

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

КОМПЛЕКСНИЙ АНАЛІЗ КУРС ЛЕКЦІЙ

Навчальний посібник

Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра
за спеціальністю 111 Математика

Електронне мережеве навчальне видання

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2024

Автори: *Голіченко Ірина Ігорівна*, канд. фіз.-мат. наук, доц.
Задерей Надія Миколаївна, канд. фіз.-мат. наук, доц.
Задерей Петро Васильович, д-р фіз.-мат. наук, проф.
Нефьодова Галина Дмитрівна, канд. фіз.-мат. наук.
Самусенко Петро Федорович, д-р. фіз.-мат. наук., доц.

Рецензент *Самойленко, В. Г.*, д-р фіз.-мат. наук, проф.,
чл.-кор. НАН України, голов. наук. співроб.,
Інститут математики НАН України

Відповідальний
редактор *Клесов, О. І.*, д-р фіз.-мат. наук, проф., КПІ ім. Ігоря Сікорського

*Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
(протокол № 1 від 26.09.2024 р.)
за поданням вченої ради Фізико-математичного факультету
(протокол № 10 від 11.09.2024 р.)*

Комплексний аналіз. Курс лекцій [Електронний ресурс]: навч. посіб. для здобувачів ступеня бакалавра за освіт. програмою "Страхова та фінансова математика" спец. 111 Математика / І. І. Голіченко та ін. ; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електрон. текст. дані (1 файл). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2024. – 220 с.

У навчальному посібнику викладено основні розділи комплексного аналізу: комплексні числа та функції комплексної змінної, диференціювання та інтегрування функції комплексної змінної, розвинення аналітичної функції у степеневий ряд та ряд Лорана, теорія лишків, елементи теорії конформних відображень. Навчальний посібник призначено для студентів третього курсу фізико-математичного факультету спеціальності 111 Математика.

Реєстр. № НП 24/25-056. Обсяг 9,5 авт. арк.
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
проспект Берестейський, 37, м. Київ, 03056
<https://kpi.ua>
Свідectво про внесення до Державного реєстру видавців, виготовлювачів
і розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 5354 від 25.05.2017 р.

© І. І. Голіченко, Н. М. Задерей, П. В. Задерей, Г. Д. Нефьодова, П. Ф. Самусенко, 2024
© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2024

Зміст

Передмова	7
1 Комплексні числа та дії над ними	9
1.1 Означення комплексного числа	9
1.2 Властивості операцій над комплексними числами у алгебраїчній формі	10
1.3 Геометрична інтерпретація комплексного числа	13
1.4 Тригонометрична і показникова форми комплексного числа	15
1.5 Добування коренів з комплексного числа	19
Контрольні питання	20
2 Послідовності і ряди комплексних чисел	22
2.1 Послідовності комплексних чисел	22
2.2 Розширена комплексна площина	26
2.3 Стереографічна проекція. Сфера Рімана	27
2.4 Числові ряди	28
Контрольні питання	31
3 Криві і області в комплексній площині	33
3.1 Комплекснозначні функції дійсної змінної	33
3.2 Криві в комплексній площині	37
3.3 Області в комплексній площині	41
Контрольні питання	43
4 Функції комплексної змінної	45
4.1 Поняття функції комплексної змінної	45
4.2 Границя функції комплексної змінної	46
4.3 Неперервні функції комплексної змінної	47
4.4 Послідовності функцій і функціональні ряди	49
4.5 Елементарні функції комплексної змінної	50
Контрольні питання	56
5 Диференціювання функцій комплексної змінної	58
5.1 Означення похідної. Правила диференціювання	58
5.2 Властивості функцій багатьох змінних	62
5.3 Умови Коші – Рімана (д’Аламбера – Ейлера)	64
5.4 Спряжені гармонічні функції	70
5.5 Поняття аналітичної функції	72

Контрольні питання	73
6 Геометричний зміст похідної. Конформне відображення	75
6.1 Геометричний зміст аргумента похідної	75
6.2 Геометричний зміст модуля похідної	78
6.3 Конформне відображення	78
Контрольні питання	80
7 Інтегрування функцій комплексної змінної	82
7.1 Означення інтеграла	82
7.2 Властивості інтегралів	85
7.3 Оцінки інтегралів	85
Контрольні питання	88
8 Інтегральна теорема Коші	90
8.1 Інтегральна теорема Коші	90
8.2 Узагальнення інтегральної теореми Коші	96
8.3 Доповнення і зауваження до інтегральної теореми Коші	98
8.4 Інтеграл і первісна	100
Контрольні питання	105
9 Інтегральна формула Коші	107
9.1 Інтеграл Коші	107
9.2 Теорема про середнє	109
9.3 Інтеграл типу Коші	110
Контрольні питання	111
10 Степеневі ряди	113
10.1 Область збіжності степеневого ряду	113
10.2 Диференціювання та інтегрування степеневого ряду. Ряд Тейлора	118
10.3 Єдиність розвинення функції в степеневий ряд	120
Контрольні питання	121
11 Властивості аналітичних функцій	123
11.1 Аналітичні функції	123
11.2 Нескінченна диференційовність аналітичної функції	126
11.3 Достатні умови аналітичності функції	127
11.4 Методи розвинення функцій у степеневий ряд	129
Контрольні питання	133

12 Ряд Лорана	135
12.1 Область збіжності ряду Лорана	135
12.2 Розвинення аналітичної функції в ряд Лорана	136
12.3 Єдиність розвинення функції в ряд Лорана	138
12.4 Зв'язок між рядами Лорана і рядами Фур'є	141
12.5 Нерівності Коші для коефіцієнтів ряду Лорана	141
Контрольні питання	142
13 Ізольовані особливі точки функцій комплексної змінної	144
13.1 Класифікація ізольованих особливих точок	144
13.2 Ряд Лорана в околі особливої точки	146
13.3 Усувна особлива точка	150
13.4 Зв'язок нулів функції з полюсами	152
13.5 Суттєво особлива точка	156
Контрольні питання	160
14 Теорема Ліувіля	163
14.1 Теорема Ліувіля	163
14.2 Основна теорема алгебри	164
14.3 Мероморфні функції та їх властивості	164
Контрольні питання	165
15 Лишки	167
15.1 Основні означення й поняття	167
15.2 Обчислення лишку в полюсі	169
15.3 Лишки в нескінченно віддаленій точці	171
Контрольні питання	173
16 Застосування лишків	175
16.1 Основна теорема теорії лишків	175
16.2 Обчислення інтегралів по контуру	176
16.3 Обчислення інтегралів від функцій дійсної змінної за допомо- гою лишків	178
16.4 Принцип аргументу і його наслідки	188
Контрольні питання	191
17 Конформні відображення	193
17.1 Поняття конформного відображення	193
17.2 Основні властивості конформних відображень	197
17.3 Основна задача теорії конформних відображень. Теорема Рімана	199

Контрольні питання	200
18 Лінійні та інші найпростіші відображення	202
18.1 Лінійна функція. Ціла лінійна функція	202
18.2 Функція $w = \frac{1}{z}$	204
18.3 Дробово-лінійна функція	205
18.4 Дробово-лінійне відображення, яке три точки переводить у три задані точки	210
18.5 Приклади дробово-лінійних відображень півплощини і круга . .	211
Контрольні питання	212
Література	214
Предметний покажчик	217

Передмова

Курс лекцій призначено для студентів фізико-математичного факультету, які вивчають дисципліну “Комплексний аналіз” з циклу професійної підготовки освітньої програми “Страхова та фінансова математика” (спеціальність 111 “Математика”). Дисципліна “Комплексний аналіз” є однією з ключових дисциплін у підготовці фахівця з математики, її зміст суттєво розширює сферу майбутньої професійної діяльності студентів фізико-математичного факультету.

Курс лекцій забезпечує викладання дисципліни “Комплексний аналіз” обсягом 54 академічних години лекційних занять, яку вивчають на фізико-математичному факультеті у п'ятому семестрі. В курсі лекцій розглядається вступ до комплексного аналізу, диференціювання та інтегрування функції комплексної змінної, розвинення аналітичної функції у степеневий ряд та ряд Лорана, теорія лишків, конформні та найпростіші перетворення функції комплексної змінної.

Метою вивчення дисципліни “Комплексний аналіз” є засвоєння студентами фізико-математичного факультету фундаментальних понять, ідей, методів комплексного аналізу, необхідних для вивчення у подальшому загальнотеоретичних дисциплін, професійно-орієнтовних дисциплін та формування компетенцій та навичок для успішної самореалізації у обраній сфері професійної діяльності.

Предметом навчальної дисципліни “Комплексний аналіз” є однозначні функції комплексної змінної, аналітичні функції, властивості яких суттєво відрізняються від аналогічних властивостей функцій дійсної змінної.

Комплексні числа та теорія функцій комплексної змінної, насамперед, є математичним апаратом для наукового опису фізичного Всесвіту. Як зазначив видатний британський науковець, лауреат Нобелівської премії, почесний доктор КПІ імені Ігоря Сікорського Роджер Пенроуз “усе виглядає таким чином, ніби природа вражена загальним та послідовним характером системи комплексних чисел і дала доручення їм описувати тонкі процеси у найменших масштабах” (Р. Пенроуз “Шлях до реальності або закони, що керують Всесвітом”). Отже, даний курс є важливим не лише для математичних дисциплін, а, насамперед, для прикладних дисциплін, таких, як теоретична фізика, теорія поля, гідромеханіка, квантова механіка, радіофізика, радіотехніка, аеродинаміка, радіоелектроніка. Методи теорії аналітичних функцій суттєво використовуються при аналізі та синтезі у теорії електро- та радіоланцюгів, при вивченні теорії електромагнітного поля, тощо.

Пререквізитами для вивчення дисципліни “Комплексний аналіз” є дисципліни “Лінійна алгебра”, “Аналітична геометрія”, “Математичний аналіз. Функції однієї змінної”, “Математичний аналіз. Функції кількох змінних”. Особливо важливим для вивчення даної дисципліни є засвоєння основ теорії границь функції дійсної змінної, основ диференціювання та інтегрування функцій однієї та кількох змінних, теорії степеневих рядів.

Отримані знання з “Комплексного аналізу” суттєво використовуються у подальшому навчанні при вивченні функціонального аналізу, операційного числення, методів математичної фізики.

Курс лекцій складається з 18 розділів, кожний з яких приблизно відповідає трьом академічним годинам. У кожному розділі детально викладено теоретичний матеріал, сформульовано та доведено основні теореми, твердження та властивості, наведено приклади, що ілюструють теорію. Значна кількість прикладів є авторським доробком. Детальне, покрокове розв’язування прикладів сприяє полегшенню засвоєння відповідного теоретичного матеріалу.

При завершенні кожного розділу наведено контрольні питання та завдання, при опрацюванні яких студент матиме змогу здійснити перевірку розуміння та засвоєння основних означень, властивостей та теорем. При цьому реалізується персональний шлях розвитку навчального потенціалу студента, формуються особисті можливості швидкості та глибини засвоєння нового матеріалу відповідно до рівня його складності та рівня освітньої підготовки студента. Перелік посилань, наданий наприкінці курсу лекцій, містить як основну, так і допоміжну літературу, що стане у нагоді при більш глибокому вивченні теоретичного та практичного курсу “Комплексного аналізу”.

Зважаючи на різну кількість годин, відведених для вивчення комплексного аналізу на технічних факультетах університету, при відповідному коригуванні змісту та обсягу кожного розділу, даний курс лекцій можна використовувати під час проведення лекційних та практичних занять з вищої математики при вивченні розділів “Теорія функцій комплексної змінної” та “Операційне числення. Перетворення Лапласа”.

Довгий час курс “Комплексного аналізу” для студентів фізико-математичного факультету викладав Петро Васильович Задерей, доктор фізико-математичних наук, професор кафедри математичного аналізу та теорії ймовірностей. Петро Васильович докладав чимало зусиль для створення посібника зі згаданого курсу. На жаль, Петра Васильовича не стало 18 червня 2024 року і він не побачив останньої версії даної праці. Проте всі його ідей та наробки склали основу цього посібника. Петро Васильович із задоволенням викладав “Комплексний аналіз” і ми сподіваємось, що змогли зберегти у тексті його майстерний стиль.

1. Комплексні числа та дії над ними

1.1. Означення комплексного числа

Розглянемо множину $\mathbb{C}$ впорядкованих пар дійсних чисел (x, y) , для елементів якої визначено операції додавання та множення наступним чином:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2),$$

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

При цьому елементи $z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{C}$ вважатимемо однаковими тоді і тільки тоді, коли $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$.

Означення 1.1. Множина $\mathbb{C}$ з операціями додавання та множення називається множиною комплексних чисел, а кожен її елемент – комплексним числом.

Комплексне число $z = (x, y)$ можна записати наступним чином

$$z = (x, y) = (x, 0) + (y, 0) \cdot (0, 1) = x + iy,$$

де за визначенням $x = (x, 0)$, $y = (y, 0)$, $i = (0, 1)$.

Число i називається уявною одиницею, оскільки

$$i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1.$$

Запис числа $z \in \mathbb{C}$

$$z = x + iy$$

називається алгебраїчною формою запису комплексного числа. При цьому число x називають дійсною частиною, а число y – уявною частиною комплексного числа $z = x + iy$, вони позначаються символами

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z. \quad (1.1)$$

Комплексне число $x - iy$ називається спряженим до комплексного числа $z = x + iy$ і позначається через $\bar{z}$:

$$\bar{z} = \overline{x + iy} = x - iy. \quad (1.2)$$

Очевидно, що

$$\bar{\bar{z}} = z \quad \text{та} \quad \bar{z} = z \Leftrightarrow z = x \in \mathbb{R}.$$

Використовуючи алгебраїчну форму запису комплексного числа, наведемо еквівалентні означення рівності комплексних чисел, операцій додавання та множення на множині $\mathbb{C}$.

Комплексне число $z_1 = x_1 + iy_1$ дорівнює комплексному числу $z_2 = x_2 + iy_2$ тоді і тільки тоді, коли $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$, тобто $\operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2$ та $\operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2$:

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow x_1 + iy_1 = x_2 + iy_2. \quad (1.3)$$

Сумою $z_1 + z_2$ комплексних чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ і $z_2 = x_2 + iy_2$ називається комплексне число

$$z = z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2). \quad (1.4)$$

Добутком $z_1 \cdot z_2$ комплексних чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ і $z_2 = x_2 + iy_2$ називається комплексне число

$$z = z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2). \quad (1.5)$$

Якщо z_1 і z_2 – дійсні числа, тобто $y_1 = y_2 = 0$, то операції додавання (1.4) і множення (1.5) співпадають з операціями над дійсними числами. При обчисленні за формулою (1.5) враховано

$$i \cdot i = i^2 = -1. \quad (1.6)$$

Очевидно, що формула (1.5) отримана при множенні $x_1 + iy_1$ і $x_2 + iy_2$ за правилом множення многочленів і використанні рівності (1.6).

1.2. Властивості операцій над комплексними числами у алгебраїчній формі

Операції додавання і множення комплексних чисел мають такі властивості:

1) комутативності:

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1, \quad z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1;$$

2) асоціативності:

$$\begin{aligned} (z_1 + z_2) + z_3 &= z_1 + (z_2 + z_3), \\ (z_1 \cdot z_2) z_3 &= z_1 (z_2 \cdot z_3); \end{aligned}$$

3) дистрибутивності:

$$z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3.$$

Доведемо, наприклад, комутативність множення. Якщо $z_1 = x_1 + iy_1$, а $z_2 = x_2 + iy_2$, то за формулою (1.5) будемо мати

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2),$$

$$z_2 \cdot z_1 = (x_2x_1 - y_2y_1) + i(x_2y_1 + y_2x_1)$$

За властивістю комутативності множення і додавання дійсних чисел

$$x_1x_2 = x_2x_1, \quad y_1y_2 = y_2y_1, \quad x_1y_2 = y_2x_1, \quad x_1y_2 + y_1x_2 = x_2y_1 + y_2x_1.$$

Тобто

$$z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1.$$

Таким же чином перевіряються інші властивості 1)-3).

За побудовою добуток

$$z\bar{z} = x^2 + y^2 \geq 0 - \text{невід'ємний.}$$

Означення 1.2. Число $\sqrt{x^2 + y^2}$ називається модулем комплексного числа $z = x + iy$ і позначається $|z|$:

$$|z| = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (1.7)$$

Тому

$$z\bar{z} = |z|^2. \quad (1.8)$$

Зауважимо, що

$$|z| \geq 0 \text{ і } |z| = 0 \text{ лише тоді, коли } z = 0.$$

Модуль дійсного числа співпадає з абсолютною величиною цього числа.

Числа 0 і 1 у множині комплексних чисел мають ті ж властивості, що й в множині дійсних чисел. Зокрема, справедливі рівності:

$$z + 0 = z, \quad z \cdot 0 = 0, \quad z \cdot 1 = z.$$

Операція додавання в множині комплексних чисел допускає обернену операцію віднімання. Тобто, для довільних комплексних чисел z_1 і z_2 існує єдине число z таке, що

$$z + z_1 = z_2. \quad (1.9)$$

Це число називається різницею чисел z_2 і z_1 , і позначається через $z_2 - z_1$. Очевидно, що

$$z_2 - z_1 = (x_2 - x_1) + i(y_2 - y_1).$$

Операція, обернена до множення, називається діленням. Часткою двох чисел z_2 і z_1 називається таке число z , яке задовольняє рівняння

$$zz_1 = z_2. \quad (1.10)$$

Частка позначається

$$z_2 : z_1 \text{ або } \frac{z_2}{z_1}.$$

Рівняння (1.10) має єдиний розв'язок для довільних комплексних чисел z_2 і z_1 , якщо $z_1 \neq 0$. Справді, помноживши обидві частини рівняння (1.10) на число $\overline{z_1}$ і використавши формулу (1.8), отримаємо $z|z_1|^2 = z_2\overline{z_1}$. Звідси знаходимо

$$z = \frac{z_2\overline{z_1}}{|z_1|^2}.$$

Тобто

$$z = \frac{z_2}{z_1} = \frac{z_2\overline{z_1}}{z_1\overline{z_1}} = \frac{z_2\overline{z_1}}{|z_1|^2}, \quad z_1 \neq 0. \quad (1.11)$$

Нехай $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$. Тоді формулу (1.11) можна переписати у вигляді

$$\begin{aligned} z &= \frac{z_2}{z_1} = \frac{x_2 + iy_2}{x_1 + iy_1} = \\ &= \frac{(x_2 + iy_2)(x_1 - iy_1)}{x_1^2 + y_1^2} = \frac{x_2x_1 + y_2y_1}{x_1^2 + y_1^2} + i \frac{x_1y_2 - x_2y_1}{x_1^2 + y_1^2}. \end{aligned}$$

Для виконання операції ділення достатньо пам'ятати, що остання формула отримується шляхом множення чисельника і знаменника на число спряжене до знаменника.

Добуток n комплексних чисел z називається n -им степенем числа z , позначається z^n :

$$z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot \dots \cdot z}_{n \text{ разів}}.$$

Обернена операція, тобто добування кореня, визначається так: число ω називається коренем n -го степеня з числа z , якщо

$$\omega^n = z$$

(позначається символом $\omega = \sqrt[n]{z}$). Далі побачимо, що для будь-якого $z \neq 0$ корінь $\sqrt[n]{z}$ має n різних значень.

1.3. Геометрична інтерпретація комплексного числа

Нехай на площині задана прямокутна система координат. Комплексне число

$$z = x + iy$$

будемо зображати точкою площини з координатами

$$(x, y).$$

Ця точка позначається тією ж літерою z . Відповідність між комплексними числами і точками площини є взаємнооднозначною. При цьому дійсні числа зображаються точками осі абсцис, а суто уявні iy – точками осі ординат. Тому вісь абсцис називається дійсною віссю, а вісь ординат – уявною віссю, а площина, на якій зображаються комплексні числа, називається *комплексною площиною* і позначається $\mathbb{C}$.

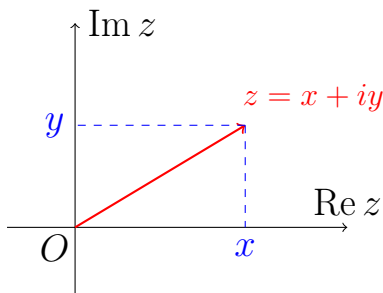


Рис. 1.1

Комплексне число z зображається також вектором з початком в точці O і кінцем в точці z . Відповідність між комплексними числами і векторами комплексної площини з початком в точці O також є взаємнооднозначною. Тому вектор, що зображає комплексне число z , позначається тією ж літерою z (Рис. 1.1).

З формули (1.7) (рис. 1.1) випливає, що довжина вектора z дорівнює $|z|$ і справедливі нерівності

$$|\operatorname{Re} z| \leq |z|, \quad |\operatorname{Im} z| \leq |z|.$$

Додавання і віднімання комплексних чисел можна ілюструвати з допомогою векторної інтерпретації цих комплексних чисел. Число $z_1 + z_2$ зображається вектором, побудованим за правилом додавання векторів z_1 і z_2 , а вектор $z_1 - z_2$ будується як різниця цих векторів, або як сума векторів z_1 і $-z_2$ (Рис. 1.2).

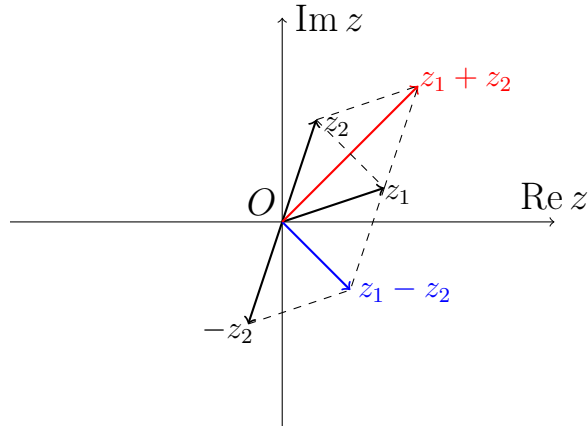


Рис. 1.2

Відстань між точками z_1 і z_2 (рис.1.2), дорівнює довжині вектора $z_1 - z_2$, тобто $|z_1 - z_2|$.

Приклад 1.1. Множина точок z , які задовольняють рівняння

$$|z - z_0| = 5,$$

є коло радіуса 5 з центром в точці z_0 , оскільки $|z - z_0|$ є відстань між точками z і z_0 .

Приклад 1.2. Множина точок рівновіддалених від точок z_1 і z_2 задається рівнянням

$$|z - z_1| = |z - z_2|$$

і є рівнянням прямої, яка проходить через середину відрізка, що з'єднує точки z_1 і z_2 і перпендикулярна до нього.

Приклад 1.3. Множина точок z , які задовольняють рівняння

$$|z - z_1| + |z - z_2| = 2a,$$

де $a > \frac{1}{2}|z_1 - z_2|$ є еліпсом з фокусами в точках z_1 і z_2 і з більшою піввіссю, що дорівнює a , оскільки $|z - z_1| + |z - z_2|$ є сумою відстаней від точки z до точок z_1 і z_2 .

Приклад 1.4. Рівняння

$$||z - z_1| - |z - z_2|| = 2a, \quad a < \frac{1}{2}|z_1 - z_2|,$$

є рівнянням гіперболи з фокусами в точках z_1 і z_2 і з дійсною піввіссю, що дорівнює a .

1.4. Тригонометрична і показникова форми комплексного числа

На комплексній площині положення точки

$$z = x + iy$$

визначається декартовими координатами (x, y) . Корисно мати зображення комплексних чисел в полярних координатах. Для цього сумістимо полярну вісь з додатною піввіссю x , а полюс з початком координат.

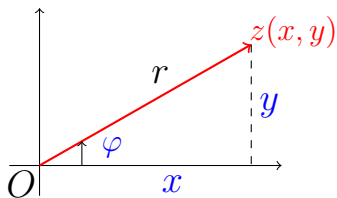


Рис. 1.3

Позначимо через r полярний радіус, а через φ полярний кут (рис.1.3). Якщо відлік ведеться проти годинникової стрілки, то величина кута φ вважається додатною, а якщо за годинниковою стрілкою – то від’ємною.

Модуль $|z| = r$ визначається однозначно,

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Кут φ називається аргументом комплексного числа $z (z \neq 0)$ і позначається символом

$$\operatorname{Arg} z.$$

Для числа $z = 0$ аргумент не визначається. Тому далі при всіх міркуваннях, пов’язаних з поняттям аргумента, вважається, що $z \neq 0$. За побудовою (рис.1.3)

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi, \\ y &= r \sin \varphi. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Отже, довільне комплексне число $z \neq 0$ можна зобразити у вигляді

$$z = x + iy = r(\cos \varphi + i \sin \varphi). \quad (1.13)$$

Запис комплексного числа у вигляді (1.13) називається тригонометричною формою комплексного числа.

Якщо $z = x + iy$, $\varphi = \operatorname{Arg} z$, то з формул (1.12) випливає, що

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ \sin \varphi &= \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \end{aligned} \quad (1.14)$$

$\operatorname{Arg} z$ визначається з точністю до $2\nu\pi$, $\nu \in \mathbb{Z}$.

Серед нескінченної множини значень $\operatorname{Arg} z$ є одне значення, що належить проміжку $(-\pi, \pi]$, його називають головним значенням аргумента і позначають

$$\arg z.$$

Таким чином,

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\nu\pi, \quad \nu = 0, \pm 1, \dots \quad (1.15)$$

Аргумент φ комплексного числа $z = x + iy$, як випливає з системи (1.14), задовольняє рівняння

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}.$$

Приклад 1.5. Знайти аргумент комплексного числа

$$z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Оскільки точка $z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ лежить в третій чверті і $\operatorname{tg} \varphi = \sqrt{3}$, то

$$\operatorname{Arg} \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{4\pi}{3} + 2\nu\pi, \quad \nu = 0, \pm 1, \dots,$$

а головне значення дорівнює

$$\arg \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -\frac{2\pi}{3}.$$

При $|z| = 1$ формула (1.13) набуде вигляду

$$z = \cos \varphi + i \sin \varphi.$$

Комплексне число

$$\cos \varphi + i \sin \varphi$$

позначається символом

$$e^{i\varphi}.$$

Для довільного дійсного числа φ має місце формула Ейлера

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi. \quad (1.16)$$

Таким чином, для $\forall \varphi \in \mathbb{R}$ дістаємо

$$\begin{aligned} \varphi &= \arg e^{i\varphi}, \quad |e^{i\varphi}| = 1, \\ e^{2\pi i} &= 1, \quad e^{\pi i} = -1, \quad e^{\pi i/2} = i, \quad e^{-\pi i/2} = -i. \end{aligned}$$

Якщо в формулі (1.16) φ замінити на $-\varphi$, то отримаємо рівність

$$e^{-i\varphi} = \cos \varphi - i \sin \varphi. \quad (1.17)$$

Додаючи і віднімаючи рівності (1.16) і (1.17), отримаємо формули, які теж називаються формулами Ейлера:

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{1}{2}(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}), \\ \sin \varphi &= \frac{1}{2i}(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}). \end{aligned} \quad (1.18)$$

Функція $e^{i\varphi}$ має властивості показникової функції. Наведемо деякі з них:

$$e^{i\varphi_1} \cdot e^{i\varphi_2} = e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}, \quad \frac{e^{i\varphi_1}}{e^{i\varphi_2}} = e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}, \quad (1.19)$$

$$(e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi}, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (1.20)$$

Доведемо першу з рівностей (1.19). Очевидно, що

$$\begin{aligned} e^{i\varphi_1} \cdot e^{i\varphi_2} &= (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = \\ &= (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + i(\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2) = \\ &= \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2) = \\ &= e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}. \end{aligned}$$

Аналогічно доводиться друга рівність (1.19). Рівність (1.20) можна отримати з (1.19) за індукцією.

З (1.20) і (1.16) маємо

$$(e^{i\varphi})^n = (\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (1.21)$$

Рівність (1.21) називається формулою Муавра.

З (1.13) і (1.16) випливає, що довільне комплексне число $z \neq 0$ можна зобразити у вигляді

$$z = r e^{i\varphi}, \quad (1.22)$$

де $r = |z|$, $\varphi = \text{Arg } z$. Права частина рівності (1.22) називається показниковою формою комплексного числа z .

Наведемо формули множення і ділення комплексних чисел, поданих в показниковій формі:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} \cdot r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}, \quad (1.23)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}. \quad (1.24)$$

З формули (1.23) знаходимо, що модуль добутку двох комплексних чисел дорівнює добутку модулів множників:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|,$$

а аргумент добутку є сумою аргументів множників:

$$\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2. \quad (1.25)$$

З формули (1.24) випливає, що модуль частки двох комплексних чисел дорівнює частці модулів цих чисел:

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad z_2 \neq 0,$$

а аргумент частки – різниці аргументів:

$$\varphi_1 = \arg z_1, \quad \varphi_2 = \arg z_2, \quad \arg \frac{z_1}{z_2} = \varphi_1 - \varphi_2. \quad (1.26)$$

Якщо $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$, то

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow r_1 = r_2, \quad \varphi_1 = \varphi_2 + 2\nu\pi, \quad \nu \in \mathbb{Z}.$$

Нехай $z = x + iy$, а $\bar{z} = x - iy$. Тоді

$$|z| = |\bar{z}|.$$

Встановимо зв'язок між аргументами чисел z і $\bar{z}$. Якщо

$$z = re^{i\varphi},$$

то

$$\bar{z} = re^{-i\varphi}$$

(див. формули (1.16) і (1.17)). Таким чином, якщо

$$\varphi = \arg z \Rightarrow -\varphi = \arg \bar{z}.$$

Легко перевірити рівності:

$$\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2,$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}, \quad z_2 \neq 0,$$

$$\overline{z^n} = (\bar{z})^n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad z \neq 0 \text{ при } n < 0.$$

1.5. Добування коренів з комплексного числа

Розглянемо рівняння

$$z^n = a, \tag{1.27}$$

де $a \neq 0$ – комплексне число, а n – натуральне число. Якщо

$$a = \rho e^{i\theta}, \quad z = re^{i\varphi},$$

то

$$r^n e^{in\varphi} = \rho e^{i\theta}.$$

Звідси знаходимо

$$r^n = \rho, \quad n\varphi = \theta + 2\nu\pi,$$

тобто

$$r = \sqrt[n]{\rho}, \quad \varphi_\nu = \frac{\theta + 2\nu\pi}{n}.$$

Таким чином,

$$z_\nu = \sqrt[n]{\rho} e^{i \frac{\theta + 2\nu\pi}{n}}, \quad \nu \in \mathbb{Z}. \quad (1.28)$$

Серед комплексних чисел (1.28) n різних коренів, інші повторюватимуться. Справді, числа $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$ різні, бо їх аргументи

$$\varphi_0 = \frac{\theta}{n}, \varphi_1 = \frac{\theta + 2\pi}{n}, \dots, \varphi_{n-1} = \frac{\theta + 2\pi(n-1)}{n}$$

різні і відрізняються один від одного на $\frac{2\pi}{n}$. Але

$$z_n = z_0,$$

оскільки

$$|z_n| = |z_0| = \sqrt[n]{\rho}, \quad \varphi_n = \frac{\theta}{n} + 2\pi = \varphi_0 + 2\pi.$$

Далі

$$z_{n+1} = z_1, z_{n+2} = z_2, \dots$$

Таким чином, рівняння (1.27) при $a \neq 0$ має n різних коренів:

$$z_\nu = \sqrt[n]{\rho} e^{i \frac{\theta + 2\nu\pi}{n}}, \quad \nu = 0, 1, \dots, n-1. \quad (1.29)$$

На комплексній площині (рис. 1.4) точки z_ν зображені у вершинах правильного n -кутника, вписаного в коло радіуса $\sqrt[n]{\rho}$ з центром у точці O .

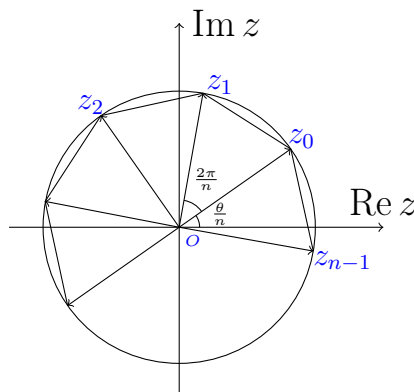


Рис. 1.4

Контрольні питання

1. Які існують форми запису комплексного числа?
2. Що таке модуль та аргумент комплексного числа? Дати означення головного значення аргумента комплексного числа.
3. Які комплексні числа називаються рівними, спряженими?
4. Як знайти дійсну та уявну частини комплексного числа

$$\frac{1}{z},$$

де $z = x + iy$, $z \neq 0$?

5. Як зображаються на комплексній площині числа, що є сумою чи різницею двох комплексних чисел?
6. Які області у комплексній площині визначають наступні нерівності:

$$|\operatorname{Re} z| < |3 - 4i|; \quad 1 < \operatorname{Im} z \leq 3; \quad 4 < |z + 2i| \leq 5; \quad |z| \leq 9?$$

7. Як знайти комплексне число z з рівняння

$$(4 + 3i)z = (1 - i)^3?$$

Зробити перевірку.

8. Як на комплексній площині зображаються корені 6-го степеня з комплексного числа?
9. Яким чином зображаються на комплексній площині корені другого степеня з комплексного числа?
10. Довести, що корені n -го степеня з комплексного числа $z \neq 0$ утворюють геометричну прогресію. Який знаменник цієї прогресії?

2. Послідовності і ряди комплексних чисел

2.1. Послідовності комплексних чисел

Означення 2.1. Комплексне число a називається границею послідовності $\{z_n\}$ комплексних чисел $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$, якщо

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N})(\forall n > N)$$

виконується нерівність

$$|z_n - a| < \varepsilon. \quad (2.1)$$

При цьому пишуть

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a.$$

Зазначимо, якщо число a є границею послідовності $\{z_n\}$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n - a| = 0. \quad (2.2)$$

Послідовності, які мають границі, називають збіжними.

Множиною точок z , які задовольняють нерівність $|z - a| < \varepsilon$ є круг з центром в точці a , який називається ε -околом точки a . Таким чином, точка a є границею послідовності $\{z_n\}$, якщо в довільному околі точки a містяться всі члени цієї послідовності, за виключенням, можливо, їх скінченного числа.

Кожній послідовності комплексних чисел

$$\{z_n\}$$

відповідає дві послідовності дійсних чисел x_n і y_n , де

$$z_n = x_n + iy_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Теорема 2.1. Існування границі

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a, \quad a = \alpha + i\beta,$$

рівносильне існуванню двох границь:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \beta.$$

Доведення. Нехай існує границя $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$, тобто виконується умова (2.2). Тоді з нерівностей

$$|x_n - \alpha| < |z_n - a|,$$

$$|y_n - \beta| < |z_n - a|$$

випливає існування границь

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \beta.$$

З оцінки

$$|z_n - a| = |(x_n - \alpha) + i(y_n - \beta)| \leq |x_n - \alpha| + |y_n - \beta|$$

отримуємо обернене твердження. Теорема доведена.

З теореми 2.1 випливають такі властивості послідовностей комплексних чисел: якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$ і $\lim_{n \rightarrow \infty} \zeta_n = b$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (z_n \pm \zeta_n) = a \pm b, \quad (2.3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (z_n \cdot \zeta_n) = a \cdot b, \quad (2.4)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z_n}{\zeta_n} = \frac{a}{b}, \quad \zeta_n \neq 0 \text{ при } n \in \mathbb{N}, \quad b \neq 0. \quad (2.5)$$

Критерій Коші. Послідовність $\{z_n\}$ є збіжною тоді і тільки тоді, коли

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N = N(\varepsilon))(\forall n > N) \wedge (\forall m > N) :$$

$$|z_m - z_n| < \varepsilon.$$

Послідовність комплексних чисел $\{z_n\}$ називається обмеженою, якщо існує таке дійсне число $A > 0$, що для $\forall n \in \mathbb{N}$ виконується нерівність

$$|z_n| \leq A.$$

Теорема Вейєрштраса. *З довільної обмеженої послідовності можна виділити збіжну підпослідовність.*

Властивості послідовностей комплексних чисел, пов'язані з властивостями послідовностей модулів і аргументів цих чисел:

- 1) із означення границі послідовності комплексних чисел і нерівності $||z_n| - a| \leq |z_n - a|$ випливає, якщо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a,$$

то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = |a|;$$

- 2) достатньою умовою збіжності послідовності комплексних чисел є наступна умова: якщо

$$z_n = |z_n|e^{i\varphi_n}, \lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = \rho, \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = \alpha,$$

то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \rho e^{i\alpha}.$$

Це твердження випливає з рівності

$$z_n = |z_n| \cos \varphi_n + i|z_n| \sin \varphi_n$$

і теореми 2.1.

Наведемо приклади, коли послідовність $\{z_n\}$ збігається, а послідовність $\{\varphi_n\}$, $\varphi_n = \arg z_n$ розбігається.

Приклад 2.1. *Послідовність $\{z_n\}$, де*

$$z_n = 2(\cos 2\pi n + i \sin 2\pi n),$$

збігається, а послідовність $\{\varphi_n\} = \arg z_n = 2\pi n$ - розбігається.

Приклад 2.2. *Послідовність $\{z_n\}$, де*

$$z_n = \frac{(-1)^n}{n},$$

збігається і

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0,$$

але послідовність $\{\varphi_n\}$, де

$$\varphi_n = \arg z_n = \{0, \pi, 0, \pi, 0, \pi, \dots\}$$

розбігається.

Приклад 2.3. Нехай

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a \neq 0, z_n \neq 0, \arg a = \alpha.$$

Тоді існує така послідовність $\{\varphi_n\}$, що $\varphi_n = \arg z_n, n \in \mathbb{N}$, і

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = \alpha.$$

Доведення. Для фіксованого $\varepsilon > 0$ виберемо $\delta > 0$ так, щоб круг $|z - a| < \delta$ лежав всередині кута $\alpha - \varepsilon < \arg z_n < \alpha + \varepsilon$ (рис. 2.1). За означенням границі послідовності, $\exists$ номер N , що $\forall n > N$ точки z_n лежать в крузі $|z - a| < \delta$, а тому $\alpha - \varepsilon < \varphi_n < \alpha + \varepsilon$ для $\forall n > N$, тобто

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = \alpha.$$

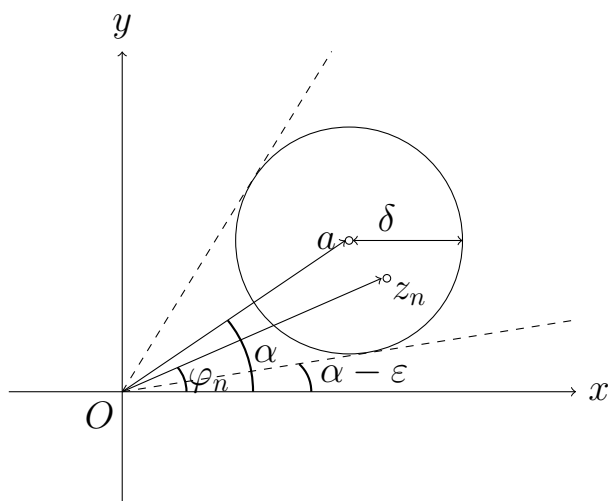


Рис.2.1

2.2. Розширена комплексна площина

Означення 2.2. Послідовність комплексних чисел $\{z_n\}$ має нескінченну границю (пишуть $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$), якщо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = \infty. \quad (2.6)$$

Нескінченну границю називають невластим (нескінченим) комплексним числом, а відповідну їй точку – нескінченно віддаленою точкою комплексної площини.

Співвідношення (2.6) означає, що послідовність $\{z_n\}$ така, що для довільного додатного числа R знайдеться номер N , починаючи з якого члени послідовності $\{z_n\}$ задовольняють умову

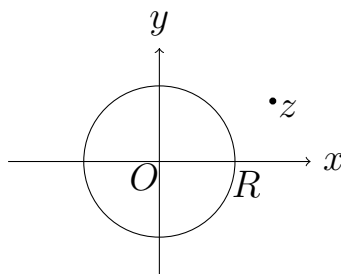
$$|z_n| > R \text{ при } \forall n \geq N. \quad (2.7)$$

З нерівності (2.7) випливає, що точка z_n лежить зовні круга радіуса R з центром в точці O .

Множина точок z , що задовольняють нерівність

$$|z| > R$$

називається *околом нескінченно віддаленої точки*.



Таким чином, точка $z = \infty$ є границею послідовності $\{z_n\}$, якщо в довільному околі точки $z = \infty$ містяться всі члени цієї послідовності, за виключенням їх скінченного числа.

Наведемо деякі властивості послідовностей $\{z_n\}$, які збігаються до нескінченності:

1) Якщо $z_n \neq 0, n \in \mathbb{N}$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$$

тоді і тільки тоді, коли

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{z_n} = 0.$$

2) Якщо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty \text{ i } \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = a \neq \infty,$$

то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (z_n + \xi_n) = \infty \text{ i } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\xi_n}{z_n} = 0.$$

3) Якщо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty \text{ i } \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = a \neq 0 (\infty),$$

то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (z_n \xi_n) = \infty \text{ i } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z_n}{\xi_n} = \infty.$$

Комплексна площина, доповнена нескінченно віддаленою точкою, називається *розширеною комплексною площиною*.

2.3. Стереографічна проекція. Сфера Рімана

Геометрична інтерпретація розширеної комплексної площини наступна.

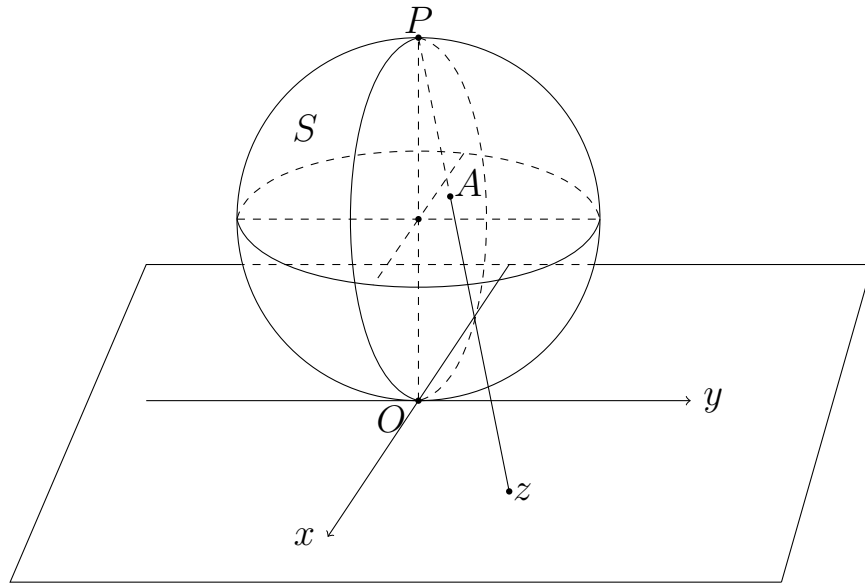


Рис. 2.2

Розглянемо у тривимірному просторі сферу S , яка дотикається до комплексної площини в точці O . P – точка сфери S , діаметрально протилежна точці O (рис. 2.2). Центр сфери S розмістимо у точці $(0, 0, \frac{1}{2})$, радіус її дорівнює $\frac{1}{2}$, тобто $R = \frac{1}{2}$. Кожній точці z комплексної площини поставимо у відповідність точку A , яка є точкою перетину сфери S з відрізком Pz . Послідовності $\{z_n\}$,

яка збігається до ∞ , відповідає послідовність точок сфери S , яка збігається до точки P . Поставимо у відповідність точці $z = \infty$ точку P . Звідси точка P у просторі з координатами $(0, 0, 1)$ відповідає точці $z = \infty$ на комплексній площині. Така відповідність між точками розширеної комплексної площини і точками сфери S є взаємно однозначною. Вона називається *стереографічною проекцією*, а сфера S - *сферою Рімана*.

Зауважимо, що нескінченно віддалена точка площини, як і точка O , не має визначеного аргумента.

