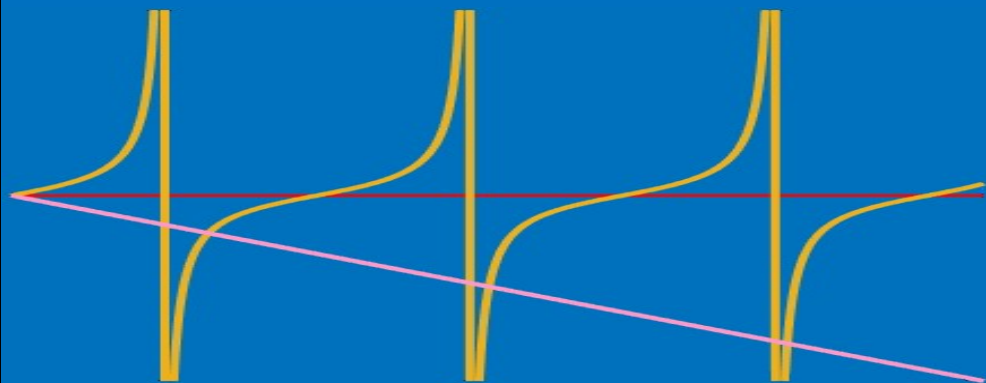




Є. С. ВАКАЛ, А. В. ЛОВЕЙКІН

МЕТОДИ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ В ПРИКЛАДАХ І ЗАДАЧАХ

Навчальний посібник для студентів
механіко-математичного факультету



МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

**Є. С. ВАКАЛ
А. В. ЛОВЕЙКІН**

МЕТОДИ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ В ПРИКЛАДАХ І ЗАДАЧАХ

**Навчальний посібник
для студентів механіко-математичного факультету**

Київ – 2020

УДК 517.95(0.75.8)

ББК 22.311я7

В 12

Рецензенти:

д-р фіз.-мат. наук, проф. О. В. Капустян,

канд. фіз.-мат. наук, доц. О. С. Тригуб

Рекомендовано до друку

вченою радою механіко-математичного факультету

(протокол № 1 від 27 серпня 2020 року)

Вакал Є.С.

В 12 Методи математичної фізики в прикладах і задачах : навчальний посібник для студентів механіко-математичного факультету / Є. С. Вакал, А. В. Ловейкін. — К.: Видавець Кравченко Я.О., 2020. — 188 с.

ISBN 978-617-7700-58-5

Навчальне видання містить теоретичні відомості та перелік завдань для аудиторної та самостійної роботи і методичні рекомендації до їх виконання з дисципліни "Методи математичної фізики", що викладається студентам механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка. За змістом видання поділено на теми згідно з навчальною програмою дисципліни. Головна увага приділяється концептуальним і методологічним основам застосування методу Фур'є до розв'язання мішаних задач для рівнянь гіперболічного та параболічного типів у різних областях.

Для студентів механіко-математичного факультету спеціальності "математика" та викладачів, що проводять заняття з курсів "Рівняння математичної фізики" та "Методи математичної фізики".

УДК 517.95(0.75.8)

ББК 22.311я7

© Вакал Є. С., Ловейкін А. В., 2020

ISBN 978-617-7700-58-5

ПЕРЕДМОВА

Метод Фур'є (або метод відокремлення змінних, метод власних функцій), запропонований французьким математиком Ж. Фур'є в роботі “Аналітична теорія тепла” (1822 р.), є ефективним засобом аналітичного розв'язання лінійних задач математичної фізики для диференціальних рівнянь різних типів.

Цей метод можна застосовувати для мішаних нестационарних задач в обмежених областях, а в разі рівнянь еліптичного типу – і для деякого класу необмежених областей. Метод ґрунтується на побудові частинних розв'язків рівняння, що задовольняють однорідні крайові умови, у вигляді добутку функцій, що залежать від різних змінних. Шляхом відокремлення змінних задача для рівняння з частинними похідними зводиться до двох задач. Одна з них полягає в розв'язанні звичайного диференціального рівняння при додаткових умовах (для нестационарних задач – це задача Коші), інша (задача на власні значення) – у знаходженні власних функцій і власних значень лінійного диференціального оператора. Для розв'язання другої задачі у випадку двох і більше просторових змінних також використовується метод Фур'є, застосування якого призводить до одновимірних задач на власні значення.

Задача на власні значення є основною в даному методі, так як служить джерелом побудови повної ортогональної системи функцій. Саме за допомогою цих функцій конструюється ряд Фур'є, який представляє собою розв'язок поставленої задачі. У більшості задач на власні значення отримуються лінійні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами. Складніші задачі містять рівняння для циліндричних функцій, класичних ортогональних многочленів, сферичних функцій тощо.

Процедура відокремлення змінних є особливо простою при розв'язанні задач для однорідних рівнянь з однорідними крайовими умовами. У випадку неоднорідних рівнянь і неоднорідних крайових умов процес відокремлення змінних ускладнюється. Один із методів розв'язання таких задач полягає в їх перетворенні в еквівалентні задачі з однорідними крайовими умовами. Існують різні технічні прийоми подібного перетворення,

наприклад, введення допоміжної функції, що задовольняє неоднорідні крайові умови. В результаті та сама задача може мати різні форми відповіді. Слід виділити важливий клас задач для неоднорідного рівняння з неоднорідними крайовими умовами (наприклад, зі стаціонарними неоднорідностями), процес розв'язання яких значно спрощується, і поліпшується збіжність рядів, якщо вдається знайти частинний розв'язок рівняння, що задовольняє дані крайові умови.

У навчальному виданні головна увага приділяється основам застосування методу відокремлення змінних до розв'язання мішаних задач для рівнянь гіперболічного та параболічного типів в одновимірних, прямокутних і кругових областях.

У посібнику наведено низку навчальних прикладів і завдань для аудиторної та самостійної роботи, які достатньо повно ілюструють відповідний лекційний курс. Тому видання можна використовувати як практичне забезпечення підручників [7, 10, 14, 15, 18, 21], що містять необхідний теоретичний матеріал

При складанні посібника автори використовували оригінальні задачі, що пропонувались упродовж багатьох років студентам механіко-математичного факультету [4, 9, 11, 17], а також відомі збірники задач [1–3, 5, 8, 12, 13, 16, 19, 20].

Для кращого розуміння матеріалу деякі задачі проілюстровано графіками, побудованими за допомогою системи комп'ютерної математики MATLAB [6].

Видання може бути корисним для студентів і викладачів математичних дисциплін природничих факультетів університетів.

ТЕМА 1. ЗАДАЧА ШТУРМА – ЛІУВІЛЛЯ

У процесі розв'язання задач методом відокремлення змінних особливу роль відіграє задача на власні значення. У випадку однієї просторової змінної така задача називається задачею Штурма – Ліувілля. Подамо коротко основні відомості стосовно цієї задачі.

Нехай задано диференціальний оператор

$$\mathcal{L}u = -\frac{d}{dx}\left(p\frac{du}{dx}\right) + q(x)u \quad (1.1)$$

на відрізку $[a, b]$. Вважаємо, що

$$p \in C^1[a, b], q \in C[a, b], p(x) > 0, q(x) \geq 0.$$

Розглянемо лінійну крайову задачу для рівняння еліптичного типу

$$\mathcal{L}u = \lambda \rho u, x \in [a, b], \quad (1.2)$$

$$A_1 u(a) - A_2 u'(a) = 0, \quad (1.3)$$

$$B_1 u(b) + B_2 u'(b) = 0,$$

де $\rho(x)$ задана на відрізку $[a, b]$ вагова функція, така що $\rho \in C[a, b]$, $\rho(x) > 0$; A_i, B_i – сталі числа, $A_i \geq 0$, $B_i \geq 0$, $i = 1, 2$; $A_1 + A_2 > 0$, $B_1 + B_2 > 0$.

Сформулюємо задачу: знайти значення параметра λ , при яких задача (1.2), (1.3) має нетривіальні розв'язки $u(x)$ класу $C^2(a, b) \cap C^1[a, b]$, а також знайти ці розв'язки. Вказані значення параметра λ називаються *власними значеннями* задачі Штурма – Ліувілля, а відповідні їм нетривіальні розв'язки – *власними функціями* цієї задачі.

Отже, задача Штурма – Ліувілля полягає у знаходженні власних значень і власних функцій. Сукупність власних значень утворює *спектр* задачі Штурма – Ліувілля.

Сформулюємо основні властивості власних функцій і власних значень задачі Штурма – Ліувілля, необхідні для подальшого викладення.

1. Власні функції задачі Штурма – Ліувілля, які відповідають різним власним значенням, ортогональні між собою на проміжку

$[a, b]$ з вагою $\rho(x)$, тобто якщо λ_1 та λ_2 – два різних власних значення, а $u_1(x)$ та $u_2(x)$ – відповідні їм власні функції, то

$$\int_a^b \rho(x) u_1(x) u_2(x) dx = 0.$$

2. Власні значення задачі Штурма – Ліувілля прості, тобто, якщо деякому власному значенню відповідають дві власні функції, то вони лінійно залежні на $[a, b]$.

Внаслідок лінійності і однорідності рівняння і крайових умов очевидно, що якщо $u_n(x)$ є власною функцією, яка відповідає власному значенню λ_n , то функція $D_n u_n(x)$ (D_n – довільна стала) також є власною функцією для того ж λ_n . Отже, власні функції визначаються з точністю до довільного множника. Щоб виключити невизначеність у виборі множника, можна підпорядкувати власні функції умові нормування

$$\|u_n\|^2 = \int_a^b \rho(x) u_n^2(x) dx = 1.$$

Якщо деяка функція $\hat{u}_n(x)$ не задовольняє цю умову, то її можна нормувати, помноживши на коефіцієнт $D_n = \frac{1}{\|\hat{u}_n\|}$,

$$D_n \hat{u}_n(x) = u_n(x).$$

Якщо підпорядкувати власні функції задачі (1.2), (1.3) умові нормування $\|u_n\| = 1$, то вони утворюють ортогональну і нормовану систему

$$\int_a^b \rho(x) u_m(x) u_n(x) dx = \begin{cases} 0, m \neq n, \\ 1, m = n. \end{cases}$$

3. Всі власні значення задачі Штурма – Ліувілля дійсні і невід’ємні. При цьому, для того, щоб $\lambda=0$ було власним значенням задачі Штурма – Ліувілля, необхідно і достатньо, щоб виконувались умови $q=0$, $A_1=B_1=0$, причому відповідною власною функцією u_0 буде стала.

4. Всі власні функції задачі Штурма – Ліувілля можна вибрати дійсними.

5. Власні значення задачі Штурма – Ліувілля утворюють зліченну множину, яка не має скінченних граничних точок. Власні значення можна розташувати в порядку зростання

$$0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots,$$

причому $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = +\infty$.

6. Теорема Стеклова.

Довільну функцію $f(x) \in C^2[a, b]$, яка задовольняє крайові умови (1.3) задачі Штурма – Ліувілля, можна розкласти у рівномірно та абсолютно збіжний ряд Фур'є

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k u_k(x) \quad (1.4)$$

за системою ортонормованих з вагою $\rho(x)$ власних функцій задачі Штурма – Ліувілля $\{u_k(x), k \geq 1\}$. Тут

$$f_k = (f, u_k) = \int_a^b \rho(x) f(x) u_k(x) dx -$$

коефіцієнти ряду Фур'є за вказаною системою.

7. Система власних функцій задачі Штурма – Ліувілля, ортонормована на відрізку $[a, b]$ з вагою $\rho(x)$, є повною на цьому відрізку.

Приклад 1. Знайти власні значення і власні функції задачі Штурма – Ліувілля

$$X'' + \lambda X = 0, X(0) = 0, X(l) = 0.$$

Розв'язання. За властивістю 3 всі власні значення цієї задачі додатні, $\lambda > 0$. Тоді загальний розв'язок рівняння має вигляд

$$X(x) = C_1 \cos \sqrt{\lambda} x + C_2 \sin \sqrt{\lambda} x,$$

де C_1, C_2 – довільні сталі. Взявши до уваги першу крайову умову

$X(0) = 0$, дістанемо $C_1 = 0$. Друга крайова умова $X(l) = 0$ дає

$$C_2 \sin \sqrt{\lambda} l = 0 \text{ або } \sin \sqrt{\lambda} l = 0,$$

так як стала $C_2 \neq 0$, інакше ми б мали тривіальний розв'язок. З останнього рівняння знаходимо $\sqrt{\lambda} l = n\pi$, $n \in \mathbb{N}$. Таким чином, нетривіальні розв'язки задачі можливі лише при значеннях $\lambda = \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$, $n \in \mathbb{N}$. Отже, власними значеннями задачі Штурма–Ліувілля будуть $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$, $n \in \mathbb{N}$. Їм відповідають власні функції

$$X_n(x) = C_2 \sin \frac{n\pi}{l} x, n \in \mathbb{N},$$

визначені з точністю до сталого множника C_2 . Виберемо цей множник так, щоб власні функції задовольняли умову нормування

$$\|X_n\|^2 = \int_0^l X_n^2(x) dx = 1.$$

Для цього повинно бути $C_2 = \sqrt{\frac{2}{l}}$. Таким чином, ортонормовані власні функції задачі мають вигляд

$$X_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{n\pi}{l} x, n \in \mathbb{N}.$$

Завдання для самостійної роботи

Знайти власні значення і власні функції задачі Штурма – Ліувілля

1.1. $X'' + \lambda X = 0$, $X(0) = 0$, $X'(l) = 0$;

1.2. $X'' + \lambda X = 0$, $X(0) = 0$, $X'(l) + hX(l) = 0$, ($h > 0$);

1.3. $X'' + \lambda X = 0$, $X'(0) = 0$, $X(l) = 0$;

1.4. $X'' + \lambda X = 0$, $X'(0) = 0$, $X'(l) = 0$;

1.5. $X'' + \lambda X = 0$, $X'(0) = 0$, $X'(l) + hX(l) = 0$ ($h > 0$);

1.6. $X'' + \lambda X = 0$, $X'(0) - hX(0) = 0$; $X(l) = 0$ ($h > 0$);

1.7. $X'' + \lambda X = 0$, $X'(0) - hX(0) = 0$; $X'(l) = 0$ ($h > 0$);

1.8. $X'' + \lambda X = 0$, $X'(0) - h_1X(0) = 0$; $X'(l) + h_2X(l) = 0 = 0$ ($h_1, h_2 > 0$).

У додатку наведено власні значення і власні функції задачі Штурма – Ліувілля з різними типами крайових умов.

ТЕМА 2. ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ФУР'Є ДО МІШАНИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОДНОРІДНОГО ХВИЛЬОВОГО РІВНЯННЯ

Викладемо ідею методу відокремлення змінних на прикладі задачі про вільні коливання однорідної струни, що закріплена на кінцях. Математично така задача полягає у знаходженні в області $D = \{(x, t): 0 < x < l, t > 0\}$ двічі неперервно диференційованого розв'язку рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, t > 0, \quad (2.1)$$

який задовольняє початкові умови

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l \quad (2.2)$$

і крайові умови

$$u(0, t) = 0, u(l, t) = 0, t \geq 0. \quad (2.3)$$

При цьому вважаємо, що виконуються умови узгодженості

$$\varphi(0) = \varphi(l) = 0, \psi(0) = \psi(l) = 0.$$

Розглянемо основну допоміжну задачу: знайти розв'язки рівняння (2.1), які тотожно не дорівнюють нулю, задовольняють однорідні крайові умови (2.3) і представляються у вигляді добутку функцій

$$u(x, t) = X(x)T(t), \quad (2.4)$$

де $X(x)$ – функція тільки змінної x , $T(t)$ – функція тільки змінної t , причому $X(x) \not\equiv 0, T(t) \not\equiv 0$.

Підставивши (2.4) у рівняння (2.1) і відокремивши змінні, отримаємо рівність

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{a^2 T(t)}. \quad (2.5)$$

Щоб функція (2.4) була розв'язком рівняння (2.1), рівність (2.5) повинна задовольнятися тотожно, тобто для всіх значень змінних $(x, t) \in D$. Але ліва частина рівності (2.5) залежить лише від змінної x , а права – тільки від змінної t . Фіксуємо деяке значення аргументу x і змінюючи t (або навпаки), одержимо, що при зміні своїх аргументів права і ліва частина рівності (2.5) зберігають сталі значення

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = -\lambda, \quad (2.6)$$

де λ – стала, яку для зручності узято із знаком мінус.

Тоді з рівності (2.6) отримаємо два звичайних диференціальних рівняння другого порядку для визначення функцій $X(x)$ і $T(t)$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad (2.7)$$

$$T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0. \quad (2.8)$$

Так як функція $u(x, t)$ повинна задовольняти крайові умови, то, підставляючи (2.4) у (2.3), отримаємо

$$X(0)T(t) = 0, X(l)T(t) = 0.$$

Оскільки $T(t) \not\equiv 0$, то з останніх рівностей випливає, що функція $X(x)$ повинна задовольняти крайові умови

$$X(0) = 0, X(l) = 0. \quad (2.9)$$

Таким чином, для функції $X(x)$ отримали задачу Штурма – Ліувілля (2.7), (2.9).

Як встановлено раніше (приклад 1), нетривіальні розв'язки цієї задачі можливі лише при значеннях $\lambda = \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$, $n \in \mathbb{N}$. Їм відповідають власні функції

$$X_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{n\pi}{l} x, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (2.10)$$

які ми обрали ортонормованими.

При $\lambda = \lambda_n$ рівняння (2.8) набуває вигляду

$$T_n''(t) + \left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 T_n(t) = 0.$$

Його загальним розв'язком буде функція

$$T_n(t) = A_n \cos \frac{n\pi}{l} at + B_n \sin \frac{n\pi}{l} at, \quad (2.11)$$

де A_n, B_n – довільні сталі. Тоді, враховуючи (2.10), (2.11), згідно з (2.4) знаходимо, що функції

$$u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t) = \left(A_n \cos \frac{n\pi}{l} at + B_n \sin \frac{n\pi}{l} at\right) \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{n\pi}{l} x$$

задовольняють рівняння (2.1) і крайові умови (2.3).

В силу лінійності і однорідності рівняння (2.1) та крайових умов (2.3) сума частинних розв'язків

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi}{l} at + B_n \sin \frac{n\pi}{l} at \right) \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{n\pi}{l} x \quad (2.12)$$

також задовольняє рівняння і крайові умови, якщо цей ряд збігається і його можна почленно диференціювати в області D два рази по x і два рази по t .

Підберемо коефіцієнти A_n, B_n так, щоб функція, визначена рядом (2.12), задовольняла і початкові умови задачі (2.2). З цієї метою підставимо ряд (2.12) у (2.2)

$$u(x, 0) = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{n\pi}{l} x, \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{n\pi a}{l} \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{n\pi}{l} x. \quad (2.14)$$

Якщо функції φ, ψ задовольняють умови розкладу у ряд Фур'є за власними функціями задачі Штурма-Ліувілля (2.7), (2.9), то

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{n\pi}{l} x, \quad (2.15)$$

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{n\pi}{l} x, \quad (2.16)$$

де

$$\varphi_n = \int_0^l \varphi(x) \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{n\pi}{l} x dx, \quad \psi_n = \int_0^l \psi(x) \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{n\pi}{l} x dx -$$

коефіцієнти розкладу функцій $\varphi(x), \psi(x)$ відповідно у ряди Фур'є за системою функцій $\left\{ \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{n\pi}{l} x, n \in \mathbb{N} \right\}$.

Порівнюючи ряди (2.13) і (2.15), (2.14) і (2.16), знаходимо

$$A_n = \varphi_n, B_n = \frac{l}{n\pi a} \psi_n.$$

Підставивши знайдені коефіцієнти у (2.12), отримаємо розв'язок задачі (2.1) – (2.3)

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\varphi_n \cos \frac{n\pi}{l} at + \frac{l}{n\pi a} \psi_n \sin \frac{n\pi}{l} at \right) \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{n\pi}{l} x dx. \quad (2.17)$$

Теорема 2.1. Припустимо, що функції $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ задовольняють такі умови:

- 1) $\varphi \in C^2[0, l]$, $\psi \in C^1[0, l]$; функції φ''' і ψ'' – кусково неперервні;
- 2) $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$, $\varphi''(0) = \varphi''(l) = 0$, $\psi(0) = \psi(l) = 0$.

Тоді функція $u(x, t)$, визначена рядом (2.17), має неперервні похідні до другого порядку включно і задовольняє рівняння (2.1) і умови (2.2), (2.3). При цьому ряд (2.17) можна почленно диференціювати два рази по x та t , і отримані ряди збігаються абсолютно і рівномірно при $0 \leq x \leq l$, $t \geq 0$.

Отже, $u(x, t)$ є класичним розв'язком задачі (2.1) – (2.3).

Розв'язок задачі про колювання струни, записаний у формі тригонометричного ряду (2.17), дозволяє проаналізувати фізичні властивості цього процесу.

Подано загальний член ряду (2.17) у вигляді

$$u_k(x, t) = \left(\varphi_k \cos \sqrt{\lambda_k} at + \frac{\psi_k}{\sqrt{\lambda_k} a} \sin \sqrt{\lambda_k} at \right) X_k(x), \quad (2.18)$$

де $\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2$, $X_k(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{k\pi}{l} x$, і перетворимо його.

Позначимо через $S_k^2 = \varphi_k^2 + \frac{\psi_k^2}{\lambda_k a^2}$. Помножимо і поділимо праву частину (2.18) на S_k

$$u_k(x, t) = S_k X_k(x) \left(\frac{\varphi_k}{S_k} \cos \sqrt{\lambda_k} at + \frac{\psi_k}{S_k \sqrt{\lambda_k} a} \sin \sqrt{\lambda_k} at \right).$$

Оскільки

$$\frac{\varphi_k^2}{S_k^2} + \frac{\psi_k^2}{\lambda_k a^2 S_k^2} = \frac{1}{S_k^2} \left(\varphi_k^2 + \frac{\psi_k^2}{\lambda_k a^2} \right) = \frac{1}{S_k^2} S_k^2 = 1,$$

то $u_k(x, t)$ можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} u_k(x, t) &= S_k X_k(x) (\sin \alpha_k \cos \sqrt{\lambda_k} at + \cos \alpha_k \sin \sqrt{\lambda_k} at) = \\ &= S_k X_k(x) \sin(\sqrt{\lambda_k} at + \alpha_k), \end{aligned}$$

де

$$\sin \alpha_k = \frac{\varphi_k}{S_k}, \cos \alpha_k = \frac{\psi_k}{S_k \sqrt{\lambda_k a}}.$$

Звідси видно, що кожна точка струни x здійснює гармонічне коливання з частотою $\omega_k = \sqrt{\lambda_k} a$ і амплітудою $S_k X_k(x)$, що залежить від абсциси точки струни. При такому коливанні всі точки струни одночасно досягають своїх максимальних відхилень у той чи інший бік і одночасно проходять положення рівноваги. Коливання такого типу називаються *стоячею хвилею* (*гармонікою*). Точки, які залишаються нерухомими протягом усього процесу коливань, називаються *вузлами* хвилі. Точки, які здійснюють коливання з максимальною амплітудою, називаються *пучностями* стоячої хвилі. Частоти $\omega_k = \sqrt{\lambda_k} a$ називаються власними частотами коливань струни.

Амплітуда гармонік швидко зменшується зі збільшенням їїнього номера. Звідси випливає, що основну роль у хвильовому процесі відіграють перші члени ряду (2.17).

У випадку крайових умов іншого вигляду схема розв'язування мішаних задач не змінюється. Зазначимо також, що для її застосування рівняння та крайові умови повинні бути однорідними.

Приклад 2. Розв'язати методом Фур'є мішану задачу

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < l, t > 0, \\ u|_{t=0} &= \sin \frac{\pi}{l} x, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0, & 0 \leq x \leq l, \\ u(0, t) &= 0, u(l, t) = 0, & t \geq 0. \end{aligned}$$

Розв'язання. Дана задача є частинним випадком, розглянутої раніше задачі (2.1) – (2.3) при $\varphi(x) = \sin \frac{\pi}{l} x$, $\psi(x) = 0$. Застосувавши до неї метод Фур'є і скориставшись отриманими результатами, запишемо її розв'язок у вигляді ряду

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi}{l} at + B_n \sin \frac{n\pi}{l} at \right) \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{n\pi}{l} x.$$

Коефіцієнти A_n, B_n підбираємо так, щоб виконувались початкові умови задачі. Одержуємо рівності

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{n\pi}{l} x = \sin \frac{\pi}{l} x, \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{n\pi a}{l} \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{n\pi}{l} x = 0,$$

з яких знаходимо значення коефіцієнтів A_n, B_n :

$$A_1 = \sqrt{\frac{l}{2}}, A_n = 0, n = 2, 3, \dots; B_n = 0, n = 1, 2, \dots$$

Отже, шуканий розв'язок задачі визначає функція

$$u(x, t) = \cos \frac{\pi}{l} at \sin \frac{\pi}{l} x.$$

Зауважимо, що розв'язок задачі подається у вигляді одного члена ряду. Пов'язано це з тим, що за першу початкову умову обрана (з точністю до множника) власна функція

$\varphi(x) = \sqrt{\frac{l}{2}} X_1(x) = \sin \frac{\pi}{l} x$, тому в силу ортогональності системи власних функцій всі коефіцієнти φ_n , крім коефіцієнта φ_1 , дорівнюють нулю.

Приклад 3. Розв'язати методом Фур'є мішану задачу

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4u, & 0 < x < 1, t > 0, \\ u|_{t=0} &= x^2 - x, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0, & 0 \leq x \leq 1, \\ u(0, t) &= 0, u(1, t) = 0, & t \geq 0. \end{aligned}$$

Розв'язання. Шукаємо розв'язок рівняння у вигляді добутку $u(x, t) = X(x)T(t)$. Далі за схемою методу Фур'є маємо

$$\begin{aligned} T''(t)X(x) &= T(t)X''(x) - 4X(x)T(t), \\ \frac{X''(x)}{X(x)} &= \frac{T''(t)}{T(t)} + 4 = -\lambda \end{aligned}$$

і після відокремлення змінних отримаємо звичайні диференціальні рівняння другого порядку

$$\begin{aligned} T''(t) + (\lambda + 4)T(t) &= 0, \\ X''(x) + \lambda X(x) &= 0. \end{aligned}$$

Крайові умови для функції $X(x)$ мають вигляд

$$X(0) = 0, X(1) = 0.$$

Задача Штурма – Ліувілля для функції $X(x)$ при $l = 1$ має власні значення $\lambda_n = (n\pi)^2$, $n \in \mathbb{N}$, яким відповідають нормовані власні функції $X_n(x) = \sqrt{2} \sin n\pi x$.

Для знаходження $T(t)$, враховуючи $\lambda = \lambda_n$, дістанемо рівняння

$$T_n''(t) + (n^2\pi^2 + 4)T_n(t) = 0,$$

розв'язок його має вигляд

$$T_n(t) = A_n \cos \sqrt{n^2\pi^2 + 4} t + B_n \sin \sqrt{n^2\pi^2 + 4} t.$$

Утворюємо ряд

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \sqrt{n^2\pi^2 + 4} t + B_n \sin \sqrt{n^2\pi^2 + 4} t \right) \sqrt{2} \sin n\pi x,$$

який задовольняє рівняння та крайові умови.

Підбираємо коефіцієнти A_n, B_n так, щоб функція $u(x, t)$, визначена цим рядом, задовольняла також і початкові умови.

Одержуємо рівності

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sqrt{2} \sin n\pi x = x^2 - x, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(B_n \sqrt{n^2\pi^2 + 4} \right) \sqrt{2} \sin n\pi x = 0,$$

з яких знаходимо $B_n = 0, n \in \mathbb{N}$,

$$A_n = \int_0^1 (x^2 - x) \sqrt{2} \sin n\pi x dx = \frac{2\sqrt{2}}{n^3\pi^3} [(-1)^n - 1], n \in \mathbb{N}.$$

Отже, шуканий розв'язок задачі визначає функція

$$u(x, t) = -\frac{8}{\pi^3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^3} \cos \sqrt{\pi^2(2k+1)^2 + 4} t \sin(2k+1)\pi x.$$

Приклад 4. Розв'язати методом Фур'є мішану задачу

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial u}{\partial t}, & 0 < x < \pi, t > 0, \\ u|_{t=0} &= \sin \frac{3x}{2}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, & 0 \leq x \leq \pi, \end{aligned}$$

$$u(0, t) = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=\pi} = 0, \quad t \geq 0.$$

Розв'язання. Шукаючи розв'язок рівняння у вигляді добутку $u(x, t) = X(x)T(t)$, отримаємо два звичайних диференціальних рівняння другого порядку

$$\begin{aligned} T''(t) + 2T'(t) + \lambda T(t) &= 0, \\ X''(x) + \lambda X(x) &= 0. \end{aligned}$$

Крайові умови для функції $X(x)$ мають вигляд

$$X(0) = 0, \quad X'(\pi) = 0.$$

Враховуючи, що за властивостями задачі Штурма – Ліувілля $\lambda > 0$, загальний розв'язок рівняння для функції $X(x)$ має вигляд

$$X(x) = C_1 \cos \sqrt{\lambda} x + C_2 \sin \sqrt{\lambda} x.$$

Підпорядковуючи цю функцію крайовим умовам, одержимо $C_1 = 0$, $C_2 \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} \pi = 0$ або $\cos \sqrt{\lambda} \pi = 0$. З останнього рівняння знаходимо $\sqrt{\lambda} \pi = \left(n + \frac{1}{2}\right) \pi$, $n \in \mathbb{N}_0$. Таким чином, власні значення задачі даються формулою $\lambda_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)^2$, $n \in \mathbb{N}_0$. Їм відповідають нормовані власні функції

$$X_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin \left(n + \frac{1}{2}\right) x, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Для знаходження $T(t)$, враховуючи $\lambda = \lambda_n$, дістанемо рівняння

$$T_n''(t) + 2T_n'(t) + \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 T_n(t) = 0,$$

розв'язок якого при $n = 0$ має вигляд

$$T_0(t) = A_0 e^{\left(-1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)t} + B_0 e^{\left(-1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)t},$$

а при $n > 0$

$$T_n(t) = e^{-t} \left(A_n \cos \sqrt{\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 - 1} t + B_n \sin \sqrt{\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 - 1} t \right).$$

Утворюємо ряд

$$u(x, t) = \left(A_0 e^{\left(-1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)t} + B_0 e^{\left(-1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)t} \right) \sqrt{\frac{2}{\pi} \sin \frac{x}{2}} + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-t} \left(A_n \cos \sqrt{\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 - 1} t + B_n \sin \sqrt{\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 - 1} t \right) \cdot \\ \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi} \sin \left(n + \frac{1}{2}\right) x},$$

який задовольняє рівняння та крайові умови.

Підбираємо коефіцієнти A_n, B_n так, щоб функція $u(x, t)$, визначена цим рядом, задовольняла також і початкові умови. Одержуємо рівності

$$(A_0 + B_0) \sqrt{\frac{2}{\pi} \sin \frac{x}{2}} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sqrt{\frac{2}{\pi} \sin \left(n + \frac{1}{2}\right) x} = \sin \frac{3x}{2}, \\ \left[A_0 \left(-1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + B_0 \left(-1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \right] \sqrt{\frac{2}{\pi} \sin \frac{x}{2}} + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-A_n + B_n \sqrt{\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 - 1} \right) \sqrt{\frac{2}{\pi} \sin \left(n + \frac{1}{2}\right) x} = 0,$$

з яких знаходимо

$$A_0 + B_0 = 0, A_1 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}, A_n = 0, n \geq 2;$$

$$A_0 \left(-1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + B_0 \left(-1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0, -A_n + B_n \sqrt{\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 - 1} = 0, n \geq 1.$$

Розв'язуючи систему, знаходимо

$$A_n = 0, B_n = 0, n \neq 1, A_1 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}, B_1 = \frac{2}{\sqrt{5}} \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Отже, розв'язком задачі є функція

$$u(x, t) = e^{-t} \left(\cos \frac{\sqrt{5}}{2} t + \frac{2}{\sqrt{5}} \sin \frac{\sqrt{5}}{2} t \right) \sin \frac{3x}{2}.$$

Приклад 5. Розв'язати методом Фур'є мішану задачу

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < l, t > 0, \\ u|_{t=0} &= \varphi(x), \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(x), & 0 \leq x \leq l, \\ u|_{x=0} &= 0, \left(\frac{\partial u}{\partial x} + hu \right) \Big|_{x=l} = 0, & t \geq 0.\end{aligned}$$

Розв'язання. Шукаємо розв'язок рівняння у вигляді добутку $u(x, t) = X(x)T(t)$. Далі за схемою методу Фур'є після відокремлення змінних отримаємо звичайні диференціальні рівняння другого порядку

$$\begin{aligned}T''(t) + \lambda a^2 T(t) &= 0, \\ X''(x) + \lambda X(x) &= 0.\end{aligned}$$

Крайові умови для функції $X(x)$ мають вигляд

$$X(0) = 0, X'(l) + hX(l) = 0.$$

Знайдемо власні значення і власні функції цієї задачі, враховуючи що $\lambda > 0$.

Загальний розв'язок рівняння має вигляд

$$X(x) = C_1 \cos \sqrt{\lambda} x + C_2 \sin \sqrt{\lambda} x.$$

З крайових умов знаходимо

$$C_1 = 0, C_2(\sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} l + h \sin \sqrt{\lambda} l) = 0.$$

Оскільки $C_2 \neq 0$, то для визначення λ одержимо трансцендентне рівняння

$$\sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} l + h \sin \sqrt{\lambda} l = 0$$

або, позначаючи $\sqrt{\lambda} l = \mu$,

$$\frac{\mu}{l} \cos \mu + h \sin \mu = 0 \text{ або } \operatorname{tg} \mu = -\frac{\mu}{hl}. \quad (2.19)$$

Корені цього рівняння можна визначити графічно або наближеними методами. Наприклад, можна побудувати графіки функцій $y = \operatorname{tg} \mu$, $y = -\frac{\mu}{hl}$ і визначити абсциси точок перетину цих кривих (рис. 2.1). З рисунка видно, що корінь рівняння μ_k

необмежено зростає зі збільшенням індексу k , причому при достатньо великих k $\mu_k \approx \frac{2k-1}{2} \pi$.

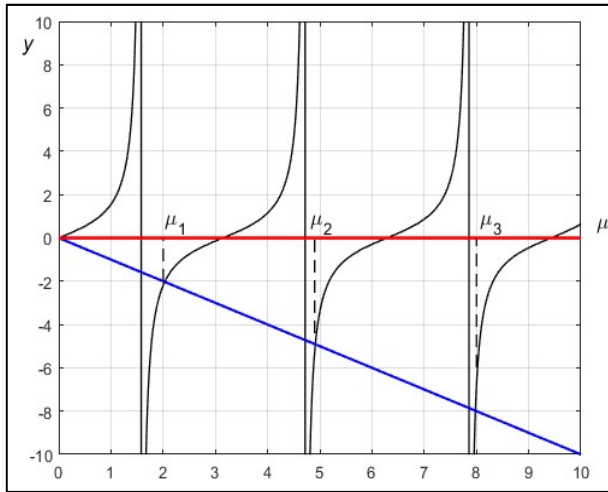


Рис. 2.1. Додатні корені рівняння $\operatorname{tg} \mu = -\mu/(hl)$

Нехай $\mu_k, k \in \mathbb{N}$ – додатні корені рівняння. Тоді $\lambda_k = \left(\frac{\mu_k}{l}\right)^2$ будуть власними значеннями задачі, а $X_k(x) = C_2 \sin \frac{\mu_k}{l} x, k \in \mathbb{N}$ – відповідними власними функціями, визначеними з точністю до сталого множника. Покажемо, що власні функції утворюють ортогональну систему функцій на проміжку $[0, l]$.

Справді

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^l \sin \frac{\mu_n x}{l} \sin \frac{\mu_m x}{l} dx = -\frac{l}{\mu_m} \left[\int_0^l \sin \frac{\mu_n x}{l} d \cos \frac{\mu_m x}{l} \right] = \\
 &= -\frac{l}{\mu_m} \left[\sin \mu_n \cos \mu_m - \frac{\mu_n}{l} \int_0^l \cos \frac{\mu_m x}{l} \cos \frac{\mu_n x}{l} dx \right] = \\
 &= -\frac{l}{\mu_m} \left[\sin \mu_n \cos \mu_m - \frac{\mu_n}{l} \frac{l}{\mu_m} \int_0^l \cos \frac{\mu_n x}{l} d \sin \frac{\mu_m x}{l} \right] =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{l}{\mu_m} \sin \mu_n \cos \mu_m + \frac{l \mu_n}{\mu_m^2} \cos \mu_n \sin \mu_m + \\
&\quad + \frac{l \mu_n \mu_n}{\mu_m^2 l} \int_0^l \sin \frac{\mu_n x}{l} \sin \frac{\mu_m x}{l} dx = \\
&= -\frac{l}{\mu_m} \sin \mu_n \cos \mu_m + \frac{l \mu_n}{\mu_m^2} \cos \mu_n \sin \mu_m + \frac{\mu_n^2}{\mu_m^2} I.
\end{aligned}$$

З останнього співвідношення одержимо

$$\begin{aligned}
I \left(1 - \frac{\mu_n^2}{\mu_m^2} \right) &= -\frac{l}{\mu_m} \sin \mu_n \cos \mu_m + \frac{l \mu_n}{\mu_m^2} \cos \mu_n \sin \mu_m, \\
I &= \frac{\mu_m^2}{\mu_m^2 - \mu_n^2} \left(-\frac{l}{\mu_m} \sin \mu_n \cos \mu_m + \frac{l \mu_n}{\mu_m^2} \cos \mu_n \sin \mu_m \right) = \\
&= \frac{l}{\mu_m^2 - \mu_n^2} (-\mu_m \sin \mu_n \cos \mu_m + \mu_n \cos \mu_n \sin \mu_m) = \\
&= \frac{l}{\mu_m^2 - \mu_n^2} \sin \mu_n \sin \mu_m (-\mu_m \operatorname{ctg} \mu_m + \mu_n \operatorname{ctg} \mu_n).
\end{aligned}$$

Враховуючи, що μ_m, μ_n – корені рівняння $\operatorname{ctg} \mu = -\frac{hl}{\mu}$, вираз у круглих дужках при $m \neq n$ дорівнює величині

$$-\mu_m \left(-\frac{hl}{\mu_m} \right) + \mu_n \left(-\frac{hl}{\mu_n} \right) = hl - hl = 0,$$

а значить

$$I = \int_0^l \sin \frac{\mu_n x}{l} \sin \frac{\mu_m x}{l} dx = 0, \quad m \neq n.$$

Виберемо тепер множник C_2 так, щоб власні функції $X_k(x)$ задовольняли умову нормування, тобто у вигляді $C_2 = \frac{1}{\mathcal{N}_k}$, де

$\mathcal{N}_k = \left\| \sin \frac{\mu_k}{l} x \right\|$. Тоді система функцій $X_k(x) = \frac{\sin \frac{\mu_k}{l} x}{\mathcal{N}_k}$ буде ортонормованою. Обчислимо

$$\mathcal{N}_k^2 = \int_0^l \sin^2 \frac{\mu_k x}{l} dx = \frac{1}{2} \int_0^l \left(1 - \cos \frac{2\mu_k x}{l} \right) dx =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{l}{2} - \frac{1}{2} \frac{l}{2\mu_k} \int_0^l d \sin \frac{2\mu_k x}{l} = \frac{l}{2} - \frac{l}{4\mu_k} \sin \frac{2\mu_k x}{l} \Big|_0^l = \frac{l}{2} - \frac{l}{4\mu_k} \sin 2\mu_k = \\
&= \frac{l}{2} - \frac{l}{4\mu_k} \frac{2\operatorname{tg} \mu_k}{1 + \operatorname{tg}^2 \mu_k} = \frac{l}{2} + \frac{l}{4\mu_k} \frac{2\mu_k}{hl} \frac{1}{1 + \frac{\mu_k^2}{h^2 l^2}} = \\
&= \frac{l}{2} \left[1 + \frac{1}{hl} \frac{h^2 l^2}{h^2 l^2 + \mu_k^2} \right] = \frac{l}{2} \left[1 + \frac{hl}{h^2 l^2 + \mu_k^2} \right] = \frac{l}{2} \frac{hl + h^2 l^2 + \mu_k^2}{h^2 l^2 + \mu_k^2}.
\end{aligned}$$

Для знаходження $T(t)$, враховуючи $\lambda = \lambda_k$, дістанемо рівняння

$$T_k''(t) + a^2 \left(\frac{\mu_k}{l} \right)^2 T_k(t) = 0,$$

розв'язок якого має вигляд

$$T_k(t) = A_k \cos \frac{\mu_k}{l} at + B_k \sin \frac{\mu_k}{l} at,$$

де A_k, B_k – довільні сталі. Таким чином, функції

$$u_k(x, t) = X_k(x) T_k(t) = \left(A_k \cos \frac{\mu_k}{l} at + B_k \sin \frac{\mu_k}{l} at \right) X_k(x)$$

задовольняють рівняння і крайові умови при довільних A_k, B_k .

В силу лінійності і однорідності рівняння та крайових умов сума частинних розв'язків

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{\mu_k}{l} at + B_k \sin \frac{\mu_k}{l} at \right) X_k(x)$$

також задовольняє рівняння і крайові умови, якщо цей ряд збігається і його можна почленно диференціювати в області два рази по x і два рази по t .

Коефіцієнти A_k, B_k визначаємо з початкових умов, які набувають вигляду

$$u(x, 0) = \varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k X_k(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \frac{a\mu_k}{l} X_k(x).$$

Якщо функції φ і ψ задовольняють умови розкладу в ряд Фур'є за системою ортонормованих власних функцій задачі Штурма-Ліувілля $\{X_k(x), k \in \mathbb{N}\}$, тоді

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k X_k(x), \quad \psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k X_k(x),$$

де

$$\varphi_k = \int_0^l \varphi(x) X_k(x) dx, \quad \psi_k = \int_0^l \psi(x) X_k(x) dx.$$

Із порівняння рядів маємо $A_k = \varphi_k$, $B_k = \frac{l}{\mu_k a} \psi_k$. Таким чином, розв'язок задачі дається рядом

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\varphi_k \cos \frac{\mu_k}{l} at + \frac{l}{\mu_k a} \psi_k \sin \frac{\mu_k}{l} at \right) X_k(x).$$

Завдання для аудиторної роботи

- 2.1. $u_{tt} = a^2 u_{xx}$, $0 < x < l$, $t > 0$,
 $u_x(0, t) = 0$, $u_x(l, t) = 0$, $t \geq 0$,
 $u(x, 0) = \varphi(x)$, $u_t(x, 0) = \psi(x)$, $0 \leq x \leq l$.
- 2.2. $u_{tt} = a^2 u_{xx}$, $0 < x < l$, $t > 0$,
 $u(0, t) = 0$, $u_x(l, t) = 0$, $t \geq 0$,
 $u(x, 0) = \varphi(x)$, $u_t(x, 0) = \psi(x)$, $0 \leq x \leq l$.
- 2.3. $u_{tt} = a^2 u_{xx}$, $0 < x < l$, $t > 0$,
 $u_x(0, t) = 0$, $u(l, t) = 0$, $t \geq 0$,
 $u(x, 0) = \varphi(x)$, $u_t(x, 0) = \psi(x)$, $0 \leq x \leq l$.
- 2.4. $u_{tt} = a^2 u_{xx}$, $0 < x < \pi$, $t > 0$,
 $u(0, t) = 0$, $u_x(\pi, t) = 0$, $t \geq 0$,
 $u(x, 0) = \frac{\pi x}{32} (2\pi - x)$, $u_t(x, 0) = 0$, $0 \leq x \leq \pi$.
- 2.5. $u_{tt} = 4u_{xx}$, $0 < x < \pi$, $t > 0$,
 $u_x(0, t) = 0$, $u_x(\pi, t) = 0$, $t \geq 0$,
 $u(x, 0) = 1$, $u_t(x, 0) = \cos 3x$, $0 \leq x \leq \pi$.
- 2.6. $u_{tt} = u_{xx} - u$, $0 < x < \pi$, $t > 0$,
 $u(0, t) = 0$, $u(\pi, t) = 0$, $t \geq 0$,
 $u(x, 0) = 0$, $u_t(x, 0) = x(\pi - x)$, $0 \leq x \leq \pi$.
- 2.7. $u_{tt} = a^2 u_{xx}$, $0 < x < \frac{1}{2}$, $t > 0$,
 $u(0, t) = 0$, $u_x\left(\frac{1}{2}, t\right) = 0$, $t \geq 0$,
 $u(x, 0) = \sin 3\pi x + \sin 5\pi x$, $u_t(x, 0) = \sin \pi x$, $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$.

- 2.8. $u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$
 $u(0, t) = 0, \quad u_x(l, t) + hu(l, t) = 0, \quad t \geq 0,$
 $u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l.$
- 2.9. $u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$
 $u_x(0, t) = 0, \quad u_x(l, t) + hu(l, t) = 0, \quad t \geq 0,$
 $u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l.$
- 2.10. $u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$
 $u_x(0, t) - hu(0, t) = 0, \quad u_x(l, t) + hu(l, t) = 0, \quad t \geq 0,$
 $u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l.$

Завдання для самостійної роботи

- 2.11. $u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0,$
 $u(0, t) = 0, \quad u(\pi, t) = 0, \quad t \geq 0,$
 $u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = \sin 3x, \quad 0 \leq x \leq \pi.$
- 2.12. $u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}, \quad t > 0,$
 $u(0, t) = 0, \quad u\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = 0, \quad t \geq 0,$
 $u(x, 0) = \sin 2x + \sin 4x, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}.$
- 2.13. $u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0,$
 $u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, \quad t \geq 0,$
 $u(x, 0) = \sin \pi x, \quad u_t(x, 0) = \sin 2\pi x, \quad 0 \leq x \leq 1.$
- 2.14. $u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < 2, \quad t > 0,$
 $u(0, t) = 0, \quad u(2, t) = 0, \quad t \geq 0,$
 $u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = \sin \frac{\pi}{2} x + \sin \pi x, \quad 0 \leq x \leq 2.$
- 2.15. $u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$
 $u_x(0, t) = 0, \quad u_x(l, t) = 0, \quad t \geq 0,$
 $u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 1 + \cos \frac{2\pi}{l} x, \quad 0 \leq x \leq l.$
- 2.16. $u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < 2, \quad t > 0,$
 $u_x(0, t) = 0, \quad u_x(2, t) = 0, \quad t \geq 0,$
 $u(x, 0) = 1 + \cos \frac{3\pi}{2} x, \quad u_t(x, 0) = \cos \pi x, \quad 0 \leq x \leq 2.$

- 2.17. $u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0,$
 $u_x(0, t) = 0, \quad u_x(\pi, t) = 0, \quad t \geq 0,$
 $u(x, 0) = \cos 5x + 1, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi.$
- 2.18. $u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}, \quad t > 0,$
 $u_x(0, t) = 0, \quad u_x\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = 0, \quad t \geq 0,$
 $u(x, 0) = \cos 4x, \quad u_t(x, 0) = 1, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}.$
- 2.19. $u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0,$
 $u_x(0, t) = 0, \quad u_x(1, t) = 0, \quad t \geq 0,$
 $u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 1 + \cos 2\pi x, \quad 0 \leq x \leq 1.$
- 2.20. $u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$
 $u(0, t) = 0, \quad u_x(l, t) = 0, \quad t \geq 0,$
 $u(x, 0) = \sin \frac{5\pi}{2l} x, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq l.$
- 2.21. $u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0,$
 $u(0, t) = 0, \quad u_x(\pi, t) = 0, \quad t \geq 0,$
 $u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = \sin \frac{3}{2} x, \quad 0 \leq x \leq \pi.$
- 2.22. $u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}, \quad t > 0,$
 $u(0, t) = 0, \quad u_x\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = 0, \quad t \geq 0,$
 $u(x, 0) = \sin 3x, \quad u_t(x, 0) = \sin x, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}.$
- 2.23. $u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0,$
 $u(0, t) = 0, \quad u_x(1, t) = 0, \quad t \geq 0,$
 $u(x, 0) = \sin \frac{\pi}{2} x + \sin \frac{3\pi}{2} x, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1.$
- 2.24. $u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < 2, \quad t > 0,$
 $u(0, t) = 0, \quad u_x(2, t) = 0, \quad t \geq 0,$
 $u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = \sin \frac{\pi}{4} x + \sin \frac{3\pi}{4} x, \quad 0 \leq x \leq 2.$
- 2.25. $u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$
 $u_x(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad t \geq 0,$
 $u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = \cos \frac{\pi}{2l} x, \quad 0 \leq x \leq l.$

$$2.26. u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0,$$

$$u_x(0, t) = 0, \quad u(\pi, t) = 0, \quad t \geq 0,$$

$$u(x, 0) = \cos \frac{5}{2}x, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi.$$

$$2.27. u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}, \quad t > 0,$$

$$u_x(0, t) = 0, \quad u\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = 0, \quad t \geq 0.$$

$$u(x, 0) = \cos x + \cos 3x, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}.$$

$$2.28. u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0,$$

$$u_x(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, \quad t \geq 0,$$

$$u(x, 0) = \cos \frac{3\pi}{2}x, \quad u_t(x, 0) = \cos \frac{\pi}{2}x, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

$$2.29. u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < 2, \quad t > 0,$$

$$u_x(0, t) = 0, \quad u(2, t) = 0, \quad t \geq 0,$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = \cos \frac{3\pi}{4}x + \cos \frac{5\pi}{4}x, \quad 0 \leq x \leq 2.$$

2.30 – 2.48. Розглянути задачі (2.11) – (2.29) для рівняння

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} - 2u_t - u.$$

ТЕМА 3. ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ФУР'Є ДО МІШАНИХ ЗАДАЧ ДЛЯ НЕОДНОРІДНОГО ХВИЛЬОВОГО РІВНЯННЯ

З точки зору методу відокремлення змінних попередні задачі розв'язувались за єдиною схемою, оскільки мали однакову математичну структуру: вони містили однорідне рівняння з однорідними крайовими умовами. Перш ніж поширити метод Фур'є на задачі з довільними неоднорідностями, виділимо клас задач, що досить просто зводяться до вже розглянутих. Серед них важливими є так звані задачі зі стаціонарними неоднорідностями, коли крайові умови і права частина рівняння не залежать від часу. Суть метода полягає у знаходженні частинного розв'язку, що задовольняє рівняння і крайові умови. Методику побудови розв'язку продемонструємо на задачі

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \Phi(x), \quad 0 < x < l, t > 0, \quad (3.1)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (3.2)$$

$$u(0, t) = \mu_1, u(l, t) = \mu_2, t \geq 0, \mu_1, \mu_2 = \text{const}. \quad (3.3)$$

Розв'язок задачі (3.1) – (3.3) природно шукати у вигляді

$$u(x, t) = v(x, t) + u_0(x), \quad (3.4)$$

де $u_0(x)$ – стаціонарне положення струни (статичний прогин), яке визначається задачею

$$a^2 u_0''(x) + \Phi(x) = 0, 0 < x < l, u_0(0) = \mu_1, u_0(l) = \mu_2, \quad (3.5)$$

а $v(x, t)$ – відхилення від цього положення.

