Міністерство освіти та науки України
Дніпродзержинський державний технічний
Університет

Л.О.Олійник

Навчальний посібник

Лекції з функціонального аналізу

для спеціальності 7.080202 “Прикладна математика”

Затверджено редакційно-видавничою
секцією науково-методичної ради ДДТУ
21 листопада 2000 р., протокол № 3

Дніпродзержинськ

2000

Навчальний посібник “Лекції з функціонального аналізу”. Для спеціальності 7.080202 “Прикладна математика” /Л.О.Олійник, - Дніпродзержинськ: ДДТУ, 2000 –96с.

Укладач: Канд. фіз.-мат.наук, доцент Олійник Л.О.

Відповідальний за випуск: зав.кафедрою докт.т.н. Самохвалов С.Є.

Рецензент: докт.ф.-м.н. Стеблянко П.О.

Затверджено на засіданні
кафедри ПМКМ
Протокол № 11 від 30 травня 2000 р.

Навчальний посібник “Лекції з функціонального аналізу» є викладенням курсу лекцій з “Функціонального аналізу”. Він містить необхідні теоретичні основи даної дисципліни, а саме теорії міри та інтегралу, банахових та гільбертових просторів, лінійних функціоналів та операторів. Кожний розділ навчального посібника має достатню кількість прикладів, які ілюструють теоретичний матеріал, а також є в деякій мірі і його продовженням.

Вступ

Курс функціонального аналізу, який вивчають студенти математичних спеціальностей, є одним з найскладніших математичних курсів. Це пояснюється високим рівнем абстрактності, яка дозволяє з єдиних позицій вивчати досить далекі, з першого погляду, питання з різних галузей математики та фізики. Сучасний функціональний аналіз потребує знань досить широкого кола математичних дисциплін. Його базою є математичний аналіз, лінійна алгебра, теорія диференціальних рівнянь, як звичайних так і з частинними похідними. Методи функціонального аналізу, в свою чергу, пронизують майже всю математику та суміжні з нею фізичні дисципліни, такі як гідромеханіка, квантова механіка та інші.

Потреба у виданні такого посібника у ДДТУ пов’язана з відкриттям нової спеціальності “Прикладна математика”. В бібліотеці ДДТУ зібрано широке коло літератури з функціонального аналізу різних авторів, як вітчизняних та і іноземних, і вона досить повно відповідає потребам цього курсу, навіть більш широким потребам, але кількісно цього замало для навчальної роботи з студентами. Крім того за останні 10-15 років нових видань навчального напряму з функціонального аналізу в Україні з’явилося дуже мало.

Даний навчальний посібник є викладенням курсу лекцій з “Функціонального аналізу”, що читається автором на протязі останніх років в ДДТУ. Навчальний посібник містить не тільки необхідні теоретичні основи, в ньому велику увагу приділено практичним аспектам вивчення даної дисципліни. Відомо, що математику вивчають, розв’язуючи задачі. Кожний розділ навчального посібника має достатню кількість прикладів, які ілюструють теоретичний матеріал, а також є в деякій мірі і його продовженням.

Навчальний посібник “Лекції з функціонального аналізу” складається з 8 розділів, які умовно розподілені на три частини. Перша частина містить матеріал, що відноситься до теорії міри та інтеграла Лебега, друга - теорії нормованих просторів. До третьої частини віднесено матеріал, що стосується вивчення лінійних операцій в нормованих просторах, а саме, теорія лінійних функціоналів, узагальнених функцій та лінійних операторів. Кожний розділ розбито на необхідну кількість параграфів згідно зі змістом. Нумерація формул в кожному розділі автономна.

До списку літератури, який наведено у посібнику, автором внесені більш відомі і більш доступні видання. Список літератури не претендує на бібліографічну повноту. Але в книгах, на які є посилання в посібнику можна знайти більш широкі відомості про літературу з функціонального аналізу.

При викладенні матеріалу використовувались позначення та термінологія, що прийняті в сучасній математичній літературі.

Частина І. Міра і інтеграл.

Розділ І. Міра. Вимірні множини та їх властивості.

§1. Системи множин. Кільце, напівкільце.

Нехай Х деяка фіксована множина. Системою множин називатимемо сукупність підмножин цієї множини.

Означення 1. Непорожня система множин $\mathfrak{R}$ називається кільцем, якщо вона замкнена відносно операцій перетину та симетричної різниці, тобто $\forall A, B \in \mathfrak{R} \Rightarrow A \bigcap B \in \mathfrak{R}, A\Delta B \in \mathfrak{R}$.

Так як $A \bigcup B = (A\Delta B)\Delta(A \bigcap B)$ та $A \setminus B = A\Delta(A \bigcap B)$, то $A \bigcup B \in \mathfrak{R}$ і $A \setminus B \in \mathfrak{R}$. Зрозуміло, що якщо $A_k \in \mathfrak{R}, k = 1, \ldots, n$, то $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k \in \mathfrak{R}$ та $\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k \in \mathfrak{R}$. Крім того $\varnothing = A \setminus A \in \mathfrak{R}$.

Множина Е називається одиницею системи множин S, якщо Е належить системі S і $\forall A \in S : E \bigcap A = A$, отже Е максимальна множина системи така, що містить в собі усі інші множини цієї системи.

Означення 2. Кільце з одиницею називається алгеброю.

Приклади: а) нехай А деяка скінчена множина, булеан В(А) – є кільце з одиницею, тобто алгеброю; б) система $\{\varnothing, A\}$- кільце з одиницею (алгебра); в) система усіх скінчених підмножин множини А – кільце, якщо сама множина скінчена то маємо випадок а); г) система усіх обмежених множин на прямій – кільце без одиниці.

Теорема 1. Перетин довільної множини кілець є кільце.

Теорема 2. (про мінімальне кільце). Для довільної непорожньої системи множин S існує єдине кільце $\mathfrak{R}(S)$, що містить S і міститься в довільному іншому кільці, яке включає систему S. $\mathfrak{R}(S)$ називається мінімальним кільцем або кільцем породжуваним системою множин S.

Означення 3. Система множин $\wp$ називається напівкільцем, якщо виконуються умови: а)$\varnothing \in \wp$; б) $\wp$ - замкнена відносно перетинів, тобто $\forall A, B \in \wp \Rightarrow A \bigcap B \in \wp$; в) з того, що $A_1 \subset A$ належать $\wp$, випливає можливість представлення А у вигляді: $A = \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$, де $A_i \bigcap A_j = 0, i \neq j$ і перша множина - A_1.

Довільна система попарно неперетинних множин, таких що їх об'єднання є множина А називається скінченим розкладом множини А.

Зрозуміло, що довільне кільце є напівкільцем, бо якщо А та $A_1 \subset A$ з $\mathfrak{R}$ то $A = A_1 \bigcup A_2$, де $A_2 = A \setminus A_1 \in \mathfrak{R}$. Обернене твердження невірне. Наприклад, множина напівінтервалів на числовій прямій є напівкільце, але не є кільце, бо

$(a,b)\Delta(c,d)$ не є напівінтервал. (На площині можна розглянути ситему напівзамкнених прямокутників).

Властивості напівкільця. Нехай $\wp$ - напівкільце і $A_1,...,A_n, A\in\wp$, $\forall i=1,...,n,\quad A_i\subset A\quad (A_i\cap A_j=\varnothing,\quad i\neq j)$, тоді знайдеться система множин $A_{n+1},...,A_{n+s}\in\wp$ $(A_{n+i}\cap A_{n+j}=\varnothing, i\neq j)$ таких, що $A\setminus\bigcup_{i=1}^{n}A_i=\bigcup_{k=1}^{s}A_{n+k}$.

Доведення. Доводимо індукцією по n. Твердження виконується при $n=1$, що випливає з означення напівкільця.

Нехай твердження теореми є вірним при деякому $n=m$. Розглянемо систему множин $A_1,...,A_m, A_{m+1}$, що задовольняють умовам теореми. Згідно припущенню маємо $A\setminus\bigcup_{i=1}^{m}A_i=\bigcup_{k=1}^{p}B_k$, де $B_k\in\wp,\quad i=1,...,p$. Нехай $B_{i1}=A_{m+1}\cap B_i$. За означенням напівкільця $B_i\setminus B_{i1}=\bigcup_{k=2}^{r}B_{ik}$, де $B_{ik}\in\wp$ і попарно не перетинаються. Отже, враховуючи, що $A_{m+1}=\bigcup_{i}^{p}B_{i1}$, одержимо представлення $A\setminus\bigcup_{j=1}^{m+1}A_j=\bigcup_{i=1}^{p}\bigcup_{k=2}^{r_i}B_{ik}$. Що й потрібно було довести.

2. Для довільної системи множин з напівкільця $A_1,...,A_n\in\wp$, знайдеться скінчена система множин, що попарно не перетинаються, тобто $B_1,...,B_p\in\wp, B_i\cap B_j=\varnothing, i\neq j$, така, що $A_i=\bigcup_{s\in M_i}B_s$, де $B_s\in\wp$ деякі множини з системи $B_1,...,B_p$. (*Довести самостійно*).

Теорема 3. (Про кільце, що породжується напівкільцем).

Нехай $\wp$ напівкільце, тоді кільце $\Re(\wp)$ співпадає з системою множин S які допускають скінчені розклади $A=\bigcup_{k=1}^{n}A_k, A_k\in\wp$. $\Re(\wp)$ - називається кільцем породженим напівкільцем $\wp$.

Доведення. Покажемо, що S - кільце. Нехай $A,B\in S$ довільні дві множини. Тоді мають місце розклади $A=\bigcup A_k,\quad B=\bigcup B_p, A_k\in\wp,\quad B_k\in\wp$. Оскільки $\wp$ напівкільце, то множини $C_{ij}=A_i\cap B_j$ також належать до $\wp$. Згідно з властивістю 1 мають місце такі розклади: $A_i=\bigcup_{j}C_{ij}\cup\bigcup_{k=1}^{r_i}D_{ik}, B_j=\bigcup_{i}C_{ij}\cup\bigcup_{l=1}^{s_j}E_{jl}$, де $D_{ij}\in\wp,\quad E_{ij}\in\wp$. Враховуючи ці розклади одержимо, $A\cap B=\bigcup_{i,j}C_{ij}$, а $A\Delta B=\bigcup_{i,k}D_{ik}\cup\bigcup_{j,l}E_{jl}$. Отже, $A\cap B\in S,\quad A\Delta B\in S$. Система S є кільце, причому мінімальне серед усіх кілець, що містять $\wp$.

Означення 4. Кільце множин називається σ-кільцем, якщо воно разом з кожною послідовністю множин $A_1,...,A_n,\dots$ містить їх об'єднання $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. Кільце множин називається δ-кільцем, якщо воно разом з кожною послідовністю множин $A_1,...,A_n,\dots$ містить їх перетин $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$. σ-кільце з одиницею називається σ-алгеброю. δ-кільце з одиницею називається δ-алгеброю.

Теорема 4. Для довільної непустої системи множин S існує незвідна σ-алгебра множин, яка містить систему S і міститься у довільній σ-алгебрі, породженій системою S.

Незвідна σ-алгебра – це σ-алгебра, яка не містить точок, що не входять в жодну з множин $A \in \wp$.

Означення 5. Борелівською σ-алгеброю називається мінімальна σ-алгебра над сукупністю усіх сегментів числової прямої.

§ 2. Міра плоских множин.

Розглянемо систему множин $\wp$ на площині, що визначаються усіма можливими парами нерівностей відносно *x* та *y*:

$$a \le x \le b, \quad a \le x < b, \quad a < x \le b, \quad a < x < b$$

$$a \le y \le b, \quad a \le y < b, \quad a < y \le b, \quad a < y < b\,.$$

Це є система прямокутників на площині з різними варіантами включення границі до них.

Довільному прямокутнику $P \in \wp$ з цієї системи поставимо у відповідність число

$$m(P) = (b-a)\cdot(d-c)$$

таким чином, що: 1) $m(P) \ge 0, \quad m(P) = 0, \quad P = \varnothing$;

2) якщо $P = \bigcup_k P_k, P_i \cap P_j = \varnothing, i \ne j$, то $m(P) = \sum_{k=1}^{n} m(P_k)$.

Ця числова функція множини називається мірою прямокутника.

Означення 6. Множина на площині називається елементарною, якщо вона представляється у вигляді скінченого об'єднання попарно неперетинних прямокутників.

Теорема 5. Об'єднання, перетин, різниця, симетрична різниця елементарних множин є елементарна множина, тобто система елементарних множин є кільцем.

Доведення. Нехай $A = \bigcup_{\kappa=1}^{u} P_k$ и $B = \bigcup_{j=1}^{m} Q_j$, тоді:

$$A \cap B = \left(\bigcup_{k}^{n} P_k\right) \cap \left(\bigcup_{j}^{m} Q_j\right) = \bigcup_{j,k}^{m,n} \left(P_k \cap Q_j\right).$$

Отже, $A \bigcap B$ є елементарною множиною. Різниця двох прямокутників є елементарною множиною. Отже, віднімаючи від прямокутника елементарну множину, знову одержимо елементарну множину. Нехай A та B – елементарні множини, тоді існує прямокутник P, який містить ці множини, і мають місце представлення: $A \bigcup B = P \setminus ((P \setminus A) \bigcap (P \setminus B))$, $A \setminus B = A \bigcap (P \setminus B)$, $A \Delta B = (A \bigcup B) \setminus (A \bigcap B)$. Ці множини є елементарними. *Теорему доведено*.

Означення 7. Нехай $A = \bigcup_{k=1}^{n} P_k$ - елементарна множина ($P_i \cap P_j = \varnothing, i \neq j$).

Мірою елементарної множини A називається число $m'(A) = \sum_{k=1}^{n} m(P_k)$.

Якщо є ще одне представлення множини A, $A = \bigcup_{j=1}^{n} Q_j, Q_i \cap Q_j = \varnothing,\ \ i \neq j$, тоді, так як $P_k \cap Q_j = S_{kj}$- прямокутник, то адитивність міри дасть:

$$\sum_{k=1}^{n} m(P_k) = \sum_{k,j} m(P_k \cap Q_j) = \sum_{j=1}^{n} m(Q_j),$$

тобто міра не залежить від розкладу множини A. Якщо A – прямокутник, то $m'(A) = m(A)$.

Теорема 6. Нехай A – елементарна множина, $\{A_n\}$-скінчена чи злічена сукупність елементарних множин така, що $A \subset \bigcup_n A_n$, тоді $m'(A) \leq \sum_n m'(A_n)$.

Доведення. Нехай $\forall \varepsilon > 0$. Можна знайти таку замкнену множину $\overline{A} \subset A$, що $m'(\overline{A}) \geq m'(A) - \frac{\varepsilon}{2}$. Крім того існують такі відкриті множини $\tilde{A}_n$, що $m'(\tilde{A}_n) \leq m'(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$.

Зрозуміло, що $\overline{A} \subset \bigcup_n \tilde{A}_n$. Застосовуючи лему Гейне-Бореля, знайдемо скінчене покриття замкненої множини $\overline{A}$ відкритими множинами $\tilde{A}_n$. Отже матимемо: $m'(\overline{A}) \leq \sum_{i=1}^{s} m'(\tilde{A}_{n_i})$, тому:

$$m(A) \leq m'(\overline{A}) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \sum_{i=1}^{s} m'(\tilde{A}_{n_i}) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \sum_n m'(\tilde{A}_n) + \frac{\varepsilon}{2} \leq$$

$$\leq \sum_{1}^{N} m'(A_n) + \sum_{1}^{N} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} + \frac{\varepsilon}{2} = \sum_n m'(A_n) + \varepsilon$$

Так як ε - довільне, то $m'(A) \leq \sum_n m'(A_n)$. *Теорему доведено*.

Розглянемо множину $A = \bigcup_n A_n, A_i \cap A_j = 0, i \neq j$, де A_n - елементарні. Тоді має місце рівність $m'(A) = \sum_{1}^{\infty} m'(A_n)$. Це є властивість σ-адитивності міри m'.

Припустимо, що $A \subseteq \bigcup_n A_n$ тоді, згідно з теоремою 6, маємо $m'(A) \le \sum_n m'(A_n)$. Але $m'(A) \ge m'\left(\bigcup_1^N A_n\right) = \sum_1^N m'(A_n)$. Переходячи до границі при $N \to \infty$, одержимо $m'(A) \ge \sum_1^\infty m'(A_n)$, бо ряд збіжний. Отже має місце рівність.

Надалі розглядатимемо множини, що є підмножинами одиничного квадрату Е на площині, $E = \{(x, y) \in R^2 : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$.

Означення 8. Зовнішньою мірою множини А називається число $\mu^*(A) = \inf\limits_{A \subset \bigcup P_k} \sum_k m(P_k)$, де P_k – прямокутники.

Якщо А –елементарна, то $\mu^*(A) = m'(A)$.

Теорема 7. Якщо $A \subset \bigcup_n A_n$, $n < \infty$, то $\mu^*(A) \le \sum_n \mu^*(A_n)$. (Без доведення).

Означення 9. Множина А називається **вимірною за Лебегом**, якщо для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists B$ - елементарна множина така, що $\mu^*(A \Delta B) < \varepsilon$.

Зовнішня міра μ^* розглядувана на вимірних множинах називається мірою Лебега і позначається - μ.

Усі вимірні за Лебегом множини утворюють σ - алгебру.

Теорема 8. Нехай $\mathfrak{R}$ деяка алгебра підмножин простору *R*, μ - міра на $\mathfrak{R}$. Тоді існує σ - алгебра $\mathfrak{R}_1 \supseteq \mathfrak{R}$ та міра μ_1 на ній така, що $\mu_1(A) = \mu(A), \forall A \in \mathfrak{R}$.

Міра μ_1 називається *продовженням* міри μ з алгебри $\mathfrak{R}$ на σ - алгебру $\mathfrak{R}_1 \supseteq \mathfrak{R}$.

Так, ми побудували продовження m' міри m з півкільця прямокутників на кільце елементарних множин. Останнє є алгеброю (одиниця $E = \{(x, y) \in R^2 : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$), отже міра Лебега μ є продовженням міри m' на σ - алгебру усіх вимірних за Лебегом множин ($m \to m' \to \mu$).

§ 3. Вимірні множини та їхні властивості.

Позначимо $\mathfrak{R}_E$ σ - алгебру усіх вимірних за Лебегом множин.

Множина $\mathfrak{R}_E$ - замкнена відносно скінчених або злічених об'єднань та перетинів та міра Лебега є σ - адитивною на $\mathfrak{R}_E$.

Властивості:

1. Доповнення вимірної множини є вимірна множина.

Якщо A вимірна, то $E \setminus A$ теж вимірна, бо має місце рівність: $A \Delta B = (E \setminus A) \Delta (E \setminus B)$. Отже існує елементарна множина B така, що $\forall \varepsilon > 0$ $\mu^*((E \setminus A) \Delta (E \setminus B)) = \mu^*(A \Delta B) < \varepsilon$.

2. Перетин та об’єднання скінченої кількості вимірних множин є вимірною множиною.

Дійсно, нехай $A_1, A_2 \in \mathfrak{R}_E$, тобто $\forall \varepsilon > 0$ існують елементарні множини B_1, B_2 такі, що $\mu^*(A_1 \Delta B_1) < \frac{\varepsilon}{2}$ і $\mu^*(A_2 \Delta B_2) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Так як $(A_1 \bigcup A_2)\Delta(B_1 \bigcup B_2) \subset (A_1 \Delta B_1) \bigcup (A_2 \Delta B_2)$, то $\mu^*((A_1 \bigcup A_2)\Delta(B_1 \bigcup B_2)) \le$ $\le \mu^*(A_1 \Delta B_1) + \mu^*(A_2 \Delta B_2) < \varepsilon$. Враховуючи, що $B_1 \bigcup B_2$ - елементарна, одержимо вимірність множини $A_1 \bigcup A_2$. Окрім того, $A_1 \bigcap A_2 = E \setminus [(E \setminus A_1)\Delta(E \setminus A_2)]$, отже, $A_1 \bigcap A_2$ - вимірна.

Наслідок. $A_1 \setminus A_2 = A_1 \bigcap (E \setminus A_2)$, $A_1 \Delta A_2 = (A_1 \setminus A_2)\Delta(A_2 \setminus A_1)$ - вимірні.

3. (Адитивність міри Лебега). Нехай $A_1, ..., A_n \in \mathfrak{R}_E$, $A_i \bigcap A_j = \varnothing, i \ne j$, тоді $\mu\left(\bigcup_k A_k\right) = \sum_k \mu(A_k)$ $n < \infty$.

Доведемо спочатку такий факт: $\forall A, B$ $\quad |\mu^*(A) - \mu^*(B)| \le \mu^*(A \Delta B)$. Дійсно, так як $A \subset B \bigcup (A \Delta B)$, то $\mu^*(A) \le \mu^*(B) + \mu^*(A \Delta B)$. Якщо $\mu^*(A) \ge \mu^*(B)$, то $(\mu^*(A) - \mu^*(B)) \le \mu^*(A \Delta B)$. Якщо ж $\mu^*(A) \le \mu^*(B)$, то, враховуючи, що $B \subset A \bigcup (A \Delta B)$, одержимо $\mu^*(B) \le \mu^*(A) + \mu^*(A \Delta B)$. Звідси й випливає $|\mu^*(A) - \mu^*(B)| \le \mu^*(A \Delta B)$.

Перейдемо до доведення властивості 3. Досить взяти дві множини. Нехай є $\forall \varepsilon > 0$ і елементарні множини B_1, B_2, тобто $\mu^*(A_1 \Delta B_1) < \varepsilon$, $\mu^*(A_2 \Delta B_2) < \varepsilon$. Нехай $A = A_1 \bigcup A_2$ і $B = B_1 \bigcup B_2$. Множина A вимірна і, так як $A_1 \bigcap A_2 = \varnothing$, то $B_1 \bigcap B_2 \subset (A_1 \Delta B_1) \bigcup (A_2 \bigcup B_2)$. Отже, $m'(B_1 \bigcap B_2) < 2\varepsilon$. Тоді $|m'(B_1) - \mu^*(A_1)| < \varepsilon$ і $|m'(B_2) - \mu^*(A_2)| < \varepsilon$. З адитивності міри m' випливає:

$$m'(B) = m'(B_1) + m'(B_2) - m'(B_1 \bigcap B_2) \ge \mu^*(B_1) + \mu_*(B_2) - 4\varepsilon.$$

Так як $A \Delta B \subset (A_1 \Delta B_1) \bigcup (A_2 \bigcup B_2)$, то $\mu^*(A) \ge m'(B) + \mu^*(A \Delta B) \ge$ $\ge m'(B) - 2\varepsilon \ge \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2) - 6\varepsilon$.

Довільність ε дає змогу написати: $\mu^*(A) \ge \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2)$, але $\mu^*(A) \le \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2)$. Звідси маємо $\mu^*(A) = \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2)$. За індукцією доводиться адитивність для довільного скінченого n.

Наслідок. $\mu(E \setminus A) = 1 - \mu(A)$ $\forall A \in \mathfrak{R}_E$.

Теорема 9. Нехай є злічена система вимірних множин $\{A_n\}_1^\infty$. Перетин та об’єднання множин цієї системи вимірні. (Без доведення).

Теорема 10. Міра Лебега μ є σ-адитивною. Тобто для зліченної системи попарно неперетинних вимірних множин $\{A_n\}_1^\infty$ $A_i \cap A_j = \varnothing, i \neq j$ таких, що $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, має місце рівність $\mu(\bigcup_n A_n) = \sum_n \mu(A_n)$.

Теорема 11. (Неперервність міри.) а) Нехай є система множин $A_1 \supset A_2 \supset ... \supset A_n \supset ...$ і $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, тоді $\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$,

б) Нехай є симтема множин $A_1 \subset A_2 \subset ... \subset A_n \subset ...$ і $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, тоді $\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$.

Доведення. а) Розглянемо випадок коли $A = \varnothing$.

Покладемо $A_n = (A_n \setminus A_{n+1}) \bigcup (A_{n+1} \setminus A_{n+2}) \bigcup ...$. Згідно з властивістю σ-адитивності міри матимемо: $\mu(A_1) = \sum_1^\infty \mu(A_n \setminus A_{n+1})$ і $\mu(A_n) = \sum_{k=n}^{\infty} \mu(A_k \setminus A_{k+1})$. Ряд $\sum_1^\infty \mu(A_n \setminus A_{n+1})$ збігається, отже, $\mu(A_n) \to 0, \quad n \to \infty$. б) Розглянемо доповнення даних множин, тоді: $\overline{A} = \bigcap_n \overline{A}_n$. Звідси: $\mu(\overline{A}_n) \to \mu(\overline{A}), \quad n \to \infty$, отже, $1 - \mu(A_n) \to 1 - \mu(A), \quad n \to \infty$.

Наслідок. Довільна множина, яка має міру нуль – вимірна. Дійсно: $\mu^*(A\Delta B) = \mu^*(A\Delta\varnothing) = \mu^*(A) = 0 < \varepsilon$.

Якщо відмовитись від вимоги скінченості міри, то прийдемо до поняття σ-скінченої міри.

Означення 10. Міра μ називається σ-скінченою, якщо існує послідовність множин $A_1 \subseteq A_2 \subseteq ... \subseteq A_n \subseteq ...$ така, що $R = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ і $\forall n \quad \mu(A_n) < \infty$.

Поширення міри з множини $E = \{(x, y) \in R^2 : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$ на всю площину здійснюється таким чином. Площину представимо у вигляді об’єднання множин $E_{mn} = \{(x, y) \in R^2 : n \le x \le n+1, m \le y \le m+1\}$, тоді для обчислення міри множини A розглянемо її частини $A_{mn} = E_{mn} \cap A$ і одержимо: $\mu(A) = \sum_{mn} \mu(A_{mn})$. Значення цієї міри може бути і нескінченним.

Розділ II. Вимірні функції та їхні властивості.

§ 1. Вимірні функції.

Означення 11. Нехай X та Y дві довільні множини, на яких побудовано два напівкільця $\wp_x$ та $\wp_y$. Абстрактна функція $y = f(x): X \to Y$ називається $(\wp_x, \wp_y)$ – вимірною, якщо з того, що $A \in \wp_y \Rightarrow f^{-1}(A) \in \wp_x$.

Наприклад: а) якщо X та Y числові прямі, то $\wp_x$ і $\wp_y$ - системи усіх відкритих інтервалів на прямій, то вимірність за означенням 10 є співпадає з неперервністю функції; б) якщо $\wp_x$ та $\wp_y$ - системи борелівських множин, то одержимо B-вимірні функції.

Надалі розглядуватимемо числові функції, визначені на деякій множині X з заданою σ-адитивною мірою μ. Тоді $\wp_x$ позначимо $\wp_\mu$- множину усіх вимірних відносно міри μ, а $\wp_y$ - система борелівських множин на прямій.

Означення 12. Нехай X множина з σ-адитивною мірою μ визначеною на σ-алгебрі $\wp_\mu$. Дійсна функція $y = f(x)$ визначена на X називається μ – вимірною, якщо для довільної борелівської множини A має місце включення $f^{-1}(A) \in \wp_\mu$.

Якщо X пряма, то функція називатиметься борелівською, коли прообраз борелівської множини є борелівська множина.

Теорема 12. Нехай X, Y, Z довільні множини з σ-алгебрами $\wp_x, \wp_y, \wp_z$ і на X задано $(\wp_x, \wp_y)$ – вимірну функцію $y = f(x)$, а на Y задано $(\wp_y, \wp_z)$ - вимірну функцію $z = g(y)$, тоді складна функція $z = \varphi(x) = g(f(x))$ є $(\wp_x, \wp_z)$ – вимірною.

Доведення. Нехай $A \in \wp_z$ за означенням $g^{-1}(A) \in \wp_y$. Нехай $B = g^{-1}(A)$, тоді $f^{-1}(B) \in \wp_x$, а, отже, $f^{-1}(g^{-1}(A)) = \varphi^{-1}(A) \in \wp_x$, тобто $z = \varphi(x)$ є $(\wp_x, \wp_z)$ – вимірною.

Наслідок. Борелівська функція від μ – вимірної функції є μ – вимірною. Неперервна функція від μ – вимірної функції є μ – вимірною.

Означення 13. Дійсна функція $y = f(x)$ називається вимірною, якщо $\forall c \in R$ множина $\{x : f(x) < c\}$- вимірна.

Теорема 13. Сума, різниця, добуток, частка (за умови відмінності від нуля знаменника) вимірних функцій – вимірна.

Доведення. Доведення теореми складається з кількох тверджень.

1) $y = f(x)$ - вимірна, тоді $kf(x)$ і $a + f(x)$ вимірні $\forall a, k \in R$.

Дійсно, $\{x : kf(x) < c\} = \left\{x : f(x) < \dfrac{c}{k}\right\}$ - вимірна, $\{x : a + f(x) < c\} =$ $= \{x : f(x) < c - a\}$- вимірна.

2) $f(x), g(x)$ - вимірні, тоді $\{x : f(x) < g(x)\} = \bigcup\limits_k \{x : g(x) > r_k\} \cap \{x : f(x) < r_k\}$ вимірна. Звідси $\forall a \in R$ маємо: $\{x : f(x) > a - g(x)\}$- вимірна, отже, $\{x : f(x) + g(x) > a\}$-вимірна, тобто $f(x) + g(x)$- вимірна. Нехай $k = -1$, $f(x) + (-g(x))$-вимірна.

3) Так як $f(x)\cdot g(x)=\frac{1}{4}\{(f+g)^2-(f-g)^2\}$, то, враховуючи п.2) і рівність $\{f^2<c\}=\begin{cases}\varnothing, & c\le 0,\\ \{|f|<\sqrt{c}\}, & c>0\end{cases}$, одержимо вимірність добутку.

4) $y=f(x)$ - вимірна, тоді $\frac{1}{f(x)}$- вимірна. Розглянемо такі випадки: $c>0$ $\left\{x:\frac{1}{f(x)}<c\right\}=\left\{x: f(x)>\frac{1}{c}\right\}\cup\{x: f(x)<0\}$ -вимірна; $c<0$ $\left\{x:\frac{1}{f(x)}<c\right\}=$ $=\left\{x:0>f(x)>\frac{1}{c}\right\}$-вимірна; $c=0$ $\left\{x:\frac{1}{f(x)}<c\right\}=\{x:0>f(x)<c\}$-вимірна;

Отже, за умови $g(x)\neq 0$, $\frac{f(x)}{g(x)}$-вимірна.

Теорема 14. Границя збіжної при кожному $x\in X$ послідовності вимірних функцій є функція вимірна.

Доведення. Нехай $f_n(x)\to f(x)$ при $n\to\infty$. Твердження теореми є наслідком рівності $\{x: f(x)<c\}=\bigcup\limits_k\bigcup\limits_n\bigcap\limits_{m>n}\left\{x: f_m(x)<c-\frac{1}{k}\right\}$. Множина в правій частині є вимірною. (Довести самостійно наведену рівність)

Означення 14. Дві функції називаються еквівалентними відносно даної міри, якщо $\mu\{x: f(x)\neq g(x)\}=0$. Такі функції ще називають рівними майже скрізь. Позначається це так: $f\overset{мс}{=}g$.

Наприклад, функція Діріхле $D(x)=\begin{cases}1, & x\in Q\\ 0, & x\notin Q\end{cases}$ дорівнює майже скрізь 0, бо міра множини раціональних чисел є нуль.

Теорема 15. Якщо $f\overset{мс}{=}g$ і одна з функцій вимірна, то є вимірною і друга функція. (Довести теорему самостійно).

Для неперервних функцій рівність майже скрізь є тотожньою рівністю.

§ 2. Збіжність послідовностей вимірних функцій.

Позначимо $\{X,\Re,\mu\}$ - простір з мірою.

Означення 15. Нехай $\{f_n(x)\}_1^\infty$ послідовність вимірних функцій визначених на $\{X,\Re,\mu\}$. Функціональна послідовність називається збіжною майже скрізь, позначається це так: $f_n(x)\xrightarrow{мс}f(x)$, якщо $\mu\{x:\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)\neq f(x)\}=0$.

Приклад 1. $f_n(x)=(-x)^n, x\in[0,1]$, тоді $f_n(x)\xrightarrow{мс}f(x)\equiv 0$.

Теорема 16. Нехай $\{f_n(x)\}_1^\infty$ вимірні і $f_n(x)\xrightarrow{мс}f(x)$, тоді $f(x)$ - вимірна.

Доведення. Нехай $A=\{x:\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)\}$, тоді за умовою $\mu(X\setminus A)=0$. Функція $f(x)$ - вимірна на A, а так як на множині міри нуль вимірна всяка функція, то $f(x)$ - вимірна на $X\setminus A$. Таким чином $f(x)$ - вимірна на X.

Теорема 17. (Д.Ф.Єгорова про зв'язок збіжності майже скрізь та рівномірної збіжності). Нехай E – множина скінченої міри. $\{f_n(x)\}_1^\infty$ - послідовність вимірних функцій така, що $f_n(x)\xrightarrow{мс} f(x)$. Тоді $\forall\delta>0$ $\exists E_\delta\subset E$ така, що: 1) $\mu(E_\delta)>\mu(E)-\delta$; 2) на E_δ $f_n(x)\to f(x)$ рівномірно.

Доведення. З попередньої теореми випливає, що $f(x)$ вимірна. Нехай

$$E_n^m=\bigcap_{i\ge n}\left\{x:|f_i(x)-f(x)|<\frac{1}{m}\right\}.$$

Покладемо $E^m=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n^m$. Так як σ-адитивна міра неперервна, то $\forall m,\ \ \forall\delta>0,\ \ \exists n_0(m)$ такий, що $\mu\left(E^m\setminus E^m_{n_0(m)}\right)<\frac{\delta}{2^m}$. Нехай $E_\delta=\bigcap\limits_{m=1}^{\infty}E^m_{n_0(m)}$. Покажемо, що ця множина задовольняє умовам теореми.

Нехай $x\in E_\delta$, тоді при $i>n_0(m)$ $|f_i(x)-f(x)|<\frac{1}{m}$, який би x ми не брали. Тобто є рівномірна збіжність на множині E_δ.

Розглянемо множину $E\setminus E_\delta$. За умовою маємо: $\mu(E\setminus E^m)=0,\quad\forall m$.

Якщо $x_0\in E\setminus E^m$, то $\exists i$ такий, що $|f_i(x_0)-f(x_0)|\ge\frac{1}{m}$. Згідно збіжності послідовності майже скрізь маємо: $\mu\left(E\setminus E^m_{n_0(m)}\right)=\mu\left(E^m\setminus E^m_{n_0(m)}\right)<\frac{\delta}{2^m}$. Тому

$$\mu(E\setminus E_\delta)=\mu\left(E\setminus\bigcap_{m=1}^{\infty}E^m_{n_0(m)}\right)=\mu\bigcup_{m=1}^{\infty}\left(E\setminus E^m_{n_0(m)}\right)\le\sum_{m=1}^{\infty}\mu\left(E\setminus E^m_{n_0(m)}\right)<\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\delta}{2^m}=\delta.$$

Теорему доведено.

Означення 16. Нехай $\{f_n(x)\}_1^\infty$ послідовність вимірних функцій визначених на $\{X,\Re,\mu\}$. Функціональна послідовність називається збіжною за мірою μ, якщо $\forall\sigma>0$ $\lim\limits_{n\to\infty}\mu\{x:|f_n(x)-f(x)|\ge\sigma\}=0$. Збіжність за мірою позначається так $f_n(x)\xrightarrow{\mu} f(x)$.

Теорема 18. Якщо послідовність вимірних функцій збігається майже скрізь до функції $f(x)$, то вона збігається до тієї ж функції за мірою.

Доведення. З теореми 15 випливає, що $f(x)$ вимірна. Нехай A множина міри нуль, на якій послідовність $\{f_n(x)\}_1^\infty$ не прямує до функції $f(x)$. Нехай $E_k(\sigma)=\{x:|f_k(x)-f(x)|\ge\sigma\}$, $R_n(\sigma)=\bigcup\limits_{k=n}^{\infty}E_k(\sigma)$, $M=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}R_n(\sigma)$. Всі ці множини вимірні. Так як $R_1(\sigma) \supset R_2(\sigma) \supset \ldots$, то на підставі неперервності міри $\mu(R_n(\sigma)) \to \mu(M)$ при $n \to \infty$.

Перевіримо тепер, що $M \subset A$. Дійсно, якщо $x_0 \notin A$, тобто коли $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0)$, то для даного $\sigma > 0$ знайдеться такий номер n, що $|f_k(x_0) - f(x_0)| < \sigma, \quad k \geq n$, тобто $x_0 \notin R_n(\sigma)$. Тим більше $x_0 \notin M$. За умовою $\mu(A) = 0$, тому $\mu(M) = 0$, а, отже, $\mu(R_n(\sigma)) \to 0$ при $n \to \infty$. Оскільки $E_n \subset R_n(\sigma)$, то теорему доведено.

Розглянемо приклад послідовності, яка збігається за мірою до нуля, але не є збіжною майже скрізь. Для кожного натурального k на півсегменті (0,1] визначимо функції:

$$f_i^k(x) = \begin{cases} 1, & \dfrac{i-1}{k} < x \leq \dfrac{i}{k} \\ 0, & \textit{для інших значень} \quad x \end{cases}$$

Наступна теорема дає відповідь на питання про можливість обернення теореми 17.

Теорема 19. Якщо послідовність вимірних функцій збігається за мірою до функції $f(x)$, то з неї можна виділити підпослідовність $\{f_{nk}(x)\}$, яка збігається до тієї ж функції майже скрізь. (Без доведення).

Теорема 20. (М.М.Лузіна). Для того, щоб функція $f(x)$, що визначена на відрізку $[a,b]$, була вимірною необхідно і достатньо, щоб $\forall \varepsilon > 0$ існувала така неперервна на $[a,b]$ функція $\varphi(x)$, що $\mu\{x : f(x) \neq \varphi(x)\} < \varepsilon$. (Без доведення).

Ця теорема вказує на зв'язок вимірності і неперервності функцій.

Розділ ІІІ. Інтеграл Лебега та його властивості.

§ 1. Інтеграл Лебега простої функції.

Означення 17. Функція $f(x)$, визначена на деякому просторі X, називається простою, якщо вона вимірна і приймає не більше ніж злічену кількість значень.