Надалі використовуються позначення вигляду:

$$\begin{aligned}(-\infty; \infty) &- \text{дійсна вісь,} \\(-i\infty; i\infty) &- \text{уявна вісь,} \\(\alpha - i\infty; \alpha + i\infty) &- \text{пряма } \operatorname{Re} z = \alpha, \\(\beta i - \infty; \beta i + \infty) &- \text{пряма } \operatorname{Im} z = \beta.\end{aligned}$$

Теорема 2.2. *Розширена комплексна площина компактна, тобто з довільної послідовності комплексних чисел можна виділити збіжну підпослідовність.*

Доведення. З обмеженої послідовності $\{z_n\}$ за теоремою Вейєрштрасса можна виділити збіжну підпослідовність. Якщо послідовність $\{z_n\}$ необмежена, то $\forall k \in \mathbb{N}$, $\exists$ номер n_k такий, що $|z_{n_k}| > k$. Отже,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} z_{n_k} = \infty.$$

2.4. Числові ряди

Означення 2.3. *Ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} z_k \tag{2.8}$$

називається *збіжним*, якщо збігається послідовність його частинних сум

$$S_n = \sum_{k=1}^n z_k.$$

Границя S послідовності S_n називається *сумою ряду* (2.8):

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} z_k.$$

Ряд (2.8) називається *абсолютно збіжним*, якщо збігається ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} |z_k|.$$

З властивостей збіжних послідовностей випливають наступні властивості:

1) Для того, щоб ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} z_k$$

був збіжним, необхідно і достатньо, щоб були збіжними ряди

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k \text{ і } \sum_{k=1}^{\infty} y_k,$$

де $z_k = x_k + iy_k$. При цьому

$$\sum_{k=1}^{\infty} z_k = \sum_{k=1}^{\infty} x_k + i \sum_{k=1}^{\infty} y_k.$$

2) Якщо ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} z_k$$

збіжний, то ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} az_k,$$

де a - комплексне число, є збіжним і

$$\sum_{k=1}^{\infty} az_k = a \sum_{k=1}^{\infty} z_k.$$

3) Якщо ряди

$$\sum_{k=1}^{\infty} z_k \text{ і } \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k$$

є збіжними, то ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (z_k + \xi_k)$$

також є збіжним і

$$\sum_{k=1}^{\infty} (z_k + \xi_k) = \sum_{k=1}^{\infty} z_k + \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k.$$

4) Якщо ряди

$$\sum_{k=1}^{\infty} z_k \text{ і } \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k$$

є збіжними і їх суми відповідно дорівнюють S і σ , то ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^k z_n \xi_{k-n+1} \right)$$

збігається і його сума дорівнює $S\sigma$.

5) **Критерій Коші.** Ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} z_k$$

є збіжним тоді і тільки тоді, коли $\forall \varepsilon > 0 \exists$ номер N , що $\forall n > N$ і $m \geq n > N$ виконується нерівність

$$\left| \sum_{k=n}^m z_k \right| < \varepsilon.$$

6) Для збіжності ряду

$$\sum_{k=1}^{\infty} z_k$$

необхідно, щоб

$$\lim_{k \rightarrow \infty} z_k = 0.$$

7) Якщо ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} |z_k|$$

збігається, то ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} z_k$$

також збігається.

Контрольні питання

1. Сформулювати необхідну і достатню умови існування границі послідовності комплексних чисел?
2. Які з наступних послідовностей комплексних чисел $\{z_n\}$ мають границю при $n \rightarrow \infty$, якщо:

а) $z_n = \left(\frac{1+3n}{3n}\right)^n + i \left(\frac{1+3n}{3n}\right)^2$;

б) $z_n = e^{in}$;

в) $z_n = \frac{n+3in}{\sin 2n}$;

г) $z_n = \frac{n+1}{2n} + i \frac{2^n}{n!}$?

3. Що називають околom точки $z = a \neq \infty$ та околom точки $z = \infty$?
4. Яка комплексна площина називається розширеною комплексною площиною?
5. Що називається стереографічною проекцією та сферою Рімана?
6. Яка множина точок на сфері Рімана відповідає паралельним прямим комплексної площини при стереографічній проекції?
7. Яка точка на сфері Рімана відповідає точці $z = i$ на комплексній площині при стереографічній проекції?
8. Сформулювати означення збіжного ряду, члени якого є комплексними числами?

9. Який числовий ряд, членами якого є комплексні числа, називається абсолютно збіжним?
10. Сформулювати властивості рядів, членами яких є комплексні числа.
11. Дослідити на збіжність числові ряди:

а) $\sum_{n=0}^{\infty} (\sqrt{4} + i\sqrt{5})^n;$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2in}}{n\sqrt{n}}.$

3. Криві і області в комплексній площині

3.1. Комплекснозначні функції дійсної змінної

Якщо кожному значенню $t \in [\alpha; \beta]$ за певним правилом ставиться у відповідність деяке комплексне число z , то кажуть, що задана комплекснозначна функція дійсної змінної $z = \lambda(t)$. Ця функція може бути зображена у вигляді

$$\lambda(t) = \xi(t) + i\eta(t),$$

де $\xi(t) = \operatorname{Re} \lambda(t)$ і $\eta(t) = \operatorname{Im} \lambda(t)$ — дійсні функції.

Визначимо границю функції $\lambda(t)$ при $t \rightarrow t_0 \in [\alpha; \beta]$ формулою

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \lambda(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} \xi(t) + i \lim_{t \rightarrow t_0} \eta(t). \quad (3.1)$$

Якщо існують границі $\lim_{t \rightarrow t_0} \xi(t)$ та $\lim_{t \rightarrow t_0} \eta(t)$, то існує границя $\lim_{t \rightarrow t_0} \lambda(t)$.

Тобто, якщо $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, таке, що $|\lambda(t) - a| < \varepsilon$ для всіх t таких, що $|t - t_0| < \delta, t \neq t_0$, то пишуть $\lim_{t \rightarrow t_0} \lambda(t) = a$. Це означення можна сформулювати за допомогою границі послідовності: $\lim_{t \rightarrow t_0} \lambda(t) = a$, якщо для довільної послідовності $\{t_n\}$ такої, що $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = t_0, t_n \neq t_0$, при $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(t_n) = a$.

Границі комплекснозначних функцій мають такі властивості: якщо існують границі

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \lambda_1(t) = a_1 \text{ і } \lim_{t \rightarrow t_0} \lambda_2(t) = a_2,$$

то

$$\lim_{t \rightarrow t_0} [\lambda_1(t) \pm \lambda_2(t)] = a_1 \pm a_2,$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \lambda_1(t) \cdot \lambda_2(t) = a_1 a_2,$$

а якщо $a_2 \neq 0$, то й

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\lambda_1(t)}{\lambda_2(t)} = \frac{a_1}{a_2}.$$

Зауважимо, що

$$\lim_{t \rightarrow t_0 - 0} \lambda(t) = \lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t < t_0}} \lambda(t),$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0 + 0} \lambda(t) = \lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t > t_0}} \lambda(t).$$

Функція

$$\lambda(t) = \xi(t) + i\eta(t)$$

називається неперервною в точці $t_0 \in (\alpha; \beta)$ (або на $(\alpha; \beta)$), якщо в точці t_0 (або на $(\alpha; \beta)$) неперервні функції $\xi(t)$ і $\eta(t)$. Іншими словами: якщо $\lim_{t \rightarrow t_0} \lambda(t) = \lambda(t_0)$, то функція $z = \lambda(t)$ називається неперервною в точці t_0 , якщо $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ таке, що $\forall t$ таких, що $|t - t_0| < \delta$, має місце нерівність $|\lambda(t) - \lambda(t_0)| < \varepsilon$.

Зрозуміло, що сума, різниця, добуток неперервних комплекснозначних функцій є неперервними функціями, а частка двох неперервних комплекснозначних функцій є неперервною функцією в тих точках, де знаменник не дорівнює нулю. Функція $\lambda(t)$ неперервна на $[\alpha; \beta]$ є обмеженою на $[\alpha; \beta]$, тобто $\exists M > 0$ таке, що $\forall t \in [\alpha; \beta]$ виконується нерівність

$$|\lambda(t)| \leq M.$$

За означенням

$$\lambda'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\lambda(t + \Delta t) - \lambda(t)}{\Delta t}. \quad (3.2)$$

Означення 3.1. Похідна функції $\lambda(t) = \xi(t) + i\eta(t)$ визначається формулою

$$\lambda'(t) = \xi'(t) + i\eta'(t). \quad (3.3)$$

Якщо існують похідні $\lambda_1'(t)$ і $\lambda_2'(t)$, то існують похідні

$$(\lambda_1(t) \pm \lambda_2(t))' = \lambda_1'(t) \pm \lambda_2'(t),$$

$$(\lambda_1(t) \cdot \lambda_2(t))' = \lambda_1'(t)\lambda_2(t) + \lambda_1(t)\lambda_2'(t),$$

а якщо $\lambda_2(t) \neq 0$, то

$$\left(\frac{\lambda_1(t)}{\lambda_2(t)} \right)' = \frac{\lambda_1'(t) \cdot \lambda_2(t) - \lambda_1(t) \cdot \lambda_2'(t)}{\lambda_2^2(t)}.$$

Приклад 3.1. Функція

$$\lambda(t) = e^{it}$$

диференційовна на відрізку $[0; 2\pi]$, $\lambda'(t) = ie^{it}$, $|\lambda'(t)| = 1$ при всіх $t \in [0; 2\pi]$. Теорема Лагранжа, взагалі кажучи, не виконується для комплекснозначних функцій, оскільки для функції $\lambda(t)$

$$\lambda(0) = \lambda(2\pi) = 1,$$

але

$$\lambda(2\pi) - \lambda(0) \neq 2\pi i e^{ic}, \quad \forall c \in [0; 2\pi].$$

Визначимо інтеграл

$$\int_{\alpha}^{\beta} \lambda(t) dt,$$

де $\lambda(t) = \xi(t) + i\eta(t)$, $\xi(t)$ і $\eta(t)$ – неперервні функції на $[\alpha; \beta]$, з допомогою поняття границі інтегральних сум. Для цього покладемо $\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \beta$, $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$, $t_{k-1} \leq \tau_k \leq t_k$, $\gamma = \max_k \Delta t_k$. Тоді

$$\int_{\alpha}^{\beta} \lambda(t) dt = \lim_{\gamma \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \lambda(\tau_k) \Delta t_k. \quad (3.4)$$

Або, що еквівалентно (3.4),

$$\int_{\alpha}^{\beta} \lambda(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} \xi(t) dt + i \int_{\alpha}^{\beta} \eta(t) dt.$$

Зрозуміло, що справедливі формули

$$\text{а) } \int_{\alpha}^{\beta} a\lambda(t) dt = a \int_{\alpha}^{\beta} \lambda(t) dt;$$

$$\text{б) } \int_{\alpha}^{\beta} [\lambda_1(t) \pm \lambda_2(t)] dt = \int_{\alpha}^{\beta} \lambda_1(t) dt \pm \int_{\alpha}^{\beta} \lambda_2(t) dt;$$

$$\text{в) } \int_{\alpha}^{\beta} \lambda(t) dt = - \int_{\beta}^{\alpha} \lambda(t) dt;$$

$$\text{г) } \int_{\alpha}^{\beta} \lambda(t) dt = \int_{\alpha}^{\delta} \lambda(t) dt + \int_{\delta}^{\beta} \lambda(t) dt, \quad \alpha < \delta < \beta;$$

$$\text{д) } \int_{\alpha}^{\beta} \lambda(t) dt = \Lambda(\beta) - \Lambda(\alpha), \quad (\text{формула Ньютона-Лейбніца}), \quad \text{тут функція } \Lambda(t) \text{ — первісна функції } \lambda(t), \text{ тобто } \Lambda'(t) = \lambda(t), \text{ де } \alpha \leq t \leq \beta.$$

Твердження 3.1. Якщо комплекснозначна функція $\lambda(t)$ інтегровна на відрізку $[\alpha; \beta]$, то функція $|\lambda(t)|$ інтегровна на цьому відрізку і справедлива нерівність

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} \lambda(t) dt \right| \leq \int_{\alpha}^{\beta} |\lambda(t)| dt. \quad (3.5)$$

Ця оцінка отримується з нерівності

$$\left| \sum_{k=1}^n \lambda(\tau_k) \Delta t_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |\lambda(\tau_k)| \cdot \Delta t_k$$

шляхом переходу до границі при $\delta = \max_k \Delta t_k \rightarrow 0$.

З формули (3.5) випливає нерівність

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} \lambda(t) dt \right| \leq (\beta - \alpha) \max_{\alpha \leq t \leq \beta} |\lambda(t)|.$$

Зауважимо, що для комплекснозначних функцій, теорема про середнє несправедлива.

Приклад 3.2. Інтеграл

$$\int_0^{2\pi} e^{it} dt = 0,$$

а функція e^{it} не обертається в нуль в жодній точці відрізка $[0, 2\pi]$.

3.2. Криві в комплексній площині

Якщо на відрізку $[\alpha; \beta]$ задана неперервна комплекснозначна функція $z = \lambda(t)$, то кажуть, що задана неперервна крива

$$z = \lambda(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta, \quad (3.6)$$

а рівняння (3.6) називається параметричним рівнянням цієї кривої. Крива (3.6) є впорядкованою множиною точок комплексної площини в тому розумінні, що якщо $z_1 = \lambda(t_1)$, $z_2 = \lambda(t_2)$ і $\alpha \leq t_1 < t_2 \leq \beta$, то кажуть, що точка z_2 кривої (3.6) є наступною за точкою z_1 , тобто крива $z = \lambda(t)$ орієнтована на напрямі зростання параметра t .

Нехай крива γ задається рівнянням (3.6), тоді на комплексній площині точки $z = \lambda(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$ утворюють множину $L(\gamma)$.

Приклад 3.3. Крива

$$z = \cos t, \quad \pi \leq t \leq 2\pi,$$

є відрізком $[-1, 1]$, орієнтованим від точки $z = -1$ до точки $z = 1$ (Рис.3.1).

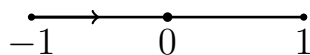


Рис. 3.1

Приклад 3.4. Крива

$$z = e^{it}, \quad \frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{3\pi}{2},$$

є півколом $|z| = 1$, $\operatorname{Re} z \leq 0$, орієнтованим проти годинникової стрілки (Рис.3.2).

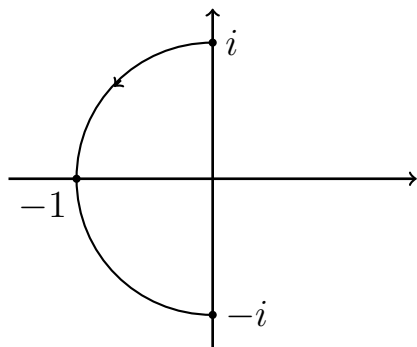


Рис. 3.2

Відмінність кривої γ від множин точок комплексної площини $L(\gamma)$ полягає в тому, що різним точкам кривої можуть відповідати одна і та ж сама точка комплексної площини: якщо $\lambda(t_1) = \lambda(t_2)$ при $t_1 \neq t_2$, то точки $z_1 = \lambda(t_1)$ і $z_2 = \lambda(t_2)$ є різними на кривій γ , але як точки комплексної площини, вони співпадають. Такі точки називаються точками самоперетину кривої (3.6).

Крива, яка не має точок самоперетину, називається простою кривою або кривою Жордана. Замкнутою кривою називається крива, початок і кінець якої співпадають. Точка, яка є одночасно початком і кінцем кривої, не вважається точкою самоперетину.

Нехай

$$\lambda(t) = x(t) + iy(t)$$

і неперервні функції $x(t)$ і $y(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$ такі, що двом різним значенням параметра t (крім можливого початку $t = \alpha$ і кінця $t = \beta$) відповідають дві різні точки лінії. Тобто, $\lambda(t)$ є кривою Жордана.

Приклад 3.5. Крива

$$z = e^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

є коло $|z| = 1$, орієнтоване проти годинникової стрілки. Початком і кінцем цієї кривої є точка $z = 1$ (Рис.3.3).

Приклад 3.6. Крива $z = \lambda(t)$, де

$$\lambda(t) = \begin{cases} e^{it}, & 0 \leq t \leq \frac{3\pi}{2}, \\ \frac{2ti}{3\pi} - 2i, & \frac{3\pi}{2} \leq t \leq 6\pi, \end{cases}$$

є незамкнутою кривою з самоперетином в точці i . Точки $z_1 = \lambda(\frac{\pi}{2})$ і $z_2 = \lambda(\frac{9\pi}{2})$ є різними на заданій кривій, хоча як точки площини вони співпадають $z_1 = z_2 = i$ (Рис.3.4).

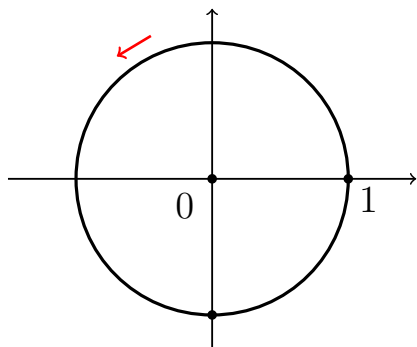


Рис. 3.3

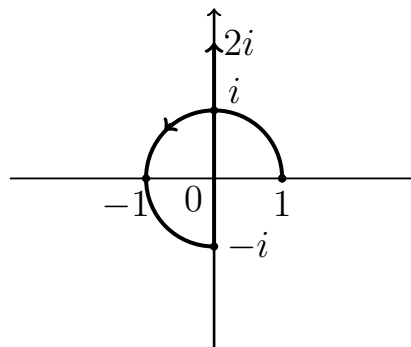


Рис. 3.4

Приклад 3.7. Крива

$$z = \sin t, \quad -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{3\pi}{2},$$

є відрізком $[-1; 1]$, який проходиться двічі: від точки -1 до точки 1 при $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, і навпаки, від точки 1 до точки -1 при $\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{3\pi}{2}$ (Рис.3.5). Це приклад замкненої кривої, у якої кожна точка є точкою самоперетину.

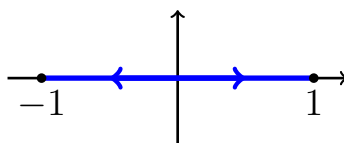


Рис. 3.5

Розглянемо криву γ , задану рівнянням

$$z = \lambda(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta.$$

Через γ^- позначимо криву, отриману з γ зміною орієнтації на протилежну. Рівняння кривої γ^- можна записати у вигляді

$$z = \lambda(-t), \quad -\beta \leq t \leq -\alpha.$$

Частина кривої γ , яка проходиться з точки $z_1 = \lambda(t_1)$ до точки $z_2 = \lambda(t_2)$, $t_1, t_2 \in [\alpha; \beta]$, називається дугою кривої γ .

Нехай

$$\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \beta,$$

γ_k – дуга кривої γ , яка проходиться від точки $z_{k-1} = \lambda(t_{k-1})$ до точки $z_k = \lambda(t_k)$, $k = 1, 2, \dots, n$. Тоді вважають, що крива γ складається з дуг

$$\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n.$$

Якщо точки

$$z_k = \lambda(t_k), \quad k = 0, 1, \dots, n,$$

з'єднати прямими, то отримаємо ламану з вершинами

$$z_k = \lambda(t_k), \quad k = 0, 1, \dots, n,$$

вписану в криву γ .

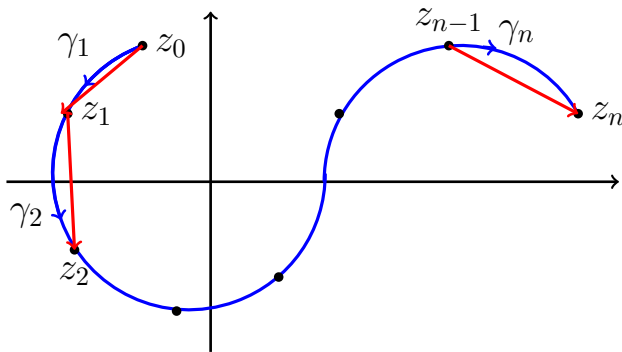


Рис. 3.6

Розглянемо множину всіх ламаних, вписаних в криву γ (Рис.3.6). Якщо множина довжин цих ламаних є обмеженою, то крива γ називається спрямлюваною, а точна верхня грань цієї множини – довжиною кривої γ .

Якщо рівняння кривої $\gamma \in$

$$z = \lambda(t), \alpha \leq t \leq \beta,$$

і функція $\lambda(t)$ при $t \in [\alpha; \beta]$ має неперервну і відмінну від нуля похідну

$$\lambda'(t) \neq 0,$$

то така крива називається гладкою кривою.

Якщо крива замкнена, то повинна виконуватися рівність

$$\lambda'(\alpha) = \lambda'(\beta).$$

Крива називається кусково-гладкою, якщо її можна розбити на скінченне число гладких кривих. Надалі рівняння кусково-гладких кривих будемо записувати у вигляді

$$z = \lambda(t), \alpha \leq t \leq \beta,$$

де функція $\lambda(t)$ неперервна і кусково неперервно диференційовна на $[\alpha; \beta]$ і на цьому відрізку $\lambda'(t) \neq 0$.

Добре відомо з курсу математичного аналізу, що кусково-гладка крива γ :

$$z = \lambda(t), \alpha \leq t \leq \beta,$$

спрямлювана і її довжина $l(\gamma)$ обчислюється за формулою

$$l(\gamma) = \int_{\alpha}^{\beta} |\lambda'(t)| dt.$$

Введемо поняття необмеженої кривої: нехай на необмеженому проміжку $\alpha \leq t < \infty$ задана неперервна комплекснозначна функція $z = \lambda(t)$ і $\lambda(\infty) = \infty$. Тоді кажуть, що задана необмежена крива

$$z = \lambda(t), \quad \alpha \leq t < \infty, \quad (3.7)$$

а рівняння (3.7) називається параметричним рівнянням цієї кривої. Необмежена крива (3.7) називається кусково-гладкою, якщо для кожного скінченного $\beta > \alpha$ крива $z = \lambda(t)$, $\alpha \leq t < \beta$ є кусково-гладкою.

3.3. Області в комплексній площині

Множина $\mathcal{D}$ точок розширеної комплексної площини називається областю, якщо ця множина:

- а) відкрита, тобто для кожної точки $z_0 \in \mathcal{D}$ існує окіл точки z_0 , що належить $\mathcal{D}$;
- б) зв'язна, тобто довільні дві точки z_1 і z_2 можна з'єднати кривою, можливо необмеженою, всі точки якої належать $\mathcal{D}$.

Точку, в довільному околі якої є точки, які належать $\mathcal{D}$ і є точки, які не належать $\mathcal{D}$, називають граничною точкою множини $\mathcal{D}$. Множина граничних точок множини $\mathcal{D}$ називається границею цієї множини.

Область $\mathcal{D}$ разом з приєднаними своїми граничними точками, називається замкненою областю і позначається $\overline{\mathcal{D}}$. Надалі будемо вважати, що всі граничні криві області $\mathcal{D}$ орієнтовані так, що при русі вздовж граничної кривої область $\mathcal{D}$ залишається зліва.

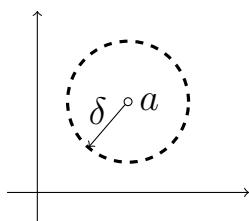


Рис. 3.7

Приклад 3.8. Область $0 < |z - a| < \delta$, $\delta > 0$, є відкритою множиною і називається околom точки $z = a$ з виколотою точкою (Рис.3.7).

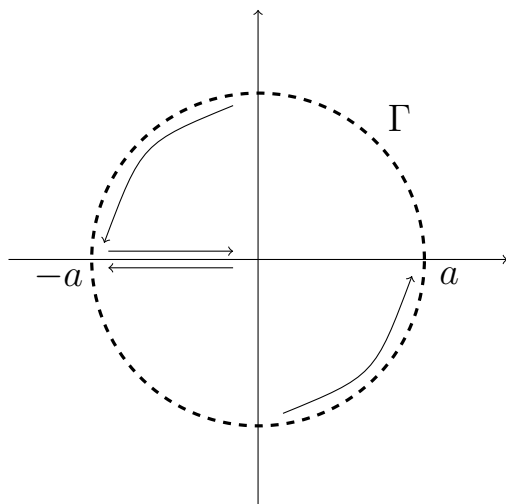


Рис. 3.8

Приклад 3.9. Область $|z| < a$, $a > 0$, $-\pi < \arg z < \pi$ є круг $|z| < a$ з розрізом вздовж відрізка $[-a; 0]$. Гранична крива Γ складається з таких частин: коло $|z| = a$, яке проходиться проти годинникової стрілки один раз; відрізок, який проходиться від точки $-a$ до точки 0 (верхній берег розрізу); відрізок $[-a; 0]$, що проходиться від точки 0 до точки $-a$. Кожній точці півсегмента $[-a; 0)$ відповідають дві різні точки граничної кривої Γ (рис. 3.8).

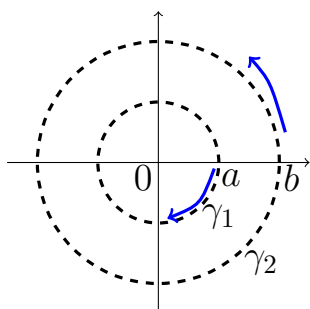


Рис. 3.9

Приклад 3.10. Границя Γ області $a < |z| < b$, $-\pi < \varphi \leq \pi$, складається з двох кіл $\Gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$, де γ_1 - коло $|z| = a$, орієнтоване за годинниковою стрілкою, γ_2 - коло $|z| = b$, орієнтоване проти годинникової стрілки (рис. 3.9).

Область $\mathcal{D}$ називається обмеженою, якщо існує такий круг

$$K = \{z \in \mathbb{C} : |z| < A\},$$

що $\mathcal{D} \subset K$. Області в прикладах 3.8-3.10 є обмеженими.

Приклад 3.11. Області, приведені нижче, є необмеженими:

- а) $|z| > 2$ (рис.3.10);
- б) верхня півплощина $\text{Im } z > 0$ з розрізами вздовж відрізків $[-1; -1 + i]$, $[1; 1 + i]$ (рис.3.11);
- с) смуга $-1 < \text{Re } z < 2$ (рис.3.12);
- д) півсмуга $|\text{Im } z| < 1$, $\text{Re } z > 1$ з розрізом по відрізку $[2; 3]$ (рис.3.13).

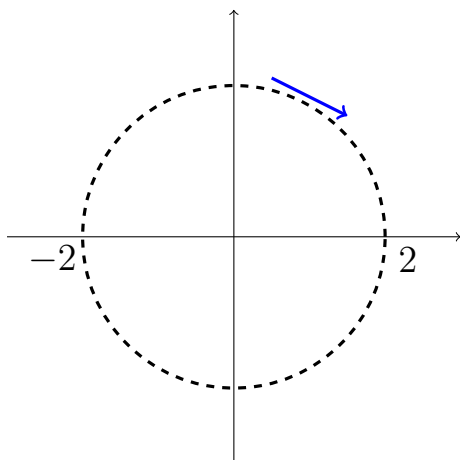


Рис. 3.10

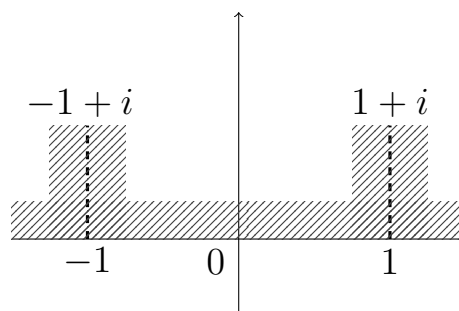


Рис. 3.11

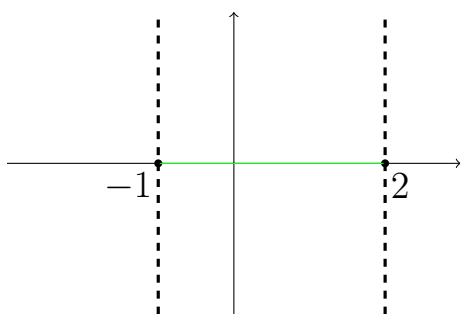


Рис. 3.12

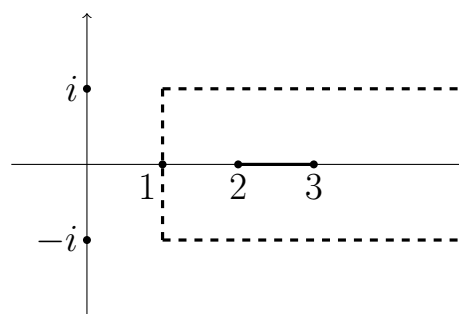


Рис. 3.13

Область, яка лежить у розширеній комплексній площині, називається *однозв'язною*, якщо внутрішня або зовнішня частини довільного кусково-гладкого контура Жордана, що цілком лежить в $\mathcal{D}$, належить $\mathcal{D}$. У випадку обмеженої області $\mathcal{D}$ число зв'язних частин границі, на які вона розбивається називається порядком зв'язності цієї області. Так на рис. 3.9 зображена двозв'язна область, а на рис. 3.8 - однозв'язна.

Теорема 3.1. Теорема Жордана. Проста замкнена неперервна крива розбиває площину $\mathbb{C}$ на дві однозв'язні області.

Контрольні питання

1. Дати означення комплексозначної функції дійсної змінної. Навести приклад такої функції.

2. Нехай $\lambda(t) = \xi(t) + i\eta(t)$, $t \in (\alpha; \beta)$, – комплекснозначна функція дійсної змінної. За яких умов $\lambda(t)$ є неперервною функцією у точці $t = t_0 \in (\alpha; \beta)$?

3. Обчислити інтеграл

$$\int_0^{\pi} e^{2it} dt.$$

4. Дати означення кривої в комплексній площині. Навести приклад.

5. Побудувати криві

$$1) z = \sin t, \quad -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}; \quad 2) z = t + i(t^2 + 1), \quad -\infty < t < \infty.$$

6. Дати означення простої кривої, замкненої кривої. Навести приклади простої, замкненої кривих.

7. Дати означення гладкої кривої. Дати означення кусково-гладкої кривої.

8. Дати означення необмеженої кривої. Навести приклад необмеженої кривої.

9. Дати означення області у комплексній площині. Які із наведених множин

$$1) |z| < 2; \quad 2) |z - 1| \geq 3; \quad 3) 0 < \arg z < \frac{\pi}{4};$$

є областями в комплексній площині? Чому? Які області є обмеженими, які необмеженими?

10. Дати означення однозв'язної області. Навести приклад.

4. Функції комплексної змінної

4.1. Поняття функції комплексної змінної

У математичному аналізі під поняттям функції розуміють однозначну функцію. Розглянемо поняття багатозначної функції.

Нехай E – деяка множина комплексної площини і кожному $z \in E$ поставлене у відповідність одне або декілька комплексних чисел ω . Тоді кажуть, що на множині E визначена функція комплексної змінної z , яку будемо позначати $f(z)$. Таким чином,

$$\omega = f(z).$$

Якщо кожному значенню z відповідає одне значення ω , то функція $\omega = f(z)$ називається однозначною. А якщо деяким z відповідає більше одного ω , то функція $\omega = f(z)$ називається багатозначною. Множина E називається множиною визначення функції $\omega = f(z)$, а сукупність $\mathcal{D}$ всіх значень ω , яких $f(z)$ набуває на E – множиною значень функції.

Функції

$$\omega = z^2, \quad \omega = \operatorname{Re} z,$$

які визначені на множині $\mathbb{C}$ є однозначними, а $\omega = \operatorname{Arg} z$ – багатозначна функція, визначена на $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Функція

$$\omega = \sqrt[n]{z}, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$$

також багатозначна.

Якщо покласти

$$z = x + iy, \quad \omega = u + iv,$$

то задання функції комплексної змінної $\omega = f(z)$ рівносильне заданню двох функцій

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y)$$

двох дійсних змінних.

Будемо вважати, що $z \in E$ належить одній комплексній площині, а $\omega = f(z)$ – іншій комплексній площині.

Якщо функція $\omega = f(z)$ однозначна на множині E і при цьому двом різним точкам з E завжди відповідають різні точки $\mathcal{D}$, то така функція називається взаємнооднозначною або однолистою.

4.2. Границя функції комплексної змінної

Нагадаємо, що точка a є граничною точкою множини E , якщо довільний окіл точки a містить безліч точок множини E .

Означення 4.1. Число A називається границею функції $f(z)$ при $z \rightarrow a$ на множині E , якщо $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що $\forall z \in E$, які задовольняють умову $0 < |z - a| < \delta$ виконується нерівність:

$$|f(z) - A| < \varepsilon.$$

Вживають наступний запис:

$$\lim_{\substack{z \rightarrow a \\ z \in E}} f(z) = A$$

або $f(z) \rightarrow A$ при $z \rightarrow a, z \in E$.

Можна навести інше означення границі функції, еквівалентне попередньому: якщо для довільної послідовності $\{z_n\}$, $z_n \in E$, $z_n \neq a$, такої що $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$, послідовність $\{f(z_n)\}$ збігається до A , тобто $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = A$, то $\lim_{\substack{z \rightarrow a \\ z \in E}} f(z) = A$.

Для скорочення запису в подальшому іноді замість

$$\lim_{\substack{z \rightarrow a \\ z \in E}} f(z) = A$$

будемо писати

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = A.$$

Існування границі

$$A = a + ib$$

функції

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

при $z = x + iy \rightarrow z_0 = x_0 + iy_0$ рівносильне існуванню двох границь

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} u(x, y) = a, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} v(x, y) = b.$$

Це випливає з теореми 2.1. Причому

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} u(x, y) + i \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} v(x, y).$$

Елементарні властивості функцій комплексної змінної, що стосуються границь, є такими ж, як властивості границь функцій дійсної змінної. Якщо

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A, \quad \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = B,$$

то

$$\lim_{z \rightarrow z_0} [f(z) \pm g(z)] = A \pm B,$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} [f(z) \cdot g(z)] = A \cdot B,$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{A}{B}, \text{ за умови } B \neq 0.$$

4.3. Неперервні функції комплексної змінної

Нехай функція $f(z)$ визначена на множині E і точка $z_0 \in E$. Функція $f(z)$ називається неперервною в точці z_0 , якщо $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ таке, що для $\forall z \in E$, які задовольняють умові $|z - z_0| < \delta$, виконується нерівність

$$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon.$$

Зокрема, якщо точка z_0 є граничною точкою множини E , то функція $f(z)$ в точці z_0 буде неперервною, якщо

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0).$$

Функція $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ називається неперервною в точці $z_0 = x_0 + iy_0$, якщо функції $u(x, y)$ і $v(x, y)$ неперервні в точці (x_0, y_0) .

Це означення еквівалентне попереднім означенням. Звідси випливає, що ряд властивостей неперервних функцій двох дійсних змінних "переноситься" на неперервні функції комплексної змінної. А саме, сума, різниця, добуток і частка двох неперервних функцій є неперервними функціями (частка неперервна в тих точках, де знаменник не обертається в нуль).

Якщо функція $\varphi = \varphi(z)$ неперервна в точці z_0 і функція $\omega = f(\varphi)$ неперервна в точці $\varphi_0 = \varphi(z_0)$, то складена функція

$$\omega = f(\varphi(z))$$

неперервна в точці z_0 .

Приклад 4.1. Функції

$$\omega = z^2, \omega = \bar{z}, \omega = |z|$$

визначені і неперервні на всій комплексній площині.

Приклад 4.2. Функція

$$\omega = \arg z$$

визначена і однозначна для всіх $z \neq 0$ ($-\pi < \arg z \leq \pi$). Кожна точка від'ємної частини дійсної осі є для $\omega = \arg z$ точкою розриву. Дійсно, якщо $z_0 = x_0 < 0$, то

$$\lim_{\substack{z \rightarrow x_0 \\ y > 0}} \arg(x + iy) = \lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ x \rightarrow x_0}} \left(\arctg \frac{y}{x} + \pi \right) = \pi,$$

$$\lim_{\substack{z \rightarrow x_0 \\ y < 0}} \arg(x + iy) = \lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ x \rightarrow x_0}} \left(\arctg \frac{y}{x} - \pi \right) = -\pi.$$

Функція $\omega = \arg z$ є неперервною в площині з розрізом вздовж від'ємної частини дійсної осі.

Функція $\omega = f(z)$, $z \in E$, називається рівномірно неперервною на множині E , якщо $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ таке, що $|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$ для довільних $z_1, z_2 \in E$ і таких, що $|z_1 - z_2| < \delta$.

Справедливі наступні твердження:

- а) неперервна в області E функція $f(z)$ рівномірно неперервна в довільній обмеженій області E_1 , такій що $\bar{E}_1 \subset E$;
- б) якщо функція $f(z)$ рівномірно неперервна в обмеженій області E , то її можна довизначити в граничних точках області E так, щоб функція $f(z)$ стала неперервною в $\bar{E}$.

4.4. Послідовності функцій і функціональні ряди

Означення 4.2. Послідовність $\{f_n(z)\}$ називається рівномірно збіжною на множині E до функції $f(z)$, якщо $\forall \varepsilon > 0$ існує такий номер N , що для всіх $n > N$ і $z \in E$ виконується нерівність

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon.$$

Означення 4.3. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(z)$ називається рівномірно збіжним на множині E , якщо послідовність його частинних сум $S_n(z) = \sum_{k=1}^n \varphi_k(z)$ збігається рівномірно на множині E .

Критерій Коші для послідовностей і для рядів.

- 1) Для того щоб послідовність $\{f_k(z)\}$ рівномірно збігалась на множині E , необхідно і достатньо, щоб $\forall \varepsilon > 0 \exists N$ такий, що $\forall n > N, \forall m > N$ і $\forall z \in E$ виконувалась нерівність:

$$|f_n(z) - f_m(z)| < \varepsilon.$$

- 2) Для того щоб ряд $\sum_{k=1}^{\infty} g_k(z)$ збігався рівномірно на множині E , необхідно і достатньо щоб $\forall \varepsilon > 0 \exists N$ такий, що $\forall n > N, \forall m \geq n > N$ і всіх $z \in E$ виконувалась нерівність:

$$\left| \sum_{k=n}^m g_k(z) \right| < \varepsilon.$$

- 3) Ознака Вейерштрасса. Якщо члени ряду $\sum_{k=1}^{\infty} g_k(z)$, задовольняють нерівність $|g_k(z)| \leq C_k$ для $\forall z \in E, k \in \mathbb{N}$, і числовий ряд $\sum_{k=1}^{\infty} C_k$ збігається, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} g_k(z)$ збігається рівномірно на множині E .

- 4) Якщо $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(z) = f(z)$, $f_k(z)$, $k \in \mathbb{N}$, – неперервні на множині E функції і послідовність $\{f_k(z)\}$ збігається рівномірно на E , то функція $f(z)$ також неперервна на E .

4.5. Елементарні функції комплексної змінної

Розглянемо функції комплексної змінної, що відповідають елементарним функціям дійсної змінної.

Нехай $y = f(x)$ функція дійсної змінної x , розвинена у ряд

$$y = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

тоді функція

$$\omega = f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

є функцією комплексної змінної, що відповідає функції $f(x)$. Зазначимо, що при цьому функції комплексної змінної набувають нових властивостей.

1) Степенева функція.

$$\omega = z^n, n \in \mathbb{N}, z \in \mathbb{C}.$$

Вважаємо, що $z^0 = 1$.

2) Показникова функція.

За означенням

$$\omega = e^z = \exp z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, z \in \mathbb{C}.$$

Зокрема, при $z = iy$ отримаємо

$$e^{iy} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n y^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n y^{2n+1}}{(2n+1)!} = \cos y + i \sin y.$$

Звідси

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y), \quad (4.1)$$

де $\operatorname{Re} e^z = e^x \cos y$, $\operatorname{Im} e^z = e^x \sin y$.

Отже,

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi. \quad (4.2)$$

Формули (4.1) та (4.2) називаються формулами Ейлера.

Зауважимо, що $e^0 = 1$, $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$, $e^{i\pi} = -1$, тобто

$$e^{i\pi} + 1 = 0. \quad (4.3)$$

Тотожність (4.3), що є частинним випадком формули Ейлера при $\varphi = \pi$, пов'язує п'ять фундаментальних математичних чисел $0, 1, \pi, e, i$.

Властивості показникової функції:

- а) $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$;
- б) функція e^z є періодичною з періодом $2\pi i$: $e^{z+2\pi i} = e^z$;
- в) функція e^z неперервна $\forall z \in \mathbb{C}$;
- г) $|e^z| = e^x$, $\arg e^z = y$;
- д) функція e^z є необмеженою.

3) Логарифмічна функція $\omega = \operatorname{Ln} z$.

Оскільки функція e^z набуває усіх значень, крім нуля, означимо $\operatorname{Ln} z$ як розв'язок рівняння

$$\begin{aligned} e^\omega &= z, \quad z \neq 0. \\ \omega = \operatorname{Ln} z &= \ln |z| + i \operatorname{Arg} z = \\ &= \ln |z| + i(\arg z + 2\pi k), \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Властивості функції $\omega = \operatorname{Ln} z$:

- а) $\operatorname{Ln} z$ багатозначна функція, визначена для $\forall z \in \mathbb{C}, z \neq 0$;
- б) головним значенням $\operatorname{Ln} z$ називається $\ln z$ ($\operatorname{Ln} z$ при $k = 0$):

$$\ln z = \ln |z| + i \arg z;$$

- в) $\operatorname{Ln}(z_1 \cdot z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2$;

$$\text{г) } \operatorname{Ln} \frac{z_1}{z_2} = \operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_2.$$

4) Загальна степенева функція.

$$\omega = z^\alpha, \alpha \in \mathbb{C}.$$

Функція $\omega = z^\alpha = e^{\alpha \operatorname{Ln} z}$, $z \neq 0$, є багатозначною.

Якщо $\alpha = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, то

$$z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{z} = e^{\frac{1}{n}(\ln |z| + i \operatorname{Arg} z)} = \sqrt[n]{|z|} e^{\frac{i}{n} \operatorname{Arg} z}.$$

5) Загальна показникова функція.

$$\omega = a^z, a \in \mathbb{C}, a \neq 0.$$

Функція $\omega = a^z = e^{z \operatorname{Ln} a}$ є багатозначною.

6) Тригонометричні функції.

За означенням

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}, z \in \mathbb{C},$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}, z \in \mathbb{C},$$

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, z \neq \frac{\pi}{2} + \pi k;$$

$$\operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}, z \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Застосуємо формулу Ейлера

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z. \quad (4.5)$$

Зробимо заміну z на $-z$:

$$e^{-iz} = \cos z - i \sin z. \quad (4.6)$$

Почленно додамо та віднімемо рівності (4.5) та (4.6)

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Властивості тригонометричних функцій:

- а) $\sin z$ та $\cos z$ визначені для $\forall z \in \mathbb{C}$, неперервні, періодичні із періодом $T = 2\pi$, зберігають непарність та парність відповідно;
- б) $\operatorname{tg} z$ та $\operatorname{ctg} z$ в області визначення непарні, є періодичними функціями із періодом $T = \pi$;
- в) справедливі формули:

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1,$$

$$\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \sin z_2,$$

$$\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2,$$

$$\sin 2z = 2 \sin z \cdot \cos z,$$

$$\cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z$$

та інші.

7) Гіперболічні функції.

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2},$$

$$\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}, \quad \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}.$$

Функції $\operatorname{ch} z, \operatorname{sh} z$ визначені для всіх $z \in \mathbb{C}$. Функція $\operatorname{th} z$ визначена для $z \neq \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)i$, функція $\operatorname{cth} z$ визначена для $z \neq k\pi i, k \in \mathbb{Z}$.

Мають місце наступні формули:

$$\text{а) } e^z = \operatorname{ch} z + \operatorname{sh} z, \quad e^{-z} = \operatorname{ch} z - \operatorname{sh} z;$$

$$\text{б) } \cos(iz) = \operatorname{ch} z, \quad \operatorname{ch}(iz) = \cos z,$$

$$\sin(iz) = i \operatorname{sh} z, \quad \operatorname{sh}(iz) = i \sin z;$$

$$\begin{aligned}
\text{в) } \operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z &= 1, \\
\operatorname{ch}(z_1 \pm z_2) &= \operatorname{ch} z_1 \operatorname{ch} z_2 \pm \operatorname{sh} z_1 \operatorname{sh} z_2, \\
\operatorname{sh}(z_1 \pm z_2) &= \operatorname{sh} z_1 \operatorname{ch} z_2 \pm \operatorname{ch} z_1 \operatorname{sh} z_2, \\
\operatorname{th}(z_1 + z_2) &= \frac{\operatorname{th} z_1 + \operatorname{th} z_2}{1 + \operatorname{th} z_1 \cdot \operatorname{th} z_2}, \\
\operatorname{sh} 2z &= 2 \operatorname{sh} z \cdot \operatorname{ch} z, \quad \operatorname{ch} 2z = \operatorname{ch}^2 z + \operatorname{sh}^2 z, \\
\operatorname{ch}^2 z &= \frac{\operatorname{ch} 2z + 1}{2}, \quad \operatorname{sh}^2 z = \frac{\operatorname{ch} 2z - 1}{2}.
\end{aligned}$$

Функції $\operatorname{sh} z$ та $\operatorname{ch} z$ періодичні з періодом $2\pi i$, функції $\operatorname{th} z$ та $\operatorname{cth} z$ періодичні з періодом πi .

