

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

В.Г. Самойленко

В.А. Бородін

Г.В. Верьовкіна

А.В. Ловейкін

І.Б. Романенко

КОМПЛЕКСНИЙ АНАЛІЗ

ПРИКЛАДИ І ЗАДАЧІ

За редакцією В.Г. Самойленка

Навчальний посібник



УДК 543.395(075.8)
ББК 24.47я73
К90

Рецензенти:

Чл.-кор. НАН України, д-р фіз.-мат. наук, проф. С.І.Ляшко
Чл.-кор. НАН України, д-р фіз.-мат. наук, проф. А.Г.Нікітін

Рекомендовано до друку
вченою радою механіко-математичного факультету
(протокол № 4 від 14 грудня 2009 року)

Самойленко В.Г.

К90 Комплексний аналіз. Приклади і задачі: навчальний посібник /
В.Г.Самойленко, В.А.Бородін, Г.В.Верьовкіна, А.В.Ловейкін, І.Б.Романенко
/ За редакцією В.Г.Самойленка. – К: Видавничо-поліграфічний центр
"Київський університет", 2010. – 224 с.
ISBN 978-966-439-280-5

Розглянуто задачі з основних розділів комплексного аналізу та його застосувань (комплексні числа та дії над ними, топологія комплексної площини, диференціювання функцій комплексної площини, гармонійні функції, конформні відображення в комплексній площині за допомогою степеневі, експоненціальної функцій, функції Жуковського, тригонометричних функцій та обернених до них.

Значну увагу також приділено розгляду поняття інтеграла від функцій комплексної змінної, степеневим рядам та рядам Лорана, теорії лишків та її застосуванню до обчислення різних типів інтегралів від функцій комплексної змінної, перетворенню Лапласа та його застосуванню. Для зручності користування матеріал посібника розбито по темам, на початку кожної з яких вміщено короткий виклад основних теоретичних положень, подано приклади розв'язування задач з теми заняття та запропоновано завдання для аудиторної та самостійної роботи.

Для студентів і викладачів математичних спеціальностей університетів. Може бути корисним також студентам і викладачам математичних спеціальностей інших вищих навчальних закладів.

УДК 543.395(075.8)
ББК 24.47я73

ISBN 978-966-439-280-5

Самойленко В.Г., Бородін В.А.,
Верьовкіна Г.В.,
Ловейкін А.В., Романенко І.Б., 2010

Зміст

Передмова	8
1 Комплексні числа та дії над ними	10
1.1 Основні поняття	10
1.2 Приклади розв'язування задач	12
1.3 Питання для перевірки теоретичних знань	14
1.4 Завдання для аудиторної роботи	14
1.5 Завдання для самостійної роботи	14
2 Стереографічна проекція і топологія в комплексній площині	16
2.1 Теоретичні відомості	16
2.2 Приклади розв'язування задач	19
2.3 Питання для перевірки теоретичних знань	20
2.4 Завдання для аудиторної роботи	21
2.5 Завдання для самостійної роботи	22
3 Диференціювання функцій комплексної змінної. Умови Коші-Рімана. Геометричний зміст модуля та аргумента похідної	23
3.1 Теоретичні відомості	23
3.2 Приклади розв'язування задач	32
3.3 Питання для перевірки теоретичних знань	34
3.4 Завдання для аудиторної роботи	35
3.5 Завдання для самостійної роботи	36
4 Гармонічні функції	37
4.1 Теоретичні відомості	37
4.2 Приклади розв'язування задач	39
4.3 Питання для перевірки теоретичних знань	39
4.4 Завдання для аудиторної та самостійної роботи	40
4.5 Приклади задач для модульної контрольної роботи (перший модуль)	41
5 Лінійні та дробово-лінійні відображення	42
5.1 Теоретичні відомості	42
5.1.1 Лінійні відображення	42
5.1.2 Дробово-лінійні відображення та їх основні властивості	43
5.2 Приклади розв'язування задач	46
5.3 Питання для перевірки теоретичних знань	49
5.4 Завдання для аудиторної роботи	50
5.5 Завдання для самостійної роботи	51

6	Степенева функція	53
6.1	Теоретичні відомості	53
6.2	Приклади розв'язування задач	54
6.3	Питання для перевірки теоретичних знань	56
6.4	Завдання для аудиторної роботи	56
6.5	Завдання для самостійної роботи	56
7	Експоненціальна функція та логарифм	58
7.1	Теоретичні відомості	58
7.2	Приклади розв'язування задач	60
7.3	Питання для перевірки теоретичних знань	63
7.4	Завдання для аудиторної роботи	63
7.5	Завдання для самостійної роботи	64
8	Функція Жуковського та обернена до неї	65
8.1	Теоретичні відомості	65
8.2	Приклади розв'язування задач	67
8.3	Питання для перевірки теоретичних знань	70
8.4	Завдання для аудиторної роботи	70
8.5	Завдання для самостійної роботи	71
9	Тригонометричні та гіперболічні функції	73
9.1	Теоретичні відомості	73
9.2	Приклади розв'язування задач	77
9.3	Питання для перевірки теоретичних знань	81
9.4	Завдання для аудиторної роботи	81
9.5	Завдання для самостійної роботи	81
9.6	Приклади задач для модульної контрольної роботи (другий модуль)	82
10	Шляхи та криві. Інтеграл вздовж шляху	83
10.1	Теоретичні відомості	83
10.2	Приклади розв'язування задач	91
10.3	Питання для перевірки теоретичних знань	93
10.4	Завдання для аудиторної роботи	94
10.5	Завдання для самостійної роботи	94
11	Теорема Коші. Інтегральна формула Коші. Інтеграл типу Коші	96
11.1	Теоретичні відомості	96
11.2	Приклади розв'язування задач	102
11.3	Питання для перевірки теоретичних знань	108
11.4	Завдання для аудиторної роботи	108
11.5	Завдання для самостійної роботи	110

12 Степеневі ряди голоморфних функцій	112
12.1 Теоретичні відомості	112
12.2 Приклади розв'язування задач	114
12.3 Питання для перевірки теоретичних знань	116
12.4 Завдання для аудиторної роботи	116
12.5 Задачі для самостійної роботи	117
13 Ряди Лорана голоморфних функцій. Ізольовані особливі точки однозначного характеру та їх класифікація	119
13.1 Теоретичні відомості	119
13.1.1 Ряди Лорана	119
13.1.2 Ізольовані особливі точки	120
13.1.3 Класифікація голоморфних функцій по їх особливих точках	122
13.2 Приклади розв'язування задач	122
13.3 Питання для перевірки теоретичних знань	127
13.4 Завдання для аудиторної роботи	128
13.5 Завдання для самостійної роботи	129
14 Лишки голоморфних функцій. Теорема Руше	131
14.1 Теоретичні відомості	131
14.1.1 Означення лишків та формули для їх обчислення	131
14.1.2 Принцип аргументу	132
14.2 Приклади розв'язування задач	133
14.3 Питання для перевірки теоретичних знань	134
14.4 Завдання для аудиторної роботи	134
14.5 Завдання для самостійної роботи	135
15 Теорема Коші про лишки та їх застосування	136
15.1 Теоретичні питання	136
15.2 Приклади розв'язування задач	136
15.3 Питання для перевірки теоретичних знань	141
15.4 Завдання для аудиторної роботи	141
15.5 Завдання для самостійної роботи	142
15.6 Приклади задач для модульної контрольної роботи (третій модуль)	143
16 Інтеграли від функцій з сингулярними особливостями	144
16.1 Попередні зауваження	144
16.2 Приклади розв'язування задач	144
16.3 Питання для перевірки теоретичних знань	149
16.4 Задачі для аудиторної роботи	150
16.5 Завдання для самостійної роботи	150

17 Застосування теорії лишків і леми Жордана до обчислення інтегралів. Інтеграли у сенсі головного значення	151
17.1 Теоретичні питання	151
17.1.1 Лема Жордана	151
17.1.2 Інтеграл типу Коші у сенсі головного значення	151
17.1.3 Поняття інтегралу в сенсі головного значення	154
17.1.4 Обчислення інтегралів у сенсі головного значення для однозначних функцій	156
17.2 Приклади розв'язування задач	158
17.3 Питання для перевірки теоретичних знань	172
17.4 Завдання для аудиторної роботи	172
17.5 Завдання для самостійної роботи	173
18 Інтеграли від функцій, що містять експоненту. Обчислення сум рядів	175
18.1 Попередні зауваження	175
18.2 Приклади розв'язування задач	175
18.3 Питання для перевірки теоретичних знань	179
18.4 Завдання для аудиторної роботи	179
18.5 Завдання для самостійної роботи	180
18.6 Приклади задач для модульної контрольної роботи (четвертий модуль)	181
19 Операційне числення та його застосування	183
19.1 Вступ	183
19.2 Теоретичні відомості	189
19.2.1 Перетворення Лапласа	189
19.2.2 Основні властивості перетворення Лапласа	191
19.2.3 Приклади перетворень Лапласа	194
19.2.4 Питання для перевірки теоретичних знань	196
19.2.5 Завдання для самостійної роботи	196
19.3 Визначення оригіналу за зображенням	198
19.3.1 Формула Мелліна	198
19.3.2 Обчислення інтеграла Мелліна	199
19.3.3 Питання для перевірки теоретичних знань	203
19.3.4 Завдання для самостійної роботи	203
19.4 Розв'язування звичайних диференціальних рівнянь операційним методом	204
19.4.1 Приклади розв'язування задач	205
19.4.2 Питання для перевірки теоретичних знань	207
19.4.3 Завдання для самостійної роботи	207

19.5	Розв'язування диференціальних рівнянь із запізненням операційним методом	208
19.5.1	Питання для перевірки теоретичних знань	209
19.5.2	Завдання для самостійної роботи	210
19.6	Розв'язування інтегральних рівнянь операційним методом	210
19.6.1	Приклад розв'язання задачі	210
19.6.2	Питання для перевірки теоретичних знань	211
19.6.3	Завдання для аудиторної роботи	211
19.7	Розв'язування крайових задач математичної фізики операційним методом	212
19.7.1	Приклади розв'язування задач	213
19.7.2	Питання для перевірки теоретичних знань	216
19.7.3	Завдання для самостійної роботи	216
19.8	Обчислення сум рядів операційним методом	218
19.8.1	Приклад розв'язування задач	219
19.8.2	Питання для перевірки теоретичних знань	219
19.8.3	Завдання для самостійної роботи	219
Список літератури		220

Передмова

Згідно діючого навчального плану студенти механіко-математичного факультету вивчають курс комплексного аналізу протягом п'ятого і шостого навчальних семестрів. В процесі його викладання значна увага приділяється вивченню основних понять комплексного аналізу і розвитку навичок студентів з розв'язування типових задач з комплексного аналізу. При цьому детально вивчаються такі розділи і поняття комплексного аналізу як комплексні числа та дії над ними, топологія комплексної площини, диференціювання функцій комплексної змінної та гармонійні функції, конформні відображення за допомогою основних функцій комплексної змінної та обернених до них, інтегрування функцій комплексної змінної, степеневі ряди та ряди Лорана від функцій комплексної змінної, теорія лишків та її застосування до обчислення інтегралів і знаходження сум рядів. Крім того, для самостійного опанування студентам пропонується тема, що стосується перетворення Лапласа та його застосування до розв'язування різних математичних задач таких як, знаходження розв'язків звичайних диференціальних рівнянь, диференціальних рівнянь з запізненням, інтегральних рівнянь та крайових задач математичної фізики. Саме такі теми і знайшли висвітлення в даному навчальному посібнику.

Матеріал посібника поділено на окремі теми, на початку кожної з яких подано основні теоретичні відомості з даної теми, розв'язки типових задач та запропоновано питання для перевірки теоретичних знань студентів. До кожної теми запропоновано завдання для аудиторної та самостійної роботи студентів.

Під час вивчення курсу з комплексного аналізу студенти мають виконати чотири модульні контрольні роботи (по дві в кожному семестрі). В посібнику подано приклади завдань для модульних контрольних робіт.

Під час підготовки даного навчального посібника використано досвід викладання цього курсу на механіко-математичному факультеті Київського національного університету імені Тараса Шевченка протягом останніх десяти років та навчально-методичну літературу, список якої подано в кінці посібника. При складанні завдань для аудиторної та самостійної роботи використано навчальні посібники та методичні розробки [6, 8, 13, 14, 19, 22, 38 – 40].

Даний посібник розроблено для підготовки до практичних занять і самостійної роботи студентів з комплексного аналізу. Він може бути корисним також викладачам Київського національного університету імені Тараса Шевченка та інших вузів України при підготовці до проведення ними

практичних занять з комплексного аналізу.

Користуючись нагодою, автори висловлюють щирю подяку професору кафедри математичної фізики механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка доктору фізико-математичних наук, професору Т.А. Мельнику, професору кафедри обчислювальної математики факультету кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка доктору фізико-математичних наук, професору О.Ю. Грищенку, доценту кафедри вищої математики Національного університету харчових технологій, кандидату фізико-математичних наук, доценту І.І. Юрику та кандидату фізико-математичних наук Ю.І. Самойленко за критичні зауваження і цінні поради.

Вважаємо своїм приємним обов'язком висловити глибоку подяку рецензентам цієї книги член-кореспондентам НАН України, професорам С.І. Ляшку і А.Г. Нікітіну, чий критичні зауваження і дружні поради безумовно сприяли її покращенню.

Автори

Тема 1

Комплексні числа та дії над ними

1.1 Основні поняття

Розглянемо множину $\mathbb{C}$ усіх можливих впорядкованих пар дійсних чисел (x, y) , для елементів якої визначено операції додавання та множення згідно правил

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2). \quad (1.1)$$

$$(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1). \quad (1.2)$$

При цьому два елементи $z_1 = (x_1, y_1), z_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{C}$ вважатимемо рівними тоді і лише тоді, коли $x_1 = x_2, y_1 = y_2$.

Множина $\mathbb{C}$ з операціями додавання та множення (1.1), (1.2) називається *множиною комплексних чисел*, а кожен її елемент – *комплексним числом*.

Користуючись означенням операцій додавання та множення (1.1), (1.2), можна довести такі властивості:

1. Множина $\mathbb{C}$ з операціями (1.1), (1.2) утворює поле. При цьому для кожного елемента даного поля $z = (x, y) \neq (0, 0)$ обернений відносно множення елемент, число z^{-1} , можна визначити за правилом $z^{-1} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, -\frac{y}{x^2 + y^2} \right)$. На основі цієї рівності вводиться операція ділення комплексних чисел $z_k = (x_k, y_k), k = 1, 2$,

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 z_2^{-1} = \left(\frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right), \quad z_2 \neq (0, 0). \quad (1.3)$$

2. Множина $\{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ є замкнутою відносно операцій (1.1), (1.2) і утворює поле, яке ізоморфне полю дійсних чисел із звичайними операціями додавання та множення. Тому цю множину позначають символом $\mathbb{R}$, а числа $(x, 0) = x$. Отже, $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

3. Для кожного $y \in \mathbb{R}$ виконується рівність $(0, y) = (y, 0)(0, 1) = y(0, 1)$. Число $(0, 1)$ називається уявною одиницею і позначається $(0, 1) = i$, оскільки це число має таку властивість: $(0, 1)(0, 1) = -1$.

4. Будь-яке комплексне число $z = (x, y)$ можна записати наступним чином

$$z = (x, y) = (x, 0) + (y, 0)(0, 1) = x + iy. \quad (1.4)$$

Запис (1.4) називають *декартовою* або *алгебраїчною формою запису* комплексного числа.

Комплексное число $\bar{z} = x - iy$ називається (*комплексно*) *спряженим* до числа $z = x + iy$.

Число $x = \operatorname{Re} z$ називається *дійсною частиною*, а число $y = \operatorname{Im} z$ – *уявною частиною* комплексного числа z .

Оскільки комплексні числа – це впорядковані пари дійсних чисел, то їх природно зображати точками площини $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1$ згідно правила, що запропоновано Гауссом: довільному комплексному числу $z = x + iy$ ставиться у відповідність точка площини $\mathbb{R}^2$ з абсцисою x та ординатою y , і навпаки (рис.1.1).

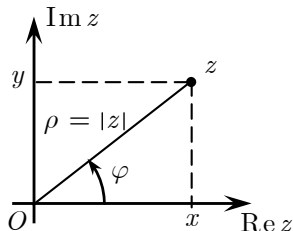


Рис. 1.1

Якщо в площині $\mathbb{R}^2$ визначити операції за правилами (1.1), (1.2), то вона утворить поле, що ізоморфно полю комплексних чисел. Така площина називається *комплексною*.

В комплексному аналізі зручно ототожнювати поняття комплексної площини та поля комплексних чисел, а тому в подальшому кожне число $z \in \mathbb{C}$ називається *точкою комплексної площини*.

Нехай $z = x + iy$ – деяка точка комплексної площини $\mathbb{C}$ (див. рис.1.1), а (ρ, φ) – полярні координати точки $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Величина ρ , де $\rho \in [0; +\infty)$, називається *модулем комплексного числа z* і позначається $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$. За цим $|z| = 0$ тоді і лише тоді, коли $z = 0$.

Число φ , де $\varphi \in (-\infty; +\infty)$, називається *аргументом комплексного числа $z \neq 0$* . Для $z = 0$ значення аргументу φ невизначене.

Аргумент будь-якого комплексного числа $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ визначається з точністю до $2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Його значення можна знайти, розв'язавши систему тригонометричних рівнянь

$$\cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\operatorname{Im} z}{|z|}. \quad (1.5)$$

Множина всіх розв'язків рівнянь (1.5) позначається $\operatorname{Arg} z$.

Значення аргументу φ , що задовольняє нерівність $0 \leq \varphi < 2\pi$ називається *головним* і позначається $\arg z$ (іноді в літературі зустрічається інша умова $-\pi < \varphi \leq \pi$).

Фактично

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Скориставшись залежністю між декартовими та полярними координатами, для довільного комплексного числа $z \neq 0$ одержимо *тригонометричну*

форму запису комплексних чисел

$$z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi). \quad (1.6)$$

Якщо взяти до уваги *формулу Ейлера*

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi,$$

то комплексне число $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ можна зобразити у такій формі

$$z = |z|e^{i\varphi}, \quad (1.7)$$

яка також використовується для запису комплексних чисел і має назву *показникової форми запису*.

Якщо декартова форма запису комплексних чисел зручна при виконанні операцій додавання та віднімання, то тригонометрична форма запису комплексних чисел є зручною при знаходженні добутку та частки від ділення комплексних чисел. Дійсно, для комплексних чисел

$$z_k = |z_k|(\cos \arg z_k + i \sin \arg z_k), \quad k = 1, 2,$$

згідно визначення операції множення (1.2) знаходимо

$$z_1 z_2 = |z_1| |z_2| (\cos(\arg z_1 + \arg z_2) + i \sin(\arg z_1 + \arg z_2)), \quad (1.8)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} (\cos(\arg z_1 - \arg z_2) + i \sin(\arg z_1 - \arg z_2)), \quad z_2 \neq 0. \quad (1.9)$$

Скориставшись формулою (1.8) для обчислення n -го ступеня комплексного числа $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, одержимо *формулу Муавра*

$$z^n = (|z|(\cos \varphi + i \sin \varphi))^n = |z|^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi). \quad (1.10)$$

Коренем степеня n , де $n = 2, 3, \dots$, з комплексного числа $z \neq 0$ називається таке комплексне число w , що $w^n = z$. Скориставшись тригонометричною формою запису комплексних чисел z, w та формулою Муавра (1.10), комплексне число w можна визначити таким чином

$$w = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \frac{\arg z + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\arg z + 2k\pi}{n} \right), \quad k = \overline{0, n-1}. \quad (1.11)$$

Якщо корені n -го степеня з комплексного числа z ($z \neq 0$) зобразити точками комплексної площини $\mathbb{C}$, то ці точки будуть знаходитись у вершинах правильного n -кутника, який вписано в коло з центром у точці $z = 0$ та радіуса $\sqrt[n]{|z|}$. Зауважимо також, що $\sqrt[n]{0} = 0$ для довільного цілого додатного числа n .

1.2 Приклади розв'язування задач

1.2.1. З'ясувати, за яких умов виконується рівність $\operatorname{Re}(z_1 z_2) = \operatorname{Re} z_1 \cdot \operatorname{Re} z_2$.

▷ Запишемо числа z_1 та z_2 у тригонометричній формі

$$z_k = \rho_k (\cos \varphi_k + i \sin \varphi_k), \quad \varphi_k = \arg z_k, \quad k = 1, 2.$$

Тоді отримаємо, що

$$\operatorname{Re}(z_1 z_2) = \operatorname{Re}[\rho_1 \rho_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))] = \rho_1 \rho_2 \cos(\varphi_1 + \varphi_2) = \rho_1 \rho_2 (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2).$$

З іншого боку, $\operatorname{Re} z_1 \cdot \operatorname{Re} z_2 = \rho_1 \rho_2 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2$.

Звідси можна встановити, що необхідна рівність виконується, якщо $\rho_1 \rho_2 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 = 0$, або, коли $\rho_1 \sin \varphi_1 = \operatorname{Im} z_1 = 0$ чи $\rho_2 \sin \varphi_2 = \operatorname{Im} z_2 = 0$, тобто $z_1 \in \mathbb{R}$ або $z_2 \in \mathbb{R}$. $\triangleleft$

1.2.2. Довести тотожність $|a + b|^2 + |a - b|^2 = 4|a|^2$, якщо $|a| = |b|$.

▷ Використаємо очевидні властивості: $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$, $z\overline{z} = |z|^2$. Тоді матимемо $|a + b|^2 + |a - b|^2 = (a + b)(\overline{a + b}) + (a - b)(\overline{a - b}) = a\overline{a} + a\overline{b} + b\overline{a} + b\overline{b} + a\overline{a} - a\overline{b} - b\overline{a} + b\overline{b} = 2(a\overline{a} + b\overline{b}) = 2(|a|^2 + |b|^2) = 4|a|^2$, бо $|a| = |b|$. $\triangleleft$

1.2.3. Довести, що $|\frac{z}{|z|} - 1| \leq \arg z$, $z \neq 0$.

▷ Нехай $z/|z| = w$. Тоді w – це комплексне число, що лежить на одиничному колі з центром у початку координат (рис.1.2). Цьому числу відповідає вектор, що з'єднує початок координат та точку w , який умовно позначимо $\vec{Ow}$.

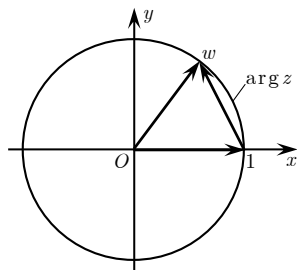


Рис. 1.2

Нехай комплексному числу 1 відповідає вектор $\vec{O1}$. Оскільки додавання та віднімання комплексних чисел аналогічне додаванню та відніманню векторів, то комплексному числу $\zeta = w - 1 = z/|z| - 1$ буде відповідати вектор, що дорівнює $\vec{Ow} - \vec{O1}$. Цей вектор, що з'єднує точки 1 та w , позначимо як вектор $\vec{1w}$. Тоді $|\zeta| = |\vec{1w}|$.

Оскільки точки 1 та w лежать на одиничному колі, то довжина дуги, що з'єднує ці точки, дорівнює (радіальній) величині кута $\angle 1Ow$, який у свою чергу дорівнює $\arg w = \arg z$ (див. означення). Так як довжина відрізка, який з'єднує дві точки, завжди не перевищує довжини довільної кривої, що з'єднує ті самі точки, то маємо необхідну нерівність. При цьому дана нерівність буде перетворюватися у рівність лише тоді, коли $z \in \mathbb{R}_+$. В інших випадках нерівність буде строгою. $\triangleleft$

1.2.4. Розв'язати рівняння $z^{n-1} = \bar{z}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$.

▷ Неважко помітити, що число $z = 0$ є розв'язком даного рівняння. Тому будемо вважати, що $z \neq 0$. Скориставшись рівністю $\bar{z} = |z|^2/z$, з рівняння $z^{n-1} = \bar{z}$ отримаємо еквівалентне

$$z^n = |z|^2. \quad (1.12)$$

З останньої рівності випливає, що $z^n \in \mathbb{R}_+$ (додатне). Оскільки модулі рівних чисел теж рівні, то маємо $|z|^{n-2} = 1$ або $|z| = 1$, бо $n > 2$.

Скориставшись отриманими умовами на z^n та $|z|$, з рівності (1.12) отримаємо остаточне рівняння $z^n = 1$, розв'язками якого є числа

$$z_k = \cos \frac{2\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n}, \quad k = \overline{0, n-1}.$$

◁

1.3 Питання для перевірки теоретичних знань

Комплексні числа та арифметичні дії над ними. Комплексна площа. Геометрична інтерпретація комплексних чисел. Форми запису комплексних чисел. Модуль та аргумент комплексного числа, головне значення аргумента. Формула Ейлера. Формула Муавра. Корінь n -степеня з комплексного числа.

1.4 Завдання для аудиторної роботи

1.4.1. Виконати дії:

$$a) i^n, n \in \mathbb{Z}; \quad b) (2+i)/(2-i); \quad c) \left(\frac{2+i^5}{1+i^{19}} \right)^3.$$

1.4.2. Довести такі твердження:

$$a) \overline{ab} = \overline{a} \cdot \overline{b}; \quad b) \text{ якщо } |a| = 1, \text{ то } \overline{a} = a^{-1}; \quad c) \operatorname{Re} z = \frac{z + \overline{z}}{2}, \operatorname{Im} z = \frac{z - \overline{z}}{2i}.$$

1.4.3. Знайти модулі та аргументи чисел, записати їх у тригонометричній та показниковій формах: i ; -1 ; $1+i$; $(1+i\sqrt{3})/2$; 0 .

1.4.4. Довести такі твердження. Нехай $|z_1| = |z_2| = |z_3| = r \neq 0$. Тоді:

$$a) \left| \frac{z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1}{z_1 + z_2 + z_3} \right| = r, \text{ якщо } |z_1| = |z_2| = |z_3| \neq 0;$$

$$b) z_1, z_2, z_3 - \text{вершини правильного трикутника, якщо } z_1 + z_2 + z_3 = 0.$$

1.4.5. Дано три вершини z_1, z_2, z_3 паралелограма, записані у порядку обходу його межі. Знайти його четверту вершину z_4 .

1.4.6. Розв'язати рівняння:

$$a) z^n = a, \quad a > 0; \quad b) \prod_{k=0}^n (\cos kx + i \sin kx) = 1, \quad \text{де } x - \text{дійсне}.$$

$$1.4.7. \text{ Знайти суми: } \sum_{k=0}^n \cos kx, \quad \sum_{k=0}^n \sin kx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$1.4.8. \text{ Розв'язати систему рівнянь } z^3 + w^5 = 0, \quad z^2 \overline{w}^4 = 1.$$

$$1.4.9. \text{ Записати } \cos 5x, \sin 5x \text{ через } \cos x, \sin x.$$

1.4.10. Знайти помилку в перетвореннях:

$$2\pi = \pi + \pi = \arg(-1) + \arg(-1) = \arg(-1)(-1) = \arg 1 = 0.$$

1.5 Завдання для самостійної роботи

1.5.1. Виконати дії:

$$a) \frac{1}{i}; \quad b) \frac{1-i}{1+i}; \quad c) \frac{2}{1-3i}; \quad d) (1+i\sqrt{3})^3.$$

1.5.2. Знайти модулі та аргументи чисел, записати їх у тригонометричній формі: $3i$; -2 ; $1+i$; ib , де $b \neq 0$; $a+ib$, де $a \neq 0$.

1.5.3. Знайти всі розв'язки рівнянь:

a) $z^3 = 1$; b) $z^4 = i$; c) $z^2 = 1 - i$;

d) $z^5 = -4 + 3i$; e) $z^{n-1} + z^{n-2} + \dots + z + 1 = 0$.

1.5.4. Довести нерівності:

a) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$; b) $|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$;

c) $|z - 1| \leq ||z| - 1| + |z| \arg z$.

1.5.5. Довести рівності:

a) $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$;

b) $|1 - \overline{z_1}z_2|^2 - |z_1 - z_2|^2 = (1 + |z_1z_2|)^2 - (|z_1| + |z_2|)^2$.

1.5.6. Довести рівність

$$\overline{\left(\frac{a}{b}\right)} = \frac{\overline{a}}{\overline{b}}, \quad \text{де } b \neq 0.$$

1.5.7. Обчислити вираз $z^n + \frac{1}{z^n}$, $n \in \mathbb{N}$, $z \neq 0$, якщо $z + \frac{1}{z} = 1$.

1.5.8. Довести, що якщо виконуються рівності $|z_1| = |z_2| = |z_3| = |z_4|$, $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0$, то точки z_1, z_2, z_3, z_4 або попарно збігаються, або є вершинами прямокутника.

1.5.9. Знайти вершини правильного n -кутника з центром у точці $z = 0$, якщо одна з його вершин лежить у точці $z = z_1 \neq 0$.

1.5.10. Визначити умову, при якій три різні точки z_1, z_2, z_3 належать одній прямій.

1.5.11. Знайти модулі та головні значення аргументів комплексних чисел: e^{2+i} ; e^{2-3i} ; e^{3+4i} ; e^{-3-4i} .

1.5.12. Знайти суми:

a) $\sum_{k=0}^n \cos(2k+1)x$, $\sum_{k=0}^n \sin(2k+1)x$; b) $\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sin kx$;

c) $\sum_{k=0}^n \cos(\alpha + k\beta)$, $\sum_{k=0}^n \sin(\alpha + k\beta)$.

1.5.13. Знайти помилку в перетворенні:

$$1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1)^2} = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = i \cdot i = -1.$$

Тема 2

Стереографічна проекція і топологія в комплексній площині

2.1 Теоретичні відомості

Наглядною моделлю комплексної площини $\mathbb{C}$ є сфера, яку називають *сферою комплексних чисел* (комплексною сферою) або *сферою Рімана*. Ця сфера будується наступним чином. Нехай у тривимірному евклідовому просторі з прямокутною декартовою системою координат $O\xi\eta\zeta$ маємо сферу S радіуса 1 із центром у початку координат $O(0, 0, 0)$. Розглянемо комплексну площину $\mathbb{C}$, що збігається з площиною $O\xi\eta$, і нехай вісь Ox збігається з віссю $O\xi$, а вісь Oy – з віссю $O\eta$ (рис.2.1).

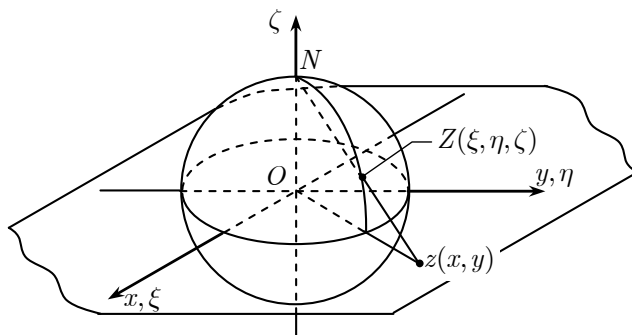


Рис. 2.1

Кожній точці $z = (x, y)$ комплексної площини $\mathbb{C}$ поставимо у відповідність деяку точку $Z(\xi, \eta, \zeta)$ сфери S , що є точкою перетину сфери S і променя, який з'єднує точку $N(0, 0, 1)$ (північний полюс сфери S) з точкою $z = (x, y)$ комплексної площини $\mathbb{C}$. При цьому точка $Z(\xi, \eta, \zeta)$ називається *стереографічним образом точки $z = (x, y)$* , а відповідність $z \rightarrow Z$ – *стереографічною проекцією*.

Очевидно, що стереографічна проекція визначає взаємно однозначну відповідність між точками комплексної площини та точками сфери S без її північного полюса – точки N .

Формули стереографічного проектування, що дають зв'язок між координатами точки $Z(\xi, \eta, \zeta)$ сфери S та координатами точки $z = (x, y)$ на

комплексній площині $\mathbb{C}$, мають вигляд

$$\xi = \frac{2x}{1 + |z|^2}, \quad \eta = \frac{2y}{1 + |z|^2}, \quad \zeta = \frac{|z|^2 - 1}{1 + |z|^2},$$

де $|z|^2 = x^2 + y^2; x, y \in \mathbb{R}^1$.

Обернене відображення можна записати таким чином

$$x = \frac{\xi}{1 - \zeta}, \quad y = \frac{\eta}{1 - \zeta}, \quad (\xi, \eta, \zeta) \in S \setminus \{N\}.$$

З формул стереографічного проектування можна зробити висновок, що коли точка Z прямує до північного полюса сфери Рімана N , то для її образу (на комплексній площині) виконується властивість $|z| \rightarrow +\infty$. Тому північному полюсу сфери S – точці N , відповідає деякий *ідеальний* елемент – *нескінченно віддалена точка* $z = \infty$. Особлива сутність точки $z = \infty$ проявляється лише в алгебраїчному аспекті: на відміну від точок комплексної площини $\mathbb{C}$ точка $z = \infty$ не використовується в алгебраїчних діях. Зауважимо, що деяким операціям з точкою $z = \infty$ можна надати сенсу, якщо за означенням покласти:

- 1⁰. $\infty + a = a + \infty = \infty$, якщо $a \in \mathbb{C}$;
- 2⁰. $a/0 = \infty \cdot a = a \cdot \infty = \infty$, якщо $a \neq 0$;
- 3⁰. $a/\infty = 0$, якщо $a \in \mathbb{C}$.

Комплексна площина $\mathbb{C}$ разом з нескінченно віддаленою точкою називається *розширеною (замкнутою) комплексною площиною* і позначається $\overline{\mathbb{C}}$.

Ототоження замкнутої комплексної площини $\overline{\mathbb{C}}$ зі сферою Рімана S дозволяє в окремих випадках розглядати нескінченно віддалену точку $z = \infty$ як рівноправний елемент $\overline{\mathbb{C}}$, тобто не виділяючи його серед інших точок з $\overline{\mathbb{C}}$. Зауважимо також, що для точки $z = \infty$ не мають сенсу поняття дійсної частини, уявної частини та аргументу, але природно вважати $|\infty| = +\infty$.

Відповідно до двох описаних способів геометричного зображення комплексних чисел можна ввести дві метрики: евклідову та сферичну.

Евклідова метрика на множині комплексних чисел $\mathbb{C}$ визначається за допомогою формули

$$r(z_1, z_2) = |z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}, \quad (2.1)$$

де $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$.

Сферична метрика на множині точок замкнутої комплексної площини $\overline{\mathbb{C}}$ визначається за допомогою евклідової метрики простору $\mathbb{R}^3$, коли відстань між числами $z_1, z_2 \in \overline{\mathbb{C}}$ визначається як відстань у просторі $\mathbb{R}^3$ між стереографічними проекціями точок z_1, z_2 на сфері Рімана.

Нескладно показати, що сферична метрика записується за допомогою формул

$$\rho(z_1, z_2) = \frac{2|z_1 - z_2|}{\sqrt{(1 + |z_1|^2)(1 + |z_2|^2)}}, \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \quad (2.2)$$

$$\rho(z_1, z_2) = \frac{2}{\sqrt{1 + |z_1|^2}}, \quad z_1 \in \mathbb{C}, z_2 = \infty.$$

Введення метрики (2.1) або (2.2) перетворює множину комплексних чисел $\mathbb{C}$ у *метричний простір*. При цьому, для елементів обмежених множин $M \subset \mathbb{C}$, тобто таких, що $|z| \leq R$ для всіх $z \in M$ та деякого дійсного додатного числа R , евклідова та сферична метрики є еквівалентними. Більш того, якщо z_1, z_2 – довільні елементи деякої обмеженої множини комплексних чисел, то справджуються нерівності

$$\frac{2r(z_1, z_2)}{1 + R^2} \leq \rho(z_1, z_2) \leq 2r(z_1, z_2). \quad (2.3)$$

Тому сферична метрика використовується частіше при розгляді необмежених множин. У подальшому, з огляду на співвідношення (2.3), на множині $\mathbb{C}$ розглядається евклідова метрика, а на множині $\overline{\mathbb{C}}$ – сферична.

Нехай $\varepsilon > 0$ – довільне число, $z_0 \in \mathbb{C}$. Множина $U_r(z_0, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \varepsilon\}$ називається (евклідовим) ε – околom (або просто околom) точки $z_0 \in \mathbb{C}$.

Множина $U_\rho(z_0, \varepsilon) = \{z \in \overline{\mathbb{C}} : \rho(z, z_0) < \varepsilon\}$ називається *сферичним* ε – околom (або просто околom) точки $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$.

Множина $U_r(\infty, R) = \{z \in \overline{\mathbb{C}} : |z| > R\}$ називається (евклідовим) R – околom (або просто околom) точки $z = \infty \in \overline{\mathbb{C}}$.

Евклідова та сферична метрика визначають у $\mathbb{C}$ локальні топологічні бази, що еквівалентні між собою. Тому в позначеннях ε – околів точки літери r чи ρ у подальшому не вказуються, звичайно, якщо це не викликає непорозуміння. Інші топологічні поняття $\mathbb{C}$ та $\overline{\mathbb{C}}$ визначаються однаково.

Множина $\dot{U}(z_0, \varepsilon) = U(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\}$, де $U(z_0, \varepsilon)$ – ε – окіл точки z_0 , називається *проколотим* ε – околom точки z_0 .

Нехай M – деяка непорожня множина з $C(\overline{\mathbb{C}})$. Точка $z_0 \in M$ називається внутрішньою точкою множини M , якщо існує ε – окіл точки z_0 , усі точки якого належать M .

Якщо всі точки множини M є внутрішніми для M , то множина M називається *відкритою множиною*.

Точка z_0 називається *зовнішньою* для множини M , якщо існує деякий ε – окіл точки z_0 , який містить лише точки, що не належать M .

Точка $z_0 \in C(\overline{\mathbb{C}})$ називається *граничною точкою* множини $M \subset C(\overline{\mathbb{C}})$,

якщо в довільному проколотому околі точки z_0 (у сенсі топології $\mathbb{C}(\overline{\mathbb{C}})$) знайдеться хоча б одна точка, що належить множині M .

Множина, що містить усі свої граничні точки, називається *замкнутою*.

Точка z_0 називається *точкою межі* множини $M \subset \mathbb{C}(\overline{\mathbb{C}})$, якщо довільний окіл точки z_0 містить як точки, що належать M , так і точки, що множині M не належать. Сукупність всіх таких точок називається *межею множини* M і позначається символом ∂M .

Множина $M \subset \mathbb{C}(\overline{\mathbb{C}})$, що містить більше однієї точки, називається *зв'язною*, якщо для будь-якого її розбиття $M = M_1 \cup M_2$ на дві не порожні множини, що не перетинаються ($M_1 \cap M_2 = \emptyset$), хоча б одна з них містить граничну точку іншої множини.

Інакше кажучи, множина M зв'язна, якщо не існує двох непорожніх множин M_1, M_2 таких, що $M_1 \cap M_2 = \emptyset$, $M_1 \cup M_2 = M$ і які, крім того, задовольняють умови $\overline{M_1} \cap M_2 = \emptyset$, $M_1 \cap \overline{M_2} = \emptyset$.

Відповідно до визначення, скінчена множина, що містить більше однієї точки, не є зв'язною.

Множина $M \subset \mathbb{C}(\overline{\mathbb{C}})$ називається *лінійно зв'язною*, якщо кожні дві її точки $z_1, z_2 \in M$ можна з'єднати за допомогою ламаної з початком z_1 та кінцем z_2 , всі точки якої належать множині M .

Теорема 2.1. Для того, щоб відкрита множина $M \subset \mathbb{C}(\overline{\mathbb{C}})$ була зв'язною необхідно і достатньо, щоб множина M була лінійно зв'язною.

Одним з основних понять в комплексному аналізі є поняття області.

Зв'язна відкрита множина $D \subset \mathbb{C}(\overline{\mathbb{C}})$ називається *областю*.

Область D називається *однозв'язною*, якщо її межа є зв'язною множиною. У протилежному випадку область називається *багатозв'язною*.

Максимально зв'язна підмножина множини M , тобто така підмножина A , що не міститься строго в жодній відмінній від A зв'язній підмножині множини M , називається *компонентою зв'язності* множини M .

Порядком зв'язності області D називають число компонент зв'язності межі ∂D області D .

2.2 Приклади розв'язування задач

2.2.1. З'ясувати геометричний зміст нерівності $2|z| > |1 + z^2|$.

▷ Виконаємо декілька еквівалентних перетворень Розглянемо наступні еквівалентні нерівності:

$$\begin{aligned} 2|z| > |1 + z^2| &\Leftrightarrow 4|z|^2 > |1 + z^2|^2 \Leftrightarrow \\ 4(|z|^2 + 1 - 1) &> |z^2 - i^2|^2 \Leftrightarrow \\ 4(|z|^2 + 1) - 4 &> |z - i|^2 |z + i|^2 \Leftrightarrow \\ 4(|z|^2 - |i|^2) - 4 &> |z - i|^2 |z + i|^2. \end{aligned}$$

У лівій частині застосуємо рівність паралелограма (див. задачу 1.5.5 а) із завдань для самостійної роботи до теми 1). Тоді отримаємо такі еквівалентні нерівності:

$$\begin{aligned} 2(|z-i|^2 + |z+i|^2) - 4 &> |z-i|^2|z+i|^2 \Leftrightarrow \\ 2|z-i|^2 - 4 &> |z-i|^2|z+i|^2 - 2|z+i|^2 \Leftrightarrow \\ 2(|z-i|^2 - 2) &> |z+i|^2(|z-i|^2 - 2) \Leftrightarrow \\ (|z-i|^2 - 2)(|z-i|^2 - 2) &< 0. \end{aligned}$$

Остання нерівність еквівалентна сукупності двох систем нерівностей

$$\begin{cases} |z-i| < \sqrt{2}, \\ |z+i| > \sqrt{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} |z-i| > \sqrt{2}, \\ |z+i| < \sqrt{2}. \end{cases}$$

Ці системи задовольняють внутрішні точки кругів $|z-i| < \sqrt{2}$ та $|z+i| < \sqrt{2}$ без їх спільної частини (рис. 2.2). $\triangleleft$

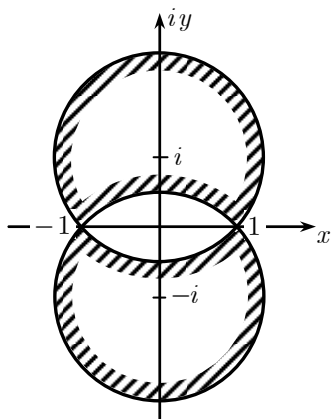


Рис. 2.2

2.2.2. З'ясувати геометричний зміст рівності $\operatorname{Im} \frac{z-1}{z+1} = 0$.

▷ Запишемо число z в алгебраїчній формі $z = x + iy$ та підставимо у задану рівність

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \frac{x+i(y-1)}{x+i(y+1)} &= \operatorname{Im} \frac{[x+i(y-1)][x-i(y+1)]}{x^2+(y+1)^2} = \\ &= \frac{-2x}{x^2+(y+1)^2} = 0. \end{aligned}$$

Звідки випливає, що $x = \operatorname{Re} z = 0$, $z \neq -i$, тобто вказаній рівності відповідають точки уявної осі (прямої, що проходить через i та $-i$), за винятком точки $z = -i$. $\triangleleft$

2.3 Питання для перевірки теоретичних знань

Сфера Рімана. Стереографічна проекція. Рівняння стереографічної проекції. Формули для оберненого відображення. Відстань між точками комплексної площини. Нескінченно віддалена точка. Розширена комплексна площина. Евклідова та сферичні метрики, їх використання. Означення околу точки з комплексної площини.

Означення граничної точки множини комплексних чисел. Означення замкнутої множини та означення замикання множини в комплексній площині. Формулювання принципу компактності. Означення послідовності комплексних чисел, її граничні точки та збіжні послідовності. Теорема про відстань між множинами, що не перетинаються.

Означення області. Властивості лінійної зв'язності. Означення граничної точки області та межі області. Означення замикання області та зовнішньої точки для області. Теорема про межу області. Означення зв'язної множини. Теорема про одночасно замкнену та відкриту множину. В якому випадку співпадають поняття лінійно зв'язної множини та поняття зв'язної множини ?

Означення зв'язних компонент множини. Означення одностов'язної та багатостов'язної областей. Означення порядку зв'язності області. Означення нескінченно зв'язної області.

2.4 Завдання для аудиторної роботи

2.4.1. Довести, що $\mathbb{C}$ та $\overline{\mathbb{C}}$ є областями.

2.4.2. Зобразити та охарактеризувати такі множини:

- a) $\{|z - z_0| < R\}$, $\{|z - z_0| = R\}$, $\{|z - z_0| > R\}$; b) $\{z = 2e^{it}, t \in [0, \pi]\}$;
- c) $\{z = z_0 + Re^{i\varphi}, \varphi \in [\pi/2, 3\pi/2]\}$;
- d) $\{|z - 3| + |z + 3| < 7\}$, $\{|z - 3| + |z + 3| = 7\}$;
- e) $\{|z - z_1| = |z - z_2|\}$, $\{|z - z_1| > |z - z_2|\}$;
- f) $\{\pi/4 < \arg z < \pi/3\}$, $\{\pi/4 < \arg(z - z_0) < \pi/3\}$.

2.4.3. З'ясувати геометричний зміст співвідношень:

- a) $|z| = \operatorname{Re} z + 1$; b) $\frac{\pi}{4} < \arg \frac{z - i}{z + i} < \frac{3\pi}{4}$;
- c) $\operatorname{Re} \frac{1}{z} = c \in \mathbb{R}$; d) $\operatorname{Im} z^2 = c \in \mathbb{R}$.

2.4.4. Показати, що комплексна площина бієктивно відображається на сферу з однією викинутою точкою.

2.4.5. Вивести формули проектування комплексної площини на сферу Рімана.

2.4.6. Довести, що довільне коло або пряма на $\mathbb{C}$ переходять у коло або пряму на сфері Рімана. У які саме кола переходять прямі?

2.4.7. Довести, що довільне коло на сфері Рімана перейде у коло або пряму на $\mathbb{C}$.

2.4.8. Дати відповідь на такі питання:

- a) Що відповідає на сфері Рімана сім'ї паралельних прямих на площині?
- b) Що є образом променя $\arg z = \alpha$ на сфері Рімана?
- c) Що є образом кола $|z| = R$ на сфері Рімана?

2.4.9. З'ясувати, як розташовані на сфері Рімана образи точок z_1 та z_2 , якщо:

- a) на площині ці точки симетричні відносно дійсної осі;
- b) на площині ці точки симетричні відносно точки $z = 0$.

2.4.10. Знайти на сфері Рімана образи таких областей:

- a) $\operatorname{Im} z > 0$; b) $\operatorname{Re} z < 0$; c) $|z| < 1$.

2.4.11. Знайти на площині $\mathbb{C}$ образ паралелі на сфері Рімана із широтою $\varphi \in [-\pi/2; \pi/2]$.

2.4.12. Довести, що дві точки сфери Рімана, відмінні від N , є тоді й тільки тоді діаметрально протилежними, коли для відповідних їм точок z_1 та z_2 на площині $\mathbb{C}$ виконана рівність $z_1 \bar{z}_2 = -1$.

2.5 Завдання для самостійної роботи

2.5.1. З'ясувати геометричний зміст співвідношень:

- a) $|z - 2| - |z + 2| > 3$; b) $\operatorname{Re} z \geq c, \operatorname{Im} z \leq c$, де $c \in \mathbb{R}$;
 c) $0 < \operatorname{Re}(iz) < 1$; d) $\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z < 1$; e) $\operatorname{Re} z^2 = c \in \mathbb{R}$;
 f) $\operatorname{Re} \frac{z+1}{z-1} = 0$; g) $\operatorname{Im} \frac{1}{z} = c \in \mathbb{R}$; h) $\frac{3\pi}{4} < \arg \frac{z+1}{z-1} < \pi$.

2.5.2. Знайти на сфері Рімана образи таких точок: $1, -1, i, (1-i)/\sqrt{2}$.

2.5.3. Як розташовані на сфері Рімана образи точок z_1 та z_2 , якщо на площині ці точки симетричні відносно кола $|z| = 1$?

2.5.4. Знайти на сфері Рімана образи областей, точки яких задовольняють умови:

- a) $\operatorname{Im} z < 0$; b) $\operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z > 0$; c) $|z| > 1$;
 d) $\operatorname{Re} z < 0, \operatorname{Im} z < 0, |z| < 1$.

2.5.5. Довести, що при стереографічній проекції кути між кривими на сфері Рімана та кути між їх образами на комплексній площині рівні.

2.5.6. При яких значеннях параметрів $r, R, \alpha > 0$ колу $|z - re^{i\alpha}| = R$ в комплексній площині $\mathbb{C}$ відповідає велике коло на сфері Рімана S .

Тема 3

Диференціювання функцій комплексної змінної. Умови Коші-Рімана. Геометричний зміст модуля та аргумента похідної

3.1 Теоретичні відомості

Поняття функції комплексної змінної є частковим випадком загального математичного поняття функції. А саме, кажуть, що на множині M комплексних чисел з $\mathbb{C}(\overline{\mathbb{C}})$ визначено деяку функцію $f(z)$, якщо відомо правило (закон) згідно з яким кожному елементу $z \in M$ відповідає одне або декілька комплексних чисел $w \in \mathbb{C}(\overline{\mathbb{C}})$.

Цей факт записують стандартним чином $w = f(z)$ або в термінах відображень $z \rightarrow f(z)$.

Число w називається *образом* числа z , а число z , у свою чергу, – *прообразом* w . Множина M називається *областю визначення функції* $f(z)$, а множина $N := f(M) = \{w : w = f(z), z \in M\}$ – *областю значень функції* $f(z)$.

Функція $f(z)$ називається *однозначною*, якщо кожному значенню змінної $z \in M$ відповідає лише одне число $w \in N$. У протилежному випадку, коли деяким (або навіть всім) елементам $z \in M$ відповідає більш як одне значення $w \in \mathbb{C}(\overline{\mathbb{C}})$, функція $f(z)$ називається *багатозначною*. Зауважимо, що в комплексному аналізі розглядаються також функції, коли одному й тому значенню аргументу відповідає зліченна кількість образів. Прикладом такої функції є функція $Ln z = \ln |z| + i(\arg z + 2\pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$, (*логарифм комплексної змінної*), яка детально вивчатиметься пізніше. В подальшому, якщо не вказано інше, розглядаються однозначні функції.

Нехай $f : M \rightarrow N$ – однозначна функція. Кажуть, що функція $f(z)$ є *однолистою* на M , якщо різні елементи z_1, z_2 з M при відображенні за допомогою функції $f(z)$ мають різні образи.

Зокрема, для однолистої в області функції $f(z)$ з умови $z_1 \neq z_2$ випливає $f(z_1) \neq f(z_2)$.

Очевидно, що якщо функція $f(z)$ є однолистою на M , то різним образам при відображенні $f(z)$ відповідають різні прообрази, тобто, із рівності $f(z_1) = f(z_2)$ для деяких $z_1, z_2 \in M$ випливає рівність $z_1 = z_2$.

Таким чином, однолиста на M функція $f(z)$ визначає взаємно-однозначне (бієктивне) відображення множини M на множину $N = f(M)$.

З визначення комплексних чисел випливає, що кожна функція $f(z)$ ком-

плексної змінної $z = x + iy$ є впорядкованою парою дійсних функцій від двох змінних: $u(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy)$, $v(x, y) = \operatorname{Im} f(x + iy)$, які називаються відповідно дійсною та уявною частинами функції $f(z)$. При цьому $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$.

І навпаки, кожній впорядкованій парі дійсних функцій $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ від двох дійсних змінних, визначених на деякій множині $D \subset \mathbb{R}^2$, можна єдиним чином поставити у відповідність деяку функцію $f(z)$ комплексної змінної z вигляду

$$\begin{aligned} f(z) &= f(x + iy) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y) = \\ &= \varphi\left(\frac{z + \bar{z}}{2}, \frac{z - \bar{z}}{2}\right) + i\psi\left(\frac{z + \bar{z}}{2}, \frac{z - \bar{z}}{2}\right), \end{aligned}$$

що визначена на множині комплексних чисел

$$M = \{z : z = x + iy, (x, y) \in D\} \subset \mathbb{C}.$$

Добре відомо, що у багатьох випадках дійсну функцію від однієї дійсної змінної можна наглядно зобразити за допомогою її графіка. Що стосується функцій комплексної змінної $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, то побудувати чи хоча б уявити її графік доволі складно через те, що графік довільної комплексної функції $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ потрібно розглядати у чотиривимірному просторі $\mathbb{R}^4$. Інколи деяку уяву про функцію $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ можна отримати, побудувавши *поверхню її модуля*, що визначається рівнянням

$$\zeta = |f(z)| = |f(x + iy)|, \quad (x, y, \zeta) \in \mathbb{R}^3.$$

На поверхні модуля функції $f(z)$, як правило, зображують лінії, вздовж яких є сталим або x і y , або $|z|$, або $\arg z$.

Функцію $f(z)$ називають *обмеженою на множині* $D \subset \mathbb{C}(\overline{\mathbb{C}})$, якщо існує таке додатне число M , що $|f(z)| \leq M$, $z \in D$.

Якщо функція $f : D \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ набуває сталого значення, наприклад, $a \in \mathbb{C}$, то кажуть, що $f(z)$ – стала функція на D і пишуть $f(z) \equiv a$ на D .

Використовуючи введені раніше поняття віддалі між комплексними числами і поняття топології для комплексної площини, можна сформулювати означення границі функції у точці.

Означення 3.1. Нехай функція $f(z)$ визначена в деякому проколотому околі точки $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$. Кажуть, що $w_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ є *границею функції* $f(z)$ при z , що прямує до z_0 , якщо для довільного околу $U(w_0)$ точки w_0 знайдеться такий проколотий окіл $V(z_0)$ точки z_0 , що для всіх $z \in V(z_0)$ значення $f(z)$ належать $U(w_0)$.

Інакше кажучи, число w_0 є *границею функції* $f(z)$ при $z \rightarrow z_0$, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться $\delta > 0$ таке, що з нерівності $0 < m(z, z_0) < \delta$ випливає нерівність $m(f(z), w_0) < \varepsilon$, де m – сферична або евклідова метрика залежно від того, чи z_0, w_0 скінченими чи нескінченними величинами.

При цьому використовується позначення

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0. \quad (3.1)$$

Для випадку $w_0 \neq \infty$ рівність (3.1) еквівалентна двом рівностям для дійсних величин. Дійсно, якщо $f(z)$ і w_0 зобразити за допомогою їх дійсних та уявних частин: $f(z) = u(z) + iv(z)$, де $u(z), v(z) \in \mathbb{R}$, $w_0 = a + ib$, де $a, b \in \mathbb{R}$, то (3.1) можна подати в еквівалентному вигляді

$$\lim_{z \rightarrow z_0} u(z) = a, \quad \lim_{z \rightarrow z_0} v(z) = b.$$

В деяких випадках використовується поняття *границі функції по множині*. Нехай $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ – деяка функція, що визначена на нескінченній множині M , яка має граничну точку z_0 . Число w_0 називається *границею функції $f(z)$ при z , що прямує до z_0 по множині M* , якщо для довільного околу $U(w_0)$ точки w_0 знайдеться такий проколотий окіл $V(z_0)$ точки z_0 , що для всіх $z \in V(z_0) \cap M$ значення $f(z)$ належать $U(w_0)$.

При цьому використовують позначення

$$\lim_{z \rightarrow z_0, z \in M} f(z) = w_0.$$

Теорема 3.1 (критерій Коші існування границі функції). *Для того, щоб існувала границя функції $f(z)$ при $z \rightarrow z_0$ необхідно і достатньо, щоб для довільного $\varepsilon > 0$ існувало таке число $\delta = \delta(\varepsilon)$, що для довільних $z_1, z_2 \in U_\delta(z_0)$ виконується нерівність $\rho(f(z_1), f(z_2)) < \varepsilon$.*

Означення 3.2. *Нехай функція $f(z)$ визначена в деякому околі точки $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$. Кажуть, що функція неперервна в точці z_0 , якщо існує*

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0). \quad (3.2)$$

При цьому, якщо $f(z_0) \neq \infty$, то говорять про *неперервність у сенсі $\mathbb{C}$* , а якщо $f(z_0) = \infty$ – то про *неперервність у сенсі $\overline{\mathbb{C}}$* .

Якщо функція неперервна у точці z_0 , то пишуть $f(z) \in C(z_0)$.

Використовуючи властивості границі функції, можна одержати аналогічні властивості неперервних у точці z_0 функцій про те, що сума, різниця, добуток і частка (за умови, що дільник відмінний від нуля) неперервних у точці z_0 функцій є також неперервними функціями.

Можна також говорити про *неперервність функції у точці z_0 по множині M* , якщо z_0 є граничною точкою M , а границю в (3.2) розуміємо як границю по множині M .

Функція $f(z)$, що неперервна в кожній точці множини M , називається неперервною на M . Зокрема, якщо $f(z)$ неперервна в кожній точці області D , то функція $f(z)$ називається *неперервною в області D* .

Неперервні (у сенсі $\mathbb{C}$) функції $f(z)$ на замкнутах (у сенсі $\overline{\mathbb{C}}$) множинах $K \subset \mathbb{C}$ мають такі властивості:

1⁰. Функція $f(z)$ є обмеженою на K , тобто існує така стала A , що $|f(z)| \leq A$ для всіх $z \in K$.

2⁰. На множині K функція $|f(z)|$ досягає свого найбільшого та найменшого значення, тобто, існують такі $z_1, z_2 \in K$, що $|f(z_1)| \leq |f(z)| \leq |f(z_2)|$ для всіх $z \in K$.

3⁰. Функція $f(z)$ рівномірно неперервна на K , тобто для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, що $|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$ для всіх таких $z_1, z_2 \in K$, що $\rho(z_1, z_2) < \delta$.

Розглянемо послідовність функцій

$$f_1(z), f_2(z), \dots, f_n(z), \dots, \quad (3.3)$$

що визначені на одній і тій же множині D . Якщо для фіксованої точки $z_0 \in D$ числова послідовність $\{f_n(z_0)\}_{n=1}^{\infty}$ збігається, то кажуть, що послідовність функцій (3.3) збігається у точці z_0 . Якщо ж послідовність функцій (3.3) збігається у кожній точці $z \in D$, то дана послідовність функцій називається збіжною на множині D . При цьому границею послідовності буде деяка функція $f(z)$, що визначена на множині D . Використовують позначення

$$f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z), \quad f_n(z) \rightarrow f(z).$$

Означення збіжності функціональної послідовності $\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ (до функції $f(z)$) можна записати таким чином: послідовність функцій (3.3) називається збіжною до функції $f(z)$ на множині D , якщо для кожної точки $z \in D$ і довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться таке число $N = N(\varepsilon, z)$, що для всіх $n \geq N(\varepsilon, z)$ виконується нерівність.

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon. \quad (3.4)$$

Послідовність функцій $\{f_n(z_0)\}_{n=1}^{\infty}$ називається рівномірно збіжною до $f(z)$ на множині D , якщо для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться таке число $N = N(\varepsilon)$, що для усіх $z \in D$ і всіх $n \geq N(\varepsilon)$ виконується нерівність

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon.$$

Рівномірна збіжність послідовності функцій (3.3) до функції $f(z)$ позначається таким чином

$$f_n(z) \rightrightarrows f(z), z \in D.$$

Теорема 3.2 (про неперервність границі послідовності функцій). *Нехай функції $f_n(z), n \geq 1$, неперервні на множині D і послідовність $\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ рівномірно збігається на D до функції $f(z)$. Тоді $f(z)$ неперервна на D .*

Означення 3.3. Нехай функція $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ визначена в деякому околі $U_r(z_0)$ точки z_0 . Якщо існує границя

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0},$$

то вона називається *похідною функції $f(z)$ у точці z_0* і позначається $f'(z_0)$. При цьому функція $f(z)$ називається *диференційовною або моногенною у точці z_0* .

Теорема 3.3 (про неперервність моногенної функції). *Якщо функція $f(z)$ диференційовна (моногенна) у точці z_0 , то $f(z)$ неперервна в даній точці.*

З означення похідної і властивостей функції комплексної змінної випливає, що добре відомі основні правила диференціювання дійсних функцій дійсної змінної поширюються і на функції комплексної змінної. Зокрема:

1⁰. Якщо $f \equiv \text{const}$, то $f' \equiv 0$.

2⁰. Якщо функція $f(z)$ диференційовна в точці z_0 , то для довільної сталої $c \in \mathbb{C}$ функція $cf(z)$ також диференційовна в точці z_0 , причому $(cf)'(z_0) = cf'(z_0)$.

3⁰. Якщо функції $f(z)$, $g(z)$ диференційовні в деякій точці z_0 , то їх сума, різниця, добуток і частка (за умови, що дільник у точці z_0 не рівний нулеві) також диференційовні в точці, при цьому:

a) $(f \pm g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0);$

b) $(fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0);$

c) $\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{g^2(z_0)}$ за умови, що $g(z_0) \neq 0$.

4⁰. Нехай функція $f(z)$ однолиста в деякому околі точки z_0 і диференційовна в цій точці, причому $f'(z_0) \neq 0$. Тоді обернена функція $z = g(w) = f^{-1}(w)$ диференційовна в точці $w_0 = f(z_0)$ і $g'(w_0) = (f^{-1})'(w_0) = (f'(z_0))^{-1}$ (формула диференціювання оберненої функції).

5⁰. Якщо функція $f(z)$ диференційовна в точці $z_0 \in \mathbb{C}$, а функція $\varphi(w)$ – диференційовна в точці $w_0 = f(z_0)$, то тоді функція $\psi(z) = \varphi(f(z))$ також диференційовна в точці z_0 і при цьому $\psi'(z_0) = \varphi'(f(z_0))f'(z_0)$ (формула диференціювання складної функції).

Теорема 3.4 (критерій диференційованості функції комплексної змінної). *Для того, щоб функція $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z = x + iy \in U(z_0)$, була диференційовною у точці $z_0 = x_0 + iy_0$ як функція комплексної змінної, необхідно і достатньо, щоб дійсні функції $u = u(x, y)$ та $v = v(x, y)$ як функції двох дійсних змінних були диференційовні в точці (x_0, y_0) і їхні*

частинні похідні в цій точці задовольняли співвідношення

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (3.5)$$

Співвідношення (3.5) називаються *умовами Коші-Рімана-Даламбера-Ейлера*. В літературі ці співвідношення частіше називаються умовами Коші-Рімана.

У полярних координатах умови (3.5) можна записати таким чином

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi}.$$

Розглянемо диференціальні оператори

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

З умов Коші-Рімана випливає, що функція $f(z)$ диференційовна в точці z_0 тоді і лише тоді, коли справджується рівність

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0.$$

Якщо функція $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ диференційовна в точці $z_0 = x_0 + iy_0$, то її похідну в даній точці можна обчислити за допомогою однієї з таких формул

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) - i \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0). \end{aligned} \quad (3.6)$$

З визначення похідної випливає, що якщо функція $f(z)$ диференційовна в точці z_0 , то

$$\Delta f(z_0) = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = f'(z_0)\Delta z + o(\Delta z), \quad (3.7)$$

де величина $o(\Delta z)$ є нескінченно малою в порівнянні з Δz .

Величина $f'(z)dz = df(z)$ називається *диференціалом функції*.

Справедливо і навпаки, якщо приріст функції $f(z)$ у точці z_0 для довільного Δz можна подати за допомогою формули (3.7), тобто існує диференціал функції, то функція $f(z)$ є диференційовною у точці z_0 .

Означення 3.4. Функція, що диференційовна в деякому околі точки z_0 , називається *голоморфною* у точці z_0 . Такі функції часто називають ще *регулярними, моногенними, правильними, аналітичними* (у точці z_0).

Кажуть, що функція $f(z)$ є *голоморфною* у точці $z = \infty$, якщо функція $g(z) = f(1/z)$ голоморфна у точці $z = 0$.

Означення 3.5. Функція $f(z)$ називається *голоморфною на множині*, зокрема, в області, якщо вона голоморфна в кожній точці цієї множини.

Зауважимо, що голоморфність функції $f(z)$ у замиканні деякої області D означає, що $f(z)$ голоморфна в деякій області G , що містить $\overline{D}$.

Функція, що голоморфна в $\mathbb{C}$, називається *цілою*. Наприклад, цілими функціями є алгебраїчні поліноми, показникова функція, тригонометричні та гіперболічні синус і косинус, які більш детально вивчаються далі.

Розглянемо *геометричний зміст похідної* функції $f(z)$, голоморфної у точці z_0 . Нехай l – деяка неперервна крива, що проходить через точку z_0 і має дотичну в точці z_0 . При відображенні за допомогою функції $w = f(z)$ крива l перейде в неперервну криву L на площині w , при цьому крива L проходитиме через точку $w_0 = f(z_0)$ і матиме в цій точці дотичну.

Нехай $\gamma = \gamma(t), t \in [\alpha, \beta]$, – параметричний запис кривої l і $t_0 \in (\alpha, \beta) : z_0 = \gamma(t_0)$. Тоді криву L можна подати за допомогою формули $\sigma = \sigma(t) = f(\gamma(t))$.

З умови існування дотичної до l в точці z_0 випливає, що функції $\gamma(t)$, $\sigma(t)$ є диференційованими при $t = t_0$. На підставі формули диференціювання складної функції знаходимо

$$\sigma'(t_0) = f'(\gamma(t_0))\gamma'(t_0), \quad \gamma(t_0) = z_0,$$

звідки маємо

$$|\sigma'(t_0)| = |f'(z_0)||\gamma'(t_0)|, \quad (3.8)$$

або, якщо $f'(z_0) \neq 0$, то при відповідному визначенні аргументів комплексних чисел $f'(z_0)$, $\gamma'(t_0)$, $\sigma'(t_0)$ отримаємо

$$\arg f'(z_0) = \arg \sigma'(t_0) - \arg \gamma'(t_0). \quad (3.9)$$

Отже, якщо $f'(z_0) \neq 0$, то $\arg f'(z_0)$ – це той кут, на який слід повернути (проти годинникової стрілки) дотичну до кривої l у точці z_0 , щоб отримати дотичну в точці $w_0 = f(z_0)$ до кривої L , яку ми отримуємо з кривої l при відображенні $w = f(z)$.

Звідси випливає, що коли через точку z_0 проходить дві криві l_1, l_2 , що мають у точці z_0 дотичні, кут між якими дорівнює α , де $0 \leq \alpha < 2\pi$, то при відображенні за допомогою голоморфної у точці z_0 функції $w = f(z)$, для якої виконується умова $f'(z_0) \neq 0$, криві l_1, l_2 перейдуть у криві L_1, L_2 , які проходять через точку $w_0 = f(z_0)$ і при цьому криві L_1, L_2 матимуть дотичні в точці w_0 , кут між якими (з урахуванням напрямку їх відліку) дорівнює α .

Кажуть, що в цьому випадку відображення за допомогою функції $f(z)$ має *властивість збереження кутів повороту гладких шляхів у точці z_0* .

З формули (3.8) також випливає, що модуль похідної $f'(z_0)$ геометрично є *коефіцієнтом розтягу в точці z_0* при відображенні за допомогою функції $f(z)$, який залишається сталим (з точністю до величин більш високого

порядку) в деякому досить малому околі точки z_0 . У цьому випадку кажуть, що відображення має *властивість сталості коефіцієнту розтягу*.

Таким чином, якщо $f'(z_0) \neq 0$, то відображення за допомогою функції $f(z)$ має властивість збереження кута повороту гладких шляхів, що проходять через точку z_0 , та властивість сталості коефіцієнта розтягу (в достатньо малому околі точки z_0).

Означення 3.6. Неперервне (у сенсі $\mathbb{C}$) відображення $f(z)$, визначене в деякому околі $U(z_0)$ точки $z_0 \in \mathbb{C}$, називається конформним у точці z_0 , якщо дане відображення має властивості збереження кута повороту гладких шляхів, що проходять через точку z_0 , та сталості коефіцієнта розтягу (в достатньо малому околі точки z_0).

Якщо точка $z_0 = \infty$ або $f(z_0) = \infty$, то відображення $f(z)$ називається конформним у точці z_0 , якщо дане відображення є конформним у відповідній точці на сфері Рімана.

Очевидно, що якщо через точку $z = z_0$ проходять два гладкі шляхи, кут між якими дорівнює α , то при конформному відображенні кут між образами цих шляхів також буде дорівнювати α .

Отже, якщо відображення $f(z)$ є голоморфним у точці z_0 і $f'(z_0) \neq 0$, то дане відображення є конформним у точці z_0 .

Означення 3.7. Відображення $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ називається конформним в області D , якщо дане відображення однолисто відображає область D у $\mathbb{C}$ і є конформним у кожній точці області D .

Таким чином, якщо функція $f(z)$ голоморфна в області D , $f'(z_0) \neq 0$ для всіх $z \in D$, причому $f(z)$ однолисто відображає D у $\mathbb{C}$, то відображення $f(z)$ є конформним у D .

Наприклад, лінійне відображення $f(z) = az + b$, $a \neq 0$, є конформним в усій комплексній площині $\mathbb{C}$.