З цього означення випливає, що множини $\{x : f(x) = y_n\}$, де y_n - значення простої функції, є вимірними.

Теорема 21. Для вимірності функції $f(x)$ необхідно і достатньо, щоб вона була границею рівномірно збіжної послідовності простих вимірних функцій.

Доведення. Достатність очевидна. Необхідність. Нехай $f(x)$ - довільна вимірна функція. Покладемо $f_n(x) = \dfrac{m}{n}$, якщо $\dfrac{m}{n} \leq f(x) < \dfrac{m+1}{n}$, де $m \in Z, n \in N$.

Побудовані таким чином функції прості і при $n \to \infty$ рівномірно збігаються до $f(x)$, бо $\left| f_n(x) - f(x) \le \frac{1}{n} \right|$.

Означення 18. Проста функція $f(x)$ називається інтегровною або сумовною за мірою μ на множині *A*, якщо абсолютно збігається ряд: $\sum_n y_n \mu(A_n)$, де $A_n = \{x : x \in A, f(x) = y_n\}$. Якщо $f(x)$ - інтегровна, то суму ряду називають інтегралом Лебега від $f(x)$ на множині *A* і позначають: $\int_A f(x) d\mu = \sum_n y_n \mu(A_n)$.

Властивості інтеграла Лебега простої функції.

1. $\int_A [f(x) + g(x)] d\mu = \int_A f(x) d\mu + \int_A g(x) d\mu$ причому, існування інтегралів у правій частині випливає з існування інтеграла у лівій частині рівності.
2. $\int_A kf(x) d\mu = k \int_A f(x) d\mu$ причому, існування інтеграла у правій частині випливає з існування інтеграла у лівій частині рівності.
3. Обмежена на множині *A* проста функція $f(x)$ інтегровна на *A*, причому, якщо $|f(x)| \le M$ на *A* (*M* – стала), то $\left| \int_A f(x) d\mu \right| \le M\mu(A)$.

§ 2. Інтеграл лебега

Означення 19. Функція $f(x)$ називається інтегровною або сумовною на множині *A*, якщо існує послідовність простих інтегровних на *A* функцій $\{f_n\}$, яка збігається рівномірно до $f(x)$. Границю $\lim\limits_{n\to\infty} \int_A f_n(x) d\mu$ називають інтегралом Лебега функції $f(x)$ на множині *A* і позначають $\int_A f(x) d\mu$.

Зауваження. Дане означення є коректним, коли границя існує для будь-якої послідовності простих інтегровних на *A* функцій, не залежить від вибору такої послідовності і, якщо $f(x)$ - проста, то воно еквівалентне означенню 18.

Властивості інтеграла Лебега.

1. $\int_A d\mu = \mu(A)$
2. $\int_A kf(x) d\mu = k \int_A f(x) d\mu$, $\forall k = const \in R$
3. $\int_A [f(x) + g(x)] d\mu = \int_A f(x) d\mu + \int_A g(x) d\mu$

4. Якщо $|f(x)| \le M$ на A (M – стала), то $\left|\int_A f(x)d\mu\right| \le M\mu(A)$
5. Якщо $f(x) \ge 0$, то $\int_A f(x)d\mu \ge 0$. Наслідком цієї властивості є така: якщо
$f(x) \ge g(x)$, то $\int_A f(x)d\mu \ge \int_A g(x)d\mu$, а також, якщо $M \ge f(x) \ge m$, то $\forall x \in A$ майже скрізь $M \cdot \mu(A) \ge \int_A f(x)d\mu \ge m \cdot \mu(A)$.
6. Якщо $\mu(A) = 0$, то $\int_A f(x)d\mu = 0$
7. Якщо $f \overset{мс}{=} g$, то $\int_A f(x)d\mu = \int_A g(x)d\mu$, обидва інтеграли існують або не існують одночасно.
8. Якщо φ інтегровна на A і майже скрізь $|f(x)| \le \varphi(x)$, то $f(x)$ - інтегровна на A.
9. Інтеграли $\int_A f(x)d\mu$, $\int_A |f(x)|d\mu$ існують або не існують одночасно.

Інтеграл Лебега можна розглядати як функцію множини $F(A) = \int_A f(x)d\mu$. Якщо підінтегральна функція невід'ємна, то інтеграл Лебега по множині A є мірою. І має такі властивості.

Теорема 22. (σ-адитивність інтеграла Лебега). Нехай $A = \bigcup_n A_n$, $A_i \cap A_j = \varnothing$, $i \ne j$, тоді $\int_A f(x)d\mu = \sum_n \int_{A_n} f(x)d\mu$, причому, з існування інтеграла в лівій частині випливає існування інтегралів і абсолютна збіжність ряду у правій частині.

Має місце і обернене твердження:

Теорема 23. (σ-адитивність інтеграла Лебега). Нехай $A = \bigcup_n A_n$, $A_i \cap A_j = \varnothing$, $i \ne j$, і ряд $\sum_n \int_{A_n} f(x)d\mu$ є збіжним, тоді f інтегровна на A і $\int_A f(x)d\mu = \sum_n \int_{A_n} f(x)d\mu$.

Теорема 24. (Нерівність Чебишева). Якщо $\varphi(x) \ge 0$ на A і $c > 0$, то

$$\mu\{x : x \in A, \varphi(x) \ge c\} \le \frac{1}{c}\int_A \varphi(x)d\mu.$$

Дійсно, нехай $A' = \{x : x \in A, \varphi(x) \ge c\}$, тоді:

$$\int_A \varphi(x)d\mu = \int_{A'} \varphi(x)d\mu + \int_{A \setminus A'} \varphi(x)d\mu \ge \int_{A'} \varphi(x)d\mu \ge c\mu(A').$$

Наслідок. Якщо $\int_A |f(x)|d\mu = 0$, то $f(x) \overset{мс}{=} 0$. Дійсно,

$$\mu\left\{x : x\in A, \left|f(x)\right| \geq \frac{1}{n}\right\} \leq n\int_A \left|f(x)\right| d\mu = 0, \quad \forall n, \text{ отже},$$

$$\mu\{x : x\in A, \left|f(x)\right| \neq 0\} \leq \sum_{n=1}^{\infty}\mu\left\{x : x\in A, \left|f(x)\right| \geq \frac{1}{n}\right\} = 0.$$

Теорема 25. (Абсолютна неперервність інтеграла Лебега). Якщо f інтегровна на A, то $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\delta > 0$ таке, що $\left|\int_e f(x)d\mu\right| < \varepsilon$ для довільної вимірної множини $e \subset A$ такої, що $\mu(e) < \delta$

Інтеграл по множині нескінченої міри. Нехай X простір з σ-скінченою мірою μ. Послідовність множин $\{X_n\}$ ($X_1 \subset X_2 \subset \ldots$) називається вичерпною, якщо $X = \bigcup_n X_n$, $\mu(X_n) < \infty$.

Означення 20. Вимірна функція *f*, визначена на X з σ-скінченою мірою μ, називається сумовною, якщо вона сумовна на кожній вимірній підмножині $A \subset X$ скінченої міри і якщо для довільної вичерпної послідовності $\{X_n\}$ існує границя $\lim_{n\to\infty}\int_{X_n} f d\mu$ і не залежить від вибору $\{X_n\}$. Ця границя називається інтегралом Лебега функції f по множині X і позначається $\int_X f(x)d\mu$.

§ 3. Граничний перехід під знаком інтеграла Лебега.

Питання про граничний перехід під знаком інтеграла є дуже важливим у математичному аналізі. Для класичної ситуації, тобто інтеграла Рімана встановлені достатні умови, які полягають у рівномірній збіжності відповідних послідовностей. Зрозуміло, що у випадку інтеграла Лебега, де маємо справу з більш широким (ніж клас неперервних функцій) класом функцій граничний перехід під знаком інтеграла треба пов'язувати з новими типами збіжності. Перейдемо до доведення теорем, які узагальнюють класичні теореми про граничний перехід.

Теорема 26. (Лебега). Якщо послідовність $\{f_n(x)\}$ сумовних функцій збігається за мірою до функції $f(x)$ і при всіх n $\left|f_n(x)\right| \leq \varphi(x)$, де $\varphi(x)$ інтегровна функція, то гранична функція $f(x)$ також інтегровна і

$$\lim_{n\to\infty}\int_R f_n(x)d\mu = \int_R \lim_{n\to\infty} f_n(x)d\mu = \int_R f(x)d\mu.$$

Доведення. Якщо $\{f_n(x)\} \xrightarrow{\mu} f(x)$, то існує підпослідовність $\{f_{nk}(x)\} \xrightarrow{мс} f(x)$ така, що $\left|f_{nk}(x)\right| \leq \varphi(x)$ для усіх *k*. Переходячи до границі у останній нерівності при $k \to \infty$, одержимо $\left|f(x)\right| \leq \varphi(x)$, тобто $f(x)$- сумовна.

Перейдемо до доведення рівності. Нехай $E_k(\sigma) = \{x : \left|f_k(x) - f(x)\right| \geq \sigma\}$ і $F_k(\sigma) = \{x : \left|f_k(x) - f(x)\right| < \sigma\}$. Тоді, так як $\left|f_n - f\right| \leq \left|f_n + f\right| \leq 2\varphi$,

$$\left|\int_R f_n d\mu - \int_R f d\mu\right| \le \int_R |f_n - f| d\mu = \int_{E_k(\sigma)} |f_n - f| d\mu + \int_{F_k(\sigma)} |f_n - f| d\mu < 2\int_{E_k(\sigma)} \varphi d\mu + \sigma\mu(R).$$

Нехай тепер $\forall\varepsilon > 0$ і $\sigma = \dfrac{\varepsilon}{2\mu(R)}$, тоді $\exists\delta > 0$ таке, що з $\mu(e) < \delta \Rightarrow \int_e f d\mu < \dfrac{\varepsilon}{4}$. Нарешті з умови $\{f_n(x)\} \xrightarrow{\mu} f(x)$ виливає, що $\mu(E_k(\sigma)) = \mu\{x : |f_k(x) - f(x)| \ge \sigma\} < \delta$ починаючи з деякого k_0. Отже, при всіх $k > k_0$ одержимо $\left|\int_R f_n d\mu - \int_R f d\mu\right| < 2\int_{E_k(\sigma)} \varphi\, d\mu + \sigma\mu(R) < 2\dfrac{\varepsilon}{4} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, тобто рівність, а разом з нею і теорему доведено.

Теорема 27. (лема Фату). Нехай $\{f_n(x)\}$ послідовність невід'ємних вимірних функцій, яка збігається за мірою до функції $f(x)$. Тоді $\int_R f(x) d\mu \le \underline{\lim}_{n\to\infty} \int_R f_n(x) d\mu$.

Доведення. Доведення проводиться у два етапи.

1) Доведемо спочатку нерівність $\int_R f(x) d\mu \le \sup_n \int_R f_n(x) d\mu$. Якщо $\{f_n(x)\} \xrightarrow{\mu} f(x)$, то існує підпослідовність $\{f_{nk}(x)\} \xrightarrow{мс} f(x)$. Тоді розглдуючи *зрізки* функцій даної підпослідовності, одержимо $\forall N > 0$ $(f_{nk}(x))_N \xrightarrow{\mu} (f(x))_N$, де $(f)_N = \begin{cases} f, & f < N \\ N, & f \ge N \end{cases}$. В такому разі $0 \le (f_{nk}(x))_N \le N$. За теоремою 26 (Лебега), одержимо $\lim_{k\to\infty} \int_R (f_{nk}(x))_N d\mu = \int_R (f)_N d\mu$, крім того $\forall k, N$ $\int_R (f_{nk})_N d\mu \le \int_R f_{nk} d\mu \le \sup_{k\to\infty} \int_R f_{nk} d\mu$. Перейдемо в цій нерівності до границі при $k \to \infty$, одержимо $\int_R (f)_N d\mu \le \sup_{k\to\infty} \int_R f_{nk} d\mu$. Переходячи, нарешті, в останній нерівності до границі при $N \to \infty$, маємо $\int_R f d\mu \le \sup_k \int_R f_{nk} d\mu$. Отже справедливою є нерівність $\int_R f(x) d\mu \le \sup_n \int_R f_n(x) d\mu$.

2) Перейдемо до доведення нерівності $\int_R f(x) d\mu \le \underline{\lim}_{n\to\infty} \int_R f_n(x) d\mu$. Якщо $\underline{\lim}_{n\to\infty} \int_R f_n(x) d\mu = +\infty$, то це очевидно. Нехай тепер $\underline{\lim}_{n\to\infty} \int_R f_n(x) d\mu = A < +\infty$. Виходячи з властивостей нижньої границі, $\forall\varepsilon > 0$ знайдеться підпослідовність індексів $n^1 < n^2 < \ldots$, для якої $\int_R f_{n^j}(x) d\mu < A + \varepsilon$, $j = 1,2,\ldots$. Оскільки $f_{n^j} \xrightarrow{\mu} f$, $j \to \infty$, то з доведеної нерівності в п.1, одержимо:

$\int\limits_R f d\mu \le \sup\limits_j \int\limits_R f_{n^j} d\mu < A+\varepsilon$. Залишилось перейти до границі при $\varepsilon \to 0$ і отримати нерівність $\int\limits_R f d\mu < A$. Теорему доведено.

Теорема 28. (Беппо Леві). Нехай $\{f_n(x)\}$ неспадна при всіх x послідовність невід'ємних вимірних функцій така, що $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. Тоді $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_R f_n(x)d\mu = \int\limits_R \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)d\mu = \int\limits_R f(x)d\mu$.

Доведення. Чилова послідовність $\left\{\int\limits_R f_n(x)d\mu\right\}_1^\infty$ - неспадна, отже вона має границю (скінчену або нечкінчену) і за лемою Фату $\int\limits_R f(x)d\mu \le \varliminf\limits_{n\to\infty}\int\limits_R f_n(x)d\mu = \lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_R f_n(x)d\mu$. Крім того, оскільки $f_n(x) \le f(x)$, то $\int\limits_R f_n(x)d\mu \le \int\limits_R f(x)d\mu$. Перейшовши до границі при $n\to\infty$, одержимо $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_R f_n(x)d\mu \le \int\limits_R f(x)d\mu$. Таким чином, рівність $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_R f_n(x)d\mu = \int\limits_R f(x)d\mu$ доведено.

Наслідок . Якщо $\{f_n(x)\}$ послідовність невід'ємних вимірних функцій, то

$$\int\limits_R (\sum_m f_n(x))d\mu = \sum_m \int\limits_R f_n(x)d\mu .$$

§ 4. Зв'язок інтеграла Лебега і інтеграла Рімана.

Теорема 29. Якщо існує інтеграл Рімана $(R)\int\limits_a^b f(x)dx$, то $f(x)$ інтегровна за Лебегом на відрізку $[a,b]$ і $(R)\int\limits_a^b f(x)dx = (L)\int\limits_{[a,b]} f(x)d\mu$.

Доведення. Розглянемо розбиття відрізку $[a,b]$ точками $x_n = a + \frac{n}{2^n}(b-a)$ і побудуємо відповідні суми Дарбу: $\Omega_n = \frac{b-a}{2^n}\sum\limits_{k=1}^{2^n} M_{nk}$, $\omega_n = \frac{b-a}{2^n}\sum\limits_{k=1}^{2^n} m_{nk}$, де $M_{nk} = \sup\limits_{[x_{k-1},x_k]} f(x)$, $m_{nk} = \inf\limits_{[x_{k-1},x_k]} f(x)$. За означенням інтеграла Рімана

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\Omega_n = \lim_{k\to\infty}\omega_n .$$

Нехай $\overline{f}_n(x) = M_{nk}$, $x_{k-1} \le x < x_k$ і $\underline{f}_n(x) = m_{nk}$, $x_{k-1} \le x < x_k$. В точці $x=b$ функції $\overline{f}_n$ і $\underline{f}_n$ можна доозначити довільно. Зрозуміло, що інтеграли Лебега цих фунцій дорівнюють $\int\limits_{[a,b]} \bar{f}_n(x)d\mu = \Omega_n$ $\int\limits_{[a,b]} \underline{f}_n(x)d\mu = \omega_n$. Оскільки послідовність $\{\overline{f}_n\}$ не зростає, а $\{\underline{f}_n\}$ не спадає, то майже скрізь $\overline{f}_n \to \bar{f} \geq f$ і $\underline{f}_n \to \underline{f} \leq f$. За теоремою Беппо Леві:

$$\int_{[a,b]} \bar{f}(x)d\mu = \lim_{n\to\infty} \Omega_n = \int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \omega_n = \int_{[a,b]} \underline{f}(x)d\mu .$$

Тому $\int_{[a,b]} \left|\bar{f}(x) - \underline{f}(x)\right| d\mu = \int_{[a,b]} \left(\bar{f}(x) - \underline{f}(x)\right) d\mu = 0$, отже майже скрізь $\bar{f}(x) - \underline{f}(x) = 0$, тобто $\bar{f}(x) = \underline{f}(x) = f(x)$ і $\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f(x)d\mu$. Теорему доведено.

Прикладом функції, яка не інтегровна за Ріманом, але інтегровна за Лебегом, є функція Діріхле на відрізку $[0,1]$.

Якщо розглядувати інтаграли від необмежених функцій або на прямій, то інтеграл Рімана існує або не існує як невласний. При цьому, якщо невласний інтеграл Рімана є абсолютно збіжним, то існує і інтеграл Лебега і їхні значення співпадають, якщо ж невласний інтеграл Рімана збігається умовно, то інтеграл Лебега не існує.

§ 5. Теорема Фубіні.

Добутки систем множин. Добутки мір. Нехай $\langle X_1, \mathfrak{R}_1 \rangle$, $\langle X_2, \mathfrak{R}_2 \rangle$ вимірні простори. Розглянемо декартів добуток $X_1 \times X_2$ і побудуємо на ньому структуру вимірного простору. Нехай $A \in \mathfrak{R}_1$, $B \in \mathfrak{R}_2$.

Означення 21. Прямокутником з сторонами A та B називається множина

$$A \times B = \{\langle x_1, x_2 \rangle \in X_1 \times X_2 : x_1 \in A,\ x_2 \in B\}.$$

Позначимо $\mathfrak{R}_1 \times \mathfrak{R}_2$ σ-алгебру підмножин $X_1 \times X_2$, яка породжується системою усіх прямокутників. Ця σ-алгебра називається прямим добутком σ-алгебр $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2$, а її підмножини вимірними.

Означення 22. Нехай $E \subset X_1 \times X_2$ та $x_1 \in X_1$ деяка фіксована точка. Перерізом множини E в точці x_1 або x_1-перерізом E називається множина $E_{x_1} \subset X_2$, яка визначається рівністю: $E_{x_1} = \{x_2 \in X_2 : \langle x_1, x_2 \rangle \in E\}$. Аналогічно визначається x_2-переріз E: $E_{x_2} = \{x_1 \in X_1 : \langle x_1, x_2 \rangle \in E\}$.

Якщо для $A \in \mathfrak{R}_1$, $B \in \mathfrak{R}_2$, $E = A \times B$, то $E_{x_1} = \begin{cases} B, & x \in A \\ \varnothing, & x \notin A \end{cases}$, а $E_{x_2} = \begin{cases} A, & x \in B \\ \varnothing, & x \notin B \end{cases}$.

Лема 1. Кожний переріз вимірної множини вимірний.

Означення 23. Нехай на $E \subset X_1 \times X_2$ задано функцію $f(x_1, x_2)$ з дійсними значеннями. Зафіксуємо точку $x_1 \in X_1$. x_1-перерізом функції $f(x_1, x_2)$ називається функція $f_{x_1}(x_2)$ на множині E_{x_1} така, що $f_{x_1}(x_2) = f(x_1, x_2)$, коли $x_2 \in E_{x_1}$. Аналогічно визначається x_2-переріз функції $f(x_1, x_2)$: $f_{x_2}(x_1) = f(x_1, x_2)$, коли $x_1 \in E_{x_2}$.

Лема 2. Кожний переріз вимірної функції вимірний.

Нехай $\langle X_1, \Re_1, \mu \rangle$, $\langle X_2, \Re_2, \nu \rangle$ вимірні простори з мірами. Введемо міру λ на $\langle X_1 \times X_2, \Re_1 \times \Re_2 \rangle$. Якщо $A \times B$ прямокутник, то $\lambda(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$. Далі можна цю міру продовжити на σ-алгебру $\Re_1 \times \Re_2$.

Тут ми розглянемо інший спосіб побудови міри λ.

Теорема 30. Нехай $\langle X_1, \Re_1, \mu \rangle$, $\langle X_2, \Re_2, \nu \rangle$ вимірні простори з скінченими мірами. Для довільної вимірної множини E введемо функції $f(x_1) = \nu(E_{x_1})$, $g(x_2) = \mu(E_{x_2})$. Ці функції є вимірними і при цьому має місце рівність

$$\int_{X_1} f(x_1) d\mu = \int_{X_2} g(x_2) d\nu .$$

Доведення. Позначимо $\Im$ систему усіх тих множин $E \subset X_1 \times X_2$ для яких теорема виконується.

а) Покажемо, що $\Im$ містить всі вимірні прямокутники. Нехай $E = A \times B$ непустий вимірний прямокутник. Тоді $f(x_1) = \nu(B)\chi_A$, $f(x_2) = \mu(A)\chi_B$, отже ці функції вимірні. При цьому $\int_{X_1} f(x_1) d\mu = \int_{X_1} \nu(B)\chi_A d\mu = \nu(B)\mu(A)$ і $\int_{X_2} g(x_2) d\nu = \int_{X_2} \mu(A)\chi_B d\nu = \mu(A)\nu(B)$.
Отже, $E = A \times B \in \Im$.

б) Нехай $\Re_1 * \Re_2$ - алгебра вимірних підмножин $E \subset X_1 \times X_2$. Покажемо, що $\Re_1 * \Re_2 \subset \Im$. Нехай $E \subset X_1 \times X_2$, воно може бути представленим як скінчене об'єднання попарно неперетинних прямокутників $E = \bigcup_{i,j} A_i \times B_j$. Тоді $f(x_1) = \nu(E_{x_1}) = \sum_{i,j} \nu(B_j)\chi_{A_i}$, $g(x_2) = \mu(E_{x_2}) = \sum_{i,j} \mu(A_i)\chi_{B_j}$. Отже функції вимірні і $\int_{X_1} f d\mu = \int_{X_2} g d\nu = \sum_{i,j} \nu(B_j)\mu(A_i)$, тобто $E = \bigcup_{i,j} A_i \times B_j \in \Im$. Отже, $\Re_1 * \Re_2 \subset \Im$.

в) Нехай $\Re_1 \times \Re_2$ σ-алгебра, породжувана алгеброю $\Re_1 * \Re_2$. Розглянемо $\{E_j\}_1^\infty$ монотонну ($E_1 \subseteq E_2 \subseteq \ldots$) послідовність підмножин $\Re_1 \times \Re_2$. Доведемо, що $\lim_{j \to \infty} E_j \in \Im$. Має місце рівність $\lim_{j \to \infty} E_j = \bigcup_j E_j$. Позначимо цю множину літерою *E*. Нехай $f_j(x_1) = \nu(E_{jx_1})$, $g_j(x_2) = \mu(E_{jx_2})_{B_j}$. З пункту б) випливає $\int_{X_1} f_j d\mu = \int_{X_2} g_j d\nu, \quad \forall j$. Крім того

$$\lim_{j\to\infty} f_j(x_1) = \lim_{j\to\infty} \nu\left(E_{jx_1}\right) = \nu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_{jx_1}\right) = \nu\left(\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right)_{x_1}\right) = \nu\left(E_{x_1}\right) = f(x_1)$$

аналогічно $\lim_{j\to\infty} g_j(x_2) = \lim_{j\to\infty}\mu\left(E_{jx_2}\right) = g(x_2)$. Послідовності $\{f_j\}$, $\{g_j\}$ -неспадні, отже, за теоремою Б.Леві $\int_{X_1} f d\mu = \int_{X_2} g d\nu$, тобто $E \in \Im$.

Аналогічно доводиться для монотонної послідовності $\{E_j\}_1^{\infty}$ ($E_1 \supseteq E_2 \supseteq \ldots$), належність її границі до $\Im$. Теорему доведено.

Теорема 31. Нехай $\langle X_1, \Re_1, \mu\rangle$, $\langle X_2, \Re_2, \nu\rangle$ вимірні простори з скінченими мірами. Тоді функція множини λ, що визначається на множинах $E \in \Re_1 \times \Re_2$ рівностями $\lambda(E) = \int_{X_1} \nu\left(E_{x_1}\right) d\mu = \int_{X_{21}} \mu\left(E_{x_2}\right) d\nu$, є скінченою однозначно визначеною мірою, і на довільному прямокутнику $A \times B$ $\lambda(A\times B) = \mu(A)\nu(B)$.

Вправа . Довести теорему 30.

Міра λ називається добутком мір μ та ν і позначається $\lambda = \mu \times \nu$. Ми побудували вимірний простір $\langle X_1 \times X_2, \Re_1 \times \Re_2, \mu\times\nu\rangle$.

Подвійний інтеграл Лебега. Теорема Фубіні. Ми показали, що для просторів $\langle X_1, \Re_1, \mu\rangle \langle X_2, \Re_2, \nu\rangle$ з σ-скінченими мірами можна побудувати простір $\langle X_1 \times X_2, \Re_1 \times \Re_2, \mu\times\nu\rangle$ з σ-скінченою мірою. Розглянемо функцію $h: X_1 \times X_2 \to R$. Для неї має сенс інтеграл за мірою прямого добутку, тобто

$$\int_{X_1\times X_2} h(x_1, x_2) d(\mu\times\nu)(x_1, x_2) \equiv \int_{X_1\times X_2} hd(\mu\times\nu).$$

Цей інтеграл називається подвійним.

Нехай $h: X_1 \times X_2 \to R$ така, що існують інтеграли $f(x_1) = \int_{X_2} h_{x_1} d\nu$ та $f(x_2) = \int_{X_1} h_{x_2} d\mu$.

Виникає питання, чи співпадають інтеграли:

$$\int_{X_1\times X_2} hd(\mu\times\nu) = \int_{X_1}\left(\int_{X_2} h_{x_1} d\nu\right) d\mu = \int_{X_2}\left(\int_{X_1} h_{x_2} d\mu\right) d\nu \tag{1}$$

Відповідь на це питання дають наступні теореми.

Теорема 32. (Тонеллі) Якщо $h: X_1 \times X_2 \to R$ невід'ємна вимірна на $X_1 \times X_2$ функція, то має місце рівність (1).

Доведення. 1) Нехай $h(x_1, x_2) = \chi_E(x_1, x_2)$, $E \in \Re_1 \times \Re_2$, тоді $\int_{X_1\times X_2} hd(\mu\times\nu) = (\mu\times\nu)(E)$. Крім того, $\int_{X_2} hd\nu = \int_{X_2} \chi_E d\nu = \int_{X_2} \chi_{E_{x_1}} d\nu = \nu\left(E_{x_1}\right)$ і $\int_{X_1} hd\nu = \mu\left(E_{x_2}\right)$. Отже,

$$\int\limits_{X_1}\left(\int\limits_{X_2} hd\nu\right)d\mu = \int\limits_{X_1}\nu\left(E_{x_1}\right)d\mu = (\mu\times\nu)(E) \text{ і } \int\limits_{X_2}\left(\int\limits_{X_1} hd\mu\right)d\nu = \int\limits_{X_2}\nu\left(E_{x_2}\right)d\nu = (\mu\times\nu)(E).$$

2) Нехай $h(x_1, x_2)$ довільна вимірна невід'ємна функція. Існує послідовність невід'ємних простих вимірних функцій така, що $h_n \xrightarrow[n\to\infty]{} h$. Так як прості функції є лінійними комбінаціями характеристичних функцій, то для h_n теорема має місце. За теоремою Б.Леві $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_{X_1\times X_2} h_n d(\mu\times\nu) = \int\limits_{X_1\times X_2} hd(\mu\times\nu)$. З іншого боку: $\int\limits_{X_1\times X_2} h_n d(\mu\times\nu) = \int\limits_{X_1}\left(\int\limits_{X_2} h_n d\nu\right)d\mu = \int\limits_{X_1} f_n d\mu$, де $f_n(x_1) = \int\limits_{X_2} h_n d\nu$. При чому ці функції задовольняють теоремі Б.Леві, отже: $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_1) = f(x_1) = \int\limits_{X_2} hd\nu$. Застосовуючи ще раз теорему Б.Леві, одержимо $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_{X_1} f_n d\mu = \int\limits_{X_1} f d\mu$. При цьому маємо $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_{X_1\times X_2} h_n d(\mu\times\nu) = \int\limits_{X_1}\int\limits_{X_2} hd\nu d\mu$. Звідси $\int\limits_{X_1\times X_2} hd(\mu\times\nu) = \int\limits_{X_1}\int\limits_{X_2} hd\nu d\mu$. Аналогічно доводиться рівність $\int\limits_{X_1\times X_2} hd(\mu\times\nu) = \int\limits_{X_2}\int\limits_{X_1} hd\mu d\nu$. Теорему доведено.

Теорема 33. (Фубіні) Якщо $h: X_1\times X_2 \to R$ вимірна на $X_1\times X_2$ функція, то майже скрізь всі її перерізи сумовні. При цьому сумовні функції $f(x_1) = \int\limits_{X_2} hd\nu$, $g(x_2) = \int\limits_{X_1} hd\mu$ і має місце рівність (1).

Доведення. Якщо $h(x_1, x_2) \geq 0$, то твердження випливає з теореми Тонеллі. Якщо $h(x_1, x_2)$ довільного знаку, то її завжди можна подати у вигляді $h = h_+ - h_-$, де h_+, h_- - невід'ємні функції.

§ 6. Заряди. Теорема Радона-Нікодима.

Нехай дано вимірний простір $\langle X, \mathfrak{R}, \mu\rangle$, тоді функція множини $\Phi(A) = \int\limits_A f(x)d\mu$, при умові додатності підінтегральної функції, є мірою. Якщо відмовитись від вимоги додатності, то прийдемо до більш загального поняття.

Означення 24. Довільна σ-адитивна функція Ф, яка визначена на σ-алгебрі $\mathfrak{R}$ називається знакозмінною мірою або *зарядом*.

Нехай Ф заряд на σ-алгебрі $\mathfrak{R}$. Множина E називається від'ємною відносно заряду Ф, якщо $\Phi(E\cap F) \leq 0, \quad \forall F\in\mathfrak{R}$, додатньою відносно заріду Ф, якщо $\Phi(E\cap F) \geq 0, \quad \forall F\in\mathfrak{R}$.

Теорема 34. (Хана). Якщо Ф заряд на *X*, то існують вимірні множини $A^-\subset X$ від'ємна і $A^+\subset X$ додатня відносно Ф, причому $A^+ = X\setminus A^-$, такі, що $X = A^+\cup A^-$.

Невід'ємні функції $\Phi^+(E)=\Phi(E\cap A^+)$ і $\Phi^-(E)=\Phi(E\cap A^-)$ називаються відповідно верхньою та нижньою варіаціями, при цьому має місце рівність $\Phi(E)=\Phi^+(E)-\Phi^-(E)$, яку називають розкладом Жордана. Функція $|\Phi|=\Phi^+ + \Phi^-$.

Заряди поділяються на такі типи.

1. Заряд зосереджений на множині *A*, якщо $\Phi(E)=0 \quad \forall E\in X \setminus A$. Множина *A* називається носієм заряду.
2. Заряд називається неперервним, якщо $\Phi(E)=0$ для довільної одноточкової множини.
3. Заряд називається дискретним, якщо він зосереджений на скінченій або зліченій множині.
4. Заряд називається абсолютно неперервним відносно міри μ, якщо $\Phi(E)=0$ для довільної множини *E* такої, що $\mu(E)=0$.
5. Заряд називається сингулярним, якщо він зосереджений на множині міри нуль.

Розглядатимемо далі абсолютно неперервні заряди і доведемо, що довільний абсолютно неперервний заряд має вигляд $\Phi(A)=\int\limits_A f(x)d\mu$, де $f(x)$ довільна вимірна функція.

Теорема 35. (Радона-Нікодима). Нехай μ σ-адитивна, скінчена міра на $\langle X,\mathfrak{R}\rangle$, а Φ заряд на $\mathfrak{R}$. Φ – є абсолютно неперервний відносно міри μ, тоді існує сумовна на *X* функція $f(x)$ така, що $\Phi(A)=\int\limits_A f(x)d\mu, \quad \forall A\subset X$.

Зауважимо, що $f(x)$ називають абстрактною похідною заряду Φ по мірі μ, вона визначається однозначно з точнісю до μ–еквівалентності.

Доведення. Доведення досить провести для невід'ємного заряду.

Лема. Нехай Φ абсолютно неперервна відносно μ міра і $\Phi\neq 0$. Тоді існує таке число *n* і вимірна множина *B* така, що $\mu(B)>0$ і *B* додатня відносно заряду $\Phi-\frac{1}{n}\mu$.

Доведення леми. Нехай є розклад Хана $X=A_n^+\cup A_n^-$, що відповідає заряду $\Phi-\frac{1}{n}\mu$ для довільних *n*. Покладемо: $A_0^-=\bigcap\limits_1^\infty A_n^-$, $A_0^+=\bigcap\limits_1^\infty A_n^+$, тоді $\Phi(A_0^-)\le\frac{1}{n}\mu(A_0^-), \quad \forall n$, тобто $\Phi(A_0^-)=0$, отже, $\Phi(A_0^+)>0$, тобто $\mu(A_0^+)>0$ (бо є абсолютна неперервність). Отже існує таке *n*, що $\mu(A_n^+)>0$. Це *n* і множина $B=A_n^+$ задовольняють умовам леми.

Нехай $K=\left\{f(x), x\in X, f\ge 0, \int\limits_A f(x)d\mu\le\Phi(A), \forall A\subset X\right\}$. Нехай також

$M=\sup\limits_{\forall f\in K}\left\{\int\limits_X f(x)d\mu\right\}$. Розглянемо послідовність $\{f_n\}\in K$ таку, щоб $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_X f_n(x)d\mu=M$. Припустимо, що $g_n(x)=\max\{f_1(x),\dots f_n(x)\}$. Покажемо, що $g_n\in K$, тобто для довільної вимірної множини A $\int\limits_A g(x)d\mu\le\Phi(A)$. Дійсно, A можна подати у вигляді $\bigcup\limits_1^n A_k$, де A_k попарно неперетинаються і $g_n(x)=f_k(x)$ на A_k, тому $\int\limits_A g_n(x)d\mu=\sum\limits_{k=1}^n\int\limits_A f_k(x)d\mu\le\sum\limits_{k=1}^n\Phi(A_k)=\Phi(A)$. Припустимо, що $f(x)=\sup\{f_n(x)\}$. Зрозуміло, що $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}g_n(x)$ і за теоремою Б.Леві $M=\int\limits_A f(x)d\mu=\int\limits_A\lim\limits_{n\to\infty}g_n(x)d\mu$. Покажем, что $\lambda(E)=\Phi(E)-\int\limits_E f(x)d\mu$. За побудовою ця функція множини має всі властивості міри. Крім того вона абсолютно неперервна відносно міри μ. Якщо $\lambda\ne0$, то згідно з лемою, знайдуться такі $\varepsilon>0$ і множина $B, \mu(B)>0$, що $\varepsilon\mu(E\cap B)\le\lambda(E\cap B)$ для довільної вимірної множини *E*. Тоді, припустивши, що $h(x)=f(x)+\varepsilon\chi_\beta(x)$, одержимо:

$$\int\limits_E h(x)d\mu=\int\limits_E f(x)d\mu+\varepsilon\mu(E\cap B)\le\int\limits_{E\setminus B}h(x)d\mu+\Phi(E\cap B)\le\Phi(E).$$

Це означає, що $h(x)\in K$. Але з іншого боку $\int\limits_X h(x)d\mu=\int\limits_X f(x)d\mu+\varepsilon\mu(B)>M$. Це суперечить означенню *M*. Отже, існування функції $f(x)$ такої, що $\Phi(A)=\int\limits_A f(x)d\mu,\quad\forall A\subset X$ доведено. Покажемо що така функція єдина. Нехай є дві функції такі, що $\Phi(A)=\int\limits_A f_1d\mu=\int\limits_A f_2d\mu$. Тоді при будь-якому *n* для множини $A_n=\left\{x:|f_1-f_2|>\frac{1}{n}\right\}$ маємо $\mu(A_n)\le n\int\limits_X|f_1-f_2|d\mu=0$. Отже $\mu(A_n)=0$, тобто $\mu\{x: f_1(x)\ne f_2(x)\}=0$. Теорему доведено.

Частина II. Лінійні нормовані простори.

Розділ IV. Банахові простори.

§ 1. Лінійний топологічний простір

Означення 1. Нехай X - довільна множина. Задамо в X деяку систему Σ її підмножин, які називаються *околами*. Множина $U \in \Sigma$ називається *околом* точки x і позначається через $U(x)$, якщо $x \in U$. Пара $\langle X, \Sigma \rangle$ називається *топологічним простором*, якщо виконуються умови:

1. $\forall x \in X, \exists U \in \Sigma : x \in U$;
2. $\forall x \in X; \forall U(x), V(x) \in \Sigma; \exists W(x) \in \Sigma : W(x) \subseteq U(x) \bigcap V(x)$

Система Σ називається *базою* околів (*базою топології*) в X. Елементи системи Σ називаються *відкритими* множинами.

Приклади баз топологій є: система відкритих кругів на площині, система інтервалів на числовій вісі утворюють топології, відповідно, на площині та на прямій.

Точка $x \in X$ називається *граничною* точкою множини A, якщо довільний окіл $U(x) \in \Sigma$ містить хоча б одну точку $a \in A$, відмінну від x. Сукупність усіх точок множини A разом з усіма її граничними точками називається *замиканням* множини A і позначається $\overline{A}$. Якщо $\overline{A} = A$ то множина A називається *замкненою*. Множина A *відкрита,* якщо $X \setminus A$ - замкнена. Зрозуміло, що X та $\varnothing$ одночасно відкриті і замкнені.

Перетин будь-якого та об'єднання скінченої кількості замкнених множин є множина замкнена.

