

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

ТЕОРІЯ АВТОМАТИЧНОГО УПРАВЛІННЯ НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського як навчальний посібник для студентів, які навчаються за спеціальністю 151 "Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології", освітньо-професійною програмою "Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології кібер-енергетичних систем"

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2020

Теорія автоматичного управління: Навчальний посібник [Електронний ресурс] : навч. посіб. для студ. спеціальності 151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології», освітньо-професійна програма «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології кібер-енергетичних систем»; уклад.: О. Й. Штіфзон, П. В. Новіков, В.П. Бунь. – Електронні текстові дані (1 файл: 2,2 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2020. – 144 с.

*Гриф надано Методичною радою КПІ імені Ігоря Сікорського
(протокол № 3 від 5.11.2020 р.) за поданням Вченої ради факультету
(протокол № 3 від 26.10.2020 р.)*

Електронне мережне навчальне видання

ТЕОРІЯ АВТОМАТИЧНОГО УПРАВЛІННЯ НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

Укладачі: *Штіфзон Олег Йосипович*, ст. викладач
Новіков Павло Валерійович, к.т.н., асистент
Бунь Валерій Павлович, к.т.н., доцент

Відповідальний редактор: *Баган Т.Г.*, к.т.н, доцент

Рецензент: *Аушева Н.М.*, д.т.н., професор, КПІ ім. Ігоря Сікорського

Посібник призначений для студентів, які навчаються за спеціальністю 151 «Автоматизація та комп'ютерно інтегровані технології», освітньо-професійна програма «Автоматизація та комп'ютерно інтегровані технології кібер-енергетичних систем», які вивчають курс «Теорія автоматичного управління».

Метою посібника «Теорія автоматичного управління: Навчальний посібник» є формування у студентів знань, умінь та навичок з розв'язання задач аналізу та синтезу автоматичних систем керування.

© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2020

ЗМІСТ

ВСТУП	5
1.ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ ТА КЛАСИФІКАЦІЯ СИСТЕМ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ	8
1.1.Основні поняття та терміни	8
1.2.Класифікація систем автоматичного керування.....	11
1.3. Принципи керування та їх порівняльна характеристика.....	16
Контрольні питання	18
2. МАТЕМАТИЧНИЙ ОПИС ЛІНІЙНИХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ.....	19
2.1. Постановка задачі. Методика формалізованого опису елементів і систем.....	19
2.2. Динамічні характеристики елементів і систем	25
2.3. Типові елементарні ланки та їх характеристики	34
Контрольні питання.....	39
3.ВЛАСТИВОСТІ ТА ХАРАКТЕРИСТИКИ АВТОМАТИЧНИХ СИСТЕМ РЕГУЛЮВАННЯ	41
3.1.Структурні схеми та їх перетворення.....	41
3.2.Структурна схема та передавальні функції типової замкненої автоматичної системи регулювання	49
3.3.Об'єкти керування та їх властивості	53
3.4.Закони керування та автоматичні регулятори	62
Контрольні питання	71
4. АНАЛІЗ СТІЙКОСТІ ЛІНІЙНИХ СИСТЕМ	73
4.1. Загальні умови стійкості	73
4.2. Алгебраїчні критерії стійкості.....	78
4.3. Частотні критерії стійкості	81
4.4. Область стійкості. Запас стійкості	85
Контрольні питання	88

5. ЯКІСТЬ ПЕРЕХІДНИХ ПРОЦЕСІВ В ЛІНІЙНИХ АВТОМАТИЧНИХ СИСТЕМАХ РЕГУЛЮВАННЯ.....	90
5.1. Поняття та показники перехідних процесів.....	90
5.2. Критерії якості перехідних процесів АСР	93
5.3. Точність та чутливість АСР.....	104
Контрольні питання	113
6.МЕТОДИ АНАЛІЗУ І СИНТЕЗУ ЛІНІЙНИХ СИСТЕМ КЕРУВАННЯ.....	114
6.1.Основні поняття та постановка задач аналізу і синтезу	114
6.2.Принципи синтезу алгоритмічної структури системи керування.	115
6.3.Часові методи аналізу і синтезу систем керування.....	118
6.4. Частотні методи аналізу та синтезу АСР	122
6.5. Визначення оптимальних параметрів системи.....	132
Контрольні питання	142
НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНІ МАТЕРІАЛИ	144

ВСТУП

Теорія автоматичного управління (ТАУ) - наукова дисципліна, предметом вивчення якої є системи, які складаються з об'єкта та пристрою керування(автоматичного регулятора) і допоміжних елементів. ТАУ виявляє загальні закономірності функціонування, які притаманні автоматичним системам різної природи, і на основі цього розробляє принципи побудови ефективних систем для керування об'єктами різного призначення. При вивченні процесів керування в ТАУ абстрагуються від фізичних та конструктивних особливостей систем і замість реальних систем розглядаються їх адекватні математичні моделі. За допомогою цих моделей розв'язуються основні задачі ТАУ – аналізу та синтезу автоматичних систем. При цьому широко використовуються математичні методи – теорія диференціальних рівнянь, теорія функцій комплексної змінної, перетворення Лапласа і Фур'є, матриці та інші.

Навчальний посібник відповідає робочій програмі навчальної дисципліни “Теорія автоматичного управління”, яка читається студентам спеціальності 151 «Автоматизація та комп'ютерно інтегровані технології» освітньо-професійної програми «Автоматизація та комп'ютерно інтегровані технології кібер-енергетичних систем».

Теорія автоматичного управління – одна з базових навчальних дисциплін, яка формує у студентів знання про загальні принципи і процеси функціонування автоматичних систем керування.

Мета дисципліни – формування у студентів знань, умінь та навичок з розв'язання задач аналізу та синтезу автоматичних систем керування за умов діяння детермінованих та випадкових збурень.

Студент повинен знати :

- фундаментальні принципи побудови систем керування, їх класифікацію за основними ознаками, особливості розімкнених та замкнених систем, роль зворотнього зв'язку;

- методику математичного опису автоматичних систем з простими об'єктами, методи лінеаризації статичних характеристик елементів системи та складання рівнянь статики і динаміки;
- форми опису та подання динамічних властивостей елементів та систем – диференціальні рівняння, передавальні функції, частотні та часові характеристики;
- властивості динамічних елементарних ланок, типові схеми їх з'єднання;
- правила перетворення структурних схем, отримання еквівалентних передавальних функцій для замкнених автоматичних систем регулювання;
- методи оцінки стійкості автоматичних систем регулювання (АСР), критерії стійкості, визначення областей стійкості;
- показники та критерії якості перехідних процесів в системі;
- методи синтезу систем із заданими показниками якості та оптимізації параметрів налаштувань автоматичних регуляторів;
- методи аналізу дискретних систем, оцінки їх якості;
- характеристики та показники якості АСР при дії випадкових сигналів;
- особливості та характеристики нелінійних систем, застосування методу фазового простору до їх аналізу, методи лінеаризації та оцінки стійкості та якості перехідних процесів;
- характеристики та область застосування спеціальних систем : із запізненням, нестационарних, з розподіленими параметрами;
- властивості оптимальних та адаптивних систем.

Студенти повинні вміти :

- розробити алгоритмічну структуру АСР, скласти її математичну модель, визначити передавальні функції за основними діями;
- оцінити стійкість та якість перехідних процесів систем, вплив параметрів автоматичних регуляторів та властивості АСР;
- розрахувати оптимальні налаштування автоматичних регуляторів;

- оцінити показники процесу керування при дії випадкових збурень;
- застосовувати методи гармонічної та статистичної лінеаризації;
- застосовувати методи оптимізації та адаптації при створенні автоматичних систем.

1.ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ ТА КЛАСИФІКАЦІЯ СИСТЕМ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ

1.1.Основні поняття та терміни

Термін “керування” (вживається також “управління”) охоплює надзвичайно широке коло понять, що викликано різною природою об’єктів, наприклад керування технологічним процесом, підприємством чи державою. Крім того, під керуванням (управлінням) розуміють також командування військами, керування транспортними засобами (судном, літаком, автомобілем), диригування оркестром і інш. З цієї точки зору ТАУ – частина кібернетики, яка вивчає процеси використання інформації і управління в системах різної фізичної природи [1].

Автоматизація виробництва – один з важливих факторів науково-технічного процесу, за рахунок якої відбувається інтенсифікація процесів випуску продукції та зменшення витрат енергетичних та матеріальних ресурсів. Сучасні системи керування мають складну багаторівневу (ієрархічну) структуру, в якій використовуються обчислювальні мережі різного рівня на основі ЕОМ та мікропроцесорних засобів. В даному посібнику розглядаються локальні системи автоматичного регулювання, які призначені для підтримання необхідних технологічних режимів, які характеризуються певним набором значень технологічних змінних – температури, рівня, тиску, концентрації і інш. Розглядаються також питання оптимізації технологічних режимів, а також можливості пристосування (адаптації) систем до змінюваних умов роботи. Для складних технологічних об’єктів розробляються системи керування, які також мають достатньо складну структуру і розвинені зв’язки між окремими частинами(елементами).

Автоматика – технічна наука, яка розробляє принципи побудови автоматичних систем та необхідних для них засобів, методи аналізу і синтезу цих систем [2].

Керування технічним процесом – цілеспрямована діяльність, направлена на досягнення бажаних результатів (отримання прибутку, мінімальної собівартості продукції, забезпечення її якості) на основі отримання та обробки інформації про стан об'єкта та умови його роботи. В процесі керування виконується ряд операцій, які відповідають таким етапам [3]:

- збирання інформації про стан об'єкта та зовнішнє середовище;
- аналіз та обробка інформації;
- прийняття рішень на основі необхідної інформації;
- реалізація керуючих діянь за допомогою технічних засобів.

Виконання цих операцій забезпечує автоматичний контроль процесу, пуск та зупинку технологічних агрегатів, підтримання необхідних режимів при виконанні вимог надійності та стійкості.

Система автоматичного керування (управління) – сукупність об'єкта та автоматичного пристрою керування.

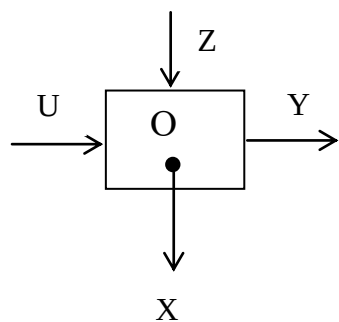
Автоматизована система керування передбачає участь у формуванні керуючих дій людини (особи, яка приймає рішення - ОПР). Автоматизовані системи створюються для складних об'єктів, де участь людини в прийнятті рішень є визначальною, а для цього необхідно отримати та переробити великі масиви інформації.

Автоматичні системи забезпечують виконання всіх функцій керування без участі людини (автоматично), але для обслуговування, ремонту та налагодження потрібні кваліфіковані спеціалісти.

Автоматичні системи регулювання (АСР) – сукупність об'єкта та пристрою керування (автоматичного регулятора), процес функціонування яких характеризується тим, що відомі задані значення регульованих координат $x_{зд}(t)$. Допускається також термін “системи автоматичного регулювання” (САР). Далі буде показано, що в процесі регулювання повинна виконуватись вимога $x(t) \rightarrow x_{зд}(t)$, x – поточне значення регульованої координати [4].

Об'єкт керування (регулювання, автоматизації, керований об'єкт) – технологічний процес, агрегат або комплекс, призначений для здійснення впливу на сировину, матеріали для отримання продукту чи напівпродукту. В складних системах керування об'єктом може бути виробництво, підприємство, галузь промисловості. В будь-якому випадку для досягнення мети функціонування необхідно сформулювати керуючі дії, які компенсують небажані відхилення від обраного режиму. Зрозуміло, що об'єкти можуть бути різної природи, мають різне призначення, виконувати різні функції. В той же час система керування створюється саме для об'єкта, тому його властивості визначають основні характеристики системи керування – її структуру, функції, показники стійкості та якості. Таким чином, саме об'єкт визначає призначення системи керування, наприклад : автоматизована система керування підприємством, автоматична система керування випарною установкою, автоматична система регулювання температури і т.д [2, 3].

