

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
Факультет математики, фізики та інформаційних технологій

В. М. Адамян, М. Я. Сушко

ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

Навчальний посібник
для здобувачів
першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
за спеціальністю 104 «Фізика та астрономія»

*Друге видання,
перероблене і доповнене*

Одеса
«Астропринт»
2025

УДК [53.02+517](075.8)
A28

Розглядаються ключові ідеї та інструменти математичної фізики на прикладі задач для лінійних рівнянь теплопровідності, дифузії і хвильового рівняння в необмеженому просторі. Наводяться необхідні відомості з теорії функцій дійсних змінних, узагальнених функцій, інтегральних перетворень Фур'є. Пропонуються завдання різної складності і контрольні питання.

Для здобувачів бакалаврського рівня вищої освіти за спеціальністю 104 «Фізика та астрономія» та іншими фізичними і математичними спеціальностями.

Автори:

В. М. Адамян, доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри теоретичної фізики та астрономії по 2022 р.;

М. Я. Сушко, кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри фізики та астрономії

Рецензенти:

С. В. Козицький, доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри теоретичної механіки Національного університету «Одеська морська академія»;

В. М. Пивоварчик, доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри вищої математики і статистики Державного закладу «Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського»

Рекомендовано до друку Вченою радою Одеського національного університету імені І. І. Мечникова (*протокол № 4 від 29 жовтня 2024 р.*)

© Адамян В. М., Сушко М. Я., 2003

© Адамян В. М., Сушко М. Я.,

переробка і доповнення, 2025

ISBN 978–617–8515–40–9

The miracle of the appropriateness of the language of mathematics for the formulation of the laws of physics is a wonderful gift which we neither understand nor deserve. We should be grateful for it and hope that it will remain valid in future research and that it will extend, for better or for worse, to our pleasure even though perhaps also to our bafflement, to wide branches of learning.

Eugene Wigner, "The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences", in Communications on Pure and Applied Mathematics, Vol. XIII, No. I (February), p. 14. New York: John Wiley & Sons, Inc. Copyright © 1960 by John Wiley & Sons, Inc.

Дивовижна придатність мови математики для формулювання законів фізики — це чудовний дар, який ми не в змозі досягнути й не заслуговуємо. Нам слід бути вдячними за нього та сподіватися, що його сила не вичерпається в майбутніх дослідженнях і що, попри все, вона пошириться — радуючи, хоч, можливо, також і спантеличуючи нас — на широкі галузі знання.

Юджин Вігнер (переклад авторів)

ЗМІСТ

<i>Передмова до другого видання</i>	6
<i>Передмова до першого видання</i>	8
1. ТЕПЛОПРОВІДНІСТЬ У СИСТЕМАХ З РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ	
1.1. Рівняння теплопровідності	10
1.2. Задача Коші для рівняння теплопровідності. Єдиність розв'язку	16
1.3. Рівняння теплопровідності зі сталими коефіцієнтами в E_3 . Інваріантність при перетвореннях координат і часу	24
1.4. Фундаментальний розв'язок лінійного рівняння теплопровідності зі сталими коефіцієнтами в E_3 . Загальний розв'язок задачі Коші	29
1.5. Фізичний зміст функції Гріна	37
1.6. Стационарна температура. Ньютонівський тепловий потенціал	43
1.7. Гармонічні функції. Спадні розв'язки рівняння Пуассона	46
1.8. Вимушені теплові коливання. Рівняння Гельмгольца	53
2. РІВНЯННЯ ДИФУЗІЇ	
2.1. Елементарне виведення рівняння дифузії	60
2.2. Імовірнісний опис руху домішкових частинок. Рівняння Чепмена — Колмогорова	63
2.3. Рівняння Фоккера — Планка	66
2.4. Рівняння дифузії для неоднорідного середовища. Функція Гріна	73
2.5. Вінерівська модель броунівського руху	81
2.6. Імовірнісний підхід до задачі Коші для рівняння дифузії	90

3. ХВИЛЬОВЕ РІВНЯННЯ	
3.1. Рівняння малих коливань рідини і газу	98
3.2. Задача Коші для хвильового рівняння. Єдиність розв'язку	105
3.3. Розв'язок задачі Коші для хвильового рівняння в E_3 . Формула Пуассона	110
3.4. Розв'язок задачі Коші для хвильового рівняння у дво- та одновимірному просторах	118
3.5. Неоднорідне хвильове рівняння	124
4. ДОДАТКОВІ ВІДОМОСТІ З ТЕОРІЇ ФУНКЦІЙ	
4.1. Основні функції. Лінійні простори і лінійні функціонали	134
4.2. Інтегровні функції	137
4.3. Регулярні і сингулярні функціонали. Дельта-функція Дірака	143
4.4. Диференціювання узагальнених функцій. Узагальнені розв'язки лінійних диференціальних рівнянь	151
4.5. Метод Фур'є	158
4.6. Інтегральне перетворення Фур'є	162
4.7. Згортка інтегровних функцій. Рівність Парсеваля	171
4.8. Перетворення Фур'є узагальнених функцій	176
4.9. Перетворення Фур'є функцій багатьох змінних	183
<i>Список використаної і рекомендованої літератури</i>	189
<i>Предметний покажчик</i>	190

Порівняно з першим виданням¹ текст цього посібника помітно перероблено і доповнено. Усунувши виявлені друкарські помилки і технічні недоліки, ми частково або цілком змінили виклад тих фрагментів, які в першому виданні були подані, як нам здається, недостатньо повно чи не зовсім вдало. Водночас спрямованість, тематику і структуру першого видання збережено.

Як і раніше, посібник не є збірником задач із «фізичним змістом» для рівнянь з частинними похідними другого порядку. У ньому ми намагаємося донести до читачів, які володіють лише базовими знаннями з математичного аналізу, лінійної алгебри і теорії ймовірностей, ті універсальні ідеї і прийоми математичної фізики, на наукове та практичне значення яких поки що не вплинуло бурхливе поширення та масове впровадження в найрізноманітніші галузі знання комп'ютерних методів аналізу фундаментальних проблем і прикладних задач, яке триває вже чверть століття.

У першому розділі другого видання посібника розширено обговорення математичних аспектів існування, єдиності і побудови розв'язку задачі Коші для рівняння теплопровідності, фізичного змісту функції Гріна цього рівняння, принципу Дюамеля й елементів теорії гармонічних функцій. До другого розділу посібника, мінімально залучаючи елементи теорії ймовірнісних процесів, додано питання, які безпосередньо підводять читача-початківця до розуміння ймовірнісних підходів до аналізу й моделювання броунівського руху як основи для розробки ефективних ймовірнісних алгоритмів розв'язування задач для рівняння дифузії, у тому числі в рухомих неоднорідних анізотропних середовищах. У третьому розділі розширено обговорення поняття функції Гріна для хвильового рівняння в різних вимірах, що дозволило значною мірою уніфікувати виклад матеріалу в ньому та двох попередніх розділах. У четвертому розділі перероблено матеріал про властивості інтегровних функцій, узагальнені розв'язки задач Коші для рівняння теплопровідності і хвильового рівняння, перетворення Фур'є узагальнених функцій. До всіх розділів додано нові завдання і вказівки.

¹ Адамьян В. М., Сушко М. Я. Вступ до математичної фізики. Introduction to Mathematical Physics. — Одеса : Астропринт, 2003. — 320 с.

Зазначимо, що перших три розділи посібника можна вивчати в будь-якій послідовності. До останнього, четвертого, розділу варто звертатися в міру потреби. У ньому, як і в першому виданні, наведено відомості, які зазвичай не входять до стандартних курсів з математичного аналізу для нематематичних спеціальностей, але необхідні для більш глибокого розуміння проблем математичної фізики.

У зв'язку із суттєвим розширенням доступу до англомовної літератури і помітним збільшенням об'єму розглянутого матеріалу ми подаємо до видання україномовний варіант переробленої і доповненої версії посібника, додавши до списку використаної і рекомендованої літератури посилання на відомі англомовні джерела. Перше ж видання посібника і далі, як ми сподіваємося, залишиться корисним порадиником для здобувачів вищої освіти при оволодінні англійської чи української мови за фахом.

Насамкінець зазначимо, що пропоноване видання разом з посібником¹ повністю охоплюють зміст двосеместрового бакалаврського курсу з методів математичної фізики для здобувачів вищої освіти з фізичних та фізико-інженерних спеціальностей.

*Вадим Адамян
Мирослав Сушко*

¹ Адамян В. М., Сушко М. Я. Вступ до математичної фізики. Варіаційне числення та крайові задачі. — Одеса : Астропринт, 2014. — 380 с.

Незважаючи на видиму різноманітність, більшість проблем сучасного природознавства і досі вдається розробляти за допомогою декількох універсальних математичних моделей, започаткованих при вивченні процесів теплопровідності та дифузії, поширення акустичних і електромагнітних хвиль, руху субатомних частинок. Вивчення цих моделей, поданих у вигляді задач для певних диференціальних рівнянь другого порядку в частинних похідних, і складає предмет математичної фізики в класичному розумінні.

Ця книга охоплює початковий мінімум засобів і прийомів математичної фізики. Увага зосереджується на двох центральних поняттях: лінійній задачі Коші для диференціальних рівнянь у частинних похідних у необмеженому просторі, та функції Гріна, за допомогою якої розв'язування задачі Коші зводиться до квадратур. Також наводяться необхідні елементи теорії узагальнених функцій і теорії інтегральних перетворень Фур'є.

Ми обмежилися розглядом задач для необмеженого тривимірного простору. У порівнянні з крайовими задачами вони більш зрозумілі та простіші для сприйняття — немає потреби задовольняти крайові умови, які зазвичай порушують симетрії, притаманні задачам для необмеженого простору. Крайові задачі, які надзвичайно важливі для опису широкого кола електромагнітних і гідродинамічних явищ, при першому знайомстві з основами теоретичної фізики можна обминути. Тому ми вирішили відкласти їх розгляд до наступного посібника, який сподіваємося завершити в найближчому майбутньому.

Книга зорієнтована на студентів фізичних спеціальностей і ґрунтується на першій частині лекційного курсу з математичної фізики, який традиційно читається на фізичному факультеті Одеського національного університету для студентів другого курсу. Це зумовило деякі її особливості.

Зокрема, матеріал подається в більш розповідному стилі, ніж традиційно прийнято в підручниках з чистої математики. Ми намагалися — наскільки це можливо — не зловживати великою кількістю абстрактних побудов та приділяти більше уваги змісту загальних тверджень і деталям їх практичного застосування. Оскільки наш по-

тенційний читач вже прослухав трисеместровий курс з математичного аналізу в межах стандартних навчальних університетських програм для фізиків та інженерів, ми також дозволили собі не нагадувати деякі означення та поняття математичного аналізу, або навіть не акцентувати, яка із можливих версій цих понять (наприклад, інтеграл Рімана чи Лебега) мається на увазі. Сприяючи повноті деяких тверджень і побудов, такі застереження небагато б додавали до розв'язування задач, що розглядаються в книзі.

Щоб не заглиблюватися в чисту математику, ми опустили ряд доведень. Попри деякі невизначеності в тексті, ми намагалися бути точними в усіх формулюваннях і доведеннях. Тому нам здається, що книга буде корисною й для студентів, що вивчають класичну або прикладну математику.

Майже всі параграфи містять задачі. Деякі з них наведені лише для того, щоб навчити читача користуватися введеними поняттями, а деякі виступають складовими частинами основного тексту.

Український текст супроводжується його перекладом (американською) англійською. Сподіваємося, що така двомовна книга принесе користь українським студентам та аспірантам з фізики й математики при роботі з професійними англomовними текстами. З іншого боку, англійський переклад робить книгу більш доступною для численної аудиторії іноземних студентів, включаючи й тих, що навчаються в українських університетах.

*Вадим Адамян
Мирослав Сушко*

1. ТЕПЛОПРОВІДНІСТЬ У СИСТЕМАХ З РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ

1.1. РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

Температура різних частин нерівномірно нагрітого тіла може змінюватися внаслідок трьох фундаментальних процесів — теплопровідності, конвекції та випромінювання. *Теплопровідність означається як процес переносу енергії в тілі, спричинений атомно-молекулярними взаємодіями та рухом вільних електронів і не пов'язаний ні з макроскопічним переносом речовини в тілі, ні з макроскопічною роботою.*

Основні риси теплопровідності залишаються однаковими для різноманітних систем — металевого стержня, дерев'яного бруска, чи газу або рідини в посудині. А саме: перенос тепла (енергії) відбувається лише між областями з різними температурами, при цьому відповідні теплові потоки завжди напрямлені з областей з більш високою температурою до областей з більш низькою.

Уважатимемо, що проміжки часу між можливими спостереженнями за тілом є значно довшими за характерний час вільного пробігу його молекул, а відстані між його просторовими точками вимірюються з абсолютною похибкою, значно більшою за середні відстані між молекулами. Тоді процес теплопровідності можна описувати за допомогою однієї скалярної функції $T(\mathbf{r}, t)$, значення якої дорівнюють температурі тіла в точках з координатами $\mathbf{r} = (x, y, z)$ у момент часу t . Окрім спеціальних випадків, коли джерела тепла зосереджуються в малих околах окремих точок, кривих чи поверхонь усередині тіла, або коли існують стрибки температури на межах поділу між його окремими частинами, функція $T(\mathbf{r}, t)$ відносно повільно змінюється у просторі та часі. Якщо не обумовлено супротивне, уважатимемо її неперервною скрізь в області визначення, разом з принаймні першими частинними похідними.

Диференціальне рівняння, яке описує зміну температури $T(\mathbf{r}, t)$ в різних точках нерівномірно нагрітого тіла внаслідок процесу теплопровідності, називається рівнянням теплопровідності.

Рівняння теплопровідності можна вивести, розглянувши тепловий баланс для довільної області V тіла.

Нехай область V обмежена поверхнею S . Зміна температури в області V за малий проміжок часу $(t, t + dt)$ визначається загальною кількістю підведеного (відведеного) тепла Q , яка є сумою кількості тепла Q_1 , що проходить через поверхню S , та кількості тепла Q_2 , що вивільняється (поглинається) джерелами (стоками) тепла, розташованими всередині V :

$$Q = Q_1 + Q_2. \quad (1.1)$$

Щоб виразити Q через $T(\mathbf{r}, t)$, розіб'ємо V на елементарні області, просторові положення яких визначаються вектором $\mathbf{r}$ і які мають об'єми (міри) $dV(\mathbf{r})$. Уважаємо, що кожна елементарна область містить достатньо велику кількість точок, щоб її можна було розглядати як макроскопічну, і в той самий час має досить малий характерний розмір (діаметр), щоб змінами температури $T(\mathbf{r}, t)$, питомої теплоємності $c(\mathbf{r})$ і густини $\rho(\mathbf{r})$ тіла в її межах можна було знехтувати. Також припускаємо, що $c(\mathbf{r})$ і $\rho(\mathbf{r})$ не залежать від часу ані явно, ані неявно (скажімо, через температуру)¹. Тоді кількість тепла, яка потрібна, щоб змінити її температуру на величину $T(\mathbf{r}, t + dt) - T(\mathbf{r}, t)$, дорівнює

$$dQ(\mathbf{r}, t) = c\rho \left[T(\mathbf{r}, t + dt) - T(\mathbf{r}, t) \right] dV(\mathbf{r}) = c\rho \frac{\partial T(\mathbf{r}, t)}{\partial t} dV(\mathbf{r}) dt.$$

Кількість тепла Q дорівнює сумі за всіма елементарними областями величин dQ :

$$Q = \left(\int_V c\rho \frac{\partial T}{\partial t} dV \right) dt.$$

Щоб підрахувати Q_1 , розіб'ємо S на малі ділянки і розглянемо ділянку, що містить деяку точку $\mathbf{r}$, має площу $dS(\mathbf{r})$ і орієнтацію, яка задається одиничним вектором нормалі $\mathbf{n}$ ². Кількість тепла $dQ_1(\mathbf{r}, t)$,

¹ Часова залежність c , ρ і коефіцієнта теплопровідності k , означеного формулою (1.3), зустрічається лише в дуже спеціальних умовах, вивчення яких виходить за рамки цієї книги. Надалі вона не розглядається.

² Наведемо для довідок кілька фактів. Нехай границею S деякої області є поверхня, точки якої задовольняють рівняння $\Phi(x, y, z) = 0$, де Φ — неперервна диференційовна функція. *Градієнтом функції* Φ називається вектор $\text{grad } \Phi \equiv \nabla \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \mathbf{e}_3$, де $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ — одиничні вектори (орти), що визначають напрями осей декартової системи координат. В усіх точках S , за винятком так званих критичних точок, де

що проходить крізь неї за проміжок часу $(t, t + dt)$, залежить як від інтенсивності і напрямку поширення тепла в її околі, які для довільної точки тіла визначаються разом через вектор густини теплового потоку $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$, так і від площі і просторової орієнтації (вектора $\mathbf{n}$) ділянки. Ця залежність дається формулою

$$dQ_1(\mathbf{r}, t) = -j_n(\mathbf{r}, t) dS(\mathbf{r}) dt,$$

де $j_n(\mathbf{r}, t) = \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{n}$ — нормальна складова (проекція на напрям $\mathbf{n}$) вектора $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$.

Від'ємний знак в останній формулі вказує на те, що dQ_1 є додатною, коли тепло надходить до області V (потік $\mathbf{j}$ напрямлений усе-редину V), і від'ємною, коли V втрачає тепло (потік $\mathbf{j}$ напрямлений назовні).

Кількість тепла Q_1 дорівнює сумі за всіма елементарними ділянками величин dQ_1 :

$$Q_1 = \left(- \oint_S j_n dS \right) dt.$$

За умови, що компоненти векторного поля $\mathbf{j}$ є неперервно диференційовними, теорема Гауса — Остроградського дає¹:

$$Q_1 = \left(- \int_V \operatorname{div} \mathbf{j} dV \right) dt.$$

Позначимо через $F(\mathbf{r}, t)$ густину потужності джерел (стоків) тепла, що діють в області V . Кількість тепла, що виділяється (поглинається) ними в елементарній області з об'ємом $dV(\mathbf{r})$ за проміжок часу $(t, t + dt)$, дорівнює $dQ_2(\mathbf{r}, t) = F(\mathbf{r}, t) dV(\mathbf{r}) dt$. Кількість тепла Q_2 знайдемо, підсумувавши кількості тепла dQ_2 , що генеруються за цей проміжок часу в усіх елементарних областях:

$\operatorname{grad} \Phi = 0$, вектор нормалі $\mathbf{n}$ до S є паралельним вектору $\operatorname{grad} \Phi$. Тому $\mathbf{n} = \pm \frac{1}{|\nabla \Phi|} \nabla \Phi$, де $|\nabla \Phi| = \sqrt{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)^2}$. Знак у формулі для $\mathbf{n}$ зазвичай вибирають так, щоб цей вектор був напрямлений назовні розглядуваної області. Аналогічні співвідношення справджуються і для просторів інших розмірностей (див. підрозділ 3.2).

¹ У декартовій системі координат $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = j_x(\mathbf{r}, t)\mathbf{e}_1 + j_y(\mathbf{r}, t)\mathbf{e}_2 + j_z(\mathbf{r}, t)\mathbf{e}_3$, $\operatorname{div} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z}$.

$$Q_2 = \left(\int_V F(\mathbf{r}, t) dV \right) dt.$$

Рівняння теплового балансу (1.1) записується тепер у вигляді

$$\left(\int_V c\rho \frac{\partial T}{\partial t} dV \right) dt = \left(\int_V [-\operatorname{div} \mathbf{j} + F(\mathbf{r}, t)] dV \right) dt.$$

Ця рівність справджується для довільної області тіла, що можливо лише тоді, коли підінтегральні вирази в обох частинах рівності дорівнюють один одному. У результаті дістаємо рівняння теплового балансу в диференціальній формі:

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = -\operatorname{div} \mathbf{j} + F(\mathbf{r}, t). \quad (1.2)$$

Скористаємося тепер *законом Фур'є*, який пов'язує густину потоку тепла $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ з температурою $T(\mathbf{r}, t)$ співвідношенням

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = -k(\mathbf{r}) \operatorname{grad} T(\mathbf{r}, t), \quad (1.3)$$

де $k(\mathbf{r}) > 0$ — коефіцієнт теплопровідності речовини. Від'ємний знак у правій частині (1.3) є проявом фундаментального фізичного закону — другого принципу термодинаміки, згідно з яким самовільні теплові потоки в нерівномірно нагрітому середовищі завжди напрямлені з більш нагрітих областей у менш нагріті. Підставивши (1.3) в (1.2), приходимо до бажаного *рівняння теплопровідності*:

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} T) + F(\mathbf{r}, t). \quad (1.4)$$

Зауваження 1.1.1.

1. Густина потужності $F(\mathbf{r}, t)$ може залежати від температури, оскільки тепло може генеруватися (чи поглинатися) всередині тіла внаслідок хімічних реакцій, протікання електричного струму тощо.

2. Далеко від ліній фазових переходів системи і за умови, що розглядаються не дуже широкі температурні інтервали, коефіцієнти c , ρ і k можна вважати незалежними від температури. Якщо при цьому густина потужності джерел F залежить від температури лінійно, або взагалі не залежить від неї, то рівняння (1.4) стає *лінійним* відносно T .

3. У неоднорідному анізотропному середовищі компоненти вектора густини теплового потоку пов'язані з компонентами градієнта

температури більш складними співвідношеннями, ніж рівність (1.3). Їх можна записати у вигляді трьох рівностей

$$j_i = - \sum_{l=1}^3 k_{il}(\mathbf{r}) \frac{\partial T(\mathbf{r}, t)}{\partial x_l}, \quad i = 1, 2, 3,$$

де змінні x_1, x_2, x_3 позначають декартові координати x, y, z , величини j_1, j_2, j_3 — відповідні компоненти j_x, j_y, j_z вектора теплового потоку, величини $k_{il}(\mathbf{r})$ — коефіцієнти матриці теплопровідності системи $(k_{il}(\mathbf{r}))_{i,l=1}^3$. Згідно з фундаментальними положеннями термодинаміки необоротних процесів, матриця $(k_{il}(\mathbf{r}))_{i,l=1}^3$ є невід'ємно визначеною, тобто для будь-яких комплексних чисел ξ_1, ξ_2, ξ_3 квадратична форма

$$\sum_{i,l=1}^3 k_{il}(\mathbf{r}) \bar{\xi}_i \xi_l \geq 0.$$

4. Для однорідної ізотропної системи, властивості якої скрізь однакові, коефіцієнти c , k і ρ не залежать від координат, тобто є сталими. Рівняння теплопровідності в цьому випадку зводиться до лінійного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами:

$$\frac{\partial T(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = a^2 \Delta T(\mathbf{r}, t) + f(\mathbf{r}, t), \quad (1.5)$$

де $\Delta \equiv \text{div grad}$ — оператор Лапласа¹, стала $a^2 \equiv k / c\rho$ називається коефіцієнтом температуропровідності, і $f(\mathbf{r}, t) = F(\mathbf{r}, t) / c\rho$.

5. При відсутності джерел і стоків тепла ($F(\mathbf{r}, t) = 0$) рівняння (1.4) стає однорідним. Якщо, крім того, коефіцієнти системи є сталими, відповідне однорідне рівняння набирає вигляду

$$\frac{\partial T(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = a^2 \Delta T(\mathbf{r}, t). \quad (1.6)$$

Завдання 1.1.1. Переконайтеся, що вигляд лінійного рівняння теплопровідності (1.4) не залежить ані від вибору початку відліку (тобто вибору нуля), ані від вибору одиниці температури на шкалі термометра, якщо показники T і $\tilde{T}$ різних термометрів пов'язані між собою

¹ У декартовій системі координат $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

лінійним співвідношенням $\tilde{T} = \alpha \cdot T + T_0$, де T_0 — стала, α — сталий безрозмірний коефіцієнт.

Вказівка. Скориставшись заданим співвідношенням, виразіть T у рівнянні (1.4) через $\tilde{T}$ та врахуйте, що при переході до шкали температур $\tilde{T}$ числові значення питомої теплоємності й коефіцієнта теплопровідності стають, у відповідності з означеннями цих величин, рівними відповідно $\tilde{c} = c/\alpha$ і $\tilde{k} = k/\alpha$.

Завдання 1.1.2. Нехай функції $T_1(\mathbf{r}, t)$ і $T_2(\mathbf{r}, t)$ задовольняють лінійне рівняння теплопровідності (1.4). Покажіть, що їх різниця $T_1(\mathbf{r}, t) - T_2(\mathbf{r}, t)$ задовольняє лінійне однорідне рівняння (1.4).

Завдання 1.1.3. Нехай $T_1(\mathbf{r}, t)$ — довільна функція, яка задовольняє лінійне рівняння (1.4). Покажіть, що всі функції, які задовольняють (1.4), можна подати у вигляді $T_0(\mathbf{r}, t) + T_1(\mathbf{r}, t)$, де $T_0(\mathbf{r}, t)$ пробігає множину всіх функцій, що задовольняють лінійне однорідне рівняння (1.4).

Завдання 1.1.4. Запишіть рівняння теплопровідності для випадків, коли з умов задачі випливає, що шукана температура не залежить від однієї або двох просторових координат; іншими словами, запишіть відповідно двовимірне та одновимірне рівняння теплопровідності.

Контрольні питання до підрозділу 1.1

1. Чим теплопровідність відрізняється від конвективного переносу тепла?
2. За яких умов опис процесу теплопровідності зводиться до дослідження однієї скалярної функції (скалярного поля) $T(\mathbf{r}, t)$?
3. Чи можуть величини c , k , ρ і F у рівнянні теплопровідності (1.4) мати, як функції координат, розриви на деяких множинах точок тіла? Відповідь аргументуйте.
4. За яких умов справджується теорема Гаусса — Остроградського, на яку робиться посилання при виведенні рівняння (1.2)?
5. З яким фундаментальним принципом пов'язана поява знака мінус у правій частині рівності (1.3)?
6. Як відрізняються форми закону Фур'є для ізотропних та анізотропних середовищ?
7. Яку властивість має матриця коефіцієнтів теплопровідності для анізотропних середовищ?
8. За яких умов рівняння (1.4) може вважатися лінійним?

1.2. ЗАДАЧА КОШІ ДЛЯ РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ. ЄДИНІСТЬ РОЗВ'ЯЗКУ

Припустимо, що початкові значення температури $T(\mathbf{r}, t_0) = T_0(\mathbf{r})$ у точках нерівномірно нагрітого тіла в певний момент часу t_0 та густини потужності джерел тепла $F(\mathbf{r}, t)$ всередині тіла відомі. У загальному випадку цієї інформації, однак, недостатньо для того, щоб, користуючись рівнянням теплопровідності (1.4), однозначно визначити температуру тіла $T(\mathbf{r}, t)$ при $t > t_0$.

Якщо тіло займає деяку область простору Ω , обмежену поверхнею S , то його температура $T(\mathbf{r}, t)$ буде суттєво залежати від фізичних обмежень, яким підкорені температура і теплові потоки на S . Такі обмеження називаються *крайовими умовами*. Наведемо їх найбільш поширені типи.

1) На S підтримується певна температура $\tau(\mathbf{r}, t)$. Тоді

$$[T(\mathbf{r}, t) - \tau(\mathbf{r}, t)]_S = 0. \quad (1.7)$$

Ця крайова умова називається *умовою Діріхле* або *крайовою умовою першого типу*.

2) У кожній точці $\mathbf{r} \in S$ задано складову $\gamma(\mathbf{r}, t)$ густини теплового потоку, напрямлену вздовж зовнішньої нормалі $\mathbf{n}$ до S . Тоді, згідно із законом Фур'є,

$$\left[-k(\mathbf{r}) \frac{\partial T(\mathbf{r}, t)}{\partial n} - \gamma(\mathbf{r}, t) \right]_S = 0, \quad (1.8)$$

де символом $\partial/\partial n$ позначено складову градієнта вздовж $\mathbf{n}$. Співвідношення (1.8) називається *умовою Нейманна* або *крайовою умовою другого типу*. Зокрема, якщо S не пропускає тепло (є адіабатичною), то (1.8) зводиться до

$$\left. \frac{\partial T(\mathbf{r}, t)}{\partial n} \right|_S = 0. \quad (1.9)$$

3) Через S відбувається теплообмін із навколишнім середовищем за законом Ньютона

$$q_n = \alpha(T - \theta)\sigma,$$

де q_n — кількість тепла, що протікає крізь малу ділянку площею σ на поверхні S за одиницю часу, T і θ — граничні значення відповід-

но температури тіла й температури середовища на вказаній ділянці, $\alpha \geq 0$ — коефіцієнт теплообміну. Тоді крайова умова на S має вигляд

$$\left[-k(\mathbf{r}) \frac{\partial T(\mathbf{r}, t)}{\partial n} - \alpha(\mathbf{r}) T(\mathbf{r}, t) + \mu(\mathbf{r}, t) \right]_S = 0. \quad (1.10)$$

Вона називається умовою Робіна або крайовою умовою третього типу. Аналогічна умова (але з іншим неоднорідним членом $\mu(\mathbf{r}, t)$) справджується й тоді, коли на S додатково підтримується тепловий потік із заданою складовою вздовж $\mathbf{n}$.

Формально крайові умови Діріхле та Нейманна є частковими випадками крайової умови Робіна — відповідно при $k(\mathbf{r}) = 0$, $\alpha(\mathbf{r}) > 0$ та при $k(\mathbf{r}) > 0$, $\alpha(\mathbf{r}) = 0$.

Загальна проблема про відшукування функції з визначеними математичними властивостями, що при $t > t_0$ підкоряється диференціальному рівнянню процесу (математичному виразу фізичного закону) і конкретним крайовим умовам на границі області визначення шуканої функції, а при $t = t_0$ набуває заданих початкових значень, називається *задачею Коші*.

У подальшому ми розглядатимемо задачі Коші лише для лінійних систем, для яких рівняння процесу та всі додаткові фізичні умови мають вигляд лінійних співвідношень, накладених на значення шуканої функції та її похідних. Якщо не обумовлено супротивне, уважатимемо також, що $t_0 = 0$.

Перейдемо до розгляду задачі Коші для рівняння теплопровідності (1.4) в області Ω . Щоб уникнути технічних ускладнень, надалі вважатимемо, що всі коефіцієнти в рівнянні (1.4), густина потужності джерел і початкове значення температури є неперервними функціями в замкненій області $\bar{\Omega} = \Omega \cup S$, коефіцієнт $k(\mathbf{r})$ до того ж має неперервні перші похідні в $\bar{\Omega}$, і що коефіцієнти й функції у крайових умовах неперервні на S . Крім того, обмежимося відшукуванням функції $T(\mathbf{r}, t)$, що є неперервною та неперервно диференційовною в області простору-часу $\{\bar{\Omega}, t \geq 0\}$, має неперервні другі похідні за просторовими змінними в області $\{\Omega, t > 0\}$ і задовольняє там рівняння (1.4), підкоряється на S крайовій умові типу (1.10) і, нарешті, задовольняє в Ω початкову умову

$$T(\mathbf{r}, 0) = T_0(\mathbf{r}). \quad (1.11)$$

Розв'язок задачі Коші з такими властивостями будемо називати *класичним*.

Зауваження 1.2.1. Для початкових функцій $T_0(\mathbf{r})$, що не узгоджуються з умовою (1.10), класичний розв'язок із вказаними властивостями не існує внаслідок порушення умови неперервності шуканої функції чи/та її просторових похідних на множині $\{\mathbf{r} \in S, t = 0\}$. Однак і для таких $T_0(\mathbf{r})$ існують розв'язки задачі Коші для рівняння теплопровідності (1.4), які при $t > 0$ є неперервно диференційовними в Ω , мають там неперервні другі похідні за просторовими змінними та підкоряються на S умові (1.10), а при $t \rightarrow 0$ прямують в Ω до $T_0(\mathbf{r})$. Наведені нижче твердження щодо властивостей і єдиності класичних розв'язків задачі Коші залишаються для цих розв'язків у силі.

Єдиність класичного розв'язку задачі Коші для лінійного рівняння теплопровідності є наслідком фізично прозорого *принципу максимального (мінімального) значення*, який для довільної замкненої обмеженої області $\bar{\Omega}$ (тобто довільної області Ω разом із її границею S , що цілком вміщаються в кулю $|\mathbf{r}| < R$ скінченного радіуса R) можна сформулювати так: якщо на відрізку часу $[0, t_1]$, $0 < t_1 < \infty$, в $\bar{\Omega}$ немає жодних джерел і стоків тепла, то на проміжку часу $0 < t < t_1$ температура у внутрішніх точках $\bar{\Omega}$ не може бути більшою (меншою), ніж найбільше $T_{\max}$ (найменше $T_{\min}$) з усіх її значень в області $\bar{\Omega}$ в момент $t = 0$ та на границі S при всіх $t \in [0, t_1]$. Іншими словами, температура у внутрішніх точках чотиривимірної області $\{\mathbf{r} \in \bar{\Omega}, t \in [0, t_1]\}$ простору-часу не може бути більшою (меншою) за найбільше (найменше) значення температури на її границях $\{\mathbf{r} \in \bar{\Omega}, t = 0\}$ і $\{\mathbf{r} \in S, t \in [0, t_1]\}$.

Справді, припустимо, що температура, як неперервна функція в замкненій обмеженій області простору-часу $\{\bar{\Omega}, [0, t_1]\}$, набуває свого максимального значення $T_M > T_{\max}$ у внутрішній точці $\mathbf{r}_1 \in \Omega$ в момент часу $t' > 0$, $t' \leq t_1$. Оскільки в $\bar{\Omega}$ немає джерел і стоків тепла, то зростання температури в $\mathbf{r}_1$ до T_M в момент $t' > 0$ можливе лише внаслідок перетікання тепла в окіл цієї точки з інших частин $\bar{\Omega}$, більш холодних при $t \in [0, t_1]$. Але без зовнішнього впливу такий перерозподіл тепла неможливий, бо прямо суперечить другому принципу термодинаміки.

Формально-математичне доведення того, що за відсутності в $\bar{\Omega}$ джерел і стоків тепла максимальне значення класичного розв'язку задачі Коші для лінійного рівняння теплопровідності не може дося-

гатися у внутрішніх точках Ω при $t > 0$, впливає, узагалі кажучи, із структури однорідного рівняння теплопровідності

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} T). \quad (1.12)$$

Якщо припустити, як вище, що $T(\mathbf{r}_1, t') = T_M > T_{\max}$ у внутрішній точці $\mathbf{r}_1 \in \Omega$ при $t' > 0$, $t' \leq t_1$, то в лівому околі точки t' функція $T(\mathbf{r}_1, t)$ має зростати, а тому в самій точці t' мати невід'ємну похідну за часом. Отже, ліва частина рівняння (1.12) у вказаній точці максимуму має бути невід'ємною. Права ж частина (1.12) у випадку ізотропних середовищ, для яких матриця коефіцієнтів теплопровідності кратна одиничній,

$$(k_{il}(\mathbf{r}))_{i,l=1}^3 = k(\mathbf{r}) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

дорівнює

$$\operatorname{div}(k \operatorname{grad} T) = \frac{\partial k}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial k}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial k}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial z} + k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right).$$

Отриманий вираз має бути недодатним, оскільки в точці локального максимуму $\mathbf{r}_1$ функції $T(\mathbf{r}, t')$ справджуються співвідношення

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \leq 0, \quad \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \leq 0, \quad \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \leq 0.$$

У більш загальному випадку анізотропних середовищ, описаних у пункті 3 зауваження 1.1.1, бачимо, що

$$\operatorname{div}(k \operatorname{grad} T) = \sum_{i,l=1}^3 \frac{\partial k_{il}}{\partial x_i} \frac{\partial T}{\partial x_l} + \sum_{i,l=1}^3 k_{il} \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_l}.$$

У точці локального максимуму $\mathbf{r}_1$ функції $T(\mathbf{r}, t')$, де $\partial T / \partial x_i = 0$ і матриця $(-\partial^2 T / \partial x_i \partial x_l)_{i,l=1}^3$ — невід'ємно визначена, перша сума в правій частині цього виразу дорівнює нулю, а друга є недодатною, оскільки, згідно з відомим результатом лінійної алгебри, для двох довільних невід'ємно визначених матриць $(a)_{i,l=1}^n$ і $(b)_{i,l=1}^n$ справджується нерівність

$$\sum_{i,l=1}^n a_{il} b_{li} \geq 0.$$

Щоб урахувати і спеціальні випадки, коли ліва і права частини (1.12) у точці $\mathbf{r}_1$ у момент t' можуть дорівнювати нулю, уведемо допоміжну функцію $V(\mathbf{r}, t) = T(\mathbf{r}, t) - \beta(t - t')$, де $\beta > 0$ — стала, яку виберемо так, щоб справджувалися умови

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{r} \in \Omega} V(\mathbf{r}, 0) &\leq T_{\max} + \beta t' < \frac{1}{2}(T_{\max} + T_M), \\ \max_{\mathbf{r} \in S, t \in [0, t_1]} V(\mathbf{r}, t) &< \frac{1}{2}(T_{\max} + T_M). \end{aligned} \quad (1.13)$$

Функція $V(\mathbf{r}, t)$ неперервна на замкненій обмеженій множині $\{\bar{\Omega}, [0, t_1]\}$, а тому набуває свого найбільшого на цій множині значення V_M у деякій її точці $\mathbf{r}_2 \in \bar{\Omega}$, $t'' \in [0, t_1]$. Оскільки $V(\mathbf{r}_1, t') = T(\mathbf{r}_1, t') = T_M \leq V_M$, а, з другого боку, унаслідок (1.13) $V(\mathbf{r}, t) < T_M \leq V_M$ при $t = 0$ та на S при всіх $t \in [0, t_1]$, робимо висновок, що $V(\mathbf{r}, t)$ досягає значення V_M при $t'' > 0$ у внутрішній точці $\mathbf{r}_2 \in \Omega$, а $V(\mathbf{r}_2, t)$ як функція часу не спадає при наближенні t до t'' зліва. Отже,

$$\left. \frac{\partial V}{\partial t} \right|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_2, t=t''} \geq 0, \quad \text{grad} V|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_2, t=t''} = 0, \quad \Delta V|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_2, t=t''} \leq 0,$$

звідки, наперекір рівності (1.12),

$$\left. \frac{\partial T}{\partial t} \right|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_2, t=t''} \geq \beta > 0, \quad \text{div}(k \text{ grad} T)|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_2, t=t''} = \text{div}(k \text{ grad} V)|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_2, t=t''} \leq 0.$$

Приходимо до суперечності.

Принцип мінімального значення впливає зі щойно доведеного принципу максимального значення, якщо врахувати лінійність рівняння (1.12) і те, що функція $-T(\mathbf{r}, t)$ набуває найбільшого значення там, де $T(\mathbf{r}, t)$ — найменшого.

На основі принципів максимального і мінімального значень для класичного розв'язку $T(\mathbf{r}, t)$ рівняння (1.12) в обмеженій області простору-часу $\{\bar{\Omega}, [0, t_1]\}$ робимо висновок, що у внутрішніх точках цієї області справджуються нерівності

$$T_{\min} \leq T(\mathbf{r}, t) \leq T_{\max}. \quad (1.14)$$

Іншими словами, температура у внутрішніх точках обмеженого тіла (середовища), де немає джерел і стоків тепла, при всіх $t \in (0, t_1)$ не може бути меншою за її найменше значення та більшою за її найбільше значення з тих, що вона має всередині тіла при $t = 0$ і на його границі на відрізку часу $[0, t_1]$.

З нерівностей (1.14) випливає

Лема 1.2.1. Якщо функція $T(\mathbf{r}, t)$ — неперервно диференційовна за всіма своїми змінними в обмеженій області $\bar{\Omega}$, при $t \geq 0$ двічі неперервно диференційовна за просторовими змінними і задовольняє рівняння теплопровідності (1.12) в Ω , крайову умову Діріхле $T(\mathbf{r}, t)|_S = 0$ на її границі S і початкову умову $T(\mathbf{r}, 0) \equiv 0$ в $\bar{\Omega}$, то вона тотожно дорівнює нулю в $\bar{\Omega}$ при $t > 0$.

Наслідком цієї леми є

Теорема 1.2.1. Задача Коші для рівняння теплопровідності (1.4) в обмеженій області з крайовою умовою Діріхле (1.7) на її границі має єдиний класичний розв'язок.

Доведення. Нехай $T_1(\mathbf{r}, t)$ і $T_2(\mathbf{r}, t)$ — класичні розв'язки задачі Коші для рівняння теплопровідності (1.4) в Ω , що задовольняють однакові умови Діріхле (1.7) на S і однакові початкові умови (1.11). Унаслідок лінійності (1.4), (1.7) і (1.11) різниця $T(\mathbf{r}, t) = T_2(\mathbf{r}, t) - T_1(\mathbf{r}, t)$ є розв'язком лінійного однорідного рівняння (1.12), який задовольняє умови леми 1.2.1. Тому $T(\mathbf{r}, t) \equiv 0$ і, отже, $T_2(\mathbf{r}, t) = T_1(\mathbf{r}, t)$.

Розглянемо тепер задачу Коші для рівняння теплопровідності (1.4) в необмеженому тривимірному просторі E_3 . Роль крайової умови в E_3 відіграє певна вимога до асимптотичної поведінки шуканої функції при $|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$.

Теорема 1.2.2. Задача Коші для рівняння теплопровідності (1.4) в E_3 має єдиний класичний розв'язок $T(\mathbf{r}, t)$, який при $|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$ прямує до нуля рівномірно за часовою змінною t на кожному обмеженому відрізку часу $[0, t_1]$.

Доведення. Припустимо, що $T_1(\mathbf{r}, t)$ і $T_2(\mathbf{r}, t)$ — два класичні розв'язки задачі Коші для рівняння (1.4) в E_3 , які збігаються при $t = 0$ і прямують до нуля на нескінченності так, як указано в умові теореми. Тоді, зокрема, для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $R > 0$, що для всіх $|\mathbf{r}| \geq R$ і $t \in [0, t_1]$ справджуються нерівності $|T_1(\mathbf{r}, t)| < \varepsilon$, $|T_2(\mathbf{r}, t)| < \varepsilon$ і, відповідно, $|T_2(\mathbf{r}, t) - T_1(\mathbf{r}, t)| < 2\varepsilon$. Зважаючи на те, що в кулі $|\mathbf{r}| \leq R$ різниця $T_2(\mathbf{r}, t) - T_1(\mathbf{r}, t)$ задовольняє однорідне рівняння теплопровідності (1.12), $T_2(\mathbf{r}, 0) - T_1(\mathbf{r}, 0) = 0$, а при $0 < t \leq t_1$ на сфері $|\mathbf{r}| = R$ ця різниця не менша за -2ε і не більша за 2ε , на підставі нерівності (1.14) робимо висновок, що в кулі $|\mathbf{r}| \leq R$ при $t \leq t_1$ виконуються нерівності

$$-2\varepsilon \leq T_2(\mathbf{r}, t) - T_1(\mathbf{r}, t) \leq 2\varepsilon.$$

Оскільки ε можна взяти як завгодно малим, а t_1 — як завгодно великим, робимо висновок, що $T_2(\mathbf{r}, t) = T_1(\mathbf{r}, t)$ при довільних $|\mathbf{r}| < \infty$, $t \leq t_1$.

Зауваження 1.2.2. Умову прямування розв'язку до нуля на нескінченності у формулюванні теореми 1.2.2 можна замінити на вимогу

$$\lim_{|\mathbf{r}| \rightarrow \infty} |T(\mathbf{r}, t) - T_\infty(\mathbf{r}, t)| = 0$$

асимптотичної збіжності на нескінченності шуканого розв'язку $T(\mathbf{r}, t)$ до фіксованої функції $T_\infty(\mathbf{r}, t)$, яка є неперервно диференційовною за всіма своїми змінними, двічі неперервно диференційовною за просторовими змінними і задовольняє рівняння (1.12).

Єдиність класичного розв'язку задачі Коші для рівняння теплопровідності (1.4) можна довести і без посилання на принципи максимального і мінімального значень. Покажемо це на прикладі задачі для обмеженого тіла з крайовою умовою Робіна (1.10) на його поверхні. У силу лінійності рівняння (1.4), крайової умови (1.10) і початкової умови (1.11) єдиність шуканого розв'язку є, як і вище, наслідком такого твердження: *єдиним класичним розв'язком $T(\mathbf{r}, t)$, $t \geq 0$, задачі Коші для однорідного рівняння теплопровідності (1.12) в обмеженій замкненій області $\bar{\Omega}$ з однорідною умовою Робіна*

$$\left[-k(\mathbf{r}) \frac{\partial T(\mathbf{r}, t)}{\partial n} - \alpha(\mathbf{r}) T(\mathbf{r}, t) \right]_S = 0 \quad (1.15)$$

на її границі S і початковою умовою $T(\mathbf{r}, 0) \equiv 0$ є тривіальний розв'язок $T(\mathbf{r}, t) \equiv 0$.

Щоб довести це твердження, уведемо допоміжну невід'ємну функцію

$$J(t) = \int_{\Omega} c(\mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}) T^2(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r}. \quad (1.16)$$

Для вказаного класичного розв'язку $J(t)$ є диференційовною функцією, похідну якої можна обчислити, диференціюючи праву частину (1.16) під знаком інтеграла. З огляду на рівняння (1.12) таким способом дістаємо:

$$J'(t) = 2 \int_{\Omega} c(\mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}) \frac{\partial T(\mathbf{r}, t)}{\partial t} T(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r} = 2 \int_{\Omega} \operatorname{div}(k(\mathbf{r}) \operatorname{grad} T(\mathbf{r}, t)) T(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r}.$$

Скориставшись у цьому виразі рівностями

$$\operatorname{div}(k(\mathbf{r})\operatorname{grad}T(\mathbf{r},t))T(\mathbf{r},t) = \operatorname{div}(k(\mathbf{r})T(\mathbf{r},t)\operatorname{grad}T(\mathbf{r},t)) - k(\mathbf{r})|\operatorname{grad}T(\mathbf{r},t)|^2, \\ |\operatorname{grad}T(\mathbf{r},t)|^2 = \left(\frac{\partial T(\mathbf{r},t)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial T(\mathbf{r},t)}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial T(\mathbf{r},t)}{\partial z}\right)^2,$$

теоремою Гаусса — Остроградського і крайовою умовою (1.15), бачимо, що похідну $J'(t)$ можна записати у вигляді

$$J'(t) = -2 \int_{\Omega} k(\mathbf{r})|\operatorname{grad}T(\mathbf{r},t)|^2 d\mathbf{r} - 2 \oint_S \alpha(\mathbf{r})T^2(\mathbf{r},t) dS. \quad (1.17)$$

Оскільки коефіцієнти $k(\mathbf{r})$ і $\alpha(\mathbf{r})$ невід'ємні, то з рівності (1.17) випливає, що $J'(t) \leq 0$, тобто функція $J(t)$ не зростає. Отже, $0 \leq J(t) \leq J(0)$. Згідно ж із початковою умовою $J(0) = 0$. Приходимо до висновку, що $J(t) = 0$ для всіх $t \geq 0$. Однак інтеграл від невід'ємної неперервної функції, яким є $J(t)$, дорівнює нулю лише тоді, коли тотожним нулем є функція під знаком інтеграла. У нашому випадку це зводиться до тотожності $T(\mathbf{r},t) \equiv 0$ для всіх $t \geq 0$, яку і треба було довести.

Контрольні питання до підрозділу 1.2

1. Які фактори визначають зміну температури нерівномірно нагрітого тіла з плином часу?
2. Який режим теплообміну тіла з навколишнім середовищем веде до третьої крайової умови для температури на його поверхні?
3. За яких умов третя крайова умова для температури тіла на його верхні (умова Робіна) переходить в умову Діріхле? Умову Нейманна?
4. У чому полягає задача Коші для лінійного рівняння теплопровідності?
5. У чому полягають принципи найбільшого і найменшого значень для рівняння теплопровідності?
6. Наслідком якого фундаментального фізичного закону є принципи найбільшого і найменшого значень для рівняння теплопровідності?
7. Яка особливість лінійного однорідного рівняння теплопровідності лежить в основі формального доведення принципу максимального значення?
8. Що мається на увазі, коли мова йде про класичний розв'язок задачі Коші для рівняння теплопровідності?

9. Як встановити єдиність розв'язку задачі Коші для лінійного рівняння теплопровідності для обмеженого тіла, на поверхні якого справджується умова Діріхле?
10. Чому принципи максимального і мінімального значень для лінійного рівняння теплопровідності впливають один з одного?
11. За якої умови на нескінченності задача Коші для лінійного рівняння теплопровідності в необмеженому просторі має єдиний класичний розв'язок?
12. Які властивості функції $J(t)$ (1.16) забезпечують єдиність класичного розв'язку задачі Коші для лінійного рівняння теплопровідності?

1.3. РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ЗІ СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ В E_3 . ІНВАРІАНТНІСТЬ ПРИ ПЕРЕТВОРЕННЯХ КООРДИНАТ І ЧАСУ

При виведенні рівняння теплопровідності неявно припускалося, що вибрано одиниці вимірювання фізичних величин і задано систему відліку просторових координат і часу з певними початками відліку. При зміні одиниць вимірювання і способу опису положень і станів частин однорідного теплопровідного середовища в просторі і часі вигляд рівняння теплопровідності може або істотно змінитися, або звестися до рівняння з лише зміненими сталими коефіцієнтами, або взагалі не змінитися.

Як простий приклад помітної трансформації рівняння теплопровідності, пов'язаної зі зміною системи відліку в просторі-часі, розглянемо однорідну речовину, яка рухається зі сталою швидкістю v вдовж нерухомої осі x , і ті зміни, які треба внести в рівняння теплопровідності в цьому випадку при переході із системи відліку, що рухається разом з нею, у нерухому систему відліку. Просторові координати точок у цих системах відліку позначимо відповідно через $\mathbf{r}' = (x', y', z')$ і $\mathbf{r} = (x, y, z)$; часові змінні в обох збігаються: $t' = t$. При заданій початковій температурі $T_0(\mathbf{r})$ термометри, що розташовані в різних точках речовини і рухаються разом з нею, згодом показуватимуть, згідно з принципом відносності Галілея, ту саму температуру, що й за відсутності руху. Іншими словами, їх покази описуватимуться розв'язком задачі Коші для рівняння теплопровідності (1.6) (записаному в змінних $\mathbf{r}'$ і t) з початковою умовою $T_0(\mathbf{r}')$. Водночас нерухомий термометр, занурений у речовину і закріплений у точці про-

сторі $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$, покаже в момент часу $t > 0$ температуру $\tilde{T}(\mathbf{r}_0, t)$ тої частинки речовини, яка в початковий момент часу заповнювала окіл точки $(x_0 - vt, y_0, z_0)$, тобто температуру $\tilde{T}(\mathbf{r}_0, t) = T(x_0 - vt, y_0, z_0, t)$. Якщо при цьому функція $T(\mathbf{r}, t)$ задовольняє рівняння (1.6), то функція $\tilde{T}(\mathbf{r}, t)$ задовольняє рівняння

$$\frac{\partial \tilde{T}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = a^2 \Delta \tilde{T}(\mathbf{r}, t) + v \frac{\partial \tilde{T}(\mathbf{r}, t)}{\partial x}.$$

У випадку, коли речовина рухається зі сталою швидкістю $\mathbf{v}$ в довільному напрямі, це рівняння узагальнюється до вигляду

$$\frac{\partial T(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = a^2 \Delta T(\mathbf{r}, t) + \mathbf{v} \cdot \nabla T(\mathbf{r}, t), \quad (1.18)$$

де для простоти опущено значок тильди, який вказує, що температура вимірюється в точках простору в нерухомій системі координат, і враховано, що в декартовій системі координат $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$,

$$v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} = \mathbf{v} \cdot \nabla T.$$

Завдання 1.3.1. Скориставшись рівнянням теплового балансу, виведіть рівняння теплопровідності для необмеженої речовини, яка рухається зі сталою швидкістю $\mathbf{v}$ і знаходиться під впливом нерухомих джерел і поглиначів тепла, сумарна густина потужності яких $F(\mathbf{r}, t)$ є неперервною функцією всіх своїх змінних, а також незалежних від часу зовнішніх факторів, унаслідок дії яких фізичні властивості речовини у різних місцях простору можуть відрізнятися.

Вказівка. Обчислюючи кількість тепла, яка веде до зміни температури в елементарному об'ємі $dV(\mathbf{r})$ за малий проміжок часу dt , візьміть до уваги, що внаслідок руху системи цей об'єм у момент часу $t + dt$ буде заповнений не тією частиною речовини, яка знаходилася в ньому в момент часу t , а тією її частиною, що буде перенесена в нього з такого ж самого за формою і розміром елементарного об'єму, але розташованого в околі точки $\mathbf{r} - \mathbf{v}dt$.

Відповідь:

$$c(\mathbf{r})\rho(\mathbf{r})\frac{\partial T(\mathbf{r}, t)}{\partial t} =$$

$$= \operatorname{div}(k(\mathbf{r}) \operatorname{grad} T(\mathbf{r}, t)) + \mathbf{v} \cdot \nabla [c(\mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}) T(\mathbf{r}, t)] + F(\mathbf{r}, t), \quad (1.19)$$

де $c(\mathbf{r})$, $\rho(\mathbf{r})$ і $k(\mathbf{r})$ — питома теплоємність, густина і коефіцієнт теплопровідності речовини.

При зміні одиниць вимірювання довжини і часу, тобто масштабних перетвореннях виду

$$x' = \lambda x, \quad y' = \lambda y, \quad z' = \lambda z, \quad t' = \mu t, \quad \lambda, \mu > 0,$$

з безрозмірними параметрами λ , μ , що супроводжується перетворенням похідних

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial t} = \lambda \frac{\partial T}{\partial x'}, \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \lambda^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x'^2}, \quad \dots, \quad \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \lambda^2 \frac{\partial^2 T}{\partial z'^2}, \quad \frac{\partial T}{\partial t} = \mu \frac{\partial T}{\partial t'},$$

рівняння (1.6) переходить у нових (зі штрихом) змінних у рівняння, що відрізняється лише заміною коефіцієнта a^2 на $a'^2 = a^2 \lambda^2 / \mu$.

Завдяки симетрії, притаманній однорідному рівнянню

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u, \quad (1.20)$$

існує досить багатий клас перетворень координат і часу

$$x' = \xi(\mathbf{r}, t), \quad y' = \eta(\mathbf{r}, t), \quad z' = \zeta(\mathbf{r}, t), \quad t' = \tau(\mathbf{r}, t), \quad (1.21)$$

які здійснюються двічі неперервно диференційовними функціями ξ , η , ζ і τ , і які взаємно однозначно відображають деяку чотиривимірну область Ω у просторі E_3 разом з часовою піввіссю (t_0, ∞) на ту ж саму або іншу чотиривимірну область Ω' у просторі E_3 разом з часовою піввіссю (t'_0, ∞) , залишаючи при цьому рівняння (1.20) *інваріантним*. Останнє означає, що в змінних x' , y' , z' , t' і в змінних x , y , z , t рівняння (1.20) має однаковий вигляд.

Зазначимо, що, узагалі кажучи, при перетвореннях (1.21) кожна функція $u(\mathbf{r}, t)$, $(\mathbf{r}, t) \in \Omega$, трансформується в іншу функцію $u'(\mathbf{r}', t')$, $(\mathbf{r}', t') \in \Omega'$, пов'язану з $u(\mathbf{r}, t)$ співвідношенням

$$u'(\xi(\mathbf{r}, t), \eta(\mathbf{r}, t), \zeta(\mathbf{r}, t), \tau(\mathbf{r}, t)) = u(\mathbf{r}, t), \quad (\mathbf{r}, t) \in \Omega. \quad (1.22)$$

Якщо функція $u(\mathbf{r}, t)$ задовольняє рівняння (1.20), то внаслідок рівності (1.22) трансформована функція $u'(\mathbf{r}', t')$ задовольняє у штрихованих змінних певне лінійне диференціальне рівняння в частинних похідних другого порядку, яке можна знайти, скориставшись правилами

диференціювання складених функцій багатьох змінних. Позначаючи функції ξ , η , ξ і τ відповідно через x' , y' , z' і t' та опускаючи для простоти запису їх аргументи, для частинних похідних функції $u(\mathbf{r}, t)$, що входить до рівняння (1.20), із рівності (1.22) за допомогою вказаних правил диференціювання дістаємо

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial u'}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{\partial u'}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial t} + \frac{\partial u'}{\partial z'} \frac{\partial z'}{\partial t} + \frac{\partial u'}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} \left(\frac{\partial x'}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} \left(\frac{\partial y'}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial^2 u'}{\partial z'^2} \left(\frac{\partial z'}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial^2 u'}{\partial t'^2} \left(\frac{\partial t'}{\partial x} \right)^2 + \\ &+ \frac{\partial u'}{\partial x'} \frac{\partial^2 x'}{\partial x^2} + \frac{\partial u'}{\partial y'} \frac{\partial^2 y'}{\partial x^2} + \frac{\partial u'}{\partial z'} \frac{\partial^2 z'}{\partial x^2} + \frac{\partial u'}{\partial t'} \frac{\partial^2 t'}{\partial x^2} + \\ &+ 2 \frac{\partial^2 u'}{\partial x' \partial y'} \frac{\partial x'}{\partial x} \frac{\partial y'}{\partial x} + 2 \frac{\partial^2 u'}{\partial x' \partial z'} \frac{\partial x'}{\partial x} \frac{\partial z'}{\partial x} + 2 \frac{\partial^2 u'}{\partial x' \partial t'} \frac{\partial x'}{\partial x} \frac{\partial t'}{\partial x} + \\ &+ 2 \frac{\partial^2 u'}{\partial y' \partial z'} \frac{\partial y'}{\partial x} \frac{\partial z'}{\partial x} + 2 \frac{\partial^2 u'}{\partial y' \partial t'} \frac{\partial y'}{\partial x} \frac{\partial t'}{\partial x} + 2 \frac{\partial^2 u'}{\partial z' \partial t'} \frac{\partial z'}{\partial x} \frac{\partial t'}{\partial x}, \end{aligned}$$

а також аналогічні вирази для похідних $\partial^2 u / \partial y^2$ і $\partial^2 u / \partial z^2$ (щоб їх виписати явно, достатньо у правій частині виразу для $\partial^2 u / \partial x^2$ змінну x замінити на відповідно змінну y і змінну z). Далі, скориставшись отриманими виразами для похідних функції $u(\mathbf{r}, t)$ через похідні функції $u'(\mathbf{r}', t')$, будуємо за їх допомогою комбінацію похідних

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u$$

та прирівнюємо її до нуля. Отриманий вираз і буде рівнянням, у яке трансформується рівняння теплопровідності при заміні змінних (1.21).

