \beta_1 < t < t_f$$

у випадку відсутності обмежень на *U(t)* або

$$H(t) + \sum_{j=1}^{\mu} H(t+\beta_j) \to \min_{\mathbf{U}(t)\in\Omega} \qquad 0 \le t \le t_f - \beta_\mu$$

$$H(t) + \sum_{j=1}^{\mu-k} H(t+\beta_j) \to \min_{\mathbf{U}(t)\in\Omega} \begin{cases} t_f - \beta_{\mu+1-k} < t < t_f - \beta_{\mu-k} \\ k = 1,2,..., \mu - 1 \end{cases} \qquad (6.1.4)$$

$$H(t) \to \min_{\mathbf{U}(t)\in\Omega} \qquad t_f - \beta_1 < t < t_f$$

при наявності обмежень на керування (в цьому випадку необхідно також виконання останньої з умов (6.1.4) вздовж всіх відрізків траєкторії, вільних від обмежень). Гамільтоніан розглянутої задачі задається виразом

$$H(t) = F + \quad {}^{T} f, \tag{6.1.5}$$

де *λ(t)* - спряжені змінні, що обчислюються як рішення спряженої системи рівнянь:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\lambda}^T(t)}{\partial t} = \begin{cases} -\dfrac{\partial H}{\partial \mathbf{X}(t)} + \displaystyle\sum_{i=1}^{\delta} \left[\dfrac{\partial H(\tau)}{\partial \mathbf{X}(\tau - \alpha_i)} \right]_{\tau = t + \alpha_i} = 0 & 0 < t < t_f - \alpha_\delta \\ -\dfrac{\partial H}{\partial \mathbf{X}(t)} + \displaystyle\sum_{i=1}^{\delta - k} \left[\dfrac{\partial H(\tau)}{\partial \mathbf{X}(\tau - \alpha_i)} \right]_{\tau = t + \alpha_i} & \begin{cases} t_f - \alpha_{\delta+1+k} < t < t_f - \alpha_{\delta-k} \\ k = 1,2,..., \end{cases} \\ -\dfrac{\partial H}{\partial \mathbf{X}(t)}, \quad t_f - \alpha_1 < t < t_f \end{cases} \tag{6.1.6}$$

$$\boldsymbol{\lambda}(t_f - \alpha_i^+) = \boldsymbol{\lambda}(t_f - \alpha_i^-) \qquad i = 1,2,...,\delta \tag{6.1.7}$$

$$\boldsymbol{\lambda}(t_f - \beta_j^+) = \boldsymbol{\lambda}(t_f - \beta_j^-) \qquad j = 1,2,...,\mu \tag{6.1.8}$$

У випадку вільного кінця траєкторії $\mathbf{X}(t_f)$ $\boldsymbol{\lambda}(t)$ повинно задовільняти умові трансверсальності

$$\boldsymbol{\lambda}^T(t_f) = \frac{\partial G}{\partial X(t_f)} \tag{6.1.9}$$

Приклад 6.1. Розглянемо задачу розрахунку оптимальної програми переводу хімічного реактора з безперервним перемішуванням зодного усталеного стану в інший.

Математична модель процесу має вигляд

$$V\left(\frac{dc}{dt'}\right) = U_3'(c_f - c) - K_0 V e^{-E/RT} \tilde{c}\, c, \qquad c(0) = c_0, \tag{6.1.10}$$

$$V\left(\frac{d\tilde{c}}{dt'}\right) = (1-\gamma)U_2'(t' - \beta_1') + \gamma U_2'(t') - \tilde{c}\, U_3', \qquad \tilde{c}(0) = \tilde{c}_0, \tag{6.1.11}$$

$$\begin{aligned} \rho c_\rho V\left(\frac{dT}{dt'}\right) &= \rho c_\rho U_3'(T_f - T) + (-\Delta H) K_0 V e^{-E/RT} \tilde{c}\, c - \\ &- \left\{ hA + U_1'(t')\left[T(t' - \alpha_1') - T_s \right] \right\}\left[T - T_c \right], \qquad T(0) = T_0. \end{aligned} \tag{6.1.12}$$

При розробці математичної моделі прийняті наступні припущення:

1) Реакція $A_1 \to A_2$ має перший порядок і по реагенту і по каталізатору, концентрація реагента позначена c, концентрація каталізатора - через $\tilde{c}$;

2) подача каталізатора U_2' в систему відбувається у вигляді складових: доля γ - безпосередньо, а доля $(1-\gamma)$ разом з реагентом A_1 з запізнюванням на час β_1;

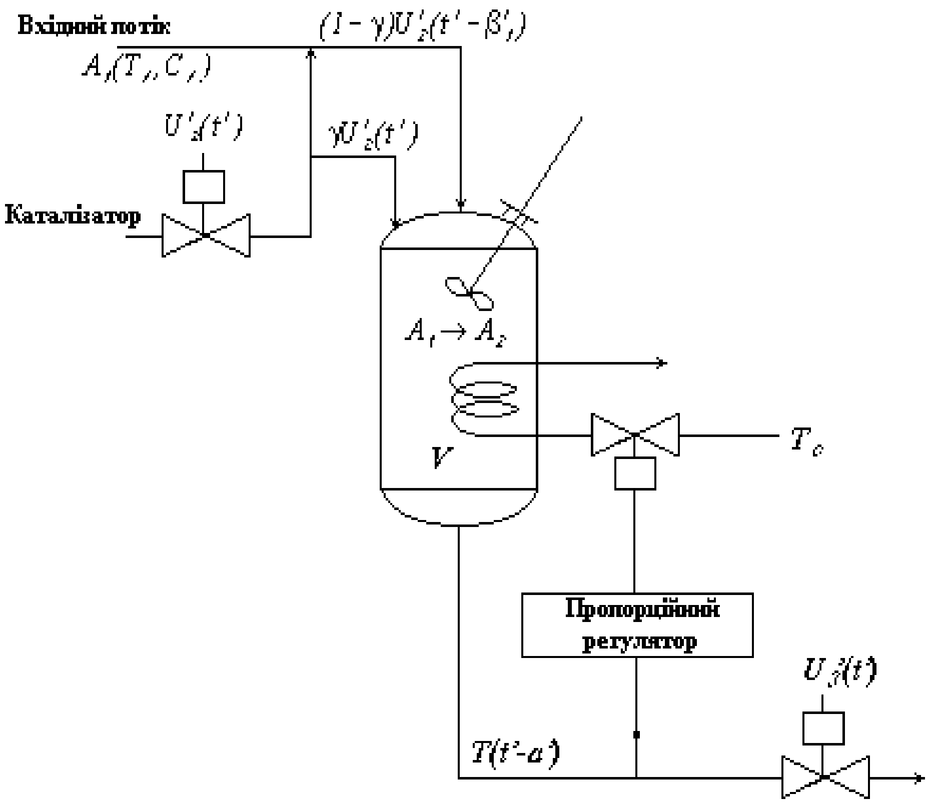


Рис.6.1 Схема хімічного реактора з перемішуванням

3) в системі є регулятор температури, який використовує безперервні виміри температури з запізнюванням на час α_1 для відповідного впливу на витрату охолоджуючої рідини, причому $U_1'(t')$ – коефіцієнт підсилення, що залежить від часу;

4) в порівнянні з молярною витратою реагента в реактор $U_3' c_f$ молярна витрата каталізатора U_2' дуже мала; тому вплив каталізатора на фізичні властивості системи можна не зважати.

Введемо відносні змінні:

$$x_1 = (c - c_s)/c_s, \qquad x_2 = (\tilde{c} - \tilde{c}_s)/\tilde{c}_s;$$

$x_3 = (T - T_s)/T_s; \quad \theta_h = V / F_s$

$t = t' / \theta_h; \quad U_1 = U_1' T_s / F_s;$

$$U_2 = U_2' / \tilde{c}_s F_s, \quad U_3 = U_3' / \mathrm{F_s} \tag{6.1.13}$$

$\theta = E / RT_s, \beta_1 = \beta_1' / \theta_h, \alpha_1 = \alpha_1' / \theta_h$

$Q = hA / \rho c_\rho F_s, \quad P = k_0 \theta_h e^{-\theta} \tilde{c}_s$

$Y = (-\Delta H)\tilde{c} / \rho c_\rho T_s, \quad x_{3c} = (T_c - T_s) T_s$

В цих позначеннях модель процесу запишеться

$$\frac{dx_1}{dt} = -U_3 x_1 - P\left[(1 + x_1)(1 + x_2)e^{\theta x_3/(x_3+1)} - U_3\right], \quad x_1(0) = x_{1_0} \tag{6.1.14}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = (1-\gamma)U_2(t - \beta_1) + \gamma U_2(t) + U_3(x_2 + 1), \quad x_2(0) = x_{2_0} \tag{6.1.15}$$

$$\begin{gathered} \frac{dx_3}{dt} = -U_3 x_3 + YP\left[(1 + x_1)(1 + x_2)e^{x_3\theta/(1+x_3)} - U_3\right] - \\ - Q\left[x_3(t) - x_{3c}(1 - U_3)\right] - U_1(t) x_3(t - \alpha_1)\left[x_3(t) - x_{3c}\right], \quad x_3(0) = x_{3_0} \end{gathered} \tag{6.1.16}$$

Будемо шукати програмне керування, що мінімізує функціонал

$$I = \int_0^{t_f} \left[x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \eta_2 (U_2 - 1)^2 + \eta_3 (U_3 - 1)^2\right] dt$$

при обмеженнях $U_i^* \le U_i \le U_i^{**} \quad i = 1,2,3$

Припустимо для спрощення, що витрата U_3 стабілізована на деякому постійному рівні, тоді усі запізнювання в системі можна вважати постійними.