Нехай на множині X (*носій* топології) задано дві топології Σ_1 та Σ_2, тобто визначено два топологічних простори $\langle X, \Sigma_1 \rangle$ та $\langle X, \Sigma_2 \rangle$. Топологія Σ_1 називається *сильнішою* топології Σ_2, якщо система Σ_2 міститься в Σ_1 (позначається) $\Sigma_1 \succ \Sigma_2$. Топології Σ_1 та Σ_2, еквівалентні, якщо одночасно $\Sigma_1 \succ \Sigma_2$ і $\Sigma_1 \prec \Sigma_2$. Еквівалентні топології визначають однаковий запас відкритих (замкнених) множин.

Важливим класом топологічних просторів є такі, що мають *злічену базу*. Якщо в топологічному просторі $\langle X, \Sigma \rangle$ є злічена база, то в ньому обов'язково знайдеться злічена скрізь щільна множина. Топологічні простори з зліченою базою називаються *сепарабельними*.

Прикладами сепарабельних топологічних просторів слугують метричні простори, в яких система відкритих куль з раціональними радіусами утворює базу топології.

Серед топологічних просторів виділяють простори, які за своїми властивостями близькі до метричних. Для цього аксіоми топологічного простору необхідно доповнити додатковими умовами. Вище згадано вже умову зліченності бази топології. Важливими є в цьому сенсі так звані аксіоми віддільності.

Перша аксіома віддільності: для довільних двох різних точок $x \in X$, $y \in X$ існує окіл O_x, який не містить y, та окіл O_y, який не містить x.

Друга аксіома віддільності (аксіома Хаусдорфа): будь-які дві різні точки $x \in X$, $y \in X$ мають неперетинні околи O_x, O_y. Такий простір називається *хаусдорфовим*.

Третя аксіома віддільності: будь-яка точка і замкнута множина, яка не містить її, мають неперетинні околи. Окіл замкненої множини – відкрита множина, що містить її. Простір, в якому виконуються аксіоми 1 та 3 називається *регулярним*.

Четверта аксіома віддільності (аксіома нормальності): будь-які непретинні замкнені множини мають неперетинні околи. Такий простір називається *нормальним*.

Будь-який метричний простір є нормальним топологічним простором.

Топологічний простір називається метризованим, якщо в ньому можна задати топологію за допомогою деякої метрики. Має місце теорема П.С.Урисона: *для того, щоб топологічний простір з зліченою базою був метризованим, необхідно і достатньо, щоб він був нормальним.*

Топологічний простір називається *компактним*, якщо будь-яке його відкрите покриття містить скінчене підпокриття.

Топологічний простір називається *зліченно-компактним*, якщо довільна його нескінчена підмножина має граничну точку.

Для метричного простору ці поняття співпадають.

Множина А топологічного простору Х називається *передкомпактною*, якщо її замикання в Х компактне.

Збіжність послідовності у топологічному просторі визначається так як і в метричному просторі, однак поняття збіжності у топологічному просторі не має такого фундаментального значення як у метричному.

Означення 2. Послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ називається збіжною в топологічному просторі Х, а точка x її границею $x = \lim_{n \to \infty} x_n$, якщо будь-який окіл точки x містить всі точки послідовності починаючи з деякої, тобто $\forall U(x) \in \Sigma, \exists N = N(U(x)), \forall n < N : x_n \in U(x)$.

Означення 3. Нехай є два топологічних простори X, $У$. Відображення $F{:}X \to У$ називається *неперервним* в точці x_0, якщо для довільного околу $U(y_0)$ точки $y_0 = F(x_0)$ знайдеться такий окіл $V(x_0)$, що $F(V(x_0)) \subset U(y_0)$.

Якщо відображення F топологічного простору X на топологічний простір $У$ взаємно однозначне і неперервне, то воно називається *гомеоморфізмом*, а простори називаються *гомеоморфними*.

Означення 4. Множина E називається лінійним топологічним простором, якщо вона є як лінійним так і топологічним простором, при чому операції додавання та множення на скаляр неперервні. Інакше кажучи, E – лінійний топологічний простір, якщо на ній задано операції додавання і множення на скаляр з числового поля К, що задовольняють умовам: $\forall x, y, z \in E, \forall \alpha, \beta, \lambda \in K$

1. $x + y = y + x$ - (комутативність)
2. $x + (y + z) = (x + y) + z$ - асоціативність
3. $x + 0 = x$ - існування $0 \in E$
4. $\forall x \in E, \exists (-x) \in E : x + (-x) = 0$ - існування протилежного елемента
5. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$
6. $1 \cdot x = x$
7. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$
8. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$
9. $\forall U(x + y), \exists U(x), U(y)$:
$$U(x + y) \supseteq U(x) + U(y) = \{x' + y' | x' \in U(x), y' \in U(y)\}$$
10. $\forall U(\lambda x), \exists U(x), \exists U(\lambda) \subseteq K$:
$$U(\lambda x) \supseteq U(\lambda) U(x) = \{\lambda' + x' | x' \in U(x), \lambda' \in U(\lambda)\}$$

Лінійна підмножина L лінійного топологічного простору E називається *підпростором*, якщо вона замкнена в топології простору E.

Означення 5. Нехай M довільна підмножина лінійного топологічного простору E. *Лінійною оболонкою* множини M називається множина:

$$\text{л.о.}(M) = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \middle| \lambda_k \in K, x_k \in E, n \in N \right\}.$$

Замикання цієї множини називається *замкненою лінійною оболонкою* множини M і позначається з.л.о.(M).

Означення 6. Множина M називається *тотальною* в E, якщо її лінійна оболонка скрізь щільна в E тобто з.л.о.(M)=E.

Означення 7. Лінійний топологічний простір називається *локально-опуклим*, якщо в ньому всяка непорожня відкрита множина містить непорожню опуклу відкриту підмножину.

§ 2. Лінійні нормовані простори. Банахові простори.

Означення 8. Нехай E лінійний простір над полем К. Числова функція

$$E \ni x \to \|x\| \in R$$

називається нормою, якщо вона задовольняє умовам:

1. $\forall x \in E : \|x\| \geq 0$, при чому $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$;
2. $\forall \lambda \in K, \forall x \in E : \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$;
3. $\forall x, y \in E : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ - (нерівність трикутника).

Лінійний простір, у якому задано норму, називається *лінійним нормованим простором* над полем К. Якщо К=*R* то простір дійсний, якщо - К=*C*, то простір комплексний.

Легко бачити, що $\|0\| = 0$. Крім того, так як $\|x\| = \|(x-y)+y\| \le \|x-y\| + \|y\|$, то $\|x-y\| \ge \|x\| - \|y\|$. Звідси $\|x-y\| = \|(-1)(y-x)\| = \|y-x\| \ge \|y\| - \|x\|$. Так як *x,y* довільні, то маємо другу нерівність трикутника: $\forall x, y \in E : \|x-y\| \ge \big| \, \|x\| - \|y\| \, \big|$.

Якщо для довільних *x,y* покласти $\rho(x,y) = \|x-y\|$. До простір *E* стане метричним. Для доведення цього факту необхідно перевірити виконання аксіом метрики. Дійсно, з властивості 1. норми випливає $\rho(x,y) = \|x-y\| \ge 0$ і $\rho(x,y) = \|x-y\| = 0 \Rightarrow y = x$. З умови 2. одержимо симетричність метрики $\rho(x,y) = \|x-y\| = \|(-1)(y-x)\| = \rho(y,x)$. Нарешті, з властивості 3. маємо при $\forall x, y, z, \in E$:

$$\rho(x,z) = \|x-z\| = \|x-y+y-z\| \le \|x-y\| + \|y-z\| = \rho(x,y) + \rho(y,z).$$

Отже лінійний нормований простір є метричним, отже всі поняття та властивості метричного простору мають місце в нормованому просторі. Відкрита куля і сфера радіуса *r* з центром *a* в *E* визначається так:

$$B_r(a) = \{ a \in E : \|x-a\| < r \}, \; S_r(a) = \{ a \in E : \|x-a\| = r \}.$$

Лінійний нормований простір є лінійним топологічним. Щоб переконатись в цьому необхідно перевірити властивості 9 і 10 означення 4. Розглянемо, наприклад, неперервність додавання. Нехай $x' \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x)$, $y' \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(y)$, то $\|x'-x\| < \frac{\varepsilon}{2}$, $\|y'-y\| < \frac{\varepsilon}{2}$. З нерівності трикутника одержимо: $\|(x'+y') - (x+y)\| = \|(x'-x) + (y'-y)\| \le \|x'-x\| + \|y'-y\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, тобто $x'+y' \in B_\varepsilon(x+y)$, що й означає $B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x) + B_{\frac{\varepsilon}{2}}(y) \subseteq B_\varepsilon(x+y)$. Аналогічно розглядується властивість 10 означення 4.

Означення 9. Послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ називається збіжною в лінійному нормованому просторі *E*, а точка *x* її границею $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, якщо $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$.

Вправа 1. Довести неперервність норми, тобто $\|x_n - x\| \to 0 \Rightarrow \|x_n\| \to \|x\|$.

Вправа 2. Сформулювати означення фундаментальної послідовності в термінах нормованого простору.

Означення 10. Лінійний нормований простір *E* називається повним, якщо *E* повний як метричний простір відносно метрики $\rho(x,y) = \|x-y\|$. Повний нормований простір називається *банаховим простором.*

Для метричного простору має місце теорема про поповнення, яку ми тут нагадаємо.

Теорема 1. Для довільного метричного простору $\langle X, \rho \rangle$ існує повний метричний простір $\langle \tilde{X}, \tilde{\rho} \rangle$ такий, що 1) $X \subset \tilde{X}$, 2) $\forall x, y \in X : \tilde{\rho}(x, y) = \rho(x, y)$, 3) X – скрізь щільний в $\tilde{X}$. Простір $\tilde{X}$ називається поповненням простору X.

Аналогічний факт має місце для лінійного нормованого простору. Наведемо цю теорему без доведення.

Теорема 2. Для довільного лінійного нормованого простору E існує банаховий простір $\tilde{E}$ такий, що 1) $E \subset \tilde{E}$, 2) $\forall x \in E : \|x\|_E = \|x\|_{\tilde{E}}$, 3) E – скрізь щільний в $\tilde{E}$. Простір $\tilde{E}$ називається поповненням простору E.

§ 3. Факторизація.

Нехай в лінійному просторі *E* введено скалярну функцію $E \ni x \to \|x\| \in R$ так, що виконуються усі аксіоми норми, за виключенням умови $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$ першої аксіоми. Тоді функція $E \ni x \to \|x\| \in R$ називається *напівнормою*.

Розглянемо множину $L = \{ x \in E : \|x\| = 0 \}$. Неважко переконатись, що ця множина лінійна. Елементи $x, y \in E$ називаються еквівалентними, якщо $x - y \in L$. З лінійності L випливає, що це насправді є відношенням еквівалентності в *E*. Позначимо E/L - сукупність класів суміжності по цьому відношенню, тобто *фактор-простір*. На цьму просторі класів еквівалентності вводяться операції додавання та множення на скаляр, як операції над представниками класів еквівалентності. Ці операції не залежать від вибору представників, та задовольняють усім аксіомам лінійного простору. Отже E/L - лінійний простір. Введемо на цьому просторі норму за правилом $\|X\|_{H/L} = \|x\|$, $x \in X$, $X \in E/L$, дійсно це є норма, яка задовольняє умові $\|X\|_{H/L} = 0 \Leftrightarrow X = 0$, бо $\|X\|_{H/L} = 0 \Leftrightarrow \forall x \in X : \|x\| = 0 \Leftrightarrow x \in L$, отже, $X = L \Leftrightarrow X = 0$.

Таким чином, факторизуючи лінійний простір, можна побудувати лінійний нормований простір, елементами якого є класи еквівалентності побудовані за відношенням: $x, y \in E$ еквівалентні, якщо $x - y \in L,\ L = \{x \in E : \|x\| = 0\}$.

Наведена процедура називається *факторизацією* лініного простору.

§ 4. Приклади банахових просторів

Простори C^n та R^n. Структура цих просторів відома з курсу алгебри, тому на прикладі C^n покажемо різні варіанти введення норми.

а) для $x = (x_1, ..., x_n) \in C^n$ вводимо норму за формулою: $\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|$;

б) для $x=(x_1,...,x_n)\in C^n$ та $\forall p\geq 1$ вводимо норму за формулою: $\|x\|_p=\left(\sum\limits_{k=1}^{n}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$;

в) для $x=(x_1,...,x_n)\in C^n$ вводимо норму за формулою: $\|x\|_0=\max\limits_{k=1,...,n}\{|x_k|\}$.

Вправа. Перевірити аксіоми норми в усіх наведених випадках.

Простір $C(Q)$**.** Нехай Q компакт, тобто компактний, хаусдорфовий топологічний простір. $C(Q)$ – множина усіх неперервних комплекснозначних функцій $Q\ni q\to x(q)\in C$. $C(Q)$ є лінійним простором із звичайними операціями додавання та множення, що легко перевірити. В $C(Q)$ введемо норму: $\|x\|=\max\limits_{q\in Q}\{|x(q)|\}$. Виконання аксіом норми очевидне. Цій нормі відповідає метрика $\rho(x,y)=\max\limits_{q\in Q}\{|x(q)-y(q)|\}$. Збіжність у метричному просторі $\langle C(Q),\rho\rangle$ - це рівномірна збіжність на компакті Q, причому цей простір повний, тобто $C(Q)$ – банаховий простір.

Простір $M(R)$**.** Нехай R – довільна множина. $M(R)$ – сукупність усіх обмежених функцій $R\ni q\to x(q)\in C$. Очевидно $M(R)$ – лінійний простір. Введемо норму: $\|x\|=\sup\limits_{q\in R}\{|x(q)|\}$. Виконання аксіом норми очевидне.

Теорема 3. Лінійний нормований простір $M(R)$ – є банаховим.

Доведення. Нехай $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ - фундаментальна послідовність в $M(R)$. Тоді при кожному фіксованому $q\in R$ числова послідовність $\{x_n(q)\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна, бо $\forall n,m\in N:|x_n(q)-x_m(q)|\leq\|x_n-x_m\|$. Тому при кожному $q\in R$ існує границя $x(q)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n(q)$. Покажемо, що $x(q)\in M(R)$ і $x=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$, тобто $\|x_n-x\|\to 0$. Так як послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна, то $\forall\varepsilon>0,\forall n,m\in N:\|x_n-x_m\|<\varepsilon$, тобто $\forall q\in R:|x_n(q)-x_m(q)|<\varepsilon$. Перейдемо у останній рівності до границі при $m\to\infty$, тоді маємо:

$$\forall n>N(\varepsilon),\forall q\in R:|x_n(q)-x(q)|\leq\varepsilon. \tag{1}$$

Крім того, послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ обмежена за нормою, тому $\exists C>0,\forall n:\|x_n\|\leq C$, тобто $\forall q\in R,:|x_n(q)|\leq C$. Тоді $\forall q\in R$: $|x(q)|\leq|x_n(q)|+|x(q)-x_n(q)|\leq C+\varepsilon$. Це й означає, що $x(q)\in M(R)$. З (1) випливає, що $\forall\varepsilon>0,\exists N(\varepsilon),\forall n>N(\varepsilon):\|x_n-x_m\|\leq\varepsilon$, тобто $x=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$. Що й потрібно було довести.

Зауважимо, що коли Q - компакт, то згідно з теоремою Вейєрштрасса $C(Q)\subseteq M(Q)$. Крім того, якщо $x\in C(Q)$, то $\|x\|_{C(Q)}=\|x\|_{M(Q)}$, отже $C(Q)$ – підпростір в $M(Q)$.

Простір $C^m(\overline{G})$**.** Нехай G – обмежена область простору R^n**,** $\overline{G}$ - її замикання. $C^m(\overline{G})$ - лінійна множина усіх функцій $\overline{G} \ni q \to x(q) \in C$, що мають на компакті похідні до порядку m включно. Норму в цьому просторі визначимо так: $\|x\| = \max\limits_{q \in \overline{G}} \{ \, | \, (D^\alpha x)(q) \, |, |\alpha| \le m \}$.

Тут $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n), |\alpha| = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k$, $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} ... D_n^{\alpha_n}$, $D_j = \dfrac{\partial}{\partial q_j}$.

Вправа. Довести, що визначений простір $C^m(\overline{G})$ - банаховий.

Простір $C^\infty(\overline{G})$**.** Нехай G – та, що й в попередньому прикладі. $C^\infty(\overline{G})$ - множина усіх нескінчено диференційованих в $\overline{G}$ комплекснозначних функцій. Це лінійний простір. Для $x \in C^\infty(\overline{G})$ визначимо серію норм $\|x\|_m = \|x\|_{C^m(\overline{G})}$, $m = 0,1,2,...$. Зрозуміло, що $\|x\|_0 \le \|x\|_1 \le ...$. Виходячи з цієї системи норм, можна виділити систему околів:

$$\Sigma = \{ U(x_0, m, \varepsilon) : x_0 \in C^\infty(\overline{G}); m = 0,1,2,..; \varepsilon > 0 \},$$

де $U(x_0, m, \varepsilon) = \{ x_0 \in C^\infty(\overline{G}) : \|x - x_0\|_m < \varepsilon \}$. Тобто простір є лінійним топологічним. Можна показати, що він локально-опуклий. У просторі $C^\infty(\overline{G})$ введемо метрику: $\rho(x, y) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} \dfrac{1}{2^m} \cdot \dfrac{\|x - y\|_m}{1 + \|x - y\|_m}$.

Вправа. Довести, що збіжність за введеною метрикою еквівалентна збіжності в топології Σ.

§ 5. Простори сумовних функцій та послідовностей.

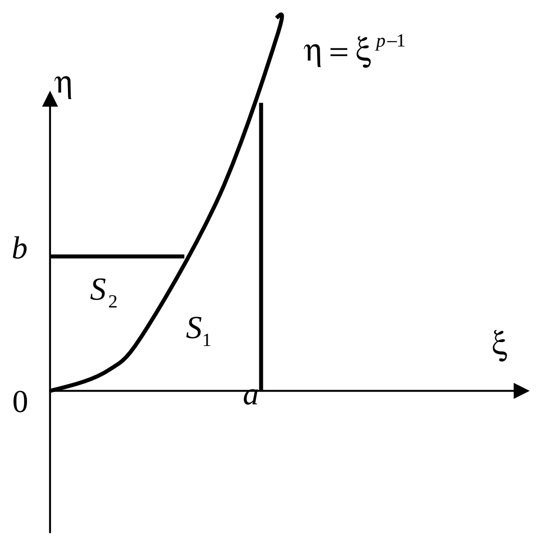
Спочатку розглянемо важливі допоміжні факти.

Нехай $\langle R, \Re, \mu \rangle$ - простір з σ-скінченою мірою і $p \ge 1$. Вимірна функція $x : R \ni t \to x(t) \in C$ називається *сумовною зі степенем* $p \ge 1$, якщо

$$\int\limits_R |x(t)|^p \, d\mu(t) < \infty. \qquad (2)$$

Сукупність усіх таких функцій позначається $L_p(R, d\mu)$ або просто L_p.

Скрізь далі для $p > 1$ позначатимемо q, так званий спряжений показник, що визначається з умови $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.



Нерівність Юнга. Для довільних $a,b>0$ та $p > 1$ має місце нерівність:

$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \qquad (3)$$

Доведення. Розглянемо на площині криву $\eta = \xi^{p-1}$ (рис) і обчислимо площі S_1 та S_2 криволінійних трикутників, обмежених цією лінією, координатними вісями та прямими $\eta = b,\quad \xi = a$.

$$S_1 = \int_0^a \xi^{p-1} d\xi = \frac{a^p}{p};\ S_2 = \int_0^b \eta^{\frac{1}{p-1}} d\eta = \int_0^b \eta^{q-1} d\eta = \frac{b^q}{q}.$$

Тепер (3) випливає з очевидної нерівності $ab \le S_1 + S_2$.

Нерівність Гельдера. Нехай $p > 1$. Тоді $\forall x \in L_p, \forall y \in L_q : xy \in L_1$ і має місце нерівність:

$$\int_R |x(t)y(t)|\, d\mu(t) \le \left(\int_R |x(t)|^p d\mu(t)\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_R |y(t)|^q d\mu(t)\right)^{\frac{1}{q}} \qquad (3)$$

Доведення. Для доведення покладемо в нерівності Юнга

$$a = |x|\left(\int_R |x(t)|^p d\mu(t)\right)^{-\frac{1}{p}},\quad b = |y|\left(\int_R |y(t)|^q d\mu(t)\right)^{-\frac{1}{q}}$$

і проінтегруємо отриману нерівність. Одержимо:

$$\int_R |x(t)y(t)| d\mu(t) \le \left(\int_R |x(t)|^p d\mu(t)\right)^{-\frac{1}{p}} \left(\int_R |y(t)|^q d\mu(t)\right)^{-\frac{1}{q}} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

звідки й випливає, що $\int_R |x(t)y(t)| d\mu(t) < \infty$, тобто $xy \in L_1$ і нерівність (3).

Нерівність Мінковського. Нехай $p \ge 1$. Тоді $\forall x, y \in L_p : x + y \in L_p$ і має місце нерівність:

$$\left(\int_R |x(t) + y(t)|^p d\mu(t)\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int_R |x(t)|^p d\mu(t)\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_R |y(t)|^p d\mu(t)\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Доведення. При $p = 1$ справедливість нерівності очевидна. Нехай $p > 1$, тоді той факт, що $\forall x, y \in L_p : x + y \in L_p$, випливає з нерівності $(a+b)^p \le C(a^p + b^p)$, де *a*,*b* – довільні невід’ємні числа, а *C* – деяка константа, що залежить від *p*. Перейдемо до доведення нерівності:

$$\int_R |x+y|^p d\mu = \int_R |x+y||x+y|^{p-1} d\mu \le \int_R |x||x+y|^{p-1} d\mu + \int_R |y||x+y|^{p-1} d\mu.$$

Оскільки $(p-1)q = p$, то застосовуючи до кожного з доданків нерівність Гельдера, одержимо:

$$\int_R |x+y|^p d\mu \le \left(\int_R |x|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_R |x+y|^p d\mu\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\int_R |y|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_R |x+y|^p d\mu\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Нарешті, поділивши обидві частини нерівності на $\left(\int\limits_R |x+y|^p d\mu\right)^{\frac{1}{q}}$, одержимо нерівність Мінковського.

Повернемось до вивчення простору $L_p(R,d\mu)$. З нерівності Мінковського випливає лінійність цього простору. Введемо в $L_p(R,d\mu)$ норму: $\forall x \in L_p(R,d\mu)$

$$\|x\|_p = \left(\int\limits_R |x(t)\,|^p d\mu(t)\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Легко перевірити, що ця функція задовольняє усім аксіомам норми, за виключенням умови $\|x\|_p = 0 \Rightarrow x = 0$. Дійсно, з того, що $\int\limits_R |x(t)|^p d\mu(t) = 0$, випливає тільки те, що $x(t) = 0$ лише майже скрізь. Отже, $\|x\|_p$ - напівнорма. Для того, щоб вона стала нормою необхідно виконати факторизацію простору $L_p(R,d\mu)$, взявши $L = \left\{ x \in L_p(R,d\mu) : \|x\|_p = 0 \right\}$. Таким чином, одержимо лінійний нормований простір, який будемо також позначати $L_p(R,d\mu)$, елементами якого є класи еквівалентності функцій, що відрізняються на множині міри нуль. Саме ці *класи функцій і будемо називати функціями сумовними з степенем р.* Збіжність за нормою простору $L_p(R,d\mu)$ називається збіжністю *в середньому степеня р*.

Теорема 4. Простір $L_p(R,d\mu)$ при довільному $p \ge 1$ повний, тобто банаховий.

Доведення. Доведення проводиться в три етапи.

1). Нехай $p = 1$. Розглянемо довільну фундаментальну послідовність $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L_1(R,d\mu)$. Доведем, що існує такий елемент $x \in L_1(R,d\mu)$, що $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$. Оскільки послідовність фундаментальна, то досить показати, що вона містить збіжну підпослідовність, яку виберемо таким чином. Існує послідовність індексів $n_1 < n_2 < \ldots$ така, що $\left\|x_{n_k} - x_{n_{k+1}}\right\| < 2^{-k}$, $k \in N$. Розглянемо функціональний ряд

$$x_{n_1}(t) + \left(x_{n_2}(t) - x_{n_1}(t)\right) + \left(x_{n_3}(t) - x_{n_2}(t)\right) + \ldots, \tag{4}$$

частинні суми цього ряду дорівнюють саме елементам побудованої підпослідовності. Розглянемо ряд

$$\left|x_{n_1}(t)\right| + \left|x_{n_2}(t) - x_{n_1}(t)\right| + \left|x_{n_3}(t) - x_{n_2}(t)\right| + \ldots. \tag{5}$$

Члени цього ряду невід'ємні і інтеграли від його частинних сум не перебільшують величину $\int\limits_R \left|x_{n_1}\right| d\mu + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \int\limits_R \left|x_{n_1}\right| d\mu + 1$. Згідно з теоремою Беппо-Леві ряд (5) збігається μ-майже скрізь до деякої сумовної функції $y(t) \ge 0$. Отже, збігається μ-майже скрізь і ряд (4) до деякої функції $x(t)$.

Залишилось показати, що $x \in L_1$ та $\left\| x_{n_j} - x \right\|_1 \to 0$ при $j \to \infty$. Оскільки $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ - фундаментальна, то при фіксованому $\varepsilon > 0$ при досить великих *l,j*

$$\int_R \left| x_{n_j} - x_{n_l} \right| d\mu = \left\| x_{n_j} - x_{n_l} \right\|_1 < \varepsilon.$$

Скориставшись лемою Фату, перейдемо до границі під знаком інтегралу при $l \to \infty$. В результаті одержимо: $\int_R \left| x_{n_j} - x \right| d\mu \le \varepsilon.$ Звідси випливає, що $x_{n_j} - x \in L_1$, тому $x = x_{n_j} - \left(x_{n_j} - x \right) \in L_1$ і $\left\| x_{n_j} - x \right\|_1 \to 0$. Отже, L_1 -повний.

2) Нехай $p > 1$ та міра μ - скінчена. Якщо $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L_p(R, d\mu)$ - фундаментальна послідовність, то з нерівності Гельдера одержимо:

$$\left\| x_n - x_m \right\|_1 = \int_R \left| x_n - x_m \right| d\mu \le \left(\int_R \left| x_n - x_m \right|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_R d\mu \right)^{\frac{1}{q}} = \left\| x_n - x_m \right\|_p \left(\mu(R) \right)^{\frac{1}{q}},$$

а, отже, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна в L_1. З першого пункту випливає, що існує функція $x(t)$ така, що $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ μ-майже скрізь до неї. Оскільки $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна в L_p, то для фіксованого $\varepsilon > 0$ при всіх досить великих *l,j* маємо: $\int_R \left| x_{n_j} - x_{n_l} \right|^p d\mu < \varepsilon.$ Застосувавши лему Фату, після переходу до границі при $l \to \infty$, одержимо: $\int_R \left| x_{n_j} - x \right|^p d\mu \le \varepsilon.$ Тому $x \in L_p$ та $\left\| x_{n_j} - x \right\|_p \to 0$ при $j \to \infty$. Враховуючи, що $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна, маємо повноту простору L_p.

3) Нехай тепер $p > 1$ та міра μ - σ-скінчена. Це означає, що простір має представлення $R = \bigcup_{j=1}^{\infty} R_j, \quad R_k \cap R_j = \varnothing, k \ne j, \quad \mu\left(R_j\right) < \infty.$ Нехай $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L_p(R, d\mu)$ - фундаментальна послідовність. Кожна з послідовностей $\{x_n^i\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна в $L_p(R_i, d\mu)$ (x_n^i- звуження функції x_n на R_i). Користуючись п.2) , виділимо підпослідовність $\{x_j^1\}_{j=1}^{\infty}$, яка збігається μ-майже скрізь на R_1 до деякої функції x^1. З одержаної послідовності знову виділимо підпослідовність $\{x_j^2\}_{j=1}^{\infty}$, яка збігається μ-майже скрізь на R_2 до деякої функції x^2. Продовжуючи цей процес, зможемо побудувати діагональну послідовність $\{x_j^j\}_{j=1}^{\infty}$, яка збігається μ-майже скрізь на R до деякої функції x, що визначається умовою: $x(t) = x^i(t), t \in R_i$. Перевірка того факту, що $x \in L_p(R, d\mu)$ та $\left\| x_{n_j} - x \right\|_p \xrightarrow[j \to \infty]{} 0$ виконується аналогічно попередньому випадку. Теорему доведено.

Множини скрізь щільні в L_p.

Теорема 5. У просторі $L_p(R,d\mu)$ скрізь щільна множина S простих функцій вигляду $x(t)=\sum_{j=1}^{n}(\alpha_j+i\beta_j)\cdot\chi_{B_j}(t)$, де $\alpha_j,\beta_j\in Q,\quad B_j\in\Re,\quad \mu(B_j)<\infty$.

Доведення. З визначення σ - скінченої міри випливає, що має місце представлення $R=\bigcup_{j=1}^{\infty}R_j,\quad R_k\cap R_j=\varnothing, k\neq j,\quad \mu(R_j)<\infty$. Нехай $x\in L_p(R,d\mu)$. Згідно з означенням інтегралу по σ - скінченій мірі, $\|x\|_p^p=\int_R |x|^p d\mu=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{R_k}|x|^p d\mu$.

Ряд в останній формулі збігається, отже $\forall\varepsilon>0,\exists N(\varepsilon:)\sum_{k=N+1}^{\infty}\int_{R_k}|x|^p d\mu<\left(\frac{\varepsilon}{4}\right)^p$.

Нехай $R'=\bigcup_{k=1}^{N}R_k$. Зрозуміло, що $\mu(R')<\infty$. Якщо тепер покласти $x_1(t)=\begin{cases}x(t), t\in R'\\ 0,\quad t\notin R'\end{cases}$, то отримаємо нерівність $\|x-x_1\|_p<\frac{\varepsilon}{4}$. Згідно з означеням інтегралу від необмеженої функції, існує "зрізка" x_2 функції x_1, така, що $\|x_1-x_2\|_p<\frac{\varepsilon}{4}$. Для функції x_2 існує така проста функція $x_3=\sum_{j=1}^{n}c_j\chi_{B_j}$, що $\|x_2-x_3\|_p<\frac{\varepsilon}{4}$. Нарешті числа $c_j\in C$ можна наблизити числами $\alpha_j+i\beta_j$ ($\alpha_j,\beta_j\in Q,$) так, що $\left\|\sum_{j=1}^{n}(c_j-\alpha_j-i\beta_j)\chi_{B_j}\right\|<\frac{\varepsilon}{4}$, тобто $\|x_3-x_4\|_p<\frac{\varepsilon}{4}$, де $x_4=\sum_{j=1}^{n}(\alpha_j+i\beta_j)\chi_{B_j}\in S$. Отже, маємо $\|x-x_4\|_p\le\|x-x_1\|_p+\|x_2-x_1\|_p+\|x_3-x_2\|_p+\|x_3-x_4\|_p<\varepsilon$.

§ 6. Збіжність в $L_p(R,d\mu)$

Означення 11. Міра μ, яку задано на вимірному просторі $\langle R,\Re\rangle$, називається сепарабельною, якщо існує така злічена сукупність $\{A_1,A_2,...\}$ вимірних множин, що $\forall\varepsilon>0,\forall B\in\Re<\exists A_k:\mu(A_k\Delta B)<\varepsilon$. Сепарабельну міру називають мірою з зліченою базою.

Наприклад, міра Лебега на напіввідрізку є сепарабельною.

Теорема 6. Якщо μ - сепарабельна на вимірному просторі $\langle R,\Re\rangle$, то простір $L_p(R,d\mu)$ - сепарабельний.

Означення 12. Нехай $\langle R,\Re\rangle$ вимірний простір, $\Re$ - σ - алгебра відкритих множин з R. Міра μ задана на $\langle R,\Re\rangle$ називається регулярною, якщо

$$\forall A \in \Re : \mu(A) = \sup_{F \subset A, F = \overline{F}} \mu(F) = \inf_{G \subset A} \{ \mu(G), G - відкрите \}.$$

Теорема 7. Якщо міра μ регулярна, то множина $C(R) \cap L_p(R, d\mu)$ скрізь щільна в $L_p(R, d\mu)$.

Елементами простору L_p є вимірні функції. Для послідовностей вимірних функцій є три різні типи збіжності, а саме: поточкова, майже скрізь, та за мірою. З'ясуємо співвідношення цих збіжностей із збіжністю за нормою в L_p.

1). $x_n \xrightarrow{L_p} x \Rightarrow x_n \xrightarrow{\mu} x$. Дійсно для довільного σ має місце нерівність:

$$\int_R |x_n(t) - x(t)|^p d\mu \geq \int_{\{t : |x_n(t) - x(t)| \geq \sigma, \sigma > 0\}} |x_n(t) - x(t)|^p d\mu \geq \sigma^p \mu(t : |x_n - x| \geq \sigma),$$

з якої випливає твердження.

2). Зі збіжності $x_n \xrightarrow{L_p} x$ не випливає збіжність $x_n \xrightarrow{м.с.} x$.

Нехай $x_n(t) \in L_p([0,1], dt)$. Послідовність $\{x_n\}_1^\infty$ будується за правилом $x_1 = f_{11}, x_2 = f_{21}, x_3 = f_{22}, x_4 = f_{31}, x_5 = f_{32}, \ldots$, де

$$f_{kj} = \begin{cases} 1, x \in \left[\dfrac{i-1}{k}, \dfrac{i}{k}\right) \\ 0, x \notin \left[\dfrac{i-1}{k}, \dfrac{i}{k}\right) \end{cases}.$$

Ця послідовність прямує за мірою до 0, бо при $\sigma > 1$ всі множини $\{ |x_n| \geq \sigma \} = \varnothing$, якщо ж $\sigma \leq 1$, то $\{ |x_n| \geq \sigma \} = \left[\dfrac{i-1}{k}, \dfrac{i}{k}\right)$. Отже, $\mu\{ |x_n| \geq \sigma \} = \dfrac{1}{k} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$. Крім того, $\|x_n\|_p^p = \dfrac{1}{k}$, тобто $x_n \to 0$ за нормою в $L_p([0,1], dt)$. Але, ця послідовність не є збіжною майже скрізь. Дійсно, нехай $x_0 \in [0,1)$. Тоді $\forall k \in N, \exists i \leq k : x_0 \in \left[\dfrac{i-1}{k}, \dfrac{i}{k}\right)$, отже, $f_{ki}(x_0) = 1$. Таким чином, серед членів числової послідовності є одиничні, з якими завгодно великими номерами. Тому послідовність не є збіжною майже скрізь.

3). $x_n \xrightarrow{\mu} x \not\Rightarrow x_n \xrightarrow{L_p} x$. Розглянемо в $L_p([0,1], dt)$ послідовність $x_n(t) = n \cdot \chi_{[0; \frac{1}{n}]}(t)$. Очевидно $x_n(t) \xrightarrow{\mu} 0$, але

$$\int_{[0;1]} \left| n \cdot \chi_{[0; \frac{1}{n}]}(t) \right|^p dt = n^p \cdot \frac{1}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} \infty.$$ Отже, $x_n(t) \not\to 0$ в $L_p([0,1], dt)$.

4). Нехай μ - скінчена і $p_2 > p_1 \geq 1$. Тоді $L_{p_2}(R,d\mu) \subseteq L_{p_1}(R,d\mu)$ та $x_n \xrightarrow{L_{p_2}} x \Rightarrow x_n \xrightarrow{L_{p_1}} x$. Дійсно, нехай $z \in L_{p_2}(R,d\mu)$. Застосовуючи нерівність Гельдера при $p = \dfrac{p_2}{p_1}$, $x(t) = |z(t)|^{p_1} \in L_p(R,d\mu)$, $y(t) \equiv 1$, одержимо

$$\int_R |z|^{p_1} \cdot 1 \cdot d\mu \leq \left(\int_R |z|^{p_1 \frac{p_2}{p_1}} d\mu \right)^{\frac{p_1}{p_2}} \cdot (\mu(R))^{\frac{1}{q}} = \|z\|_{p_2}^{p_1} \cdot (\mu(R))^{\frac{1}{q}} < \infty,$$

тобто $z \in L_{p_1}(R,d\mu)$. При цьому $\|z\|_{p_1} \leq C(p_1,p_2) \cdot \|z\|_{p_2}$. Якщо покласти $z = x_n - x$, одержимо $x_n \xrightarrow{L_{p_2}} x \Rightarrow x_n \xrightarrow{L_{p_1}} x$.

Простір l_p. Нехай $R = N, \mathfrak{R}$- сукупність усіх підмножин з N. μ - дискретна міра на $\langle R, \mathfrak{R} \rangle$ така, що $\forall n \in N : \mu(n) = 1$. Тоді простір $L_p(R,d\mu)$ позначається l_p і його елементами є послідовності комплексних чисел $\{x_n\}_1^\infty$ таких, що $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$. Норма елемента $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l_p$ визначається за формулою: $\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$. З доказаного вище випливає, що l_p- банаховий простір.

Простір l_p - сепарабельний. Множина $S = \{ (r_1, \ldots, r_n, 0, \ldots) : r_k \in Q, k = \overline{1,n} \}$ є зліченою і скрізь щільною в l_p.

Із збіжності за нормою l_p- випливає покоординатна збіжність, але навпакти невірно, бо послідовність

$$x^{(1)} = (1,0,\ldots),\ x^{(2)} = (0,1,0,\ldots),\ x^{(3)} = (0,0,1,0,\ldots), \ldots$$

збігається покоординатно до $x = (0,0,0,\ldots) \in l_p$ і в той же час не є фундаментальною , бо $\|x^{(m)} - x^{(n)}\| = 2^{\frac{1}{p}}$.

Вправа. Нехай $p_2 > p_1 \geq 1$. Довести, що $l_{p_2} \subset l_{p_1}$ та $x_n \xrightarrow{l_{p_2}} x \Rightarrow x_n \xrightarrow{l_{p_1}} x$.

