

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА
Механіко-математичний факультет

А. ЛОВЕЙКІН

Є. ВАКАЛ

**РІВНЯННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ:
ПРИКЛАДИ І ЗАДАЧІ**

**Навчальний посібник
для студентів механіко-математичного факультету**

КИЇВ – 2024

УДК 517.95

ББК

Рецензенти:

чл.-кор. НАН України, доктор фіз.-мат. наук, професор Ю.В. Крак
доктор фіз.-мат. наук, професор О.В. Капустян

*Рекомендовано Вченою радою
механіко-математичного факультету
Київського національного університету імені Тараса Шевченка
(протокол № 14 від 2 травня 2024 р.)*

А. Ловейкін

Рівняння математичної фізики: приклади і задачі. Навчальний посібник для студентів механіко-математичного факультету / А. Ловейкін, Є. Вакал. – К.: [Електронне видання] – 2024. – 187 с.

Навчальний посібник містить короткі теоретичні відомості, приклади розв'язання задач та завдання для самостійної роботи для студентів механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка, які вивчають дисципліни "Рівняння математичної фізики" та "Математична фізика". Зміст посібника поділено на теми, які відповідають навчальним програмам вказаних дисциплін. В посібнику розглядається класифікація лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними другого порядку, постановки задач для основних рівнянь математичної фізики та задачі Коші і Гурса для гіперболічних рівнянь.

Для студентів механіко-математичного факультету, які навчаються за освітніми програмами "Математика", "Комп'ютерна механіка".

УДК 517.95

ББК

© А. Ловейкін, Є. Вакал, 2024 р.

Передмова

Дисципліна "Рівняння математичної фізики" є обов'язковою для вивчення студентами освітніх програм "Математика", "Статистика", "Комп'ютерна математика". Вона є фактично першою із дисциплін, в якій студенти знайомляться із диференціальними рівняннями з частинними похідними, задачами, які виникають у зв'язку із цими рівняннями, вивчають математичні моделі реальних процесів, що використовують класичні рівняння математичної фізики.

Як науковий напрямок, математична фізика сформувалась у 19 столітті, хоча окремі питання, присвячені рівнянням з частинними похідними, розглядались д'Аламбером і Ейлером ще у 18 столітті, а сам термін "математична фізика" з'явився в класичній роботі І. Н'ютона "Математичні основи натуральної філософії" у 17 столітті. Активний розвиток у 19 столітті механіки і фізики, в першу чергу, механіки деформівного твердого тіла, термодинаміки, електромагнетизму призвели до всебічного використання рівнянь з частинними похідними в математичних моделях, що описували різні природні явища. Розрізнені підходи до вивчення таких рівнянь та задач, пов'язаних з ними, почали об'єднуватись у цілі напрямки, розвивались нові методи розв'язання задач, виникли суто математичні питання про існування та єдиність розв'язків задач, коректність математичних моделей, що включають рівняння з частинними похідними. В результаті, таких процесів і з'явилась, як окремий науковий напрямок, математична фізика.

Назва математична фізика означає, що об'єктом вивчення тут є математичні моделі, в першу чергу, фізичних явищ. Така назва говорить про те, що математична фізика з'явилась на стику математики і фізики. Дисципліна "Рівняння математичної фізики" вивчає саме математичну складову, яка пов'язана із вивченням рівнянь з частинними похідними, як математичних об'єктів, їх класифікацією. Також розглядаються суто математичні питання про існування та єдиність розв'язків задач для таких рівнянь, коректність їх постановок.

В даному посібнику основна увага приділяється практичній складовій дисципліни. Теоретична частина представлена на рівні формулю-

вань основних понять, означень, властивостей і теорем. Натомість, наведена велика кількість прикладів із розв'язаннями, а також завдання для самостійної роботи студентів.

Посібник включає три великі теми: "Класифікація лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними другого порядку", "Фізичні процеси, які приводять до задач математичної фізики", "Задача Коші для рівнянь гіперболічного типу". Кожна тема розділена на окремі підпункти, в яких вивчаються детальніші питання, що складають розглядувану тему.

Готуючи матеріал посібника та підбираючи завдання для самостійної роботи автори, в першу чергу, спирались на свій багаторічний досвід викладання дисциплін "Рівняння математичної фізики", "Математична фізика" студентам механіко-математичного факультету. При цьому, також використовувались збірники [1, 2, 3, 6]. Для кращого розуміння теоретичного матеріалу, необхідного для підготовки до практичних занять та виконання завдань для самостійної роботи, можна використовувати підручники та посібники [3, 5, 7...10].

Пропонований навчальний посібник буде корисним студентам та викладачам при підготовці та проведенні практичних занять з дисциплін "Рівняння математичної фізики" та "Математична фізика", а також при виконанні завдань для самостійної роботи.

Автори посібника будуть вдячними за всі висловлені зауваження, відгуки та пропозиції щодо його покращення.

Тема 1. Фізичні процеси, які приводять до задач математичної фізики

В цьому розділі розглядаються різноманітні фізичні процеси, які описуються задачами математичної фізики. Виділимо основні етапи, необхідні для побудови математичної моделі фізичного явища.

- Вибір фізичної моделі явища: заміна реального процесу ідеальним так, щоб основні властивості реального фізичного процесу збереглись, формулювання фізичних законів.
- Вибір зручної системи координат.
- Вибір характеристичної функції, тобто деякої функції, яка описує (характеризує) процес.
- Виведення диференціального рівняння відносно невідомої характеристичної функції в рамках вибраної фізичної моделі із використанням фізичних законів.
- Визначення додаткових умов, які накладаються на характеристичну функцію (початкові та крайові умови).

1.1. Фізичні процеси, які приводять до задач для хвильового рівняння

1.1.1. Задачі для одновимірного хвильового рівняння

Приклади розв'язання задач

Приклад 1. Вивести рівняння малих повздовжніх коливань однорідного, пружного стержня сталого поперечного перерізу. Записати початкові та крайові умови.

Розглянемо тонкий пружний стержень довжини l та сталого поперечного перерізу площею $S = \text{const}$. Вважаємо, що довжина стержня l набагато більша за два його поперечні розміри. Припустимо, що всі зовнішні зусилля, прикладені до стержня, діють вздовж стержня. При цьому, відхилення точок стержня від їх положень рівноваги є малими у порівнянні із довжиною l . У цьому випадку можна вважати, що точки стержня рухаються лише вздовж (поперечними відхиленнями нехтуємо), а поперечні перерізи залишаються плоскими та паралельними

один одному. В таких припущеннях можна зробити висновок: якщо у недеформованому стані (стані спокою) зафіксувати деякий поперечний переріз, то в процесі розповсюдження коливань всі точки цього поперечного перерізу будуть рухатися за одним і тим самим законом. Тому для описання коливань стержня досить ввести одну просторову координату, яку слід спрямувати вздовж стержня.

У стані спокою стержень буде займати відрізок $[0, l]$. Пов'яжемо всі поперечні перерізи з їх положеннями рівноваги, надавши кожному поперечному перерізу координату, яка співпадає з його положенням рівноваги. Такі координати називають *лагранжевими*.

Для опису процесу розповсюдження повздовжніх коливань у пружному стержні введемо характеристичну функцію $u = u(x, t)$, яка визначатиме відхилення поперечного перерізу з координатою $x \in [0, l]$ (поперечного перерізу, для якого положенням рівноваги є точка x на координатній прямій) в момент часу $t \geq 0$. Тоді в будь-який момент часу геометричне положення такого поперечного перерізу визначається величиною $x + u(x, t)$, швидкість — $u'_t(x, t)$, а прискорення — $u''_{tt}(x, t)$.

Всередині пружного стержня в результаті його деформації виникають внутрішні пружні сили, які намагаються повернути стержень у недеформований стан. Пружні сили визначаються згідно із законом Гука. Виділимо всередині стержня малу ділянку, обмежену двома поперечними перерізами з координатами x та $x + \Delta x$, $\Delta x \ll 1$. Тоді пружна сила T , яка виникає в процесі деформацій у виділеній ділянці стержня, прямо пропорційна площі поперечного перерізу ділянки S та її відносному видовженню (деформації) ε :

$$T = ES\varepsilon, \quad (1)$$

де E — модуль пружності Юнга, експериментальна величина, яка характеризує пружні властивості матеріалу, з якого зроблено стержень. *Відносне видовження (деформація) ε* — це безрозмірна величина, яка визначає наскільки змінилась довжина виділеної ділянки стержня в процесі деформації у порівнянні з її довжиною у недеформованому стані. При цьому,

$$\varepsilon = \varepsilon(x, \Delta x, t) = \frac{x + \Delta x + u(x + \Delta x, t) - (x + u(x, t)) - \Delta x}{\Delta x} =$$

$$= \frac{u(x + \Delta x, t) - u(x, t)}{\Delta x} \rightarrow u'_x(x, t), \quad \Delta x \rightarrow 0. \quad (2)$$

Спрямувавши в рівності (1) $\Delta x \rightarrow 0$ та врахувавши (2), отримаємо вираз для визначення пружної сили, яка виникає у поперечному перерізі з координатою x

$$T(x, t) = ESu'_x(x, t). \quad (3)$$

Пружну силу T , яка визначається рівністю (3), називають поверхневою силою, оскільки вона виникає виключно в точках поперечного перерізу з координатою x .

Для виведення рівняння, яке буде описувати процес розповсюдження малих поздовжніх коливань у пружному стержні, виділимо довільну ділянку стержня, обмежену поперечними перерізами з координатами x_1 та x_2 , $0 < x_1 < x_2 < l$ (Рис. 1.1). Позначимо виділену ділянку через V . У довільний момент часу $t > 0$ запишемо для цієї ділянки другий закон Н'ютона

$$F_{\text{ін}} = R, \quad (4)$$

де $F_{\text{ін}}$ – сила інерції ділянки V , R – рівнодійна всіх зовнішніх по відношенню до V сил, які на неї діють.

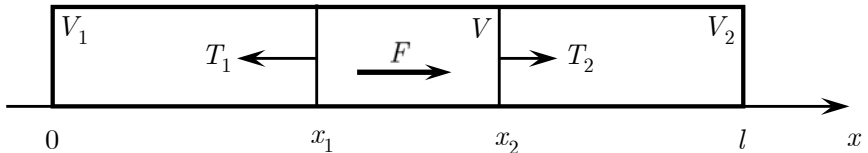


Рис. 1.1

Якщо всередині V розглянути елементарний циліндр, обмежений перерізами x і $x + dx$, який є матеріальною точкою, то його сила інерції дорівнює $u''_{tt}\rho Sdx$, ρ – густина матеріалу, з якого зроблено стержень. Тоді сумарна сила інерції $F_{\text{ін}}$ ділянки V дорівнюватиме

$$F_{\text{ін}} = \int_{x_1}^{x_2} u''_{tt}\rho Sdx. \quad (5)$$

До зовнішніх по відношенню до ділянки V відносяться пружні сили T_1 і T_2 , які виникають у поперечних перерізах x_1 та x_2 (Рис. 1.1), і з якими ділянки V_1 і V_2 діють на V . Також на точки стержня з боку навколишнього середовища можуть діяти зовнішні сили, наприклад, через бічну

поверхню. Крім цього, всередині стержня можуть виникати сили, спричинені рухом його точок, які відмінні від пружних (мають іншу природу), наприклад, сили в'язкості (сили тертя між частинками речовини). Всі ці сили сумарно позначимо через F . Тоді рівнодійна всіх зовнішніх сил R матиме вигляд

$$R = F + T_1 + T_2. \quad (6)$$

Пружні сили T_1 і T_2 визначаються за допомогою закону Гука (3). Для визначеності вважатимемо, що $u'_x > 0$. Оскільки u'_x — це деформація, то умова $u'_x > 0$ означає, що всі ділянки стержня видовжуються. Тому пружна сила T_1 , з якою ділянка V_1 діє на V , буде напрямлена проти осі Ox , а пружна сила T_2 , з якою V_2 діє на V , — в напрямку Ox . В результаті, з (3) отримаємо

$$T_1 = -ESu'_x|_{x=x_1}, \quad T_2 = ESu'_x|_{x=x_2}. \quad (7)$$

Оскільки природа сил F досить різноманітна, то для їхнього визначення скористаємось масовою густиною $f = f(x, t)$ цих сил. *Масова густина сил* — це величина, яка визначає силу, що діє на одиницю маси тіла (змінюється з часом, залежить від точки прикладання сили, має розмірність прискорення — м/с^2). Аналогічно до визначення сили інерції ділянки V виділимо елементарний циліндр, обмежений перерізами x і $x + dx$, який можна вважати матеріальною точкою. Тоді на цей циліндр діє сила $f\rho Sdx$, а сумарна сила F , що діє на всю ділянку V , дорівнює

$$F = \int_{x_1}^{x_2} f\rho Sdx. \quad (8)$$

Сили F , які визначаються через масову густину, називають *масовими силами*. Аналогічним чином можна використовувати і об'ємні сили. Тоді замість масової густини розглядається об'ємна густина (сила, віднесена до одиниці об'єму).

Отримані рівності (5)...(8) підставляємо в II закон Н'ютона (4):

$$\int_{x_1}^{x_2} u''_{tt}\rho Sdx = ESu'_x|_{x=x_2} - ESu'_x|_{x=x_1} + \int_{x_1}^{x_2} f\rho Sdx.$$

Стержень має сталий поперечний переріз. Тому $S = \text{const}$, і попередню рівність можна на S скоротити. Перший і другий доданки в правій

частині цієї рівності перепишемо, використовуючи формулу Н'ютона-Лейбніца,

$$\int_{x_1}^{x_2} u''_{tt} \rho dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x} (E u'_x) dx + \int_{x_1}^{x_2} f \rho dx. \quad (9)$$

Отримана рівність (9) виконується на довільній внутрішній ділянці $[x_1, x_2] \subset (0, l)$ і у довільний момент часу $t > 0$.

Завдяки тому, що ділянка $[x_1, x_2]$ обиралась довільним чином, можна перейти до рівності підінтегральних виразів (операцію інтегрування "опустити"). В результаті, отримаємо рівняння, що описує малі повздовжні коливання пружного стержня сталого поперечного перерізу

$$\rho u''_{tt} = \frac{\partial}{\partial x} (E u'_x) + \rho f, \quad 0 < x < l, \quad t > 0.$$

Оскільки за умовою стержень однорідний, то $\rho, E = \text{const}$, і отримане рівняння остаточно запишеться у вигляді

$$u''_{tt} = a^2 u''_{xx} + f(x, t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \quad (10)$$

де $a^2 = \frac{E}{\rho} = \text{const} > 0$.

Рівняння (10) — це *хвильове рівняння* з однією просторовою змінною (одновимірне хвильове рівняння). Таке рівняння описує не тільки коливання пружного стержня, а і багато інших хвильових процесів, наприклад, малі поперечні коливання струни.

Рівняння (10) належить до нестационарних рівнянь, воно описує процеси, які змінюються з часом (нестационарні процеси). До цього рівняння входять дві незалежні змінні: просторова змінна x та час t . Для однозначного математичного опису процесу розповсюдження коливань хвильове рівняння (10) потрібно доповнити *початковими* та *крайовими умовами*.

Початкові умови описують початковий стан пружного стержня (коливної системи). Оскільки в рівнянні (10) найстаршою похідною за часом є похідна другого порядку u''_{tt} , то їх має бути дві:

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u'|_{t=0} = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l. \quad (11)$$

Перша з умов (11) визначає початкові відхилення точок стержня (поперечних перерізів) від їх положень рівноваги, а друга — їх початкові швидкості.

Крайові умови описують фізичну ситуацію на кінцях стержня (на межі тіла). Оскільки до рівняння (10) входить похідна другого порядку u''_{xx} , то крайових умов має бути дві, одна з яких записується на одному кінці стержня $x = 0$, а інша — на другому $x = l$.

Розглянемо класичні крайові умови.

а) *Крайові умови I роду* описують ситуацію, коли відомий закон руху кінців стержня (відомі відхилення кінців стержня від їх положень рівноваги):

$$u|_{x=0} = \varphi_0(t), \quad u|_{x=l} = \varphi_1(t), \quad t \geq 0. \quad (12)$$

Крайові умови (12) належать до кінематичних умов.

б) *Крайові умови II роду* дозволяють описати ситуацію, коли на кінці стержня діють зовнішні сили.

Нехай на кінець стержня $x = 0$ діє зовнішня сила $F_0 = F_0(t)$, $t \geq 0$ (Рис. 1.2). Розглянемо ділянку стержня, обмежену кінцем $x = 0$ та поперечним перерізом з координатою $x = x_2$, та запишемо другий закон Н'ютона

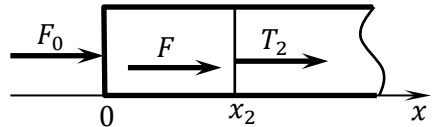


Рис. 1.2

$$F_{\text{ін}} = R.$$

По аналогії із розглянутим вище для сили інерції $F_{\text{ін}}$ можемо записати

$$F_{\text{ін}} = \int_0^{x_2} u''_{tt} \rho S dx.$$

До зовнішніх по відношенню до виділеної ділянки відносяться сила F_0 , яка діє на кінець стержня, масові сили F та сила пружності T_2 , з якою частина стержня, яка лежить по правий бік від x_2 , діє на виділену ділянку (Рис. 1.2). Тоді, використовуючи міркування, аналогічні попереднім, для рівнодійної зовнішніх сил R отримаємо

$$R = F_0(t) + F + T_2 = F_0(t) + \int_0^{x_2} f \rho S dx + E S u'_x|_{x=x_2}.$$

Отримані вирази для сили інерції та рівнодійної зовнішніх сил підставляємо в другий закон Н'ютона і спрямовуємо $x_2 \rightarrow 0$ (для того, щоб отримати саме крайову умову на кінці $x = 0$). При цьому, інтегральні доданки перетворюються на нульові. В результаті, запишемо

$$0 = F_0(t) + ESu'_x|_{x=0}, \quad t \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u'_x|_{x=0} = -\frac{1}{ES}F_0(t), \quad t \geq 0. \quad (13)$$

Якщо розглянути випадок, коли на кінець $x = l$ діє сила $F_1 = F_1(t)$, $t \geq 0$, то аналогічним чином (Рис. 1.3) отримаємо крайову умову

$$u'_x|_{x=l} = \frac{1}{ES}F_1(t), \quad t \geq 0. \quad (14)$$

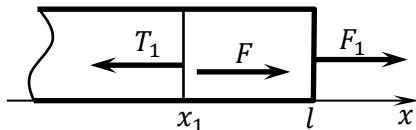


Рис. 1.3

в) *Крайові умови III роду* опису-

ють ситуацію, коли на кінці стержня діють зовнішні пружні сили (пружне закріплення кінців стержня).

Нехай до кінця стержня $x = 0$ прикріплено пружину жорсткістю k_0 (Рис. 1.4). Коли цей кінець перебуває в положенні рівноваги, вважатимемо, що прикріплена пружина недеформована. В ході розповсюдження коливань кінець $x = 0$ відхиляється від свого положення рівноваги. Це приз-

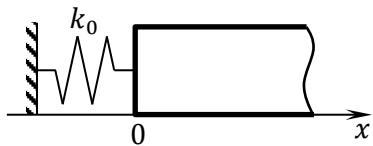


Рис. 1.4

водить до видовження чи стискання пружини, в якій виникає пружна сила F_0 , що діє на кінець стержня. Дія зовнішньої сили на кінець $x = 0$ стержня описується умовою (13). Видовження чи стискання пружини співпадають із відхиленням кінця $x = 0$ від положення рівноваги (співпадає із $u|_{x=0}$). Згідно із законом Гюка "для пружини" для пружної сили $F_0(t)$, яка виникає внаслідок деформації пружини жорсткості k_0 , запишемо

$$F_0 = F_0(t) = -k_0 u|_{x=0}, \quad t \geq 0.$$

Підставивши вираз для F_0 в умову (13), отримаємо крайову умову III роду на кінці $x = 0$

$$(u'_x - h_0 u)|_{x=0} = 0, \quad t \geq 0, \quad (15)$$

де $h_0 = \frac{k_0}{ES} > 0$.

Аналогічним чином, якщо до кінця $x = l$ приєднано пружину жорсткістю k_1 , то з умови (14) отримаємо

$$(u'_x + h_1 u)|_{x=l} = 0, \quad t \geq 0, \quad (16)$$

де $h_1 = \frac{k_1}{ES} > 0$.

Крайові умови II і III роду, які описують дію сил, називають динамічними.

Остаточно, *задача математичної фізики*, яка описує малі повздовжні коливання пружного стержня, складається з:

- хвильового рівняння (10);
- двох початкових умов (11);
- двох крайових умов, одна з яких формулюється обов'язково на кінці $x = 0$, а інша — на кінці $x = l$, причому, на різних кінцях стержня крайові умови можуть мати різний тип. ■

Приклад 2. Записати задачу, яка описує малі повздовжні коливання однорідного пружного стержня сталого поперечного перерізу, до одного з кінців якого приєднано абсолютно твердий (недеформівний) вантаж маси M_0 (Рис. 1.5). На вантаж діє зовнішня сила $F_1(t)$, $t \geq 0$. Інший кінець стержня жорстко закріплений. В початковий момент часу стержень перебував у стані спокою.

В даному прикладі коливання стержня відбуваються в тих самих фізичних умовах, що і в попередньому. Тому при його розв'язанні можна використати результати *прикладу 1*.

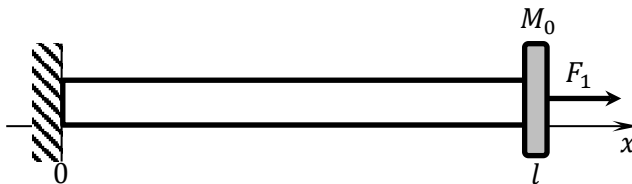


Рис. 1.5

Нехай стержень займає відрізок $[0, l]$, вантаж приєднано до кінця $x = l$, а кінець $x = 0$ буде жорстко закріплений (Рис. 1.5). Оскільки вантаж абсолютно твердий і не змінює своєї форми, то його можна розглядати як матеріальну точку (точкову масу), розмірами знехтувати і об'єднати з кінцем стержня $x = l$. При цьому, відхилення, швидкості та прискорення вантажу і кінця $x = l$ стержня співпадатимуть.

Оскільки розглядаються малі повздовжні коливання однорідного пружного стержня сталого поперечного перерізу, то для їх опису використовується хвильове рівняння (10) (с. 9), виведене в попередньому

прикладі, але при цьому, слід покласти густину масових сил $f = 0$, оскільки до внутрішніх ділянок стержня ($0 < x < l$) зовнішні сили не прикладаються (про них нічого не сказано). Таким чином, маємо *рівняння задачі*

$$u''_{tt} = a^2 u''_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \quad (17)$$

де $a^2 = \frac{E}{\rho}$, E, ρ — модуль пружності Юнга та густина матеріалу стержня.

В початковий момент часу стержень перебував у стані спокою, тобто його точки мали нульові початкові відхилення та швидкості. В цьому випадку *початкові умови* (11) (с. 9), матимуть вигляд

$$u|_{t=0} = 0, \quad u'_t|_{t=0} = 0, \quad 0 \leq x \leq l. \quad (18)$$

Кінець $x = 0$ стержня жорстко закріплений, тобто він зафіксований у своєму положенні рівноваги і не рухається. В результаті при $x = 0$ маємо крайову умову I роду

$$u|_{x=0} = 0, \quad t \geq 0. \quad (19)$$

Для виведення крайової умови на кінці $x = l$ стержня запишемо другий закон Н'ютона для вантажу (точкової маси) (Рис. 1.6)

$$M_0 u''_{tt}|_{x=l} = F_1(t) + T_l,$$

де T_l — пружна сила, яка виникає в поперечному перерізі $x = l$, і з якою стержень діє на приєднаний вантаж. Так само, як і в попередньому прикладі, вважаємо, що всі ділянки стержня видовжуються. Тому пружна сила T_l буде напрямлена в напрямку, протилежному до осі x . Тоді, використовуючи закон Гука, з

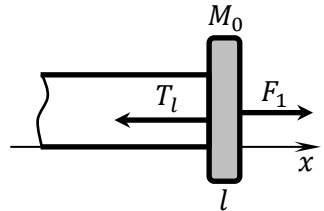


Рис. 1.6

другого закону Н'ютона матимемо

$$M_0 u''_{tt}|_{x=l} = F_1(t) - ESu'_x|_{x=l}, \quad t \geq 0,$$

або

$$M_0 u''_{tt}|_{x=l} + ESu'_x|_{x=l} = F_1(t), \quad t \geq 0, \quad (20)$$

S — площа поперечного перерізу стержня.

Отримана крайова умова (20) належить до неklasичних крайових умов математичної фізики, оскільки до неї входить похідна за часом. Якщо покласти $M_0 = 0$ (вантаж відсутній), то отримаємо класичну

крайову умову II роду (14) (с. 11).

Таким чином, задача математичної фізики, що описує коливання розглянутого стержня, складається з рівняння (17), початкових умов (18) та крайових умов (19) і (20). ■

Приклад 3. Кусково-однорідний пружний стержень сталого поперечного перерізу складено з двох однорідних частин довжинами l_1 та l_2 і фізичними характеристиками E_1, ρ_1 та E_2, ρ_2 відповідно. Записати задачу, яка описує малі поєздовжні коливання такого стержня, що викликані масовими силами, розподіленими по всій довжини стержня. Один із кінців стержня вільний, а інший — закріплений пружно. В початковий момент часу точкам стержня надали початкові відхилення, початкові швидкості відсутні (точки стержня не рухались). Розглянути два випадки:

- а) однорідні частини з'єднані напряму;
- б) однорідні частини з'єднані через абсолютно тверду (недеформівну) прокладку маси M .

У даному прикладі коливний процес розглядається в умовах, сформульованих у прикладі 1.

Нехай однорідна частина довжини l_1 з фізичними характеристиками E_1, ρ_1 займає відрізок $[-l_1, 0)$, а однорідна частина довжини l_2 з фізичними характеристиками E_2, ρ_2 — відрізок $(0, l_2]$ (розглядаємо випадок а) з'єднання однорідних частин напряму) (Рис. 1.7).

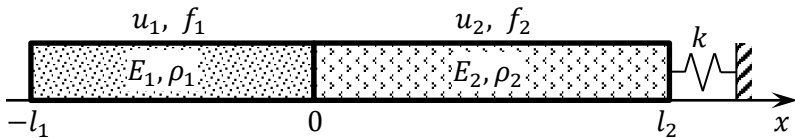


Рис. 1.7

док а) з'єднання однорідних частин напряму) (Рис. 1.7).

В точці $x = 0$ з'єднання однорідних частин фізичні характеристики стержня змінюються миттєво (мають розрив). Тому записати рівняння, яке б описувало коливання в цій точці, неможливо. Запишемо окремо хвильове рівняння (10) (с. 9), для кожної з однорідних частин стержня:

$$(u_1)''_{tt} = a_1^2(u_1)''_{xx} + f_1(x, t), \quad -l_1 < x < 0, \quad t > 0, \quad (21)$$

$$(u_2)''_{tt} = a_2^2(u_2)''_{xx} + f_2(x, t), \quad 0 < x < l_2, \quad t > 0,$$

де $u_{1,2} = u_{1,2}(x, t)$ — функції, які визначають відхилення точок стержня в однорідних частинах $[-l_1, 0)$ і $(0, l_2]$ відповідно, $t \geq 0$, $a_{1,2}^2 = \frac{E_{1,2}}{\rho_{1,2}}$ — сталі, що визначаються фізичними характеристиками однорідних складових стержня, $f_{1,2}(x, t)$ — густини масових сил, які діють на відповідні однорідні ділянки стержня (Рис. 1.7).

До кожного із записаних рівнянь (21) потрібно додати по дві *початкові умови*, які описують початковий стан кожної з однорідних частин. За умовою точки стержня в початковий момент часу отримали початкові відхилення, а початкові швидкості нульові (точки не рухались). В результаті в кожній з однорідних частин запишемо

$$\begin{aligned} u_1|_{t=0} &= \varphi_1(x), & (u_1)'_t|_{t=0} &= 0, & -l_1 \leq x < 0, \\ u_2|_{t=0} &= \varphi_2(x), & (u_2)'_t|_{t=0} &= 0, & 0 < x \leq l_2, \end{aligned} \quad (22)$$

де $\varphi_{1,2}$ — задані функції, що визначають початкові відхилення у відповідних однорідних частинах стержня.

Також запишемо *крайові умови* на кінцях $x = -l_1$ і $x = l_2$ стержня. Вважатимемо, що лівий кінець $x = -l_1$ вільний від зовнішніх сил, а до правого $x = l_2$ приєднано пружину жорсткістю k (Рис. 1.7).

На вільний кінець $x = -l_1$ не діють зовнішні сили. Тому маємо крайову умову II роду вигляду (13) (с. 11), в якій зовнішня сила $F_0 = 0$:

$$(u_1)'_x|_{x=-l_1} = 0, \quad t \geq 0. \quad (23)$$

На пружно закріпленому кінці $x = l_2$ маємо крайову умову III роду вигляду (16), с. 12,

$$((u_2)'_x + hu_2)|_{x=l_2} = 0, \quad t \geq 0, \quad (24)$$

де $h = \frac{k}{(E_2 S)} > 0$, S — площа поперечного перерізу стержня.

Рівнянь (21), початкових умов (22) і крайових умов (23) та (24) недостатньо для повного моделювання хвильового процесу, оскільки вони записані окремо для кожної із однорідних частин кусково-однорідного стержня. Тобто, суто математично стержень було "розділено" на окремі однорідні складові. Запишемо в точці з'єднання однорідних частин $x = 0$ дві *умови зшивання*, які математично "об'єднують" їх в

кусково-однорідний стержень. Перша умова — кінематична. Оскільки однорідні частини з'єднані напряду (вип. а), то граничні значення відхилень u_1 та u_2 в точці $x = 0$ повинні співпадати (поперечний переріз $x = 0$ не може мати два різних закони руху):

$$u_1|_{x=0-} = u_2|_{x=0+}, \quad t \geq 0. \quad (25)$$

Друга умова зшивання динамічна. Для її виведення розглянемо ділянку стержня $[x_1, x_2]$, яка включає точку $x = 0$ (Рис. 1.8), і запишемо для неї другий закон Н'ютона

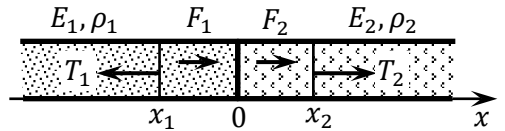


Рис. 1.8

$$F_{\text{ін}} = R. \quad (26)$$

Сила інерції $F_{\text{ін}}$ для виділеної ділянки матиме вигляд

$$F_{\text{ін}} = \int_{x_1}^0 (u_1)''_{tt} \rho_1 S dx + \int_0^{x_2} (u_2)''_{tt} \rho_2 S dx,$$

де перший доданок визначає силу інерції ділянки $[x_1, 0]$, яка має густину ρ_1 , а другий — ділянки $(0, x_2]$, яка має густину ρ_2 . Рівнодійна зовнішніх сил R запишеться таким чином (Рис. 1.8)

$$R = F_1 + F_2 + T_1 + T_2,$$

де $F_{1,2}$ — масові сили, що діють з боку навколишнього середовища на $[x_1, 0]$ і $(0, x_2]$ та визначаються через густини $f_{1,2}$ відповідно

$$F_1 = \int_{x_1}^0 f_1(x, t) \rho_1 S dx, \quad F_2 = \int_0^{x_2} f_2(x, t) \rho_2 S dx,$$

$T_{1,2}$ — пружні сили, що виникають в поперечних перерізах $x_{1,2}$ відповідно. Використовуючи закон Гука та враховуючи напрямки дії $T_{1,2}$ (Рис. 1.8), запишемо

$$T_1 = -E_1 S (u_1)'_x|_{x=x_1}, \quad T_2 = E_2 S (u_2)'_x|_{x=x_2}.$$

Отримані вирази для сил підставляємо в другий закон Н'ютона (26), при цьому, спрямовуємо $x_1 \rightarrow 0-$, а $x_2 \rightarrow 0+$. Всі інтегральні доданки прямують до нуля ($F_{\text{ін}} \rightarrow 0$, $F_{1,2} \rightarrow 0$), а динамічна умова зшивання матиме вигляд

$$0 = -E_1 S (u_1)'_x|_{x=0-} + E_2 S (u_2)'_x|_{x=0+}, \quad t \geq 0,$$

або

$$E_1(u_1)'_x|_{x=0-} = E_2(u_2)'_x|_{x=0+}, \quad t \geq 0. \quad (27)$$

Таким чином, задача математичної фізики (математична модель), яка описує малі повздовжні коливання кусково-однорідного стержня сталого поперечного перерізу у *вип. а)* (однорідні частини з'єднані на-пряму), складається з двох хвильових рівнянь (21), чотирьох початкових умов (22), двох крайових умов (23) і (24) та двох умов зшивання (25) і (27).

Розглянемо *вип. б)*, коли однорідні частини з'єднані через абсолютно тверду прокладку маси M (Рис. 1.9).

Оскільки прокладка, через яку з'єднуються однорідні частини стержня, абсолютно тверда (недеформівна), то в процесі коливань вона не змінює своєї форми, а всі її точки рухаються однаково. Тоді прокладку можна розглядати як матеріальну точку (точкову масу), знехтувавши її розмірами. В таких умовах кусково-однорідний стержень суто математично (не геометрично) займатиме відрізок $[-l_1, l_2]$ так само, як і у *вип. а)*. При цьому, точка $x = 0$ — це точка з'єднання однорідних частин, в якій додатково присутня точкова маса M (прокладка).

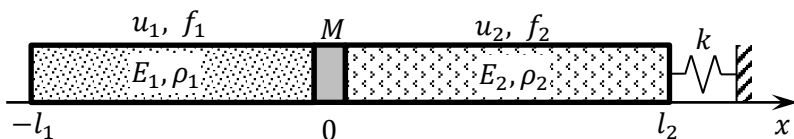


Рис. 1.9

В таких умовах фізична ситуація в однорідних складових стержня та на його кінцях не змінилась у порівнянні із *вип. а)*. Також незмінним є і початковий стан стержня. Тому у *вип. б)*, який розглядається, задача математичної фізики, яка описує коливання, включатиме ті самі рівняння (21), початкові умови (22) та крайові умови (23) і (24). Оскільки прокладка абсолютно тверда і всі її точки рухаються за одним законом, то граничні значення відхилень $u_1|_{x=0-}$ та $u_2|_{x=0+}$ мають співпадати. Тому кінематична умова зшивання (25) також залишається.

Відрізнятиметься *вип. б)* від *вип. а)* лише динамічною умовою зшивання в точці $x = 0$, в якій має бути врахована точкова маса (прокладка). Запишемо другій закон Н'ютона для прокладки маси M (точкової маси) (Рис. 1.10), що з'єднує однорідні частини стержня

$$M(u_1)''_{tt}|_{x=0-} = T_1 + T_2,$$

де ліва частина — це сила інерції прокладки (матеріальної точки маси M), $T_{1,2}$ — сили пружності в граничних поперечних перерізах $x = 0 -$ та $x = 0 +$, з якими пружні ділянки стержня діють на прокладку. Враховуючи закон Гука та напрямки дії сил $T_{1,2}$ (Рис. 1.10), з другого закону Н'ютона отримаємо динамічну умову зшивання

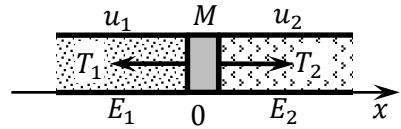


Рис. 1.10

$$M(u_1)''_{tt}|_{x=0-} = E_2 S(u_1)'_{x=0+} - E_1 S(u_2)'_{x=0-}, \quad t \geq 0. \quad (28)$$

Якщо врахувати першу (кінематичну) умову зшивання, то для сили інерції прокладки можна використати вираз $M(u_1)''_{tt}|_{x=0+}$. При $M = 0$ (прокладка відсутня) умова зшивання (28) перетворюється на умову зшивання (27), отриману у вип. а).

Отже, задача математичної фізики у вип. б) (однорідні частини з'єднані через жорстку прокладку) відрізняється від задачі у вип. а) (однорідні частини з'єднані напряму, без прокладки) лише другою (динамічною) умовою зшивання. ■

Приклад 4. Вивести рівняння, що описує малі поперечні коливання струни. Записати початкові і крайові умови.

Струна — це тонка, натягнута нитка із жорстко закріпленими кінцями, яка не чинить опору зміні своєї форми. Нехай в положенні рівноваги струна натягнута за допомогою сили натягу T_0 , а її кінці жорстко закріплені. Будемо вважати, що сила натягу значно перевищує силу тяжіння, а тому останньою знехтуємо. Оскільки струна є тонкою, її поперечними розмірами можна знехтувати. Вважатимемо, що в стані спокою струна співпадає з відрізком $[0, l]$ осі Ox (l — довжина струни). Надамо точкам струни лагранжеві координати, які співпадають з їх положеннями рівноваги на осі Ox .

Всі зовнішні зусилля, які прикладатимуться до точок струни, діятимуть паралельно осі Oy (у поперечному напрямку). Тоді в процесі коливань профіль струни буде мати вигляд плоскої кривої, яка лежить в площині Oxy . Якщо вважати, що відхилення точок струни від їх

положень рівноваги значно менші за довжину струни, то можна припустити, що точки струни рухаються лише у напрямку осі Oy (відхиленнями точок струни в повздовжньому напрямку можна знехтувати).

Позначимо через $u = u(x, t)$ відхилення у напрямку Oy точки струни з координатою $x \in [0, l]$ в момент часу $t \geq 0$. Тоді в кожен фіксований момент часу $t \geq 0$ струна має форму, яка співпадає з плоскою кривою, що описується рівнянням

$$y = u(x, t), \quad 0 \leq x \leq l. \quad (29)$$

Під малими коливаннями будемо вважати такі коливання, за яких $u \ll l$, $u'_x \ll 1$. Причому, u та u'_x будуть настільки малими, що їх квадратами та добутками можна знехтувати.

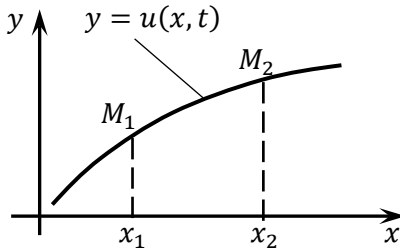


Рис. 1.11

В таких припущеннях відстані між точками струни практично не змінюються. Розглянемо дві довільні точки струни з координатами x_1 та x_2 , $x_1 < x_2$. В стані спокою, відстань між цими точками дорівнює $x_2 - x_1$. В довільний фіксований момент часу ці точки перейдуть в точки

M_1 та M_2 кривої (29) (Рис. 1.11), а точки струни, які лежать між ними, — в дугу $\widehat{M_1 M_2}$ цієї кривої, довжина якої

$$|\widehat{M_1 M_2}| = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (u'_x)^2} dx \approx |(u'_x)^2 \approx 0| \approx \int_{x_1}^{x_2} dx = x_2 - x_1.$$

Оскільки в процесі коливань жодна ділянка струни не змінює своєї довжини, то і абсолютна величина сили натягу всередині струни не змінюється і співпадає із абсолютною величиною T_0 сили натягу в струні в стані спокою.

Для виведення рівняння коливань струни виділимо на ній довільну внутрішню ділянку $[x_1, x_2]$, $0 < x_1 < x_2 < l$, та розглянемо її в довільний фіксований момент часу $t > 0$. Нехай кінці ділянки перейшли в точки M_1 , M_2 кривої (29), а сама ділянка — в дугу $\widehat{M_1 M_2}$ цієї кривої (Рис. 1.12). Запишемо другий закон Н'ютона

$$\vec{F}_{\text{ін}} = \vec{R}, \quad (30)$$

де $\vec{F}_{\text{ін}}$ — сила інерції виділеного фрагменту струни, $\vec{R}$ — рівнодійна всіх зовнішніх по відношенню до виділеного фрагменту сил.

Оскільки точки струни в процесі коливань рухаються лише у напрямку осі Oy , то і вектор сили інерції $\vec{F}_{\text{ін}}$ паралельний цій осі

$$\vec{F}_{\text{ін}} = F_{\text{ін}}\vec{j} = \vec{j} \int_{x_1}^{x_2} \rho u''_{tt} dx,$$

де $\vec{j}$ — орт осі Oy , $\rho = \text{const} > 0$ — лінійна густина струни (маса одиниці довжини струни).

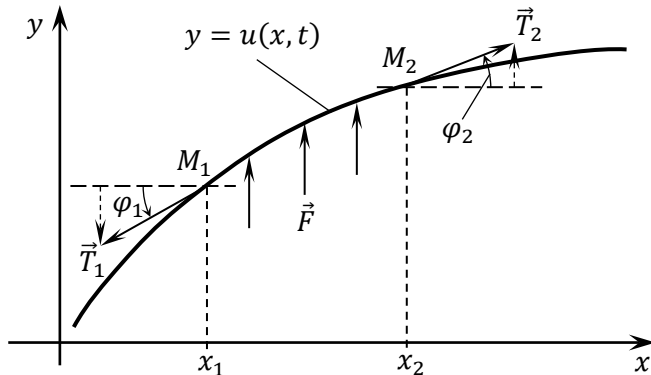


Рис. 1.12

В точках M_1 та M_2 з боку зовнішніх ділянок струни на виділену ділянку будуть діяти сили натягу $\vec{T}_1$ та $\vec{T}_2$, крім цього, з боку навколишнього середовища на точки струни можуть діяти масові сили різної природи $\vec{F}$ (Рис. 1.12). Тоді

$$\vec{R} = \vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{F}.$$

Відповідно до припущень масові сили $\vec{F}$ напрямлені вздовж осі Oy . Тоді

$$\vec{F} = F\vec{j} = \vec{j} \int_{x_1}^{x_2} \rho f(x, t) dx,$$

де f — масова густина сил, що діють з боку навколишнього середовища.

Для визначення напрямків дії сил натягу $\vec{T}_{1,2}$ припустимо, що похідна $u'_x > 0$. В такому разі профіль струни визначається графіком строго зростаючої функції. Оскільки струна не чинить опору зміні своєї форми, то

$\vec{T}_{1,2}$ напрямлені вздовж дотичних до струни в точках $M_{1,2}$, як це показано на Рис. 1.12, при цьому $|\vec{T}_{1,2}| = T_0$.

Спроектуємо другий закон Н'ютона (30) на вісь Oy (проекція на вісь Ox дає тотожність $0 = 0$). З урахуванням виразів для сили інерції $\vec{F}_{\text{ін}}$, масових сил $\vec{F}$ та напрямків дії сил натягу $\vec{T}_{1,2}$ (Рис. 1.12) запишемо

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho u''_{tt} dx = \int_{x_1}^{x_2} \rho f(x, t) dx - T_0 \sin \varphi_1 + T_0 \sin \varphi_2, \quad (31)$$

де $\varphi_{1,2}$ — кути нахилу дотичних до струни в точках $M_{1,2}$ (Рис. 1.12).

За малих відхилень u точок струни кути нахилу дотичних також будуть малими. Тому можемо записати

$$\sin \varphi_{1,2} \approx \operatorname{tg} \varphi_{1,2} = u'_x|_{x=x_{1,2}}.$$

Тоді (31) перепишемо у вигляді

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho u''_{tt} dx = \int_{x_1}^{x_2} \rho f(x, t) dx + T_0 (u'_x|_{x=x_2} - u'_x|_{x=x_1}),$$

або, використовуючи формулу Н'ютона-Лейбніца,

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho u''_{tt} dx = \int_{x_1}^{x_2} \rho f(x, t) dx + \int_{x_1}^{x_2} T_0 u''_{xx} dx. \quad (32)$$

Отримана рівність (32) виконується на довільній внутрішній ділянці $[x_1, x_2] \subset (0, l)$ струни та у довільний момент часу $t > 0$.

Оскільки ділянка $[x_1, x_2]$ обиралась довільним чином, то можна перейти до рівності підінтегральних виразів (операцію інтегрування "опустити"). В результаті отримаємо *рівняння малих поперечних коливань струни*

$$u''_{tt} = a^2 u''_{xx} + f(x, t), \quad 0 < x < l, t > 0, \quad (33)$$

де $a^2 = \frac{T}{\rho} > 0$.

Математично рівняння (33) повторює рівняння (10) (с. 9), яке описує повздовжні коливання пружного стержня.

Для повного опису малих поперечних коливань струни рівняння (33) слід доповнити *початковими* і *крайовими* умовами.

Початкові умови математично співпадають з умовами (11) (с. 9), які були записані в *прикладі 1* для рівняння повздовжніх коливань стержня,

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l. \quad (34)$$

Фізично, перша з умов (34) задає початкові відхилення точок струни, а друга — початкові швидкості їх руху.

На відміну від опису процесу малих повздовжніх коливань стержня при описі малих поперечних коливань струни вибір крайових умов не такий широкий. Відповідно до фізичного опису процесу в стані спокою струна має бути розтягнута за допомогою сили натягу T_0 , а її кінці — зафіксовані (жорстко закріпленими). Такими вони повинні залишатись і в процесі коливань, аби не втратити натягу в струні. Тому в ході коливань кінці струни весь час перебувають у своїх положеннях рівноваги, тобто мають нульові відхилення. В результаті запишемо *крайові умови*

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0, \quad t \geq 0. \quad (35)$$

Крайові умови (35) — це крайові умови I роду, аналогічні до умов (12) на с. 10.

Оскільки математично рівняння коливань струни (33) повторює рівняння коливань стержня (10) (с. 9), з *прикладу 1*, то до рівняння (33), суто математично, можна дописувати крайові умови й інших типів. Але фізично їх пояснення не таке очевидне, як у випадку коливань стержня. Тому при описі коливань струни крайові умови, які відмінні від умов (35), використовуються вкрай рідко. ■

Приклад 5. *Записати задачу математичної фізики, яка описує малі поперечні коливання струни із закріпленими кінцями під дією точкової сили, що прикладена до внутрішньої точки струни. В початковий момент часу струна перебувала в стані спокою.*

Нехай струна в стані спокою займає відрізок $[0, l]$ осі Ox . При $t > 0$ у внутрішній точці $x_0 \in (0, l)$ діє точкова сила $F(t)$ (Рис. 1.13). Розіб'ємо

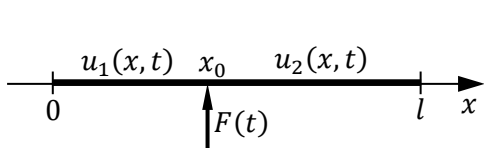


Рис. 1.13

струну на дві ділянки: $[0, x_0)$ та $(x_0, l]$. Позначимо через u_1 поперечні відхилення точок струни на першій з них, а через u_2 — на другій.

Вважаємо, що струна є однорідною. За межами точки x_0 на струну не діють ніякі зовнішні сили. Тому на проміжках $(0, x_0)$ і (x_0, l) можемо

записати два однорідних хвильових рівняння відносно функцій u_1 та u_2

$$\begin{aligned}(u_1)''_{tt} - a^2(u_1)''_{xx} &= 0, \quad 0 < x < x_0, \quad t > 0, \\ (u_2)''_{tt} - a^2(u_2)''_{xx} &= 0, \quad x_0 < x < l, \quad t > 0,\end{aligned}\tag{36}$$

де $a^2 = \frac{T_0}{\rho}$, T_0 — абсолютна величина сили натягу в струні, ρ — лінійна густина струни.

В початковий момент часу струна перебувала в стані спокою. Тому матимемо такі початкові умови

$$\begin{aligned}u_1|_{t=0} &= 0, \quad (u_1)'_t|_{t=0} = 0, \quad 0 \leq x < x_0, \\ u_2|_{t=0} &= 0, \quad (u_2)'_t|_{t=0} = 0, \quad x_0 < x \leq l.\end{aligned}\tag{37}$$

Кінці струни жорстко закріплені. Тому при $x = 0$ та $x = l$ крайові умови матимуть вигляд

$$u_1|_{x=0} = 0, \quad u_2|_{x=l} = 0, \quad t \geq 0.\tag{38}$$

Для повної постановки задачі потрібно ще записати умови зшивання (спряження) в точці x_0 , точці прикладання точкової сили. Оскільки струна не розривається на окремі шматки в точці прикладання сили, то першою умовою є умова неперервності відхилень при $x = x_0$

$$u_1|_{x=x_0-0} = u_2|_{x=x_0+0}, \quad t \geq 0.\tag{39}$$

Умова (39) є кінематичною умовою зшивання.

Другою умовою зшивання є динамічна умова. Для її виведення виділимо ділянку струни (x_1, x_2) , яка містить точку x_0 . В довільний момент часу t ділянка (x_1, x_2) , внаслідок відхилень точок струни від їх положень рівноваги, перейде у дугу M_1M_2 кривої, що є профілем струни (Рис. 1.14). Використовуючи ті самі міркування, що і в прикладі 4 при виведенні рівняння коливань струни, запишемо для виділеної ділянки проекцію II закону Н'ютона на вісь Oy

$$(\vec{F}_{\text{ін}})_{Oy} = (\vec{R})_{Oy},\tag{40}$$

де $\vec{F}_{\text{ін}}$ — сила інерції ділянки (x_1, x_2) , проекція якої на Oy запишеться у вигляді

$$(\vec{F}_{\text{ін}})_{Oy} = \int_{x_1}^{x_0} \rho(u_1)''_{tt} dx + \int_{x_0}^{x_2} \rho(u_2)''_{tt} dx,$$

$\vec{R}$ — рівнодійна всіх зовнішніх сил, прикладених до (x_1, x_2) . При цьому,

$$\vec{R} = \vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{F}(t),$$

де $\vec{T}_{1,2}$ — сили натягу, з якими зовнішні ділянки струни діють на виділену ділянку в точках $M_{1,2}$ відповідно, $\vec{F}(t) = F(t)\vec{j}$ — точкова сила, що діє в точці x_0 , $\vec{j}$ — одиничний орт осі Oy (Рис. 1.14).

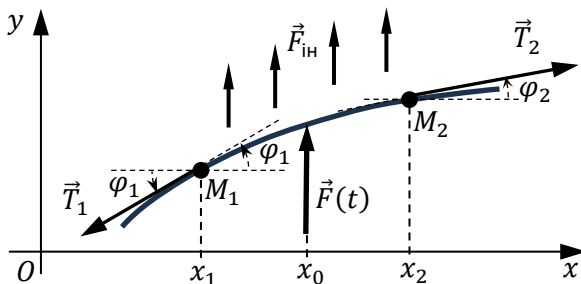


Рис. 1.14

Проектуючи рівнодійну $\vec{R}$ на вісь Oy , запишемо

$$(\vec{R})_{Oy} = -T_0 \sin \varphi_1 + T_0 \sin \varphi_2 + F(t),$$

$\varphi_{1,2}$ — кути нахилу дотичних до кривої, що визначає профіль струни, в точках $M_{1,2}$, вздовж яких напрямлені сили натягу. Оскільки для струни розглядаються малі поперечні коливання, то можна вважати, що

$$\sin \varphi_{1,2} \approx \operatorname{tg} \varphi_{1,2} = (u_{1,2})'_x \Big|_{x=x_{1,2}}.$$

Результати проведених міркувань підставляємо в рівність (40)

$$\int_{x_1}^{x_0} \rho(u_1)''_{tt} dx + \int_{x_0}^{x_2} \rho(u_2)''_{tt} dx = T_0((u_2)'_x|_{x=x_2} - (u_1)'_x|_{x=x_1}) + F(t),$$

після чого спрямовуємо $x_1 \rightarrow x_0 - 0$, $x_2 \rightarrow x_0 + 0$. Отримаємо динамічну умову зшивання в точці x_0 , яка враховує дію точкової сили

$$T_0((u_2)'_x|_{x=x_2} - (u_1)'_x|_{x=x_1}) + F(t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (41)$$

Задача математичної фізики, яка описує коливання струни під дією точкової сили, прикладеної у внутрішній точці, складається з рівнянь (36), початкових умов (37), крайових умов (38) та умов зшивання (спряження) (39) і (41). ■

Завдання для самостійної роботи

Задача 1. Однорідний пружний стержень довжини l має форму

зрізаного конуса з радіусами основ r, R , $0 < r < R \ll l$. Вивести рівняння малих повздовжніх коливань такого стержня. Записати крайову задачу, якщо основа радіуса r жорстко закріплена, а на основу радіуса R діє зовнішня сила $F(t)$, в початковий момент часу поперечним перерізам стержня надали початкових відхилень, початкові швидкості — нульові.

Задача 2. Записати задачу, що описує малі повздовжні коливання однорідного пружного стержня сталого поперечного перерізу і довжини l , лівий кінець якого ($x = 0$) вільний, а правий ($x = l$) — рухається за відомим законом. В початковий момент часу стержень перебував у стані спокою.

Задача 3. Записати задачу, що описує малі поперечні коливання струни, на яку діють зовнішні масові сили із густиною f . В початковий момент часу задані відхилення точок струни (початковий профіль струни), початкові швидкості відсутні (нульові).

Задача 4. Записати задачу, що описує малі повздовжні коливання однорідного пружного стержня сталого поперечного перерізу і довжини l , який перебуває під дією зовнішніх масових сил із густиною f . Лівий кінець стержня ($x = 0$) закріплено пружно, а правий ($x = l$) — жорстко. В початковий момент часу точкам стержня надали початкових швидкостей, початкові відхилення точок — нульові.