Розглянемо також *гідродинамічний сенс* комплексного диференціювання та похідної. Нехай маємо усталену плоскопаралельну течію рідини. Вектор швидкості $\vec{v} = (v_1, v_2, 0)$ такої течії не залежить від часу і є однаковим в усіх точках кожного перпендикуляру до деякої площини, яку приймемо за комплексну площину. Припустимо, що:

1⁰. В околі $U(z_0)$ деякої точки z_0 функції $v_1 = v_1(x, y)$, $v_2 = v_2(x, y)$ мають неперервні частинні похідні.

2⁰. Векторне поле $\vec{v} = (v_1, v_2, 0)$ є потенціальним, тобто

$$\text{rot} \vec{v} = \vec{k} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) = 0, \quad (3.10)$$

або іншими словами, існує деяка така скалярна функція $\varphi = \varphi(x, y)$, яка називається *потенціальною функцією поля* $\vec{v}$, що в околі $U(z_0)$ точки $z_0 =$

$x_0 + iy_0$ виконується рівність $\vec{v} = \text{grad } \varphi$, або, що те саме,

$$v_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial y}. \quad (3.11)$$

3°. Векторне поле $\vec{v}$ є соленоїдальним, тобто

$$\text{div } \vec{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} = 0. \quad (3.12)$$

З умови (3.12) випливає, що диференціальна форма $-v_2 dx + v_1 dy$ є точним диференціалом деякої скалярної функції $\psi = \psi(x, y)$, так, що в околі точки z_0 виконуються рівності

$$v_1 = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad -v_2 = \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (3.13)$$

На лінії рівня функції $\psi = \psi(x, y)$ її диференціал $d\psi = -v_2 dx + v_1 dy = 0$, тобто

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v_2}{v_1}.$$

Звідки випливає, що лінія рівня функції $\psi = \psi(x, y)$ є лінією течії, тобто траєкторією руху частинок рідини. Тому функцію $\psi = \psi(x, y)$ називають функцією потоку. Комплексна функція

$$f(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y), \quad z = x + iy, \quad (3.14)$$

називається комплексним потенціалом поля $\vec{v}$.

Із співвідношень (3.11), (3.13) випливає, що в околі $U(z_0)$ точки z_0 виконуються рівності

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (3.15)$$

які співпадають з умовами Коші-Рімана (3.5).

Це означає, що комплексний потенціал $f(z)$ поля $\vec{v}$ є голоморфною у точці z_0 функцією.

З іншого боку, якщо комплексна функція $f(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ є голоморфною у точці $z_0 = x_0 + iy_0$, а функції $\varphi(x, y), \psi(x, y)$ у деякому околі $U(x_0, y_0)$ точки (x_0, y_0) мають неперервні частинні похідні другого порядку, то, використовуючи умови Коші-Рімана (3.5), можна показати, що векторне поле

$$\vec{v} = \text{grad } \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

є потенціальним в околі $U(x_0, y_0)$, тобто

$$\text{rot } \vec{v} = \vec{k} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} \right) = 0,$$

та соленоїдальним, тобто

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} = 0.$$

Очевидно, що функція $f(z)$ є комплексним потенціалом даного векторного поля.

Таким чином, якщо функція $f(z)$ голоморфна, то її можна розглядати як комплексний потенціал плоскопаралельної усталеної течії рідини, яка є потенціальною і соленоїдальною.

З формул (3.6), (3.11), (3.13) знаходимо

$$f'(z) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = v_1 - iv_2.$$

Останній рівності можна надати такий гідродинамічний зміст: похідна комплексного потенціалу $f(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ поля $\vec{v}$ є вектором, який комплексно спряжений вектору швидкості течії $\vec{v} = v_1 + iv_2$.

Зауважимо також, що критичні точки функції $f(z)$ – це точки, в яких швидкість течії дорівнює нулю.

3.2 Приклади розв'язування задач

3.2.1. Довести, що функція $f(z) = \sqrt{|xy|}$, $z = x + iy \in C$, не є диференційовною в точці $z = 0$, хоча умови Коші-Рімана для неї виконуються.

▷ Якщо функцію $f(z)$ записати у вигляді $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, то у даному випадку маємо, що $u(x, y) = \sqrt{|xy|}$, $v(x, y) = 0$, $x, y \in \mathbb{R}$. Переконаємося, що в точці $z = 0$ для функції $f(z)$ виконуються умови Коші-Рімана. Використовуючи означення частинної похідної функції в точці та врахувавши, що $v \equiv 0$, отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(0, 0)}{\partial x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{u(x, 0) - u(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{x} = 0 = \frac{\partial v(0, 0)}{\partial y}, \\ \frac{\partial u(0, 0)}{\partial y} &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{u(0, y) - u(0, 0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{y} = 0 = -\frac{\partial v(0, 0)}{\partial x}. \end{aligned}$$

Покажемо, що виконання умов Коші-Рімана не гарантує диференційовності функції. Дійсно, для даної функції не існує границя

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z) - f(0)}{z} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{|xy|}}{x + iy}.$$

Для того, щоб це показати, спрямуємо z до 0 двома різними способами:
а) якщо $z = x + i0$, $x \rightarrow 0$, $y = 0$, то

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z) - f(0)}{z} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x} = 0.$$

b) якщо $z = t + it$, $x = y = t > 0$, $t \rightarrow 0$, то

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z) - f(0)}{z} = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\sqrt{t^2}}{t + it} = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{t}{t(1 + i)} = \frac{1}{1 + i} \neq 0.$$

З пунктів a) та b) випливає, що функція $f(z) = \sqrt{|xy|}$, $z = x + iy$, недиференційовна в точці $z = 0$.

Розглянутий приклад не суперечить теоремі 3.4 про необхідні та достатні умови диференційовності функції комплексної змінної, оскільки в точці $z = 0$ функція $u(x, y) = \sqrt{|xy|}$ не є диференційовною як функція двох дійсних змінних, тобто не виконується перша з умов згаданої теореми. $\triangleleft$

3.2.2. Нехай функція $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ має в точці $z = x + iy$ такі властивості:

a) $u(x, y)$, $v(x, y)$ – диференційовані як функції двох дійсних змінних у точці (x, y) ;

b) існує границя $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta f}{\Delta z} \right|$.

Довести, що або функція $f(z)$, або функція $\bar{f}(z)$ є диференційовною в точці z .

▷ Оскільки функції $u(x, y)$ та $v(x, y)$ диференційовні в точці (x, y) як функції двох дійсних змінних (умова a) задачі), то для доведення твердження досить показати виконання в точці z умов Коші-Рімана для функції $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, тобто умов

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x, \quad (3.16)$$

або умов Коші-Рімана для функції $\bar{f}(z) = u(x, y) - iv(x, y)$, тобто умов

$$u_x = -v_y, \quad u_y = v_x. \quad (3.17)$$

Оскільки за умовою задачі існує границя $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} |\Delta f / \Delta z|$, то її обчислення не залежить від шляху прямування Δz до нуля. Тому при обчисленні цієї границі, взявши спочатку $\Delta z = \Delta x$, $\Delta y = 0$, а потім $\Delta z = i\Delta y$, $\Delta x = 0$ та $\Delta x = \Delta y$, отримаємо

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta f}{\Delta z} \right|^2 &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{|\Delta u + i\Delta v|^2}{|\Delta x + i\Delta y|^2} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(\Delta u)^2 + (\Delta v)^2}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \\ &= (u_x)^2 + (v_x)^2 = (u_y)^2 + (v_y)^2 = \frac{1}{2}[(u_x + u_y)^2 + (v_x + v_y)^2]. \end{aligned}$$

Звідси знаходимо, що виконуються такі рівності

$$(u_x)^2 + (v_x)^2 = (u_y)^2 + (v_y)^2, \quad (3.18)$$

$$u_x u_y + v_x v_y = 0. \quad (3.19)$$

Нехай $v_y \neq 0$. Якщо це не так, то виберемо серед похідних u_x, u_y, v_x таку, яка не обертається в нуль. Якщо ж всі похідні обертаються в нуль,

то це означає, що в точці z виконані і умови (3.16), і умови (3.17). Тоді з рівності (3.19) маємо

$$v_x = -\frac{u_x u_y}{v_y}, \quad (3.20)$$

і після підстановки останнього виразу в (3.18) отримаємо

$$(u_x)^2 = (v_y)^2$$

або

$$u_x = \pm v_y. \quad (3.21)$$

При цьому з рівності (3.20), врахувавши (3.21), випливає умова

$$u_y = \mp v_x. \quad (3.22)$$

У рівності (3.21) верхній знак відповідає верхньому у рівності (3.22), а нижній – нижньому.

Об'єднавши (3.21) та (3.22) отримаємо, що необхідно мають виконуватися умови (3.16) або (3.17), тобто в точці z диференційовна функція $f(z)$ або $\bar{f}(z)$. $\triangleleft$

3.3. Доведіть, що якщо у точці z існує $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \operatorname{Re}(\Delta f / \Delta z)$, то у цій точці z існують похідні u_x, v_y і при цьому виконуються рівності $u_x = v_y$.

▷ Нехай $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, де $z = x + iy$. Тоді

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{\Delta u + i \Delta v}{\Delta x + i \Delta y} = \frac{\Delta u \Delta x + \Delta v \Delta y}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} + i \frac{\Delta v \Delta x - \Delta u \Delta y}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}.$$

Звідки

$$\operatorname{Re} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{\Delta u \Delta x + \Delta v \Delta y}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}.$$

Оскільки за умовою існує $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \operatorname{Re}(\Delta f / \Delta z) = A$, то ця границя не залежить від шляху прямування Δz до нуля. Спрямуємо $\Delta z \rightarrow 0$ двома різними способами:

a) $\Delta z = \Delta x \rightarrow 0, \Delta y = 0$. Тоді існує границя

$$\lim_{\Delta z = \Delta x \rightarrow 0} \operatorname{Re} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u_x = A;$$

b) $\Delta z = i \Delta y \rightarrow 0, \Delta x = 0$. Тоді існує границя

$$\lim_{\Delta z = i \Delta y \rightarrow 0} \operatorname{Re} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta y} = v_y = A.$$

Очевидно, що з a) та b) випливає твердження задачі. $\triangleleft$

3.3 Питання для перевірки теоретичних знань

Означення функції комплексної змінної. Означення функції в області. Форми запису функцій комплексного аргументу та їх еквівалентність. Поняття про поверхню модуля функції (рельєфа). Означення границі функції комплексної змінної в точці.

Означення границі функції комплексної змінної в точці по множині. Означення функції, неперервної в точці. Означення функції, неперервної в області. Властивості функцій, неперервних (в сенсі $\mathbb{C}$) на замкнутих (в сенсі $\overline{\mathbb{C}}$) множинах $K \subset \overline{\mathbb{C}}$.

Означення функції, що диференційовна в точці. Похідна функції комплексної змінної. Правила диференціювання функцій комплексної змінної. Теорема про необхідні та достатні умови диференціювання за комплексною змінною в точці. Формули для обчислення похідних функцій комплексної змінної, якщо відомо її дійсну та уявну частини. Умови Коші-Рімана.

Еквівалентне формулювання теореми про необхідні та достатні умови диференціювання за комплексною змінною в точці, якщо відомо значення $\partial f(z, \bar{z})/\partial \bar{z}$.

Умови Коші-Рімана для функцій, записаних в полярних координат (ввести формулу). Чи досить існування частинних похідних $\partial u(x, y)/\partial x$, $\partial u(x, y)/\partial y$, $\partial v(x, y)/\partial x$, $\partial v(x, y)/\partial y$ в точці $(x_0; y_0) \in \mathbb{R}^2$ та виконання умов Коші-Рімана в точці $(x_0; y_0) \in \mathbb{R}^2$ для диференційовності функції $f(z) = u(x; y) + iv(x; y)$ в точці $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$? Означення функції, що диференційовна в області.

3.4 Завдання для аудиторної роботи

3.4.1. Навести приклад функції, недиференційовної у жодній точці.

3.4.2. Визначити області, в яких функція $f(z) = |x^2 - y^2| + 2i|xy|$, $z = x + iy$, є диференційовною.

3.4.3. Чи може функція бути диференційовною, але не голоморфною у точці? Розглянути функцію $f(z) = z \operatorname{Re} z$.

3.4.4. Довести, що функція є голоморфною в області тоді і тільки тоді, коли вона диференційовна у кожній точці області.

3.4.5. Нехай функція $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ має в точці $z = x + iy$ такі властивості:

a) $u(x, y)$, $v(x, y)$ – диференційовні як функції двох дійсних змінних у точці (x, y) ;

b) існує границя $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \arg \frac{\Delta f}{\Delta z}$.

Довести, що функція $f(z)$ диференційовна в точці z .

3.4.6. Дослідити на диференційовність та голоморфність такі функції:

a) $f(z) = \operatorname{Re} z^2$; b) $f(z) = (\operatorname{Re} z)^2$; c) $f(z) = \operatorname{Im} z^2$;

d) $f(z) = (\operatorname{Im} z)^2$; e) $f(z) = \bar{z}^2$; f) $f(z) = z \cdot \bar{z}^2$.

3.4.7. Довести голоморфність в усій комплексній площині та знайти похідні таких функцій

a) $f(z) = z^n$; b) $f(z) = e^z$; c) $f(z) = \cos z$; d) $f(z) = \operatorname{sh} z$.

3.4.8. Визначити області в комплексній площині, в яких функція $f(z) = |x^2 - y^2| + 2i|xy|$ є голоморфною.

3.4.9. Визначити параметри $a, b, c \in \mathbb{C}$ таким чином, щоб функція $f(z) = x + ay + i(bx + cy)$ була голоморфною в усій комплексній площині.

3.5 Завдання для самостійної роботи

3.5.1. Функцію комплексного змінного $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ можна розглядати як функцію від змінних $z, \bar{z}$. Довести, що умови Коші-Рімана у змінних $z, \bar{z}$ мають вигляд $\partial f / \partial \bar{z} = 0$.

3.5.2. Довести, що якщо функції $f(z), g(z)$ голоморфні в точці $z_0 \in \mathbb{C}$, і для них виконуються умови $f(z_0) = g(z_0) = 0$, $g'(z_0) \neq 0$, то

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.$$

3.5.3. Визначити усі голоморфні в комплексній площині $\mathbb{C}$ функції $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, для яких виконується рівність $u^2(x, y) + v^2(x, y) = g^2(x)$, де $g(x)$ – деяка функція.

3.5.4. Нехай $P(z) = (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n)$. Довести, що
а) для логарифмічної похідної полінома $P(z)$ справджується формула

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \frac{1}{z - z_1} + \frac{1}{z - z_2} + \dots + \frac{1}{z - z_n}, \quad z \in \{z_k, k = \overline{1, n}\};$$

б) якщо усі корені полінома $P(z)$ розташовані у верхній півплощині, то й усі корені його похідної також розташовані у верхній півплощині ;

с) якщо усі корені полінома $P(z)$ розташовані у деякому крузі, то й усі корені його похідної також розташовані у цьому крузі.

3.5.5. Довести, що якщо для функції $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ у точці $z = x + iy$ існує $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \operatorname{Im} \frac{\Delta f}{\Delta z}$, то існують і частинні похідні u_y, v_x функцій $u(x, y), v(x, y)$ у точці (x, y) та при цьому виконується рівність $u_y = -v_x$.

3.5.6. Чи може функція $f(z) = \sqrt[16]{\sin^2 x + \ln(2 - \cos^{24} y)}$ бути голоморфною в усій комплексній площині? Відповідь обґрунтувати.

3.5.7. Нехай $f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = \rho(x, y)e^{i\varphi(x, y)}$. Довести, що якщо одна з функцій $u(x, y), v(x, y), \rho(x, y), \varphi(x, y)$ – стала, то й функція $f(z)$ – теж стала.

3.5.8. Знайти усі функції $f(z) = u(x) + iv(y)$, $z = x + iy$, голоморфні у комплексній площині $\mathbb{C}$.

3.5.9. Нехай $z = re^{i\varphi}$, а $f(z) = f(r, \varphi) = u(r, \varphi) + iv(r, \varphi)$. Записати рівняння Коші-Рімана у полярних координатах.

Тема 4

Гармонічні функції

4.1 Теоретичні відомості

Означення 4.1. Дійсна функція $u = u(x, y)$ називається гармонічною (гармонійною) в області D , якщо дана функція в області D є двічі неперервно-диференційованою (неперервна разом зі своїми похідними до другого порядку включно) і задовольняє рівняння Лапласа

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (x, y) \in D. \quad (4.1)$$

Диференціальний оператор Δ в (4.1) називається *оператором Лапласа*. Цей оператор можна записати таким чином

$$\Delta u = \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) u = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}}.$$

В полярних координатах оператор Лапласа має зображення вигляду

$$\Delta u = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}.$$

Означення 4.2. Гармонічні в області D функції $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, що задовольняють в області D умови Коші-Рімана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \quad (4.2)$$

називаються *спряженими гармонічними функціями*.

Нехай функція $f(z)$ голоморфна в точці $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$. Тоді дійсні функції $u = u(x, y) = \operatorname{Re} f(x+iy)$, $v = v(x, y) = \operatorname{Im} f(x+iy)$, як функції дійсних змінних (x, y) , диференційовні в деякому околі $u(x_0, y_0)$ точки (x_0, y_0) і для всіх $(x, y) \in U(x_0, y_0)$ задовольняють умови Коші-Рімана (4.2).

Припустимо, що функції $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ для всіх $(x, y) \in U(x_0, y_0)$ мають неперервні частинні похідні до другого порядку включно. Тоді, диференціюючи перше співвідношення в (4.2) за x , а друге за y , одержимо

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}.$$

Звідси випливає, що функція $u = u(x, y)$ задовольняє рівняння Лапласа (4.1), тобто є гармонічною. Аналогічно, функція $v = v(x, y)$ також задовольняє рівняння Лапласа (4.1) і отже є гармонічною.

Таким чином, має місце твердження.

Теорема 4.1. Нехай функція $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ голоморфна в області D , а її дійсна та уявна частини – функції $u = u(x, y) = \operatorname{Re} f(x+iy)$, $v = v(x, y) =$

$\operatorname{Im} f(x + iy)$, є двічі неперервно-диференційовними у області $D \subset \mathbb{R}^2$. Тоді функції $u(x, y)$, $v(x, y)$ є спряженими гармонічними функціями в області D . І навпаки, якщо в області $D \subset \mathbb{R}^2$ функції $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, є спряженими гармонічними функціями, то функція $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$, як функція комплексної змінної $z = x + iy$, є голоморфною в області D .

Розглянемо задачу: визначити в області D голоморфну функцію $f(z)$, якщо в D задано її дійсну частину – функцію $u(x, y) \in C^2(D)$.

Для того, щоб дана задача мала розв'язок, очевидно, необхідно, щоб функція $u(x, y)$ задовольняла в області D рівняння Лапласа, тобто була гармонічною.

Якщо, наприклад, гармонічна функція $u(x, y)$ є дійсною частиною деякої голоморфної функції $f(z)$, тобто $u = u(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy)$, то уявна частина функції $f(z)$, функція $v = v(x, y) = \operatorname{Im} f(x + iy)$, є двічі неперервно диференційованою (це випливає з умов Коші-Рімана) і задовольняє рівняння Лапласа, тобто необхідно є гармонічною.

Таким чином, сформульована вище задача про визначення голоморфної функції за її дійсною частиною еквівалентна такій: для довільної визначеної в області D гармонічної функції $\varphi(x, y)$ знайти спряжену до неї гармонічну функцію $\psi(x, y)$.

Справедлива теорема.

Теорема 4.2. Кожна гармонічна в однозв'язній області D функція $\varphi(x, y)$ має спряжену гармонічну в однозв'язній області D функцію $\psi(x, y)$, що визначається за функцією $\varphi(x, y)$ з точністю до довільної дійсної сталої. Спряжена гармонічна функція $\psi(x, y)$ записується за допомогою формули

$$\psi(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \left(-\frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y} dx + \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} dy \right) + C. \quad (4.4)$$

При цьому функції комплексних змінних $f(z) = f(x + iy) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ та $g(z) = g(x + iy) = -\psi(x, y) + i\varphi(x, y)$ голоморфні в області D .

Якщо область D не є однозв'язною, то інтеграл в (4.4) у цілому залежить від шляху інтегрування, а тому функція $\psi(x, y)$, що визначена формулою (4.4), може виявитися неоднозначною в D . Дану теорему для багатозв'язної області D можна переформулювати таким чином.

Теорема 4.3. Нехай $\varphi(x, y)$ – гармонічна в області $D \subset \mathbb{C}$ функція. Тоді для кожної точки $z_0 = x_0 + iy_0 \in D$ існують голоморфні функції $f(z)$ та $g(z)$, визначені в деякому околі точки z_0 , такі, що

$$\varphi(x, y) = \operatorname{Re} f(z) = \operatorname{Im} g(z).$$

Зауваження 4.1. Дещо згодом в курсі комплексного аналізу доводиться теорема про те, що якщо функція $f(z)$ голоморфна в області D , то її похідна $f'(z)$ також голоморфна в області D . Це означає, що для функції $f(z)$, яка голоморфна в області D , маємо, що її дійсна та уявна частини, тобто функції $u = u(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy)$, $v = v(x, y) = \operatorname{Im} f(x + iy)$, як функції дійсних змінних $x, y \in \mathbb{R}$ нескінченно диференційовними за x, y в області D .

При знаходженні спряженої гармонічної функції $v(x, y)$ за відомою гармонічною функцією $u(x, y)$ (або навпаки) часто зручніше користуватися умовами Коші-Рімана (4.2), а не формулою (4.4).

4.2 Приклади розв'язування задач

4.2.1. Знайти голоморфну функцію $f(z)$, якщо

$$v = v(x, y) = \operatorname{Im} f(x + iy) = 3x^2y - y^3.$$

▷ Перевіримо, чи є функція $v(x, y) = 3x^2y - y^3$ гармонічною. Маємо:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 6y, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -6y,$$

звідси випливає, що $v(x, y)$ задовольняє рівняння Лапласа.

З умов Коші-Рімана (4.2) знаходимо

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -6y.$$

Інтегруючи останнє співвідношення за y , одержуємо:

$$u(x, y) = -3xy^2 + c(x),$$

де $c(x) \in C^1(\mathbb{R})$.

Використовуючи іншу умову в (4.2), маємо

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -3xy^2 + c'(x) = 3x^2 - 3y^2 = \frac{\partial v}{\partial y},$$

звідки випливає, що $c'(x) = 3x^2$ або $c(x) = x^3 + c_1$, де $c_1 = \text{const}$.

Таким чином, $u(x, y) = x^3 - 3xy^2 + c_1$, а шукана функція $f(z) = f(x + iy)$ має вигляд

$$f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y) = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3) + c_1 = (x + iy)^3 + c_1,$$

звідки знаходимо $f(z) = z^3 + c_1$. ◁

4.3 Питання для перевірки теоретичних знань

Рівняння Лапласа в декартових та полярних координатах. Означення функції, гармонійної в області. Означення спряжених гармонійних в області функцій.

Теорема про дійсну та уявну частини диференційовної в області функції. Теорема про існування гармонійної функції, спряженої до даної гармонійної

в області функції. Дійсна та уявні частини диференційовної функції комплексної змінної як гармонійні функції.

4.4 Завдання для аудиторної та самостійної роботи

4.4.1. Чи завжди деяка неперервно-диференційована дійснозначна функція визначає дійсну (уявну) частину голоморфної функції. Розглянути приклад

$$u(x, y) = x^2 + y^2.$$

4.4.2. Нехай $u(x, y)$, $v(x, y)$ – спряжені гармонічні в області Ω функції, що одночасно не обертаються у цій області на 0. З'ясувати, чи будуть функції $\frac{u}{u^2 + v^2}$ та $\frac{-v}{u^2 + v^2}$ також спряженими гармонічними у цій області?

4.4.3. Довести, що похідні довільного порядку від гармонічної функції теж є функціями гармонічними.

4.4.4. Нехай $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ – спряжені гармонічні функції в області Ω . Довести, що записані нижче функції теж є спряженими гармонічними функціями у області Ω :

$$\begin{aligned} U &= e^u \cos v, & V &= e^u \sin v; \\ U &= e^{u^2 - v^2} \cos(2uv), & V &= e^{u^2 - v^2} \sin(2uv); \\ U &= e^{-uv} \cos \frac{u^2 - v^2}{2}, & V &= e^{-uv} \sin \frac{u^2 - v^2}{2}; \\ U &= \frac{\partial^{n+m} u}{\partial^n x \partial^m y}, & V &= \frac{\partial^{n+m} v}{\partial^n x \partial^m y}. \end{aligned}$$

4.4.5. Нехай $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ – спряжені гармонічні в області Ω функції, причому $u^2 + v^2 \neq 0$. Довести, що функції

$$U = \exp\left(\frac{u}{u^2 + v^2}\right) \cos \frac{v}{u^2 + v^2}, \quad V = -\exp\left(\frac{u}{u^2 + v^2}\right) \sin \frac{v}{u^2 + v^2}$$

є спряженими гармонічними в області Ω функціями.

4.4.6. Нехай $u_k(x, y)$, $v_k(x, y)$, $k = 1, 2$, – спряжені гармонічні в області Ω функції. Довести, що функції $U = u_1 u_2 - v_1 v_2$, $V = u_1 v_2 + u_2 v_1$ є спряженими гармонічними функціями в області Ω .

4.4.7. Нехай $\varphi(x)$ – деяка двічі неперервно диференційовна функція. З'ясувати, чи існує гармонічна функція вказаного нижче вигляду $u = u(x, y)$, що відмінна від сталої? Якщо так, то знайти її. Функція $u = u(x, y)$ залежить від $\varphi(x)$ таким чином:

$$u(x, y) = \varphi(x); \quad u(x, y) = \varphi(y/x); \quad u(x, y) = \varphi(xy); \quad u(x, y) = \varphi(x^2 + y^2).$$

4.4.8. Якщо функції $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ – гармонічні в області D , то $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ називається гармонічною комплексозначною функцією в області D . Довести, що якщо функції $f(z)$ та $zf(z)$ – гармонічні в області Ω , то $f(z)$ – голоморфна в області Ω .

4.4.9. Нехай функція $u(x, y)$ – гармонічна. З'ясувати, чи є функція $(u(x, y))^2$ теж гармонічною?

4.4.10. Нехай $u(x, y)$ – гармонічна функція. З'ясувати, для яких двічі неперервно диференційовних функцій $f(x)$ функція $f(u(x, y))$ теж гармонічна?

4.4.11. З'ясувати, чи може функція

$$u(x, y) = 100(x^2 + y^2) + \frac{1}{x^2 + y^2 + 1}$$

бути дійсною частиною голоморфної у деякій області функції? Відповідь обґрунтувати.

4.4.12. Визначити голоморфну функцію $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$, якщо задано її дійсну або уявну частини:

a) $v = C = \text{const}$; b) $u = x^2 - y^2$; c) $u = 2xy$;

d) $v = 3 + x^2 - y^2 - \frac{y}{2(x^2 + y^2)}$; e) $u = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$.

4.5 Приклади задач для модульної контрольної роботи (перший модуль)

Після завершення вивчення тем "Комплексні числа та дії над ними", "Топологія в комплексній площині. Стереографічна проекція", "Диференціювання функцій комплексної змінної. Умови Коші-Рімана", "Гармонічні функції", проводиться модульна контрольна робота (МКР №1), яка крім теоретичних питань, містить також задачі до кожної зі згаданих вище тем. Приклади таких задач подано нижче.

1. Довести, що $\left| \frac{z}{|z|} - 1 \right| \leq \arg z$, $z \neq 0$.

2. З'ясувати геометричний зміст нерівності $2|z| > |1 + z^2|$.

3. Дослідити на диференційовність функцію $f(z) = \sqrt{|xy|}$, $z = x + iy \in \mathbb{C}$.

4. Знайти голоморфну функцію $f(z)$, якщо $v = v(x, y) = \text{Im } f(x + iy) = 3x^2y - y^3$.

Тема 5

Лінійні та дробово-лінійні відображення

5.1 Теоретичні відомості

5.1.1 Лінійні відображення

Розглянемо *лінійну функцію*

$$f(z) = az + b, \quad a \neq 0, \quad (5.1)$$

де a, b – деякі комплексні числа.

Функція $f(z)$ визначена при всіх $z \in \mathbb{C}$, відображає $\mathbb{C}$ на $\mathbb{C}$, а її похідна $f'(z) = a \neq 0$ для всіх $z \in \mathbb{C}$. Таким чином, відображення $z \rightarrow az + b$ є конформним у $\mathbb{C}$. Більш того, неважко показати, що дане відображення, яке переводить точку $z = \infty$ у точку $w = \infty$, є конформним і в точці $z = \infty$.

При $a = 1$ відображення (5.1) здійснює *паралельне перенесення* у напрямку, що визначається вектором $\vec{b} = (\operatorname{Re} b, \operatorname{Im} b)$ (рис. 5.1 а).

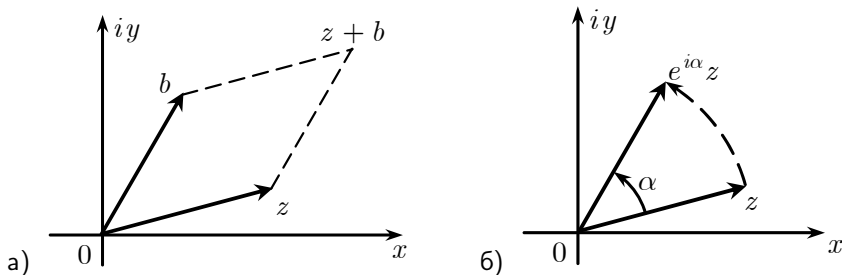


Рис. 5.1

При $b = 0$ і $a = e^{i\alpha}$, де α – деяке дійсне число, відображення (5.1) має вигляд $w = e^{i\alpha}z$ і здійснює *поворот комплексної площини* $\mathbb{C}$ на кут α навколо початку координат (у напрямку, що протилежний напрямку руху годинникової стрілки) (рис. 5.1 б).

При $a = k, b = 0$, де $k \neq 1$ – деяке дійсне додатне число, відображення (5.1) є *перетворенням подібності* з центром подібності в початку координат та коефіцієнтом подібності k .

У цілому відображення (5.1) можна розглядати як результат послідовного виконання трьох відображень: $\xi = e^{i\alpha}z$ – поворот на кут $\alpha = \arg a$ навколо початку координат; $\eta = k\xi$ – перетворення подібності (гомотетія) з

центром подібності у початку координат та коефіцієнтом подібності $k = |a|$; $w = \eta + b$ – паралельне перенесення на вектор $\vec{b}$.

Зауважимо також, що при $a \neq 1$ відображення (5.1) має нерухому точку $z_0 = b/(1-a)$, а тому перетворення (5.1) $w = az + b$ можна записати у вигляді $w - z_0 = \alpha(z - z_0)$ та розглядати його ще як результат таких трьох перетворень:

- перенесення вектора $\vec{z} = (x, y)$ у точку z_0 ;
- поворот вектора $\vec{z} - z_0$ навколо початку координат на кут $\alpha = \arg a$ та його розтяг в $k = |a|$ разів;

- перенесення вектора $\vec{a(z - z_0)}$ у точку z_0 (рис. 5.2).

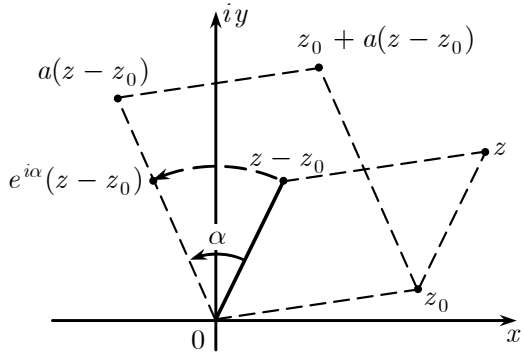


Рис. 5.2

5.1.2 Дробово-лінійні відображення та їх основні властивості

Розглянемо *дробово-лінійну функцію*, що визначається формулою

$$w = \frac{az + b}{cz + d}, \quad (5.2)$$

де a, b, c, d – деякі комплексні числа, причому такі, що $ad - bc \neq 0$.

Вважатимемо надалі $c \neq 0$, бо в протилежному випадку функція (5.2) набуває вигляду

$$w = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d} = Az + B, \quad \text{де } A = \frac{a}{d}, \quad B = \frac{b}{d},$$

тобто є лінійною функцією, основні властивості якої вже розглянуто вище.

Функція (5.2) визначена для всіх комплексних чисел, крім $z = -d/c$. Вважатимемо, що відображення за допомогою функції (5.2) переводить точку $z = -d/c$ у точку $w = \infty$, а точку $z = \infty$, відповідно, у точку $w = a/c$.

Довизначена таким способом функція (5.2) відображає $\overline{\mathbb{C}}$ в $\overline{\mathbb{C}}$.

Неважко переконатися, що відображення за допомогою дробово-лінійної функції (5.2) (у таких випадках часто використовується термін "дробово-лінійне відображення") є взаємно-однозначним і конформним відображенням розширеної комплексної площини $\overline{\mathbb{C}}$ на себе.

Функцію (5.2) можна записати таким чином

$$w = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c^2} \cdot \left(z + \frac{d}{c}\right)^{-1}, \quad (5.3)$$

звідки випливає, що в цілому дробово-лінійне відображення (5.2) можна розглядати як результат послідовного виконання трьох відображень:

$$\xi = z + \frac{d}{c}, \quad \eta = \frac{1}{\xi}, \quad w = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c^2} \eta.$$

Перше та третє відображення є лінійними (див. п. 5.1.1).

Розглянемо функцію $w = 1/z$, що є частковим випадком дробово-лінійної функції (5.2). Дана функція відображає точку $z = 0$ у точку $w = \infty$ та точку $z = \infty$ у точку $w = 0$.

Означення 5.1. Точки $z, z_* \in \mathbb{C}$ називаються симетричними відносно кола радіуса R з центром в точці $z_0 \in \mathbb{C}$, якщо ці точки належать одному й тому самому променю, що виходить з центра кола, і якщо добуток відстаней від даних точок до центра кола рівний квадрату радіуса кола, тобто

$$|z - z_0| |z_* - z_0| = R^2.$$

Відображення, що переводить кожну точку $z \in \overline{\mathbb{C}}$ в точку $z^* \in \overline{\mathbb{C}}$, яка симетрична точці z відносно даного кола, називається *симетрією відносно даного кола* або *інверсією*.

Дане відображення є взаємно однозначним, при цьому центр кола відображається в точку $z^* = \infty$ (і навпаки), а всі точки, що знаходяться на даному колі, є нерухомими.

Зрозуміло, що якщо одна з точок $z, z^* \in \overline{\mathbb{C}}$ лежить всередині кола, то інша – ззовні.

Теорема 5.1. Для того, щоб точки $z, z_* \in \overline{\mathbb{C}}$ були симетричними стосовно кола $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = R\}$, необхідно та достатньо, щоб кожне коло Γ в $\overline{\mathbb{C}}$, що проходить через точки $z, z_* \in \overline{\mathbb{C}}$, було ортогональним до кола γ , тобто щоб кути між дотичними до кіл γ, Γ у точках їх перетину дорівнювали $\pi/2$.

Відображення інверсії можна записати за допомогою такої формули

$$z^* = z_0 + \frac{R^2}{\bar{z} - \bar{z}_0}. \quad (5.4)$$

Таким чином, відображення $w = 1/z$ є результатом послідовного виконання двох таких відображень: $\xi = 1/\bar{z}$ – інверсії стосовно кола $|z| = 1$ та $w = \bar{\xi}$ – дзеркального відображення (відображення симетрії) стосовно дійсної осі $\text{Im } \xi = 0$.

Дробово-лінійні відображення мають такі найважливіші властивості:

1⁰. *Групова властивість*. Сукупність всіх дробово-лінійних перетворень утворює неабелеву групу. При цьому в якості групової операції у множині всіх дробово-лінійних відображень розглядається їх суперпозиція, тобто для довільних двох дробово-лінійних відображень

$$w = L_k(z) = \frac{a_k z + b_k}{c_k z + d_k}, \quad k = 1, 2, \quad (5.5)$$

їх "добутком" є суперпозиція цих дробово-лінійних відображень, тобто дробово-лінійне відображення вигляду

$$w = L(z) = L_2(L_1(z)) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad (5.6)$$

де

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}.$$

Звідси випливає, що група всіх дробово-лінійних відображень ізоморфна групі невідроджених квадратних матриць другого порядку.

Обернене до (5.2) дробово-лінійне відображення має вигляд

$$z = L^{-1}(w) = \frac{1}{(ad - bc)^2} \frac{dw - b}{-cw + a}. \quad (5.7)$$

2⁰. *Кругова властивість*. Прямі лінії та кола, що проходять через точку $z = -d/c$, при дробово-лінійному відображенні (5.2) переходять в прямі, в той час, як прямі та кола, що через дану точку не проходять, відображаються у кола.

3⁰. *Властивість збереження симетричних точок*. Якщо точки $z_1, z_2 \in \overline{\mathbb{C}}$ симетричні стосовно деякого кола γ (або прямої l), то будь-яке дробово-лінійне відображення переводить z_1, z_2 в точки, які симетричні щодо образу кола γ (або прямої l , відповідно).

4⁰. Для довільних трьох попарно-різних точок $z_1, z_2, z_3 \in \overline{\mathbb{C}}$ та будь-яких трьох попарно-різних точок $w_1, w_2, w_3 \in \overline{\mathbb{C}}$ існує і причому єдине дробово-лінійне відображення $L(z)$, що має властивість $L(z_k) = w_k, k = \overline{1, 3}$.

Дане відображення можна визначити за допомогою співвідношення

$$\frac{w - w_1}{w - w_2} : \frac{w_3 - w_1}{w_3 - w_2} = \frac{z - z_1}{z - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}. \quad (5.8)$$

Нехай a, b, c, d – попарно різні комплексні числа. Число

$$\frac{c - a}{c - b} : \frac{d - a}{d - b}$$

називається *подвійним або ангармонічним відношенням чотирьох чисел (точок) a, b, c, d* і позначається символом (a, b, c, d) , тобто

$$(a, b, c, d) = \frac{c - a}{c - b} : \frac{d - a}{d - b}.$$

Якщо ж серед точок (a, b, c, d) є нескінченно віддалена точка, то подвійним відношенням таких точок називається границя подвійного відношення чотирьох скінчених точок, коли три з них співпадають з заданими точками, а відповідна четверта точка прямує до нескінченно віддаленої точки.

Якщо ж одна з точок z_k , $k = \overline{1, 3}$, або ж w_k , $k = \overline{1, 3}$, або ж z_k , z_k , $k = \overline{1, 3}$, збігається з нескінченно віддаленою точкою ∞ , то формула (5.8) також матиме місце і для такого випадку, якщо в ній ті різниці, де мала б знаходитися точка ∞ , замінити на 1. Наприклад, для випадку $z_1 = \infty$, $w_2 = \infty$ формула (5.8) запишеться таким чином

$$\frac{w - w_1}{1} : \frac{w_3 - w_1}{1} = \frac{1}{z - z_2} : \frac{1}{z_3 - z_2}.$$

Використовуючи поняття ангармонічного відношення чотирьох чисел, формулу (5.8) можна записати ще таким чином

$$(w_1, w_2, w, w_3) = (z_1, z_2, z, z_3).$$

Якщо дробово-лінійне відображення не є тотожним перетворенням, то воно має одну скінченну нерухому точку (якщо $c = 0$ і $a \neq 1$ або $c \neq 0$ і $(a - d)^2 + 4bc = 0$) або ж дві скінчені нерухомі точки (якщо $c \neq 0$ і $(a - d)^2 + 4bc = 0$).

У випадку, коли $c = 0$, $a = 1$, лінійне відображення має лише одну нерухому точку, що збігається з нескінченно віддаленою точкою.

5.2 Приклади розв'язування задач

5.2.1. Знайти образ відрізка, який з'єднує точки $z_1 = -1 + 2i$ та $z_2 = 1 + 2i$ (рис. 5.3), при відображенні $w = (2z + i)/(iz + 2)$.

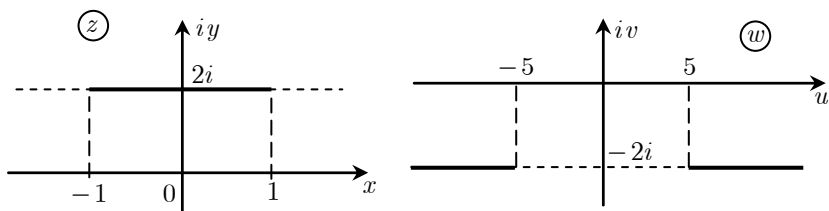


Рис. 5.3

▷ Заданий відрізок належить прямій $\text{Im } z = 2$. Дане в умові задачі дробово-лінійне відображення переводить точку $2i$ у нескінченно віддалену точку. Тому пряма $\text{Im } z = 2$ перейде в пряму (кругова властивість). Для визначення її образу знайдемо образи ще двох точок, наприклад z_1 та z_2 . Маємо: $w(z_1) = w(-1 + 2i) = -5 - 2i = w_1$, $w(z_2) = w(1 + 2i) = 5 - 2i = w_2$.

Таким чином, образом прямої $\operatorname{Im} z = 2$ буде пряма $\operatorname{Im} w = -2$, а образом відрізка, який з'єднує точки $z_1 = -1 + 2i$ та $z_2 = 1 + 2i$, буде частина цієї прямої, що не містить відрізка, який з'єднує точки w_1 та w_2 .

Оскільки одна з точок нашого відрізка переходить у нескінченність ($w(2i) = \infty$), то його образом буде частина прямої, обмежена точками w_1 та w_2 , яка проходить через нескінченність (див. рис. 5.3). $\triangleleft$

5.2.2. Знайти лінію в z -площині, яка при відображенні

$$w = \frac{\sqrt{2}(z - 1 - i)}{2z - 1 - i}$$

перейде в коло $|w| = 1$ в w -площині.

▷ Маємо $|w| = 1$, звідки слідує рівність $w\bar{w} = 1$.

Враховуючи вигляд відображення w , з останньої рівності отримаємо

$$\frac{2(z - 1 - i)(\bar{z} - 1 + i)}{(2z - 1 - i)(2\bar{z} - 1 + i)} = 1,$$

що еквівалентно рівності $z\bar{z} = 1$, звідки отримуємо $|z| = 1$.

Отже шуканою лінією буде одиничне коло $|z| = 1$. $\triangleleft$

5.2.3. Знайти образ області $D = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \arg z < \frac{\pi}{2}\}$ при відображенні

$$w = \frac{z - i}{z + i}.$$

▷ Область D обмежена двома променями: $l_1 = \{z \in \mathbb{C} : \arg z = 0\} \cup \{0\}$ та $l_2 = \{z \in \mathbb{C} : \arg z = \pi/2\} \cup \{0\}$ (рис. 5.4).

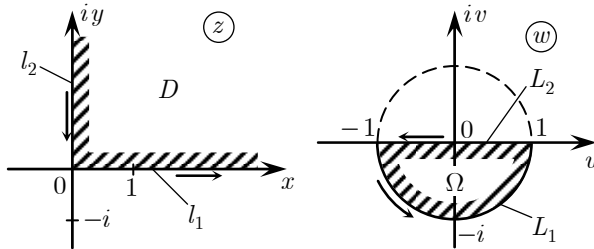


Рис. 5.4

Знайдемо образ l_1 . Оскільки $w(0) = -1$, $w(\infty) = 1$, $w(1) = -i$, то образом дійсної осі, частиною якої є l_1 , буде коло L_1 , яке проходить через точки -1 , 1 , i , тобто коло $|w| = 1$. При цьому l_1 перейде у дугу цього кола L_1 , яка обмежена образами точок 0 та ∞ (це точки -1 та 1), і проходить через образ точки 1 (точку $-i$) (див.рис. 5.4).

Аналогічно знайдемо образ l_2 . Оскільки $w(0) = -1$, $w(\infty) = 1$, $w(-i) = \infty$, то образом уявної осі, частиною якої є l_2 , буде дійсна вісь, а образом променя l_2 – відрізок $L_2 = [-1, 1]$, який обмежений образами точок 0 та ∞ і не проходить через образ точки $-i$ (точку ∞) (див.рис. 5.4).

Використовуючи конформність дробово-лінійного відображення та властивість збереження напрямку обходу вздовж межі області, неважко встановити, що образом області D буде область Ω (див.рис. 5.4). $\triangleleft$

5.2.4. Знайти дробово-лінійний ізоморфізм верхньої півплощини, який задовольняє умови:

a) $w(a) = b$, $\operatorname{Im} a > 0$, $\operatorname{Im} b > 0$;

b) $\arg w'(a) = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

▷ Побудуємо шукане відображення у вигляді суперпозиції двох таких відображень:

1) $w_1 = L_1(z)$ – ізоморфізм верхньої півплощини $\operatorname{Im} z > 0$ та одиничного круга $|w_1| < 1$, у якого $w_1(a) = 0$;

2) $w = L_2(w_1)$ – ізоморфізм одиничного круга $|w_1| < 1$ та верхньої півплощини $\operatorname{Im} w > 0$, у якого $w(0) = b$.

Тоді відображення $w = L_2(L_1(z))$ буде автоморфізмом верхньої півплощини, що задовольняє умову a).

Використовуючи загальний вигляд дробово-лінійного ізоморфізму верхньої півплощини та одиничного круга, отримаємо

$$w_1 = L_1(z) = e^{i\varphi} \frac{z - a}{z - \bar{a}}, \quad \varphi \in \mathbb{R}.$$

Для визначення відображення $w = L_2(w_1)$ побудуємо обернене до нього, тобто дробово-лінійний ізоморфізм $w_1 = L_2^{-1}(w)$ верхньої півплощини $\operatorname{Im} w > 0$ та одиничного круга $|w_1| < 1$, який має властивість $L_2^{-1}(b) = 0$.

Аналогічно попередньому запишемо

$$w_1 = L_2^{-1}(w) = e^{i\psi} \frac{w - b}{w - \bar{b}}, \quad \psi \in \mathbb{R}.$$

Тоді шуканий автоморфізм можна визначити з рівності $L_1(z) = L_2^{-1}(w)$, звідки знаходимо

$$\frac{w - b}{w - \bar{b}} = e^{i\theta} \frac{z - a}{z - \bar{a}}, \quad \theta = \varphi - \psi. \quad (5.9)$$

Рівність (5.9) можна розглядати як неявне задання функції $w = w(z)$.

Отримана рівність (5.9) містить невідому величину θ , яка визначається з умови b). Продиференціюємо (5.9) за змінною z та підставимо $z = a$, пам'ятаючи, що $w(a) = b$. Отримаємо

$$w'(a) = e^{i\theta} \frac{\operatorname{Im} b}{\operatorname{Im} a}.$$

Звідси знаходимо $\arg w'(a) = \theta = \alpha$. $\triangleleft$

5.2.5. Відобразити двозв'язну область $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0, |z - 2| > 1\}$ на концентричне кільце $r < |w| < 1$. Знайти r .

▷ Скористаємося властивістю інваріантності симетричних точок при дробово-лінійних відображеннях. Визначимо в площині z точки a та a_* , симетричні відносно прямої $\operatorname{Re} z = 0$ та кола $|z - 2| = 1$ одночасно. Ці точки мають лежати на промені, який виходить із центра кола (точки $z = 2$) та є перпендикулярним до прямої $\operatorname{Re} z = 0$, тобто на промені $(-\infty, 2)$. Крім цього, точки a та a_* мають бути симетричними відносно прямої $\operatorname{Re} z = 0$ та кола $|z - 2| = 1$, тобто задовольняти співвідношення

$$a_* = -\bar{a} \quad (\text{властивість симетрії відносно прямої } \operatorname{Re} z = 0),$$

$$|a - 2| \cdot |a_* - 2| = 1 \quad (\text{властивість симетрії відносно кола } |z - 2| = 1).$$

$$\text{Звідси знаходимо } a = \sqrt{3}, \quad a_* = -\sqrt{3}.$$

Візьмемо до уваги, що в площині w точки $b = 0$ та $b_* = \infty$ симетричні відносно кіл $|w| = r$ та $|w| = 1$ одночасно. З властивості інваріантності симетричних точок випливає, що повинні виконуватися співвідношення:

$$a) \ w(a) = b = 0, \ w(a_*) = b_* = \infty \quad \text{або} \quad b) \ w(a) = b_* = \infty, \ w(a_*) = b = 0.$$

Для випадку $a)$ дробово-лінійне відображення можна записати у вигляді

$$w = k \frac{w - \sqrt{3}}{w + \sqrt{3}}, \quad k \in \mathbb{C}.$$

При цьому пряма $\operatorname{Re} z = 0$ має перейти у коло $|w| = 1$, а коло $|z - 2| = 2$ — у коло $|w| = r$.

Для визначення невідомого параметру k скористаємося умовою $|w(0)| =$

1. Тоді з рівності $|k| = 1$ отримаємо, що $k = e^{i\varphi}$, $\varphi \in \mathbb{R}$.

Величину r можна визначити з умови

$$r = |w(1)| = \left| k \frac{1 - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} \right| = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} = 2 - \sqrt{3}.$$

Аналогічно будується відображення у випадку $b)$. $\triangleleft$

5.3 Питання для перевірки теоретичних знань

Означення дробово-лінійної функції. Теорема про гомеоморфізм відображення, визначеного дробово-лінійною функцією. Теорема про конформність відображення, визначеного дробово-лінійною функцією.

Теорема про сукупність всіх дробово-лінійних відображень. Теорема про кругову властивість дробово-лінійних відображень. Означення точок, що симетричні відносно деякого кола. Теорема про збереження властивості симетрії точок відносно деякого кола.

Теорема про існування та єдиність дробово-лінійної функції, що відображає три різні довільні точки в три різні довільні точки замкнутої комплексної площини.

Довести, що довільне коло в замкнутій комплексній площині за допомогою дробово-лінійної функції можна відобразити в будь-яке коло в замкнутій комплексній площині. Теорема про дробово-лінійний ізоморфізм кругів в замкнутій комплексній площині. Знайти всі дробово-лінійні ізоморфізми верхньої півплощини на одиничний круг. Означення дробово-лінійного автоморфізма. Знайти групу дробово-лінійних автоморфізмів одиничного круга.

5.4 Завдання для аудиторної роботи

5.4.1. Точка z_0 називається нерухомою для відображення $\omega = f(z)$, якщо $z_0 = f(z_0)$. Знайти нерухому точку лінійного відображення та умови, за яких вона існує.

5.4.2. Знайти функцію, за допомогою якої відображається:

- a) внутрішність трикутника з вершинами у точках $0, 1, i$ на внутрішність трикутника з вершинами у точках $0, 2, i + 1$;
- b) смуга $\{a < \operatorname{Re} z < a + h\}$ на смугу $\{0 < \operatorname{Im} z < \pi\}$.

5.4.3. Довести конформність дробово-лінійного ізоморфізму у розширеній комплексній площині.

5.4.4. Довести, що довільне коло у розширеній комплексній площині відображається при дробово-лінійному відображенні знову у коло у розширеній комплексній площині.

5.4.5. Знайти точку, що симетрична точці z_0 відносно кола $|z - a| = r$. Окремо розглянути випадки, коли $a = 0, r = 1$.

5.6. Знайти симетричний образ таких ліній відносно одиничного кола:

- a) $|z| = 1/2$; b) $|z - 1| = 1$.

5.4.7. Довести, що дві точки є симетричними відносно кола Γ тоді й тільки тоді, коли довільне коло у розширеній комплексній площині, що проходить через них, перетинає коло Γ під прямим кутом.

5.4.8. Довести, що при відображенні за допомогою дробово-лінійної функції образи симетричних відносно кола точок є симетричними відносно образу вихідного кола (кола-образу).

5.4.9. Для функції $w = 1/z$ знайти образи таких ліній:

- a) сімейства кіл $x^2 + y^2 = ax$;
- b) сімейства паралельних прямих $y = x + b$.

5.4.10. Визначити образ дійсної вісі при відображенні за допомогою функції

$$w(z) = \frac{z - z_1}{z - z_2}, \quad \operatorname{Im} z_2 \neq 0.$$

5.4.11. Знайти загальний вигляд лінійної функції, яка залишає півплощину $\operatorname{Re} z > 0$ на місці.

5.4.12. Знайти дробово-лінійну функцію, яка переводить точки $-1, 0, 1$ відповідно у точки $1, i, -1$. З'ясувати, на яку множину ця функція переводить верхню півплощину?

5.4.13. Знайти дробово-лінійну функцію, яка точки $-1, i, \infty$ переводить відповідно у точки $i, 1 + i, 1$.

5.4.14. Визначити образи вказаних областей при заданих відображеннях:

a) $\{|z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$, $w(z) = (2z - i)/(2 + iz)$;

b) $\{0 < \operatorname{Re} z < 1\}$, $w(z) = (z - 1)/z$.

5.4.15. Відобразити на смугу $\{0 < \operatorname{Re} w < 1\}$ такі множини:

a) $\left\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0, \left|z - \frac{d}{2}\right| \leq \frac{d}{2}\right\}$;

b) $\left\{z \in \mathbb{C} : \left|z - \frac{d_1}{2}\right| > \frac{d_1}{2}, \left|z - \frac{d_2}{2}\right| < \frac{d_2}{2}\right\}, \quad 0 < d_1 < d_2$.

5.4.16. Відобразити кільце $\{2 < |z| < 5\}$ на кільце $\{4 < |w| < 10\}$ так, щоб виконувалася умова $w(5) = 4$.

5.4.17. Знайти загальний вигляд дробово-лінійної функції, що конформно відображає:

a) верхню півплощину на одиничний круг;

b) одиничний круг на себе.

5.4.18. Відобразити півплощину $\operatorname{Im} z > 0$ на круг $\{|w - w_0| < R\}$ так, щоб точка i перейшла у центр кола, а похідна $w'(z)$ у цій точці була додатною.

5.4.19. Знайти дробово-лінійний ізоморфізм круга $\{|z| < r\}$ на півплощину $\operatorname{Im} w > 0$, у якого $w(0) = 2i$, $\arg w'(0) = \pi$.

5.4.20. Знайти дробово-лінійний ізоморфізм круга $\{|z| < r\}$ на круг $\{|w| < R\}$, що задовольняє умови $w(a) = b$, $\arg w'(a) = \alpha$.

5.5 Завдання для самостійної роботи

5.5.1. Знайти відображення, що відображає півплощину $\operatorname{Re} z > a$ на півплощину $\operatorname{Im} z < b$.

5.5.2. Знайти симетричний образ наступних ліній відносно одиничного кола: a) $y = 2$, b) $|z - z_0| = |z_0|$.

5.5.3. Для функції $w = 1/z$ знайти образи таких ліній:

a) сімейства кіл $x^2 + y^2 = by$, $b \in \mathbb{R}$;

b) в'язки прямих $y = kx$, $k \in \mathbb{R}$;

c) параболи $y = x^2$.

5.5.4. З'ясувати, у що функція $w = 1/(z - z_0) + h$ переводить:

- a) прямокутну сітку $x = c, y = c$;
- b) полярну сітку $|z - z_0| = R, \arg(z - z_0) = \alpha$.

5.5.5. Нехай задано функцію $w = (z - 1)/(z + 1)$.

- a) Довести, що прообразом сімейства кіл $|w| = \lambda$, де $0 < \lambda < +\infty$, є сімейство кіл (кола Аполлонія). Для даного λ знайти радіус та центр відповідного кола у z -площині.
- b) Знайти прообрази променів $\arg w = \theta$.
- c) Побудувати у z -площині сітку, яка відповідає полярній сітці в w -площині.
- d) Знайти область у z -площині, що відповідає півкругу $\{|w| < 1, \operatorname{Im} w > 0\}$.

5.5.6. Визначити образи вказаних областей при заданих відображеннях:

- a) $\{0 < \arg z < \frac{\pi}{4}\}$, $w(z) = z/(z - 1)$;
- b) $\{0 < \operatorname{Re} z < 1\}$, $w(z) = (z - 1)/(z - 2)$;
- c) $\{1 < |z| < 2\}$, $w(z) = z/(z - 1)$.

5.5.7. Знайти загальний вигляд лінійної функції, яка залишає на місці:

- a) смугу $\{0 < \operatorname{Re} z < 1\}$;
- b) півплощину $\operatorname{Im} z > a, a > 0$.

5.5.8. Відобразити на смугу $\{0 < \operatorname{Re} w < 1\}$ такі множини:

- a) $\{\operatorname{Im} z > 0, |z - i| > 1\}$;
- b) $\{|z - 2i| > 2, |z + 2i| > 2\}$;
- c) $\left\{ \left| z + \frac{d_1}{2} \right| > \frac{d_1}{2}, \left| z - \frac{d_2}{2} \right| > \frac{d_2}{2} \right\}, d_1 > 0, d_2 > 0$ за умови, що образом точки d_2 є початок координат.

5.5.9. Відобразити ексцентричне кільце, що обмежене колами $|z - 3| = 9$ та $|z - 8| = 16$, на кільце $\rho < |w| < 1$. Знайти ρ .

5.5.10. Відобразити на концентричне кругове кільце з центром у початку координат двозв'язну область, що обмежена колами $|z - z_1| = r_1$ та $|z - z_2| = r_2$, де для величин z_1, z_2, r_1, r_2 виконується одна з умов $|z_2 - z_1| > r_1 + r_2$ або $|z_2 - z_1| > |r_2 - r_1|$.

5.5.11. Знайти дробово-лінійний ізоморфізм:

- a) круга $|z - z_0| < r$ на круг $|w| < R$, у якого $w(z_0) = a, \arg w'(z_0) = \pi, |a| < R$;
- b) круга $|z| < r$ на півплощину $\operatorname{Im} w > 0$, у якого $w(a) = b, \arg w'(a) = \alpha, |a| < r, \operatorname{Im} b > 0$.

Тема 6

Степенева функція

6.1 Теоретичні відомості

Означення 6.1. Функція вигляду $w = z^n$, де n – натуральне число, називається степеневою функцією.

При $n = 1$ ця функція є лінійною і детально розглянута у попередньому розділі. Тому в подальшому розглядається випадок $n > 1$.

Функція $w = z^n$, $n > 1$, визначена в усій комплексній площині й відображає розширену комплексну площину $\overline{\mathbb{C}}$ у себе так, що кожна точка $w \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \{0, \infty\}$ має n прообразів:

$$z_k = \sqrt[n]{|w|}(\cos \varphi_k + i \sin \varphi_k), \quad \varphi_k = \frac{\arg w + 2k\pi}{n}, \quad k = \overline{0, n-1}. \quad (6.1)$$

У (6.1) символом $\sqrt[n]{|w|}$ позначено арифметичне значення кореня n -го ступеня з додатнього числа $|w|$.

Кожен сектор вигляду

$$S = \{z = re^{i\varphi} : 0 \leq r < \infty, \quad \alpha_0 \leq \varphi < \alpha_0 + 2\pi/n\}$$

взаємно однозначно (однолисто) відображається за допомогою степеневої функції $w = z^n$ на комплексну площину $\mathbb{C}$.

Таким чином, при відображенні за допомогою степеневої функції $w = z^n$, $n > 1$, комплексна площина $\mathbb{C}$ "накриває" саму себе n разів.

У такому випадку кажуть, що дане відображення є n -листим.

Степенева функція голоморфна в усій комплексній площині $\mathbb{C}$, при цьому $w' = nz^{n-1} \neq 0$ для всіх $z \in \mathbb{C}$, крім $z = 0$.

Отже, степенева функція визначає відображення, яке є конформним в усіх точках комплексної площини, крім $z = 0$.

У точці $z = 0$, як і в точці $z = \infty$, дане відображення збільшує в n разів кути між гладкими шляхами, що проходять через ці точки, а отже, не є конформним.

Степенева функція часто використовується, коли потрібно відобразити даний сектор S_1 на деякий інший сектор S_2 , що утворений кутом в n разів більшим від відповідного кута даного сектора S_1 .

Для степеневої функції можна визначити обернену функцію. Для цього розглянемо функцію $w = z^n$ на множині

$$D_k = \{z = re^{i\varphi} : 0 \leq r < +\infty, \quad 2k\pi/n \leq \varphi < 2(k+1)\pi/n\}, \quad k = \overline{0, n-1},$$

яку при кожному фіксованому k степенева функція взаємно однозначно відображає на комплексну площину. Очевидно, що $\bigcup_{k=0}^{n-1} D_k = \mathbb{C}$.

При кожному фіксованому k , $k = \overline{0, n-1}$, довільному комплексному числу w можна єдиним чином поставити у відповідність деяке таке комплексне число z_k , що $z_k \in D_k$ і $z_k^n = w$, тобто на комплексній площині $\mathbb{C}$ можна визначити n різних однолистих функцій $z_k = z_k(w)$, $k = \overline{0, n-1}$, кожна з яких є оберненою до степеневій функції $w = z^n$ та взаємно однозначно відображає множину $\mathbb{C}$ на відповідну множину D_k .

Сукупність функцій $z_k = z_k(w)$, $k = \overline{0, n-1}$, називається багатолистою (багатозначною) функцією, а кожна з функцій $z_k = z_k(w)$, $k = \overline{0, n-1}$, – гілкою багатозначної функції $z = \sqrt[n]{w}$ і записується за допомогою формули вигляду (6.1) (при відповідному значенні k).

Розглянемо n листів комплексних площин $\mathbb{C}$ з розрізами по додатній частині дійсної осі. Нехай ці площини розміщені одна над одною так, що їх осі координат та розрізи збігаються. Подумки нижній край розрізу першої площини "склеїмо" (тобто ототожнимо) з верхнім краєм розрізу другої площини, нижній край розрізу другої площини "склеїмо" з верхнім краєм розрізу третьої площини і т.д., а нижній край n -тої площини "склеїмо" з верхнім краєм першої площини.

Якщо тепер уявити деяку точку, що знаходиться на першому листі та рухається по деякому шляху навколо початку координат, то через деякий час ця точка перейде на другий лист.

Якщо дана точка знову обійде початок координат, то тепер вона буде на третьому листі і т.д.

При обході початку координат n разів точка, побувавши на усіх листах, повернеться на перший.

Поверхня, що складається з n комплексних площин, які розрізані та склеєні описаним вище способом, називається n -листою рімановою поверхнею функції $z = \sqrt[n]{w}$.

Степенева функція взаємно однозначно відображає комплексну площину на n -листу ріманову поверхню.

Точки, при обході яких по замкнутим шляхам відбувається перехід з одного листа ріманової поверхні на інший, називаються точками розгалуження. Такими точками для функції $\sqrt[n]{w}$ є точки $w = 0$ та $w = \infty$, які при відображенні за допомогою степеневій функції $w = z^n$ є образами, відповідно точок $z = 0$ та $z = \infty$. Нагадаємо, що в цих точках відображення $w = z^n$ не є конформним.

6.2 Приклади розв'язування задач

6.2.1. Конформно відобразити на $\text{Im } w > 0$ область $D = \{\text{Im } z > 0, |z| > 1\}$ (рис. 6.1 а).

▷ З властивостей степеневі функції випливає, що функція $w = z^n$ конформно відображає кут $\{0 < \arg z < \pi/n\}$ на верхню півплощину $\text{Im } w > 0$. Тому спробуємо перетворити задану область D на кут вказаного вигляду. Для цього точки перетину прямої $\text{Im } z = 0$ та кола $|z| = 1$, які обмежують область D (рис. 6.1 а), переведемо за допомогою дробово-лінійного відображення в точки 0 та ∞ , спільні точки променів, що обмежують необхідний нам кут. Наприклад, точку 1 переведемо в 0 , а точку -1 – у нескінченно віддалену точку. Крім цього, для спрощення знаходження образів "примусимо" ∞ "перейти" в точку 1 . Дробово-лінійна функція, що переводить три вказані точки на три інші вказані точки, має вигляд $w_1 = (z - 1)/(z + 1)$. Після такого відображення область D перейде в кут $D_1 = \{0 < \arg w_1 < \pi/2\}$ (рис. 6.1 б). Далі застосуємо відображення $w = w_1^2$, яке переводить кут D_1 на верхню півплощину. <

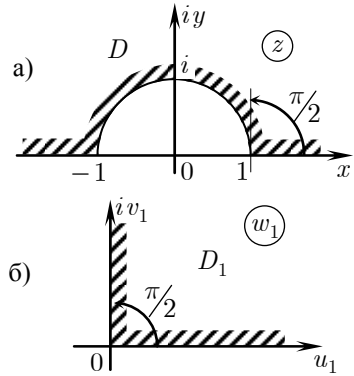


Рис. 6.1

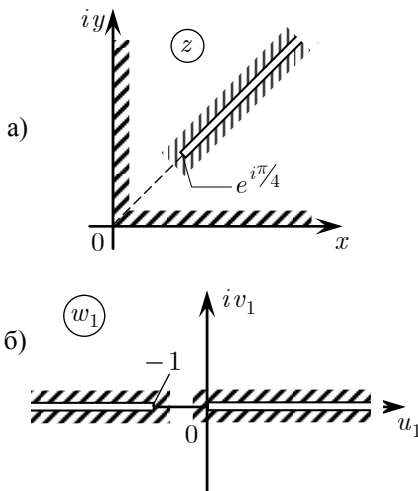


Рис. 6.2

6.2.2. Конформно відобразити на $\text{Im } w > 0$ кут $\{0 < \arg z < \pi/2\}$ з розрізом по променю $z = \rho e^{i\pi/4}$, $\rho \geq 1$ (рис. 6.2 а).

▷ Перетворимо задану область на всю площину з розрізом по додатній частині дійсної осі. Для цього застосуємо відображення $w_1 = z^4$, при якому кут з вершиною в початку координат величиною $\pi/2$ збільшиться в 4 і його образом є кут з вершиною у початку координат величиною 2π . У результаті отримаємо область, зображену на рис. 6.2 б.

Розріз вздовж додатньої частини дійсної осі з'являється завдяки застосуванню степеневі функції до її області однолистості.

Отриману область перетворимо на комплексну площину з одним розрі-

зом уздовж променя $[0, +\infty)$ за допомогою дробово-лінійної функції, яка залишає нерухомою початок координат і яка точку -1 в переводить ∞ , а нескінченно віддалену точку -1 в 1 . Дробово-лінійна функція з такими властивостями має вигляд $w_2 = w_1/(w_1 + 1)$. Нарешті застосовуємо відображення $w = \sqrt{w_2}$, однозначна гілка якого визначається умовою $\sqrt{-1} = i$.
 $\triangleleft$

6.3 Питання для перевірки теоретичних знань

Означення та основні властивості степеневі функції та оберненої до неї. Їх області однолистості. Поверхня Рімана функції, що обернена до степеневі. Точки розгалуження для функції, що є оберненою до степеневі. Конформність відображення за допомогою степеневі функції в комплексній площині.

6.4 Завдання для аудиторної роботи

6.4.1. З'ясувати, у яку множину точок комплексної площини степеневі функція $w = z^n$, $n > 1$, відображає:

- a) промені $\arg z = \alpha$;
- b) кути $\alpha < \arg z < \beta$, $0 < \beta - \alpha < 2\pi/n$.

6.4.2. Конформно відобразити на верхню півплощину $\operatorname{Im} w > 0$ задані області:

- a) верхню півплощину $\operatorname{Im} z > 0$ з розрізом по відрізку $[0; i]$;
- b) площину $\overline{\mathbb{C}}$ з розрізом по відрізку $[z_1; z_2]$;
- c) площину $\overline{\mathbb{C}}$ з розрізами $[-\infty; -1]$ та $[0; +\infty]$;
- d) півкруг $\{\operatorname{Re} z > 0, |z| < 1\}$;
- e) кругову лунку $\{\operatorname{Im} z < 0\} \cup \{|z - i| < \sqrt{2}\}$;
- f) кут $\{0 < \arg z < 2\alpha\}$, $0 < \alpha < \pi$;
- g) кут $\{\pi/4 < \arg z < 3\pi/4\}$ із розрізом по проміжку $[i; +i\infty]$;
- h) зовнішність кола $|z| = 1$ з розрізом по дузі кола $|z - i - 1| = 1$ від точки $z_1 = i$ до точки $z_2 = i + 2$ вздовж руху годинникової стрілки;
- i) сектор $\{|z| > 1, \operatorname{Im} z > 0, \operatorname{Re} z > 0\}$;
- j) сектор $\{|z| < R, 0 < \arg z < \pi\alpha\}$, $0 < \alpha \leq 2$;
- k) кругову лунку $\{|z| < 1, |z - i| < 1\}$.

6.5 Завдання для самостійної роботи

6.5.1. Визначити образ вказаних множин при відображенні $w = z^3$:

- a) $|z| = R$;
- b) $\{|z| < R, |\arg z| < \pi/3\}$.

6.5.2. Конформно відобразити на $\operatorname{Im} w > 0$ вказані області:

- a) верхню півплощину з розрізом вздовж $[i, +i\infty]$;

- b) площину із розрізом проти годинникової стрілки вздовж дуги кола $|z - a| = r$ від точки $a + re^{i\alpha}$ до точки $a + re^{i\beta}$, де $\alpha < \beta$;
- c) площину із розрізом по розташованому у першому квадранті променю, що виходить із точки i паралельно прямій $y = x$;
- d) область $\{\operatorname{Re} z < 0, |z| > 2\}$;
- e) кругову лунку $\{|z| > 1, |z - i| < 1\}$;
- f) $\{|z + i| > \sqrt{2}, |z - i| > \sqrt{2}\}$ з розрізами $[1; a]$ та $[-a; -1]$, де $a > 1$;
- g) площину із викинутим кругом $|z| \leq 1$ та розрізом $[-2i; -i]$;
- h) верхню півплощину із розрізом проти годинникової стрілки вздовж дуги кола $|z| = 1$ від точки 1 до точки $e^{i\alpha}$, де $0 < \alpha < \pi$;
- i) площину із викинутим півкругом $\{|z| \leq 1, \operatorname{Im} z \geq 0\}$ та розрізом $[-i; 0]$;
- j) $\{0 < \arg z < 2\alpha\}$ із розрізом по променю $\arg z = \alpha$ від точки $e^{i\alpha}$ до точки ∞ ;
- k) область $\{|z| > R, 0 < \arg z < \pi\alpha\}$, $0 < \alpha < 2$;
- l) кут $\{|\arg z| < \pi/3\}$ з розрізами $[0; 1]$ та $[2; +\infty]$.