Простір $L_\infty(R,d\mu)$**.** Нехай $\langle R, \mathfrak{R}, d\mu \rangle$ - простір з мірою. Вимірна функція $x(t) : R \to C$ називається в суттєвому обмеженою, якщо $\exists$ C>0, C-const, і множина $A \in \mathfrak{R}$, $\{\mu(A)=0\}$, такі, що $\forall$ $t \in \overline{A}$ $|x(t)| \leq C$. Точну нижню грань таких сталих називають суттєвою верхнею гранню функції $x(t)$ і позначають $ess\sup|x(t)|$. Таким чином, $ess\sup|x(t)| \overset{df}{=} \inf_{\mu(A)=0} \sup_{t \in \overline{A}} |x(t)|$. В суттєвому обмежена функція майже скрізь скінчена. Однак обернене твердження невірне. Якщо покласти $\|x\|_\infty = ess\sup|x(t)|$. То можна показати, що

L_∞ / L, $L = \left\{ x \in L_\infty : x(t) \overset{м.с}{=} 0 \right\}$ є лінійний нормований простір, який будемо позначати $L_\infty(R, d\mu)$.

Теорема 8. Простір $L_\infty(R, d\mu)$ - банаховий.

Простір l_∞**.** Нехай $R = N, \mathfrak{R}$ - сукупність усіх підмножин з N. μ - дискретна міра на $\langle R, \mathfrak{R} \rangle$ така, що $\forall n \in N : \mu(n) = 1$. Тоді простір $L_\infty(R, d\mu)$ позначається l_∞. Елементами цього простору є обмежені послідовності комплексних чисел. А норма визначається так: $\|x\|_\infty = \sup\limits_{n \in N} |x_n|$. Збіжність за цією нормою є рівномірна покоординатна збіжність. Простір l_∞ - банаховий.

Зауваження. Можна показати, що $L_\infty = \bigcap\limits_p L_p$ та $\|x\|_\infty = \lim\limits_{p \to \infty} \|x\|_p$.

Соболівський простір $W_p^l(\overline{G})$**.** Нехай G – обмежена область в R^n. $\overline{G}$ - її замикання. $C^l\left(\overline{G}\right)$ - простір l разів неперервно диференційованих комплекснозначних функцій в $\overline{G}$. Крім того вважаємо, що в $\overline{G}$ є струтура вимірного простору з мірою Лебега, тому можна розглядати простір $L_p(G)$, $\forall p \geq 1$. Оскільки $\overline{G}$ - компакт, то $C^l(\overline{G}) \subset L_p(G, d\mu)$(як множина неперервно диференційованих функцій). Таким чином $\forall x(t) \in C^l(\overline{G})$ має сенс вираз: $\|x\|_{l,p} = \left(\sum\limits_{|\alpha| \leq l} \|D^\alpha x\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}}$, де $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n), \alpha_i \geq 0, \alpha_i \in Z$, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$, $D^\alpha = \left(\dfrac{\partial}{\partial x_1} \right)^{\alpha_1} ... \left(\dfrac{\partial}{\partial x_n} \right)^{\alpha_n}$. Лінійний нормований простір з нормою $\|x\|_{l,p}$ не є повним. Поповнення $C^l\left(\overline{G}\right)$ за нормою $\|x\|_{l,p}$ називається соболівським простором, і позначається $W_p^l(G)$. Зокрема, $W_p^0(G) = L_p(G)$. Зрозуміло, що $W_p^l(G) \subset L_p(G, d\mu)$. Елементи $W_p^l(G)$ - є сумовні функції, але для них може іти мова про певну гладкість. У зв’язку з цим наведемо так звану теорему вкладення (одну з багатьох), яка дає умови неперервності єлементів соболівського простору.

Теорема 9. Якщо $l > \dfrac{N}{p}$, то $W_p^l(G) \subset C\left(\overline{G}\right)$, при чому:

$$\exists C > 0, \forall x \in W_p^l(G) : \|x\|_{C(\overline{G})} \leq C \|x\|_{l,p}.$$

§ 7. Геометрія банахових просторів.

Теорема 10. (про майже ортогональний вектор) Нехай E – довільний лінійний нормований простір. Нехай G - підпростір. Тоді $\forall\varepsilon\ \exists\ y_\varepsilon \notin G$, $\|y_\varepsilon\| = 1$, що має таку властивість $\forall x \in G : \|y_\varepsilon - x\| > 1 - \varepsilon$. Вектор y_ε називається майже ортогональним.

Доведення. Нехай $\exists\ z \notin G$. Відстань до G $\delta = \rho(z, G) = \inf\{\|z - x\|, x \in G\} > 0$. Якщо б $\delta = \rho(z, G) = 0$, то це означало б, що z гранична точка G, що протирічить замкненості G. За означенням нижньої грані:

$$\forall \eta > 0, \exists x_\eta \in G, \delta \le \|z - x_\eta\| \le \delta + \eta. \tag{6}$$

Виберемо $\eta(\delta + \eta)^{-1} = \varepsilon$ і побудуємо вектор $y_\varepsilon = \|z - x_\eta\|^{-1}(z - x_\eta)$. Покажемо, що це шуканий вектор. Дійсно, зрозуміло, що $y_\varepsilon \notin G$; $\|y_\varepsilon\| = 1$. Далі:

$$\forall x \in G : \|y_\varepsilon - x\| = \left\| \|z - x_\eta\|^{-1}(z - x_\eta) - x \right\| = \|z - x_\eta\|^{-1} \cdot \left\| z - \left(x_\eta + x\|z - x_\eta\|\right) \right\|. \tag{7}$$

Оскільки $x_\eta + x\|z - x_\eta\| \in G$, то з (7) з урахуванням (6) маємо:

$$\|y_\varepsilon - x\| \ge \|z - x_\eta\|^{-1} \cdot \delta > \frac{\delta}{\delta + \eta} = 1 - \frac{\eta}{\delta + \eta} = 1 - \varepsilon.$$

Ця теорема стверджує, що у просторах з довільною нормою існує поняття близьке до поняття ортогональності, тобто звичайної перпендикулярності векторів у евклідовому просторі.

Нехай E лінійний простір над полем К. Позначимо $dim(E)$ – розмірність простору E, тобто кількість лінійно незалежних векторів (елементів). Якщо для довільного n в E існує n лінійно незалежних векторів, то простір називається нескінченновимірним.

Означення 13. Лінійні нормовані простори E_1 та E_2 називаються ізоморфними, якщо вони алгебраїчно ізоморфні і цей ізоморфізм U є гомеоморфізмом, тобто обидва відображення $U : E_1 \to E_2$, $U^{-1} : E_1 \to E_2$ неперервні. Ізоморфізм U називається ізометричним ізоморфізмом, якщо $\forall x \in E_1 : \|x\|_{E_1} = \|Ux\|_{E_2}$.

З курсу алгебри відомо, що скінченновимірні лінійні простори ізоморфні тоді і тільки тоді, коли їх розмірності співпадають. Можна показати, що теорема про ізоморфізм скінченновимірних лінійних нормованих просторів таке ж формулювання. Наступна теорема є реалізацією даного твердження.

Теорема 11. Усі банахові простори розмірності n ізоморфні.

Доведення. Нехай E банаховий простір E, $\dim E = N < \infty$. Покажемо, шо E ізоморфний простору C^N. Нехай $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N) \in C^N$, а система векторів $\{e_1, e_2, \ldots e_N\}, e_k \in C^N, k = \overline{1, N}$ - базис. Побудуємо ізоморфізм за правилом

$$E \ni x \xleftrightarrow{U} \xi = (x_1, ..., x_N) \in C^N.$$

При цьому усі алгебраїчні операції зберігаються. Перевіримо неперервність побудованого відображення. Для цього необхідно довести еквівалентність норм простору E $\|\bullet\|_1$ і простору C^N: $\|x\|_2 = \left(\sum_{k=1}^{N} |x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

Означення 14. Якщо $\exists C_1 = const, \quad \exists C_2 = const, \quad C_1\|x\|_1 \le \|x\|_2 \le C_2\|x\|_1$, то норми називаються *еквівалентними.*

Збіжність послідовності за однією з еквівалентних норм тягне за собою збіжність і за іншою. Отже, необхідно підібрати сталі C_1 та C_2 такі, що

$$C_1\|x\|_1 \le \|\xi\|_2 \le C_2\|x\|_1.$$

Дійсно, $$\|x\|_1 = \left\|\sum_{k=1}^{N} x_k e_k\right\|_1 \le \sum_{k=1}^{N} |x_k| \cdot \|e_k\|_1 \le \left(\sum_{k=1}^{N} |x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{k=1}^{N} \|e_k\|_1^2\right)^{\frac{1}{2}} = \|\xi\|_1 \cdot C_1.$$

Якщо поділити на C_1, то одержимо ліву нерівність.

Праву нерівність, згідно з однорідністю норми, досить довести для елементів одиничної сфери $S_1(0) = \{\xi \in C; \|\xi\| = 1\}$. Отже, потрібно довести:

$$\exists C_2 > 0, \forall \xi \in S_1(0), \quad 1 = \|\xi\|_2 \le C_2\|x\|_1.$$

Розглянемо функцію: $S_1(0) \ni \xi \to f(\xi) = \|x\|_1 \in R$. Ця функція неперервна, тому досягає на компакті $S_1(0)$ свого мінімума. Нехай $\delta = \min_{\xi \in S_1(0)} f(\xi) \ge 0$. Покажемо, що $\delta > 0$. Якщо припустити $\delta = 0$, то тоді $\exists \xi_0 \in S_1(0)$ такий, що $\|x_0\|_1 = 0$. Тоді $x_0 = 0$, а, отже, й $\xi_0 = 0$, тобто $\xi_0 \notin S_1(0)$. Це протиріччя показує, що $\delta > 0$, тобто $\|x\|_1 \ge \delta \cdot \|\xi\|_2$. Теорему доведено.

Має місце, ще один важливий факт.

Теорема 12. Якщо банаховий простір скінченновимірний, то довільна обмежена множина в ньому є передкомпактною

Розділ V. Гільбертові простори.

§ 1. Передгільбертові та гільбертові простори.

Означення 15. Якщо у лінійному просторі H визначено скалярний добуток $H \ni x, y \to (x, y) \in C$, тобто задана функція, яка задовольняє аксіомам:

1. $\forall x \in H : (x, x) \ge 0$, при чому $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
2. $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in C, \forall x_1, x_2, y \in H : (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y) = \lambda_1(x_1, y) + \lambda_2(x_2, y)$ - (лінійність по першому множнику);
3. $\forall x, y \in H : (x, y) = \overline{(y, x)}$ - (ермітовість),

то такий лінійний простір називається *передгільбертовим.*

Якщо $H \ni x, y \to (x, y) \in R$, то третя аксіома має вигляд: $\forall x, y \in H : (x, y) = (y, x)$.

У скінченовимірному випадку передгільбертовий простір називається евклідовим або унітарним, в залежності від числового поля.

Зауважимо, що має місце така властивість скалярного добутку:

$$\forall \lambda_1, \lambda_2 \in C, \forall x_1, x_2, y \in H : (y, \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \overline{\lambda}_1 (y, x_1) + \overline{\lambda}_2 (y, x_2).$$

В цьому неважко впевнитись, врахувавши аксіоми 2 і 3 означення:

$$(y, \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \overline{(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y)} = \overline{\lambda_1 (x_1, y) + \lambda_2 (x_2, y)} = \overline{\lambda}_1 (y, x_1) + \overline{\lambda}_2 (y, x_2).$$

Нерівність Коші-Буняковського. $\forall x, y \in H : |(x, y)|^2 \le (x, x)(y, y)$.

Доведення. Якщо хоча б один з елементів нульовий, то нерівність очевидна. Нехай $y \neq 0$. Знайдем таке λ, щоб $(x - \lambda y, y) = 0$. З цієї рівності знаходимо: $\lambda = {(x,y)} / {(y,y)}$. Тепер, враховуючи аксіому 1, маємо:

$$0 \le (x - \lambda y, x - \lambda y) = (x - \lambda y, x) - \overline{\lambda}(x - \lambda y, y) =$$

$$= (x - \lambda y, x) = (x, x) - \lambda (y, x) = (x, x) - \frac{|(x, y)|^2}{(y, y)},$$

звідки одержимо потрібну нерівність.

Для довільного $x \in H$ визначимо норму за правилом: $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$. Тоді нерівність Коші-Буняковського має вигляд $\forall x, y \in H : |(x, y)| \le \|x\| \cdot \|y\|$.

Теорема 13. Передгільбертовий простір, в якому введено норму за формулою $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$, є лінійним нормованим простором.

Доведення. Виконання першої властивості норм очевидне. Перевіримо другу властивість: $\|\lambda x\| = \sqrt{(\lambda x, \lambda x)} = \sqrt{|\lambda|^2 (x, x)} = |\lambda| \cdot \|x\|$. Нарешті доведемо нерівність трикутника. Для $\forall x, y \in H$ маємо:

$$\|x + y\|^2 = (x + y, x + y) = (x, x) + (x, y) + (y, x) + (y, y) =$$

$$= \|x\|^2 + \operatorname{Re}(x, y) + \|y\|^2 \le \|x\|^2 + 2|(x, y)| + \|y\|^2,$$

звідки, згідно з нерівністю Коші-Буняковського, одержимо:

$$\|x + y\|^2 \le \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2 \Leftrightarrow \|x + y\| \le \|x\| + \|y\|.$$

Означення 16. Передгільбертовий простір повний відносно норми $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$, називається *гільбертовим* простором.

Теорема 14. (Про поповнення)**.** Для довільного передгільбертового простору H існує гільбертовий простір $\widetilde{H}$ такий, що 1) $H \subset \widetilde{H}$, 2) $\forall x, y \in H : (x, y)_H = (x, y)_{\widetilde{H}}$, 3) H – скрізь щільний в $\widetilde{H}$. Простір $\widetilde{H}$ називається поповненням простору H.

Означення 17. Нехай в лінійному просторі *H* введено скалярну функцію $H \ni x, y \to (x, y) \in C$ так, що виконуються усі аксіоми скалярного добутку, за виключенням умови $(x,x)=0 \Leftrightarrow x=0$ першої аксіоми. Тоді функція $H \ni x,y \to (x,y) \in C$ називається *квазіскалярним* добутком.

Квазіскалярний добуток задовольняє умові антилінійності, нерівності Коші-Буняковського.

Розглянемо множину $L=\{x \in H : (x,x)=0\}$. Неважко переконатись, що ця множина лінійна, при чому, якщо $x \in L$, то $(x,y)=0$ (наслідок нерівності Коші-Буняковського).

Аналогічно до викладеного в § 3 розд. IV, факторизуємо H відносно класу $L=\{x \in H : (x,x)=0\}$ і одержимо фактор-простір лінійний H/L, в якому вводиться скалярний добуток за правилом $(X,Y)_{H/L}=(x,y)$, де $x \in X, y \in Y, \quad X,Y \in H/L$. Це є квазіскалярний добуток, який задовольняє умові $(X,X)_{H/L}=0 \Leftrightarrow X=0$, бо $(X,X)_{H/L}=0 \Leftrightarrow \forall x \in X : (x,x)=0 \Leftrightarrow x \in L$, отже, $X=L \Leftrightarrow X=0$.

Ми показали, що за квазіскалярним добутком завжди, за допомогою факторизації простору, можна побудувати передгільбертовий простір.

§ 2. Приклади гільбертових просторів

Простори C^n **та** R^n**.** Для $x=(x_1,\dots,x_n),\ y=(y_1,\dots,y_n) \in C^n$ скалярний добуток вводимо за формулою: $(x,y)=\sum\limits_{k=1}^{n} x_k \overline{y_k}$.

Простір $L_2(R,d\mu)$. Розглянемо множину усіх функцій з сумовним квадратом модуля на R. Визначимо скалярний добуток за формулою $(x,y)=\int\limits_R x(t)\overline{y(t)}d\mu$. Це є квазіскалярний добуток. Виконавши факторизацію одержимо гільбертовий простір $L_2(R,d\mu)$. Його повнота може бути доведеною за означенням, але можна врахувати те, що в цьому просторі норма має вгляд $\|x\|_{L_2(R,d\mu)}=\sqrt{(x,x)}=\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}|x_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ і сам простір є банаховим, тобто повним.

Простір l_2. Розглянемо множину всіх послідовностей комплексних чисел $\{x_n\}_1^\infty$ таких, що $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|x_n|^2<\infty$. На цій множині вводимо скалярний добуток за формулою $(x,y)=\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k \overline{y_k}$**.** Відносно цього скалярного добутку це є гільбертовий простір. При чому $\|x\|_{l_2}=\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}|x_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

Простір $W_2^l(G)$. В соболівському просторі $W_p^l(\overline{G})$ при $p=2$ можна ввести скалярний добуток $(x,y)_l = \sum\limits_{|\alpha|\le l}\left(D^\alpha x, D^\alpha y\right)_{L_2(G)}$. Відносно цього скалярного добутку простір $W_2^l(G)$ є гільбертовим.

Вправа. Перевірити в усіх прикладах аксіоми скалярного добутку.

§ 3. Теорема про проекцію. Ортогональні підпростори.

Геометрія гільбертових просторів більш багата за геометрію банахових, і досить близька до геометрії скінченовимірних евклідових просторів. Отже, нехай H - гільбертовий простір, з скалярним добутком $(x,y)_H = (x,y)$.

Вправа. Довести, що скалярний добуток є неперервною функцією відносно збіжності за нормою в H: $\|x\|_H = \sqrt{(x,x)}$.

Означення 18. Два вектори $x, y\in H$ називаються *ортогональними* ($x\perp y$), якщо $(x,y)=0$.

Означення 19. Вектор $x\in H$ називається ортогональним до множини $M\subset H$ $(x\perp M)$, якщо $(x,y)=0, \forall y\in M$. Множина векторів ортогональних до M називається ортогональним доповненням множини M і позначається $M^{\perp}$.

Означення 20. Нехай G – підпростір H. Проекцією вектора x на підпростір G, називається такий вектор $y\in G$, що $x-y\perp G$. Позначається так: $y=np_G x$.

Теорема 15. (про проекцію**)** Нехай G – підпростір H. $\forall x\in H$ існує єдина проекція $y=np_G x$.

Доведення. Якщо $x\in G$, то $np_G x = x$. Отже, вважаємо $x\notin G$, тоді $d=\rho(x,G)=\inf\limits_{y\in G}\|x-y\|>0$. Нехай $\{y_n\}_1^\infty\subset G$ така, що $d_n = \|x-y_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} d$. Покажемо, що $\{y_n\}_1^\infty$ -фундаментальна.

Нехай $h\in G$ - довільний ненульовий вектор. Тоді $y_n+\varepsilon h\in G, \forall\varepsilon\in C$, тому $\|x-y_n\|^2-\overline{\varepsilon}(x-y_n,h)-\varepsilon(h,x-y_n)+\left|\varepsilon^2\right|\cdot\|h\|^2\ge d^2$.

Поклавши, тут $\varepsilon=\|h\|^{-2}(x-y_n,h)$, одержимо: $|(x-y_n,h)|\le\|h\|\left(\sqrt{d_n^2-d^2}\right)$ (8)

Оскільки нерівність є вірною і при $h=0$, то при довільному $h\in G$ маємо: $|(y_n-y_m,h)|\le|(y_n-x,h)|+|(x-y_m,h)|\le\|h\|\left(\sqrt{d_n^2-d^2}+\sqrt{d_m^2-d^2}\right)$. Поклавши тут $h=y_n-y_m$, одержимо: $\|y_n-y_m\|\le\sqrt{d_n^2-d^2}+\sqrt{d_m^2-d^2}$. Отже, $\{y_n\}_1^\infty$ - фундаментальна. Оскільки H повний, то існує границя цієї послідовності $y=\lim\limits_{n\to\infty}y_n$, а так як G – підпростір, то $y\in G$. Перейдемо у нерівності (8) до границі при $n\to\infty$. Тоді $(x-y,h)=0, \forall h\in G$, тобто $x-y\perp G$, що й означає: $y=np_G x$.

Доведемо єдиність проекції. Нехай $y' = np_G x$ ще одна проекція. Тоді $\forall h \in G$ маємо: $(y - y', h) = (x - y', h) - (x - y, h) = 0$. Поклавши тут $h = y - y'$, одержимо $\|y - y'\|^2 = 0 \Rightarrow y = y'$. Теорему доведено.

Наслідок. Нехай G – підпростір *H*, $G^{\perp}$- його ортогональне доповнення. Тоді кожний $x \in H$ єдиним чином представляється у вигляді $x = y + z, y \in G, z \in G^{\perp}$, при цьому $y = np_G x, \quad z = np_{G^{\perp}} x$.

Означення 21. Два підпростори G_1, G_2 гільбертового простору *H* називаються ортогональними $G_1 \perp G_2$, якщо $x \perp y, \forall x \in G_1, \forall y \in G_2$.

Означення 22. Нехай $G_1, G_2, ..., G_n$ - попарно ортогональні підпростори в гільбертовому просторі *H*. Ортогональною сумою цих підпросторів називається множина $G = \{x \in H^n : x = g_1 + ... + g_n, \quad g_k \in G_k, k = 1,...,n\}$. Позначається так: $G = G_1 \oplus G_2 \oplus ... \oplus G_n$ або $G = \bigoplus_{k=1}^{n} G_k$.

Так, якщо G – підпростір, то $H = G \oplus G^{\perp}$.

Теорема 16. Ортогональна сума скінченої кількості попарно ортогональних підпросторів також є підпростором.

§ 4. Ортонормовані системи векторів. Ортонормовані базиси.

Означення 23. Система $\{e_k\}_1^{\infty}$ векторів гільбертова простору *H* називається ортонормованою, якщо $\forall j, k \in N \ (e_j, e_k) = \delta_{jk}$.

Прикладом такої системи може слугувати система векторів $e_1 = (1,0,0\ldots 0), e_2(0,1,0\ldots 0),..., e_3(0,0,1,\cdots 0),...$ у просторі l_2.

Лема. Нехай $\{e_k\}_1^{\infty}$- ортонормована система векторів в *H*. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k, \quad c_k \in C$ збігається в *H* тоді і тільки тоді, коли збігається ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2$.

Доведення. Оскільки *H* повний простір, то для збіжності ряду $\sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k$ необхідно і достатньо, щоб послідовність його частинних сум була фундаментальною. Але при $n > m$ маємо:

$$\left\| \sum_{1}^{n} c_k e_k - \sum_{1}^{m} c_k e_k \right\|^2 = \left\| \sum_{m+1}^{n} c_k e_k \right\|^2 = \sum_{j,k=m+1}^{n} c_j \overline{c_k} (e_j, e_k) = \sum_{k=m+1}^{n} |c_k|^2 .$$

Звідси, згідно критерію Коші збіжності числового ряду, випливає твердження леми.

Теорема 17. Нехай $\{e_k\}_1^{\infty}$- ортонормована система векторів в *H*. Тоді для довільного вектора $x \in H$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (x, e_k) \cdot e_k$ збігається в *H* і має місце нерівність Бесселя

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\left(x,e_k\right)\right|^2 \le \|x\|^2 . \qquad (9)$$

Доведення. Оскільки згідно з лемою збіжність ряду випливатиме з нерівності (9), то досить довести цю нерівність. Враховуючи властивості скалярного добутку та умову ортогональності, одержимо $\forall n \in N$:

$$0 \le \left\| x - \sum_{k=1}^{n}(x,e_k)e_k \right\|^2 = \left(x - \sum_{k=1}^{n}(x,e_k)e_k , x - \sum_{k=1}^{n}(x,e_k)e_k \right) =$$

$$= \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n}(x,e_k)(e_k,x) - \sum_{k=1}^{n}\overline{(x,e_k)}(x,e_k) + \sum_{j,k=1}^{n}\overline{(x,e_k)}(x,e_j)(e_j,e_k) = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n}\left|(x,e_k)\right|^2 ,$$

тому $\sum_{k=1}^{n}\left|(x,e_k)\right|^2 \le \|x\|^2, \quad \forall n \in N$. Переходячи до границі в цій нерівності одержимо нерівність (9). Теорему доведено.

Числа $x_k = (x,e_k)$ - називаються коефіцієнтами Фур'є вектора x в ортонормованій системі $\{e_k\}_1^{\infty}$, а ряд $\sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k = \sum_{k=1}^{\infty}(x,e_k)e_k$ - рядом Фур'є за цією системою.

Нехай $\{e_k\}_1^{\infty}$- ортонормована система векторів в *H*. Покладемо *G*=з.л.о.$\{e_k\}_1^{\infty}$. Тоді для довільного $x \in H$ має рівність

$$np_G x = \sum_{k=1}^{\infty}(x,e_k)e_k .$$

Означення 24. Ортонормована система $\{e_k\}_1^{\infty}$ векторів з *H* називається *ортонормованим базисом* у гільбертовому просторі *H*, якщо вона тотальна в *H*, тобто з.л.о.$\{e_k\}_1^{\infty}$=*H*.

Якщо $\{e_k\}_1^{\infty}$ є ортонормованим базисом в *H*, то довільний $x \in H$ представляється у вигляді

$$x = \sum_{k=1}^{\infty}(x,e_k)e_k = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k .$$

Тоді скалярний добуток матиме вигляд:

$$(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty}(x,e_k)\overline{(y,e_k)} = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{y_k}, \quad \forall x,y \in H$$

Зокрема:

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n}\left|(x,e_k)\right|^2 = \sum_{k=1}^{n}\left|x_k\right|^2, \quad \forall x \in H . \qquad (10)$$

Остання рівність називається *рівністю Парсеваля*.

Теорема 18. Ортонормована система $\{e_k\}_1^{\infty}$ векторів з *H* є *ортонормованим базисом* у гільбертовому просторі *H* тоді і тільки тоді, коли має місце рівність Парсеваля (10).

Доведення. Необхідність умови встановлено вище. Доведемо достатність. В попередній теоремі було доведено рівність

$$\left\| x-\sum_{k=1}^{n}(x,e_k)\cdot e_k \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n}|(x,e_k)|^2 ,$$

тому з (13) випливає, що $\lim\limits_{n\to\infty}\left\| x-\sum\limits_{k=1}^{n}(x,e_k)e_k \right\|^2 = 0$, але це означає, що $x\in$ з.л.о.$\{e_k\}_1^\infty$. Отже, з.л.о.$\{e_k\}_1^\infty$=*H*, тобто $\{e_k\}_1^\infty$ - ортонормований базис в *H*. Теорему доведено.

Приклад. Нехай $H = L_2([0,2\pi])$. Покладем $e_n = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} e^{\text{int}}$, $n\in Z$. Лінійна оболонка даної системи є сукупність усіх тригонометричних поліномів, яка в свою чергу, скрізь щільна в просторі $C([0,2\pi])$. Так як ця множина є скрізь щільною в *H*, то з.л.о.$\{e_k\}_1^\infty$=*H*. Таким чином, ця система є ортонормованим базисом в $H = L_2([0,2\pi])$. Отже, $\forall f\in L_2([0,2\pi])$ має місце розклад за базисом

$$f=\sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k e^{ikt}\text{, де } f_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-ikt}dt .$$

Рівність Парсеваля матиме вигляд:

$$\int_0^{2\pi}|f(t)|^2 dt = 2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}|f_n|^2, \quad \forall f\in L_2([0,2\pi]).$$

§ 5. Ортоганалізація системи векторів.

Розглянемо в гільбертовому просторі *H* злічену систему лінійно незалежних векторів$\{U_k\}_1^\infty$. Ортогоналізувати її означає - побудувати таку ортонормовану систему $\{e_k\}_1^\infty$, щоб л.о. $\{U_k\}_1^\infty$=л.о. $\{e_k\}_1^\infty$.

Розглянемо метод ортогоналізації Грамма-Шмідта. Спочатку виключимо з даної системи, лінійно залежні вектори. Отриману систему будемо позначати так само $\{U_k\}_1^\infty$. Зрозуміло, що її лінійна оболонка співпаде з лінійною оболонкою початкової системи. Покладемо $e_1 = \dfrac{U_1}{\|U_1\|}$, $\|e\| = 1$і побудуємо вектор $e_2' = U_2 - \lambda_{11}e_1$. λ_{11} шукаємо з умови $(e_2', e_1) = 0$. Тобто $0 = (U_2, e_1) - \lambda_{11} \Rightarrow \lambda_{11} = (U_2, e_1)$, отже, $e_2' = U_2 - (U_2, e_1)e_1 \Rightarrow e_2 = \dfrac{e_2'}{\|e_2'\|}$. Далі будуємо вектор $e_3' = U_3 - \lambda_{21}e_1 - \lambda_{22}e_2$.

З умов ортогональності визначаються коефіцієнти $\lambda_{21}, \lambda_{22}$

$$(e_3, e_1) = 0 = (U_3, e_1) - \lambda_{21} \Rightarrow \lambda_{21} = (U_3, e_1)$$
$$(e_3', e_2) = 0 = (U_3, e_2) - \lambda_{22} \Rightarrow \lambda_{22} = (U_3, e_2).$$

Тоді $e_3' = U_3 - (U_3 e_1)e_1 - (U_3, e_2)e_2 \Rightarrow e_3 = \frac{e_3'}{\|e_3'\|}, \quad \|e_3\| = 1.$

Продовжуючи цей процес, одержимо ортонормовану систему векторів $\{e_k\}_1^\infty$, де $e_k = \frac{e_k'}{\|e_k'\|}$, $e_k' = U_k - \lambda_{k-1,1}e_1 - \lambda_{k-1,2}e_2 - \ldots - \lambda_{k-1,k-1}e_{k-1}$, $\lambda_{k-1,j} = (U_k, e_j)$.

При чому л.о. $\{U_k\}_1^\infty$=л.о. $\{e_k\}_1^\infty$. Ця система є ортонормованим базисом в H, якщо виконується рівність Парсеваля. Ми довели теорему.

Теорема 19. Будь яку лінійно незалежну систему елементів гільбертового простору H можна перетворити в ортонормовану. Якщо вихідна система є повною, то в результаті ортогоналізації одержемо ортонормований базис.

Теорема 20. Будь-який сепарабельний гільбертовий простір ізоморфний гільбертовому простору l_2.

Доведення. Нехай $\{U_k\}_1^\infty$ - тотальна система. Ортогоналізуючи її одержемо: $\{e_k\}^\infty$ таку, що $(e_k, e_j) = \delta_{kj}$ і з.л.о.$\{e_k\} = H$. Тоді для $\forall x \in H$ $x = \sum_1^\infty (x_\eta, e_k)e_k$ встановимо ізоморфізм: $x \in H \leftrightarrow (x, e_k) \in l_2$ і $\sum_{n=1}^\infty |(x, e_n)|^2 < \infty$, тобто норма скінчена, співпадання норм очевидне. Теорему доведено.

§ 6. Ортогональні поліноми.

Розглянемо множину дійсних чисел $\Omega \in R$ і вимірний простір $(\Omega, \Re, \mu)$. Нехай міра задається рівністю: $\mu = \int_R |t|^n dt < \infty, \quad n \in N$. Тоді $t^n \in L_2(\Omega, d\mu), \forall n$. Одержуємо злічену систему $\{1, t, t^2, t^3, \ldots\} \subset L_2(\Omega, d\mu)$. Ортогоналізуючи цю систему отримаємо ортонормовану систему $\{e_k\}^\infty$, при чому $e_k = P_n(t)$- поліном степеня *n*. Одержану систему $\{P_n(t)\}_0^\infty$ називають ортогональною відносно міри μ. Розглянемо приклади ситем ортогональних поліномів.

1. $\Omega = [-1,1]$, $L_2([-1;1], d\mu)$, $\mu(A) = \int_A (1-t)^\alpha (1+t)^\beta dt$, $\alpha, \beta > -1$, $A \in \Re$.

Ортогоналізуючи систему $\{1, t, t^2, t^3, \ldots\}$, одержимо так звану ортогональну систему поліномів Якобі. Зокрема: а) якщо $\alpha = \beta = 0$, то $L_n(t) = C_n \frac{d^n}{dt^n}(t^2 - 1)^n$ - система поліномів Лежандра; б) якщо $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$, то $T_n = d_n \cos(n \cdot \arccos t)$ - поліноми Чебишева першого роду; в) якщо $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$, то $T_n(t) = \frac{K_n \sin((n+1)\arccos t)}{\sin(\arccos t)}$ - поліноми Чебишева другого роду.

2. Нехай $\Omega = R$. Простір $L_2(R, d\mu)$ і міра $\mu(A) = \int\limits_A e^{-t^2} dt, \quad A \in \Re$.

Внаслідок ортогоналізації приходимо до поліномів Ерміта

$$H_n(t) = C_n (-1)^n e^{t^2} \frac{d^n}{dt^n} e^{-t^2}.$$

3. Нехай $\Omega = [0, \infty)$. Простір $L_2([0, \infty), d\mu)$ і міра $\mu(A) = \int\limits_A e^{-t} dt$, де $A \in \Re$.

Ортогоналізуючи ситему, одержуємо: $L_n(t) = e^{-t} \frac{d^n}{dt^n}\left(e^t t^n\right)$ - поліноми Лаггера.

Частина III. Лінійні оператори та функціонали.

Розділ VI. Лінійні неперервні функціонали.

§ 1. Означення та властивості лінійного функціоналу.

Означення 1. Нехай E лінійний нормований простір над полем K з нормою $\|\bullet\|$. Відображення $E \ni x \to l(x) \in K$ або $l : E \to K$ називається *функціоналом.* Функціонал l називається *неперервним,* якщо відображення $l : E \to K$ - неперервне на E. Функціонал l називається *лінійним,* якщо $\forall \lambda, \mu \in K, \quad \forall x, y \in E : l(\lambda x + \mu y) = \lambda l(x) + \mu l(y)$. Лінійний функціонал називається *обмеженим,* якщо $\exists C > 0, \forall x \in E : |l(x)| \le C\|x\|$.

З лінійності функціонала l випливає $l(0) = 0$. Дійсно,

$$l(0) = l(0 \cdot x) = 0 \cdot l(x) = 0.$$

Властивості функціоналів. 1. Якщо лінійний функціонал неперервний в одній точці, то він неперервний всюди. Дійсно, припустимо, що лінійний функціонал неперервний в точці x_0. Нехай $x \ne x_0$ довільна точка. Візьмемо довільну послідовність $\{x_n\}_1^\infty$ таку, що $x_n \to x$ при $n \to \infty$. Тоді $x_n - x + x_0 \to x_0$. Так як функціонал неперервний, то $l(x_n - x + x_0) \to l(x_0)$. Лінійність функціоналу дає: $l(x_n) - l(x) + l(x_0) \to l(x_0)$. Звідси $l(x_n) \to l(x)$. А це і є неперервність в точці x.

2. Лінійний функціонал неперервний тоді і тільки тоді, коли він обмежений.

Достатність. Нехай $l(x)$- обмежений. Якщо $x_n \to 0$, то з $\exists C > 0 : |l(x_n)| \le C\|x_n\|$ випливає $l(x_n) \to 0$. $l(x)$-неперервний в точці 0, отже він неперервний скрізь.

Необхідність. Нехай $l(x)$-неперервний. Припустимо, що він необмежений. Тоді $\forall n\in N: \exists x_n \in E: |l(x_n)| > n\|x_n\|$. Покладемо $y_n = (n\|x_n\|)^{-1}\cdot x_n$. Тоді $\forall n\in N: |l(y_n)| > 1$, крім того $\|y_n\| = \dfrac{1}{n}$. Тому $y_n \to 0$ і, враховуючи неперервність функціоналу, одержимо $l(y_n) \to 0$. Прийшли до протиріччя. Отже, $l(x)$ обмежений.

Означення 2. Нормою лінійного неперервного функціоналу $l(x)$ називається число

$$\|l\| = \sup_{x\in E, x\neq 0}\frac{|l(x)|}{\|x\|} = \sup\{|l(x)| : x\in E; \|x\| = 1\}.$$

Норма лінійного функціоналу скінчена, причому $|l(x)| \le \|l\|\cdot\|x\|, \quad \forall x\in E$.

§ 2. Спряжений простір.

Розглянемо множину усіх лініних функціоналів на банаховому просторі *E*. Позначимо цю множину E'. E'- є *лінійним нормованим простором* і називається простором *спряженим* до *E*. Дійсно, мають місце рівності:

$$(l+m)(x) = l(x) + m(x), \quad (\lambda\cdot l)(x) = \lambda\cdot l(x), \quad \forall l, m\in E', \forall\lambda\in K.$$

Нулем простору E' є нульовий функціонал: $0(x) = 0$. Вводимо в E' норму за означенням 2. Перші дві аксіоми очевидні. Третя - випливає з нерівностей:

$$|(l+m)(x)| = |l(x) + m(x)| \le |l(x)| + |m(x)| \le (\|l\| + \|x\|)\|x\|.$$

Теорема 1. E'- банаховий простір.

Доведення. Нехай $\{l_n\}_1^\infty \in E'$ фундаментальна послідовність. Візьмемо довільний вектор $x\in E$. Тоді числова послідовність $\{l_n(x)\}_1^\infty$-фундаментальна. Дійсно, $|l_n(x) - l_m(x)| = |(l_n - l_m)(x)| \le \|l_n - l_m\|\cdot\|x\|$. Поле К повне, отже, при $\forall x\in E$ існує границя $\lim_{n\to\infty} l_n(x) = l(x)$. Функціонал l лінійний, бо лінійною є операція граничного переходу. Покажемо, що l – неперервний. Дійсно, з фундаментальності $\{l_n(x)\}_1^\infty$ випливає її обмеженість, тобто $\exists C > 0, \forall n: \|l_n\| \le C$. Тому $|l_n(x)| \le \|l_n\|\cdot\|x\| \le C\|x\|, \quad \forall x\in E, \forall n$. Перейдемо в останній рівності до границі при $n\to\infty$. Отримаємо: $|l(x)| \le \|l\|\cdot\|x\| \le C\|x\|, \quad \forall x\in E, \forall n$. Тобто l – неперервний. Залишилось перевірити, що $\|l_n - l\| \to 0, n\to\infty$. З фундаментальності послідовності $\{l_n(x)\}_1^\infty$ маємо: $\forall\varepsilon > 0, \exists N, \forall n, m > N: \|l_n - l_m\| < \varepsilon$. Отже $\forall x\in E: \quad |l_n(x) - l_m(x)| < \varepsilon\cdot\|x\|$. Переходячи до границі при $m\to\infty$, одержимо: $|l_n(x) - l(x)| < \varepsilon\cdot\|x\|$, що означає $\|l_n - l\| < \varepsilon$. Теорему доведено.

§ 3. Продовження лінійних функціоналів.