Для об'єктів керування можна виділити такі змінні (рис.1.1.) [5, 6]:



- координати стану, які визначають стан об'єкта в будь-який момент часу, для АСР – це регульовані координати:

$$X = \{ x_1, x_2 \dots x_n \};$$

- вихідні змінні, які характеризують якість продукту, продуктивність об'єкта або узагальнені показники, наприклад

$$Y = \{ y_1, y_2 \dots y_r \};$$

- збурення – зовнішні та внутрішні фактори, вплив яких порушує роботу об'єкта : змінювання характеристик зовнішнього середовища, параметрів енергоносіїв, якості сировини і інш.,
 $Z = \{ z_1, z_2, \dots z_L \};$

- керуючі дії – цілеспрямовані змінювання матеріальних та енергетичних потоків, направлені на компенсацію збурень z ,

Рис.1.1.Схема об'єкта

$U=\{U_1, U_2, \dots, U_m\}$. В складних системах керуючі дії можуть передбачати змінювання структури, або навіть кадрові перестановки.

Вектори Y, X, Z, U можуть мати довільну кількість складових, а в частинному випадку це – скалярні величини.

Автоматичний регулятор – технічний засіб, який реалізує керуючі дії в залежності від стану об'єкта та зовнішнього середовища :

$U_{\text{рег.}} = f(x, z, t)$. Автоматичний регулятор реалізується також програмним шляхом в мікропроцесорних контролерах або ЕОМ. В складних системах функції керування виконують різні регулятори або спеціальні пристрої [1, 5, 8, 9].

1.2.Класифікація систем автоматичного керування

На рис.1.2,а,б,в показані структури систем керування з різним ступенем деталізації та виділення різних пристроїв і елементів. Загальним в цих структурах є те, що пристрої управління ПУ чи автоматичний регулятор АР отримує сигнал про стан об'єкта X або його вихідну змінну Y і формує керуючу дію U . Для схеми, показаної на рис.1.2.а., характерним є те, що задане значення $x_{\text{зд}}$ може формуватись безпосередньо в пристрої управління [8].

Схема б) показує сигнали об'єкта та автоматичного регулятора АР, що дає можливість описати процес функціонування автоматичної системи регулювання, а саме : на регулятор поступає сигнал $\Delta x = x_{\text{зд}} - x(t)$, який характеризує порушення режиму роботи об'єкта. Автоматичний регулятор може враховувати додатковий сигнал від компенсатора K про збурення Z . Тоді автоматичний регулятор повинен сформувати такий сигнал $U_{\text{рег}} = f(\Delta x, Z, t)$, який компенсував би дію збурення Z або принаймні зменшив його вплив на роботу об'єкта, тобто необхідно, щоб $\Delta x = x_{\text{зд}} - x(t) \rightarrow 0$. Приймається, що $x_{\text{зд}} = \text{const}$ на тривалому періоді керування, але є клас систем де $x_{\text{зд}}$ змінюється ($x_{\text{зд}} - \text{var}$), тоді записують : $x_{\text{зд}}(t)$, t – час [8, 9].

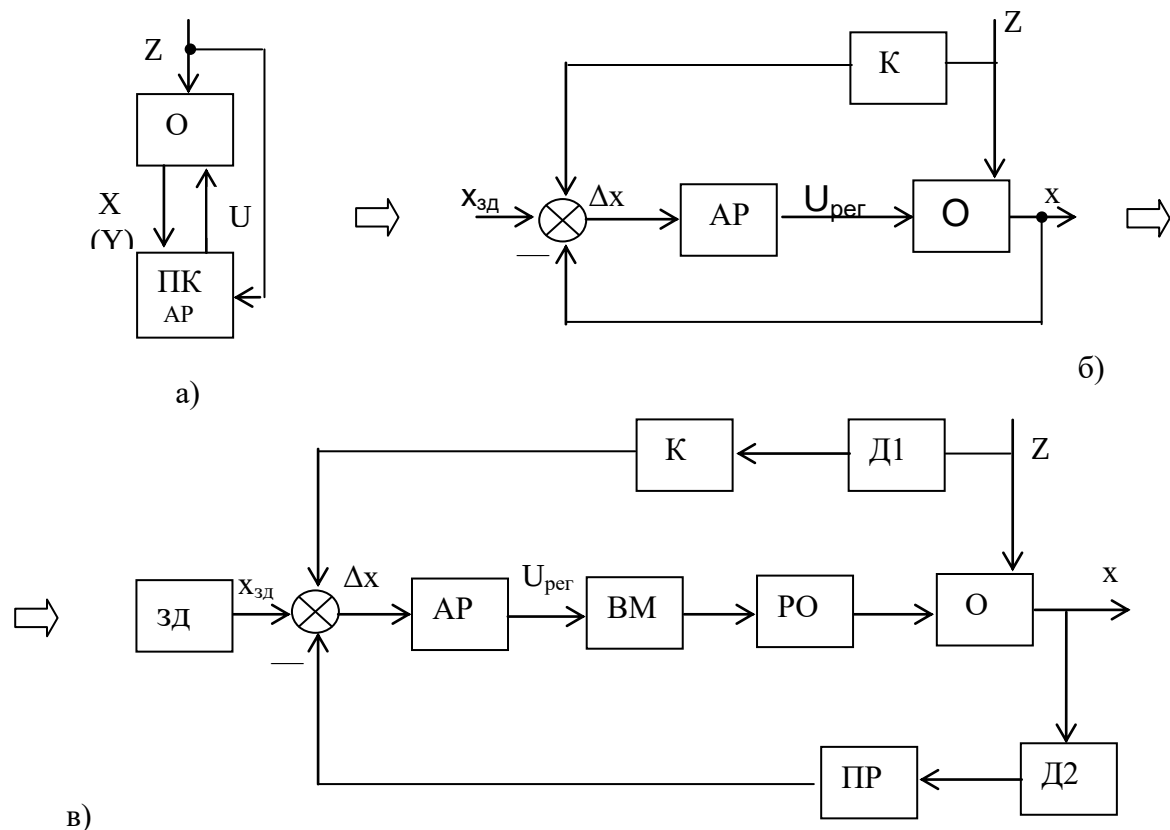


Рис.1.2. Структура систем керування

В системах керування виділяють [7]:

- алгоритм функціонування – сукупність визначених дій, які забезпечують правильне функціонування системи (відповідає на запитання : що необхідно знати для досягнення мети?), цей алгоритм, як правило, є заданим;
- алгоритм керування – сукупність визначених дій, які забезпечують потрібний характер дій для здійснення алгоритму функціонування (відповідає на запитання : як необхідно діяти?).

Автоматична система керування структурно може подаватись по-різному. *Структура* – це сукупність частин системи, на які вона може поділятися за певними ознаками, та зв'язків між ними. Виділяють такі види структур [9]:

- алгоритмічна – сукупність частин, призначених для виконання алгоритмів перетворення інформації у відповідності до алгоритма функціонування;
- функціональна – сукупність частин, призначених для виконання окремих функцій системи (отримання інформації, її перетворення, передача сигналів і інш.);
- конструктивна (технічна) - сукупність частин як окремих конструктивних елементів.

На рис.1.2.в додатково показано : Зд – пристрій для формування $x_{зд}$, Д1, Д2 – датчики; ВМ – виконавчий механізм; РО – регулюючий орган; ПР – перетворювач [3].

Системи автоматичного керування можуть класифікуватись за різними ознаками, для подальшого викладення матеріалу доцільно виділити такі їх класи : *розімкнені, замкнені, комбіновані системи*. На рис.1.2. показано, що на пристрій керування поступає інформація про $x_{зд}$, x та Z , але можливі і частинні випадки. В розімкнених системах відсутня інформація про фактичне значення регульованої координати x , відсутній зворотній зв'язок. При цьому можуть бути різні варіанти, а саме : поступає сигнал від $x_{зд}$ або від Z , чи обидва одночасно, однак при керуванні в розімкненій системі за $x_{зд}$ повинна бути впевненість, що регульована координата буде відтворювати $x_{зд}$ ($x(t) \rightarrow x_{зд}(t)$), а це можливо лише за умови, що властивості об'єкта не змінюються. Ознакою класифікації в даному випадку є напрям передачі інформації : в розімкнених системах інформація передається в одному напрямку (від пристрою завдання і регулятора до об'єкта), в замкнених та комбінованих системах є зворотній зв'язок. Це універсальна властивість таких систем керування, що й визначає їх широке застосування [2, 9].

Системи з різними видами алгоритму функціонування . Сюди відносяться автоматичні системи регулювання, серед яких можна виділити :

- системи стабілізації, для яких $x_{зд}$ залишається постійним на визначеному інтервалі часу, тоді :

$$x(t) = x_{зд}, \quad t \in [0, T]; \quad (1.1)$$

- системи програмного регулювання, коли $x_{зд}$ визначається програмно і змінюється, наприклад, за часом. Такі системи часто застосовуються для керування періодичними процесами;
- сліdkуючі системи, коли $x_{зд}$ є змінним, наперед не заданим і невідомим та залежить від змін іншої величини, тобто система “сліdkує” за змінами, які характеризують режим роботи об’єкта.

Одно- та багатовимірні системи. Ця ознака передбачає виділення класів систем за кількістю вихідних змінних об’єкта. Тут виділяються ще два підкласи для багатовимірних систем [3, 7, 8, 9]:

- системи незв’язаного регулювання, коли є кілька регульованих координат x і відповідних автоматичних регуляторів, які не зв’язані між собою і утворюють сепаратні контури. В той же час регульовані координати можуть бути зв’язаними через об’єкт;
- системи зв’язаного регулювання, коли автоматичні регулятори для різних x зв’язані додатковими зв’язками, за рахунок чого досягається автономність регулювання окремих X .

Лінійні та нелінійні системи. Основними методами дослідження автоматичних систем є їх математичне моделювання. Математичні моделі реальних систем повинні з необхідною точністю відобразити їх характеристики, що приводить до складних нелінійних залежностей. В складі реальних систем є завжди елементи з нелінійними характеристиками. З математичної точки зору наявність нелінійних залежностей не дозволяє отримати загальні розв’язки задач аналізу та синтезу, значно ускладнює дослідження систем. В теорії автоматичного керування найбільш повно розроблені методи дослідження лінійних систем, хоча це є певною ідеалізацією. Системи називають [1, 2, 7]:

- *лінійними*, якщо вони описуються лінійними залежностями. Для таких систем виконується принцип суперпозиції (накладання) : реакція системи на будь-яку комбінацію зовнішніх діянь дорівнює

сумі реакцій на кожне з них, прикладених окремо. Це відповідає адитивній функції, наприклад :

$$x(U,Z) = x(U) + x(Z), \quad (1.2)$$

- *нелінійними*, якщо в їх складі є хоча б один елемент з нелінійними характеристиками.

Для спрощення задач аналізу і синтезу виконують *лінеаризацію* нелінійних характеристик, що дає можливість замінити реальну нелінійну систему еквівалентною лінійною (лінеаризованою).

Стаціонарні і нестаціонарні системи. В процесі функціонування системи відбуваються змінювання характеристик не лише зовнішнього середовища, а й окремих їх частин, тому виділяють [2, 8, 9]:

- *стаціонарні системи*, параметри та характеристики яких не змінюються з часом. Динаміка таких систем описується диференціальними рівняннями з постійними коефіцієнтами;
- *нестаціонарні системи*, в яких змінюються характеристики та параметри з часом, а поведінка цих систем в динаміці описується диференціальними рівняннями із змінними коефіцієнтами, значення яких залежить від часу. При дослідженні цих систем необхідно враховувати не лише величину збурення, а й момент його прикладання.