Неважко бачити, що розв'язком задачі (3.5) є функція

$$u_0(x) = \mu_1 + \frac{\mu_2 - \mu_1}{l}x - \frac{1}{a^2} \int_0^x \left(\int_0^{\xi_2} \Phi(\xi_1) d\xi_1 \right) d\xi_2 + \frac{x}{a^2 l} \int_0^l \left(\int_0^{\xi_2} \Phi(\xi_1) d\xi_1 \right) d\xi_2.$$

Зокрема, якщо $\Phi(x) = \Phi_0 = \text{const}$, то

$$u_0(x) = \mu_1 + \frac{\mu_2 - \mu_1}{l}x + \frac{\Phi_0}{2a^2}(lx - x^2).$$

Підставляючи (3.4) в (3.1) – (3.3) і враховуючи (3.5), для функції $v(x, t)$ одержимо мішану задачу для однорідного рівняння

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, t > 0$$

з однорідними крайовими умовами

$$v(0, t) = 0, v(l, t) = 0, t \geq 0$$

і початковими умовами

$$v|_{t=0} = \varphi(x) - u_0(x), \left. \frac{\partial v}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(x), 0 \leq x \leq l,$$

яка розв'язується за викладеною в темі 2 схемою методу Фур'є.

Розглянемо застосування методу відокремлення змінних для неоднорідного хвильового рівняння на прикладі задачі про вимушені коливання однорідної струни з закріпленими кінцями.

Нехай в області $D = \{(x, t): 0 < x < l, t > 0\}$ необхідно знайти двічі неперервно диференційований розв'язок рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad 0 < x < l, t > 0, \quad (3.6)$$

який задовольняє початкові умови

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(x), 0 \leq x \leq l \quad (3.7)$$

і крайові умови

$$u(0, t) = 0, u(l, t) = 0, t \geq 0. \quad (3.8)$$

В силу теореми Стеклова при кожному $t > 0$ розв'язок задачі, якщо він існує, може бути розкладений у ряд Фур'є

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x), \quad (3.9)$$

де $X_n(x)$ – ортонормована система власних функцій задачі Штурма – Ліувілля

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad X(0) = 0, X(l) = 0,$$

до якої зводиться розв'язок однорідного рівняння, що відповідає рівнянню (3.6), при умовах (3.8).

Якщо помножити співвідношення (3.9) на $X_k(x)$ і проінтегрувати його по x від 0 до l (обидві частини рівності помножити скалярно на X_k), то, очевидно, в силу ортонормованості системи власних функцій $X_n(x)$ матимемо

$$(u, X_k) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \int_0^l X_k(x) X_n(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) (X_k, X_n) = T_k(t).$$

Отже,

$$T_n(t) = (u, X_n). \quad (3.10)$$

Множимо рівняння (3.6) на $X_n(x)$ та інтегруємо його по x від 0 до l

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, X_n \right) - a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, X_n \right) = (f, X_n).$$

Враховуючи, що для функцій u та X_n , які задовольняють ті самі однорідні крайові умови, оператор $\mathcal{L} = -\frac{d^2}{dx^2}$ задачі Штурма – Ліувілля є самоспряженим, тобто

$$\left(-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, X_n \right) = (u, -X_n'') = (u, \lambda_n X_n) = \lambda_n (u, X_n) = \lambda_n T_n(t),$$

а також беручи до уваги співвідношення

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, X_n \right) = \int_0^l \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} X_n(x) dx = \frac{d^2}{dt^2} \int_0^l u(x, t) X_n(x) dx = \frac{d^2 T_n}{dt^2},$$

одержимо неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

$$T_n''(t) + \lambda_n a^2 T_n(t) = f_n(t),$$

де

$$f_n(t) = (f, X_n) = \int_0^l f(x, t) X_n(x) dx -$$

коефіцієнт Фур'є функції $f(x, t)$ за системою $X_n(x)$.

Отримаємо початкові умови, які повинні задовольняти функція $T_n(t)$. Для цього скористаємося співвідношенням (3.10), підставивши в нього $t = 0$:

$$T_n(0) = (u|_{t=0}, X_n) = \int_0^l u(x, 0) X_n(x) dx = \int_0^l \varphi(x) X_n(x) dx = \\ = (\varphi, X_n) = \varphi_n.$$

Продиференціюємо (3.9) по t

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} T_n'(t) X_n(x),$$

помножимо скалярно на $X_k(x)$ і при $t = 0$ отримаємо другу початкову умову

$$T_k'(0) = \left(\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0}, X_k \right) = \int_0^l \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} X_k(x) dx = (\psi, X_k) = \\ = \int_0^l \psi(x) X_k(x) dx = \psi_k.$$

Таким чином, для функції $T_n(t)$ маємо задачу Коші

$$T_n''(t) + \lambda_n a^2 T_n(t) = f_n(t), \quad (3.11)$$

$$T_n(0) = \varphi_n, T_n'(0) = \psi_n. \quad (3.12)$$

Розв'язок задачі (3.11), (3.12) знаходимо методом варіації довільної сталої

$$T_n(t) = \varphi_n \cos \sqrt{\lambda_n} a t + \frac{\psi_n}{\sqrt{\lambda_n} a} \sin \sqrt{\lambda_n} a t + \\ + \frac{1}{\sqrt{\lambda_n} a} \int_0^t f_n(\tau) \sin \sqrt{\lambda_n} a (t - \tau) d\tau. \quad (3.13)$$

Підставляючи знайдений вираз у (3.9), отримаємо розв'язок задачі (3.6) – (3.8)

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\varphi_n \cos \sqrt{\lambda_n} a t + \frac{\psi_n}{\sqrt{\lambda_n} a} \sin \sqrt{\lambda_n} a t \right) X_n(x) + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_n} a} \int_0^t f_n(\tau) \sin \sqrt{\lambda_n} a (t - \tau) d\tau \right) X_n(x), \quad (3.14)$$

якщо ряди, що входять у (3.14), збігаються рівномірно і їх можна

почленно диференціювати в області D два рази по x і два рази по t .

В умовах нашої задачі $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$, $X_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{n\pi}{l} x$, $n \in \mathbb{N}$. Тоді формула (3.14) для розв'язку мішаної задачі (3.1) – (3.3) набуває вигляду

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\varphi_n \cos \frac{n\pi}{l} at + \frac{l}{n\pi a} \psi_n \sin \frac{n\pi}{l} at \right) \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{n\pi}{l} x + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{l}{n\pi a} \int_0^t f_n(\tau) \sin \frac{n\pi}{l} a(t - \tau) d\tau \right) \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{n\pi}{l} x. \quad (3.15)$$

Перша сума описує вільні коливання, викликані початковими зміщеннями φ і швидкостями ψ . Другий доданок описує вимушені коливання під впливом зовнішньої сили інтенсивності $f(x, t)$.

Теорема 3.1. Припустимо, що

- 1) виконуються умови теореми 2.1;
- 2) функція $f(x, t)$ неперервна разом із своїми похідними за змінною x до другого порядку включно і задовольняє умови

$$f(0, t) = f(l, t) = 0, \quad t \geq 0.$$

Тоді функція $u(x, t)$, визначена рядом (3.15), є класичним розв'язком задачі (3.1) – (3.3).

Якщо в мішаній задачі крайові умови неоднорідні

$$\begin{cases} A_1 u(0, t) - A_2 u_x(0, t) = \mu_1(t), \\ B_1 u(l, t) + B_2 u_x(l, t) = \mu_2(t), \end{cases} \quad (3.16)$$

то таку задачу завжди можна звести до задачі з однорідними крайовими умовами, якщо підібрати гладку функцію $w(x, t)$, яка б задовольняла крайові умови (3.16).

Тоді розв'язок задачі (3.6), (3.7), (3.16) шукаємо у вигляді суми

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x, t),$$

де $v(x, t)$ – нова шукана функція, яка задовольняє рівняння

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \bar{f}(x, t), \quad 0 < x < l, t > 0, \quad (3.17)$$

початкові умови

$$v|_{t=0} = \bar{\varphi}(x), \quad \left. \frac{\partial v}{\partial t} \right|_{t=0} = \bar{\psi}(x), \quad 0 \leq x \leq l \quad (3.18)$$

і крайові умови

$$\begin{cases} A_1 v(0, t) - A_2 v_x(0, t) = 0, \\ B_1 v(l, t) + B_2 v_x(l, t) = 0, \end{cases} t \geq 0. \quad (3.19)$$

Тут

$$\begin{aligned} \bar{f}(x, t) &= f(x, t) - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \\ \bar{\varphi}(x) &= \varphi(x) - w(x, 0), \quad \bar{\psi}(x) = \psi(x) - \left. \frac{\partial w}{\partial t} \right|_{t=0}. \end{aligned}$$

Функцію $w(x, t)$ завжди можна знайти у вигляді

$$w(x, t) = c(t) + xd(t), \quad (3.20)$$

крім випадку умов другого роду, коли $A_1 = B_1 = 0$. Справді, якщо підставити (3.20) в умови (3.16), одержимо систему рівнянь для визначення $c(t), d(t)$:

$$\begin{cases} A_1 w(0, t) - A_2 w_x(0, t) = \mu_1(t), \\ B_1 w(l, t) + B_2 w_x(l, t) = \mu_2(t), \end{cases} \quad (3.21)$$

визначник якої відмінний від нуля за умови, що A_1 і B_1 одночасно не перетворюються у нуль. Якщо ж $A_1 = B_1 = 0$, тобто маємо умови другого роду

$$w_x(0, t) = \mu_1(t), \quad w_x(l, t) = \mu_2(t),$$

то $w(x, t)$ слід шукати у вигляді квадратичної функції

$$w(x, t) = xc(t) + x^2 d(t). \quad (3.22)$$

У додатку 2 наведено вигляд функції $w(x, t)$ для випадку крайових умов, які найчастіше зустрічаються у прикладних задачах.

Приклад 6. Знайти методом Фур'є розв'язок мішаної задачі для хвильового рівняння:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 5u - 2t + 5x(1 + xt) + 1 - t \cos 2x, \\ 0 &< x < \pi, t > 0, \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$u|_{t=0} = x, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = x^2, \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad (3.24)$$

$$u_x(0, t) = 1, \quad u_x(\pi, t) = 2\pi t + 1, \quad t \geq 0. \quad (3.25)$$

Розв'язання. Оскільки крайові умови задачі неоднорідні, шукатимемо її розв'язок у вигляді суми двох функцій

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x, t),$$

де функція $w(x, t)$ задовольняє неоднорідні крайові умови другого роду (3.25) і вибирається за формулою (3.22) як квадратична за змінною x функція. Згідно з додатком 2 $w(x, t) = tx^2 + x$.

Функція $v(x, t)$ задовольняє рівняння

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - 5v - 2t + 5x(1 + xt) + 1 - t \cos 2x - \\ - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 5w, \end{aligned}$$

початкові умови

$$v|_{t=0} = x - w|_{t=0}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} \Big|_{t=0} = x^2 - \frac{\partial w}{\partial t} \Big|_{t=0}$$

і однорідні крайові умови.

Враховуючи, що

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 2t, \quad 5w = 5tx^2 + 5x, \quad w|_{t=0} = x, \quad \frac{\partial w}{\partial t} \Big|_{t=0} = x^2,$$

для функції $v(x, t)$ дістанемо задачу

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - 5v + 1 - t \cos 2x, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0, \quad (3.26)$$

$$v|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad (3.27)$$

$$v_x(0, t) = 0, \quad v_x(\pi, t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (3.28)$$

Оскільки крайові умови (3.28) однорідні, застосуємо для її розв'язання метод відокремлення змінних. Розв'язок задачі, якщо він існує, шукатимемо у вигляді ряду Фур'є

$$v(x, t) = \sum_n T_n(t) X_n(x) \quad (3.29)$$

за ортонормованою системою власних функцій $X_n(x)$ задачі Штурма – Ліувілля

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad X'(0) = 0, \quad X'(\pi) = 0,$$

отриманої для однорідної задачі, яка відповідає задачі (3.26), (3.28).

Враховуючи, що за властивостями задачі Штурма – Ліувілля $\lambda \geq 0$, розглянемо окремо випадки $\lambda = 0, \lambda > 0$.

1. $\lambda = 0$. Загальний розв'язок рівняння має вигляд $X(x) = C_1 x + C_2$. З крайових умов знаходимо $C_1 = 0, C_2 = \text{const}$. Отже, $\lambda_0 = 0$ – власне значення, якому відповідає власна функція, яка є сталою. Виберемо її у вигляді $X_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$, щоб система функцій була ортонормованою.

2. $\lambda > 0$. Загальний розв'язок рівняння має вигляд

$$X(x) = C_1 \cos \sqrt{\lambda} x + C_2 \sin \sqrt{\lambda} x.$$

Підпорядковуючи цю функцію крайовим умовам, одержимо $C_2 = 0, C_1 \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} \pi = 0$ або $\sin \sqrt{\lambda} \pi = 0$. З останнього рівняння знаходимо $\sqrt{\lambda} \pi = n\pi, \lambda_n = n^2, n \in \mathbb{N}$. Цим власним значенням відповідають власні функції $X_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos n x, n \in \mathbb{N}$.

Таким чином, у (3.29) індекс суми n змінюється від 0 до ∞ .

Помножимо рівняння (3.26) та початкові умови (3.27) скалярно на $X_n(x)$:

$$\left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, X_n \right) - \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, X_n \right) + 5(v, X_n) = (1, X_n) - t(\cos 2x, X_n),$$

$$T_n(0) = (v|_{t=0}, X_n) = 0, \quad T_n'(0) = \left(\frac{\partial v}{\partial t} \Big|_{t=0}, X_n \right) = 0.$$

З (3.29) внаслідок ортонормованості системи функцій $X_n(x)$ маємо $T_n(t) = (v, X_n)$. Враховуючи також рівності $1 = \sqrt{\pi} X_0, \cos 2x = \sqrt{\frac{\pi}{2}} X_2$, дістанемо задачу Коші для функції $T_n(t)$

$$T_n''(t) + (\lambda_n + 5)T_n(t) = \sqrt{\pi}(X_0, X_n) - \sqrt{\frac{\pi}{2}} t(X_2, X_n),$$

$$T_n(0) = 0, T_n'(0) = 0.$$

Розв'яжемо її. Для цього розглянемо випадки: $n = 0, n = 2, n \neq 0, 2$. Тоді відповідні задачі Коші мають вигляд

1) $n = 0$:

$$T_0''(t) + 5T_0(t) = \sqrt{\pi}, \quad (3.30)$$

$$T_0(0) = 0, T_0'(0) = 0; \quad (3.31)$$

2) $n = 2$:

$$T_2''(t) + 9T_2(t) = -\sqrt{\frac{\pi}{2}}t, \quad (3.32)$$

$$T_2(0) = 0, T_2'(0) = 0; \quad (3.33)$$

3) $n \neq 0, 2$:

$$T_n''(t) + (n^2 + 5)T_n(t) = 0, \quad (3.34)$$

$$T_n(0) = 0, T_n'(0) = 0. \quad (3.35)$$

Знайдемо їхні розв'язки.

1) Загальний розв'язок неоднорідного рівняння $T_0(t)$ будемо шукати як суму загального розв'язку однорідного рівняння

$$\bar{T}_0(t) = A_0 \cos \sqrt{5}t + B_0 \sin \sqrt{5}t$$

і частинного розв'язку неоднорідного рівняння $\bar{\bar{T}}_0(t)$ за виглядом його правої частини як сталу

$$\bar{\bar{T}}_0(t) = D.$$

Підставляючи $\bar{\bar{T}}_0(t) = D$ у рівняння (3.30), знаходимо сталу $D = \frac{1}{5}\sqrt{\pi}$, а отже, і $\bar{\bar{T}}_0(t) = \frac{1}{5}\sqrt{\pi}$.

Тоді загальний розв'язок неоднорідного рівняння має вигляд

$$T_0(t) = A_0 \cos \sqrt{5}t + B_0 \sin \sqrt{5}t + \frac{1}{5}\sqrt{\pi}.$$

З початкових умов (3.31) визначаємо $A_0 = -\frac{1}{5}\sqrt{\pi}$, $B_0 = 0$.

Таким чином,

$$T_0(t) = \frac{1}{5}\sqrt{\pi}(1 - \cos \sqrt{5}t).$$

2) Загальний розв'язок неоднорідного рівняння (3.32) будемо шукати як суму загального розв'язку однорідного рівняння

$$\bar{T}_2(t) = A_2 \cos 3t + B_2 \sin 3t$$

і частинного розв'язку неоднорідного рівняння $\bar{\bar{T}}_2(t)$ за виглядом його правої частини у формі

$$\bar{\bar{T}}_2(t) = Ct + D.$$

Підставляючи $\bar{\bar{T}}_2(t)$ у рівняння (3.32), знаходимо $D = 0$, $C = -\frac{1}{9}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$. Отже, $\bar{\bar{T}}_2(t) = -\frac{1}{9}\sqrt{\frac{\pi}{2}}t$.

Тоді загальний розв'язок неоднорідного рівняння має вигляд

$$T_2(t) = A_2 \cos 3t + B_2 \sin 3t - \frac{1}{9} \sqrt{\frac{\pi}{2}} t.$$

Враховуючи початкові умови (3.33), маємо $A_2 = 0, B_2 = \frac{1}{27} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

Таким чином

$$T_2(t) = \frac{1}{27} \sqrt{\frac{\pi}{2}} (\sin 3t - 3t).$$

3. Задача Коші (3.34), (3.35) при $n \neq 0, 2$ має тривіальний розв'язок $T_n(t) = 0$. Тоді внаслідок єдиності розв'язку задачі Коші для звичайного диференціального рівняння другого порядку інших розв'язків бути не може. Отже,

$$v(x, t) = \frac{1}{5} (1 - \cos \sqrt{5}t) + \frac{1}{27} (\sin 3t - 3t) \cos 2x,$$

а шуканий розв'язок задачі (3.23) – (3.25) визначає функція

$$u(x, t) = \frac{1}{5} (1 - \cos \sqrt{5}t) + \frac{1}{27} (\sin 3t - 3t) \cos 2x + tx^2 + x.$$

Приклад 7. Знайти методом Фур'є розв'язок мішаної задачі для хвильового рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 3 \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u + x(4 + t) + \cos \frac{3x}{2}, 0 < x < \pi, t > 0, \quad (3.36)$$

$$u|_{t=0} = x, \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = x, 0 \leq x \leq \pi, \quad (3.37)$$

$$u_x(0, t) = t + 1, u(\pi, t) = \pi(t + 1), t \geq 0. \quad (3.38)$$

Розв'язання. Оскільки крайові умови задачі неоднорідні, шукатимемо її розв'язок у вигляді суми двох функцій

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x, t),$$

де функція $w(x, t)$ задовольняє неоднорідні крайові умови (3.38) і вибирається за формулою (3.20) як лінійна за змінною x функція. Згідно з додатком 2 вона має вигляд $w(x, t) = tx + x$.

Функція $v(x, t)$ задовольняє рівняння

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + 3 \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - v + x(4 + t) + \cos \frac{3x}{2} - 3 \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - w,$$

початкові умови

$$v|_{t=0} = x - w|_{t=0}, \frac{\partial v}{\partial t}\bigg|_{t=0} = x - \frac{\partial w}{\partial t}\bigg|_{t=0}$$

і однорідні крайові умови.

Враховуючи, що

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \frac{\partial w}{\partial t} = x, w = tx + x, w|_{t=0} = x, \frac{\partial w}{\partial t}\bigg|_{t=0} = x,$$

для функції $v(x, t)$ дістанемо задачу

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + 3 \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - v + \cos \frac{3x}{2}, 0 < x < \pi, t > 0, \quad (3.39)$$

$$v|_{t=0} = 0, \frac{\partial v}{\partial t}\bigg|_{t=0} = 0, 0 \leq x \leq \pi, \quad (3.40)$$

$$v_x(0, t) = 0, v(\pi, t) = 0, t \geq 0. \quad (3.41)$$

Оскільки крайові умови (3.41) однорідні, застосуємо для її розв'язання метод відокремлення змінних. Розв'язок задачі, якщо він існує, шукатимемо у вигляді ряду Фур'є

$$v(x, t) = \sum_n T_n(t) X_n(x) \quad (3.42)$$

за ортонормованою системою власних функцій $X_n(x)$ задачі Штурма – Ліувілля

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad X'(0) = 0, X(\pi) = 0,$$

отриманої для однорідної задачі, яка відповідає задачі (3.39), (3.41).

Враховуючи, що за властивостями задачі Штурма – Ліувілля $\lambda > 0$, загальний розв'язок рівняння для функції $X(x)$ має вигляд

$$X(x) = C_1 \cos \sqrt{\lambda} x + C_2 \sin \sqrt{\lambda} x.$$

Підпорядковуючи цю функцію крайовим умовам, одержимо $C_2 = 0, C_1 \cos \sqrt{\lambda} \pi = 0$ або $\cos \sqrt{\lambda} \pi = 0$. З останнього рівняння знаходимо $\sqrt{\lambda} \pi = \left(n + \frac{1}{2}\right) \pi, n \in \mathbb{N}_0$. Таким чином, власні значення задачі даються формулою $\lambda_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)^2, n \in \mathbb{N}_0$. Їм відповідають нормовані власні функції

$$X_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x, n \in \mathbb{N}_0.$$

Таким чином, у (3.42) індекс суми n змінюється від 0 до ∞ .

Помножимо рівняння (3.39) та початкові умови (3.40) скалярно

$$\text{на } X_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x:$$

$$\left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, X_n\right) + 3\left(\frac{\partial v}{\partial t}, X_n\right) - \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, X_n\right) + (v, X_n) = \left(\cos \frac{3x}{2}, X_n\right),$$

$$T_n(0) = (v|_{t=0}, X_n) = 0,$$

$$T_n'(0) = \left(\frac{\partial v}{\partial t}\Big|_{t=0}, X_n\right) = 0.$$

З (3.42) внаслідок ортонормованості системи функцій $X_n(x)$ маємо $T_n(t) = (v, X_n)$. Враховуючи також, що $\cos \frac{3x}{2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} X_1$, дістанемо задачу Коші для функції $T_n(t)$

$$T_n''(t) + 3T_n'(t) + (\lambda_n + 1)T_n(t) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}(X_1, X_n),$$

$$T_n(0) = 0, T_n'(0) = 0.$$

Розв'яжемо її. Для цього розглянемо випадки: $n = 1$, $n \neq 1$. Тоді відповідні задачі Коші мають вигляд

1) $n = 1$:

$$T_1''(t) + 3T_1'(t) + \frac{13}{4}T_1(t) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \quad (3.43)$$

$$T_1(0) = 0, T_1'(0) = 0; \quad (3.44)$$

2) $n \neq 1$:

$$T_n''(t) + 3T_n'(t) + (\lambda_n + 1)T_n(t) = 0, \quad (3.45)$$

$$T_n(0) = 0, T_n'(0) = 0. \quad (3.46)$$

Знайдемо їхні розв'язки.

1) Загальний розв'язок неоднорідного рівняння $T_1(t)$ будемо шукати як суму загального розв'язку однорідного рівняння і частинного розв'язку неоднорідного рівняння, який шукаємо за

правою частиною рівняння у вигляді сталої. Тоді загальний розв'язок неоднорідного рівняння матиме вигляд

$$T_1(t) = e^{-\frac{3}{2}t}(A_1 \cos t + B_1 \sin t) + \frac{4}{13} \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

З початкових умов (3.44) визначаємо

$$A_1 = -\frac{4}{13} \sqrt{\frac{\pi}{2}}, B_1 = -\frac{6}{13} \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Таким чином,

$$T_1(t) = \frac{1}{13} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[e^{-\frac{3}{2}t}(-4 \cos t - 6 \sin t) + 4 \right].$$

2) Задача Коші (3.45), (3.46) при $n \neq 1$ має лише тривіальний розв'язок $T_n(t) = 0$.

Отже,

$$v(x, t) = \frac{1}{13} \left[e^{-\frac{3}{2}t}(-4 \cos t - 6 \sin t) + 4 \right] \cos \frac{3x}{2},$$

а шуканий розв'язок задачі (3.36) – (3.38) визначає функція

$$u(x, t) = \frac{2}{13} \left[e^{-\frac{3}{2}t}(-2 \cos t - 3 \sin t) + 2 \right] \cos \frac{3x}{2} + tx + x.$$

Приклад 8. Розв'язати методом Фур'є задачу про вимушені коливання струни з закріпленими кінцями, викликані дією зовнішньої сили інтенсивності $f(x, t) = A \sin \omega t$. Початкові відхилення точок струни і швидкості руху відсутні. Окремо дослідити коливання струни у випадку резонансу.

Розв'язання. Вказана задача очевидно зводиться до задачі для неоднорідного хвильового рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A \sin \omega t, 0 < x < l, t > 0 \quad (3.47)$$

з однорідними початковими

$$u|_{t=0} = 0, \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, 0 \leq x \leq l \quad (3.48)$$

і однорідними крайовими умовами

$$u(0, t) = 0, u(l, t) = 0, t \geq 0. \quad (3.49)$$

Задача Штурма – Ліувілля для однорідної задачі, яка відповідає задачі (3.47), (3.49), має вигляд

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad X(0) = X(l) = 0. \quad (3.50)$$

Власними значеннями і власними функціями цієї задачі є

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \quad X_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{n\pi}{l} x, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3.51)$$

Розв'язок задачі (3.47) – (3.49) шукаємо у вигляді ряду

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{n\pi}{l} x, \quad (3.52)$$

де

$$T_n(t) = (u, X_n). \quad (3.53)$$

Помножимо рівняння та початкові умови скалярно на $X_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{n\pi}{l} x$. Дістанемо задачу Коші для неоднорідного диференціального рівняння другого порядку

$$T_n''(t) + \left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 T_n(t) = \beta_n \sin \omega t, \quad (3.54)$$

$$T_n(0) = 0, \quad T_n'(0) = 0, \quad (3.55)$$

де

$$\beta_n = (A, X_n) = \sqrt{\frac{2}{l}} A \int_0^l \sin \frac{n\pi}{l} x dx = -\sqrt{\frac{2}{l}} \frac{Al}{n\pi} [(-1)^n - 1]. \quad (3.56)$$

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння $T_n(t)$ будемо шукати як суму загального розв'язку однорідного рівняння

$$\overline{T}_n(t) = A_n \cos \frac{n\pi}{l} at + B_n \sin \frac{n\pi}{l} at \quad (3.57)$$

і частинного розв'язку неоднорідного рівняння $\overline{\overline{T}}_n(t)$ за виглядом його правої частини. Розглянемо випадок, коли $\omega \neq \omega_n = \frac{an\pi}{l}$, $n \in \mathbb{N}$, тобто частота зовнішніх коливань ω не дорівнює жодній із частот власних коливань струни. Тоді частинний розв'язок будемо шукати у вигляді

$$\overline{\overline{T}}_n(t) = F_n \sin \omega t + D_n \cos \omega t. \quad (3.58)$$

Підставляючи (3.58) у рівняння (3.54), знаходимо коефіцієнти $F_n = \frac{\beta_n}{\omega_n^2 - \omega^2}$, $D_n = 0$. Отже, частинний розв'язок неоднорідного рівняння має вигляд

$$\bar{T}_n(t) = \frac{\beta_n}{\omega_n^2 - \omega^2} \sin \omega t, \quad (3.59)$$

а його загальний розв'язок

$$T_n(t) = A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t + \frac{\beta_n}{\omega_n^2 - \omega^2} \sin \omega t.$$

З початкових умов (3.55) визначаємо $A_n = 0$, $B_n = -\frac{\beta_n \omega}{\omega_n(\omega_n^2 - \omega^2)}$.

Таким чином,

$$T_n(t) = \frac{\beta_n}{\omega_n^2 - \omega^2} \left(\sin \omega t - \frac{\omega}{\omega_n} \sin \omega_n t \right). \quad (3.60)$$

Враховуючи, що

$$\beta_{2k+1} = \sqrt{\frac{2}{l}} \frac{2Al}{(2k+1)\pi}, k \in \mathbb{N}_0, \beta_{2k} = 0, k \in \mathbb{N}, \omega_{2k+1} = \frac{(2k+1)a\pi}{l}$$

та підставляючи їх у ряд (3.52), одержимо

$$u(x, t) = \frac{4A}{\pi} \sin \omega t \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin \frac{(2k+1)\pi}{l} x}{(2k+1)(\omega_{2k+1}^2 - \omega^2)} - \frac{4A\omega l}{\pi^2 a} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin \frac{(2k+1)\pi}{l} at \sin \frac{(2k+1)\pi}{l} x}{(2k+1)^2(\omega_{2k+1}^2 - \omega^2)}. \quad (3.61)$$

Перший доданок у (3.61) має таку саму частоту, що і збурювальна сила $f(x, t) = A \sin \omega t$, він характеризує вимушені коливання струни. Другий доданок складається із нескінченного числа гармонічних коливань з частотою ω_{2k+1} і описує вільні власні коливання, викликані зовнішньою збурювальною силою.

Формула розв'язку (3.61) показує, що якщо частота зовнішньої збурювальної сили ω близька до однієї з частот власних коливань, то в розкладі (3.61) з'являється доданок з особливо великою амплітудою, внаслідок чого виникає явище, яке називається *резонансом*.

У випадку, коли існує номер k_0 , такий що $\omega = \omega_{2k_0+1}$, формула втрачає зміст і повинна бути замінена іншою.

Нехай $\omega = \omega_{2k_0+1} = \frac{(2k_0+1)\pi}{l}$, тобто частота вимушених коливань співпадає з частотою власних коливань з номером $2k_0 + 1$, і має місце резонанс. Тоді, як і раніше, розв'язок задачі Коші (3.54), (3.55) при $n = 2k + 1, k \neq k_0$, має вигляд (3.60). Знайдемо розв'язок задачі Коші, коли $k = k_0$. У цьому випадку задача (3.54), (3.55) може бути записана у вигляді

$$T''_{2k_0+1}(t) + \omega_{2k_0+1}^2 T_{2k_0+1}(t) = \beta_{2k_0+1} \sin \omega_{2k_0+1} t, \quad (3.62)$$

$$T_{2k_0+1}(0) = 0, \quad T'_{2k_0+1}(0) = 0. \quad (3.63)$$

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння $T_{2k_0+1}(t)$ будемо шукати як суму загального розв'язку однорідного рівняння, що відповідає (3.62),

$$\bar{T}_{2k_0+1}(t) = A_{2k_0+1} \cos \omega_{2k_0+1} t + B_{2k_0+1} \sin \omega_{2k_0+1} t \quad (3.64)$$

і частинного розв'язку неоднорідного рівняння, який можна шукати у вигляді

$$\bar{\bar{T}}_{2k_0+1}(t) = t(F_{2k_0+1} \sin \omega_{2k_0+1} t + D_{2k_0+1} \cos \omega_{2k_0+1} t). \quad (3.65)$$

Підставляючи (3.65) у рівняння (3.62), знаходимо коефіцієнти $F_{2k_0+1} = 0, D_{2k_0+1} = -\frac{\beta_{2k_0+1}}{2\omega_{2k_0+1}}$. Отже, частинний розв'язок неоднорідного рівняння має вигляд

$$\bar{\bar{T}}_{2k_0+1}(t) = -\frac{\beta_{2k_0+1}}{2\omega_{2k_0+1}} t \cos \omega_{2k_0+1} t, \quad (3.66)$$

а його загальний розв'язок

$$T_{2k_0+1}(t) = A_{2k_0+1} \cos \omega_{2k_0+1} t + B_{2k_0+1} \sin \omega_{2k_0+1} t - \frac{\beta_{2k_0+1}}{2\omega_{2k_0+1}} t \cos \omega_{2k_0+1} t. \quad (3.67)$$

З початкових умов (3.63) визначаємо $B_{2k_0+1} = \frac{\beta_{2k_0+1}}{2\omega_{2k_0+1}^2}$, $A_{2k_0+1} = 0$. Таким чином,

$$T_{2k_0+1}(t) = \frac{\beta_{2k_0+1}}{2\omega_{2k_0+1}^2} (\sin \omega_{2k_0+1} t - \omega_{2k_0+1} t \cos \omega_{2k_0+1} t). \quad (3.68)$$

Враховуюючи, що

$$\beta_{2k_0+1} = \sqrt{\frac{2}{l}} \frac{2Al}{(2k_0+1)\pi}, k_0 \in \mathbb{N}_0, \quad \omega_{2k_0+1} = \frac{(2k_0+1)a\pi}{l},$$

підставляючи їх у ряд (3.52), одержимо розв'язок задачі у вигляді

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \frac{4A}{\pi} \sin \omega_{2k_0+1} t \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq k_0}}^{\infty} \frac{\sin \frac{(2k+1)\pi}{l} x}{(2k+1)(\omega_{2k+1}^2 - \omega_{2k_0+1}^2)} - \\ & - \frac{4A\omega_{2k_0+1}l}{\pi^2 a} \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq k_0}}^{\infty} \frac{\sin \frac{(2k+1)\pi}{l} at \sin \frac{(2k+1)\pi}{l} x}{(2k+1)^2(\omega_{2k+1}^2 - \omega_{2k_0+1}^2)} + \\ & + \frac{2Al^2}{(2k_0+1)^3 a^2 \pi^3} (\sin \omega_{2k_0+1} t - \omega_{2k_0+1} t \cos \omega_{2k_0+1} t) \sin \frac{(2k_0+1)\pi}{l} x. \end{aligned}$$

Аналізуючи схему розв'язання задачі, зазначимо, що для настання резонансу, тобто необмеженого зростання амплітуди коливань з часом під впливом зовнішньої сили, необхідне виконання двох умов: $\omega = \omega_{n_0}$, $\beta_{n_0} \neq 0$.

Приклад 9. Знайти методом Фур'є розв'язок мішаної задачі для хвильового рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2(x^2 - t^2) + \sin 2t \cos 2x, 0 < x < \frac{\pi}{2}, t > 0 \quad (3.68)$$

з початковими

$$u|_{t=0} = 1 + \cos 4x, \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \quad (3.69)$$

і крайовими умовами

$$u_x(0, t) = 0, u_x\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = \pi t^2, t \geq 0. \quad (3.70)$$

Розв'язання. Оскільки крайові умови задачі неоднорідні, шукатимемо її розв'язок у вигляді суми двох функцій

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x, t),$$

де $w(x, t)$ задовольняє неоднорідні крайові умови (3.70) і вибирається за формулою (3.22) як квадратична за змінною x функція. Згідно з додатком 2 вона має вигляд $w(x, t) = t^2 x^2$.

Функція $v(x, t)$ задовольняє рівняння

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2(x^2 - t^2) + \sin 2t \cos 2x - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2},$$

початкові умови

$$v|_{t=0} = 1 + \cos 4x - w|_{t=0}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} \Big|_{t=0} = - \frac{\partial w}{\partial t} \Big|_{t=0}$$

і однорідні крайові умови.

Враховуючи, що

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 2x^2, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 2t^2, \frac{\partial w}{\partial t} = 2tx^2, w|_{t=0} = 0, \frac{\partial w}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0,$$

для функції $v(x, t)$ дістанемо задачу

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \sin 2t \cos 2x, 0 < x < \frac{\pi}{2}, t > 0, \quad (3.71)$$

$$v|_{t=0} = 1 + \cos 4x, \frac{\partial v}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \quad (3.72)$$

$$v_x(0, t) = 0, v_x \left(\frac{\pi}{2}, t \right) = 0, t \geq 0. \quad (3.73)$$

Оскільки крайові умови задачі однорідні, застосуємо для її розв'язання метод відокремлення змінних. Розв'язок задачі, якщо він існує, шукатимемо у вигляді ряду Фур'є

$$v(x, t) = \sum_n T_n(t) X_n(x) \quad (3.74)$$

за ортонормованою системою власних функцій $X_n(x)$ задачі Штурма – Ліувілля

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad X'(0) = 0, X' \left(\frac{\pi}{2} \right) = 0,$$

отриманої для однорідної задачі, яка відповідає задачі (3.71), (3.73).

Повторюючи міркування прикладу 6, встановлюємо, що власними значеннями і відповідними ортонормованими власними

функціями цієї задачі будуть

$$\lambda_0 = 0, X_0(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}; \lambda_n = 4n^2, X_n(x) = \sqrt{\frac{4}{\pi}} \cos 2nx, n \in \mathbb{N}.$$

Таким чином, у (3.74) індекс суми n змінюється від 0 до ∞ .

Помножимо рівняння (3.71) та початкові умови (3.72) скалярно на $X_n(x)$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, X_n \right) - \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, X_n \right) &= \sin 2t (\cos 2x, X_n), \\ T_n(0) = (v|_{t=0}, X_n) &= (1 + \cos 4x, X_n), \\ T_n'(0) = \left(\frac{\partial v}{\partial t} \Big|_{t=0}, X_n \right) &= (0, X_n). \end{aligned}$$

З (3.74) внаслідок ортонормованості системи функцій $X_n(x)$ маємо $T_n(t) = (v, X_n)$. Враховуючи також, що $1 = \sqrt{\frac{\pi}{2}} X_0$, $\cos 2x = \sqrt{\frac{\pi}{4}} X_1$,

$\cos 4x = \sqrt{\frac{\pi}{4}} X_2$, дістанемо задачу Коші для функції $T_n(t)$

$$\begin{aligned} T_n''(t) + 4n^2 T_n(t) &= \sqrt{\frac{\pi}{4}} \sin 2t (X_1, X_n), \\ T_n(0) &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} (X_0, X_n) + \sqrt{\frac{\pi}{4}} (X_2, X_n), \\ T_n'(0) &= 0. \end{aligned}$$

Розв'яжемо її. Для цього розглянемо випадки: $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$, $n > 2$. Тоді відповідні задачі Коші мають вигляд

1) $n = 0$:

$$T_0''(t) = 0, \quad (3.75)$$

$$T_0(0) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}, T_0'(0) = 0; \quad (3.76)$$

2) $n = 1$:

$$T_1''(t) + 4T_1(t) = \sqrt{\frac{\pi}{4}} \sin 2t, \quad (3.77)$$

$$T_1(0) = 0, T_1'(0) = 0; \quad (3.78)$$

3) $n = 2$:

$$T_2''(t) + 16T_2(t) = 0, \quad (3.79)$$

$$T_2(0) = \sqrt{\frac{\pi}{4}}, T_2'(0) = 0; \quad (3.80)$$

4) $n > 2$:

$$T_n''(t) + 4n^2T_n(t) = 0, \quad (3.81)$$

$$T_n(0) = 0, T_n'(0) = 0. \quad (3.82)$$

Знайдемо їхні розв'язки.

1) Загальний розв'язок рівняння (3.75)

$$T_0(t) = A_0t + B_0.$$

Враховуючи початкові умови (3.76), маємо

$$T_0(t) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

2) Загальний розв'язок неоднорідного рівняння $T_1(t)$ будемо шукати як суму загального розв'язку однорідного рівняння

$$\bar{T}_1(t) = A_1 \cos 2t + B_1 \sin 2t$$

і частинного розв'язку неоднорідного рівняння, який шукаємо за виглядом правої частини рівняння у формі

$$\bar{\bar{T}}_1(t) = t(C \cos 2t + D \sin 2t).$$

Підставляючи $\bar{\bar{T}}_1(t)$ у рівняння (3.77), знаходимо $C = -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{4}},$

$D = 0$. Отже, $\bar{\bar{T}}_1(t) = -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{4}}t \cos 2t.$

Тоді загальний розв'язок неоднорідного рівняння має вигляд

$$T_1(t) = A_1 \cos 2t + B_1 \sin 2t - \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{4}}t \cos 2t.$$

З початкових умов (3.78) одержуємо $A_1 = 0, B_1 = \frac{1}{8}\sqrt{\frac{\pi}{4}}.$ Таким чином,

$$T_1(t) = \left(\frac{1}{8} \sin 2t - \frac{1}{4}t \cos 2t\right) \sqrt{\frac{\pi}{4}}.$$

3) Загальний розв'язок однорідного рівняння $T_2(t)$ має вигляд

$$T_2(t) = A_2 \cos 4t + B_2 \sin 4t.$$

Використовуючи початкові умови (3.80), знаходимо $A_2 = \sqrt{\frac{\pi}{4}}$,
 $B_2 = 0$. Тоді

$$T_2(t) = \sqrt{\frac{\pi}{4}} \cos 4t.$$

4) Задача Коші (3.81), (3.82) при $n > 2$ має тривіальний розв'язок $T_n(t) = 0$. Тоді внаслідок єдиності розв'язку задачі Коші для звичайного диференціального рівняння другого порядку інших розв'язків бути не може.

Отже,

$$v(x, t) = 1 + \left(\frac{1}{8} \sin 2t - \frac{1}{4} t \cos 2t \right) \cos 2x + \cos 4t \cos 4x,$$

а шуканий розв'язок задачі (3.68) – (3.70) визначає функція

$$u(x, t) = 1 + \left(\frac{1}{8} \sin 2t - \frac{1}{4} t \cos 2t \right) \cos 2x + \cos 4t \cos 4x + t^2 x^2.$$

Завдання для аудиторної роботи

- 3.1. $u_{tt} = a^2 u_{xx}$, $0 < x < l$, $t > 0$,
 $u(0, t) = u_1$, $u_x(l, t) + hu(l, t) = u_2$, $t \geq 0$,
 $u(x, 0) = \varphi(x)$, $u_t(x, 0) = \psi(x)$, $0 \leq x \leq l$.
- 3.2. $u_{tt} = u_{xx} + 2b$, $0 < x < l$, $t > 0$,
 $u(0, t) = 0$, $u(l, t) = 0$, $t \geq 0$,
 $u(x, 0) = 0$, $u_t(x, 0) = 0$, $0 \leq x \leq l$.
- 3.3. $u_{tt} = a^2 u_{xx} + x$, $0 < x < \pi$, $t > 0$,
 $u(0, t) = 0$, $u(\pi, t) = 0$, $t \geq 0$,
 $u(x, 0) = \sin 2x$, $u_t(x, 0) = 0$, $0 \leq x \leq \pi$.
- 3.4. $u_{tt} = a^2 u_{xx} + b \sinh x$, $0 < x < l$, $t > 0$,
 $u(0, t) = 0$, $u(l, t) = 0$, $t \geq 0$,
 $u(x, 0) = 0$, $u_t(x, 0) = 0$, $0 \leq x \leq l$.
- 3.5. $u_{tt} = a^2 u_{xx} + bx(x - l)$, $0 < x < l$, $t > 0$,
 $u(0, t) = 0$, $u(l, t) = 0$, $t \geq 0$,
 $u(x, 0) = 0$, $u_t(x, 0) = 0$, $0 \leq x \leq l$.

Завдання для самостійної роботи

Завдання 1: дати фізичну інтерпретацію та знайти методом Фур'є розв'язок мішаної задачі для хвильового рівняння:

3.6. $u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = \frac{At^3}{ES}, \quad t \geq 0,$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq l.$$

3.7. $u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0,$

$$u(0, t) = t + 1, \quad u(1, t) = t^3 + 2, \quad t \geq 0,$$

$$u(x, 0) = x + 1, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

3.8. $u_{tt} = a^2 u_{xx} + e^{-t} \sin x, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0,$

$$u(0, t) = 0, \quad u(\pi, t) = 0, \quad t \geq 0,$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi.$$

3.9. $u_{tt} = a^2 u_{xx} + x e^{-t}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad t \geq 0,$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq l.$$

3.10. $u_{tt} = a^2 u_{xx} + A e^{-t} \sin \frac{\pi x}{l}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad t \geq 0,$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq l.$$

3.11. $u_{tt} = a^2 u_{xx} + \cos t, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0,$

$$u(0, t) = u_1, \quad u(\pi, t) = 0, \quad t \geq 0,$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi.$$

3.12. $u_{tt} = u_{xx} - u + 2xt, \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$

$$u(0, t) = 0, \quad u_x(l, t) = 0, \quad t \geq 0,$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = x, \quad 0 \leq x \leq l.$$

3.13. $u_{tt} = u_{xx} - \frac{\pi}{3} u_t, \quad 0 < x < 3, \quad t \geq 0,$

$$u_x(0, t) = 0, \quad u(3, t) = 2t, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 2, \quad 0 \leq x \leq 3.$$

3.14. $u_{tt} = \frac{1}{4} u_{xx} - u + t \cos \pi x, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0,$

$$u_x(0, t) = 0, \quad u_x(1, t) = 0, \quad t \geq 0,$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = x, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

- 3.15. $u_{tt} + 2u_t = u_{xx} + 4x + 8e^t \cos x$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$, $t > 0$,
 $u_x(0, t) = 2t$, $u\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = \pi t$, $t \geq 0$,
 $u(x, 0) = \cos x$, $u_t(x, 0) = 2x$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.
- 3.16. $u_{tt} - 2u_t = u_{xx} + 4t(\sin x - x)$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$, $t > 0$,
 $u(0, t) = 3$, $u_x\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = t^2 + t$, $t \geq 0$,
 $u(x, 0) = 3$, $u_t(x, 0) = x + \sin x$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.
- 3.17. $u_{tt} - 3u_t = u_{xx} + u - x(4 + t) + \cos \frac{3x}{2}$, $0 < x < \pi$, $t > 0$,
 $u_x(0, t) = t + 1$, $u(\pi, t) = \pi(t + 1)$, $t \geq 0$,
 $u(x, 0) = x$, $u_t(x, 0) = x$, $0 \leq x \leq \pi$.
- 3.18. $u_{tt} + 2u_t = u_{xx} + 8u + 2x(1 - 4t) + \cos 3x$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$, $t > 0$,
 $u_x(0, t) = t$, $u\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = \frac{\pi t}{2}$, $t \geq 0$,
 $u(x, 0) = 0$, $u_t(x, 0) = x$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.
- 3.19. $u_{tt} = u_{xx} + 10u + 2\sin 2x \cos x$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$, $t > 0$,
 $u(0, t) = 0$, $u_x\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = 0$, $t \geq 0$,
 $u(x, 0) = 0$, $u_t(x, 0) = 0$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.
- 3.20. $u_{tt} = 4u_{xx} + 16u - 4t(2x^2 + 1) + e^{-4t} + \frac{1}{2}\cos t \cos 2x$,
 $0 < x < \pi$, $t > 0$,
 $u_x(0, t) = 0$, $u_x(\pi, t) = \pi t$, $t \geq 0$,
 $u(x, 0) = 2\cos^2 x$, $u_t(x, 0) = 2\sin^2 x + \frac{1}{2}x^2$, $0 \leq x \leq \pi$.
- 3.21. $u_{tt} - 7u_t = u_{xx} + 2u_x - 2t - 7x - e^{-x}\sin 3x$, $0 < x < \pi$, $t > 0$,
 $u(0, t) = \pi t$, $u(\pi, t) = \pi t$, $t \geq 0$,
 $u(x, 0) = 0$, $u_t(x, 0) = x$, $0 \leq x \leq \pi$.
- 3.22. $u_{tt} - 3u_t = u_{xx} + 2u_x - 3x - 2t$, $0 < x < \pi$, $t > 0$,
 $u(0, t) = 0$, $u(\pi, t) = \pi t$, $t \geq 0$,
 $u(x, 0) = e^{-x} \sin x$, $u_t(x, 0) = x$, $0 \leq x \leq \pi$.

- 3.23. $u_{tt} = u_{xx} - 2u_t - u + x(t^2 + 4t + 3) + \cos \frac{x}{2}, 0 < x < \pi, t > 0,$
 $u_x|_{x=0} = t^2 + 1, u|_{x=\pi} = (t^2 + 1)\pi, t \geq 0,$
 $u|_{t=0} = x + \cos \frac{3x}{2}, u_t|_{t=0} = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi.$
- 3.24. $u_{tt} = u_{xx} - 2u + Ae^{-at} \sin 3x + 2 + 4x + 2t^2,$
 $0 < x < \frac{\pi}{2}, \quad t > 0,$
 $u|_{x=0} = t^2, u_x|_{x=\frac{\pi}{2}} = 2, t \geq 0,$
 $u|_{t=0} = 2x + \sin x, u_t|_{t=0} = 0, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}.$
- 3.25. $u_{tt} = u_{xx} - 4u - 2t + 4x(1 + xt) + t + e^t \cos 2x,$
 $0 < x < \pi, t > 0,$
 $u_x|_{x=0} = 1, u_x|_{x=\pi} = 2\pi t + 1, t \geq 0,$
 $u|_{t=0} = \cos x + x + 1, u_t|_{t=0} = x^2, 0 \leq x \leq \pi.$
- 3.26. $u_{tt} = u_{xx} - 4u - 2t + 4x(1 + xt) + 1 + e^{-t} \cos 2x,$
 $0 < x < \frac{\pi}{2}, t > 0,$
 $u_x|_{x=0} = 1, u_x|_{x=\frac{\pi}{2}} = \pi t + 1, t \geq 0,$
 $u|_{t=0} = \cos 4x + x, u_t|_{t=0} = x^2, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}.$
- 3.27. $u_{tt} = u_{xx} + \frac{1}{4}u + \cos t \cos \frac{x}{2} - \frac{1}{4}xt + t \cos \frac{5x}{2},$
 $0 < x < \pi, t > 0,$
 $u_x|_{x=0} = t, u|_{x=\pi} = \pi t, t \geq 0,$
 $u|_{t=0} = 0, u_t|_{t=0} = \cos \frac{3x}{2} + x, 0 \leq x \leq \pi.$
- 3.28. $u_{tt} = u_{xx} + 4u_t + 5u - 2t - 4x^2 - 5tx^2 + 2 \cos^2 x,$
 $0 < x < \pi, t > 0,$
 $u_x|_{x=0} = 0, u_x|_{x=\pi} = 2\pi t, t \geq 0,$
 $u|_{t=0} = \cos 3x, u_t|_{t=0} = x^2, 0 \leq x \leq \pi.$
- 3.29. $u_{tt} = u_{xx} - 4u_t + 2 + 8t + \cos t \sin x,$
 $0 < x < \pi, t > 0,$
 $u|_{x=0} = t^2, u|_{x=\pi} = \pi + t^2, t \geq 0,$
 $u|_{t=0} = x, u_t|_{t=0} = \sin 2x, 0 \leq x \leq \pi.$

- 3.30. $u_{tt} = u_{xx} - 4u_t + 2 + 8t + \sin t \sin 2x$,
 $0 < x < \pi, t > 0$,
 $u|_{x=0} = t^2, u|_{x=\pi} = \pi + t^2, t \geq 0$,
 $u|_{t=0} = x, u_t|_{t=0} = \sin x, 0 \leq x \leq \pi$.
- 3.31. $u_{tt} = u_{xx} + 6u + 2 - 6t^2 - 6x + 2\cos x \cos 2x$,
 $0 < x < \frac{\pi}{2}, t > 0$,
 $u_x|_{x=0} = 1, u|_{x=\frac{\pi}{2}} = t^2 + \frac{\pi}{2}, t \geq 0$,
 $u|_{t=0} = x, u_t|_{t=0} = \cos 5x, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.
- 3.32. $u_{tt} = 9u_{xx} + At \cos \pi x + B \cos 3\pi x - 18t, 0 < x < 1, t > 0$,
 $u_x|_{x=0} = 0, u_x|_{x=1} = 2t, t \geq 0$,
 $u|_{t=0} = C, u_t|_{t=0} = x^2, 0 \leq x \leq 1$.
- 3.33. $u_{tt} = u_{xx} + 4u - 2t - 4x^2t + 2\cos^2 x \sin t, 0 < x < \pi, t > 0$,
 $u_x|_{x=0} = 0, u_x|_{x=\pi} = 2\pi t, t \geq 0$,
 $u|_{t=0} = \cos 3x, u_t|_{t=0} = x^2 + \cos 2x, 0 \leq x \leq \pi$.
- 3.34. $u_{tt} = u_{xx} - 2u_t + 4x + 8e^t \cos x, 0 < x < \frac{\pi}{2}, t > 0$,
 $u_x|_{x=0} = 2t, u|_{x=\frac{\pi}{2}} = \pi t, t \geq 0$,
 $u|_{t=0} = \cos 3x, u_t|_{t=0} = 2x + \cos 5x, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.
- 3.35. $u_{tt} = u_{xx} - 3u_t - u + \cos \frac{3x}{2} + 4x + tx, 0 < x < \pi, t > 0$,
 $u_x|_{x=0} = t + 1, u|_{x=\pi} = \pi(t + 1), t \geq 0$,
 $u|_{t=0} = \cos \frac{x}{2} + x, u_t|_{t=0} = x + \cos \frac{5x}{2}, 0 \leq x \leq \pi$.
- 3.36. $u_{tt} = u_{xx} - 2u + 2t^2 + 2 + t \cos \frac{\pi x}{2}, 0 < x < 1, t > 0$,
 $u_x|_{x=0} = 0, u|_{x=1} = t^2, t \geq 0$,
 $u|_{t=0} = \cos \frac{3\pi x}{2}, u_t|_{t=0} = \cos \frac{5\pi x}{2}, 0 \leq x \leq 1$.
- 3.37. $u_{tt} = u_{xx} - u + t^2x + t + 2x + At \sin \frac{3x}{2}, 0 < x < \pi, t > 0$,
 $u|_{x=0} = t, u_x|_{x=\pi} = t^2, t \geq 0$,
 $u|_{t=0} = C \sin \frac{5x}{2}, u_t|_{t=0} = B \sin \frac{x}{2} + 1, 0 \leq x \leq \pi$.