При $\eta_2 = 1$ керування U_2 виявляється замороженим і функціонування системи забезпечується за рахунок лише одного U_1.Результати чисельного рішення задачі оптимального керування показані на рис.6.2.

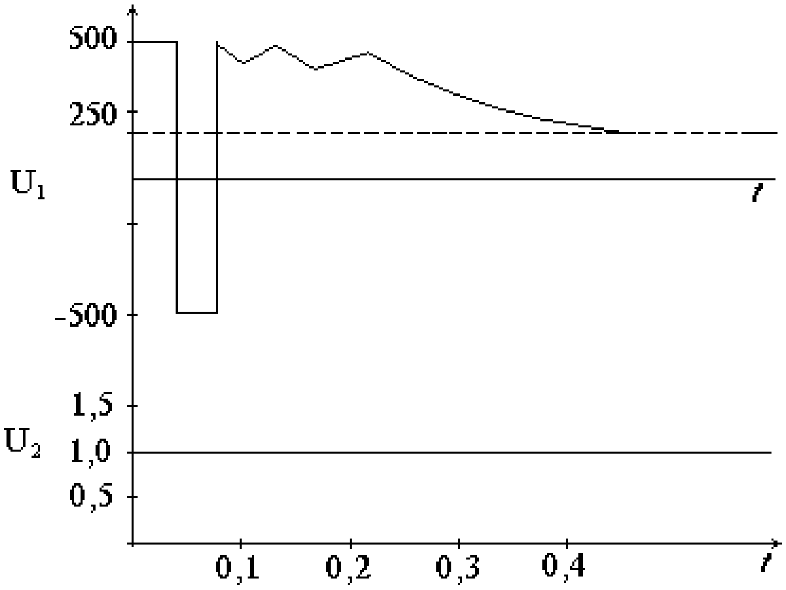


Рис.6.2 Оптимальне програмне керування.

– – – – – початкове значення

———— оптимальне значенння

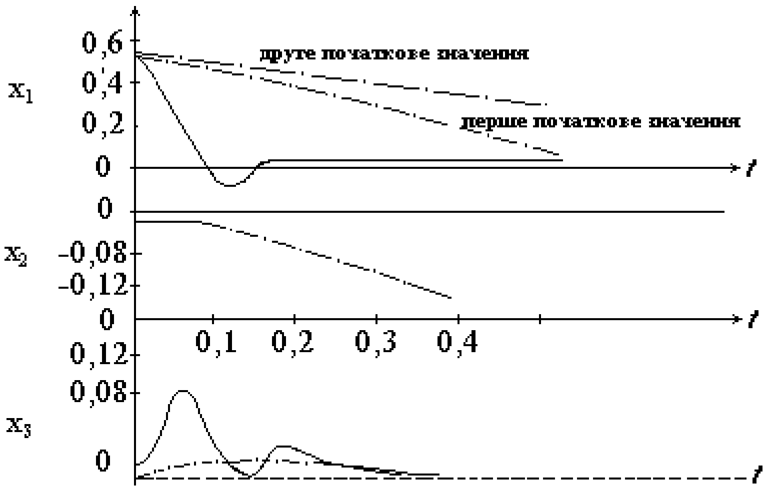


Рис. 6.3 Оптимальні траєкторії для випадка η_2*=1*

6.2 Лінійні задачі регулювання з квадратичним критерієм якості

Для лінійних систем з запізнюваням має вигляд

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = A_0\mathbf{X}(t) + \sum_{i=1}^{\delta} A_i\mathbf{X}(t-\alpha_i) + B_0\mathbf{U}(t) + \sum_{j=1}^{\mu} B_j\mathbf{U}(t-\beta_j) \qquad (6.2.1)$$

$$-\alpha_\delta \le t \le 0$$
$$-\beta_\delta \le t \le 0$$

можна синтезувати регулятор, оптимальний в плані квадратичного критерія якості

$$I = \tfrac{1}{2}\mathbf{X}^T(t_f)\mathbf{S}_f\mathbf{X}(t_f) + \tfrac{1}{2}\int_0^{t_f}\left[\mathbf{X}^T(t)\mathbf{Q}\mathbf{X}(t) + \mathbf{U}^T(t)\mathbf{R}\mathbf{U}(t)\right]dt \to \min$$

Відповідний закон зворотнього зв`язку задається виразами

$$\begin{aligned}\mathbf{U}(t) = -R^{-1}\Big\{&[\mathbf{B}_0^T\mathbf{P}_0(t) + \mathbf{P}_3^T(t,0)]\mathbf{X}(t) + \\ &+\int_{-\alpha_\delta}^{0}[\mathbf{B}_0^T\mathbf{P}_1(t,s) + \mathbf{P}_5^T(t,s,0)]\mathbf{X}(t+s)ds + \\ &+\int_{-\beta_\mu}^{0}[\mathbf{B}_0^T\mathbf{P}_3(t,s) + \mathbf{P}_4(t,0,s)]\mathbf{U}(t,s)ds\ \Big\}\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{P}_0}{dt} &= -\mathbf{P}_0(t)\mathbf{A}_0 - \mathbf{A}_0^T\mathbf{P}_0(t) - \mathbf{P}_1^T(t,0) - \mathbf{P}_0(t,0) + \\ &+[\mathbf{P}_0(t)\mathbf{B}_0 + \mathbf{P}_3(t,0)]R^{-1}[\mathbf{B}_0^T\mathbf{P}_0(t) + \mathbf{P}_3^T(t,0)] - \mathbf{Q}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathbf{P}_1(t,s)}{\partial t} = \frac{\partial\mathbf{P}_1(t,s)}{\partial s} &- \mathbf{A}_1^T\mathbf{P}_1(t,s) - \mathbf{P}_2(t,0,s) + [\mathbf{P}_0(t)\mathbf{B}_0 + \mathbf{P}_3(t,0)]R^{-1}\times \\ &\times[\mathbf{B}_0^T\mathbf{P}_1(t,s) + \mathbf{P}_5^T(t,s,0)], \qquad -\alpha_\delta \le s \le 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathbf{P}_2(t,r,s)}{\partial t} = \frac{\partial\mathbf{P}_2(t,r,s)}{\partial r} + \frac{\partial\mathbf{P}_2(t,r,s)}{\partial s} &+ \left[\mathbf{P}_1^T(t,r)\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_5(t,r,0)\right]R^{-1}\times \\ &\times\left[\mathbf{B}_0^T\mathbf{P}_1(t,s) + \mathbf{P}_5^T(t,s,0)\right], \\ &-\alpha_\delta \le r \le 0, \\ &-\alpha_\delta \le s \le 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathbf{P}_3(t,s)}{\partial t} = \frac{\partial\mathbf{P}_3(t,s)}{\partial s} &- \mathbf{A}_0^T\mathbf{P}_3(t,s) - \mathbf{P}_5(t,0,s) + \left[\mathbf{P}_0(t)\mathbf{B}_0 + \mathbf{P}_3(t,0)\right]R^{-1}\times \\ &\times\left[\mathbf{B}_0^T\mathbf{P}_3(t,s) + \mathbf{P}_4(t,0,s)\right], \\ &-\beta_\mu \le s \le 0,\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \mathbf{P}_4(t,r,s)}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{P}_4(t,r,s)}{\partial r} + \frac{\partial \mathbf{P}_5(t,r,s)}{\partial s} + \left[\mathbf{P}_3^T(t,r)\mathbf{B}_0 + \mathbf{P}_4(t,r,0)\right]R^{-1} \times$$
$$\times\left[\mathbf{B}_0^T \mathbf{P}_3(t,s) + \mathbf{P}_4(t,0,s)\right],$$
$$\begin{cases} -\beta_\mu \le r \le 0 \\ -\beta_\mu \le s \le 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial \mathbf{P}_5(t,r,s)}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{P}_5(t,r,s)}{\partial r} + \frac{\partial \mathbf{P}_5(t,r,s)}{\partial s} + \left[\mathbf{P}_1^T(t,r)\mathbf{B}_0 + \mathbf{P}_5(t,r,0)\right]R^{-1} \times$$
$$\times\left[\mathbf{B}_0^T \mathbf{P}_3(t,s) + \mathbf{P}_4(t,0,s)\right],$$
$$\begin{cases} -\beta_\mu \le s \le 0 \\ -\alpha_\delta \le r \le 0 \end{cases}$$

де $\boldsymbol{P_0}(t)$, $\boldsymbol{P_1}(t,s)$, $\boldsymbol{P_2}(t,r,s)$ - матричні функції размірністю $(n{\times}n)$, $\boldsymbol{P_3}(t,s)$, $\boldsymbol{P_4}(t,r,s)$, $\boldsymbol{P_5}(t,r,s)$ - матричні функції розмірністю $(n{\times}m)$.