Системи неперервної та дискретної дії. За характером зміни сигналів системи діляться на [2, 8]:

- неперервної дії (неперервні, аналогові), всі сигнали в яких є неперервними функціями часу;
- дискретної дії (дискретні), в яких є елементи, що перетворюють неперервні сигнали в стрибкоподібні або послідовність імпульсів (релейні, імпульсні, цифрові).

Екстремальні, адаптивні та оптимальні системи. В системах керування функціонують об'єкти, статичні характеристики яких можуть мати точку екстремуму, в якій досягаються найвищі техніко-економічні показники

роботи. За допомогою спеціальних керуючих дій система підтримує режим роботи об'єкта в околі екстремальної точки, яка змінює своє положення з часом. Такі системи називають *екстремальними*. *Адаптивні* системи мають властивість пристосовування до змінюваних характеристик зовнішнього середовища та параметрів об'єкта. Це відбувається за рахунок змінювання структури системи та (чи) параметрів окремих її частин. *Оптимальні* системи призначені для досягнення найкращих результатів роботи протягом певного часу у відповідності з критерієм оптимальності (керування) в конкретних умовах з урахуванням існуючих ресурсів та обмежень. Це найбільш складні системи, в яких використовуються спеціальні математичні методи, а для їх реалізації потрібні ЕОМ з відповідним програмним забезпеченням [1, 8, 9].

1.3. Принципи керування та їх порівняльна характеристика

При створенні різних систем автоматичного керування для об'єктів різної природи та призначення використовуються загальні принципи [1, 2, 5, 8]:

- **за відхиленням.** На рис.1.2.б це відповідає структурі, яка складається з автоматичного регулятора та об'єкта, охоплених від'ємним зворотнім зв'язком (сигнал за збуренням Z на АР не подається). Це найбільш поширений принцип керування, дякуючи його універсальності : з якої б причини не відбулось відхилення $\Delta x = x_{зд}(t) - x(t)$, автоматичний регулятор формує сигнал $U_{рег}$, який поступає на об'єкт і зменшує похибку Δx . Такий зворотній зв'язок називають *головним*. В той же час в цьому принципі закладено його основний недолік : автоматичний регулятор починає працювати лише після появи значного відхилення $\Delta x \neq 0$;
- **за збуренням** (на рис.1.2.б це відповідає відсутності зворотнього зв'язку). В цьому випадку автоматичний регулятор розпочинає свою роботу одразу після виникнення збурення Z , ще до появи Δx , але проблема полягає в тому, що реалізація цього принципу вимагає вимірювання всіх без винятку збурень, а це практично неможливо.

Застосування цього принципу обмежується тими випадками, коли процес функціонування об'єкта визначається незначною кількістю збурень, які можна вимірювати та використовувати для керування;

- **комбінований** (це відповідає структурі, зображеній на рис.1.2.б). При реалізації цього принципу обирається одне (або два – три) найбільш суттєве збурення, яке можна виміряти і перетворити за допомогою компенсатора К. Це дає можливість виконати умову *інваріантності* (незалежності) регульованої координати x від збурення Z , тоді Δx тотожно дорівнює нулю ($\Delta x \equiv 0$). Ця частина системи називається розімкненим контуром, і він є головним. Дію невимірюваних збурень, які завжди є в системі, компенсує допоміжний замкнений контур за відхиленням. Комбіновані системи дають можливість забезпечити необхідну якість процесу керування, але виникають проблеми щодо їх синтезу, зокрема з виконанням вимог фізичної реалізуємості для складних об'єктів;

Для оцінки працездатності автоматичних систем керування використовуються різні показники, але загальними вимогами є [3, 5, 7]:

- *стійкість*, це необхідна але не достатня умова, яка означає можливість повернення системи в початковий стан після того, як була порушена її рівновага. Для автоматичних систем регулювання це означає збіжність перехідних процесів, тобто обмежений час їх тривалості. Оцінку стійкості АСР проводять на початкових етапах аналізу і синтезу і нестійка система не може застосовуватись. Часто для забезпечення стійкості необхідно змінити структуру системи або значення параметрів її елементів, в першу чергу автоматичних регуляторів. Для реальних систем повинна забезпечуватись також додаткова вимога – запасу стійкості при роботі в різних умовах;
- *якість*, що для АСР характеризується якістю перехідних процесів : відхилення від заданого режиму в статиці та динаміці,

коливальність і тривалість перехідних процесів. Часто якість перехідних процесів оцінюють інтегральними показниками :

$$I_1 = \int_0^{t_n} \Delta x \, dt \longrightarrow \min \quad (1.3)$$

або

$$I_2 = \int_0^{t_n} (\Delta x)^2 \, dt \longrightarrow \min \quad (1.4)$$

де : $\Delta x = x_{зд} - x$, t_n – час перехідного процесу. Таким чином, оцінка якості перехідних процесів АСР дає можливість оцінити остаточно її працездатність та можливість застосування в конкретних умовах;

- *надійність*, яка доповнюється додатковими вимогами щодо вартості, зручності науково-технічного рівня і т.д [1, 8, 9].

Контрольні питання

1. Дайте визначення поняття “система автоматичного керування”.
2. В чому полягає процес функціонування системи автоматичного керування?
3. Поясніть основні терміни “система”, ”об’єкт”, ”регулятор” і інш.
4. Наведіть приклади класифікації систем автоматичного керування.
5. З яких елементів складається автоматична система регулювання (АСР)?
6. Дайте порівняльну характеристику принципам керування.
7. Перерахуйте основні вимоги до АСР.

2. МАТЕМАТИЧНИЙ ОПИС ЛІНІЙНИХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ

2.1. Постановка задачі. Методика формалізованого опису елементів і систем

Головними задачами теорії автоматичного керування є дві – аналізу та синтезу. В першому випадку задається система та її параметри і необхідно визначити властивості системи, в другому випадку задаються вимоги і необхідно створити систему, яка відповідала б цим вимогам. Друга задача є більш складною і, як правило, не має однозначного розв'язку. Названі задачі розв'язуються на основі математичного опису елементів та системи в цілому, що дає можливість дослідити усталені та перехідні процеси в них. Одним з підходів отримання математичного опису системи є розбиття її на окремі ланки, для кожної з яких визначаються закономірності перетворення вхідного сигналу у вихідний. При цьому виділення ланок здійснюється, виходячи із зручності математичного опису [3, 7, 9].

При формалізованому описі елементів і систем виконуються такі положення [8]:

- система розглядається як ланцюг взаємодіючих (фізично та інформаційно) елементів, які характеризуються можливістю передавати фізичні діяння та інформаційні сигнали в одному, чітко визначеному, напрямі;
- кожен конструктивний елемент системи розглядається як перетворювач вхідного діяння у вихідну реакцію;
- на основі апріорних даних щодо фізичної природи кожного елемента та закономірностей його функціонування складається математична модель, яка відображає найбільш суттєві для даного випадку взаємозв'язки між вхідними та вихідними змінними елемента;
- при складанні математичної моделі елементів чи системи в цілому завжди виникає необхідність деякої ідеалізації реальних фізичних

процесів, певних спрощень фізичних закономірностей, відкидання другорядних факторів. Для цього потрібні глибокі знання процесу (об'єкта), фундаментальних законів, та експериментальна перевірка.

Раніше відзначалось, що реальні системи є нелінійними, і тому проводиться операція *лінеаризації*, тобто наближеної заміни нелінійних залежностей лінійними. Розглянемо приклад лінеаризації статичної характеристики елемента, схема якого показана на рис.2.1,а [3].

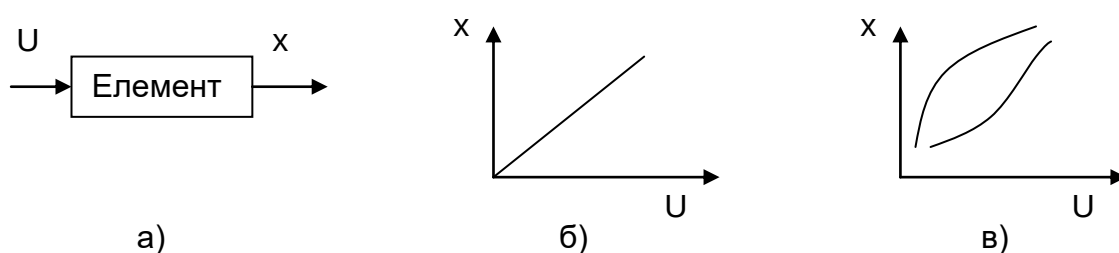


Рис.2.1 Схема елемента – а); статична лінійна характеристика – б); статична нелінійна характеристики – в)

В теорії автоматичного керування використовуються такі методи лінеаризації: аналітичні та графоаналітичні. Статичною характеристикою елемента чи системи називається графічна залежність виходу від входу в статиці (в усталеному режимі). Саме статична характеристика дає можливість визначити коефіцієнт передачі, тобто пропорційність відхилень вхідних і вихідних змінних [3].

Якщо статична характеристика задана у вигляді аналітичної залежності

$$x = f(U), \quad (2.1)$$

то її можна розкласти в ряд Тейлора в околі робочої точки:

$$x = f(U_0) + \frac{f'(U_0)}{1!}(U - U_0) + \frac{f''(U_0)}{2!}(U - U_0)^2 + \dots \quad (2.2)$$

де : U_0 характеризує робочу точку на статичній характеристиці; $f'(U_0)$, $f''(U_0)$ - похідні функції $f(U)$ в робочій точці.

Відкидаючи другу і старші похідні, отримують рівняння лінійної (лінеаризованої) статичної характеристики

$$x \cong f(U_0) + \frac{f'(U_0) \cdot (U - U_0)}{1!} \approx a + K \cdot U, \quad (2-3)$$

де: $K = f'(U_0) = \left(\frac{\partial x}{\partial U} \right)_{U=U_0}$ - коефіцієнт передачі.

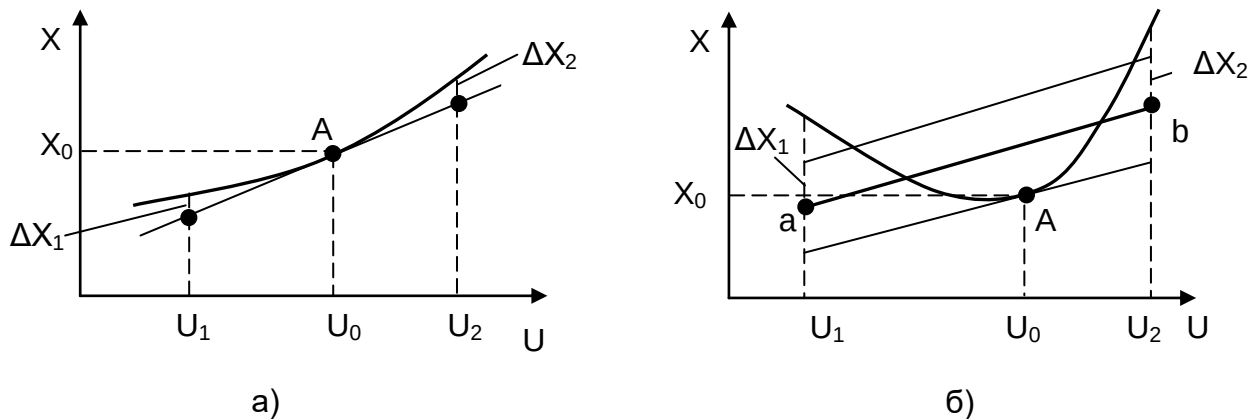


Рис.2.2.Лінеаризація статичних характеристик методом дотичної(а) та січної (б)

Якщо статичні характеристики задані графічно, то лінеаризовану характеристику можна отримати графічними методами. За методом дотичної проводять дотичну до статичної характеристики в робочій точці А (U_0, X_0) так, щоб $\Delta X_1 \approx \Delta X_2$. Вона і буде лінійною статичною характеристикою в робочому діапазоні U_1, U_2 (рис.2.2.а). Якщо статична характеристика має вигляд, зображений на рис.2.2.б, то застосовують метод січних. Спочатку проводять дотичну до статичної характеристики в робочій точці А так, щоб $\Delta X_1 \approx \Delta X_2$, потім ділять навпіл відрізки ΔX_1 та ΔX_2 , а лінійною характеристикою буде пряма а,б. Для лінійних статичних характеристик коефіцієнт передачі [2, 3, 7]

$$K = \frac{\Delta X}{\Delta U} = \operatorname{tg} \alpha, \quad (2.4)$$

де: α – кут нахилу прямої до осі абсцис.

