

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний університет кораблебудування
імені адмірала Макарова

**А. П. ГУРОВ, С. І. ОЛЬШЕВСЬКИЙ,
О. О. ЧЕРНО, Л. І. БУГРІМ**

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК
з дисципліни
"Теорія автоматичного керування"
У двох частинах
Частина I

Рекомендовано Вченою радою НУК

Електронне видання
комбінованого використання на DVD-ROM



МИКОЛАЇВ • НУК • 2018

УДК 551.46:629.12(07)

Н 15

Автори: А. П. Гуров, канд. техн. наук, професор;
С. І. Ольшевський, старш. викладач;
О. О. Черно, канд. техн. наук, доцент;
Л. І. Бугрім, канд. техн. наук, доцент

Рецензенти: Г. В. Павлов, д-р техн. наук, професор;
Ю. П. Кондратенко, д-р техн. наук, професор;
В. Л. Тимченко, д-р техн. наук, професор

Навчальний посібник з дисципліни "Теорія автоматичного керування" : у 2 ч. Ч. 1 / А. П. Гуров, С. І. Ольшевський, О. О. Черно, Л. І. Бугрім. – Миколаїв : НУК, 2018. – 111 с.

Уміщено основи теорії автоматичного керування. Посібник скомпоновано у порядку проходження відповідних розділів лекційного курсу, розділи супроводжуються прикладами рішень, тому він може бути корисним для самостійного та індивідуальної роботи студентів.

Призначено для студентів, що навчаються за спеціальністю 141 "Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка".

УДК 551.46:629.12(07)

Навчальне видання

ГУРОВ Анатолій Петрович
ОЛЬШЕВСЬКИЙ Сергій Іванович
ЧЕРНО Олександр Олександрович
БУГРІМ Леонід Іванович

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК
з дисципліни
"Теорія автоматичного керування"
У двох частинах
Частина I

Комп'ютерне складання *А. Д. Сорочинська*
Коректор *М. О. Паненко*

© Гуров А. П., Ольшевський С. І., Черно О. О.,
Бугрім Л. І., 2018
© Національний університет кораблебудування
імені адмірала Макарова, 2018

Формат 60×84/16. Ум. друк. арк. 6.5. Об'єм даних 4396 кб.
Тираж 15 прим. Вид. № 18. Зам. № 194.

Видавець і виготовник Національний університет кораблебудування
імені адмірала Макарова
просп. Героїв України, 9, м. Миколаїв, 54025
E-mail : publishing@nuos.edu.ua

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 6402 від 19.09.2018 р.

ВСТУП

У число наукових дисциплін, що утворюють науку про керування, входить теорія автоматичного керування і регулювання. Для здійснення автоматичного керування технічним процесом створюється система, яка складається з керованого об'єкта і зв'язаного з ним керуючого пристрою.

Найпростіші регулятори були винайдені більше 200 років тому. Їх перевагою є те, що вони конструктивно прості, проте в принципі не можуть бути абсолютно точними.

Першими промисловими регуляторами є автоматичний поплавковий регулятор рівня води, побудований у 1765 році І.І.Ползуновим; відцентровий регулятор швидкості обертів, створений у 1784 році англійським механіком Дж. Уаттом; перший програмний пристрій керування ткацьким верстатом від перфокарти, побудований у 1808 році Ж. Жаккар. У цей період з'явилися регулятори з впливом за похідною, за навантаженням, серводвигуни з жорстким зворотним зв'язком, регулятори з гнучким зворотним зв'язком, імпульсні регулятори. Проте до кінця 60-х років XIX століття системний підхід у теоретичних дослідженнях регулювання був відсутній.

Корінні зміни в підході до проблеми автоматичного керування внесли три роботи: Дж. Максвела "Про регулятори" (1866), І.А. Вишнеградського "Про загальну теорію регуляторів" і "Про регулятори прямої дії" (1877). В цих роботах був здійснений системний підхід до проблеми, регулятор і машина розглядалися як єдина динамічна система. Саме професор Петербурзького технологічного інституту І.А. Вишнеградський вважається основоположником теорії автоматичного керування (ТАК).

Великий вклад у теорію вніс Н.Є. Жуковський, автор праці "Про міцність руху" і першого підручника "Теорія регулювання ходу машин" (1909).

У теорії автоматичного керування значну роль відіграє стійкість. Засновником строгої теорії стійкості є великий російський математик О.М.Ляпунов. У праці "Загальна задача про стійкість руху" (1892) ним було дано строге визначення стійкості.

Вже у ранні роки ТАК стала стимулювати розробки математичного плану. У 1877 р. англійський математик Раус запропонував алгоритм для оцінки розташування коренів характеристичного рівняння і стійкості системи (критерій стійкості Рауса). В 1895 р. німецький математик А. Гурвіц, а в 1914 р. П. Льєнар і Р. Шипар розробили свої алгебраїчні критерії стійкості.

Особливо інтенсивно ТАК почала розвиватися з кінця тридцятих років ХХ століття, коли були розроблені частотні методи аналізу стійкості лінійних систем (частотні критерії стійкості Х. Найквіста та А.В. Михайлова), поставлена проблема якості регулювання і закладені основи ряду ефективних методів дослідження нелінійних систем. Якісне дослідження нелінійних систем, що базується на представленні перехідних процесів у фазовій площині, було запропоновано в тридцяті роки О.О. Андроновим і його школою. М.М. Крилов і М.М. Боголюбов розробили метод гармонічного балансу (1934) для визначення параметрів автоколивань і умов їх виникнення. Я.З. Ципкін розробив основи теорії релейних (1955) та імпульсних (60-ті роки) систем з різними видами модуляції.

Методи дослідження, які розроблені в теорії автоматичного керування, є досить загальними методами, галузь використання яких виходить за рамки тільки технічних систем. Динамічні керовані процеси мають місце в живих організмах, економічних і організаційних людино-машинних процесах.

Тому вивчення теорії автоматичного керування стає необхідним для фахівців не тільки в галузі автоматики, а й в інших напрямках.

1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ І ВИЗНАЧЕННЯ ТАК

1.1. Сутність проблеми автоматичного керування

Будь-яка діяльність людини являє собою організовану сукупність дій або операцій, які можна розділити на два класи: робочі операції та операції керування. До робочих операцій належать дії, безпосередньо необхідні для виконання процесу, а операції керування забезпечують правильне та якісне виконання робочих операцій: визначають їх початок і кінець, задають потрібні параметри процесу (швидкість, прискорення робочого інструменту, температуру, напрям і т. д.). Сукупність керуючих операцій утворює процес керування.

Операції керування та робочі операції можуть виконуватися технічними пристроями. Заміну праці людини в робочих операціях називають *механізацією*. Її мета – вивільнення людини від важких, одноманітних, шкідливих, втомлюючих операцій. Заміну праці людини в операціях керування називають *автоматизацією*, а технічні пристрої, що виконують операції керування, – *автоматичними* пристроями.

Сукупність технічних засобів, що виконують процес і вимагають для цього спеціально організованих дій, називають *об'єктом керування* (ОК).

Сукупність засобів керування та об'єкта створює *систему керування*.

Система, в якій всі робочі операції та операції керування виконують автоматичні пристрої, називається *автоматичною*.

Система, в якій автоматизована тільки частина операцій, а інша частина зберігається за людиною, називається *автоматизованою*.

Отже, система автоматичного керування складається з об'єкта керування і керуючого пристрою (КП). Така система може бути представлена схемою, зображеною на рис. 1.1.

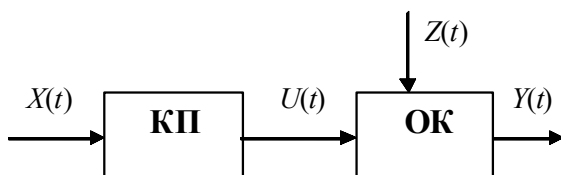


Рис. 1.1. Схема САК

У схемі використані позначення:

КП – керуючий пристрій;

ОК – об'єкт керування;

$X(t)$ – задаючий вплив, що визначає алгоритм функціонування;

$U(t)$ – керуючий вплив, за допомогою якого виконується безпосереднє керування об'єктом;

$Y(t)$ – вихідна координата, яка характеризує стан об'єкта;

$Z(t)$ – збурення, яке заважає нормальному перебігу процесу керування.

Можна сказати, що для організації процесу керування необхідно так формувати керуючий вплив $U(t)$, аби він, компенсуючи збурення $Z(t)$, забезпечував би бажану зміну вихідної координати $Y(t)$.

Зміна вихідних координат у нормальному, бажаному ході процесу визначається сукупністю правил, вказівок або математичних залежностей, яка називається *алгоритмом функціонування системи*. Цей алгоритм показує мету керування, бажану зміну вихідної координати.

Формування керуючого впливу $U(t)$ виконується на основі *алгоритму керування* – сукупності вказівок, що визначають характер дії на об'єкт з метою виконання ним алгоритму керування. Алгоритм керування залежить як від алгоритму функціонування, так і від динамічних властивостей системи.

1.2. Основні принципи керування

Залежно від способів формування керуючого впливу $U(t)$ розрізняють три основних принципи керування: принцип розімкнутого керування, принцип компенсації та принцип зворотного зв'язку. Розглянемо кожний із цих принципів.

Принцип розімкнутого керування

Суть принципу полягає в тому, що алгоритм керування виробляється тільки на основі заданого алгоритму функціонування і в процесі роботи системи ніяк не коректується. Схема такої САК наведена на рис. 1.2. У цьому випадку керуючий вплив $U(t)$ формується шляхом функціонального перетворення задаючого впливу $X(t)$ з урахуванням характеристик ОК, тобто алгоритм керування може бути записаний у вигляді $U = f(x)$.

Схема має вид розімкнутого кола, що й визначило назву принципу. Близкість вихідної величини до бажаної забезпечується тільки правильним вибором конструкції автоматичного керуючого пристрою.

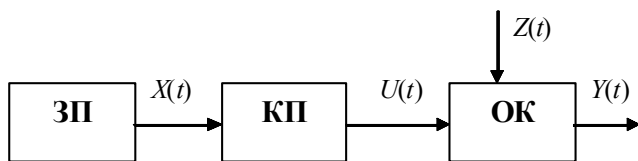


Рис. 1.2. Функціональна схема САК з принципом розімкнутого керування

Керування за розімкненим циклом може забезпечити виконання алгоритму функціонування з достатньою точністю у тих випадках, коли немає збурення, характеристики об'єкта відомі раніше й в процесі роботи не змінюються. Звідси випливає основний недолік принципу розімкнутого керування:

такі системи не забезпечують точності при наявності завад і зміні параметрів об'єкта. До переваг потрібно віднести простоту конструкції, високу швидкодію, малу споживану енергію.

Системи, які працюють за розімкненим циклом, широко використовуються в різних пристроях з програмним керуванням: профільованих кулачкових механізмах, магнітофонах, автоматичних верстатах.

Принцип компенсації

Якщо збурюючий вплив великий і розімкнута САК не забезпечує потрібної точності, то іноді можна, вимірявши збурення, внести корективи в алгоритм керування, які компенсували б відхилення алгоритму функціонування.

Принцип компенсації можна проілюструвати схемою, що наведена на рис. 1.3.

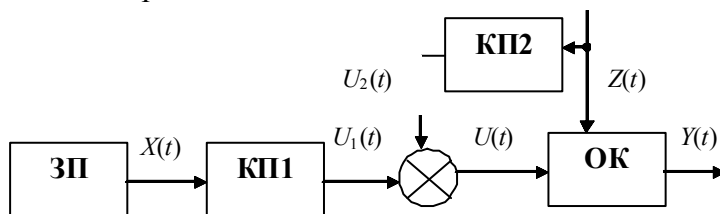
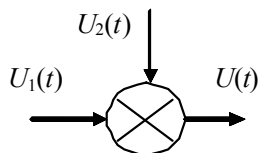


Рис. 1.3. Функціональна схема САК з керуванням за принципом компенсації

На рис. 1.3 позначено:

КП2 – блок врахування завад і корекції керуючої дії;



– суматор; тобто $U(t) = U_1(t) + U_2(t)$.

Алгоритм керування може бути записаний у вигляді $U = f(x; z)$, тобто він містить у собі інформацію про задаючий та збурюючий впливи. Величина і знак додаткового сигналу

повинні бути такими, щоб повністю або частково компенсувати збурюючий вплив.

Ступінь компенсації залежить від точності знання характеристик об'єкта і точності виміру збурюючого впливу. Тому принцип керування за збуренням (принцип компенсації) можна використовувати тільки в тих випадках, коли відомі характеристики об'єкта і можливе вимірювання збурюючого впливу. У цьому є головний недолік принципу компенсації.

Принцип зворотного зв'язку

Систему можна побудувати й так, щоб точність виконання алгоритму функціонування забезпечувалась і без вимірювання збурень. У цьому випадку корективи в алгоритм керування вносяться за фактичним значенням координат у системі. Для цього в конструкцію системи вводять додатковий зв'язок, який називається ланкою зворотного зв'язку.

Зворотний зв'язок (ЗЗ) – це такий зв'язок, по якому інформація про стан об'єкта з виходу системи передається на вхід автоматичного керуючого пристрою.

Існують жорсткий і гнучкий зворотні зв'язки. Жорсткий ЗЗ постійно подає на вхід сигнал, за величиною пропорційний сигналу на виході. Він дозволяє стабілізувати систему й поліпшити її перехідні характеристики. Жорсткий ЗЗ діє не тільки в перехідному, а й встановленому режимі. При цьому зменшується коефіцієнт підсилення (пропорційно глибині жорсткого ЗЗ) і знижується статична точність.

Гнучкий ЗЗ подає на вхід сигнал, пропорційний швидкості, прискоренню або інтегралу зміни вихідної величини. Тому гнучкий ЗЗ діє тільки в перехідному режимі.

При введенні гнучкого ЗЗ за швидкістю або за прискоренням збільшується стійкість і зменшується коливальність системи, причому корекція за прискоренням ефективніша.

Схема САК, що працює за принципом зворотного зв'язку, має вид замкнутого кола (рис. 1.4).

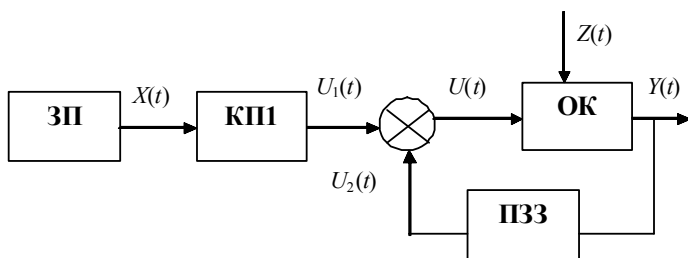


Рис. 1.4. Функціональна схема замкнутої САК

Тут ПЗЗ – пристрій зворотного зв'язку, що формує сигнали ЗЗ, які несуть інформацію про фактичний стан об'єкта. Ця інформація порівнюється з бажаним значенням вихідної координати $Y_6(t)$ і керуючий вплив $U(t)$ виробляється відповідно до відхилення $Y(t)$ від $Y_6(t)$.

Алгоритм керування може бути записаний у вигляді $U = f(x; y)$, тобто вихідна величина $Y(t)$ безпосередньо бере участь у формуванні керуючого впливу.

У багатьох замкнутих системах керуючий вплив $U(t)$ виробляється в результаті порівняння вихідної координати $Y(t)$ із задаючим впливом $X(t)$, тобто алгоритм керування записується у вигляді $U = f(x - y)$.

Такий спосіб утворення керуючого впливу називається керуванням за відхиленням (за похибкою, за розузгодженням), а системи з таким способом керування називаються системами автоматичного регулювання (САР). Функціональна схема САР наведена на рис. 1.5.

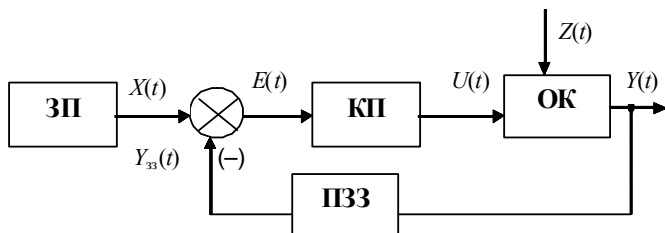
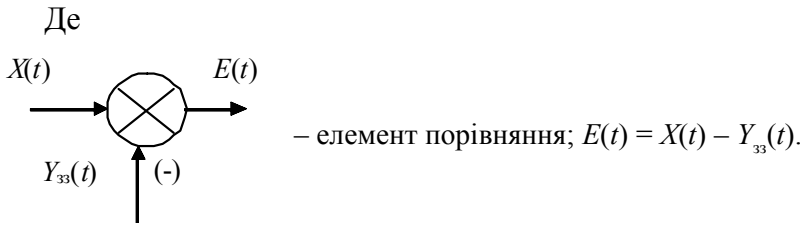
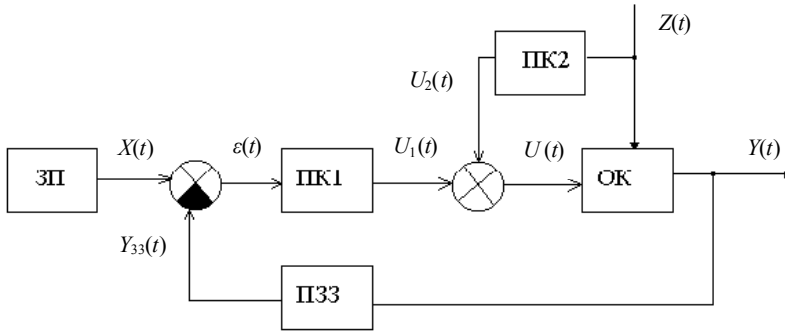


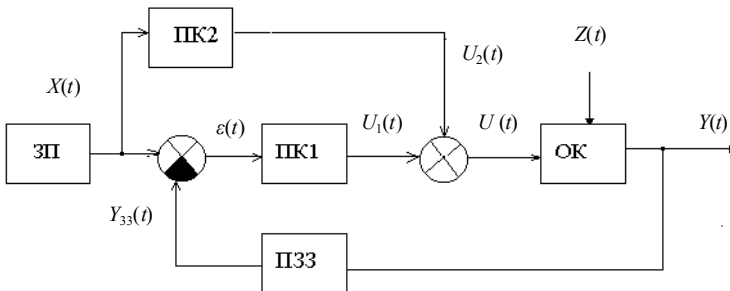
Рис. 1.5. Функціональна схема САР



Головна позитивна риса принципу зворотного зв'язку полягає в тому, що керування виконується з урахуванням результатів. Це забезпечує широке використання принципу.



a



б

Рис. 1.6. Функціональні схеми САК з комбінованим керуванням

У ряді випадків для поліпшення точності використовується *комбіноване керування* – керування одночасно за розімкнутим і замкнутим циклами. Системи, які будуються за таким принципом, можуть мати і від'ємний зворотний зв'язок, і ланку компенсації збурення (рис. 1.6,*а*). Алгоритм її функціонування $U = f(x-y; z)$. Для повної або часткової компенсації похибок обробки задаючого впливу може використовуватися алгоритм $U = f(x-y; x)$, коли задаючий вплив обробляється і замкнутим, і розімкнутим контуром (рис. 1.6,*б*).

Комбіноване керування дозволяє об'єднати переваги принципів розімкнутого і замкнутого циклів – швидкодію і точність регулювання.

2. МАТЕМАТИЧНИЙ ОПИС СИСТЕМ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ

2.1. Математичні моделі САК. Рівняння динаміки і статички

Визначення математичних моделей (ММ) динамічних об'єктів – це математичний опис всіх процесів, що відбуваються в об'єкті, щодо вихідних і вхідних величин на основі законів фізики.

На певному етапі аналізу та синтезу САК отримують її математичний опис за допомогою рівнянь (аналітичний опис), графіків, структурних схем, графів (графічний опис), таблиць (табличний опис). Причому, для опису всієї системи в цілому спочатку звичайно складають опис її окремих елементів. Так, для отримання рівнянь системи складають рівняння для кожного складаючого її елемента. Сукупність цих рівнянь називають *математичною моделлю САК*.

Математична модель має бути досить простою, щоб не обтяжувати дослідження, але з іншого боку – точною, щоб повніше відображати властивості самої системи.

Такою моделлю можуть служити диференціальні рівняння, складені на основі фізичних законів, визначаючих поведінку системи (закон збереження матерії, енергії, другий закон Ньютона, закони Кіргофа і т. д.).

Розв'язуючи ці рівняння, можна визначити значення вихідної координати $y(t)$ системи в будь-який момент часу при вибраному законі змінення задаючих $x(t)$ та збурюючих $z(t)$ впливів.

У більшості випадків безперервні САК описуються нелінійними диференціальними рівняннями n -го порядку, які можуть бути записані в вигляді:

$$F(y, \dot{y}, \ddot{y}, \dots, x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots) = 0. \quad (2.1)$$

Це рівняння (для спрощення припустимо, що збурюючий вплив z відсутній) описує процеси в системі при будь-яких вхідних впливах і називається *рівнянням динаміки*.

Якщо припустити, що вплив $x(t)$ не змінюється і має постійне значення x_0 , а процес в системі усталився, і вихідна координата набула значення y_0 , то рівняння набуде вигляду:

$$F(y_0, 0, 0, \dots, x_0, 0, 0, \dots) = F(y_0, x_0) = 0. \quad (2.2)$$

Це рівняння описує статичний режим роботи САК і називається *рівнянням статики*.

Статичний режим можна описати графічно за допомогою *статичних характеристик*. Статичною характеристикою називається залежність вихідної величини від вхідної в статичному режимі.

В більшості випадків статичні характеристики реальних елементів нелінійні і задаються в вигляді графіків (рис. 2.1).

Але в ряді випадків нелінійності елементів САК є неістотними або система працює на обмежених ділянках статичних характеристик її елементів, де нечутливість недостатньо виражена. В цих випадках реальну нелінійну характеристику вдається з певним ступенем точності замінити лінійною і здійснити *лінеаризацію* рівнянь, тобто замінити точні нелінійні рівняння наближеними лінійними. Це дозволяє спростити методи аналізу та синтезу САК.

Для визначення можливості лінеаризації використовують принцип малих відхилень.

Принцип малих відхилень: якщо малим відхиленням на вході Δx відповідають малі відхилення Δy на виході поблизу робочої точки, така нелінійність може бути розкладена в ряд Тейлора або Маклорена (рис. 2.2).

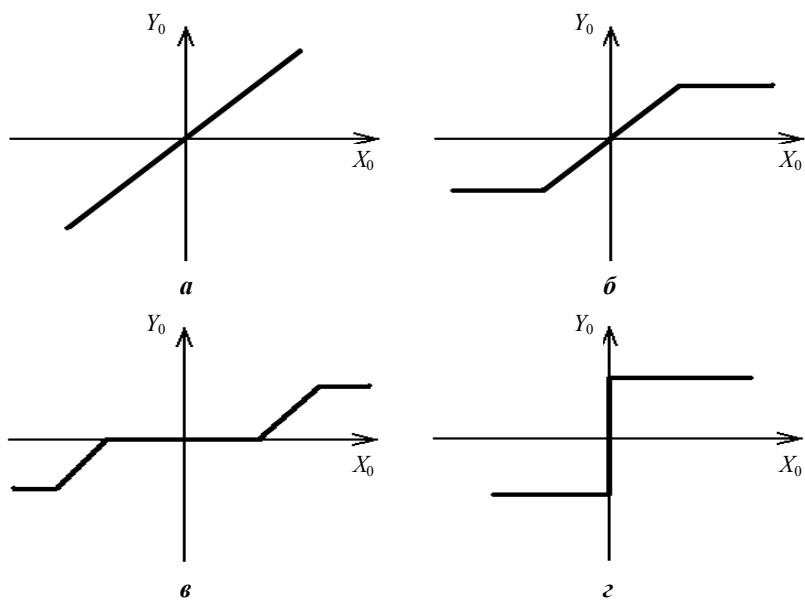


Рис. 2.1. Деякі типові статичні характеристики елементів:
a – лінійна; *б* – обмеження лінійності за виходом;
в – обмеження лінійності за виходом з зоною нечутливості;
г – ідеальна релейна характеристика

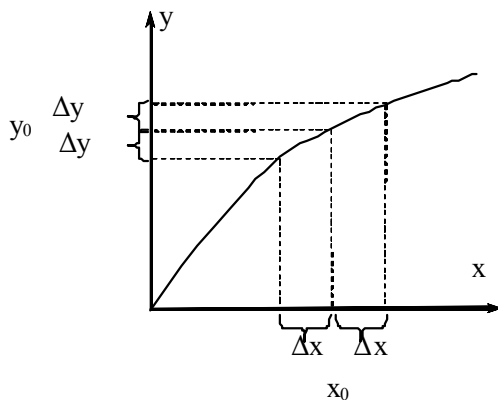


Рис. 2.2. До принципу малих відхилень

$$y = y_0 + \Delta y = y(x_0) + \frac{1}{1!} \frac{\partial y}{\partial x} \Delta x + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \Delta x^2 + \dots$$

В лінеаризованих рівняннях всі координати задані у збільшеннях, але знак Δ не використовують.