Тема 7

Експоненціальна функція та логарифм

7.1 Теоретичні відомості

Показникову функцію $w = \exp z = e^z$ можна означити багатьма способами. Зокрема, показникову функцію можна визначити аналогічно випадку дійсної змінної, тобто довести існування границі

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$$

для усіх $z \in \mathbb{C}$ і покласти

$$e^z = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n;$$

або ж можна довести абсолютну збіжність ряду $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ і покласти

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad \text{для усіх } z \in \mathbb{C}.$$

Можна також скористатися теорією звичайних диференціальних рівнянь і довести існування розв'язку диференціального рівняння $w' = w$, який задовольняє початкову умову $w(0) = 1$, та показати, що розв'язком записаної задачі Коші є функція

$$w(z) = e^x (\cos y + i \sin y), \quad \text{де } z = x + iy.$$

Крім того, можна також довести, що існує лише один неперервно диференційовний в точці $z = 0$ розв'язок $w = w(z)$ функціонального рівняння

$$w(z_1 + z_2) = w(z_1) \cdot w(z_2),$$

який визначений для усіх комплексних чисел z , і який при $z = x \in \mathbb{R}$ набуває дійсних значень, причому $w(1) = e$.

Визначимо *показникову функцію* e^z комплексної змінної $z = x + iy$ за допомогою рівності

$$e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y), \quad z \in \mathbb{C}. \quad (7.1)$$

Функція e^z є продовженням у комплексну площину $\mathbb{C}$ дійсної показникової функції e^x , визначеної на дійсній осі $\mathbb{R}$.

Звуження показникової функції на уявну вісь має своїм наслідком формулу Ейлера

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y.$$

Перевіривши умови Коші-Рімана, переконуємося, що показникова функція голоморфна в усій комплексній площині, більш того, оскільки $|e^z| =$

$e^x \neq 0$, $x \in \mathbb{R}$, то $w' = (e^z)' = e^z \neq 0$, а отже показникова функція визначає відображення, яке конформне у кожній точці комплексної площини $\mathbb{C}$.

Для функції e^z має місце *теорема додавання* про те, що

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}.$$

Іншими словами, показникова функція переводить адитивну групу поля комплексних чисел у мультиплікативну групу цього ж поля шляхом відображення $z \mapsto e^z$.

Показникова функція e^z є періодичною з періодом $2\pi i$. Число $2\pi i$ називається основним періодом функції e^z .

Звідси випливає, що для того, щоб показникова функція була однолистою в області D , необхідно та досить, щоб в області D не було пар комплексних чисел z_1, z_2 , пов'язаних співвідношеннями

$$z_1 - z_2 = 2n\pi i, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (7.2)$$

Прикладом області, що задовольняє умову (7.2), є довільна смуга комплексної площини із сторонами, паралельними дійсній осі і шириною h , де $0 < h \leq 2\pi$, тобто

$$D_h = \{z : \alpha < \operatorname{Im} z < \alpha + h\}, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \quad (7.3)$$

Показникова функція e^z відображає смугу (7.3) при $h = 2\pi$ на комплексну площину $w = e^z$ з розрізом по променю $\varphi = \alpha$, при цьому прямі $y = y_0$ переходять у промені $\arg z = \varphi = y_0$, а відрізки

$$\{z = x + iy : x = x_0, \alpha < y < \alpha + 2\pi\}$$

переходять у кола $|w| = e^{x_0}$, з яких вилучено точку $|w| = e^{x_0+i\alpha}$.

Будь-яке комплексне число w , крім $w = 0$, має нескінченну кількість різних прообразів, які записуються за допомогою формули

$$z = \ln |w| + i \operatorname{Arg} w = \ln |w| + i(\arg w + 2\pi k), \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (7.4)$$

Усі точки вигляду (7.4) розташовані на одній прямій, яка паралельна уявній осі, і знаходяться одна від одної на відстанях, кратних 2π .

Функція z комплексної змінної w , що визначена за допомогою формули (7.4), в області $w \neq 0$ є нескінченнозначною функцією, що обернена до показникової функції $w = e^z$.

Дана функція називається *логарифмічною* і позначається за допомогою $\operatorname{Ln} w$.

З формули (7.4) випливає, що логарифмічна функція $w = \operatorname{Ln} z$ кожному комплексному числу $z \neq 0$ ставить у відповідність нескінченну кількість значень.

Відомі з курсу елементарної математики правила для добутку та частки для логарифмічної функції дійсної змінної зберігаються і для логарифмі-

чної функції у випадку комплексної змінної, а саме:

$$\operatorname{Ln} (z_1 z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2, \quad \operatorname{Ln} \frac{z_1}{z_2} = \operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_2. \quad (7.5)$$

Враховуючи особливості однолистості показникової функції, можна виділити *однозначні гілки логарифмічної функції*. З цією метою розглянемо в z -площині нескінченну сукупність смуг вигляду

$$D_k = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : \alpha + 2k\pi < y < \alpha + 2(k+1)\pi\}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

де α – деяке фіксоване дійсне число.

Показникова функція $w = e^z$ взаємно однозначно (однолисто) відображає кожен смугу D_k , $k \in \mathbb{Z}$, на комплексну площину з вилученим із неї променем – область $G_\alpha = \mathbb{C} \setminus \{w = re^{i\alpha} : 0 \leq r < \infty\}$.

Якщо кожному комплексному числу $w \in \mathbb{C}$ поставити у відповідність значення $z = \operatorname{Ln}_k w = \ln |w| + i \operatorname{Arg}_k w$, де значення $\operatorname{Arg}_k w$, $k \in \mathbb{Z}$, обрано так, що виконуються нерівності $\alpha + 2k\pi < \operatorname{Arg}_k w < \alpha + 2(k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, для усіх $w \in \mathbb{C}$, то в області G_α буде визначено деяку однозначну гілку нескінченнозначної функції $z = \operatorname{Ln} w$.

Кожна з даних гілок взаємно однозначно і голоморфно відображає область G_α на відповідну смугу D_k .

Згідно з правилом диференціювання оберненої функції кожна гілка $z = \operatorname{Ln}_k w$, $k \in \mathbb{Z}$, є диференційовною в G і при цьому виконується рівність

$$(\operatorname{Ln}_k w)' = \frac{1}{(e^z)'} = \frac{1}{w}, \quad w \in G.$$

Точками розгалуження нескінченнозначної функції $w = \operatorname{Ln} z$ є точки $z = 0$ та $z = \infty$. Рухаючись по замкненому шляху навколо точки $z = 0$ в одному й тому ж напрямі, після кожного обходу навколо точки $z = 0$ ми будемо переходити з одної однозначної гілки на іншу, без повернення на початкову гілку.

Аналогічна ситуація має місце і у випадку нескінченно віддаленої точки.

Точки $z = 0$ та $z = \infty$ називаються точками розгалуження нескінченного порядку або логарифмічними точками розгалуження.

Однозначна гілка логарифмічної функції, що відображає область

$$D = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \geq 0, \quad \operatorname{Im} z = 0\}$$

на смугу $\{w \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Im} w < 2\pi\}$ називається головним значенням логарифмічної функції $\operatorname{Ln} z$ і позначається таким чином

$$\ln z = \operatorname{Ln}_0 z = \ln |z| + i \arg z.$$

7.2 Приклади розв'язування задач

7.2.1. Знайти образи областей за вказаними відображеннями:

a) $\{0 < \operatorname{Re} z < 1/2\}$, $w = e^{2\pi iz}$;

b) $\operatorname{Im} z < 0$, $w = \operatorname{Ln} z$, $\operatorname{Ln} i = 5\pi i/2$.

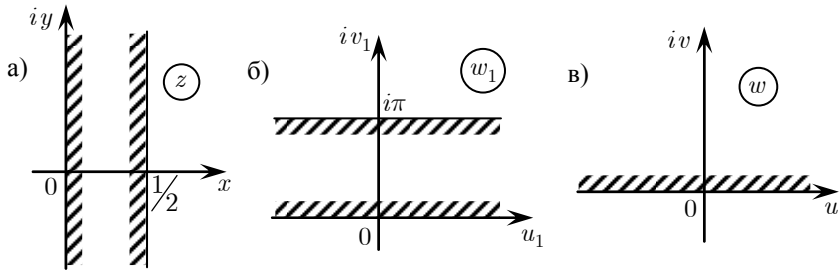


Рис. 7.1

▷ а) Подано задане відображення у вигляді суперпозиції декількох:

$$w_1 = 2\pi iz = 2\pi e^{i\pi/2} z, \quad w_2 = e^{w_1}.$$

Перше відображення здійснює розтяг та поворот заданої області (рис. 7.1 а). Результатом буде область, що зображена на рис. 7.1 б.

При застосуванні відображення $w = e^{w_1}$ пряма $\operatorname{Im} w_1 = 0$ перейде в промінь $\arg w = 0$, а пряма $\operatorname{Im} w_1 = \pi$ – в промінь $\arg w = \pi$. Сама смуга з рис. 7.1 б перейде у верхню півплощину $\operatorname{Im} w > 0$ (рис. 7.1 в).

б) Зафіксуємо однозначну гілку функції $w = \operatorname{Ln} z$, визначену у площині $\mathbb{C}$ з розрізом $[0; +\infty]$. За означенням

$$\operatorname{Ln} z = \ln |z| + i(\arg z + 2\pi k), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad 0 \leq \arg z \leq 2\pi.$$

Підставимо в це співвідношення задану умову

$$\operatorname{Ln} i = \ln |i| + i(\arg i + 2\pi k) = i(\pi/2 + 2\pi k) = 5\pi i/2.$$

З отриманої рівності випливає, що $k = 1$. Отже маємо однозначну гілку $\operatorname{Ln} z = \ln |z| + i(\arg z + 2\pi)$, $0 \leq \arg z \leq 2\pi$.

Область $\operatorname{Im} z < 0$ обмежена двома променями: $\arg z = \pi$ та $\arg z = 2\pi$ (рис. 7.2 а). При застосуванні логарифма перший промінь перейде у пряму $\operatorname{Im} w = 3\pi$, а промінь $\arg z = 2\pi$ відобразиться у пряму $\operatorname{Im} w = 4\pi$, а сама півплощина – у смугу $3\pi < \operatorname{Im} w < 4\pi$ (рис. 7.2 б). ◁

7.2.2. Конформно відобразити смугу $\{|\operatorname{Im} z| < \pi\}$ із розрізом вздовж променя $[0; +\infty]$ на смугу $\{0 < \operatorname{Im} z < 1\}$.

▷ Для того, щоб відобразити задану область (рис. 7.3 а) на смугу $\{0 < \operatorname{Im} z < 1\}$, спершу відобразимо її на область всередині деякого кута.

Застосуємо для цього спочатку відображення $w_1 = e^z$.

Смуга $\{|\operatorname{Im} z| < \pi\}$ є областю однолистості експоненціальної функції, тому при такому відображенні пряма $\operatorname{Im} z = \pi$ перейде у промінь $\arg z = \pi$, а пряма $\operatorname{Im} z = -\pi$ – у промінь $\arg z = -\pi$ (рис. 7.3 б).

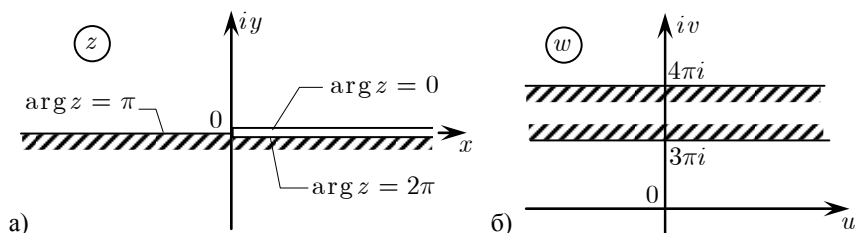


Рис. 7.2

Сама ж смуга $\{|\operatorname{Im} z| < \pi\}$ перейде у площину з розрізом по від'ємній частині дійсної осі, а розріз $[0, +\infty]$ відобразиться у розріз $[1, +\infty]$.

У результаті отримаємо область, що зображена на рис. 7.3 б.

Два напівнескінченні розрізи отриманої області можна розглядати як один, який з'єднує точки 0 та 1, але проходить через нескінченно відділену точку ∞ .

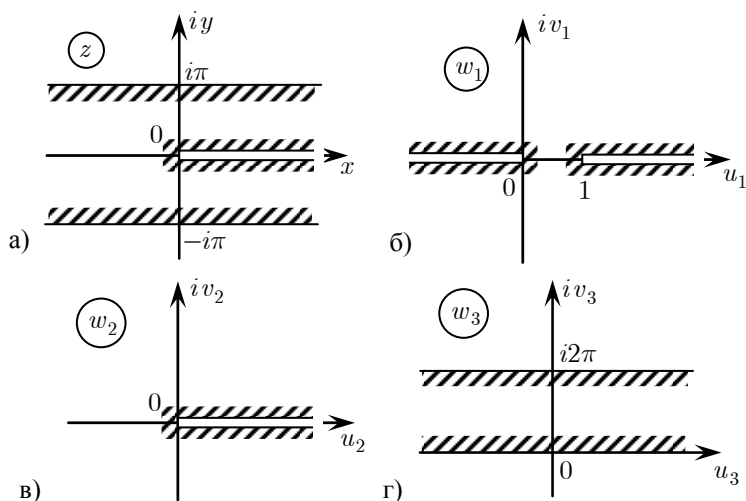


Рис. 7.3

Перетворюємо цей розріз на розріз вздовж додатної частини дійсної осі (рис. 7.3 в) за допомогою дробово-лінійного відображення. Для цього переведемо точку 0 у 0, точку 1 у ∞ , а нескінченно віддалену точку ∞ у 1.

Дробово-лінійне відображення, яке задовольняє вказаним умовам має

вигляд $w_2 = w_1/(w_1 - 1)$.

У результаті отримаємо комплексну площину з розрізом по додатній частині дійсної осі (рис. 7.3 в), яка за допомогою відображення $w_3 = \ln w_2$ переводиться на смугу $\{0 < \operatorname{Im} w_3 < 2\pi\}$ (рис. 7.3 г).

Отримана смуга перетворюється на необхідну нам смугу за допомогою перетворення подібності $w = w_3/(2\pi)$.

Зауважимо, що у випадку, коли вихідну область необхідно відобразити на верхню півплощину $\operatorname{Im} w > 0$, замість логарифма слід застосувати відображення $w = \sqrt{w_2}$ з умовою $\sqrt{-1} = i$. $\triangleleft$

7.3 Питання для перевірки теоретичних знань

Означення та основні властивості показникової та логарифмічної функцій. Їх області однолистості. Точки розгалуження логарифмічної функції. Поверхня Рімана логарифмічної функції. Визначення однозначних гілок логарифма.

7.4 Завдання для аудиторної роботи

7.4.1. Знайти образи вказаних кривих при відображенні $w = e^z$ (з урахуванням орієнтації):

- a) $\operatorname{Re} z = a$, $a \in \mathbb{R}$, $\operatorname{Im} z \in [\alpha; \alpha + \beta]$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in [0; 2\pi)$;
- b) $\operatorname{Im} z = b$, $b \in \mathbb{R}$, $\operatorname{Re} z \in \mathbb{R}$.

7.4.2. Знайти образи областей при вказаних відображеннях:

- a) $\{|\operatorname{Im} z| < \pi\}$, $w = e^z$;
- b) $\{0 < \operatorname{Re} z < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$, $w = e^{i\pi z}$;
- c) $\{\operatorname{Im} z > 0, \operatorname{Re} z > 0\}$, $w = \operatorname{Ln} z$, $\operatorname{Ln} i = \pi i/2$;
- d) $\mathbb{C} \setminus \{z : \operatorname{Im} z = 0, \operatorname{Re} z \in [0, +\infty); \operatorname{Re} z \in (-\infty, -1]\}$,
 $w = \operatorname{Ln} z$, $\operatorname{Ln} i = 5\pi i/2$.

7.4.3. Конформно відобразити на верхню півплощину $\operatorname{Im} w > 0$ вказані області:

- a) смугу $\{a < \operatorname{Im} z < b\}$.
- b) півсмугу $\{0 < \operatorname{Re} z < h, \operatorname{Im} z > 0\}$.
- c) $\{|z + 1| > 1, |z - 2| > 2\}$.
- d) $\{|z - h| > h, |z - 2h| < 2h, \operatorname{Im} z > 0\}$, $h > 0$.
- e) $\{\operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z > 0, |z - i| > 1\}$.
- f) $\{|\operatorname{Im} z| < 1\}$ із розрізом вздовж променя $\{\operatorname{Im} z = 0, \operatorname{Re} z \leq 0\}$.
- g) смугу $\{|\operatorname{Im} z| < \pi\}$ із розрізами вздовж променів $[-\infty, 0]$ та $[\pi, +\infty]$.
- h) $\{|z - 2i| > 2, |z + 2i| > 2\}$ із розрізом по відрітку $[-2, 2]$.

7.4.4. Конформно відобразити на смугу $\{0 < \operatorname{Im} z < 1\}$ такі області:

- a) кут $0 < \arg z < \alpha$, $0 < \alpha \leq 2\pi$.
- b) кут $0 < \arg z < 2\alpha$ з розрізом по променю $\{z = \rho e^{i\alpha}, \rho \geq 1\}$, $0 < \alpha \leq \pi$.

7.5 Завдання для самостійної роботи

7.5.1. Конформно відобразити на верхню півплощину $\operatorname{Im} w > 0$ зазначені області:

- a) $\{| \operatorname{Im} z| < h, \operatorname{Re} z > 0\}, h > 0.$
- b) $\{|z - 1| > 1, \operatorname{Re} z > 0\}.$
- c) $\{z = x + iy : x - h < y < x + h, y > -x - h\}, h > 0.$
- d) $\{\operatorname{Re} z > 0, |z - 1| > 1\}.$
- e) $\{|z - 2i| < 2, |z - i| > 1\}.$
- f) $\{\operatorname{Re} z > 0, |z - 2| < 2, |z - 1| > 1\}.$
- g) $\{|\operatorname{Re} z| < 1\}$ з розрізами $[-\infty; 0]$ та $[1; +\infty]$.
- h) $\{|z - 1| > 1, |z + 1| > 1\}$ з розрізом $[-2i; i]$.
- i) $\{\operatorname{Im} z > 0, |z - 1| > 1, |z + 1| > 1\}.$
- j) $\{\operatorname{Im} z > 0, |z - i| > 1\}$ з розрізом по дузі кола $\{z = 2i + e^{i\varphi}, |\varphi| \leq \pi/2\}.$

7.5.2. Конформно відобразити на смугу $\{0 < \operatorname{Im} w < 1\}$ зазначені області:

- a) $\{0 < \arg z < \pi\alpha, |z| > 1\}, 0 < \alpha \leq 2.$
- b) $\{|z - i| < \sqrt{2}, |z + i| < \sqrt{2}\}$ з розрізом по відрізьку $[0; 1]$.

Тема 8

Функція Жуковського та обернена до неї

8.1 Теоретичні відомості

Функція комплексної змінної вигляду

$$w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right), \quad z \neq 0, \quad (8.1)$$

називається *функцією Жуковського*.

Функція (8.1) широко використовувалася російським вченим М.Є. Жуковським при розв'язанні багатьох задач гідро- та аеродинаміки.

Функція Жуковського визначена та голоморфна для усіх комплексних значень, крім $z = 0$.

Оскільки

$$\frac{dw}{dz} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{z^2} \right) \neq 0$$

для усіх $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, крім $z = \pm 1$, то функція Жуковського визначає конформне відображення в усіх точках комплексної площини, крім $z = \pm 1$.

Функцію (8.1) можна довизначити у точках $z = 0$, $z = \infty$, якщо вважати, що точка $z = 0$ відображається у $w = \infty$, а нескінченно віддалена точка $z = \infty$ у $w = \infty$.

Визначена таким чином у розширеній комплексній площині $\overline{\mathbb{C}}$ функція Жуковського здійснює відображення, яке є конформним при $z = 0$ та при $z = \infty$.

Областями однолистості функції Жуковського є ті області, які не містять точок $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, що задовольняють умову $z_1 z_2 = 1$. Звідси, наприклад, випливає, що якщо область D містить точку $z = 1$ або точку $z = -1$, то дана область не є областю однолистості функції (8.1).

Області $D_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ та $D_2 = \{z \in \overline{\mathbb{C}} : |z| > 1\}$ є областями однолистості для функції Жуковського і внаслідок рівності $w(z) = w(1/z)$ ці області конформно відображаються на одну й ту ж саму область у розширеній комплексній площині w .

З'ясуємо *геометричні властивості* відображення (8.1). Для цього скористаємося експоненціальною формою запису комплексних чисел. Позначимо $z = re^{i\varphi}$, де $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $u = \operatorname{Re} w$, $v = \operatorname{Im} w$. Тоді для функції Жуковського (8.1) можна записати

$$u = \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right) \cos \varphi, \quad v = \frac{1}{2} \left(r - \frac{1}{r} \right) \sin \varphi. \quad (8.2)$$

З (8.2) випливає, що коло $|z| = 1$ при відображенні (8.1) має своїм образом відрізок $I = \{w : \operatorname{Re} w \in [-1; 1], \operatorname{Im} w = 0\}$, який точка w "проходить" двічі – спочатку від точки 1 до точки -1 (при цьому значення φ змінюється від 0 до π), а потім – від точки -1 до точки 1 (значення φ змінюється від π до 2π).

Довільне коло радіуса $r < 1$ при відображенні (8.1) має своїм образом еліпс

$$\frac{u^2}{\left(\frac{r+1/r}{2}\right)^2} + \frac{v^2}{\left(\frac{r-1/r}{2}\right)^2} = 1, \quad (8.3)$$

фокуси якого знаходяться у точках -1 та 1 .

При цьому, якщо точка z рухається по колу $|z| = r$ у додатному напрямку, то її образ, точка w , рухається по еліпсу (8.3) у протилежному напрямку. Якщо радіус кола $r \rightarrow 1 - 0$, то еліпс (8.3) "стискається" до інтервалу I , а при $r \rightarrow 0$ осі еліпсів нескінченно збільшуються.

Таким чином, внутрішність одиничного кола функцією Жуковського однолисто відображається на всю комплексну площину $\mathbb{C}$ з розрізом по інтервалу I . Верхній півкруг $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$ відображається на нижню півплощину $\operatorname{Im} w < 0$, а нижній півкруг $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, \operatorname{Im} z < 0\}$ – на верхню півплощину $\operatorname{Im} w > 0$; відрізок $[0, 1]$ має своїм образом нескінченний інтервал $\{w : \operatorname{Re} w > 1, \operatorname{Im} w = 0\}$, а відрізок $[-1, 0]$, відповідно, – інтервал $\{w : \operatorname{Re} w < -1; \operatorname{Im} w = 0\}$.

Аналогічно, з (8.2) знаходимо, що довільне коло радіуса $r > 1$ відображається за допомогою функції Жуковського в еліпс (8.3), при цьому, якщо точка z рухається по даному колу в додатному напрямку, то її образ, точка w , рухається по відповідному еліпсу вигляду (8.3) теж у додатному напрямку.

Якщо радіус кола $r \rightarrow 1 + 0$, то еліпс (8.3) також "стискається" до інтервалу I , а при $r \rightarrow \infty$ осі еліпсів (8.3) також нескінченно збільшуються.

Таким чином, функція Жуковського однолисто відображає зовнішність одиничного кола на всю комплексну площину $\mathbb{C}$ з розрізом по інтервалу I . При цьому множина точок $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1, \operatorname{Im} z > 0\}$ відображається на верхню півплощину $\operatorname{Im} w > 0$; множина точок $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1, \operatorname{Im} z < 0\}$ має своїм образом нижню півплощину $\{\operatorname{Im} w < 0\}$, промені $\{z : \operatorname{Re} z \in [1, \infty), \operatorname{Im} z = 0\}$, $\{z : \operatorname{Re} z \in (\infty, -1], \operatorname{Im} z = 0\}$ відображаються самі у себе. Крім того, верхня півплощина $\{\operatorname{Im} z > 0\}$ (аналогічно, нижня півплощина $\{\operatorname{Im} z < 0\}$) однолисто відображаються на всю площину w з розрізами по променям $[-\infty, -1]$ та $[1, +\infty]$, що лежать на дійсній осі.

Нехай у (8.2) аргумент комплексних чисел набуває деякого сталого зна-

чення φ_0 , для якого $\varphi_0 \notin \{0, \pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi\}$, а модуль r може змінюватись від 0 до ∞ . Точки комплексної площини, що задовольняють зазначеним вище умовам, розташовані на промені, початок якого міститься в точці $z = 0$, і який утворює кут φ_0 з додатнім напрямом дійсної осі. У цьому випадку образом такого променя при відображенні за допомогою функції Жуковського є гіпербола

$$\frac{u^2}{\cos^2 \varphi_0} - \frac{v^2}{\sin^2 \varphi_0} = 1, \quad (8.4)$$

фокуси якої знаходяться у точках -1 та 1 .

Отже, функція Жуковського ортогональну координатну сітку полярної системи координат на комплексній площині $\mathbb{C}$, що складається з сімейства концентричних кіл з центрами в початку координат та сімейства променів, які мають своїм початком точку $z = 0$, відображає в ортогональну координатну сітку деякої криволінійної системи координат, що складається з сімейства софокусних еліпсів (8.3) та гіпербол (8.4).

Розглянемо дві комплексні площини $\overline{\mathbb{C}}$ з розрізами по відрізьку $I = [-1; 1]$, які розташовані одна над одною так, що відповідні координатні осі та розрізи співпадають. Ототожнимо ("склеїмо") нижній берег нижнього листа з верхнім берегом верхнього листа, та верхній берег нижнього листа – з нижнім берегом верхнього листа. Побудована таким чином поверхня є *рімановою поверхнею для функції, оберненої до функції Жуковського*, причому обернену функцію аналітично можна записати у вигляді

$$z = w + \sqrt{w^2 - 1}. \quad (8.5)$$

Функція (8.5) є однолистою голоморфною функцією на своїй *рімановій поверхні*, причому дана функція має дві точки розгалуження $w = 1$ та $w = -1$, при обході кожної з цих точок відбувається перехід з одного листа *ріманової поверхні* на її інший лист. Зауважимо, що при русі по замкнутому шляху, всередині якого знаходяться точки $w = 1$, $w = -1$ і який не перетинає відрізок $I = [-1; 1]$, ми весь час знаходимося на одному і тому ж листі *ріманової поверхні*.

Функція, що обернена до функції Жуковського, має дві однолисті гілки, одна з яких взаємно однозначно відображає комплексну площину $\mathbb{C}$ з розрізом по інтервалу $[-1; 1]$ на внутрішність одиничного кола з центром в початку координат, а інша – на його зовнішність.

8.2 Приклади розв'язування задач

8.2.1. Конформно відобразити на верхню півплощину $\text{Im } w > 0$ сектор $\{|\arg z| < \pi/3, |z| < 1\}$ з розрізом по відрізьку $[2^{-1/3}; 1]$ (рис. 8.1 а).

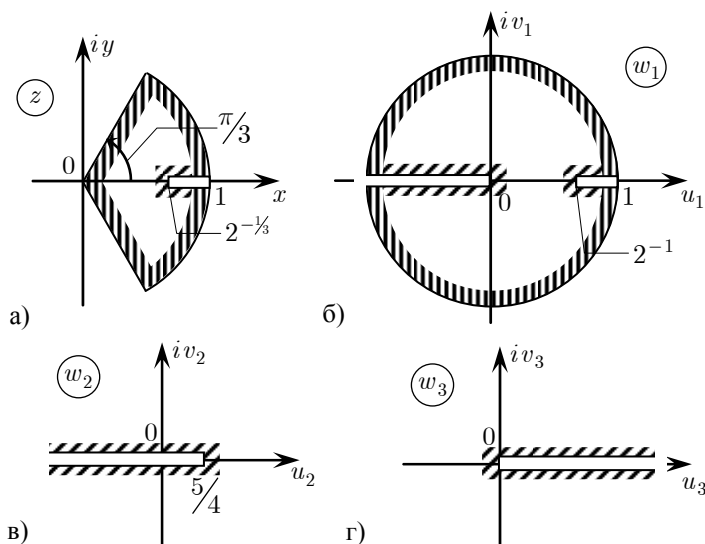


Рис. 8.1

▷ Для розв'язання цієї задачі скористаємося властивістю однолистості функції Жуковського, оскільки одиничний круг з центром у початку координат є областю однолистості цієї функції. Але спочатку, перед тим як застосовувати функцію Жуковського, відобразимо заданий сектор на одиничний круг за допомогою степеневого відображення.

Величина кута, який утворює заданий сектор в одиничному крузі, дорівнює $2\pi/3$ (рис. 8.1 а). Для того, щоб отримати весь круг, необхідно мати кут величиною 2π , тобто збільшити вихідний кут у три рази. Для цього, враховуючи властивості степеневих функцій, слід застосувати відображення $w_1 = z^3$. При такому відображенні заданий сектор $\{|\operatorname{Arg} z| < \pi/3, |z| < 1\}$ перейде у одиничний круг $|w_1| < 1$ з розрізом по відрізку $[-1; 0]$, а розріз по відрізку $[2^{-1/3}; 1]$ – у розріз по відрізку $[1/2; 1]$ (рис. 8.1 б).

До області, що зображена на рис. 8.1 б, застосуємо функцію Жуковського. Тоді одиничний круг $|w_1| < 1$ перейде у розширену комплексну площину з розрізом по відрізку $[-1; 1]$, розріз $[-1; 0]$ – у розріз по променю $[-\infty; -1]$, а розріз $[1/2; 1]$ – у розріз $[1; 5/4]$. В результаті отримаємо комплексну площину з розрізом по променю $[-\infty; 5/4]$ (рис. 8.1 в).

Тепер потрібно застосувати відображення паралельного переносу, щоб кінець розрізу змістився у початок координат, і повернути комплексну пло-

щину так, щоб розріз проходив по променю $[0; +\infty)$ (рис. 8.1 г). Ці перетворення здійснюються за допомогою дробово-лінійного відображення $w_3 = e^{i\pi}(w_2 - 5/4) = 5/4 - w_2$.

Нарешті, для того, щоб отримати верхню півплощину, можна застосувати відображення за допомогою функції $w = \sqrt{w_3}$, однозначна гілка якої фіксується умовою $\sqrt{-1} = i$. $\triangleleft$

8.2.2. Конформно відобразити на верхню півплощину $\text{Im } w > 0$ область, що розташована між гілками гіперболи $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$, $a \geq b > 0$, і має розріз по променю $[0; +i\infty)$ (рис. 8.2 а).

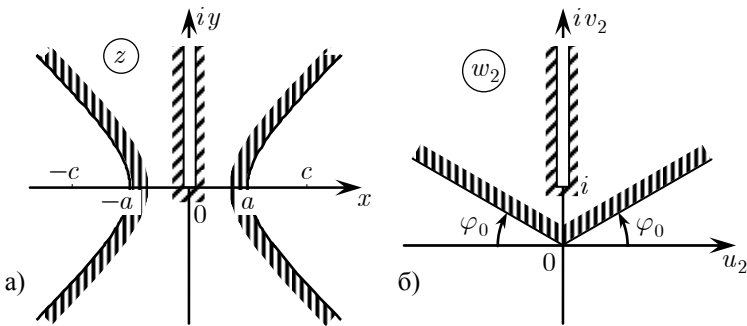


Рис. 8.2

▷ Нагадаємо, що функція Жуковського відображає промені, що виходять з початку координат, на гілки гіпербол з фокусами у точках ± 1 . Тому, використовуючи функцію, що обернена до функції Жуковського, можна здійснити обернені відображення.

Фокуси згаданої в задачі гіперболи розташовані в точках $\pm c$, де $c = \sqrt{a^2 + b^2} > 0$. За допомогою перетворення подібності $w_1 = z/c$ задана область перейде у аналогічну, але розташовану між гілками гіперболи $u_1^2/a_1^2 - v_1^2/b_1^2 = 1$, де $a_1 = a/c$, $b_1 = b/c$, фокуси якої вже лежать в точках ± 1 . Розріз при цьому залишиться таким самим.

Далі застосуємо обернену до функції Жуковського $w_2 = w_1 + \sqrt{w_1^2 - 1}$, однозначна гілка якої визначена в комплексній площині $\mathbb{C}$ з розрізами по променях $[-\infty, -1]$ та $[1, +\infty)$ і відображає її на верхню півплощину $\text{Im } w_2 > 0$. При цьому права гілка гіперболи $u_1^2/a_1^2 - v_1^2/b_1^2 = 1$ перейде у промінь $\arg w_2 = \varphi_0$, де $\varphi_0 = \arccos a_1$, $0 < \varphi_0 < \pi/2$, а ліва – у промінь $\arg w_2 = \pi - \varphi_0$; область, що розташована між гілками гіпербол, перейде у кут $\varphi_0 < \arg w_2 < \pi - \varphi_0$.

Для відшукування образу відрізка $[0; +i\infty]$ підставимо числа $w = i\tau$, $\tau \geq 0$, у вираз (8.5), що визначає обернену до функції Жуковського функцію.

В результаті отримаємо

$$w_2(i\tau) = i\tau + \sqrt{-\tau^2 - 1} = i\tau \pm i\sqrt{\tau^2 + 1} = i(\tau \pm \sqrt{\tau^2 + 1}), \quad \tau \geq 0.$$

Якщо вибрати корінь із додатним знаком, то отримаємо чисто уявні комплексні числа, розташовані на промені $[i; +i\infty]$, а якщо вибрати корінь із від'ємним знаком, то отримаємо відрізок $[-i; 0]$. Оскільки однозначна гілка оберненої до функції Жуковського визначена так, що всі образи повинні лежати у верхній півплощині, то образом розрізу $[0; +i\infty]$ буде розріз вздовж $[i; +i\infty]$. В результаті отримаємо область, що зображена на рис. 8.2 б. Далі розв'язування задачі проводиться аналогічно прикладу 6.2.2. <

8.3 Питання для перевірки теоретичних знань

Означення та основні властивості функції Жуковського. Її області однолистості. Визначення функції, що обернена до функції Жуковського, її поверхня Рімана.

8.4 Завдання для аудиторної роботи

8.4.1. Визначити образ вказаних кривих при відображенні за допомогою функції Жуковського (з урахуванням орієнтації):

- a) $|z| = R$, $R < 1$, орієнтація проти годинникової стрілки;
- b) $\arg z = \varphi$, $0 < \varphi < \pi/2$, орієнтація від 0 до ∞ ;
- c) $\arg z = \pi/2$, орієнтація від 0 до ∞ .

8.4.2. Визначити образ вказаних областей при відображенні за допомогою функції Жуковського:

- a) $\{|z| < R\}$, де $R \leq 1$; b) $\{|z| > 1\}$; c) $\text{Im } z > 0$;
- d) $\{\text{Im } z > 0, |z| > 1\}$; e) $\{1 < |z| < R\}$, $\{1 < |z| < R, \text{Im } z > 0\}$;
- f) $\text{Im } z > 0$ з розрізом по відрізку $[0; i]$.

8.4.3. Конформно відобразити на верхню півплощину $\text{Im } w > 0$ такі області:

- a) $\{|z| < 1, \text{Im } z > 0\}$;
- b) $\{|z| < 1\}$ з розрізом вздовж відрізка $[a; 1]$, $0 < a < 1$;
- c) $\{|z| < 1\}$ з розрізом вздовж відрізка $[0; 1]$;
- d) $\{|z| < 1\}$ з розрізами вздовж відрізків $[-1; b]$, де $-1 < b < 0$, та $[a; 1]$, де $0 < a < 1$.

8.4.4. Конформно відобразити на верхню півплощину $\text{Im } w > 0$ такі області:

- a) верхню півплощину $\text{Im } z > 0$ з викинутим півеліпсом

$$\left\{ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1, \quad y \geq 0 \right\};$$

- b) розширену комплексну площину із розрізами по відрізках $[-l; l]$ та $[-pi; qi]$, $p, q > 0$;
 c) розширену комплексну площину із розрізами $[-\infty; -1]$, $[1; +\infty]$, $[i\infty; ip]$, $p \in \mathbb{R}$;
 d) зовнішність одиничного круга $|z| > 1$ з розрізами $[-2, -1]$, $[1, 2]$, $[i, 2i]$, $[-1, -2i]$;
 e) розширену комплексну площину $\overline{\mathbb{C}}$ з розрізами по відрізу $[0, -2i]$ та по дузі кола $\{|z| = 1, \operatorname{Im} z \leq 0\}$;
 f) верхню півплощину $\operatorname{Im} z > 0$ з розрізами по відрізу $[0, i]$ та по дугах кіл $\{|z| = 1, 0 \leq \arg z \leq \pi/4\}$, $\{|z| = 1, 3\pi/4 \leq \arg z \leq \pi\}$.

8.4.5. Знайти образи заданих областей при вказаних відображеннях:

- a) круга $\{|z| < 1\}$, $w(z) = z/(z^2 + 1)$;
 b) кута $\{0 < \arg z < \pi/n\}$, $w(z) = (z^n + z^{-n})/2$.

8.4.6. Конформно відобразити на верхню півплощину $\operatorname{Im} w > 0$ такі області:

- a) внутрішність еліпса $4(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2 = 4$;
 b) область $\{z \in \mathbb{C} : 3(\operatorname{Re} z)^2 - 6(\operatorname{Im} z)^2 > 2, \operatorname{Re} z > 0\}$ з розрізом вздовж відрізка $[\sqrt{2/3}; 1]$.

8.5 Завдання для самостійної роботи

8.5.1. Визначити образи вказаних кривих при відображенні за допомогою функції Жуковського:

- a) $\{|z| = R\}$, де $R > 1$, орієнтація проти годинникової стрілки;
 b) $\{\arg z = \varphi\}$, $\pi/2 < \varphi < \pi$, орієнтація від 0 до ∞ ;
 c) $\{\arg z = \varphi\}$, $\pi < \varphi < 3\pi/2$, орієнтація від 0 до ∞ ;
 d) $\{|z| = 1\}$, орієнтація проти годинникової стрілки.

8.5.2. Визначити образи вказаних областей при відображенні за допомогою функції Жуковського:

- a) $\{|z| > R\}$, $R > 1$; b) $\{\operatorname{Im} z < 0\}$; c) $\{\operatorname{Im} z > 0, |z| < 1\}$;
 d) $\{R < |z| < 1\}$, $\{R < |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$;
 e) $\operatorname{Im} z > 0$ з розрізом по променю $[i; +i\infty]$ вздовж додатнього напрямку уявної осі;
 f) $\{1/R < |z| < R, \operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z > 0\}$, $R > 1$;
 g) $\{\pi/2 - \alpha < \arg z < \pi/2 + \alpha\}$, $\alpha \in (0, \pi/2)$.

8.5.3. Конформно відобразити на верхню півплощину такі області:

- a) круг $\{|z| < 1\}$ з розрізом вздовж відрізка $[a, 1]$, $-1 < a < 0$;
 b) півкруг $\{|z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$ з розрізом по відрізу $[0; ai]$, $0 < a < 1$;
 c) $\{|z| > 1\}$ з розрізами по відрізках $[b; -1]$, де $b \in (-\infty; -1)$, та $[1, a]$, де $a \in (1; +\infty)$;

d) $|z| > 1$ з розрізом по променю $[1, +\infty]$.

8.5.4. Конформно відобразити на верхню півплощину такі області:

a) розширену комплексну площину з розрізами по відрізку $[-1; 1]$ та променю $\arg z = \pi/2$;

b) розширену комплексну площину з розрізами по відрізку $[-i; i]$ та дузі кола $|z| = 1$ від точки -1 до точки 1 , що проходить через точку $-i$;

c) розширену комплексну площину із розрізами $[-\infty; -1]$, $[1; +\infty]$, $[+i\infty; ip]$, $[-iq; -i\infty]$, $p, q > 0$;

d) розширену комплексну площину $\mathbb{C}$ з розрізами по відрізках $[-1, 2]$ та $[-i, i]$;

e) круг $\{|z| < 2\}$ з розрізами $[-1, 2]$ та $[-i, i]$.

8.5.5. Конформно відобразити двозв'язну область, що обмежена софкусними еліпсами

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{та} \quad \frac{x^2}{a^2 + k^2} + \frac{y^2}{b^2 + k^2} = 1, \quad a > b, k \neq 0,$$

на концентричне кругове кільце з центром у початку координат.

8.5.6. Подавши функцію Жуковського у вигляді

$$\frac{w-1}{w+1} = \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^2,$$

знайти для кола, що проходить через точки ± 1 під кутом α до дійсної осі у точці 1 , де $\alpha \in (0, \pi)$, його образ та образ його внутрішності.

8.5.7. Знайти образи заданих областей при вказаних відображеннях:

a) півкруг $\{|z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$, $w(z) = 1/(z^2 + 1)$;

b) сектор $\{-\pi/n < \arg z < \pi/n, |z| < 1\}$, $w(z) = z/((1 + z^n)^{2/n})$, де $w(z) > 0$ при $z > 0$.

8.5.8. Конформно відобразити на верхню півплощину такі області:

a) $\{z \in \mathbb{C} : (\operatorname{Re} z)^2 - (\operatorname{Im} z)^2 < 1\}$;

b) $\{z \in \mathbb{C} : 2(\operatorname{Re} z)^2 - 2(\operatorname{Im} z)^2 < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$ з розрізом вздовж відрізка $[0; ih]$, де $h > 0$.

Тема 9

Тригонометричні та гіперболічні функції

9.1 Теоретичні відомості

Як показникову функцію e^z , так і *тригонометричні функції* $\cos z$, $\sin z$ можна визначити різними способами. Найзручніше це зробити, використовуючи формули Ейлера. Тоді, згідно визначення

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (9.1)$$

З формул (9.1) і властивостей показникової функції випливають такі властивості функцій $\cos z$, $\sin z$.

Функції $\cos z$, $\sin z$ визначені та голоморфні для усіх комплексних чисел, при цьому

$$(\cos z)' = -\sin z, \quad (\sin z)' = \cos z, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Для дійсних значень $z = x \in \mathbb{R}$ функції $\cos z$, $\sin z$ співпадають з дійсними тригонометричними функціями $\cos x$, $\sin x$ дійсної змінної x .

Функція $\cos z$ парна, а функція $\sin z$ непарна, і ці функції періодичні з періодом 2π .

Для функцій $\cos z$, $\sin z$ справджуються:

а) *основна тригонометрична тотожність*

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1, \quad z \in \mathbb{C};$$

б) *теореми додавання (для всіх $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$)*

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2,$$

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2;$$

в) *формули зведення*

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \sin z, \quad \sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = \cos z, \quad z \in \mathbb{C}.$$

З цих властивостей і формул (9.1) випливає, що функція $\cos z$ нульове значення набуває лише при $z = \pi/2 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, а функція $\sin z$ – при $z = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Відображення $z \rightarrow \cos z$ є конформним в усіх точках комплексної площини, крім $z = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, а відображення $z \rightarrow \sin z$ – в усіх точках комплексної площини $\mathbb{C}$, крім $z = \pi/2 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Кожне значення $w_0 \in \mathbb{C}$ функції $\cos z$ та $\sin z$ набувають зліченну кількість разів, в чому неважко переконатися, розв'язавши рівняння

$$e^{2iz} - 2w_0 e^{iz} + 1 = 0 \quad (\text{для } \cos z),$$

$$e^{2iz} - 2iw_0 e^{iz} - 1 = 0 \quad (\text{для } \sin z).$$

Іншими словами, функції $\cos z$, $\sin z$ відображають комплексну площину $\mathbb{C}$ на всю комплексну площину $\mathbb{C}$, причому кожна точка $w_0 \in \mathbb{C}$ має зліченну множину прообразів в площині $\mathbb{C}$, тобто відображення є неоднолистим. Звідси, зокрема, випливає, що функції $\cos z$, $\sin z$ не є обмеженими, як функції комплексної змінної $z \in \mathbb{C}$, на відміну від випадку дійсної змінної $x \in \mathbb{R}$. Більше того, при $|y| = |\operatorname{Im} z| \rightarrow +\infty$ мають місце асимптотичні співвідношення

$$|\cos z| \sim \frac{1}{2} e^{|y|}, \quad |\sin z| \sim \frac{1}{2} e^{|y|}.$$

Областю однолистості для функції $\cos z$ є така область з $\mathbb{C}$, всі точки z_1, z_2 якої не задовольняють жодну з умов

$$z_1 + z_2 = 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad z_1 - z_2 = 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

а областю однолистості для функції $\sin z$ є область з $\mathbb{C}$, всі точки z_1, z_2 якої не задовольняють жодну з таких умов

$$z_1 + z_2 = \pi + 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z}, \quad z_1 - z_2 = 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Наприклад, множина точок

$$\{z \in \mathbb{C} : \pi n < \operatorname{Re} z < \pi(n+1), \quad n \in \mathbb{Z}\},$$

є областю однолистості для функції $\cos z$, а множина точок

$$\{z \in \mathbb{C} : -\frac{\pi}{2} + \pi n < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{2} + \pi(n+1), \quad n \in \mathbb{Z}\},$$

є областю однолистості для функції $\sin z$.

При вивченні геометричних властивостей відображень $z \rightarrow \cos z$, $z \rightarrow \sin z$, корисно розглядати їх як суперпозицію трьох відображень

а) лінійного відображення

$$z \rightarrow \xi = iz \quad (\text{для } \cos z),$$

$$z \rightarrow \xi = i\left(\frac{\pi}{2} - z\right) \quad (\text{для } \sin z);$$

б) відображення за допомогою показникової функції

$$\xi \rightarrow \eta = e^{\xi};$$

в) функції Жуковського

$$\eta \rightarrow w = \frac{1}{2}\left(\eta + \frac{1}{\eta}\right).$$

За допомогою розглянутих тригонометричних функцій для комплексної змінної $z \in \mathbb{C}$ визначаються також функції

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad z \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$\operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}, \quad z \neq \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Для дійсних значень $z = x \in \mathbb{R}$ ці функції збігаються з дійсними функціями $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ дійсної змінної $x \in \mathbb{R}$. Відзначимо, що в точках, у яких обертаються в нуль знаменники виразів, за допомогою яких визначені функції $\operatorname{tg} z$ та $\operatorname{ctg} z$, ці функції можна довизначити нескінченністю.

Тригонометричні функції $\operatorname{tg} z$, $\operatorname{ctg} z \in \mathbb{C}$ є періодичними з періодом π , голоморфними, за винятком точок, у яких знаменники обертаються в нуль, і, як це впливає з формул

$$(\operatorname{tg} z)' = \frac{1}{\cos^2 z}, \quad (\operatorname{ctg} z)' = -\frac{1}{\sin^2 z},$$

дані функції визначають конформні відображення в усіх точках області $D \subset \mathbb{C}$, якщо така область не містить точок $z = \pi/2 + k\pi$, $z = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, відповідно.

Відображення областей, що здійснюються за допомогою функцій $\operatorname{tg} z$ і $\operatorname{ctg} z$, зручно вивчати, якщо дані функції записати таким чином

$$\operatorname{tg} z = -i \frac{e^{2iz} - 1}{e^{2iz} + 1}, \quad \operatorname{ctg} z = i \frac{e^{2iz} + 1}{e^{2iz} - 1},$$

а потім подати їх як суперпозицію лінійної ($z \rightarrow \xi = 2iz$), показникової ($\xi \rightarrow \eta = e^\xi$) та відповідної дробово-лінійної функції.

Областями однолистості для функцій $\operatorname{tg} z$ і $\operatorname{ctg} z \in \mathbb{C}$ є вертикальні смуги

$$\{z \in \mathbb{C} : x_0 < \operatorname{Re} z < x_0 + h\},$$

де $0 < h \leq \pi$, $x_0 \in \mathbb{R}$.

Використовуючи показникову функцію, можна визначити *гіперболічний косинус* $\operatorname{ch} z$ та *гіперболічний синус* $\operatorname{sh} z$ комплексної змінної

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (9.2)$$

З формул Ейлера (9.1) випливають співвідношення, які пов'язують між собою тригонометричні та гіперболічні функції

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} z &= \cos iz, & \operatorname{sh} z &= -i \sin iz, \\ \cos z &= \operatorname{ch} iz, & \sin z &= -i \operatorname{sh} iz. \end{aligned} \quad (9.3)$$

Використовуючи формули (9.3) і теореми додавання, неважко вивести співвідношення

$$\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1,$$

$$\cos(x + iy) = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y, \quad (9.4)$$

$$\sin(x + iy) = \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y, \quad (9.5)$$

звідки також випливає, що функції $\cos z$ та $\sin z$ не є обмеженими в комплексній площині $\mathbb{C}$.

Гіперболічний тангенс та гіперболічний котангенс для комплексної змінної визначаються відповідно формулами

$$\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}, \quad z \neq \frac{2k+1}{2}\pi i, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$\operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}, \quad z \neq k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z},$$

або, використовуючи (9.2), ще таким чином

$$\operatorname{th} z = \frac{e^{2z} - 1}{e^{2z} + 1}, \quad z \neq \frac{2k+1}{2}\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (9.6)$$

$$\operatorname{cth} z = \frac{e^{2z} + 1}{e^{2z} - 1}, \quad z \neq k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (9.7)$$

Використовуючи формули (9.2), (9.6) і (9.7), гіперболічні функції $\operatorname{ch} z$, $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{th} z$ та $\operatorname{cth} z$ можна вивчати, використовуючи властивості дробово-лінійного відображення та функції Жуковського.

Розглянемо більш детально властивості відображення $z \rightarrow \cos z$. Для цього знайдемо образи прямих, що паралельні координатним осям Ox і Oy . З формули (9.4) знаходимо, що образом прямої $l_x : z = x + iy_0, x \in \mathbb{R}$, де $y_0 \in \mathbb{R}$ – стала, паралельної дійсній осі, є крива L_x , параметричне рівняння якої у площині $w = u + iv$ має вигляд

$$u = \cos x \operatorname{ch} y_0, \quad v = -\sin x \operatorname{sh} y_0, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (9.8)$$

З формул (9.8) випливає, що при $y_0 \neq 0$ (пряма l_x не збігається з дійсною віссю) образом прямої l_x є еліпс з півосями $\operatorname{ch} y_0$ та $|\operatorname{sh} y_0|$ і фокусами в точках $w = \pm 1$, рівняння якого має вигляд

$$\frac{u^2}{\operatorname{ch}^2 y_0} + \frac{v^2}{\operatorname{sh}^2 y_0} = 1. \quad (9.9)$$

Якщо пряма l_x збігається з дійсною віссю, тобто $y_0 = 0$, то при відображенні $z \rightarrow \cos z$ її образом у площині w буде відрізок $[-1; 1]$, який при зміні величини x від $-\infty$ до $+\infty$ "обходить" нескінченну кількість разів.

Образом прямої $l_y : z = x_0 + iy, y \in \mathbb{R}$, де $x_0 \in \mathbb{R}$ – стала, паралельної уявній осі, є крива L_y , параметричне рівняння якої площині $w = u + iv$ має вигляд

$$u = \cos x_0 \operatorname{ch} y, \quad v = -\sin x_0 \operatorname{sh} y, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (9.10)$$

Для того, щоб з'ясувати тип кривої L_y , скористаємося рівняннями (9.10) і розглянемо такі випадки:

- а) $x_0 = k\pi$ при деякому цілому k ;
- б) $x_0 = (2k-1)\frac{\pi}{2}$ при деякому цілому k ;
- в) $x_0 \neq \pi n/2$ для всіх цілих n .

Для випадку а) маємо $u = (-1)^k \operatorname{ch} y, v = 0, y \in \mathbb{R}$, тобто крива L_y – це частина дійсної осі в площині $w = u + iv$, яка при зміні значення від

$-\infty$ до $+\infty$ "обходиться" двічі, причому, $u \geq 1$, якщо k – парне число, і $u \leq -1$, якщо k – непарне число.

Для випадку б) маємо $u = 0$, $v = (-1)^k \operatorname{sh} y$, $y \in \mathbb{R}$, тобто, крива L_y – це вся уявна вісь, яка при зміні значення від $-\infty$ до $+\infty$ "обходиться" у додатньому напрямку (у напрямку зростання значень v), якщо k – парне число, та у від'ємному, якщо k – непарне число.

Нарешті, для випадку в) крива L_y збігається з однією із гілок гіперболи

$$\frac{u^2}{\cos^2 x_0} - \frac{v^2}{\sin^2 x_0} = 1 \quad (9.11)$$

з півосями $|\cos x_0|$ та $|\sin x_0|$ і фокусами в точках $w = \pm 1$. При цьому, якщо $\cos x_0 > 0$, то L_y – це права гілка гіперболи (9.11), а якщо $\cos x_0 < 0$, то L_y – ліва гілка гіперболи (9.11).

Таким чином, відображення за допомогою функції $w = \cos z$ переводить ортогональну сітку прямих, що паралельні координатним осям декартової площини, в ортогональну сітку еліпсів (9.10) і гіпербол (9.11) зі спільними фокусами в точках ± 1 .

Аналогічним чином можна дослідити інші відображення, що здійснюються за допомогою тригонометричних і гіперболічних функцій, визначених в даному розділі.

Побудувавши поверхні Рімана для даних функцій, можна визначити функції, обернені до них.

9.2 Приклади розв'язування задач

9.2.1. Знайти образ смуги $\{0 < \operatorname{Re} z < \pi\}$ (рис. 9.1 а) при відображенні $w = \cos z$.

▷ Для розв'язання представимо функцію

$$w = \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

у вигляді суперпозиції трьох функцій: лінійної функції $w_1 = iz = e^{i\frac{\pi}{2}} z$, експоненціальної функції $w_2 = e^{w_1}$ та функції Жуковського $w = \frac{1}{2}(w_2 + \frac{1}{w_2})$.

Перше відображення здійснює поворот комплексної площини навколо початку координат на кут $\pi/2$ проти напрямку руху годинникової стрілки. Тому з заданої області отримаємо горизонтальну смугу, зображену на рис. 9.1 б.

Згадавши властивості експоненти, можемо встановити, що смуга з рис. 9.1 б перейде у область $\{0 < \arg w_2 < \pi\} = \{\operatorname{Im} w_2 > 0\}$ (рис. 9.1 в).

Нарешті, останнє відображення здійснюється за допомогою функції Жуковського. Нагадаємо, що верхня півплощина є областю однолистості фун-

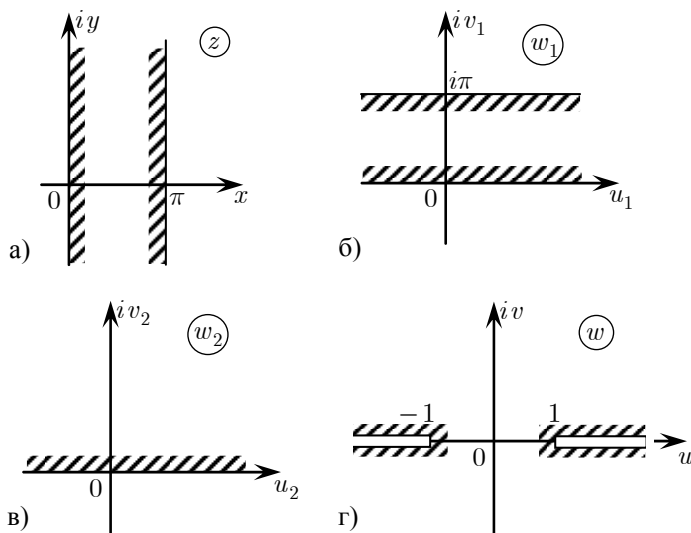


Рис. 9.1

кції Жуковського, яка переходить у комплексну площину $\mathbb{C}$ з розрізами $[-\infty; -1]$ та $[1; +\infty]$ (рис. 9.1 г). $\triangleleft$

9.2.2. Знайти образ прямокутника $\{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} z < \ln 2, 0 < \operatorname{Im} z < \pi/4\}$ (рис. 9.2 а) при відображенні $w = \operatorname{ch} z$.

▷ Аналогічно попередньому прикладу подамо функцію

$$w = \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

у вигляді суперпозиції двох функцій: експоненціальної $w_1 = e^z$ та функції Жуковського $w = \frac{1}{2}(w_1 + \frac{1}{w_1})$.

Відрізок горизонтальної прямої при відображенні $w_1 = e^z$ перейде у відрізок променя $\arg w_1 = \pi/4$, який на рис. 9.2 б позначений як l_1 , а відрізок дійсної осі $[0; \ln 2]$ – у відрізок $l_3 = [1; 2]$.

Відрізок вертикальної прямої $\operatorname{Re} z = \ln 2$ перейде у дугу кола $|w_2| = 2$, яка позначена через l_2 (рис. 9.2 б), а відрізок уявної осі $[0; i\pi/4]$ – у дугу кола одиничного радіуса l_4 .

У результаті експонента переводить заданий прямокутник у кільцевий сектор $\{1 < |w_1| < 2, 0 < \arg w_1 < \pi/4\}$ (рис. 9.2 б).

Знайдемо образ межі області з площини w_1 (рис. 9.2 б) при відображенні за допомогою функції Жуковського. Відрізок дійсної осі $l_3 = [1; 2]$

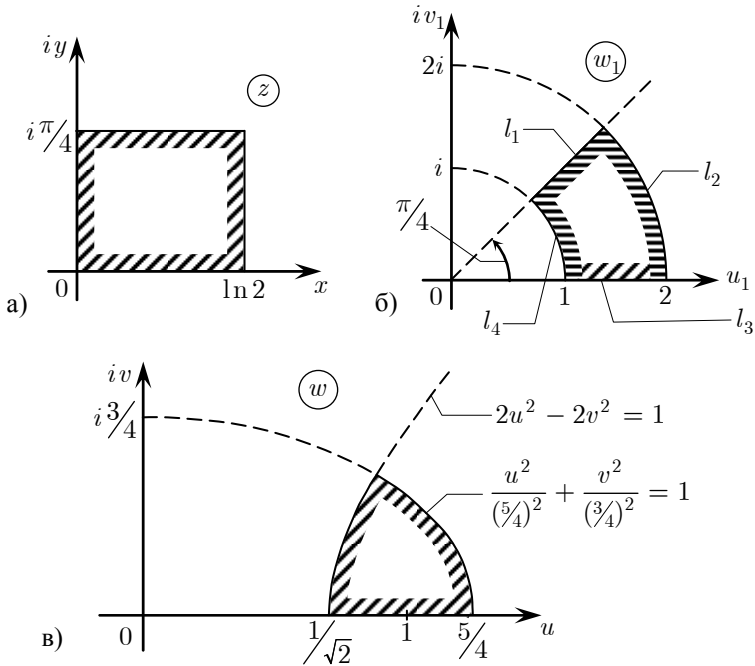


Рис. 9.2

перейде у відрізок $[1; 5/4]$ (рис. 9.2 в).

Оскільки півколо одиничного радіуса $\{|w_1| = 1, 0 \leq \arg w_1 \leq \pi\}$ під дією функції Жуковського переходить у відрізок $[-1; 1]$, то його дуга перейде у частину цього відрізка – відрізок $[1/\sqrt{2}; 1]$.

Функція Жуковського переводить промінь $\arg w_1 = \pi/4$ у праву гілку гіперболи $2u^2 - 2v^2 = 1$, а півкруг $\{|w_1| = 2, 0 \leq \arg w_1 \leq \pi\}$ – у півеліпс

$$\frac{u^2}{(5/4)^2} + \frac{v^2}{(3/4)^2} = 1, \quad u \geq 0,$$

які перетинаються у деякій точці a (рис. 9.2 в).

При цьому відрізок l_1 (рис. 9.2 б) перейде у частину гіперболи, яка лежить між точками $1/\sqrt{2}$ та a , а дуга кола l_2 (рис. 9.2 б) – у частину півеліпса між точками $5/4$ та a .

Таким чином кільцевий сектор з рис. 9.2 б під дією функції Жуковського перейде у область, зображену на рис. 9.2 в, яка і є образом вихідного прямокутника при відображенні $w = \cos z$. $\triangleleft$

9.2.3. Конформно відобразити на верхню півплощину $\text{Im } w > 0$ смугу $\{| \text{Re } z | < 1\}$ з розрізом по відрізку $[-1; 0]$ (рис. 9.3 а).

▷ Для розв'язання даної задачі скористаємось тим, що вертикальна смуга $|\text{Re } z| < \pi/2$ є областю однолистості функції $\sin z$, причому вказана смуга переходить у комплексну площину $\mathbb{C}$ з розрізами $[-\infty; -1]$ та $[1; +\infty]$.

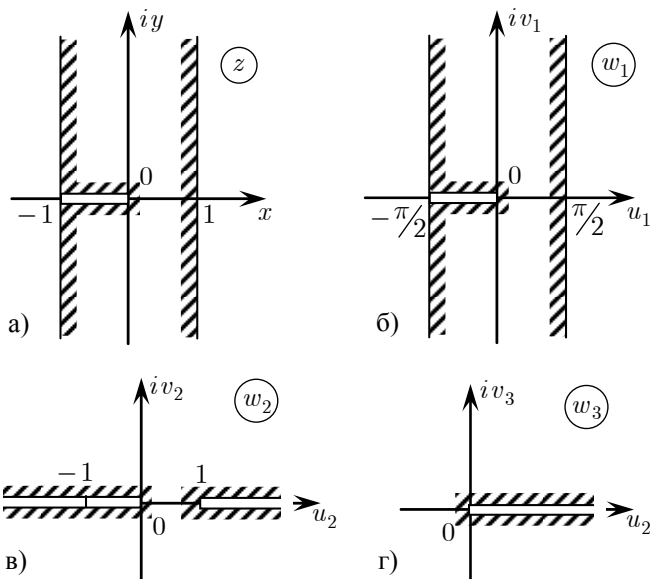


Рис. 9.3

Спочатку за допомогою перетворення подібності $w_1 = \pi z/2$ відображаємо задану в умові задачі смугу на смугу $|\text{Re } w_1| < \pi/2$ з розрізом $[-\pi/2; 0]$ (рис. 9.3 б). Далі до отриманої смуги застосовуємо відображення $w_2 = \sin w_1$, яке переведе її на комплексну площину $\mathbb{C}$ з розрізами $[-\infty; -1]$ та $[1; +\infty]$, а розріз по відрізку $[-\pi/2; 0]$ – на розріз $[-1; 0]$. У результаті матимемо площину $\mathbb{C}$ з розрізами $[-\infty; 0]$ та $[1; +\infty]$ (рис. 9.3 в).

Отриману область (рис. 9.3 в) можна розглядати як розширену комплексну площину $\mathbb{C}$ з розрізом, який з'єднує точки 0 та 1 і проходить через нескінченно віддалену точку. Тому для того, щоб відобразити її на верхню півплощину, перетворимо за допомогою дробово-лінійного відображення даний розріз на розріз вздовж додатньої частини дійсної осі (рис. 9.3 г). Для цього точку 0 залишимо нерухомою, точку 1 переведемо у ∞ , а не-

скінченно віддалену точку – у 1.

Дробово-лінійне відображення, яке задовольняє ці умови, має вигляд

$$w_3 = \frac{w_2}{w_2 - 1}.$$

На завершення розв'язання задачі застосовуємо відображення $w = \sqrt{w_3}$, для якого однозначна гілка функції $\sqrt{z}$ фіксується умовою $\sqrt{-1} = i$.
 $\triangleleft$

9.3 Питання для перевірки теоретичних знань

Визначення та основні властивості тригонометричних і гіперболічних функцій та функцій, що обернені до них. Їх області однолистості.

9.4 Завдання для аудиторної роботи

9.4.1. Знайти образи областей при вказаних відображеннях:

- $\{0 < \operatorname{Re} z < \pi, \operatorname{Im} z < 0\}$, $w = \operatorname{tg} z$;
- $\{0 < \operatorname{Re} z < \pi, \operatorname{Im} z > 0\}$;
- $\{|\operatorname{Re} z| < \pi/4\}$, $w = \operatorname{ctg} z$;
- $\{|\operatorname{Re} z| < \ln 2, 0 < \operatorname{Im} z < \pi/4\}$, $w = \operatorname{ch} z$;
- $\{|\operatorname{Im} z| < \pi/4, \operatorname{Re} z < 0\}$, $w = \operatorname{sh} z$.

9.4.2. Конформно відобразити на верхню півплощину $\operatorname{Im} w > 0$ зазначені нижче області:

- $\{|z - 1| > 1, |z + 1| > 1, \operatorname{Im} z > 0\}$;
- $\{|\operatorname{Im} z| < \pi\}$ з розрізом $[0; i\pi]$;
- $\{0 < \operatorname{Re} z < 1\}$ з розрізами $[0; a]$ та $[1 - b; 1]$, де $a, b > 0$, $a + b < 1$;
- $\{|\operatorname{Re} z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$ з розрізом $[0; ih]$, $h > 0$;
- $\{|z - i| > 1, |z + i| > 1\}$ з розрізом $[2i; +i\infty]$;
- $\{|z - i| > 1, |z + i| > 1, \operatorname{Re} z > 0\}$ з розрізом $[0; 1]$;
- $\{\operatorname{Im} z > 0, |z - 1| > 1\}$ з розрізами $[2i; ia]$, $[ib; +i\infty]$, де $a, b \in (2; +\infty)$.

9.5 Завдання для самостійної роботи

9.5.1. Знайти образи вказаних множин при відображенні $w = \sin z$:

- $\operatorname{Re} z = c$;
- $\operatorname{Im} z = c$;
- $|\operatorname{Re} z| < \pi/2$;
- $0 < \operatorname{Re} z < \pi/2, \operatorname{Im} z > 0$;
- $-\pi/4 < \operatorname{Re} z < \pi/2, |\operatorname{Im} z| < \ln h$, де $h > 1$.

9.5.2. Знайти образи вказаних множин при відображенні $w = \operatorname{sh} z$:

- $\operatorname{Re} z = c$;
- $\operatorname{Im} z = c$;
- $|\operatorname{Im} z| < \pi/2$;

- d) $-\pi/2 < \operatorname{Im} z < 0, \operatorname{Re} z > 0$;
 e) $-\pi/2 < \operatorname{Im} z < \pi/3, 0 < \operatorname{Re} z < \ln h, h > 1$.

9.5.3. Знайти образи вказаних множин при відображенні $w = \operatorname{tg} z$:

- a) $\operatorname{Re} z = c$;
 b) $\operatorname{Im} z = c$;
 c) $0 < \operatorname{Re} z < \pi/4$;
 d) $|\operatorname{Re} z| < \pi/4, \operatorname{Im} z > 0$;
 e) $0 < \operatorname{Im} z < \pi$;
 f) $0 < \operatorname{Im} z < \pi, \operatorname{Re} z < 0$.

9.5.4. Конформно відобразити на верхню півплощину $\operatorname{Im} w > 0$ такі області:

- a) $\{|z - 1| > 1, |z - 2| < 2\}$ з розрізом $[2; a]$, $a < 4$;
 b) $\{|z - i| > 1, |z - 2i| < 2\}$ з розрізами $[2i; ia]$, $[ib, 4i]$, де $a < b$;
) $\{|\operatorname{Re} z| < 1, \operatorname{Im} z < 0\}$ з розрізом $[-i\infty; ih]$, де $h < 0$;
 d) $\{|z - 1| > 1, |z + 1| > 1\}$ з розрізами $[2; +\infty]$, $[-\infty; -4]$.

9.6 Приклади задач для модульної контрольної роботи (другий модуль)

Після завершення вивчення тем "Лінійні та дробово-лінійні відображення", "Відображення за допомогою степеневих функцій", "Відображення за допомогою експоненти і логарифма", "Функція Жуковського та обернена до неї", "Відображення за допомогою тригонометричних та гіперболічних функцій" проводиться модульна контрольна робота (МКР №2), яка крім теоретичних питань, містить також задачі до кожної зі згаданих вище тем. Приклади таких задач подано нижче.

1. Конформно відобразити на смугу $\{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} z < 1\}$ область $\{\operatorname{Im} z > 0, |z - i| > 1\}$.
2. Конформно відобразити на верхню півплощину область $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1, |z - i| < 1\}$.
3. Конформно відобразити на верхню півплощину область $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0, |z - 1| > 1, |z - 2| < 2\}$.
4. Конформно відобразити на верхню півплощину круг $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ з розрізом вздовж відрізка $[a; 1]$, де $a \in (-1; 0)$.
5. Конформно відобразити на верхню півплощину область $\{z \in \mathbb{C} : |z - 1| > 1, |z - 2| < 2\}$ з розрізом вздовж відрізка $[2; a]$, де $a \in [2; 4]$.