Задача 5. Записати задачу, що описує малі вільні поперечні коливання струни, які викликані початковими швидкостями точок струни. Початкові відхилення відсутні (нульові).

Задача 6. Записати задачу, що описує малі повздовжні коливання однорідного пружного стержня сталого поперечного перерізу і довжини l , на який з боку навколишнього середовища діють зовнішні сили пружності (до бічної поверхні стержня приєднано пружини, які чинять опір коливанням, масова густина таких сил пропорційна відхиленням точок стержня). Кінець $x = 0$ жорстко закріплений, а на кінець $x = l$ діє зовнішня задана сила. В початковий момент часу стержень перебував у стані спокою.

Задача 7. Записати задачу, що описує малі поперечні коливання струни, на яку діють зовнішні сили опору, пропорційні швидкостям руху її точок (масова густина сил опору пропорційна швидкостям руху). В початковий момент часу точкам струна надано початкові відхилення та швидкості.

Задача 8. Записати задачу, що описує малі повздовжні коливання однорідного пружного стержня сталого поперечного перерізу і довжини l , на кінець $x = 0$ якого діє задана зовнішня сила, а інший кінець $x = l$ закріплено пружно. В початковий момент часу точки стержня отримали задані відхилення, а їх швидкості нульові.

Задача 9. Записати задачу, що описує малі поперечні коливання струни, на яку діють зовнішні масові сили з густиною f . В початковий момент часу струна перебувала в стані спокою.

Задача 10. Записати задачу, що описує малі повздовжні коливання однорідного пружного стержня сталого поперечного перерізу і довжини l , на який з боку навколишнього середовища діють зовнішні сили пружності (до бічної поверхні стержня приєднано пружини, які чинять опір коливанням, масова густина таких сил пропорційна відхиленням точок стержня). Кінець $x = 0$ стержня рухається за відомим законом, а інший, $x = l$ — жорстко закріплений. В початковий момент часу точкам стержня надали початкових швидкостей, початкові відхилення нульові.

Задача 11. Записати задачу, що описує малі поперечні коливання струни, на яку діють зовнішні сили опору, пропорційні швидкостям руху її точок (масова густина сил опору пропорційна швидкостям руху). В початковий момент часу точкам струни надали початкових відхилень (відомий початковий профіль струни), початкові швидкості нульові.

Задача 12. Кусково-однорідний, пружний стержень сталого поперечного перерізу складається з двох однорідних частин, які з'єднані між собою напругою. В точці з'єднання ($x = 0$) на стержень діє зовнішня точкова сила $F(t)$. Записати задачу, що описує малі повздовжні коливання такого стержня, якщо один з його кінців жорстко

закріплений, а інший — вільний. В початковий момент часу стержень перебував у стані спокою.

Задача 13. В стані спокою струна займає відрізок $[-l, l]$. В точці $x = 0$ до струни прикріплено абсолютно жорстку кульку маси M (точкова маса). Записати задачу, що описує малі, поперечні коливання такої струни, якщо в початковий момент часу точкам струни надали початкових швидкостей, початкові відхилення нульові.

Задача 14. Кусково-однорідний, пружний стержень сталого поперечного перерізу складається з двох однорідних частин, які з'єднані між собою напряду. В точці з'єднання ($x = 0$) на стержень діє зовнішня точкова сила опору, яка пропорційна швидкості. Один з кінців стержня закріплений пружно, а на інший — діє задана сила. В початковий момент часу точкам стержня надали початкових відхилень, початкові швидкості нульові.

Задача 15. В стані спокою струна займає відрізок $[-l_1, l_2]$. В точці $x = 0$ до струни прикріплено абсолютно жорстку кульку маси M (точкова маса), до якої приєднано пружину жорсткості k . По один бік від кульки, на проміжку $(-l_1, 0)$, на струну діють зовнішні масові сили із густиною f , по інший бік — масові сили відсутні. Записати задачу, що описує малі, поперечні коливання такої струни, якщо в початковий момент часу струна перебувала в стані спокою.

Задача 16. До одного з кінців однорідного, пружного стержня сталого поперечного перерізу приєднано абсолютно твердий вантаж маси M (точкову масу), на який діє зовнішня сила опору, пропорційна швидкості. Інший кінець — жорстко закріплений. Записати задачу, що описує малі, повздовжні коливання такого стержня, якщо в початковий момент часу його точкам надали початкові відхилення та швидкості.

Задача 17. В стані спокою струна займає відрізок $[-l, l]$. В точці $x = 0$ до струни прикріплено абсолютно жорстку кульку маси M (точкова маса), на яку діє зовнішня сила $F(t)$ (точкова сила). Записати задачу, що описує малі, поперечні коливання такої струни, якщо в початковий момент часу вона перебувала в стані спокою.

Задача 18. До одного з кінців однорідного, пружного стержня сталого поперечного перерізу приєднано абсолютно твердий вантаж маси M (точкову масу), до якого в свою чергу прикріплено пружину жорсткістю k . На інший кінець — діє задана зовнішня сила. Записати задачу, що описує малі, повздовжні коливання такого стержня, якщо в початковий момент часу точки стержня отримали початкові швидкості, а їх відхилення нульові.

Задача 19. В стані спокою струна займає відрізок $[0, l]$. В точці $x_0 \in (0, l)$ на струну діє зовнішня точкова сила $F(t)$. Записати задачу, яка описує малі, поперечні коливання такої струни, якщо в початковий момент часу вона перебувала в стані спокою.

Задача 20. Кусково-однорідний, пружний стержень сталого поперечного перерізу складено з двох однорідних частин, які з'єднані через абсолютно тверду прокладку маси M , на яку діє зовнішня сила $F(t)$. Один із кінців стержня жорстко закріплений, а інший вільний. Записати задачу, що описує малі, повздовжні коливання такого стержня, якщо в початковий момент часу точкам стержня надано початкових відхилень, початкові швидкості нульові.

Задача 21. В стані спокою струна займає відрізок $[0, l]$. В точці $x_0 \in (0, l)$ до струни приєднано пружину жорсткістю k , з боку якої в ході коливань діє зовнішня точкова пружна сила, пропорційна відхиленню точки x_0 від положення рівноваги. Записати задачу, що описує малі, поперечні коливання такої струни, якщо на проміжку (x_0, l) на струну діють масові сили із густиною f , а на проміжку $(0, x_0)$ таких сил немає. В початковий момент часу струна перебувала в стані спокою.

Задача 22. Кусково-однорідний, пружний стержень сталого поперечного перерізу складено з двох однорідних частин, які з'єднані через абсолютно тверду прокладку маси M , на яку з боку навколишнього середовища діє сила опору, пропорційна швидкості. На один із кінців стержня діє зовнішня сила, інший кінець пружно закріплений. Записати задачу, що описує малі, повздовжні коливання такого стержня, якщо в початковий момент часу точкам стержня надано початкові

відхилення та швидкості.

1.1.2. Багатовимірні задачі для хвильового рівняння

Приклади розв'язання задач

Приклад 1. Вивести рівняння малих, поперечних коливань мембрани. Записати початкові і крайові умови, що описують даний процес.

Під мембраною будемо розуміти тонку пружну плівку, яка розтягнута за допомогою рівномірного натягу T_0 , прикладеного до її межі, і яка не чинить опору зміні своєї форми. За своїми фізичними характеристиками мембрана схожа із струною, але є двовимірним тілом. Для збереження незмінного натягу всередині мембрани її межа вважається жорстко закріпленою (по аналогії зі струною).

Вважаємо, що в стані спокою мембрана займає в площині Oxy двовимірну область Ω . В ході коливань зовнішні зусилля, які прикладаються до мембрани, діють лише в поперечному напрямку Oz , перпендикулярному до площини Oxy . Якщо відхилення точок мембрани від їх положень рівноваги достатньо малі у порівнянні з її розмірами, то в ході моделювання процесу можемо знехтувати рухами точок мембрани у повздовжніх напрямках Ox та Oy , вважаючи, що вони рухаються лише в поперечному напрямку Oz . За таких припущень точки мембрани однозначно визначаються своїми геометричними позиціями, що вони займають в площині Oxy , перебуваючи в стані спокою. Таким чином, кожна точка мембрани позначатиметься ("нумеруватиметься") координатами x, y , які визначають її положення рівноваги в площині Oxy .

Позначимо через $u = u(x, y, t)$ поперечні відхилення точки мембрани з координатами x, y в момент часу $t \geq 0$. При цьому, відхилення u вважатимемо на стільки малими у порівнянні із геометричними розмірами мембрани, що $u'_x, u'_y \ll 1$. Тому квадратами величин u'_x, u'_y та їхніми добутками можна знехтувати. За таких припущень, по аналогії із струною, можемо встановити, що в процесі коливань відстані між точками мембрани змінюються незначним чином, і цими змінами можна знехтувати. В наслідок цього, ділянки мембрани не деформуватимуться, а це означатиме, що всередині мембрани не виникають додаткові пружні сили (мембрана — пружна плівка), які впливають на натяг.

Тому в процесі коливань абсолютна величина сил натягу в мембрані не змінюватиметься і відповідатиме початковому натягу T_0 , будуть змінюватись лише напрямки, в яких ці сили діють.

Розглянемо довільну внутрішню ділянку мембрани S , яка компактно належить Ω ($\bar{S} \subset \Omega$). Тоді межа $\partial S =: l$, не має спільних точок з межею мембрани. Нехай в довільний фіксований момент часу $t > 0$ вибрана ділянка перейшла у поверхню S' , а її межа l — в криву l' (Рис. 1.15).

Запишемо для цієї ділянки мембрани другий закон Н'ютона

$$\vec{F}_{\text{ін}} = \vec{R}, \quad (42)$$

де $\vec{F}_{\text{ін}}$ — сила інерції виділеної ділянки мембрани, $\vec{R}$ — рівнодійна всіх зовнішніх по відношенню до виділеної ділянки сил, що діють на неї.

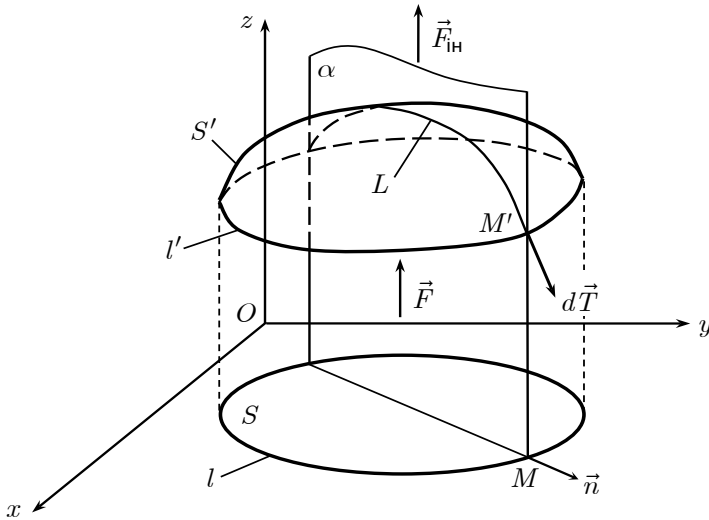


Рис. 1.15

Оскільки точки мембрани рухаються лише в поперечному напрямку Oz , то для виведення рівняння коливань другий закон Н'ютона (42) досить розглядати лише в проекції на вісь Oz . Для сили інерції запишемо

$$(\vec{F}_{\text{ін}})_{Oz} = \int_S u''_{tt} \rho \, dx dy \quad (43)$$

де $\rho = \text{const} > 0$ — поверхнева густина мембрани (маса одиниці площі мембрани).

В ході коливань виділена ділянка мембрани буде взаємодіяти із

зовнішньою частиною мембрани внаслідок наявного в мембрані натягу, який буде розподілений вздовж кривої l' , яка обмежує ділянку в деформованому стані. Силу натягу, з якою зовнішня частина мембрани діє на виділену, позначимо через $\vec{T}$. Крім цього, на внутрішні точки мембрани можуть діяти масові сили різної природі. Це і внутрішні сили опору (в'язкості), зовнішні сили, які діють з боку навколишнього середовища. Позначимо всі сили, які діють на точки мембрани і не пов'язані із натягом, через $\vec{F}$. Тоді в законі Н'ютона (42)

$$\vec{R} = \vec{F} + \vec{T}. \quad (44)$$

Зауважимо, що сили $\vec{F}$ діють у поперечному до мембрани напрямку. Тому відмінною від нуля буде лише компонента, напрямлена вздовж осі Oz . Оскільки природа сил $\vec{F}$ досить різноманітна, то запишемо сумарне їх значення через масову густину f — силу, віднесену до одиниці площі мембрани:

$$(\vec{F})_{Oz} = \int_S f(x, y, t) p dx dy. \quad (45)$$

Для визначення проекції на вісь Oz сумарної сили натягу $\vec{T}$, що діє вздовж всієї кривої l' , розглянемо на кривій l довільну точку M . У зафіксований момент часу t точка M перейде в точку M' , яка лежить на кривій l' (Рис. 1.15). В точці M проведемо вектор $\vec{n}$ зовнішньої нормалі до кривої l , і через точки M , M' , та вектор $\vec{n}$ проведемо площину α (Рис. 1.15). В околі точки M' на кривій l' виділимо малу ділянку dl' . Ця ділянка настільки мала, що можна вважати, що на ній напрямки сили натягу не змінюється і співпадає із напрямком цієї сили в точці M' . Для визначення цього напрямку, а також проекції сумарної сили натягу $d\vec{T}$, що діє вздовж dl' , на вісь Oz розглянемо перетин нашої мембрани площиною α . Площина α перетинає поверхню S' по плоскій кривій L (Рис. 1.15). Оскільки мембрана не чинить опору зміні своєї форми, то по аналогії зі струною сила натягу в точці M' напрямлена по дотичній до кривої L , як це показано на Рис. 1.16. Тоді проекція на вісь Oz сумарної сили натягу, яка діє на ділянку dl' , дорівнює

$$(d\vec{T})_{Oz} = -T_0 \sin \varphi dl',$$

де φ — кут між напрямком дотичної до L та напрямком $\vec{n}$ (Рис. 1.16).

При цьому,

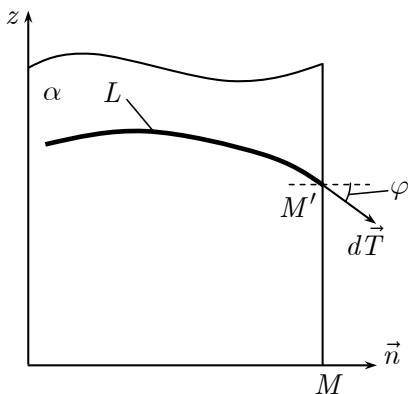


Рис. 1.16

$$\operatorname{tg} \varphi = - \left. \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right|_M.$$

Поява знаку "–" в останній рівності пов'язана з тим, що кут φ обчислюється за годинниковою стрілкою, тобто у від'ємному напрямку.

Оскільки розглядаються малі коливання мембрани, то кут φ буде настільки малим, що можна записати: $\sin \varphi \approx \varphi \approx \operatorname{tg} \varphi$. Тоді проекція на вісь Oz сили натягу, яка діє вздовж ділянки dl' , дорівнює

$$(d\vec{T})_{Oz} = -T_0 \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} dl'.$$

Інтегруємо вздовж всієї кривої l' і отримаємо сумарну проекцію на вісь Oz сили натягу, що діє на виділену ділянку мембрани збоку решти мембрани через цю криву. При цьому згадаємо, що в процесі коливань відстані між точками мембрани не змінюються. Тому $dl' \approx dl$, і можемо перейти до інтегрування вздовж кривої l . Запишемо

$$(\vec{T})_{Oz} = \oint_{l'} T_0 \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} dl' = \oint_l T_0 \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} dl. \quad (46)$$

Проектуємо другий закон Н'ютона (42) на вісь Oz і з урахуванням отриманих рівностей (43)...(46) матимемо

$$\int_S u''_{tt} \rho dx dy = \int_S f(x, y, t) \rho dx dy + \oint_l T_0 \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} dl.$$

Останній доданок переписуємо за допомогою формули Гаусса-Остроградського

$$\oint_l T_0 \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} dl = T_0 \oint_l \nabla u \cdot \vec{n} dl = T_0 \int_S \operatorname{div}(\nabla u) dx dy = T_0 \int_S \Delta u dx dy,$$

де $\Delta u = u''_{xx} + u''_{yy}$ — оператор Лапласа. Остаточно приходимо до інтегральної рівності

$$\int_S u''_{tt} \rho dx dy = \int_S f(x, y, t) \rho dx dy + T_0 \int_S \Delta u dx dy,$$

яка повинна виконуватись на довільній ділянці S мембрани, що компактно належить до Ω .

Оскільки ділянка S може обиратись довільно, то остання рівність матиме місце лише за у мови співпадіння підінтегральних виразів (інтегрування можна "опустити"). В результаті, приходимо до рівняння малих, поперечних коливань мембрани

$$u''_{tt} = a^2 \Delta u + f(x, y, t), \quad (x, y) \in \Omega, t > 0, \quad (47)$$

де $a^2 = \frac{T_0}{\rho} = \text{const} > 0$.

Рівняння (47) є двовимірним хвильовим рівнянням зі сталими коефіцієнтами.

Для повної постановки задачі математичної фізики, яка буде описувати розглядуваний процес коливань, рівняння (47) слід доповнити початковими та крайовою умовою.

Початкові умови записуємо аналогічно до одновимірного випадку:

$$u|_{t=0} = u_0(x, y), \quad u'_t|_{t=0} = v_0(x, y), \quad (x, y) \in \bar{\Omega}, \quad (48)$$

де u_0 і v_0 — задані функції, які задають початкові відхилення і початкові швидкості точок мембрани.

Згідно із умовами, в яких розглядаються коливання мембрани, її межа має бути жорстко закріпленою, тобто відхилення точок межи мембрани будуть нульовими. В результаті, запишемо крайову умову І роду, яка розглядається в кожній точці межи

$$u|_{(x,y) \in \partial\Omega} = 0, \quad t \geq 0. \quad (49)$$

При вивченні малих поперечних коливань мембрани крайові умови інших типів не розглядаються.

Задача математичної фізики, яка описує розглянутий процес, складається з

- двовимірного хвильового рівняння (47),
- початкових умов (48),
- крайової умови (49).



Приклад 2. Використовуючи рівняння руху Ейлера ідеальної рідини або газу, рівняння нерозривності та рівняння стану речовини, вивести рівняння акустичних коливань у просторі. Записати початкові та крайові умови.

Розглядаючи математичні моделі коливань твердих тіл (пружний стержень, струна, мембрана тощо), для їх геометричного опису використовувались лагранжеві координати. Особливістю такого підходу є те, що кожна точка тіла жорстко пов'язується зі своїми координатами, і ці координати однозначно ідентифікують її протягом усього процесу коливань. Такий підхід є природним при вивченні рухів твердих тіл, точки яких жорстко впорядковані, і цей порядок не змінюється протягом всього процесу. Якщо ж розглядати рух рідини або газу, то в таких тілах окремі їх частинки не пов'язані жорстко між собою і можуть перемішуватись. Тому використання лагранжевих координат стає неефективним. Для геометричного опису рухів рідин та газів використовується *ейлеровий* підхід, згідно з яким координати пов'язують не з точками тіла (лагранжевий підхід), а з точками простору (області). За такого підходу, якщо слідкувати за окремою точкою (частинкою) тіла, то в різні моменти часу вона перебуватиме в різних точках простору і матиме різні координати.

Якщо в просторі ввести декартову систему координат $Oxyz$, то для опису руху рідини або газу використовуються такі *характеристичні функції*:

$\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z, t) = (v_x, v_y, v_z)$ — *вектор швидкості* руху елементарної частинки середовища, яка в момент часу t перебуває в точці (x, y, z) простору;

$\rho = \rho(x, y, z, t)$ — *густина* елементарної частинки середовища, яка в момент часу t перебуває у точці (x, y, z) простору;

$p = p(x, y, z, t)$ — *тиск* в елементарній частинці середовища, яка в момент часу t перебуває у точці (x, y, z) простору.

Якщо рідина або газ ідеальні, то для визначення вказаних функцій маємо систему із 5-ти рівнянь:

а) *рівняння руху Ейлера*

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \left(v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{f}, \quad (50)$$

де $\mathbf{f} = \mathbf{f}(x, y, z, t)$ — вектор масової густини зовнішніх сил, що діють на частинки середовища;

б) *рівняння нерозривності*

$$\rho'_t + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0; \quad (51)$$

в) *термодинамічне рівняння стану середовища*, яке при адіабатичному процесі (процесі без надходження теплової енергії ззовні) можна подати у вигляді

$$p = g(\rho), \quad (52)$$

де g — експериментальна, строго зростаюча функція, вибір якої залежить від конкретних умов протікання процесу.

Рідина або газ називаються *ідеальними*, якщо всередині речовини виникають внутрішні сили реакції на зміну форми окремих її ділянок, які пов'язані виключно із тиском. Іншими внутрішніми силами (силами в'язкості тощо), які можуть виникати під час руху середовища, нехтуємо.

Система (50)...(52) є нелінійною системою диференціальних та функціонального рівнянь. Такі рівняння не є предметом розгляду в курсі "Рівнянь математичної фізики". Тому на базі цих рівнянь виведемо спрощену модель, яка описує *акустичні коливання*.

В процесі розповсюдження акустичних (звукових) коливань вважаємо, що масові сили відсутні ($\mathbf{f} = 0$), а частинки середовища здійснюють малі коливання навколо своїх положень рівноваги. При цьому, амплітуда таких коливань та максимальна швидкість руху частинок речовини є досить малими в порівнянні з характерними величинами: розміром області, де вивчаються коливання, швидкістю розповсюдження коливань (швидкістю звуку). Наприклад, під час людської розмови амплітуда коливань частинок у звуковій хвилі приблизно 200...300 ангстремів (1 ангстрем = 10^{-10} м), а їх максимальні швидкості руху менші за 1 м/год. При цьому, розміри аудиторії для практичних занять приблизно 10x15x3,5 м, а швидкість звуку в повітрі дорівнює 335...340 м/с. За таких умов можна знехтувати доданками, які включають квадрати швидкостей, градієнтів швидкостей та їхні добутки. В результаті таких припущень рівнянь руху Ейлера (50) запишуться у вигляді

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \nabla p. \quad (53)$$

Конденсацією (ущільненням) назвемо безрозмірну величину

$$u = u(x, y, z, t) = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0},$$

яка визначає відносну зміну густини речовини в процесі коливань, ρ_0 — гідростатична густина в речовині. При цьому, можемо стверджувати, що $|u| \ll 1$. Тоді

$$\rho = \rho_0(1 + u). \quad (54)$$

Зауважимо, що в стані спокою, коли відсутні рухи окремих частинок, у речовині встановлюються гідростатичні густина ρ_0 і тиск p_0 , $\rho_0, p_0 = \text{const} > 0$, і при цьому, $p_0 = g(\rho_0)$.

Підставляємо (54) у (52) і переписуємо рівняння стану (вважаємо, що g диференційована)

$$\begin{aligned} p &= g(\rho_0 + \rho_0 u) = g(\rho_0) + g'(\rho_0)(\rho_0 u) + O(u^2) \approx \\ &\approx p_0 + \rho_0 a^2 u, \end{aligned} \quad (55)$$

де $a^2 = g'(\rho_0) = \text{const} > 0$ (g — строго зростаюча, тому $g' > 0$).

Використовуючи (55), знаходимо

$$\nabla p = \rho_0 a^2 \nabla u.$$

Підставляємо отриману рівність, а також рівність (54), у (53)

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{a^2}{(1 + u)} \nabla u. \quad (56)$$

Припускаючи, що разом із u малими величинами будуть і компоненти вектора ∇u , праву частину (56) перепишемо у вигляді

$$\frac{1}{1 + u} \nabla u = (1 + O(u)) \nabla u = \nabla u + \underbrace{O(u) \nabla u}_{\approx 0} \approx \nabla u.$$

Тоді саму рівність (56) остаточно запишемо наступним чином

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -a^2 \nabla u. \quad (57)$$

Аналізуючи рівності (54), (55) та (57), можна отримати такий висновок: якщо знати конденсацію речовини u та початковий розподіл швидкостей

руху частинок середовища $\mathbf{v}|_{t=0}$, то з рівностей (54), (55) та проінтегрованої по t рівності (57) можна визначити всі основні характеристики руху середовища. Тому в подальшому за основну *характеристичну функцію* процесу виберемо саме конденсацію u .

Перепишемо з урахуванням зроблених припущень рівняння нерозривності (51). Підставляємо в це рівняння (54)

$$\begin{aligned}\rho_0 u'_t + \operatorname{div}(\rho_0(1+u)\mathbf{v}) &= 0 \quad \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \rho_0 u'_t + \rho_0(\operatorname{div} \mathbf{v} + \operatorname{div}(u \mathbf{v})) &= 0.\end{aligned}$$

В ході побудови математичної моделі ми вважаємо, що конденсація u та компоненти вектора швидкості $\mathbf{v}$ настільки малі, що малими є і градієнти цих величин. Тому $\operatorname{div}(u \mathbf{v}) \approx 0$, і останню рівність можна записати у вигляді

$$u'_t + \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (58)$$

З отриманих рівностей (57) та (58) виводимо рівняння для конденсації u . Для цього беремо дивергенцію лівої і правої частин (57), а (58) диференціюємо за t :

$$\operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -a^2 \operatorname{div} \nabla u, \quad u''_{tt} + \operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = 0.$$

Віднімаючи від першої рівності другу, можемо записати рівняння для конденсації u ($\operatorname{div} \nabla u = \Delta u = u''_{xx} + u''_{yy} + u''_{zz}$ — *оператор Лапласа*)

$$u''_{tt} = a^2 \Delta u, \quad (x, y, z) \in \Omega, t > 0, \quad (59)$$

де Ω — область, яку займає речовина, в якій розповсюджуються акустичні хвилі.

Рівняння (59) — *основне рівняння акустики*. Воно є тривимірним однорідним хвильовим рівнянням і за своїм виглядом повторює рівняння малих поперечних коливань струни (47) на с. 33, за тим виключенням, що отримане рівняння (59) є тривимірним рівнянням (має три просторові координати), а рівняння коливань мембрани — двовимірним.

Для повної постановки задачі математичної фізики, яка б описувала акустичні коливання в області Ω , хвильове рівняння (59) потрібно доповнити початковими та крайовими умовами.

Початкові умови. Перша початкова умова записується у вигляді

$$u|_{t=0} = u_0(x, y, z), \quad (x, y, z) \in \bar{\Omega}, \quad (60)$$

і визначає початковий розподіл конденсації речовини в $\bar{\Omega}$. Оскільки конденсація характеризує відносну зміну густини речовини, то фактично, початкова умова (60) описує початкову густину речовини в області Ω .

Для того, щоб отримати другу початкову умову, вважаємо, що задані початкові швидкості точок середовища $\mathbf{v}|_{t=0} = \mathbf{v}_0(x, y, z)$, $(x, y, z) \in \bar{\Omega}$. Тоді з рівності (58) запишемо

$$u'_t|_{t=0} = -\operatorname{div} \mathbf{v}|_{t=0} = -\operatorname{div} \mathbf{v}_0(x, y, z), \quad (x, y, z) \in \bar{\Omega}, \quad (61)$$

що і буде другою початковою умовою для рівняння (59).

Крайові умови на межі $\partial\Omega$. Якщо акустичні коливання вивчаються в області, яка заповнена ідеальною рідиною (наприклад, резервуар або басейн з водою), то у загальному випадку межа $\partial\Omega$ розбивається на дві складові: S , $S \subseteq \partial\Omega$, та $\partial\Omega \setminus S$. Ділянка S розглядається, як абсолютно тверда, непроникна стінка, а $\partial\Omega \setminus S$ — як вільна поверхня, без зовнішнього впливу (Рис. 1.17).

Рухаючись, частинки середовища не можуть проникати через абсолютно тверду стінку S . Тому на S проекція вектора швидкості $\mathbf{v}$ на зовнішню нормаль $\vec{\nu}$ дорівнює нулеві (Рис. 1.17):

$$(\mathbf{v} \cdot \vec{\nu})|_S = 0, \quad t \geq 0.$$

Диференціюємо отриману рівність по t (стінка S нерухома, тому нормаль $\vec{\nu}$ не залежить від часу t)

$$\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \cdot \vec{\nu} \right) \Big|_S = 0, \quad t \geq 0.$$

Підставляючи (57) в останню рівність, можемо записати крайову умову на абсолютно твердій, непроникній стінці S

$$-a^2(\nabla u \cdot \vec{\nu})|_S = 0, \quad t \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}} \Big|_S = 0, \quad t \geq 0. \quad (62)$$

На вільній поверхні $\partial\Omega \setminus S$ рідини з боку навколишнього середовища немає зовнішнього впливу, за виключенням атмосферного тиску, який співпадає з гідростатичним тиском p_0 . Тому на такій поверхні тиск у рідині завжди співпадає із гідростатичним. Відповідно до рівняння стану

гідростатичному тиску p_0 відповідає гідростатична густина ρ_0 . Тому на вільній поверхні $\partial\Omega \setminus S$ з урахуванням (54) запишемо

$$\rho|_{\partial\Omega \setminus S} = \rho_0(1 + u)|_{\partial\Omega \setminus S} = \rho_0, \quad t \geq 0,$$

звідки отримаємо крайову умову для конденсації

$$u|_{\partial\Omega \setminus S} = 0, \quad t \geq 0. \quad (63)$$

Тоді задача математичної фізики (крайова задача), яка описує акустичні коливання в ідеальній рідині, складається з рівняння акустики (59) (тривимірного хвильового рівняння), початкових умов (60), (61) та крайових умов (62), (63).

В окремих задачах вільна поверхня рідини може бути відсутньою. В цьому випадку $S = \partial\Omega$, і на всій межі маємо крайову умову (62), а крайова умова (63) відсутня. Такий випадок описує ситуацію, коли вся межа області $\partial\Omega$ є абсолютно твердою, непроникною стінкою.

При моделюванні акустичних коливань в ідеальному газі, суто фізично, неможливо реалізувати вільну поверхню на межі області. Тому в таких задачах крайова умова (63) не зустрічається.

Також в деяких задачах можлива ситуація, коли окрема ділянка межі S_0 (а можливо, і вся межа) є абсолютно твердою стінкою, яка коливається із частотою ω . В цьому випадку частинки середовища, які межують із S_0 , також коливаються з тією самою частотою, що призводить до того, що зміна густини речовини на поверхні S_0 буде підпорядкована закону коливань стінки. Тоді для конденсації на S_0 можна записати крайову умову вигляду

$$u|_{S_0} = U_0(x, y, z) \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (x, y, z) \in S_0, \quad t \geq 0, \quad (64)$$

де U_0 — задана функція, яка визначається через амплітуду коливань стінки S_0 . ■

Приклад 3. Записати задачу, яка описує малі вільні коливання круглої мембрани радіуса R , якщо в початковий момент часу точкам мембрани надали початкових швидкостей, початкові відхилення відсутні.

Для геометричного опису круглої мембрани виберемо систему координат Ox так, щоб її початок, точка O , співпадав із центром мем-

брани (Рис. 1.18). Тоді мембрана в площині Oxy займатиме кругову область

$$\Omega = \{(x, y): x^2 + y^2 < R^2\},$$

межею якої буде коло

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Коливання мембрани описуються двовимірним хвильовим рівнянням (47), с. 33, яке отримане в прикладі 1. Оскільки коливання вільні, то масова густина зовнішніх сил $f = 0$. Таким чином, маємо рівняння задачі

$$u''_{tt} = a^2 \Delta u, \quad x^2 + y^2 < R^2, \quad t > 0, \quad (65)$$

де $u = u(x, y, t)$, $x^2 + y^2 \leq R^2$, $t \geq 0$, — функція, що визначає поперечні відхилення мембрани.

На межі мембрани записуємо *крайову умову*, що описує жорстке закріплення (умова (49), с. 33)

$$u|_{x^2+y^2=R^2} = 0, \quad t \geq 0. \quad (66)$$

Згідно з умовою в початковий момент часу відхилення точок мембрани від їх положень рівноваги відсутні (нульові), але задані початкові швидкості. Тоді *початкові умови* задачі матимуть вигляд (умови (48), с. 33)

$$u|_{t=0} = 0, \quad u'_t|_{t=0} = v_0(x, y), \quad x^2 + y^2 \leq R^2, \quad (67)$$

де v_0 — задана функція, яка визначає початкові швидкості.

В результаті, в декартових координатах Oxy отримали крайову задачу математичної фізики (65)...(67). ■

Приклад 4. Записати задачу, яка описує розповсюдження акустичних коливань всередині півкулі, що заповнена ідеальною рідиною або газом. Плоска ділянка межі є абсолютно твердою, непроникною стінкою, а сферична — коливається із частотою ω . В початковий момент часу речовина була у стані спокою.

Виберемо систему координат так, щоб півкуля, в якій вивчаються акустичні коливання, займала там область, яка задається нерівностями

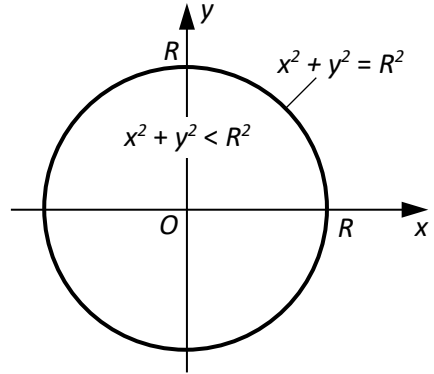


Рис. 1.18

(Рис. 1.19):

$$x^2 + y^2 + z^2 < R^2, \quad z > 0.$$

Межа такої області складається із двох ділянок: плоскої, яка лежить в площині Oxy і визначається співвідношеннями

$$z = 0, \quad x^2 + y^2 \leq R^2,$$

та сферичної (півсфери)

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \quad z > 0.$$

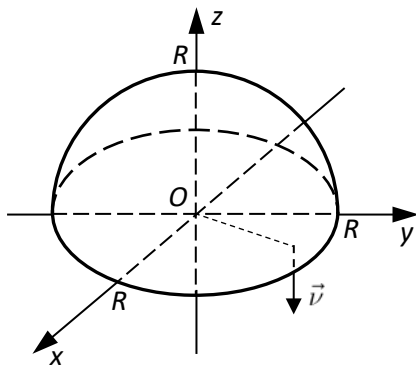


Рис. 1.19

Всередині півкулі запишемо *рівняння акустичних коливань* (59), с. 37, яке отримане в *прикладі 2*,

$$u''_{tt} = a^2 \Delta u, \quad x^2 + y^2 + z^2 < R^2, \quad z > 0, \quad t > 0, \quad (68)$$

де $u = u(x, y, z, t)$ — конденсація речовини.

В початковий момент часу речовина перебувала в стані спокою. Тому загальні початкові умови (60) та (61), с. 38, записані в *прикладі 2*, матимуть вигляд

$$u|_{t=0} = 0, \quad u'_t|_{t=0} = 0, \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, \quad z \geq 0. \quad (69)$$

Плоска (нижня) ділянка межі (Рис. 1.19) є абсолютно твердою, непроникною стінкою. Тому на цій ділянці використовуємо *крайову умову* (62), с. 38,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \vec{v}} \Big|_{z=0} &= - \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{z=0} = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow u'_y \Big|_{z=0} &= 0, \quad x^2 + y^2 < R^2, \quad t \geq 0. \end{aligned} \quad (70)$$

Сферична (верхня) ділянка межі (Рис. 1.19) здійснює коливання з частотою ω . Тому тут маємо *крайову умову* (64), с. 39,

$$u|_{x^2+y^2+z^2=R^2} = U_0(x, y, z) \sin(\omega t), \quad z > 0, \quad t \geq 0, \quad (71)$$

де вигляд функції U_0 залежить від амплітуди коливань сферичної ділянки межі.

В результаті отримали *задачу математичної фізики*, яка складається з однорідного хвильового рівняння (68), нульових початкових умов (69) та двох крайових умов (70) і (71), записаних на двох окремих ділянках межі. ■

Завдання для самостійної роботи

Задача 1. Записати задачу, яка описує малі поперечні коливання мембрани прямокутної форми, на яку з боку навколишнього середовища діють рівномірно розподілені сили із масовою густиною $f_0 \sin(\omega t)$. В початковий момент часу мембрана перебувала у стані спокою.

Задача 2. Записати задачу, яка описує вільні, малі поперечні коливання мембрани, що має форму круга радіуса R . Коливання зумовлені початковими відхиленнями точок мембрани від їх положень рівноваги, початкові швидкості відсутні.

Задача 3. Записати задачу, яка описує малі поперечні коливання мембрани, що має форму квадрата зі стороною b , якщо з боку навколишнього середовища діють зовнішні сили опору, пропорційні швидкості руху точок мембрани. В початковий момент часу точкам мембрани надали початкові швидкості, початкові відхилення відсутні.

Задача 4. Записати задачу, яка описує малі поперечні коливання мембрани, що має форму півкруга. На точки мембрани діють рівномірно розподілені зовнішні сили із масовою густиною $f_0 \cos(\omega t)$. В початковий момент часу задані відхилення точок мембрани від їх положень рівноваги, початкові швидкості відсутні.

Задача 5. Записати задачу, що описує малі поперечні коливання мембрани прямокутної форми, на яку з боку навколишнього середовища діють зовнішні сили, пропорційні відхиленням точок мембрани, напрямок дії сил протилежний до напрямку відхилень. В початковий момент часу точкам мембрани надані початкові швидкості, початкові відхилення відсутні.

Задача 6. Записати задачу, яка описує малі поперечні коливання мембрани, що має форму квадрата зі стороною b , якщо з боку навколишнього середовища діють сили опору, пропорційні швидкостям руху точок мембрани, а також масові сили із заданою густиною. В початковий момент часу мембрана перебувала в стані спокою.

Задача 7. Записати задачу, яка описує малі поперечні коливання

мембрани, що має форму круга радіуса R , на яку з боку навколишнього середовища діють рівномірно розподілені зовнішні сили із масовою густиною $f_1 \sin(\omega_1 t) + f_2 \cos(\omega_2 t)$. В початковий момент часу задані відхилення точок мембрани від їх положень рівноваги, початкові швидкості відсутні.

Задача 8. Записати задачу, яка описує вільні, малі поперечні коливання мембрани, що має форму півкруга. В початковий момент часу задані швидкості руху точок мембрани, початкові відхилення від їх положень рівноваги відсутні.

Задача 9. Записати задачу, яка описує розповсюдження акустичних коливань всередині резервуару, що має форму паралелепіпеда, і заповнений ідеальною рідиною. Верхня грань вільна, а решта — це абсолютно тверді, непроникні стінки. В початковий момент часу відомий розподіл швидкостей частинок рідини, початкова конденсація нульова.

Задача 10. Записати задачу, яка описує розповсюдження акустичних коливань всередині куба зі стороною b , який заповнений ідеальним газом. Грані куба є абсолютно твердими і непроникними стінками, але одна з них здійснює періодичні коливання з частотою ω . В початковий момент часу газ всередині куба перебував у стані спокою.

Задача 11. Записати задачу, яка описує розповсюдження акустичних коливань всередині циліндричного резервуару з радіусом основи R та висоти h , який заповнений ідеальною рідиною, якщо його нижня основа абсолютно тверда і непроникна, бічна поверхня коливається із частотою ω , а верхня основа є вільною поверхнею. В початковий момент часу відома конденсація рідини, початкові швидкості руху частинок рідини нульові.

Задача 12. Записати задачу, яка описує розповсюдження акустичних коливань всередині кулі радіуса R , що заповнена ідеальною рідиною або газом, якщо нижня півсфера, що обмежує кулю, є нерухомою, абсолютно твердою, непроникною стінкою, а верхня — коливається із частотою ω . В початковий момент часу задана конденсація речовини, початкові швидкості руху частинок середовища нульові.

Задача 13. Записати задачу, яка описує розповсюдження акустичних коливань всередині половини циліндра, що в декартових координатах визначається нерівностями: $x^2 + y^2 < R^2$, $0 < z < h$, $x > 0$. Верхня основа $z = h$ та нижня основа $z = 0$, а також плоска ділянка бічної поверхні $x = 0$, є абсолютно твердими і непроникними стінками, циліндрична ділянка межі здійснює коливання із частотою ω . В початковий момент часу задані швидкості руху частинок середовища, початкова конденсація нульова.

Задача 14. Записати задачу, яка описує розповсюдження акустичних коливань всередині чверті кулі, яка заповнена ідеальною рідиною, і в декартових координатах описується нерівностями: $x^2 + y^2 + z^2 < R^2$, $x, y > 0$. Сферична та плоска $x = 0$ ділянки межі є абсолютно твердими і непроникними стінками. Плоска ділянка $y = 0$ є вільною поверхнею. В початковий момент часу задані конденсація та швидкості руху частинок середовища.

1.2. Фізичні процеси, які приводять до задач для рівняння теплопровідності

1.2.1. Загальні припущення і закони

В даному підрозділі розглядаються теплові процеси, математичні моделі яких мають вигляд задач для рівняння теплопровідності. Вперше це рівняння виникло саме при описі таких процесів, за що і отримало свою назву.

Зробимо загальні припущення та сформулюємо загальні закони, які будуть використовуватись при математичному моделюванні теплових процесів.

Основною характеристикою, яка використовується при описанні теплових процесів, є температура. Якщо тіло нагріте нерівномірно, то функція, що описує його температуру, залежатиме від точки тіла (просторових координат) і буде змінюватися з часом.

В ході опису теплових процесів вважаємо, що температура змінюється так, що тепловими деформаціями тіл (змінами їх геометричних розмірів при нагріванні чи охолодженні) можна знехтувати. Тоді для визначення координат точок тіла можна використовувати їх геомет-

ричні координати.

Перше начало термодинаміки виражає закон збереження енергії: *вся теплова енергія Q , що передається в тіло, йде на зміну його внутрішньої енергії ΔU (зміну температури) та виконану механічну роботу A*

$$Q = \Delta U + A.$$

Оскільки розглядатимуться теплові процеси, в яких нехтуємо зміною геометричних розмірів тіл, то механічна робота відсутня ($A = 0$). За таких умов матимемо

$$Q = \Delta U. \quad (1)$$

Рівняння (1) ще називають *рівнянням теплового балансу*.

Зміна внутрішньої енергії тіла напряму пов'язана зі зміною його температури. Якщо протягом певного теплового процесу температура матеріальної точки маси m змінилась від $u_{\text{поч}}$ до $u_{\text{кін}}$, то зміна її *внутрішньої енергії* виражається формулою

$$\Delta U_{\text{м.т.}} = ct(u_{\text{кін}} - u_{\text{поч}}), \quad (2)$$

де c — питома теплоємність матеріалу.

Якщо тіло, що займає певну область Ω , нагріте нерівномірно (різні точки мають різну температуру), то всередині тіла відбувається перерозподіл теплової енергії. Відповідно до другого начала термодинаміки *теплова енергія буде передаватись від більш нагрітих ділянок тіла до менш нагрітих і ніколи навпаки*. Таким чином, перерозподіл тепла буде напрямлений на вирівнювання температури по всьому об'єму. Якщо перепади температури в тілі не дуже великі, то кількісно перерозподіл теплової енергії можна описати за допомогою закону Фур'є. Нехай температура в тілі Ω задається функцією $u = u(x, t)$, де $x \in \Omega$ — геометричні координати точок тіла, $t > 0$ — час. Тоді *тепловий потік q через поверхню S у напрямку нормалі $\vec{v}$* (Рис. 1.20) дорівнює

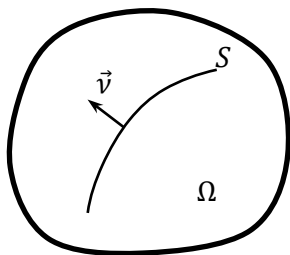


Рис. 1.20

$$q = -k \frac{\partial u}{\partial \vec{v}} \Big|_S, \quad (3)$$

1.2. Фізичні процеси, які приводять до задач для рівняння теплопровідності

де k — коефіцієнт внутрішньої теплопровідності. *Тепловий потік* — це фізична величина, яка визначає кількість тепла, що передається через одиницю площі поверхні за одиницю часу. Якщо тіло ізотропне та однорідне, то $k = \text{const} > 0$.

Закон Н'ютона конвективного теплообміну з навколишнім середовищем на поверхні тіла. Нехай тіло займає область Ω , поверхня якого $\partial\Omega$ кусково-гладка. Тоді за законом Н'ютона в ході теплообміну з навколишнім середовищем на поверхні тіла $\partial\Omega$ в напрямку внутрішньої нормалі (з навколишнього середовища в тіло) встановлюється тепловий потік

$$q|_{\partial\Omega} = \alpha(T_{\text{н.с.}} - u|_{\partial\Omega}), \quad (4)$$

де $u|_{\partial\Omega}$ — температура на поверхні тіла, $T_{\text{н.с.}}$ — температура навколишнього середовища, $\alpha > 0$ — експериментальна величина, яка не залежить від температур тіла та навколишнього середовища.

1.2.2. Задачі для одновимірного рівняння теплопровідності

Приклади розв'язання задач

Приклад 1. Вивести рівняння, що описує розподіл температури в тонкому однорідному стержні сталого поперечного перерізу з теплоізованою бічною поверхнею. Записати початкові і крайові умови.

Розглянемо тонкий стержень довжини l та сталого поперечного перерізу площею $S = \text{const}$. Вважаємо, що довжина стержня l набагато більша за два його поперечні розміри. За таких припущень можна вважати, що в поперечних напрямках перерозподіл тепла здійснюється на

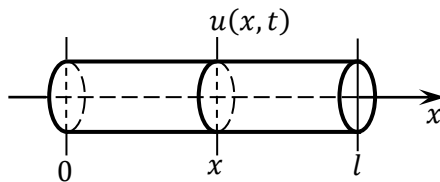


Рис. 1.21

вдovж стержня (Рис. 1.21) і визначатиме його поперечні перерізи.

багато швидше, ніж вздовж стержня. Тому в поперечних перерізах стержня температура розподілена рівномірно. В результаті, для опису стержня досить використати лише одну просторову координату x , яка напрямлена

Нехай стержень займає на осі Ox відрізок $[0, l]$. Позначимо через $u(x, t)$ температуру точок поперечного перерізу із координатою $x \in [0, l]$ в момент часу $t \geq 0$. Виділимо в стержні довільну внутрішню ділянку V , яка обмежена поперечними перерізами з координатами x_1 і x_2

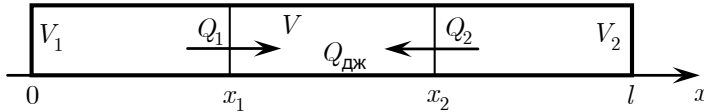


Рис. 1.22

(Рис. 1.22), $0 < x_1 < x_2 < l$. Запишемо для цієї ділянки рівняння теплового балансу (1), с. 45, на довільному проміжку часу $[t_1, t_2] \subset (0, +\infty)$

$$Q = \Delta U, \quad (5)$$

де Q — сумарна теплова енергія, яка передається ділянці V , а ΔU — зміна її внутрішньої енергії.

Циліндричну ділянку, обмежену перерізами x та $x + dx$, можна розглядати як матеріальну точку. Зміна внутрішньої енергії такого циліндра на проміжку часу $[t_1, t_2]$ дорівнює (див. (2) на с. 45)

$$c(u|_{t=t_2} - u|_{t=t_1})\rho S dx,$$

а всієї ділянки V —

$$\Delta U = \int_{x_1}^{x_2} c\rho(u|_{t=t_2} - u|_{t=t_1})S dx, \quad (6)$$

де c, ρ — питома теплоємність і густина матеріалу стержня.

Якщо стержень нагрітий нерівномірно, то в результаті перерозподілу в ділянку V від ділянок V_1 і V_2 (Рис. 1.22) передається теплова енергія Q_1 і Q_2 . Також всередині стержня може виділятися тепло $Q_{дж}$ від внутрішніх джерел. Оскільки бічна поверхня стержня теплоізольована, то з навколишнього середовища в ділянку V тепло не передається. Таким чином, вся теплова енергія Q , що передається у виділену ділянку V , дорівнює

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_{дж}. \quad (7)$$

Якщо розглядати передачу тепла від V_1 до виділеної ділянки V через поперечний переріз x_1 (Рис. 1.22), то в законі Фур'є (3) на с. 45 напрямком нормалі $\vec{n}$ співпадатиме із напрямком Ox , а тепловий потік, який

встановлюється, буде дорівнювати $q_1 = -ku'_x|_{x=x_1}$. Аналогічно, якщо розглядати передачу теплової енергії від V_2 до V через переріз x_2 (Рис. 1.22), то напрямок нормалі зміниться на протилежний, і згідно із законом Фур'є (3) запишемо тепловий потік $q_2 = ku'_x|_{x=x_2}$. Теплові потоки в поперечних перерізах розподілені рівномірно. Тому за досить малий проміжок часу dt через перерізи x_1 і x_2 в ділянку V передається $-ku'_x|_{x=x_1} S dt$ і $ku'_x|_{x=x_2} S dt$ теплової енергії. Тоді за весь проміжок $[t_1, t_2]$ —

$$Q_1 = - \int_{t_1}^{t_2} ku'_x|_{x=x_1} S dt, \quad Q_2 = \int_{t_1}^{t_2} ku'_x|_{x=x_2} S dt \quad (8)$$

відповідно.

Для визначення теплової енергії $Q_{дж}$, яка виділяється від внутрішніх джерел тепла, використаємо масову густину $f_1 = f_1(x, t)$ розподілу цих джерел. Масова густина f_1 визначає кількість теплової енергії, яка виділяється від джерел тепла в одиницю маси за одиницю часу. Тоді в циліндричній ділянці, обмеженій перерізами x та $x + dx$, за досить малий проміжок часу dt джерела тепла виділяють $f_1 \rho S dx dt$ тепла, а в усій ділянці V і на всьому проміжку часу $[t_1, t_2]$ —

$$Q_{дж} = \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} f_1 \rho S dx dt. \quad (9)$$

Отримані вирази (6)...(9) підставляємо в рівняння теплового балансу (5)

$$\begin{aligned} & \int_{x_1}^{x_2} c \rho (u|_{t=t_2} - u|_{t=t_1}) S dx = \\ & = \int_{t_1}^{t_2} (ku'_x|_{x=x_2} - ku'_x|_{x=x_1}) S dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} f_1 \rho S dx dt. \end{aligned}$$

Отриману рівність скорочуємо на $S = \text{const}$ і перепишемо всі інтеграли, використовуючи формулу Н'ютона-Лейбніца, у вигляді подвійних інтегралів за аргументами x і t . При цьому, скористаємось тим, що стержень однорідний, тобто $c, \rho, k = \text{const} > 0$. В результаті, запишемо

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} c \rho u'_t dx dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} ku''_{xx} dx dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} f_1 \rho dx dt. \quad (10)$$

Рівність (10) має виконуватись у довільній внутрішній ділянці $[x_1, x_2]$

стержня і на довільному проміжку часу $[t_1, t_2]$. Завдяки цьому можна перейти від інтегральної рівності (10) до рівності підінтегральних виразів, що до неї входять. В результаті, отримуємо *рівняння, що описує розподіл температури всередині стержня*

$$\begin{aligned} \text{сру}'_t &= ku''_{xx} + \rho f_1(x, t), \quad 0 < x < l, t > 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow u'_t &= a^2 u''_{xx} + f(x, t), \quad 0 < x < l, t > 0, \end{aligned} \quad (11)$$

де $a^2 = \frac{k}{c\rho} = \text{const} > 0$, $f = \frac{f_1}{c}$.

Отримане рівняння (11) називається *рівнянням теплопровідності* із однією просторовою змінною (одновимірне рівняння). За своїм виглядом рівняння теплопровідності (11) нагадує хвильове рівняння, яке описує коливні процеси, але на відміну від хвильового рівняння (11) до нього входить похідна першого порядку за часом u'_t , а не другого, як це було в хвильовому рівнянні.

Рівняння теплопровідності (11) належить до нестационарних рівнянь (містить дві незалежні змінні — просторову змінну x і час t , описує процеси, які змінюються з часом). Тому для повного математичного опису процесу розподілу температури в стержні рівняння (11) слід доповнити *початковими і крайовими умовами*.

Оскільки в рівнянні теплопровідності (11) наявна лише похідна першого порядку за часом u'_t , то *початкова умова* має бути лише одна

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (12)$$

яка описує початковий розподіл температури в стержні.

До рівняння (11) входить похідна другого порядку u''_{xx} . Тому його слід доповнити двома крайовими умовами, одна з яких задається при $x = 0$, а друга — при $x = l$.

Розглянемо класичні *крайові умови*, які можуть використовуватись у задачах.

а) *Крайові умови I роду* описують відомий розподіл температури на кінцях стержня:

$$u|_{x=0} = \psi_0(t), \quad u|_{x=l} = \psi_1(t), \quad t \geq 0, \quad (13)$$

де $\psi_{0,1}$ — задані функції.

б) *Крайові умови II роду* дозволяють описати ситуацію, коли на кінцях стержня заданий тепловий потік.