Нехай *E* банаховий простір. *G* – лінійна підмножина в *E*. *G* – лінійний нормований простір відносно тієї ж норми, що задана в *E*. Нехай на *G* задано лінійний функціонал *l*. Задача про продовження полягає в тому, щоб з’ясувати питання про існування такого лінійного неперервного функціоналу $L \in E'$, який називається продовженням функіоналу *l*, щоб на множині *G* він співпадав з функціоналом l . Зрозуміло, що при продовженні функціоналу, його норма може тільки збільшитися, тобто $\| l \| \le \| L \|$. Серед усіх продовжень важливу роль відіграють такі, що зберігають норму початкового функціоналу.

Розглянемо спочатку процедуру продовження функціоналу за неперервністю.

Теорема 2. Нехай *E* – лінійний нормований простір, *G* – лінійна підмножина скрізь щільна в *E*. Тоді для довільного лінійного неперервного функціоналу *l* на множині *G* існує єдиний лінійний неперервний функціонал $L \in E'$, такий, що $L\big|_G = l$. При цьому $\| l \| = \| L \|$.

Доведення. Оскільки $\overline{G} = E$, то $\forall x \in E,\ \ \exists \{g_n\}_1^\infty \subset G$ така, що $\lim\limits_{n\to\infty} g_n = x$, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} \| g_n - x \| = 0$. Покладемо $\lim\limits_{n\to\infty} l(g_n) = L(x)$. Ця границя існує, бо має місце оцінка: $|l(g_n) - l(g_m)| \le \| l \| \cdot \| g_n - g_m \|$, а послідовність $\{g_n\}_1^\infty \subset G$ - фундаментальна. Припустимо, що $\lim\limits_{n\to\infty} g_n = x = \lim\limits_{n\to\infty} g'_n$, тобто вектор *x* має різні представлення. Тоді $|l(g_n) - l(g'_n)| \le \| l \| \cdot \| g_n - g'_n \| \to 0, \quad n \to \infty$. Отже, $\lim\limits_{n\to\infty} g_n = \lim\limits_{n\to\infty} g'_n$. Це означає, що функціонал $L(x)$ визначений коректно. Якщо $x \in G$, то візьмемо $\{g_n = x\}_1^\infty$, тому $L(x) = \lim\limits_{n\to\infty} l(g_n) = l(x)$, тобто $L\big|_G = l$. Лінійність функціоналу $L(x)$ очевидна. Перевіримо збереження норми. Перейдемо в нерівності $|l(g_n)| \le \| l \| \cdot \| g_n \|$ до границі при $n \to \infty$. Одержимо $|L(x)| \le \| l \| \cdot \| x \|$, звідки $\| l \| \ge \| L \|$. Отже: $\| l \| = \| L \|$.

Нарешті, доведемо єдиність продовження. Нехай L_1 та L_2 - продовження функціоналу *l*. Нехай $\forall x \in E,\ \ \exists \{g_n\}_1^\infty \subset G$ така, що $\lim\limits_{n\to\infty} g_n = x$. Тоді з неперервності функціоналів L_1 та L_2 випливає: $L_1(x) = \lim\limits_{n\to\infty} L_1(g_n) = \lim\limits_{n\to\infty} l(g_n) =$ $= \lim\limits_{n\to\infty} L_2(g_n) = L(x)$, тобто $L_1 = L_2$. Теорему доведено.

Розглянемо більш складну ситуацію, коли функціонал визначений на підпросторі G , $\overline{G} \subset E$.

Теорема 3. (Хана-Банаха) Нехай *E* – сепарабельний банаховий простір, *G* – підпростір $\overline{G} \subset E$. Тоді для довільного лінійного неперервного функціоналу *l* на *G* існує єдиний лінійний неперервний функціонал $L \in E'$, такий, що $L\big|_G = l$. При цьому $\| l \| = \| L \|$.

Лема. Нехай E – сепарабельний банаховий простір, G – підпростір $\overline{G} \subset E$, $y \notin G$. Тоді $F = л.о.\{G, y\}$- підпростір в E, при чому довільна послідовність $\{x_n = g_n + \lambda_n y\} \in F$ збігається до $x = g + \lambda y \in F$ тоді і тільки тоді, коли $g_n \to g$ та $\lambda_n \to \lambda$.

Доведення. Зауважимо, що $\forall x \in F = л.о.\{G, y\}, \quad \exists g \in G, \quad \exists \lambda \in C^1$ такі, що $x = g + \lambda y$. Якщо це не так, тобто $\exists g' \in G, \quad \exists \lambda' \in C^1$ такі, що $x = g' + \lambda' y$, то матимемо рівність $x = g + \lambda y = g' + \lambda' y$, або $g - g' = (\lambda - \lambda')y$. Тут $g - g' \in G$, $(\lambda - \lambda')y \notin G$. Отже, $g = g'$, $\lambda = \lambda'$. Нехай тепер $\{x_n\}_1^\infty \subset F$ фундаментальна послідовність. Тоді

$$\|x_n - x_m\| = \|(g_n - g_m) + (\lambda_n - \lambda_m)y\| = |\lambda_n - \lambda_m| \cdot \left\| \frac{g_n - g_m}{\lambda_n - \lambda_m} + y \right\| \ge |\lambda_n - \lambda_m| \cdot \rho(y, G).$$

Так як $\rho(y, G) > 0$, а $\|x_n - x_m\| \to 0$, то $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda$. Залишилось показати, що послідовність $\{g_n\}_1^\infty$ - фундаментальна. Оскільки $g_n = x_n - \lambda_n y$, то $\|g_n - g_m\| = = \|(x_n - x_m) - (\lambda_n - \lambda_m)y\| \le \|x_n - x_m\| + |\lambda_n - \lambda_m| \cdot \|y\| \to 0, \quad m, n \to \infty$. Так як $G = \overline{G}$, то $\exists \lim\limits_{n\to\infty} g_n = g \in G$. Отже, $x_n = g_n + \lambda_n y \xrightarrow[n\to\infty]{} g + \lambda y = x \in F$.

Той факт, що з $x_n = g_n + \lambda_n y \xrightarrow[n\to\infty]{} g + \lambda y = x \in F$ випливає збіжність $g_n \to g$ та $\lambda_n \to \lambda$, є очевидним. Лему доведено.

Доведення теореми Хана Банаха. I етап. Нехай $l \in G'$. Покажемо, що $\forall y \notin G, \quad \exists L \in F'$такий, що $L|_G = l$. Для $x = g + \lambda y \in F$ покладемо $L(x) = l(g) + c\lambda, \quad c \in R$. Лінійність функціоналу $L(x)$ очевидна. Неперервність є наслідком леми і неперервності функціоналу *l*. Так як $\forall x \in G$, $\lambda = 0$, то $L|_G = l$. Підберемо $c \in R$, так, щоб виконувалась рівність $\|l\| = \|L\|$. Досить підібрати $c \in R$ так, щоб $\|l\| \ge \|L\|$, тобто $\forall g \in G, \quad \forall \lambda \in R$: $|L(g + \lambda y)| = |l(g) + c\lambda| \le \|l\| \cdot \|g + \lambda y\|$. Перепишемо цю нерівність інакше: $-l(g) - \|l\| \cdot \|g + \lambda y\| \le \lambda c \le -l(g) + \|l\| \cdot \|g + \lambda y\|$. Нехай $\lambda > 0$, візьмемо $h = \lambda^{-1} g$, тоді

$$-l(h) - \|l\| \cdot \|h + y\| \le c \le -l(h) + \|l\| \cdot \|h + y\| \tag{1}$$

Нехай $\forall h_1, h_2 \in G$, тоді має місце нерівність:

$$l(h_1) - l(h_2) \le |l(h_1 - h_2)| \le \|l\| \cdot \|h_1 - h_2\| \le \|l\| \cdot (\|h_1 + y\| + \|h_2 + y\|),$$

отже, $-\|l\| \cdot \|h_1 + y\| - l(h_1) \le \|l\| \cdot \|h_2 + y\| - l(h_2)$, тоді:

$$a_1 = \sup_{h_1 \in G}(-\|l\| \cdot \|h_1 + y\| - l(h_1)) \le \inf_{h_2 \in G}(-\|l\| \cdot \|h_2 + y\| - l(h_2)) = a_2.$$

Нарешті, $\exists c \in R: \quad a_1 \le c \le a_2$. Отже має місце нерівність (1).

2 етап. Нехай $A = \{x_1, x_2, \ldots\}$ - злічена скрізь щільна множина в банаховому просторі *E*. Припустимо, що $x_{n_1} \notin G$. Продовжимо функціонал *l* з

G на $G_1 = л.о.\{G, x_{n_1}\}$. Побудуємо функціонал l_1: $l_1|_G = l$, $\|l_1\| = \|l\|$. Нехай $x_{n_2} \notin G_1$. Продовжимо функціонал l_1 з G_1 на $G_2 = л.о.\{G_1, x_{n_2}\}$. Побудуємо функціонал l_2: $l_2|_G = l$, $\|l_2\| = \|l\|$.

Продовжуючи цю процедуру, одержимо послідовність підпросторів $G_1 \subset G_2 \subset \ldots$ і функціоналів $l_1, l_2, \ldots$, де $l_k \in G_k'$: $l_k|_G = l_{k-1}|_G = l$, $\|l_k\| = \|l\|$.

Розглянемо множину $M = \bigcup_1^\infty G_k$. Ця множина лінійна і $M \supset A$, тому $\overline{M} = E$.

Візьмемо $L_0 = l_n(x)$. $\forall x \in M$, $\exists n : x \in G_n$ і $L_0|_G = l$, $\|L_0\| = \|l\|$. Застосовуючи теорему 2, побудуємо продовження L функціоналу l, що задовольняє умовам теореми.

3 етап. Нехай E – комплексний банаховий простір. Будемо казати, що дійсний вектоний простір E_R, асоційований з простором E, якщо операція додавання в них співпадає, а множення на скаляр визначене в E тільки тоді, коли скаляр дійсний.

Нехай $l \in E'$, візьмемо $m(x) = \operatorname{Re} l(x)$, $n(x) = \operatorname{Im} l(x)$. Покажемо, що $m, n \in E_R'$. Маємо $\forall \alpha, \beta \in R$ та $\forall x, y \in E$:

$$m(\alpha x + \beta y) + in(\alpha x + \beta y) = l(\alpha x + \beta y) =$$
$$\alpha l(x) + \beta l(y) = \alpha m(x) + \beta m(y) + i(\alpha n(x) + \beta n(y)),$$

звідки випливає лінійність функціоналів $m, n \in E_R'$. Неперервність покажемо для одного з них: $|m(x)| \le |m(x) + in(x)| = |l(x)| \le \|l\| \cdot \|x\|$, $\forall x \in E$.

Відмітимо, що функціонали m та n пов'язані співідношеннями:

$$\forall x \in E \quad m(ix) = -n(x). \tag{2}$$

Дійсно, $\forall x \in E \quad m(ix) + in(ix) = l(ix) = il(x) = -n(x) + im(x)$.

Має місце і обернене твердження, тобто, якщо $m, n \in E_R'$ задовольняють умові (2), то $l = m + in \in E'$. В цьому неважко переконатись самостійно.

Нехай тепер E_R і G_R дійсні простори асоційовані з E і G. Застосовуючи вже доведену для дійсних просторів частину теореми Хана-Банаха, побудуємо продовження M функціоналу m з збереженням норми. Функціонал N визначимо рівністю $\forall x \in E \quad N(x) = -M(ix)$. Функціонал $L = M + iN$ задовольняє умові $L|_G = l$. Залишилось довести нерівність $\|l\| \ge \|L\|$. Для довільного $x \in E$ $\exists \alpha \in R$: $e^{i\alpha} L(x) = (L(x))$. Отже: $L(e^{i\alpha} x) = e^{i\alpha} L(x) \in R$. Звідси:

$$|L(x)| = L(e^{i\alpha} x) = M(e^{i\alpha} x) = |M(e^{i\alpha} x)| \le \|M\| \cdot \|(e^{i\alpha} x)\| = \|m\| \cdot \|x\| \le \|l\| \cdot \|x\|.$$

Теорему доведено.

Зауважимо, що теорема Хана-Банаха виконується і у випадку довільного (не обов'язково сепарабельного) простору. Доведення цієї частини теореми тут ми не наводимо.

§ 4. Наслідки з теореми Хана-Банаха.

Наслідок 1. Нехай E - лінійний нормований простір, G – його підпростір. Тоді $\forall y \notin G$**,** $\exists l \in E'$**:** $\|l\| = 1$ та $l(y) = \rho(y,G)$, $\quad l|_G = 0$.

Доведення. Визначимо на $F = л.о.\{G, y\}$ лінійний функціонал $l_0(g + \lambda y) = \lambda \rho(y,G)$, $\quad g \in G$, $\quad \lambda \in C$. Зрозуміло, що $l_0(y) = \rho(y,G)$, $\; l_0(g) = 0$. Знайдемо норму цього функціоналу.

$$\|l_0\| = \sup\left\{\frac{|l(g+\lambda y)|}{\|g+\lambda y\|}, g + \lambda y \in F\right\} = \sup\left\{\frac{|\lambda| \cdot \rho(y,G)}{|\lambda| \cdot \|\lambda^{-1} g + y\|}, g + \lambda y \in F\right\} =$$

$$= \rho(y,G) \sup\left\{\|g' - y\|^{-1}, g' \in G\right\} = 1.$$

За теоремою Хана-Банаха існує продовження функціоналу $l_0 \in F'$до $l \in E'$таке, що $\|l_0\| = \|l\| = 1$. Цей функціонал є шуканим.

Наслідок 2. Нехай E - лінійний нормований простір, $G = \{0\}$, то $\forall y \neq 0$**,** $\exists l \in E'$**:** $\|l\| = 1$ та $l(y) = \|y\|$.

Наслідок 3. Множина M є тотальною в просторі E тоді і тільки тоді, коли з того, що $\forall l \in E', \forall x \in M \;\; l(y) = 0$ випливає: $l \equiv 0$.

Доведення. Нехай M – тотальна і $\forall x \in M$**,** $l(x) = 0$. Так як $l \in E'$**-** лінійний, то $l(y) = 0$, $\;\forall y \in л.о.(M)$. Але $\overline{л.о.(M)} = E$, тому, продовжуючи функціонал, одержимо: $l \equiv 0$.

Нехай тепер з $\forall l \in E', \forall x \in M \quad l(y) = 0$ випливає: $l \equiv 0$, покажемо тотальність M. Припустимо, що це не так. Покладемо $\overline{л.о.(M)} = G \subset E$. Тоді $\exists y \in E \setminus G$. Згідно з наслідком 1, $\exists l \in E'$**:** $\|l\| = 1$ та $l(y) = \rho(y,G)$, $\quad l|_G = 0$. Це протирічить тому, що $l \equiv 0$.

Наслідок 4. $\forall l \in E'$ підпростір, що співпадає з ядром функціонала l, а саме: $\Gamma_0 = \ker l = \{x \in E : l(x) = 0\}$ є гіперпідпростором в E, тобто $\forall y \notin \Gamma_0$, $\quad л.о.(y, \Gamma_0) = E$.

Доведення. Нехай $\forall y \notin \Gamma_0$. Покажемо, що $\forall x \in E$, $\quad \exists g \in \Gamma_0$, $\quad \lambda \in C : x = g + \lambda y$. Нехай $\lambda = \dfrac{l(x)}{l(y)}$. Вектор $g = x - \lambda y \in \Gamma_0$. Дійсно: $l(g) = l(x) - \lambda l(y) = 0$.

Наслідок 5. Нехай $l \in E'$, $\; c \in C$**.** Множина $\Gamma_{l,c} = \{x \in E : l(x) = c\}$ називається гіперплощиною. Зрозуміло, що $\Gamma_{l,0} = \Gamma_0$. Для довільного $c \in C \; \exists я \in E : \Gamma_{l,c} = \Gamma_0 + z$.

Доведення. Дійсно, нехай z – фіксований вектор з $\Gamma_{l,c} = \{x \in E : l(x) = c\}$. Тоді $\forall x \in \Gamma_{l,c} : g = x - z \in \Gamma_0$, оскільки $l(g) = l(x) - l(z) = 0$.

Нехай $A \subset E$, $\; x_0$- гранична точка множини A. Гіперплощина $\Gamma_{l,c} = \{x \in E : l(x) = c\}$ називається опорною гіперплощиною, що проходить через точку x_0, якщо $x_0 \in \Gamma_{l,c}$ і множина A лежить по один бік від цієї гіперплощини, тобто $\forall y \in A,\quad l(y) \ge c$ або $\forall y \in A,\quad l(y) \le c$. Розглянемо в E кулю $B_r(0) = \{x \in E : \|x\| \le r\}$. Тоді для довільної точки x_0 сфери $S_r(0) = \{x \in E : \|x\| = r\}$ існує гіперплощина $\Gamma_{l,c}$, яка проходить через цю точку.

§ 5. Загальний вигляд лінійних функціоналів у просторах послідовностей.

Нехай E – банаховий простір над полем K і послідовність $\{x_n\}_1^\infty \in E$. Ряд $\sum_1^\infty x_k$ називається збіжним, якщо збігається послідовність $S_n = \sum_1^n x_k$. Елемент $S = \lim_{n\to\infty} S_n$ називається сумою ряду і $S = \sum_1^\infty x_k$.

Означення 3. Послідовність $\{e_1, e_2, \ldots\} \subset E$ називається базисом Шаудера в банаховому просторі E, якщо $\forall x \in E$ має місце представлення: $x = \sum_1^\infty x_k e_k,\quad x_k \in K$.

Якщо в банаховому просторі є базис Шаудера, то такий простір є сепарабельним. (Зауважимо, що існують простори які не мають базиса Шаудера).

Теорема 4. Нехай $E = l_p,\quad 1 \le p < \infty$. Послідовність

$$e_1 = (1,0\ldots), e_2 = (0,1,0\ldots), e_3 = (0,0,1,0\ldots),\ldots$$

є базисом Шаудера.

Доведення. Розглянемо $S_n = \sum_1^n x_k e_k,\quad x_k \in K$. Покажемо, що ця послідовність фундаментальна. Нехай $n > m$, тоді $\|S_n - S_m\|_p = \left\|\sum_1^n x_k e_k - \sum_1^m x_k e_k\right\|_p = = \left(\sum_{m+1}^n |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \to 0$, бо ряд $\sum_1^\infty |x_k|^p < \infty$ збігається. Отже, фундаментальність має місце. Враховуючи повноту простору $E = l_p$, знайдемо такий $x \in E$, що $x = \lim_{n\to\infty} S_n$. Дійсно, $\|x - S_n\|_p = \left\|x - \sum_1^n x_k e_k\right\|_p = \left(\sum_{n+1}^\infty |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, тобто $x = \lim_{n\to\infty} S_n = \sum_1^\infty x_k e_k$.

Теорему доведено.

Теорема 5. Нехай $\infty > p > 1$ і q такі, що $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Тоді $\forall g \in (l_p)'$ $\exists \{g_k\}_1^\infty \in l_q : \forall x \in l_p$

$$g(x) = \sum_1^\infty g_k x_k \tag{3}$$

і навпаки, $\forall\{g_k\}_1^\infty \in l_q$ формула (3) визначає функціонал $g \in (l_p)'$. При цьому $\|g\| = \left(\sum_1^\infty |g_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}$. Інакше кажучи, формула (3) встановлює ізоморфізм банахових просторів $(l_p)'$ та l_q, який зберігає норму.

Доведення. Розглянемо $g = \{g_k\}_1^\infty \in l_q$. Покажемо, що $g(x)$ - функціонал, що визначається за формулою (3) належить до $(l_p)'$. З нерівності Гельдера маємо: $|g(x)| \le \left(\sum_1^\infty |g_k|^q\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_1^\infty |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} = C\|x\|_p < +\infty$. Отже $g(x)$ - обмежений функціонал, при чому $\|g\| \le C$. Лінійність цього функціоналу очевидна, тобто, так як $g(x)$ довільний, можемо зробити висновок, що $l_q \subseteq (l_p)'$.

Навпаки, нехай $g \in (l_p)'$. Тоді

$$g(x) = g\left(\sum_1^\infty e_k x_k\right) = g\left(\lim_{n\to\infty}\sum_1^n e_k x_k\right) = \lim_{n\to\infty}\sum_1^n g(e_k)x_k = \sum_1^\infty g(e_k)x_k = \sum_1^\infty g_k x_k,$$

де $g_k = g(e_k) \in l_q$. Покажемо це. Нехай $y \in l_p$ такий, що

$$y = \left\{|g_1|^{q-1} e^{-i\arg g_1}, \ldots, |g_n|^{q-1} e^{-i\arg g_n}, 0, 0, \ldots\right\}$$

Тоді

$$g(y) = \sum_1^n g_k |g_k|^{q-1} e^{-i\arg g_k} = \sum_1^n |g_k|^q. \tag{4}$$

Враховуючи, що функціонал $g(x)$ - обмежений, одержимо: ($q = p(q-1)$)

$$|g(y)| \le \|g\| \cdot \|y\| = \|g\| \cdot \left(\sum_1^n \left||g_k|^{q-1} e^{-i\arg g_k}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|g\| \cdot \left(\sum_1^n |g_k|^q\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{5}$$

Порівнюючи (4) та (5), одержимо $\forall n \in N$

$$\left(\sum_1^n |g_k|^q\right)^{\frac{1}{q}} \le \|g\|.$$

Таким чином, $g_k = g(e_k) \in l_q$ і $C = \left(\sum_1^n |g_k|^q\right)^{\frac{1}{q}} \le \|g\|$. Так як $\|g\| \le C$, то $\|g\| = C$. Теорему доведено.

Теорема 6. Простір l_1 ізометрично ізоморфний простору l_∞, тобто має місце рівність $l_\infty = (l_1)'$. Цей ізоморфізм $(l_1)' \ni g \leftrightarrow \{g_k\}_1^\infty \in l_\infty$ для довільного $\forall x \in l_1$ встановлюється формулою (3).

Доведення. Нехай $g = \{g_k\}_1^\infty \in l_\infty$ з нормою $\|g\|_\infty = \sup\{|g_k|, \quad k \in N\}$. Тоді функціонал, що визначається за формулою (3), є лінійним. Покажемо, що він обмежений. Дійсно,

$$\left|g(x)\right| = \left|\sum_{1}^{\infty} g_k x_k\right| \leq \sup\{|g_k|, \quad k \in N\} \cdot \sum_{1}^{\infty} |x_k| = \|g\|_{\infty} \cdot \|x\|_1,$$

тобто функціонал $g(x)$ - обмежений і $\|g\| \leq \|g\|_{\infty}$. Отже, має місце включення $l_{\infty} \subseteq (l_1)'$. Навпаки, нехай $g \in (l_1)'$. Тоді

$$g(x) = g\left(\sum_{1}^{\infty} e_k x_k\right) = g\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{1}^{n} e_k x_k\right) = \lim_{n\to\infty}\sum_{1}^{n} g(e_k)x_k = \sum_{1}^{\infty} g(e_k)x_k = \sum_{1}^{\infty} g_k x_k,$$

де $g_k = g(e_k) \in l_{\infty}$. Це насправді так, бо $|g_k| = |g(e_k)| \leq \|g\| \cdot \|e_k\| = \|g\|$, що означає обмеженність послідовності g_k і справедливість нерівності $\|g\|_{\infty} = \sup\{|g_k|, \quad k \in N\} \leq \|g\|$.Отже, має місце включення $l_{\infty} \supseteq (l_1)'$. Таким чином доведено рівність $l_{\infty} = (l_1)'$. Теорему доведено.

Розглянемо простір l_{∞}. Можна довести, що $l_1 \subseteq (l_{\infty})'$, але $l_1 \neq (l_{\infty})'$.

Вправа. Довести справедливість включення $l_1 \subseteq (l_{\infty})'$.

Розглянемо приклад, що доводить нерівність $l_1 \neq (l_{\infty})'$. Побудуємо функціонал з $(l_{\infty})'$, що не може представлятись формулою (3) ні при якому $\{f_k\}_1^{\infty} \in l_1$. Нехай *S* лінійна множина, що складається із збіжних послідовностей комплексних чисел. Визначимо на *S* лінійний функціонал *f* за правилом: $\forall x \in S, \quad f(x) = \lim\limits_{k\to\infty} x_k$. Неважко переконатись, що це є обмежений функціонал, при чому $\|f\| \leq 1$. За теоремою Хана-Банаха цей функціонал продовжується на простір $(l_{\infty})'$ з збереженням норми до функіоналу *F*, який не можна представити формулою (3). Це так, бо сума в формулі (3) змінюється разом з зміною скінченої кількості доданків, а границя $f(x) = \lim\limits_{k\to\infty} x_k$ залишиться незмінною.

§ 6. Загальний вигляд лінійних функціоналів у функціональних просторах .

Теорема 7. Нехай $1 < p < \infty$ і *q* такі, що $p^{-1} + q^{-1} = 1$, $\langle R, \mathfrak{R}, d\mu \rangle$ - простір з σ-скінченою мірою. Тоді $\forall l \in (L_p(R, d\mu))'$ $\exists y(t) \in L_q(R, d\mu)$: $\forall x(t) \in L_p(R, d\mu)$

$$l(x) = \int_R y(\tau)x(\tau)d\mu(\tau) \qquad (6)$$

і навпаки, $\forall y(t)\in L_q(R,d\mu)$ формула (6) визначає функціонал $l\in\left(L_p(R,d\mu)\right)'$.

При цьому $\|l\|=\left(\int\limits_R |y(\tau)|^q d\mu(\tau)\right)^{\frac{1}{q}}$. Інакше кажучи, формула (6) встановлює ізоморфізм банахових просторів $\left(L_p(R,d\mu)\right)'$ та $L_q(R,d\mu)$, який зберігає норму.

Доведення. У випадку, коли $R=\{1,2,3,...\}$, $\mu(\{n\})=1$, тобто $L_p(R,d\mu)=l_p$, теорему доведено. Загальний випадок розглядати детально не будемо. Лиш доведем включення: $L_q(R,d\mu)\subseteq\left(L_p(R,d\mu)\right)'$. Нехай $x(t)\in L_p(R,d\mu)$, $y\in L_q(R,d\mu)$. Нерівність Гельдера дає $|l(x)|\le\int\limits_R |y(\tau)x(\tau)|d\mu(\tau)\le\|y(\tau)\|_q\cdot\|x\|_p$. Це означає, що функціонал вигляду (6) належить до простору $\left(L_p(R,d\mu)\right)'$, при чому $\|l\|\le\|y\|_q$. Доведення закінчено.

Теорема 8. Нехай $\langle R,\mathfrak{R},d\mu\rangle$ - простір з σ-скінченою мірою. Тоді $\forall l\in\left(L_1(R,d\mu)\right)'$ $\exists y(t)\in L_\infty(R,d\mu)$: $\forall x(t)\in L_1(R,d\mu)$ має місце формула (6) і навпаки, $\forall y(t)\in L_\infty(R,d\mu)$ формула (6) визначає функціонал $l\in\left(L_1(R,d\mu)\right)'$. При цьому $\|l\|=\|y\|_\infty=ess\sup\limits_{t\in R}|y(t)|$. Інакше кажучи, формула (6) встановлює ізоморфізм банахових просторів $\left(L_1(R,d\mu)\right)'$ та $L_\infty(R,d\mu)$, який зберігає норму.

Доведення. У випадку, коли $R=\{1,2,3,...\}$, $\mu(\{n\})=1$, тобто $L_1(R,d\mu)=l_1$, теорему доведено. Загальний випадок розглядати детально не будемо. Лише доведемо включення: $L_\infty(R,d\mu)\subseteq\left(L_1(R,d\mu)\right)'$. Нехай $x(t)\in L_1(R,d\mu)$, $y\in L_\infty(R,d\mu)$. Тоді $|l(x)|\le\int\limits_R |y(\tau)x(\tau)|d\mu(\tau)\le ess\sup\limits_{t\in R}|y(t)|\cdot\|x\|_p=\|y\|_q\cdot\|x\|_p$. Це означає, що функціонал вигляду (6) належить до простору $\left(L_1(R,d\mu)\right)'$, при чому $\|l\|\le\|y\|_\infty$. Доведення закінчено.

Неважко бачити, що для довільної функціїї з $x(t)\in L_1(R,d\mu)$ відповідає обмежений фукнкціонал з $\left(L_\infty(R,d\mu)\right)'$ вигляду (6).

Вправа. Довести, що $L_1(R,d\mu)\subseteq\left(L_\infty(R,d\mu)\right)'$.

Але $L_1(R,d\mu)\ne\left(L_\infty(R,d\mu)\right)'$, причому, $L_1(R,d\mu)\subset\left(L_\infty(R,d\mu)\right)'$, якщо тільки міра не зосереджена на скінченій кількості точок.

Нарешті розглянемо простір неперервних функцій на компакті $C(Q)$.

Теорема 9. Нехай $C(Q)$ простір функцій, що приймають дійсні значення. Простір $\left(C(Q)\right)'$ ізометрично ізоморфний простору регулярних зарядів $W(Q)$. При цьому ізоморфізм визначається формулою: $\forall x(t)\in C(Q)$ $\quad l(x)=\int\limits_R x(\tau)d\omega(\tau)$.

Доведення цієї теореми наводити не будемо, а розглянемо (також без доведення) ще один факт для простору $C([0,1])$.

Теорема 10. Для довільного функціоналу $l \in C([0,1])'$ існує така функція g обмеженої варіації, що функціонал l представляється за допомогою інтегралу Рімана-Стілтьєса:

$$\forall x(t) \in C([0,1]) :\ l(x) = \int_0^1 x(\tau) dg(\tau),$$

при чому $V_0^1(g) = \|l\|$.

§ 7. Лінійні неперервні функціонали у гільбертовому просторі.

Враховуючи теореми, що наведені вище, маємо рівності $l_2 = (l_2)'$ та $L_2(R, d\mu) = (L_2(R, d\mu))'$. Можна сказати, що гільбертові простори самоспряжені, тобто співпадають з просторами функціоналів, визначених на них. Для гільбертових просторів має місце загальний факт.

Теорема 11. (Рісса). Нехай H гільбертовий простір. Тоді $\forall\, l \in H'$ існує єдиний елемент $u \in H$ такий, що

$$\forall x \in H : l(x) = (x, u). \tag{7}$$

При чому, $\|l\| = \|u\|$. Навпаки, $\forall u \in H$ формула (7) визначає єдиний функціонал над простором *H*.

Доведення. З властивостей скалярного добутку випливає, що $\forall u \in H$ добуток (x, u) визначає лінійний функціонал. А з нерівності Коші-Буняковського випливає: $|(x,u)| = |l(x)| \le \|l\| \cdot \|x\| \Rightarrow \|l\| \le \|u\|$. Але при $x = u$ $\|u\|^2 \le \|l\| \cdot \|u\| \Rightarrow \|u\| \le \|l\|$, отже $\|u\| = \|l\|$.

Нехай тепер є довільний функціонал $l \in H'$. Покажемо, що його можна представити формулою (7). Покладемо $G = \{x \in H : l(x) = 0\}$. Це гіперпідпростір і $\dim G^{\perp} = 1$. Нехай $e \in G^{\perp}$, $\|e\| = 1$, тоді $\forall x \in H$ $x = g + \lambda e, g \in G, \lambda \in C$. Одержимо: $l(x) = l(g) + \lambda l(e) = \lambda l(e) = (x, e) l(x) = \left(x, \overline{l(e)} \cdot e\right)$. Поклавши $u = \overline{l(e)} \cdot e$, одержимо (7) і рівність $\|u\| = \|l\|$.

Залишилось довести єдиність *u*, що відповідає функціоналу *l*. Нехай є $v \in H$ такий, що $\forall x \in H : l(x) = (x, v)$, тоді $\forall x \in H : (x, u) = (x, v) \Rightarrow (x, (u - v)) = 0$, поклавши $x = u - v$, одержимо $\|u - v\| = 0 \Rightarrow u = v$. Теорему доведено.

§ 8. Другий спряжений простір. Рефлексивність.

Нехай E –банаховий простір. E'- спряжений до нього простір, або простір лінійних неперервних функціоналів над *E*. Так як E'-банаховий простір, то має сенс побудувати спряжений до нього простір, тобто другий спряжений до E. Позначатимемо $E'' = (E')'$. Має місце такий факт.

Теорема 12. $E \subseteq E''$, при чому $\forall x \in E : \|x\|_E = \|x\|_{E''}$.

Доведення. Введем позначення елементів просторів: E $x, y, \ldots$; $E' - l, m, \ldots$; $E'' - L, M, \ldots$. Визначимо відображення $E \ni x \xrightarrow{\varphi} L_x \in E''$, поклавши $L_x(l) = l(x)$. Перевіримо, що L_x є лінійний неперервний функціонал на E'. Дійсно: $\forall \lambda, \mu \in C$, $\forall l, m \in E'$ $L_x(\lambda l + \mu m) = (\lambda l + \mu m)(x) = \lambda l(x) + \mu m(x) = \lambda L_x(l) + {} + \mu L_x(m)$. Крім того: $|L_x(l)| = |l(x)| \le \|l\| \cdot \|x\|$. Отже L_x - неперервний і $\|L_x\| \le \|x\|$.

Покажемо, що відображення φ - лінійне. Дійсно $\forall \lambda, \mu \in C$, $\forall x, y \in E$,: $\forall l \in E'$ $L_{\lambda x + \mu y}(l) = l(\lambda x + \mu y) = \lambda l(x) + \mu l(y) = \lambda L_x(l) + \mu L_y(l) = (\lambda L_x + \mu L_y)(l)$.

Розглянемо ядро відображення $Ker\varphi = \{x \in E : L_x = 0\}$і доведем, що $Ker\varphi = 0$.Припустимо, що існує $x \in Ker\varphi : x \ne 0$. Тоді з наслідку 1 теореми Хана-Банаха $\exists l \in E' : \|l\| = 1, l(x) = \|x\|$. Тоді $L_x(l) = l(x) = \|x\| \ne 0$, тобто $L_x \ne 0$, а, отже, $x \notin Ker\varphi$.

Доведемо нарешті рівність $\forall x \in E : \|x\| = \|L_x\|$.

Ми вже показали, що $\|L_x\| \le \|x\|$. Припустимо, що $\exists x \in E : \|x\| > \|L_x\|$. Для цього вектора x $\exists l \in E' : \|l\| = 1, l(x) = \|x\|$. Тоді $|L_x(l)| = |l(x)| = \|x\|_E$, а з іншого боку $|L_x(l)| \le \|L_x\|_{E''} \|l\|_{E'} = \|L_x\|_{E''}$, тобто $\|x\|_E \le \|L_x\|_{E''}$. Це протирічить припущенню. Теорему доведено.

Означення 4. Банаховий простір називається рефлексивним, якщо $E = E''$.

Серед розглянутих прикладів просторів рефлексивними є $l_p, L_p(R, d\mu)$ при $p > 1$. Нерефлексивними є простори l_1, l_∞ , якщо міра не зосереджена на скінченій множині точок і множина Q є нескінченною, то нерефлексивними будуть і простори $L_1(R, d\mu), L_\infty(R, d\mu), C(Q)$.

§ 9. Теорема Банаха-Штейнгауза. Слабка збіжність.

Теорему, що зараз буде доведено, називають *принципом рівномірної обмеженості*. Вона відіграє важливу роль у функціональному аналізі.

Теорема 13. Нехай E –банаховий простір, $\{l_n, n \in N\}$ - послідовність функціоналів з E'. Якщо

$$\forall x \in E, \quad \exists C_x > 0 : \forall n \in N \quad |l_n(x)| \le C_x, \tag{8}$$

то норми функціоналів $\{l_n, n \in N\}$ ріномірно обмежені, тобто

$$\exists C > 0 : \forall n \in N \quad \|l_n\| \le C. \tag{9}$$

Доведення. Нехай послідовність $\{l_n\}_1^\infty$ задовольняє умові (8). Покажемо, що існує замкнена куля $\widetilde{B}_r(a)$, на елементах якої множина $\{l_n(x)\}_1^\infty$ є обмеженою.

Припустимо, що це не так, тобто множина $\{l_n(x)\}_1^\infty$ не є обмеженою ні в одній замкненій кулі, а, отже, ні в одній відкритій кулі. Візьмемо довільну кулю $B_{r_0}(x_0)$. Так як у відкритій кулі множина $\{l_n(x)\}_1^\infty$ не є обмеженою, то знайдуться такі $x_1 \in B_{r_0}(x_0)$ та $n_1 \in N$, для яких $\left|l_{n_1}(x)\right| > 1$. Враховуючи, що функціонал l_{n_1} неперервний, нерівність $\left|l_{n_1}(x)\right| > 1$ виконується в деякому околі точки x_1, тому вона буде виконуватись в деякій замкненій кулі $\widetilde{B}_{r_1}(x_1) \subset B_{r_0}(x_0)$. При цьому можна вважати, що $r_1 \le \frac{r_0}{2}$. Оскільки в кулі $B_{r_1}(x_1)$ множина $\{l_n(x)\}_1^\infty$ не є обмеженою, то знайдуться такі $x_2 \in B_{r_1}(x_1)$ та $n_2 > n_1$, що $\left|l_{n_2}(x)\right| > 2$. Враховуючи, що функціонал l_{n_2} неперервний, нерівність $\left|l_{n_2}(x)\right| > 2$ виконується в деякому околі точки x_2, тому вона буде виконуватись в деякій замкненій кулі $\widetilde{B}_{r_2}(x_2) \subset B_{r_1}(x_1)$. При цьому можна вважати, що $r_2 \le \frac{r_0}{2^2}$.
Продовжуючи цей
процес, одержимо послідовність $\widetilde{B}_{r_0}(x_0) \supset \widetilde{B}_{r_1}(x_1) \supset \widetilde{B}_{r_2}(x_2) \supset \ldots$ ($r_k \to 0$ при $k \to \infty$) і натуральні числа $n_1 > n_2 > \ldots$ такі, що $\left|l_{n_k}(x)\right| > k$ при $x \in \widetilde{B}_{r_k}(x_k)$.
Отже, існує точка x^*, що належить всім кулям (простір є повним метричним) $x^* = \lim\limits_{k\to\infty} x_k$. Тому $\left|l_{n_k}(x^*)\right| > k$ при всіх *k*, що протирічить умові (8). Отже існує куля $\widetilde{B}_r(a)$, на якій множина $\{l_n(x)\}_1^\infty$ обмежена:

$$\forall x \in \widetilde{B}_r(a), \quad \exists C' > 0 : \forall n \in N \quad \left|l_n(x)\right| \le C'. \tag{10}$$

Оскільки для довільного лінійного неперервного функціоналу $\|l\| = \sup\limits_{\|x\|\le 1}\{|l(x)|\}$, то для доведення теореми досить показати, що множина $\{l_n(x)\}_1^\infty$ є обмеженою на одиничній кулі $\widetilde{B}_1(0)$. Для довільного $x \in \widetilde{B}_1(0)$ покладемо $x' = rx + a$, тоді $x = \frac{1}{r}(x' - a)$. Зрозуміло, що $x' \in \widetilde{B}_r(a)$, тому $\forall n : \left|l_n(x')\right| < C'$.
Тоді маємо: $\left|l_n(x)\right| = \left|l_n\left(\frac{1}{r}(x' - a)\right)\right| = \frac{1}{r}\left|l_n(x') - l_n(a)\right| \le \frac{1}{r}\left(\left|l_n(x')\right| + \left|l_n(a)\right|\right)$.