Узагалі-то, це рівняння може бути дуже громіздким. Однак за певних умов, накладених на функції ξ , η , ξ і τ , його можна подати у вигляді

$$Q(x, y, z) \left[\frac{\partial u'}{\partial t'} - a^2 \left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial z'^2} \right) \right] = 0, \quad Q(x, y, z) \neq 0.$$

Очевидно, що ці умови зводяться до вимоги, щоб у трансформованому рівнянні теплопровідності загального вигляду дорівнювали нулю коефіцієнти при тих частинних похідних, які відсутні в рівнян-

ні (1.20), а коефіцієнти при решті похідних з точністю до спільного множника $Q(x, y, z)$ збігалися з відповідними коефіцієнтами в цьому ж рівнянні (1.20). Іншими словами, чотири функції ξ , η , ζ і τ у співвідношенні (1.22), які здійснюють перехід до штрихованих координат зі збереженням вигляду рівняння теплопровідності, мають задовольняти зв'язану систему нелінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних другого порядку. За цих і лише цих додаткових умов рівняння теплопровідності залишається незмінним (інваріантним) відносно перетворень (1.22).

З наведених міркувань та інваріантності рівняння (1.20) відносно певного перетворення (1.22) випливає: *якщо деяка функція $u(x, y, z, t)$ задовольняє рівняння (1.20), то його задовольняє і складена функція $u(\xi(x, y, z, t), \eta(x, y, z, t), \zeta(x, y, z, t), \tau(x, y, z, t))$.*

Ми не виписуємо тут ані ці рівняння¹ для функцій ξ , η , ζ і τ , ані трансформоване рівняння теплопровідності в його загальному вигляді, оскільки в подальшому розглядаються лише лінійні перетворення координатних і часової змінних зі сталими коефіцієнтами.

Завдання 1.3.2. Користуючись правилами диференціювання складених функцій, переконайтеся, що рівняння (1.20) інваріантне відносно:

а) *зсувів початку координат і початку відліку часу*

$$x' = x - x_0, \quad y' = y - y_0, \quad z' = z - z_0, \quad t' = t - t_0;$$

б) *поворотів відносно координатних осей на довільні кути; прикладом останніх є перетворення*

$$x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha, \quad y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha, \quad z' = z, \quad t' = t;$$

в) *масштабних перетворень*

$$x' = \lambda x, \quad y' = \lambda y, \quad z' = \lambda z, \quad t' = \lambda^2 t, \quad \lambda > 0.$$

Зауважимо, що попри нібито простоту перетворень, розглядуваних у завданні 1.3.2, їх множина доволі багата. Шляхом послідовного їх виконання можна перенести в нові положення початки відліку координат і часу та здійснити довільний жорсткий поворот осей декартової системи координат, не змінюючи при цьому вигляду рівняння теплопровідності.

¹ Зацікавлений читач може знайти їх у посібнику Адамян В. М., Сушко М. Я. Вступ до математичної фізики. Introduction to Mathematical Physics. — Одеса : Астропринт, 2003. — С. 22, 23.

Контрольні питання до підрозділу 1.3

1. Як змінюється вигляд рівняння теплопровідності у випадку, коли однорідне теплопровідне середовище рухається зі сталою швидкістю?
2. Як змінюється однорідне рівняння теплопровідності при зміні масштабів довжини і часу?
3. Який наслідок випливає з інваріантності рівняння теплопровідності (1.20) відносно просторово-часових перетворень (1.22)?
4. Наведіть приклади перетворень координат і часу, відносно яких рівняння теплопровідності (1.20) є інваріантним.

1.4. ФУНДАМЕНТАЛЬНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ЗІ СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ В E_3 . ЗАГАЛЬНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ КОШІ

У цьому підрозділі мова йтиме про відшукування функції $u(\mathbf{r}, t)$, яка задовольняє рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + f(\mathbf{r}, t), \quad (1.23)$$

початкову умову

$$u(\mathbf{r}, 0) = T_0(\mathbf{r}) \quad (1.24)$$

і належить до певного класу диференційовних функцій.

При розв'язуванні задачі Коші (1.23), (1.24) істотну роль відіграє спеціальний розв'язок рівняння (1.20), який має вигляд

$$G(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(4\pi a^2 t)^{3/2}} e^{-\frac{r^2}{4a^2 t}}, \quad t > 0, \quad (1.25)$$

де $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Зауважимо, що $G(\mathbf{r}, t) > 0$.

Завдання 1.4.1. Перевірте, що при $t > 0$ функція $G(\mathbf{r}, t)$ задовольняє однорідне рівняння (1.20).

Завдання 1.4.2. Перевірте, що при $t > 0$

$$\int_{E_3} G(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r} = 1. \quad (1.26)$$

Розв'язання. Потрійний інтеграл (1.26) можна обчислювати як повторний, тобто

$$J = \int_{E_3} G(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r} = \frac{1}{(4\pi a^2 t)^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{4a^2 t}}.$$

Згідно з властивостями експоненціальної функції, співвідношення

$$e^{a+b} = e^a e^b$$

виконується для будь-яких дійсних чи комплексних чисел a і b . Користуючись ним, знаходимо:

$$J = \left[\frac{1}{(4\pi a^2 t)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}} \right]^3.$$

Добре відома формула Пуассона

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx' e^{-x'^2} = \sqrt{\pi} \quad (1.27)$$

далі дає ($x' = x/\sqrt{4a^2 t}$):

$$\frac{1}{(4\pi a^2 t)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx' e^{-x'^2} = 1.$$

Формулу (1.27) можна довести так. Очевидно, що

$$J_0 = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} > 0,$$

бо підінтегральна функція набуває лише додатних значень. Запишемо J_0^2 у вигляді

$$J_0^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-y^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx dy e^{-(x^2+y^2)},$$

та зробимо в останньому інтегралі заміну змінних

$$x = R \cos \theta, \quad y = R \sin \theta, \quad 0 \leq R < \infty, \quad 0 \leq \theta < 2\pi.$$

Дістаємо:

$$J_0^2 = \int_0^{\infty} R dR \int_0^{2\pi} d\theta e^{-R^2} = \pi \int_0^{\infty} d(R^2) e^{-R^2} = \pi.$$

Зауважимо, що внаслідок інваріантності рівняння (1.20) відносно зсувів початку координат і початку відліку часу разом з функцією $G(\mathbf{r}, t)$ його задовольняє (при довільних $\mathbf{r}_0$, t_0 і $t > t_0$) і функція

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0; t, t_0) = G(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}; t, t_0) = G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|, t - t_0) = \frac{1}{(4\pi a^2(t - t_0))^{3/2}} e^{-\frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^2}{4a^2(t - t_0)}}, \quad (1.28)$$

де $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$.

Функція $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0; t, t_0)$ також задовольняє рівняння

$$\frac{\partial G}{\partial t} = a^2 \Delta_0 G, \quad \frac{\partial G}{\partial t_0} = -a^2 \Delta_0 G, \quad (1.29)$$

де $\Delta_0 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_0^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_0^2}$.

Функція $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0; t, t_0)$ називається *фундаментальним розв'язком*, або *функцією Гріна*, рівняння (1.20).

Лема 1.4.1. Нехай довільна обмежена функція $g(\mathbf{r})$ є неперервною в точці $\mathbf{r}_0$. Тоді

$$\lim_{t \downarrow t_0} \int_{E_3} G(\mathbf{r}', \mathbf{r}_0; t, t_0) g(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' = g(\mathbf{r}_0). \quad (1.30)$$

Доведення. Оскільки функція $g(\mathbf{r})$ неперервна в точці $\mathbf{r}_0$, для довільно малого числа $\varepsilon > 0$ існує таке число $\delta > 0$, що для всіх $\mathbf{r}$ у кулі $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| < \delta$ маємо

$$|g(\mathbf{r}) - g(\mathbf{r}_0)| < \varepsilon. \quad (1.31)$$

Обмеженість функції означає, що існує таке число M , $0 < M < \infty$, що майже скрізь

$$|g(\mathbf{r})| < M. \quad (1.32)$$

Позначивши інтеграл у лівій частині формули (1.30) через $J(t)$, розіб'ємо його при $t > t_0$ на два доданки:

$$J(t) = J_1(t) + J_2(t),$$

де

$$J_1(t) = \int_{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0| > \delta} G(\mathbf{r}', \mathbf{r}_0; t, t_0) g(\mathbf{r}') d\mathbf{r}',$$

$$J_2(t) = \int_{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0| < \delta} G(\mathbf{r}', \mathbf{r}_0; t, t_0) g(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' .$$

Беручи до уваги додатність функції $G(\mathbf{r}', \mathbf{r}_0; t, t_0)$ і нерівність (1.32), робимо висновок, що для $J_1(t)$ справджується оцінка

$$|J_1(t)| \leq \int_{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0| > \delta} G(\mathbf{r}', \mathbf{r}_0; t, t_0) |g(\mathbf{r}')| d\mathbf{r}' \leq M \int_{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0| > \delta} G(\mathbf{r}', \mathbf{r}_0; t, t_0) d\mathbf{r}' .$$

Переходячи в останньому інтегралі до нової змінної інтегрування

$$\mathbf{r} = \frac{1}{2a\sqrt{t-t_0}}(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0) , \quad d\mathbf{r} = \frac{1}{(4a^2(t-t_0))^{3/2}} d\mathbf{r}' ,$$

бачимо, що

$$\int_{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0| > \delta} G(\mathbf{r}', \mathbf{r}_0; t, t_0) d\mathbf{r}' = \frac{1}{\pi^{3/2}} \int_{|\mathbf{r}| > \frac{\delta}{2a\sqrt{t-t_0}}} e^{-r^2} d\mathbf{r} .$$

Але інтеграл Пуассона

$$\frac{1}{\pi^{3/2}} \int_{E_3} e^{-r^2} d\mathbf{r} = \frac{1}{\pi^{3/2}} \int_{|\mathbf{r}| < \frac{\delta}{2a\sqrt{t-t_0}}} e^{-r^2} d\mathbf{r} + \frac{1}{\pi^{3/2}} \int_{|\mathbf{r}| > \frac{\delta}{2a\sqrt{t-t_0}}} e^{-r^2} d\mathbf{r} = 1$$

абсолютно збіжний. Тому

$$\lim_{t \downarrow t_0} \frac{1}{\pi^{3/2}} \int_{|\mathbf{r}| < \frac{\delta}{2a\sqrt{t-t_0}}} e^{-r^2} d\mathbf{r} = 1 , \quad \lim_{t \downarrow t_0} \frac{1}{\pi^{3/2}} \int_{|\mathbf{r}| > \frac{\delta}{2a\sqrt{t-t_0}}} e^{-r^2} d\mathbf{r} = 0 . \quad (1.33)$$

Отже,

$$\lim_{t \downarrow t_0} J_1(t) = 0 .$$

Інтеграл $J_2(t)$ перепишемо у вигляді

$$J_2(t) = J_{21}(t) + J_{22}(t) ,$$

де

$$J_{21}(t) = g(\mathbf{r}_0) \int_{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0| < \delta} G(\mathbf{r}', \mathbf{r}_0; t, t_0) d\mathbf{r}' = g(\mathbf{r}_0) \cdot \frac{1}{\pi^{3/2}} \int_{|\mathbf{r}| < \frac{\delta}{2a\sqrt{t-t_0}}} e^{-r^2} d\mathbf{r} ,$$

$$J_{22}(t) = \int_{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0| < \delta} G(\mathbf{r}', \mathbf{r}_0; t, t_0) (g(\mathbf{r}') - g(\mathbf{r}_0)) d\mathbf{r}' .$$

Унаслідок (1.33)

$$\lim_{t \downarrow t_0} J_{21}(t) = g(\mathbf{r}_0) .$$

Залишок $J_{22}(t)$ при $t \downarrow t_0$ залишається меншим від будь-якого малого числа ε . Справді, з огляду на (1.31) і (1.26), маємо:

$$|J_{22}(t)| \leq \int_{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0| < \delta} G(\mathbf{r}', \mathbf{r}_0; t, t_0) |g(\mathbf{r}') - g(\mathbf{r}_0)| d\mathbf{r}' \leq \varepsilon \int_{E_3} G(\mathbf{r}', \mathbf{r}_0; t, t_0) d\mathbf{r}' = \varepsilon .$$

Отже, приходимо до співвідношення (1.30).

Зауваження 1.4.1. Вимога, щоб функція $g(\mathbf{r})$ була обмежена, насправді не є необхідною. Ми користувалися нею лише для того, щоб довести, що інтеграл $J_1(t)$ прямує до нуля при $t \rightarrow 0$. Але він може прямувати до нуля при $t \rightarrow 0$ й у випадку необмежених функцій.

Завдання 1.4.3. Доведіть, що співвідношення (1.30) залишається правильним, якщо вимагати, щоб функція $g(\mathbf{r})$ була *інтегрованою*, тобто такою, що

$$\int_{E_3} |g(\mathbf{r})| d\mathbf{r} < \infty .$$

Вказівка. Скористайтесь тим, що при $|\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0| > \delta$

$$G(\mathbf{r}', \mathbf{r}_0; t, t_0) \leq \frac{1}{(4\pi a^2(t - t_0))^{3/2}} e^{-\frac{\delta^2}{4a^2(t - t_0)}} ,$$

і тому для $J_1(t)$ виконується оцінка:

$$|J_1(t)| \leq \int_{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0| > \delta} G(\mathbf{r}', \mathbf{r}_0; t, t_0) |g(\mathbf{r}')| d\mathbf{r}' \leq \frac{1}{(4\pi a^2(t - t_0))^{3/2}} e^{-\frac{\delta^2}{4a^2(t - t_0)}} \int_{E_3} |g(\mathbf{r}')| d\mathbf{r}' .$$

Тепер ми спроможні знайти розв'язок задачі Коші (1.23), (1.24). Для цього скористаємось наслідком теореми Гаусса — Остроградського, який називають *формулою* (або *теоремою*) *Гріна*.

Нехай $u(\mathbf{r})$ та $v(\mathbf{r})$ — двічі неперервно диференційовні функції. Тоді

$$\operatorname{div}(u \nabla v) = u \Delta v + \nabla u \cdot \nabla v ,$$

$$\operatorname{div}(v \nabla u) = v \Delta u + \nabla v \cdot \nabla u ,$$

а тому

$$u\Delta v - v\Delta u = \operatorname{div}(u\nabla v - v\nabla u). \quad (1.34)$$

Якщо такі $u(\mathbf{r})$ і $v(\mathbf{r})$ визначені в обмеженій просторово-однозв'язній області Ω з кусково-гладкою границею Ξ та неперервні разом з першими похідними в замкненій області $\bar{\Omega}$, то зінтегрувавши обидві частини рівності (1.34) по області Ω та застосувавши теорему Гаусса — Остроградського, дістаємо

$$\int_{\Omega} (u\Delta v - v\Delta u) d\mathbf{r} = \oint_{\Xi} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma, \quad (1.35)$$

де $d\sigma$ — елемент площі поверхні Ξ , а $\partial/\partial n$ позначає складову градієнта вздовж нормалі до $d\sigma$. Це і є формула (теорема) Гріна.

Нехай функція $f(\mathbf{r})$ — неперервно диференційовна в будь-якій обмеженій області простору E_3 . Для кожної такої функції введемо позначення:

$$m_f(R) = \max_{|\mathbf{r}|=R} |f(\mathbf{r})|, \quad m_f^1(R) = \max_{|\mathbf{r}|=R} |\nabla f(\mathbf{r})|$$

$$\left(|\nabla f(\mathbf{r})| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)^2} \right).$$

Наслідком теореми Гріна є наступне твердження.

Лема 1.4.2. Нехай функції $u(\mathbf{r})$ та $v(\mathbf{r})$ — двічі неперервно диференційовні в кожній обмеженій області простору E_3 , при цьому для $v(\mathbf{r})$ існують такі додатні сталі $C, C_1 < \infty$, що $m_v(R) \leq C$, $m_v^1(R) \leq C_1$, а $u(\mathbf{r})$ є інтегровною разом з другими похідними і задовольняє умови

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R^2 m_u(R) = 0, \quad \lim_{R \rightarrow \infty} R^2 m_u^1(R) = 0. \quad (1.36)$$

Тоді

$$\int_{E_3} (u\Delta v - v\Delta u) d\mathbf{r} = 0.$$

¹ Область називається просторово-однозв'язною, якщо будь-яку замкнену гладку просту (тобто без самоперетинів) поверхню, що цілком лежить у цій області, можна, неперервно деформуючи, стягнути в точку цієї ж області. Наприклад, куля є однозв'язною областю, а тор — ні.

Доведення. Скориставшись формулою Гріна і враховуючи умови леми, маємо:

$$\begin{aligned} \left| \int_{E_3} (u\Delta v - v\Delta u) d\mathbf{r} \right| &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left| \int_{|\mathbf{r}| < R} (u\Delta v - v\Delta u) d\mathbf{r} \right| = \lim_{R \rightarrow \infty} \left| \oint_{|\mathbf{r}|=R} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma \right| \leq \\ &\leq \lim_{R \rightarrow \infty} \oint_{|\mathbf{r}|=R} [C_1 m_u(R) + C m_u^1(R)] d\sigma = \lim_{R \rightarrow \infty} 4\pi R^2 [C_1 m_u(R) + C m_u^1(R)] = 0. \end{aligned}$$

Нехай неперервна функція $T(\mathbf{r}, t)$, яка має неперервні перші похідні, неперервні другі похідні за координатами і є також обмеженою разом зі своїми першими та другими похідними, задовольняє рівняння (1.23) і початкову умову (1.24). Функція Гріна $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t, t')$ як функція $\mathbf{r}'$ при фіксованих значеннях $\mathbf{r}$ і $t > t' \geq 0$ є двічі неперервно диференційовною та інтегровною разом з другими похідними і до того ж задовольняє умови

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R^2 m_G(R) = 0, \quad \lim_{R \rightarrow \infty} R^2 m_G^1(R) = 0.$$

Тому в силу леми 1.4.2 для функції $T(\mathbf{r}, t)$ і функції Гріна $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t, t')$ при $t > t'$ справджується співвідношення

$$\int_{E_3} [T(\mathbf{r}', t') \Delta' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t, t') - G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t, t') \Delta' T(\mathbf{r}', t')] d\mathbf{r}' = 0, \quad (1.37)$$

$$\text{де } \Delta' \equiv \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2}{\partial z'^2}.$$

Далі, користуючись співвідношенням (1.37) та рівняннями (1.23) для $T(\mathbf{r}, t)$ і (1.29) для $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t, t')$, можемо записати:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^t dt' \int_{E_3} \left\{ T(\mathbf{r}', t') \left[\frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t, t')}{\partial t'} + a^2 \Delta' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t, t') \right] - \right. \\ &\quad \left. - G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t, t') \left[-\frac{\partial T(\mathbf{r}', t')}{\partial t'} + a^2 \Delta' T(\mathbf{r}', t') + f(\mathbf{r}', t') \right] \right\} d\mathbf{r}' = \\ &= \int_0^t dt' \frac{\partial}{\partial t'} \int_{E_3} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t, t') T(\mathbf{r}', t') d\mathbf{r}' - \int_0^t dt' \int_{E_3} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t, t') f(\mathbf{r}', t') d\mathbf{r}' = \\ &= \lim_{t' \uparrow t} \int_{E_3} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t, t') T(\mathbf{r}', t') d\mathbf{r}' - \lim_{t' \downarrow 0} \int_{E_3} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t, t') T(\mathbf{r}', t') d\mathbf{r}' - \end{aligned}$$

$$-\int_0^t dt' \int_{E_3} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t, t') f(\mathbf{r}', t') d\mathbf{r}' .$$

Уважатимемо, що початкова функція $T_0(\mathbf{r})$ в (1.24) обмежена і при $t \downarrow 0$ обмежений розв'язок $T(\mathbf{r}, t)$ прямує до цієї функції майже всюди, тобто майже всюди

$$\lim_{t \downarrow 0} |T(\mathbf{r}, t) - T_0(\mathbf{r})| = 0 .$$

Тоді, ураховуючи неперервність та інтегровність функції $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t, t')$ при $t > t'$, бачимо, що

$$\lim_{t' \downarrow 0} \int_{E_3} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t, t') T(\mathbf{r}', t') d\mathbf{r}' = \int_{E_3} G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|; t) T_0(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' .$$

З іншого боку, з огляду на лему 1.4.1 та неперервність і обмеженість $T(\mathbf{r}, t)$, маємо:

$$\lim_{t' \uparrow t} \int_{E_3} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t, t') T(\mathbf{r}', t') d\mathbf{r}' = T(\mathbf{r}, t) .$$

Отже, остаточний результат такий: за умови, що початкова функція $T_0(\mathbf{r})$ обмежена, задача Коші (1.23), (1.24) має один і лише один розв'язок $T(\mathbf{r}, t)$, який є неперервно диференційний, двічі неперервно диференційовний за координатами та обмежений разом з першими і другими похідними. Цей розв'язок дається виразом

$$T(\mathbf{r}, t) = \int_{E_3} G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|; t) T_0(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' + \int_0^t dt' \int_{E_3} G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|; t - t') f(\mathbf{r}', t') d\mathbf{r}' . \quad (1.38)$$

Завдання 1.4.4. Перевірте, що функція Гріна $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t, t')$ як функція $\mathbf{r}'$ при фіксованих значеннях $\mathbf{r}$ і $t > t' \geq 0$ справді задовольняє умови (1.36).

Завдання 1.4.5. Не обчислюючи інтеграл безпосередньо, доведіть, що при $t, t' > 0$ для функції Гріна (1.25) справджується рівність

$$G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|; t + t') = \int_{E_3} G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}''|; t) G(|\mathbf{r}'' - \mathbf{r}'|; t') d\mathbf{r}'' . \quad (1.39)$$

Вказівка. Скористайтесь єдиністю розв'язку задачі Коші (1.23), (1.24) у класі функцій, до якого належить і функція Гріна (1.25), очевидним співвідношенням

$$\lim_{t \downarrow 0} G(\mathbf{r} - \mathbf{r}'; t + t') = G(\mathbf{r} - \mathbf{r}'; t')$$

та формулою (1.38), коли $f(\mathbf{r}, t) \equiv 0$, а $T_0(\mathbf{r}) = G(\mathbf{r} - \mathbf{r}'; t')$.

Завдання 1.4.6. Знайдіть розв'язок задачі Коші для однорідного рівняння теплопровідності в необмеженому однорідному середовищі, початкова температура якого дорівнює

$$T_0(\mathbf{r}) = T_0 e^{-\alpha |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^2}, \quad \alpha > 0.$$

Вказівка. Скористайтесь формулами (1.38) та (1.39).

Контрольні питання до підрозділу 1.4

1. Які властивості має функція Гріна рівняння (1.20)?
2. Дайте означення класів обмежених та інтегровних функцій. Наведіть приклади обмежених, але неінтегровних функцій, та інтегровних, але необмежених функцій.
3. Які рівності випливають з формули Гріна (1.35) у випадках, коли хоча б одна з функцій u , v дорівнює нулю разом зі своїми першими похідними на границі відповідної області?

1.5. ФІЗИЧНИЙ ЗМІСТ ФУНКЦІЇ ГРІНА

Нехай у початковий момент часу $t = t_0$ розподіл температури в необмеженому середовищі задається обмеженою або інтегрованою функцією $T_0(\mathbf{r})$. Якщо середовище однорідне і не містить жодних джерел (і стоків) тепла, то його температура $T(\mathbf{r}, t)$ в довільній точці $\mathbf{r}$ у моменти часу $t > t_0$ пов'язана з $T_0(\mathbf{r})$ співвідношенням (див. формулу (1.38))

$$T(\mathbf{r}, t) = \int_{E_3} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t - t_0) T_0(\mathbf{r}') d\mathbf{r}',$$

де $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t)$ — функція Гріна лінійного рівняння теплопровідності зі сталими коефіцієнтами. Подібне співвідношення виконується і для лінійних рівнянь теплопровідності зі змінними коефіцієнтами, що описують процес теплопровідності в неоднорідних середовищах, а також для лінійних рівнянь теплопровідності в обмежених просторових областях.

Розглянемо випадок неоднорідних середовищ докладніше. За певних, досить загальних, умов існує неперервна функція $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t - t_0)$, $t > t_0$, яка визначена в просторі E_3 і має такі властивості:

1) за своїми просторовими змінними $\mathbf{r}$ і $\mathbf{r}'$ вона двічі неперервно диференційовна, при $t > t_0$ і фіксованому значенні $\mathbf{r}$ спадає до нуля при $|\mathbf{r}'| \rightarrow \infty$ швидше за будь-який від'ємний степінь $|\mathbf{r}'|$, а також інтегровна, разом з усіма своїми першими та другими частинними похідними, по E_3 ;

2) вона симетрична відносно перестановки змінних $\mathbf{r}$ і $\mathbf{r}'$:

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t - t_0) = G(\mathbf{r}', \mathbf{r}; t - t_0);$$

3) при фіксованих значеннях змінної $\mathbf{r}'$ вона задовольняє однорідне рівняння

$$c(\mathbf{r})\rho(\mathbf{r})\frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t - t_0)}{\partial t} = \operatorname{div}[k(\mathbf{r})\operatorname{grad} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t - t_0)];$$

4) для довільної обмеженої і навіть досить повільно зростаючої на нескінченності функції $g(\mathbf{r})$, неперервної в точці $\mathbf{r}_0$, справджується співвідношення

$$\lim_{t \downarrow t_0} \int_{E_3} G(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}'; t - t_0) c(\mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') g(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' = g(\mathbf{r}_0).$$

При виконанні умов, що забезпечують перераховані властивості функції $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t - t_0)$, загальний розв'язок задачі Коші для рівняння теплопровідності (1.4) зі змінними коефіцієнтами та для обмежених або інтегровних функцій $T_0(\mathbf{r})$ і $F(\mathbf{r}, t)$ дається при $t > t_0$ формулою

$$\begin{aligned} T(\mathbf{r}, t) = & \int_{E_3} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t - t_0) c(\mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') T_0(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' + \\ & + \int_{t_0}^t dt' \int_{E_3} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t - t') F(\mathbf{r}', t') d\mathbf{r}'. \end{aligned} \quad (1.40)$$

Нагадаємо, що функції $T_0(\mathbf{r})$ і $F(\mathbf{r}, t)$ визначають відповідно початкову температуру середовища і густину потужності джерел тепла. Коли ж джерела тепла відсутні, розв'язок задачі Коші для відповідного однорідного рівняння зводиться до

$$T(\mathbf{r}, t) = \int_{E_3} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t - t_0) c(\mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') T_0(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'. \quad (1.41)$$

Добуток $c(\mathbf{r}')\rho(\mathbf{r}')T_0(\mathbf{r}')$ під знаком інтеграла (1.41) — це початкове значення густини енергії, підведеної до речовини тепловими потоками, яке ця густина має в малому околі точки $\mathbf{r}'$ у момент часу $t = t_0$.

Припустимо тепер, що початкова температура середовища відрізняється від нуля лише в малому околі Ω точки $\mathbf{r}' = \mathbf{r}_0$ і що джерела тепла в середовищі відсутні. Тоді інтеграл (1.41) розповсюджується лише на окіл Ω . Зважаючи на неперервність функції Гріна, можемо записати:

$$T(\mathbf{r}, t) \approx G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0; t - t_0) \int_{\Omega} c(\mathbf{r}')\rho(\mathbf{r}')T_0(\mathbf{r}')d\mathbf{r}' = G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0; t - t_0)Q_0,$$

де Q_0 — кількість тепла, уведеного в початковий момент часу $t = t_0$ в окіл Ω . Здійснюючи у виписаній формулі формальний граничний перехід до нескінченно малого околу Ω , приходимо до висновку, що функція Гріна $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0; t - t_0)$ дорівнює температурі середовища, яка встановлюється в точці $\mathbf{r}$ у момент часу $t > t_0$ завдяки одиниці кількості тепла, миттєво введеної в нього в точці $\mathbf{r}_0$ в момент часу t_0 , за умови, що температура середовища до моменту t_0 скрізь дорівнює нулю і що інші джерела тепла відсутні.

Функції з подібним змістом з'являються в різноманітних задачах механіки і фізики. Там вони також називаються функціями Гріна, а ще — функціями розповсюдження, функціями впливу або функціями відгуку.

Зауваження 1.5.1. Функція Гріна для рівняння теплопровідності зі сталими коефіцієнтами (1.20) відрізняється від розглянутої вище множителем $c\rho$, який дорівнює теплоємності одиниці об'єму однорідного середовища. Якщо, наприклад, у момент часу $t_0 = 0$ в точці $\mathbf{r}_0 = 0$ в однорідне середовище миттєво вводиться одиниця кількості тепла, і якщо температура середовища до цього скрізь дорівнює нулю, то за відсутності інших джерел тепла функція Гріна (фундаментальний розв'язок) (1.25) дорівнює густині теплової енергії середовища $c\rho T(\mathbf{r}, t)$ в точці $\mathbf{r}$ у момент часу $t > 0$.

Завдання 1.5.1. У момент часу $t_0 = 0$ в нескінченно малий окіл точки $\mathbf{r}_0$ однорідного середовища, яке має нульову температуру, раптово вводять Q_0 джоулів тепла. Проаналізуйте подальші зміни температури середовища з часом у довільній точці $\mathbf{r} \neq 0$. Знайдіть максимальну температуру, яку можна зафіксувати на відстані $r > 0$ від початку координат, і момент часу, коли вона досягається.

Вказівка. Дослідіть часову залежність функції $T(\mathbf{r}, t) = (Q_0/c\rho)G(|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|; t)$, де $G(|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|; t)$ — функція Гріна (1.28), при фіксованих значеннях координат.

Якщо в початковий момент часу t_0 тепло в середовище, яке до цього скрізь мало нульову температуру, не лише внесли, але й розподілили миттєво в певних кількостях по малих неперетинних околах деякої множини точок $\mathbf{r}_i$, то в силу лінійності рівняння теплопровідності загальна температура середовища в точці $\mathbf{r}$ у момент часу $t > t_0$ дорівнюватиме сумі

$$T(\mathbf{r}, t) = \sum_i T_i(\mathbf{r}, t - t_0), \quad (1.42)$$

де $T_i(\mathbf{r}; t - t_0) = Q_i G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i; t - t_0)$ — внесок у $T(\mathbf{r}, t)$ від околу точки $\mathbf{r}_i$, куди внесли кількість тепла Q_i , $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i; t - t_0)$ — функція Гріна рівняння теплопровідності (для однорідного середовища $T_i(\mathbf{r}, t - t_0) = Q_i/(c\rho)G(|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|; t - t_0)$, а функція Гріна дається виразом (1.28)).

Твердження (1.42) є відображенням загального *принципу суперпозиції для лінійних систем*, зокрема для лінійного рівняння теплопровідності. Згідно з цим принципом реакція (відгук) лінійної системи на спільний вплив двох або більше факторів є сумою реакцій на їх індивідуальні впливи. До того ж, якщо вплив кожного з факторів виражається числовою скалярною або векторною величиною X , а реакція на нього — скалярною або векторною функцією $F(X)$, то $F(X)$ є лінійною функцією, тобто має властивості адитивності

$$F(X_1 + X_2) = F(X_1) + F(X_2)$$

й однорідності

$$F(\alpha X) = \alpha F(X),$$

де α — довільне дійсне або комплексне число¹.

¹ Досить часто зустрічається твердження, що принцип суперпозиції є лише наближенням до справжньої фізичної поведінки, оскільки фізичні системи можна моделювати як лінійні лише наближено. Воно не зовсім правильне, можна навіть сказати, що в своїй основі воно зовсім неправильне. Справа в тому, що лінійність і принцип суперпозиції є фундаментальними відправними положеннями квантової теорії, у достовірності яких на сьогодні немає підстав сумніватися — не відомо жодного спостереження або спеціально поставленого експерименту, які би їх не підтверджували. Відштовхуючись від квантової теорії багаточастинкових систем, шляхом певних спрощень і наближень та математично коректних побудов фізикам-теоретикам протягом минулого століття вдалося вивести рівняння еволюції і рівноваги для макроскопічних систем.

За умов, що околі точок $\mathbf{r}_i$ з об'ємами dV_i і діаметрами¹ d_i покривають не перетинаючись весь простір E_3 , найбільший з діаметрів d_i прямує до нуля і $Q_i = c(\mathbf{r}_i)\rho(\mathbf{r}_i)T_0(\mathbf{r}_i)dV_i$, сума (1.42) збігається до виразу (1.41).

Принцип суперпозиції можна перенести і на випадок, коли кількості тепла Q_i вносять, узагалі кажучи, у різні моменти часу $t_j \geq t_0$. Тоді

$$T(\mathbf{r}, t) = \sum_{i,j} T_i(\mathbf{r}, t - t_j), \quad (1.43)$$

де вирази під знаком суми дістаємо, замінивши t_0 в попередніх виразах для $T_i(\mathbf{r}; t - t_0)$ на відповідні t_j .

Зі схожою і навіть більш загальною ситуацією ми зустрічаємося, наприклад, коли в середовищі діють джерела тепла з густиною потужності $F(\mathbf{r}, t)$. Кількість тепла, яку вони генерують у малому околі об'ємом dV_i точки $\mathbf{r}_i$ за малий інтервал часу $(t_j, t_j + dt_j)$, становить $Q_{ij} = F(\mathbf{r}_i, t_j^*)dV_i dt_j$, де t_j^* — деякий момент часу з $(t_j, t_j + dt_j)$, а її внесок у загальну температуру дорівнює $F(\mathbf{r}_i, t_j^*)G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i; t - t_j^*)dV_i dt_j$ (або $f(\mathbf{r}_i, t_j^*)G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|; t - t_j^*)dV_i dt_j$, якщо мова йде про однорідне середовище і функцію Гріна (1.28)). Покриваючи весь простір такими малими неперетинними околами з діаметрами d_i , розбиваючи інтервал часу (t_0, t) точками ділення t_j на малі інтервали (t_j, t_{j+1}) , бачимо, що коли найбільший з діаметрів d_i і найдовший з інтервалів (t_j, t_{j+1}) прямують до нуля, то відповідний внесок (1.43) у температуру середовища, спричинений дією джерел протягом часу від t_0 до t , зводиться до другого інтеграла в правій частині формули (1.40) (або формули (1.38) у випадку однорідного середовища).

Звернемо тепер увагу, що кількість тепла, яка генерується джерелами в усьому середовищі за малий інтервал часу $(t_j, t_j + dt_j)$, дається сумою

$$\sum_i Q_{ij} = \left(\sum_i F(\mathbf{r}_i, t_j^*)dV_i \right) dt_j,$$

а її внесок у загальну температуру середовища — виразом

$$dT_{t_j}(\mathbf{r}, t) = \left(\sum_i F(\mathbf{r}_i, t_j^*)G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_i; t - t_j^*)dV_i \right) dt_j.$$

Нелінійність рівнянь у цих моделях виявилася наслідком використання саме зроблених спрощень і наближень.

¹ Діаметром області називається точна верхня границя відстаней між будь-якими її точками.

Перейшовши до граничного випадку $d_i \rightarrow 0$, з огляду на формулу (1.41) можемо записати

$$dT_{ij}^*(\mathbf{r}, t) = \tilde{T}_{ij}^*(\mathbf{r}, t - t_j^*) dt_j ,$$

де $\tilde{T}_\tau(\mathbf{r}, t)$, $t > \tau$, — розв’язок задачі Коші для *однорідного* рівняння теплопровідності (1.4) з початковою умовою

$$\tilde{T}_\tau(\mathbf{r}, t_0) = \frac{1}{c(\mathbf{r})\rho(\mathbf{r})} F(\mathbf{r}, \tau) . \quad (1.44)$$

Підсумовуючи всі такі внески від інтервалів $(t_j, t_j + dt_j)$ і переходячи до границі $dt_j \rightarrow 0$, знаходимо, що загальний внесок у температуру середовища внаслідок дії джерел протягом інтервалу часу (t_0, t) (тобто другий доданок у правій частині формули (1.40)) можна також подати у вигляді

$$T(\mathbf{r}, t) = \int_{t_0}^t \tilde{T}_\tau(\mathbf{r}, t - \tau) d\tau . \quad (1.45)$$

Важливо підкреслити, що інтеграл (1.45), яким підсумовуються розв’язки (1.41) задачі Коші для однорідного рівняння теплопровідності (1.4) з початковою умовою (1.44), збігається з розв’язком задачі Коші для неоднорідного рівняння теплопровідності з нульовою початковою умовою. Цей результат є проявом, на прикладі рівняння теплопровідності, універсального *принципу Дюамеля*, згідно з яким розв’язок неоднорідного лінійного диференціального рівняння в частинних похідних можна побудувати, знайшовши розв’язок відповідного однорідного рівняння і підставивши його в певний інтеграл («інтеграл Дюамеля»), вигляд якого залежить від типу рівнянь, але є стандартним для всіх рівнянь кожного окремого типу. Зокрема інтеграл (1.45) є інтегралом Дюамеля для рівняння теплопровідності.

Зазначимо, що принцип Дюамеля веде своє походження від принципу суперпозиції і методу варіації сталих теорії звичайних лінійних диференціальних рівнянь.

1.6. СТАЦІОНАРНА ТЕМПЕРАТУРА. НЬЮТОНІВСЬКИЙ ТЕПЛОВИЙ ПОТЕНЦІАЛ

Якщо початкова температура $T_0(\mathbf{r})$ — інтегровна функція, то з бігом часу її внеском у загальне значення температури $T(\mathbf{r}, t)$ у будь-якій точці $\mathbf{r}$ можна знехтувати. Справді, для необмеженого однорідного середовища справджується така рівномірна оцінка:

$$\left| \frac{1}{(4\pi a^2 t)^{3/2}} \int_{E_3} e^{-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2}{4a^2 t}} T_0(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \right| \leq \frac{1}{(4\pi a^2 t)^{3/2}} \int_{E_3} e^{-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2}{4a^2 t}} |T_0(\mathbf{r}')| d\mathbf{r}' \leq$$

$$\leq \frac{1}{(4\pi a^2 t)^{3/2}} \int_{E_3} |T_0(\mathbf{r}')| d\mathbf{r}' \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0.$$

Отже, при $t \rightarrow \infty$ температура в такому середовищі може змінюватися лише завдяки джерелам тепла. Її граничне значення дорівнює

$$T(\mathbf{r}, t) = \int_0^t dt' \int_{E_3} G(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|, t-t') f(\mathbf{r}', t') d\mathbf{r}' + O\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right), \quad (1.46)$$

де $f(\mathbf{r}, t) \equiv F(\mathbf{r}, t)/c\rho$, $F(\mathbf{r}, t)$ — густина потужності джерел тепла.

Якщо, крім того, густина потужності джерел тепла — інтегровна та незалежна від часу функція $F(\mathbf{r})$, то з часом у кожній точці $\mathbf{r}$ середовища встановлюється стаке значення температури, яке дорівнює ($\tau = 1/\sqrt{4a^2(t-t')}$)

$$T(\mathbf{r}) = \lim_{t \rightarrow \infty} T(\mathbf{r}, t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{c\rho} \int_0^t dt' \int_{E_3} G(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|, t-t') F(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' =$$

$$= \frac{1}{2a^2 c\rho \pi^{3/2}} \int_{E_3} \left(\int_0^\infty d\tau e^{-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2 \tau^2} \right) F(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' = \frac{1}{4\pi k} \int_{E_3} \frac{F(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d\mathbf{r}'. \quad (1.47)$$

Завдання 1.6.1. Нехай у формулі (1.47)

$$F(\mathbf{r}) = \begin{cases} q_0, & 0 < r < R, \\ 0, & r > R. \end{cases}$$

Знайдіть температуру, яка встановлюється в необмеженому однорідному середовищі при $t \rightarrow \infty$.

Вказівка. Виберіть сферичну систему координат з полярною віссю, напрямленою вздовж вектора $\mathbf{r}$. При обчисленні інтегралів скористайтеся формулою

$$\int_0^\pi \frac{\sin \theta d\theta}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta}} = \begin{cases} \frac{2}{r}, & r' < r, \\ \frac{2}{r'}, & r' > r, \end{cases}$$

та врахуйте, що при $r < R$ реалізуються два випадки $0 \leq r' \leq r$ і $r \leq r' \leq R$.

Останній вираз у правій частині рівності (1.47) визначає граничний *стаціонарний* ($\partial T / \partial t = 0$) розв'язок неоднорідного рівняння теплопровідності. Він називається *ньютонівським (тепловим) потенціалом*.

Якщо $F(\mathbf{r})$ — неперервно диференційовна функція, яка спадає на нескінченності принаймні як

$$F(\mathbf{r}) = O\left(\frac{1}{r^{2+\varepsilon}}\right), \quad \varepsilon > 0, \quad (1.48)$$

то ньютонівський потенціал є двічі диференційовним розв'язком *диференціального рівняння Пуассона*

$$k \Delta T(\mathbf{r}) = -F(\mathbf{r}), \quad (1.49)$$

який *спадає до нуля на нескінченності* та неперервні перші похідні якого можна дістати, диференціюючи останній вираз в (1.47) під знаком інтеграла.

Рівняння Пуассона (1.49) може мати в E_3 лише один розв'язок, який спадає до нуля на нескінченності, і саме до нього збігається з часом температура однорідного середовища при будь-якій інтегровній початковій температурі $T_0(\mathbf{r})$ і будь-якій густині потужності джерел $F(\mathbf{r})$, що задовольняє наведені вище умови.

Ці твердження доводяться в наступному підрозділі.

Підкреслимо, що рівняння Пуассона (1.49) — це рівняння теплопровідності для часткового випадку стаціонарних розподілів температури, спричинених дією джерел і стоків тепла зі сталою потужністю. З відповідними змінами фізичного змісту величин, що до них входять, формула (1.47) і рівняння (1.49) слугують і для відшукування електростатичних та гравітаційних потенціалів.

Завдання 1.6.2. Доведіть, що коли

$$F(\mathbf{r}) = O\left(\frac{1}{r^{3+\varepsilon}}\right), \quad \varepsilon > 0,$$

то ньютонівський потенціал (1.47) спадає на нескінченності до нуля принаймні як $1/r$.

Завдання 1.6.3. Нехай $F(\mathbf{r})$ дорівнює нулю зовні деякої обмеженої області. Знайдіть явний вираз для ньютонівського потенціалу при $r \rightarrow \infty$ з точністю до членів $\sim 1/r^3$.

Зауваження 1.6.1. Вимога (1.48) не є обов'язковою для того, щоб при $t \rightarrow \infty$ і довільній інтегровній початковій температурі $T_0(\mathbf{r})$ температура однорідного середовища збігалася до того єдиного розв'язку стаціонарного рівняння теплопровідності (рівняння Пуассона (1.49)), який спадає до нуля на нескінченності. Але вона гарантує, що цей розв'язок можна подати у вигляді ньютонівського потенціалу.

Завдання 1.6.4. Нехай у необмеженому однорідному середовищі густина потужності джерел

$$F(\mathbf{r}) = q \frac{\sin br}{r},$$

а початкова температура дорівнює нулю. Розв'яжіть відповідне неоднорідне рівняння теплопровідності (1.5) та переконайтеся, що при $t \rightarrow \infty$ його розв'язок дає стаціонарну температуру середовища, яка задовольняє рівняння (1.49) та спадає до нуля при $r \rightarrow \infty$.

Вказівка. Шукайте вказаний розв'язок серед функцій виду

$$T(\mathbf{r}) = A \frac{\sin br}{r}.$$

Контрольні питання до підрозділу 1.6

1. За яким законом спадає до нуля при $t \rightarrow \infty$ внесок у температуру $T(\mathbf{r}, t)$ однорідного середовища від її початкового значення $T_0(\mathbf{r})$, якщо $T_0(\mathbf{r})$ — інтегровна функція?
2. До якого виразу збігається з часом температура однорідного середовища при будь-якій інтегровній початковій температурі $T_0(\mathbf{r})$ і незалежній від часу потужності джерел $F(\mathbf{r}) = O\left(r^{-2-\varepsilon}\right)$, $\varepsilon > 0$?

3. Чи є ньютонівський потенціал єдиним неперервним обмеженим розв'язком рівняння Пуассона (1.49) з правою частиною $F(\mathbf{r})$, що задовольняє умову (1.48)?

1.7. ГАРМОНІЧНІ ФУНКЦІЇ. СПАДНІ РОЗВ'ЯЗКИ РІВНЯННЯ ПУАССОНА

Той факт, що рівняння Пуассона в просторі E_3 має єдиний розв'язок, який спадає до нуля на нескінченності, впливає з кількох простих, але фундаментальних тверджень.

Лема 1.7.1. Нехай функція $u(\mathbf{r})$ задовольняє рівняння Пуассона

$$\Delta u(\mathbf{r}) = -f(\mathbf{r})$$

у деякій області. Якщо функція $f(\mathbf{r}) < 0$ ($f(\mathbf{r}) > 0$) у деякій внутрішній точці $\mathbf{r}_0$ цієї області, то функція $u(\mathbf{r})$ не може мати максимум (мінімум) у $\mathbf{r}_0$.

Завдання 1.7.1. Згадавши умови, що їх задовольняють другі похідні $\partial^2 u / \partial x^2$, $\partial^2 u / \partial y^2$, $\partial^2 u / \partial z^2$ в точках локального максимуму (мінімуму) функції u , доведіть лему 1.7.1.

Довільна функція u називається *гармонічною* в деякій області, якщо в цій області вона двічі неперервно диференційовна та задовольняє рівняння Лапласа

$$\Delta u(\mathbf{r}) = 0. \quad (1.50)$$

Теорема 1.7.1. Нехай функція $u(\mathbf{r})$ неперервна в обмеженій області Ω разом з її границею S і гармонічна в Ω . Тоді ніде всередині Ω вона не може набувати значень, більших за її максимальне значення на S і менших за її мінімальне значення на S .

Доведення. Нехай у деякій внутрішній точці $\mathbf{r}_0$ області Ω

$$u(\mathbf{r}_0) > u_S + \varepsilon, \quad \varepsilon > 0,$$

де u_S — максимальне значення $u(\mathbf{r})$ на S . У силу обмеженості області Ω існує таке число $\eta > 0$, що

$$\max_{\mathbf{r} \in S} \eta |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^2 < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тому для функції

$$v(\mathbf{r}) = u(\mathbf{r}) + \eta |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^2$$

маємо:

$$v_S = \max_{\mathbf{r} \in S} v(\mathbf{r}) \leq u_S + \frac{\varepsilon}{2},$$

звідки

$$v(\mathbf{r}_0) = u(\mathbf{r}_0) > u_S + \varepsilon \geq v_S + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отже, максимальне значення функції $v(\mathbf{r})$ досягається десь у середині Ω . У той самий час

$$\Delta v = -(-6\eta) > 0,$$

а це суперечить лемі 1.7.1.

Аналогічним способом доводимо, що значення, які функція $u(\mathbf{r})$ набуває у внутрішніх точках області Ω , не є меншими від мінімуму функції $u(\mathbf{r})$ на границі S .

Наслідок 1.7.1. *Функція, яка гармонічна скрізь у просторі E_3 і спадає до нуля на нескінченності, є тотожним нулем.*

Завдання 1.7.2. Доведіть наслідок 1.7.1 та, спираючись на нього, єдиність розв'язку рівняння Пуассона в E_3 у класі функцій, що спадають до нуля на нескінченності.

Завдання 1.7.3. Доведіть теорему Ірншоу: *будь-яка просторова конфігурація системи рознесених точкових зарядів (мас), між якими діють лише кулонівські сили (ньютонівські сили тяжіння), є нестійкою. Узагальніть її на системи, що знаходяться в зовнішньому статичному електричному (гравітаційному) полі.*

Вказівки. Стану стійкої рівноваги відповідає таке відносне розташування частинок, при якому їх повна потенціальна енергія U має строгий мінімум. Внесок в U від виділеного точкового заряду q , розташованого в точці $\mathbf{r}_0$, дорівнює $q\varphi(\mathbf{r}_0)$, де $\varphi(\mathbf{r})$ — сумарний потенціал електростатичного поля, створюваного рештою зарядів і зовнішнім полем. У силу фундаментального закону Кулона взаємодії точкових зарядів $\varphi(\mathbf{r})$ є гармонічною функцією в усіх точках простору, де немає зарядів. Тому в кожному околі точки $\mathbf{r}_0$, у якому, крім виділеного заряду q , інших зарядів немає, є точки $\mathbf{r}'$, де $q\varphi(\mathbf{r}') < q\varphi(\mathbf{r}_0)$. Аналогічний внесок від виділеної точкової маси m становить $m\varphi(\mathbf{r}_0)$,

а гармонічність сумарного потенціалу $\varphi(\mathbf{r})$ статичного гравітаційного поля в точках, де відсутні маси, є наслідком закону всесвітнього тяжіння Ньютона.

Завдання 1.7.4. Перевірте, що при будь-якому фіксованому значенні $\mathbf{r}'$ вираз $g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ є гармонічною функцією змінної $\mathbf{r}$ скрізь у просторі E_3 , за винятком точки $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$.

Завдання 1.7.5. Доведіть теорему Гаусса: нехай функція $u(\mathbf{r})$ гармонічна всередині обмеженої області D з кусково-гладкою границею S і неперервна разом зі своїми першими похідними в замкненій області $\bar{D}$. Тоді

$$\oint_S \frac{\partial u(\mathbf{r})}{\partial n} dS = 0. \quad (1.51)$$

Вказівка. Застосуйте формулу Гріна (1.35) до функцій $u(\mathbf{r})$ і $v(\mathbf{r}) \equiv 1$.

Теорема 1.7.2 (про середнє). Нехай функція $u(\mathbf{r})$ гармонічна в деякій області, що повністю охоплює кулю $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| \leq R$, $R > 0$. Тоді значення $u(\mathbf{r})$ у центрі кулі $\mathbf{r}_0$ дорівнює середньому арифметичному її значень на сфері $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| = R$:

$$u(\mathbf{r}_0) = \frac{1}{4\pi R^2} \oint_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|=R} u(\mathbf{r}) dS. \quad (1.52)$$

Доведення. Без втрати загальності можемо вважати, що початок системи координат збігається з точкою $\mathbf{r}_0$. Запишемо формулу Гріна (1.35) для пари функцій $\tilde{u}(\mathbf{r}) = u(\mathbf{r}) - u(\mathbf{0})$ і $g_\delta(\mathbf{r}) = 1/\sqrt{r^2 + \delta^2}$, $\delta > 0$, у кулі $r \leq R$. Оскільки $\tilde{u}(\mathbf{r})$ — гармонічна в цій кулі, то $\Delta \tilde{u}(\mathbf{r}) = 0$ і, у силу теореми Гаусса (1.51),

$$\oint_{r=R} \frac{\partial \tilde{u}(\mathbf{r})}{\partial n} dS = \oint_{r=R} \frac{\partial u(\mathbf{r})}{\partial n} dS = 0.$$

Беручи також до уваги, що $g_\delta(\mathbf{r}) = g_\delta(r)$ — сферично-симетрична,

$$\left. \frac{\partial g_\delta(\mathbf{r})}{\partial n} \right|_{r=R} = g'_\delta(R) = -\frac{R}{(R^2 + \delta^2)^{3/2}}, \quad \Delta g_\delta(\mathbf{r}) = -\frac{3\delta^2}{(r^2 + \delta^2)^{5/2}},$$

бачимо, що для вибраної пари функцій формула Гріна зводиться до рівності

$$\int_{r \leq R} \tilde{u}(\mathbf{r}) \frac{3\delta^2}{(r^2 + \delta^2)^{5/2}} d\mathbf{r} = \frac{R}{(R^2 + \delta^2)^{3/2}} \oint_{r=R} \tilde{u}(\mathbf{r}) dS. \quad (1.53)$$

Далі скористаємося тим, що $u(\mathbf{r})$ — неперервно диференційовна. Тоді

$$\max_{r \leq R} \frac{|\tilde{u}(\mathbf{r})|}{r} = \max_{r \leq R} \frac{|u(\mathbf{r}) - u(\mathbf{0})|}{r} = M < \infty$$

і, з огляду на співвідношення

$$\frac{1}{\sqrt{r^2 + \delta^2}} \leq \frac{1}{r}, \quad \max_{\delta > 0} \frac{\delta}{r^2 + \delta^2} = \frac{1}{2r},$$

робимо висновок, що підінтегральна функція в лівій частині рівності (1.53) має незалежну від δ та інтегровну мажоранту:

$$\left| \tilde{u}(\mathbf{r}) \frac{3\delta^2}{(r^2 + \delta^2)^{5/2}} \right| \leq \frac{3|\tilde{u}(\mathbf{r})|}{r} \left(\frac{\delta}{r^2 + \delta^2} \right)^2 \frac{r}{\sqrt{r^2 + \delta^2}} \leq \frac{3M}{4r^2}.$$

Оскільки, з другого боку, сама ця функція прямує до нуля при $\delta \rightarrow 0$, то за теоремою Лебега ліва частина (1.53) прямує до нуля при $\delta \rightarrow 0$. Обчисливши інтеграл у правій частині (1.53) при такому граничному переході, дістаємо бажану рівність:

$$\oint_{r=R} \tilde{u}(\mathbf{r}) dS = \oint_{r=R} u(\mathbf{r}) dS - 4\pi R^2 u(\mathbf{0}) = 0.$$

Завдання 1.7.6. Доведіть наступний наслідок із теореми 1.7.2: функція $u(\mathbf{r})$, яка є гармонічною в D і неперервною в $\bar{D}$, може досягати у внутрішній точці $\mathbf{r}_0 \in D$ свого найбільшого значення M (чи найменшого m) у $\bar{D}$ тоді й лише тоді, коли $u(\mathbf{r}) \equiv M$ (чи $u(\mathbf{r}) \equiv m$).

Вказівка. Скористайтеся теоремою про середнє для значення функції $M - u(\mathbf{r})$ (чи $u(\mathbf{r}) - m$) у точці $\mathbf{r}_0 \in D$ і тим фактом, що інтеграл від невід'ємної неперервної функції по певній множині (поверхні, кривій) дорівнює нулю тоді, коли така функція дорівнює нулю в усіх точках цієї множини.

Зауваження 1.7.1. З огляду на результат завдання 1.7.6 теорема 1.7.1 допускає наступне уточнення:

Принцип максимуму (мінімуму) для гармонічних функцій. Нехай функція $u(\mathbf{r})$ неперервна в обмеженій області Ω разом з її границею

S і гармонічна в Ω , M і m — відповідно найбільше і найменше значення $u(\mathbf{r})$ на S . Тоді у внутрішніх точках Ω справджується нерівність

$$m \leq u(\mathbf{r}) \leq M, \quad (1.54)$$

при цьому знак рівності досягається хоча б в одній внутрішній точці Ω тоді і лише тоді, коли $u(\mathbf{r})$ — тотожна стала.

Укажемо, що визначену в просторі E_3 функцію називають *фінітною*, якщо вона набуває ненульових значень лише всередині деякої сфери скінченного радіуса.

Лема 1.7.2. *Будь-яку двічі неперервно диференційовну фінітну функцію $\psi(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} \in E_3$, можна подати у вигляді*

$$\psi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \int_{E_3} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \Delta' \psi(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'. \quad (1.55)$$

Доведення. Достатньо довести виконання рівності (1.55) у точці $\mathbf{r} = \mathbf{0}$. Після цього правильність (1.55) у будь-якій іншій точці $\mathbf{r}_0 \in E_3$ встановлюється просто заміною $\psi(\mathbf{r}) \rightarrow \psi(\mathbf{r}_0 + \mathbf{r})$.