У результаті лінеаризації математична модель САК зводиться до системи лінійних диференціальних рівнянь або до одного лінійного диференціального рівняння n -го порядку:

$$\begin{aligned} a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = \\ = b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t). \end{aligned} \quad (2.3)$$

2.2. Формалізація диференціальних рівнянь

Формалізація диференціальних рівнянь виконується у чотирьох етапах після виключення додаткових змінних:

- розділ змінних. Складові вихідної координати об'єднують у лівій частині рівняння, від зовнішніх впливів – у правій;
- розташування членів рівняння у порядку зменшення степенів похідних змінних;
- позбавлення від коефіцієнту при нульовій похідній керованої величини;
- перехід від фізичних параметрів до динамічних:
- k – коефіцієнт передачі, може мати різну розмірність;
- T – постійна часу, має розмірність [с], міра інерційності елемента.

Під канонічною формою диференційного рівняння системи елементів будь-якого об'єкту розуміють рівняння виду:

$$a_0 \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dx}{dt} + a_n x = b_0 \frac{d^m f}{dt^m} + \\ + b_1 \frac{d^{m-1} f}{dt^{m-1}} + \dots + b_m f,$$

де x – вихідна (керована) величина; f – вхідна величина (зовнішній вплив); a_i ; b_i – комбінації постійних часу.

У нормалізованому виді $a_n = 1$, а $b_m = k$.

Завдання для індивідуальної роботи наведені у додатку 1.

Рекомендується наступний порядок дій:

- позначити струми гілок;
- скласти рівняння для входу і виходу схеми, її вузлів;
- видалити із рівнянь інтеграли струмів (шляхом диференціювання);
- вивести залежність виходу від входу з виключенням проміжних змінних (струмів);
- скомпонувати диференціальні рівняння у канонічну форму.

При складанні рівнянь використовуються закони Кірхгофа та закон Ома для частки електричного кола (падіння напругі на елементі під дією струму скрізь цей елемент):

$$U_R = R \cdot i;$$

$$U_C = \frac{1}{C} \cdot \int i \, dt;$$

$$U_L = L \frac{di}{dt}.$$

На рисунку 2.3 наведений приклад типової задачі для індивідуального завдання 1 – по схемі пасивного чотириполюсника отримати диференціальне рівняння в канонічній формі.

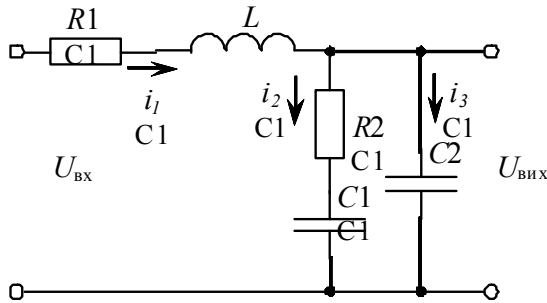


Рис. 2.3. Приклад задачі для індивідуального завдання 1

Позначимо струми гілок схеми:

- i_1 – гілка, що складається із $R1$ та L ;
- i_2 – гілка, що складається із $R2$ та $C1$;
- i_3 – гілка, що складається із $C2$.

Сума струмів i_2 та i_3 дає струм i_1 :

$$i_1 = i_2 + i_3. \quad (2.4)$$

Рівняння для входу схеми:

$$U_{BX} = R1 \cdot i_1 + L \cdot \frac{di_1}{dt} + U_{VHX}. \quad (2.5)$$

Рівняння для виходу схеми:

$$U_{VHX} = R2 \cdot i_2 + \frac{1}{C1} \cdot \int i_2 dt; \quad (2.6)$$

$$U_{VHX} = \frac{1}{C2} \cdot \int i_3 dt. \quad (2.7)$$

Маємо два рівняння для виходу – відповідно до двох гілок із струмами i_2 та i_3 . Обидва рівняння мають струми під інтегралами – диференціюємо:

$$\frac{dU_{BHX}}{dt} = R_2 \cdot \frac{di_2}{dt} + \frac{1}{C_1} \cdot i_2$$

$$\frac{dU_{BHX}}{dt} = \frac{1}{C_2} \cdot i_3$$

Знаходимо струми i_2, i_3 :

$$i_2 = C_1 \cdot \frac{dU_{BHX}}{dt} - R_2 \cdot C_1 \cdot \frac{di_2}{dt},$$

$$i_3 = C_2 \cdot \frac{dU_{BHX}}{dt}.$$

Так як $\frac{di_1}{dt} = \frac{di_2}{dt} + \frac{di_3}{dt}$ маємо:

$$\frac{di_2}{dt} = \frac{di_1}{dt} - C_2 \frac{d^2 U_{BHX}}{dt^2};$$

$$i_1 = i_2 + i_3 = (C_1 + C_2) \frac{dU_{BHX}}{dt} - R_2 C_1 \left(\frac{di_1}{dt} - C_2 \frac{d^2 U_{BHX}}{dt^2} \right).$$

Звідси виражаємо $\frac{di_1}{dt}$:

$$\frac{di_1}{dt} = C_2 \frac{d^2 U_{BHX}}{dt^2} + \frac{C_1 + C_2}{R_2 C_1} \frac{dU_{BHX}}{dt} - \frac{1}{R_2 C_1} i_1.$$

Підставляємо отримане $\frac{di_1}{dt}$ у рівняння (2.2), та виражаємо i_1 :

$$U_{BX} = R_1 i_1 + L C_2 \frac{d^2 U_{BHX}}{dt^2} + L \frac{C_1 + C_2}{R_2 C_1} \frac{dU_{BHX}}{dt} - \frac{L}{R_2 C_1} i_1 + U_{BHX};$$

$$i_1 = \frac{R_2 C_1}{R_1 R_2 C_1 - L} U_1 - \frac{L C_2 R_2 C_1}{R_1 R_2 C_1 - L} \frac{d^2 U_{BHX}}{dt^2} -$$

$$- \frac{L R_2 C_1}{R_1 R_2 C_1 - L} \frac{C_1 + C_2}{R_2 C_1} \frac{dU_{BHX}}{dt} - \frac{R_2 C_1}{R_1 R_2 C_1 - L} U_{BHX}.$$

Беремо похідну отриманого рівняння, та підставляємо у рівняння (2.2), приводимо отриманий результат до нормалізованого вигляду:

$$\frac{di_1}{dt} = \frac{R_2 C_1}{R_1 R_2 C_1 - L} \frac{dU_{BX}}{dt} - \frac{L C_2 R_2 C_1}{R_1 R_2 C_1 - L} \frac{d^3 U_{BHX}}{dt^3} -$$

$$- \frac{L R_2 C_1}{R_1 R_2 C_1 - L} \frac{C_1 + C_2}{R_2 C_1} \frac{d^2 U_{BHX}}{dt^2} - \frac{R_2 C_1}{R_1 R_2 C_1 - L} \frac{dU_{BHX}}{dt}.$$

$$\frac{L L C_1 C_2 R_2}{R_1 R_2 C_1 - L} \frac{d^3 U_{BHX}}{dt^3} + \frac{L C_2 R_1 R_2 C_1 + L L (C_1 + C_2)}{R_1 R_2 C_1 - L} \frac{d^2 U_{BHX}}{dt^2} +$$

$$+ \frac{L R_1 (C_1 + C_2) + L R_2 C_1}{R_1 R_2 C_1 - L} \frac{dU_{BHX}}{dt} + \frac{L}{R_1 R_2 C_1 - L} U_{BHX} =$$

$$= \frac{L R_2 C_1}{R_1 R_2 C_1 - L} \frac{dU_{BX}}{dt} + \frac{L}{R_1 R_2 C_1 - L} U_{BX}$$

$$L C_1 C_2 R_2 \frac{d^3 U_{BHX}}{dt^3} + (C_2 R_1 R_2 C_1 + L (C_1 + C_2)) \frac{d^2 U_{BHX}}{dt^2} +$$

$$+ (R_1 (C_1 + C_2) + R_2 C_1) \frac{dU_{BHX}}{dt} + U_{BHX} = R_2 C_1 \frac{dU_{BX}}{dt} + U_{BX}.$$

Вводимо заміни:

$$T_1^3 = LC_1C_2R_2;$$

$$T_2^2 = C_2 R_1 R_2 C_1 + L(C_1 + C_2);$$

$$T_3 = R_1(C_1 + C_2) + R_2C_1;$$

$$T_4 = R_2 C_1.$$

Тоді остаточно диф. рівняння у нормалізованому вигляді:

$$\begin{aligned} T_1^3 \frac{d^3 U_{BHX}}{dt^3} + T_2^2 \frac{d^2 U_{BHX}}{dt^2} + T_3 \frac{dU_{BHX}}{dt} + U_{BHX} &= \\ &= T_4 \frac{dU_{BX}}{dt} + U_{BX}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

2.3. Векторно-матрична форма математичних моделей

В основі векторно-матричної форми лежить представлення диференціальних рівнянь у формі Коші:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + b_{11}U_1 + \dots \\ \frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + b_{21}U_1 + \dots \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + b_{n1}U_1 + \dots \end{cases}$$

$$\dot{X} = AX + BU$$

$\dot{X}$ – вектор-матриця похідних координат:

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \dots \\ U_n \end{bmatrix}$$

X – вектор-матриця;

A і B – матриці коефіцієнтів:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ b_{31} & b_{23} & \dots & b_{3m} \end{bmatrix}$$

Існує інший вид векторно-матричної форми – структурне представлення рівнянь, наведене на рис. 2.4.

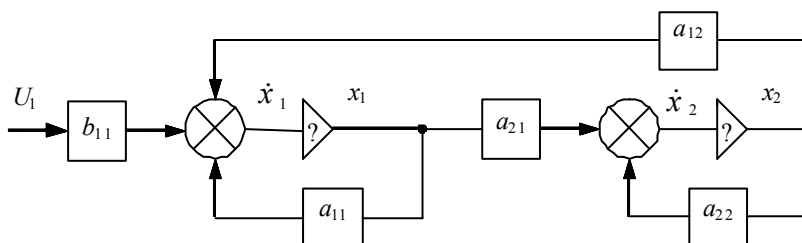


Рис. 2.4. Структурне представлення векторно-матричної форми ММ

Якщо диференціальне рівняння вихідних координат не вдалося написати, то додають рівняння виходу:

$$\dot{Y} = \begin{bmatrix} 0 & C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix},$$

$$Y = C^T X.$$

2.4. Перехід від векторно-матричної форми до канонічної і навпаки

Канонічна форма представлення:

$$a_0 \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dx}{dt} + a_n x = bU.$$

Для переходу від канонічної форми до векторно-матричної використовують метод зниження порядків рівняння $x = x_1$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = x_3 \\ \dots \\ \frac{dx_{n-1}}{dt} = -\frac{a_n}{a_0} x_1 - \frac{a_{n-1}}{a_0} x_2 - \frac{a_{n-2}}{a_0} x_3 - \dots - \frac{a_4}{a_0} x_{n-1} + \frac{b}{a_0} U \end{array} \right.$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dots \\ \dot{x}_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{a_n}{a_0} & -\frac{a_{n-1}}{a_0} & \dots & \dots & \dots & -\frac{a_1}{a_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_{n-1} \end{bmatrix} + bU.$$

В якості приклада візьмемо ту саму задачу, що і минулого разу.

Для розв'язку задачі необхідно виразити з системи диференціальних рівнянь, похідні через інші параметри. Для цього складемо початкову систему рівнянь:

$$\left\{ \begin{array}{l} U_{BX} = R_1 i_1 + L \frac{di_1}{dt} + U_{BHX} \\ U_{BHX} = R_2 i_2 + \frac{1}{C_1} \int i_2 dt \\ U_{BHX} = \frac{1}{C_2} \int i_3 dt \\ i_1 = i_2 + i_3. \end{array} \right.$$

Як бачимо, ми маємо змогу вільно виразити $\frac{di_1}{dt}$, а також $\frac{di_2}{dt}$, через похідну вихідної характеристики, яка легко виражається через струм i_3 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{di_1}{dt} = -\frac{R_1}{L} U_{BX} + \frac{1}{L} U_{BHX} - \frac{R_1}{L} i_1 \\ \frac{di_2}{dt} = \frac{1}{R_2 C_2} i_3 - \frac{1}{R_2 C_1} i_2 \\ \frac{di_3}{dt} = \frac{di_1}{dt} - \frac{di_2}{dt} = \frac{1}{L} U_{BX} - \frac{R_1}{L} i_1 - \frac{1}{L} U_{BHX} - \frac{1}{R_2 C_2} i_3 + \frac{1}{R_2 C_1} i_2 \\ \frac{dU_{BHX}}{dt} = \frac{1}{C_2} i_3. \end{array} \right.$$

За наявними даними маємо змогу збудувати схему (рис. 2.5):

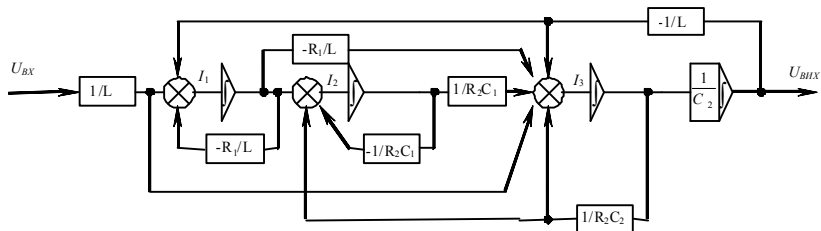


Рис. 2.5. Схема векторно-матричної форми представлення моделі

3. ОПЕРАТОРНА ФОРМА МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ. ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛАПЛАСА ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ

Сутність операторного методу полягає в переході від функцій часу $[f(t)]$, які звуться оригіналами, до функцій комплексної змінної $[f(p)]$, які звуться зображеннями.

Існує кілька видів перетворення, але найбільш поширеними є перетворення Лапласа і, окремий випадок, перетворення Фур'є.

L – процедура перетворення (її символ):

$$L\{x(t)\},$$

де $x(t)$ – функція-оригінал

$$x(p) = L\{x(t)\} = \int_0^{\infty} x(t)e^{-pt} dt.$$

Оператор p – незалежна комплексна змінна:

$$p = d + j\omega,$$

d – ціла частина, ω – коефіцієнт при уявній частині.

У перетвореннях Фур'є з оператора Лапласа видалена речовинна частина:

$$(d = 0; p = j\omega).$$

3.1. Властивості перетворень Лапласа

1) Властивість лінійності: $L\{ax_1(t) + bx_2(t)\} = aL\{x_1(t)\} + bL\{x_2(t)\}.$

2) Властивість диференціювання: $L\{\frac{d^n x}{dt^n}\} = p^n x(p).$

3) Властивість інтегрування: $L\{\frac{d^n x}{dt^n}\} = p^n x(p)$.

4) Зв'язок початкових та кінцевих значень: $x(0) = \lim_{p \rightarrow \infty} px(p)$
 $x(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} px(p)$.

Існують також зворотні перетворення Лапласа (Фур'є), які дозволяють за відомою функцією зображення знайти функцію-оригінал:

$$x(t) = L^{-1}\{x(p)\} = \int_{-d-j\omega}^{d+j\omega} x(p)e^{pt} dp.$$

3.2. Поняття передаточної функції.

Властивості передаточної функції

Під передаточною функцією розуміють відношення вихідної координати, яка перетворена за Лапласом, до вхідної координати при нульових початкових умовах.

$$W(p) = \frac{U_{ВИХ}(p)}{U_{ВХ}(p)} = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n}. \quad (3.1)$$

Знаменник передаточної функції (3.1) є *характеристичним поліномом* системи. Якщо його прирівняти до нуля, отримаємо *характеристичне рівняння САК*.

Властивості передаточної функції:

1) Передаточна функція є дрібно-раціональною функцією відносно p (чисельник менше знаменника);

2) Усі коефіцієнти – дійсні, речовинні числа, так як визначаються через параметри реальних елементів;

3) Корені чисельника та знаменника у загальному вигляді є комплексними числами, попарно-сполученими;

4) Для реальних систем корені знаменника повинні бути від'ємними, речовинними або комплексними числами із від'ємними речовинними частинами.

В якості приклада візьмемо ту саму задачу (див. рис. 2.2), що і минулого разу.

Для того, щоб знайти передаточну функцію $W(p)$, необхідно знайти Z_{BX} та Z_{BHX} :

$$W(p) = \frac{U_{BHX}(p)}{U_{BX}(p)} = \frac{Z_{BHX}(p)}{Z_{BX}(p)} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2};$$

$$Z_{BX} = Z_1 + Z_2;$$

$$Z_{BHX} = Z_2.$$

Z_1 та Z_2 знаходимо з заданої схеми:

$$Z_1 = R_1 + Lp;$$

$$Z_2 = \frac{(R_2 + \frac{1}{C_1 p}) \cdot \frac{1}{C_2 p}}{R_2 + \frac{1}{C_1 p} + \frac{1}{C_2 p}} = \frac{R_2 C_1 p + 1}{p(R_2 C_1 C_2 p + C_1 + C_2)} = Z_{BHX}.$$

Одже:

$$Z_{BX} = Z_1 + Z_2 = \frac{(R_1 + Lp) \cdot p(R_2 C_1 C_2 p + C_1 + C_2) + R_2 C_1 p + 1}{p(R_2 C_1 C_2 p + C_1 + C_2)}.$$

$$\text{Знаходимо } W(p) = \frac{U_{BHX}(p)}{U_{BX}(p)} = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n}$$

$$W(p) = \frac{Z_{BHX}(p)}{Z_{BX}(p)} = \frac{(R_2 C_1 p + 1)}{p(R_2 C_1 C_2 p + C_1 + C_2)} \times \\ \times \frac{p(R_2 C_1 C_2 p + C_1 + C_2)}{(R_1 + Lp)(R_2 C_1 C_2 p + C_1 + C_2) + R_2 C_1 p + 1};$$

$$W(p) = \frac{R_2 C_1 p + 1}{LR_2 C_1 C_2 p^3 + [R_1 R_2 C_1 C_2 + L(C_1 + C_2)]p^2 + \\ + (R_1 C_1 + R_1 C_2 + R_2 C_1)p + 1}.$$

Вводимо заміни:

$$T_1^3 = LC_1 C_2 R_2;$$

$$T_2^3 = C_2 R_1 R_2 C_1 + L(C_1 + C_2);$$

$$T_3 = R_1 C_1 + R_1 C_2 + R_2 C_1;$$

$$T_4 = R_2 C_1.$$

Тоді остаточно:

$$W(p) = \frac{T_4 p + 1}{T_1^3 p^3 + T_1^2 p^2 + T_3 p + 1}.$$

Використовував перехід $p \rightarrow \frac{d}{dt}$ і ураховуючи, що

$$W(p) = \frac{U_{BHX}(p)}{U_{BX}(p)} \text{ можливо виконати перехід до рівняння (2.5).}$$

У тому разі, якщо всі перетворення були виконані вірно, результати повинні співпадати.

3.3. Еквівалентні перетворення структурних схем

Структурна схема САУ у найпростішому випадку будуються з елементарних динамічних ланок. Але кілька елементарних ланок можуть бути замінені одною ланкою із складною передаточною функцією. Для цього існують правила еквівалентного перетворення структурних схем. Розглянемо можливі методи перетворення.

1. Послідовне з'єднання (рис. 3.1) – вихідна величина попередньої ланки подається на вхід наступної.

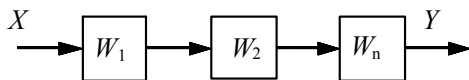


Рис. 3.1. Послідовне з'єднання ланок

При цьому можна записати:

$$y_1 = W_1 \cdot y_0; y_2 = W_2 \cdot y_1; \dots; y_n = W_n \cdot y_{n-1} \Rightarrow \\ y_n = W_1 \cdot W_2 \dots W_n \cdot y_0 = W_{екв} \cdot y_0,$$

$$\text{де } W_{екв} = \prod_{i=1}^n W_i.$$

Таким чином ланцюг послідовно з'єднаних ланок перетворюється у еквівалентну ланку з передаточною функцією, рівної добутку передаточних функцій окремих ланок.

2. Паралельно-узгоджене (рис. 3.2) з'єднання – на вхід кожної ланки подається один і той же сигнал, а вихідні сигнали додаються.

Тоді:

$$y = y_1 + y_2 + \dots + y_n = (W_1 + W_2 + \dots + W_n) y_0 = W_{екв} \cdot y_0,$$

$$\text{де } W_{екв} = \sum_{i=1}^n W_i.$$

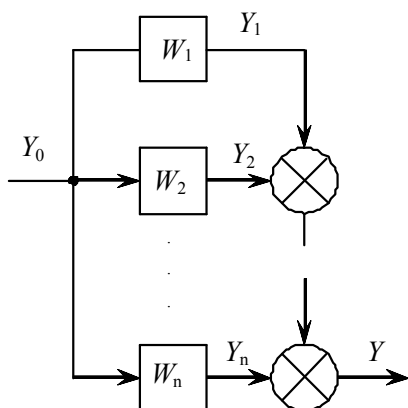


Рис. 3.2. Паралельно-узгоджене з'єднання ланок

Тобто ланцюг ланок, з'єднаний паралельно-узгоджено, перетворюється у ланку з передаточною функцією, рівною сумі передаточних функцій окремих ланок.

3. Паралельно-зустрічне з'єднання (рис. 3.3) – ланка, охоплена додатним або від'ємним зворотнім зв'язком. Фрагмент ланцюга, по якому йде сигнал у зворотному напрямі по відношенню к системі у цілому називається ланцюгом зворотного зв'язку з передаточною функцією W_{33} . Окремий випадок зворотного зв'язку – повний (100%-й) зворотний зв'язок, при якому $W_{33} = 1$.

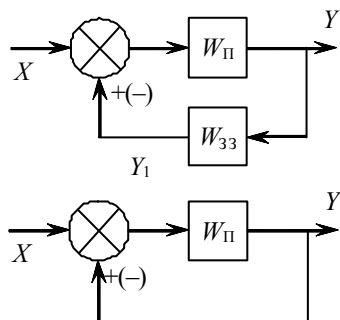


Рис. 3.3. Паралельно-зустрічне з'єднання ланок

При цьому для зворотного зв'язку:

$$y = W_{\Pi} u; y_1 = W_{33} y; u = y_0 - y_1,$$

тому:

$$\begin{aligned} y &= W_{\Pi} y_0 - W_{\Pi} y_1 = W_{\Pi} y_0 - W_{\Pi} W_{33} y \Rightarrow \\ y(1 + W_{\Pi} W_{33}) &= W_{\Pi} y_0 \Rightarrow y = W_{екв} y_0, \end{aligned}$$

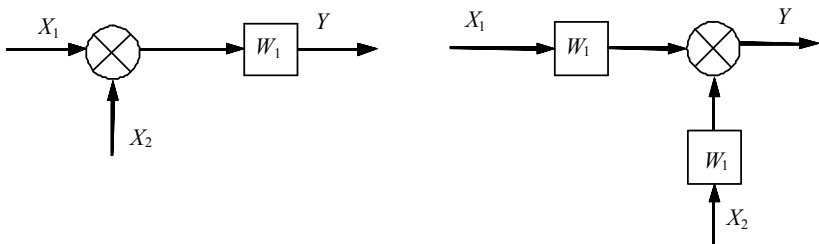
де $W_{екв} = \frac{W_{\Pi}}{1 \pm W_{\Pi} W_{33}}$ (від'ємний (+) та додатний (-) 33).