Звідси, враховуючи (10) та (8) одержимо $\left|l_n(x)\right| \le \frac{1}{r}(C' + C_a) = C$, що й доводить обмеженість $\{l_n(x)\}_1^\infty$ на одиничній кулі $\widetilde{B}_1(0)$. Теорему доведено.

Означення 5. Нехай E – банаховий простір, $\{l_n\}_1^\infty$ - послідовність функціоналів з E'. Послідовність $\{l_n\}_1^\infty$ називається слабко збіжною до функціоналу $l\in E'$, якщо $\forall x\in E: l_n(x)\xrightarrow[n\to\infty]{} l(x)$. Позначається ця збіжність так: $l_n\xrightarrow{w} l$ або $l = w.\lim\limits_{n\to\infty} l_n$.

З теореми Банаха-Штейнгауза випливає, що слабко збіжна послідовність є рівномірно обмеженою, тобто, якщо $l_n\xrightarrow{w} l$, то $\exists C>0: \forall n\in N \quad \|l_n\|\le C$.

Таким чином в банховому просторі E є два типи збіжності: за нормою простору та слабка. З нерівності $|l_n(x)-l(x)|\le \|l_n-l\|\cdot\|x\|$ маємо, що із збіжності за нормою випливає слабка збіжність.

Приклад. Рорзглянемо простір l_2. Нехай $f_n=\left\{\underbrace{0,\dots,0}_{n-1},1,0\dots\right\}\in(l_2)'$, $n=1,2,\dots$ і нехай $x\in l_2$. Тоді $g(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty} g_k x_k$, де $\{g_k\}_{k=0}^\infty,\{x_k\}_{k=0}^\infty\in l_2$. Тому $f_n(x)=x_n\xrightarrow[n\to\infty]{}0$. Отже, $f_n\xrightarrow{w}0$. Але ця послідовність не є фундаментальною за нормою простору l_2. Дійсно, при $n\ne m$ $\|f_n-f_m\|=\sqrt{2}$, отже не прямує до нуля.

Цей приклад показує, що з слабкої збіжності послідовності функціоналів не випливає збіжність за нормою.

Теорема 14. (Критерій слабкої збіжності функціоналів). Нехай E – банаховий простір M множина всюди щільна в E. Для того щоб послідовність $\{l_n\}_1^\infty\subset E'$ слабко збігалась до функціоналу $l\in E'$, необхідно і достатньо, щоб виконувались наступні умови:

$$1)\,\forall x\in M: l_n(x)\xrightarrow[n\to\infty]{} l(x),\ \ 2)\,\exists C>0:\forall n\in N\quad \|l_n\|\le C.$$

Доведення. Необхідність очевидна. Для доведення достатності треба показати, що при виконанні умов теореми $\forall y\in E \quad \lim\limits_{n\to\infty} l_n(y)=l(y)$. Дійсно, якщо $x\in M$, то

$$|l_n(y)-l(y)|\le|l_n(y)-l_x(x)|+|l_n(x)-l(x)|+|l(x)-l(y)|\le$$
$$\le\|l_n\|\cdot\|x-y\|+|l_n(x)-l(x)|+\|l\|\cdot\|x-y\|\le(c+\|l\|)\cdot\|x-y\|+|l_n(x)-l(x)|. \tag{11}$$

Оскільки $\overline{M}=E$, то $\forall\varepsilon>0,\forall y\in E,\exists x\in M:\ \|x-y\|<\frac{\varepsilon}{2}(C+\|l\|)$. Згідно з умовою 1): $\forall\varepsilon>0,\exists N,\forall n>N:\ |l_n(x)-l(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$. Тоді з (11) знаходимо, що $\forall\varepsilon>0,\exists N,\forall n>N:\ |l_n(y)-l(y)|<\varepsilon$, тобто виконується $\forall y\in E\ \ \lim\limits_{n\to\infty} l_n(y)=l(y)$. Теорему доведено.

Означення 6. Нехай E – банаховий простір. Послідовність $\{x_n\}_1^\infty$ з E називається слабко збіжною до $x\in E$, якщо $\forall l\in E': l(x_n)\xrightarrow[n\to\infty]{} l(x)$. Позначається ця збіжність так: $x_n\xrightarrow{w} x$ або $x=w.\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Аналогічно тому, як це було для збіжності функціоналів з збіжності за нормою простору E випливає слабка збіжність. Обернене твердження не вірне.

Вправа. Навести приклад послідовності що збігається слабко, але не збігається за нормою.

Згадаємо, що $E \subseteq E''$. Можна показати, що слабка збіжність в просторі E еквівалентна слабкій збіжності послідовності функціоналів $L_{x_n} \xrightarrow{w} L_x$ в просторі E''. Отже, можна сформулювати критерій слабкої збіжності в E, спираючись на теорему 13.

Теорема 15. (Критерій слабкої збіжності). Нехай E –банаховий простір M тотальна підмножина в E'. Для того щоб послідовність $\{x_n\}_1^\infty$ з E слабко збігалась до $x \in E$, необхідно і достатньо, щоб виконувались наступні умови:

$$1)\forall l \in M : l(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} l(x),\ 2)\exists C > 0 : \forall n \in N \quad \|x_n\| \le C.$$

Доводиться ця теорема аналогічно теоремі 13, тому залишим її доведення у вигляді вправи.

Нарешті сформулюємо ще один факт, з якого випливає зв'язок слабкої збіжності та збіжності за нормою.

Теорема 16. Якщо $x_n \xrightarrow{w} x$, то існує послідовність скінчених лінійних комбінацій елементів послідовності $\{x_n\}_1^\infty$, що збігається за нормою.

Розділ VII. Лінійні оператори.

§ 1. Означення та приклади лінійних операторів

Означення 1. Нехай E_1 та E_2 банахові простори. Відображення $A : E_1 \to E_2$ називається лінійним оператором, якщо $\forall x, y \in E$ та $\forall \mu, \lambda \in K$ (числове поле) є справедливою рівність: $A(\lambda x + \mu y) = \lambda A(x) + \mu A(y)$, де $(\lambda x + \mu y) \in E_1$, а $\lambda A(x) + \mu A(y) \in E_2$.

Якщо відображення неперервне, то і оператор неперервний, тобто: $Ax_n \xrightarrow[n\to\infty]{} Ax$, при $\{x_n\} \xrightarrow[n\to\infty]{} x$.

Оператор A називається обмеженим, якщо $\exists\, C > 0$, така що $\|Ax\|_2 \le C \cdot \|x\|_1,\ \forall x \in E_1$.

З лінійності оператора A випливає $A(0) = 0$. Дійсно,

$$A(0) = A(0 \cdot x) = 0 \cdot A(x) = 0.$$

Аналогічно тому, як доводились властивості функціоналів, можна довести такі твердження.

1. Якщо лінійний оператор неперервний в одній точці, то він неперервний всюди. Дійсно, припустимо, що лінійний оператор неперервний в точці x_0. Нехай $x \ne x_0$ довільна точка. Візьмемо довільну послідовність

$\{x_n\}_1^\infty$ таку, що $x_n \to x$ при $n \to \infty$. Тоді $x_n - x + x_0 \to x_0$. Так як оператор неперервний, то $A(x_n - x + x_0) \to A(x_0)$. Лінійність оператора дає: $A(x_n) - A(x) + A(x_0) \to A(x_0)$. Звідси $A(x_n) \to A(x)$. А це і є неперервність в точці x.

2. Лінійний оператор неперервний тоді і тільки тоді, коли він обмежений.

Достатність. Нехай $A(x)$ $(A: E_1 \to E_2)$ - обмежений. Якщо $x_n \to 0$, то з $\exists C > 0 : \|Ax\|_2 \le C\|x_n\|_1$ випливає $A(x_n) \to 0$. $A(x)$-неперервний в точці 0, отже він неперервний скрізь.

Необхідність. Нехай $A(x)$-неперервний. Припустимо, що він необмежений. Тоді $\forall n \in N : \exists x_n \in E : \|Ax\|_2 > n\|x_n\|_1$. Покладемо $y_n = (n\|x_n\|)^{-1} \cdot x_n$. Тоді $\forall n \in N : \|Ay_n\|_2 > 1$, крім того $\|y_n\| = \dfrac{1}{n}$. Тому $y_n \to 0$ і, враховуючи неперервність оператора, одержимо $A(y_n) \to 0$. Прийшли до протиріччя. Отже, $A(x)$ обмежений.

Означення 2. Нормою оператора A називається

$$\|A\| = \sup\left\{\frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_1};\ x \in E_1\right\} \qquad \text{або} \qquad \|A\| = \sup\{\|Ax\|_2;\ x \in E_1, \|x\|_1 = 1\} \qquad \text{або}$$

$\|A\| = \inf\ C$ таких, що $\|Ax\|_2 \le C \cdot \|x\|_1$, $\forall x \in E_1$.

Приклади лінійних операторів. 1) Нехай $E_1 = E_2 = C^N$ - множина векторів з комплексними координатами, то $Ax = y \in C^N$ (A – матриця) лінійний оператор в C^N. Дійсно, нехай $x \in C^N$ та $\{e_1, \dots, e_N\}$- базис. Тоді $x = \sum_{k=1}^{N} x_k e_k$ і

$Ax = A\left(\sum_{k=1}^{N} x_k \cdot e_k\right) = \sum_{k=1}^{N} x_k \cdot (Ae_k) = \sum_{k=1}^{N} x_k \cdot v_k$, де $v_k = Ae_k = \sum_{j=1}^{N} (Ae_k)_j \cdot e_j$. Нарешті,

$Ax = \sum_{k=1}^{N} x_k \sum_{j=1}^{N} (Ae_k)_j \cdot e_j = \sum_{j=1}^{N}\left(\sum_{k=1}^{N} a_{kj} \cdot x_k\right) \cdot e_j$, де $a_{kj} = (Ae_k)_j$.

Нехай $\|x\|_1 = \max_k |x_k| = 1$, $\|A\| = \sup_{\|x\|=1}\{\|Ax\|_1\}$, отже:

$$\|A\| = \sup_{\|x=1\|}\left\{\left\|\sum_{j=1}^{N} a_{ij} \cdot x_j\right\|_1\right\} \le \sup\left\{\max_i \left|\sum_{j=1}^{N} a_{ij} \cdot x_j\right|\right\} \le \max_i \sum_{j=1}^{N} |a_{ij}|.$$

Отже $\|A\| \le \max_i \sum_{j=1}^{N} |a_{ij}| = C$. На ортонормованій системі $\{e_1, \dots, e_N\}$ рівність досягається. Отже $\|A\| = \max_i \sum_{j=1}^{N} |a_{ij}|$.

2). $E_1 = E_2 = C_{[a;b]}$ - простір неперервних функцій на відрізку $[a,b]$. Нехай $(Ax)(t) = \alpha(t)\cdot x(t),\ t\in[a,b],$ $\alpha(t)$ - деяка фіксована функція з $C_{[a;b]}$. Оператор лінійний, бо $A(\lambda x+\mu y)(t) = \alpha(t)(\lambda x(t)+\mu y(t)) = (\lambda Ax+\mu Ay)(t)$. Крім того,

$\|Ax\| = |\alpha(t)|\cdot|x(t)| \le \|\alpha\|\cdot\|x\|$, тобто A – обмежений.

3). У просторі l_2 визначимо лінійний оператор $A: l_2 \to l_2$ $Ax = A(\zeta_1,\zeta_2,\ldots,\zeta_n,\ldots) = (0,\zeta_1,\zeta_2,\ldots,\zeta_n,\ldots),\ \forall x = (\zeta_1,\zeta_2,\ldots,\zeta_n,\ldots)\in l_2$.

Вправа. Перевірити лінійність і обмеженість цього оператора.

4). У просторі $L_2([a;b],d\mu)$. Розглянемо інтегральний оператор, який має вигляд $(Ax)(t) = \int\limits_{[a;b]} k(t,s)\cdot x(s)d\mu(s)$, де $\int\limits_{[a;b]\times[a,b]} |k(t,s)|^2 d(\mu\times\mu)(t,s) < +\infty$.

Вправа. Перевірити лінійність і обмеженість цього оператора.

5). Розглянемо інтегральний оператор у просторі неперервних на відрізку $[a,b]$ функцій. $(Ax)(t) = \int\limits_{[a,b]} k(t,s)\cdot x(s)d\mu(s)$, де ядро інтегрального оператора $k(t,s)$-неперервна на $[a,b]\times[a,b]$ функція. Тоді, враховуючи, що на $C_{[a;b]}$ $\mu(t)=t$, оператор набере вигляду $(Ax)(t) = \int\limits_a^b k(t,s)\cdot x(s)ds$. Це лінійний оператор. Він є обмеженим. Дійсно:

$$\|Ax\| = \max_{t\in[a,b]}\left|\int\limits_a^b k(t,s)\cdot x(s)ds\right| \le \max_{t\in[a,b]}\int\limits_a^b |k(t,s)|\cdot|x(s)|ds$$
$$\le \max_{t\in[a,b]}\int\limits_a^b |k(t,s)|ds\cdot\max_{s\in[a,b]}|x(s)| = \max_{t\in[a,b]}\int\limits_a^b |k(t,s)|ds\cdot\|x\|.$$

Отже: $\|A\| \le \max\limits_{t\in[a,b]}\int\limits_a^b |k(t,s)|ds = C$. Згідно з теоремою Вейєрштрасса $\exists t_0\in[a,b]$ така, що $\int\limits_a^b |k(t_0,s)|ds = C$. Якщо $k(t_0,s)$ має незмінний знак на $[a,b]$, то поклавши $\tilde{x}(t)\equiv 1$, одержимо: $\|A\tilde{x}\| = C$, тобто $\|A\| = C$.

В попередніх прикладах були розглянуті обмежені оператори. Розглянемо приклад необмеженого оператора. Розглянемо $E_1 = C^1_{[a;b]}$; $E_2 = C_{[a;b]}$ з нормою $\|x\| = \max\limits_{[a;b]}|x(t)|$.

Тоді $(Ax)(t) = x'(t)$ діє з $E_1 = C^1_{[a;b]}$ в $E_2 = C_{[a;b]}$. Розглянемо послідовність функцій $x_n(t) = \sin(\pi n t)$ з E_1. Тоді $(Ax_n)(t) = \pi n\cos(\pi n t)$. $\|x_n\| = 1$, але $\|Ax_n\| = \pi n$ є необмеженою при зростанні *n*.

§ 2. Простір лінійних неперервних операторів.

Позначимо $L(E_1, E_2)$ - множину усіх лінійних неперервних операторів, що діють з E_1 в E_2. Якщо $E_1 = E_2 = E$, то $-L(E)$. Для довільних операторів A та B маємо: $(\lambda \cdot A + \mu \cdot B)(x) = \lambda(Ax) + \mu(Bx)$, $\|\lambda \cdot A\| = |\lambda| \cdot \|A\|$. Отже $L(E_1, E_2)$ є лінійним простором. Враховуючи означення 2, робимо висновок, що $L(E_1, E_2)$ - нормований простір. Має місце такий факт.

Теорема 1. (без доведення). Множина $L(E_1, E_2)$ є лінійним нормованим простором. Крім того, якщо E_2 - банаховий простір, то й $L(E_1, E_2)$ - банаховий.

Типи збіжності в $L(E_1, E_2)$.

Означення 3. Послідовність операторів $\{A_n\}_1^\infty$ називається збіжною за нормою простору $L(E_1, E_2)$, якщо $\|A_n - A\| \to 0,\ n \to \infty$. Збіжність за нормою називається рівномірною, бо $\|A_n - A\| = \sup\{\|(A_n - A)x\|_2, \|x\|_1 = 1\}$.

Означення 4. Послідовність операторів $\{A_n\}_1^\infty$ називається сильно (поточково) збіжною до оператора A і позначається $A_n \xrightarrow{s} A$, якщо $\forall x \in E_1 : \|A_n x - Ax\|_2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Друге позначення сильної збіжності $A = s.\lim\limits_{n\to\infty} A_n$.

Означення 5. Послідовність операторів $\{A_n\}_1^\infty$ називається слабко збіжною до оператора A і позначається $A_n \xrightarrow{w} A$, якщо $\forall x \in E_1 : A_n x \xrightarrow{w} Ax$ при $n \to \infty$. Друге позначення слабкої збіжності $A = w.\lim\limits_{n\to\infty} A_n$.

Залежність між даними типами збіжності така: 1) з рівномірної випливає сильна, але не навпаки; 2) з сильної випливає слабка, але не навпаки.

Розглянемо приклад послідовності, що збігається сильно, але не є збіжною за нормою. Нехай $E_1 = E_2 = l_2$. Розглянемо послідовність операторів $\{P_n\}_1^\infty$, які діють за законом $\forall x = \sum\limits_1^\infty \xi_k e_k$, ($x = (\xi_1, \xi_2, \ldots)$, $\xi_k = (x, e_k)$, $\{e_n\}_1^\infty$ - ортонормований базис в l_2) $P_n x = \sum\limits_1^n (x, e_k) e_k$. Кожний з опрераторів $\{P_n\}_1^\infty$ є лінійним. З нерівності Беселя випливає $\|P_n x\| \le \|x\|$, тобто P_n обмежений. Нарешті, при $n \ne m$, то $\|P_n - P_m\| = 1$, тобто послідовність $\{P_n\}_1^\infty$ не є фундаментальною, отже не є збіжною за нормою. Але $\forall x \in l_2$ $\|P_n x - x\| = \left(\sum\limits_{k=n+1}^\infty |x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \xrightarrow{n\to\infty} 0$, тобто послідовність $\{P_n\}_1^\infty$ збігається сильно.

Узагальнення теореми Банаха-Штейнгауза.

Теорема 3. (без доведення). Якщо E_1, E_2 - банахові простори, і послідовність операторів $\{A_n\} \in L(E_1, E_2)$ обмежена в довільній точці, тобто $\forall x\ \exists C_x$, що $\forall n$ справедлива нерівність $\|A_n x\| \le C_x \cdot \|x\|$; то з цієї поточкової обмеженность випливає повна неперервність, тобто $\forall x, n\ \exists \forall C > 0$, що $\|A_n x\| \le C \cdot \|x\|$.

Теорема 4. (без доведення). Якщо E_1, E_2 - банахові простори, тоді простір $L(E_1, E_2)$ є повним відносно сильної збіжності операторів.

§ 3. Добуток операторів. Обернений оператор.

Нехай $A: E_1 \to E_2$, $B: E_2 \to E_3$, E_1, E_2, E_3 - банахові простори, A та B лінійні оператори, тоді добуток оператора A на B визначається правилом:

$$(BA)(x) = B(Ax).$$

При цьому одержимо також лінійний оператор. Якщо оператори A та B обмежені, то і добуток також буде обмеженим , дійсно:

$$\|(BA)x\|_3 = \|B(Ax)\|_3 \le \|B\| \cdot \|Ax\|_2 \le \|B\| \cdot \|A\| \cdot \|x\|_1.$$

Отже, $\|BA\| \le \|B\| \cdot \|A\|$.

Приклад. 1) Нехай $E_1 = E_2 = C^N$ - множина векторів з комплексними координатами і A та B лінійні оператори з матрицями $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^N$, $B = \{b_{ij}\}_{i,j=1}^N$. Тоді добуток операторів A та B визначається через добуток їхніх матриць.

2) Нехай $A_1 : C([a,b]) \to C([a,b])$, $A_2 : C([a,b]) \to C([a,b])$ є інтегральні оператори $(A_1 x)(t) = \int\limits_{[a,b]} k_1(t,s) \cdot x(s)ds$ і $(A_2 x)(t) = \int\limits_{[a,b]} k_2(t,s) \cdot x(s)ds$, тоді їхній добуток дорівнює:

$$(A_1 A_2 x)(t) = A_1(A_2 x)(t) = \int\limits_{[a,b]} k_1(t,s) \cdot (A_2 x)(s)ds = \int\limits_{[a,b]} k_1(t,s)\left(\int\limits_{[a,b]} k_2(s,\tau) \cdot x(\tau)d\tau\right)ds =$$

$$= \iint\limits_{[a,b]\times[a,b]} (k_1(t,s) \cdot k_2(s,\tau)ds) \cdot x(t)d\tau = \int\limits_{[a,b]} k(t,\tau) \cdot x(t)d\tau, \quad \text{де } k(t,\tau) = \int\limits_{[a,b]} k_1(t,s) \cdot k_2(s,\tau)ds.$$

Означення 6. Нехай $A \in L(E_1, E_2)$ такий, що $\ker A = \{x \in E_1 : Ax = 0\} = \{0\}$, то оператор $A^{-1} : R(A) \to E_1$ називається алгебраїчним оберненим до A і має місце рівність $A^{-1}A = I$, де I – одиничний оператор ($I\,x = x$).

Приклади. 1) Якщо матриця, що відповідає деякому лінійному оператору A в просторі C^N, має ненульовий детермінант, то вона має обернену матрицю, що породжує оператор обернений до A.

2) Нехай $A \in L(C(0,1))$ діє за правилом $(Ax)(t) = \int\limits_0^t x(s)ds$, $\quad t \in [0,1]$. Область значень цього опратора є $R(A) = \{x \in C^1[0,1] : x(0) = 0\}$. При цьоме легко бачити , що має місце $\ker A = \{x \in E_1 : Ax = 0\} = \{0\}$. Отже алгебраїчний обернений існує і на функцію $y \in R(A)$ діє за правилом $(A^{-1}y)(t) = y'(t), t \in [0,1]$.

Означення 7. Оператор A^{-1} називається оберненим до оператора $A \in L(E_1, E_2)$, якщо виконуються умови 1) $R(A) = E_2$, 2) A^{-1} є алгебраїчним оберненим, 3) A^{-1} неперервно діє з E_2 в E_1.

Теорема 5. Оператор $A \in L(E_1, E_2)$ такий, що $R(A) = E_2$ має обернений тоді і тільки тоді, коли $\exists m > 0, \forall x \in E_1 : \|Ax\|_2 \geq m\|x\|_1$.

Доведення цієї теореми залишимо як вправу, для самостійного розгляду.

Теорема 6. (без доведення). Якщо оператор $A \in L(E_1, E_2)$ бієктивно відображає E_1 у E_2, то він має обернений.

Теорема 7. Оператор $A \in L(E)$ такий, що $\|A\| = q < 1$, то оператор $I - A$ має обернений і виконується рівність:

$$(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + \ldots, \tag{1}$$

де ряд збігається рівномірно.

Доведення. Розглянемо послідовність частинних сум ряду, що стоїть в правій частині (1) і доведемо, що вона фундаментальна. Дійсно, $\forall n, p \in N$ $\|S_{n+p} - S_n\| \leq \|A^{n+1}\| + \ldots + \|A^{n+p}\| \leq q^{n+1} + \ldots q^{n+p}$, звідки випливає потрібне. Оскільки $L(E)$- банаховий простір, то послідовність $\{S_n\}_1^\infty$ збігається до деякого оператора $S \in L(E)$. Покажемо, що $S(I - A) = (I - A)S = I$. Враховуючи, що $\|(I - A)S_n - (I - A)S\| \leq \|I - A\| \cdot \|S_n - S\| \to 0, n \to \infty$, одержимо:

$$(I - A)S_n = S_n(I - A) = I + A + A^2 + \ldots + A^n - A - \ldots - A^{n+1} = I - A^{n+1}.$$

Отже, $\|(I - A)S_n - I\| = \|A^{n+1}\| \leq q^{n+1}$. Ця величина прямує до нуля при $n \to \infty$. Таким чином, $(I - A)^{-1} = S$. Теорему доведено.

§ 4. Спряжений оператор.

Означення 8. Нехай $A \in L(E_1, E_2)$. Оператор A^* що діє з E_2' в E_1' за правилом

$$(A^*l)(x) = l(Ax), l \in E_2', x \in E_1 \tag{2}$$

називається спряженим до оператора *A*.

Це означення є коректним, тобто співідношення (2) однозначно визначає лінійний оператор $A^* \in L(E_2', E_1')$. Дійсно, нехай $\exists l \in E_2'$, якому відповідають два різних функціонали $m_1, m_2 \in E_1'$. Так як $m_1 \neq m_2$, то $\exists x \in E_1$ такий, що $m_1(x) \neq m_2(x)$. Але за означенням $\forall x \in E_1 : (A^*l)(x) = m_1(x) = l(Ax)$ і $(A^*l)(x) = m_2(x) = l(Ax)$. Отже, єдиність доведено. Перевіримо лінінйність. Нехай $\lambda, \mu \in K, l, m \in E_2', x \in E_1$, тоді

$$(A^*(\lambda l + \mu m))(x) = (\lambda l + \mu m)(Ax) = \lambda l(Ax) + \mu m(Ax) = \lambda(A^*l)(x) + \mu(A^*m)(x).$$

Для норми спряженого оператора має місце рівність $\|A^*\| = \|A\|$. Дійсно: $\forall l \in E_2', \forall x \in E_1 : |(A^*l)(x)| \leq \|l\| \cdot \|A\| \cdot \|x\|_1$. Звідси маємо $\|A^*l\| \leq \|l\| \cdot \|A\|$, тобто спряжений оператор є обмеженим $\|A^*\| \leq \|A\|$. Нехай тепер $x \in E_1$ і $Ax = y$. Згідно з теоремою Хана-Банаха $\exists l \in E_2'$ такий, що $\|l\| = 1, l(y) = \|y\|$. Тоді

$l(Ax)=\|Ax\|$ і при цьому $\|Ax\|=\left|\left(A^{*}l\right)(x)\right|\leq\|l\|\cdot\left\|A^{*}\right\|\cdot\|x\|_{1}=\left\|A^{*}\right\|\cdot\|x\|_{1}$. Отже, $\|A\|\leq\left\|A^{*}\right\|$. Таким чином довели, що $\left\|A^{*}\right\|=\|A\|$.

Приклади. 1). Нехай $E_1=E_2=R^N$. $A\in L\left(R^N\right)$ і $A=\left\{a_{ij}\right\}_{i,j=1}^{N}$ – матриця, оператора A. Нехай $l\in\left(R^N\right)'$ отже, $l(x)=\sum_{k=1}^{N}x_k l_k,\ \{l_1,...,l_N\}\in R^N$. Тоді $l(Ax)=\sum_{j=1}^{N}\left(\sum_{k=1}^{N}a_{j_k}\cdot x_k\right)\cdot l_j=\sum_{k=1}^{N}x_k\left(\sum_{j=1}^{N}a_{j_k}\cdot l_j\right)=m(x)$, тобто функціонал $m=A^{*}l$ визначається вектором з координатами $\left(\sum_{j=1}^{N}a_{j_1}\cdot l_j,...,\sum_{j=1}^{N}a_{j_N}\cdot l_j\right)$. Отже, спряженому оператору A^{*} відповідає матриця $A'=\left\{a_{ji}\right\}_{i,j=1}^{N}$.

2). У просторі $L_p(X,d\mu)$, $p>1$ Розглянемо інтегральний оператор, який має вигляд $(Ax)(t)=\int_X k(t,s)\cdot x(s)d\mu(s)$. Нехай $l\in L'_p(X,d\mu)$, $p>1$, тоді $l(Ax)=\int_X\left(\int_X k(t,s)\cdot x(s)d\mu(s)\right)h(t)d\mu(t)$, де $h(t)\in L_q(X,d\mu)$, $p^{-1}+q^{-1}=1$. Змінюючи порядок інтегрування одержемо:

$$l(Ax)=\int_X\left(\int_X k(s,t)\cdot h(t)d\mu(t)\right)x(s)d\mu(s)=m(x).$$

Отже, A^{*} - інтегральний оператор в просторі $L_q(X,d\mu)$, з ядром $K^{*}(t,s)=k(s,t)$.

Нехай H_1,H_2 гільбертові простори. Зрозуміло, що $H_1=H'_1, H_2=H'_2$. Нехай $A\in L(H_1,H_2)$, тоді $A^{*}\in L(H_2,H_1)$. Враховуючи загальний вигляд лінійного функціоналу у гільбертовому просторі, одержимо $\left(A^{*}l\right)(x)=\left(x,A^{*}l\right)_1=l(Ax)=(Ax,l)_2$. Цю рівність

$$\left(x,A^{*}l\right)_1=(Ax,l)_2 \tag{3}$$

приймають за означення спряженого оператора в гільбертовому просторі.

Теорема 8. Нехай $A\in L(E_1,E_2)$, $B\in L(E_2,E_3)$, тоді $(BA)^{*}=A^{*}B^{*}$.

Доведення. Нехай $\forall l\in E'_3, \forall x\in E_1$, тоді матимемо:

$$\left((BA)^{*}l\right)(x)=l(BAx)=l(B(Ax))=\left(B^{*}l\right)(Ax).$$

Позначимо $m=B^{*}l\in E'_2$, тоді $m(Ax)=\left(A^{*}m\right)(x)$. Таким чином: $\left((BA)^{*}l\right)(x)=\left(A^{*}B^{*}l\right)(x)$. Теорему доведено.

Теорема 9. Нехай $A\in L(E_1,E_2)$, простори E_1,E_2 - банахові рефлексивні, тоді $\left(A^{*}\right)^{*}=A$.

Доведення цієї теореми залишимо як впарву для самостійного розгляду.

Зауважимо, що у випадку гільбертових просторів воно стає зовсім простим. Дійсно, згідно з (3) матимемо: $\left(A^{*}y,x\right)_1=\left(y,\left(A^{*}\right)^{*}x\right)_2$, з іншого боку $\left(A^{*}y,x\right)_1=\overline{\left(x,A^{*}y\right)}_1=\overline{\left(Ax,y\right)}_1=\left(y,Ax\right)_1$. Таким чином, $\forall x\in H_1, \forall y\in H_2$ одержимо рівність $\left(y,\left(A^{*}\right)^{*}x\right)_2=\left(y,Ax\right)_1$, що означає $\left(A^{*}\right)^{*}=A$.

§ 5. Лінійні оператори в гільбертовому просторі.

Означення 9. Нехай H гільбертовий простір. Функція $H\times H\ni\langle x,y\rangle\to b(x,y)\in C$ називається білінійною формою, якщо вона лінійна відносно першої змінної та антилінійна відносно другої змінної.

Будемо позначати $b_A(x,y)=(Ax,y)$ білінійну форму породжувану оператором A, $A\in L(H)$.

Білінійна форма називається ермітовою, якщо $b(x,y)=\overline{b(y,x)},\quad \forall x,y\in H$.

Значення білінійної форми при $x=y$ називається квадратичною формою. Білінійна форма називається обмеженою, якщо $\exists C>0$ така, що

$$\forall x,y\in H: |b(x,y)|\le C\|x\|\cdot\|y\|.$$

Теорема 10. Для довільної білінійної форми існує єдиний обмежений лінінйний оператор A такий, що $b(x,y)=b_A(x,y)=(Ax,y)$.

При фіксованому $x\in H$ $\overline{b(x,y)}=f(y)$ є обмеженим лінійним функціоналом на H, тоді за теоремою Рісса існує єдиний вектор $a_x\in H$ такий, що $\overline{b(x,y)}=f(y)=(y,a_x)$, тобто $b(x,y)=(a_x,y)$. Таким чином, визначено відповідність $H\ni x\to a_x\in H$. Покладемо $a_x=Ax$. Покажемо, що $A:H\to H$ лінійний неперервний оператор. Але ці властивості оператора випливають з властивостей білінійної форми $b(x,y)$. Теорему доведено.

Означення 10. Оператор $A\in L(H)$ називається самоспряженим, якщо $A=A^{*}$, тобто $(Ax,y)=(x,Ay),\quad \forall x,y\in H$.

Теорема 11. (без доведення). $\forall A\in L(H)$ єдиним чином представляється у вигляді $A=\operatorname{Re}A+i\operatorname{Im}A$, де $\operatorname{Re}A,\operatorname{Im}A$ - самоспряжені оператори такі, що $\operatorname{Re}A=\frac{1}{2}\left(A+A^{*}\right)$, $\operatorname{Im}A=\frac{1}{2i}\left(A-A^{*}\right)$.

Теорема 12. Наступні твердження еквівалентні:

1) $A\in L(H)$, $A=A^{*}$;
2) $b_A(x,y)$ - породжується ермітовим оператором;
3) $b_A(x,x)$ - приймає дійсні значення.

Доведення. 1) $\leftrightarrow$2). Нехай $A=A^{*}$, тоді

$$\forall x,y\in H\ b_A(x,y)=(Ax,y)=(x,Ay)=\overline{(Ax,y)}=\overline{b_A(x,y)},$$

тобто оператор A є ермітовим. Легко бачити, що обернене твердження є очевидним.

2) $\leftrightarrow$3). Зрозуміло, якщо $b_A(x,y)=\overline{b_A(x,y)}$, то $b_A(x,x)$ - дійсне число. Нехай $b_A(x,x)\in R$, то

$$4b_A(x,y)=b_A(y+x,y+x)-b_A(y-x,y-x)+ib_A(y+ix,y+ix)-ib_A(y-ix,y-ix)=$$
$$=b_A(x+y,x+y)-b_A(x-y,x-y)+ib_A(x-iy,x-iy)-ib_A(x+iy,x+iy)=4\overline{b(y,x)}.$$

Теорему доведено.

Означення 11. Оператор $A\in L(H)$ називається невід'ємним, якщо породжувана ним квадратична форма є невід'ємною, тобто $b_A(x,x)=(Ax,x)\geq 0$. Тоді пишуть $A\geq 0$. Якщо $A-B\geq 0$, то пишуть $A\geq B$. Оператор $A\in L(H)$ називається додатним $A>0$, якщо $b_A(x,x)=(Ax,x)>0$. Оператор $A\in L(H)$ називається напівобмеженим знизу числом C, якщо $\forall x\in H: b_A(x,x)\geq C\|x\|^2$. Самоспряжений оператор обмежений знизу числом $-\|A\|$, а згори - $\|A\|$.

Означення 12. Нехай H гільбертовий простір. $G\subset H$ - підпростір, $G^{\perp}$ - ортогональне доповнення. Оператор P_G, що діє за правилом: $\forall x\in H: P_G x = np_G x$, називається проекційним оператором або проектором..

Якщо $\{e_i\}_1^{\infty}$ - ортонормований базис в $G\subset H$, то $P_G=\sum\limits_{k\geq 1}(x,e_k)\cdot e_k$.

Теорема 13. (без доведення). Нехай H гільбертовий простір. $G\subset H$ - підпростір. Проектор P_G має такі властивості:

1) $P_G\in L(H)$ та, якщо $G\neq\{0\}$, то $\|P_G\|=1$;

2) P_G - ідемпотентний оператор, тобто $P_G^2=P_G$;

3) P_G - невід'ємний оператор.

Означення 13. Оператор $A\in L(H)$ називається нормальним, якщо $A^*A=AA^*$.

Різницю $[A,B]=AB-BA$ - називають комутатором операторів A та B.

Теорема 14. (без доведення). Оператор $A\in L(H)$ нормальний тоді і тільки тоді, коли $[\operatorname{Re}A,\operatorname{Im}A]=0$.

Означення 14. Оператор $U\in L(H)$ називається унітарним, якщо:

1) U – зберігає скалярний добуток, тобто $(Ux,Uy)=(x,y),\quad \forall x,y\in H$;

2) $R(U)=H$.

Зауважимо, що $\|Ux\|=\|x\|\Rightarrow\|U\|=1$. Неважко переконатися, що $\exists U^{-1}$ і $U^{-1}=U^*$.

Означення 15. Нехай $V:H_1\to H_2$ лінійний обмежений оператор. Якщо $(Vx,Vy)_2=(x,y)_1,\quad \forall x,y\in H_1$, то оператор називається ізометричним. При чому $\|Vx\|_2=\|x\|_1$.

Зауважимо, щ для ізометричного оператора не обов'язково $R(V)=H_2$.

§ 6. Матричне представлення лінійних операторів у гільбертовому просторі.

Нехай H – сепарабельний гільбертовий простір, $\{e_k\}_1^\infty$ - ортонормований базис, $A\in L(H)$. Візьмемо довільний $x\in H$, тоді $x=\sum\limits_{k=1}^{\infty}(x,e_k)\cdot e_k$ і $Ax=\sum\limits_{k=1}^{\infty}(x,e_k)\cdot Ae_k=\sum\limits_{k=1}^{\infty}x_k\cdot Ae_k$. Тоді для довільного j: $(Ax,e_j)=\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty}x_k Ae_k,e_j\right)=$ $=\sum\limits_{k=1}^{\infty}x_k(Ae_k,e_j)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_{jk}x_k$, де $a_{jk}=(Ae_k,e_j)$.

Таким чином, як і в скінченновимірному випадку дія оператора задається нескінченою матрицею $(a_{jk})_{j,k=1}^{\infty}$. Точніше кажучи, елементи матриці $(a_{jk})_{j,k=1}^{\infty}$ та базис $\{e_k\}_1^\infty$ дають змогу визначити дію оператора A на довільному $x\in H$. Отже, ми одержали матричне представлення оператора A в гільбертовому просторі H. З наведених міркувань випливає, що кожний оператор допускає матричне представлення. Але не кожній нескінченій матриці відповідає обмежений лінійний оператор.

Теорема 15. Кожна матриця $(a_{jk})_{j,k=1}^{\infty}$, що задовольняє умові $\sum\limits_{j,k=1}^{\infty}|a_{jk}|^2<\infty$, визначає лінійний обмежений оператор.