8) Обернені тригонометричні функції.

$$\operatorname{Arcsin} z = -i \operatorname{Ln}(iz + \sqrt{1 - z^2}),$$

$$\operatorname{Arccos} z = -i \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}),$$

$$\operatorname{Arctg} z = -\frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{1 + iz}{1 - iz},$$

$$\operatorname{Arcctg} z = -\frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{iz - 1}{iz + 1}.$$

Ці функції визначаються як функції, обернені відповідно до $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{tg} z$, $\operatorname{ctg} z$, тобто є розв'язками відповідних рівнянь:

$$1) \quad z = \sin \omega \Rightarrow \omega = \operatorname{Arcsin} z,$$

$$z = \sin \omega = \frac{e^{i\omega} - e^{-i\omega}}{2i} = \frac{e^{2i\omega} - 1}{2ie^{i\omega}},$$

$$e^{2i\omega} - 2iz e^{i\omega} - 1 = 0,$$

$$e^{i\omega} = iz + \sqrt{1 - z^2},$$

$$\omega = \operatorname{Arcsin} z = -i \operatorname{Ln}(iz + \sqrt{1 - z^2}).$$

$$2) \quad z = \cos \omega \Rightarrow \omega = \operatorname{Arccos} z,$$

$$z = \cos \omega = \frac{e^{i\omega} + e^{-i\omega}}{2} = \frac{e^{2i\omega} + 1}{2e^{i\omega}},$$

$$e^{2i\omega} - 2ze^{i\omega} + 1 = 0,$$

$$e^{i\omega} = z + \sqrt{z^2 - 1},$$

$$\omega = \operatorname{Arccos} z = -i \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}).$$

$$3) z = \operatorname{tg} \omega \Rightarrow \omega = \operatorname{Arctg} z,$$

$$z = \operatorname{tg} \omega = \frac{e^{i\omega} - e^{-i\omega}}{i(e^{i\omega} + e^{-i\omega})} = \frac{e^{2i\omega} - 1}{i(e^{2i\omega} + 1)},$$

$$iz(e^{2i\omega} + 1) = e^{2i\omega} - 1,$$

$$e^{2i\omega} = \frac{1 + iz}{1 - iz},$$

$$\omega = \operatorname{Arctg} z = -\frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{1 + iz}{1 - iz}.$$

$$4) z = \operatorname{ctg} \omega \Rightarrow \omega = \operatorname{Arcctg} z,$$

$$z = \operatorname{ctg} \omega = \frac{(e^{i\omega} + e^{-i\omega})i}{e^{i\omega} - e^{-i\omega}} = \frac{(e^{2i\omega} + 1)i}{e^{2i\omega} - 1},$$

$$-iz(e^{2i\omega} - 1) = e^{2i\omega} + 1,$$

$$e^{2i\omega} = \frac{iz - 1}{iz + 1},$$

$$\omega = \operatorname{Arcctg} z = -\frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{iz - 1}{iz + 1}.$$

Обернені тригонометричні функції є багатозначними. Функції $\operatorname{Arcsin} z$ та $\operatorname{Arccos} z$ визначені для всіх $z \in \mathbb{C}$, а функції $\operatorname{Arctg} z$ та $\operatorname{Arcctg} z$ визначені для всіх $z \neq \pm i$.

9) Обернені гіперболічні функції:

$$\operatorname{Arcsh} z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 + 1}),$$

$$\operatorname{Arcch} z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}),$$

$$\operatorname{Arcth} z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{1 + z}{1 - z},$$

$$\operatorname{Arccth} z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{z + 1}{z - 1}.$$

Ці функції визначаються як функції, обернені відповідно до $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$, $\operatorname{th} z$, $\operatorname{cth} z$, тобто вони є розв'язками відповідних рівнянь:

$$1) z = \operatorname{sh} \omega \Rightarrow \omega = \operatorname{Arcsh} z,$$

$$z = \operatorname{sh} \omega = \frac{e^{\omega} - e^{-\omega}}{2} = \frac{e^{2\omega} - 1}{2e^{\omega}},$$

$$e^{2\omega} - 2ze^{\omega} - 1 = 0,$$

$$e^{\omega} = z + \sqrt{z^2 + 1},$$

$$\omega = \operatorname{Arcsh} z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 + 1}).$$

$$2) \ z = \operatorname{ch} \omega \Rightarrow \omega = \operatorname{Arcch} z,$$

$$z = \operatorname{ch} \omega = \frac{e^{\omega} + e^{-\omega}}{2} = \frac{e^{2\omega} + 1}{2e^{\omega}},$$

$$e^{2\omega} - 2ze^{\omega} + 1 = 0,$$

$$e^{\omega} = z + \sqrt{z^2 - 1},$$

$$\omega = \operatorname{Arcch} z = \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}).$$

$$3) \ z = \operatorname{th} \omega \Rightarrow \omega = \operatorname{Arcth} z,$$

$$z = \operatorname{th} \omega = \frac{e^{\omega} - e^{-\omega}}{e^{\omega} + e^{-\omega}} = \frac{e^{2\omega} - 1}{e^{2\omega} + 1},$$

$$e^{2\omega} = \frac{1 + z}{1 - z},$$

$$\omega = \operatorname{Arcth} z = -\frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{1 + z}{1 - z}.$$

$$4) \ z = \operatorname{cth} \omega \Rightarrow \omega = \operatorname{Arccth} z,$$

$$z = \operatorname{cth} \omega = \frac{e^{\omega} + e^{-\omega}}{e^{\omega} - e^{-\omega}} = \frac{e^{2\omega} + 1}{e^{2\omega} - 1},$$

$$e^{2\omega} = \frac{z + 1}{z - 1},$$

$$\omega = \operatorname{Arccth} z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{z + 1}{z - 1}.$$

Обернені гіперболічні функції є багатозначними. Функції $\operatorname{Arcsh} z$ та $\operatorname{Arcch} z$ визначені для всіх $z \in \mathbb{C}$, а функції $\operatorname{Arcth} z$ та $\operatorname{Arccth} z$ визначені для всіх $z \neq \pm 1$.

Контрольні питання

1. Дати означення функції комплексної змінної. Яка функція комплексної змінної називається однозначною, яка багатозначною?
2. Яким умовам задовольняє однолиста функція комплексної змінної?
3. Дати означення границі функції комплексної змінної.

4. Знайти границі послідовності $\{z_n\}$, якщо:

$$1) z_n = \frac{2n+1}{3n} + i \frac{3^n}{n!}; \quad 2) z_n = \frac{n^2-1}{n^3+3} + i \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

5. Дати означення неперервної функції комплексної змінної $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ у точці $z_0 = x_0 + iy_0$. Навести приклад неперервної функції комплексної змінної.

6. Дати означення рівномірно збіжної послідовності функцій комплексної змінної. Сформулювати критерій Коші рівномірно збіжної послідовності функцій комплексної змінної.

7. Сформулювати основні властивості показникової функції. За допомогою формули Ейлера обчислити значення $e^{2\pi i}$.

8. Сформулювати основні властивості логарифмічної функції. Обчислити всі значення функції $\text{Ln } 2$, $\ln 2$. Яка із функцій $\text{Ln } z$ та $\ln z$ є багатозначною?

9. Обчислити всі значення функції 5^i .

10. Обчислити всі значення функції

$$\sin(1+2i), \cos 3i, \cos(-i), \sin i, \operatorname{tg} 1, \operatorname{ctg} 2i.$$

11. Довести наступні формули

$$\sin(iz) = i \operatorname{sh} z, \cos(iz) = \operatorname{ch} z.$$

5. Диференціювання функцій комплексної змінної

5.1. Означення похідної. Правила диференціювання

Нехай функція $f(z)$ визначена і однозначна на деякій множині E , $z_0 \in E$ і z_0 – гранична точка множини E .

Означення 5.1. Якщо існує границя

$$\lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in E}} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0},$$

то вона називається **похідною** функції $f(z)$ на множині E в точці z_0 і позначається через $f'(z_0)$.

Таким чином,

$$\lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in E}} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0). \quad (5.1)$$

Якщо існує похідна $f'(z)$ в кожній точці відкритої множини E , то функцію $f(z)$ називають *диференційовною* або *аналітичною* в області E .

Підкреслимо, якщо існує границя (5.1), то вона не залежить від способу прямування точки z до точки z_0 .

Позначимо $f(z) - f(z_0)$ через $\Delta f(z)$, а $z - z_0$ через Δz (відповідно приріст функції і приріст незалежної змінної). Тоді рівність (5.1) можна записати так

$$\frac{\Delta f(z)}{\Delta z} = f'(z_0) + \delta(z_0, \Delta z),$$

де $\delta(z_0, \Delta z) \rightarrow 0$ при $\Delta z \rightarrow 0$, $z \in E$. Звідси випливає, що

$$\Delta f(z) = f'(z_0)\Delta z + o(\Delta z), \quad \Delta z \rightarrow 0. \quad (5.2)$$

Будь-яка функція $f(z)$, приріст якої може бути поданим у вигляді

$$\Delta f(z) = B\Delta z + o(\Delta z), \quad \Delta z \rightarrow 0, \quad (5.3)$$

з комплексною сталою B , що не залежить від Δz , є диференційовною в точці z_0 і $B = f'(z_0)$.

Таким чином, рівність (5.3) є необхідною і достатньою умовою диференційовності функції $f(z)$ в точці z_0 . З (5.3), зокрема, випливає неперервність функції $f(z)$ в точці z_0 .

Слід зауважити, що в означенні похідної функції міститься вимога, щоб при $z \rightarrow z_0$ границя в (5.1) не залежала від способу прямування z до z_0 . Іншими словами, відношення

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

має одну й ту ж саму границю при $z \rightarrow z_0$ по довільному шляху від точки z до точки z_0 .

Ця вимога накладає на функцію комплексної змінної значно сильніші обмеження, ніж на функцію дійсної змінної.

Приклад 5.1. Функція

$$f(z) = z^2$$

диференційовна в усій комплексній площині, бо

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z^2 - z_0^2}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} (z + z_0) = 2z_0.$$

Приклад 5.2. Функція

$$f(z) = z\bar{z}$$

неперервна в $\mathbb{C}$, але не диференційовна в жодній точці, крім $z_0 = 0$. Доведемо це.

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z\bar{z} - z_0\bar{z}_0}{z - z_0} = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} \frac{x^2 + y^2 - x_0^2 - y_0^2}{(x - x_0) + i(y - y_0)}. \quad (5.4)$$

Якщо $z = x + iy_0$, тобто $y = y_0$, то

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y = y_0}} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} (x + x_0) = 2x_0. \quad (5.5)$$

Якщо ж $z = x_0 + iy$, тобто $x = x_0$, то

$$\lim_{\substack{x = x_0 \\ y \rightarrow y_0}} \frac{y^2 - y_0^2}{i(y - y_0)} = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{1}{i}(y + y_0) = -2iy_0. \quad (5.6)$$

Рівність між (5.5) і (5.6) можлива лише тоді, коли $x_0 = y_0 = 0$. Тобто $z_0 = 0$.

Наведемо основні правила диференціювання функцій комплексної змінної.

Із властивостей границь функцій комплексної змінної і означення похідної випливає, що основні правила, відомі з математичного аналізу, поширюються і на похідні від функцій комплексної змінної, заданих в області E і диференційовних в точці $z \in E$. Тобто, мають місце рівності:

- 1) $(cf(z))' = cf'(z), c = const;$
- 2) $(f(z) \pm g(z))' = f'(z) \pm g'(z);$
- 3) $(f(z)g(z))' = f'(z)g(z) + f(z)g'(z);$
- 4) $\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)' = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g^2(z)}, g(z) \neq 0.$

- 5) **Правило диференціювання складених функцій.** Нехай функція $\omega = f(z)$ диференційовна в точці $z_0 \in E$, точка $\omega_0 = f(z_0)$ є граничною точкою множини D значень цієї функції при $z \in E$. Розглянемо функцію $\zeta = g(\omega)$, що визначена при $\omega \in D$ і диференційовна в точці ω_0 множини D . Тоді складена функція $\zeta = g(f(z))$ диференційовна в точці $z_0 \in E$, причому

$$(g(f(z)))'_z = g'(\omega)f'(z). \quad (5.7)$$

- 6) **Похідна оберненої функції.** Нехай функція $\omega = f(z)$ задає взаємно-однозначну відповідність між множинами E та D . Тоді, якщо функція $\omega = f(z)$ диференційовна в точці $z_0 \in E$, $f'(z_0) \neq 0$, а обернена їй функція $z = \varphi(\omega)$ неперервна на D та диференційовна в точці $\omega_0 = f(z_0)$, то

$$\varphi'(\omega_0) = \frac{1}{f'(z_0)}.$$

Доведемо властивість 5). Спочатку розглянемо випадок, коли у довільному околі точки z_0 існують точки $z \in E, z \neq z_0$, такі, що $f(z) = f(z_0) = \omega_0$. Тоді існує така послідовність точок $z_n \in E$, що $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0$ і $f(z_n) = f(z_0)$, $n \in \mathbb{N}$. Для цієї послідовності

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(z_n) - f(z_0)}{z_n - z_0} = 0.$$

Оскільки за припущенням похідна

$$f'(z_0) = \lim_{z_n \rightarrow z_0} \frac{f(z_n) - f(z_0)}{z_n - z_0}$$

існує, то вона повинна дорівнювати 0. Тому права частина рівності (5.7) дорівнює нулю. Достатньо показати, що і ліва частина цього співвідношення (5.7) дорівнює нулю.

Вираз

$$\frac{g(f(z)) - g(f(z_0))}{z - z_0}$$

є нулем для кожного $z \neq z_0$ такого, що $f(z) = f(z_0)$. Покажемо, що це співвідношення має границю, що дорівнює нулю для довільної послідовності $z'_n \rightarrow z_0$ такої, що $f(z'_n) = \omega'_n \neq \omega_0$. Справді, вираз

$$\begin{aligned} \frac{g(f(z'_n)) - g(f(z_0))}{z'_n - z_0} &= \frac{g(\omega'_n) - g(\omega_0)}{\omega'_n - \omega_0} \cdot \frac{\omega'_n - \omega_0}{z'_n - z_0} = \\ &= \frac{g(\omega'_n) - g(\omega_0)}{\omega'_n - \omega_0} \cdot \frac{f(z'_n) - f(z_0)}{z'_n - z_0} \end{aligned}$$

прямує до $g'(\omega_0)f'(z_0) = 0$ при $z'_n \rightarrow z_0$. Тобто при зробленому припущенні співвідношення (5.7) виконується.

Нехай тепер існує такий окіл точки z_0 , позначимо його $U_E(z_0)$, в якому $f(z) = \omega \neq \omega_0$ для $\forall z \in U_E(z_0)$.

Тоді при $z \rightarrow z_0$ матимемо:

$$\begin{aligned} \frac{g(f(z)) - g(f(z_0))}{z - z_0} &= \frac{g(\omega) - g(\omega_0)}{\omega - \omega_0} \cdot \frac{\omega - \omega_0}{z - z_0} = \\ &= \frac{g(\omega) - g(\omega_0)}{\omega - \omega_0} \cdot \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \rightarrow g'(\omega)f'(z). \end{aligned}$$

Таким чином, рівність (5.7) доведена.

Доведемо властивість 6). Внаслідок взаємної однозначності відображення $\omega = f(z)$, при $\omega \neq \omega_0$ буде виконуватись $z \neq z_0$. Тоді

$$\frac{\varphi(\omega) - \varphi(\omega_0)}{\omega - \omega_0} = \frac{z - z_0}{\omega - \omega_0} = \frac{1}{\frac{\omega - \omega_0}{z - z_0}}.$$

Оскільки $z = \varphi(\omega) \rightarrow z_0 = \varphi(\omega_0)$ при $\omega \rightarrow \omega_0$, то

$$\lim_{\omega \rightarrow \omega_0} \frac{\varphi(\omega) - \varphi(\omega_0)}{\omega - \omega_0} = \frac{1}{\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\omega - \omega_0}{z - z_0}} = \frac{1}{\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}} = \frac{1}{f'(z_0)}.$$

Таким чином,

$$\varphi'(\omega_0) = \frac{1}{f'(z_0)}.$$

5.2. Властивості функцій багатьох змінних

Нехай множина E задання функції $\omega = f(z)$ є областю. З метою встановлення умов диференційовності функції $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ в області E нагадаємо деякі поняття диференціального числення функцій багатьох змінних.

- 1) **Повний диференціал.** Нехай $u = u(x, y)$ визначена в деякій області D і $M_0(x_0, y_0)$ – точка цієї області. Оберемо прирости

$$\Delta x = x - x_0,$$

$$\Delta y = y - y_0$$

так, щоб точка $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ належала області D . Тоді функція $u(x, y)$ матиме повний приріст Δu

$$\Delta u = u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0).$$

Означення 5.2. Функція $u = u(x, y)$ називається *диференційовною* в точці (x_0, y_0) , якщо її повний приріст в цій точці можна зобразити у вигляді

$$\Delta u = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y,$$

де A і B не залежить від приростів Δx і Δy , а $\alpha = \alpha(\Delta x, \Delta y) \rightarrow 0$, $\beta = \beta(\Delta x, \Delta y) \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$.

Означення 5.3. Лінійна відносно приростів Δx і Δy частина приросту Δu , диференційовної в точці (x_0, y_0) функції $u(x, y)$, називається її **повним диференціалом** в цій точці і позначається символом $du = du(x_0, y_0)$, тобто

$$du(x_0, y_0) = A\Delta x + B\Delta y.$$

Теорема 5.1. Якщо функція $u = u(x, y)$ визначена в області D і диференційовна в деякій точці $M_0(x_0, y_0) \in D$, то вона має в цій точці частинні похідні $u'_x(x_0, y_0)$ і $u'_y(x_0, y_0)$.

Домовимось розуміти під диференціалами dx і dy довільні прирости Δx і Δy відповідно змінних x і y . Тоді вираз для повного диференціалу du можна записати у вигляді

$$du = u'_x(x_0, y_0)dx + u'_y(x_0, y_0)dy.$$

Теорема 5.2. Якщо функція $u(x, y)$ має в деякому okolí точки $M_0(x_0, y_0)$ частинні похідні $u'_x(x_0, y_0)$ і $u'_y(x_0, y_0)$, неперервні в точці (x_0, y_0) , то функція $u(x, y)$ диференційовна в цій точці.

2) Критерій того, що вираз

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

є повним диференціалом деякої функції.

Теорема 5.3. Якщо функції $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ неперервно диференційовні в деякій однозв'язній області D , то необхідною і достатньою умовою того, щоб вираз

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

в області D був повним диференціалом є виконання в цій області рівності

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}, \quad \forall (x, y) \in D.$$

5.3. Умови Коші – Рімана (д’Аламбера – Ейлера)

Теорема 5.4. Для того, щоб функція $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, задана в області D , була диференційовна в точці $z = x + iy \in D$, необхідно і достатньо, щоб:

1) функції $u(x, y)$ і $v(x, y)$ були диференційовні в точці (x, y) , як дійсні функції двох змінних;

2) в точці $M(x, y)$ виконувались умови Коші–Рімана

$$\begin{aligned}\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} &= \frac{\partial v(x, y)}{\partial y}, \\ \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} &= -\frac{\partial v(x, y)}{\partial x}.\end{aligned}\tag{5.8}$$

При виконанні умов теореми похідна $f'(z)$ може бути обчислена за однією із формул:

$$\begin{aligned}f'(z) &= \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \\ &= \frac{\partial v}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}.\end{aligned}\tag{5.9}$$

Доведення. Необхідність. Нехай функція $f(z)$ диференційовна в точці $z \in D$. Тоді, на основі співвідношення (5.3), маємо

$$\Delta f = f'(z)\Delta z + \eta(\Delta z)\Delta z,\tag{5.10}$$

де

$$\begin{aligned}\Delta z &= z_1 - z = (x_1 - x) + i(y_1 - y) = \Delta x + i\Delta y, \\ \eta(\Delta z) &\rightarrow 0 \text{ при } \Delta z \rightarrow 0, \\ \Delta f &= f(z_1) - f(z) = \\ &= [u(x_1, y_1) - u(x, y)] + i[v(x_1, y_1) - v(x, y)] = \Delta u + i\Delta v, \\ f'(z) &= A + iB, \\ \eta &= \eta(\Delta z) = \eta_1 + i\eta_2.\end{aligned}$$

Зазначимо, що $\eta_1 \rightarrow 0$, $\eta_2 \rightarrow 0$, при $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$, тобто $z_1 \rightarrow z$.

Виділивши у (5.10) дійсну і уявну частини, знайдемо:

$$\begin{aligned}\Delta u &= A\Delta x - B\Delta y + \eta_1\Delta x - \eta_2\Delta y, \\ \Delta v &= B\Delta x + A\Delta y + \eta_2\Delta x + \eta_1\Delta y.\end{aligned}$$

Оскільки

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \eta_1 = 0,$$

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \eta_2 = 0,$$

то згідно означення 5.2 з рівностей (5.3) випливає, що функції $u(x, y)$ і $v(x, y)$ диференційовні в точці (x, y) , а згідно теореми 5.1.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = A, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -B,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = B, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = A,$$

тобто виконуються рівності (5.8).

При цьому для $f'(z)$ маємо рівності (5.9)

$$f'(z) = A + iB = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Необхідність умов теореми 5.4 доведена.

Достатність. Нехай функції $u(x, y)$ і $v(x, y)$ диференційовні в точці (x, y) і виконуються умови (5.8). Покажемо, що функція

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

диференційовна в точці z , тобто має місце рівність (5.3). З диференційовності функцій $u(x, y)$ і $v(x, y)$ випливає справедливість рівностей (5.3). Помноживши другу з них на i , а потім їх додавши, знайдемо

$$\begin{aligned}\Delta f &= \Delta u + i\Delta v = \\ &= A\Delta x + iB\Delta x - B\Delta y + iA\Delta y + \eta_1\Delta x + i\eta_2\Delta x - \eta_2\Delta y + i\eta_1\Delta y, = \\ &= (A + iB)\Delta x + i(A + iB)\Delta y + (\eta_1 + i\eta_2)\Delta x + i(\eta_1 + i\eta_2)\Delta y = \\ &= (A + iB)\Delta z + (\eta_1 + i\eta_2)\Delta z.\end{aligned}$$

Згідно (5.3) функція $f(z)$ диференційовна в точці z . Достатність, а тому і теорему 5.4 доведено.

Функція $f(z)$, диференційовна в кожній точці області D називається голоморфною або аналітичною в цій області D .

Приклад 5.3. Розглянемо функцію

$$f(z) = e^z.$$

Перевіримо її на диференційовність. Оскільки

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y),$$

то

$$u(x, y) = e^x \cos y,$$

$$v(x, y) = e^x \sin y$$

і

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Умови Коші–Рімана виконуються, згідно формули (5.9) маємо

$$f'(z) = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^z = f(z).$$

Приклад 5.4. Перевіримо на диференційовність функцію

$$f(z) = \overline{z}^2 = x^2 - y^2 - 2ixy.$$

Оскільки

$$u(x, y) = x^2 - y^2, \quad v(x, y) = -2xy,$$

то

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -2x,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -2y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y.$$

Отже, умови Коші–Рімана виконуються тоді і тільки тоді, коли $x = y = 0$. Отже, функція $\overline{z}^2$ диференційовна лише в точці $z = 0$.

Приклад 5.5. На основі прикладу 5.3 і означення функцій

$$\cos z, \sin z,$$

$$\operatorname{ch} z, \operatorname{sh} z$$

можна встановити, що ці функції диференційовні у всій комплексній площині $\mathbb{C}$ і їх похідні відповідно дорівнюють

$$(\cos z)' = -\sin z, \quad (\sin z)' = \cos z,$$

$$(\operatorname{ch} z)' = \operatorname{sh} z, \quad (\operatorname{sh} z)' = \operatorname{ch} z.$$

У багатьох випадках важливо мати умови диференційовності функції $f(z)$ в точці $z \neq 0$, виражені в полярних координатах. Нехай

$$z = re^{i\varphi},$$

тоді

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = u(r \cos \varphi, r \sin \varphi) + iv(r \cos \varphi, r \sin \varphi).$$

З математичного аналізу відомо, що

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial u}{\partial y} \sin \varphi; \\ \frac{\partial v}{\partial r} &= \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial v}{\partial y} \sin \varphi; \end{aligned} \tag{5.11}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi} = \frac{\partial u}{\partial x} r(-\sin \varphi) + \frac{\partial u}{\partial y} r \cos \varphi;$$

$$\frac{\partial v}{\partial \varphi} = \frac{\partial v}{\partial x} r(-\sin \varphi) + \frac{\partial v}{\partial y} r \cos \varphi.$$

Звідси за умовами Коші–Рімана:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial y} \cos \varphi - \frac{\partial v}{\partial x} \sin \varphi =$$

$$\frac{1}{r} \left(\frac{\partial v}{\partial x} (-r \sin \varphi) + \frac{\partial v}{\partial y} r \cos \varphi \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi},$$

$$\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{\partial u}{\partial y} \cos \varphi + \frac{\partial u}{\partial x} \sin \varphi = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi}.$$

Тепер умови Коші–Рімана в полярних координатах можна записати так:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi}, \\ \frac{\partial v}{\partial r} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi}.\end{aligned}\tag{5.12}$$

Вирази (5.11) перепишемо у вигляді

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{\partial u}{\partial x} \cos \varphi - \frac{\partial v}{\partial x} \sin \varphi, \\ \frac{\partial v}{\partial r} &= \frac{\partial v}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial u}{\partial x} \sin \varphi.\end{aligned}$$

Звідси отримаємо

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial r} \cos \varphi + \frac{\partial v}{\partial r} \sin \varphi, \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{\partial u}{\partial r} \sin \varphi + \frac{\partial v}{\partial r} \cos \varphi.\end{aligned}$$

Отже, в полярних координатах

$$\begin{aligned}f'(z) &= \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \\ &= \frac{\partial u}{\partial r} \cos \varphi + \frac{\partial v}{\partial r} \sin \varphi - i \frac{\partial u}{\partial r} \sin \varphi + i \frac{\partial v}{\partial r} \cos \varphi = \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial r} + i \frac{\partial v}{\partial r} \right) \cos \varphi - i \left(\frac{\partial u}{\partial r} + i \frac{\partial v}{\partial r} \right) \sin \varphi = \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial r} + i \frac{\partial v}{\partial r} \right) (\cos \varphi - i \sin \varphi) = \frac{r}{z} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + i \frac{\partial v}{\partial r} \right).\end{aligned}\tag{5.13}$$

Враховуючи співвідношення (5.12), отримано наступні формули для похідної

$$f'(z) = \frac{r}{z} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + i \frac{\partial v}{\partial r} \right) = \frac{1}{z} \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} - i \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right).$$

Приклад 5.6. Нехай область D – комплексна площина з "викинутою" додатною дійсною піввіссю.

1) Функція

$$\sqrt{z} = \sqrt{r} e^{i\frac{\varphi}{2}}, \quad z = r e^{i\varphi}, \quad 0 < \varphi < 2\pi,$$

задовольняє умовам (5.12). Справді,

$$u(r, \varphi) = \sqrt{r} \cos \frac{\varphi}{2},$$

$$v(r, \varphi) = \sqrt{r} \sin \frac{\varphi}{2},$$

тому

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{2\sqrt{r}} \cos \frac{\varphi}{2} = \frac{\sqrt{r}}{2r} \cos \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi}.$$

Таким же чином перевіряється і друга умова з (5.12). Тому функція $\sqrt{z}$ диференційовна в області D і за формулою (5.13) маємо

$$\begin{aligned} (\sqrt{z})' &= \frac{r}{z} \left(\frac{1}{2\sqrt{r}} \cos \frac{\varphi}{2} + i \frac{1}{2\sqrt{r}} \sin \frac{\varphi}{2} \right) = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{r}} \frac{\cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2}}{\cos \varphi + i \sin \varphi} = \frac{1}{2\sqrt{r}} \frac{1}{e^{i\frac{\varphi}{2}}}, \end{aligned}$$

тобто

$$(\sqrt{z})' = \frac{1}{2\sqrt{z}}.$$

2) Умови (5.12) виконуються для функції

$$\ln z = \ln r + i\varphi$$

в області D і

$$(\ln z)' = \frac{1}{z}.$$

5.4. Спряжені гармонічні функції

Якщо функція $f(z) = u + iv$ диференційовна в області D , а функції $u(x, y)$ і $v(x, y)$ мають неперервні частинні похідні до другого порядку включно, то диференціюючи першу рівність за змінною x , а другу – за змінною y , будемо мати

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y},$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}.$$

Остання рівність справедлива внаслідок неперервності мішаних частинних похідних. Додаючи попередні рівності, отримаємо

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad (5.14)$$

Аналогічно отримаємо

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Означення 5.4. Дійсна функція $u(x, y)$, яка має в області D неперервні частинні похідні другого порядку і задовольняє рівняння (5.14), називається гармонічною в області D , а рівняння (5.14) — рівнянням Лапласа.

Гармонічні функції $u(x, y)$ і $v(x, y)$, які пов'язані між собою умовами Коші–Рімана (5.8), називаються спряженими. Тобто дійсна та уявна частини диференційовної в області D функції є спряженими гармонічними функціями в цій області.

Якщо задана гармонічна функція $u(x, y)$ в однозв'язній області D , то з точністю до сталого доданку, можна знайти диференційовну в області D функцію $f(z) = u + iv$. Тобто відновити диференційовну функцію за її заданою дійсною або уявною частиною.

Приклад 5.7. Знайти аналітичну в околі точки $z = \pi$ функцію $f(z)$ за відомою її дійсною частиною

$$u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad f(\pi) = \frac{1}{\pi}.$$

Перевіримо, чи є гармонічною в околі точки $z = \pi$ функція $u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{2x^3 - 6xy^2}{(x^2 + y^2)^3},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{6xy^2 - 2x^3}{(x^2 + y^2)^3},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Отже, функція $u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$ є гармонічною.

Оскільки за умовами Коші-Рімана

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

то

$$v(x, y) = y \int \frac{2x}{(x^2 + y^2)^2} dx = -\frac{y}{x^2 + y^2} + \varphi(y).$$

Звідси

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} + \varphi'(y) = \frac{\partial u}{\partial x} \text{ (за умовами Коші-Рімана)}.$$

Тобто $\varphi'(y) = 0$, а $\varphi(y) = C$ – деяка стала.

Таким чином,

$$f(z) = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{iy}{x^2 + y^2} + Ci.$$

Оскільки $f(\pi) = \frac{1}{\pi}$, то $f(\pi) = \frac{\pi}{\pi^2} = \frac{1}{\pi}$. Тобто $C = 0$.

Отже, шукана функція має вигляд

$$f(z) = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{1}{z}.$$

5.5. Поняття аналітичної функції

Одним з основних понять теорії функцій комплексної змінної є поняття аналітичної (регулярної, голоморфної) функції.

Нехай функція $f(z)$ визначена в околі точки $z_0 = a$ ($a \neq \infty$).

Означення 5.5. Функція $f(z)$, яка зображається рядом

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - a)^k \quad (5.15)$$

збіжним в деякому околі точки $z = a$, тобто в крузі $|z - a| < \rho, \rho > 0$, називається аналітичною в точці $z = a$.

Якщо функція $f(z)$ аналітична в кожній точці $z \in D$, то $f(z)$ називається регулярною в області D .

Теорема 5.5. Якщо функція $f(z)$ аналітична в точці $z = a$, то вона диференційовна в цій точці.

Доведення. Степеневий ряд (5.15) збігається в деякому околі точки $z = a$ та $f(a) = c_0$.

При $z \neq a$

$$\frac{f(z) - f(a)}{z - a} = \frac{f(z) - c_0}{z - a} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k (z - a)^{k-1}, \quad (5.16)$$

Ряд у правій частині рівності (5.16) рівномірно збігається в крузі $|z - a| \leq \rho_1 < \rho$, отже, його сума є неперервною в цьому крузі і тому існує границя правої частини рівності (5.16) при $z \rightarrow a$. Тобто, $f'(a) = c_1$.

Приклад 5.8. Функція

$$\frac{1}{1 - z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k$$

аналітична в точці $z = 0$, оскільки ряд є збіжним у крузі $|z| < 1$.

Означення 5.6. Нехай функція $f(z)$ визначена в околі нескінченно віддаленої точки і зображається рядом

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{z^k}, \quad (5.17)$$

збіжним в деякому околі точки $z = \infty$ (тобто в області $|z| > R$). Функція $f(z)$, при цих умовах, називається аналітичною в нескінченно віддаленій точці.

Наслідок 5.1. Функція $f(z)$ аналітична в точці $z = \infty$ тоді і тільки тоді, коли функція

$$g(\zeta) = f\left(\frac{1}{\zeta}\right)$$

аналітична в точці $\zeta = 0$.

Приклад 5.9. Функція

$$f(z) = \frac{z}{z-1}$$

аналітична в точці $z = \infty$.

Розглянемо функцію

$$g(\xi) = \frac{1}{1-\xi} = \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{z}{z-1} = f(z).$$

Оскільки функція $g(\xi)$ аналітична в точці $\xi = 0$ (приклад (5.8)), то $f(z)$ аналітична в точці $z = \infty$.

Контрольні питання

1. Дати означення похідної функції комплексної змінної.
2. Яка функція $f(z)$ називається аналітичною в точці $z = z_0$?
3. Які умови є необхідними та достатніми для того, щоб вираз

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

був повним диференціалом деякої функції двох змінних?

4. У чому полягають необхідні та достатні умови диференційовності функції

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

в точці?

5. Які з наступних функцій задовольняють умовам Коші-Рімана в усій комплексній площині

$$f(z) = \cos z, \quad f(z) = \operatorname{ch} z, \quad f(z) = \bar{z}, \quad f(z) = z^3, \quad f(z) = \operatorname{Re}(z - i) ?$$

6. Яка функція двох змінних називається гармонічною?
7. Чи є дійсна та уявна частини аналітичної функції гармонічними функціями?
8. Чи є гармонічною функція $(u(x, y))^2$ за умови гармонічності функції $u(x, y)$?
9. Дати означення аналітичної функції комплексної змінної з допомогою зображення її степеневим рядом.
10. Чи існує зв'язок між аналітичними та гармонічними функціями?

6. Геометричний зміст похідної. Конформне відображення

6.1. Геометричний зміст аргумента похідної

Нехай $w = f(z)$ – функція, аналітична в області E . Значення функції

$$w = u(x, y) + iv(x, y)$$

будемо зображати точками в комплексній площині uv . Кожній точці

$$z = x + iy$$

буде відповідати одна точка

$$w = u + iv$$

в площині uv . Ми розглядаємо взаємно однозначне відображення. Якщо точка z в площині xu рухається по деякій лінії C , то відповідна їй точка w буде описувати в площині uv лінію Γ , яка є образом лінії C . Нехай z_0 – довільна точка області E і задана лінія C із певним напрямком, яка виходить з цієї точки z_0 і має в цій точці дотичну. Припустимо, що $f'(z_0) \neq 0$. Образом лінії C в площині uv буде лінія Γ , яка виходить з точки $w_0 = f(z_0)$. Якщо рівняння довільно вибраної лінії C є

$$z = z(t), 0 \leq t \leq 1,$$

то рівняння лінії Γ отримаємо, якщо замінимо в рівності $w = f(z)$ змінну z на $z(t)$:

$$w = f(z(t)) = w(t), 0 \leq t \leq 1.$$

Зобразимо комплексне число $f'(z_0)$ в тригонометричній формі:

$$f'(z_0) = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

і з'ясуємо геометричний зміст аргумента α похідної і її модуля r . Візьмемо довільну точку $z_0 + \Delta z_0$ на лінії C і позначимо через $w_0 + \Delta w_0$ відповідну їй точку на лінії Γ площини uv . При прямуванні точки $z_0 + \Delta z_0$ по лінії C до точки z_0 відповідна їй точка $w_0 + \Delta w_0$ буде рухатись по лінії Γ до точки w_0 . Прирости Δz_0 і Δw_0 одночасно прямують до нуля. За означенням похідної в точці z_0

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z_0 \rightarrow 0} \frac{\Delta w_0}{\Delta z_0} = r(\cos \alpha + i \sin \alpha).$$

Звідси будемо мати

$$\lim_{\Delta z_0 \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta w_0}{\Delta z_0} \right| = r \quad (6.1)$$

і

$$\lim_{\Delta z_0 \rightarrow 0} \operatorname{Arg} \left(\frac{\Delta w_0}{\Delta z_0} \right) = \alpha. \quad (6.2)$$

Остання рівність справедлива з точністю до числа, кратного 2π .

Оскільки

$$\operatorname{Arg} \left(\frac{\Delta w_0}{\Delta z_0} \right) = \operatorname{Arg} \Delta w_0 - \operatorname{Arg} \Delta z_0,$$

то рівність (6.2) перепишемо у вигляді

$$\lim_{\Delta z_0 \rightarrow 0} \operatorname{Arg} \Delta w_0 - \lim_{\Delta z_0 \rightarrow 0} \operatorname{Arg} \Delta z_0 = \alpha. \quad (6.3)$$

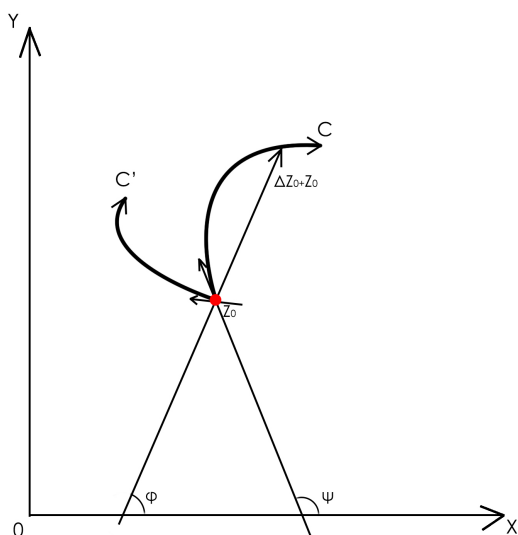


Рис. 6.1

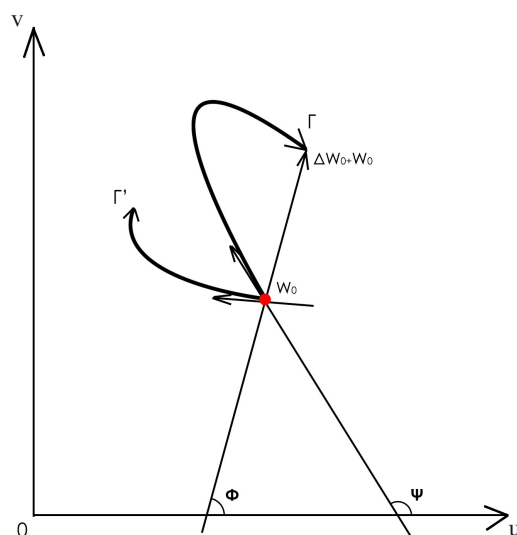


Рис. 6.2

Очевидно, що $\Delta z_0 = z_0 + \Delta z_0 - z_0$ зображається вектором, який з'єднує точку z_0 з точкою $z_0 + \Delta z_0$, а Δw_0 є вектор, з початком в точці w_0 і кінцем в $w_0 + \Delta w_0$. Отже, $\operatorname{Arg}(\Delta z_0)$ є кут φ між додатнім напрямом осі Ox і вектором Δz_0 , а $\operatorname{Arg}(\Delta w_0)$ – кут Φ (кут між додатнім напрямом осі Ou і вектором Δw_0). Таким чином, рівність (6.3) можна переписати у вигляді

$$\Phi - \varphi = \alpha. \quad (6.4)$$

В граничному положенні напрям вектора Δz_0 співпадає з напрямом дотичної до лінії C в точці z_0 (див рис. 6.1), а напрям вектора Δw_0 з напрямом дотичної до лінії Γ в точці w_0 (рис. 6.2).

Позначимо через ψ і Ψ кути між осями Ox і Ou відповідно з дотичними до ліній C і Γ в точках z_0 і w_0 . Тоді (6.4) можна переписати наступним чином

$$\Psi - \psi = \alpha. \quad (6.5)$$

Отже, α є кут на який повертається дотична до лінії C в точці z_0 при відображенні $w = f(z)$. Оскільки лінію C ми взяли довільним чином, то при зміні C будуть змінюватись кути ψ і Ψ , але α залишається сталим. Якщо з точки z_0 провести іншу лінію, позначимо її C' , а відповідну їй лінію, яка виходить з точки w_0 через Γ' , то

$$\Psi' - \psi' = \alpha, \quad (6.6)$$

де ψ' - кут між додатнім напрямом осі Ox і дотичною до лінії C' в точці z_0 , а Ψ' - кут між віссю Ou і дотичною до лінії Γ' . Віднімаючи від рівності (6.6) рівність (6.5), будемо мати

$$\Psi' - \Psi = \psi' - \psi. \quad (6.7)$$

Кут між дотичними до ліній C' і C в точці z_0 є

$$\psi' - \psi,$$

а відповідний кут до ліній Γ' і Γ

$$\Psi' - \Psi.$$

Ці кути однакові. Таким чином, відображення $w = f(z)$, де $f(z)$ диференційовна в околі точки z_0 функція і $f'(z_0) \neq 0$, зберігає кути між кривими, які проходять через точку z_0 не тільки по величині, але й по напрямку відрахунку.

Приклад 6.1. Знайдемо кут повороту α кривих при відображенні

$$f(z) = \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}$$

в точці z_0 , де $\text{Im}(z_0) = y_0 > 0$. Оскільки

$$f'(z) = \frac{z_0 - \bar{z}_0}{(z - \bar{z}_0)^2}, \quad f'(z_0) = \frac{-i}{2y_0},$$

то

$$\alpha = \text{Arg} f'(z_0) = -\frac{\pi}{2}.$$

6.2. Геометричний зміст модуля похідної

Рівність (6.1) запишемо у вигляді

$$\lim_{\Delta z_0 \rightarrow 0} \frac{|\Delta w_0|}{|\Delta z_0|} = r. \quad (6.8)$$

Відстань між точками z_0 і $z_0 + \Delta z_0$, очевидно, дорівнює $|\Delta z_0|$, аналогічно, $|\Delta w_0|$ – відстань між точками w_0 і $w_0 + \Delta w_0$. Рівність (6.8) показує, що відношення нескінченно малої, яка є відстанню між відображеними точками до нескінченно малої, яка є відстанню між початковими точками не залежить від напрямку лінії C . Величину

$$r = |f'(z_0)|$$

можна розглядати, як величину масштабу в точці z_0 при відображенні з допомогою функції $w = f(z)$. Якщо $r > 1$, то масштаб збільшується, тобто проходить розтяг при відображенні $w = f(z)$ в точці z_0 , якщо $r < 1$, то відбувається стиснення.

Величина

$$\lim_{\Delta z_0 \rightarrow 0} \frac{|\Delta w_0|}{|\Delta z_0|} = r$$

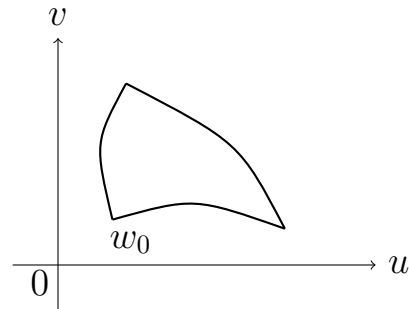
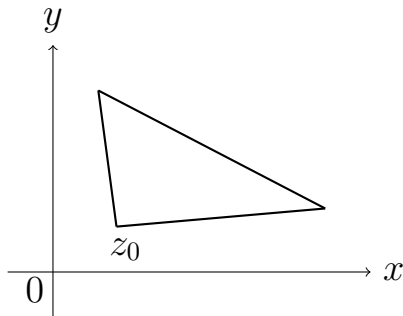
називається лінійним розтягом кривої C в точці z_0 при відображенні $w = f(z)$. Вона не залежить від вигляду і напрямку кривої C і дорівнює $r = |f'(z_0)|$.

6.3. Конформне відображення

Зображення, яке встановлюється з допомогою аналітичної функції $w = f(z)$, має в кожній точці z_0 , де $f'(z_0) \neq 0$, дві властивості:

- 1) зберігає кути між кривими (консерватизм кутів);
- 2) сталість розтягів.

Якщо в комплексній площині z взяти нескінченно малий трикутник, одна з вершин якого знаходиться в точці z_0 , то йому в площині w буде відповідати нескінченно малий криволінійний трикутник з вершиною в точці w_0 .



Відповідні кути, в силу консерватизму кутів, в цих трикутниках будуть однакові, відношення відповідних сторін з точністю до нескінченно малих дорівнюватимуть деякому сталому числу $r \neq 0$. Такі трикутники називаються подібними між собою.

Означення 6.1. Відображення $w = f(z)$ називається конформним в точці z_0 , якщо воно зберігає кути між кривими і має властивість сталості розтягів в точці z_0 .

Зауваження. Умова $f'(z_0) \neq 0$ означає, що якобіан відображення $w = f(z)$ в точці z_0 відмінний від нуля. Справді, відображення $w = f(z) = u + iv$ еквівалентне дійсному відображенню

$$\begin{cases} u = u(x, y), \\ v = v(x, y). \end{cases} \quad (6.9)$$

Якобіан J відображення (6.9) дорівнює

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Використовуючи умови Коші–Рімана, матимемо

$$J = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2,$$

а враховуючи те, що

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x},$$

отримаємо

$$J = |f'(z)|^2.$$

Таким чином, якщо $f'(z_0) \neq 0$, то якобіан $J(z_0)$ відмінний від нуля, оскільки $J(z_0) = |f'(z_0)|^2$.