Нехай на кінці $x = 0$ з навколишнього середовища в стержень поступає тепловий потік $q_0(t)$ (Рис. 1.23). За законом Фур'є (3), с. 45, на кінці $x = 0$ в указаному напрямку тепловий потік визначається, як

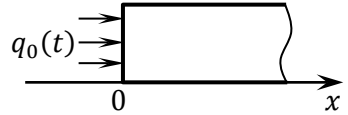


Рис. 1.23

$$q|_{x=0} = -ku'_x|_{x=0}, \quad t \geq 0,$$

і цей потік має співпадати із тепловим потоком $q_0(t)$, який поступає з навколишнього середовища. В результаті отримаємо крайову умову

$$-ku'_x|_{x=0} = q_0(t), \quad t \geq 0, \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u'_x|_{x=0} = -\frac{1}{k}q_0(t), \quad t \geq 0. \quad (14)$$

Аналогічним чином, якщо вважати, що на кінці $x = l$ із навколишнього середовища подається тепловий потік $q_1(t)$ (Рис. 1.24), то крайова умова запишеться у вигляді

$$u'_x|_{x=l} = \frac{1}{k}q_1(t), \quad t \geq 0. \quad (15)$$

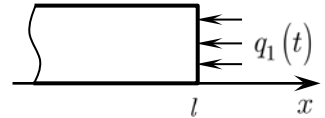


Рис. 1.24

в) *Крайові умови III роду* з'являються при описі конвективного теплообміну з навколишнім середовищем на кінцях стержня, який відбувається за законом Н'ютона (4), с. 46.

Нехай на кінці $x = 0$ відбувається конвективний теплообмін з навколишнім середовищем температури $T_0(t)$. Тоді за законом Н'ютона на цьому кінці з навколишнього середовища в стержень встановлюється тепловий потік

$$q_0(t) = \alpha_0(T_0(t) - u|_{x=0}), \quad t \geq 0,$$

де $\alpha_0 > 0$ — коефіцієнт пропорційності в законі Н'ютона. Якщо підставити записане q_0 в умову (14), яка описує наявність теплового потоку на кінці $x = 0$, то отримаємо крайову умову III роду

$$u'_x|_{x=0} = -\frac{\alpha_0}{k}(T_0(t) - u|_{x=0}), \quad t \geq 0, \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (u'_x - h_0 u)|_{x=0} = -h_0 T_0(t), \quad t \geq 0, \quad (16)$$

де $h_0 = \frac{\alpha_0}{k} > 0$.

Аналогічно, якщо використати закон Н'ютона та умову (15), отрима-

емо крайову умову III роду, яка описує конвективний теплообмін на кінці $x = l$ з навколишнім середовищем температури $T_1(t)$,

$$(u'_x + h_1 u)|_{x=l} = h_1 T_1(t), \quad t \geq 0, \quad (17)$$

де $h_1 = \frac{\alpha_1}{k} > 0$, $\alpha_1 > 0$ — коефіцієнт пропорційності в законі Н'ютона.

Таким чином, задача математичної фізики, яка описує розподіл температури всередині тонкого однорідного стержня сталого поперечного перерізу з теплоізолюваною бічною поверхнею, складається з одновимірного рівняння теплопровідності (11), початкової умови (12) та двох крайових умов, одна з яких має бути записана при $x = 0$, а друга — при $x = l$, причому на різних кінцях крайові умови можуть мати різний тип. ■

Приклад 2. Вивести рівняння, що описує розподіл температури в тонкому однорідному циліндричному стержні, на бічній поверхні якого відбувається конвективний теплообмін з навколишнім середовищем відомої температури, внутрішні джерела тепла відсутні. Записати задачу, що описує вказаний процес, якщо в початковий момент часу стержень мав нульову температуру, один із його кінців теплоізолюваний, а на іншому — відома температура.

В даному прикладі будемо виводити рівняння і записувати задачу математичної фізики, використовуючи ті самі припущення, що і в попередньому прикладі 1. Нехай циліндричний стержень має довжину l , а радіус його поперечного перерізу дорівнює r , $0 < r \ll l$. Як і в попередньому прикладі, для опису стержня використовуємо одну просторову координату x , яка напрямлена вздовж його найбільшого розміру. На осі Ox стержень займає відрізок $[0, l]$. Характеристична функція $u = u(x, t)$, $0 \leq x \leq l$, $t \geq 0$, визначає температуру точок поперечного перерізу з координатою x в момент часу t .

Аналогічно до попереднього прикладу, для виведення рівняння зафіксуємо довільну внутрішню ділянку стержня $[x_1, x_2]$, $0 < x_1 < x_2 < l$, яку позначимо через V (Рис. 1.25), та довільний проміжок часу $[t_1, t_2]$.

Запишемо рівняння теплового балансу (1), с. 45,

$$Q = \Delta U, \quad (18)$$

де зміна внутрішньої енергії ділянки V запишеться, як і в прикладі 1, у

вигляді (див. (6), с. 47)

$$\Delta U = \int_{x_1}^{x_2} c\rho(u|_{t=t_2} - u|_{t=t_1})Sdx = \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} c\rho u'_t S dx dt, \quad (19)$$

де c, ρ — питома теплоємність і густина матеріалу стержня, $S = \pi r^2$ — площа поперечного перерізу.

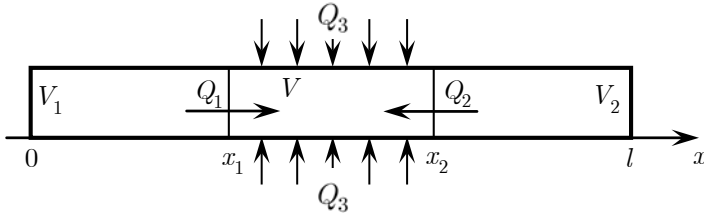


Рис. 1.25

Теплова енергія Q , яка передається ділянці V , складається із $Q_{1,2}$ — теплової енергії, що передається у V від зовнішніх ділянок $V_{1,2}$ в результаті перерозподілу, та теплової енергії Q_3 , яку отримує ділянка V від навколишнього середовища через бічну поверхню внаслідок теплообміну,

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3. \quad (20)$$

Як і в прикладі 1, використовуючи закон Фур'є, запишемо (див. (8), с. 48)

$$Q_1 = - \int_{t_1}^{t_2} k u'_x|_{x=x_1} S dt, \quad Q_2 = \int_{t_1}^{t_2} k u'_x|_{x=x_2} S dt, \quad (21)$$

де k — коефіцієнт внутрішньої теплопровідності.

Для визначення Q_3 використовуємо закон Н'ютона (4), с. 46, згідно з яким на бічній поверхні стержня, внаслідок теплообміну з навколишнім середовищем, встановлюється тепловий потік

$$q_3 = q_3(x, t) = \alpha(T_{\text{н.с.}}(x, t) - u),$$

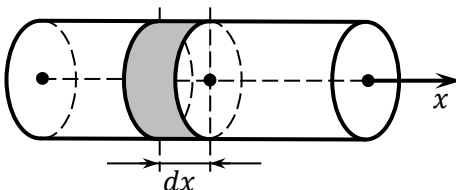


Рис. 1.26

де $\alpha > 0$ — експериментальний коефіцієнт, $T_{\text{н.с.}}$ — температура навколишнього середовища. На бічній поверхні ділянки V виділимо досить малий циліндр висоти dx (Рис. 1.26), площа якого

$2\pi r dx$. За малий проміжок часу dt через поверхню цього циліндра з навколишнього середовища всередину V передається $q_3 2\pi r dx dt$ теплової енергії. Тоді через всю бічну поверхню ділянки V за весь проміжок часу $[t_1, t_2]$ передається тепло

$$Q_3 = \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} q_3 2\pi r dx dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} 2\pi r \alpha (T_{\text{н.с.}}(x, t) - u) dx dt. \quad (22)$$

Якщо підставити рівності (19)...(22) в рівняння теплового балансу, то отримаємо

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} c\rho u'_t S dx dt &= \int_{t_1}^{t_2} k(u'_x|_{x=x_2} - u'_x|_{x=x_1}) S dt + \\ &+ \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} 2\pi r \alpha (T_{\text{н.с.}}(x, t) - u) dx dt, \end{aligned}$$

або, використавши формулу Н'ютона-Лейбніца,

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} c\rho u'_t S dx dt &= \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} k u''_{xx} S dx dt + \\ &+ \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} 2\pi r \alpha (T_{\text{н.с.}}(x, t) - u) dx dt. \end{aligned}$$

Оскільки отримана рівність повинна виконуватись на довільній ділянці $[x_1, x_2]$ стержня і на довільному проміжку часу $[t_1, t_2]$, то операцію інтегрування "можна опустити" і перейти до рівностей підінтегральних виразів. Врахувавши, що площа поперечного перерізу $S = \pi r^2$, отримаємо

$$u'_t = a^2 u''_{xx} - \tilde{\alpha} u + \tilde{\alpha} T_{\text{н.с.}}(x, t), \quad 0 < x < l, t > 0, \quad (23)$$

$$\text{де } a^2 = \frac{k}{(c\rho)}, \quad \tilde{\alpha} = \frac{2\alpha}{(cpr)}.$$

Отримане рівняння (23) описує розподіл температури в стержні, на бічній поверхня якого відбувається теплообмін з навколишнім середовищем. Тому його також відносять до *рівнянь теплопровідності*.

Доповнюємо рівняння початковою умовою (початкова температура стержня нульова)

$$u|_{t=0} = 0, \quad 0 \leq x \leq l. \quad (24)$$

Додамо до рівняння (23) крайові умови. Один із кінців стержня (нехай це буде $x = 0$) теплоізований, тобто тепловий потік з навколишнього середовища в стержень (і навпаки) на цьому кінці дорівнює нулеві. Тоді, використовуючи крайову умову (14), отриману в прикладі 1, в якій слід покласти $q_0 = 0$, запишемо

$$u'_x|_{x=0} = 0, \quad t \geq 0. \quad (25)$$

На іншому кінці $x = l$ відома температура. Аналогічно до умов (13) із попереднього прикладу отримаємо

$$u|_{x=l} = \psi(t), \quad t \geq 0. \quad (26)$$

Таким чином, задача математичної фізики, яка описує вказаний в умові процес — це задача для рівняння теплопровідності (23) з початковою умовою (24) і крайовими умовами (25), (26). ■

Приклад 3. Однорідний циліндричний стержень радіуса r і довжини $2l$ ($r \ll l$) займає відрізок $[-l, l]$ осі Ox . Бічна поверхня ділянки $(-l, 0)$ стержня та його кінець $x = -l$ теплоізовані, а на бічній поверхні ділянки $(0, l)$ та на кінці $x = l$ відбувається конвективний теплообмін з навколишнім середовищем нульової температури (Рис. 1.27). Також всередині ділянки $(-l, 0)$ діють внутрішні джерела тепла. В початковий момент часу стержень нагрітий рівномірно до температури $T_0 = \text{const}$. Записати задачу математичної фізики, яка описує даний фізичний процес.

Оскільки рівняння, яке описує розподіл температури в стержні з теплоізованою бічною поверхнею (див. (11) з прикладу 1), і рівняння, що описує розподіл температури в стержні, на бічній поверхні якого ві-

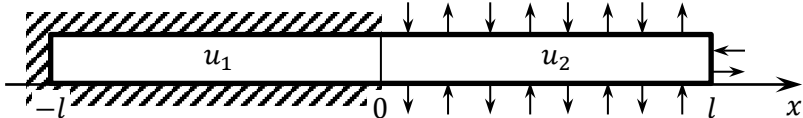


Рис. 1.27

дбується теплообмін з навколишнім середовищем (див. (23) з прикладу 2), відрізняються, то запишемо їх окремо для ділянки $(-l, 0)$ та для ділянки $(0, l)$. Позначимо через $u_1 = u_1(x, t)$ температуру в частині $[-l, 0)$, а через $u_2 = u_2(x, t)$ — в частині $(0, l]$ (Рис. 1.27). Тоді на проміжку $(-l, 0)$ маємо рівняння, аналогічне до (11) з прикладу 1, а на

проміжку $(0, l)$ — аналогічне до (23) з *прикладу 2* ($T_{\text{н.с.}} = 0$, температура навколишнього середовища нульова):

$$\begin{aligned}(u_1)'_t &= a^2(u_1)''_{xx} + f(x, t), \quad -l < x < 0, t > 0, \\ (u_2)'_t &= a^2(u_2)''_{xx} - \tilde{\alpha}u_2, \quad 0 < x < l, t > 0,\end{aligned}\tag{27}$$

де $a^2 = \frac{k}{c\rho}$, k, c, ρ — коефіцієнт внутрішньої теплопровідності, питома теплоємність та густина матеріалу стержня, $f = \frac{f_1}{c}$, $f_1 = f_1(x, t)$ — масова густина джерел тепла, $\tilde{\alpha} = \frac{2\alpha}{(c\rho r)}$, α — експериментальний коефіцієнт, що входить в закон конвективного теплообміну Н'ютона (4), с. 46.

Доповнюємо рівняння (27) *початковими умовами* для функцій u_1 і u_2 . Оскільки початкова температура всього стержня T_0 , то запишемо:

$$u_1|_{t=0} = T_0, \quad -l \leq x < 0, \quad u_2|_{t=0} = T_0, \quad 0 < x \leq l.\tag{28}$$

Кінець $x = -l$ теплоізолюваний (тепловий потік дорівнює нулеві). Використовуючи крайову умову (14) з *прикладу 1*, запишемо

$$(u_1)'_x|_{x=-l} = 0, t \geq 0.\tag{29}$$

На кінці $x = l$ відбувається конвективний теплообмін з навколишнім середовищем нульової температури. Якщо використати крайову умову (17), отриману в *прикладі 1*, можемо записати

$$((u_2)'_x + hu_2)|_{x=l} = 0, t \geq 0,\tag{30}$$

де $h = \frac{\alpha}{k}$.

Записавши два рівняння (27), окремо при $-l < x < 0$ і при $0 < x < l$, формально стержень було розділено на дві окремі складові. Для того, щоб "з'єднати їх назад в один стержень", потрібно записати ще дві *умови зшивання* в перерізі $x = 0$. *Першою умовою зшивання* є

$$u_1|_{x=0-} = u_2|_{x=0+}, t \geq 0,\tag{31}$$

яка означає, що температура при $x = 0$ не може мати розриву.

Друга умова зшивання є наслідком закону збереження енергії. Якщо визначити теплові потоки в перерізі $x = 0$ з лівого ($x = 0 -$) та правого ($x = 0 +$) боків, то ці потоки мають співпадати. Оскільки фізичні характеристики стержня залишаються незмінними по всій довжині, то використовуючи закон Фур'є (3), запишемо умову зшивання

$$-k(u_1)'_x|_{x=0-} = -k(u_2)'_x|_{x=0+}, t \geq 0, \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (u_1)'_{x=0-} = (u_2)'_{x=0+}, t \geq 0. \quad (32)$$

В результаті, задача математичної фізики, яка описує вказаний в умові процес, складається з рівнянь (27), початкових умов (28), крайових умов (29) і (30), а також умов зшивання (31) і (32). ■

Приклад 4. Тонкий однорідний стержень сталого поперечного перерізу з теплоізовованою бічною поверхнею займає на осі Ox відрізок $[0, l]$. До його кінця $x = 0$ приєднано масивну піч потужністю q та теплоємністю C_0 (Рис. 1.28). Піч виготовлено з матеріалу, що має значно вищу теплопровідність, ніж матеріал стержня. На іншому кінці стержня $x = l$ відбувається конвективний теплообмін з навколишнім середовищем нульової температури. В початковий момент часу стержень нагрітий рівномірно до температури T_0 . Записати задачу, що описує даний тепловий процес.

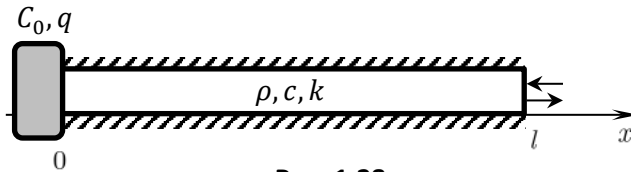


Рис. 1.28

Оскільки бічна поверхня стержня теплоізовована, то для опису процесу у внутрішніх точках стержня використовується рівняння теплопровідності (11), с. 49, отримане в прикладі 1:

$$u'_t = a^2 u''_{xx} + f(x, t), \quad 0 < x < l, t > 0,$$

де $u = u(x, t)$ — функція, що визначає температуру точок (поперечних перерізів) стержня, $a^2 = \frac{k}{c\rho}$, k, c, ρ — коефіцієнт внутрішньої теплопровідності, питома теплоємність та густина матеріалу стержня, f — функція, що визначає масову густину внутрішніх джерел тепла. Оскільки в даному прикладі внутрішні джерела тепла відсутні, то $f = 0$. В результаті, отримаємо рівняння задачі

$$u'_t = a^2 u''_{xx}, \quad 0 < x < l, t > 0. \quad (33)$$

В початковий момент часу стержень нагрітий до температури $T_0 = \text{const}$ (рівномірно). Тому до рівняння (33) допишемо початкову умову

$$u|_{t=0} = T_0, \quad 0 \leq x \leq l. \quad (34)$$

На кінці $x = l$ (Рис. 1.28) відбувається конвективний теплообмін з навколишнім середовищем нульової температури. Тому, використовуючи крайову умову (17) з прикладу 1, в якій $T_1 = 0$, запишемо

$$(u'_x + h_1 u)|_{x=l} = 0, \quad t \geq 0, \quad (35)$$

де $h_1 = \frac{\alpha_1}{k} > 0, \alpha_1 > 0$ — коефіцієнт пропорційності в законі Н'ютона (4).

Для того, щоб записати крайову умову на кінці $x = 0$ (Рис. 1.29), відзначимо, що теплопровідність печі значно вища за теплопровідність стержня. Тому можна вважати, що перерозподіл температури в печі відбувається практично миттєво, і всі її точки в кожен фіксований момент часу мають однакову температуру. Тому піч, яка приєднана до кінця $x = 0$, розглядається як матеріальна точка, зосереджена на кінці стержня. При цьому, очевидно, що температура печі дорівнює $u|_{t=0}, t \geq 0$, тобто співпадає із температурою кінця $x = 0$.

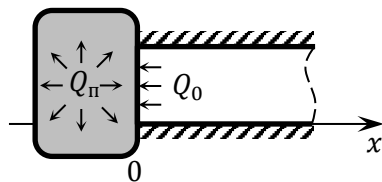


Рис. 1.29

Запишемо для печі на довільному проміжку часу $[t_1, t_2] \subset [0, +\infty)$ рівняння теплового балансу (1)

$$\Delta U = Q. \quad (36)$$

Оскільки піч розглядається, як матеріальна точка, то для визначення зміни її внутрішньої ΔU енергії на проміжку часу $[t_1, t_2]$ матимемо

$$\Delta U = C_0(u|_{t=t_2} - u|_{t=t_1})|_{x=0} = C_0 \int_{t_1}^{t_2} u'_t|_{x=0} dt. \quad (37)$$

Теплова енергія Q , яка передається печі, складається з енергії Q_0 , що надходить від стержня через поперечний переріз $x = 0$ внаслідок наявних теплових потоків, а також енергії $Q_{\text{п}}$, яку виробляє сама піч, маючи потужність q , (Рис. 1.29)

$$Q = Q_0 + Q_{\text{п}}. \quad (38)$$

За законом Фур'є тепловий потік, який встановлюється в поперечному перерізі $x = 0$ і напрямлений проти осі Ox , дорівнює $ku'_x|_{x=0}$. Звідки отримаємо, що

$$Q_0 = \int_{t_1}^{t_2} k u'_x|_{x=0} S dt.$$

Потужність печі $q = q(t)$, $t \geq 0$, — величина, що визначає кількість тепла, яку вона виробляє в одиницю часу. Тоді протягом проміжку часу $[t_1, t_2]$ виділяється

$$Q_{\Pi} = \int_{t_1}^{t_2} q(t) dt.$$

Знайдені вирази для Q_0 і Q_{Π} підставляємо в (38), після чого рівності (38) та (37) підставляємо в рівняння теплового балансу (36). В результаті, отримаємо

$$\int_{t_1}^{t_2} C_0 u'_t|_{x=0} dt = \int_{t_1}^{t_2} k u'_x|_{x=0} S dt + \int_{t_1}^{t_2} q(t) dt.$$

Остання рівність виконується на довільному проміжку часу $[t_1, t_2] \subset [0, +\infty)$, що дозволяє "опустити" операцію інтегрування і перейти до рівності підінтегральних виразів

$$C_0 u'_t|_{x=0} = k S u'_x|_{x=0} + q(t), \quad t \geq 0. \quad (39)$$

Отримана рівність (39) є крайовою умовою на лівому кінці $x = 0$. Дана умова належить до неklasичних крайових умов, оскільки до неї входить похідна за часом u'_t .

Таким чином, задача математичної фізики, що описує вказаний в умові задачі процес, складається з рівняння теплопровідності (33), початкової умови (34), класичної крайової умови I роду (34) на правому кінці $x = l$ та неklasичної крайової умови (39) на лівому кінці $x = 0$. ■

Приклад 5. Кусково-однорідний стержень займає на осі Ox відрізок $[-l_1, l_2]$ і складається з двох однорідних частин, що мають різні фізичні характеристики (Рис. 1.30). Стержень підігрівається за допомогою точкового джерела потужністю $q_0(t)$, $t \geq 0$, яке діє в точці з'єднання однорідних частин $x = 0$. В початковий момент часу температура стержня нульова. Бічна поверхня стержня теплоізолювана, а кінці стержня підтримуються при нульовій температурі.

Нехай однорідні частини стержня, які займають ділянки $[-l_1, 0)$ та

$(0, l_2]$, мають фізичні характеристики ρ_1, c_1, k_1 і ρ_2, c_2, k_2 відповідно. Позначимо через $u_1 = u_1(x, t)$, $-l_1 \leq x < 0, t \geq 0$, температуру в лівій однорідній ділянці, а через $u_2 = u_2(x, t)$, $0 < x \leq l_2, t \geq 0$, — в правій (Рис. 1.30). Запишемо рівняння теплопровідності для кожної з однорідних ділянок окремо:

$$\begin{aligned} (u_1)''_{tt} - a_1^2(u_1)''_{xx} &= 0, \quad -l_1 < x < 0, t > 0, \\ (u_2)''_{tt} - a_2^2(u_2)''_{xx} &= 0, \quad 0 < x < l_2, t > 0, \end{aligned} \quad (40)$$

де $a_{1,2}^2 = \frac{k_{1,2}}{c_{1,2}\rho_{1,2}}$ — коефіцієнти температуропровідності однорідних ділянок.

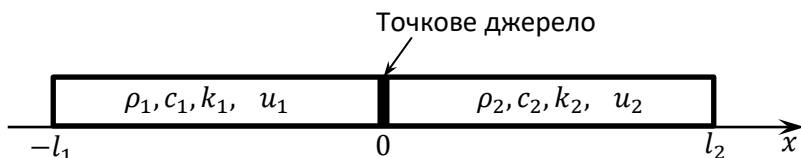


Рис. 1.30

За умовою всередині стержня діє лише точкове джерело, яке розташоване в точці з'єднання однорідних частин, тобто у внутрішніх точках однорідних ділянок джерел тепла немає. Тому рівняння (40) однорідні.

Доповнюємо (40) початковими умовами для кожної із функцій $u_{1,2}$. В початковий момент часу температура стержня нульова. Тому

$$u_1|_{t=0} = 0, \quad -l_1 \leq x < 0, \quad u_2|_{t=0} = 0, \quad 0 < x \leq l_2. \quad (41)$$

Кінці стержня протягом усього процесу підтримуються при нульовій температурі. Тому при $x = -l_1$ та при $x = l_2$ маємо крайові умови I роду:

$$u_1|_{x=-l_1} = 0, \quad u_2|_{x=l_2} = 0, \quad t \geq 0. \quad (42)$$

Для повної постановки задачі залишилось записати умови зшивання в точці з'єднання однорідних ділянок $x = 0$. Першою з них є умова неперервності температури при переході від однієї ділянки до іншої:

$$u_1|_{x=0-} = u_2|_{x=0+}, \quad t \geq 0. \quad (43)$$

Друга умова описує дію точкового джерела в точці $x = 0$, що має потужність q_0 (Рис. 1.31). Точкове джерело — це невелике включення в стержні, розмірами якого можна знехтувати. Воно має нульову тепломісткість (не відбирає теплову енергію в процесі її перерозподілу) і тільки

виробляє тепло, віддаючи його точкам стержня.

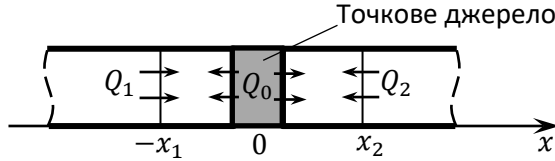


Рис. 1.31

Виділимо навколо точкового джерела ділянку $[-x_1, x_2]$, $x_{1,2} > 0$ (Рис. 1.31), та запишемо для неї рівняння теплового балансу на довільному проміжку часу $[t_1, t_2] \subset [0, +\infty)$:

$$\Delta U = Q. \quad (44)$$

Зміна внутрішньої енергії ΔU визначається зміною внутрішньої енергії ділянки $[-x_1, 0]$ та ділянки $(0, x_2]$, які мають різні характеристики:

$$\begin{aligned} \Delta U &= \int_{-x_1}^0 c_1 \rho_1 (u_1|_{t=t_2} - u_1|_{t=t_1}) S dx + \\ &+ \int_0^{x_2} c_2 \rho_2 (u_2|_{t=t_2} - u_2|_{t=t_1}) S dx = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_{-x_1}^0 c_1 \rho_1 (u_1)'_t S dx + \int_0^{x_2} c_2 \rho_2 (u_2)'_t S dx \right) dt, \end{aligned} \quad (45)$$

де S — площа поперечного перерізу стержня.

Теплова енергія Q , яка передається ділянці $[-x_1, x_2]$, складається з теплової енергії Q_1 і Q_2 , що передається через поперечні перерізи $x = -x_1$ та $x = x_2$ внаслідок наявних теплових потоків всередині стержня, а також тепла Q_0 , що виділяється точковим джерелом із потужністю q_0 (Рис. 1.31). Використовуючи закон Фур'є для визначення $Q_{1,2}$, запишемо

$$\begin{aligned} Q &= Q_1 + Q_2 + Q_0 = \\ &= - \int_{t_1}^{t_2} k_1 (u_1)'_x|_{x=-x_1} S dt + \int_{t_1}^{t_2} k_2 (u_2)'_x|_{x=x_2} S dt + \int_{t_1}^{t_2} q_0(t) dt. \end{aligned}$$

Отриманий вираз для Q разом із (45) підставляємо в рівняння теплового балансу (44), після чого спрямовуємо $x_{1,2} \rightarrow 0$. При цьому, інтеграли, що входять у (45), прямують до нуля. В результаті, прийдемо до рівності

$$-\int_{t_1}^{t_2} k_1(u_1)'_x|_{x=0-} S dt + \int_{t_1}^{t_2} k_2(u_2)'_x|_{x=0+} S dt + \int_{t_1}^{t_2} q_0(t) dt = 0,$$

яка має виконуватись на довільному проміжку часу $[t_1, t_2] \subset [0, +\infty)$. Завдяки тому, що проміжок часу обирається довільно, в останній рівності інтегрування "можна опустити" і перейти до рівності підінтегральних виразів. Отримаємо другу умову зшивання при $x = 0$:

$$(k_2(u_2)'_x|_{x=0+} - k_1(u_1)'_x|_{x=0-})S + q_0(t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (46)$$

Остаточно, задача математичної фізики, яка описує розглядуваний в умові задачі фізичний процес, складається з рівнянь теплопровідності (40), початкових умов (41), крайових умов (42) та умов зшивання (43) і (46). ■

Завдання для самостійної роботи

Задача 1. Поставити задачу, яка описує розподіл температури в однорідному стержні сталого поперечного перерізу з теплоізолюваною бічною поверхнею. Всередині стержня відсутні джерела тепла. В початковий момент часу стержень мав нульову температуру. На його лівому кінці задана температура, а на правому — тепловий потік.

Задача 2. Поставити задачу, яка описує розподіл температури в однорідному стержні сталого поперечного перерізу з теплоізолюваною бічною поверхнею, всередині якого діють внутрішні джерела тепла із заданою масовою густиною. В початковий момент часу відома температура точок стержня. Лівий кінець теплоізолюваний, а на правому — відбувається конвективний теплообмін з навколишнім середовищем заданої температури.

Задача 3. Поставити задачу, яка описує розподіл температури в однорідному стержні циліндричної форми, на бічній поверхні якого відбувається теплообмін з навколишнім середовищем нульової температури. В початковий момент часу відома температура точок стержня. На лівому кінці заданий тепловий потік, а правий кінець — теплоізолюваний.

Задача 4. Поставити задачу, яка описує розподіл температури в

однорідному стержні сталого поперечного перерізу з теплоізолюваною бічною поверхнею. Всередині стержня відсутні джерела тепла. Початкова температура стержня нульова. На лівому кінці відбувається конвективний теплообмін з навколишнім середовищем відомої температури, на правому — підтримується нульова температура.

Задача 5. Поставити задачу, яка описує розподіл температури в однорідному стержні сталого поперечного перерізу з теплоізолюваною бічною поверхнею, всередині якого діють внутрішні джерела тепла із заданою масовою густиною. В початковий момент часу температура стержня нульова. На лівому кінці нульова температура підтримується протягом усього процесу, правий кінець теплоізолюваний.

Задача 6. Поставити задачу, яка описує розподіл температури в однорідному стержні циліндричної форми, на бічній поверхні якого відбувається теплообмін з навколишнім середовищем заданої температури. Початковий розподіл температури точок стержня заданий. На лівому кінці відбувається конвективний теплообмін із навколишнім середовищем, а на правому — заданий тепловий потік.

Задача 7. Поставити задачу, яка описує розподіл температури в однорідному стержні сталого поперечного перерізу з теплоізолюваною бічною поверхнею. Всередині стержня відсутні джерела тепла. Початкова температура стержня нульова. На лівому кінці відомий тепловий потік, а правий кінець теплоізолюваний.

Задача 8. Поставити задачу, яка описує розподіл температури в однорідному стержні сталого поперечного перерізу з теплоізолюваною бічною поверхнею, всередині якого діють внутрішні джерела тепла із заданою масовою густиною. В початковий момент часу відома температура точок стержня. На лівому кінці температура нульова, а на правому — відбувається конвективний теплообмін з навколишнім середовищем заданої температури.

Задача 9. Поставити задачу, яка описує розподіл температури в однорідному стержні циліндричної форми, на бічній поверхні якого відбувається теплообмін з навколишнім середовищем нульової темпе-

ратури. Початкова температура стержня нульова. На лівому кінці відомий тепловий потік, а на правому — підтримується температура, рівна нулеві.

Задача 10. Поставити задачу, яка описує розподіл температури в однорідному стержні сталого поперечного перерізу з теплоізолюваною бічною поверхнею, всередині якого діють внутрішні джерела тепла із заданою масовою густиною. В початковий момент часу задана температура точок стержня. На лівому кінці температура нульова, а на правому — змінюється за відомим законом.

Задача 11. Поставити задачу про розподіл температури в однорідному стержні сталого поперечного перерізу з теплоізолюваною бічною поверхнею. В початковий момент часу температура точок стержня відома. На лівому кінці заданий тепловий потік, а правий — затиснений у масивну клему із високою теплопровідністю та теплоємністю C_0 .

Задача 12. Кусково-однорідний стержень, який займає відрізок $[-l, l]$ осі Ox , складається з двох однорідних частин, які з'єднані напівпрямку в точці $x = 0$. Бічна поверхня стержня теплоізолювана. На ділянці $(-l, 0)$ діють внутрішні джерела тепла із заданою масовою густиною. На іншій ділянці джерела тепла відсутні. Початкова температура стержня відома. Кінці підтримуються при нульовій температурі. Записати задачу, яка описує вказаний тепловий процес.

Задача 13. Поставити задачу про розподіл температури в однорідному стержні циліндричної форми, на бічній поверхні якого відбувається конвективний теплообмін з навколишнім середовищем нульової температури. Лівий кінець затиснений у масивну клему з високою теплопровідністю та теплоємністю C_0 . До правого — приєднано піч, яка має також високу теплопровідність, теплоємність C_1 і виділяє тепло із потужністю $g(t), t \geq 0$. Початкова температура точок стержня задана.

Задача 14. Кусково-однорідний стержень циліндричної форми займає відрізок $[-l_1, l_2]$ осі Ox і складається з двох однорідних частин, які з'єднуються в точці $x = 0$ через масивну клему з високою теплопро-

1.2. Фізичні процеси, які приводять до задач для рівняння теплопровідності

відністю на теплоємність C_0 . На бічній поверхні ділянки $(-l_1, 0)$ відбувається конвективний теплообмін з навколишнім середовищем нульової температури, а бічна поверхня ділянки $(0, l_2)$ теплоізована. На кінцях стержня відома температура. В початковий момент часу температура точок стержня задана. Записати задачу, що описує даний тепловий процес.

Задача 15. Поставити задачу про розподіл температури в однорідному стержня сталого поперечного перерізу з теплоізованою бічною поверхнею, всередині якого діють внутрішні джерела тепла із заданою масовою густиною. Лівий кінець стержня затиснений у масивну клему з високою теплопровідністю та теплоємністю C_0 . На правому — відбувається конвективний теплообмін з навколишнім середовищем нульової температури. Початкова температура стержня дорівнює нулеві.

Задача 16. Кусково-однорідний стержень сталого поперечного перерізу з теплоізованою бічною поверхнею займає відрізок $[-l, l]$ осі Ox і складається з двох однорідних частин, які з'єднані між собою в точці $x = 0$ через точкове джерело теплової енергії потужності $g(t), t \geq 0$. В початковий момент часу стержень нагрітий рівномірно до температури $T_0 = \text{const}$. Кінці стержня підтримуються при початковій температурі T_0 . Записати задачу, що описує даний процес.

Задача 17. Кусково-однорідний стержень сталого поперечного перерізу з теплоізованою бічною поверхнею займає відрізок $[-l, l]$ осі Ox і складається з двох однорідних частин, які з'єднані між собою в точці $x = 0$ через масивну піч із високою теплопровідністю і теплоємністю C_0 . Піч виробляє тепло із потужністю $g(t), t \geq 0$. Всередині однорідних ділянок джерела тепла відсутні. Температура лівого кінця стержня відома, а на правому — заданий тепловий потік. Початкова температура стержня нульова. Записати задачу, що описує даний тепловий процес.

Задача 18. Кусково-однорідний стержень циліндричної форми займає відрізок $[-l, l]$ осі Ox і складається з двох однорідних частин, які з'єднуються напряду в точці $x = 0$. Бічна поверхня ділянки $(-l, 0)$

теплоізольована, але в ній діють внутрішні джерела тепла із заданою масовою густиною. На бічній поверхні ділянки $(0, l)$ відбувається конвективний теплообмін з навколишнім середовищем нульової температури. Кінці стержня теплоізольовані. В початковий момент часу задана температура точок стержня. Записати задачу, що описує даний тепловий процес.

1.2.3. Багатовимірні задачі для рівняння теплопровідності

Приклади розв'язання задач

Приклад 1. Вивести рівняння, що описує розподіл температури в об'ємному ізотропному однорідному тілі. Записати початкові і крайові умови.

Нехай задане тіло займає у системі координат $Oxuz$ обмежену область Ω . Характеристична функція u , яка визначає температуру точок тіла, буде залежною від чотирьох незалежних змінних: трьох просторових x, y, z та часу t .

Для виведення рівняння, яке описуватиме фізичний процес всередині області Ω , виділимо довільну ділянку V тіла, яка компактно входить в область Ω , $\partial V \cap \partial \Omega = \emptyset$ (Рис. 1.32). Запишемо для неї рівняння теплового балансу на довільному проміжку часу (t_1, t_2)

$$\Delta U = Q, \quad (47)$$

де ΔU — зміна внутрішньої енергії ділянки, Q — тепло, що потрапляє в ділянку.

Для визначення зміни внутрішньої енергії ділянки V розглянемо всередині цієї ділянки довільний елементарний об'єм dV , який можна вважати за матеріальну точку. Зміна внутрішньої енергії матеріальної точки dV на проміжку часу (t_1, t_2) визначається таким чином

$$c\rho(u|_{t=t_2} - u|_{t=t_1})dV,$$

де $c, \rho = \text{const} > 0$ — питома теплоємність та густина матеріалу, з якого зроблено тіло. Оскільки тіло однорідне, то інтегруємо записаний вираз по всьому об'єму V і отримуємо зміну внутрішньої енергії всієї ділянки на проміжку часу (t_1, t_2)

$$\Delta U = \iiint_V c\rho(u|_{t=t_2} - u|_{t=t_1})dV.$$

Використовуючи формулу Н'ютона-Лейбніца, останню рівність можна переписати у вигляді (при цьому припускаємо, що необхідні похідні існують)

$$\Delta U = \int_{t_1}^{t_2} \iiint_V c\rho u'_t dV dt. \quad (48)$$

Визначимо тепло Q , яке потрапляє у ділянку V протягом проміжку часу (t_1, t_2) . В процесі теплообміну всередині тіла через поверхню ∂V (Рис. 1.32), яка обмежує виділену ділянку V , з оточуючої частини тіла

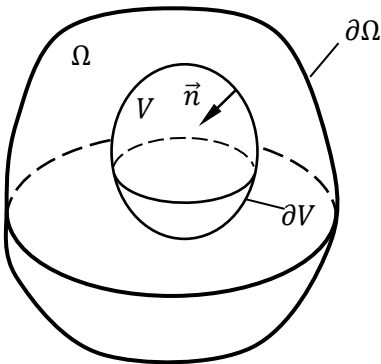


Рис. 1.32

передається тепло, яке позначимо через $Q_{\partial V}$. Крім цього, всередині тіла можуть діяти внутрішні джерела, що також будуть виділяти тепло, яке позначимо через $Q_{дж}$. Оскільки виділена ділянка не контактує із поверхнею тіла, то з навколишнього середовища тепло у V не потрапляє (передача тепла з навколишнього середовища через поверхню тіла визначатиметься крайовими умовами, які розглядатимуться пізніше). Таким чином, має місце рівність

$$Q = Q_{\partial V} + Q_{дж}. \quad (49)$$

Визначимо окремо складові рівності (49). Для визначення $Q_{\partial V}$ використаємо закон Фур'є. Оскільки ми розглядаємо передачу тепла з оточуючої частини тіла в ділянку V , то спрямуємо одиничну нормаль $\vec{n}$ до поверхні ∂V всередину V (внутрішня нормаль) (Рис. 1.32). За законом Фур'є (3), с. 45, на поверхні ∂V у напрямку внутрішньої нормалі $\vec{n}$ тепловий потік визначатиметься наступним чином

$$q|_{\partial V} = -k \frac{\partial u}{\partial \vec{n}},$$

де k — коефіцієнт внутрішньої теплопровідності. Для однорідного, ізотропного тіла $k = \text{const} > 0$. Інтегруємо тепловий потік по всій ∂V та по

всьому проміжку часу (t_1, t_2) . В результаті, отримаємо

$$Q_{\partial V} = - \int_{t_1}^{t_2} \oint_{\partial V} k \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} dS dt.$$

Перепишемо поверхневий інтеграл через об'ємний, використовуючи формулу Гаусса-Остроградського,

$$\begin{aligned} \oint_{\partial V} k \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} dS &= k \oint_{\partial V} \nabla u \cdot \vec{n} dS = -k \iiint_V \operatorname{div}(\nabla u) dV = \\ &= -k \iiint_V \Delta u dV, \end{aligned}$$

де $\Delta u = u''_{xx} + u''_{yy} + u''_{zz}$ — оператор Лапласа. Поява знаку "—" пов'язана з тим, що $\vec{n}$ — внутрішня нормаль до ∂V .

Остаточно для величини $Q_{\partial V}$ маємо рівність

$$Q_{\partial V} = \int_{t_1}^{t_2} \iiint_V k \Delta u dV dt. \quad (50)$$

Для визначення величини $Q_{\text{дж}}$ по аналогії із стержнем введемо до розгляду масову густину внутрішніх джерел тепла, яку позначимо через $f_1 = f_1(x, y, z, t)$. Виділимо всередині ділянки V довільну елементарну ділянку dV , яка є матеріальною точкою, та визначимо кількість тепла, що виділяється в ній протягом елементарного проміжку часу dt : $f_1 \rho dV dt$. Інтегруючи цей вираз по всьому об'єму V та вздовж усього проміжку часу (t_1, t_2) , отримаємо

$$Q_{\text{дж}} = \int_{t_1}^{t_2} \iiint_V f_1 \rho dV dt. \quad (51)$$

Підставляємо отримані рівності (48)...(51) у рівняння теплового балансу (47). В результаті запишемо інтегральну рівність

$$\int_{t_1}^{t_2} \iiint_V c \rho u'_t dV dt = \int_{t_1}^{t_2} \iiint_V k \Delta u dV dt + \int_{t_1}^{t_2} \iiint_V f_1 \rho dV dt,$$

яка виконується при довільному виборі підобласті $V \subset \subset \Omega$ та на довільному проміжку часу (t_1, t_2) . За рахунок довільного вибору V та (t_1, t_2) остання рівність має місце лише за умови, коли співпадають підінтегральні вирази. В результаті, отримаємо рівняння, яке описує розподіл температури всередині ізотропного об'ємного тіла

$$c\rho u'_t = k \Delta u + \rho f_1(x, y, z, t), \quad (x, y, z) \in \Omega, \quad t > 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u'_t = a^2 \Delta u + f(x, y, z, t), \quad (x, y, z) \in \Omega, \quad t > 0, \quad (52)$$

де $a^2 = \frac{k}{(c\rho)} = \text{const} > 0$ — коефіцієнт температуропровідності, $f = \frac{1}{c} f_1$.

Для повного опису фізичного процесу рівняння (52) слід доповнити початковою та крайовими умовами.

Початкова умова. В рівнянні (52) присутня лише похідна першого порядку від невідомої функції u по часу t . Тому початкова умова лише одна

$$u|_{t=0} = u_0(x, y, z), \quad (x, y, z) \in \bar{\Omega}. \quad (53)$$

Умова (53) визначає початковий розподіл температури в тілі.

Крайові умови. При розгляді розподілу температури в стержні, який займав одновимірну область, проміжок $(0, l)$, крайові умови задавались у двох точках: $x = 0$ та $x = l$, які утворюють всю межу цього проміжку. Аналогічно для об'ємного тіла, що займає область Ω , крайові умови слід формулювати на всій межі $\partial\Omega$.

Розглядатимемо крайові умови трьох типів. Нехай поверхня тіла $\partial\Omega$ розділена на три частини: $\partial\Omega = S_1 \cup S_2 \cup S_3$, $S_i \cap S_j = \emptyset$, $i \neq j$. Вважимо, що на поверхні S_1 задана температура. Тоді на S_1 маємо *крайову умову I роду*

$$u|_{S_1} = T(x, y, z, t), \quad (x, y, z) \in S_1, \quad t \geq 0, \quad (54)$$

де $T(x, y, z, t)$ — відома функція.

Нехай на поверхні S_2 заданий тепловий потік $q(x, y, z, t)$ з навколишнього середовища в тіло (Рис. 1.33). Вважимо, що S_2 гладка поверхня. Нехай $\vec{v}$ — вектор зовнішньої нормалі до S_2 . Оскільки тепловий потік напрямлений

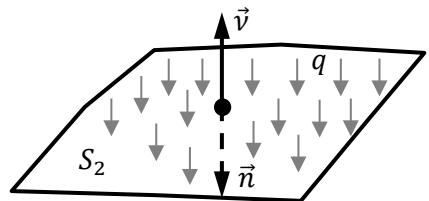


Рис. 1.33

з навколишнього середовища в тіло, то на S_2 маємо передачу тепла у напрямку внутрішньої нормалі $\vec{n}$, яка протилежно напрямлена до $\vec{v}$ ($\vec{n} = -\vec{v}$). Використовуючи закон Фур'є (3), с. 45, для теплового потоку

можемо записати

$$-k \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \Big|_{S_2} = q(x, y, z, t), \quad (x, y, z) \in S_2, \quad t \geq 0,$$

або, враховуючи рівність $\frac{\partial}{\partial \vec{n}} = -\frac{\partial}{\partial \vec{v}}$,

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{v}} \Big|_{S_2} = \frac{1}{k} q(x, y, z, t), \quad (x, y, z) \in S_2, \quad t \geq 0. \quad (55)$$

Нарешті, нехай на поверхні S_3 відбувається конвективний теплообмін з навколишнім середовищем за законом Н'ютона (4), с. 46. В процесі теплообміну на поверхні S_3 встановлюється тепловий потік q_3 з навколишнього середовища в тіло. Аналогічно до умови (55) можемо записати

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{v}} \Big|_{S_3} = \frac{1}{k} q_3(x, y, z, t), \quad (x, y, z) \in S_3, \quad t \geq 0. \quad (56)$$

З іншого боку, за законом Н'ютона запишемо

$$q_3 = \alpha(u_{\text{н.с.}} - u|_{(x,y,z) \in S_3}),$$

де α — експериментальний коефіцієнт пропорційності, який залежить від співвідношення "навколишнє середовище — матеріал тіла", $u_{\text{н.с.}} = u_{\text{н.с.}}(x, y, z, t)$ — температура навколишнього середовища. Підставивши отриманий вираз для q_3 в рівність (56), отримуємо *крайову умову III роду* на поверхні S_3

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \vec{v}} + hu \right) \Big|_{S_3} = hu_{\text{н.с.}}(x, y, z, t), \quad (x, y, z) \in S_3, \quad t \geq 0, \quad (57)$$

де $h = \frac{\alpha}{k} > 0$.

Таким чином, постановка задачі математичної фізики про розподіл температури всередині об'ємного ізотропного тіла складається з

- рівняння теплопровідності (52);
- початкової умови (53);
- крайових умов (54), (55) та (57), в яких $\partial\Omega = S_1 \cup S_2 \cup S_3$, $S_i \cap S_j = \emptyset$, $i \neq j$.

При розгляді конкретних задач кожна зі складових S_1 , S_2 та S_3 поверхні $\partial\Omega$ може бути відсутньою, тобто необов'язково, щоб на поверхні тіла задавались крайові умови всіх трьох типів. ■

Приклад 2. Записати задачу, яка описує розподіл температури всередині тонкої прямокутної однорідної пластини з нетеплоізолюваними плоскими поверхнями, на яких відбувається конвективний теплообмін з навколишнім середовищем температури T_0 . Всередині пластини відсутні джерела тепла, але пластина підігрівается за допомогою сталого теплового потоку на її ребрах. В початковий момент часу температура пластини нульова.

Розглянемо прямокутну пластину довжини l_1 , ширини l_2 та товщини h . У загальному випадку така пластина є об'ємним тілом (паралелепіпедом), і для моделювання теплового процесу в ній можна скористатись результатами попереднього прикладу. Але в даному прикладі розглядається тонка пластина, тобто товщина h значно менша за довжину l_1 та ширину l_2 , які є співрозмірними ($h \ll l_{1,2}$). В такому випадку можна спростити задачу, зменшивши кількість просторових змінних. Вважаємо, що перерозподіл температури в пластині по товщині відбувається значно швидше, ніж в інших напрямках, практично миттєво. Тоді температура точок пластини u буде залежати від двох координат: координати x , яка напрямлена вздовж довжини l_1 , координати y , напрямленої вздовж ширини l_2 , і не буде залежати від третьої координати z , яка буде перпендикулярно направленою до плоских поверхонь пластини (Рис. 1.34).

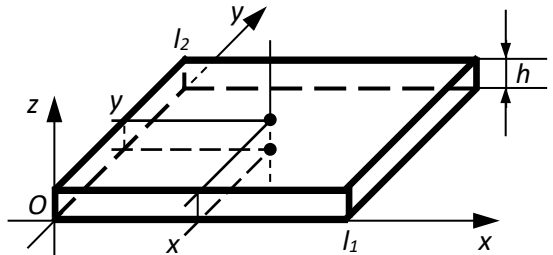


Рис. 1.34

В результаті, $u = u(x, y, t)$, $0 \leq x \leq l_1$, $0 \leq y \leq l_2$, $t \geq 0$.

Використовуючи отримане припущення, виведемо рівняння, що описує плоский розподіл температури в пластині. Виділимо довільну ділянку пластини S (Рис. 1.35), яка компактно належить області пластини — відкритому прямокутнику $(0, l_1) \times (0, l_2)$, при цьому, межа ∂S виділеної ділянки не має спільних точок із ребрами пластини. Незважаючи на те, що S розглядається, як плоска область, насправді вона визначає в пластині циліндричну ділянку, яка має висоту h , а межа

ділянки S — циліндрична поверхня висоти h .

Запишемо для S рівняння теплового балансу (1), с. 45, на довільному проміжку часу $[t_1, t_2] \subset (0, +\infty)$

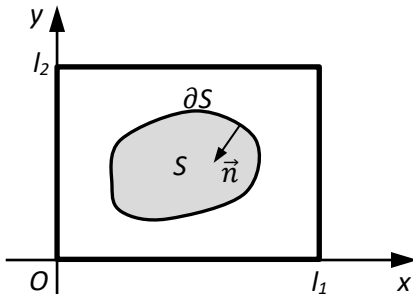


Рис. 1.35

$$\Delta U = Q, \quad (58)$$

де ΔU — зміна внутрішньої енергії S , Q — теплова енергія, що передається в S .

Всередині S виділимо елементарну ділянку площею $dxdy$ (насправді, нею буде паралелепіпед з основою $dxdy$ та висотою h). Виділена мала ділянка розглядається,

як матеріальна точка. Тоді згідно з (2), зміна її внутрішньої енергії

$$(u|_{t=t_2} - u|_{t=t_1})c\rho h \, dxdy,$$

де $\rho, c = \text{const} > 0$ — густина та питома теплоємність матеріалу пластини. Інтегруємо записаний вираз по всій ділянці S . Якщо додатково скористатись формулою Н'ютона-Лейбніца за аргументом t , то отримаємо сумарну зміну внутрішньої енергії всієї ділянки

$$\Delta U = \int_{t_1}^{t_2} \iint_S u'_t c\rho h \, dxdy \, dt. \quad (59)$$

Теплова енергія Q , яка надходить до S , складається з теплової енергії $Q_{\partial S}$, що передається через межу від зовнішньої частини пластини внаслідок наявних внутрішніх теплових потоків, а також з $Q_{\text{н.с.}}$ — теплової енергії, яка надходить з навколишнього середовища внаслідок теплообміну на верхній та нижній плоских поверхнях пластини.

Крива ∂S визначає всередині пластини циліндричну поверхню висотою h . За законом Фур'є (3), с. 45, тепловий потік, який визначає передачу тепла від зовнішньої частини пластини всередину ділянки S , тобто у напрямку внутрішньої нормалі $\vec{n}$ (Рис. 1.35), дорівнює

$$q|_{\partial S} = -k \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \Big|_{\partial S},$$

де $k = \text{const} > 0$ — коефіцієнт внутрішньої теплопровідності. Інтегруючи записаний тепловий потік по всій циліндричній поверхні, що

визначається ∂S , та по всьому проміжку часу $[t_1, t_2]$, отримаємо $Q_{\partial S}$

$$Q_{\partial S} = - \int_{t_1}^{t_2} \oint_{\partial S} k \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} h \, dl \, dt = -kh \int_{t_1}^{t_2} \oint_{\partial S} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \, dl \, dt.$$

Використовуючи формулу Гаусса-Остроградського, можемо записати

$$\oint_{\partial S} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \, dl = \oint_{\partial S} \nabla u \cdot \vec{n} \, dl = - \iint_S \operatorname{div} (\nabla u) \, dxdy = - \iint_S \Delta u \, dxdy,$$

де $\Delta u = u''_{xx} + u''_{yy}$ — двовимірний оператор Лапласа. Поява знака "—" пов'язана із внутрішньою нормаллю $\vec{n}$.

В результаті, для теплової енергії, що передається в ділянку S через її межу ∂S від зовнішньої частини пластини внаслідок наявних внутрішніх теплових потоків, остаточно запишемо

$$Q_{\partial S} = \int_{t_1}^{t_2} \iint_S kh \Delta u \, dxdy \, dt. \quad (60)$$

Якщо розглядати передачу тепла від навколишнього середовища в пластину через її плоскі поверхні внаслідок конвективного теплообміну, то згідно із законом Н'ютона (4), с. 46, на цих поверхнях тепловий потік визначається, як

$$q_{\text{н.с.}} = 2\alpha(T_0 - u),$$

де $\alpha > 0$ — експериментальний коефіцієнт, що входить у закон Н'ютона, T_0 — температура навколишнього середовища (див. умову), а коефіцієнт 2 вказує на те, що плоских поверхонь дві: верхня та нижня.

Інтегруємо потік $q_{\text{н.с.}}$ по всій ділянці S та всьому проміжку часу (t_1, t_2) . В результаті, для теплової енергії $Q_{\text{н.с.}}$, що надходить до ділянки S з навколишнього середовища, запишемо

$$\begin{aligned} Q_{\text{н.с.}} &= \int_{t_1}^{t_2} \iint_S q_{\text{н.с.}} \, dxdy \, dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \iint_S 2\alpha(T_0 - u) \, dxdy \, dt. \end{aligned} \quad (61)$$

Отримані вирази (59), (60), (61) підставляємо в рівняння теплового балансу (58) і приходимо до інтегральної рівності

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} \iint_S u'_t c \rho h dx dy dt = \\ & = \int_{t_1}^{t_2} \iint_S kh \Delta u dx dy dt + \int_{t_1}^{t_2} \iint_S 2\alpha(T_0 - u) dx dy dt, \end{aligned}$$

яка повинна виконуватись для довільної ділянки пластини S та на довільному проміжку часу (t_1, t_2) . Завдяки тому, що ділянка S та проміжок (t_1, t_2) можна обирати довільним чином, то остання рівність можлива лише за умови, коли співпадають підінтегральні вирази в лівій та правій частинах (інтегрування можна "опустити"). В результаті, можемо записати диференціальне рівняння відносно температури u

$$u'_t c \rho h = kh \Delta u + 2\alpha(T_0 - u), \quad 0 < x < l_1, 0 < y < l_2, t > 0, \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u'_t = a^2 \Delta u - 2\beta u + 2\beta T_0, \quad 0 < x < l_1, 0 < y < l_2, t > 0, \quad (62)$$

де $a^2 = \frac{k}{c\rho} > 0, \beta = \frac{\alpha}{c\rho} > 0$.