- 3.38. $u_{tt} = u_{xx} - 7u + 2t \sin 2x \cos x + 7 + 14x, 0 < x < \frac{\pi}{2}, t > 0,$
 $u|_{x=0} = 1, u_x|_{x=\frac{\pi}{2}} = 2, t \geq 0,$
 $u|_{t=0} = 2x + 1 + \sin 3x, u_t|_{t=0} = \sin 5x, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}.$
- 3.39. $u_{tt} = u_{xx} - u + \sin t \sin \frac{\pi x}{4} + 2tx + 2, 0 < x < 2, t > 0,$
 $u|_{x=0} = 2, u_x|_{x=2} = 2t, t \geq 0,$
 $u|_{t=0} = \sin \frac{5\pi x}{4} + 2, u_t|_{t=0} = \sin \frac{3\pi x}{4} + 2x, 0 \leq x \leq 2.$
- 3.40. $u_{tt} = u_{xx} + At \cos \pi x + 2(x^2 - t^2), 0 < x < 1, t > 0,$
 $u_x|_{x=0} = 0, u_x|_{x=1} = 2t^2, t \geq 0,$
 $u|_{t=0} = 1, u_t|_{t=0} = 2B \cos^2 \pi x, 0 \leq x \leq 1.$
- 3.41. $u_{tt} = u_{xx} + 10u + 2 \sin t \sin 4x \cos x - 10 - 20x,$
 $0 < x < \frac{\pi}{2}, t > 0,$
 $u|_{x=0} = 1, u_x|_{x=\frac{\pi}{2}} = 2, t \geq 0,$
 $u|_{t=0} = 2x + 1, u_t|_{t=0} = \sin x, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}.$
- 3.42. $u_{tt} = u_{xx} - 4u + Ce^{-t} \sin \frac{3\pi x}{4} + 8x + 16t^2x + 4,$
 $0 < x < 2, t > 0,$
 $u|_{x=0} = 1, u_x|_{x=2} = 4t^2, t \geq 0,$
 $u|_{t=0} = A \sin \frac{\pi x}{4} + B \sin \frac{5\pi x}{4} + 1, u_t|_{t=0} = D \sin \frac{\pi x}{4}, 0 \leq x \leq 2.$
- 3.43. $u_{tt} = u_{xx} + 4u + t \sin 2x + \sin t \sin x - 4x - 4t,$
 $0 < x < \pi, t > 0,$
 $u|_{x=0} = t, u|_{x=\pi} = \pi + t, t \geq 0,$
 $u|_{t=0} = x, u_t|_{t=0} = \sin 3x + 1, 0 \leq x \leq \pi.$

Завдання 2: сформулювати мішану задачу для хвильового рівняння і розв'язати її методом Фур'є:

- 3.44. Один кінець однорідного стержня довжини l закріплений пружно, а інший вільний. Знайти позовжні коливання стержня при довільних початкових умовах.

- 3.45. Однорідний стержень довжини l , лівий кінець $x = 0$ якого жорстко закріплений, знаходиться в спокої. З моменту часу $t = 0$ до вільного кінця стержня $x = l$ прикладена сила $Q = \text{const}$, розрахована на одиницю площі, яка діє вздовж стержня. Знайти зміщення стержня в довільний момент часу $t > 0$.
- 3.46. Один кінець однорідного стержня закріплений пружно, а до іншого прикладена повздовжня сила $Q = \text{const}$, під дією якої стержень знаходиться в положенні рівноваги. Знайти повздовжні коливання стержня, якщо в початковий момент часу сила Q миттєво зникає, а початкові швидкості дорівнюють нулеві.
- 3.47. Знайти повздовжні коливання однорідного стержня довжини l , лівий кінець якого закріплено жорстко, а до правого з моменту часу $t = 0$ прикладена сила $F(t) = At, A = \text{const}$.
- 3.48. Знайти повздовжні коливання однорідного стержня довжини l із жорстко закріпленими кінцями під дією неперервно розподіленої сили, прикладеної з моменту часу $t = 0$, яка має густину $F(x, t) = G(x)t^m, m \geq 0$.
- 3.49. Стержень підвішено вертикально і закріплено так, що зміщення в усіх точках дорівнює нулеві. В момент часу $t = 0$ стержень звільняється, залишаючись закріпленим у верхній точці. Вивчити вимушені коливання стержня при $t > 0$.
- 3.50. Знайти закон коливань однорідної струни, закріпленої на кінцях $x = 0, x = l$, якщо в початковий момент часу струна мала форму параболи, симетричної відносно перпендикуляра, проведеного через точку $x = \frac{l}{2}$, а початкова швидкість її точок рівна нулеві.
- 3.51. Однорідна струна довжини l , кінці якої закріплено, відтягнута в початковий момент часу в точці $x = c$ на величину h і відпущена без початкової швидкості. Знайти закон коливань точок струни при $t > 0$.

- 3.52. Вивчити вільні коливання однорідної струни довжини l із закріпленими кінцями, що коливається в середовищі, опір якого пропорційний швидкості. Початкові відхилення та швидкість точок струни довільні.
- 3.53. Знайти закон вільних коливань однорідної струни довжини l , якщо в початковий момент часу $t = 0$ струна мала форму кривої $\varphi(x) = \frac{l}{100} \sin \frac{\pi x}{2l}$, а потім була відпущена без початкової швидкості. Струна закріплена на лівому кінці $x=0$, правий кінець $x = l$ вільний.
- 3.54. Кінці однорідної струни довжини l утримуються за допомогою пружних сил на прямих, паралельних осі Ox . Вивчити вільні поперечні коливання струни, якщо вона коливається тільки за рахунок початкового відхилення її точок, яке рівне $\frac{x^2(x-l)^2}{4}$.
- 3.55. Знайти закон коливань однорідної струни довжини l із закріпленими кінцями, якщо вона коливається тільки за рахунок початкової швидкості її точок, яка рівна $\frac{a}{10}$ (a – стала, що фігурує в рівнянні коливань струни).
- 3.56. Вивчити вимушені поперечні коливання однорідної струни довжини l , яка закріплена на кінці $x = 0$, а на її кінець $x = l$ діє сила, що викликає його зміщення, рівне $A \sin \omega t$, де $\omega \neq \frac{ak\pi}{l}$, $k \in \mathbb{N}$; a – стала, що фігурує в рівнянні коливань струни. Початкові відхилення та швидкості точок струни відсутні.
- 3.57. Однорідна струна довжини l із закріпленими кінцями збурюється в точці $x = x_0$ ударом жорсткого плоского молоточка, який надає їй початковий розподіл швидкості

$$\psi(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq x_0 - \delta, \\ v_0, & x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta, \\ 0, & x_0 + \delta \leq x \leq l, \end{cases}$$

де $v_0, \delta = \text{const}$. Вивчити вільні коливання струни, якщо початкові відхилення точок струни рівні нулеві.

- 3.58. Знайти закон коливань однорідної струни, закріпленої на кінцях $x = 0$, $x = l$, якщо вона коливається тільки внаслідок дії неперервно розподіленої вздовж струни зовнішньої сили інтенсивності $f(x, t) = \frac{a^2}{10l} \sin \omega t$, $\omega \neq \frac{ak\pi}{l}$, $k \in \mathbb{N}$, a – стала, що фігурує в рівнянні струни.
- 3.59. Знайти закон коливань однорідної струни, закріпленої на кінцях $x = 0$, $x = l$, якщо вона коливається тільки внаслідок дії неперервно розподіленої вздовж струни зовнішньої сили інтенсивності $f(x, t) = \frac{a^2}{10l} \sin \frac{a\pi}{l} t$, a – стала, що фігурує в рівнянні струни.
- 3.60. Дослідити процес коливань однорідної струни довжини l з вільними кінцями, якщо на струну діє неперервно розподілена зовнішня сила інтенсивності $A \sin t$. Початкові відхилення та швидкості точок струни відсутні.
- 3.61. Вивчити вимушені поперечні коливання однорідної струни, яка закріплена на кінці $x = 0$, а на кінці $x = l$ зазнає дії гармонічної збудовувальної сили, що викликає зміщення, рівне $A \cos \omega t$. Початкові відхилення та швидкості точок струни відсутні. Знайти закон коливань струни в середовищі без опору, дослідити можливість резонансу і знайти розв'язок у випадку резонансу.
- 3.62. Вивчити вимушені поперечні коливання однорідної струни, яка закріплена на кінці $x = l$, а на кінці $x = 0$ зазнає дії гармонічної збудовувальної сили інтенсивності $F = A \cos \omega t$. Початкові відхилення та швидкості точок струни відсутні. Знайти закон коливань струни в середовищі без опору, дослідити можливість резонансу і знайти розв'язок у випадку резонансу.
- 3.63. Вивчити вимушені поперечні коливання однорідної струни, закріпленої на кінцях $x = 0$ та $x = l$, без початкових зміщень і швидкостей, якщо на струну діє неперервно розподілена сила інтенсивності $f(x, t) = x^3 \sin \omega t$. Знайти коливання струни в середовищі без опору, дослідити можливість резонансу і знайти розв'язок у випадку резонансу.

- 3.64. Вивчити вимушені поперечні коливання однорідної струни, яка закріплена на кінці $x = 0$, а на кінці $x = l$ зазнає дії гармонічної збудовальної сили інтенсивності $F = A \sin \omega t$. Початкові відхилення та швидкості точок струни відсутні. Знайти закон коливань струни в середовищі без опору, дослідити можливість резонансу і знайти розв'язок у випадку резонансу.
- 3.65. Вивчити вимушені поперечні коливання однорідної струни, закріпленої на кінці $x = 0$ і вільної на кінці $x = l$, на яку в момент часу $t = 0$ починає діяти неперервно розподілена сила інтенсивності $f(x, t) = x \cos \omega t$. Початкові відхилення та швидкості точок струни рівні нулеві. Знайти коливання струни в середовищі без опору, дослідити можливість резонансу і знайти розв'язок у випадку резонансу.

ТЕМА 4. ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ФУР'Є ДО МІШАНИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ХВИЛЬОВОГО РІВНЯННЯ З ДВОМА ПРОСТОРОВИМИ ЗМІННИМИ

Поширимо метод Фур'є на випадок двох просторових змінних. Викладемо ідею методу відокремлення змінних на прикладі задачі про вільні поперечні коливання однорідної прямокутної мембрани, що закріплена по контуру.

Математично така задача полягає у знаходженні в області $D = \{(x, y, t): 0 < x < c, 0 < y < b, t > 0\}$ двічі неперервно диференційованого розв'язку двовимірного однорідного хвильового рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad 0 < x < c, 0 < y < b, t > 0, \quad (4.1)$$

який задовольняє початкові умови

$$u|_{t=0} = \varphi(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \psi(x, y), \quad 0 \leq x \leq c, 0 \leq y \leq b \quad (4.2)$$

і крайові умови

$$u(0, y, t) = u(c, y, t) = 0, \quad 0 \leq y \leq b, t \geq 0, \quad (4.3)$$

$$u(x, 0, t) = u(x, b, t) = 0, \quad 0 \leq x \leq c, t \geq 0.$$

При цьому вважаємо, що виконуються умови узгодженості

$$\varphi(0, y) = \varphi(c, y) = \varphi(x, 0) = \varphi(x, b) = 0,$$

$$\psi(0, y) = \psi(c, y) = \psi(x, 0) = \psi(x, b) = 0.$$

Припустимо, що розв'язок задачі (4.1) – (4.3) існує. Для його побудови розв'яжемо спочатку допоміжну задачу: знайти нетривіальні розв'язки рівняння (4.1), які б задовольняли крайові умови (4.3). Згідно з методом відокремлення змінних шукатимемо такі розв'язки у вигляді добутку двох функцій

$$u(x, y, t) = V(x, y)T(t), \quad (4.4)$$

де $V(x, y)$ – функція тільки від x та y , $T(t)$ – функція тільки від t , причому $V(x, y) \not\equiv 0, T(t) \not\equiv 0$. Підставляючи (4.4) у рівняння (4.1), маємо

$$VT'' = a^2(V_{xx} + V_{yy})T.$$

Поділивши останню рівність на a^2VT , дістаємо умову відокремлення змінних

$$\frac{1}{a^2} \frac{T''}{T} = \frac{V_{xx} + V_{yy}}{V}. \quad (4.5)$$

Щоб функція (4.4) була розв'язком рівняння (4.1), рівність (4.5) повинна задовольнятися тотожно, тобто для всіх значень змінних $(x, y, t) \in D$. Але ліва частина рівності (4.5) залежить тільки від змінної t , а права – тільки від змінних x, y . Очевидно така рівність може мати місце лише у тому випадку, коли обидві її частини зберігають сталі значення

$$\frac{1}{a^2} \frac{T''}{T} = \frac{V_{xx} + V_{yy}}{V} = -\lambda,$$

де λ – стала. З останнього співвідношення отримуємо два рівняння для визначення функцій $V(x, y)$ і $T(t)$:

$$V_{xx} + V_{yy} + \lambda V = 0, \quad (4.6)$$

$$T'' + \lambda a^2 T = 0. \quad (4.7)$$

З крайових умов (4.3) для функції $V(x, y)$ знаходимо такі крайові умови

$$V(0, y) = 0, V(c, y) = 0, V(x, 0) = 0, V(x, b) = 0. \quad (4.8)$$

Задача (4.6), (4.8) – це двовимірна задача на власні значення та власні функції у прямокутнику. Розв'язуємо її методом відокремлення змінних.

Шукатимемо розв'язок задачі (4.6), (4.8) у вигляді

$$V(x, y) = X(x)Y(y), \quad (4.9)$$

де $X(x)$ – функція тільки від x , $Y(y)$ – функція тільки від y .

Підставляючи (4.9) у рівняння (4.6), одержимо

$$X''Y + XY'' + \lambda XY = 0.$$

Поділимо на $XY \neq 0$ і відокремимо змінні

$$\frac{X''}{X} + \lambda = -\frac{Y''}{Y} = \alpha.$$

Тоді для визначення $X(x)$, $Y(y)$ маємо рівняння

$$X''(x) + \beta X(x) = 0, \quad (4.10)$$

$$Y''(y) + \alpha Y(y) = 0, \quad (4.11)$$

де α і β – сталі, $\lambda = \alpha + \beta$.

Зважаючи на однорідні крайові умови (4.8), для визначення функцій $X(x)$ і $Y(y)$ отримаємо крайові умови

$$X(0) = X(c) = 0, \quad (4.12)$$

$$Y(0) = Y(b) = 0. \quad (4.13)$$

Таким чином, маємо дві одновимірні задачі Штурма – Ліувілля (4.10), (4.12) та (4.11), (4.13). Згідно з формулами прикладу 1 власні значення та власні функції цих задач мають вигляд

$$\beta_m = \frac{m^2 \pi^2}{c^2}, \quad X_m(x) = \sqrt{\frac{2}{c}} \sin \frac{m\pi}{c} x,$$

$$\alpha_n = \frac{n^2 \pi^2}{b^2}, \quad Y_n(y) = \sqrt{\frac{2}{b}} \sin \frac{n\pi}{b} y.$$

Звідси випливає, що власними значеннями λ_{mn} і відповідними власними функціями $V_{mn}(x, y)$ двовимірної задачі Штурма – Ліувілля (4.6), (4.8) будуть

$$\lambda_{mn} = \pi^2 \left(\frac{m^2}{c^2} + \frac{n^2}{b^2} \right), \quad (4.14)$$

$$V_{mn}(x, y) = \frac{2}{\sqrt{bc}} \sin \frac{m\pi}{c} x \sin \frac{n\pi}{b} y, \quad m, n = 1, 2, \dots \quad (4.15)$$

Те, що рівності (4.14), (4.15) вичерпують всі власні значення та власні функції цієї задачі, випливає з повноти системи функцій $V_{mn}(x, y)$, що є наслідком наступної леми.

ЛЕМА 4.1 (повнота системи функцій двох змінних).

Нехай $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_k(x), \dots$ є повною на відрізку $[a, b]$ системою функцій, ортонормованою з вагою $\rho_1(x)$, і нехай кожна з систем функцій $\psi_{k1}(y), \psi_{k2}(y), \dots, \psi_{km}(y), \dots$ ($k = 1, 2, \dots$) є повною на відрізку $[c, d]$ і ортонормованою з вагою $\rho_2(y)$. Тоді система функцій двох змінних

$$u_{km}(x, y) = \varphi_k(x) \psi_{km}(y), \quad (k = 1, 2, \dots; m = 1, 2, \dots)$$

в замкненому прямокутнику $\overline{G} = [a, b] \times [c, d]$ буде повною і ортонормованою з вагою $\rho_1(x) \rho_2(y)$.

Зазначимо, що серед знайдених власних значень задачі (4.6), (4.8) можуть бути кратні, тобто такі, яким відповідає не одна, а декілька лінійно незалежних власних функцій. Справді, при $b = c = 1$ власне значення $\lambda = \lambda_{12} = \lambda_{21} = 5\pi^2$ буде двократним, оскільки йому згідно з рівністю (4.15) відповідають дві лінійно незалежні функції

$$V_{12}(x, y) = 2\sin\pi x \sin 2\pi y, V_{21}(x, y) = 2\sin 2\pi x \sin\pi y.$$

Для знаходження функції $T(t)$ розглянемо рівняння (4.7) при $\lambda = \lambda_{mn}$

$$T''_{mn}(t) + \lambda_{mn}a^2T_{mn}(t) = 0.$$

Його загальним розв'язком буде функція

$$T_{mn}(t) = A_{mn} \cos \sqrt{\lambda_{mn}}at + B_{mn} \sin \sqrt{\lambda_{mn}}at, \quad (4.16)$$

де A_{mn}, B_{mn} – довільні сталі.

Підставляючи (4.15), (4.16) у (4.4), запишемо частинні розв'язки рівняння (4.1)

$$u_{mn}(x, y, t) = V_{mn}(x, y)T_{mn}(t).$$

Додавши усі можливі розв'язки такого вигляду, утворимо ряд

$$u(x, y, t) = \sum_{m,n=1}^{\infty} (A_{mn} \cos \sqrt{\lambda_{mn}}at + B_{mn} \sin \sqrt{\lambda_{mn}}at) V_{mn}(x, y), \quad (4.17)$$

який також буде розв'язком рівняння (4.1) і задовольнятиме крайові умови (4.3), якщо він збігається рівномірно і його можна почленно диференціювати два рази по x, y, t в області D .

Залишилося підібрати коефіцієнти A_{mn}, B_{mn} так, щоб функція $u(x, y, t)$, визначена рядом (4.17), задовольняла умови (4.2). Підставляючи $t = 0$ в (4.17), отримаємо

$$u(x, y, 0) = \sum_{m,n=1}^{\infty} A_{mn} V_{mn}(x, y) = \varphi(x, y). \quad (4.18)$$

Продиференціюємо ряд (4.17) по t і покладемо $t = 0$. В силу другої початкової умови маємо

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \sum_{m,n=1}^{\infty} B_{mn} \sqrt{\lambda_{mn}}a V_{mn}(x, y) = \psi(x, y). \quad (4.19)$$

Припустимо, що ряди (4.18), (4.19) збігаються рівномірно. Тоді

помноживши обидві частини цих рівностей скалярно на функцію $V_{kl}(x, y)$ (помноживши на $V_{kl}(x, y)$ та проінтегрувавши по x від 0 до c і по y від 0 до b), внаслідок ортонормованості системи функцій $V_{mn}(x, y)$, матимемо

$$A_{mn} = \varphi_{mn}, \quad B_{mn} = \frac{\psi_{mn}}{\sqrt{\lambda_{mn}a}}, \quad (4.20)$$

де

$$\varphi_{mn} = (\varphi, V_{mn}) = \int_0^c \int_0^b \varphi(x, y) V_{mn}(x, y) dx dy, \quad (4.21)$$

$$\psi_{mn} = (\psi, V_{mn}) = \int_0^c \int_0^b \psi(x, y) V_{mn}(x, y) dx dy \quad (4.22)$$

– коефіцієнти розкладу функцій $\varphi(x, y), \psi(x, y)$ у рівномірно збіжні подвійні ряди Фур'є за системою власних функцій (4.15)

$$\varphi(x, y) = \sum_{m,n=1}^{\infty} \varphi_{mn} V_{mn}(x, y), \quad \psi(x, y) = \sum_{m,n=1}^{\infty} \psi_{mn} V_{mn}(x, y). \quad (4.23)$$

Підставляючи знайдені значення A_{mn}, B_{mn} у ряд (4.17), будемо формальний розв'язок задачі

$$u(x, y, t) = \sum_{m,n=1}^{\infty} \left(\varphi_{mn} \cos \sqrt{\lambda_{mn}} at + \frac{\psi_{mn}}{\sqrt{\lambda_{mn}a}} \sin \sqrt{\lambda_{mn}} at \right) \cdot V_{mn}(x, y). \quad (4.24)$$

Теорема 4.1. Якщо функції $\varphi(x, y)$ та $\psi(x, y)$ неперервні разом із своїми похідними до четвертого порядку включно в прямокутнику $[0, c] \times [0, b]$, то ряд (4.24) збігається рівномірно в області D і його можна почленно диференціювати два рази по x, y і t .

Зазначимо, що для мембрани одній і тій самій частоті власних коливань $\omega_{mn} = \sqrt{\lambda_{mn}a}$ може відповідати декілька форм з різними положеннями вузлових ліній, вздовж яких амплітуди власних гармонічних коливань дорівнюють нулеві.

Задача про вимушені коливання прямокутної мембрани розв'язується подібно до задачі про вимушені коливання струни з відповідними модифікаціями. Її розв'язок треба шукати у вигляді

$$u(x, y, t) = \sum_{m,n} T_{mn}(t) V_{mn}(x, y), \quad (4.25)$$

де $T_{mn}(t)$ – невідомі функції, а $V_{mn}(x, y)$ – власні функції двовимірної задачі Штурма – Ліувілля у прямокутнику при відповідних крайових умовах.

Приклад 10. Дослідити коливання однорідної прямокутної мембрани зі сторонами p і s , край $y = s$ якої вільний, а три інші краї нерухомо закріплені, під дією неперервно розподіленої поперечної сили інтенсивності $f(x, y, t) = A \sin \frac{\pi x}{p} \sin \frac{\pi y}{2s}$, якщо початкове відхилення точок мембрани задане функцією $\varphi(x, y) = B \sin \frac{3\pi x}{p} \sin \frac{5\pi y}{2s}$, а їхня початкова швидкість рівна нулеві.

Розв'язання. Математична модель даної задачі має вигляд

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + A \sin \frac{\pi x}{p} \sin \frac{\pi y}{2s},$$

$$0 < x < p, \quad 0 < y < s, \quad t > 0, \quad (4.26)$$

$$u(0, y, t) = u(p, y, t) = 0, \quad 0 \leq y \leq s, \quad t \geq 0,$$

$$u(x, 0, t) = u_y(x, s, t) = 0, \quad 0 \leq x \leq p, \quad t \geq 0, \quad (4.27)$$

$$u|_{t=0} = B \sin \frac{3\pi x}{p} \sin \frac{5\pi y}{2s}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0,$$

$$0 \leq x \leq p, \quad 0 \leq y \leq s. \quad (4.28)$$

Припустимо, що розв'язок задачі (4.26) – (4.28) існує. Шукатимемо його у вигляді ряду Фур'є (4.25) за ортонормованою системою власних функцій $V_{mn}(x, y)$ двовимірної задачі Штурма – Ліувілля

$$V_{xx} + V_{yy} + \lambda V = 0, \quad (4.29)$$

$$V(0, y) = 0, \quad V(p, y) = 0, \quad V(x, 0) = 0, \quad V_y(x, s) = 0,$$

для знаходження якої застосовуємо метод відокремлення змінних для однорідної задачі, що відповідає (4.26), (4.27)

Задачу (4.29) в свою чергу розв'язуємо методом Фур'є, покладаючи $V(x, y) = X(x)Y(y)$. Здійснюючи відокремлення змінних та зважаючи на однорідні крайові умови для функції

$V(x, y)$, для визначення функцій $X(x)$ і $Y(y)$ отримаємо дві одновимірні задачі на власні значення

$$X''(x) + \beta X(x) = 0, \quad X(0) = X(p) = 0, \quad (4.30)$$

$$Y''(y) + \alpha Y(y) = 0, \quad Y(0) = Y'(s) = 0, \quad (4.31)$$

де α і β – сталі, $\lambda = \alpha + \beta$.

Згідно з формулами прикладів 1,7 та додатку 2 власні значення та власні функції цих задач мають вигляд

$$\beta_m = \frac{m^2 \pi^2}{p^2}, \quad X_m(x) = \sqrt{\frac{2}{p}} \sin \frac{m\pi}{p} x, \quad m = 1, 2, \dots,$$

$$\alpha_n = \left(\frac{\pi(2n+1)}{2s} \right)^2, \quad Y_n(y) = \sqrt{\frac{2}{s}} \sin \frac{(2n+1)\pi}{2s} y, \quad n = 0, 1, \dots$$

Звідси випливає, що власними значеннями λ_{mn} і відповідними власними функціями $V_{mn}(x, y)$ двовимірної задачі Штурма – Ліувілля (4.29) будуть

$$\lambda_{mn} = \left(\frac{m\pi}{p} \right)^2 + \left(\frac{(2n+1)\pi}{2s} \right)^2, \quad (4.32)$$

$$V_{mn}(x, y) = \frac{2}{\sqrt{ps}} \sin \frac{m\pi}{p} x \sin \frac{(2n+1)\pi}{2s} y, \quad m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}_0. \quad (4.33)$$

Враховуючи, що у формулі (4.25) індекс n повинен починатися з нуля, будемо шукати розв'язок задачі (4.26) – (4.28) у вигляді

$$u(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} T_{mn}(t) V_{mn}(x, y). \quad (4.34)$$

Якщо помножити співвідношення (4.34) на $V_{kl}(x, y)$ і проінтегрувати його по x від 0 до p , по y від 0 до s (обидві частини рівності помножити скалярно на V_{kl}), то очевидно в силу ортонормованості системи власних функцій $V_{kl}(x, y)$ матимемо

$$(u, V_{kl}) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} T_{mn}(t) \int_0^p \int_0^s V_{kl}(x, y) V_{mn}(x, y) dx dy =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} T_{mn}(t) (V_{kl}, V_{mn}) = T_{kl}(t).$$

Отже,

$$T_{mn}(t) = (u, V_{mn}). \quad (4.35)$$

Помножимо рівняння (4.26) та початкові умови (4.28) скалярно на $V_{mn}(x, y)$:

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, V_{mn} \right) = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, V_{mn} \right) + A \left(\sin \frac{\pi x}{p} \sin \frac{\pi y}{2s}, V_{mn} \right),$$

$$T_{mn}(0) = (u|_{t=0}, V_{mn}) = B \left(\sin \frac{3\pi x}{p} \sin \frac{5\pi y}{2s}, V_{mn} \right),$$

$$T'_{mn}(0) = \left(\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0}, V_{mn} \right) = (0, V_{mn}).$$

Враховуючи (4.35), а також те, що оператор $\mathcal{L} = -\Delta$, який входить у рівняння, є самоспряженим при заданих однорідних крайових умовах, тобто

$(-\Delta u, V_{mn}) = (u, -\Delta V_{mn}) = (u, \lambda_{mn} V_{mn}) = \lambda_{mn}(u, V_{mn}) = \lambda_{mn} T_{mn}(t)$, беручи до уваги співвідношення

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, V_{mn} \right) &= \int_0^p \int_0^s \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} V_{mn}(x, y) dx dy = \\ &= \frac{d^2}{dt^2} \int_0^p \int_0^s u(x, y, t) V_{mn}(x, y) dx dy = \frac{d^2 T_{mn}}{dt^2}, \end{aligned}$$

рівності

$$\sin \frac{\pi x}{p} \sin \frac{\pi y}{2s} = \frac{\sqrt{ps}}{2} V_{10}, \quad \sin \frac{3\pi x}{p} \sin \frac{5\pi y}{2s} = \frac{\sqrt{ps}}{2} V_{32},$$

дістанемо задачу Коші для функції $T_{mn}(t)$

$$T''_{mn}(t) + \lambda_{mn} a^2 T_{mn}(t) = A \frac{\sqrt{ps}}{2} (V_{10}, V_{mn}),$$

$$T_{mn}(0) = B \frac{\sqrt{ps}}{2} (V_{32}, V_{mn}), \quad T'_{mn}(0) = 0.$$

Розв'яжемо її. Для цього розглянемо випадки: $m = 1, n = 0$; $m = 3, n = 2$; $(m, n) \neq (1, 0)$; $(m, n) \neq (3, 2)$. Тоді відповідні задачі Коші мають вигляд

1) $m = 1, n = 0$:

$$T''_{10}(t) + \lambda_{10} a^2 T_{10}(t) = A \frac{\sqrt{ps}}{2}, \quad (4.36)$$

$$T_{10}(0) = 0, T'_{10}(0) = 0; \quad (4.37)$$

2) $m = 3, n = 2$:

$$T''_{32}(t) + \lambda_{32} a^2 T_{32}(t) = 0, \quad (4.38)$$

$$T_{32}(0) = B \frac{\sqrt{ps}}{2}, T'_{32}(0) = 0; \quad (4.39)$$

3) $(m, n) \neq (1, 0)$; $(m, n) \neq (3, 2)$:

$$T''_{mn}(t) + \lambda_{mn} a^2 T_{mn}(t) = 0, \quad (4.40)$$

$$T_{mn}(0) = 0, T'_{mn}(0) = 0. \quad (4.41)$$

Знайдемо їхні розв'язки.

1) Загальний розв'язок неоднорідного рівняння $T_{10}(t)$ шукатимемо як суму загального розв'язку однорідного рівняння

$$\bar{T}_{10}(t) = A_{10} \cos \sqrt{\lambda_{10}} at + B_{10} \sin \sqrt{\lambda_{10}} at$$

і частинного розв'язку неоднорідного рівняння, який шукаємо за виглядом правої частини рівняння як сталу

$$\bar{\bar{T}}_{10}(t) = D.$$

Підставляючи $\bar{\bar{T}}_{10}(t) = D$ у рівняння (4.36), знаходимо сталу $D = \frac{A\sqrt{ps}}{2\lambda_{10}a^2}$ а, отже, і $\bar{\bar{T}}_{10}(t) = \frac{A\sqrt{ps}}{2\lambda_{10}a^2}$.

Тоді загальний розв'язок неоднорідного рівняння має вигляд

$$T_{10}(t) = A_{10} \cos \sqrt{\lambda_{10}} at + B_{10} \sin \sqrt{\lambda_{10}} at + \frac{A\sqrt{ps}}{2\lambda_{10}a^2}.$$

З початкових умов (4.37) одержуємо

$$A_{10} = -\frac{A\sqrt{ps}}{2\lambda_{10}a^2}, B_{10} = 0.$$

Таким чином,

$$T_{10}(t) = \frac{A\sqrt{ps}}{2\lambda_{10}a^2} (1 - \cos \sqrt{\lambda_{10}} at).$$

2) Загальний розв'язок однорідного рівняння $T_{32}(t)$ має вигляд

$$T_{32}(t) = A_{32} \cos \sqrt{\lambda_{32}} at + B_{32} \sin \sqrt{\lambda_{32}} at.$$

Використовуючи початкові умови (4.39), знаходимо $B_{32} = 0$, $A_{32} = B \frac{\sqrt{ps}}{2}$. Тоді

$$T_{32}(t) = B \frac{\sqrt{ps}}{2} \cos \sqrt{\lambda_{32}} at.$$

3) Задача (4.40), (4.41) має тривіальний розв'язок $T_{mn}(t) = 0$. Тоді внаслідок єдиності розв'язку задачі Коші для звичайного диференціального рівняння другого порядку інших розв'язків бути не може.

Отже, шуканий розв'язок задачі (4.26) – (4.28) визначає функція

$$u(x, y, t) = \frac{A\sqrt{ps}}{2a^2\lambda_{10}} (1 - \cos \sqrt{\lambda_{10}} at) \frac{2}{\sqrt{ps}} \sin \frac{\pi x}{p} \sin \frac{\pi y}{2s} + \\ + B \frac{\sqrt{ps}}{2} \cos \sqrt{\lambda_{32}} at \frac{2}{\sqrt{ps}} \sin \frac{3\pi x}{p} \sin \frac{5\pi y}{2s}$$

або, після підстановки значень $\lambda_{10}, \lambda_{32}$ з (4.32),

$$u(x, y, t) = \frac{A}{\pi^2 a^2 \left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{4s^2} \right)} \left(1 - \cos \sqrt{\left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{4s^2} \right) \pi at} \right) \cdot \\ \cdot \sin \frac{\pi x}{p} \sin \frac{\pi y}{2s} + B \cos \sqrt{\left(\frac{9}{p^2} + \frac{25}{4s^2} \right) \pi at} \sin \frac{3\pi x}{p} \sin \frac{5\pi y}{2s}.$$

Приклад 11. Знайти методом Фур'є розв'язок мішаної задачі для хвильового рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + A \cos \frac{3\pi x}{4} \cos 3y, \\ 0 < x < 2, \quad 0 < y < \frac{\pi}{2}, \quad t > 0, \quad (4.42)$$

$$u_x(0, y, t) = u(2, y, t) = 0, \quad 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}, \quad t \geq 0, \\ u_y(x, 0, t) = u\left(x, \frac{\pi}{2}, t\right) = 0, \quad 0 \leq x \leq 2, \quad t \geq 0, \quad (4.43)$$

$$u|_{t=0} = B \cos \frac{\pi x}{4} \cos y, \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = C \cos \frac{5\pi x}{4} \cos 3y, \\ 0 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}. \quad (4.44)$$

Розв'язання. Припустимо, що розв'язок задачі (4.42) – (4.44) існує. Шукатимемо його у вигляді ряду Фур'є (4.25) за ортонормованою системою власних функцій $V_{mn}(x, y)$ двовимірної задачі Штурма – Ліувілля

$$V_{xx} + V_{yy} + \lambda V = 0, \quad (4.45) \\ V_x(0, y) = 0, \quad V(2, y) = 0, \quad V_y(x, 0) = 0, \quad V\left(x, \frac{\pi}{2}\right) = 0,$$

для знаходження якої застосовуємо метод відокремлення змінних для однорідної задачі, що відповідає (4.42), (4.43).

Задачу (4.45) в свою чергу розв'язуємо методом Фур'є, покладаючи $V(x, y) = X(x)Y(y)$. Здійснюючи відокремлення змінних та зважаючи на однорідні крайові умови для функцій $V(x, y)$, для визначення функцій $X(x)$ і $Y(y)$ отримаємо дві одновимірні задачі на власні значення

$$X''(x) + \beta X(x) = 0, \quad X'(0) = X(2) = 0, \quad (4.46)$$

$$Y''(y) + \alpha Y(y) = 0, \quad Y'(0) = Y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad (4.47)$$

де α і β – сталі, $\lambda = \alpha + \beta$.

Розглянемо задачу (4.46). Враховуючи, що за властивостями задачі Штурма – Ліувілля $\lambda > 0$, загальний розв'язок рівняння для функції $X(x)$ має вигляд

$$X(x) = C_1 \cos \sqrt{\beta} x + C_2 \sin \sqrt{\beta} x.$$

Підпорядковуючи цю функцію крайовим умовам, одержимо $X'(0) = C_2 \sqrt{\beta} = 0$, звідки $C_2 = 0$; $X(2) = C_1 \cos 2\sqrt{\beta} = 0$ або $\cos 2\sqrt{\beta} = 0$. З останнього рівняння знаходимо $2\sqrt{\beta} = \frac{\pi}{2} + m\pi$, $m \in \mathbb{N}_0$. Таким чином, власні значення задачі (4.46) даються формулою $\beta_m = \left[\frac{\pi(2m+1)}{4} \right]^2$. Їм відповідають нормовані власні функції

$$X_m(x) = \cos\left(\frac{\pi(2m+1)}{4}\right)x, m \in \mathbb{N}_0.$$

З аналогічних міркувань власні значення та власні функції задачі (4.47) мають вигляд

$$\alpha_n = (1+2n)^2, Y_n(y) = \sqrt{\frac{4}{\pi}} \cos(1+2n)y, n \in \mathbb{N}_0.$$

Звідси випливає, що власними значеннями λ_{mn} і відповідними власними функціями $V_{mn}(x, y)$ двовимірної задачі Штурма – Ліувілля (4.45) будуть

$$\lambda_{mn} = \left[\frac{\pi(2m+1)}{4} \right]^2 + (1+2n)^2, \quad (4.48)$$

$$V_{mn}(x, y) = \sqrt{\frac{4}{\pi}} \cos \frac{\pi(2m+1)}{4} x \cos(1+2n)y, \quad m, n \in \mathbb{N}_0. \quad (4.49)$$

Враховуючи, що у формулі (4.25) індекси m, n повинні починатися з нуля, будемо шукати розв'язок задачі (4.42) – (4.44) у вигляді

$$u(x, y, t) = \sum_{m,n=0}^{\infty} T_{mn}(t) V_{mn}(x, y), \quad (4.50)$$

Помножимо рівняння (4.42) та початкові умови (4.44) скалярно на $V_{mn}(x, y)$:

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, V_{mn} \right) = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, V_{mn} \right) + A \left(\cos \frac{3\pi x}{4} \cos 3y, V_{mn} \right),$$

$$T_{mn}(0) = (u|_{t=0}, V_{mn}) = B \left(\cos \frac{\pi x}{4} \cos y, V_{mn} \right),$$

$$T'_{mn}(0) = \left(\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0}, V_{mn} \right) = C \left(\cos \frac{5\pi x}{4} \cos 3y, V_{mn} \right).$$

З (4.50) внаслідок ортонормованості системи функцій $V_{mn}(x, y)$ маємо $T_{mn}(t) = (u, V_{mn})$. Враховуючи також самоспряженість оператора Лапласа і рівності

$$\cos \frac{3\pi x}{4} \cos 3y = \sqrt{\frac{\pi}{4}} V_{11}, \cos \frac{\pi x}{4} \cos y = \sqrt{\frac{\pi}{4}} V_{00},$$

$$\cos \frac{5\pi x}{4} \cos 3y = \sqrt{\frac{\pi}{4}} V_{21},$$

дістанемо задачу Коші для функції $T_{mn}(t)$

$$T_{mn}''(t) + \lambda_{mn} a^2 T_{mn}(t) = A \sqrt{\frac{\pi}{4}} (V_{11}, V_{mn}),$$

$$T_{mn}(0) = B \sqrt{\frac{\pi}{4}} (V_{00}, V_{mn}), T_{mn}'(0) = C \sqrt{\frac{\pi}{4}} (V_{21}, V_{mn}).$$

Розв'яжемо її. Для цього розглянемо такі випадки: $m = 1, n = 1$; $m = 0, n = 0$; $m = 2, n = 1$; $(m, n) \neq (1, 1)$; $(m, n) \neq (0, 0)$; $(m, n) \neq (2, 1)$. Тоді відповідні задачі Коші мають вигляд

1) $m = 1, n = 1$:

$$T_{11}''(t) + \lambda_{11} a^2 T_{11}(t) = A \sqrt{\frac{\pi}{4}}, \quad (4.51)$$

$$T_{11}(0) = 0, T_{11}'(0) = 0; \quad (4.52)$$

2) $m = 0, n = 0$:

$$T_{00}''(t) + \lambda_{00} a^2 T_{00}(t) = 0, \quad (4.53)$$

$$T_{00}(0) = B \sqrt{\frac{\pi}{4}}, T_{00}'(0) = 0; \quad (4.54)$$

3) $m = 2, n = 1$:

$$T_{21}''(t) + \lambda_{21} a^2 T_{21}(t) = 0, \quad (4.55)$$

$$T_{21}(0) = 0, T_{21}'(0) = C \sqrt{\frac{\pi}{4}}; \quad (4.56)$$

4) $(m, n) \neq (1, 1)$; $(m, n) \neq (0, 0)$; $(m, n) \neq (2, 1)$:

$$T_{mn}''(t) + \lambda_{mn} a^2 T_{mn}(t) = 0, \quad (4.57)$$

$$T_{mn}(0) = 0, T_{mn}'(0) = 0. \quad (4.58)$$

Знайдемо їхні розв'язки.

1) Загальний розв'язок неоднорідного рівняння $T_{11}(t)$ шукатимемо як суму загального розв'язку однорідного рівняння

$$\bar{T}_{11}(t) = A_{11} \cos \sqrt{\lambda_{11}} at + B_{11} \sin \sqrt{\lambda_{11}} at$$

і частинного розв'язку неоднорідного рівняння, який шукаємо за виглядом правої частини рівняння як сталу

$$\bar{\bar{T}}_{11}(t) = D.$$

Підставляючи $\bar{\bar{T}}_{11}(t) = D$ у рівняння (4.51), знаходимо сталу $D = A \sqrt{\frac{\pi}{4} \frac{1}{\lambda_{11} a^2}}$ а, отже, і $\bar{\bar{T}}_{11}(t) = A \sqrt{\frac{\pi}{4} \frac{1}{\lambda_{11} a^2}}$.

Тоді загальний розв'язок неоднорідного рівняння має вигляд

$$T_{11}(t) = A_{11} \cos \sqrt{\lambda_{11}} at + B_{11} \sin \sqrt{\lambda_{11}} at + A \sqrt{\frac{\pi}{4} \frac{1}{\lambda_{11} a^2}}.$$

З початкових умов (4.52) одержуємо

$$A_{11} = -A \sqrt{\frac{\pi}{4} \frac{1}{\lambda_{11} a^2}}, B_{11} = 0.$$

Таким чином,

$$T_{11}(t) = A \sqrt{\frac{\pi}{4} \frac{1}{\lambda_{11} a^2}} (1 - \cos \sqrt{\lambda_{11}} at).$$

2) Загальний розв'язок однорідного рівняння $T_{00}(t)$ має вигляд

$$T_{00}(t) = A_{00} \cos \sqrt{\lambda_{00}} at + B_{00} \sin \sqrt{\lambda_{00}} at.$$

Використовуючи початкові умови (4.54), знаходимо $B_{00} = 0$,

$$A_{00} = B \sqrt{\frac{\pi}{4}}. \text{ Тоді}$$

$$T_{00}(t) = B \sqrt{\frac{\pi}{4}} \cos \sqrt{\lambda_{00}} at.$$

3) Загальний розв'язок однорідного рівняння $T_{21}(t)$ має вигляд

$$T_{21}(t) = A_{21} \cos \sqrt{\lambda_{21}} at + B_{21} \sin \sqrt{\lambda_{21}} at.$$

Використовуючи початкові умови (4.56), знаходимо $A_{21} = 0$,

$$B_{21} = C \sqrt{\frac{\pi}{4} \frac{1}{\sqrt{\lambda_{21}} a}}. \text{ Тоді}$$

$$T_{21}(t) = C \sqrt{\frac{\pi}{4} \frac{1}{\sqrt{\lambda_{21}} a}} \sin \sqrt{\lambda_{21}} at.$$

4) Задача (4.57), (4.58) має тривіальний розв'язок $T_{mn}(t) = 0$.

Отже, шуканий розв'язок задачі (4.42) – (4.44) визначає функція

$$u(x, y, t) = \frac{A}{\lambda_{11} a^2} (1 - \cos \sqrt{\lambda_{11}} at) \cos \frac{3\pi x}{4} \cos 3y + \\ + B \cos \sqrt{\lambda_{00}} at \cos \frac{\pi}{4} x \cos y + \frac{C}{\sqrt{\lambda_{21}} a} \sin \sqrt{\lambda_{21}} at \cos \frac{5\pi x}{4} \cos 3y$$

або, після підстановки значень $\lambda_{11}, \lambda_{00}, \lambda_{21}$ з (4.48),

$$u(x, y, t) = \frac{A}{\left(\frac{9\pi^2}{16} + 9\right)a^2} \left(1 - \cos \sqrt{\frac{9\pi^2}{16} + 9at}\right) \cos \frac{3\pi x}{4} \cos 3y + \\ + B \cos \left(\sqrt{\frac{\pi^2}{16} + 1at}\right) \cos \frac{\pi}{4}x \cos y + \\ + \frac{C}{a\sqrt{\frac{25\pi^2}{16} + 9}} \sin \left(\sqrt{\frac{25\pi^2}{16} + 9at}\right) \cos \frac{5\pi x}{4} \cos 3y.$$

Приклад 12. Знайти методом Фур'є розв'язок мішаної задачі для хвильового рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + A \sin \frac{3\pi x}{2} \cos \frac{3\pi y}{4}, \\ 0 < x < 1, \quad 0 < y < 2, \quad t > 0, \quad (4.59)$$

$$u(0, y, t) = u_x(1, y, t) = 0, \quad 0 \leq y \leq 2, \quad t \geq 0, \\ u_y(x, 0, t) = u(x, 2, t) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t \geq 0, \quad (4.60)$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = B \sin \frac{\pi x}{2} \cos \frac{\pi y}{4}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 2. \quad (4.61)$$

Розв'язання. Припустимо, що розв'язок задачі (4.59) – (4.61) існує. Шукатимемо його у вигляді ряду Фур'є (4.25) за ортонормованою системою власних функцій $V_{mn}(x, y)$ двовимірної задачі Штурма – Ліувіля

$$V_{xx} + V_{yy} + \lambda V = 0, \quad (4.62) \\ V(0, y) = 0, \quad V_x(1, y) = 0, \quad V_y(x, 0) = 0, \quad V(x, 2) = 0,$$

для знаходження якої застосовуємо метод відокремлення змінних для однорідної задачі, що відповідає (4.59), (4.60).

Задачу (4.62) в свою чергу розв'язуємо методом Фур'є, покладаючи $V(x, y) = X(x)Y(y)$. Здійснюючи відокремлення змінних та зважаючи на однорідні крайові умови для функції

$V(x, y)$, для визначення функцій $X(x)$ і $Y(y)$ отримаємо дві одновимірні задачі на власні значення

$$X''(x) + \beta X(x) = 0, \quad X(0) = X'(1) = 0, \quad (4.63)$$

$$Y''(y) + \alpha Y(y) = 0, \quad Y'(0) = Y(2) = 0, \quad (4.64)$$

де α і β – сталі, $\lambda = \alpha + \beta$.

Згідно з формулами додатку 2 власні значення та власні функції цих задач мають вигляд

$$\beta_m = \left[\frac{\pi(2m+1)}{2} \right]^2, \quad X_m(x) = \sqrt{2} \sin \frac{2m+1}{2} \pi x, \quad m \in \mathbb{N}_0,$$

$$\alpha_n = \left[\frac{\pi(1+2n)}{4} \right]^2, \quad Y_n(y) = \cos \left(\frac{1+2n}{4} \right) \pi y, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Звідси випливає, що власними значеннями λ_{mn} і відповідними власними функціями $V_{mn}(x, y)$ двовимірної задачі Штурма – Ліувілля (4.62) будуть

$$\lambda_{mn} = \left[\frac{\pi(2m+1)}{2} \right]^2 + \left[\frac{\pi(2n+1)}{4} \right]^2, \quad (4.65)$$

$$V_{mn}(x, y) = \sqrt{2} \sin \frac{2m+1}{2} \pi x \cos \frac{2n+1}{4} \pi y, \quad m, n \in \mathbb{N}_0. \quad (4.66)$$

Враховуючи, що у формулі (4.25) індекси m, n повинні починатися з нуля, будемо шукати розв'язок задачі (4.59) – (4.61) у вигляді

$$u(x, y, t) = \sum_{m,n=0}^{\infty} T_{mn}(t) V_{mn}(x, y), \quad (4.67)$$

Помножимо рівняння (4.59) та початкові умови (4.61) скалярно на $V_{mn}(x, y)$:

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, V_{mn} \right) = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, V_{mn} \right) + A \left(\sin \frac{3\pi x}{2} \cos \frac{3\pi y}{4}, V_{mn} \right),$$

$$T_{mn}(0) = (u|_{t=0}, V_{mn}) = (0, V_{mn}),$$

$$T'_{mn}(0) = \left(\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0}, V_{mn} \right) = B \left(\sin \frac{\pi x}{2} \cos \frac{\pi y}{4}, V_{mn} \right).$$

З (4.67) внаслідок ортонормованості системи функцій $V_{mn}(x, y)$ маємо $T_{mn}(t) = (u, V_{mn})$. Враховуючи також самоспряженість оператора Лапласа і рівності

$$\sin \frac{3\pi x}{2} \cos \frac{3\pi y}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} V_{11}, \sin \frac{\pi x}{2} \cos \frac{\pi y}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} V_{00},$$

дістанемо задачу Коші для функції $T_{mn}(t)$

$$T_{mn}''(t) + \lambda_{mn} a^2 T_{mn}(t) = A \frac{1}{\sqrt{2}} (V_{11}, V_{mn}),$$

$$T_{mn}(0) = 0, T_{mn}'(0) = B \frac{1}{\sqrt{2}} (V_{00}, V_{mn}).$$

Розв'яжемо її. Для цього розглянемо випадки: $m = 1, n = 1$; $m = 0, n = 0$; $(m, n) \neq (1, 1)$; $(m, n) \neq (0, 0)$. Тоді відповідні задачі Коші мають вигляд

1) $m = 1, n = 1$:

$$T_{11}''(t) + \lambda_{11} a^2 T_{11}(t) = A \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (4.68)$$

$$T_{11}(0) = 0, T_{11}'(0) = 0; \quad (4.69)$$

2) $m = 0, n = 0$:

$$T_{00}''(t) + \lambda_{00} a^2 T_{00}(t) = 0, \quad (4.70)$$

$$T_{00}(0) = 0, T_{00}'(0) = B \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad (4.71)$$

3) $(m, n) \neq (1, 1)$; $(m, n) \neq (0, 0)$:

$$T_{mn}''(t) + \lambda_{mn} a^2 T_{mn}(t) = 0, \quad (4.72)$$

$$T_{mn}(0) = 0, T_{mn}'(0) = 0. \quad (4.73)$$

1) Загальний розв'язок неоднорідного рівняння $T_{11}(t)$ шукатимемо як суму загального розв'язку однорідного рівняння

$$\bar{T}_{11}(t) = A_{11} \cos \sqrt{\lambda_{11}} at + B_{11} \sin \sqrt{\lambda_{11}} at$$

і частинного розв'язку неоднорідного рівняння, який шукаємо за виглядом правої частини рівняння як сталу

$$\bar{\bar{T}}_{11}(t) = D.$$

Підставляючи $\bar{T}_{11}(t) = D$ у рівняння (4.68), знаходимо сталу $D = \frac{A}{\sqrt{2}} \frac{1}{\lambda_{11} a^2}$ а отже, і $\bar{T}_{11}(t) = \frac{A}{\sqrt{2}} \frac{1}{\lambda_{11} a^2}$.