Тема 10

Шляхи та криві. Інтеграл вздовж шляху

10.1 Теоретичні відомості

Означення 10.1. Шляхом в комплексній площині $\mathbb{C}$ називається геометричне місце точок

$$\gamma = \{z \in \mathbb{C} : z = \gamma(t), t \in [\alpha; \beta]\},$$

де $\gamma(t)$ – деяка неперервна комплексно-значна функція, визначена на відрізку $[\alpha; \beta] \subset \mathbb{C}$.

Рівність $z = \gamma(t), t \in [\alpha; \beta]$, називається *рівнянням шляху* γ . Цю рівність ще записують у вигляді $\gamma(t) = x(t) + iy(t), t \in (\alpha; \beta)$, де $x(t), y(t) \in \mathbb{R}$.

Значення функції $\gamma(t)$ для фіксованого $t = t_0 \in [\alpha; \beta]$ називають *точкою шляху*, при цьому, точки $\gamma(\alpha)$ і $\gamma(\beta)$ мають назву *кінцевих точок* шляху γ .

Означення 10.2. Шлях γ називається *замкненим*, якщо $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$, тобто його кінцеві точки співпадають.

Означення 10.3. Шлях γ називається *жордановим* або *простим*, якщо відображення $\gamma : [\alpha; \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ є взаємно-однозначним на інтервалі $(\alpha; \beta)$.

Означення 10.4. Шлях γ називається *неперервно-диференційованим*, якщо $\gamma(t) \in C^1((\alpha; \beta))$. Тут $\gamma'(t)$ розуміємо в тому сенсі, що $\gamma'(t) = x'(t) + iy'(t), t \in (\alpha; \beta)$.

Означення 10.5. Неперервно-диференційований шлях γ називається *гладким*, якщо $\gamma'(t) \neq 0$ для всіх $t \in (\alpha; \beta)$.

Означення 10.6. Шлях γ називається *кусково-гладким*, якщо існує таке скінченне розбиття $\lambda = \{\alpha = \beta_0 < \beta_1 < \dots < \beta_n = \beta\}$ відрізка $[\alpha; \beta]$, що при кожному $k = \overline{1, n}$ функція $\gamma_k = \gamma(t), t \in [\beta_{k-1}, \beta_k]$, визначає гладкий шлях.

Означення 10.7. Шлях γ називається *спрямлюваним*, якщо існує скінченна границя

$$l(\gamma) = \lim_{d(\lambda) \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n |\gamma(\beta_k) - \gamma(\beta_{k-1})|,$$

де $\lambda = \{\alpha = \beta_0 < \beta_1 < \dots < \beta_n = \beta\}$ – довільне розбиття відрізка $[\alpha; \beta]$, $d(\lambda) = \max_{k=1, \dots, n} (\beta_k - \beta_{k-1})$ – діаметр розбиття.

Величина $l(\gamma)$ називається *довжиною шляху*. Якщо шлях γ гладкий, то його довжина визначається згідно формули

$$l(\gamma) = \int_{\alpha}^{\beta} |\gamma'(t)| dt = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{|x'(t)|^2 + |y'(t)|^2} dt,$$

де $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$.

Означення 10.8. Два шляхи $\gamma_1 : [\alpha_1; \beta_1] \rightarrow \mathbb{C}$ та $\gamma_2 : [\alpha_2; \beta_2] \rightarrow \mathbb{C}$ називаються *еквівалентними*, якщо існує така неперервна зростаюча функція $\tau = \tau(t)$, $t \in [\alpha; \beta]$, що відображення $\tau : [\alpha_1; \beta_1] \rightarrow [\alpha_2; \beta_2]$ є взаємно-однозначним і $\gamma_1(t) = \gamma_2(\tau(t))$, $t \in [\alpha; \beta]$.

Означення 10.9. Множина всіх еквівалентних шляхів називається *кривою* або *плоскою кривою*.

Таким чином, поняття *кривої* Γ описує те спільне, що мають відповідні еквівалентні шляхи: одну й ту ж саму множину точок комплексної площини $\mathbb{C}$, які належать одному з шляхів γ , що визначає криву Γ , та впорядкованість точок на Γ (напрямок). Зокрема, *жорданова крива* – множина шляхів, еквівалентних деякому жордановому шляху. Множина точок, що утворюють гладку жорданову криву, є компактною в $\mathbb{C}$.

Значення поняття жорданової кривої в комплексному аналізі показує така теорема.

Теорема 10.1 (Жордана). Кожна замкнена жорданова крива Γ ділить розширену комплексну площину $\mathbb{C}$ на дві однозв'язні області D_1 та D_2 , спільною межею яких є крива Γ , тобто $\partial D_1 = \Gamma = \partial D_2$.

При цьому, одна з цих областей обмежена і називається *внутрішністю* кривої Γ , а інша містить нескінченно віддалену точку ∞ і називається *зовнішністю* кривої Γ .

При розгляді i) гладкої кривої, ii) кусково-гладкої кривої та iii) спрямлюваної кривої у відповідному означенні щодо функції $\tau = \tau(t)$, яка визначає еквівалентність згаданих вище шляхів, додатково вимагається виконання умов, відповідно, про:

i) неперервну-диференційованість функції $\tau = \tau(t)$ на проміжку $(\alpha; \beta)$ та додатність її похідної;

ii) неперервну-диференційованість функції $\tau = \tau(t)$ на проміжку $(\alpha; \beta)$ крім, можливо, скінченної кількості точок, та додатність її похідної в тих точках, в яких вона існує;

iii) абсолютну неперервність функції $\tau = \tau(t)$ на $[\alpha; \beta]$.

Означення 10.10. Область, межею якої є замкнена жорданова крива, називається *жордановою областю*.

Якщо для замкненої жорданової кривої Γ , яка розглядається як компактне геометричне місце точок в $\mathbb{C}$, не обумовлено її параметризацію, то *додатнім напрямком* на кривій Γ вважається той, при русі згідно обраного напрямку вздовж Γ внутрішність Γ залишається зліва.

Якщо крива Γ визначається шляхом γ , то крива Γ^- визначається відповідно шляхом γ^- , що відрізняється від γ орієнтацією.

Таким чином, множини точок ривих Γ та Γ^- співпадають, але додатній напрямок на Γ^- протилежний додатному напрямку на Γ .

Означення 10.11. Функція $f : D \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$, де $D \subset \mathbb{C}$, називається *узагальнено-неперервною* в точці $z_0 \in D$, якщо існує $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0) \in \overline{\mathbb{C}}$.

Означення 10.12. Якщо $\gamma = \gamma(t)$, $t \in [\alpha; \beta]$, узагальнено-неперервна комплекснозначна функція (область визначення функції $\gamma = \gamma(t)$ може бути необмеженою в $\overline{\mathbb{C}}$), то відповідний шлях γ в розширеній комплексній площині $\overline{\mathbb{C}}$ називається *узагальнено-неперервним* в $\overline{\mathbb{C}}$, а множина всіх еквівалентних γ шляхів – *узагальнено-неперервною кривою* Γ в $\overline{\mathbb{C}}$.

Якщо $\gamma(t_0) = \infty$ для деякого $t_0 \in [\alpha; \beta]$, то кажуть, що крива Γ проходить через нескінченно віддалену точку.

Розглянуте вище поняття жорданового шляху (кривої) поширюється також і на випадок узагальнено-неперервного шляху (кривої).

Інтеграл від функції комплексної змінної вздовж деякого шляху γ (кривої Γ) можна визначити за допомогою інтегральних сум, аналогічно тому, як в математичному аналізі визначається інтеграл від функції дійсної змінної на відрізок числової осі $\mathbb{R}$.

Нехай γ – деякий спрямлюваний шлях з фіксованим напрямком руху на ньому, а $z = \gamma(t)$, $t \in [\alpha; \beta]$, – рівняння шляху γ . Розглянемо довільне розбиття λ проміжку $[\alpha; \beta]$, яке визначається точками

$$\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_n < t_{n+1} = \beta,$$

згідно з яким відповідним чином точками $z_k = \gamma(t_k)$, $k = \overline{0, n+1}$, визначено деяке розбиття шляху γ .

Величина $d(\lambda) = \max_{0 \leq k \leq n} (t_{k+1} - t_k)$ називається діаметром розбиття λ .

Нехай на множині точок $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : z = \gamma(t), t \in [\alpha; \beta]\}$ задано деяку неперервну функцію $f(z)$. У цьому випадку кажуть, що на шляху γ визначено неперервну функцію $f(z)$.

Означення 10.13. Сума вигляду

$$S(\lambda, \{\tau_k\}_{k=0}^n) = \sum_{k=0}^n f(\gamma(\tau_k)) (\gamma(t_{k+1}) - \gamma(t_k)),$$

де $\tau_k \in [t_k; t_{k+1}]$, $k = \overline{0, n}$, називається *комплексною інтегральною сумою* функції $f(z)$ для розбиття λ .

Означення 10.14. Величина $\lim_{d(\lambda) \rightarrow 0} S(\lambda, \{\tau_k\}_{k=0}^n)$ називається *інтегралом від функції комплексної змінної $f(z)$ вздовж шляху γ* і позначається $\int_{\gamma} f(z) dz$.

Границя $\lim_{d(\lambda) \rightarrow 0} S(\lambda, \{\tau_k\}_{k=0}^n)$ існує, бо, записавши функції $f(z)$ та $\gamma(t)$

у вигляді $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$, інтегральну суму можна подати як суму $S = S_1 + i S_2$ двох інтегральних сум для функцій $u(x, y)$, $v(x, y)$ від двох дійсних змінних, де

$$S_1 = \sum_{k=0}^n [u(x(\tau_k), y(\tau_k)) (x(t_{k+1}) - x(t_k)) - \\ - v(x(\tau_k), y(\tau_k)) (y(t_{k+1}) - y(t_k))] , \\ S_2 = \sum_{k=0}^n [u(x(\tau_k), y(\tau_k)) (y(t_{k+1}) - y(t_k)) + \\ + v(x(\tau_k), y(\tau_k)) (x(t_{k+1}) - x(t_k))] .$$

Оскільки функції $u(x, y)$, $v(x, y)$ є неперервними на множині точок γ , а шлях γ – спрямлюваний, то маємо

$$\lim_{d(\lambda) \rightarrow 0} S_1(\lambda, \{\tau_k\}_{k=0}^n) = \int_{\gamma} u(x, y) dx - v(x, y) dy, \\ \lim_{d(\lambda) \rightarrow 0} S_2(\lambda, \{\tau_k\}_{k=0}^n) = \int_{\gamma} v(x, y) dx + u(x, y) dy,$$

причому дані границі не залежать ні від розбиття відрізка $[\alpha; \beta]$, ні від вибору точок $\{\tau_k\}_{k=0}^n$.

Таким чином, інтеграл від неперервної функції $f(z)$ комплексної змінної вздовж спрямлюваного шляху γ дорівнює сумі криволінійних інтегралів другого роду

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} u(x, y) dx - v(x, y) dy + i \int_{\gamma} v(x, y) dx + u(x, y) dy.$$

Якщо шлях γ є гладким, тобто функція $\gamma(t) \in C^1((\alpha; \beta))$ і $\gamma'(t) \neq 0$, $t \in (\alpha; \beta)$, то інтеграл від функції $f(z)$ вздовж шляху γ можна обчислити за формулою

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\alpha}^{\beta} f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt. \quad (10.1)$$

Сформулюємо деякі властивості інтегралу вздовж шляху.

10.1. Лінійність. Нехай $f(z)$, $g(z)$ – неперервні на спрямлюваному шляху γ функції. Тоді для довільних $a, b \in \mathbb{C}$ виконується рівність

$$\int_{\gamma} (a f(z) + b g(z)) dz = a \int_{\gamma} f(z) dz + b \int_{\gamma} g(z) dz.$$

10.2. Орієнтованість. Нехай функція $f(z)$ неперервна на спрямлюваному шляху $\gamma: z = \gamma(t)$, $t \in [\alpha; \beta]$, а шлях γ^- співпадає (як геометричне місце

точок) з шляхом γ , але має протилежну орієнтацію (зокрема, його рівняння має вид $\gamma^-(t) = \gamma(\alpha + \beta - t)$, $t \in [\alpha; \beta]$). Тоді

$$\int_{\gamma^-} f(z) dz = - \int_{\gamma} f(z) dz.$$

10.3. Адитивність. Нехай γ_1, γ_2 – спрямлювані шляхи, що визначені рівняннями $z = \gamma_1(t)$, $t \in [\alpha; \alpha_1]$, та $z = \gamma_2(t)$, $t \in [\alpha_1; \beta]$, відповідно, та $\gamma_1(\alpha_1) = \gamma_2(\alpha_1)$. *Об'єднанням* $\gamma_1 \cup \gamma_2$ шляхів γ_1, γ_2 називається шлях $\gamma : [\alpha; \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ такий, що

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t), & t \in [\alpha; \alpha_1], \\ \gamma_2(t), & t \in [\alpha_1; \beta]. \end{cases}$$

Тоді для будь-якої неперервної на шляху γ функції $f(z)$ виконується

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz.$$

10.4. Інваріантність. Нехай γ та γ_1 – два еквівалентних, кусково-гладких шляхи. Тоді для довільної неперервної на шляху γ і, як наслідок, неперервній на шляху γ_1 функції $f(z)$ виконується рівність

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz.$$

Якщо γ – деякий спрямлюваний шлях, а функція $\varphi(z)$ визначає взаємно-однозначне і неперервно-диференційоване (конформне) відображення шляху γ на шлях σ , то для неперервної функції f , визначеної на σ , справедлива рівність

$$\int_{\sigma} f(\xi) d\xi = \int_{\gamma} f(\varphi(z)) \varphi'(z) dz.$$

Ця формула може розглядатися як формула заміни змінної інтегрування.

10.5. Оцінка інтегралу. Нехай функція $f(z)$ неперервна на спрямлюваному шляху $\gamma : [\alpha; \beta] \rightarrow \mathbb{C}$. Тоді виконується нерівність

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \int_{\gamma} |f(z)| dl,$$

де в правій частині стоїть криволінійний інтеграл першого роду (інтеграл від функції дійсних змінних x та y , $z = x + iy$) вздовж шляху γ , а dl – диференціал довжини шляху.

Якщо ж існує така стала $M > 0$, що для всіх точок шляху γ виконується нерівність $|f(z)| \leq M$, то справедлива формула

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq M|\gamma|,$$

де $|\gamma|$ – довжина шляху γ .

10.6. Граничний перехід під знаком інтегралу. Нехай $\gamma : [\alpha; \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ – спрямлюваний шлях, на якому визначені неперервні функції $f_n(z)$, $n \in \mathbb{N}$, які рівномірно збігаються на γ до деякої функції $f(z)$. Тоді функція $f(z)$ неперервна на γ і виконується рівність

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma} f_n(z) dz.$$

10.7. Зміна порядків інтегрування та підсумовування функціонального ряду. Нехай $\gamma : [\alpha; \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ – спрямлюваний шлях, на якому визначені неперервні функції $f_n(z)$, $n \in \mathbb{N}$, такі, що функціональний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ рівномірно збігається на γ до деякої функції $f(z)$. Тоді функція $f(z)$ неперервна на γ , і виконується рівність

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\gamma} f_n(z) dz,$$

тобто якщо функціональний ряд з неперервних на спрямлюваному шляху γ функцій рівномірно збігається, то для цього ряду можна змінити порядок операцій інтегрування та обчислення його суми.

Означення 10.15. Голоморфна (аналітична) в області D функція $F(z)$ називається *первісною* функції $f(z)$ в області D , якщо для кожної точки $z \in D$ виконується рівність $F'(z) = f(z)$.

Первісна для функції $f(z)$ в області D при умові, що вона існує, визначається з точністю до сталої. Справедлива така теорема.

Теорема 10.2. Якщо $F(z)$ – деяка первісна для функції $f(z)$ в області D , то будь-яка первісна для функції $f(z)$ в D записується формулою $F(z) + C$, де $C \in \mathbb{C}$ – стала.

За допомогою теореми Коші (див. теоретичні відомості до теми 11) можна довести таке твердження.

Теорема 10.3 (про локальне існування первісної). Якщо функція $f(z)$ голоморфна (аналітична) в області D , то для будь-якої точки $z_0 \in D$ в кожному крузі $U_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\} \subset D$ функція $f(z)$ має

первісну $F(z)$, що записується за допомогою рівності

$$F(z) = \int_{[z_0, z]} f(\xi) d\xi,$$

де шлях інтегрування $[z_0; z] \subset D$ – прямолінійний відрізок з початком в точці z_0 і кінцем в точці z .

Означення 10.16. Нехай функція $f(z)$ визначена в області D , $\gamma : [\alpha; \beta] \rightarrow D$ – деякий (неперервний) шлях. Функція $\Phi : [\alpha; \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ називається *первісною вздовж шляху γ* , якщо виконуються такі умови: функція $\Phi(t)$ неперервна для всіх $t \in [\alpha; \beta]$; для кожної точки $t_0 \in [\alpha; \beta]$ існує окіл $U(\gamma(t_0)) \subset D$ точки $z = \gamma(t_0)$, в якому функція $f(z)$ має таку первісну $F_U(z)$, що для всіх t з деякого околу точки t_0 виконується рівність $F_U(\gamma(t)) = \Phi(t)$.

Взагалі кажучи, первісна $\Phi(t)$ для функції $f(z)$ вздовж шляху $\gamma \subset D$ є функцією параметра $t \in [\alpha; \beta]$, але при цьому первісна $\Phi(t)$ може не бути функцією від точок шляху γ .

Теорема 10.4. Якщо функція $f(z)$ голоморфна (аналітична) в області D , то для довільного (неперервного) шляху $\gamma \subset D$ первісна для $f(z)$ вздовж γ існує і визначається з точністю до сталої.

Якщо функція $f(z)$ має первісну $F(z)$ в усій області D , то функція $F(\gamma(t))$ є первісною для $f(z)$ вздовж шляху $\gamma(t) \subset D$, $t \in [\alpha; \beta]$.

Якщо для функції $f(z)$ відомо її первісну вздовж (неперервного) шляху $\gamma \subset D$ (наприклад, відомо первісну для $f(z)$ в області D), то інтеграл від функції $f(z)$ вздовж γ можна обчислити за допомогою формули *Ньютона-Лейбніца*.

Теорема 10.5 (формула Ньютона-Лейбніца). Нехай функція $f(z)$ має первісну $\Phi(t)$ вздовж (неперервного) шляху $\gamma : [\alpha; \beta] \rightarrow \mathbb{C}$. Тоді справедлива формула

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha).$$

Останнє твердження дає можливість перекоонатися в необхідності виконання певних умов щодо області D для того, щоб довільна голоморфна (аналітична) в D функція $f(z)$ мала в цій області глобальну первісну. Зокрема, в багатозв'язній області не кожна голоморфна (аналітична) функція має первісну.

Дійсно, розглянемо функцію $f(z) = 1/z$, $z \in D = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 2\}$. Очевидно, що дана функція голоморфна (аналітична) в області D . Якщо припустити, що $f(z)$ має первісну в D , то для довільного кола $\gamma_r(t) = r e^{it}$,

$t \in [0; 2\pi]$, де $0 < r < 2$, то за формулою Ньютона-Лейбніца, оскільки шлях $\gamma_r(t)$ замкнений (його початок і кінець співпадають), отримаємо таку рівність

$$\int_{\gamma_r} \frac{1}{z} dz = 0.$$

Але якщо цей інтеграл обчислити, скориставшись формулою (10.1), то легко знайти, що його значення дорівнює $2\pi i \neq 0$.

Має місце таке твердження.

Теорема 10.6. *Якщо область D є однозв'язною, то кожна голоморфна (аналітична) в D функція $f(z)$ має в цій області первісну.*

Сформульованим вище твердженням про первісну для голоморфної (аналітичної) в області функції можна надати дещо інший зміст.

Означення 10.16. Диференціальна форма $\omega = P(x, y) dx + Q(x, y) dy$, де $P(x, y)$, $Q(x, y)$ – дійсні функції від змінних $(x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$, називається замкнутою в області D , якщо $P(x, y)$ та $Q(x, y)$ диференційовні в D і всюди в цій області виконується умова

$$\partial P / \partial y = \partial Q / \partial x.$$

Означення 10.17. Диференціальна форма $\omega = P(x, y) dx + Q(x, y) dy$ називається точною в області D , якщо існує така диференційовна в D функція $\varphi(x, y)$, що для всіх $(x, y) \in D$ виконується рівність

$$d\varphi(x, y) = P(x, y) dx + Q(x, y) dy.$$

Аналоги цих означень в комплексному аналізі формулюються таким чином.

Означення 10.18. Диференціальна форма $\omega = f(z, \bar{z}) dz$ називається замкнутою в області $D \subset \mathbb{C}$, якщо функція $f(z, \bar{z})$ голоморфна (аналітична) в D . Очевидно, що при цьому функція $f(z, \bar{z})$ не залежить від $\bar{z}$, тобто $\partial f / \partial \bar{z} = 0$.

Означення 10.19. Диференціальна форма $\omega = f(z, \bar{z}) dz$ називається точною в області D , якщо існує така голоморфна (аналітична) в D функція $F(z)$, що для всіх $z \in D$ виконується рівність $\omega = f(z, \bar{z}) dz = dF(z)$. Іншими словами, функція $F(z)$ є первісною для $f(z, \bar{z})$ в області D . Зрозуміло, що при цьому функція $f(z, \bar{z})$ не залежить від $\bar{z}$.

Дещо пізніше (див. теоретичні відомості до теми 11) буде сформульовано теорему про голоморфність (аналітичність) похідної від голоморфної (аналітичної) функції. На підставі цієї теореми можна стверджувати, що кожна точна в області D диференціальна форма $\omega = f(z) dz$ необхідно є замкнутою в області D .

З іншого боку, якщо диференціальна форма $\omega = f(z) dz$ є замкнутою в однозв'язній області D , то ця форма обов'язково є точною в цій області.

Якщо ж область багатозв'язна, то не кожна замкнена в D диференціальна форма $\omega = f(z) dz$ є точною. В справедливості даного твердження легко переконатися, якщо розглянути диференціальну форму $\omega = (1/z) dz$ в області $D = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 2\}$, де ця форма є замкнутою, але не є точною, бо функція $f(z) = 1/z$ не має первісної в цій області.

10.2 Приклади розв'язування задач

10.2.1. Обчислити інтеграл

$$\int_{|z-a|=R} (z-a)^n dz, \quad n \in \mathbb{Z},$$

при умові, що коло проходиться проти годинникової стрілки.

▷ Образом шляху інтегрування є коло з центром в точці $z = a$ та радіусом R . Тому параметризацією цього шляху можна записати в такому вигляді: $z = a + R e^{i\varphi}$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Тоді, враховуючи означення інтегралу в комплексній площині, отримаємо

$$\int_{|z-a|=R} (z-a)^n dz = \int_0^{2\pi} R^n e^{in\varphi} R i e^{i\varphi} d\varphi = R^{n+1} i \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)\varphi} d\varphi.$$

Для обчислення останнього інтегралу розглянемо два випадки: а) $n \neq -1$ та б) $n = -1$. У випадку а) маємо

$$\int_0^{2\pi} e^{i(n+1)\varphi} d\varphi = \left. \frac{e^{i(n+1)\varphi}}{i(n+1)} \right|_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} = \frac{e^{i2\pi(n+1)} - 1}{i(n+1)} = 0.$$

У випадку б) знаходимо

$$\int_0^{2\pi} e^{i(n+1)\varphi} d\varphi = \int_0^{2\pi} 1 d\varphi = 2\pi.$$

Об'єднуючи обидва випадки, остаточно отримуємо

$$\int_{|z-a|=R} (z-a)^n dz = \begin{cases} 2\pi i, & n = -1, \\ 0, & n \neq -1. \end{cases} \quad \triangleleft$$

10.2.2. Обчислити інтеграл $\int_{\gamma} z \operatorname{Ln} z dz$, де γ – межа півкільця $1 < |z| < 2$, $0 < \arg z < \pi$ (рис. 10.1), яка обходить у додатному напрямку. Однозначна гілка функції $\operatorname{Ln} z$ визначається умовою $\operatorname{Ln} 1 = 0$.

▷ Зафіксуємо однозначну гілку багатозначної функції $\operatorname{Ln} z$. Нагадаємо, що однозначні гілки логарифма можна визначити в комплексній площині з розрізом по додатній частині дійсної осі. Тоді можна записати

$$\operatorname{Ln} z = \ln |z| + i(\arg z + 2\pi k), \quad k \in \mathbb{Z},$$

де $0 \leq \arg z < 2\pi$, а значення параметра k визначають однозначні гілки функції.

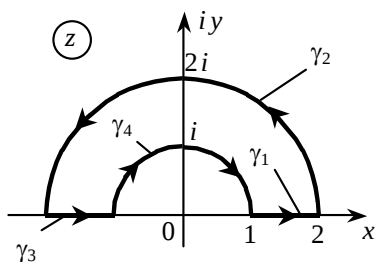


Рис. 10.1

$\gamma_1 : z = x, x \in [1; 2]$, – відрізок дійсної осі $[1; 2]$,

$\gamma_2 : z = 2e^{i\varphi}, \varphi \in [0; \pi]$, – півколо радіуса 2, яке проходиться проти годинникової стрілки,

$\gamma_3 : z = x, x \in [-2; -1]$, – відрізок дійсної осі $[-2; -1]$,

$\gamma_4 : z = e^{i\varphi}, \varphi \in [\pi; 0]$, – півколо радіуса 1, яке проходиться за годинниковою стрілкою.

Використовуючи властивість адитивності інтегралу, отримаємо

$$\int_{\gamma} z \operatorname{Ln} z \, dz = \sum_{k=1}^4 \int_{\gamma_k} z \operatorname{Ln} z \, dz. \quad (10.3)$$

Обчислимо окремо кожен інтеграл, враховуючи означення інтегралу та правило обчислення логарифма (10.2). Маємо:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1} z \operatorname{Ln} z \, dz &= \int_1^2 x \ln x \, dx = |\text{Інтегруємо частинами}| = \\ &= \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_1^2 - \frac{1}{2} \int_1^2 x \, dx = 2 \ln 2 - \frac{x^2}{4} \Big|_1^2 = 2 \ln 2 - \frac{3}{4}; \\ \int_{\gamma_2} z \operatorname{Ln} z \, dz &= \int_0^{\pi} 2e^{i\varphi} (\ln 2 + i\varphi) 2ie^{i\varphi} d\varphi = \\ &= 4 \left(i \ln 2 \int_0^{\pi} e^{i2\varphi} d\varphi - \int_0^{\pi} \varphi e^{i2\varphi} d\varphi \right) = \left| \begin{array}{l} \text{Другий інтеграл} \\ \text{інтегруємо частинами} \end{array} \right| = \\ &= 4 \left(i \ln 2 \int_0^{\pi} e^{i2\varphi} d\varphi - \frac{\varphi e^{i2\varphi}}{2i} \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{2} \int_0^{\pi} e^{i2\varphi} d\varphi \right) = \\ &= 2i\pi e^{2i\pi} + 2(2i \ln 2 + 1) \int_0^{\pi} e^{i2\varphi} d\varphi = 2i\pi + (2i \ln 2 + 1) \frac{e^{2i\varphi}}{2i} \Big|_0^{\pi} = 2i\pi; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_3} z \operatorname{Ln} z \, dz &= \int_{-2}^{-1} x (\ln(-x) + i\pi) \, dx = \\
&= \int_{-2}^{-1} x \ln(-x) \, dx + i\pi \int_{-2}^{-1} x \, dx = \left| \begin{array}{l} \text{Заміна } x = -t \\ \text{в першому інтегралі} \end{array} \right| = \\
&= - \int_1^2 t \ln t \, dt + i\pi \frac{x^2}{2} \Big|_{-2}^{-1} = \frac{3}{4} - 2 \ln 2 - \frac{3}{2} \pi i; \\
\int_{\gamma_4} z \operatorname{Ln} z \, dz &= \int_{\pi}^0 e^{i\varphi} (\ln 1 + i\varphi) i e^{i\varphi} d\varphi = \int_0^{\pi} \varphi e^{2i\varphi} d\varphi = \\
&= \left| \begin{array}{l} \text{Аналогічно} \\ \text{інтегралу по } \gamma_2 \end{array} \right| = -\frac{i\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Підставивши отримані значення для інтегралів в (10.3), отримаємо

$$\int_{\gamma} z \operatorname{Ln} z \, dz = 0.$$

◁

10.2.3. Обчислити інтеграл $\int_{\gamma} \left(\frac{3}{2} z^2 + z \right) dz$, де γ – шлях, який з'єднує точки $2 + 2i$ та $1 + i$.

▷ Підінтегральна функція $f(z) = \frac{3}{2} z^2 + z$ є голоморфною (аналітичною) в усій комплексній площині і має там первісну – функцію $F(z) = \frac{1}{2} (z^3 + z^2) + C$. Тоді за формулою Н'ютона-Лейбніца

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma} \left(\frac{3}{2} z^2 + z \right) dz &= F(1 + i) - F(2 + 2i) = \\
&= \frac{1}{2} ((1 + i)^3 + (1 + i)^2 - (2 + 2i)^3 - (2 + 2i)^2) = -\frac{(1 + i)^2}{2} (10 + 7i).
\end{aligned}$$

Зауважимо, що результат обчислення інтегралу не залежить від шляху інтегрування, а залежить лише від вибору точок, які він з'єднує. ◁

10.3 Питання для перевірки теоретичних знань

Означення шляху та поняття інтеграла від функцій комплексної змінної вздовж шляху. Зв'язок з криволінійним інтегралом. Основні властивості інтеграла від функції комплексної змінної вздовж шляху. Означення первісної для функції комплексної змінної. Теорема про сукупність всіх первісних для функції комплексної змінної.

Теорема Коші про інтеграл від голоморфної в області функції. Теорема про локальне існування первісної. Означення первісної для функції вздовж шляху. Теорема про існування первісної вздовж довільного шляху в області. Формула Ньютона-Лейбніца. Чи для всіх голоморфних функцій в довільній

області існує первісна? Аналог формули інтегрування за частинами. Зв'язок між поняттями інтегровності і диференційовності функцій та поняттями точної і замкнутої диференціальної форми.

10.4 Завдання для аудиторної роботи

10.4.1. Знайти геометричний образ та дати характеристику шляхів:

- a) $\gamma : z = t + it^2, \quad t \in [-1; 1];$ b) $\gamma : z = t^2 + it^4, \quad t \in [-1; 1];$
 c) $\gamma : z = t^3 + it^2, \quad t \in [-1; 1];$ d) $\gamma : z = e^{it}, \quad t \in [0; 2\pi].$

10.4.2. Визначити, які із вказаних нижче шляхів є еквівалентними:

- $\gamma_1 : z = t, \quad t \in [0; 1];$ $\gamma_2 : z = \sin t, \quad t \in [0; \pi/2];$
 $\gamma_3 : z = \cos t, \quad t \in [0; \pi/2];$ $\gamma_4 : z = t^3 + it^2, \quad t \in [-1; 1];$
 $\gamma_5 : z = t + i|t|, \quad t \in [-1; 1].$

10.4.3. Обчислити інтеграли:

- a) $\int_{\gamma} |z| dz$, де γ – радіус-вектор точки $2 - i$;
 b) $\int_{\gamma} z/|z| dz$, де γ – межа області $\{1 < |z| < 2, 0 < \arg z < \pi/2\}$, яка проходиться у від'ємному напрямку;
 c) $\int_{\gamma} \sin(2 \ln z)/z dz$, γ – дуга кола $|z| = 1$, яка з'єднує точки 1 та i та лежить у верхній півплощині, $\ln z = \ln |z| + i \arg z$.

10.4.4. Визначити, чи є гомотопними шляхи:

- a) $\gamma_1 : z = e^{it}, \quad t \in [0; 2\pi],$ $\gamma_2 : z = 2e^{it}, \quad t \in [0; 2\pi]$ в $\mathbb{C}$;
 b) $\gamma_1 : z = e^{it}, \quad t \in [-\pi/2; \pi/2],$ $\gamma_2 : z = e^{i(3\pi/2-t)}, \quad t \in [0; \pi],$ в області $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\}$ та в області $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 2\}$.

10.4.5. Визначити, чи має функція $f(z) = 1/z$ первісну в областях:

- a) $\operatorname{Im} z > 0;$ b) $\{|z| < 1, \operatorname{Re} z > 0\};$ c) $\{0 < |z| < 1\}?$

10.4.6. Використовуючи формулу Н'ютона-Лейбніца, обчислити інтеграли:

- a) $\int_{\gamma} 1/z dz$, де γ – дуга кола $|z| = 1$, яка з'єднує точки 1 і -1 та лежить у верхній півплощині;
 b) $\int_{\gamma} 1/z dz$, де γ – дуга кола $|z| = 1$, яка з'єднує точки 1 і -1 та лежить у нижній півплощині;
 c) $\int_{\gamma} 1/(2\sqrt{z}) dz$, де γ – довільний шлях, який з'єднує точки 1 і -4 та лежить у верхній півплощині;
 d) $\int_{\gamma} 1/(2\sqrt{z}) dz$, де γ – довільний шлях, який з'єднує точки 1 і -4 та лежить у нижній півплощині.

10.5 Завдання для самостійної роботи

10.5.1. Знайти геометричний образ та дати характеристику таких шляхів:

- a) $\gamma : z = 1 - it, \quad t \in [0; 2];$
 b) $\gamma : z = t + i/t, \quad -\infty < t < 0;$
 c) $\gamma : z = a(\cos t + i \sin t), \quad t \in [\pi/2; 3\pi/2], \quad a > 0;$

d) $\gamma : z = t + i\sqrt{1-t^2}, \quad t \in [-1; 1];$

e) $\gamma : z = ia + at - ie^{-it}, \quad t \in [0; 2\pi], \quad a > 0, \quad b > 0.$

10.5.2. Визначити, які з вказаних шляхів є еквівалентними:

$\gamma_1 : z = t - i, \quad 0 \leq t \leq 2; \quad \gamma_2 : z = \sqrt{t} - i, \quad 0 \leq t \leq 4;$

$\gamma_3 : z = i + e^{it}, \quad -\pi/2 \leq t \leq \pi/2; \quad \gamma_4 : z = it + \sqrt{1 - (t-1)^2}, \quad 0 \leq t \leq 2;$

$\gamma_5 : z = i(2-t) + \sqrt{1 - (t-1)^2}, \quad 0 \leq t \leq 2 ?$

10.5.3. Визначити, чи є гомотопними шляхи γ_1, γ_2 , де $\gamma_1 : z = e^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi, \quad \gamma_2 : z = 3e^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$, в області $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 4\}$ та в області $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 4\} \setminus \{2\} ?$

10.5.4. Обчислити інтеграли $\int_{\gamma} \operatorname{Re} z \, dz, \int_{\gamma} \operatorname{Im} z \, dz$ для випадків, коли:

a) γ – радіус-вектор точки $2 + i;$

b) γ – півколо $|z| = 1, \quad 0 \leq \arg z \leq \pi$, з початковою точкою інтегрування $z = 1.$

10.5.5. Обчислити інтеграл $\int_{\gamma} |z| \, dz$ для випадків, коли:

a) γ – півколо $|z| = 1, \quad 0 \leq \arg z \leq \pi$, з початковою точкою інтегрування $z = -1;$

b) γ – півколо $|z| = 2, \quad -\pi/2 \leq \arg z \leq \pi/2$ з початковою точкою інтегрування $z = -2i;$

c) γ – коло $|z| = R$, яке проходиться проти годинникової стрілки.

10.5.6. Обчислити інтеграл $\int_{\gamma} |z| \bar{z} \, dz$, де γ – межа півкруга $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$, яка проходиться у додатному напрямку.

10.5.7. Обчислити інтеграл $\int_{\gamma} (z-a)^n \, dz$, де γ – периметр квадрата з центром в точці a та сторонами, паралельними осям координат, $n \in \mathbb{Z}$.

10.5.8. Обчислити інтеграл $\int_{\gamma} \sqrt{z} \, dz$, для випадків, коли:

a) γ – межа півкруга $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$, яка проходиться у додатному напрямку, $\sqrt{-1} = i;$

b) γ – коло $|z| = 1$, яке проходиться проти годинникової стрілки, початкова точка $z = 1$. Розглянути обидві однозначні гілки функції $f(z) = \sqrt{z}$.

10.5.9. Обчислити інтеграл $\int_{\gamma} \operatorname{Ln} z \, dz$, для випадків, коли:

a) γ – коло $|z| = R$, яке проходиться проти годинникової стрілки, початкова точка $z = R, \operatorname{Ln} R = \ln R;$

b) γ – півколо $|z| = R, \quad 0 \leq \arg z \leq \pi$, початкова точка $z = R, \operatorname{Ln} R = \ln R + 2\pi i.$

10.5.10. Обчислити інтеграл $\int_{|z|=1} z^{\alpha} \, dz, \quad \alpha \in \mathbb{C}$, де $z^{\alpha} = \exp(\alpha \operatorname{Ln} z),$

а однозначна гілка визначається умовою $1^{\alpha} = 1.$

Тема 11

Теорема Коші. Інтегральна формула Коші. Інтеграл типу Коші

11.1 Теоретичні відомості

Нехай $I = [0; 1]$.

Означення 11.1. Шляхи $\gamma_1 : I \rightarrow \mathbb{C}$ та $\gamma_2 : I \rightarrow \mathbb{C}$ зі спільними кінцями ($\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = a$, $\gamma_1(1) = \gamma_2(1) = b$) називаються *гомотопними* в області D , якщо існує таке неперервне відображення $\gamma(s, t) : I \times I \rightarrow D$, що

$$\begin{aligned} \gamma(0; t) &= \gamma_1(t), & \gamma(1, t) &= \gamma_2(t) & \text{для всіх } t \in I, \\ \gamma(s; 0) &= a, & \gamma(s, 1) &= b & \text{для всіх } s \in I. \end{aligned}$$

Означення 11.2. Замкнені шляхи $\gamma_1 : I \rightarrow \mathbb{C}$ та $\gamma_2 : I \rightarrow \mathbb{C}$ називаються *гомотопними* в області D , якщо існує таке неперервне відображення $\gamma(s, t) : I \times I \rightarrow D$, що

$$\begin{aligned} \gamma(0, t) &= \gamma_1(t), & \gamma(1, t) &= \gamma_2(t) & \text{для всіх } t \in I, \\ \gamma(s, 0) &= \gamma(s, 1) & \text{для всіх } s \in I. \end{aligned}$$

Для гомотопних шляхів використовується позначення: $\gamma_1 \sim \gamma_2$.

Гомотопність двох шляхів означає, що ці шляхи можна неперервним чином "деформувати" один в другий в області D .

При розв'язанні багатьох задач комплексного аналізу використовуються різноманітні варіанти *інтегральної теореми Коші*, яка в одному з найпростіших випадків формулюється таким чином.

Теорема 11.1 (Коші). Якщо функція $f(z)$ голоморфна (аналітична) в області D , а шляхи γ_1, γ_2 гомотопні в цій області як шляхи зі спільними кінцями або як замкнені шляхи, то

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_2} f(z) dz.$$

Означення 11.3. Кажуть, що замкнений шлях γ *гомотопний нулеві* в області D , якщо $\gamma \sim \gamma_1$, де $\gamma_1(t) \equiv \text{const}$ для всіх $t \in I$, тобто шлях γ за допомогою деякої його неперервної деформації в області D можна "стиснути" до деякої точки.

В однозв'язній області довільний замкнений шлях гомотопний нулеві. Іншими словами, будь-які шляхи зі спільними кінцями є гомотопними в однозв'язній області. Ця властивість гомотопних шляхів інколи використовується для визначення поняття однозв'язної області.

Для випадку однозв'язної області теорема Коші формулюється особливо просто.

Теорема 11.2 (Коші). Якщо функція $f(z)$ голоморфна (аналітична) в однозв'язній області D , то для довільного замкненого в області D шляху γ маємо

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

Узагальненням сформульованих вище теорем є такі твердження.

Теорема 11.3. Якщо функція $f(z)$ голоморфна (аналітична) в області D , а G – довільна область, яка компактно належить області D , то

$$\int_{\partial G} f(z) dz = 0,$$

де ∂G – орієнтована межа області G .

Інколи дану теорему формують дещо іншим чином.

Теорема 11.4 (Коші для багатозв'язної області). Нехай функція $f(z)$ голоморфна (аналітична) в області $D \subset \mathbb{C}$; γ – замкнений спрямлюваний шлях, що міститься в D і обмежує область D_0 , яка компактно належить D ; γ_k , $k \in \overline{1, n}$, – замкнені спрямлювані шляхи, які належать області D_0 , причому кожен зі шляхів γ_k , $k = \overline{1, n}$, знаходиться зовні будь-якого іншого та не вироджується в точку. Тоді, якщо шляхи γ , γ_k^- , $k = \overline{1, n}$, утворюють орієнтовану межу ∂G $(n+1)$ -зв'язної області G , що обмежена цими шляхами, то

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz + \dots + \int_{\gamma_n} f(z) dz.$$

Ця теорема дозволяє проводити обчислення інтегралу від функції комплексної змінної $f(z)$ вздовж заданого замкненого шляху шляхом обчислення інтегралів вздовж інших замкнених шляхів, які лежать всередині цього шляху.

Теорема 11.5. Нехай функція $f(z)$ голоморфна (аналітична) в компактній області D , яка обмежена скінченим числом спрямлюваних кривих, та неперервна в замиканні області $\bar{D}$. Тоді

$$\int_{\partial D} f(z) dz = 0.$$

Теорема 11.5 при деяких додаткових припущеннях має місце і для випадку, коли область D не є обмеженою.

Теорема 11.6. Нехай функція $f(z)$ голоморфна (аналітична) в необмеженій багатозв'язній області D та неперервна в її замиканні $\bar{D}$. Тоді, якщо

невласний інтеграл $\int_{\partial D} f(z) dz$ збігається, а функція $f(z)$ в околі нескінченно віддаленої точки задовольняє умову $f(z) = o(z^{-1})$, то $\int_{\partial D} f(z) dz = 0$.

Теорема Коші дозволяє сформулювати обернене твердження, яке можна використовувати для визначення, чи є дана функція голоморфною (аналітичною) в області.

Теорема 11.7 (Морера). Якщо функція $f(z)$ неперервна в однозв'язній області D , а інтеграл від неї вздовж довільного шляху, який міститься в D , рівний нулеві, то функція $f(z)$ є голоморфною (аналітичною) в області D .

Важливе значення в комплексному аналізі має наступний результат.

Теорема 11.8. Якщо функція $f(z)$ голоморфна (аналітична) в області D , а область G обмежена скінченним числом неперервних кривих і компактно належить D , то для будь-якої точки $z \in G$ справедливо зображення функції $f(z)$ за допомогою формули

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi, \quad (11.1)$$

де ∂G – орієнтована межа області G .

Формула (11.1) називається *інтегральною формулою Коші* і дозволяє визначити значення голоморфної (аналітичної) функції в довільній внутрішній точці області, якщо відомі її значення на межі цієї області.

Інтеграл в правій частині формули (11.1) називається *інтегралом Коші*.

Якщо точка $z \notin \bar{G}$, а функція $f(z)$ голоморфна (аналітична) в $\bar{G}$, то підінтегральний вираз в рівності (11.1) голоморфно (аналітично) залежить від ξ в $\bar{G}$. Тоді згідно з інтегральною теоремою Коші права частина (11.1) перетворюється на нуль. Таким чином, теорему 11.8 можна сформулювати ще таким чином.

Теорема 11.9. Нехай функція $f(z)$ голоморфна (аналітична) в компактній області D , що обмежена скінченним числом спрямлюваних кривих, та неперервна в замиканні області $\bar{D}$. Тоді має місце рівність

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \begin{cases} f(z), & \text{якщо } z \in D, \\ 0, & \text{якщо } z \notin \bar{D}, \end{cases}$$

де ∂D – орієнтована межа області D .

Якщо $z \in \partial D$, то інтеграл Коші, взагалі кажучи, не є визначеним ні як власний, ні як невластний інтеграл.

Для випадку, коли $f(z, \bar{z})$ як функція двох змінних $z, \bar{z}$ є неперервно-диференційованою, за допомогою формули Гріна можна довести таке твердження.

Теорема 11.10. Якщо функція $f(z, \bar{z})$ має частинні похідні в замиканні області D , що обмежена скінченим числом спрямлюваних кривих, то для кожної точки $z \in D$ виконується рівність

$$f(z, \bar{z}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta, \bar{\zeta})}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{\pi} \iint_D \frac{1}{\zeta - z} \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} f(\zeta, \bar{\zeta}) d\xi d\eta, \quad (11.2)$$

де $\zeta = \xi + i\eta$.

Формула (11.2) називається формулою Коші-Гріна. Якщо функція $f(z)$ голоморфна (аналітична) в області D та неперервна в її замиканні, то з формули (11.2) одержуємо інтегральну формулу Коші (11.1).

З інтегральної формули Коші (11.1) легко отримати такий результат.

Теорема 11.11 (про середнє). Якщо функція $f(z)$ голоморфна (аналітична) в області D , то її значення в будь-якій точці $z_0 \in D$ дорівнює середньому арифметичному її значень на довільному колі $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = \rho\}$ з центром в точці z_0 , якщо лише коло і круг, що ним обмежений, належать області D , тобто

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + \rho e^{it}) dt. \quad (11.3)$$

З формули (11.3), як наслідок, маємо, що для дійсної та уявної частин голоморфної (аналітичної) функції, тобто для гармонічних функцій, також притаманна властивість про середнє арифметичне, тобто:

$$u(x_0, y_0) = \operatorname{Re} f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x_0 + \rho \cos \varphi, y_0 + \rho \sin \varphi) d\varphi,$$

$$v(x_0, y_0) = \operatorname{Im} f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(x_0 + \rho \cos \varphi, y_0 + \rho \sin \varphi) d\varphi,$$

де $z_0 = x_0 + iy_0$.

Інтеграл Коші (11.1) визначено для випадку, коли функція $f(z)$ голоморфна (аналітична) в замиканні області D , а межа цієї області складається з замкнених кривих. Досить часто в комплексному аналізі доводиться розглядати інтеграл типу Коші, що є узагальненням інтегралу Коші (11.1).

Означення 11.4. Інтегралом типу Коші називається інтеграл вигляду

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi, \quad (11.4)$$

де γ – деяка спрямлювана (не обов'язково замкнена) крива, $\gamma : [\alpha; \beta] \rightarrow \mathbb{C}$, функція $f(z)$ неперервна на множині $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : z = \gamma(t), t \in [\alpha; \beta]\}$, а точка z не належить кривій γ .

Очевидно, що інтеграл типу Коші (11.4) є інтегралом Коші, якщо крива γ замкнена, а функція $f(z)$ голоморфна (аналітична) в замиканні області

D , що обмежена кривою γ . При цьому $F(z) = f(z)$, якщо $z \in D$, та $F(z) = 0$, якщо $z \in \mathbb{C} \setminus \bar{D}$.

Означення 11.5. Функція $1/(\xi - z)$ називається *ядром Коші*, а функція $f(\xi)$ – *щільністю інтегралу типу Коші*.

Оскільки інтеграл (11.4) існує для кожної точки $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma$, то за допомогою функції $F(z)$ визначено відображення $F : \mathbb{C} \setminus \gamma \rightarrow \mathbb{C}$ і при цьому $\lim_{z \rightarrow \infty} F(z) = 0$.

Важливі властивості інтегралу типу Коші демонструє такий приклад.

Приклад 11.1.1. Розглянемо функцію $f(z) = 2 \operatorname{Re} z$, яка, як це випливає з умов Коші-Рімана, не є голоморфною (аналітичною) в жодній точці комплексної площини $\mathbb{C}$. Обчислимо інтеграл

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=1} \frac{2 \operatorname{Re} \xi}{\xi - z} d\xi.$$

Оскільки $|\xi| = 1$, то можна записати $\operatorname{Re} \xi = (\xi + \xi^{-1})/2$. Тоді

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=1} \frac{\xi}{\xi - z} d\xi + \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=1} \frac{1}{\xi(\xi - z)} d\xi. \quad (11.5)$$

За інтегральною формулою Коші маємо

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=1} \frac{\xi}{\xi - z} d\xi = \begin{cases} z, & \text{якщо } |z| < 1 \\ 0, & \text{якщо } |z| > 1. \end{cases}$$

Для обчислення другого інтегралу в рівності (11.5) розглянемо випадки, коли $z = 0$ та $z \neq 0$. Очевидно, що якщо $z = 0$, то цей інтеграл дорівнює нулеві, бо

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=1} \frac{d\xi}{\xi^2} = 0.$$

Якщо ж $z \neq 0$ і $|z| < 1$, то маємо

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=1} \frac{d\xi}{\xi(\xi - z)} = \frac{1}{2\pi i z} \int_{|\xi|=1} \frac{d\xi}{\xi - z} - \frac{1}{2\pi i z} \int_{|\xi|=1} \frac{d\xi}{\xi} = 0,$$

оскільки для даного випадку інтеграли від функцій $1/(\xi - z)$ та $1/\xi$ вздовж одиничного кола з центром в початку координат співпадають, тобто

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=1} \frac{d\xi}{\xi - z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=1} \frac{d\xi}{\xi} = 1.$$

Якщо ж $|z| > 1$, то

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=1} \frac{d\xi}{\xi - z} = 0, \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=1} \frac{d\xi}{\xi} = 1.$$

Таким чином одержимо

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=1} \frac{d\xi}{\xi(\xi - z)} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } |z| < 1, \\ -1/z, & \text{якщо } |z| > 1. \end{cases}$$

Остаточню знаходимо

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=1} \frac{2 \operatorname{Re} \xi}{\xi - z} d\xi = \begin{cases} z, & \text{якщо } |z| < 1, \\ -1/z, & \text{якщо } |z| > 1. \end{cases}$$

В розглянутому вище прикладі інтеграл типу Коші визначав функцію, яка є голоморфною (аналітичною) як в середині одиничного кола, так і ззовні, тобто в областях, на які шлях інтегрування (одиничне коло) розділяє комплексну площину. Ця властивість голоморфності (аналітичності) притаманна інтегралу типу Коші і для загального випадку.

Згадана вище властивість голоморфності інтегралу типу Коші може використовуватися для доведення нескінченної диференційовності голоморфних (аналітичних) функцій.

Теорема 11.12 (про голоморфність (аналітичність) інтегралу типу Коші). *Нехай γ – орієнтована кусково-гладка крива, а функція $f(z)$ неперервна на γ . Тоді функція $F(z)$, що визначена за допомогою інтегралу типу Коші (11.4), є голоморфною (аналітичною) в кожній точці комплексної площини $\mathbb{C}$, що не належить кривій γ . Причому $F(z)$ має похідні будь-якого порядку $n \in \mathbb{N}$, які можна обчислити за допомогою формули*

$$F^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (11.6)$$

Оскільки інтеграл Коші є частинним випадком інтегралу типу Коші, то за допомогою теореми 11.12 та інтегральної формули Коші нескладно встановити такі властивості голоморфних функцій.

Наслідок 11.1. *Якщо функція $f(z)$ голоморфна (аналітична) в області D , то вона має в цій області похідні будь-якого порядку $n \in \mathbb{N}$.*

Наслідок 11.2. *Похідна будь-якого порядку від голоморфної (аналітичної) в області функції є голоморфною (аналітичною) в цій області.*

З формул (11.1), (11.6) можна отримати формулу Коші для похідних

функції $f(z)$, що голоморфна в області G . Ця формула має вигляд

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_G \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi, \quad z \in G, n \in \mathbb{N}.$$

11.2 Приклади розв'язування задач

11.2.1. Нехай функція $f(z)$ неперервна в секторі

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| \leq r_0, 0 \leq \arg z \leq \varphi_0\}, \quad 0 < \varphi_0 \leq 2\pi,$$

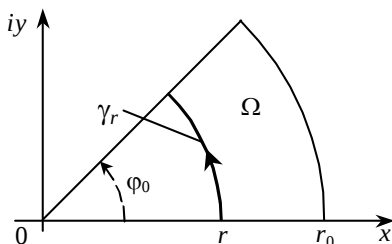
існує границя

$$\lim_{z \in \Omega, z \rightarrow 0} z f(z) = a \in \mathbb{C}.$$

Довести, що

$$\lim_{r \rightarrow 0+} \int_{\gamma_r} f(z) dz = ia\varphi_0,$$

де γ_r — дуга кола $|z| = r$, яка належить сектору Ω і проходиться проти годинникової стрілки (рис. 11.1).



▷ Шлях γ можна параметризувати таким чином: $z = re^{i\varphi}$, $0 \leq \varphi \leq \varphi_0$. Тоді, враховуючи дану параметризацію і означення інтегралу, маємо

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_r} f(z) dz - ia\varphi_0 \right| &= \left| \int_0^{\varphi_0} f(re^{i\varphi}) rie^{i\varphi} d\varphi - i \int_0^{\varphi_0} a d\varphi \right| \leq \\ &\leq \int_0^{\varphi_0} |f(re^{i\varphi}) re^{i\varphi} - a| d\varphi. \end{aligned} \quad (11.7)$$

Для оцінки останнього інтегралу в (11.7) використаємо умову задачі про існування границі $\lim_{z \rightarrow 0, z \in \Omega} z f(z) = a \in \mathbb{C}$.

Якщо записати означення границі і потім покласти $z = re^{i\varphi}$, то прийдемо до наступного твердження: для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, що для довільного такого r , що $|r| < \delta$, і для довільного $\varphi \in [0; \varphi_0]$ виконується нерівність $|f(re^{i\varphi}) re^{i\varphi} - a| < \varepsilon$. Останнє твердження означає, що $f(re^{i\varphi}) re^{i\varphi} \rightarrow a$ при $r \rightarrow 0$ рівномірно стосовно $\varphi \in [0; \varphi_0]$. Тоді, перейшовши до границі в останньому інтегралі (11.7) при $r \rightarrow 0$, отримаємо

$$\left| \int_{\gamma_r} f(z) dz - ia\varphi_0 \right| \leq \int_0^{\varphi_0} |f(re^{i\varphi}) re^{i\varphi} - a| d\varphi \rightarrow 0, \quad r \rightarrow 0.$$

З отриманої нерівності випливає твердження задачі. ◁

11.2.2. (Лема Жордана для $\text{Im } z \geq 0$). Нехай для функції $f = f(z)$ виконуються умови:

- $f \in C(\{z \in \mathbb{C} : |z| \geq R_0, \text{Im } z \geq 0\})$,
- $f(z) \rightarrow 0, \quad z \rightarrow \infty, \text{Im } z \geq 0$.

Тоді для всіх $\alpha > 0$

$$\int_{\Gamma_R} e^{i\alpha z} f(z) dz \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad R \rightarrow +\infty,$$

де Γ_R – дуга кола $|z| = R \geq R_0$, яка лежить у півплощині $\text{Im } z \geq 0$ і проходиться проти годинникової стрілки.

▷ Розглянемо наступну параметризацію шляху Γ_R : $z = R e^{i\varphi}$, де $\varphi \in [0; \pi]$. Використовуючи дану параметризацію та означення інтегралу, маємо

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma_R} e^{i\alpha z} f(z) dz \right| &= \left| \int_0^\pi e^{i\alpha R e^{i\varphi}} f(R e^{i\varphi}) R i e^{i\varphi} d\varphi \right| = \\ &= \left| \int_0^\pi e^{i\alpha R (\cos \varphi + i \sin \varphi)} f(R e^{i\varphi}) R i e^{i\varphi} d\varphi \right| \leq \\ &\leq R \int_0^\pi \left| e^{i\alpha R \cos \varphi} e^{-\alpha R \sin \varphi} f(R e^{i\varphi}) e^{i\varphi} \right| d\varphi = \\ &= R \int_0^\pi \left| e^{-\alpha R \sin \varphi} f(R e^{i\varphi}) \right| d\varphi. \end{aligned}$$

Для оцінки останнього інтегралу використаємо неперервність функції $f(z)$. Оскільки $f \in C(\{z \in \mathbb{C} : |z| \geq R_0, \text{Im } z \geq 0\})$, то для будь-якого $R \geq R_0$ існує

$$\max_{z \in \Gamma_R} |f(z)| = \max_{0 \leq \varphi \leq \pi} |f(R e^{i\varphi})| = M_R,$$

бо Γ_R – компактна множина.

При цьому, з умови б) випливає, що $M_R \rightarrow 0$ при $R \rightarrow +\infty$.

Тоді можемо записати

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma_R} e^{i\alpha z} f(z) dz \right| &\leq R M_R \int_0^\pi e^{-\alpha R \sin \varphi} d\varphi = \\ &= 2 R M_R \int_0^{\pi/2} e^{-\alpha R \sin \varphi} d\varphi. \end{aligned}$$

Далі використаємо очевидну нерівність $\sin \varphi \geq 2\varphi/\pi$, якщо $0 \leq \varphi \leq \pi/2$. Тоді

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma_R} e^{i\alpha z} f(z) dz \right| &\leq 2 R M_R \int_0^{\pi/2} e^{-\alpha R 2\varphi/\pi} d\varphi = \\ &= 2 R M_R \frac{\pi e^{-2\alpha R \varphi/\pi}}{2\alpha R} \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi M_R}{\alpha} (1 - e^{-\alpha R}) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad R \rightarrow +\infty, \end{aligned}$$

що і доводить сформульовану лему. ◁

Зауваження 11.1. Під час доведення леми Жордана було доведено сильніше твердження, а саме: при виконанні умов леми Жордана для до-

вільного $\alpha > 0$ має місце така властивість

$$\int_{\Gamma_R} |e^{i\alpha z} f(z)| |dz| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad R \rightarrow +\infty.$$

11.2.3. Довести, що $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos 2bx \, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-b^2}$, $b > 0$.

▷ Позначимо інтеграл, який стоїть в правій частині, через I . Оскільки підінтегральна функція є парною, то очевидно, що

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cos 2bx \, dx.$$

Для обчислення останнього інтегралу розглянемо замкнений контур C_R ,

$R > 0$, та інтеграл по контуру C_R від функції $f(z) = e^{-z^2}$, яка є голоморфною (аналітичною) в усій комплексній площині (рис. 11.2). При цьому за теоремою Коші маємо

$$\int_{C_R} e^{-z^2} dz = 0,$$

оскільки інтеграл визначено від голоморфної (аналітичної) функції по контуру, що є замкненим.

Подавши контур C_R як об'єднання чотирьох прямолінійних відрізків та використавши властивість адитивності інтегралу, отримаємо

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{C_R} e^{-z^2} dz = \int_{-R}^R e^{-x^2} dx + \\ &+ \int_{R+ib}^{-R+ib} e^{-z^2} dz + \int_R^{R+ib} e^{-z^2} dz + \int_{-R+ib}^{-R} e^{-z^2} dz. \end{aligned} \quad (11.8)$$

Розглянемо окремо другий інтеграл. Маємо

$$\begin{aligned} \int_{R+ib}^{-R+ib} e^{-z^2} dz &= \int_{-R}^R e^{-(x+ib)^2} dx = - \int_{-R}^R e^{-x^2 - 2xib + b^2} dx = \\ &= -e^{b^2} \int_{-R}^R e^{-x^2} (\cos 2bx - i \sin 2bx) dx = \end{aligned}$$

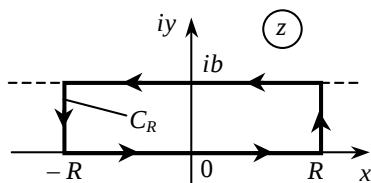


Рис. 11.2

$$= -e^{b^2} \int_{-R}^R e^{-x^2} \cos 2bx \, dx \rightarrow -2e^{b^2} I \quad \text{при } R \rightarrow +\infty.$$

Підставивши отриманий вираз в рівність (11.8) та перейшовши до границі при $R \rightarrow +\infty$, отримаємо

$$0 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx - 2e^{b^2} I + \lim_{R \rightarrow +\infty} \left(\int_R^{R+ib} e^{-z^2} dz + \int_{-R+ib}^{-R} e^{-z^2} dz \right).$$

Для обчислення границі в першому інтегралі останнього виразу розглянемо такі перетворення:

$$\begin{aligned} \left| \int_R^{R+ib} e^{-z^2} dz \right| &= \left| \int_0^b e^{-(R+iy)^2} dy \right| = \\ &= \left| \int_0^b e^{-R^2 - 2iRy + y^2} dy \right| \leq e^{-R^2} \int_0^b |e^{-2iRy} e^{y^2}| dy = e^{-R^2} \int_0^b e^{y^2} dy, \end{aligned}$$

звідки слідує, що цей інтеграл прямує до нуля при $R \rightarrow +\infty$.

Аналогічно розглядається і другий інтеграл.

Після проведених міркувань, врахувавши, що $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ (інтеграл Пуассона) отримаємо $\sqrt{\pi} = 2e^{b^2} I$, звідки і слідує твердження задачі.

◁

11.2.4. Обчислити інтеграл

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{e^z dz}{z^2 - a^2},$$

якщо γ – простий замкнений контур, всередині якого лежать точки $\pm a$. Окремо розглянути випадки $a \neq 0$ та $a = 0$.

▷ Розглянемо випадок $a \neq 0$. Розкладемо функцію $1/(z^2 - a^2)$ на елементарні дробі

$$\frac{1}{z^2 - a^2} = \left(\frac{1}{z - a} - \frac{1}{z + a} \right) \frac{1}{2a}.$$

Тоді шуканий інтеграл матиме вид

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{e^z dz}{z^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{e^z dz}{z - a} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{e^z dz}{z + a} \right). \quad (11.9)$$

Для обчислення інтегралів, які стоять в правій частині (11.9), використаємо інтегральну формулу Коші (інтеграл Коші). Оскільки точки $\pm a$

лежать всередині цього контуру, то згідно згаданої формули

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{e^z dz}{z-a} = e^a, \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{e^z dz}{z+a} = e^{-a}.$$

Тоді з (11.9) випливає, що

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{e^z dz}{z^2 - a^2} = \frac{1}{2a} (e^a - e^{-a}) = \frac{\operatorname{sh} a}{a}, \quad a \neq 0.$$

У випадку $a = 0$ для обчислення шуканого інтегралу використаємо інтеграл Коші та правило обчислення похідних від інтегралу типу Коші. Згідно інтегральної формули Коші отримуємо, що для всіх ξ , які лежать всередині контуру γ , має місце рівність

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{e^z dz}{z - \xi} = e^{\xi}.$$

Оскільки інтеграл Коші є частковим випадком інтегралу типу Коші, то для інтегралу Коші залишається справедливою формула для обчислення похідних. Згідно цієї формули

$$(e^{\xi})' = e^{\xi} = \frac{d}{d\xi} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{e^z dz}{z - \xi} \right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{e^z dz}{(z - \xi)^2}.$$

Поклавши в останній рівності $\xi = a = 0$, отримаємо

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{e^z dz}{z^2} = e^0 = 1.$$

Таким чином, задачу розв'язано. $\triangleleft$

11.2.5. Нехай γ – простий замкнений контур, який обмежує однозв'язну область D (рис. 11.3). Позначимо $D^- = \mathbb{C} \setminus \bar{D}$. Припустимо, що $f \in H(D^-) \cap C(\bar{D}^-)$ та існує границя $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) := f(\infty) \in \mathbb{C}$. Довести, що

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \begin{cases} f(\infty) - f(z_0), & \text{якщо } z_0 \in D^-, \\ f(\infty), & \text{якщо } z_0 \in D, \end{cases} \quad (11.10)$$

де контур γ пробігається у напрямку, додатному для області D .

▷ Зафіксуємо довільну точку $z_0 \in D$ і для досить великих R проведемо таке коло $\Gamma_R = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = R\}$, щоб область D лежала всередині цього кола, яке проходиться за годинниковою стрілкою (рис. 11.3). Підінтегральна функція $F(z) = f(z)/(z - z_0)$ буде голоморфною (аналітичною) в області $D_R^- = D^- \cap \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$, межа якої складається з

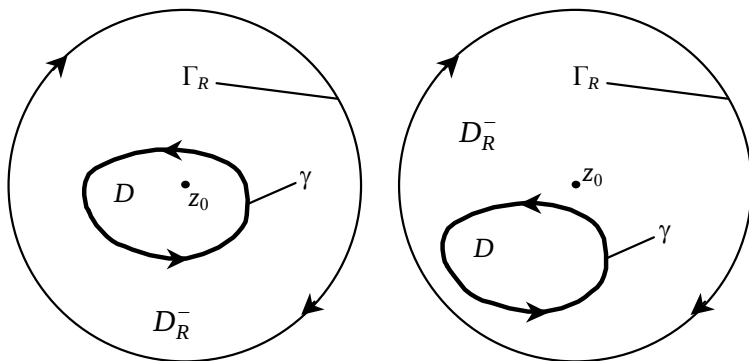


Рис. 11.3

контур γ та кола Γ_R , і буде неперервною в замиканні цієї області. Тоді за теоремою Коші для багатозв'язної області

$$0 = \int_{\gamma \cup \Gamma_R} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz + \int_{\Gamma_R} \frac{f(z)}{z - z_0} dz, \quad (11.11)$$

причому, отримана рівність залишається справедливою для всіх досить великих R .

Перейдемо в цій рівності до границі при $R \rightarrow +\infty$. Використовуючи означення інтегралу, знаходимо

$$\int_{\Gamma_R} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = - \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + R e^{i\varphi})}{R e^{i\varphi}} i R e^{i\varphi} d\varphi = -i \int_0^{2\pi} f(z_0 + R e^{i\varphi}) d\varphi.$$

За умовою задачі існує границя $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = f(\infty) \in \mathbb{C}$. З існування цієї границі випливає, що $f(z_0 + R e^{i\varphi}) \rightarrow f(\infty)$ при $R \rightarrow +\infty$, причому рівномірно стосовно φ . Тоді

$$\int_{\Gamma_R} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = -i \int_0^{2\pi} f(z_0 + R e^{i\varphi}) d\varphi \rightarrow -2\pi i f(\infty) \quad \text{при } R \rightarrow +\infty.$$

Як результат отримуємо, що з останньої рівності і рівності (11.11) при $R \rightarrow +\infty$ випливає рівність (11.10) для $z_0 \in D$.

Розглянемо тепер випадок, коли $z_0 \in D^-$ – довільна фіксована точка. Аналогічно до попереднього випадку побудуємо коло Γ_R (рис. 11.3). Тоді

за інтегральною формулою Коші маємо

$$-f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma \cup \Gamma_R} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

Поява знаку "мінус" перед $f(z_0)$ пов'язана з тим, що межа області D_R^- зорієнтована у від'ємному напрямку (рис. 11.3).

Перейшовши до границі при $R \rightarrow +\infty$, аналогічно до попереднього випадку, отримаємо рівність (11.10) для $z_0 \in D^-$. $\triangleleft$

11.3 Питання для перевірки теоретичних знань

Означення гомотопних шляхів. Властивості гомотопності шляхів.

Апроксимаційна лема. Теорема Коші для довільного замкнутого шляху в області. Чи має місце теорема Коші про інтеграл вздовж довільного замкнутого шляху для випадку функції $f(z) = 1/z$, визначеної в області $D = \{z : 0 < |z| < 1\}$. Відповідь обґрунтувати.

Теорема Коші для гомотопних шляхів. Теорема Коші для шляху, гомотопного нулеві.

Теорема Коші для області, обмеженою неперервною кривою. Теорема Коші про інтеграл вздовж неперервної кривої, що є межею області.

Означення орієнтованої межі області. Теорема Коші про інтеграл вздовж орієнтованої межі довільної (компактної) області.

Узагальнена теорема Коші. Теорема Коші про інтеграл вздовж орієнтованої межі довільної області.

Теорема про глобальне існування первісної. Інтегральна формула Коші.

Інтеграл Коші. Інтеграл Пуассона. Формула Рімана-Гріна. Формула Коші-Гріна. Теорема про середнє.

Інтеграл типу Коші. Теорема про голоморфність функції, визначеної інтегралом типу Коші. Теорема про похідні функції, визначеної інтегралом типу Коші. Теорема про існування похідних довільного порядку функції, що голоморфна в області. Формула Коші для похідних.

11.4 Завдання для аудиторної роботи

11.4.1. Нехай функція $f = f(z)$ неперервна в околі точки $z = a$. Довести, що

$$\lim_{r \rightarrow 0+} \int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{z-a} dz = 2\pi i f(a),$$

де коло $|z - a| = r$ проходиться проти годинникової стрілки.

11.4.2. Нехай функція $f = f(z)$ неперервна в множині $\bar{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \geq R_0, 0 \leq \arg z \leq \alpha\}$, де $0 < \alpha \leq 2\pi$, і існує границя

$$\lim_{z \in D, z \rightarrow \infty} z f(z) = a \in \mathbb{C}.$$

Довести, що

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_R} f(z) dz = i \alpha a,$$

де Γ_R – дуга кола $|z| = R$, яка лежить в $\bar{D}$ і проходиться проти годинникової стрілки.

11.4.3. Довести таке твердження: якщо $f \in H(\{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \operatorname{Im} z \leq h\})$, де $h > 0$, існує рівномірна стосовно $y \in [0; h]$ границя $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x + iy) = 0$

та існує інтеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$, то існує також інтеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x + ih) dx$ і ці інтеграли співпадають.

11.4.4. Довести, що $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$ (інтеграл Діріхле).

Вказівка. Проінтегрувати функцію $f(z) = e^{iz}/z$ по межі області $\{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R, 0 < \arg z < \pi\}$ та спрямувати $r \rightarrow 0, R \rightarrow +\infty$.