Отримане рівняння (62) також відносять до *рівнянь теплопровідності*. Рівняння включає дві просторові змінні x, y (2-вимірне рівняння) та змінну t , яка відповідає за час (нестационарне рівняння).

За умовою задачі початкова температура пластини дорівнює нулеві. Тому можемо записати *початкову умову* задачі

$$u|_{t=0} = 0, \quad 0 \leq x \leq l_1, \quad 0 \leq y \leq l_2. \quad (63)$$

Межа пластини складається з чотирьох відрізків: двох вертикальних та двох горизонтальних (Рис. 1.36), на яких заданий рівномірний тепловий потік q з навколишнього середовища. Напрямок теплового потоку q на всіх ділянках межі співпадає із напрямком внутрішньої нормалі $\vec{n}$ (Рис. 1.36). Тоді згідно із законом Фур'є (3), с. 45, запишемо крайові умови

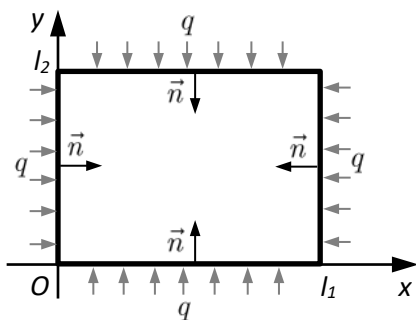


Рис. 1.36

$$-k \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \Big|_{x=0} = q, \quad -k \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \Big|_{x=l_1} = q, \quad 0 < y < l_2,$$

$$-k \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \Big|_{y=0} = q, \quad -k \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \Big|_{y=l_2} = q, \quad 0 < x < l_1, \quad t \geq 0.$$

Враховуючи, що вектор внутрішньої нормалі $\vec{n}$ є співнапрямленим або протилежно напрямленим із осями координат (Рис. 1.36) на окремих ділянках межі, *крайові умови* можна переписати у вигляді

$$\begin{aligned} u'_x|_{x=0} &= -\frac{q}{k}, & u'_x|_{x=l_1} &= \frac{q}{k}, & 0 < y < l_2, \\ u'_y|_{y=0} &= -\frac{q}{k}, & u'_y|_{y=l_2} &= \frac{q}{k}, & 0 < x < l_1, \end{aligned} \quad t \geq 0. \quad (64)$$

В результаті, отримали задачу математичної фізики (62), (63), (64), яка описує заданий в умові тепловий процес. ■

Завдання для самостійної роботи

Задача 1. Поставити задачу, яка описує розподіл температури в однорідному тілі, що має форму куба зі стороною d , в якому відсутні внутрішні джерела тепла. На бічних гранях куба задана температура, нижня грань теплоізована, а на верхній — відбувається теплообмін з навколишнім середовищем заданої температури. В початковий момент часу температура тіла нульова.

Задача 2. Поставити задачу, яка описує розподіл температури в прямокутній однорідній пластині зі сторонами d_1 , d_2 , плоскі поверхні якої теплоізовані. Всередині пластини діють внутрішні джерела тепла. На двох протилежних ребрах пластині відома температура, а два інших ребра теплоізовані. В початковий момент часу температура пластини задана.

Задача 3. Поставити задачу, яка описує розподіл температури всередині однорідного циліндра з радіусом основи R_0 і висотою h , в якому не діють внутрішні джерела тепла. Бічна поверхня підтримується при нульовій температурі, на нижній основі заданий тепловий потік, а на верхній — відбувається теплообмін з навколишнім середовищем температури T_0 . Початкова температура циліндра відома.

Задача 4. Поставити задачу, яка описує розподіл температури в круговій однорідній пластині радіуса R_0 , на плоских поверхнях якої відбувається теплообмін з навколишнім середовищем нульової

температури. Всередині пластини діють внутрішні джерела тепла. На ребрі пластини відома температура. В початковий момент часу температура пластини T_0 .

Задача 5. Поставити задачу, яка описує розподіл температури всередині однорідної кулі радіуса R_0 , в якій внаслідок хімічної реакції поглинається тепло, пропорційне температурі точок кулі. Поверхня підтримується при температурі T_0 . Початкова температура в кулі задана.

Задача 6. Поставити задачу, яка описує розподіл температури всередині однорідної квадратної пластини зі стороною d , плоскі поверхні якої теплоізовані. Всередині пластини діють внутрішні джерела тепла. Два протилежних ребра пластини теплоізовані, а на двох інших — відбувається конвективний теплообмін з навколишнім середовищем нульової температури. В початковий момент часу температура пластини задана.

Задача 7. Поставити задачу, яка описує розподіл температури всередині однорідного тіла, що має форму половини циліндра і займає область $\Omega = \{(x, y, z): x^2 + y^2 < R_0^2, y > 0, 0 < z < h\}$. Внутрішні джерела тепла відсутні. Плоска ділянка бічної поверхні теплоізована, на циліндричній — підтримується температура T_0 , на верхній та нижній основах відбувається конвективний теплообмін з навколишнім середовищем нульової температури. Початкова температура тіла задана.

Задача 8. Поставити задачу, яка описує розподіл температури всередині однорідної пластини, що має форму півкруга, на плоских поверхнях якої відбувається конвективний теплообмін з навколишнім середовищем відомої температури. Всередині пластини відсутні внутрішні джерела тепла. На прямолінійному ребрі пластини заданий тепловий потік, на ребрі, що має форму півкола, підтримується нульова температура. В початковий момент часу температура пластини задана.

Задача 9. Поставити задачу, яка описує розподіл температури всередині однорідної півкулі радіуса R_0 , в якій діють внутрішні

джерела тепла. Сферична поверхня півкулі підтримується при заданій температурі, а на плоскій — заданий тепловий потік. Початкова температура в півкулі нульова.

Задача 10. Поставити задачу, яка описує розподіл температури всередині однорідної пластини, що має форму чверті круга, плоскі поверхні якої теплоізовані. Всередині пластини відсутні внутрішні джерела тепла. На одному з прямолінійних ребер заданий тепловий потік, а інше ребро теплоізоване. На ребрі, що є дугою кола, підтримується задана температура. В початковий момент часу температура пластини нульова.

1.3. Стаціонарні фізичні процеси

При розгляді різноманітних фізичних процесів був встановлений такий факт: за певних обставин, коли зовнішній вплив на процес або відсутній, або певним чином врівноважений, можна спостерігати так званий вихід на *стаціонарний режим*, коли основні характеристики фізичного процесу не змінюються з часом. Фізичний процес, який вийшов на стаціонарний режим, називають *стаціонарним фізичним процесом*, а задачі математичної фізики, які описують такі процеси, називають *стаціонарними задачами*.

До стаціонарних задач, які вивчаються в математичній фізиці, відносяться задачі, що описують стаціонарний розподіл температури всередині тіл та за їх межами, розподіл потенціалу електростатичного поля, стаціонарні, потенціальні течії нестисливих рідин тощо.

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Записати задачу, що описує стаціонарний розподіл температури всередині однорідного тіла, яке займає обмежену область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Записати крайові умови.

В прикладі 1, п. 1.2.3, було виведене рівняння (52), що описує розподіл температури в об'ємному тілі (рівняння теплопровідності)

$$u'_t = a^2 \Delta u + f(x, y, z, t), \quad (x, y, z) \in \Omega, \quad t > 0,$$

де $a^2 = \frac{k}{(c\rho)} = \text{const} > 0$ — коефіцієнт внутрішньої температуропро-

відності, k, c, ρ — коефіцієнт внутрішньої теплопровідності, питома теплоємність та густина матеріалу тіла, $f = \frac{1}{c} f_1$, f_1 — масова густина джерел тепла, що діють всередині тіла. Взагалі кажучи, теплові процеси є нестационарними, але в багатьох випадках при тривалому спостереженні, коли зовнішній вплив або відсутній, або є незмінним в часі ($f = f(x, y, z)$), можливий вихід процесу на, так званий, стаціонарний режим, коли температура точок тіла u перестає змінюватись з часом. У такому випадку $u'_t \equiv 0$, і рівняння теплопровідності перетворюється на стаціонарне рівняння

$$\Delta u = -\frac{1}{a^2} f(x, y, z), \quad (x, y, z) \in \Omega, \quad (1)$$

яке відоме, як *рівняння Пуассона*.

При $f \equiv 0$ (внутрішні джерела відсутні) рівняння Пуассона (1) перетворюється на однорідне рівняння

$$\Delta u = 0, \quad (x, y, z) \in \Omega, \quad (2)$$

яке називають *рівнянням Лапласа*.

Оскільки до рівнянь (1) і (2) не входить час, то очевидно, що *початкові умови* до цих рівнянь не додаються, задаються тільки *крайові умови*. Розглянемо окремі випадки можливих крайових умов.

а) Якщо на всій поверхні тіла відома температура, то в цьому випадку на межі $\partial\Omega$ запишемо *крайову умову I роду* або *умову Діріхле*

$$u|_{(x,y,z) \in \partial\Omega} = \varphi(x, y, z), \quad (3)$$

де φ — задана функція, що визначає температуру на поверхні тіла.

Крайові задачі (1), (3) та (2), (3) називаються *задачами Діріхле* для рівняння Пуассона та Лапласа відповідно.

б) Якщо на всій поверхні тіла заданий стаціонарний тепловий потік, то на $\partial\Omega$ отримаємо *крайову умову II роду* або *умову Неймана* (див. крайову умову (55) з прикладу 1, п. 1.2.3)

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \vec{\nu}} \right|_{(x,y,z) \in \partial\Omega} = \frac{1}{k} q(x, y, z), \quad (4)$$

де $\vec{\nu}$ — одинична, зовнішня нормаль до $\partial\Omega$, q — відома функція, яка задає тепловий потік на поверхні тіла, що напрямлений всередину тіла.

Крайові задачі (1), (4) та (2), (4) називаються *задачами Неймана* для

рівняння Пуассона та Лапласа відповідно.

в) Якщо на поверхні тіла відбувається конвективний теплообмін з навколишнім середовищем відомої температури за законом Н'ютона, то використовуючи результат *прикладу 1*, п. 1.2.3, отримаємо *крайову умову III роду* (див. (57) з указанного прикладу)

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \vec{v}} + hu \right) \Big|_{(x,y,z) \in \partial \Omega} = hu_{\text{н.с.}}(x, y, z), \quad (5)$$

де $h = \frac{\alpha}{k} > 0$, $\alpha > 0$ — коефіцієнт пропорційності в законі Н'ютона, $u_{\text{н.с.}}$ — відома функція, яка визначає температуру навколишнього середовища.

Крайову умову III роду (5) ще називають *умовою Н'ютона, Робена, Фур'є*.

Крайові задачі (1), (5) та (2), (5) називаються *III крайовими задачами* для рівняння Пуассона та Лапласа відповідно.

г) Якщо поверхня тіла $\partial \Omega$ розбита на дві окремі складові: $\partial \Omega = S_1 \cup S_2$, $S_1 \cap S_2 = \emptyset$, і при цьому, на S_1 задана температура, а на S_2 — тепловий потік, то отримаємо *крайову задачу*, в якій на різних ділянках межі $\partial \Omega$ задані *крайові умови різних типів*

$$u|_{(x,y,z) \in S_1} = \varphi(x, y, z), \quad \frac{\partial u}{\partial \vec{v}} \Big|_{(x,y,z) \in S_2} = \frac{1}{k} q(x, y, z). \quad (6)$$

Крайові умови (6) називають *змішаними крайовими умовами*, а крайові задачі (1), (6) та (2), (6) — *змішаними крайовими задачами* для рівнянь Пуассона та Лапласа. ■

Приклад 2. *Записати задачу, що описує плоский стаціонарний розподіл температури всередині необмеженого тіла, яке у поперечному перерізі має форму прямокутника зі сторонами a, b . Всередині тіла відсутні джерела тепла. Дві прилеглі грані підтримуються при заданій температурі, а на двох інших — заданий тепловий потік.*

В умові задачі розглядається необмежене тіло, що займає 3-вимірну область $D = \{(x, y, z): 0 < x < a, 0 < y < b, -\infty < z < +\infty\}$. Поперечними перерізами такого тіла є прямокутники зі сторонами a та b . Оскільки розподіл температури плоский, то вважається, що в кожному такому поперечному перерізі він однаковий. Тому замість об'ємної задачі

матимемо задачу, в якій залишається залежність лише від двох просторових координат x та y .

Використовуючи результат попереднього прикладу (див. (2)), для опису стаціонарного розподілу температури в тілі запишемо рівняння Лапласа (внутрішні джерела тепла відсутні)

$$\Delta_3 u = u''_{xx} + u''_{yy} + u''_{zz} = 0,$$

$$(x, y, z) \in D,$$

де u — невідома функція, яка визначає температуру точок тіла. При цьому, $u = u(x, y)$, оскільки в умовах задачі залежності від z немає. Тоді $u''_{zz} \equiv 0$, і для опису плоского стаціонарного розподілу температури отримаємо двовимірне рівняння Лапласа

$$\Delta u = u''_{xx} + u''_{yy} = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b. \quad (7)$$

За умовою, дві прилеглі грані підтримуються при заданій температурі. Нехай цими гранями будуть $x = 0$ та $y = 0$ (Рис. 1.37). Тоді на цих гранях запишемо крайові умови Діріхле (умови I роду)

$$u|_{x=0} = \varphi_1(y), \quad 0 < y < b, \quad (8)$$

$$u|_{y=0} = \varphi_2(x), \quad 0 < x < a.$$

На двох інших гранях — $x = a$ та $y = b$, задані теплові потоки (Рис. 1.37). Тоді на цих гранях матимемо крайові умови Неймана

(умови II роду), аналогічні до крайової умови (4) з попереднього прикладу,

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \vec{v}} \right|_{x=a} = \frac{1}{k} q_1(y), \quad 0 < y < b, \quad (9)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \vec{v}} \right|_{y=b} = \frac{1}{k} q_2(x), \quad 0 < x < a,$$

де $\vec{v}$ — одинична зовнішня нормаль до граней $x = a$ та $y = b$, k — коефіцієнт внутрішньої теплопровідності. Оскільки зовнішня нормаль $\vec{v}$ при $x = a$ співнапрявлена з віссю Ox , а при $y = b$ — з віссю Oy

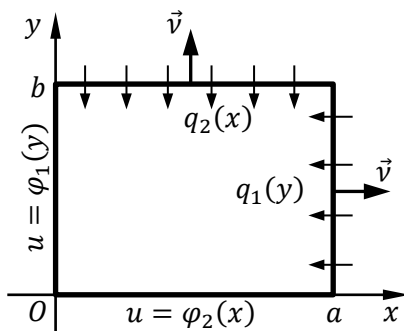


Рис. 1.37

(Рис. 1.37), то крайові умови Неймана (9) можна переписати у вигляді

$$\begin{aligned} u'_x|_{x=a} &= \frac{1}{k} q_1(y), \quad 0 < y < b, \\ u'_y|_{y=b} &= \frac{1}{k} q_2(x), \quad 0 < x < a. \end{aligned} \quad (10)$$

Таким чином, отримали остаточну стаціонарну задачу математичної фізики (7), (8), (10). ■

Приклад 3. Записати задачу, яка описує стаціонарний розподіл температури всередині однорідного тіла, що має форму півкулі. Всередині тіла відсутні внутрішні джерела тепла, на сферичній частині межі тіла відома температура, а на плоскій — заданий тепловий потік.

Введемо систему координат так, щоб півкуля займала область (Рис. 1.38)

$$\Omega = \{(x, y, z):$$

$$x^2 + y^2 + z^2 < R^2, z > 0\},$$

$R > 0$ — радіус півкулі.

Стаціонарний розподіл температури в тілі за умови відсутності внутрішніх джерел тепла описується рівнянням Лапласа (2) з прикладу 1

$$\Delta u = 0, \quad x^2 + y^2 + z^2 < R^2, \quad z > 0. \quad (11)$$

На сферичній ділянці межі $x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \geq 0$, за умовою задачі, задана температура. Отримаємо крайову умову Діріхле (див. (3) з прикладу 1)

$$u|_{x^2+y^2+z^2=R^2} = T_0(x, y, z), \quad x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \geq 0, \quad (12)$$

де T_0 — відома функція, що визначає температуру на поверхні тіла.

На плоскій частині межі $z = 0, x^2 + y^2 < R^2$, заданий тепловий потік з навколишнього середовища в тіло. В результаті, запишемо крайову умову Неймана (див. (4) з прикладу 1)

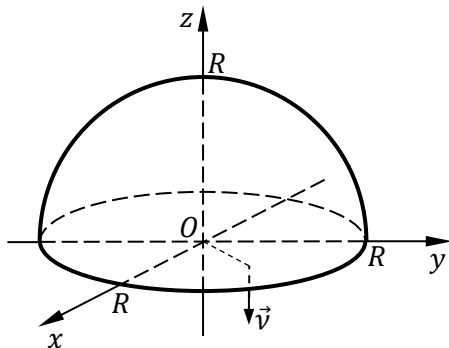


Рис. 1.38

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \vec{v}} \right|_{z=0} = \frac{1}{k} q(x, y), \quad x^2 + y^2 < R^2,$$

де q — задана функція, що описує тепловий потік.

Зовнішня нормаль $\vec{v}$ при $z = 0$ напрямлена у протилежному напрямку до осі Oz (Рис. 1.38). Тоді $\left. \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \right|_{z=0} = - \left. \frac{\partial}{\partial z} \right|_{z=0}$, а умова Неймана переписється у вигляді

$$u'_z|_{z=0} = - \frac{1}{k} q(x, y), \quad x^2 + y^2 < R^2. \quad (13)$$

Таким чином, отримали стаціонарну задачу математичної фізики (11), (12), (13). ■

Завдання для самостійної роботи

Задача 1. Записати задачу, яка описує стаціонарний розподіл температури всередині однорідного тіла, що має форму куба з ребром a . Всередині тіла діють внутрішні джерела тепла, дві протилежні грані куба мають нульову температуру, а решта — теплоізовані.

Задача 2. Записати задачу, яка описує плоский стаціонарний розподіл температури всередині необмеженого, однорідного тіла, що в поперечному перерізі має форму квадрата зі стороною a . Всередині тіла відсутні внутрішні джерела тепла, дві прилеглих грані тіла мають нульову температуру, а на двох інших — заданий тепловий потік.

Задача 3. Записати задачу, яка описує стаціонарний розподіл температури всередині однорідного тіла, що має форму циліндра радіуса R та висоти h . Всередині тіла відсутні внутрішні джерела тепла. Основи циліндра теплоізовані, на бічній поверхні відома температура.

Задача 4. Записати задачу, яка описує плоский стаціонарний розподіл температури всередині необмеженого однорідного тіла, що в поперечному перерізі має форму півкруга радіуса R . Всередині тіла діють внутрішні джерела тепла. На прямолінійній ділянці межі тіла заданий тепловий потік, а на круговій — підтримується нульова температура.

Задача 5. Записати задачу, яка описує стаціонарний розподіл температури всередині однорідного тіла, що має форму куба з ребром a . Всередині тіла відсутні внутрішні джерела тепла, на гранях куба відома температура.

Задача 6. Записати задачу, яка описує плоский стаціонарний розподіл температури всередині необмеженого однорідного тіла, що в поперечному перерізі має форму прямокутника зі сторонами a , b . Всередині тіла діють внутрішні джерела тепла, грані — теплоізовані.

Задача 7. Записати задачу, яка описує стаціонарний розподіл температури всередині однорідного тіла, що має форму циліндра радіуса R та висоти h . Всередині тіла діють внутрішні джерела тепла, а на всій його поверхні підтримується нульова температура.

Задача 8. Записати задачу, яка описує плоский стаціонарний розподіл температури всередині необмеженого однорідного тіла, що в поперечному перерізі має форму півкруга радіуса R . Всередині тіла відсутні внутрішні джерела тепла. Межа тіла підтримується при заданій температурі.

Тема 2. Класифікація лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними другого порядку

2.1 Класифікація та зведення до канонічної форми рівнянь зі сталими коефіцієнтами

Теоретичні відомості

В загальному випадку лінійне диференціальне рівняння другого порядку з n незалежними змінними можна записати у вигляді

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = f(x), \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega, \quad (1)$$

де $a_{ij} = a_{ji} = \text{const}$, u — невідома функція, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — область.

Розглянемо, як перетворюється рівняння (1), якщо ввести нові незалежні змінні $y = (y_1, \dots, y_n)$ за допомогою лінійної невідродженої заміни

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = Ax = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad (2)$$

або покоординатно

$$y_k = \sum_{r=1}^n \alpha_{kr} x_r, \quad k = 1, \dots, n,$$

$$\det A = \det \|\alpha_{kr}\|_{k,r=1}^n \neq 0.$$

Розглядаючи функцію u , як складну функцію: $u = u(y(x))$, запишемо

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial u}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^n \alpha_{ki} \frac{\partial u}{\partial y_k}, \quad i = 1, \dots, n;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum_{k=1}^n \alpha_{ki} \frac{\partial u}{\partial y_k} \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^n \alpha_{ki} \sum_{l=1}^n \alpha_{lj} \frac{\partial^2 u}{\partial y_k \partial y_l} = \sum_{k,l=1}^n \alpha_{ki} \alpha_{lj} \frac{\partial^2 u}{\partial y_k \partial y_l}, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Підставивши переписані похідні в рівняння (1), запишемо його в нових незалежних змінних

$$\sum_{k,l=1}^n \tilde{a}_{kl} \frac{\partial^2 u}{\partial y_k \partial y_l} + \sum_{k=1}^n \tilde{b}_k \frac{\partial u}{\partial y_k} + cu = \tilde{f}(y), \quad y \in D = A(\Omega), \quad (3)$$

де $\tilde{f}(y) = f(A^{-1}x), \quad \tilde{b}_k = \sum_{i=1}^n b_i \alpha_{ki}, \quad k = 1, \dots, n,$

$$\tilde{a}_{kl} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \alpha_{ki} \alpha_{lj}, \quad k, l = 1, \dots, n, \quad \tilde{a}_{kl} = \tilde{a}_{lk}. \quad (4)$$

Разом із диференціальним рівнянням (1) розглядається квадратична форма

$$\delta = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \xi_i \xi_j, \quad (5)$$

для побудови якої використовуються коефіцієнти при похідних другого порядку, що входять до (1).

Якщо зробити невиворжене перетворення координат

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = B\eta = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & \dots & \beta_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix}, \quad (6)$$

$\det B = \det \|\beta_{ij}\|_{i,j=1}^n \neq 0$, то квадратична форма (5) в нових координатах $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n)$ переписеться у вигляді

$$\delta = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \sum_{k=1}^n \beta_{ik} \eta_k \sum_{l=1}^n \beta_{jl} \eta_l = \sum_{k,l=1}^n a_{kl}^* \eta_k \eta_l, \quad (7)$$

де

$$a_{kl}^* = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \beta_{ik} \beta_{jl}, \quad k, l = 1, \dots, n. \quad (8)$$

Якщо заміну змінних (2) та перетворення координат (6) вибрати так,

що $\mathbf{A} = \mathbf{B}^T$, то в рівностях (4) і (8) буде виконуватись: $\alpha_{ki} = \beta_{ik}$, $\alpha_{lj} = \beta_{jl}$, а коефіцієнти (4) перетвореного рівняння (3) та коефіцієнти (8) переписаної квадратичної форми (7) співпадатимуть

$$\tilde{\alpha}_{kl} = a_{kl}^*, \quad k, l = 1, \dots, n. \quad (9)$$

Для квадратичної форми δ завжди можна вибрати матрицю $\mathbf{B}$ в перетворенні координат (6) так, що вона (форма) запишеться в діагональному (канонічному) вигляді

$$\delta = \eta_1^2 + \dots + \eta_P^2 - \eta_{P+1}^2 - \dots - \eta_{P+Q}^2, \quad (10)$$

де $P, Q \geq 0$, $0 < P + Q \leq n$ тобто в (7) для коефіцієнтів a_{kl}^* буде виконуватись: $a_{kl}^* = 0$, $k \neq l$, $a_{kk}^* \in \{\pm 1, 0\}$. При цьому, згідно із законом інерції квадратичних форм діагональний вигляд (10) квадратичної форми δ визначається однозначно (з точністю до перепозначень координат $\eta_1, \dots, \eta_n$). Тоді, поклавши у заміні змінних (2) $\mathbf{A} = \mathbf{B}^T$ та врахувавши (9), рівняння (1) можна звести до вигляду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial y_P^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y_{P+1}^2} - \dots - \frac{\partial^2 u}{\partial y_{P+Q}^2} + \sum_{k=1}^n \tilde{b}_k \frac{\partial u}{\partial y_k} + cu = \tilde{f}(y), \quad y \in D = \mathbf{A}(\Omega), \quad (11)$$

в якому відсутні доданки, що включають змішані похідні другого порядку, а коефіцієнти при незмішаних похідних співпадають із коефіцієнтами квадратичної форми (10). Оскільки діагональний вигляд квадратичної форми (10) визначається однозначно, то і форма запису вихідного диференціального рівняння (1) у вигляді (11) також однозначна (з точністю до позначень змінних $y_1, \dots, y_n$).

(11) називається **канонічною формою** лінійного диференціального рівняння другого порядку (1).

В залежності від діагонального вигляду (10) відповідної квадратичної форми всі лінійні диференціальні рівняння з частинними похідними можна поділити на три основних типи.

а) Якщо в (10) $P = n, Q = 0$ або навпаки, $P = 0, Q = n$, тобто в діагональному вигляді квадратична форма δ має рівно n квадратів, і всі вони стоять з однаковими знаками, то рівняння (1) має еліптичний тип.

- б) Якщо в (10) $P + Q = n$ і одночасно $P, Q > 0$, тобто в діагональному вигляді квадратична форма δ має рівно n квадратів, але вони стоять з різними знаками, то рівняння (1) має гіперболічний тип. Окремо виділяють нормально-гіперболічні рівняння, коли $P = n - 1, Q = 1$ або $P = 1, Q = n - 1$.
- в) Якщо в (10) $P + Q < n$, тобто в діагональному вигляді квадратична форма δ має менше за n квадратів, то рівняння (1) має параболічний тип. Окремо виділяють нормально-параболічні рівняння, коли $P = n - 1, Q = 0$ або $P = 0, Q = n - 1$.

Якщо рівняння (1) має змінні коефіцієнти, $a_{ij} = a_{ij}(x), x \in \Omega$, то в цьому випадку тип рівняння можна визначити лише в окремо взятій точці x . Для цього в цій точці слід записати квадратичну форму δ , звести її до діагонального вигляду і в залежності від кількості квадратів, що залишаються, та знаків, з якими вони входять, визначити тип рівняння в зафіксованій точці за тими самими правилами. При цьому, в залежності від вибраної точки x , тип рівняння може змінюватись. Припустимо, що в усіх точках області Ω рівняння (1) зі змінними коефіцієнтами має однаковий тип (зберігає тип). Чи можна побудувати єдину заміну незалежних змінних, яка б дозволила звести рівняння до його канонічної форми в усій області збереження типу відразу? Якщо кількість незалежних змінних $n = 2$, то відповідь на це запитання позитивна. Якщо ж $n \geq 3$, то задача про знаходження такої заміни перевизначена, і така заміна, взагалі кажучи, не існує.

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Визначити тип рівняння та звести його до канонічної форми

$$u''_{xx} + 2u''_{xy} - 2u''_{yz} + 2u'_y - u'_z + u = 0. \quad (12)$$

Рівняння включає три незалежних змінних: x, y, z ($n = 3$).

Виділяємо в рівнянні доданки з похідними другого порядку (перші три доданки лівої частини), з їх допомогою записуємо квадратичну форму, яка відповідає рівнянню, та зводимо її до діагонального вигляду

$$\delta = \xi_1^2 + 2\xi_1\xi_2 - 2\xi_2\xi_3 = \xi_1^2 + 2\xi_1\xi_2 + \underline{\xi_2^2 - \xi_2^2} - 2\xi_2\xi_3 =$$

$$\begin{aligned}
 &= (\xi_1 + \xi_2)^2 - \xi_2^2 - 2\xi_2\xi_3 = (\xi_1 + \xi_2)^2 - \left(\xi_2^2 + 2\xi_2\xi_3 + \xi_3^2 - \xi_3^2\right) = \\
 &= (\xi_1 + \xi_2)^2 - (\xi_2 + \xi_3)^2 + \xi_3^2 = \eta_1^2 - \eta_2^2 + \eta_3^2, \quad (13)
 \end{aligned}$$

де

$$\eta_1 = \xi_1 + \xi_2, \quad \eta_2 = \xi_2 + \xi_3, \quad \eta_3 = \xi_3. \quad (14)$$

В діагональному вигляді квадратична форма має три квадрати (кількість квадратів співпадає із кількістю незалежних змінних), серед яких два входять зі знаком плюс, а один — зі знаком мінус (квадрати мають різні знаки). Тоді відповідно до пп. а) – в), с. 85, рівняння (12) належить до гіперболічного (нормально-гіперболічного) типу.

Визначимо лінійну заміну змінних для рівняння (12), яка зведе його до канонічної форми. Для цього, перепишемо перетворення координат (14) квадратичної форми у вигляді (6), тобто розв'яжемо ξ_1, ξ_2, ξ_3 через η_1, η_2, η_3

$$\xi_1 = \eta_1 - \eta_2 + \eta_3, \quad \xi_2 = \eta_2 - \eta_3, \quad \xi_3 = \eta_3,$$

або у векторно-матричній формі

$$\vec{\xi} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix} = \mathbf{B}\vec{\eta}.$$

За допомогою отриманої матриці $\mathbf{B}$ записуємо лінійну заміну змінних, яка зведе рівняння (12) до канонічної форми

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \\ \theta \end{pmatrix} &= \mathbf{A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{B}^T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} \rho = x, \\ \varphi = -x + y, \\ \theta = x - y + z. \end{cases} \quad (15)
 \end{aligned}$$

Для, власне, зведення рівняння до канонічної форми потрібно переписати похідні за змінними x, y, z через похідні за змінними ρ, φ, θ . Вважаючи, що $u = u(\rho, \varphi, \theta)$, та використовуючи правило диференціювання складної функції, запишемо похідні першого порядку

$$\begin{aligned}
 u'_x &= u'_\rho \rho'_x + u'_\varphi \varphi'_x + u'_\theta \theta'_x = u'_\rho - u'_\varphi + u'_\theta, \\
 u'_y &= u'_\rho \rho'_y + u'_\varphi \varphi'_y + u'_\theta \theta'_y = u'_\varphi - u'_\theta, \quad (16)
 \end{aligned}$$

$$u'_z = u'_\rho \rho'_z + u'_\varphi \varphi'_z + u'_\theta \theta'_z = u'_\theta.$$

Для того, щоб отримати аналогічні вирази для похідних другого порядку, скористаємось правилом множення диференціальних операторів. Із (16) запишемо оператори похідних першого порядку

$$\partial_x = \partial_\rho - \partial_\varphi + \partial_\theta, \quad \partial_y = \partial_\varphi - \partial_\theta, \quad \partial_z = \partial_\theta.$$

Тоді для похідних другого порядку отримаємо

$$\begin{aligned} u''_{xx} &= \partial_x^2 u = (\partial_\rho - \partial_\varphi + \partial_\theta)^2 u = \\ &= u''_{\rho\rho} + u''_{\varphi\varphi} + u''_{\theta\theta} - 2u''_{\rho\varphi} + 2u''_{\rho\theta} - 2u''_{\varphi\theta}, \\ u''_{xy} &= \partial_x \partial_y u = (\partial_\rho - \partial_\varphi + \partial_\theta)(\partial_\varphi - \partial_\theta)u = \\ &= u''_{\rho\varphi} - u''_{\rho\theta} - u''_{\varphi\varphi} + 2u''_{\varphi\theta} - u''_{\theta\theta}, \\ u''_{yz} &= \partial_y \partial_z u = (\partial_\varphi - \partial_\theta)\partial_\theta u = u''_{\varphi\theta} - u''_{\theta\theta}. \end{aligned}$$

Знайдені похідні першого та другого порядків підставляємо у вихідне рівняння (12) і після зведення спільних доданків приходимо до канонічної форми

$$u''_{\rho\rho} - u''_{\varphi\varphi} + u''_{\theta\theta} + 2u'_\varphi - 3u'_\theta + u = 0. \quad (17)$$

Порівнюючи діагональний вигляд (13) квадратичної форми δ та канонічну форму рівняння (17), можемо зробити висновок, що коефіцієнти при квадратах квадратичної форми та коефіцієнти при похідних другого порядку в канонічній формі співпадають. Даний факт є загальним правилом, якщо матриця $\mathbf{B}$ лінійного перетворення координат квадратичної форми та матриця $\mathbf{A}$ лінійної заміни змінних у рівнянні пов'язані рівністю $\mathbf{A} = \mathbf{B}^T$. Тому, в подальшому, дане правило дозволяє значно полегшити отримання канонічної форми рівняння, адже обчислювати похідні другого порядку та підставляти їх у рівняння необов'язково, оскільки результат цих дій можна, якщо скористатись діагональним записом квадратичної форми. ■

Приклад 2. *Визначити тип рівняння та звести його до канонічної форми*

$$u''_{xy} + 2u''_{yz} + u'_x - u'_y = 0. \quad (18)$$

Як і в попередньому прикладі рівняння включає три незалежних змінних: x, y, z ($n = 3$).

Записуємо квадратичну форму, яка відповідає рівнянню (18),

виділивши доданки із похідними другого порядку (перших два доданки лівої частини), та зводимо її до діагонального вигляду

$$\delta = \xi_1 \xi_2 + 2\xi_2 \xi_3 = \xi_2(\xi_1 + 2\xi_3) = \eta_1^2 - \eta_2^2, \quad (19)$$

де

$$\xi_2 = \eta_1 - \eta_2, \quad \xi_1 + 2\xi_3 = \eta_1 + \eta_2. \quad (20)$$

В отриманому діагональному вигляді (19) квадратичної форми залишилось лише два квадрати, що менше за кількість незалежних змінних у рівнянні. Тому рівняння (18) має параболічний тип.

Перетворення координат квадратичної форми має вигляд лінійного невідродженого перетворення з $\mathbb{R}^3$ у $\mathbb{R}^3$. Тому доповнюємо (20) третьою рівністю, яку можна вибрати довільним чином, але так, щоб отримане перетворення було невідродженим. Наприклад,

$$\eta_3 = \xi_3. \quad (21)$$

Розв'язуємо рівності (20), (21) відносно ξ_1, ξ_2, ξ_3

$$\xi_1 = \eta_1 + \eta_2 - 2\eta_3, \quad \xi_2 = \eta_1 - \eta_2, \quad \xi_3 = \eta_3,$$

або у векторно-матричній формі

$$\vec{\xi} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix} = \mathbf{B} \vec{\eta}.$$

За допомогою отриманої матриці $\mathbf{B}$ визначаємо лінійну заміну змінних, що зведе диференціальне рівняння (18) до канонічної форми,

$$\begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \\ \theta \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{B}^T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \quad (22)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \rho = x + y, \\ \varphi = x - y, \\ \theta = -2x + z. \end{cases}$$

Використовуючи явний вигляд заміни змінних (22) та правило диференціювання складної функції, переписуємо похідні першого порядку за змінними x, y, z через похідні за змінними ρ, φ, θ

$$\begin{aligned} u'_x &= u'_\rho \rho'_x + u'_\varphi \varphi'_x + u'_\theta \theta'_x = u'_\rho + u'_\varphi - 2u'_\theta, \\ u'_y &= u'_\rho \rho'_y + u'_\varphi \varphi'_y + u'_\theta \theta'_y = u'_\rho - u'_\varphi, \end{aligned} \quad (23)$$

$$u'_z = u'_\rho \rho'_z + u'_\varphi \varphi'_z + u'_\theta \theta'_z = u'_\theta.$$

Оскільки коефіцієнти при похідних другого порядку перетворюють за тими самими правилами, що і коефіцієнти квадратичної форми при зведенні до діагонального вигляду, то записувати для похідних другого порядку рівності, аналогічні до (23), немає потреби.

Після заміни змінних (22) результат перетворення доданків рівняння (18), які включають похідні другого порядку (перші два доданки лівої частини), визначаємо за допомогою діагонального вигляду квадратичної форми (19). Вирази (23) для похідних першого порядку підставляємо у третій та четвертий доданки рівняння безпосередньо. В результаті отримуємо шукану канонічну форму рівняння (18)

$$u''_{\rho\rho} - u''_{\varphi\varphi} + 2u'_\varphi - 2u'_\theta = 0. \quad \blacksquare$$

Приклад 3. *Визначити тип рівняння та звести його до канонічної форми*

$$u''_{xy} - 3u''_{yz} + u''_{xz} + u'_x - 3u'_z = 0. \quad (24)$$

Рівняння знову містить три незалежні змінні x, y, z . Тому $n = 3$.

Використовуючи перші три доданки лівої частини рівняння (24), до яких включають похідні другого порядку, записуємо квадратичну форму, яка відповідає рівнянню

$$\delta = \xi_1 \xi_2 - 3\xi_2 \xi_3 + \xi_1 \xi_3.$$

Для зведення δ до діагонального вигляду введемо допоміжне перетворення координат

$$\xi_1 = \tau_1 + \tau_2, \quad \xi_2 = \tau_1 - \tau_2, \quad \xi_3 = \tau_3, \quad (25)$$

в яких зручніше виділяти повні квадрати (зводити форму до діагонального вигляду).

$$\begin{aligned} \delta &= \tau_1^2 - \tau_2^2 - 3(\tau_1 - \tau_2)\tau_3 + (\tau_1 + \tau_2)\tau_3 = \\ &= \tau_1^2 - \tau_2^2 - 2\tau_1\tau_3 + 4\tau_2\tau_3 = \\ &= \tau_1^2 - 2\tau_1\tau_3 + \underline{\tau_3^2 - \tau_3^2} - \tau_2^2 + 4\tau_2\tau_3 = \\ &= (\tau_1 - \tau_3)^2 - (\tau_2^2 - 4\tau_2\tau_3 + \tau_3^2) = \\ &= (\tau_1 - \tau_3)^2 - \left(\tau_2^2 - 4\tau_2\tau_3 + \underline{4\tau_3^2 - 4\tau_3^2} + \tau_3^2 \right) = \end{aligned}$$

$$= (\tau_1 - \tau_3)^2 - (\tau_2 - 2\tau_3)^2 + 3\tau_3^2 = \eta_1^2 - \eta_2^2 + \eta_3^2, \quad (26)$$

де

$$\tau_1 - \tau_3 = \eta_1, \quad \tau_2 - 2\tau_3 = \eta_2, \quad \sqrt{3}\tau_3 = \eta_3. \quad (27)$$

З (26) випливає, що рівняння (24) має гіперболічний тип (кількість квадратів співпадає із кількістю незалежних змінних, але вони входять із різними знаками).

Для вибору заміни змінних, що зведе диференціальне рівняння (24) до канонічної форми, визначаємо ξ_1, ξ_2, ξ_3 через η_1, η_2, η_3 . Для цього, розв'язуємо (27) відносно τ_1, τ_2, τ_3 і підставляємо отримані рівності в (25). В результаті, запишемо

$$\xi_1 = \eta_1 + \eta_2 + \sqrt{3}\eta_3, \quad \xi_2 = \eta_1 - \eta_2 - \frac{1}{\sqrt{3}}\eta_3, \quad \xi_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\eta_3,$$

або у векторно-матричній формі

$$\vec{\xi} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \sqrt{3} \\ 1 & -1 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix} = \mathbf{B}\vec{\eta}. \quad (28)$$

Використовуючи отриману матрицю $\mathbf{B}$, вводимо нові незалежні змінні в диференціальному рівнянні (24) за допомогою заміни

$$\begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \\ \theta \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{B}^T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ \sqrt{3} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \rho = x + y, \\ \varphi = x - y, \\ \theta = \sqrt{3}x - \frac{y}{\sqrt{3}} + \frac{z}{\sqrt{3}}. \end{cases}$$

Використовуючи правило диференціювання складної функції та введену заміну, записуємо похідні першого порядку за змінними x, y, z через похідні за ρ, φ, θ

$$u'_x = u'_\rho + u'_\varphi + \sqrt{3}u'_\theta, \quad u'_z = \frac{1}{\sqrt{3}}u'_\theta. \quad (29)$$

Для похідних другого порядку аналогічні рівності записувати необов'язково, оскільки результат перетворення доданків, до яких входять ці похідні, можна визначити з діагонального вигляду (26) квадратичної форми δ .

Підставляємо рівності (29) в рівняння (24) безпосередньо, результат перетворення доданків, що включають похідні другого порядку, визначаємо за допомогою (26). В результаті, отримуємо канонічну форму диференціального рівняння (24)

$$u''_{\rho\rho} - u''_{\varphi\varphi} + u''_{\theta\theta} + u'_\rho + u'_\varphi = 0. \quad \blacksquare$$

Приклад 4. Визначити тип рівняння та звести його до канонічної форми

$$u''_{xx} - 4u''_{xy} + 2u''_{xz} + 9u''_{yy} + 2u''_{zz} = 0. \quad (30)$$

Як і в попередніх прикладах, маємо рівняння з трьома незалежними змінними x, y, z ($n = 3$).

Використовуючи доданки, до яких входять похідні другого порядку (всі доданки лівої частини рівняння (30)), записуємо квадратичну форму та зводимо її до діагонального вигляду

$$\begin{aligned} \delta &= \xi_1^2 - 4\xi_1\xi_2 + 2\xi_1\xi_3 + 9\xi_2^2 + 2\xi_3^2 = \\ &= \underline{\xi_1^2 - 4\xi_1\xi_2 + 2\xi_1\xi_3} + 4\xi_2^2 + \xi_3^2 - 4\xi_2\xi_3 + 4\xi_2\xi_3 + 5\xi_2^2 + \xi_3^2 = \\ &= (\xi_1 - 2\xi_2 + \xi_3)^2 + \underline{\xi_2^2 + 4\xi_2^2 + 4\xi_2\xi_3} + \xi_3^2 = \\ &= (\xi_1 - 2\xi_2 + \xi_3)^2 + \xi_2^2 + (2\xi_2 + \xi_3)^2 = \eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2, \end{aligned} \quad (31)$$

де

$$\eta_1 = \xi_1 - 2\xi_2 + \xi_3, \quad \eta_2 = \xi_2, \quad \eta_3 = 2\xi_2 + \xi_3. \quad (32)$$

З (31) випливає, що рівняння (30) має еліптичний тип.

Розв'язуємо рівності (32) відносно ξ_1, ξ_2, ξ_3 :

$$\xi_1 = \eta_1 + 4\eta_2 - \eta_3, \quad \eta_2 = \xi_2, \quad \xi_3 = \eta_3 - 2\eta_2,$$

або у векторно-матричній формі

$$\vec{\xi} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix} = \mathbf{B}\vec{\eta}.$$

Використовуючи отриману матрицю $\mathbf{B}$, визначаємо заміну змінних, що зводить рівняння (30) до канонічної форми

$$\begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \\ \theta \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{B}^T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \rho = x, \\ \varphi = 4x + y - 2z, \\ \theta = -x + z. \end{cases}$$

Оскільки вихідне диференціальне рівняння (30) не включає доданків із похідними першого порядку, то його канонічну форму можна повністю визначити із діагонального вигляду квадратичної форми (31). Отримаємо

$$u''_{\rho\rho} + u''_{\varphi\varphi} + u''_{\theta\theta} = 0. \quad \blacksquare$$

Приклад 5. *Визначити тип рівняння та звести його до канонічної форми*

$$u''_{xy} + u''_{xz} - u''_{xt} - u''_{yz} + u''_{yt} + u''_{zt} = 0. \quad (33)$$

Рівняння (33) має чотири незалежні змінні: x, y, z, t ($n = 4$).

Записуємо квадратичну форму, яка відповідає (33), та зводимо її до діагонального вигляду

$$\begin{aligned} \delta &= \xi_1\xi_2 + \xi_1\xi_3 - \xi_1\xi_4 - \xi_2\xi_3 + \xi_2\xi_4 + \xi_3\xi_4 = \\ &= \xi_1\xi_2 + \xi_1(\xi_3 - \xi_4) - \xi_2(\xi_3 - \xi_4) + \xi_3\xi_4 = \\ &= \xi_1\xi_2 + (\xi_1 - \xi_2)(\xi_3 - \xi_4) + \xi_3\xi_4. \end{aligned}$$

Допоміжне перетворення координат квадратичної форми

$$\xi_1 = \tau_1 + \tau_2, \quad \xi_2 = \tau_1 - \tau_2, \quad \xi_3 = \tau_3 + \tau_4, \quad \xi_4 = \tau_3 - \tau_4, \quad (34)$$

після якого остаточно зводимо її до діагонального вигляду

$$\begin{aligned} \delta &= \tau_1^2 - \tau_2^2 + 2\tau_2\tau_4 + \tau_3^2 - \tau_4^2 = \\ &= \tau_1^2 - (\tau_2^2 - 4\tau_2\tau_4 + \tau_4^2) + \tau_3^2 = \\ &= \tau_1^2 - (\tau_2^2 - 4\tau_2\tau_4 + 4\tau_4^2 - 3\tau_4^2) + \tau_3^2 = \\ &= \tau_1^2 - (\tau_2 - 2\tau_4)^2 + \tau_3^2 + 3\tau_4^2 = \eta_1^2 - \eta_2^2 + \eta_3^2 + \eta_4^2, \end{aligned} \quad (35)$$

де

$$\eta_1 = \tau_1, \quad \eta_2 = \tau_2 - 2\tau_4, \quad \eta_3 = \tau_3, \quad \eta_4 = \sqrt{3}\tau_4. \quad (36)$$

З (35) випливає, що вихідне диференціальне рівняння (33) має гіперболічний тип.

Рівності (36) розв'язуємо відносно $\tau_{1,2,3,4}$, результат підставляємо в (34). Отримаємо перетворення координат квадратичної форми, за допомогою якого вона зводиться до діагонального вигляду,

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \eta_1 + \eta_2 + 2\sqrt{3}\eta_4, & \xi_2 &= \eta_1 - \eta_2 - 2\sqrt{3}\eta_4, \\ \xi_3 &= \eta_3 + \frac{\eta_4}{\sqrt{3}}, & \xi_4 &= \eta_3 - \frac{\eta_4}{\sqrt{3}},\end{aligned}$$

або у векторно-матричній формі

$$\vec{\xi} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2\sqrt{3} \\ 1 & -1 & 0 & -2\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \\ \eta_4 \end{pmatrix} = \mathbf{B}\vec{\eta}.$$

Отримана матриця $\mathbf{B}$ перетворення координат квадратичної форми дозволяє вибрати лінійну заміну змінних диференціального рівняння (33), яка зведе останнє до канонічної форми,

$$\begin{pmatrix} \rho \\ \theta \\ \varphi \\ \psi \end{pmatrix} = \mathbf{B}^T \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2\sqrt{3} & -2\sqrt{3} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}.$$

Оскільки до рівняння (33) не входять доданки із похідними першого порядку, то його канонічну форму можна повністю отримати, користуючись діагональним виглядом (35) квадратичної форми δ . Запишемо

$$u''_{\rho\rho} - u''_{\theta\theta} + u''_{\varphi\varphi} + u''_{\psi\psi} = 0. \quad \blacksquare$$

Завдання для самостійної роботи

Визначити типи наведених диференціальних рівнянь та звести їх до канонічних форм.

1. $u''_{xx} + u''_{yy} - 2u''_{xz} + u'_x - u'_z = 0.$
2. $2u''_{yy} - u''_{yz} + u''_{xz} - u'_z = 0.$

3. $u''_{yy} - 2u''_{xy} + 2u''_{xz} - u''_{yz} + 2u'_x + 3u = 0.$
4. $u''_{xx} + 2u''_{xy} + 2u''_{xz} - 2u''_{yy} + 2u''_{zz} + u'_y = 0.$
5. $u''_{xx} - 4u''_{xy} + 5u''_{yy} + 2u''_{yz} - 3u''_{zz} = 0.$
6. $u''_{xx} + 2u''_{xy} - u''_{yy} + 4u''_{yz} + 6u''_{zz} = 0.$
7. $u''_{xx} + 5u''_{yy} + 5u''_{zz} + 4u''_{xy} + 4u''_{xz} + 8u''_{yz} - u'_x + 2u'_z = 0.$
8. $4u''_{xx} + 4u''_{zz} - 4u''_{xy} + 12u''_{xz} - 8u''_{yz} + 3u'_y - 2u'_z + 5u = 0.$
9. $u''_{xx} - 4u''_{xy} + 2u''_{xz} + 4u''_{yy} + u''_{zz} = 0.$
10. $u''_{xx} + 2u''_{xy} - 2u''_{xz} + 2u''_{yy} + 2u''_{zz} = 0.$
11. $u''_{yy} + u''_{yz} - u''_{xy} - u'_z = 0.$
12. $u''_{zz} + u''_{xz} - u''_{yz} + u'_y - u'_z + 2u = 0.$
13. $2u''_{xy} + u''_{yz} - 3u'_y + u = 0.$
14. $u''_{xy} + 2u''_{yy} + u''_{xz} + 2u''_{yz} + 2u'_x - 3u = 0.$
15. $9u''_{xx} + 6u''_{xy} + 6u''_{xz} + 2u''_{yy} - 4u''_{yz} + 11u''_{zz} + u'_x - u'_z = 0.$
16. $u''_{xx} - 6u''_{xy} - 2u''_{xz} + 13u''_{yy} + 10u''_{yz} + 2u''_{zz} - u'_y + 2u'_z = 0.$
17. $u''_{xx} - 2u''_{xy} + 6u''_{xz} - 3u''_{yy} - 2u''_{yz} + 9u''_{zz} + 2u'_x + u'_z = 0.$
18. $u''_{xx} + 2u''_{xy} + 2u''_{yy} + 2u''_{yz} + 2u''_{zz} + 2u''_{zt} + 2u''_{tt} = 0.$
19. $u''_{xx} + 2u''_{xy} + 2u''_{xz} + 4u''_{yz} - 2u''_{yt} + 4u''_{zt} + u''_{zz} = 0.$
20. $u''_{xz} + u''_{xt} + u''_{yy} + u''_{yz} + u''_{yt} = 0.$

2.2. Класифікація та зведення до канонічної форми рівнянь, що мають дві незалежні змінні

Теоретичні відомості

В загальному випадку лінійне диференціальне рівняння з частинними похідними другого порядку, що має дві незалежні змінні, можна записати у вигляді

$$a(x, y)u''_{xx} + 2b(x, y)u''_{xy} + c(x, y)u''_{yy} + F(x, y, u, u'_x, u'_y) = 0, \quad (1)$$

$$(x, y) \in \Omega,$$

де $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — область, F об'єднує доданки, до яких не входять похідні другого порядку, коефіцієнти $a, b, c \in C^2(\Omega)$, причому, в жодній точці Ω

всі коефіцієнти a, b, c не дорівнюють нулю одночасно:

$$|a(x, y)| + |b(x, y)| + |c(x, y)| \neq 0, \quad (x, y) \in \Omega. \quad (2)$$

Для визначення типу рівняння (1) зафіксуємо довільну точку $(x, y) \in \Omega$ та запишемо в цій точці квадратичну форму

$$\delta(x, y) = a(x, y)p^2 + 2b(x, y)pq + c(x, y)q^2,$$

де p, q — координати квадратичної форми.

В подальшому, вважаємо, що $a(x, y) \neq 0$. Якщо це не так, то з урахуванням (2) можна припустити, що $c(x, y) \neq 0$. Тоді, зробивши відповідні перепозначення, прийдемо до випадку, що розглядається. Якщо ж одночасно $a(x, y) = c(x, y) = 0$, то з (2) випливає, що обов'язково $b(x, y) \neq 0$. В цьому випадку, як буде показано пізніше, рівняння (1) матиме в точці (x, y) гіперболічний тип, і вже буде записане у так званій канонічній формі.

Оскільки $a(x, y) \neq 0$, то можна вважати, що $a(x, y) > 0$ (в іншому випадку рівняння (1) треба помножити на (-1)). Виділяючи повний квадрат, перепишемо квадратичну форму δ у вигляді

$$\delta(x, y) = \frac{1}{a(x, y)} [(a(x, y)p + b(x, y)q)^2 - d(x, y)q^2], \quad (3)$$

де $d(x, y) = b^2(x, y) - a(x, y)c(x, y)$ — неповний дискримінант рівняння (1).

З (3) випливає, що остаточний діагональний (канонічний) вигляд квадратичної форми залежить від знаку дискримінанта d :

а) якщо $d(x, y) > 0$, то діагональний вигляд $\delta(x, y)$ включатиме два квадрати з протилежними знаками, а рівняння (1) матиме в точці (x, y) гіперболічний тип;

б) якщо $d(x, y) = 0$, то діагональний вигляд $\delta(x, y)$ включатиме лише один квадрат, а рівняння (1) матиме в точці (x, y) параболічний тип;

в) якщо $d(x, y) < 0$, то діагональний вигляд $\delta(x, y)$ включатиме два квадрати з однаковими знаками, а рівняння (1) матиме в точці (x, y) еліптичний тип.