Тоді загальний розв'язок неоднорідного рівняння має вигляд

$$T_{11}(t) = A_{11} \cos \sqrt{\lambda_{11}} at + B_{11} \sin \sqrt{\lambda_{11}} at + \frac{A}{\sqrt{2}} \frac{1}{\lambda_{11} a^2}.$$

З початкових умов (4.69) одержуємо

$$A_{11} = -\frac{A}{\sqrt{2}} \frac{1}{\lambda_{11} a^2}, B_{11} = 0.$$

Таким чином,

$$T_{11}(t) = \frac{A}{\sqrt{2}} \frac{1}{\lambda_{11} a^2} (1 - \cos \sqrt{\lambda_{11}} at).$$

2) Загальний розв'язок однорідного рівняння $T_{00}(t)$ має вигляд

$$T_{00}(t) = A_{00} \cos \sqrt{\lambda_{00}} at + B_{00} \sin \sqrt{\lambda_{00}} at.$$

Використовуючи початкові умови (4.71), знаходимо

$$A_{00} = 0, B_{00} = \frac{B}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{\lambda_{00}} a}.$$

Тоді

$$T_{00}(t) = \frac{B}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{\lambda_{00}} a} \sin \sqrt{\lambda_{00}} at.$$

3) Задача (4.72), (4.73) має тривіальний розв'язок $T_{mn}(t) = 0$.

Отже, шуканий розв'язок задачі (4.59) – (4.61) визначає функція

$$u(x, y, t) = \frac{A}{\lambda_{11} a^2} (1 - \cos \sqrt{\lambda_{11}} at) \sin \frac{3\pi x}{2} \cos \frac{3\pi y}{4} + \frac{B}{\sqrt{\lambda_{00}} a} \sin \sqrt{\lambda_{00}} at \sin \frac{\pi x}{2} \cos \frac{\pi y}{4}$$

або, після підстановки значень $\lambda_{11}, \lambda_{00}$ з (4.65),

$$u(x, y, t) = \frac{16A}{45a^2\pi^2} \left(1 - \cos \frac{3\pi}{4} \sqrt{5} at\right) \sin \frac{3\pi x}{2} \cos \frac{3\pi y}{4} + \frac{4B}{\sqrt{5}\pi a} \sin \frac{\pi}{4} \sqrt{5} at \sin \frac{\pi x}{2} \cos \frac{\pi y}{4}.$$

Приклад 13. Знайти методом Фур'є розв'язок мішаної задачі для хвильового рівняння:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + A e^t \sin 2x, \\ 0 < x < \pi, \quad 0 < y < \frac{\pi}{2}, \quad t > 0, \quad (4.74)$$

$$u(0, y, t) = u(\pi, y, t) = 0, \quad 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}, \quad t \geq 0, \\ u_y(x, 0, t) = u_y\left(x, \frac{\pi}{2}, t\right) = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad t \geq 0, \quad (4.75)$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = B \sin x \cos 2y, \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}. \quad (4.76)$$

Розв'язання. Припустимо, що розв'язок задачі (4.74) – (4.76) існує. Шукатимемо його у вигляді ряду Фур'є (4.25) за ортонормованою системою власних функцій $V_{mn}(x, y)$ двовимірної задачі Штурма – Ліувіля

$$V_{xx} + V_{yy} + \lambda V = 0, \quad (4.77)$$

$$V(0, y) = 0, \quad V(\pi, y) = 0, \quad V_y(x, 0) = 0, \quad V_y\left(x, \frac{\pi}{2}\right) = 0,$$

для знаходження якої застосовуємо метод відокремлення змінних для однорідної задачі, що відповідає (4.74), (4.75).

Задачу (4.77) в свою чергу розв'язуємо методом Фур'є, покладаючи $V(x, y) = X(x)Y(y)$. Здійснюючи відокремлення змінних та зважаючи на однорідні крайові умови для функції $V(x, y)$, для визначення функцій $X(x)$ і $Y(y)$ отримаємо дві одновимірні задачі на власні значення

$$X''(x) + \beta X(x) = 0, \quad X(0) = X(\pi) = 0, \quad (4.78)$$

$$Y''(y) + \alpha Y(y) = 0, \quad Y'(0) = Y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad (4.79)$$

де α і β – сталі, $\lambda = \alpha + \beta$.

Згідно з формулами прикладів 1, 9 та додатку 2 власні функції та власні значення цих задач мають вигляд

$$\beta_m = m^2, \quad X_m(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin mx, \quad m \in \mathbb{N},$$

$$\alpha_0 = 0, Y_0(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}; \alpha_n = 4n^2, Y_n(y) = \sqrt{\frac{4}{\pi}} \cos 2ny, n \in \mathbb{N}.$$

Звідси випливає, що власними значеннями λ_{mn} і відповідними власними функціями $V_{mn}(x, y)$ двовимірної задачі Штурма-Ліувілля (4.77) будуть

$$\begin{cases} \lambda_{m0} = m^2, V_{m0}(x, y) = \frac{2}{\pi} \sin mx, m \in \mathbb{N}, \\ \lambda_{mn} = m^2 + 4n^2, V_{mn}(x, y) = \frac{\sqrt{8}}{\pi} \sin mx \cos 2ny, m, n \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (4.80)$$

Враховуючи, що у формулі (4.25) індекс n повинен починатися з нуля, будемо шукати розв'язок задачі (4.74) – (4.76) у вигляді

$$u(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} T_{mn}(t) V_{mn}(x, y). \quad (4.81)$$

Помножимо рівняння (4.74) та початкові умови (4.76) скалярно на $V_{mn}(x, y)$:

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, V_{mn} \right) = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, V_{mn} \right) + A e^t (\sin 2x, V_{mn}),$$

$$T_{mn}(0) = (u|_{t=0}, V_{mn}) = (0, V_{mn}),$$

$$T'_{mn}(0) = \left(\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0}, V_{mn} \right) = B (\sin x \cos 2y, V_{mn}).$$

З (4.81) внаслідок ортонормованості системи функцій $V_{mn}(x, y)$ маємо $T_{mn}(t) = (u, V_{mn})$. Враховуючи також самоспряженість оператора Лапласа і рівності

$$\sin 2x = \frac{\pi}{2} V_{20}(x, y), \sin x \cos 2y = \frac{\pi}{\sqrt{8}} V_{11},$$

дістанемо задачу Коші для функції $T_{mn}(t)$

$$T''_{mn}(t) + \lambda_{mn} a^2 T_{mn}(t) = A \frac{\pi}{2} e^t (V_{20}, V_{mn}),$$

$$T_{mn}(0) = 0, T'_{mn}(0) = B \frac{\pi}{\sqrt{8}} (V_{11}, V_{mn}).$$

Розв'яжемо її. Для цього розглянемо випадки: $m = 2, n = 0$; $m = 1, n = 1$; $(m, n) \neq (2, 0)$; $(m, n) \neq (1, 1)$. Тоді відповідні задачі Коші мають вигляд

1) $m = 2, n = 0$:

$$T_{20}''(t) + \lambda_{20} a^2 T_{20}(t) = A \frac{\pi}{2} e^t, \quad (4.82)$$

$$T_{20}(0) = 0, T_{20}'(0) = 0; \quad (4.83)$$

2) $m = 1, n = 1$:

$$T_{11}''(t) + \lambda_{11} a^2 T_{11}(t) = 0, \quad (4.84)$$

$$T_{11}(0) = 0, T_{11}'(0) = B \frac{\pi}{\sqrt{8}}; \quad (4.85)$$

3) $(m, n) \neq (2, 0)$; $(m, n) \neq (1, 1)$:

$$T_{mn}''(t) + \lambda_{mn} a^2 T_{mn}(t) = 0, \quad (4.86)$$

$$T_{mn}(0) = 0, T_{mn}'(0) = 0. \quad (4.87)$$

1) Загальний розв'язок неоднорідного рівняння $T_{20}(t)$ шукатимемо як суму загального розв'язку однорідного рівняння

$$\bar{T}_{20}(t) = A_{20} \cos \sqrt{\lambda_{20}} at + B_{20} \sin \sqrt{\lambda_{20}} at$$

і частинного розв'язку неоднорідного рівняння, який шукаємо за виглядом правої частини рівняння як

$$\bar{\bar{T}}_{20}(t) = D e^t.$$

Підставляючи $\bar{\bar{T}}_{20}(t) = D e^t$ у рівняння (4.82), знаходимо сталу $D = A \frac{\pi}{2} \frac{1}{1 + \lambda_{20} a^2}$, а отже, і $\bar{\bar{T}}_{20}(t) = A \frac{\pi}{2} \frac{1}{1 + \lambda_{20} a^2} e^t$.

Тоді загальний розв'язок неоднорідного рівняння має вигляд

$$T_{20}(t) = A_{20} \cos \sqrt{\lambda_{20}} at + B_{20} \sin \sqrt{\lambda_{20}} at + A \frac{\pi}{2} \frac{1}{1 + \lambda_{20} a^2} e^t.$$

З початкових умов (4.83) одержуємо

$$A_{20} = -A \frac{\pi}{2} \frac{1}{1 + \lambda_{20} a^2}, B_{20} = -A \frac{\pi}{2} \frac{1}{1 + \lambda_{20} a^2} \frac{1}{\sqrt{\lambda_{20}} a}.$$

Таким чином,

$$T_{20}(t) = \frac{A\pi}{2} \frac{1}{1 + \lambda_{20} a^2} \left(e^t - \cos \sqrt{\lambda_{20}} at - \frac{1}{\sqrt{\lambda_{20}} a} \sin \sqrt{\lambda_{20}} at \right).$$

2) Загальний розв'язок однорідного рівняння $T_{11}(t)$ має вигляд

$$T_{11}(t) = A_{11} \cos \sqrt{\lambda_{11}} at + B_{11} \sin \sqrt{\lambda_{11}} at.$$

Використовуючи початкові умови (4.85), знаходимо

$$A_{11} = 0, B_{11} = \frac{B\pi}{\sqrt{8}} \frac{1}{\sqrt{\lambda_{11}}a}.$$

Тоді

$$T_{11}(t) = \frac{B\pi}{\sqrt{8}} \frac{1}{\sqrt{\lambda_{11}}a} \sin \sqrt{\lambda_{11}} at.$$

3) Задача (4.86), (4.87) має тривіальний розв'язок $T_{mn}(t) = 0$.

Отже, шуканий розв'язок задачі (4.74) – (4.76) визначає функція

$$u(x, y, t) = \frac{A}{1 + \lambda_{20}a^2} \left(e^t - \cos \sqrt{\lambda_{20}} at - \frac{1}{\sqrt{\lambda_{20}}a} \sin \sqrt{\lambda_{20}} at \right) \sin 2x + \\ + \frac{B}{\sqrt{\lambda_{11}}a} \sin \sqrt{\lambda_{11}} at \sin x \cos 2y$$

або, після підстановки значень $\lambda_{11}, \lambda_{20}$ з (4.80),

$$u(x, y, t) = \frac{A}{1 + 4a^2} \left(e^t - \cos 2at - \frac{1}{2a} \sin 2at \right) \sin 2x + \\ + \frac{B}{\sqrt{5}a} \sin \sqrt{5} at \sin x \cos 2y.$$

Завдання для аудиторної роботи

4.1. $u_{tt} = a^2 \Delta u + A \cos \frac{\pi x}{4}, 0 < x < 2, 0 < y < 2, t > 0,$

$$u_x|_{x=0} = u_x|_{x=2} = 0, 0 \leq y \leq 2, t \geq 0,$$

$$u_y|_{y=0} = u_y|_{y=2} = 0, 0 \leq x \leq 2, t \geq 0,$$

$$u|_{t=0} = B \cos \frac{5\pi x}{4} \cos \pi y, u_t|_{t=0} = C \cos \frac{3\pi x}{4} \cos \frac{\pi y}{2}, \\ 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2.$$

4.2. $u_{tt} = a^2 \Delta u + A \cos \pi x, 0 < x < 1, 0 < y < \pi, t > 0,$

$$u_x|_{x=0} = u_x|_{x=1} = 0, 0 \leq y \leq \pi, t \geq 0,$$

$$u_y|_{y=0} = u_y|_{y=\pi} = 0, 0 \leq x \leq 1, t \geq 0,$$

$$u|_{t=0} = B \cos 2\pi x \cos 3y, u_t|_{t=0} = C \cos 2y, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \pi.$$

- 4.3. $u_{tt} = a^2 \Delta u + A \sin 4x \cos \pi y, 0 < x < \frac{\pi}{2}, 0 < y < 1, t > 0,$
 $u|_{x=0} = u|_{x=\frac{\pi}{2}} = 0, 0 \leq y \leq 1, t \geq 0,$
 $u_y|_{y=0} = u_y|_{y=1} = 0, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, t \geq 0,$
 $u|_{t=0} = B \sin 2x \cos 2\pi y, u_t|_{t=0} = C \sin 6x,$
 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq 1.$
- 4.4. $u_{tt} = a^2 \Delta u + A \sin x \sin 2\pi y, 0 < x < \frac{\pi}{2}, 0 < y < 2, t > 0,$
 $u|_{x=0} = u_x|_{x=\frac{\pi}{2}} = 0, 0 \leq y \leq 2, t \geq 0,$
 $u|_{y=0} = u|_{y=2} = 0, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, t \geq 0,$
 $u|_{t=0} = B \sin 3x \sin \frac{\pi y}{2}, u_t|_{t=0} = C \sin 5x \sin \pi y,$
 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq 2.$
- 4.5. $u_{tt} = a^2 \Delta u + A \cos 3x \sin 3y, 0 < x < \pi, 0 < y < \frac{\pi}{2}, t > 0,$
 $u_x|_{x=0} = u_x|_{x=\pi} = 0, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}, t \geq 0,$
 $u|_{y=0} = u_y|_{y=\frac{\pi}{2}} = 0, 0 \leq x \leq \pi, t \geq 0,$
 $u|_{t=0} = B \cos x \sin 5y, u_t|_{t=0} = C \sin y, 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}.$

Завдання для самостійної роботи

Завдання 1: дати фізичну інтерпретацію та знайти методом Фур'є розв'язок мішаної задачі для хвильового рівняння:

- 4.6. $u_{tt} = a^2 \Delta u + A \sin x \cos \frac{\pi y}{4}, 0 < x < \pi, 0 < y < 2, t > 0,$
 $u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0, 0 \leq y \leq 2, t \geq 0,$
 $u_y|_{y=0} = u|_{y=2} = 0, 0 \leq x \leq \pi, t \geq 0,$
 $u|_{t=0} = B \sin 3x \cos \frac{5\pi y}{4}, u_t|_{t=0} = C \sin 2x \cos \frac{3\pi y}{4},$
 $0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq 2.$

- 4.7. $u_{tt} = a^2 \Delta u + A \cos \frac{\pi x}{2} \sin 2y, 0 < x < 1, 0 < y < \pi, t > 0,$
 $u_x|_{x=0} = u_x|_{x=1} = 0, 0 \leq y \leq \pi, t \geq 0,$
 $u|_{y=0} = u|_{y=\pi} = 0, 0 \leq x \leq 1, t \geq 0,$
 $u|_{t=0} = B \cos \frac{3\pi x}{2} \sin y, u_t|_{t=0} = C \cos \frac{5\pi x}{2} \sin 3y,$
 $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \pi.$
- 4.8. $u_{tt} = a^2 \Delta u + A \cos 2x \sin 2y, 0 < x < \pi, 0 < y < \frac{\pi}{2}, t > 0,$
 $u_x|_{x=0} = u_x|_{x=\pi} = 0, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}, t \geq 0,$
 $u|_{y=0} = u|_{y=\frac{\pi}{2}} = 0, 0 \leq x \leq \pi, t \geq 0,$
 $u|_{t=0} = B \sin 4y, u_t|_{t=0} = C \cos x \sin 4y, 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}.$
- 4.9. $u_{tt} = a^2 \Delta u + A \sin 2\pi x \sin \frac{\pi y}{4}, 0 < x < 1, 0 < y < 2, t > 0,$
 $u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0, 0 \leq y \leq 2, t \geq 0,$
 $u|_{y=0} = u_y|_{y=2} = 0, 0 \leq x \leq 1, t \geq 0,$
 $u|_{t=0} = B \sin \pi x \sin \frac{3\pi y}{4}, u_t|_{t=0} = C \sin 2\pi x \sin \frac{5\pi y}{4},$
 $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2.$
- 4.10. $u_{tt} = a^2 \Delta u + A \cos 2x \sin 3y, 0 < x < \pi, 0 < y < \frac{\pi}{2}, t > 0,$
 $u_x|_{x=0} = u_x|_{x=\pi} = 0, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}, t \geq 0,$
 $u|_{y=0} = u_y|_{y=\frac{\pi}{2}} = 0, 0 \leq x \leq \pi, t \geq 0,$
 $u|_{t=0} = B \sin y, u_t|_{t=0} = C \cos x \sin 5y, 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}.$
- 4.11. $u_{tt} = a^2 \Delta u + A \cos \frac{3\pi y}{4}, 0 < x < 1, 0 < y < 2, t > 0,$
 $u_x|_{x=0} = u_x|_{x=1} = 0, 0 \leq y \leq 2, t \geq 0,$
 $u_y|_{y=0} = u|_{y=2} = 0, 0 \leq x \leq 1, t \geq 0,$
 $u|_{t=0} = B \cos 2\pi x \cos \frac{\pi y}{4}, u_t|_{t=0} = C \cos \pi x \cos \frac{5\pi y}{4},$
 $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2.$

$$\begin{aligned}
4.12. \quad & u_{tt} = a^2 \Delta u + A \cos 3\pi x \sin \frac{5y}{2}, 0 < x < 1, 0 < y < \pi, t > 0, \\
& u_x|_{x=0} = u_x|_{x=1} = 0, 0 \leq y \leq \pi, t \geq 0, \\
& u|_{y=0} = u_y|_{y=\pi} = 0, 0 \leq x \leq 1, t \geq 0, \\
& u|_{t=0} = B \sin \frac{3y}{2}, u_t|_{t=0} = C \cos 2\pi x \sin \frac{y}{2}, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \pi.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4.13. \quad & u_{tt} = a^2 \Delta u + A \sin \frac{3x}{2} \cos 2y, 0 < x < \pi, 0 < y < \frac{\pi}{2}, t > 0, \\
& u|_{x=0} = u_x|_{x=\pi} = 0, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}, t \geq 0, \\
& u_y|_{y=0} = u_y|_{y=\frac{\pi}{2}} = 0, 0 \leq x \leq \pi, t \geq 0, \\
& u|_{t=0} = B \sin \frac{x}{2} \cos 4y, u_t|_{t=0} = C \sin \frac{x}{2}, 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4.14. \quad & u_{tt} = a^2 \Delta u + A \cos \frac{x}{2} \cos 4y, 0 < x < \pi, 0 < y < \frac{\pi}{2}, t > 0, \\
& u_x|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}, t \geq 0, \\
& u_y|_{y=0} = u_y|_{y=\frac{\pi}{2}} = 0, 0 \leq x \leq \pi, t \geq 0, \\
& u|_{t=0} = B \cos \frac{5x}{2}, u_t|_{t=0} = C \cos \frac{3x}{2}, 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4.15. \quad & u_{tt} = a^2 \Delta u + A \cos \frac{3\pi x}{2}, 0 < x < 1, 0 < y < 2, t > 0, \\
& u_x|_{x=0} = u|_{x=1} = 0, 0 \leq y \leq 2, t \geq 0, \\
& u_y|_{y=0} = u_y|_{y=2} = 0, 0 \leq x \leq 1, t \geq 0, \\
& u|_{t=0} = B \cos \frac{5\pi x}{2} \cos \frac{\pi y}{2}, u_t|_{t=0} = C \cos \frac{\pi x}{2} \cos \pi y, \\
& 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4.16. \quad & u_{tt} = a^2 \Delta u + A \sin \frac{3\pi x}{2} \sin \frac{y}{2}, 0 < x < 1, 0 < y < \pi, t > 0, \\
& u|_{x=0} = u_x|_{x=1} = 0, 0 \leq y \leq \pi, t \geq 0, \\
& u|_{y=0} = u_y|_{y=\pi} = 0, 0 \leq x \leq 1, t \geq 0, \\
& u|_{t=0} = B \sin \frac{3\pi x}{2} \sin \frac{3y}{2}, u_t|_{t=0} = C \sin \frac{\pi x}{2} \sin \frac{5y}{2}, \\
& 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \pi.
\end{aligned}$$

$$4.17. u_{tt} = a^2 \Delta u + A \cos \frac{\pi x}{2} \sin \frac{3y}{2}, 0 < x < 1, 0 < y < \pi, t > 0,$$

$$u_x|_{x=0} = u_x|_{x=1} = 0, 0 \leq y \leq \pi, t \geq 0,$$

$$u|_{y=0} = u_y|_{y=\pi} = 0, 0 \leq x \leq 1, t \geq 0,$$

$$u|_{t=0} = B \cos \frac{\pi x}{2} \sin \frac{5y}{2}, u_t|_{t=0} = C \cos \frac{3\pi x}{2} \sin \frac{y}{2}, \\ 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \pi.$$

$$4.18. u_{tt} = a^2 \Delta u + A \sin 2\pi x \cos \frac{y}{2}, 0 < x < 1, 0 < y < \pi, t > 0,$$

$$u_x|_{x=0} = u_x|_{x=1} = 0, 0 \leq y \leq \pi, t \geq 0,$$

$$u_y|_{y=0} = u|_{y=\pi} = 0, 0 \leq x \leq 1, t \geq 0,$$

$$u|_{t=0} = B \sin \pi x \cos \frac{3y}{2}, u_t|_{t=0} = C \sin 3\pi x \cos \frac{y}{2}, \\ 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \pi.$$

$$4.19. u_{tt} = a^2 \Delta u + A \sin \frac{\pi x}{2}, 0 < x < 1, 0 < y < \pi, t > 0,$$

$$u_x|_{x=0} = u_x|_{x=1} = 0, 0 \leq y \leq \pi, t \geq 0,$$

$$u_y|_{y=0} = u_y|_{y=\pi} = 0, 0 \leq x \leq 1, t \geq 0,$$

$$u|_{t=0} = B \sin \frac{5\pi x}{2}, u_t|_{t=0} = C \sin \frac{3\pi x}{2} \cos 2y, \\ 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \pi.$$

$$4.20. u_{tt} = a^2 \Delta u + A \cos \frac{3\pi x}{4} \sin \frac{y}{2}, 0 < x < 2, 0 < y < \pi, t > 0,$$

$$u_x|_{x=0} = u_x|_{x=2} = 0, 0 \leq y \leq \pi, t \geq 0,$$

$$u|_{y=0} = u_y|_{y=\pi} = 0, 0 \leq x \leq 2, t \geq 0,$$

$$u|_{t=0} = B \cos \frac{\pi x}{4} \sin \frac{3y}{2}, u_t|_{t=0} = C \cos \frac{3\pi x}{4} \sin \frac{5y}{2}, \\ 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq \pi.$$

$$4.21. u_{tt} = a^2 \Delta u + A \sin \frac{5\pi x}{4} \cos \frac{3y}{2}, 0 < x < 2, 0 < y < \pi, t > 0,$$

$$u_x|_{x=0} = u_x|_{x=2} = 0, 0 \leq y \leq \pi, t \geq 0,$$

$$u_y|_{y=0} = u|_{y=\pi} = 0, 0 \leq x \leq 2, t \geq 0,$$

$$u|_{t=0} = B \sin \frac{\pi x}{4} \cos \frac{y}{2}, u_t|_{t=0} = C \sin \frac{3\pi x}{4} \cos \frac{5y}{2}, \\ 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq \pi.$$

- 4.22. $u_{tt} = a^2 \Delta u + At, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < \pi, \quad t > 0,$
 $u_x|_{x=0} = u_x|_{x=1} = 0, \quad 0 \leq y \leq \pi, \quad t \geq 0,$
 $u_y|_{y=0} = u_y|_{y=\pi} = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t \geq 0,$
 $u|_{t=0} = \cos \pi x, \quad u_t|_{t=0} = \cos y, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq \pi.$
- 4.23. $u_{tt} = a^2 \Delta u + A \cos \frac{\pi x}{2} \cos \frac{3\pi y}{4}, \quad 0 < x < 2, \quad 0 < y < 2, \quad t > 0,$
 $u_x|_{x=0} = u_x|_{x=2} = 0, \quad 0 \leq y \leq 2, \quad t \geq 0,$
 $u_y|_{y=0} = u_y|_{y=2} = 0, \quad 0 \leq x \leq 2, \quad t \geq 0,$
 $u|_{t=0} = B \cos \frac{\pi y}{4}, \quad u_t|_{t=0} = C \cos \pi x \cos \frac{5\pi y}{4},$
 $0 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq y \leq 2.$
- 4.24. $u_{tt} = a^2 \Delta u + A \sin \frac{\pi x}{4} \cos 3y, \quad 0 < x < 2, \quad 0 < y < \frac{\pi}{2}, \quad t > 0,$
 $u_x|_{x=0} = u_x|_{x=2} = 0, \quad 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}, \quad t \geq 0,$
 $u_y|_{y=0} = u_y|_{y=\frac{\pi}{2}} = 0, \quad 0 \leq x \leq 2, \quad t \geq 0,$
 $u|_{t=0} = B \sin \frac{\pi x}{4} \cos 5y, \quad u_t|_{t=0} = C \sin \frac{3\pi x}{4} \cos y,$
 $0 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}.$
- 4.25. $u_{tt} = a^2 \Delta u + A \cos x \sin \frac{\pi y}{4}, \quad 0 < x < \pi, \quad 0 < y < 4, \quad t > 0,$
 $u_x|_{x=0} = u_x|_{x=\pi} = 0, \quad 0 \leq y \leq 4, \quad t \geq 0,$
 $u_y|_{y=0} = u_y|_{y=4} = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad t \geq 0,$
 $u|_{t=0} = B \sin \frac{\pi y}{2}, \quad u_t|_{t=0} = C \cos 2x \sin \pi y,$
 $0 \leq x \leq \pi, \quad 0 \leq y \leq 4.$

Завдання 2: сформулювати мішану задачу для хвильового рівняння і розв'язати її методом Фур'є:

- 4.26. Однорідна квадратна мембрана, яка в початковий момент часу $t = 0$ має форму $Axy(b-x)(b-y)$, $A = \text{const}$, b – довжина сторони мембрани, почала коливатися без початкової швидкості. Нехтуючи реакцією навколишнього середовища, дослідити вільні коливання мембрани, закріпленої по контуру.

- 4.27. Знайти в середовищі без опору поперечні коливання однорідної прямокутної мембрани, закріпленої по контуру, якщо коливання:
- а) викликані початковою швидкістю $Axy(a-x)(b-y)$;
 - б) відбуваються тільки за рахунок неперервно розподіленої по мембрані поперечної сили інтенсивності $f(x,y)\sin\omega t$, $A, \omega = \text{const}$, a і b – довжини сторін мембрани.
- 4.28. Знайти в середовищі без опору поперечні коливання однорідної квадратної мембрани, закріпленої по контуру, якщо коливання здійснюються тільки за рахунок початкового відхилення її точок, заданого функцією $\frac{l}{100} \sin \frac{\pi x}{l} \sin \frac{\pi y}{l}$, де l – довжина сторони мембрани.
- 4.29. Знайти в середовищі без опору поперечні коливання однорідної прямокутної мембрани, які викликані початковою швидкістю $A(a-x) \sin \frac{\pi y}{b}$, де a і b – довжини сторін. Частина межі мембрани $x = 0$ вільна, а решта нерухомо закріплена.
- 4.30. Знайти в середовищі без опору поперечні коливання однорідної прямокутної мембрани зі сторонами a і b , викликані початковим відхиленням її точок, заданим функцією Axy . Два краї мембрани $x = a$ і $y = b$ вільні, а інші два – нерухомо закріплені.
- 4.31. Знайти поперечні коливання однорідної прямокутної мембрани зі сторонами a і b , закріпленої по контуру, викликані поперечним зосередженим імпульсом K , переданим мембрані в точці (x_0, y_0) , $0 < x_0 < a$, $0 < y_0 < b$.
- 4.32. Знайти поперечні коливання однорідної прямокутної мембрани зі сторонами a і b , закріпленої по контуру, в середовищі з опором, пропорційним швидкості, якщо коливання відбуваються тільки за рахунок неперервно розподіленої по мембрані поперечної сили інтенсивності $A \sin \omega t$, $A, \omega = \text{const}$.
- 4.33. Знайти закон вільних коливань однорідної прямокутної мембрани зі сторонами a і b , закріпленої по контуру, якщо в

початковий момент часу мембрана мала форму $\sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b}$, а швидкість усіх її точок дорівнювала $V_0 \sin \frac{3\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$, $V_0 = \text{const}$.

- 4.34. Знайти в середовищі без опору закон вільних коливань однорідної прямокутної мембрани зі сторонами a і b , краї $x = 0, y = b$ якої вільні, а інші – нерухомо закріплені, якщо коливання відбуваються тільки внаслідок початкового відхилення точок, яке рівне $\cos \frac{5\pi x}{2a} \sin \frac{9\pi y}{2b}$.
- 4.35. Знайти в середовищі без опору закон вільних коливань однорідної прямокутної мембрани, краї $x = 0, x = 2$ якої вільні, а $y = 0, y = 1$ – нерухомо закріплені, якщо коливання здійснюються тільки за рахунок початкового відхилення її точок, яке рівне $\cos \frac{\pi x}{2} \sin 2\pi y$.
- 4.36. Нехтуючи реакцією навколишнього середовища, дослідити коливання однорідної квадратної мембрани з нерухомо закріпленим краєм, якщо коливання здійснюються тільки за рахунок неперервно розподіленої по поверхні мембрани поперечної сили інтенсивності $t \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a}$, де a – сторона мембрани.
- 4.37. Дослідити коливання однорідної квадратної мембрани зі стороною a , якщо коливання викликані дією неперервно розподіленої по поверхні мембрани поперечної сили інтенсивності $e^{-t} \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{2\pi y}{a}$. Краї мембрани. $x = 0, x = a$ нерухомо закріплені, а інші – вільні.
- 4.38. Дослідити коливання однорідної прямокутної мембрани зі сторонами a і b , з вільними краями, під дією неперервно розподіленої по поверхні мембрани поперечної сили інтенсивності $1 + \cos \frac{\pi y}{b}$, якщо початкове відхилення точок мембрани задано функцією $\cos \frac{\pi x}{a}$, а їхня початкова швидкість рівна нулеві.

ТЕМА 5. ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ФУР'Є ДО МІШАНИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ХВИЛЬОВОГО РІВНЯННЯ В КРУГОВИХ ОБЛАСТЯХ

Розглянемо задачу про вільні поперечні коливання однорідної круглої мембрани радіуса R із центром у початку координат, що закріплена по контуру. Для знаходження закону коливань такої мембрани зручно перейти від декартових до полярних координат. Математично така задача полягає у знаходженні в області $D = \{(r, \varphi, t): 0 < r < R, 0 \leq \varphi < 2\pi, t > 0\}$ розв'язку двовимірного однорідного хвильового рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \right), (r, \varphi, t) \in D, \quad (5.1)$$

який задовольняє початкові умови

$$u|_{t=0} = g(r, \varphi), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \psi(r, \varphi), \quad 0 \leq r \leq R, 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad (5.2)$$

та крайову умову

$$u|_{r=R} = 0, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, t \geq 0. \quad (5.3)$$

З фізичного змісту задачі зрозуміло, що розв'язок $u(r, \varphi, t)$ повинен бути однозначною періодичною функцією від φ з періодом 2π і залишатися обмеженим у всіх точках мембрани, в тому числі і в її центрі $r = 0$ (інакше ми б отримали нескінченний прогин мембрани, що неможливо).

Важливим частинним випадком задачі (5.1) – (5.3) є радіальні коливання мембрани, коли вважається, що початкові функції $g(r, \varphi)$ та $\psi(r, \varphi)$ не залежать від кута φ . Це означає, що величини початкових відхилень і початкових швидкостей залежать лише від відстані точок мембрани до її центру. Інакше кажучи, всі точки кола, концентричного з межею круга, в початковий момент часу мають ті самі відхилення і швидкості. Тоді очевидно, що і в будь-який момент часу t величина відхилення не залежатиме від полярного кута φ і буде функцією лише від r і t , тобто $u = u(r, t)$. При такому припущенні задача зводиться до інтегрування рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right), \quad 0 < r < R, t > 0 \quad (5.4)$$

за початкових умов

$$u|_{t=0} = g(r), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(r), \quad 0 \leq r \leq R \quad (5.5)$$

та крайових умов

$$u(R, t) = 0, \quad |u(0, t)| < \infty, \quad t \geq 0. \quad (5.6)$$

Вважаємо також, що виконуються умови узгодженості

$$g(R) = 0, \quad \psi(R) = 0.$$

Припустимо, що розв'язок задачі (5.4) – (5.6) існує. Для його побудови розв'яжемо спочатку допоміжну задачу: знайти нетривіальні розв'язки рівняння (5.4), які б задовольняли крайові умови (5.6). Згідно з методом відокремлення змінних шукатимемо такі розв'язки у вигляді добутку двох функцій

$$u(r, t) = V(r)T(t), \quad (5.7)$$

де $V(r)$ – функція тільки від r , а $T(t)$ – функція тільки від t , причому $V(r) \not\equiv 0, T(t) \not\equiv 0$. Підставляючи цей вираз у рівняння (5.4), дістанемо

$$VT'' = a^2 \left(V'' + \frac{1}{r} V' \right) T.$$

Поділивши обидві частини цієї рівності на $V(r)T(t)$, знайдемо умову відокремлення змінних

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{V''(r) + \frac{1}{r} V'(r)}{V(r)} = -\lambda,$$

з якої одержимо два звичайних диференціальних рівняння другого порядку

$$T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0, \quad (5.8)$$

$$V''(r) + \frac{1}{r} V'(r) + \lambda V(r) = 0. \quad (5.9)$$

Для функції $u(r, t)$ крайові умови (5.6) набувають вигляду

$$V(R)T(t) = 0, \quad |V(0)T(t)| < \infty,$$

звідки, враховуючи $T(t) \not\equiv 0$, випливають умови

$$V(R) = 0, \quad |V(0)| < \infty. \quad (5.10)$$

Таким чином, для функції $V(r)$ поставлена задача Штурма – Ліувілля (5.9) – (5.10), яка є задачею на власні значення в крузі.

Рівняння (5.9) заміною

$$\rho = \sqrt{\lambda}r, r = \frac{\rho}{\sqrt{\lambda}}, V(r) = V\left(\frac{\rho}{\sqrt{\lambda}}\right) = W(\rho)$$

зводиться до рівняння Бесселя нульового порядку

$$\rho^2 W''(\rho) + \rho W'(\rho) + \rho^2 W(\rho) = 0. \quad (5.11)$$

Крайові умови (5.10) набувають вигляду

$$W(\sqrt{\lambda}R) = 0, \quad |W(0)| < \infty. \quad (5.12)$$

Загальний розв'язок рівняння (5.11) має вигляд

$$W(\rho) = C_1 J_0(\rho) + C_2 N_0(\rho), \quad (5.13)$$

де $J_0(\rho), N_0(\rho)$ – функції Бесселя відповідно першого та другого роду нульового порядку. Відомо, що $J_0(0) = 1$, а $N_0(\rho)$ необмежено зростає, коли $\rho \rightarrow 0$ (рис. 5.1, 5.2)



Рис. 5.1. Додатні корені μ_n функції Бесселя $J_0(x)$

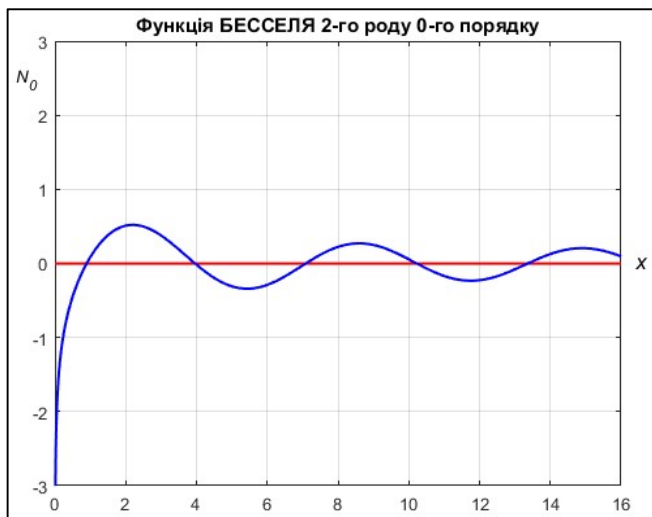


Рис. 5.2. Графік функції Бесселя $N_0(x)$

Щоб задовольнити умову обмеженості $|W(0)| < \infty$, у формулі (5.13) потрібно покласти $C_2 = 0$.

Перша крайова умова з (5.12) дає

$$J_0(\sqrt{\lambda}R) = 0 \quad \text{або} \quad J_0(\mu) = 0, \quad (5.14)$$

оскільки $C_1 \neq 0$. Остання рівність означає, що числа $\mu = \sqrt{\lambda}R$ є коренями (нулями) функції Бесселя нульового порядку. Ці корені добре вивчені; відомо, що вони утворюють зліченну множину, розташовані симетрично відносно початку числової осі, тому візьмемо тільки додатні корені, які утворюють нескінченно зростаючу послідовність $0 < \mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_n < \dots$, причому $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = +\infty$. На рис. 5.1, 5.2 наведено графіки функції $J_0(x)$, $N_0(x)$ для додатних значень аргументу.

Таким чином, власні значення задачі (5.9), (5.10), що відповідають кореням рівняння (5.14), мають вигляд

$$\lambda_n = \left(\frac{\mu_n}{R}\right)^2, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (5.15)$$

а власними функціями з точністю до сталого множника C_1 є

$$W_n(\rho) = V_n(r) = C_1 J_0\left(\frac{\mu_n}{R} r\right), n \in \mathbb{N}. \quad (5.16)$$

Власні функції крайової задачі (5.9), (5.10), які відповідають різним власним значенням λ_n , ортогональні на відрізку $[0, R]$ з вагою r , тобто

$$\int_0^R r J_0\left(\frac{\mu_n}{R} r\right) J_0\left(\frac{\mu_m}{R} r\right) dr = 0, \quad m \neq n,$$

а квадрат норми цих функцій визначається за формулою

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_n^2 &= \left\| J_0\left(\frac{\mu_n}{R} r\right) \right\|^2 = \int_0^R r J_0^2\left(\frac{\mu_n}{R} r\right) dr = \frac{R^2}{2} [J_0'(\mu_n)]^2 = \\ &= \frac{R^2}{2} J_1^2(\mu_n). \end{aligned}$$

Тут використано властивість функцій Бесселя $J_0'(t) = -J_1(t)$.

Тоді, якщо коефіцієнт C_1 у (5.16) вибрати у вигляді

$$C_1 = \frac{1}{\mathcal{N}_n},$$

функції

$$V_n(r) = \frac{J_0\left(\frac{\mu_n}{R} r\right)}{\mathcal{N}_n} = \frac{\sqrt{2} J_0\left(\frac{\mu_n}{R} r\right)}{R J_1(\mu_n)} \quad (5.17)$$

утворюють повну ортонормовану систему на $[0, R]$.

Розглянемо рівняння (5.8). Після підстановки $\lambda = \lambda_n = \left(\frac{\mu_n}{R}\right)^2$, одержимо для кожного номера n своє рівняння відносно функції $T_n(t)$

$$T_n''(t) + a^2 \left(\frac{\mu_n}{R}\right)^2 T_n(t) = 0, \quad (5.18)$$

загальним розв'язком якого є функція

$$T_n(t) = A_n \cos \frac{\mu_n}{R} at + B_n \sin \frac{\mu_n}{R} at. \quad (5.19)$$

Таким чином, згідно з (5.7) отримана зліченна множина частинних розв'язків $u_n(r, t) = V_n(r)T_n(t)$ рівняння (5.4), кожен з яких задовольняє крайові умови (5.6). Ураховуючи (5.17), (5.19), одержуємо функції

$$u_n(r, t) = \left(A_n \cos \frac{\mu_n}{R} at + B_n \sin \frac{\mu_n}{R} at \right) V_n(r).$$

Загальний розв'язок рівняння (5.4) шукаємо як суперпозицію цих функцій у вигляді ряду

$$u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{\mu_n}{R} at + B_n \sin \frac{\mu_n}{R} at \right) V_n(r). \quad (5.20)$$

Припустимо, що цей ряд збігається рівномірно і його можна почленно диференціювати два рази по t і r у розглядуваній області. Тоді він буде розв'язком рівняння (5.4) і задовольнятиме крайові умови (5.6). Виберемо коефіцієнти A_n, B_n ряду (5.20) так, щоб він задовольняв і початкові умови (5.5). Для цього підставляємо (5.20) у (5.5):

$$u(r, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n V_n(r) = g(r), \quad (5.21)$$

$$\frac{\partial u(r, 0)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{\mu_n a}{R} V_n(r) = \psi(r). \quad (5.22)$$

Таким чином, ми стикаємося з необхідністю розвинення функцій $g(r)$ і $\psi(r)$ у ряди, що аналогічні ряду Фур'є. Якщо ці функції неперервні разом із своїми похідними до другого порядку включно і задовольняють крайові умови (5.6), то вони розкладаються у рівномірно збіжні ряди Фур'є – Бесселя за системою функцій $V_n(r)$

$$g(r) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n V_n(r), \quad (5.23)$$

$$\psi(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n V_n(r). \quad (5.24)$$

Припускаючи можливість почленного інтегрування цих рядів,

знаходимо коефіцієнти g_n, ψ_n , скориставшись ортонормованістю системи (5.17). Для цього помножимо обидві частини кожного розвинення на $rV_m(r)$ і проінтегруємо від 0 до R , тоді справа залишиться лише по одному ненульовому доданку

$$g_m = \int_0^R g(r)V_m(r)rdr, \quad \psi_m = \int_0^R \psi(r)V_m(r)rdr. \quad (5.25)$$

З порівняння рядів (5.21) і (5.23), (5.22) і (5.24) знаходимо

$$A_n = g_n, \quad B_n = \frac{R}{\mu_n a} \psi_n,$$

коефіцієнти g_n, ψ_n визначаються за формулами (5.25). Підставляючи знайдені коефіцієнти у ряд (5.20), одержимо розв'язок задачі про вільні поперечні коливання круглої мембрани, що закріплена по контуру

$$u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(g_n \cos \frac{\mu_n}{R} at + \frac{R}{\mu_n a} \psi_n \sin \frac{\mu_n}{R} at \right) V_n(r), \quad (5.26)$$

який можна переписати у вигляді

$$u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\bar{g}_n \cos \frac{\mu_n}{R} at + \frac{R}{\mu_n a} \bar{\psi}_n \sin \frac{\mu_n}{R} at \right) J_0 \left(\frac{\mu_n}{R} r \right), \quad (5.27)$$

де

$$\bar{g}_n = \frac{2}{R^2 J_1^2(\mu_n)} \int_0^R g(r) J_0 \left(\frac{\mu_n}{R} r \right) r dr,$$

$$\bar{\psi}_n = \frac{2}{R^2 J_1^2(\mu_n)} \int_0^R \psi(r) J_0 \left(\frac{\mu_n}{R} r \right) r dr.$$

Зазначимо, що для круглої мембрани, як і в усіх попередніх випадках, кожний член ряду (5.20) представляє собою стоячу хвилю. Кожна точка мембрани здійснює гармонічні коливання з частотою $\omega_n = \frac{\mu_n}{R} a$. Пучності та вузли розташовуються тут по колах, концентричних із контуром мембрани.

Задача про вимушені коливання круглої мембрани розв'язується подібно до задачі про вимушені коливання струни з

відповідними модифікаціями. Її розв'язок треба шукати у вигляді

$$u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) V_n(r), \quad (5.28)$$

де $T_n(t)$ – невідомі функції, а $V_n(r)$ – власні функції задачі Штурма – Ліувілля для круга при відповідних крайових умовах.

Приклад 14. Вивчити вільні коливання однорідної круглої мембрани радіуса R , закріпленої по контуру, якщо в початковий момент часу вона була поверхнею параболоїда обертання, а початкова швидкість її точок рівна нулеві.

Розв'язання. Задача є частинним випадком розглянутої задачі (5.4) – (5.6) при $g(r) = U_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$, $U_0 = \text{const}$, $\psi(r) = 0$. Отже, її розв'язок згідно з (5.27) можна записати у вигляді

$$u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\bar{g}_n \cos \frac{\mu_n}{R} at + \frac{R}{\mu_n a} \bar{\psi}_n \sin \frac{\mu_n}{R} at \right) J_0 \left(\frac{\mu_n}{R} r \right),$$

де

$$\bar{g}_n = \frac{2}{R^2 J_1^2(\mu_n)} \int_0^R U_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) J_0 \left(\frac{\mu_n}{R} r \right) r dr, \quad \bar{\psi}_n = 0.$$

Обчислимо інтеграл, зробивши в ньому заміни

$$y = \frac{\mu_n}{R} r, r = \frac{R}{\mu_n} y, dr = \frac{R}{\mu_n} dy, r = R \rightarrow y = \mu_n, r = 0 \rightarrow y = 0$$

і скориставшись формулами

$$y J_0(y) = \frac{d[y J_1(y)]}{dy}, J_1(y) = -\frac{d[J_0(y)]}{dy}.$$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^R \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) J_0 \left(\frac{\mu_n}{R} r \right) r dr = \int_0^{\mu_n} \frac{R}{\mu_n} y \left(1 - \frac{R^2 y^2}{\mu_n^2 R^2}\right) J_0(y) \frac{R}{\mu_n} dy = \\ &= \frac{R^2}{\mu_n^2} \int_0^{\mu_n} y \left(1 - \frac{y^2}{\mu_n^2}\right) J_0(y) dy = \frac{R^2}{\mu_n^2} \int_0^{\mu_n} \left(1 - \frac{y^2}{\mu_n^2}\right) d[y J_1(y)] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{R^2}{\mu_n^2} \left(1 - \frac{y^2}{\mu_n^2}\right) y J_1(y) \Big|_0^{\mu_n} - \frac{R^2}{\mu_n^2} \int_0^{\mu_n} y J_1(y) d\left(1 - \frac{y^2}{\mu_n^2}\right) = \\
&= \frac{2R^2}{\mu_n^4} \int_0^{\mu_n} y^2 J_1(y) dy = -\frac{2R^2}{\mu_n^4} \int_0^{\mu_n} y^2 dJ_0(y) = \\
&= -\frac{2R^2}{\mu_n^4} \left[y^2 J_0(y) \Big|_0^{\mu_n} - 2 \int_0^{\mu_n} J_0(y) y dy \right] = \frac{4R^2}{\mu_n^4} \int_0^{\mu_n} d[y J_1(y)] = \\
&= \frac{4R^2}{\mu_n^4} y J_1(y) \Big|_0^{\mu_n} = \frac{4R^2}{\mu_n^3} J_1(\mu_n).
\end{aligned}$$

Тоді

$$\bar{g}_n = \frac{2U_0}{R^2 J_1^2(\mu_n)} \frac{4R^2}{\mu_n^3} J_1(\mu_n) = \frac{8U_0}{J_1(\mu_n) \mu_n^3},$$

і розв'язок визначає функція

$$u(r, t) = 8U_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n^3 J_1(\mu_n)} \cos \frac{\mu_n}{R} a t J_0\left(\frac{\mu_n}{R} r\right).$$

Приклад 15. Знайти поперечні коливання однорідної круглї мембрани із закріпленим краєм у середовищі без опору, викликані дією рівномірно розподіленої по мембрані зовнішньої сили інтенсивності $p_0 = \text{const}$, що діє з моменту часу $t = 0$ на одну сторону мембрани. Початкові відхилення точок мембрани та швидкість їхнього руху відсутні.

Розв'язання. Задача зводиться до інтегрування рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{p_0}{\rho}, \quad 0 < r < R, \quad t > 0,$$

де ρ – поверхнева густина мембрани, за початкових умов

$$u|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \quad 0 \leq r \leq R$$

та крайових умов

$$u(R, t) = 0, \quad |u(0, t)| < \infty, \quad t \geq 0.$$

Оскільки права частина рівняння $\frac{p_0}{\rho} = \text{const}$, маємо задачу зі стаціонарними неоднорідностями. Її розв'язок природно шукати у вигляді

$$u(r, t) = v(r, t) + w(r), \quad (5.29)$$

де функція $w(r)$ визначається із крайової задачі

$$a^2 \left(w''(r) + \frac{1}{r} w'(r) \right) + \frac{p_0}{\rho} = 0, 0 < r < R, \quad (5.30)$$

$$w(R) = 0, \quad |w(0)| < \infty, \quad (5.31)$$

а для $v(x, t)$ одержимо мішану задачу

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} \right), 0 < r < R, t > 0, \quad (5.32)$$

$$v|_{t=0} = -w(r), \quad \left. \frac{\partial v}{\partial t} \right|_{t=0} = 0, 0 \leq r \leq R, \quad (5.33)$$

$$v(R, t) = 0, \quad |v(0, t)| < \infty, t \geq 0. \quad (5.34)$$

Розв'яжемо задачу для визначення функції $w(r)$. Перепишемо рівняння (5.30) у вигляді

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) + \frac{rp_0}{a^2 \rho} = 0.$$

Далі, проінтегрувавши його двічі по r , одержимо розв'язок

$$w(r) = -\frac{r^2 p_0}{4a^2 \rho} + C_1 \ln r + C_2.$$

З крайових умов знаходимо $C_1 = 0, C_2 = \frac{R^2 p_0}{4a^2 \rho}$.

Таким чином, розв'язком задачі (5.30), (5.31) є функція

$$w(r) = \frac{p_0}{4a^2 \rho} (R^2 - r^2), \quad (5.35)$$

а перша початкова умова (5.33) для функції v набуває вигляду

$$v|_{t=0} = \frac{p_0}{4a^2 \rho} (r^2 - R^2) = -\frac{p_0 R^2}{4a^2 \rho} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right).$$

Позначаючи в останньому виразі $U_0 = -\frac{p_0 R^2}{4a^2 \rho}$, ми приходимо до задачі для функції $v(r, t)$, розглянутій у попередньому прикладі. Скориставшись її розв'язком, запишемо

$$v(r, t) = -2 \frac{p_0 R^2}{a^2 \rho} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n^3 J_1(\mu_n)} \cos \frac{\mu_n}{R} a t J_0 \left(\frac{\mu_n}{R} r \right).$$

Тоді за формулою (5.29) сума функцій $v(r, t)$ і $w(r)$ визначає розв'язок вихідної задачі

$$u(r, t) = \frac{p_0}{a^2 \rho} \left[\frac{R^2 - r^2}{4} - 2R^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n^3 J_1(\mu_n)} \cos \frac{\mu_n}{R} a t J_0 \left(\frac{\mu_n}{R} r \right) \right].$$

Приклад 16. Знайти поперечні коливання однорідної круглої мембрани із закріпленням краєм у середовищі без опору, викликані дією рівномірно розподіленої по мембрані зовнішньої сили інтенсивності $p_0 \sin \omega t$, $p_0 = \text{const}$, що діє з моменту часу $t = 0$ на одну сторону мембрани. Початкові відхилення точок мембрани та швидкість їхнього руху відсутні.