Запишемо формулу Гріна (1.35) для пари функцій $\tilde{\psi}(\mathbf{r}) = \psi(\mathbf{r}) - \psi(\mathbf{0})$ і введеної вище $g_\delta(\mathbf{r}) = g_\delta(r)$ у кулі $r \leq R$, узявши R настільки великим, щоб фінітна функція $\psi(\mathbf{r})$ та її похідні вже дорівнювали б нулю при $r \geq R$. Оскільки на сфері $r = R$ функція $\psi(\mathbf{r})$ та її похідні дорівнюють нулю, маємо:

$$\int_{r < R} g_\delta(r) \Delta \tilde{\psi}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} + \int_{r < R} \tilde{\psi}(\mathbf{r}) \frac{3\delta^2}{(r^2 + \delta^2)^{5/2}} d\mathbf{r} = -\frac{4\pi R^3}{(R^2 + \delta^2)^{3/2}} \psi(\mathbf{0}). \quad (1.56)$$

Переходячи далі до границі $\delta \rightarrow 0$ і користуючись тими ж аргументами, що застосовувалися при доведенні теореми 1.7.2, отримуємо з (1.56) зазначену рівність:

$$\psi(\mathbf{0}) = -\frac{1}{4\pi} \int_{E_3} \frac{1}{|\mathbf{r}|} \Delta \psi(\mathbf{r}) d\mathbf{r}.$$

Доведемо тепер, що для неперервно диференційовної функції F , яка задовольняє умову (1.48), той розв'язок рівняння Пуассона (1.49), який спадає на нескінченності до нуля, дається ньютонівським потенціалом. Спершу переконаємося, що ньютонівський потенціал для функції F є двічі диференційовний.

Оскільки функція $1/|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2$ — інтегровна по будь-якій обмеженій області, неважко перевірити, що перші похідні від ньютонівського потенціалу (1.47) можна обчислювати, диференціюючи під знаком інтеграла. Візьмемо, для прикладу, похідну

$$\frac{\partial T(\mathbf{r})}{\partial x} = \frac{1}{4\pi k} \int_{E_3} \frac{x' - x}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^3} F(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' . \quad (1.57)$$

Маємо:

$$\left| \frac{\partial T(\mathbf{r})}{\partial x} \right| \leq \frac{1}{4\pi k} \int_{E_3} \left| \frac{x' - x}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^3} F(\mathbf{r}') \right| d\mathbf{r}' \leq \frac{1}{4\pi k} \int_{E_3} \frac{1}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^2} |F(\mathbf{r}')| d\mathbf{r}' < \infty .$$

Покажемо тепер, що з диференційовності F випливає й диференційовність похідної (1.57).

В окремому випадку, коли функція F не тільки диференційовна, але ще й фінітна, тобто тотожно дорівнює нулю зовні сфери зі скінченним радіусом, за допомогою заміни змінної $\mathbf{r}'' = \mathbf{r}' - \mathbf{r}$ перепишемо (1.57) у вигляді

$$\frac{\partial T(\mathbf{r})}{\partial x} = \frac{1}{4\pi k} \int_{E_3} \frac{x''}{|\mathbf{r}''|^3} F(\mathbf{r} + \mathbf{r}'') d\mathbf{r}'' . \quad (1.58)$$

Вираз (1.58) уже можна диференціювати під знаком інтеграла.

У загальному ж випадку розіб'ємо F на суму $F_1 + F_2$ двох диференційовних доданків, один із яких дорівнює нулю зовні сфери зі скінченним радіусом R , а другий — усередині сфери радіусом $R_1 < R$. Таке розбиття можна здійснити, наприклад, за допомогою нескінченно диференційовних функцій

$$\varphi_1(\mathbf{r}) = \begin{cases} e^{-\frac{R^2}{R^2-r^2}}, & r < R, \\ 0, & r \geq R, \end{cases} \quad \varphi_2(\mathbf{r}) = \begin{cases} 0, & r \leq R_1, \\ e^{-\frac{R_1^2}{r^2-R_1^2}}, & r > R_1, \end{cases}$$

якщо покласти

$$F_1(\mathbf{r}) = \frac{\varphi_1(\mathbf{r})F(\mathbf{r})}{\varphi_1(\mathbf{r}) + \varphi_2(\mathbf{r})}, \quad F_2(\mathbf{r}) = \frac{\varphi_2(\mathbf{r})F(\mathbf{r})}{\varphi_1(\mathbf{r}) + \varphi_2(\mathbf{r})}.$$

Тоді внесок

$$\frac{1}{4\pi k} \int_{E_3} \frac{x' - x}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^3} F_2(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'$$

у похідну $\partial T/\partial x$ від F_2 можна, очевидно, диференціювати під знаком інтеграла при $r < R_1$, а відповідний внесок від F_1 зводиться до інтеграла виду (1.58), який теж можна диференціювати під знаком інтеграла.

Тепер залишається довести, що за наведених умов ньютонівський потенціал (1.47) задовольняє рівняння Пуассона (1.49).

Візьмемо довільну двічі неперервно диференційовну фінітну функцію ψ , помножимо обидві частини рівності (1.55) на густину потужності джерел тепла $F(\mathbf{r})$, і зінтегруємо так здобуту рівність по всьому простору E_3 . Маємо:

$$\int_{E_3} \psi(\mathbf{r}) F(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = -\frac{1}{4\pi} \int_{E_3} \left(\int_{E_3} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \Delta' \psi(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \right) F(\mathbf{r}) d\mathbf{r}.$$

При виконанні зазначених умов у повторному інтегралі в правій частині цієї рівності можна змінити порядок інтегрування. У результаті справа дістаємо:

$$-\int_{E_3} \left(\int_{E_3} \frac{1}{4\pi k |\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} F(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \right) k \Delta' \psi(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' = -\int_{E_3} T(\mathbf{r}') k \Delta' \psi(\mathbf{r}') d\mathbf{r}',$$

де $T(\mathbf{r})$ — ньютонівський потенціал для густини $F(\mathbf{r})$. Оскільки $T(\mathbf{r})$ і $\psi(\mathbf{r})$ — двічі неперервно диференційовні функції, а $\psi(\mathbf{r})$ до того ж і фінітна, останній інтеграл можна переписати у вигляді

$$\int_{E_3} T(\mathbf{r}') k \Delta' \psi(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' = \int_{E_3} \psi(\mathbf{r}) k \Delta T(\mathbf{r}) d\mathbf{r}.$$

Бачимо, що

$$\int_{E_3} \psi(\mathbf{r}) [k \Delta T(\mathbf{r}) + F(\mathbf{r})] d\mathbf{r} = 0.$$

Беручи до уваги довільність функції ψ , остаточно дістаємо:

$$k \Delta T(\mathbf{r}) + F(\mathbf{r}) = 0$$

— рівняння (1.49).

Контрольні питання до підрозділу 1.7

1. Поясніть, яка особливість рівняння Лапласа є першопричиною принципу максимуму (мінімуму) для гармонічних функцій?

2. Чому дорівнює середнє значення функції по поверхні кулі, яка знаходиться в області, де ця функція гармонічна?
3. Чому дорівнює інтеграл по границі обмеженої області від нормальної похідної функції, яка є гармонічною і неперервно диференційовною в цій області, включаючи її границю?
4. Як поновити двічі неперервно диференційовну фінітну функцію після дії на неї оператора Лапласа?

1.8. ВИМУШЕНІ ТЕПЛОВІ КОЛИВАННЯ. РІВНЯННЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА

Якщо густина потужності джерел змінюється з часом за гармонічним законом

$$F(\mathbf{r}, t) = F_0(\mathbf{r}) \cos(\omega t - \varphi(\mathbf{r})), \quad (1.59)$$

то поступово й температура в усіх точках середовища починає змінюватися гармонічно, з тією ж самою частотою ω .

Справді, нехай густина потужності джерел задається виразом (1.59), де $F_0(\mathbf{r})$ — інтегровна або принаймні обмежена функція. Щоб знайти граничне значення температури $T(\mathbf{r}, t)$ при $t \rightarrow \infty$, перепишемо (1.59) у вигляді

$$F(\mathbf{r}, t) = \operatorname{Re} \tilde{F}_0(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}, \quad \tilde{F}_0(\mathbf{r}) = F_0(\mathbf{r}) e^{i\varphi(\mathbf{r})},$$

та підставимо у формулу (1.38) замість функції $f(\mathbf{r}, t)$ комплекснозначну функцію

$$\tilde{f}(\mathbf{r}, t) = \tilde{f}_0(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}, \quad \tilde{f}_0(\mathbf{r}) = \frac{1}{c\rho} \tilde{F}_0(\mathbf{r}).$$

Обчисливши з нею комплекснозначну функцію ($\tau = t - t'$)

$$\tilde{T}(\mathbf{r}, t) = \int_0^t dt' \int_{E_3} G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \tilde{f}(\mathbf{r}', t') d\mathbf{r}' = \int_0^t d\tau \int_{E_3} G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', \tau) \tilde{f}(\mathbf{r}', t - \tau) d\mathbf{r}',$$

далі перейдемо до границі функції $\tilde{T}(\mathbf{r}, t)$ при великих значеннях змінної t , після чого за допомогою формули

$$\operatorname{Re} e^{i\alpha} = \cos \alpha \quad (\operatorname{Im} \alpha = 0)$$

відокремимо дійсну частину цієї границі. Це і дасть відповідь.

Змінюючи у виразі для $\tilde{T}(\mathbf{r}, t)$ порядок інтегрування за $\mathbf{r}'$ і τ , при $t \rightarrow \infty$ дістаємо:

$$\begin{aligned}\tilde{T}(\mathbf{r}, t) &= \int_{E_3} d\mathbf{r}' \int_0^t d\tau \frac{1}{(4\pi a^2 \tau)^{3/2}} e^{-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2}{4a^2 \tau}} e^{-i\omega(t-\tau)} \tilde{f}_0(\mathbf{r}') = \\ &= e^{-i\omega t} \int_{E_3} d\mathbf{r}' G_\omega(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|) \tilde{F}_0(\mathbf{r}'),\end{aligned}\quad (1.60)$$

де

$$G_\omega(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|) = \frac{1}{c\rho(4\pi a^2)^{3/2}} \int_0^\infty \frac{d\tau}{\tau^{3/2}} e^{-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2}{4a^2 \tau}} e^{i\omega\tau}.\quad (1.61)$$

Щоб знайти елементарний вираз для інтеграла (1.61), розглянемо інтеграл виду

$$\Phi_\alpha(z) = \int_0^\infty \frac{d\tau}{\tau^{3/2}} e^{-\frac{\alpha}{\tau} + iz\tau},\quad (1.62)$$

який при фіксованому параметрі $\alpha > 0$ є функцією параметра z , визначеною у верхній комплексній півплощині та на дійсній осі. Значимо, що під знаком інтеграла (1.62) стоїть функція від z , яка є однозначною, обмеженою й аналітичною в замкненій верхній півплощині та має інтегровну й незалежну від z мажоранту:

$$\left| \frac{1}{\tau^{3/2}} e^{-\frac{\alpha}{\tau} + iz\tau} \right| \leq \frac{e^{-\frac{\alpha}{\tau} - \text{Im } z\tau}}{\tau^{3/2}} \leq \frac{e^{-\frac{\alpha}{\tau}}}{\tau^{3/2}}.$$

З цього випливає, що функція $\Phi_\alpha(z)$ є однозначною й аналітичною у верхній півплощині і має неперервні граничні значення на дійсній осі. Якщо при цьому $\Phi_\alpha(z)$ є елементарною аналітичною функцією, то згідно з теоремою єдиності для аналітичних функцій її можна знайти, обчисливши інтеграл (1.62) при $z = i\beta$, $\beta > 0$, та аналітично продовживши так здобутий вираз на всю верхню півплощину — простіше кажучи, замінивши всюди в цьому виразі β на $-i\beta$.

Отже, обчислимо $\Phi_\alpha(i\beta)$, $\beta > 0$. Почнемо із заміни змінної $\tau = u^2 \sqrt{\alpha/\beta}$, яка дає

$$\Phi_\alpha(i\beta) = 2\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \int_0^\infty \frac{du}{u^2} e^{-\sqrt{\alpha\beta} \left(\frac{1}{u^2} + u^2 \right)}.$$

Розіб'ємо цей інтеграл на суму двох інтегралів, один з яких береться від нуля до одиниці, а другий — від одиниці до нескінченності, після чого зробимо в першому інтегралі підстановку $u' = u^{-1}$, перетворюючи його тим самим теж в інтеграл від одиниці до нескінченності. Дістаємо:

$$\Phi_{\alpha}(i\beta) = 2\sqrt[4]{\frac{\beta}{\alpha}} \int_1^{\infty} du \left(\frac{1}{u^2} + 1 \right) e^{-\sqrt{\alpha\beta} \left(\frac{1}{u^2} + u^2 \right)} = 2\sqrt[4]{\frac{\beta}{\alpha}} e^{-2\sqrt{\alpha\beta}} \int_1^{\infty} du \left(\frac{1}{u^2} + 1 \right) e^{-\sqrt{\alpha\beta} \left(\frac{1}{u} - u \right)^2}.$$

Ще одна заміна змінної $w = u - u^{-1}$ в останньому інтегралі остаточно дає:

$$\Phi_{\alpha}(i\beta) = 2\sqrt[4]{\frac{\beta}{\alpha}} e^{-2\sqrt{\alpha\beta}} \int_0^{\infty} dw e^{-\sqrt{\alpha\beta} w^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-2\sqrt{\alpha\beta}}.$$

Відповідно,

$$\Phi_{\alpha}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-2\sqrt{-i\alpha z}}, \quad (1.63)$$

при цьому треба брати ту вітку кореня в показнику експоненти (1.63), яка додатна на уявній осі у верхній півплощині.

Повертаючись до інтеграла (1.61) і враховуючи (1.63), дістаємо:

$$G_{\omega}(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) = \frac{1}{4\pi k} \frac{e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} e^{i\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (1.64)$$

Отже, при $t \rightarrow \infty$ комплекснозначна функція $\tilde{T}(\mathbf{r}, t)$ змінюється за гармонічним законом

$$\tilde{T}(\mathbf{r}, t) = \tilde{A}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}, \quad (1.65)$$

з частотою ω і комплексною амплітудою

$$\tilde{A}(\mathbf{r}) = \int_{E_3} d\mathbf{r}' G_{\omega}(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \tilde{F}_0(\mathbf{r}'). \quad (1.66)$$

Звідси випливає, що температура в кожній точці середовища змінюється при $t \rightarrow \infty$ за законом

$$T(\mathbf{r}, t) = |\tilde{A}(\mathbf{r})| \cos(\omega t - \psi(\mathbf{r})), \quad \psi(\mathbf{r}) = \arg \tilde{A}(\mathbf{r}). \quad (1.67)$$

Функція, яка описує усталену температуру системи в режимі вимушених гармонічних коливань, має, звичайно ж, задовольняти рівняння теплопровідності. Підставляючи вираз (1.65) у рівняння

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} = a^2 \Delta \tilde{T} + \tilde{f}_0 e^{-i\omega t},$$

дістаємо рівняння для комплексної амплітуди вимушених гармонічних коливань температури:

$$-\Delta \tilde{A}(\mathbf{r}) - \frac{i\omega}{a^2} \tilde{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{k} \tilde{F}_0(\mathbf{r}). \quad (1.68)$$

Узагалі, диференціальне рівняння виду

$$-\Delta u(\mathbf{r}) - zu(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}), \quad (1.69)$$

де z — дійсний або комплексний параметр, називають (*неоднорідним*) *рівнянням Гельмгольца*. Його можна розглядати як природне узагальнення рівняння Пуассона. За допомогою прийомів, подібних до тих, що використовувалися для аналізу ньютонівських потенціалів, можна довести, що для комплексних або від'ємних значень параметра z і неперервно диференційовної функції $f(\mathbf{r})$, яка в необмеженому просторі E_3 задовольняє умови

$$|f(\mathbf{r})|_{r \rightarrow \infty} = O(r^n), \quad |\nabla f(\mathbf{r})|_{r \rightarrow \infty} = O(r^m), \quad -\infty < n, m < \infty, \quad (1.70)$$

формула

$$u(\mathbf{r}) = \int_{E_3} G_z(\mathbf{r}, \mathbf{r}') f(\mathbf{r}') d\mathbf{r}', \quad (1.71)$$

де

$$G_z(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{i\sqrt{z}|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}, \quad \text{Im} \sqrt{z} > 0, \quad (1.72)$$

дає єдиний розв'язок рівняння Гельмгольца в класі двічі неперервно диференційовних функцій, модулі яких разом з модулями їх перших і других похідних можуть зростати при $r \rightarrow \infty$ щонайбільше за степеневим законом. При цьому перші похідні функції $u(\mathbf{r})$ можна обчислювати, диференціюючи (1.71) під знаком інтеграла.

Функція $G_z(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = G_z(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$, наведена формулою (1.72), називається *функцією Гріна рівняння Гельмгольца*.

Завдання 1.8.1. Перевірте, що при фіксованих значеннях змінної $\mathbf{r}'$ функція Гріна (1.72) скрізь у просторі E_3 , за винятком точки $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$, задовольняє *однорідне рівняння Гельмгольца*

$$-\Delta u(\mathbf{r}) - zu(\mathbf{r}) = 0. \quad (1.73)$$

Зауваження 1.8.1. Неперервна диференційовність функції $f(\mathbf{r})$ не є обов'язковою умовою для того, щоб розв'язок рівняння (1.69) можна було подати у вигляді (1.71). Зокрема, при довільному комплексному або від'ємному z підстановка у формулу (1.71) будь-якої інтегровної з квадратом функції $f(\mathbf{r})$ дає неперервну та інтегровну з квадратом функцію $u(\mathbf{r})$, яка є єдиним *узагальненим розв'язком* (див. підрозділ 4.4) рівняння (1.69) у класі інтегровних з квадратом функцій, що мають інтегровні з квадратом *узагальнені другі похідні*. Звідси випливає, що для функцій $u(\mathbf{r})$ (зокрема двічі неперервно диференційовних) із цього класу при $\text{Im } z \neq 0$ або при $z < 0$ справджується тотожність

$$u(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{E_3} \frac{e^{i\sqrt{z}|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} [-\Delta' u(\mathbf{r}') - zu(\mathbf{r}')] d\mathbf{r}', \quad \text{Im } \sqrt{z} > 0. \quad (1.74)$$

Зауваження 1.8.2. Єдиність та інтегральні зображення певних розв'язків рівняння Гельмгольца при додатних z потребують окремого розгляду. Ці випадки мають фундаментальне значення для дослідження таких фізичних процесів як поширення електромагнітних і звукових хвиль, розсіювання атомів і елементарних частинок тощо. Відповідні задачі розглядаються пізніше.

Зауваження 1.8.3. Згідно з формулою (1.74), інтегральне перетворення (1.71) з ядром (1.72) можна розглядати, при певних застереженнях, як оператор, обернений до диференціального оператора $[-\Delta - z]$, тобто як операцію, що відновлює функцію певного класу після дії на цю функцію оператора $[-\Delta - z]$. Тоді з формального співвідношення

$$[-\Delta - z_1]^{-1} [-\Delta - z_2]^{-1} = (z_1 - z_2) [-\Delta - z_1]^{-1} [-\Delta - z_2]^{-1}$$

випливає, що при $\text{Im } \sqrt{z_1} > 0$ і $\text{Im } \sqrt{z_2} > 0$ справджується *тотожність Гільберта*:

$$\frac{1}{z_1 - z_2} [G_{z_1}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - G_{z_2}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')] = \int_{E_3} G_{z_1}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'') G_{z_2}(\mathbf{r}'', \mathbf{r}') d\mathbf{r}''. \quad (1.75)$$

Зокрема

$$\int_{E_3} G_z(\mathbf{r}, \mathbf{r}'') G_z(\mathbf{r}'', \mathbf{r}') d\mathbf{r}'' = \frac{i}{8\pi\sqrt{z}} e^{i\sqrt{z}|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \quad (1.76)$$

Завдання 1.8.2. Переконайтеся у правильності формул (1.75) і (1.76).

Вказівка. Це можна зробити, обчисливши інтеграли в цих формулах безпосередньо. Оскільки $G_z(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = G_z(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$, при обчисленнях зручно зробити заміну змінної $\mathbf{r}'' \rightarrow \mathbf{p} = \mathbf{r}'' - \mathbf{r}' = (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ і перейти до сферичних координат з полярною віссю $\tilde{z}$, напрямленою вздовж вектора $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$.

З наведених міркувань випливає, що при $\omega > 0$ амплітуди (1.66) усталених гармонічних коливань температури, зумовлених гармонічними джерелами тепла з неперервно диференційовною амплітудою густини потужності $\tilde{F}_0$, що задовольняє умови (1.70), справді є єдиними розв'язками рівняння Гельмгольца (1.68) у класі функцій, модулі яких можуть зростати на нескінченності щонайбільше за степеневим законом.

З'ясуємо наприкінці цього підрозділу фізичний зміст функції Гріна (1.64). Нехай деяке джерело тепла загальною потужністю q знаходиться в нескінченно малому околі точки $\mathbf{r}_0$ і виділяє та поглинає тепло за гармонічним законом з частотою ω . Без обмеження загальності можна вважати, що його фаза $\varphi = 0$. Тоді з наведених вище формул випливає, що

$$\tilde{A}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi k} \frac{e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} e^{i\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}, \quad (1.77)$$

і що усталена температура

$$T(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi k} \frac{e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} \cos\left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|\right). \quad (1.78)$$

Вираз (1.78) називається *сферичною тепловою хвилею*. Порівнюючи формули (1.64) і (1.77), бачимо, що з точністю до множника q функція Гріна $G_\omega(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$ визначає комплексну амплітуду усталених вимушених теплових коливань, які викликаються в середовищі гармонічним точковим джерелом тепла з частотою ω , розташованим у точці $\mathbf{r}_0$.

Завдання 1.8.3. Знайдіть амплітуду усталених вимушених коливань температури у випадку, коли густина потужності джерел (1.59) має такі параметри:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{\pi}{2}, \quad F_0(\mathbf{r}) = \begin{cases} q_0, & 0 < r < R, \\ 0, & r > R. \end{cases}$$

Завдання 1.8.4. Знайдіть амплітуду усталених вимушених коливань температури у випадку, коли однакові гармонічні джерела тепла рівномірно розподіляються в тонкому шарі $|x| < d$, $d \rightarrow 0$.

Контрольні питання до підрозділу 1.8

1. Як змінюватиметься з часом температура в довільній точці необмеженого однорідного середовища внаслідок дії джерел тепла, густина потужності яких є обмеженою або інтегрованою функцією просторових координат і змінюється в часі за гармонічним законом зі скрізь однаковою частотою?
2. Як знайти амплітуду вимушених коливань температури в довільній точці необмеженого однорідного середовища, що виникають під дією джерел тепла, описаних у попередньому питанні?
3. Опишіть алгоритм, за яким можна знайти двічі неперервно диференційовну й обмежену разом зі своїми похідними функцію $u(\mathbf{r})$, якщо відома функція $-\Delta u(\mathbf{r}) - zu(\mathbf{r})$, де $\text{Im } z \neq 0$, Δ — оператор Лапласа.
4. При розв'язанні яких фізичних задач з'являється функція Гріна рівняння Гельмгольца з уявними значеннями параметра z ?

2. РІВНЯННЯ ДИФУЗІЇ

2.1. ЕЛЕМЕНТАРНЕ ВИВЕДЕННЯ РІВНЯННЯ ДИФУЗІЇ

Розподіл домішкових частинок у середовищі в довільний момент часу визначається їх числовою густиною (надалі — просто густиною)

$$n(\mathbf{r}, t) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta N(\mathbf{r}, t)}{\Delta V}, \quad (2.1)$$

де $\Delta N(\mathbf{r}, t)$ — кількість домішкових частинок у малому околі точки $\mathbf{r}$ у момент часу t , ΔV — об'єм цього околу.

Дифузією називається процес вирівнювання густини домішкових мікрочастинок у середовищі (газі, рідині або твердому тілі) унаслідок їх зіткнень з молекулами, атомами, іонами або ядрами середовища.

Локальні зміни густини домішкових мікрочастинок характеризуються *вектором густини потоку частинок* $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$, напрям якого, за означенням, збігається з напрямом руху домішкових частинок у малому околі точки $\mathbf{r}$ у момент часу t , а модуль дорівнює кількості частинок, що проходять за одиницю часу через поверхню з одиничною площею перпендикулярно до неї. Тому кількість частинок ΔN , що проходять за інтервал часу $(t, t + \Delta t)$ через поверхню площею ΔS , що є перпендикулярною до потоку $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ і містить точку $\mathbf{r}$, дається числом $|\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)| \Delta S \Delta t$.

Узагалі, вектор густини потоку домішкових частинок $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ є сумою двох векторів, $\mathbf{j}_d(\mathbf{r}, t)$ і $\mathbf{j}_D(\mathbf{r}, t)$. Вектор $\mathbf{j}_d(\mathbf{r}, t)$ виникає тоді, коли процес дифузії відбувається в рухомому середовищі. Він описує перенесення домішкових частинок разом із середовищем. Відповідно,

$$\mathbf{j}_d(\mathbf{r}, t) = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) n(\mathbf{r}, t), \quad (2.2)$$

де $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ — вектор швидкості руху середовища в точці $\mathbf{r}$ у момент часу t відносно нерухомого спостерігача.

Вектор $\mathbf{j}_D(\mathbf{r}, t)$ описує перенесення домішкових частинок унаслідок саме міжчастинкових зіткнень. Він називається вектором густини дифузійного потоку домішкових частинок. Відповідно до закону Фіка, в однорідному ізотропному середовищі

$$\mathbf{j}_D(\mathbf{r}, t) = -D \text{grad } n(\mathbf{r}, t), \quad (2.3)$$

де додатний скалярний коефіцієнт D називають коефіцієнтом дифузії. Якщо дифузія відбувається в неоднорідному анізотропному середовищі, то коефіцієнт дифузії може бути тензорною величиною $D_{ik}(\mathbf{r})$, що залежить від координат. У цьому випадку закон Фіка має вигляд

$$j_{D,i}(\mathbf{r}, t) = - \sum_{k=1}^3 D_{ik}(\mathbf{r}) \frac{\partial n(\mathbf{r}, t)}{\partial x_k}, \quad (2.4)$$

де x_1, x_2, x_3 позначають відповідно координати x, y, z , а індекси i, k — компоненти векторів і тензорів в системі координат x_1, x_2, x_3 .

Домішкові частинки можуть також утворюватися чи знищуватися в середовищі внаслідок хімічних або ядерних реакцій. Внесок таких процесів у густину домішкових частинок визначається за допомогою функції джерел $f(n(\mathbf{r}, t), \mathbf{r}, t)$, яка має такий зміст: кількість домішкових частинок, що утворюються чи знищуються в малому околі об'ємом ΔV точки $\mathbf{r}$ за інтервал часу $(t, t + \Delta t)$, дорівнює $f(n(\mathbf{r}, t), \mathbf{r}, t) \Delta V \Delta t$.

Зокрема для реакцій першого порядку

$$f(n(\mathbf{r}, t), \mathbf{r}, t) = \chi(\mathbf{r}) n(\mathbf{r}, t), \quad (2.5)$$

де $\chi(\mathbf{r})$ — коефіцієнт реакції. Для зовнішніх джерел або поглиначів $f(\mathbf{r}, t)$ може й не залежати від густини $n(\mathbf{r}, t)$.

Завдання 2.1.1. Користуючись законом збереження кількості домішкових частинок та аналогією між процесами дифузії й теплопровідності, виведіть узагальнене рівняння дифузії в однорідному ізоотропному середовищі, яке враховує як рух середовища, так і можливе утворення або знищення домішкових частинок унаслідок певних реакцій першого порядку в ньому.

Відповідь:

$$\frac{\partial n(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -\text{div}[\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) n(\mathbf{r}, t)] + D \Delta n(\mathbf{r}, t) + \chi(\mathbf{r}) n(\mathbf{r}, t). \quad (2.6)$$

Завдання 2.1.2. Запишіть рівняння (2.6) для випадку, коли дифузія домішкових частинок відбувається в однорідному потоці рідини, що тече вздовж осі x зі швидкістю V_0 .

Завдання 2.1.3. Сформулюйте задачу Коші для процесу вирівнювання густини домішкових частинок у необмеженому нерухомому

середовищі, вважаючи, що цей процес описується рівнянням (2.6), а густина є функцією, неперервно диференційовною за часом і двічі неперервно диференційовною за координатами, що спадає до нуля на нескінченності. Доведіть єдиність розв'язку цієї задачі.

Вказівка. Зведіть задачу Коші до відповідної задачі для рівняння теплопровідності.

Завдання 2.1.4. Побудуйте розв'язок задачі Коші, сформульованої в завданні 2.1.3, для рівняння (2.6) зі сталими параметрами $\mathbf{v}$, D і χ .

Вказівка. Припускаючи, що вісь x координатної системи напрямлена вздовж вектора $\mathbf{v}$, та користуючись підстановкою

$$n(\mathbf{r}, t) = e^{\alpha x + \beta t} w(\mathbf{r}, t),$$

зведіть рівняння (2.6) до рівняння типу рівняння теплопровідності зі сталими коефіцієнтами.

Завдання 2.1.5. Запишіть рівняння дифузії для домішкових частинок у неоднорідному анізотропному середовищі, у якому ці частинки ані утворюються, ані знищуються.

Вказівка. Скористайтеся загальним виразом для закону збереження кількості частинок

$$\frac{\partial n(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = 0$$

і формулами (2.2), (2.4).

Відповідь:

$$\frac{\partial n(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -\operatorname{div}[\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)n(\mathbf{r}, t)] + \sum_{i,k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left[D_{ik}(\mathbf{r}) \frac{\partial n(\mathbf{r}, t)}{\partial x_k} \right]. \quad (2.7)$$

Контрольні питання до підрозділу 2.1

1. На які складові частини можна розкласти вектор густини потоку домішкових частинок? Як ці складові пов'язані з густиною домішкових частинок?
2. На яких законах фізики ґрунтується елементарне виведення рівняння дифузії?
3. Як формулюється задача Коші для лінійного рівняння дифузії?
4. Який вигляд має функція Гріна для рівняння, що описує процес дифузії в нерухомому однорідному середовищі, у якому не відбуваються ані хімічні, ані ядерні реакції?

2.2. ІМОВІРНІСНИЙ ОПИС РУХУ ДОМІШКОВИХ ЧАСТИНОК. РІВНЯННЯ ЧЕПМЕНА — КОЛМОГорова

Спостерігатимемо за пересуванням окремої домішкової частинки в деякому середовищі за умов, що роздільна здатність приладів для визначення її положень та інтервалів часу між послідовними спостереженнями є не лише грубішою за природні квантовомеханічні обмеження на точність вимірювань, але й за середню відстань і середній час зіткнення між частинками середовища та характерні періоди їх коливань. Якщо при цьому лінійні розміри і маса розглядуваної частинки не перевищують на багато порядків відповідні розміри і масу частинок середовища, то її спостережувана траєкторія являтиме собою не гладку криву, а ламану лінію, довжини ланок якої можуть нерегулярно змінюватися в межах, що значно перевищують допустиму похибку вимірювання довжини, а дві такі ламані, отримані в тотожних за умовами експериментах, можуть істотно відрізнитися. Іншими словами, для частинки, яка в початковий момент часу t_0 знаходилася в заданій точці простору $\mathbf{r}_0$, координати її положень у подальші моменти часу $t > t_0$ видаватимуться *випадковими величинами*, а їх упорядковані в часі послідовні значення утворюватимуть *випадковий*, або *ймовірнісний, процес*. Кінематика частинки, послідовні переміщення якої відображає такий процес, зводиться до порівняльного опису можливостей її потрапляння в задані моменти часу $t > t_0$ в різні області простору.

Виділимо малий окіл Ω об'ємом ΔV деякої точки $\mathbf{r}$ і розглядатимемо як сприятливу таку подію, коли домішкова частинка в момент часу t спостерігається в Ω . Нехай спостереження проводяться одночасно за N тотожними домішковими частинками, що ніяк не впливають одна на одну, і дослід показує, що в момент часу t в Ω знаходиться N' частинок із N . Тоді, за означенням, *імовірністю* $\Delta w_\Omega(\mathbf{r}, t)$ знайти домішкову частинку в Ω в момент часу t називається границя частки N'/N при $N \rightarrow \infty$.

Згідно з цим означенням імовірність $\Delta w_\Omega(\mathbf{r}, t)$ є безрозмірною величиною з такими властивостями:

- 1) $0 \leq \Delta w_\Omega(\mathbf{r}, t) \leq 1$;
- 2) якщо окіл Ω' точки $\mathbf{r}$ цілком покриває окіл Ω цієї ж точки, $\Omega \subset \Omega'$, то $\Delta w_\Omega(\mathbf{r}, t) \leq \Delta w_{\Omega'}(\mathbf{r}, t)$;
- 3) якщо при зростанні n послідовність вкладених околів $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \dots \subset \Omega_n \subset \dots$ точки $\mathbf{r}$ розширюється так, що поглинає кож-

ну точку області Ξ , у якій перебувають усі спостережувані частинки, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta w_{\Omega n}(\mathbf{r}, t) = 1.$$

Будемо надалі вважати, що домішкова частинка перебуває в необмеженому тривимірному середовищі й у своєму випадковому блуканні не може з ненульовою ймовірністю застрягати на ненульовий час у якихось ізольованих точках або конгломератах точок середовища, що утворюють многовиди з розмірністю, нижчою за три. Зазначене обмеження на рух домішкової частинки зумовлює існування для будь-якого $t > t_0$ невід'ємної інтегрованої функції $p(\mathbf{r}, t)$, пов'язаної з уведеними ймовірностями $\Delta w_{\Omega}(\mathbf{r}, t)$ співвідношеннями

$$\Delta w_{\Omega}(\mathbf{r}, t) = \int_{\mathbf{r}' \in \Omega} p(\mathbf{r}', t) d\mathbf{r}', \quad \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta w_{\Omega}(\mathbf{r}, t)}{\Delta V} = p(\mathbf{r}, t). \quad (2.8)$$

З формули (2.8) і сказаного вище також випливає, що

$$\int_{E_3} p(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r} = 1. \quad (2.9)$$

Функція $p(\mathbf{r}, t)$ називається *густиною ймовірності* знайти домішкову частинку в околі точки $\mathbf{r}$ у момент часу t , або просто густиною ймовірності¹. Узагалі кажучи, функція $p(\mathbf{r}, t)$ залежить також від початкового положення частинки $\mathbf{r}_0$ і початкового моменту часу t_0 , але оскільки вони в подальшому не змінюються, то цю залежність ми явно не вказуємо.

Коли в середовищі знаходиться всього N однакових домішкових частинок, що не впливають одна на одну, то густина ймовірності $p(\mathbf{r}, t)$ і густина домішкових частинок $n(\mathbf{r}, t)$ пов'язані співвідношенням

$$n(\mathbf{r}, t) = Np(\mathbf{r}, t). \quad (2.10)$$

Якщо в момент часу t частинку, за якою ведеться спостереження, зафіксовано в точці $\mathbf{r}$, то *густина умовної ймовірності* $p(\mathbf{r}', \mathbf{r}; t', t)$ знайти її в околі якоїсь іншої точки $\mathbf{r}'$ у подальший момент часу t' у загальному випадку залежить від координат точок $\mathbf{r}$ і $\mathbf{r}'$ та моментів часу t і t' . Функцію $p(\mathbf{r}', \mathbf{r}; t', t)$ також називають *густиною ймовірності переходу* домішкової частинки з точки $\mathbf{r}$, де вона перебувала

¹ Строго кажучи, зроблені твердження вимагають більш ретельного і повного обговорення із залученням фундаментальних положень теорії функції дійсних змінних. Однак наведених фактів для подальшого розгляду достатньо.

в момент часу t , в окіл точки $\mathbf{r}'$ у момент часу $t' > t$. Очевидно, що $p(\mathbf{r}', \mathbf{r}; t', t)$ — інтегровна функція, яка задовольняє умову

$$\int_{E_3} p(\mathbf{r}', \mathbf{r}; t', t) d\mathbf{r}' = 1. \quad (2.11)$$

Умова (2.11) стверджує, що до моменту часу t' включно частинка не зникає, залишаючись десь у просторі E_3 .

Якщо густина ймовірності переходу не залежить від того, як частинка блукала до моменту часу t , а лише від різниці $t' - t$, тобто $p(\mathbf{r}', \mathbf{r}; t', t) = p(\mathbf{r}', \mathbf{r}; t' - t)$, то процес називається *марковським*. Уважатимемо, що процес випадкового блукання домішкової частинки в середовищі внаслідок багатьох зіткнень її з частинками середовища є марковським.

При марковському процесі перебування частинки в малому околі Ω об'ємом ΔV точки $\mathbf{r}$ у момент часу t та її подальший перехід з Ω у малий окіл Ω' об'ємом $\Delta V'$ точки $\mathbf{r}'$ за час $t' - t$ є *незалежними подіями*. Імовірності цих подій дорівнюють відповідно $\Delta w_\Omega(\mathbf{r}, t) = p(\mathbf{r}, t) \Delta V$ і $\Delta w_{\Omega'}(\mathbf{r}', \mathbf{r}; t' - t) = p(\mathbf{r}', \mathbf{r}; t' - t) \Delta V'$. Тому ймовірність знайти домішкову частинку в околі Ω' у момент часу t' після того, як вона побувала в околі Ω в момент часу t , має дорівнювати добутку $\Delta w_{\Omega'}(\mathbf{r}', \mathbf{r}; t' - t) \Delta w_\Omega(\mathbf{r}, t)$ ймовірностей цих послідовних незалежних подій.

Розіб'ємо весь простір E_3 (чи область, яку займає середовище) на сукупність нескінченно малих неперетинних областей з координатами $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_j, \dots$ і, відповідно, об'ємами $\Delta V_1, \dots, \Delta V_j, \dots$, та розглянемо суму

$$\sum_j \Delta w_{\Omega'}(\mathbf{r}', \mathbf{r}_j; t' - t) \Delta w_{\Omega_j}(\mathbf{r}_j, t) = \left(\sum_j p(\mathbf{r}', \mathbf{r}_j; t' - t) p(\mathbf{r}_j, t) \Delta V_j \right) \Delta V'. \quad (2.12)$$

Оскільки частинка спостерігається в околі точки $\mathbf{r}'$ у момент t' після того, як у момент t вона безумовно знаходилася в одній з областей указаної сукупності, сума в лівій частині формули (2.12) повинна дорівнювати ймовірності $p(\mathbf{r}', t') \Delta V'$. З другого боку, коли діаметр кожної з областей прямує до нуля, а функції $p(\mathbf{r}, t)$ і $p(\mathbf{r}', \mathbf{r}; t' - t)$ задовольняють певні вимоги, то сума в правій частині рівності (2.12) прямує до інтеграла

$$\int_{E_3} p(\mathbf{r}', \mathbf{r}; t' - t) p(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r}.$$

Тому при $t' > t$ справджується така рівність:

$$p(\mathbf{r}', t') = \int_{E_3} p(\mathbf{r}', \mathbf{r}; t' - t) p(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r} . \quad (2.13)$$

Формула (2.13), яка пов'язує густину ймовірності знайти частинку в околі певної точки з густиною умовної ймовірності переходу в цей окіл з інших точок за певний час, називається *рівнянням Чепмена — Колмогорова*¹.

Контрольні питання до підрозділу 2.2

1. Як означається ймовірність знайти броунівську частинку в околі заданої точки середовища? Як змінюється ця ймовірність при розширенні околу заданої точки?
2. Як означається густина ймовірності знайти броунівську частинку в околі заданої точки середовища? Які властивості має ця функція?
3. Як означається густина ймовірності переходу домішкової частинки з однієї точки середовища в інші його точки за визначений проміжок часу? Які властивості має ця функція взагалі і для марковських процесів зокрема?
4. Чому дорівнює ймовірність того, що домішкова частинка, яка спочатку знаходиться в точці $\mathbf{r}_0$, перейде за проміжок часу Δt_1 у малий окіл об'ємом ΔV_1 точки $\mathbf{r}_1$, а далі за проміжок Δt_2 — у малий окіл об'ємом ΔV_2 точки $\mathbf{r}_2$, якщо процес блукання частинки марковський?
5. Яке співвідношення пов'язує значення густини ймовірності координат частинки в послідовні моменти часу в марковському процесі її випадкового блукання?

2.3. РІВНЯННЯ ФОККЕРА — ПЛАНКА

У реальних експериментах з вивчення молекулярного руху реєстраційні прилади не здатні, як правило, фіксувати положення досліджуваних частинок безпосередньо, даючи здебільшого лише середні значення деяких функцій від їх координат. Якщо координати $\mathbf{r}$ домішкової частинки в якомусь середовищі є випадковими величинами, то, узагалі, випадковими будуть і значення довільної функції $\varphi(\mathbf{r})$ від цих координат.

¹ Історично вперше це рівняння було запропоновано Смолюховським (1913).

Нехай густина ймовірності $p(\mathbf{r}, t)$ знайти домішкову частинку в околі довільної точки простору в будь-який момент часу відома. Тоді середнє значення $\bar{\varphi}_i$ випадкової величини $\varphi(\mathbf{r})$, знайдене в результаті вимірювань над багатьма тотожними системами, що в момент часу t перебувають в однакових зовнішніх умовах, тобто *математичне сподівання* $\bar{\varphi}_i$ величини $\varphi(\mathbf{r})$, дається (за умови, що функція $\varphi(\mathbf{r})$ обмежена) виразом

$$\bar{\varphi}_i = \int_{E_3} \varphi(\mathbf{r}) p(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r} . \quad (2.14)$$

Звичайно, $\bar{\varphi}_i$ може змінюватися з часом завдяки тому, що густина ймовірності $p(\mathbf{r}, t)$ залежить від часу.

Уважатимемо далі, що $\varphi(\mathbf{r})$ — довільна гладка функція, яка дорівнює нулю зовні сфери досить великого радіуса. Як і раніше, функції з такою властивістю називатимемо фінітними. Відповідний приріст функції $\bar{\varphi}_i$ можна знайти, надаючи малого приросту Δt часовій змінній t . Згідно з рівнянням Чепмена — Колмогорова (2.13) можемо тоді записати:

$$\bar{\varphi}_{t+\Delta t} = \int_{E_3} \varphi(\mathbf{r}') p(\mathbf{r}', t + \Delta t) d\mathbf{r}' = \int_{E_3} \varphi(\mathbf{r}') \left(\int_{E_3} p(\mathbf{r}', \mathbf{r}; t + \Delta t, t) p(\mathbf{r}; t) d\mathbf{r} \right) d\mathbf{r}' , \quad (2.15)$$

де $p(\mathbf{r}', \mathbf{r}; t + \Delta t, t) \equiv p(\mathbf{r}', \mathbf{r}; \Delta t)$ — густина ймовірності переходу домішкової частинки за час Δt з точки $\mathbf{r}$, де вона знаходилася в момент часу t , у малий окіл точки $\mathbf{r}'$. Оскільки функції $p(\mathbf{r}', \mathbf{r}; \Delta t)$ і $p(\mathbf{r}, t)$ — невід'ємні, а функція $\varphi(\mathbf{r}')$ — гладка та фінітна, в останньому з інтегралів у (2.15) можна змінити порядок інтегрування. Дістаємо:

$$\bar{\varphi}_{t+\Delta t} = \int_{E_3} \Phi(\mathbf{r}, \Delta t) p(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r} ,$$

де

$$\Phi(\mathbf{r}, \Delta t) = \int_{E_3} p(\mathbf{r}', \mathbf{r}; \Delta t) \varphi(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' . \quad (2.16)$$

Як свідчить дослід, траєкторія домішкової частинки при випадковому русі — це неперервна, хоч і не обов'язково гладка, крива. Тому ймовірність того, що частинка за короткий проміжок часу Δt ¹ помітно зміститься з того положення, яке вона займає в момент часу t ,

¹ Підкреслимо, що під Δt тут розуміється малий проміжок часу з погляду макроскопічних вимірювань, який, однак, на кілька порядків перевищує характерний час зіткнень броунівської частинки з частинками (молекулами чи атомами) середовища. Іншими словами, у результаті величезної кількості таких зіткнень броунівська частин-

є досить мала. Чим менший проміжок Δt , тим швидше $p(\mathbf{r}', \mathbf{r}; \Delta t)$ прямує до нуля при зростанні відстані $|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|$. Унаслідок цього головний внесок в інтеграл (2.15) при $\Delta t \rightarrow 0$ дає нескінченно малий окіл точки $\mathbf{r}$. Знайдемо цей внесок, користуючись формулою Тейлора для функції трьох змінних x_1, x_2, x_3 (що позначають змінні x, y, z) та вважаючи, що процес відбувається таким чином, що при $\Delta t \rightarrow 0$, по-перше, для величин

$$\overline{\Delta x_i} = \int_{E_3} (x'_i - x_i) p(\mathbf{r}', \mathbf{r}; \Delta t) d\mathbf{r}', \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.17)$$

$$\overline{\Delta x_i \Delta x_k} = \int_{E_3} (x'_i - x_i)(x'_k - x_k) p(\mathbf{r}', \mathbf{r}; \Delta t) d\mathbf{r}', \quad i, k = 1, 2, 3, \quad (2.18)$$

справджуються співвідношення

$$\overline{\Delta x_i} = \left[V_i(\mathbf{r}) + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial D_{ik}(\mathbf{r})}{\partial x_k} \right] \Delta t + o(\Delta t), \quad (2.19)$$

$$\overline{\Delta x_i \Delta x_k} = 2D_{ik}(\mathbf{r})\Delta t + o(\Delta t) \quad (2.20)$$

і, по-друге,

$$\int_{E_3} |\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^3 p(\mathbf{r}', \mathbf{r}; \Delta t) d\mathbf{r}' = o(\Delta t). \quad (2.21)$$

Якщо умови (2.19)–(2.21) задовольняються, то випадковий рух домішкової частинки називається *броунівським*, а вона сама — *броунівською*. Докладніше такий рух обговорюється в наступних підрозділах.

Завдання 2.3.1. Покажіть, що координати броунівської частинки $x_i(t)$, $t \geq 0$, є неперервними функціями часу, які, однак, не є диференційовними для жодного $t \geq 0$.

Вказівка. Скористайтесь співвідношеннями (2.19) і (2.20) для приростів $\Delta x_i(t)$ і $(\Delta x_i(t))^2$.

У відповідності з формулою Тейлора запишемо функцію $\phi(\mathbf{r})$ в околі точки $\mathbf{r}$ у вигляді

$$\phi(\mathbf{r}') = \phi(\mathbf{r}) + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \phi(\mathbf{r})}{\partial x_i} (x'_i - x_i) +$$

ка за час Δt вже вийшла на дифузійний закон руху $\overline{(\Delta x)^2} \sim \Delta t$. Також припускається, що перехід $\Delta t \rightarrow 0$ не веде до виходу за межі дифузійного режиму.

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^3 \frac{\partial^2 \varphi(\mathbf{r})}{\partial x_i \partial x_k} (x'_i - x_i)(x'_k - x_k) + R(\mathbf{r}', \mathbf{r}) , \quad (2.22)$$

із залишковим членом $R(\mathbf{r}', \mathbf{r})$ у формі

$$R(\mathbf{r}', \mathbf{r}) = \frac{1}{3!} \sum_{i,k,l=1}^3 \frac{\partial^3 \varphi(\mathbf{r} + \theta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}))}{\partial x_i \partial x_k \partial x_l} (x'_i - x_i)(x'_k - x_k)(x'_l - x_l) ,$$

де множник θ набуває значень між нулем та одиницею і в загальному випадку залежить від $\mathbf{r}'$.

Підставимо тепер вираз (2.22) в інтеграл (2.16) і винесемо всі залежні лише від $\mathbf{r}$ величини за знак інтеграла. Беручи до уваги формулу (2.11), дістаємо:

$$\Phi(\mathbf{r}, \Delta t) = \varphi(\mathbf{r}) + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \varphi(\mathbf{r})}{\partial x_i} \overline{\Delta x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^3 \frac{\partial^2 \varphi(\mathbf{r})}{\partial x_i \partial x_k} \overline{\Delta x_i \Delta x_k} + \overline{R(\mathbf{r}', \mathbf{r})} , \quad (2.23)$$

де

$$\overline{R(\mathbf{r}', \mathbf{r})} = \int_{E_3} R(\mathbf{r}', \mathbf{r}) p(\mathbf{r}', \mathbf{r}; \Delta t) d\mathbf{r}' .$$

Ураховуючи співвідношення (2.21) і той факт, що функція $\varphi(\mathbf{r})$ є обмеженою разом зі своїми похідними, тобто, зокрема, існує така додатна стала $C < \infty$, що

$$\max_{\mathbf{r}} \left| \frac{\partial^3 \varphi(\mathbf{r})}{\partial x_i \partial x_k \partial x_l} \right| < C , \quad i, k, l = 1, 2, 3 ,$$

бачимо, що

$$\begin{aligned} \left| \overline{R(\mathbf{r}', \mathbf{r})} \right| &\leq \int_{E_3} |R(\mathbf{r}', \mathbf{r})| p(\mathbf{r}', \mathbf{r}; \Delta t) d\mathbf{r}' \leq \frac{1}{3!} C \sum_{i,k,l=1}^3 \int_{E_3} |\Delta x_i| |\Delta x_k| |\Delta x_l| p(\mathbf{r}', \mathbf{r}; \Delta t) d\mathbf{r}' \leq \\ &\leq \frac{9C}{2} \int_{E_3} |\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^3 p(\mathbf{r}', \mathbf{r}; \Delta t) d\mathbf{r}' = o(\Delta t) . \end{aligned}$$

Знаходимо, таким чином, що

$$\Phi(\mathbf{r}, \Delta t) = \varphi(\mathbf{r}) + \left[\sum_{i=1}^3 V_i(\mathbf{r}) \frac{\partial \varphi(\mathbf{r})}{\partial x_i} + \sum_{i,k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} \left(D_{ik}(\mathbf{r}) \frac{\partial \varphi(\mathbf{r})}{\partial x_i} \right) \right] \Delta t + o(\Delta t) .$$

Отже,

$$\frac{1}{\Delta t} (\varphi_{t+\Delta t} - \varphi_t) = \int_{E_3} d\mathbf{r} \varphi(\mathbf{r}) \frac{1}{\Delta t} [p(\mathbf{r}, t + \Delta t) - p(\mathbf{r}, t)] =$$

$$= \int_{E_3} d\mathbf{r} \left[\sum_{i=1}^3 V_i(\mathbf{r}) \frac{\partial \varphi(\mathbf{r})}{\partial x_i} + \sum_{i,k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} \left(D_{ik}(\mathbf{r}) \frac{\partial \varphi(\mathbf{r})}{\partial x_i} \right) \right] p(\mathbf{r}, t) + o(1). \quad (2.24)$$

Уважатимемо далі, що густина ймовірності $p(\mathbf{r}, t)$, а також усі коефіцієнти $V_i(\mathbf{r})$ і $D_{ik}(\mathbf{r})$ — неперервні функції, що мають неперервні перші частинні похідні за всіма своїми змінними, а $p(\mathbf{r}, t)$ і всі $D_{ik}(\mathbf{r})$ мають ще й неперервні другі частинні похідні за просторовими змінними.

Переходячи до границі виразу (2.24) при $\Delta t \rightarrow 0$, дістаємо:

$$\begin{aligned} & \int_{E_3} d\mathbf{r} \varphi(\mathbf{r}) \frac{\partial p(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \\ & = \int_{E_3} d\mathbf{r} \left[\sum_{i=1}^3 V_i(\mathbf{r}) \frac{\partial \varphi(\mathbf{r})}{\partial x_i} + \sum_{i,k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} \left(D_{ik}(\mathbf{r}) \frac{\partial \varphi(\mathbf{r})}{\partial x_i} \right) \right] p(\mathbf{r}, t). \end{aligned} \quad (2.25)$$

Оскільки, за припущенням, функція $\varphi(\mathbf{r})$ — гладка й фінітна, інтеграли в рівності (2.25) поширюються лише на обмежену область. Можна вважати, що область інтегрування в правій частині рівності (2.25) є кубом з центром у початку координатної системи, який цілком містить кулю, усередині якої $\varphi(\mathbf{r})$ відмінна від нуля. Розглядаючи інтеграл у правій частині рівності (2.25) по такому кубу як повторний, застосовуючи інтегрування частинами та беручи далі до уваги той факт, що $\varphi(\mathbf{r})$ разом зі своїми похідними дорівнює на поверхні куба нулю, можемо переписати (2.25) у вигляді

$$\int_{E_3} d\mathbf{r} \left[\frac{\partial p(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} (V_i(\mathbf{r}) p(\mathbf{r}, t)) - \sum_{i,k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(D_{ik}(\mathbf{r}) \frac{\partial p(\mathbf{r}, t)}{\partial x_k} \right) \right] \varphi(\mathbf{r}) = 0. \quad (2.26)$$

Підкреслимо, що рівність (2.26) справджується для довільної гладкої фінітної функції $\varphi(\mathbf{r})$. Звідси випливає, що густина ймовірності $p(\mathbf{r}, t)$ задовольняє рівняння

$$\frac{\partial p(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -\operatorname{div}(\mathbf{V}(\mathbf{r}) p(\mathbf{r}, t)) + \sum_{i,k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(D_{ik}(\mathbf{r}) \frac{\partial p(\mathbf{r}, t)}{\partial x_k} \right), \quad (2.27)$$

де $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ — векторна функція з компонентами $V_1(\mathbf{r})$, $V_2(\mathbf{r})$, $V_3(\mathbf{r})$.

Рівняння (2.27) називається *рівнянням Фоккера — Планка*¹. Оскільки густина домішкових частинок $n(\mathbf{r}, t)$ пропорційна густині ймовір-

¹ Частковий випадок цього рівняння для броунівських частинок, що здійснюють одновимірний рух у полі зовнішньої сили, вперше отримав Смолюховський (1915).

ності $p(\mathbf{r}, t)$ (див. формулу (2.10)), бачимо, що функція $n(\mathbf{r}, t)$ теж задовольняє рівняння (2.27).

Отже, рівняння для густини броунівських частинок у неоднорідному анізотропному рухомому середовищі, у якому відсутні їх джерела, можна подати як рівняння дифузії виду (2.7):

$$\frac{\partial n(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (2.28)$$

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{V}(\mathbf{r})n(\mathbf{r}, t) + \mathbf{j}_D(\mathbf{r}, t), \quad j_{D,i} = -\sum_{k=1}^3 D_{ik}(\mathbf{r}) \frac{\partial n(\mathbf{r}, t)}{\partial x_k},$$

де векторна функція $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ може розглядатися як швидкість течії середовища, у якому рухаються броунівські частинки, а складова $\mathbf{j}_D(\mathbf{r}, t)$ густини потоку броунівських частинок описується законом Фіка (2.4) з тензорним коефіцієнтом дифузії $D_{ik}(\mathbf{r})$. Підкреслимо, що рівняння (2.28) є безпосереднім наслідком особливостей приростів (2.17)–(2.21) координат броунівської частинки, а векторна функція $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ і тензорна функція $D_{ik}(\mathbf{r})$ визначаються рівняннями (2.19), (2.20).

Зауваження 2.3.1. При виведенні рівняння (2.27) ми припустили, що інтегровна функція $p(\mathbf{r}, t)$ є неперервною та має неперервні частинні похідні потрібних порядків. Якщо таких припущень не робити, то на підставі рівняння (2.25) можна лише висувати, що інтегровна $p(\mathbf{r}, t)$ є узагальненим розв'язком рівняння (2.27) (див. підрозділ 4.4). Якщо ж коефіцієнти рівняння (2.27) мають властивості, перелічені після формули (2.24), то його фундаментальний розв'язок — функція Гріна $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0; t - t_0)$ — є при $t > t_0$ інтегровою функцією, яка має всі властивості, що ми приписували функції $p(\mathbf{r}, t)$. Зокрема для довільної гладкої фінітної функції $\varphi(\mathbf{r})$

$$\lim_{t \downarrow t_0} \int_{E_3} \varphi(\mathbf{r}) G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0; t - t_0) d\mathbf{r} = \varphi(\mathbf{r}_0),$$

де $\mathbf{r}_0$ — початкове положення броунівської частинки у момент часу t_0 . Тому при $t \geq t_0$ $p(\mathbf{r}, t)$ і $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0; t)$ як узагальнені функції збігаються. Зазначені припущення відносно властивостей густини ймовірності $p(\mathbf{r}, t)$ підтверджуються досвідом.