Доведення. З нерівності Коші-Буняковського маємо $\forall x\in H$

$$\left|(Ax,e_j)\right|^2=\left|\sum_{k=1}^{\infty}a_{jk}x_k\right|^2\le\|x_k\|^2\sum_{k=1}^{\infty}|a_{jk}|^2,\ \forall j\in N.$$

Склавши всі доданки по змінній j, одержимо

$$\|Ax\|^2=\sum_{j=1}^{\infty}\left|(Ax,e_j)\right|^2\le\|x_k\|^2\sum_{k,j=1}^{\infty}|a_{jk}|^2.$$

Таким чином $A\in L(H)$ і $\|A\|\le\left(\sum\limits_{k,j=1}^{\infty}|a_{jk}|^2\right)^{\frac{1}{2}}$. Теорему доведено.

Якщо оператор $A\in L(H)$ самоспряжений $A=A^*$, то

$$a_{jk}=(Ae_k,e_j)=(e_k,Ae_j)=\overline{(Ae_j,e_k)}=\overline{a_{jk}},$$

тобто матриця $(a_{jk})_{j,k=1}^{\infty}$ - ермітова. Вірним є і обернене. Нехай $(a_{jk})_{j,k=1}^{\infty}$ - ермітова, тоді $\forall x,y\in H$:

$$(Ax,y)=\sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}a_{jk}x_k\right)\bar{y}_j=\sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\bar{a}_{jk}x_k\right)\bar{y}_j=\sum_{k=1}^{\infty}x_k\left(\sum_{j=1}^{\infty}\bar{a}_{jk}\bar{y}_j\right)=(x,Ay).$$

Якщо оператор $A\in L(H)$ невід'ємний $A=A^*\ge0$, то $\sum\limits_{j,k=1}^{\infty}a_{jk}x_k\bar{x}_j\ge0$, тобто матриця $(a_{jk})_{j,k=1}^{\infty}$ є додатньо визначеною. Згідно з критерієм Сільвестра оператор $A\in L(H)$ буде невід'ємним тоді і тільки тоді, коли всі головні мінори матриці $(a_{jk})_{j,k=1}^{\infty}$ - невід'ємні.

Якщо оператор P_G - ортопроектор на підпростір $G\subset H$, а $(p_{jk})_{j,k=1}^{\infty}$ матриця, що йому відповідає, то ця матриця є ермітовою. А з властивочті ідемпотентності випливає, що $p_{jk}=\sum_{i=1}^{\infty}p_{ji}p_{ik}$. Отже, щоб матриця породжувала ортопроектор вона повинна бути ермітовою і задовольняти наведеній умові.

Означення 16. Матриця $(a_{jk})_{j,k=1}^{\infty}$ називається Якобієвою, якщо $a_{jk}=0$ при $|j-k|>1$. Така матриця носить також назву трьохдіагональної.

Теорема 16. Якобієва матриця породжує обмежений оператор тоді і тільки тоді, коли її елементи рівномірно обмежені.

Доведення. Необхідність очевидна. Дійсно, нехай $A\in L(H)$, тоді

$$|a_{jk}|=|(Ae_k,e_j)|\le\|Ae_k\|\le\|A\|.$$

Достатність. Нехай $\sup\{|a_{jk}|,\ j,k\in N\}=c<+\infty$. Покладемо $a_{10}=0,\ x_0=0$. Тоді $\forall x\in H$ $(Ax,e_j)=a_{j,j-1}x_{j-1}+a_{jj}x_j+a_{j,j+1}x_{j+1}$, тому:

$$\|Ax\|=\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|a_{j,j-1}x_{j-1}+a_{jj}x_j+a_{j,j+1}x_{j+1}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\le$$

$$\le\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|a_{j,j-1}x_{j-1}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|a_{jj}x_j\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|a_{j,j+1}x_{j+1}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\le 3c\|x\|.$$

Теорему доведено.

Означення 17. Оператор $A\in L(H)$ називається оператором Гільберта-Шмідта, якщо для деякого ортонормованого базиса $\{e_k\}_1^{\infty}$ збігається ряд:

$$\sum_{j=1}^{\infty}\|Ae_j\|^2=\sum_{j,k=1}^{\infty}|a_{jk}|^2 .$$

Множина усіх операторів Гільберта-Шмідта позначається $S_2(H)$. Величина $|A|=\left(\sum_{j=1}^{\infty}\|Ae_j\|^2\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\sum_{j,k=1}^{\infty}|a_{jk}|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ називається абсолютною нормою оператора A.

Відомо, що клас $S_2(H)$ непустий (довільна скінчена матриця породжує оператор Гільберта-Шмідта). Крім того $I\notin S_2(H)$. Нетривіальним прикладом оператора Гільберта-Шмідта є інтегральний оператор.

Теорема 17. Нехай $H=L_2(R,d\mu)$. Оператор $(Ax)(t)=\int_R k(t,s)\cdot x(s)d\mu(s)$ тоді і тільки тоді буде оператором Гільберта-Шмідта, коли $K(t,s)\in L_2(R\times R,d\mu\times d\mu)$ і $|A|=\|K\|_{L_2(R\times R,d\mu\times d\mu)}$.

Доведення. Нехай $\{e_j(t)\}_1^{\infty}$ ортонормований базис в $L_2(R,d\mu)$. Тоді:

$$a_{jk}=(Ae_k,e_j)=\int_R\left(\int_R K(t,s)e_k(s)d\mu(s)\right)\overline{e_j(t)}d\mu(t)=\int_{R\times R}K(t,s)\overline{e_j(t)\overline{e_k(s)}}d(\mu\times\mu)(t,s).$$

Неважко переконатись, що $e_j(t)\overline{e_k(s)}$, $j,k\in N$ ортонормований базис в $L_2(R\times R,d\mu\times d\mu)$. Якщо $K(t,s)\in L_2(R\times R,d\mu\times d\mu)$, то згідно з рівністю Парсеваля $\|K\|_{L_2(R\times R,d\mu\times d\mu)}=\sum_{j,k=1}^{\infty}|a_{jk}|^2<\infty$. І навпаки, якщо $A\in S_2(L_2)$, то $|A|^2=\sum_{j,k=1}^{\infty}|a_{jk}|^2<\infty$. Отже: $K(t,s)\in L_2(R\times R,d\mu\times d\mu)$. Теорему доведено.

§ 7. Спектр і резольвента лінійного оператора.

З курсу лінійної алгебри відомо, що в просторі R^n, число $\lambda\in C$ для якого рівняння

$$A\varphi=\lambda\varphi \tag{4}$$

має нетривіальний розв’язок, називається власним значенням опеператора *A*, сам розв’язок власним вектором, що відповідає цьому власному значенню. Сукупність усіх власних значень оператора *A* називається його спектром.
Як відомо спектр скінченновимірного оператора визначається з характеристичного рівняння $\det(A-\lambda I)=0$. В довільному нормованому просторі поняття власного вектора і власного значення лінійного оператора визначається як і в скінченновимірному випадку. Але в нормованому просторі спектр оператора має більш складну структуру.

Означення 18. Нехай *E* лінійний нормований простір і $A\in L(E)$. Точка $z\in C$ така, що оператор $A-zI$ має обернений, називається регулярною точкою оператора *A*. Множина усіх регулярних точок позначається $\rho(A)$. Доповнення множини регулярних точок в *C* називається спектром оператора *A* і позначається $\sigma(A)$.

Приклад. Нехай $E=L_2([a,b])$ і оператор визначається за правилом $(Ax)(t)=tx(t)$. Знайдемо спектр цього оператора. Нехай $z\notin[a,b]$, тоді $\forall x\in L_2([a,b])$ має місце нерівність $\|(A-zI)x\|^2=\int_{[a,b]}(t-z)^2|x(t)|^2dt\ge d^2\|x\|^2$. $d>0$ - відстань від точки $z\notin[a,b]$ до відрізку $[a,b]$. Функції $x(t),\dfrac{x(t)}{t-z}$ одночасно належать або не належать до $L_2([a,b])$. Тому $R(A-zI)=L_2([a,b])$. Тобто $z\in\rho(A)$, бо $\exists(A-zI)^{-1}$. Якщо ж $z\in[a,b]$, то $R(A-zI)\ne L_2([a,b])$. Наприклад, $x(t)\equiv1\notin R(A-zI)$, бо $\dfrac{1}{t-z}\notin L_2([a,b])$. Отже, $\sigma(A)=[a,b]$. І точки відрізка не є власними значеннями.

Теорема 18. Спектр лінійного оператора A є замкненою підмножиною круга $\widetilde{B}_{\|A\|}(0)=\{z\in C:|z|\le\|A\|\}$.

Доведення. Покажемо, що доповнення круга $\widetilde{B}_{\|A\|}(0)$ міститься в $\rho(A)$. Нехай $|z|>\|A\|$, тоді $(A-zI)=-z\left(I-\frac{1}{z}A\right)$, де $\frac{1}{z}A$ має норму менше одиниці. Оператор $\left(I-\frac{1}{z}A\right)$ має обернений, а разом з ним має обернений і $(A-zI)$, тобто $z\in\rho(A)$.

Покажемо, що $\rho(A)$ - відкрита множина, для цього візьмемо довільну точку $z_0\in\rho(A)$. Розглянемо для деякого $z\in C$ оператор $A-zI=A-z_0I-(z-z_0)I$. Оператор $A-z_0I$ має обернений і, якщо $\|(z-z_0)I\|<\left\|(A-z_0)^{-1}\right\|^{-1}=r$, то буде мати обернений і оператор $A-zI$. Тобто куля $B_r(0)\subset\rho(A)$. Теорему доведено

Зауваження. При доведенні було використано такий факт: якщо оператор A має обернений і оператор B такий, що $\|B\|\le\left\|A^{-1}\right\|^{-1}$, то оператор $A+B$ має обернений.

Означення 19. Нехай $A\in L(E)$ і $z\in\rho(A)$. Оператор $(A-zI)^{-1}$ називається резольвентою оператора A в точці z і позначається R_z або $R_z(A)$.

Теорема 19. Нехай $\lambda,\mu\in\rho(A)$. Має місце тотожність Гільберта

$$R_\lambda-R_\mu=(\lambda-\mu)R_\lambda R_\mu .$$

Доведення. Розглянемо рівність $(A-\mu I)-(A-\lambda I)=(\lambda-\mu)I$. Помножимо цю рівність спочатку зліва на R_λ, потім праворуч на R_μ і отримаємо наступні рівності:

$$R_\lambda(A-\mu I)-I=(\lambda-\mu)R_\lambda$$
$$R_\lambda-R_\mu=(\lambda-\mu)R_\lambda R_\mu ,$$

що й потрібно було довести.

Наслідком цієї тотожності є рівність $R_\mu R_\lambda=R_\lambda R_\mu$.

Теорема 20. Операторна функція $\rho(A)\ni z\to R_z(A)\in L(E)$ неперервна на $\rho(A)$.

Дійсно, $\|R_\lambda-R_\mu\|=|\lambda-\mu|\cdot\|R_\lambda\|\cdot\|R_\mu\|$, отже, якщо $\lambda\to\mu$, то $R_\lambda\Rightarrow R_\mu$.

Має місце й таке твердження: резольвента оператора A є аналітичною оператор-функцією на $\rho(A)$.

Теорема 21. Спектр довільного лінійного неперервного оператора непустий.

Доведення. Нехай $\sigma(A)=\varnothing$, тоді $\rho(A)=C$. Тоді $R_z(A)$ - аналітична функція на C, тобто ціла функція. Покажемо, що $\sup\{\|R_z(A)\|,z\in C\}<\infty$. Так як

$R_z(A)$ - неперервна на C, то неперервною є і функція $\|R_z(A)\|$. За теоремою Вейєрштрасса $f(z)=\|R_z(A)\|$ є обмеженою в крузі $\widetilde{B}_{2\|A\|}(0)$ і $\forall z\notin \widetilde{B}_{2\|A\|}(0)$ маємо:

$$\|R_z(A)\|=\left\|-\frac{1}{z}\left(I-\frac{1}{z}A\right)^{-1}\right\|=|z|^{-1}\left\|\left(I-\frac{1}{z}A\right)^{-1}\right\|\le(2\|A\|)^{-1}\left(I-\frac{\|A\|}{z}\right)^{-1}<\|A\|^{-1},$$

тобто $\sup\{\|R_z(A)\|, z\in C\}=d<\infty$. Крім того, якщо $|z|>2\|A\|$, то $\|R_z(A)\|<2|z|^{-1}$, тобто $\|R_z(A)\|\to 0$ при $|z|\to\infty$. Нехай $x\in E, l\in E'$, розглянемо числову функцію $f_{x,l}(z)=l(R_z x)$. Ця функція ціла і $|f_{x,l}(z)|\le\|l\|\cdot\|R_z x\|\le d\|l\|\cdot\|x\|$. Звідси випливає, що $f_{x,l}(z)$ - обмежена. За теоремою Ліувілля обмежена ціла функція може бути тільки сталою, тобто $f_{x,l}(z)=\text{const}$ $\forall z\in C$. Але $\|R_z(A)\|\to 0$, отже, $f_{x,l}(z)=0$ $\forall z\in C$, тобто $f_{x,l}(z)=l(R_z x)=0$. Але тоді $(A-zI)^{-1}x=0$ $\forall x\in E$. Тобто $(A-zI)^{-1}=0$, що не має сенсу. Теорему доведено.

Означення 20. Нехай $A\in L(E)$, $\sigma(A)$- його спектр. Спектральним радіусом оператора *A* називається число $\rho_A=\max\{|z|, z\in\sigma(A)\}$.

Теорема 22. Спектральний радіус оператора $A\in L(E)$ обчислюється за формулою $\rho_A=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|A^n\|}$.

Доведення. Оскільки $\|A^{n+m}\|\le\|A^n\|\|A^m\|$, то $\exists\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|A^n\|}<\infty$ (властивості невід'ємних послідовностей). Розглянемо резольвенту оператора *A*. Спектр оператора *A* знаходиться в крузі $\sigma(A)\subset\widetilde{B}_{\rho_A}(0)$. Тому операторна функція $(A-zI)^{-1}$ є аналітичною зовні цього круга. Покладемо $f(\varsigma)=R_{\frac{1}{\varsigma}}$. Тоді ця функція аналітична в середині круга $\dfrac{1}{\rho_A}$. Представимо $f(\varsigma)$ у вигляді ряда з операторними коефіцієнтами. Якщо $|\varsigma|\le\|A\|^{-1}$, то

$$f(\varsigma)=\left(A-\varsigma^{-1}I\right)^{-1}=-\varsigma(I-\varsigma A)^{-1}=-\varsigma\sum_{n=0}^{\infty}\varsigma^n A^n.$$

Радіус збіжності цього ряду дорівнює: $\left(\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|A^n\|}\right)^{-1}$. Крім того $f(\varsigma)$ аналітична в середині круга $\dfrac{1}{\rho_A}$, а на межі цього круга аналітичність порушується, тому виконується рівність $\rho_A=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|A^n\|}$. Теорему доведено.

§ 8. Компактні оператори.

Означення 21. Нехай E_1, E_2- лінійні нормовані простори. Оператор $A: E_1\to E_2$ називається компактним, якщо він відображає довільну обмежену множину з E_1 в передкомпактну множину з E_2. Множину усіх компактних операторів, що діть з E_1 в E_2, позначають $\sigma(E_1,E_2)$.

Зауваження 1. Так як оператор $A: E_1 \to E_2$ - лінійний, то в означенні досить розглядати одиничну кулю $B_1(0)\subset E_1$ і вимагати передкомпактність її образу.

Зауваження 2. Так як компактний оператор відображає обмежену множину в передкомпактну, то він є обмеженим оператором, тобто $\sigma(E_1,E_2)\subset L(E_1,E_2)$. Властивість компактності є більш сильною ніж неперервність оператора, тому, щоб підкреслити це, компактний оператор називається ще *цілком неперервним.*

Зауваження 3. Іноді як означення компактного оператора приймається така його властивість: якщо послідовність $\{x_n\}_1^\infty \subset E_1$ обмежена, то з послідовності $\{Ax_n\}_1^\infty \subset E_2$ можна виділити збіжну підпослідовність.

Приклади. 1) Довільний оператор, що діє в $E_1 = E_2 = C^N$ є компактним.

2) У просторі $L_p([a;b],d\mu)$. Розглянемо інтегральний оператор, який має вигляд $(Ax)(t) = \int\limits_{[a;b]} k(t,s)\cdot x(s)d\mu(s)$, де $k(t,s)=\sum\limits_{j=1}^{n} a_j(t)\cdot b_j(s)$. Цей оператор є компактним, а його ядро називається виродженим.

Перейдемо до вивчення властивостей компактних операторів.

Теорема 23. Нехай E – банаховий простір, $\{A_n\}_1^\infty \subset L(E)$ - послідовність компактних операторів, що збігається до оператора $A\subset L(E)$. Тоді оператора A є компактним.

Доведення. Нехай послідовність $\{x_n\}_1^\infty \subset E$ є обмеженою. Доведемо, що з послідовності $\{Ax_n\}_1^\infty$ можна виділити збіжну підпослідовність. Для доведення цього застосуємо «діагональний метод».

Оскільки оператор $A_1 \in \sigma(E)$, то з послідовності $\{A_1x_n\}_1^\infty$ можна виділити збіжну підпослідовність, яку позначимо $\{A_1x_{n1}\}_1^\infty$. Оскільки оператор $A_2 \in \sigma(E)$, то з послідовності $\{A_2x_{n1}\}_1^\infty$ можна виділити збіжну підпослідовність, яку позначимо $\{A_2x_{n2}\}_1^\infty$. Продовжимо цей процес для усіх операторів даної послідовності. Розглянемо діагональну підпослідовність $\{x_{nn}\}_1^\infty \subset E$ і покажемо, що послідовність $\{Ax_{nn}\}_1^\infty$ -фундаментальна, а, отже, збіжна. Зауважимо, що $\forall k\in N$ послідовність $\{A_kx_{nn}\}_1^\infty$ є збіжною. Тоді $\forall n,m\in N$ матимемо:

$$\|Ax_{nn} - Ax_{mm}\| \le \|Ax_{nn} - A_kx_{nn}\| + \|A_kx_{nn} - A_kx_{mm}\| + \|Ax_{nn} - A_kx_{mm}\| \le$$
$$\le \|A - A_k\|(\|x_{nn}\| + \|x_{mm}\|) + \|A_kx_{nn} - A_kx_{mm}\| \le 2c\|A - A_k\| + \|A_kx_{nn} - A_kx_{mm}\|,$$

де $c = \sup\{\|x_n\|, n\in N\}$.

Нехай задано $\varepsilon > 0$, виберемо k_0 такий, що $\left\|A - A_{k_0}\right\| < \frac{\varepsilon}{3c}$. Послідовність $\left\{A_{k_0} x_{nn}\right\}_1^{\infty}$ збігається, тому, починаючи з деякого N, $\left\|A_{k_0} x_{nn} - A_{k_0} x_{mm}\right\| < \frac{\varepsilon}{3}$. Враховуючи останні нерівності, одержимо $\left\|Ax_{nn} - Ax_{mm}\right\| < \varepsilon$. Отже, $A \in \sigma(E)$. Теорему доведено.

З цієї теореми випливає той факт, що множина компактних операторів $\sigma(E_1, E_2)$ є підпростором в просторі усіх обмежених лінійних операторів $L(E_1, E_2)$.

Теорема 24. (без доведення). Якщо $A \in \sigma(E)$, то $A^* \in \sigma(E')$.

Теорема 25. Довільний оператор Гільберта-Шмідта в гільбетровому просторі H є компактним, тобто $S_2(H) \subset \sigma(H)$.

Доведення. Оператор називається *скінченновимірним*, якщо $\dim R(A) < \infty$. Покажемо, що довільний оператор Гільберта-Шмідта є границею рівномірно збіжної послідовності скінченновимірних операторів. Тоді, так як скінченновимірні оператори компактні, то за теоремою 23, одержимо компактність оператора Гільберта-Шмідта.

Зафіксуємо в H ортонормований базис $(e_k)_1^{\infty}$. Нехай $\left(a_{jk}\right)_{j,k=1}^{\infty}$ матриця, що відповідає оператору A в цьому базисі. Визначимо оператор A_n так: $(A_n x)_k = \begin{cases} (Ax)_k, 1 \le k \le n \\ 0, \quad n+1 \le k \end{cases}$, $\forall x \in H$. Зрозуміло, що $R(A_n) \subseteq л.о.(e_1, ..., e_n)$, тому $A_n \in \sigma(H)$. Крім того $\left|A - A_n\right|^2 = \sum_{j=n+1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left|a_{jk}\right|^2 \to 0$ при $n \to \infty$, як залишок збіжного ряду $\sum_{j,k=1}^{\infty} \left|a_{jk}\right|^2$. Але тоді і $\lim_{n \to \infty} \left\|A - A_n\right\| = 0$. Теорему доведено.

§ 9. Теорія Рісса-Шаудера розв'язності рівнянь з компактним оператором

Нехай $A \in \sigma(E)$, E – банаховий простір. Позначимо $T = A - I$, де I – одиничний оператор. Розглянемо наступні рівняння:

$$Tx = y,\ x, y \in E \tag{5}$$

$$Tx = 0, \quad x \in E \tag{6}$$

$$T^* l = m, \quad l, m \in E' \tag{7}$$

$$T^* l = 0, \quad l \in E' \tag{8}$$

У скінченовимірному випадку відомі результати лінійної алгебри про розв'язність рівнянь (5)-(8) та взаємозв'язок між цими рівняннями. Наприклад, рівняння (5) розв'язне для тих і тільки тих правих частин y, для яких $l(y) = 0$ для усіх розв'язків рівняння (8), і т.д. Ці результати можна перенести на випадок, коли A – компактний оператор, що діє в довільному банаховому просторі.

Спочатку без доведення наведемо такі два факти.

Лема 1. Нехай $T = A - I$, де $A \in \sigma(E)$. Ядро оператора $T = A - I$ є скінченновимірним підпростором.

Лема 2. Область значень оператора $T = A - I$ є підпростір.

Перейдемо до доведення теорем Фредгольма.

Теорема 26. Рівняння $Tx = y, x, y \in E$ розв'язне для тих і тільки тих $y \in E$, для яких $l(y) = 0$ при всіх $l \in E'$, що є розв'язками рівняння $T^* l = 0$.

Доведення. *Необхідність.* Нехай $y \in E$ такий, що $Tx = y$ розв'язне, тоді

$$l(y) = l(Tx) = (T^* l)(x) \Rightarrow l(y) = 0, \quad \forall l : T^* l = 0.$$

Достатність. Нехай $y \in E$ такий, що $l(y) = 0 \ \forall l : T^* l = 0$. Нехай рівняння $Tx = y$ не є розв'язним, тобто $y \notin R(T)$. Згідно з лемою 2 $R(T)$ є підпростір і за наслідками теореми Хана-Банаха існує функціонал $l_0 \in E'$ такий, що $l_0(h) = 0, \quad \forall h \in R(T)$ і $l_0(y) = \rho(y, R(T))$. Таким чином, $\forall x \in E : (T^* l_0)(x) = l_0(Tx) = l_0(y) = 0$, тобто l_0 є розв'язок рівняння $T^* l = 0$, але $l_0(y) \neq 0$. Прийшли до протиріччя, яке доводить теорему.

Наслідок. Рівняння $Tx = y, x, y \in E$ розв'язне $\forall y \in E$ тоді і тільки тоді, коли $\ker T^* = \{0\}$.

Теорема 27. Рівняння $T^* l = m$ розв'язне для тих і тільки тих $m \in E'$, для яких $m(x) = 0$ при всіх $x \in E$, що є розв'язками рівняння $Tx = 0$.

Доведення. *Необхідність.* Нехай $m \in E'$ такий, що $T^* l = m$ розв'язне і нехай $x \in \ker T$, тоді

$$m(x) = (T^* l)(x) = l(Tx) = l(0) = 0.$$

Достатність. Нехай $m \in E'$такий, що $\forall x \in \ker T$, $m(x) = 0$. Побудуємо розв'язок рівняння $T^* l = m$. Для цього на підпросторі $R(T)$ визначимо функціонал l_0, поклавши $l_0(y) = m(x)$, де x один з прообразів елемента y при відображенні T. Означення функціоналу є корректним, дійсно, нехай x_1 ще один прообраз елемента y при відображенні T, тоді $m(x_1) = m(x + (x_1 - x)) = m(x)$. Функціонал l_0 лінійний, бо лінійним є функціонал m. Нехай $\tilde{x}$- мінімальний розв'язок рівняння $Tx = y$, тобто розв'язок змінімальною нормою). Тоді одержимо: $|l_0(y)| = |m(\tilde{x})| \leq \|m\| \cdot \|\tilde{x}\| \leq c\|m\| \cdot \|y\|$, тобто l_0 - обмежений.

Застосовуючи теорему Хана-Банаха, продовжимо функціонал l_0 з $R(T)$ на весь простір, і позначимо продовження l.

Тоді для $x \in E$ $(T^* l)(x) = l(Tx) = l_0(Tx) = m(x)$, тобто l є розв'язок рівняння $T^* l = m$. Теорему доведено.

Наслідок. Рівняння $T^*l = m$ розв'язне $\forall m \in E'$ тоді і тільки тоді, коли $\ker T = \{0\}$.

Зауважимо, якщо E рефлексивний простір, то теорема 27 є наслідком теореми 26, бо $\left(T^*\right)^* = T$.

Теорема 28. Рівняння $Tx = y,\, x, y \in E$ розв'язне $\forall y \in E$ тоді і тільки тоді, коли $\ker T = \{0\}$. Тоді існує T^{-1} і розв'язок визначається однозначно.

Доведення. *Необхідність.* Нехай $G_n = \ker T^n$, $n \in N$ так як з того, що $T^n x = 0 \Rightarrow T^{n+1}x = 0$, то $G_n \subseteq G_{n+1}$. Нехай рівняння $Tx = y$ розв'язне $\forall y$, а рівняння $Tx = 0$ має ненульовий розв'зок x_1. Нехай x_2 розв'язок рівняння $Tx = x_1$ і x_{k+1} розв'язок рівняння $Tx = x_k$. Тоді $T^{k-1}x_k = x_1 \neq 0$, з іншого боку $T^k x_k = Tx_1 = 0$. Отже, $x_k \in G_k \setminus G_{k-1}$, тобто $G_{k-1} \subset G_k$. З теореми про майже ортогональний вектор в G_k існує y_k такий, що $\|y_k\| = 1$ та $\forall x \in G_{k-1}$ має місце нерівність $\|y_k - x\| \geq \frac{1}{2}$. Так як $\|y_k\| = 1$ і оператор $A \in \sigma(E)$, то $\{Ay_k\}_1^\infty$ містить збіжну підпослідовність. Нехай $n > m$, так як $T^{n-1}(y_m + Ty_n - Ty_m) = T^{n-1}y_m + T^n y_n - T^n y_m = 0$, то $y_m + Ty_n - Ty_m \in G_{n-1}$ і тому $\|Ay_n - Ay_m\| = \|y_n - (y_m + Ty_n - Ty_m)\|T^{n-1} \geq \frac{1}{2}$. Таким чином припущення, що рівняння $Tx = 0$ має ненульовий розв'зок, невірне.

Достатність. Нехай $Tx = 0$ має тільки тривіальний розв'язок. Згідно з наслідком до теореми 26, рівняння $T^*l = m$ розв'язне $\forall m \in E'$. Так як $A^* \in \sigma(E)$, то як нами вже доведено, рівняння $T^*l = 0$ має тільки тривіальний розв'язок. Але тоді згідно з наслідком до теореми 25, рівняння $Tx = y$ розв'язне для довільної правої частини.

Умова $\ker T = \{0\}$ забезпечує існування алгебраїчного оберненого оператора T^{-1}. Єдиний розв'язок рівнянн $x = T^{-1}y$ є в той же час і мінімальними, отже $\|T^{-1}y\| \leq c\|y\|$, тобто $T^{-1} \in L(E)$. Теорему доведено.

Теорема 29. (без доведення). Однорідні рівняння $Tx = 0$ і $T^*l = 0$ мають однакову скінчену кількість лінійно незалежних розв'язків, тобто $\dim\ker T = \dim\ker T^* < \infty$.

Поєднуючи результати наведених теорем 25-28, одержимо теорему, що носить назву «альтернатива Фредгольма».

Теорема 30. (Альтернатива Фредгольма). а) Або рівняння $Tx = y,\, x, y \in E$ $T^*l = m,\quad l, m \in E'$ (з компактним оператором A) розв'язні для довільних правих частин і при цьому відповідні однорідні рівняння $Tx = 0, T^*l = 0$ мають лише тривіальні розв'язки.

б) Або однорідні рівняння $Tx = 0, T^*l = 0$ мають однакову скінчену кількість лінійно незалежних розв'язків $(x_1, \ldots, x_n)$.

§ 10. Спектр компактного оператора.

Теорема 31. Нехай $A \in \sigma(E)$, E – банаховий простір.

1) Спектр оператора A $\sigma(A)$ складається з не більше ніж зліченої підмножини круга $\{\lambda \in C : |\lambda| \le \|A\|\}$, який містить точку 0.
2) $\forall \lambda \in \sigma(A)$, $\lambda \ne 0$ є власним значенням скінченої кратності.
3) Якщо $\sigma(A)$ є нескінченою множиною, то точка 0 є єдиною граничною точкою цієї множини.

Доведення. Так як $A \cdot A^{-1} = I$, а I не є компактним оператором, то A^{-1} не є компактним в нескінченновимірному просторі, отже, $0 \in \sigma(A)$.

Нехай $z \ne 0$. Розглянемо рівняння $(A - zI)x = y$ або $(z^{-1}A - I)x = z^{-1}y$. При даному $z \ne 0$ (згідно з теоремами Фредгольма) або рівняння розв'язне при всіх правих частинах і розв'язок неперервно залежить від y, або рівняння $Ax - zx = 0$ має нетривіальні розв'язки. Інакше кажучи, кожна точка $z \in C \setminus \{0\}$ або регулярна, або є власним значенням. Отже, спектр компактного оператора складається тільки з власних значень і точки 0. Нехай $z \ne 0$ власне значення, тоді, згідно з лемою 1.9, оператор $z^{-1}A - I$ має скінченновимірне ядро, тобто $z \ne 0$ власним значенням скінченої кратності.

Доведемо, що зовні круга $B_r(0) \subset C$ довільного радіусу $r > 0$, лежить лише скінчена кількість точок спектра оператора A. Припустимо, що це не так, тобто існує нескінчена кількість точок зовні круга $B_r(0) \subset C$. Тоді можна виділити послідовність $\{\lambda_k\}_1^\infty$ власних значень оператора $B_r(0) \subset C$ таких, що $|\lambda_k| \ge r$. Нехай $\{x_k\}_1^\infty$ послідовність власних векторів, що відповідають власним значеннм $\{\lambda_k\}_1^\infty$. Покажемо, що $x_1,...,x_n$ $\forall n \in N$ є лінійно незалежною. Індукція по n. При $n = 1$ - твердження вірне для $x_1 \ne 0$. Нехай $x_1,...,x_n$ лінійно незалежні, розглянемо послідовність $x_1,...,x_n,x_{n+1}$. Якщо припустити, що $x_{n+1} = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$, то $Ax_{n+1} = \lambda_{n+1}x_{n+1} = \sum_{j=1}^{n} c_j \lambda_j x_j$. Так як $\lambda_{n+1} \ne 0$, то $\sum_{j=1}^{n}\left(1 - \frac{\lambda_j}{\lambda_{n+1}}\right)c_j x_j = 0$, що неможливо, бо $\lambda_{n+1} \ne \lambda_j$, $\forall j = \overline{1,n}$ і $x_1,...,x_n$ лінійно незалежні. Нехай $G_n = л.о.\{x_1,...,x_n\}$. З доведеного випливає, що G_n є підпростір в просторі G_{n+1}. Отже, існує y_{n+1} такий, що $\|y_{n+1}\| = 1$ та $\forall x \in G_{n+1}$ має місце нерівність $\|y_{n+1} - x\| \ge \frac{1}{2}$. Припустимо для визначеності, що $m > n$ і розглянемо $\|Ay_n - Ay_m\|$. Відмітимо, що $Ay_n - Ay_m = \lambda_m y_m - \{\lambda_n y_n + (A - \lambda_n I)y_n - (A - \lambda_m I)y_m\}$. Для $y_m \in G_m$ випливає, що $y_m = \sum_{j=1}^{m} c_j x_j$ і тому

$$(A-\lambda_m I)y=\sum_{j=1}^{m} c_j(\lambda_j-\lambda_m)x_j=\sum_{j=1}^{m-1} c_j(\lambda_j-\lambda_m)x_j\in G_{m-1}.$$

Звідси $Ay_m - Ay_n = \lambda_m y_m - \lambda_m \tilde{y}$, де

$$\tilde{y}=\lambda_m^{-1}\{\lambda_n y_n+(A-\lambda_n I)y_n-(A-\lambda_m I)y_m\}\in G_{m-1}.$$

Таким чином, $\|Ay_m - Ay_n\| = \|\lambda_m y_m - \lambda_m \tilde{y}\| = |\lambda_m|\cdot\|y_m-\tilde{y}\|\geq\frac{r}{2}.$ Отже ні послідовність $\{Ay_n\}_1^\infty$, ні довільна її підпослідовність не є збіжними. Крім того, так як $\{y_n\}_1^\infty$ є обмеженою, то $\{Ay_n\}_1^\infty$ множина передкомпактна, бо оператор A – компактний. Отже, отримали протиріччя, яке доводить теорему.

§ 11. Лінійні інтегральні рівняння.

Означення 22. Інтегральним рівнянням Фредгольма другого роду називається рівняння вигляду:

$$\lambda\int_{[a,b]} k(t,s)x(s)d\mu(s)-x(t)=y(t), \tag{9}$$

де $x(t)$ - невідома функція з простору E, λ - числовий параметр, міра $\mu(s)$, функції $k(t,s)$, $y(t)\in E$ задані.

В ліву частину рівняння входить інтегральний оператор $(Ax)(t)=\int_{[a,b]} k(t,s)x(s)d\mu(s)$. В § 6 т.16 показано, що у випадку, коли $E=L_2([a,b])$, цей оператор, при умові $k(t,s)\in L_2([a,b],[a,b])$ є оператором Гільберта-Шмідта, тобто компактний. В прикладі 2) § 8 розглянуто інтегральний оператор з виродженним ядром, який теж є компактним. Можна показати, що у випадку $E=C([a,b])$ інтегральний оператор $(Ax)(t)=\int_a^b k(t,s)x(s)ds$, при умові $k(t,s)\in C([a,b],[a,b])$, є компактним.Має місце більш загальний факт.

Теорема 32. (без доведення**)**. Нехай $p,q>1$. Якщо функція $k(t,s)\in L_{r'}([a,b],[a,b])$, де $r'=min\{p,q'\}$, $\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}=1$, $\frac{1}{q}+\frac{1}{q'}=1$, то інтегральний оператор $(Ax)(t)=\int_a^b k(t,s)x(s)ds$, що діє з $L_p([a,b])$ в $E=L_q([a,b])$ є компактним.

Враховуючи все сказане, рівняння (9) зводиться до рівняння $Tx=y$, де $T=A-\lambda I$, A – інтегральний оператор. Якщо розглядати це рівняння в просторах сумовних або неперервних функцій, то оператор A є компактним.

Отже, теорія Рісса-Шаудера (§9) дає відповідь на питання про розв'язність інтегрального рівняння Фредгольма доругого роду.

Для спрощення формулювань будемо розглядати випадок гільбертового простору $L_2(R,d\mu)$. В цьому випадку спряжене рівняння матиме вигляд:

$$\lambda\int_R \overline{k(s,t)}\,l(s)d\mu(s) - l(t) = m(t), \quad l,m\in L_2(R,d\mu) \tag{10}$$

Мають місце теореми:

Теорема 33. Інтегральне рівняння (9) розв’язне для тих і тільки тих $y\in L_2(R,d\mu)$, які задовольняють умові $\int_R y(t)\,\overline{l(t)}\,d\mu(t)=0$ для довільного розв’язку l однорідного рівняння (10). Рівняння (9) має розв’язок для довільної правої частини тоді і тільки тоді, коли спряжене однорідне рівняння (10) (при $m=0$) має тільки тривіальний розв’язок. В цьому випадку розв’язок рівняння визначається однозначно і неперервно залежить від правої частини.

Теорема 34. Інтегральне рівняння (10) розв’язне для тих і тільки тих $m\in L_2(R,d\mu)$, які задовольняють умові $\int_R m(t)\,\overline{x(t)}\,d\mu(t)=0$ для довільного розв’язку x однорідного рівняння (9). Рівняння (10) має розв’язок для довільної правої частини тоді і тільки тоді, коли спряжене однорідне рівняння (10) (при $y=0$) має тільки тривіальний розв’язок. В цьому випадку розв’язок рівняння визначається однозначно і неперервно залежить від правої частини.

Теорема 35. Підпростори розв’язків однорідних рівнянь, що відповідають рівнянням (9) та (10), скінченновимірні і їхні виміри співпадають.

Аналогічні теореми можна сформулювати для простору неперервних функцій.

Зауваження. Інтегральним рівнянням Фредгольма першого роду називається рівняння вигляду

$$\int_{[a,b]} k(t,s)x(s)d\mu(s) = y(t).$$

Теорія розв’язності цих рівнянь принципово відрізняється від відповідної теорії для рівнянь другого роду навіть коли інтегральний оператор є компактним. Тому тут ми питання розв’язності цих рівнянь не будемо розглядати.

Перейдемо до методів розв'язання інтегральних рівнянь.

Інтегральні рівняння з виродженими ядрами. Нехай $k(t,s)=\sum_{j=1}^{n} a_j(t)\cdot b_j(s)$, де $a_j(t), b_j(s)\quad j=\overline{1,n}$ - лінійно незалежні набори функцій з $L_2(R,d\mu)$. Рівняння (9) набере вигляду:

$$\lambda\sum_{j=1}^{n} a_j(t)\int_R b_j(s)x(s)d\mu(s) - x(t) = y(t) \tag{11}$$

Покладемо $\quad x_j=\int_R b_j(s)x(s)d\mu(s),\quad a_{jk}=\int_R a_k(s)b_j(s)d\mu(s),\quad y_j=\int_R b_j(s)y(s)d\mu(s)$ ($k, j=\overline{1,n}$). Якщо рівняння (11) домножити на $b_i(t)$ і проінтегрувати, то одержимо систему n лінійних рівнянь

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j - x_i = y_i ,\ i = \overline{1,n} \tag{12}$$

Нехай $x(t)$ - розв’язок рівняння (11). Тоді $(x_1,...,x_n)$ є розв’язком системи (12). Навпаки, якщо $(x_1,...,x_n)$ - розв’язок системи (12), то функція

$$x(t) = \sum_{j=1}^{n} a_j(t) \cdot x_j - y(t) \tag{13}$$

є розв’язком рівняння (11).