Більш детально конформні відображення розглядатимуться у розділі 17.

Приклад 6.2. Лінійне відображення

$$w = az + b, \quad a \neq 0$$

є конформним у всій комплексній площині.

Приклад 6.3. Функція

$$w = z^2$$

конформно відображає верхню півплощину $\operatorname{Im} z > 0$ на площину з розрізом $[0, \infty)$.

Приклад 6.4. Відображення

$$w = e^z$$

є конформним у смугі $0 < \operatorname{Im} z < 2\pi$.

Контрольні питання

1. Сформулювати геометричний зміст аргумента похідної функції комплексної змінної у точці.
2. Знайти множину точок, у яких кут повороту для відображення

$$f(z) = \frac{z}{z + i}$$

дорівнює нулю.

3. Сформулювати геометричний зміст модуля похідної функції комплексної змінної у точці.
4. Знайти множину точок, у яких коефіцієнт розтягу для відображення

$$f(z) = z^3 - z$$

дорівнює одиниці.

5. Знайти коефіцієнт розтягу та кут повороту в точці $z_0 = \frac{\pi}{2} + i$ для відображення

$$f(z) = \sin z.$$

6. Дати означення конформного відображення $\omega = f(z)$ у точці $z = z_0$. Навести приклад конформного відображення у всій комплексній площині.

7. Яка частина площини стискається, яка розтягується, при відображенні

$$f(z) = z^2 - 2z?$$

7. Інтегрування функцій комплексної змінної

7.1. Означення інтеграла

Нехай на кривій γ визначена комплекснозначна функція $f(z)$.

Розіб'ємо криву γ на n частин точками $z_0, z_1, \dots, z_n$. Отримаємо n дуг

$$\gamma_k, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Через

$$l_k, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

позначимо довжину відповідної дуги γ_k .

Нехай

$$l = \max_{1 \leq k \leq n} l_k.$$

На кожній дузі γ_k вибираємо точку $\zeta_k \in \gamma_k$.

Обчислимо $f(\zeta_k)$, $k = 1, 2, \dots, n$.

Складемо суму

$$\sum_{k=1}^n f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1}), \quad (7.1)$$

яку будемо називати інтегральною сумою для функції $f(z)$ на кривій γ .

Означення 7.1. Якщо при $l \rightarrow 0$ існує скінченна границя інтегральних сум (7.1), яка не залежить ні від способу розбиття кривої γ на дуги γ_k , $k = 1, 2, \dots, n$, ні від вибору точок ζ_k , $k = 1, 2, \dots, n$, то ця границя називається інтегралом від функції $f(z)$ уздовж кривої γ :

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \lim_{l \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1}). \quad (7.2)$$

Якщо $z = x + iy$, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, то позначимо

$$z_k = x_k + iy_k,$$

$$\begin{aligned}x_k - x_{k-1} &= \Delta x_k, y_k - y_{k-1} = \Delta y_k, \\ \zeta_k &= \xi_k + i\eta_k, \\ u_k &= u(\xi_k, \eta_k), v_k = v(\xi_k, \eta_k).\end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned}& \sum_{k=1}^n f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1}) = \\ &= \sum_{k=1}^n (u_k \Delta x_k - v_k \Delta y_k) + i \sum_{k=1}^n (v_k \Delta x_k + u_k \Delta y_k).\end{aligned}$$

Переходячи в цій рівності до границі при $l \rightarrow 0$, отримаємо

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} u dx - v dy + i \int_{\gamma} v dx + u dy. \quad (7.3)$$

Існування інтегралу

$$\int_{\gamma} f(z) dz$$

рівносильне існуванню наступних двох криволінійних інтегралів від дійсних функцій

$$\int_{\gamma} u(x, y) dx - v(x, y) dy$$

і

$$\int_{\gamma} v(x, y) dx + u(x, y) dy.$$

Нехай крива γ задана рівнянням

$$z = \xi(t) + i\eta(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta.$$

Тоді $dx = \xi'(t)dt$, $dy = \eta'(t)dt$ і

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} f(z) dz &= \int_{\alpha}^{\beta} (u\xi' - v\eta') dt + i \int_{\alpha}^{\beta} (v\xi' + u\eta') dt = \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} (u(\xi(t), \eta(t)) + iv(\xi(t), \eta(t))) (\xi'(t) + i\eta'(t)) dt.\end{aligned}$$

Приклад 7.1. Обчислити

$$\int_{\gamma} f(z) dz,$$

де $f(z) = z$, а γ – довільна неперервна крива, з початковою та кінцевою точками a та b відповідно.

Розіб'ємо криву на n частин точками

$$z_0 = a, z_1, z_2, \dots, z_n = b.$$

Складемо дві інтегральні суми. Нехай спочатку $\xi_k = z_k$, а у другому розбитті $\xi_k = z_{k+1}$. Інтегральні суми матимуть вигляд

$$\sum_{k=0}^{n-1} z_k(z_{k+1} - z_k) \quad \text{та} \quad \sum_{k=0}^{n-1} z_{k+1}(z_{k+1} - z_k).$$

Оскільки границі цих інтегральних сум дорівнюють заданому інтегралу, то обчислимо інтеграл як границю середнього арифметичного цих границь:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} z dz &= \frac{1}{2} \lim_{l \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} (z_{k+1} + z_k)(z_{k+1} - z_k) = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{l \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} (z_{k+1}^2 - z_k^2) = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{l \rightarrow 0} (z_n^2 - z_0^2) = \frac{1}{2} (b^2 - a^2). \end{aligned}$$

Отже, інтеграл $\int_{\gamma} z dz$ не залежить від кривої інтегрування.

Зазначимо, якщо γ – довільна замкнена неперервна крива, тобто $a = b$, то

$$\int_{\gamma} z dz = 0.$$

7.2. Властивості інтегралів

Неперервна на кривій функція інтегровна на цій кривій, що випливає з формули (7.3). З властивостей криволінійних інтегралів слідує, що мають місце наступні формули:

1)

$$\int_{\gamma} (af(z) + bg(z)) dz = a \int_{\gamma} f(z) dz + b \int_{\gamma} g(z) dz, \quad (7.4)$$

де a і b довільні комплексні числа.

2)

$$\int_{\gamma^+} f(z) dz = - \int_{\gamma^-} f(z) dz, \quad (7.5)$$

де γ^+ , γ^- – крива, яка проходиться в протилежних напрямках.

3) Якщо $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$, тобто крива γ складається з двох частин γ_1 і γ_2 , то

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz. \quad (7.6)$$

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$, складений з неперервних на кривій γ функцій $f_k(z)$, $k \in \mathbb{N}$, який збігається рівномірно на γ , можна почленно інтегрувати, тобто

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\gamma} f_k(z) dz.$$

Ця властивість випливає з теореми про почленне інтегрування рівномірно збіжного ряду і властивості (7.6).

7.3. Оцінки інтегралів

Лема 7.1. *Нехай функція $f(z)$ неперервна на кривій γ . Тоді має місце оцінка*

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \int_{\gamma} |f(z)| ds, \quad (7.7)$$

де інтеграл у правій частині – криволінійний інтеграл від дійсної невід’ємної функції вздовж кривої γ .

Нерівність (7.7) часто записують у вигляді

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \int_{\gamma} |f(z)| |dz|.$$

Доведення. Очевидно, що

$$\left| \sum_{k=1}^n f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1}) \right| \leq \sum_{k=1}^n |f(\zeta_k)| |z_k - z_{k-1}|.$$

Перейшовши до границі при $l \rightarrow 0$, отримуємо нерівність (7.7).

Наслідок 7.1. З нерівності (7.7) випливає оцінка

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq M l(\gamma), \quad (7.8)$$

де $M = \max_{z \in \gamma} |f(z)|$, а $l(\gamma)$ - довжина кривої γ .

Лема 7.2. Нехай $f(z)$ – неперервна функція, визначена в деякій області G комплексної площини, γ – довільна кусково-гладка крива, що лежить в цій області. Тоді для довільного як завгодно малого $\varepsilon > 0$ існує така ламана $C \in G$, вписана в криву γ , що виконується нерівність

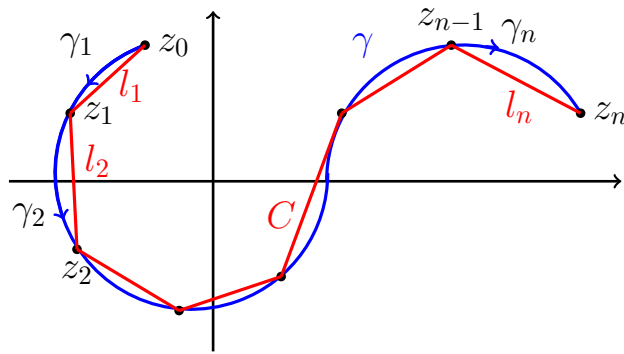
$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz - \int_C f(z) dz \right| < \varepsilon. \quad (7.9)$$

Тобто інтеграл $\int_{\gamma} f(z) dz$ з наперед заданою точністю дорівнює інтегралу від цієї функції вздовж ламаної C , яка вписана в криву γ .

Доведення. Розглянемо замкнену область $\overline{D}$, що є підмножиною області G та містить криву γ . Неперервна в області $\overline{D}$ функція $f(z)$ є рівномірно неперервною. Тому для точок z_1 та z_2 області $\overline{D}$ і як завгодно малого $\varepsilon > 0$ існує таке значення $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, що виконується нерівність

$$|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon, \text{ якщо } |z_1 - z_2| < \delta. \quad (7.10)$$

Розіб'ємо криву γ точками $z_0, z_1, z_2, \dots, z_n$ на n дуг $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}$, довжина кожної з яких менша ніж δ . Зрозуміло, що і довжина кожної ланки $l_k, k = 0, 1, 2, \dots, n-1$, ламаної C , буде тим більш менша значення δ .



Порівняємо значення $\int_{\gamma} f(z) dz$ зі значенням цього ж інтеграла вздовж ламаної C , яка вписана в криву γ .

Розглянемо суму, що є наближеним значенням $\int_{\gamma} f(z) dz$:

$$S = \sum_{k=0}^{n-1} f(z_k) \Delta z_k. \quad (7.11)$$

Замінімо $\Delta z_k = |z_{k+1} - z_k|, k = 0, 1, \dots, n-1$, на значення

$$\Delta z_k = \int_{\gamma_k} dz,$$

отримаємо

$$S = \sum_{k=0}^{n-1} f(z_k) \int_{\gamma_k} dz = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\gamma_k} f(z_k) dz. \quad (7.12)$$

Інтеграл вздовж кривої γ можна подати, як суму інтегралів вздовж дуг $\gamma_k, k = 1, 2, \dots, n$, тобто

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\gamma_k} f(z) dz. \quad (7.13)$$

Оцінимо різницю між (7.12) та (7.13), врахувавши (7.10)

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\gamma} f(z) dz - S \right| &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\gamma_k} f(z) dz - \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\gamma_k} f(z_k) dz \right| = \\
&= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\gamma_k} (f(z) - f(z_k)) dz \right| \leq \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\gamma_k} |f(z) - f(z_k)| dz < \varepsilon \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\gamma_k} dz = \varepsilon l,
\end{aligned} \tag{7.14}$$

де l – довжина кривої γ .

Аналогічно, оцінимо різницю між інтегралом функції $f(z)$ по ламаній C , тобто

$$\int_C f(z) dz = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{l_k} f(z) dz$$

та сумою S :

$$\begin{aligned}
\left| \int_C f(z) dz - S \right| &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{l_k} (f(z) - f(z_k)) dz \right| \leq \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{l_k} |f(z) - f(z_k)| dz < \varepsilon \sum_{k=0}^{n-1} \int_{l_k} dz = \varepsilon l' \leq \varepsilon l,
\end{aligned} \tag{7.15}$$

де l' – довжина кривої C .

Враховуючи нерівності (7.14) та (7.15), отримуємо:

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\gamma} f(z) dz - \int_C f(z) dz \right| &\leq \\
&\leq \left| \int_{\gamma} f(z) dz - S \right| + \left| S - \int_C f(z) dz \right| < \varepsilon l + \varepsilon l = 2\varepsilon l.
\end{aligned}$$

Лема доведена, тобто у довільну кусково-гладку криву γ завжди можна вписати ламану C так, що різниця значень інтеграла вздовж кривої γ та вздовж ламаної C за модулем буде менша як загодно малого додатного числа.

Контрольні питання

1. Дати означення інтеграла від функції комплексної змінної $f(z)$ вздовж кривої γ .
2. Записати формулу для обчислення інтеграла від функції комплексної змінної

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

вздовж кривої

$$\gamma : z = \xi(t) + i\eta(t), \alpha \leq t \leq \beta.$$

3. Обчислити інтеграл

$$\int_L \bar{z}^2 dz,$$

де крива L – відрізок прямої $y = x$ від точки $z_1 = 0$ до точки $z_2 = 1 + i$.

4. Обчислити інтеграл

$$\int_L z \operatorname{Im} z^2 dz,$$

де крива L – коло $|z| = 1$.

5. Сформулювати властивості інтеграла від функції комплексної змінної $f(z)$ вздовж кривої γ .

6. Обчислити інтеграл

$$\int_L (i \operatorname{Im} z)^2 dz,$$

вздовж кривої L , що є ламаною $z_1 z_2 z_3$, де $z_1 = 0$, $z_2 = 1 + i$, $z_3 = i$.

7. Нехай функція $f(z)$ – неперервна на кривій γ . Навести оцінки для модуля інтеграла від $f(z)$ вздовж кривої γ .

8. За яких умов інтеграл $\int_{\gamma} f(z) dz$ можна наблизити інтегралом вздовж ламаної C , яка вписана в криву γ , із певною точністю?

8. Інтегральна теорема Коші

Розглянемо доведення однієї з основних теорем теорії аналітичних функцій.

8.1. Інтегральна теорема Коші

Теорема 8.1. *Якщо D – однозв'язна область комплексної площини і $f(z)$ – однозначна функція, аналітична в цій області, то для довільної замкненої спрямлюваної кривої L , яка належить області D*

$$\int_L f(z) dz = 0.$$

Доведення. *Спочатку доведемо теорему для ламаної, а потім, користуючись лемою 7.2, перейдемо до загального випадку. Доведення теореми для замкнених ламаних розділимо на декілька етапів.*

а) *Відрізок.* Нехай L є відрізком γ , що проходиться двічі у взаємно протилежних напрямках. Тоді

$$\int_L f(z) dz = \int_{\gamma^+} f(z) dz + \int_{\gamma^-} f(z) dz = \int_{\gamma^+} f(z) dz - \int_{\gamma^+} f(z) dz = 0.$$

Тут не використовується навіть диференційовність функції $f(z)$.

б) *Трикутник.* Цей випадок, як ми побачимо далі, є основним, де суттєво використовується диференційовність функції $f(z)$. Нехай L є контур розміщеного в області D трикутника, який проходиться в одному напрямі (наприклад, проти годинникової стрілки). Покладемо

$$\left| \int_L f(z) dz \right| = M, \quad M \geq 0.$$

Доведемо, що $M = 0$. Для цього розділимо трикутник відрізками, які з'єднують середини його сторін, на чотири рівні трикутники з контурами L', L'', L''', L^{IV} , (див. рис. 8.1). Складемо суму інтегралів, взятих на L', L'', L''', L^{IV} в напрямках, вказаних на рисунку стрілками (усі проти годинникової стрілки).

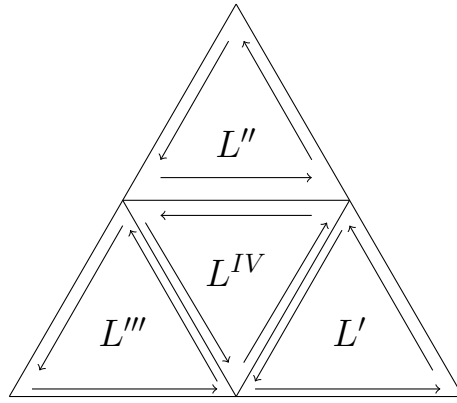


Рис. 8.1

Отримаємо:

$$\int_{L'} f(z) dz + \int_{L''} f(z) dz + \int_{L'''} f(z) dz + \int_{L^{IV}} f(z) dz. \quad (8.1)$$

Кожний з цих інтегралів можна замінити сумою трьох інтегралів, обчислених вздовж окремих сторін чотирьох трикутників. Шість з цих інтегралів, взятих по відрізках, розміщених на L , дадуть в сумі $\int_L f(z) dz$. Інші шість розіб'ються на три пари інтегралів, кожна з цих пар береться по одному і тому ж відрізку, який проходиться двічі, в протилежних напрямках. Очевидно, що кожна пара дає в сумі нуль. Звідси випливає, що сума (8.1) дорівнює інтегралу $\int_L f(z) dz$ і

$$\begin{aligned} M &= \left| \int_L f(z) dz \right| \leq \\ &\leq \left| \int_{L'} f(z) dz \right| + \left| \int_{L''} f(z) dz \right| + \left| \int_{L'''} f(z) dz \right| + \left| \int_{L^{IV}} f(z) dz \right|. \end{aligned} \quad (8.2)$$

З (8.2) випливає, що хоча б один з доданків в правій частині, повинен бути більшим або рівним $\frac{M}{4}$. Позначимо відповідний контур через L_1 (він співпадає з одним з контурів L', L'', L''', L^{IV}). Отримаємо

$$\left| \int_{L_1} f(z) dz \right| \geq \frac{M}{4}.$$

Виконаємо з трикутником L_1 ті ж самі операції, що і з трикутником L , а саме розділимо L_1 на чотири рівні трикутники: $L'_1, L''_1, L'''_1, L^{IV}_1$. Зазначимо, що інтеграл $\int_{L_1} f(z) dz$ дорівнює сумі чотирьох інтегралів вздовж $L'_1, L''_1, L'''_1, L^{IV}_1$ (взятих проти годинникової стрілки). Модуль одного з цих інтегралів буде не меншим, ніж

$$\frac{1}{4} \frac{M}{4} = \frac{M}{4^2}.$$

Позначимо контур цього інтеграла L_2 (L_2 співпадає з одним із контурів $L'_1, L''_1, L'''_1, L^{IV}_1$). Тобто, матимемо

$$\left| \int_{L_2} f(z) dz \right| \geq \frac{M}{4^2}.$$

Продовжуючи такі міркування, отримаємо послідовність трикутників з контурами $L_1, L_2, \dots, L_n, \dots$, які мають наступні властивості:

- 1) Кожен наступний трикутник міститься в попередньому і ориєнтується з нього, якщо середини двох його сторін з'єднати відрізками прямих. Звідси випливає, що l_n – довжина контура L_n вдвічі менша l_{n-1} , отже, $l_n = \frac{l}{2^n}$, де l – довжина контура L .
- 2) Кожен із трикутників L_n міститься в області D ; бо L міститься в D , а внаслідок однозв'язності D точки, обмежені кривою L теж належать D .
- 3) Інтеграл від $f(z)$ вздовж L_n задовольняє нерівність

$$\left| \int_{L_n} f(z) dz \right| \geq \frac{M}{4^n}, n \in \mathbb{N}. \quad (8.3)$$

Трикутник L_n , як випливає з першої властивості, стягується до певної точки ζ , яка належить кожному з трикутників, бо лежить всередині L_n , або на L_n . За властивістю 2 точка ζ міститься в області D . Отже, за умовою теореми функція $f(z)$ має в точці ζ похідну $f'(\zeta)$ і можна $\forall \varepsilon > 0$ вказати $\delta > 0$ таке, що при $|z - \zeta| < \delta$ буде виконуватися нерівність

$$\left| \frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta} - f'(\zeta) \right| < \varepsilon. \quad (8.4)$$

Оскільки точка ζ належить довільному з розглядуваних трикутників і вони стягуються до цієї точки, то довжини контурів L_n прямують до 0, та, починаючи з деякого $n > N$, ці трикутники будуть повністю міститися в крузі $|z - \zeta| < \delta$, тобто для $\forall z \in L_n$ буде виконуватись нерівність (8.4). Перепишемо її у вигляді

$$|f(z) - f(\zeta) - f'(\zeta)(z - \zeta)| < \varepsilon |z - \zeta|.$$

Враховуючи, що відстань $|z - \zeta|$ між двома точками одного і того ж трикутника менше ніж периметр цього трикутника, тобто менше ніж $\frac{l}{2^n}$, отримаємо

$$|f(z) - f(\zeta) - f'(\zeta)(z - \zeta)| < \varepsilon \frac{l}{2^n}, \quad z \in L_n, \quad n > N. \quad (8.5)$$

Далі проінтегруємо функцію $f(z) - f(\zeta) - f'(\zeta)(z - \zeta)$ вздовж замкненої лінії L_n . Будемо мати

$$\begin{aligned} & \int_{L_n} \left[f(z) - f(\zeta) - f'(\zeta)(z - \zeta) \right] dz = \\ &= \int_{L_n} f(z) dz - f(\zeta) \int_{L_n} dz - f'(\zeta) \int_{L_n} z dz - \zeta f'(\zeta) \int_{L_n} dz = \\ &= \int_{L_n} f(z) dz. \end{aligned} \quad (8.6)$$

Скористалися тим, що інтеграли $\int_{L_n} dz$ і $\int_{L_n} z dz$ дорівнюють 0. Отже, внаслідок (8.5), (8.6) будемо мати оцінку

$$\begin{aligned} \left| \int_{L_n} f(z) dz \right| &= \left| \int_{L_n} \left[f(z) - f(\zeta) - f'(\zeta)(z - \zeta) \right] dz \right| \leq \\ &\leq \varepsilon \frac{l}{2^n} l_n = \varepsilon \frac{l}{2^n} \frac{l}{2^n} = \varepsilon \frac{l^2}{4^n}. \end{aligned} \quad (8.7)$$

Порівнюючи нерівності (8.3) та (8.7), дістаємо

$$M < \varepsilon l^2.$$

Спрямувавши ε до 0, будемо мати $M \leq 0$. Оскільки M не може бути менше нуля, то

$$M = \left| \int_{L_n} f(z) dz \right| = 0.$$

Це доводить інтегральну теорему Коші у випадку коли L – трикутник.

- в) Тепер перейдемо до випадку, коли L – довільна замкнена ламана, яка лежить в області D . Розглянемо спочатку випадок, коли L є контуром опуклого n -кутника $A_0A_1, \dots, A_{n-1}A_n$, що проходиться один раз в певному напрямі. Розіб'ємо многокутник на $n - 2$ трикутники шляхом проведення діагоналей з вершини A_0 , як зображено на рисунку 8.2.

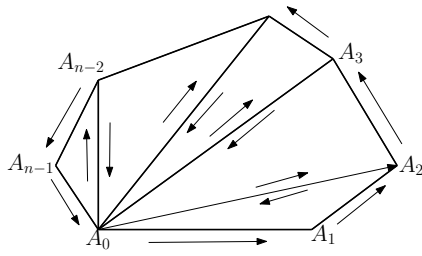


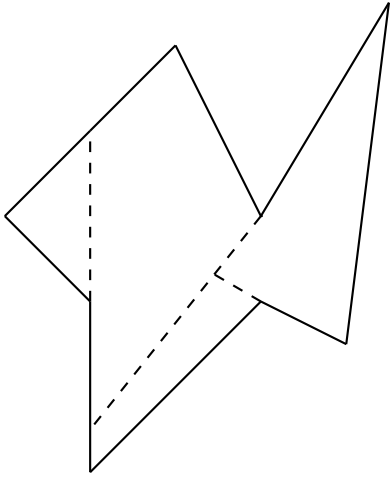
Рис. 8.2

Кожен з цих трикутників належить даному многокутнику, тобто і області D . До отриманих трикутників застосуємо теорему. Інтеграл від $f(z)$ вздовж L запишемо у вигляді

$$\begin{aligned} \int_L f(z) dz = & \left(\int_{A_0A_1A_2} + \int_{A_2A_0A_3} + \int_{A_0A_2A_4} + \int_{A_2A_3A_4} + \int_{A_3A_4A_5} + \dots + \right. \\ & \left. + \int_{A_{n-2}A_0A_1} + \int_{A_0A_{n-2}A_{n-1}} + \int_{A_{n-2}A_{n-1}A_n} \right) f(z) dz = 0 \end{aligned}$$

Таким чином, теорема доведена і для довільного опуклого многокутника.

Нехай L тепер є довільна замкнена ламана, яка не має самоперетинів, проходиться один раз. Оскільки область D – однозв'язна, то точки, обмежені ламаною L , належать області D . Доведемо, що цю область можна розкласти на опуклі многокутники. Відомо, що опуклий многокутник характеризується тим, що довільну з його сторін можна продовжити до прямої, це продовження не потрапить у внутрішню частину опуклого многокутника.



Навпаки, серед сторін неопуклого многокутника повинні бути такі сторони, продовження яких, потрапить у внутрішню частину неопуклого многокутника.

Будемо продовжувати сторони неопуклого многокутника до тих пір, поки не зустрінемо криву L . Остаточно многокутник буде розкладено на скінченне число многокутників, кожний з яких буде опуклим. Як вже було встановлено, інтеграл по опуклому многокутнику дорівнює нулю.

Нехай тепер L – довільна замкнена ламана. Тобто, вона складається зі скінченного числа прямолінійних відрізків $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_k$, заданих в певному порядку: кінець кожного відрізка є початком наступного, причому кінець останнього співпадає з початком першого.

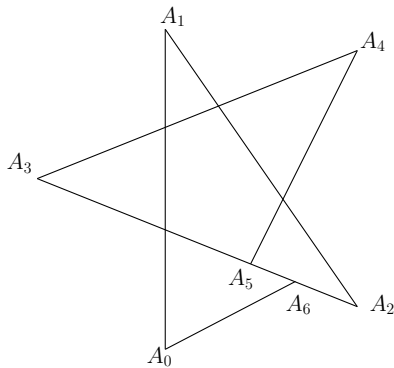


Рис. 8.3

При цьому деякі з відрізків Δ_k можуть бути частинами інших відрізків, або навіть, співпадати з ними, що означає, що при проходженні ламаною L деякі з її відрізків частково або повністю будуть проходитися по кілька разів (див. рис. 8.3).

Скористаємось рисунком 8.3. Ламана складається з шести ланок $\Delta_k = A_k A_{k+1}$, $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$, $A_7 = A_0$.

Причому ланка $A_5 A_6$ є частиною ланки $A_2 A_3$. Будемо послідовно рухатись по ламаній L , починаючи з точки A_0 до тих пір, поки не зустрінемо ланку $A_2 A_3$ в точці B . Замкнена ламана $BA_1 A_2 B$ буде жордановою (тобто, не має точок самоперетину) і лежить в області D . Інтеграл

$$\int_{BA_1 A_2 B} f(z) dz = 0.$$

Значення інтеграла вздовж L не зміниться, якщо виключити з L криву $BA_1 A_2 B$. Отримаємо ламану L' , яка складається з відрізків

$A_0B, BA_3, A_3A_4, A_4A_5, A_5A_6, A_6A_0$. Многокутник $A_0BA_3A_4A_5A_6A_0$ вже немає перетинів. За доведеним раніше інтеграл по цій ламаній дорівнює нулю. Таким чином, теорема доведена для довільної замкненої ламаної.

Розглянемо, нарешті, загальний випадок. Отже, нехай $L \subset D$ – замкнена спрямлювана крива. Згідно леми 7.2 для будь-якого $\varepsilon > 0$ можна вказати таку замкнену ламану $C \subset D$, вписану в криву L , що

$$\left| \int_L f(z) dz - \int_C f(z) dz \right| < \varepsilon.$$

Оскільки за доведеним

$$\int_C f(z) dz = 0,$$

то

$$\left| \int_L f(z) dz \right| < \varepsilon,$$

тобто

$$\int_L f(z) dz = 0.$$

8.2. Узагальнення інтегральної теореми Коші

У доведений теоремі контур інтегрування належить області D , де функція $f(z)$ є аналітичною. Цю теорему можна поширити на випадок, коли L є границею області D .

Теорема 8.2. Теорема Коші (узагальнена). Якщо D – внутрішність замкненої жорданової спрямлюваної кривої L , $f(z)$ – функція неперервна в замкненій області $\overline{D}$ і аналітична в області D , то

$$\int_L f(z) dz = 0.$$

Доведення. Доведемо частинний випадок цієї теореми, що достатньо для багатьох застосувань. Нехай L – спрямлювана крива, яку кожен промінь, який виходить з точки $z_0 \in D$ перетинає лише в одній точці.

Припустимо, що рівняння цієї кривої має вигляд

$$z = z_0 + \lambda(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

θ – полярний кут відносно полярної системи координат з полюсом в точці z_0 . Тоді для ρ , $0 < \rho < 1$, крива $L_\rho : z = z_0 + \rho\lambda(\theta)$, подібна до кривої L відносно точки z_0 , належить області D . А, отже, внаслідок інтегральної теореми Коші,

$$\int_{L_\rho} f(z) dz = 0, \quad 0 < \rho < 1.$$

Якщо

$$\sum_{k=0}^n f(z_k)(z_{k+1} - z_k) = \sum_{k=0}^n f(z_0 + \lambda(\theta_k)) [\lambda(\theta_{k+1}) - \lambda(\theta_k)]$$

– інтегральна сума для інтегралу $\int f(z) dz$, то враховуючи подібність кривих L_ρ і L , вираз

$$\sum_{k=0}^n f(z_0 + \rho\lambda(\theta_k)) [\rho\lambda(\theta_{k+1}) - \rho\lambda(\theta_k)]$$

буде інтегральною сумою для $\int_{L_\rho} f(z) dz$. Тому останній інтеграл можна зобразити також у вигляді інтеграла вздовж L :

$$\int_L \rho f(z_0 + \rho\lambda(\theta)) dz = 0.$$

Інтеграл $\int_L f(z) dz$ перетворимо наступним чином

$$\begin{aligned} \int_L f(z_0 + \lambda(\theta)) dz &= \int_L \{f(z_0 + \lambda(\theta)) - \rho f(z_0 + \rho\lambda(\theta))\} dz = \\ &= \int_L \{(1 - \rho)f(z_0 + \lambda(\theta)) + \rho(f(z_0 + \lambda(\theta)) - f(z_0 + \rho\lambda(\theta)))\} dz. \end{aligned}$$

Нехай $\max_{z \in \overline{D}} |f(z)| = M$, а $\max_{0 \leq \theta \leq 2\pi} |\lambda(\theta)| = m$. Для $\forall \varepsilon > 0$ можна вказати таке $\delta(\varepsilon) > 0$, що нерівність

$$|f(z') - f(z'')| < \varepsilon$$

буде виконуватись для $z', z'' \in D$, таких, що $|z' - z''| < \delta(\varepsilon)$. Тому при $1 - \rho < \frac{\delta(\varepsilon)}{m}$ будемо мати

$$|f(z_0 + \lambda(\theta)) - f(z_0 + \rho\lambda(\theta))| < \varepsilon,$$

отже,

$$\left| \int_L f(z) dz \right| < [(1 - \rho)M + \rho \cdot \varepsilon] \cdot \tilde{L},$$

де $\tilde{L}$ – довжина кривої L .

Спрямувавши $\rho \rightarrow 1$, отримаємо

$$\left| \int_L f(z) dz \right| < \varepsilon \cdot \tilde{L}.$$

Тому

$$\int_L f(z) dz = 0.$$

Що й потрібно було довести.

8.3. Доповнення і зауваження до інтегральної теореми Коші

Розглянемо функцію

$$f(z) = \frac{1}{z},$$

яка є диференційовною в кільці $0 < |z| < 2$. Обчислимо інтеграл $\int_{|z|=1} \frac{dz}{z}$.

Зробимо заміну $z = e^{it}$, $dz = ie^{it} dt$.

$$\int_{|z|=1} \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}}{e^{it}} dt = 2\pi i \neq 0.$$

Інтегральна теорема Коші не виконується, оскільки порушена вимога однозв'язності області інтегрування.

За певних умов, накладених на криві, інтегральну теорему Коші можна застосовувати і до багатозв'язних областей D .

Теорема 8.3. Інтегральна теорема Коші для складного контура.

Нехай $f(z)$ – однозначна і аналітична функція в області D і $\Gamma, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ система замкнених спрямлювальних жорданових кривих, які лежать в області D і задовольняють наступні умови:

- 1) криві $\gamma_k, k = 1, 2, \dots, n$, лежать всередині Γ ;
- 2) кожна з кривих $\gamma_k, k = 1, 2, \dots, n$, лежить зовні інших з них;
- 3) багатозв'язна область, обмежена кривими $\Gamma, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$, належить області D .

Тоді справедлива рівність

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k} f(z) dz, \quad (8.8)$$

де інтегрування відбувається в одному і тому ж самому напрямі (наприклад, при обході кривою область, обмежена цією кривою залишається зліва).

Доведення. З'єднаємо криву Γ з кривими $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ розрізами $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ (рис. 8.4) так, щоб отримана область $\tilde{D}$ була однозв'язною. Границя $\tilde{\Gamma}$ області D складається з кривих $\Gamma, \gamma_1^-, \gamma_2^-, \dots, \gamma_n^-$, де Γ – проходиться в додатному напрямі, а криві $\gamma_1^-, \gamma_2^-, \dots, \gamma_n^-$ – у від'ємному напрямі, а також з розрізів $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$, які проходять двічі у протилежних напрямках. За інтегральною теоремою Коші $\int_{\tilde{\Gamma}} f(z) dz = 0$.

Звідси випливає правильність рівності (8.8).

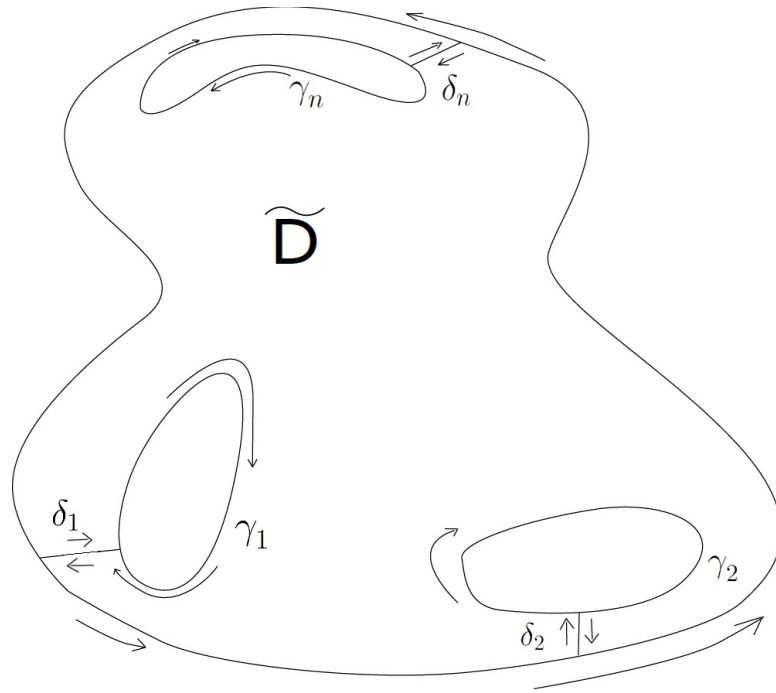
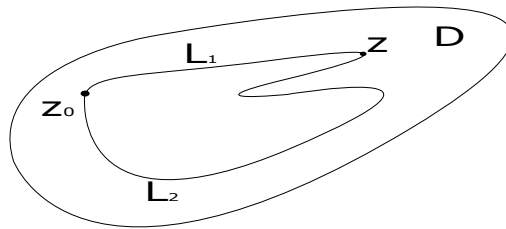


Рис. 8.4

8.4. Інтеграл і первісна

Нехай D – однозв'язна область, $f(z)$ – аналітична в D , $z_0 \in D$ – задана точка, L_1 і L_2 – спрямлювані криві, які належать D і з'єднують точку z_0 з довільною точкою $z \in D$. Якщо L_2 крива, яка проходиться від точки z до точки z_0 у протилежному напрямі до напрямку L_1 , то криві L_1 і L_2 утворюють замкнену спрямлювану криву, і за інтегральною теоремою Коші:

$$\int_{L_1} f(z) dz + \int_{-L_2} f(z) dz = 0, \quad \text{або} \quad \int_{L_1} f(z) dz = \int_{L_2} f(z) dz.$$



Тобто, значення інтеграла від аналітичної функції $f(z)$ не залежить від форми кривої інтегрування, а залежить лише від початкової та кінцевої точок цієї кривої. Нехай задана точка z_0 фіксована, тоді інтеграл $\int_{z_0}^z f(\xi) d\xi \in$

функцією z , тобто

$$\int_{z_0}^z f(\xi) d\xi = F(z). \quad (8.9)$$

Функція $F(z)$ диференційовна в області D і $F'(z) = f(z)$. Доведемо більш загальне твердження.

Теорема 8.4. *Нехай функція $f(z)$ неперервна в однозв'язній області D , і інтеграл від $f(z)$ по довільній замкненій кривій, яка лежить в області D , дорівнює нулю. Тоді функція*

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(\xi) d\xi,$$

де $z_0 \in D$, $z \in D$, диференційовна в області D і $F'(z) = f(z)$, тобто

$$\left(\int_{z_0}^z f(\xi) d\xi \right)' = f(z).$$

Доведення. За умов теореми інтеграл $\int_{\gamma} f(\xi) d\xi$ не залежить від форми кривої γ , яка належить області D і з'єднує точки z_0 і z , отже, функція

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(\xi) d\xi$$

однозначна в області D . Для точки $z + \Delta z \in D$, яка лежить в околі точки $z \in D$, різниця

$$\frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) \longrightarrow 0 \quad \text{при} \quad \Delta z \rightarrow 0.$$

Справді,

$$\frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} = \frac{1}{\Delta z} \left\{ \int_{z_0}^{z+\Delta z} f(\xi) d\xi - \int_{z_0}^z f(\xi) d\xi \right\} =$$

$$= \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} f(\xi) d\xi.$$

Оскільки

$$\int_z^{z+\Delta z} d\xi = \Delta z,$$

то

$$f(z) = \frac{f(z)}{\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} d\xi = \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} f(z) d\xi. \quad (8.10)$$

Інтеграли (8.4) і (8.10) не залежать від форми кривої інтегрування. Тому виберемо криву інтегрування як відрізок, який з'єднує точки z і $z + \Delta z$. Матимемо

$$\frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) = \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} [f(\xi) - f(z)] d\xi,$$

тобто

$$\left| \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) \right| \leq \frac{1}{|\Delta z|} \int_z^{z+\Delta z} |f(\xi) - f(z)| |d\xi|. \quad (8.11)$$

З неперервності функції $f(z)$ в кожній точці $z \in D$ для $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що при $|z - \xi| < \delta$ справджується нерівність

$$|f(z) - f(\xi)| < \varepsilon. \quad (8.12)$$

Зрозуміло, що $|z - \xi| \leq |\Delta z|$, оскільки ξ належить відрізку $[z, z + \Delta z]$, тому нерівність (8.12) буде виконуватися при $|\Delta z| < \delta$, отже

$$\left| \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) \right| \leq \frac{1}{|\Delta z|} \varepsilon |\Delta z| = \varepsilon.$$

Таким чином, існує границя

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} = f(z),$$

тобто, $F'(z) = f(z)$. Теорема доведена.

За умов, що функція $f(z)$ визначена в області D , а функція $F(z) = \int_{z_0}^z f(\xi) d\xi$ диференційовна в цій області, наведемо означення первісної:

Означення 8.1. Якщо

$$F'(z) = f(z)$$

для $\forall z \in D$, то функція $F(z)$ називається первісною функції $f(z)$ в області D .

Як бачимо, поняття первісної для функцій комплексної змінної вводиться таким же чином, як і для функцій дійсної змінної.

З означення первісної та теореми 8.4 випливає, що $F(z) = \int_{z_0}^z f(\xi) d\xi$ є первісною функції $f(z)$.

Теорема 8.5. Якщо функція $f(z)$ диференційовна в однозв'язній області D , то вона має в D первісну $F(z)$.

Доведення. Функція $f(z)$ задовольняє умови теореми 8.4. Тому за цією теоремою функція

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(\xi) d\xi$$

є первісною $f(z)$. Теорема доведена.

Теорема 8.6. Сукупність всіх первісних функцій $f(z)$ в області D визначається формулою

$$F_1(z) + C,$$

де $F_1(z)$ – деяка первісна функції $f(z)$, а C – довільна стала.

Доведення. Якщо $F_1(z)$ і $F_2(z)$ – дві первісні функції $f(z)$ в області D , то функція

$$F(z) = F_2(z) - F_1(z)$$

є сталою в області D , оскільки $F'(z) = F_2'(z) - F_1'(z) = f(z) - f(z) = 0$ для $\forall z \in D$. Звідси випливає, що

$$F(z) \equiv \text{const}$$

або

$$F_2(z) = F_1(z) + C,$$

де C – комплексна стала.

Наслідок 8.1. За умов теореми 8.4 довільна первісна $F(z)$ функції $f(z)$ зображається формулою

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(\xi) d\xi + C, \quad (8.13)$$

де C – комплексна стала.

Наслідок 8.2. За умов теореми 8.4 має місце формула Ньютона-Лейбніца

$$\int_{z_0}^{z_1} f(\xi) d\xi = F(z_1) - F(z_0). \quad (8.14)$$

Доведення. Покладемо у формулі (8.13) $z = z_0$, отримаємо $F(z_0) = C$. При $z = z_1$, формула (8.13) матиме вигляд

$$F(z_1) = \int_{z_0}^{z_1} f(\xi) d\xi + C = \int_{z_0}^{z_1} f(\xi) d\xi + F(z_0).$$

Звідси випливає рівність (8.14).

Наслідок 8.3. Якщо функції $f(z)$ і $g(z)$ задовольняють умови теореми 8.5, то справедлива формула інтегрування частинами:

$$\int_{z_0}^{z_1} f(\xi) g'(\xi) d\xi = \left[f(\xi) g(\xi) \right] \Big|_{z_0}^{z_1} - \int_{z_0}^{z_1} f'(\xi) g(\xi) d\xi. \quad (8.15)$$

Доведення. Оскільки $(fg)' = f'g + fg'$, то використовуючи формулу (8.14), отримаємо

$$\int_{z_0}^{z_1} (fg)' d\xi = f(z_1)g(z_1) - f(z_0)g(z_0) = [f(\xi)g(\xi)] \Big|_{z_0}^{z_1},$$

що доводить рівність (8.15).

В однозв'язній області інтеграли від диференційовних елементарних функцій комплексної змінної обчислюються з допомогою формул, аналогічних формулам дійсної змінної.

Приклад 8.1. Функція

$$f(z) = \frac{1}{z}$$

диференційовна в неоднозв'язній області $D : 0 < |z| < \infty$. Нехай $\tilde{D} \subset D$, і $\tilde{D}$ – однозв'язна область. Тоді функція

$$F(z) = \int_1^z \frac{d\xi}{\xi}, \quad z \in \tilde{D},$$

де інтегрування здійснюється по довільній кривій, що лежить в $\tilde{D}$, є первісною, згідно теореми 8.5, для функції $\frac{1}{z}$ і $F'(z) = \frac{1}{z}$. Зокрема, $F(1) = 0$.

Зауважимо, що функція

$$\Phi(z) = \int_1^z \frac{d\xi}{\xi}, \quad z \in D$$

є неоднозначною в області D .

Контрольні питання

1. Сформулювати інтегральну теорему Коші.
2. Сформулювати узагальнену інтегральну теорему Коші.

3. У яких випадках до інтеграла

$$\int_L \frac{1}{z^2 - 1} dz$$

можна застосувати інтегральну теорему Коші, якщо контур L є колом:

1) $|z - 1| = 1$;

2) $|z| = \frac{1}{2}$;

3) $|z + 2| = 2$?

4. Дати означення первісної функції комплексної змінної $f(z)$ у області D . Наведіть приклад первісної функції комплексної змінної $f(z)$.

5. Якою формулою через інтеграл пов'язані функція комплексної змінної $f(z)$ та її первісна $F(z)$?

6. Записати всі первісні для функції $f(z) = z^2 + 1$.

7. За яких умов інтеграл

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z) dz$$

можна обчислити за формулою Ньютона-Лейбніца?

8. Обчислити інтеграл

$$\int_1^{1+i} (1 + i)z dz.$$

9. За яких умов інтеграл

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)g'(z) dz$$

можна обчислити застосувавши формулу інтегрування частинами?