Якщо $W_{33} = 1$, то зворотний зв'язок називається одиночним, тоді:

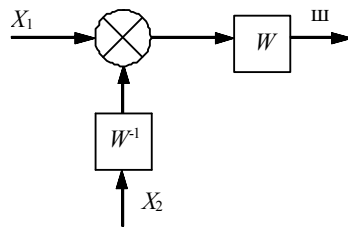
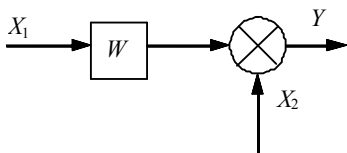
$$W_{екв} = W / (1 \pm W_{\Pi}).$$

Якщо багатоконтурна система має перехресні зв'язки, то для розрахунку еквівалентної передаточної функції необхідні додаткові правила:

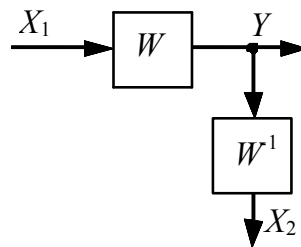
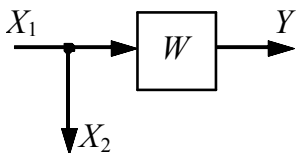
4. При переносі суматора через ланку у напрямі сигналу необхідно додати ланку із передаточною функцією тієї ланки, через яку переноситься суматор.



Якщо суматор переноситься проти напрямі сигналу, то додається ланка із передаточною функцією, зворотною від передаточної функції ланки, через яку переносимо суматор.



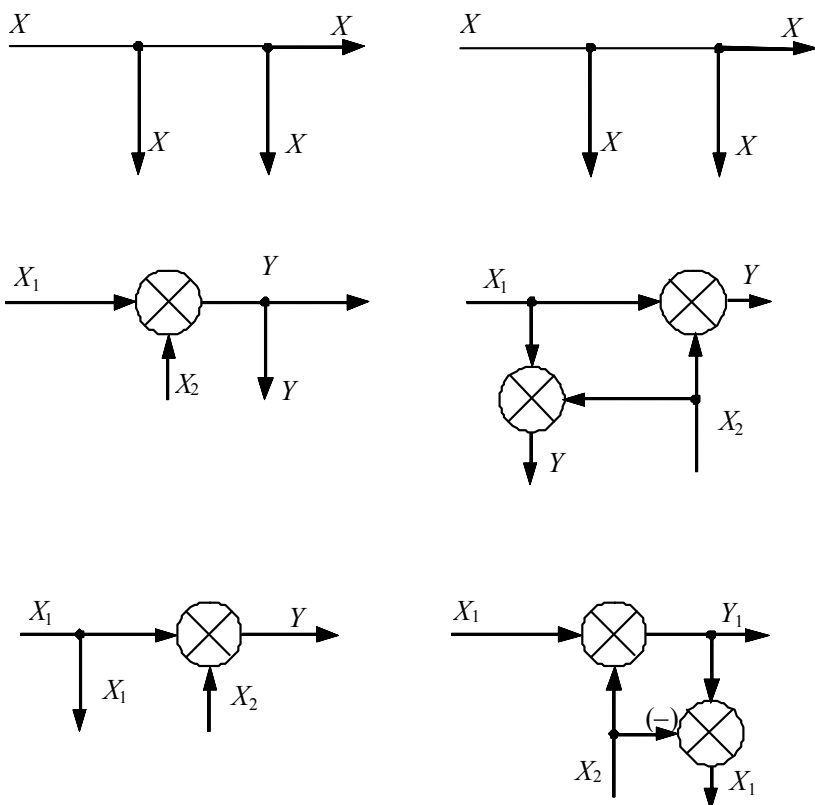
5. При перенесенні вузла через ланку у напрямку сигналу додається ланка із передаточною функцією ланки, через яку переносимо вузол. Якщо вузол переноситься проти напрямку сигналу, то додається ланка із передаточною функцією, через яку переноситься вузол.



6. Для вузлів та суматорів можливі взаємні перестановки: вузли можна міняти місцями; суматори також можна міняти місцями; при переносі вузла через суматор необхідно додати зрівнювальний елемент або суматор.

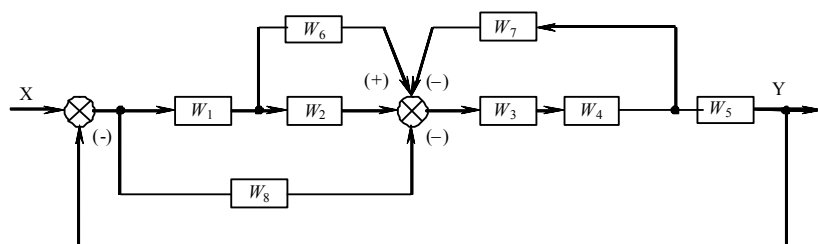
У всіх випадках переносу елементів структурної схеми виникають нееквівалентні фрагменти зв'язку, тому потрібно бути обачним в місцях зняття вихідного сигналу.

При еквівалентних перетвореннях однієї і тієї ж структурної схеми можуть бути отримані різні передаточні функції системи по різним входам та виходам.



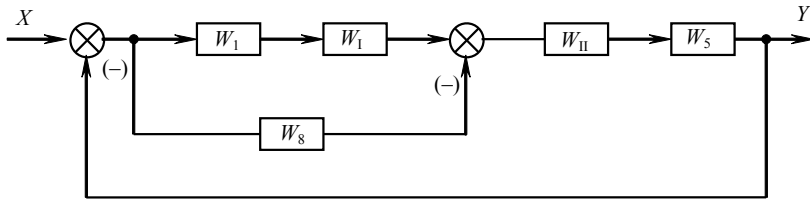
Варіанти завдань наведені у додатку 2.

Для повнішого засвоєння матеріалу розглянемо приклад.
Треба перетворити наступну схему:



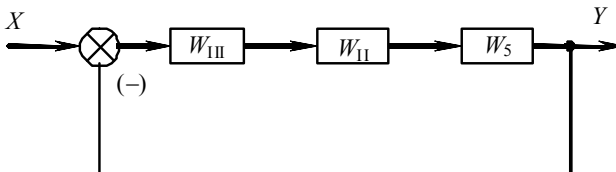
Блоки W_6 , W_2 утворюють паралельний зв'язок, тому маємо змогу записати: $W_I = W_2 + W_6$.

Блоки W_3 , W_4 з'єднані послідовно, та охоплені зворотним зв'язком через блок W_7 : $W_{II} = \frac{W_3 W_4}{1 + W_3 W_4 W_7}$.



Блоки W_1 і W_I із блоком W_8 утворюють паралель: $W_{III} = W_1 W_I - W_8$.

І нарешті отримуємо еквівалентну передаточну функцію



розімкненої та замкнутої систем:

$$W_P = W_{III} W_{II} W_5,$$

$$W_3 = \frac{W_{III} W_{II} W_5}{1 + W_{III} W_{II} W_5}.$$

4. ЧАСТОТНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ

4.1. Загальні положення

Перетворення Фур'є є окремим випадком перетворення Лапласа при $p = j\omega$. При цьому виконується заміна змінної x одночасним переходом від зображень до частотних характеристик.

Формальний перехід відбувається при заміні оператора Лапласа p на змінну $j\omega$ де j – мніма одиниця а ω – кругова частота. Усі теореми та властивості перетворення Лапласа справедливі і для перетворення Фур'є (в частотній ділянці).

Передаточну функцію $W(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}$ називають частотною або комплексною (КПФ).

Частотна передаточна функція $W(j\omega)$ є комплексною функцією від змінної ω . Її як і будь-яке комплексне число, можна записати в алгебраїчній та показниковій формах:

$$W(j\omega) = u(\omega) + jv(\omega) = A(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)},$$

де $u(\omega) = \operatorname{Re}\{W(j\omega)\}$ – дійсна частина КПФ, яка називається *дійсною частотною функцією*; графік цієї функції називається *дійсною частотною характеристикою* (ДЧХ); $v(\omega) = \operatorname{Im}\{W(j\omega)\}$ – уявна частина КПФ, яка називається *уявною частотною функцією*, а її графік – *уявною частотною характеристикою* (УЧХ); $A(\omega) = |W(j\omega)|$ – модуль КПФ – *амплітудна частотна функція*, причому $A(\omega) = \sqrt{u^2(\omega) + v^2(\omega)}$. Графік цієї функції називають *амплітудною частотною ха-*

рактеристикою (АЧХ); $\varphi(\omega) = \text{Arg}\{W(j\omega)\}$ – аргумент КПФ, який називають *фазовою частотною функцією*:

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{v(\omega)}{u(\omega)}.$$

Графік цієї функції називається *фазовою частотною характеристикою* (ФЧХ).

Фізичне значення АЧХ і ФЧХ.

Якщо на вхід системи подати гармонічний сигнал частоти ω : $x(t) = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$, то на виході отримаємо гармонічний сигнал тієї ж частоти ω : $y(t) = A_2 \sin(\omega t + \varphi_2)$, амплітуда і початкова фаза якого може відрізнитися від амплітуди та початкової фази вхідного сигналу (рис. 4.1).

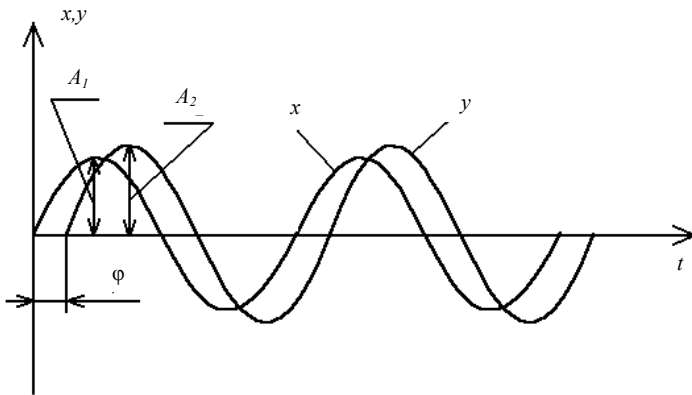


Рис. 4.1. До пояснення фізичного змісту частотних характеристик

АЧХ – це залежність зміни відношення амплітуди вихідного сигналу A_2 до амплітуди вхідного сигналу A_1 від частоти ω вхідного сигналу, тобто

$$A(\omega) = \frac{A_2(\omega)}{A_1(\omega)}.$$

ФЧХ – це залежність зсуву по фазі між вхідним та вихідним сигналами від частоти ω вхідного сигналу, тобто

$$A(\omega) = \frac{A_2(\omega)}{A_1(\omega)}.$$

Саму частотну передаточну функцію $W(j\omega)$ називають також *амплітудно-фазовою частотною функцією*, а її графік на комплексній площині – *амплітудно-фазовою частотною характеристикою* (АФЧХ).

На комплексній площині (рис. 4.2) $W(j\omega)$ визначає вектор $\overline{OC}$, довжина якого дорівнює $A(\omega)$, а аргумент (кут між вектором та дійсною позитивною напіввіссю) – $\varphi(\omega)$.

Крива, яку описує кінець вектора $W(j\omega)$ при зміні частоти ω від 0 до ∞ і називається АФЧХ.

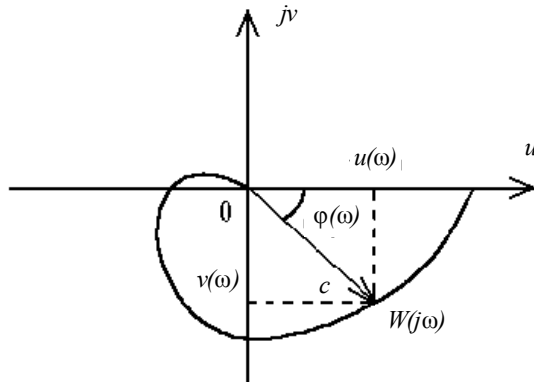


Рис. 4.2. Амплітудно-фазова частотна характеристика

Окрім перелічених частотних характеристик (АФЧХ, АЧХ, ФЧХ, ДЧХ, УЧХ), при аналізі та синтезі САК широко застосовуються також логарифмічні частотні характеристики (ЛЧХ):

ЛАЧХ – логарифмічна амплітудна частотна характеристика;
 ЛФЧХ – логарифмічна фазова частотна характеристика;
 ЛЧХ – це ті ж частотні характеристики системи, але побудовані в іншій системі координат:

– по вісі абсцис відкладають частоту в логарифмічному масштабі: на поділці, що відповідає значенню $\lg(\omega)$, пишуть значення ω ; одиницею виміру служить *декада* – інтервал, на якому частота змінюється в десять раз;

– по вісі ординат значення $A(\omega)$ відкладають в децибелах (дБ), а значення $\varphi(\omega)$ – в градусах.

Логарифмічною амплітудною частотною характеристикою САК називають АЧХ цієї системи, виражену в децибелах та побудовану в логарифмічному масштабі частот.

ЛАЧХ та АЧХ зв'язані співвідношенням:

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg |W(j\omega)|.$$

Логарифмічною фазовою частотною характеристикою САК називають залежність фази φ , вираженою в градусах чи радіанах, від частоти в логарифмічному масштабі.

Системи координат, в яких будуються ЛАЧХ та ЛФЧХ, показані на рис. 4.3.

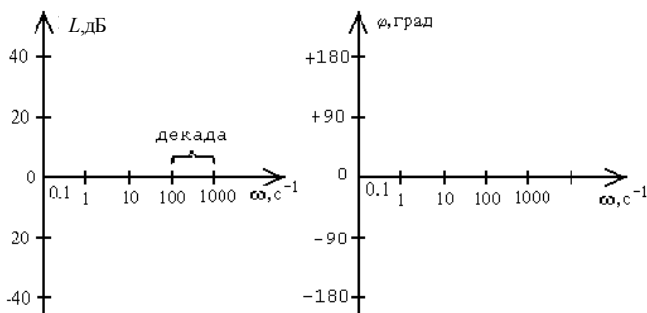


Рис. 4.3. Системи координат логарифмічних частотних характеристик ЛАЧХ та ЛФЧХ

ЛЧХ мають переваги перед звичайними АЧХ та ФЧХ: вони більш наглядні та прості в побудові.

Отже, після вивчення попереднього матеріалу можна зробити такий **висновок**.

Класичний метод дослідження лінійних САК ґрунтується на складанні та подальшому розв'язку диференціальних рівнянь, що зв'язують вихідну координату $y(t)$ з вхідним впливом $x(t)$. Диференціальні рівняння – це *перша форма математичної моделі* САК. Через складність реальних систем та впливів складання та розв'язок цих рівнянь є складною задачею, що потребує застосування ЕОМ.

Мета дослідження спрощується при введенні *другої форми математичної моделі* – передаточної функції за Лапласом, оскільки перетворення Лапласа дозволяє замінити диференціальні рівняння на алгебраїчні.

Третя форма математичної моделі – частотні характеристики – дозволяють розв'язувати алгебраїчні рівняння графічно, що також спрощує задачу. Крім того, частотні характеристики дають ясне фізичне тлумачення властивостей системи.

4.2. Характеристики типових структурних ланок

4.2.1. Поняття динамічної ланки

Реальні САК – це дуже складні системи, до складу яких входять різноманітні елементи. Це робить задачу аналізу та синтезу САК дуже складною. Тому в курсі ТАК вводиться поняття *динамічної ланки* – математичної частини системи (незалежно від фізичної природи та конструкції), що описується рівнянням певного типу. Це дозволяє звести багато різних реальних елементів САК до обмеженого числа типових ланок, а всі реальні САК розглядати як системи, що складаються із з'єднаних між собою типових ланок.

Оскільки рівняння реальних елементів складаються на основі законів, виражених рівняннями не вище другого сту-

пеня (закони Кіргофа, другий закон Ньютона і т. д.), то вони не можуть мати ступінь вище другого. Тому *типовою динамічною ланкою* називають частину системи, яку можна описати диференціальним рівнянням не вище другого ступеня.

До такого визначення можна підійти й математично.

У передаточній функції (3.1) системи коефіцієнти a_i та b_i визначаються параметрами цієї системи, тому вони можуть бути тільки дійсними, а значить, співмножники чисельника та знаменника можна розкласти на лінійні та квадратичні множники виду:

$$k; kp; \frac{k}{p}; \frac{k}{ap+b}; \frac{k}{ap^2+bp+c}; ap+b; ap^2+bp+c.$$

Тому передаточну функцію $W(p)$ можна записати як добуток простих множників та простих дробів.

Звідси можна дати ще одне визначення елементарної або типової динамічної ланки: *типовою динамічною ланкою* називається елемент системи, передаточна функція якого має вигляд простого множника чи простого дробу.

В курсі ТАК виділяють: пропорційну, інтегруючу, диференціальну, аперіодичну, коливальну, консервативну, форсуючу першого та другого ступеня, ланку запізнення та деякі інші (немінімально-фазові) ланки. Розглянемо основні ланки та їх характеристики.

4.2.2. Пропорційна ланка

Пропорційною (підсилювальною, безінерційною) називається ланка, яка описується рівнянням:

$$y(t) = k \cdot x(t).$$

Використовуючи властивості перетворення Лапласа, запишемо операційне рівняння:

$$U_{ВИХ}(p) = k \cdot U_{ВХ}(p).$$

Звідси передаточна функція ланки за Лапасом:

$$W(p) = U_{BHX}(p) / U_{BX}(p) = k .$$

Комплексна передаточна функція та частотні функції ланки мають вигляд:

$$W(j\omega) = k ; u(\omega) = 0 ; v(\omega) = k ;$$

$$A(\omega) = \sqrt{u^2(\omega) + v^2(\omega)} = k ;$$

$$\varphi(\omega) = \arctg(v(\omega)/u(\omega)) = 0 .$$

На рис. 4.4 побудовані відповідні частотні характеристики.

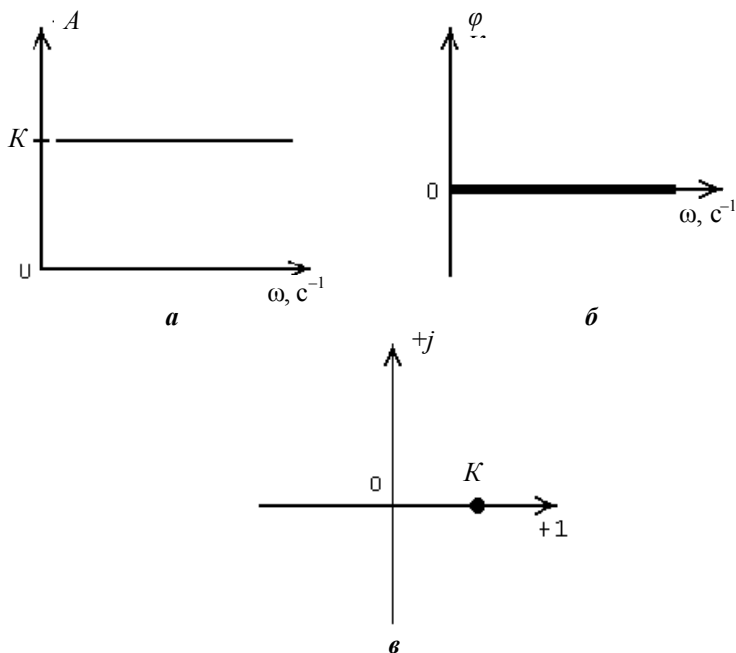


Рис. 4.4. Частотні характеристики пропорційної ланки:
(а) АЧХ; (б) ФЧХ; (в) АФЧХ

Часові функції та відповідні характеристики (рис. 4.5) мають вигляд:

$$h(t) = k \cdot 1(t); \quad \omega(t) = \dot{h}(t) = k \cdot \delta(t) = \delta(t);$$

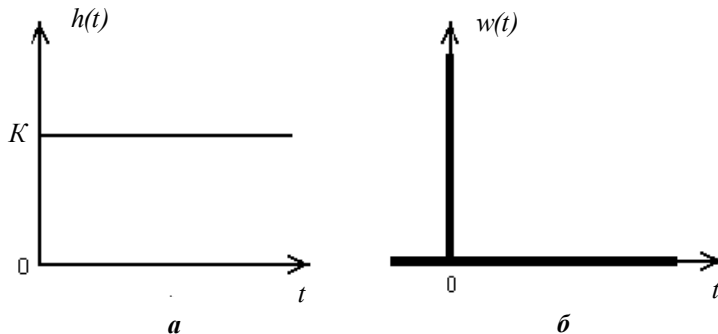


Рис. 4.5. Перехідна (а) та імпульсна перехідна (б) характеристики пропорційної ланки

Для пропорційної ланки характерна відсутність накопичувачів енергії, і тому вона миттєво копіює вхідний сигнал, змінюючи його по величині в k разів.

Прикладами елементів, які можуть бути описані пропорційною ланкою, є: редуктори, трансформатори, підсилювачі і тощо.

Ідеальних підсилювальних елементів не існує, але таким можна вважати елемент, інерційність якого не відбивається на поведінці САК.

4.2.3. Диференціальна ланка

Диференціальною називається ланка, яка описується рівнянням

$$y(t) = k \frac{dx(t)}{dt}.$$

Вихідний сигнал пропорційний швидкості зміни вхідного сигналу.

Операційне рівняння та передаточна функція ланки:

$$U_{ВИХ}(p) = k \cdot p \cdot U_{ВХ}(p); W(p) = \frac{U_{ВИХ}(p)}{U_{ВХ}(p)} = k \cdot p.$$

Частотні функції мають вигляд:

$$W(j\omega) = k \cdot j\omega; u(\omega) = 0; v(\omega) = k\omega;$$

$$A(\omega) = k\omega; \varphi(\omega) = \arctg \frac{k\omega}{0} = \arctg(\infty) = \frac{\pi}{2};$$

Зсув фази не залежить від частоти і дорівнює $\pi/2$. АФЧХ ланки співпадає з позитивною уявною напіввіссю.

Частотні характеристики побудовані на рис. 4.6.

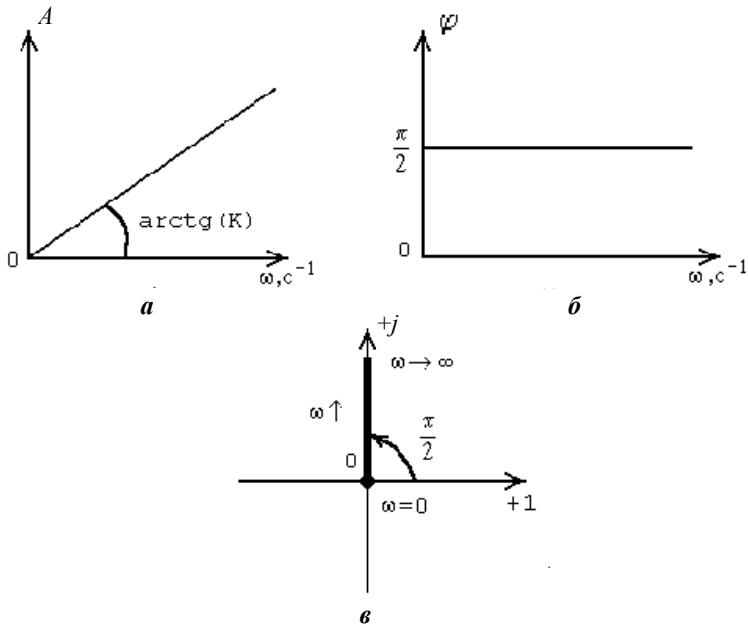


Рис. 4.6. Частотні характеристики диференціальної ланки:
 a – АЧХ; $б$ – ФЧХ; $в$ – АФЧХ

Запишемо логарифмічну амплітудну частотну характеристику ланки:

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg k\omega = 20 \lg k + 20 \lg \omega ;$$

$$\text{при } \omega = 1 \quad L(\omega) = 20 \lg k \quad (\text{дБ});$$

$$\text{при } \omega = 10 \quad L(\omega) = 20 \lg k + 20 \quad (\text{дБ});$$

$$\text{при } \omega = 100 \quad L(\omega) = 20 \lg k + 40 \quad (\text{дБ}),$$

тобто ЛАЧХ являє собою пряму, що проходить через точку з координатами $\omega = 1$; $L(\omega) = 20 \lg k$ та має ухил $+20$ дБ/дек (плюс двадцять децибел на декаду). Це вказує на те, що логарифмічна амплітуда збільшується на 20 дБ за одну декаду (рис. 4.7).