Розв'язання. Задача зводиться до розв'язання рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{p_0 \sin \omega t}{\rho}, \quad 0 < r < R, \quad t > 0 \quad (5.36)$$

при початкових умовах

$$u|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \quad 0 \leq r \leq R \quad (5.37)$$

та крайових умовах

$$u(R, t) = 0, \quad |u(0, t)| < \infty, \quad t \geq 0. \quad (5.38)$$

Розв'язок задачі, якщо він існує, шукатимемо у вигляді ряду

$$u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) V_n(r) \quad (5.39)$$

за ортонормованою системою власних функцій задачі Штурма – Ліувілля $V_n(r)$, яку отримуємо в результаті застосування методу відокремлення змінних до однорідної задачі, що відповідає задачі (5.36), (5.38). Вказана задача має вигляд

$$V''(r) + \frac{1}{r} V'(r) + \lambda V(r) = 0, \quad V(R) = 0, \quad |V(0)| < \infty.$$

Як встановлено раніше, власні значення і власні функції цієї задачі мають вигляд

$$\lambda_n = \left(\frac{\mu_n}{R}\right)^2, V_n(r) = \frac{\sqrt{2} J_0\left(\frac{\mu_n}{R} r\right)}{R J_1(\mu_n)}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (5.40)$$

де μ_n – корені рівняння $J_0(\mu) = 0$.

З (5.39) внаслідок ортонормованості з вагою r системи функцій $V_n(r)$ маємо

$$T_n(t) = (u, V_n). \quad (5.41)$$

Помножимо рівняння (5.36) та початкові умови (5.37) скалярно на $V_n(r)$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, V_n\right) &= a^2(\Delta u, V_n) + \left(\frac{p_0 \sin \omega t}{\rho}, V_n\right), \\ T_n(0) &= (u|_{t=0}, V_n) = (0, V_n), \\ T'_n(0) &= \left(\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}, V_n\right) = (0, V_n). \end{aligned}$$

Враховуючи (5.41), а також те, що оператор $\mathcal{L} = -\Delta = -\frac{d^2}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d}{dr}$, що входить у рівняння, є самоспряженим при заданих однорідних крайових умовах, тобто

$$(-\Delta u, V_n) = (u, -\Delta V_n) = (u, \lambda_n V_n) = \lambda_n (u, V_n) = \left(\frac{\mu_n}{R}\right)^2 T_n(t),$$

беручи до уваги співвідношення

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, V_n\right) = \int_0^R \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} V_n(r) dr = \frac{d^2}{dt^2} \int_0^R u(r, t) V_n(r) dr = \frac{d^2 T_n}{dt^2},$$

рівності

$$\left(\frac{p_0 \sin \omega t}{\rho}, V_n\right) = \left(\frac{p_0}{\rho J_1(\mu_n)} \frac{\sqrt{2}}{R} \int_0^R r J_0\left(\frac{\mu_n}{R} r\right) dr\right) \sin \omega t = \beta_n \sin \omega t,$$

дістанемо задачу Коші для функції $T_n(t)$

$$T_n''(t) + \left(\frac{\mu_n a}{R}\right)^2 T_n(t) = \beta_n \sin \omega t, \quad (5.42)$$

$$T_n(0) = 0, \quad T_n'(0) = 0, \quad (5.43)$$

де

$$\begin{aligned}\beta_n &= \frac{p_0}{\rho J_1(\mu_n)} \frac{\sqrt{2}}{R} \int_0^R r J_0\left(\frac{\mu_n}{R} r\right) dr = \frac{p_0}{\rho J_1(\mu_n)} \frac{\sqrt{2} R^2}{\mu_n^2 R} \int_0^{\mu_n} y J_0(y) dy = \\ &= \frac{p_0}{\rho J_1(\mu_n)} \frac{\sqrt{2} R}{\mu_n^2} y J_1(y) \Big|_0^{\mu_n} = \frac{\sqrt{2} p_0}{\rho} \frac{R}{\mu_n}.\end{aligned}$$

Задача (5.42), (5.43) має вигляд, аналогічний розглянутій у прикладі 8 задачі (3.54), (3.55). Скористаємося результатами цієї задачі.

Нехай $\omega \neq \omega_n = \frac{\mu_n a}{R}$, $n \in \mathbb{N}$, тобто частота зовнішніх коливань ω не дорівнює жодній із частот власних коливань мембрани.

Тоді розв'язком задачі Коші (5.42), (5.43) буде функція

$$T_n(t) = \frac{\beta_n}{\omega_n^2 - \omega^2} \left(\sin \omega t - \frac{\omega}{\omega_n} \sin \omega_n t \right). \quad (5.44)$$

Враховуючи, що

$$\beta_n = \frac{\sqrt{2} p_0}{\rho} \frac{R}{\mu_n}, n \in \mathbb{N}, \omega_n = \frac{\mu_n a}{R},$$

підставляючи (5.44) у ряд (5.39), одержимо

$$\begin{aligned}u(r, t) &= \frac{2p_0}{\rho} \sin \omega t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{\mu_n}{R} r\right)}{\mu_n (\omega_n^2 - \omega^2) J_1(\mu_n)} - \\ &- \frac{2p_0 \omega}{\rho} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{\mu_n}{R} r\right) \sin \omega_n t}{\mu_n \omega_n (\omega_n^2 - \omega^2) J_1(\mu_n)}.\end{aligned} \quad (5.45)$$

Перший доданок у (5.45) має таку саму частоту, що і збурювальна сила $p_0 \sin \omega t$, він характеризує вимушені коливання мембрани. Другий доданок складається з нескінченного числа гармонічних коливань із частотами ω_n , і описує вільні власні коливання, викликані зовнішньою збурювальною силою.

Формула розв'язку (5.45) показує, що якщо частота зовнішньої збурювальної сили ω близька до однієї з частот власних коливань, то в розкладі (5.45) з'являється доданок з особливо великою амплітудою, внаслідок чого виникає *резонанс*. У випадку, коли

існує номер n_0 , такий що $\omega = \omega_{n_0}$, формула втрачає сенс і її слід замінити на іншу.

Нехай $\omega = \omega_{n_0} = \frac{\mu_{n_0} a}{R}$, тобто частота вимушених коливань співпадає з частотою власних коливань з номером n_0 , і має місце резонанс. Тоді, як і раніше, розв'язок задачі Коші (5.42), (5.43) при $n \neq n_0$ має вигляд (5.44). Знайдемо розв'язок задачі Коші у випадку, коли $n = n_0$. У цьому випадку задача (5.42), (5.43) може бути записана у вигляді

$$T_{n_0}''(t) + \omega_{n_0}^2 T_{n_0}(t) = \beta_{n_0} \sin \omega_{n_0} t, \quad (5.46)$$

$$T_{n_0}(0) = 0, \quad T_{n_0}'(0) = 0. \quad (5.47)$$

Розв'язок цієї задачі знаходиться аналогічно (3.68) у вигляді

$$T_{n_0}(t) = \frac{\beta_{n_0}}{2\omega_{n_0}} (\sin \omega_{n_0} t - \omega_{n_0} t \cos \omega_{n_0} t). \quad (5.48)$$

Враховуючи, що

$$\beta_{n_0} = \frac{\sqrt{2}p_0}{\rho} \frac{R}{\mu_{n_0}}, \quad \omega_{n_0} = \frac{\mu_{n_0} a}{R},$$

підставляючи (5.48) у ряд (5.39), одержимо розв'язок задачі у вигляді

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \frac{2p_0}{\rho} \sin \omega_{n_0} t \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq n_0}}^{\infty} \frac{1}{\mu_n (\omega_n^2 - \omega_{n_0}^2)} \frac{J_0\left(\frac{\mu_n}{R} r\right)}{J_1(\mu_n)} - \\ & - \frac{2p_0 \omega_{n_0}}{\rho} \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq n_0}}^{\infty} \frac{\sin \omega_n t}{\mu_n \omega_n (\omega_n^2 - \omega_{n_0}^2)} \frac{J_0\left(\frac{\mu_n}{R} r\right)}{J_1(\mu_n)} + \\ & + \frac{p_0 R^2}{\rho a^2 \mu_{n_0}^3} (\sin \omega_{n_0} t - \omega_{n_0} t \cos \omega_{n_0} t) \frac{J_0\left(\frac{\mu_{n_0}}{R} r\right)}{J_1(\mu_{n_0})}. \end{aligned}$$

Приклад 17. Знайти розв'язок мішаної задачі

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + (\sin t + \cos t) J_0(\mu_k r), \quad 0 < r < 1, t > 0, \quad (5.49)$$

$$|u(0, t)| < \infty, \quad u(1, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (5.50)$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0, \quad 0 \leq r \leq 1 \quad (5.51)$$

де μ_k – додатний корінь рівняння $J_0(\mu)=0$.

Розв’язання. Оскільки рівняння (5.49) неоднорідне, а крайові умови (5.50) однорідні, розв’язок задачі, якщо він існує, шукатимемо у вигляді ряду (5.39) за ортонормованою системою власних функцій задачі Штурма – Ліувілля $V_n(r)$, яку отримуємо в результаті застосування методу відокремлення змінних до однорідної задачі, що відповідає (5.49), (5.50). Побудована задача

$$V''(r) + \frac{1}{r}V'(r) + \lambda V(r) = 0, \quad V(1) = 0, \quad |V(0)| < \infty$$

за формулами (5.40) при $R = 1$ має власні значення і власні функції у вигляді

$$\lambda_n = \mu_n^2, \quad V_n(r) = \sqrt{2} \frac{J_0(\mu_n r)}{J_1(\mu_n)}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (5.52)$$

З (5.39) внаслідок ортонормованості системи функцій $V_n(r)$ маємо

$$T_n(t) = (u, V_n). \quad (5.53)$$

Помножимо рівняння (5.49) та початкові умови (5.51) скалярно на $V_n(r)$. Беручи до уваги співвідношення

$$J_0(\mu_k r) = V_k(r) \|J_0(\mu_k r)\|$$

та позначивши відповідну норму через $\mathcal{N}_k = \|J_0(\mu_k r)\|$, дістанемо задачу Коші для функції $T_n(t)$

$$T_n''(t) + \mu_n^2 T_n(t) = (\sin t + \cos t)(V_k, V_n) \mathcal{N}_k, \quad (5.54)$$

$$T_n(0) = 0, \quad T_n'(0) = 0. \quad (5.55)$$

Внаслідок ортонормованості системи функцій $V_n(r)$ права частина рівняння (5.54) буде відмінна від нуля лише при $n = k$. Тоді відповідні задачі Коші мають вигляд

1) $n = k$:

$$T_k''(t) + \mu_k^2 T_k(t) = (\sin t + \cos t) \mathcal{N}_k, \quad (5.56)$$

$$T_k(0) = 0, \quad T_k'(0) = 0; \quad (5.57)$$

2) $n \neq k$:

$$T_n''(t) + \mu_n^2 T_n(t) = 0, \quad (5.58)$$

$$T_n(0) = 0, \quad T_n'(0) = 0. \quad (5.59)$$

1) Загальний розв'язок неоднорідного рівняння $T_k(t)$ знаходимо як суму загального розв'язку однорідного рівняння

$$\bar{T}_k(t) = A_k \cos \mu_k t + B_k \sin \mu_k t$$

і частинного розв'язку неоднорідного рівняння, який шукаємо за виглядом правої частини рівняння у формі

$$\bar{\bar{T}}_k(t) = C \sin t + D \cos t.$$

Підставляючи $\bar{\bar{T}}_k(t)$ у рівняння (5.56), знаходимо $C = D = \frac{\mathcal{N}_k}{\mu_k^2 - 1}$,

отже, $\bar{\bar{T}}_k(t) = \frac{\mathcal{N}_k}{\mu_k^2 - 1} (\sin t + \cos t)$.

Тоді загальний розв'язок неоднорідного рівняння має вигляд

$$T_k(t) = A_k \cos \mu_k t + B_k \sin \mu_k t + \frac{\mathcal{N}_k}{\mu_k^2 - 1} (\sin t + \cos t).$$

З початкових умов (5.57) одержуємо

$$A_k = \frac{\mathcal{N}_k}{1 - \mu_k^2}, \quad B_k = \frac{1}{\mu_k} \frac{\mathcal{N}_k}{1 - \mu_k^2}.$$

Таким чином,

$$T_k(t) = \frac{\mathcal{N}_k}{\mu_k^2 - 1} \left(\sin t + \cos t - \cos \mu_k t - \frac{1}{\mu_k} \sin \mu_k t \right).$$

2) Задача (5.46), (5.47) має тривіальний розв'язок $T_n(t) = 0$.

З урахуванням співвідношення $V_k(r) = \frac{J_0(\mu_k r)}{\mathcal{N}_k}$, розв'язок задачі (5.49) – (5.51) запишеться у вигляді

$$u(r, t) = \frac{1}{\mu_k^2 - 1} \left(\sin t + \cos t - \cos \mu_k t - \frac{1}{\mu_k} \sin \mu_k t \right) J_0(\mu_k r).$$

Приклад 18. Знайти розв'язок мішаної задачі

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = r \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial u}{\partial r}, \quad 0 < r < \frac{1}{4}, \quad t > 0, \quad (5.60)$$

$$|u(0, t)| < \infty, \quad u\left(\frac{1}{4}, t\right) = 0, \quad t \geq 0, \quad (5.61)$$

$$u|_{t=0} = J_0(2\mu_1\sqrt{r}), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \quad 0 \leq r \leq \frac{1}{4}, \quad (5.62)$$

де μ_1 – додатний корінь рівняння $J_0(\mu)=0$.

Розв’язання. Оскільки рівняння (5.60) і крайові умови (5.61) однорідні, застосуємо до розв’язання задачі метод відокремлення змінних. Шукаємо розв’язок рівняння у вигляді добутку функцій $u(r, t) = V(r)T(t)$. Далі за схемою методу Фур’є маємо

$$T''(t)V(r) = rT(t)V''(r) + V'(r)T(t),$$

$$\frac{rV''(r) + V'(r)}{V(r)} = \frac{T''(t)}{T(t)} = -\lambda$$

і після відокремлення змінних отримаємо звичайні диференціальні рівняння другого порядку

$$T''(t) + \lambda T(t) = 0, \quad (5.63)$$

$$rV''(r) + V'(r) + \lambda V(r) = 0. \quad (5.64)$$

Крайові умови для функції $V(r)$ мають вигляд

$$|V(0)| < \infty, \quad V\left(\frac{1}{4}\right) = 0. \quad (5.65)$$

Рівняння (5.64) заміною

$$\rho = 2\sqrt{\lambda r}, \quad r = \frac{\rho^2}{4\lambda}, \quad V(r) = V\left(\frac{\rho^2}{4\lambda}\right) = W(\rho)$$

зводиться до рівняння Бесселя нульового порядку

$$\rho^2 W''(\rho) + \rho W'(\rho) + \rho^2 W(\rho) = 0. \quad (5.66)$$

Крайові умови (5.65) набувають вигляду

$$W(\sqrt{\lambda}) = 0, \quad |W(0)| < \infty. \quad (5.67)$$

Обмежений розв’язок рівняння (5.64) має вигляд

$$W(\rho) = C_1 J_0(\rho), \quad (5.68)$$

де $J_0(\rho)$ – функція Бесселя першого роду нульового порядку.

Перша крайова умова з (5.67) дає

$$J_0(\sqrt{\lambda}) = 0 \quad \text{або} \quad J_0(\mu) = 0, \quad (5.69)$$

оскільки $C_1 \neq 0$. Остання рівність означає, що числа $\mu = \sqrt{\lambda}$ є коренями (нулями) функції Бесселя нульового порядку. Нехай μ_n – додатні корені цього рівняння. Тоді власні значення задачі (5.64), (5.65), що їм відповідають, мають вигляд

$$\lambda_n = \mu_n^2, n \in \mathbb{N}, \quad (5.70)$$

а власними функціями з точністю до сталого множника C_1 є

$$W_n(\rho) = V_n(r) = C_1 J_0(2\sqrt{\lambda_n r}) = C_1 J_0(2\mu_n \sqrt{r}), n \in \mathbb{N}. \quad (5.71)$$

Тоді, якщо позначити $\mathcal{N}_n = \|J_0(2\mu_n \sqrt{r})\|$ і коефіцієнт C_1 у (5.71) вибрати у вигляді $C_1 = \frac{1}{\mathcal{N}_n}$, функції

$$V_n(r) = \frac{J_0(2\mu_n \sqrt{r})}{\mathcal{N}_n} \quad (5.72)$$

утворюють повну ортонормовану систему на $\left[0, \frac{1}{4}\right]$.

Розглянемо рівняння (5.63). Після підстановки $\lambda = \lambda_n = \mu_n^2$ одержимо для кожного номера n своє рівняння відносно функції $T_n(t)$

$$T_n''(t) + \mu_n^2 T_n(t) = 0, \quad (5.73)$$

загальним розв'язком якого є

$$T_n(t) = A_n \cos \mu_n t + B_n \sin \mu_n t. \quad (5.74)$$

Тоді, враховуючи (5.72), (5.74), функції

$$u_n(x, t) = V_n(r) T_n(t) = (A_n \cos \mu_n t + B_n \sin \mu_n t) \frac{J_0(2\mu_n \sqrt{r})}{\mathcal{N}_n}$$

задовольняють рівняння (5.60) і крайові умови (5.61).

Загальний розв'язок (5.60) шукаємо як суперпозицію цих функцій у вигляді ряду

$$u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos \mu_n t + B_n \sin \mu_n t) \frac{J_0(2\mu_n \sqrt{r})}{\mathcal{N}_n}. \quad (5.75)$$

Припустимо, що цей ряд збігається рівномірно і його можна почленно диференціювати два рази по t і r в розглядуваній області. Тоді він буде розв'язком рівняння (5.60) і задовольнятиме крайові умови (5.61). Виберемо коефіцієнти A_n, B_n ряду (5.75) так,

щоб він задовольняв і початкові умови (5.62). Для цього підставляємо (5.75) у (5.62):

$$u(r, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{J_0(2\mu_n \sqrt{r})}{\mathcal{N}_n} = J_0(2\mu_1 \sqrt{r}), \quad (5.76)$$

$$\frac{\partial u(r, 0)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \mu_n \frac{J_0(2\mu_n \sqrt{r})}{\mathcal{N}_n} = 0. \quad (5.77)$$

З рівностей (5.76), (5.77) знаходимо коефіцієнти ряду

$$A_1 = \mathcal{N}_1, A_n = 0, n = 2, 3, \dots, B_n = 0, n = 1, 2, \dots$$

Отже, шуканий розв'язок задачі визначає функція

$$u(r, t) = J_0(2\mu_1 \sqrt{r}) \cos \mu_1 t.$$

Приклад 19. Знайти розв'язок мішаної задачі для хвильового рівняння:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right), \quad 0 < r < R, \quad t > 0, \quad (5.78)$$

при початкових умовах

$$u|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = r^2, \quad 0 \leq r \leq R \quad (5.79)$$

та крайових умовах

$$u_r(R, t) = 0, \quad |u(0, t)| < \infty, \quad t \geq 0. \quad (5.80)$$

Розв'язання. Застосовуючи метод відокремлення змінних, дістанемо

$$T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0, \quad (5.81)$$

$$V''(r) + \frac{1}{r} V'(r) + \lambda V(r) = 0, \quad V'(R) = 0, |V(0)| < \infty. \quad (5.82)$$

Задача (5.82) є задачею Штурма – Ліувілля. Обмеженням загальним розв'язком рівняння є

$$V(r) = C_1 J_0(\sqrt{\lambda} R), \quad (5.83)$$

де $J_0(r)$ – функція Бесселя першого роду нульового порядку. За умовою $V'(R) = 0$, отже, $C_1 J_0'(\sqrt{\lambda} R) = 0$. Оскільки $C_1 \neq 0$ (інакше $V(r)$ буде тривіальним розв'язком), то $J_0'(\sqrt{\lambda} R) = 0$. Використовуючи властивість $J_0'(r) = -J_1(r)$, дістанемо рівняння

$$J_1(\sqrt{\lambda}R) = 0. \quad (5.84)$$

Остання рівність означає, що числа $\mu = \sqrt{\lambda}R$ є коренями (нулями) функції Бесселя першого порядку. Дане рівняння має безліч додатних дійсних коренів $\mu_n, n \in \mathbb{N}$. На рис. 5.3 наведено графік функції $J_1(x)$, що відповідає додатним значенням аргументу.



Рис. 5.3. Додатні корені μ_n функції Бесселя $J_1(x)$

Таким чином, власні значення задачі (5.82), що відповідають кореням рівняння (5.84), мають вигляд

$$\lambda_n = \left(\frac{\mu_n}{R}\right)^2, n \in \mathbb{N}, \quad (5.85)$$

а власними функціями з точністю до сталого множника C_1 є

$$V_n(r) = C_1 J_0\left(\frac{\mu_n}{R} r\right), n \in \mathbb{N}. \quad (5.86)$$

Зазначимо, що $\lambda_0 = 0$ також є власним значенням задачі (5.82), а власна функція, яка йому відповідає, $V_0(r) = C_0 \cdot 1 = \text{const}$.

Власні функції задачі (5.82), які відповідають різним власним значенням λ_n , ортогональні на відрізку $[0, R]$ з вагою r , а квадрат норми цих функцій визначається за формулою

$$\mathcal{N}_n^2 = \|V_n\|^2 = \left\| J_0\left(\frac{\mu_n}{R}r\right) \right\|^2 = \frac{R^2}{2} J_0^2(\mu_n), n \in \mathbb{N},$$

а для функції $V_0(r)$: $\mathcal{N}_0^2 = \|V_0\|^2 = \frac{R^2}{2}$.

Тоді, якщо коефіцієнти C_1, C_0 вибрати у вигляді

$$C_1 = \frac{1}{\mathcal{N}_n} = \frac{\sqrt{2}}{R J_0(\mu_n)}, C_0 = \frac{1}{\mathcal{N}_0} = \frac{\sqrt{2}}{R},$$

функції

$$V_n(r) = \frac{J_0\left(\frac{\mu_n}{R}r\right)}{\mathcal{N}_n} = \frac{\sqrt{2} J_0\left(\frac{\mu_n}{R}r\right)}{R J_0(\mu_n)}, n \in \mathbb{N}, V_0(r) = \frac{\sqrt{2}}{R} \quad (5.87)$$

утворюють повну ортонормовану систему на $[0, R]$.

Розглянемо рівняння (5.81). Після підстановки $\lambda = \lambda_n$ отримаємо для кожного номера n своє рівняння відносно функції $T_n(t)$

$$T_n''(t) + a^2 \left(\frac{\mu_n}{R}\right)^2 T_n(t) = 0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad T_0''(t) = 0.$$

Загальними розв'язками цих рівнянь є функції

$$T_n(t) = A_n \cos \frac{\mu_n}{R} at + B_n \sin \frac{\mu_n}{R} at, n \in \mathbb{N},$$

$$T_0(t) = A_0 + B_0 t.$$

Скориставшись принципом суперпозиції, розв'язок задачі (5.78) – (5.80) подамо у вигляді

$$u(r, t) = (A_0 + B_0 t) V_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{\mu_n}{R} at + B_n \sin \frac{\mu_n}{R} at \right) V_n(r). \quad (5.88)$$

Коефіцієнти A_n, B_n підбираємо так, щоб задовольнялися початкові умови задачі. Одержуємо рівності

$$A_0 V_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n V_n(r) = 0, \quad (5.89)$$

$$B_0 V_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{\mu_n a}{R} V_n(r) = r^2. \quad (5.90)$$

З (5.89) одразу випливає $A_n = 0$, $n \in \mathbb{N}_0$.

Для знаходження коефіцієнта B_0 помножимо співвідношення (5.90) на $rV_0(r)$ і проінтегруємо по r від 0 до R . Для знаходження коефіцієнтів B_k помножимо співвідношення (5.90) на $rV_k(r)$ і проінтегруємо по r від 0 до R .

Враховуючи ортонормованість системи власних функцій, знайдемо

$$\begin{aligned} B_0 &= \int_0^R r^3 \frac{\sqrt{2}}{R} dr = \frac{\sqrt{2}R^3}{4}. \\ B_k \frac{\mu_k a}{R} &= \int_0^R r^3 \frac{\sqrt{2}}{R} \frac{J_0\left(\frac{\mu_k}{R}r\right)}{J_0(\mu_k)} dr = \frac{\sqrt{2}}{RJ_0(\mu_k)} \int_0^R r^3 J_0\left(\frac{\mu_k}{R}r\right) dr = \\ &= \frac{\sqrt{2}R^3}{J_0(\mu_k)\mu_k^4} \int_0^{\mu_k} y^3 J_0(y) dy = \\ &= \frac{\sqrt{2}R^3}{J_0(\mu_k)\mu_k^4} \left(2\mu_k^2 J_0(\mu_k) + (\mu_k^3 - 4\mu_k) J_1(\mu_k) \right) = \frac{2\sqrt{2}R^3}{J_0(\mu_k)\mu_k^2} J_0(\mu_k). \end{aligned}$$

Тут ураховано, що $J_1(\mu_k) = 0$, а також використано тотожність

$$\int_0^x \xi^3 J_0(\xi) d\xi = 2x^2 J_0(x) + (x^3 - 4x) J_1(x),$$

для доведення якої слід скористатися формулами

$$J_0'(y) = -J_1(y), \quad (yJ_1(y))' = yJ_0(y)$$

та проінтегрувати двічі частинами [21].

Остаточно

$$B_k = \frac{2\sqrt{2}R^4}{\mu_k^3 a}.$$

Підставивши $A_n, B_n, n \in \mathbb{N}_0$ у (5.88), дістанемо розв'язок задачі (5.78) – (5.80)

$$u(r, t) = \frac{R^2 t}{2} + \frac{4R^3}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n^3} \frac{J_0\left(\frac{\mu_n}{R}r\right)}{J_0(\mu_n)} \sin \frac{\mu_n}{R} at.$$

Завдання для аудиторної роботи

Сформулювати мішану задачу для хвильового рівняння і розв'язати її методом Фур'є:

- 5.1. Кругла однорідна мембрана радіуса R з центром у початку координат здійснює поперечні коливання в середовищі без опору. Визначити поперечні коливання мембрани, закріпленої по контуру, викликані сталою початковою швидкістю її точок.
- 5.2. Кругла однорідна мембрана радіуса R з центром у початку координат здійснює поперечні коливання в середовищі без опору. Визначити поперечні коливання мембрани, закріпленої по контуру, викликані сталим початковим відхиленням її точок.
- 5.3. Нехтуючи опором навколишнього середовища, знайти поперечні коливання однорідної круглої мембрани радіуса R із закріпленим краєм, які відбуваються тільки внаслідок початкового відхилення її точок, яке рівне $AJ_0\left(\frac{\mu_k}{R}r\right)$, де μ_k – додатний корінь рівняння $J_0(\mu) = 0$.
- 5.4. Нехтуючи опором навколишнього середовища, знайти поперечні коливання однорідної круглої мембрани радіуса R із закріпленим краєм, якщо початкові відхилення точок мембрани відсутні, а їхня початкова швидкість $AJ_0'\left(\frac{\mu_k}{R}r\right)$, де μ_k – додатний корінь рівняння $J_0(\mu) = 0$.
- 5.5. Знайти поперечні коливання однорідної круглої мембрани із закріпленим краєм у середовищі без опору, викликані дією рівномірно розподіленої по мембрані зовнішньої сили інтенсивності $p_0J_0\left(\frac{\mu_k}{R}r\right)$, де μ_k – додатний корінь рівняння $J_0(\mu) = 0$, $p_0 = \text{const}$. Початкові відхилення точок мембрани та швидкість їхнього руху відсутні.

Завдання для самостійної роботи

Дати фізичну інтерпретацію та знайти методом Фур'є розв'язок мішаної задачі для хвильового рівняння:

- 5.6. $u_{tt} = u_{xx} + \frac{1}{x}u_x, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0,$
 $|u(0, t)| < \infty, \quad u(1, t) = t - 1, \quad t \geq 0,$
 $u(x, 0) = J_0(\mu_1 x) - 1, \quad u_t(x, 0) = 1, \quad 0 \leq x \leq 1,$
де μ_1 – додатний корінь рівняння $J_0(\mu) = 0$.
- 5.6. $u_{tt} = u_{xx} + \frac{1}{x}u_x, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0,$
 $|u(0, t)| < \infty, \quad u(1, t) = t - 1, \quad t \geq 0,$
 $u(x, 0) = -1, \quad u_t(x, 0) = J_0(\mu_1 x) + 1, \quad 0 \leq x \leq 1,$
де μ_1 – додатний корінь рівняння $J_0(\mu) = 0$.
- 5.7. $u_{tt} = u_{xx} + \frac{1}{x}u_x + t J_0(\mu_1 x), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0,$
 $|u(0, t)| < \infty, \quad u(1, t) = 0, \quad t \geq 0,$
 $u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1,$
де μ_1 – додатний корінь рівняння $J_0(\mu) = 0$.
- 5.8. $u_{tt} = u_{xx} + \frac{1}{x}u_x - \cos t, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0,$
 $|u(0, t)| < \infty, \quad u(1, t) = 0, \quad t \geq 0,$
 $u(x, 0) = 1 - \frac{J_0(2x)}{J_0(2)}, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1.$
- 5.9. $u_{tt} = u_{xx} + \frac{1}{x}u_x - \sin 3t, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0,$
 $|u(0, t)| < \infty, \quad u(1, t) = 1, \quad t \geq 0,$
 $u(x, 0) = 1, \quad u_t(x, 0) = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{J_0(3x)}{J_0(3)} \right), \quad 0 \leq x \leq 1.$
- 5.10. $u_{tt} = xu_{xx} + u_x + t J_0(\mu_1 \sqrt{x}), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0,$
 $|u(0, t)| < \infty, \quad u(1, t) = 0, \quad t \geq 0,$
 $u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1,$
де μ_1 – додатний корінь рівняння $J_0(\mu) = 0$.
- 5.11. $u_{tt} = xu_{xx} + u_x + \sin t J_0(\mu_1 \sqrt{x}), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0,$
 $|u(0, t)| < \infty, \quad u(1, t) = 0, \quad t \geq 0,$
 $u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1,$
де μ_1 – додатний корінь рівняння $J_0(\mu) = 0$.

- 5.12. $u_{tt} = xu_{xx} + u_x$, $0 < x < 1$, $t > 0$,
 $|u(0, t)| < \infty$, $u(1, t) = 0$, $t \geq 0$,
 $u(x, 0) = 0$, $u_t(x, 0) = J_0(\mu_k \sqrt{x})$, $0 \leq x \leq 1$,
де μ_k – додатний корінь рівняння $J_0(\mu) = 0$.
- 5.13. $u_{tt} = xu_{xx} + u_x$, $0 < x < 1$, $t > 0$,
 $|u(0, t)| < \infty$, $u(1, t) = 0$, $t \geq 0$,
 $u(x, 0) = J_0(\mu_k \sqrt{x})$, $u_t(x, 0) = 0$, $0 \leq x \leq 1$,
де μ_k – додатний корінь рівняння $J_0(\mu) = 0$.
- 5.14. $u_{tt} = u_{xx} + \frac{1}{x}u_x + A \cos \omega t$, $0 < x < R$, $t > 0$,
 $|u(0, t)| < \infty$, $u(R, t) = 0$, $t \geq 0$,
 $u(x, 0) = 0$, $u_t(x, 0) = 0$, $0 \leq x \leq R$.
- 5.15. $u_{tt} = xu_{xx} + u_x - \frac{9u}{4x}$, $0 < x < 1$, $t > 0$,
 $|u(0, t)| < \infty$, $u(1, t) = 0$, $t \geq 0$,
 $u(x, 0) = 0$, $u_t(x, 0) = J_3(\mu_1 \sqrt{x})$, $0 \leq x \leq 1$,
де μ_1 – додатний корінь рівняння $J_3(\mu) = 0$.
- 5.16. $u_{tt} = xu_{xx} + u_x - \frac{u}{x}$, $0 < x < 1$, $t > 0$,
 $|u(0, t)| < \infty$, $u(1, t) = 0$, $t \geq 0$,
 $u(x, 0) = 0$, $u_t(x, 0) = J_2(\mu_k \sqrt{x})$, $0 \leq x \leq 1$,
де μ_k – додатний корінь рівняння $J_2(\mu) = 0$.
- 5.17. $u_{tt} = u_{xx} + \frac{1}{x}u_x - \frac{4u}{x^2}$, $0 < x < 1$, $t > 0$,
 $|u(0, t)| < \infty$, $u(1, t) = 0$, $t \geq 0$,
 $u(x, 0) = J_2(\mu_k x)$, $u_t(x, 0) = J_2(\mu_k x)$, $0 \leq x \leq 1$,
де μ_k – додатний корінь рівняння $J_2(\mu) = 0$.

ТЕМА 6. ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ФУР'Є ДО МІШАНИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОДНОРІДНОГО РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

Схема розв'язування мішаних задач для рівняння теплопровідності методом відокремлення змінних аналогічна схемі розв'язування задач для хвильового рівняння. Викладемо основну ідею методу на прикладі задачі про поширення тепла в однорідному стержні, кінці якого підтримуються при нульовій температурі. Математично така задача полягає у знаходженні в області $D = \{(x, t): 0 < x < l, t > 0\}$ двічі неперервно диференційованого за змінною x і неперервно диференційованого за змінною t розв'язку рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, t > 0, \quad (6.1)$$

який задовольняє початкову умову

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l \quad (6.2)$$

і крайові умови

$$u(0, t) = 0, u(l, t) = 0, t \geq 0. \quad (6.3)$$

При цьому вважаємо, що виконуються умови узгодженості

$$\varphi(0) = \varphi(l) = 0.$$

Припустимо, що розв'язок задачі (6.1)–(6.3) існує. Для формального розв'язання цієї задачі згідно з методом Фур'є розглянемо основну допоміжну задачу: знайти розв'язки рівняння (6.1), які тотожно не дорівнюють нулю, задовольняють однорідні крайові умови (6.3) і подаються у вигляді добутку функцій

$$u(x, t) = X(x)T(t), \quad (6.4)$$

де $X(x)$ – функція тільки змінної x , $T(t)$ – функція тільки змінної t , причому $X(x) \not\equiv 0, T(t) \not\equiv 0$.

Підставивши (6.4) у рівняння (6.1) і відокремивши змінні, отримаємо рівність

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = -\lambda, \quad (6.5)$$

з якої одержуємо два звичайних диференціальних рівняння для визначення функцій $X(x)$ і $T(t)$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad (6.6)$$

$$T'(t) + \lambda a^2 T(t) = 0. \quad (6.7)$$

Оскільки функція $u(x, t)$ повинна задовольняти крайові умови, то підставляючи (6.4) у (6.3), отримаємо

$$X(0)T(t) = 0, X(l)T(t) = 0.$$

Оскільки $T(t) \neq 0$, то з останніх рівностей випливає, що функція $X(x)$ повинна задовольняти крайові умови

$$X(0) = 0, X(l) = 0. \quad (6.8)$$

Таким чином, для функції $X(x)$ отримали задачу Штурма-Ліувілля (6.6), (6.8).

Як встановлено раніше (тема 2), нетривіальні розв'язки цієї задачі можливі лише при значеннях $\lambda = \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$, $n \in \mathbb{N}$. Їм відповідають власні функції

$$X_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{n\pi}{l} x, n \in \mathbb{N}, \quad (6.9)$$

які ми обрали ортонормованими.

При $\lambda = \lambda_n$ рівняння (6.7) набуває вигляду

$$T'_n(t) + \left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 T_n(t) = 0.$$

Проінтегрувавши його, маємо

$$T_n(t) = A_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t}, \quad (6.10)$$

де A_n – довільні сталі. Тоді, враховуючи (6.9), (6.10), згідно з (6.4) знаходимо, що функції

$$u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t) = A_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t} \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{n\pi}{l} x$$

задовольняють рівняння (6.1) і крайові умови (6.3).

В силу лінійності і однорідності рівняння (6.1) та крайових умов (6.3) сума частинних розв'язків

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t} \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{n\pi}{l} x \quad (6.11)$$

також задовольняє рівняння і крайові умови, якщо цей ряд

збігається і його можна почленно диференціювати в області D два рази по x і один раз по t .

Підберемо коефіцієнти A_n так, щоб функція, визначена рядом (6.11), задовольняла і початкову умову задачі (6.2). З цією метою підставимо ряд (6.11) у (6.2)

$$u(x, 0) = \varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{n\pi}{l} x. \quad (6.12)$$

Якщо функція φ задовольняє умови розкладу у ряд Фур'є за власними функціями задачі Штурма-Ліувілля (6.6), (6.8), то

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{n\pi}{l} x, \quad (6.13)$$

де

$$\varphi_n = \int_0^l \varphi(x) \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{n\pi}{l} x dx -$$

коефіцієнт розкладу функції $\varphi(x)$ у ряд Фур'є за системою функцій $\left\{ \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{n\pi}{l} x, n \in \mathbb{N} \right\}$.

Порівнюючи ряди (6.12) і (6.13), знаходимо

$$A_n = \varphi_n.$$

Підставивши знайдені коефіцієнти у (6.11), отримаємо розв'язок задачі (6.1) – (6.3)

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t} \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{n\pi}{l} x dx. \quad (6.14)$$

Теорема 6.1. Припустимо, що функція $\varphi(x)$ задовольняє такі умови:

- 1) $\varphi \in C[0, l]$, функція φ' – кусково неперервна;
- 2) $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$.

Тоді функція $u(x, t)$, визначена рядом (6.14), є неперервною, неперервно диференційованою по t та двічі неперервно диференційованою по x і задовольняє рівняння (6.1) і умови (6.2), (6.3). При цьому ряд (6.14) можна почленно диференціювати двічі

по x і один раз по t , і отримані ряди збігаються абсолютно і рівномірно при $0 \leq x \leq l, t \geq 0$.

Отже, функція $u(x, t)$ є класичним розв'язком задачі (6.1) – (6.3).

Приклад 20. Розв'язати методом Фур'є мішану задачу

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < \pi, t > 0, \\ u|_{t=0} &= x^2 - \pi x, & 0 \leq x \leq \pi, \\ u(0, t) &= 0, u(\pi, t) = 0, & t \geq 0.\end{aligned}$$

Розв'язання. Дана задача є частинним випадком, розглянутої раніше задачі (6.1) – (6.3) при $l = \pi$, $\varphi(x) = x^2 - \pi x$. Застосувавши до неї метод Фур'є і скориставшись отриманими результатами, запишемо її розв'язок у вигляді ряду

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-(na)^2 t} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nx.$$

Коефіцієнти A_n підбираємо так, щоб задовольнялася початкова умова задачі. Одержуємо рівність

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nx = x^2 - \pi x,$$

з якої знаходимо значення коефіцієнтів A_n :

$$A_n = \int_0^{\pi} (x^2 - \pi x) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\int_0^{\pi} x^2 \sin nx dx - \pi \int_0^{\pi} x \sin nx dx \right).$$

Обчислюючи інтеграли, знаходимо

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} x^2 \sin nx dx &= -\frac{1}{n} \left[\pi^2 (-1)^n + \frac{2}{n} ((-1)^n - 1) \right], \\ \int_0^{\pi} x \sin nx dx &= -\frac{1}{n} \pi (-1)^n.\end{aligned}$$

Тоді

$$A_n = -\frac{2}{n^2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} ((-1)^n - 1) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{4}{n^2}, & n = 2k + 1, \\ 0, & n = 2k. \end{cases}$$

Отже, шуканий розв'язок задачі визначає функція

$$u(x, t) = \frac{8}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} e^{-(2k+1)^2 a^2 t} \sin(2k+1)x.$$

Приклад 21. Розв'язати методом Фур'є мішану задачу

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < l, t > 0, \\ u|_{t=0} &= 1 + \cos \frac{\pi}{l} x, & 0 \leq x \leq l, \\ u_x(0, t) &= 0, u_x(l, t) = 0, & t \geq 0. \end{aligned}$$

Розв'язання. Шукаємо розв'язок рівняння у вигляді добутку $u(x, t) = X(x)T(t)$. Далі за схемою методу Фур'є маємо

$$\begin{aligned} T'(t)X(x) &= a^2 T(t)X''(x), \\ \frac{X''(x)}{X(x)} &= \frac{1}{a^2} \frac{T'(t)}{T(t)} = -\lambda, \end{aligned}$$

і після відокремлення змінних отримаємо звичайні диференціальні рівняння

$$\begin{aligned} T'(t) + \lambda a^2 T(t) &= 0, \\ X''(x) + \lambda X(x) &= 0. \end{aligned}$$

Крайові умови для функції $X(x)$ мають вигляд

$$X'(0) = 0, X'(l) = 0.$$

Враховуючи, що за властивостями задачі Штурма-Ліувілля $\lambda \geq 0$, розглянемо окремо випадки $\lambda = 0, \lambda > 0$.

1. $\lambda = 0$. Загальний розв'язок рівняння має вигляд $X(x) = C_1 x + C_2$. З крайових умов знаходимо $C_1 = 0, C_2 = \text{const}$. Отже, $\lambda_0 = 0$ – власне значення, якому відповідає власна функція, яка є сталою. Виберемо її у вигляді $X_0(x) = \frac{1}{\sqrt{l}}$, щоб система функцій була ортонормованою.

2. $\lambda > 0$. Загальний розв'язок рівняння має вигляд

$$X(x) = C_1 \cos \sqrt{\lambda} x + C_2 \sin \sqrt{\lambda} x.$$

Підпорядковуючи цю функцію крайовим умовам, одержимо $C_2 = 0$, $C_1 \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} l = 0$ або $\sin \sqrt{\lambda} l = 0$. З останнього рівняння знаходимо $\sqrt{\lambda} l = n\pi$, $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$, $n \in \mathbb{N}$. Цим власним значенням відповідають власні функції $X_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \cos \frac{n\pi}{l} x$, $n \in \mathbb{N}$.

Для знаходження $T(t)$, враховуючи $\lambda = \lambda_n$, дістанемо рівняння

$$T_n'(t) + \left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 T_n(t) = 0,$$

розв'язок якого при $n = 0$ має вигляд

$$T_0(t) = A_0,$$

а при $n > 0$

$$T_n(t) = A_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t}.$$

Утворюємо ряд

$$u(x, t) = A_0 \frac{1}{\sqrt{l}} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t} \sqrt{\frac{2}{l}} \cos \frac{n\pi}{l} x.$$

Коефіцієнти A_n підбираємо так, щоб задовольнялася початкова умова задачі. Одержуємо рівність

$$A_0 \frac{1}{\sqrt{l}} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sqrt{\frac{2}{l}} \cos \frac{n\pi}{l} x = 1 + \cos \frac{\pi}{l} x,$$

з якої знаходимо значення коефіцієнтів A_n :

$$A_0 = \sqrt{l}, A_1 = \sqrt{\frac{l}{2}}, A_n = 0, n = 2, 3, \dots$$

Отже, шуканий розв'язок задачі визначає функція

$$u(x, t) = 1 + e^{-\left(\frac{\pi a}{l}\right)^2 t} \cos \frac{\pi}{l} x.$$

Зауважимо, що розв'язок задачі подається у вигляді суми двох членів ряду. Пов'язано це з тим, що за початкову умова обрана

функція $\varphi(x) = \sqrt{l}X_0(x) + \sqrt{\frac{l}{2}}X_1(x) = 1 + \cos\frac{\pi}{l}x$, тому в силу ортогональності системи власних функцій усі коефіцієнти φ_n , за винятком φ_0, φ_1 , дорівнюють нулю.

Приклад 22. Розв'язати методом Фур'є мішану задачу

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4u, & 0 < x < 1, t > 0, \\ u|_{t=0} &= \cos\frac{\pi}{2}x + \cos\frac{3\pi}{2}x, & 0 \leq x \leq 1, \\ u_x(0, t) &= 0, u(1, t) = 0, t \geq 0.\end{aligned}$$

Розв'язання. Шукаємо розв'язок рівняння у вигляді добутку $u(x, t) = X(x)T(t)$. Далі за схемою методу Фур'є маємо

$$\begin{aligned}T'(t)X(x) &= a^2 T(t)X''(x) - 4X(x)T(t), \\ \frac{X''(x)}{X(x)} &= \frac{1}{a^2} \left(\frac{T'(t)}{T(t)} + 4 \right) = -\lambda,\end{aligned}$$

і після відокремлення змінних отримаємо звичайні диференціальні рівняння

$$\begin{aligned}T'(t) + (4 + \lambda a^2)T(t) &= 0, \\ X''(x) + \lambda X(x) &= 0.\end{aligned}$$

Крайові умови для функції $X(x)$ мають вигляд

$$X'(0) = 0, X(1) = 0.$$

Враховуючи, що за властивостями задачі Штурма-Ліувілля $\lambda > 0$, загальний розв'язок рівняння для функції $X(x)$ має вигляд

$$X(x) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x.$$

Підпорядковуючи цю функцію крайовим умовам, одержимо $C_2 = 0$, $C_1 \cos\sqrt{\lambda} = 0$ або $\cos\sqrt{\lambda} = 0$. З останнього рівняння знаходимо $\sqrt{\lambda} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$, $n \in \mathbb{N}_0$. Таким чином, власні значення задачі даються формулою $\lambda_n = \pi^2 \left(n + \frac{1}{2}\right)^2$, $n \in \mathbb{N}_0$. Їм відповідають нормовані власні функції

$$X_n(x) = \sqrt{2} \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi x, n \in \mathbb{N}_0.$$

Для знаходження $T(t)$, враховуючи $\lambda = \lambda_n$, дістанемо рівняння

$$T_n'(t) + \left(4 + \frac{\pi^2 a^2 (2n+1)^2}{4}\right) T_n(t) = 0,$$

розв'язок його має вигляд

$$T_n(t) = A_n e^{-\left(4 + \frac{\pi^2 a^2 (2n+1)^2}{4}\right)t}.$$

Утворюємо ряд

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-\left(4 + \frac{\pi^2 a^2 (2n+1)^2}{4}\right)t} \sqrt{2} \cos\left(n + \frac{1}{2}\right) \pi x,$$

який задовольняє рівняння та крайові умови.

Підбираємо коефіцієнти A_n так, щоб функція $u(x, t)$, визначена цим рядом, задовольняла також і початкову умову. Одержуємо рівність

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sqrt{2} \cos\left(n + \frac{1}{2}\right) \pi x = \cos \frac{\pi}{2} x + \cos \frac{3\pi}{2} x,$$

з якої знаходимо значення коефіцієнтів A_n :

$$A_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}, A_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, A_n = 0, n = 2, 3, \dots$$

Отже, шуканий розв'язок задачі визначає функція

$$u(x, t) = e^{-\left(4 + \frac{\pi^2 a^2}{4}\right)t} \cos \frac{\pi}{2} x + e^{-\left(4 + \frac{9\pi^2 a^2}{4}\right)t} \cos \frac{3\pi}{2} x.$$

Приклад 23. Розв'язати методом Фур'є мішану задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \pi, t > 0,$$

$$u|_{t=0} = \sin \frac{5x}{2}, \quad 0 \leq x \leq \pi,$$

$$u(0, t) = 0, u_x|_{x=\pi} = 0, \quad t \geq 0.$$

Розв'язання. Шукаючи розв'язок рівняння у вигляді добутку $u(x, t) = X(x)T(t)$, отримаємо два звичайних диференціальних рівняння

$$T'(t) + \lambda a^2 T(t) = 0,$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0.$$

Крайові умови для функції $X(x)$ мають вигляд

$$X(0) = 0, X'(\pi) = 0.$$

Враховуючи, що за властивостями задачі Штурма-Ліувілля $\lambda > 0$, загальний розв'язок рівняння для функції $X(x)$ має вигляд

$$X(x) = C_1 \cos \sqrt{\lambda} x + C_2 \sin \sqrt{\lambda} x.$$

Підпорядковуючи цю функцію крайовим умовам, одержимо $C_1 = 0$, $C_2 \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} \pi = 0$ або $\cos \sqrt{\lambda} \pi = 0$. З останнього рівняння знаходимо $\sqrt{\lambda} \pi = \left(n + \frac{1}{2}\right) \pi$, $n \in \mathbb{N}_0$. Таким чином, власні значення задачі даються формулою $\lambda_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)^2$, $n \in \mathbb{N}_0$. Їм відповідають нормовані власні функції

$$X_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin \left(n + \frac{1}{2}\right) x, n \in \mathbb{N}_0.$$

Для знаходження $T(t)$, враховуючи $\lambda = \lambda_n$, дістанемо рівняння

$$T'_n(t) + a^2 \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 T_n(t) = 0,$$

розв'язок якого має вигляд

$$T_n(t) = A_n e^{-a^2 \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 t}.$$

Утворюємо ряд

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-a^2 \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 t} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin \left(n + \frac{1}{2}\right) x,$$

який задовольняє рівняння та крайові умови.

Підбираємо коефіцієнти A_n так, щоб функція $u(x, t)$, визначена цим рядом, задовольняла також і початкову умову. Одержуємо рівність

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin \left(n + \frac{1}{2}\right) x = \sin \frac{5x}{2},$$

з якої знаходимо

$$A_2 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \quad A_n = 0, n \neq 2.$$

Отже, розв'язком задачі є функція

$$u(x, t) = e^{-\frac{25}{4}a^2t} \sin \frac{5x}{2}.$$

Приклад 24. Розв'язати методом Фур'є мішану задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, t > 0,$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l,$$

$$(u_x - hu)|_{x=0} = 0, \quad (u_x + hu)|_{x=l} = 0, \quad h > 0, t \geq 0.$$

Розв'язання. Шукаємо розв'язок рівняння у вигляді добутку $u(x, t) = X(x)T(t)$. Далі за схемою методу Фур'є після відокремлення змінних отримаємо звичайні диференціальні рівняння

$$T'(t) + \lambda a^2 T(t) = 0,$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0.$$

Крайові умови для функції $X(x)$ мають вигляд

$$X'(0) - hX(0) = 0, \quad X'(l) + hX(l) = 0.$$

Знайдемо власні значення і власні функції цієї задачі, враховуючи що $\lambda > 0$.