Розглянемо перетворення рівняння (1) після невиворотної заміни незалежних змінних

$$\xi = \xi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \quad (4)$$

$$\xi, \eta \in C^2(\Omega), \quad \left| \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} \right| = \begin{vmatrix} \xi'_x & \xi'_y \\ \eta'_x & \eta'_y \end{vmatrix} \neq 0.$$

Вважаючи u функцією аргументів ξ, η , які у свою чергу залежать від x, y , і використовуючи правило диференціювання складної функції багатьох змінних, переписуємо похідні за змінними x, y через похідні за змінними ξ, η . Отримані вирази підставляємо в рівняння (1), після чого воно запишеться у вигляді

$$\tilde{a}(x, y)u''_{\xi\xi} + 2\tilde{b}(x, y)u''_{\xi\eta} + \tilde{c}(x, y)u''_{\eta\eta} + \tilde{F}(x, y, u, u'_\xi, u'_\eta) = 0, \quad (5)$$

де

$$\tilde{a}(x, y) = a(x, y)(\xi'_x)^2 + 2b(x, y)\xi'_x\xi'_y + c(x, y)(\xi'_y)^2,$$

$$\tilde{b}(x, y) = a(x, y)\xi'_x\eta'_x + b(x, y)(\xi'_x\eta'_y + \xi'_y\eta'_x) + c(x, y)\xi'_y\eta'_y,$$

$$\tilde{c}(x, y) = a(x, y)(\eta'_x)^2 + 2b(x, y)\eta'_x\eta'_y + c(x, y)(\eta'_y)^2, \quad (6)$$

а $\tilde{F}$ об'єднує всі доданки, до яких не входять похідні другого порядку.

Зауважимо, що невинороджена заміна (4) не змінює тип диференціального рівняння. Для дискримінанта перетвореного рівняння (5) має місце рівність

$$\tilde{d}(x, y) = \tilde{b}^2(x, y) - \tilde{a}(x, y)\tilde{c}(x, y) = \left| \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} \right|^2 d(x, y),$$

тобто знаки дискримінанта $\tilde{d}$ рівняння (5) і дискримінанта d вихідного рівняння (1) співпадають.

Виберемо заміну змінних (4) так, щоб в усій області Ω коефіцієнт $\tilde{a} = 0$. Тоді, з першої рівності (6) випливає, що функція $\xi = \xi(x, y)$ повинна бути розв'язком рівняння

$$a(x, y)(\Phi'_x)^2 + 2b(x, y)\Phi'_x\Phi'_y + c(x, y)(\Phi'_y)^2 = 0, \quad (x, y) \in \Omega, \quad (7)$$

яке називається рівнянням характеристик вихідного диференціального рівняння з частинними похідними (1).

Очевидним розв'язком рівняння (7) є $\Phi = \text{const}$. Але такий розв'язок не підходить для вибору невинородженої заміни (4). Тому будемо шукати такі розв'язки (7), для яких $\nabla\Phi \neq 0$.

Лема. Функція $\Phi = \Phi(x, y)$, $(x, y) \in \Omega$, $\nabla \Phi \neq 0$, буде розв'язком рівняння характеристик (7) тоді і лише тоді, коли вираз $\Phi(x, y) = \text{const}$ визначатиме в області Ω загальний інтеграл звичайного диференціального рівняння

$$a(x, y)(dy)^2 - 2b(x, y)dxdy + c(x, y)(dx)^2 = 0. \quad (8)$$

Рівняння (8) називається *характеристичним рівнянням* для диференціального рівняння з частинними похідними (1).

Рівняння (8) є звичайним диференціальним рівнянням, яке записане в диференціалах.

Криві, неявні рівняння яких визначаються з рівності $\Phi(x, y) = \text{const}$, називаються *характеристиками* рівняння (1).

З урахуванням попередньої лема характеристики вихідного рівняння (1) будуть інтегральними кривими характеристичного рівняння (8).

Як і до цього, вважаємо, що $a \neq 0$ в області Ω . Поділивши рівняння (8) на $(dx)^2$, перепишемо його у вигляді квадратного рівняння відносно $\frac{dy}{dx}$

$$a(x, y) \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - 2b(x, y) \frac{dy}{dx} + c(x, y) = 0,$$

розв'язавши яке, приходимо, взагалі кажучи, до сукупності двох звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{b(x, y) \pm \sqrt{b^2(x, y) - a(x, y)c(x, y)}}{a(x, y)} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow a(x, y)dy &= (b(x, y) \pm \sqrt{d(x, y)})dx. \end{aligned} \quad (9)$$

1. Нехай вихідне диференціальне рівняння з частинними похідними (1) має в усій області Ω гіперболічний тип. Тоді $d > 0$ в області Ω , і сукупність (9) складається з двох звичайних диференціальних рівнянь з дійсними, гладкими коефіцієнтами. Кожне з двох рівнянь (9) має свій загальний інтеграл

$$\Phi_1(x, y) = C_1, \quad \Phi_2(x, y) = C_2, \quad C_{1,2} = \text{const}. \quad (10)$$

В результаті, характеристичне рівняння (8) має два незалежних загальних інтеграли (10). Ці інтеграли будуть дійсними, і визначатимуть два набори дійсних характеристик вихідного гіперболічного рівняння з частинними похідними (1). Ці характеристики можна зобразити в області

Ω , причому через кожну фіксовану точку області будуть проходити рівно по одній характеристиці з кожного набору.

Згідно із лемою (с. 98) обидві функції $\Phi_{1,2}$ будуть розв'язками рівняння характеристик (7) в області Ω . Ці розв'язки будуть незалежними, оскільки функції $\Phi_{1,2}$ визначають загальні інтеграли двох різних диференціальних рівнянь (9).

Тоді, якщо вибрати заміну змінних (4) у вигляді

$$\xi = \Phi_1(x, y), \quad \eta = \Phi_2(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \quad (11)$$

яка буде невиворотною, то в перетвореному рівнянні (5) з урахуванням формул (6) коефіцієнти $\tilde{a} \equiv 0$ та $\tilde{c} \equiv 0$. При цьому, коефіцієнт $\tilde{b} \neq 0$ в області Ω . В результаті, після заміни змінних (11) гіперболічне рівняння (1) перепишеться у вигляді

$$u''_{\xi\eta} + \frac{1}{2\tilde{b}(x, y)} \tilde{F}(x, y, u, u'_\xi, u'_\eta) = 0.$$

Розв'язавши невиворотною заміну (11) відносно x, y та підставивши отримані вирази у попереднє рівняння, запишемо остаточний вигляд перетвореного рівняння (1)

$$u''_{\xi\eta} + f_1(\xi, \eta, u, u'_\xi, u'_\eta) = 0. \quad (12)$$

Рівняння (12) називається **I канонічною формою гіперболічного рівняння з двома незалежними змінними**.

Якщо замість заміни (11) зробити невиворотною заміну

$$\begin{aligned} \rho &= \xi + \eta = \Phi_1(x, y) + \Phi_2(x, y), \\ \tau &= \xi - \eta = \Phi_1(x, y) - \Phi_2(x, y), \end{aligned} \quad (x, y) \in \Omega, \quad (13)$$

то гіперболічне рівняння (1) з двома незалежними змінними зведеться до **II канонічної форми**

$$u''_{\rho\rho} - u''_{\tau\tau} + f_2(\rho, \tau, u, u'_\rho, u'_\tau) = 0.$$

2. Нехай рівняння з частинними похідними (1) має в області Ω параболический тип. Тоді $d = 0$ в усій області Ω , а сукупність рівнянь (9) перетворюється на одне звичайне диференціальне рівняння

$$a(x, y)dy = b(x, y)dx,$$

з дійсними коефіцієнтами, яке має один загальний дійсний інтеграл $\Phi(x, y) = C = \text{const}$. В результаті, параболическе рівняння (1) матиме

один набір дійсних характеристик, які можна зобразити в області Ω .

Згідно із лемою (с. 98) рівняння характеристик (7) матиме лише один розв'язок. Тоді заміну змінних (4) виберемо у вигляді

$$\xi = \Phi(x, y), \quad \eta = \Psi(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \quad (14)$$

де функцію $\Psi \in C^2(\Omega)$ можна обирати довільним чином, але так, щоб заміна (14) була невивродженою.

Оскільки Φ розв'язок рівняння характеристик (7), то після заміни (14) у перетвореному рівнянні (5), використовуючи першу формулу (6), отримаємо, що коефіцієнт $\tilde{a} \equiv 0$. Також, з умови параболічності рівняння (1) та другої формули (6) випливає, що $\tilde{b} \equiv 0$. При цьому, $\tilde{c} \neq 0$ в усій області Ω . Таким чином, параболічне рівняння (1) в результаті заміни незалежних змінних (14) переписеться у вигляді

$$u''_{\eta\eta} + \frac{1}{\tilde{c}(x, y)} \tilde{F}(x, y, u, u'_\xi, u'_\eta) = 0.$$

Розв'язавши невивроджену заміну (14) відносно x, y та підставивши отримані вирази у попереднє рівняння, отримаємо остаточний вигляд параболічного рівняння (1) у змінних ξ, η

$$u''_{\eta\eta} + f(\xi, \eta, u, u'_\xi, u'_\eta) = 0. \quad (15)$$

Рівняння (15) називається **канонічною формою параболічного рівняння з двома незалежними змінними**.

3. Нехай рівняння з частинними похідними (1) має в області Ω еліптичний тип. Тоді $d < 0$ в усій області Ω . З урахуванням знаку дискримінанта d сукупність рівнянь (9) перепишемо у вигляді

$$a(x, y)dy = \left(b(x, y) \pm i\sqrt{-d(x, y)} \right) dx,$$

де i — уявна одиниця, $i^2 = -1$, а $(-d) > 0$ в Ω .

Таким чином, характеристичне рівняння (8) розпадається на сукупність двох диференціальних рівнянь із комплексно-спряженими коефіцієнтами. Кожне із цих рівнянь має свій загальний інтеграл, але вони запишуться через комплексно-спряжені вирази

$$\Phi_{1,2}(x, y) = \phi(x, y) \pm i\psi(x, y) = C_{1,2} = \text{const}. \quad (16)$$

Загальні інтеграли (16) визначають два набори характеристик вихідного еліптичного рівняння (1). Оскільки рівняння характеристик запи-

сані через комплексно-спряжені вирази, то такі характеристики не можна зобразити в області Ω дійсної площини Oxy , і їх називають **уявними характеристиками**.

Якщо вибрати заміну змінних у вигляді

$$\xi = \operatorname{Re} \Phi_1 = \phi(x, y), \quad \eta = \operatorname{Im} \Phi_1 = \psi(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \quad (17)$$

скористатись тим, що функція $\Phi_1 = \phi + i\psi$ є комплексно-значним розв'язком рівняння характеристик (7), то з формул (6) для коефіцієнтів перетвореного рівняння отримаємо: $\tilde{b} \equiv 0, \tilde{a} \equiv \tilde{c} \neq 0$ в Ω . В результаті, після заміни (17) еліптичне рівняння (1) перепишеться у вигляді

$$u''_{\xi\xi} + u''_{\eta\eta} + \frac{1}{\tilde{a}(x, y)} \tilde{F}(x, y, u, u'_\xi, u'_\eta) = 0.$$

Зауважимо, що заміна (17) буде невивірженою. Тому, розв'язавши її відносно x, y та підставивши отримані вирази у попереднє рівняння, остаточно перепишемо еліптичне рівняння (1) у змінних ξ, η

$$u''_{\xi\xi} + u''_{\eta\eta} + f(\xi, \eta, u, u'_\xi, u'_\eta) = 0. \quad (18)$$

Рівняння (18) — **канонічна форма еліптичного рівняння з двома незалежними змінними**.

Для зведення еліптичного рівняння до канонічної форми можна використовувати заміну у вигляді

$$\xi = \operatorname{Re} \Phi_2 = \phi(x, y), \quad \eta = \operatorname{Im} \Phi_2 = -\psi(x, y), \quad (x, y) \in \Omega. \quad (19)$$

При цьому, канонічна форма (18) не зазнає принципових змін.

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. *Визначити тип рівняння та звести його до канонічної форми в областях збереження типу*

$$u''_{xx} - xu''_{yy} = 0. \quad (20)$$

Запишемо коефіцієнти рівняння (20):

$$a(x, y) = 1, b = 0, c(x, y) = -x.$$

Для визначення типу диференціального рівняння (20) знайдемо його дискримінант та проаналізуємо знак

$$d(x, y) = b^2(x, y) - a(x, y)c(x, y) = x.$$

а) $d(x, y) = x > 0 \Leftrightarrow x > 0$ — рівняння (20) має гіперболічний тип;

б) $d(x, y) = x < 0 \Leftrightarrow x < 0$ — рівняння (20) має еліптичний тип;

в) $d(x, y) = x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ — рівняння (20) має параболічний тип.

Зведемо рівняння до його канонічної форми в областях, в яких зберігається тип: $x > 0$ та $x < 0$. На прямій $x = 0$ рівняння до канонічної форми не зводимо, бо пряма не буде областю (вона не містить жодної внутрішньої точки).

1. Півплощина $x > 0$. Рівняння (20) має гіперболічний тип. Для зведення рівняння до канонічної форми шукаємо його характеристики. Записуємо характеристичне рівняння (8) та шукаємо загальні інтеграли

$$(dy)^2 - x(dx)^2 = 0, \quad x > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (dy)^2 = x(dx)^2, x > 0 \Leftrightarrow dy = \pm \sqrt{x} dx, x > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y \pm \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} = C_{1,2}, \quad x > 0, \quad C_{1,2} = \text{const.}$$

Отримали два набори дійсних характеристик, за допомогою яких можна знайти два незалежних розв'язки рівняння характеристик

$$\Phi_{1,2}(x, y) = y \pm \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}, \quad x > 0.$$

Кожне гіперболічне рівняння з двома незалежними змінними має дві канонічні форми — I та II. Для зведення рівняння (20) до I канонічної форми в півплощині $x > 0$ обираємо заміну незалежних змінних у вигляді (11)

$$\xi = \Phi_1(x, y) = y + \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}, \quad \eta = \Phi_2(x, y) = y - \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}, \quad x > 0. \quad (21)$$

Розглядаючи невідому функцію u , як функцію змінних ξ, η , які у свою чергу є функціями від x, y , знаходимо вирази для похідних за змінними x та y , використовуючи правило диференціювання складної функції

$$u'_x = u'_\xi \xi'_x + u'_\eta \eta'_x = u'_\xi \sqrt{x} - u'_\eta \sqrt{x} = \sqrt{x}(u'_\xi - u'_\eta),$$

$$u'_y = u'_\xi \xi'_y + u'_\eta \eta'_y = u'_\xi + u'_\eta;$$

$$u''_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}(\sqrt{x}(u'_\xi - u'_\eta)) = \frac{1}{2\sqrt{x}}(u'_\xi - u'_\eta) + \sqrt{x} \frac{\partial}{\partial x}(u'_\xi - u'_\eta) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}}(u'_\xi - u'_\eta) + \sqrt{x}((u''_{\xi\xi}\sqrt{x} - u''_{\xi\eta}\sqrt{x}) - (u''_{\eta\xi}\sqrt{x} - u''_{\eta\eta}\sqrt{x})) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}}(u'_\xi - u'_\eta) + x(u''_{\xi\xi} - 2u''_{\xi\eta} + u''_{\eta\eta}),$$

$$u''_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}(u'_\xi + u'_\eta) = u''_{\xi\xi} + u''_{\xi\eta} + u''_{\eta\xi} + u''_{\eta\eta} = u''_{\xi\xi} + 2u''_{\xi\eta} + u''_{\eta\eta}.$$

Отримані вирази для похідних u''_{xx}, u''_{yy} підставляємо у вихідне рівняння (20). В результаті в півплощині $x > 0$ воно перепишеться у вигляді

$$\underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x}}(u'_\xi - u'_\eta) + x(u''_{\xi\xi} - 2u''_{\xi\eta} + u''_{\eta\eta})}_{u''_{xx}} - x \underbrace{(u''_{\xi\xi} + 2u''_{\xi\eta} + u''_{\eta\eta})}_{u''_{yy}} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u''_{\xi\eta} - \frac{1}{8x^{\frac{3}{2}}}(u'_\xi - u'_\eta) = 0.$$

Використовуючи заміну (21), знаходимо $8x^{\frac{3}{2}} = 6(\xi - \eta)$, і можемо записати остаточну I канонічну форму рівняння (20) у півплощині $x > 0$

$$u''_{\xi\eta} - \frac{1}{6(\xi - \eta)}(u'_\xi - u'_\eta) = 0.$$

Для зведення вихідного рівняння (20) до II канонічної форми при $x > 0$ замість заміни (21) використовуємо заміну змінних у вигляді (13)

$$\begin{aligned} \rho &= \Phi_1(x, y) + \Phi_2(x, y) = 2y, \\ \tau &= \Phi_1(x, y) - \Phi_2(x, y) = \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}, \quad x > 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Далі за аналогічною схемою переписуємо похідні за змінними x, y через похідні за ρ, τ

$$\begin{aligned} u'_x &= 2\sqrt{x}u'_\tau, \quad u'_y = 2u'_\rho; \\ u''_{xx} &= \frac{1}{\sqrt{x}}u'_\tau + 4xu''_{\tau\tau}, \quad u''_{yy} = 4u''_{\rho\rho}. \end{aligned}$$

Отримані вирази підставляємо в рівняння (20). Після чого, воно перепишеться у вигляді

$$4x(u''_{\tau\tau} - u''_{\rho\rho}) + \frac{1}{\sqrt{x}}u'_\tau = 0 \Leftrightarrow u''_{\tau\tau} - u''_{\rho\rho} + \frac{1}{4x^{\frac{3}{2}}}u'_\tau = 0.$$

На останньому кроці, використовуючи (22), знаходимо $4x^{\frac{3}{2}} = 3\tau$, і

можемо записати остаточну II канонічну форму рівняння (20) у півплощині $x > 0$

$$u''_{\tau\tau} - u''_{\rho\rho} + \frac{1}{3\tau} u'_\tau = 0.$$

2. Півплощина $x < 0$. Рівняння (20) має еліптичний тип. Для вибору заміни змінних, яка зведе рівняння до канонічної форми, знову шукаємо характеристики. Записуємо характеристичне рівняння (зовні воно залишається незмінним, але при $x < 0$ буде розв'язуватись по-іншому)

$$(dy)^2 - x(dx)^2 = 0, \quad x < 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (dy)^2 = x(dx)^2, x < 0 \Leftrightarrow dy = \pm \sqrt{x} dx, x < 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow dy = \pm i \sqrt{-x} dx, x < 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Phi_{1,2}(x, y) := y \pm i \frac{2}{3} (-x)^{\frac{3}{2}} = C_{1,2}, \quad x < 0, \quad C_{1,2} = \text{const.}$$

Отримали два набори уявних, комплексно-спряжених характеристик.

Для зведення рівняння (20) до канонічної форми обираємо заміну змінних у вигляді (17)

$$\xi = \text{Re } \Phi_1(x, y) = y, \quad \eta = \text{Im } \frac{2}{3} (-x)^{\frac{3}{2}}, \quad x > 0. \quad (23)$$

Аналогічно до попереднього переписуємо похідні за x, y через похідні за ξ, η

$$u'_x = u'_\eta (-\sqrt{-x}) = -u'_\eta \sqrt{-x}, \quad u'_y = u'_\xi,$$

$$u''_{xx} = -\frac{\partial}{\partial x} (u'_\eta \sqrt{-x}) = \frac{u'_\eta}{2\sqrt{-x}} - \sqrt{-x} u''_{\eta\eta} (-\sqrt{-x}) = \frac{u'_\eta}{2\sqrt{-x}} - x u''_{\eta\eta},$$

$$u''_{yy} = u''_{\xi\xi}.$$

Отримані вирази для похідних u''_{xx} та u''_{yy} підставляємо в рівняння (20), після чого, його в півплощині $x < 0$ можна переписати у вигляді

$$\frac{u'_\eta}{2\sqrt{-x}} - x u''_{\eta\eta} - x u''_{\xi\xi} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u''_{\eta\eta} + u''_{\xi\xi} + \frac{u'_\eta}{2(-x)^{\frac{3}{2}}} = 0.$$

З (23) знаходимо $2(-x)^{\frac{3}{2}} = 3\eta$, і можемо записати вихідне рівняння (20) при $x < 0$ у канонічній формі

$$u''_{\eta\eta} + u''_{\xi\xi} + \frac{u'_\eta}{3\eta} = 0.$$

Приклад 2. Визначити тип рівняння та звести його до канонічної форми в областях збереження типу

$$u''_{xx} - 2yu''_{xy} + 4yu'_x = 0. \quad (24)$$

Запишемо коефіцієнти рівняння: $a(x, y) = 1$, $b(x, y) = -y$, $c = 0$.

Для визначення типу диференціального рівняння (24) знайдемо його дискримінант та проаналізуємо знак

$$d(x, y) = b^2(x, y) - a(x, y)c(x, y) = y^2.$$

а) $d(x, y) = y^2 > 0 \Leftrightarrow y \neq 0$ — рівняння (24) має гіперболічний тип;

б) $d(x, y) = y^2 = 0 \Leftrightarrow y = 0$ — рівняння (24) має параболічний тип.

Умова $y \neq 0$ об'єднує дві півплощини: $y > 0$ та $y < 0$, окремо кожна з яких є областю, але разом вони область не утворюють. Тому зведення до канонічної форми рівняння (24) слід проводити окремо в кожній із вказаних півплощин, не зважаючи на те, що в обох цих півплощинах тип рівняння однаковий. Пряма $y = 0$, пряма параболічності рівняння, не містить жодної внутрішньої точки. Тому не є областю. На таких множинах рівняння до канонічної форми не зводимо.

Розглянемо зведення рівняння (24) до канонічної форми в півплощині $y > 0$, в якій рівняння має гіперболічний тип. Обмежимося і канонічною формою.

Для відшукування характеристик рівняння (24) записуємо характеристичне рівняння (8) та шукаємо його загальні інтеграли

$$\begin{aligned} (dy)^2 + 2ydx dy &= 0 \Leftrightarrow (dy + 2ydx)dy = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} dy + 2ydx = 0, \\ dy = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} dy = -2ydx, \\ y = C_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{dy}{y} = -2dx, \\ y = C_2 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + \ln y = C_1, \\ y = C_2, \end{cases} &C_{1,2} = \text{const.} \end{aligned}$$

Отримали два дійсних, загальних інтеграли, які визначають два набори дійсних характеристик рівняння (24) в півплощині $y > 0$. Знайдені загальні інтеграли характеристичного рівняння визначають два

незалежних розв'язки $\Phi_1(x, y) = 2x + \ln y$, та $\Phi_2(x, y) = y$ рівняння характеристик. Для зведення до I канонічної форми вихідного рівняння (24) в півплощині гіперболічності $y > 0$ обираємо заміну змінних у формі (11)

$$\xi = \Phi_1(x, y) = 2x + \ln y, \quad \eta = \Phi_2(x, y) = y, \quad y > 0. \quad (25)$$

Перепишемо похідні за x, y через похідні за ξ, η

$$u'_x = 2u'_\xi, \quad u'_y = u'_\xi \frac{1}{y} + u'_\eta;$$

$$u''_{xx} = 4u''_{\xi\xi}, \quad u''_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}(2u'_\xi) = 2\left(u''_{\xi\xi} \frac{1}{y} + u''_{\xi\eta}\right).$$

Отримані вирази для похідних підставляємо в рівняння (24), яке при $y > 0$ переписеться у вигляді

$$\begin{aligned} 4u''_{\xi\xi} - 4u\left(u''_{\xi\xi} \frac{1}{y} + u''_{\xi\eta}\right) + 4u\left(u'_\xi \frac{1}{y} + u'_\eta\right) &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -4yu''_{\xi\eta} + 4u\left(u'_\xi \frac{1}{y} + u'_\eta\right) &= 0 \Leftrightarrow u''_{\xi\eta} - \left(u'_\xi \frac{1}{y} + u'_\eta\right) = 0. \end{aligned}$$

З (25) знаходимо $y = \eta$, підставляємо в попереднє рівняння і отримуємо I канонічну форму гіперболічного рівняння (24) при $y > 0$

$$u''_{\xi\eta} - \left(u'_\xi \frac{1}{\eta} + u'_\eta\right) = 0. \quad \blacksquare$$

Приклад 3. Визначити тип рівняння та звести його до канонічної форми в областях збереження типу

$$x^2 u''_{xx} + 2x u''_{xy} + 2u''_{yy} = 0. \quad (26)$$

Запишемо коефіцієнти рівняння:

$$a(x, y) = x^2, b(x, y) = x, c(x, y) = 2.$$

Знайдемо дискримінант та визначимо його знак

$$d(x, y) = b^2(x, y) - a(x, y)c(x, y) = x^2 - 2x^2 = -x^2.$$

а) $d(x, y) = -x^2 < 0 \Leftrightarrow x \neq 0$ — рівняння (26) має еліптичний тип;

б) $d(x, y) = -x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ — рівняння (26) має параболічний тип.

Умова $x \neq 0$, аналогічно до попереднього прикладу, об'єднує дві півплощини: $x > 0$ та $x < 0$. Зведення до канонічної форми рівняння (26) слід проводити в кожній з них окремо. Пряма $x = 0$ (пряма

параболічності рівняння) не містить жодної внутрішньої точки. Тому при $x = 0$ рівняння (26) до канонічної форми не зводимо.

Розглянемо випадок $x < 0$. Для визначення заміни змінних, яка зведе рівняння (26) до канонічної форми, шукаємо його характеристики. Записуємо характеристичне рівняння (8) та шукаємо його загальні інтеграли

$$\begin{aligned} x^2(dy)^2 - 2xdxdy + 2(dx)^2 &= 0, \quad x < 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2x\frac{dy}{dx} + 2 &= 0, \quad x < 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x \pm \sqrt{-x^2}}{x^2} = \frac{1 \pm i}{x}, \quad x < 0 \Leftrightarrow dy = \frac{1 \pm i}{x} dx, \quad x < 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow y = (1 \pm i) \ln(-x) + C_{1,2}, \quad x < 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \Phi_{1,2}(x, y) := y - \ln(-x) \mp i \ln(-x) &= C_{1,2}, \quad x < 0, \quad C_{1,2} = \text{const}. \end{aligned}$$

Характеристичне рівняння має два комплексно-спряжених інтеграли, які визначають у півплощині $x < 0$ два набори уявних характеристик еліптичного рівняння (26). Використовуючи знайденні характеристики, запишемо заміну змінних, що зведе вихідне рівняння до канонічної форми при $x < 0$

$$\begin{aligned} \xi &= \text{Re } \Phi_2(x, y) = y - \ln(-x), \\ \eta &= \text{Im } \Phi_2(x, y) = \ln(-x), \end{aligned} \quad x < 0. \quad (27)$$

Перепишемо похідні за змінними x, y через похідні за ξ, η

$$\begin{aligned} u'_x &= -u'_\xi \frac{1}{x} + u'_\eta \frac{1}{x} = \frac{u'_\eta - u'_\xi}{x}, \quad u'_y = u'_\xi; \\ u''_{xx} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u'_\eta - u'_\xi}{x} \right) = -\frac{u'_\eta - u'_\xi}{x^2} + \frac{u''_{\eta\eta} - 2u''_{\xi\eta} + u''_{\xi\xi}}{x^2}, \\ u''_{xy} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u'_\eta - u'_\xi}{x} \right) = \frac{u''_{\xi\eta} - u''_{\xi\xi}}{x}, \quad u''_{yy} = u''_{\xi\xi}. \end{aligned}$$

Отримані вирази для похідних підставляємо в рівняння (26). Після чого воно при $x < 0$ запишеться у канонічній формі

$$\begin{aligned} u''_{\eta\eta} - 2u''_{\xi\eta} + u''_{\xi\xi} - (u'_\eta - u'_\xi) + 2(u''_{\xi\eta} - u''_{\xi\xi}) + 2u''_{\xi\xi} &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow u''_{\xi\xi} + u''_{\eta\eta} + u'_\xi - u'_\eta &= 0. \end{aligned}$$

Приклад 4. Визначити тип рівняння та звести його до канонічної форми в областях збереження типу

$$xu''_{xx} - (x + y)u''_{xy} + yu''_{yy} = 0. \quad (28)$$

Запишемо коефіцієнти рівняння (28)

$$a(x, y) = x, \quad b(x, y) = -\frac{x + y}{2}, \quad c(x, y) = y.$$

Для визначення типу рівняння запишемо його дискримінант та проаналізуємо знак

$$d(x, y) = b^2(x, y) - a(x, y)c(x, y) = \frac{(x + y)^2}{4} - xy = \frac{(x - y)^2}{4} \geq 0.$$

а) $d(x, y) > 0 \Leftrightarrow x \neq y$ — рівняння (28) має гіперболічний тип;

б) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ — рівняння (28) має параболічний тип.

Умова $x \neq y$ визначає дві півплощини, в кожній з яких зведення до канонічної форми рівняння (28) слід проводити окремо. Умова $x = y$ визначає в площині Oxy пряму, яка не містить жодної внутрішньої точки. Тому при $x = y$ вихідне рівняння до канонічної форми не зводимо.

Зведемо рівняння (28) до I канонічної форми в півплощині $x > y$ (випадок $x < y$ абсолютно аналогічний).

Для визначення заміни змінних, яка зведе рівняння (28) до канонічної форми, шукаємо характеристики. Запишемо характеристичне рівняння (8) та знайдемо його загальні інтеграли

$$\begin{aligned} x(dy)^2 + (x + y)dxdy + y(dx)^2 &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x(dy)^2 + xdxdy + ydxdy + y(dx)^2 &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow xdy(dy + dx) + ydx(dy + dx) &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{(xdy + ydx)(dy + dx)}{d(xy)} = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} dy + dx = 0, \\ d(xy) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} y + x = C_1, \\ xy = C_2, \end{cases} &C_{1,2} = \text{const.} \end{aligned}$$

Характеристичне рівняння має два загальні інтеграли, які визначають два набори дійсних характеристик рівняння (28) в півплощині $x > y$, при цьому, функції $\Phi_1(x, y) = y + x$ та $\Phi_2(x, y) = xy$ будуть розв'язками рівняння характеристик в указаній півплощині (лема на с. 98).

Для зведення рівняння (28) до I канонічної форми виберемо заміну у формі (14)

$$\xi = \Phi_1(x, y) = y + x, \quad \eta = \Phi_2(x, y) = xy, \quad x > y. \quad (29)$$

Виразуємо похідні за змінними x, y через похідні за ξ, η :

$$u'_x = u'_\xi + yu'_\eta, \quad u'_y = u'_\xi + xu'_\eta;$$

$$u''_{xx} = u''_{\xi\xi} + 2yu''_{\xi\eta} + y^2u''_{\eta\eta}, \quad u''_{yy} = u''_{\xi\xi} + 2xu''_{\xi\eta} + x^2u''_{\eta\eta},$$

$$u''_{xy} = u'_\eta + u''_{\xi\xi} + (x + y)u''_{\xi\eta} + xyu''_{\eta\eta}.$$

Якщо отримані вирази для похідних підставити в рівняння (28)

$$\begin{aligned} & x(u''_{\xi\xi} + 2yu''_{\xi\eta} + y^2u''_{\eta\eta}) - \\ & -(x + y)(u'_\eta + u''_{\xi\xi} + (x + y)u''_{\xi\eta} + xyu''_{\eta\eta}) + \\ & + y(u''_{\xi\xi} + 2xu''_{\xi\eta} + x^2u''_{\eta\eta}) = 0, \end{aligned}$$

та звести подібні доданки, можемо записати

$$(4xy - (x + y)^2)u''_{\xi\eta} - (x + y)u'_\eta = 0,$$

при цьому, коефіцієнт при найстаршій похідній $u''_{\xi\eta}$:

$$4xy - (x + y)^2 = -(x - y)^2 \neq 0 \text{ при } x > y.$$

Замість x, y підставляємо заміну змінних (29) і отримуємо остаточну I канонічну форму для рівняння (28) в півплощині $x > y$

$$u''_{\xi\eta} - \frac{\xi}{4\eta - \xi^2} u'_\eta = 0. \quad \blacksquare$$

Приклад 5. Визначити тип рівняння та звести його до канонічної форми в областях збереження типу

$$yu''_{xx} - 2\sqrt{y}u''_{xy} + u''_{yy} = 0, \quad y > 0. \quad (30)$$

Запишемо коефіцієнти рівняння:

$$a(x, y) = y, \quad b(x, y) = -\sqrt{y}, \quad c(x, y) = 1.$$

Для визначення типу запишемо дискримінант рівняння (30)

$$d(x, y) = b^2(x, y) - a(x, y)c(x, y) = y - y = 0, \quad y > 0.$$

Оскільки $d \equiv 0$ в усій півплощині $y > 0$, то рівняння (30) в цій півплощині має параболічний тип.

Для вибору заміни, яка зведе рівняння (30) до канонічної форми, шукаємо характеристики рівняння. Записуємо характеристичне рівняння (8) та шукаємо його загальний інтеграл

$$\begin{aligned} y(dy)^2 + 2\sqrt{y}dxdy + (dx)^2 &= 0, \quad y > 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\sqrt{y}dy + dx)^2 &= 0, \quad y > 0 \Leftrightarrow \sqrt{y}dy + dx = 0, \quad y > 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} + x &= C, \quad y > 0, \quad C = \text{const.} \end{aligned}$$

Характеристичне рівняння має один загальний, дійсний інтеграл, який визначає один набір дійсних характеристик, при цьому, функція $\Phi(x, y) = \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} + x \in \text{розв'язком рівняння характеристик (лема на с. 98)}$.

Для зведення до канонічної форми параболічного рівняння (30) обираємо заміну змінних у формі (14)

$$\xi = \Phi(x, y) = \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} + x, \quad \eta = \Psi(x, y), \quad y > 0, \quad (31)$$

де $\Psi \in C^2$ — довільна функція, яка обирається так, що заміна (31) була невідродженою.

Виберемо $\Psi(x, y) = y, \quad y > 0$. Тоді заміна (31) запишеться у вигляді

$$\xi = \Phi(x, y) = \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} + x, \quad \eta = y, \quad y > 0, \quad (32)$$

при цьому,

$$\left| \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} \right| = \begin{vmatrix} \xi'_x & \xi'_y \\ \eta'_x & \eta'_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \sqrt{y} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0, \quad y > 0,$$

тобто заміна буде невідродженою.

Зведемо параболічне рівняння (30) до канонічної форми при $y > 0$ за допомогою (32). Перепишемо похідні за змінними x, y через похідні за ξ, η

$$\begin{aligned} u'_x &= u'_\xi, \quad u'_y = u'_\xi \sqrt{y} + u'_\eta; \\ u''_{xx} &= u''_{\xi\xi}, \quad u''_{xy} = u''_{\xi\xi} \sqrt{y} + u''_{\xi\eta}, \\ u''_{yy} &= \frac{1}{2\sqrt{y}} u'_\xi + y u''_{\xi\xi} + 2\sqrt{y} u''_{\xi\eta} + u''_{\eta\eta}. \end{aligned}$$

Отримані вирази для похідних підставляємо у рівняння (30) і перепишемо його в півплощини $y > 0$ наступним чином

$$yu''_{\xi\xi} - 2\sqrt{y}(u''_{\xi\xi}\sqrt{y} + u''_{\xi\eta}) + \frac{1}{2\sqrt{y}}u'_\xi + yu''_{\xi\xi} + 2\sqrt{y}u''_{\xi\eta} + u''_{\eta\eta} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u''_{\eta\eta} + \frac{1}{2\sqrt{y}}u'_\xi = 0.$$

З (32) визначаємо $\sqrt{y} = \sqrt{\eta}$ і можемо записати остаточно канонічну форму рівняння (30) у півплощині $y > 0$

$$u''_{\eta\eta} + \frac{1}{2\sqrt{\eta}}u'_\xi = 0. \quad \blacksquare$$

Приклад 6. Визначити тип рівняння та звести його до канонічної форми в областях збереження типу

$$4y^2u''_{xx} + 4ye^xu''_{xy} + e^{2x}u''_{yy} = 0. \quad (33)$$

Визначаємо коефіцієнти рівняння:

$$a(x, y) = 4y^2, \quad b(x, y) = 2ye^x, \quad c(x, y) = e^{2x}.$$

Запишемо дискримінант рівняння (33)

$$d(x, y) = b^2(x, y) - a(x, y)c(x, y) = 4y^2e^{2x} - 4y^2e^{2x} = 0,$$

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Оскільки $d = 0$ при всіх x, y , то рівняння (33) має параболічний тип в усій площині Oxy .

Для вибору заміни змінних, яка зведе вихідне рівняння до канонічної форми, шукаємо характеристики цього рівняння. Записуємо характеристичне рівняння (8) та шукаємо його загальний інтеграл

$$4y^2(dy)^2 - 4ye^xdxdy + e^{2x}(dx)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2ydy - e^xdx)^2 = 0 \Leftrightarrow 2ydy - e^xdx = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y^2 - e^x = C = \text{const}$$

Характеристичне рівняння має один загальний інтеграл, який визначає один дійсний набір характеристик параболічного рівняння (33), при цьому, функція $\Phi(x, y) = y^2 - e^x$ буде розв'язком рівняння характеристик (лема на с. 98).

Для зведення рівняння (33) до канонічної форми виберемо заміну змінних у формі (14)

$$\xi = \Phi(x, y) = y^2 - e^x, \quad \eta = \Psi(x, y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad (34)$$

де $\Psi \in C^2(\mathbb{R}^2)$ — довільна функція, яку потрібно обирати так, щоб заміна (34) була невідродженою.

Спробуємо вибрати $\Psi(x, y) = x$. Тоді заміна (34) матиме вигляд

$$\xi = y^2 - e^x, \quad \eta = x. \quad (35)$$

Запишемо якобіан заміни (35) та з'ясуємо її невідродженість

$$\left| \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} \right| = \begin{vmatrix} \xi'_x & \xi'_y \\ \eta'_x & \eta'_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -e^x & 2y \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2y \neq 0 \Leftrightarrow y \neq 0.$$

Заміна (35) буде невідродженою, якщо $y \neq 0$, тобто її можна використовувати лише при $y > 0$ або $y < 0$. Якщо ж зведення до канонічної форми потрібно провести в області, яка включає точки прямої $y = 0$, наприклад, в усій площині Oxy , то така заміна не підходить. Тому (35) не буде універсальною заміною.

Виберемо $\Psi(x, y) = y$. В цьому випадку заміна (34) запишеться таким чином

$$\xi = y^2 - e^x, \quad \eta = y, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2. \quad (36)$$

Якобіан заміни (36)

$$\left| \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} \right| = \begin{vmatrix} \xi'_x & \xi'_y \\ \eta'_x & \eta'_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -e^x & 2y \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -e^x \neq 0, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

буде відмінними від нуля в усій площині Oxy . Тому зміна змінних (36) буде невідродженою при всіх $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ і буде універсальною.

Зведемо параболічне рівняння (33) до канонічної форми, використовуючи (36). Перепишемо похідні за змінними x, y через похідні за ξ, η :

$$\begin{aligned} u'_x &= -e^x u'_\xi, & u'_y &= 2y u'_\xi + u'_\eta; \\ u''_{xx} &= -e^x u'_\xi + e^{2x} u''_{\xi\xi}, & u''_{xy} &= -e^x (2y u''_{\xi\xi} + u''_{\xi\eta}), \\ u''_{yy} &= 2u'_\xi + 4y^2 u''_{\xi\xi} + 4y u''_{\xi\eta} + u''_{\eta\eta}. \end{aligned}$$

Підставляємо отримані вирази для похідних в рівняння (33), після чого воно запишеться у вигляді

$$4y^2(-e^x u'_\xi + e^{2x} u''_{\xi\xi}) - 4ye^x(2y u''_{\xi\xi} + u''_{\xi\eta}) +$$

$$+e^{2x}(2u'_\xi + 4y^2u''_{\xi\xi} + 4yu''_{\xi\eta} + u''_{\eta\eta}) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u''_{\eta\eta} + \left(1 - \frac{4y^2}{e^x}\right)u'_\xi = 0.$$

З (36) визначаємо: $y^2 = \eta^2$, $e^x = y^2 - \xi = \eta^2 - \xi$, і підставляємо в попереднє рівняння. В результаті, отримаємо канонічну форму параболічного рівняння (33) в усій площині Oxu

$$u''_{\eta\eta} + \left(1 - \frac{4\eta^2}{\eta^2 - \xi}\right)u'_\xi = 0. \quad \blacksquare$$

Приклад 7. Визначити тип рівняння та звести його до канонічної форми в областях збереження типу

$$x^2u''_{xx} - 2xuy''_{xy} + y^2u''_{yy} = 0. \quad (37)$$

Визначаємо коефіцієнти рівняння:

$$a(x, y) = x^2, \quad b(x, y) = -xy, \quad c(x, y) = y^2.$$

Зауважимо, що всі коефіцієнти рівняння обертаються в нуль в точці $(0,0)$. Це особлива точка, точка виродження диференціального рівняння. Тому в подальшому будемо розглядати рівняння (37) в площині Oxu без точки $(0,0)$.

Записуємо дискримінант вихідного рівняння (37) та аналізуємо його знак

$$d(x, y) = b^2(x, y) - a(x, y)c(x, y) = (xy)^2 - x^2y^2 \equiv 0.$$

Отже, рівняння (37) має параболічний тип в усій Oxu без точки $(0,0)$.

Для вибору заміни змінних, яка зведе вихідне рівняння (37) до канонічної форми, шукаємо характеристики. Записуємо характеристичне рівняння (8) та шукаємо його загальний інтеграл

$$x^2(dy)^2 + 2xydx dy + y^2(dx)^2 = 0 \Leftrightarrow (xdy + ydx)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow xdy + ydx = d(xy) = 0 \Leftrightarrow xy = C, \quad C = \text{const.}$$

Характеристичне рівняння має один загальний інтеграл, а вихідне параболічне рівняння з частинними похідними (37) — один набір дійсних характеристик, при цьому функція $\Phi(x, y) = xy$ буде розв'язком рівняння характеристик.

Для зведення рівняння (37) до канонічної форми обираємо заміну у вигляді (14)

$$\xi = \Phi(x, y) = xy, \quad \eta = \Psi(x, y), \quad (38)$$

де $\Psi \in C^2$ — довільна функція, яку потрібно вибрати так, щоб заміна (38) була невивродженою.

Наявність точки вивродження коефіцієнтів $(0,0)$ у вихідного рівняння (37) не дозволяє вибрати функцію Ψ так, щоб заміна (38) була невивродженою та взаємно-однозначною в усій площині Oxy без $(0,0)$.

Виберемо $\Psi(x, y) = y^2 - x^2$. Тоді заміна (38) матиме вигляд

$$\xi = \Phi(x, y) = xy, \quad \eta = y^2 - x^2. \quad (39)$$

Вибрана заміна (39) буде невивродженою в усіх точках площини Oxy без $(0,0)$:

$$\left| \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} \right| = \begin{vmatrix} y & x \\ -2x & 2y \end{vmatrix} = 2y^2 + 2x^2 \neq 0, \text{ якщо } (x, y) \neq (0,0).$$

Невивроженість заміни (39) гарантує, що вона буде взаємно-однозначною в околі кожної точки $(x, y) \neq (0,0)$, тобто локально. Якщо дослідити, чи буде заміна (39) взаємно-однозначною глобально, то неважко встановити, що для точок з координатами (x, y) та $(-x, -y)$ нові координати (ξ, η) будуть співпадати. Тому, маємо очевидний висновок: заміна змінних (39) не буде взаємно-однозначною в усій Oxy без $(0,0)$.

Не зважаючи на те, що заміна (39) не є взаємно-однозначною в усій Oxy без $(0,0)$, вона буде такою в довільній півплощині, яка обмежена прямою, що проходить через точку $(0,0)$, наприклад, при $x > 0$, або $y > 0$, або $x + y > 0$ тощо. Тому з цієї точки зору заміну (39) можна вважати універсальною.

Розглянемо тепер зведення рівняння (37) до канонічної форми за допомогою заміни (39) у будь-якій півплощині, де (39) буде взаємно-однозначною.

Перепишемо похідні за змінними x, y через похідні за ξ, η , використовуючи правило диференціювання складної функції багатьох змінних:

$$\begin{aligned} u'_x &= yu'_\xi - xu'_\eta, & u'_y &= xu'_\xi + 2yu'_\eta; \\ u''_{xx} &= -2u'_\eta + y^2u''_{\xi\xi} - 4xyu''_{\xi\eta} + 4x^2u''_{\eta\eta}, \end{aligned}$$

$$u''_{xy} = u'_\xi + xu''_{\xi\xi} + 2y^2u''_{\xi\eta} - 2x^2u''_{\xi\eta} - 4xyu''_{\eta\eta},$$

$$u''_{yy} = 2u'_\eta + x^2u''_{\xi\xi} + 4xyu''_{\xi\eta} + 4y^2u''_{\eta\eta}.$$

Якщо підставити отримані вирази для похідних в рівняння (37) та зідрати спільні доданки, то переписемо його у вигляді

$$4(x^2 + y^2)^2 u''_{\eta\eta} - 2xyu'_\xi + 2(y^2 - x^2)u'_\eta = 0. \quad (40)$$

Зауважимо, що коефіцієнт при найстаршій похідній $u''_{\eta\eta}$ відмінний від нуля, якщо $(x, y) \neq (0, 0)$.

Використовуючи заміну (39), знаходимо $(x^2 + y^2)^2 = \eta^2 + 4\xi^2$.

Отриману рівність разом із (39) підставляємо в (40) і запишемо остаточно канонічну форму вихідного параболічного рівняння (37)

$$u''_{\eta\eta} - \frac{\eta u'_\eta - \xi u'_\xi}{2(\eta^2 + 4\xi^2)} = 0. \quad \blacksquare$$

Завдання для самостійної роботи

Визначити типи наведених диференціальних рівнянь та звести їх до канонічних форм в областях збереження типу

1. $xu''_{yy} - yu''_{xx} = 0.$
2. $xyu''_{xy} - u''_{yy} = 0.$
3. $x^2u''_{yy} - y^2u''_{xx} = 0.$
4. $x^2u''_{xx} - y^2u''_{yy} = 0.$
5. $xu''_{xy} + yu''_{yy} = 0.$
6. $xu''_{xy} - yu''_{yy} = 0.$
7. $yu''_{xx} + xu''_{xy} = 0.$
8. $yu''_{xx} - xu''_{xy} = 0.$
9. $e^{2y}u''_{xx} - 2e^y u''_{xy} + 2u''_{yy} = 0.$
10. $e^{2x}u''_{xx} - 2e^x u''_{xy} + 5u''_{yy} = 0.$
11. $e^{2y}u''_{xx} + 2e^y u''_{xy} + 2u''_{yy} = 0.$
12. $2u''_{xx} - 2e^y u''_{xy} + e^{2y} u''_{yy} = 0.$
13. $5u''_{xx} + 2e^x u''_{xy} + e^{2x} u''_{yy} = 0.$
14. $xu''_{yy} - 4\sqrt{x}u''_{xy} + 5u''_{xx} = 0, \quad x > 0.$
15. $xu''_{xx} + 4\sqrt{x}u''_{xy} + 8u''_{yy} = 0, \quad x > 0.$
16. $yu''_{xx} + 2\sqrt{y}u''_{xy} + 5u''_{yy} = 0, \quad y > 0.$
17. $yu''_{yy} - 2\sqrt{y}u''_{xy} + 2u''_{xx} = 0, \quad y > 0.$
18. $x^2u''_{xx} - 2xu''_{xy} + u''_{yy} = 0.$

19. $u''_{xx} \cos^2 y + 2u''_{xy} \cos y + u''_{yy} = 0.$
20. $u''_{xx} - 4e^y u''_{xy} + 4e^{2y} u''_{yy} = 0.$
21. $y^2 u''_{xx} + 4y u''_{xy} + 4u''_{yy} = 0.$
22. $u''_{xx} - 4y u''_{xy} + 4y^2 u''_{yy} = 0.$
23. $e^{2y} u''_{xx} + 2e^y u''_{xy} + u''_{yy} = 0.$
24. $e^{2x} u''_{xx} - 2e^x u''_{xy} + u''_{yy} = 0.$
25. $4u''_{xx} + 4e^x u''_{xy} + e^{2x} u''_{yy} = 0$
26. $4e^{2y} u''_{xx} - 4e^y u''_{xy} + u''_{yy} = 0.$
27. $u''_{xx} \sin^2 y + 4u''_{xy} \sin y + 4u''_{yy} = 0.$
28. $u''_{xx} - 4u''_{xy} \cos x + 4u''_{yy} \cos^2 x = 0.$
29. $4u''_{xx} + 4u''_{xy} \sin x + u''_{yy} \sin^2 x = 0.$
30. $4u''_{xx} - 4x u''_{xy} + x^2 u''_{yy} = 0.$
31. $4y^2 u''_{xx} - 4ye^x u''_{xy} + e^{2x} u''_{yy} = 0.$
32. $x^2 u''_{xx} + 2xe^{-y} u''_{xy} + e^{-2y} u''_{yy} = 0, \quad x > 0.$
33. $e^{2x} u''_{xx} - 2e^{x+y} u''_{xy} + e^{2y} u''_{yy} = 0.$
34. $e^{2y} u''_{xx} + 4xe^y u''_{xy} + 4x^2 u''_{yy} = 0.$
35. $u''_{xx} \cos^2 y - 2e^x u''_{xy} \cos y + e^{2x} u''_{yy} = 0.$
36. $e^{2y} u''_{xx} + 2e^y u''_{xy} \sin x + u''_{yy} \sin^2 x = 0.$
37. $e^{2x} u''_{xx} - 2e^x y u''_{xy} + y^2 u''_{yy} = 0.$
38. $y^2 u''_{xx} + 2y u''_{xy} \cos x + u''_{yy} \cos^2 x = 0, \quad y > 0.$
39. $u''_{xx} \sin^2 y - 2x u''_{xy} \sin y + x^2 u''_{yy} = 0, \quad x > 0.$
40. $e^{2y} u''_{xx} + 2e^{y-x} u''_{xy} + e^{-2x} u''_{yy} = 0.$

Тема 3. Задача Коші для рівнянь гіперболічного типу

3.1. Класична задача Коші для одновимірного хвильового рівняння

3.1.1. Задача Коші для одновимірного, однорідного хвильового рівняння. Розв'язок д'Аламбера. Формула д'Аламбера

Теоретичні відомості

Розглядається класична задача Коші для однорідного хвильового рівняння з однією просторовою змінною

$$u''_{tt} - a^2 u''_{xx} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0, \quad (1)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u'_t|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2)$$

де φ, ψ — задані функції.

Задача (1), (2) включає дві незалежні змінні: просторову змінну x і час t . З фізичної точки зору, вона моделює вільні коливання (однорідне рівняння) необмеженого одновимірного тіла, наприклад, малі поперечні коливання необмеженої струни або малі повздовжні коливання необмеженого пружного стержня, які спричинені початковими відхиленнями φ та початковими швидкостями ψ .

Розв'язком задачі Коші (1), (2) називається функція $u = u(x, t) \in C^2(x \in \mathbb{R}, t > 0) \cap C^1(x \in \mathbb{R}, t \geq 0)$, яка у відкритій півплощині $\{x \in \mathbb{R}, t > 0\}$ задовольняє рівнянню (1), а на прямій $\{x \in \mathbb{R}, t = 0\}$ — початковим умовам (2).

Для розв'язання класичної задачі Коші (1), (2) використовується метод характеристик.

Хвильове рівняння (1) є гіперболічним рівнянням з двома незалежними змінними. Зводимо цього до I канонічної форми. Для цього шукаємо загальні інтеграли характеристичного рівняння:

$$\begin{aligned} (dx)^2 - a^2(dt)^2 = 0 &\Leftrightarrow (dx - adt)(dx + adt) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} dx - adt = 0, \\ dx + adt = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x - at = C_1, \\ x + at = C_2, \end{cases} \quad C_{1,2} = \text{const}. \end{aligned} \quad (3)$$

Отже, характеристичне рівняння, яке відповідає хвильовому рівнян-

ню (1), має два загальні інтеграли (3), які визначають два набори дійсних характеристик. Цими характеристиками будуть два набори паралельних прямих в площині Oxt .

За допомогою заміни

$$\xi = x - at, \quad \eta = x + at, \quad (4)$$

однорідне хвильове рівняння (1) зводиться до I канонічної форми

$$u''_{\xi\eta} = 0. \quad (5)$$

Рівняння (5) називають *найпростішим гіперболічним рівнянням*. Для цього рівняння можна побудувати загальний розв'язок (знайти вигляд всіх можливих розв'язків). Для цього потрібно послідовно проінтегрувати (5) спочатку за однією незалежною змінною, а потім за іншою. При цьому, порядок інтегрування неважливий.

Проінтегруємо (5) спочатку за η

$$u'_\xi = h(\xi), \quad (6)$$

де $h \in C^1$ — довільна функція.

Далі проінтегрувавши (6) за ξ , отримаємо загальний розв'язок рівняння (5)

$$u = \int h(\xi) d\xi + G(\eta) = F(\xi) + G(\eta), \quad (7)$$

де $F, G \in C^2$ — довільні функції, області визначення яких встановимо згодом.