Проводячи лінеаризацію, необхідно оцінити точність заміни нелінійної характеристики лінійною. Наприклад, похибка лінеаризації при використанні метода дотичних буде найбільшою на кінцях робочого діапазону. Необхідно враховувати також, що лінеаризація проводиться в робочій точці А, і при зміні робочого режиму необхідно повторити лінеаризацію в новій робочій точці [8, 9].

При дослідженні елементів та систем аналізують проходження вхідних сигналів, або, по-іншому визначають реакцію елемента чи системи на вхідний сигнал. Для можливості порівняння властивостей систем в ТАУ введено поняття “типові сигнали”, і саме вони використовуються для цієї мети. При цьому властивості елементів та систем оцінюються в часовій та частотній областях, що дає можливість оцінити їх поведінку в статичній та динамічній, тобто визначити їх статичні та динамічні характеристики.

В залежності від характеру зміни сигналів за часом та формою математичного представлення розрізняють [1, 6, 9]:

- регулярні (детерміновані) сигнали, які змінюються за певним законом та описуються конкретною функцією часу;
- нерегулярні (випадкові) сигнали, які змінюються з часом випадково, значення в кожний момент часу – ймовірне.

Типові сигнали – стандартні, які використовуються при теоретичних та експериментальних дослідженнях та описуються простими математичними залежностями і легко відтворюються. Використання типових (“еталонних”) діянь дозволяє уніфікувати розрахунки різних систем та порівнювати їх передавальні властивості.

Основними видами типових регулярних сигналів є [3]:

- ступінчастий (рис.2.3,а). Для цього сигналу характерним є те, що він змінюється стрибкоподібно в момент часу t_0 і зберігає своє значення протягом експерименту. Приймається, що величина стрибка має умовну одиницю, тоді

$$U(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases} \quad (2.5)$$

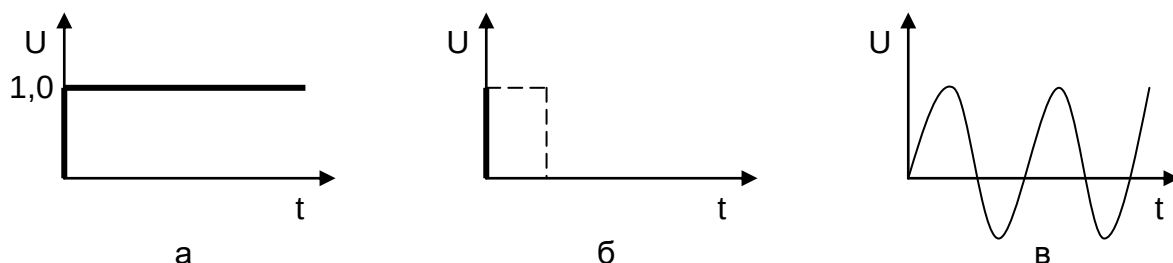


Рис.2.3. Типові сигнали, а – ступінчастий, б – імпульсний, в – гармонійний

Цей сигнал формується при комп'ютерному моделюванні, а для реальних систем його величина, наприклад переміщення регулюючого органа, має кінцеве значення, і швидкість зміни (стрибок) обмежена. Одиничний ступінчастий сигнал, який подається в момент $t=t_1$, позначається $1(t - t_1)$. Стрибкоподібний сигнал використовується для визначення часових характеристик та може імітувати змінювання збурення або сигналу завдання. Необхідно враховувати, що в реальних системах цей сигнал необхідно підтримувати на протязі всього експерименту, що часто приводить до неприпустимих порушень технологічного режиму;

- імпульсний (рис.2.3,б) – одиничний імпульс, який має нескінченно велику висоту і нескінченно малу тривалість, а його площа дорівнює одиниці. Звичайно, це певна ідеалізація, яка в математиці відома як δ -функція Дірака:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t > 0, \\ \infty, & t = 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

Важливою є залежність

$$\delta(t) = \frac{dl(t)}{dt}, \quad (2.7)$$

тобто δ -функція – це похідна від одиничного стрибка. Неодиначний імпульс з площею a_0 позначається як $a_0 \delta(t)$.

Якщо одиничний імпульс діє в момент часу $t=t_1$, то йому відповідає зміщена дельта-функція $\delta(t-t_1)$. Основна властивість дельта-функції [3]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} U(\vartheta) \cdot \delta(\vartheta-t) d\vartheta = U(t), \quad (2.8)$$

тобто неодиначна імпульсна функція $U(\vartheta)\delta(\vartheta-t)$, отримана як добуток довільної функції $U(\vartheta)$ на зміщену дельта-функцію, існує лише в момент $\vartheta=t$. Це фільтруюча або “вихоплююча” властивість дельта-функції. Цей вираз можна також розглядати як розкладення деякої функції $U(t)$ на суму нескінченно великого числа елементарних імпульсів виду $U(\vartheta)\delta(\vartheta-t)$, причому кожний елементарний імпульс діє лише в момент $\vartheta=t$ та має площу $U(\vartheta)d\vartheta$. В реальних системах імпульс має певну тривалість (на рис. 2.3,б показано пунктиром) та величину;

- гармонійний, який відповідає синусоїдальному закону [3]:

$$U(t) = U_m \sin \omega t, \quad (2.9)$$

де: U_m - максимальне значення амплітуди, $\omega = \frac{2\pi}{T}$ - кругова частота, яка може змінюватись від 0 до ∞ , T – період;

- лінійний, який змінюється за виразом:

$$U(t) = l(t) \cdot a_1 t, \quad (2.10)$$

де: a_1 - коефіцієнт, який характеризує швидкість наростання сигналу $U(t)$.

2.2. Динамічні характеристики елементів і систем

Для автоматичних систем регулювання основним режимом є динамічний, який характеризується змінюванням регулювальних координат X за часом t . АСР постійно перебуває під впливом збурень або змінюваного сигналу $X_{зд}$ [2].

Вид перехідного процесу залежить від сигналів, які його викликали, а також від властивостей об'єкта та регулятора. Таким чином, при розв'язанні задач аналізу та синтезу АСР необхідно мати математичні моделі елементів і систем в цілому, а в першу чергу – їх динамічні характеристики. Для цієї мети в теорії автоматичного керування використовуються: диференціальні рівняння, передавальні функції, частотні характеристики, часові характеристики.

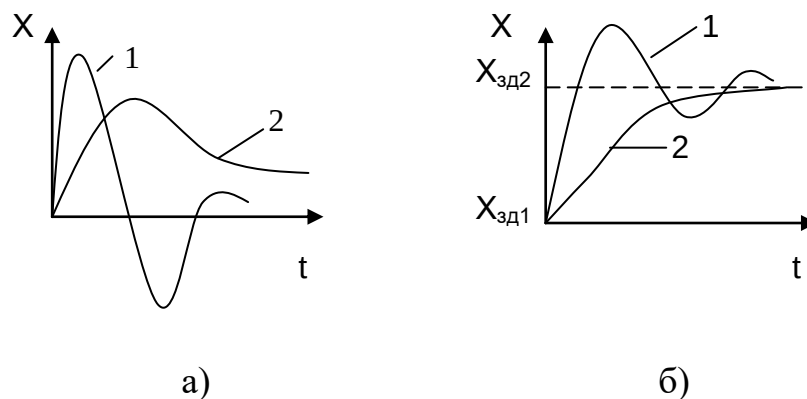


Рис.2.4. Перехідні процеси в АСР: а – відносно збурення Z_0 ; б – відносно зміни завдання $X_{зд}$; 1- коливальний, 2 – аперіодичний

Лінійні диференціальні рівняння АСР

В загальному випадку динамічні властивості одноконтурної АСР описуються диференціальним рівнянням виду [2, 3]:

$$a_n(t) \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1}(t) \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = b_m \frac{d^m U}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} U}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{dU}{dt} + b_0 U =$$

$$c_l \frac{d^l z}{dt^l} + c_{l-1} \frac{d^{l-1} z}{dt^{l-1}} + \dots + c_1 \frac{dz}{dt} + c_0 z \quad (2.11)$$

де: X, U, z – координати стану (регульована координата) та вхідні змінні – керуюча дія та збурення, a_i, b_i, c_i – коефіцієнти;

В рівнянні (2.11) необхідно врахувати фактор часу, тобто фактично всі змінні залежать від часу – $x(t), U(t), z(t)$. Коефіцієнти диференціального рівняння називають **параметрами**, значення яких визначаються особливостями об'єкта: конструктивними і режимними, наприклад швидкістю протікання процесів, константами тепло- та масообміну, хімічних реакцій. Якщо розглядаються нестационарні системи, то коефіцієнти диференціального рівняння залежать від часу – $a_i(t), b_i(t), c_i(t)$ [6, 7].

Зручною формою запису рівняння (2.11) є операторна, або символічна. Для цього вводиться оператор

$$\frac{d}{dt} = p; \frac{d^i}{dt^i} = p^i. \quad (2.12)$$

З урахуванням (2.12) диференціальне рівняння (2.11) в операторному вигляді має вид [1, 2, 3]:

$$\begin{aligned} (a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0) \cdot x(p) = \\ = (b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_0) \cdot U(p) + (c_l p^l + c_{l-1} p^{l-1} + \dots + c_0) \cdot z(p), \end{aligned} \quad (2.13)$$

або:

$$D(p)x(p) = R_1(p)U(p) + R_2(p)z(p), \quad (2.14)$$

де: $D(p)$ – власний оператор; $R_1(p), R_2(p)$ – оператори діянь.

Лінійні диференціальні рівняння першого, другого, а часом і більш високих порядків записують в **стандартній** (канонічній) формі, коли вихідна координата та її похідні знаходяться в лівій частині рівняння, вхідні змінні – в правій частині, а коефіцієнт при X дорівнює одиниці. Наприклад, диференціальне рівняння першого порядку ($n=1$) має вид [3, 8]:

$$a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = b_0 U + c_0 z, \quad (2.15)$$

Для приведення до стандартної форми поділимо вираз (2.15) на a_0 , тоді

$$T \frac{dx}{dt} + x = K_u U + K_z Z, \quad (2.16)$$

де: $T = \frac{a_1}{a_0}$ - постійна часу; $K_u = \frac{b_0}{a_0}$; $K_z = \frac{c_0}{a_0}$ - коефіцієнти передачі

відповідно за керуючою дією та збуренням.

Стандартна форма диференційного рівняння дозволяє оцінити деякі важливі показники елемента чи системи: постійна часу T завжди має розмірність часу (с, хв) і визначає інерційність системи, наприклад тривалість перехідного процесу $t_n = (3 \div 4)T$. Коефіцієнти передачі також мають важливий фізичний зміст: вони показують, наскільки змінилась вихідна величина при зміні вхідної на одиницю. Наприклад, оцінюється змінювання температури при зміні подачі пари, тоді розмірність коефіцієнта передачі буде $\left[\frac{^{\circ}\text{C}}{\text{кг/с}} \right]$. Часто керуючу дію оцінюють в одиницях переміщення

регулюючого органу, його коефіцієнт передачі має розмірність $\left[\frac{^{\circ}\text{C}}{\%x_{PO}} \right]$ (x_{PO} – хід регулюючого органу) [9].

Диференціальне рівняння (2.11) описує поведінку системи в динаміці, його розв'язком є перехідні процеси при різних вхідних діях та заданих початкових умовах [1]:

$$x(t) = x_v(t) + x_{уст}(t), \quad (2.17)$$

де: $x_v(t)$ - вільна складова, в стійких системах з часом зникає, це перехідна складова;

$x_{уст}(t)$ - змушена, усталена складова, це те значення, до якого прямує $x(t)$ при $t \rightarrow \infty$.