11.4.5. Довести, що $\int_0^{+\infty} \cos x^2 dx = \int_0^{+\infty} \sin x^2 dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{8}}$ (інтеграли Френеля).

Вказівка. Проінтегрувати функцію $f(z) = e^{iz^2}$ по межі сектора $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < R, 0 < \arg z < \pi\}$ та спрямувати R до $+\infty$. При оцінці інтеграла по дузі кола використати лему Жордана, в якій покласти $z^2 = t$.

11.4.6. Використовуючи інтегральну формулу Коші, обчислити інтеграли:

a) $\int_{|z+i|=3} \frac{\sin z}{z+i} dz;$ b) $\int_{|z|=2} \frac{e^z}{z^2-1} dz;$ c) $\int_{|z-i|=1} \frac{\cos z}{(z-i)^3} dz.$

11.4.7. Використовуючи формулу Коші для похідних, обчислити інтеграли:

a) $\int_{|z|=1} \frac{\exp z^2}{z^3} dz;$ b) $\int_{|z-1|=2} \frac{\cos \pi z}{(z-1)^3} dz;$ c) $\int_{|z|=1} \frac{\operatorname{tg} z}{z^2} dz.$

11.4.8. Нехай $a > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Довести, що

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{\alpha z}}{z^2} dz = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \alpha < 0, \\ \alpha, & \text{якщо } \alpha \geq 0. \end{cases}$$

11.4.9. Нехай $f(z)$, $g(z)$ – голоморфні в одиничному крузі та неперервні в його замиканні функції. Довести, що

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=1} \left(\frac{f(t)}{t-z} + \frac{z g(t)}{z t - 1} \right) dt = \begin{cases} f(z), & \text{якщо } |z| < 1, \\ g(1/z), & \text{якщо } |z| > 1. \end{cases}$$

11.5 Завдання для самостійної роботи

11.5.1. Нехай функція $f = f(z)$ неперервна в околі точки $z = 0$. Довести, що

$$\lim_{r \rightarrow 0+} \int_0^{2\pi} f(re^{i\varphi}) d\varphi = 2\pi f(0).$$

11.5.2. Довести таке твердження: якщо функція $f = f(z)$ неперервна в замиканні півсмуги $\bar{D} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \geq x_0, 0 \leq \operatorname{Im} z \leq h\}$, де $h > 0$; існує рівномірно стосовно $y \in [0; h]$ границя $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x + iy) = a \in \mathbb{C}$, де a не залежить від y , то

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_x} f(z) dz = i a h,$$

де γ_x – вертикальний відрізок, який з'єднує точки x та $x + ih$ і пробігається знизу до гори.

11.5.3. Сформулювати та довести лему Жордана для випадків $\operatorname{Re} z \geq 0$ та $\operatorname{Re} z \leq 0$.

11.5.4. Довести таке твердження: якщо функція $f(z)$ голоморфна в замиканні області $\{z \in \mathbb{C} : 0 < \arg z < \alpha\}$, де $\alpha \in [0; 2\pi)$, існує границя

$$\lim_{0 \leq \arg z \leq \alpha, z \rightarrow \infty} z f(z) = 0$$

і інтеграл $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ збігається, то збігається також інтеграл $\int_{\arg z = \alpha} f(z) dz$

і ці інтеграли рівні.

11.5.5. Нехай функція $f(z)$ голоморфна в кільці $\{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R\}$, γ – проста кусково-гладка крива, що є додатно орієнтованою межею деякої області, яка містить замикання круга $\{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$ та лежить в області $\{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$. Довести, що інтеграл $\int_{\gamma} f(z) dz$ не залежить від вибору кривої γ .

11.5.6. Довести, що для кожного $s \in (0; 1)$ справедливі рівності:

$$a) \int_0^{+\infty} x^{s-1} \cos x \, dx = \Gamma(s) \cos \frac{\pi s}{2}, \quad b) \int_0^{+\infty} x^{s-1} \sin x \, dx = \Gamma(s) \sin \frac{\pi s}{2},$$

де $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} dx$ – Γ -функція, $s > 0$.

Вказівка. Проінтегрувати функцію $f(z) = z^{s-1} e^{iz}$ по межі області $\{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R, 0 < \arg z < \pi/2\}$, розглянути границю інтегралу при $r \rightarrow 0, R \rightarrow +\infty$ та використати означення Γ -функції.

11.5.7. Обчислити інтеграл

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{z e^z dz}{(z-a)^2},$$

якщо точка a лежить всередині простого замкнутого контуру γ .

11.5.8. Обчислити інтеграл

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{e^z dz}{z(z-1)^3},$$

якщо γ – простий замкнений контур і:

- a) точка $z = 0$ лежить всередині контура γ , а точка $z = 1$ – зовні;
- b) точка $z = 1$ лежить всередині контура γ , а точка $z = 0$ – зовні;
- c) обидві точки, $z = 0$ та $z = 1$, лежать всередині контура γ .

11.5.9. Обчислити інтеграли

$$a) \int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2+1}; \quad b) \int_{|z|=4} \frac{\cos z \, dz}{z^2-\pi^2}; \quad c) \int_{|z|=2} \frac{\exp \pi z \, dz}{z^2+2z+2}.$$

11.5.10. Обчислити інтеграли

$$a) \int_{|z-1|=1} \frac{ze^z dz}{(z-1)^n}, \quad n \in \mathbb{N}; \quad b) \int_{|z|=2} \frac{\sin \pi z \, dz}{(z^2+1)^2}; \quad c) \int_{|z|=2} \frac{\exp(\pi z) \, dz}{(z^2+1)^2}.$$

11.5.11. Обчислити інтеграл

$$\int_{|z|=R} \frac{dz}{(z-a)^n(z-b)}, \quad \text{де } |a| < R < |b| \quad n \in \mathbb{N}.$$

Тема 12

Степеневі ряди голоморфних функцій

12.1 Теоретичні відомості

Нехай $\{a_k : k \geq 0\} \subset \mathbb{C}$ – деяка послідовність комплексних чисел, z_0 – фіксована точка комплексної площини $\mathbb{C}$.

Означення 12.1. *Степеневим рядом* в комплексній площині називається функціональний ряд вигляду

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad (12.1)$$

де z – комплексне число.

Означення 12.2. *Множиною збіжності* степеневому ряду (12.1) називається така множина $M \subset \mathbb{C}$, в кожній точці якої ряд (12.1) збігається.

Очевидно, що степеневий ряд (12.1) завжди збігається в точці $z = z_0$ при довільних a_k , $k \geq 0$. Це означає, що множина збіжності степеневому ряду не може бути порожньою, бо до цієї множини належить як мінімум одне комплексне число, число z_0 .

Означення 12.3. *Областю збіжності* степеневому ряду (12.1) називається множина всіх внутрішніх точок з множини збіжності цього ряду.

Необхідно зауважити, що означення 12.3 області збіжності степеневому ряду, з точки зору означення області, не є повністю коректним, оскільки з означення 12.3 випливає, що область збіжності степеневому ряду є, очевидно, відкритою множиною, але зовсім не обов'язково зв'язною (або лінійно-зв'язною). Коректність цього означення встановлює теорема Коші-Адамара.

Позначимо

$$r = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}.$$

Теорема 12.1 (Коші-Адамара). Областю збіжності степеневому ряду (12.1) є круг

$$U_R(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\},$$

де $R = 1/r$, якщо $0 < r < +\infty$; $R = 0$, якщо $r = +\infty$ та $R = +\infty$, якщо $r = 0$.

З теореми Коші-Адамара випливає, що множина збіжності степеневому ряду M лежить в замиканні круга збіжності, тобто $M \subset \bar{U}_R(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq R\}$. Тоді для довільного такого $z \in \mathbb{C}$, що $|z - z_0| > R$, ряд (12.1) є розбіжним.

Вивчення збіжності ряду (12.1) на межі круга збіжності, тобто при $|z - z_0| = R$, вимагає окремих досліджень, які проводяться в кожному конкретному випадку окремо.

Означення 12.4. Величина R в теоремі Коші-Адамара, яка визначає радіус круга збіжності степеневому ряду, називається *радіусом збіжності* степеневому ряду.

Сформулюємо деякі властивості степеневих рядів для випадку, коли область його збіжності не є порожньою множиною.

12.1. Нехай K – довільна компактна множина, яка лежить в крузі збіжності степеневому ряду (12.1) Тоді ряд (12.1) рівномірно збіжний на множині K .

12.2. Степеневий ряд (12.1) можна почленно інтегрувати вздовж довільного шляху, яких лежить в його крузі збіжності.

12.3. Степеневий ряд (12.1) можна почленно диференціювати в кожній точці круга збіжності. Звідси випливає, що оскільки круг збіжності є областю в комплексній площині $\mathbb{C}$, то степеневий ряд визначає функцію, яка голоморфна (аналітична) в його крузі збіжності.

Перша теорема Абеля. Нехай степеневий ряд (12.1) збігається при $z = z_1 \in \mathbb{C}$. Тоді ряд (12.1) є збіжним в крузі $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < |z_1 - z_0|\}$.

Друга теорема Абеля. Нехай степеневий ряд (12.1) із скінченним радіусом збіжності $R > 0$ збігається до $f(z_1)$ в деякій точці z_1 , що належить межі його області збіжності, тобто колу $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = R\}$. Тоді сума степеневому ряду (12.1) прямує до $f(z_1)$, якщо значення z прямує до точки z_1 вздовж довільного шляху, що лежить у області збіжності даного ряду і закінчується в точці z_1 .

Степеневі ряди тісно пов'язані з голоморфними (аналітичними) функціями. Так, кожен степеневий ряд визначає голоморфну (аналітичну) функцію всередині круга збіжності. Але на цьому зв'язок степеневих рядів та голоморфних (аналітичних) функцій не завершується. Виявляється кожен голоморфну (аналітичну) функцію можна розкласти в степеневий ряд.

Теорема 12.2 (Тейлора). Нехай функція $f(z)$ голоморфна (аналітична) в деякій області D . Тоді для довільного $z_0 \in D$ функцію $f(z)$ можна розкласти в степеневий ряд

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k, \quad (12.2)$$

де

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi - z_0| = \rho} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z_0)^{k+1}}, \quad k \geq 0, \quad (12.3)$$

i число $\rho > 0$ вибирається так, щоб коло $|\xi - z_0| = \rho$ належало області D , при обчисленні інтегралів в (12.3) коло $|\xi - z_0| = \rho$ проходиться проти годинникової стрілки.

При цьому радіус збіжності ряду (12.2) не менше відстані від точки z_0 до межі області D .

Ряд (12.2) називається рядом Тейлора функції $f(z)$.

Згадавши правило обчислення похідних від інтегралу типу Коші та інтегральну формулу Коші (11.1), неважко переконатися, що коефіцієнти ряду Тейлора (12.2) можна обчислити за допомогою таких рівностей

$$c_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}, \quad k \geq 0.$$

Сформулюємо наслідки з теореми Тейлора.

Наслідок 12.1. Кожен збіжний степеневий ряд є рядом Тейлора своєї суми.

Наслідок 12.2 (оцінка Коші для коефіцієнтів степеневого ряду). Нехай функція $f(z)$ голоморфна (аналітична) в замкненому крузі $\bar{K}_r = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}$ і $M = \max_{z \in \partial K_r} |f(z)|$. Тоді для коефіцієнтів ряду Тейлора (12.2) функції $f(z)$ виконується нерівність

$$|a_k| \leq M/r^k, \quad k \geq 0.$$

12.2 Приклади розв'язування задач

12.2.1. Нехай послідовність комплексних чисел $\{a_k, k \geq 0\} \subset \mathbb{R}$ задовольняє умови: а) $0 < a_{k+1} < a_k, k \geq 0$; б) $a_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow +\infty$.

Довести, що степеневий ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ збіжний в усіх точках кола $|z| = 1$, за винятком, можливо, точки $z = 1$.

▷ Множину точок, які лежать на одиничному колі $|z| = 1$, можна параметризувати таким чином $z = \cos \varphi + i \sin \varphi$, де $\varphi \in [0; 2\pi)$. Тому для досліджуваного степеневому ряду на множині точок одиничного кола $|z| = 1$ маємо

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos k\varphi + i \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin k\varphi, \quad \text{де } 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

З отриманої рівності слідує, що збіжність степеневому ряду $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ рівносильна збіжності рядів $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos k\varphi$ та $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin k\varphi$.

Оскільки послідовність $\{a_k : k \geq 0\}$ монотонно прямує до нуля (за умовами задачі) і для всіх $N \geq 1$

$$\left| \sum_{k=0}^N \cos k\varphi \right| = \left| \frac{\sin \frac{(N+1)\varphi}{2} \cos \frac{N\varphi}{2}}{\sin \frac{\varphi}{2}} \right| \leq \left(\sin \frac{\varphi}{2} \right)^{-1} \quad \text{при } \varphi \neq 0,$$

$$\left| \sum_{k=1}^N \sin k \varphi \right| = \left| \frac{\sin \frac{(N+1)\varphi}{2} \sin \frac{N\varphi}{2}}{\sin \frac{\varphi}{2}} \right| \leq \left(\sin \frac{\varphi}{2} \right)^{-1} \quad \text{при } \varphi \neq 0,$$

то для всіх $0 < \varphi < 2\pi$ за ознакою Діріхле обидва тригонометричні ряди збіжні, тобто для всіх $|z| = 1, z \neq 1$, степеневий ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ є збіжним.

У випадку, коли $z = 1$, маємо $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ і збіжність даного степеневому ряду залежить від властивостей послідовності $\{a_k : k \geq 0\}$. <

12.2.2. Використовуючи метод невизначених коефіцієнтів, розв'язати диференціальне рівняння

$$f''(z) - z f(z) = 0, \quad f(0) = 1, \quad f'(0) = 0,$$

в околі точки $z = 0$.

▷ Припустимо, що функція $f(z)$ голоморфна (аналітична) в околі точки $z = 0$. Тоді за теоремою про розвинення голоморфної (аналітичної) функції в ряд Тейлора в цьому околі можемо записати

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, \quad (12.3)$$

де коефіцієнти $a_k, k \geq 0$, невідомі.

З початкової умови $f(0) = 1$ слідує, що $a_0 = 1$, а з умови $f'(0) = 0$ слідує, що $a_1 = 0$.

Для визначення інших коефіцієнтів степеневому ряду підставимо розвинення (12.3) функції $f(z)$ в диференціальне рівняння

$$\sum_{k=2}^{\infty} a_k k(k-1) z^{k-2} - \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{k+1} = 0.$$

В першій сумі покладемо $k-2 = n \geq 0$, а в другій – $k+1 = n \geq 1$. В результаті отримаємо

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} (n+2)(n+1) z^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} z^n = 0.$$

Звідси знаходимо, що в першій сумі коефіцієнт при z^0 , число $a_2 = 0$. Прирівнявши в першій і другій сумах коефіцієнти при $z^n, n \geq 1$, отримаємо рекурентну формулу для обчислення коефіцієнтів ряду (12.3) вигляду:

$$(n+2)(n+1) a_{n+2} - a_{n-1} = 0, \quad n \geq 1,$$

звідки знаходимо

$$a_{n+3} = \frac{a_n}{(n+3)(n+2)}, \quad n \geq 0.$$

Таким чином, можемо записати

$$a_1 = a_2 = a_4 = a_5 = \dots = a_{3k+1} = a_{3k+2} = \dots = 0,$$

$a_0 = 1, \quad a_3 = \frac{a_0}{3 \cdot 2} = \frac{1}{3 \cdot 2}, \quad a_6 = \frac{a_3}{6 \cdot 5} = \frac{1}{6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2}, \quad \dots,$
 або

$$a_{3k} = \prod_{j=1}^k \frac{1}{3j(3j-1)}, \quad \dots$$

Підставивши отримані коефіцієнти в розвинення (12.3) знайдемо шука-
 ну функцію $f(z)$

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\prod_{j=1}^k \frac{1}{3j(3j-1)} \right) z^{3k}.$$

Також зауважимо, що отриманий степеневий ряд збігається в усій ком-
 плексній площині і визначає деяку функцію $f(z)$, яка є голоморфною (ана-
 літичною) в $\mathbb{C}$. $\triangleleft$

12.3 Питання для перевірки теоретичних знань

Степеневий ряд, його круг збіжності. Ряд Тейлора. Теорема про розклад
 голоморфної функції в ряд Тейлора. Нерівність Коші для коефіцієнтів ряду
 Тейлора. Теорема Ліувілля. Теорема Ліувілля для розширеної комплексної
 площини.

Лема про збіжність степеневого ряду та теорема Абеля. Формула Коші-
 Адамара. Область збіжності степеневого ряду.

Голоморфність суми степеневого ряду та її наслідки. Необхідна умова
 існування первісної. Теорема про єдиність розвинення голоморфної функції
 в ряд Тейлора. Формули Коші для похідних.

Теорема Морера. Теорема про еквівалентність понять голоморфної фун-
 кції в сенсі Рімана, Коші та Вейєрштраса.

Теорема Вейєрштраса про рівномірно збіжний ряд голоморфних фун-
 кцій. Задача про рівномірне наближення функції поліномом в області та
 теорема Рунге.

Означення нуля (простого та кратного, для скінченної та нескінченної
 точки) та a -точки функції. Теорема про зображення функції в околі її нуля.

Теорема єдиності. Теорема про множину нулів голоморфної функції.
 Зв'язок порядку нуля з явним виглядом коефіцієнтів ряду Тейлора. Теорема
 про порядок нуля голоморфної функції.

12.4 Завдання для аудиторної роботи

12.4.1. Визначити області збіжності таких рядів:

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k} (z-1)^k;$

Вказівка: використати формулу Стірлінга $k! = \sqrt{2\pi k}(k/e)^k e^{\theta(k)/(12k)}$ при $k \rightarrow +\infty$, де $0 < \theta(k) < 1$;

$$b) \sum_{k=0}^{\infty} (2 + (-1)^k) z^k;$$

$$c) \sum_{k=1}^{\infty} (\sin ik) (z + i)^k;$$

$$d) \sum_{k=0}^{\infty} (k + a^k) z^k, \quad a \in \mathbb{C}.$$

12.4.2. Відомо, що радіус збіжності степеневого ряду $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ дорівнює R , де $R \in (0; +\infty)$. Визначити радіуси збіжності таких рядів:

$$a) \sum_{k=0}^{\infty} k^n c_k z^k, \quad n \in \mathbb{N}; \quad b) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k!} z^k;$$

$$c) \sum_{k=0}^{\infty} (1 + a)^k c_k z^k, \quad a \neq 0.$$

12.4.3. Дослідити збіжність таких рядів на межі круга збіжності:

$$a) \sum_{k=2}^{\infty} \frac{z^k}{k \ln^2 k}; \quad b) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} z^k; \quad c) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{3k}}{k}.$$

12.4.4. Розкласти функції в ряди Тейлора в околі точки $z = 0$ та визначити радіуси їх збіжності:

$$a) f(z) = \frac{2z - 5}{z^2 - 5z + 6}; \quad b) f(z) = \frac{2}{(1 - z)^3};$$

$$c) f(z) = \frac{z}{(1 - z)^2}; \quad d) f(z) = e^z \sin z;$$

$$e) f(z) = \sin^4 z + \cos^4 z; \quad f) f(z) = \operatorname{sh} z \operatorname{sh} 2z.$$

12.4.5. Методом невизначених коефіцієнтів знайти в околі точки $z = 0$ розв'язки таких диференціальних рівнянь:

$$a) f'(z) = f(z), \quad f(0) = 1;$$

$$b) (1 + z^2) f'(z) = 1, \quad f(0) = 0;$$

$$c) z f''(z) + f'(z) + z f(z) = 0, \quad f(0) = 1, \quad f'(0) = 0.$$

12.5 Задачі для самостійної роботи

12.5.1. Визначити області збіжності таких рядів:

$$a) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k}; \quad b) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}; \quad c) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k} z^k;$$

$$d) \sum_{k=0}^{\infty} z^{2k}; \quad e) \sum_{k=0}^{\infty} k! z^{k^2}; \quad f) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{(k!)^2} (z - 1)^k;$$

$$g) \sum_{k=1}^{\infty} k^{\ln k} (z-i)^{2k}; \quad h) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(z+1+i)^{3k}}{3^k + k^2}.$$

12.5.2. Відомо, що радіус збіжності степеневого ряду $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ дорівнює R , де $R \in (0; +\infty)$. Визначити радіуси збіжності таких рядів:

$$a) \sum_{k=0}^{\infty} (2^k - 1) c_k z^k; \quad b) \sum_{k=1}^{\infty} k^k c_k z^k;$$

$$c) \sum_{k=0}^{\infty} C_k^l c_k z^k, \text{ де } l \in \mathbb{N}, C_k^l = \frac{k!}{l! (k-l)!}.$$

12.5.3. Знайти суми рядів:

$$a) \sum_{k=1}^{\infty} k z^k; \quad b) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k}; \quad c) \sum_{k=1}^{\infty} k z^k; \quad d) \sum_{k=1}^{\infty} k^2 z^k.$$

12.5.4. Дослідити збіжність рядів на межі круга збіжності:

$$a) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^2}; \quad b) \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{3k}}{k \ln k}; \quad c) \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{3k-1}}{\ln k}.$$

12.5.5. Методом невизначених коефіцієнтів знайти в околі точки $z = 0$ розв'язки таких диференціальних рівнянь:

$$a) f''(z) - z^2 f(z) = 0, \quad f(0) = 0, \quad f'(0) = 1;$$

$$b) (1 - z^2) f''(z) = z f(z), \quad f(0) = 0, \quad f'(0) = 1.$$

Тема 13

Ряди Лорана голоморфних функцій. Ізольовані особливі точки однозначного характеру та їх класифікація

13.1 Теоретичні відомості

13.1.1 Ряди Лорана

Ряди Тейлора дають зображення голоморфних функцій в кругах, а ряди вигляду

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad (13.1)$$

тобто ряди, що містять як додатні, так і від'ємні степені $(z - z_0)^n$, $n \in \mathbb{Z}$, дають зображення голоморфних функцій в кільцях

$$K = \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R\}, \quad 0 \leq r < R, \quad (13.2)$$

що містяться між двома концентричними колами.

У випадку $r = 0$ ряди вигляду (13.1) дають можливість вивчати властивості функцій в околі точки $z = z_0$, в якій дана функція не є голоморфною.

Означення 13.1. Ряд вигляду (13.1), де

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad r < \rho < R, \quad (13.3)$$

називається *рядом Лорана* функції $f(z)$ в кільці (13.2).

Означення 13.2. Ряд

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n \quad (13.4)$$

називається *правильною (регулярною) частиною* ряду Лорана.

Означення 13.3. Ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z - z_0)^n \quad (13.5)$$

називається *головною частиною* ряду Лорана.

Якщо дано деякий ряд вигляду (13.1), то область його збіжності, кільце (13.2), можна визначити, скориставшись формулою Коші-Адамара для

визначення радіуса збіжності степеневого ряду:

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|c_n|}, \quad r = \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|c_{-n}|} . \quad (13.6)$$

Зауважимо, що число R не обов'язково має бути більшим за r . У випадку $r \geq R$ областю збіжності ряду (13.1) є порожня множина.

У випадку $K \neq \emptyset$, тобто $r < R$, ряд (13.1) рівномірно збігається на довільній компактній підмножині з кільця K (за теоремою Абеля), і його сума є голоморфною в кільці (13.2) функцією.

Теорема 13.1 (Лорана). Якщо функція $f(z)$ голоморфна в кільці вигляду (13.2), то функцію $f(z)$ можна записати у вигляді ряду Лорана (13.1)

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad (13.7)$$

коефіцієнти якого визначаються згідно формул (13.3), і цей ряд збігається для всіх точок з кільця K .

Розклад голоморфної в кільці K функції в ряд Лорана (13.1), (13.3) є єдиним.

Для коефіцієнтів ряду Лорана має місце нерівність Коші:

$$|c_n| \leq \frac{M}{\rho^n}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$\text{де } M = \max_{|z - z_0| = \rho} |f(z)|.$$

13.1.2 Ізольовані особливі точки

Означення 13.4. Точка $z_0 \in \mathbb{C}$ називається *ізольованою особливою точкою* функції $f(z)$, якщо функція $f(z)$ не є голоморфною в точці z_0 , але $f(z)$ є голоморфною в деякому проколотому околі точки z_0 .

В залежності від поведінки функції $f(z)$ при наближенні z до особливої точки z_0 розрізняють три типи ізольованих особливих точок.

Означення 13.5. Ізольована особлива точка $z_0 \in \mathbb{C}$ функції $f(z)$ називається *усувною особливою точкою*, якщо існує скінчена границя $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$.

Означення 13.6. Ізольована особлива точка $z_0 \in \mathbb{C}$ функції $f(z)$ називається *полюсом*, якщо існує границя $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ і дана границя дорівнює ∞ , тобто $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$.

Означення 13.7. Ізольована особлива точка $z_0 \in \mathbb{C}$ функції $f(z)$ називається *істотно (суттєво) особливою точкою*, якщо не існує границя $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$.

Якщо точка $z_0 \in \mathbb{C}$ є полюсом функції $f(z)$, то в проколотому околі

точки $z_0 \in \mathbb{C}$ ряд Лорана функції $f(z)$ має вигляд

$$f(z) = \sum_{n=-N}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad N \in \mathbb{Z},$$

де $c_{-N} \neq 0$.

Число N називається *порядком полюса* функції $f(z)$ в точці z_0 .

Наприклад, для функцій $f(z) = \sin z/z$ та $g(z) = (1 - \cos z)/z^2$ точка $z = 0$ є усувною (ізолюваною) особливою точкою, для функції $\varphi(z) = 1/z^2$ точка $z = 0$ є полюсом другого порядку, а для функції $\psi(z) = e^{1/z}$ точка $z = 0$ є істотно особливою точкою.

Тип ізолюваної особливої точки $z_0 \in \mathbb{C}$ функції $f(z)$ можна визначити за розкладом функції в ряд Лорана в проколотому околі точки z_0 , а саме:

а) ізолювана особлива точка $z_0 \in \mathbb{C}$ є усувною тоді і лише тоді, коли ряд Лорана функції $f(z)$ в проколотому околі точки z_0 не містить головної частини розкладу;

б) ізолювана особлива точка $z_0 \in \mathbb{C}$ є полюсом тоді і лише тоді, коли головна частина ряду Лорана функції $f(z)$ в проколотому околі точки z_0 містить не менше одного, але скінчену кількість членів;

с) ізолювана особлива точка $z_0 \in \mathbb{C}$ є істотно особливою тоді і лише тоді, коли головна частина ряду Лорана функції $f(z)$ в проколотому околі точки z_0 містить нескінченно багато членів.

Ці твердження визначають зв'язок між типом скінчених ізолюваних особливих точок та структурою ряду Лорана в проколотому околі особливої точки. Ці твердження є справедливими і у випадку нескінченно віддаленої точки $z_0 = \infty$, якщо взяти до уваги, що ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n z^n$ називається головною

частиною, а ряд $\sum_{n=-\infty}^0 c_n z^n$ – правильною частиною ряду Лорана функції $f(z)$ в околі точки $z_0 = \infty$.

Теорема 13.2 (Сохотського). Якщо точка z_0 є істотно особливою ізолюваною точкою функції $f(z)$, то тоді для будь-якого числа $w_0 \in \mathbb{C}$ існує така послідовність комплексних чисел $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, що $z_n \rightarrow z_0$ при $n \rightarrow +\infty$ і $\lim_{z_n \rightarrow z_0} f(z_n) = w_0$.

Теорема 13.3 (Пікара). Якщо точка z_0 є істотно особливою ізолюваною точкою функції $f(z)$, то тоді для кожного $w_0 \in \mathbb{C}$, за винятком хіба що одного значення, існує така послідовність комплексних чисел $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, що $z_n \rightarrow z_0$ при $n \rightarrow +\infty$ і $f(z_n) = w_0$.

Наслідок 13.1. Множина значень функції $f(z)$, у якій є істотно особлива

ізолювана точка, співпадає з усією комплексною площиною $\mathbb{C}$, виключаючи хіба-що одну точку.

13.1.3 Класифікація голоморфних функцій по їх особливих точках

Функція $f(z)$, що голоморфна в усій замкненій комплексній площині, згідно теореми Ліувілля є сталою.

Означення 13.8. Функція, яка голоморфна в усій комплексній площині, називається *цілою*.

Іншими словами, ціла функція – це функція, яка не має скінчених особливих точок, а точка $z = \infty$ є її ізолюваною особливою точкою.

Якщо $z = \infty$ є усувною особливою точкою функції $f(z)$, то така функція є сталою.

Якщо $z = \infty$ – полюс цілої функції $f(z)$, то така функція є поліномом від змінної z .

Якщо $z = \infty$ – істотно особлива ізолювана точка функції $f(z)$, то така функція називається *цілою трансцендентною функцією*. Прикладом таких функцій є функції $\sin z$, $\cos z$, e^z .

Означення 13.8. Функція $f(z)$ називається *мероморфною*, якщо особливими точками $f(z)$ в комплексній площині $\mathbb{C}$ є лише полюси.

Мероморфну функцію можна подати у вигляді відношення (дробу) двох цілих функцій. Функції, які є часткою двох алгебраїчних многочленів, є цілими функціями. Кількість полюсів мероморфної функції не більш, ніж злічenna.

Теорема 13.4. Якщо мероморфна функція $f(z)$ в точці $z = \infty$ має усуну особливу точку або полюс, то $f(z)$ – раціональна функція.

Іншими словами, функція, яка є мероморфною в замкненій комплексній площині, є раціональною.

13.2 Приклади розв'язування задач

13.2.1. Знайти область збіжності ряду $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k z^k$. ▷

Подано цей ряд у вигляді суми головної та регулярної частини. Маємо:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k z^k = \sum_{k=-\infty}^{-1} a_k z^k + \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k = \sum_{k=1}^{+\infty} a_{-k} t^k + \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k,$$

де $t = 1/z$.

В результаті заданий ряд можна розглядати як суму двох степеневих рядів. Тому для визначення області збіжності ряду $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k z^k$ слід знайти області збіжності отриманих степеневих рядів. Використовуючи формулу Коші-Адамара, знаходимо, що степеневий ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} a_{-k} t^k$ збігається

в крузі $|t| < 1/r$, де $r = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_{-k}|}$, а степеневий ряд $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k$ збігається в крузі $|z| < R$, де $1/R = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}$.

Враховуючи, що $t = 1/z$, отримаємо, що заданий ряд $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k z^k$ збігається в кільці $r < |z| < R$, якщо $r < R$.

У випадку, коли $r \geq R$, цей ряд не має області збіжності, оскільки він розбігається при $r > R$ та, можливо, збігається в деяких точках кола $|z| = R$ (у випадку $r = R$). $\triangleleft$

13.2.2. Розкласти функцію

$$f(z) = \frac{1}{(z-a)(z-b)}$$

в ряди Лорана в околах точок $z = 0$, $z = a$, $z = \infty$ та в кільці $|a| < |z| < |b|$, $0 < |a| < |b|$.

▷ Розкладемо функцію $f(z)$ на елементарні дроби

$$f(z) = \frac{1}{b-a} \left(\frac{1}{z-b} - \frac{1}{z-a} \right). \quad (13.8)$$

Для розвинення заданої функції в ряди Лорана використаємо відому формулу для суми нескінченної геометричної прогресії

$$\sum_{k=0}^{\infty} t^k = \frac{1}{1-t}, \quad \text{де } |t| < 1. \quad (13.9)$$

При розвиненні функції $f(z)$ в ряд Лорана в околі $z = 0$ вважаємо, що $|z| < |a| < |b|$, тобто $|z/a| < 1$, $|z/b| < 1$.

Скористаємося очевидними рівностями

$$z-a = a(1-z/a), \quad z-b = b(1-z/b).$$

Тоді, використовуючи (13.9), можемо записати (13.8) у вигляді

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{b-a} \left(-\frac{1}{b(1-z/b)} + \frac{1}{a(1-z/a)} \right) = \\ &= \frac{1}{b-a} \left(\frac{1}{a} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{a^k} - \frac{1}{b} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{b^k} \right) = \frac{1}{b-a} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{a^{k+1}} - \frac{1}{b^{k+1}} \right) z^k, \end{aligned}$$

що і буде шуканим розкладом функції $f(z)$ в ряд Лорана, який збігається при $|z/a| < 1$, або $|z| < |a|$.

Відзначимо, що отриманий ряд Лорана не містить головної частини, тобто він є рядом Тейлора. Це пов'язано з тим, що функція $f(z)$ голоморфна (аналітична) в околі точки $z = 0$.

В околі точки $z = a$ ряд Лорана будується за степенями $z-a$. Другий доданок в дужках (13.8) вже фактично має необхідний вигляд. Тому залишилось розкласти лише перший доданок. Для цього запишемо такий

ланцюжок рівностей:

$$z - b = z - a + a - b = (a - b) \left(1 + \frac{z - a}{a - b} \right) = (a - b) \left(1 - \frac{z - a}{b - a} \right).$$

Тоді, використовуючи (13.9), отримаємо

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{b - a} \left(\frac{1}{a - b} \frac{1}{1 - (z - a)/(b - a)} - \frac{1}{z - a} \right) = \\ &= \frac{1}{b - a} \left(\frac{1}{a - b} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z - a)^k}{(b - a)^k} - \frac{1}{z - a} \right). \end{aligned}$$

Отриманий ряд і буде шуканим рядом Лорана для функції $f(z)$. Цей ряд збігається при $|(z - a)/(b - a)| < 1$ і $z \neq a$, тобто в проколотому околі точки a , для всіх значень комплексного аргументу $z \in \mathbb{C}$, для яких виконуються нерівності $0 < |z - a| < |b - a|$.

При розвиненні функції $f(z)$ в кільці $\{z \in \mathbb{C} : |a| < |z| < |b|\}$ ряд Лорана будується за степенями z , причому $|z/a| > 1$, $|z/b| < 1$. В цьому випадку скористаємося такими рівностями

$$z - a = z(1 - a/z), \quad z - b = -b(1 - z/b).$$

Тоді, використовуючи (13.9), знаходимо

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{b - a} \left(-\frac{1}{b} \frac{1}{1 - z/b} - \frac{1}{z} \frac{1}{1 - a/z} \right) = \\ &= \frac{1}{a - b} \left(\frac{1}{b} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{b^k} + \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{z^k} \right) = \frac{1}{a - b} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{b^{k+1}} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{z^{k+1}} \right). \end{aligned}$$

Отримане розвинення і є шуканим рядом Лорана для функції $f(z)$, який, як неважко переконатися, збігається в кільці $\{z \in \mathbb{C} : |a| < |z| < |b|\}$.

В околі точки $z = \infty$ можемо вважати, що $|a/z| < 1$ і $|b/z| < 1$. Тоді аналогічно до попередніх випадків запишемо

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{b - a} \left(\frac{1}{z} \frac{1}{1 - b/z} - \frac{1}{z} \frac{1}{1 - a/z} \right) = \\ &= \frac{1}{b - a} \left(\frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b^k}{z^k} - \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{z^k} \right) = \frac{1}{b - a} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b^k - a^k}{z^{k+1}}. \end{aligned}$$

Отриманий ряд Лорана збігається при $|z| > |b|$. При цьому, аналогічно випадку $z = 0$, цей ряд не має головної частини, бо точка $z = \infty$ є усункою особливою точкою функції $f(z)$. $\triangleleft$

13.2.3. Знайти всі особливі точки функції

$$f(z) = \frac{1}{e^z - 1} - \frac{1}{z}$$

та визначити їх тип.

▷ Очевидно, що особливими точками функції $f(z)$ будуть точки, в яких знаменник хоча б одного з дробів обертається в нуль. Отже, особливими точками функції $f(z)$ є $z = 0$ та ті комплексні числа z , для яких $e^z = 1$. З останнього рівняння знаходимо $z = \text{Ln } 1 = 2\pi k i$, $k \in \mathbb{Z}$. Також особливою точкою вважається точка $z = \infty$.

Розглянемо точку $z = z_k = 2\pi k i$, $k \neq 0$. Функція $1/z$ голоморфна (аналітична) в околі кожної точки z_k , $k \in \mathbb{Z}$, а для функції $g(z) = e^z - 1$ виконуються умови

$$g(z_k) = 0, \quad g'(z_k) = e^{z_k} \neq 0.$$

Іншими словами, знаменник першого дробу має в точці $z = z_k$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$, нуль першого порядку. Тоді точка $z = z_k = 2\pi k i$, $k \neq 0$, є полюсом 1-го порядку (простим полюсом) функції $f(z)$.

Розглянемо точку $z = 0$. Для визначення типу точки обчислимо

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 0} f(z) &= \lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{1}{e^z - 1} - \frac{1}{z} \right) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z - e^z + 1}{z(e^z - 1)} = \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - e^z}{e^z - 1 + z e^z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{-e^z}{2e^z + z e^z} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Тут ми скористалися правилом Лопітала.

Оскільки функція $f(z)$ має в точці $z = 0$ границю, то ця точка є усувною ізольованою особливою точкою.

Нарешті розглянемо точку $z = \infty$. Відзначимо, що $f(z)$ має набір протих полюсів в точках $z = z_k$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. При цьому, $|z_k| \rightarrow \infty$, $k \rightarrow \pm\infty$. Тобто в довільному околі нескінченно віддаленої точки будуть наявні полюси функції $f(z)$. Це означає, що $z = \infty$ не є ізольованою особливою точкою. В даному випадку $z = \infty$ є точкою скупчення полюсів функції $f(z)$. ◁

13.2.4. Знайти загальний вигляд функції, яка має тільки такі особливості: один простий полюс в точці $z_0 \in \mathbb{C}$ та усувну особливу точку на нескінченності.

▷ Оскільки шукана функція $f(z)$ має простий полюс в точці $z = z_0$, то головна частина ряду Лорана цієї функції в околі даної точки має вигляд $c_{-1}/(z - z_0)$, де c_{-1} – деяка константа, відмінна від нуля.

Розглянемо функцію $g(z) = f(z) - c_{-1}/(z - z_0)$. Функція $g(z)$ є голоморфною (аналітичною) в $\mathbb{C}$ (в точці z_0 вона має усувну особливу точку, тому її можна довизначити $g(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} g(z)$), а на нескінченності має усувну особливу точку. Тому функція $g(z)$ є обмеженою в $\mathbb{C}$. За теоремою Ліувілля функція $g(z) \equiv c = \text{const}$. Тоді шукана функція повинна мати вигляд

$$f(z) = c_{-1}/(z - z_0) + c, \quad \text{де } c_{-1}, c \in \mathbb{R}, \quad c_{-1} \neq 0. \quad \triangleleft$$

13.2.5. Теорема Сохоцького стверджує: якщо точка a є істотно особливою точкою функції $f(z)$, то для довільного значення $A \in \mathbb{C}$ існує така послідовність значень комплексного аргумента $\{z_k, k \geq 1\} \subset \mathbb{C} \setminus \{a\}$, збіжна до точки a , що $f(z_k) \rightarrow A$ при $k \rightarrow +\infty$. Довести, що твердження цієї теореми залишається справедливим, якщо точка a є точкою скупчення полюсів (неізолюованою особливою точкою).

▷ Випадок $A = \infty$ очевидний (пропонуємо розглянути самостійно).

Нехай $A \in \mathbb{C}$ – довільне фіксоване число. Нехай $\{a_k : k \geq 1\}$ – така послідовність полюсів функції $f(z)$, що $a_k \rightarrow a$ при $k \rightarrow \infty$.

Скористаємося методом доведення від супротивного і припустимо, що не існує такої послідовності $\{z_k, k \geq 1\} \subset \mathbb{C} \setminus \{a\}$, яка збігається до точки a і для якої $f(z_k) \rightarrow A$ при $k \rightarrow +\infty$.

Із зробленого припущення випливає, що існує такий проколотий окіл точки a , який позначимо $\dot{V}_a$, в якому $|f(z) - A| \geq \varepsilon$, де $\varepsilon > 0$ – деяке фіксоване число. Не обмежуючи загальності, можемо вважати, що $\{a_k, k \in \mathbb{N}\} \subset \dot{V}_a$, і інших особливих точок функція $f(z)$ в V_a не має.

Введемо до розгляду функцію $g(z) = 1/(f(z) - A)$. Проаналізуємо властивості функції $g(z)$ в $\dot{V}_a$. Оскільки функція $f(z)$ голоморфна (аналітична) в $\dot{V}_a$ за виключенням полюсів $\{a_k\}$ і $f(z) \neq A$ в V_a , то і функція $g(z)$ голоморфна (аналітична) в $\dot{V}_a$ за виключенням ізолюованих особливих точок $\{a_k, k \in \mathbb{N}\}$.

Функція $f(z)$ має полюси в точках $\{a_k, k \in \mathbb{N}\}$, тобто $\lim_{z \rightarrow a_k} f(z) = \infty$, $k \geq 1$. Тоді для функції $g(z)$ виконується $\lim_{z \rightarrow a_k} g(z) = 0$, $k \geq 1$, тобто $\{a_k, k \in \mathbb{N}\}$ є усувними особливими точками $g(z)$.

Довизначивши $g(a_k) = \lim_{z \rightarrow a_k} g(z) = 0$, $k \geq 1$, отримуємо, що функція $g(z)$ буде голоморфною (аналітичною) в $\dot{V}_a$, проколотому околу точки a . Тоді точка a буде ізолюованою особливою точкою функції $g(z)$. Крім цього, враховуючи те, що $|f(z) - A| \geq \varepsilon$ в $\dot{V}_a$, ми можемо стверджувати, що $g(z)$ обмежена в $\dot{V}_a$, проколотому околу точки a .

Враховавши поведінку голоморфних (аналітичних) функцій в околах ізолюованих особливих точок, робимо висновок, що точка a є усувною особливою точкою функції $g(z)$. Тоді існує границя

$$\lim_{z \rightarrow a} g(z) = \lim_{k \rightarrow \infty} g(a_k) = 0,$$

і точка a є нулем функції $g(z)$.

На підставі леми про зображення голоморфної (аналітичної) функції в околі її нуля, існують такі окіл $U_a \subset \dot{V}_a \cup \{a\}$ точки a , число $n \in \mathbb{N}$ та функція $\varphi(z)$, яка є голоморфною (аналітичною) в U_a , що для функції $g(z)$

справедливе зображення $g(z) = (z-a)^n \varphi(z)$ в U_a , причому $\varphi(z) \neq 0$ в U_a .

Згадавши визначення функції $g(z)$ в проколотому околі $\dot{V}_a$ точки a , для функції $f(z)$ можемо записати

$$f(z) = A + 1/g(z) = A + \psi(z)/(z-a)^n,$$

де функція $\psi(z) = 1/\varphi(z)$ голоморфна (аналітична) в U_a і $\psi(a) = 1/\varphi(a) \neq 0$.

З останньої рівності можна зробити висновок про те, що точка a є полюсом функції $f(z)$, тобто ізольованою особливою точкою. Але точка a не є ізольованою особливою точкою, бо є точкою скупчення полюсів.

Отримали протиріччя, тобто припущення про існування такої послідовності $\{z_k, k \geq 1\} \subset \mathbb{C} \setminus \{a\}$, яка збігається до точки a і $f(z_k) \rightarrow A$ при $k \rightarrow +\infty$ є хибним. $\triangleleft$

13.3 Питання для перевірки теоретичних знань

Означення ряду Лорана. Правильна та головна частина ряду Лорана. Визначення області збіжності ряду Лорана.

Теорема Лорана. Теорема про єдиність розкладу функції в ряд Лорана. Нерівність Коші для коефіцієнтів ряду Лорана.

Означення ізольованих особливих точок функції та їх типи. Приклади.

Теореми про зв'язок між виглядом ряду Лорана в околі ізольованої особливої точки та її типом (теорема про розклад функції в ряд Лорана в околі усувної особливої точки; теорема про розклад функції в ряд Лорана в околі особливої точки типу полюс та її еквівалентне формулювання; теорема про розклад функції в ряд Лорана в околі істотно особливої точки). Теорема про обмеженість функції в околі її усувної особливої точки.

Означення порядку полюса функції та його визначення за явним виглядом коефіцієнтів ряду Лорана.

Теорема Сохоцького-Вейерштраса. Велика теорема Пікара (подати приклади). Що можна сказати про множину точок $\{w : w = f(z), 0 < |z-a| < \delta\}$, якщо функція $f(z)$ визначена для $\{z : 0 < |z-a| < \delta\}$, а точка $z = a$ є істотно особливою точкою для функції $f(z)$?

Означення множини невизначеності функції та її вигляд. Що можна сказати про тип особливої точки та явний вигляд ряду Лорана для випадку, коли ізольованою особливою точкою є $z_0 = \infty$?

Означення цілої функції та її загальний вигляд. Означення цілої трансцендентної функції. Приклади.

Означення мероморфної та раціональної функцій. Приклади мероморфних та раціональних функцій.

Функція $f(z)$ – мероморфна. Що можна сказати про множину полюсів функції $f(z)$? В яких випадках мероморфна функція є раціональною? Відповідь обґрунтувати. Означення функції, що мероморфна в області.

Теорема про функцію, що мероморфна в замкненій комплексній площині.

Теорема Вейерштраса для цілих функцій та її узагальнення.

13.4 Завдання для аудиторної роботи

13.4.1. Знайти області збіжності рядів:

$$a) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{(z - z_0)^k}{\operatorname{ch} \alpha k}, \quad \alpha > 0; \quad b) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{z^k}{3^k + 1};$$

$$c) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2^{-k^2} (z + 1)^k.$$

13.4.2. Розкласти функції в ряди Лорана у вказаних областях:

$$a) f(z) = \frac{1}{(z^2 - 1)^2} \quad \text{в околі точок } z = 0 \text{ та } z = \infty;$$

$$b) f(z) = \frac{z^3}{(z + 1)(z - 2i)} \quad \text{в околі точки } z = -1;$$

$$c) f(z) = \frac{z^4 + 1}{(z - 1)(z + 2)} \quad \text{в кільці } 1 < |z| < 2.$$

13.4.3. Знайти всі особливі точки функцій та визначити їх тип:

$$a) f(z) = \frac{1}{z - z^3}; \quad b) f(z) = (z + 1)e^{1/(z+1)}; \quad c) f(z) = \frac{e^z}{1 + z^2};$$

$$d) f(z) = \frac{\sin z}{z(1 - e^z)}.$$

13.4.4. Довести, що точка $z = 0$ є істотно особливою для функції $\exp(1/z)$.

13.4.5. З'ясувати, чи є точка $z = 1$ істотно особливою для суми ряду

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(z - 1)^k} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(z - 1)^k}{3^{k+1}}?$$

13.4.6. Нехай функції $f(z)$, $g(z)$ голоморфні в околі U_a точки $a \in \mathbb{C}$ і $f(a) = g(a) = 0$. З'ясувати поведінку функції $f(z)/g(z)$ в околі точки a .

13.4.7. Нехай a – ізольована особлива точка функції $f(z)$ і існують такі числа $M > 0$ та $m \in \mathbb{N}$, що $|f(z)| \leq M|z - a|^{-m}$ в деякому околі точки a . Довести, що a не може бути істотно особливою точкою функції $f(z)$.

13.4.8. Нехай функції $f(z)$ та $g(z)$ мають в точці $z = a$ полюси порядку m та n відповідно. З'ясувати, чи є точка $z = a$ ізольованою особливою точкою функцій:

- a) $f(z) + g(z)$, b) $f(z) \cdot g(z)$, c) $f(z)/g(z)$?

Якщо так, то визначити її тип.

13.4.9. Знайти загальний вигляд функцій, які мають в $\overline{\mathbb{C}}$ тільки такі особливості:

- a) один полюс порядку $m \in \mathbb{N}$ в точці $z_0 \in \mathbb{C}$;
b) полюс 2-го порядку в точці $z = 0$ з головною частиною $1/z^2$.

13.4.10. Нехай функція $f(z)$ голоморфна (аналітична) в кільці $\{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R\}$. Довести, що функцію $f(z)$ можна зобразити у вигляді $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$, де функція $f_1(z)$ голоморфна (аналітична) в області $\{z \in \mathbb{C} : |z| > r\}$, а $f_2(z)$ голоморфна (аналітична) в області $\{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$. З'ясувати, чи є таке представлення єдиним ?

13.5 Завдання для самостійної роботи

13.5.1. Знайти області збіжності таких рядів:

- a) $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2^{-|k|} z^k$; b) $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{z^k}{k^2 + 1}$; c) $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2^k z^k$.

13.5.2. Розкласти задані функції в ряди Лорана у вказаних областях:

- a) $f(z) = \frac{1}{(z-b)^2}$, $|z| > |b|$;
b) $f(z) = \frac{e^z}{z(1-z)}$, $|z| > 1$;
c) $f(z) = \frac{1}{(z-1)^2(z+2)}$, $1 < |z| < 2$;
d) $f(z) = \frac{z^3}{(z+1)(z-2)}$ в околі точки $z = 1$;
e) $f(z) = z^3 e^{1/z}$ в околі точки $z = 0$.

13.5.3. Знайти всі особливі точки функцій та визначити їх тип:

- a) $f(z) = \cos \frac{z}{z+1}$; b) $f(z) = \sin z \cdot \sin \frac{1}{z}$; c) $f(z) = z^n \sin \frac{1}{z}$, $n \in \mathbb{N}$;
d) $f(z) = \frac{\sin 2z}{(z+1)^3}$; e) $f(z) = \left(\sin \frac{1}{z}\right)^{-1}$; f) $f(z) = \operatorname{tg} z$;
g) $f(z) = \frac{z^2}{(z^2+1)^2}$; h) $f(z) = \frac{\exp(1/z)}{\cos z + 4}$.

13.5.4. Нехай функція $f(z)$ має в точці $z = a \in \mathbb{C}$ полюс порядку n . Знайти порядок полюса функції $f^{(m)}(z)$, $m \in \mathbb{N}$, в точці $z = a$.

13.5.5. Знайти загальний вигляд функції, яка в $\overline{\mathbb{C}}$ має прості полюси в точках $z_1, z_2, \dots, z_n$.

13.5.6. Нехай функції $f(z)$ та $g(z)$ мають в точці $z = \infty$ полюси порядків m та n відповідно. Довести, що функція $f(g(z))$ має в точці $z = \infty$ полюс

порядку $m \cdot n$.

13.5.7. Побудувати приклади функцій, які мають:

a) полюс 2-го порядку в точці $z = \infty$;

b) полюс 2-го порядку в точці $z = 0$ з головною частиною c_{-2}/z^2 та простий полюс в точці $z = \infty$.

13.5.8. Нехай функція $f(z)$ голоморфна (аналітична) в області $G \subset \mathbb{C}$, за виключенням точок $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, в яких вона має полюси. Довести, що її логарифмічна похідна, тобто функція $f'(z)/f(z)$, має в G тільки прості полюси, які співпадають з полюсами та нулями функції $f(z)$.

Тема 14

Лишки голоморфних функцій. Теорема Руше

14.1 Теоретичні відомості

14.1.1 Означення лишків та формули для їх обчислення

Розглянемо функцію $f(z)$, для якої точка $z_0 \in \mathbb{C}$ є ізольованою особливою точкою. Така функція є голоморфною в деякому проколотому околі $\dot{U}(a)$ точки $z_0 \in \mathbb{C}$. Нехай $\gamma_r = \{z \in \mathbb{C} : z = z_0 + re^{i\varphi}, \varphi \in [0; 2\pi)\}$ – коло радіуса r з центром в точці z_0 , яке належить проколотому околу $\dot{U}(a)$.

Означення 14.1. Величина

$$\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} f(z) dz \quad (14.1)$$

називається *лишком* функції $f(z)$ в точці z_0 .

Якщо функцію $f(z)$ записати в околі точки z_0 за допомогою її ряду Лорана $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n$, то $\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = c_{-1}$. Зокрема, лишок функції $f(z)$ в усуній ізольованій особливій точці рівний нулеві.

У випадку, коли точка z_0 є полюсом функції $f(z)$, її лишок в цій точці можна обчислити за допомогою формули

$$\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} ((z - z_0)^n f(z)),$$

де $n \in \mathbb{N}$ – порядок полюса функції $f(z)$ в точці z_0 .

У випадку простого полюса дана формула спрощується і має вигляд

$$\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} ((z - z_0) f(z))$$

Якщо, крім того, функцію $f(z)$ в околі точки z_0 можна записати у вигляді дробу $f(z) = \varphi(z)/\psi(z)$, де $\varphi(z)$, $\psi(z)$ – голоморфні в точці z_0 функції та $\varphi(z_0) \neq 0$, $\psi(z_0) = 0$, $\psi'(z_0) \neq 0$, то $\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = \varphi(z_0)/\psi'(z_0)$.

Для обчислення значення лишку функції в її істотно особливій точці потрібно користуватися означенням лишку або розкладом функції в ряд Лорана в околі такої точки.

Лишок функції в нескінченно віддаленій точці визначається також за допомогою формули (14.1), але коло γ_r при цьому орієнтовано в напрямку руху годинникової стрілки і, як наслідок, $\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = -c_{-1}$, де c_{-1} – коефіцієнт при $1/z$ в розкладі функції $f(z)$ в ряд Лорана в околі точки $z_0 = \infty$.

14.1.2 Принцип аргументу

Розглянемо функцію $f(z)$, яка голоморфна в деякому проколотому околі точки $z_0 \in \mathbb{C}$, причому $f(z_0) \neq 0$.

Означення 14.2. Величина

$$\operatorname{res}_{z=z_0} \frac{f'(z)}{f(z)}$$

називається *логарифмічним лишком* функції $f(z)$ в точці $z_0 \in \mathbb{C}$.

Логарифмічний лишок функції $f(z)$ в її нулі дорівнює порядку цього нуля, а логарифмічний лишок функції $f(z)$ в її полюсі дорівнює порядку цього полюсу, взятого зі знаком мінус.

Теорема 14.3. Нехай:

- 1) функція $f(z)$ мероморфна в області $D \subset \mathbb{C}$;
- 2) область G компактно належить області D ;
- 3) межа ∂G області G не містить ні нулів, ні полюсів функції $f(z)$.

Тоді

$$N - P = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f'(z)}{f(z)} dz,$$

де ∂G – додатньо орієнтована межа ∂G області G ; N та P – відповідно, загальне число нулів і полюсів функції $f(z)$ в області G з урахуванням їх кратності.

Теорема 14.4 (принцип аргументу). Якщо виконуються умови 1) – 3) теореми 14.3, то різниця між числом нулів N та числом полюсів P функції $f(z)$ в області G з урахуванням їх кратності дорівнює поділеному на 2π приросту аргументу функції $f(z)$ при обході додатньо орієнтованої межі ∂G області G , тобто

$$N - P = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\partial G} \arg f(z).$$

Теорема 14.5 (Руше). Нехай:

- 1) функції $f(z)$, $g(z)$ голоморфні в замикані області $G \subset \mathbb{C}$;
- 2) межа ∂G області G є неперервною;
- 3) виконується нерівність $|f(z)| > |g(z)|$ для всіх $z \in \partial G$.

Тоді функції $f(z)$ та $f(z) + g(z)$ мають в області G однакову кількість нулів.

За допомогою теореми Руше можна визначати число нулів в даній області для функції, що голоморфна в $D \subset \mathbb{C}$. Зокрема, з теореми Руше випливає основна теорема алгебри.

14.2 Приклади розв'язування задач

14.2.1. Довести, що для будь-якої парної функції $f(z)$ виконуються рівності $\operatorname{res}_{z=0} f(z) = \operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = 0$, якщо записані лишки мають сенс.

▷ Нехай $z = 0$ – ізольована особлива точка функції $f(z)$. Згідно означення лишку

$$\operatorname{res}_{z=0} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=\rho} f(\xi) d\xi,$$

де $\rho > 0$ настільки мале, що в крузі $|z| \leq \rho$ немає інших особливих точок функції $f(z)$, окрім $z = 0$.

Для обчислення інтегралу в означенні лишку використаємо означення інтеграла вздовж гладкого шляху (див. формулу (10.1)). Маємо:

$$\begin{aligned} \int_{|\xi|=\rho} f(\xi) d\xi &= \int_0^{2\pi} f(\rho e^{i\varphi}) \rho i e^{i\varphi} d\varphi = \\ &= \rho i \left(\int_0^\pi f(\rho e^{i\varphi}) e^{i\varphi} d\varphi + \int_\pi^{2\pi} f(\rho e^{i\varphi}) e^{i\varphi} d\varphi \right). \end{aligned}$$

В другому інтегралі виконаємо заміну $\varphi = \pi + \psi$, після якої отримаємо:

$$\begin{aligned} \int_{|\xi|=\rho} f(\xi) d\xi &= \rho i \left(\int_0^\pi f(\rho e^{i\varphi}) e^{i\varphi} d\varphi + \int_0^\pi f(\rho e^{i(\pi+\psi)}) e^{i(\pi+\psi)} d\psi \right) = \\ &= \rho i \left(\int_0^\pi f(\rho e^{i\varphi}) e^{i\varphi} d\varphi - \int_0^\pi f(-\rho e^{i\psi}) e^{i\psi} d\psi \right) = |f(-z) = f(z)| = \\ &= \rho i \left(\int_0^\pi f(\rho e^{i\varphi}) e^{i\varphi} d\varphi - \int_0^\pi f(\rho e^{i\psi}) e^{i\psi} d\psi \right) = 0. \end{aligned}$$

Що і треба було довести.

Аналогічно розглядається випадок $z = \infty$. ◁

14.2.2. Знайти кількість розв'язків рівняння $z^6 - 6z + 10 = 0$ в області $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$.

▷ Згідно з основною теоремою алгебри дане рівняння в комплексній площині $\mathbb{C}$ має 6 розв'язків (з урахуванням кратності).

Для визначення кількості розв'язків в області $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$ знайдемо кількість розв'язків в її доповненні – множині $G = \mathbb{C} \setminus D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$. Для цього використаємо теорему Руше.

Покладемо $f(z) = 10$, $g(z) = z^6 - 6z$. Очевидно, що для всіх $z \in \partial G$ виконується нерівність $|g(z)| < |f(z)|$, оскільки для $z \in \partial G = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ виконується

$$|g(z)| \leq |z^6| + |6z| = 7 < 10 = |f(z)|. \quad (14.2)$$

Тоді за теоремою Руше з (14.2) отримаємо, що функції $f(z) = 10$ та $f(z) + g(z) = z^6 - 6z + 10$ мають в області $|z| < 1$ однакову кількість

нулів, тобто не мають їх зовсім. Крім цього, з (14.2) випливає, що функція $f(z) + \psi(z)$ не має нулів і на одиничному колі, яке є межею множини G .

З проведених міркувань випливає, що всі b нулів вихідного рівняння лежать в області $|z| > 1$. $\triangleleft$

14.3 Питання для перевірки теоретичних знань

Означення лишку функції в її ізольованій особливій точці (випадок скінченної точки). Теорема Коші про лишки. Теорема про лишок функції в її ізольованій особливій точці та її наслідок.

Формули для обчислення лишку функції для випадку простого полюса. Формула для обчислення лишку для випадку кратного полюса.

Означення лишку функції в її ізольованій особливій точці (випадок нескінченної точки). Теорема Коші про повну суму лишків.

Логарифмічний лишок. Теорема про число нулів та полюсів мероморфної функції. Принцип аргумента. Сформулювати принцип аргументу для випадку a -точок функцій.

Теорема Руше та її застосування. Доведення основної теореми алгебри за допомогою теореми Руше.

14.4 Завдання для аудиторної роботи

14.4.1. Знайти лишки заданих функцій в усіх особливих точках:

$$a) f(z) = \frac{z^2 + z - 1}{z^2(z-1)}; \quad b) f(z) = \frac{e^z - 1}{\operatorname{ch} z}; \quad c) f(z) = \cos \frac{1}{z^2};$$

$$d) f(z) = z^n \sin \frac{1}{z}, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad e) f(z) = \frac{z^{2n}}{(z+1)^n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

14.4.2. Розвинення функції $f(z)$ в околі точки $z = \infty$ має вигляд

$$f(z) = c_0 + \frac{c_1}{z} + \dots, \quad |z| > R.$$

Знайти $\operatorname{res}_{z=\infty} f^2(z)$.

14.4.3. Знайти $\operatorname{res}_{z=a} \{f(z)g(z)\}$, якщо функція $f(z)$ голоморфна (аналітична) в околі точки $z = a$, а функція $g(z)$ має в цій точці простий полюс з лишком A .

14.4.4. Знайти $\operatorname{res}_{z=a} \left\{ g(z) \frac{f'(z)}{f(z)} \right\}$, якщо функція $g(z)$ голоморфна (аналітична) в околі точки $z = a$, а функція $f(z)$ має в цій точці нуль порядку m .

14.4.5. Довести, що для будь-якої непарної функції $f(z)$ має місце рівність

$$\operatorname{res}_{z=a} f(z) = \operatorname{res}_{z=-a} f(z),$$

якщо записані лишки мають сенс.

14.4.6. Знайти кількість розв'язків рівнянь у вказаних областях:

- a) $z^4 - 3z + 1 = 0$, $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$;
 b) $z^4 + z^3 - 4z + 1 = 0$, $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 3\}$.

14.5 Завдання для самостійної роботи

14.5.1. Знайти лишки заданих функцій в усіх ізольованих особливих точках

$$\begin{aligned} \text{a) } f(z) &= \frac{1}{z + z^3}; & \text{b) } f(z) &= \operatorname{ctg} \pi z; & \text{c) } f(z) &= \frac{z^2}{(1+z)^3}; \\ \text{d) } f(z) &= \frac{\sin \frac{1}{z}}{z-1}; & \text{e) } f(z) &= \frac{z^{2n}}{(z-1)^n}, \quad n \in \mathbb{Z}; & \text{f) } f(z) &= z \cos^2 \frac{\pi}{z}. \end{aligned}$$

14.5.2. Знайти $\operatorname{res}_{z=a} \left(\frac{f'(z)}{f(z)} \right)^2$, якщо функція $f(z)$ аналітична в околі точки $z = a$ та має там нуль порядку m .

14.5.3. Знайти $\operatorname{res}_{z=a} \left(\frac{f'(z)}{f(z)} \right)^2$, якщо функція $f(z)$ має в точці $z = a$ полюс порядку p .

14.5.4. Знайти $\operatorname{res}_{z=a} \left\{ g(z) \frac{f'(z)}{f(z)} \right\}$, якщо функція $f(z)$ має в точці $z = a$ полюс порядку m , а функція $g(z)$ голоморфна (аналітична) в околі цієї точки.

14.5.5. Знайти $\operatorname{res}_{z=a} f(g(z))$, якщо функція $g(z)$ голоморфна (аналітична) в околі точки $z = a$ і $g'(a) \neq 0$, а функція $f(w)$ має простий полюс в точці $w = g(a)$ з лишком A .

14.5.6. Довести, що для будь-якої парної функції $f(z)$ має місце рівність

$$\operatorname{res}_{z=a} f(z) = - \operatorname{res}_{z=-a} f(z),$$

якщо записані лишки мають сенс.

14.5.7. Знайти кількість розв'язків рівнянь у вказаних областях:

- a) $2z^4 - 5z + 2 = 0$, $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$;
 b) $z^4 - 9z^3 + 1 = 0$, $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1/2\}$;
 c) $z^7 - 5z^4 + z^2 - 2 = 0$, $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$;
 d) $z^3 - 12z + 1 = 0$, $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$.

Тема 15

Теореми Коші про лишки та їх застосування

15.1 Теоретичні питання

При обчисленні інтегралів по замкнутому контуру чи по межі області часто використовуються теорема Коші про суму лишків та теорема про повну суму лишків, які формулюються таким чином.

Теорема 15.1 (Коші про суму лишків, основна теорема про лишки).
Нехай виконуються умови:

- 1) функція $f(z)$ голоморфна в замиканні області $D \subset \mathbb{C}$ всюди за винятком ізольованої множини особливих точок;
- 2) область G компактно належить області D ;
- 3) межа ∂G області G не містить особливих точок функції $f(z)$ і складається зі скінченного числа неперервних кривих.

Тоді

$$\int_{\partial G} f(z) dz = 2\pi i \sum_{a_k \in G} \operatorname{res}_{z=a_k} f(z),$$

де інтеграл в лівій частині береться по додатньо орієнтованій межі ∂G області G , а сума в правій частині – по всім особливим точкам функції $f(z)$, які належать області G .

Теорема 15.2 (Коші про повну суму лишків). Нехай функція $f(z)$ голоморфна в усій комплексній площині $\mathbb{C}$ за винятком хіба що скінченного числа точок a_k , $k = \overline{1, n}$. Тоді сума її лишків в усіх скінчених особливих точках a_k , $k = \overline{1, n}$, та лишку в точці $z = \infty$ дорівнює нулеві, тобто

$$\sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z=a_k} f(z) + \operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = 0.$$

15.2 Приклади розв'язування задач

15.2.1 Обчислити інтеграл

$$\int_{|z-1|=1} \frac{dz}{z^3 - 1}.$$

▷ Підінтегральна функція $f(z) = 1/(z^3 - 1)$ є голоморфною (аналітичною) в комплексній площині $\mathbb{C}$ за виключенням трьох простих полюсів в точках $z_1 = 1$, $z_2 = e^{i2\pi/3}$, $z_3 = e^{i4\pi/3}$ (кубічні корені з 1). Всередину контуру інтегрування попадає лише один з них – полюс $z_1 = 1$ (рис. 15.1).

Тоді за основною теоремою про лишки маємо

$$\int_{|z-1|=1} \frac{dz}{z^3-1} = 2\pi i \operatorname{res}_{z=1} \frac{1}{z^3-1} =$$

$$= 2\pi i \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z^3-1} = \frac{2}{3} \pi i.$$

15.2.2. Обчислити інтеграл

$$\int_{|z|=2} \frac{z^5}{z^6-1} dz.$$

▷ Підінтегральна функція $f(z) = z^5/(z^6-1)$ є голоморфною (аналітичною) в комплексній площині $\mathbb{C}$ за виключенням простих полюсів в точках $z = z_k = \exp(2\pi k i/6)$, $k = \overline{0, 5}$, (корені 6-го степеня з 1), які всі попадають всередину контуру інтегрування. Тоді за основною теоремою про лишки маємо

$$\int_{|z|=2} \frac{z^5}{z^6-1} dz = 2\pi i \sum_{k=0}^5 \operatorname{res}_{z=z_k} f(z).$$

Для обчислення суми лишків використаємо теорему Коші про повну суму лишків голоморфної (аналітичної) функції в $\overline{\mathbb{C}}$. Згідно цієї теореми

$$\sum_{k=0}^5 \operatorname{res}_{z=z_k} f(z) + \operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = 0.$$

Тоді для обчислення шуканого інтегралу досить порахувати $\operatorname{res}_{z=\infty} f(z)$. Функція $f(z)$ має в нескінченно віддаленій точці усуну особливу точку, бо існує границя $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = f(\infty) = 0$. Тоді

$$\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} z (f(\infty) - f(z)) = - \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z^6}{z^6-1} = -1.$$

В результаті отримаємо

$$\int_{|z|=2} \frac{z^5}{z^6-1} dz = 2\pi i \sum_{k=0}^5 \operatorname{res}_{z=z_k} f(z) = -2\pi i \operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = 2\pi i. \quad \triangleleft$$

15.2.3. Обчислити інтеграл

$$\int_{|z|=1} z \exp \bar{z} dz.$$

▷ Безпосереднє застосування основної теореми про лишки в даному випадку неможливе, оскільки підінтегральна функція $f(z) = z \exp \bar{z}$ не є голоморфною (аналітичною) в жодній точці комплексної площини. Для об-

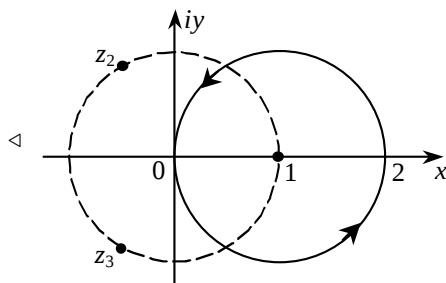


Рис. 15.1

числення шуканого інтегралу розглянемо функцію $f(z)$ на колі $|z| = 1$, по якому відбувається інтегрування. Отже, для довільного z такого, що $|z| = 1$, має місце

$$f(z) = z \exp \bar{z} = |\bar{z} = |z|^2 / z = 1/z| = z e^{1/z} = g(z).$$

Тобто на колі $|z| = 1$ значення неголоморфної (неаналітичної) функції $f(z)$ співпадають із значеннями функції $g(z) = z e^{1/z}$, що голоморфна (аналітична) в комплексній площині $\mathbb{C}$ за виключенням точки $z = 0$, яка є істотно особливою точкою для функції $g(z)$. Тоді

$$\int_{|z|=1} z \exp \bar{z} dz = \int_{|z|=1} z e^{1/z} dz = 2\pi i \operatorname{res}_{z=0} z e^{1/z}.$$

Для знаходження лишку функції $g(z)$ в точці $z = 0$ розкладемо функцію $g(z) = z e^{1/z}$ в ряд Лорана в околі точки $z = 0$. Маємо:

$$g(z) = z e^{1/z} = z \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{-k}}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{-k+1}}{k!}.$$

Тоді $\operatorname{res}_{z=0} z e^{1/z} = c_{-1} = 1/(2!) = 1/2$. Як результат маємо, що шуканий інтеграл дорівнює

$$\int_{|z|=1} z \exp \bar{z} dz = \pi i. \quad \triangleleft$$

15.2.4. Обчислити інтеграл $\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{a + \cos \varphi}, \quad a > 1.$

▷ Для обчислення інтегралу згадаємо, що $\cos \varphi = (e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})/2$, і покладемо в інтегралі $z = e^{i\varphi}$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Тоді від інтегрування по проміжку дійсної осі $[0, 2\pi]$ перейдемо до інтегрування по колу $|z| = 1$ в комплексній площині, яке проходиться проти годинникової стрілки. При цьому, $\cos \varphi = (z + z^{-1})/2$, $d\varphi = dz/(i e^{i\varphi}) = -i dz/z$.