Загальний розв'язок рівняння має вигляд

$$X(x) = c_1 \cos \sqrt{\lambda} x + c_2 \sin \sqrt{\lambda} x.$$

З крайових умов знаходимо лінійну однорідну систему алгебраїчних рівнянь

$$c_2 \sqrt{\lambda} - hc_1 = 0,$$

$$(-c_1 \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} l + c_2 \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} l) + h(c_1 \cos \sqrt{\lambda} l + c_2 \sin \sqrt{\lambda} l) = 0,$$

яка має нетривіальний розв'язок тоді і тільки тоді, коли визначник цієї системи дорівнює нулеві, тобто

$$\begin{vmatrix} -h & \sqrt{\lambda} \\ -\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} l + h \cos \sqrt{\lambda} l & \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} l + h \sin \sqrt{\lambda} l \end{vmatrix} = 0.$$

Спрощуючи вираз

$$-h\sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} l - h^2 \sin \sqrt{\lambda} l + \lambda \sin \sqrt{\lambda} l - h\sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} l = 0,$$

одержимо

$$(\lambda - h^2) \sin \sqrt{\lambda} l = 2h \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} l,$$

$$\frac{\lambda - h^2}{h\sqrt{\lambda}} = \frac{\sqrt{\lambda}}{h} - \frac{h}{\sqrt{\lambda}} = 2 \operatorname{ctg} \sqrt{\lambda} l.$$

Звідси після заміни

$$\mu = \sqrt{\lambda} l, \quad (6.15)$$

знаходимо

$$2 \operatorname{ctg} \mu = \frac{\mu}{hl} - \frac{hl}{\mu}. \quad (6.16)$$

Це рівняння має нескінченну множину дійсних коренів, у чому легко впевнитися, побудувавши графіки функцій

$$y = 2 \operatorname{ctg} \mu, \quad y = \frac{\mu}{hl} - \frac{hl}{\mu}.$$

З рис. 6.1 видно, що кожний додатний корінь μ_k рівняння (6.16) розташований у відповідному інтервалі: $\mu_k \in (\pi(k-1), \pi k)$, $k \in \mathbb{N}$.

Оскільки функції $2 \operatorname{ctg} \mu$ і $\frac{\mu}{hl} - \frac{hl}{\mu}$ є непарними, рівняння (6.16) має також від'ємні корені, які за модулем дорівнюють додатним.

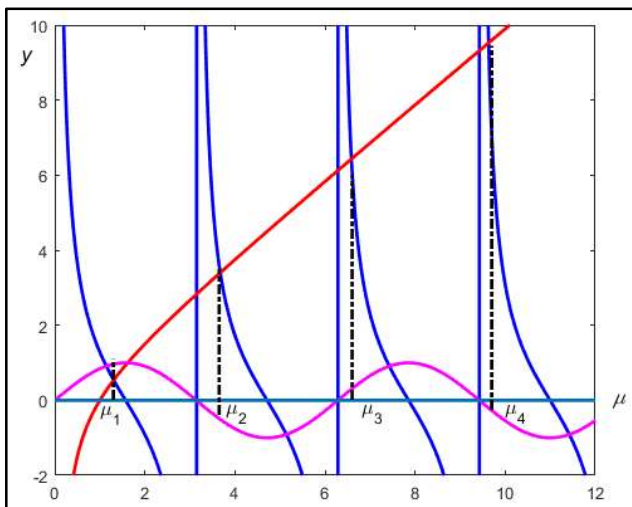


Рис. 6.1. Додатні корені рівняння $2 \operatorname{ctg} \mu = \frac{\mu}{hl} - \frac{hl}{\mu}$

Таким чином, згідно з (6.15) власними значеннями задачі будуть

$$\lambda_n = \left(\frac{\mu_n}{l}\right)^2, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (6.17)$$

Їм відповідає нескінченна множина власних функцій

$$X_n(x) = h \sin \sqrt{\lambda_n} x + \sqrt{\lambda_n} \cos \sqrt{\lambda_n} x, \quad n \in \mathbb{N} \quad (6.18)$$

або, в іншому вигляді,

$$X_n(x) = h \sin \frac{\mu_n}{l} x + \frac{\mu_n}{l} \cos \frac{\mu_n}{l} x, \quad n \in \mathbb{N} \quad (6.19)$$

(з точністю до довільного сталого множника, який ми покладемо рівним одиниці).

За загальною теорією отримана система власних функцій є ортогональною. Підрахуємо

$$\|X_n\|^2 = \int_0^l X_n^2(x) dx.$$

Із рівності

$$X_n''(x) + \lambda_n X_n(x) = 0$$

після її множення на $X_n(x) \neq 0$ одержуємо

$$\lambda_n X_n^2(x) = -X_n''(x) X_n(x).$$

Проінтегруємо останнє співвідношення по x від 0 до l

$$\lambda_n \int_0^l X_n^2 dx = - \int_0^l X_n'' X_n dx = - \left(X_n'(x) X_n(x) \right) \Big|_{x=0}^{x=l} + \int_0^l (X_n')^2 dx. \quad (6.20)$$

Продиференціюємо співвідношення (6.18)

$$X_n'(x) = h \sqrt{\lambda_n} \cos \sqrt{\lambda_n} x - \lambda_n \sin \sqrt{\lambda_n} x.$$

Обчислимо значення виразу

$$\begin{aligned} \lambda_n X_n^2 + (X_n')^2 &= \lambda_n (h \sin \sqrt{\lambda_n} x + \sqrt{\lambda_n} \cos \sqrt{\lambda_n} x)^2 + \\ &+ (h \sqrt{\lambda_n} \cos \sqrt{\lambda_n} x - \lambda_n \sin \sqrt{\lambda_n} x)^2 = \lambda_n^2 + h^2 \lambda_n. \end{aligned} \quad (6.21)$$

Проінтегруємо останню рівність по x від 0 до l

$$\lambda_n \int_0^l X_n^2(x) dx + \int_0^l (X_n'(x))^2 dx = (\lambda_n^2 + h^2 \lambda_n) l. \quad (6.22)$$

Додавши (6.20), (6.22), отримуємо

$$2\lambda_n \int_0^l X_n^2(x) dx = (\lambda_n^2 + h^2 \lambda_n) l - \left(X_n'(x) X_n(x) \right) \Big|_{x=0}^{x=l}. \quad (6.23)$$

Із крайових умов задачі запишемо рівності

$$X_n'(0) = hX_n(0), X_n'(l) = -hX_n(l) \quad (6.24)$$

або

$$(X_n'(0))^2 = h^2 X_n^2(0), (X_n'(l))^2 = h^2 X_n^2(l). \quad (6.25)$$

Тоді з (6.21) з урахуванням (6.25) знаходимо

$$\lambda_n X_n^2(0) + h^2 X_n^2(0) = \lambda_n^2 + h^2 \lambda_n, \lambda_n X_n^2(l) + h^2 X_n^2(l) = \lambda_n^2 + h^2 \lambda_n,$$

$$(\lambda_n + h^2) X_n^2(0) = (\lambda_n + h^2) \lambda_n, (\lambda_n + h^2) X_n^2(l) = (\lambda_n + h^2) \lambda_n,$$

звідки випливає

$$X_n^2(0) = X_n^2(l) = \lambda_n. \quad (6.26)$$

Помножимо на $X_n(0)$ першу умову з (6.24), на $X_n(l)$ – другу умову

$$X_n'(0) X_n(0) = hX_n^2(0), X_n'(l) X_n(l) = -hX_n^2(l).$$

Тоді другий доданок у (6.23) з урахуванням (6.26) набуває вигляду

$$-\left(X_n'(x) X_n(x) \right) \Big|_{x=0}^{x=l} = -\left(-hX_n^2(l) - hX_n^2(0) \right) = 2h\lambda_n. \quad (6.27)$$

Перепишемо співвідношення (6.23), враховуючи (6.27), у вигляді

$$2\lambda_n \int_0^l X_n^2(x) dx = (\lambda_n^2 + h^2 \lambda_n) l + 2h\lambda_n,$$

звідки

$$\mathcal{N}_n^2 = \int_0^l X_n^2(x) dx = \frac{(\lambda_n + h^2) l + 2h}{2}. \quad (6.28)$$

Таким чином, система функцій

$$\hat{X}_n(x) = \frac{h \sin \sqrt{\lambda_n} x + \sqrt{\lambda_n} \cos \sqrt{\lambda_n} x}{\mathcal{N}_n}, n \in \mathbb{N} \quad (6.29)$$

буде ортонормованою.

З урахуванням (6.17) співвідношення (6.28), (6.29) перепишуться у вигляді

$$\mathcal{N}_n^2 = \int_0^l X_n^2(x) dx = \frac{\mu_n^2 + l^2 h^2 + 2hl}{2l}, \quad (6.30)$$

$$\hat{X}_n(x) = \frac{h \sin \frac{\mu_n}{l} x + \frac{\mu_n}{l} \cos \frac{\mu_n}{l} x}{\mathcal{N}_n}, n \in \mathbb{N}. \quad (6.31)$$

Для знаходження $T(t)$, враховуючи $\lambda = \lambda_n$, дістанемо рівняння

$$T_n'(t) + \lambda_n a^2 T_n(t) = 0,$$

розв'язок якого має вигляд

$$T_n(t) = A_n e^{-\lambda_n a^2 t},$$

де A_n – довільні сталі. Таким чином, функції

$$u_n(x, t) = \hat{X}_n(x) T_n(t) = A_n e^{-\lambda_n a^2 t} \hat{X}_n(x)$$

задовольняють рівняння і крайові умови при довільних A_n .

В силу лінійності і однорідності рівняння та крайових умов сума частинних розв'язків

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\lambda_n a^2 t} \hat{X}_n(x)$$

також задовольняє рівняння і крайові умови, якщо цей ряд збігається і його можна почленно диференціювати в області $D = \{(x, t): 0 < x < l, t > 0\}$ два рази по x і один раз по t .

Коефіцієнти A_n визначаємо з початкової умови. Одержуємо рівність,

$$u(x, 0) = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \hat{X}_n(x),$$

з якої знаходимо

$$\begin{aligned} A_n = \varphi_n &= \int_0^l \varphi(x) \hat{X}_n(x) dx = \\ &= \frac{1}{\mathcal{N}_n} \int_0^l \varphi(x) (h \sin \sqrt{\lambda_n} x + \sqrt{\lambda_n} \cos \sqrt{\lambda_n} x) dx - \end{aligned}$$

коефіцієнти розкладу функції $\varphi(x)$ у ряд Фур'є за ортонормованою системою функцій $\{\hat{X}_n(x), n \in \mathbb{N}\}$.

Розглянемо частинний випадок задачі, коли $\varphi(x) = U_0 = \text{const.}$
Обчислимо коефіцієнти Фур'є

$$\begin{aligned}\varphi_n &= \frac{U_0}{N_n} \int_0^l (h \sin \sqrt{\lambda_n} x + \sqrt{\lambda_n} \cos \sqrt{\lambda_n} x) dx = \frac{U_0}{N_n} \left\{ h \int_0^l \sin \sqrt{\lambda_n} x dx + \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{\lambda_n} \int_0^l \cos \sqrt{\lambda_n} x dx \right\} = \frac{U_0}{N_n} \left\{ -\frac{h}{\sqrt{\lambda_n}} (\cos \sqrt{\lambda_n} l - 1) + \sin \sqrt{\lambda_n} l \right\} = \\ &= \frac{U_0}{N_n} \left\{ \frac{h}{\sqrt{\lambda_n}} + \sin \sqrt{\lambda_n} l \left(1 - \frac{h}{\sqrt{\lambda_n}} \text{ctg} \sqrt{\lambda_n} l \right) \right\}.\end{aligned}$$

Перетворимо отриманий вираз, враховуючи, що λ_n є коренем рівняння

$$\frac{\lambda_n - h^2}{h\sqrt{\lambda_n}} = \frac{\sqrt{\lambda_n}}{h} - \frac{h}{\sqrt{\lambda_n}} = 2 \text{ctg} \sqrt{\lambda_n} l, \quad (6.32)$$

а, отже,

$$\begin{aligned}1 - \frac{h}{\sqrt{\lambda_n}} \text{ctg} \sqrt{\lambda_n} l &= 1 - \frac{h}{\sqrt{\lambda_n}} \frac{\lambda_n - h^2}{2h\sqrt{\lambda_n}} = \frac{\lambda_n + h^2}{2\lambda_n}, \\ \sin \sqrt{\lambda_n} l &= (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{1 + \text{ctg}^2 \sqrt{\lambda_n} l}} = (-1)^{n+1} \frac{2h\sqrt{\lambda_n}}{(\lambda_n + h^2)}.\end{aligned}$$

При виборі знаку $\sin \sqrt{\lambda_n} l$ враховано, що $\sin \sqrt{\lambda_n} l > 0$,
 $n = 1, 3, 5, \dots$ і $\sin \sqrt{\lambda_n} l < 0$, $n = 2, 4, 6, \dots$ (рис. 6.1).

Таким чином, маємо

$$\varphi_n = \frac{U_0}{N_n} \left(\frac{h}{\sqrt{\lambda_n}} + (-1)^{n+1} \frac{\lambda_n + h^2}{2\lambda_n} \frac{2h\sqrt{\lambda_n}}{\lambda_n + h^2} \right) = \frac{U_0}{N_n} \frac{h}{\sqrt{\lambda_n}} (1 + (-1)^{n+1}).$$

Отже,

$$\varphi_n = \begin{cases} \frac{2U_0}{N_n} \frac{h}{\sqrt{\lambda_n}}, & n = 2k + 1, k \in \mathbb{N}_0, \\ 0, & n = 2k, k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Остаточно, розв'язок задачі визначає функція

$$\begin{aligned}
& u(x, t) = \\
& = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2U_0}{N_{2k+1}^2} \frac{h}{\sqrt{\lambda_{2k+1}}} e^{-\lambda_{2k+1} a^2 t} \left(h \sin \sqrt{\lambda_{2k+1}} x + \sqrt{\lambda_{2k+1}} \cos \sqrt{\lambda_{2k+1}} x \right) = \\
& = 4U_0 h \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda_{2k+1} a^2 t} \frac{h \sin \sqrt{\lambda_{2k+1}} x + \sqrt{\lambda_{2k+1}} \cos \sqrt{\lambda_{2k+1}} x}{\sqrt{\lambda_{2k+1}} ((\lambda_{2k+1} + h^2)l + 2h)},
\end{aligned}$$

де λ_{2k+1} – додатні корені рівняння (6.32).

Завдання для аудиторної роботи

- 6.1. $u_t = a^2 u_{xx}$, $0 < x < \pi$, $t > 0$,
 $u(0, t) = 0$, $u_x(\pi, t) = 0$, $t \geq 0$,
 $u(x, 0) = \frac{\pi x}{32} (2\pi - x)$, $0 \leq x \leq \pi$.
- 6.2. $u_t = a^2 u_{xx}$, $0 < x < \frac{1}{2}$, $t > 0$,
 $u_x(0, t) = 0$, $u\left(\frac{1}{2}, t\right) = 0$, $t \geq 0$,
 $u(x, 0) = \cos \pi x + \cos 3\pi x$, $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$.
- 6.3. $u_t = a^2 u_{xx}$, $0 < x < l$, $t > 0$,
 $u(0, t) = 0$, $u_x(l, t) + hu(l, t) = 0$, $t \geq 0$,
 $u(x, 0) = \varphi(x)$, $0 \leq x \leq l$.
- 6.4. $u_t = a^2 u_{xx}$, $0 < x < l$, $t > 0$,
 $u_x(0, t) = 0$, $u_x(l, t) + hu(l, t) = 0$, $t \geq 0$,
 $u(x, 0) = \varphi(x)$, $0 \leq x \leq l$.
- 6.5. $u_t = a^2 u_{xx}$, $0 < x < l$, $t > 0$,
 $u_x(0, t) - hu(0, t) = 0$, $u(l, t) = 0$, $t \geq 0$,
 $u(x, 0) = \varphi(x)$, $0 \leq x \leq l$.
- 6.6. $u_t = a^2 u_{xx}$, $0 < x < l$, $t > 0$,
 $u_x(0, t) - hu(0, t) = 0$, $u_x(l, t) = 0$, $t \geq 0$,
 $u(x, 0) = \varphi(x)$, $0 \leq x \leq l$.

Завдання для самостійної роботи

- 6.7. $u_t = a^2 u_{xx}$, $0 < x < \pi$, $t > 0$,
 $u(0, t) = 0$, $u(\pi, t) = 0$, $t \geq 0$,
 $u(x, 0) = \sin 3x$, $0 \leq x \leq \pi$.

- 6.8. $u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0,$
 $u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, \quad t \geq 0,$
 $u(x, 0) = \sin \pi x, \quad 0 \leq x \leq 1.$
- 6.9. $u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}, \quad t > 0,$
 $u(0, t) = 0, \quad u\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = 0, \quad t \geq 0,$
 $u(x, 0) = \sin 2x + \sin 4x, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}.$
- 6.10. $u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < 2, \quad t > 0,$
 $u(0, t) = 0, \quad u(2, t) = 0, \quad t \geq 0,$
 $u(x, 0) = \sin \frac{\pi}{2} x + \sin \pi x, \quad 0 \leq x \leq 2.$
- 6.11. $u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}, \quad t > 0,$
 $u_x(0, t) = 0, \quad u_x\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = 0, \quad t \geq 0,$
 $u(x, 0) = \cos 4x, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}.$
- 6.12. $u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0,$
 $u_x(0, t) = 0, \quad u_x(1, t) = 0, \quad t \geq 0,$
 $u(x, 0) = 1 + \cos 2\pi x, \quad 0 \leq x \leq 1.$
- 6.13. $u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < 2, \quad t > 0,$
 $u_x(0, t) = 0, \quad u_x(2, t) = 0, \quad t \geq 0,$
 $u(x, 0) = 1 + \cos \frac{3\pi}{2} x + \cos \pi x, \quad 0 \leq x \leq 2.$
- 6.14. $u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}, \quad t > 0,$
 $u(0, t) = 0, \quad u_x\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = 0, \quad t \geq 0,$
 $u(x, 0) = \sin 3x, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}.$
- 6.15. $u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < 2, \quad t > 0,$
 $u(0, t) = 0, \quad u_x(2, t) = 0, \quad t \geq 0,$
 $u(x, 0) = \sin \frac{\pi}{4} x + \sin \frac{3\pi}{4} x, \quad 0 \leq x \leq 2.$
- 6.16. $u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}, \quad t > 0,$
 $u_x(0, t) = 0, \quad u\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = 0, \quad t \geq 0,$
 $u(x, 0) = \cos x + \cos 3x, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}.$

$$\begin{aligned}
6.17. \quad & u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < 2, \quad t > 0, \\
& u_x(0, t) = 0, \quad u(2, t) = 0, \quad t \geq 0, \\
& u(x, 0) = \cos \frac{3\pi}{4}x + \cos \frac{5\pi}{4}x, \quad 0 \leq x \leq 2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
6.18. \quad & u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < 2, \quad t > 0, \\
& u(0, t) = 0, \quad u(2, t) = 0, \quad t \geq 0, \\
& u(x, 0) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2 - x, & 1 \leq x \leq 2. \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
6.19. \quad & u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\
& u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, \quad t \geq 0, \\
& u(x, 0) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{3}, \\ \frac{1}{2}(1 - x), & \frac{1}{3} \leq x \leq 1. \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
6.20. \quad & u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\
& u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, \quad t \geq 0, \\
& u(x, 0) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ (1 - x)^2, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
6.21. \quad & u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\
& u_x(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, \quad t \geq 0, \\
& u(x, 0) = \begin{cases} 4x^2, & 0 \leq x \leq \frac{1}{4}, \\ \frac{1}{3}(1 - x), & \frac{1}{4} \leq x \leq 1. \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
6.22. \quad & u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\
& u_x(0, t) = 0, \quad u_x(1, t) = 0, \quad t \geq 0, \\
& u(x, 0) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ (1 - x)^2, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
6.23. \quad & u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\
& u(0, t) = 0, \quad u_x(1, t) = 0, \quad t \geq 0, \\
& u(x, 0) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ \frac{2}{3}x(2 - x), & \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}
\end{aligned}$$

ТЕМА 7. ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ФУР'Є ДО МІШАНИХ ЗАДАЧ ДЛЯ НЕОДНОРІДНОГО РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

Поширимо метод Фур'є на задачі для неоднорідного рівняння теплопровідності з неоднорідними крайовими умовами.

Як і для хвильового рівняння, спочатку виділимо клас задач, що досить просто зводяться до вже розглянутих. Серед них важливими є задачі зі стаціонарними неоднорідностями, коли крайові умови і вільний член у рівнянні не залежать від часу. Для таких задач зручно виділити стаціонарний розв'язок, що задовольняє рівняння і крайові умови, і шукати відхилення від цього розв'язку. Проілюструємо методику побудови такого розв'язку на прикладі задачі

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \Phi(x), \quad 0 < x < l, t > 0, \quad (7.1)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (7.2)$$

$$u(0, t) = \mu_1, u(l, t) = \mu_2, t \geq 0, \mu_1, \mu_2 = \text{const}. \quad (7.3)$$

Розв'язок задачі (7.1) – (7.3) природно шукати у вигляді суми

$$u(x, t) = v(x, t) + u_0(x), \quad (7.4)$$

де $u_0(x)$ – стаціонарна температура, яка визначається задачею

$$a^2 u_0''(x) + \Phi(x) = 0, \quad 0 < x < l, u_0(0) = \mu_1, u_0(l) = \mu_2, \quad (7.5)$$

а $v(x, t)$ – відхилення від стаціонарної температури.

Задача (7.5) має вигляд, аналогічний (3.5). Її розв'язок отримано в темі 3.

Підставляючи (7.4) в (7.1)–(7.3) і враховуючи (7.5), для функції $v(x, t)$ одержимо мішану задачу для однорідного рівняння

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, t > 0$$

з однорідними крайовими умовами

$$v(0, t) = 0, v(l, t) = 0, t \geq 0$$

і початковою умовою

$$v|_{t=0} = \varphi(x) - u_0(x), 0 \leq x \leq l,$$

яка розв'язується за викладеною в темі 6 схемою методу Фур'є.

Приклад 24. Розв'язати методом Фур'є мішану задачу

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A \cos \frac{3x}{2}, A = \text{const}, 0 < x < \pi, t > 0, \\ u|_{t=0} &= 0, \quad 0 \leq x \leq \pi, \\ u_x(0, t) &= 0, u|_{x=\pi} = 0, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Розв'язання. Оскільки права частина рівняння не залежить від часу t , а крайові умови однорідні, маємо задачу зі стаціонарними неоднорідностями. Шукаємо її розв'язок у вигляді суми

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x),$$

де функція $w(x)$ визначається задачею

$$a^2 w''(x) + A \cos \frac{3x}{2} = 0, 0 < x < \pi, w'(0) = 0, w(\pi) = 0,$$

з якої знаходимо

$$w(x) = \frac{4A}{9a^2} \cos \frac{3x}{2},$$

а для функції $v(x, t)$ одержимо мішану задачу для однорідного рівняння

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \pi, t > 0,$$

з однорідними крайовими умовами

$$v_x(0, t) = 0, v(\pi, t) = 0, t \geq 0,$$

і початковою умовою

$$v|_{t=0} = -w(x) = -\frac{4A}{9a^2} \cos \frac{3x}{2}, 0 \leq x \leq \pi.$$

Застосовуючи до задачі для $v(x, t)$ метод відокремлення змінних, одержимо розв'язок

$$v(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-\lambda_n a^2 t} X_n(x),$$

де власні значення λ_n і власні функції $X_n(x)$ знаходяться із задачі Штурма – Ліувілля

$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad X'(0) = 0, X(\pi) = 0$
у вигляді (приклад 7)

$$\lambda_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)^2, X_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x, n \in \mathbb{N}_0.$$

Коефіцієнти A_n підбираємо так, щоб виконувалась початкова умова задачі. Із рівності

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x = -\frac{4A}{9a^2} \cos \frac{3x}{2},$$

знаходимо значення коефіцієнтів A_n :

$$A_1 = -\frac{4A}{9a^2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}, A_n = 0, n \neq 1.$$

Отже, шуканий розв'язок визначає функція

$$v(x, t) = -\frac{4A}{9a^2} e^{-\frac{9}{4}a^2t} \cos \frac{3x}{2}.$$

Тоді розв'язок вихідної задачі має вигляд

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x) = \frac{4A}{9a^2} \left(1 - e^{-\frac{9}{4}a^2t}\right) \cos \frac{3x}{2}.$$

Розглянемо застосування методу відокремлення змінних для неоднорідного рівняння теплопровідності на прикладі задачі про поширення тепла в однорідному ізотропному стержні з теплоізолюваною бічною поверхнею при наявності внутрішніх теплових джерел.

Нехай в області $D = \{(x, t): 0 < x < l, t > 0\}$ необхідно знайти класичний розв'язок рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad 0 < x < l, t > 0, \quad (7.6)$$

який задовольняє початкову умову

$$u|_{t=0} = \varphi(x), 0 \leq x \leq l \quad (7.7)$$

і крайові умови

$$u(0, t) = 0, u(l, t) = 0, t \geq 0. \quad (7.8)$$

В силу теореми Стеклова при кожному $t > 0$ розв'язок задачі, якщо він існує, може бути розкладений у ряд Фур'є

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x), \quad (7.9)$$

де $X_n(x)$ – ортонормована система власних функцій задачі Штурма – Ліувілля, до якої зводиться розв’язок однорідного рівняння, що відповідає рівнянню (7.6), при умовах (7.8)

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad X(0) = 0, X(l) = 0.$$

Якщо помножити співвідношення (7.9) на $X_k(x)$ і проінтегрувати його по x від 0 до l (обидві частини рівності помножити скалярно на X_k), то очевидно в силу ортонормованості системи власних функцій $X_n(x)$ матимемо

$$(u, X_k) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \int_0^l X_k(x) X_n(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) (X_k, X_n) = T_k(t).$$

Отже,

$$T_n(t) = (u, X_n). \quad (7.10)$$

Множимо рівняння (7.6) на $X_n(x)$ та інтегруємо його по x від 0 до l

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}, X_n \right) - a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, X_n \right) = (f, X_n).$$

Враховуючи самоспряженість оператора задачі Штурма – Ліувілля

$$\left(-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, X_n \right) = (u, -X_n'') = (u, \lambda_n X_n) = \lambda_n (u, X_n) = \lambda_n T_n(t),$$

а також беручи до уваги співвідношення

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}, X_n \right) = \int_0^l \frac{\partial u}{\partial t} X_n(x) dx = \frac{d}{dt} \int_0^l u(x, t) X_n(x) dx = \frac{dT_n}{dt},$$

одержимо неоднорідне диференціальне рівняння першого порядку зі сталими коефіцієнтами

$$T_n'(t) + \lambda_n a^2 T_n(t) = f_n(t),$$

де

$$f_n(t) = (f, X_n) = \int_0^l f(x, t) X_n(x) dx \quad -$$

коефіцієнт Фур’є функції $f(x, t)$ за системою $X_n(x)$.

Отримаємо початкову умову, яку повинна задовольняти функція $T_n(t)$. Для цього підставимо в (7.10) $t = 0$:

$$\begin{aligned} T_n(0) = (u|_{t=0}, X_n) &= \int_0^l u(x, 0) X_n(x) dx = \int_0^l \varphi(x) X_n(x) dx = \\ &= (\varphi, X_n) = \varphi_n. \end{aligned}$$

Таким чином, для функції $T_n(t)$ маємо задачу Коші

$$T_n'(t) + \lambda_n a^2 T_n(t) = f_n(t), \quad (7.11)$$

$$T_n(0) = \varphi_n. \quad (7.12)$$

Розв'язок задачі (7.11), (7.12) знаходимо методом варіації довільної сталої:

$$T_n(t) = \varphi_n e^{-\lambda_n a^2 t} + \int_0^t f_n(\tau) e^{-\lambda_n a^2 (t-\tau)} d\tau. \quad (7.13)$$

Підставляючи знайдений вираз у (7.9), отримаємо розв'язок задачі (7.6) – (7.8)

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\varphi_n e^{-\lambda_n a^2 t} + \int_0^t f_n(\tau) e^{-\lambda_n a^2 (t-\tau)} d\tau \right) X_n(x), \quad (7.14)$$

якщо ряди, що входять у (7.14), збігаються рівномірно і їх можна почленно диференціювати два рази по x і один раз по t .

Як встановлено раніше, $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$, $X_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{n\pi}{l} x$, $n \in \mathbb{N}$. Тоді формула (7.14) для розв'язку мішаної задачі (7.1) – (7.3) набуває вигляду

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\varphi_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t} \right) \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{n\pi}{l} x + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^t f_n(\tau) e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 (t-\tau)} d\tau \right) \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{n\pi}{l} x. \end{aligned} \quad (7.15)$$

Теорема 7.1. Припустимо, що

- 1) функція $\varphi(x)$ задовольняє умови теореми 6.1;
- 2) функція $f(x, t)$ задана і задовольняє одну з умов:

а) $f(x, t) \in C_{x,t}^{1,0}(\bar{D})$, для довільного фіксованого $t \geq 0$ має кусково-неперервну другу похідну за змінною x і

$$f(0, t) = f(l, t) = 0, \forall t \geq 0;$$

б) $f(x, t) \in C_{x,t}^{0,1}(\bar{D})$, для довільного фіксованого $t \geq 0$ має кусково-неперервну першу похідну за змінною x і

$$f(0, t) = f(l, t) = 0, \forall t \geq 0.$$

Тоді функція $u(x, t)$, визначена рядом (7.15), є класичним розв'язком задачі (7.1) – (7.3) [22].

Якщо розглядається задача (7.6) – (7.8) з неоднорідними крайовими умовами

$$\begin{cases} A_1 u(0, t) - A_2 u_x(0, t) = \mu_1(t), \\ B_1 u(l, t) + B_2 u_x(l, t) = \mu_2(t), \end{cases} \quad (7.16)$$

то її розв'язок слід подати у вигляді суми двох функцій

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x, t),$$

де функція $w(x, t)$ вибирається таким чином, щоб вона задовольняла зазначені крайові умови (7.16), а $v(x, t)$ є новою шуканою функцією, яка задовольняє рівняння

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \bar{f}(x, t), \quad 0 < x < l, t > 0, \quad (7.17)$$

початкову умову

$$v|_{t=0} = \bar{\varphi}(x), \quad 0 \leq x \leq l \quad (7.18)$$

і однорідні крайові умови

$$\begin{cases} A_1 v(0, t) - A_2 v_x(0, t) = 0, \\ B_1 v(l, t) + B_2 v_x(l, t) = 0, \end{cases} \quad t \geq 0. \quad (7.19)$$

Тут

$$\begin{aligned} \bar{f}(x, t) &= f(x, t) - \frac{\partial w}{\partial t} + a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \\ \bar{\varphi}(x) &= \varphi(x) - w(x, 0). \end{aligned}$$

У додатку 2 наведено вигляд функції $v(x, t)$ для випадку крайових умов, які найчастіше зустрічаються у прикладних задачах.

Приклад 25. Знайти методом Фур'є розв'язок мішаної задачі для рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, t > 0, \quad (7.20)$$

з початковою

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l \quad (7.21)$$

і крайовими умовами

$$u(0, t) = U_0, u_x(l, t) = Q, t \geq 0. \quad (7.22)$$

Розв'язання. Оскільки крайові умови задачі неоднорідні, шукатимемо її розв'язок у вигляді суми двох функцій

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x, t),$$

де $w(x, t)$ задовольняє неоднорідні крайові умови (7.22) і вибирається за формулою (3.20) як лінійна за змінною x функція. Згідно з додатком 2

$$w(x, t) = Qx + U_0.$$

Функція $v(x, t)$ задовольняє рівняння

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, 0 < x < l, t > 0, \quad (7.23)$$

початкову умову

$$v|_{t=0} = \varphi(x) - Qx - U_0, \quad 0 \leq x \leq l \quad (7.24)$$

і однорідні крайові умови

$$v(0, t) = 0, v_x(l, t) = 0, t \geq 0. \quad (7.25)$$

Застосуємо для розв'язання задачі (7.23) – (7.25) метод Фур'є. Шукаючи розв'язок рівняння у вигляді добутку $v(x, t) = X(x)T(t)$ і відокремлюючи змінні, отримаємо два звичайних диференціальних рівняння

$$T'(t) + \lambda a^2 T(t) = 0,$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0.$$

Крайові умови для функції $X(x)$ мають вигляд

$$X(0) = 0, X'(l) = 0.$$

Враховуючи, що за властивостями задачі Штурма-Ліувілля $\lambda > 0$, загальний розв'язок рівняння для функції $X(x)$ має вигляд

$$X(x) = C_1 \cos \sqrt{\lambda} x + C_2 \sin \sqrt{\lambda} x.$$

Підпорядковуючи цю функцію крайовим умовам, одержимо $C_1 = 0$, $C_2 \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} l = 0$ або $\cos \sqrt{\lambda} l = 0$. З останнього рівняння знаходимо $\sqrt{\lambda} l = \left(n + \frac{1}{2}\right) \pi$, $n \in \mathbb{N}_0$. Таким чином, власні значення

задачі даються формулою $\lambda_n = \left(\frac{2n+1}{2l}\pi\right)^2$, $n \in \mathbb{N}_0$. Їм відповідають нормовані власні функції

$$X_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{2n+1}{2l} \pi x, n \in \mathbb{N}_0.$$

Для знаходження $T(t)$, враховуючи $\lambda = \lambda_n$, дістанемо рівняння

$$T'_n(t) + \left(\frac{2n+1}{2l}\pi a\right)^2 T_n(t) = 0,$$

розв'язок якого має вигляд

$$T_n(t) = A_n e^{-\frac{(2n+1)^2 \pi^2 a^2}{4l^2} t}.$$

Утворюємо ряд

$$v(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-\frac{(2n+1)^2 \pi^2 a^2}{4l^2} t} \cdot \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{2n+1}{2l} \pi x, \quad (7.26)$$

який задовольняє рівняння та крайові умови.

Підбираємо коефіцієнти A_n так, щоб функція $v(x, t)$, визначена цим рядом, задовольняла також і початкову умову. Одержуємо рівність

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{2n+1}{2l} \pi x = \varphi(x) - Qx - U_0,$$

з якої знаходимо

$$A_n = \int_0^l (\varphi(x) - Qx - U_0) \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{2n+1}{2l} \pi x dx.$$

Обчислимо інтеграли

$$\begin{aligned} \int_0^l x \sin \frac{2n+1}{2l} \pi x dx &= -\frac{2l}{\pi(2n+1)} \int_0^l x d \cos \frac{2n+1}{2l} \pi x = \\ &= -\frac{2l}{\pi(2n+1)} \left(x \cos \frac{2n+1}{2l} \pi x \Big|_0^l - \int_0^l \cos \frac{2n+1}{2l} \pi x dx \right) = \\ &= \left(\frac{2l}{\pi(2n+1)} \right)^2 \sin \frac{2n+1}{2l} \pi x \Big|_0^l = \frac{4l^2 (-1)^n}{\pi^2 (2n+1)^2}; \end{aligned}$$

$$\int_0^l \sin \frac{2n+1}{2l} \pi x dx = -\frac{2l}{\pi(2n+1)} \cos \frac{2n+1}{2l} \pi x \Big|_0^l = \frac{2l}{\pi(2n+1)}.$$

Таким чином,

$$A_n = \varphi_n - Q \sqrt{\frac{2}{l}} \frac{4l^2(-1)^n}{\pi^2(2n+1)^2} - U_0 \sqrt{\frac{2}{l}} \frac{2l}{\pi(2n+1)},$$

і формула розв'язку задачі (7.26) набуває вигляду

$$v(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\bar{\varphi}_n - \frac{8Ql(-1)^n}{\pi^2(2n+1)^2} - \frac{4U_0}{\pi(2n+1)} \right) e^{-\frac{(2n+1)^2 \pi^2 a^2}{4l^2} t} \sin \frac{2n+1}{2l} \pi x,$$

де

$$\bar{\varphi}_n = \sqrt{\frac{2}{l}} \varphi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{2n+1}{2l} \pi x dx,$$

а шуканим розв'язком задачі (7.20) – (7.22) є функція

$$u(x, t) = v(x, t) + Qx + U_0.$$

Приклад 26. Знайти методом Фур'є розв'язок мішаної задачі для рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2te^{-2t} \cos x + 1 + x, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}, \quad t > 0, \quad (7.27)$$

$$u|_{t=0} = \cos 3x, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \quad (7.28)$$

$$u_x(0, t) = t, \quad u\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = t\left(\frac{\pi}{2} + 1\right), \quad t \geq 0. \quad (7.29)$$

Розв'язання. Оскільки крайові умови задачі неоднорідні, шукатимемо її розв'язок у вигляді суми двох функцій

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x, t),$$

де функція $w(x, t)$ задовольняє неоднорідні крайові умови (7.29) і вибирається за формулою (3.20) як лінійна за змінною x функція. Згідно з додатком 2

$$w(x, t) = (x + 1)t.$$

Підставляючи $u(x, t) = v(x, t) + (x + 1)t$ у (7.27) – (7.29), для функції $v(x, t)$ дістанемо задачу

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2te^{-2t} \cos x, 0 < x < \frac{\pi}{2}, t > 0, \quad (7.30)$$

$$v|_{t=0} = \cos 3x, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \quad (7.31)$$

$$v_x(0, t) = 0, v\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = 0, t \geq 0. \quad (7.32)$$

Оскільки крайові умови (7.32) однорідні, застосуємо для її розв'язання метод відокремлення змінних. Розв'язок задачі, якщо він існує, шукатимемо у вигляді ряду Фур'є

$$v(x, t) = \sum_n T_n(t) X_n(x) \quad (7.33)$$

за ортонормованою системою власних функцій $X_n(x)$ задачі Штурма – Ліувілля

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad X'(0) = 0, X\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,$$

отриманої для однорідної задачі, яка відповідає задачі (7.30), (7.32).

Згідно з прикладом 11 (задача Штурма-Ліувілля (4.47)) власними значеннями і відповідними ортонормованими власними функціями цієї задачі будуть

$$\lambda_n = (1 + 2n)^2, X_n(x) = \sqrt{\frac{4}{\pi}} \cos(1 + 2n)x, n \in \mathbb{N}_0.$$

Таким чином, у (7.33) індекс суми n змінюється від 0 до ∞ .

Тепер розв'язок задачі для функції $v(x, t)$ шукаємо у вигляді суми ряду

$$v(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) \sqrt{\frac{4}{\pi}} \cos(1 + 2n)x. \quad (7.34)$$

З формули (7.33) внаслідок ортонормованості системи функцій $X_n(x)$ маємо $T_n(t) = (v, X_n)$.

Помножимо рівняння (7.30) та початкову умову (7.31) скалярно на $X_n(x)$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial v}{\partial t}, X_n\right) - \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, X_n\right) &= 2te^{-2t}(\cos x, X_n), \\ T_n(0) &= (v|_{t=0}, X_n) = (\cos 3x, X_n). \end{aligned}$$

Враховуючи самоспряженість оператора задачі Штурма – Ліувілля, тобто

$$\left(-\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, X_n\right) = (v, -X_n'') = (v, \lambda_n X_n) = \lambda_n (v, X_n) = \lambda_n T_n(t),$$

беручи до уваги співвідношення

$$\left(\frac{\partial v}{\partial t}, X_n\right) = \int_0^l \frac{\partial v}{\partial t} X_n(x) dx = \frac{d}{dt} \int_0^l v(x, t) X_n(x) dx = \frac{dT_n}{dt},$$

а також рівності $\cos x = \sqrt{\frac{\pi}{4}} X_0$, $\cos 3x = \sqrt{\frac{\pi}{4}} X_1$, дістанемо задачу Коші для функції $T_n(t)$

$$T_n'(t) + (1 + 2n)^2 T_n(t) = 2te^{-2t} \sqrt{\frac{\pi}{4}} (X_0, X_n),$$

$$T_n(0) = \sqrt{\frac{\pi}{4}} (X_1, X_n).$$

Розв'яжемо її. Для цього розглянемо випадки: $n = 0$, $n = 1$, $n \geq 2$. Тоді відповідні задачі Коші мають вигляд

$$1) n = 0: \quad T_0'(t) + T_0(t) = \sqrt{\pi} te^{-2t}, \quad T_0(0) = 0; \quad (7.35)$$

$$2) n = 1: \quad T_1'(t) + 9T_1(t) = 0, \quad T_1(0) = \sqrt{\frac{\pi}{4}}; \quad (7.36)$$

$$3) n \geq 2: \quad T_n'(t) + (1 + 2n)^2 T_n(t) = 0, \quad T_n(0) = 0. \quad (7.37)$$

Знайдемо їхні розв'язки.

1) Загальний розв'язок неоднорідного рівняння $T_0(t)$ будемо шукати як суму загального розв'язку однорідного рівняння

$$\bar{T}_0(t) = A_0 e^{-t}$$

і частинного розв'язку неоднорідного рівняння $\bar{\bar{T}}_0(t)$ за виглядом його правої частини у формі

$$\bar{\bar{T}}_0(t) = (Ct + D)e^{-2t}.$$

Підставляючи $\bar{\bar{T}}_0(t)$ у рівняння (7.35), знаходимо $C = D = -\sqrt{\pi}$. Отже, $\bar{\bar{T}}_0(t) = -\sqrt{\pi}(t + 1)e^{-2t}$. Тоді загальний розв'язок неоднорідного рівняння має вигляд

$$T_0(t) = A_0 e^{-t} - \sqrt{\pi}(t + 1)e^{-2t}.$$

З початкової умови одержуємо $A_0 = \sqrt{\pi}$. Таким чином, розв'язок задачі Коші (7.35)

$$T_0(t) = \sqrt{\pi}(e^{-t} - (t+1)e^{-2t}).$$

2) Загальний розв'язок однорідного рівняння $T_1(t)$ має вигляд

$$T_1(t) = A_1 e^{-9t}.$$

Використовуючи початкову умову, знаходимо $A_1 = \sqrt{\frac{\pi}{4}}$. Тоді розв'язок задачі Коші (7.36)

$$T_1(t) = \sqrt{\frac{\pi}{4}} e^{-9t}.$$

3) Задача Коші (7.37) при $n \geq 2$ має тривіальний розв'язок $T_n(t) = 0$. Отже, внаслідок єдиності розв'язку задачі Коші для звичайного диференціального рівняння першого порядку інших розв'язків бути не може.

Таким чином,

$$v(x, t) = 2(e^{-t} - (t+1)e^{-2t}) \cos x + e^{-9t} \cos 3x,$$

а шуканий розв'язок задачі (7.27) – (7.29) визначає функція

$$u(x, t) = 2(e^{-t} - (t+1)e^{-2t}) \cos x + e^{-9t} \cos 3x + (x+1)t.$$

Приклад 27. Знайти методом Фур'є розв'язок мішаної задачі для рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u + 2 \cos t + \left(\frac{x^2}{2} + x \right) (1-t) - t, \\ 0 < x < \pi, \quad t > 0, \quad (7.38)$$

$$u|_{t=0} = 1 + \cos 2x, \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad (7.39)$$

$$u_x(0, t) = t, \quad u_x(\pi, t) = t(\pi+1), \quad t \geq 0. \quad (7.40)$$

Розв'язання. Оскільки крайові умови задачі неоднорідні, шукатимемо її розв'язок у вигляді суми двох функцій

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x, t),$$

де функція $w(x, t)$ задовольняє неоднорідні крайові умови другого роду (7.40) і вибирається за формулою (3.22) як квадратична за змінною x функція. Згідно з додатком 2

$$w(x, t) = \frac{tx^2}{2} + tx.$$

Функція $v(x, t)$ задовольняє рівняння

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{x^2}{2} + x = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + t + v + \frac{tx^2}{2} + tx + 2\cos t + \left(\frac{x^2}{2} + x\right)(1 - t) - t,$$

початкову умову

$$v|_{t=0} = 1 + \cos 2x - w|_{t=0},$$

і однорідні крайові умови.

Після спрощень для функції $v(x, t)$ дістанемо задачу

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + v + 2\cos t, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0, \quad (7.41)$$

$$v|_{t=0} = 1 + \cos 2x, \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad (7.42)$$

$$v_x(0, t) = 0, \quad v_x(\pi, t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (7.43)$$

Оскільки крайові умови задачі (7.43) однорідні, застосуємо для її розв'язання метод відокремлення змінних. Розв'язок задачі, якщо він існує, шукатимемо у вигляді ряду Фур'є

$$v(x, t) = \sum_n T_n(t) X_n(x) \quad (7.44)$$

за ортонормованою системою власних функцій $X_n(x)$ задачі Штурма – Ліувіля

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad X'(0) = 0, \quad X'(\pi) = 0,$$

отриманої для однорідної задачі, яка відповідає задачі (7.41), (7.43).

Згідно з прикладом 6 власними значеннями і відповідними ортонормованими власними функціями цієї задачі будуть

$$\lambda_0 = 0, X_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \lambda_n = n^2, X_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos nx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Таким чином, у (7.44) індекс суми n змінюється від 0 до ∞ .

Помножимо рівняння (7.41) та початкову умову (7.42) скалярно на $X_n(x)$:

$$\left(\frac{\partial v}{\partial t}, X_n\right) - \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, X_n\right) = (v, X_n) + 2\cos t(1, X_n),$$

$$T_n(0) = (v|_{t=0}, X_n) = (1 + \cos 2x, X_n).$$

З формули (7.44) внаслідок ортонормованості системи функцій $X_n(x)$ маємо $T_n(t) = (v, X_n)$. Враховуючи самоспряженість оператора задачі Штурма-Ліувілля і рівності

$$1 = \sqrt{\pi}X_0, \cos 2x = \sqrt{\frac{\pi}{2}}X_2,$$

дістанемо задачу Коші для функції $T_n(t)$

$$T'_n(t) + (\lambda_n - 1)T_n(t) = 2\sqrt{\pi}\cos t(X_0, X_n),$$

$$T_n(0) = \sqrt{\pi}(X_0, X_n) + \sqrt{\frac{\pi}{2}}(X_2, X_n).$$

Розв'яжемо її. Для цього розглянемо випадки: $n = 0, n = 2, n \neq 0, 2$. Тоді відповідні задачі Коші мають вигляд

$$1) n = 0: \quad T'_0(t) - T_0(t) = 2\sqrt{\pi}\cos t, \quad T_0(0) = \sqrt{\pi}; \quad (7.45)$$

$$2) n = 2: \quad T'_2(t) + 3T_2(t) = 0, \quad T_2(0) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}; \quad (7.46)$$

$$3) n \neq 0, 2: \quad T'_n(t) + (n^2 - 1)T_n(t) = 0, \quad T_n(0) = 0. \quad (7.47)$$

Знайдемо їхні розв'язки.

1) Загальний розв'язок неоднорідного рівняння $T_0(t)$ будемо шукати як суму загального розв'язку однорідного рівняння

$$\bar{T}_0(t) = A_0 e^t$$

і частинного розв'язку неоднорідного рівняння $\bar{\bar{T}}_0(t)$ за виглядом його правої частини у формі

$$\bar{\bar{T}}_0(t) = C \cos t + D \sin t.$$

Підставляючи $\bar{\bar{T}}_0(t)$ у рівняння (7.45), знаходимо $C = -\sqrt{\pi}$, $D = \sqrt{\pi}$. Отже, $\bar{\bar{T}}_0(t) = \sqrt{\pi}(\sin t - \cos t)$. Тоді загальний розв'язок неоднорідного рівняння має вигляд

$$T_0(t) = A_0 e^t + \sqrt{\pi}(\sin t - \cos t).$$

З початкової умови одержуємо $A_0 = 2\sqrt{\pi}$. Таким чином, розв'язок задачі Коші (7.45)

$$T_0(t) = \sqrt{\pi}(2e^t + \sin t - \cos t).$$

2) Загальний розв'язок однорідного рівняння $T_2(t)$ має вигляд

$$T_2(t) = A_2 e^{-3t}.$$

Використовуючи початкову умову, знаходимо $A_2 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$. Тоді розв'язок задачі Коші (7.46)

$$T_2(t) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-3t}.$$

3) Задача Коші (7.47) при $n \neq 0, 2$ має єдиний тривіальний розв'язок $T_n(t) = 0$.

Отже,

$$v(x, t) = 2e^t + \sin t - \cos t + e^{-3t} \cos 2x,$$

а шуканий розв'язок задачі (7.38) – (7.40) визначає функція

$$u(x, t) = 2e^t + \sin t - \cos t + e^{-3t} \cos 2x + \frac{tx^2}{2} + tx.$$

Приклад 28. Знайти методом Фур'є розв'язок мішаної задачі для рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4u + \cos t \sin x + te^t \sin 3x + 2t + 4x + 4t^2,$$

$$0 < x < \pi, \quad t > 0, \quad (7.48)$$

$$u|_{t=0} = \sin 2x + x, \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad (7.49)$$

$$u(0, t) = t^2, \quad u(\pi, t) = \pi + t^2, \quad t \geq 0. \quad (7.50)$$

Розв'язання. Оскільки крайові умови задачі неоднорідні, шукатимемо її розв'язок у вигляді суми двох функцій

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x, t),$$

де $w(x, t)$ задовольняє неоднорідні крайові умови (7.50) і вибирається за формулою (3.20) як лінійна за змінною x функція. Згідно з додатком 2

$$w(x, t) = x + t^2.$$

Підставляючи $u(x, t) = v(x, t) + x + t^2$ у (7.48) – (7.50), для функції $v(x, t)$ дістанемо задачу

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - 4v + \cos t \sin x + te^t \sin 3x, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0, \quad (7.51)$$

$$v|_{t=0} = \sin 2x, \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad (7.52)$$

$$v(0, t) = 0, \quad v(\pi, t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (7.53)$$

Оскільки крайові умови (7.53) однорідні, застосуємо для її

розв'язання метод відокремлення змінних. Розв'язок задачі, якщо він існує, шукатимемо у вигляді ряду Фур'є

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x) \quad (7.54)$$

за ортонормованою системою власних функцій $X_n(x)$ задачі Штурма – Ліувілля

$X''(x) + \lambda X(x) = 0$, $X(0) = 0$, $X(\pi) = 0$,
отриманої для однорідної задачі, яка відповідає задачі (7.51), (7.53).

Згідно з прикладом 8 (формули (3.51) при $l = \pi$) власними значеннями і відповідними ортонормованими власними функціями цієї задачі будуть

$$\lambda_n = n^2, X_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nx, n \in \mathbb{N}.$$

Помножимо рівняння (7.51) та початкову умову (7.52) скалярно на $X_n(x)$:

$$\left(\frac{\partial v}{\partial t}, X_n \right) - \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, X_n \right) = -4(v, X_n) + \cos t (\sin x, X_n) + t e^t (\sin 3x, X_n),$$

$$T_n(0) = (v|_{t=0}, X_n) = (\sin 2x, X_n).$$

З формули (7.54) внаслідок ортонормованості системи функцій $X_n(x)$ маємо $T_n(t) = (v, X_n)$. Враховуючи самоспряженість оператора задачі Штурма–Ліувілля і рівності

$$\sin x = \sqrt{\frac{\pi}{2}} X_1, \quad \sin 2x = \sqrt{\frac{\pi}{2}} X_2, \quad \sin 3x = \sqrt{\frac{\pi}{2}} X_3,$$

дістанемо задачу Коші для функції $T_n(t)$

$$T_n'(t) + (n^2 + 4)T_n(t) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cos t (X_1, X_n) + \sqrt{\frac{\pi}{2}} t e^t (X_3, X_n),$$

$$T_n(0) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} (X_2, X_n).$$

Розв'яжемо її. Для цього розглянемо випадки: $n = 1, n = 2, n = 3, n \geq 4$. Тоді відповідні задачі Коші мають вигляд

$$1) n = 1: \quad T_1'(t) + 5T_1(t) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cos t, \quad T_1(0) = 0; \quad (7.55)$$

$$2) n = 2: \quad T_2'(t) + 8T_2(t) = 0, T_2(0) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}; \quad (7.56)$$

$$3) n = 3: \quad T_3'(t) + 13T_3(t) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}te^t, T_3(0) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}; \quad (7.57)$$

$$4) n \geq 4: \quad T_n'(t) + (n^2 + 4)T_n(t) = 0, T_n(0) = 0. \quad (7.58)$$

Знайдемо їхні розв'язки.