Розв'язок диференціальних рівнянь знаходять, виконуючи такі етапи: знаходження загального розв'язку однорідного рівняння, частинного неоднорідного, загального та власне розв'язку з числовими значеннями постійних коефіцієнтів. Вільна складова – це розв'язок оператора $D = 0$ (рівняння 2.13) і він має n складових (n – порядок системи):

$$x_{\theta}(t) = \sum_{i=1}^n C_i e^{\lambda_i t}, \quad (2.18)$$

де: C_i - постійні інтегрування; λ - корені полінома D .

З диференціальних рівнянь можна отримати також рівняння статички, прирівнявши похідні нулю ($p=0$). Для рівняння (2.15) статична характеристика буде [5]:

$$x = K_u U + K_z Z, \quad (2.19)$$

Передавальні функції. В теорії автоматичного керування зручною і найбільш наочною формою визначення закономірностей перетворення вхідних сигналів є передаточна функція. В операторному вигляді – це відношення оператора дії до власного оператора, причому кількість передавальних функцій дорівнює кількості вхідних сигналів [1, 2, 3]:

$$W_1(p) = \frac{R_1(p)}{D(p)} = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0}, \quad (2.20)$$

$$W_2(p) = \frac{R_2(p)}{D(p)} = \frac{c_l p^l + c_{l-1} p^{l-1} + \dots + c_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0}, \quad (2.21)$$

тобто

$$W_1(p) = \frac{x(p)}{U(p)}, W_2(p) = \frac{z(p)}{z(p)} \quad (2.22)$$

Передавальні функції мають нулі (корені рівняння $R(p)=0$) і полюси (корені рівняння $D(p)=0$). На основі виразів (2.20)-(2.22) визначається фундаментальна залежність:

$$x(p) = W_1(p) \cdot U(p) + W_2(p) \cdot z(p), \quad (2.23)$$

Таким чином, передавальні функції мають чіткий фізичний зміст - показують як перетворюється вхідний сигнал (передається з входу на вихід). Передавальні функції зручно отримувати з диференціальних рівнянь в операторному вигляді, наприклад рівняння (2.16) можна записати так:

$$(Tp + 1)x(p) = K_u U(p) + K_z z(p), \quad (2.24)$$

тоді

$$W_1(p) = \frac{K_U}{Tp + 1}; W_2(p) = \frac{K_Z}{Tp + 1}, \quad (2.25)$$

Передавальні функції також можна описати у формі зображень Лапласа - це відношення зображення вихідної величини до зображення вхідної за нульових початкових умов. Формально це можна отримати підстановкою в (2.20)-(2.22) $p=s$ (s -комплексне число), але це справедливо лише для стаціонарних систем, тоді [8]

$$x(s) = W_1(s)U(s) + W_2z(s), \quad (2.26)$$

Частотні характеристики. При розв'язанні задач аналізу та синтезу необхідно оцінювати також властивості елементів та систем в частотній області, при різних частотах вхідних сигналів. Частотні характеристики – це реакція елемента чи системи на гармонійний сигнал (2.9) при змінюванні частоти від 0 до ∞ . Вихідний сигнал відрізняється від вхідного амплітудою та фазою [3]:

$$x = x_m \sin(\omega t + \varphi), \quad (2.27)$$

Динамічні властивості досліджуваних елементів чи систем визначаються амплітудно-частотною $A(\omega)$, фазо-частотною $\varphi(\omega)$ та амплітудно-фазовою характеристиками (рис.2.4).

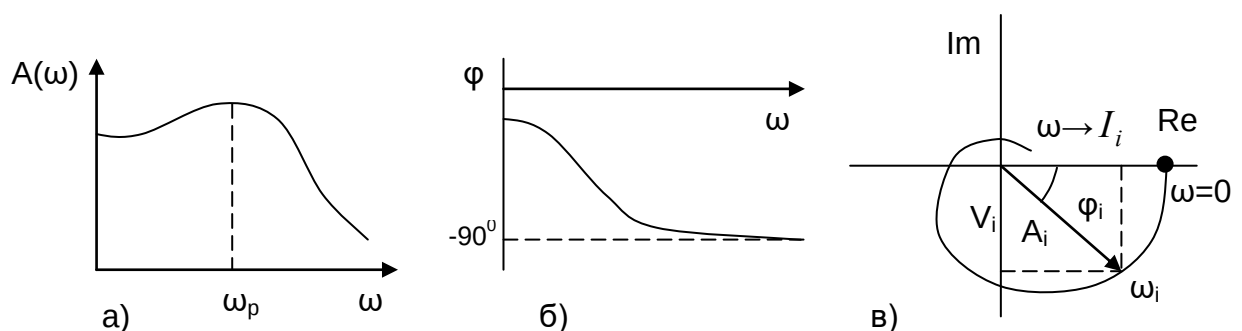


Рис.2.4 Частотні характеристики, а - амплітудно-частотна (АЧХ); б - фазо-частотна (ФЧХ); в - амплітудно-фазова (АФХ)

При збільшенні ω амплітудно-фазова характеристика $A(\omega) \rightarrow 0$, тобто проявляються інерційні властивості елемента та системи. Чим менша інерційність, тим ширша $A(\omega)$, тобто більша смуга (діапазон) пропускаємих частот. Часто існує резонансна частота, коли $A(\omega_p)$ має максимальне значення.

Фазо-частотна характеристика $\varphi(\omega)$ від'ємна, тобто вихідні коливання відстають від вхідних за фазою.

На комплексній площі $A(\omega)$ та $\varphi(\omega)$ об'єднуються в одну - амплітудно-фазову характеристику (АФХ) – рис.2.4,в. Це крива (годограф), яку описує кінець вектора A при зміні частоти від 0 до ∞ . Проеції вектора на дійсну (Re) та уявну (Im) осі – дійсна $U(\omega)$ та уявна $V(\omega)$ частотні характеристики [3, 7].

Важливою особливістю лінійних систем є те, що частота вхідних та усталених вихідних (після зникнення перехідної складової) сигналів співпадають. Крім того, якщо розглядати відношення амплітуд вихідного та вхідного сигналів, то при $\omega=0$ – це коефіцієнт передачі ($A(0)=K$).

Частотну характеристику можна отримати підстановкою $p=j\omega$ в вираз для передавальної функції, наприклад (2.20), тоді [5, 6, 7, 9]

$$W(j\omega) = \frac{b_m(j\omega)^m + b_{m-1}(j\omega)^{m-1} + \dots + b_0}{a_n(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \dots + a_0}, \quad (2.28)$$

Цей вираз називають частотною передавальною функцією, яку можна подати у вигляді [1]:

$$W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}, \quad (2.29)$$

$$\text{де: } A(\omega) = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)}, \varphi(\omega) = \arctg \frac{V(\omega)}{U(\omega)}, \quad (2.30)$$

$$U(\omega) = A(\omega) \cos \varphi(\omega), V(\omega) = A(\omega) \sin \varphi(\omega) \quad (2.31)$$

В загальному випадку виконують такі перетворення: записують вираз:

$$W(j\omega) = \frac{R(j\omega)}{D(j\omega)} = \frac{U_R(\omega) + jV_R(\omega)}{U_D(\omega) + jV_D(\omega)}, \quad (2.32)$$

після чого звільняються від уявності в знаменнику:

$$W(j\omega) = \frac{(U_R(\omega) + jV_R(\omega))(U_D(\omega) + jV_D(\omega))}{U_D^2(\omega) + jV_D^2(\omega)} = U(\omega) + jV(\omega), \quad (2.33)$$

$$\text{де:} \quad U(\omega) = \frac{U_R(\omega)U_D(\omega) + V_R(\omega)V_D(\omega)}{U_D^2(\omega) + jV_D^2(\omega)}, \quad (2.34)$$

$$V(\omega) = \frac{V_R(\omega)U_D(\omega) - U_R(\omega)V_D(\omega)}{U_D^2(\omega) + jV_D^2(\omega)}, \quad (2.35)$$

В практичних розрахунках користуються також логарифмічними частотними характеристиками, побудованими в логарифмічних координатах, тому їх можна замінити ломаними лініями, складеними з кількох прямолінійних відрізків. Крім того, в логарифмічних координатах легко знаходити характеристики різних з'єднань елементів: операціям множення і ділення відповідають додавання та віднімання ординат логарифмічних характеристик, наприклад [1]:

$$A = \prod_{i=1}^n A_i; \quad \lg A = \sum_{i=1}^n \lg A_i, \quad (2.36)$$

Амплітудно-фазові характеристики будуються в координатах $20 \lg A = f(\lg \omega)$, фазочастотні - $\varphi = f(\lg \omega)$. Одиницею довжини по осі частот є декада – інтервал частот між ω_i та $10\omega_i$. Ординати логарифмічної амплітудно-частотної характеристики $L(\omega) = 20 \lg A(\omega)$ вимірюють в логарифмічних одиницях – белах (Б) або децибелах (дБ), що відповідає відношенню потужностей двох сигналів: якщо потужність одного сигналу більша (або менша) іншого в 10 разів, тоді потужності відрізняються на 1Б ($\lg 10=1$). Потужність гармонійного сигналу пропорційна квадрату його амплітуди, тому при вимірюванні відношення амплітуд перед логарифмом необхідно враховувати множник 2. Наприклад, на деякій частоті $A(\omega) = 100$, що означає різницю вхідного і вихідного сигналів в 100^2 разів, тобто $2 \cdot \lg 100 = 4\text{Б}$ (40 дБ), а $L(\omega) = 20 \cdot \lg A(\omega) = 40$ дБ [1, 2].

Відповідно до частотних характеристик, всі елементи і системи поділяються на дві групи: мінімально-фазові і немінімально-фазові. Мінімально-фазовими називають такі елементи і системи, для яких всі нулі

та полюси передавальної функції $W(p)$ мають від'ємні дійсні частини та фазовий зсув $\phi(\omega)$ є мінімальним в порівнянні з іншими елементами, які мають таку ж амплітудно-частотну характеристику $A(\omega)$, але хоча б один полюс чи нуль у них має додатню частину. Для мінімально-фазових елементів і систем достатньо знати $A(\omega)$, $U(\omega)$ і $V(\omega)$ для повної оцінки їх характеристик [2, 3].

Часові характеристики. Це реакція елемента чи системи на типові вхідні сигнали – стрибкоподібний чи імпульсний (рис.2.5).

Часові функції є наочними, за їх видом можна оцінити загальні властивості елемента чи системи, які визначають їх динамічні особливості. З математичної точки зору часові характеристики є розв'язком диференціального рівняння, яке описує поведінку елемента чи системи в залежності від виду зовнішнього сигналу (це визначається правою частиною диференціального рівняння) та початкових умов, як правило нульових. Перехідна функція $h(t)$ (рис.2.5,а) – зміна вихідної величини з часом при подачі на вхід одиничного ступінчатого сигналу за нульових початкових умов [2, 3, 7].