Якщо рух домішкових частинок відбувається в нерухомому однорідному середовищі, густина ймовірності переходу $p(\mathbf{r}', \mathbf{r}; \Delta t)$ може залежати лише від різниці $\mathbf{r}' - \mathbf{r}$ координат $\mathbf{r}'$ і $\mathbf{r}$, тобто

$$p(\mathbf{r}', \mathbf{r}; \Delta t) = p(\mathbf{r}' - \mathbf{r}; \Delta t). \quad (2.29)$$

Для нерухомого однорідного та ізотропного середовища, у якому відсутні виділені напрями, $p(\mathbf{r}' - \mathbf{r}; \Delta t)$ може залежати лише від модуля $|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|$ цієї різниці:

$$p(\mathbf{r}', \mathbf{r}; \Delta t) = p(|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|; \Delta t). \quad (2.30)$$

Якщо таке середовище рухається зі сталою швидкістю $\mathbf{V}$, то рівняння (2.28) для густини $n(\mathbf{r}, t)$ набирає вигляду

$$\frac{\partial n(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -\mathbf{V} \cdot \nabla n(\mathbf{r}, t) + D \Delta n(\mathbf{r}, t). \quad (2.31)$$

Завдання 2.3.2. Доведіть, що для необмеженого однорідного середовища матриця $D_{ik}(\mathbf{r})$ не залежить від просторових координат.

Вказівка. За допомогою заміни змінних $\mathbf{r}'' = \mathbf{r}' - \mathbf{r}$ переконайтеся, що інтеграли в правих частинах формули (2.18) не залежить від $\mathbf{r}$, а тож не залежать від $\mathbf{r}$ і їх головні частини у формулі (2.20).

Завдання 2.3.3. Доведіть, що для необмеженого однорідного ізотропного середовища $D_{ik}(\mathbf{r}) = D \delta_{ik}$, де δ_{ik} — символ Кронекера

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1, & i = k, \\ 0, & i \neq k. \end{cases}$$

Вказівка. Почніть із заміни змінних $\mathbf{r}'' = \mathbf{r}' - \mathbf{r}$ у формулі (2.18) (див. завдання 2.3.2). При подальшій заміні змінних $x''' = -x''$, $y''' = -y''$, $z''' = z''$ (що відповідає повороту декартової системи навколо осі z'' на кут π) кожний з інтегралів, якими визначаються компоненти D_{xz} і D_{yz} , зберігає свій вигляд, але змінює знак на протилежний. Отже, ці інтеграли дорівнюють нулю. При заміні ж змінних, що відповідає повороту декартової системи навколо осі z'' на кут $\pi/2$, інтеграли, якими визначаються D_{xx} і D_{yy} , просто міняються місцями.

Завдання 2.3.4. Перевірте, що матриця коефіцієнтів дифузії для анізотропного середовища невід'ємно визначена, тобто для будь-яких комплексних чисел ξ_1 , ξ_2 , ξ_3 значення квадратичної форми

$$\sum_{i,k=1}^3 D_{ik} \bar{\xi}_i \xi_k \geq 0.$$

Вказівка. Скориставшись формулою (2.20), для вказаних ξ_1 , ξ_2 , ξ_3 і приростів координат броунівської частинки Δx_1 , Δx_2 , Δx_3 знайдіть середнє значення невід’ємної випадкової величини $\left| \sum_{i=1}^3 \xi_i \Delta x_i \right|^2$.

Контрольні питання до підрозділу 2.3

1. Як визначається математичне сподівання неперервної функції від випадкових величин з відомою густиною ймовірності?
2. Якщо координати частинки, що рухається в деякому середовищі, утворюють випадковий процес, то як змінюється з часом математичне сподівання значень обмеженої функції від цих координат?
3. За яких обмежень на математичні сподівання приростів координат і їх добутків рух блукаючої частинки в середовищі визначається як броунівський?
4. Чи має зміст поняття швидкості частинки для броунівського руху?
5. За яких умов на густину ймовірності переходу блукаючої частинки справджується рівняння Фоккера — Планка?
6. Як пов’язані між собою рівняння Фоккера — Планка і рівняння дифузії?
7. Які обмеження виникають на координатну залежність густини ймовірності переходу броунівської частинки з точки $\mathbf{r}$ у нескінченно малий окіл точки $\mathbf{r}'$ за час Δt , якщо частинка рухається в однорідному та ізотропному середовищі?
8. Який вигляд має рівняння Фоккера — Планка для броунівської частинки, яка рухається в однорідному й ізотропному нерухомому середовищі?

2.4. РІВНЯННЯ ДИФУЗІЇ ДЛЯ НЕОДНОРІДНОГО СЕРЕДОВИЩА. ФУНКЦІЯ ГРІНА

У цьому підрозділі уточнюються умови існування та єдиності класичного розв’язку задачі Коші і властивості функції Гріна для рівняння дифузії в неоднорідному анізотропному рухомому середовищі, у якому домішкові частинки можуть народжуватися чи поглинатися внаслідок реакцій першого порядку.

Припустимо, що густина ймовірності для координат броунівської частинки в певний момент часу $t_0 \geq 0$ є визначеною гладкою фінітною функцією $p_0(\mathbf{r})$, яка задовольняє умову

$$\int_{E_3} p_0(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = 1. \quad (2.32)$$

Згідно з рівнянням Чепмена — Колмогорова, при $t > t_0$ має справджуватися рівність

$$p(\mathbf{r}, t) = \int_{E_3} p(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t - t_0) p_0(\mathbf{r}') d\mathbf{r}', \quad (2.33)$$

де $p(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t - t_0)$ — густина ймовірності переходу частинки з точки $\mathbf{r}'$, де вона перебуває у момент часу t_0 , у нескінченно малий окіл точки $\mathbf{r}$, куди вона потрапляє в момент часу t . Будемо вважати, що майже для всіх $\mathbf{r}$ функція $p(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t - t_0)$ є інтегровною за змінною $\mathbf{r}'$ принаймні по кожній обмеженій області. Оскільки функція $p(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t - t_0)$ майже для всіх $\mathbf{r}'$ та функція $p_0(\mathbf{r})$ є інтегровними за змінною $\mathbf{r}$ і невід'ємними, то на підставі теореми Фубіні можемо стверджувати, що інтеграл у формулі (2.33) є збіжним майже для всіх $\mathbf{r}$. Справді:

$$\begin{aligned} \int_{E_3} d\mathbf{r} p(\mathbf{r}, t) &= \int_{E_3} d\mathbf{r} \int_{E_3} d\mathbf{r}' p(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t - t_0) p_0(\mathbf{r}') = \\ &= \int_{E_3} d\mathbf{r}' \int_{E_3} d\mathbf{r} p(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t - t_0) p_0(\mathbf{r}') = \int_{E_3} d\mathbf{r}' p_0(\mathbf{r}') = 1. \end{aligned}$$

Як було зазначено в попередньому підрозділі, густина ймовірності $p(\mathbf{r}, t)$ для броунівської частинки є такою, що для довільної гладкої фінітної функції $\varphi(\mathbf{r})$ середнє значення її приросту вздовж траєкторії руху частинки задовольняє умову

$$\begin{aligned} \overline{\varphi(\mathbf{r}(t + \Delta t)) - \varphi(\mathbf{r}(t))} &= \int_{E_3} \varphi(\mathbf{r}) [p(\mathbf{r}, t + \Delta t) - p(\mathbf{r}, t)] d\mathbf{r} \underset{\Delta t \downarrow 0}{=} O(\Delta t), \\ t &\geq t_0 \geq 0, \quad \Delta t > 0, \end{aligned}$$

і що

$$\lim_{t \downarrow t_0} \int_{E_3} \varphi(\mathbf{r}) p(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r} = \int_{E_3} \varphi(\mathbf{r}) p_0(\mathbf{r}) d\mathbf{r}.$$

Тому $p(\mathbf{r}, t)$ є узагальненим невід'ємним інтегровним розв'язком задачі Коші

$$\frac{\partial n(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -\operatorname{div} \mathbf{V}(\mathbf{r}) \cdot n(\mathbf{r}, t) - \sum_{i=1}^3 V_i(\mathbf{r}) \frac{\partial n(\mathbf{r}, t)}{\partial x_i} + \sum_{i,k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(D_{ik}(\mathbf{r}) \frac{\partial n(\mathbf{r}, t)}{\partial x_k} \right), \quad (2.34)$$

$$n(\mathbf{r}, t_0) = n_0(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in E_3, \quad t \geq t_0 \geq 0,$$

для рівняння дифузії і початкової функції $n_0(\mathbf{r}) = p_0(\mathbf{r})$, яка задовольняє умову (2.32).

Далі в цьому підрозділі вважатимемо, що коефіцієнтні функції $V_i(\mathbf{r})$ і $D_{ik}(\mathbf{r})$, їх перші похідні та початкова функція $n_0(\mathbf{r})$ є дійсними, неперервними та обмеженими в E_3 і що для деякої сталої $\mu > 0$ та довільних комплексних чисел ξ_1, ξ_2, ξ_3 справджується нерівність

$$\sum_{i,k=1}^3 D_{ik} \bar{\xi}_i \xi_k \geq \mu \sum_{i=1}^3 |\xi_i|^2.$$

Завдання 2.4.1. Нехай

$$\operatorname{div} \mathbf{V}(\mathbf{r}) = 0 \quad (2.35)$$

і виконується умова

$$\lim_{|\mathbf{r}| \rightarrow \infty} n(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (2.36)$$

Покажіть, що в цих випадках задача Коші (2.34) має єдиний розв'язок у класі неперервних обмежених функцій, які мають неперервні перші похідні за всіма змінними та неперервні другі похідні за координатами. Іншими словами, задача (2.34) має єдиний класичний розв'язок.

Вказівка. Урахувавши умову (2.35), для рівняння (2.34) повторіть ті ж самі формально-математичні аргументи, що використовувалися в підрозділі 1.2 при доведенні єдиності класичного розв'язку рівняння теплопровідності (1.12).

За певних умов твердження завдання 2.4.1 залишається в силі і тоді, коли умови (2.35) і (2.36) не виконуються, і навіть для більш загального рівняння

$$\frac{\partial n(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = q(\mathbf{r}) n(\mathbf{r}, t) - \sum_{i=1}^3 V_i(\mathbf{r}) \frac{\partial n(\mathbf{r}, t)}{\partial x_i} + \sum_{i,k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(D_{ik}(\mathbf{r}) \frac{\partial n(\mathbf{r}, t)}{\partial x_k} \right), \quad (2.37)$$

$$q(\mathbf{r}) = w(\mathbf{r}) - \operatorname{div} \mathbf{V}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in E_3, \quad t \geq t_0 \geq 0,$$

яке виникає у випадках, коли густина частинок може змінюватися зі швидкістю $w(\mathbf{r})n(\mathbf{r}, t)$ — наприклад, унаслідок хімічних або ядерних реакцій першого порядку.

Щоб переконатися в єдиності класичного розв'язку задачі Коші для рівняння (2.37) з обмеженою неперервною функцією $q(\mathbf{r})$, скористаємося такими проміжними твердженнями.

Лема 2.4.1. Нехай функція $v(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{r} \in E_3$, $t_0 \leq t \leq T < \infty$, неперервна і має неперервні перші похідні за всіма своїми змінними та неперервні другі похідні за координатами, функції $V_i(\mathbf{r})$ і $D_{ik}(\mathbf{r})$ задовольняють всі умови, перелічені після формули (2.34), і функція $q(\mathbf{r})$ є обмеженою й неперервною. Якщо за цих умов для функції $v(\mathbf{r}, t)$ скрізь у E_3 справджується нерівність

$$-\frac{\partial v(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + q(\mathbf{r})v(\mathbf{r}, t) - \sum_{i=1}^3 V_i(\mathbf{r}) \frac{\partial v(\mathbf{r}, t)}{\partial x_i} + \sum_{i,k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(D_{ik}(\mathbf{r}) \frac{\partial v(\mathbf{r}, t)}{\partial x_k} \right) \leq 0, \quad (2.38)$$

то нерівність $v(\mathbf{r}, t_0) \geq 0$, $\mathbf{r} \in E_3$, веде до нерівності $v(\mathbf{r}, t) \geq 0$, $\mathbf{r} \in E_3$, $t_0 \leq t \leq T$.

Доведення. Ми обмежимося доведенням цієї леми для випадку, коли функція $v(\mathbf{r}, t)$ задовольняє додаткову умову (2.36). Без цієї вимоги твердження леми може залишатися істинним навіть у випадках, коли $v(\mathbf{r}, t)$ досить швидко зростає при $|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$. Однак відповідне доведення є більш громіздким.

Спершу вважатимемо, що $q(\mathbf{r}) < 0$ скрізь у E_3 . Припустимо, що умови леми виконуються і водночас функція $v(\mathbf{r}, t)$ набуває в деякій точці простору-часу $(\mathbf{r}', t_1)$, $t_0 < t_1 \leq T$, значення $v(\mathbf{r}', t_1) = \eta < 0$. Беручи до уваги умову (2.36), розглянемо кулю $|\mathbf{r}| \leq R$ з настільки великим радіусом R , щоб точка $\mathbf{r}'$ знаходилася всередині неї, а в момент часу t_1 на її поверхні $|\mathbf{r}| = R$ справджувалася нерівність $v(\mathbf{r}, t_1) > \eta/2$. У силу неперервності функція $v(\mathbf{r}, t)$ досягає на проміжку часу $t_0 < t < t_1$ свого найменшого значення в замкненій області $|\mathbf{r}| \leq R$ в деякій точці $(\mathbf{r}'', t_2)$, $|\mathbf{r}''| \leq R$, $t_0 < t_2 \leq t_1$, і це значення, зрозуміло, не перевищує η . У цій точці $(\mathbf{r}'', t_2)$ маємо:

$$\frac{\partial v(\mathbf{r}'', t_2)}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial v(\mathbf{r}'', t_2)}{\partial x_1} = \frac{\partial v(\mathbf{r}'', t_2)}{\partial x_2} = \frac{\partial v(\mathbf{r}'', t_2)}{\partial x_3} = 0.$$

Відповідно, нерівність (2.38) набирає вигляду

$$q(\mathbf{r}'')v(\mathbf{r}'', t_2) + \sum_{i,k=1}^3 D_{ik}(\mathbf{r}'') \frac{\partial^2 v(\mathbf{r}'', t_2)}{\partial x_i \partial x_k} \leq 0. \quad (2.39)$$

Оскільки в точці мінімуму за просторовими змінними матриця з елементами

$$\frac{\partial^2 v(\mathbf{r}'', t_2)}{\partial x_i \partial x_k}, \quad i, k = 1, 2, 3,$$

є невід'ємно визначеною, і такою ж є матриця з елементами $D_{ik}(\mathbf{r}'')$, то справджується нерівність (див. підрозділ 1.2)

$$\sum_{i,k=1}^3 D_{ik}(\mathbf{r}'') \frac{\partial^2 v(\mathbf{r}'', t_2)}{\partial x_i \partial x_k} \geq 0.$$

Для першого ж доданка в лівій частині нерівності (2.39) можемо записати

$$q(\mathbf{r}'') v(\mathbf{r}'', t_2) \geq |q(\mathbf{r}'')| |\eta| > 0.$$

Отже, у рамках зроблених припущень другий доданок у лівій частині нерівності (2.39) виявляється в точці $(\mathbf{r}'', t_2)$ невід'ємним, перший — додатним. Як наслідок, ліва частина нерівності (2.39) є в точці $(\mathbf{r}'', t_2)$ додатною, що суперечить умові леми.

Припустимо тепер, що $q(\mathbf{r})$ може набувати додатних значень. Оскільки ця функція обмежена, існує така стала M , $0 < M < \infty$, що скрізь у E_3 $q(\mathbf{r}) < M$. Зробимо заміну

$$v(\mathbf{r}, t) = e^{M(t-t_0)} u(\mathbf{r}, t).$$

Функція $u(\mathbf{r}, t)$ має такі самі властивості, що й функція $v(\mathbf{r}, t)$, лише з тією різницею, що вона скрізь у E_3 задовольняє нерівність

$$-\frac{\partial u(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + [q(\mathbf{r}) - M] u(\mathbf{r}, t) - \sum_{i=1}^3 V_i(\mathbf{r}) \frac{\partial u(\mathbf{r}, t)}{\partial x_i} + \sum_{i,k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(D_{ik}(\mathbf{r}) \frac{\partial u(\mathbf{r}, t)}{\partial x_k} \right) \leq 0,$$

у яку, на відміну від нерівності (2.38), замість функції $q(\mathbf{r})$ входить функція $[q(\mathbf{r}) - M] < 0$. Тому, згідно з попереднім результатом, можемо стверджувати, що нерівність $u(\mathbf{r}, t_0) \geq 0$, $\mathbf{r} \in E_3$, веде до нерівності $u(\mathbf{r}, t) \geq 0$, $\mathbf{r} \in E_3$, $t_0 \leq t \leq T$. Але $u(\mathbf{r}, t) \geq 0$ тоді і лише тоді, коли $v(\mathbf{r}, t) \geq 0$. Лему доведено.

Лема 2.4.2. Нехай неперервна обмежена функція $v(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{r} \in E_3$, $t_0 \leq t \leq T < \infty$, є на інтервалі $t_0 < t \leq T$ класичним розв'язком рівняння (2.37), у якому коефіцієнти $V_i(\mathbf{r})$, $D_{ik}(\mathbf{r})$, $q(\mathbf{r})$ мають ті самі властивості, що й у лемі 2.4.1, і $q(\mathbf{r}) < M$, $0 \leq M < \infty$. Якщо при цьому $|v(\mathbf{r}, t_0)| \leq m$, $0 \leq m < \infty$, то

$$|v(\mathbf{r}, t)| \leq e^{M(t-t_0)} m, \quad t_0 < t \leq T.$$

Доведення. Уведемо допоміжні функції $w_{\pm}(\mathbf{r}, t) = e^{M(t-t_0)} m \pm v(\mathbf{r}, t)$. У відповідності з умовами леми,

$$\begin{aligned} w_{\pm}(\mathbf{r}, t_0) &= m \pm v(\mathbf{r}, t_0) \geq 0, \\ -\frac{\partial w_{\pm}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + q(\mathbf{r}) w_{\pm}(\mathbf{r}, t) - \sum_{i=1}^3 V_i(\mathbf{r}) \frac{\partial w_{\pm}(\mathbf{r}, t)}{\partial x_i} + \\ + \sum_{i,k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(D_{ik}(\mathbf{r}) \frac{\partial w_{\pm}(\mathbf{r}, t)}{\partial x_k} \right) &= e^{M(t-t_0)} m [q(\mathbf{r}) - M] < 0. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Оскільки коефіцієнти в нерівності (2.40) і функції $w_{\pm}(\mathbf{r}, t)$ задовольняють умови леми 2.4.1, робимо висновок, що $w_{\pm}(\mathbf{r}, t) \geq 0$, $t_0 < t < T$, тобто

$$-e^{M(t-t_0)} m \leq v(\mathbf{r}, t) \leq e^{M(t-t_0)} m.$$

З леми 2.4.2 безпосередньо впливає єдиність розв'язку задачі Коші для рівняння дифузії (2.37) та її більш загального варіанту для неоднорідного рівняння дифузії:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n(\mathbf{r}, t)}{\partial t} &= q(\mathbf{r}) n(\mathbf{r}, t) - \sum_{i=1}^3 V_i(\mathbf{r}) \frac{\partial n(\mathbf{r}, t)}{\partial x_i} + \\ + \sum_{i,k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(D_{ik}(\mathbf{r}) \frac{\partial n(\mathbf{r}, t)}{\partial x_k} \right) &+ f(\mathbf{r}, t), \\ n(\mathbf{r}, t_0) &= n_0(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in E_3, \quad t_0 < t < \infty. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Завдання 2.4.2. Нехай у задачі Коші (2.41) для неоднорідного рівняння дифузії коефіцієнти $V_i(\mathbf{r})$, $D_{ik}(\mathbf{r})$ і $q(\mathbf{r})$ задовольняють вимоги леми 2.4.2, функції $n_0(\mathbf{r})$ і $f(\mathbf{r}, t)$ — обмежені й неперервні. Спираючись на згадану лему, доведіть, що тоді задача (2.41) може мати лише один обмежений класичний розв'язок.

Вказівка. Припустивши існування двох розв'язків задачі Коші (2.41), за допомогою леми 2.4.2 покажіть, що їх різниця дорівнює нулю.

Як і у випадку рівняння теплопровідності, універсальним інструментом для побудови розв'язків задачі Коші (2.41) для рівняння дифузії зі змінними коефіцієнтами, включаючи її класичний розв'язок при зазначених вище властивостях коефіцієнтів, є метод функцій Гріна. Функція Гріна або фундаментальний розв'язок рівняння (2.37)

означається як така функція $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t - t_0)$, $\mathbf{r}, \mathbf{r}' \in E_3$, $t \geq t_0$, яка при фіксованому $\mathbf{r}'$ і $t > t_0$ задовольняє рівняння (2.37), для якої і будь-якої обмеженої неперервної функції $n_0(\mathbf{r})$ інтеграл

$$n(\mathbf{r}, t) = \int_{E_3} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t - t_0) n_0(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (2.42)$$

є збіжним, і так побудована функція $n(\mathbf{r}, t)$ задовольняє рівняння (2.37) і умову

$$\lim_{t \downarrow t_0} n(\mathbf{r}, t) = n_0(\mathbf{r}). \quad (2.43)$$

Беручи до уваги властивості коефіцієнтів у рівнянні (2.37), у результаті кропітких обчислень і оцінок можна довести, що існує лише одна функція Гріна $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t - t_0)$ рівняння (2.37), яка при $t > t_0$ є невід'ємною, неперервною й обмеженою за просторовими змінними, задовольняє умову

$$\int_{E_3} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t - t_0) d\mathbf{r} = 1, \quad t > t_0,$$

і для якої існують такі сталі $\mu > 0$ і $M > 0$, що справджуються оцінки

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t - t_0) \leq M(t - t_0)^{-3/2} e^{-\frac{\mu|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2}{t - t_0}},$$

$$\left| \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t - t_0)}{\partial t} \right| \leq M(t - t_0)^{-5/2} e^{-\frac{\mu|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2}{t - t_0}},$$

$$\left| \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t - t_0)}{\partial x_i} \right| \leq M(t - t_0)^{-2} e^{-\frac{\mu|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2}{t - t_0}}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Завдання 2.4.3. Нехай у задачі Коші (2.41) функції $n_0(\mathbf{r})$ і $f(\mathbf{r}, t)$ — обмежені й неперервні. Запишіть її загальний розв'язок через ці функції і функцію Гріна рівняння (2.37).

Вказівка. Скористайтесь формулою (2.42) і принципом Дюамеля (див. підрозділ 1.5).

Повертаючись до рівняння (2.33), згадаємо, що густина $n(\mathbf{r}, t)$ однакових домішкових частинок, що перебувають у броунівському русі, і густина ймовірності $p(\mathbf{r}, t)$ знайти вибрану домішкову частинку в околі даної точки простору пов'язані рівністю (2.10): $n(\mathbf{r}, t) = Np(\mathbf{r}, t)$,

де N — загальна кількість домішкових частинок у середовищі. Нехай у початковий момент часу $t = t_0$ всі частинки, що беруть участь у процесі дифузії, зосереджено в малому околі Ω точки $\mathbf{r}_0$. Це означає, що початкова густина ймовірності $p_0(\mathbf{r})$ відрізняється від нуля лише в області Ω . Якщо розмір області Ω набагато менший від характерної дифузійної довжини $\sqrt{D(t-t_0)}$, то, враховуючи зв'язок між $p(\mathbf{r}, t)$ і $n(\mathbf{r}, t)$, а також між $p_0(\mathbf{r})$ і $n(\mathbf{r}, t_0) = n_0(\mathbf{r})$, можемо записати

$$\begin{aligned} p(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{N} n(\mathbf{r}, t) = \int_{\Omega} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t - t_0) \frac{1}{N} n_0(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \approx \\ &\approx G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0; t - t_0) \int_{\Omega} p_0(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' = G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0; t - t_0), \end{aligned} \quad (2.44)$$

де $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0; t - t_0)$ — функція Гріна рівняння (2.37). Наближення (2.44) тим краще, чим менший розмір області Ω . Коли ж область Ω стягується в точку, формула (2.44) стає точною.

Отже, функція Гріна $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0; t - t_0)$ рівняння дифузії (2.37) дорівнює густині ймовірності переходу $p(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0; t - t_0)$ броунівської частинки з точки $\mathbf{r}_0$ в околі точки $\mathbf{r}$ за проміжок часу $t - t_0$.

Спираючись на це твердження, можна поставити експеримент, у якому в неоднорідне середовище з малого околу точки $\mathbf{r}_0$ вводять домішкову частинку і спостерігають, чи потрапляє вона через проміжок часу $t - t_0$ в малий окіл об'ємом dV іншої точки $\mathbf{r}$. Експеримент багаторазово повторюють в однакових фізичних умовах для великої кількості N тотожних домішкових частинок. Підрахувавши загальну кількість потраплянь N' домішкових частинок у вказаний окіл точки $\mathbf{r}$, значення функції Гріна $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0; t - t_0)$ можна знайти як границю відношення $N'/(NdV)$ при $N \rightarrow \infty$ без залучення методів аналізу й теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними. Такі реальні експерименти можна, очевидно, замінити комп'ютерним симулюванням для моделей випадкового блукання домішкових частинок, що ведуть до рівнянь дифузії із заданими коефіцієнтами, тобто для комп'ютерних моделей броунівського руху. Їх обговоренню присвячено підрозділ 2.6.

Контрольні питання до підрозділу 2.4

1. За яких умов зміни розподілу домішкових частинок у середовищі описуються рівнянням дифузії (2.37)?

2. За якої умови класичний розв'язок задачі Коші для рівняння (2.37), невід'ємний у початковий момент часу, залишається невід'ємним і в подальші моменти часу?
3. У яких межах можуть лежати значення класичного розв'язку задачі Коші для рівняння дифузії (2.37) у момент часу $t > t_0$, якщо при $t = t_0$ його значення не виходили за межі проміжку $[-m, m]$, $0 < m < \infty$?
4. Який зміст має функція Гріна рівняння дифузії (2.37)?
5. Які оцінки задовольняє функція Гріна для рівняння (2.37) з обмеженими неперервними коефіцієнтами?
6. Опишіть реальний експеримент з вимірювання значень функції Гріна рівняння (2.37).
7. Яких умов треба дотримуватися при комп'ютерному симулюванні реального експерименту з вимірювання значень функції Гріна рівняння (2.37)?

2.5. ВІНЕРІВСЬКА МОДЕЛЬ БРОУНІВСЬКОГО РУХУ

У цьому підрозділі для деталізації поняття випадкового руху броунівської частинки залучаються елементи теорії ймовірнісних процесів.

Спершу зазначимо, що в теорії ймовірності *розподіл імовірностей* дійсної випадкової величини X , яка може набувати будь-яких значень з інтервалу $(-\infty, \infty)$, називається *нормальним* або *розподілом Гаусса*, якщо ймовірність потрапляння значень X у довільний інтервал (A, B) дійсної осі дорівнює

$$P(A < X < B; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \int_A^B \exp\left(-\frac{(X - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) dX, \quad (2.45)$$

де μ і $\sigma > 0$ — дійсні параметри.

Оскільки для будь-якого дійсного числа Y справджується співвідношення

$$\begin{aligned} P(Y < X < Y + \Delta Y; \mu, \sigma) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \int_Y^{Y + \Delta Y} \exp\left(-\frac{(X - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) dX \stackrel{\Delta Y \rightarrow 0}{=} \\ &\stackrel{\Delta Y \rightarrow 0}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \exp\left(-\frac{(Y - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) \Delta Y, \end{aligned}$$

то густина ймовірності для нормального розподілу дається виразом

$$p(X; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \exp\left(-\frac{(X - \mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad (2.46)$$

і незалежно від μ і σ справджується умова

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(X; \mu, \sigma) dX = 1. \quad (2.47)$$

Параметри μ і σ^2 у формулах (2.45)–(2.47) збігаються з *математичним сподіванням* (середнім значенням) $\bar{X}$ і *дисперсією* $(\bar{X} - \bar{X})^2$ випадкової величини X :

$$\begin{aligned} \bar{X} &= \int_{-\infty}^{\infty} X p(X; \mu, \sigma) dX = \mu, \\ (\bar{X} - \bar{X})^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} (X - \bar{X})^2 p(X; \mu, \sigma) dX = \sigma^2. \end{aligned}$$

У спеціальному випадку, коли $\mu = 0$ і $\sigma^2 = 1$, нормальний розподіл називається *стандартним*; його густина ймовірності

$$p(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{X^2}{2}\right). \quad (2.48)$$

Будь-який нормальний розподіл є результатом трансформації стандартного розподілу, яка включає зсув точки відліку (нуля) і масштабне перетворення випадкової величини X :

$$X \rightarrow \frac{1}{\sigma}(X' - A_0), \quad dX \rightarrow \frac{1}{\sigma} dX'. \quad (2.49)$$

Очевидно, що при перетворенні (2.49) нормальний розподіл зберігає властивість (2.47):

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(X) dX = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma} p\left(\frac{X' - \mu}{\sigma}\right) dX' = \int_{-\infty}^{\infty} p(X'; \mu, \sigma) dX' = 1.$$

Нормальний розподіл природно виникає в різноманітних галузях знання і їх застосуваннях — від фізики до медицини, економіки і соціології. Зокрема нормальним розподілом добре моделюються похибки вимірювань, кількісні геометричні і фізичні характеристики живих організмів, відхилення при стрільбі тощо. Така його поширеність пояснюється *центральною граничною теоремою* теорії ймовірностей, згідно з якою за певних, не надто обмежувальних, умов для

незалежних випадкових числових величин $X_1, \dots, X_n, \dots$, які мають однакові розмірності, нульові середні значення і скінченні дисперсії $\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2, \dots$, випадкова величина

$$S_n = \frac{1}{s_n} \sum_{j=1}^n X_j, \quad s_n = \sqrt{\sum_{j=1}^n \sigma_j^2}, \quad (2.50)$$

збігається при $n \rightarrow \infty$ до випадкової величини S , яка має стандартний нормальний розподіл.

У випадках, коли кожний з доданків суми S_n у формулі (2.50) має нормальний розподіл, справджується таке твердження:

Лема 2.5.1. Якщо всі незалежні випадкові числові величини $X_1, \dots, X_n, \dots$, розмірності яких збігаються, мають нормальні розподіли з нульовими середніми і скінченними дисперсіями відповідно $\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2, \dots$, то для кожного $n \geq 2$ сума

$$Z_n = X_1 + \dots + X_n$$

має нормальний розподіл з нульовим середнім і дисперсією $\sigma_1^2 + \dots + \sigma_n^2$.

Доведення. Розглянемо докладно випадок $n=2$. Для цього виконаємо загальний аналіз випадкових подій, які однозначно визначаються впорядкованою парою двох дійсних чисел (X_1, X_2) . У таких випадках говорять про векторну випадкову величину. Ставлячи можливим подіям у відповідність точки площини E_2 , для довільної області $\Omega \subset E_2$ розглядатимемо як сприятливу подію потрапляння в неї точки з координатами (X_1, X_2) і вважатимемо, що ймовірність такої події w_Ω дається виразом

$$w_\Omega = \iint_{\Omega} p(X_1, X_2) dX_1 dX_2,$$

де $p(X_1, X_2)$ — невід’ємна інтегровна функція, яка задовольняє умову

$$\iint_{E_2} p(X_1, X_2) dX_1 dX_2 = 1.$$

Функцію $p(X_1, X_2)$ називають *густиною ймовірності* для векторної випадкової величини (X_1, X_2) . Для подальшого достатньо обмежитися випадком, коли $p(X_1, X_2)$ — неперервно диференційовна функція.

Нехай тепер $z = z(x_1, x_2)$ — довільна неперервно диференційовна дійснозначна скалярна функція на E_2 , а $\Omega_{z \in (a,b)}$ — геометричне місце

точок простору E_2 , що для будь-яких скінченних дійсних чисел $a < b$ задовольняють нерівність

$$a < z(x_1, x_2) < b.$$

Застосувавши функцію $z(x_1, x_2)$ до величини (X_1, X_2) , згенеруємо випадкову величину $Z = z(X_1, X_2)$. Імовірність потрапляння значень Z в інтервал (a, b) дається, очевидно, виразом

$$w_{a < Z < b} = \iint_{\Omega_{Z \in (a, b)}} p(X_1, X_2) dX_1 dX_2.$$

Щоб просунутися далі, користуємося характеристичною функцією $\chi_{\Omega_{z \in (a, b)}}$ області $\Omega_{z \in (a, b)}$:

$$\chi_{\Omega_{z \in (a, b)}}(x_1, x_2) = \begin{cases} 1, & (x_1, x_2) \in \Omega_{z \in (a, b)}, \\ 0, & (x_1, x_2) \notin \Omega_{z \in (a, b)}. \end{cases}$$

За допомогою складених функцій Дірака $\delta(\zeta - z(x_1, x_2))$ і Хевісайда $\theta(\zeta - z(x_1, x_2))$, а також співвідношенням $\theta'(\zeta) = \delta(\zeta)$ (див. підрозділи 4.3 і 4.4), її можна подати у вигляді

$$\chi_{\Omega_{z \in (a, b)}}(x_1, x_2) = \theta(b - z(x_1, x_2)) - \theta(a - z(x_1, x_2)) = \int_a^b \delta(\zeta - z(x_1, x_2)) d\zeta.$$

Формально дістаємо:

$$\begin{aligned} w_{a < Z < b} &= \iint_{E_2} \chi_{\Omega_{Z \in (a, b)}}(X_1, X_2) p(X_1, X_2) dX_1 dX_2 = \int_a^b P(Z) dZ, \\ P(Z) &= \iint_{E_2} \delta(Z - z(X_1, X_2)) p(X_1, X_2) dX_1 dX_2. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Водночас

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} P(Z) dZ &= \iint_{E_2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \delta(Z - z(X_1, X_2)) dZ \right] p(X_1, X_2) dX_1 dX_2 = \\ &= \iint_{E_2} p(X_1, X_2) dX_1 dX_2 = 1. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Отже, для випадкової величини $Z = z(X_1, X_2)$ функція $P(Z)$ у формулах (2.51), (2.52) є густиною ймовірності.

У рамках припущень, зроблених щодо густини ймовірності $p(X_1, X_2)$, наведені перетворення, які оперують з узагальненими

функціями і ведуть до співвідношень (2.51) і (2.52), є цілком виправданими. Випадки, коли функція $z(x_1, x_2)$ має *критичні точки*, у яких

$$\left(\frac{\partial z(x_1, x_2)}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial z(x_1, x_2)}{\partial x_2} \right)^2 = 0,$$

потребують спеціального розгляду (зверніть увагу на теорему 4.3.3). Це застереження не стосується, однак, досліджуваного нами випадку, коли $z(x_1, x_2) = x_1 + x_2$.

Згідно з формулою (2.51) густина ймовірності для величини $Z_2 = X_1 + X_2$ має вигляд

$$P(Z_2) = \iint_{E_2} \delta(Z_2 - X_1 - X_2) p(X_1, X_2) dX_1 dX_2 = \int_{-\infty}^{\infty} p(X_1, Z_2 - X_1) dX_1. \quad (2.53)$$

Якщо випадкові величини X_1 і X_2 незалежні, то їх густини ймовірності $p_1(X_1)$ і $p_2(X_2)$ задовольняють додаткову умову

$$p(X_1, X_2) = p_1(X_1) p_2(X_2).$$

У результаті густина ймовірності (2.53) суми $Z_2 = X_1 + X_2$ збігається із згорткою

$$P(Z_2) = \int_{-\infty}^{\infty} p_1(X_1) p_2(Z_2 - X_1) dX_1. \quad (2.54)$$

Підставляючи у цю формулу явні вирази для густин нормальних розподілів з нульовими середніми і дисперсіями відповідно σ_1^2 і σ_2^2 , для густини ймовірності суми $Z_2 = X_1 + X_2$ дістаємо

$$P(Z_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x_1^2/2\sigma_1^2} e^{-(Z_2-x_1)^2/2\sigma_2^2} dX_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}} e^{-Z_2^2/2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)},$$

що і треба було довести.

Доведення твердження леми для випадків $n \geq 3$ залишаємо читачеві.

Завдання 2.5.1. Доведіть лему 2.5.1 для всіх $n \geq 3$.

Вказівка. Скористайтеся методом математичної індукції, тобто покажіть, що з істинності твердження леми для деякого $n \geq 2$ випливає істинність її твердження і для $n+1$.

Розглянемо тепер процеси, що описуються безрозмірними функціями часу $W(t)$, значення яких у кожний момент часу $t > 0$ є випад-

ковими дійсними величинами. Кожний такий процес $W(t)$, $0 \leq t < \infty$, називається *вінерівським*, якщо функція $W(t)$ має наступні властивості:

1) Для будь-яких значень $s \geq 0$ і $t > s$ приріст $\Delta W = W(t) - W(s)$ є нормально розподіленою випадковою величиною з густиною ймовірності

$$p(\Delta W) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t-s)}} \exp\left(-\frac{(\Delta W)^2}{2\sigma^2(t-s)}\right) \quad (2.55)$$

і середніми

$$\overline{\Delta W} = 0, \quad \overline{(\Delta W)^2} = \sigma^2(t-s), \quad (2.56)$$

де $\sigma^2 > 0$ — стала, яка має розмірність оберненого часу і залежить лише від вибору одиниці вимірювання часу.

2) Для моментів часу t_1, t'_1, t_2, t'_2 , що задовольняють умови $0 \leq t_1 < t'_1 \leq t_2 < t'_2 < \infty$, прирости $\Delta W_j = W(t'_j) - W(t_j)$, $j=1,2$, є незалежними випадковими подіями.

Надалі для простоти вважатимемо, без втрати загальності, що обрано таку одиницю вимірювання часу, що $\sigma^2 = 1$.

Завдання 2.5.2. Виходячи з означення вінерівського процесу, покажіть, що для $t > 0$ значення такого процесу $W(t)$ — нормально розподілена величина із середнім значенням $\overline{W(t)} = W(0)$ і дисперсією $\overline{W^2(t)} = t$.

Завдання 2.5.3. Знайдіть середні значення степенів $|\Delta W(t)|^n$, $n=1,2,\dots$, де $\Delta W = W(t+\Delta t) - W(t)$, $\Delta t > 0$ — приріст вінерівського процесу.

Відповідь:

$$\overline{|\Delta W(t)|^n} = \frac{(2\Delta t)^{n/2}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right), \quad n=1,2,\dots, \quad (2.57)$$

де $\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-\tau} \tau^{z-1} d\tau$, $\operatorname{Re} z > 0$, — *гамма-функція (інтеграл Ейлера другого роду)*.

Повернімося до аналізу випадкового блукання домішкової частинки у тривимірному просторі. Уважаючи спершу, що частинка рухається в нерухомому однорідному ізотропному середовищі, припустимо, що в процесі блукання її декартові координати x_1, x_2, x_3 змінюються з часом згідно зі співвідношеннями

$$x_i(t) = x_{0i} + qW_i(t), \quad t > 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.58)$$

де $x_{0i} = x_i(0)$ — початкові значення координат, $W_i(t)$ — незалежні вінерівські процеси, q — стала, яка має розмірність довжини. Тоді прирости координат частинки за проміжок часу від моменту t до моменту $t + \Delta t$ даються виразами

$$\Delta x_i(t) = q\Delta W_i(t), \quad t > 0, \quad i = 1, 2, 3,$$

звідки знаходимо

$$\overline{\Delta x_i(t)} = 0, \quad i, k = 1, 2, 3, \quad (2.59)$$

$$\overline{\Delta x_i(t)\Delta x_k(t)} = 2D\delta_{ik}\Delta t, \quad i, k = 1, 2, 3, \quad (2.60)$$

$$\overline{|\Delta \mathbf{r}(t)|^3} = O((\Delta t)^{3/2}), \quad (2.61)$$

де позначено $D = q^2/2$, $|\Delta \mathbf{r}(t)| = \sqrt{(\Delta x_1(t))^2 + (\Delta x_2(t))^2 + (\Delta x_3(t))^2}$. Бачимо, що середні (2.59)–(2.61) відповідають вимогам (2.19)–(2.21), щоб частинка вважалася броунівською. Як результат, рівняння Фоккера — Планка для густини ймовірності $p(\mathbf{r}, t)$ у випадковому русі, що описується співвідношеннями (2.58), має вигляд

$$\frac{\partial p(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = D\Delta p(\mathbf{r}, t), \quad (2.62)$$

тобто збігається з рівнянням дифузії в нерухомому однорідному ізо- тропному середовищі, у якому немає джерел і поглиначів домішкових частинок.

Ситуація ускладнюється, якщо середовище, де відбуваються блу- кання частинки, є неоднорідним й анізотропним. Тоді прирости ко- ординат частинки за проміжок часу від моменту t до моменту $t + \Delta t$ вже залежать від координат, тобто радіус-вектора $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ точки, у якій опиняється частинка в момент часу t . Уважаючи, що рух частинки в такому середовищі теж керується трьома незалежними вінерівськими процесами $W_j(t)$, $j = 1, 2, 3$, припустимо, що тепер ці прирости визна- чаються при $\Delta t \rightarrow 0$ виразами

$$\Delta x_i(t) = \sum_{j=1}^3 b_{ij}(\mathbf{r}(t))\Delta W_j(t) + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial d_{ij}(\mathbf{r}(t))}{\partial x_j} \Delta t + O((\Delta t)^{3/2}), \quad (2.63)$$

$$t > 0, \quad i = 1, 2, 3,$$

де $b_{ij}(\mathbf{r}) = b_{ji}(\mathbf{r})$ — дійсні неперервно диференційовні елементи оборотної симетричної матриці $B(\mathbf{r}) = (b_{ij}(\mathbf{r}))_{i,j=1}^3$, $d_{ij}(\mathbf{r})$ — елементи симетричної матриці $D(\mathbf{r}) = (d_{ij}(\mathbf{r}))_{i,j=1}^3$, пов'язаної з $B(\mathbf{r})$ співвідношенням

$$B(\mathbf{r}) \cdot B(\mathbf{r}) = 2D(\mathbf{r}). \quad (2.64)$$

Тоді з формул (2.63) і (2.64), з огляду на властивості і незалежність вінерівських процесів $W_j(t)$, для приростів координат дістаємо:

$$\overline{\Delta x_i(t)} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial d_{ij}(\mathbf{r}(t))}{\partial x_j} \Delta t + O((\Delta t)^{3/2}), \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.65)$$

$$\overline{\Delta x_i(t) \Delta x_k(t)} = 2d_{ik}(\mathbf{r}(t)) \Delta t + O((\Delta t)^{3/2}), \quad i, k = 1, 2, 3, \quad (2.66)$$

$$|\overline{\Delta \mathbf{r}(t)}|^3 = O((\Delta t)^{3/2}). \quad (2.67)$$

Порівнюючи формули (2.65)–(2.67) з формулами (2.19)–(2.21), бачимо, що випадковий рух, який характеризується приростами координат (2.63), відповідає означенню броунівського. Відповідно, рівняння Фоккера — Планка для густини ймовірності $p(\mathbf{r}, t)$ в цьому русі збігається з рівнянням дифузії в нерухомому неоднорідному анізотропному середовищі (див. попередній підрозділ):

$$\frac{\partial p(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(d_{ij}(\mathbf{r}) \frac{\partial p(\mathbf{r}, t)}{\partial x_j} \right). \quad (2.68)$$

Зауваження 2.5.1. Варто зазначити, що при визначенні особливостей перерозподілу домішкових частинок у конкретному середовищі в рамках наближень, які ведуть до рівняння дифузії, усі фізичні особливості середовища, домішкових частинок, взаємодії між середовищем і частинками та заданих стаціонарних факторів (структурних і механічних неоднорідностей середовища, зовнішніх полів, температури тощо) впливають лише на значення коефіцієнта (матриці коефіцієнтів) дифузії у рівнянні (2.68) і далі не ніяк не проявляються. Тому різні моделі броунівського руху, керованого незалежними вінерівськими процесами, які при описі руху броунівських частинок не змінюють вигляду рівняння дифузії (2.68) і зберігають значення скалярного або матричних коефіцієнтів дифузії, є

фізично еквівалентними. Факт існування різних моделей броунівського руху, які дають рівняння (2.68) з однаковими коефіцієнтами $d_{ij}(\mathbf{r})$, можна побачити, звернувши увагу хоча б на ту обставину, що співвідношення (2.64), якщо розглядати його як рівняння відносно матричної функції $B(\mathbf{r})$, має принаймні 8 різних симетричних розв'язків з дійсними елементами¹.

Завдання 2.5.4. Перевірте, що заміна приростів координат (2.63) на

$$\begin{aligned} \Delta x_i(t) = & \sum_{j=1}^3 b_{ij}(\mathbf{r}(t)) \Delta W_j(t) + \\ & + \sum_{j,m,n=1}^3 \frac{1}{2} \left[\frac{\partial b_{im}(\mathbf{r}(t))}{\partial x_j} b_{nj}(\mathbf{r}(t)) + b_{im}(\mathbf{r}(t)) \frac{\partial b_{nj}(\mathbf{r}(t))}{\partial x_j} \right] \Delta W_m(t) \Delta W_n(t) + \\ & + O((\Delta t)^{3/2}), \quad i=1,2,3, \end{aligned} \quad (2.69)$$

де $b_{ij}(\mathbf{r})$ і $d_{ij}(\mathbf{r})$ — ті самі коефіцієнти, що й у приростах (2.63), не змінює вирази для середніх значень, що даються формулами (2.65)–(2.67).

Згідно з результатом завдання 2.5.4 моделі (2.63) і (2.69) броунівського руху в неоднорідному анізотропному середовищі фізично еквівалентні. Однак при використанні моделі (2.69) обсяг обчислень для комп'ютерної симуляції броунівських траєкторій значно зростає, не додаючи натомість жодних переваг.

При стаціонарній течії середовища зі швидкістю, значення якої в різних точках можуть різнитися, до приростів координат $\Delta x_i(t)$ у формулі (2.63) додається детермінована складова $V_i(\mathbf{r}(t))\Delta t$, де $V_i(\mathbf{r})$, $i=1,2,3$, — компоненти вектора швидкості течії в точці $\mathbf{r}$. Унаслідок цього рівняння для $\Delta x_i(t)$ набувають вигляду

$$\begin{aligned} \Delta x_i(t) = & V_i(\mathbf{r}(t))\Delta t + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial d_{ij}(\mathbf{r}(t))}{\partial x_j} \Delta t + \sum_{j=1}^3 b_{ij}(\mathbf{r}(t)) \Delta W_j(t) + \\ & + O((\Delta t)^{3/2}), \quad t > 0, \quad i=1,2,3. \end{aligned} \quad (2.70)$$

¹ Якщо A — дійсна симетрична оборотна матриця розміром $n \times n$, яка має невід'ємну квадратичну форму, тоді матричне рівняння $B \cdot B = A$ має 2^n різних дійсних симетричних розв'язків. Прикладом матриці A з $n=3$ є матриця коефіцієнтів дифузії $D(\mathbf{r})$ (див. завдання 2.3.4).

Така сама складова додається і до середніх $\overline{\Delta x_i(t)}$, тоді як середні $\overline{\Delta x_i(t)\Delta x_j(t)}$ не змінюються. У результаті рівняння Фоккера — Планка набуває дивергентної форми, притаманної рівнянню дифузії Фіка (2.28):

$$\frac{\partial p(\mathbf{r},t)}{\partial t} = -\sum_{i=1}^3 \frac{\partial (V_i(\mathbf{r})p(\mathbf{r},t))}{\partial x_i} + \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(d_{ij}(\mathbf{r}) \frac{\partial p(\mathbf{r},t)}{\partial x_j} \right). \quad (2.71)$$

Контрольні питання до підрозділу 2.5

1. Як означається нормальний розподіл дійсної випадкової величини?
2. Як розрізняються густини ймовірностей різних нормальних розподілів?
3. Як відновити густину ймовірності нормально розподіленої випадкової величини, знаючи її середнє значення і дисперсію?
4. Чому дорівнює густина ймовірності випадкової величини, яка є сумою двох незалежних нормально розподілених величин? Чому дорівнює середнє значення і дисперсія такої величини?
5. Які властивості мають часові прирости і добутки часових приростів вінерівського випадкового процесу?
6. З яких доданків складаються прирости координат при броунівському русі?
7. Як за допомогою вінерівських процесів можна так змодельовати зміни координат броунівських частинок, щоб їх густина задовольняла задане рівняння дифузії?

2.6. ІМОВІРНІСНИЙ ПІДХІД ДО ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ РІВНЯННЯ ДИФУЗІЇ

Задача про відшукування класичного розв'язку задачі Коші для рівняння дифузії несуттєво відрізняється від аналогічної задачі Коші для рівняння теплопровідності. Тому результати, отримані для другої, безпосередньо переносяться і на першу. Однак генезис рівняння дифузії, першоосною якого є броунівський рух, відкриває несподівано прості можливості для побудови ефективних алгоритмів чисельного розв'язування задач Коші для нього.

Теорема 2.6.1 (формула Фейнмана — Каца). Нехай рівняння для густини домішкових частинок, породжене їх броунівським рухом, має вигляд

$$\frac{\partial n(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -\operatorname{div}[\mathbf{V}(\mathbf{r})n(\mathbf{r}, t)] + \sum_{i,k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(d_{ik}(\mathbf{r}) \frac{\partial n(\mathbf{r}, t)}{\partial x_k} \right), \quad (2.72)$$

де коефіцієнти $V_i(\mathbf{r})$, $d_{ik}(\mathbf{r})$ мають перші похідні та є разом з ними неперервними й обмеженими. Тоді класичний розв'язок задачі Коші

$$\begin{aligned} \frac{\partial n(\mathbf{r}, t)}{\partial t} &= w(\mathbf{r})n(\mathbf{r}, t) - \operatorname{div}[\mathbf{V}(\mathbf{r})n(\mathbf{r}, t)] + \sum_{i,k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(d_{ik}(\mathbf{r}) \frac{\partial n(\mathbf{r}, t)}{\partial x_k} \right), \\ n(\mathbf{r}, t_0) &= n_0(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in E_3, \quad 0 \leq t_0 \leq t \leq T < \infty, \end{aligned} \quad (2.73)$$

за умов, що функції $w(\mathbf{r})$, $\operatorname{div} \mathbf{V}(\mathbf{r})$, їх похідні та функція $n_0(\mathbf{r})$ — неперервні й обмежені, дається виразом

$$n(\mathbf{r}, t) = \overline{n_0(\mathbf{r}(t)) \cdot \exp \left\{ \int_{t_0}^t [w(\mathbf{r}(s')) - \operatorname{div} \mathbf{V}(\mathbf{r}(s'))] ds' \right\}}, \quad (2.74)$$

де середнє береться за всіма траєкторіями частинок $\mathbf{r}(s)$, $t_0 \leq s \leq t$, що починаються в точці $\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}$.

Доведення. Почнемо із зауваження, що у випадках, коли $w(\mathbf{r}) \equiv 0$ і $\operatorname{div} \mathbf{V}(\mathbf{r}) \equiv 0$, вираз (2.74) набирає вигляду

$$n(\mathbf{r}, t) = \overline{n_0(\mathbf{r}(t))}. \quad (2.75)$$

Ця формула безпосередньо впливає з того факту, що для вказаних випадків фундаментальний розв'язок, тобто функція Гріна $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0; t - t_0)$ рівняння (2.37) і густина ймовірності переходу $p(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t - t_0)$ з точки $\mathbf{r}'$ у малий окіл точки $\mathbf{r}$ за проміжок часу $t - t_0$ для броунівської частинки, специфіці випадкового блукання якої відповідає рівняння (2.71), збігаються. Відповідно, для будь-якої обмеженої неперервної функції $n_0(\mathbf{r})$ можемо записати

$$\int_{E_3} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t - t_0) n_0(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' = \int_{E_3} p(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t - t_0) n_0(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'. \quad (2.76)$$

Ліва частина рівності (2.76) — це розв'язок $n(\mathbf{r}, t)$ задачі Коші (2.73) для випадку, коли $w(\mathbf{r}) \equiv 0$ і $\operatorname{div} \mathbf{V}(\mathbf{r}) \equiv 0$, права — середнє за всіма траєкторіями, про яке йдеться в умові теореми.

Щоб переконатися в правильності теореми для ненульових $w(\mathbf{r})$ і $\operatorname{div} \mathbf{V}(\mathbf{r})$, не занурюючись водночас у технічні деталі, додатково припустимо, що шуканий розв'язок $n(\mathbf{r}, t)$ має обмежені неперервні треті похідні за всіма змінними.

Нехай $\varphi(\mathbf{r}, t)$ — довільна функція, яка є тричі неперервно диференційовною за всіма своїми змінними і має рівномірно обмежені в E_3 треті похідні за просторовими змінними. Розглянемо складену функцію $\varphi(\mathbf{r}(s), s)$, $t_0 \leq s \leq t$, де $\mathbf{r}(s)$ — вектор, який визначає положення броунівської частинки у момент часу s ; у початковий момент часу $\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}$. Послідовні значення цієї функції утворюють на часовому інтервалі $t_0 \leq s \leq t$ випадковий процес φ_s .

Уважаючи, що прирости координат броунівських частинок у рухомому середовищі визначаються приростами трьох незалежних вінерівських процесів, які ведуть до рівняння (2.71) й асоційованого з цим рухом рівняння дифузії (2.72), знайдемо прирости $\Delta\varphi_s = \varphi_{s+\Delta s} - \varphi_s$ процесу φ_s при $\Delta s \rightarrow 0$. Ураховуючи рівняння (2.70) і (2.71), оцінки (2.57) для модулів приростів вінерівських процесів і користуючись, як і при виведенні рівняння Фоккера — Планка, формулою Тейлора для тричі диференційовної за всіма змінними функції $\varphi(\mathbf{r}, s)$, можемо записати:

$$\begin{aligned} \Delta\varphi_s &= \frac{\partial\varphi(\mathbf{r}(s), s)}{\partial s} \Delta s + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial\varphi(\mathbf{r}(s), s)}{\partial x_i} \Delta x_i(s) + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2\varphi(\mathbf{r}(s), s)}{\partial s \partial x_i} \Delta s \Delta x_i(s) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial^2\varphi(\mathbf{r}(s), s)}{\partial x_i \partial x_j} \Delta x_i(s) \Delta x_j(s) + \\ &+ \frac{1}{6} \sum_{i,j,k=1}^3 \frac{\partial^3\varphi(\mathbf{r}(s), s)}{\partial s \partial x_i \partial x_j} \Delta s \Delta x_i(s) \Delta x_j(s) + \\ &+ \frac{1}{6} \sum_{i,j,k=1}^3 \frac{\partial^3\varphi(\mathbf{r}(s), s)}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \Delta x_i(s) \Delta x_j(s) \Delta x_k(s) + O(|\Delta s|^{3/2}) = \\ &= \frac{\partial\varphi(\mathbf{r}(s), s)}{\partial s} \Delta s + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial\varphi(\mathbf{r}(s), s)}{\partial x_i} \overline{\Delta x_i(s)} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial^2\varphi(\mathbf{r}(s), s)}{\partial x_i \partial x_j} \overline{\Delta x_i(s) \Delta x_j(s)} + \\ &+ \sum_{i=1}^3 \frac{\partial\varphi(\mathbf{r}(s), s)}{\partial x_i} [\Delta x_i(s) - \overline{\Delta x_i(s)}] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial^2 \varphi(\mathbf{r}(s), s)}{\partial x_i \partial x_j} \left[\Delta x_i(s) \Delta x_j(s) - \overline{\Delta x_i(s) \Delta x_j(s)} \right] + \\
& + \frac{1}{6} \sum_{i,j,k=1}^3 \frac{\partial^3 \varphi(\mathbf{r}(s), s)}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \overline{\Delta x_i(s) \Delta x_j(s) \Delta x_k(s)} + \\
& + \frac{1}{6} \sum_{i,j,k=1}^3 \frac{\partial^3 \varphi(\mathbf{r}(s), s)}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \left[\Delta x_i(s) \Delta x_j(s) \Delta x_k(s) - \overline{\Delta x_i(s) \Delta x_j(s) \Delta x_k(s)} \right] + O(|\Delta s|^{3/2}).
\end{aligned}$$

Звідси бачимо, що приріст процесу $\varphi(\mathbf{r}(s), s)$ при $\Delta s \rightarrow 0$ є сумою трьох внесків: детермінованої дрейфової частини

$$\begin{aligned}
\Delta \varphi_s^d = & \left[\frac{\partial \varphi(\mathbf{r}(s), s)}{\partial s} + \sum_{i=1}^3 V_i(\mathbf{r}(s)) \frac{\partial \varphi(\mathbf{r}(s), s)}{\partial x_i} + \right. \\
& \left. + \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(d_{ij}(\mathbf{r}(s)) \frac{\partial \varphi(\mathbf{r}(s), s)}{\partial x_j} \right) \right] \Delta s; \tag{2.77}
\end{aligned}$$

флуктуаційної частини

$$\begin{aligned}
\Delta \varphi_s^f = & \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \varphi(\mathbf{r}(s), s)}{\partial x_i} \left[\Delta x_i(s) - \overline{\Delta x_i(s)} \right] + \\
& + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial^2 \varphi(\mathbf{r}(s), s)}{\partial x_i \partial x_j} \left[\Delta x_i(s) \Delta x_j(s) - \overline{\Delta x_i(s) \Delta x_j(s)} \right], \tag{2.78}
\end{aligned}$$

доданки якої за порядком величини не нижчі за $O(|\Delta s|^{1/2})$ і не вищі за $O((\Delta s)^2)$, і середнє якої дорівнює нулю; усіх тих доданків у формулі Тейлора для функції $\varphi(\mathbf{r}(s), s)$, які містять різні добуток будь-яких трьох із приростів Δx_1 , Δx_2 , Δx_3 , Δs і середні яких, як і їх сума, є величинами щонайменше порядку $O(|\Delta s|^{3/2})$.