Підставляючи в (7) заміну змінних (4), запишемо *загальний розв'язок вихідного однорідного хвильового рівняння (1)*

$$u(x, t) = F(x - at) + G(x + at), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0. \quad (8)$$

Зауважимо, що при $x \in \mathbb{R}$ та $t > 0$ вирази $x \pm at$ (аргументи функцій F і G) приймають будь-які дійсні значення. Тому $F, G \in C^2(\mathbb{R})$.

Розв'язок (8) однорідного хвильового рівняння (1) з однією простою змінною називається розв'язком д'Аламбера. Вперше побудований Ж.-Л. д'Аламбером у 1747 р.

Знайдений загальний розв'язок (8) підставляємо в початкові умови (2)

$$u|_{t=0} = F(x) + G(x) = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (9)$$

$$u'_t|_{t=0} = (-aF'(x - at) + aG'(x + at))|_{t=0} =$$

$$= a(G'(x) - F'(x)) = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (10)$$

Оскільки $F, G \in C^2(\mathbb{R})$, то з (9) та (10) випливає, що для існування розв'язку задачі Коші (1), (2) мають виконуватись умови

$$\varphi \in C^2(\mathbb{R}), \quad \psi \in C^1(\mathbb{R}). \quad (11)$$

Інакше виконати початкові умови (2) неможливо, і розв'язок задачі не існує.

Умови (11) є необхідними і достатніми умовами існування розв'язку задачі Коші (1), (2) для однорідного хвильового рівняння з однією просторовою змінною.

Проінтегруємо рівність (10). Отримаємо

$$G(x) - F(x) = \frac{1}{a} \int_0^x \psi(\xi) d\xi + C, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (12)$$

де C — довільна стала.

Розв'язуючи рівності (9) та (12) відносно F та G , можемо записати

$$\begin{aligned} G(x) &= \frac{1}{2} \varphi(x) + \frac{1}{2a} \int_0^x \psi(\xi) d\xi + C, \quad x \in \mathbb{R}, \\ F(x) &= \frac{1}{2} \varphi(x) - \frac{1}{2a} \int_0^x \psi(\xi) d\xi - C, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Зауважимо, що шукані функції F та G визначаються неоднозначно, з точністю до довільної сталої C .

Знайдені F та G підставляємо в розв'язок д'Аламбера (8) і запишемо розв'язок задачі Коші (1), (2)

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2} \varphi(x - at) - \frac{1}{2a} \int_0^{x-at} \psi(\xi) d\xi - C + \\ &+ \frac{1}{2} \varphi(x + at) + \frac{1}{2a} \int_0^{x+at} \psi(\xi) d\xi + C = \\ &= \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi = u(x, t), \quad (13) \\ &x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Формула (13), яка визначає розв'язок задачі Коші (1), (2), називається формулою д'Аламбера, хоча і отримана Л. Ейлером у 1748 р.

Як бачимо з (13), розв'язок задачі Коші (1), (2) для однорідного хвильового рівняння з однією просторовою змінною визначається однозначно (єдиний). Хоча по ходу його побудови і виникає довільна стала C , але в остаточному виразі для розв'язку вона зникає.

Коротко розглянемо фізичний зміст розв'язку д'Аламбера (8). Припустимо, що в ході розв'язання деякої задачі отримано розв'язок у вигляді

$$u(x, t) = F(x - at), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0, \quad (14)$$

тобто $G \equiv 0$ у (8). Також вважаємо, що у початковий момент часу $t = 0$ відхилення $u|_{t=0} = F(x)$, $x \in \mathbb{R}$, мали вигляд хвилі, яка зосереджена в околі точки $x = 0$ (Рис. 3.1). Тоді, враховуючи правило перетворення графіка функції при зміні її аргументу, можемо встановити, то при $t > 0$ хвиля (14) буде рухатись в напрямку осі Ox зі швидкістю a (параметр хвильового рівняння (1)). Таку хвилю називають прямою хвилею.

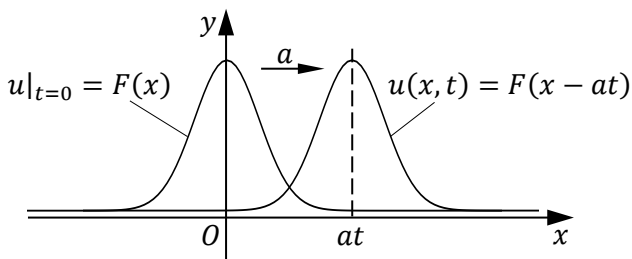


Рис. 3.1

Абсолютно аналогічно, можна встановити, що хвиля

$$u(x, t) = G(x + at), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad (15)$$

буде рухатись зі швидкістю a у напрямку, протилежному до осі Ox . Таку хвилю називають зворотною хвилею.

В результаті, загальний розв'язок однорідного хвильового рівняння (1), розв'язок д'Аламбера (8), є суперпозицією (сумою) двох хвиль — прямої і зворотної, які зі швидкістю a кожна розходяться у протилежних напрямках.

Проаналізуємо формулу д'Аламбера (13). Задача Коші (1), (2) розглядається в площині Oxt . Рівняння (1) розглядається у відкритій півплощині $t > 0$, а початкові умови (2) задаються на прямій $t = 0$ — на осі Ox . Зафіксуємо довільну точку $M = (x_0, t_0)$, $t_0 > 0$. Згідно із формулою д'Аламбера (13) значення розв'язку u в цій точці, фактично, визначається

значеннями першої початкової функції φ в точках $P = (x_0 - at_0, 0)$ та $Q = (x_0 + at_0, 0)$ осі Ox , а також інтегралом від другої початкової функції ψ вздовж відрізка осі Ox , який з'єднує P та Q (Рис. 3.2). В результаті, можемо записати

$$u(M) = \frac{\varphi(P) + \varphi(Q)}{2} + \frac{1}{2a} \int_P^Q \psi(\xi) d\xi. \quad (16)$$

Як видно з (16), значення початкових функцій φ і ψ (початкові дані) за межами відрізка $[P, Q]$ осі Ox ніяк не впливають на розв'язок в точці M . Якщо з'єднати точки P та Q з точкою M прямими, то отримаємо дві характеристики вихідного хвильового рівняння (1): $x \pm at = x_0 \pm at_0$, які проходять через M (Рис. 3.2). Трикутник MPQ називають *характеристичним*.

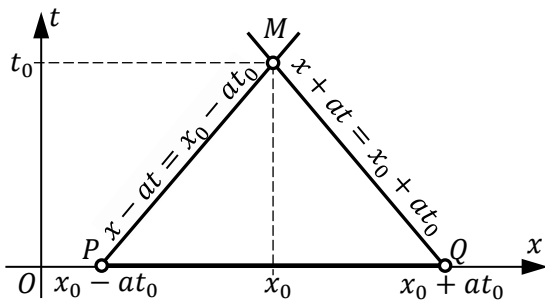


Рис. 3.2

Розглянемо початкові дані φ, ψ , які задані на деякому відрізку $[x_1, x_2]$ осі Ox . Враховуючи попередні міркування, через точки $P_{1,2} = (x_{1,2}, 0)$ фазової площини проводимо характеристики $x - at = x_1$ та $x + at = x_2$, які перетинаються в точці M (Рис. 3.3). Тоді отриманий трикутник MP_1P_2 буде максимальною множиною, на якій розв'язок u задачі Коші (1), (2) повністю визначається початковими даними φ, ψ , заданими на $[x_1, x_2]$. Цей трикутник називають *зоною впливу початкових умов (даних)*.

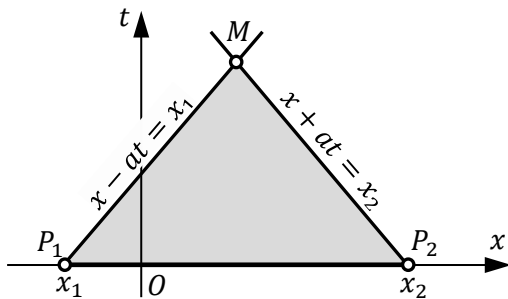


Рис. 3.3

Якщо припустити, що початкові функції φ, ψ визначені лише на відрізку $[x_1, x_2]$, то отримаємо задачу Коші для хвильового рівняння із

обмеженими початковими даними. Для такої задачі існування і єдиність розв'язку можна гарантувати лише на обмеженому трикутнику MP_1P_2 площини Oxt (Рис. 3.3). За його межами розв'язок або не існує, або визначається неоднозначно.

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Використовуючи формулу д'Аламбера, з'ясувати якісну картину розповсюдження хвиль, які спричинені початковими відхиленнями, локалізованими на обмеженій ділянці, при нульових початкових швидкостях (хвилі відхилень).

Розглядається задача Коші

$$\begin{aligned} u''_{tt} - a^2 u''_{xx} &= 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ u|_{t=0} &= \varphi(x), \quad u'_t|_{t=0} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (17)$$

яка описує розповсюдження коливань, наприклад, в необмеженій струні, де в початковий момент часу задані відхилення $\varphi(x)$, а початкові швидкості відсутні (нульові). При цьому, вважаємо, що функція $\varphi(x)$ має ненульові значення лише на проміжку $(-l, l)$ (початкові відхилення локалізовані на обмеженій ділянці), а за його межами $\varphi \equiv 0$. Схематично графік функції φ (початкових відхилень) подано на Рис. 3.4.

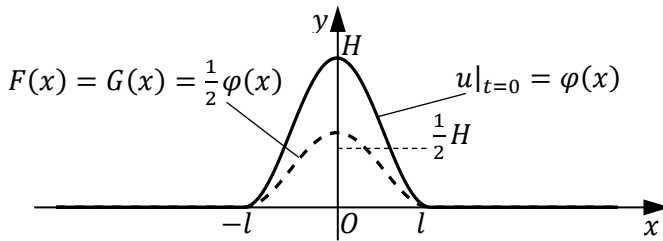


Рис. 3.4

Задача (17) є окремим випадком задачі Коші (1), (2). Тому для розв'язання (17) використовуємо формулу д'Аламбера (13), яка в даному випадку матиме вигляд

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2} \varphi(x - at) + \frac{1}{2} \varphi(x + at) = \\ &= F(x - at) + G(x + at), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0, \end{aligned} \quad (18)$$

де $F(x) = G(x) = \frac{1}{2}\varphi(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

В початковий момент часу $t = 0$ пряма та зворотна хвилі мають однакові профілі відхилень, які накладаються один на другий та формують початкові відхилення точок струни (Рис. 3.4).

При $t > 0$ хвилі розходяться у різних напрямках, кожна зі швидкістю a . На початковому етапі $0 < t < \frac{l}{a}$ пряма та зворотна хвилі взаємодіють

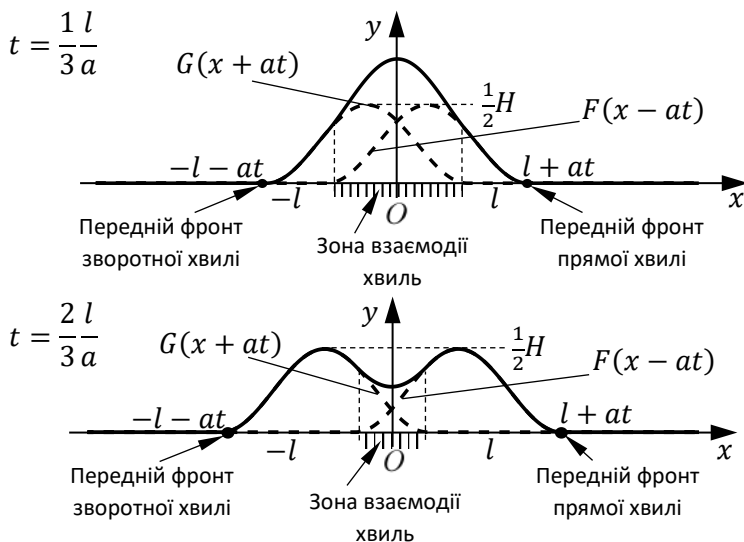


Рис. 3.5

між собою (Рис. 3.5). Тому тут можна чітко виділити передні фронти хвиль, зону їх взаємодії, яка з часом зменшується. Задні фронти явно не виражені. Пряма та зворотна хвилі поступово відокремлюються одна від іншої.

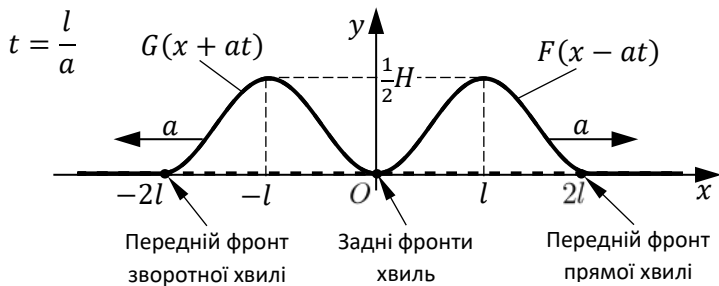


Рис. 3.6

В момент часу $t = \frac{l}{a}$ відбувається повне відокремлення прямої і зворотної хвиль (Рис. 3.6). Тут тепер можна виділити як передні фронти обох хвиль, так і задні, які в цей момент часу співпадають. Зона взаємодії прямої і зворотної хвиль зникає.

При $t > \frac{l}{a}$ пряма і зворотна хвилі, повністю відокремившись, розходяться у протилежних напрямках і не взаємодіють одна з одною. Можна чітко виділити передні і задні фронти обох хвиль (Рис. 3.7).

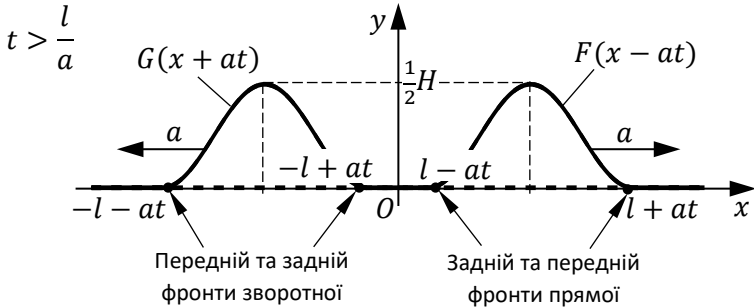


Рис. 3.7

Таким чином, локалізовані початкові відхилення при відсутніх початкових швидкостях породжують дві локалізовані в просторі хвилі — пряму і зворотну, які розходяться у протилежних напрямках зі швидкістю a кожна.

Зафіксуємо довільну точку $x > l$ (по правий бік від проміжку початкових відхилень $(-l, l)$). На проміжку часу $0 < t < \frac{x-l}{a}$ точка перебуває у стані спокою, оскільки пряма хвиля, передній фронт якої рухається від точки l зі швидкістю a , ще не встиг дійти до вибраної точки.

В момент часу $t = \frac{x-l}{a}$ передній фронт прямої хвилі досягає точки x , після чого остання попадає в зону прямої хвилі і на проміжку часу $\frac{x-l}{a} < t < \frac{x+l}{a}$ перебуває в стані активних коливань.

В момент часу $t = \frac{x+l}{a}$ до вибраної точки x доходить задній фронт прямої хвилі, який рухається від точки $(-l)$ зі швидкістю a . В цей момент точка повертається в положення рівноваги і в подальшому, при $t > \frac{x+l}{a}$, перебуває в стані спокою.

Таким чином, для довільної точки $x > l$ можна виділити три основні проміжки часу:

- а) $0 < t < \frac{x-l}{a}$ — початковий стан спокою, коли пряма хвиля не дійшла до точки x ;
- б) $\frac{x-l}{a} < t < \frac{x+l}{a}$ — активна фаза коливань, коли пряма хвиля проходить через точку x ;
- в) $t > \frac{x+l}{a}$ — остаточний стан спокою, коли пряма хвиля повністю пройшла через точку x .

Для точок $x < -l$, розташованих по лівий бік від проміжка початкових збурень, картина абсолютно симетрична. Тому для таких точок, на які діятиме зворотна хвиля, також виділяються три аналогічні проміжки часу:

- а) $0 < t < \frac{-x-l}{a}$ — початковий стан спокою, коли зворотна хвиля не дійшла до точки x ;
- б) $\frac{-x-l}{a} < t < \frac{-x+l}{a}$ — активна фаза коливань, коли зворотна хвиля проходить через точку x ;
- в) $t > \frac{-x+l}{a}$ — остаточний стан спокою, коли зворотна хвиля повністю пройшла через точку x .

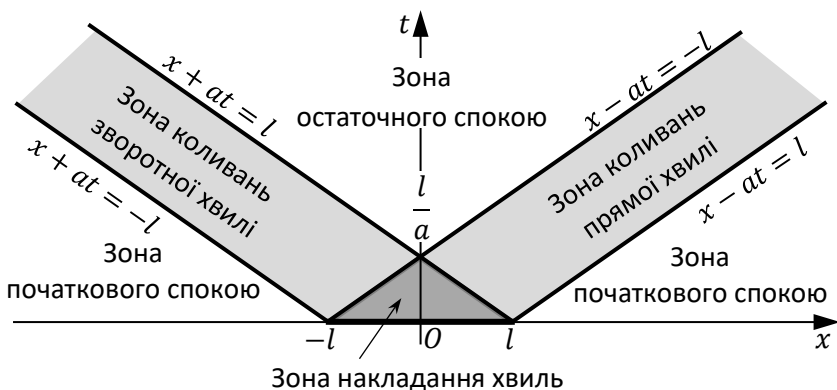


Рис. 3.8

Перехідні моменти часу $t = \frac{x \pm l}{a}$ для $x > l$ та $t = \frac{-x \pm l}{a}$ для $x < -l$ в площині Oxt визначають характеристики хвильового рівняння задачі $x - at = \pm l$ і $x + at = \pm l$, які проходять через кінці проміжка $(-l, l)$

початкових відхилень на осі Ox (Рис. 3.8). Ці характеристики розбивають півплощину $t > 0$ на окремі зони, кожна з яких відповідає стан точок струни у різні моменти часу. Рис. 3.8 — *фазовий портрет* розповсюдження коливань. Зауважимо, що фазовий портрет побудований на основі аналізу стану точок, які лежать за межами відрізка $[-l, l]$. Але він дозволяє встановити і якісну картину коливань і на цьому відрізку.

Якщо на цьому портреті проводити прямі $t = \text{const}$, то можна проаналізувати стан в струні у вибраний момент часу: визначити точки, які перебувають в стані коливань, до яких коливання ще не дійшли, які завершили активну фазу коливань і повернулись у стан спокою. Якщо ж провести промінь $x = \text{const}$, $t > 0$, то можна визначити поведінку вибраної точки x у різні моменти часу, а бо на різних проміжках часу. Тобто, фазовий портрет — це ефективний інструмент якісного аналізу розповсюдження коливань. ■

Приклад 2. Використовуючи формулу д'Аламбера, з'ясувати якісну картину розповсюдження хвиль, які спричинені початковими швидкостями, локалізованими на обмеженій ділянці, при нульових початкових відхиленнях (хвилі імпульсу).

Розглядається задача Коші

$$\begin{aligned} u''_{tt} - a^2 u''_{xx} &= 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ u|_{t=0} &= 0, \quad u'_t|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (19)$$

де ψ має ненульові значення лише на проміжку $(-l, l)$ (початкові швидкості локалізовані на обмеженій ділянці), а за його межами $\psi \equiv 0$. Схематично графік функції ψ наведений на Рис. 3.9.

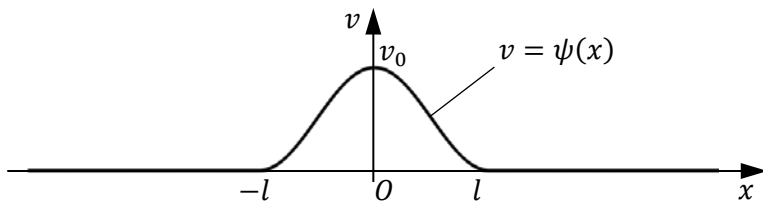


Рис. 3.9

Задачу (19) можна розглядати як математичну модель, що описує такий хвильовий процес: по струні, яка перебувала в стані спокою, в початковий момент часу $t = 0$ вдарив абсолютно твердий молоточок і

передає її точкам імпульс, зосереджений на проміжку $(-l, l)$. Внаслідок удару точки цього проміжку отримали початкові швидкості, розподіл яких має, наприклад, вигляд, наведений на Рис. 3.9. Після цього в струні розповсюджується хвиля, що називають *хвилями імпульсу*.

Оскільки задача (19) є окремим випадком задачі Коші (1), (2), то використовуючи формулу д'Аламбера (13), запишемо розв'язок (19)

$$u(x, t) = \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi = \frac{1}{2a} \left(\int_0^{x+at} \psi(\xi) d\xi - \int_0^{x-at} \psi(\xi) d\xi \right) = \\ = F(x - at) + G(x + at), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0,$$

де $F(x) = -\frac{1}{2a} \int_0^{x+at} \psi(\xi) d\xi$, $G(x) = -F(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Отриманий розв'язок знову подається у вигляді суми прямої та зворотної хвиль, які будуть розходитись зі швидкістю a кожна.

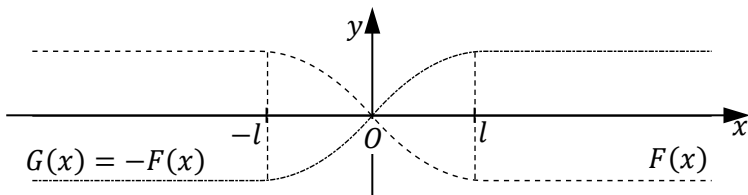


Рис. 3.10

В початковий момент часу $t = 0$ пряма і зворотна хвилі компенсують одна одну, що відповідає нульовим початковим відхиленням (Рис. 3.10).

При $t > 0$ пряма та зворотна хвилі розходяться, формуючи зону коливань $(-l - at, l + at)$. При $0 < t < \frac{l}{a}$ всі точки проміжку перебувають у русі (Рис. 3.11). Можна виділити два передні фронти хвиль, які розходяться в протилежних напрямках. Задні фронти — відсутні.

В момент часу $t = \frac{l}{a}$ точка з координатою $x = 0$ — середина відрізка початкового імпульсу $(-l, l)$, досягає відхилення $H = \frac{1}{2a} \int_{-l}^l \psi(\xi) d\xi$ і зупиняється (Рис. 3.12). Починаючи з цього моменту часу, формується остаточний профіль струни. Зберігаються два передні фронти хвиль. Задні фронти відсутні.

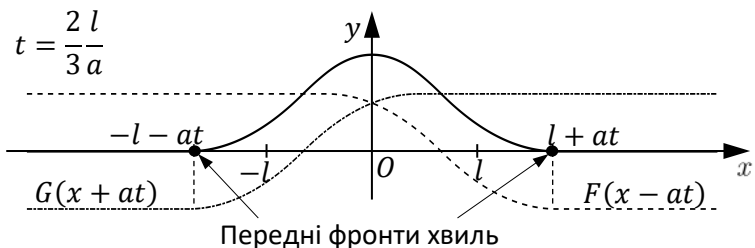
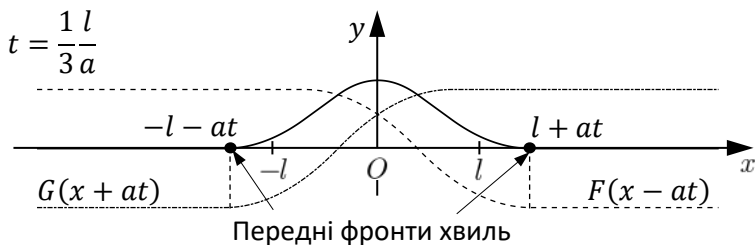


Рис. 3.11

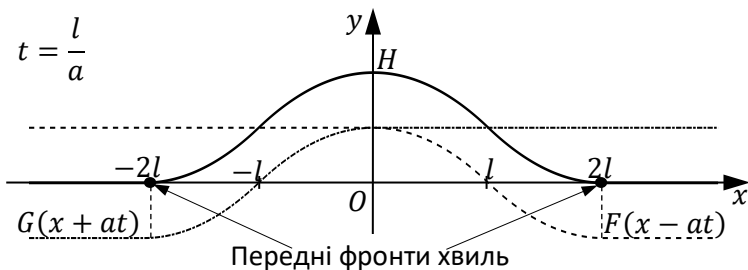


Рис. 3.12

В наступні моменти часу $t > \frac{l}{a}$ похилі ділянки струни, в яких точки перебувають в активному русі, не змінюючи своєї форми, будуть розходитись у протилежних напрямках зі швидкістю a кожна, тим самим розширюючи зону коливань. В центральній частині, навколо точки $x = 0$ горизонтальну ділянку, яка складається з нерухомих точок, що досягли відхилення H і зупинились. В подальшому ці точки так і залишаються нерухомими і в свої положення рівноваги ніколи не повернуться (Рис. 3.13). Можна виділити два передні фронти хвиль в точках $\pm(l + at)$ Задні фронти відсутні. Явище, коли в ході розповсюдження коливань не можна виділити задній фронт хвилі, називають *дифузією*

хвиль.

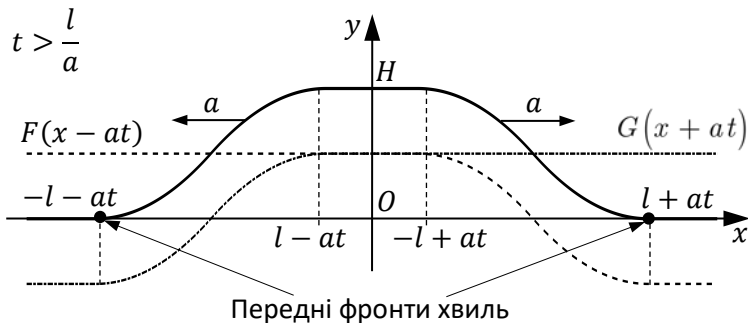


Рис. 3.13

На основі проведеного якісного аналізу розповсюдження хвилі імпульсу можна побудувати фазовий портрет даного процесу, якій матиме вигляд, аналогічний до Рис. 3.8, за тим виключенням, що нижній трикутник слід перейменувати із "Зони накладання хвиль" на "Зону формування профіля коливань", а верхню "Зону остаточного спокою" — на "Зону рівноваги у відхиленому положенні". ■

Приклад 3. Розв'язати задачу Коші

$$\begin{aligned} u''_{tt} - u''_{xx} &= 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ u|_{t=0} &= e^{-x}, \quad u'_t|_{t=0} = \frac{1}{1+x}, \quad x \geq 0, \end{aligned} \quad (20)$$

методом характеристик та встановити максимальну множину, на який розв'язок визначається однозначно.

На відміну від класичної задачі Коші (1), (2) початкові умови задачі (20) задані не на всій прямій $t = 0$, а лише на півпрямій $t = 0, x \geq 0$. Це означає, що розв'язок задачі (20) буде однозначно визначеним не в усій півплощині $t \geq 0$, а лише на деякій підмножині, яка буде визначеною в ході розв'язання задачі.

Рівняння задачі (20) є окремим випадком однорідного хвильового рівняння (1) з параметром $a = 1$. Тому, використовуючи розв'язок д'Аламбера (8), запишемо загальний розв'язок рівняння задачі (20)

$$u(x, t) = F(x - t) + G(x + t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0, \quad (21)$$

де $F, G \in C^2(\mathbb{R})$.

Для визначення функцій F та G підставляємо (21) в початкові умови задачі (20)

$$u|_{t=0} = F(x) + G(x) = e^{-x}, \quad x \geq 0; \quad (22)$$

$$u'_t|_{t=0} = -F'(x) + G'(x) = \frac{1}{1+x}, \quad x \geq 0. \quad (23)$$

Інтегруємо (23)

$$-F(x) + G(x) = \ln(1+x) + 2C, \quad x \geq 0, \quad (24)$$

де C — довільна стала. Після чого, з рівностей (22), (24) знаходимо функції F і G

$$F(x) = \frac{1}{2}e^{-x} - \frac{1}{2}\ln(1+x) - C, \quad x \geq 0,$$

$$G(x) = \frac{1}{2}e^{-x} + \frac{1}{2}\ln(1+x) + C, \quad x \geq 0.$$

Отримані вирази для F і G підставляємо в загальний розв'язок рівняння (21). При цьому, слід врахувати, що функції визначені лише на півпрямій $[0, +\infty)$. Тому після підстановки в отриманому розв'язку потрібно накласти обмеження на аргументи x, t : $x - t \geq 0, x + t \geq 0$. В результаті, запишемо

$$\begin{aligned} u(x, t) &= F(x - t) + G(x + t) = \\ &= \frac{1}{2}e^{-x+t} - \frac{1}{2}\ln(1+x-t) - C + \frac{1}{2}e^{-x-t} + \frac{1}{2}\ln(1+x+t) + C = \\ &= \frac{1}{2}(e^{-x+t} + e^{-x-t}) - \ln\left(\frac{1+x+t}{1+x-t}\right)^{\frac{1}{2}}, \\ &\quad x - t \geq 0, \quad x + t \geq 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Отриманий розв'язок (25) визначений однозначно на множині $D = \{(x, t): x - t \geq 0, x + t \geq 0\}$, яка обмежена двома характеристиками рівняння задачі (20), що проходять через точку O , кінцеву точку півосі $Ox_+ = \{t = 0, x \geq 0\}$, на якій задані початкові умови задачі (Рис. 3.14). Дана

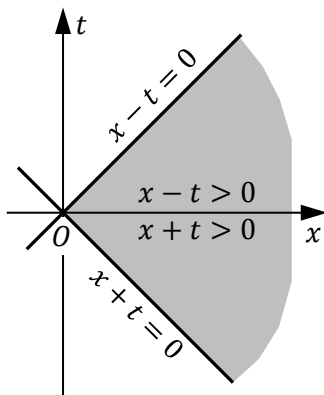


Рис. 3.14

множина буде максимальною множиною, на якій розв'язок задачі Коші (20) визначається однозначно. Причому, ця множина включає як точки півплощини $t > 0$, в якій розглядається рівняння задачі, так і точки півплощини $t < 0$. Тобто, розв'язок задачі (20) продовжується в півплощину $t < 0$. Це можливо, оскільки рівняння задачі — це однорідне хвильове рівняння, що має сталі коефіцієнти. Тому задача може розглядатись як при $t > 0$, так і при $t < 0$. ■

Приклад 4. Розв'язати задачу Коші

$$\begin{aligned} u''_{tt} - 4u''_{xx} &= 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ u|_{t=0} &= \sin(\pi x), \quad u'_t|_{t=0} = 4x + \frac{2}{x}, \quad 1 \leq x \leq 5, \end{aligned} \quad (26)$$

методом характеристик та встановити максимальну множину, на який розв'язок визначається однозначно.

Рівняння задачі (26) — це однорідне хвильове рівняння, яке є окремим випадком рівняння (1) з параметром $a = 2$. Тоді, використовуючи розв'язок д'Аламбера (8), можемо записати його загальний розв'язок

$$u(x, t) = F(x - 2t) + G(x + 2t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0, \quad (27)$$

де $F, G \in C^2(\mathbb{R})$.

Функції F та G визначаємо так, що виконувались початкові умови задачі. Для цього підставляємо (27) в ці умови

$$u|_{t=0} = F(x) + G(x) = \sin(\pi x), \quad 1 \leq x \leq 5, \quad (28)$$

$$u'_t|_{t=0} = -2F'(x) + 2G'(x) = 4x + \frac{2}{x}, \quad 1 \leq x \leq 5. \quad (29)$$

Інтегруємо (29)

$$-F(x) + G(x) = x^2 + \ln x + 2C, \quad 1 \leq x \leq 5, \quad (30)$$

де C — довільна стала. Після чого, з (28) і (30) знаходимо F та G

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{2} \sin(\pi x) - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \ln x - C, \\ F(x) &= \frac{1}{2} \sin(\pi x) + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \ln x + C, \end{aligned} \quad 1 \leq x \leq 5. \quad (31)$$

Знайдені вирази (31) для функцій F і G підставляємо в загальний

розв'язок (27) і отримаємо розв'язок задачі Коші (26). При цьому, оскільки знайдені функції F і G визначені лише на відрізку $[1,5]$, то на аргументи x, t розв'язку u задачі Коші потрібно накласти відповідні обмеження. В результаті, отримаємо

$$\begin{aligned} u(x, t) &= F(x - 2t) + G(x + 2t) = \\ &= \frac{1}{2} \sin(\pi(x - 2t)) - \frac{(x - 2t)^2}{2} - \frac{1}{2} \ln(x - 2t) - C + \\ &+ \frac{1}{2} \sin(\pi(x + 2t)) + \frac{(x + 2t)^2}{2} + \frac{1}{2} \ln(x + 2t) + C = \\ &= \sin(\pi x) \cos(2\pi t) + 4xt + \ln \left(\frac{x + 2t}{x - 2t} \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (32)$$

$$1 \leq x - 2t \leq 5, \quad 1 \leq x + 2t \leq 5.$$

Отриманий розв'язок (32) визначений в чотирикутнику D , який утворений шляхом перетину характеристик вихідного хвильового рівняння задачі, що проходять через

кінці відрізка $[1,5]$ осі Ox , за якому задаються початкові умови задачі Коші (26) (Рис. 3.15). Дана множина є максимальною множиною, на якій можна гарантувати існування та єдиність розв'язку задачі. Як і в попередньому прикладі множина D включає точки півплощини

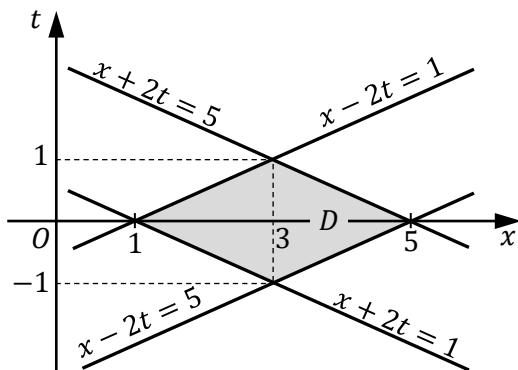


Рис. 3.15

$t > 0$, в якій початково розглядалось рівняння задачі, так і півплощини $t < 0$. Тобто розв'язок задачі Коші (26) допускає продовження на півплощину $t < 0$ із збереженням гладкості. ■

Завдання для самостійної роботи

Розв'язати задані задачі Коші методом характеристик. Для кожної із задач встановити максимальну множину існування та єдиності розв'язку.

1. $u''_{tt} - u''_{xx} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$

$$u|_{t=0} = \frac{1}{1+x^2}, \quad u'_t|_{t=0} = \frac{2x}{1+x^2}, \quad x \geq 0.$$

2. $u''_{tt} - u''_{xx} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$

$$u|_{t=0} = 2 \cos(\pi x), \quad u'_t|_{t=0} = \frac{x}{1+x}, \quad 0 \leq x \leq 2.$$

3. $u''_{tt} - 4u''_{xx} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$

$$u|_{t=0} = 2e^x, \quad u'_t|_{t=0} = 4xe^x, \quad x \leq 0.$$

4. $u''_{tt} - 4u''_{xx} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$

$$u|_{t=0} = 4 - x^2, \quad u'_t|_{t=0} = 4x \sin x, \quad |x| \leq 2.$$

5. $u''_{tt} - 9u''_{xx} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$

$$u|_{t=0} = \frac{2x}{2+x^2}, \quad u'_t|_{t=0} = 6xe^{-2x}, \quad x \geq -1.$$

6. $u''_{tt} - 9u''_{xx} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$

$$u|_{t=0} = 4xe^{2x}, \quad u'_t|_{t=0} = 6x \cos x, \quad -4 \leq x \leq 2.$$

7. $u''_{tt} - u''_{xx} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$

$$u|_{t=0} = \frac{1}{2-x}, \quad u'_t|_{t=0} = \frac{2}{1+x^2}, \quad x \leq 1.$$

8. $u''_{tt} - u''_{xx} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$

$$u|_{t=0} = \frac{2x}{4+x}, \quad u'_t|_{t=0} = \frac{2x}{1+x^2}, \quad -2 \leq x \leq 1.$$

9. $4u''_{tt} - u''_{xx} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$

$$u|_{t=0} = \frac{2}{x}, \quad u'_t|_{t=0} = \frac{x}{1+x^2}, \quad x \geq 1.$$

10. $4u''_{tt} - u''_{xx} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$

$$u|_{t=0} = \sin(\pi x), \quad u'_t|_{t=0} = xe^{2x}, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

11. $9u''_{tt} - u''_{xx} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$

$$u|_{t=0} = \frac{1}{2+x^2}, \quad u'_t|_{t=0} = \frac{2}{1+x}, \quad x \leq 0.$$

12. $9u''_{tt} - u''_{xx} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$

$$u|_{t=0} = e^{2x}, \quad u'_t|_{t=0} = x \sin x, \quad -3 \leq x \leq 0.$$

Задача 13. В нескінченній струні розповсюджуються хвилі, зумовлені початковими відхиленнями, сконцентрованими на проміжку $(-3, -2)$ (хвилі відхилень). Процес моделюється задачею Коші

$$u''_{tt} - u''_{xx} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x) = \begin{cases} > 0, & x \in (-2, -1), \\ 0, & x \notin (-2, -1), \end{cases} \quad u'_t|_{t=0} = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Зобразити фазовий портрет явища. Використовуючи цей портрет, з'ясувати стан струни в моменти часу $t = \frac{1}{2}, 1, 3$: виділити зони коливань, спокою, зони взаємодії (накладання) хвиль. Проаналізувати періоди "життя" точки $x = 0$.

Задача 14. В нескінченній струні розповсюджуються хвилі, зумовлені початковими відхиленнями, сконцентрованими на двох проміжках: $(-3, -2)$ та $(1, 2)$ (хвилі відхилень). Процес моделюється задачею Коші

$$u''_{tt} - 4u''_{xx} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x) = \begin{cases} \varphi_1(x) > 0, & x \in (-3, -2), \\ \varphi_2(x) > 0, & x \in (1, 2), \\ 0, & x \notin (-3, -2) \cup (1, 2), \end{cases}$$

$$u'_t|_{t=0} = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Зобразити фазовий портрет явища. Використовуючи цей портрет, з'ясувати стан струни в моменти часу $t = \frac{1}{4}, 1, \frac{3}{2}, 2, 4$: виділити зони коливань, спокою, зони взаємодії (накладання) хвиль. Проаналізувати періоди "життя" точки $x = 0$.

Задача 15. В нескінченній струні розповсюджуються хвилі, зумовлені початковими швидкостями, сконцентрованими на проміжку $(1, 2)$ (хвилі імпульсу). Процес моделюється задачею Коші

$$u''_{tt} - 4u''_{xx} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad u'_t|_{t=0} = \psi(x) = \begin{cases} > 0, & x \in (1, 2), \\ 0, & x \notin (1, 2), \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Зобразити фазовий портрет явища. Використовуючи цей портрет, з'ясувати стан струни в моменти часу $t = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 3$: виділити зони коливаль, спокою, зони рівноваги у відхиленому стані. Проаналізувати періоди "життя" точки $x = 0$.

Задача 16. В нескінченній струні розповсюджуються хвилі, зумовлені початковими відхиленнями, сконцентрованими на двох проміжках: $(-3, -2)$ та $(1, 2)$ (хвилі відхилень). Процес моделюється задачею Коші

$$\begin{aligned} u''_{tt} - u''_{xx} &= 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ u|_{t=0} &= 0, \\ u'_t|_{t=0} = \psi(x) &= \begin{cases} \psi_1(x) > 0, & x \in (-2, -1), \\ \psi_2(x) > 0, & x \in (2, 3), \\ 0, & x \notin (-2, -1) \cup (2, 3), \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Зобразити фазовий портрет явища. Використовуючи цей портрет, з'ясувати стан струни в моменти часу $t = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, 4$: виділити зони коливаль, спокою, зони рівноваги у відхиленому стані. Проаналізувати періоди "життя" точки $x = 0$.

3.1.2. Задача Коші для неоднорідного, одновимірного хвильового рівняння

Теоретичні відомості

В даному підрозділі розглядається класична задача Коші для неоднорідного хвильового рівняння з однією просторовою змінною

$$u''_{tt} - a^2 u''_{xx} = f(x, t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad (33)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u'_t|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (34)$$

де f, φ, ψ — задані функції.

З фізичної точки зору задача (33), (34) моделює процес розповсюдження коливаль у необмеженому, одновимірному тілі, які зумовлені початковими збуреннями (початкові умови (34)) та зовнішніми факторами, які діють протягом всього процесу (права частина f рівняння (33)). Прикладами таких процесів є вимушені коливання необмеженої

струни або стержня, на які діють зовнішні сили із масовою густиною f , а в початковий момент часу задані початкові відхилення φ та швидкості ψ точок тіла.

Задача Коші (33), (34) включає дві незалежні змінні: просторова змінна x та час t .

Розв'язком задачі Коші (33), (34) називається функція $u = u(x, t) \in C^2(x \in \mathbb{R}, t > 0) \cap C^1(x \in \mathbb{R}, t \geq 0)$, яка у відкритій півплощині $\{x \in \mathbb{R}, t > 0\}$ задовольняє рівнянню (33), а на прямій $\{x \in \mathbb{R}, t = 0\}$ — початковим умовам (34).

Використовуючи лінійність задачі (33), (34), запишемо її розв'язок у вигляді

$$u = v + w, \quad (35)$$

де v — розв'язок задачі Коші для однорідного хвильового рівняння з ненульовими початковими умовами

$$\begin{aligned} v''_{tt} - a^2 v''_{xx} &= 0, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ v|_{t=0} &= \varphi(x), \quad v'_t|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (36)$$

а w — розв'язок задачі Коші для неоднорідного хвильового рівняння з нульовими початковими умовами

$$\begin{aligned} w''_{tt} - a^2 w''_{xx} &= f(x, t), \quad x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ w|_{t=0} &= 0, \quad w'_t|_{t=0} = 0, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (37)$$

Задача Коші (36) розглянута в попередньому п. 3.1.1. Її розв'язок можна отримати за допомогою формули д'Аламбера (13)

$$\begin{aligned} v(x, t) &= \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi, \\ x &\in \mathbb{R}, \quad t \geq 0, \end{aligned} \quad (38)$$

при цьому, мають виконуватись умови

$$\varphi \in C^2(\mathbb{R}), \quad \psi \in C^1(\mathbb{R}), \quad (39)$$

які є необхідними та достатніми умовами існування розв'язку задачі (36), при цьому, цей розв'язок буде єдиним.

Для розв'язання задачі Коші (37) використовується *метод Дюамеля*. Шуканий розв'язок задачі подається у вигляді

$$w(x, t) = \int_0^t W(x, t - \tau, \tau) d\tau = \int_0^t W(x, \theta, \tau) |_{\theta=t-\tau} d\tau, \quad (40)$$

$$x \in \mathbb{R}, t \geq 0,$$

де невідома підінтегральна функція $W(x, \theta, \tau)$ має бути розв'язком задачі Коші

$$W''_{\theta\theta} - a^2 W''_{xx} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \theta > 0, \quad (41)$$

$$W|_{\theta=0} = 0, \quad W'|_{\theta=0} = f(x, \tau), \quad x \in \mathbb{R},$$

при кожному $\tau \geq 0$. (41) — це параметрична серія задач Коші для однорідного хвильового рівняння. При кожному $\tau \geq 0$ розв'язок цієї задачі можна отримати, використовуючи формулу д'Аламбера,

$$W(x, \theta, \tau) = \frac{1}{2a} \int_{x-a\theta}^{x+a\theta} f(\xi, \tau) d\xi, \quad x \in \mathbb{R}, \theta \geq 0, \tau \geq 0, \quad (42)$$

при цьому, має виконуватись умова

$$f \in C^{1,0}(\mathbb{R} \times 0, +\infty). \quad (43)$$

Якщо підставити (42) в (40), то запишемо розв'язок задачі Коші (37) для неоднорідного хвильового рівняння з нульовими початковими умовами

$$w(x, t) = \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi d\tau, \quad x \in \mathbb{R}, t \geq 0. \quad (44)$$

Оскільки метод Дюамеля використовує спеціальне зображення для розв'язку задачі Коші (37), то він не гарантує єдиності розв'язку цієї задачі. З тих самих міркувань умова (43) буде лише достатньою умовою існування розв'язку (37).

Вирази (38) та (44) для функцій v і w підставляємо в (35). В результаті, отримуємо розв'язок задачі Коші (33), (34)

$$\begin{aligned} u(x, t) &= v(x, t) + w(x, t) = \\ &= \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi + \\ &+ \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi d\tau, \quad x \in \mathbb{R}, t \geq 0, \end{aligned} \quad (45)$$

при цьому, мають одночасно виконуватись умови (39), (43), які будуть

достатніми умовами існування розв'язку.

Використаний підхід до розв'язання задачі Коші (33), (34) для неоднорідного хвильового рівняння не гарантує єдиності розв'язку задачі. Тому це питання вивчається окремо. Має місце теорема.

Теорема (про єдиність розв'язку задачі Коші для одновимірного хвильового рівняння)

Якщо задача Коші (33), (34) для одновимірного хвильового рівняння має розв'язок, то він єдиний.

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Розв'язати класичну задачу Коші для одновимірного хвильового рівняння методом характеристик

$$\begin{aligned} u''_{tt} - u''_{xx} &= 8xe^{-2t}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ u|_{t=0} &= \sin x, \quad u'_t|_{t=0} = \frac{2}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (46)$$

Відповідно до методу характеристик зводимо неоднорідне хвильове рівняння задачі (46) до I канонічної форми. Характеристиками рівняння будуть два набори прямих: $x \pm t = C_{1,2} = \text{const}$, які визначають заміну змінних

$$\xi = x - t, \quad \eta = x + t, \quad (47)$$

що і зводить рівняння до I канонічної форми.

Виконавши заміну (47), перепишемо рівняння задачі (46) у вигляді

$$u''_{\xi\eta} = -(\xi + \eta)e^{\xi-\eta}. \quad (48)$$

Отримане рівняння послідовно інтегруємо за ξ та η (порядок неважливий). Після інтегрування за η запишемо

$$u'_\xi = - \int (\xi + \eta)e^{\xi-\eta} d\eta = (\xi + \eta)e^{\xi-\eta} + e^{\xi-\eta} + h(\xi),$$

де $h \in C^1$ — довільна функція. А після інтегрування за ξ —

$$\begin{aligned} u &= \int ((\xi + \eta)e^{\xi-\eta} + e^{\xi-\eta}) d\xi + \int h(\xi) d\xi = \\ &= (\xi + \eta)e^{\xi-\eta} + F(\xi) + G(\eta), \end{aligned}$$

де $F, G \in C^2$ — довільні функції. Підставляючи замість ξ та η (47),

приходимо до загального розв'язку неоднорідного хвильового рівняння задачі (46)

$$u(x, t) = 2xe^{-2t} + F(x - t) + G(x + t), \quad x \in \mathbb{R}, t \geq 0. \quad (49)$$

Для визначення функцій F і G підставляємо (49) у початкові умови задачі (46)

$$u|_{t=0} = 2x + F(x) + G(x) = \sin x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (50)$$

$$u'_t|_{t=0} = -4x - F'(x) + G'(x) = \frac{2}{1 + x^2}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (51)$$

Інтегруємо рівність (51)

$$-F(x) + G(x) = 2\operatorname{arctg} x + 2x^2 + 2C, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (52)$$

де C — довільна стала. Після чого, з (50) і (52) знаходимо шукані функції F та G

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{2} \sin x - x - \operatorname{arctg} x - x^2 - C, \\ G(x) &= \frac{1}{2} \sin x - x + \operatorname{arctg} x + x^2 + C, \end{aligned} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Підставляємо знайдені F і G в загальний розв'язок (49) і запишемо розв'язок задачі Коші (46)

$$\begin{aligned} u(x, t) &= 2xe^{-2t} + \\ &+ \frac{1}{2} \sin(x - t) - (x - t) - \operatorname{arctg}(x - t) - (x - t)^2 - C + \\ &+ \frac{1}{2} \sin(x + t) - (x + t) + \operatorname{arctg}(x + t) + (x + t)^2 + C = \\ &= 2xe^{-2t} + \sin x \cos t - 2x + 4xt + \\ &+ \operatorname{arctg}(x + t) - \operatorname{arctg}(x - t), \quad x \in \mathbb{R}, t \geq 0. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Приклад 2. Розв'язати класичну задачу Коші для одновимірного хвильового рівняння методом характеристик

$$\begin{aligned} u''_{tt} - \frac{1}{4} u''_{xx} &= \frac{3}{2\sqrt{t}} + \frac{3}{2} \cos(x + t), \quad x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u|_{t=0} &= 0, \quad u'_t|_{t=0} = 0, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (53)$$

Відзначимо, що права частина хвильового рівняння задачі (53) не

задовольняє достатній умові існування розв'язку (43). Але, як буде показано далі, задача Коші (53) все одно матиме розв'язок, який можна отримати методом характеристик.

Для відшукування загального розв'язку рівняння задачі (53) зводимо його до I канонічної форми. Характеристиками рівняння будуть два набори прямих $x \pm \frac{1}{2}t = C_{1,2} = \text{const}$, на основі яких визначаємо заміну змінних

$$\xi = x - \frac{t}{2}, \quad \eta = x + \frac{t}{2}, \quad (54)$$

що зводить вихідне рівняння задачі до I канонічної форми.

Виконавши заміну (54), запишемо рівняння задачі (53) у вигляді

$$u''_{\xi\eta} = -\frac{3}{2\sqrt{\eta-\xi}} - \frac{3}{2} \cos\left(\frac{3\eta}{2} - \frac{\xi}{2}\right), \quad t = \eta - \xi > 0.$$

Інтегруємо послідовно за обома змінними ξ та η (порядок інтегрування неважливий). Якщо проінтегрувати за η , то запишемо

$$u'_\xi = -3\sqrt{\eta-\xi} - \sin\left(\frac{3\eta}{2} - \frac{\xi}{2}\right) + h(\xi), \quad \eta - \xi > 0,$$

де $h \in C^1$. Далі, проінтегрувавши за ξ , отримаємо

$$u = 2(\eta - \xi)^{\frac{3}{2}} - 2 \cos\left(\frac{3\eta}{2} - \frac{\xi}{2}\right) + \underbrace{\int h(\xi) d\xi}_{F(\xi)} + G(\eta), \quad \eta - \xi \geq 0,$$

де $F, G \in C^2$. Підставляємо в отриманий вираз заміну (54) і матимемо загальний розв'язок неоднорідного хвильового рівняння задачі (53)

$$u = 2t^{\frac{3}{2}} - 2 \cos(x + t) + F\left(x - \frac{t}{2}\right) + G\left(x + \frac{t}{2}\right), \quad (55)$$

$$x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0.$$

Якщо $F, G \in C^2(\mathbb{R})$, то отриманий розв'язок (55) задовольняє умови гладкості, які накладаються на розв'язок задачі Коші (див. означення розв'язку на с. 136).

Для визначення функцій F, G підставляємо (55) у початкові умови задачі (53)

$$u|_{t=0} = -2 \cos x + F(x) + G(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (56)$$

$$u'_t|_{t=0} = 2 \sin x - \frac{1}{2}F'(x) + \frac{1}{2}G'(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (57)$$

Інтегруємо рівність (57)

$$-2 \cos x - \frac{1}{2}F(x) + \frac{1}{2}G(x) = C, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (58)$$

де C — довільна стала.

Нарешті, з (56) та (58) знаходимо шукані функції F і G

$$F(x) = -\cos x - C, \quad G(x) = 3 \cos x + C, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Знайдені F та G підставляємо в загальний розв'язок хвильового рівняння (55) і отримуємо розв'язок вихідної задачі Коші (53)

$$u(x, t) = 2t^{\frac{3}{2}} - 2 \cos(x + t) - \cos\left(x - \frac{t}{2}\right) + 3 \cos\left(x + \frac{t}{2}\right),$$

$$x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0. \quad \blacksquare$$

Приклад 3. Розв'язати класичну задачу Коші для одновимірного хвильового рівняння

$$\begin{aligned} u''_{tt} - u''_{xx} &= (5t + 3)e^{-t} \cos(2x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ u|_{t=0} &= \frac{2}{1 + x^2}, \quad u'_t|_{t=0} = 0, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (59)$$

Хвильове рівняння задачі (59) є лінійним неоднорідним рівнянням. Тому його загальний розв'язок можна записати у вигляді

$$u = \tilde{u} + w, \quad (60)$$

де w — загальний розв'язок однорідного хвильового рівняння

$$w''_{tt} - w''_{xx} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad (61)$$

а $\tilde{u}$ — фіксований частковий розв'язок вихідного неоднорідного рівняння.

Загальний розв'язок однорідного хвильового рівняння (61) можна записати, використовуючи розв'язок д'Аламбера (8) при $a = 1$, отриманий в попередньому пункті,

$$w(x, t) = F(x - t) + G(x + t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0, \quad (62)$$

де $F, G \in C^2(\mathbb{R})$.

Частковий розв'язок $\tilde{u}$ вихідного неоднорідного хвильового рів-

няння будемо з урахуванням вигляду правої частини вигляд правої частини. Використовуючи диференціальні властивості функції $\cos(2x)$, запишемо

$$\tilde{u}(x, t) = T(t) \cos(2x), \quad x \in \mathbb{R}, t \geq 0, \quad (63)$$

де функцію $T(t)$ потрібно підібрати.