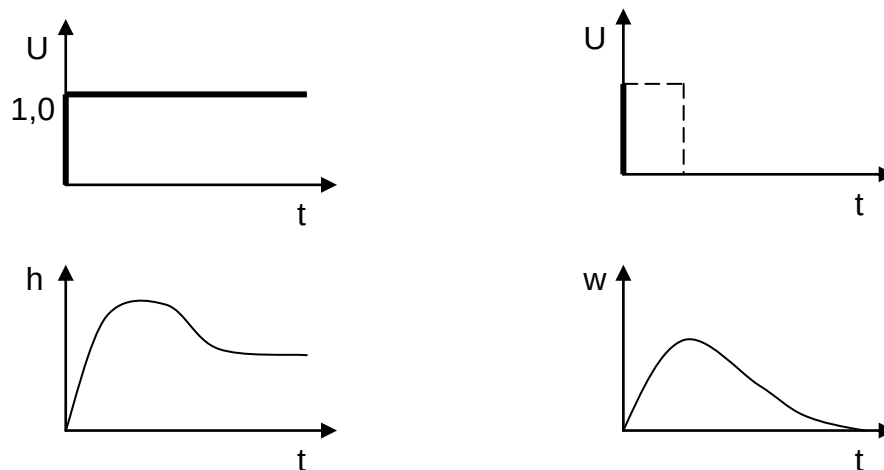


Рис.2.5. Часові характеристики: а) – перехідна функція $h(t)$
б) – імпульсна перехідна функція $w(t)$

Імпульсна перехідна функція $w(t)$ (рис.2.5,б) – зміна вихідної велечини з часом після подачі на вхід сигналу у вигляді δ -функції. Цю характеристику називають також ваговою функцією, або функцією ваги.

В задачах аналізу та синтезу використовуються різні динамічні характеристики, тому важливо знати і зв'язок між ними, який є однозначним тому, що фактично – це відображення одних і тих же властивостей елемента чи системи в різній формі. В той же час це дає можливість використовувати в конкретній задачі саме такі характеристики, які є найбільш зручними. Вище вже вказувалось, що перехідна функція $h(t)$ – розв'язок диференціального рівняння. Враховуючи, що δ -функція і одиничний стрибок зв'язані між собою залежністю [3]:

$$\delta(t) = l'(t), \quad (2.37)$$

справедливі також залежності:

$$w(t) = h'(t), h(t) = \int_0^t w(t)dt, \quad (2.38)$$

зображення за Лапласом одиничного стрибка

$$L[l(t)] = \frac{1}{s}, \quad (2.39)$$

тому

$$L[h(t)] = \frac{W(s)}{s}, \quad (2.40)$$

$$h(t) = L^{-1}\left[\frac{W(s)}{s}\right], \quad (2.41)$$

де: L^{-1} - символ зворотнього перетворення Лапласа.

Приймаючи до уваги, що

$$L[\delta(t)] = 1, \quad (2.42)$$

можна записати:

$$L[w(t)] = W(s), W(t) = L^{-1}[W(s)], \quad (2.43)$$

Реакція елемента чи системи на довільний вхідний сигнал визначається за допомогою інтеграла згортки (інтеграл Дюамеля) [3]:

$$x(t) = h(t)U(0) + \int_0^t h(t - \tau)U'(\tau)d\tau, \quad (2.44)$$

$$x(t) = h(0)U(t) + \int_0^t w(t - \tau)U(\tau)d\tau. \quad (2.45)$$

2.3. Типові елементарні ланки та їх характеристики

В автоматичних системах використовуються різні функціональні елементи (автоматичні регулятори, датчики, перетворювачі і інш.), які мають різну природу і конструкцію, але їх поведінка описується однаковими математичними залежностями, що дає можливість виділити порівняно невелику кількість типових ланок. Кожній такій ланці відповідає математична модель як залежність між вхідною та вихідною величинами, при цьому ця залежність є достатньо простою, і ланки називають елементарними. Елементарна ланка (ЕЛ) – це виділена ділянка (частка, елемент), яка має однонаправлену дію з відомою залежністю $x = f(U)$ (рис.2.6).

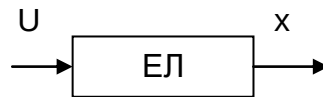


Рис.2.6. Елементарна ланка

В теорії автоматичного керування введені такі ЕЛ, щоб з їх допомогою можна було представити та описати систему різної природи та призначення. Використовуються такі елементарні ланки: аперіодична, підсилювальна, коливальна, інтегральна, диференціююча, із запізнюванням. Всі ці ЕЛ є мінімально-фазовими елементами. При аналізі властивостей елементарних ланок необхідно знати: рівняння, передавальну функцію, часові та частотні характеристики, а також реальні об'єкти, властивості яких описуються конкретною елементарною ланкою [1, 2].

Підсилювальна ланка. Рівняння ланки має вигляд [3, 8, 9]:

$$x = kU, \quad (2.46)$$

де: k - коефіцієнт передачі.

Рівняння ланки в операторному вигляді:

$$x(p) = kU(p), \quad (2.47)$$

звідки передавальна функція

$$W(p) = \frac{x(p)}{U(p)} = k, \quad (2.48)$$

Частотні характеристики отримують підстановкою: $p = j\omega$, звідки амплітудно-фазова характеристика:

$$W(j\omega) = k, \quad (2.49)$$

дійсна частина $U(\omega)=k$, уявна $V(\omega)=0$, амплітудно-фазова характеристика $\varphi(\omega)=0$ (рис.2.7)

Перехідна функція підсилювальної ланки

$$h(t) = k \cdot 1(t), \quad (2.50)$$

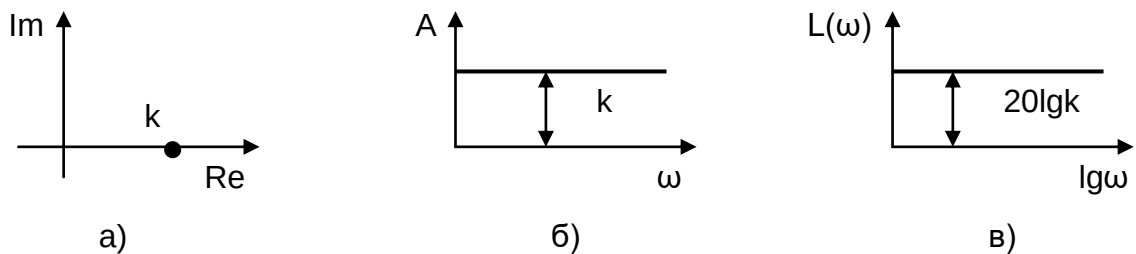


Рис.2.7. Частотні характеристики підсилювальної ланки, а – амплітудно-фазова (АФХ), б – амплітудно-частотна (АЧХ), в – логарифмічна амплітудно-частотна (ЛАЧХ)

а імпульсна характеристика

$$w(t) = k \cdot \delta(t), \quad (2.51)$$

Таким чином, підсилювальна ланка є безінерційною, і сигналу будь-якої частоти ($\omega=0; \infty$) проходять з однаковим відношенням амплітуд вхідної і вихідної змінної, яке дорівнює k .

Прикладом об'єкта, який описується підсилювальною ланкою, є електронний операційний підсилювач.

Аперіодична ланка. Диференціальне рівняння ланки [3, 8, 9]:

$$T \frac{dx}{dt} + x = kU, \quad (2.52)$$

де: T - постійна часу, k - коефіцієнт передачі.

В операторному вигляді рівняння (2.52) записується так:

$$(Tp + 1)x(p) = kU(p), \quad (2.53)$$

звідки передавальна функція ЕЛ:

$$W(p) = \frac{k}{Tp + 1}, \quad (2.54)$$

Амплітудно-фазова характеристика відповідає виразу (2.54) при $p = j\omega$:

$$W(j\omega) = \frac{k}{T(j\omega) + 1}, \quad (2.55)$$

Домножуючи вираз (2.55) на $(T(j\omega) - 1)$, отримуємо:

$$W(j\omega) = \frac{k - jTk\omega}{(T\omega)^2 + 1} = U(\omega) + jV(\omega), \quad (2.56)$$

$$\text{де:} \quad U(\omega) = \frac{k}{1 + (T\omega)^2}, V(\omega) = -\frac{kT\omega}{1 + (T\omega)^2}, \quad (2.57)$$

Амплітудно-частотна характеристика:

$$A(\omega) = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)} = \frac{k}{\sqrt{1 + (T\omega)^2}}, \quad (2.58)$$

Фазочастотна характеристика

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{V(\omega)}{U(\omega)} = -\arctg T\omega, \quad (2.59)$$

Ці характеристики показані на рис.2.8

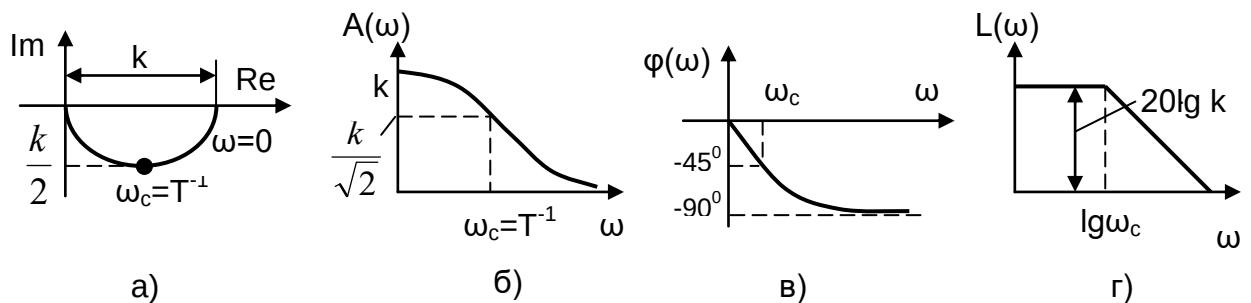


Рис.2.8. Частотні характеристики аперіодичної ланки, а – АФХ,

б – АЧХ, в – ФЧХ, г – ЛАЧХ

Перехідна функція аперіодичної ланки знаходиться як сума загального та частинного роз'язків рівняння (2.52):

$$h(t) = k(1 - e^{-\frac{t}{T}}) \cdot 1(t), \quad (2.60)$$

Імпульсна характеристика ланки визначається диференціюванням $h(t)$:

$$w(t) = \frac{k}{T} e^{-\frac{t}{T}} \cdot 1(t), \quad (2.61)$$

Часові характеристики аперіодичної ланки показані на рис.2.9.

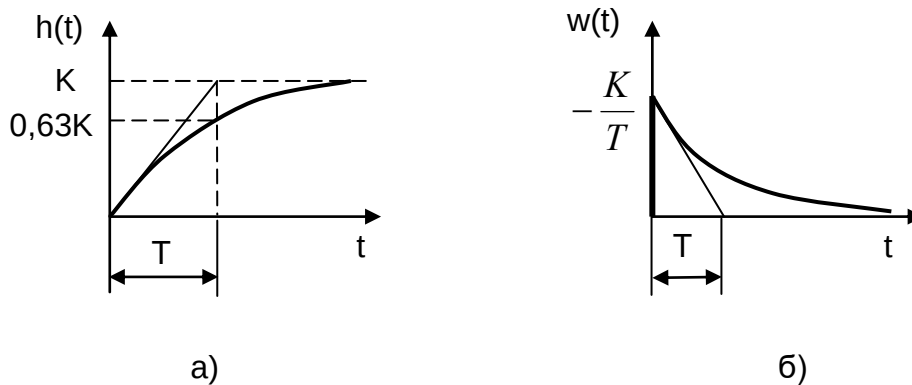


Рис.2.9. Часові характеристики аперіодичної ланки,
а – перехідна функція, б – імпульсна характеристика

З аналізу частотних характеристик ланки випливає, що гармонійний сигнал малої частоти ($\omega < \omega_c$) пропускається добре, про що свідчить відношення амплітуд вихідного і вхідного сигналів. При збільшенні частоти ($\omega > \omega_c$) зменшується коефіцієнт передачі і при $\omega \rightarrow \infty$ $K \rightarrow 0$. Аперіодична ланка є мінімально-фазовою, тому що створює менший фазовий зсув ніж інші ланки з такою характеристикою. Наприклад, нестійка ланка, частотна характеристика якої

$$W(j\omega) = \frac{K}{Tj\omega - 1}, \quad (2.62)$$

створює зсув за фазою

$$\varphi(\omega) = -180^\circ + \arctg \omega T, \quad (2.63)$$

Часові характеристики аперіодичної ланки (рис.2.9) дають можливість оцінити постійну часу T , яка визначає інерційність ланки.

Аперіодичною ланкою можна описувати різні елементи, які можуть накопичувати та передавати енергію чи речовину: конструктивні, електричні, гідравлічні збірники та інші.