Припустимо також, що функція $\varphi(\mathbf{r}, s)$, яка породжує процес φ_s , додатково задовольняє рівняння

$$\frac{\partial \varphi(\mathbf{r}, s)}{\partial s} + \sum_{i=1}^3 V_i(\mathbf{r}) \frac{\partial \varphi(\mathbf{r}, s)}{\partial x_i} + \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(d_{ij}(\mathbf{r}) \frac{\partial \varphi(\mathbf{r}, s)}{\partial x_j} \right) = 0. \tag{2.79}$$

Тоді, згідно з формулою (2.77), детермінована складова $\Delta \varphi_s^d$ приросту $\Delta \varphi_s$ дорівнює нулю. Оскільки середнє флуктуаційної частини $\Delta \varphi_s^f$ приросту $\Delta \varphi_s$, з огляду на формулу (2.78), теж дорівнює нулю,

$\overline{\Delta\varphi_s^f} = 0$, а середнє від решти внесків у приріст $\Delta\varphi_s$ має порядок $O(|\Delta s|^{3/2})$, робимо висновок, що за умови (2.79)

$$\overline{\Delta\varphi_s} = O(|\Delta s|^{3/2}).$$

Відповідно, беручи довільне s з інтервалу $[0, t]$ і як завгодно велике натуральне число N , для $\delta = s/N$ маємо

$$\overline{\varphi_s - \varphi_0} = \sum_{i=1}^N [\overline{\varphi_{i\delta} - \varphi_{(i-1)\delta}}] = N \cdot O(\delta^{3/2}) = O\left(\frac{s^{3/2}}{N^{1/2}}\right). \quad (2.80)$$

Оскільки ліва частина співвідношення (2.80) не залежить від N , воно вказує на те, що за умови (2.79) при фіксованому φ_0 і довільному $s > 0$ процесу φ_s притаманна властивість

$$\overline{\varphi_s} = \varphi_0.$$

Повертаючись тепер до тричі неперервно диференційовного розв'язку $n(\mathbf{r}, t)$ задачі Коші (2.73), утворимо за його допомогою випадковий процес $\varphi(\mathbf{r}(s), s)$, у якому в ролі φ виступає функція

$$\varphi(\mathbf{r}, s) = \exp \left\{ \int_{t_0}^s [w(\mathbf{r}(s')) - \operatorname{div} \mathbf{V}(\mathbf{r}(s'))] ds' \right\} \cdot n(\mathbf{r}, t + t_0 - s), \quad t_0 \leq s \leq t. \quad (2.81)$$

Щоб обчислити прирости $\Delta\varphi_s$ для цього процесу, візьмемо до уваги, що для будь-якої неперервно диференційовної функції $f(\mathbf{r})$ з обмеженими похідними справджується співвідношення

$$|f(\mathbf{r}') - f(\mathbf{r})| \leq M |\mathbf{r}' - \mathbf{r}|, \quad |\nabla f| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2} \leq M < \infty,$$

унаслідок якого для приростів процесу

$$\psi_s = \exp \left[\int_{t_0}^s f(\mathbf{r}(s')) ds' \right]$$

на броунівських траєкторіях маємо:

$$\Delta\psi_s = \psi_{s+\Delta s} - \psi_s = \left\{ \exp \left[\int_s^{s+\Delta s} f(\mathbf{r}(s')) ds' \right] - 1 \right\} \psi_s =$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\int_s^{s+\Delta s} f(\mathbf{r}(s')) ds' + O((\Delta s)^2) \right] \psi_s = \\
&= \left[f(\mathbf{r}(s)) \Delta s + O(|\mathbf{r}(s+\Delta s) - \mathbf{r}(s)| |\Delta s|) + O((\Delta s)^2) \right] \psi_s = \\
&= f(\mathbf{r}(s)) \psi_s \Delta s + O((\Delta s)^{3/2}). \tag{2.82}
\end{aligned}$$

З урахуванням виразу (2.82), записаного для функції $f(\mathbf{r}) = w(\mathbf{r}) - \operatorname{div} \mathbf{V}(\mathbf{r})$, для шуканих приростів $\Delta \varphi_s$ знаходимо:

$$\begin{aligned}
\Delta \varphi_s = & \left\{ [w(\mathbf{r}(s)) - \operatorname{div} \mathbf{V}(\mathbf{r}(s))] n(\mathbf{r}(s), \tau) \Delta s + \Delta n(\mathbf{r}(s), \tau) \right\} \times \\
& \times \exp \left\{ \int_{t_0}^s [w(\mathbf{r}(s')) - \operatorname{div} \mathbf{V}(\mathbf{r}(s'))] ds' \right\}, \quad \tau = t + t_0 - s. \tag{2.83}
\end{aligned}$$

Зокрема для детермінованої частини $\Delta \varphi_s^d$ приросту процесу φ_s з формул (2.77), (2.81) і (2.83) маємо:

$$\begin{aligned}
\Delta \varphi_s^d = & \left\{ [w(\mathbf{r}(s)) - \operatorname{div} \mathbf{V}(\mathbf{r}(s))] n(\mathbf{r}(s), \tau) + \right. \\
& + \frac{\partial n(\mathbf{r}(s), \tau)}{\partial s} + \sum_{i=1}^3 V_i(\mathbf{r}) \frac{\partial n(\mathbf{r}(s), \tau)}{\partial x_i} + \\
& + \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(d_{ij}(\mathbf{r}(s)) \frac{\partial \varphi(\mathbf{r}(s), \tau)}{\partial x_j} \right) \left. \right\} \exp \left\{ \int_{t_0}^s [w(\mathbf{r}(s')) - \operatorname{div} \mathbf{V}(\mathbf{r}(s'))] ds' \right\} \Delta s = \\
& = \left\{ -\frac{\partial n(\mathbf{r}(s), \tau)}{\partial t} + w(\mathbf{r}(s)) n(\mathbf{r}(s), \tau) - \operatorname{div} [\mathbf{V}(\mathbf{r}(s)) n(\mathbf{r}(s), \tau)] + \right. \\
& + \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(d_{ij}(\mathbf{r}(s)) \frac{\partial \varphi(\mathbf{r}(s), \tau)}{\partial x_j} \right) \left. \right\} \times \\
& \times \exp \left\{ \int_{t_0}^s [w(\mathbf{r}(s')) - \operatorname{div} \mathbf{V}(\mathbf{r}(s'))] ds' \right\} \Delta s. \tag{2.84}
\end{aligned}$$

Оскільки, за припущенням, функція $n(\mathbf{r}, t-s)$ задовольняє рівняння дифузії задачі (2.73), то з формули (2.84) випливає, що детермінована частина приросту процесу φ_s дорівнює нулю. Як і вище,

отримуємо, що $\varphi_{t_0} = \bar{\varphi}_s$, $t_0 \leq s \leq t$. Тоді з формули (2.81) і початкової умови задачі (2.73) дістаємо:

$$\begin{aligned} n(\mathbf{r}, t) = \varphi_{t_0} = \bar{\varphi}_t &= n(\mathbf{r}(t), t_0) \exp \left\{ \overline{\int_{t_0}^t [w(\mathbf{r}(s')) - \operatorname{div} \mathbf{V}(\mathbf{r}(s'))] ds'} \right\} = \\ &= n_0(\mathbf{r}(t)) \exp \left\{ \overline{\int_{t_0}^t [w(\mathbf{r}(s')) - \operatorname{div} \mathbf{V}(\mathbf{r}(s'))] ds'} \right\}, \end{aligned}$$

де усереднення ведеться за всіма броунівськими траєкторіями $\mathbf{r}(s)$, $t_0 \leq s \leq t$, з початком у точці $\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}$. Теорему доведено.

Завдання 2.6.1. Узагальніть формулу Фейнмана — Каца на розв'язок задачі Коші для неоднорідного рівняння дифузії

$$\begin{aligned} \frac{\partial n(\mathbf{r}, t)}{\partial t} &= -\operatorname{div}(\mathbf{V}(\mathbf{r})n(\mathbf{r}, t)) + \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(d_{ij}(\mathbf{r}) \frac{\partial n(\mathbf{r}, t)}{\partial x_j} \right) + f(\mathbf{r}, t), \\ n(\mathbf{r}, t_0) &= n_0(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in E_3, \quad 0 \leq t_0 \leq t \leq T < \infty, \end{aligned} \quad (2.85)$$

де $f(\mathbf{r}, t)$ — густина потужності зовнішніх джерел домішкових броунівських частинок. Уважайте, що розв'язки задач Коші (2.73) і (2.85) належать до класу тричі неперервно диференційовних функцій.

Вказівка. Як завжди для лінійних рівнянь, розв'язок задачі Коші (2.85) можна шукати у вигляді суми

$$n(\mathbf{r}, t) = n_1(\mathbf{r}, t) + n_2(\mathbf{r}, t),$$

де $n_1(\mathbf{r}, t)$ — розв'язок однорідної ($f(\mathbf{r}, t) = 0$) задачі Коші (2.85), $n_2(\mathbf{r}, t)$ — розв'язок неоднорідної задачі Коші (2.85) з нульовою початковою умовою

$$n_2(\mathbf{r}, t_0) = 0.$$

Для знаходження $n_1(\mathbf{r}, t)$ можна скористатися формулою (2.74). Для $n_2(\mathbf{r}, t)$ справджується принцип Дюамеля, згідно з яким

$$n_2(\mathbf{r}, t) = \int_{t_0}^t n(\mathbf{r}, t + t_0 - \tau; f_\tau) d\tau, \quad (2.86)$$

де $n(\mathbf{r}, t; f_\tau)$, $t_0 \leq \tau \leq t$, — розв'язок задачі Коші для однорідного рівняння дифузії (2.73) і початкової умови

$$n(\mathbf{r}, \tau) = f(\mathbf{r}, \tau) .$$

Тому для $n(\mathbf{r}, t; f_\tau)$, $t_0 \leq \tau \leq t$, у формулі (2.86) можна скористатися формулою (2.74), замінивши в ній початкову функцію $n(\mathbf{r}, t_0)$ на $f(\mathbf{r}, \tau)$ і початковий момент часу t_0 на τ .

3. ХВИЛЬОВЕ РІВНЯННЯ

3.1. РІВНЯННЯ МАЛИХ КОЛИВАНЬ РІДИНИ І ГАЗУ

На відміну від необоротних процесів типу теплопровідності або дифузії, поширення хвиль у середовищі є суто динамічним процесом, який керується фундаментальними рівняннями механіки або теорії поля. Вивчення більшості лінійних хвильових процесів здійснюється за допомогою хвильового рівняння, яке ми виводимо далі на прикладі малих коливань рідини (або газу).

Розглянемо всередині рідини деяку її масу, яка має об'єм V і обмежена гладкою поверхнею S . Сили, які діють на виділену масу з боку решти рідини, є короткосяжними і тому зводяться лише до поверхневих. Уважатимемо також, що рідина є ідеальною. Це означає, що сили, які діють на будь-яку малу ділянку поверхні S , перпендикулярні до цієї ділянки, напрямлені протилежно до вектора зовнішньої нормалі $\mathbf{n}$ до неї (усередину маси), а їх величина пропорційна площі ділянки dS . Іншими словами, у кожній точці $\mathbf{r}$ ділянки в будь-який момент часу t вони зводяться лише до нормального тиску $p(\mathbf{r}, t)$ — зсувних напружень, як у твердому тілі, не виникає. Більше того, величина тиску $p(\mathbf{r}, t)$ не залежить від орієнтації цієї ділянки. Надалі вважатимемо, що $p(\mathbf{r}, t)$ та всі інші функції, які характеризують стан рідини, є принаймні двічі неперервно диференційовними.

Розбиваючи виділену масу на нескінченно малі частини з об'ємами dV , рівняння руху для неї можемо записати у вигляді

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) dV = \mathbf{F}, \quad (3.1)$$

де $\rho(\mathbf{r}, t)$ — густина рідини, $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ — векторна функція, значення якої в кожній точці збігається з вектором миттєвої швидкості потоку рідини в цій точці, $\mathbf{F}$ — рівнодійна сил, прикладених до виділеної маси. Рівність (3.1) є математичним виразом принципу Д'Аламбера, згідно з яким векторна сума всіх сил, які діють на речовину в об'ємі V , включно з силами інерції, що виникають при прискореному русі окремих частин виділеної маси, дорівнює нулю.

При обчисленні похідної в лівій частині (3.1) треба взяти до уваги, що при русі рідини її найдрібніші частинки неперервно змінюють свої положення, переходячи з точок з координатами $\mathbf{r}$ у момент часу t в точки з координатами $\mathbf{R}(t')$ у момент часу $t' > t$. Формально рух рідини можна ототожнити з неперервним перетворенням координат її частинок при поступовій зміні часового параметра t . При цьому область, яку займає виділена маса, може зміщуватися і деформуватися, трансформуючись в область з об'ємом V' .

Нехай Φ — довільна адитивна характеристика рідини, $\varphi(\mathbf{r}, t)$ — її об'ємна густина; прикладом таких величин є відповідно маса $M(t)$ і густина $\rho(\mathbf{r}, t)$ рідини. Для частинок, які в момент часу t займають об'єм V , величина

$$\Phi(t) = \int_V \varphi(\mathbf{r}, t) dV$$

внаслідок руху рідини буде, узагалі кажучи, змінюватися, набуваючи в момент часу $t' > t$ значення

$$\Phi(t') = \int_{V'} \varphi(\mathbf{R}(t'), t') dV'.$$

Щоб обчислити часову похідну $\Phi'(t)$, повернімося в інтегралі $\Phi(t')$ від трансформованих координат $\mathbf{R}(t')$ до їх відповідних значень $\mathbf{r}$ у момент часу t , зробивши відповідну заміну змінних і пам'ятаючи, що при цій заміні

$$dV' = J dV,$$

де

$$J = \frac{\partial(X(t'), Y(t'), Z(t'))}{\partial(x, y, z)} = \det \left(\frac{\partial X_k(t')}{\partial x_l} \right)_{1 \leq k, l \leq 3}$$

— якобіан перетворення від змінних $\mathbf{R}(t') = (X(t'), Y(t'), Z(t')) \equiv (X_1(t'), X_2(t'), X_3(t'))$ до змінних $\mathbf{r} = (x, y, z) \equiv (x_1, x_2, x_3)$, та знайдемо головну частину приросту $d\Phi = \Phi(t') - \Phi(t)$ для випадку, коли різниця $t' - t = dt$ — нескінченно мала величина. У цьому випадку, з огляду на означення вектора швидкості частинки,

$$\mathbf{R}(t + dt) = \mathbf{r} + \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) dt + o(dt),$$

а тому

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{R}(t + dt), t + dt) &= \varphi(\mathbf{r} + \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) dt, t + dt) + o(dt) = \\ &= \varphi(\mathbf{r}, t) + \left[\frac{\partial \varphi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \cdot \nabla \varphi(\mathbf{r}, t) \right] dt + o(dt), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J &= \det \left(\delta_{kl} + \frac{\partial v_k(\mathbf{r}, t)}{\partial x_l} dt \right)_{1 \leq k, l \leq 3} + o(dt) = \\
&= 1 + \left[\frac{\partial v_x(\mathbf{r}, t)}{\partial x} + \frac{\partial v_y(\mathbf{r}, t)}{\partial y} + \frac{\partial v_z(\mathbf{r}, t)}{\partial z} \right] dt + o(dt) = \\
&= 1 + \operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \cdot dt + o(dt).
\end{aligned}$$

Ураховуючи далі, що

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \cdot \nabla \varphi(\mathbf{r}, t) + \varphi(\mathbf{r}, t) \cdot \operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \operatorname{div} [\varphi(\mathbf{r}, t) \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)],$$

приходимо до *теорему переносу Рейнольдса* у формі

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} = \int_V \left\{ \frac{\partial \varphi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \operatorname{div} [\varphi(\mathbf{r}, t) \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)] \right\} dV. \quad (3.2)$$

Нехай, наприклад, йдеться про масу

$$M(t) = \int_V \rho(\mathbf{r}, t) dV$$

рідини, що в момент часу t заповнює область об'ємом V . Якщо в процесі подальшого руху рідини і неперервної трансформації цієї області молекулярний склад рідини не змінюється, то маса M теж залишається незмінною. Тоді, з огляду на теорему переносу, дістаємо:

$$\frac{dM}{dt} = \int_V \left\{ \frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \operatorname{div} [\rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)] \right\} dV = 0.$$

Оскільки ця рівність справджується для будь-якого об'єму V , то з неї випливає так зване *рівняння неперервності*:

$$\frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \operatorname{div} [\rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)] = 0. \quad (3.3)$$

Застосуємо тепер теорему переносу до декартових компонент вектора повного імпульсу

$$\mathbf{P}(t) = \int_V \rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) dV$$

рідини, яка в момент часу t міститься в області об'ємом V . Зокрема для проєкції вектора $\mathbf{P}(t)$ на вісь x знаходимо

$$\frac{dP_x(t)}{dt} = \int_V \left\{ \frac{\partial}{\partial t} [\rho(\mathbf{r}, t) v_x(\mathbf{r}, t)] + \operatorname{div} [\rho(\mathbf{r}, t) v_x(\mathbf{r}, t) \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)] \right\} dV,$$

де підінтегральний вираз, скориставшись рівнянням неперервності (3.3), можемо перетворити наступним чином:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} [\rho(\mathbf{r}, t) v_x(\mathbf{r}, t)] + \operatorname{div} [\rho(\mathbf{r}, t) v_x(\mathbf{r}, t) \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)] = \\ & = \left\{ \frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \operatorname{div} [\rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)] \right\} v_x(\mathbf{r}, t) + \\ & + \rho(\mathbf{r}, t) \left[\frac{\partial v_x(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \cdot \nabla v_x(\mathbf{r}, t) \right] = \rho(\mathbf{r}, t) \left[\frac{\partial v_x(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + (\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \cdot \nabla) v_x(\mathbf{r}, t) \right]. \end{aligned}$$

Часові похідні проекцій вектора $\mathbf{P}(t)$ на осі y і z описуються аналогічними співвідношеннями. Як результат, для лівої частини рівності (3.1) маємо:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) dV = \int_V \rho(\mathbf{r}, t) \left[\frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + (\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \cdot \nabla) \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \right] dV. \quad (3.4)$$

Якщо, крім поверхневих сил, що визначаються нормальним тиском $p(\mathbf{r}, t)$, на виділену масу рідини діють ще й об'ємні сили, наприклад, сила тяжіння, то права частина (3.1) має вигляд

$$\mathbf{F} = - \oint_S p(\mathbf{r}, t) \mathbf{n} dS + \int_V \rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{f}(\mathbf{r}, t) dV, \quad (3.5)$$

де $\mathbf{f}(\mathbf{r}, t)$ — об'ємна сила, яка діє на одиничну масу, розташовану в точці $\mathbf{r}$.

Зауважимо, що для будь-якої гладкої функції $p(\mathbf{r}, t)$ і будь-якого скінченного об'єму V , обмеженого кусково-гладкою поверхнею S ,

$$\oint_S p(\mathbf{r}, t) \mathbf{n} dS = \int_V (\nabla p(\mathbf{r}, t)) dV. \quad (3.6)$$

Користуючись формулами (3.4)–(3.6) та опускаючи аргументи функцій, перепишемо рівняння руху (3.1) у вигляді

$$\int_V \left(\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \rho \mathbf{f} + \nabla p \right) dV = 0.$$

З того, що ця рівність справджується для будь-якого об'єму V , випливає, що

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = - \frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{f}. \quad (3.7)$$

Система із чотирьох рівнянь (3.3), (3.7) містить, у загальному випадку, п'ять невідомих функцій — v_x , v_y , v_z , ρ і p , але дві з них —

ρ і p — пов'язані між собою функціональним співвідношенням $p = p(\rho)$, явний вигляд якого визначається рівнянням стану речовини середовища.

Отже, рівновага і рух ідеальної рідини визначаються такою системою рівнянь:

$$\begin{aligned}\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho(\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} &= -\nabla p + \rho \mathbf{f}, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) &= 0, \\ p &= p(\rho).\end{aligned}\tag{3.8}$$

Оскільки система (3.8) нелінійна, загальні методи її розв'язування досі залишаються за межами можливостей сучасної науки. Проте відомі деякі її стаціонарні (незалежні від часу) розв'язки, що відповідають стійким станам спокою або стаціонарного руху рідини. Стійкість розв'язку системи (3.8) означає, що малі збурення при $t = t_0$ функцій, що становлять її розв'язок, не ведуть до виходу значень цих функцій при $t > t_0$ за певні межі.

Нехай $\mathbf{v}_0(x, y, z)$, $\rho_0(x, y, z)$, $p_0(x, y, z)$ — стійкий стаціонарний розв'язок системи (3.8) при наявності стаціонарної зовнішньої сили $\mathbf{f}_0$. Розглядатимемо лише ті розв'язки, які при $t \geq t_0$ досить мало відрізняються від $\mathbf{v}_0$, ρ_0 , p_0 . Покладемо

$$\begin{aligned}\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{v}_0(\mathbf{r}) + \mathbf{v}_1(\mathbf{r}, t), \\ \rho(\mathbf{r}, t) &= \rho_0(\mathbf{r}) + \rho_1(\mathbf{r}, t), \\ p(\mathbf{r}, t) &= p_0(\mathbf{r}) + p_1(\mathbf{r}, t),\end{aligned}\tag{3.9}$$

і підставимо ці вирази в систему (3.8). Нехтуючи членами другого порядку за малими величинами $\mathbf{v}_1(\mathbf{r}, t)$, $\rho_1(\mathbf{r}, t)$ і $p_1(\mathbf{r}, t)$, знаходимо для цих величин таку наближену систему лінійних рівнянь:

$$\begin{aligned}\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} + \rho_0(\mathbf{v}_0 \nabla) \mathbf{v}_1 + \rho_0(\mathbf{v}_1 \nabla) \mathbf{v}_0 &= \frac{\rho_1}{\rho_0} \nabla p_0 - \nabla \left(\frac{dp_0}{d\rho_0} \rho_1 \right), \\ \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_1 \mathbf{v}_0) + \operatorname{div}(\rho_0 \mathbf{v}_1) &= 0.\end{aligned}\tag{3.10}$$

Завдання 3.1.1. Виходячи із системи (3.8), виконайте всі зазначені вище перетворення та отримайте систему лінійних рівнянь (3.10).

Рівняння (3.10) описують малі коливання рідини або газу на фоні стійкого стаціонарного потоку. Підкреслимо, що ці рівняння лінійні. Вони називаються *лінеаризованими* рівняннями гідродинаміки, а описана вище процедура для їх знаходження — *лінеаризацією*. Якщо й на зовнішню об'ємну силу накладається збурення $\mathbf{f}_1(\mathbf{r}, t)$ того ж порядку, що й шукані функції $\mathbf{v}_1(\mathbf{r}, t)$, $\rho_1(\mathbf{r}, t)$ і $p_1(\mathbf{r}, t)$, то в правій частині першого рівняння в (3.10) з'являється додатковий член $\rho_0 \mathbf{f}_1(\mathbf{r}, t)$.

Розглянемо найпростіший випадок, коли вивчаються малі відхилення від стану спокою однорідної рідини. Тоді

$$\mathbf{v}_0(\mathbf{r}) = 0, \quad \rho_0(\mathbf{r}) = \text{const}, \quad p_0(\mathbf{r}) = \text{const},$$

і якщо сила зовнішнього збурення $\mathbf{f}_1(\mathbf{r}, t)$ досить мала, система (3.10) набуває вигляду

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} &= -a^2 \nabla p_1 + \rho_0 \mathbf{f}_1, \\ \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \mathbf{v}_1 &= 0, \end{aligned} \quad (3.11)$$

де $a^2 \equiv dp_0/d\rho_0$.

Зауважимо, що похідна $dp_0/d\rho_0$ для термодинамічно стійких систем є додатною величиною і має розмірність квадрата швидкості. Звукові та ультразвукові коливання рідини або газу — це відносно швидкі процеси, на які теплопровідність не встигає помітно вплинути. Тому рівняння, що пов'язує p і ρ , повинно узгоджуватися з умовою адіабатичності процесу.

Уважатимемо, що об'ємна сила $\mathbf{f}_1$ у системі (3.11) відсутня, або що принаймні для неї існує *потенціал*, тобто така скалярна функція W , що

$$-\nabla W = \mathbf{f}_1. \quad (3.12)$$

Припустимо також, що в початковий момент часу $t = t_0$ поле швидкостей є *потенціальним*, тобто¹

$$\operatorname{rot} \mathbf{v}_1 = 0. \quad (3.13)$$

За умови (3.13) і лише за такої умови існує скалярна функція $\psi_0(\mathbf{r})$, яка називається *потенціалом швидкості*, така, що

$$\mathbf{v}_1(\mathbf{r}, t_0) = -\nabla \psi_0(\mathbf{r}). \quad (3.14)$$

¹ У декартовій системі координат $\operatorname{rot} \mathbf{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \mathbf{e}_1 + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \mathbf{e}_2 + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \mathbf{e}_3$.

Зазначимо що потенціальний потік характеризуються відсутністю вихрових (обертальних) рухів частинок рідини. У непотенціальному ж потоці частинка рідини, що заповнює, скажімо, малий окіл точки $\mathbf{r}$, може рухатися як поступально, з деякою миттєвою швидкістю $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$, так і одночасно обертатися навколо осі, що проходить через точку $\mathbf{r}$, з кутовою швидкістю $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}, t)$, величина і напрям якої визначаються виразом

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) .$$

З першого рівняння (3.11) за умови (3.12) дістаємо:

$$\mathbf{v}_1(\mathbf{r}, t) = \mathbf{v}_1(\mathbf{r}, t_0) - \nabla \left\{ \int_{t_0}^t \left[W(\mathbf{r}, t') + \frac{a^2}{\rho_0} \rho_1(\mathbf{r}, t') \right] dt' \right\} ,$$

або, з урахуванням співвідношення (3.14),

$$\mathbf{v}_1(\mathbf{r}, t) = -\nabla \left\{ \psi_0(\mathbf{r}) + \int_{t_0}^t \left[W(\mathbf{r}, t') + \frac{a^2}{\rho_0} \rho_1(\mathbf{r}, t') \right] dt' \right\} .$$

Остання рівність означає, що *при виконанні умов (3.12) і (3.14) течія рідини залишається потенціальною в будь-який момент часу $t > t_0$, й існує потенціал швидкості $\psi(\mathbf{r}, t)$, такий, що*

$$\mathbf{v}_1(\mathbf{r}, t) = -\nabla \psi(\mathbf{r}, t) . \quad (3.15)$$

Відтак із першого рівняння (3.11) знаходимо:

$$\frac{1}{a^2} \rho_0 \left[\frac{\partial \psi}{\partial t} - W \right] - \rho_1 = \chi(t) , \quad (3.16)$$

де $\chi(t)$ — деяка функція, яка залежить лише від часу. Оскільки потенціал швидкості взагалі визначено лише з точністю до такої ж функції, то $\chi(t)$ завжди можна вибрати так, щоб виконувалася рівність

$$\rho_1(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{a^2} \rho_0 \left[\frac{\partial \psi}{\partial t} - W \right] . \quad (3.17)$$

Підставивши вираз (3.17) у друге рівняння в (3.11), бачимо, що

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{\partial W}{\partial t} + a^2 \text{div}(\text{grad } \psi) = \frac{\partial W}{\partial t} + a^2 \Delta \psi . \quad (3.18)$$

У випадках, коли $\partial W / \partial t = 0$, потенціал швидкості задовольняє рівняння

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = a^2 \Delta \psi. \quad (3.19)$$

Воно називається *хвильовим рівнянням* (або *хвильовим рівнянням Д'Аламбера*).

Завдання 3.1.2. Виразіть через потенціал швидкості $\psi(\mathbf{r}, t)$ відхилення тиску $p_1(\mathbf{r}, t)$, які виникають при малих коливаннях рідини або газу в гравітаційному полі Землі.

Завдання 3.1.3. Зведіть систему рівнянь (3.11) до хвильового рівняння для відхилень масової густини $\rho_1(\mathbf{r}, t)$.

Контрольні питання до підрозділу 3.1

1. До якої сили зводяться всі сили, що діють в ідеальній рідині на будь-яку виділену всередині неї частину з боку оточення?
2. Яким рівнянням стану слід користуватися для опису процесу поширення акустичних коливань у рідинах і газах?
3. У чому полягає теорема переносу?
4. Які члени в системі рівнянь (3.8) гідродинаміки ідеальної рідини зумовлюють її нелінійність?
5. Чи завжди течія рідини або газу при відсутності зовнішніх сил є потенціальною?
6. Як за допомогою потенціалу швидкості можна визначити відхилення від рівноважних значень швидкості, масової густини і тиску, які виникають при малих коливаннях рідини або газу?

3.2. ЗАДАЧА КОШІ ДЛЯ ХВИЛЬОВОГО РІВНЯННЯ. ЄДИНІСТЬ РОЗВ'ЯЗКУ

Згідно з формулами (3.15) і (3.17), відхилення швидкості і масової густини, які виникають при малих коливаннях рідини або газу, повністю визначаються через потенціал швидкості ψ . Сам же потенціал ψ можна відтворити для довільного моменту часу $t > t_0$, якщо відомі його значення і значення його часової похідної для деякого моменту часу t_0 .

Отже, дослідження малих коливань рідини або газу природно зводиться до наступної задачі, яка називається *задачею Коші для одного-рідного хвильового рівняння*: у просторі E_3 і для $t > t_0$ знайти функцію $\psi(\mathbf{r}, t)$, яка задовольняє рівняння (3.19) і початкові умови

$$\psi(\mathbf{r}, t_0) = u(\mathbf{r}), \quad \frac{\partial \psi(\mathbf{r}, t_0)}{\partial t} = v(\mathbf{r}). \quad (3.20)$$

Перш ніж перейти до побудови розв'язку цієї задачі, перевіримо його єдиність та окреслимо клас функцій, до якого він належить.

Теорема 3.2.1. Нехай двічі неперервно диференційовна функція $\Psi(\mathbf{r}, t)$ задовольняє хвильове рівняння (3.19) при $t > t_0$ та умови

$$\Psi(\mathbf{r}, t_0) = 0, \quad \frac{\partial \Psi(\mathbf{r}, t_0)}{\partial t} = 0. \quad (3.21)$$

Тоді

$$\Psi(\mathbf{r}, t) \equiv 0, \quad t > t_0.$$

Доведення. Оскільки рівняння (3.19) інваріантне відносно зсувів початку відліку часу та відносно зміни напрямку плинину часу $t \rightarrow -t$, можна вважати, без обмеження загальності, що $t_0 = 0$. Крім того, з лінійності й однорідності рівняння (3.19) та умов (3.21) випливає, що їх задовольняють і дійсна, і уявна частини функції $\Psi(\mathbf{r}, t)$. Тому можемо вважати, що $\Psi(\mathbf{r}, t)$ — дійсна функція.

Позначаючи тимчасово координати (at, x, y, z) через (x_0, x_1, x_2, x_3) , перепишемо таку очевидну тотожність

$$\begin{aligned} 0 &\equiv \frac{2}{a} \frac{\partial \Psi}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{a^2 \partial t^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right) = \\ &= \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z} \right)^2 \right] - \\ &- 2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Psi}{a \partial t} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) - 2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \Psi}{a \partial t} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) - 2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \Psi}{a \partial t} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

у вигляді

$$\operatorname{div} \mathbf{A} \equiv \frac{\partial A_0}{\partial x_0} + \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3} = 0, \quad (3.22)$$

де $\mathbf{A} = (A_0, A_1, A_2, A_3)$ — чотирирівимірний вектор з компонентами

$$A_0 = \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_0} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_3} \right)^2, \quad (3.23)$$

$$A_j = -2 \frac{\partial \Psi}{\partial x_0} \frac{\partial \Psi}{\partial x_j}, \quad j = 1, 2, 3.$$

Розглянемо тепер у чотиривимірному просторі зрізаний «світловий» конус D^1 , який визначимо як геометричне місце точок, координати яких задовольняють співвідношення

$$(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + (x_3 - a_3)^2 \leq (x_0 - a_0)^2, \quad 0 \leq x_0 \leq a'_0 < a_0,$$

де (a_0, a_1, a_2, a_3) — вершина конуса — є довільною точкою чотиривимірного півпростору $x_0 > 0$. Позначимо через σ_0 і σ_1 відповідно нижню

$$(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + (x_3 - a_3)^2 \leq a_0'^2, \quad x_0 = 0,$$

і верхню

$$(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + (x_3 - a_3)^2 \leq (a'_0 - a_0)^2, \quad x_0 = a'_0,$$

основи конуса D , і через Γ — його бічну поверхню

$$(x_0 - a_0)^2 - (x_1 - a_1)^2 - (x_2 - a_2)^2 - (x_3 - a_3)^2 = 0, \quad 0 \leq x_0 \leq a'_0 < a_0.$$

Інтегрування обох частин рівності (3.22) по об'єму конуса D і застосування чотиривимірного варіанта теореми Гаусса — Остроградського дають:

$$\int_D \operatorname{div} \mathbf{A} dx_0 dx_1 dx_2 dx_3 = \int_{\Gamma} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}) dS + \int_{\sigma_0} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}) dS + \int_{\sigma_1} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}) dS = 0, \quad (3.24)$$

де $\mathbf{n} = (n_0, n_1, n_2, n_3)$ — одиничний вектор зовнішньої нормалі до відповідного елемента поверхні конуса D , $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}) \equiv A_0 n_0 + A_1 n_1 + A_2 n_2 + A_3 n_3$.

Користуючись явним виглядом компонент вектора $\mathbf{A}$, перепишемо підінтегральний вираз у поверхневих інтегралах у формулі (3.24) у вигляді

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}) = n_0 \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_0} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_3} \right)^2 \right] - \sum_{j=1}^3 2n_j \frac{\partial \Psi}{\partial x_0} \frac{\partial \Psi}{\partial x_j} =$$

¹ Назва «світловий» йде від релятивістської фізики, де у відповідних хвильових рівняннях a — швидкість світла у вакуумі.

$$= \frac{n_0^2 - n_1^2 - n_2^2 - n_3^2}{n_0} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_0} \right)^2 + \frac{1}{n_0} \sum_{j=1}^3 \left(n_j \frac{\partial \Psi}{\partial x_0} - n_0 \frac{\partial \Psi}{\partial x_j} \right)^2. \quad (3.25)$$

На поверхні Γ , яка є геометричним місцем точок, що задовольняють рівняння

$$F(x_0, x_1, x_2, x_3) = x_0 + \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + (x_3 - a_3)^2} - a_0 = 0, \\ 0 \leq x_0 \leq a'_0 < a_0,$$

згідно із загальним означенням вектора нормалі до гладкої поверхні маємо:

$$n_0 = \left(\frac{\partial F}{\partial x_0} \right) \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x_0} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_3} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ n_j = \left(\frac{\partial F}{\partial x_j} \right) \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x_0} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_3} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} = \\ = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{x_j - a_j}{\sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + (x_3 - a_3)^2}}, \quad j = 1, 2, 3.$$

Отже, на цій поверхні

$$n_0^2 - n_1^2 - n_2^2 - n_3^2 = 0,$$

і тому, згідно з формулою (3.25), $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}) \geq 0$. Відповідно,

$$\int_{\Gamma} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}) dS \geq 0. \quad (3.26)$$

На нижній основі σ_0 в силу початкових умов (3.21) маємо $\mathbf{A} = 0$, і тому

$$\int_{\sigma_0} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}) dS = 0. \quad (3.27)$$

На верхній основі σ_1 , яка є частиною площини $x_0 = a'_0$, маємо $\mathbf{n} = (1, 0, 0, 0)$. Тоді, згідно з формулою (3.25),

$$\int_{\sigma_1} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}) dS = \int_{\sigma_1} A_0 dS = \\ = \int_{\sigma_1} \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_0} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_3} \right)^2 \right] dS \geq 0. \quad (3.28)$$

Унаслідок співвідношень (3.24), (3.26) і (3.27) знак нерівності у формулі (3.28) треба опустити. А це означає, що на поверхні σ_1

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x_0} = \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} = \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} = \frac{\partial \Psi}{\partial x_3} = 0. \quad (3.29)$$

Оскільки a'_0 може набувати довільних значень з інтервалу $(0, a_0)$, рівності (3.29) справджуються в усіх точках конуса D . Спрямовуючи a'_0 до a_0 і враховуючи, що за припущенням Ψ — неперервно диференційовна функція, приходимо до висновку, що рівності (3.29) правильні й у вершині конуса, яка може знаходитися в будь-якій точці півпростору $x_0 > 0$. Тому для довільної точки $\mathbf{r}$ простору E_3 і довільного моменту часу $t > 0$ (або $t > t_0$) $\Psi \equiv \text{const}$. Більше того, враховуючи умови (3.21), маємо: $\Psi \equiv 0$.

Наслідок 3.2.1. Задача Коші

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = a^2 \Delta \psi + f(\mathbf{r}, t), \quad t > t_0,$$

$$\psi(\mathbf{r}, t_0) = u(\mathbf{r}), \quad \frac{\partial \psi(\mathbf{r}, t_0)}{\partial t} = v(\mathbf{r}),$$

для *неоднорідного хвильового рівняння* в необмеженому просторі має єдиний розв'язок у класі двічі неперервно диференційовних функцій.

Доведення. Справді, припустивши існування двох розв'язків неоднорідної задачі, на основі теореми 3.2.1 приходимо до висновку, що їх різниця дорівнює нулю, тобто вони збігаються.

Контрольні питання до підрозділу 3.2

1. У чому полягає теорема єдиності розв'язку задачі Коші для хвильового рівняння?
2. Яке рівняння задовольняють координати точок бічної поверхні верхньої і нижньої частин чотиривимірного «світлового» конуса з вершиною в точці $(a_0, 0, 0, 0)$?
3. Як знайти компоненти одиничного вектора нормалі до поверхні тіла, точки якої задовольняють рівняння $F(x_0, x_1, x_2, x_3) = 0$, де F — гладка функція?

4. Чому дорівнює потенціал $\psi(\mathbf{r}, t)$ поля швидкостей при $t > t_0$, якщо зовнішні сили відсутні і

$$\psi(\mathbf{r}, t_0) = u_0(\mathbf{r}), \quad \frac{\partial \psi(\mathbf{r}, t_0)}{\partial t} = 0,$$

де $u_0(\mathbf{r})$ — гармонічна функція?

3.3. РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ХВИЛЬОВОГО РІВНЯННЯ В E_3 . ФОРМУЛА ПУАССОНА

Перейдемо тепер до відшукування розв'язку задачі Коші (3.19), (3.20). Спочатку вважатимемо, що початкові функції $u(\mathbf{r})$ і $v(\mathbf{r})$ нескінченно диференційовні, і що для будь-яких цілих чисел $s_1, s_2, s_3 \geq 0$ і цілого $n > 1$ вони при $|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$ задовольняють умови

$$\left| \frac{\partial^{s_1+s_2+s_3} u(\mathbf{r})}{\partial x^{s_1} \partial y^{s_2} \partial z^{s_3}} \right| = o(|\mathbf{r}|^{-n}), \quad \left| \frac{\partial^{s_1+s_2+s_3} v(\mathbf{r})}{\partial x^{s_1} \partial y^{s_2} \partial z^{s_3}} \right| = o(|\mathbf{r}|^{-n}). \quad (3.30)$$

За таких умов єдиний двічі неперервно диференційований розв'язок $\psi(\mathbf{r}, t)$ нашої задачі є функцією, яка нескінченно диференційовна за всіма змінними, а також інтегровна разом з усіма своїми частинними похідними. Справді, припускаючи існування $\psi(\mathbf{r}, t)$, розглянемо перетворення Фур'є цієї функції за просторовими змінними:

$$\hat{\psi}(\mathbf{k}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{E_3} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \psi(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r}. \quad (3.31)$$

Виходячи з рівняння (3.19) і початкових умов (3.20) та користуючись співвідношеннями

$$\frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial t^2}(\mathbf{k}, t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \hat{\psi}(\mathbf{k}, t), \quad \Delta \hat{\psi}(\mathbf{k}, t) = -k^2 \hat{\psi}(\mathbf{k}, t), \quad k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2},$$

знаходимо, що $\hat{\psi}(\mathbf{k}, t)$ є розв'язком такої елементарної задачі:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \hat{\psi}(\mathbf{k}, t) = -a^2 k^2 \hat{\psi}(\mathbf{k}, t),$$

$$\hat{\psi}(\mathbf{k}, 0) = \hat{u}(\mathbf{k}), \quad \frac{\partial \hat{\psi}(\mathbf{k}, 0)}{\partial t} = \hat{v}(\mathbf{k}),$$

де $\hat{u}(\mathbf{k})$, $\hat{v}(\mathbf{k})$ — Фур'є-образи функцій $u(\mathbf{r})$, $v(\mathbf{r})$. Звідси знаходимо, що

$$\hat{\psi}(\mathbf{k}, t) = \hat{u}(\mathbf{k}) \cos akt + \hat{v}(\mathbf{k}) \frac{\sin akt}{ak}. \quad (3.32)$$

Користуючись властивостями Фур'є-образів та беручи до уваги властивості функцій $u(\mathbf{r})$ і $v(\mathbf{r})$, бачимо, що функції $\hat{u}(\mathbf{k})$ і $\hat{v}(\mathbf{k})$ нескінченно диференційовні за змінними k_x , k_y , k_z , і що для будь-яких цілих чисел $s_1, s_2, s_3 \geq 0$ і цілого $n > 1$ при $k \rightarrow \infty$ маємо

$$\left| \frac{\partial^{s_1+s_2+s_3} \hat{u}(\mathbf{k})}{\partial k_x^{s_1} \partial k_y^{s_2} \partial k_z^{s_3}} \right| = o(k^{-n}), \quad \left| \frac{\partial^{s_1+s_2+s_3} \hat{v}(\mathbf{k})}{\partial k_x^{s_1} \partial k_y^{s_2} \partial k_z^{s_3}} \right| = o(k^{-n}). \quad (3.33)$$

Функції $\sin akt/ak$ і $\cos akt$ у формулі (3.32) обмежені, нескінченно диференційовні за змінними k_x , k_y , k_z , а їх похідні при дійсних значеннях цих змінних і цілих $s_1, s_2, s_3 \geq 0$ задовольняють нерівності

$$\left| \frac{\partial^{s_1+s_2+s_3} \frac{\sin akt}{ak}}{\partial k_x^{s_1} \partial k_y^{s_2} \partial k_z^{s_3}} \right| \leq t(at)^{s_1+s_2+s_3}, \quad (3.34)$$

$$\left| \frac{\partial^{s_1+s_2+s_3} \cos akt}{\partial k_x^{s_1} \partial k_y^{s_2} \partial k_z^{s_3}} \right| \leq (1+akt)(at)^{s_1+s_2+s_3}, \quad t \geq 0.$$

Завдання 3.3.1. Доведіть нерівності (3.34).

Вказівки. Спершу переконайтеся, що справджується рівність

$$\frac{\sin akt}{akt} = \frac{1}{4\pi} \oint_{|\mathbf{n}|=1} e^{iat(\mathbf{k} \cdot \mathbf{n})} d\mathbf{n}, \quad (3.35)$$

де інтеграл справа береться по поверхні сфери одиничного радіуса з центром у початку координат, $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$ і $d\mathbf{n}$ — відповідно радіус-вектор точок поверхні та елемент площі цієї сфери, $(\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}) = k_x n_x + k_y n_y + k_z n_z$. Цей інтеграл можна обчислити, перейшовши до сферичних координат, через які декартові координати точок одиничної сфери та елемент площі її поверхні виражаються формулами

$$n_x = \cos \varphi \sin \theta, \quad n_y = \sin \varphi \sin \theta, \quad n_z = \cos \theta,$$

$$d\mathbf{n} = \sin \theta d\theta d\varphi, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

Якщо полярну вісь, від якої відраховується кут θ , напрямити паралельно вектору $\mathbf{k}$, то $(\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}) = k \cos \theta$ і після інтегрування за кутом φ права частина рівності (3.35) зводиться до виразу

$$\frac{1}{2} \int_0^\pi e^{i a t k \cos \theta} \sin \theta d\theta,$$

який легко обчислити, скориставшись підстановкою $x = \cos \theta$.

Виходячи з формули (3.35), далі простим диференціюванням експоненти під знаком інтеграла за параметрами k_x , k_y , k_z можна знайти аналогічні інтегральні зображення для довільних частинних похідних функції $\sin a k t / a k$ та, беручи до уваги, що координати n_x , n_y і n_z вектора $\mathbf{n}$ за модулем не перевищують одиниці, оцінити модулі цих похідних.

Інтегральне зображення для функції $\cos a k t$ дістаємо, здиференціювавши обидві частини рівності (3.35) за змінною t . З нього описаним вище способом знаходяться оцінки для похідних цієї функції.

Із зазначених властивостей функцій $\sin a k t / a k$ і $\cos a k t$ випливає, що разом з функціями $\hat{u}(\mathbf{k})$ і $\hat{v}(\mathbf{k})$ функція $\hat{\psi}(\mathbf{k}, t)$ також нескінченно диференційовна за k_x , k_y , k_z і для будь-яких цілих чисел $s_1, s_2, s_3 \geq 0$ і $n > 1$ задовольняє умови (3.33). Звідси, знову ж з огляду на властивості Фур'є-образів, випливає, що функція

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{E_3} e^{i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \hat{u}(\mathbf{k}) \cos a k t d\mathbf{k} + \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{E_3} e^{i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \hat{v}(\mathbf{k}) \frac{\sin a k t}{a k} d\mathbf{k} \quad (3.36)$$

задовольняє рівняння (3.19) та умови (3.20), і при цьому нескінченно диференційовна за всіма своїми змінними, спадаючи разом зі своїми частинними похідними до нуля при $|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$ швидше від будь-якого степеня $|\mathbf{r}|$.

Виразимо тепер цей розв'язок через функції $u(\mathbf{r})$ і $v(\mathbf{r})$. Спочатку розглянемо випадок, коли $u(\mathbf{r}) \equiv 0$, $v(\mathbf{r}) \neq 0$, виконаємо всі розрахунки для функції

$$v_\tau(\mathbf{r}) = \frac{1}{(4\pi\tau)^{3/2}} \int_{E_3} e^{-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2}{4\tau}} v(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (3.37)$$

замість $v(\mathbf{r})$, а потім, урахувуючи, що згідно з лемою 1.4.1 $v_\tau(\mathbf{r}) \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} v(\mathbf{r})$, спрямуємо τ до нуля.

Оскільки $v_{\tau}(\mathbf{r})$ — згортка двох інтегровних функцій, її Фур'є-образ дорівнює

$$\hat{v}_{\tau}(\mathbf{k}) = e^{-\tau k^2} \hat{v}(\mathbf{k}),$$

звідки випливає, що $\hat{v}_{\tau}(\mathbf{k}) \rightarrow \hat{v}(\mathbf{k})$. Формула (3.36) набирає вигляду

$$\psi_{\tau}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{E_3} d\mathbf{k} \frac{\sin akt}{ak} e^{-\tau k^2} \hat{v}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}.$$

Підставляючи сюди вираз для Фур'є-образу $\hat{v}(\mathbf{k})$,

$$\hat{v}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{E_3} d\mathbf{r}' e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}'} v(\mathbf{r}'),$$

та змінюючи порядок інтегрування за змінними $\mathbf{k}$ і $\mathbf{r}'$, приходимо до інтегрального зображення

$$\psi_{\tau}(\mathbf{r}, t) = \int_{E_3} d\mathbf{r}' G_{\tau}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t) v(\mathbf{r}'), \quad (3.38)$$

де

$$\begin{aligned} G_{\tau}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{E_3} d\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} e^{-\tau k^2} \frac{\sin akt}{ak} = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{\infty} dk k^2 \frac{\sin akt}{ak} e^{-\tau k^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \sin \theta e^{ikr \cos \theta} = \\ &= \frac{1}{2\pi^2 ar} \int_0^{\infty} dk \sin akt \sin kr e^{-\tau k^2}. \end{aligned}$$

Застосування формули

$$\sin akt \sin kr = \frac{1}{2} [\cos k(r - at) - \cos k(r + at)]$$

дає:

$$G_{\tau}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi^2 ar} \int_0^{\infty} dk [\cos k(r - at) - \cos k(r + at)] e^{-\tau k^2}.$$

Ураховуючи далі, що

$$\int_0^{\infty} dk \cos k(r \pm at) e^{-\tau k^2} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ik(r \pm at)} e^{-\tau k^2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\tau}} e^{-\frac{(r \pm at)^2}{4\tau}},$$

дістаємо:

$$G_{\tau}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi ar \sqrt{4\pi\tau}} \left[e^{-\frac{(r-at)^2}{4\tau}} - e^{-\frac{(r+at)^2}{4\tau}} \right].$$

Зазначимо, що для будь-якого $\tau > 0$ функція $G_\tau(\mathbf{r}, t)$ задовольняє хвильове рівняння (3.19), оскільки при $r > 0$ рівняння (3.19) задовольняють усі функції виду

$$F(r, t) = \frac{f(r \pm at)}{r}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} > 0, \quad -\infty < t < \infty,$$

де $f(x)$, $-\infty < x < \infty$, — будь-яка двічі неперервно диференційовна функція.

Завдання 3.3.2. Доведіть останнє твердження.

Вказівки. Нехай $g(\mathbf{r}) = g(r)$ — сферично симетрична і двічі неперервно диференційовна функція. Безпосереднім диференціюванням покажіть, що тоді

$$\Delta g(\mathbf{r}) = \frac{\partial^2 g(r)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g(r)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 g(r)}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 g(r)}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial g(r)}{\partial r}. \quad (3.39)$$

Застосувавши правий вираз цієї формули до функцій $f(r \pm at)/r$, переконайтеся, що

$$\Delta \frac{f(r \pm at)}{r} = \frac{f''(r \pm at)}{r}$$

і, відповідно, справджується рівняння (3.19).

Згадаємо тепер, що

$$\lim_{\tau \downarrow 0} \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} e^{-\frac{(r \pm at)^2}{4\tau}} = \delta(r \pm at),$$

де δ — дельта-функція Дірака. Оскільки $r > 0$, $a > 0$ і $t > 0$, то $\delta(r + at) = 0$. Отже, розглядаючи границю послідовності функцій $G_\tau(\mathbf{r}, t)$ як узагальнену функцію просторових координат, маємо:

$$\lim_{\tau \downarrow 0} G_\tau(\mathbf{r}, t) = \frac{\delta(r - at)}{4\pi ar}, \quad t > 0. \quad (3.40)$$

Функцію

$$G(\mathbf{r}, t) = G(r, t) = \frac{\delta(r - at)}{4\pi ar}, \quad t > 0, \quad (3.41)$$

називають функцією Гріна для хвильового рівняння у тривимірному просторі. Її також можна подати у вигляді

$$G(\mathbf{r}, t) = G(r, t) = \frac{\theta(t)}{2\pi a} \delta(r^2 - a^2 t^2), \quad -\infty < t < \infty. \quad (3.42)$$

У силу того, що при $\tau > 0$ всі функції $G_\tau(\mathbf{r}, t)$ задовольняють хвильове рівняння (3.19), функція Гріна (3.42) при $t \neq 0$ є його узагальненим розв'язком.

Шуканий розв'язок задачі Коші (3.19), (3.20) має вигляд

$$\begin{aligned}\psi(\mathbf{r}, t) &= \lim_{\tau \downarrow 0} \psi_\tau(\mathbf{r}, t) = \int_{E_3} d\mathbf{r}' G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, t) v(\mathbf{r}') = \\ &= \int_{E_3} d\mathbf{r}' \frac{\delta(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| - at)}{4\pi a |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} v(\mathbf{r}').\end{aligned}\quad (3.43)$$

Тепер у формулі (3.43) покладемо $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \boldsymbol{\rho}$, $d\mathbf{r}' = d\boldsymbol{\rho}$, і перейдемо до сферичної системи координат. Дістаємо:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \int_0^\infty d\rho \rho^2 \frac{\delta(\rho - at)}{4\pi a \rho} \int_{|\mathbf{n}|=1} v(\mathbf{r} + \rho \mathbf{n}) d\mathbf{n},$$

де інтеграл за $\mathbf{n}$ береться по сфері одиничного радіуса. Згідно з властивостями δ -функції, інтеграл за змінною ρ дорівнює значенню підінтегральної функції в точці $\rho = at$. Тому

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \frac{t}{4\pi} \int_{|\mathbf{n}|=1} v(\mathbf{r} + at\mathbf{n}) d\mathbf{n}. \quad (3.44)$$

Для довільної неперервної функції $w(\mathbf{r}, t)$ позначимо:

$$M[w](\mathbf{r}, t) \equiv \frac{1}{4\pi} \int_{|\mathbf{n}|=1} w(\mathbf{r} + at\mathbf{n}) d\mathbf{n}. \quad (3.45)$$

Отже, формула

$$\psi(\mathbf{r}, t) = tM[v](\mathbf{r}, t) \quad (3.46)$$

дає розв'язок задачі Коші (3.19), (3.20) у випадку, коли $u(\mathbf{r}) = 0$, $v(\mathbf{r}) \neq 0$.

Щоб дістати відповідний розв'язок для випадку, коли $u(\mathbf{r}) \neq 0$, звернемо увагу на те, що перший інтеграл у правій частині формули (3.36) можна записати у вигляді

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{E_3} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \hat{u}(\mathbf{k}) \frac{\sin akt}{ak} d\mathbf{k} \right).$$

Повторюючи для цього інтеграла ті ж самі перетворення, що привели до співвідношення (3.46), робимо висновок, що початкова функція $u(\mathbf{r})$ дає внесок

$$\frac{\partial}{\partial t} tM[u](\mathbf{r}, t) .$$

Отже, розв'язок задачі Коші (3.19), (3.20), з початковими функціями $u(\mathbf{r}) \neq 0$, $v(\mathbf{r}) \neq 0$, безпосередньо виражається через ці функції так:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial}{\partial t} tM[u](\mathbf{r}, t) + tM[v](\mathbf{r}, t) . \quad (3.47)$$

Формула (3.47) називається *формулою Пуассона*. З попередніх міркувань видно, що її також можна записати через функцію Гріна (3.41):

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \int_{E_3} d\mathbf{r}' G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, t) u(\mathbf{r}') + \int_{E_3} d\mathbf{r}' G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, t) v(\mathbf{r}') , \quad t > 0 . \quad (3.48)$$

Ми вивели формулу Пуассона, припустивши, що функції $u(\mathbf{r})$ і $v(\mathbf{r})$ нескінченно диференційовні, і що при $|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$ вони та всі їх похідні є величинами вищого порядку малості в порівнянні з будь-яким степенем $|\mathbf{r}|^{-1}$. За таких умов розв'язок (3.47) і сам є функцією, нескінченно диференційовною за всіма змінними, включно з часом t , яка при $|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$ спадає до нуля разом з усіма своїми похідними.

Зауважимо, однак, що інтеграл у перетворенні (3.45) береться лише по компактній множині. Згідно з властивостями інтегралів, що залежать від параметрів, перетворення (3.45) при $t > 0$ переводить кожную неперервну функцію, яка має неперервні частинні похідні до n -го порядку включно, в n -кратно неперервно диференційовну функцію за всіма змінними, включаючи й t . Ураховуючи тепер, що перетворення (3.47) при застосуванні до нескінченно диференційовних функцій, що разом з похідними досить швидко спадають до нуля на нескінченності, дає функції, які задовольняють хвильове рівняння (3.19), і що зазначеними нескінченно диференційовними функціями та їх відповідними похідними можна в кожній обмеженій області наближати з довільною точністю будь-яку двічі неперервно диференційовну функцію разом з її похідними, приходимо до висновку, що перетворення (3.46) переводить будь-які двічі неперервно диференційовні функції у функції, що задовольняють хвильове рівняння (3.19).

Беручи далі до уваги те, що якщо деякі тричі диференційовні функції задовольняють хвильове рівняння (3.19), то його задовольняють і їх перші похідні, вже не багато залишається додати, щоб зробити такий висновок:

Для будь-якої тричі неперервно диференційовної функції $u(\mathbf{r})$ і будь-якої двічі неперервно диференційовної функції $v(\mathbf{r})$ формула (3.47) дає єдиний двічі неперервно диференційовний розв'язок тривимірної задачі Коші (3.19), (3.20) для хвильового рівняння.