Підставляємо функцію (63) у вихідне неоднорідне хвильове рівняння

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{tt}'' - \tilde{u}_{xx}'' &= T''(t) \cos(2x) + 4T(t) \cos(2x) = \\ &= (T''(t) + 4T(t)) \cos(2x) = (5t + 3)e^{-t} \cos(2x), \quad x \in \mathbb{R}, t > 0, \end{aligned}$$

і можемо записати звичайне диференціальне рівняння відносно невідомої функції $T(t)$

$$T''(t) + 4T(t) = (5t + 3)e^{-t}, \quad t > 0. \quad (64)$$

Оскільки $\tilde{u}$ — це лише один частковий розв'язок вихідного неоднорідного хвильового рівняння, то для його побудови у вигляді (63) потрібен лише один із розв'язків рівняння (64), який можна побудувати методом невизначених коефіцієнтів. Враховуючи вигляд правої частини (64), запишемо

$$T(t) = (At + B)e^{-t}, \quad t \geq 0, \quad (65)$$

де A, B — невідомі коефіцієнти. Якщо підставити (65) у рівняння (64), то отримаємо

$$\begin{aligned} T''(t) + 4T(t) &= (At + B)e^{-t} - 2Ae^{-t} + 4(At + B)e^{-t} = \\ &= (5At + 5B - 2A)e^{-t} = (5t + 3)e^{-t}, \quad t > 0. \end{aligned}$$

В останній рівності прирівнюємо коефіцієнти при відповідних степенях t в лівій та правій частинах та знаходимо невідомі коефіцієнти

$$A = 1, B = 1.$$

Функцію (65) зі знайденими коефіцієнтами A і B підставляємо в (63). В результаті, отримаємо частковий розв'язок неоднорідного хвильового рівняння задачі (59). Якщо об'єднати цей розв'язок із загальним розв'язком однорідного хвильового рівняння (62) та підставити їх у (60), то запишемо загальний розв'язок вихідного неоднорідного рівняння

$$u(x, t) = (t + 1)e^{-t} \cos(2x) + F(x - t) + G(x + t), \quad (66)$$

$$x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0,$$

де $F, G \in C^2(\mathbb{R})$.

Для визначення функцій F і G підставляємо (66) у початкові умови вихідної задачі Коші (59)

$$u|_{t=0} = \cos(2x) + F(x) + G(x) = \frac{2}{1 + x^2}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (67)$$

$$u'_t|_{t=0} = -F'(x) + G'(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (68)$$

Інтегруємо (68)

$$-F(x) + G(x) = 2C, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (69)$$

C — довільна стала. Після чого, з (67) та (69) знаходимо F і G

$$F(x) = \frac{1}{1 + x^2} - \frac{1}{2} \cos(2x) - C, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$G(x) = \frac{1}{1 + x^2} - \frac{1}{2} \cos(2x) + C, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Знайдені функції підставляємо в загальний розв'язок (66) і отримаємо розв'язок вихідної задачі Коші (59)

$$\begin{aligned} u(x, t) &= (t + 1)e^{-t} \cos(2x) + \frac{1}{1 + (x - t)^2} - \frac{1}{2} \cos(2(x - t)) - C + \\ &\quad + \frac{1}{1 + (x + t)^2} - \frac{1}{2} \cos(2(x + t)) + C = \\ &= (t + 1)e^{-t} \cos(2x) + \frac{1}{1 + (x - t)^2} + \frac{1}{1 + (x + t)^2} - \\ &\quad - \cos(2x) \cos(2t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Приклад 4. Розв'язати задачу Коші

$$u''_{tt} - 4u''_{xx} + 2u'_t + u = 4e^{-3t} \cos x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad (70)$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad u'_t|_{t=0} = \frac{4x}{1 + x^2}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (71)$$

Для розв'язання рівняння (70) спробуємо позбутись "зайвих" доданків, які включають u'_t та u . Зауважимо, що це можна зробити не завжди, а лише тоді, коли коефіцієнти цих доданків пов'язані певним чином між

собою.

Зробимо заміну невідомої функції

$$u(x, t) = e^{\alpha t} w(x, t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0, \quad (72)$$

де w — нова невідома функція, а коефіцієнт α виберемо пізніше.

Записуємо похідні від u з урахуванням (72) та підставляємо їх у рівняння (70). Зібравши спільні доданки, запишемо рівняння відносно нової невідомої функції w

$$e^{\alpha t} ((\alpha + 1)^2 w + 2(\alpha + 1)w'_t + w''_{tt} - 4w''_{xx}) = 4e^{-3t} \cos x, \\ x \in \mathbb{R}, \quad t > 0.$$

Якщо вибрати $\alpha = -1$, позбудемось доданків, що включають w'_t і w . В результаті, для відшукування w отримаємо неоднорідне хвильове рівняння

$$w''_{tt} - 4w''_{xx} = 4e^{-2t} \cos x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad (73)$$

заміна (72), при цьому, матиме вигляд

$$u(x, t) = e^{-t} w(x, t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0. \quad (74)$$

Загальний розв'язок лінійного, неоднорідного хвильового рівняння (73) записуємо у вигляді

$$w(x, t) = \tilde{w}(x, t) + v(x, t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0, \quad (75)$$

де v — загальний розв'язок однорідного хвильового рівняння

$$v''_{tt} - 4v''_{xx} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$$

який можна отримати за допомогою розв'язку д'Аламбера (8) при $a = 2$,

$$v(x, t) = F(x - 2t) + G(x + 2t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0, \quad (76)$$

$F, G \in C^2(\mathbb{R})$, а $\tilde{w}$ — частковий розв'язок неоднорідного рівняння (73), який з урахування правої частини рівняння можна вибрати таким чином

$$\tilde{w}(x, t) = Ce^{-2t} \cos x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0, \quad C = \text{const.}$$

Підставивши вираз для $\tilde{w}$ в рівняння (73)

$$\tilde{w}''_{tt} - 4\tilde{w}''_{xx} = 8Ce^{-2t} \cos x = 4e^{-2t} \cos x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$$

знаходимо коефіцієнт $C = \frac{1}{2}$. В результаті, отримаємо частковий розв'язок неоднорідного рівняння (73)

$$\tilde{w}(x, t) = \frac{1}{2} e^{-2t} \cos x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0. \quad (77)$$

Отримані вирази (76) та (77) підставляємо в (75) і запишемо загальний розв'язок неоднорідного хвильового рівняння (73)

$$\begin{aligned} w(x, t) &= \tilde{w}(x, t) + v(x, t) = \\ &= \frac{1}{2} e^{-2t} \cos x + F(x - 2t) + G(x + 2t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0, \end{aligned} \quad (78)$$

де $F, G \in C^2(\mathbb{R})$ — довільні функції.

Для визначення функцій F і G підставляємо (74) в початкові умови вихідної задачі (71). Запишемо

$$u|_{t=0} = w|_{t=0} = 0, \quad x \in \mathbb{R};$$

$$u'_t|_{t=0} = \underbrace{-w|_{t=0}}_{=0} + w'_t|_{t=0} = w'_t|_{t=0} = \frac{4x}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Якщо тепер врахувати (78), отримаємо

$$w|_{t=0} = \frac{1}{2} \cos x + F(x) + G(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}; \quad (79)$$

$$w'_t|_{t=0} = -\cos x - 2F'(x) + 2G'(x) = \frac{4x}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (80)$$

Інтегруємо рівність (80)

$$-F(x) + G(x) = \frac{1}{2} \sin x + \ln(1+x^2) + 2C, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (81)$$

де C — довільна стала. Після цього, з (79) і (81) знаходимо F та G

$$\begin{aligned} F(x) &= -\frac{\cos x + \sin x}{4} - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) - C, \\ G(x) &= \frac{\sin x - \cos x}{4} + \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C. \end{aligned}$$

Якщо знайдені функції F і G підставити в (78) (стала C при цьому зникне), то отримаємо функцію w , яку в свою чергу слід підставити в (74), і отримаємо розв'язок вихідної задачі Коші (70), (71)

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2} e^{-3t} \cos x + \\ &+ e^{-t} \left(-\frac{\cos(x-2t) + \sin(x-2t)}{4} - \frac{1}{2} \ln(1+(x-2t)^2) - C + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\sin(x+2t) - \cos(x+2t)}{4} + \frac{1}{2} \ln(1 + (x+2t)^2) + C \Big) = \\
 & = \frac{1}{2} e^{-3t} \cos x + e^{-t} \left(\frac{\sin(2t) - \cos(2t)}{2} \cos x + \ln \left(\frac{1 + (x+2t)^2}{1 + (x-2t)^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right), \\
 & \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0. \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

Завдання для самостійної роботи

Розв'язати задані задачі Коші.

1. $u''_{tt} - u''_{xx} = 4, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$
 $u|_{t=0} = 2 \sin x, \quad u'_t|_{t=0} = 4 \cos(2x), \quad x \in \mathbb{R}.$
2. $u''_{tt} - 4u''_{xx} = 8, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$
 $u|_{t=0} = \frac{4}{\cosh x}, \quad u'_t|_{t=0} = \frac{4 \sin x}{2 + \cos x}, \quad x \in \mathbb{R}.$
3. $u''_{tt} - \frac{1}{9}u''_{xx} = \frac{8}{9}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$
 $u|_{t=0} = 4 \cos x, \quad u'_t|_{t=0} = \frac{2}{1 + x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$
4. $u''_{tt} - u''_{xx} = 8(x+2t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$
 $u|_{t=0} = \frac{4}{1 + x^2}, \quad u'_t|_{t=0} = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$
5. $u''_{tt} - \frac{1}{4}u''_{xx} = 3 \cos(2x + 2t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$
 $u|_{t=0} = 0, \quad u'_t|_{t=0} = \frac{e^x}{1 + e^x}, \quad x \in \mathbb{R}.$
6. $u''_{tt} - 9u''_{xx} = 36 \sin(3(x+t)), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$
 $u|_{t=0} = \frac{1}{1 + e^x}, \quad u'_t|_{t=0} = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$
7. $u''_{tt} - u''_{xx} = 8 \cos(x-t) \sin(2(x+t)), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$
 $u|_{t=0} = 0, \quad u'_t|_{t=0} = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$
8. $u''_{tt} - 4u''_{xx} = 32 \sin(2x - 4t) \cos(x + 2t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$

$$u|_{t=0} = 0, \quad u'_t|_{t=0} = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$9. \quad u''_{tt} - \frac{1}{9}u''_{xx} = 4 \cos(3x + t) \cos(3x - t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad u'_t|_{t=0} = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$10. \quad u''_{tt} - \frac{1}{4}u''_{xx} = 2 \sin(2x + t) \sin(2x - t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad u'_t|_{t=0} = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$11. \quad u''_{tt} - 9u''_{xx} = (2e^{-t} - 5e^{-2t}) \cos \frac{x}{3}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$$

$$u|_{t=0} = 2 \sin x, \quad u'_t|_{t=0} = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$12. \quad u''_{tt} - \frac{1}{4}u''_{xx} = (6 \sin t + 3 \cos t) \sin(4x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad u'_t|_{t=0} = \cos x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$13. \quad u''_{tt} - u''_{xx} = 8te^{-2t} \cos(2x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad u'_t|_{t=0} = \frac{x}{2 + x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$14. \quad u''_{tt} - \frac{1}{4}u''_{xx} + 2u'_t + u = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$$

$$u|_{t=0} = 2 \cos(2x), \quad u'_t|_{t=0} = 4 \sin x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$15. \quad u''_{tt} - 9u''_{xx} + \frac{2}{3}u'_t + \frac{1}{9}u = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$$

$$u|_{t=0} = 6 \sin(2x), \quad u'_t|_{t=0} = 3 \cos x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$16. \quad u''_{tt} - u''_{xx} + u'_t + \frac{1}{4}u = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$$

$$u|_{t=0} = 4 \cos x, \quad u'_t|_{t=0} = \frac{6x}{1 + x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$17. \quad u''_{tt} - 4u''_{xx} + 4u'_t + 4u = 16e^{-2t}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$$

$$u|_{t=0} = 2 \sin x, \quad u'_t|_{t=0} = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$18. \quad u''_{tt} - u''_{xx} + 6u'_t + 9u = 8e^{-3t}(3x + t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad u'_t|_{t=0} = 2x^2 - \sin x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

3.2. Загальна задача Коші для гіперболічних рівнянь з двома незалежними змінними

Теоретичні відомості

Розглянемо рівняння з двома незалежними змінними x, y , записане в загальному вигляді,

$$au''_{xx} + 2bu''_{xy} + cu''_{yy} + pu'_x + qu'_y + ru = f(x, y), \quad (1)$$

яке зберігає гіперболічний тип в деякій області Ω ($b^2 - ac > 0$ в Ω). Коefіцієнти рівняння (1), взагалі кажучи, є функціями аргументів x, y і належать до класу $C^2(\Omega)$. Оскільки рівняння (1) має в області Ω гіперболічний тип, то в цій області воно має два набори дійсних характеристик, які повністю покривають область. Розглянемо всередині області Ω гладку, замкнену криву $L, L \subset \Omega$, яка в жодній своїй точці не дотикається до характеристик рівняння.

Постановка загальної задачі Коші для гіперболічного рівняння (1) полягає у відшукуванні розв'язку цього рівняння, що визначений в деякій області $D, \bar{D} \subset \Omega, L \subset \bar{D}$, і який на кривій L задовольняє умовам Коші

$$u|_L = \varphi(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial \vec{l}} \Big|_L = \psi(x, y), \quad (x, y) \in L, \quad (2)$$

де $\vec{l}$ — вибраний напрямок, який в жодній точці кривої L не буде дотичним. При цьому, розв'язок $u \in C^2(D) \cap C^1(G \cup L)$.

В задачах $\vec{l}$ найчастіше співпадає або з напрямком осі Ox , або Oy . В таких випадках $\frac{\partial}{\partial \vec{l}} \Big|_L = \frac{\partial}{\partial x} \Big|_L$ або $\frac{\partial}{\partial \vec{l}} \Big|_L = \frac{\partial}{\partial y} \Big|_L$.

Якщо крива L обмежена, то, провівши через її кінці P_0 та P_1 характеристики L_0, L_1 і $\tilde{L}_0, \tilde{L}_1$ з обох сімейств, отримаємо криволінійний чотирикутник Π (Рис. 3.16). Має місце така теорема існування розв'язку.

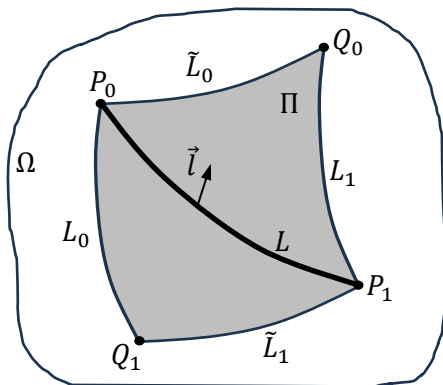


Рис. 3.16

Теорема (про існування розв'язку задачі Коші (1), (2) для гіперболічного рівняння з двома незалежними змінними)

Нехай $\varphi \in C^2(L)$, $\psi \in C^1(L)$, $f \in C^1(\overline{\Pi})$. Тоді задача Коші (1), (2) для гіперболічного рівняння з двома незалежними змінними має розв'язок $u \in C^2(\overline{\Pi})$.

З твердження теореми випливає, що за умов сформульованої теореми в постановці задачі Коші можна вибрати $D = \Pi$.

Разом із теоремою про існування розв'язку задачі Коші має місце і теорема про єдиність цього розв'язку.

Теорема (про єдиність розв'язку задачі Коші (1), (2) для гіперболічного рівняння з двома незалежними змінними)

Якщо задача Коші (1), (2) для гіперболічного рівняння з двома незалежними змінними має розв'язок в криволінійному чотирикутнику Π , то цей розв'язок визначений однозначно.

Зауважимо, що чотирикутник Π , утворений характеристиками рівняння (1), що проходять через кінці обмеженої кривої L (Рис. 3.16), буде максимальною множиною, на якій можна гарантувати існування та єдиність розв'язку задачі Коші (1), (2).

Одним із методів розв'язання задачі Коші (1), (2) для гіперболічного рівняння з двома незалежними змінними є *метод характеристик*. Алгоритм методу складається з таких кроків:

- А) відшукування характеристик вихідного гіперболічного рівняння (1);
- Б) визначення заміни змінних на основі знайдених характеристик та зведення рівняння до I канонічної форми;
- В) відшукування загального розв'язку рівняння (1), якщо це дозволяє його I канонічна форма, при цьому, загальний розв'язок визначається з точністю до двох довільних функцій;
- Г) визначення довільних функцій, що входять до розв'язку так, щоб виконувались умови Коші (2) задачі.

Якщо крива L необмежена, то область існування та єдиності розв'язку D залежить від форми кривої L та вигляду характеристик рівняння (1). В окремих випадках може бути, що $D = \Omega$, а в інших — D буде лише

підобластю Ω .

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Розв'язати задачу Коші методом характеристик

$$u''_{xx} - 2u''_{xy} - 3u''_{yy} = 0, \quad x, y \in \mathbb{R}, \quad (3)$$

$$u|_{y=-x} = \cos x, \quad u'_x|_{y=-x} = e^{2x}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (4)$$

Переконаємось, що рівняння (3) має гіперболічний тип. Запишемо неповний дискримінант: $b^2 - ac = 1 + 3 = 4 > 0$ при всіх $x, y \in \mathbb{R}$, тобто рівняння (3) має гіперболічний тип в $\Omega = \mathbb{R}^2$.

Крива L з умов Коші (2) в даному прикладі — це необмежена пряма $y = -x$.

Застосуємо метод характеристик.

Для відшукування характеристики рівняння (3) записуємо характеристичне рівняння та знаходимо його загальні інтеграли

$$(dy)^2 + 2dx dy - 3(dx)^2 = 0 \Leftrightarrow (dy + dx)^2 = 4(dx)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow dy + dx = \pm 2dx \Leftrightarrow \begin{cases} dy - dx = 0, \\ dy + 3dx = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y - x = C_1, \\ y + 3x = C_2, \end{cases} \quad C_{1,2} = \text{const.}$$

Отримали два набори паралельних прямих, які і є характеристиками вихідного гіперболічного рівняння (3).

Для зведення рівняння (3) до I канонічної форми запишемо заміну змінних, використовуючи знайдені характеристики,

$$\xi = y - x, \quad \eta = y + 3x, \quad \xi, \eta \in \mathbb{R}. \quad (5)$$

Якщо переписати похідні за змінними x, y через похідні за змінними ξ, η , підставити їх у рівняння (3), то отримаємо I канонічну форму цього рівняння, яка матиме вигляд

$$u''_{\xi\eta} = 0, \quad \xi, \eta \in \mathbb{R}. \quad (6)$$

Рівняння (6) — це найпростіше гіперболічне рівняння з двома незалежними змінними, послідовно інтегруючи яке за ξ та η (порядок інтегрування неважливий), запишемо його загальний розв'язок

$$u = F(\xi) + G(\eta), \quad \xi, \eta \in \mathbb{R},$$

де $F, G \in C^2(\mathbb{R})$ — довільні функції.

В останню рівність підставляємо заміну змінних (5) і запишемо загальний розв'язок вихідного рівняння (3)

$$u(x, y) = F(y - x) + G(y + 3x), \quad x, y \in \mathbb{R}, \quad (7)$$

де $F, G \in C^2(\mathbb{R})$ — довільні функції.

Для визначення функцій F, G підставляємо розв'язок (7) в умови Коші (4)

$$u|_{y=-x} = F(-2x) + G(2x) = \cos x, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\begin{aligned} u'_x|_{y=-x} &= [-F'(y - x) + 3G'(y + 3x)]|_{y=-x} = \\ &= -F'(-2x) + 3G'(2x) = e^{2x}, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Для зручності подальших міркувань зробимо заміну аргументу:

$$2x = z \in \mathbb{R}.$$

В результаті отримаємо рівності:

$$F(-z) + G(z) = \cos \frac{z}{2}, \quad z \in \mathbb{R}, \quad (8)$$

$$-F'(-z) + 3G'(z) = e^z, \quad z \in \mathbb{R}. \quad (9)$$

Інтегруємо (9)

$$F(-z) + 3G(z) = e^z + C, \quad z \in \mathbb{R}, \quad (10)$$

де C — довільна стала. Після чого, з (8) та (10) знаходимо шукані F, G

$$G(z) = \frac{1}{2} \left(e^z - \cos \frac{z}{2} + C \right), \quad z \in \mathbb{R}, \quad (11)$$

$$F(-z) = \frac{1}{2} \left(3 \cos \frac{z}{2} - e^z - C \right), \quad z \in \mathbb{R}.$$

Для функції F робимо заміну аргументу: $-z = t \in \mathbb{R}$, і запишемо для неї остаточний вираз

$$F(t) = \frac{1}{2} \left(3 \cos \frac{t}{2} - e^{-t} - C \right), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (12)$$

Знайдені F, G підставляємо в загальний розв'язок (7) і отримаємо розв'язок задачі Коші (3), (4)

$$u(x, y) = F(y - x) + G(y + 3x) =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \left(3 \cos \frac{y-x}{2} - e^{x-y} - C \right) + \frac{1}{2} \left(e^{y+3x} - \cos \frac{y+3x}{2} + C \right) = \\
 &= \frac{1}{2} \left(3 \cos \frac{y-x}{2} - \cos \frac{y+3x}{2} - e^{x-y} + e^{y+3x} \right), \quad x, y \in \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

Оскільки в ході побудови функцій F і G ніякі обмеження на їх аргументи не накладались, то отриманий розв'язок визначений при довільних x, y . Також встановлено, що він єдиний. ■

Приклад 2. Розв'язати задачу Коші методом характеристик

$$u''_{xy} - u''_{yy} + 2(u'_x - u'_y) = 0, \quad x, y \in \mathbb{R}, \quad (13)$$

$$u|_{x=y} = 2e^{-2y} + 1, \quad u'_x|_{x=y} = e^{-2y}, \quad 0 \leq y \leq 1. \quad (14)$$

Записавши неповний дискримінант: $b^2 - ac = \frac{1}{4} > 0$, неважко впевнитись, що рівняння (13) має гіперболічний тип при всіх $x, y \in \mathbb{R}$ (в $\mathbb{R}^2 = \Omega$).

Умови Коші (14) задані на обмеженому відрізку прямої $L = \{(x, y): x = y, 0 \leq y \leq 1\}$.

Для розв'язання задачі (13), (14) застосовуємо метод характеристик.

Для знаходження характеристик рівняння (13) записуємо характеристичне рівняння та шукаємо його загальні інтеграли

$$\begin{aligned}
 -dx dy - (dx)^2 = 0 &\Leftrightarrow dx(dy + dx) = 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} dx = 0, \\ dy + dx = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = C_1, \\ y + x = C_2, \end{cases} \quad C_{1,2} = \text{const.}
 \end{aligned}$$

Отримані два набори паралельних прямих і є характеристиками (13).

Зводимо рівняння (13) до I канонічної форми, використовуючи заміну змінних

$$\xi = x, \quad \eta = x + y, \quad \xi, \eta \in \mathbb{R}. \quad (15)$$

Після виконання заміни (15) вихідне гіперболічне рівняння (13) задачі запишемо в I канонічній формі

$$u''_{\xi\eta} + 2u'_\xi = 0, \quad \xi, \eta \in \mathbb{R}. \quad (16)$$

Для розв'язання рівняння (16) робимо заміну: $v = u'_\xi$, після якої отримаємо

$$v'_\eta + 2v = 0. \quad (17)$$

Отримане рівняння (17) є рівнянням 1-го порядку відносно v , в якому присутня лише похідна за змінною η , а змінна ξ входить лише як параметр. Тому рівняння (17) можна розглядати як звичайне диференціальне рівняння відносно аргумента η . (17) є лінійним однорідним рівнянням 1-го порядку. Для його розв'язання шукаємо корінь характеристичного полінома

$$\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -2 \in \mathbb{R}.$$

Оскільки корінь дійсний, то при кожному фіксованому ξ загальний розв'язок рівняння (17) запишеться у вигляді

$$v = Ce^{-2\eta},$$

де $C = C(\xi) \in C^1(\mathbb{R})$ — довільна функція. Згадавши, що $v = u'_\xi$, знаходимо

$$u = e^{-2\eta} \underbrace{\int C(\xi) d\xi}_{=: F(\xi)} + G(\eta) = e^{-2\eta} F(\xi) + G(\eta), \quad \xi, \eta \in \mathbb{R},$$

де $F, G \in C^2(\mathbb{R})$ — довільні функції.

Підставляючи в останню рівність заміну змінних (15), можемо записати загальний розв'язок вихідного рівняння (13)

$$u(x, y) = e^{-2(x+y)} F(x) + G(x + y), \quad x, y \in \mathbb{R}, \quad (18)$$

де $F, G \in C^2(\mathbb{R})$.

Для визначення функцій F і G підставляємо знайдений розв'язок (18) в умови Коші (14). В результаті, запишемо

$$u|_{x=y} = e^{-4y} F(y) + G(2y) = 2e^{-2y} + 1, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad (19)$$

$$\begin{aligned} u'_x|_{x=y} &= \left(-2e^{-2(x+y)} F(x) + e^{-2(x+y)} F'(x) + G'(x + y) \right) \Big|_{x=y} = \\ &= -2e^{-4y} F(y) + e^{-4y} F'(y) + G'(2y) = e^{2y}, \quad 0 \leq y \leq 1. \end{aligned} \quad (20)$$

Диференціюємо (по y) (19)

$$-4e^{-4y} F(y) + e^{-4y} F'(y) + 2G'(2y) = -4e^{-2y}, \quad 0 \leq y \leq 1.$$

Від отриманої рівності віднімаємо помножену на 2 рівність (20) і можемо записати

$$-e^{-4y} F'(y) = -6e^{-2y}, \quad 0 \leq y \leq 1, \Leftrightarrow F'(y) = 6e^{2y}, \quad 0 \leq y \leq 1.$$

Звідки шляхом інтегрування знаходимо функцію F

$$F(y) = 3e^{2y} + C_1, 0 \leq y \leq 1, \quad (21)$$

C_1 — довільна стала.

Якщо підставити (21) у (19), отримаємо

$$G(2y) = 2e^{-2y} + 1 - e^{-4y}F(y) = 1 - e^{-2y} - C_1e^{-4y}, 0 \leq y \leq 1.$$

Зробивши в останній рівності заміну аргумента: $2y = z$, $0 \leq z \leq 2$, запишемо остаточний вираз для функції G

$$G(z) = 1 - e^{-z} - C_1e^{-2z}, 0 \leq z \leq 2.$$

Знайдені F і G підставляємо в загальний розв'язок (18) і отримаємо розв'язок задачі Коші (13), (14). Під час підстановки слід пам'ятати, що функція F визначена лише на відрізку $[0,1]$, а функція G — на відрізку $[0,2]$. Тому на аргументи цих функцій в розв'язку (18) потрібно накласти відповідні обмеження, а саме, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq x + y \leq 2$. В результаті, запишемо

$$\begin{aligned} u(x, y) &= e^{-2(x+y)}(3e^{2x} + C_1) + 1 - e^{-x-y} - C_1e^{-2(x+y)} = \\ &= 3e^{-2y} + 1 - e^{-x-y}, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq x + y \leq 2. \end{aligned} \quad (22)$$

В ході розв'язання задачі Коші отриманий розв'язок (22) визначений всередині паралелограма

$$\bar{\Pi} = \{(x, y): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq x + y \leq 2\},$$

який утворений характеристиками, що проходять через кінці відрізка L (Рис. 3.17), на якому задані умови Коші (14). Паралелограм $\bar{\Pi}$ є найбільшою множиною, на який можна гарантувати існування та єдиність розв'язку задачі Коші. ■

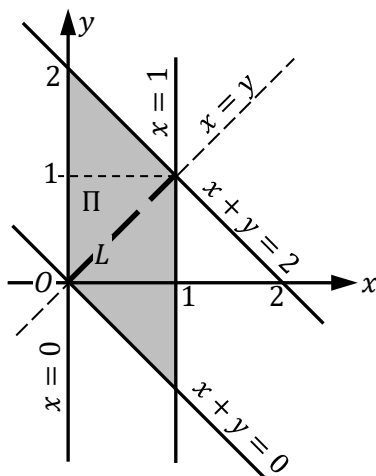


Рис. 3.17

Приклад 3. Розв'язати задачу Коші методом характеристик

$$3u''_{xx} + 4u''_{xy} + u''_{yy} + 2(u'_x + u'_y) = 8e^{-x-y}, \quad x, y \in \mathbb{R}, \quad (23)$$

$$u|_{x=-y} = 2 - 6y, \quad u'_x|_{x=-y} = 0, \quad y \leq 0. \quad (24)$$

Неповний дискримінант рівняння (23) $b^2 - ac = 4 - 3 = 1 > 0$ при всіх $x, y \in \mathbb{R}$. Тому рівняння (23) задачі зберігає гіперболічний тип в $\mathbb{R}^2$.

Для зведення рівняння до I канонічної форми визначаємо характеристики рівняння. Записуємо характеристичне рівняння та шукаємо його загальні інтеграли

$$\begin{aligned} 3(dy)^2 - 4dx dy + (dx)^2 = 0 &\Leftrightarrow (dx - 2dy)^2 = (dy)^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow dx - 2dy = \pm dy \Leftrightarrow \begin{cases} dx - 3dy = 0, \\ dx - dy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y = C_1, \\ x - y = C_2, \end{cases} \end{aligned}$$

де $C_{1,2} = \text{const.}$

Рівняння (23) має два набори дійсних характеристики, за допомогою яких визначаємо заміну змінних, що зведе рівняння до I канонічної форми.

$$\xi = x - 3y, \quad \eta = x - y, \quad \xi, \eta \in \mathbb{R}. \quad (25)$$

Переписавши похідні за змінними x, y через похідні за ξ, η та підставивши їх у рівняння (23), перепишемо його таким чином

$$-4u''_{\xi\eta} - 4u'_\xi = 8e^{-x-y}.$$

З (25) знаходимо $x = \frac{3}{2}\eta - \frac{1}{2}\xi$, $y = \frac{1}{2}\eta - \frac{1}{2}\xi$. Після чого, можемо отримати остаточно I канонічну форму рівняння (23)

$$u''_{\xi\eta} + u'_\xi = -2e^{\xi-2\eta}, \quad \xi, \eta \in \mathbb{R}. \quad (26)$$

Позначимо $v = u'_\xi$, після якого рівняння (26) запишемо у вигляді

$$v'_\eta + v = -2e^{\xi-2\eta}. \quad (27)$$

Отримане рівняння (27) можна розглядати, як звичайне диференціальне рівняння відносно аргумента η , в яке ξ входить як параметр. При кожному фіксованому ξ (27) — це лінійне, неоднорідне рівняння першого порядку зі сталими коефіцієнтами. Для його розв'язання використаємо метод варіації довільної сталої Лагранжа. Загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння (27) можна отримати, використовуючи корінь характеристичного полінома: $\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1 \in \mathbb{R}$. Оскільки корінь дійсний, то запишемо

$$v = Ce^{-\eta}, \quad (28)$$

де відповідно до методу Лагранжа $C = C(\xi, \eta)$. Вираз (28)

підставляємо в рівняння (27) і отримаємо рівність, з якої визначається невідома функція C

$$\begin{aligned} v'_\eta + v &= C'_\eta e^{-\eta} - C e^{-\eta} + C e^{-\eta} = C'_\eta e^{-\eta} = -2e^{\xi-2\eta} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow C'_\eta(\xi, \eta) = -2e^{\xi-\eta}. \end{aligned}$$

Інтегруємо отриману рівність за η

$$C(\xi, \eta) = \int -2e^{\xi-\eta} d\eta = 2e^{\xi-\eta} + h(\xi), \quad h \in C^1(\mathbb{R}).$$

Знайдену C підставляємо в (28). В результаті, запишемо загальний розв'язок (27):

$$v = 2e^{\xi-2\eta} + e^{-\eta}\varphi(\xi), \quad \xi, \eta \in \mathbb{R}.$$

Згадуємо, що $v = u'_\xi$, і для функції u , розв'язку рівняння (26), отримаємо

$$\begin{aligned} u &= \int v d\xi = \int (2e^{\xi-2\eta} + e^{-\eta}\varphi(\xi)) d\xi = \\ &= 2e^{\xi-2\eta} + e^{-\eta} \underbrace{\int \varphi(\xi) d\xi}_{F(\xi)} + G(\eta) = 2e^{\xi-2\eta} + e^{-\eta}F(\xi) + G(\eta), \end{aligned}$$

де $F, G \in C^2(\mathbb{R})$.

Використовуючи заміну (25), повертаємось до початкових змінних x, y і записуємо загальний розв'язок рівняння (23) задачі

$$u(x, y) = 2e^{-x-y} + e^{y-x}F(x-3y) + G(x-y), \quad x, y \in \mathbb{R}. \quad (29)$$

Для визначення функцій F, G записаний розв'язок (29) підставляємо в умови Коші (24)

$$\begin{aligned} u|_{x=-y} &= 2 + e^{2y}F(-4y) + G(-2y) = 2 - 6y, \\ u'_x|_{x=-y} &= -2 - e^{2y}F(-4y) + e^{2y}F'(-4y) + G'(-2y) = 0, \quad y \leq 0. \end{aligned}$$

Для зручності в отриманих рівностях перепозначимо аргумент $-2y = z, z \geq 0$ при $y \leq 0$. Тоді

$$e^{-z}F(2z) + G(z) = 3z, \quad z \geq 0, \quad (30)$$

$$-e^{-z}F(2z) + e^{-z}F'(2z) + G'(z) = 2, \quad z \geq 0. \quad (31)$$

Диференціюємо (30)

$$-e^{-z}F(2z) + 2e^{-z}F'(2z) + G'(z) = 3, \quad z \geq 0. \quad (32)$$

Віднімаємо рівності (32) і (31)

$$e^{-z}F'(2z) = 1, \quad z \geq 0 \Leftrightarrow F'(2z) = e^z, \quad z \geq 0,$$

і після інтегрування отримаємо

$$\frac{1}{2}F(2z) = e^z + C_1, \quad z \geq 0 \Leftrightarrow F(2z) = 2e^z + 2C_1, \quad z \geq 0,$$

C_1 — довільна стала.

Робимо заміну аргумента: $2z = t \geq 0$, і можемо записати остаточний вираз для функції F

$$F(t) = 2e^{\frac{t}{2}} + 2C_1, \quad t \geq 0. \quad (33)$$

Якщо підставити (33) в (30), знайдемо функцію G

$$G(z) = 3z - e^{-z}F(2z) = 3z - 2 - 2C_1e^{-z}, \quad z \geq 0.$$

Знайдені функції F, G підставляємо в загальний розв'язок (29) і отримуємо розв'язок вихідної задачі Коші (23), (24). При цьому, слід врахувати, що функції F і G визначені на півпрямій $[0, +\infty)$. Тому на аргументи цих функцій, що входять до розв'язку (29) слід накласти обмеження: $x - 3y \geq 0, x - y \geq 0$. В результаті отримаємо

$$\begin{aligned} u(x, y) &= 2e^{-x-y} + e^{y-x} \left(2e^{\frac{(x-3y)}{2}} + 2C_1 \right) + \\ &\quad + 3(x-y) - 2 - 2C_1e^{y-x} = \\ &= 2e^{-x-y} + 2e^{\frac{-(x+y)}{2}} + 3(x-y) - 2, \quad x - 3y \geq 0, \quad x - y \geq 0. \end{aligned}$$

Отриманий розв'язок визначений на замиканні області $\overline{D} = \{(x, y): x - 3y \geq 0, x - y \geq 0\}$, що буде максимальною множиною існування та єдиності розв'язку задачі Коші (23), (24). ■

Приклад 4. Розв'язати задачу Коші методом характеристик

$$xu''_{xx} - u''_{yy} + \frac{1}{2}u'_x = 0, \quad x > 0, \quad (34)$$

$$u|_{y=0} = 4x - 2\sqrt{x}, \quad u'_y|_{y=0} = 4\sqrt{x}, \quad 1 \leq x \leq 4. \quad (35)$$

Обчисливши неповний дискримінант рівняння (34): $b^2 - ac = x$, переконуємось, що воно зберігає гіперболічний тип у півплощині $x > 0$. При цьому, на прямій $x = 0$ тип рівняння стає параболічним, а в

півплощині $x < 0$ — еліптичним. Тому задачу Коші для рівняння (34) можна розглядати виключно в півплощині $x > 0$. Крива L , на якій задані умови Коші (35), — це відрізок прямої, $L = \{(x, y): y = 0, 1 \leq x \leq 4\}$, який лежить у півплощині гіперболічності рівняння.

Для розв'язання задачі Коші (34), (35) застосовуємо метод характеристик.

Для зведення рівняння (34) до I канонічної форми визначаємо його характеристики. Записуємо характеристичне рівняння в $x > 0$ та шукаємо його загальні інтеграли

$$\begin{aligned} x(dy)^2 - (dx)^2 &= 0 \Leftrightarrow x(dy)^2 = (dx)^2 \Leftrightarrow \sqrt{x}dy = \pm dx \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow dy = \pm \frac{dx}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow y = \pm 2\sqrt{x} + C_{1,2} \Leftrightarrow y \mp 2\sqrt{x} = C_{1,2}, \end{aligned}$$

де $C_{1,2} = \text{const}$.

Рівняння (34) має в півплощині два набори дійсних характеристик, які дозволяють вибрати заміну змінних, що зведе його до I канонічної форми

$$\xi = y - 2\sqrt{x}, \quad \eta = y + 2\sqrt{x}, \quad x > 0. \quad (36)$$

Переписавши похідні за x, y через похідні за ξ, η та підставивши їх у рівняння (34), перепишемо останнє у I канонічній формі

$$u''_{\xi\eta} = 0, \quad \xi, \eta \in \mathbb{R}. \quad (37)$$

Загальний розв'язок рівняння (37) подається у вигляді

$$u = F(\xi) + G(\eta), \quad \xi, \eta \in \mathbb{R},$$

де $F, G \in C^2(\mathbb{R})$.

Якщо в попередню рівність підставити заміну (36), то запишемо загальний розв'язок вихідного рівняння

$$u(x, y) = F(y - 2\sqrt{x}) + G(y + 2\sqrt{x}), \quad x > 0, y \in \mathbb{R}. \quad (38)$$

Для визначення функцій F, G підставляємо розв'язок (38) в умови Коші (35). Запишемо

$$\begin{aligned} u|_{y=0} &= F(-2\sqrt{x}) + G(2\sqrt{x}) = 4x - 2\sqrt{x}, \\ u'_y|_{y=0} &= F'(-2\sqrt{x}) + G'(2\sqrt{x}) = 4\sqrt{x}, \quad 1 \leq x \leq 4. \end{aligned}$$

Для простоти подальших міркувань введемо позначення для

аргументів $2\sqrt{x} = z$, $2 \leq z \leq 4$ при $1 \leq x \leq 4$. В результаті, попередні рівності запишемо таким чином

$$F(-z) + G(z) = z^2 - z, \quad 2 \leq z \leq 4, \quad (39)$$

$$F'(-z) + G'(z) = 2z, \quad 2 \leq z \leq 4. \quad (40)$$

Інтегруємо (40)

$$-F(-z) + G(z) = z^2 + 2C, \quad 2 \leq z \leq 4, \quad (41)$$

C — довільна стала, після чого, визначаємо шукані функції F і G з рівностей (39) та (41)

$$F(-z) = -\frac{z}{2} - C, \quad 2 \leq z \leq 4, \quad G(z) = z^2 - \frac{z}{2} + C, \quad 2 \leq z \leq 4.$$

Робимо заміну аргумента функції F : $-z = t$, $-4 \leq t \leq -2$, і можемо записати остаточний вираз

$$F(t) = \frac{t}{2} - C, \quad -4 \leq t \leq -2.$$

Знайдені функції F, G підставляємо у розв'язок (38) і отримуємо розв'язок задачі Коші (34), (35). При цьому, слід врахувати обмеження, які накладені на аргументи цих функцій. В результаті, можемо записати

$$\begin{aligned} u(x, y) &= F(y - 2\sqrt{x}) + G(y + 2\sqrt{x}) = \\ &= \frac{y - 2\sqrt{x}}{2} - C + (y + 2\sqrt{x})^2 - \frac{y + 2\sqrt{x}}{2} + C = -2\sqrt{x} + (y + 2\sqrt{x})^2, \\ &-4 \leq y - 2\sqrt{x} \leq -2, \quad 2 \leq y + 2\sqrt{x} \leq 4. \end{aligned} \quad (42)$$

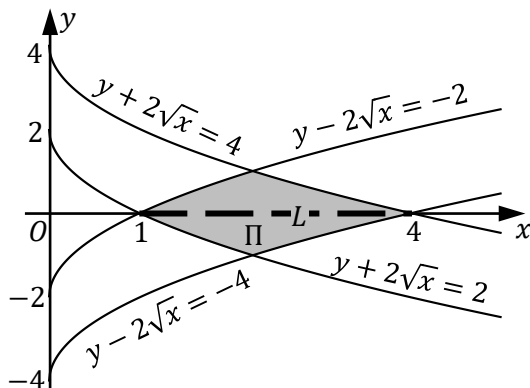


Рис. 3.18

Отриманий розв'язок (42) визначений у криволінійному чотирикутнику $\bar{\Pi} = \{(x, y): -4 \leq y - 2\sqrt{x} \leq -2, 2 \leq y + 2\sqrt{x} \leq 4\}$, сторони якого утворені характеристиками вихідного рівняння, що проходять через кінці відрізка L , на якому задані умови Коші (Рис. 3.18). Дана множина є максимальною множиною, на якій розв'язок задачі Коші (34), (35) існуватиме і буде єдиним. ■

Приклад 5. Розв'язати задачу Коші методом характеристик

$$u''_{xy} + xu'_x = 0, \quad x, y \in \mathbb{R} \quad (43)$$

$$u|_{y=x} = \varphi(x), \quad u'_y|_{y=x} = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (44)$$

Рівняння (43) є гіперболічним рівнянням в усій площині Oxy , яке вже записане в I канонічній формі. Для його розв'язання позначимо $u'_x = v$. Тоді рівняння перепишеться у вигляді

$$v'_y + xv = 0. \quad (45)$$

Оскільки в отриманому рівнянні (45) присутня похідна лише за змінною y , то його можна розглядати, як звичайне диференціальне рівняння відносно цієї змінної при кожному фіксованому значенні змінної x . Оскільки значення змінної x фіксується, то при розв'язанні (45) її можна розглядати, як сталу. Тоді при кожному фіксованому x (45) є лінійним, однорідним звичайним диференціальним рівнянням зі сталими коефіцієнтами. Для його розв'язання використовуємо корінь характеристичного полінома: $\lambda + x = 0 \Leftrightarrow \lambda = -x \in \mathbb{R}$. Оскільки корінь дійсний, то загальний розв'язок (45) запишеться у вигляді

$$v = Ce^{-xy}, \quad (46)$$

де $C = C(x) \in C^1(\mathbb{R})$.

Згадавши, що $u'_x = v$, інтегруємо (46) за змінною x для знаходження u . При відшуканні первісної використаємо інтеграл зі змінною верхньою межею

$$u(x, y) = \int_a^x C(t)e^{-ty} dt + F(y), \quad x, y \in \mathbb{R}, \quad (47)$$

де $F \in C^2(\mathbb{R})$, нижня межа інтегрування не повинна залежати від x . Тому в (47), фактично, $a = a(y)$, причому, вибрати її можна так, щоб

було зручно виконувати умови Коші (44). Оскільки умови Коші розглядаються на прямій $y = x$, то зручно вибрати $a = a(y) = y$. В результаті, загальний розв'язок рівняння (43) можна подати у вигляді

$$u(x, y) = \int_y^x C(t) e^{-ty} dt + F(y), \quad x, y \in \mathbb{R}. \quad (48)$$

Для визначення функцій C, F підставляємо отриманий загальний розв'язок (48) в умови Коші (44). Запишемо

$$u|_{y=x} = \int_x^x C(t) e^{-tx} dt + F(x) = F(x) = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (49)$$

$$\begin{aligned} u'_y|_{y=x} &= \left(-C(y) e^{-y^2} + \int_y^x C(t) (-t) e^{-ty} dt + F'(y) \right) \Big|_{y=x} = \\ &= -C(x) e^{-x^2} + \int_x^x C(t) (-t) e^{-tx} dt + F'(x) = \\ &= -C(x) e^{-x^2} + F'(x) = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (50)$$

Враховуючи диференціальні властивості функцій C та F , робимо висновки, що рівності (49), (50) можна виконати, лише за умов

$$\varphi \in C^2(\mathbb{R}), \quad \psi \in C^1(\mathbb{R}). \quad (51)$$

Умови (51) є необхідними та достатніми умова існування розв'язку вихідної задачі Коші.

Отримана рівність (49) відразу дозволяє визначити функцію F . Підставляючи вже знайдену F у рівність (50), знаходимо і функцію C

$$C(x) = e^{x^2} (\varphi'(x) - \psi(x)), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Після знаходження підставляємо C та F у загальний розв'язок (48) і можемо записати розв'язок задачі Коші (43), (44)

$$u(x, y) = \int_y^x (\varphi'(t) - \psi(t)) e^{t^2 - ty} dt + \varphi(y), \quad x, y \in \mathbb{R}$$

Оскільки ніяких обмежень на аргументи знайдених функцій C та F немає, то отриманий розв'язок задачі Коші буде визначеним в усій площині Oxy , при цьому, розв'язок буде єдиним. ■

Приклад 6. Розв'язати задачу Коші методом характеристик

$$x^2 u''_{xx} - y^2 u''_{yy} = 0, \quad x, y > 0, \quad (52)$$

$$u|_{y=1} = \varphi(x), \quad u'_y|_{y=1} = \psi(x), \quad x \geq 1. \quad (53)$$

Неповний дискримінант рівняння (52) $b^2 - ac = x^2 y^2 > 0$ при $x, y > 0$. Тому рівняння задачі зберігає гіперболічний тип у чверті площини $x, y > 0$.

Для визначення характеристик (52) записуємо характеристичне рівняння та шукаємо його загальні інтеграли

$$x^2(dy)^2 - y^2(dx)^2 = 0 \Leftrightarrow (xdy + ydx)(xdy - ydx) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xdy + ydx = 0, \\ \frac{xdy - ydx}{y^2} = 0, \end{cases} \quad x, y > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} d(xy) = 0, \\ d\left(\frac{x}{y}\right) = 0, \end{cases} \quad x, y > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy = C_1, \\ \frac{x}{y} = C_2, \end{cases} \quad x, y > 0, \quad C_{1,2} = \text{const.}$$

Отримали два набори дійсних характеристик вихідного рівняння (52), які дозволяють визначити заміну змінних

$$\rho = xy, \quad \tau = \frac{x}{y}, \quad x, y > 0, \quad (54)$$

за допомогою якої рівняння зводиться до I канонічної форми.

Переписавши похідні за змінними x, y через похідні за змінними ρ, τ , запишемо рівняння (52) у I канонічній формі

$$u''_{\rho\tau} - \frac{1}{2\rho} u'_\tau = 0, \quad \rho, \tau > 0. \quad (55)$$

Для розв'язання отриманого рівняння (55) позначимо $u'_\tau = v$, після чого воно перепишеться у вигляді

$$v'_\rho - \frac{1}{2\rho} v = 0, \quad \rho, \tau > 0. \quad (56)$$

При кожному фіксованому τ отримане рівняння (56) розглядається, як звичайне диференціальне рівняння відносно змінної ρ . Рівняння (56) є лінійним рівнянням першого порядку зі змінним коефіцієнтом. Використаємо метод відокремлення змінних. Зафіксуємо довільне τ і

перепишемо (56) в термінах звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dv}{d\rho} - \frac{1}{2\rho}v = 0 \Leftrightarrow \frac{dv}{d\rho} = \frac{v}{2\rho} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{dv}{v} = \frac{d\rho}{2\rho}, \\ v = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \ln|v| = \frac{1}{2}\ln\rho + \ln|C|, \\ v = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow v = C\sqrt{\rho}, \quad (57)$$

де $C = C(\tau) \in C^1((0, +\infty))$.

Згадавши, що $u'_\tau = v$, знаходимо u

$$u = \int v \, d\tau = \sqrt{\rho} \int \underbrace{C(\tau) d\tau}_{=F(\tau)} + G(\rho) = F(\tau)\sqrt{\rho} + G(\rho), \quad \rho, \tau > 0,$$

де $F, G \in C^2((0, +\infty))$.

В отриманий вираз підставляємо (54) і запишемо загальний розв'язок вихідного рівняння (52):

$$u = F\left(\frac{x}{y}\right)\sqrt{xy} + G(xy), \quad x, y > 0, \quad (58)$$

де $F, G \in C^2((0, +\infty))$.

Для визначення функцій F, G підставляємо знайдений загальний розв'язок (58) в умови Коші (53)

$$u|_{y=1} = F(x)\sqrt{x} + G(x) = \varphi(x), \quad x \geq 1, \quad (59)$$

$$\begin{aligned} u'_y|_{y=1} &= \left(-\frac{x}{y^2} F'\left(\frac{x}{y}\right)\sqrt{xy} + \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}} F\left(\frac{x}{y}\right) + xG'(xy) \right) \Big|_{y=1} = \\ &= -x^{\frac{3}{2}} F'(x) + \frac{\sqrt{x}}{2} F(x) + xG'(x) = \psi(x), \quad x \geq 1. \end{aligned} \quad (60)$$

Диференціюємо (59)

$$F'(x)\sqrt{x} + F(x)\frac{1}{2\sqrt{x}} + G'(x) = \varphi'(x), \quad x \geq 1,$$

з отриманої рівності та рівності (60) знаходимо

$$F'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \left(\varphi'(x) - \frac{1}{x} \psi(x) \right), \quad x \geq 1,$$

і після інтегрування визначаємо функцію F

$$F(x) = \int_1^x \frac{1}{2\sqrt{t}} \left(\varphi'(t) - \frac{1}{t} \psi(t) \right) dt + C_1, \quad x \geq 1, \quad (61)$$

C_1 — довільна стала.

Підставляючи отриману рівність (61) в (59), можемо знайти функцію G

$$\begin{aligned} G(x) &= \varphi(x) - F(x)\sqrt{x} = \\ &= \varphi(x) - \sqrt{x} \left(\int_1^x \frac{1}{2\sqrt{t}} \left(\varphi'(t) - \frac{1}{t} \psi(t) \right) dt + C_1 \right), \quad x \geq 1. \end{aligned} \quad (62)$$

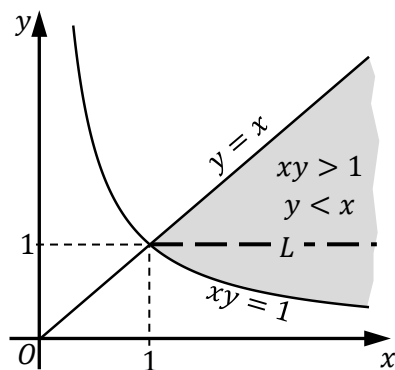


Рис. 3.19

Знайдені функції F, G , (61) і (62), підставляємо в загальний розв'язок (58) і отримаємо розв'язок задачі Коші (52), (53). Під час підстановки враховуємо, що функції F, G визначені на $[1, +\infty)$, і накладаємо відповідні обмеження на аргументи цих функцій в рівності (58): $xy \geq 1, \frac{x}{y} \geq 1 \Leftrightarrow xy \geq 1, x \geq y$ (Рис. 3.19). В результаті, запишемо остаточний розв'язок

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \sqrt{xy} \left(\int_1^{\frac{x}{y}} \frac{1}{2\sqrt{t}} \left(\varphi'(t) - \frac{1}{t} \psi(t) \right) dt + C_1 \right) + \\ &+ \varphi(xy) - \sqrt{xy} \left(\int_1^{xy} \frac{1}{2\sqrt{t}} \left(\varphi'(t) - \frac{1}{t} \psi(t) \right) dt + C_1 \right) = \\ &= \varphi(xy) + \sqrt{xy} \int_{xy}^{\frac{x}{y}} \frac{1}{2\sqrt{t}} \left(\varphi'(t) - \frac{1}{t} \psi(t) \right) dt, \quad xy \geq 1, x \geq y. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Приклад 7. Розв'язати задачу Коші методом характеристик

$$xu''_{xx} + yu''_{xy} = 4xy, \quad y > 0, \quad (63)$$

$$u|_{x=1} = 0, \quad u'_x|_{x=1} = 0, \quad y > 0. \quad (64)$$

Неповний дискримінант рівняння (63) $d = \frac{y^2}{4} > 0$, якщо $y \neq 0$, тобто рівняння (63) зберігає гіперболічний тип у півплощині $y > 0$.