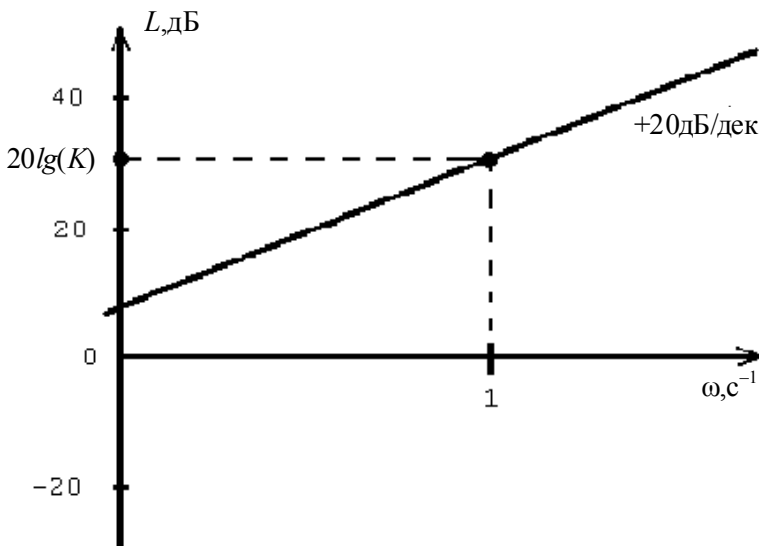


Рис. 4.7. ЛАЧХ диференціальної ланки

Часові функції та характеристики диференціальної ланки (рис. 4.8):

$$h(t) = k \frac{dl(t)}{dt} = k \cdot \delta(t); \quad w(t) = k \cdot \dot{\delta}(t).$$

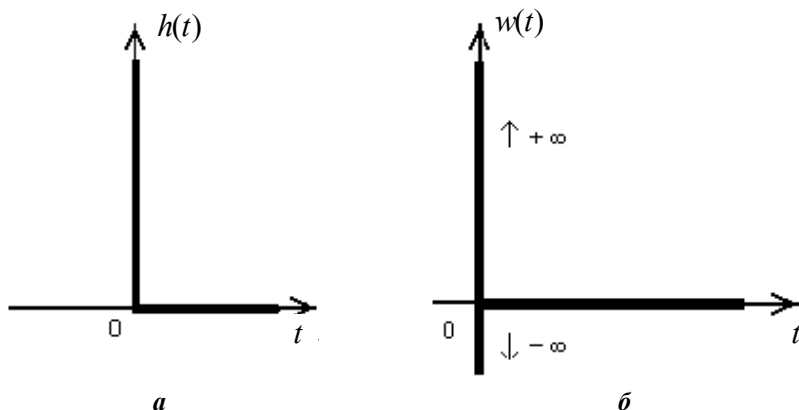


Рис. 4.8. Перехідна (а) та імпульсна перехідна (б) характеристики диференціальної ланки

Прикладами диференціальних ланок можуть бути спідометр, тахогенератор (якщо вхідна величина – кут повороту вала).

4.2.4. Інтегруюча ланка

Інтегруючою називається ланка, яка описується рівнянням

$$y(t) = k \int_0^t x(t) dt.$$

Звідси передаточна функція ланки:

$$U_{ВИХ}(p) = k \cdot \frac{U_{ВХ}(p)}{p}; \quad W(p) = \frac{U_{ВИХ}(p)}{U_{ВХ}(p)} = \frac{k}{p}.$$

КПФ та частотні функції мають вигляд:

$$W(j\omega) = \frac{k}{j\omega} = -j \frac{k}{\omega}; \quad u(\omega) = 0; \quad v(\omega) = -\frac{k}{\omega};$$

$$A(\omega) = \sqrt{u^2(\omega) + v^2(\omega)} = \frac{k}{\omega};$$

$$\varphi(\omega) = \arctg\left(-\frac{k}{\omega \cdot 0}\right) = -\arctg(\infty) = -\frac{\pi}{2}.$$

Зсув фази не залежить від частоти і дорівнює $-\frac{\pi}{2}$. АФЧХ ланки співпадає з негативною уявною напіввіссю.

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \omega;$$

тобто ЛАЧХ являє собою пряму, що проходить через точку з координатами $\omega = 1$; $L(\omega) = 20 \lg k$ та має ухил -20 дБ/дек (мінус двадцять децибел на декаду). Вона перетинає вісь частот при $\omega = k$ (рис. 4.9,з).

Часові функції ланки:

$$h(t) = k \int_0^t 1(t) dt = k \cdot t; \quad w(t) = \dot{h}(t) = k \cdot 1(t).$$

Відповідні їм характеристики інтегруючої ланки побудовані на рис. 4.9.

Інтегруючі ланки відповідають елементам, в яких при постійному входньому впливі встановлюється постійна швидкість зміни вихідної координати: безінерційний двигун постійного струму з незалежним збудженням (ДПС НЗ), якщо

вихідна величина – кут повороту; редуктор, в якого вхідна величина – кутова швидкість, а вихідна – кут повороту вала.

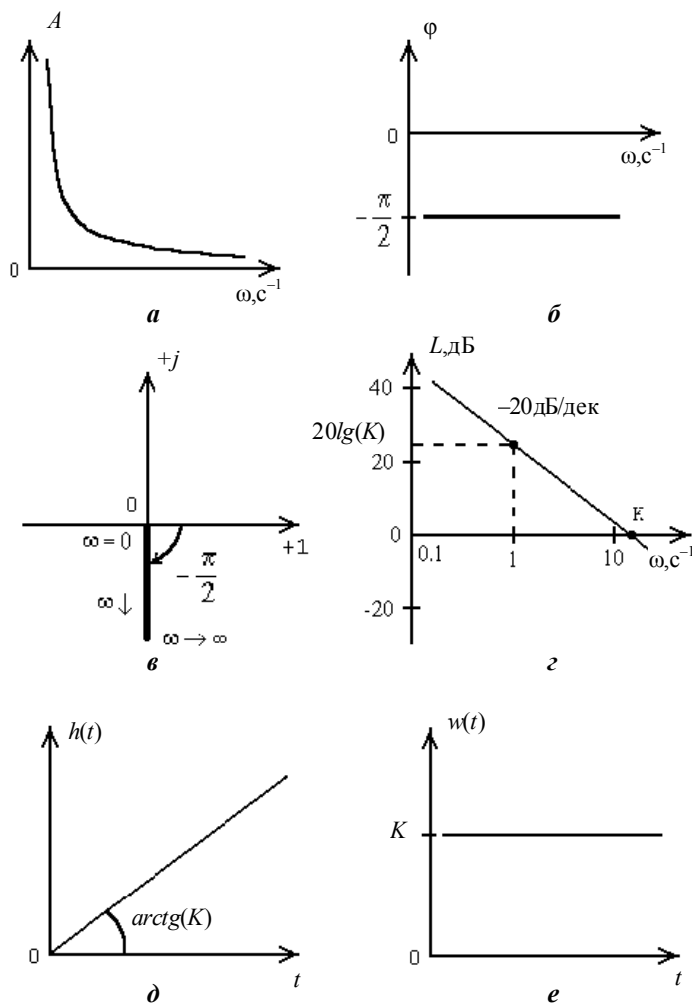


Рис. 4.9. Частотні та часові характеристики інтегруючої ланки:
АЧХ (*a*); ФЧХ (*б*); АФЧХ (*в*); ЛАЧХ (*г*); перехідна (*д*);
імпульсна перехідна (*е*)

4.2.5. Аперіодична ланка

Аперіодичною називається ланка, яка описується рівнянням першого ступеня:

$$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k \cdot x(t).$$

Цю ланку називають також інерційною ланкою. Вона характеризується двома параметрами: постійною часу T (інерційні властивості ланки) та коефіцієнтом передачі k (підсилювальні властивості).

Операційне рівняння має вигляд:

$$\begin{aligned} T \cdot p \cdot U_{ВИХ}(p) + U_{ВИХ}(p) &= k \cdot U_{ВХ}(p), \\ (T \cdot p + 1) \cdot U_{ВИХ}(p) &= k \cdot U_{ВХ}(p). \end{aligned}$$

Звідси передаточна функція ланки:

$$W(p) = \frac{U_{ВИХ}(p)}{U_{ВХ}(p)} = \frac{k}{T \cdot p + 1}.$$

Частотні функції ланки мають вигляд:

$$W(j\omega) = \frac{k}{1 + jT\omega} = \frac{k(1 - jT\omega)}{(1 + jT\omega)(1 - jT\omega)} = \frac{k}{1 + T^2\omega^2} - j \frac{kT\omega}{1 + T^2\omega^2};$$

$$u(\omega) = \frac{k}{1 + T^2\omega^2}; \quad v(\omega) = -\frac{kT\omega}{1 + T^2\omega^2};$$

$$A(\omega) = \sqrt{u^2(\omega) + v^2(\omega)} = \frac{k}{\sqrt{1 + T^2\omega^2}};$$

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{v(\omega)}{u(\omega)} = -\arctg(T\omega);$$

$$\text{при } \omega = 0 \quad \varphi(\omega) = 0;$$

$$\text{при } \omega \rightarrow \infty \quad \varphi(\omega) \rightarrow -\frac{\pi}{2};$$

$$\text{при } \omega = \frac{1}{T} \quad \varphi(\omega) = -\frac{\pi}{4}.$$

АФЧХ ланки являє собою напівколо діаметра k .

Побудуємо ЛАЧХ аперіодичної ланки.

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \sqrt{1 + T^2 \omega^2};$$

при $\omega \ll 1/T$ (ділянка низьких частот) під коренем можна знехтувати другим доданком, а при $\omega \gg 1/T$ (ділянка високих частот) – першим доданком, тобто:

$$L_1(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg 1 = 20 \lg k \text{ – горизонтальна пряма;}$$

$$L_2(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg T\omega \text{ – пряма з ухилом } -20 \text{ дБ/дек.}$$

Обидві прямі перетинаються в точці, яку можна знайти із виразу $L_1(\omega) = L_2(\omega)$, тобто

$$20 \lg k = 20 \lg k - 20 \lg T\omega; \text{ звідси}$$

$$\lg T\omega = 0; \quad T\omega = 1; \quad \omega = \frac{1}{T}.$$

Частота $\omega = 1/T$, в якій перетинаються дві прямі (асимптоти), називається *частотою спряження*.

Побудована при таких припущеннях ЛАЧХ називається асимптотичною. Вона є наближеною. Точна та наближена ЛАЧХ найбільш сильно відрізняються в частоті спряження (відхилення досягає 3 дБ).

Частота, при якій ЛАЧХ перетинає вісь частот ($L = 0$ дБ), називається *частотою зрізу* ω_{zp} . Для цієї частоти маємо:

$$L(\omega_{zp}) = 20 \lg A(\omega_{zp}) = 20 \lg \frac{A_2(\omega_{zp})}{A_1(\omega_{zp})} = 0;$$

звідси $A_2/A_1 = 1$, тобто $A_2 = A_1$.

На частоті зрізу амплітуди вхідного та вихідного сигналів рівні між собою.

Логарифмічна фазова частотна характеристика асимптотично наближається до нуля при $\omega \rightarrow 0$ та до $-\pi/2$ при $\omega \rightarrow \infty$.

Частотні характеристики ланки наведені на рис. 4.10.

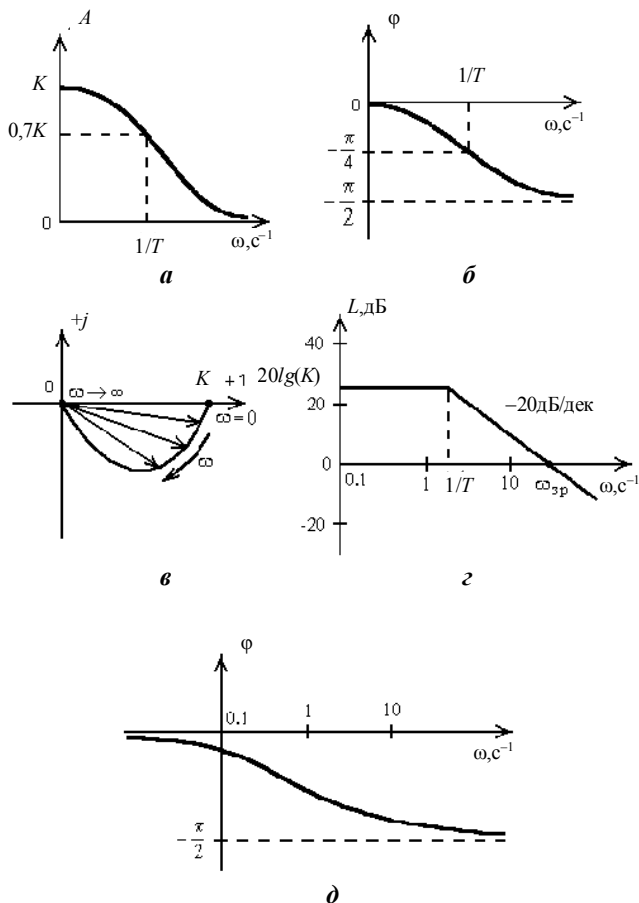


Рис. 4.10. Частотні характеристики аперіодичної ланки:

а – АЧХ; **б** – ФЧХ; **в** – АФЧХ; **з** – ЛАЧХ; **д** – ЛФЧХ

Розв'язуючи диференційне рівняння ланки при $X = 1(t)$ та нульових початкових умовах ($y(0) = 0$) отримаємо перехідну функцію ланки:

$$h(t) = k \left(1 - e^{-t/T} \right); \quad w(t) = \dot{h}(t) = \frac{k}{T} \cdot e^{-t/T}.$$

Перехідна характеристика (рис. 4.11) являє собою експоненціальну криву, усталене значення якої дорівнює коефіцієнту k .

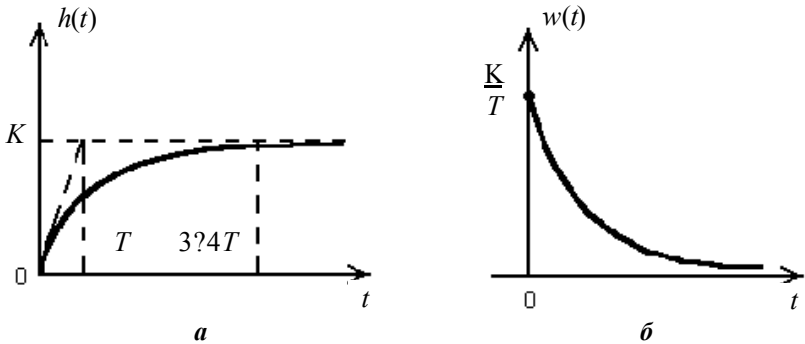


Рис. 4.11. Перехідна (а) та імпульсна перехідна (б) характеристики аперіодичної ланки

Аперіодична ланка відповідає елементам САК, які містять хоча б один накопичувач енергії (ємність, індуктивність, пружина, маса, що рухається і т. д.).

Чим більша величина T , тим повільніше відбувається розсіювання енергії в аперіодичній ланці.

Прикладами можуть служити RC – ланцюжок, LC – ланцюжок, ДПС НЗ великої потужності (з великою електро механічною постійною часу T_m), якщо вихідна величина – кутова швидкість вала двигуна.

4.2.6. Коливальна ланка

Коливальною називається ланка, яка описується рівнянням другого ступеня

$$T^2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2\xi T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k \cdot x(t),$$

де ξ (ксі) – коефіцієнт затухання або демпфування. Для коливальної ланки $0 < \xi < 1$.

Операційне рівняння має вигляд:

$$T^2 p^2 U_{ВИХ}(p) + 2\xi T p U_{ВИХ}(p) + U_{ВИХ}(p) = k \cdot U_{ВХ}(p);$$
$$U_{ВИХ}(p) \cdot (T^2 p^2 + 2\xi T p + 1) = k \cdot U_{ВИХ}(p).$$

Передаточна функція ланки:

$$W(p) = \frac{U_{ВИХ}(p)}{U_{ВХ}(p)} = \frac{k}{T^2 p^2 + 2\xi T p + 1}.$$

Частотні функції мають вигляд:

$$W(j\omega) = \frac{k}{1 - T^2 \omega^2 + 2\xi T j\omega};$$

$$A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{(1 - T^2 \omega^2)^2 + (2\xi T \omega)^2}};$$

при $\omega = 1/T$ $A(\omega) = \frac{k}{2\xi}$, тобто для різних значень коефіцієнта затухання ξ на частоті $\omega = 1/T$, яку називають резонансною,

амплітуда набуває значень від $k/2$ до ∞ . Сукупність АЧХ ланки наведена на рисунку 4.12, *a*.

$$\varphi(\omega) = -\arctg \frac{2\xi T\omega}{1 - T^2\omega^2}, \quad \text{при } \omega \leq \frac{1}{T};$$

$$\varphi(\omega) = -\pi - \arctg \frac{2\xi T\omega}{1 - T^2\omega^2}, \quad \text{при } \omega > \frac{1}{T},$$

тобто при $\omega \rightarrow \infty$ $\varphi(\omega) \rightarrow -\pi$.

Асимптотична ЛАЧХ може бути побудована аналогічно ЛАЧХ аперіодичної ланки:

$$L_1(\omega) = 20 \lg k, \quad \text{при } \omega < \frac{1}{T};$$

$$L_2(\omega) = 20 \lg k - 40 \lg T\omega, \quad \text{при } \omega > \frac{1}{T} - \text{пряма з на-}$$

хилом -40 дБ/дек.

В частоті спряження $\omega = 1/T$ при малих значеннях коефіцієнта згасання асимптотична ЛАЧХ дуже відрізняється від точної ЛАЧХ.

Частотні характеристики наведені на рис. 4.12.

Розв'язуючи диф. рівняння ланки при $x = 1(t)$ та нульових початкових умовах ($y(0) = 0; \dot{y}(0) = 0$), отримаємо перехідну функцію ланки:

$$h(t) = k \left(1 - \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\beta} \cdot e^{-\alpha t} \cdot \sin(\beta t + \varphi_0) \right),$$

$$\text{де } \alpha = \frac{\xi}{T}; \beta = \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{T}; \varphi_0 = \arctg \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\xi}.$$

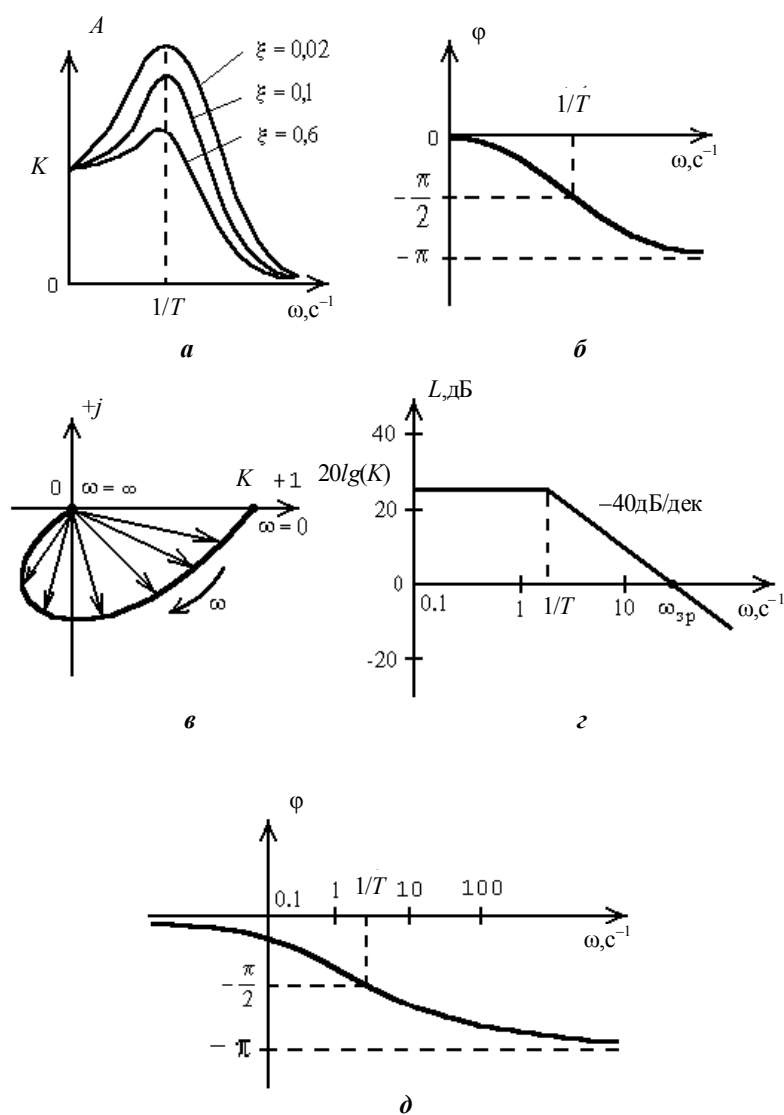


Рис. 4.12. Частотні характеристики коливальної ланки:
а – АЧХ; *б* – ФЧХ; *в* – АФЧХ; *г* – ЛАЧХ; *д* – ЛФЧХ

Перехідна характеристика має вигляд затухаючих коливань, усталене значення яких дорівнює коефіцієнту k (рис. 4.13).

Імпульсна перехідна функція ланки:

$$w(t) = \dot{h}(t) = \frac{k(\alpha^2 + \beta^2)}{\beta} \cdot e^{-\alpha t} \cdot \sin \beta t.$$

Характеристики наведені на рис. 4.13.

До коливальних ланок належать елементи САК, що містять два накопичувачі енергії, в одному з яких накопичується потенціальна енергія, а в іншому – кінетична. Окрім того, має бути елемент, що розсіює цю енергію, тобто канал, по якому накопичувачі обмінюються енергією. Мірою витрати енергії в каналі обміну і є коефіцієнт затухання ξ : зі збільшенням витрат збільшується ξ ; зі зменшенням ξ збільшується коливальність процесу.

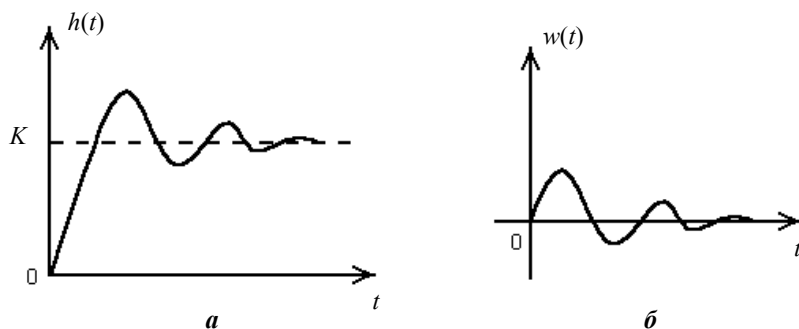


Рис. 4.13. Перехідна (**a**) та імпульсна перехідна (**б**) характеристики коливальної ланки

Приклади пристроїв, що описуються коливальною ланкою, наведені на рис. 4.14.