В результаті шуканий інтеграл можна записати таким чином

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{a + \cos \varphi} = -i \int_{|z|=1} \frac{z^{-1} dz}{a + (z + z^{-1})/2} = -2i \int_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 + 2az + 1}.$$

Підінтегральна функція $f(z) = 1/(z^2 + 2az + 1)$ в останньому інтегралі є голоморфною (аналітичною) всюди в $\mathbb{C}$ за виключенням двох простих полюсів $z_{1,2} = -a \pm \sqrt{a^2 - 1}$ (нулі знаменника). Враховуючи, що $a > 1$, неважко переконатися, що всередину одиничного кола $|z| = 1$ попадає

лише полюс $z_1 = -a + \sqrt{a^2 - 1}$. Тоді

$$\int_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 + 2az + 1} = 2\pi i \operatorname{res}_{z=z_1} f(z) = \frac{\pi i}{z_1 + a}.$$

Звідки випливає, що

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{a + \cos \varphi} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}. \quad \triangleleft$$

15.2.5. Обчислити інтеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) dx$, де $R(x)$ – раціональна функція, яка не має особливих точок на дійсній осі, а у півплощині $\operatorname{Im} z > 0$ має полюси лише в точках $a_1, a_2, \dots, a_n$, причому існує границя $\lim_{z \rightarrow \infty} z R(z) = 0$.

▷ Очевидно, що шуканий інтеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) dx$$

збігається. Тоді його можна визначити як таку границю

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) dx = \lim_{\rho \rightarrow +\infty} \int_{-\rho}^{\rho} R(x) dx. \quad (15.1)$$

Для обчислення останньої границі побудуємо замкнений контур $C_\rho =$

$[-\rho, \rho] \cup \Gamma_\rho$ (рис. 15.2), де величину ρ виберемо настільки великою, щоб всі полюси $a_1, a_2, \dots, a_n$ лежали всередині побудованого контуру.

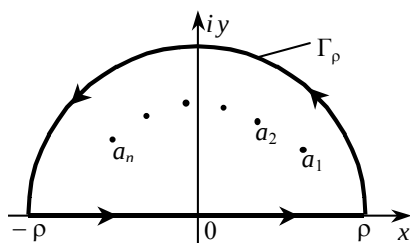


Рис. 15.2

Тоді за основною теоремою про лишки має місце рівність

$$\int_{C_\rho} R(z) dz = \int_{-\rho}^{\rho} R(x) dx + \int_{\Gamma_\rho} R(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z=a_k} R(z), \quad (15.2)$$

причому отримана рівність справедлива для всіх досить великих ρ .

Для обчислення границі (15.1) спрямуємо $\rho \rightarrow +\infty$ в рівності (15.2).

При цьому оцінимо

$$\int_{\Gamma_\rho} R(z) dz = \int_0^\pi R(\rho e^{i\varphi}) i \rho e^{i\varphi} d\varphi. \quad (15.3)$$

За умовою задачі існує границя $\lim_{z \rightarrow \infty} z R(z) = 0$. Якщо в ній покласти $z = \rho e^{i\varphi}$, то отримаємо, що $R(\rho e^{i\varphi}) \rho e^{i\varphi} \rightarrow 0$ при $\rho \rightarrow +\infty$ рівномірно по φ . Тоді, перейшовши в (15.3) до границі під знаком інтегралу, отримаємо $\int_{\Gamma_\rho} R(z) dz \rightarrow 0$ при $\rho \rightarrow +\infty$.

В результаті, спрямувавши в (15.2) ρ до $+\infty$, остаточно отримаємо

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z=a_k} R(z). \quad \triangleleft$$

15.2.6. Обчислити інтеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^n + 1}, \quad n = 2, 3, \dots$$

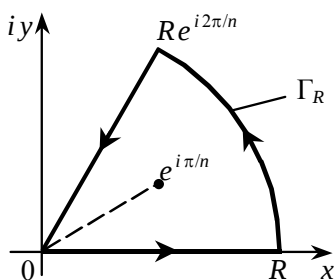


Рис. 15.3

▷ Підінтегральну функцію $f(z) = 1/(z^n + 1)$ можна розглядати як суперпозицію функцій $1/(w + 1)$ та $w = z^n$. Нагадаємо, що степенева функція $w = z^n$ не є однолистою в комплексній площині. Однією з областей однолистості цієї функції є кут $\{0 < \arg z < 2\pi/n\}$, причому на променях $\arg z = 0$ та $\arg z = 2\pi/n$ функція $w = z^n$ набуває однакових значень.

Тоді для обчислення шуканого інтегралу побудуємо замкнений контур C_R , який є додатньо зорієнтованою межею сектора $\{0 < |z| < R, 0 < \arg z < 2\pi/n\}$ (рис.15.3), $C_R = [0, R] \cup \Gamma_R \cup [Re^{i2\pi/n}, 0]$.

Функція $f(z) = 1/(z^n + 1)$ голоморфна (аналітична) в комплексній площині $\mathbb{C}$ за виключенням простих полюсів в точках $z = \exp[i\pi(1 + 2k)/n]$, $k = 0, (n-1)$. При цьому всередину контура C_R попадає лише один полюс в точці $z = e^{i\pi}$. Тоді за основною теоремою про лишки маємо

$$\int_{C_R} \frac{dz}{z^n + 1} = 2\pi i \operatorname{res}_{z=e^{i\pi}} \frac{1}{z^n + 1} = \frac{2\pi i}{n e^{i(n-1)\pi/n}} = -\frac{2\pi i}{n e^{-i\pi/n}}. \quad (15.4)$$

Використовуючи адитивність інтегралу, запишемо

$$\int_{C_R} \frac{dz}{z^n + 1} = \int_0^R \frac{dx}{x^n + 1} + \int_{\Gamma_R} \frac{dz}{z^n + 1} + \int_{Re^{i2\pi/n}}^0 \frac{dz}{z^n + 1}.$$

В останньому інтегралі виконаємо заміну $z = \rho e^{i2\pi/n}$, де ρ набуває значень від $\rho = R$ до $\rho = 0$. Тоді отримаємо

$$\int_{C_R} \frac{dz}{z^n + 1} = \int_0^R \frac{dx}{x^n + 1} + \int_{\Gamma_R} \frac{dz}{z^n + 1} + \int_R^0 \frac{e^{i2\pi/n} d\rho}{\rho^n + 1} =$$

$$= (1 - e^{i2\pi/n}) \int_0^R \frac{dx}{x^n + 1} + \int_{\Gamma_R} \frac{dz}{z^n + 1}. \quad (15.5)$$

Для обчислення шуканого інтегралу перейдемо до границі при $R \rightarrow +\infty$ в рівності (15.5). Враховуючи (15.4), отримаємо

$$-\frac{2\pi i}{n e^{-i\pi/n}} = (1 - e^{i2\pi/n}) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^n + 1} + \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_R} \frac{dz}{z^n + 1}.$$

Оскільки $z f(z) = z/(z^n + 1) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \infty$ (за умови $n \geq 2$), то, використовуючи результат задачі 11.4.2 (див. завдання для аудиторної роботи до теми 11), отримаємо рівність

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_R} \frac{dz}{z^n + 1} = 0.$$

Тоді

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^n + 1} = -\frac{2\pi i}{n e^{-i\pi/n} (1 - e^{i2\pi/n})} = \frac{\pi}{n \sin(\pi/n)}. \quad \triangleleft$$

15.3 Питання для перевірки теоретичних знань

Означення лишку для випадку скінченної та нескінченної точки. Основна теорема про лишки та теорема Коші про повну суму лишків.

15.4 Завдання для аудиторної роботи

15.4.1. Обчислити інтеграли:

$$\begin{aligned} a) \int_{|z+i|=1} \frac{dz}{z^4 + 1}; \quad b) \int_{|z-i|=1} \frac{e^{\pi z/2}}{(z^2 + 1)^2} dz; \quad c) \int_{|z|=1} \frac{z^3 dz}{2z^4 + 1}; \\ d) \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=2} \frac{dz}{(z-1)(1-\bar{z})}; \quad e) \int_{|z|=R} \sin^2 \frac{1}{z} dz. \end{aligned}$$

14.5.2. Застосовуючи теорему про логарифмічний лишок, обчислити інтеграли:

$$a) \frac{1}{\pi i} \int_{|z|=2\pi/3} \frac{dz}{\sin 2z}; \quad b) \frac{1}{\pi i} \int_{|z|=4\pi/3} \frac{dz}{\cos 2z}.$$

15.4.3. Обчислити інтеграли:

$$a) \int_0^\pi \frac{\cos^4 \varphi}{1 + \sin^2 \varphi} d\varphi; \quad b) \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{a + b \sin \varphi}, \quad 0 < b < a;$$

$$c) \int_0^{\pi} \operatorname{tg}(x + i a) dx, \quad a > 0; \quad d) \int_0^{2\pi} \frac{\cos n\varphi d\varphi}{1 - 2a \cos \varphi + a^2}, \quad -1 < a < 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

15.4.4. Обчислити інтеграли:

$$a) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 13}; \quad b) \int_0^{+\infty} \frac{x+1}{x^4+1} dx; \quad c) \int_0^{+\infty} \frac{x^n dx}{x^{2n}+1}, \quad n = 2, 3, \dots$$

15.5 Завдання для самостійної роботи

15.5.1. Обчислити інтеграли:

$$a) \int_{|z-1-i|=2} \frac{dz}{(z-1)^2(z^2+1)}; \quad b) \int_{\partial\Omega} \frac{dz}{z^2(z-3)^2}, \quad \Omega = \{2 < |z| < 4\};$$

$$c) \int_{|z|=4} \frac{z}{z+3} \exp(1/(3z)) dz; \quad d) \int_{|z|=2} \sin \frac{z}{z+1} dz;$$

$$e) \int_{|z|=4} \frac{dz}{z^3(z^{10}-2)}; \quad f) \int_{|z|=2} \frac{z^3}{z+1} \exp(\bar{z}/4) dz;$$

$$g) \int_{|z|=\pi} \frac{\exp(\pi z)}{\sin z - i} dz.$$

15.5.2. Обчислити інтеграли:

$$a) \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{1 - 2a \cos \varphi + a^2}, \quad a \neq \pm 1; \quad b) \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(a + b \cos^2 \varphi)^2}, \quad a > 0, \quad b > 0;$$

$$c) \int_0^{2\pi} \operatorname{ctg}(x+a) dx, \quad \operatorname{Im} a \neq 0; \quad d) \int_0^{2\pi} e^{\cos \varphi} \cos(n\varphi - \sin \varphi) d\varphi, \quad n \in \mathbb{N};$$

$$e) \int_0^{2\pi} \frac{\sin n\varphi d\varphi}{1 - 2a \sin \varphi + a^2}, \quad -1 < a < 1.$$

15.5.3. Обчислити інтеграли:

$$a) \int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + a^2)^2}, \quad a > 0; \quad b) \int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + a^2)^3}, \quad a > 0;$$

$$c) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^n}, \quad n \in \mathbb{N}; \quad d) \int_0^{+\infty} \frac{x^4 dx}{(bx^2 + a)^4}, \quad a, b > 0;$$

$$e) \int_0^{+\infty} \frac{x^6 dx}{(x^4 + a^4)^2}, \quad a > 0.$$

15.5.3. Обчислити інтеграл $\int_0^{+\infty} R(x^n) dx$, де $R(z)$ – раціональна функція, яка не має особливих точок при $z = x \geq 0$, і для якої існує границя $\lim_{z \rightarrow \infty} z R(z) = 0$.

15.6 Приклади задач для модульної контрольної роботи (третій модуль)

Після завершення вивчення тем "Шляхи та криві в комплексній площині. Інтеграл вздовж шляху", "Інтегрування функцій комплексної змінної. Теорема Коші. Інтегральна формула Коші. Інтеграл типу Коші", "Степеневі ряди в комплексній площині. Розвинення голоморфних функцій в ряд Тейлора", "Розвинення голоморфних функцій в ряд Лорана. Ізольовані особливі точки однозначного характеру та їх класифікація", "Лишки голоморфних функцій. Основна теорема про лишки" проводиться модульна контрольна робота (МКР №3), яка крім теоретичних питань, містить також задачі до кожної зі згаданих вище тем. Приклади таких задач подано нижче.

1. Обчислити інтеграл $\int_{\gamma} |z| dz$, де γ – радіус-вектор точки $2 - i$.

2. Використовуючи інтегральну формулу Коші, обчислити інтеграл

$$\int_{|z-i|=1} \frac{\cos z}{(z-i)^3} dz.$$

3. Розкласти в ряд Тейлора в околі точки $z = 1$ функцію

$$f(z) = \frac{2z - 5}{z^2 - 5z + 6}.$$

4. Розкласти в ряд Лорана функцію

$$f(z) = \frac{z^2}{z^2 - (a+b)z + ab},$$

де $|a| < |b|$, в областях $|z| < |a|$, $|a| < |z| < |b|$, $|z| > |b|$.

5. Знайти всі особливі точки функції $f(z) = \operatorname{tg} z$ та визначити їх тип.

6. Обчислити інтеграл

$$\int_{|z-i|=1} \frac{e^{\pi z/2}}{(z^2 + 1)^2} dz.$$

Тема 16

Інтеграли від функцій з сингулярними особливостями

16.1 Попередні зауваження

Обчислення визначених інтегралів від заданої функції дійсної змінної часто зводиться до обчислення інтегралів від певної функції комплексної змінної, яка є аналітичним продовженням (з дійсної вісі в комплексну площину) даної функції дійсної змінної.

Випадки, коли аналітичне продовження в комплексну площину заданої функції є однозначною функцією, вже розглянуто вище (див. розділи 11-15). Далі розглянемо випадки, коли аналітичне продовження функції дійсної змінної в комплексну площину є функцією багатозначною, зокрема, функцією, поверхня Рімана якої є нескінченнолистою. Кажуть, що такі функцією мають сингулярні особливості.

При обчисленні інтегралів від таких функцій важливе значення має вдалий вибір контуру інтегрування для функції комплексної змінної. Методику обчислення інтегралів від функцій зі сингулярними особливостями продемонструємо для випадків функції зі степеневою сингулярністю (з не цілим показником степеня) та функції з логарифмічною сингулярністю на прикладах.

16.2 Приклади розв'язування задач

16.2.1. Нехай функція $f(z)$ голоморфна (аналітична) в $\mathbb{C}$, за виключенням ізолюваних особливих точок $\{a_k, k = \overline{1, n}\}$, причому $\{a_k\} \cap [0; +\infty) = \emptyset$, і $f(z) = O(z^{-q})$ при $z \rightarrow \infty, q > 0$. Довести, що

$$\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} f(x) dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi i \alpha}} \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z=a_k} z^{\alpha-1} f(z),$$

де $0 < \alpha < q, \alpha \notin \mathbb{N}$, а функція $z^{\alpha-1}$ визначена формулою $z^{\alpha-1} = \exp\{(\alpha-1) \ln z\}$.

▷ Підінтегральна функція $g(z) = z^{\alpha-1} f(z)$ містить багатозначну узагальнену степеневу функцію $z^{\alpha-1} = \exp\{(\alpha-1) \operatorname{Ln} z\}$, яка має дві точки розгалуження $z = 0$ та $z = \infty$. Її однозначні гілки можуть бути визначені в комплексній площині з розрізом по дійсній додатній піввісі $[0; +\infty)$ (рис. 16.1). На верхньому березі цього розрізу, який позначимо символом "+" (див. рис. 16.1), вважається, що $\arg z = 0$, а на нижньому, який позначимо символом "-", відповідно вважається, що $\arg z = 2\pi$.

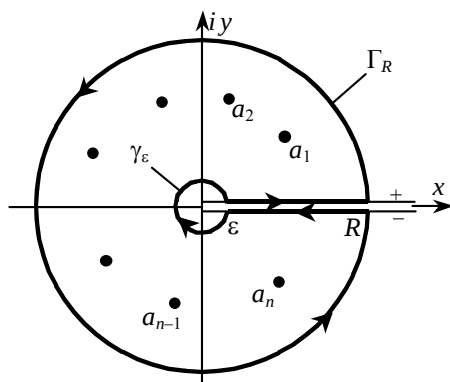


Рис. 16.1

Зафіксуємо однозначну гілку багатозначної функції $z^{\alpha-1}$ так, щоб на верхньому березі розрізу вона співпадала з виразом $x^{\alpha-1}$, $x > 0$. Відомо, що

$$z^{\alpha-1} = \exp\{(\alpha-1)\operatorname{Ln} z\} = \exp\{(\alpha-1)(\ln|z| + i \arg z + i2\pi k)\}, k \in \mathbb{Z}.$$

Тоді на верхньому березі розрізу запишемо $z = x > 0$, $\arg z = 0$,

$$z^{\alpha-1} = \exp\{(\alpha-1)(\ln x + i2\pi k)\} = x^{\alpha-1} = \exp\{(\alpha-1)\ln x\}.$$

З отриманої рівності очевидно випливає, що $k = 0$. Тоді для зафіксованої однозначної гілки функції $z^{\alpha-1}$ маємо таке її аналітичне зображення

$$z^{\alpha-1} = \exp\{(\alpha-1)(\ln|z| + i \arg z)\} = \exp\{(\alpha-1)\ln z\}. \quad (16.1)$$

Для обчислення шуканого інтегралу побудуємо замкнений контур $C_{\varepsilon, R} = [\varepsilon, R]_+ \cup \Gamma_R \cup [R, \varepsilon]_- \cup \gamma_\varepsilon$ (див. рис. 16.1), де ε та R вибрано так, що особливі точки $\{a_k\}$ функції $f(z)$ лежать всередині цього контуру.

Тоді за основною теоремою про лишки маємо

$$\int_{C_{\varepsilon, R}} z^{\alpha-1} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z=a_k} z^{\alpha-1} f(z). \quad (16.2)$$

Використовуючи адитивність інтегралу, запишемо

$$\begin{aligned} \int_{C_{\varepsilon, R}} z^{\alpha-1} f(z) dz &= \int_{[\varepsilon, R]_+} z^{\alpha-1} f(z) dz + \\ &+ \int_{[R, \varepsilon]_-} z^{\alpha-1} f(z) dz + \int_{\Gamma_R} z^{\alpha-1} f(z) dz + \int_{\gamma_\varepsilon} z^{\alpha-1} f(z) dz. \end{aligned}$$

Згадавши, що на верхньому березі розрізу $\arg z = 0$, а на нижньому – $\arg z = 2\pi$ та врахувавши рівність (16.1), останню рівність перепишемо у вигляді

$$\begin{aligned} \int_{C_{\varepsilon, R}} z^{\alpha-1} f(z) dz &= \int_{\varepsilon}^R x^{\alpha-1} f(x) dx + \int_R^{\varepsilon} e^{(\alpha-1)(\ln x + i 2\pi)} f(x) dx + \\ &+ \int_{\Gamma_R} z^{\alpha-1} f(z) dz + \int_{\gamma_{\varepsilon}} z^{\alpha-1} f(z) dz = \int_{\varepsilon}^R x^{\alpha-1} f(x) dx + \\ &+ \int_R^{\varepsilon} e^{i 2\pi \alpha} x^{\alpha-1} f(x) dx + \int_{\Gamma_R} z^{\alpha-1} f(z) dz + \int_{\gamma_{\varepsilon}} z^{\alpha-1} f(z) dz. \end{aligned}$$

Враховуючи записану рівність, перейдемо в рівності (16.2) до границі при $\varepsilon \rightarrow 0+$ і $R \rightarrow +\infty$. Отримаємо

$$\begin{aligned} 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z=a_k} z^{\alpha-1} f(z) &= (1 - e^{i 2\pi \alpha}) \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} f(x) dx + \\ &+ \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_R} z^{\alpha-1} f(z) dz + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{\gamma_{\varepsilon}} z^{\alpha-1} f(z) dz. \end{aligned} \quad (16.3)$$

Оцінимо інтеграли вздовж Γ_R та γ_{ε} . Маємо:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma_R} z^{\alpha-1} f(z) dz \right| &= \left| \int_0^{2\pi} e^{(\alpha-1)(\ln R + i\varphi)} f(R e^{i\varphi}) R i e^{i\varphi} d\varphi \right| \leq \\ &\leq \int_0^{2\pi} \left| e^{(\alpha-1)(\ln R + i\varphi)} f(R e^{i\varphi}) R i e^{i\varphi} \right| d\varphi = R^{\alpha} \int_0^{2\pi} |f(R e^{i\varphi})| d\varphi. \end{aligned}$$

Оскільки $f(z) = O(z^{-q})$ при $z \rightarrow \infty$ незалежно від шляху прямування z до нескінченності, то при $R \rightarrow +\infty$ має місце рівномірна за φ оцінка $|f(R e^{i\varphi})| \leq \text{Const} \cdot R^{-q}$.

Звідси випливає, що при $R \rightarrow +\infty$ можемо записати

$$\left| \int_{\Gamma_R} z^{\alpha-1} f(z) dz \right| \leq R^{\alpha} \int_0^{2\pi} |f(R e^{i\varphi})| d\varphi \leq \text{Const} \cdot R^{\alpha-q} \int_0^{2\pi} d\varphi \rightarrow 0,$$

бо за умовою задачі $\alpha < q$.

Аналогічно оцінюється і інтеграл по колу γ_ε . Оскільки функція $f(z)$ голоморфна (аналітична) в околі точки $z = 0$, то вона є обмеженою в околі цієї точки. Враховуючи цю властивість функції $f(z)$, при $\varepsilon \rightarrow 0+$ можемо записати таку оцінку

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_\varepsilon} z^{\alpha-1} f(z) dz \right| &= \left| \int_{2\pi}^0 e^{(\alpha-1)(\ln \varepsilon + i\varphi)} f(\varepsilon e^{i\varphi}) \varepsilon i e^{i\varphi} d\varphi \right| \leq \\ &\leq \int_0^{2\pi} \left| e^{(\alpha-1)(\ln \varepsilon + i\varphi)} f(\varepsilon e^{i\varphi}) \varepsilon i e^{i\varphi} \right| d\varphi = \varepsilon^\alpha \int_0^{2\pi} |f(\varepsilon e^{i\varphi})| d\varphi \leq \\ &\leq \text{Const} \cdot \varepsilon^\alpha \int_0^{2\pi} d\varphi \rightarrow 0, \end{aligned}$$

бо за умовою задачі $\alpha > 0$.

З використанням отриманих оцінок з рівності (16.3) випливає твердження задачі. $\triangleleft$

16.2.2. Обчислити інтеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2 + a^2} dx,$$

де $a > 0$.

► Проаналізуємо підінтегральну функцію. В знаменнику знаходиться функція $f(z) = z^2 + a^2$, яка голоморфна (аналітична) в $\mathbb{C}$ і має два простих нуля в точках $z = \pm ia$. Функція $f(z)$ не є однолистою, областю її однолистості є півплощина $\text{Im } z > 0$, при цьому на межі цієї області при $z = x > 0$ та при $z = -x, x > 0$, дана функція приймає однакові значення.

Чисельник підінтегрального виразу, функція $\ln x$, є звуженням на дійсну вісь $\mathbb{R}$ головної однозначної гілки багатозначної функції $\text{Ln } z$, яка має дві точки розгалуження, $z = 0$ та $z = \infty$. Тому функція $\ln z$ як функція комплексної змінної, є голоморфною (аналітичною) в комплексній площині $\mathbb{C}$ з розрізом $[0; +\infty)$. При цьому має місце таке її зображення $\ln z = \ln |z| + i \arg z$.

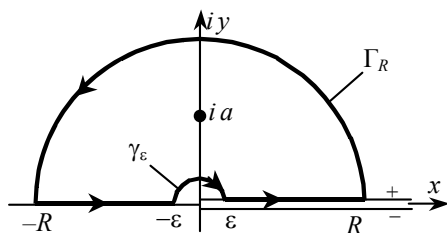


Рис. 16.2

Враховуючи властивості функції у знаменнику підінтегрального виразу, побудуємо замкнений контур $C_{\varepsilon, R} = [\varepsilon, R]_+ \cup \Gamma_R \cup [-R, -\varepsilon] \cup \gamma_\varepsilon$

(рис. 16.2), при цьому ε та R виберемо так, щоб $0 < \varepsilon < a < R$. Тоді за основною теоремою про лишки отримаємо

$$\int_{C_{\varepsilon, R}} \frac{\ln z}{z^2 + a^2} dz = 2\pi i \operatorname{res}_{z=ia} \frac{\ln z}{z^2 + a^2} = 2\pi i \frac{\ln(ia)}{2ia} = \pi \left(\ln a + i \frac{\pi}{2} \right). \quad (16.4)$$

Зауважимо, що рівність (16.4) залишається справедливою для довільних $0 < \varepsilon < a$ та $R > a$.

З властивості адитивності інтегралу отримаємо

$$\begin{aligned} \int_{C_{\varepsilon, R}} \frac{\ln z}{z^2 + a^2} dz &= \int_{\varepsilon}^R \frac{\ln x}{x^2 + a^2} dx + \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{\ln z}{z^2 + a^2} dz + \\ &+ \int_{\Gamma_R} \frac{\ln z}{z^2 + a^2} dz + \int_{\gamma_{\varepsilon}} \frac{\ln z}{z^2 + a^2} dz. \end{aligned}$$

При $z \in [-R; -\varepsilon]$ покладемо $z = -x$, $x \in [R; \varepsilon]$, при цьому $dz = -dx$ та $\ln z = \ln(-x) = \ln x + i\pi$. Тоді останню рівність можна подати у такому вигляді

$$\begin{aligned} \int_{C_{\varepsilon, R}} \frac{\ln z}{z^2 + a^2} dz &= 2 \int_{\varepsilon}^R \frac{\ln x}{x^2 + a^2} dx + \int_{\varepsilon}^R \frac{i\pi}{z^2 + a^2} dz + \\ &+ \int_{\Gamma_R} \frac{\ln z}{z^2 + a^2} dz + \int_{\gamma_{\varepsilon}} \frac{\ln z}{z^2 + a^2} dz. \end{aligned} \quad (16.5)$$

Для обчислення шуканого інтегралу, ураховуючи (16.5), перейдемо в рівності (16.4) до границі при $\varepsilon \rightarrow 0+$ та $R \rightarrow +\infty$.

Аналогічно до попереднього прикладу можна отримати оцінки (пропонуємо це зробити самостійно) для інтегралів по шляхах Γ_R та γ_{ε} , з яких випливає, що

$$\int_{\Gamma_R} \frac{\ln z}{z^2 + a^2} dz \rightarrow 0 \text{ при } R \rightarrow +\infty, \quad \int_{\gamma_{\varepsilon}} \frac{\ln z}{z^2 + a^2} dz \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0+.$$

Тоді з рівності (16.4), з урахуванням (16.5), при $\varepsilon \rightarrow 0+$ та $R \rightarrow +\infty$ отримаємо

$$2 \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2 + a^2} dx + \int_0^{+\infty} \frac{i\pi}{x^2 + a^2} dx = \pi \left(\ln a + i \frac{\pi}{2} \right),$$

звідки

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2 + a^2} dx = \frac{\pi \ln a}{2}.$$

Тут враховано значення інтегралу

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{\pi}{2}. \quad \triangleleft$$

16.3 Питання для перевірки теоретичних знань

Теорема про збереження області. Критерій локальної однолистості функції.

Аналітичне розв'язання задачі про локальне обернення голоморфної функції. Ряд Бурмана-Лагранжа.

Поняття про аналітичне продовження функції комплексної змінної. Способи аналітичного продовження.

Означення аналітичного елемента. Означення безпосереднього аналітичного продовження. Означення аналітичного продовження аналітичних елементів. Означення канонічного аналітичного елемента. Означення аналітичного продовження канонічного аналітичного елемента вздовж шляху. Теорема про єдиність аналітичного продовження канонічного аналітичного елемента вздовж шляху. Теорема про аналітичне продовження канонічного аналітичного елемента вздовж гомотопних шляхів.

Лема про неперервність радіуса кругів канонічних аналітичних елементів, що входять до сімейства канонічних аналітичних елементів, за допомогою якого здійснюється аналітичне продовження вздовж шляху. Теорема про існування скінченного ланцюжка канонічних аналітичних елементів, що входять до сімейства канонічних аналітичних елементів, за допомогою якого здійснюється аналітичне продовження канонічного елемента вздовж шляху.

Принципи аналітичного продовження: принцип неперервного аналітичного продовження та принцип симетрії Рімана-Шварца.

Поняття про повну аналітичну функцію.

Означення ізольованої особливої точки аналітичної функції. Означення ізольованої особливої точки однозначного та багатозначного характеру.

Особливі точки на межі круга збіжності степеневому ряду. Теорема Прінгсхейма.

16.4 Задачі для аудиторної роботи

16.4.1. Обчислити інтеграли:

$$\begin{aligned} a) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}; \quad b) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+4)\sqrt[3]{x}}; \quad c) \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} \ln x}{(x+1)^2} dx; \\ d) \int_0^{+\infty} \frac{\cos(\ln x)}{x^2+1} dx; \quad e) \int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha dx}{(x^2+1)(x^2+a^2)}, \text{ де } |\alpha| < 1, a > 0. \end{aligned}$$

16.4.2. Нехай $R(z)$ – раціональна функція, полюси якої лежать в точках $z = a_k, k = \overline{1, n}$, причому $\{a_k\} \cap [0, +\infty) = \emptyset, R(z) = O(z^{-2})$ при $z \rightarrow \infty$.

Довести, що $\int_0^{+\infty} R(x) dx = - \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{z=a_k} R(z) \ln z$.

16.4.3. Обчислити інтеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{x dx}{x^\alpha + 1}, \text{ де } \alpha > 2.$$

16.4.5. Обчислити інтеграл $\int_0^{+\infty} x^{p-1} \cos ax dx$, де $a > 0, 0 < p < 1$.

Вказівка. Обчислити інтеграл від функції $z^{p-1}e^{iaz}$ по межі області $\{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R, 0 < \arg z < \pi/2\}$.

16.5 Завдання для самостійної роботи

16.5.1. Обчислити інтеграли:

$$\begin{aligned} a) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt[3]{x}}; \quad b) \int_0^{+\infty} \frac{\ln x dx}{(x+1)\sqrt{x}}; \quad c) \int_0^{+\infty} \frac{\sin(\ln x)}{x^2+4} dx; \\ d) \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} \ln x}{x^2+4} dx; \quad e) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+a)x^\alpha}, \text{ де } 0 < \alpha < 1, a > 0; \\ f) \int_0^{+\infty} \frac{\ln^2 x}{x^2+a^2} dx, \text{ де } a > 0; \quad g) \int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha dx}{(x^2+1)^2}, \text{ де } |\alpha| < 1; \\ h) \int_0^{+\infty} \sin x^p dx, \text{ де } p > 1. \end{aligned}$$

Тема 17

Застосування теорії лишків і леми Жордана до обчислення інтегралів. Інтеграли у сенсі головного значення

17.1 Теоретичні питання

17.1.1 Лема Жордана

При розгляді теми про інтегрування функцій комплексної змінної (розділ 11) доведено лему Жордана (для випадку $\text{Im } z \geq 0$) (див. задачу 11.2.2). Ця лема часто використовується при розв'язанні задач про обчислення інтегралів. Тому корисно подати ще раз один з варіантів формулювання цієї леми.

Лема 17.1.1 (Жордана). Нехай для функції $f = f(z)$ виконуються умови:

- a) функція $f(z)$ неперервна на множині $\{z \in \mathbb{C} : |z| \geq R_0, \text{Im } z \geq 0\}$;
- b) значення $f(z) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \infty$ для всіх $z \in \mathbb{C} : \text{Im } z \geq 0$.

Тоді для всіх $\alpha > 0$

$$\int_{\Gamma_R} e^{i\alpha z} f(z) dz \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad R \rightarrow +\infty,$$

де Γ_R – дуга кола $|z| = R \geq R_0$, яка лежить у півплощині $\text{Im } z \geq 0$ і проходиться проти годинникової стрілки.

17.1.2 Інтеграл типу Коші у сенсі головного значення

В розділі 11 було дано означення інтеграл типу Коші (див. означення 11.5), згідно з яким, якщо $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$ – деяка спрямлювана крива, функція $f(z)$ неперервна на множині $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : z = \gamma(t), t \in [\alpha; \beta]\}$, а точка z не належить кривій γ , то інтеграл вигляду

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \quad (17.1)$$

визначає функцію $F(z)$, яка голоморфна (аналітична) в кожній точці комплексної площини $\mathbb{C}$, крім точок кривої γ .

Якщо ж $z \in \gamma$, то інтеграл типу Коші (17.1) в загальному випадку є розбіжним, бо підінтегральний вираз має неінтегровану особливість в точці z . В той же самий час при додаткових умовах щодо функції $f(\xi)$ інтегралу (17.1) можна надати певного сенсу і для випадку, коли точка z належить кривій γ .

Означення 17.1. Число $\rho_0 > 0$ називається *стандартним радіусом кривої* γ , якщо для кожної внутрішньої точки z_0 даної кривої γ будь-яке коло радіуса $\rho < \rho_0$ з центром в точці z_0 $\Gamma_\rho(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = \rho\}$ перетинає криву γ рівно в двох точках.

Кожна замкнена жорданова крива має стандартний радіус.

Розглянемо замкнену гладку жорданову криву γ і точку z_0 на ній. Нехай $\Gamma_\rho(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = \rho\}$, де радіус кола $\Gamma_\rho(z_0)$ не перевищує стандартного радіуса ρ_0 кривої γ . Позначимо за допомогою γ_ρ частину кривої γ , що знаходиться зовні кола $\Gamma_\rho(z_0)$, тобто $\gamma_\rho = \gamma \setminus \Gamma_\rho(z_0)$. Тоді інтеграл

$$F_\rho(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} d\xi$$

визначено в звичайному сенсі для всіх $0 < \rho < \rho_0$, бо $z_0 \notin \gamma_\rho$.

Означення 17.2. Якщо існує границя

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} d\xi,$$

то вона називається *інтегралом в сенсі головного значення за Коші (сингулярним інтегралом Коші) інтегралу типу Коші в точці z_0* і позначається

$$\text{v. p. } \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} d\xi \quad \text{або} \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} d\xi.$$

Для існування інтегралу типу Коші в сенсі головного значення за Коші в кожній точці замкнутої жорданової кривої γ досить, щоб щільність в інтегралі типу Коші (17.1), функція $f(\xi)$, задовольняла умову Гельдера.

Означення 17.3. Функція $f(z)$, визначена на деякій зв'язній множині $G \subset \mathbb{C}$, задовольняє *умову Гельдера*, якщо існують такі сталі $M > 0$ і $0 < \nu \leq 1$, що для всіх точок $z_1, z_2 \in G$ виконується нерівність

$$|f(z_1) - f(z_2)| \leq M |z_1 - z_2|^\nu. \quad (17.2)$$

Число ν називається *показником Гельдера*.

Функція, що задовольняє умову Гельдера, очевидно, є неперервною на множині G , а тому таку функцію інколи називають *неперервною за Гельдером*.

Нехай функцію $f(\xi)$ визначено на гладкій жордановій кривій γ , яка має рівняння $z = \gamma(t)$, $t \in [0; l]$, де t – параметр довжини кривої γ , і $f(z)$ задовольняє на γ умову Гельдера (17.2). Тоді цю умову можна записати ще таким чином

$$|f(\gamma(t_1)) - f(\gamma(t_2))| \leq M |t_1 - t_2|^\nu, \quad 0 < \nu \leq 1. \quad (17.3)$$

Теорема 17.1. Якщо функція $f(\xi)$ задовольняє умову Гельдера з показником $0 < \nu \leq 1$ на замкненій гладкій жордановій кривій γ , то невласний інтеграл

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} d\xi \quad (17.4)$$

існує для будь-якої точки $z \in \gamma$, а функція $\Phi(z)$ неперервна на кривій γ та у випадку $0 < \nu < 1$ задовольняє на γ умову Гельдера з показником ν .

Теорема 17.2. Якщо функція $f(\xi)$ визначена на замкненій гладкій жордановій кривій γ і задовольняє на цій кривій умову Гельдера з показником $0 < \nu \leq 1$, то для будь-якої точки $z_0 \in \gamma$ функція $f(\xi)/(\xi - z_0)$ інтегровна на γ в сенсі головного значення за Коші, причому має місце рівність

$$F(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} d\xi = \Phi(z_0) + \frac{f(z_0)}{2},$$

де функція $\Phi(z)$ визначена формулою (17.4).

Замкнута жорданова крива γ ділить площину $\mathbb{C}$ на дві області: обмежену D^+ і необмежену D^- . В кожній з цих областей інтеграл типу Коші (17.1) визначає голоморфну (аналітичну) функцію.

Нехай $z_0 \in \gamma$ – довільна точка. Розглянемо границі

$$\lim_{z \in D^+, z \rightarrow z_0} F(z) \quad \text{та} \quad \lim_{z \in D^-, z \rightarrow z_0} F(z). \quad (17.5)$$

Дані границі, якщо вони існують, називаються відповідно *граничними значеннями інтегралу типу Коші в точці z_0 зліва та справа від кривої γ* і позначаються $F^+(z_0)$ і $F^-(z_0)$.

В загальному випадку границі (17.5) не існують.

Теорема 17.3 (Ю.В. Сохоцького). Якщо функція $f(\xi)$ задовольняє умову Гельдера (17.2) на гладкій замкнутій жордановій кривій γ , то функція, що визначена інтегралом типу Коші (17.1), неперервно продовжується як з області D^+ на криву γ , так і з області D^- на криву γ , причому граничні значення інтегралу типу Коші в довільній точці $z \in \gamma$ визначаються за допомогою формул

$$F^+(z) = F(z) + \frac{f(z)}{2}, \quad F^-(z) = F(z) - \frac{f(z)}{2}, \quad (17.6)$$

де $F(z)$ – головне значення інтегралу типу Коші в точці $z \in \gamma$.

Співвідношення (17.6) називаються *формулами Сохоцького*.

Наслідок 17.1. При виконанні умов теореми Сохоцького справедливий

рівності

$$F^+(z) - F^-(z) = f(z), \quad F^+(z) + F^-(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi, \quad z \in \gamma.$$

Наслідок 17.2. Якщо функція голоморфна (аналітична) в області $D \subset \mathbb{C}$, що обмежена гладкою замкнутою жордановою кривою γ , та неперервна за Гельдером в замиканні області $\bar{D}$, то для будь-якої точки $z \in \gamma$ справедлива формула

$$F(z) = \frac{f(z)}{2},$$

де $F(z)$ – головне значення інтегралу типу Коші.

17.1.3 Поняття інтегралу в сенсі головного значення

Розглянемо ще один підхід до визначення інтегралу в сенсі головного значення. Нехай γ – кусково-гладкий шлях, що проходить через точку $a \in \mathbb{C}$. Будемо вважати, що існує окіл точки a , в якому шлях γ має дотичну у кожній своїй точці, окрім точки a , а також граничні значення дотичної у точці a , отримані при прямуванні до a по різних частинах шляху γ .

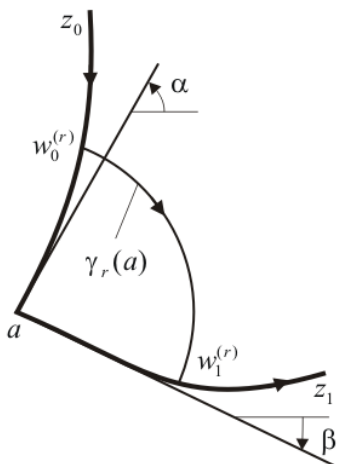


Рис. 17.1

Нехай α та β – кути між додатнім напрямком дійсної осі та граничними положеннями дотичних до кривої γ у точці a , причому кут α відраховано у додатньому напрямку (проти руху годинникової стрілки) а кут β – у від'ємному (рис. 17.1).

Розглянемо функцію $f(z)$, яка голоморфна у деякій області $\Omega \setminus \{a\}$, що містить шлях γ , для якої точка a є полюсом першого порядку.

Оскільки в околі точки a головна частина ряду Лорана функції $f(z)$ містить доданок вигляду $c_{-1}/(z - a)$, де c_{-1} – коефіцієнт ряду Лорана функції $f(z)$ в околі точки a , то точка a створює для $f(z)$ не інтегровану особливість, а тому скористатися стандартним означенням інтеграла від функції $f(z)$ вздовж шляху γ не можна. Однак можна

показати, що за перерахованих вище умов цьому інтегралу можна надати певного сенсу.

Нехай інтегрування по шляху γ відбувається у напрямку від точки z_0 до точки z_1 . Розглянемо точки $w_0^{(r)}$ та $w_1^{(l)}$, утворені перетином шляху γ

та кола $\gamma_r(a)$ з центром у точці a радіусу r . Будемо відраховувати зміну аргументу величини $w - a$, коли w змінюється по колу $\gamma_r(a)$ від точки $w_0^{(\varepsilon)}$ до точки $w_1^{(\varepsilon)}$, таким чином, щоб відповідна дуга кола знаходилася при русі по шляху γ від точки z_0 до точки z_1 ліворуч.

Позначимо за допомогою γ_{-r} ту частину шляху γ , яка не знаходиться усередині кола $\gamma_r(a)$ (це будуть ділянки шляху від z_0 до $w_0^{(r)}$ та від $w_1^{(r)}$ до z_1).

Розглянемо інтеграл $\int_{\gamma_{-r}} f(z)dz$, який є коректно визначеним, і доведемо, що для нього існує границя $\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma_{-r}} f(z)dz$.

Справді, в околі точки a функцію $f(z)$ можна зобразити у такому вигляді

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z-a} + \sum_{k=0}^{+\infty} c_k (z-a)^k. \quad (17.7)$$

Тоді

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma_{-r}} f(z)dz = \lim_{r \rightarrow 0} \left(\int_{\gamma_{-r}} \frac{f(z)(z-a) - c_{-1}}{z-a} dz + \int_{\gamma_{-r}} \frac{c_{-1}}{z-a} dz \right).$$

З'ясуємо спочатку питання про існування границі

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma_{-r}} \frac{c_{-1}}{z-a} dz.$$

З цією метою оберемо деяку гілку функції $\text{Ln}(z-a)$, яка при всіх $z \in \gamma \setminus \{a\}$ визначає (однозначну) голоморфну функцію комплексної змінної $\xi = z-a$, щодо аргументу якої вважаємо, що він змінюється від β до α , та виконаємо такі обчислення:

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma_{-r}} \frac{c_{-1}}{z-a} dz &= c_{-1} \lim_{r \rightarrow 0} \left(\text{Ln}(z-a) \Big|_{z_0^{(0)}}^{w_r^{(0)}} + \text{Ln}(z-a) \Big|_{w_r^{(1)}}^{z_1^{(1)}} \right) = \\ &= c_{-1} \lim_{r \rightarrow 0} \left(\text{Ln}(z-a) \Big|_{z_0^{(0)}}^{z_1^{(1)}} + \text{Ln}(z-a) \Big|_{w_r^{(0)}}^{w_r^{(1)}} \right) = c_{-1} \text{Ln}(z-a) \Big|_{z_0^{(0)}}^{z_1^{(1)}} - \\ &\quad - c_{-1} \lim_{r \rightarrow 0} \ln \left| \frac{w_r^{(1)} - a}{w_r^{(0)} - a} \right| - i(\arg(w_r^{(1)} - a) - \arg(w_r^{(0)} - a)). \end{aligned}$$

Нескладно помітити, що

$$\lim_{r \rightarrow 0} \ln \left| \frac{w_r^{(1)} - a}{w_r^{(0)} - a} \right| = 0,$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} (\arg(w_r^{(1)} - a) - \arg(w_r^{(0)} - a)) = \beta - \alpha.$$

З формули (17.7) маємо, що

$$\frac{f(z)(z-a) - c_{-1}}{z-a} = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k(z-a)^k,$$

звідки випливає, що ця підінтегральна функція є неперервною у точці a , а отже для неї існує скінченна границя

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma-r} \frac{f(z)(z-a) - c_{-1}}{z-a} dz.$$

Внаслідок цього будуть існувати границі

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma-r} \frac{c_{-1}}{z-a} dz = -ic_{-1}(\beta - \alpha),$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma-r} f(z) dz = \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma-r} \frac{f(z)(z-a) - c_{-1}}{z-a} dz - ic_{-1}(\beta - \alpha).$$

Означення 17.4. Нехай шлях γ та функція $f(z)$ задовольняють усі вказані вище умови. Тоді інтегралом $\int_{\gamma} f(z) dz$ у сенсі головного значення називається граничне значення

$$\text{v.p.} \int_{\gamma} f(z) dz \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma-r} f(z) dz.$$

17.1.4 Обчислення інтегралів у сенсі головного значення для однозначних функцій

Нехай виконуються умови:

- γ – кусково-гладкий шлях, що проходить через точку $a \in \mathbb{C}$;
- Існує окіл $B_{\varepsilon}(a)$ точки a , в якому шлях γ має дотичну у кожній своїй точці, окрім самої точки a , а також існують граничні положення дотичної у точці a , отримані при прямуванні до a по шляху γ з різних напрямів.
- Нехай функція $f(z)$ голоморфна в проколотому околі $B_{\varepsilon}(a) \setminus \{a\}$, а у точці a має полюс першого порядку.

За вказаних умов обчислення інтегралу у сенсі головного значення можна здійснювати з використанням наступної леми:

Лема 17.1 (про граничне значення інтеграла по частині кола в околі полюса 1 порядку). Нехай виконуються сформульовані вище умови $a)$, $b)$,

с). Тоді справедлива формула

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma_r(a)} f(z) dz = i(\beta - \alpha) \operatorname{res}_{z=a} f(z),$$

де α та β – кути, що визначають напрямки граничних положень дотичних до шляху γ у точці a , причому кут β відповідає граничному повороту навколо точки a за годинниковою стрілкою у межах $U_\varepsilon(a)$, а кут α – граничному повороту проти годинникової стрілки (рис. 17.2). Тут $(U_\varepsilon(a) - \text{область, що обмежена кривою } \gamma \text{ та межею околу } B_\varepsilon(a)), \gamma_r(a) - \text{частина кола з центром у точці } a \text{ радіусу } r, \text{ що проходиться проти годинникової стрілки та знаходиться усередині області } U_\varepsilon(a).$

Доведення. Справді, нехай $\alpha(r), \beta(r)$ – граничні значення кутового параметру t при параметризації $z = a + re^{it}$ кривої $\gamma_r(a)$. Тоді можемо записати:

$$\int_{\gamma_r(a)} f(z) dz = i \int_{\alpha(r)}^{\beta(r)} f(a + re^{it}) re^{it} dt.$$

В останньому інтегралі при $r \rightarrow 0$ маємо неперервне прямування $\alpha(r) \rightarrow \alpha$ та $\beta(r) \rightarrow \beta$ при $r \rightarrow 0 + 0$.

У випадку, коли функція $f(z)$ має в точці a полюс першого порядку, при $r \rightarrow 0$ виконується таке співвідношення

$$f(a + re^{it}) re^{it} \rightarrow \operatorname{res}_{z=a} f(z).$$

Саме тому, після здійснення граничного переходу, отримуємо твердження леми.

Зауваження 17.3. Якщо в точці a шлях γ є гладким (має дотичну), то $\beta - \alpha = -\pi$ і

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma_r(a)} f(z) dz = -i\pi \operatorname{res}_{z=a} f(z).$$

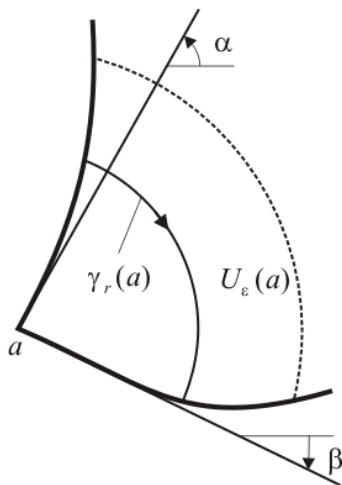


Рис. 17.2

17.2 Приклади розв'язування задач

17.2.1. Обчислити інтеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{x^2 + b^2} dx$, де $b > 0$, $\alpha > 0$.

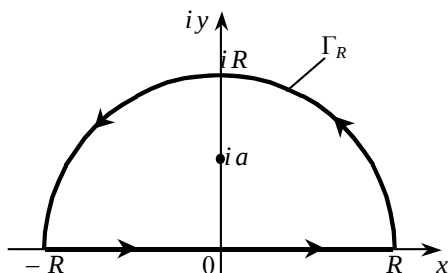


Рис. 17.3

▷ Підінтегральну функцію можна записати у вигляді

$$g(z) = e^{i\alpha z} / (z^2 + b^2) = e^{i\alpha z} f(z),$$

де функція $f(z) = 1/(z^2 + b^2)$ є голоморфною в комплексній площині $\mathbb{C}$ всюди, за винятком точок $z = \pm ia$, в яких вона має прості полюси. Ця функція задовольняє умови леми Жордана.

Оскільки $\alpha > 0$, то для використання леми Жордана і обчислення

шуканого інтегралу побудуємо замкнений контур $C_R = [-R; R] \cup \Gamma_R$ (рис. 17.3), де $R > b$. Тоді за основною теоремою про лишки отримаємо

$$\int_{C_R} \frac{e^{i\alpha z} dz}{z^2 + b^2} = \int_{-R}^R \frac{e^{i\alpha x} dx}{x^2 + b^2} + \int_{\Gamma_R} \frac{e^{i\alpha z} dz}{z^2 + b^2} = 2\pi i \operatorname{res}_{z=ib} \frac{e^{i\alpha z}}{z^2 + b^2} = \frac{\pi}{b} e^{-b\alpha}.$$

Отримана рівність справедлива при всіх $R > b$. Тоді, якщо спрямувати $R \rightarrow +\infty$, то, враховуючи, що за лемою Жордана

$$\int_{\Gamma_R} \frac{e^{i\alpha z} dz}{z^2 + b^2} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad R \rightarrow +\infty,$$

отримаємо

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\alpha x} dx}{x^2 + b^2} = 2\pi i \operatorname{res}_{z=ib} \frac{e^{i\alpha z}}{z^2 + b^2} = \frac{\pi}{b} e^{-b\alpha}. \quad \triangleleft$$

17.2.2. Обчислити інтеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 - 1)(x^2 + 4)}$$

у сенсі головного значення.

▷ Для обчислення інтегралу скористаємося теорією лишків та лемою 17.1 про граничне значення інтеграла по дузі кола в околі полюса першого порядку.

Функція $f(z) = \frac{1}{(z^2 - 1)(z^2 + 4)}$ у комплексній площині має чотири особливі точки, які є полюсами першого порядку: ± 1 та $\pm 2i$. Серед цих точок дві знаходяться на контурі інтегрування.

Для функції $f(z)$ при $z \rightarrow \infty$ справедливе граничне співвідношення $zf(z) \rightarrow 0$. З практики застосувань теорії лишків до знаходження невластних інтегралів відомо, що у цьому випадку при відсутності на дійсній осі особливих точок обчислення інтегралу здійснюється за допомогою обрання контуру, що складається з відрізка $[-R; R]$ дійсної осі і півкола $\{z \in \mathbb{C} : |z| = R\}$ у верхній півплощині $\{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z \geq 0\}$, та подальшого застосування теореми Коші про лишки і переходу до границі при $R \rightarrow \infty$.

У випадку функції $f(z)$, що розглядається, зазначений контур буде містити полюси функції $f(z)$, а отже не може бути використаний при обчисленні інтегралу від функції $f(z)$.

Для знаходження інтегралу від функції $f(z)$ контур інтегрування оберемо у вигляді, зображеному на рис. 17.4.

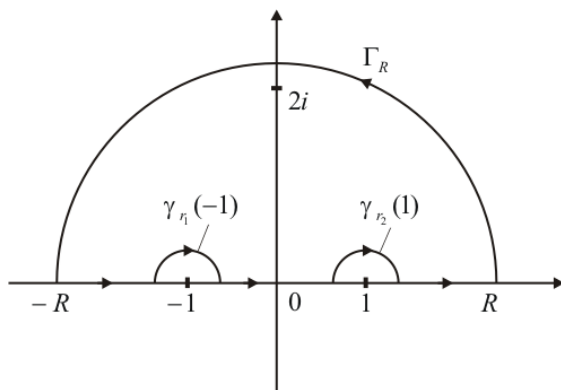


Рис. 17.4

Весь контур, який позначимо за допомогою C_{R,r_1,r_2} , складається з відрізка $[-R; -1 - r_1]$; верхнього півкола $\gamma_{r_1}(-1)$ радіусу r_1 з центром у точці -1 ; відрізка $[-1 + r_1; 1 - r_2]$; верхнього півкола $\gamma_{r_2}(1)$ радіусу r_2 з центром у точці 1 ; відрізка $[1 + r_2; R]$ та верхнього півкола Γ_R з центром у точці 0 радіусу R для $R > 2$. Напрямок обходу контуру – проти годинникової стрілки.

Чому контур C_{R,r_1,r_2} обрано саме у такий спосіб? Обрання контуру C_{R,r_1,r_2} саме таким чином дозволяє, з одного боку, уникнути розташування

на ньому особливих точок підінтегральної функції $f(z)$, а з іншого боку – при граничному переході, коли $R \rightarrow \infty$, $r_1 \rightarrow 0$, $r_2 \rightarrow 0$, з інтегралів по сукупності відрізків $[-R; -1 - r_1]$, $[-1 + r_1; 1 - r_2]$, $[1 + r_2; R]$ одержати шуканий інтеграл у сенсі головного значення.

Дійсно, при великих R та малих r_1 , r_2 згідно теореми Коші про лишки можна стверджувати, що

$$\int_{C_{R,r_1,r_2}} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{res}_{z=2i} f(z) = 2\pi i \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{z - 2i}{(z^2 - 1)(z^2 + 4)} = -\frac{\pi}{10}.$$

З іншого боку, маємо

$$\begin{aligned} \int_{C_{R,r_1,r_2}} f(z) dz &= \int_{-R}^{-1-r_1} f(x) dx + \int_{-1+r_1}^{1-r_2} f(x) dx + \int_{1+r_2}^R f(x) dx + \\ &+ \int_{\gamma_{r_1}(-1)} f(z) dz + \int_{\gamma_{r_2}(1)} f(z) dz + \int_{\Gamma_R} f(z) dz. \end{aligned}$$

Використовуючи лему 17.1, знаходимо значення границь:

$$\lim_{r_1 \rightarrow 0} \int_{\gamma_{r_1}(-1)} f(z) dz = -\pi i \operatorname{res}_{z=-1} f(z) = \lim_{z \rightarrow -1} \frac{-\pi i(z+1)}{(z^2-1)(z^2+4)} = \frac{\pi i}{10},$$

$$\lim_{r_2 \rightarrow 0} \int_{\gamma_{r_2}(1)} f(z) dz = -\pi i \operatorname{res}_{z=1} f(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{-\pi i(z-1)}{(z^2-1)(z^2+4)} = -\frac{\pi i}{10}.$$

Беручи до уваги, що $zf(z) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \infty$, одержуємо

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R} f(z) dz = 0.$$

Враховуючи значення отриманих вище границь при здійсненні граничного переходу $R \rightarrow \infty$, $r_1 \rightarrow 0$, $r_2 \rightarrow 0$ у рівності

$$\begin{aligned} &\int_{-R}^{-1-r_1} f(x) dx + \int_{-1+r_1}^{1-r_2} f(x) dx + \int_{1+r_2}^R f(x) dx + \\ &+ \int_{\gamma_{r_1}(-1)} f(z) dz + \int_{\gamma_{r_2}(1)} f(z) dz + \int_{\Gamma_R} f(z) dz = -\frac{\pi}{10} \end{aligned}$$

одержуємо

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2-1)(x^2+4)} + \frac{\pi i}{10} - \frac{\pi i}{10} = -\frac{\pi}{10},$$

звідки

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 - 1)(x^2 + 4)} = -\frac{\pi}{10}. \quad \triangleleft$$

17.2.3. Нехай D – однозв'язна область, обмежена відрізком дійсної осі $[a; b]$ та кривою γ (рис. 17.5), функція $f(z)$ голоморфна (аналітична) в $\bar{D}$, за виключенням особливих точок $\{a_k, k = \overline{1, n}\} \subset D$ та простого полюса в точці $z = c \in (a; b)$. Довести, що

$$\text{v.p.} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z=a_k} f(z) + \frac{1}{2} \operatorname{res}_{z=c} f(z).$$

▷ Для доведення сформульовано-го твердження розглянемо замкнений контур $C_\varepsilon = \gamma \cup [a; c - \varepsilon] \cup \gamma_\varepsilon \cup [c + \varepsilon; b]$ (див. рис. 17.5), де γ_ε – півколо радіуса ε з центром в точці c , причому $\varepsilon > 0$ вибрано настільки малим, що всі особливі точки $a_k, k = \overline{1, n}$, лежать всередині контура C_ε .

Тоді за основною теоремою про лишки отримаємо

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_\varepsilon} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z=a_k} f(z).$$

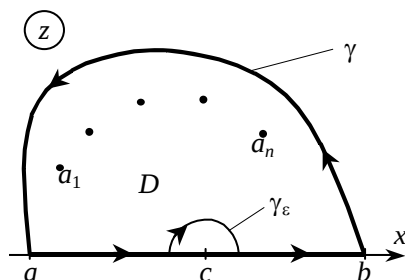


Рис. 17.5

Використовуючи адитивність інтегралу, перепишемо отриману рівність у вигляді

$$\sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z=a_k} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\varepsilon \setminus \gamma_\varepsilon} f(z) dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\varepsilon} f(z) dz$$

і розглянемо її границю, коли $\varepsilon \rightarrow 0+$.

В результаті отримаємо

$$\sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z=a_k} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \text{v.p.} \int_{\partial D} f(z) dz + \frac{1}{2\pi i} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{\gamma_\varepsilon} f(z) dz. \quad (17.8)$$

Розглянемо границю, що входить в (17.8). Нагадаємо, що точка $c \in$ простим полюсом функції $f(z)$. Тоді в околі точки c дану функцію можна подати у вигляді $f(z) = g(z)/(z - c)$, де $g(z)$ – голоморфна (аналітична) в околі точки c і $g(c) \neq 0$. При цьому $\operatorname{res}_{z=c} f(z) = g(c)$.

Параметризувавши шлях γ_ε наступним чином $z = c + \varepsilon e^{i\varphi}$, де значення параметра φ змінюється від π до 0, знаходимо

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{\gamma_\varepsilon} f(z) dz &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{g(z)}{z-c} dz = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{\pi}^0 \frac{g(c + \varepsilon e^{i\varphi})}{\varepsilon e^{i\varphi}} \varepsilon i e^{i\varphi} d\varphi = -i \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_0^{\pi} g(c + \varepsilon e^{i\varphi}) d\varphi. \end{aligned}$$

Оскільки функція $g(z)$ голоморфна в околі точки c , то $g(z) \rightarrow g(c)$ при $z \rightarrow c$. Тоді $g(c + \varepsilon e^{i\varphi}) \rightarrow g(c)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ рівномірно по φ . В результаті отримаємо

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{\gamma_\varepsilon} f(z) dz = -i \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_0^{\pi} g(c + \varepsilon e^{i\varphi}) d\varphi = -i\pi g(c) = -i\pi \operatorname{res}_{z=c} f(z).$$

Підставивши отриманий результат у рівність (17.8), прийдемо до твердження, яке потрібно було довести. $\triangleleft$

17.2.4. Обчислити інтеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

▷ Враховуючи парність підінтегральної функції, можна записати

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

Цей інтеграл не має особливості у точці 0, але вона з'являється, якщо побудувати вираз, який би давав змогу обчислити вихідний інтеграл. У даному випадку зручно звести обчислення даного інтегралу до інтегралу, який можна обчислити за допомогою леми Жордана.

Помітимо, що інтеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ є уявною частиною інтегралу

$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx$. Підінтегральний вираз для останнього інтегралу має полюс першого порядку в точці 0. Тому цей інтеграл потрібно обчислювати у сенсі головного значення.

З цією метою розглянемо контур C_{Rr} , що зображений на рис. 17.6. Цей контур складається з відрізка $[-R; -r]$, верхнього півкола $\gamma_r(0)$ з центром

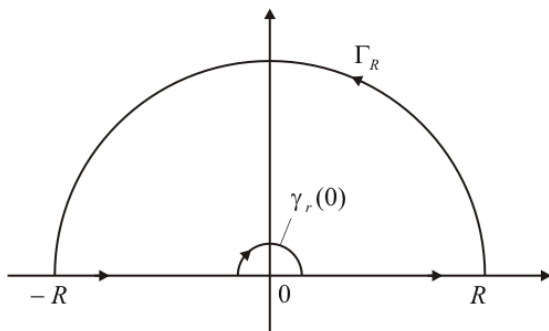


Рис. 17.6

у точці 0 радіусу r , відрізка $[r; R]$, верхнього півкола Γ_R з центром у точці 0 радіуса R і проходиться у напрямку проти годинникової стрілки.

Функція $f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$ не має особливих точок усередині контуру C_{Rr} . Тому $\int_{C_{Rr}} f(z) dz = 0$. З іншого боку,

$$\int_{C_{Rr}} f(z) dz = \int_{-R}^{-r} f(x) dx + \int_{\gamma_r(0)} f(z) dz + \int_r^R f(x) dx + \int_{\Gamma_R} f(z) dz.$$

Згідно леми 17.1 отримаємо значення границі

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma_r(0)} f(z) dz = -\pi i \operatorname{res}_{z=0} f(z) = -\pi i \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^{iz}}{z} z = -\pi i,$$

а за лемою Жордана маємо $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0$.

Здійснюючи граничний перехід при $R \rightarrow \infty$, $r \rightarrow 0$ у рівності

$$\int_{-R}^{-r} f(x) dx + \int_r^R f(x) dx + \int_{\gamma_r(0)} f(z) dz + \int_{\Gamma_R} f(z) dz = 0$$

і враховуючи отримані вище значення границь, одержуємо

$$\text{в.п.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix} dx}{x} = i\pi,$$

звідки

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left(\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx \right) = \frac{\pi}{2}. \quad \triangleleft$$

17.2.5. Обчислити інтеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x - \cos \beta x}{x^2} dx, \quad \text{де } \alpha > 0, \beta > 0.$$

▷ Позначимо шуканий інтеграл через I . Тоді, очевидно,

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \alpha x - \cos \beta x}{x^2} dx.$$

Згадаємо, що $\cos \alpha x - \cos \beta x = \operatorname{Re} (e^{i\alpha x} - e^{i\beta x})$. Тоді формально можемо записати

$$2I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \alpha x - \cos \beta x}{x^2} dx = \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\alpha x} - e^{i\beta x}}{x^2} dx. \quad (17.9)$$

Формальність рівності (17.9) полягає в тому, що в її лівій частині стоїть збіжний інтеграл, а в правій – розбіжний, бо підінтегральна функція $f(z) = (e^{i\alpha z} - e^{i\beta z})/z^2$ має в точці $z = 0$ полюс 1-го порядку, тобто має неінтегровану особливість. Але, оскільки $z = 0$ – простий полюс (полюс 1-го порядку) функції $f(z)$, то, беручи до уваги твердження, яке доведено вище (див. задачу 17.2.3), ми можемо проаналізувати інтеграл з правої частини (17.9) на предмет збіжності в сенсі головного значення за Коші. Маємо:

$$\begin{aligned} & \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\alpha x} - e^{i\beta x}}{x^2} dx = \\ &= \lim_{\substack{R \rightarrow +\infty \\ \varepsilon \rightarrow 0+}} \left(\int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{i\alpha x} - e^{i\beta x}}{x^2} dx + \int_{\varepsilon}^R \frac{e^{i\alpha x} - e^{i\beta x}}{x^2} dx \right) = \\ &= \lim_{\substack{R \rightarrow +\infty \\ \varepsilon \rightarrow 0+}} \left(\int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{\cos \alpha x - \cos \beta x}{x^2} dx + \int_{\varepsilon}^R \frac{\cos \alpha x - \cos \beta x}{x^2} dx \right) + \\ &+ i \lim_{\substack{R \rightarrow +\infty \\ \varepsilon \rightarrow 0+}} \left(\int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{\sin \alpha x - \sin \beta x}{x^2} dx + \int_{\varepsilon}^R \frac{\sin \alpha x - \sin \beta x}{x^2} dx \right) = \end{aligned}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \alpha x - \cos \beta x}{x^2} dx = 2I. \quad (17.10)$$

Вище враховано, що інтеграл від уявної частини дорівнює нулю як інтеграл від непарної функції по множині, що симетрична відносно $x = 0$.

Оскільки підінтегральний вираз $f(z) = (e^{i\alpha z} - e^{i\beta z})/z^2$ задовольняє умови леми Жордана, то для обчислення

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\alpha x} - e^{i\beta x}}{x^2} dx$$

побудуємо замкнений контур $C_R = [-R, R] \cup \Gamma_R$, аналогічний контуру, що розглядався при розв'язанні задачі 17.2.4 (див. рис. 17.6).

Тоді, використовуючи результат твердження з задачі 17.2.3, знаходимо

$$\begin{aligned} \text{v.p.} \int_{C_R} \frac{e^{i\alpha z} - e^{i\beta z}}{z^2} dz &= \text{v.p.} \int_{-R}^R \frac{e^{i\alpha x} - e^{i\beta x}}{x^2} dx + \int_{\Gamma_R} \frac{e^{i\alpha z} - e^{i\beta z}}{z^2} dz = \\ &= \pi i \operatorname{res}_{z=0} \frac{e^{i\alpha z} - e^{i\beta z}}{z^2} = \pi i \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^{i\alpha z} - e^{i\beta z}}{z} = \pi(\beta - \alpha). \end{aligned}$$

Якщо в отриманій рівності перейти до границі при $R \rightarrow +\infty$, то, враховуючи, що за лемою Жордана

$$\int_{\Gamma_R} \frac{e^{i\alpha z} - e^{i\beta z}}{z^2} dz \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad R \rightarrow +\infty,$$

отримаємо

$$2I = \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\alpha x} - e^{i\beta x}}{x^2} dx = \pi(\beta - \alpha),$$

тобто $I = \pi(\beta - \alpha)/2$. $\triangleleft$

Розглянемо також питання про обчислення інтегралів в сенсі головного значення від багатозначних функцій. Подібні задачі є досить складними, оскільки при їх розв'язанні потрібно розглядати (будувати) контури із розрізами, на різних берегах яких аналітичне продовження підінтегрального виразу в комплексну площину набуває різних значень. Поява полюсів першого порядку на контурі інтегрування ще більше ускладнює таку задачу. Методику обчислення інтегралів даного типу продемонструємо на такому прикладі.

17.2.6 Обчислити головне значення інтегралу

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^p}{(x-1)(x^2+1)} dx,$$

де $-1 < p < 2$, $p \neq 0, 1$.

▷ Розглянемо багатозначну функцію

$$f(z) = \frac{z^p}{(z-1)(z^2+1)}.$$

В комплексній площині $\mathbb{C}$ ця функція має точку розгалуження $z = 0$, а також полюси першого порядку $z_1 = 1$, $z_{2,3} = \pm i$. Перший з цих полюсів лежить на проміжку інтегрування функції.

Для обчислення інтегралу від функції, чисельник якої являє собою багатозначний вираз, розглянемо контур C_{R,r_1,r_2} , який зображено на рис. 17.7.

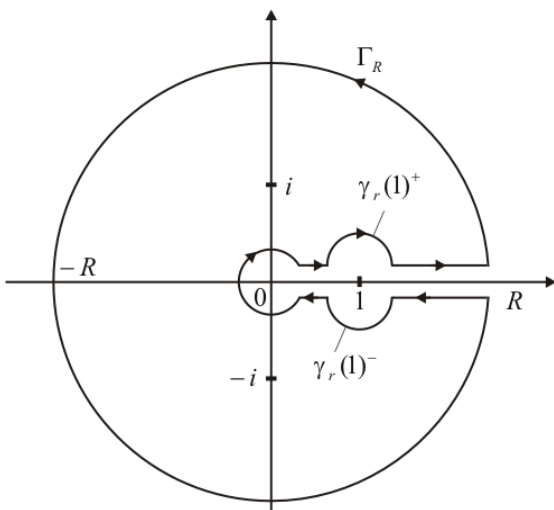


Рис. 17.7

Даний контур складається з кола з центром у точці 0 радіусу R , в якому, з метою побудови однозначної функції, зроблено розріз від точки 0 до точки R вздовж додатного напрямку дійсної осі.