10. Обчислити інтеграл

$$\int_0^{\ln 2} ze^z dz.$$

9. Інтегральна формула Коші

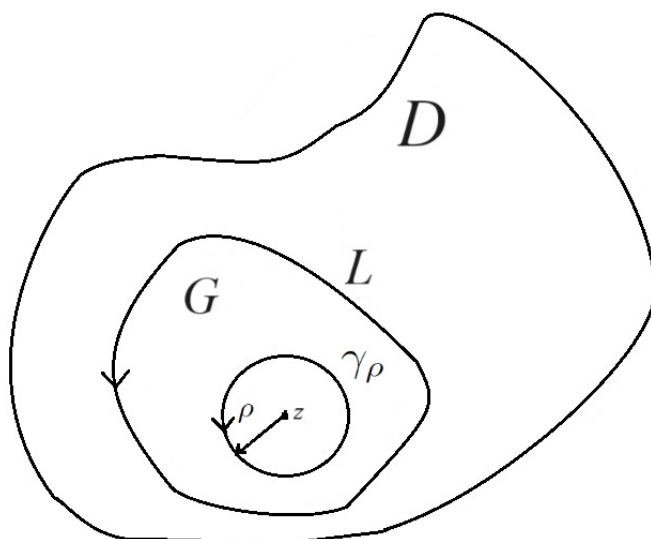
9.1. Інтеграл Коші

З інтегральної теореми Коші випливає одна з найважливіших формул теорії функцій комплексної змінної – інтегральна формула Коші.

Теорема 9.1 (інтегральна формула Коші). *Нехай $f(z)$ — функція однозначна і аналітична в області D і L — замкнена жорданова спрямлювана крива, яка належить D одночасно з областю G , яку вона обмежує. Тоді для будь-якої точки $z \in G$ справедлива інтегральна формула Коші*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi, \quad z \in G. \quad (9.1)$$

Напрямок кривої L є додатним (проти годинникової стрілки). Інтеграл у правій частині формули (9.1) називають інтегралом Коші.



Доведення. *Опишемо з точки z , як з центра, коло γ_ρ настільки малого радіуса ρ , щоб воно містилось в G . Тоді для контура, утвореного кривими*

L і γ_ρ , будемо мати:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z}. \quad (9.2)$$

Для доведення формули (9.1) достатньо з'ясувати правильність рівності

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z},$$

тобто, що

$$\begin{aligned} & \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z} - 2\pi i f(z) = \\ & \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z} - f(z) \int_{\gamma_\rho} \frac{d\xi}{\xi - z} = \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} d\xi = 0. \end{aligned}$$

Справді, внаслідок неперервності функції $f(\xi)$ в точці z нерівність

$$|f(\xi) - f(z)| < \varepsilon, \quad \xi \in \gamma_\rho$$

буде виконуватись для $\forall \varepsilon > 0$, якщо $\rho < \delta = \delta(\varepsilon)$. Тому

$$\left| \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} d\xi \right| < \frac{\varepsilon}{\rho} 2\pi\rho = 2\pi\varepsilon.$$

Отже,

$$\int_{\gamma_\rho} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} d\xi = 0$$

для всіх $\rho < \delta(\varepsilon)$. Таким чином, має місце інтегральна формула Коші (9.1).

Зауваження 1. Значення функції $f(z)$ в середині області виражається з допомогою формули (9.1) через її значення на межі цієї області.

Нехай функція $f(z)$ диференційовна в області D , а γ_1 і γ_2 – жорданові спрямлювані криві (γ_1 лежить всередині області, обмеженої кривою γ_2), які утворюють границю області $D_1 \subset D$ (рис. 9.1). Тоді для $\forall z \in D_1$ справедлива формула

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z}. \quad (9.3)$$

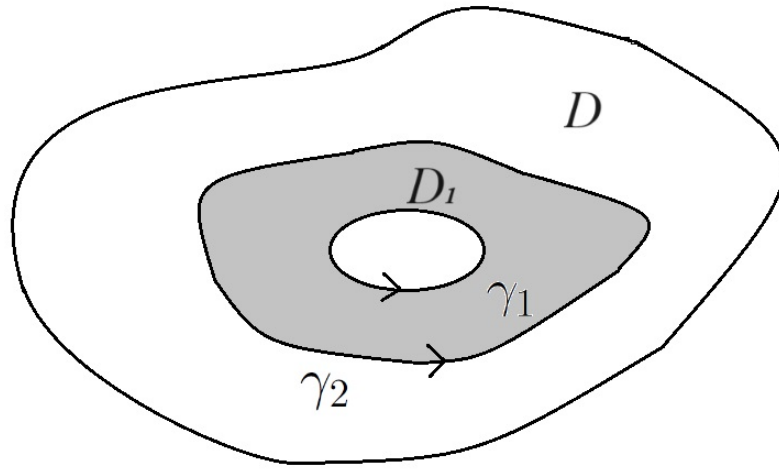


Рис. 9.1

При обході кривих γ_2 і γ_1 області, які вони обмежують, лишаються зліва.

Зауваження 2. Якщо в правій частині формули (9.1) z лежить зовні кривої L , тобто $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{D}$, то підінтегральна функція диференційовна по ξ скрізь в D і за теоремою Коші інтеграл дорівнює нулю, тобто

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \begin{cases} f(z), & z \in D, \\ 0, & z \in \mathbb{C} \setminus \overline{D}. \end{cases}$$

9.2. Теорема про середнє

Теорема 9.2. Теорема про середнє. Якщо функція $f(z)$ диференційовна в крузі $|z - z_0| < R$ і неперервна в замкненому крузі $|z - z_0| \leq R$, то значення цієї функції в центрі круга дорівнює середньому арифметичному її значень на колі, тобто

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{i\varphi}) d\varphi. \quad (9.4)$$

Доведення. Якщо в формулі (9.1) замість L взяти коло радіуса R з центром в точці z_0 , тобто

$$L : \xi = z_0 + Re^{i\varphi}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi,$$

то

$$\begin{aligned} f(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + Re^{i\varphi}) i Re^{i\varphi}}{Re^{i\varphi}} d\varphi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{i\varphi}) d\varphi. \end{aligned}$$

Формула (9.4) доведена.

9.3. Інтеграл типу Коші

В теорії функцій комплексної змінної важливу роль відіграє узагальнення інтеграла Коші, яке називають інтегралом типу Коші.

Інтеграл вигляду

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad (9.5)$$

де Γ - довільна спрямована крива (необов'язково замкнена), а $\varphi(\zeta)$ - неперервна на Γ функція і z - точка, яка не належить Γ , називається інтегралом типу Коші.

Інтеграл Коші є частинним випадком інтеграла типу Коші.

Наведемо приклади інтегралів типу Коші, які не є інтегралами Коші:

$$1) \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \frac{f(x)dx}{x - z}, \text{ де } f(x) \not\equiv 0 - \text{функція дійсної змінної, неперервна на } [-1, 1];$$

$$2) \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{\bar{\zeta} d\zeta}{\zeta - z};$$

$$3) \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=1} \frac{\zeta^{-2} d\zeta}{\zeta - z}.$$

Функція

$$f(z) = \bar{z}$$

не є аналітичною в крузі $|z| < 1$, оскільки $\bar{z} = x - iy$, $u(x, y) = x$, $v(x, y) = -y$ і умови Коші-Рімана не виконуються: $\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \neq \frac{\partial v}{\partial y} = -1$. Тому 2) не є інтегралом Коші.

Функція

$$\frac{1}{z^2}$$

не диференційовна в точці $z = 0$, тому вона не є аналітичною в крузі $|\zeta| < 1$, отже, 3) не є інтегралом Коші.

Контрольні питання

1. Сформулювати теорему про інтегральну формулу Коші. Дати означення інтеграла Коші.
2. Яким буде значення інтеграла Коші у формулі (9.1), якщо точка z лежатиме зовні кривої L .
3. Як з інтегральної формули Коші вивести твердження теореми про середнє?
4. За допомогою інтегральної формули Коші обчислити інтеграл

$$\int_L \frac{e^z}{z-1} dz,$$

де контур інтегрування L є колом $|z-1| = 1$.

5. За допомогою інтегральної формули Коші обчислити інтеграл

$$\int_L \frac{\cos z}{(z+1)(z-2)} dz,$$

де контур інтегрування L є

- 1) колом $|z-1| = \frac{1}{2}$;
- 2) колом $|z-i| = 3$.

6. За допомогою інтегральної формули Коші обчислити інтеграл

$$\int_{|z|=2} \frac{z+3}{(z+i)(z-1)} dz.$$

Вказівка: розкласти підінтегральну функцію на суму елементарних дробів.

7. Який зв'язок між інтегралом Коші та інтегралом типу Коші? Яке поняття є більш ширшим: інтеграл Коші або інтеграл типу Коші?
8. Навести приклад інтегралу типу Коші, що не є інтегралом Коші.
9. Обчислити інтеграл

$$\int_{|z|=3} \frac{e^z + 2}{z(z+4)} dz.$$

10. Степеневі ряди

10.1. Область збіжності степеневого ряду

Степеневим рядом називається ряд вигляду

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - a)^k, \quad (10.1)$$

де c_k, a – задані комплексні числа, z – комплексна змінна, $c_k, k = 0, 1, 2, \dots$, – коефіцієнти ряду. Якщо $a = 0$, то ряд (10.1) набуде вигляду

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k. \quad (10.2)$$

Степеневий ряд є частинним випадком функціонального ряду.

Означення 10.1. *Функціональний ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$$

є збіжним у точці $z = z_0$, якщо відповідний числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z_0)$ є збіжним.

Множину усіх точок z , в яких ряд є збіжним, називають його областю збіжності.

Приклад 10.1. *Ряд*

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^{2k}$$

збігається при $|z| < 1$ і розбігається при $|z| \geq 1$, оскільки при кожному фіксованому z матимемо відповідну геометричну прогресію.

Приклад 10.2. Ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{z}{k}\right)^k$$

збігається при всіх $z \in \mathbb{C}$, оскільки для будь-якого z можна вказати таке k_0 , що для всіх $k > k_0$ матиме місце нерівність $\left|\frac{z}{k}\right| < \frac{1}{2}$, тобто $\left|\frac{z}{k}\right|^k < \frac{1}{2^k}$. Отже, ряд буде збіжним в точці z .

Приклад 10.3. Ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^k z^k$$

збігається лише при $z = 0$, оскільки при $z \neq 0$ і $k > \frac{1}{|z|}$ має місце $|kz| > 1$, отже, не виконується необхідна умова збіжності ряду.

Теорема 10.1. Теорема Абеля. Якщо степеневий ряд (10.2) збігається в точці $z_0 \neq 0$, то він абсолютно збігається в крузі $|z| < |z_0|$, а в крузі $|z| \leq \rho$, де $\rho < |z_0|$, цей ряд збігається рівномірно.

Доведення. Оскільки ряд (10.2) збігається в точці z_0 , то $\lim_{k \rightarrow \infty} c_k z_0^k = 0$. Отже, $\exists M > 0$ таке, що $\forall k$ має місце нерівність $|c_k z_0^k| \leq M$. Нехай z — довільна точка круга $|z| < |z_0|$. Тоді

$$|c_k z^k| = |c_k z_0^k| \left| \frac{z}{z_0} \right|^k \leq M q^k,$$

де $q = \left| \frac{z}{z_0} \right| < 1$. Звідки випливає абсолютна збіжність ряду (10.2) в крузі $|z| < |z_0|$.

Нехай $|z| \leq |\rho| < |z_0|$. Тоді $|c_k z^k| \leq M \left| \frac{z}{z_0} \right|^k \leq M q_1^k$. Тут $q_1 = \frac{\rho}{|z_0|}$ не залежить від z , і за ознакою Вейерштрасса ряд (10.2) збігається рівномірно в крузі $|z| \leq |\rho| < |z_0|$.

Наслідок 10.1. Кожний зі степеневих рядів

$$\sum_{k=l}^{\infty} c_k z^{k-l}, \quad l \in \mathbb{N}, \quad (10.3)$$

за умов теореми Абеля збігається абсолютно при $|z| < |z_0|$ і рівномірно, якщо $|z| \leq |\rho| < |z_0|$, оскільки

$$|c_k z^{k-l}| = \frac{|c_k z_0^k|}{|z_0|^l} \left| \frac{z}{z_0} \right|^{k-l} \leq \frac{M}{|z_0|^l} q^{k-l}, \quad q < 1.$$

Наслідок 10.2. За умов теореми Абеля ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} k c_k z^{k-1}, \quad (10.4)$$

складений з похідних членів ряду (10.2), збігається абсолютно при $|z| < |z_0|$ і рівномірно при $|z| \leq |\rho| < |z_0|$. Справді,

$$|k c_k z^{k-1}| = \frac{|c_k z_0^k|}{|z_0|} k \left| \frac{z}{z_0} \right|^{k-1} \leq M_1 k q^{k-1},$$

$$q = \left| \frac{z}{z_0} \right| < 1.$$

Звідси, внаслідок збіжності ряду $\sum_{k=1}^{\infty} k q^{k-1}$, $0 \leq q < 1$, впливає абсолютна збіжність ряду (10.4) при $|z| < |z_0|$ і рівномірність при $|z| \leq |\rho| < |z_0|$.

Наслідок 10.3. Існує такий круг $|z| < R$, що ряд (10.2) збігається у всіх точках, які знаходяться всередині круга і розбігається в усіх точках зовні. Круг $|z| < R$ називається кругом збіжності ряду (10.2), а його радіус R – радіусом збіжності ряду (10.2).

Доведення. Зрозуміло, якщо степеневий ряд (10.2) збігається лише в точці $z = 0$, то $R = 0$. Якщо він збігається при $\forall z \in \mathbb{C}$, то $R = \infty$. Якщо степеневий ряд (10.2) розбігається при $z_1 \neq 0$, то він розбігається і при всіх z таких, що $|z| > |z_1|$. В протилежному випадку, при збіжності ряду в точці z такій, що $|z| > |z_1|$, згідно теореми Абеля він би збігався і в точці z_1 .

Якщо $R = \sup_{z \in \mathbb{C}} |z|$, де z – множина точок, в яких ряд (10.2) збігається, то ряд (10.2) збігається в крузі $|z| < R$ і розбігається зовні цього круга, тобто в області $|z| > R$. В точках кола $|z| = R$ ряд (10.2) може як збігатись так і розбігатись.

Наслідок 10.4. Сума степеневого ряду (10.2) є неперервною функцією всередині круга збіжності цього ряду.

Повне уявлення про область збіжності степеневих рядів дає наступна теорема.

Теорема 10.2. Теорема Коші-Адамара. Нехай

$$\Lambda = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|}.$$

Тоді при $\Lambda = \infty$ ряд (10.2) збігається в точці $z = 0$, при $0 < \Lambda < \infty$ цей ряд абсолютно збігається в крузі $|z| < \frac{1}{\Lambda}$ і розбігається зовні цього круга. При $\Lambda = 0$ ряд (10.2) абсолютно збігається при всіх $z \in \mathbb{C}$. Радіус збіжності R степеневого ряду (10.2) визначається формулою

$$R = \frac{1}{\Lambda}, \quad (10.5)$$

яка називається формулою Коші-Адамара.

Доведення. Нехай $0 < \Lambda < \infty$. Візьмемо точку z з круга $|z| < \frac{1}{\Lambda}$ і нехай $|z| = \frac{\theta^2}{\Lambda}$, де $0 < \theta < 1$. Оскільки $\frac{\theta}{|z|} = \frac{\Lambda}{\theta} > \Lambda$, то всі значення $\sqrt[k]{|c_k|}$, починаючи з деякого, повинні бути меншими за $\frac{\theta}{|z|}$, оскільки $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|} = \Lambda < \frac{\theta}{|z|}$. Тому, починаючи з деякого k , модулі всіх членів ряду (10.2) задовольняють нерівність

$$|c_k z^k| < \theta^k,$$

а оскільки ряд $1 + \theta + \dots + \theta^n + \dots$ збігається як геометрична прогресія, то і ряд (10.2) абсолютно збігається в кожній точці круга $|z| < \frac{1}{\Lambda}$.

Якщо z лежить зовні круга $|z| < \frac{1}{\Lambda}$, то $\Lambda > \frac{1}{|z|}$, отже, знайдеться нескінченна множина значень k_e для яких $\sqrt[k_e]{|c_{k_e}|} > \frac{1}{|z|}$. Звідси випливає, що $|c_{k_e} z^{k_e}| > 1$, тобто необхідна умова збіжності ряду (10.2), $\lim_{k \rightarrow \infty} c_k z^k = 0$ не виконується в жодній точці зовні круга $|z| < \frac{1}{\Lambda}$.

Розглянемо випадок $\Lambda = 0$. Для $\forall z \neq 0$ і $0 < \theta < 1$ нерівність

$$\sqrt[k]{|c_k|} < \frac{\theta}{|z|}$$

виконується для досить великих значень k . Отже, починаючи з деякого k , модулі всіх членів ряду (10.2) задовольняють нерівність

$$|c_k z^k| < \theta^k,$$

звідки впливає абсолютна збіжність ряду (10.2) в довільній точці площини $\mathbb{C}$.

При $\Lambda = \infty$, для $\forall z \neq 0$ знайдеться нескінченна множина значень $k = k_e$, для яких

$$\sqrt[k_l]{|c_{k_e}|} > \frac{1}{|z|}.$$

Звідси випливає, що $|c_{k_l} z^{k_l}| > 1$ і необхідна умова збіжності ряду (10.2) не виконується в жодній точці $z \neq 0$. Таким чином, ряд (10.2) збігається при $\Lambda = \infty$ лише в точці $z = 0$. Теорему доведено.

У багатьох випадках при застосуванні формули Коші-Адамара використовують границю

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = \frac{1}{e}.$$

Зазначимо, що

$$e^n = 1 + \frac{n}{1!} + \dots + \frac{n^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{n^n}{n!} \left[1 + \frac{n}{n+1} + \frac{n^2}{(n+1)(n+2)} + \dots \right].$$

Звідси випливає, що

$$e^n < n \frac{n^n}{n!} + \frac{n^n}{n!} \left[1 + \frac{n}{n+1} + \left(\frac{n}{n+1} \right)^2 + \dots \right] = (2n+1) \frac{n^n}{n!}.$$

З іншого боку $e^n > \frac{n^n}{n!}$. Тому

$$\frac{1}{e^n} < \frac{n!}{n^n} < \frac{2n+1}{e^n}.$$

Тобто, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = \frac{1}{e}$.

Користуючись формулою Коші-Адамара встановлено радіуси збіжності наступних рядів:

а) $\sum_{k=1}^{\infty} k^\nu z^k$, б) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^k}{k!} z^k$, в) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k$, г) $\sum_{k=1}^{\infty} k! z^k$.

а) $R = \frac{1}{\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{k^\nu}} = 1$, оскільки $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{k} = 1$,

б) $R = \frac{1}{\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\frac{k^k}{k!}}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\frac{k!}{k^k}} = \frac{1}{e}$,

$$\text{в)} R = \frac{1}{\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\frac{1}{k!}}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{k!} = \infty,$$

$$\text{г)} R = \frac{1}{\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{k!}} = 0.$$

Зауваження. Радіус збіжності степеневого ряду в багатьох випадках зручно знаходити користуючись ознакою д'Аламбера. Зокрема, в прикладі б)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(k+1)^{k+1}}{k!} |z|^{k+1} \cdot \frac{k!}{k^k |z|^k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{k+1}{k} \right)^k |z| = e|z| < 1$$

при $|z| < \frac{1}{e}$.

Звідси, $R = \frac{1}{e}$.

10.2. Диференціювання та інтегрування степеневого ряду. Ряд Тейлора

Теорема 10.3. Якщо радіус збіжності степеневого ряду

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \quad (10.6)$$

дорівнює R ($R \neq 0$), то цей ряд можна почленно диференціювати в крузі $|z| < R$ довільне число разів. Отримані при диференціюванні ряди мають той радіус збіжності R , що й ряд (10.6).

Доведення. Розглянемо ряд

$$S(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k z^{k-1}, \quad (10.7)$$

складений з похідних членів ряду (10.6). За наслідком 10.2 ряд (10.7) збігається рівномірно в крузі $K_1: |z| \leq \rho < R$, і його сума $S(z)$ неперервна в K_1 . Доведемо, що функція $f(z)$ диференційовна в крузі K_1 і

$$S(z) = f'(z). \quad (10.8)$$

Нехай γ - довільна крива, яка лежить в крузі K_1 і з'єднує точки 0 і z . Оскільки функції ζ^k , $k = 0, 1, 2, \dots$, диференційовні у всій комплексній площині, то за інтегральною теоремою Коші інтеграли $\int_{\gamma} \zeta^k d\zeta$ не залежать

від форми шляху інтегрування і

$$\int_{\gamma} \zeta^k d\zeta = \int_0^z \zeta^k d\zeta = \frac{z^{k+1}}{k+1},$$

тобто $\frac{z^{k+1}}{k+1}$ є первісною для функції z^k . Отже,

$$\int_0^z k c_k \zeta^{k-1} d\zeta = c_k z^k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (10.9)$$

Інтегруючи почленно вздовж кривої γ рівномірно збіжний ряд (10.7) і враховуючи, що $\int_0^z S(\zeta) d\zeta$ не залежить від форми шляху інтегрування, оскільки цю властивість мають інтеграли (10.9), дістаємо

$$\int_0^z S(\zeta) d\zeta = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^z k c_k \zeta^{k-1} d\zeta = \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k.$$

З останньої рівності та рівності (10.6) маємо

$$\int_0^z S(\zeta) d\zeta = f(z) - c_0.$$

За теоремою 8.4 пункту 8.4 функція

$$\int_0^z S(\zeta) d\zeta$$

є первісною для функції $S(z)$, тобто $S(z) = f'(z)$. Таким чином, функція $f(z)$ диференційовна в крузі K_1 і має місце рівність $S(z) = f'(z)$, тобто ряд (10.6) можна почленно диференціювати в крузі K_1 . Радіус ρ круга K_1 можна взяти як завгодно близьким до R , тобто ряд (10.7) має той же радіус збіжності, що й ряд (10.6).

Ряд (10.6) можна почленно диференціювати довільне число разів. Теорема доведена.

Наслідок 10.1. Коефіцієнти c_k степеневого ряду

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k, \quad (10.10)$$

збіжного в крузі $K : |z - z_0| < R, R > 0$, визначаються за формулами

$$c_0 = f(z_0), \quad c_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(z_0), \quad k = 1, 2, \dots \quad (10.11)$$

Доведення. Застосовуючи теорему про почленне диференціювання до степеневого ряду (10.10), дістаємо

$$f^{(n)}(z) = n!c_n + (n+1)!c_{n+1}(z - z_0) + \dots \quad (10.12)$$

для $\forall z \in K$. Покладаючи в (10.12) і (10.10) $z = z_0$, отримаємо формули (10.11).

Означення 10.2. Рядом Тейлора функції $f(z)$ називається степеневий ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k.$$

Степеневий ряд (10.10) в його крузі збіжності є рядом Тейлора функції $f(z)$.

10.3. Єдиність розвинення функції в степеневий ряд

Теорема 10.4. Якщо ряди

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k,$$
$$\sum_{k=0}^{\infty} d_k (z - z_0)^k$$

мають одну й ту ж суму в крузі $K : |z - z_0| < \rho, \rho > 0$, то відповідні коефіцієнти цих рядів співпадають, тобто $c_k = d_k, k = 0, 1, \dots$

Доведення. За умовою для $\forall z \in K$ справедлива рівність

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z - z_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} d_k(z - z_0)^k.$$

Покладаючи в цій рівності $z = z_0$, отримуємо, що $c_0 = d_0$ і тому цю рівність можна записати у вигляді

$$c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \dots = d_1(z - z_0) + d_2(z - z_0)^2 + \dots,$$

або, розділивши на $(z - z_0)$,

$$c_1 + c_2(z - z_0) + \dots = d_1 + d_2(z - z_0) + \dots \quad (10.13)$$

Ця рівність справедлива в крузі K з виколотою точкою z_0 . Перейдемо в (10.13) до границі при $z \rightarrow z_0$, отримуємо $c_1 = d_1$. Аналогічно доводиться, що $c_k = d_k$ при $\forall k \in \mathbb{N}$. Теорема доведена.

Контрольні питання

1. Сформулювати означення степеневого ряду. Який зв'язок між степеневими та функціональними рядами?
2. Дати означення області збіжності степеневого ряду. Навести приклад степеневого ряду, вказати область його збіжності.
3. Сформулювати теорему Абеля. Які наслідки має теорема Абеля?
4. Сформулювати теорему Коші-Адамара. Навести приклад застосування теореми Коші-Адамара.
5. Знайти радіуси збіжності степеневих рядів

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n} z^n;$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} (3 + (-1)^n) z^n.$$

6. За якою формулою визначаються коефіцієнти c_k степеневого ряду

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z - z_0)^k,$$

збіжного у крузі $K : |z - z_0| < R, R > 0$?

7. Дати означення ряду Тейлора функції $f(z)$. Як визначити круг збіжності ряду Тейлора?

8. Знайти круги збіжності степеневих рядів

1) $\sum_{n=0}^{\infty} z^n;$

2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n^3};$

3) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1-i}{3}\right)^n z^n.$

9. Розвинути функцію

$$f(z) = \frac{1}{1-z}$$

в ряд Тейлора за степенями z . Вказати круг збіжності ряду. Яким буде розвинення в ряд Тейлора за степенями z функції

$$f(z) = \frac{1}{1+z}?$$

11. Властивості аналітичних функцій

11.1. Аналітичні функції

Нагадаємо означення аналітичної (регулярної) функції, яке було дано у пункті 5.6.

Функція $f(z)$, що зображається збіжним в крузі $|z - a| < \rho$, $\rho > 0$, рядом

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - a)^k$$

називається аналітичною в точці $z = a$.

Доведемо еквівалентність понять диференційовності і аналітичності функції в області, а також розглянемо властивості аналітичних функцій.

Теорема 11.1. *Якщо функція $f(z)$ диференційовна в області D , то вона аналітична в цій області.*

Доведення. Розглянемо круг $K : |z - a| < \rho$, $\rho > 0$, який належить області D . Через γ_ρ позначимо коло $|\zeta - a| = \rho$. Якщо z довільна точка круга K , то за інтегральною формулою Коші

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \quad (11.1)$$

Задача полягає в тому, щоб інтеграл (11.1) зобразити у вигляді суми степеневого ряду за степенями $z - a$. Для цього розвинемо функцію $\frac{1}{\zeta - z}$ в ряд за степенями $z - a$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\zeta - z} &= \frac{1}{\zeta - a - (z - a)} = \frac{1}{(\zeta - a)(1 - \frac{z-a}{\zeta-a})} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z - a)^k}{(\zeta - a)^{k+1}}. \end{aligned} \quad (11.2)$$

Якщо $\zeta \in \gamma_\rho$, то

$$|\zeta - a| = \rho, \quad \left| \frac{z - a}{\zeta - a} \right| = \frac{|z - a|}{\rho} < 1.$$

Отже, ряд (11.2) збігається рівномірно по ζ на колі γ_ρ (за ознакою Вейерштрасса). Ряд

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{k+1}} (z - a)^k, \quad (11.3)$$

який отримуємо з ряду (11.2), шляхом множення на $f(\zeta)$, збігається рівномірно на γ_ρ , бо функція $f(\zeta)$ неперервна на γ_ρ , отже, обмежена.

Інтегруючи почленно ряд (11.3) вздовж кола γ_ρ , що можливо, внаслідок його рівномірної збіжності, отримуємо

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - a)^{k+1}} (z - a)^k = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - a)^k, \end{aligned} \quad (11.4)$$

де

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - a| = \rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{k+1}} d\zeta. \quad (11.5)$$

Функція $f(z)$ аналітична в точці a , оскільки ряд (11.4) збігається в крузі K . Оскільки a – довільна точка області D , то функція $f(z)$ аналітична в D . Теорема доведена.

Наслідок 11.1. Для того, щоб функція $f(z)$ була аналітичною в області D , необхідно і достатньо, щоб вона була диференційовна в цій області.

Доведення. Наслідок 11.1 випливає з теореми 11.1 та теореми 5.5.

Звідси випливає, що поняття диференційовності і аналітичності еквівалентні. Тому з властивостей диференційовних функцій випливає, якщо функції $f(z)$ і $g(z)$ аналітичні в області D , то їх сума, різниця, добуток і частка (при умові, що $g(z) \neq 0$) також аналітичні в області D .

Якщо функція $f(z)$ аналітична в області D , а функція $g(w)$ аналітична в області G і множина значень функції $w = f(z)$, $z \in D$, належить області G , то функція $F(z) = g(f(z))$ аналітична в D .

Наслідок 11.2. Ряд (11.4) збігається в крузі $|z - a| < R_1$ (R_1 – відстань від точки $z = a$ до межі області D), де функція $f(z)$ диференційовна, отже, радіус збіжності R степеневого ряду (11.4) не менший ніж R_1 .

Наслідок 11.3. Якщо функція $f(z)$ аналітична в крузі $K : |z - a| < R$, то вона зображається рядом Тейлора

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (z - a)^k,$$

що є збіжним у крузі K .

Наслідок 11.4. Якщо функція $f(z)$ аналітична (регулярна) в точці $z = a$, то вона аналітична (регулярна) в деякому околі цієї точки.

Доведення. Згідно означення аналітична функція $f(z)$ розвивається у деякому крузі $K : |z - a| < \rho$ у збіжний ряд (11.4), отже, диференційовна в цьому крузі (див. теорему 10.3). За теоремою 11.1 функція $f(z)$ аналітична в крузі K . Тому

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z - z_0)^k,$$

де $z_0 \in K$. Цей ряд збігається у деякому крузі $|z - z_0| = \rho_1$, $\rho_1 \leq d$, d – відстань від точки z_0 до межі круга K .

Зауваження. Функція, яка диференційовна в точці $z = a$, не зобов'язана бути аналітичною в цій точці, бо аналітична в точці $z = a$ функція диференційовна не тільки в самій точці $z = a$, але і в деякому її околі (наслідок 11.4). Наприклад, функція

$$f(z) = \bar{z}$$

диференційовна тільки при $z = 0$, тому не є аналітичною в жодній точці комплексної площини.

11.2. Нескінченна диференційовність аналітичної функції

Теорема 11.2. Якщо функція $f(z)$ диференційовна в області D , то вона нескінченно диференційовна в цій області. Справедлива формула

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta, \quad z \in D, \quad (11.6)$$

де γ_ρ – контур круга $|z - a| \leq \rho$, що належить області D .

Доведення. Функція $f(z)$ аналітична в області D згідно теореми 11.1. Нехай $z = a \in D$. Оскільки функція аналітична в точці $z = a$, то

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z - a)^k, \quad (11.7)$$

і ряд (11.7) збігається в деякому крузі $|z - a| < \rho$, $\rho > 0$. Згідно теореми 10.3 ряд (11.7) можна почленно диференціювати в крузі $|z - a| < \rho$ довільне число разів. При цьому мають місце формули (наслідок 10.1)

$$b_0 = f(a), b_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

З іншого боку, в теоремі 11.1 було встановлено, що коефіцієнти розвинення функції $f(z)$ в степеневий ряд в околі точки $z = a$ знаходяться за формулами (11.5). Згідно теореми 10.4 про єдиність розвинення функції у степеневий ряд маємо $b_k = c_k$, тобто

$$\frac{f^{(k)}(a)}{k!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{k+1}} d\zeta.$$

При заміні a на z отримуємо формулу (11.6). Теорема доведена.

Похідна аналітичної функції є функція аналітична, що випливає з доведеної теореми.

Рівність

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_L \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta$$

можна безпосередньо отримати з формули Коші $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$, якщо диференціювати обидві частини k разів за змінною z . Зауважимо, що в правій частині рівності диференціювання проводиться під знаком інтеграла.

Зауваження. Якщо функція $f(z)$ диференційовна в околі точки a , то вона аналітична в точці a (теорема 11.1) і розвивається у степеневий ряд, що є рядом Тейлора для $f(z)$ (наслідок 10.1).

Для функції $f(z)$ диференційовної в околі точки a , ряд Тейлора має вигляд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (z - a)^k,$$

і збігається до цієї функції $f(z)$. Для функцій дійсної змінної таке твердження, взагалі кажучи, неправильне. Наприклад, функція

$$\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

диференційовна в кожній точці і має в точці $x = 0$ похідні довільного порядку, що дорівнюють 0. Отже, всі коефіцієнти ряду Тейлора для $f(x)$ в точці $x = 0$ дорівнюють нулю, але ж $f(x) \not\equiv 0$.

11.3. Достатні умови аналітичності функції

В теоремі 11.1 доведено, що достатньою умовою аналітичності функції $f(z)$ в області D є диференційовність цієї функції.

Які ще умови, крім диференційовності функції $f(z)$ в області D є достатніми для того, щоб функція $f(z)$ була аналітичною в D ? Відповідь на це питання дають наступні теореми.

Теорема 11.3. Теорема Морери. Нехай функція $f(z)$ неперервна в області D і нехай інтеграл від функції $f(z)$ по довільному замкненому контуру, що лежить в D , дорівнює нулю. Тоді функція $f(z)$ аналітична в області D .

Доведення. Згідно теореми 8.4 функція $f(z)$ має первісну, тобто існує диференційовна функція $F(z)$ така, що $F'(z) = f(z)$ для будь-якого $z \in D$. За теоремою 11.1 функція $F(z)$ аналітична в області D , отже, і її похідна – аналітична в області D функція, тобто $f(z) = F'(z)$ – аналітична в області D .

Теорема 11.4. Перша теорема Вейерштрасса. Якщо функції $f_k(z)$, $k \in \mathbb{N}$, аналітичні в області D і ряд

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(z), \quad (11.8)$$

рівномірно збігається в кожній замкненій області $\overline{D_1}$, $\overline{D_1} \subset D$, то функція $f(z)$ аналітична в D .

Доведення. Нехай z_0 – довільна точка області D , а $K : |z - z_0| < \delta$ і $K \subset D$. За умовою, ряд (11.8) рівномірно збігається в $\overline{K}$, а тому і в K . Функції $f_k(z)$ неперервні в K , оскільки за умовою аналітичні в K . Функція $f(z)$ неперервна в K як сума рівномірного збіжного ряду неперервних функцій.

Нехай γ – довільний замкнений контур, який лежить в крузі K . Інтегруючи почленно рівномірно збіжний на γ ряд (11.8), отримаємо

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\gamma} f_k(z) dz.$$

За інтегральною теоремою Коші $\int_{\gamma} f_k(z) dz = 0$, $k \in \mathbb{N}$, отже, $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$.

За теоремою Морери, функція $f(z)$ аналітична в крузі і, зокрема, в точці z_0 . Оскільки z_0 – довільна точка області D , то функція $f(z)$ аналітична в області D . Теорема доведена.

Теорема 11.5. Друга теорема Вейерштрасса. За умов попередньої теореми ряд (11.8) можна диференціювати почленно довільну кількість разів. Отримані таким чином ряди рівномірно збігаються в кожній замкненій області $\overline{D_1} \subset D$.

Поряд з терміном “аналітична функція” в літературі використовуються різні еквівалентні терміни: “голоморфна функція”, “регулярна функція”.

Критерії (необхідні і достатні умови) аналітичності функції $f(z)$ в області D :

- 1) диференційовність функції $f(z)$ в області D ;
- 2) умови Коші-Рімана.

Достатні умови аналітичності функції $f(z)$ в області D :

- 1) теорема Морери;
- 2) перша теорема Вейєрштраса.

11.4. Методи розвинення функцій у степеневий ряд

Аналітична в крузі $|z - a| < \rho$ функція $f(z)$ розвивається у степеневий ряд, що є рядом Тейлора,

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - a)^k,$$

де коефіцієнти $c_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)$.

Безпосереднім обчисленням похідних від елементарних функцій e^z , $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$ при $a = 0$ отримаємо такі збіжні при будь-якому $z \in \mathbb{C}$ розвинення

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}, \quad (11.9)$$

$$\sin z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1}, \quad \cos z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k}, \quad (11.10)$$

$$\operatorname{sh} z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad \operatorname{ch} z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!}. \quad (11.11)$$

Для функції $\frac{1}{1-z}$ має місце розвинення

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k, \quad (11.12)$$

в крузі $|z| < 1$.

Коефіцієнти ряду Тейлора можна знайти, використовуючи відомі розвинення функцій (зокрема формули (11.9)-(11.12)).

Приклад 11.1. Розвинути у степеневий ряд функцію

$$\frac{1}{(1-z)^3}$$

у точці $z = 0$.

Якщо двічі продиференціювати рівність (11.12), то отримаємо

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)z^k, \quad |z| < 1,$$

$$\frac{2}{(1-z)^3} = \sum_{k=1}^{\infty} k(k+1)z^{k-1}, \quad |z| < 1,$$

Відповідь: $\frac{1}{(1-z)^3} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(k+1)}{2} z^{k-1}, \quad |z| < 1.$

Приклад 11.2. Розвинути в ряд Тейлора в околі точки $z = 0$ раціональну функцію

$$f(z) = \frac{z}{z^2 - 2z - 3}.$$

Розв'язання. Оскільки $z^2 - 2z - 3 = (z+1)(z-3)$, то

$$\begin{aligned} \frac{z}{(z+1)(z-3)} &= \frac{A}{z+1} + \frac{B}{z-3} = \\ &= \frac{1}{4} \frac{1}{z+1} + \frac{3}{4} \frac{1}{z-3} = \frac{1}{4} \frac{1}{1+z} - \frac{1}{4} \frac{1}{1-\frac{z}{3}}. \end{aligned}$$

Розглядаючи дроби

$$\frac{1}{1+z} = \frac{1}{1-(-z)} \text{ та } \frac{1}{1-\frac{z}{3}},$$

як суми геометричних прогресій, де $q_1 = -z$, $q_2 = \frac{z}{3}$, отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{z}{z^2 - 2z - 3} &= \frac{1}{4}(1 - z + z^2 - z^3 + \dots) - \frac{1}{4}\left(1 + \frac{z}{3} + \frac{z^2}{9} + \dots\right) = \\ &= -\frac{z}{3} + \frac{2}{3^2}z^2 - \frac{7}{3^3}z^3 + \dots \end{aligned}$$

Перший ряд збігається при $|q_1| = |z| < 1$, а другий – при $|q_2| = \frac{|z|}{3} < 1$. Отже, ряд Тейлора функції

$$\frac{z}{z^2 - 2z - 3}$$

збіжний при $|z| < 1$.

Розглянемо арифметичні операції із степеневими рядами. Якщо функції $f(z)$ і $g(z)$ розвиваються у ряди

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k, \quad g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k (z-a)^k, \quad (11.13)$$

які збігаються, відповідно, в кругах $|z-a| < R$, $|z-a| < R_1$. Тоді мають місце розвинення

$$Af(z) = \sum_{k=0}^{\infty} Ac_k (z-a)^k, \quad A = \text{const}, \quad (11.14)$$

$$f(z) \pm g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (c_k \pm d_k) (z-a)^k, \quad (11.15)$$

$$f(z)g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n (c_k d_{n-k}) (z-a)^k. \quad (11.16)$$

Ряд (11.14) збігається в крузі $|z-a| < R$, а ряди (11.15) і (11.16) збігаються в крузі $|z-a| < \min\{R, R_1\}$.

Приклад 11.3. Розвинути у ряд Тейлора за степенями z , тобто в околі точки $z = 0$, функцію

$$f(z) = e^z \sin z.$$

Розв'язання. Для знаходження розвинення функції $f(z)$ в ряд Тейлора в околі точки $z = 0$ можна було б перемножити ряди Тейлора функцій e^z і $\sin z$. Але для більш ефективного обчислення коефіцієнтів ряду Тейлора функції $f(z)$ використаємо тотожність

$$e^z \sin z = e^z \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{1}{2i} (e^{(1+i)z} - e^{(1-i)z}).$$

Оскільки

$$1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}, \quad 1 - i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}},$$

то

$$\begin{aligned} e^z \sin z &= \frac{1}{2i} (e^{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}z} - e^{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}z}) = \\ &= \frac{1}{2i} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}z)^k}{k!} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}z)^k}{k!} \right) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{2})^k}{k!} \frac{e^{i\frac{k\pi}{4}} - e^{-i\frac{k\pi}{4}}}{2i} z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{\frac{k}{2}}}{k!} \sin \frac{k\pi}{4} z^k. \end{aligned}$$

Цей ряд збігається у всій комплексній площині.

Приклад 11.4. Розглянемо ділення рядів за допомогою методу невизначених коефіцієнтів. Розглянемо два степеневі ряди

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^k \tag{11.17}$$

і

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k(z-a)^k \tag{11.18}$$

з відповідними радіусами збіжності R_1 і R_2 , причому вільний член другого ряду $b_0 \neq 0$. Позначимо $R = \min\{R_1, R_2\}$. Тоді в крузі $|z-a| < R$ обидва ряди збігаються. Якщо в цьому крузі містяться нулі суми ряду (11.18), то візьмемо новий круг меншого радіуса, всередині якого сума ряду (11.18) не обертається в нуль. Такий круг існує, бо точка $z = a$ не є нулем для суми ряду (11.18) ($b_0 \neq 0$). Таким чином, існує круг $|z-a| < R_0$, в якому обидва ряди (11.17) і (11.18) збігаються, причому сума другого ряду не має нулів. В цьому крузі відношення

$$f(z) = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^k}{\sum_{k=0}^{\infty} b_k(z-a)^k} \tag{11.19}$$

є аналітичною функцією, отже, існує степеневий ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} d_k(z-a)^k,$$

Виконаємо ділення рядів методом невизначених коефіцієнтів. Для цього перепишемо співвідношення (11.19) у вигляді

Зазначимо, що всі три степеневі ряди всередині круга $|z - a| < R_0$ збігаються абсолютно. Тому ряди, які стоять в лівій частині останньої рівності можна перемножити. Отримаємо

Суми степеневих рядів, які стоять зліва і справа в (11.20) співпадають в крузі $|z-a| < R_0$, тому за теоремою єдиності степеневих рядів коефіцієнти обох рядів однакові

Це нескінченна система лінійних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів $d_0, d_1, d_2, \dots, d_k, \dots$. Визначимо d_0 з першого рівняння: $d_0 = \frac{c_0}{b_0}$, $b_0 \neq 0$. Підставимо d_0 в друге рівняння, отримаємо

Із системи (11.21) нескладно отримати вираз для d_n через коефіцієнти $b_0, b_1, \dots, b_n$ і $c_0, c_1, \dots, c_n$:

133

Контрольні питання

1. Сформулювати означення аналітичної в точці функції. Якщо функція $f(z)$ диференційована у точці $z = a$, чи означає це, що функція $f(z)$ є аналітичною у точці $z = a$?
2. Чи будь-яка аналітична функція $f(z)$ в області D буде диференційовною у цій самій області?
3. Сформулювати властивості аналітичної функції у точці та в області.
4. Сформулювати теорему про нескінченну диференційовність аналітичної функції $f(z)$ в області D . Записати формулу для обчислення похідної n -го порядку функції $f(z)$.

5. Обчислити інтеграли

1)
$$\int_{|z|=1.5} \frac{\operatorname{sh} z}{(z+1)^3(z-4)} dz;$$

2)
$$\int_{|z-1|=1} \frac{e^z}{(z-1)^{2024}} dz.$$

6. Сформулювати достатні умови аналітичності функції в області (теорему Морери, першу теорему Вейєрштрасса).
7. Розвинути у степеневий ряд функцію

$$f(z) = \frac{1}{z-4}$$

за степенями z . Вказати круг збіжності ряду.

8. Розвинути у степеневий ряд функцію

$$f(z) = \sin z$$

за степенями $z - \frac{\pi}{4}$. Вказати круг збіжності ряду.

9. Розвинути функцію

$$f(z) = \frac{z-1}{2z^2+5z+2}$$

у степеневий ряд за степенями $z+1$. Вказати круг збіжності ряду.

10. Назвати еквівалентні терміни до терміна “аналітична функція”.

12. Ряд Лорана

12.1. Область збіжності ряду Лорана

Ряд вигляду

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z-a)^k, \quad (12.1)$$

де a – фіксована точка комплексної площини, c_k – задані комплексні числа, називається рядом Лорана. Під сумою цього ряду розуміють суму рядів

$$f_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k \quad (12.2)$$

і

$$f_2(z) = \sum_{k=-1}^{-\infty} c_k (z-a)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{-k}}{(z-a)^k}. \quad (12.3)$$

Областю збіжності ряду (12.2), який є степеневим рядом, є круг

$$|z-a| < R.$$

Ряд (12.3) має властивості, аналогічні до відповідних властивостей ряду (12.2). Замінімо $\zeta = \frac{1}{z-a}$ і отримаємо ряд наступного вигляду

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} \zeta^k.$$

Останній ряд є степеневим рядом і його область збіжності є круг $|\zeta| < \rho$. Отже, ряд (12.3) збігається в області $|z-a| > \frac{1}{\rho} = r$. Якщо виконується умова $r < R$, то ряд (12.1) збігається в області

$$G : r < |z-a| < R, \quad (12.4)$$

тобто в круговому кільці з центром в точці a .