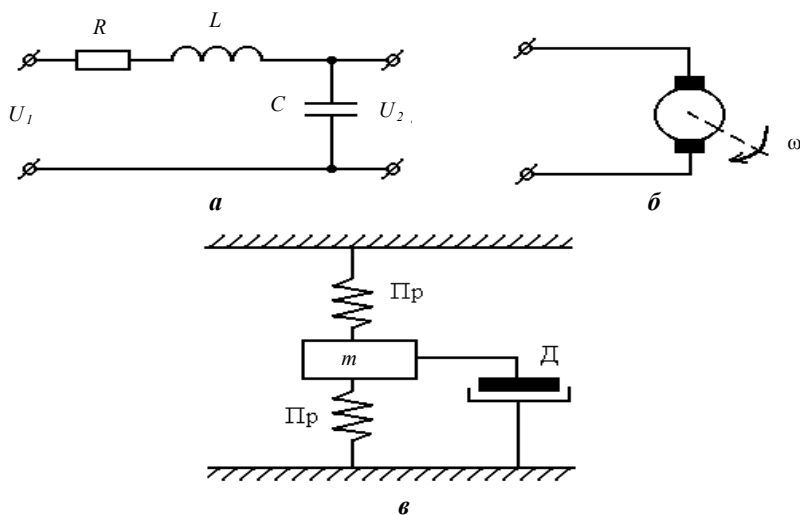


Рис. 4.14. Приклади елементів, що відповідають коливальній ланці

На рис. 4.14,*а* L – накопичувач кінетичної енергії, C – накопичувач кінетичної енергії, R – елемент, на якому розсіюється енергія (теплова).

На рис. 4.14,*б* – ДПС НЗ малої потужності, в якого електромеханічна постійна часу T_m досить мала порівняно з електромагнітною T_e : $T_m < 4 T_e$.

На рис. 4.14,*в* пружина Пр – накопичувач потенціальної енергії; маса, що рухається, m – накопичувач кінетичної енергії. Розсіювання відбувається в демпфері Д.

4.2.7. Консервативна ланка

Якщо опір каналу обміну енергії дорівнює нулю, тобто $\xi = 0$, то коливальна ланка вироджується в консервативну (резонансну) ланку, рівняння якої має вигляд:

$$T^2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + y(t) = k \cdot x(t).$$

Цьому рівнянню відповідає передаточна функція:

$$W(p) = \frac{U_{BIX}(p)}{U_{BX}(p)} = \frac{k}{T^2 p^2 + 1}.$$

Частотні функції ланки:

$${}_0W(j\omega) = \frac{k}{1 - T^2 \omega^2}; \quad u(\omega) = \frac{k}{1 - T^2 \omega^2}; \quad v(\omega) = 0;$$

$$A(\omega) = \frac{k}{1 - T^2 \omega^2}; \quad \varphi(\omega) = 0, \text{ при } \omega \leq \frac{1}{T};$$

$$\varphi(\omega) = -\pi, \text{ при } \omega > \frac{1}{T}.$$

Із цих виразів видно, що АЧХ на частоті $\omega = 1/T$ має розрив, а ФЧХ – східчасто змінює своє значення з 0 на $-\pi$ (рис. 4.15).

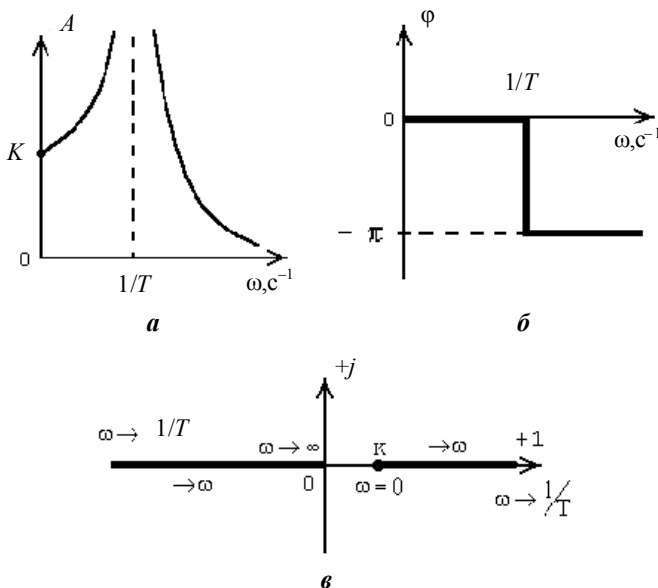


Рис. 4.15. Частотні характеристики консервативної ланки

Перехідна функція ланки

$$h(t) = k(1 - \cos \omega_1 t); \quad \omega_1 = 1/T.$$

Перехідна характеристика (рис. 4.16) має вигляд незатухаючих гармонічних коливань.

Імпульсна перехідна функція:

$$w(t) = \dot{h}(t) = \frac{k}{T} \cdot \sin \frac{t}{T}.$$

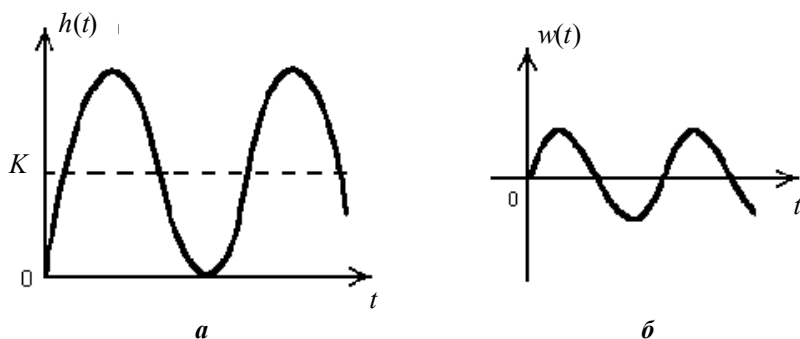


Рис. 4.16. Перехідна (а) та імпульсна перехідна (б) характеристики консервативної ланки

4.2.8. Аперіодична ланка другого ступеня

Якщо коефіцієнт згасання $\xi \geq 1$, то передаточну функцію коливальної ланки можна привести до вигляду:

$$W(p) = \frac{k}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}, \quad \text{де } T_{1,2} = \frac{T}{\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1}}.$$

Цю ланку можна уявити як послідовне з'єднання двох аперіодичних ланок першого ступеня, тому воно не належить до числа елементарних ланок.

Відмітимо, що аперіодичною ланкою другого ступеня може бути описаний ДПС НЗ середньої потужності, для якого $T_m \geq 4T_e$.

4.2.9. Форсуюча ланка

Форсуючою називається ланка, яка описується рівнянням

$$y(t) = k \cdot \left(T \frac{dx(t)}{dt} + x(t) \right).$$

Звідси знаходимо передаточну функцію:

$$U_{ВІХ}(p) = k(T \cdot p \cdot U_{ВХ}(p) + U_{ВХ}(p));$$

$$W(p) = \frac{U_{ВІХ}(p)}{U_{ВХ}(p)} = k(Tp + 1).$$

Частотні функції:

$$W(j\omega) = k(Tj\omega + 1); \quad u(\omega) = k; \quad v(\omega) = kT\omega;$$

$$A(\omega) = k\sqrt{T^2\omega^2 + 1}; \quad \varphi(\omega) = \arctg(T\omega);$$

при $\omega \rightarrow \infty \quad \varphi(\omega) \rightarrow +\pi/2$.

$$L(\omega) = 20 \lg k + 20 \lg \sqrt{1 + T^2\omega^2};$$

при $\omega \ll 1/T; \quad L_1(\omega) = 20 \lg k$

при $\omega \gg 1/T \quad L_2(\omega) = 20 \lg k + 20 \lg T\omega$ – пряма з ухилом +20 дБ/дек.

АФЧХ являє собою пряму, паралельну уявній вісі та перетинаючу дійсну вісь в точці $u = k$.

Частотні характеристики наведені на рис. 4.17.

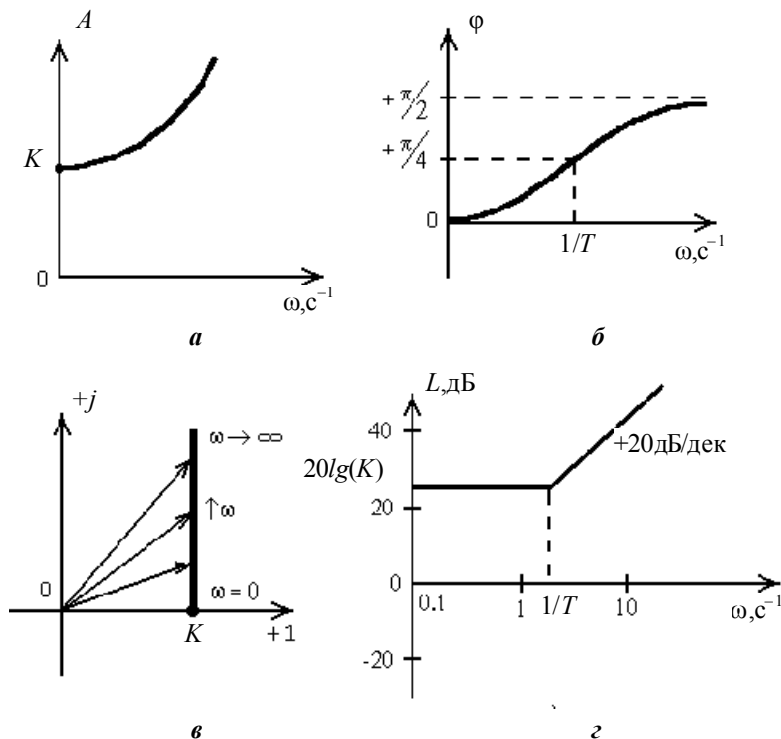


Рис. 4.17. Частотні характеристики форсуючої ланки:
а – АЧХ; б – ФЧХ; в – АФЧХ; г – ЛАЧХ

Часові функції форсуючої ланки:

$$h(t) = k(T \cdot \delta(t) + 1(t)); \quad w(t) = k\left(T \cdot \dot{\delta}(t) + \delta(t)\right).$$

4.2.10. Форсуюча ланка другого ступеня

Ця ланка описується рівнянням:

$$y(t) = k \cdot \left(T^2 \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + 2\xi T \frac{dx(t)}{dt} + x(t) \right)$$

і має передаточну функцію

$$W(p) = k(T^2 p^2 + 2\xi Tp + 1); \quad 0 < \xi < 1.$$

ЛАЧХ та ЛФЧХ ланки наведені на рис. 4.18.

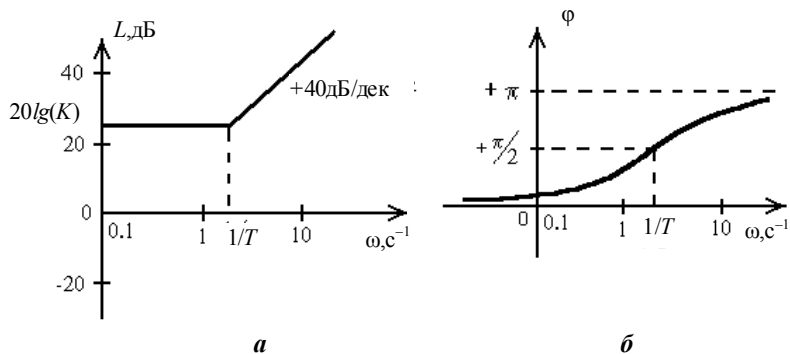


Рис. 4.18. ЛАЧХ (а) та ЛФЧХ (б) форсуючої ланки другого ступеня

Форсуючі ланки першого та другого ступеня практично не реалізуються, а реальні форсуючі ланки обов'язково містять аперіодичні; наприклад, ланка, яку називають ланкою швидкого реагування, має передаточну функцію

$$W(p) = k \cdot \frac{T_1 p + 1}{T_2 p + 1}.$$

4.2.11. Ланка запізнення

Ланка запізнення описується рівнянням

$$y(t) = k \cdot x(t - \tau),$$

де k – коефіцієнт передачі, τ – час запізнення.

Використовуючи теорему запізнення (2.9) запишемо передаточну функцію ланки:

$$U_{ВИХ}(p) = k \cdot e^{-\tau s} \cdot U_{ВХ}(p); W(p) = \frac{U_{ВИХ}(p)}{U_{ВХ}(p)} = k \cdot e^{-\tau s}.$$

Звідси частотні функції ланки:

$$W(j\omega) = k \cdot e^{-j\omega\tau}; A(\omega) = k; \varphi(\omega) = -\tau\omega.$$

АФЧХ являє собою коло з центром в початку координат та радіусом k .

Часові функції мають вигляд:

$$h(t) = k \cdot 1(t - \tau); w(t) = k \cdot \delta(t - \tau).$$

Характеристики ланки запізнення наведені на рис. 4.19.

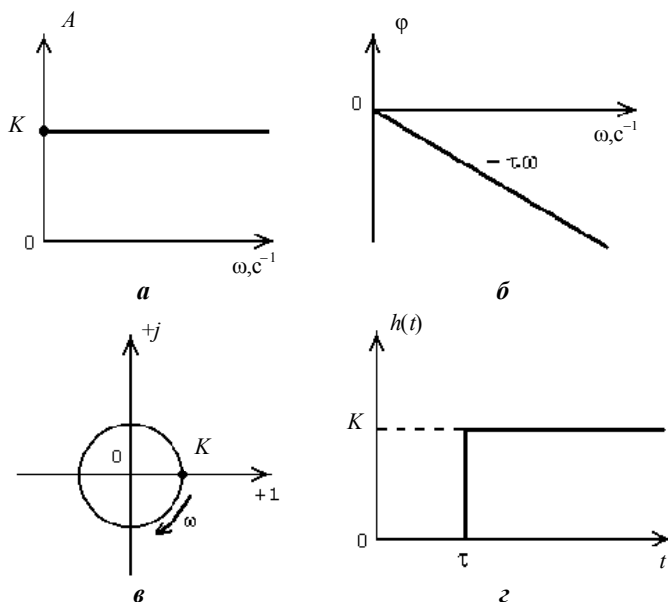


Рис. 4.19. Характеристики ланки запізнення:
a – АЧХ; **б** – ФЧХ; **в** – АФЧХ; **г** – перехідна характеристика

До ланок запізнення можна віднести:

- лінії радіозв'язку (τ – час проходження сигналу);
- довгий трубопровід (τ – час розповсюдження тиску);
- транспортер (τ – час перевезення вантажу).

Ланка запізнення належить до числа ланок немінімально-фазового типу.

Ланка називається немінімально-фазовою, якщо хоча б один нуль чи полюс її передаточної функції має позитивну дійсну частину. Прикладами немінімально-фазових елементарних ланок є ланки з передаточними функціями:

$$W(p) = \frac{k}{Tp - 1}; \quad W(p) = k \cdot (Tp - 1);$$

$$W(p) = \frac{k}{T^2 p^2 - 2\xi Tp + 1}; \quad W(p) = k \cdot (T^2 p^2 - 2\xi Tp + 1).$$

Для немінімально-фазової ланки характерно, що в неї зсув фази за модулем більше, ніж в мінімально-фазової ланки, що має рівноцінну з нею АЧХ.

4.3. Побудова ЛАЧХ розімкнених систем

При дослідженні та проектуванні САК звичайно використовують АФЧХ, ЛАЧХ та ЛФЧХ розімкненої системи.

Передаточні функції розімкнених САК можна перетворити до вигляду:

$$W(p) = \prod_{i=1}^n W_i(p),$$

де $W_i(p)$ – передаточні функції елементарних ланок.

Тоді модулі та аргументи частотних передаточних функцій системи і ланок відповідно до правила модулів та аргументів комплексних чисел зв'язані між собою співвідношеннями:

$$A(\omega) = \prod_{i=1}^n A_i(\omega),$$

$$\varphi(\omega) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(\omega).$$

За цими співвідношеннями можна побудувати АФЧХ розімкненої САК: розрахувати АЧХ та ФЧХ окремих ланок за відомими формулами, АЧХ системи обчислити як добуток АЧХ ланок, а ФЧХ системи обчислити як суму ФЧХ окремих ланок.

Тоді для ЛАЧХ:

$$L(\omega) = \sum_{i=1}^n L_i(\omega).$$

де $L(\omega) = 20 \lg A(\omega)$; $L_i(\omega) = 20 \lg A_i(\omega)$ – логарифмічні амплітудні частотні функції системи та окремих ланок.

Звідси випливає *правило побудови асимптотичної ЛАЧХ розімкненої САК*.

– обчислюють частоти спряження $\omega_i = \frac{1}{T_i}$, де T_i – постійні часу окремих ланок; обчислюють коефіцієнт підсилення розімкненої САК в дБ: $20 \lg k(\text{дБ})$, де $k = \prod_{i=1}^n k_i$ – коефіцієнт підсилення системи;

– відкладають величину $20 \lg k$ на частоті $\omega = 1 \text{ с}^{-1}$; обчислені частоти спряження ω_i відмічають вертикальними пунктирними лініями;

– через точку з координатами $\omega = 1 \text{ с}^{-1}$ та $L = 20 \lg k$ проводять першу асимптоту; її проводять до першої частоти спряження ω_1 з нахилом $-\nu \cdot 20$ дБ/дек. Тут $-\nu$ – ступінь аста-тизму САК, що визначається як різниця між числом інтегру-ючих та диференціальних ланок;

– будують другу асимптоту від кінця першої асимптоти до частоти спряження ω_2 , причому її нахил змінюється на 20; -20; 40; -40 дБ/дек залежно від того, є ω_1 частотою спря-ження форсуючої, аперіодичної, форсуючої другого ступеня чи коливальної ланки відповідно;

– кожную подальшу асимптоту будують аналогічно другій.

Якщо будь-яка частота спряження є кратною, а її кратність дорівнює L , тобто є L однакових елементарних ланок, то зміна нахилу при цій частоті в L разів більше, ніж при відповідній простій частоті.

Розглянемо приклад

Побудувати ЛАЧХ розімкненої САК, передаточна функ-ція якої має вигляд:

$$W(p) = \frac{100 \cdot (p+1)}{p \cdot (10p+1)(0.01p^2 + 0.1p+1)},$$

де $k = 100$; $T_1 = 10$ с (аперіодична ланка); $T_2 = 1$ с (форсуюча ланка); $T_3 = \sqrt{0,01} = 0,1 \text{ с}$ (коливальна ланка).

Оскільки в знаменнику p в першому ступені, тобто є одна інтегруюча ланка, то система астатична першого ступеня і перша асимптота має нахил -20 дБ/дек. В першій частоті

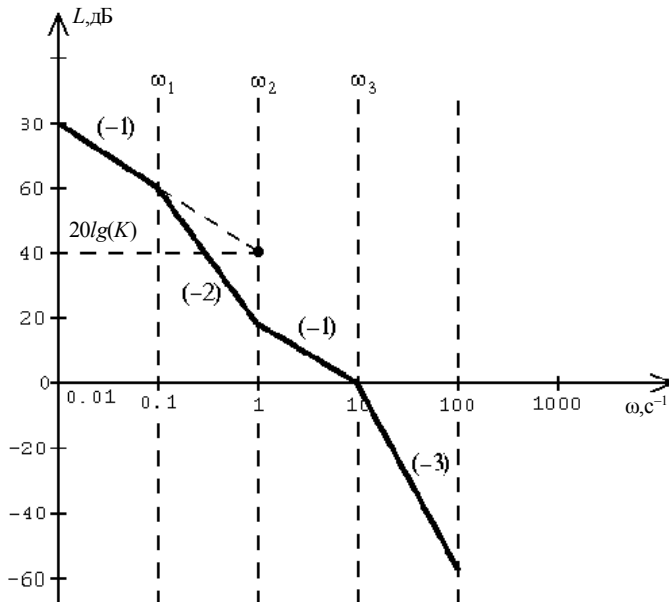
спряження $\omega_1 = \frac{1}{T_1} = \frac{1}{10} = 0,1 \text{ с}^{-1}$ нахил змінюється на

-20 дБ/дек і стає рівним -40 дБ/дек. В другій частоті спряження $\omega_2 = \frac{1}{T_2} = \frac{1}{1} = 1 \text{ c}^{-1}$ нахил змінюється на $+20$ дБ/дек і стає $-$

20 дБ/дек. В третій частоті спряження $\omega_3 = \frac{1}{T_3} = \frac{1}{0,1} = 10 \text{ c}^{-1}$ нахил ЛАЧХ змінюється на -40 дБ/дек і стає рівним -60 дБ/дек.

Обчислюємо $20 \lg k = 20 \lg 100 = 40 \text{ дБ}$ і відмічаємо цю точку на частоті $\omega = 1 \text{ c}^{-1}$.

Асимптотична ЛАЧХ розімкненої САК наведена на рис. 4.20.



- | | |
|-------------------|--------------|
| (-1) – нахил ЛАЧХ | -20 дБ/дек |
| (-2) – нахил ЛАЧХ | -40 дБ/дек |
| (-3) – нахил ЛАЧХ | -60 дБ/дек |

Рис. 4.20. Асимптотична ЛАЧХ розімкненої САК

5. СТІЙКІСТЬ ЛІНІЙНИХ САК

5.1. Поняття стійкості

На будь-яку автоматичну систему завжди діють різні зовнішні впливи, які можуть перешкоджати її нормальній роботі. Правильно спроектована система має стійко працювати при всіх зовнішніх впливах.

У найпростішому випадку під стійкістю САК будемо розуміти властивість системи повертатися у стан рівноваги після зникнення зовнішніх сил, які вивели її з цього стану.

Це поняття можна проілюструвати за допомогою системи куля-поверхня (рис. 5.1).

У випадку, зображеному на рисунку 5.1,*а*, при будь-якому відхиленні шару від положення рівноваги (положення A_0) він буде намагатися повернутися у це положення. Цей випадок відповідає стійкій рівновазі.

У випадку, зображеному на рисунку 5.1,*б*, має місце нестійка рівновага, тобто така система нестійка.

На рисунку 5.1,*в*, стан рівноваги стійкий лише доти, доки відхилення не вийшло за деяку межу.

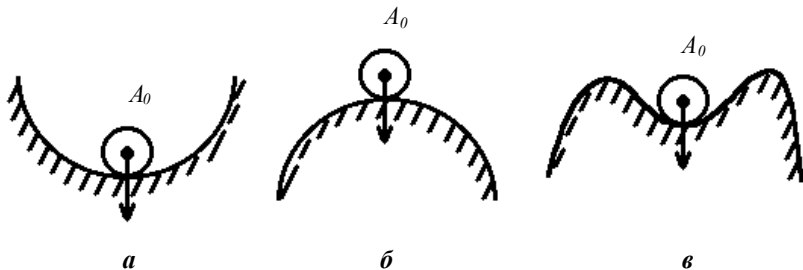


Рис. 5.1. До поняття стійкості рівноважних положень

Якщо система описується лінійним диференціальним рівнянням, то її стійкість не залежить від величини впливів.

Лінійна САК, стійка при малих впливах, буде стійкою і при великих. Нелінійні системи можуть бути стійкі при малих впливах і нестійкі при великих (рис. 5.1, в).

Тому у загальному випадку, розглядаючи нелінійні системи, вводять поняття стійкості "у малому", "у великому" та "в цілому".

Система стійка "у малому", якщо відмічається лише факт наявності області стійкості, але не визначаються її межі.

Систему називають стійкою "у великому", коли визначені межі області стійкості, тобто визначені границі області початкових відхилень, при яких система повертається у початкове положення, і вияснено, що реальні початкові відхилення належать цій області.

У тому випадку, коли система повертається у початкове положення при будь-яких початкових відхиленнях, систему називають стійкою "в цілому".

Зрозуміло, що система, стійка "в цілому", буде стійка "у малому" та "у великому"; система, стійка "у великому", буде стійка "у малому".

Поняття стійкості можна розповсюдити і на більш загальний випадок – випадок руху в незбуреному стані, наприклад, руху за деякою заданою траєкторією.