Припустимо тепер, що при $t = 0$ початкове збурення в середовищі відрізняється від нуля лише в деякій області Ω навколо початку координат. Згідно з формулою (3.47), значення хвильового поля $\psi(\mathbf{r}, t)$ в точці $\mathbf{r}$ у момент часу $t > 0$ обчислюється за допомогою інтегралів по поверхні сфери S_{at} з радіусом at і центром у точці $\mathbf{r}$. Оскільки ці інтеграли залежать лише від значень початкових функцій $u(\mathbf{r})$ і $v(\mathbf{r})$ на поверхні S_{at} , поле $\psi(\mathbf{r}, t)$ відрізняється від нуля лише тоді, коли поверхня S_{at} перетинає область Ω , тобто на інтервалі часу

$$\min_{\mathbf{r}' \in \Omega} \frac{1}{a} |\mathbf{r}' - \mathbf{r}| \equiv \frac{d}{a} < t < \max_{\mathbf{r}' \in \Omega} \frac{1}{a} |\mathbf{r}' - \mathbf{r}| \equiv \frac{D}{a}, \quad (3.49)$$

де d і D — відповідно найменша та найбільша відстані від точки $\mathbf{r}$ до області Ω .

Це є свідченням того факту, що хвильове рівняння описує процес поширення збурень зі сталою швидкістю a . Початкове збурення в області Ω не впливає на середовище в точці $\mathbf{r}$, поки не мине проміжок часу d/a . Саме стільки часу потрібно хвилям, які виходять з області Ω , щоб дійти до цієї точки. Далі, після моменту часу D/a вплив початкового збурення у точці $\mathbf{r}$ припиняється.

У граничному випадку, коли область Ω стягується в точку (початок координат), вплив початкового збурення відчувається у точці $\mathbf{r}$ лише в момент часу $t = r/a$. Цей факт відомий як *принцип Гюйгенса* для хвильового рівняння: початкове збурення, яке локалізоване в обмеженій області простору Ω , пізніше триває в кожній точці $\mathbf{r}$ протягом обмеженого інтервалу часу з чітко визначеними границями (3.49).

Контрольні питання до підрозділу 3.3

1. Яке рівняння задовольняє Фур'є-образ $\hat{\psi}(\mathbf{k}, t)$ функції $\psi(\mathbf{r}, t)$, яка сама задовольняє хвильове рівняння (3.19) і двічі диференційовна та інтегровна разом з усіма своїми похідними до другого порядку включно?
2. Чому дорівнюють внески функцій $u(\mathbf{r})$ і $v(\mathbf{r})$, що входять у початкові умови (3.20), у Фур'є-образ розв'язку задачі Коші для рівняння

(3.19), якщо перша функція є тричі неперервно диференційовною, друга — двічі, і ці функції є інтегровними разом з усіма своїми похідними до зазначених порядків включно?

3. Внесок від початкової функції $v(\mathbf{r})$ у розв'язок задачі Коші (3.19), (3.20) при $t > 0$ можна подати у вигляді інтегрального перетворення $\int_{E_3} d\mathbf{r}' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t) v(\mathbf{r}')$. Чому дорівнює ядро $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t)$ цього перетворення?
4. У момент часу $t=0$ тиск у рідині відрізняється від рівноважного лише всередині сфери з радіусом R і центром у деякій точці. За який найменший час рідина в центрі цієї сфери прийде в рівноважний стан? На її поверхні?
5. У чому полягає принцип Гюйгенса?

3.4. РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ХВИЛЬОВОГО РІВНЯННЯ У ДВО- ТА ОДНОВИМІРНОМУ ПРОСТОРАХ

Двовимірна задача Коші для хвильового рівняння виникає тоді, коли в силу заданих фізичних умов хвильове поле та інші шукані функції залишаються незмінними при зміщеннях у певному напрямі. Уважаючи, без обмеження загальності, що цей напрям паралельний осі z , можемо записати її у вигляді

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right), \quad (3.50)$$

$$\psi|_{t=0} = u(x, y), \quad \left. \frac{\partial \psi}{\partial t} \right|_{t=0} = v(x, y). \quad (3.51)$$

Для знаходження розв'язку задачі (3.50), (3.51) у класі двічі неперервно диференційовних функцій розглянемо розв'язок $\psi = \psi(x, y, z, t)$ тривимірного хвильового рівняння (3.19) при початкових умовах (3.51), вважаючи при цьому, що незалежні від змінної z функції $u(x, y)$ і $v(x, y)$ є відповідно тричі і двічі неперервно диференційовними. Оскільки в рівняння (3.19) входять лише похідні від функції ψ , його задовольняє й функція $\tilde{\psi} = \psi(x, y, z + h, t)$, де h — довільне дійсне число. Крім того, функція $\tilde{\psi}$ задовольняє й початкові умови (3.51), що випливає з незалежності цих умов від змінної z . Іншими словами, обидві функції $\psi(x, y, z, t)$ і $\tilde{\psi}(x, y, z, t)$ є розв'язками

тривимірної задачі Коші (3.19), (3.51). Унаслідок єдиності розв'язку останньої вони мають дорівнювати одна одній,

$$\psi(x, y, z, t) = \psi(x, y, z + h, t),$$

що означає, що функція ψ від змінної z не залежить: $\psi = \psi(x, y, t)$.

Отже, ми довели, що двічі неперервно диференційовний розв'язок тривимірної задачі Коші для однорідного хвильового рівняння не залежить від певної змінної, якщо від цієї змінної не залежать початкові функції. Тому для розв'язування двовимірної задачі (3.50), (3.51) можна скористатися функцією Гріна (3.41) і формулою (3.48) для відповідної тривимірної задачі. При цьому, щоб відразу ж прибрати з формули (3.48) присутність несуттєвої змінної z , інтеграли в (3.48) доцільно розглядати як повторні і спершу виконати інтегрування відповідних функцій за змінною z' . У силу незалежності початкових функцій u і v в цих інтегралах від z' таке інтегрування поширюється лише на функцію Гріна і з урахуванням формули (3.41) зводить (3.48) до виразу

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \int_{E_2} d\mathbf{r}' G_2(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, t) u(\mathbf{r}') + \int_{E_2} d\mathbf{r}' G_2(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, t) v(\mathbf{r}'), \quad t > 0, \quad (3.52)$$

де $\mathbf{r} = (x, y)$, $\mathbf{r}' = (x', y')$, $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}$ і

$$\begin{aligned} G_2(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} dz' G\left(\sqrt{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2 + (z - z')^2}, t\right) = \\ &= \frac{1}{4\pi a} \int_{-\infty}^{\infty} dz' \frac{\delta\left(\sqrt{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2 + (z - z')^2} - at\right)}{\sqrt{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2 + (z - z')^2}} = \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2\pi a} \frac{1}{\sqrt{a^2 t^2 - (x - x')^2 - (y - y')^2}}, & 0 < |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| < at, \\ 0, & |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| > at, \end{cases} = \\ &= \frac{1}{2\pi a} \frac{\theta(at - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{\sqrt{a^2 t^2 - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2}}. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Функцію

$$G_2(x, y, t) = \frac{1}{2\pi a} \frac{\theta(at - |\mathbf{r}|)}{\sqrt{a^2 t^2 - |\mathbf{r}|^2}}$$

називають *функцією Гріна для хвильового рівняння у двовимірному просторі*.

Завдання 3.4.1. Обчисліть інтеграл (3.53).

Вказівка. Скористайтесь тим, що для складеної дельта-функції Дірака $\delta(f(x))$ у випадках, коли $f(x)$ — дійсна неперервно диференційовна функція, що має скінченну кількість нулів, тобто точок $x_1, \dots, x_n$, у яких $f(x_j) = 0$, $1 \leq j \leq n$, і при цьому у всіх них похідна $f'(x_j) \neq 0$, $1 \leq j \leq n$, то для будь-якої неперервної функції $g(x)$ справджується формула

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx g(x) \delta(f(x)) = \sum_{j=1}^n \frac{g(x_j)}{|f'(x_j)|} \quad (3.54)$$

(див. означення 4.3.1 і теорему 4.3.3).

Позначимо

$$\tilde{M}[w](x, y, t) \equiv \frac{1}{2\pi a} \iint_{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}| \leq at} \frac{w(x', y')}{\sqrt{a^2 t^2 - (x' - x)^2 - (y' - y)^2}} dx' dy'. \quad (3.55)$$

На підставі формул (3.52), (3.53) і (3.55) приходимо до висновку, що *двічі неперервно диференційовний розв'язок двовимірної задачі Коші (3.50), (3.51), з тричі неперервно диференційовною функцією $u(x, y)$ і двічі неперервно диференційовною функцією $v(x, y)$, обчислюється за формулою*

$$\psi(x, y, t) = \frac{\partial}{\partial t} \tilde{M}[u](x, y, t) + \tilde{M}[v](x, y, t), \quad t > 0. \quad (3.56)$$

Зазначимо, що використаний вище спосіб знаходження розв'язків задач для рівнянь з певним числом незалежних змінних, відштовхуючись від розв'язків задач для аналогічних рівнянь з більшим числом незалежних змінних, у математичній фізиці називається *методом спуску*.

Розглянемо за допомогою формул (3.56) і (3.55) деякі особливості процесу поширення хвиль у середовищі у випадку, коли його опис можна здійснювати за допомогою двовимірної задачі Коші.

Нехай початкове збурення двовимірного хвильового поля зосереджено в малій області Ω площини (xOy) , і нехай P — деяка точка цієї площини на відстані d від Ω . Поки $t < d/a$, середовище в точці P залишається у стані спокою, бо інтеграли у формулі (3.56) беруться по кругах з радіусами $at < d$ і центрами у точці P , на яких початкові функції дорівнюють нулю. Коли ж $t > d/a$, стан спокою середовища в точці P порушується, оскільки тепер інтеграли беруться по кругах, які спочатку перетинають, а потім, починаючи з деякого моменту часу t_1 , повністю покривають область початкового збурення Ω . Фактично тільки область Ω і дає внески в ці інтеграли. Останні в загальному випадку не дорівнюють нулю при $t > t_1$, що означає, що у двовимірному випадку хвиля, спричинена просторово локалізованим збуренням, не має заднього фронту, хоч і має чіткий передній фронт — принцип Гюйгенса порушується.

Фізична причина цього стає зрозумілою, якщо звернути увагу на таку обставину. Зазначена вище двовимірна задача, з початковими функціями, відмінними від нуля в обмеженій плоскій області Ω , породжуються тими задачами для тривимірного хвильового рівняння, у яких початкові функції відмінні від нуля в нескінченному циліндрі, перпендикулярному площині (xOy) , і мають однакові значення на всіх його поперечних перерізах, паралельних цій площині. Середовище зовні циліндра залишається незбуреним у точці P до тих пір, поки сфера з радіусом at і центром у точці P не перетне циліндр (див. формули (3.45), (3.47)). У цей момент від найближчої точки циліндричної області у точку P приходить хвиля. Вона має передній фронт, але не матиме заднього: починаючи з цього моменту, у точку P продовжуватимуть надходити збурення від інших точок циліндричної області, все більш і більш віддалених (сфера достатньо великого радіуса і нескінченний циліндр мають непустий переріз).

Завдання 3.4.2. Нехай функція $u(x, y)$ дорівнює нулю, а функція $v(x, y)$ невід'ємна та дорівнює нулю зовні деякого круга радіусом $R < \infty$. Знайдіть головний член асимптотичного розкладу розв'язку задачі Коші (3.50), (3.51) при $t \rightarrow \infty$ в довільній точці простору.

Розглянемо наприкінці задачу Коші для хвильового рівняння в одновимірному просторі:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}, \quad (3.57)$$

$$\psi|_{t=0} = u(x), \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} \Big|_{t=0} = v(x). \quad (3.58)$$

Як і у випадку двовимірної задачі, розв'язок можна відшукати, застосувавши формули Пуассона (3.47), (3.48), або, що простіше, їх двовимірні аналоги (3.56), (3.52) до початкових функцій, що залежать лише від змінної x . Уважаючи, що в інтегралі (3.55) функція w не залежить від змінної y , дістаємо:

$$\frac{1}{2\pi a} \iint_{|r'-r| \leq at} \frac{w(x')}{\sqrt{a^2 t^2 - (x' - x)^2 - (y' - y)^2}} dx' dy' = \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} w(x') dx', \quad t > 0.$$

Тому двічі диференційовний розв'язок задачі (3.57), (3.58), з початковими функціями $u(x)$ і $v(x)$, що є відповідно двічі диференційовною і диференційовною, обчислюється за формулою

$$\psi(x, t) = \frac{u(x + at) + u(x - at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} v(x') dx', \quad t > 0. \quad (3.59)$$

Цей вираз відомий як *формула Д'Аламбера*.

Завдання 3.4.3. Покажіть, що розв'язок одновимірної задачі Коші (3.57), (3.58) теж можна подати як суму виду (3.48) чи (3.52), у якій *функція Гріна для хвильового рівняння на прямій* $-\infty < x < \infty$ дається виразом

$$G_1(x, t) = \frac{1}{2a} \theta(at - |x|).$$

Нехай $v(x) = aw'(x)$, де $w(x)$ — двічі диференційовна функція. Показавши

$$f_{1,2}(x) = \frac{u(x) \pm w(x)}{2},$$

розв'язок (3.59) можемо подати у вигляді

$$\psi(x, t) = f_1(x + at) + f_2(x - at). \quad (3.60)$$

З іншого боку, беручи до уваги, що для будь-якої двічі диференційовної функції $f(x)$ функції $f(x \pm at)$ задовольняють одновимірне хвильове рівняння (3.57), можемо стверджувати, що формула (3.60), де $f_{1,2}(x)$ — довільні двічі диференційовні функції, дає загальний розв'язок рівняння (3.57).

З формули (3.60) випливає, що якщо початкові функції в задачі Коші (3.57), (3.58) дорівнюють нулю зовні деякого інтервалу, то її

розв'язок є сумою, тобто суперпозицією двох хвиль, одна з яких (f_1) рухається зі сталою швидкістю a вліво, а друга (f_2) — з цією ж швидкістю вправо.

Завдання 3.4.4. Знайдіть загальний розв'язок (3.60) одновимірного хвильового рівняння і формулу Д'Аламбера, не посилаючись на тривимірну та двовимірну задачі Коші.

Вказівка. Скористайтесь тим, що заміна змінних

$$\xi = x + at, \quad \eta = x - at$$

перетворює одновимірне хвильове рівняння на рівняння

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

Його загальний розв'язок має структуру $\psi(\xi, \eta) = f_1(\xi) + f_2(\eta)$, де кожна з функцій $f_1(\xi)$ і $f_2(\eta)$ залежить лише від однієї змінної. Повернувшись до змінних x і t , знайдіть ці функції і далі їх суму із системи рівнянь, яка впливає з початкових умов.

Повертаючись до формули Д'Аламбера (3.59), розглянемо випадок, коли початкові функції u і v дорівнюють нулю скрізь за межами скінченного інтервалу $(-A, A)$. Узявши будь-яке значення x_0 простої змінної x , бачимо, що з плином часу змінна t почне і далі продовжуватиме задовольняти нерівність

$$at > \max\{x_0 + A, A - x_0\}. \quad (3.61)$$

За умови (3.61) значення в точці x_0 аргументів $x \pm at$ початкової функції u лежатимуть зовні інтервалу $(-A, A)$, а тому внесок початкової функції u у формулі Д'Аламбера дорівнюватиме нулю. При цьому, оскільки інтервал $(-A, A)$ лежить усередині інтервалу $(x_0 - at, x_0 + at)$, внесок початкової функції v у цій формулі зводиться до сталої

$$C = \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} v(x') dx' = \frac{1}{2a} \int_{-A}^A v(x') dx'.$$

Якщо $C \neq 0$, то з формули (3.59) випливає, що відхилення від нуля розв'язку одновимірної задачі Коші для хвильового рівняння з початковими функціями, відмінними від нуля в скінченному інтервалі, може тривати в кожній точці x_0 нескінченно довго. Отже, з формального математичного погляду, для хвильового рівняння в одновимірному просторі принцип Гюйгенса порушується. Однак з фізичного погляду

це, узагалі кажучи, не так. Справа в тому, що в реальних фізичних застосуваннях спостережувані фізичні величини визначаються, як ми бачили на прикладі малих коливань рідини чи газу, не безпосередньо через розв'язок $\psi(x,t)$ певної задачі Коші для хвильового рівняння, а через його частинні похідні. Тому розглянуте вище нескінченно довге відхилення $\psi(x,t)$ від нуля не породжуватиме ніяких тривалих фізичних проявів.

Контрольні питання до підрозділу 3.4

1. Як за допомогою формули Пуассона можна знайти розв'язок задачі Коші для хвильового рівняння в необмеженому двовимірному просторі?
2. Чому у двовимірному просторі хвилі, спричинені просторово локалізованим збуренням, не мають заднього фронту?
3. Яка залежність від координати і часу є характерною для функцій, які задовольняють одновимірне хвильове рівняння?
4. За якої умови на початкові функції розв'язок задачі Коші (3.57), (3.58) має вигляд хвилі, яка, не змінюючи своєї форми, рухається зі сталою швидкістю вправо?
5. Чи справджується принцип Гюйгенса для хвильового рівняння в одновимірному просторі?

3.5. НЕОДНОРІДНЕ ХВИЛЬОВЕ РІВНЯННЯ

Розглянемо тепер хвилі, які породжуються в необмеженому однорідному ізотропному середовищі деякими джерелами. Потужність джерел, віднесена до одиниці маси середовища, означимо як густину потужності джерел і позначимо через $f(\mathbf{r},t)$. Уважатимемо, що $f(\mathbf{r},t)$ — двічі неперервно диференційовна функція всіх своїх змінних.

При наявності джерел задача Коші для хвильового рівняння набиратиме вигляду

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = a^2 \Delta \psi + f(\mathbf{r},t), \quad t > 0, \quad (3.62)$$

$$\psi(\mathbf{r},0) = u(\mathbf{r}), \quad \frac{\partial \psi(\mathbf{r},0)}{\partial t} = v(\mathbf{r}). \quad (3.63)$$

Її розв'язок можна подати у вигляді суми

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \psi_1(\mathbf{r}, t) + \psi_2(\mathbf{r}, t), \quad (3.64)$$

де $\psi_1(\mathbf{r}, t)$ — розв'язок однорідного хвильового рівняння (3.19) при заданих початкових умовах (3.63), $\psi_2(\mathbf{r}, t)$ — функція, яка підкоряється неоднорідному хвильовому рівнянню (3.62) і яка вибирається так, щоб задовольняти нульові початкові умови

$$\psi_2(\mathbf{r}, 0) = 0, \quad \frac{\partial \psi_2(\mathbf{r}, 0)}{\partial t} = 0. \quad (3.65)$$

З фізичного погляду, $\psi_1(\mathbf{r}, t)$ описує хвилі, спричинені початковим збуренням, а $\psi_2(\mathbf{r}, t)$ — хвилі, викликані джерелами.

Розв'язок $\psi_1(\mathbf{r}, t)$ виражається через початкові функції $u(\mathbf{r})$ і $v(\mathbf{r})$ за допомогою формули Пуассона (3.47). Якщо ці функції фінітні, їх вплив на середовище в довільній точці триває, згідно з принципом Гюйгенса, лише протягом обмеженого проміжку часу. Згодом коливальний процес у цій точці визначається виключно джерелами і тому описується функцією $\psi_2(\mathbf{r}, t)$.

Щоб знайти явний вираз для функції $\psi_2(\mathbf{r}, t)$ через $f(\mathbf{r}, t)$, спершу розглянемо спеціальний випадок, коли

$$f(\mathbf{r}, t) = f_r(\mathbf{r})\delta(t - \tau), \quad \tau > 0,$$

де $f_r(\mathbf{r})$ — деяка двічі неперервно диференційовна функція, $\delta(t - \tau)$ — дельта-функція Дірака. Припускаючи, що й у цьому випадку рівняння (3.62) має єдиний неперервний розв'язок $\psi_2(\mathbf{r}, t; \tau)$, який задовольняє умови (3.65), та виходячи з єдиності розв'язку задачі Коші для хвильового рівняння, можемо стверджувати, що $\psi_2(\mathbf{r}, t; \tau) = 0$ до моменту $t = \tau$, коли «вмикаються» джерела. З неперервності розв'язку випливає, що й $\psi_2(\mathbf{r}, \tau; \tau) = 0$. Беручи до уваги ці властивості розв'язку $\psi_2(\mathbf{r}, t; \tau)$, зінтегруємо обидві частини рівняння

$$\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial t^2} = a^2 \Delta \psi_2 + f_r(\mathbf{r})\delta(t - \tau)$$

за змінною t в межах від $\tau - \varepsilon$ до $\tau + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, а потім спрямуємо ε до нуля. Дістаємо:

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left[\frac{\partial \psi_2(\mathbf{r}, \tau + \varepsilon; \tau)}{\partial t} - \frac{\partial \psi_2(\mathbf{r}, \tau - \varepsilon; \tau)}{\partial t} \right] = \frac{\partial \psi(\mathbf{r}, \tau + 0; \tau)}{\partial t} = f_r(\mathbf{r}). \quad (3.66)$$

Отже, при $t > \tau$ функція $\psi_2(\mathbf{r}, t; \tau)$ задовольняє однорідне хвильове рівняння

$$\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial t^2} = a^2 \Delta \psi_2, \quad (3.67)$$

а у граничному випадку $t \rightarrow \tau$ — умови

$$\psi_2(\mathbf{r}, \tau + 0; \tau) = 0, \quad \frac{\partial \psi_2(\mathbf{r}, \tau + 0; \tau)}{\partial t} = f_\tau(\mathbf{r}). \quad (3.68)$$

Іншими словами, в інтервалі (τ, ∞) функція $\psi_2(\mathbf{r}, t; \tau)$ дорівнює розв'язку однорідного хвильового рівняння (3.67) при початкових умовах (3.68). Беручи до уваги формулу (3.46), дістаємо:

$$\psi_2(\mathbf{r}, t; \tau) = \begin{cases} 0, & t < \tau, \\ (t - \tau) M[f_\tau](\mathbf{r}, t - \tau), & t > \tau. \end{cases} \quad (3.69)$$

Тепер скористаємося тим, що густину потужності джерел $f(\mathbf{r}, t)$ завжди можна записати у вигляді

$$f(\mathbf{r}, t) = \int_0^\infty \delta(t - \tau) f(\mathbf{r}, \tau) d\tau.$$

Оскільки рівняння (3.62) лінійне, щоб отримати розв'язок $\psi_2(\mathbf{r}, t)$, досить зінтегрувати формулу (3.69) за параметром τ від нуля до нескінченності, замінивши в ній $f_\tau(\mathbf{r})$ на $f(\mathbf{r}, \tau)$. Унаслідок (3.69), при $t > 0$ цей інтеграл береться лише в межах від нуля до t . Отже,

$$\begin{aligned} \psi_2(\mathbf{r}, t) &= \int_0^t (t - \tau) M[f(\mathbf{r}, \tau)](\mathbf{r}, t - \tau) d\tau = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^t (t - \tau) \left[\int_{|\mathbf{n}|=1} f(\mathbf{r} + a(t - \tau)\mathbf{n}, \tau) d\mathbf{n} \right] d\tau. \end{aligned} \quad (3.70)$$

Зауважимо, що в термінах функції Гріна (3.41) розв'язок тривимірної задачі Коші (3.62), (3.65) для неоднорідного хвильового рівняння з нульовими початковими умовами можна подати у вигляді

$$\psi_2(\mathbf{r}, t) = \int_0^t d\tau \int_{E_3} G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, t - \tau) f(\mathbf{r}', \tau) d\mathbf{r}'.$$

Для тривимірного простору, з огляду на явний вираз функції Гріна (3.41), ця формула є фактично проміжною — після інтегрування в ній за радіальною змінною приходимо до формули (3.70).

Для розв'язків аналогічної задачі Коші в інших просторах справджується аналогічна формула

$$\psi_2(\mathbf{r}, t) = \int_0^t d\tau \int_{E_n} G_n(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, t - \tau) f(\mathbf{r}', \tau) d\mathbf{r}', \quad (3.71)$$

а можливість її подальших перетворень визначається явним виразом для функції Гріна хвильового рівняння у відповідному просторі. Зокрема для просторів E_2 (з двічі неперервно диференційовною $f(x, y, t)$) і E_1 (з неперервно диференційовною $f(x, t)$) відповідно дістаємо (див. вирази для функцій Гріна $G_2(x, y, t)$ і $G_1(x, t)$ у підрозділі 3.4):

$$\psi_2(x, y, t) = \frac{1}{2\pi a} \int_0^t d\tau \iint_{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}| < a(t - \tau)} \frac{f(x', y', \tau)}{\sqrt{a^2(t - \tau)^2 - (x' - x)^2 - (y' - y)^2}} dx' dy', \quad (3.72)$$

$$\psi_2(x, t) = \frac{1}{2a} \int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(x', \tau) dx'. \quad (3.73)$$

Остання — це *формула Д'Аламбера для вимушених коливань* (порівняйте її з (3.59)).

Нагадаємо (див. підрозділ 1.5), що описаний вище універсальний підхід до розв'язування задач Коші для неоднорідних лінійних рівнянь математичної фізики, який полягає у використанні сукупності розв'язків задач Коші для відповідних однорідних рівнянь з початковими моментами часу $\tau > 0$ і подальшому інтегруванні їх за параметром τ , $0 < \tau < t$, називається *принципом Дюамеля*, а інтеграли (3.71) за початковими моментами часу, які дають шуканий розв'язок, — *інтегралами Дюамеля*.

Завдання 3.5.1. Користуючись тим, що для двічі неперервно диференційовних функцій $u(\mathbf{r})$ перетворення $tM[u](\mathbf{r}, t)$, $t > 0$, дає двічі неперервно диференційовні функції, які задовольняють однорідне хвильове рівняння та умову

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\partial \{tM[u](\mathbf{r}, t)\}}{\partial t} = u(\mathbf{r}, 0),$$

перевірте, що для будь-якої двічі неперервно диференційовної функції $f(\mathbf{r}, t)$ функція (3.70) — це єдиний двічі неперервно диференційовний розв'язок неоднорідного рівняння (3.62), підкорений умовам (3.65).

Увівши у формулі (3.70) нову змінну інтегрування $\rho = a(t - \tau)$ і використовуючи явний вигляд перетворення M , дістаємо:

$$\psi_2(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi a^2} \int_0^{at} \frac{1}{\rho} \left[\int_{|\mathbf{n}|=1} f\left(\mathbf{r} + \rho \mathbf{n}, t - \frac{\rho}{a}\right) d\mathbf{n} \right] \rho^2 d\rho. \quad (3.74)$$

Поклавши далі $\rho = \rho \mathbf{n}$, бачимо, що

$$\psi_2(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi a^2} \int_{|\rho| < at} \frac{1}{|\rho|} f\left(\mathbf{r} + \rho, t - \frac{|\rho|}{a}\right) d\rho.$$

У змінних $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \rho$ цей вираз набирає вигляду

$$\psi_2(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi a^2} \int_{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| < at} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} f\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{a}\right) d\mathbf{r}'. \quad (3.75)$$

За аналогією з ньютонівським потенціалом вираз (3.75) називається *загаювальним потенціалом*. З нього видно, що в однорідному ізотропному середовищі швидкість поширення сигналів або збурень від будь-якого джерела не залежить від напряму поширення і є обмеженою сталою $a > 0$. Відповідно, стан системи в точці спостереження $\mathbf{r}$ у момент часу t , спричинений джерелами, що діють у малому околі точки $\mathbf{r}'$, визначається збуренням цього околу в більш ранній момент часу $t' = t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/a$, де $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/a$ — час, за який збурення з точки $\mathbf{r}'$ доходить (з амплітудою, послабленою внаслідок поширення і в інших напрямках) до точки $\mathbf{r}$. Загальний же стан середовища в точці $\mathbf{r}$ у момент часу t від усіх околів, де діють джерела, дається, згідно з принципом суперпозиції для лінійних рівнянь, інтегральною сумою (3.75).

Завдання 3.5.2. Знайдіть потенціал швидкості для вимушених акустичних коливань однорідного ізотропного середовища, викликаних джерелами, локалізованими в нескінченно малому околі початку координат.

Розглянемо тепер важливий випадок, коли густина потужності $f(\mathbf{r}, t)$ змінюється з часом за гармонічним законом, з амплітудою $p(\mathbf{r})$ і частотою ω :

$$f(\mathbf{r}, t) = p(\mathbf{r}) \sin \omega t. \quad (3.76)$$

Оскільки хвильове рівняння лінійне відносно шуканої функції, а функція $f(\mathbf{r}, t)$ — дійсна, то подальший аналіз сильно спрощується, якщо $f(\mathbf{r}, t)$ подати в комплексному вигляді

$$\tilde{f}(\mathbf{r}, t) = p(\mathbf{r})e^{-i\omega t}, \quad (3.77)$$

обчислити відповідний комплексний потенціал $\tilde{\psi}(\mathbf{r}, t)$ (індекс 2 надалі опускаємо), а потім виокремити уявну з мінусом частину $\tilde{\psi}(\mathbf{r}, t)$.

Припустимо, що функція $p(\mathbf{r})$ дорівнює нулю зовні деякої сфери досить великого радіуса R . Підставляючи вираз (3.77) у формулу (3.75), бачимо, що в цьому випадку кожна точка середовища приводиться з плином часу в гармонічні коливання з тією ж самою частотою ω . Якщо $at > R + r$, потенціал швидкості для цих коливань дорівнює

$$\tilde{\psi}(\mathbf{r}, t) = A_+(\mathbf{r})e^{-i\omega t}, \quad (3.78)$$

де комплексна амплітуда

$$A_+(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi a^2} \int_{E_3} \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} p(\mathbf{r}') d\mathbf{r}', \quad k = \frac{\omega}{a} \quad (3.79)$$

(інтегрування фактично ведеться по області, зайнятій джерелами).

Зокрема точкове джерело з $p(\mathbf{r}) = d\delta(\mathbf{r})$, розташоване в початку координат, породжує з часом гармонічні коливання у формі *розбіжної сферичної хвилі*

$$\tilde{\psi}(\mathbf{r}, t) = \frac{d}{4\pi a^2} \frac{e^{i(kr - \omega t)}}{r}, \quad at > r. \quad (3.80)$$

Якщо функція $p(\mathbf{r})$ не є фінітною, а спадає на нескінченності щонайменше як

$$|p(\mathbf{r})|_{r \rightarrow \infty} = O\left(\frac{1}{r^{3+\varepsilon}}\right), \quad (3.81)$$

то

$$\tilde{\psi}(\mathbf{r}, t)_{t \rightarrow \infty} = A_+(\mathbf{r})e^{-i\omega t} + O\left(\frac{1}{t^{1+\varepsilon}}\right), \quad (3.82)$$

Справді, для $f(\mathbf{r}, t)$ у вигляді (3.77) за допомогою формул (3.75) і (3.79) можемо записати

$$\tilde{\psi}(\mathbf{r}, t)_{t \rightarrow \infty} = A_+(\mathbf{r})e^{-i\omega t} + R(\mathbf{r}, t),$$

де

$$R(\mathbf{r}, t) = -\frac{e^{-i\omega t}}{4\pi a^2} \int_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| > at} \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} p(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'.$$

Згідно з формулою (3.81), існує таке додатне число $C < \infty$, що

$$|p(\mathbf{r})| \leq \frac{C}{r^{3+\varepsilon}}.$$

Тому при $r < at \leq |\mathbf{r}' - \mathbf{r}|$, ураховуючи співвідношення

$$r' = |\mathbf{r}' - \mathbf{r} + \mathbf{r}| \geq |\mathbf{r}' - \mathbf{r}| - r \geq at - r,$$

одержуємо:

$$\begin{aligned} |R(\mathbf{r}, t)| &\leq \frac{1}{4\pi a^2} \int_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| > at} \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} |p(\mathbf{r}')| d\mathbf{r}' \leq \frac{1}{4\pi a^3 t} \int_{r' > at-r} |p(\mathbf{r}')| d\mathbf{r}' \leq \\ &\leq \frac{C}{4\pi a^3 t} \int_{r' > at-r} \frac{1}{r'^{(3+\varepsilon)}} d\mathbf{r}' = \frac{C}{a^3 t} \int_{at-r}^{\infty} \frac{dr'}{r'^{(1+\varepsilon)}} = \frac{C}{a^3 \varepsilon t (at-r)^\varepsilon} \underset{t \rightarrow \infty}{=} O\left(\frac{1}{t^{1+\varepsilon}}\right). \end{aligned}$$

Крім того, умова (3.81) гарантує, що

$$A_{\pm}(\mathbf{r}) = \frac{d(\mathbf{n})}{r \rightarrow \infty} \frac{e^{ikr}}{4\pi a^2} \frac{1}{r} + o\left(\frac{1}{r}\right), \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad (3.83)$$

$$d(\mathbf{n}) = \int_{E_3} e^{-ik(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}')} p(\mathbf{r}') d\mathbf{r}', \quad (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}') = n_x x' + n_y y' + n_z z'.$$

Щоб довести це, візьмемо деяке додатне число $R \ll r$ і запишемо інтеграл у формулі (3.79) як суму двох інтегралів: J_1 по кулі радіусом R і J_2 по рештці простору E_3 . Також запишемо $J_2 = J_{21} + J_{22}$, де інтеграл J_{21} береться по сферичному шару $R < r' < r$, а інтеграл J_{22} — по області $r' > r$. Ураховуючи, що для інтегралів по поверхні одиничної сфери справджується співвідношення

$$\oint_{|\mathbf{n}'|=1} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\mathbf{n}'|} d\mathbf{n}' = \begin{cases} \frac{4\pi}{r}, & r' < r, \\ \frac{4\pi}{r'}, & r' > r, \end{cases}$$

для J_{21} маємо:

$$|J_{21}| \leq \int_{R < r' < r} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} |p(\mathbf{r}')| d\mathbf{r}' \leq C \int_{R < r' < r} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| r'^{(3+\varepsilon)}} d\mathbf{r}' =$$

$$= \frac{4\pi C}{r} \int_R^r \frac{dr'}{r'^{(1+\varepsilon)}} = \frac{4\pi C}{r\varepsilon} \left(\frac{1}{R^\varepsilon} - \frac{1}{r^\varepsilon} \right)_{r \rightarrow \infty} = O\left(\frac{1}{rR^\varepsilon}\right).$$

Подібним же способом дістаємо:

$$|J_{22}| \leq \int_{r' > r} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} |p(\mathbf{r}')| d\mathbf{r}' = O\left(\frac{1}{r^{1+\varepsilon}}\right).$$

Отже,

$$|J_2|_{r \rightarrow \infty} = O\left(\frac{1}{R^\varepsilon r}\right). \quad (3.84)$$

Далі, при $r \gg r'$ маємо:

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')} = r - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}') + O\left(\frac{r'}{r}\right),$$

$$\frac{e^{ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{e^{ikr}}{r} e^{-ik(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}')} \left(1 + O\left(\frac{r'}{r}\right) \right). \quad (3.85)$$

Підстановка оцінки (3.85) в інтеграл J_1 дає:

$$J_1 = \frac{e^{ikr}}{r} \int_{r' < R} e^{-ik(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}')} p(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' + o\left(\frac{1}{r}\right) =$$

$$= \frac{e^{ikr}}{r} \left[\int_{E_3} e^{-ik(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}')} p(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' - \int_{r' > R} e^{-ik(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}')} p(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \right] + o\left(\frac{1}{r}\right) =$$

$$= \frac{e^{ikr}}{r} \left[\int_{E_3} e^{-ik(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}')} p(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' + O\left(\frac{1}{R^\varepsilon}\right) \right] + o\left(\frac{1}{r}\right).$$

Тому, урахувуючи, що R можна взяти як завгодно великим, дістаємо:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} [r(J_1 + J_2) - e^{ikr} d(\mathbf{n})] = 0.$$

Разом з (3.84) це дає (3.83).

Отже, усталені коливання точок середовища, спричинені гармонічним джерелом, густина потужності якого описується формулою (3.77), з амплітудою $p(\mathbf{r})$, що задовольняє умову (3.81), набувають на далеких відстанях від початку координат форми розбіжної сферичної хвилі, зумовленої гармонічним точковим джерелом з амплітудою $d(\mathbf{n})\delta(\mathbf{r})$.

Завдання 3.5.3. Доведіть, що гармонічне джерело зі сферично симетричною амплітудою $p(\mathbf{r}) = p(r)$, яка задовольняє умову (3.81), викликає на далеких відстанях від початку координат розбіжну сферично симетричну (тобто незалежну від $\mathbf{n}$) хвилю.

Повернімося до формул (3.78) і (3.79) ((3.82)).

Завдання 3.5.4. Уважаючи, що функція $p(\mathbf{r})$ неперервно диференційовна й інтегровна, та користуючись властивостями ньютонівського потенціалу, покажіть, що комплексна амплітуда (3.79) задовольняє рівняння Гельмгольца

$$-\Delta u(\mathbf{r}) - k^2 u(\mathbf{r}) = \frac{1}{a^2} p(\mathbf{r}). \quad (3.86)$$

Потенціал швидкості (3.78) для усталених коливань середовища можна було б також знайти, розглянувши так звану *задачу без початкових умов*, яка включає неоднорідне хвильове рівняння (3.62) з густиною потужності джерел у вигляді (3.77). Підставивши (3.78) у це рівняння, ми б дістали для $A_+(\mathbf{r})$ рівняння (3.86).

Слід зазначити, що якщо $k^2 > 0$, а функція $p(\mathbf{r})$ — неперервна і фінітна, або неперервна і задовольняє умову (3.81), то існує нескінченно багато функцій, які задовольняють рівняння (3.86) й умову

$$\lim_{r \rightarrow \infty} u(\mathbf{r}) = 0. \quad (3.87)$$

Легко перевірити, що крім функції $A_+(\mathbf{r})$, наведеної формулою (3.79), рівняння (3.86) та умову (3.87) задовольняє функція

$$A_-(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi a^2} \int_{E_3} \frac{e^{-ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} p(\mathbf{r}') d\mathbf{r}',$$

а також будь-яка опукла комбінація

$$\alpha A_+(\mathbf{r}) + (1-\alpha) A_-(\mathbf{r}), \quad 0 < \alpha < 1.$$

Зокрема у граничному випадку ізотропного точкового джерела розв'язком хвильового рівняння (3.62), який задовольняє умову (3.87), є не тільки розбіжна сферична хвиля, але й *збіжна сферична хвиля*

$$\tilde{\psi}(\mathbf{r}, t) = \frac{d}{4\pi a^2} \frac{e^{-i(kr + \omega t)}}{r},$$

а також будь-яка опукла комбінація цих хвиль.

Але якщо джерело почало діяти в деякий момент часу в минулому, то існує єдиний розв'язок рівняння Гельмгольца (3.86), який задовольняє умову (3.87), і ним є функція $A_+(\mathbf{r})$. З-поміж функцій, що задовольняють рівняння (3.86) і умову (3.87), цей єдиний розв'язок можна виокремити за допомогою наступної крайової умови на нескінченності:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial u(\mathbf{r})}{\partial r} - iku(\mathbf{r}) \right) = 0. \quad (3.88)$$

Вона називається умовою випромінювання Зоммерфельда.

Контрольні питання до підрозділу 3.5

1. На які незалежні частини можна розбити задачу Коші для неоднорідного хвильового рівняння?
2. Як за відомою густиною потужності джерел визначити потенціал швидкості для спричинених ними вимушених акустичних коливань рідини або газу?
3. Які джерела породжують розбіжні сферичні хвилі?
4. Яким вимогам мають підкорятися густина потужності джерел, що змінюється в часі за гармонічним законом, і початкові умови, щоб розв'язок задачі Коші для неоднорідного хвильового рівняння асимптотично трансформувався при $t \rightarrow \infty$ і $r \rightarrow \infty$ в розбіжну сферичну хвилю?
5. Яке рівняння задовольняє амплітуда потенціалу швидкості для установлених коливань рідини або газу, спричинених гармонічним джерелом?
6. Яка умова на нескінченності дає можливість з-поміж функцій, що задовольняють рівняння Гельмгольца з параметром $k^2 > 0$, виокремити ту єдину, яка описує акустичні хвилі від гармонічного джерела, увімкненого в деякий момент часу в минулому?

4. ДОДАТКОВІ ВІДОМОСТІ З ТЕОРІЇ ФУНКЦІЙ

4.1. ОСНОВНІ ФУНКЦІЇ. ЛІНІЙНІ ПРОСТОРИ І ЛІНІЙНІ ФУНКЦІОНАЛИ

Якщо броунівський рух у системі здійснюється лише однією домішковою частинкою, то роль густини $n(\mathbf{r}, t)$ переходить до густини ймовірності $p(\mathbf{r}, t)$. При цьому, однак, постає питання, як визначити початкову густину ймовірності, якщо задано, що при $t = 0$ частинка знаходилася в деякій точці $\mathbf{r}_0$.

Потреба розширити поняття густини на випадок, коли розподіл фізичної величини створюється точковими об'єктами, виникає у фізичних задачах досить часто. Спробуємо, наприклад, визначити густину $\rho(\mathbf{r})$, яка створюється в довільній точці $\mathbf{r}$ точковою одиничною масою $m = 1$, розташованою в точці $\mathbf{r}_0$. Для цього розглянемо послідовність вкладених одна в одну областей Ω_j , з об'ємами ΔV_j , які поступово стягуються в точку $\mathbf{r}$. Позначимо через ΔM_j загальну масу, що міститься в області Ω_j . У нашому випадку:

$$\Delta M_j = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \mathbf{r}_0 \notin \Omega_j, \\ 1, & \text{якщо } \mathbf{r}_0 \in \Omega_j. \end{cases}$$

Згідно з означенням густини маємо:

$$\rho(\mathbf{r}) = \lim_{\Delta V_j \rightarrow 0} \frac{\Delta M_j}{\Delta V_j}.$$

Якщо $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}_0$, то, очевидно, починаючи з деякого номера j_0 , усі області Ω_j не міститимуть точку $\mathbf{r}_0$, і тому $\Delta M_j = 0$ при $j \geq j_0$. Відповідно,

$$\rho(\mathbf{r} \neq \mathbf{r}_0) = 0.$$

Якщо ж $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$, то $\Delta M_j = 1$ при усіх j , і тому

$$\rho(\mathbf{r} = \mathbf{r}_0) = \lim_{\Delta V_j \rightarrow 0} \frac{\Delta M_j}{\Delta V_j} = \lim_{\Delta V_j \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V_j} = +\infty.$$

Таким чином, густина $\rho(\mathbf{r})$, що формально відповідає точковій одиничній масі, розташованій в точці $\mathbf{r}_0$, дорівнює нулю всюди, крім

самої точки $\mathbf{r}_0$, де вона дорівнює « $+\infty$ ». Водночас інтеграл від густини $\rho(\mathbf{r})$ по будь-якій області, що містить точку $\mathbf{r}_0$, дорівнює одиниці:

$$\int_{E_3} \rho(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = 1.$$

Ці властивості функції $\rho(\mathbf{r})$ несумісні з класичними означеннями функції та інтеграла. При розв'язуванні конкретних фізичних задач, однак, такі величини як густини, що відповідають точковим масам або зарядам, зустрічаються, як правило, лише на проміжних етапах. В остаточній відповіді вони або відсутні, або з'являються під знаком інтеграла у вигляді добутків з деякими «хорошими» функціями, при цьому самі ці інтеграли є скінченними. Наприклад, ньютонівський потенціал φ , створений згаданим точковим «розподілом» маси, залишається скінченним у будь-якій точці $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}_0$. Дійсно, розбиваючи весь простір E_3 на малі області з об'ємами ΔV_j навколо точок $\mathbf{r}_j$, серед яких є й $\mathbf{r}_0$, маємо:

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}) &= -\gamma \int_{E_3} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \rho(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' = -\gamma \lim_{\Delta V_j \rightarrow 0} \sum_j \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|} \rho(\mathbf{r}_j) \Delta V_j = \\ &= -\gamma \lim_{\Delta V_j \rightarrow 0} \sum_j \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j|} \Delta M_j = -\frac{\gamma}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}, \end{aligned}$$

де γ — універсальна гравітаційна стала.

Отже, немає нагальної потреби давати докладну відповідь на питання, що означає функція $\rho(\mathbf{r})$ та подібні сингулярні функції. Досить лише визначити зміст інтеграла від добутку сингулярної та «хорошої» функцій.

Прояснимо спершу, що мається на увазі під «хорошими» функціями — називатимемо їх надалі *основними*. Зауважимо, що вибір певного класу основних функцій визначається потребами конкретної задачі. Якщо не зазначено інше, під основними розумітимемо множину K всіх нескінченно гладких фінітних функцій, визначених у просторі E_3 , тобто фінітних функцій, що *всюди в E_3 є неперервними і мають неперервні частинні похідні будь-якого порядку*. Основні функції можна додавати одна до одної, множити на дійсні і комплексні числа, при цьому новоутворені функції залишаються основними. Іншими словами, основні функції утворюють *лінійну множину*, або *лінійний простір*.

Означення 4.1.1. Множина L об'єктів — елементів — будь-якої природи (нехай букви f, g, h позначають будь-які з них, а букви λ, μ — довільні числа) називається лінійним простором, якщо на ній визначені такі операції:

А) операція додавання елементів, яка кожній парі елементів f, g ставить у відповідність єдиний елемент, що позначається $f + g$, множини L , і яка задовольняє аксіоми 1) — 4):

1) $f + g = g + f$ (переставний закон додавання);

2) $(f + g) + h = f + (g + h)$ (сполучний закон додавання);

3) існує єдиний нульовий елемент « θ », такий, що $f + \theta = f$;

4) для кожного елемента f існує єдиний обернений елемент « $-f$ », такий, що $f + (-f) = (-f) + f = \theta$;

Б) операція множення елементів на числа, яка кожному елементу f і кожному числу λ ставить у відповідність єдиний елемент, що позначається λf , множини L , і яка задовольняє аксіоми 5) — 8):

5) $0f = \theta$;

6) $1f = f$;

7) $\lambda(\mu f) = (\lambda\mu)f$ (сполучний закон множення);

8) $\lambda(f + g) = \lambda f + \lambda g$ (розподільний закон множення).

Зауважимо, що коли йдеться про лінійний простір, елементами якого є числові функції, зазначені вище операції додавання і множення на числа можна розуміти як звичайні арифметичні операції над числовими функціями.

Лінійний простір, елементами якого є нескінченно диференційовні фінитні функції, також позначатимемо буквою K .

Означення 4.1.2. Кажуть, що послідовність основних функцій $\varphi_1, \dots, \varphi_n, \dots$ прямує до нуля в просторі K , якщо всі ці функції дорівнюють нулю зовні деякої сфери досить великого радіуса, а всередині неї вони та всі їх похідні рівномірно прямують до нуля (у звичайному розумінні) при $n \rightarrow \infty$.

Означення 4.1.3. Кажуть, що на деякій множині функцій визначено функціонал F , якщо задано правило, за яким кожному елементу цієї множини ставиться у відповідність певне число.

Отже, F — це функція, область визначення якої сама є множиною функцій, а не множиною чисел.

Означення 4.1.4. Нехай на просторі K визначено функціонал F , тобто вказано правило, за яким кожній основній функції $\varphi \in K$ ста-

вється у відповідність певне число $F(\varphi)$. Функціонал F називається *лінійним і неперервним*, якщо задовольняються такі умови:

а) для будь-яких основних функцій $\varphi, \psi \in K$ і будь-яких чисел λ, μ

$$F(\lambda\varphi + \mu\psi) = \lambda F(\varphi) + \mu F(\psi) \quad (\text{лінійність функціонала } F);$$

б) якщо послідовність основних функцій $\varphi_1, \dots, \varphi_n, \dots \in K$ прямує до нуля в просторі K , то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(\varphi_n) = 0 \quad (\text{неперервність функціонала } F).$$

Нехай, наприклад, функція $f(\mathbf{r})$ визначена і неперервна в усьому просторі E_3 . За допомогою f будь-якій основній функції $\varphi(\mathbf{r})$ можна поставити у відповідність число

$$F(\varphi) = \int_{E_3} f(\mathbf{r})\varphi(\mathbf{r}) d\mathbf{r}. \quad (4.1)$$

Інтегрування в (4.1) фактично ведеться по скінченній області, бо функція φ фінітна.

Завдання 4.1.1. Перевірте, що для будь-якої неперервної в E_3 функції $f(\mathbf{r})$ функціонал (4.1) є лінійним і неперервним у просторі K основних функцій.

Контрольні питання до підрозділу 4.1

1. Які аксіоми повинні виконуватися для визначених на деякій множині операцій додавання елементів і множення їх на комплексні числа для того, щоб цю множину можна було вважати лінійним простором?
2. Чи утворюють основні функції лінійний простір?
3. Як означаються неперервні лінійні функціонали, визначені на множині основних функцій?
4. Чи утворюють лінійний простір неперервні лінійні функціонали, які визначені на множині основних функцій?

4.2. ІНТЕГРОВНІ ФУНКЦІЇ

Комплекснозначна функція $f(\mathbf{r})$, задана в усьому тривимірному просторі E_3 , називається *інтегрованою по E_3* , якщо

$$\int_{E_3} |f(\mathbf{r})| d\mathbf{r} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x, y, z)| dx dy dz < \infty.$$

Множину комплекснозначних інтегровних функцій $f(\mathbf{r})$, які за межами області $\Omega \subset E_3$ дорівнюють нулю, традиційно позначають символом $L_1(\Omega)$. Якщо зрозуміло, про яку область Ω йдеться, символ Ω опускають і замість $L_1(\Omega)$ пишуть просто L_1 . У подальшому, якщо не зазначено інше, Ω завжди збігається з E_3 .

Для інтегровної функції $f(\mathbf{r})$ невід'ємне число

$$\|f\| = \int_{E_3} |f(\mathbf{r})| d\mathbf{r}$$

називають *нормою*.

Завдання 4.2.1. Знайдіть значення показників степеня α і β , при яких функції

$$g(\mathbf{r}) = C \frac{e^{-r}}{r^\alpha} \quad \text{і} \quad h(\mathbf{r}) = C \frac{1}{r^\alpha |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^\beta}$$

належать до множини L_1 .

Завдання 4.2.2. Доведіть, що функції множини L_1 утворюють лінійний простір, якщо операції додавання цих функцій і множення їх на комплексні числа означити як звичайні арифметичні дії з комплексними величинами, а нульовий елемент простору L_1 — як функцію $\theta(\mathbf{r})$ з $\|\theta\| = 0$.

Вказівка. Завважте, що для будь-яких комплексних величин α , β , $f(\mathbf{r})$ і $g(\mathbf{r})$ справджується нерівність

$$|\alpha f(\mathbf{r}) + \beta g(\mathbf{r})| \leq |\alpha| |f(\mathbf{r})| + |\beta| |g(\mathbf{r})|,$$

та скористайтесь властивостями інтеграла, згадавши, зокрема, що для інтегровних функцій $f(\mathbf{r})$ і $g(\mathbf{r})$ справджується нерівність трикутника

$$\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|.$$

Зауваження 4.2.1. Інтегровні функції $f(\mathbf{r})$ і $g(\mathbf{r})$ як елементи простору L_1 вважаються однаковими, якщо $\|f - g\| = 0$. Це співвідношення, однак, не означає, що $f(\mathbf{r}) = g(\mathbf{r})$ у кожній точці $\mathbf{r}$, оскільки інтегровна функція може мати нескінченну множину точок розриву,

а довільні зміни її значень на будь-якій скінченній і певних нескінченних множинах точок не впливають на значення інтеграла від цієї функції.

Функція з множини L_1 у загальному випадку може мати точки розриву на щільній¹ множині точок у просторі E_3 . Дійсно, розглянемо невід'ємну функцію

$$g(\mathbf{r}) = g(r) = \frac{e^{-r}}{4\pi r},$$

де $r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Інтеграл

$$J(R) = \int_{|\mathbf{r}| < R} g(r) d\mathbf{r}$$

легко обчислюється у сферичних координатах

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta,$$

$$0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad 0 \leq r < \infty, \quad d\mathbf{r} = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi.$$

Маємо:

$$J(R) = \int_0^R e^{-r} r dr = 1 - (1 + R)e^{-R} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 1.$$

Отже, $g(\mathbf{r}) \in L_1$ і

$$\int_{E_3} g(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = 1.$$

Для довільної точки $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z) \in E_3$ і довільного числа $\lambda > 0$ заміна змінних

$$x' = \lambda(x - a_x), \quad y' = \lambda(y - a_y), \quad z' = \lambda(z - a_z)$$

дає:

$$\int_{E_3} g(\lambda|\mathbf{r} - \mathbf{a}|) d\mathbf{r} = \lambda^{-3} \int_{E_3} g(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' = \lambda^{-3}. \quad (4.2)$$

Розглянемо тепер функцію $q(\mathbf{r})$, формально визначену як суму

$$q(\mathbf{r}) = \sum_{n=1}^{\infty} g(n|\mathbf{r} - \mathbf{a}_n|)$$

¹ Множина називається щільною в деякому просторі, якщо в будь-якому околі довільної точки цього простору міститься хоча б один її елемент.

ряду невід'ємних функцій $g(n|\mathbf{r}-\mathbf{a}_n|) \in L_1$, де $\{\mathbf{a}_n\}$ — довільна послідовність точок простору E_3 , і скористаємося відомою *теоремою аналізу про монотонну збіжність*:

Теорема 4.2.1 (Беппо Леві). Нехай $\{f_n(\mathbf{r}) \leq f_{n+1}(\mathbf{r})\}$ — неспадна послідовність невід'ємних функцій з L_1 і $\|f_n\| \leq M < \infty$. Тоді послідовність $\{f_n(\mathbf{r})\}$ майже всюди¹ збігається до деякої інтегровної функції $f(\mathbf{r})$, і при цьому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E_3} f_n(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \int_{E_3} f(\mathbf{r}) d\mathbf{r}.$$

У нашому випадку в якості $\{f_n(\mathbf{r})\}$ можна взяти неспадну послідовність частинних сум $f_n(\mathbf{r}) = \sum_{s=1}^n g(s|\mathbf{r}-\mathbf{a}_s|)$, оскільки, згідно з (4.2),

$$\sum_{s=1}^n \int_{E_3} g(s|\mathbf{r}-\mathbf{a}_s|) d\mathbf{r} = \sum_{s=1}^n \frac{1}{s^3} < \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s^3} = \zeta(3) \approx 1,202 < \infty,$$

де $\zeta(z)$ — дзета-функція Рімана. Отже, $q(\mathbf{r})$ — це функція, яка належить множині L_1 і має розриви другого роду щонайменше в точках послідовності $\{\mathbf{a}_n\}$. Цю ж послідовність можна вибрати так, щоб вона була щільною в просторі E_3 . Наприклад, у якості $\{\mathbf{a}_n\}$ можна взяти зліченну послідовність² точок простору E_3 , координати яких є раціональними числами³.

За означенням, послідовність $\{f_n(\mathbf{r})\}$ функцій $f_n(\mathbf{r})$ як елементів простору L_1 прямує в ньому до функції (елемента) $f(\mathbf{r})$, якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = 0$. З цього означення, звичайно, не випливає, що функції послідовності $\{f_n(\mathbf{r})\}$, збіжної в L_1 до $f(\mathbf{r})$, збігаються до $f(\mathbf{r})$ у кожній точці $\mathbf{r}$. Крім того, умова

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\mathbf{r}) \rightarrow f(\mathbf{r}) \text{ (майже всюди),}$$

¹ Термін «майже всюди» означає «всюди, за виключенням, можливо, множини точок, яка має міру нуль, тобто множини точок, яку для будь-якого $\varepsilon > 0$ можна покрити сукупністю куль $|\mathbf{r}-\mathbf{r}_n| < \delta_n$ із загальним об'ємом $\sum_n \frac{4\pi}{3} \delta_n^3 < \varepsilon$ ».

² Нескінченна множина називається зліченною, якщо кожному з її елементів можна надати унікальний номер, що виражається натуральним числом, і при цьому щоб жодний з можливих номерів не залишився незадіяним.

³ Той факт, що точки простору з раціональними координатами утворюють зліченну множину, є наслідком загального твердження, що всі елементи, які належать одній зі зліченної сукупності злічених множин, утворюють зліченну множину.

узагалі кажучи, не означає (навіть коли $f(\mathbf{r})$ — інтегровна функція), що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E_3} f_n(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \int_{E_3} f(\mathbf{r}) d\mathbf{r}.$$

Однак справджується наступна теорема про граничний перехід під знаком інтеграла:

Теорема 4.2.2 (Лебега). Нехай $\{f_n(\mathbf{r})\}$ — послідовність функцій з L_1 , що прямує до функції $f(\mathbf{r})$ майже всюди, і при цьому існує така невід'ємна функція $g(\mathbf{r})$ з L_1 , що $|f_n(\mathbf{r})| \leq g(\mathbf{r})$. Тоді функція $f(\mathbf{r})$ належить L_1 і

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E_3} f_n(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \int_{E_3} f(\mathbf{r}) d\mathbf{r}.$$

Завдання 4.2.3. Доведіть, що при виконанні умов теореми 4.2.2 справджується співвідношення

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = 0.$$

Вказівка. Застосуйте теорему 4.2.2 до послідовності функцій $\{|f_n(\mathbf{r}) - f(\mathbf{r})|\}$.