Внаслідок необхідності обходити особливу точку (полюс $z = 1$) та точку розгалуження 0 для функції $f(z)$, кінцевий варіант контуру буде складатися з відрізка $[r_1; 1-r_2]^+$ на верхньому березі розрізу; верхнього півкола $\gamma_{r_2}(1)^+$

з центром у точці 1 радіусу r_2 , що обходить за годинниковою стрілкою; відрізьку $[1 + r_2; R]^+$ на верхньому березі розрізу; кола Γ_R з центром у точці 0 радіусу R ; відрізьку $[R; 1 + r_2]^-$ на нижньому березі розрізу, вказаного з урахуванням напрямку проходження; нижнього півкола $\gamma_{r_2}(1)^-$ з центром у точці 1 радіусу r_2 , що обходить за годинниковою стрілкою; відрізьку $[1 - r_2; r_1]^-$ на нижньому березі розрізу; кола $\gamma_{r_1}(0)$ з центром у точці 0 радіусу r_1 , що обходить за годинниковою стрілкою.

Оберемо однозначну гілку багатозначної функції $f(z)$, зафіксувавши її вибір на верхньому березі розрізу значенням $\arg z = 0$. Тоді на нижньому березі розрізу $\arg z = 2\pi$.

При обранні досить великого R та досить малих r_1, r_2 усередину контуру потрапляють полюси першого порядку $z = \pm i$ функції $f(z)$. Тоді згідно основної теореми про лишки маємо

$$\begin{aligned} \int_{C_{R,r_1,r_2}} f(z) dz &= 2\pi i (\operatorname{res}_{z=i} f(z) + \operatorname{res}_{z=-i} f(z)) = \\ &= 2\pi i \lim_{z \rightarrow i} \frac{z^p(z-i)}{(z-1)(z^2+1)} + 2\pi i \lim_{z \rightarrow -i} \frac{z^p(z+i)}{(z-1)(z^2+1)} = \\ &= 2\pi i \frac{i^p}{2i(i-1)} + 2\pi i \frac{(-i)^p}{2i(i+1)} = \pi \frac{-e^{i\frac{\pi}{2}p}(1+i) + e^{i\frac{3\pi}{2}p}(1-i)}{2}. \end{aligned} \quad (17.11)$$

З іншого боку, з урахуванням напрямків обходу кіл (коли стандартний напрямок обходу відповідає руху по колу проти годинникової стрілки), можна записати, що

$$\begin{aligned} \int_{C_{R,r_1,r_2}} f(z) dz &= \int_{[r_1, 1-r_2]^+} f(z) dz - \int_{\gamma_{r_2}(1)^+} f(z) dz + \\ &+ \int_{[1+r_2, R]^+} f(z) dz + \int_{\Gamma_R} f(z) dz + \int_{[R, 1+r_2]^-} f(z) dz - \\ &- \int_{\gamma_{r_2}(1)^-} f(z) dz + \int_{[1-r_2, r_1]^-} f(z) dz - \int_{\gamma_{r_1}(0)} f(z) dz. \end{aligned} \quad (17.12)$$

З того, що на верхньому березі розрізу маємо $\arg z = 0$, випливають рівності

$$\int_{[r_1, 1-r_2]^+} f(z) dz = \int_{r_1}^{1-r_2} \frac{x^p}{(x-1)(x^2+1)} dx, \quad (17.13)$$

$$\int_{[1+r_2, R]^+} f(z) dz = \int_{1+r_2}^R \frac{x^p}{(x-1)(x^2+1)} dx, \quad (17.14)$$

$$\begin{aligned} \lim_{r_2 \rightarrow 0} \left(- \int_{\gamma_{r_2}(1)^+} f(z) dz \right) &= -\pi i \operatorname{res}_{z=1} f(z)|_{\arg z=0} = \\ &= -\pi i \frac{z^p}{z^2+1} \Big|_{z=1, \arg z=0} = -\frac{\pi i}{2}. \end{aligned} \quad (17.15)$$

Аналогічно, з того факту, що на нижньому березі розрізу $\arg z = 2\pi$, отримуємо

$$\int_{[1-r_2, r_1]^-} f(z) dz = - \int_{r_1}^{1-r_2} \frac{e^{i2\pi p} x^p}{(x-1)(x^2+1)} dx, \quad (17.16)$$

$$\int_{[R, 1+r_2]^-} f(z) dz = - \int_{1+r_2}^R \frac{e^{i2\pi p} x^p}{(x-1)(x^2+1)} dx, \quad (17.17)$$

$$\begin{aligned} \lim_{r_2 \rightarrow 0} \int_{\gamma_{r_2}(1)^-} f(z) dz &= \pi i \operatorname{res}_{z=1} f(z)|_{\arg z=2\pi} = \\ &= \pi i \frac{z^p}{z^2+1} \Big|_{z=1, \arg z=2\pi} = \frac{\pi i e^{i2\pi p}}{2}. \end{aligned} \quad (17.18)$$

З умови $zf(z) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \infty$ випливає

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R} f(z) dz = 0. \quad (17.19)$$

Нарешті, за допомогою параметризації кола $\gamma_{r_1}(0)$ отримуємо

$$\lim_{r_1 \rightarrow 0} \int_{\gamma_{r_1}(0)} f(z) dz = \lim_{r_1 \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \frac{r_1^p e^{ip\varphi} \cdot r_1 i e^{i\varphi} d\varphi}{(r_1 e^{i\varphi} - 1)(r_1^2 e^{2\varphi i} + 1)} = 0. \quad (17.20)$$

З рівностей (17.11), (17.12), при здійсненні граничного переходу при $r_1 \rightarrow 0$, $r_2 \rightarrow 0$, $R \rightarrow \infty$ з урахуванням рівностей (17.13) – (17.20), маємо

$$(1 - e^{i2\pi p}) \int_0^{+\infty} \frac{x^p}{(x-1)(x^2+1)} dx - \frac{\pi i (e^{i2\pi p} + 1)}{2} =$$

$$= \pi \frac{e^{i\frac{3\pi}{2}p} - e^{i\frac{\pi}{2}p} - i(e^{i\frac{3\pi}{2}p} + e^{i\frac{\pi}{2}p})}{2}.$$

Шляхом ділення останньої рівності на $-ie^{\pi pi}$ та застосування відомих формул для $\sin \alpha$ та $\cos \alpha$, отримуємо

$$2 \sin \pi p \int_0^{+\infty} \frac{x^p}{(x-1)(x^2+1)} dx + \pi \cos \pi p = \pi \left(\cos \frac{\pi p}{2} - \sin \frac{\pi p}{2} \right),$$

звідки остаточно знаходимо

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^p}{(x-1)(x^2+1)} dx = \frac{\pi}{2} \frac{\cos \frac{\pi p}{2} - \sin \frac{\pi p}{2}}{\sin \pi p} - \frac{\pi}{2} \operatorname{ctg} \pi p. \quad \triangleleft$$

17.2.7. Нехай функція $f(z)$ голоморфна (аналітична) в $\mathbb{C}$, за виключенням ізольованих особливих точок $\{0, a_k, k = \overline{1, n}\} \subset \mathbb{C}$, причому $\{a_k\} \cap [0, +\infty) = \emptyset$, і $f(z) = O(z^{-p})$ при $z \rightarrow 0$ та $f(z) = O(z^{-q})$ при $z \rightarrow \infty$, де $0 < p < q$. Довести, що для всіх значень $\alpha \in (p; q)$, де $\alpha \notin \mathbb{N}$, справедлива формула

$$\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} f(x) dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi i \alpha}} \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z=a_k} z^{\alpha-1} f(z),$$

де функція $z^{\alpha-1}$ визначена згідно формули $z^{\alpha-1} = \exp \{ (\alpha-1) \ln z \}$.

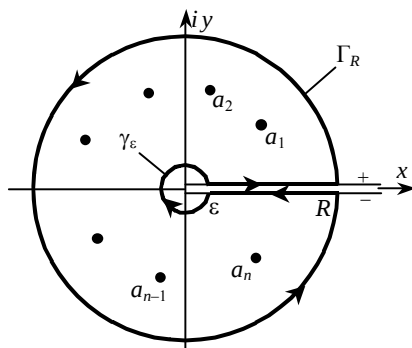


Рис. 17.8

▷ Підінтегральна функція $g(z) = z^{\alpha-1} f(z)$ містить багатозначну узагальнену степеневу функцію $z^{\alpha-1} = \exp \{ (\alpha-1) \operatorname{Ln} z \}$, яка має дві точки розгалуження $z = 0$ та $z = \infty$, і її однозначні гілки можуть бути визначені в комплексній площині з розрізом по додатній піввісі $[0; +\infty)$ (рис.17.8).

На верхньому березі цього розрізу, який будемо позначати символом "+" (див. рис. 17.8), вважається, що $\arg z = 0$, а на нижньому, який будемо позначати символом "-", вважається, що $\arg z = 2\pi$.

Зафіксуємо однозначну гілку багатозначної функції

$$z^{\alpha-1} = \exp\{(\alpha-1)\operatorname{Ln} z\}$$

так, щоб на верхньому березі розрізу дана функція аналітично визначалася виразом $x^{\alpha-1}$, $x > 0$.

Відомо, що

$$z^{\alpha-1} = \exp\{(\alpha-1)\operatorname{Ln} z\} = \exp\{(\alpha-1)(\ln|z| + i \arg z + i2\pi k)\}, k \in \mathbb{Z}.$$

Тоді, враховуючи, що на верхньому березі розрізу маємо $z = x > 0$, $\arg z = 0$, можна записати такі рівності

$$z^{\alpha-1} = \exp\{(\alpha-1)(\ln x + i2\pi k)\} = x^{\alpha-1} = \exp\{(\alpha-1)\ln x\},$$

звідки, очевидно, випливає, що $k = 0$.

Тоді для зафіксованої однозначної гілки функції $z^{\alpha-1}$ маємо правило обчислення

$$z^{\alpha-1} = \exp\{(\alpha-1)(\ln|z| + i \arg z)\} = \exp\{(\alpha-1)\ln z\}. \quad (17.21)$$

Для обчислення шуканого інтегралу розглянемо замкнений контур $C_{\varepsilon, R} = [\varepsilon; R]_+ \cup \Gamma_R \cup [R; \varepsilon]_- \cup \gamma_{\varepsilon}$ (див. рис. 17.8), де значення величин ε , R вибрано так, що особливі точки $\{a_k, k = \overline{1, n}\}$ функції $f(z)$ лежать всередині цього контуру.

Тоді за основною теоремою про лишки маємо

$$\int_{C_{\varepsilon, R}} z^{\alpha-1} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z=a_k} z^{\alpha-1} f(z). \quad (17.22)$$

Використовуючи адитивність інтегралу, запишемо

$$\begin{aligned} \int_{C_{\varepsilon, R}} z^{\alpha-1} f(z) dz &= \int_{[\varepsilon, R]_+} z^{\alpha-1} f(z) dz + \int_{[R, \varepsilon]_-} z^{\alpha-1} f(z) dz + \\ &+ \int_{\Gamma_R} z^{\alpha-1} f(z) dz + \int_{\gamma_{\varepsilon}} z^{\alpha-1} f(z) dz. \end{aligned}$$

Згадавши, що на верхньому березі розрізу $\arg z = 0$, а на нижньому – $\arg z = 2\pi$ та врахувавши рівність (17.21), останню рівність перепишемо у вигляді

$$\int_{C_{\varepsilon, R}} z^{\alpha-1} f(z) dz = \int_{\varepsilon}^R x^{\alpha-1} f(x) dx + \int_R^{\varepsilon} e^{(\alpha-1)(\ln x + i2\pi)} f(x) dx +$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\Gamma_R} z^{\alpha-1} f(z) dz + \int_{\gamma_\varepsilon} z^{\alpha-1} f(z) dz = \int_{\varepsilon}^R x^{\alpha-1} f(x) dx + \\
& + \int_{\varepsilon}^R e^{i 2 \pi \alpha} x^{\alpha-1} f(x) dx + \int_{\Gamma_R} z^{\alpha-1} f(z) dz + \int_{\gamma_\varepsilon} z^{\alpha-1} f(z) dz.
\end{aligned}$$

Враховуючи записану рівність, перейдемо в рівності (17.22) до границі при $\varepsilon \rightarrow 0+$ і $R \rightarrow +\infty$. Отримаємо

$$\begin{aligned}
2 \pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z=a_k} z^{\alpha-1} f(z) &= (1 - e^{i 2 \pi \alpha}) \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} f(x) dx + \\
&+ \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_R} z^{\alpha-1} f(z) dz + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{\gamma_\varepsilon} z^{\alpha-1} f(z) dz. \quad (17.23)
\end{aligned}$$

Оцінимо інтеграли по Γ_R та γ_ε . Маємо:

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\Gamma_R} z^{\alpha-1} f(z) dz \right| &= \left| \int_0^{2\pi} e^{(\alpha-1)(\ln R + i\varphi)} f(R e^{i\varphi}) R i e^{i\varphi} d\varphi \right| \leq \\
&\leq \int_0^{2\pi} \left| e^{(\alpha-1)(\ln R + i\varphi)} f(R e^{i\varphi}) R i e^{i\varphi} \right| d\varphi = R^\alpha \int_0^{2\pi} |f(R e^{i\varphi})| d\varphi.
\end{aligned}$$

Оскільки $f(z) = O(z^{-q})$ при $z \rightarrow \infty$ незалежно від шляху прямування z до нескінченності, то при $R \rightarrow +\infty$ має місце рівномірна стосовно φ оцінка $|f(R e^{i\varphi})| \leq \text{Const} \cdot R^{-q}$.

Тоді, враховуючи умову $\alpha < q$, при $R \rightarrow +\infty$ отримаємо співвідношення

$$\left| \int_{\Gamma_R} z^{\alpha-1} f(z) dz \right| \leq R^\alpha \int_0^{2\pi} |f(R e^{i\varphi})| d\varphi \leq \text{Const} \cdot R^{\alpha-q} \int_0^{2\pi} d\varphi \rightarrow 0.$$

Аналогічно, використовуючи умову $f(z) = O(z^{-p})$ при $z \rightarrow 0$ та враховуючи нерівність $\alpha > p$, отримаємо оцінку для даних інтегралів на шляху γ_ε . Маємо:

$$\left| \int_{\gamma_\varepsilon} z^{\alpha-1} f(z) dz \right| = \left| \int_{2\pi}^0 e^{(\alpha-1)(\ln \varepsilon + i\varphi)} f(\varepsilon e^{i\varphi}) \varepsilon i e^{i\varphi} d\varphi \right| \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq \int_0^{2\pi} \left| e^{(\alpha-1)(\ln \varepsilon + i\varphi)} f(\varepsilon e^{i\varphi}) \varepsilon i e^{i\varphi} \right| d\varphi = \varepsilon^\alpha \int_0^{2\pi} |f(\varepsilon e^{i\varphi})| d\varphi \leq \\ &\leq \text{Const} \cdot \varepsilon^{\alpha-p} \int_0^{2\pi} d\varphi \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \rightarrow 0+. \end{aligned}$$

Використовуючи отримані оцінки, з рівності (17.23) отримаємо формулу, яку потрібно було довести. $\triangleleft$

17.3 Питання для перевірки теоретичних знань

Лема Жордана.

Означення інтегралу Коші і типу Коші. Поняття про граничні значення інтегралу типу Коші. Теорема і формули Ю.В.Сохоцького.

Означення інтегралу у сенсі головного значення для випадку інтеграла типу Коші.

17.4 Завдання для аудиторної роботи

17.4.1. Обчислити головне значення інтегралів:

$$a) \text{ v.p. } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x(x^2+4)}; \quad b) \text{ v.p. } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x-a}, \quad \text{де} \quad \text{Im } a > 0;$$

17.4.2. Нехай функція $f(z)$ голоморфна (аналітична) в замиканні сектора $D = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \arg z < \alpha_0, |z| < R\}$, за виключенням ізольованих особливих точок $\{a_k, k = \overline{1, n}\} \subset D$ та простого полюса в точці $z = 0$. Довести, що

$$\text{v.p. } \int_{\partial D} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{res}_{z=a_k} f(z) + i\alpha_0 \text{res}_{z=0} f(z).$$

17.4.3. Обчислити інтеграли:

$$\begin{aligned} a) &\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{x^2+a^2} dx, \quad \text{де} \quad a > 0, \alpha < 0; \\ b) &\int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{x^4+x^2+1} dx, \quad \text{де} \quad \alpha > 0; \\ c) &\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^2-2x+10} dx; \quad d) \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{e^{\alpha x}}{x^2-1} dx, \quad \text{де} \quad \alpha > 0; \end{aligned}$$

$$e) \int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{x^2 + a^2} dx, \text{ де } a > 0, \alpha > 0.$$

17.4.4. Для випадку $\alpha > 0$ знайти головні значення інтегралів:

$$a) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{x} dx; \quad b) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - e^{i\alpha x}}{x^2} dx; \quad c) \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\operatorname{ch} \alpha x}{x^2 + 1} dx.$$

17.4.5. Обчислити інтеграли:

$$a) \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx, \text{ де } \alpha > 0;$$

$$b) \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x(x^2 + a^2)} dx, \text{ де } \alpha > 0, a > 0;$$

$$c) \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx; \quad d) \int_0^{+\infty} \frac{x - \sin x}{x^3} dx.$$

17.5 Завдання для самостійної роботи

17.5.1. Обчислити інтеграли:

$$a) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-3)e^{ix}}{x^2 - 6x + 10} dx; \quad b) \int_0^{+\infty} \frac{(x^3 + 5x) \sin x}{x^4 + 10x^2 + 9} dx;$$

$$c) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ix}}{x^4 + 8x^2 + 16} dx; \quad d) \int_0^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^4 + 2x^2 + 10} dx;$$

$$e) \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2 + a^2)^2} dx; \quad f) \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{e^{-\alpha z}}{z^2 + 1} dz, \text{ де } \alpha \geq 0.$$

17.5.2. Знайти головні значення інтегралів:

$$a) \text{ в.р. } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x-a}, \text{ де } \operatorname{Im} a < 0; \quad b) \text{ в.р. } \int_0^{+\infty} \frac{\ln x dx}{(x-1)\sqrt{x}};$$

$$c) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\alpha x}}{x} dx, \text{ де } \alpha > 0; \quad d) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - e^{-i\alpha x}}{x^2} dx, \text{ де } \alpha \geq 0;$$

$$e) \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\operatorname{ch} \alpha z dz}{(z+1)(z^2+1)}, \text{ де } \alpha \in \mathbb{R}.$$

17.5.3. Обчислити інтеграли:

$$a) \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos \alpha x}{x^2} dx, \text{ де } \alpha > 0; \quad b) \int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 x}{x^3} dx;$$

$$c) \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2(x^2 + 4)} dx;$$

$$d) \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 \alpha x}{x^2(x^2 + a^2)} dx, \text{ де } a, \alpha > 0;$$

$$e) \int_0^{+\infty} \frac{(x^2 - b^2) \sin x}{x(x^2 + a^2)} dx, \text{ де } a, b > 0.$$

17.5.4. Обчислити інтеграли:

$$a) \int_0^{+\infty} x^{p-1} \sin ax dx, \text{ де } a > 0, 0 < p < 1; \quad b) \int_0^{+\infty} \cos x^p dx, \text{ де } p > 1.$$

Тема 18

Інтеграли від функцій, що містять експоненту.

Обчислення сум рядів

18.1 Попередні зауваження

При застосуванні теорії лишків для обчислення різних типів інтегралів важливим елементом математичних міркувань є вибір контуру інтегрування. Зауважимо, що будова контуру інтегрування у кожному конкретному випадку суттєво залежить як від того, які особливості має підінтегральна функція та чи є аналітичне продовження в комплексну площину заданої функції дійсної змінної однолистою чи багатолистою функцією, так і від вигляду (структури) підінтегральної функції. Зокрема, крім тих контурів, які вже зустрічалися вище при обчисленні інтегралів, часто використовуються також контури у вигляді прямокутників (для підінтегральних виразів, які містять експоненційну функцію) та інші. Методика використання таких контурів розглядається далі для конкретних прикладів. Теорія лишків також може бути застосована для знаходження сум рядів.

18.2 Приклади розв'язування задач

18.2.1. Нехай $f(z)$ – мероморфна, періодична функція з періодом $i\omega$, де $\omega > 0$, яка не має особливих точок на дійсній осі, а всередині смуги $\{0 < \text{Im } z < \omega\}$ має полюси тільки в точках $z = a_k$, $k = \overline{1, n}$, крім цього $f(z) = O(e^{-p|\text{Re } z|})$ при $\text{Re } z \rightarrow \pm\infty$ рівномірно стосовно $\text{Im } z$, $p > 0$. Довести, що

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\alpha x} f(x) dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{i\omega\alpha}} \sum_{k=1}^n \text{res}_{z=a_k} e^{\alpha z} f(z), \quad |\alpha| < p.$$

▷ Оскільки функція $f(z)$ періодична з періодом $i\omega$, то для обчислення інтегралу $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\alpha x} f(x) dx$ побудуємо замкнений контур C_R , який є додатньо зорієнтованою межею прямокутника

$\Omega_R = \{z \in \mathbb{C} : |\text{Re } z| < R, 0 < \text{Im } z < \omega\}$

(рис. 18.1), де число R вибрано настільки великим, що всі особливі точки $z = a_k$, $k = \overline{1, n}$, функції $f(z)$ знаходяться в області Ω_R .

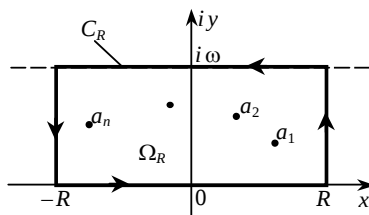


Рис. 18.1

Тоді за основною теоремою про лишки отримаємо

$$\int_{C_R} e^{\alpha z} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z=a_k} e^{\alpha z} f(z). \quad (18.1)$$

З властивості адитивності інтегралу випливає

$$\begin{aligned} \int_{C_R} e^{\alpha z} f(z) dz &= \int_{-R}^R e^{\alpha x} f(x) dx + \int_{R+i\omega}^{-R+i\omega} e^{\alpha z} f(z) dz + \\ &+ \int_R^{R+i\omega} e^{\alpha z} f(z) dz + \int_{-R+i\omega}^{-R} e^{\alpha z} f(z) dz. \end{aligned}$$

На відрізку $[R+i\omega; -R+i\omega]$ покладемо $z = x + i\omega$, $x \in [R; -R]$, при цьому $dz = dx$, а $f(z) = f(x + i\omega) = f(x)$. Тоді можемо записати

$$\begin{aligned} \int_{C_R} e^{\alpha z} f(z) dz &= \int_{-R}^R e^{\alpha x} f(x) dx - e^{i\alpha\omega} \int_{-R}^R e^{\alpha x} f(x) dx + \\ &+ \int_R^{R+i\omega} e^{\alpha z} f(z) dz + \int_{-R+i\omega}^{-R} e^{\alpha z} f(z) dz. \end{aligned}$$

Враховуючи отриману рівність, перейдемо в рівності (18.1) до границі при $R \rightarrow +\infty$. В результаті матимемо

$$\begin{aligned} &(1 - e^{i\alpha\omega}) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\alpha x} f(x) dx + \\ &+ \lim_{R \rightarrow +\infty} \left(\int_R^{R+i\omega} e^{\alpha z} f(z) dz + \int_{-R+i\omega}^{-R} e^{\alpha z} f(z) dz \right) = \\ &= 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z=a_k} e^{\alpha z} f(z). \end{aligned} \quad (18.2)$$

Оцінимо інтеграли на вертикальних сторонах прямокутника Ω_R . Маємо:

$$\begin{aligned} \left| \int_R^{R+i\omega} e^{\alpha z} f(z) dz \right| &= \left| \int_0^\omega e^{\alpha(R+iy)} f(R+iy) i dy \right| \leq \\ &\leq \int_0^\omega e^{\alpha R} |f(R+iy)| dy. \end{aligned}$$

Враховуючи те, що $f(z) = O(e^{-p|\operatorname{Re} z|})$ при $\operatorname{Re} z \rightarrow \pm\infty$ рівномірно стосовно $\operatorname{Im} z$, отримаємо оцінку $|f(R+iy)| \leq C \cdot e^{-pR}$, яка має місце при $R \rightarrow +\infty$ рівномірно стосовно y , де C – деяка стала.

Тоді при $R \rightarrow +\infty$ виконуються співвідношення

$$\left| \int_R^{R+i\omega} e^{\alpha z} f(z) dz \right| \leq \int_0^\omega e^{\alpha R} |f(R+iy)| dy \leq C \cdot e^{(\alpha-p)R} \int_0^\omega dy \rightarrow 0,$$

бо за умовою $\alpha < p$.

Аналогічно оцінюється і інтеграл по іншій вертикальній стороні прямокутника Ω_R .

Тоді, враховуючи проведені оцінки для інтегралів по відрізках $[R; R+i\omega]$ та $[-R+i\omega; -R]$ з рівності (18.2) отримаємо потрібний результат. $\triangleleft$

18.2.2. Нехай $f(z)$ – раціональна функція з полюсами в точках $z = a_k$, $k = \overline{1, n}$, серед яких немає цілих чисел, і $f(z) = O(z^{-2})$, $z \rightarrow \infty$. Довести, що

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} f(m) = -\pi \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z=a_k} f(z) \operatorname{ctg} \pi z.$$

$\triangleright$ Розглянемо функцію $g(z) = \frac{f(z)}{z} \operatorname{ctg} \pi z$, яка має в комплексній площині полюси в точках $z = a_k$, $k = \overline{1, n}$, – це полюси функції $f(z)$, та прості полюси в точках $z = m$, $m \in \mathbb{Z}$, – це полюси функції $\operatorname{ctg} \pi z$.

При цьому $\operatorname{res}_{z=m} f(z) \operatorname{ctg} \pi z = f(m)/\pi$, $m \in \mathbb{Z}$.

Для доведення сформульованого вище твердження побудуємо замкнений контур C_N (рис. 18.2), що обмежує область

$$\Omega_N = \{ |\operatorname{Re} z| < N + 1/2, \quad |\operatorname{Im} z| < N + 1/2 \},$$

де N – таке досить велике натуральне число, що $\{a_k, k = \overline{1, n}\} \subset \Omega_N$. Не важко помітити, що межа $\partial\Omega_N$ області Ω_N – квадрат зі стороною $2N+1$ та центром в початку координат.

За основною теоремою про лишки маємо

$$\begin{aligned} & \int_{C_N} f(z) \operatorname{ctg} \pi z dz = \\ &= 2\pi i \left(\sum_{m=-N}^N \operatorname{res}_{z=m} f(z) \operatorname{ctg} \pi z + \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z=a_k} f(z) \operatorname{ctg} \pi z \right) = \\ &= 2\pi i \left(\sum_{m=-N}^N \frac{f(m)}{\pi} + \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z=a_k} f(z) \operatorname{ctg} \pi z \right). \end{aligned} \quad (18.3)$$

Отримана рівність (18.3) залишається справедливою для всіх досить великих натуральних N .

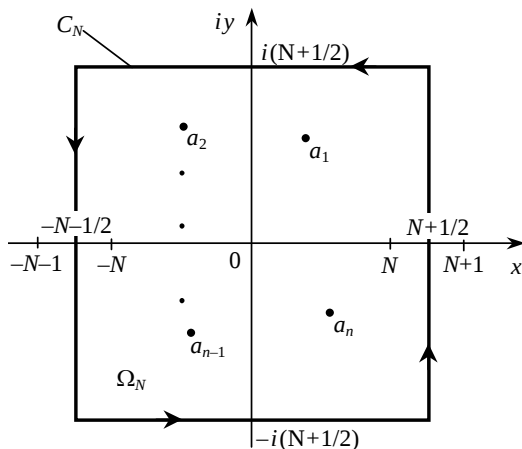


Рис. 18.2

Оцінимо інтеграл, що стоїть в лівій частині (18.3). У випадку, коли $\operatorname{Re} z = N + 1/2$, $|\operatorname{Im} z| \leq N + 1/2$ (права вертикальна сторона квадрату), запишемо $z = N + 1/2 + iy$, $|y| \leq N + 1/2$, і

$$\begin{aligned} |\operatorname{ctg} \pi z| &= \left| \frac{\cos(\pi N + \pi/2 + i\pi y)}{\sin(\pi N + \pi/2 + i\pi y)} \right| = \left| \frac{\sin(i\pi y)}{\cos(i\pi y)} \right| = \\ &= \left| \frac{\operatorname{sh}(\pi y)}{\operatorname{ch}(\pi y)} \right| = \frac{1 - e^{-2\pi|y|}}{1 + e^{-2\pi|y|}} \leq 2. \end{aligned}$$

У випадку, коли $\operatorname{Im} z = N + 1/2$, $|\operatorname{Re} z| \leq N + 1/2$ (верхня горизонтальна сторона квадрату), запишемо $z = x + i(N + 1/2)$, $|x| \leq N + 1/2$ і

$$\begin{aligned} |\operatorname{ctg} \pi z| &= \left| \frac{e^{i\pi x} e^{-\pi(N+1/2)} + e^{-i\pi x} e^{\pi(N+1/2)}}{e^{i\pi x} e^{-\pi(N+1/2)} - e^{-i\pi x} e^{\pi(N+1/2)}} \right| \leq \\ &\leq \frac{e^{\pi(N+1/2)} + e^{-\pi(N+1/2)}}{e^{\pi(N+1/2)} - e^{-\pi(N+1/2)}} = \frac{1 + e^{-2\pi(N+1/2)}}{1 - e^{-2\pi(N+1/2)}} < \frac{2}{1 - e^{-\pi}}, \quad N \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

де використано добре відомі нерівності

$$|a + b| \leq |a| + |b|, \quad |a - b| \geq ||a| - |b||.$$

Аналогічно оцінюється величина $|\operatorname{ctg} \pi z|$ на інших сторонах квадрату C_N .

Ураховуючи отримані оцінки, можемо записати, що для всіх досить великих N виконується нерівність $|\operatorname{ctg} \pi z| \leq 2/(1 - e^{-\pi})$, якщо $z \in C_N$.

Перейдемо до границі при $N \rightarrow +\infty$ в рівності (18.3). При цьому маємо

$$\left| \int_{C_N} f(z) \operatorname{ctg} \pi z \, dz \right| \leq \int_{C_N} |f(z) \operatorname{ctg} \pi z| \, |dz| \leq \frac{2}{1 - e^{-\pi}} \int_{C_N} |f(z)| \, |dz|.$$

Оскільки $f(z) = O(z^{-2})$, $z \rightarrow \infty$, то $|f(z)| \leq \operatorname{Const}/N^2$ при $z \in C_N$. Тоді з останньої нерівності отримаємо

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_N} f(z) \operatorname{ctg} \pi z \, dz \right| &\leq \frac{2}{1 - e^{-\pi}} \int_{C_N} |f(z)| \, |dz| \leq \frac{\operatorname{Const}}{N^2} \int_{C_N} |dz| = \\ &= \frac{\operatorname{Const}}{N^2} (8N + 4) \rightarrow 0, \quad N \rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (18.4)$$

Враховуючи оцінку (18.4), з рівності (18.3) при $N \rightarrow +\infty$ отримаємо твердження задачі. $\triangleleft$

18.3 Питання для перевірки теоретичних знань

Означення мероморфної функції.

Означення лишку функції в точці. Формули для обчислення лишків.

Властивості експоненціальної, тригонометричних і гіперболічних функцій комплексної змінної.

18.4 Завдання для аудиторної роботи

18.4.1. Обчислити інтеграли:

- a) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\alpha x}}{e^x + 1} \, dx$, де $0 < \alpha < 1$; b) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{1 - e^x} \, dx$, де $\alpha, \beta \in (0; 1)$;
c) $\int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{\operatorname{ch} x} \, dx$, де $\alpha \in \mathbb{R}$.

18.4.2. Нехай функція $f(z)$ голоморфна (аналітична) в усій комплексній площині $\mathbb{C}$ крім точок $\{a_k, k = \overline{1, m}\}$, для яких виконується умова $\{a_k\} \cap \mathbb{Z} = \emptyset$. Позначимо $G_\rho = \mathbb{C} \setminus (\bigcup_{k=1}^m \{z \in \mathbb{C} : |z - a_k| \leq \rho\})$. Припустимо, що в області G_ρ функція f задовольняє умову $|f(z)| \leq e^{\alpha |\operatorname{Im} z|} \varepsilon(|z|)$, $z \in G_\rho$, $0 \leq \alpha < \pi$, де $\varepsilon(t) \rightarrow 0$, $t \rightarrow +\infty$. Довести, що

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n f(n) = -\pi \sum_{k=1}^m \operatorname{res}_{z=a_k} \frac{f(z)}{\sin \pi z}.$$

Вказівка. Обчислити інтеграл $\int_{|z|=N+1} \frac{f(z)}{\sin \pi z} \, dz$ для достатньо великого натурального числа N , а потім розглянути границю отриманого виразу

при $N \rightarrow +\infty$. При оцінці інтегралу використати лему Жордана.

18.4.3. Знайти суми рядів:

$$a) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(n-a)^2}, \text{ де } a \notin \mathbb{Z}; \quad b) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2};$$

$$c) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n e^{i\alpha n}}{n^2 + a^2}, \text{ де } a > 0, |\alpha| < \pi;$$

$$d) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\alpha n}}{(n+a)^2}, \text{ де } a \notin \mathbb{Z}, 0 < \alpha < 2\pi.$$

18.4.4. Нехай $f(z)$ – раціональна функція від $\sin z$ та $\cos z$, яка не має полюсів на дійсній та уявній осях, $f(z) \rightarrow 0$ при $\operatorname{Im} z \rightarrow \pm\infty$ рівномірно стосовно $\operatorname{Re} z \in [0; 2\pi]$. Позначимо через $a_k, k = \overline{1, m}$, полюси функції $f(z)$ в смузі $\{0 < \operatorname{Re} z < 2\pi\}$. Довести, що

$$\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{2k\pi}{n}\right) = -\frac{n}{2} \sum_{k=1}^m \operatorname{res}_{z=a_k} f(z) \operatorname{ctg} \frac{\pi z}{2}.$$

Вказівка. Обчислити інтеграл від функції $f(z) \operatorname{ctg} \frac{\pi z}{2}$ по межі смуги $\{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} z < 2\pi\}$.

18.4.5. Знайти суми:

$$a) \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - 2a \cos \frac{2\pi k}{n} + a^2\right)^{-1}, \text{ де } 0 < a < 1;$$

$$b) \sum_{k=1}^{n-1} \sin^{-2} \frac{\pi k}{n}; \quad c) \sum_{k=0}^{n-1} \cos^{2n} \frac{\pi k}{n};$$

$$d) \sum_{k=1}^{n-1} \left(\cos^2 \frac{\pi k}{n}\right) \left(\operatorname{ctg}^2 \frac{\pi k}{n}\right);$$

$$e) \sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{ctg} \left(x + \frac{\pi k}{n}\right), \text{ де } 0 < x < \frac{\pi}{n}.$$

18.5 Завдання для самостійної роботи

18.5.1. Обчислити інтеграли:

$$a) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\alpha x} dx}{1 + e^x + e^{2x}}, \text{ де } 0 < \alpha < 2;$$

$$b) \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{\operatorname{sh} x} dx, \text{ де } \alpha > 0;$$

$$c) \text{ v.p. } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\alpha x}}{e^{2x} - 1} dx, \quad \text{де } 0 < \alpha < 2;$$

$$d) \int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{\operatorname{ch} x + \operatorname{ch} a} dx, \quad \text{де } a > 0, |\alpha| < 1.$$

18.5.2. Знайти суми рядів:

$$a) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k^2 + a^2}, \quad \text{де } a \in \mathbb{R};$$

$$b) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^4 - a^4}, \quad \text{де } a \notin \mathbb{Z};$$

$$c) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2 + a^2}, \quad \text{де } a \in \mathbb{R};$$

$$d) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^3}, \quad \text{де } a \in \mathbb{R};$$

$$e) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\alpha k}}{(k-a)^2}, \quad \text{де } 0 < \alpha < 2\pi, a \notin \mathbb{Z}.$$

18.5.3. Знайти суми:

$$a) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{a^2 + \cos^2 \frac{\pi k}{n}}, \quad \text{де } a > 0;$$

$$b) \sum_{k=0}^{n-1} \cos^{2n} \frac{\pi k}{n}; \quad c) \sum_{k=1}^{n-1} \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi k}{n};$$

$$d) \sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{ctg}^2 \left(x + \frac{\pi k}{n} \right), \quad \text{де } 0 < x < \frac{\pi}{n};$$

$$e) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin^2 \frac{\pi k}{n}}{a^2 + \cos^2 \frac{\pi k}{n}}, \quad \text{де } a > 0.$$

18.6 Приклади задач для модульної контрольної роботи (четвертий модуль)

Після завершення вивчення тем "Застосування теорії лишків до обчислення інтегралів від функцій з сингулярними особливостями", "Застосування теорії лишків і леми Жордана до обчислення інтегралів. Інтеграли у сенсі головного значення", "Обчислення інтегралів від функцій, що містять екс-

поненту, та знаходження сум" проводиться модульна контрольна робота (МКР №4), яка крім теоретичних питань, містить також задачі до кожної зі згаданий вище тем. Приклади таких задач подано нижче.

1. Обчислити інтеграл $\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2 + \cos \varphi}$.

2. Обчислити інтеграл $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2 + \pi^2} dx$.

3. Знайти головне значення інтеграла $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\pi x}}{x} dx$.

4. Обчислити інтеграл $\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{x^2 + 1} dx$.

5. Обчислити інтеграл $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{e^{4x} + 1} dx$.

Тема 19

Операційне числення та його застосування

19.1 Вступ

Операційне числення є одним з ефективних методів вивчення різноманітних математичних задач. Воно часто застосовується при дослідженні математичних моделей багатьох фізичних явищ і процесів у техніці, зокрема тих, які описуються за допомогою лінійних диференціальних (як звичайних, так і з частинними похідними), диференціально-різницевих, різницевих, інтегральних, інтегро-диференціальних рівнянь, диференціальних рівнянь з випередженням або із запізненням аргументу та ін. Особливого поширення операційне числення набуло при розгляді задач електротехніки, радіотехніки, автоматичного регулювання, теплопровідності, гірничої механіки та багатьох задач фізики й механіки.

Видатний механік академік О.О.Андронов (1901 – 1952) вважав, що операційне числення є азбукою сучасної автоматики і телемеханіки.

Англійський математик Е.Т.Уїттекер (1873 – 1956), який вніс значний вклад в розвиток теорії спеціальних функцій математичної фізики, відзначав, що "операційне числення ми повинні розглядати поряд з такими найбільш важливими досягненнями в математиці в останній чверті XIX-го століття як створення А.Пуанкаре автоморфних функцій і відкриття Річчі тензорного аналізу".

Методи операційного числення базуються на заміні (за певних умов) операцій диференціювання та інтегрування заданої функції $f(t)$ алгебраїчними операціями – відповідно операціями множення та ділення на деяку змінну (цю змінну найчастіше позначають літерою p) функції $F(p)$, що визначається згідно певних правил за функцією $f(t)$, яка вивчається.

Наприклад, за певних умов похідна функції $f(t)$ подається у вигляді $pF(p)$, де $F(p)$ – деяка функція комплексної змінної p , що визначається спеціальним чином за функцією $f(t)$, її n -та похідна – $p^n F(p)$, а результат дії на функцію $f = f(t)$ диференціального оператора

$$L\left(\frac{d}{dt}\right) = a_0 \frac{d^n}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \dots + a_n$$

зі сталими коефіцієнтами – у вигляді

$$L(p)F(p) = (a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n)F(p).$$

Як наслідок, багато математичних дій, виконання яких у диференціальному та інтегральному численні є досить складними, зводиться до простіших алгебраїчних дій. Саме завдяки цим своїм властивостям операційне

числення виявилось досить зручним для розв'язання різноманітних теоретичних і практичних задач, математичний запис яких містить лінійним чином невідому функцію.

Розвитку теорії та застосуванню операційного числення присвячено значну кількість наукових праць, огляд яких можна знайти, наприклад, в [–] та в літературі з історії математики. Ми лише відзначимо кілька цікавих фактів з історії операційного числення.

Операційному передувало символічне числення, яке бере свій початок зі спостереження Г.В.Лейбніца (1646 – 1716) про подібність формул для диференціала n -го порядку від добутку двох функцій та n -го степеня бінома. Г.В.Лейбніц написав про подібність цих формул у одному зі своїх листів до І.Бернуллі (1667 – 1748), який у відповідь показав, що у деяких випадках за заданим диференціалом можна знайти інтеграл.

Згодом ці ідеї були розвинені Г.В.Лейбніцем, Я.Бернуллі (1654 – 1705), Л.Ейлером (1707 – 1783). При цьому виникла навіть думка про перебудову всього аналізу нескінченно малих (інтегрального і диференціального числення) на основі порівняно простих алгебраїчних перетворень, але ця ідея не отримала свого завершеного розвитку, хоча Ж.Л.Лагранж (1736 – 1813) і створив у 1772 році на її основі струнку систему алгоритмічних обчислень.

Зауважимо, що у своїх дослідженнях Ж.Л.Лагранж розглядав символ диференціювання як деяку фіктивну величину, до якої можна застосовувати стандартні алгебраїчні операції.

Згодом результати, що подібні результатам Ж.Л.Лагранжа, у 1796 році отримав П.С.Лаплас (1749 – 1827), який виконав систематичні дослідження властивостей інтегрального перетворення, яке зараз відоме як *перетворення Лапласа*, хоча варто зазначити, що це перетворення вперше знайшов Л.Ейлер ще у 1737 році.

Праці Ж.Л.Лагранжа й П.С.Лапласа спонукали інтенсивні дослідження з теорії символічних методів багатьох авторів, серед яких Л.Ф.Арбогаст, Ж.Франсе, Лорньє, Грюзон, Сервуа. Так, зокрема, Л.Ф.Арбогаст у 1800 році опублікував працю "Дериваційне числення", в якій спробував створити операційне числення.

З 1830–1860 років теорію символічних методів розвивають широке коло вчених, серед яких О.Л.Коші (1789 – 1857), Ж.Б.Ж.Фур'є (1768 – 1830), Д.Грегори (1813 – 1844), С.Ж.Лакруа (1765 – 1843), Р.Кермайл (1879 – 1967), Пікок, Мурфі, Буль, Гревс, Кейлі, Хергрів, Джіллет, Бріссон, Каке, та інш., які прагнули створити диференціальне числення на основі звичайних алгебраїчних дій і побудувати математичний аналіз як систему формальних операцій над символом $p = d/dt$.

Нідерландський вчений Р.Лопатто (1797 – 1866) у середині 19-го століття розвинув варіант символного числення, так звану теорію характеристик, за допомогою якого отримав формули для розв'язків звичайних диференціальних рівнянь і рівнянь з частинними похідними та певних класів різницевих рівнянь.

У Росії про символне числення стало відомо з книг закордонних математиків, зокрема, з підручника "Трактат про диференціальне і інтегральне числення" відомого французького математика С.Ж.Лакруа, який створив також низку інших підручників з математики, зокрема, важливе значення для розвитку математичної освіти мав його повний курс математики в 9-и томах.

Російські математики в середині XIX ст. починають використовувати елементи символного числення при викладанні математики в російських університетах та подають деякі його застосування: М.Зернов у своєму курсі лекцій у Московському університеті (1837) та В.Я.Буняковський (1804 – 1889) у своїй праці "Лексикон чистої та прикладної математики" (1839) викладають елементи символного числення за підручником Лакруа, а В. Перевозчиков у своїй дисертації "Міркування про інтегрування різницевих рівнянь з двома змінними" (1848) подає деякі застосування символного числення до різницевих рівнянь. Московський математик О.В.Летников (1837 – 1888), один із засновників Московського математичного товариства (1865), пробував отримати за допомогою символного числення загальний метод інтегрування диференціальних рівнянь.

У 1862 р. у Києві було видано у вигляді монографії магістерську дисертацію "Символьне числення та його застосування до інтегрування лінійних диференціальних рівнянь" М.Є.Ващенко-Захарченка (1825 – 1912), який згодом в 1863 – 1902 роках працював професором Київського університету Святого Володимира. Зауважимо, що він в 1845 – 1846 роках навчався в Київському університеті, в 1847 – 1848 роках в Парижі, де відвідував лекції О.Л.Коші і Ж.Ліувілля в Сорбонні і Коллеж де Франс, а в 1852 році склав в Київському університеті іспити за весь курс навчання.

Монографія М. Ващенко-Захарченка була результатом глибокого вивчення літератури із символних методів, зокрема, праць Л.Ф.Арбогаста, О.Л.Коші, англійських вчених. В ній автор розглянув символи та їх властивості, застосування символного числення для знаходження розв'язків звичайних лінійних диференціальних рівнянь та диференціальних рівнянь з частинними похідними як зі сталими коефіцієнтами, так і зі змінними, отримав формулу розкладу для випадку простих і кратних коренів, яка відома в літературі як формула розкладу О.Хевісайда, розглянув приклади

розв'язання низки задач.

Зауважимо, що не зважаючи на значну кількість праць, присвячених розвитку різних концепціям символічного числення, застосування символічних методів було обмеженим – в той час це числення розглядалося лише як приклад певних математичних міркувань, а не як важливий метод прикладної математики.

Символьне числення використовувалося лише для знаходження формул для розв'язків різних класів диференціальних і різницевих рівнянь, а також застосовувалося в інших розділах математики, наприклад, теорії інваріантів (методи Кейлі, Аронгольда, Клебша) і аналітичній теорії чисел.

Наприкінці XIX ст. стало зрозуміло, що символічне числення зіткнулося з численними теоретичними проблемами, мало багато слабких місць та нерозв'язаних питань. Пошук розв'язків диференціальних рівнянь у загальному вигляді вже мало цікавив дослідників, оскільки потрібно було негайно вирішувати конкретні технічні проблеми, і інженерам потрібні були зручні та надійні практичні методи.

Популяризації символічного числення значною мірою сприяв видатний англійський фізик, інженер-електрик Олівер Хевісайд (1850 – 1925), який успішно використовував символічне числення при розрахунках електричних кіл. Він першим показав, яким чином розв'язання деяких задач теорії диференціальних рівнянь і математичної фізики можна звести до виконання певних алгебраїчних операцій та як отриманим результатам дати вірну інтерпретацію. Найбільш повно свої результати О.Хевісайд виклав у своїй праці "Електромагнітна теорія".

Основна ідея методу О.Хевісайда полягає в тому, що замість формально використовує диференціальний оператор $p = d/(dt)$ в якості множника, без будь-яких обґрунтувань.

Найважливішим досягненням О.Хевісайда можна вважати запровадження оператора p^{-1} за допомогою формули

$$p^{-1}f(t) = \int_0^t f(\xi) d\xi,$$

тобто оператора, який в певному сенсі є оберненим до оператора диференціювання.

Метод О.Хевісайда мав важливе значення при вивченні перехідних процесів в електричних системах, що описувалися за допомогою лінійних диференціальних, різницевих чи інтегральних рівнянь. Принциповим моментом у дослідженнях О.Хевісайда та його послідовників було припущення про лінійність відповідних рівнянь.

Для ілюстрації методу Хевісайда розглянемо лінійне звичайне диференціальне рівняння вигляду $x' - x = 1$ з початковою умовою $x(0) = 0$. Використовуючи метод О.Хевісайда, дане рівняння можна записати у вигляді $px - x = 1$, звідки маємо $x = 1/(p - 1)$.

Виконуючи формальні перетворення, знаходимо:

$$x = \frac{1}{p(1 - \frac{1}{p})} = \frac{1}{p} \left(1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \dots \right) \cdot 1.$$

Ураховуючи, що згідно із символьним численням $(1/(p^n)) \cdot 1 = t^n/(n!)$, маємо

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{p} \cdot \left(1 + t + \frac{t^2}{2} + \dots + \frac{t^n}{n!} + \dots \right) = \\ &= \int_0^t \left(1 + t + \frac{t^2}{2} + \dots + \frac{t^n}{n!} + \dots \right) dt = \int_0^t e^t dt = e^t - 1. \end{aligned}$$

Безпосередньою перевіркою можна переконатися, що функція $x(t) = e^t - 1$ є розв'язком даного рівняння та задовольняє початкову умову.

Результати О.Хевісайда з символьного числення не були математично строго обґрунтовані, усі положення свого методу О. Хевісайд вивів емпірично й незалежно від інших дослідників. Він мав досить високий (на той час) рівень математичної підготовки, але вважав математику експериментальною наукою, а тому зовсім не турбувався про відповідне математичне обґрунтування свого методу. Через це в його працях зустрічалися математичні помилки, але завдяки своїй тонкій інженерній інтуїції він часто отримував вірні відповіді. Тим не менш, подальший розвиток методу Хевісайда потребував його строгого (математичного) обґрунтування.

Обґрунтування символьного числення, або, як його зараз називають, операційного числення, було дано лише у 20-х рр. XX ст. англійським математиком Т.Бромвичем (1875 – 1929) і американським інженером Дж.Карсоном (1887 – 1940), які пов'язали цей метод з методом інтегральних перетворень, що успішно використовувався Коші, Лапласом та іншими математиками. При цьому Бромвич і Карсон свої міркування будували на основі теорії аналітичних функцій (теорії функцій комплексної змінної) та перетворенні Лапласа, символ p одержав нове тлумачення як комплексна змінна $p = s + i\sigma$. Було показано, що метод О.Хевісайда можна повністю обґрунтувати, якщо використати перетворення Лапласа.

Спочатку Дж.Карсон встановив зв'язок між операційним численням і

перетворенням Лапласа за допомогою формули

$$F(p) = p \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt, \quad (19.1)$$

де $f(t)$ – оригінал, а $F(p)$ – його зображення, а потім Т.Бромвич отримав формулу обернення у вигляді контурного інтегралу вигляду

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{s-\infty}^{s+\infty} e^{pt} \frac{F(p)}{p} dp \quad (19.2)$$

в комплексній площині, де інтегрування виконується вздовж будь-якої прямої, що паралельна уявній вісі і розташована праворуч від всіх особливих точок підінтегральної функції.

Згодом французький математик П.Леві (1886 – 1971) показав еквівалентність співвідношень (19.1) і (19.2).

Потрібно також відзначити, що інтеграл вигляду (19.2) ще в 1959 році був отриманий німецьким математиком Г.Ф.Ріманом (1826 – 1866) у його праці "Про кількість простих чисел, що не перевищують даної величини". Згодом у 1902 році цей інтеграл вивчався фінським математиком Р.Мелліном (1854 – 1933), тому в літературі цей інтеграл часто називають інтегралом Рімана-Мелліна.

Таким чином, на початку 20-их років минулого століття було створено теоретичний базис для операційного числення, причому цей метод вже не використовував операцію диференціювання.

Ці результати справили значний вплив на подальшу розробку операційного числення. Багато вчених, серед яких Уіддер, Ванневар, Буш, Деч, Нейссен, Гумберт, Гардер, Черчіль, Маклахлана, Вагнер, Пароді, Коломбо, Додч, Джеффріс, Коісумі, М.М.Крилов (1879 – 1955), М.М.Боголюбов (1909 – 1992), О.О.Андронов, Я.Мікусінський, Й.З.Штокало, Конторович, Повзнер, К.Г.Валєєв, В.С.Мартиненко та ін., значно розширили теоретичний базис операційного числення та межі його застосування, зокрема, у їх працях отримано операційне зображення різноманітних функцій та дано застосування співвідношень і спеціальних функцій до розв'язання багатьох теоретичних і прикладних задач.

Крім того, було розвинуто також і деякі інші, альтернативні, підходи при обґрунтуванні операційного числення. Так, польський математик Я.Мікусінський операційне числення побудував на основі операторного підходу, без використання перетворення Лапласа, і отримав варіант операційного числення на основі прямих алгебраїчних операцій, причому роль множення

виконувала згортка функцій.

Досить повну характеристику переваг операційного числення дав академік АН СРСР і АН УРСР М.М.Крилов, який в [20, с.9-10] писав: "... найбільша перевага символічного або інакше операційного числення полягає в зручності і швидкості обчислень. Це особливо добре проявляється тоді, коли потрібно (наприклад, у багатьох задачах електротехніки, що пов'язані з розподілом струму в колах) розв'язувати систему диференціальних рівнянь. Не буде зайвим зауважити, що один з методів операційного числення, а саме так званий метод степеневих рядів Хевісайда, дає можливість уникнути потреби розв'язування характеристичних рівнянь (що відповідають даним диференціальним рівнянням), які у багатьох випадках прикладних задач є рівняннями високого степеня.

Крім того, особливо зручно застосовувати метод операційного числення в тих практичних випадках, коли коефіцієнти диференціальних рівнянь з частинними похідними не залежать від тієї незалежної змінної, до якої застосовується символічний метод...

Лише ... в працях Карсона, Джорджі, Бромвича, Марча та інш. було звернуто належну увагу на зв'язок методів операційного числення з теорією контурних інтегралів в теорії функцій комплексної змінної, причому, на наш погляд, обгрунтовано лише задачу застосування операційного числення до звичайних диференціальних рівнянь.

Ось чому ... ми вважаємо необхідним теоретично обгрунтувати методи операційного числення і підкреслити зв'язок цих методів з важливою для практики задачею наближених розв'язків." (переклад авторів).

В наступних параграфах посібника розглянуто визначення перетворення Лапласа, його основні властивості, питання про знаходження функції, чиє перетворення Лапласа є відомим (обернена задача) та застосування перетворення Лапласа для знаходження аналітичних розв'язків звичайних диференціальних рівнянь, диференціальних рівнянь з запізненням, інтегральних рівнянь, крайових задач математичної фізики для диференціальних рівнянь з частинними похідними та для обчислення сум рядів.

19.2 Теоретичні відомості

19.2.1 Перетворення Лапласа

Перетворення Лапласа ставить у відповідність функції $f(t)$ дійсної змінної t функцію $F(p)$ комплексної змінної p за допомогою формули

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt. \quad (19.3)$$

При цьому функцію $f(t)$ називають *оригіналом*, а $F(p)$ – *зображенням за Лапласом функції $f(t)$* (коротко – *зображенням функції $f(t)$*).

Зв'язок функцій $f(t)$ та $F(p)$ за допомогою формули (19.3) символічно позначають таким чином:

$$f(t) \doteq F(p) \quad \text{або} \quad F(p) \doteq f(t).$$

Використовують також позначення $\rightarrow$, $\leftarrow$, $\parallel$, тобто пишуть $f(t) \rightarrow F(p)$, $F(p) \leftarrow f(t)$, $f(t) \parallel F(p)$ та ін., при цьому точки та стрілки направляють від оригіналу до зображення функції.

Зауважимо, що в методі Хевісайда використовувалося зображення функції $f(t)$ за Карсоном, яке визначається згідно формули

$$F^*(p) = p \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt$$

і пов'язано із зображенням функції $f(t)$ за Лапласом співвідношенням $F^*(p) = pF(p)$. Таким чином, зображення функції в методі Хевісайда та зображення за Лапласом відрізняються множителем p .

Очевидно, що не для кожної функції $f(t)$ інтеграл у (19.3) має сенс. Тому розглядається певний клас функцій, для яких інтеграл у (19.3) напевне існує. Найчастіше використовують такі припущення:

19.1) Функція $f(t) \equiv 0$ для всіх $t < 0$.

19.2) Функція $f(t)$ задовольняє умову Гельдера для всіх $t > 0$, крім окремих точок, де $f(t)$ має розриви першого роду, причому на кожному скінченному інтервалі таких точок існує не більш ніж скінченне число. Це означає, що для кожної точки t , у якій функція $f(t)$ є неперервною, існують такі додатні сталі A , h_0 , $0 < \gamma \leq 1$, що для всіх h , які задовольняють умову $|h| < h_0$, виконується нерівність

$$|f(t+h) - f(t)| \leq A|h|^\gamma. \quad (19.4)$$

19.3) Функція $f(t)$ зростає не швидше ніж деяка показникова функція, тобто існують такі дійсні сталі $M > 0$, $s > 0$, що для всіх $t > 0$ виконується нерівність

$$|f(t)| \leq M e^{st}. \quad (19.5)$$

Число γ в нерівності (19.4) називають *показником Гельдера для функції $f(t)$* , а нижню грань чисел s , які задовольняють нерівність вигляду (19.5) при деякому M , – *показником зростання функції $f(t)$* .

Для математичного обґрунтування операційного числення використовуються така теорема.

Теорема 19.1. Нехай функція $f(t)$ дійсної змінної задовольняє умови 19.1) – 19.3). Тоді $F(p)$, зображення функції $f(t)$, визначено в півплощині $\operatorname{Re} p > \alpha$, де α – показник зростання функції $f(t)$. При цьому функція $F(p)$ як функція комплексної змінної є голоморфною (аналітичною) для всіх таких p , що $\operatorname{Re} p > \alpha$.

Зауваження 19.1. Інтеграл у (19.3) збігається для всіх значень p , що знаходяться в правій від прямої $\operatorname{Re} p = \alpha$ півплощині, тобто для тих значень p , для яких виконується нерівність $\operatorname{Re} p > \alpha$. Тому теорема 19.1 справедлива й у тому випадку, коли замість умови 19.3) виконується така: існує комплексне число p_0 , для якого інтеграл

$$\int_0^{\infty} e^{-p_0 t} f(t) dt$$

збігається.

Зауваження 19.2. Використовуючи умову 19.3) щодо функції $f(t)$ та означення перетворення за Лапласом, можна показати, що виконується співвідношення

$$\lim_{\operatorname{Re} p \rightarrow \infty} F(p) = 0.$$

Дана рівність є необхідною умовою того, що функція $F(p)$ є зображенням за Лапласом деякої функції $f(t)$.

19.2.2 Основні властивості перетворення Лапласа

З визначення перетворення Лапласа можна легко отримати такі його основні властивості:

1. *Лінійність.* Якщо $f_i(p) \doteq F_i(p)$, де $\operatorname{Re} p > \alpha_i$, $i = \overline{1, n}$, то

$$f(t) = \sum_{i=1}^n c_i f_i(t) \doteq F(p) = \sum_{i=1}^n c_i F_i(p),$$

де $\operatorname{Re} p > \alpha = \max_{i=\overline{1, n}} \alpha_i$; c_i , $i = \overline{1, n}$, – довільні дійсні або комплексні числа.

У випадку однієї функції, тобто коли $cf(t) \doteq cF(p)$, властивість лінійності називають ще властивістю однорідності.

2. *Подібність (зміна масштабу незалежної змінної).* Якщо $f(t) \doteq F(p)$, де $\operatorname{Re} p > \alpha$, то для довільного додатного числа c маємо $f(ct) \doteq \frac{1}{c} F(\frac{p}{c})$, де $\operatorname{Re} p > \alpha$. Цю ж саму властивість інколи зручно використовувати в такому вигляді: якщо $f(t) \doteq F(p)$, де $\operatorname{Re} p > \alpha$, то для довільного додатного числа $c \neq 0$ маємо $f(\frac{t}{c}) \doteq cF(cp)$, де $\operatorname{Re} p > \alpha$.

3. *Зсув аргументу (теорема запізнення).* Якщо $f(t) \doteq F(p)$, де $\operatorname{Re} p > \alpha$, то для довільного додатного числа $\tau > 0$ справедлива рівність

$$f(t - \tau) \doteq e^{-p\tau} F(p), \quad \operatorname{Re} p > \alpha.$$

Остання властивість використовується при знаходженні зображень за Лапласом періодичних функцій (періодичні імпульси) та функцій, які на різних інтервалах визначаються різними аналітичними виразами.

4. *Зміщення (теорема згасання).* Якщо $f(t) \doteq F(p)$, де $\operatorname{Re} p > \alpha$, то для довільного комплексного числа p_0 справедлива формула

$$F(p - p_0) \doteq e^{p_0 t} f(t), \quad \operatorname{Re} p > \operatorname{Re} p_0 + \alpha,$$

тобто множення оригіналу на функцію $e^{p_0 t}$ рівносильно "зміщенню" зображення на p_0 .

Теорема згасання часто використовується при вивченні явищ, пов'язаних зі згасаючими коливаннями. У таких випадках змінна t є часовою змінною. Ця теорема є двоїстою (у деякому сенсі оберненою) до теореми запізнення.

5. *Властивість часткового виродження оригіналу (теорема випередження).* Якщо $f(t) \doteq F(p)$, де $\operatorname{Re} p > \alpha$, то для довільного дійсного числа $t_0 > 0$ справедлива формула

$$f(t + t_0) \doteq e^{t_0 p} \left[F(p) - \int_0^{t_0} e^{-pt} f(t) dt \right], \quad \operatorname{Re} p > \alpha.$$

6. *Зображення похідної (диференціювання оригіналу).* Якщо $f(t) \doteq F(p)$, де $\operatorname{Re} p > \alpha$, і функція $f'(t)$ має зображення за Лапласом, то

$$f'(t) \doteq pF(p) - f(0), \quad \operatorname{Re} p > \alpha,$$

де

$$f(0) = \lim_{t \rightarrow 0+} f(t).$$

Якщо додатково до вказаних вище умов функція $f^{(n)}(t)$ задовольняє умови існування зображення за Лапласом, тобто має зображення за Лапласом, то

$$f^{(n)}(t) \doteq p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0),$$

де

$$f^{(k)}(0) = \lim_{t \rightarrow 0+} f^{(k)}(t), \quad k = \overline{0, n-1}.$$

Ця властивість є однією з основних властивостей зображень за Лапласом і використовується, зокрема, при розв'язуванні задач Коші для лінійних звичайних диференціальних рівнянь і крайових задач для рівнянь математичної фізики, оскільки дозволяє замінити диференціювання оригіналу операцією множення зображення на незалежну змінну.

У частинному випадку, коли $f(0) = 0$, маємо $f'(t) \doteq pF(p)$, де $f(t) \doteq F(p)$. Якщо ж, крім того, $f'(0) = \dots = f^{(n-1)}(0) = 0$, то $f^{(n)}(t) \doteq p^n F(p)$.

7. *Диференціювання зображення.* Якщо $f(t) \doteq F(p)$, де $\operatorname{Re} p > \alpha$, то

$$F^{(n)}(p) \doteq (-1)^n t^n f(t), \quad \operatorname{Re} p > \alpha. \quad (19.6)$$

Ця властивість є двоїстою або оберненою в деякому сенсі до властивості диференціювання оригіналу.

8. *Диференціювання зображення за параметром.* Якщо $f(t; x) \doteq F(p; x)$ при кожному значенні параметра $x \in (a; b) \subset \mathbb{R}^1$ і функція $f(t; x)$ є диференційовною стосовно $x \in (a; b)$, а її похідна $f_x(t; x)$ при всіх значеннях $(t; x) \in \mathbb{R}^1 \times (a; b)$ задовольняє умову $|f_x(t; x)| < Me^{\alpha t}$ при деяких сталих M, α , то функція $F(p; x)$ диференційовна за $x \in (a; b)$, причому при кожному значенні $x \in (a; b)$ справедлива рівність $f_x(t; x) \doteq F_x(p; x)$, де $\operatorname{Re} p > \alpha$.

9. *Інтегрування оригіналу (зображення інтегралу від функції).* Якщо $f(t) \doteq F(p)$, де $\operatorname{Re} p > \alpha$, то справедлива формула

$$\int_0^\infty f(\sigma) d\sigma \doteq \frac{1}{p} F(p), \quad \operatorname{Re} p > \alpha.$$

Ця властивість використовується при знаходженні розв'язків лінійних інтегральних рівнянь.

10. *Інтегрування зображення.* Якщо $f(t) \doteq F(p)$, де $\operatorname{Re} p > \alpha$, і інтеграл $\int_0^\infty F(q) dq$ збігається, то справедлива формула

$$\frac{f(t)}{t} \doteq \int_p^\infty F(q) dq, \quad \operatorname{Re} q \geq \alpha_0 > \alpha, \quad \operatorname{Re} p > \alpha.$$

Цю властивість, яка є оберненою або двоїстою до властивості інтегрування оригіналу, можна інтерпретувати так: інтегрування зображення еквівалентне діленню оригіналу на t .

11. *Теорема множення (Бореля).* Якщо $f(t) \doteq F(p)$, де $\operatorname{Re} p > \alpha_1$, $g(t) \doteq G(p)$, де $\operatorname{Re} p > \alpha_2$, то справедлива формула

$$\int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau \doteq F(p) G(p), \quad \operatorname{Re} p > \max(\alpha_1, \alpha_2).$$

Функція

$$\varphi(t) = \int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau = \int_0^t f(t - \tau) g(\tau) d\tau$$

називається *згортою функцій* $f(t)$ та $g(t)$.

12. *Теорема про зображення добутку функцій.* Якщо $f(t) \doteq F(p)$, де $\operatorname{Re} p > \alpha_1$, $g(t) \doteq G(p)$, де $\operatorname{Re} p > \alpha_2$, то справедлива формула

$$f(t) g(t) \doteq \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(q) G(p-q) dq, \quad a > \alpha_1, \quad \operatorname{Re} p > a + \alpha_2,$$

а інтеграл у правій частині рівності слід розуміти в сенсі головного значення за Коші.

Теорема про зображення добутку функції є двоїстою до теореми множення. Теорема про зв'язок між оригіналом та зображенням добутку функцій посідають особливе місце в операційному численні та його застосуванні.

19.2.3 Приклади перетворень Лапласа

19.2.3.1. Функція Хевісайда $H(t)$. Згідно з визначенням функції Хевісайда маємо

$$H(t) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } t \geq 0, \\ 0, & \text{якщо } t < 0. \end{cases}$$

Тоді

$$H(t) \doteq F(p) = \int_0^{\infty} e^{pt} dt = \frac{1}{p}, \quad \text{де } \operatorname{Re} p > 0.$$

Тут ураховано, що коефіцієнт зростання функції Хевісайда рівний нулю.

19.2.3.2. Показникова функція $e^{\alpha t}$, $\alpha \in \mathbb{C}$. Ураховуючи умову 19.1), запишемо показникову функцію для $t \geq 0$ таким чином: $f_1(t) = H(t)e^{\alpha t}$, $t \geq 0$. Тоді

$$f_1(t) \doteq \int_0^{\infty} e^{-pt} e^{\alpha t} dt = \frac{1}{p - \alpha}, \quad \text{де } \operatorname{Re} p > \operatorname{Re} \alpha.$$

Тут ураховано, що коефіцієнт зростання записаної вище показникової функції рівний $\operatorname{Re} \alpha$.

19.2.3.3. Перетворення Лапласа тригонометричних, гіперболічних функцій та функцій вигляду $e^{\alpha t} f(t)$ можна знайти, використовуючи лінійність перетворення Лапласа та теорему запізнення. Наприклад, узявши до уваги зображення для показникової функції, можна знайти такі формули:

$$\begin{aligned} \cos \omega t &= \frac{1}{2} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) \doteq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p - i\omega} + \frac{1}{p + i\omega} \right) = \frac{p}{p^2 + \omega^2}, \\ \sin \omega t &= \frac{1}{2i} (e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}) \doteq \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{p - i\omega} - \frac{1}{p + i\omega} \right) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}. \end{aligned}$$

Тут $\operatorname{Re} p > |\operatorname{Im} \omega|$.

Аналогічно знаходимо

$$\begin{aligned} e^{\alpha t} \sin \omega t &= \frac{1}{2i} (e^{(\alpha + i\omega)t} - e^{(\alpha - i\omega)t}) \doteq \\ &\doteq \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{p - \alpha - i\omega} - \frac{1}{p - \alpha + i\omega} \right) = \frac{\omega}{(p - \alpha)^2 + \omega^2}, \end{aligned}$$

де $\operatorname{Re} p > \alpha + |\operatorname{Im} \omega|$.

19.2.3.4. Степенева функція t^n , $n \in \mathbb{N}$. Ураховуючи умову 19.1), запишемо степеневу функцію для $t \geq 0$ таким чином: $f_2(t) = H(t)t^n$, $t \geq 0$.

Тоді

$$f_2(t) \doteq \int_0^{\infty} H(t)t^n dt = \frac{n!}{p^{n+1}} = \frac{\Gamma(n+1)}{p^{n+1}}, \quad \operatorname{Re} p > 0, \quad (19.7)$$

де $\Gamma(z)$ – гамма-функція Ейлера. Тут ураховано, що коефіцієнт зростання степеневі функції рівний нулю.

Зауважимо, що дану формулу можна також отримати, використовуючи теорему про диференціювання зображення, якщо у формулі (19.4) в якості функції $f(t)$, $t > 0$, використати функцію Хевісайда. Дійсно, на підставі теореми диференціювання зображення справджується формула $F^{(n)}(p) \doteq (-1)^n t^n f(t)$. Тоді отримуємо

$$(-1)^n t^n H(t) \doteq \frac{d^n}{dt^n} \left(\frac{1}{p} \right) = (-1)^n \frac{n!}{p^{n+1}}, \quad \operatorname{Re} p > 0,$$

звідки випливає формула (19.7).

19.2.3.5. Функція $t^n e^{p_0 t}$. На підставі теореми диференціювання зображення, ураховуючи рівність $e^{p_0 t} \doteq 1/(p - p_0)$, знаходимо

$$H(t)t^n e^{p_0 t} \doteq (-1)^n \cdot \left(\frac{1}{p - p_0} \right)^{(n)} = \frac{n!}{(p - p_0)^{n+1}}, \quad \operatorname{Re} p > \operatorname{Re} p_0.$$

19.2.3.6. Східчаста та імпульсна функції. Використовуючи властивість запізнення, для так званої "східчастої" функції

$$f_3(t) = A(H(t) + H(t - \tau) + H(t - 2\tau) + \dots),$$

де $\tau > 0$ – деяке дійсне число, $H(t)$ – функція Хевісайда, A – деяке число, знаходимо

$$f_3(t) \doteq A \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p} \cdot e^{-p\tau} + \dots \right) = \frac{A}{p} \frac{1}{1 - e^{-p\tau}} = \frac{A}{2p} \left(1 + \operatorname{cth} \frac{p\tau}{2} \right),$$

де $\operatorname{Re} p > 0$.