Для зведення рівняння до I канонічної форми запишемо характеристичне рівняння та шукаємо його загальні інтеграли

$$\begin{aligned} x(dy)^2 - ydxdy &= dy(xdy - ydx) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left[\frac{xdy - ydx}{y^2} = 0, y > 0 \right] &\Leftrightarrow \left[y = C_1, \right. \\ &\left. d\left(\frac{x}{y}\right) = 0, y > 0 \right] \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} y &= C_1 = \text{const}, \\ \frac{x}{y} &= C_2 = \text{const}, \end{aligned} \right. &y > 0. \end{aligned}$$

Два загальних інтеграли характеристичного рівняння визначають два набори дійсних характеристик рівняння (63). Використовуючи ці характеристики, запишемо заміну змінних, яка зведе рівняння до I канонічної форми,

$$\rho = y, \quad \tau = \frac{x}{y}, \quad y > 0. \quad (65)$$

Якщо записати похідні за змінними x, y через похідні за ρ, τ , то можемо переписати вихідне рівняння (63) у вигляді

$$u''_{\rho\tau} - \frac{1}{y}u'_\tau = 4xy, \quad y > 0.$$

Остаточно позбуваємось змінних x, y , використовуючи заміну (65), і отримуємо I канонічну форму рівняння

$$u''_{\rho\tau} - \frac{1}{\rho}u'_\tau = 4\rho^2\tau, \quad \rho = y > 0. \quad (66)$$

Для побудови загального розв'язку отриманого рівняння (66) позначимо $u'_\tau = v$. Тоді перепишемо (66) таким чином

$$v'_\rho - \frac{1}{\rho}v = 4\rho^2\tau, \quad \rho > 0. \quad (67)$$

При кожному фіксованому τ рівняння (67) розглядається, як звичайне диференціальне рівняння відносно аргумента ρ . (67) є лінійним, неоднорідним рівнянням першого порядку. Для його розв'язання використаємо метод варіації довільної сталої Лагранжа. Спочатку розглянемо однорідне рівняння, яке запишемо в позначеннях звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dv}{d\rho} - \frac{1}{\rho}v = 0, \quad \rho > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{dv}{v} = \frac{d\rho}{\rho}, & \rho > 0 \\ v = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln|v| = \ln\rho + \ln|C|, & \rho > 0 \\ v = 0, \end{cases} \Leftrightarrow v = C \cdot \rho, \quad \rho > 0. \quad (68)$$

Відповідно до методу Лагранжа вважаємо, що $C = C(\rho, \tau)$. Підставляємо (68) у неоднорідне рівняння (67) і визначаємо невідомий коефіцієнт C

$$v'_\rho - \frac{1}{\rho}v = C'_\rho \cdot \rho + C - \frac{1}{\rho}C\rho = C'_\rho \cdot \rho = 4\rho^2\tau, \quad \rho > 0 \Leftrightarrow C'_\rho = 4\rho\tau, \quad \rho > 0 \Leftrightarrow C(\rho, \tau) = 2\rho^2\tau + h(\tau), \quad \rho > 0, \quad h \in C^1.$$

Знайдений коефіцієнт C підставляємо в (68) і можемо записати загальний розв'язок (67)

$$v = 2\rho^3\tau + \rho\varphi(\tau), \quad \rho > 0.$$

Згадавши, що $u'_\tau = v$, знаходимо загальний розв'язок (66)

$$u = \int v \, d\tau = \int (2\rho^3\tau + \rho h(\tau)) \, d\tau = \rho^3\tau^2 + \rho \underbrace{\int h(\tau) d\tau}_{=F(\tau)} + G(\rho) = \rho^3\tau^2 + \rho F(\tau) + G(\rho), \quad \rho > 0,$$

де F, G — двічі неперервно-диференційовані функції.

Підставивши у попередню рівність заміну змінних (65), повертаємось до вихідних змінних і можемо записати загальний розв'язок рівняння (63)

$$u(x, y) = x^2y + yF\left(\frac{x}{y}\right) + G(y), \quad y > 0. \quad (69)$$

Якщо проаналізувати аргументи функцій F, G в рівності (69), то можемо уточнити області визначення цих функцій. В результаті, отримаємо $F \in C^2(\mathbb{R}), G \in C^2((0, +\infty))$.

Для визначення функцій F, G підставляємо розв'язок (69) в умови Коші (64)

$$u|_{x=1} = y + yF\left(\frac{1}{y}\right) + G(y) = 0, \quad y > 0; \quad (70)$$

$$u'_x|_{x=1} = \left(2xy + F'\left(\frac{x}{y}\right) \right) \Big|_{x=1} = 2y + F'\left(\frac{1}{y}\right) = 0, \quad y > 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow F'\left(\frac{1}{y}\right) = -2y, \quad y > 0.$$

В останній з отриманих рівностей робимо заміну аргумента $\frac{1}{y} = z, z > 0$, після чого, матимемо

$$F'(z) = -\frac{2}{z}, \quad z > 0.$$

Інтегруючи, знаходимо функцію F

$$F(z) = -2 \ln z + C_1, \quad z > 0,$$

C_1 — довільна стала.

Знайдену F підставляємо в рівність (70), після чого, отримуємо функцію G

$$G(y) = -y - yF\left(\frac{1}{y}\right) = -y - y\left(-2 \ln \frac{1}{y} + C_1\right) = \\ = -y(1 + 2 \ln y + C_1), \quad y > 0.$$

Отримані функції F, G підставляємо в загальний розв'язок (69) і можемо записати розв'язок задачі Коші (63), (64). В ході підстановки слід врахувати, що знайдена функція F визначена не на всій множини $\mathbb{R}$, а лише на $(0, +\infty)$. Тому на змінні x, y , що входять до (69), отримуємо обмеження: $\frac{x}{y} > 0, y > 0 \Leftrightarrow x, y > 0$. В результаті, маємо остаточний розв'язок задачі Коші

$$u(x, y) = x^2 y + y\left(-2 \ln \frac{x}{y} + C_1\right) - y(1 + 2 \ln y + C_1) = \\ = x^2 y - y\left(2 \ln \frac{x}{y} + 1 + 2 \ln y\right) = y(x^2 - 2 \ln x - 1), \quad x, y > 0. \quad \blacksquare$$

Завдання для самостійної роботи

Розв'язати задачі Коші методом характеристик та встановити максимальні множини існування та єдиності розв'язків.

1. $u''_{xx} - 2u''_{xy} = 0, \quad x, y \in \mathbb{R},$

$$u|_{y=-x} = 4x - x^2, \quad u'_y|_{y=-x} = 2x - \cos x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

2. $u''_{xy} + 3u''_{yy} = 0, \quad x, y \in \mathbb{R},$
 $u|_{x=y} = 2 \sin y, \quad u'_y|_{x=y} = 4y + 6y^2, \quad -1 \leq y \leq 1.$
3. $2u''_{xx} + u''_{xy} = \sin(4y - x), \quad x, y \in \mathbb{R},$
 $u|_{y=x} = \frac{1}{2} \sin(3x), \quad u'_y|_{y=x} = \cos(3x), \quad x \leq 0.$
4. $u''_{xx} - 2u''_{xy} - 8u''_{yy} = 36 \cos(2x + 2y), \quad x, y \in \mathbb{R},$
 $u|_{y=-2x} = 0, \quad u'_y|_{y=-2x} = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$
5. $u''_{yy} - u''_{xy} + u'_y = 0, \quad x, y \in \mathbb{R},$
 $u|_{y=2x} = 0, \quad u'_y|_{y=2x} = 6xe^x, \quad x \geq 0.$
6. $u''_{xx} + 2u''_{xy} - 3u''_{yy} = 0, \quad x, y \in \mathbb{R};$
 $u|_{y=0} = 3x^2, \quad u'_y|_{y=0} = 0, \quad -1 \leq x \leq 0.$
7. $u''_{xx} - u''_{yy} - 2(u'_x + u'_y) = 0, \quad x, y \in \mathbb{R};$
 $u|_{x=0} = -y, \quad u'_x|_{x=0} = y - 1, \quad 0 \leq y \leq 2.$
8. $2u''_{xy} + u''_{yy} - 4(2u'_x + u'_y) = 0, \quad x, y \in \mathbb{R},$
 $u|_{x=y} = e^{2y}, \quad u'_x|_{x=y} = 4, \quad -1 \leq y \leq 1.$
9. $u''_{xx} + 4u''_{xy} + 3u''_{yy} + 4(u'_x + 3u'_y) = 0, \quad x, y \in \mathbb{R},$
 $u|_{y=2x} = -\frac{2}{3}e^{-3x} + 1, \quad u'_y|_{y=2x} = 4xe^{-2x}, \quad x \in \mathbb{R}.$
10. $u''_{xx} + 4u''_{xy} - 5u''_{yy} + u'_x - u'_y = 0, \quad x, y \in \mathbb{R};$
 $u|_{y=0} = -e^{2x}, \quad u'_y|_{y=0} = 2, \quad x \leq 0.$
11. $9u''_{xx} - u''_{yy} - 3(u'_y - 3u'_x) = 0, \quad x, y \in \mathbb{R}$
 $u|_{y=0} = 0, \quad u'_y|_{y=0} = 12xe^{-\frac{x}{2}}, \quad -1 \leq x \leq 1.$
12. $u''_{xx} - 4u''_{yy} + 8(u'_x + 2u'_y) = 32(y + 2x), \quad x, y \in \mathbb{R},$

$$u|_{y=0} = 0, \quad u'_y|_{y=0} = 0, \quad x \geq 0.$$

13. $2u''_{xy} + u''_{yy} - 4(2u'_x + u'_y) = 4e^{2x-2y}, \quad x, y \in \mathbb{R},$

$$u|_{x=y} = 0, \quad u'_x|_{x=y} = 0, \quad y \leq 0.$$

14. $u''_{xy} - 3u''_{yy} + 3(u'_x - 3u'_y) = e^{-2x-5y}, \quad x, y \in \mathbb{R},$

$$u|_{y=x} = 0, \quad u'_x|_{y=x} = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

15. $u''_{xx} - 9u''_{yy} + 3(u'_x - 3u'_y) = 36 \cos(y - 3x), \quad x, y \in \mathbb{R},$

$$u|_{y=x} = 0, \quad u'_y|_{y=x} = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

16. $2u''_{xx} - u''_{xy} + 3(u'_y - 2u'_x) = ye^{-2(x+2y)}, \quad x, y \in \mathbb{R},$

$$u|_{y=-x} = 0, \quad u'_y|_{y=-x} = 0, \quad x \geq 0.$$

17. $2u''_{xx} + 3u''_{xy} - 6u'_x = 9e^{-2y-3x}, \quad x, y \in \mathbb{R},$

$$u|_{y=2x} = 0, \quad u'_y|_{y=2x} = 0, \quad -2 \leq x \leq 0.$$

18. $3u''_{xy} - u''_{yy} - u'_y = 18(x + 3y), \quad x, y \in \mathbb{R},$

$$u|_{x=-y} = 0, \quad u'_x|_{x=-y} = 0, \quad 0 \leq y \leq 1.$$

19. $(x + y)u''_{xy} - u'_x = 0, \quad x + y > 0,$

$$u|_{y=x} = \sin x - 4x^2, \quad u'_y|_{y=x} = \cos x, \quad x \geq 1.$$

20. $xu''_{xy} - u'_y = 0, \quad x > 0,$

$$u|_{y=x} = 0, \quad u|_{y=x} = x^2 e^x, \quad 1 \leq x \leq 3.$$

21. $xu''_{xy} - yu''_{yy} = 0, \quad x > 0,$

$$u|_{x=y} = 0, \quad u'_y|_{x=y} = \cos y^2, \quad 1 \leq y \leq 2.$$

22. $x^2u''_{xx} - y^2u''_{yy} - 2yu'_y = 0, \quad x, y > 0,$

$$u|_{x=1} = 0, \quad u'_x|_{x=1} = \psi(y), \quad y \geq 1.$$

3.3. Задача Гурса

Теоретичні відомості

Ще однією задачею, яка розглядається для гіперболічних рівнянь з двома незалежними змінними, і розв'язок якої можна отримати методом характеристик, є задача Гурса.

Розглядаємо рівняння

$$au''_{xx} + 2bu''_{xy} + cu''_{yy} + pu'_x + qu'_y + ru = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \quad (71)$$

яке зберігає гіперболічний тип в області Ω ($d = b^2 - ac > 0$ в Ω). Коефіцієнти рівняння (71) можуть бути як сталими, так і функціями від x, y . В останньому випадку коефіцієнти мають належати до класу $C^2(\Omega)$.

Оскільки рівняння (71) має гіперболічний тип в області Ω , то в цій області воно має два набори дійсних характеристик, які покривають всю область. Через кожну точку області Ω проходить рівно по одній характеристиці з кожного сімейства.

Для постановки задачі Гурса зафіксуємо точку $P \in \Omega$. Проведемо че-

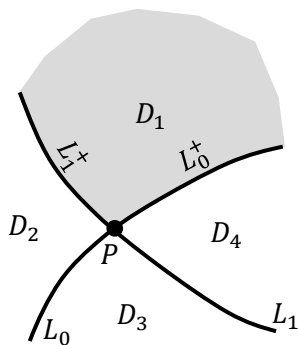


Рис. 3.20

рез цю точку характеристики L_0 і L_1 з обох сімейств (Рис. 3.20). Ці характеристики розбивають область гіперболічності Ω на чотири підобласті: D_1, D_2, D_3, D_4 . Виберемо одну з них, наприклад, D_1 . Межа області D_1 включає дуги L_0^+ та L_1^+ характеристик L_0 і L_1 відповідно, які виходять із точки P . Тоді задача Гурса полягає у відшуванні розв'язку рівняння (71) в області D_1 , який на дугах L_0^+ та L_1^+ характеристик

L_0 і L_1 задовольняє умовам Гурса

$$\begin{aligned} u|_{L_0^+} &= \varphi_0(x, y), \quad (x, y) \in L_0^+, \\ u|_{L_1^+} &= \varphi_1(x, y), \quad (x, y) \in L_1^+, \end{aligned} \quad (72)$$

де $\varphi_{0,1}$ — задані функції. При цьому, розв'язок задачі Гурса $u \in C^2(D_1) \cap C(D_1 \cup L_0^+ \cup L_1^+)$.

Оскільки умови Гурса (72) задані на характеристиках, то задачу Гурса ще називають *задачею з даними на характеристиках*.

Мають місце теореми про існування та єдиність розв'язку задачі Гурса.

Теорема (про єдиність розв'язку задачі Гурса)

Задача Гурса (71), (72) не може мати більше одного розв'язку.

Теорема (про існування розв'язку задачі Гурса)

Нехай $f \in C^1(\bar{D}_1)$, $\varphi_0 \in C^2(L_0^+)$, $\varphi_1 \in C^2(L_1^+)$ і $\varphi_0(P) = \varphi_1(P)$. Тоді розв'язок задачі Гурса (71), (72) існує.

Умова $\varphi_0(P) = \varphi_1(P)$ означає, що граничні значення шуканої функції u в точці перетину характеристик P (Рис. 3.20), якщо рухатись вздовж L_0^+ та L_1^+ , співпадатимуть. Ця умова називається *умовою узгодження даних*, заданих на характеристиках.

Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Розв'язати задачу Гурса

$$u''_{xx} - 4u''_{xy} + 3u''_{yy} = 0, \quad y + x > 0, \quad y + 3x > 0, \quad (73)$$

$$u|_{y+x=0} = \varphi_0(x), \quad x \geq 0, \quad u|_{y+3x=0} = \varphi_1(y), \quad y \geq 0. \quad (74)$$

Записавши неповний дискримінант рівняння $d = b^2 - ac = 1 > 0$, можемо впевнитись, що рівняння (73) має гіперболічний тип, який зберігається в усій площині Oxy .

Для розв'язання задачі Гурса використовуємо *метод характеристик*.

Для відшукування характеристик вихідного рівняння (73) записуємо характеристичне рівняння та знаходимо його загальні інтеграли

$$\begin{aligned} (dy)^2 + 4dxdy + 3(dx)^2 = 0 &\Leftrightarrow (dy + 2dx)^2 - (dx)^2 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow dy + 2dx = \pm dx &\Leftrightarrow \begin{cases} dy + 3dx = 0, \\ dy + dx = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y + 3x = C_1 = \text{const}, \\ y + x = C_2 = \text{const}. \end{cases} \end{aligned}$$

Характеристичне рівняння має два загальних інтеграли, які визначають два набори дійсних характеристик гіперболічного рівняння (73). Якщо вибрати $C_1 = C_2 = 0$, то отримаємо дві характеристики $y + 3x = 0$ та $y + x = 0$, які перетинаються в точці O (Рис. 3.21), і на яких задані умови Гурса (74).

Заміна змінних

$$\xi = y + 3x, \quad \eta = y + x, \quad (75)$$

записана за допомогою знайдених характеристик, зводить рівняння (73) до I канонічної форми

$$u''_{\xi\eta} = 0, \quad \xi > 0, \eta > 0. \quad (76)$$

Послідовно інтегруючи рівняння (76) за ξ та η , знаходимо його загальний розв'язок

$$u = F(\xi) + G(\eta), \quad \xi, \eta \geq 0,$$

де $F, G \in C^2(0, +\infty) \cap C[0, +\infty)$.

Скориставшись заміною (75), повертаємось до вихідних змінних x, y і можемо записати загальний розв'язок рівняння (73)

$$u(x, y) = F(y + 3x) + G(y + x), \quad y + 3x \geq 0, y + x \geq 0. \quad (77)$$

Функції F, G визначаємо з умов Гурса (74)

$$\begin{aligned} u|_{y+x=0} &= u|_{y=-x} = F(2x) + G(0) = \varphi_0(x), \quad x \geq 0, \\ u|_{y+3x=0} &= u|_{x=-\frac{y}{3}} = F(0) + G\left(\frac{2y}{3}\right) = \varphi_1(y), \quad y \geq 0. \end{aligned} \quad (78)$$

Оскільки $F, G \in C^2(0, +\infty) \cap C[0, +\infty)$, то рівностей (78) випливає, що для виконання умов Гурса (74) слід вимагати, щоб $\varphi_{0,1} \in C^2(0, +\infty) \cap C[0, +\infty)$. Якщо задані функції $\varphi_{0,1}$ не належать до вказаного класу, то виконати умови Гурса (74) неможливо, і вихідна задача не має розв'язку.

Далі вважаємо, що умови гладкості для $\varphi_{0,1}$ виконані. Тоді з (78) знаходимо

$$F(2x) = \varphi_0(x) - G(0), \quad x \geq 0, \quad G\left(\frac{2y}{3}\right) = \varphi_1(y) - F(0), \quad y \geq 0.$$

Зробивши заміни аргументів функцій F, G : $2x = z \geq 0$, $\frac{2y}{3} = t \geq 0$, отримуємо остаточні вирази

$$F(z) = \varphi_0\left(\frac{z}{2}\right) - G(0), \quad z \geq 0, \quad G(t) = \varphi_1\left(\frac{3t}{2}\right) - F(0), \quad t \geq 0. \quad (79)$$

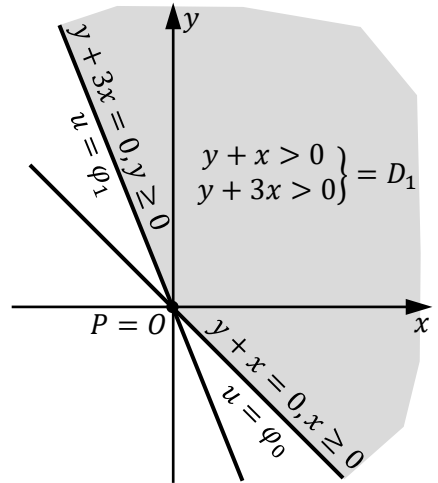


Рис. 3.21

Отримані рівності (79) не визначають функції F, G повністю, оскільки величини $F(0)$ та $G(0)$ залишаються невизначеними. Між ними можна тільки встановити зв'язок. Якщо в (79) покласти $z = 0$ та $t = 0$, то отримаємо дві рівності

$$F(0) + G(0) = \varphi_0(0), \quad F(0) - G(0) = \varphi_1(0), \quad (80)$$

з яких, зокрема, випливає ще одна умова існування розв'язку задачі Гурса (73), (74)

$$\varphi_0(0) = \varphi_1(0). \quad (81)$$

Умова (81) — це умова узгодження даних $\varphi_{0,1}$, заданих на характеристиках, в точці їх перетину O (Рис. 3.21).

Вирази (79) для функцій F, G підставляємо в загальний розв'язок (77). Після чого, запишемо

$$u(x, y) = \varphi_0\left(\frac{y+3x}{2}\right) + \varphi_1\left(\frac{3(y+x)}{2}\right) - (F(0) + G(0)), \\ y + 3x \geq 0, y + x \geq 0.$$

В отриману рівність підставляємо одну з рівностей (80) з урахуванням умови (81) і матимемо остаточний розв'язок задачі Гурса (73), (74)

$$u(x, y) = \varphi_0\left(\frac{y+3x}{2}\right) + \varphi_1\left(\frac{3(y+x)}{2}\right) - \varphi_0(0), \\ y + 3x \geq 0, y + x \geq 0. \quad \blacksquare$$

Приклад 2. Розв'язати задачу Гурса

$$3u''_{xy} + u''_{yy} = 9e^{2x-3y}, \quad x > 0, \quad x - 3y < 0, \quad (82)$$

$$u|_{x=0} = \cos y, \quad u|_{x-3y=0} = 1 + y^2, \quad y \geq 0. \quad (83)$$

Рівняння (82) має гіперболічний тип, який зберігається в усій площині Oxy : $d = b^2 - ac = \frac{9}{4} > 0$.

Відповідно до методу характеристик зводимо рівняння (82) до канонічної форми. Для відшукування характеристик записуємо характеристичне рівняння та знаходимо його загальні інтеграли

$$(dx)^2 - 3dxdy = 0 \Leftrightarrow dx(dx - 3dy) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} dx = 0, \\ dx - 3dy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = C_1, \\ x - 3y = C_2, \end{cases} \quad C_{1,2} = \text{const.}$$

Отримані два загальних інтеграли визначають два набори дійсних характеристик рівняння (82). Якщо вибрати $C_1 = C_2 = 0$, то матимемо характеристики $x = 0$ і $x - 3y = 0$, які належать до різних наборів, перетинаються в точці O (Рис. 3.22), і на яких задані умови Гурса (83).

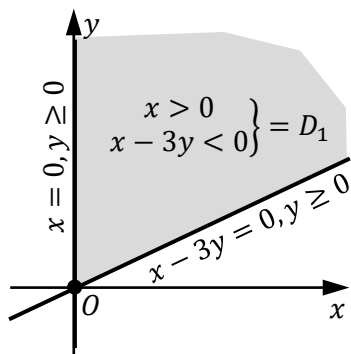


Рис. 3.22

Заміна змінних

$$\xi = x, \quad \eta = x - 3y, \quad (84)$$

яка визначається за допомогою знайдених характеристик, дозволяє звести рівняння (82) до його I канонічної форми

$$u''_{\xi\eta} = -e^{\xi+\eta}, \quad \xi > 0, \eta < 0. \quad (85)$$

Послідовно інтегруючи рівняння (85) за обома змінними, знаходимо його загальний розв'язок

$$u = -e^{\xi+\eta} + F(\xi) + G(\eta), \quad \xi \geq 0, \eta \leq 0,$$

де $F \in C^2(0, +\infty) \cap C[0, +\infty)$, $G \in C^2(-\infty, 0) \cap C(-\infty, 0]$.

Якщо в отриману рівність підставити заміну (84), то запишемо загальний розв'язок вихідного рівняння (82)

$$u(x, y) = -e^{2x-3y} + F(x) + G(x-3y), \quad x \geq 0, x-3y \leq 0. \quad (86)$$

Для визначення функцій F, G розв'язок (86) підставляємо в умови Гурса (83)

$$\begin{aligned} u|_{x=0} &= -e^{-3y} + F(0) + G(-3y) = \cos y, \\ u|_{x-3y=0} &= u|_{x=3y} = -e^{3y} + F(3y) + G(0) = 1 + y^2, \quad y \geq 0, \end{aligned}$$

звідки знаходимо

$$\begin{aligned} G(-3y) &= \cos y + e^{-3y} - F(0), \\ F(3y) &= 1 + y^2 + e^{3y} - G(0), \quad y \geq 0. \end{aligned}$$

Після заміни аргументів $(-3y) = z \leq 0$, $3y = t \geq 0$, можемо записати вирази для шуканих функцій F, G

$$\begin{aligned} G(z) &= \cos \frac{z}{3} + e^z - F(0), \quad z \leq 0, \\ F(t) &= 1 + \frac{t^2}{9} + e^t - G(0), \quad t \geq 0. \end{aligned} \quad (87)$$

Величини $F(0)$ та $G(0)$, які входять до (87), неможна визначити

повністю, але між ними можна встановити зв'язок. Якщо покласти в (87) $z = 0$ та $t = 0$, то з обох рівностей можемо запитати одне і теж співвідношення

$$F(0) + G(0) = 2, \quad (88)$$

що, зокрема, означає, що в точці перетину O характеристик $x = 0$ та $x - 3y = 0$ (Рис. 3.22) виконується умова узгодження.

Отримані вирази (87) для функцій F, G підставляємо в розв'язок (86), врахувавши (88). В результаті, отримуємо розв'язок задачі Гурса

$$\begin{aligned} u(x, y) &= -e^{2x-3y} + 1 + \frac{x^2}{9} + e^x - G(0) + \\ &\quad + \cos \frac{x-3y}{3} + e^{x-3y} - F(0) = \\ &= -e^{2x-3y} - 1 + \frac{x^2}{9} + e^x + \cos \frac{x-3y}{3} + e^{x-3y}, \\ &\quad x \geq 0, \quad x - 3y \leq 0. \end{aligned}$$



Приклад 3. Розв'язати задачу Гурса

$$u''_{xx} - u''_{xy} + u'_x - u'_y = 0, \quad y > 0, \quad y + x > 0, \quad (89)$$

$$u|_{y=0} = x - 1, \quad x \geq 0, \quad u|_{y+x=0} = 2 \sin y - 1, \quad y \geq 0. \quad (90)$$

Неповний дискримінант рівняння (89) $d = \frac{1}{4} > 0$. Тому рівняння має гіперболічний тип у всій площині Oxy .

Для розв'язання задачі Гурса (89), (90) використовуємо метод характеристик.

Для зведення гіперболічного рівняння (89) до I канонічної форми визначаємо його характеристики. Для цього записуємо характеристичне рівняння та шукаємо його загальні інтеграли

$$\begin{aligned} (dy)^2 + dx dy &= 0 \Leftrightarrow dy(dy + dx) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} dy = 0, \\ dy + dx = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y = C_1 = \text{const}, \\ y + x = C_2 = \text{const}. \end{cases} \end{aligned}$$

Два отримані загальні інтеграли характеристичного рівняння визначають два набори дійсних характеристик рівняння (89). При $C_1 = C_2 = 0$ маємо характеристики $x = 0$ та $y + x = 0$, які перетинаються в точці O , і на яких задаються умови Гурса (90) (Рис. 3.23).

Заміна змінних

$$\xi = y, \quad \eta = y + x, \quad (91)$$

вибрана із використанням знайдених характеристик, зводить вихідне рівняння (89) до I канонічної форми

$$u''_{\xi\eta} + u'_\xi = 0, \quad \xi > 0, \eta > 0. \quad (92)$$

Якщо позначити $u'_\xi = v$, то рівняння (92) можна переписати таким

чином

$$v'_\eta + v = 0. \quad (93)$$

Отримане рівняння (93) можна розглядати, як звичайне диференціальне рівняння відносно змінної η , яке залежить від ξ , як від параметра. (93) є лінійним, однорідним рівнянням зі сталими коефіцієнтами. Для побудови його загального розв'язку

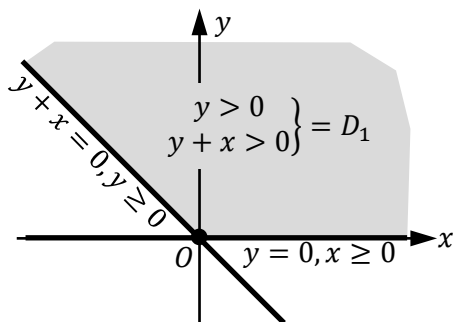


Рис. 3.23

знаходимо корінь характеристичного полінома: $\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1$. Оскільки корінь дійсний, то загальний розв'язок рівняння (93) подається у вигляді

$$v = C e^{-\eta}, \quad C = C(\xi) \in C^1.$$

Згадавши, що $u'_\xi = v$, знаходимо

$$u = \int v d\xi = e^{-\eta} \int C(\xi) d\xi + G(\eta) = e^{-\eta} F(\xi) + G(\eta),$$

$$\xi \geq 0, \eta \geq 0,$$

де $F, G \in C^2(0, +\infty) \cap C[0, +\infty)$.

За допомогою (91) повертаємось до вихідних змінних x, y і отримаємо загальний розв'язок рівняння (89) задачі

$$u(x, y) = e^{-y-x} F(y) + G(y + x), \quad y \geq 0, y + x \geq 0. \quad (94)$$

Функції F, G визначаємо з умов Гурса (90). Запишемо

$$u|_{y=0} = e^{-x} F(0) + G(x) = x - 1, \quad x \geq 0,$$

$$u|_{y+x=0} = u|_{x=-y} = F(y) + G(0) = 2 \sin y - 1, \quad y \geq 0.$$

З попередніх рівностей знаходимо

$$\begin{aligned} G(x) &= x - 1 - e^{-x}F(0), \quad x \geq 0, \\ F(y) &= 2 \sin y - 1 - G(0), \quad y \geq 0. \end{aligned} \quad (95)$$

Для того, щоб встановити зв'язок між величинами $F(0)$ та $G(0)$, що входять до (95), покладемо в цих рівностях $x = 0, y = 0$. В результаті, з обох отримаємо однакове співвідношення

$$F(0) + G(0) = -1, \quad (96)$$

що, зокрема, означає, що в точці O перетину характеристик $x = 0$ та $y + x = 0$ (Рис. 3.23) виконується умова узгодження.

Вирази (95) для функцій F, G підставляємо в загальний розв'язок (94) і з урахуванням (96) отримаємо розв'язок задачі Гурса (89), (90)

$$\begin{aligned} u(x, y) &= e^{-y-x} (2 \sin y - 1 - G(0)) + y + x - 1 - e^{-y-x} F(0) = \\ &= e^{-y-x} (2 \sin y - 1) + y + x - 1 - e^{-y-x} \underbrace{(F(0) + G(0))}_{-1} = \\ &= 2e^{-y-x} \sin y + y + x - 1, \quad y \geq 0, y + x \geq 0. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Приклад 4. Розв'язати задачу Гурса

$$u''_{xy} + 3u''_{yy} + 2(u'_x + 3u'_y) = e^{3x-y} \cos x, \quad x > 0, y - 3x > 0, \quad (97)$$

$$u|_{x=0} = \varphi(y), \quad y \geq 0, \quad u|_{y-3x=0} = 0, \quad x \geq 0. \quad (98)$$

Неповний дискримінант рівняння (97) дорівнює $d = \frac{1}{4} > 0$. Тому рівняння має гіперболічний тип, який зберігається в усій площині Oxy .

Для визначення характеристик рівняння (97) записуємо характеристичне рівняння та шукаємо його загальні інтеграли

$$\begin{aligned} -dx dy + 3(dx)^2 &= 0 \Leftrightarrow -dx(dy - 3dx) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} dx = 0, \\ dy - 3dx = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = C_1 = \text{const}, \\ y - 3x = C_2 = \text{const}. \end{cases} \end{aligned}$$

Отримали два загальні інтеграли характеристичного рівняння, які визначають два набори дійсних характеристик вихідного рівняння. Якщо вибрати $C_1 = 0, C_2 = 0$, то отримаємо характеристики $x = 0$ та $y - 3x = 0$, на яких задані умови Гурса (98) (Рис. 3.24).

Використовуючи знайдені характеристики, записуємо заміну змінних

$$\xi = x, \eta = y - 3x, \quad (99)$$

яка зводить рівняння (97) до I канонічної форми

$$u''_{\xi\eta} + 2u'_\xi = e^{-\eta} \cos \xi, \quad \xi > 0, \eta > 0. \quad (100)$$

Якщо позначити $u'_\xi = v$, то рівняння (100) можна переписати у вигляді

$$v'_\eta + 2v = e^{-\eta} \cos \xi. \quad (101)$$

При кожному фіксованому ξ рівняння (101) розглядається, як звичайне диференціальне рівняння відносно змінної η , при цьому, ξ розглядається, як стала. (101) — це лінійне, неоднорідне рівняння зі сталими коефіцієнтами. Для його розв'язання використовуємо метод варіації довільної сталої Лагранжа. Характеристичний поліном $\lambda + 2$, який відповідає рівнянню (101), має один дійсний корінь $\lambda = -2$. Тому розв'язок подаємо у вигляді

$$v = C(\xi, \eta)e^{-2\eta},$$

де C шукаємо з рівняння. Підставляємо зображення для v в (101) і запишемо

$$\begin{aligned} v'_\eta + 2v &= C'_\eta e^{-2\eta} = e^{-\eta} \cos \xi \Leftrightarrow C'_\eta = e^\eta \cos \xi \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow C(\xi, \eta) = e^\eta \cos \xi + h(\xi), \quad h \in C^1. \end{aligned}$$

Тоді загальний розв'язок рівняння (101) матиме вигляд

$$v = e^{-\eta} \cos \xi + e^{-2\eta} h(\xi).$$

Згадавши, що $u'_\xi = v$, отримаємо загальний розв'язок рівняння (100)

$$\begin{aligned} u &= \int v d\xi = e^{-\eta} \sin \xi + e^{-2\eta} \underbrace{\int h(\xi) d\xi}_{F(\xi)} + G(\eta) = \\ &= e^{-\eta} \sin \xi + e^{-2\eta} F(\xi) + G(\eta), \quad \xi \geq 0, \eta \geq 0, \end{aligned}$$

де $F, G \in C^2(0, +\infty) \cap C[0, +\infty)$.

Якщо підставити в отриманий розв'язок зміну змінних (99), запишемо загальний розв'язок вихідного рівняння (97)

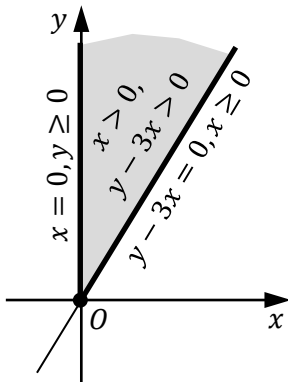


Рис. 3.24

$$u(x, y) = e^{-(y-3x)} \sin x + e^{-2(y-3x)} F(x) + G(y - 3x), \quad (102)$$

$$x \geq 0, y - 3x \geq 0.$$

Функції F, G визначаємо з умов Гурса (98). Після підстановки (102) в ці умови отримаємо рівності

$$u|_{x=0} = e^{-2y} F(0) + G(y) = \varphi(y), \quad y \geq 0, \quad (103)$$

$$u|_{y-3x=0} = \sin x + F(x) + G(0) = 0, \quad x \geq 0.$$

Якщо врахувати гладкість шуканої функції G , то першу рівність (103) можна виконати лише за умови, що $\varphi \in C^2(0, +\infty) \cap C[0, +\infty)$. За цієї умови з (103) знаходимо

$$G(y) = \varphi(y) - e^{-2y} F(0), \quad y \geq 0, \quad (104)$$

$$F(x) = -\sin x - G(0), \quad x \geq 0.$$

Для того, щоб встановити зв'язок між величинами $F(0)$ і $G(0)$, покладемо в (104) $x = 0$ та $y = 0$. В результаті, отримаємо

$$F(0) + G(0) = \varphi(0), \quad (105)$$

$$F(0) + G(0) = 0.$$

З рівностей (105) також впливає умова узгодження в т. O перетину характеристик $x = 0$ та $y - 3x = 0$ (Рис. 3.24), яка має вигляд

$$\varphi(0) = 0.$$

Отримані вирази (104) для функцій F, G підставляємо в розв'язок (102) і в урахуванням (105) та умов, накладених на задану функцію φ , запишемо розв'язок задачі Гурса (97), (98)

$$\begin{aligned} u(x, y) &= e^{-(y-3x)} \sin x - e^{-2(y-3x)} (\sin x + G(0)) + \\ &\quad + \varphi(y - 3x) - e^{-2(y-3x)} F(0) = \\ &= e^{-(y-3x)} \sin x (1 - e^{-(y-3x)}) + \varphi(y - 3x), \quad x \geq 0, y - 3x \geq 0. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Приклад 5. Розв'язати задачу Гурса

$$u''_{xy} - 2xu'_y = 0, \quad x > 1, y > 0, \quad (106)$$

$$u|_{x=1} = y + a, \quad y \geq 0, \quad u|_{y=0} = \frac{b}{x}, \quad x \geq 1. \quad (107)$$

Рівняння (106) є рівнянням гіперболічного типу, яке вже записане у канонічній формі. Характеристиками цього рівняння є два набори прямих: $x = C_1$, $y = C_2$, $C_{1,2} = \text{const}$. Якщо покласти $C_1 = 1$, $C_2 = 0$, то отримаємо характеристики $x = 1$, $y = 0$, на яких задаються умови Гурса (107) (Рис. 3.25).

Для розв'язання рівняння (106) позначимо $v = u'_y$. Після чого, воно переписється у вигляді

$$v'_x - 2xv = 0.$$

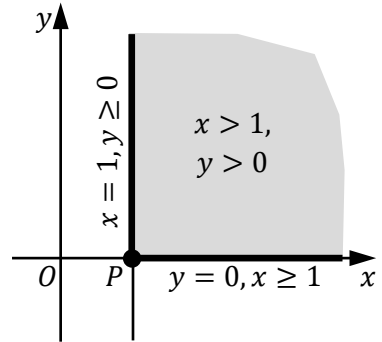


Рис. 3.25

Отримане рівняння розв'яжемо, як звичайне диференціальне рівняння відносно змінної x , в якому y розглядається лише як параметр. Записавши рівняння в термінах звичайних диференціальних рівнянь та відокремивши змінні, матимемо

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dx} - 2xv &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{dv}{v} = 2xdx, \\ v = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln|v| = x^2 + \ln|C|, \\ v = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow v = Ce^{x^2}, \quad C = C(y) \in C^1. \end{aligned}$$

Згадавши, що $v = u'_y$, знаходимо загальний розв'язок вихідного рівняння (106)

$$u(x, y) = \int v dy = e^{x^2} \int C(y) dy + G(x) = e^{x^2} F(y) + G(x), \quad (108)$$

$$x \geq 1, y \geq 0,$$

де $F \in C^2(0, +\infty) \cap C[0, +\infty)$, $G \in C^2(1, +\infty) \cap C[1, +\infty)$.

Функції F, G визначаємо з умов Гурса (107)

$$u|_{x=1} = eF(y) + G(1) = y + a, \quad y \geq 0,$$

$$u|_{y=0} = e^{x^2} F(0) + G(x) = \frac{b}{x}, \quad x \geq 1,$$

з яких отримаємо

$$F(y) = e^{-1}(y + a - G(1)), \quad y \geq 0,$$

$$G(x) = \frac{b}{x} - e^{x^2} F(0), \quad x \geq 1.$$

(109)

Для того, що встановити зв'язок між величинами $F(0)$ та $G(1)$, покладемо в (109) $x = 1, y = 0$. Запишемо дві рівності

$$\begin{aligned} eF(0) + G(1) &= a, \\ eF(0) + G(1) &= b, \end{aligned} \quad (110)$$

з яких, зокрема, випливає умова існування розв'язку задачі Гурса (106), (107): $a = b$. Дана умова є умовою узгодження умов Гурса в точці $P = (1, 0)$ перетину характеристик (Рис. 3.25).

Вирази (109) для функцій F, G з урахуванням (110) та умови $a = b$ підставляємо в (108) і отримуємо розв'язок вихідної задачі Гурса

$$\begin{aligned} u(x, y) &= e^{x^2-1}(y + a - G(1)) + \frac{b}{x} - e^{x^2}F(0) = \\ &= e^{x^2-1}(y + a - G(1) - eF(0)) + \frac{b}{x} = ye^{x^2-1} + \frac{b}{x}, \quad x \geq 1, y \geq 0. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Приклад 6. Розв'язати задачу Гурса

$$xu''_{xy} - yu''_{yy} = 0, \quad x > 1, \quad xy > -1, \quad (111)$$

$$u|_{x=1} = A \sin \frac{\pi y}{2} + B, \quad y \geq -1, \quad u|_{xy=-1} = e^{1-x}, \quad x \geq 1, \quad (112)$$

$A, B = \text{const.}$

Неповний дискримінант рівняння (111) дорівнює $d = \frac{x^2}{4}$. Тому рівняння зберігає гіперболічний тип при $x \neq 0$. Замикання області задачі $\bar{D}_1 = \{(x, y): x \geq 1, xy \geq -1\}$ лежить у півплощині $x > 0$, в якій рівняння зберігає гіперболічний тип (Рис. 3.26).

Визначаємо характеристики рівняння. Для цього знаходимо загальні інтеграли характеристичного рівняння

$$-xdxdy - y(dx)^2 = 0 \Leftrightarrow -dx \underbrace{(xdy + ydx)}_{d(xy)} = 0 \Leftrightarrow$$

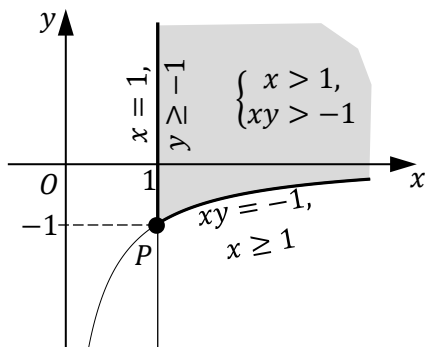


Рис. 3.26

$$\Leftrightarrow \begin{cases} dx = 0, \\ d(xy) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = C_1, \\ xy = C_2, \end{cases} \quad C_{1,2} = \text{const.}$$

Два загальних інтеграли визначають два наболі дійсних характеристик гіперболічного рівняння (111) в півплощині $x > 0$. Якщо покласти $C_1 = 1$, $C_2 = -1$, то отримаємо рівняння характеристик, на яких задано умови Гурса (112).

Використовуючи знайдені характеристики, запишемо заміну змінних

$$\xi = x, \quad \eta = xy, \quad (113)$$

яка зводить рівняння (111) до I канонічної форми

$$\xi u''_{\xi\eta} + u'_\eta = 0, \quad \xi > 1, \quad \eta > -1. \quad (114)$$

Для розв'язання рівняння (114) позначимо $u'_\eta = v$. Тоді отримаємо рівняння

$$\xi v'_\xi + v = 0,$$

яке розглядається, як звичайне диференціальне рівняння відносно змінної ξ , а змінна η входить, як параметр. Записавши останнє рівняння в термінах звичайних диференціальних рівнянь та відокремивши змінні, матимемо

$$\begin{aligned} \xi \frac{dv}{d\xi} + v = 0 &\Leftrightarrow \left[\frac{dv}{v} = -\frac{d\xi}{\xi}, \quad \Leftrightarrow \left[\begin{matrix} \ln|v| = -\ln \xi + \ln|C(\eta)|, \\ v = 0 \end{matrix} \right], \quad \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow v = \frac{C(\eta)}{\xi}, \quad \xi \geq 1, \quad \eta \geq -1, \quad C \in C^1. \end{aligned}$$

Згадавши, що $u'_\eta = v$, знаходимо загальний розв'язок рівняння (114)

$$u = \int v d\eta = \frac{1}{\xi} \int C(\eta) d\eta + G(\xi) = \frac{1}{\xi} F(\eta) + G(\xi), \quad \xi \geq 1, \quad \eta \geq -1,$$

де $F \in C^2(-1, +\infty) \cap C[-1, +\infty)$, $G \in C^2(1, +\infty) \cap C[1, +\infty)$.

Повертаючись до змінних x, y , використовуючи (113), запишемо загальний розв'язок вихідного рівняння (111)

$$u(x, y) = \frac{1}{x} F(xy) + G(x), \quad x \geq 1, \quad xy \geq -1. \quad (115)$$

Функції F, G визначаємо з умов Гурса (112). Запишемо

$$u|_{x=1} = F(y) + G(1) = A \sin \frac{\pi y}{2} + B, \quad y \geq -1,$$

$$u|_{xy=-1} = \frac{1}{x}F(-1) + G(x) = e^{1-x}, \quad x \geq 1.$$

З отриманих рівностей знаходимо

$$\begin{aligned} F(y) &= A \sin \frac{\pi y}{2} + B - G(1), \quad y \geq -1, \\ G(x) &= e^{1-x} - \frac{1}{x}F(-1), \quad x \geq 1. \end{aligned} \quad (116)$$

Знайдені вирази (116) для функцій F, G підставляємо в загальний розв'язок (115). Отримаємо

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \frac{1}{x} \left(A \sin \frac{\pi xy}{2} + B - G(1) - F(-1) \right) + e^{1-x}, \\ x &\geq 1, \quad xy \geq -1. \end{aligned} \quad (117)$$

Для повного визначення розв'язку задачі Гурса залишилось знайти величину $G(1) + F(-1)$. Для цього в рівностях (116) покладемо $x = 1, y = -1$. В результаті, запишемо

$$\begin{aligned} G(1) + F(-1) &= -A + B, \\ G(1) + F(-1) &= 1. \end{aligned} \quad (118)$$

З рівностей (118), зокрема, отримаємо, що для існування розв'язку задачі Гурса (111), (112) має виконуватись умова

$$-A + B = 1 \Leftrightarrow B = 1 + A, \quad (119)$$

яка є умовою узгодження даних, заданих на характеристиках $x = 1, xy = -1$ в точці їх перетину P (Рис. 3.26).

Підставляємо (118) з урахуванням умови (119) в рівність (117) і отримуємо остаточний розв'язок вихідної задачі

$$u(x, y) = \frac{A}{x} \left(\sin \frac{\pi xy}{2} + 1 \right) + e^{1-x}, \quad x \geq 1, \quad xy \geq -1. \quad \blacksquare$$

Завдання для самостійної роботи

Розв'язати задачі Гурса методом характеристик

1. $3u''_{xx} + 4u''_{xy} + u''_{yy} = 0, \quad x - y > 0, \quad x - 3y < 0,$

$$u|_{x-y=0} = e^x - 1, \quad u|_{x-3y=0} = \sin x, \quad x \geq 0.$$

2. $u''_{xx} - 4u''_{xy} = -32e^{2y}, \quad y - 2x < 0, \quad y + 2x > 0,$

$$u|_{y-2x=0} = 0, \quad u|_{y+2x=0} = \frac{x}{1+x}, \quad x \geq 0.$$

$$3. \quad u''_{xx} - u''_{xy} = y e^{x+y}, \quad y > 1, \quad x + y > 0,$$

$$u|_{y=1} = 2x + 1, \quad x \geq -1, \quad u|_{x+y=0} = \sin(\pi y) - 1, \quad y \geq 1.$$

$$4. \quad u''_{xy} + 2u''_{yy} = 2x e^{y-2x}, \quad x > 1, \quad y - 2x < 0,$$

$$u|_{x=1} = \cos \frac{\pi y}{2} + 1, \quad y \leq 2, \quad u|_{y-2x=0} = 2x^2, \quad x \geq 1.$$

$$5. \quad u''_{yy} - 2u''_{xy} = 4 \cos(3x + 2y), \quad x > 0, \quad x + 2y > 2,$$

$$u|_{x=0} = (y - 1)^2 + 1, \quad y \geq 1, \quad u|_{x+2y=2} = e^{2x}, \quad x \geq 0.$$

$$6. \quad u''_{xx} + 2u''_{xy} = 4 \sin(2y - 2x), \quad y > -1, \quad y - 2x < 0,$$

$$u|_{y=-1} = e^{2x+1} + 1, \quad u|_{y-2x=0} = 2 + \sin(\pi x), \quad x \geq \frac{1}{2}.$$

$$7. \quad u''_{yy} + 2u''_{xy} + 4(2u'_x + u'_y) = 0, \quad x > 0, \quad x - 2y < 0,$$

$$u|_{x=0} = 2y + 1, \quad u|_{x-2y=0} = 1 - \sin(2y), \quad y \geq 0.$$

$$8. \quad 4u''_{xx} - u''_{yy} + 2(2u'_x - u'_y) = 0, \quad 2y - x > 0, \quad 2y + x > 0,$$

$$u|_{2y-x=0} = \frac{1}{1+4y}, \quad u|_{2y+x=0} = \cos(4y), \quad y \geq 0.$$

$$9. \quad u''_{xx} - u''_{yy} - 4(u'_x + u'_y) = 0, \quad x + y > 1, \quad y - x > 0,$$

$$u|_{y+x=1} = 2y - 2, \quad u|_{y-x=0} = -e^{1-2y}, \quad y \geq \frac{1}{2}.$$

$$10. \quad u''_{xx} - u''_{xy} + u'_y - u'_x = 0, \quad y < 1, \quad y + x > 1,$$

$$u|_{y=1} = (x - 1)^2, \quad u|_{y+x=1} = 2 \sin x + 1, \quad x \geq 0.$$

$$11. \quad xu''_{xy} + yu''_{yy} = 0, \quad x > 1, \quad \frac{y}{x} > 1,$$

$$u|_{x=1} = 2 \cos y - 1, \quad y \geq 1, \quad u|_{\frac{y}{x}=1} = 2 - e^x, \quad x \geq 1.$$

12. $yu''_{xy} - xu''_{xx} = 0, \quad y > 1, xy > 1,$

$$u|_{y=1} = \sin x + 2, \quad x \geq 1, \quad u|_{xy=1} = 2 + y^2, \quad y \geq 1.$$

13. $x^2u''_{xx} - y^2u''_{yy} = 0, \quad \frac{x}{y} > 2, xy > 2,$

$$u|_{\frac{x}{y}=2} = 2y + y^2, \quad y \geq 1, \quad u|_{xy=2} = x^2 - 1, \quad x \geq 2.$$

14. $u''_{xx} - yu''_{xy} = 2y(x + \ln y), \quad y > 1, x + \ln y > 0,$

$$u|_{y=1} = 2e^x - 1, \quad x \geq 0, \quad u|_{x+\ln y=0} = y - \ln y, \quad y \geq 1.$$

15. $xu''_{xy} + u''_{yy} + u'_y = 0, \quad x > 1, y - \ln x > 0,$

$$u|_{x=1} = 2 \sin y + 1, \quad y \geq 0, \quad u|_{y+\ln x=0} = x^2, \quad x \geq 1.$$

Список літератури

1. Вакал Є.С. Класифікація рівнянь із частинними похідними з використанням системи MATLAB / Є.С. Вакал, Ю.Є. Вакал. — К.: Основа, 2017. — 104 с.
2. Вакал Є.С. та ін. Контрольні завдання з курсу “Рівняння математичної фізики”. — К.: Фітосоціоцентр, 2002. — 29 с.
3. Вірченко Н.О. Основні методи розв'язання задач математичної фізики. — К.: Інтрес: Воля, 2006. — 332 с.
4. Курпа Л.В. Рівняння математичної фізики : навч. посіб. / Л.В. Курпа, Г.Б. Лінник. — Харків : НТУ “ХПІ”, 2011. — 312 с. 184.
5. Маркович Б.М. Рівняння математичної фізики. — Навчальний посібник. — Львів: Вид. Львівської політехніки, 2010. — 384 с.
6. Перестюк М.О. Збірник задач з математичної фізики: навчальний посібник. — Вид. 2-ге виправлене і доповнене / М.О. Перестюк, В.В. Маринець, В.Л. Рого. — Кам'янець-Подільський: Аксіома, 2012. — 252 с.
7. Перестюк М.О. Теорія рівнянь математичної фізики: підручник / М.О. Перестюк, В.В. Маринець. — К.: ВПЦ "Київський університет", 2017.— 520 с.
8. Піх С.С. Методи математичної фізики: підручник / С.С. Піх, О.М. Попель, А.А. Ровенчак, І.І. Тальянський. — Львів, нац. ун-т ім. І. Франка, 2011. — 404 с.
9. Drábek P. Elements of Partial Differential Equations: 2nd Revised and Extended Edition / P. Drábek, G. Holubová. — Berlin/Boston: Walter de Gruyter GmbH, 2014. — 277 p.
10. Pinchover Y. An introduction to partial differential equations / Y. Pinchover, J. Rubinstein. — New York: Cambridge University Press, 2005. — 371 p.

ЗМІСТ

Передмова.....	3
Тема 1. Фізичні процеси, які приводять до задач математичної фізики.....	5
1.1. Фізичні процеси, які приводять до задач для хвильового рівняння .5	
1.1.1. Задачі для одновимірного хвильового рівняння.....	5
1.1.2. Багатовимірні задачі для хвильового рівняння	29
1.2. Фізичні процеси, які приводять до задач для рівняння теплопровідності	44
1.2.1. Загальні припущення і закони.....	44
1.2.2. Задачі для одновимірного рівняння теплопровідності.....	46
1.2.3. Багатовимірні задачі для рівняння теплопровідності	65
1.3. Стаціонарні фізичні процеси.....	76
Тема 2. Класифікація лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними другого порядку.....	83
2.1 Класифікація та зведення до канонічної форми рівнянь зі сталими коефіцієнтами	83
2.2. Класифікація та зведення до канонічної форми рівнянь, що мають дві незалежні змінні	95
Тема 3. Задача Коші для рівнянь гіперболічного типу.....	117
3.1. Класична задача Коші для одновимірного хвильового рівняння..	117
3.1.1. Задача Коші для одновимірного, однорідного хвильового рівняння. Розв'язок д'Аламбера. Формула д'Аламбера	117
3.1.2. Задача Коші для неоднорідного, одновимірного хвильового рівняння	135
3.2. Загальна задача Коші для гіперболічних рівнянь з двома незалежними змінними	148
3.3. Задача Гурса	170
Список літератури.....	186

Навчальне видання

Андрій ЛОВЕЙКІН
Євген ВАКАЛ

РІВНЯННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ: ПРИКЛАДИ І ЗАДАЧІ

*Навчальний посібник
для студентів механіко-математичного факультету*

Авторська редакція
Загальний обсяг – 6,15 авт. аркушів