Припустимо, що заданий рух при відсутності впливів має визначатися законом зміни вихідної координати $y^*(t)$. Це буде *незбурений рух*. Зовнішні впливи спричиняють відхилення дійсного руху системи від заданого. Цей дійсний рух називають *збуреним*. Він визначається координатою $y(t)$. Тоді заданий незбурений рух буде стійким, якщо після закінчення дії зовнішніх впливів збурений рух через деякий час ввійде у задану область $|y(t) - y^*(t)| \leq \xi$, де $\xi = \text{const}$ – задана величина.

5.2. Постановка задачі стійкості за О.М. Ляпуновим

Теореми О.М. Ляпунова про стійкість руху

Вперше чітке визначення стійкості було дане російським вченим О.М. Ляпуновим у 1892 році у роботі "Загальна задача про стійкість руху".

Введемо нову змінну, що дорівнює різниці змінної $y(t)$ у збуреному та незбуреному русі: $x = y(t) - y^*(t)$. Цю змінну називають відхиленням або варіацією величини $y(t)$.

Визначення стійкості за О. М. Ляпуновим можна пояснити таким чином.

Стійкість незбуреного руху означає, що при достатньо малих початкових збуреннях збурений рух буде як завгодно мало відрізнятися від незбуреного руху. Якщо незбурений рух нестійкий, то збурений рух відходить від нього, як би малі не були початкові відхилення.

Незбурений рух називається *асимптотично стійким*, якщо будь-який збурений рух при достатньо малих збуреннях прямує до незбуреного руху, тобто

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0. \quad (5.1)$$

Ми відмітили, що у результаті лінеаризації точні нелінійні диференціальні рівняння замінюються наближеними лінеаризованими рівняннями, які називаються рівняннями першого наближення.

О.М. Ляпунов сформулював теореми, що дозволяють судити про стійкість нелінійних систем за їх лінеаризованими рівняннями (рівняннями першого наближення).

Теорема 1. Якщо дійсні частини всіх коренів p_i характеристичного рівняння першого наближення від'ємні, то незбурений рух асимптотично стійкий.

Теорема 2. Якщо серед коренів p_i характеристичного рівняння першого наближення є хоча б один корінь з додатною дійсною частиною, то незбурений рух нестійкий.

Якщо серед коренів p_i є хоча б один нульовий корінь, а дійсні частини решти коренів від'ємні, то це відповідає критичному випадку і, згідно з О.М.Ляпуновим, стійкість незбуреного руху в цьому випадку не може бути оцінена за рівняннями першого наближення, а потрібний розгляд точних рівнянь.

Умови стійкості лінійних систем автоматичного керування Лінійні САК описуються лінійним диференціальним рівнянням. Розв'язок цього рівняння містить дві складові:

$$y(t) = y_3(t) + y_6(t), \quad (5.2)$$

де $y_3(t)$ – змушена складова, яка залежить від виду правої частини рівняння. Вона визначається як частковий розв'язок неоднорідного рівняння; $y_6(t)$ – вільна складова, яка визначається загальним розв'язком однорідного диференціального рівняння:

$$(a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0) \cdot y_6(t) = 0. \quad (5.3)$$

Звичайно в ТАК цікавляться стійкістю змущеної складової $y_3(t)$ перехідного процесу. Тому за незбурений рух системи приймаємо змущену складову $y_3(t)$. Тоді збуреним рухом буде будь-яка можлива зміна вихідної величини $y(t)$, а відхиленням – вільна складова:

$$y_6(t) = y(t) - y_3(t). \quad (5.4)$$

Тоді відповідно до (5.1) система буде асимптотична стійкою, якщо протягом часу при $t \rightarrow \infty$ вільна складова буде наближатися до нуля, тобто $y_6(t) \rightarrow 0$.

Значить, для того, щоб вияснити необхідні та достатні умови стійкості, потрібно вияснити, за яких умов виконується дана умова, тобто потрібно розв'язати диференціальне рівняння (5.3).

Цей розв'язок має вигляд:

$$y_{\text{с}}(t) = \sum_{i=1}^n C_i \cdot e^{p_i t}, \quad (5.5)$$

де C_i – постійні інтегрування; p_i – корені характеристичного рівняння :

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0 = 0. \quad (5.6)$$

Корені p_i і визначатимуть характер перехідного процесу в системі. У загальному випадку $p_i = \alpha_i + j\omega_i$, тобто корені рівняння (5.6) можуть бути дійсними, комплексно-спряженими, нульовими. На комплексній площині ці корені можуть розташовуватися по-різному (рисунок 5.2).

Корені з від'ємними дійсними частинами прийнято називати *лівими*, оскільки вони лежать у лівій площині. Це p_5, p_6, p_7 .

Корені з додатними дійсними частинами називають *правими коренями* (p_1, p_2, p_3).

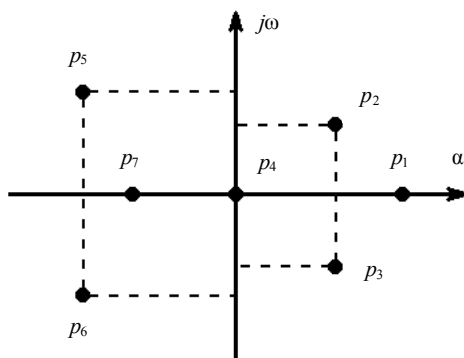


Рис. 5.2. Розташування коренів на комплексній площині

Неважко показати, що для виконання умови $\lim_{t \rightarrow \infty} y_{\varepsilon}(t) = 0$ необхідно, щоб дійсні частини α_i коренів p_i були від'ємними. Звідси випливають необхідні та достатні умови стійкості лінійних САК.

Для того, щоб лінійна система була стійкою, необхідно та достатньо, щоб усі корені її характеристичного рівняння були лівими.

5.3. Критерії стійкості САК

Обчислення коренів просте для характеристичного рівняння першого та другого порядку. Для рівнянь третього та четвертого порядку загальні вирази для коренів громіздкі та незручні у використанні. Загальні вирази для коренів рівнянь вищих порядків не існують.

Тому важливе значення мають правила, які дозволяють визначати стійкість системи без обчислення коренів характеристичного рівняння. Ці правила називають *критеріями стійкості*.

За допомогою критеріїв стійкості можна встановити, стійка система чи ні, а також виявити, як впливають на стійкість ті чи інші параметри та структурні зміни в системі.

Усі критерії можуть бути розподілені на *алгебраїчні* та *частотні*.

До алгебраїчних належать критерії Рауса, Гурвиця, Ляпунова, Шипара. До частотних – критерії стійкості Михайлова, Найквіста, логарифмічний критерій.

5.3.1. Алгебраїчні критерії стійкості

Алгебраїчні критерії дозволяють судити про стійкість САК за коефіцієнтами характеристичного рівняння (5.6).

Відмітимо спочатку, що необхідною умовою стійкості системи будь-якого порядку є додатність усіх коефіцієнтів характеристичного рівняння, тобто

$$a_n > 0; \quad a_{n-1} > 0; \quad \dots; \quad a_1 > 0; \quad a_0 > 0, \quad (5.7)$$

Для систем першого та другого порядків необхідна умова (5.7) є і достатньою умовою стійкості.

Для систем третього та вищих порядків додатність коефіцієнтів є необхідною умовою, але недостатньою.

Критерій стійкості Гурвиця

Цей критерій був запропонований у 1895 році німецьким математиком О. Гурвицем у вигляді визначників, що складаються за коефіцієнтами характеристичного рівняння системи.

Спочатку будують головний визначник Гурвиця за таким правилом: по головній діагоналі визначника зліва направо виписують усі коефіцієнти характеристичного рівняння від a_{n-1} до a_0 у напрямі зменшення індексів. Стовпці вгору від головної діагоналі доповнюють коефіцієнтами з індексами, що послідовно зменшуються, а стовпці вниз – коефіцієнтами з індексами, що послідовно збільшуються. Місця у визначнику, що залишилися, заповнюють нулями. Тобто визначник має вигляд:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_0 \end{vmatrix}. \quad (5.8)$$

Відкреслюючи у головному визначникові Гурвиця, як показано пунктиром, діагональні мінори, отримуємо визначники Гурвиця нижчого порядку:

$$\Delta_1 = a_{n-1}; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{vmatrix}; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}. \quad (5.9)$$

Критерій стійкості Гурвиця формулюється таким чином: *для того, щоб система автоматичного управління була стійкою, необхідно та достатньо, щоб усі визначники Гурвиця були додатними.*

В останньому стовпці головного визначника Гурвиця (5.8) відрізняється від нуля лише один коефіцієнт a_0 , тому

$$\Delta_n = a_0 \cdot \Delta_{n-1}. \quad (5.10)$$

Звідси видно, що при $a_0 > 0$ для перевірки стійкості системи достатньо знайти лише визначники Гурвиця від Δ_1 до Δ_{n-1} (головний визначник Δ_n обчислювати не потрібно).

Якщо всі визначники нижчого порядку додатні, то система знаходиться на межі стійкості, коли головний визначник дорівнює нулю, тобто

$$\Delta_n = a_0 \cdot \Delta_{n-1} = 0. \quad (5.11)$$

Це можливо у двох випадках: $a_0 = 0$ чи $\Delta_{n-1} = 0$.

Використовуючи критерій Гурвиця, можна за заданими параметрами системи прийняти за невідомий будь-який один параметр (наприклад, коефіцієнт підсилення) та визначити його граничне чи критичне значення, при якому система буде знаходитися на межі стійкості.

Приклад: характеристичне рівняння системи має вид:

$$a_4 p^4 + a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = 0.$$

$$a_4 = 5; \quad a_3 = 3; \quad a_2 = 6; \quad a_1 = 2; \quad a_0 = 1.$$

Усі коефіцієнти рівняння додатні. Визначник Гурвиця матиме вигляд:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 & 0 & 0 \\ a_4 & a_2 & a_0 & 0 \\ 0 & a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_4 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & 1 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 3 \cdot 6 - 5 \cdot 2 = 8 > 0;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 5 & 6 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 6 \cdot 2 - 5 \cdot 2 \cdot 2 - 3 \cdot 1 \cdot 3 = 7 > 0.$$

Значить, система стійка.

Визначимо критичне значення коефіцієнта a_0 , прийнявши його за невідомий параметр:

$$\Delta_4 = a_0 \cdot \Delta_3 = a_0 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 5 & 6 & a_0 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0. \text{ звідси}$$

$$a_0 \cdot (3 \cdot 6 \cdot 2 - 5 \cdot 2 \cdot 2 - 3 \cdot a_0 \cdot 3) = 0;$$

$$a_0 \cdot (16 - 9 \cdot a_0) = 0;$$

$a_0^{\text{кр}} = 16/9$, тобто при $a_0 > 16/9$ система стає нестійкою.

Критерій стійкості Льєнара–Шипара

Даний критерій, запропонований у 1914 році П. Льєнаром та Р. Шипаром, є однією з модифікацій критерію Гурвиця. Приведемо його без доказу.

Якщо додатні всі коефіцієнти характеристичного рівняння системи, то для її стійкості необхідно та достатньо, щоб були додатними всі визначники Гурвиця з парними або непарними індексами.

Тобто для стійкості САК необхідно та достатньо виконання таких нерівностей:

$$\begin{cases} a_n > 0, & a_{n-1} > 0, & \dots, & a_1 > 0, & a_0 > 0 \\ \Delta_1 > 0, & \Delta_3 > 0, & \Delta_5 > 0, & \dots & \dots \end{cases} \quad (5.12)$$

або

$$\begin{cases} a_n > 0, & a_{n-1} > 0, & \dots, & a_1 > 0, & a_0 > 0 \\ \Delta_2 > 0, & \Delta_4 > 0, & \Delta_6 > 0, & \dots & \dots \end{cases} \quad (5.13)$$

Критерій Лєнара–Шипара потребує розкриття меншого числа визначників, ніж критерій Гурвиця, і тому зручніший для дослідження стійкості САК високого порядку.

5.3.2. Частотні критерії стійкості

Частотні критерії стійкості дозволяють судити про стійкість САК за виглядом їх частотних характеристик. Ці критерії є графоаналітичними та отримали широке розповсюдження, оскільки вони дозволяють порівняно легко досліджувати стійкість САК високого порядку, а також мають наглядність та просту геометричну інтерпретацію.

В основі частотних критеріїв стійкості лежить наслідок із відомого принципу аргумента.

Принцип аргумента

Нехай дано поліном n -го ступеня

$$D(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0. \quad (5.14)$$

Цей поліном може бути розкладений на співмножники:

$$D(p) = a_n \cdot (p - p_1) \cdot (p - p_2) \cdot \dots \cdot (p - p_n), \quad (5.15)$$

де $S_i = \alpha_i + j\omega_i$ – корені рівняння $D(p) = 0$.

На комплексній площині кожний корінь p_i зображується у вигляді вектора, проведеного з початку координат до точки p_i . Довжина цього вектора дорівнює модулю комплексного числа $|p_i|$, а кут між вектором та дійсною додатною напіввіссю – аргументу числа, тобто $\text{Arg } p_i$.

Різниця $(p - p_i)$ зображується вектором, проведеним з точки p_i до довільної точки p (рисунок 5.3,а). Якщо взяти випадок, коли $p = j\omega$, то отримаємо:

$$D(j\omega) = a_n \cdot (j\omega - p_1)(j\omega - p_2) \dots (j\omega - p_n). \quad (5.16)$$

Тоді кінці векторів $(j\omega - p_i)$ знаходитимуться в одній точці на уявній вісі $p = j\omega$ (рис. 5.3,б).

У виразі (5.16) $D(j\omega)$ являє собою вектор, рівний добутку елементарних векторів $(j\omega - p_i)$ та числа a_n .

Модуль цього вектора дорівнює добутку модулів елементарних векторів та a_n , а аргумент дорівнює сумі аргументів елементарних векторів.

Прийнято вважати обертання вектора проти годинникової стрілки додатним, а за годинниковою – від'ємним. Тоді при зміні частоти ω від $-\infty$ до $+\infty$ кожний вектор обернеться на кут π , якщо його початок, тобто корінь p_i , знаходиться зліва від уявної вісі (лівий корінь), і на кут $-\pi$, якщо корінь правий (рисунок 5.3,в).

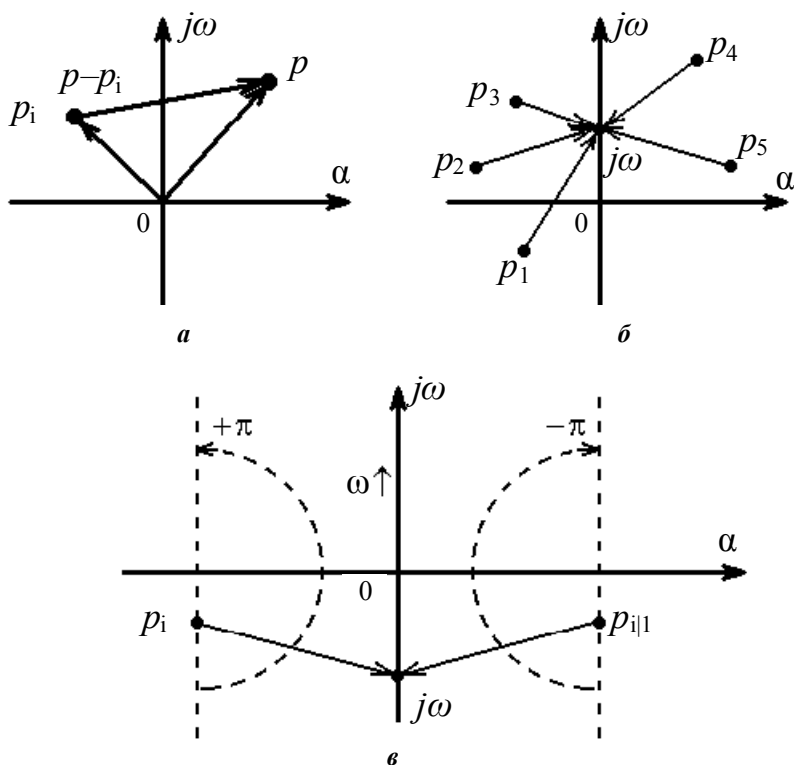


Рис. 5.3. До пояснення принципу аргументу

Припустимо, що поліном (5.14) має m правих коренів і $(n-m)$ лівих коренів (усього коренів у полінома n -го ступеня $-n$). Тоді за зміною ω від $-\infty$ до $+\infty$ приріст аргументу вектора $D(j\omega)$, що дорівнює сумі кутів обертання векторів $(j\omega - p_i)$, дорівнює:

$$\Delta \text{Arg}(D(j\omega)) \Big|_{\omega = -\infty}^{\omega = \infty} = \pi \cdot (n - m) - \pi m = \pi \cdot (n - 2m). \quad (5.17)$$

Значить, *приріст аргументу* $D(j\omega)$ *при зміні частоти* ω від $-\infty$ до $+\infty$ *дорівнює різниці між числом лівих та правих коренів рівняння* $D(p) = 0$, *помноженої на* π .

У цьому полягає принцип аргументу.

Якщо розглядати зміну частоти ω від 0 до $+\infty$, то зміна аргументу вектора $D(j\omega)$ буде вдвічі менша:

$$\Delta \text{Arg}(D(j\omega)) \bigg|_{\omega=0}^{\omega=\infty} = \frac{\pi}{2} \cdot (n - m). \quad (5.18)$$

Критерій стійкості Михайлова

Критерій, сформульований у 1938 році радянським вченим О.В. Михайловим, є геометричною інтерпретацією принципу аргументу та дозволяє судити про стійкість системи за деякою кривою, що називається кривою Михайлова.

Нехай дано характеристичне рівняння системи (5.6). Ліва частина цього рівняння називається характеристичним поліномом (5.14).

Якщо підставити в нього уявне значення $s = j\omega$, то отримаємо комплексний поліном:

$$\begin{aligned} D(j\omega) &= a_n (j\omega)^n + a_{n-1} (j\omega)^{n-1} + \dots + a_1 j\omega + a_0 = \\ &= U(\omega) + jV(\omega) = D(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)}, \end{aligned} \quad (5.19)$$

де $U(\omega)$ та $V(\omega)$ – дійсна та уявна функції Михайлова; $D(\omega)$ та $\varphi(\omega)$ – модуль та аргумент вектора $D(j\omega)$.

Причому,

$$\begin{cases} U(\omega) = a_0 - a_2\omega^2 + a_4\omega^4 - \dots \\ V(\omega) = a_1\omega - a_3\omega^3 + a_5\omega^5 - \dots \end{cases} \quad (5.20)$$

При зміні частоти ω від 0 до $+\infty$ вектор $D(j\omega)$ буде змінюватися за модулем та напрямком і описувати при цьому своїм кінцем у комплексній площині деяку криву, яку називають кривою (годографом) Михайлова.

Кут повороту вектора $D(j\omega)$ навколо початку координат при зміні частоти ω від 0 до $+\infty$ визначається формулою (5.18).

Звідси кількість правих коренів полінома $D(p)$:

$$m = \frac{\frac{\pi}{2} \cdot n - \Delta \operatorname{Arg}(D(j\omega)) \Big|_{\omega=0}^{\omega=\infty}}{\pi}. \quad (5.21)$$

Значить, кількість правих коренів дорівнюватиме нулю, якщо

$$\Delta \operatorname{Arg}(D(j\omega)) \Big|_{\omega=0}^{\omega=\infty} = \frac{\pi}{2} \cdot n. \quad (5.22)$$

Для стійкості системи необхідно та достатньо, щоб усі корені характеристичного рівняння були лівими, тобто, крім умови (5.22), має ще виконуватися умова

$$D(j\omega) \neq 0. \quad (5.23)$$

Формули (5.22) та (5.23) є математичним виразом критерію стійкості Михайлова.

Із (5.20) випливає, що при $\omega = 0$ $U(0) = a_0$; $V(0) = 0$, тобто крива Михайлова починається на дійсній напіввісі: $D(0) = a_0 > 0$.

Звідси випливає формулювання критерію стійкості Михайлова:

Для того, щоб система автоматичного керування була стійкою, необхідно та достатньо, щоб крива Михайлова при

зміні частоти ω від 0 до $+\infty$, починаючись при $\omega = 0$ на дійсній напіввісі, обходила тільки проти годинникової стрілки послідовно n квадрантів (чвертей) координатної площини, де n – порядок характеристичного рівняння, ніде не перетворюючись в нуль.

Крива Михайлова для стійких систем має плавну спіральну форму, та кінець її прямує до нескінченості у квадранті, номер якого дорівнює ступеню характеристичного рівняння (рис. 5.4).

Кількість прaviх коренів для нестійкої САК можна визначити за (5.21).

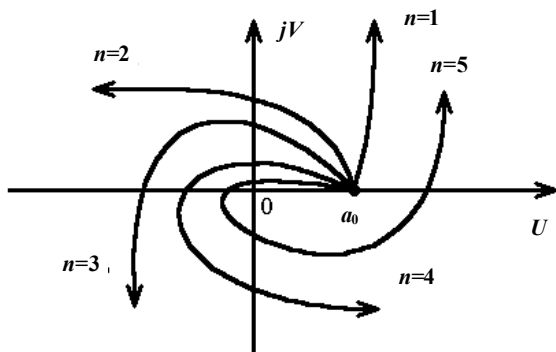


Рис. 5.4. Приклади кривих Михайлова для стійких САК

Із рисунку 5.4 випливає, що крива Михайлова при послідовному проходженні квадрантів *почергово* перетинає дійсну та уявну вісі. У точках перетину з дійсною віссю уявна функція Михайлова дорівнює нулю: $V(\omega) = 0$. У точках перетину з уявною віссю стає рівною нулю дійсна функція Михайлова: $U(\omega) = 0$.

$U(\omega)$ та $V(\omega)$ можуть бути зображені графічно у вигляді деяких кривих (рис. 5.5). Точки перетину цих кривих з віссю частот дають значення коренів рівнянь

$$U(\omega) = 0; \quad V(\omega) = 0.$$

Якщо $\omega_0, \omega_2, \omega_4, \dots$ – це корені рівняння $V(\omega) = 0$, а $\omega_1, \omega_3, \omega_5, \dots$ – корені рівняння $U(\omega) = 0$, причому $\omega_0 < \omega_2 < \omega_4 < \dots$; $\omega_1 < \omega_3 < \omega_5 < \dots$, то для стійкої системи обов'язкове виконання нерівності:

$$\omega_0 < \omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < \omega_4 < \omega_5 < \dots \quad (5.24)$$

Звідси випливає ще одне формулювання критерію стійкості Михайлова:

САК буде стійкою тоді й тільки тоді, коли дійсна $X(\omega)$ та уявна $Y(\omega)$ функції Михайлова, прирівняні до нуля, мають усі дійсні та переміжні корені, причому загальна кількість коренів дорівнює порядку n характеристичного рівняння, а при $\omega = 0$ виконуються умови $U(\omega) = a_0 > 0$; $V(\omega) > 0$.

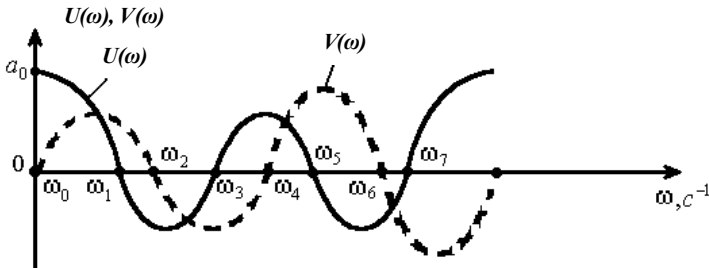


Рис. 5.5. Дійсна та уявна функції Михайлова

Критерій стійкості Найквіста

Цей частотний критерій стійкості, розроблений у 1932 р. американським вченим Г. Найквістом, дозволяє виносити судження про стійкість замкнутої САК за виглядом АФЧХ розімкнутої системи.