В будь-якій замкненій підобласті $\overline{G_1}$ області G обидва ряди (12.2) і (12.3) збігаються абсолютно і рівномірно. Отже, в замкненій області $\overline{G_1}$ абсолютно і рівномірно збігається і ряд Лорана (12.1), що є розвиненням в області G деякої аналітичної функції. В кожній точці, яка лежить зовні кільця (12.4), ряд Лорана (12.1) розбігається внаслідок розбіжності одного з рядів (12.2)

та (12.3). В точках, які лежать на межі кільця (12.4), ряд (12.1) може як збігатись, так і розбігатись.

Якщо $r < \rho < R$, то ряд (12.1) рівномірно збігається на колі $\gamma : |z - a| = \rho$, оскільки згідно теореми Абеля (теорема 10.1) рівномірно збігаються ряди (12.2) і (12.3). Ряд (12.1) буде рівномірно збігатись на γ і після того, як всі його члени будуть помножені на $\frac{1}{2\pi i} (z - a)^{-k-1}$, де k – довільне ціле число. Проінтегрувавши отриманий ряд на γ , будемо мати

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}} dz = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} (z-a)^{n-k-1} dz.$$

Обчислимо інтеграли в правій частині останньої рівності. Рівняння кола γ запишемо у вигляді

$$z = a + \rho e^{i\theta}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Тоді

$$\int_{\gamma} (z-a)^{n-k-1} dz = \rho^{n-k} i \int_0^{2\pi} e^{i(n-k)\theta} d\theta = \begin{cases} 0, & n \neq k, \\ 2\pi i, & n = k. \end{cases}$$

Отже,

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}} dz, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (12.5)$$

З теореми Абеля (теорема 10.1) випливає, що у будь-якому замкненому кільці $r < r_1 \leq |z-a| \leq R_1 < R$, яке лежить в кільці (12.4), ряд (12.1) збігається рівномірно і згідно першої теореми Вейерштраса (теорема 11.4) його сума $f(z)$ аналітична в кільці (12.4).

12.2. Розвинення аналітичної функції в ряд Лорана

Теорема 12.1. Теорема Лорана. Функція $f(z)$, аналітична в кільці $D : r < |z-a| < R$, розвивається в цьому кільці у збіжний ряд Лорана

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z-a)^k, \quad (12.6)$$

де

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta-a|=\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{k+1}} d\zeta,$$

$$r < \rho < R, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Доведення. Зазначимо, що за умовами цієї теореми кільце D може вироджуватись в круг з виколотим центром ($r = 0, R < \infty$), в зовнішність круга з виколотою нескінченно віддаленою точкою ($0 < r, R = \infty$), а також у всю площину з двома виколотими точками $z = a$ та $z = \infty$ ($r = 0, R = \infty$).

Розглянемо кільце $D_1 : r_1 < |z - a| < R_1$ (рис. 12.1). Позначимо через γ і Γ відповідно внутрішню і зовнішню частини межі кільця D_1 . Нехай z — довільна точка кільця D_1 . Зазначимо (розділ 11.1, формула (11.4)), що

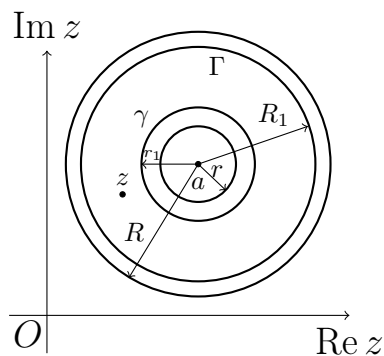


Рис. 12.1

$$f(z) = \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - a)^k, \quad (12.7)$$

де

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{k+1}} d\zeta. \quad (12.8)$$

За інтегральною формулою Коші для неоднотвірних областей (розділ 9.1, формула (9.3)), маємо

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \quad (12.9)$$

Представимо вираз $-\frac{1}{\zeta - z}$, $\zeta \in \gamma$, як суму геометричної прогресії із знаменником $\frac{\zeta - a}{z - a}$, модуль якого

$$\left| \frac{\zeta - z}{z - a} \right| = \frac{|\zeta - a|}{|z - a|} < 1.$$

Отримаємо

$$-\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{z - a - (\zeta - a)} = \frac{1}{(z - a) \left[1 - \frac{\zeta - a}{z - a} \right]} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\zeta - a)^k}{(z - a)^{k+1}}. \quad (12.10)$$

За ознакою Вейєрштрасса, ряд (12.10) рівномірно збігається по ζ , $\zeta \in \gamma$, для кожного $z \in D_1$. Оскільки функція $f(\zeta)$ неперервна на γ , то вона обмежена на γ . Отже, ряд

$$- \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{(z - a)^{k+1}} (\zeta - a)^k \quad (12.11)$$

рівномірно збігається по ζ на колі γ . Інтегруємо ряд (12.11) почленно, зробивши заміну $k + 1 = -n$, отримуємо

$$- \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{k=-1}^{-\infty} c_k (z - a)^k, \quad (12.12)$$

де

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{k+1}} d\zeta, \quad k = -1, -2, \dots \quad (12.13)$$

Підставимо (12.12) і (12.7) в (12.9). Отримали збіжне в кожній точці кільця D_1 розвинення (12.6), коефіцієнти якого визначаються за формулами (12.8) і (12.13).

Як наслідок з інтегральної теореми Коші (розділ 9.1, формула (9.3)) у формулах (12.8) і (12.13) контуром інтегрування можна взяти коло $|\zeta - a| = \rho$, $r_1 < \rho < R_1$, тобто справедлива формула (12.6). Оскільки r_1 можна взяти як завгодно близьким до r , а R_1 як завгодно близьким до R , то ряд (12.6) збігається у всьому кільці D . Теорема доведена.

12.3. Єдиність розвинення функції в ряд Лорана

Теорема 12.2. Розвинення в ряд Лорана функції $f(z)$, аналітичної в кільці $D : r < |z - a| < R$, єдине.

Доведення. Нехай функція $f(z)$ аналітична в кільці D і має в ньому два різних розвинення

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z - a)^k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k (z - a)^k. \quad (12.14)$$

Помноживши ряди (12.14) на $(z - a)^{-m-1}$, де m – фіксоване ціле число, отримаємо

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z - a)^{k-m-1} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k (z - a)^{k-m-1}. \quad (12.15)$$

Оскільки ряди (12.15) рівномірно збігаються на колі $|z - a| = \rho$, $r < \rho < R$, то почленно інтегруючи їх на цьому колі, та враховуючи, що при цілому k

$$\int_{|z-a|=\rho} (z - a)^k dz = \begin{cases} 0, & k \neq -1, \\ 2\pi i, & k = -1; \end{cases}$$

отримаємо, $c_m = \alpha_m$ для кожного цілого m . Теорема доведена.

Приклад 12.1. Функція

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + 2z - 8} = \frac{1}{(z - 2)(z + 4)}$$

аналітична в областях $D_1 = \{z : |z| < 2\}$, $D_2 = \{z : 2 < |z| < 4\}$, $D_3 = \{z : |z| > 4\}$. Знайти розвинення функції $f(z)$ в цих областях.

Розв'язання. Зобразимо функцію $f(z)$ у вигляді елементарних дробів

$$f(z) = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{z - 2} - \frac{1}{z + 4} \right). \quad (12.16)$$

При $|z| < 2$

$$\frac{1}{z - 2} = -\frac{1}{2 - z} = -\frac{1}{2(1 - \frac{z}{2})} = -\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^k = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{2^{k+1}}, \quad (12.17)$$

а при $|z| > 2$

$$\frac{1}{z - 2} = \frac{1}{z(1 - \frac{2}{z})} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{z^{k+1}}. \quad (12.18)$$

Далі, в крузі $|z| < 4$ маємо розвинення

$$-\frac{1}{z + 4} = -\frac{1}{4(1 + \frac{z}{4})} = -\frac{1}{4} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^k}{4^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{4^{k+1}} z^k, \quad (12.19)$$

а якщо $|z| > 4$, то

$$-\frac{1}{z+4} = -\frac{1}{z\left(1+\frac{4}{z}\right)} = -\frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 4^k}{z^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \cdot 4^k}{z^{k+1}}. \quad (12.20)$$

В області D_1 на основі формул (12.16), (12.17) і (12.19) отримуємо ряд Лорана для функції

$$f(z) = -\frac{1}{6} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{2^{k+1}} + \frac{1}{6} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{4^{k+1}} z^k = \frac{1}{6} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{k+1}}{4^{k+1}} - \frac{1}{2^{k+1}} \right) z^k.$$

В області D_2 розв'язання в ряд Лорана функції $f(z)$ матиме вигляд згідно формул (12.18) і (12.19)

$$f(z) = \frac{1}{6} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{z^{k+1}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4^k} z^{k-1} \right).$$

В області D_3 на основі формул (12.16), (12.18) і (12.20) ряд Лорана для функції $f(z)$ матиме вигляд

$$f(z) = \frac{1}{6} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k + (-1)^{k+1} 4^k}{z^{k+1}} \right).$$

Приклад 12.2. Розвинути у ряд Лорана функцію

$$f(z) = \frac{z+2}{z^2-4z+3}$$

в кільці $2 < |z-1| < \infty$.

Розв'язання. Оскільки

$$f(z) = \frac{z+2}{(z-1)(z-3)} = \frac{z-3+5}{(z-1)(z-3)} = \frac{1}{z-1} \left(1 + \frac{5}{z-3} \right),$$

то функція $f(z)$ аналітична (регулярна) в кільці $2 < |z-1| < \infty$.

Розвинемо функцію $\frac{1}{z-3}$ в ряд Лорана за степенями $z-1$

$$\frac{1}{z-3} = \frac{1}{z-1-2} = \frac{1}{(z-1)\left(1-\frac{2}{z-1}\right)} =$$

$$= \frac{1}{(z-1)} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z-1} \right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{(z-1)^{k+1}}.$$

Тому розвинення функції $f(z)$ у кільці $2 < |z-1| < \infty$ має вигляд:

$$f(z) = \frac{1}{z-1} + 5 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{(z-1)^{k+2}}.$$

12.4. Зв'язок між рядами Лорана і рядами Фур'є

Між рядами Лорана і рядами Фур'є існує тісний зв'язок. Вкажемо його в частинному випадку.

Нехай функція $f(z)$ аналітична в кільці

$$\rho_1 < |z| < 1 + \delta_2, \quad 0 < \rho_1 < 1, \quad \delta_2 > 0,$$

яке містить одиничне коло $|z| = 1$. Функція $f(z)$ зображається в цьому кільці рядом Лорана

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^k.$$

Покладаючи $z = e^{it}$ на одиничному колі, отримуємо розвинення в ряд Фур'є функції

$$f(e^{it}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}.$$

12.5. Нерівності Коші для коефіцієнтів ряду Лорана

Нехай функція $f(z)$ аналітична в кільці $D : r < |z-a| < R$ та має розвинення у ряд Лорана

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z-a)^k$$

в цьому кільці. Тоді коефіцієнти c_k її лоранівського розвинення задовольняють нерівності:

$$|c_k| \leq \frac{M}{\rho^k}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (12.21)$$

де $M = \max_{z \in \gamma_\rho} |f(z)|$, $\gamma_\rho : |z - a| = \rho$, $r < \rho < R$.

Нерівності (12.21) називаються нерівностями Коші для коефіцієнтів ряду Лорана.

Для доведення нерівностей (12.21) скористаємось формулою (теорема Лорана 12.1):

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{k+1}} d\zeta.$$

Отримаємо

$$|c_k| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_\rho} \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta - a|^{k+1}} |d\zeta| \leq \frac{M}{2\pi \rho^{k+1}} \int_{|\zeta - a| = \rho} |d\zeta| = \frac{M}{\rho^k}.$$

Контрольні питання

1. Сформулювати означення ряду Лорана. Якою множиною задається область збіжності ряду Лорана?
2. Знайти область збіжності ряду Лорана

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(z-2)^n}{\operatorname{ch} 3n}.$$

3. Сформулювати теорему Лорана. Яким умовам має задовольняти функція $f(z)$, щоб мати розвинення у ряд Лорана?
4. Нехай функція $f(z)$ у кільці $D : r < |z - a| < R$ має розвинення у ряд Лорана. Скільки існує розвинень $f(z)$ у ряд Лорана у кільці D ?
5. Розвинути функцію

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + 2z - 3}$$

у ряд Лорана у крузі $0 < |z - 1| < 3$.

6. Знайти всі розвинення у ряд Лорана функції

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)(z-2)}$$

в околі точки $z_0 = 0$, тобто в областях $D_1 = \{z : |z| < 1\}$, $D_2 = \{z : 1 < |z| < 2\}$, $D_3 = \{z : |z| > 2\}$.

7. Розвинути функцію

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 3z + 2}$$

у ряд Лорана у крузі $|z| > 2$.

8. Розвинути у ряд Лорана функцію

$$f(z) = z \sin \frac{\pi z}{z - a}$$

в околі точки $z_0 = a$. Вказати область збіжності ряду.

9. Вказати зв'язок між рядами Лорана та рядами Фур'є.

10. Записати нерівності Коші для коефіцієнтів ряду Лорана.

13. Ізольовані особливі точки функцій комплексної змінної

13.1. Класифікація ізольованих особливих точок

Означення 13.1. Якщо однозначна в околі точки $z = a$ функція $f(z)$ є аналітичною в кільці $0 < |z - a| < \rho$, але не визначена в точці $z = a$, то точка $z = a$ називається ізольованою особливою точкою функції $f(z)$.

Наприклад, точка $z = 1$ є ізольованою особливою точкою функції

$$f(z) = \frac{1}{z - 1},$$

а функція

$$g(z) = \frac{1}{z^2 + 1}$$

має дві ізольовані особливі точки $z = i$ та $z = -i$.

Означення 13.2. Ізольована особлива точка $z = a$ функції $f(z)$ називається:

а) усувною особливою точкою, якщо

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) \text{ існує і скінченна;}$$

б) полюсом, якщо

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty;$$

в) суттєво (або істотно) особливою точкою, якщо

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) \text{ не існує.}$$

Приклад 13.1. Для функції

$$f(z) = \frac{1 - \cos z}{z^2}$$

точка $z = 0$ є усувною особливою точкою, оскільки $f(z)$ аналітична при $z \neq 0$ і

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - \cos z}{z^2} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\frac{z^2}{2!} - \frac{z^4}{4!} + \dots}{z^2} = \frac{1}{2}.$$

Приклад 13.2. Для функції

$$f(z) = \frac{z^2}{z - 2}$$

точка $z = 2$ є полюсом, оскільки $f(z)$ аналітична при $z \neq 2$ та

$$\lim_{z \rightarrow 2} \frac{z^2}{z - 2} = \infty.$$

Приклад 13.3. Для функцій

$$e^z, \sin z, \cos z,$$

точка $z = \infty$ є суттєво особливою, оскільки ці функції аналітичні у всій комплексній площині і не мають границі при $z \rightarrow \infty$.

Приклад 13.4. Точка $z = 0$ є суттєво особливою точкою для функції

$$f(z) = e^{\frac{1}{z^2}},$$

оскільки функція є аналітичною при $z \neq 0$. Границя функції $f(z)$ при $z \rightarrow 0$ не існує. Справді, якщо $z = x$, то

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x^2}} = \infty,$$

а якщо $z = iy$, то

$$\lim_{y \rightarrow 0} e^{-\frac{1}{y^2}} = 0.$$

Звідси випливає, що не існує границі $f(z)$ при $z \rightarrow 0$, і точка $z = 0$ є суттєвою (істотною) особливою точкою функції $f(z)$.

13.2. Ряд Лорана в околі особливої точки

Означення 13.3. Якщо функція $f(z)$ аналітична в кільці $K : 0 < |z - a| < \rho$, то цю функцію можна розвинути у ряд Лорана

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - a)^k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{-k}}{(z - a)^k}, \quad (13.1)$$

збіжний в кільці K . Ряд (13.1) називається рядом Лорана функції $f(z)$ в околі точки $z = a$. Ряди

$$f_1(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{-k}}{(z - a)^k} \quad (13.2)$$

та

$$f_2(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - a)^k \quad (13.3)$$

називаються відповідно головною і правильною частинами ряду Лорана (13.1).

Означення 13.4. Якщо функція $f(z)$ розвивається у області $R < |z| < \infty$, тобто в околі нескінченно віддаленої точки, у збіжний ряд

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^k, \quad (13.4)$$

то цей ряд називається рядом Лорана функції $f(z)$ в околі нескінченно віддаленої точки. Ряди

$$f_1(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k \quad (13.5)$$

і

$$f_2(z) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} z^{-k} \quad (13.6)$$

називаються відповідно головною і правильною частинами ряду (13.4).

Приклад 13.5. Розвинення у ряд Лорана функції

$$f(z) = z^3 e^{\frac{1}{z}}$$

в околі точки $z = 0$ має вигляд

$$\begin{aligned} f(z) &= z^3 \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \dots + \frac{1}{k!z^k} + \dots \right) = \\ &= z^3 + z^2 + \frac{z}{2} + \frac{1}{3!} + \sum_{k=4}^{\infty} \frac{1}{k!z^{k-3}}. \end{aligned} \quad (13.7)$$

Головна частина лоранівського розвинення $f(z)$ в околі точки $z = 0$ має вигляд

$$f_1(z) = \sum_{k=4}^{\infty} \frac{1}{k!z^{k-3}},$$

правильна частина лоранівського розвинення дорівнює

$$f_2(z) = z^3 + z^2 + \frac{z}{2} + \frac{1}{3!}.$$

Ряд (13.7) збігається у всій комплексній площині з виколотою точкою $z = 0$.

Цей ряд також є рядом Лорана для функції $f(z)$ в околі точки $z = \infty$. Головна частина ряду (13.7) в околі точки $z = \infty$ дорівнює

$$z^3 + z^2 + \frac{z}{2},$$

а правильна частина

$$\frac{1}{3!} + \sum_{k=4}^{\infty} \frac{1}{k!z^{k-3}}.$$

Висновок: $z = 0$ є суттєво особливою точкою для функції $f(z)$, нескінченно віддалена точка $z = \infty$ є полюсом третього порядку.

Приклад 13.6. Записати розвинення у ряд Лорана функції

$$f(z) = \cos \frac{z}{z+2}$$

в околі особливої точки $z = -2$.

Виконаємо наступні перетворення

$$f(z) = \cos\left(1 - \frac{2}{z+2}\right) = \cos 1 \cdot \cos \frac{2}{z+2} + \sin 1 \cdot \sin \frac{2}{z+2}.$$

Оскільки

$$\cos \frac{2}{z+2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k)!} \left(\frac{2}{z+2}\right)^{2k}, \quad |z| < \infty,$$

$$\sin \frac{2}{z+2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!} \left(\frac{2}{z+2}\right)^{2k+1}, \quad |z| < \infty,$$

то розвинення у ряд Лорана функції $f(z)$ в околі точки $z = -2$ матиме вигляд

$$\begin{aligned} f(z) = & \cos 1 + \sin 1 \cdot \frac{2}{z+2} - \cos 1 \cdot \frac{2}{(z+2)^2} - \sin 1 \cdot \frac{2^3}{3!} \frac{1}{(z+2)^3} + \dots \\ & + (-1)^k \cos 1 \cdot \frac{1}{2k!} \frac{2^{2k}}{(z+2)^{2k}} + (-1)^k \sin 1 \cdot \frac{2^{2k+1}}{(2k+1)!} \frac{1}{(z+2)^{2k+1}} + \dots \end{aligned} \quad (13.8)$$

Особлива точка $z = -2$ є суттєво особливою точкою функції $f(z)$.

Приклад 13.7. Знайти правильну частину $g_2(z)$ ряду Лорана для функції

$$g(z) = z^3 \cos \frac{z}{z+2}$$

в околі точки $z = -2$.

Запишемо розвинення $f(z) = z^3$ за степенями $z+2$, матимемо

$$z^3 = [(z+2) - 2]^3 = (z+2)^3 - 6(z+2)^2 + 12(z+2) - 8. \quad (13.9)$$

Перемноживши (13.8) і (13.9), знайдемо правильну частину лоранівського розвинення

$$\begin{aligned} g_2(z) = & \left(4 \cos 1 + \frac{68}{3} \sin 1\right) + (10 \cos 1 - 12 \sin 1)(z+2) + \\ & + (-6 \cos 1 + 2 \sin 1)(z+2)^2 + \cos 1(z+2)^3. \end{aligned}$$

Приклад 13.8. Знайти головну частину $f_1(z)$ розвинення у ряд Лорана функції

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + 1}$$

в околі точки $z = i$. Знайдемо розвинення у ряд Лорана функції $f(z)$

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + 1} = \frac{1}{(z - i)(z + i)} = \frac{1}{2i} \frac{1}{z - i} - \frac{1}{2i} \frac{1}{z + i}.$$

Оскільки,

$$\frac{1}{z + i} = \frac{1}{z - i + 2i} = \frac{1}{2i(1 + \frac{z-i}{2i})} = \frac{1}{2i} \left(1 - \frac{z-i}{2i} + \left(\frac{z-i}{2i} \right)^2 + \dots \right),$$

цей ряд збіжний при $\left| \frac{z-i}{2i} \right| < 1$, тобто в кільці $|z - i| < 2$. Отже,

$$f(z) = \frac{1}{2i} \frac{1}{z - i} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8i}(z - i) + \dots$$

Таким чином,

$$f_1(z) = \frac{1}{2i} \frac{1}{z - i}.$$

Особлива точка $z = i$ є простим полюсом функції $f(z)$.

Приклад 13.9. Знайти головну частину $f_1(z)$ лоранівського розвинення функції $f(z)$ в околі точки $z = \infty$, якщо

$$f(z) = \frac{z^7}{(z^2 + 1)(z^3 - 8)}.$$

Оскільки

$$f(z) = \frac{z^7}{z^5 + z^3 - 8z^2 - 8} = z^2 - 1 + \frac{8z^4 + z^3 - 8}{z^5 + z^3 - 8z^2 - 8},$$

то головною частиною $f_1(z)$ ряду Лорана є $z^2 - 1$.

Нескінченно віддалена точка $z = \infty$ є полюсом другого порядку функції $f(z)$.

13.3. Усувна особлива точка

Теорема 13.1. Для того, щоб ізольована особлива точка $z = a$ була усувною особливою точкою функції $f(z)$, необхідно і достатньо, щоб головна частина ряду Лорана в околі точки $z = a$ була відсутня.

Доведення. Необхідність. Якщо $z = a$ – усувна особлива точка функції $f(z)$, то за означенням усувної особливої точки існує

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = A < \infty. \quad (13.10)$$

Отже, функція $f(z)$ аналітична і обмежена в деякому проколотому околі точки $z = a$, тобто:

$$|f(z)| \leq M, \quad 0 < |z - a| < \rho. \quad (13.11)$$

Нехай $0 < \rho_1 < \rho$. Тоді з (13.11), внаслідок нерівностей Коші (12.21), будемо мати

$$|c_k| \leq \frac{M}{\rho_1^k}, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (13.12)$$

Оскільки в формулі (13.12) ρ_1 можна взяти як завгодно малим і коефіцієнти c_k не залежать від ρ_1 , то при $k = -1, -2, \dots$ ці коефіцієнти $c_k = 0$, тобто головна частина лоранівського розвинення функції $f(z)$ в околі точки $z = a$ відсутня.

Достатність. Нехай головна частина лоранівського розвинення функції $f(z)$ в околі точки $z = a$ відсутня. Тобто лоранівське розвинення має вигляд

$$f(z) = c_0 + c_1(z - a) + c_2(z - a)^2 + \dots \quad (13.13)$$

Степеневий ряд (13.13) збігається у крузі $|z - a| < \rho$, отже, існує $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = c_0$. Тобто $z = a$ – усувна особлива точка.

За допомогою аналогічних міркувань доводиться і наступне твердження.

Теорема 13.2. Ізольована особлива точка $z = a$ функції $f(z)$ тоді і тільки тоді є усувною, коли $f(z)$ обмежена в деякому проколотому околі точки $z = a$.

Зауваження. Продовжуючи функцію $f(z)$ в її усувній точці $z = a$ за неперервністю, тобто покладаючи $f(a) = \lim_{z \rightarrow a} f(z)$, отримаємо функцію, аналітичну в точці $z = a$.

Приклад 13.10. Розглянемо функцію

$$f(z) = \frac{e^z - 1}{\sin z}.$$

Якщо до визначити функцію в її усувній особливій точці $z = 0$, поклавши $f(0) = \lim_{z \rightarrow 0} f(z) = 1$, то отримаємо функцію, аналітичну в усій комплексній площині.

Приклад 13.11. Розглянемо функцію

$$f(z) = \frac{1}{e^z - 1} - \frac{1}{\sin z}.$$

Точка $z = 0$ є особливою,

$$\lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{1}{e^z - 1} - \frac{1}{\sin z} \right) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z - e^z + 1}{(e^z - 1) \sin z} = -\frac{1}{2}.$$

Отже, $z = 0$ є усувною особливою точкою функції $f(z)$.

Приклад 13.12. Встановити, що для функції

$$f(z) = \operatorname{ctg} z - \frac{1}{z},$$

точка $z = 0$ є усувною особливою точкою.

Це випливає з наступного:

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 0} \left(\operatorname{ctg} z - \frac{1}{z} \right) &= \lim_{z \rightarrow 0} \left(\frac{z \cos z - \sin z}{z \sin z} \right) = \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \dots \right) - \left(z - \frac{z^3}{3!} + \dots \right)}{z \left(z - \frac{z^3}{3!} + \dots \right)} = 0. \end{aligned}$$

13.4. Зв'язок нулів функції з полюсами

Означення 13.5. Нехай функція $f(z)$ аналітична в точці $z = a$. Точка $z = a$ називається нулем функції $f(z)$ кратності m , якщо виконуються умови:

$$f(a) = 0, f'(a) = 0, f''(a) = 0, \dots, f^{(m-1)}(a) = 0, f^{(m)}(a) \neq 0. \quad (13.14)$$

У випадку, коли $m = 1$, кажуть, що $z = a$ простий нуль функції $f(z)$.

Мають місце наступні твердження:

1. Якщо $z = a$ є нулем кратності m функції $f(z)$, то аналітична в точці $z = a$ функція розвивається в деякому околі цієї точки у ряд Тейлора вигляду

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n = \\ &= \frac{f^{(m)}(a)}{m!} (z-a)^m + \frac{f^{(m+1)}(a)}{(m+1)!} (z-a)^{m+1} + \dots = \\ &= (z-a)^m \left(\frac{f^{(m)}(a)}{m!} + \frac{f^{(m+1)}(a)}{(m+1)!} (z-a) + \dots \right), \end{aligned}$$

тобто

$$f(z) = (z-a)^m h(z),$$

де

$$h(z) = \frac{f^{(m)}(a)}{m!} + \frac{f^{(m+1)}(a)}{(m+1)!} (z-a) + \dots,$$

$h(z)$ – аналітична в точці $z = a$ функція, причому $h(a) = \frac{f^{(m)}(a)}{m!} \neq 0$.

2. Якщо $z = a$ – полюс порядку m функції $f(z)$, то розвинення функції $f(z)$ у ряд Лорана в деякому околі точки $z = a$ матиме вигляд

$$\begin{aligned} f(z) &= \\ &= \frac{c_{-m}}{(z-a)^m} + \frac{c_{-m+1}}{(z-a)^{m-1}} + \dots + c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \dots = \\ &= \frac{1}{(z-a)^m} (c_{-m} + c_{-m+1}(z-a) + c_{-m+2}(z-a)^2 + \dots), \quad c_{-m} \neq 0. \end{aligned}$$

Тобто в цьому випадку

$$f(z) = \frac{1}{(z-a)^m} g(z),$$

де

$$g(z) = c_{-m} + c_{-m+1}(z-a) + c_{-m+2}(z-a)^2 + \dots,$$

$g(z)$ – аналітична в точці $z = a$ функція, причому $g(a) = c_{-m} \neq 0$.

3. Таким чином, у першому випадку, якщо $z = a$ – нуль функції $f(z)$ кратності m , то для функції

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{(z-a)^m} \frac{1}{h(z)}$$

точка $z = a$ є полюсом порядку m .

4. Якщо точка $z = a$ є полюсом порядку m функції $f(z)$, як у другому випадку, то для функції

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{(z-a)^m}{g(z)}$$

точка $z = a$ є нулем кратності m .

Висновок: для того, щоб визначити порядок полюса функції $f(z)$, розглядають функцію $\frac{1}{f(z)}$ та визначають кратність її нулів.

Тобто точка $z = a \neq \infty$ є полюсом функції $f(z)$ тоді і тільки тоді, коли функція $f(z)$ має вигляд

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-a)^m}, \quad (13.15)$$

де $\varphi(a) \neq 0$, $\varphi(z)$ – аналітична в точці $z = a$ функція, $m \in \mathbb{N}$.

Число m називається порядком полюса $z = a$ функції $f(z)$.

Аналогічно, нескінченно віддалена точка $z = \infty$ є полюсом порядку m функції $f(z)$ тоді і тільки тоді, коли

$$f(z) = z^m \psi(z), \quad \psi(\infty) \neq 0, \quad (13.16)$$

де $\psi(z)$ – аналітична в точці $z = \infty$ функція, $m \in \mathbb{N}$.

Як приклад, розглянемо нескоротну дробово-раціональну функцію

$$\frac{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n}{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_m}, \quad n, m \in \mathbb{N}.$$

Полюсами цієї функції є нулі знаменника.

Порядок кожного полюса дорівнює відповідній кратності кожного з нулів знаменника.

Зауваження. Випадки неізолюваних особливих точок однозначної функції, а також випадки особливих точок, в околі яких функція є неоднозначною, не розглядатимемо.

Теорема 13.3. *Ізолювана особлива точка $z = a$ функції $f(z)$ є полюсом тоді і тільки тоді, коли головна частина її лоранівського розвинення в околі точки $z = a$ містить лише скінченну кількість відмінних від нуля членів ряду, тобто*

$$f(z) = \sum_{k=-m}^{\infty} c_k(z-a)^k, \quad m > 0.$$

Порядок полюса дорівнює номеру старшого члена головної частини розвинення у ряд Лорана, тобто m .

Доведення. *Необхідність.* Нехай точка $z = a \neq \infty$ є полюсом порядку m функції $f(z)$, тобто

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-a)^m}, \quad (13.17)$$

$\varphi(a) \neq 0$, $\varphi(z)$ – аналітична в точці $z = a$ функція.

Розвиваючи $\varphi(z)$ у ряд Тейлора в околі точки $z = a$, отримуємо ряд Лорана функції $f(z)$ в околі цієї точки:

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z-a)^m} + \dots + \frac{c_{-1}}{z-a} + c_0 + c_1(z-a) + \dots, \quad (13.18)$$

де $c_{-m} = \varphi(a) \neq 0$.

Головна частина ряду (13.18)

$$f_1(z) = \sum_{k=1}^m \frac{c_{-k}}{(z-a)^k}$$

містить скінченну кількість (не більше, ніж m) членів, причому $c_{-m} \neq 0$, де m – порядок полюсу $z = a$.

Достатність. Якщо $f(z)$ розвивається в околі точки $z = a$ у ряд вигляду (13.18), то $f(z)$ може бути зображена у вигляді (13.17), з чого випливає, що ізолювана особлива точка $z = a$ є полюсом порядку m функції $f(z)$.

Зауваження. Якщо полюсом порядку m функції $f(z)$ є нескінченно віддалена точка $z = \infty$, при доведенні теореми слід використовувати зображення $f(z)$ у вигляді (13.16), тобто

$$f(z) = z^m \psi(z), \quad \psi(\infty) \neq 0,$$

де $\psi(z)$ – аналітична в точці $z = \infty$ функція.

Означення 13.6. Порядком полюса в точці $z = a$ функції $f(z)$ називається порядок нуля цієї точки для функції

$$\varphi(z) = \frac{1}{f(z)}.$$

Порядок полюса співпадає з номером m старшого члена головної частини розвинення функції $f(z)$ в ряд Лорана в проколотому околі полюса.

Приклад 13.13. Визначити характер ізольованих особливих точок функції

$$f(z) = \frac{1}{\sin \frac{1}{z}}.$$

Точки

$$z_k = \frac{1}{k\pi}, \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots,$$

є полюсами першого порядку функції $f(z)$, оскільки функція $g(z) = \frac{1}{f(z)} = \sin \frac{1}{z}$ є аналітичною при $z \neq 0$, та точки $z_k = \frac{1}{k\pi}$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$, є її нулями кратності один, оскільки $g'(z_k) \neq 0$.

Нескінченно віддалена точка $z = \infty$ є простим полюсом функції $f(z)$, оскільки

$$f(z) = \frac{1}{\sin \frac{1}{z}} \sim z \quad \text{при } z \rightarrow \infty.$$

Особлива точка $z = 0$ не є ізольованою особливою точкою, тому що вона є граничною для простих полюсів $z_k = \frac{1}{k\pi}$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$, даної функції,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} z_k = 0.$$

Випадок неізольованих особливих точок не розглядатимемо.

Приклад 13.14. Точка $z = 0$ є полюсом першого порядку функції

$$f(z) = \frac{1 - \cos z}{(e^z - 1)^3}.$$

Це випливає з наступного співвідношення:

$$f(z) = \frac{1 - \cos z}{(e^z - 1)^3} \sim \frac{z^2}{2z^3} = \frac{1}{2z} \text{ при } z \rightarrow 0,$$

тобто особлива точка $z = 0$ функції $f(z)$ є нулем першого порядку функції $\frac{1}{f(z)}$, тому $z = 0$ є простим полюсом функції $f(z)$.

Точки $z_k = 2k\pi i, k = \pm 1, \pm 2, \dots$, є полюсами третього порядку функції $f(z)$, оскільки ці точки є нулями третього порядку для функції

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{(e^z - 1)^3}{1 - \cos z}.$$

13.5. Суттєво особлива точка

Теорема 13.4. Ізольована особлива точка $z = a$ функції $f(z)$ є суттєво особливою тоді і тільки тоді, коли головна частина розвинення Лорана $f(z)$ в околі точки $z = a$ містить нескінченну кількість відмінних від нуля членів.

Доведення. Доведення цієї теореми випливає з попередніх теорем. Якщо головна частина містить нескінченне число членів, то $z = a$ не може бути ні усувною особливою точкою, а ні полюсом. Якщо $z = a$ — суттєво особлива точка, то головна частина не може бути відсутньою, і не може містити скінченне число членів.

Теорема 13.5. (Сохоцького). Якщо $z = a$ є суттєво особливою точкою функції $f(z)$, то для довільного числа A скінченного чи нескінченного, можна знайти послідовність точок $z_k \rightarrow a$ таку, що

$$\lim_{z_k \rightarrow a} f(z_k) = A.$$

Цю теорему можна сформулювати наступним чином: у як завгодно малому околі суттєво особливої точки функція $f(z)$ набуває значень як завгодно близьких до довільного наперед заданого числа, скінченного чи нескінченного.

Доведення. Нехай $A = \infty$. Покажемо, що існує послідовність точок z_k , $\lim_{k \rightarrow \infty} z_k = a$, таких, що $\lim_{z_k \rightarrow a} f(z_k) = \infty$. Позначимо для скорочення через $P(z - a)$ правильну частину розвинення у ряд Лорана (формули (13.1)-(13.3)), яка містить додатні степені $z - a$ і вільний член, а через $Q(\frac{1}{z-a})$ його головну частину, що містить від'ємні степені $z - a$. Тоді формулу (13.1) можемо переписати у вигляді:

$$f(z) = P(z - a) + Q\left(\frac{1}{z - a}\right). \quad (13.19)$$

Що стосується правильної частини $P(z - a)$, то при $z \rightarrow a$ маємо

$$\lim_{z \rightarrow a} P(z - a) = c_0. \quad (13.20)$$

Покладаючи $\frac{1}{z-a} = z'$ в головній частині $Q\left(\frac{1}{z-a}\right)$, будемо мати

$$\begin{aligned} Q\left(\frac{1}{z - a}\right) &= Q(z') = \\ &= c_{-1}z' + c_{-2}(z')^2 + \dots + c_{-k}(z')^k + \dots \end{aligned} \quad (13.21)$$

Оскільки ряд $Q(\frac{1}{z-a})$ збігається скрізь, крім точки $z = a$, то ряд (13.21), очевидно, буде збіжним у всій площині комплексної змінної z' . Функція $Q(z')$ не може бути обмеженою у всій площині комплексної змінної z' за теоремою Ліувіля. Таким чином, $\forall n \in \mathbb{N}$, знайдеться точка z'_n , $|z'_n| > n$, така, що будемо мати $|Q(z'_n)| > n$. Якщо n набуває значень $1, 2, 3, \dots, k, \dots$, то отримаємо послідовність точок $z'_1, z'_2, \dots, z'_k, \dots$, яка прямує до ∞ і

$$\lim_{z'_k \rightarrow \infty} Q(z'_k) = \infty.$$

Повертаючись до попередньої змінної z , враховуючи рівність

$$\frac{1}{z - a} = z',$$

переконуємось, що послідовність точок z'_k перетворюється в послідовність точок $z_1, z_2, \dots, z_k, \dots$, збіжну до точки a і

$$\lim_{z_k \rightarrow a} Q\left(\frac{1}{z_k - a}\right) = \infty. \quad (13.22)$$

Якщо $z \rightarrow a$, набуваючи значень точок z_k , то з рівності (13.19) на основі (13.20) і (13.22) маємо

$$\lim_{z_k \rightarrow a} f(z_k) = \infty.$$

Нехай A довільне комплексне число. Може трапитись, що у як завгодно малому околі точки a існує точка z така, що $f(z) = A$. У цьому випадку теорема Сохоцького справедлива. Таким чином, можна припустити, що в достатньо малому околі точки a функція $f(z)$ не дорівнює A . При цьому функція $\varphi(z) = \frac{1}{f(z)-A}$ буде аналітичною в цьому околі точки a , крім самої точки a , яка буде суттєво особливою точкою (тому, що $z = a$ є суттєво особлива точка для $f(z) - A$). За доведеним існує така послідовність точок $\{z_n\}$, збіжна до точки a , що

$$\lim_{z_n \rightarrow a} \varphi(z_n) = \infty.$$

Звідси випливає, що

$$\lim_{z_n \rightarrow a} f(z_n) = A.$$

Теорема доведена.

Приклад 13.15. 1. Для функції

$$e^{\frac{1}{z}}$$

точка $z = 0$ є суттєво особливою точкою. Лоранівське розвинення функції в околі цієї точки має вигляд

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! z^k}.$$

2. Для функції

$$f(z) = \cos z$$

нескінченно віддалена точка $z = \infty$ є суттєво особливою, оскільки головна частина $f_1(z)$ ряду Лорана $f(z)$ в околі точки $z = \infty$ містить нескінченну кількість членів.

$$f_1(z) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}.$$

Має місце теорема:

Теорема 13.6. (Пікара.) У довільному околі суттєво особливої точки функція набуває, причому нескінченне число разів, будь-яких значень, крім, можливо, одного. Це значення називають винятковим для функції.

Приклад 13.16. Для функції

$$f(z) = e^z$$

точка $z = \infty$ є суттєво особливою (приклад 13.15). Розглянемо рівняння

$$e^z = A, \quad (A \neq 0). \quad (13.23)$$

Розв'язком цього рівняння є множина точок

$$z_k = \ln |A| + i(\arg A + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (13.24)$$

де $\arg A$ — головне значення аргумента числа A . З (13.23) і (13.24) випливає, що в довільному околі точки $z = \infty$ є нескінченна множина точок z_k , в яких функція e^z набуває значення, що дорівнює A ($A \neq 0$). Значення $A = 0$ функція e^z не набуває.

Значення $A = 0$ для функції e^z є винятковим.

Приклад 13.17. Точка $z = \infty$ є суттєво особливою для функції

$$f(z) = \sin z$$

і для $\forall A$ рівняння $\sin z = A$ має безліч розв'язків:

$$z_k = \frac{1}{i} \ln(iA + \sqrt{1 - A^2}) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Тобто, функція $\sin z$ не має виняткових значень.

Розглянемо функції $\operatorname{tg} z$ та $\operatorname{ctg} z$.

Функція $\operatorname{tg} z$ аналітична у всій комплексній площині, крім точок $z_k = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, які є полюсами першого порядку.

Функція $\operatorname{ctg} z$ має полюси першого порядку в точках $z_k = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Приклад 13.18. Для раціональної функції

$$R(z) = \frac{P_n(z)}{Q_m(z)},$$

де $P_n(z)$ і $Q_m(z)$ многочлени степенів n і m відповідно, які не мають спільних нулів, лише нулі знаменника $Q_m(z)$ є полюсами функції $R(z)$. Точка $z = \infty$ є нескінченно віддаленою особливою точкою, а саме полюсом порядку $n - m$, якщо $n - m > 0$. Якщо $n \leq m$, то $z = \infty$ є точкою аналітичності функції $R(z)$.

Приклад 13.19. Визначити характер ізольованої особливої точки $z = 0$ для функції

$$f(z) = \frac{\sin 2z}{\cos z - 1 + \frac{z^2}{2}}.$$

Розвинемо чисельник та знаменник $f(z)$ в околі точки $z = 0$ у ряд Тейлора

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{2z - \frac{(2z)^3}{3!} + \frac{(2z)^5}{5!} - \dots}{1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots - 1 + \frac{z^2}{2!}} = \\ &= \frac{z \left(2 - \frac{2^3 z^2}{3!} + \frac{2^5 z^4}{5!} - \dots \right)}{z^4 \left(\frac{1}{4!} - \frac{z^4}{6!} + \dots \right)}. \end{aligned}$$

Звідси $z = 0$ є нулем кратності $m = 3$ для функції $\frac{1}{f(z)}$, тому $z = 0$ є полюсом порядку 3 для $f(z)$.

Приклад 13.20. Точки $z_k = k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, є суттєво особливими для функції

$$f(z) = e^{\frac{1}{\sin z}}.$$

Справді,

$$\sin z \sim (-1)^k (z - k\pi), \quad z \rightarrow k\pi.$$

Нехай k – парне, тоді, якщо $z \rightarrow k\pi + 0$, то $\sin z \rightarrow 0 + 0$ і $f(z) \rightarrow +\infty$, а якщо $z \rightarrow k\pi - 0$, то $\sin z \rightarrow 0 - 0$ і $f(z) \rightarrow 0$, тобто функція $f(z)$ не має границі в точці z_k .

Аналогічно розглядається випадок непарного k . Інших особливих точок в комплексній площині функція $f(z)$ не має.

Контрольні питання

1. Сформулювати означення ізольованої особливої точки функції $f(z)$. Навести приклад функції $f(z)$, що має ізольовану особливу точку.
2. Навести класифікацію ізольованих особливих точок.
3. Довести, що точка $z_0 = \pi$ є усувною особливою точкою функції

$$f(z) = \frac{1 + \cos z}{z - \pi}.$$

4. Знайти всі полюси функції

$$f(z) = \frac{e^z}{(z - 3)(z + i)}.$$

5. Довести, що точка $z_0 = 0$ є суттєво особливою точкою функції

$$f(z) = e^{\frac{1}{z}}.$$

6. Дати означення головної та правильної частин ряду Лорана функції $f(z)$ в околі особливої точки $z = a, a \neq \infty$.
7. Записати головну та правильну частини розвинення у ряд Лорана функції

$$f(z) = \sin \frac{z}{z + 1}$$

в околі точки $z_0 = -1$.

8. Сформулювати необхідні та достатні умови того, що ізольована особлива точка $z = a$ є усувною особливою точкою функції $f(z)$.
9. Сформулювати означення нуля функції кратності m . Який зв'язок між нулями та полюсами функції?
10. Сформулювати необхідні та достатні умови того, що ізольована особлива точка $z = a$ є полюсом функції $f(z)$. Яким чином встановити порядок відповідного полюса?
11. Сформулювати необхідні та достатні умови того, що ізольована особлива точка $z = a$ є суттєво особливою точкою функції $f(z)$.

12. Знайти всі особливі точки функції $f(z)$ та встановити їх тип, якщо

1) $f(z) = \frac{1 - \cos 2z}{z^2};$

2) $f(z) = \frac{z^2 + z - 1}{z^2(z - 1)};$

3) $f(z) = \cos \frac{1}{z^2}.$

У випадку особливої точки типу полюс, встановити порядок полюса.

14. Теорема Ліувіля

14.1. Теорема Ліувіля

Функція $f(z)$, аналітична у всій комплексній площині, називається цілою. Ряд Тейлора цілої функції $f(z)$ в околі точки $z = 0$ має вигляд

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k. \quad (14.1)$$

Отже, цей ряд є рядом Лорана функції $f(z)$ в околі нескінченно віддаленої точки, причому головна частина ряду Лорана (14.1) дорівнює

$$f_1(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k,$$

а правильною частиною є функція $f_2(z) = c_0$.