Граничні умови для цих матричних функцій мають вигляд

$$\mathbf{P}_1(t,-\alpha_\delta) = \mathbf{P}_0(t)A_1 \qquad \mathbf{P}_4(t,-\beta_\mu,s) = \mathbf{B}_1^T\mathbf{P}_3(t,s)$$
$$\mathbf{P}_3(t,-\beta_\mu) = \mathbf{P}_0(t)B_1 \qquad \mathbf{P}_5(t,-\alpha_\delta,s) = \mathbf{A}_1^T\mathbf{P}_3(t,s)$$
$$\mathbf{P}_2(t,-\alpha_\delta,s) = \mathbf{A}_1^T\mathbf{P}_1(t,s) \qquad \mathbf{P}_5(t,r,-\beta_\mu) = \mathbf{P}_1^T(t,r)B$$

Для $P_2(t,r,s)$ та $P_4(t,r,s)$ справедливі співвідношення симетрії

$$\mathbf{P}_2^T(t,r,s) = \mathbf{P}_2(t,s,r), \qquad \mathbf{P}_4^T(t,r,s) = \mathbf{P}_4(t,s,r),$$

а кінцеві умови мають вигляд

$$\begin{array}{lll} \mathbf{P}_0(t_f) = S, & & \\ \mathbf{P}_1(t_f,s) = 0 & -\alpha_\delta \le s \le 0 & \\ \mathbf{P}_2(t_f,r,s) = 0 & -\alpha_\delta \le s \le 0 & -\alpha_\delta \le r \le 0 \\ \mathbf{P}_3(t_f,s) = 0 & -\beta_\mu \le s \le 0 & \\ \mathbf{P}_4(t_f,r,s) = 0 & -\beta_\delta \le s \le 0 & -\beta_\mu \le r \le 0 \\ \mathbf{P}_5(t_f,r,s) = 0 & -\beta_\mu \le s \le 0 & -\alpha_\delta \le r \le 0 \end{array}$$

Додатково до перелічених в точках α_i,β_j повинні задовільняти умові неперервності.

Приклад 6.2. Розглянемо використовування лінійного квадратично-оптимального алгоритма керування трубчатим теплообмінником, коли температура на виході трубчатого теплообмінника $\tilde{x}(t)$ зв`язана з температурою парової рубашки $U(t)$ передаточною функцією

$$W(p)=\frac{\tilde{x}(p)}{\tilde{U}(p)}=\frac{k_1(1-k_2e^{-\beta p})}{(ap+1)(bp+1)}.$$

Критерій якості має вигляд

$$I=\tfrac{1}{2}\int_0^{t_f}\left[Q(x-x_s)^2+R(U-U_s)^2\right]dt$$

Динаміка системи в просторі станів задається рівняннями диференціально-різницевого типу

$$\mathbf{z}'=\mathbf{Az}+\mathbf{B}_0U(t)+\mathbf{B}_1U(t-\beta),\qquad z(0)=0$$
$$x=z_1,\qquad -\beta\le t\le 0$$

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\dfrac{1}{ab} & -(a+b)\big/ab\end{bmatrix}\qquad \mathbf{B}_0=\begin{bmatrix}0\\ k_1\big/ab\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_1=\begin{bmatrix}0\\ -k_1k_2\big/ab\end{bmatrix}\qquad \mathbf{z}=\begin{bmatrix}z_1\\ z_2\end{bmatrix}$$

Для чисельного рішення взяті такі значення параметрів системи:

$Q(t)=2t^2$; $R=20$; $k_1=1$; $k_2=0{,}5$; $\beta=10$; $a=40$; $b=15$; $t_f=80$; $x_s=0{,}2$; $U_s=0{,}4$.

Оптимальний закон зворотнього зв`язку має вигляд

$$U(t)=U_s-R^{-1}\Big(\left[\mathbf{B}_0^T\mathbf{P}_0(t)+\mathbf{P}_1^T(t,0)\right]\overline{Y}+$$
$$+\int_{-\beta}^{0}\left\{\left[\mathbf{B}_0^T\mathbf{P}_1(t,s)+\mathbf{P}_2(t,0,s)\right]\left[U(t+s)-U_s\right]\right\}ds$$

де $$\mathbf{Y}=\begin{bmatrix}x-x_s\\ x'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}z_1-x_s\\ z_2\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}_0=\begin{bmatrix}P_{011} & P_{012}\\ P_{021} & P_{022}\end{bmatrix};\qquad \mathbf{P}_1=\begin{bmatrix}P_{11}\\ P_{12}\end{bmatrix}$$

P*$_2$* задається рівняннями Ріккаті:

$$\frac{d\mathbf{P}_0}{dt}=-\mathbf{P}_0(t)\mathbf{A}-\mathbf{A}^T\mathbf{P}_0(t)+\left[\mathbf{P}_0(t)\mathbf{B}_0+\mathbf{P}_1(t,0)\right]R^{-1}\times\left[\mathbf{B}_0^T\mathbf{P}_0(t)+\mathbf{P}_1^T(t,0)\right]-\mathbf{Q}_0$$

$$\frac{\partial\mathbf{P}_1(t,s)}{\partial t}=\frac{\partial\mathbf{P}_1(t,s)}{\partial s}-\mathbf{A}^T\mathbf{P}_1(t,s)+\left[\mathbf{P}_0(t)\mathbf{B}_0+\mathbf{P}_1(t,0)\right]R^{-1}\times\left[\mathbf{B}_0\mathbf{P}_1(t,s)+\mathbf{P}_2(t,0,s)\right],$$
$$-\beta\le s\le 0$$

$$\frac{\partial P_2(t,r,s)}{\partial t} = \frac{\partial P_2(t,r,s)}{\partial r} + \frac{\partial P_2(t,r,s)}{\partial s} + \left[\mathbf{P}_1^T(t,r)\mathbf{B}_0 + \mathbf{P}_2(t,r,0)\right]R^{-1} \times$$
$$\times \left[\mathbf{B}_0^T \mathbf{P}_1(t,s) + \mathbf{P}_2(t,0,s)\right],$$
$$\begin{cases} -\beta \le r \le 0 \\ -\beta \le s \le 0 \end{cases}$$

$\boldsymbol{Q_0}$ визначається наступним чином

$$\mathbf{Q}_0 = \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Граничні умови по r та s задаються співвідношеннями

$$\mathbf{P}_1(t,-\beta) = \mathbf{P}_0(t)\mathbf{B}_1$$
$$\mathbf{P}_2(t,-\beta,s) = \mathbf{B}_1^T\mathbf{P}_1(t,s)$$

а кінцеві співвідношення

$$\mathbf{P}_0(t_f) = 0$$
$$\mathbf{P}_1(t_f,s) = 0 \qquad -\beta \le s \le 0$$
$$\mathbf{P}_1(t_f,r,s) = 0 \qquad -\beta \le r \le 0 \qquad -\beta \le s \le 0$$

Рівняння для $\boldsymbol{P_0}$, $\boldsymbol{P_1}$, $\boldsymbol{P_2}$ достатньо громіздкі, однак їх можна розв`язати раніше поза контуром керування і потім підставити отримані розв`язки у вигляді відповідних коефіцієнтів $K_1(t)$, $K_2(t)$, $K_3(t)$, що призводить до оптимального регулятора вигляду

$$U = U_s - K_1(t)(x - x_s) - K_2(t)x' + \int_{-\beta}^{0} K(t,s)\left[U(t+s) - U_s\right]ds$$

Вираз показує, що в розглянутому випадку оптимальний регулятор включає ПІ-складову, а також складову для обчислювання якої необхідно запам`ятовування керування на поточному інтервалі *(t-β, t).* Результати розрахунків представлені на рис.6.3

Можна застосувати лінійну квадратично-оптимальну стратегію керування і для нелінійних систем, перед тим лінеаризуючи деяку програмну траєкторію.