Нехай передаточна функція розімкнутої системи:

$$W(p) = \frac{R(p)}{Q(p)}.$$

Тоді комплексна передаточна функція

$$W(j\omega) = \frac{R(j\omega)}{Q(j\omega)} = U(\omega) + jV(\omega) = A(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)}, \quad (5.25)$$

де $U(\omega)$ і $V(\omega)$ – дійсна та уявна частини КПФ; $A(\omega)$ і $\varphi(\omega)$ – модуль та фаза КПФ.

Розглянемо допоміжну функцію

$$\Phi(p) = 1 + W(p) = 1 + \frac{R(p)}{Q(p)} = \frac{Q(p) + R(p)}{Q(p)} = \frac{D(p)}{Q(p)}, \quad (5.26)$$

де $D(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0$ – характеристичний поліном замкнутої системи.

Оскільки в реальних системах ступінь поліному $R(p)$ не вище ступеня поліному $Q(p)$, тобто $m \leq n$, то ступені чисельника та знаменника дробу (5.26) однакові та дорівнюють n .

Приймаючи $p = j\omega$, отримаємо

$$\Phi(j\omega) = 1 + W(j\omega) = \frac{D(j\omega)}{Q(j\omega)}. \quad (5.27)$$

Нехай характеристичне рівняння замкнутої САК $D(p) = 0$ має m правих та $(n-m)$ лівих коренів, а характеристичне рівняння розімкнутої системи $Q(p) = 0$ має L правих та $(n-L)$ лівих коренів.

При зміні частоти ω від $-\infty$ до $+\infty$ зміна кута повороту вектора $\Phi(j\omega)$ за принципом аргументу (5.17) буде:

$$\begin{aligned} \Delta \text{Arg}(\varphi(j\omega)) \Big|_{\omega=-\infty}^{\omega=\infty} &= \Delta \text{Arg}(D(j\omega)) - \Delta \text{Arg}(Q(j\omega)) = \\ &= \pi[(n-m) - m] - \pi[(n-L) - L] = 2\pi(L-m). \end{aligned} \quad (5.28)$$

Для стійкості замкнутої САК необхідно і достатньо, щоб усі корені її характеристичного рівняння були лівими, тобто $m = 0$.

Тоді сумарний поворот вектора $\varphi(j\omega)$ стійкої системи навколо початку координат має бути рівний

$$\Delta \text{Arg}(\Phi(j\omega)) \Big|_{\omega=-\infty}^{\omega=\infty} = 2\pi L. \quad (5.29)$$

Звичайно розглядають тільки додатні частоти $\omega > 0$, тоді

$$\Delta \text{Arg}(\Phi(j\omega)) \Big|_{\omega=0}^{\omega=\infty} = \pi L = \frac{2\pi L}{2}. \quad (5.30)$$

Значить, якщо розімкнута система є нестійкою і має L правих коренів, то замкнута система буде стійкою тоді й тільки тоді, коли АФЧХ допоміжної функції $\Phi(j\omega)$ при зміні частоти ω від 0 до ∞ охоплює початок координат у додатному напрямку $L/2$ раз.

Із (5.27) випливає, що кількість обертів вектора $\Phi(j\omega)$ навколо початку координат дорівнює кількості обертів вектора $W(j\omega)$ навколо точки $(-1; j0)$. Звідси випливає формулювання критерію стійкості Найквіста:

Якщо розімкнута САК нестійка, то для того, щоб замкнута САК була стійкою, необхідно та достатньо, аби АФЧХ розімкнутої системи $W(j\omega)$ при зміні частоти ω від 0 до ∞ охоплювала точку $(-1; j0)$ в додатному напрямку $L/2$ раз, де L – кількість правих коренів характеристичного рівняння розімкнутої САК.

На практиці зручніше користуватися наступним формулюванням критерію:

Якщо розімкнута САК нестійка, то для того, щоб замкнута САК була стійкою, необхідно та достатньо, щоб різниця

між кількістю додатних та від'ємних переходів АФЧХ розімкнутої САК через відрізок дійсної вісі $(-\infty; -1)$ при зміні частоти ω від 0 до ∞ дорівнювала $L/2$, де L – кількість правих коренів характеристичного рівняння розімкнутої системи.

Додатним переходом характеристики $W(j\omega)$ через відрізок дійсної вісі $(-\infty; -1)$ при зростанні називається перехід зверху вниз; від'ємним – знизу вгору.

Якщо характеристика $W(j\omega)$ починається на відрізку $(-\infty; -1)$ при $\omega = 0$ чи закінчується на ньому при $\omega = \infty$, то вважають, що вона здійснює *напівперехід*.

Пояснимо це формулювання рис. 5.6.

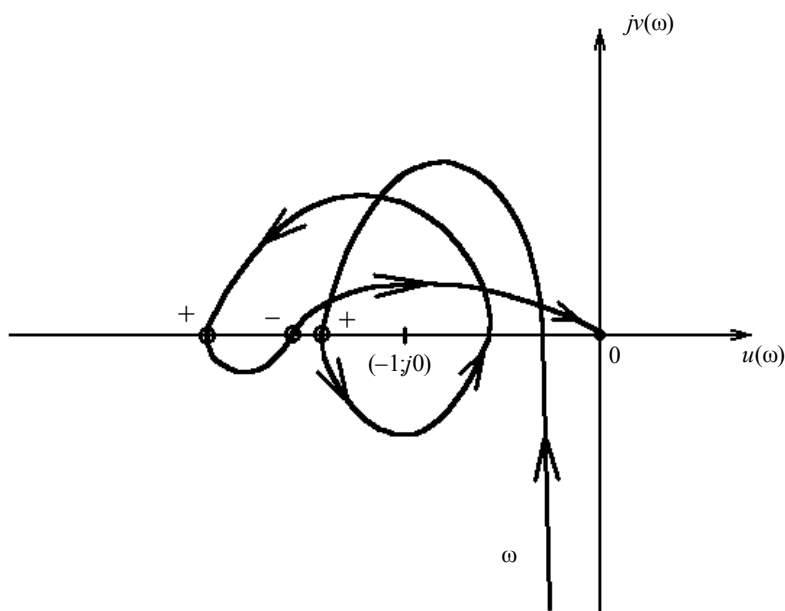


Рис. 5.6. Ілюстрація до формулювання критерію стійкості Найквіста

На рис. 5.6 різниця між додатними та від'ємними переходами дорівнює одиниці: $(2-1) = 1$. Якщо розімкнута система нестійка і $L = 2$, то замкнута САК буде стійкою.

Якщо САК у розімкнутому стані стійка, тобто $L = 0$, то із (5.30) випливає, що $\Delta \text{Arg}(\Phi(j\omega)) = 0$, а значить – АФЧХ розімкнутої САК не повинна охоплювати точку $(-1; j0)$. Отримуємо наступне формулювання критерію:

Якщо розімкнута САК стійка, то замкнута САК буде стійкою, якщо АФЧХ розімкнутої САК $W(j\omega)$ не охоплює точку з координатами $(-1; j0)$.

За віддаленням АФЧХ розімкнутої САК від точки $(-1; j0)$ можна визначити запас стійкості, який характеризується двома величинами: *запасом стійкості за фазою $\varphi_{\text{зан}}$ та запасом стійкості за амплітудою $A_{\text{зан}}$* (рис. 5.7).

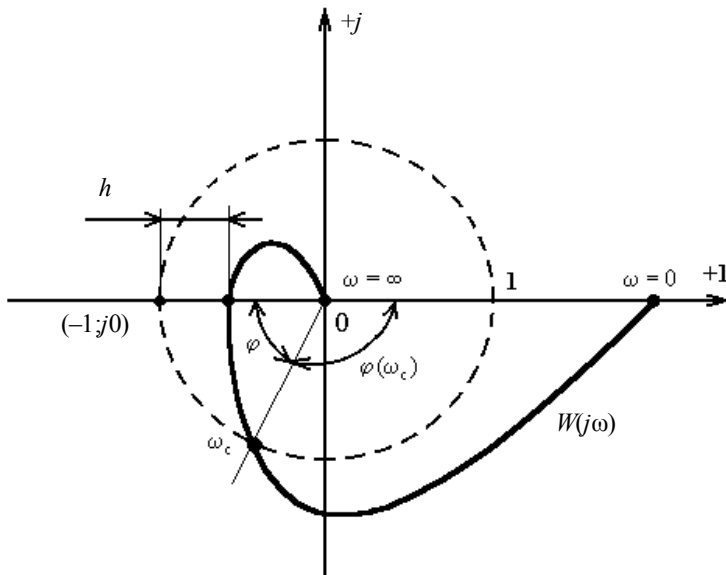


Рис. 5.7. Визначення запасів стійкості

Запас стійкості за фазою $\varphi_{зан}$ визначають як величину кута $\varphi = \pi - |\varphi(\omega_3)|$ для частоти зрізу ω_3 , при якій $|W(\omega_3)| = 1$.

Запас стійкості за амплітудою $A_{зан}$ визначають як величину відрізка вісі абсцис h , що знаходиться між критичною точкою $(-1; j0)$ та АФЧХ.

При збільшенні коефіцієнта підсилення розімкнутої системи модуль АФЧХ також зростає і при деякому значенні цього коефіцієнта $K = K_{гран}$, що називається *критичним коефіцієнтом підсилення*, АФЧХ пройде через точку $(-1; j0)$, тобто $h = 0$ і система буде на межі стійкості. При $K > K_{гран}$ система буде нестійкою.

Критерій стійкості Найквіста може бути використаний у тих випадках, коли диференціальні рівняння системи (чи окремих ланок) невідомі, але експериментально визначені частотні характеристики. Крім того, критерій дозволяє зв'язати дослідження стійкості системи з наступним аналізом якості.

5.4. Аналіз стійкості за логарифмічними частотними характеристиками

В інженерній практиці широке застосування отримав аналіз стійкості САК за логарифмічними частотними характеристиками розімкнутої системи. Це пов'язано з тим, що побудова ЛЧХ розімкнутих систем простіша, ніж побудова їх АФЧХ.

Відповідно до критерію Найквіста стійкість пов'язана з кількістю переходів АФЧХ $W(j\omega)$ через відрізок $(-\infty; -1)$ від'ємної дійсної напіввісі. Коли $W(j\omega)$ перетинає від'ємну дійсну напіввісь, ЛФЧХ перетинає пряму $(-\pi)$.

Додатному переходу (зверху вниз) через відрізок $(-\infty; -1)$ характеристики $W(j\omega)$ відповідає перетин ЛФЧХ при $L(\omega) > 0$

прямої $(-\pi)$ знизу вгору (точка 2 на рис. 5.8). а від'ємному переходу – зверху вниз (точка 1 на рис. 5.8).

Тоді критерій стійкості Найквіста стосовно до ЛЧХ можна сформулювати таким чином:

Для того, щоб САК була стійкою, необхідно і достатньо, щоб різниця між числом додатних та від'ємних переходів ЛФЧХ через пряму $(-\pi)$ на всіх ділянках, де ЛАЧХ додатна, тобто $L(\omega) > 0$, дорівнювала $L/2$ (L – кількість правих коренів характеристичного рівняння розімкнутої системи).

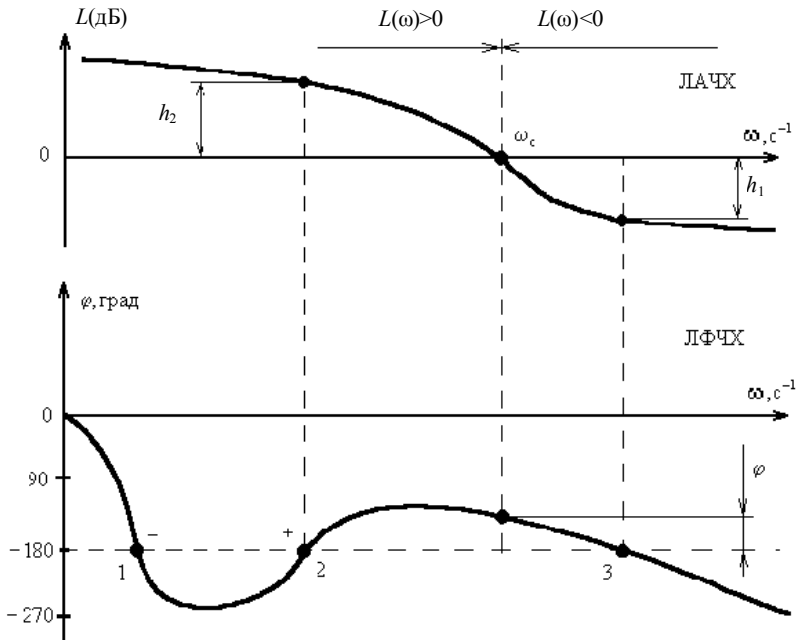


Рис. 5.8. Аналіз стійкості та визначення запасів стійкості за ЛЧХ розімкнутої САК

Із аналізу ЛЧХ (рис. 5.8) випливає, що різниця між кількістю додатних і від'ємних переходів ЛФЧХ через пряму

$(-\pi)$ при $L(\omega) > 0$ дорівнює нулю. Значить, якщо розімкнута САК стійка ($L = 0$), то і замкнута САК буде стійкою. При цьому вона має запаси стійкості за амплітудою h_1 і h_2 , та за фазою – φ .

Звичайно, в добре спроектованій системі запас за фазою $\varphi_{\text{зап}} = 30 \div 60$; запас за амплітудою $A_{\text{зап}} = 10 \div 15 \text{дБ}$.

5.5. Стійкість систем із запізненням

Системи автоматичного керування можуть включати ланки запізнення, які описуються рівнянням

$$y(t) = x(t - \tau), \quad (5.31)$$

де τ – постійна величина, яка називається часом запізнення.

Передаточна функція ланки запізнення має вигляд (за теоремою запізнення)

$$W_{\text{зап}}(p) = e^{-\tau p}. \quad (5.32)$$

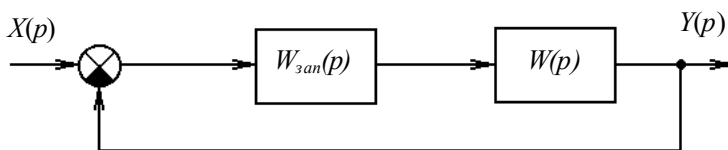
САК, що включають ланку запізнення, називають системами із запізненням.

Структурні схеми системи із запізненням показані на рис. 5.9.

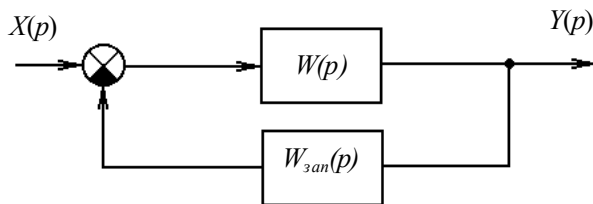
Передаточна функція розімкнутої системи із запізненням дорівнює

$$W_{\tau}(p) = W_{\text{зап}}(p) \cdot W(p) = \frac{R(p)}{Q(p)} e^{-\tau p}, \quad (5.33)$$

де $W(p) = R(p)/Q(p)$ – передаточна функція розімкнутої системи без врахування запізнення.



a



б

Рис. 5.9. Структурна схема САК з ланкою запізнення:
a – в прямому ланцюгу; **б** – в ланцюгу зворотного зв'язку

Якщо ланка запізнення включена в прямий ланцюг (рис. 5.9,**a**), то передаточна функція замкнутої системи:

$$W_3(p) = \frac{W_\tau(p)}{1 + W_\tau(p)} = \frac{R(p) \cdot e^{-\tau p}}{Q(p) + R(p) \cdot e^{-\tau p}} = \frac{R_\tau(p)}{D_\tau(p)}. \quad (5.34)$$

Якщо ланка запізнення знаходиться в ланцюгу зворотного зв'язку, то передаточна функція замкнутої системи

$$W_3(p) = \frac{W(p)}{1 + W_\tau(p)} = \frac{R(p)}{Q(p) + R(p) \cdot e^{-\tau p}} = \frac{R(p)}{D_\tau(p)}. \quad (5.35)$$

Звідси випливає, що незалежно від місця включення ланки запізнення характеристичне рівняння системи із запізненням має вигляд

$$D_\tau(p) = Q(p) + R(p) \cdot e^{-\tau p} = 0. \quad (5.36)$$

Це рівняння не є поліномом, оскільки включає множник $e^{-\tau p}$. Тому воно має нескінченну кількість коренів. Отже, для дослідження стійкості систем із запізненням необхідно використовувати критерії стійкості.

При цьому слід мати на увазі, що алгебраїчні критерії стійкості в їх звичайній формі для дослідження систем із запізненням непридатні. Крім того, для стійкості лінійних систем першого та другого ступенів із запізненням додатності коефіцієнтів характеристичного рівняння стає недостатньо.

Для дослідження стійкості систем із запізненням можна використовувати частотні критерії стійкості Михайлова та Найквіста. Останній є найбільш зручним.

Підставивши в (5.33) $p = j\omega$, запишемо частотну передаточну функцію $W_\tau(j\omega)$ розімкнутої системи із запізненням:

$$W_\tau(j\omega) = W(j\omega) \cdot e^{-j\omega\tau} = A(\omega) \cdot e^{j\psi(\omega)} \cdot e^{-j\omega\tau} = A(\omega) \cdot e^{j\psi\tau(\omega)}, \quad (5.37)$$

де $W(j\omega)$ – АФЧХ розімкнутої САК без врахування запізнення; $\varphi_\tau(\omega) = (\varphi(\omega) - \omega\tau)$ – ФЧХ розімкнутої САК із запізненням.

Звідси видно, що присутність ланки запізнення не змінює модуля $A(\omega)$ АФЧХ розімкнутої САК $W(j\omega)$, а вносить лише додатковий від'ємний фазовий зсув $\omega\tau$, пропорційний частоті. При цьому коефіцієнтом пропорційності є час запізнення τ .

Знаючи АФЧХ $W(j\omega)$ розімкнутої САК без запізнення, легко побудувати АФЧХ $W_\tau(j\omega)$ системи із запізненням. Для цього кожний модуль $A(\omega_i)$ вектора АФЧХ $W(j\omega)$ потрібно повернути на кут $\omega_i\tau$ за годинниковою стрілкою. Тоді $W_\tau(j\omega)$ буде мати вигляд спіралі, що закручується навколо початку координат. Це "закручування" погіршує умови стійкості, оскільки вся АФЧХ наближається до точки $(-1; j0)$.

Змінюючи час запізнення в широких межах, можна знайти таке його значення, при якому замкнута система буде знаходитися на межі стійкості. В цьому випадку характеристика $W_\tau(j\omega)$ буде проходити через точку $(-1; j0)$.

Час запізнення $\tau_{кр}$ і відповідне йому значення частоти $\omega_{кр}$, при яких $W_\tau(j\omega)$ проходить через точку $(-1; j0)$, називають критичними. Для критичного випадку справедливі умови:

$$A(\omega_{кр}) = |W_\tau(j\omega_{кр})| = 1, \quad (5.38)$$

$$\varphi_\tau(\omega_{кр}) = \varphi(\omega_{кр}) - \omega_{кр}\tau_{кр} = -\pi. \quad (5.39)$$

Із (5.38) можна знайти спочатку $\omega_{кр}$, а потім із (5.39) знайти $\tau_{кр}$:

$$\tau_{кр} = \frac{\varphi(\omega_{кр}) + \pi}{\omega_{кр}} = \frac{\arctg \frac{V(\omega_{кр})}{U(\omega_{кр})} + \pi}{\omega_{кр}} = \frac{\varphi_\tau(\omega_{кр})}{\omega_{кр}}, \quad (5.40)$$

де $\varphi_\tau(\omega_{кр}) = \pi + \arctg \frac{V(\omega_{кр})}{U(\omega_{кр})}$ – запас стійкості за фазою.

Приклад. Передаточна функція розімкнутої системи із запізненням має вигляд

$$W_\tau(p) = \frac{K \cdot e^{-\tau s}}{T \cdot p + 1},$$

де $K = \sqrt{2}; T = 5c$.

Визначити критичний час запізнення $\tau_{кр}$.

Запишемо частотну передаточну функцію:

$$W_{\tau}(j\omega) = \frac{K \cdot e^{-\tau j\omega}}{Tj\omega + 1}.$$

За умовою (5.38) маємо:

$$|W_{\tau}(j\omega_{кр})| = \left| \frac{K}{1 + j\omega_{кр}T} \right| = \frac{K}{\sqrt{1 + T^2\omega_{кр}^2}} = 1.$$

Звідси $\omega_{кр} = 0,2 \text{ с}^{-1}$.

Фазовий зсув на критичній частоті без урахування запізнення:

$$\varphi(\omega_{кр}) = -\arctg(T \cdot \omega_{кр}) = -\arctg\left(5 \cdot \frac{1}{5}\right) = -\frac{\pi}{4}.$$

Тоді за (5.40) шукаємо критичний час запізнення:

$$\tau_{кр} = 15\pi/4 \text{ (с)}.$$

Критичний час запізнення можна визначити графічно. Умова (5.38) визначається перетином $W(j\omega)$ з колом одиничного радіуса з центром у початку координат. Точка перетину визначає одночасно $\omega_{кр}$ та кут $\varphi(\omega_{кр})$ (рис. 5.10). Тоді критичний час запізнення визначається за (5.40).

Система автоматичного керування буде стійкою, якщо час запізнення τ менший за критичний: $\tau < \tau_{кр}$.

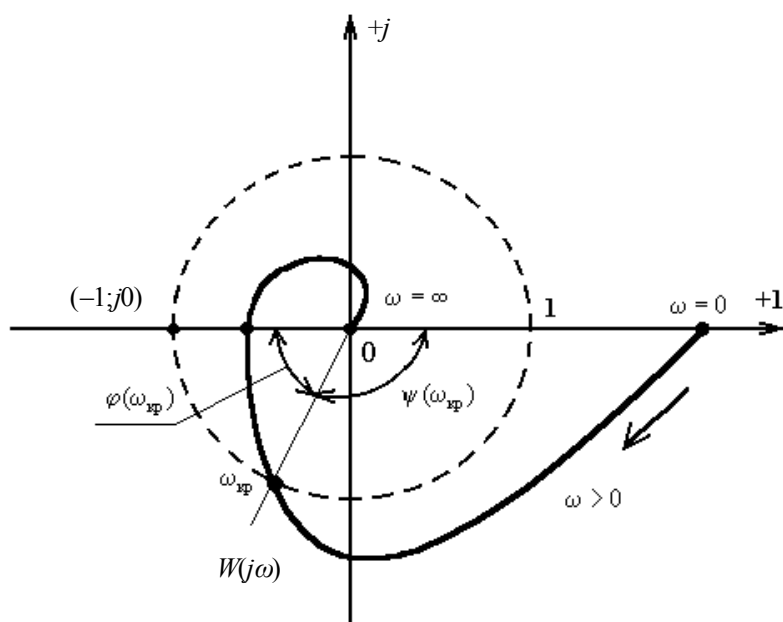


Рис. 5.10. Визначення критичного часу запізнення

6. АНАЛІЗ ЛІНІЙНИХ САК

6.1. Показники якості керування

Для порівняльного аналізу різних систем керування необхідно мати деякі числові характеристики цих систем що дозволяють оцінювати яка з них буде більше ефективною. Ці числові характеристики й називають критеріями якості.

Критерії якості дозволяють дати кількісну оцінку різним системам керування й тим самим обґрунтовано підійти до вибору системи і її закону керування, що задовольняє обраному критерію якості.

Система керування характеризується різними показниками, до яких у першу чергу можна віднести: точність, стійкість, швидкодія надійність, вартість, оптимальність і ін. З огляду на велику різноманітність систем і об'єктів керування, у цей час розроблено велику кількість особистих критеріїв так чи інакше включають у себе вищенаведені показники. Між цими показниками (критеріями якості) існує тісний взаємозв'язок, тому прагнення поліпшити який-небудь показник системи керування приводить до погіршення іншого. Так, наприклад, прагнення зменшити помилку регулювання приводить до зменшення запасу стійкості й швидкодії й навпаки, або підвищення надійності системи неминуче приводить до збільшення її вартості.