1) Загальний розв'язок неоднорідного рівняння $T_1(t)$ будемо шукати як суму загального розв'язку однорідного рівняння

$$\bar{T}_1(t) = A_1 e^{-5t}$$

і частинного розв'язку неоднорідного рівняння $\bar{\bar{T}}_1(t)$ за виглядом його правої частини у формі

$$\bar{\bar{T}}_1(t) = C \cos t + D \sin t.$$

Підставляючи $\bar{\bar{T}}_1(t)$ у рівняння (7.55), знаходимо $C = \frac{5}{26}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$, $D = \frac{1}{26}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$. Отже, $\bar{\bar{T}}_1(t) = \frac{1}{26}\sqrt{\frac{\pi}{2}}(\sin t + 5\cos t)$. Тоді загальний розв'язок неоднорідного рівняння має вигляд

$$T_1(t) = A_1 e^{-5t} + \frac{1}{26}\sqrt{\frac{\pi}{2}}(\sin t + 5\cos t).$$

З початкової умови одержуємо $A_1 = -\frac{5}{26}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$. Таким чином, розв'язок задачі Коші (7.55)

$$T_1(t) = \frac{1}{26}\sqrt{\frac{\pi}{2}}(-5e^{-5t} + \sin t + 5\cos t).$$

2) Загальний розв'язок однорідного рівняння $T_2(t)$ має вигляд

$$T_2(t) = A_2 e^{-8t}.$$

Використовуючи початкову умову, знаходимо $A_2 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$. Тоді розв'язок задачі Коші (7.46)

$$T_2(t) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-8t}.$$

3) Загальний розв'язок неоднорідного рівняння $T_3(t)$ будемо шукати як суму загального розв'язку однорідного рівняння

$$\bar{T}_3(t) = A_3 e^{-13t}$$

і частинного розв'язку неоднорідного рівняння $\bar{\bar{T}}_3(t)$ за виглядом його правої частини у формі

$$\bar{\bar{T}}_3(t) = (Ct + D)e^t.$$

Підставляючи $\bar{\bar{T}}_3(t)$ у рівняння (7.57), знаходимо $C = \frac{1}{14}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$,

$D = -\frac{1}{196}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$. Отже, $\bar{\bar{T}}_3(t) = \frac{1}{14}\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^t\left(t - \frac{1}{14}\right)$. Тоді загальний розв'язок неоднорідного рівняння має вигляд

$$T_3(t) = A_3 e^{-13t} + \frac{1}{14}\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^t\left(t - \frac{1}{14}\right).$$

З початкової умови одержуємо $A_3 = \frac{1}{196}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$. Таким чином, розв'язок задачі Коші (7.57)

$$T_3(t) = \frac{1}{196}\sqrt{\frac{\pi}{2}}(e^{-13t} + 14te^t - e^t).$$

4) Задача Коші (7.58) при $n \geq 4$ має єдиний тривіальний розв'язок $T_n(t) = 0$.

Отже,

$$v(x, t) = \frac{1}{26}(-5e^{-5t} + \sin t + 5\cos t)\sin x + e^{-8t}\sin 2x + \\ + \frac{1}{196}(e^{-13} + 14te^t - e^t)\sin 3x,$$

а шуканий розв'язок задачі (7.48)–(7.50) визначає функція

$$u(x, t) = v(x, t) + x + t^2.$$

Завдання для аудиторної роботи

$$7.1. \quad u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u(0, t) = u_1, \quad u_x(l, t) + hu(l, t) = u_2, \quad t \geq 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l.$$

$$7.2. \quad u_t = a^2 u_{xx} + t \sin \frac{x}{2}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ u(0, t) = 0, \quad u_x(\pi, t) = 0, \quad t \geq 0, \\ u(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi.$$

- 7.3. $u_t = a^2 u_{xx} + x(l - x), \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$
 $u(0, t) = 0, u(l, t) = 0, t \geq 0,$
 $u(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq l.$
- 7.4. $u_t = 4u_{xx} + u + 1, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0,$
 $u_x(0, t) = 0, u_x(1, t) = 0, t \geq 0,$
 $u(x, 0) = 2\cos 2\pi x, \quad 0 \leq x \leq 1.$
- 7.5. $u_t = 4u_{xx} + \sin t \sin 2x, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0,$
 $u(0, t) = 0, u(\pi, t) = 0, t \geq 0,$
 $u(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi.$
- 7.6. $u_t = u_{xx} - u + e^{-t} \sin 3x, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}, \quad t > 0,$
 $u(0, t) = 0, u_x\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = 0, t \geq 0,$
 $u(x, 0) = \sin x, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}.$
- 7.7. $u_t = u_{xx} + 1, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}, \quad t > 0,$
 $u_x(0, t) = 1, u\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = t, \quad t \geq 0,$
 $u(x, 0) = \cos 3x + \cos 5x + x - \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}.$
- 7.8. $u_t = u_{xx} - 4u + 2t + 4x + 4t^2 + \cos t \sin x + te^t \sin 3x,$
 $0 < x < \pi, \quad t > 0,$
 $u(0, t) = t^2, u(\pi, t) = \pi + t^2, t \geq 0,$
 $u(x, 0) = x + \sin 2x, \quad 0 \leq x \leq \pi.$

Завдання для самостійної роботи

Завдання 1: дати фізичну інтерпретацію та знайти методом Фур'є розв'язок мішаної задачі для рівняння теплопровідності:

- 7.9. $u_t = a^2 u_{xx} - hu, \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$
 $u(0, t) = u_1, u_x(l, t) + hu(l, t) = 0, \quad t \geq 0,$
 $u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l.$
- 7.10. $u_t = a^2 u_{xx} + 2b, \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$
 $u(0, t) = u_1, u_x(l, t) = u_2, \quad t \geq 0,$
 $u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l.$
- 7.11. $u_t = a^2 u_{xx} + 2bx, \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$
 $u_x(0, t) = u_1, u(l, t) = 0, \quad t \geq 0,$
 $u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l.$

- 7.12. $u_t = a^2 u_{xx}$, $0 < x < 1$, $t > 0$,
 $u(0, t) = 3(1 - e^{-t})$, $u_x(1, t) + u(1, t) = 0$, $t \geq 0$,
 $u(x, 0) = \varphi(x)$, $0 \leq x \leq 1$.
- 7.13. $u_t = a^2 u_{xx} - h(u - u_0)$, $0 < x < l$, $t > 0$,
 $u_x(0, t) = u_1$, $u(l, t) = u_2$, $t \geq 0$,
 $u(x, 0) = \varphi(x)$, $0 \leq x \leq l$.
- 7.14. $u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t)$, $0 < x < l$, $t > 0$,
 $u_x(0, t) = Q$, $u_x(l, t) + u(l, t) = 0$, $t \geq 0$,
 $u(x, 0) = Q(x - l - 1)$, $0 \leq x \leq l$.
- 7.15. $u_t = u_{xx} + 4u + x^2 - 2t - 4x^2 t + 2 \cos^2 x$,
 $0 < x < \pi$, $t > 0$,
 $u_x(0, t) = 0$, $u_x(\pi, t) = 2\pi t$, $t \geq 0$,
 $u(x, 0) = 0$, $0 \leq x \leq \pi$.
- 7.16. $u_t + t = u_{xx} + \frac{x^2}{2}$, $0 < x < 1$, $t > 0$,
 $u_x(0, t) = 0$, $u_x(1, t) = t$, $t \geq 0$,
 $u(x, 0) = 3 + \cos 2\pi x + \cos 4\pi x$, $0 \leq x \leq 1$.
- 7.17. $u_t = u_{xx} + u + 2 \sin 2x \sin x$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$, $t > 0$,
 $u_x(0, t) = 0$, $u\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = 0$, $t \geq 0$,
 $u(x, 0) = 0$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.
- 7.18. $u_t = u_{xx} + u + xt(2 - t) + 2 \cos t$, $0 < x < \pi$, $t > 0$,
 $u_x(0, t) = t^2$, $u_x(\pi, t) = t^2$, $t \geq 0$,
 $u(x, 0) = \cos 2x$, $0 \leq x \leq \pi$.
- 7.19. $u_t = u_{xx} + 6u + 2t(1 - 3t) - 6x + 2 \cos x \cos 2x$,
 $0 < x < \frac{\pi}{2}$, $t > 0$,
 $u_x(0, t) = 1$, $u\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = t^2 + \frac{\pi}{2}$, $t \geq 0$,
 $u(x, 0) = x$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.
- 7.20. $u_t = u_{xx} + 2[2t^2(\pi - x) - u] + 4t(\pi - x) + \cos x \sin t + te^{-t} \cos 3x$,
 $0 < x < \frac{\pi}{2}$, $t > 0$,
 $u_x(0, t) = -2t^2$, $u\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = \pi t^2$, $t \geq 0$,
 $u(x, 0) = \cos 5x$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

- 7.21. $u_t = u_{xx} + 6u + x^2(1 - 6t) - 2(t + 3x) + t \cos 2x$,
 $0 < x < \pi, t > 0$,
 $u_x(0, t) = 1, u_x(\pi, t) = 2\pi t + 1, t \geq 0$,
 $u(x, 0) = x + 1 + \cos 3x, 0 \leq x \leq \pi$.
- 7.22. $u_t = u_{xx} + 4u + x^2 - 2t - 4x^2 t + 2 \sin t \cos^2 x$,
 $0 < x < \pi, t > 0$
 $u_x(0, t) = 0, u_x(\pi, t) = 2\pi t, t \geq 0$,
 $u(x, 0) = \cos x, 0 \leq x \leq \pi$.
- 7.23. $u_t = u_{xx} + 6u + 2t(1 - 3t) - 6x + 2 \sin t \cos x \cos 2x$,
 $0 < x < \frac{\pi}{2}, t > 0$,
 $u_x(0, t) = 1, u\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = t^2 + \frac{\pi}{2}, t \geq 0$,
 $u(x, 0) = x + \cos 5x, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.
- 7.24. $u_t - u_{xx} - \frac{1}{4}u = \cos^2 t \cos \frac{x}{2} + x\left(1 - \frac{1}{4}t\right), 0 < x < \pi, t > 0$,
 $u_x(0, t) = t, u(\pi, t) = \pi t, t \geq 0$,
 $u(x, 0) = \cos \frac{3x}{2}, 0 \leq x \leq \pi$.
- 7.25. $u_t - u_{xx} - u = tx(2 - t) + 1 - t + A \cos t \sin \frac{3x}{2}$,
 $0 < x < \pi, t > 0$,
 $u(0, t) = t, u_x(\pi, t) = t^2, t \geq 0$,
 $u(x, 0) = B \sin \frac{x}{2}, 0 \leq x \leq \pi$.
- 7.26. $u_t = u_{xx} + t\left(A \cos \frac{3\pi x}{4} + B \cos \frac{\pi x}{4}\right) + 2tx, 0 < x < 2, t > 0$,
 $u_x(0, t) = t^2, u(2, t) = 2t^2 + 1, t \geq 0$,
 $u(x, 0) = C \cos \frac{7\pi x}{4} + 1, 0 \leq x \leq 2$.
- 7.27. $u_t = u_{xx} - 2u + 2x^2 + 2t^2 x + 2tx - 2 + A + Bt \cos x$,
 $0 < x < \pi, t > 0$,
 $u_x(0, t) = t^2, u_x(\pi, t) = t^2 + 2\pi, t \geq 0$,
 $u(x, 0) = C \cos 2x + x^2, 0 \leq x \leq \pi$.
- 7.28. $u_t = u_{xx} + \cos t\left(\frac{9}{4}A \sin \frac{3x}{2} + \frac{25}{4}B \sin \frac{5x}{2}\right) + 2t, 0 < x < \pi, t > 0$,
 $u(0, t) = t^2 + 1, u_x(\pi, t) = 0, t \geq 0$,
 $u(x, 0) = C \sin \frac{x}{2} + 1, 0 \leq x \leq \pi$.

- 7.29. $u_t = u_{xx} - 4u + 8tx + 16t^2x + 4 + Ce^{-t}\sin\frac{3\pi x}{4}, 0 < x < 1, t > 0,$
 $u(0, t) = 1, u_x(2, t) = 4t^2, t \geq 0,$
 $u(x, 0) = A\sin\frac{\pi x}{4} + B\sin\frac{5\pi x}{4} + 1, 0 \leq x \leq 1.$
- 7.30. $u_t = 9u_{xx} + At\cos\pi x + B\cos 3\pi x + x^2 - 18t, 0 < x < 1, t > 0,$
 $u_x(0, t) = 0, u_x(1, t) = 2t, t \geq 0,$
 $u(x, 0) = C, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq x \leq 1.$
- 7.31. $u_t = u_{xx} - 4u + x^2 - 2t + 4t^2x + 4x + 1 + e^{-t}\cos 2x,$
 $0 < x < \frac{\pi}{2}, t > 0,$
 $u_x(0, t) = 1, u_x\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = \pi t + 1, t \geq 0,$
 $u(x, 0) = C\cos 4x + x, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}.$
- 7.32. $u_t = u_{xx} + \frac{9}{4}A\cos\frac{3x}{2} + Bt\cos\frac{x}{2} + 2t, 0 < x < \pi, t > 0$
 $u_x(0, t) = 0, u(\pi, t) = t^2 + 2, t \geq 0,$
 $u(x, 0) = C\cos\frac{5x}{2} + 2, 0 \leq x \leq \pi.$
- 7.33. $u_t = u_{xx} + u - x + 2\cos t \sin 2x \cos x, 0 < x < \frac{\pi}{2}, t > 0,$
 $u(0, t) = 0, u_x\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = 1, t \geq 0,$
 $u(x, 0) = x + \sin 5x, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}.$
- 7.34. $u_t = u_{xx} + x^2\cos t + 2\sin t \cos \pi x, 0 < x < 1, t > 0,$
 $u_x(0, t) = 1, u_x(1, t) = 2\sin t + 1, t \geq 0,$
 $u(x, 0) = x + \cos 2\pi x, 0 \leq x \leq 1.$
- 7.35. $u_t = u_{xx} + 2u + 1 - (2x + 2t - 2) + e^t\cos\frac{\pi x}{2}, 0 < x < 1, t > 0,$
 $u_x(0, t) = 1, u(1, t) = t, t \geq 0,$
 $u(x, 0) = \cos\frac{3\pi x}{2} + x - 1, 0 \leq x \leq 1.$
- 7.36. $u_t = u_{xx} - 4u + x^2 - 2t + 4tx^2 + t\cos 3x, 0 < x < \pi, t > 0,$
 $u_x(0, t) = 0, u_x(\pi, t) = 2\pi t, t \geq 0,$
 $u|_{t=0} = 1 + \cos x, 0 \leq x \leq \pi.$

Завдання 2: сформулювати мішану задачу для рівняння теплопровідності і розв'язати її методом Фур'є:

7.37. Знайти закон розподілу температури всередині однорідного ізотропного стержня довжини l із теплоізолюваною бічною поверхнею, якщо температура його кінців підтримується рівною нулю, а початкова температура задається функцією $\varphi(x)$. Розглянути випадки:

$$a) \varphi(x) = u_0 = \text{const}; \quad б) \varphi(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq \frac{l}{2}, \\ l - x, & \frac{l}{2} \leq x \leq l. \end{cases}$$

7.38. Знайти закон розподілу температури всередині однорідного ізотропного стержня довжини l із теплоізолюваною бічною поверхнею, якщо

- а) правий кінець стержня підтримується при нульовій температурі, а на лівому кінці вона зростає лінійно з часом: $u|_{x=0} = At, A = \text{const}$. Початкова температура стержня рівна нулеві;
- б) лівий кінець стержня підтримується при нульовій температурі, а на правому кінці вона змінюється з часом за законом $u|_{x=l} = Ae^{-t}, A = \text{const}$. Початкова температура задана функцією $u|_{t=0} = \frac{A}{l}x, A = \text{const}$;
- в) на лівому кінці стержня температура змінюється за законом $u|_{x=0} = u_1 e^{-t}$, на правому – за законом $u|_{x=l} = u_2 e^{-t}$. Початкова температура точок стержня задана функцією $\varphi(x) = u_1 + \frac{x}{l}(u_2 - u_1), u_1, u_2 = \text{const}$;
- г) кінці стержня підтримуються при сталій температурі $u|_{x=0} = u|_{x=l} = u_1$. Початкова температура задана функцією $u|_{t=0} = u_1 + Ax(l - x), A = \text{const}$;
- д) лівий кінець стержня теплоізолюваний, а правий підтримується при сталій температурі $u|_{x=l} = u_2$. Початкова температура задана функцією $u|_{t=0} = u_2 \frac{x^2}{l^2}$;
- е) лівий кінець підтримується при нульовій температурі, а на правому кінці вона змінюється за законом $u|_{x=l} = Ate^{-t}, A = \text{const}$. Початкова температура стержня рівна нулеві;
- є) кінці стержня теплоізолювані, а початкова температура стала й рівна U_0 .

- 7.39. Знайти закон розподілу температури в однорідному ізотропному стержні довжини l із теплоізолюваною бічною поверхнею, якщо по стержню неперервно розподілені теплові джерела з густиною $F(t) \sin \frac{\pi x}{l}$, початкова температура задана функцією $\phi(x)$, а температура кінців підтримується рівною нулеві.
- 7.40. Знайти закон розподілу температури в однорідному ізотропному стержні довжини l із теплоізолюваною бічною поверхнею, початкова температура якого рівна нулеві, якщо на лівому кінці стержня підтримується нульова температура, а на правому кінці температура змінюється за законом $A \sin 4t$, $A = \text{const}$.
- 7.41. Знайти закон розподілу температури в однорідному ізотропному стержні довжини l із теплоізолюваною бічною поверхнею, якщо його лівий кінець підтримується при нульовій температурі, а правий кінець теплоізолюваний. По стержню неперервно розподілені теплові джерела, інтенсивність яких становить $\frac{x}{l} (x - l)^2 \cos t$, а початкова температура стержня рівна нулеві.
- 7.42. Знайти закон розподілу температури в однорідному ізотропному стержні довжини l із теплоізолюваною бічною поверхнею, якщо його правий кінець підтримується при нульовій температурі, а лівий кінець теплоізолюваний. По стержню неперервно розподілені теплові джерела, інтенсивність яких становить $\frac{1}{l} (x^2 - l^2) \sin t$, а початкова температура стержня рівна нулеві.
- 7.43. Знайти закон розподілу температури в однорідному ізотропному стержні довжини $l=1$ із теплоізолюваною бічною поверхнею, якщо на лівому кінці стержня проходить теплообмін із навколишнім середовищем нульової температури за законом $(u_x - u)|_{x=0} = 0$, а на правому кінці температура змінюється за законом $u|_{x=1} = U_0 e^{-t}$, $U_0 = \text{const}$. Початкова температура стержня рівна $\frac{U_0}{2} (x + 1)$.

- 7.44. Знайти закон розподілу температури в однорідному ізотропному стержні довжини l , лівий кінець якого теплоізольований, правий підтримується при нульовій температурі, а через бічну поверхню здійснюється теплообмін із навколишнім середовищем сталої температури U_0 . Початкова температура стержня рівна нулеві.
- 7.45. Знайти закон розподілу температури в однорідному ізотропному стержні довжини l із теплоізольованою бічною поверхнею, на лівому кінці якого температура змінюється за законом $u|_{x=0} = u_1(e^{-t} - 1)$, а правий кінець підтримується при сталій температурі $u|_{x=l} = u_2$. Початкова температура задана функцією $u|_{t=0} = u_2 \frac{x}{l}$.
- 7.46. Знайти закон розподілу температури в однорідному ізотропному стержні довжини l із теплоізольованою бічною поверхнею, до лівого кінця якого підводиться сталий тепловий потік $u_x|_{x=0} = Q_0$, а на правому відбувається теплообмін із навколишнім середовищем нульової температури за законом $(u_x + u)|_{x=l} = 0$. Початкова температура задана функцією $u|_{t=0} = -Q_0 e^{-x}$.
- 7.47. Знайти закон розподілу температури в однорідному ізотропному стержні довжини l із теплоізольованою бічною поверхнею, до лівого кінця якого підводиться тепловий потік $u_x|_{x=0} = Q_0 t$, $Q_0 = \text{const}$, а правий кінець підтримується при нульовій температурі. Початкова температура стержня рівна нулеві.
- 7.48. Знайти закон розподілу температури в однорідному ізотропному стержні довжини l із теплоізольованою бічною поверхнею, на лівому кінці якого температура зростає лінійно з часом: $u|_{x=0} = At$, $A = \text{const}$. Правий кінець стержня теплоізольований, початкова температура рівна нулеві. По стержню неперервно розподілені теплові джерела, інтенсивність яких становить $At(x^2 - 2lx + 1)$.

ТЕМА 8. МЕТОД ФУР'Є ПОБУДОВИ РОЗВ'ЯЗКІВ МІШАНИХ ЗАДАЧ ДЛЯ РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ В ПРЯМОКУТНИХ ОБЛАСТЯХ

Розглянемо задачу про поширення тепла в тонкій однорідній металевій пластині без внутрішніх джерел з теплоізованими бічними поверхнями.

Математичною моделлю цього процесу є така задача: знайти в області $D = \{(x, y, t): 0 < x < c, 0 < y < b, t > 0\}$ двічі неперервно диференційований за просторовими змінними і диференційований за часом розв'язок двовимірного однорідного рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad 0 < x < c, 0 < y < b, t > 0, \quad (8.1)$$

який задовольняє початкову умову

$$u|_{t=0} = \varphi(x, y), \quad 0 \leq x \leq c, 0 \leq y \leq b \quad (8.2)$$

і крайові умови

$$u(0, y, t) = u(c, y, t) = 0, 0 \leq y \leq b, t \geq 0, \quad (8.3)$$

$$u(x, 0, t) = u(x, b, t) = 0, 0 \leq x \leq c, t \geq 0.$$

При цьому вважаємо, що виконуються умови узгодженості

$$\varphi(0, y) = \varphi(c, y) = \varphi(x, 0) = \varphi(x, b) = 0,$$

Розв'язок цієї задачі може бути отримано методом відокремлення змінних, викладеним стосовно двовимірного хвильового рівняння в темі 4. Застосування цього методу до нашої задачі проходить абсолютно аналогічно.

Припустимо, що розв'язок задачі (8.1)–(8.3) існує. Для його побудови розв'яжемо спочатку допоміжну задачу: знайти нетривіальні розв'язки рівняння (8.1), які б задовольняли крайові умови (8.3). Згідно з методом відокремлення змінних шукатимемо такі розв'язки у вигляді добутку двох функцій

$$u(x, y, t) = V(x, y)T(t), \quad (8.4)$$

де $V(x, y)$ – функція тільки від x та y , $T(t)$ – функція тільки від t , причому $V(x, y) \not\equiv 0, T(t) \not\equiv 0$. Підставляючи (8.4) у рівняння (8.1), маємо

$$VT' = a^2(V_{xx} + V_{yy})T.$$

Поділивши останню рівність на a^2VT , дістаємо умову відокремлення змінних

$$\frac{1}{a^2} \frac{T'}{T} = \frac{V_{xx} + V_{yy}}{V} = -\lambda, \quad (8.5)$$

де λ – стала. З останнього співвідношення отримуємо два рівняння для визначення функцій $V(x, y)$ і $T(t)$:

$$V_{xx} + V_{yy} + \lambda V = 0, \quad (8.6)$$

$$T'(t) + \lambda a^2 T(t) = 0. \quad (8.7)$$

З крайових умов (8.3) для функції $V(x, y)$ знаходимо такі крайові умови

$$V(0, y) = 0, V(c, y) = 0, V(x, 0) = 0, V(x, b) = 0. \quad (8.8)$$

Задача (8.6), (8.8) – це двовимірна задача на власні значення та власні функції у прямокутнику, аналогічна задачі (4.6), (4.8). Розв'язуючи її методом відокремлення змінних, знаходимо власні значення λ_{mn} і відповідні їм власні функції $V_{mn}(x, y)$ за формулами (4.14) – (4.15) у вигляді

$$V_{mn}(x, y) = \frac{2}{\sqrt{bc}} \sin \frac{m\pi}{c} x \sin \frac{n\pi}{b} y, \quad (8.9)$$

$$\lambda_{mn} = \pi^2 \left(\frac{m^2}{c^2} + \frac{n^2}{b^2} \right), m, n \in \mathbb{N}. \quad (8.10)$$

Для знаходження функції $T(t)$ розглянемо рівняння (8.7) при $\lambda = \lambda_{mn}$

$$T'_{mn}(t) + \lambda_{mn} a^2 T_{mn}(t) = 0.$$

Його загальним розв'язком буде функція

$$T_{mn}(t) = A_{mn} e^{-\pi^2 \left(\frac{m^2}{c^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) a^2 t}, \quad (8.11)$$

де A_{mn} – довільні сталі.

Підставляючи (8.9), (8.11) у (8.4), запишемо частинні розв'язки рівняння (8.1)

$$u_{mn}(x, y, t) = V_{mn}(x, y) T_{mn}(t).$$

Склавши лінійну комбінацію з усіх можливих розв'язків такого вигляду, утворимо ряд

$$u(x, y, t) = \sum_{m,n=1}^{\infty} A_{mn} e^{-\pi^2 \left(\frac{m^2}{c^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) a^2 t} V_{mn}(x, y), \quad (8.12)$$

який також буде розв'язком рівняння (8.1) і задовольнятиме крайові умови (8.3), якщо він збігається рівномірно і його можна почленно диференціювати в області D два рази по x та y і один раз по t .

Залишилося підібрати коефіцієнти A_{mn} так, щоб функція $u(x, y, t)$, визначена рядом (8.12), задовольняла умову (8.2). Підставляючи $t = 0$ в (8.12), отримаємо

$$u(x, y, 0) = \sum_{m,n=1}^{\infty} A_{mn} V_{mn}(x, y) = \varphi(x, y). \quad (8.13)$$

Припустимо, що ряд (8.13) збігається рівномірно. Тоді помноживши обидві частини цієї рівності скалярно на функцію $V_{kl}(x, y)$ (помноживши на $V_{kl}(x, y)$ та проінтегрувавши по x від 0 до c і по y від 0 до b), внаслідок ортонормованості системи функцій $V_{mn}(x, y)$ матимемо

$$A_{kl} = \varphi_{kl}, \quad (8.14)$$

де

$$\varphi_{kl} = (\varphi, V_{kl}) = \int_0^c \int_0^b \varphi(x, y) V_{kl}(x, y) dx dy - \quad (8.15)$$

коефіцієнти розкладу функції $\varphi(x, y)$ у рівномірно збіжний подвійний ряд Фур'є за системою власних функцій (8.9)

$$\varphi(x, y) = \sum_{m,n=1}^{\infty} \varphi_{mn} V_{mn}(x, y). \quad (8.16)$$

Підставляючи знайдені значення A_{mn} у ряд (8.12), будемо формальний розв'язок задачі

$$u(x, y, t) = \sum_{m,n=1}^{\infty} \varphi_{mn} e^{-\pi^2 \left(\frac{m^2}{c^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) a^2 t} V_{mn}(x, y). \quad (8.17)$$

Приклад 29. Знайти розподіл тепла в однорідній прямокутній пластині зі сторонами b і p , якщо її початкова температура рівна нулеві, край $y = 0$ теплоізолюваний, а на краях $x = 0$, $x = b$, $y = p$ задані закони зміни температури – відповідно 0, bt і tx .

Інтенсивність джерел тепла, розміщених у пластині, рівна $x \left(1 - (b - x) \cos \frac{3\pi y}{p}\right)$. (Вважаємо $\rho c = 1$, де ρ – густина матеріалу пластини, c – питома теплоємність).

Розв’язання. Математична модель даної задачі має вигляд

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + x \left(1 - (b - x) \cos \frac{3\pi y}{p} \right),$$

$$0 < x < b, 0 < y < p, t > 0, \quad (8.18)$$

$$u(0, y, t) = 0, u(b, y, t) = bt, \quad 0 \leq y \leq p, \quad t \geq 0,$$

$$u_y(x, 0, t) = 0, u(x, p, t) = tx, \quad 0 \leq x \leq b, t \geq 0, \quad (8.19)$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad 0 \leq x \leq b, \quad 0 \leq y \leq p. \quad (8.20)$$

Оскільки крайові умови задачі неоднорідні, шукатимемо її розв’язок у вигляді суми двох функцій

$$u(x, y, t) = v(x, y, t) + w(x, y, t),$$

де функція $w(x, y, t)$ задовольняє неоднорідні крайові умови (8.19). Легко бачити, що її можна вибрати у вигляді $w(x, y, t) = tx$.

Підставляючи $u(x, y, t) = v(x, y, t) + tx$ у (8.18) – (8.20), для функції $v(x, y, t)$ дістанемо задачу з однорідними крайовими умовами

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + x(x - b) \cos \frac{3\pi y}{p},$$

$$0 < x < b, 0 < y < p, t > 0, \quad (8.21)$$

$$v(0, y, t) = 0, v(b, y, t) = 0, \quad 0 \leq y \leq p, \quad t \geq 0,$$

$$v_y(x, 0, t) = 0, v(x, p, t) = 0, \quad 0 \leq x \leq b, t \geq 0, \quad (8.22)$$

$$v|_{t=0} = 0, \quad 0 \leq x \leq b, \quad 0 \leq y \leq p. \quad (8.23)$$

Будемо шукати розв’язок задачі у вигляді ряду за системою власних функцій задачі Штурма-Ліувілля для однорідної задачі, що відповідає (8.21), (8.22). Застосовуючи до неї метод Фур’є за схемою (8.4), (8.5), приходимо до двовимірної задачі на власні значення

$$V_{xx} + V_{yy} + \lambda V = 0, \quad (8.24)$$

$$V(0, y) = 0, V(b, y) = 0, V_y(x, 0) = 0, V(x, p) = 0. \quad (8.25)$$

Задачу (8.24), (8.25) в свою чергу розв'язуємо методом Фур'є, покладаючи $V(x, y) = X(x)Y(y)$. Здійснюючи відокремлення змінних та зважаючи на однорідні крайові умови для функцій $V(x, y)$, для визначення функцій $X(x)$ і $Y(y)$ отримаємо дві одновимірні задачі на власні значення

$$X''(x) + \beta X(x) = 0, \quad X(0) = X(b) = 0, \quad (8.26)$$

$$Y''(y) + \alpha Y(y) = 0, \quad Y'(0) = Y(p) = 0, \quad (8.27)$$

де α і β – сталі, $\lambda = \alpha + \beta$.

Розв'язавши дві одновимірні задачі Штурма – Ліувілля, знаходимо власні значення і власні функції задачі (8.24), (8.25)

$$\lambda_{mn} = \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{(2n+1)\pi}{2p}\right)^2, \quad (8.28)$$

$$V_{mn}(x, y) = \frac{2}{\sqrt{bp}} \sin \frac{m\pi}{b} x \cos \frac{(2n+1)\pi}{2p} y, \quad m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}_0. \quad (8.29)$$

Шукатимемо розв'язок задачі (8.21) – (8.23) у вигляді

$$v(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} T_{mn}(t) V_{mn}(x, y). \quad (8.30)$$

Із співвідношення (8.30) внаслідок ортонормованості системи власних функцій $V_{mn}(x, y)$ маємо $T_{mn}(t) = (v, V_{mn})$.

Помножимо рівняння (8.21) та початкову умову (8.23) скалярно на $V_{mn}(x, y)$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial v}{\partial t}, V_{mn}\right) &= a^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}, V_{mn}\right) + \left(x(x-b) \cos \frac{3\pi}{2p} y, V_{mn}\right), \\ T_{mn}(0) &= (v|_{t=0}, V_{mn}) = 0. \end{aligned}$$

Враховуючи самоспряженість оператора задачі Штурма – Ліувілля, співвідношення $\cos \frac{3\pi}{2p} y = \sqrt{\frac{p}{2}} Y_1$, а також ортонормованість системи функцій $\left\{Y_n(y) = \sqrt{\frac{2}{p}} \cos \frac{(2n+1)\pi}{2p} y, n \in \mathbb{N}_0\right\}$, дістанемо задачу Коші для функції $T_{mn}(t)$

$$T'_{mn}(t) + \lambda_{mn} a^2 T_{mn}(t) = f_{mn}, \quad T_{mn}(0) = 0. \quad (8.31)$$

Тут

$$\begin{aligned}
f_{mn} &= \int_0^b \int_0^p x(x-b) \cos \frac{3\pi y}{2p} \frac{2}{\sqrt{bp}} \sin \frac{m\pi}{b} x \cos \frac{(2n+1)\pi}{2p} y dx dy = \\
&= \int_0^b x(x-b) \sqrt{\frac{2}{b}} \sin \frac{m\pi}{b} x \sqrt{\frac{p}{2}} (Y_1, Y_n) dx = \begin{cases} f_{m1}, n=1, \\ 0, n \neq 1. \end{cases}
\end{aligned}$$

Обчислимо

$$f_{m1} = \sqrt{\frac{p}{b}} \int_0^b x(x-b) \sin \frac{m\pi}{b} x dx = \sqrt{\frac{p}{b}} (I_1 - bI_2),$$

де

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^b x^2 \sin \frac{m\pi}{b} x dx = -\frac{b}{m\pi} \left(x^2 \cos \frac{m\pi}{b} x \Big|_{x=0}^{x=b} - 2 \int_0^b x \cos \frac{m\pi}{b} x dx \right) = \\
&= -\frac{b}{m\pi} \left[b^2 (-1)^m - 2 \frac{b}{m\pi} \left(x \sin \frac{m\pi}{b} x \Big|_{x=0}^{x=b} - \int_0^b \sin \frac{m\pi}{b} x dx \right) \right] = \\
&= -\frac{b}{m\pi} \left[b^2 (-1)^m + \frac{2b^2}{(m\pi)^2} ((-1)^m - 1) \right]; \\
I_2 &= \int_0^b x \sin \frac{m\pi}{b} x dx = -\frac{b}{m\pi} \left(x \cos \frac{m\pi}{b} x \Big|_{x=0}^{x=b} - \int_0^b \cos \frac{m\pi}{b} x dx \right) = \\
&= -\frac{b^2}{m\pi} (-1)^m.
\end{aligned}$$

$$f_{m1} = -\sqrt{\frac{p}{b}} \frac{2b^3}{(m\pi)^3} ((-1)^m - 1) = \begin{cases} \sqrt{\frac{p}{b}} \frac{4b^3}{(m\pi)^3}, m=2k+1, k \in \mathbb{N}_0, \\ 0, m=2k+2, \end{cases}$$

З виразу для f_{mn} випливає, що задача Коші (8.31) при $n \neq 1, m \in \mathbb{N}$ і $n=1, m=2k+2, k \in \mathbb{N}_0$ має лише тривіальний розв'язок.

Розв'язок задачі Коші (8.31) при $n=1, m=2k+1, k \in \mathbb{N}_0$ знаходиться як сума загального розв'язку однорідного рівняння

$$\bar{T}_{m1}(t) = A_{m1} e^{-\lambda_{m1} a^2 t}$$

і частинного розв'язку неоднорідного рівняння $\bar{\bar{T}}_{m1}(t)$ за виглядом його правої частини у формі

$$\bar{\bar{T}}_{m1}(t) = D.$$

Підставляючи $\bar{\bar{T}}_{m1}(t)$ у рівняння (8.31), знаходимо $\bar{\bar{T}}_{m1}(t) = D = \frac{f_{m1}}{a^2 \lambda_{m1}}$. Тоді загальний розв'язок неоднорідного рівняння

$$T_{m1}(t) = A_{m1} e^{-\lambda_{m1} a^2 t} + \frac{f_{m1}}{a^2 \lambda_{m1}}.$$

З початкової умови одержуємо $A_{m1} = -\frac{f_{m1}}{a^2 \lambda_{m1}}$. Таким чином, розв'язок задачі Коші (8.31)

$$T_{m1}(t) = \frac{f_{m1}}{a^2 \lambda_{m1}} (1 - e^{-\lambda_{m1} a^2 t}).$$

Тоді розв'язок задачі (8.21) – (8.23) має вигляд

$$\begin{aligned} v(x, y, t) &= \sum_{k=0}^{\infty} T_{2k+1,1}(t) V_{2k+1,1}(x, y) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1 - e^{-a^2 \lambda_{2k+1,1} t})}{a^2 \lambda_{2k+1,1}} \sqrt{\frac{p}{b}} \frac{4b^3}{((2k+1)\pi)^3} \frac{2}{\sqrt{bp}} \sin \frac{(2k+1)\pi}{b} x \cos \frac{3\pi}{2p} y, \end{aligned}$$

а шуканий розв'язок задачі (8.18) – (8.20) визначає функція

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= \\ &= \frac{8b^2}{\pi^3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1 - e^{-a^2 \lambda_{2k+1,1} t})}{a^2 \lambda_{2k+1,1}} \frac{1}{(2k+1)^3} \sin \frac{(2k+1)\pi}{b} x \cos \frac{3\pi}{2p} y + tx. \end{aligned}$$

Приклад 30. Знайти методом Фур'є розв'язок мішаної задачі для рівняння теплопровідності:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + Ate^{-t} \sin \frac{5\pi x}{4} \cos \frac{3y}{2}, \\ 0 < x < 2, 0 < y < \pi, t > 0, \end{aligned} \quad (8.32)$$

$$\begin{aligned} u(0, y, t) &= 0, u_x(2, y, t) = 0, 0 \leq y \leq \pi, t \geq 0, \\ u_y(x, 0, t) &= 0, u(x, \pi, t) = 0, 0 \leq x \leq 2, t \geq 0, \end{aligned} \quad (8.33)$$

$$u|_{t=0} = B \sin \frac{3\pi x}{4} \cos \frac{5y}{2}, 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq \pi. \quad (8.34)$$

Розв'язання. Оскільки крайові умови задачі однорідні, будемо шукати її розв'язок у вигляді ряду за системою власних функцій задачі Штурма-Ліувілля для однорідної задачі, що відповідає (8.32), (8.33). Застосовуючи до неї метод Фур'є за схемою (8.4), (8.5), приходимо до двовимірної задачі на власні значення

$$V_{xx} + V_{yy} + \lambda V = 0, \quad (8.35)$$

$$V(0, y) = 0, V_x(2, y) = 0, V_y(x, 0) = 0, V(x, \pi) = 0. \quad (8.36)$$

Задачу (8.35), (8.36) в свою чергу розв'язуємо методом Фур'є, покладаючи $V(x, y) = X(x)Y(y)$. Здійснюючи відокремлення змінних та зважаючи на однорідні крайові умови для функції $V(x, y)$, для визначення функцій $X(x)$ і $Y(y)$ отримаємо дві одновимірні задачі на власні значення

$$X''(x) + \beta X(x) = 0, \quad X(0) = X'(2) = 0,$$

$$Y''(y) + \alpha Y(y) = 0, \quad Y'(0) = Y(\pi) = 0,$$

де α і β – сталі, $\lambda = \alpha + \beta$.

Згідно з формулами додатку 2 власні значення та власні функції цих задач мають вигляд

$$\beta_m = \left[\frac{\pi(2m+1)}{4} \right]^2, \quad X_m(x) = \sin \frac{2m+1}{4} \pi x, \quad m \in \mathbb{N}_0,$$

$$\alpha_n = \left(\frac{2n+1}{2} \right)^2, \quad Y_n(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos \frac{2n+1}{2} y, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Звідси випливає, що власними значеннями λ_{mn} і відповідними власними функціями $V_{mn}(x, y)$ двовимірної задачі Штурма-Ліувілля (8.35), (8.36) будуть

$$\lambda_{mn} = \left[\frac{\pi(2m+1)}{4} \right]^2 + \left(\frac{2n+1}{2} \right)^2, \quad (8.37)$$

$$V_{mn}(x, y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin \frac{2m+1}{4} \pi x \cos \frac{2n+1}{2} y, \quad m, n \in \mathbb{N}_0. \quad (8.38)$$

Шукатимемо розв'язок задачі (8.32) – (8.34) у вигляді ряду

$$u(x, y, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} T_{mn}(t) V_{mn}(x, y). \quad (8.39)$$

Із співвідношення (8.39) внаслідок ортонормованості системи власних функцій $V_{mn}(x, y)$ маємо $T_{mn}(t) = (u, V_{mn})$.

Помножимо рівняння (8.32) та початкову умову (8.34) скалярно на $V_{mn}(x, y)$:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}, V_{mn} \right) = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, V_{mn} \right) + Ate^{-t} \left(\sin \frac{5\pi x}{4} \cos \frac{3y}{2}, V_{mn} \right),$$

$$T_{mn}(0) = (u|_{t=0}, V_{mn}) = B \left(\sin \frac{3\pi x}{4} \cos \frac{5y}{2}, V_{mn} \right).$$

Враховуючи самоспряженість оператора задачі Штурма-Ліувілля і рівності

$$\sin \frac{5\pi x}{4} \cos \frac{3y}{2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} V_{21}, \quad \sin \frac{3\pi x}{4} \cos \frac{5y}{2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} V_{12},$$

дістанемо задачу Коші для функції $T_{mn}(t)$

$$T'_{mn}(t) + \lambda_{mn} a^2 T_{mn}(t) = Ate^{-t} \sqrt{\frac{\pi}{2}} (V_{21}, V_{mn}),$$

$$T_{mn}(0) = B \sqrt{\frac{\pi}{2}} (V_{12}, V_{mn}).$$

Розв'яжемо її. Для цього розглянемо випадки: $m = 2, n = 1$; $m = 1, n = 2$; $(m, n) \neq (2, 1)$; $(m, n) \neq (1, 2)$. Тоді відповідні задачі Коші мають вигляд

1) $m = 2, n = 1$:

$$T'_{21}(t) + \lambda_{21} a^2 T_{21}(t) = Ate^{-t} \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \quad (8.40)$$

$$T_{21}(0) = 0; \quad (8.41)$$

2) $m = 1, n = 2$:

$$T'_{12}(t) + \lambda_{12} a^2 T_{12}(t) = 0, \quad (8.42)$$

$$T_{12}(0) = B \sqrt{\frac{\pi}{2}}; \quad (8.43)$$

3) $(m, n) \neq (2, 1)$; $(m, n) \neq (1, 2)$:

$$T'_{mn}(t) + \lambda_{mn} a^2 T_{mn}(t) = 0, \quad (8.44)$$

$$T_{mn}(0) = 0. \quad (8.45)$$

1) Загальний розв'язок неоднорідного рівняння $T_{21}(t)$ шукаємо як суму загального розв'язку однорідного рівняння

$$\bar{T}_{21}(t) = A_{21}e^{-\lambda_{21}a^2t}$$

і частинного розв'язку неоднорідного рівняння, який шукаємо за виглядом правої частини рівняння у формі

$$\bar{\bar{T}}_{21}(t) = e^{-t}(Ct + D).$$

Підставляючи $\bar{\bar{T}}_{21}(t)$ у рівняння (8.40), знаходимо

$$C = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{A}{\lambda_{21}a^2 - 1}, D = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{A}{(\lambda_{21}a^2 - 1)^2},$$

отже,

$$\bar{\bar{T}}_{21}(t) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{A}{\lambda_{21}a^2 - 1} \left(t - \frac{1}{\lambda_{21}a^2 - 1} \right) e^{-t}.$$

Тоді загальний розв'язок неоднорідного рівняння має вигляд

$$T_{21}(t) = A_{21}e^{-\lambda_{21}a^2t} + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{A}{\lambda_{21}a^2 - 1} \left(t - \frac{1}{\lambda_{21}a^2 - 1} \right) e^{-t}.$$

З початкової умови (8.41) одержуємо

$$A_{21} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{A}{(\lambda_{21}a^2 - 1)^2}.$$

Таким чином,

$$T_{21}(t) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{A}{\lambda_{21}a^2 - 1} \left[\frac{1}{\lambda_{21}a^2 - 1} e^{-\lambda_{21}a^2t} + \left(t - \frac{1}{\lambda_{21}a^2 - 1} \right) e^{-t} \right].$$

2) Загальний розв'язок однорідного рівняння $T_{12}(t)$ має вигляд

$$T_{12}(t) = A_{12}e^{-\lambda_{21}a^2t}.$$

Використовуючи початкову умову (8.43), знаходимо

$$T_{12}(t) = B \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-\lambda_{21}a^2t}.$$

3) Задача (8.44), (8.45) має тривіальний розв'язок $T_{mn}(t) = 0$.

Отже, шуканий розв'язок задачі (8.32) – (8.34) визначає функція

$$u(x, y, t) = B e^{-\lambda_{21}a^2t} \sin \frac{3\pi x}{4} \cos \frac{5y}{2} + \\ + \frac{A}{\lambda_{21}a^2 - 1} \left[\frac{1}{\lambda_{21}a^2 - 1} e^{-\lambda_{21}a^2t} + \left(t - \frac{1}{\lambda_{21}a^2 - 1} \right) e^{-t} \right] \sin \frac{5\pi x}{4} \cos \frac{3y}{2},$$

де

$$\lambda_{21} = \frac{25\pi^2}{16} + \frac{9}{4}, \lambda_{12} = \frac{9\pi^2}{16} + \frac{25}{4}.$$

Приклад 30. Знайти методом Фур'є розв'язок мішаної задачі для рівняння теплопровідності:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + A \sin t \sin \pi y, \quad 0 < x, y < 1, t > 0, \quad (8.46)$$

$$u_x(0, y, t) = 0, u_x(1, y, t) = 0, \quad 0 \leq y \leq 1, t \geq 0,$$

$$u(x, 0, t) = 0, u(x, 1, t) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, t \geq 0, \quad (8.47)$$

$$u|_{t=0} = B \cos 2\pi x \sin 2\pi y, \quad 0 \leq x, y \leq 1. \quad (8.48)$$

Розв'язання. Оскільки крайові умови задачі однорідні, шукаємо її розв'язок у вигляді ряду за системою власних функцій задачі Штурма-Ліувілля для однорідної задачі, що відповідає (8.46), (8.47). Застосовуючи до неї метод Фур'є за схемою (8.4), (8.5), приходимо до двовимірної задачі на власні значення

$$V_{xx} + V_{yy} + \lambda V = 0, \quad (8.49)$$

$$V_x(0, y) = 0, V_x(1, y) = 0, V(x, 0) = 0, V(x, 1) = 0. \quad (8.50)$$

Задачу (8.49), (8.50) в свою чергу розв'язуємо методом Фур'є, покладаючи $V(x, y) = X(x)Y(y)$. Здійснюючи відокремлення змінних та зважаючи на однорідні крайові умови для функції $V(x, y)$, для визначення функцій $X(x)$ і $Y(y)$ отримаємо дві одновимірні задачі на власні значення

$$X''(x) + \beta X(x) = 0, \quad X'(0) = X'(1) = 0,$$

$$Y''(y) + \alpha Y(y) = 0, \quad Y(0) = Y(1) = 0,$$

де α і β – сталі, $\lambda = \alpha + \beta$.

Розв'язуючи ці задачі знаходимо

$$\beta_0 = 0, X_0(x) = 1, \beta_m = (m\pi)^2, \quad X_m(x) = \sqrt{2} \cos m\pi x, m \in \mathbb{N},$$

$$\alpha_n = (n\pi)^2, \quad Y_n(y) = \sqrt{2} \sin n\pi y, n \in \mathbb{N}.$$

Звідси випливає, що власними значеннями λ_{mn} і відповідними власними функціями $V_{mn}(x, y)$ двовимірної задачі Штурма-Ліувілля (8.49), (8.50) будуть

$$\lambda_{0n} = \pi^2 n^2, \quad \lambda_{mn} = \pi^2 (m^2 + n^2), m, n \in \mathbb{N}, \quad (8.51)$$

$$V_{0n}(x, y) = \sqrt{2} \sin n\pi y, V_{mn}(x, y) = 2 \cos m\pi x \sin n\pi y, m, n \in \mathbb{N}. \quad (8.52)$$

Шукатимемо розв'язок задачі (8.46) – (8.48) у вигляді

$$u(x, y, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} T_{mn}(t) V_{mn}(x, y). \quad (8.53)$$

Із співвідношення (8.53) внаслідок ортонормованості системи власних функцій $V_{mn}(x, y)$ маємо $T_{mn}(t) = (u, V_{mn})$.

Помножимо рівняння (8.46) та початкову умову (8.48) скалярно на $V_{mn}(x, y)$:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}, V_{mn} \right) = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, V_{mn} \right) + (A \sin t \sin \pi y, V_{mn}),$$

$$T_{mn}(0) = (u|_{t=0}, V_{mn}) = B(\cos 2\pi x \sin 2\pi y, V_{mn}).$$

Враховуючи самоспряженість оператора задачі Штурма-Ліувілля і рівності

$$\sin \pi y = \frac{1}{\sqrt{2}} V_{01}(x, y), \quad \cos 2\pi x \sin 2\pi y = \frac{1}{2} V_{22}(x, y),$$

дістанемо задачу Коші для функції $T_{mn}(t)$

$$T'_{mn}(t) + \lambda_{mn} a^2 T_{mn}(t) = A \sin t \frac{1}{\sqrt{2}} (V_{01}, V_{mn}),$$

$$T_{mn}(0) = \frac{B}{2} (V_{22}, V_{mn}).$$

Розв'яжемо її. Для цього розглянемо випадки: $m = 0, n = 1$; $m = 2, n = 2$; $(m, n) \neq (0, 1)$; $(m, n) \neq (2, 2)$. Тоді відповідні задачі Коші мають вигляд

1) $m = 0, n = 1$:

$$T'_{01}(t) + \pi^2 a^2 T_{01}(t) = A \sin t \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (8.54)$$

$$T_{01}(0) = 0; \quad (8.55)$$

2) $m = 2, n = 2$:

$$T'_{22}(t) + 8\pi^2 a^2 T_{22}(t) = 0, \quad (8.56)$$

$$T_{22}(0) = \frac{B}{2}; \quad (8.57)$$

3) $(m, n) \neq (0, 1)$; $(m, n) \neq (2, 2)$:

$$T'_{mn}(t) + \pi^2 a^2 (m^2 + n^2) T_{mn}(t) = 0, \quad (8.58)$$

$$T_{mn}(0) = 0. \quad (8.59)$$

1) Загальний розв'язок неоднорідного рівняння $T_{01}(t)$ шукатимемо як суму загального розв'язку однорідного рівняння

$$\bar{T}_{01}(t) = A_{01}e^{-\pi^2 a^2 t}$$

і частинного розв'язку неоднорідного рівняння, який шукаємо за виглядом правої частини рівняння у формі

$$\bar{\bar{T}}_{01}(t) = C \sin t + D \cos t.$$

Підставляючи $\bar{\bar{T}}_{01}(t)$ у рівняння (8.54), знаходимо

$$C = \frac{A\pi^2 a^2}{\sqrt{2}(1 + \pi^4 a^4)}, D = -\frac{A}{\sqrt{2}(1 + \pi^4 a^4)},$$

отже,

$$\bar{\bar{T}}_{01}(t) = \frac{A}{\sqrt{2}(1 + \pi^4 a^4)} (\pi^2 a^2 \sin t - \cos t).$$

Тоді загальний розв'язок неоднорідного рівняння має вигляд

$$T_{01}(t) = A_{01}e^{-\pi^2 a^2 t} + \frac{A}{\sqrt{2}(1 + \pi^4 a^4)} (\pi^2 a^2 \sin t - \cos t).$$

З початкової умови (8.55) одержуємо

$$A_{01} = \frac{A}{\sqrt{2}(1 + \pi^4 a^4)}.$$

Таким чином,

$$T_{01}(t) = \frac{A}{\sqrt{2}(1 + \pi^4 a^4)} (e^{-\pi^2 a^2 t} + \pi^2 a^2 \sin t - \cos t).$$

2) Загальний розв'язок однорідного рівняння $T_{22}(t)$ має вигляд

$$T_{22}(t) = A_{22}e^{-8\pi^2 a^2 t}.$$

Використовуючи початкову умову (8.57), знаходимо

$$T_{22}(t) = \frac{B}{2} e^{-8\pi^2 a^2 t}.$$

3) Задача (8.58), (8.59) має тривіальний розв'язок $T_{mn}(t) = 0$.