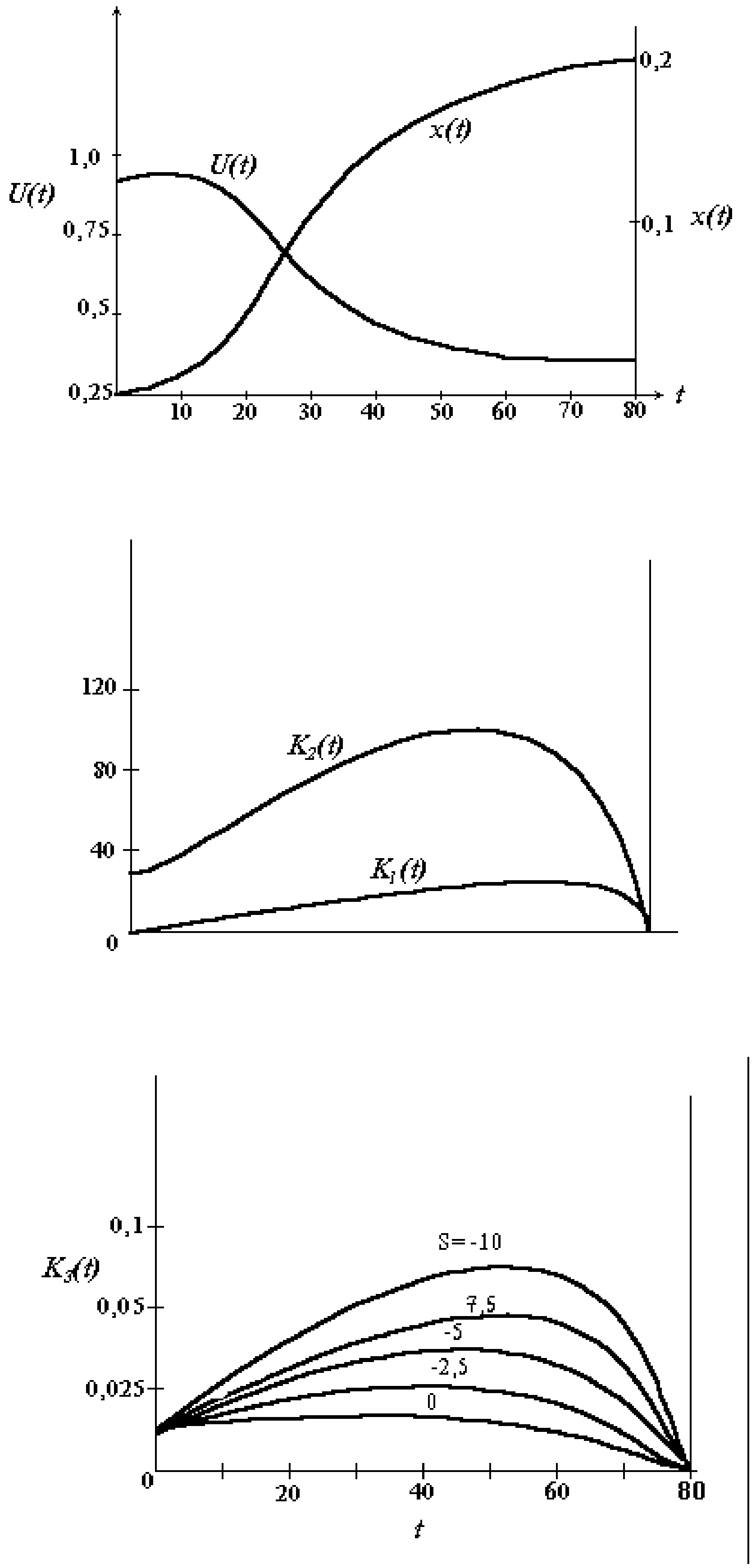


Рис. 6.4 Характеристики лінійного оптимального регулятора

6.3 Оптимальне регулювання для систем з розподіленими параметрами – лінійно-квадратична задача

Аналогічно випадку з зосередженими параметрами оптимальні закони зворотнього зв`язку для систем керування з розподіленими параметрами отримують при розв`язанні лінійної задачі з квадратичним критерієм. Розглянемо випадок параболічного рівняння другого порядку.

Нехай деяка система задається рівнянням в просторі (розподілених) станів

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} = \mathbf{A}_2\left(\frac{\partial^2 \mathbf{X}}{\partial z^2}\right) + A_1\left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial z}\right) + A_0\mathbf{X} + \mathbf{B}\mathbf{U}(z,t) \qquad (6.3.1)$$

з граничними умовами

$$\left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial z}\right)\Big|_{Z=0} + \mathbf{D}_0\mathbf{X}\Big|_{Z=0} = \mathbf{B}_0\mathbf{U}_0(t) \qquad (6.3.2)$$

$$\left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial z}\right)\Big|_{Z=1} + \mathbf{D}_1\mathbf{X}\Big|_{Z=1} = \mathbf{B}_1\mathbf{U}_1(t) \qquad (6.3.3)$$

Нехай заданий квадратичний критерій оптимальності

$$\begin{aligned} I = {}& \tfrac{1}{2}\int_0^1\!\!\int_0^1 \mathbf{X}(r,t_f)^T\mathbf{S}_f(r,s)\mathbf{X}(s,t_f)\,drds + \\ &+ \tfrac{1}{2}\int_0^{t_f}\!\!\int_0^1\!\!\int_0^1 \left[\mathbf{X}(r,t)^T\mathbf{Q}(r,s,t)\mathbf{X}(s,t) + \mathbf{U}(r,t)^T\mathbf{R}(r,s,t)\mathbf{U}(s,t)\right]drdsdt + \\ &+ \tfrac{1}{2}\int_o^{t_f}\left[\mathbf{U}_0^T(t)\mathbf{R}_0(t)\mathbf{U}_0(t) + \mathbf{U}_1^T(t)\mathbf{R}_1(t)\mathbf{U}_1(t)\right]dt \end{aligned} \qquad (6.3.4)$$

Використаєм принцип максимума та введемо гамільтоніан

$$H(r,t) = \tfrac{1}{2}\int_0^1(\mathbf{X}^T\mathbf{Q}\mathbf{X} + \mathbf{U}^T\mathbf{R}\mathbf{U})ds + \boldsymbol{\lambda}^T(r,t)\left[\mathbf{A}_2\mathbf{X}''(r,t) + \mathbf{A}_1\mathbf{X}'(r,t) + \mathbf{A}_0\mathbf{X}(r,t) + \mathbf{B}\mathbf{U}(r,t)\right], \qquad (6.3.5)$$

$$H_2(t) = \tfrac{1}{2}\mathbf{U}_0^T\mathbf{R}_0\mathbf{U}_0 - \boldsymbol{\lambda}^T(0,t)\mathbf{A}_2\left[-\mathbf{D}_0\mathbf{X}(0,t) + \mathbf{B}_0\mathbf{U}_0(t)\right], \qquad (6.3.6)$$

$$H_3(t) = \tfrac{1}{2}\mathbf{U}_1^T\mathbf{R}_1\mathbf{U}_1 + \boldsymbol{\lambda}^T(1,t)\mathbf{A}_2\left[-\mathbf{D}_1\mathbf{X}(1,t) + \mathbf{B}_1\mathbf{U}_1(t)\right], \qquad (6.3.7)$$

$$H_1(r) = \tfrac{1}{2}\int_0^1 \mathbf{X}(r,t_f)^T\mathbf{S}_f(r,s)\mathbf{X}(s,t_f)\,ds \qquad (6.3.8)$$

Необхідні умови оптимальності для цього випадка будуть мати вигляд

$$\partial H(r,t)/\partial \mathbf{U}(r,t) = \int_0^1 \mathbf{R}\mathbf{U}(s,t)ds + \mathbf{B}^T \boldsymbol{\lambda}(r,t) = 0 \qquad (6.3.9)$$

$$\partial H_2 / \partial \mathbf{U}_0 = \mathbf{R}_0 \mathbf{U}_0 - \mathbf{B}_0^T \mathbf{A}_2^T \boldsymbol{\lambda}(0,t) = 0 \qquad (6.3.10)$$

$$\partial H_3 / \partial \mathbf{U}_1 = \mathbf{R}_1 \mathbf{U}_1 + \mathbf{B}_1^T \mathbf{A}_2^T \boldsymbol{\lambda}(1,t) = 0 \qquad (6.3.11)$$

Якщо керування **U** залежить тільки від часу, то необхідні умови зміняться

$$\int_0^1 \frac{\partial H(r,t)}{\partial \mathbf{U}(t)} dr = \int_0^1 \left[\int_0^1 \mathbf{R}(r,s,t)\mathbf{U}(t)ds + \mathbf{B}^T \boldsymbol{\lambda}(r,t) \right] dr = 0 \qquad (6.3.12)$$

Перетворюючи (6.3.9), матимемо для **U***(r,t)* вираз

$$\mathbf{U}(r,t) = -\int_0^1 \mathbf{R}^*(r,s,t)\mathbf{B}^T \boldsymbol{\lambda}(s,t)ds \qquad (6.3.13)$$

де через ***R**** позначено ядро, що є зворотнім до ***R***, тобто таке, що

$$\int_2^1 \mathbf{R}^*(r,s,t)\mathbf{R}(s,\rho,t)ds = \delta(r-\rho)\mathbf{I} \qquad (6.3.14)$$

δ - імпульсна функція Дірака.