Аналогічно для так званої імпульсної функції

$$g(t) = A(H(t) - 2H(t - \tau) + 2H(t - 2\tau) + \dots)$$

знаходимо її зображення за Лапласом у вигляді

$$g(t) \doteq A \left(\frac{1}{p} - \frac{2}{p} \cdot e^{-p\tau} + \frac{2}{p} \cdot e^{-2p\tau} - \dots \right) = \frac{A}{p} \left(1 + \operatorname{th} \frac{p\tau}{2} \right), \quad \operatorname{Re} p > 0.$$

19.2.3.7. Теорема запізнення дозволяє знайти загальну формулу для зображення періодичної функції. Нехай $\varphi(t)$ – деяка τ -періодична функція. Позначимо $\varphi(t) \doteq \Phi(p)$ та $f(t) \doteq F(p)$, де

$$f(t) = \begin{cases} H(t)\varphi(t), & \text{якщо } 0 \leq t < \tau, \\ 0, & \text{якщо } t \geq \tau. \end{cases}$$

Тоді справедлива формула

$$\Phi(p) = \frac{F(p)}{1 - e^{-p\tau}}.$$

19.2.3.8. За допомогою операційного числення легко можна довести важливі співвідношення з математичного аналізу, зокрема між B -функцією та Γ -функцією Ейлера (у випадку натуральних значень m та n). Як відомо, згідно визначення

$$B(m, n) = \int_0^1 \xi^{m-1} (1 - \xi)^{n-1} d\xi, \quad \Gamma(m) = (m-1)!, \quad \Gamma(n) = (n-1)!.$$

Використовуючи операційне співвідношення для функції t^n та теорему множення, знаходимо

$$\frac{(m-1)!}{p^m} \cdot \frac{(n-1)!}{p^n} = \int_0^t \xi^{m-1} (t - \xi)^{n-1} d\xi.$$

Ураховуючи, що інтеграл у правій частині цієї рівності рівний

$$\frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-2)!} t^{m+n-1} = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} t^{m+n-1},$$

з останньої рівності при $t = 1$ отримуємо добре відоме в математичному аналізі співвідношення

$$B(m, n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}.$$

19.2.4 Питання для перевірки теоретичних знань

Означення перетворення Лапласа та умови щодо функції, до якої застосовується перетворення Лапласа. Теорема про голоморфність зображення за Лапласом.

Теорема про обернене перетворення (інтеграл Мелліна). Методи обчислення інтегралу Мелліна.

Основні властивості перетворення за Лапласом (лінійність, теореми подібності, запізнення, зміщення, випередження, зображення похідної функції (диференціювання оригіналу), диференціювання зображення, диференціювання за параметром зображення, зображення інтегралу, інтегрування зображення).

Теорема множення (Бореля). Теорема про зображення добутку двох функцій. Інтеграл Дюамеля.

19.2.5 Завдання для самостійної роботи

Знайти зображення таких функцій:

- 1) $f(t) = \cos \omega t + \varphi, t \geq 0,$ де $\omega, \varphi \in \mathbb{R};$
- 2) $f(t) = \operatorname{ch} \lambda t, t \geq 0,$ де $\lambda \in \mathbb{R};$

- 3) $f(t) = \operatorname{sh} \lambda t, t \geq 0$, де $\lambda \in \mathbb{R}$;
- 4) $f(t) = t^n e^{\alpha t}, t \geq 0$, де $n \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{R}$;
- 5) $f(t) = t^\nu, t \geq 0$, де $\nu > -1$;
- 6) $f(t) = e^{-\alpha t}/t, t > 0$, де $\alpha \in \mathbb{R}$;
- 7) $f(t) = e^{\alpha t} \cos \omega t, t \geq 0$, де $\alpha, \omega \in \mathbb{R}$;
- 8) $f(t) = t^n \sin \omega t, t \geq 0$, де $n \in \mathbb{N}, \omega \in \mathbb{R}$;
- 9) $f(t) = |\sin \omega t|, t \geq 0$, де $\omega \in \mathbb{R}$;
- 10) $f(t) = |\cos \omega t|, t \geq 0$, де $\omega \in \mathbb{R}$;
- 11) $f(t) = t e^{-t} \sin^2 \omega t, t \geq 0$, де $\omega \in \mathbb{R}$;
- 12) $f(t) = \int_0^t e^{\alpha \tau} \cos \omega(t - \tau) d\tau, t \geq 0$, де $\alpha, \omega \in \mathbb{R}$;
- 13) $f(t) = \begin{cases} 1, & t \in [a, b], \\ 0, & t \notin [a, b], \end{cases}$ де $0 < a < b$;
- 14) $f(t) = \begin{cases} f_0, & 2nT \leq t < (2n+1)T, \\ -f_0, & (2n+1)T \leq t < (2n+2)T, \end{cases} \quad n = 1, 2, \dots,$
де $f_0 \in \mathbb{R}$;
- 15) $f(t) = \begin{cases} 0, & t < t_0, \\ n f_0, & n t_0 \leq t < (n+1)t_0, \end{cases} \quad n = 1, 2, \dots,$
де $t_0 > 0, f_0 \in \mathbb{R}$;
- 16) $f(t) = \int_0^t e^{\alpha \tau} \cos \omega \tau d\tau, t \geq 0$, де $\alpha, \omega \in \mathbb{R}$;
- 17) $f(t) = \int_0^t \tau^n (1 - e^{-\tau}) d\tau, t \geq 0$, де $n \in \mathbb{N}$.
- 18) Нехай зображенням функції $\phi(t)$ є функція $\Phi(p)$, а функції $\phi(t+T)$ – функція $\Phi_T(p)$, $T > 0$. Довести, що функція
- $$f(t) = \begin{cases} \phi(t), & 0 \leq t < T, \\ 0, & t \geq T, \end{cases}$$
- має зображення
- $$F(p) = \Phi(p) - e^{-pT} \Phi_T(p).$$

Використовуючи отриманий результат і теорему запізнення, знайти зображення періодичної функції з періодом T .

- 19) Довести формулу Дюамеля: якщо $f(t) \doteq F(p)$, $g(t) \doteq G(p)$ і $f'(t)$ має зображення за Лапласом, то

$$\int_0^t f'(\tau)g(t-\tau) d\tau + f(0)g(t) \doteq pF(p)G(p).$$

19.3 Визначення оригіналу за зображенням

При застосуванні операційного числення виконують такі операції:

1. Від шуканої дійсної функції $x(t)$ переходять до функції $X(p)$ комплексної змінної p . Функція $X(p)$ є зображенням за Лапласом функції $x(t)$.

2. Над зображенням $X(p)$ виконують математичні операції, що відповідають операціям над шуканою функцією $x(t)$. При цьому одержують деяке (лінійне) рівняння для $X(p)$.

3. Одержане таким чином рівняння для $X(p)$ розв'язують стосовно функції $X(p)$.

4. Від знайденого зображення $X(p)$ переходять до оригіналу $x(t)$, що і є шуканою функцією.

Операції над зображенням $X(p)$ є значно простішими, ніж операції над шуканою функцією $x(t)$, оскільки диференціюванню відповідає множення на змінну p , а інтегруванню – ділення на p . Застосування операційного методу можна в деякому сенсі порівняти з логарифмуванням, коли від чисел переходять до логарифмів, над відповідними значеннями логарифмів виконують певні дії, і при цьому множенню чисел відповідає додавання, а діленню – віднімання логарифмів, а потім від знайденого логарифма знову повертаються до числа.

19.3.1 Формула Мелліна

При застосуванні операційного числення для розв'язання практичних задач важливе значення має відповідь на питання: як за відомою функцією $F(p)$, зображенням за Лапласом, знайти функцію $f(t)$, що є оригіналом для $F(p)$. Відповідь на це питання дає теорема.

Теорема 19.4. Якщо функція $f(t)$ є оригіналом для $F(p)$, тобто $f(t)$ задовольняє умови 19.1) – 19.3), то в кожній точці $t \geq 0$, у якій $f(t)$ задовольняє умову Гельдера, справедлива рівність

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt} F(p) dp, \quad (19.8)$$

де інтеграл береться вздовж довільної прямої $\operatorname{Re} p = a > \alpha$ і розуміється в сенсі головного значення, тобто

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_{a-ib}^{a+ib} e^{pt} F(p) dp.$$

Цей інтеграл є інтегралом обернення, оскільки формула (19.8) визначає обернене (у певному сенсі) інтегральне перетворення до перетворення Лапласа (19.3).

Інтеграл (19.8) було введено в операційне числення англійським математиком Бромвичем, але він ще раніше був відомим німецькому математику Ріману та фінському математику Мелліну, який і дав йому строге математичне обґрунтування. Тому формулу (19.8) називають *формулою Мелліна*, а інтеграл у правій частині формули (19.8) – *інтегралом Мелліна*.

Обґрунтування справедливості формули (19.8) дається такою теоремою.

Теорема 19.5. Нехай функція $F(p)$ комплексної змінної p задовольняє умови:

- 1) функція $F(p)$ голоморфна в області $\operatorname{Re} p > \alpha$;
- 2) $F(p) \rightarrow 0$ при $|p| \rightarrow \infty$ рівномірно стосовно $\arg p$ (в області $\operatorname{Re} p > \alpha$);
- 3) для всіх комплексних чисел p , що належать області $\operatorname{Re} p > \alpha$, збігається інтеграл

$$\int_{s-i\infty}^{s+i\infty} |F(p)| dp, \quad s > \alpha,$$

де інтеграл розуміється в сенсі головного значення.

Тоді функція $F(p)$ при $\operatorname{Re} p > a$ є зображенням функції $f(t)$ дійсної змінної $t > 0$, що визначається формулою (19.8).

19.3.2 Обчислення інтеграла Мелліна

У багатьох важливих випадках невластний інтеграл у правій частині формули (19.8), яка дає можливість обчислити значення оригіналу, функцію $f(t)$, за відомим зображенням, функцією $F(p)$, можна обчислити за допомогою теорії лишків.

Нехай функція $F(p)$ визначена в області $\operatorname{Re} p > \alpha$. Оскільки дана функція, згідно умов задачі, є зображенням за Лапласом деякої функції $f(t)$, то $F(p)$ є голоморфною функцією в правій півплощині – області $\operatorname{Re} p > \alpha$, де α – показник росту шуканої функції $f(t)$. Не втрачаючи загальності, можна вважати число α відомим.

Припустимо, що функцію $F(p)$ можна аналітично продовжити на всю комплексну площину $\mathbb{C}$ крім деякої скінченної множини ізольованих точок, і її аналітичне продовження в лівій півплощині, області $\operatorname{Re} p < \alpha$, задоволь-

няє умови леми Жордана. Тоді на підставі цієї леми при $t > 0$ маємо

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_R} e^{pt} F(p) dp = 0, \quad (19.9)$$

де C_R – дуга кола $|p - a| = R$, яка лежить у лівій півплощині $\operatorname{Re} p < a$.

Для обчислення інтегралу Мелліна розглянемо контур Γ_R , що утворений відрізком $[a - iR; a + iR]$ вертикальної прямої $\operatorname{Re} z = a$, де $a > \alpha \in \mathbb{R}$ дійсним, та дугою C_R кола $|p - a| = R$, яка лежить у лівій півплощині $\operatorname{Re} p < a$. Контур Γ_R має додатню орієнтацію.

При достатньо великому значенні радіуса R всередині даного кола будуть міститися всі особливі точки функції $F(p)$, а отже інтеграл від функції $e^{pt} F(p)/(2\pi i)$ по контуру Γ_R можна обчислити за допомогою теореми Коші про суму лишків.

Спрямувавши значення R до $+\infty$, на підставі леми Жордана (див. формулу (19.9)) отримаємо, що значення інтегралу від функції $e^{pt} F(p)$ по дузі C_R прямуватиме при $R \rightarrow +\infty$ до нуля, а значення цього інтегралу по відрізьку $[a - iR; a + iR]$ матиме своєю границею при $R \rightarrow +\infty$ значення інтегралу (19.8).

Описану методику обчислення інтеграла Мелліна (19.8) продемонструємо на прикладі. Нехай $F(p) = \omega/(p^2 + \omega^2)$, $\operatorname{Re} p > \alpha$. Потрібно знайти оригінал $f(t) \doteq F(p)$. Очевидно, що функція $F(p)$ задовольняє умови теореми 1.2. Продовжимо $F(p)$ у комплексну площину згідно формули $F(p) = \omega/(p^2 + \omega^2)$. Таке аналітичне продовження функції $F(p)$ у комплексну площину задовольняє умови леми Жордана, оскільки

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \max_{|p|=R} |F(p)| = 0.$$

Функція $F(p) = \omega/(p^2 + \omega^2)$ як функція комплексної змінної p має дві скінченні ізольовані особливі точки $p_1 = i\omega$ та $p_2 = -i\omega$, кожна з яких є простим полюсом. Знайшовши інтеграл від функції $e^{pt} F(p)$ по межі області, що обмежена прямою $\operatorname{Re} p = s$ та дугою C_R , і спрямувавши радіус R кола до $+\infty$, отримаємо:

$$f(t) = \sum_{k=1}^2 \operatorname{res}_{p_k} \frac{e^{pt} \omega}{p^2 + \omega^2} = \frac{\omega e^{i\omega t}}{2i\omega} - \frac{\omega e^{-i\omega t}}{2i\omega} = \sin \omega t, \quad t \geq 0.$$

У багатьох випадках при знаходженні оригіналу за відомим його зображенням, функцією $F(p)$, корисними є теореми про розклад оригіналів та зображень у ряди – ці теореми коротко називають *теоремами про розклад*.

Теорема 19.6 (перша теорема про розклад). Якщо точка $p = \infty$ для функції $F(p)$ є усунюю ізольованою особливою точкою, а розклад функції

$F(p)$ в околі $p = \infty$ має вигляд

$$F(p) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k p^{-k}, \quad \left| \frac{1}{p} \right| < \alpha,$$

то оригіналом для функції $F(p)$ є функція

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{(n-1)!} t^{n-1} \cdot H(t),$$

де $H(t)$ – функція Хевісайда. При цьому функція $f(t)$ є цілою.

Надалі в подібних формулах множення на функцію Хевісайда $H(t)$ опускається.

Справедливо й обернене твердження: якщо функція $f(t)$ є цілою і зображується рядом

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{(n-1)!} t^{n-1},$$

причому коефіцієнт зростання функції $f(t)$ рівний α , то зображення $F(p)$ функції $f(t)$ за Лапласом можна подати у вигляді збіжного за степенями $\frac{1}{p}$ ряду при $\left| \frac{1}{p} \right| < \alpha$.

Зауваження 19.3. З першої теореми про розклад випливає, що у випадку зображення за Лапласом, що записується за допомогою ряду за степенями $1/p$, його оригінал може бути записано за допомогою ряду, який збігається для всіх t . Однак обернене твердження не є вірним, тобто якщо оригінал записується за допомогою ряду, що збігається для всіх t , то його зображення за Лапласом не завжди записується за допомогою збіжного ряду.

Теорема 19.7 (друга теорема про розклад). Нехай виконуються умови:

- 1) функція $F(p)$ мероморфна в деякій півплощині $\operatorname{Re} p > \alpha_0$;
- 2) існує система кіл $c_n := \{p \in \mathbb{C} : |p| = R_n\}$, де $R_1 < R_2 < \dots < R_n < \dots$, та $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n = +\infty$, для яких рівномірно щодо $\arg p$ виконується умова

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \max_{p \in c_n} |F(p)| = 0;$$

- 3) для будь-якого $a > \alpha_0$ абсолютно збігається невластний інтеграл

$$\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p) dp.$$

Тоді оригіналом для функції $F(p)$ є функція

$$f(t) = \sum_{p_k} \operatorname{res}_{p_k} (e^{pt} F(p)),$$

де сума лишків обчислюється за всіма особливими точками p_k функції $F(p)$ у порядку неспадання їх модулів.

Наслідок 19.1. При розв'язанні різноманітних практичних задач виникає потреба визначити оригінал, коли зображення, функція $F(p)$, є дробово-раціональною, тобто $F(p)$ має вигляд

$$F(p) = \frac{P_n(p)}{Q_m(p)},$$

причому степінь n полінома $P_n(p)$ у чисельнику менше ніж степінь m полінома $Q_m(p)$ у знаменнику.

Оригіналом для функції $F(p)$ у такому випадку є функція

$$f(t) = \sum_{p_k} \frac{1}{(m_k - 1)!} \lim_{p \rightarrow p_k} \frac{d^{m_k-1}}{dp^{m_k-1}} \left(\frac{P_n(p)}{Q_m(p)} (p - p_k)^{m_k} e^{pt} \right), \quad (19.10)$$

де p_k – нулі полінома $Q_m(p)$, а m_k – їх кратність.

У випадку, коли поліном $Q_m(p)$ має лише прості корені (p_k , $k = \overline{1, m}$), формула (19.10) набуває вигляду

$$f(t) = \sum_{k=1}^m \frac{P_n(p_k)}{Q'_m(p_k)} e^{p_k t}.$$

Зауваження 19.4. Якщо поліноми $P_n(p)$ та $Q_m(p)$ мають дійсні коефіцієнти і корені полінома $Q_m(p)$ є простими, то оригінал для $F(p)$ можна записати таким чином:

$$f(t) = \sum \frac{P_n(p_k)}{Q'_m(p_k)} e^{p_k t} + 2 \operatorname{Re} \left(\sum \frac{P_n(p_k)}{Q'_m(p_k)} \right),$$

де в першій сумі підсумовування проводиться за дійсними коренями полінома $Q_m(p)$, а в другій – за комплексними коренями з додатними уявними частинами.

Зауваження 19.5. Якщо нулі полінома $Q_m(p)$ є простими й мають вигляд $p_k = s_k + i\sigma_k$, $k = \overline{1, m}$, то формулу (19.10) можна записати ще так:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{P_n(s_k + i\sigma_k)}{Q'_m(s_k + i\sigma_k)} e^{s_k t} (\cos \sigma_k t + i \sin \sigma_k t).$$

Звідси випливає, що дійсним ($\sigma_k = 0$) кореням полінома $Q_m(p)$ відповідають аперіодичні коливання, комплексним кореням з від'ємними дійсними частинами – згасаючі, а чисто уявним ($s_k = 0$, $\sigma_k \neq 0$) кореням – гармонійні.

Для коливних систем за наявності в них тертя, їх поведінку, що відповідає режиму, який встановився, математично можна описати за допомогою

формули

$$f(t) = 2 \operatorname{Re} \sum \frac{P_n(i\sigma_k)}{Q'_m(i\sigma_k)} e^{i\sigma_k t},$$

де підсумовування проводиться за всіма чисто уявними коренями $p_k = i\sigma_k$ з додатними уявними частинами.

У випадку, коли поліном $Q_m(p)$ має лише прості корені, серед яких є корінь, рівний нулю, тобто коли справедлива рівність $Q_m(p) = pQ_{m-1}(p)$, оригіналом для дробово-раціональної функції-зображення $F(p)$ є функція

$$f(t) = \frac{P_n(0)}{Q_{m-1}(0)} + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{P_n(p_k)}{p_k Q'_{m-1}(p_k)} e^{p_k t},$$

де p_k , $k = \overline{1, m-1}$, – корені полінома $Q_{m-1}(p)$.

Остання формула часто корисна при розв'язанні задач з електротехніки за допомогою операційного числення.

Відзначимо, що у попередніх міркуваннях випадок $m \geq n$ виключається, оскільки у цьому випадку після ділення полінома $P_n(p)$ на $Q_m(p)$ у функції $F(p)$ можна виділити алгебраїчний поліном з невід'ємними степенями змінної p , який не задовольняє умови теореми 19.7.

19.3.3 Питання для перевірки теоретичних знань

Означення перетворення Лапласа та умови щодо функції, до якої застосовується перетворення Лапласа. Теорема про голоморфність зображення за Лапласом.

Теорема про обернене перетворення (інтеграл Мелліна). Методи обчислення інтегралу Мелліна. Перша і друга теореми про розклад та їх наслідки.

Основні властивості перетворення за Лапласом (лінійність, теореми подібності, запізнення, зміщення, випередження, зображення похідної функції (диференціювання оригіналу), диференціювання зображення, диференціювання за параметром зображення, зображення інтегралу, інтегрування зображення).

Теорема множення (Бореля). Теорема про зображення добутку двох функцій. Інтеграл Дюамеля.

19.3.4 Завдання для самостійної роботи

Знайти оригінали за образами:

- 1) $F(p) = p(p^2 + \omega^2)^{-1}$, де $\omega \in \mathbb{R}$;
- 2) $F(p) = p^{-3}(p^2 + \omega^2)^{-1}$, де $\omega \in \mathbb{R}$;
- 3) $F(p) = p^{-3}(p^2 + \omega^2)^{-1}$, де $\omega \in \mathbb{R}$;
- 4) $F(p) = p^2(p^2 + \omega^2)^{-2}$, де $\omega \in \mathbb{R}$;

- 5) $F(p) = \frac{n!}{p^{n+1}} \frac{1}{p - \alpha}$, де $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}$;
- 6) $F(p) = 1/p^{\alpha+1}$, де $\alpha > 0$;
- 7) $F(p) = 1/\sqrt{p^2 + 1}$;
- 8) $F(p) = \lambda(p^2 - \lambda^2)^{-1}$, де $\lambda \in \mathbb{R}$;
- 9) $F(p) = (p - p_0)(p^2 - \omega^2)^{-1} p^{-2}$, де $p_0, \omega \in \mathbb{R}$;
- 10) $F(p) = \omega p (p^2 + \omega^2)^{-2}$, де $\omega \in \mathbb{R}$;
- 11) $F(p) = \frac{1}{p} e^{-1/p}$;
- 12) $F(p) = \frac{1}{p} e^{1/p^2}$;
- 13) $F(p) = \sin \frac{1}{p}$;
- 14) $F(p) = \frac{1}{p} \cos \frac{1}{p}$.

19.4 Розв'язування звичайних диференціальних рівнянь операційним методом

Властивості перетворення Лапласа (лінійність, зображення похідної) дають можливість знаходити розв'язки задач Коші для звичайних лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Дійсно, якщо задано задачу Коші вигляду

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_n x = f(t), \quad a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}, \quad (19.11)$$

з початковими умовами

$$x(0) = x_0, \quad x^{(1)}(0) = x_{10}, \quad \dots \quad x^{(n-1)}(0) = x_{n-1,0}, \quad (19.12)$$

то застосувавши перетворення Лапласа до обох частин рівняння (19.11) і врахувавши початкові умови (19.12), задачу Коші (19.11), (19.12) можна записати у вигляді еквівалентного лінійного алгебраїчного рівняння для зображення $X(p)$ шуканого розв'язку $x(t)$. Визначивши вираз для $X(p)$ і знайшовши його оригінал, отримаємо розв'язок $x(t)$ задачі Коші (19.11), (19.12).

При розв'язанні задач з електротехніки часто використовується така формула: якщо $\varphi(t)$ – розв'язок задачі Коші для звичайного лінійного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами вигляду

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_n x = 1, \quad a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R},$$

з однорідними (нульовими) початковими умовами $x(0) = x^{(1)}(0) = \dots = x^{(n-1)}(0) = 0$, то розв'язок задачі Коші для рівняння (19.11) з цими ж початковими умовами можна знайти за формулою

$$x(t) = \int_0^t \varphi'(t) f(t - \tau) d\tau = \int_0^t \varphi'(t - \tau) f(\tau) d\tau,$$

тобто без обчислення зображення за Лапласом функції $f(t)$ у правій частині рівняння (19.11).

19.4.1 Приклади розв'язування задач

19.4.1.1. Розглянемо задачу Коші для лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами:

$$\begin{aligned} y'' - 4y' + 5y &= 0, \quad t > 0, \\ y(0) &= 1, \quad y'(0) = -1. \end{aligned} \quad (19.13)$$

▷ Для розв'язання поставленої задачі застосуємо до рівняння перетворення Лапласа. Нехай $y(t) \doteq Y(p)$. Використовуючи правило диференціювання оригіналу та початкові умови задачі, отримаємо:

$$\begin{aligned} y'(t) &\doteq pY(p) - y(0) = pY(p) - 1, \\ y''(t) &\doteq p^2Y(p) - py(0) - y'(0) = p^2Y(p) - p + 1. \end{aligned}$$

У результаті, після застосування перетворення Лапласа, задача Коші (19.13) перепишеться у вигляді

$$Y(p)(p^2 - 4p + 5) = p - 5,$$

звідки легко знаходимо

$$Y(p) = \frac{p - 5}{p^2 - 4p + 5} = \frac{p - 5}{(p - 2 + i)(p - 2 - i)}.$$

Невідому функцію $y(t)$, $t \geq 0$, шукаємо за її перетворенням за Лапласом $Y(p)$, використовуючи формулу обернення Мелліна. Оскільки функція $Y(p)$ аналітична при $\operatorname{Re} p > 2$, то маємо

$$y(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{pt} Y(p) dp = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{e^{pt}(p-5)}{p^2 - 4p + 5} dp, \quad (19.14)$$

де $c > 2$ — довільне фіксоване число.

При $t \geq 0$ інтеграл (19.14) можна порахувати шляхом замикання контуру в півплощині $\operatorname{Re} p < c$, у якій підінтегральний вираз має два прості полюси в точках $p = 2 \pm i$. У результаті отримаємо

$$\begin{aligned} y(t) &= \operatorname{res}_{p=2-i} \frac{e^{pt}(p-5)}{p^2 - 4p + 5} + \operatorname{res}_{p=2+i} \frac{e^{pt}(p-5)}{p^2 - 4p + 5} = \\ &= e^{2t}(\cos t - 3 \sin t), \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

19.4.1.2. Розглянемо задачу Коші для лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами:

$$\begin{aligned} y'' + 2y' - 3y &= \cos 2t, \quad t > 0, \\ y(0) &= y'(0) = 0. \end{aligned} \quad (19.15)$$

▷ Для розв'язання поставленої задачі застосуємо до рівняння перетворення Лапласа. Нехай $y(t) \doteq Y(p)$. Використовуючи правило диференціювання оригіналу та початкові умови задачі, отримаємо:

$$\begin{aligned} y'(t) &\doteq pY(p) - y(0) = pY(p), \\ y''(t) &\doteq p^2Y(p) - py(0) - y'(0) = p^2Y(p). \end{aligned}$$

При цьому для правої частини рівняння матимемо $\cos 2t \doteq p/(p^2 + 4)$.

У результаті, після застосування перетворення Лапласа, для образу $Y(p)$ невідомої функції $y(t)$ отримаємо рівняння

$$Y(p)(p^2 + 2p - 3) = \frac{p}{p^2 + 4},$$

з якого легко можна знайти перетворення за Лапласом функції $y(t)$:

$$\begin{aligned} Y(p) &= \frac{p}{(p^2 + 4)(p^2 + 2p - 3)} = \\ &= \frac{p}{(p - 2i)(p + 2i)(p + 3)(p - 1)}. \end{aligned}$$

Для знаходження самої невідомої функції $y(t)$, $t \geq 0$, використаємо формулу Мелліна. Ураховуючи те, що $Y(p)$ є аналітичною функцією при $\operatorname{Re} p > 1$, отримаємо

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{pt} Y(p) dp = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{p e^{pt} dp}{(p - 2i)(p + 2i)(p + 3)(p - 1)}, \end{aligned} \quad (19.16)$$

де $c > 1$ – довільне фіксоване число.

При $t \geq 0$ для обчислення інтеграла (19.16) замикаємо контур інтегрування в півплощині $\operatorname{Re} p < c$, у якій підінтегральний вираз має чотири прості полюси в точках $p = \pm 2i$, $p = -3$, $p = 1$. У результаті матимемо

$$\begin{aligned} y(t) &= \operatorname{res}_{p=2i} e^{pt} Y(p) + \operatorname{res}_{p=-2i} e^{pt} Y(p) + \operatorname{res}_{p=-3} e^{pt} Y(p) + \operatorname{res}_{p=1} e^{pt} Y(p) = \\ &= -\frac{7}{65} \cos 2t + \frac{4}{65} \sin 2t + \frac{1}{20} e^t + \frac{3}{52} e^{-3t}, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

19.4.2 Питання для перевірки теоретичних знань

Означення перетворення Лапласа та умови щодо функції, до якої застосовується перетворення Лапласа. Теорема про голоморфність зображення за Лапласом.

Теорема про обернене перетворення (інтеграл Мелліна). Методи обчислення інтегралу Мелліна. Перша і друга теореми про розклад та їх наслідки.

Основні властивості перетворення за Лапласом (лінійність, теореми подібності, запізнення, зміщення, випередження, зображення похідної функції (диференціювання оригіналу), диференціювання зображення, диференціювання за параметром зображення, зображення інтегралу, інтегрування зображення).

Теорема множення (Бореля). Теорема про зображення добутку двох функцій. Інтеграл Дюамеля.

19.4.3 Завдання для самостійної роботи

Використовуючи перетворення Лапласа, знайти розв'язки задач Коші :

- 1) $y'' - 4y' + 8y = 0, t > 0; \quad y(0) = 1, y'(0) = -1;$
- 2) $y'' - 6y' + 5y = 0, t > 0; \quad y(0) = -1, y'(0) = 2;$
- 3) $y'' + 6y' + 9y = 0, t > 0; \quad y(0) = 0, y'(0) = 2;$
- 4) $y''' - 2y'' + y - 2y = 0, t > 0; \quad y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = 0;$
- 5) $y''' + 5y'' + 8y' + 4y = 0, t > 0; \quad y(0) = 1, y'(0) = 0, y''(0) = 0;$
- 6) $4y'' + 12y' + 9y = 144 e^{-3t/2}, t > 0; \quad y(0) = 1, y'(0) = 1/2;$
- 7) $y'' - 5y' + 6y = \operatorname{ch} 2t, t > 0; \quad y(0) = 0, y'(0) = 1;$
- 8) $y'' + 3y' - 4y = e^t(t + 1), t > 0; \quad y(0) = 0, y'(0) = 1;$
- 9) $y'' - 2y' = e^t(t^2 + t + 3), t > 0; \quad y(0) = 2, y'(0) = 2;$
- 10) $y'' - 7y' + 10y = e^{-t} - \cos t, t > 0; \quad y(0) = 1, y'(0) = 1;$
- 11) $y'' + 9y = -\sin 3t, t > 0; \quad y(0) = 0, y'(0) = 0;$
- 12) $y'' - 2y' + y = 2 \operatorname{sh} t, t > 0; \quad y(0) = 0, y'(0) = 0;$
- 13) $y'' - 3y' - 4y = e^{4t} \sin t, t > 0; \quad y(0) = 2, y'(0) = 1;$
- 14) $y'' + 6y' + 8y = 2 e^{-t}(\cos 3t + 1), t > 0; \quad y(0) = 2, y'(0) = 1;$
- 15) $y'' + 2y' + 2y = 2 e^{-t} \sin t, t > 0; \quad y(0) = 1, y'(0) = 1;$
- 16) $y'' - 4y' + 5y = e^{2t}(1 + \cos t), t > 0; \quad y(0) = 0, y'(0) = 1.$

19.5 Розв'язування диференціальних рівнянь із запізненням операційним методом

Операційне числення можна використовувати для знаходження розв'язку початкової задачі (задачі Коші) для звичайних лінійних диференціальних рівнянь із запізненням та сталими коефіцієнтами. Початкова задача для диференціального рівняння із запізненням першого порядку формулюється таким чином: знайти таку неперервно диференційовну функцію $x(t)$, яка задовольняє лінійне диференціальне рівняння із запізненням

$$\frac{dx(t)}{dt} + bx(t) + ax(t - \tau) = f(t), \quad (19.17)$$

де $b, a, \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $\tau > 0$, та початкову умову (умову Коші)

$$x(t) = \varphi(t), \quad 0 \leq t \leq \tau. \quad (19.18)$$

Величина τ в рівнянні (19.17) називається *запізненням*. Функція $\varphi(t)$, $0 \leq t \leq \tau$, вважається неперервною і називається *початковою*.

Лінійне диференціальне рівняння із запізненням (19.17) має нескінченну множину функціонально незалежних розв'язків, які можна записати в явному вигляді, якщо відомі корені (нулі) так званого характеристичного квазіполінома $\kappa(\lambda) = \lambda + b + ae^{-\tau\lambda}$.

Даний квазіполіном над полем комплексних чисел має зліченну множину коренів, причому всі вони, за винятком хіба що двох, є комплексними.

Якщо, наприклад, $\lambda = \lambda_0$ – простий дійсний корінь квазіполінома $\kappa(\lambda)$, то такому кореню відповідає розв'язок рівняння (19.17) вигляду $x_0(t) = e^{\lambda_0 t}$; якщо $\lambda = \lambda_1$ – кратний (квазіполіном $\kappa(\lambda)$ може мати дійсні корені кратністю не більше ніж два) дійсний корінь квазіполінома $\kappa(\lambda)$, то такому кореню відповідають розв'язки рівняння (19.17) вигляду $x_{11}(t) = e^{\lambda_1 t}$ та $x_{12}(t) = te^{\lambda_1 t}$, а якщо $\lambda = s + i\sigma$ – (простий) комплексний ($\sigma \neq 0$) корінь квазіполінома $\kappa(\lambda)$, то такому кореню відповідають розв'язки рівняння (19.17) вигляду $x_{21}(t) = e^{st} \cos \sigma t$ та $x_{22}(t) = e^{st} \sin \sigma t$.

Очевидно, що визначити всі корені квазіполінома $\kappa(\lambda)$ у явному вигляді неможливо, оскільки відповідне рівняння є трансцендентним.

Можна показати, що корені квазіполінома $\kappa(\lambda)$ розташовані в деякій лівій півплощині, тобто існує така дійсна стала γ , що для будь-якого кореня квазіполінома виконується нерівність $\operatorname{Re} \lambda < \gamma$.

З іншого боку, якщо α_1 – показник зростання функції $f(t)$ у правій частині лінійного диференціального рівняння із запізненням (19.17), то кожен його розв'язок $x(t)$ задовольняє нерівність $|x(t)| < Me^{\alpha t}$, де $\alpha = \alpha_1 + |a| + |b|$, тобто має показник зростання, рівний α .

Ці властивості розв'язків лінійного диференціального рівняння із запі-

зненням (19.17) дозволяють використати операційне числення для знаходження розв'язку початкової задачі (19.17), (19.18). З цією метою помножимо рівняння (19.17) на e^{-pt} та проінтегруємо за змінною t у межах від τ до $+\infty$. У результаті отримаємо співвідношення:

$$\begin{aligned} & \int_{\tau}^{+\infty} x'(t)e^{-pt}dt + b \int_{\tau}^{+\infty} x(t)e^{-pt}dt + a \int_{\tau}^{+\infty} x(t-\tau)e^{-pt}dt = \\ & = \int_{\tau}^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt. \end{aligned} \quad (19.19)$$

У даній рівності інтеграли

$$\int_{\tau}^{+\infty} x'(t)e^{-pt}dt, \quad \int_{\tau}^{+\infty} x(t)e^{-pt}dt, \quad \int_{\tau}^{+\infty} x(t-\tau)e^{-pt}dt, \quad \int_{\tau}^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$$

існують для всіх таких p , що $\operatorname{Re} p > \alpha$.

Використовуючи теорему про зображення похідної та початкову умову (19.18), можна встановити рівність

$$\int_{\tau}^{+\infty} x'(t)e^{-pt}dt = -\varphi(\tau)e^{-p\tau} + p \int_{\tau}^{+\infty} x(t)e^{-pt}dt.$$

Виконавши заміну $\xi = t - \tau$ та позначивши знову $\xi = t$, одержуємо:

$$\int_{\tau}^{+\infty} x(t-\tau)e^{-pt}dt = e^{-p\tau} \left[\int_0^{\tau} \varphi(t)e^{-pt}dt + \int_{\tau}^{+\infty} x(t)e^{-pt}dt \right].$$

Тоді співвідношення (19.19) можна записати таким чином:

$$\kappa(p) \int_{\tau}^{+\infty} x(t)e^{-pt}dt = \varphi(\tau)e^{-p\tau} - ae^{-p\tau} \int_0^{\tau} \varphi(t)e^{-pt}dt + \int_{\tau}^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt,$$

де $\kappa(p) = p + b + ae^{-p\tau}$.

Позначивши праву частину цієї рівності за допомогою $h(p)$ та застосувавши формулу Мелліна (19.8), остаточно знаходимо вираз для функції $x(t)$ – розв'язку початкової задачі (19.17), (19.18):

$$x(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{h(p)}{\kappa(p)} e^{pt} dp, \quad t > \tau,$$

де

$$h(p) = \varphi(\tau)e^{-p\tau} - ae^{-p\tau} \int_0^{\tau} \varphi(t)e^{-pt}dt + \int_{\tau}^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt.$$

19.5.1 Питання для перевірки теоретичних знань

Означення перетворення Лапласа та умови щодо функції, до якої застосовується перетворення Лапласа. Теорема про голоморфність зображення за Лапласом.

Теорема про обернене перетворення (інтеграл Мелліна). Методи обчислення інтегралу Мелліна. Перша і друга теореми про розклад та їх наслідки.

Основні властивості перетворення за Лапасом (лінійність, теореми подібності, запізнення, зміщення, випередження, зображення похідної функції (диференціювання оригіналу), диференціювання зображення, диференціювання за параметром зображення, зображення інтегралу, інтегрування зображення).

Теорема множення (Бореля). Теорема про зображення добутку двох функцій. Інтеграл Дюамеля.

19.5.2 Завдання для самостійної роботи

Використовуючи операційне числення, знайти розв'язки початкових задач:

- 1) $x'(t) + x(t - \frac{\pi}{2}) = 0$, $x(t) = \sin t$, $t \in [0, \pi/2]$;
- 2) $x'(t) + x(t - \frac{\pi}{2}) = 0$, $x(t) = \cos t$, $t \in [0, \pi/2]$;
- 3) $x'(t) - x(t - \frac{\pi}{2}) = 2 \cos t$, $x(t) = \sin t$, $t \in [0, \pi/2]$;
- 4) $x'(t) + 2x(t - \frac{\pi}{2}) = \sin t$, $x(t) = \cos t$, $t \in [0, \pi/2]$.

19.6 Розв'язування інтегральних рівнянь операційним методом

Властивості перетворення Лапласа (лінійність, зображення інтегралу від функції) дають можливість також знаходити розв'язки лінійних інтегральних рівнянь аналогічно описаному вище методу розв'язання задачі Коші для звичайних лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

19.6.1 Приклад розв'язання задачі

Розглянемо інтегральне рівняння Вольтерра з ядром, що залежить від різниці аргументів,

$$y(t) = \operatorname{sh} 3t + 2 \int_0^t e^{t-\tau} y(\tau) d\tau, \quad t \geq 0. \quad (19.20)$$

▷ До рівняння (19.20) застосуємо перетворення Лапласа. Позначимо $y(t) \doteq Y(p)$. Для першого доданка у правій частині (19.20) маємо $\operatorname{sh} 3t \doteq 3/(p^2 + 9)$. Другий доданок у правій частині (19.20) фактично є згорткою функцій $y(t)$ та e^t . Ураховуючи те, що $e^t \doteq 1/(p - 1)$, за теоремою множення (теоремою про образ за Лапасом згортки функцій) цей доданок після застосування перетворення Лапласа матиме вигляд $Y(p)/(p - 1)$.

У результаті, після застосування перетворення Лапласа, інтегральне рівняння (19.20) перепишеться у вигляді

$$Y(p) = \frac{3}{p^2 - 9} + 2 \frac{Y(p)}{p - 1}.$$

З останньої рівності знаходимо

$$Y(p) = \frac{3(p-1)}{(p^2-9)(p-3)} = \frac{3(p-1)}{(p-3)^2(p+3)}.$$

Оскільки функція $Y(p)$ аналітична при $\operatorname{Re} p > 3$, то за формулою Мелліна отримаємо:

$$y(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{pt} Y(p) dp = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{3(p-1)e^{pt} dp}{(p-3)^2(p+3)}, \quad (19.21)$$

де $c > 3$ – довільне фіксоване число.

Для обчислення інтеграла (19.21) при $t \geq 0$ контур інтегрування "замикаємо" в півплощині $\operatorname{Re} p < c$, у якій підінтегральний вираз має полюс другого порядку в точці $p = 3$ та простий полюс у точці $p = -3$.

У результаті знаходимо

$$\begin{aligned} y(t) &= \operatorname{res}_{p=3} \frac{3(p-1)e^{pt}}{(p-3)^2(p+3)} + \operatorname{res}_{p=-3} \frac{3(p-1)e^{pt}}{(p-3)^2(p+3)} = \\ &= \frac{2}{3} \operatorname{sh} 3t + t e^{3t}, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

◁

19.6.2 Питання для перевірки теоретичних знань

Означення перетворення Лапласа та умови щодо функції, до якої застосовується перетворення Лапласа. Теорема про голоморфність зображення за Лапласом.

Теорема про обернене перетворення (інтеграл Мелліна). Методи обчислення інтегралу Мелліна. Перша і друга теореми про розклад та їх наслідки.

Основні властивості перетворення за Лапласом (лінійність, теореми подібності, запізнення, зміщення, випередження, зображення похідної функції (диференціювання оригіналу), диференціювання зображення, диференціювання за параметром зображення, зображення інтегралу, інтегрування зображення).

Теорема множення (Бореля). Теорема про зображення добутку двох функцій. Інтеграл Дюамеля.

19.6.3 Завдання для аудиторної роботи

Використовуючи перетворення Лапласа, розв'язати такі інтегральні рівняння:

$$1) \quad y(t) = \sin t + \int_0^t e^{t-\tau} y(\tau) d\tau, \quad t \geq 0;$$

$$2) \quad y(t) = \cos t + \int_0^t e^{t-\tau} y(\tau) d\tau, \quad t \geq 0;$$

$$3) y(t) = t \cos t + \int_0^t e^{t-\tau} y(\tau) d\tau, t \geq 0;$$

$$4) y(t) = t \operatorname{ch} 2t + 3 \int_0^t e^{\tau-t} y(\tau) d\tau, t \geq 0;$$

$$5) y(t) = \sin 2t - \frac{8}{3} \int_0^t \operatorname{sh} 3(t-\tau) y(\tau) d\tau, t \geq 0;$$

$$6) y(t) = e^{3t} + \frac{9}{4} \int_0^t \operatorname{sh} 4(t-\tau) y(\tau) d\tau, t \geq 0;$$

$$7) y(t) = t^3 + \int_0^t \sin(t-\tau) y(\tau) d\tau, t \geq 0;$$

$$8) y(t) = t + 2 \int_0^t \cos(t-\tau) y(\tau) d\tau, t \geq 0;$$

$$9) y(t) = e^t \sin 2t + 2 \int_0^t \cos(t-\tau) d\tau, t \geq 0;$$

$$10) y(t) = e^{2t} + \cos 3t + \int_0^t \sin(t-\tau) y(\tau) d\tau, t \geq 0;$$

$$11) y(t) = t^3 + \operatorname{ch} t + \int_0^t \sin(t-\tau) y(\tau) d\tau, t \geq 0;$$

$$12) y(t) = \cos t + \frac{1}{2} \int_0^t (t-\tau) y(\tau) d\tau, t \geq 0;$$

$$13) y(t) = \operatorname{sh} 2t + \frac{1}{2} \int_0^t (t-\tau)^2 y(\tau) d\tau, t \geq 0.$$

19.7 Розв'язування крайових задач математичної фізики операційним методом

Методика застосування перетворення Лапласа для побудови розв'язків крайових задач математичної фізики аналогічна методиці знаходження розв'язків задачі Коші для звичайних лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Із застосуванням цієї методики можна ознайомитися на прикладах, що розглядаються в наступному параграфі.

19.7.1 Приклади розв'язування задач

19.7.1.1. Розглянемо крайову задачу для одновимірного хвильового рівняння

$$\begin{aligned} u_{tt} - a^2 u_{xx} &= 0, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u|_{x=0} &= u|_{x=l} = 0, \quad t \geq 0, \\ u|_{t=0} &= u_0 \sin(\pi x/l), \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad 0 \leq x \leq l; u_0 \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (19.22)$$

розв'язок якої побудуємо, використовуючи перетворення Лапласа за змінною t .

▷ Нехай

$$u(x, t) \doteq \int_0^{+\infty} e^{-pt} u(x, t) dt = U(x, p).$$

Тоді

$$u_{xx}(x, t) \doteq \int_0^{+\infty} e^{-pt} u_{xx}(x, t) dt = U_{xx}(x, p),$$

і за теоремою про диференціювання оригіналу маємо

$$u_{tt}(x, t) \doteq p^2 U(x, p) - p u|_{t=0} - u_t|_{t=0} = p^2 U(x, p) - u_0 p \sin(\pi x/l).$$

У результаті застосування перетворення Лапласа до рівняння та крайових умов (19.22), крайова задача перепишеться у вигляді

$$\begin{aligned} U_{xx} - \left(\frac{p}{a}\right)^2 U &= -\frac{u_0 p}{a^2} \sin \frac{\pi x}{l}, \quad 0 < x < l, \\ U|_{x=0} &= U|_{x=l} = 0. \end{aligned} \quad (19.23)$$

У рівнянні (19.23) присутня похідна лише за змінною x , тобто після перетворення Лапласа крайова задача для рівняння з частинними похідними (19.22) звелася до крайової задачі для звичайного диференціального рівняння.

При розв'язанні задачі (19.23) величина p розглядається як параметр.

Розв'язок лінійного неоднорідного рівняння (19.23) зобразимо у вигляді

$$U(x, p) = A_p \cos \frac{px}{a} + B_p \sin \frac{px}{a} + V(x, p),$$

де A_p , B_p – невідомі коефіцієнти, а $V(x, p)$ – частинний розв'язок рівняння, який шукаємо методом невизначених коефіцієнтів.

Ураховуючи вигляд правої частини рівняння (19.23), подамо $V(x, p)$ у вигляді

$$V(x, p) = C_p \sin \frac{\pi x}{l}$$

і після підстановки цієї функції в рівняння (19.23) отримаємо

$$C_p = \frac{u_0 p}{p^2 + (a\pi/l)^2}.$$

Таким чином, розв'язок задачі (19.23) матиме вигляд

$$U(x, p) = A_p \cos \frac{px}{a} + B_p \sin \frac{px}{a} + \frac{u_0 p}{p^2 + (a\pi/l)^2} \sin \frac{\pi x}{l}.$$

З крайових умов (19.23) випливає, що $A_p = 0$, $B_p = 0$, або остаточно

$$U(x, p) = \frac{u_0 p}{p^2 + (a\pi/l)^2} \sin \frac{\pi x}{l}.$$

Для відшукування невідомої функції $u(x, t)$ за її зображенням за Лапласом, функцією $U(x, p)$, можна скористатись формулою обернення Мелліна або тим, що

$$\cos \omega t \doteq \frac{p}{p^2 + \omega^2}.$$

Поклавши в останній рівності $\omega = \pi a/l$ та використавши лінійність перетворення Лапласа, отримаємо

$$U(x, p) \doteq u(x, t) = u_0 \cos \frac{\pi a t}{l} \cdot \sin \frac{\pi x}{l}, \quad 0 \leq x \leq l, \quad t \geq 0.$$

◁

19.7.1.2. Розглянемо крайову задачу для рівняння теплопровідності

$$\begin{aligned} u_t - a^2 u_{xx} &= q_0 e^{-t} x, \quad t > 0, \quad 0 < x < l, \\ u|_{x=0} &= 0, \quad u_x|_{x=l} = 0, \quad t \geq 0, \\ u|_{t=0} &= 0, \quad 0 \leq x \leq l. \end{aligned} \quad (19.24)$$

▷ Для розв'язання поставленої задачі використаємо перетворення Лапласа за змінною t . Нехай

$$u(x, t) \doteq \int_0^{+\infty} e^{-pt} u(x, t) dt = U(x, p).$$

Тоді

$$\begin{aligned} u_x(x, t) &\doteq \int_0^{+\infty} e^{-pt} u_x(x, t) dt = U_x(x, p), \\ u_{xx}(x, t) &\doteq \int_0^{+\infty} e^{-pt} u_{xx}(x, t) dt = U_{xx}(x, p), \end{aligned}$$

і, згідно теореми про диференціювання оригіналу, враховуючи початкову умов, знаходимо

$$u_t(x, t) \doteq pU(x, p) - u|_{t=0} = pU(x, p).$$

Врахуємо, що $e^{-t} \doteq 1/(p+1)$.

Застосовуючи перетворення Лапласа до рівняння та крайових умов задачі (19.24), отримаємо

$$\begin{aligned} U_{xx} - \frac{p}{a^2} U &= -\frac{q_0 x}{p+1}, \quad 0 < x < l, \\ U|_{x=0} &= 0, \quad U_x|_{x=l} = 0. \end{aligned} \quad (19.25)$$

Аналогічно попередньому прикладу вихідна задача (19.24) звелась до задачі (19.25), у якій присутнє диференціювання лише за змінною x , тобто фактично крайова задача для рівняння з частинними похідними знову зведена до крайової задачі для звичайного диференціального рівняння.

При розв'язанні задачі (19.25) величина p розглядається як параметр.

Загальний розв'язок рівняння (19.25) подамо у вигляді

$$U(x, p) = A_p \operatorname{ch} \frac{\sqrt{p}}{a} x + B_p \operatorname{sh} \frac{\sqrt{p}}{a} x + V(x, p),$$

де $V(x, p)$ – частинний розв'язок рівняння, який шукаємо у вигляді

$$V(x, p) = C_p x + D_p.$$

Невідомі величини C_p , D_p шукаємо методом невизначених коефіцієнтів. Після підстановки функції $V(x, p)$ у рівняння (19.25) отримаємо

$$C_p = \frac{q_0}{p(p+1)}, \quad D_p = 0.$$

У результаті загальний розв'язок рівняння (19.25) має вигляд

$$U(x, p) = A_p \operatorname{ch} \frac{\sqrt{p}}{a} x + B_p \operatorname{sh} \frac{\sqrt{p}}{a} x + \frac{q_0 x}{p(p+1)}. \quad (19.26)$$

Невідомі величини A_p , B_p шукаємо з крайових умов (19.25).

Після підстановки (19.26) у ці умови отримаємо

$$A_p = 0, \quad B_p = -\frac{a}{\sqrt{p} \operatorname{ch} \frac{\sqrt{p}}{a} l} \frac{q_0}{p(p+1)}$$

або остаточно, розв'язок задачі (19.25),

$$U(x, p) = \frac{q_0}{p(p+1)} \left(x - \frac{a \operatorname{sh} \frac{\sqrt{p}}{a} x}{\sqrt{p} \operatorname{ch} \frac{\sqrt{p}}{a} l} \right). \quad (19.27)$$

Для визначення шуканої функції $u(x, t)$ за її зображенням за Лапласом $U(x, p)$ використаємо формулу Мелліна.

Незважаючи на те, що функція $U(x, p)$ визначається через багатозначну функцію $\sqrt{p}$, використовуючи парність функції $\operatorname{ch} x$ та непарність $\operatorname{sh} x$, легко показати, що $U(x, p)$ є однозначною мероморфною функцією від змінної p , особливі точки якої збігаються з точками, у яких знаменник обертається в нуль. Такими точками є: $p = 0$, $p = -1$, $p = p_k = -\left(\frac{a\pi}{l}\right)^2 \left(\frac{1}{2} + k\right)^2$, $k \geq 0$. При цьому $p = 0$ – усувна особлива точка, а всі інші є простими полюсами.

Таким чином, $U(x, p)$ є аналітичною у півплощині $\operatorname{Re} p > 0$, і для знаходження функції $u(x, t)$ маємо рівність

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt} U(x, p) dp, \quad 0 \leq x \leq l, \quad t \geq 0, \quad (19.28)$$

де $a > 0$ – довільне фіксоване число. Для обчислення інтеграла (19.28) використаємо другу теорему про розклад. Згідно з цією теоремою отримаємо

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \operatorname{res}_{p=-1} e^{pt} U(x, p) + \sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{res}_{p=p_k} e^{pt} U(x, p) = \\ &= q_0 e^{-t} \left(a \frac{\sin \frac{x}{a}}{\cos \frac{l}{a}} - x \right) - \frac{2a^2 q_0}{l} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k e^{p_k t} \frac{\sin \frac{\pi}{l} \left(\frac{1}{2} + k \right) x}{p_k (p_k + 1)}, \\ &0 \leq x \leq l, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

◁

19.7.2 Питання для перевірки теоретичних знань

Означення перетворення Лапласа та умови щодо функції, до якої застосовується перетворення Лапласа. Теорема про голоморфність зображення за Лапласом.

Теорема про обернене перетворення (інтеграл Мелліна). Методи обчислення інтегралу Мелліна. Перша і друга теореми про розклад та їх наслідки.

Основні властивості перетворення за Лапласом (лінійність, теореми подібності, запізнення, зміщення, випередження, зображення похідної функції (диференціювання оригіналу), диференціювання зображення, диференціювання за параметром зображення, зображення інтегралу, інтегрування зображення).

Теорема множення (Бореля). Теорема про зображення добутку двох функцій. Інтеграл Дюамеля.

19.7.3 Завдання для самостійної роботи

Використовуючи перетворення Лапласа, знайти розв'язки таких крайових задач математичної фізики:

1) $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$

$$u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0, \quad t \geq 0,$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = -\sin \frac{3\pi x}{2l}, \quad 0 \leq x \leq l;$$

2) $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$

$$u_x|_{x=0} = u_x|_{x=l} = 0, \quad t \geq 0,$$

$$u|_{t=0} = \cos \frac{\pi x}{2l}, \quad u_t|_{t=0} = -2 \cos \frac{3\pi x}{2l}, \quad 0 \leq x \leq l;$$

3) $u_t - a^2 u_{xx} = 0, \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$

$$u_x|_{x=0} = u_x|_{x=l} = 0, \quad t \geq 0,$$

-
- $u|_{t=0} = 1 - \cos(\pi x/l), \quad 0 \leq x \leq l;$
 4) $u_t - a^2 u_{xx} = 0, \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$
 $u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0, \quad t \geq 0,$
 $u|_{t=0} = u_0 x(l-x), \quad 0 \leq x \leq l;$
 5) $u_t - a^2 u_{xx} = e^{-t} \sin(\pi x/l), \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$
 $u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0, \quad t \geq 0,$
 $u|_{t=0} = 0, \quad 0 \leq x \leq l;$
 6) $u_t - a^2 u_{xx} = (l-x) e^{-2t}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$
 $u_x|_{x=0} = u_x|_{x=l} = 0, \quad t \geq 0,$
 $u|_{t=0} = 0, \quad 0 \leq x \leq l;$
 7) $u_{tt} - a^2 u_{xx} = \sin \omega t, \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$
 $u|_{x=0} = u_x|_{x=l} = 0, \quad t \geq 0,$
 $u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0, \quad 0 \leq x \leq l;$
 8) $u_{tt} - a^2 u_{xx} = \cos \omega t \cdot \sin \frac{\pi x}{2l}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$
 $u|_{x=0} = u_x|_{x=l} = 0, \quad t \geq 0,$
 $u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad 0 \leq x \leq l;$
 9) $u_t - a^2 u_{xx} = 0, \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$
 $u_x|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = e^{-t}, \quad t \geq 0,$
 $u|_{t=0} = \cos(2\pi x/l), \quad 0 \leq x \leq l;$
 10) $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$
 $u|_{x=0} = t e^{-t}, \quad u|_{x=l} = 0, \quad t \geq 0,$
 $u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad 0 \leq x \leq l;$
 11) $u_t - a^2 u_{xx} = 0, \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$
 $u_x|_{x=0} = u_x|_{x=l} = \sin \omega t, \quad t \geq 0,$
 $u|_{t=0} = 0, \quad 0 \leq x \leq l;$
 12) $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \quad x > 0, \quad t > 0,$
 $u_x|_{x=0} = 0, \quad t \geq 0, \quad |u| < +\infty, \quad x \rightarrow +\infty,$
 $u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = e^{-x}(1 - \cos x), \quad x \geq 0;$

$$13) \quad u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \quad x > 0, \quad t > 0,$$

$$u|_{x=0} = 0, \quad t \geq 0, \quad |u| < +\infty, \quad x \rightarrow +\infty,$$

$$u|_{t=0} = e^{-x} \sin x, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad x \geq 0;$$

$$14) \quad u_t - a^2 u_{xx} = e^{-x} + e^{-t}, \quad x > 0, \quad t > 0,$$

$$u_x|_{x=0} = 0, \quad t \geq 0, \quad |u| < +\infty, \quad x \rightarrow +\infty,$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad x \geq 0;$$

$$15) \quad u_{tt} - a^2 u_{xx} = e^{-2x-t}, \quad x > 0, \quad t > 0,$$

$$u|_{x=0} = 0, \quad t \geq 0, \quad |u| < +\infty, \quad x \rightarrow +\infty,$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad x \geq 0;$$

$$16) \quad u_t - a^2 u_{xx} = 0, \quad x > 0, \quad t > 0,$$

$$u_x|_{x=0} = \sin \omega t, \quad t \geq 0, \quad |u| < +\infty, \quad x \rightarrow +\infty,$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad x \geq 0.$$

19.8 Обчислення сум рядів операційним методом

Методика застосування перетворення Лапласа для обчислення суми ряду

$$S = \sum_{n=k}^{\infty} F(n) \quad (19.29)$$

полягає в тому, що спочатку загальний доданок цього ряду розглядається як значення деякої функції $F(p)$ на множині натуральних чисел $\mathbb{N}$.

При цьому функція $F(p)$ апіорі вважається зображенням за Лапласом певної функції $f(t)$, тобто

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt \quad \text{або} \quad F(n) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-nt} dt, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (19.30)$$

Функція $f(t)$ поки-що невідома і визначається згодом за даним її зображенням – функцією $F(p)$. Ця задача вирішується за допомогою першої та другої теорем про розклади та їх наслідків.

Підставивши в суму ряду (19.29) зображення за Лапласом функції $f(t)$ через інтегральний вираз (19.30) та змінивши порядок операцій підсумовування та інтегрування, отримаємо

$$S = \sum_{n=k}^{\infty} F(n) = \sum_{n=k}^{\infty} \int_0^{+\infty} f(t) e^{-nt} dt = \int_0^{+\infty} f(t) \sum_{n=k}^{\infty} e^{-nt} dt. \quad (19.31)$$

Ряд в правій частині (19.31) обчислюється за допомогою формули для суми нескінченної геометричної прогресії, тобто

$$\sum_{n=k}^{\infty} e^{-nt} = \frac{e^{-kt}}{1 - e^{-t}},$$

після чого з (19.31) для суми ряду отримаємо

$$S = \int_0^{+\infty} f(t) \frac{e^{-kt}}{1 - e^{-t}} dt, \quad (19.32)$$

де функція $f(t)$ вже визначена раніше.

19.8.1 Приклад розв'язування задач

Розглянемо задачу про знаходження суми ряду

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}. \quad (19.33)$$

В даному випадку

$$F(p) = \frac{1}{p(p+1)(p+2)}, \quad k=1,$$

а отже за другою теоремою про розклад та її наслідком 19.1 знаходимо

$$f(t) = \frac{1}{2} (1 - 2e^{-t} + e^{-2t}).$$

Тоді шукана сума ряду визначається згідно формули (19.32) через визначений інтеграл

$$S = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2} (1 - 2e^{-t} + e^{-2t}) \frac{e^{-t}}{1 - e^{-t}} dt = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} (1 - e^{-t}) e^{-t} dt = \frac{1}{4}.$$

19.8.2 Питання для перевірки теоретичних знань

Перша і друга теореми про розклад та їх наслідки.

19.8.3 Завдання для самостійної роботи

Використовуючи перетворення Лапласа, знайти суми таких рядів:

$$a) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n^2-1)}; \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n(n+2)(n+3)}; \quad c) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2+1}{(n-1)^2(n^2+1)};$$

$$d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n+1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}; \quad e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}; \quad f) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^4+1};$$

$$g) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n+1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}; \quad h) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}; \quad i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^4+1}.$$

Список літератури

1. *Александров И.А., Соболев В.В.* Аналитические функции комплексного переменного. – М.: Высшая школа, 1984. – 186 с.
2. *Алешков Ю.З., Смышляев П.П.* Теория функций комплексного переменного и ее приложения. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1986. – 247 с.
3. *Араманович А.А., Лунц Г.Л., Эльсгольц Л.Э.* Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. – М.: Наука, 1968. – 416 с.
4. *Бицадзе А.В.* Основы теории аналитических функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1972. – 264 с.
5. *Боголюбов А.Н.* Математики. Механики. Биографический справочник. – К.: Наукова думка, 1983. – 640 с.
6. *Боярчук А.К.* Справочное пособие по высшей математике: В 5-и т. – Т. 4: Функции комплексного переменного (теория и практика). – М.: Изд-во УРСС, 1999. – 349 с.
7. *Ван-дер Поль Б., Бреммер Х.* Операционное исчисление на основе двустороннего преобразования Лапласа. – М.: Изд-во иностр. лит., 1952. – 507 с.
8. *Волковыский Л.И., Лунц Г.Л., Араманович И.Г.* Сборник задач по теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1975. – 320 с.
9. *Гарднер М.Ф., Бернс Дж.Л.* Переходные процессы в линейных системах. – М.: Физматгиз, 1961. – 551 с.
10. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. – М.: Наука, 1957. – 640 с.
11. *Голузин Г.М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1966. – 544 с.
12. *Гурвиц А., Курант Р.* Теория функций. – М.: Наука, 1968. – 648 с.
13. *Грищенко А.Е., Нагнибида Н.И., Настасьев П.П.* Теория функций комплексного переменного: Решение задач. – К.: Виша школа: Головное изд-во, 1986. – 336 с.
14. *Грищенко О.Ю., Нагнибида М.И., Настасієв П.П.* Теорія функцій комплексної змінної. Розв'язування задач. – К.: Вища школа, 1994. – 375 с.
15. *Давидов Н.О.* Элементы теории функций комплексной переменной. – К.: Рад. шк., 1968. – 212 с.

16. Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа. – М.: Наука, 1965. – 287 с.
17. Диткин В.А., Прудников А.П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. – М.: Физматгиз, 1961. – 524 с.
18. Диткин В.А., Прудников А.П. Справочник по операционному исчислению. – М.: Высш. шк., 1965. – 465 с.
19. Диференціювання функцій комплексної змінної. Конформні відображення. Методичні вказівки до практичних занять з курсу "Комплексний аналіз" для студентів механіко-математичного факультету / Упорядники: В.Г. Самойленко, А.М. Кириченко, А.В. Ловейкін, І.Б. Романенко, Г.В. Верьовкіна. – К.: ВПЦ "Київський університет", 2002. – 84 с.
20. Долженко Е.П., Николаева С.Н. Теория функций комплексной переменной. Методические указания. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1983. – 55 с.
21. Евграфов М.А. Аналитические функции. – М.: Наука, 1968. – 472 с.
22. Евграфов М.А. и др. Сборник задач по теории аналитических функций. – М.: Наука, 1972. – 415 с.
23. Картан А. Элементарная теория аналитических функций одного и нескольких переменных. – М.: Изд-во иностр. лит., 1973. – 296 с.
24. Коппенфельс В., Штальман Ф. Практика конформных отображений. – М.: Изд-во иностр. лит., 1963. – 406 с.
25. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. – М.: Наука, 1971. – 256 с.
26. Крилов М.М. Избранные труды. В 3-х т. – К.: Изд-во АН УССР, 1961. – Т.3. – 399 с.
27. Крилов М.М. Методи наближеного і символічного розв'язання диференціальних рівнянь математичної фізики і техніки. Наукові дослідження з прикладної математики. – К.: Держтехвидав, 1931. – 162 с.
28. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1987. – 688 с.
29. Левин Б.Я. Целые функции (курс лекций). – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1971. – 124 с.

30. *Лурье А.И.* Операционное исчисление в приложении к задачам механики. – М.-Л.: ОНТИ, 1951. – 432 с.
31. *Маркушевич А.И.* Теория аналитических функций: В 2 т. – М.: Наука, 1967-1968. – Т. 1 – 486 с.; Т. 2 – 624 с.
32. *Маркушевич А.И.* Краткий курс теории аналитических функций. – М.: ГИФМЛ, 1961. – 336 с.
33. *Маркушевич А.И., Маркушевич Л.А.* Введение в теорию аналитических функций. – М.: Просвещение, 1977. – 320 с.
34. *Маркушевич А.И.* Избранные главы теории аналитических функций. – М.: Наука, 1976. – 191 с.
35. *Маркушевич А.И.* Комплексные числа и конформные отображения. – М.: Физматгиз, 1960. – 55 с.
36. *Мартиненко В.С.* Операционное исчисление. – К.: Выща школа, 1990. – 360 с.
37. *Мартиненко М.А., Юрик І.І.* Теорія функцій комплексної змінної. Операційне числення. – К.: Слово, 2008. – 295 с.
38. Методичні вказівки до практичних занять з курсу "Теорія функцій комплексної змінної" для студентів механіко-математичного факультету / О.О. Капшивий, А.М. Кириченко. – К.: ВПЦ "Київський університет", 1992. – 60 с.
39. Обчислення інтегралів у сенсі головного значення. Методичні вказівки до практичних занять з дисципліни "Комплексний аналіз" для студентів механіко-математичного факультету / Упорядники: І.Б.Романенко, В.Г. Самойленко. – К., 2008. – 20 с.
40. Операційне числення. Методичні вказівки для студентів механіко-математичного факультету / Упорядники: В.Г. Самойленко, А.В. Ловейкін, В.А. Бородин. – К.: ВПЦ "Київський університет", 2007. – 32 с.
41. *Микусинский Я.* Операторное исчисление. – М.: Изд-во иностр. лит., 1956. – 366 с.
42. *Митропольський Ю.О., Боголюбов О.М.* Микола Митрофанович Крилов. – К.: Наукова думка, 1979. – 92 с.
43. *Полосуев А.М.* Элементы теории функций комплексной переменной. М.: Изд-во Московск. ун-та, 1971. – 100 с.

-
44. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1984. – 432 с.
 45. Романовский П.И. Ряды Фурье. Теория поля. Аналитические и специальные функции. Преобразование Лапласа. – М.: Наука, 1980. – 335 с.
 46. Ряди та інтеграли в комплексній площині. Методичні вказівки до практичних занять з дисципліни "Комплексний аналіз" для студентів механіко-математичного факультету / Упорядники: В.Г. Самойленко, А.В. Ловейкін, Г.В. Верьовкіна. – К.: ВПЦ "Київський університет", 2005. – 77 с.
 47. Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Теория функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1974. – 304 с.
 48. Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И. Лекции по теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1989. – 480 с.
 49. Снеддон И. Преобразование Фурье. – М.: Изд-во иностр. лит., 1955. – 668 с.
 50. Соколов Ю.Д. Элементы теории функций комплексной переменной. – К.: Рад. шк., 1954. – 202 с.
 51. Спрингер Дж. Введение в теорию римановых поверхностей. – М.: Изд-во иностр. лит., 1960. – 343 с.
 52. Стоилов С. Теория функций комплексного переменного: В 2 т. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – Т. 1 – 364 с. Т. 2 – 415 с.
 53. Титчмарш Е. Теория функций. – М.: Наука, 1980. – 463 с.
 54. Фукс Б.А., Шабат Б.В. Функции комплексного переменного и некоторые их приложения. – М.: Наука, 1964. – 388 с.
 55. Хапланов М.Г. Теория функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1965. – 208 с.
 56. Чемерис В.С. Теорія аналітичних функцій: В 5 ч. – К.: Вид-во Київ. ун-та, 1970-1973.
 57. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ: В 2 ч. – М.: Наука, 1976. – Ч. 1. – 320 с.
 58. Шелковников Ф.А., Такайшвили К.Г. Сборник задач по операционному исчислению. – М.: Высш. шк., 1968. – 249 с.
 59. Штокало И.З. Операционное исчисление (обобщения и приложения). – К.: Наукова думка, 1972. – 303 с.

Навчальне видання

САМОЙЛЕНКО Валерій Григорович
БОРОДІН Віктор Анатолійович
ВЕРЬОВКІНА Ганна Володимирівна
ЛОВЕЙКІН Андрій Вячеславович
РОМАНЕНКО Ігор Борисович

КОМПЛЕКСНИЙ АНАЛІЗ ПРИКЛАДИ І ЗАДАЧІ

Навчальний посібник

Оригінал-макет виготовлено авторами

Редактор *ФІО*

Підписано до друку 20.03.2010. Формат $60 \times 84^{1/16}$. Вид № . Гарнітура Arial.

Папір офсетний. Друк офсетний. Наклад 150.

Ум. друк. арк. 13,2. Обл.-вид. арк. 16,14. Зам. № 210- .

Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет"

01601, Київ, б-р Т.Шевченка, 14, кімн. 43

(38044) 239 32 22; (38044) 239 31 72; тел./факс (38044) 239 31 28.

Свідоцтво внесено до Державного реєстру ДК № 1103 від 31.10.02.