Незважаючи на те, що функція з простору L_1 може мати розриви на нескінченній множині точок, для будь-якої функції $f(\mathbf{r}) \in L_1$ існують послідовності $\{\psi_n(\mathbf{r})\}$ функцій з простору K , що прямують до функції $f(\mathbf{r})$ майже в усіх точках $\mathbf{r}$ простору E_3 , і для яких

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E_3} |f(\mathbf{r}) - \psi_n(\mathbf{r})| d\mathbf{r} = 0.$$

У багатьох випадках більш природним є наближувати функції з L_1 за допомогою «простих», хоч і розривних, функцій.

Нехай Ω — довільна множина точок простору E_3 . Функція

$$\chi_{\Omega}(\mathbf{r}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{r} \in \Omega, \\ 0, & \mathbf{r} \notin \Omega, \end{cases}$$

називається *характеристичною* функцією множини Ω . Зауважимо, що характеристичні функції обмежених областей інтегровні, а інтеграли від них дорівнюють об'ємам відповідних областей. Функції, які є скінченними сумами виду

$$u_n(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^n c_j \chi_{\Omega_j}(\mathbf{r}), \quad 1 \leq n < \infty,$$

де c_j — довільні комплексні числа, а χ_{Ω_j} — характеристичні функції обмежених областей $\Omega_j \subset E_3$, називаються *скінченнозначними*.

Завдання 4.2.4. Покажіть, що скінченнозначні функції інтегровні й утворюють лінійний підпростір¹ в L_1 .

Для кожної функції $f(\mathbf{r}) \in L_1$ існують послідовності $\{u_n(\mathbf{r})\}$ скінченнозначних функцій, що прямують до функції $f(\mathbf{r})$ майже в усіх точках простору E_3 і для яких

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E_3} |f(\mathbf{r}) - u_n(\mathbf{r})| d\mathbf{r} = 0.$$

Зауважимо, що наведені вище твердження щодо інтегровних функцій, які утворюють лінійний простір $L_1(E_3)$, переносяться, з тривіальними змінами, на функції з лінійних просторів $L_1(\Omega)$, де Ω — деяка область простору E_n , $1 \leq n < \infty$.

Контрольні питання до підрозділу 4.2

1. Як означається норма інтегровної функції? Чи є норма лінійним функціоналом на множині інтегровних функцій?
2. За якої умови дві інтегровні функції як елементи простору L_1 вважаються рівними?
3. Чи може інтегровна функція в області $\Omega \subset E_3$ мати розриви на щільний в Ω множині точок? Відповідь обґрунтуйте.
4. Який зміст має твердження «послідовність функцій $f_n(\mathbf{r})$ на множині Ω майже всюди збігається до функції $f(\mathbf{r})$ »?
5. За якої умови послідовність інтегралів від інтегровних функцій $f_n(\mathbf{r})$ на множині Ω , що збігаються майже всюди на цій множині до інтегровної функції $f(\mathbf{r})$, буде збігатися до інтеграла від $f(\mathbf{r})$?

¹ Лінійним підпростором лінійного простору називається будь-яка множина елементів простору, елементи якої самі утворюють лінійний простір для означених у просторі операцій додавання елементів і множення їх на комплексні числа.

4.3. РЕГУЛЯРНІ І СИНГУЛЯРНІ ФУНКЦІОНАЛИ. ДЕЛЬТА-ФУНКЦІЯ ДІРАКА

Повертаючись до функціоналів, заданих на лінійній множині K всіх нескінченно гладких фінітних функцій, поставимо у відповідність довільній функції $f \in L_1$ функціонал на K , означений виразом

$$F_f(\varphi) = \int_{E_3} f(\mathbf{r})\varphi(\mathbf{r})d\mathbf{r}. \quad (4.3)$$

Завдання 4.3.1. Нехай $f(\mathbf{r}) \in L_1$, і нехай $\varphi(\mathbf{r})$ — неперервна та обмежена функція, тобто існує таке невід’ємне число $C < \infty$, що $\sup|\varphi(\mathbf{r})| \leq C$. Доведіть, що добуток $f\varphi \in L_1$ і

$$\left| \int_{E_3} f(\mathbf{r})\varphi(\mathbf{r})d\mathbf{r} \right| \leq C \int_{E_3} |f(\mathbf{r})|d\mathbf{r}. \quad (4.4)$$

Згідно з означенням (4.3) і нерівністю (4.4), для $f \in L_1$ функціонал $F_f(\varphi)$ є лінійним і неперервним на K . Оскільки для будь-якої основної функції з K інтеграл у правій частині (4.3) фактично береться по кулі скінченного радіуса, означення (4.3) має зміст і тоді, коли функція $f(\mathbf{r})$ визначена в E_3 та інтегрована по будь-якій обмеженій області $\Omega \subset E_3$, тобто і тоді, коли функція $f(\mathbf{r})$ — локально інтегровна. Функціонали виду (4.3) на множині K , де $f(\mathbf{r})$ — локально інтегровна функція, називаються *регулярними*.

Регулярними функціоналами не вичерпується вся множина лінійних неперервних функціоналів, визначених на множині основних функцій K . Розглянемо, наприклад, лінійний функціонал, який будь-якій основній функції $\varphi(\mathbf{r})$ ставить у відповідність її значення у фіксованій точці $\mathbf{r}_0$, тобто $F_{\mathbf{r}_0}(\varphi) = \varphi(\mathbf{r}_0)$. Він лінійний і неперервний, але його не можна подати у вигляді (4.3), з локально інтегрованою функцією f .

Справді, припустимо, що існує така локально інтегровна функція $f_0(\mathbf{r})$, що для будь-якої основної функції

$$\varphi(\mathbf{r}_0) = \int_{E_3} f_0(\mathbf{r})\varphi(\mathbf{r})d\mathbf{r}. \quad (4.5)$$

Зокрема для основної функції

$$\varphi_{\varepsilon}(\mathbf{r}) = \begin{cases} e^{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^2}}, & |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| < \varepsilon, \\ 0, & |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| \geq \varepsilon, \end{cases}$$

згідно з формулою (4.5) маємо:

$$\varphi_{\varepsilon}(\mathbf{r}_0) = e^{-1} = \int_{E_3} f_0(\mathbf{r}) \varphi_{\varepsilon}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \int_{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| < \varepsilon} e^{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^2}} f_0(\mathbf{r}) d\mathbf{r}. \quad (4.6)$$

Ліва частина рівності (4.6), яка дорівнює e^{-1} , не залежить від ε . Водночас інтеграл справа, з огляду на інтегровність функції f_0 , прямує до нуля при зменшенні ε , оскільки

$$\left| \int_{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| < \varepsilon} e^{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^2}} f_0(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \right| \leq \int_{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| < \varepsilon} |f_0(\mathbf{r})| d\mathbf{r}.$$

Приходимо до суперечності.

Означення 4.3.1. Функціонал, який будь-якій основній функції $\varphi(\mathbf{r})$ ставить у відповідність її значення в точці $\mathbf{r}_0$, символічно записується у вигляді

$$\varphi(\mathbf{r}_0) = \int_{E_3} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \varphi(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad (4.7)$$

де символ $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$ називається *дельта-функцією Дірака*, чи просто *δ -функцією*.

Узагалі, будь-який неперервний лінійний функціонал, визначений на множині K , формально записується у вигляді (4.3), і при цьому символ f називається *узагальненою функцією*, або *розподілом*.

Функціонали, визначені на просторі K , можна розповсюдити і на більш широкі класи функцій.

Розглянемо, наприклад, простір C функцій, неперервних у будь-якій замкненій області Ω простору E_3 . Очевидно, що він лінійний. Якщо збіжність послідовності неперервних функцій $\psi_1(\mathbf{r}), \dots, \psi_n(\mathbf{r}), \dots$, $\mathbf{r} \in \Omega$, до нуля в просторі C означається як виконання умови

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{\mathbf{r} \in \Omega} |\psi_n(\mathbf{r})| = 0,$$

то функціонал, який кожній неперервній функції $\psi(\mathbf{r}) \in C$ ставить у відповідність її значення в точці $\mathbf{r}_0 \in \Omega$ (і якому відповідає узагальнена функція $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$), є лінійним і неперервним на просторі C .

Замість простору K інколи використовується і простір S , який теж складається з нескінченно диференційовних функцій, але таких, що не обов'язково фінітні, а лише прямують до нуля при $|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$ швидше від будь-якого степеня $1/|\mathbf{r}|$. Прикладом такої функції є $e^{-\gamma r^2}$, $\gamma > 0$.

За означенням, послідовність функцій $\chi_1(\mathbf{r}), \dots, \chi_n(\mathbf{r}), \dots$ простору S прямує до нуля, якщо для будь-яких невід'ємних чисел l_1, l_2, l_3 і p

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{\mathbf{r} \in E_3} |\mathbf{r}|^p \left| \frac{\partial^{l_1+l_2+l_3} \chi_n(\mathbf{r})}{\partial x^{l_1} \partial y^{l_2} \partial z^{l_3}} \right| = 0.$$

Лінійність простору S очевидна. Як і у випадку простору K , узагальненим функціям відповідають функціонали, які є лінійними і неперервними на просторі S . Зрозуміло, що кожна функція простору K належить і простору S .

Зауважимо, що розширення класу основних функцій веде до звуження класу лінійних функціоналів, які є визначеними й залишаються неперервними на ширшому класі неперервних функцій.

Означення 4.3.2. Кажуть, що послідовність неперервних лінійних функціоналів $F_n(\varphi) = \int_{E_3} f_n(\mathbf{r}) \varphi(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$, які породжують звичайні або узагальнені функції $f_n(\mathbf{r})$, прямує до функціонала $F(\varphi)$, якщо для будь-якої основної функції $\varphi(\mathbf{r})$ існує границя

$$F(\varphi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E_3} f_n(\mathbf{r}) \varphi(\mathbf{r}) d\mathbf{r}. \quad (4.8)$$

Вираз (4.8) задає лінійний функціонал, визначений на множині основних функцій. Можна довести, що він неперервний. Записавши його у вигляді

$$F(\varphi) = \int_{E_3} f(\mathbf{r}) \varphi(\mathbf{r}) d\mathbf{r},$$

ми вважаємо, що узагальнена функція $f(\mathbf{r})$ є границею послідовності функцій $f_n(\mathbf{r})$ при $n \rightarrow \infty$.

Теорема 4.3.1. Будь-який *сингулярний* функціонал, заданий на множині основних функцій, тобто такий функціонал, який неможливо подати у вигляді

$$F(\varphi) = \int_{E_3} f(\mathbf{r}) \varphi(\mathbf{r}) d\mathbf{r} ,$$

де $f(\mathbf{r})$ — локально інтегровна функція, є границею послідовності регулярних функціоналів $F_n(\varphi)$, що породжуються локально інтегровними функціями $f_n(\mathbf{r})$.

Послідовності звичайних інтегровних функцій, що прямують до дельта-функції, до певної міри характеризуються наступною теоремою:

Теорема 4.3.2. Нехай $\{f_n(\mathbf{r})\}$ — послідовність інтегровних функцій, яка задовольняє такі умови:

- а) $f_n(\mathbf{r}) \geq 0$;
- б) для довільного числа $\Delta > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0| \leq \Delta} f_n(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0| > \Delta} f_n(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = 0.$$

Тоді

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) .$$

Доведення. Щоб довести, що для будь-якої основної функції $\varphi(\mathbf{r})$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(\varphi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E_3} f_n(\mathbf{r}) \varphi(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \varphi(\mathbf{r}_0) ,$$

подамо $F_n(\varphi)$ у вигляді

$$F_n(\varphi) = \varphi(\mathbf{r}_0) \int_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0| \leq \Delta} f_n(\mathbf{r}) d\mathbf{r} + \int_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0| \leq \Delta} [\varphi(\mathbf{r}) - \varphi(\mathbf{r}_0)] f_n(\mathbf{r}) d\mathbf{r} + \int_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0| > \Delta} f_n(\mathbf{r}) \varphi(\mathbf{r}) d\mathbf{r} . \quad (4.9)$$

Згідно з умовою б), перший доданок у правій частині формули (4.9) прямує до $\varphi(\mathbf{r}_0)$ при $n \rightarrow \infty$.

Оскільки всі основні функції обмежені, маємо

$$\max_{\mathbf{r}} |\varphi(\mathbf{r})| < C < \infty ,$$

і для третього доданка умови а) і б) тепер дають:

$$\left| \int_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|>\Delta} f_n(\mathbf{r})\varphi(\mathbf{r})d\mathbf{r} \right| \leq C \int_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|>\Delta} f_n(\mathbf{r})d\mathbf{r} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

І, нарешті, завдяки неперервності функції $\varphi(\mathbf{r})$ другий доданок у формулі (4.9) стає як завгодно близьким до нуля при $n \rightarrow \infty$. Це впливає з оцінки

$$\begin{aligned} \left| \int_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0| \leq \Delta} [\varphi(\mathbf{r}) - \varphi(\mathbf{r}_0)] f_n(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \right| &\leq \int_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0| \leq \Delta} |\varphi(\mathbf{r}) - \varphi(\mathbf{r}_0)| f_n(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \leq \\ &\leq \max_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0| \leq \Delta} |\varphi(\mathbf{r}) - \varphi(\mathbf{r}_0)| \int_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0| \leq \Delta} f_n(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \end{aligned}$$

де множник $\max_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0| \leq \Delta} |\varphi(\mathbf{r}) - \varphi(\mathbf{r}_0)|$ є як завгодно близьким до нуля, а інтеграл $\int_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0| \leq \Delta} f_n(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$ — як завгодно близьким до одиниці для, відповідно, достатньо малого числа Δ і достатньо великого n .

Зауважимо, що вимоги попередньої теореми не є необхідними для того, щоб послідовність функцій $f_n(\mathbf{r})$ прямувала до $\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)$ при $n \rightarrow \infty$. Пізніше, наприклад, буде показано, що послідовність функцій однієї змінної $f_n(x) = \sin nx / \pi x$ також прямує до функції $\delta(x)$ (див. завдання 4.6.6).

Завдання 4.3.2. Доведіть, що функція $\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)$ є границею інтегровних функцій

$$f_n(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) = \begin{cases} \frac{3n^3}{4\pi a^3}, & |\mathbf{r}-\mathbf{r}_0| \leq \frac{a}{n}, \\ 0, & |\mathbf{r}-\mathbf{r}_0| > \frac{a}{n}. \end{cases}$$

Завдання 4.3.3. Доведіть, що

$$\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{3/2}}{\pi^{3/2}} e^{-|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^2 n}.$$

Завдання 4.3.4. Доведіть для випадку функцій однієї змінної, що

$$\delta(x-x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin^2 n(x-x_0)}{\pi n(x-x_0)^2}.$$

Завершимо обговорення властивостей дельта-функції розглядом узагальнених функцій, що відповідають складеній функції $\delta(h(x))$. Правильна така

Теорема 4.3.3. Нехай функція $h(x)$ неперервно диференційовна на всій осі і задовольняє наступні умови:

а) якщо множина $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ усіх коренів рівняння $h(x) = 0$ нескінченна, то існує таке число $\delta > 0$, що для будь-яких двох коренів x_i і x_j виконується нерівність $|x_i - x_j| > \delta$;

б) $h'(x_j) \neq 0$ в усіх точках x_j .

Тоді

$$\delta(h(x)) = \sum_j \frac{\delta(x - x_j)}{|h'(x_j)|}. \quad (4.10)$$

Доведення. Зазначивши, що послідовність функцій $f_n(x) = \sqrt{n/\pi} e^{-nx^2}$ прямує при $n \rightarrow \infty$ до функції $\delta(x)$, розглянемо послідовність функціоналів

$$F_n(\varphi) = \sqrt{\frac{n}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-nh^2(x)} \varphi(x) dx. \quad (4.11)$$

Уважатимемо спочатку, що рівняння $h(x) = 0$ має лише один корінь x_0 . Оскільки функція $h(x)$ має неперервну похідну і $h'(x_0) \neq 0$, то існує таке число $\Delta > 0$, що $h'(x) \neq 0$ і на відрізку $[x_0 - \Delta, x_0 + \Delta]$. Розіб'ємо інтеграл (4.11) на три по таких інтервалах: $(-\infty, x_0 - \Delta)$, $[x_0 - \Delta, x_0 + \Delta]$ і $(x_0 + \Delta, +\infty)$. Оскільки функція $\varphi(x)$ фінітна, усі інтеграли існують. При цьому існує таке число $\varepsilon > 0$, що скрізь на інтервалах $(-\infty, x_0 - \Delta)$ і $(x_0 + \Delta, +\infty)$, де $\varphi(x) \neq 0$, виконується нерівність $|h(x)| > \varepsilon$. Дійсно, у протилежному разі функція $h(x)$ дорівнювала б нулю ще в деяких, крім x_0 , точках, приналежних або інтервалу $(-\infty, x_0 - \Delta)$, або інтервалу $(x_0 + \Delta, +\infty)$, або обом цим інтервалам, а це суперечить нашому припущенню. Отже,

$$\left| \int_{-\infty}^{x_0 - \Delta} f_n(x) \varphi(x) dx \right| \leq \int_{-\infty}^{x_0 - \Delta} f_n(x) |\varphi(x)| dx \leq \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-n\varepsilon^2} \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)| dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Подібним способом також пересвідчуємося, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x_0 + \Delta}^{\infty} f_n(x) \varphi(x) dx = 0.$$

В інтегралі по відрізку $[x_0 - \Delta, x_0 + \Delta]$ зробимо заміну змінної, поклавши $s = h(x)$. Оскільки $ds = h'(x)dx$, цей інтеграл переписується у вигляді

$$\int_{x_0 - \Delta}^{x_0 + \Delta} f_n(x) \varphi(x) dx = \int_{h(x_0 - \Delta)}^{h(x_0 + \Delta)} \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-ns^2} \varphi(x(s)) \frac{ds}{h'(x(s))}, \quad (4.12)$$

де $x = x(s)$ — функція, обернена до функції $s = h(x)$. Зауважимо, що $x(0) = x_0$.

Якщо $h'(x_0) > 0$, то враховуючи, що $h(x_0) = 0$, маємо: $h(x_0 + \Delta) \equiv b > 0$, $h(x_0 - \Delta) \equiv a < 0$. Роблячи в інтегралі (4.12) заміну змінної $w = \sqrt{ns}$, дістаємо:

$$\int_{x_0 - \Delta}^{x_0 + \Delta} f_n(x) \varphi(x) dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{a\sqrt{n}}^{b\sqrt{n}} e^{-w^2} \varphi(x(w/\sqrt{n})) \frac{dw}{h'(x(w/\sqrt{n}))}.$$

Звідси, з огляду на неперервність функцій φ і h' , маємо:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x_0 - \Delta}^{x_0 + \Delta} f_n(x) \varphi(x) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{a\sqrt{n}}^{b\sqrt{n}} e^{-w^2} \varphi(x(w/\sqrt{n})) \frac{dw}{h'(x(w/\sqrt{n}))} = \\ &= \frac{\varphi(x_0)}{h'(x_0)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{a\sqrt{n}}^{b\sqrt{n}} e^{-w^2} dw = \frac{\varphi(x_0)}{h'(x_0)}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Якщо ж $h'(x_0) < 0$, то $h(x_0 + \Delta) \equiv b < 0$, $h(x_0 - \Delta) \equiv a > 0$, і останній інтеграл у формулі (4.13) прямує до інтеграла $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\infty}^{-\infty} e^{-w^2} dw = -1$. У цьому випадку

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(\varphi) = -\frac{\varphi(x_0)}{h'(x_0)}.$$

Обидва випадки об'єднуються однією формулою:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(\varphi) = \frac{\varphi(x_0)}{|h'(x_0)|}. \quad (4.14)$$

Припустимо тепер, що в інтервал, по якому фактично ведеться інтегрування у формулі (4.11), попадає декілька коренів функції $h(x)$. Тоді внесок у граничне значення функціонала $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(\varphi)$ від малого околу кожного такого кореня x_j дорівнює $\varphi(x_j)/|h'(x_j)|$, тоді як внески від решти інтервалів дорівнюють нулю.

Отже, у загальному випадку

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(\varphi) = \sum_j \frac{\varphi(x_j)}{|h'(x_j)|},$$

тобто справджується формула (4.10).

Завдання 4.3.5. Покажіть, що:

а) $\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x)$;

б) $\delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{2a} \delta(x - a) + \frac{1}{2a} \delta(x + a)$, $a > 0$;

в) $\delta(\sin kx) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{|k|} \delta\left(x - \frac{\pi n}{k}\right)$.

Завдання 4.3.6. Покажіть, що функція Гріна (1.28) є розв'язком задач Коші для однорідних рівнянь теплопровідності і дифузії зі сталими коефіцієнтами у випадках, коли початкові значення температури і густини дорівнюють $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$.

Контрольні питання до підрозділу 4.3

1. У чому полягає різниця між регулярними і сингулярними функціоналами?
2. Чи є неперервним і регулярним функціонал, який кожній основній функції ставить у відповідність її значення в певній точці?
3. Чи можна довільну узагальнену функцію наблизити звичайними локально інтегровними функціями? Про що йдеться, коли кажуть, що послідовність регулярних функціоналів збігається до сингулярного?
4. Як дельта-функції двох і трьох змінних можна виразити через дельта-функцію однієї змінної?
5. Як, за певних умов, що накладаються на функцію $h(x)$, обчислюється функціонал, який відповідає складеній узагальненій функції $\delta(h(x))$?

4.4. ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ УЗАГАЛЬНЕНИХ ФУНКЦІЙ. УЗАГАЛЬНЕНІ РОЗВ'ЯЗКИ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Відомо, що звичайні функції можна здиференціювати не завжди: існують неперервні функції, які не мають похідних у жодній точці своєї області визначення. Прикладом є функції, які задають координати броунівської частинки. На противагу до цього, узагальнені функції мають похідні всіх порядків, які теж є узагальненими функціями.

Якщо неперервна функція $f(\mathbf{r})$ локально інтегровна і має неперервні локально інтегровні перші похідні, то можна, наприклад, побудувати неперервний функціонал

$$\int_{E_3} \frac{\partial f(\mathbf{r})}{\partial x} \varphi(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \equiv F_x(\varphi).$$

Розглядаючи цей інтеграл як повторний та обчислюючи його частинами, дістаємо:

$$F_x(\varphi) = - \int_{E_3} f(\mathbf{r}) \frac{\partial \varphi(\mathbf{r})}{\partial x} d\mathbf{r} = F\left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right).$$

Цей вираз можна покласти в основу означення похідної від узагальненої функції. А саме: якщо узагальненій функції $f(\mathbf{r})$ відповідає деякий функціонал $F(\varphi)$, то частинною похідною за змінною x від функції $f(\mathbf{r})$ називається узагальнена функція, якій відповідає функціонал $F(-\partial\varphi/\partial x)$. Ця похідна позначається символом $\partial f(\mathbf{r})/\partial x$. Зокрема похідна $\partial\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)/\partial x$ — це узагальнена функція, якій відповідає функціонал, що кожній основній функції $\varphi(\mathbf{r})$ ставить у відповідність число $(-\partial\varphi/\partial x)(\mathbf{r}_0)$.

Аналогічним чином означаються частинні похідні $\partial f(\mathbf{r})/\partial y$ і $\partial f(\mathbf{r})/\partial z$.

Завдання 4.4.1. Доведіть таке твердження: нехай узагальнені функції $f_n(\mathbf{r})$ неперервні і мають неперервні локально інтегровні перші частинні похідні. Якщо послідовність $\{f_n(\mathbf{r})\}$ збігається до узагальненої функції $f(\mathbf{r})$, то кожна з послідовностей перших похідних від функцій $f_n(\mathbf{r})$ збігається до відповідної частинної похідної від функції $f(\mathbf{r})$.

З попереднього випливає, що результатом диференціювання узагальненої функції f знову є узагальнена функція. Продовжуючи диференціювати функцію f далі, можна ввести інші частинні похідні:

$\partial^2 f / \partial x^2$, $\partial^2 f / \partial x \partial y$, ..., $\partial^3 f / \partial x^3$, $\partial^3 f / \partial x^2 \partial y$ тощо. Наприклад, похідна $\partial^2 f / \partial x \partial y$ означається як узагальнена функція, якій відповідає функціонал

$$F_{xy}(\varphi) = \int_{E_3} f(\mathbf{r}) \frac{\partial^2 \varphi(\mathbf{r})}{\partial x \partial y} d\mathbf{r} = F\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}\right).$$

Отже, у певному розумінні *всі узагальнені функції нескінченно диференційовні*.

Змішані похідні узагальнених функцій зберігають притаманну звичайним неперервно диференційовним функціям властивість не залежати від порядку диференціювання. Так, зокрема,

$$\begin{aligned} F_{xy}(\varphi) &= \int_{E_3} \frac{\partial^2 f(\mathbf{r})}{\partial x \partial y} \varphi(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \int_{E_3} f(\mathbf{r}) \frac{\partial^2 \varphi(\mathbf{r})}{\partial x \partial y} d\mathbf{r} = \\ &= \int_{E_3} f(\mathbf{r}) \frac{\partial^2 \varphi(\mathbf{r})}{\partial y \partial x} d\mathbf{r} = F\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x}\right) = F_{yx}(\varphi). \end{aligned}$$

Розглянемо декілька прикладів, починаючи з функцій однієї змінної.

Завдання 4.4.2. *Східною функцією Хевісайда* називається вираз

$$\theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ 1 & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

Розглядаючи її як узагальнену функцію однієї змінної, переконайтеся, що

$$\theta'(x) = \delta(x).$$

Завдання 4.4.3. Знайдіть узагальнену першу похідну *знакової функції*

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} -1 & \text{при } x < 0, \\ +1 & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

Відповідь:

$$\text{sign}'(x) = 2\delta(x).$$

Згідно з формулою (1.55), будь-яку основну функцію $\varphi(\mathbf{r})$ у довільній точці $\mathbf{r}_0$ можна подати у вигляді

$$\varphi(\mathbf{r}_0) = -\frac{1}{4\pi} \int_{E_3} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \Delta \varphi(\mathbf{r}) d\mathbf{r}. \quad (4.15)$$

З формули (4.15) і означення узагальнених частинних похідних випливає, що узагальнені другі частинні похідні функції

$$G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}$$

пов'язані рівністю

$$-\Delta G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0). \quad (4.16)$$

Розглянемо таке лінійне диференціальне рівняння порядку n , зі сталими або нескінченно диференційовними коефіцієнтами a_{ijk} , відносно функції u :

$$\sum_{0 \leq i+j+k \leq n} a_{ijk}(\mathbf{r}) \frac{\partial^{i+j+k} u(\mathbf{r})}{\partial x^i \partial y^j \partial z^k} = f(\mathbf{r}), \quad (4.17)$$

де $f(\mathbf{r})$ — узагальнена функція. За допомогою диференціального оператора

$$L\left(\mathbf{r}; \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \equiv \sum_{0 \leq i+j+k \leq n} a_{ijk}(\mathbf{r}) \frac{\partial^{i+j+k}}{\partial x^i \partial y^j \partial z^k}$$

перепишемо його у вигляді

$$L\left(\mathbf{r}; \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) u(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}).$$

Інтегруючи, неважко перевірити, що для основних функцій $\varphi(\mathbf{r})$ і $\psi(\mathbf{r})$ виконується рівність

$$\int_{E_3} \psi(\mathbf{r}) L\left(\mathbf{r}; \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \varphi(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \int_{E_3} \varphi(\mathbf{r}) L\left(\mathbf{r}; \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)^* \psi(\mathbf{r}) d\mathbf{r},$$

де, за означенням,

$$L\left(\mathbf{r}; \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)^* \equiv \sum_{0 \leq i+j+k \leq n} (-1)^{i+j+k} \frac{\partial^{i+j+k}}{\partial x^i \partial y^j \partial z^k} a_{ijk}(\mathbf{r})$$

— спряжений оператор.

Узагальненим розв'язком рівняння (4.17) з узагальненою правою частиною $f(\mathbf{r})$ називається будь-яка узагальнена функція $u(\mathbf{r})$, яка задовольняє це рівняння в узагальненому розумінні, тобто така узагальнена функція $u(\mathbf{r})$, що для будь-якої основної функції $\varphi(\mathbf{r})$ справджується рівність

$$\int_{E_3} u(\mathbf{r}) L\left(\mathbf{r}; \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)^* \varphi(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \int_{E_3} f(\mathbf{r}) \varphi(\mathbf{r}) d\mathbf{r}. \quad (4.18)$$

Із цього означення і співвідношень (4.15), (4.16) випливає, що функція $G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$ — узагальнений розв'язок рівняння Пуассона (4.16). Аналогічно, функція Гріна для рівняння Гельмгольца

$$G_z(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{i\sqrt{z}|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|} \quad (4.19)$$

є узагальненим розв'язком неоднорідного рівняння¹

$$-\Delta u(\mathbf{r}) - zu(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0). \quad (4.20)$$

Завдання 4.4.4. Для значень z , відмінних від невід'ємного числа, знайдіть узагальнений розв'язок рівняння

$$-u''(x) - zu(x) = \delta(x - x_0) \quad (4.21)$$

у класі функцій, інтегровних на всій дійсній осі.

Вказівка. Перевірте, що сформульовані умови задовольняються функцією

$$g_z(x, x_0) = \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dz G_z(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \frac{i}{2\sqrt{z}} e^{i\sqrt{z}|x-x_0|}. \quad (4.22)$$

Поняття узагальненого розв'язку лінійного диференціального рівняння дозволяє узагальнити постановку типових задач математичної фізики. Наприклад, *узагальненою задачею Коші* для рівняння теплопровідності з джерелом $\delta(t)u_0(\mathbf{r})$ називається така задача: відшукати узагальнену функцію $u(\mathbf{r}, t)$, яка дорівнює нулю при $t < 0$ і яка є узагальненим розв'язком рівняння

$$\frac{\partial u(\mathbf{r}, t)}{\partial t} - a^2 \Delta u(\mathbf{r}, t) = \delta(t)u_0(\mathbf{r}), \quad (4.23)$$

де $u_0(\mathbf{r})$ — узагальнена функція, тобто таку узагальнену функцію $u(\mathbf{r}, t)$, що для будь-якої основної функції $\varphi(\mathbf{r}, t)$ змінних $\mathbf{r}$ і t справджується рівність

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\varepsilon}^{\infty} dt \int_{E_3} d\mathbf{r} \left[\frac{\partial \varphi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + a^2 \Delta \varphi(\mathbf{r}, t) \right] u(\mathbf{r}, t) = - \int_{E_3} d\mathbf{r} \varphi(\mathbf{r}, 0) u_0(\mathbf{r}). \quad (4.24)$$

¹ Див. також завдання 1.8.1.

Можна довести, що в класі функцій, обмежених у кожному шарі $0 \leq t \leq T < \infty$, єдиний розв'язок узагальненої задачі Коші (4.23), (4.24) існує, якщо функція $u_0(\mathbf{r})$ обмежена. Зрозуміло, що у випадках, коли обмежений розв'язок задачі (4.23), (4.24) виявляється функцією, двічі неперервно диференційовною за просторовими координатами й неперервно диференційовною за часовою змінною, він задовольняє однорідне рівняння теплопровідності у звичайному розумінні.

Фундаментальним розв'язком рівняння теплопровідності називається розв'язок $G(\mathbf{r}, t)$ узагальненої задачі Коші (4.23), (4.24) для випадку, коли функція $u_0(\mathbf{r})$ дорівнює $\delta(\mathbf{r})$. Зазначимо, що при такій правій частині вигляд рівняння (4.23) не змінюється при будь-якій зміні напрямів осей x , y , z координатної системи. Це означає, що функція $G(\mathbf{r}, t)$ залежить лише від модуля вектора $\mathbf{r}$. Крім того, з урахуванням співвідношення (4.18) і формули (див. завдання 4.3.5)

$$\delta(\lambda x) = \frac{1}{\lambda} \delta(x), \quad \lambda > 0,$$

з рівняння (4.23) у цьому випадку випливає, що при масштабному перетворенні

$$\mathbf{r}' = \lambda \mathbf{r}, \quad t' = \lambda^2 t$$

виконується рівність

$$G(\lambda \mathbf{r}, \lambda^2 t) = \lambda^{-3} G(\mathbf{r}, t).$$

Тому фундаментальний розв'язок при $t > 0$ доцільно шукати у вигляді

$$G(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{t^{3/2}} g(\xi), \quad \xi = \frac{r}{a\sqrt{t}}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (4.25)$$

Уважаючи далі, що на інтервалі $0 < \xi < \infty$ функція $g(\xi)$ двічі диференційовна, з рівняння (4.23) знаходимо, що при $t > 0$ вона задовольняє звичайне диференціальне рівняння

$$-\frac{1}{2} \frac{d}{d\xi} \xi^3 g(\xi) = \frac{d}{d\xi} \xi^2 \frac{dg(\xi)}{d\xi}. \quad (4.26)$$

Завдання 4.4.5. Виведіть рівняння (4.26) і покажіть, що його загальний розв'язок має вигляд

$$g(\xi) = C_1 e^{-\frac{\xi^2}{4}} + C_0 e^{-\frac{\xi^2}{4}} \int_1^{\xi} e^{\frac{s^2}{4}} \frac{ds}{s^2}, \quad (4.27)$$

де C_0, C_1 — довільні сталі.

Вказівка. Зінтегрувавши обидві сторони рівняння (4.26) за ξ , далі користайтесь заміною $g(\xi) = h(\xi)e^{-\xi^2/4}$.

Завдання 4.4.6. Переконайтеся, що функція $g(\xi)$ інтегровна в просторі E_3 лише за умови $C_0 = 0$.

Розв'язання. Оскільки перший доданок у правій частині виразу (4.27) — інтегровна функція, досить показати, що функція

$$\tilde{g}(r) = e^{-\frac{r^2}{4}} \int_1^r e^{\frac{s^2}{4}} \frac{ds}{s^2}$$

неінтегровна. Беручи інтеграл частинами, бачимо, що

$$\tilde{g}(r) = 2e^{-\frac{r^2}{4}} \int_1^r \frac{1}{s^3} ds = \frac{2}{r^3} + 6e^{-\frac{r^2}{4}} \int_1^r \frac{1}{s^4} e^{\frac{s^2}{4}} ds + O\left(e^{-\frac{r^2}{4}}\right), \quad r \rightarrow \infty.$$

Оскільки

$$6e^{-\frac{r^2}{4}} \int_1^r \frac{1}{s^4} e^{\frac{s^2}{4}} ds > 0,$$

робимо висновок, що

$$\tilde{g}(r) > \frac{2}{r^3} + O\left(e^{-\frac{r^2}{4}}\right), \quad r \rightarrow \infty.$$

Для $r > R > 0$

$$\int_{r>R} \frac{1}{r^3} d\mathbf{r} = +\infty,$$

тому функція $\tilde{g}(r)$ справді неінтегровна.

Отже, фундаментальний розв'язок рівняння теплопровідності має вигляд

$$G(\mathbf{r}, t) = \frac{C_1}{t^{3/2}} e^{-\frac{r^2}{4a^2t}} + \frac{C_0}{t^{3/2}} e^{-\frac{r^2}{4a^2t}} \int_1^{\frac{r}{a\sqrt{t}}} e^{\frac{s^2}{4}} \frac{ds}{s^2}. \quad (4.28)$$

Нам залишається знайти значення сталих C_0 і C_1 .

Для фундаментального розв'язку $G(\mathbf{r}, t)$ рівність (4.24) набирає вигляду

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{\varepsilon}^{\infty} dt \int_{E_3} d\mathbf{r} \left[\frac{\partial \varphi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + a^2 \Delta \varphi(\mathbf{r}, t) \right] G(\mathbf{r}, t) = -\varphi(\mathbf{0}, 0). \quad (4.29)$$

Щоб вона виконувалася для довільної основної функції $\varphi(\mathbf{r}, t)$ змінних $\mathbf{r}$ і t , функція $G(\mathbf{r}, t)$ повинна бути принаймні інтегровною в кожному шарі $0 \leq t \leq T < \infty$. Згідно з результатом завдання 4.4.6 це означає, що стала $C_0 = 0$. Далі, інтегруючи частинами, користуючись формулами (4.23), (4.28) і лемою 1.4.1, ліву частину рівності (4.29) можемо звести до

$$\begin{aligned} & -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{E_3} d\mathbf{r} \varphi(\mathbf{r}, \varepsilon) G(\mathbf{r}, \varepsilon) + \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{E_3} dt \int d\mathbf{r} \varphi(\mathbf{r}, t) \left[-\frac{\partial G(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + a^2 \Delta G(\mathbf{r}, t) \right] = \\ & = -\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{C_1}{\varepsilon^{3/2}} \int_{E_3} d\mathbf{r} e^{-\frac{r^2}{4a^2\varepsilon}} \varphi(\mathbf{r}, \varepsilon) = -C_1 (4\pi a^2)^{3/2} \varphi(\mathbf{0}, 0). \end{aligned}$$

Бачимо, що рівність (4.29) виконується, якщо

$$C_1 = \frac{1}{(4\pi a^2)^{3/2}}.$$

Отже,

$$G(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(4\pi a^2 t)^{3/2}} e^{-\frac{r^2}{4a^2 t}}.$$

Контрольні питання до підрозділу 4.4

1. Як означаються частинні похідні узагальненої функції?
2. Чому дорівнюють узагальнені похідні від дельта-функції однієї змінної і функції Хевісайда?
3. Як для лінійних диференціальних операторів означаються спряжені оператори?
4. Що називається узагальненим розв'язком лінійного диференціального рівняння? Зокрема як означаються узагальнені розв'язки рівнянь Пуассона і Гельмгольца?
5. Що називається розв'язком узагальненої задачі Коші для рівняння теплопровідності?

4.5. МЕТОД ФУР'Є

Метод Фур'є, або метод відокремлення змінних, є одним з найбільш універсальних методів дослідження й розв'язування лінійних рівнянь математичної фізики. За його допомогою задачі для рівнянь з частинними похідними можна звести до звичайних диференціальних рівнянь.

Згідно з методом Фур'є спочатку шукають частинні розв'язки у вигляді добутку двох функцій, одна з яких залежить від часової змінної, а друга — від просторових координат. У випадку рівняння теплопровідності такі частинні розв'язки поодиноці відповідають режимам нагрівання або остигання, при яких відношення значень температури в будь-яких двох довільно вибраних точках середовища залишається сталим. У випадку рівняння дифузії вони поодиноці відповідають таким змінам густини домішкових частинок, при яких не залежить від часу відношення значень густини, також взятих у будь-яких двох точках середовища.

Отже, для однорідного рівняння теплопровідності (чи дифузії)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u \quad (4.30)$$

відповідний клас функцій складається з обмежених або інтегровних функцій, які задовольняють це рівняння і мають вигляд

$$u(\mathbf{r}, t) = S(t)\Phi(\mathbf{r}) . \quad (4.31)$$

Підставляючи вираз (4.31) у рівняння (4.30) та ділячи обидві частини так здобутої рівності на цей же вираз, дістаємо:

$$\frac{\left(\frac{dS(t)}{dt} \right)}{S(t)} = \frac{a^2 \Delta \Phi(\mathbf{r})}{\Phi(\mathbf{r})} . \quad (4.32)$$

Ліва частина рівняння (4.32), яка залежить від часової змінної t , та права, яка залежить від просторових координат $\mathbf{r}$, дорівнюють одна одній при довільних значеннях t і $\mathbf{r}$ лише за умови, що вони обидві дорівнюють одній і тій самій сталій. Якщо позначити її через $-\lambda$, то рівняння (4.32) зводиться до таких двох рівнянь:

$$S'(t) = -\lambda S(t) , \quad (4.33)$$

$$a^2 \Delta \Phi(\mathbf{r}) + \lambda \Phi(\mathbf{r}) = 0 . \quad (4.34)$$

Загальний розв'язок рівняння (4.33) дорівнює

$$S(t) = Ce^{-\lambda t}, \quad (4.35)$$

з незалежним від t коефіцієнтом C , що дає

$$u(\mathbf{r}, t) = e^{-\lambda t} \Phi(\mathbf{r}), \quad (4.36)$$

де функція $\Phi(\mathbf{r})$ підкоряється рівнянню (4.34).

Функції виду (4.36) є дійсними і рівномірно обмеженими відносно змінної t , а отже, за виключенням спеціальних випадків, відповідають фізичному змісту реальних задач лише при $\lambda > 0$.

Позначивши $k^2 \equiv \lambda/a^2$, перепишемо рівняння (4.34) у вигляді

$$\Delta \Phi(\mathbf{r}) + k^2 \Phi(\mathbf{r}) = 0. \quad (4.37)$$

Рівняння (4.37), з додатним параметром k^2 , — це найбільш поширений випадок рівняння Гельмгольца. Розглянемо множину його розв'язків, які залежать від змінних x , y , z лише через комбінацію $n_x x + n_y y + n_z z$, де $n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$. Вони мають вигляд

$$\Phi(x, y, z) = \varphi(n_x x + n_y y + n_z z). \quad (4.38)$$

Кожна функція цього типу набуває того ж самого значення в усіх точках довільної площини, нормаль до якої паралельна вектору $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$.

Завдання 4.5.1. Переконайтеся, що серед функцій (4.38) лише ті задовольняють рівняння Гельмгольца (4.37), які мають вигляд

$$\Phi(x, y, z) = A \sin k(\mathbf{n}\mathbf{r}) + B \cos k(\mathbf{n}\mathbf{r}), \quad (\mathbf{n}\mathbf{r}) = n_x x + n_y y + n_z z,$$

або, що рівносильно,

$$\Phi(x, y, z) = C_+ e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r})} + C_- e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{r})},$$

де A , B , C_+ і C_- — сталі, $\mathbf{k} = (kn_x, kn_y, kn_z)$.

Дужки (...), що позначають скалярний добуток двох векторів, надалі опускаються.

Частинні розв'язки рівняння Гельмгольца, що мають вигляд $e^{\pm i\mathbf{k}\mathbf{r}}$, $\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = k^2$, називаються *плоскими хвилями*. Розв'язки рівняння (4.37) у вигляді плоских хвиль існують і тоді, коли параметр k^2 є від'ємним або навіть комплексним. Однак у цих випадках компоненти вектора $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$ у показниках експоненти є уявними або комплексними величинами, і функції $e^{\pm i\mathbf{k}\mathbf{r}}$ не є обмеженими в усьому просторі E_3 .

Завдання 4.5.2. Переконайтеся, що функції $e^{\pm i\mathbf{k}\mathbf{r}}$, де $\mathbf{n}$ — одиничний вектор, а k — комплексне число, є обмеженими в усьому просторі E_3 лише при $k^2 \geq 0$.

Завдання 4.5.3. Знайдіть загальний розв'язок рівняння Гельмгольца в класі двічі неперервно диференційовних сферично симетричних функцій.

Розв'язання. Шуканий загальний розв'язок має вигляд

$$\Phi(r) = A \frac{\sin kr}{r}. \quad (4.39)$$

Щоб його дістати, перейдемо до сферичних координат і врахуємо, що для сферично симетричних функцій

$$\Delta\Phi(r) = \Phi''(r) + \frac{2}{r}\Phi'(r).$$

Тоді рівняння (4.37) набирає вигляду

$$\Phi''(r) + \frac{2}{r}\Phi'(r) + k^2\Phi(r) = 0.$$

Зробивши підстановку

$$\Phi(r) = \frac{\chi(r)}{r}, \quad (4.40)$$

для функції $\chi(r)$ дістаємо рівняння

$$\chi''(r) + k^2\chi(r) = 0,$$

загальний розв'язок якого

$$\chi(r) = A\sin kr + B\cos kr. \quad (4.41)$$

Для того щоб функція (4.40), де функція $\chi(r)$ дається формулою (4.41), була диференційовною в точці $r = 0$, необхідно, щоб $B = 0$.

Зауваження 4.5.1. Якщо обмежена двічі неперервно диференційовна функція $\Phi(\mathbf{r})$ задовольняє рівняння Гельмгольца (4.37), то розв'язок рівняння (4.30) при початковій умові $u(\mathbf{r}, 0) = \Phi(\mathbf{r})$ має вигляд $u(\mathbf{r}, t) = e^{-a^2 k^2 t} \Phi(\mathbf{r})$. Це твердження безпосередньо впливає з єдиності розв'язку задачі Коші для рівняння (4.30).

Завдання 4.5.4. Покажіть, що розв'язок рівняння (4.30) при початковій умові

$$u(\mathbf{r}, 0) = \sum_{l=1}^N a_l e^{i\mathbf{k}_l \cdot \mathbf{r}}, \quad (4.42)$$

де $\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_N$ — будь-які вектори з дійсними компонентами, а $a_1, \dots, a_N$ — довільні числа, має вигляд

$$u(\mathbf{r}, t) = \sum_{l=1}^N a_l e^{i\mathbf{k}_l \cdot \mathbf{r} - a^2 k_l^2 t}, \quad k_l^2 = \mathbf{k}_l \cdot \mathbf{k}_l = |\mathbf{k}_l|^2. \quad (4.43)$$

Вказівка. Скористайтесь *принципом суперпозиції*: будь-яка лінійна комбінація $u(\mathbf{r}, t) = \sum_{l=1}^N a_l u_l(\mathbf{r}, t)$ частинних розв'язків лінійного однорідного рівняння, що задовольняють умови $u_l(\mathbf{r}, 0) = u_l^0(\mathbf{r})$, де $u_l^0(\mathbf{r})$ — задані функції відповідного класу, є розв'язком цього рівняння при початковій умові

$$u(\mathbf{r}, 0) = \sum_{l=1}^N a_l u_l^0(\mathbf{r}). \quad (4.44)$$

Подальше використання принципу суперпозиції веде до такого узагальнення результату завдання 4.5.4:

Теорема 4.5.1. Нехай функцію $u_0(\mathbf{r})$ можна подати у вигляді інтеграла

$$u_0(\mathbf{r}) = \int_{E_3} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \hat{u}_0(\mathbf{k}) d\mathbf{k}, \quad (4.45)$$

де $\hat{u}_0(\mathbf{k})$ — деяка інтегровна функція. Тоді розв'язок задачі Коші для рівняння (4.30) при $t > 0$ і початковій умові $u(\mathbf{r}, 0) = u_0(\mathbf{r})$ дорівнює

$$u(\mathbf{r}, t) = \int_{E_3} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - a^2 k^2 t} \hat{u}_0(\mathbf{k}) d\mathbf{k}. \quad (4.46)$$

Доведення цієї теореми наводиться в підрозділі 4.9.

Виникає питання, наскільки широким є клас функцій, що допускають зображення (4.45). З'ясуємо відповідь на нього далі, почавши з випадку функцій однієї змінної.

Контрольні питання до підрозділу 4.5

1. Частинні розв'язки якого вигляду використовуються, коли застосовують метод відокремлення змінних?
2. Який фізичний зміст мають частинні розв'язки рівняння теплопровідності у вигляді добутку двох функцій, одна з яких залежить лише

від часу, а друга — лише від координат? Який вигляд має функція, що описує часову залежність? Якому рівнянню підкоряється координатно-залежний множник?

3. Які частинні розв'язки рівняння Гельмгольца називаються плоскими хвилями? Чому?
4. Чому дорівнює розв'язок задачі Коші для рівняння теплопровідності, якщо початкова температура має вигляд суперпозиції плоских хвиль?

4.6. ІНТЕГРАЛЬНЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУР'Є

За означенням, перетворенням Фур'є або Фур'є-образом довільної інтегровної функції $f(x)$, $-\infty < x < +\infty$, називається функція $\hat{f}(k)$, яка визначена на всій осі $-\infty < k < +\infty$ і задається інтегралом

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} f(x) dx. \quad (4.47)$$

З означення (4.47) випливає, що Фур'є-образ будь-якої інтегровної функції — це функція, рівномірно обмежена на всій осі. Справді, для $k \in (-\infty, \infty)$ правильна така оцінка:

$$|\hat{f}(k)| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} f(x) dx \right| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\| < \infty,$$

де символ $\|f\|$, як і раніше, позначає норму функції $f(x)$, але тепер як елемента простору $L_1(E_1)$:

$$\|f\| = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx.$$

Крім того, Фур'є-образ будь-якої інтегровної функції є функцією, яка неперервна на всій осі. Щоб це довести, візьмемо довільне число k_0 , $-\infty < k_0 < \infty$, надамо йому малого приросту k' та розглянемо різницю $\hat{f}(k_0 + k') - \hat{f}(k_0)$. Маємо:

$$\begin{aligned} |\hat{f}(k_0 + k') - \hat{f}(k_0)| &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| \int_{-\infty}^{\infty} (e^{-ik'x} - 1) e^{-ik_0x} f(x) dx \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |e^{-ik'x} - 1| |f(x)| dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \sin \frac{k'x}{2} \right| |f(x)| dx. \end{aligned}$$

Для всіх значень x

$$\left| \sin \frac{k'x}{2} \right| \leq 1, \quad \lim_{k' \rightarrow 0} \left| \sin \frac{k'x}{2} \right| = 0.$$

Тому, у силу теореми 4.2.2,

$$\lim_{k' \rightarrow 0} |\hat{f}(k_0 + k') - \hat{f}(k_0)| = 0.$$

Операція, яка кожній інтегровній функції ставить у відповідність її Фур'є-образ, є лінійною: якщо $f_1(x)$ і $f_2(x)$ — довільні інтегровні функції, а α і β — довільні дійсні або комплексні числа, то перетворення Фур'є лінійної комбінації $g(x) = \alpha f_1(x) + \beta f_2(x)$ дається формулою

$$\hat{g}(k) = \alpha \hat{f}_1(k) + \beta \hat{f}_2(k). \quad (4.48)$$

Співвідношення (4.48) безпосередньо впливає з означення перетворення Фур'є і властивостей визначеного інтеграла.

Завдання 4.6.1. Знайдіть Фур'є-образ *характеристичної функції* інтервалу (a, b) , $-\infty < a, b < \infty$, означеної виразом

$$\chi_{(a,b)}(x) = \begin{cases} 1, & a < x < b, \\ 0, & x < a, \\ 0, & x > b. \end{cases}$$

Відповідь:

$$\hat{\chi}_{(a,b)}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-ika} - e^{-ikb}}{ik}.$$

Завдання 4.6.2. Доведіть, що Фур'є-образ будь-якої *скінченнозначної (східчастої) функції*

$$u_n(x) = \sum_{s=1}^n c_s \chi_{(a_s, b_s)}(x),$$

де $1 \leq n < \infty$, $\min_s a_s > -\infty$, $\max_s b_s < +\infty$, а c_s — довільні дійсні або комплексні числа, має таку властивість:

$$\lim_{k \rightarrow \pm\infty} \hat{u}_n(k) = 0.$$

Оскільки для будь-якої інтегровної функції $f(x)$ існує така послідовність скінченнозначних функцій $u_n(x)$, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - u_n\| = 0,$$

то з результату завдання 4.6.2 випливає

Теорема 4.6.1 (Рімана — Лебега). Для будь-якої інтегровної функції $f(x)$

$$\lim_{k \rightarrow \pm\infty} \hat{f}(k) = 0.$$

Згідно з теоремою Рімана — Лебега, Фур'є-образ будь-якої інтегровної функції $f(x)$ спадає до нуля, коли параметр k прямує до $\pm\infty$. Однак жодних універсальних оцінок щодо швидкості спадання Фур'є-образу інтегровної функції не існує. Якщо ж функція $f(x)$ задовольняє певні додаткові умови, то такі оцінки можна навести.

Припустимо, що функцію $f(x)$ можна подати у вигляді

$$f(x) = f(0) + \int_0^x h(s) ds, \quad (4.49)$$

де $h(x)$ — функція, інтегровна на будь-якому скінченному інтервалі. Функція $f(x)$, яка дозволяє таке зображення, називається *абсолютно неперервною*.

Абсолютно неперервна функція є неперервною у звичайному розумінні. Більше того, вона диференційовна майже в кожній точці дійсної осі, і при цьому, як це випливає з виразу (4.49), майже всюди $f'(x) = h(x)$. Можна сказати, що та й тільки та функція є абсолютно неперервною, яка майже всюди має локально інтегровну першу похідну і яку (з точністю до сталого доданка) можна відновити за допомогою її похідної.

Теорема 4.6.2. Нехай інтегровна функція $f(x)$ є абсолютно неперервною і має інтегровну на всій осі першу похідну $f'(x)$. Тоді Фур'є-образ $\hat{f}'(k)$ похідної $f'(x)$ і Фур'є-образ $\hat{f}(k)$ функції $f(x)$ пов'язані співвідношенням

$$\hat{f}'(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} f'(x) dx = ik \hat{f}(k). \quad (4.50)$$

Доведення. У кожній точці x дійсної осі функцію $f(x)$ можна подати у вигляді

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(s) ds.$$

Оскільки похідна $f'(x)$ — інтегровна функція, існують скінченні границі

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= f(0) + \int_0^{+\infty} f'(s) ds \equiv \alpha, \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= f(0) - \int_0^{-\infty} f'(s) ds \equiv \beta.\end{aligned}\tag{4.51}$$

Перша з формул (4.51) означає, що для довільно малого числа $\delta > 0$ існує відповідне скінченне число x_0 , починаючи з якого нерівність $|f(x) - \alpha| < \delta$ виконується для всіх $x > x_0$. Зміст другої формули аналогічний.

Покажемо тепер, що обидві границі (4.51) дорівнюють нулю. Справді, інтегровність $f(x)$ означає, що

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < \infty,$$

звідки випливає, що

$$\int_0^{+\infty} |f(x)| dx = \int_0^{x_0} |f(x)| dx + \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{x_0}^N |f(x)| dx < \infty,$$

тобто

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{x_0}^N |f(x)| dx < \infty.$$

Беручи $\delta < |\alpha|/2$, для належного x_0 маємо:

$$|f(x)| = |\alpha + (f(x) - \alpha)| \geq |\alpha| - |f(x) - \alpha| \geq \frac{|\alpha|}{2}.$$

Отже, при $N \rightarrow \infty$ і для цього x_0 дістаємо:

$$\int_{x_0}^N |f(x)| dx \geq \frac{|\alpha|}{2} (N - x_0).$$

Як щойно було зазначено, цей інтеграл залишається обмеженим зверху при $N \rightarrow \infty$, що можливо лише при $\alpha = 0$. Аналогічно доведемо, що $\beta = 0$.

Беручи ці результати до уваги та інтегруючи частинами, дістаємо:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} f'(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ikx} f(x) \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{ik}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} f(x) dx = ik \hat{f}(k).$$

Зауваження 4.6.1. Слід підкреслити, що умова $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$ не гарантує ані виконання співвідношень $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$, ані навіть обмеженість $f(x)$. Наприклад, функція

$$f(x) = \begin{cases} |n|, & n - \frac{1}{4|n|^3} \leq x \leq n + \frac{1}{4|n|^3}, \quad |n| = 1, 2, \dots, \\ 0 & \text{для інших значень } x, \end{cases}$$

інтегровна,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

але при цьому необмежена на інтервалах $(-\infty, -N)$, (N, ∞) , де $N > 0$ — будь яке число.

Наслідок 4.6.1. Якщо функція $f(x)$ інтегровна, абсолютно неперервна і має інтегровну першу похідну $f'(x)$, то

$$\hat{f}(k) \underset{k \rightarrow \pm\infty}{=} o\left(\frac{1}{|k|}\right). \quad (4.52)$$

Доведення. Справді, з формули (4.50) бачимо, що $\hat{f}(k) = \hat{f}'(k)/ik$. Застосовуючи до Фур'є-образу похідної $f'(x)$ теорему Рімана — Лебега, приходимо до оцінки (4.52).

Теорему 4.6.2 і наслідок 4.6.1 можна узагальнити таким чином:

Теорема 4.6.3. Якщо інтегровна функція $f(x)$ є абсолютно неперервною, має абсолютно неперервні та інтегровні похідні до порядку $(n-1)$ включно та інтегровну n -ну похідну, то Фур'є-образ $\hat{f}^{(n)}(k)$ n -ї похідної $f^{(n)}(x)$ і Фур'є-образ $\hat{f}(k)$ функції $f(x)$ пов'язані співвідношенням

$$\hat{f}^{(n)}(k) = (ik)^n \hat{f}(k). \quad (4.53)$$

Наслідок 4.6.2. Якщо функція $f(x)$ задовольняє умови теореми 4.6.3, то

$$\hat{f}(k) \underset{k \rightarrow \pm\infty}{=} o\left(\frac{1}{|k|^n}\right). \quad (4.54)$$

Завдання 4.6.3. Доведіть теорему 4.6.3 і наслідок 4.6.2.