Підставимо отриманий вираз для ***U**(r,t)* в (6.3.12) знайдемо

$$\mathbf{U}(t) = -\left[\int_0^1 \int_0^1 \mathbf{R}(r,s,t)dsdr \right]^{-1} \int_0^1 \mathbf{B}^T \boldsymbol{\lambda}(r,t)dr \qquad (6.3.15)$$

Аналогічним чином для ***U**₀(t)* та ***U**₁(t)* отримаємо вираз

$$\mathbf{U}_0(t) = \mathbf{R}_0^{-1} \mathbf{B}_0^T \mathbf{A}_2^{/} \boldsymbol{\lambda}(0,t) \qquad (6.3.16)$$

$$\mathbf{U}_1(t) = -\mathbf{R}_1^{-1} \mathbf{B}_1^T \mathbf{A}_2^{/} \boldsymbol{\lambda}(1,t) \qquad (6.3.17)$$

Спряжені змінні задаються рівнянням

$$\frac{d\boldsymbol{\lambda}(r,t)}{dt} = -\int_0^1 \mathbf{Q}(r,s,t)\mathbf{X}(s,t)ds - \mathbf{A}_0^T \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{A}_1^T \frac{\partial \boldsymbol{\lambda}}{\partial z} - \mathbf{A}_2^T \frac{\partial^2 \boldsymbol{\lambda}}{\partial z^2} \qquad (6.3.18)$$

з граничними умовами

$$\boldsymbol{\lambda}(t_f, r) = \int_0^1 \mathbf{S}_f(r,s)\mathbf{X}(s,t_f)ds,$$

$$\begin{aligned} &\mathbf{D}_0^T \mathbf{A}_2^T \boldsymbol{\lambda}(0,t) - \mathbf{A}_1^T \boldsymbol{\lambda}(0,t) + \mathbf{A}_2^T \left[\frac{\partial \boldsymbol{\lambda}(0,t)}{\partial z} \right] = 0 \\ -&\mathbf{D}_1^T \mathbf{A}_2^T \boldsymbol{\lambda}(1,t) + \mathbf{A}_1^T \boldsymbol{\lambda}(1,t) - \mathbf{A}_2^T \left[\frac{\partial \boldsymbol{\lambda}(1,t)}{\partial z} \right] = 0 \end{aligned} \qquad (6.3.19)$$

Введемо за допомогою перетворення Рікатті матрицю **P**(r,s,t)

$$\boldsymbol{\lambda}(r,t)=\int_0^1 \mathbf{P}(r,s,t)\mathbf{X}(s,t)ds \qquad (6.3.20)$$

Підставляючи (6.3.20) в (6.3.18) отримаємо для лівої частини (6.3.18) вираз

$$\frac{d\boldsymbol{\lambda}(r,t)}{dt}=\int_0^1 \left[\mathbf{P}'\mathbf{X}(s,t)+\mathbf{P}\mathbf{X}'(s,t)\right]ds \qquad (6.3.21)$$

або $$\frac{d\boldsymbol{\lambda}(r,t)}{dt}=\int_0^1 \left\{\mathbf{P}\mathbf{X}+\mathbf{P}\left[\mathbf{A}_2\frac{\partial^2\mathbf{X}}{\partial s^2}+\mathbf{A}_1\frac{\partial\mathbf{X}}{\partial s}+\mathbf{A}_0\mathbf{X}+\mathbf{B}\mathbf{U}(s,t)\right]\right\}ds \qquad (6.3.22)$$

Права частина (6.3.18) запишеться у вигляді

$$\int_0^1 \left\{-\mathbf{Q}(r,s,t)\mathbf{X}(s,t)-\mathbf{A}_0^T\mathbf{P}\mathbf{X}(s,t)+\mathbf{A}_1^T\mathbf{P}_r\mathbf{X}(s,t)-\mathbf{A}_2^T\mathbf{P}_{rr}\mathbf{X}(s,t)\right\}ds \qquad (6.3.23)$$

Займемося перетворенням двох останніх виразів:

$$\begin{aligned}&\int_0^1 \mathbf{P}(r,s,t)\mathbf{A}_2\frac{\partial\mathbf{X}^2}{\partial s^2}ds=\mathbf{P}(r,s,t)\mathbf{A}_2\frac{\partial\mathbf{X}}{\partial s}\bigg|_0^1-\int_0^1\mathbf{P}_s\mathbf{A}_2\frac{\partial\mathbf{X}}{\partial s}ds'=\\&=\mathbf{P}(r,1,t)\mathbf{A}_2\left[\mathbf{B}_1\mathbf{U}_1-\mathbf{D}_1\mathbf{X}(1,t)\right]-\mathbf{P}(r,0,t)\mathbf{A}_2\left[\mathbf{B}_0\mathbf{U}_0-\mathbf{D}_0\mathbf{X}(0,t)\right]-\\&-\mathbf{P}_2\mathbf{A}_2\mathbf{X}\Big|_0^1+\int_0^1\mathbf{P}_{ss}\mathbf{A}_2\mathbf{X}(s,t)ds\end{aligned} \qquad (6.3.24)$$

Аналогічним чином отримаємо

$$\int_0^1 \mathbf{P}\mathbf{A}_1\frac{\partial\mathbf{X}}{\partial s}ds=\mathbf{P}\mathbf{A}_1\mathbf{X}\Big|_0^1-\int_0^1\mathbf{P}_s\mathbf{A}_1\mathbf{X}(s,t)ds \qquad (6.3.25)$$

Таким чином для лівої частини (6.3.18) маємо

$$\begin{aligned}&\frac{d\boldsymbol{\lambda}(r,t)}{dt}=\int_0^1\left[\left(\mathbf{P}'+\mathbf{P}_{ss}'\mathbf{A}_2-\mathbf{P}_s\mathbf{A}_1+\mathbf{P}\mathbf{A}_0\right)\mathbf{X}(s,t)+\mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{U}(s,t)\right]ds-\\&-\left[\mathbf{P}(r,1,t)\mathbf{A}_2\mathbf{D}_1-\mathbf{P}(r,1,t)\mathbf{A}_1+\mathbf{P}_s(r,1,t)\mathbf{A}_2\right]\mathbf{X}(1,t)+\\&+\left[\mathbf{P}(r,0,t)+\mathbf{D}_0-\mathbf{P}(r,0,t)\mathbf{A}_1+\mathbf{P}_s(r,0,t)\mathbf{A}_2\right]\mathbf{X}(0,t)+\mathbf{P}(r,1,t)\mathbf{A}_2\mathbf{B}_1\mathbf{U}_1-\\&-\mathbf{P}(r,0,t)\mathbf{A}_2\mathbf{B}_0\mathbf{U}_0\end{aligned} \qquad (6.3.26)$$

Тепер

$$\begin{aligned}&\int_0^s \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{U}(s,t)ds=-\int_0^1\int_0^1\mathbf{P}(r,s,t)\mathbf{B}\mathbf{R}^*(s,\rho,t)\mathbf{B}^T\lambda(\rho,t)dsd\rho)=\\&=-\int_0^1\int_0^1\int_0^1\mathbf{P}(r,s,t)\mathbf{B}\mathbf{R}^*(s,\rho,t)\mathbf{B}^T\mathbf{P}(\rho,z,t)\mathbf{X}(z,t)dzdsd\rho=\\&=-\int_0^1\left[\int_0^1\int_0^1\mathbf{P}(r,z,t)\mathbf{B}\mathbf{R}^*(z,\rho,t)\mathbf{B}^T\mathbf{P}(\rho,s,t)dzd\rho\right]\mathbf{X}(s,t)ds,\end{aligned} \qquad (6.3.27)$$

$$\mathbf{P}(r,1,t)\mathbf{A}_2\mathbf{B}_1\mathbf{U}_1 = -\int_0^1 \mathbf{P}(r,1,t)\mathbf{A}_2\mathbf{B}_1\mathbf{R}_1^{-1}\mathbf{B}_1^T\mathbf{A}_2^T\mathbf{P}(1,s,t)\mathbf{X}(s,t)ds, \qquad (6.3.28)$$

$$\mathbf{P}(r,0,t)\mathbf{A}_2\mathbf{B}_0\mathbf{U}_0 = \int_0^1 \mathbf{P}(r,0,t)\mathbf{A}_2\mathbf{B}_0\mathbf{R}_0^{-1}\mathbf{B}_0^T\mathbf{A}_2^T\mathbf{P}(0,s,t)\mathbf{X}(s,t)ds, \qquad (6.3.29)$$

Підставляючи (6.3.24)-(6.3.29) в (6.3.22),(6.3.23) та приводячи подібні члени, отримаємо слідуючі рівняння Рікатті:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_t(r,s,t) &= -\mathbf{P}_{ss}\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_2^T\mathbf{P}_{rr} + \mathbf{P}_s\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_1^T\mathbf{P}_r - \mathbf{P}\mathbf{A}_0 - \mathbf{A}_0^T\mathbf{P} + \\ &+ \int_0^1\int_0^1 \mathbf{P}(r,z,t)\mathbf{B}\mathbf{R}^*(z,\rho,t)\mathbf{B}^T\mathbf{P}(\rho,s,t)dzd\rho + \mathbf{P}(r,1,t)\mathbf{A}_2\mathbf{B}_1\mathbf{R}_1^{-1}\mathbf{B}_1^T\mathbf{A}_2^T\mathbf{P}(1,s,t) + \\ &+ \mathbf{P}(r,0,t)\mathbf{A}_2\mathbf{B}_0\mathbf{R}_0^{-1}\mathbf{B}_0^T\mathbf{A}_2^T\mathbf{P}(0,s,t) - \mathbf{Q}(r,s,t)\end{aligned} \qquad (6.3.30)$$