Єдиною особливою точкою цілої функції $f(z)$ в розширеній комплексній площині може бути точка $z = \infty$. Якщо $z = \infty$ – полюс порядку n цілої функції $f(z)$, то $f(z)$ – многочлен степеня n . Ціла функція, для якої точка $z = \infty$ є суттєво особливою, називається цілою трансцендентною (прикладом цілих трансцендентних функцій є e^z , $\sin z$, $\cos z$).

Якщо ціла функція $f(z)$ аналітична в точці $z = \infty$, то $f(z) = c_0 = \text{const}$. Єдиний клас аналітичних функцій, які не мають особливих точок в розширеній комплексній площині – це сталі функції.

Теорема 14.1. (Ліувіля) Якщо аналітична функція $f(z)$, розвинення у ряд Тейлора якої має вигляд

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

в області $|z| > R$, задовольняє нерівність

$$|f(z)| \leq M |z|^n, n \in \mathbb{N}, \quad (14.2)$$

то $f(z)$ – многочлен степеня, що не перевищує n .

Доведення. Використовуючи нерівність Коші (12.21), внаслідок (14.2) отримаємо при $|z| > R$ наступну оцінку для коефіцієнтів ряду (14.1)

$$|c_k| \leq \frac{MR^n}{R^k} = MR^{n-k}, k \in \mathbb{N}. \quad (14.3)$$

Якщо $k > n$, то з (14.3) випливає, що $c_k = 0$, оскільки R можна взяти як завгодно великим, а коефіцієнти c_k не залежать від R . Таким чином,

$$c_{n+1} = c_{n+2} = \dots = 0,$$

тобто $f(z)$ – многочлен степеня, що не перевищує n .

Теорема доведена.

Наслідок 14.1. Якщо ціла функція $f(z)$ обмежена у всій комплексній площині, то вона є сталою: $f(z) \equiv \text{const}$.

14.2. Основна теорема алгебри

З теореми Ліувіля випливає наступне твердження.

Теорема 14.2. (Основна теорема алгебри) Будь який многочлен

$$P_n(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_n z^n, \quad c_n \neq 0, \quad n \geq 1,$$

має принаймні один нуль.

Доведення. Нехай многочлен $P_n(z)$ не має нулів. Тоді функція

$$g(z) = \frac{1}{P_n(z)}$$

є цілою. Оскільки функція $g(z) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \infty$, то функція $g(z)$ обмежена у всій комплексній площині, і згідно наслідку з теореми Ліувіля маємо, що $g(z) = \text{const}$. Це суперечить визначенню функції $g(z)$. Таким чином, многочлен $P_n(z)$ має хоча б один нуль.

14.3. Мероморфні функції та їх властивості

Більш широким за клас аналітичних функцій є клас мероморфних функцій.

Означення 14.1. Однозначна функція $f(z)$ називається мероморфною, якщо особливими точками її є лише полюси.

Число полюсів мероморфної функції може бути як скінченним, так і нескінченним у всій комплексній площині. Прикладами функцій, що мають нескінченну кількість полюсів першого порядку, є функції

$$\operatorname{tg} z, \operatorname{ctg} z, \frac{1}{\sin z}, \frac{1}{e^z - 1}.$$

Теорема 14.3. Мероморфна функція $f(z)$, яка має в розширеній комплексній площині лише скінченну кількість полюсів $a_1, a_2, \dots, a_m$ (точка $z = \infty$ також може бути полюсом), є раціональною і може бути зображена у вигляді

$$f(z) = A + f_0(z) + \sum_{k=1}^m f_k(z), \quad (14.4)$$

де $f_0(z)$, $f_k(z)$ – головні частини ряду Лорана функції $f(z)$ в околі точки $z = \infty$ або $z = a_k$, $k = 1, 2, \dots, m$, відповідно,

$$A = \lim_{z \rightarrow \infty} [f(z) - f_0(z)].$$

Доведення. Нехай для кожної особливої точки $z = a_k$

$$f_k(z) = \sum_{j=1}^{m_k} \frac{A_{j,k}}{(z - a_k)^j}, \quad \text{і} \quad f_0(z) = A_1 z + \dots + A_m z^m$$

є головними частинами ряду Лорана для функції $f(z)$ в точках $z = a_k$ і $z = \infty$, відповідно. Тоді функція

$$g(z) = f(z) - f_0(z) - \sum_{k=1}^m f_k(z)$$

аналітична у всій розширеній комплексній площині, отже, $g(z) \equiv A = \text{const}$. Оскільки $f_k(z) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \infty$, $k = 1, 2, \dots, m$, то

$$A = \lim_{z \rightarrow \infty} [f(z) - f_0(z)].$$

Зауваження. Будь-яка мероморфна функція зображається у вигляді відношення двох цілих функцій.

Контрольні питання

1. Дати означення цілої функції. Навести приклад цілої функції.
2. Сформулювати теорему Ліувіля та наслідок з неї.
3. Сформулювати основну теорему алгебри.
4. Дати означення мероморфної функції. Навести приклади мероморфних функцій.
5. Сформулювати теорему про мероморфну функцію, яка має в розширеній комплексній площині лише скінченну кількість полюсів.
6. Який зв'язок між мероморфною та цілою функціями?
7. Знайти всі особливі точки функції $f(z)$ та встановити їх тип, якщо
 - 1) $f(z) = \frac{1}{z - z^3}$;
 - 2) $f(z) = 4z^2 + 3z - 7$;
 - 3) $f(z) = \frac{\cos z}{(z - 2)^3(z + 1)}$.Які із перелічених функцій є мероморфними? Які є цілими функціями?

15. Лишки

15.1. Основні означення й поняття

Нехай функція $f(z)$ аналітична в проколотому околі точки $z = a$, $a \neq \infty$, тобто у кільці

$$K : 0 < |z - a| < \rho_0.$$

Точка $z = a$ для $f(z)$ є або ізольованою особливою точкою, або точкою аналітичності і функція $f(z)$ розвивається в околі точки $z = a$ у збіжний ряд Лорана

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z - a)^k.$$

Означення 15.1. *Лишком функції $f(z)$ в точці a (позначається $\operatorname{res}_{z=a} f(z)$) називається коефіцієнт c_{-1} ряду Лорана функції $f(z)$ в околі точки a , тобто*

$$\operatorname{res}_{z=a} f(z) = c_{-1}. \quad (15.1)$$

Використовуючи формули для обчислення коефіцієнтів ряду Лорана при $n = -1$, маємо

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} f(\zeta) d\zeta,$$

де $\gamma_\rho : |z - a| = \rho$, $0 < \rho < \rho_0$, – коло радіуса ρ з центром в точці a , орієнтоване в додатньому напрямі. Таким чином,

$$\int_{\gamma_\rho} f(\zeta) d\zeta = 2\pi i \operatorname{res}_{z=a} f(z). \quad (15.2)$$

Тобто, якщо $z = a$ – ізольована особлива точка функції $f(z)$, то інтеграл від функції $f(z)$ по межі достатньо малого околу точки $z = a$ дорівнює лишку в цій точці, помноженому на $2\pi i$.

Очевидно, що

$$\operatorname{res}_{z=a} f(z) = 0,$$

якщо $z = a$ ($a \neq \infty$) – точка аналітичності функції $f(z)$.

Приклад 15.1. Обчислити лишок функції

$$f(z) = e^{\frac{1}{z}}$$

в точці $z = 0$.

Оскільки

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{1!z} + \frac{1}{2!z^2} + \dots,$$

то $c_{-1} = 1$, тобто $\operatorname{res}_{z=0} e^{\frac{1}{z}} = 1$.

Зауважимо, що згідно формули (15.2)

$$\int_{|\zeta|=1} e^{\frac{1}{\zeta}} d\zeta = 2\pi i \operatorname{res}_{z=0} e^{\frac{1}{z}} = 2\pi i.$$

Приклад 15.2. Знайти лишок функції

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^4}$$

в точці $z = 0$.

Оскільки

$$f(z) = \frac{1}{z^4} \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots \right),$$

то $c_{-1} = -\frac{1}{3!}$.

Зауважимо, що

$$\int_{|\zeta|=2} \frac{\sin \zeta}{\zeta^4} d\zeta = -\frac{2\pi i}{3!} = -\frac{\pi i}{3}.$$

Приклад 15.3. Знайти лишок функції

$$f(z) = z \cos \frac{1}{z+1}$$

в точці $z = -1$. Оскільки

$$f(z) = ((z+1) - 1) \left(1 - \frac{1}{2!(z+1)^2} + \dots \right),$$

то $c_{-1} = -\frac{1}{2!}$, тому $\operatorname{res}_{z=-1} f(z) = -\frac{1}{2}$.

15.2. Обчислення лишку в полюсі

Розглянемо два випадки: випадок простого полюса і кратного полюса.

- 1) Якщо точка $z = a$ – простий полюс функції $f(z)$, то ряд Лорана в околі точки $z = a$ має вигляд

$$f(z) = c_{-1}(z - a)^{-1} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z - a)^k.$$

Отже, $c_{-1} = \lim_{z \rightarrow a} (z - a)f(z)$.

Тому для знаходження лишку у простому полюсі використовують формулу

$$\operatorname{res}_{z=a} f(z) = \lim_{z \rightarrow a} (z - a)f(z). \quad (15.3)$$

У частинному випадку, коли

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)},$$

де $\varphi(z)$ і $\psi(z)$ – аналітичні в точці $z = a$ функції, причому $\varphi(a) \neq 0$, $\psi(a) = 0$, $\psi'(a) \neq 0$, точка a є простим полюсом функції $f(z)$ і за формулою (15.3) обчислюємо

$$\operatorname{res}_{z=a} f(z) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{(z - a)\varphi(z)}{\psi(z)} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{\varphi(z)}{\frac{\psi(z) - \psi(a)}{z - a}} = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)},$$

тобто,

$$\operatorname{res}_{z=a} \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}. \quad (15.4)$$

- 2) Якщо точка $z = a$ – полюс порядку m функції $f(z)$, тоді розвинення функції у ряд Лорана в околі точки $z = a$ має вигляд

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z - a)^m} + \dots + \frac{c_{-1}}{z - a} + c_0 + c_1(z - a) + \dots \quad (15.5)$$

Помноживши обидві частини рівності (15.5) на $(z - a)^m$, будемо мати

$$(z - a)^m f(z) = c_{-m} + \dots + c_{-1}(z - a)^{m-1} + c_0(z - a)^m + \dots \quad (15.6)$$

Диференціюючи рівність (15.6) $m - 1$ раз і обчисливши границю при $z \rightarrow a$, дістаємо

$$(m - 1)!c_{-1} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z - a)^m f(z) \right].$$

Звідси

$$c_{-1} = \frac{1}{(m - 1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z - a)^m f(z) \right]. \quad (15.7)$$

Зокрема, якщо

$$f(z) = \frac{h(z)}{(z - a)^m},$$

де функція $h(z)$ аналітична в точці $z = a$, $h(a) \neq 0$, то з (15.7) отримаємо формулу

$$\operatorname{res}_{z=a} \frac{h(z)}{(z - a)^m} = \frac{1}{(m - 1)!} h^{(m-1)}(a). \quad (15.8)$$

Приклад 15.4. Обчислити лишки в полюсах функції

$$f(z) = \frac{e^z}{(z + 1)(z - 3)^3}.$$

Оскільки $z = -1$ – полюс першого порядку, то за формулою (15.3)

$$\operatorname{res}_{z=-1} f(z) = \left[\frac{e^z}{(z - 3)^3} \right]_{z=-1} = \frac{-e^{-1}}{4^3},$$

Особлива точка $z = 3$ є полюсом третього порядку функції $f(z)$. Тоді за формулою (15.8) маємо

$$\operatorname{res}_{z=3} f(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{e^z}{z + 1} \right)'' \Big|_{z=3} = \frac{5}{4^3} e^3.$$

Приклад 15.5. Для функції

$$\operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}$$

точки $z = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, є простими полюсами. За формулою (15.4) знаходимо

$$\operatorname{res}_{z=k\pi} \operatorname{ctg} z = \left[\frac{\cos z}{(\sin z)'} \right]_{z=k\pi} = 1.$$

15.3. Лишки в нескінченно віддаленій точці

Нехай функція $f(z)$ аналітична в області $r_0 < |z| < \infty$, тобто в околі точки $z = \infty$. Тоді точка $z = \infty$ є для функції $f(z)$ або ізольованою особливою точкою, або точкою аналітичності. Функція $f(z)$ розвивається в області $r_0 < |z| < \infty$ у збіжний ряд Лорана

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k + \frac{c_{-1}}{z} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \dots \quad (15.9)$$

Означення 15.2. *Лишком функції $f(z)$ в нескінченно віддаленій точці $z = \infty$ (позначається $\operatorname{res}_{z=\infty} f(z)$) називається число*

$$-c_{-1},$$

де c_{-1} — коефіцієнт при $\frac{1}{z}$ ряду Лорана (15.9) для функції $f(z)$ в околі нескінченно віддаленої точки, тобто

$$\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = -c_{-1}. \quad (15.10)$$

Якщо функція $f(z)$ аналітична в області $D : r_0 < |z| < \infty$, то

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=r} f(\xi) d\xi,$$

де $|\xi| = r, r > r_0$, орієнтована проти годинникової стрілки. Отже, внаслідок (10.10) маємо

$$\int_{\gamma_r} f(\xi) d\xi = 2\pi i \operatorname{res}_{z=\infty} f(z), \quad (15.11)$$

де γ_r — коло $|\xi| = r$, орієнтоване за годинниковою стрілкою.

Зауваження. Формули (15.2) та (15.11) можна об'єднати наступним чином: якщо функція $f(z)$ аналітична в проколотому околі точки $z = a$ ($a \neq \infty$ або $a = \infty$), то

$$\int_{\gamma_\rho} f(\xi) d\xi = 2\pi i \operatorname{res}_{z=a} f(z)$$

де γ_ρ – границя цього околу. При обході γ_ρ область, обмежена контуром γ_ρ у формулах (15.2) і (15.11) залишається зліва.

Якщо точка $z = \infty$ є нулем порядку n функції $f(z)$, то в околі цієї нескінченно віддаленої точки функція $f(z)$ розвивається у ряд Лорана вигляду

$$f(z) = \frac{c_{-n}}{z^n} + \frac{c_{-(n+1)}}{z^{n+1}} + \dots,$$

де $c_{-n} \neq 0$. При $z \rightarrow \infty$ має місце асимптотична формула

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{f(z)z^n}{c_{-n}} = 1,$$

звідси

$$f(z) \sim \frac{c_{-n}}{z^n}, \quad z \rightarrow \infty.$$

Тому при $n = 1$,

$$\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = -c_1,$$

а якщо $n \geq 2$, то

$$\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = 0.$$

Приклад 15.6. *Оскільки*

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \dots,$$

то $c_{-1} = 1$ і

$$\operatorname{res}_{z=\infty} e^{\frac{1}{z}} = -1.$$

Приклад 15.7. *Нехай*

$$f(z) = \frac{1}{z+5} \cos \frac{1}{z},$$

тоді точка $z = \infty$ є нулем першого порядку і

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z \cos \frac{1}{z}}{z+5} = 1.$$

Тому

$$\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = -1.$$

Приклад 15.8. Нехай

$$f(z) = \frac{z}{z^4 + 3} \sin \frac{1}{z + 1},$$

тоді точка $z = \infty$ є нулем четвертого порядку:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{f(z)}{\frac{1}{z^4}} = 1.$$

Тому

$$\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = 0.$$

Контрольні питання

1. Дати означення лишку функції $f(z)$ у точці $z = a$.
2. Чому дорівнює лишок $f(z)$ у точці $z = a$, якщо $z = a$ – точка аналітичності функції?
3. Знайти лишок функції

$$f(z) = \frac{\cos z}{z^3}$$

у точці $z = 0$.

4. Сформулювати правила, за якими обчислюються лишки у простому полюсі та у кратному полюсі.
5. Обчислити лишки в полюсах функції

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^3 + z^2 - z - 1}.$$

6. Обчислити лишок функції

$$f(z) = \sin \frac{z}{z + 1}$$

у точці $z = -1$.

7. Дати означення лишку функції у нескінченно віддаленій точці.

8. Обчислити лишок функції

$$f(z) = z \cos^2 \frac{\pi}{z}$$

у точці $z = \infty$.

9. Знайти лишки функцій в усіх ізольованих особливих точках

1) $f(z) = \frac{1}{z^2 - z^4};$

2) $f(z) = \frac{ze^{iz}}{z^2 + 1};$

3) $f(z) = \frac{\cos z^2 - 1}{z^4}.$

16. Застосування лишків

16.1. Основна теорема теорії лишків

Теорема 16.1. (Основна теорема теорії лишків) Нехай функція $f(z)$ аналітична в обмеженій одноз'язній області D , за виключенням скінченного числа ізольованих особливих точок $z_1, z_2, \dots, z_n$ і нехай γ – спрямлювана замкнена крива, яка лежить в області D і містить всередині себе точки $z_1, z_2, \dots, z_n$. Тоді

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z=z_k} f(z). \quad (16.1)$$

Крива γ орієнтована в додатному напрямі, тобто обхід по кривій здійснюється проти годинникової стрілки.

Доведення. Нехай γ_k , $k = 1, 2, \dots, n$ – коло достатньо малого радіуса з центром в точці z_k , орієнтоване проти годинникової стрілки.

Згідно інтегральної теореми Коші для багатозв'язної області (розділ 8.4, формула (8.8)), отримаємо

$$\oint_{\gamma} f(\zeta) d\zeta = \sum_{k=1}^n \oint_{\gamma_k} f(\zeta) d\zeta.$$

Звідси, використовуючи формулу (15.2), отримаємо формулу (16.1). Згідно цієї формули обчислення інтеграла від функції $f(z)$ по замкненому контуру γ зводиться до знаходження лишків в особливих точках цієї функції, які містяться всередині γ .

Наслідок 16.1. Нехай функція $f(z)$ аналітична у розширеній комплексній площині $\overline{\mathbb{C}}$, за виключенням скінченного числа ізольованих особливих точок. Тоді сума всіх лишків функції $f(z)$, включно з лишком в точці $z = \infty$, дорівнює нулю, тобто

$$\sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z=z_k} f(z) + \operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = 0, \quad (16.2)$$

де z_k , $k = 1, 2, \dots, n$ – особливі точки функції $f(z)$, а точка $z = \infty$ є або особливою, або точкою аналітичності функції $f(z)$.

Доведення. Нехай γ – орієнтоване в додатньому напрямі коло $|z| = R$, де R вибрано так, що всі точки z_k , $k = 1, 2, \dots, n$, лежать всередині γ . За теоремою 16.1

$$\oint_{\gamma} f(s) ds = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z=z_k} f(z).$$

З іншого боку, з формули (15.11) випливає, що

$$\oint_{\gamma} f(s) ds = -2\pi i \operatorname{res}_{z=\infty} f(z).$$

З цієї і попередньої формули отримуємо рівність (16.2).

16.2. Обчислення інтегралів по контуру

Розглянемо приклади обчислення інтегралів по замкненому контуру за допомогою лишків.

Приклад 16.1. Нехай

$$f(z) = \frac{\cos z}{z^5},$$

знайти

$$\oint_{|z|=2} f(\zeta) d\zeta.$$

Оскільки в крузі $|z| < 2$ функція $f(z)$ має одну особливу точку $z = 0$ і

$$f(z) = \frac{1}{z^5} - \frac{1}{2!z^3} + \frac{1}{4!z} + \dots,$$

то

$$\operatorname{res}_{z=0} f(z) = c_{-1} = \frac{1}{4!}.$$

Отже,

$$\oint_{|z|=2} \frac{\cos z}{z^5} dz = \frac{\pi i}{12}.$$

Приклад 16.2. Знайти

$$I = \oint_{|z-2i|=2} f(z)dz,$$

якщо

$$f(z) = \frac{1}{e^z + 1}.$$

Оскільки функція $f(z)$ має в крузі $|z - 2i| < 2$ одну особливу точку, а саме полюс першого порядку $z = \pi i$, то за формулою (15.4) знайдемо

$$\operatorname{res}_{z=\pi i} f(z) = \frac{1}{(e^z + 1)'|_{z=\pi i}} = \frac{1}{e^{\pi i}} = -1.$$

Таким чином, $I = -2\pi i$.

Приклад 16.3. Нехай

$$f(z) = (2z - 1) \cos \frac{z}{z - 1}.$$

Знайти

$$I = \oint_{|z|=2} f(z)dz.$$

Оскільки функція $f(z)$ аналітична в крузі $|z| < 2$, крім точки $z = 1$, яка є суттєво особливою, то маємо

$$\begin{aligned} \cos \frac{z}{z-1} &= \cos\left(1 + \frac{1}{z-1}\right) = \\ &= \cos 1 \cdot \cos \frac{1}{z-1} - \sin 1 \cdot \sin \frac{1}{z-1} = \\ &= \cos 1 \left(1 - \frac{1}{2(z-1)^2} + \dots\right) - \sin 1 \left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{3!(z-1)^3} + \dots\right), \\ 2z - 1 &= 2(z - 1) + 1. \end{aligned}$$

Звідси знаходимо коефіцієнт c_{-1} при $(z - 1)^{-1}$ ряду Лорана для функції $f(z)$:

$$c_{-1} = -(\cos 1 + \sin 1).$$

Отже,

$$I = 2\pi i c_{-1} = -2\pi i (\cos 1 + \sin 1).$$

Приклад 16.4. Обчислити інтеграл

$$I = \oint_{|z|=4} \frac{e^{1/(z-1)}}{z-2} dz.$$

Функція

$$f(z) = \frac{1}{z-2} e^{\frac{1}{z-1}}$$

в крузі $|z| < 4$ має дві особливі точки: $z = 1$ і $z = 2$. Тому

$$I = 2\pi i \left(\operatorname{res}_{z=1} f(z) + \operatorname{res}_{z=2} f(z) \right).$$

Оскільки

$$e^{\frac{1}{z-1}} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!(z-1)^k},$$

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{1-(z-1)} = -\sum_{k=0}^{\infty} (z-1)^k,$$

то

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{z=1} f(z) &= \operatorname{res}_{z=1} \left(-\sum_{k=0}^{\infty} (z-1)^k \cdot \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!(z-1)^k} \right) \right) = \\ &= -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} = -(e-1) = 1-e. \end{aligned}$$

Отже,

$$\operatorname{res}_{z=2} f(z) = c_{-1} = e^{\frac{1}{z-1}} \Big|_{z=2} = e$$

і

$$I = 2\pi i.$$

16.3. Обчислення інтегралів від функцій дійсної змінної за допомогою лишків

1. Нехай $R(\cos t, \sin t)$ – раціональна функція від $\cos t$, $\sin t$, неперервна на відрізку $0 \leq t \leq 2\pi$. За формулами Ейлера

$$\cos t = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it}),$$

$$\sin t = \frac{1}{2}(e^{it} - e^{-it}).$$

Зробимо заміну $z = e^{it}$. Зрозуміло, що $|z| = 1$ і при зростанні t від 0 до 2π точка $z = e^{it}$ опише коло $|z| = 1$, орієнтація якого – проти годинникової стрілки. Запишемо

$$\cos t = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right), \quad \sin t = \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right),$$

$$dz = ie^{it} dt, \quad \text{або} \quad dt = \frac{dz}{iz}.$$

Інтеграли вигляду

$$I = \int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t) dt, \tag{16.3}$$

зводяться до інтегралів по замкненому контуру

$$I = \oint_{|z|=1} \tilde{R}(z) dz, \tag{16.4}$$

де $\tilde{R}(z) = -\frac{i}{z} R\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right)$ – раціональна функція. Оскільки $\tilde{R}(z)$ аналітична на контурі $|z| = 1$, має скінченне число особливих точок при $|z| < 1$, то інтеграл (16.4) можна обчислити за теоремою про лишки

$$I = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z=z_k} \tilde{R}(z),$$

де $z_1, z_2, \dots, z_n$ – полюси раціональної функції $\tilde{R}(z)$, які лежать в крузі $|z| < 1$.

Приклад 16.5. Зробимо заміну $z = e^{it}$ при обчисленні інтеграла

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{1 - 2a \cos t + a^2}, \quad 0 < |a| < 1,$$

отримаємо

$$\oint_{|z|=1} \frac{i dz}{az^2 - (a^2 + 1)z + a}.$$

Рівняння

$$az^2 - (a^2 + 1)z + a = 0$$

має корені

$$z_1 = a, z_2 = \frac{1}{a}.$$

В крузі $|z| < 1$ лежить лише точка $z_1 = a$, що є полюсом першого порядку підінтегральної функції. За формулою (15.4) отримуємо

$$\operatorname{res}_{z=a} \frac{i}{az^2 - (a^2 + 1)z + a} = \frac{i}{2az - (a^2 + 1)} \Big|_{z=a} = \frac{i}{a^2 - 1}.$$

Отже,

$$I = \frac{2\pi}{1 - a^2}.$$

Приклад 16.6. Обчислити

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{\cos t - 2}.$$

Зробимо заміну $z = e^{it}$, отримуємо

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{\cos t - 2} = \frac{1}{i} \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z \left(\frac{z+z^{-1}}{2} - 2 \right)} = \frac{2}{i} \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 - 4z + 1}.$$

Функція

$$\tilde{R}(z) = \frac{2}{i} \frac{1}{z^2 - 4z + 1}$$

має 2 простих полюси

$$z_1 = 2 - \sqrt{3}, z_2 = 2 + \sqrt{3}.$$

В крузі $|z| < 1$ лежить лише точка $z_1 = 2 - \sqrt{3}$. Отже,

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{\cos t - 2} = 2\pi i \operatorname{res}_{z=2-\sqrt{3}} \frac{1}{z^2 - 4z + 1} = -\frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

2. Інтеграли від раціональних функцій.

Обчислимо інтеграл

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} R(x) dx, \quad (16.5)$$

де $R(x)$ – раціональна функція,

$$R(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)},$$

$P_m(x)$, $Q_n(x)$ – многочлени відповідно степеня m і n , причому $m \leq n + 2$. Нехай функція $R(x)$ не має полюсів на дійсній осі, тобто інтеграл (16.5) збігається. Всі полюси $R(x)$ містяться всередині деякого круга, наприклад, $|z| < R_0$. Щоб застосувати теорему про лишки, візьмемо замкнений контур C_R (рис. 16.1), який складається з півкола $\gamma_R : |z| = R$, $\text{Im } z \geq 0$, $R > R_0$, і відрізка дійсної осі $-R \leq x \leq R$. Якщо позначити $z_1, z_2, \dots, z_s$, всі різні полюси $R(z)$ у верхній півплощині, то усі вони потраплять у внутрішню частину контура C_R .

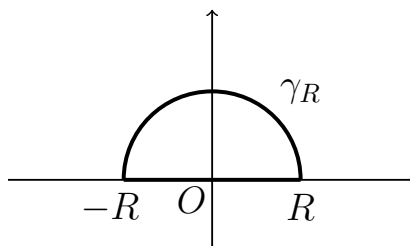


Рис. 16.1

Тобто

$$\int_{C_R} R(z) dz = \int_{-R}^R R(z) dz + \int_{\gamma_R} R(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^s \text{res}_{z=z_k} R(z). \quad (16.6)$$

Покажемо, що при $R \rightarrow \infty$ інтеграл

$$\int_{\gamma_R} R(z) dz \rightarrow 0.$$

Справді, степінь чисельника $m + 2$ раціонального дробу

$$z^2 \frac{P_m(z)}{Q_n(z)},$$

не перевищує степеня його знаменника n . Отже, $z^2 R(z)$ обмежена в деякому околі $z = \infty$:

$$|z^2 R(z)| \leq M, |z| \geq R_1.$$

Звідси, при $|z| = R > \max\{R_0, R_1\}$, маємо

$$|R(z)| \leq \frac{M}{R^2}.$$

Тому

$$\left| \int_{\gamma_R} R(z) dz \right| \leq \frac{M}{R^2} L = \frac{\pi M}{R} \rightarrow 0, R \rightarrow \infty,$$

де L – довжина кола γ_R .

Якщо в рівності (16.6) $R \rightarrow 0$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R R(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^s \operatorname{res}_{z=z_k} R(z). \quad (16.7)$$

3. Інтеграли вигляду

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} R(x) dx,$$

де $R(x)$ – раціональна функція.

Інтеграл

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} R(x) dx$$

є перетворенням Фур'є функції $R(x)$. При обчисленні таких інтегралів часто використовується лема Жордана.

Лема 16.1. Лема Жордана. Нехай $\alpha > 0$ і виконуються наступні умови:

- 1) функція $g(z)$ неперервна в області $D_{R_0} : \operatorname{Im} z \geq 0, |z| \geq R_0 > 0$;
- 2)

$$M(R) = \max_{z \in \gamma_R} |g(z)| \rightarrow 0 \text{ при } R \rightarrow \infty, \quad (16.8)$$

γ_R – півколо $|z| = R, \operatorname{Im} z \geq 0$.

Тоді

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} g(z) e^{i\alpha z} dz = 0. \quad (16.9)$$

Доведення. Нехай $z \in \gamma_R$, $R > R_0$. Тоді

$$z = Re^{i\varphi}, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi, \quad dz = iRe^{i\varphi} d\varphi, \\ |e^{i\alpha z}| = \left| e^{i\alpha R(\cos \varphi + i \sin \varphi)} \right| = e^{-\alpha R \sin \varphi}. \quad (16.10)$$

Оскільки $\alpha > 0$, то

$$|e^{i\alpha z}| \leq 1, \quad z \in \gamma_R. \quad (16.11)$$

Оцінка (16.11) є недостатньою для доведення співвідношення (16.9). Щоб отримати більш точну оцінку для $|e^{i\alpha z}|$ на γ_R , використаємо нерівність

$$\sin \varphi \geq \frac{2}{\pi} \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}. \quad (16.12)$$

Оцінимо інтеграл $I_1 = \int_{\gamma_R} e^{i\alpha z} g(z) dz$. Використовуючи (16.10), отримаємо

$$|I_1| \leq \max_{z \in \gamma_R} |g(z)| \int_0^\pi e^{-\alpha R \sin \varphi} R d\varphi = 2RM(R) \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\alpha R \sin \varphi} d\varphi.$$

Звідси, внаслідок (16.12), знаходимо

$$|I_1| \leq 2RM(R) \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2R\frac{\alpha}{\pi}\varphi} d\varphi = M(R) \left(-\frac{\pi}{\alpha} \right) e^{-2R\frac{\alpha}{\pi}\varphi} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \\ = M(R) \frac{\pi}{\alpha} (1 - e^{-\alpha R}) \leq M(R) \frac{\pi}{\alpha},$$

звідки, згідно (16.8), випливає співвідношення (16.9).

Лема Жордана доведена.

Розглянемо інтеграл

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} R(x) dx, \quad (16.13)$$

який збігається тоді і тільки тоді, коли на дійсній осі немає полюсів функції $R(z)$ і, крім того, $R(x) \sim \frac{c}{x^k}$, $x \rightarrow \infty$, $k \in \mathbb{N}$. Це означає, що

$$R(z) \sim \frac{c}{z^k}, \quad z \rightarrow \infty, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (16.14)$$

Але з умови (16.14) випливає, що умова (16.8) виконується і за лемою Жордана

$$\int_{\gamma_R} e^{i\alpha z} R(z) dz \rightarrow 0, \quad R \rightarrow \infty, \quad \alpha > 0.$$

Отже, інтеграл (16.13) можна обчислити за формулою

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} R(x) dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} \operatorname{res}_{z=z_k} (e^{i\alpha z} R(z)). \quad (16.15)$$

Зауваження 1. Якщо $\alpha < 0$, то замінивши контур γ_R на контур $\tilde{\gamma}_R$, симетричний γ_R відносно дійсної осі, отримаємо формулу

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} R(x) dx = -2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k < 0} \operatorname{res}_{z=z_k} (e^{i\alpha z} R(z)).$$

Зауваження 2. Якщо функція $R(x)$ є дійсною при дійсних x і $\alpha > 0$, то виділивши у формулі (16.15) дійсну та уявну частини, отримаємо

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x) \cos(\alpha x) dx = -2\pi \operatorname{Im} \left[\sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} \operatorname{res}_{z=z_k} (e^{i\alpha z} R(z)) \right], \quad (16.16)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x) \sin(\alpha x) dx = 2\pi \operatorname{Re} \left[\sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} \operatorname{res}_{z=z_k} (e^{i\alpha z} R(z)) \right]. \quad (16.17)$$

Немає необхідності запам'ятовувати формули (16.15) – (16.17). Більш важливо засвоїти ті методи, за допомогою яких ці формули можна отримати.

Приклад 16.7. Обчислити інтеграл

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-1) \cos 5x}{x^2 - 2x + 5} dx.$$

Використовуючи формулу (16.16), дістаємо

$$I = -2\pi \operatorname{Im} \left[\operatorname{res}_{z=1+2i} \left(e^{i5z} \frac{z-1}{z^2 - 2z + 5} \right) \right].$$

Оскільки підінтегральна функція має у верхній півплощині єдиний полюс першого порядку, за формулою (15.4) знаходимо

$$\operatorname{res}_{z=1+2i} e^{i5z} \frac{z-1}{z^2 - 2z + 5} = \frac{e^{i5z}(z-1)}{(z^2 - 2z + 5)'} \Big|_{z=1+2i} = \frac{e^{-10}}{2} (\cos 5 + i \sin 5).$$

Отже,

$$I = -\pi e^{-10} \sin 5.$$

Інтеграли вигляду

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} R(x) dx$$

можна обчислювати за допомогою лишків і в тому випадку, коли раціональна функція має на дійсній осі полюси першого порядку.

Приклад 16.8. Обчислити інтеграл

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx. \quad (16.18)$$

Нехай $\Gamma_{\rho,R}$ – контур зображений на рис. 16.2. Тут півколо C_ρ орієнтоване за годинниковою стрілкою, а півколо C_R – проти годинникової стрілки.

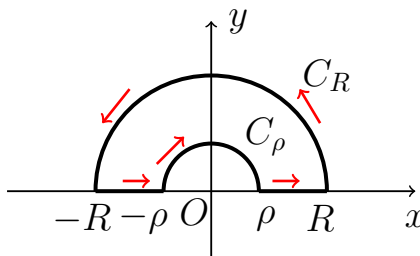


Рис. 16.2

Інтеграл

$$\int_{\Gamma_{\rho,R}} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0,$$

оскільки функція $\frac{e^{iz}}{z}$ аналітична всередині контура $\Gamma_{\rho,R}$. З іншого боку, цей інтеграл дорівнює сумі інтегралів, що обчислюються вздовж C_ρ і C_R та по відрізках $[-R; -\rho]$, $[\rho; R]$.

Для оцінки інтеграла вздовж C_ρ скористаємось тим, що головна частина ряду Лорана функції $\frac{e^{iz}}{z}$ в околі точки $z = 0$ дорівнює $\frac{1}{z}$. Тобто

$$\frac{e^{iz}}{z} = \frac{1}{z} + h(z),$$

де функція $h(z)$ аналітична у точці $z = 0$.

Якщо $z \in C_\rho$, то $z = \rho e^{i\varphi}$, $0 \leq \varphi \leq \pi$, $dz = i\rho e^{i\varphi} d\varphi$ і

$$\int_{C_\rho} \frac{e^{iz}}{z} dz = i \int_{\pi}^0 d\varphi = -i\pi.$$

Функція $h(z)$ обмежена в околі точки $z = 0$, отже $\int_{C_\rho} h(z) dz \rightarrow 0$ при $\rho \rightarrow 0$. Звідси отримаємо

$$\int_{C_\rho} \frac{e^{iz}}{z} dz = i \int_{\pi}^0 d\varphi \rightarrow -i\pi \text{ при } \rho \rightarrow 0. \quad (16.19)$$

Інтеграл вздовж C_R прямує до 0 при $R \rightarrow \infty$ (за лемою Жордана). Сума інтегралів по відрізках $[-R; -\rho]$, $[\rho; R]$ дорівнює

$$\int_{-R}^{-\rho} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{\rho}^R \frac{e^{ix}}{x} dx = \int_{\rho}^R \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{x} dx = 2i \int_{\rho}^R \frac{\sin x}{x} dx.$$

Отже,

$$0 = I_{\rho,R} = 2i \int_{\rho}^R \frac{\sin x}{x} dx - i\pi + \alpha(\rho) + \beta(R), \quad (16.20)$$

де $\alpha(\rho) \rightarrow 0$ при $\rho \rightarrow 0$, $\beta(R) \rightarrow 0$ при $R \rightarrow \infty$. Оскільки інтеграл (16.18) збігається, то існує

$$\lim_{\rho \rightarrow 0, R \rightarrow \infty} \int_{\rho}^R \frac{\sin x}{x} dx = I.$$

Знайдемо у (16.20) границю при $\rho \rightarrow 0$, $R \rightarrow \infty$:

$$2iI = i\pi,$$

тобто

$$I = \frac{\pi}{2}.$$

Приклад 16.9. Обчислити інтеграл

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\cos \alpha x - \cos \beta x}{x^2} dx, \quad \alpha \geq 0, \beta \geq 0.$$

Розглянемо інтеграл

$$I_{\rho,R} = \int_{\Gamma_{\rho,R}} \frac{e^{i\alpha z} - e^{i\beta z}}{z^2} dz, \quad (16.21)$$

де контур $\Gamma_{\rho,R}$ вказаний на рис. 16.2. Цей інтеграл внаслідок теореми Коші дорівнює нулю. З іншого боку, інтеграл (16.21) дорівнює сумі інтегралів вздовж C_ρ , C_R , $[-R; -\rho]$, $[\rho; R]$. Для підінтегральної функції

$$f(z) = \frac{e^{i\alpha z} - e^{i\beta z}}{z^2}$$

точка $z = 0$ є простим полюсом. Тому

$$\operatorname{res}_{z=0} f(z) = i(\alpha - \beta).$$

Як в прикладі 16.8, можна показати, що інтеграл по C_ρ прямує до $\pi(\alpha - \beta)$ при $\rho \rightarrow 0$, а інтеграл по C_R прямує до нуля при $R \rightarrow \infty$. Сума інтегралів вздовж відрізків дорівнює

$$\int_\rho^R \left(\frac{e^{i\alpha x} + e^{-i\alpha x}}{x^2} - \frac{e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}}{x^2} \right) dx = 2 \int_\rho^R \frac{\cos \alpha x - \cos \beta x}{x^2} dx.$$

Перейдемо у рівності

$$2 \int_\rho^R \frac{\cos \alpha x - \cos \beta x}{x^2} dx + \pi(\alpha - \beta) + \varepsilon_1(\rho) + \varepsilon_2(R) = 0$$

до границі при $\rho \rightarrow 0$, $R \rightarrow \infty$:

$$2I + \pi(\beta - \alpha) = 0.$$

Тобто

$$I = \frac{\pi}{2}(\alpha - \beta).$$

16.4. Принцип аргументу і його наслідки

Важливим застосуванням теорії лишків є обчислення інтегралів вигляду

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta,$$

де $f(z)$ – функція однозначна в області D і має в цій області лише скінченну кількість полюсів і нулів.

Теорема 16.2. (Принцип аргументу). Нехай функція $f(z)$ – аналітична в області G за виключенням полюсів і нехай D – обмежена однозв'язна область, яка міститься в області G разом із своєю межею Γ .

Якщо функція $f(z)$ не має на Γ ні нулів, ні полюсів, а всередині Γ може міститись лише скінченна кількість полюсів цієї функції, то

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta = N - P, \quad (16.22)$$

де P – число полюсів, а N – число нулів функції $f(z)$ в області D . При цьому кожен нуль рахується стільки разів, яка його кратність, а кожен полюс – стільки разів, який його порядок.

Доведення. Число нулів функції $f(z)$ в області D скінченне, оскільки якщо б воно було нескінченним, то існувала б гранична точка нулів функції $f(z)$, яка лежить в області G , звідси, $f(z) \equiv 0$ в D за теоремою єдиності.

Особливими точками підінтегральної функції

$$g(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$$

є лише нулі і полюси $f(z)$, і за основною теоремою про лишки [16.1](#) ліва частина [\(16.22\)](#) дорівнює сумі лишків, обчислених у всіх нулях і полюсах функції $f(z)$, які лежать в області D .

Нехай $z = a$ – нуль функції $f(z)$ кратності n . Тоді

$$f(z) = (z - a)^n h(z),$$

де $h(z)$ – функція, аналітична в точці $z = a$, $h(a) \neq 0$.

Отже,

$$g(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n}{z - a} + \frac{h'(z)}{h(z)}.$$

Звідси знаходимо

$$\operatorname{res}_{z=a} g(z) = n,$$

тобто лишок функції $g(z)$ в точці $z = a$, яка є нулем $f(z)$, дорівнює кратності цього нуля.

Якщо $z = b$ – полюс функції $f(z)$ порядку p , то

$$f(z) = (z - b)^{-p} \eta(z),$$

де $\eta(z)$ – функція, аналітична в точці $z = b$, $\eta(b) \neq 0$. Звідси отримаємо

$$g(z) = \frac{-p}{z - b} + \frac{\eta'(z)}{\eta(z)}.$$

Отже,

$$\operatorname{res}_{z=b} g(z) = -p,$$

тобто лишок функції $g(z)$ в точці $z = b$, яка є полюсом $f(z)$, дорівнює порядку цього полюса, взятому з протилежним знаком.

Таким чином, ліва частина у співвідношенні [\(16.22\)](#) дорівнює різниці між сумою кратностей нулів і сумою порядків полюсів функції $f(z)$. Отже, формула [\(16.22\)](#) доведена.

Зауваження. Формула [\(16.22\)](#) є справедливою також для багатозв'язної області D .

Наслідок 16.2. Згідно основної теореми про лишки формулу (16.22) можна записати таким чином

$$\frac{1}{2\pi} \Delta_{\Gamma} \arg f(z) = N - P, \quad (16.23)$$

де $\Delta_{\Gamma} \arg f(z)$ – приріст аргумента функції $f(z)$ при обході кривої Γ в додатному напрямі (при проходженні кривої Γ область D залишається зліва).

Доведення. За умовою функція $f(z)$ аналітична в околі кривої Γ і $f(z) \neq 0$ в точках кривої Γ . Отже, $f(z) \neq 0$ в деякому околі кривої Γ і в цьому околі можна виділити аналітичну гілку функції $\ln f(z)$. Оскільки

$$[\ln f(z)]' = \frac{f'(z)}{f(z)},$$

то

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} d[\ln f(z)] = \Delta_{\Gamma} \ln f(z), \quad (16.24)$$

де $\Delta_{\Gamma} \ln f(z)$ – приріст (зміна) функції $\ln f(z)$ при обході точкою z замкнутого контура Γ в додатному напрямі. Але

$$\ln f(z) = \ln |f(z)| + i \arg f(z),$$

де $\ln |f(z)|$ – однозначна функція, і тому

$$\Delta_{\Gamma} \ln |f(z)| = 0.$$

Отже,

$$\Delta_{\Gamma} \ln f(z) = i \Delta_{\Gamma} \arg f(z),$$

а з формули (16.24) будемо мати

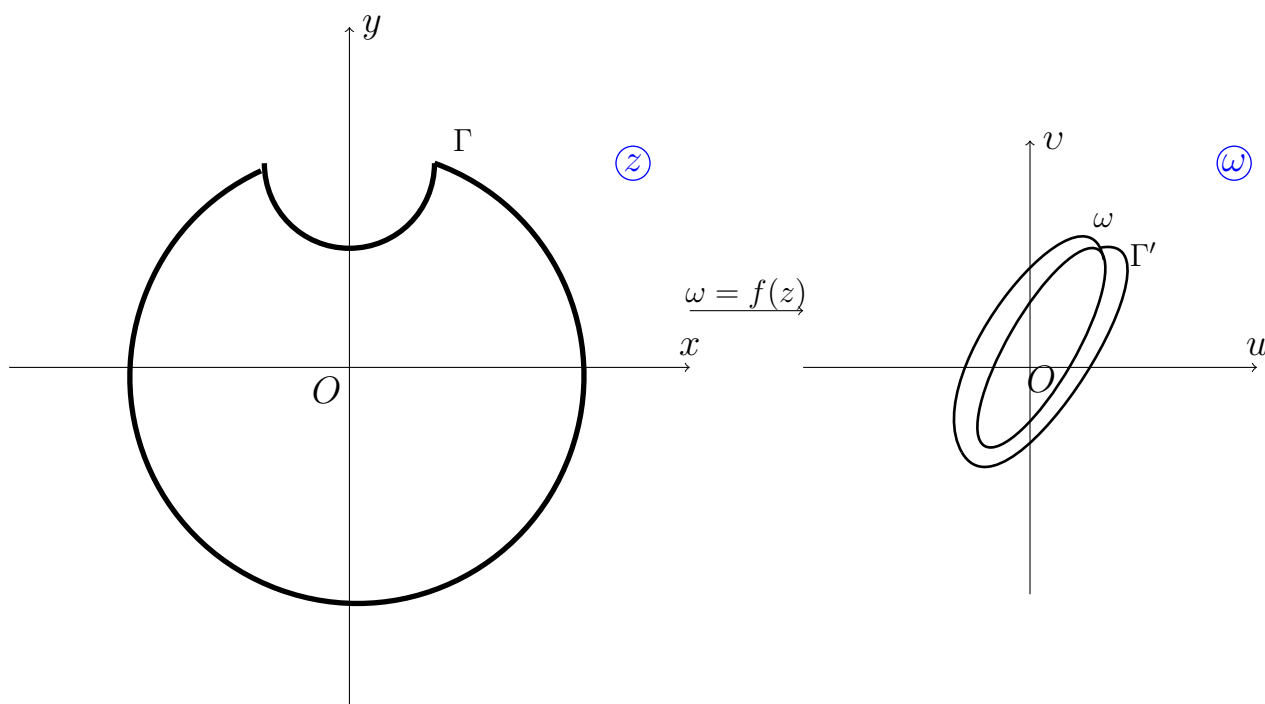
$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\Gamma} \arg f(z).$$

Звідси, внаслідок (16.22), випливає формула (16.23).