Метод послідовних наближень. Розглянемо спочатку загальний випадок. Нехай *E* – банаховий простір. Розглянемо рівняння $x - Ax = y$, де *A* обмежений оператор в *E*. Якщо $\|A\| < 1$, то згідно до т.7 § 3, рівняння буде мати розв’язок

$$x = (I - A)^{-1} y = \sum_{k=1}^{\infty} A^k y . \tag{14}$$

Цей же факт випливає з принципу стискаючих відображень, застосованого до рівняння $x = F(x)$, де $F(x) = Ax + y$. Якщо $\|A\| = q < 1$, то відображення $F : E \to E$ є стискаючим. Тоді процес побудови розв’язку визначається схемою $x_n = F(x_{n-1}) = y + Ay + A^2 y + ... + A^n x_0$. Послідовність $\{x_n\}_1^{\infty}$ збігається до розв’язку рівняння $x - Ax = y$ і має вигляд (14). Має місце теорема.

Теорема 36. (без доведення) Нехай $A \in L(E)$. Якщо спектральний радіус оператора *A* менше одиниці ($r_A < 1$), то рівняння $x - Ax = y$ розв’язне і його розв’язок знаходиться методом послідовних наближень.

Повернемось до інтегрального рівняння (9) з інтегральним оператором, що діє неперервно в просторі $L_p(R, d\mu)$ або $C([a,b])$. Якщо $|\lambda| r_A < 1$, то згідно з теоремою 36 рівняння буде розв’язним і його розв’язок знаходиться методом послідовних наближень. В теорії інтегральних рівнянь розв’язок в цьому випадку записують так:

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k A^k y = y + \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{k-1} A^k y = y + \lambda \Re_\lambda y . \tag{15}$$

Оператор $\Re_\lambda$ називається резольвентою ядра $k(t,s)$, або рівняння (9).

Якщо $E = C(\overline{G})$, де $G \subset R^n$ обмежена область. Можна довести, що $\Re_\lambda$ є інтегральним оператором з ядром $\Re(t,s,\lambda) = \sum_{1}^{\infty} \lambda^{n-1} k^{(n)}(t,s)$, де $k^{(n)}(t,s)$ - *n* –та ітерація ядра $k(t,s)$, тобто ядро оператора A^n (має місце рекурентна формула $k^{(n)}(x,s) = \int_{\overline{G}} k(x,t) k^{(n-1)}(t,s) dt$). Тому розв’язок рівняння (9) можна записати в інтегральній формі:

$$x(t) = y(t) + \lambda \int_{\overline{G}} \Re(t,s,\lambda) y(s) ds ,\ |\lambda| r_A < 1 .$$

Зауваження. Якщо ядро інтегрального оператора довільне, то його завжди можна в просторі $L_2(R, d\mu)$ подати у вигляді суми двох доданків, а саме, виродженого ядра та ядра з нормою меншою одиниці. Крім того можна побудувати послідовність інтегральних операторів з виродженими ядрами таку, що вона буде прямувати до даного інтегрального оператора. Отже, інтегральний оператор в рівнянні (9) можна замінити оператором з цієї послідовності так, що він буде відрізнятись від даного на досить малу величину, якою можна знехтувати.

Означення 23. Інтегральним рівнянням Вольтерра називається рівняння вигляду:

$$\lambda\int_a^t k(t,s)x(s)ds - x(t) = y(t), \tag{16}$$

де $x(t)$ - невідома функція з простору $L_2([a,b], d\mu)$, λ - числовий параметр, міра $\mu(s)$, функції $k(t,s)$, $y(t)\in E$ задані.

Означення 24. Оператор називається квазінільпотентним, якщо $r_A = 0$, тобто спектр складається з однієї точки $\sigma(A) = \{0\}$.

Рівняння $x - \lambda Ax = y$ з квазінільпотентним оператором A є розв'язним при довільних $\lambda \in C$. Розв'зуються такі ріняння методом послідовних наближень і мають вигляд (15). Як виявляється, інтегральний оператор в рівнянні Вольтерра є квазінільпотентним.

Теорема 37. Нехай $k(t,s)$ ($t\in[a,b]$, $a \le s \le t$) вимірна обмежена функція. Інтегральний оператор Вольтерра, що діє в $L_2([a,b], d\mu)$ є квазінільпотентним.

Доведення. Функцію $k(t,s)$, що визначена на трикутнику ($t\in[a,b]$, $a \le s \le t$) продовжимо нулем на ($t\in[a,b]$, $t < s \le b$). Нову функцію позначимо $\tilde{k}(t,s)$. За умовою теореми існує така стала $c > 0$ така, що $\forall t,s \in [a,b]$: $\left|\tilde{k}(t,s)\right| \le c$. Звідси випливає, що $\tilde{k}(t,s) \in L_2([a,b]\times[a,b])$ і інтегральний оператор $\int_a^t \tilde{k}(t,s)x(s)ds$ є оператором Гільберта-Шмідта. Для абсолютної норми цього оператора має місце нерівність $|A| \le c(b-a)$. Покажемо, що має місце нерівність

$$\left|A^n\right| \le \frac{c^n(b-a)^n}{(n-1)!}. \tag{17}$$

Ця нерівність означає, що $\left\|A^n\right\|^{\frac{1}{n}} \le \frac{c(b-a)}{((n-1)!)^{\frac{1}{n}}} \to 0, \quad n \to \infty$. Це й є твердження теореми. Отже, необхідно довести (17). Для $n = 2$ маємо:

$$(A^2x)(t) = \int_a^b\left(\int_a^b \tilde{k}(t,\tau)\tilde{k}(\tau,s)d\tau\right)x(s)ds = \int_a^b\left(\int_s^t k(t,\tau)k(\tau,s)d\tau\right)x(s)ds.$$

Звідси випливає оцінка для другого ітерованого ядра $\left|k^{(2)}(t,s)\right| \le c^2 (t-s)^2$. Це означає, при $n=2$ нерівність (17) є вірною. Далі за індукцією одержимо $\left|k^{(n)}(t,s)\right| \le \frac{1}{(n-1)!} c^n (t-s)^{n-1}$. Дійсно, якщо остання нерівність вірна при $n=m$, то

$$\left|k^{(m+1)}(t,s)\right| = \left|\int_s^t k^{(m)}(t,\tau) k(\tau,s) d\tau\right| \le \frac{1}{(m-1)!} c^{m+1} \int_s^t (t-\tau)^{m-1} d\tau = \frac{c^{m+1}}{(m)!}(t-s)^m.$$ Отже, має місце нерівність (17). Теорему доведено.

Розділ VIII. Узагальнені функції

§ 1. Простір основних функцій

Означення 1. Носієм неперервної на R^N функції називається замикання множини тих точок $x \in R^N$, де $f(x) \ne 0$. Носій функції позначається $supp\, f$. Функція називається фінітною, якщо $supp\, f$ є компактною множиною. Сукупність усіх фінітних функцій з $C(R^N)$ позначається так: $C_0(R^N)$.

Розглянемо лінійний простір $C_0^\infty(R^N)$ фінітних нескінченно диференційованих функцій на R^N.

Означення 2. Послідовність функцій $(\varphi_n)_{n=1}^\infty \in C_0^\infty(R^N)$ збігається до функції $\varphi \in C_0^\infty(R^N)$, якщо виконуються умови:

1) носії усіх функцій $(\varphi_n)_{n=1}^\infty$рівномірно обмежені, тобто $\exists r > 0, \forall n \in N$: $supp\varphi_n \subseteq \widetilde{B}_r(0)$;
2) $\forall \alpha_1,...,\alpha_n \in Z_+ : D^{|\alpha|}\varphi_n \Rightarrow D^{|\alpha|}\varphi$ на $\widetilde{B}_r(0)$.

Означення 3. Простір$C_0^\infty(R^N)$, з наведеною в означенні 2 збіжністю, називається **простором основних функцій** і позначається $D(R^N)$.

Прикладом основної функції є така функція:

$$\omega_\varepsilon(x)=\begin{cases} c_\varepsilon \exp\left(-\dfrac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2-|x|^2}\right), & |x|<\varepsilon \\ 0, \quad |x|\geq\varepsilon \end{cases}, \tag{1}$$

де стала c_ε така, що $\int\limits_{R^N}\omega_\varepsilon(x)dx=1$. Крім того ω_ε має такі властивості: 1) $\omega_\varepsilon\in C_0^\infty\left(R^N\right)$; 2) $\omega_\varepsilon(x)=0, \quad |x|\geq\varepsilon$; 3) $\omega_\varepsilon(x)\geq 0$.

Можна довести, що простір основних функцій $D\left(R^N\right)$ є лінійним топологічним простором.

Розглянемо більш детально структуру основних функцій, щоб переконатись, що запас цих функцій досить великий.

Означення 4. Функція $f(x)$, $x\in R^N$ така, що $\chi_A f\in L_1\left(R^N\right)$, для довільної обмеженої множини, називається локально сумованою на R^N за мірою Лебега. Сукупність усіх локально сумованих функцій позначають так: $L_{1,loc}\left(R^N\right)$.

Означення 5. Нехай $f\in L_{1,loc}\left(R^N\right)$ і $\varepsilon>0$. Покладемо

$$S_\varepsilon(f)(t)=\int\limits_{R^N}\omega_\varepsilon(t-s)f(s)ds=(\omega_\varepsilon * f)(t), \tag{2}$$

де ω_ε - функція вигляду (1). Визначений таким чином оператор S_ε називається оператором *осереднення*, а функція $S_\varepsilon(f)(t)=(\omega_\varepsilon * f)(t)$ - середньою функцією або регуляризацією *f*. Функція $(\omega_\varepsilon * f)(t)$ називається *згорткою* функцій ω_ε та *f*.

Рівність (2) визначає оператор S_ε на функціях $f\in L_p(G)$, $p\geq 1$, де $G\subset R^N$ обмежена область і функцію f подовжено нулем на весь простір R^N. Якщо функція *f* фінітна, то подовжувати її немає необхідності. Сукупність усіх фінітних функцій з $L_p(G)$ позначимо $L_{p,0}(G)$. Наведемо без доведення властивості оператора осереднення у вигляді наступної теореми.

Теорема 1. Оператор S_ε має такі властивості:

1) $\forall f\in L_{1,loc}\left(R^N\right): S_\varepsilon\in C^\infty\left(R^N\right)$;
2) $\forall p\geq 1: S_\varepsilon\in L\left(L_p(G)\right)$;
3) $\forall f\in C_0(G): S_\varepsilon f \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} f \quad в \quad C\left(\tilde{G}\right)$;
4) $\forall f\in L_{p,0}(G): S_\varepsilon f \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} f \quad в \quad L_p(G)$

Таким чином за допомогою оператора осереднення будується досить велика кількість функцій з $D\left(R^N\right)$.

Теорема 2. Множина $D\left(R^N\right)$ є скрізь щільною в просторі $L_p\left(R^N\right)$.

Доведення. Нехай дано $f \in L_p(R^N)$ і $\delta > 0$. Знайдеться така обмежена вимірна множина $A \subset R^N$, що $\| f - f\chi_A \|_p < \frac{\delta}{2}$. Розглянемо обмежену область $G = \{x \in R^N : \rho(x, A) < \varepsilon\}$. Так як $G \supset A$, то $\| f - f\chi_A \|_p < \frac{\delta}{2}$. Згідно з властивістю 4) оператора S_ε, $\exists \varepsilon > 0 : \| f\chi_G - S_\varepsilon(f\chi_G) \|_p < \frac{\delta}{2}$. При цьому $S_\varepsilon(f\chi_G) \in D(R^N)$, звідки випливає твердження. Теорему доведено.

Нехай $G \subseteq R^N$ деяка обмежена область. Нехай ця область покривається не більш ніж зліченою сукупністю відкритих множин $\{O_k, k \geq 1\}$, що цілком належать G. Покриття називається локально-скінченим, якщо довільна підобласть $G' \subset G$ перетинається лише з скінченою кількістю множин O_k. Має місце такий результат.

Теорема 3. (без доведення). Нехай $\{O_k, k \geq 1\}$- локально-скінчене покриття області G. Існує система функцій $\chi_k \in C_0^\infty(O_k), k \geq 1$ така, що $0 \leq \chi_k \leq 1$, $\sum\limits_{k \geq 1} \chi_k(t) = 1\,(t \in G)$. Система функцій $\{\chi_k\}_1^\infty$ називається розбиттям одиниці, що побудоване за локально-скінченим розбиттям області G.

Зауваження. З леми Гейне-Бореля випливає, що за довільним (необов’язково зліченним) покриттям області G, можна побудувати розбиття одиниці.

§ 2. Простір узагальнених функцій

Означення 6. Узагальненою функцією називається довільний лінійний неперервний функціонал на просторі основних функцій. Простір узагальнених функцій позначається так: $D'(R^N)$. Значення узагальненої функції α на основній функції φ позначатиметься так: $\alpha(\varphi)$ або $\langle \alpha, \varphi \rangle$.

Як і в довільному спряженому просторі, в $D'(R^N)$ вводиться структура лінійного простору. Збіжність послідовності узагальнених функцій визначається як слабка збіжність функціоналів, тобто $\alpha_n \to \alpha$ *в* $D'(R^N)$, якщо $\forall \varphi \in D(R^N) : \langle \alpha_n, \varphi \rangle \to \langle \alpha, \varphi \rangle$.

Неважко переконатись, що операції додавання та добутку узагальнених функцій на число є неперервними, тобто, що простір $D'(R^N)$ є лінійним топологічним.

Приклади. 1) Нехай $f \in L_{1,loc}(R^N)$. Розглянемо

$$\alpha_f(\varphi) = \int\limits_{R^N} f(t)\varphi(t)\,dt, \quad \varphi \in D(R^n). \tag{3}$$

Це є лінійний функціонал. Неперервність його випливає з того, що інтегрування ведеться по деякій кулі $B=\left\{t\in R^N : |t|\le r\right\}$ і послідовність $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ збігається рівномірно на B. Дійсно, за теоремою Лебега про граничний перехід під знаком інтегралу, одержимо рівність $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_{R^N} f(t)\varphi_n(t)dt=\int\limits_{R^N} f(t)\varphi(t)dt$, тобто

$\alpha_f(\varphi_n)\xrightarrow[n\to\infty]{}\alpha_f(\varphi)\in D'\left(R^N\right).$

Узагальнені функції, що породжуються функціями $f\in L_{1,loc}\left(R^N\right)$ за формулою (3) називаються *регулярними*. Інші узагальнені функції називаються сингулярними.

Зауваження. Дві регулярні узагальнені функції співпадають тоді і тільки тоді, коли функції, що їх породжують еквівалентні (співпадають майже скрізь).

2) Прикладом сингулярної узагальненої функції є δ-функція Дірака, яка визначається формулою $D\left(R^N\right)\ni\varphi\mapsto\langle\delta,\varphi\rangle=\varphi(0)\in C$. Це є лінійний функціонал, який неможна представити формулою (3). Дійсно, якби таке представлення мало місце, то, так як $|t|^2\varphi(t)=\sum\limits_{k=1}^{N}t_k^2\varphi(t)\in D\left(R^N\right)$, одержали б $\int\limits_{R^N} f(t)|t|^2\varphi(t)dt=|t|^2\varphi(t)\Big|_{t=0}=0$. Узагальнена функція, що породжується функцією $|t|^2 f(t)\in L_{1,loc}\left(R^N\right)$, дорівнює нулю. Отже, майже скрізь $f=0$, але тоді прийдемо до протиріччя: $\forall\varphi\in D\left(R^N\right):\varphi(0)=\langle\delta,\varphi\rangle=\int\limits_{R^N} f(t)\varphi(t)dt=0$.

Має місце такий факт.

Теорема 4. Для того, щоб лінійний функціонал α на $D\left(R^N\right)$ належав $D'\left(R^N\right)$, необхідно і достатньо, щоб для довільної обмеженої області $G\subset R^N$ існували числа $K=K(G)>0$ та $m=m(G)\in Z_+$ такі, що

$$\forall\varphi\in C_0^{\infty}(G):\left|\langle\alpha,\varphi\rangle\right|\le K\|\varphi\|_{C^m\left(\tilde G\right)}. \tag{4}$$

Доведення. Достатність умови (4) є очевидною.

Необхідність. Нехай $\alpha\in D'\left(R^N\right)$ та $G\subset R^N$ - обмежена область. Якщо нерівність (4) є невірною, то $\forall n\in N,\exists\varphi_n\in C_0^{\infty}(G):\left|\langle\alpha,\varphi_n\rangle\right|>n\|\varphi_n\|_{C^n\left(\tilde G\right)}$.

Покладемо $\psi_n(t)=\dfrac{\varphi_n(t)}{\sqrt{n}\|\varphi_n\|_{C^n\left(\tilde G\right)}}$. Послідовність $\psi_n\to 0$ в $D\left(R^N\right)$. Так як $\forall n\in N$ $supp\,\psi_n\subset G$ і при $n\ge|\nu|$: $\left|\left(D^{\nu}\psi_n\right)(t)\right|=\psi_n(t)=\dfrac{\left(D^{\nu}\psi_n\right)(t)}{\sqrt{n}\|\varphi_n\|_{C^n\left(\tilde G\right)}}\le\dfrac{1}{\sqrt{n}}\to 0$. Так як α неперервний функціонал, то, з одного боку $\langle\alpha,\psi_n\rangle\to 0$, а з іншого боку $\left|\langle\alpha,\psi_n\rangle\right|=\dfrac{\left|\langle\alpha,\varphi_n\rangle\right|}{\sqrt{n}\|\varphi_n\|_{C^n\left(\tilde G\right)}}\ge\sqrt{n}$. Отримане протиріччя доводить теорему.

Якщо в нерівності (4) можна вибрати число $m \in Z_+$, яке не залежить від області $G \subset R^N$, то узагальнена функція називається функцією *скінченого порядку*. Найменше з таких чисел $m \in Z_+$ називається *порядком* узагальненої функції. Якщо узагальнена функція породжується мірами, тобто регулярна, то її порядок 0, δ-функція Дірака має порядок 1.

Узагальнені функції не мають значень в окремих точках. Але можна вести мову про значення її на відкритій множині.

Узагальнена функція обертається в 0 на відкритій множині G, *якщо* $\forall \varphi \in C_0^\infty(G): supp\varphi \subset G, \langle \alpha, \varphi \rangle = 0$.

Означення 7. Нехай $\alpha \in D'(R^N)$. Носієм узагальненої функції α називається доповнення до об'єднання усіх її нульвих околів. Позначається $supp\alpha$. Якщо носій є компактом, то узагальнена функція називається фінітною.

З цього означення випливає: 1) якщо носії узагальненої функції α та основної функції φ не перетинаються то $\langle \alpha, \varphi \rangle = 0$; 2) точка $t \in supp\alpha$ тоді і тільки тоді, коли α не обертається в нуль ні в одному околі цієї точки .

§ 3. Операції над узагальненими функціями

Нехай $A: D(R^N) \to D(R^N)$ лінійне неперервне відображення. Визначимо спряжене відображення $A^*: D'(R^N) \to D'(R^N)$ таким чином:

$$\forall \alpha \in D'(R^N), \forall \varphi \in D(R^N): \langle A^* \alpha, \varphi \rangle = \langle \varphi, A\alpha \rangle. \qquad (5)$$

Відображення $A^*: D'(R^N) \to D'(R^N)$ визначене на регулярних узагальнених функціях. Тому можна, ототожнивши з функцією f узагальнену функцію α_f, яка породжується локально сумованою функцією f, говорити про похідну функції f в узагальненому сенсі, розуміючи її як функціонал $\left(\frac{\partial}{\partial x_k} \right)^* \alpha_f$.

Отже спираючись на формулу (5) визначимо операції над узагальненими функціями.

Добуток узагальненої функції на гладку функцію. Нехай $a \in C^\infty(R^N)$. Добутком узагальненої функції α на гладку функцію a є узагальнена функція $a\alpha$ така, що

$$\langle a\alpha, \varphi \rangle = \langle \alpha, a\varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in D(R^N). \qquad (6)$$

Приклади. 1) Так як $\langle a\delta, \varphi \rangle = \langle \delta, a\varphi \rangle = a(0)\varphi(0) = \langle a(0)\delta, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in D(R^N)$, то $a\delta = a(0)\delta$.

2) Розглянемо узагальнену функцію вигляду $\left(P\frac{1}{t} \right)(\varphi) = V.p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(t)}{t} dt$, тобто її значення на основній функції φ дорівнює головному значенню

невласного інтеграла. Покажемо, що добуток цієї функції на функцію $a(t)=t$ дорівнює одиниці. Дійсно, $\forall\varphi\in D(R^N)$ одержимо

$$\left\langle tP\frac{1}{t},\varphi\right\rangle=\left\langle P\frac{1}{t},t\varphi\right\rangle=V.p.\int_{-\infty}^{\infty} t\frac{\varphi(t)}{t}dt=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)dt=\langle 1,\varphi\rangle .$$

Заміна змінної в узагальненій функції. Нехай $C\in L(R^N)$ має обернений, нехай також $t=Cs+a$, де $a\in R^N$ фіксований. Визначимо узагальнену функцію $\alpha(Cs+a)$. Якщо $f\in L_{1,loc}(R^N)$, то $\forall\varphi\in D(R^N)$ одержимо

$$\int_{R^N} f(Cs+a)\varphi(s)ds=|det\,C|^{-1}\int_{R^N} f(t)\varphi\left(C^{-1}(t-a)\right)dt .$$

Цю рівність і приймають за означення узагальненої функції $\alpha(Cs+a)$ для довільної $\alpha(t)\in D'(R^N)$, а саме:

$$\langle\alpha(Cs+a),\varphi(s)\rangle=\left\langle\alpha(t),|det\,C|^{-1}\varphi\left(C^{-1}(t-a)\right)\right\rangle,\quad \forall\varphi\in D(R^N). \tag{7}$$

Так, наприклад, при $C=I$ одержимо

$$\langle\delta(s-a),\varphi\rangle=\left\langle\delta(t),|det\,C|^{-1}\varphi(t+a)\right\rangle=\varphi(a)\quad \forall\varphi\in D(R^N).$$

Диференціювання узагальнених функцій. Нехай $f\in C^{|\sigma|}(R^N)$, де $\sigma=(\sigma_1,...,\sigma_N)$, $\sigma_k>0$, $\sigma_k\in Z$.

Якщо покласти $(A\varphi)(t)=(D^\sigma\varphi)(t)$, $\varphi\in D(R^N)$, то спряжене відображення $A^*:D'(R^N)\to D'(R^N)$ визначається інтегруванням за частинами:

$$\left\langle\alpha_f,A\varphi\right\rangle=\int_{R^N} f(t)(D^\sigma\varphi)(t)dt=(-1)^{|\sigma|}\int_{R^N}(D^\sigma f)(t)\varphi(t)dt=\left\langle A^*\alpha_f,\varphi\right\rangle,\quad \varphi\in D(R^N), \tag{8}$$

тобто $A^*\alpha_f$ - є регулярною узагальненою функцією, що породжується локально сумованою функцією $(-1)^{|\sigma|}(D^\sigma f)(t)$. Виходячи з формули (8) визначимо похідну узагальненої функції $\alpha\in D'(R^N)$ таким чином:

$$\left\langle D^\sigma\alpha,\varphi\right\rangle=(-1)^{|\sigma|}\left\langle\alpha,D^\sigma\varphi\right\rangle,\quad \varphi\in D(R^N) \tag{9}$$

Можна переконатись в тому, що 1) відображення $D^\sigma:D'(R^N)\to D'(R^N)$ є неперервним; 2) довільна узагальнена функція є нескінченно диференційованою в узагальненому сенсі; 3) якщо $f\in C^{|\sigma|}(R^N)$, то узагальнена похідна від цієї функції співпадає зі звичайною похідною.

Розглянемо функцію Хевісайда $\theta(t)=\chi_{[0,\infty)}(t)$. Для неї одержимо:

$$\langle\theta',\varphi\rangle=-\langle\theta,\varphi'\rangle=-\int_R\theta(t)\varphi'(t)dt=-\int_{[0,\infty)}\varphi'(t)dt=-\varphi\Big|_0^\infty=\varphi(0)=\langle\delta,\varphi\rangle,\quad \varphi\in D(R^N),$$

отже, узагальнена похідна $\theta'=\delta$.

§ 4. Узагальнені функції повільного зростання.

Позначимо $S\left(R^N\right)$ множину функція з $C^\infty\left(R^N\right)$, які спадають при $|t|\to\infty$ разом зі своїми похідними швидше довільного степеня $|t|^{-1}$. Ця множина є лінійним простором. Розглянемо в цьому просторі послідовність норм $\left\{\|\cdot\|_p\right\}_{p=0}^\infty$, поклавши для $\varphi\in S\left(R^N\right)$

$$\|\varphi\|_p=\max_{t\in R^N}\left(1+|t|^2\right)^{\frac{p}{2}}\sum_{\nu\le p}\left|\left(D^\nu\varphi\right)(t)\right| \tag{10}$$

Зрозуміло, що $\|\varphi\|_p\le\|\varphi\|_{p+1},\quad p=\overline{0,\infty},\quad \varphi\in S\left(R^N\right)$.

Означення 8. Нехай $\varphi,\{\varphi_n\}_1^\infty\subset S\left(R^N\right)$. Послідовність $\{\varphi_n\}_1^\infty$ збігається до елемента $\varphi\in S\left(R^N\right)$ в просторі $S\left(R^N\right)$, якщо $\forall p\in Z_+:\|\varphi_n-\varphi\|_p\xrightarrow[n\to\infty]{}0$.

Можна перевірити, що $S\left(R^N\right)\supset D\left(R^N\right)$, але $S\left(R^N\right)=\overline{D\left(R^N\right)}$. Наприклад, функція $e^{-|t|^2}\in S\left(R^N\right)$, але $e^{-|t|^2}\notin D\left(R^N\right)$.

З означення збіжності в просторі $S\left(R^N\right)$ випливає, що операції заміни змінної та диференціювання є неперервними відображеннями цього простора в себе. Операція множення на неперервно-диференційовану функцію може виводити за межі даного простору, наприклад, $e^{-|t|^2}e^{|t|^2}=1\notin S\left(R^N\right)$. Отже множити можна на функції, що зростають не скоріше довільного полінома.

Означення 9. Узагальненою функцією повільного зростання називається довільний лінійний неперервний функціонал визначений на просторі швидко спадних основних функцій $S\left(R^N\right)$. Сукупність усіх узагальнених функцій повільного зростання позначається $S'\left(R^N\right)$. Аналогічно до простору $D'\left(R^N\right)$ узагальнених функцій в $S'\left(R^N\right)$ вводиться структура лінійного простору і збіжність.

Означення 10. Збіжність послідовності узагальнених функцій повільного зростання визначається як слабка збіжність функціоналів, тобто $\alpha_n\to\alpha\quad в\quad S'\left(R^N\right)$, якщо $\forall\varphi\in S\left(R^N\right):\langle\alpha_n,\varphi\rangle\to\langle\alpha,\varphi\rangle$.

Лінійний простір $S'\left(R^N\right)$ з даною збіжністю називається *простором узагальнених функцій повільного зростання.*

Так як $S\left(R^N\right)\supset D\left(R^N\right)$, то $S'\left(R^N\right)\subset D'\left(R^N\right)$, тобто довільна узагальнена функція повільного зростання є лінійним функціоналом над $D\left(R^N\right)$ і із збіжності в $S'\left(R^N\right)$ випливає збіжність в $D'\left(R^N\right)$.

§ 5. Перетворення Фур'є узагальнених функцій повільного зростання.

На основних функціях з $S\left(R^N\right)$ визначене перетворення Фур'є

$$F(\varphi(\xi))=(2\pi)^{\frac{-N}{2}}\int_{R^N}\varphi(t)\cdot e^{i(\xi,t)}dt,\quad \xi\in R^N \qquad (11)$$

При цьому функція $F(\varphi(\xi))$ - є обмеженою і неперервною на R^N.
Так як $\varphi\in S\left(R^N\right)$ спадає при $|t|\to\infty$ швидше довільного степеня $|t|^{-1}$, то, згідно з властивостями класичного перетворення Фур'є, одержимо $F(\varphi)\in C^\infty\left(R^N\right)$ і

$$\forall\nu\in Z_+^N:\quad \left(D^\nu F(\varphi(\xi))\right)(\xi)=(2\pi)^{\frac{-N}{2}}\int_{R^N}(it)^\nu\varphi(t)\cdot e^{i(\xi,t)}dt=F\left((it)^\nu\varphi\right)(\xi).$$

Довільна похідна $D^\nu\varphi$ основної функції входить до $L_1\left(R^N\right)$, тому є визначеним її класичне перетворення Фур'є

$$F\left(D^\nu\varphi(\xi)\right)(\xi)=(2\pi)^{\frac{-N}{2}}\int_{R^N}\left(D^\nu\varphi\right)(t)\cdot e^{i(\xi,t)}dt=(-i\xi)^\nu F(\varphi)(\xi).$$

З цього співвідношення випливає, що $F(\varphi)\in L_1\left(R^N\right)$, тому існує обернене перетворення Фур'є $F^{-1}(F(\varphi(\xi)))$, де

$$F^{-1}(\psi(t))=(2\pi)^{\frac{-N}{2}}\int_{R^N}\psi(t)\cdot e^{-i(\xi,t)}d\xi,\quad \psi\in L_1\left(R^N\right). \qquad (12)$$

Має місце теорема.

Теорема 5. (Без доведення) Перетворення Фур'є (11) є лінійним взаємно неперервним бієктивним відображенням $S\left(R^N\right)$ на $S\left(R^N\right)$. Оберненим до нього є обернене перетворення Фур'є (12).

Визначимо перетворення Фур'є на $S'\left(R^N\right)$. Перетворення Фур'є узагальненої функції $\alpha\in S'\left(R^N\right)$ визначається наступною рівністю:

$$\langle F(\alpha),\varphi\rangle=\langle\alpha,F(\varphi)\rangle,\quad \forall\varphi\in S\left(R^N\right). \qquad (13)$$

Згідно з теоремою 5 відображення $\varphi\to F(\varphi)$ лінійне і неперервне, то функціонал $F(\alpha)$, що визначається з рівності (13), є узагальненою функцією з $S'\left(R^N\right)$ і відображення $S'\left(R^N\right)\ni\alpha\to F(\alpha)\in S'\left(R^N\right)$ лінійне і неперервне в $S'\left(R^N\right)$.

З рівності Парсеваля для класичного перетворення Фур'є одержимо

$$\int_{R^N}\varphi(t)\cdot\overline{\psi(t)}dt=\int_{R^N}F(\varphi(\xi))\cdot\overline{F(\varphi(\xi))}d\xi,\quad \varphi,\psi\in S\left(R^N\right).$$

Звідси випливає, що перетворення Фур'є на $S'\left(R^N\right)$ є продовженням перетворення Фур'є визначеного на $S\left(R^N\right)$. Неважко довести, що $\overline{S\left(R^N\right)}=S'\left(R^N\right)$. Цей факт дозволяє стверджувати, що перетворення Фур'є (13) є лінійним бієктивним взаємно неперервним відображенням $S'(R^N)$ на $S'(R^N)$. Обернене перетворення визначається рівністю $F(\alpha(-t)) = F^{-1}(\alpha)$.

Перетворення Фур'є має в $S'(R^N)$ важливу властивість:

$$D^\nu F(\alpha) = F((it)^\nu \alpha), \quad F(D^\nu \alpha) = (-i\xi)^\nu F(\alpha), \quad \forall \alpha \in S'(R^N), \forall \nu \in Z_+^N .$$

Вправа. Довести останню рівність спираючись на формулу (13).

Нарешті обчислимо, для прикладу, перетворення Фур'є дельта-функції δ_0. За означенням (13), для довільної точки простору $a \in R^N$ маємо:

$$\langle F(\delta_a), \varphi \rangle = \langle \delta_a, F(\varphi) \rangle = F(\varphi(a)) = (2\pi)^{\frac{-N}{2}} \int_{R^N} \varphi(t) \cdot e^{i(a,t)} dt, \quad \xi \in R^N =$$

$$= \left\langle (2\pi)^{\frac{-N}{2}} e^{i(a,t)}, \varphi \right\rangle, \quad \varphi \in S(R^N).$$

Таким чином, $F(\delta_a) = (2\pi)^{\frac{-N}{2}} e^{i(a,t)}$. Отже, для $a = 0$ матимемо: $F(\delta_0) = (2\pi)^{\frac{-N}{2}}$. Застосовуючи до цієї рівності обернене перетворення Фур'є, одержимо, що $F(\alpha_1) = (2\pi)^{\frac{N}{2}} \delta_0$, де α_1- регулярна узагальнена функція, що породжується функцією $f(t) = 1, \quad t \in R^N$.

Література

1. Ю.М.Березанский, Г.Ф.Ус, З.Г.Шефтель Функциональный анализ.- К.:Вища школа, 1990. -600с.

2. Л.А.Люстерник, В.И.Соболев Краткий курс функционального анализа.- М.: Высш. Школа, 1982, -271 с.

3. А.М.Колмогоров, С.В.Фомін Елементи теорії функцій та функціонального аналізу. -К.:Вища школа, 1974, - 456 с.

4. В.В.Городецкий, Н.И.Нагнибеда, П.П.Настасиев Методы решения задач по функциональному анализу. -К.:Вища школа, 1990, - 479 с.

5. А.А.Кирилов, А.Д.Гвишиани Теоремы и задачи функционального анализа.-М.: Наука, -1979, 382 с.

6. В.А.Треногин, Б.М.Писаревский, Т.С.Соболева Задачи и упражнения по функциональному анализу.-М.: Наука, -1984, 256 с.

7. Б.З.Вулих Ведение в функциональный анализ.-М.: Наука, -1967, 415 с.

З М І С Т

ВСТУП... 1

ЧАСТИНА І. МІРА І ІНТЕГРАЛ.. 4

Розділ І. Міра. Вимірні множини та їх властивості.................................... 4
§1. Системи множин. Кільце, напівкільце. 4
§ 2. Міра плоских множин. 6
§ 3. Вимірні множини та їхні властивості.. 8
Розділ ІІ. Вимірні функції та їхні властивості. 10
§ 1. Вимірні функції. 10
§ 2. Збіжність послідовностей вимірних функцій.. 12
Розділ ІІІ. Інтеграл Лебега та його властивості....................................... 14
§ 1. Інтеграл Лебега простої функції. 14
§ 2. Інтеграл лебега 15
§ 3. Граничний перехід під знаком інтеграла Лебега................................... 17
§ 4. Зв'язок інтеграла Лебега і інтеграла Рімана. 19
§ 5. Теорема Фубіні.. 20
§ 6. Заряди. Теорема Радона-Нікодима. 23

ЧАСТИНА ІІ. ЛІНІЙНІ НОРМОВАНІ ПРОСТОРИ. 26

Розділ IV. Банахові простори. 26
§ 1. Лінійний топологічний простір.. 26
§ 2. Лінійні нормовані простори. Банахові простори..................................... 28
§ 3. Факторизація... 30
§ 4. Приклади банахових просторів 30
§ 5. Простори сумовних функцій та послідовностей...................................... 32
§ 6. Збіжність в $L_p(R, d\mu)$ *36*
§ 7. Геометрія банахових просторів.. 39
Розділ V. Гільбертові простори.. 41
§ 1. Передгільбертові та гільбертові простори. 41
§ 2. Приклади гільбертових просторів 43
§ 3. Теорема про проекцію. Ортогональні підпростори.................................. 44
§ 4. Ортонормовані системи векторів. Ортонормовані базиси....................... 45
§ 5. Ортоганалізація системи векторів. 47
§ 6. Ортогональні поліноми... 48

ЧАСТИНА ІІІ. ЛІНІЙНІ ОПЕРАТОРИ ТА ФУНКЦІОНАЛИ...................... 49

Розділ VI. Лінійні неперервні функціонали. 49
§ 1. Означення та властивості лінійного функціоналу. 49
§ 2. Спряжений простір. 50

§ 3. Продовження лінійних функціоналів. 51
§ 4. Наслідки з теореми Хана-Банаха. 53
§ 5. Загальний вигляд лінійних функціоналів 55
у просторах послідовностей. 55
§ 6. Загальний вигляд лінійних функціоналів 57
§ 8. Другий спряжений простір. Рефлексивність. 59
§ 9. Теорема Банаха-Штейнгауза. Слабка збіжність. 60
РОЗДІЛ VII. ЛІНІЙНІ ОПЕРАТОРИ. 63
§ 1. Означення та приклади лінійних операторів 63
§ 2. Простір лінійних неперервних операторів. 65
§ 3. Добуток операторів. Обернений оператор. 67
§ 4. Спряжений оператор. 68
§ 5. Лінійні оператори в гільбертовому просторі. 70
§ 6. Матричне представлення лінійних операторів 71
§ 7. Спектр і резольвента лінійного оператора. 74
§ 8. Компактні оператори. 76
§ 9. Теорія Рісса-Шаудера 78
§ 10. Спектр компактного оператора. 81
§ 11. Лінійні інтегральні рівняння. 82
РОЗДІЛ VIII. УЗАГАЛЬНЕНІ ФУНКЦІЇ 86
§ 1. Простір основних функцій 86
§ 2. Простір узагальнених функцій 88
§ 3. Операції над узагальненими функціями 90
§ 4. Узагальнені функції повільного зростання 92
§ 5. Перетворення Фур'є 92
Література 94

Навчальне видання

Навчальний посібник

Лекції з функціонального аналізу

для спеціальності "Прикладна математика"

Укладач: Олійник Леонід Олексійович

Підписано до друку___________________2000р. Формат__________________
Обсяг______________д.а. Тираж_________________екз. Заказ______________
Видавництво ДДТУ
51918 м.Дніпродзержинськ, вул Дніпробудівська, 2.