з граничними умовами

$$\mathbf{P}_s(r,1,t)\mathbf{A}_2 + \mathbf{P}(r,1,t)(\mathbf{A}_2\mathbf{D}_1 - \mathbf{A}_1) = 0 \qquad (6.3.31)$$

$$\mathbf{P}_s(r,0,t)\mathbf{A}_2 + \mathbf{P}(r,0,t)(\mathbf{A}_2\mathbf{D}_0 - \mathbf{A}_1) = 0 \qquad (6.3.32)$$

а умовою на кінцевий стан

$$\mathbf{P}(r,s,t_f) = \mathbf{S}_f(r,s) \qquad (6.3.33)$$

Можна показати, що визначена таким чином матриця ***S*** являється симетричною

$$\mathbf{P}(r,s,t) = \mathbf{P}(s,r,t)^T. \qquad (6.3.34)$$

Остаточно отримаємо для керування **U***(z,t)* оптимальний закон зворотнього зв`язку

$$\mathbf{U}(z,t) = -\int_0^1\int_0^1 \mathbf{R}^*(z,s,t)\mathbf{B}^T\mathbf{P}(s,\rho,t)\mathbf{X}(\rho,t)dsd\rho \qquad (6.3.35)$$

а для **U***(t)* - відповідно закон

$$\mathbf{U}(t) = -\left[\int_0^1\int_0^1 \mathbf{R}(r,s,t)dsdr\right]^{-1}\int_0^1\int_0^1 \mathbf{B}^T\mathbf{P}(s,\rho,t)\mathbf{X}(\rho,t)dsd\rho \qquad (6.3.36)$$

Граничні умови при цьому задаються у вигляді

$$\mathbf{U}_0(t) = \mathbf{R}_0^{-1}\mathbf{B}_0^T\mathbf{A}_2^T\int_0^1 \mathbf{P}(0,s,t)\mathbf{X}(s,t)ds' \qquad (6.3.37)$$

$$\mathbf{U}_1(t) = -\mathbf{R}_1^{-1}\mathbf{B}_1^T\mathbf{A}_2^T\int_0^1 \mathbf{P}(1,s,t)\mathbf{X}(s,t)ds \qquad (6.3.38)$$

P*(r,s,t)* може обчислюватися раніше поза контуром керування за допомогою (6.3.30)-(6.3.34).

Приклад 6.3. Розглянемо задачу керування розподілом температури по осях довгого тонкого стрижня при нагріванні в багатотонній нагрівальній печі.

Динаміка процесу задається рівнянням

$$\rho C_\rho\left[\frac{\partial T(z',t')}{\partial t'}\right]=k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial z'^2}\right)+q(z',t'),\qquad T(z',0)=T_0 \tag{6.3.39}$$

де $q(z',t')$ - питомий тепловий потік від різних зон печі з граничними умовами $\left(\frac{\partial T}{\partial z'}\right)\Big|_{Z''=0}=0$, $\left(\frac{\partial T}{\partial z'}\right)\Big|_{Z''=l}=0$ отриманими в припущені неврахованої малості втрат через кінці стрижня.

Введемо безрозмірні змінні

$$t=\frac{t'k}{\rho C_\rho},\qquad z=\frac{z'}{l},\qquad U'(z,t)=\frac{q(z,t')l^2}{kT_0},\qquad x'(z,t)=\frac{T(z,t')}{T_0}$$

(T_0 - деяке початкове рівномірне розподілення температури в стрижні).

Отримаємо рівняння процесу у вигляді

$$\frac{\partial x'(z,t)}{\partial t}=\frac{\partial^2 x'(z,t)}{\partial z^2}+U'(z,t) \tag{6.3.40}$$

$$\frac{\partial x'(z,t)}{\partial z}\bigg|_{z=0}=0 \tag{6.3.41}$$

$$\frac{\partial x'}{\partial z}\bigg|_{z=1}=0 \tag{6.3.42}$$

$$x'=1$$

Визначимо квадратичний критерій оптимальності

$$\begin{aligned}I&=\tfrac{1}{2}\int_0^1\left[x'(z,t_f)-x'_d(z)\right]^2 S_f\,dz+\\&+\tfrac{1}{2}\int_0^{t_f}\int_0^1\left\{Q\left[x'(z,t)-x'_d(z)\right]^2+R\left[U'(z,t)-U'_d(z)\right]^2\right\}dtdz\end{aligned} \tag{6.3.43}$$

де $x'_d(z)$ бажаний (встановлений) розподіл температури по осі стрижня. Відповідне цьому розподілу встановлене керування $U_d(z)$, що задовільняє рівнянню статики (6.3.40)

$$U'_d(z) = -\frac{\partial^2 x_d}{\partial z^2} \tag{6.3.44}$$

Переходячі до відхилень від встановленого стану $x=x'-x'_d$, $U=U'-U'_d$ отримаємо

$$\frac{\partial x(z,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 x(z,t)}{\partial z^2} + U(z,t) \tag{6.3.45}$$

$$\left.\frac{\partial x}{\partial z}\right|_{z=0} = 0 \tag{6.3.46}$$

$$\left.\frac{\partial x}{\partial z}\right|_{z=1} = 0 \tag{6.3.47}$$

$$x(z,0)=1-x'_d(z) \tag{6.3.48}$$

$$I = \tfrac{1}{2} S_f \int_0^1 x^2(x,t_f)dz + \tfrac{1}{2}\int_0^{t_f}\int_0^1 \left[Qx^2(z,t) + RU^2(z,t)\right]dtdz \tag{6.3.49}$$

Оптимальний закон зворотнього зв`язку для задачі (6.3.45)-(6.3.49) отримаємо з формул (6.3.30)-(6.3.38), якщо підставити в них

$$\begin{aligned}
&S_f(r,s) = S_f \delta(r-s) \\
&Q(r,s,t) = Q\delta(r-s) \\
&R(r,s,t) = R\delta(r-s) \Rightarrow R^*(r,s,t) = R^{-1}\delta(r-s) \\
&D_0 = B_0 = D_1 = B_1 = 0
\end{aligned} \tag{6.3.50}$$

У відповідності з цим оптимальний закон зворотнього зв`язку задається системою

$$U(z,t) = -\int_0^1 R^{-1} P(z,\rho,t) x(\rho,t) d\rho, \tag{6.3.51}$$

$$P_t(r,s,t) = -P_{ss} - P_{rr} + \int_0^1 P(r,\rho,t) R^{-1} P(\rho,s,t)\delta\rho - Q\delta(r-s) \tag{6.3.52}$$

$$P_s(r,1,t) = P_s(r,0,t) = P_r(1,s,t) = P_r(0,s,t) = 0 \tag{6.3.53}$$

$$P(r,s,t_f) = P_f \delta(r-s) \tag{6.3.54}$$

Вирази (6.3.52)-(6.3.54) показують, що P(r,s,t) може бути обчислено раніше, поза контуром керування, оскільки не залежить від поточної інформації.

Приклад 6.4. Розглянемо задачу синтеза оптимального регулятора для трубчатого теплообмінника з паровим обігрівом. Температура потоку рідини вимірюється в чотирьох точках теплообмінника: T(0,25,t), T(0,5,t), T(0,75,t), T(1,0,t), керуючим впливом є зміна температури парової рубашки, яке забеспечується зміною температури парової рубашки.

Модель процесу має вигляд

$$\frac{\partial T}{\partial t} + V\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{hA}{\rho C_\rho}(T - T_\omega), \qquad T(0,t) = T_f .$$

Перейдемо до нових координат:

$$x = T - T_d(z), U = T_\omega - T_{\omega d}, a_0 = \frac{hA}{\rho C_\rho},$$

де $T_d(z)$ - заданий встановлений розподілення температури; $T_{\omega d}$ - відповідна цьому розподілу температура парової рубашки; $T_{\omega d}$ задовільняє рівнянню статики

$$V\left(\frac{\partial T_d}{\partial z}\right) = \frac{hA}{\rho C_\rho}(T_d - T_{\omega d}), \qquad T_d(0) = T_f$$

В цих координатах знайдемо лінійноквадратичну задачу з критерієм

$$I = \tfrac{1}{2}\int_0^1 x(z,t_f)^2 S_f\,dz + \tfrac{1}{2}\int_0^{t_f}\left\{\int_0^1 \left[x(z,t)^2 Q\right]dz + RU^2(t)\right\}dt$$

при умові, що

$$\frac{\partial x}{\partial t} = -V\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right) + a_0 x - a_0 U, \qquad x(0,t) = 0$$

Порівнюючі зі стандартною постановкою відмітимо, що

$$S_f(r,s) = S_f\delta(r-s),$$
$$Q(r,s,t) = Q\delta(r-s),$$
$$R(r,s,t) = R \Rightarrow R^*(r,s,t) = R^{-1},$$
$$A_2 = 0, A_1 = -V, A_0 = +a_0, B = -a_0,$$
$$D_0 \to \infty, B_0 = 0.$$

Оптимальний регулятор визначається системою

$$U(t) = -R^{-1}a_0\int_0^1\int_0^1 P(s,\rho,t)x(\rho,t)\,ds\,d\rho$$

де

$$P_t(r,s,t) = -P_s V - P_r V - 2P_0 a_0 + a_0^2 R^{-1} \times$$
$$\times \left[\int_0^1 P(r,z,t)dz\right]\left[\int_0^1 P(\rho,s,t)d\rho\right] - Q\delta(r-s)$$
$$P(r,0,t) = P(0,s,t) = 0,$$
$$P(r,s,t_f) = S_f \delta(r-s).$$

6.4. *Синтез регуляторів для нелінійних систем з розподіленими параметрами*

Задача синтезу керуючих пристроїв для нелінійних систем з розподіленими параметрами створює значні труднощі для розробника, оскільки у такому випадку відсутня струнка теорія, що мається для лінійних систем, а більшість методів апроксимації не можна застосувати безпосередньо. Це приводить до необхідності створювати різні спеціальні метди апроксимації розподілених систем.