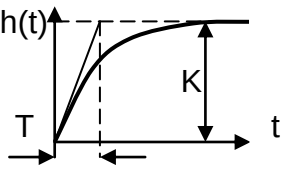
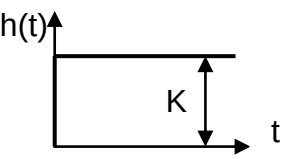
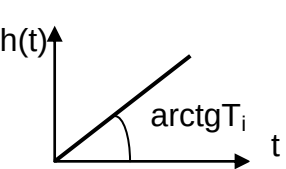
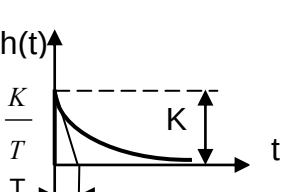
В задачах аналізу та синтезу амплітудно-фазова характеристика аперіодичної ланки визначаються формулою:

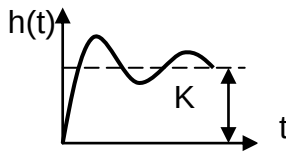
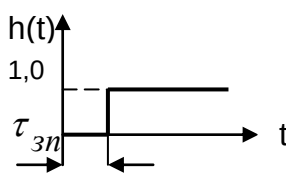
$$W(j\omega) = \frac{K}{\sqrt{T^2\omega^2 + 1}} e^{-\arctg T\omega}, \quad (2.63)$$

Властивості інших ланок вивчаються самостійно за наведеною схемою, а їх характеристики в загальному вигляді подано в табл.2-1 [1, 8, 9].

Таблиця 2-1

Характеристика типових елементарних ланок

№ п/п	Ланка	Рівняння	Передавальна функція	Перехідна функція
1.	Аперіодична	$T \frac{dx}{dt} + x = KU$	$W(p) = \frac{K}{Tp + 1}$	
2.	Підсилювальна (пропорційна, безінерційна)	$x = KU$	$W(p) = K$	
3.	Інтегрувальна	$x = \frac{1}{T_i} \int_0^t U dt$	$W(p) = \frac{1}{T_i p}$	
4.	Диференцію- вальна	$x = K \frac{dU}{dt}$	$W(p) = Kp$	

5.	Коливальна	$T_1^2 \frac{d^2 x}{dt^2} + T_2 \frac{dx}{dt} + x = KU$	$W(p) = \frac{K}{T_1^2 p^2 + T_2 p + 1}$	
6.	Із запізнюванням	$x = U(t - \tau_{zn})$	$W(p) = e^{-p\tau_{zn}}$	

Контрольні питання

1. В чому полягає зміст основних задач аналізу та синтезу автоматичних систем?
2. Назвіть основні положення формалізованого опису елементів і систем.
3. Чим характеризуються статичні та динамічні режими роботи?
4. Наведіть приклад лінійних та нелінійних статичних характеристик.
5. В чому полягає лінеаризація нелінійних характеристик і які методи для цього використовуються?
6. Які типові сигнали використовуються при дослідженні автоматичних систем?
7. Які види динамічних характеристик елементів і систем використовуються в задачах аналізу і синтезу?
8. Наведіть форми запису диференціальних рівнянь системи. Що таке канонічна форма?
9. Які перехідні процеси виникають в АСР?
10. Дайте визначення передавальної функції, як її отримати з диференціального рівняння?
11. Частотні характеристики, їх види, методи отримання.
12. Що таке логарифмічні частотні характеристики?
13. Часові характеристики, їх види та способи отримання.
14. Наведіть приклади взаємозв'язку різних динамічних характеристик.
15. Що таке типові елементарні ланки?

16. Охарактеризуйте властивості елементарних ланок: підсилювальної, аперіодичної, коливальної, диференціювальної, інтегрувальної, із запізненням.
17. Наведіть приклади реальних об'єктів, які описуються різними елементарними ланками.

3.ВЛАСТИВОСТІ ТА ХАРАКТЕРИСТИКИ АВТОМАТИЧНИХ СИСТЕМ РЕГУЛЮВАННЯ

3.1.Структурні схеми та їх перетворення

Структурною схемою автоматичної системи називається умовне графічне зображення її елементів (ланок) та зв'язків між ними з визначенням перетворень сигналів за допомогою передавальних функцій цих елементів. При аналізі структурних схем враховуються лише інформаційні аспекти, в першу чергу напрямки передачі сигналів. На структурних схемах крім динамічних ланок з фіксованими виходами та входами, зображаються також суматори або елементи порівняння кількох сигналів та вузли (точки розгалуження сигналів). В задачах аналізу та синтезу АСР структурні схеми приводять до зручного виду за рахунок перетворень, для чого існують певні правила. В основі цих перетворень лежить фундаментальне правило: вихід елемента – відображення входу за допомогою передавальної функції, тобто $x(p) = W(p)*U(p)$ [3].

В структурних схемах зустрічаються типові з'єднання, для яких відомі вирази еквівалентних передавальних функцій. При **послідовному** з'єднанні елементів (рис.3.1.) вихідного попереднього є входом наступного і сигнал передається в одному напрямі [1, 2, 7, 8, 9].

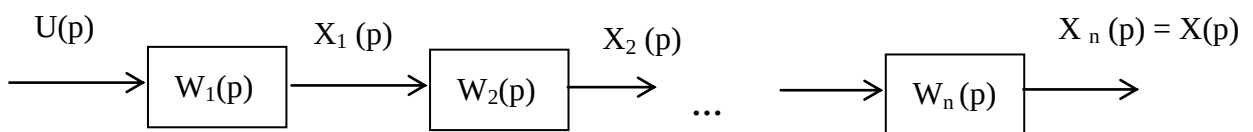


Рис. 3.1. Послідовне з'єднання елементів

Еквівалентна передавальна функція отримується з очевидних залежностей :

$$X_1(p) = W_1(p)*U(p), \quad (3.1)$$

$$X_2(p) = X_1(p)*W_2(p) = W_1(p)*W_2(p)*U(p) \quad (3.2)$$

$$X_n(p) = X(p) = \prod_{i=1}^n W_i(p) * U(p) \quad (3.3)$$

$$W_{екв}(p) = \frac{X(p)}{U(p)} = \prod_{i=1}^n W_i(p) \quad (3.4)$$

Таким чином, для послідовного з'єднання елементів еквівалентна передавальна функція – добуток передавальних функцій цих елементів. При дослідженні статичного режиму загальний коефіцієнт передачі також є добутком коефіцієнтів передачі окремих елементів

$$K_{екв} = \prod_{i=1}^n K_i \quad (3.5)$$

При цьому необхідно враховувати, що розмірність $K_{екв}$ – добуток розмірностей K_i , які повинні визначатись в точках, що відповідають обраному режиму роботи, наприклад в точках лінеаризації статичних характеристик.

При **паралельному** з'єднанні елементів (рис.3.2) вхідний сигнал поступає одночасно на всі елементи, а вихід системи – сума виходів елементів [1, 2, 7, 8, 9].

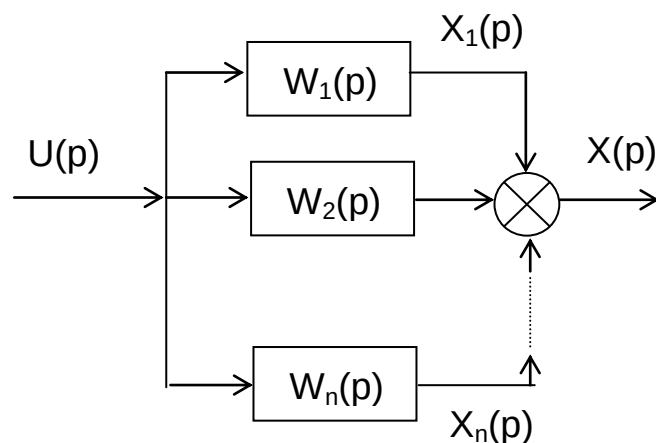


Рис.3.2.Паралельне з'єднання елементів

Для такого з'єднання справедливі залежності :

$$X_1(p) + X_2(p) + \dots + X_n(p) = X(p) \quad (3.6)$$

$$X(p) = U(p) * (W_1(p) + W_2(p) + \dots + W_n(p)) \quad (3.7)$$

$$W_{екв}(p) = \frac{X(p)}{U(p)} = \sum_{i=1}^n W_i(p) \quad (3.8)$$

Таким чином, в даному випадку еквівалентна передавальна функція – сума передавальних функцій елементів, але додавання сигналів в певній точці можливе за умови, що вони мають одну розмірність, тоді K_i та $K_{екв}$ також мають одну розмірність.

В автоматичних системах найбільш характерним з'єднанням елементів є зустрічно – паралельне, тобто при наявності зворотнього зв'язку (рис.3.3) [1, 2, 7, 8, 9].

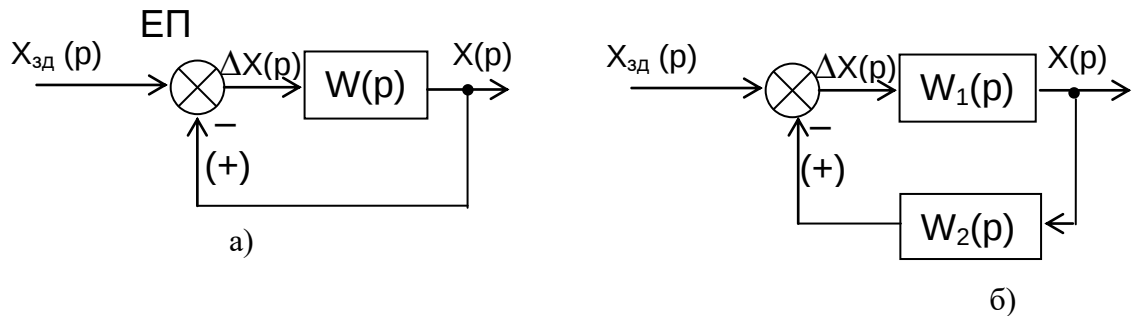


Рис.3.3. Зустрічно-паралельне з'єднання елементів, а – з одиничним зворотнім зв'язком, б – з елементом в ланцюзі зворотнього зв'язку

За знаком зворотній зв'язок може бути від'ємним або додатнім, що показано на вході елемента порівняння ЕП. Для схеми з одиничним зворотнім зв'язком (рис.3.3,а) справедливі залежності :

$$X(p) = W(p) \cdot \Delta X(p) \quad (3.9)$$

$$\Delta X(p) = X_{зд}(p) \mp X(p) \quad (3.10)$$

Після підстановки (3.10) в (3.9) отримуємо :

$$X(p) = W(p) \cdot (X_{зд}(p) \mp X(p)) \quad (3.11)$$

Перенесемо в ліву частину $X(p)$ (знак при цьому зміниться) :

$$(1 \pm W(p)) \cdot X(p) = W(p) \cdot X_{зд}(p) \quad (3.12)$$

$$W_{екв}(p) = \frac{X(p)}{X_{з\delta}(p)} = \frac{W(p)}{1 \pm W(p)} \quad (3.13)$$

Необхідно звернути увагу на те, що у виразі (3.13) знак “+” відповідає від’ємному зворотньому зв’язку.

Якщо в зворотньому зв’язку є також елемент з передавальною функцією $W_2(p)$ (рис.3.3,б), то це необхідно врахувати у виразі для $\Delta X(p)$:

$$\Delta X(p) = X_{з\delta}(p) \mp W_2(p) \cdot X(p) \quad (3.14)$$

Після перетворень отримаємо :

$$W_{екв}(p) = \frac{W_1(p)}{1 \pm W_1(p) \cdot W_2(p)} \quad (3.15)$$

На основі аналізу наведених прикладів можна сформулювати таке правило : при з’єднанні елементів, де використовується зворотній зв’язок, еквівалентна передавальна функція завжди є дробом, в чисельнику якого передавальна функція прямої ланки, а знаменник – одиниця “±” добуток передавальних функцій прямої ланки та зворотнього зв’язку, причому знак “+” відповідає від’ємному зворотньому зв’язку.