Отже, шуканий розв'язок задачі (8.46) – (8.48) визначає функція

$$u(x, y, t) = \frac{A}{1 + \pi^4 a^4} (e^{-\pi^2 a^2 t} + \pi^2 a^2 \sin t - \cos t) \sin \pi y + \\ + B e^{-8\pi^2 a^2 t} \cos 2\pi x \sin 2\pi y.$$

Завдання для аудиторної роботи

- 8.1. $u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy}) - 4t \sin 6\pi x, 0 < x < 1, 0 < y < 2, t > 0,$
 $u(0, y, t) = 0, u(1, y, t) = A, 0 \leq y \leq 2,$
 $u_y(x, 0, t) = 0, u_y(x, 2, t) = 0, 0 \leq x \leq 1,$
 $u(x, y, 0) = Ax, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2.$
- 8.2. $u_t = u_{xx} + u_{yy} + 2x[y + (x - 1)\cos t \sin 4\pi y],$
 $0 < x < 1, 0 < y < 2, t > 0,$
 $u(0, y, t) = 0, u(1, y, t) = 2ty, 0 \leq y \leq 2,$
 $u(x, 0, t) = 0, u(x, 2, t) = 4tx, 0 \leq x \leq 1,$
 $u(x, y, 0) = 0, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2.$
- 8.3. $u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy}) + At \sin \frac{x}{2} \cos \frac{y}{2}, 0 < x, y < \pi, t > 0,$
 $u(0, y, t) = 0, u_x(\pi, y, t) = 0, 0 \leq y \leq \pi,$
 $u_y(x, 0, t) = 0, u(x, \pi, t) = 0, 0 \leq x \leq \pi,$
 $u(x, y, 0) = B \sin \frac{5x}{2} \cos \frac{5y}{2}, 0 \leq x, y \leq \pi.$
- 8.4. $u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy}) + Ae^{-t} \sin x \sin \frac{y}{2}, 0 < x, y < \pi, t > 0,$
 $u(0, y, t) = 0, u(\pi, y, t) = 0, 0 \leq y \leq \pi,$
 $u(x, 0, t) = 0, u_y(x, \pi, t) = 0, 0 \leq x \leq \pi,$
 $u(x, y, 0) = B \sin 3x \sin \frac{5y}{2}, 0 \leq x, y \leq \pi.$
- 8.5. $u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy}) + Ae^t \sin \frac{x}{2} \sin \frac{y}{2}, 0 < x, y < \pi, t > 0,$
 $u(0, y, t) = 0, u_x(\pi, y, t) = 0, 0 \leq y \leq \pi,$
 $u(x, 0, t) = 0, u_y(x, \pi, t) = 0, 0 \leq x \leq \pi,$
 $u(x, y, 0) = B \sin \frac{3x}{2} \sin \frac{3y}{2}, 0 \leq x, y \leq \pi.$

Завдання для самостійної роботи

- 8.6. $u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy}) + At \cos \frac{\pi x}{4} \sin \frac{\pi y}{2},$
 $0 < x < 2, 0 < y < 1, t > 0,$
 $u_x(0, y, t) = 0, u(2, y, t) = 0, 0 \leq y \leq 1,$
 $u(x, 0, t) = 0, u_y(x, 1, t) = 0, 0 \leq x \leq 2,$
 $u(x, y, 0) = B \cos \frac{3\pi x}{4} \sin \frac{3\pi y}{2}, 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1.$

- 8.7. $u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy}) + At^2 \cos 3y$, $0 < x, y < \pi$, $t > 0$,
 $u_x(0, y, t) = 0, u_x(\pi, y, t) = 0, 0 \leq y \leq \pi$,
 $u_y(x, 0, t) = 0, u_y(x, \pi, t) = 0, 0 \leq x \leq \pi$,
 $u(x, y, 0) = B \cos 2x + C, 0 \leq x, y \leq \pi$.
- 8.8. $u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy}) + Ae^{-t} \sin \frac{\pi x}{2}$, $0 < x, y < 1$, $t > 0$,
 $u(0, y, t) = 0, u_x(1, y, t) = 0, 0 \leq y \leq 1$,
 $u_y(x, 0, t) = 0, u_y(x, 1, t) = 0, 0 \leq x \leq 1$,
 $u(x, y, 0) = B \sin \frac{3\pi x}{2} + C \cos 2\pi y \sin \frac{5\pi x}{2}, 0 \leq x, y \leq 1$.
- 8.9. $u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy}) + At \cos \pi x \sin \frac{\pi y}{2}$, $0 < x, y < 1, t > 0$,
 $u_x(0, y, t) = 0, u_x(1, y, t) = 0, 0 \leq y \leq 1$,
 $u(x, 0, t) = 0, u_y(x, 1, t) = 0, 0 \leq x \leq 1$,
 $u(x, y, 0) = B \sin \frac{3\pi y}{2}, 0 \leq x, y \leq 1$.
- 8.10. $u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy}) + A \sin t \cos \pi y$, $0 < x, y < 1, t > 0$,
 $u_x(0, y, t) = 0, u_x(1, y, t) = 0, 0 \leq y \leq 1$,
 $u_y(x, 0, t) = 0, u_y(x, 1, t) = 0, 0 \leq x \leq 1$,
 $u(x, y, 0) = B \cos \pi x \cos 2\pi y, 0 \leq x, y \leq 1$.
- 8.11. $u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy}) + At \sin \frac{x}{2} \sin \frac{y}{2}$, $0 < x, y < \pi, t > 0$,
 $u(0, y, t) = 0, u_x(\pi, y, t) = 0, 0 \leq y \leq \pi$,
 $u(x, 0, t) = 0, u_y(x, \pi, t) = 0, 0 \leq x \leq \pi$,
 $u(x, y, 0) = B \sin \frac{3x}{2} \sin \frac{3y}{2}, 0 \leq x, y \leq \pi$.
- 8.12. $u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy}) + At \cos 3y$, $0 < x, y < \pi, t > 0$,
 $u_x(0, y, t) = 0, u_x(\pi, y, t) = 0, 0 \leq y \leq \pi$,
 $u_y(x, 0, t) = 0, u_y(x, \pi, t) = 0, 0 \leq x \leq \pi$,
 $u(x, y, 0) = B \cos 2x + C, 0 \leq x, y \leq \pi$.
- 8.13. $u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy}) + Ate^t \cos \frac{3\pi y}{4}$,
 $0 < x < 1, 0 < y < 2, t > 0$,
 $u_x(0, y, t) = 0, u_x(1, y, t) = 0, 0 \leq y \leq 2, t \geq 0$,
 $u_y(x, 0, t) = 0, u(x, 2, t) = 0, 0 \leq x \leq 1, t \geq 0$,
 $u(x, y, 0) = B \cos 2\pi x \cos \frac{\pi y}{4}, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2$.

- 8.14. $u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy}) + A \cos t \sin \frac{\pi x}{2}$, $0 < x, y < 1, t > 0$,
 $u(0, y, t) = 0, u_x(1, y, t) = 0, 0 \leq y \leq 1$,
 $u_y(x, 0, t) = 0, u_y(x, 1, t) = 0, 0 \leq x \leq 1$,
 $u(x, y, 0) = B \sin \frac{3\pi x}{2}, 0 \leq x, y \leq 1$.
- 8.15. $u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy}) + Ate^{-t} \sin x \sin \frac{y}{2}$, $0 < x, y < \pi, t > 0$,
 $u(0, y, t) = 0, u(\pi, y, t) = 0, 0 \leq y \leq \pi$,
 $u(x, 0, t) = 0, u_y(x, \pi, t) = 0, 0 \leq x \leq \pi$,
 $u(x, y, 0) = B \sin 3x \sin \frac{5y}{2}, 0 \leq x, y \leq \pi$.
- 8.16. $u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy}) + Ae^{-t} \sin \frac{3\pi x}{2}$, $0 < x, y < 1, t > 0$,
 $u(0, y, t) = 0, u_x(1, y, t) = 0, 0 \leq y \leq 1$,
 $u_y(x, 0, t) = 0, u_y(x, 1, t) = 0, 0 \leq x \leq 1$,
 $u(x, y, 0) = B \sin \frac{\pi x}{2} \cos 2\pi y, 0 \leq x, y \leq 1$.
- 8.17. $u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy}) + Ae^t \sin 2x, 0 < x < \pi, 0 < y < \frac{\pi}{2}, t > 0$,
 $u(0, y, t) = 0, u(\pi, y, t) = 0, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$,
 $u_y(x, 0, t) = 0, u_y(x, \frac{\pi}{2}, t) = 0, 0 \leq x \leq \pi$,
 $u(x, y, 0) = B \sin x \cos 2y, 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$.
- 8.18. $u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy}) + At \cos 4x \sin 2y$,
 $0 < x < \pi, 0 < y < \frac{\pi}{2}, t > 0$,
 $u_x(0, y, t) = 0, u_x(\pi, y, t) = 0, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$,
 $u(x, 0, t) = 0, u(x, \frac{\pi}{2}, t) = 0, 0 \leq x \leq \pi$,
 $u(x, y, 0) = B \sin 4y, 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$.
- 8.19. $u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy}) + Ae^t \cos 3y, 0 < x, y < \pi, t > 0$,
 $u_x(0, y, t) = 0, u_x(\pi, y, t) = 0, 0 \leq y \leq \pi$,
 $u_y(x, 0, t) = 0, u_y(x, \pi, t) = 0, 0 \leq x \leq \pi$,
 $u(x, y, 0) = B \cos 2x + C, 0 \leq x, y \leq \pi$.

$$8.20. u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy}) + At \sin x \sin \frac{y}{2}, \quad 0 < x, y < \pi, t > 0,$$

$$u(0, y, t) = 0, u(\pi, y, t) = 0, 0 \leq y \leq \pi,$$

$$u(x, 0, t) = 0, u_y(x, \pi, t) = 0, 0 \leq x \leq \pi,$$

$$u(x, y, 0) = B \sin 3x \sin \frac{5y}{2}, 0 \leq x, y \leq \pi.$$

$$8.21. u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy}) + Ae^t \cos \frac{x}{2}, \quad 0 < x, y < \pi, t > 0,$$

$$u_x(0, y, t) = 0, u(\pi, y, t) = 0, 0 \leq y \leq \pi,$$

$$u_y(x, 0, t) = 0, u_y(x, \pi, t) = 0, 0 \leq x \leq \pi,$$

$$u(x, y, 0) = B \cos \frac{x}{2} \cos y, 0 \leq x, y \leq \pi.$$

$$8.22. u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy}) + A \sin t \sin 3x,$$

$$0 < x < \pi, 0 < y < \frac{\pi}{2}, t > 0,$$

$$u(0, y, t) = 0, u(\pi, y, t) = 0, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2},$$

$$u_y(x, 0, t) = 0, u_y\left(x, \frac{\pi}{2}, t\right) = 0, 0 \leq x \leq \pi,$$

$$u(x, y, 0) = B \sin 2x \cos 2y, 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}.$$

$$8.24. u_t = 4(u_{xx} + u_{yy}) - y \left(8 - x \cos \frac{\pi t}{8} \cos \frac{\pi x}{2} \cos \frac{\pi y}{4} \right),$$

$$0 < x < 1, 0 < y < 2, t > 0,$$

$$u(0, y, t) = 0, u(1, y, t) = y, 0 \leq y \leq 2,$$

$$u(x, 0, t) = 0, u(x, 2, t) = 2x^2, 0 \leq x \leq 1,$$

$$u(x, y, 0) = x^2 y, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2.$$

$$8.25. u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy}) + 3 \cos y + 2 \cos 6x \cos 3y,$$

$$0 < x, y < \pi, t > 0,$$

$$u_x(0, y, t) = 0, u_x(\pi, y, t) = 0, 0 \leq y \leq \pi,$$

$$u_y(x, 0, t) = 0, u_y(x, \pi, t) = 0, 0 \leq x \leq \pi,$$

$$u(x, y, 0) = 10, 0 \leq x, y \leq \pi.$$

$$8.26. u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy}) + Ae^t \sin \frac{\pi y}{4}, \quad 0 < x < 1, 0 < y < 2, t > 0,$$

$$u_x(0, y, t) = 0, u_x(1, y, t) = 0, 0 \leq y \leq 2$$

$$u(x, 0, t) = 0, u_y(x, 2, t) = 0, 0 \leq x \leq 1,$$

$$u(x, y, 0) = 2 \cos \pi x \sin \frac{5\pi y}{4}, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2.$$

- 8.27. $u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy}) + 6\sin\pi x \sin\pi y$,
 $0 < x < 1, 0 < y < 4, t > 0$,
 $u(0, y, t) = 0, u(1, y, t) = 0, 0 \leq y \leq 4$,
 $u(x, 0, t) = 0, u(x, 4, t) = 0, 0 \leq x \leq 1$,
 $u(x, y, 0) = 2\sin 3\pi x \sin \frac{\pi y}{4}, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 4$.
- 8.28. $u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy}) + Ae^t \sin \frac{x}{2} \sin 2y$,
 $0 < x < \pi, 0 < y < \frac{\pi}{2}, t > 0$,
 $u(0, y, t) = 0, u_x(\pi, y, t) = 0, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$,
 $u(x, 0, t) = 0, u\left(x, \frac{\pi}{2}, t\right) = 0, 0 \leq x \leq \pi$,
 $u(x, y, 0) = B \sin \frac{3x}{2} \sin 4y, 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$.
- 8.29. $u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy}) + ye^{-t} \left[(2 - y) \sin \frac{3\pi x}{2} - 1 \right]$,
 $0 < x < 1, 0 < y < 2, t > 0, t > 0$,
 $u(0, y, t) = ye^{-t}, u_x(1, y, t) = 0, 0 \leq y \leq 2$,
 $u(x, 0, t) = 0, u(x, 2, t) = 2e^{-t}, 0 \leq x \leq 1$,
 $u(x, y, 0) = y, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$.
- 8.30. $u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy}) - \sin t(3 - 3\cos\pi x)\sin 4\pi y$,
 $0 < x, y < 1, t > 0$,
 $u_x(0, y, t) = 0, u_x(1, y, t) = 0, 0 \leq y \leq 1$,
 $u(x, 0, t) = 0, u(x, 1, t) = 0, 0 \leq x \leq 1$,
 $u(x, y, 0) = 0, 0 \leq x, y \leq 1$.
- 8.31. $u_t = 16(u_{xx} + u_{yy}) - (3t^2 + 2)\cos \frac{3\pi x}{4}$,
 $0 < x < 2, 0 < y < 3, t > 0, t > 0$,
 $u_x(0, y, t) = 0, u(2, y, t) = 0, 0 \leq y \leq 3$,
 $u_y(x, 0, t) = 0, u_y(x, 3, t) = 0, 0 \leq x \leq 2$,
 $u(x, y, 0) = \cos\pi y \cos \frac{\pi x}{4}, 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 3$.

ТЕМА 9. МЕТОД ФУР'Є ПОБУДОВИ РОЗВ'ЯЗКІВ МІШАНИХ ЗАДАЧ ДЛЯ РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ В КРУГОВИХ ОБЛАСТЯХ

Розглянемо задачу про поширення тепла в нескінченному однорідному круговому циліндрі радіуса R , якщо в початковий момент часу температура в кожній його точці залежить лише від її відстані до осі циліндра, а бічна поверхня підтримується при температурі, рівній нулеві.

Оскільки в початковий момент часу $t = 0$ і на бічній поверхні $r = R$ температура не залежить від координати z (вісь Oz напрямлена вздовж осі циліндра) і полярного кута φ , очевидно, що і в будь-який момент часу $t > 0$ температура буде функцією лише від r і t , тобто $u = u(r, t)$.

Із фізичного змісту задачі зрозуміло, що розв'язок $u(r, t)$ повинен залишатися обмеженим у всіх точках циліндра, в тому числі і в точці $r = 0$ (інакше ми б отримали в ній нескінченну температуру, що неможливо).

При такому припущенні задача полягає у знаходженні в області $D = \{(r, t): 0 \leq r < R, t > 0\}$ розв'язку однорідного рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right), \quad 0 < r < R, \quad t > 0, \quad (9.1)$$

який задовольняє початкову умову

$$u|_{t=0} = g(r), \quad 0 \leq r \leq R \quad (9.2)$$

та крайові умови

$$u(R, t) = 0, \quad |u(0, t)| < \infty, \quad t \geq 0. \quad (9.3)$$

Вважаємо також, що виконується умова узгодженості

$$g(R) = 0.$$

Припустимо, що розв'язок задачі (9.1) – (9.3) існує. Для його побудови скористаємося методом Фур'є. Покладемо

$$u(r, t) = V(r)T(t), \quad (9.4)$$

де $V(r)$ – функція тільки від r , а $T(t)$ – функція тільки від t , причому $V(r) \neq 0, T(t) \neq 0$. Відокремивши змінні у рівнянні (9.1) та крайових умовах (9.3), дістанемо

$$T'(t) + \lambda a^2 T(t) = 0, \quad (9.5)$$

$$V''(r) + \frac{1}{r} V'(r) + \lambda V(r) = 0. \quad (9.6)$$

$$V(R) = 0, \quad |V(0)| < \infty. \quad (9.7)$$

Загальний розв'язок рівняння (9.6) має вигляд (тема 5, формула (5.13))

$$V(r) = C_1 J_0(\sqrt{\lambda} r) + C_2 N_0(\sqrt{\lambda} r), \quad (9.8)$$

де $J_0(x), N_0(x)$ – функції Бесселя відповідно першого та другого роду нульового порядку. Відомо, що $J_0(0) = 1$, а $N_0(x)$ необмежено зростає, коли $x \rightarrow 0$ (рис. 5.1, 5.2) Щоб задовольнити умову обмеженості $|V(0)| < \infty$, у формулі (9.8) потрібно покласти $C_2 = 0$.

Перша крайова умова (9.7) дає

$$J_0(\sqrt{\lambda} R) = 0 \quad \text{або} \quad J_0(\mu) = 0, \quad (9.9)$$

оскільки $C_1 \neq 0$. Остання рівність означає, що числа $\mu = \sqrt{\lambda} R$ є коренями (нулями) функції Бесселя нульового порядку.

Отже, власні значення задачі (9.6), (9.7), що відповідають кореням рівняння (9.9), мають вигляд

$$\lambda_n = \left(\frac{\mu_n}{R} \right)^2, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (9.10)$$

а відповідними власними функціями, що утворюють повну ортонормовану систему на $[0, R]$, будуть

$$V_n(r) = \frac{J_0\left(\frac{\mu_n}{R} r\right)}{N_n} = \frac{\sqrt{2}}{R} \frac{J_0\left(\frac{\mu_n}{R} r\right)}{J_1(\mu_n)}, \quad (9.11)$$

де

$$N_n^2 = \int_0^R r J_0^2\left(\frac{\mu_n}{R} r\right) dr = \frac{R^2}{2} [J_0'(\mu_n)]^2 = \frac{R^2}{2} J_1^2(\mu_n).$$

Розглянемо рівняння (9.5). Після підстановки $\lambda = \lambda_n = \left(\frac{\mu_n}{R}\right)^2$, одержимо для кожного номера n своє рівняння відносно функції $T_n(t)$

$$T'_n(t) + a^2 \left(\frac{\mu_n}{R}\right)^2 T_n(t) = 0, \quad (9.12)$$

загальним розв'язком якого є функція

$$T_n(t) = A_n e^{-\left(\frac{a\mu_n}{R}\right)^2 t}. \quad (9.13)$$

Таким чином, згідно з (9.4) отримано зліченну множину частинних розв'язків $u_n(r, t) = V_n(r)T_n(t)$ рівняння (9.1), кожен з яких задовольняє крайові умови (9.3). Ураховуючи (9.11), (9.13), одержуємо функції

$$u_n(r, t) = T_n(t)V_n(r) = A_n e^{-\left(\frac{a\mu_n}{R}\right)^2 t} V_n(r).$$

Загальний розв'язок рівняння (9.1) шукаємо як суперпозицію цих функцій у вигляді ряду

$$u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\left(\frac{a\mu_n}{R}\right)^2 t} V_n(r). \quad (9.14)$$

Припустимо, що ряд збігається рівномірно і його можна почленно диференціювати два рази за змінною r і один раз за змінною t у розглядуваній області. Тоді він буде розв'язком рівняння (9.1) і задовольнятиме крайові умови (9.3). Виберемо коефіцієнти A_n ряду (9.14) так, щоб він задовольняв і початкову умову (9.2). Для цього підставляємо (9.14) у (9.2):

$$u(r, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n V_n(r) = g(r). \quad (9.15)$$

Коефіцієнти розкладу (9.15) визначаються за формулою, аналогічною (5.25) теми 5

$$A_n = g_n = \int_0^R g(r) V_n(r) r dr. \quad (9.16)$$

Підставляючи знайдені коефіцієнти у ряд (9.14), одержимо

розв'язок задачі (9.1) – (9.3)

$$u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n e^{-\left(\frac{a\mu_n}{R}\right)^2 t} V_n(r), \quad (9.17)$$

який можна переписати у вигляді

$$u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{g}_n e^{-\left(\frac{a\mu_n}{R}\right)^2 t} J_0\left(\frac{\mu_n}{R} r\right), \quad (9.18)$$

де

$$\bar{g}_n = \frac{2}{R^2 J_1^2(\mu_n)} \int_0^R g(r) J_0\left(\frac{\mu_n}{R} r\right) r dr.$$

Задача про радіальний розподіл тепла в нескінченному циліндрі при наявності теплових джерел, що описується неоднорідним рівнянням теплопровідності, розв'язується подібно до задачі про вимушені коливання мембрани з відповідними модифікаціями (приклади 15 – 17). Її розв'язок треба шукати у вигляді

$$u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) V_n(r), \quad (9.19)$$

де $T_n(t)$ – невідомі функції, а $V_n(r)$ – власні функції задачі Штурма-Ліувілля для круга при відповідних крайових умовах.

Приклад 31. Знайти розподіл температури в нескінченному однорідному ізотропному круговому циліндрі радіуса R , на поверхні якого задано сталий тепловий потік q . Початкова температура всередині циліндра рівна $u_0 = \text{const}$.

Розв'язання. Задача зводиться до розв'язання рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right), 0 < r < R, t > 0 \quad (9.20)$$

при початковій умові

$$u|_{t=0} = u_0, \quad 0 \leq r \leq R \quad (9.21)$$

та крайових умовах

$$u_r(R, t) = \frac{q}{k}, \quad |u(0, t)| < \infty, t \geq 0, \quad (9.22)$$

де k – коефіцієнт теплопровідності.

Оскільки крайові умови неоднорідні, розв'язок задачі будемо шукати у вигляді суми двох функцій

$$u(r, t) = v(r, t) + w(r, t),$$

де функція $w(r, t)$ є розв'язком рівняння (9.20), який задовольняє крайові умови (9.23). Таку функцію зручно шукати у вигляді

$$w(r, t) = Ct + Dr^2. \quad (9.23)$$

Підставляючи (9.23) у рівняння і крайові умови, отримаємо

$$C = 4a^2D, 2DR = \frac{q}{k},$$

звідки знаходимо

$$D = \frac{q}{2Rk}, C = \frac{2a^2q}{Rk}.$$

Отже,

$$w(r, t) = \frac{2a^2q}{Rk}t + \frac{q}{2Rk}r^2.$$

Тоді задача для функції $v(r, t)$ набуває вигляду

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} \right), 0 < r < R, t > 0, \quad (9.24)$$

$$v|_{t=0} = u_0 - \frac{q}{2Rk}r^2, 0 \leq r \leq R, \quad (9.25)$$

$$v_r(R, t) = 0, |u(0, t)| < \infty, t \geq 0. \quad (9.26)$$

Застосуємо для її розв'язання метод Фур'є. Шукаємо нетривіальні розв'язки рівняння (9.24), які задовольняють крайові умови (9.26), у вигляді

$$v(r, t) = V(r)T(t), \quad (9.27)$$

Відокремивши змінні у рівнянні та крайових умовах, дістанемо

$$T'(t) + \lambda a^2 T(t) = 0, \quad (9.28)$$

$$V''(r) + \frac{1}{r}V'(r) + \lambda V(r) = 0. \quad (9.29)$$

$$V'(R) = 0, |V(0)| < \infty. \quad (9.30)$$

Власними значеннями і власними функціями задачі Штурма-Ліувілля (9.29) – (9.30) (згідно з прикладом 19 теми 5) є

$$\lambda_n = \left(\frac{\mu_n}{R}\right)^2, \quad V_n(r) = \frac{J_0\left(\frac{\mu_n}{R}r\right)}{\mathcal{N}_n}, \quad \mathcal{N}_n = \frac{R}{\sqrt{2}}J_0(\mu_n), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (9.31)$$

$$\lambda_0 = 0, \quad V_0(r) = \frac{1}{\mathcal{N}_0}, \quad \mathcal{N}_0 = \frac{R}{\sqrt{2}},$$

де μ_n – додатні корені рівняння $J_1(\mu) = 0$.

Розглянемо рівняння (9.28). Після підстановки $\lambda = \lambda_n$ отримаємо для кожного номера n своє рівняння відносно функції $T_n(t)$

$$T'_n(t) + a^2 \left(\frac{\mu_n}{R}\right)^2 T_n(t) = 0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad T'_0(t) = 0.$$

Загальними розв'язками цих рівнянь є функції

$$T_n(t) = A_n e^{-\left(\frac{a\mu_n}{R}\right)^2 t}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad T_0(t) = A_0.$$

Скориставшись принципом суперпозиції, розв'язок задачі (9.24) – (9.26) подамо у вигляді

$$u(r, t) = A_0 V_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\left(\frac{a\mu_n}{R}\right)^2 t} V_n(r). \quad (9.32)$$

Задовольнивши початкову умову, одержимо

$$A_0 V_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n V_n(r) = u_0 - \frac{qr^2}{2Rk}.$$

Для знаходження коефіцієнта A_0 помножимо останню рівність на $rV_0(r)$, а для знаходження коефіцієнтів A_m – на $rV_m(r)$ і проінтегруємо по r від 0 до R .

Враховуючи ортонормованість системи власних функцій, знайдемо

$$A_0 = \int_0^R r \left(u_0 - \frac{qr^2}{2Rk} \right) \frac{1}{\mathcal{N}_0} dr = \frac{1}{\mathcal{N}_0} \left(\frac{R^2 u_0}{2} - \frac{qR^3}{8k} \right),$$

$$A_m = \int_0^R r \left(u_0 - \frac{qr^2}{2Rk} \right) \frac{J_0\left(\frac{\mu_m}{R}r\right)}{\mathcal{N}_m} dr = \frac{u_0}{\mathcal{N}_m} \int_0^R r J_0\left(\frac{\mu_m}{R}r\right) dr - \\ - \frac{q}{2Rk\mathcal{N}_m} \int_0^R r^3 J_0\left(\frac{\mu_m}{R}r\right) dr = \frac{u_0}{\mathcal{N}_m} I_1 - \frac{q}{2Rk\mathcal{N}_m} I_2,$$

де

$$I_1 = \frac{R^2}{\mu_m^2} \int_0^{\mu_m} y J_0(y) dy = \frac{R^2}{\mu_m^2} \int_0^{\mu_m} \frac{d}{dy} (y J_1(y)) = \frac{R^2}{\mu_m^2} (y J_1(y)) \Big|_0^{\mu_m} = 0, \\ I_2 = \frac{R^4}{\mu_m^4} \int_0^{\mu_m} y^3 J_0(y) dy = \frac{R^4}{\mu_m^4} (2\mu_m^2 J_0(\mu_m) + (\mu_m^3 - 4\mu_m) J_1(\mu_m)) = \\ = \frac{R^4}{\mu_m^4} 2\mu_m^2 J_0(\mu_m) = \frac{2R^4}{\mu_m^2} J_0(\mu_m).$$

Таким чином,

$$A_m = -\frac{q}{2Rk\mathcal{N}_m} \frac{2R^4}{\mu_m^2} J_0(\mu_m) = -\frac{R^3 q}{k\mathcal{N}_m \mu_m^2} J_0(\mu_m).$$

Підставивши $A_n, n \in \mathbb{N}_0$ у (9.32), дістанемо розв'язок задачі (9.24) – (9.26)

$$v(r, t) = \frac{1}{\mathcal{N}_0} \left(\frac{R^2 u_0}{2} - \frac{qR^3}{8k} \right) V_0(r) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R^3 q}{k\mathcal{N}_n \mu_n^2} J_0(\mu_n) e^{-\left(\frac{a\mu_n}{R}\right)^2 t} V_n(r) = \\ = \frac{2}{R^2} \left(\frac{R^2 u_0}{2} - \frac{qR^3}{8k} \right) - \frac{2}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R^3 q}{k\mu_n^2} \frac{J_0(\mu_n)}{J_0^2(\mu_n)} e^{-\left(\frac{a\mu_n}{R}\right)^2 t} J_0\left(\frac{\mu_n}{R}r\right) = \\ = u_0 - \frac{qR}{4k} - \frac{2Rq}{k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n^2 J_0(\mu_n)} e^{-\left(\frac{a\mu_n}{R}\right)^2 t} J_0\left(\frac{\mu_n}{R}r\right).$$

Отже, шуканий розв'язок задачі (9.20) – (9.22) визначає функція

$$u(r, t) = \frac{2a^2 q}{Rk} t + \frac{q}{2Rk} r^2 + v(r, t).$$

Приклад 32. Знайти методом Фур'є розв'язок мішаної задачі

$$u_t = xu_{xx} + u_x - \frac{u}{x}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \quad (9.33)$$

$$|u(0, t)| < \infty, \quad u(1, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (9.34)$$

$$u(x, 0) = J_2(\mu_k \sqrt{x}), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (9.35)$$

де μ_k – додатний корінь рівняння $J_2(\mu) = 0$.

Розв'язання. Застосуємо до розв'язання задачі метод Фур'є. Шукаємо нетривіальні розв'язки рівняння, які задовольняють крайові умови задачі, у вигляді

$$v(r, t) = V(r)T(t). \quad (9.36)$$

Відокремивши змінні, дістанемо

$$T'(t) + \lambda T(t) = 0, \quad (9.37)$$

$$V''(x) + \frac{1}{x}V'(x) + \left(\frac{\lambda}{x} - \frac{1}{x^2}\right)V(x) = 0, \quad (9.38)$$

$$V(1) = 0, \quad |V(0)| < \infty. \quad (9.39)$$

Рівняння (9.38) заміною

$$\eta = 2\sqrt{\lambda x}, \quad x = \frac{\eta^2}{4\lambda}, \quad V(x) = V\left(\frac{\eta^2}{4\lambda}\right) = Y(\eta)$$

зводиться до рівняння Бесселя другого порядку

$$Y''(\eta) + \frac{1}{\eta}Y'(\eta) + \left(1 - \frac{4}{\eta^2}\right)Y(\eta) = 0,$$

обмеженим розв'язком якого є функція

$$Y(\eta) = C_1 J_2(\eta).$$

Перша крайова умова з (9.39) дає

$$J_2(2\sqrt{\lambda}) = 0 \quad \text{або} \quad J_2(\mu) = 0, \quad (9.40)$$

оскільки $C_1 \neq 0$. Остання рівність означає, що числа $\mu = 2\sqrt{\lambda}$ є додатними коренями (нулями) функції Бесселя другого порядку.

Таким чином, власні значення задачі (9.38), (9.39), що відповідають кореням рівняння (9.40), мають вигляд

$$\lambda_n = \left(\frac{\mu_n}{2}\right)^2, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (9.41)$$

а відповідні їм ортонормовані власні функції

$$V_n(x) = \frac{1}{\mathcal{N}_n} J_2(\mu_n \sqrt{x}), n \in \mathbb{N}, \quad (9.42)$$

$$\text{де } \mathcal{N}_n = \frac{R}{\sqrt{2}} J_3(\mu_n).$$

Розглянемо рівняння (9.37). При $\lambda = \lambda_n$ воно має розв'язок

$$T_n(t) = A_n e^{-\left(\frac{\mu_n}{2}\right)^2 t}, n \in \mathbb{N}.$$

Скориставшись принципом суперпозиції, розв'язок задачі (9.33) – (9.35) подамо у вигляді

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\left(\frac{\mu_n}{2}\right)^2 t} V_n(x). \quad (9.43)$$

Задовольнивши початкову умову, одержимо

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n V_n(x) = J_2(\mu_k \sqrt{x}). \quad (9.44)$$

Враховуючи рівність $J_2(\mu_k \sqrt{x}) = \mathcal{N}_k V_k(x)$, із співвідношення (9.44) знаходимо коефіцієнти

$$A_k = \mathcal{N}_k, A_n = 0, n \neq k.$$

Підставивши $A_n, n \in \mathbb{N}$ у (9.43), дістанемо розв'язок задачі (9.33) – (9.35)

$$u(x, t) = e^{-\frac{\mu_k^2 t}{4}} J_2(\mu_k \sqrt{x}). \quad (9.45)$$

Завдання для аудиторної роботи

- 9.1. $u_t = u_{xx} + \frac{1}{x} u_x + t J_0(\mu_1 x), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0,$
 $|u(0, t)| < \infty, \quad u(1, t) = 0, \quad t \geq 0,$
 $u(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1,$
де μ_1 – додатний корінь рівняння $J_0(\mu) = 0$.

- 9.2. $u_t = u_{xx} + \frac{1}{x} u_x - \frac{u}{x^2} + \sin t J_1(\mu_k x), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0,$
 $|u(0, t)| < \infty, \quad u(1, t) = 0, \quad t \geq 0,$
 $u(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1,$
де μ_k – додатний корінь рівняння $J_1(\mu) = 0$.

- 9.3. $u_t = u_{xx} + \frac{1}{x}u_x - \frac{9u}{4x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0,$
 $|u(0, t)| < \infty, \quad u(1, t) = 0, \quad t \geq 0,$
 $u(x, 0) = J_3(\mu_k \sqrt{x}), \quad 0 \leq x \leq 1,$
де μ_k – додатний корінь рівняння $J_3(\mu) = 0$.

Завдання для самостійної роботи

Завдання 1: знайти методом Фур'є розв'язок мішаної задачі:

- 9.4. $u_t = u_{xx} + \frac{1}{x}u_x - \frac{u}{x^2} + e^{-t}J_1(\mu_k x), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0,$
 $|u(0, t)| < \infty, \quad u(1, t) = 0, \quad t \geq 0,$
 $u(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1,$
де μ_k – додатний корінь рівняння $J_1(\mu) = 0$.
- 9.5. $u_t = xu_{xx} + u_x - \frac{u}{4x} + tJ_1(\mu_k \sqrt{x}), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0,$
 $|u(0, t)| < \infty, \quad u(1, t) = 0, \quad t \geq 0,$
 $u(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1,$
де μ_k – додатний корінь рівняння $J_1(\mu) = 0$.
- 9.6. $u_t = u_{xx} + \frac{1}{x}u_x + A \cos \omega t, \quad 0 < x < R, \quad t > 0,$
 $|u(0, t)| < \infty, \quad u(R, t) = 0, \quad t \geq 0,$
 $u(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq R.$
- 9.7. $u_t = u_{xx} + \frac{1}{x}u_x + f(t)J_0\left(\frac{\mu_k}{R}x\right), \quad 0 < x < R, \quad t > 0,$
 $|u(0, t)| < \infty, \quad u_x(R, t) = 0, \quad t \geq 0,$
 $u(x, 0) = u_0, \quad 0 \leq x \leq R,$
де μ_k – додатний корінь рівняння $J'_0(\mu)$, якщо
 $a) f(t) = A = \text{const}, \delta) f(t) = \sin t, \epsilon) f(t) = e^{-t}.$
- 9.8. $u_t = u_{xx} + \frac{1}{x}u_x, \quad 0 < x < R, \quad t > 0,$
 $u_x(R, t) + hu(R, t) = 0, \quad |u(0, t)| < \infty, \quad t \geq 0,$
 $u(x, 0) = u_0, \quad 0 \leq x \leq R.$

Завдання 2: сформулювати мішану задачу і розв'язати її методом Фур'є:

- 9.9. Дослідити радіальний розподіл тепла в нескінченному однорідному ізотропному круговому циліндрі радіуса R , бічна поверхня якого підтримується при сталій температурі u_0 . Початкова температура всередині циліндра рівна нулеві.
- 9.10. Дослідити радіальний розподіл тепла в нескінченному однорідному ізотропному круговому циліндрі радіуса R , з бічної поверхні якого випромінюється тепло в навколишнє середовище нульової температури. Початкова температура всередині циліндра задається функцією $f(r)$.
- 9.11. Знайти розподіл температури в нескінченному однорідному ізотропному круговому циліндрі радіуса R , якщо його початкова температура $u|_{t=0} = u_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$, $u_0 = \text{const}$, а бічна поверхня підтримується при нульовій температурі.
- 9.12. Знайти розподіл температури в нескінченному однорідному ізотропному круговому циліндрі радіуса R , бічна поверхня якого підтримується при нульовій температурі, а температура всередині циліндра в початковий момент часу $u|_{t=0} = AJ_0\left(\frac{\mu_k r}{R}\right)$, де μ_k – додатний корінь рівняння $J_0(\mu) = 0$.
- 9.13. Дослідити радіальний розподіл тепла в нескінченному однорідному ізотропному круговому циліндрі радіуса R , бічна поверхня якого підтримується при нульовій температурі. Всередині циліндра діють теплові джерела інтенсивності $Q_0 e^{-\alpha t}$, $\alpha \geq 0$, $Q_0 = \text{const}$. Початкова температура циліндра рівна нулеві.
- 9.14. Дослідити радіальний розподіл тепла в нескінченному однорідному ізотропному круговому циліндрі радіуса R , на бічній поверхні якого відбувається теплообмін з навколишнім середовищем, температура якого задана лінійною функцією At , $A = \text{const}$. Початкова температура всередині циліндра рівна нулеві.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Бицадзе А. В.* Сборник задач по уравнениям математической физики / А. В. Бицадзе, Д. Ф. Калининченко. – М. : Наука, 1985. – 312 с.
2. *Боголюбов А. Н.* Задачи по математической физике / А. Н. Боголюбов, В. В. Кравцов. – М. : МГУ, 1998. – 350 с.
3. *Будак В. М.* Сборник задач по математической физике / В. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов. – М. : Физматлит, 2004. – 688 с.
4. *Вакал Є. С.* Класифікація рівнянь із частинними похідними з використанням системи MATLAB / Є. С. Вакал, Ю. Є. Вакал. – К. : Основа, 2017. – 104 с.
5. *Вірченко Н. О.* Основні методи розв'язання задач математичної фізики / Н. О. Вірченко. – К. : Інрес, Воля, 2006. – 332 с.
6. Використання математичного пакета MATLAB для розв'язування прикладних задач : навч. посіб. / Б. П. Довгий, Є. С. Вакал, Ю. Є. Вакал, А. В. Попов. – К. : Фітосоціоцентр, 2012. – 78 с.
7. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики / В. С. Владимиров, В. В. Жаринов. – М. : Физматлит, 2004. – 400 с.
8. *Горюнов А. Ф.* Уравнения математической физики в примерах и задачах. Ч. 1 / А. Ф. Горюнов. – М. : Физматлит, 2015. – 872 с.
9. Контрольні завдання з курсу “Рівняння математичної фізики” / Є. С. Вакал [та ін.]. – К. : Фітосоціоцентр, 2002. – 29 с.
10. *Кошляков Н. С.* Уравнения в частных производных математической физики / Н. С. Кошляков, Э. Б. Глинер, М. М. Смирнов. – М. : Высшая школа, 1970. – 712 с.
11. *Кренивич А. П.* Методичні вказівки до практичних занять із дисципліни “Рівняння математичної фізики” / А. П. Кренивич, А. В. Ловейкін. – К. : ВПЦ “Київський університет”, 2016. – 45 с.
12. *Курпа Л. В.* Рівняння математичної фізики : навч. посіб. / Л. В. Курпа, Г. Б. Лінник. – Харків : НТУ “ХПІ”, 2011. – 312 с.

13. *Перестюк М. О.* Збірник задач з математичної фізики / М. О. Перестюк, В. В. Маринець, В. Л. Реґо. – Кам'янець-Подільський : Аксіома, 2012. – 252 с.
14. *Перестюк М. О.* Теорія рівнянь математичної фізики / М. О. Перестюк, В. В. Маринець. – К. : Либідь, 2001. – 336 с.
15. *Положій Г. М.* Рівняння математичної фізики / Г. М. Положій. – К. : Радянська школа, 1959. – 479 с.
16. Рівняння математичної фізики (методичний посібник) / В. П. Лавренчук [та ін]. – Чернівці : Рута, 1998. – 187 с.
17. *Романенко І. Б.* Застосування методу відокремлення змінних для розв'язання одновимірних задач : навч.-метод. посіб. з дисципліни “Рівняння математичної фізики” / І. Б. Романенко, В. Г. Самойленко. – К. : ВПЦ “Київський університет”, 2006. – 54 с.
18. *Самойленко В. Г.* Рівняння математичної фізики : навч. посіб. / В. Г. Самойленко, І. М. Конет. – К. : ВПЦ “Київський університет”, 2014. – 283 с.
19. Сборник задач по уравнениям математической физики / под ред. В. С. Владимирова. – М. : Физматлит, 2003. – 288 с.
20. *Смирнов М. М.* Задачи по уравнениям математической физики / М. М. Смирнов. – М. : Наука, 1975. – 128 с.
21. *Тихонов А. Н.* Уравнения математической физики : учебник для вузов / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. – М. : МГУ, Наука, 2004. – 798 с.
22. *Уроев В. М.* Уравнения математической физики / В. М. Уроев. – М. : Яуза, 1998. – 373 с.

ДОДАТКИ

Додаток 1. Власні значення і власні функції задачі Штурма – Ліувілля з різними типами крайових умов

КУ	Власні значення λ_n , власні функції X_n , квадрат норми $\ X_n\ ^2$
I-I	$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, X_n(x) = \sin \frac{n\pi}{l}x, \ X_n\ ^2 = \frac{l}{2}, n \in \mathbb{N}$
I-II	$\lambda_n = \left(\frac{\pi(2n+1)}{2l}\right)^2, X_n(x) = \sin \frac{\pi(2n+1)}{2l}x, n \in \mathbb{N}_0,$ $\ X_n\ ^2 = \frac{l}{2}, n \in \mathbb{N}$
I-III	$\lambda_n > 0$ - розв'язок рівняння $tg\sqrt{\lambda}l = -\frac{\sqrt{\lambda}}{h},$ $X_n(x) = \sin\sqrt{\lambda_n}x, \ X_n\ ^2 = \frac{l(h^2+\lambda_n)+h}{2(h^2+\lambda_n)}, n \in \mathbb{N}$
II-I	$\lambda_n = \left(\frac{\pi(2n+1)}{2l}\right)^2, X_n(x) = \cos \frac{\pi(2n+1)}{2l}x, n \in \mathbb{N}_0,$ $\ X_n\ ^2 = \frac{l}{2}, n \in \mathbb{N}_0$
II-II	$\lambda_0 = 0, X_0(x) = 1, \ X_0\ ^2 = l,$ $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, X_n(x) = \sin \frac{n\pi}{l}x, n \in \mathbb{N}, \ X_n\ ^2 = \frac{l}{2}, n \in \mathbb{N}$
II-III	$\lambda_n > 0$ - розв'язок рівняння $tg\sqrt{\lambda}l = \frac{h}{\sqrt{\lambda}},$ $X_n(x) = \cos\sqrt{\lambda_n}x, \ X_n\ ^2 = \frac{l(h^2+\lambda_n)+h}{2(h^2+\lambda_n)}, n \in \mathbb{N}$
III-I	$\lambda_n > 0$ - розв'язок рівняння $tg\sqrt{\lambda}l = -\frac{\sqrt{\lambda}}{h},$ $X_n(x) = h\sin\sqrt{\lambda_n}x + \sqrt{\lambda_n}\cos\sqrt{\lambda_n}x, \ X_n\ ^2 = \frac{l(h^2+\lambda_n)+h}{2(h^2+\lambda_n)}, n \in \mathbb{N}$
III-II	$\lambda_n > 0$ - розв'язок рівняння $ctg\sqrt{\lambda}l = \frac{\sqrt{\lambda}}{h},$ $X_n(x) = h\sin\sqrt{\lambda_n}x + \sqrt{\lambda_n}\cos\sqrt{\lambda_n}x, \ X_n\ ^2 = \frac{l(h^2+\lambda_n)+h}{2(h^2+\lambda_n)}, n \in \mathbb{N}$
III-III	$\lambda_n > 0$ - розв'язок рівняння $ctg\sqrt{\lambda}l = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{h} - \frac{h}{\sqrt{\lambda}}\right),$ $X_n(x) = h\sin\sqrt{\lambda_n}x + \sqrt{\lambda_n}\cos\sqrt{\lambda_n}x,$ $\ X_n\ ^2 = \frac{l(h^2 + \lambda_n) + 2h}{2}, n \in \mathbb{N}$

Крайові умови наведено в прикладі 1 і в завданнях (1.1) – (1.8).

Додаток 2. Вибір функції $w(x, t)$ для зведення мішаної задачі до задачі з однорідними крайовими умовами

Крайові умови	Допоміжна функція $w(x, t)$
$u(0, t) = \mu_1(t),$ $u(l, t) = \mu_2(t)$	$w(x, t) = \mu_1 + \frac{x}{l}(\mu_2 - \mu_1)$
$u(0, t) = \mu_1(t),$ $u_x(l, t) = \mu_2(t)$	$w(x, t) = \mu_1 + x\mu_2$
$u(0, t) = \mu_1(t),$ $u_x(l, t) + hu(l, t) = \mu_2(t)$	$w(x, t) = \mu_1 + x \frac{\mu_2 - h\mu_1}{1 + lh}$
$u_x(0, t) = \mu_1(t),$ $u(l, t) = \mu_2(t)$	$w(x, t) = (x - l)\mu_1 + \mu_2$
$u_x(0, t) = \mu_1(t),$ $u_x(l, t) = \mu_2(t)$	$w(x, t) = x\mu_1 + x^2 \frac{\mu_2 - \mu_1}{2l}$
$u_x(0, t) = \mu_1(t),$ $u_x(l, t) + hu(l, t) = \mu_2(t)$	$w(x, t) = (x - l)\mu_1 + \frac{\mu_2 - \mu_1}{h}$
$u_x(0, t) - hu(0, t) = \mu_1(t),$ $u(l, t) = \mu_2(t)$	$w(x, t) = x \frac{\mu_1 + \mu_2 h}{hl + 1} + \frac{\mu_2 - \mu_1 l}{hl + 1}$
$u_x(0, t) - hu(0, t) = \mu_1(t),$ $u_x(l, t) = \mu_2(t)$	$w(x, t) = x\mu_2 + \frac{\mu_2 - \mu_1}{h}$
$u_x(0, t) - hu(0, t) = \mu_1(t),$ $u_x(l, t) + hu(l, t) = \mu_2(t)$	$w(x, t) = x \frac{\mu_1 + \mu_2}{2 + hl} + \frac{\mu_2 - \mu_1(1 + hl)}{(2 + lh)h}$

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА.....	3
ТЕМА 1	
ЗАДАЧА ШТУРМА – ЛІУВІЛЛЯ.....	5
ТЕМА 2	
ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ФУР'Є ДО МІШАНИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОДНОРІДНОГО ХВИЛЬОВОГО РІВНЯННЯ.....	10
ТЕМА 3	
ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ФУР'Є ДО МІШАНИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ДЛЯ НЕОДНОРІДНОГО ХВИЛЬОВОГО РІВНЯННЯ.....	27
ТЕМА 4	
ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ФУР'Є ДО МІШАНИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ХВИЛЬОВОГО РІВНЯННЯ З ДВОМА ПРОСТОРОВИМИ ЗМІННИМИ..	57
ТЕМА 5	
ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ФУР'Є ДО МІШАНИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ХВИЛЬОВОГО РІВНЯННЯ В КРУГОВИХ ОБЛАСТЯХ	86
ТЕМА 6	
ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ФУР'Є ДО МІШАНИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОДНОРІДНОГО РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ	111
ТЕМА 7	
ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ФУР'Є ДО МІШАНИХ ЗАДАЧ ДЛЯ НЕОДНОРІДНОГО РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ	129
ТЕМА 8	
МЕТОД ФУР'Є ПОБУДОВИ РОЗВ'ЯЗКІВ МІШАНИХ ЗАДАЧ ДЛЯ РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ В ПРЯМОКУТНИХ ОБЛАСТЯХ.....	154
ТЕМА 9. МЕТОД ФУР'Є ПОБУДОВИ РОЗВ'ЯЗКІВ МІШАНИХ ЗАДАЧ ДЛЯ РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ В КРУГОВИХ ОБЛАСТЯХ.....	172
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ	183
ДОДАТКИ.....	185

Навчальне видання

ВАКАЛ Євген Сергійович
ЛОВЕЙКІН Андрій Вячеславович

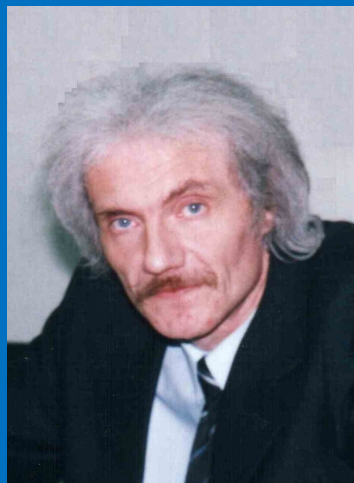
МЕТОДИ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ В ПРИКЛАДАХ І ЗАДАЧАХ

**Навчальний посібник
для студентів механіко-математичного факультету**

Підписано до друку 12.09.2020
Формат 60х84/16. Папір офсетний.
Гарнітура Times

Умовн. друк. арк.: 11,75. Обл.-вид. арк.: 6,98
Наклад 300 прим. Замовлення №П-2020-594
Віддруковано з оригіналів замовника

Видавець і виготовлювач ФО-П Кравченко Я.О.
Свідоцтво №ДК6078 від 13.03.2018 р.
02100, м. Київ, вул. Будівельників, буд. 32/2
e-mail: 5619531@ukr.net www.metodichka.in.ua



ВАКАЛ Євген Сергійович – доцент, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математичної фізики Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Основні напрямки наукової діяльності стосуються сучасних інформаційних технологій, теорії крайових задач для нелінійних рівнянь з розривними розв'язками і числових методів. Автор понад 100 наукових праць.



ЛОВЕЙКІН Андрій Вячеславович – доцент, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математичної фізики Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Наукові інтереси пов'язанні з побудовою точних аналітичних розв'язків задач математичної фізики та теорії пружності в неканонічних областях. Автор понад 50 наукових праць.