6.4.1. *Методи синтезу регуляторів*

Основними методами синтезу регуляторів для нелінійних систем з розподіленими параметрами є:

а) синтез оптимального закону регулювання для лінеарізованої системи з
квадратичним критерієм якості ;

б) параметризація закону регулювання ;

в) лінеарізація з наступним застосуванням відомих методів синтезу для лінійних
систем ;

г) заміна рівнянь з частковими похідними звичайними диференційними рівняннями і
застосування відповідних процедур синтезу.

Лінеарізація з наступним синтезом квадратично-оптимального регулятора розглядалось у розділі 6.3 , при цоьому знайдена повна аналогія систем з сосередженними і розподіленними параметрами. Це теж справедливо і по відношенню методу параметризації стратегії керування.

Звичайно структура регулятора для систем з розподіленними параметрами визначаються у вигляді

$$M(z,t) = \int_0^1 F_B(z,r,t,\boldsymbol{\lambda}, X(r,t)X_d(r,t))dr \,. \qquad (6.4.1)$$

Необхідно вибрати вектор невідомих параметрів $\boldsymbol{\lambda}$ таким чином, щоб досягався мінімум деякого критерію якості.

Іноді вихідну нелінійну систему можна лінеарізувати в околі деякого усталеного стану. Проблема у цьому випадку виникає, якщо номінальний усталений стан є неоднорідним, оскільки при цьому коефіцієнти лінеарізованого рівня залежать від просторових координат.

Найбільш просто здійснюється заміна систем з розподіленими параметрами системою звичайних диференціальних рівнянь, але при цьому може бути загублена частина корисної інформації і порушена структура вихідної задачі.

6.4.2. *Методи апроксимації*

Маємо цілий ряд ефективних прийомів заміни рівнянь з частинними похідними звичайними диференціальними рівняннями як на єтапі синтезу закона керування, так і на етапі чисельної реалізації отриманих алгоритмів. Класичні різницеві методи слід використовувати лише після застосування більш ефективних методів. Псевдомодальні методи, що використовують уявлення рішення у вигляді розкладання по деякій заданій системі функцій $\varphi_n(z)$

$$x_a(z,t)=\sum_{n=1}^{N}a_n(t)\varphi_n(z) \tag{6.4.2}$$

В якості базису розкладання використовуються довільні системи ортогональних функцій. І в лінійному і в нелінійному випадку рішення може бути отримане за допомогою таких методів, як, наприклад, метод зважених відхилів. Якщо задана нелінійна система

$$\frac{\partial x(z,t)}{\partial t}=A_2(z,t,x)\left(\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}\right)+A_1(z,t,x)\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)+A_0(z,t,x)x+f(x,u,z,t)\,,\ \begin{cases}0\le z\le 1\\ t>0\end{cases} \tag{6.4.3}$$

з граничними умовами

$$b_1(t,x)\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)\bigg|_{z=0}+b_0(t,x)x\big|_{z=0}=f_0(x,u_0,t) \tag{6.4.4}$$

$$c_1(t,x)\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)\bigg|_{z=1}+c_0(t,x)x\big|_{z=1}=f_1(x,u_1,t) \tag{6.4.5}$$

то можна перейти від неї до системи звичайних диференціальних рівнянь, використовуючи систему базисних функцій $\varphi_n(z)$, що система $\varphi_n(z)$ повинна бути повною і краще ортогональною з деякою вагою $\rho(z)$

$$\int_0^1\rho(z)\varphi_n(z)\varphi_m(z)dz\,,\ n\ne m \tag{6.4.6}$$

Вибір системи $\varphi_n(z)$ довільний, але у багатьох випадках доцільно використовувати власні функції лінеарцзованої задачі, особливо коли нелінійність у системі (6.4.3)-(6.4.5) не дуже суттєва.

Наближене рішення вихідної системи у цому випадку виражається через N перших базисних функцій. При використанні методу зважених відхилень, то буде забезпечена мінімальність середніх зважених відхілів у тому змісті, що

$$\int_0^1 \omega_i(z)R(z,t)dz = 0, \quad i = 0,1,\ldots, N \tag{6.4.7}$$

при точному виконанні граничних умов, де $\omega_i(z)$–деякі вагові функції, котрі підлягають вибору, а відхил $R(z,t)$ задається виразом

$$R(z,t) = \frac{\partial \hat{x}}{\partial z} - \hat{A}_2\left(\frac{\partial^2 \hat{x}}{\partial z^2}\right) - \hat{A}_1\left(\frac{\partial \hat{x}}{\partial z}\right) - \hat{A}_0 \hat{x} - f \tag{6.4.8}$$

Вибір вагових функцій ω_i визначають конкретні критерії.

1) Метод Гальоркіна отримується при співпаданні вагових функцій і функцій базису розкладання

$$\omega_n(z) = \varphi_n(z)0, \quad n = 0,1,\ldots, N \tag{6.4.9}$$

При такому виборі ω_n досягається ортогональність $R(z,t)$ до всіх функцій базису, і наближене рішення є найкращим в скінченномірному просторі порродженому $N+1$ першими функціями базису, в силу повноти котрого справедливо асимптотичне спадання відхилів:

$R_N(z,t) \to 0$ так як $N \to \infty$

2) Метод підобластей (локальної апроксимації) отримуються при виборі $\omega_n(z)$ у

вигляді характеристик функцій підінтервалів, що утворюють розбиття вихідного інтервалу

$0 \le z \le 1$:

$$\omega_n(z) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } z \in [z_n, z_{n+1}] \\ 0, \text{ якщо } z \notin [z_n, z_{n+1}] \end{cases} \tag{6.4.10}$$

Уцьому випадку умова (6.4.10) приводиться до виразу

$$\int_{z_n}^{z_{n+1}} R(z,t)dz = 0, \; n = 0,1\ldots, N \tag{6.4.11}$$

тобто потрібна рівність нулю усереднених по кожному з підінтервалів відхилів. При $N = 0$ отримаємо $z_0 = 0, \; z_1 = 1$.

$$\int_0^1 R(z,t)dz = 0 \tag{6.4.12}$$

Це частковий випадок методу локальоної апроксимації називається інтегральною апроксимацією

3) Метод моментів отримується при виборі $\omega_n(z)$ у вигляді ступеневих функцій $\omega_n(z) = z^n$. У цьому випадку умова(6.4.7) приводиться до виразу

$$\int_0^1 z^n R(z,t)dz = 0, \quad i = 0,1,\ldots, N \tag{6.4.13}$$

тобто потрібна рівність нулю перших N моментів функції $R(z,t)$.

4) Метод коллокації отримується при виборі $\omega_n(z)$ у вигляді

$\omega_n(z) = \partial(z - z_n)$. У цьому випадку умова (6.4.7) приводиться до виразу

$$R(z_n, t) = 0, \quad n = 0,1,....., N \tag{6.4.14}$$

і для отримання наближенного рішення необхідно вирішити звичайне диференціальне рівняння, отримане при завданні N+1 точки z_n в просторі.