Рівність (16.23) відома під назвою “принцип аргумента”. Згідно рівності (16.23) різниця між числом нулів і числом полюсів функції $f(z)$ всередині контура Γ дорівнює зміні аргумента цієї функції при обході контура Γ , поділеному на 2π (за умови, що функція $f(z)$ аналітична всередині контура

Γ та на самому контурі Γ , за виключенням скінченного числа полюсів і не обертається в нуль на Γ).

З'ясуємо геометричний зміст $\Delta_{\Gamma} \arg f(z)$. Нехай Γ' – образ кривої Γ при відображенні $\omega = f(z)$.



Якщо точка z обходить весь контур Γ , то точка ω проходить замкнений контур Γ' . Зміна аргумента функції $f(z)$ на контурі Γ визначається числом повних обертів, які здійснює вектор $O\omega$ при русі точки ω по замкненому контуру Γ' . Якщо вектор $O\omega$ не робить жодного повного оберту навколо точки $\omega = 0$, то $\Delta_{\Gamma} \arg f(z) = 0$.

Контрольні питання

1. Сформулювати основну теорему теорії лишків та наслідок з неї про суму всіх лишків функції $f(z)$.
2. За допомогою лишків обчислити інтеграли

$$1) \oint_{|z|=2} \frac{z}{z^2 - 1} dz; \quad 2) \oint_{|z|=1} \frac{\sin 3z}{z^4} dz.$$

3. За допомогою лишків обчислити визначені інтеграли

$$1) \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 t}{5 + 4 \cos t} dt; \quad 2) \int_0^{2\pi} \frac{dt}{2 + \sin t}.$$

4. За допомогою лишків обчислити інтеграли від раціональних функцій

$$1) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x-1}{(x^2+1)^2} dx; \quad 2) \int_0^{\infty} \frac{x^2+3}{x^4+3x^2+2} dx.$$

5. Сформулювати лему Жордана.

6. За допомогою лишків обчислити інтеграли

$$1) \int_0^{\infty} \frac{x \sin \frac{x}{2}}{x^2+4} dx; \quad 2) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2x}{(x^2-x+1)^2} dx.$$

7. Чи можна обчислити інтеграл вигляду

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} R(x) dx$$

за допомогою лишків у випадку, коли раціональна функція $R(x)$ має на дійсній осі полюси першого порядку?

8. Сформулювати принцип аргументу.

9. За допомогою принципу аргументу обчислити інтеграл

$$\int_{|z|=\frac{\pi}{10}} \frac{\cos z}{\sin z} dz.$$

17. Конформні відображення

Поняття конформного відображення належить до числа важливих понять математики. Воно виникло при дослідженні фізичних процесів і має численні важливі застосування у різних областях фізики. За допомогою методу конформних відображень з успіхом розв'язуються задачі гідро- і аеродинаміки, теорії пружності, теорії електростатичного, магнітного та теплового полів.

Починаючи з середини XIX-го століття конформні відображення широко використовуються як математичний апарат при вивченні механіки навколишнього середовища. Серед ініціаторів такого використання були М. Є. Жуковський, С. О. Чаплигін (гідро- і аеродинаміка), Г. В. Колосов та М. І. Мусхелішвілі (теорія пружності).

Роглянемо поняття конформного відображення і загальні принципи теорії конформних відображень. Обмежимося тим, що будемо пояснювати природу цих принципів на прикладах, не наводячи їх доведень, оскільки доведення виходять за межі даного курсу.

17.1. Поняття конформного відображення

Нехай задано неперервне і взаємнооднозначне відображення області D на деяку область D^* :

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y). \quad (17.1)$$

Припустимо, що функції $u(x, y)$ і $v(x, y)$ диференційовні в області D . Фіксуємо довільну точку $z_0 \in D$ і в околі цієї точки замінимо прирости функцій u і v диференціалами. За означенням диференціала прирости можна представити у вигляді

$$\begin{cases} u - u_0 = \frac{\partial u}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial u}{\partial y}(y - y_0) + \eta_1 \delta, \\ v - v_0 = \frac{\partial v}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(y - y_0) + \eta_2 \delta, \end{cases} \quad (17.2)$$

де частинні похідні обчислюються у точці z_0 ,

$$\delta = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2},$$

а η_1, η_2 прямують до нуля при $\delta \rightarrow 0$. Заміна приростів диференціалами полягає у відкиданні у співвідношенні (17.2) членів $\eta_1 \delta$ і $\eta_2 \delta$, які є нескінченно малими більш високого порядку, ніж перші доданки. За припущенням

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$

та

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2$$

відмінні від нуля.

Геометрично ця заміна рівносильна заміні відображення $w = f(z)$ системою наступних відображень:

$$\begin{cases} u - u_0 = \frac{\partial u}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial u}{\partial y}(y - y_0), \\ v - v_0 = \frac{\partial v}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(y - y_0), \end{cases} \quad (17.3)$$

які називаються головними лінійними частинами відображення (17.1). Відображення (17.3) можна записати у вигляді

$$\begin{cases} u = ax + by + l, \\ v = cx + dy + m, \end{cases} \quad (17.4)$$

де

$$\begin{cases} a = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad b = \frac{\partial u}{\partial y}, \\ c = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad d = \frac{\partial v}{\partial y}, \\ l = u_0 - x_0 \frac{\partial u}{\partial x} - y_0 \frac{\partial u}{\partial y}, \\ m = v_0 - x_0 \frac{\partial v}{\partial x} - y_0 \frac{\partial v}{\partial y} \end{cases} \quad (17.5)$$

не залежать від x та y . Ці відображення є лінійним перетворенням площини (x, y) .

Розглянемо основні властивості лінійних перетворень. Кожне лінійне перетворення (17.4) однозначно визначене на площині z . За умови, що визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

відмінний від нуля, обернене до (17.4) перетворення

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\Delta}(du - bu - dl - bm), \\ y = \frac{1}{\Delta}(-cu + av + lc - am), \end{cases} \quad (17.6)$$

також однозначно визначене у всій площині w . Таким чином, якщо $\Delta \neq 0$, то перетворення (17.4) здійснює взаємнооднозначне перетворення площини z на площину w .

Розглянемо множину паралельних прямих з кутовим коефіцієнтом

$$k = \operatorname{tg} \varphi,$$

тобто прямих

$$y = kx + c.$$

При заміні x та y за формулами (17.6) цій множині відповідає також множина паралельних прямих

$$-cu + av + cl - am = k(du - bu - dl + bm) + c\Delta$$

з кутовим коефіцієнтом

$$k^* = \operatorname{tg} \theta = \frac{c + kd}{a + kb}.$$

Звідси випливає, що відображення (17.4) перетворює квадрати на площині z у паралелограми на площині w .

Нехай $z_0 = x_0 + iy_0, w_0 = u_0 + iv_0$ – пара взаємновідповідних точок при відображенні (17.4). Тоді це відображення можна переписати у вигляді

$$\begin{cases} u - u_0 = a(x - x_0) + b(y - y_0), \\ v - v_0 = c(x - x_0) + d(y - y_0), \end{cases} \quad (17.7)$$

а обернене відображення у вигляді

$$\begin{cases} x - x_0 = \frac{d}{\Delta}(u - u_0) - \frac{b}{\Delta}(v - v_0), \\ y - y_0 = -\frac{c}{\Delta}(u - u_0) + \frac{a}{\Delta}(v - v_0). \end{cases} \quad (17.8)$$

Щоб вивести формули (17.7) і (17.8) достатньо підставити у співвідношення (17.4) і (17.6) отримані рівняння. Враховуючи формули (17.8), можна стверджувати, що кола з центром в точці z_0

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

при відображенні (17.3) переходять в еліпси з центром в точці w_0

$$(d^2 + c^2)(u - u_0)^2 - 2(bd + ac)(u - u_0)(v - v_0) + (b^2 + a^2)(v - v_0)^2 = \Delta^2 r^2. \quad (17.9)$$

Виникає питання: яким умовам повинні задовольняти коефіцієнти відображення (17.3), щоб при його використанні образом кола було коло? Зі співвідношення (17.9) випливає, що для цього необхідно і достатньо виконання умов

$$bd + ac = 0, \quad a^2 + b^2 = c^2 + d^2. \quad (17.10)$$

З першої з них маємо

$$\frac{a}{d} = -\frac{b}{c} = \lambda,$$

звідки

$$a = \lambda d, \quad b = -\lambda c.$$

Підставивши ці рівності в друге рівняння (17.10), отримаємо

$$\lambda^2 = 1 \quad \text{або} \quad \lambda = \pm 1.$$

Випадок $\lambda = 1$ приводить до співвідношень

$$a = d, \quad b = -c. \quad (17.11)$$

Тоді $\Delta = ad - bc = a^2 + b^2 > 0$. Позначимо через

$$a = d = \sqrt{\Delta} \cos \alpha,$$

$$c = -b = \sqrt{\Delta} \sin \alpha.$$

Це можливо, оскільки

$$\left(\frac{a}{\sqrt{\Delta}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{\Delta}}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2}{\Delta} = 1.$$

Перетворення (17.4) перепишемо у вигляді:

$$u = \sqrt{\Delta}(\cos \alpha x - \sin \alpha y) + l,$$

$$v = \sqrt{\Delta}(\sin \alpha x + \cos \alpha y) + m.$$

Ці співвідношення можна записати у комплексній формі таким чином

$$u + iv = \sqrt{\Delta}(\cos \alpha + i \sin \alpha)(x + iy) + l + im.$$

Тому

$$w = zA + B, \quad (17.12)$$

де

$$A = \sqrt{\Delta}e^{i\alpha}, \quad B = l + im. \quad (17.13)$$

Звідси отримаємо, що за умов (17.11) лінійне перетворення (17.4) зводиться до зсуву площини z на вектор $B = l + im$, повороту на кут $\alpha = \text{Arg } A$ та розтягу з коефіцієнтом $\sqrt{\Delta} = |A|$.

У випадку $\lambda = -1$ маємо

$$a = -d, \quad b = c \quad (17.14)$$

і $\Delta = a^2 - b^2 < 0$. Виконавши аналогічні дії, переконуємось, що перетворення (17.4) можна записати таким чином

$$w = \sqrt{-\Delta}e^{i\alpha}\bar{z} + B. \quad (17.15)$$

За умов (17.14) до розглянутих вище перетворень додається ще перехід від z до $\bar{z}$, тобто симетрія відносно дійсної осі.

З геометричного змісту перетворень (17.12) і (17.15) зрозуміло, що вони зберігають подібність фігур, зокрема, зберігають кути між прямими, перетворюють квадрати на площині z на квадрати на площині w .

Лінійні перетворення, які мають таку властивість, називаються ортогональними. Таким чином, умова (17.10) є умовою ортогональності перетворення (17.4). Зазначимо, що перетворення (17.12) зберігає напрям обходу замкнених контурів, а (17.15) змінює його на протилежний обхід. Умови (17.11) визначають ортогональні перетворення, які зберігають орієнтацію, а умови (17.14) – ортогональні перетворення, які змінюють її.

Взаємнооднозначне відображення

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

області D на область D^* називається конформним, якщо в околі довільної точки області D головна лінійна частина цього відображення є ортогональне перетворення, яке зберігає орієнтацію.

17.2. Основні властивості конформних відображень

Розглянемо дві основні властивості конформних відображень:

1) Конформні відображення перетворюють нескінченно малі кола в кола з точністю до малих вищих порядків (кругова властивість).

2) Конформні відображення зберігають кути між кривими в точках їх перетину (властивість збереження кутів).

Враховуючи формули (17.5) і (17.11), можна записати умови конформності відображення (17.1) у вигляді

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \quad (17.16)$$

причому повинно бути

$$\Delta = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = |f'(z_0)|^2 \neq 0. \quad (17.17)$$

Таким чином, умови конформності є умовами Коші-Рімана диференційовності (аналітичності) функції $f(z)$ в області D , причому нерівність (17.17) показує, що похідна $f'(z)$ повинна бути скрізь відмінною від нуля.

Далі маємо

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} &= \sqrt{\Delta} \cos \alpha, \\ \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} &= \sqrt{\Delta} \sin \alpha. \end{aligned}$$

Звідси легко отримати геометричну інтерпретацію похідної від функції комплексної змінної:

$$|f'(z)| = \sqrt{\Delta}, \quad \arg f'(z) = \alpha, \quad (17.18)$$

тобто модуль і аргумент похідної $f'(z)$ означають відповідно коефіцієнт розтягу і кут повороту головної лінійної частини відображення $w = f(z)$ у точці z .

Міркування, проведені у цьому пункті, приводять до наступного висновку: для того, щоб функція $w = f(z)$ здійснювала конформне відображення області D , необхідно і достатньо, щоб в цій області вона була:

- 1) однолистою;
- 2) аналітичною;
- 3) щоб скрізь у області D похідна $f'(z)$ була відмінною від нуля.

Зауважимо, якщо $f'(z_0) = 0$, то в околі точки z_0 тейлорівське розвинення різниці $f(z) - w_0$ має вигляд

$$f(z) - w_0 = c_n(z - z_0)^n + c_{n+1}(z - z_0)^{n+1} + \dots, \quad (17.19)$$

де $n \geq 2$, $c_n \neq 0$. Звідси випливає, що при малих $|z - z_0| = r$ відображення, що здійснюється функцією $f(z)$, відрізняється на нескінченно малі вищого порядку від відображення

$$w - w_0 = c_n(z - z_0)^n. \quad (17.20)$$

Відображення, обернене до (17.20), має в w_0 точку розгалуження n -го порядку, тобто відображення (17.20) неоднолисте в околі точки z_0 . Отже, відображення $w = f(z)$ неоднолисте в околі точки z_0 . Таким чином, умову 3) можна відкинути, бо вона випливає з умови 1) (однолистості відображення).

Зауважимо, що і навпаки, умова $f'(z_0) \neq 0$ забезпечує однолистість відображення в достатньо малому околі точки z_0 – це доводиться так само, як і попереднє твердження. Однак, якщо умова $f'(z) \neq 0$ виконується в кожній точці області D , то звідси ще не випливає однолистість відображення у всій області навіть при умові її аналітичності. Наприклад, в півкільці $1 < |z| < 2$, $0 < \arg z < \pi$ відображення

$$w = z^4,$$

очевидно, неоднолисте, але в довільній точці півкільця $\frac{\partial w}{\partial z} = 4z^3 \neq 0$.

17.3. Основна задача теорії конформних відображень. Теорема Рімана

Розглянемо різні конформні відображення, що здійснюються аналітичними функціями. Область D , в якій аналітична функція однолиста, за допомогою цієї функції конформно відображається на деяку область D^* .

Основна задача теорії конформних відображень. Задано області D і D^* ; потрібно побудувати функцію, яка здійснює конформне відображення однієї з цих областей на іншу.

Оскільки для розв'язання цієї задачі не існує достатньо простого алгоритму, то розвиток теорії конформних відображень йде в таких напрямках:

- 1) з'ясовуються загальні умови існування конформного відображення і його єдиності;
- 2) визначаються різні частинні класи областей, відображення яких можна здійснювати за допомогою комбінації елементарних функцій;

- 3) за допомогою загальних властивостей аналітичних функцій досліджуються різні властивості конформних відображень, в залежності від областей, що відображаються;
- 4) розробляються наближені методи конформних відображень.

Зупинимось на першій з перерахованих проблем. Багатозв'язну область неможливо взаємнооднозначно і неперервно відобразити на однозв'язну.

Неможливо, наприклад, конформно відобразити площину z на обмежену область D^* площини w .

Однак, дві довільні однозв'язні області, границі яких складаються більш ніж з однієї точки, виявляється можна конформно відобразити одну на іншу і при цьому багатьма способами.

Справедлива основна теорема теорії конформних відображень.

Теорема 17.1. Рімана. *Якби не були однозв'язні області D і D^* (границі яких складаються більш ніж з однієї точки) і якби не були задані точки z_0 з D і w_0 з D^* і дійсне число α_0 , існує одне і тільки одне конформне відображення*

$$w = f(z) \quad (17.21)$$

області D на область D^* таке, що

$$f(z_0) = w_0, \quad \arg'(z_0) = \alpha_0. \quad (17.22)$$

Доведення цієї теореми виходить за межі курсу.

Контрольні питання

1. Записати відображення

$$\omega = f(z) = u(x, y) + iv(x, y),$$

яке є лінійним перетворенням площини (x, y) .

2. Які властивості має лінійне перетворення? Зокрема, куди переводить відображення, що є лінійним перетворенням площини (x, y) кола із фіксованим центром?

3. Які лінійні перетворення називаються ортогональними? Яким умовам має задовольняти ортогональне перетворення, щоб воно зберігало орієнтацію?
4. Сформулювати означення конформного відображення у термінах перетворення площини (x, y) , тобто охарактеризувати перетворення площини (x, y) , яке задає конформне відображення $\omega = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$.
5. Пояснити, що означає кругова властивість конформного відображення та властивість збереження кутів.
6. Навести необхідні та достатні умови конформного відображення функцією $\omega = f(z)$ у області D .
7. Сформулювати основну задачу теорії конформних відображень.
8. Сформулювати теорему Рімана.

18. Лінійні та інші найпростіші відображення

Даний параграф присвячено розгляду деяких відображень (зокрема конформних), які виконуються за допомогою деяких аналітичних функцій.

18.1. Лінійна функція. Ціла лінійна функція

Нехай задано функцію

$$w = az + b, \quad (18.1)$$

де a, b – деякі сталі комплексні числа ($a \neq 0$). Відображення (18.1) буде конформним у всій $\mathbb{C}$ ($w' = a \neq 0$) і крім того взаємнооднозначним. Спочатку розглянемо три частинних випадки цього відображення. Для простоти, z і w будемо зображати точками на одній площині.

1) $w = z + b$. При такому відображенні точка z переходить в точку w (Рис. 18.1). Поклавши

$$z = x + iy,$$

$$w = u + iv,$$

$$b = b_1 + ib_2$$

функцію (18.1) запишемо у вигляді

$$u = x + b_1,$$

$$v = y + b_2.$$

Ці дві рівності представляють відомі формули переносу осей координат.

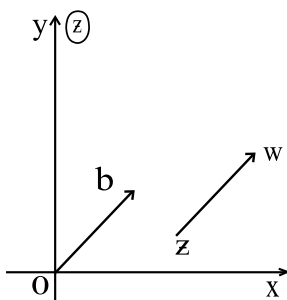


Рис. 18.1

2) $w = e^{i\alpha}z$. У цьому випадку

$$|w| = |z|,$$

$$\arg w = \arg z + \alpha.$$

Тобто точка z переходить в точку w як при повороті вектора z навколо початку координат на кут α (рис. 18.2). Тобто відображення

$$w = e^{i\alpha}z$$

є поворотом навколо початку координат на кут α .

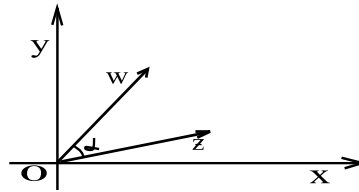


Рис. 18.2

3) $w = rz$, де r – дійсна додатна стала. В цьому випадку маємо:

$$|w| = r|z|,$$

$$\arg w = \arg z,$$

тобто точка z переходить в точку w , що лежить на прямій Oz на відстані $r|z|$ від початку координат.

Відображення

$$w = az + b$$

проводиться шляхом трьох простих, вище описаних перетворень.

Справді, нехай $a = re^{i\alpha}$. Повернемо спочатку вектор Oz на кут α :

$$z' = e^{i\alpha}z.$$

Далі змінимо $|z'|$ в r раз:

$$z'' = rz'.$$

Останнім зробимо паралельне перенесення точки z'' на вектор b :

$$w = z'' + b = rz' + b = re^{i\alpha}z + b = az + b.$$

18.2. Функція $w = \frac{1}{z}$

Ця функція

$$w = \frac{1}{z}$$

є взаємнооднозначною у всіх точках $\overline{\mathbb{C}}$. Причому точці $z = 0$ відповідає точка $w = \infty$. Для дослідження цього відображення введемо полярні координати:

$$z = \gamma e^{i\varphi}, \quad w = \rho e^{i\theta}.$$

Тоді

$$\rho = \frac{1}{\gamma}, \quad \theta = -\varphi. \quad (18.2)$$

Проведемо коло C радіуса 1 з центром в початку координат. При відображенні (18.2) це коло переходить саме в себе.

Відображення (18.2) зручно розбити на два, більш простих, відображення

$$r' = \frac{1}{r}, \quad \varphi' = \varphi, \quad (18.3)$$

$$\rho = r', \quad \theta = -\varphi'. \quad (18.4)$$

У першому з цих відображень аргумент не змінюється, а модуль змінюється на обернений. Точка z , яка міститься в колі C , переходить в точку w' , яка знаходиться зовні кола і не лежить на продовженні відрізка Oz . Добуток відстаней від точки O до початкової точки на відстань від точки O до відображеної точки дорівнює одиниці. Таке відображення називають інверсією відносно кола C . Точки z і w' , що переходять за допомогою перетворення (18.3), одна в другу, тобто z в w' , називають взаємно симетричними відносно кола C .

Покажемо як з точки α з допомогою інверсії побудувати точку $\frac{1}{\alpha}$.

Проводимо коло з центром в початку координат радіуса 1. Нехай $|\alpha| < 1$. Через α і центр кола проводимо пряму. В точці α ставимо перпендикуляр до побудованої прямої. Знаходимо точку A , яка є точкою перетину цього перпендикуляра з колом. В точці A проводимо дотичну до кола. Знаходимо точку β , яка є перетином цієї дотичної з прямою $O\alpha$.

З трикутника OAB (рис. 18.3) маємо

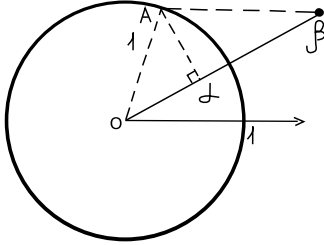


Рис. 18.3

$$\frac{|\beta|}{1} = \frac{1}{|\alpha|},$$

тобто $|\alpha||\beta| = 1$. Точки α і β називають взаємно симетричними відносно кола C . Зрозуміло, що $\arg \alpha = \arg \beta$. Отже,

$$\beta = \frac{1}{\alpha}.$$

Для того, щоб отримати точку $\frac{1}{\alpha}$, потрібно виконати симетричне відображення точки β відносно дійсної осі.

Геометрична побудова точки w' по заданій точці z вказана вище. Відображення (18.3) може бути записане у вигляді

$$w' = \frac{1}{z}. \quad (18.5)$$

Воно не буде аналітичним. При такому відображенні кути зберігаються за абсолютною величиною, але мають різні напрямки.

Відображення (18.4) можна записати у вигляді

$$w = \bar{w}'.$$

Це відображення також є конформним. Воно переводить кожен точку в точку, симетричну до неї відносно дійсної осі. Сукупність двох неаналітичних відображень (18.3) і (18.4) дає аналітичне (при $z \neq 0$) відображення

$$w = \frac{1}{z}.$$

Це відображення зберігає кути у всіх точках площини z , включаючи $z = 0$ і $z = \infty$, якщо під кутом двох ліній при $z = \infty$ розуміти кут, утворений відображеними лініями з допомогою функції $w = \frac{1}{z}$.

18.3. Дробово-лінійна функція

Функція

$$w = \frac{az + b}{cz + d}, \quad (18.6)$$

де a, b, c і d – задані сталі комплексні числа такі, що $ad - bc \neq 0$, оскільки у протилежному випадку дробово-лінійна функція (18.6) не залежала б від z . Якщо $c \neq 0$, то $w(\infty) = \frac{a}{c}$, $w(-\frac{d}{c}) = \infty$, а якщо $c = 0$, то $w(\infty) = \infty$. Отже, дробово-лінійна функція (18.6) визначена в розширеній комплексній площині. Зокрема, при $c = 0$ функція (18.6) є лінійною функцією.

Основні властивості дробово-лінійних відображень наступні:

1) Конформність.

Теорема 18.1. *Дробово-лінійна функція (18.6) конформно відображає розширену комплексну площину на розширену комплексну площину.*

Доведення. Функція (18.6) аналітична в розширеній комплексній площині, за виключенням точки $z = -\frac{d}{c}$ – полюс першого порядку. Розв'яжемо рівняння (18.6) відносно z :

$$z = \frac{d\omega - b}{-c\omega + a}, \quad ad - bc \neq 0. \quad (18.7)$$

Функція (18.7), яка є оберненою до функції (18.6), однозначна на розширеній комплексній площині і також є дробово-лінійною. Таким чином, дробово-лінійна функція однолистка в розширеній комплексній площині.

Зауваження. Справедливе обернене твердження: якщо функція $\omega = f(z)$ конформно відображає розширену комплексну площину на розширену комплексну площину, то ця функція є дробово-лінійною.

2) Групова властивість.

Теорема 18.2. *Сукупність дробово-лінійних відображень утворює групу, тобто*

- a)** *суперпозиція дробово-лінійних відображень є дробово-лінійним відображенням;*
- b)** *відображення, обернене до дробово-лінійного є також дробово-лінійним.*

Доведення. Властивість $b)$ доведена у пункті 1. Нехай

$$\xi = \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1}, \quad a_1 d_1 - b_1 c_1 \neq 0, \quad (18.8)$$

$$\omega = \frac{a_2 \xi + b_2}{c_2 \xi + d_2}, \quad a_2 d_2 - b_2 c_2 \neq 0. \quad (18.9)$$

Підставляючи (18.8) в (18.9), отримаємо

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{a_2 \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1} + b_2}{c_2 \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1} + d_2} = \frac{a_1 a_2 z + b_1 a_2 + c_1 b_2 z + d_1 b_2}{a_1 c_2 z + b_1 c_2 + c_1 d_2 z + d_1 d_2} = \\ &= \frac{(a_1 a_2 + c_1 b_2)z + b_1 a_2 + d_1 b_2}{(a_1 c_2 + c_1 d_2)z + b_1 c_2 + d_1 d_2}. \end{aligned}$$

Якщо позначити

$$a = a_1 a_2 + c_1 b_2, \quad b = b_1 a_2 + d_1 b_2,$$

$$c = a_1 c_2 + c_1 d_2, \quad d = b_1 c_2 + d_1 d_2,$$

то $ad - bc = (a_1 d_1 - b_1 c_1)(a_2 d_2 - b_2 c_2) \neq 0$. Таким чином, відображення

$$\omega = \frac{az + b}{cz + d} \quad (18.10)$$

є дробово-лінійним.

Зауваження. Група дробово-лінійних відображень не комутативна. Справді, якщо

$$\omega(z) = \frac{1}{3z}, \quad \xi(z) = 3z - 3,$$

то

$$\omega(\xi(z)) = \frac{1}{9z - 9},$$

але

$$\xi(\omega(z)) = \frac{1}{z} - 3$$

і тому

$$\omega(\xi(z)) \neq \xi(\omega(z)).$$

3) Кругова властивість.

Теорема 18.3. При дробово-лінійному відображенні образом довільного кола чи прямої є коло або пряма.

Доведення. Спочатку розглянемо лінійне відображення $\omega = az + b$ ($a \neq 0$). Це відображення зводиться до перетворень подібності, повороту і переносу (розділ 16.1). Отже, лінійне відображення переводить кола в кола, а прямі в прямі.

У випадку, коли дробово-лінійна функція

$$\omega = \frac{az + b}{cz + d}$$

не є лінійною, тобто $c \neq 0$, то зобразимо її у вигляді

$$\omega = A + \frac{B}{z - z_0}, \quad (18.11)$$

де $A = \frac{a}{c}$, $B = \frac{bc - ad}{c^2}$, $z_0 = -\frac{d}{c}$. Відображення (18.11) зводиться до послідовності виконання наступних відображень:

$$\xi = z - z_0, \quad \eta = \frac{1}{\xi}, \quad \omega = A + B\eta. \quad (18.12)$$

Перше і третє відображення (18.12) мають кругову властивість, бо вони лінійні. Покажемо, що і друге відображення (18.12), тобто відображення

$$\omega = \frac{1}{z}, \quad (18.13)$$

також має кругову властивість.

Рівняння кола на площині $z = x + iy$ має вигляд

$$\alpha(x^2 + y^2) + \beta x + \gamma y + \delta = 0, \quad (18.14)$$

де $\alpha \neq 0$.

Якщо $\alpha = 0$, то (18.14) описує рівняння прямої. Оскільки

$$x^2 + y^2 = |z|^2 = z\bar{z},$$

$$x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}),$$

то рівняння (18.14) записується у вигляді

$$\alpha z \bar{z} + Dz + \bar{D}z + \delta = 0, \quad (18.15)$$

де α і δ — дійсні числа, $D = \frac{1}{2}(\beta - i\gamma)$.

Підставляючи в (18.15) $z = \frac{1}{\omega}$, отримаємо

$$\delta \omega \bar{\omega} + D\bar{\omega} + \bar{D}\omega + \alpha = 0, \quad (18.16)$$

Таким чином, зображенням кола (18.15) або прямої (при $\alpha = 0$) при відображенні (18.13) є відповідно коло (18.16) або пряма (при $\delta = 0$).

Зауважимо, що дробово-лінійне відображення

$$\omega = \frac{az + b}{cz + d}$$

переводить кола і прямі, які проходять через точку $z = -\frac{d}{c}$ в прямі, а інші кола і прямі переводить в кола.

У подальшому будемо вважати, що пряма це коло нескінченного радіуса. Тому кругову властивість можна сформулювати наступним чином: при дробово-лінійному відображенні кола переходять в кола.

Дробово-лінійне відображення має наступну властивість збереження симетрії.

Теорема 18.4. При дробово-лінійному відображенні довільна пара точок, симетричних відносно кола, переходить в пару точок, симетричних відносно образу цього кола.

Зокрема, коло може вироджуватись у пряму.

18.4. Дробово-лінійне відображення, яке три точки переводить у три задані точки

Теорема 18.5. *Існує єдине дробово-лінійне відображення, яке три різні точки z_1, z_2, z_3 переводить відповідно в три різні точки $\omega_1, \omega_2, \omega_3$. Це відображення визначається формулою*

$$\frac{\omega - \omega_1}{\omega - \omega_2} \frac{\omega_3 - \omega_2}{\omega_3 - \omega_1} = \frac{z - z_1}{z - z_2} \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}, \quad (18.17)$$

Доведення. На основі властивостей а) і б) теореми 18.2 маємо, що функція $\omega = f(z)$, яка визначається співвідношенням (18.17), є дробово-лінійною. Зрозуміло, що

$$\omega_k = f(z_k), \quad k = 1, 2, 3,$$

оскільки при $z = z_k$, $k = 1, 2, 3$, права частина рівності (18.17) набуває значень $0, \infty, 1$, і ліва частина (18.17) при $\omega = \omega_k$, $k = 1, 2, 3$, набуває тих же значень $0, \infty, 1$, відповідно.

Доведемо, якщо дробово-лінійна функція $\omega = f_1(z)$, задовольняє ті ж умови, що і функція $\omega = f(z)$, а саме $\omega_k = f_1(z_k)$, $k = 1, 2, 3$, то $f_1(z) = f(z)$. Нехай $z = \psi(\omega)$ — функція, обернена до функції $\omega = f(z)$. Тоді $\psi(f_1(z))$ — дробово-лінійна функція:

$$\psi(f_1(z)) = \frac{az + b}{cz + d}$$

і $\psi(f_1(z_k)) = z_k$, $k = 1, 2, 3$, тобто

$$\frac{az_k + b}{cz_k + d} = z_k, \quad k = 1, 2, 3.$$

Звідси отримаємо

$$cz_k^2 + (d - a)z_k - b = 0, \quad k = 1, 2, 3,$$

тобто квадратне рівняння $cz^2 + (d - a)z - b = 0$, $k = 1, 2, 3$, має три різні корені, що неможливо. Звіси,

$$c = 0, \quad d = a, \quad b = 0$$

і

$$\psi(f_1(z)) = z.$$

Отже,

$$f_1(z) = f(z).$$

Наслідок 18.1. Функція $w = f(z)$, що визначається формулою (18.17), конформно відображає круг, межа якого проходить через точки z_k , $k = 1, 2, 3$, на круг, межа якого проходить через точки ω_k , $k = 1, 2, 3$.

Надалі під терміном "круг" розуміємо множину точок або всередині або зовні кола, або множину точок півплощини.

Зауваження. З доведення теореми 18.5 випливає, що дробово-лінійне відображення $\omega = \omega(z)$ може мати не більше двох нерухомих точок z_1, z_2 , тобто таких, що $\omega(z_k) = z_k$, $k = 1, 2$, якщо $\omega(z) \neq z$. Дробово-лінійне відображення, що має дві нерухомі точки z_1 і z_2 , визначається формулою

$$\frac{\omega - z_1}{\omega - z_2} = A \frac{z - z_1}{z - z_2},$$

де A – комплексне число.

Приклад 18.1. Будь-яке дробово-лінійне відображення, яке переводить точку z_1 в точку $\omega = 0$, а точку z_2 в точку $\omega = \infty$ має вигляд

$$\omega = A \frac{z - z_1}{z - z_2}, \quad (18.18)$$

де A – деяке комплексне число.

18.5. Приклади дробово-лінійних відображень півплощини і круга

Приклад 18.2. Будь-яке дробово-лінійне відображення півплощини $\text{Im } z > 0$ на круг $|\omega| < 1$ має вигляд

$$\omega = \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0} e^{i\alpha}, \quad (18.19)$$

де $\text{Im } z_0 > 0$, α – дійсне число.

Доведення. Нехай дробово-лінійна функція $\omega = \omega(z)$ відображає півплощину $\text{Im } z > 0$ на круг $|\omega| < 1$ так, що $\omega(z_0) = 0$, $\text{Im } z_0 > 0$, тобто z_0

переходить в 0. Тоді, внаслідок властивості збереження симетрії (теорема 18.4) $\overline{z_0}$ переходить в ∞ і згідно формули (18.18) маємо

$$\omega = A \frac{z - z_0}{z - \overline{z_0}}. \quad (18.20)$$

Покажемо, що $|A| = 1$. Враховуючи, що точки дійсної осі переходять в точки одиничного кола, тобто $|\omega| = 1$ при дійсних $z = x$, то з (18.20) маємо

$$1 = \left| A \frac{x - z_0}{x - \overline{z_0}} \right| = |A| \frac{|x - z_0|}{|x - \overline{z_0}|} = |A|,$$

оскільки $|x - z_0| = \overline{|x - z_0|} = |x - \overline{z_0}|$. Звідси

$$A = e^{i\alpha}$$

і з (18.20) отримаємо формулу (18.19).

Контрольні питання

1. За якої умови відображення лінійною функцією

$$\omega = az + b$$

буде конформним у комплексній площині $\mathbb{C}$?

2. Які перетворення необхідно провести, щоб отримати образ точки z при відображенні

$$\omega = re^{i\alpha}z + b?$$

3. Знайти відображення лінійною функцією, яке має нерухому точку $1+2i$ та переводить точку i у точку $-i$. Точка $z = z_0$ називається нерухомою при відображенні функцією $\omega = f(z)$, якщо $f(z_0) = z_0$.
4. Записати відображення, що здійснюється дробово-лінійною функцією. Що можна сказати про конформність дробово-лінійного відображення?
5. Сформулювати основні властивості дробово-лінійних відображень.
6. Яким буде образ кола при дробово-лінійному відображенні? Яким буде образ прямої?

7. Знайти образ прямої $\operatorname{Im} z = 1$ при відображенні $\omega = \frac{z-1}{z+1}$.
8. Знайти дробово-лінійне відображення, яке переводить точки $-1, i, 1+i$ у відповідні їм точки $0, 2i, 1-i$.
9. Навести приклад дробово-лінійного відображення півплощини і круга.
10. Відобразити верхню півплощину $\operatorname{Im} > 0$ на круг $|\omega| < 1$ так, щоб

$$\omega(i) = 0, \arg \omega'(i) = -\frac{\pi}{2}.$$

Література

- [1] Гольберг А.А. Комплексний аналіз / А.А. Гольберг, М.М. Шеремета, М.В. Заболоцький, О.Б. Скасків. – Львів : Афіша, 2002. – 203 с.
- [2] Грищенко О.Ю. Теорія функцій комплексної змінної. Розв’язування задач / О.Ю. Грищенко, М.І. Нагнибіда, П.П. Настасієв. – Київ : Вища школа, 1994. – 376 с.
- [3] Давидов М.О. Елементи теорії функцій комплексної змінної. / М.О. Давидов. – Київ: "Радянська школа 1968. – 212 с.
- [4] Долженко Є.П. Теорія функції комплексної змінної та деякі її застосування: навч. посіб. / Є.П. Долженко, А.І. Єрмаков. – Луганськ: Вид-во СНУ ім. В. Даля, 2003. – 192 с.
- [5] Єрмаков А.І. Лекції з теорії функцій комплексної змінної: навч. посіб. / А.І. Єрмаков. – Луганськ: Вид-во СНУ ім. В. Даля, 2011. – 186 с.
- [6] Комплексний аналіз. Приклади і задачі: навч. посіб. / В.Г. Самойленко [та ін.] / За ред. В.Г. Самойленка. – Київ : ВПЦ "Київський університет", 2010. – 224 с.
- [7] Комплексний аналіз. Розрахункова робота [Електронний ресурс] : навч. посіб. [для студентів спеціальності 111 "Математика"] / В. В. Дрозд [та ін.]. — Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2017. — 110 с.
- [8] Комплексний аналіз: навч. посіб. / П. В. Слюсарчук [та ін.]. – Ужгород : «Шарк», 2020. – 174 с.
- [9] Коренков М.Є. Комплексний аналіз. / М.Є. Коренков, І.В. Кальчук, Ю.І. Харкевич. – Луцьк: 2019. – 470 с.
- [10] Мартиненко В.С. Операційне числення / В.С. Мартиненко. – Київ : Вища школа, 1990. – 360 с.
- [11] Мартиненко М.А. Теорія функцій комплексної змінної. Операційне числення / М.А. Мартиненко , І.І. Юрик.– Київ : Слово, 2008. – 295 с.
- [12] Мельник Т.А. Комплексний аналіз: підручник / Т.А. Мельник. – Київ : ВПЦ "Київський університет", 2015. – 192 с.

- [13] Математика в технічному університеті : Підручник / І. В. Алексєєва [та ін.] / за ред. О. І. Клесова. – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018. – Т. 1. – 496 с.
- [14] Методи комплексного аналізу: монографія / А.Я. Бомба, С.С. Каштан, Д.О. Пригорницький, С.В. Ярощак. – Рівне: НУВГП, 2013. – 415 с.
- [15] Павлова Л.В. Теорія аналітичних функцій. Збірник вправ : навч. посіб. [для пед ін-тів] / Л.В. Павлова, О.І. Редькіна. – К.: Вища школа, 1980. – 216 с.
- [16] Пукальський І.Д. Вища математика. Теорія функцій комплексної змінної: навч.-метод. посіб. / І.Д. Пукальський, І.П. Лусте. – Чернівці: ЧНУ, 2001. – 106 с.
- [17] Самойленко В.Г. Операційне числення. Методичні вказівки для практичних занять з дисципліни "Комплексний аналіз" для студентів механіко-математичного факультету / Упорядники: В.Г. Самойленко, А.В. Ловейкін, В.А. Бородін. – Київ : ВПЦ "Київський університет", 2007. – 32 с.
- [18] Тесленко Л.С. Комплексний аналіз. Навч.посіб. [для студентів механіко-математичних факультетів вищих навчальних закладів] / Л.С. Тесленко, О.М. Чадаєв, Я.П. Менько. – Миколаїв: МНУ, 2019. – 121 с.
- [19] Тітова О.О. Конформні відображення: навч. посіб. [для здобувачів ступеня вищої освіти бакалавра спеціальності «Математика» освітньо-професійної програми «Математика»] / О.О. Тітова, С.М. Гребенюк. – Запоріжжя : ЗНУ, 2020. – 80 с.
- [20] Швець В.Т. Вища математика: теорія функцій комплексної змінної. / В.Т. Швець. – Одеса: ВМВ, 2014. – 236 с.
- [21] Швець В.Т. Вища математика: Комплексний аналіз, інтегральні перетворення, задачі математичної фізики. / В.Т. Швець. – Одеса: Видавничий центр ОДАХ, 2012. – 327 с.
- [22] Шека Д.Д. Комплексний аналіз (в прикладах і задачах). Навч. посіб. [для студентів спеціальності «Прикладна фізика та наноматеріали»] / Д.Д. Шека. – Київ: факультет радіофізики, електроніки та комп'ютерних систем Київського національного університету імені Тараса Шевченка, 2019. – 130 с.

- [23] R.E. Greene and S.G. Krantz, Function Theory of One Complex Variable Graduate studies in mathematics, American Mathematical Soc., 2006. – 504 pp.
- [24] J.B. Conway, Functions of One Complex Variable, Springer-Verlag, New York Inc., 1978. – 331 pp.

Предметний покажчик

А

Аргумент комплексного числа, 15

В

Відображення

— дробово-лінійне, 205

— лінійне, 202

Г

Геометричний зміст

— аргумента похідної, 77

— модуля похідної, 78

Границя

— послідовності комплексних чисел, 22

— функції комплексної змінної, 46

Е

Елементарні функції комплексної змінної, 50-56

І

Ізольована особлива точка, 144

— полюс порядку m , 153, 155

— суттєво (істотно) особлива, 144, 156

— типу полюс, 144

— усувного типу, 144, 150

Інтеграл від функції комплексної змінної вздовж кривої, 82

К

Конформне відображення, 79, 197

Комплексна площа, 13

Комплексне число, 9

Крива

— гладка, кусково-гладка, 41

— Жордана, 38

- необмежена, 41
- неперервна, 37
- проста, 38
- спрямлювана, 40

Критерій

- диференційовності функції у точці, 64
- Коші, 23, 30, 49

Л

Лема Жордана, 182

Лишок, 167

- у нескінченно віддаленій точці, 171
- у полюсі, 169

М

Модуль комплексного числа, 11

Н

Нескінченність, нескінченно віддалена точка, 26

О

Область

- збіжності степеневого ряду, 113
- на комплексній площині, 41
- обмежена, 42
- однозв'язна, 43

Операції

- ділення комплексних чисел, 12, 18
- добування кореня степеня n із комплексного числа, 12, 20
- додавання комплексних чисел, 9, 10, 13
- множення комплексних чисел, 9, 10, 17
- піднесення комплексного числа до степеня n , 12, 18

П

Первісна функції комплексної змінної, 103

Послідовність комплексних чисел

- збіжна, 23
- обмежена, 23
- Похідна функції комплексної змінної, 58

Р

Розширена комплексна площина, 27

Ряд

- абсолютно збіжний, 29
- збіжний, 28
- Лорана, 135
- степеневий, 113
- Тейлора, 120

С

Стереографічна проекція, 28

Сфера Рімана, 28

Т

Теорема

- Абеля, 114
- друга Вейерштрасса, 128
- Жордана, 43
- інтегральна Коші, 90
- інтегральна Коші для складного контура, 99
- інтегральна Коші узагальнена, 96
- Коші-Адамара, 116
- Ліувіля, 163
- Лорана, 136
- Морери, 127
- основна алгебри, 164
- основна теорії лишків, 175
- перша Вейерштасса, 128
- Пікара, 159
- принцип аргументу, 188
- про середнє, 109

— Рімана, 200

У

Умови Коші-Рімана, 64

Ф

Форма запису комплексного числа

— алгебраїчна, 9

— показникова, 18

— тригонометрична, 16

Формула

— Ейлера, 17

— інтегральна Коші, 107

— інтегрування частинами, 104

— Муавра, 18

— Ньютона-Лейбніца, 104

Функція комплексної змінної, 45

— аналітична в області, 58, 66

— аналітична у точці, 72

— багатозначна, 45

— диференційовна у точці, 58

— мероморфна, 165

— неперервна, 47

— однозначна, 45

— однолиста, 45

— регулярна, 72

— ціла, 163

Функції двох дійсних змінних

— гармонічні, 70

— спряжені, 70

Ч

Числовий ряд, 28