Використання того або іншого показника системи або їхніх комбінацій у вигляді критеріїв якості визначається зручністю його застосування в системах керування, а також, у відомій мірі, традиціями, що зложилися.

У лінійних системах найбільше широко використовуються критерії якості перехідних процесів, які підрозділяються на прямі, непрямі й інтегральні.

Крім цього на основі цих критеріїв можуть бути обчислені ще ряд додаткових критеріїв, до яких ставляться:

Критерій точності, що використовують для оцінки якості величину помилки керування й регулювання в деяких типових режимах.

Критерій запасу стійкості, що встановлюють, наскільки далеко від границі стійкості перебуває система керування.

Критерій швидкодії, що дозволяє оцінювати час перехідних процесів у системі.

Обчислення всіх цих критеріїв ґрунтується на використанні математичного апарата теорії керування, причому найбільш часто при обчисленні критеріїв якості використовуються часові й частотні характеристики систем. По часових характеристиках визначають прямі показники якості, по частотних характеристиках – непрямі. До непрямих показників якості відносяться також і кореневі критерії, що дозволяють по коріннях характеристичного рівняння замкнутої системи оцінити її властивості.

Поняття критеріїв якості тісно пов'язане з поняттям критеріїв оптимальності, а в ряді випадків ці поняття збігаються.

З огляду на взаємозв'язок між різними показниками систем керування завдання вибору або проектування оптимальної системи можна розглядати як завдання на умовний екстремум. Знайти екстремум (мінімум і максимум) якого-небудь показника, наприклад вартості, за умови, що інші показники відповідають заздалегідь заданим величинам.

Оцінювання якості перехідного процесу у системі.

Перехідні процеси, що виникають у системі при стрибкоподібному процесі за звичайним порядком, ділять на групи (рис. 6.1).

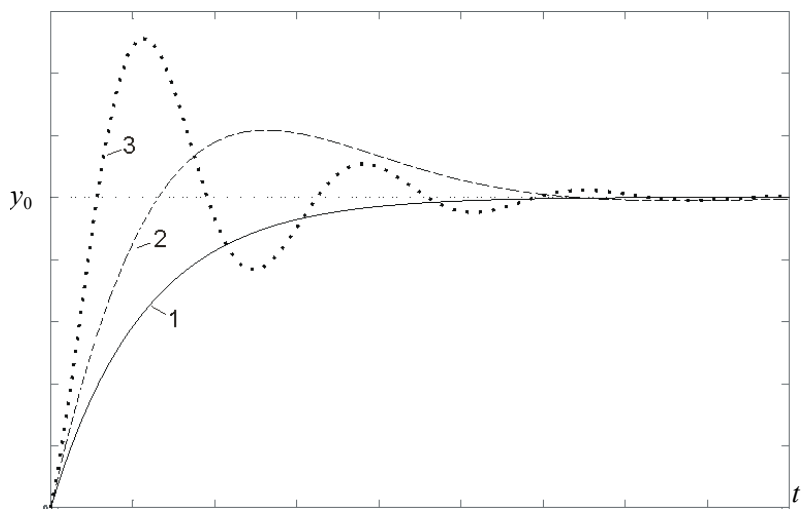


Рис. 6.1. Приклади перехідних процесів у стійких САК

На рис. 6.1 використані наступні позначення:

1 – аперіодичний перехідний процес, у якому похідна вихідної координати змінює знак один раз;

2 – монотонний перехідний процес, у якому похідна вихідної координати не змінює знак;

3 – коливальний перехідний процес;

y_0 – потрібне стає значення вихідної координати системи.

Оцінка якості перехідного процесу при стрибкоподібному вхідному впливі здійснюється за наступними показниками (рис. 6.2):

– t_{III} – це такий мінімальний час, після якого вихідна регульована координата системи відповідає умові:

$$\frac{y_{\max} - y_0}{y_0} \leq \Delta, \quad (6.1)$$

де Δ – припустиме відхилення вихідної координати від заданого значення y_0 , де $\Delta = 0,05$ (5%);

– стала помилка (статична точність):

$$e_{уст} = 1 - y_0, \quad (6.2)$$

якщо $e_{уст} = 0$, то система астатична; σ – перерегулювання – це максимальне відхилення вихідної координати від сталого значення, розрахована у відсотках, при цьому розрахункова формула:

$$\sigma = \frac{y_{\max}^1 - y_0}{y_0} 100\%; \quad (6.3)$$

– вид перехідного процесу (коливальний або монотонний);

– частота власних коливань, Гц, (і період, с):

$$f_k = \frac{1}{T_k};$$

– кількість коливань n .

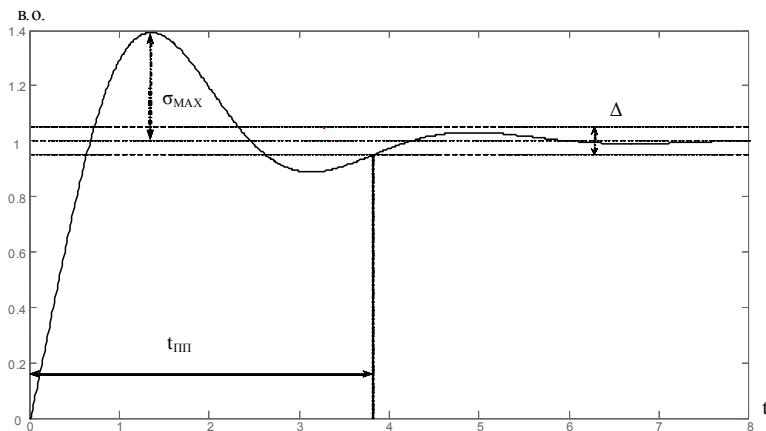


Рис. 6.2. Показники якості перехідного процесу

6.2. Інтегральні оцінки якості

Стандартні (типові) показники якості зрозумілі для замовників. Виявляється, що всі чотири показники найтіснішим образом пов'язані із запасами стійкості по амплітуді й по фазі. Тому, забезпечення стандартних показників якості забезпечує необхідну стійкість.

- $t_{\text{III}}, e_{\text{уст}}, n$ можуть бути легко визначені, навіть аналітично;
- σ , на жаль, обчислюється набагато складніше ("проблема перерегулювання").

Завдання забезпечення показників можна розглянути як оптимізаційну. Ця задача оптимізації, однак, виявляється багатокритеріальною і із цієї причини виключно важкої для рішення, у тому числі, чисельного.

Наступний інтегральний показник якості (критерій) одним числовим значенням ураховує всі типові показники якості:

$$J = \int_0^{\infty} [e^2(t) + \gamma \cdot \dot{e}^2(t)] dt. \quad (6.4)$$

З використанням показника якості (6.4) можна цілком коректно підібрати коефіцієнти регулятора, при якому J мінімально. При цьому задача оптимізації має один критерій, але багато вимірів.

Найпростішою інтегральною оцінкою для одномірних систем може служити величина:

$$J_0 = \int_0^{\infty} e(t) dt, \quad (6.5)$$

де e – помилка системи.

Очевидно, що J_0 буде тим менше, ніж швидше загасає перехідний процес і чим менше величина помилки.

Незручність інтегральної оцінки виду (6.5) є те, що вона може використовуватися тільки для аперіодичних процесів. Якщо маємо місце коливальний процес, то використовуються критерії:

$$J_1 = \int_0^{\infty} |e(t)| dt \quad (6.6)$$

або

$$J_2 = \int_0^{\infty} e^2(t) dt. \quad (6.7)$$

Більш широко використовується останній критерій (6.7), називаний квадратичною інтегральною оцінкою. Це обумовлено можливістю обчислення цього критерію без безпосереднього визначення $e(t)$.

Оцінка якості системи по інтегральній квадратичній оцінці не враховує коливальність перехідного процесу. Виявляється, що перехідні процеси з різними показниками коливальності й різною тривалістю перехідних процесів можуть дати рівні значення критерію (6.7). Якщо вибирати параметри системи по мінімуму цієї оцінки, то перехідні процеси в такій системі мають високий показник коливальності.

6.3. Коефіцієнти помилок

Конкретні значення точності, безумовно, будуть залежати від виду впливу, що задає. Розглянемо довільний вхідний вплив і виразимо сигнал помилки (у цьому випадку для слідкуючої системи – помилки спостереження) через передаточну

функцію по помилці й вплив, що задає. В остаточному підсумку, адже саме сигнал помилки й вимірює точність у будь-який момент часу.

Розкладемо $W(p)$ у ряд Тейлора в околиці 0, припускаючи, що ряд Тейлора сходиться.

$$W_e(p) = W_e(0) + \left. \frac{dW_e(p)}{dp} \right|_{p=0} p + \left. \frac{d^2 W_e(p)}{dp^2} \right|_{p=0} \frac{1}{2!} p^2 + \dots (6.8)$$

Припущення про збіжність ряду виконується, як і для будь-якого статичного ряду, у деякому околі 0, тобто за умови $|p|$ – малий.

$$e(p) = \left(\underbrace{W_e(0)}_{C_0} + \underbrace{\dot{W}_e(0)}_{C_1} p + \underbrace{\ddot{W}_e(0)}_{C_2} \cdot \frac{1}{2} p^2 + \dots \right) \cdot U^{zad}(p). \quad (6.9)$$

Коефіцієнти C_K називаються коефіцієнтами помилок. C_K являюся значеннями в 0 похідних передаточної функції по помилці й дозволяють у такий спосіб виразити поточне значення помилки через похідні впливу, що задає:

$$e(p) = \sum_{i=0}^{\infty} C_i p^i \cdot U^{zad}(p) \cong \sum_{i=0}^N C_i p^i \cdot U^{zad}(p); \quad C_K = \left. \frac{d^K W_e(p)}{dp^K} \right|_{p=0}; \quad (6.10)$$

$$e(t) = C_0 U^{zad}(t) + C_1 \dot{U}^{zad}(t) + C_2 \ddot{U}^{zad}(t) + \dots \cong \sum_{i=0, N} C_i U^{(i)zad}(t). \quad (6.11)$$

Умова малості $|p|$ після переходу в часову область означає, що ряд буде збіжної при досить великому t .

Значення сигналу помилки зв'язано з усіма похідними вхідного сигналу.

Крім того, не можна випустити з уваги, що формули (6.8–6.11) справедливі лише за умови збіжності ряду, тобто для досить великого часу іншими словами, у сталому режимі. Тому формули (6.8–6.11) застосовані до статичної точності, хоча й роблять оманне враження. У формулах також відбито, що на практиці, звичайно користуються лише кінцевим відрізком ряду – до члена порядку N .

Для типових вхідних сигналів лише кінцеве число похідних не дорівнює нулю, тому замість ряду виходить кінцеве вираження. Це не означає, однак, що у випадку типових впливів питання про збіжність відпадає, тому що повинен ще сходиться ряд для передаточної функції по помилці, а це не залежить від виду впливу, що задає.

Обчислимо тепер величину сталої помилки у випадку різних впливів.

Одиничний вплив, що задає: $U^{зад}(t) = 1(t)$;

$$e(t) = C_0. \quad (6.12)$$

З'ясуємо, від чого залежить C_0 і C_1 :

$$C_0 = W_e(0) = \frac{1}{1+W(0)} = \frac{1}{1+K};$$

$$C_1 = \dot{W}_e(0) = \frac{-W(0)}{(1+W(0))^2} = \frac{1}{(1+K)^2}. \quad (6.13)$$

Таким чином, збільшення коефіцієнта підсилення розімкненої системи зменшує коефіцієнти помилок C_0 і C_1 тобто, зокрема, помилку при східчастому $U^{зад}(t)$.

Є інший спосіб зменшення C_0 і деякої кількості C_K , якщо в розімкнутій системі є кілька інтеграторів, при цьому інтегратори можуть перебувати в будь-якому місці розімкнutoї системи.

$$W_{PC}(p) = K \cdot W(p) \cdot \frac{1}{p^K};$$

$$W_e(p) = \frac{1}{1 + W_{PC}(p)} = \frac{1}{1 + KW(p)p^{-K}} = \frac{p^K}{p^K + KW(p)}.$$

Неважко бачити, що:

$$\left. \frac{d^N}{dp^N} [W_e(p)] \right|_{p=0} \equiv 0; \text{ при } 0 \leq N \leq K; \quad (6.14)$$

тобто $C_0 = 0; C_1 = 0; \dots; C_{K-1} = 0$.

При відсутності інтеграторів у системі $C_0 = e_{ycm} = 1/(1+K)$ при $U^{зад}(t) = 1(t)$, але при надходженні на вхід лінійно-зростаючого (або більш складного) вхідного впливу $U^{зад}(t) = t(t)$ помилка $e_{ycm} = C_0 t(t) + \dots$, тобто необмежено зростає.

При наявності одного інтегратора в системі, $k = 1; C_0 = 0, e_{ycm} = 0$ при $U^{зад}(t) = 1(t)$, але при надходженні на вхід лінійно-зростаючого вхідного впливу $U^{зад}(t) = t(t)$ помилка $e_{ycm} = C_1$, тобто має кінцеве значення. При більш складних впливах (наприклад, квадратичному,) помилка не обмежена.

При наявності двох інтеграторів у системі, $k = 2; C_0 = C_1 = 0, e_{ycm} = 0$ при $U^{зад}(t) = 1(t)$ і при $U^{зад}(t) = t(t)$, але при надходженні на вхід квадратично-зростаючого вхідного впливу $U^{зад}(t) = t^2(t)$ помилка $e_{ycm} = C_2$, тобто має кінцеве значення.

При більше складних впливах (наприклад, кубічному), помилка не обмежена й так далі.

Визначення.

Якщо $C_0 = C_1 = \dots = C_{k-1} = 0$ то говорять, що система володіє астатизмом k -го порядку. Якщо $C_0 = 0$, то говорять просто, що система володіє астатизмом.

Додавання до складу регулятора декількох інтегральних ланок дозволяє підвищити порядок астатизму, тим самим забезпечити нульову помилку для досить складного виду вхідного впливу. Помітимо, що інтегратори можуть бути невід'ємною властивістю елементів системи. Наприклад, передаточна функція двигуна при вихідній величині – φ – кут повороту вала – містить інтегратор тому що $\varphi(t) = \int \omega(t) dt$.

Але наведене міркування одночасно показує, що не може існувати система, що має нульову сталу помилку абсолютно для будь-якого впливу, тому що це зажадало б рівності $C_k = 0$ при всіх k . Але це може бути лише, якщо $We(p) = 0$, що неможливо для реальної системи.

Повернемося до питання про збіжність функція ряду (6.8). Як усяка звичайна передаточна, $We(p)$ є дрібно-раціональною. Ряд Тейлора для такої функції завідомо сходиться в колі, у середині якого немає корінь знаменника. Тому радіус збіжності (6.8) визначається найближчим до нуля коренем характеристичного рівняння замкнутої системи. Можна оцінити радіус збіжності:

$$R = 1/|p|_{\min}. \quad (6.15)$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Автоматические основы теории автоматического регулирования. Т. 1. [Текст] / Под ред. Б. К. Чемоданова. – М. : Высшая школа, 1977.

2. **Арманович И. Г.** Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости [Текст] / И. Г. Арманович, Г. Л. Лунц, Л. Э. Эльсгольц. – М. : Наука, 1965.

3. **Д'Анджело, Г.** Линейные системы с переменными параметрами [Текст] / Г. Д'Анджело. – М. : Наука, 1974.

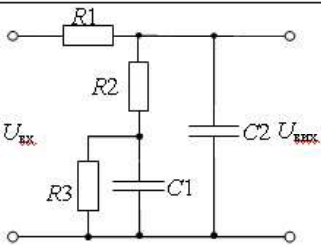
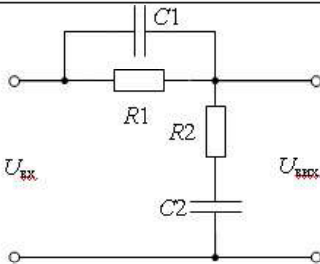
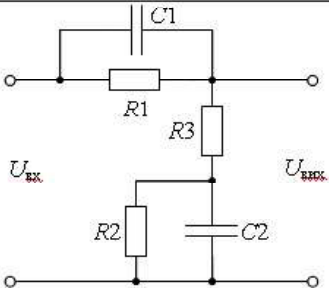
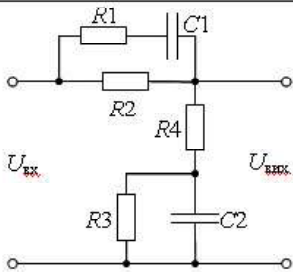
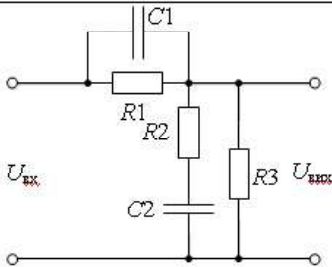
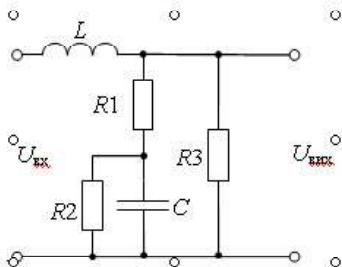
4. **Зайцев, Г. Ф.** Теория автоматического управления и регулирования, 2-е изд. [Текст] / Г. Ф. Зайцев. – К. : Вища школа, 1989.

5. **Заде, Д.** Теория линейных систем [Текст] / Д. Заде, Ч. Дезоер. – М. : Наука, 1970.

6. **Ким, Д. П.** Теория автоматического управления. Т. 1. Линейные системы [Текст] / Д. П. Ким. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 288 с.

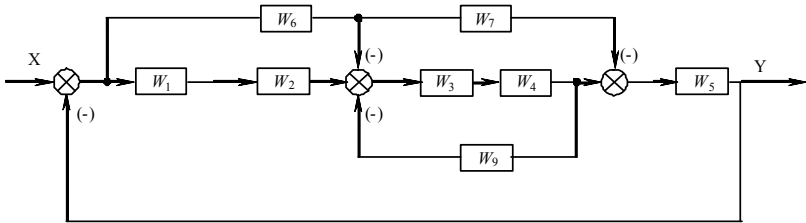
7. **Туманов, М. П.** Теория управления. Теория линейных систем автоматического управления : учебное пособие [Текст] / М. П. Туманов. – МГИЭМ. – М., 2005. – 82 с.

Варіанти для виконання індивідуального завдання № 1

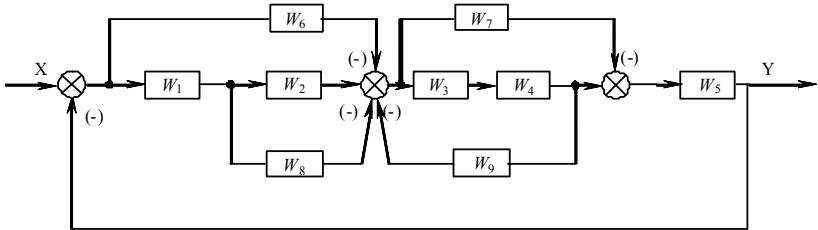
Варіант 1 	Варіант 2 
Варіант 3 	Варіант 4 
Варіант 5 	Варіант 6 

Варіанти для виконання індивідуального завдання № 2

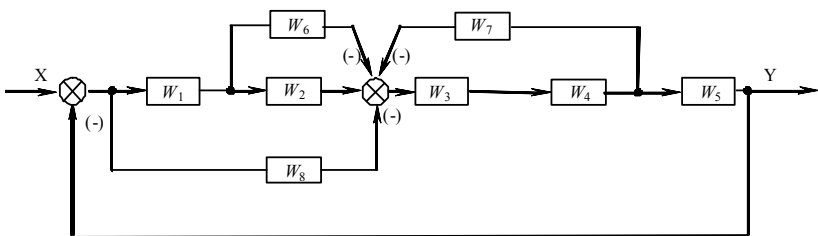
Варіант № 1



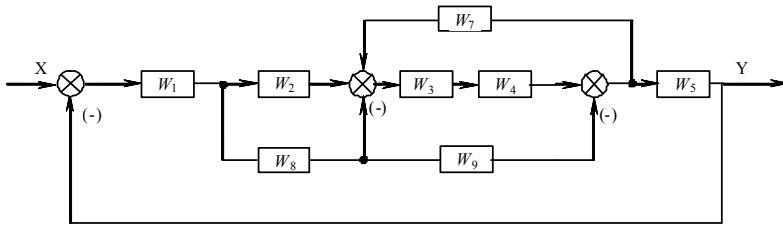
Варіант № 2



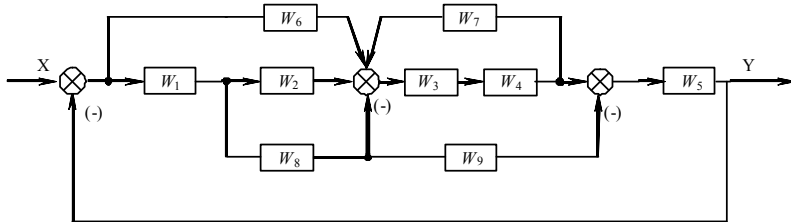
Варіант № 3



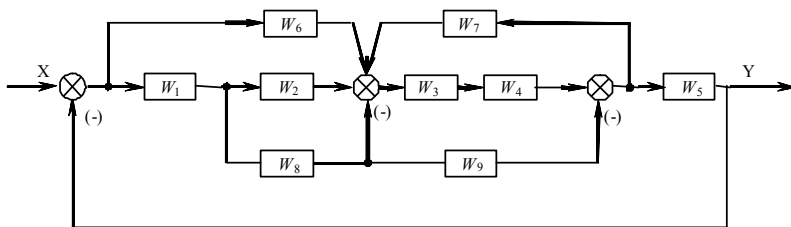
Вариант № 4



Вариант № 5



Вариант № 6



ЗМІСТ

ВСТУП	3
1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ І ВИЗНАЧЕННЯ ТАК	5
1.1. Сутність проблеми автоматичного керування	5
1.2. Основні принципи керування	7
2. МАТЕМАТИЧНИЙ ОПИС СИСТЕМ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ	13
2.1. Математичні моделі САК. Рівняння динаміки і статички	13
2.2. Формалізація диференціальних рівнянь	16
2.3. Векторно-матрична форма математичних моделей	21
2.4. Перехід від векторно-матричної форми до канонічної і навпаки	23
3. ОПЕРАТОРНА ФОРМА МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ. ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛАПЛАСА ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ .	26
3.1. Властивості перетворень Лапласа	26
3.2. Поняття передаточної функції. Властивості переда- точної функції	27
3.3. Еквівалентні перетворення структурних схем	30
4. ЧАСТОТНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ	36
4.1. Загальні положення	36
4.2. Характеристики типових структурних ланок	40
4.2.1. Поняття динамічної ланки	40
4.2.2. Пропорційна ланка	41
4.2.3. Диференціальна ланка	43
4.2.4. Інтегруюча ланка	46
4.2.5. Аперіодична ланка	49
4.2.6. Коливальна ланка	53
4.2.7. Консервативна ланка	57
4.2.8. Аперіодична ланка другого ступеня	59
4.2.9. Форсуюча ланка	60

4.2.10. Форсууюча ланка другого ступеня.....	61
4.2.11. Ланка запізнення.....	62
4.3. Побудова ЛАЧХ розімкнених систем	64
5. СТІЙКІСТЬ ЛІНІЙНИХ САК	68
5.1. Поняття стійкості	68
5.2. Постановка задачі стійкості за О.М. Ляпуновим ...	70
5.3. Критерії стійкості САК	73
5.4. Аналіз стійкості за логарифмічними частотними характеристиками	88
5.5. Стійкість систем із запізненням	90
6. АНАЛІЗ ЛІНІЙНИХ САК	96
6.1. Показники якості керування	96
6.2. Інтегральні оцінки якості	100
6.3. Коефіцієнти помилок	101
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ	106
<i>Додаток 1. Варіанти для виконання індивідуального завдання №1</i>	<i>107</i>
<i>Додаток 2. Варіанти для виконання індивідуального завдання №2</i>	<i>108</i>