Приклад 6.5. Розглянемо задачу керування нагрівом довгого тонкого стриржня у нагрівальній печі (див. Приклад 6.3), припускаючи, що коефіцієнти ρC_p і K залежать від температури:

$$\rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t'}\right) = \partial\left(k(T)\frac{\partial T}{\partial z'}\right) \Big/ \partial z' + q(z', t') \tag{6.4.15}$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial z'}\right|_{z'=0} = 0 \qquad \left.\frac{\partial T}{\partial z'}\right|_{z'=l} = 0 \tag{6.4.16}$$

Відповідний диференціальний оператор з частнними похідними є нелінійним:

$$\frac{\partial T}{\partial t'} = \left(\frac{k}{\rho C_p}\right)\left(\frac{\partial^2 T}{\partial z'^2}\right) + \left(\frac{1}{\rho C_p}\right)\left(\frac{\partial k}{\partial T}\right)\left(\frac{\partial T}{\partial z'}\right)^2 + q(z', t) \tag{6.4.17}$$

Припустимо що другою складовую у правій частині (6.4.17) можна знехтувати і що нелінійність у першій складовій приводитьсядо вигляду

$$\alpha = k / \rho C_p = a_0 + a_1 T \tag{6.4.18}$$

При введенні безрозмірних координат

$$\begin{aligned} &z = z'/l, \qquad x = T/T_0, \qquad t' = a_0 t / l^2, \\ &\beta = (a_1/a_0)T_0, \; u = ql^2/a_0 T_0, \end{aligned} \tag{6.4.19}$$

отримаємо задачу

$$\partial x(z,t)/\partial t = (1 + \beta x)\left[\partial^2 x(z,t)/\partial z^2\right] + u(z,t) \tag{6.4.20}$$

$$\left.\frac{\partial x}{\partial z}\right|_{z=0} = 0 \qquad \left.\frac{\partial x}{\partial z}\right|_{z=l} = 0 \tag{6.4.21}$$

У якості базису розкладання наближенного рішення візьмемо власні функції задачі, отриманої з (6.4.20)-(6.4.21) при $\beta = 0$

$$x(z,t) = \sum_{n=0}^{N} a_n(t)\varphi_n(z) \tag{6.4.22}$$

$$u(z,t) = \sum_{n=0}^{N} b_n(t)\varphi_n(z) \tag{6.4.23}$$

де $\varphi_n(z) = \begin{cases} 1, \; якщо \;\; n = 0 \\ \sqrt{2}\cos n\pi\, z, \; якщо \;\; n = 1,2,..., N \end{cases}$

(6.4.24)

Підставляючи (6.4.22), (6.4.23) у (6.4.20)-(6.4.21) бачимо що граничні умови дотримуються і що відхил лівої частини від правої складає

$$R(z,t)=\sum_{n=0}^{N}\varphi_n(z)\left\{(da_n/dt)-\sum_{m=0}^{N}\beta a_n(m\pi)^2\varphi_m(z)-b_b(t)+a_n(t)(n\pi)^2\right\} \qquad (6.4.25)$$

Метод Гальоркіна приводить до наступних умов:

$$\int_0^1\varphi_n(z)R(z,t)dz=0,\quad n=0,1,....,N \qquad (6.4.26)$$

звідси знаходимо

$$\frac{da_n}{dt}+(n\pi)^2a_n-b_n(t)-\beta\int_0^1\sum_{m=0}^{N}\sum_{k=0}^{N}\varphi_n(z)\varphi_m(z)\varphi_k(z)a_m a_k(m\pi)^2dz$$

чи $$\frac{da_n}{dt}+(n\pi)^2a_n-b_n(t)-\beta\int_0^1\sum_{m=0}^{N}\sum_{k=0}^{N}a_m a_k(m\pi)^2 \qquad (6.4.27)$$

$$\int_0^1\varphi_m(z)\varphi_n(z)\varphi_k(z)dz=0,\ n=0,1,2,...,N$$

Позначивши інтеграл в (6.4.27) через I_{mnk} :

$$I_{mnk}=\int_0^1\varphi_m(z)\varphi_n(z)\varphi_k(z)dz \qquad (6.4.28)$$

Можна показати, що цей інтеграл обчислюється у явному вигляді:

$$I_{mnk}=2\sqrt{2}\int_0^1\cos m\pi z\cos n\pi z\cos k\pi z=\sqrt{2}\int_0^1[\cos(n+m)\pi z+\cos(n-m)\pi z]\cos k\pi zdz$$

(6.4.29)

звідки по таблицям [? ? ?] знахоимо

$$I_{mnk}=\begin{cases}0,\ \textit{якщо}\ n=m=k\ \textit{чи}\ n-k\neq k,\ n+m\neq k,\\ \delta_{pq},\ \textit{якщоодин з індексів}\ n,m,k\ \textit{дорівнює}\ 0,\\ \sqrt{2}/2,\textit{якщо}\ n+m=k\ \textit{чи}\ n-m\neq k.\end{cases} \qquad (6.4.29)$$

Тепер рівняння для коефіцієнтів a_n перетворюється до вигляду

$$\frac{da_n}{dt}+(n\pi)^2a_n-b_n(t)-\beta\int_0^1\sum_{m=0}^{N}\sum_{k=0}^{N}a_m a_k(m\pi)^2I_{mnk}=0\ \ n=0,1,...,N \qquad (6.4.31)$$

Розглянемо три перших коефіцієнти:

$$\frac{da_0}{dt}-b_0-\beta\left(\pi^2a_1^{\ 2}+4\pi^2a_2^{\ 2}+...\right)=0$$

(6.4.32)

$$\frac{da_1}{dt}+\pi^2a_1-b_1-\beta\left\{\pi^2a_1\left[a_0+\left(a_2\sqrt{2}/2\right)\right]+4\pi^2a_2\left[\left(a_1/\sqrt{2}/2\right)+\left(a_3\sqrt{2}/2\right)\right]+...\right\}=0$$

(6.4.33)

$$\frac{da_2}{dt}+4\pi^2a_2-b_2-\beta\left\{a_0 4\pi^2a_2+\left(a_1^{\ 2}\sqrt{2}/2\right)\pi^2+a_1a_3\left[\left(\sqrt{2}/2\right)9\pi^2+\left(\sqrt{2}/2\right)\pi^2\right]+...\right\}=0$$

(6.4.34)

Метод Гальоркіна приводить не до наближенного, а до точного модального зображення рішення, коли система стає лінійною (у розглянутому прикладі при $\beta=0$)

Контрольні запитання до розділу 6.

1. Необхідні умови оптимальності для системи з постійним запізненням з використанням принципа максимума
2. Оптимальне керування нелінійної системи с запізненням при наявності обмеження на керування
3. Синтез оптимального регулятора для лінійної системи с запізненням.
4. Рівняння Ріккаті для лінійного квадратично-оптимального закона системи с запізненням.
5. Управління Ріккаті для лінійної системи з розподільними параметрами.
6. Оптимальний закон зворотнього зв′язку для лінійно-квадратичної задачі системи з розподільними параметрами.
7. Метод Гальоркіна для рішення рівнянь Ріккаті.

Список літератури

1. Сейдж Э.П., Уаут Ч.С. Оптимальное управление системами. –М.: Радио и связь, 1982. –392 с.
2. Брайсон А., Хо Ю-ши. Прикладная теория оптимального управления. –М.: Мир, 1972. –544 с.
3. Papageorgiou M. Optimierung: statische, dynamische, stochastische Verfahren fur die Anwendung. –Munhen, Wien: Olgenbourg, 1991. –587 c.
4. Абдулаев Н.Д., Петров Ю.П. Теория и методы проектирования оптимальных регуляторов. –Л.: Энергоатомиздат, 1985. –240 с.
5. Александров Е.Е. и др. Оптимизация многоканальных систем управления. –Х.: Основа, 1996. –288 с.
6. Рей У. Методы управления технологическими процессами. –М.: Мир, 1983. – 368 с.
7. Ажогин В.В., Згуровский М.З., Корбич Ю.С. Методы фильтрации и управления стохастическими процессами с распределенными параметрами: Учеб. Пособие.–К.: Выща шк. Гловное изд-во, 1988. –488 с.
8. Бутковский А.Г. Методы управления системами сраспределенными параметрами.–М.: Наука 1975. – 568 с.
9. Лионс Ж.Л. Оптимальное управление для систем с распределенными параметрами.–М.:Мир, 1970.–587 с.
10. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное програмирование.–М.:Мир, 1975.–534 с.
11. Двайт Х.Б. Таблицы интегралов и других метематических формул. 2-е изд.–М.: Наука, 1970.–288 с.
12. Сейдж Э.П., Мелса Д.Л. Теория оценивания и ее применение в связи и управлении.–М.:Связь, 1986.–496 с.
13. Острем К.Ю. Введение в стахостическую теорию управления.–М.: Мир, 1973.
14. Аоки М. Оптимизация стахостических систем.–М.: Наука, 1971.
15. Сю. Д., Мейер А. Современная теория автоматического управления.–М.: Машиностроение, 1972.– 544 с.

16. Болтянский В.Г. Достаточные условия оптимальности обоснование метода динамического програмирования // Известия АН СССР.– 1964.– т.28№3.–481 с.

17. Sage A.P. Optimum systems control / Sage A.P., White C.C. - Englewood Cliffs, NJ, Prentice-Hall. Inc., 1977, 2nd ed. - 413p.

18. Ravindran A. Engineering Optimization Methods and Application /A. Ravindran A., Ragsdell K.M., Reklaitis G.V. / - Publication John Willy and sons, Inc, NJ, 2006, 2nd ed.- 688p.

19. Robert F. Stengel Optimal Control and Estimation (Dover Books on Mathematics) Paperback – September 20, 1994 672 p.

ЗМІСТ