Вказівка. Скористайтесь методом математичної індукції.

Завдання 4.6.4. Доведіть таке твердження: нехай функція $f(x)$ і функція $x^n f(x)$, $n \geq 1$, інтегровні. Тоді Фур'є-образ $\hat{f}(k)$ має n неперервних похідних, і при цьому

$$\frac{d^n}{dk^n} \hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} (-ix)^n f(x) dx. \quad (4.55)$$

Іншими словами, Фур'є-образ функції $x^n f(x)$ дорівнює $i^n \hat{f}^{(n)}(k)$.

З наслідку 4.6.2 випливає, що чим більше інтегровних похідних має функція $f(x)$, тим швидше її Фур'є-образ спадає за модулем при $k \rightarrow \pm\infty$. З другого боку, з формули (4.55) видно, що чим швидше спадає функція $f(x)$, тим гладшим є її Фур'є-образ. Можна стверджувати: якщо абсолютно неперервна функція має в кожній точці дійсної осі інтегровні неперервні похідні будь-якого порядку і залишається інтегровою після множення на будь-який натуральний степінь n аргументу, то і її Фур'є-образ має такі самі властивості.

Покажемо прикладом у цьому відношенні є функція $g(x) = e^{-\alpha x^2}$, $\alpha > 0$, Фур'є-образ якої

$$\hat{g}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} e^{-\frac{k^2}{4\alpha}}. \quad (4.56)$$

Щоб переконатися у правильності виразу (4.56), зазначимо, що при будь-якому комплексному $z = p + iq$ функція $e^{zx} g(x)$ інтегровна і

$$\int_{-\infty}^{\infty} |e^{zx} g(x)| dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{px} e^{-\alpha x^2} dx = e^{\frac{p^2}{4\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha \left(x + \frac{p}{2\alpha}\right)^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{\frac{p^2}{4\alpha}}.$$

Оскільки експонента e^{zx} є для кожного дійсного числа x однозначною аналітичною функцією комплексної змінної z в усій відкритій комплексній площині, то внаслідок інтегровності функції $e^{zx} e^{-\alpha x^2}$ за x такою ж є і функція

$$\tilde{g}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{zx} e^{-\alpha x^2} dx,$$

яка на дійсній осі збігається з аналітичною функцією $e^{\frac{z^2}{4\alpha}} / \sqrt{2\alpha}$. Оскільки аналітичне продовження функції з дійсної осі на комплекс-

сну площину єдине, можемо стверджувати, що для будь-якого комплексного z виконується рівність

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{zx} e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} e^{\frac{z^2}{4\alpha}}. \quad (4.57)$$

При $z = -ik$ вона зводиться до формули (4.56).

Завдання 4.6.5. Застосувавши правило інтегрування частинами до інтеграла (4.56) і скориставшись наслідками 4.6.1 і 4.6.2, покажіть, що Фур'є-образ $\hat{g}(k)$ функції $g(x) = e^{-\alpha x^2}$ можна знайти як розв'язок диференціального рівняння

$$2\alpha \hat{g}''(k) + k \hat{g}'(k) + \hat{g}(k) = 0,$$

який задовольняє умови

$$\lim_{k \rightarrow \pm\infty} k \hat{g}(k) = 0, \quad \lim_{k \rightarrow \pm\infty} \hat{g}'(k) = 0, \quad \hat{g}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}.$$

Вказівка. Виписане рівняння має перший інтеграл $2\alpha \hat{g}'(k) + k \hat{g}(k) = C = 0$.

Важливе значення має той факт, що при перетворенні Фур'є, у відповідності з теоремами 4.6.2 і 4.6.3, операція диференціювання функції зводиться до операції множення Фур'є-образу цієї функції на ik . Зокрема лінійні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами переходять у лінійні алгебраїчні рівняння.

Розглянемо, наприклад, рівняння

$$a_0 y^{(n)}(x) + a_1 y^{(n-1)}(x) + \dots + a_{n-1} y'(x) + a_n y(x) = g(x), \quad (4.58)$$

де $g(x)$ — інтегровна функція, $a_0, \dots, a_n$ — сталі.

Якщо функція $y(x)$ відшукується в класі функцій, що є неперервними, мають абсолютно неперервні похідні до порядку $(n-1)$ включно та є інтегровними разом зі своїми похідними до порядку n включно, то Фур'є-образ функції $y(x)$ задовольняє (див. теореми 4.6.2 і 4.6.3, формули (4.50) і (4.53)) рівняння

$$L(ik) \hat{y}(k) = \hat{g}(k),$$

де

$$L(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n.$$

Звідси

$$\hat{y}(k) = \frac{\hat{g}(k)}{L(ik)}. \quad (4.59)$$

Якщо многочлен $L(z)$ має нулі на уявній осі, то розв'язок із зазначеними властивостями може існувати лише за умови, що $\hat{g}(k)$ дорівнює нулю при всіх тих k , що відповідають нулям функції $L(ik)$.

Справді, як Фур'є-образ інтегровної функції, $\hat{y}(k)$ є неперервною функцією при всіх k . Права ж частина формули (4.59) неперервна лише тоді, коли многочлен $L(ik)$ не має нулів на дійсній осі, або ж коли нулі знаменника у формулі (4.59) компенсуються нулями чисельника. При виконанні цих умов можна сподіватися, що права частина формули (4.59) справді буде Фур'є-образом інтегровної функції, яка має n інтегровних похідних.

Щоб відновити цю функцію і показати, що вона єдина, треба пересвідчитися, що будь-яка інтегровна функція однозначно визначається за її Фур'є-образом, а також відшукати *формулу обернення*.

Теорема 4.6.4. Якщо $\hat{f}(k)$ — Фур'є-образ інтегровної функції $f(x)$, то для всіх точок неперервності x функції $f(x)$ справджується співвідношення

$$f(x) = \lim_{\tau \downarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} e^{-\tau k^2} \hat{f}(k) dk. \quad (4.60)$$

Більше того, якщо Фур'є-образ $\hat{f}(k)$ є інтегровою функцією, то функція $f(x)$ неперервна, і для всіх точок x

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \hat{f}(k) dk. \quad (4.61)$$

Формула (4.61) і її точніший варіант (4.60) — шукані формули обернення.

Доведення. Доведення формули (4.60), а тим самим і (4.61), почнемо з уже знайденого співвідношення

$$f(x) = \lim_{\tau \downarrow 0} \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-x')^2}{4\tau}} f(x') dx', \quad (4.62)$$

правильного в усіх точках неперервності інтегровної функції $f(x)$.

Далі зазначимо, що згідно з формулою (4.57)

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} e^{-\frac{x^2}{4\tau}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} e^{-\tau k^2} dk. \quad (4.63)$$

Підставивши вираз (4.63) у формулу (4.62) і змінюючи порядок інтегрування¹, для точок неперервності функції $f(x)$ маємо:

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{\tau \downarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-x')} e^{-\tau k^2} dk \right) f(x') dx' = \\ &= \lim_{\tau \downarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau k^2} e^{ikx} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx'} f(x') dx' \right) dk = \\ &= \lim_{\tau \downarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau k^2} e^{ikx} \hat{f}(k) dk. \end{aligned}$$

Завдання 4.6.6. Доведіть, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin nx}{\pi x} = \delta(x),$$

де $\delta(x)$ — дельта-функція Дірака.

Розв'язання. Згідно з формулою обернення (4.61), для довільної основної функції $\phi(x)$ маємо:

$$\begin{aligned} \phi(0) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\phi}(k) dk = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-n}^n \hat{\phi}(k) dk = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-n}^n \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} \phi(x) dx \right) dk = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-n}^n e^{-ikx} dk \right) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin nx}{\pi x} \phi(x) dx. \end{aligned}$$

Завдання 4.6.7. Знайдіть Фур'є-образ функції

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{|x|}{2T}, & |x| < 2T, \quad T > 0, \\ 0, & |x| > 2T, \end{cases}$$

і перевірте, що

$$\frac{1}{\pi} \frac{\sin^2 Tx}{Tx^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-2T}^{2T} \left(1 - \frac{|k|}{2T} \right) e^{ikx} dk.$$

¹ Така зміна можлива на підставі теореми Фубіні, яка розглядається в наступному підрозділі.

Завдання 4.6.8. Знайдіть Фур'є образ функції

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\alpha x}, & x > 0, \alpha > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Відокремивши дійсну та уявну частини $\hat{f}(k)$, переконайтеся, що

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \cos kx dx = \frac{\alpha}{\alpha^2 + k^2}, \quad \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} \sin kx dx = \frac{k}{\alpha^2 + k^2}. \quad (4.64)$$

Завдання 4.6.9. Доведіть, що

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin px}{x} dx = \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} p.$$

Вказівка. Зінтегруйте першу з рівностей (4.64) за змінною k від нуля до p , після чого спрямуйте α до нуля.

Завдання 4.6.10. Доведіть, що при $k > 0$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin kx}{x} e^{ipx} dx = \begin{cases} \theta(k - |p|), & k \neq |p|, \\ \frac{1}{2}, & k = |p|. \end{cases}$$

(Розривний множник Діріхле.)

4.7. ЗГОРТКА ІНТЕГРОВНИХ ФУНКЦІЙ. РІВНІСТЬ ПАРСЕВАЛЯ

Нехай $f(x)$ і $g(x)$ — довільні інтегровні функції. Тоді майже при всіх x існує інтеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)dt, \quad -\infty < x < \infty. \quad (4.65)$$

Функція, значення якої задаються формулою (4.65), називається *згортою функцій* $f(x)$ і $g(x)$. Згортка позначається символом $(f * g)(x)$.

Теорема 4.7.1. Згортка будь-яких інтегровних функцій $f(x)$ і $g(x)$ є інтегровою функцією. При цьому для норми згортки $\|f * g\|$ справджується нерівність

$$\|f * g\| \leq \|f\| \cdot \|g\|. \quad (4.66)$$

Доведення. З означення згортки випливає, що

$$\|f * g\| = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)dt \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} |f(x-t)||g(t)|dt. \quad (4.67)$$

Згадаємо далі, що якщо функція двох змінних $\varphi(x, t)$ — неінтегровна, то може статися так, що один з інтегралів

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, t) dt, \quad \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, t) dx$$

існує, тоді як другий — ні; або обидва інтеграли існують та мають скінченні значення, але ці значення не збігаються.

Завдання 4.7.1. Перевірте, що

$$\int_0^1 dx \int_0^1 dt \frac{x^2 - t^2}{(x^2 + t^2)^2} = \frac{\pi}{4}, \quad \int_0^1 dt \int_0^1 dx \frac{x^2 - t^2}{(x^2 + t^2)^2} = -\frac{\pi}{4}.$$

У теорії інтегрування, однак, доводиться така фундаментальна теорема:

Теорема 4.7.2 (Фубіні). Якщо для функції $\varphi(x, t)$ один з інтегралів

$$\iint_{E_2} |\varphi(x, t)| dx dt, \quad \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x, t)| dt, \quad \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x, t)| dx \quad (4.68)$$

має скінченне значення, або має скінченне значення один з таких самих інтегралів для будь-якої мажорантної функції $\psi(x, t) \geq |\varphi(x, t)|$, то всі інтеграли (4.68) мають скінченні значення, і ці значення збігаються. За наведеної умови

$$\iint_{E_2} \varphi(x, t) dx dt = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, t) dx. \quad (4.69)$$

Повернімося до формули (4.67). Якщо змінити порядок інтегрування в її правій частині, то отримуваний інтеграл буде збіжним:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} |f(x-t)||g(t)| dx &= \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)| \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x-t)| dx \right) dt \stackrel{x'=x-t}{=} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)| dt \int_{-\infty}^{\infty} |f(x')| dx' = \|f\| \cdot \|g\| < \infty. \end{aligned}$$

Бачимо, що функція

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x-t)| |g(t)| dt$$

(яка є мажорантою для $|(f * g)(x)|$) інтегровна, і що справджується нерівність (4.66). Згідно з теоремою Фубіні це означає, що згортка $(f * g)(x)$ інтегровна, а її норма задовольняє нерівність (4.66).

Якщо кожна з функцій $f(x)$ і $g(x)$ дійсна і невід'ємна (або недовідатна), знак нерівності у формулі (4.66) можна опустити.

Завдання 4.7.2. Нехай $f(x)$ і $g(x)$ — інтегровні функції. Користуючись теоремою Фубіні, перевірте, що майже при всіх x

$$(f * g)(x) = (g * f)(x). \quad (4.70)$$

Знайдемо тепер Фур'є-образ згортки інтегровних функцій. З означення перетворення Фур'є і теореми Фубіні випливає, що

$$\begin{aligned} (\widehat{f * g})(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t) g(t) dt = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt g(t) e^{-ikt} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ik(x-t)} f(x-t) \underset{x'=x-t}{=} \\ &\underset{x'=x-t}{=} \sqrt{2\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-ikt} g(t) \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx' e^{-ikx'} f(x') \right) = \sqrt{2\pi} \widehat{f}(k) \widehat{g}(k). \end{aligned}$$

Отже, з точністю до множника $\sqrt{2\pi}$, Фур'є-образ згортки двох інтегровних функцій дорівнює добутку їх Фур'є-образів.

Припустимо, що функції $f(x)$ і $g(x)$ не тільки інтегровні, але й інтегровні з квадратом, тобто

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|^2 dx < \infty.$$

Можна показати, що за цієї додаткової умови згортка функцій $f(x)$ і $g(x)$ є неперервною функцією. Тоді, згідно з формулою обернення для перетворення Фур'є, у кожній точці дійсної осі виконується рівність

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x-t) g(t) dt = \lim_{\tau \downarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} e^{-\tau k^2} (\widehat{f * g})(k) dk =$$

$$= \lim_{\tau \downarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} e^{-\tau k^2} \hat{f}(k) \hat{g}(k) dk .$$

Зокрема при $x=0$ маємо:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(-t)g(t)dt = \lim_{\tau \downarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau k^2} \hat{f}(k) \hat{g}(k) dk .$$

Замінімо функцію $f(x)$ у цій формулі *ермітово-спряженою* функцією $f_*(x) = \overline{f(-x)}$. Оскільки

$$\hat{f}_*(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} \overline{f(-x)} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x'=-x}^{\infty} e^{ikx'} \overline{f(x')} dx = \overline{\hat{f}(k)} ,$$

дістаємо:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_*(-t)g(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(t)}g(t)dt = \lim_{\tau \downarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau k^2} \overline{\hat{f}(k)} \hat{g}(k) dk . \quad (4.71)$$

Зокрема, якщо $g(x) = f(x)$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \lim_{\tau \downarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau k^2} |\hat{f}(k)|^2 dk . \quad (4.72)$$

Підінтегральний вираз у правій частині формули (4.72) монотонно зростає, коли параметр τ прямує до нуля. Тому під знаком інтеграла можна перейти до границі. Дістаємо:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2 dk . \quad (4.73)$$

Це співвідношення називається *рівністю Парсеваля* (або *Парсеваля — Планшереля*).

З рівності (4.73) випливає, що Фур'є-образ від інтегрованої та інтегрованої з квадратом функції є інтегрованою з квадратом функцією. Тому для двох таких функцій $\overline{f(x)}$ і $g(x)$ добуток їх Фур'є-образів $\overline{\hat{f}(k)} \hat{g}(k)$ виявляється, як показує нерівність Коші — Буняковського — Шварца

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\hat{f}(k)} \hat{g}(k) dk \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)| |\hat{g}(k)| dk \leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2 dk \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{g}(k)|^2 dk \right)^{\frac{1}{2}} ,$$

інтегрованою функцією. Виконуючи граничний перехід у формулі (4.71), приходимо до такого узагальнення рівності Парсеваля:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(t)} g(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\hat{f}(k)} \hat{g}(k) dk . \quad (4.74)$$

Рівності (4.73) і (4.74) відіграють важливу роль, зокрема у квантовій механіці, теорії електромагнетизму, статистичній фізиці тощо.

При доведенні рівностей (4.73) і (4.74) ми вважали обидві функції $f(x)$ і $g(x)$ інтегровними та інтегровними з квадратом. Інтегровність цих функцій була необхідною для того, щоб існували їх Фур'є-образи. У загальному випадку можна довести, що навіть у тому разі, коли функції $f(x)$ і $g(x)$ є лише інтегровними з квадратом, їх Фур'є-образи існують, у певному розумінні, майже при всіх значеннях k , і що ці Фур'є-образи є інтегровними з квадратом функціями. При цьому й далі виконуються рівності (4.73) і (4.74).

Завдання 4.7.3. Доведіть, що

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 ak}{k^2} dk = \pi |a| .$$

Вказівка. Покажіть, що функція $\sin|a|k/k$ є Фур'є-образом функції

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{\pi}{2}}, & |x| < |a|, \\ 0, & |x| > |a|, \end{cases}$$

а потім скористайтесь рівністю Парсеваля (4.73).

Завдання 4.7.4. Запишіть рівність Парсеваля (4.73) для функції

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{|x|}{2}, & |x| < 2, \\ 0, & |x| > 2, \end{cases}$$

та її Фур'є-образу і покажіть, що

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^4 k}{k^4} dk = \frac{2\pi}{3} .$$

Завдання 4.7.5. Обчисліть інтеграли:

$$I_1(a, b) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin ka}{k^2 + b^2} \frac{dk}{k} = \frac{\pi}{b^2} (1 - e^{-ab}) ,$$

$$I_2(a, b) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ka}{k^2 + b^2} dk = \frac{\pi}{b} e^{-ab},$$

де a, b — додатні числа.

Вказівка. Достатньо обчислити інтеграл $I_1(a, b)$, оскільки $I_2(a, b) = \partial I_1(a, b) / \partial a$. Щоб обчислити $I_1(a, b)$, знайдіть Фур'є-образ характеристичної функції $\chi_{[-a, a]}(x)$ відрізка $[-a, a]$ і Фур'є-образ функції $e^{-b|x|}$, а потім скористайтеся рівністю Парсеваля (4.74).

Завдання 4.7.6. Знайдіть розв'язок рівняння

$$-\frac{d^2 y}{dx^2} + \gamma^2 y = C e^{-b|x|}, \quad \gamma, b > 0,$$

у класі двічі неперервно диференційовних функцій, що спадають до нуля при $x \rightarrow \pm\infty$.

Вказівка. Застосувавши перетворення Фур'є до обох частин рівняння, зведіть його до алгебраїчного рівняння відносно Фур'є-образу шуканої функції, знайдіть цей Фур'є-образ, а потім скористайтеся формулою обернення.

Завдання 4.7.7. Уважаючи, що права частина рівняння

$$-\frac{d^2 y}{dx^2} + \gamma^2 y = f(x) \tag{4.75}$$

є довільною інтегровною функцією, знайдіть його розв'язок у класі неперервних функцій, що мають абсолютно неперервні перші похідні і спадають до нуля при $x \rightarrow \pm\infty$. Подайте цей розв'язок у вигляді згортки функції $f(x)$ з деякою функцією $G_{-\gamma^2}(x)$, тобто за допомогою функції Гріна рівняння (4.75).

4.8. ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУР'Є УЗАГАЛЬНЕНИХ ФУНКЦІЙ

Грунтуючись на формулі (4.74), можна означити перетворення Фур'є узагальнених функцій.

Щоб спростити подальший аналіз, розглянемо простір S основних функцій $\varphi(x)$, що (див. підрозділ 4.3) разом з нескінченно диференційовними фінітними функціями простору K включає й нескінченно диференційовні функції, які для будь-яких цілих $n, p \geq 0$ задовольняють умови

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} |x|^n \left| \frac{d^p \varphi(x)}{dx^p} \right| = 0. \quad (4.76)$$

Фур'є-образи таких основних функцій є функціями з того самого класу S . Дійсно (див. підрозділ 4.6), якщо основна функція $\varphi(x)$ абсолютно неперервна і має абсолютно неперервні інтегровні похідні всіх порядків, то для всіх цілих $p \geq 0$ її Фур'є-образ $\hat{\varphi}(k)$ задовольняє умови

$$\lim_{k \rightarrow \pm\infty} |k|^p |\hat{\varphi}(k)| = 0.$$

Якщо ж для інтегрованої функції $\varphi(x)$ функція $x^n \varphi(x)$ залишається інтегрованою для всіх цілих $n > 0$, то її Фур'є-образ $\hat{\varphi}(k)$ має неперервні похідні всіх порядків. Як результат, умови (4.76) для $\varphi(x)$ трансформуються в умови

$$\lim_{k \rightarrow \pm\infty} |k|^p \left| \frac{d^n \hat{\varphi}(k)}{dk^n} \right| = 0$$

для відповідного Фур'є-образу $\hat{\varphi}(k)$.

Запишемо лінійні неперервні функціонали на S у вигляді

$$F(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)} \varphi(x) dx. \quad (4.77)$$

Якщо узагальнена функція $f(x)$, якій відповідає функціонал (4.77), є інтегрованою з квадратом звичайною функцією, то згідно з рівністю (4.74) можна ввести функціонал

$$\hat{F}(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\hat{f}(k)} \hat{\varphi}(k) dk, \quad (4.78)$$

і ці функціонали пов'язані співвідношенням

$$F(\varphi) = \hat{F}(\hat{\varphi}), \quad (4.79)$$

тобто значення функціонала $\hat{F}$ для Фур'є-образу $\hat{\varphi}$ довільної основної функції з S збігається зі значенням функціонала F для самої функції φ . Формулу (4.79) можна вважати означенням перетворення Фур'є для узагальнених функцій.

Нехай, наприклад, $\hat{f}(k)$ — звичайна обмежена функція, для якої існує таке число $C > 0$, що майже для всіх k справджується нерівність

$$|\hat{f}(k)| < C,$$

або *помірно зростаюча функція*, для якої існують такі числа $C, C_1 > 0$ і натуральне число N , що майже всюди

$$|\hat{f}(k)| < C + C_1 |k|^N.$$

Усі такі функції утворюють лінійний простір відносно звичайних операцій додавання функцій і множення їх на комплексні числа, а добуток помірно зростаючої функції і будь-якої функції з S є інтегровною функцією. Якщо функціонал $\hat{F}$ на множині S допускає зображення (4.78) зі звичайною обмеженою або помірно зростаючою функцією $\hat{f}(k)$, то саме ця функція $\hat{f}(k)$, згідно з формулою (4.79), визначається як Фур'є-образ звичайної або узагальненої функції $f(x)$, яка породжує функціонал (4.77).

Підкреслимо, що зображення функціонала (4.77) на S у вигляді (4.78) з обмеженою або помірно зростаючою функцією $\hat{f}(k)$, якщо воно існує, єдине. Справді, припустимо, що для двох помірно зростаючих функцій $\hat{f}_1(k)$, $\hat{f}_2(k)$ і будь-якої функції $\hat{\varphi} \in S$ справджується рівність

$$\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\hat{f}_1(k)} \hat{\varphi}(k) dk = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\hat{f}_2(k)} \hat{\varphi}(k) dk.$$

Беручи в якості $\hat{\varphi}$ функції

$$\hat{\varphi}(k; x) = e^{-\alpha k^2} e^{-ikx}, \quad -\infty < x < \infty,$$

з фіксованим $\alpha > 0$, можемо стверджувати, що Фур'є-образи інтегровних функцій $\overline{\hat{f}_1(k)} e^{-\alpha k^2}$ і $\overline{\hat{f}_2(k)} e^{-\alpha k^2}$ збігаються, а тому в силу теореми обернення для Фур'є-перетворень інтегровних функцій майже всюди $\hat{f}_1(k) = \hat{f}_2(k)$.

Простими прикладами узагальнених функцій, які допускають зображення (4.78) з обмеженою або помірно зростаючою функцією $\hat{f}(k)$, є дельта-функція $\delta(x)$ і її узагальнені похідні. Нагадаємо, що дельта-функція відповідає функціоналу F_δ , заданому формулою

$$F_\delta(\varphi) = \varphi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \varphi(x) dx,$$

де $\varphi(x)$ — довільна основна функція. Користуючись формулою обернення для інтеграла Фур'є, можемо записати

$$\varphi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{\varphi}(k) dk = \hat{F}_{\delta}(\hat{\varphi}).$$

Функціонали $F_{\delta}(\varphi)$ і $\hat{F}_{\delta}(\hat{\varphi})$ пов'язані співвідношенням (4.79). Тому, за означенням, Фур'є-образ дельта-функції $\delta(x)$ є звичайною функцією, що дорівнює сталій:

$$\hat{\delta}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}. \quad (4.80)$$

Аналогічно, функціонал $F_{\delta'}$, який породжує похідну дельта-функції $\delta'(x)$, можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} F_{\delta'}(\varphi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta'(x) \varphi(x) dx = -\varphi'(0) = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} ik \hat{\varphi}(k) dk = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{ik}{\sqrt{2\pi}} \right) \hat{\varphi}(k) dk = \hat{F}_{\delta'}(\hat{\varphi}), \end{aligned}$$

звідки

$$\hat{\delta'}(k) = \frac{ik}{\sqrt{2\pi}}. \quad (4.81)$$

Так само знаходимо, що

$$\hat{\delta^{(n)}}(k) = \frac{(ik)^n}{\sqrt{2\pi}}. \quad (4.82)$$

Завдання 4.8.1. Знайдіть Фур'є-образи функцій $\delta(x - x_0)$ і $\delta'(x - x_0)$.

Отже, Фур'є-образи узагальнених функцій, які породжуються сингулярними функціоналами, можуть бути звичайними локально інтегровними функціями. Інакше кажучи, Фур'є-образами узагальнених функцій, породжуваних сингулярними функціоналами, можуть бути (не обов'язково) функції, що породжують регулярні функціонали, і навпаки.

Нетривіальним прикладом звичайної функції, узагальнений Фур'є-образ якої породжується сингулярним функціоналом, є функція Хевісайда

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

У цьому випадку регулярний функціонал

$$F_{\theta}(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \theta(x) \varphi(x) dx = \int_0^{\infty} \varphi(x) dx$$

на S є границею при $n \rightarrow \infty$ послідовності регулярних функціоналів

$$F_{\theta_n}(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \theta_n(x) \varphi(x) dx = \int_0^{\infty} e^{-\frac{x}{na}} \varphi(x) dx, \quad a > 0,$$

які породжуються інтегровними в квадраті функціями

$$\theta_n(x) = \begin{cases} e^{-\frac{x}{na}}, & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Оскільки

$$\hat{\theta}_n(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \theta_n(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{na}{1+inak},$$

бачимо, що

$$F_{\theta_n}(\varphi) = \hat{F}_{\theta_n}(\hat{\varphi}) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{na}{1-inak} \hat{\varphi}(k) dk. \quad (4.83)$$

Для будь-якої функції $\varphi \in S$ границя послідовності інтегралів $\hat{F}_{\theta_n}(\hat{\varphi})$, безперечно, існує і дорівнює $F_{\theta}(\varphi)$. Однак знайти явний вигляд функціонала від $\hat{\varphi}(k)$, який виникає в результаті вказаного граничного переходу, простим переходом до границі під знаком інтеграла у формулі (4.83) не вдається, оскільки гранична функція $i\hat{\varphi}(k)/\sqrt{2\pi}k$, узагалі кажучи, неінтегровна. Щоб знайти границю послідовності $\hat{F}_{\theta_n}(\hat{\varphi})$ при $n \rightarrow \infty$, візьмемо деяке число $\varepsilon > 0$ і розіб'ємо кожний з інтегралів (4.83) на суму

$$\hat{F}_{\theta_n}(\hat{\varphi}) = J_{1,n}(\varepsilon) + J_{2,n}(\varepsilon),$$

де

$$J_{1,n}(\varepsilon) = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{na}{1-inak} \hat{\varphi}(k) dk,$$

$$J_{2,n}(\varepsilon) = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{na}{1-inak} \hat{\varphi}(k) dk + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{na}{1-inak} \hat{\varphi}(k) dk .$$

Далі, розбиваючи $J_{1,n}(\varepsilon)$ на суму

$$J_{1,n}(\varepsilon) = J_{1,n}^{(1)}(\varepsilon) + J_{1,n}^{(2)}(\varepsilon) ,$$

$$J_{1,n}^{(1)}(\varepsilon) = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{na}{1-inak} \hat{\varphi}(0) dk ,$$

$$J_{1,n}^{(2)}(\varepsilon) = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{na}{1-inak} [\hat{\varphi}(k) - \hat{\varphi}(0)] dk ,$$

і враховуючи, що

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{na}{1-inak} dk = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{na}{\sqrt{2\pi}} \frac{1+inak}{1+n^2 a^2 k^2} dk = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{arctg}(na\varepsilon) ,$$

знаходимо:

$$J_{1,n}^{(1)} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{arctg}(na\varepsilon) \hat{\varphi}(0) \underset{n \rightarrow \infty}{=} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \hat{\varphi}(0) .$$

Для підінтегрального виразу в $J_{1,n}^{(2)}(\varepsilon)$ справджується оцінка

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| \frac{na}{1-inak} \right| |\hat{\varphi}(k) - \hat{\varphi}(0)| &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| \frac{nak}{1-inak} \right| \left| \frac{\hat{\varphi}(k) - \hat{\varphi}(0)}{k} \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| \frac{1}{k} \int_0^k \hat{\varphi}'(k) dk \right| \leq C(\hat{\varphi}') , \quad C(\hat{\varphi}') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \max_k |\hat{\varphi}'(k)| < \infty . \end{aligned}$$

Тому маємо незалежну від n оцінку

$$|J_{1,n}^{(2)}(\varepsilon)| \leq 2C(\hat{\varphi}') \varepsilon .$$

Отже,

$$J_{1,n} \underset{n \rightarrow \infty}{=} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \hat{\varphi}(0) + O(\varepsilon) .$$

Що стосується послідовності інтегралів, які входять у $J_{2,n}(\varepsilon)$, то за умови $\varepsilon > 0$ вони є збіжними при $n \rightarrow \infty$, а тому відповідні границі можна отримати, здійснивши граничні переходи $n \rightarrow \infty$ під знаками інтегралів.

У результаті дістаємо:

$$\hat{F}_\theta(\hat{\varphi}) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \hat{\varphi}(0) - \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{2\pi} ik} \hat{\varphi}(k) dk - \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi} ik} \hat{\varphi}(k) dk + O(\varepsilon). \quad (4.84)$$

Оскільки ліва частина і перший доданок у правій частині рівності (4.84) не залежать від ε , бачимо, що для будь-якої функції $\hat{\varphi}(k) \in S$ існує скінченна границя

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left[\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{1}{k} \hat{\varphi}(k) dk + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{1}{k} \hat{\varphi}(k) dk \right] = \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{k} \hat{\varphi}(k) dk.$$

Нагадаємо тут, що коли для достатньо малих $\varepsilon > 0$ функція $h(x)$ інтегровна на інтервалах $(a, c - \varepsilon)$ і $(c + \varepsilon, b)$, $a < c < b$, то границя суми

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left[\int_a^{c-\varepsilon} h(x) dx + \int_{c+\varepsilon}^b h(x) dx \right], \quad (4.85)$$

якщо вона існує, у математичному аналізі називається *інтегралом* (по інтервалу (a, b)) у сенсі *головного значення* і позначається символом

$$\mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} h(x) dx.$$

При цьому границі обох доданків у сумі (4.85) можуть окремо не існувати.

Отже, сингулярний функціонал $\hat{F}_\theta(\hat{\varphi})$, який відповідає узагальненому Фур'є-образу $\hat{\theta}(k)$ функції Хевісайда, обчислюється за формулою

$$\hat{F}_\theta(\hat{\varphi}) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\hat{\theta}(k)} \hat{\varphi}(k) dk = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \hat{\varphi}(0) - \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi} ik} \hat{\varphi}(k) dk, \quad (4.86)$$

а $\hat{\theta}(k)$ символічно записують у вигляді

$$\hat{\theta}(k) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \delta(k) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \mathcal{P} \frac{1}{ik}. \quad (4.87)$$

4.9. ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУР'Є ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Почнемо з випадку функцій двох змінних. Нехай $f(x, y)$ — довільна гладка функція, що досить швидко спадає до нуля при $r = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow +\infty$. Розглянемо перетворення Фур'є цієї функції за змінною x при фіксованому значенні другої змінної y . Маємо:

$$\hat{f}(k_x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ik_x x} f(x, y), \quad (4.88)$$

при цьому формула обернення набирає вигляду

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x e^{ik_x x} \hat{f}(k_x, y). \quad (4.89)$$

Розглядаючи k_x як параметр, запишемо тепер перетворення Фур'є функції $\hat{f}(k_x, y)$ за змінною y . Ураховуючи формулу (4.88), дістаємо:

$$\hat{\hat{f}}(k_x, k_y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-ik_y y} \hat{f}(k_x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-i(k_x x + k_y y)} f(x, y). \quad (4.90)$$

Підстановка формули обернення

$$\hat{f}(k_x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk_y e^{ik_y y} \hat{\hat{f}}(k_x, k_y) \quad (4.91)$$

у формулу (4.89) дає:

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x e^{ik_x x} \int_{-\infty}^{\infty} dk_y e^{ik_y y} \hat{\hat{f}}(k_x, k_y). \quad (4.92)$$

Якщо функція $f(x, y)$ досить гладка і швидко спадає на нескінченності, то значення повторних інтегралів (4.90) і (4.92) не залежать від порядку інтегрування. Відповідно, перетворення Фур'є функції двох змінних задається формулою

$$\hat{f}(\mathbf{k}) = \frac{1}{2\pi} \int_{E_2} e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} f(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad (4.93)$$

де $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$, $(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) = k_x x + k_y y$ і $d\mathbf{r} = dx dy$, а формула обернення має (при певних застереженнях) вигляд

$$f(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} \int_{E_2} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \hat{f}(\mathbf{k}) d\mathbf{k}. \quad (4.94)$$

Аналогічно, перетворення Фур'є інтегровної функції $f(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} = (x_1, \dots, x_n)$, n змінних означається формулою

$$\hat{f}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{E_n} e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} f(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad (4.95)$$

де $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n)$, $(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) = k_1 x_1 + k_2 x_2 + \dots + k_n x_n$ і $d\mathbf{r} = dx_1 \dots dx_n$; формула ж обернення набирає (при певних застереженнях) вигляду

$$f(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{E_n} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \hat{f}(\mathbf{k}) d\mathbf{k}. \quad (4.96)$$

Результати і співвідношення, отримані для Фур'є-образів функцій однієї змінної, відповідним чином переносяться на Фур'є-образи функцій n змінних. Так, наприклад, Фур'є-образ $\hat{f}(\mathbf{k})$ довільної інтегровної функції n змінних є обмеженою неперервною функцією, що задовольняє умову

$$\lim_{|\mathbf{k}| \rightarrow \infty} \hat{f}(\mathbf{k}) = 0. \quad (4.97)$$

Співвідношення (4.97) — це багатовимірний варіант теореми Рімана — Лебега.

Розглядаючи інтеграл (4.95) як повторний, для гладких функцій з інтегровними частинними похідними можна дістати формули

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial x_1}(\mathbf{k}) = i k_1 \hat{f}(\mathbf{k}), \dots, \frac{\partial \hat{f}}{\partial x_n}(\mathbf{k}) = i k_n \hat{f}(\mathbf{k}), \quad (4.98)$$

$$\frac{\partial^{s_1+s_2+\dots+s_n} \hat{f}}{\partial x_1^{s_1} \partial x_2^{s_2} \dots \partial x_n^{s_n}}(\mathbf{k}) = i^{s_1+s_2+\dots+s_n} k_1^{s_1} k_2^{s_2} \dots k_n^{s_n} \hat{f}(\mathbf{k}), \quad 0 \leq s_1, s_2, \dots, s_n < \infty. \quad (4.99)$$

Зокрема для Фур'є образу $\Delta f(\mathbf{k})$ n -вимірного лапласіана

$$(\Delta f)(\mathbf{r}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$$

функції $f(\mathbf{r})$ справджується формула

$$(\Delta f)(\mathbf{k}) = -k^2 \hat{f}(\mathbf{k}), \quad k^2 = k_1^2 + k_2^2 + \dots + k_n^2. \quad (4.100)$$

Також виконуються багатовимірний аналог формули для Фур'є-образу згортки

$$(f * g)(\mathbf{r}) = \int_{E_n} f(\mathbf{r} - \mathbf{r}') g(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} dx'_1 \dots dx'_n f(x_1 - x'_1, x_2 - x'_2, \dots, x_n - x'_n) g(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$$

двох функцій $f(\mathbf{r})$ і $g(\mathbf{r})$, а саме

$$(f * g)(\mathbf{k}) = (2\pi)^{n/2} \hat{f}(\mathbf{k}) \hat{g}(\mathbf{k}), \quad (4.101)$$

і багатовимірний варіант формули Парсеваля:

$$\int_{E_n} \overline{\hat{f}(\mathbf{k})} \hat{g}(\mathbf{k}) d\mathbf{k} = \int_{E_n} \overline{f(\mathbf{r})} g(\mathbf{r}) d\mathbf{r}. \quad (4.102)$$

Формули (4.95)–(4.102) відображають найважливіші властивості Фур'є-образів функцій багатьох змінних. За їх допомогою задачі для лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами в необмеженому багатовимірному просторі можна звести до лінійних алгебраїчних рівнянь, або лінійних звичайних диференціальних рівнянь.

Повернімося ще раз до задачі Коші для рівняння теплопровідності (дифузії) в просторі E_3 :

$$\frac{\partial u(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = a^2 \Delta u(\mathbf{r}, t), \quad (4.103)$$

$$u(\mathbf{r}, 0) = u_0(\mathbf{r}).$$

Уважаючи, що функція $u_0(\mathbf{r})$ інтегровна, шукатимемо розв'язок задачі (4.103) при $t > 0$ в класі функцій, неперервних та інтегровних разом зі своїми першими і другими похідними за просторовими координатами та першими похідними за часом. Застосовуючи перетворення Фур'є до обох сторін рівнянь (4.103), переходимо від шуканої функції $u(\mathbf{r}, t)$ до її Фур'є-образу $\hat{u}(\mathbf{k}, t)$ за просторовими змінними. Дістаємо для нього диференціальне рівняння

$$\frac{\partial \hat{u}(\mathbf{k}, t)}{\partial t} = -a^2 k^2 \hat{u}(\mathbf{k}, t)$$

і початкову умову

$$\hat{u}(\mathbf{k}, 0) = \hat{u}_0(\mathbf{k}),$$

де $\hat{u}_0(\mathbf{k})$ — Фур'є-образ початкової функції $u_0(\mathbf{r})$. Розв'язок рівняння має вигляд

$$\hat{u}(\mathbf{k}, t) = C(\mathbf{k}) e^{-a^2 k^2 t}.$$

Стала інтегрування $C(\mathbf{k})$ знаходиться за допомогою початкової умови і дорівнює $\hat{u}_0(\mathbf{k})$. Отже,

$$\hat{u}(\mathbf{k}, t) = \hat{u}_0(\mathbf{k}) e^{-a^2 k^2 t},$$

і тому

$$\begin{aligned} u(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{E_3} d\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} e^{-a^2 k^2 t} \hat{u}_0(\mathbf{k}), \\ \hat{u}_0(\mathbf{k}) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{E_3} d\mathbf{r} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} u_0(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (4.104)$$

Тепер вже безпосередньо можна перевірити, що функція $u(\mathbf{r}, t)$, наведена формулою (4.104), при $t > 0$ має частинні похідні всіх порядків, задовольняє рівняння (4.104) і при $t \rightarrow 0$ рівномірно збігається до $u_0(\mathbf{r})$.

Інтегровність частинних похідних функції $u(\mathbf{r}, t)$ при $t > 0$ можна перевірити, переписавши перший інтеграл у формулі (4.104) у вигляді згортки функції $u_0(\mathbf{r})$ з функцією

$$G(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{E_3} d\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} e^{-a^2 k^2 t} = \frac{1}{(4\pi a^2 t)^{3/2}} e^{-\frac{r^2}{4a^2 t}}.$$

Завдання 4.9.1. Покажіть, що в просторі E_3 Фур'є-образ $\hat{f}(\mathbf{k})$ інтегровної сферично-симетричної функції $f(\mathbf{r}) = f(r)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, залежить лише від модуля k вектора $\mathbf{k}$ і дорівнює

$$\hat{f}(\mathbf{k}) = \hat{f}(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty dr r f(r) \frac{\sin kr}{k}.$$

Вказівка. При обчисленні перетворення Фур'є за змінною $\mathbf{r}$ перейдіть до сферичних координат з полярною віссю, напрямленою вздовж вектора $\mathbf{k}$.

Завдання 4.9.2. Знайдіть Фур'є-образи таких сферично-симетричних функцій трьох змінних:

а) $f(r) = A \frac{e^{-\gamma r}}{r}$; б) характеристична функція кулі радіусом R з центром у початку координат: $\chi_R(r) = \begin{cases} 1, & 0 \leq r \leq R, \\ 0, & r > R. \end{cases}$

Завдання 4.9.3. Знайдіть функцію Гріна (1.72), розв'язавши неоднорідне рівняння Гельмгольца (1.69) з дельта-функцією у правій частині за допомогою тривимірного інтегрального перетворення Фур'є.

Вказівка. Для відновлення функції за її Фур'є-образом скористайтеся результатом завдання 4.9.2 а), поширивши його за допомогою підстановки $\gamma = -i\sqrt{z}$, $\text{Im } z > 0$, на комплексні значення параметра γ .

Завдання 4.9.4. Знайдіть Фур'є-образ характеристичної функції $\chi_R(\mathbf{r})$ n -вимірної гіперкулі з радіусом R і центром у початку декартової системи координат, тобто області простору E_n , множина точок якої задовольняє нерівність $r = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} < R$.

Вказівки. При обчисленні Фур'є-образу $\hat{\chi}_R(\mathbf{k})$ можна, без втрати загальності, уважати, що вісь координат x_n у просторі E_n напрямлена паралельно вектору $\mathbf{k}$. Тоді

$$\hat{\chi}_R(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{-R}^R dx_n e^{-ikx_n} V_{n-1}(\sqrt{R^2 - x_n^2}), \quad (4.105)$$

де

$$V_m(r) = \int_{\sqrt{x_1^2 + \dots + x_m^2} < r} dx_1 dx_2 \dots dx_m \quad (4.106)$$

— об'єм m -вимірної гіперкулі радіусом r . З формули (4.106) видно, що $V_m(r) = r^m V_m(1)$. Явний вираз для об'єму $V_m(1)$ m -вимірної одиничної гіперкулі можна знайти, обчисливши інтеграл

$$J_m = \int_{E_m} e^{-r^2} d\mathbf{r} = \int_{E_m} \prod_{p=1}^m e^{-x_p^2} dx_p = \pi^{m/2}$$

у декартових координатах як повторний і помітивши, що для інтегрованих *радіальних* (тобто сферично-симетричних) функцій $f(r)$ у E_m , якою є і $f(r) = e^{-r^2}$,

$$\int_{E_m} f(r) d\mathbf{r} = \int_0^\infty f(r) dV_m(r) = m V_m(1) \int_0^\infty f(r) r^{m-1} dr.$$

Зокрема маємо:

$$\int_{E_m} e^{-r^2} d\mathbf{r} = m V_m(1) \int_0^\infty e^{-r^2} r^{m-1} dr = \frac{m}{2} V_m(1) \int_0^\infty e^{-\tau} \tau^{m/2-1} d\tau =$$

$$= \frac{m}{2} \Gamma\left(\frac{m}{2}\right) V_m(1) = \Gamma\left(\frac{m}{2} + 1\right) V_m(1),$$

де $\Gamma(x)$ — гамма-функція. Щоб завершити обчислення інтеграла (4.105), зручно скористатися формулою¹

$$\int_{-1}^1 (1-t^2)^\lambda e^{-ist} dt = \sqrt{\pi} \Gamma(\lambda+1) \left(\frac{2}{s}\right)^{\lambda+\frac{1}{2}} J_{\lambda+\frac{1}{2}}(s), \quad \operatorname{Re} \lambda > -1, \quad (4.107)$$

де $J_\nu(s)$ — функція Бесселя порядку ν ².

Відповідь:

$$\hat{\chi}_R(\mathbf{k}) = \frac{R^n}{2^{\frac{n}{2}} \sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} \int_{-1}^1 (1-t^2)^{\frac{n-1}{2}} e^{-ikRt} dt = \left(\frac{R}{k}\right)^{\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}}(kR).$$

Завдання 4.9.5. Покажіть, що в просторі E_n , $n \geq 3$, формула для Фур'є-образу $\hat{f}(k)$ радіальної функції $f(r)$ і відповідна формула обернення для відновлення $f(r)$ за $\hat{f}(k)$ набирають однакового вигляду.

¹ Див.: Morse P. M., Feshbach H. Methods of Mathematical Physics, Part 1. — New York : McGraw-Hill, 1953. Р. 619; Gel'fand I. M., Shilov G. E. Generalized Functions. Volume 1. Properties and Operations. — New York : Academic Press, 1964. Р. 185.

² Функції Бесселя, одним із численних інтегральних зображень яких є рівність (4.107), їх прості комбінації і модифікації утворюють дуже поширений клас так званих циліндричних функцій математичної фізики. Функції цього класу постійно з'являються при розв'язуванні задач, пов'язаних, зокрема, з вісесиметричними об'єктами.

Список використаної і рекомендованої літератури

1. *Вайсфельд Н. Д., Реут В. В.* Рівняння математичної фізики. Одеса : ОНУ, 2018. 194 с.
2. *Перестюк М. О., Маринець В. В.* Теорія рівнянь математичної фізики. Київ : Либідь, 2006. 424 с.
3. *Перестюк М. О., Маринець В. В., Рого В. Л.* Збірник задач з математичної фізики. Кам'янець-Подільський : Аксіома, 2012. 252 с.
4. *Піх С. С., Ровенчак А. А., Криницький Ю. С.* 1001 задача з математичної фізики. Львів : ЛНУ ім. І. Франка, 2006. 328 с.
5. *Піх С. С., Попель О. М., Ровенчак А. А., Тальянський І. А.* Методи математичної фізики. Львів : ЛНУ ім. І. Франка, 2011. 404 с.
6. *Положий Г. М.* Рівняння математичної фізики. Київ : Рад. шк., 1959. 479 с.
7. *Свідзинський А. В.* Математичні методи теоретичної фізики : у 2 т. Київ : Ін-т теор. фізики ім. М. М. Боголюбова, 2009. Т. 1. 396 с.; Т. 2. 436 с.
8. *Arfken G. B., Weber H. J., Harris F. E.* Mathematical Methods for Physicists: A Comprehensive Guide. New York : Elsevier, Academic Press, 2013. 1214 p.
9. *Boas M. L.* Mathematical Methods in the Physical Sciences. Hoboken, New Jersey : Wiley, 2006. 839 p.
10. *Courant R., Hilbert D.* Methods of Mathematical Physics : In 2 vols. New York : Wiley, 1989. Vol 1. 560 p.; Vol 2: Partial Differential Equations. 811 p.
11. *Gelfand I. M., Shilov G. E.* Generalized Functions. Vol. 1. Properties and Operations. Providence, Rhode Island : AMS Chelsea Publishing, 2016. 423 p.
12. *Hassani S.* Mathematical Methods: For Students of Physics and Related Fields. New York : Springer, 2009. 831 p.
13. *Schwartz L.* Mathematics for the Physical Sciences. Mineola, New York : Dover Publications, 2008. 358 p.
14. *Sobolev S. L.* Partial Differential Equations of Mathematical Physics. Oxford : Pergamon Press, 2014. 438 p.

Предметний покажчик¹

- Аксіоми додавання елементів
лінійного простору 136
— множення елементів лінійного
простору на числа 136
Амплітуда комплексна
вимушених коливань
середовища 129, 132
— — — температури 55, 58
Аналітичне продовження
функції 54, 167
Вектор густини потоку
дифузійного 60, 61
— — — теплового 12–14
— — — частинок 60
— нормалі до гладкої поверхні
12, 108
Випромінювання 10
Гradient функції 11
Густина домішкових частинок
(числова) 60
— ймовірності знайти домішкову
частинку 64
— — нормального розподілу 81, 82
— — переходу домішкової
частинки 64, 65
— — умовна знайти домішкову
частинку 64
— потужності джерела
домішкових частинок 96
— — — (стоку) тепла 12
— — — хвиль 124
— точкової маси 134
Джерело тепла гармонічне 53
— — — точкове 58
— хвиль гармонічне 128
— — — точкове 129
Дисперсія випадкової величини
82
Дифузія 60
— в середовищі анізотропному 62
— — — при наявності хімічних
(ядерних) реакцій 61
— — — рухомому 60, 61, 71, 89, 90
Діаметр області 41
Елемент множини 136
— нульовий 136
— обернений 136
Задача без початкових умов 132
— Коші (означення) 17
— — для густини ймовірності
знайти домішкову частинку
74, 75
— — — рівняння дифузії 61, 76, 78
— — — теплопровідності
узагальнена 154
Закон гармонічний коливань 128
— збереження кількості частинок
62
— — маси 100
— Кулона 47
— Ньютона всесвітнього тяжіння
48
— — теплообміну 16
— Фіка 60, 61, 71

¹ Цей покажчик не включає терміни і поняття, які безпосередньо вказані в назвах підрозділів.

- Фур'є 13, 14, 16
- Збіжність до нуля послідовності основних функцій 136, 144, 145 *див. також* Функціонал неперервний
- Імовірність знайти домішкову частинку 63
- Інваріантність хвильового рівняння відносно перетворень часу 106
- Інтеграл Дюамеля 42, 127
- Ейлера другого роду 86
- Пуассона *див. Формула...*
- у сенсі головного значення 182
- Коефіцієнт дифузії 61
- питомої теплоємності 11
- реакції 61
- температуропровідності 14
- теплопровідності 11, 13
- Коливання середовища вимушені (викликані джерелами) 124—128
- — — усталені 131
- Конвекція 10
- Конус світловий зрізаний 107
- Лінеаризація рівняння 103
- “Майже всюди” 140
- Матриця коефіцієнтів дифузії 61, 71, 72, 88, 89
- — теплопровідності 14
- невід’ємно визначена 14, 72
- Метод відокремлення змінних 158
- спуску 120
- Множина злічення 140
- лінійна 135
- щільна 139
- S (неперервних функцій) 144
- K (нескінченно гладких фінітних функцій) 135
- L_1 (інтегровних комплекснозначних функцій) 138
- S (нескінченно гладких функцій, спадаючих швидше від довільного степеня) 145
- Множник розривний Діріхле 171
- Нерівність Коші — Буняковського — Шварца 174
- Норма функції 138
- Оператор Лапласа 14
- обернений 57
- спряжений 153
- Операції над елементами лінійного простору 136
- Перетворення Фур'є лінійного диференціального рівняння 168, 169
- — обернене *див. Формула* обернення...
- Підпростір лінійний 142
- Події незалежні 65
- Поле швидкості потенціальне 103
- Потенціал електростатичний 44, 47
- загаювальний 128
- ньютонівський гравітаційний 44, 48, 135
- сили 103
- швидкості 103, 104
- — комплексний 129
- Похідна узагальненої функції 151
- Принцип відносності Галілея 24
- Гюйгенса в різних просторах 117, 121, 123, 124
- Д'Аламбера 98
- другий термодинаміки 13
- Дюамеля 42, 127

- максимального (мінімального) значення 18
- максимуму (мінімуму) для гармонічних функцій 49
- суперпозиції для лінійних систем 40, 161
- Простір *див.* Множина...
- Процес адіабатний 103
- випадковий (імовірнісний) 63
- марковський 65
- поширення хвиль 117, 121, 123, 124
- Реакція лінійної системи 40
- першого порядку 61, 75
- Режим дифузійний 68
- Рівність Парсевалю
- (— Планшереля) 174
- — багатовимірною 185
- — узагальнена 174, 175
- Рівновага (не)стійка 47
- Рівняння балансу теплового
- 10—13
- — — в диференціальній формі 13
- Лапласа 46
- неперервності 100
- руху ідеальної рідини 102
- — — — лінеаризовані 102, 103
- стану 102
- теплопровідності для рухомої речовини 25, 26
- Рідина ідеальна 98
- Розв'язок класичний задачі
- Коші для рівняння дифузії 75, 78
- — — — для рівняння теплопровідності 17, 18, 21
- стійкий системи рівнянь 102
- сферично симетричний рівняння Гельмгольца 160
- узагальнений рівняння Гельмгольца 57
- — — Пуассона 154
- узагальненої задачі Коші для рівняння теплопровідності 155—157
- Розподіл *див.* Функція узагальнена
- нормальний Гаусса 81
- — стандартний 82
- Рух броунівський 68
- рідини стаціонарний 102, 103
- Символ Кронекера 72
- Система лінійна 17, 40
- Сподівання математичне випадкової величини 67, 82
- Стан спокою рідини 103
- Температура *див.* Функція температури...
- усталена 55, 58
- Теорема Беппо Леві про монотонну збіжність 140
- Гаусса 48
- Гаусса — Остроградського 12, 34, 107
- Гріна 33, 34
- єдиності для аналітичних функцій 54
- Ірншоу 47
- Лебега 141
- переносу Рейнольдса 100
- про середнє 48
- Рімана — Лебега 164, 184
- Фейнмана — Каца *див.* Формула...
- Фубіні 172
- центральна гранична 82
- Теплопровідність 10
- Течія потенціальна 104

- Тотожність Гільберта 57
- Траєкторія домішкової частинки 63, 67
- Умова випромінювання
 - Зоммерфельда 133
- крайова 16
- — в необмеженому просторі 21
- — Діріхле (першого типу) 16
- — Нейманна (другого типу) 16
- — Робіна (третього типу) 17
- початкова 17, 29, 80, 106, 118, 122
- Форма квадратична невід'ємно визначена 14, 72
- Формула Гріна *див.* Теорема...
 - Д'Аламбера 122
 - — для вимушених коливань 127
 - обернення для перетворення Фур'є 169, 183, 184
 - Пуассона (для інтеграла) 30
 - Тейлора 68, 92
 - Фейнмана — Каца 91, 96
- Функціонал 136
- неперервний 137
- Функція абсолютно неперервна 164
 - Бесселя порядку ν 188
 - відгуку 39
 - впливу 39
 - гамма *див.* Інтеграл Ейлера...
 - Гріна рівняння Гельмгольца 56, 154, 187
 - — — Пуассона 154
 - — — теплопровідності 31
 - — хвильового рівняння 114, 120, 122
 - дельта Дірака складена 120, 148
 - джерел домішкових частинок 61
 - ермітово-спряжена 174
 - знакова 152
 - зростаюча помірно 178
 - інтегровна з квадратом 173
 - локально інтегровна 143
 - нескінченно гладка 135
 - обмежена 31
 - розповсюдження 39
 - скінченнозначна (східча) 142, 163
 - східча Хевісайда 152, 179
 - температури скалярна 10
 - узагальнена 144, 145
 - фінітна 50
 - характеристична 84, 141, 163, 186
- Фур'є-образ 162
 - дельта-функції 179
 - згортки 173, 184, 185
 - інтегровної функції 162
 - — та інтегровної з квадратом функції 174
 - лапласіана 184
 - похідної 164, 165
 - — вищого порядку 166
 - — першої і вищих дельта-функції 179
 - сферично симетричної функції 186
 - функції Хевісайда 179–182
 - характеристичної функції гіперкулі 187, 188
 - — — інтервалу 163
 - частинної похідної 184
- Хвиля плоска 159
 - сферична збіжна 132
 - — розбіжна 129
 - — теплова 58
- Частинка броунівська 68

- A28 **Адамян В. М.**
Вступ до математичної фізики : навчальний посібник для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти за спеціальністю 104 «Фізика та астрономія» / В. М. Адамян, М. Я. Сушко. — 2-ге вид., переробл. і доповн. — Одеса : Астропринт, 2025. — 196 с.

ISBN 978–617–8515–40–9

Розглядаються ключові ідеї та інструменти математичної фізики на прикладі задач для лінійних рівнянь теплопровідності, дифузії і хвильового рівняння в необмеженому просторі. Наводяться необхідні відомості з теорії функцій дійсних змінних, узагальнених функцій, інтегральних перетворень Фур'є. Пропонуються завдання різної складності і контрольні питання.

Для здобувачів бакалаврського рівня вищої освіти за спеціальністю 104 «Фізика та астрономія» та іншими фізичними і математичними спеціальностями.

УДК [53.02+517](075.8)

Навчальне видання

**Адамян Вадим Мовсесович
Сушко Мирослав Ярославович**

**ВСТУП
ДО МАТЕМАТИЧНОЇ
ФІЗИКИ**

Навчальний посібник
для здобувачів
першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
за спеціальністю 104 «Фізика та астрономія»

*Друге видання,
перероблене і доповнене*

Надруковано в авторській редакції

Завідувачка редакції *Т. М. Забанова*

Формат 60х84/16. Ум. друк. арк. 11,39.
Тираж 300 прим. Зам. № 531 (24).

Видавництво і друкарня «Астропринт»
65091, м. Одеса, вул. Разумовська, 21
Тел.: (0482) 37-14-25, 33-07-17, (048) 7-855-855
e-mail: astro_print@ukr.net; www.astroprint.ua

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 1373 від 28.05.2003 р.