Якщо в складі системи немає інтегральних ланок, то в статичі загальний коефіцієнт передачі визначається виразом :

$$K_{екв}(p) \Big|_{p=0} = \frac{K_n}{1 \pm K_n \cdot K_{зз}} \quad (3.16)$$

де : K_n , $K_{зз}$ – відповідно коефіцієнти передачі прямої ланки та зворотнього зв’язку. Розмірність $K_{екв}$ відповідає розмірності K_n , а добуток $K_n \cdot K_{зз}$ завжди безрозмірний. Аналіз виразу (3.16) приводить до таких висновків [1, 2, 7, 8, 9]:

- від’ємний зворотній зв’язок зменшує $K_{екв}$, а додатній збільшує (а при $K_n \cdot K_{зз} = 1$, $K_{екв} \rightarrow \infty$). При $K_n \cdot K_{зз} > 1$ і додатньому зворотньому зв’язку схема виконує функцію інвертора ;
- при $K_n \cdot K_{зз} \gg 1$ значення $K_{екв}$ практично не залежить від K_n , а визначається зворотнім зв’язком :

$$K_{екв}(p) \approx \frac{K_n}{K_n \cdot K_{33}} \approx \frac{1}{K_{33}} \quad (3.17)$$

Остання залежність широко використовується при конструюванні високостабільних пристроїв, які складаються з елементів із змінюваними коефіцієнтами. Від'ємний зворотній зв'язок зменшує нестабільність елементів.

При необхідності проводять перетворення структурних схем, приводять їх до необхідного виду за рахунок тотожних змінювань. Це значить, що початкова і кінцева структурні схеми повинні бути тотожними щодо перетворень сигналів. Таких перетворень може бути необмежена кількість, тому тут наводяться лише деякі загальні правила та характерні приклади.

Перенесення суматора назад чи вперед потребує введення додаткової передавальної функції (показана подвійними лініями) для того, щоб початкова та кінцева схеми були тотожними (рис.3.4.) [1, 2, 7, 8, 9].

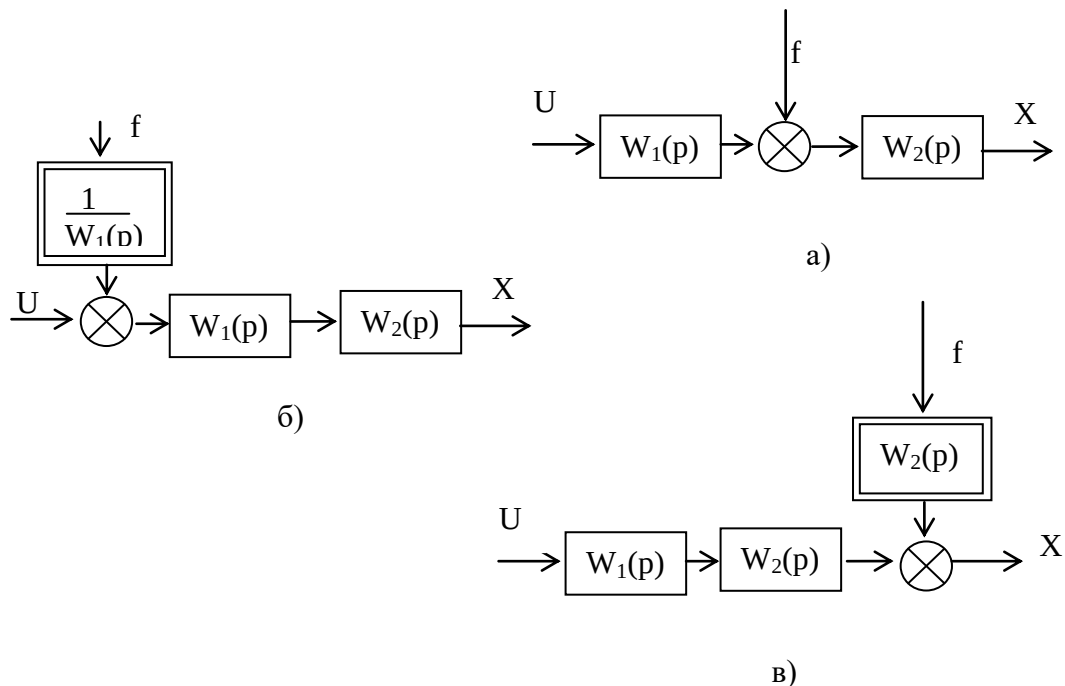


Рис.3.4. Перенесення суматора, а – початкова схема, б – перенесення суматора назад, в – перенесення суматора вперед

При перенесеннях, показаних на рис.3.4 б,в необхідно зберегти проходження сигналу f лише через передавальну функцію $W_2(p)$, тобто введення додаткових передавальних функцій дає :

для схеми б) :

$$\frac{1}{W_1(p)} \cdot W_1(p) \cdot W_2(p) = W_2(p) \quad (3.18)$$

для схеми в) : $W_2(p)$. Ці перетворення стосуються лише сигналу f .

Перенесення точки (вузла) потребують змінювань структурної схеми, які зрозумілі з рис.3.5 [1, 2, 7, 8, 9].

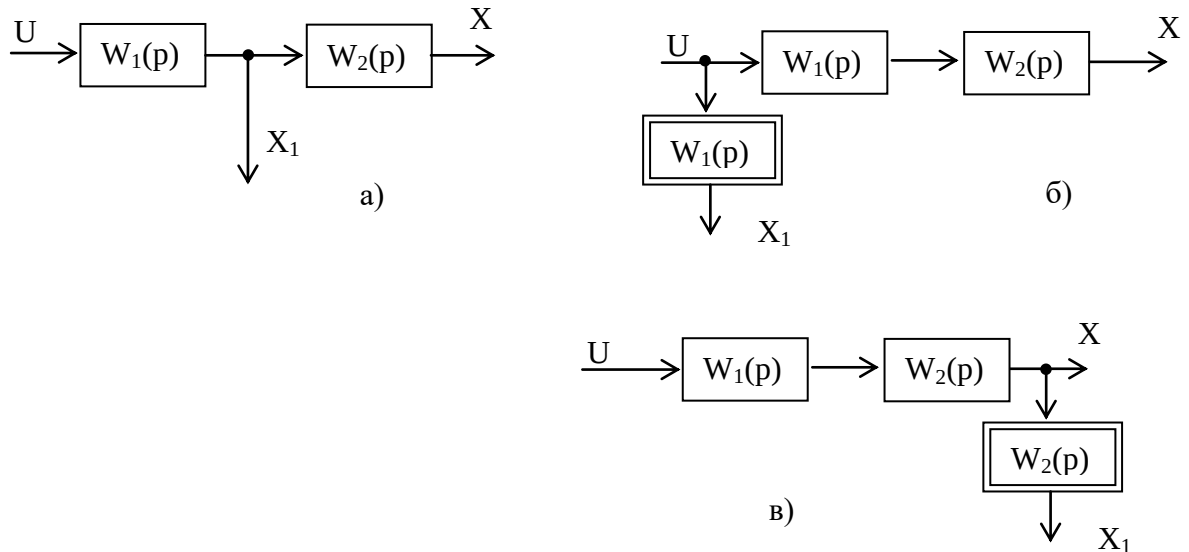


Рис.3.5.Перенесення точки (вузла), а) – початкова схема, б) – перенесення назад, в) – перенесення вперед

В більш складних структурних схемах часто доводиться проводити їх спрощення за рахунок усунення :

- прямих перехресних зв'язків;
- зворотніх перехресних зв'язків;
- прямих та зворотніх перехресних зв'язків.

Відповідні перетворення наведені на рис.3.6. – 3.8, в результаті отримують структурну схему та відповідні еквівалентні передавальні функції. При перетвореннях структурних схем використовувались правила перенесення точок і суматорів, а також отримання еквівалентних передавальних функцій для типових схем з'єднань елементів [8].

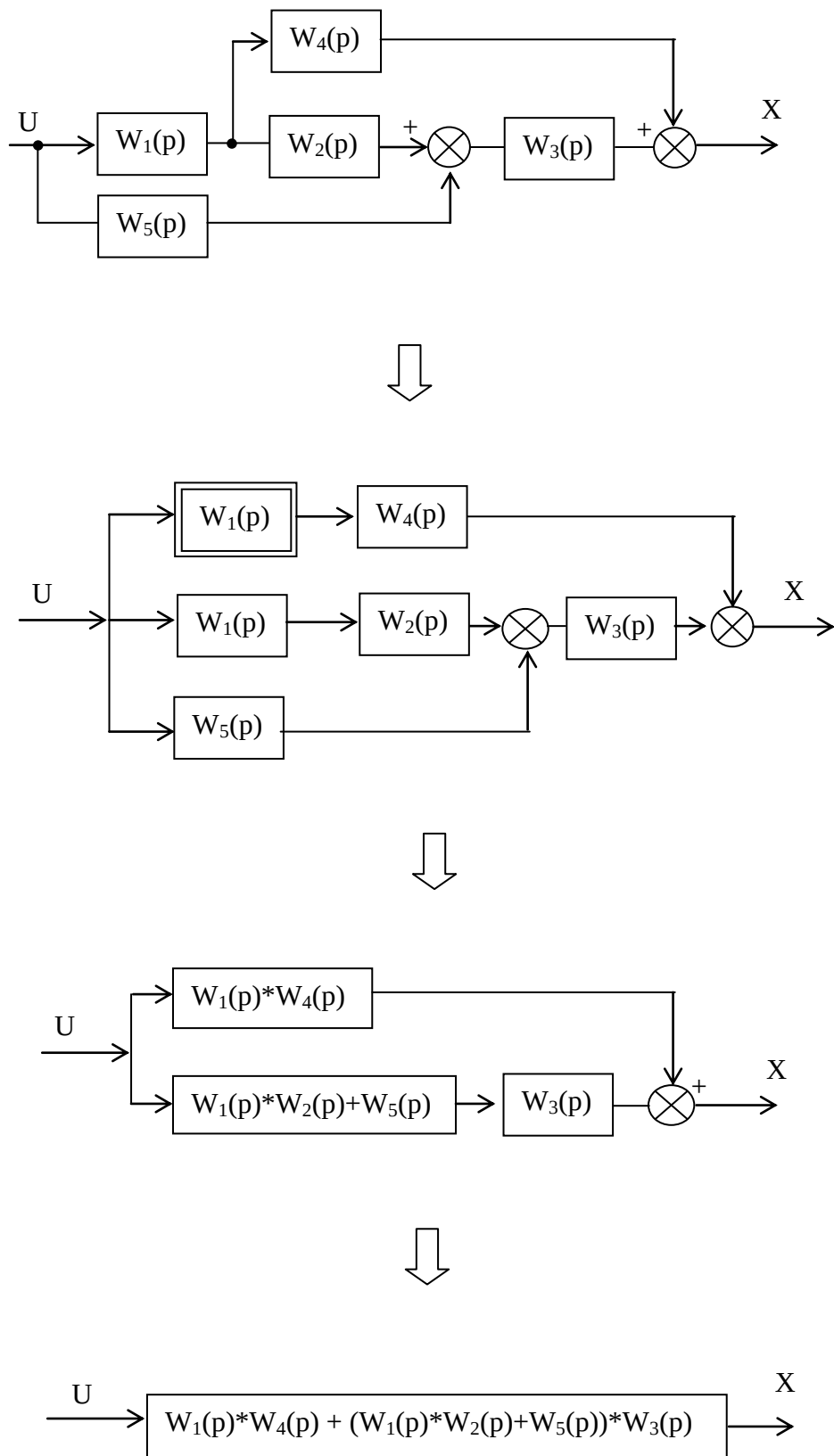


Рис.3.6.Усунення прямих перехресних зв'язків

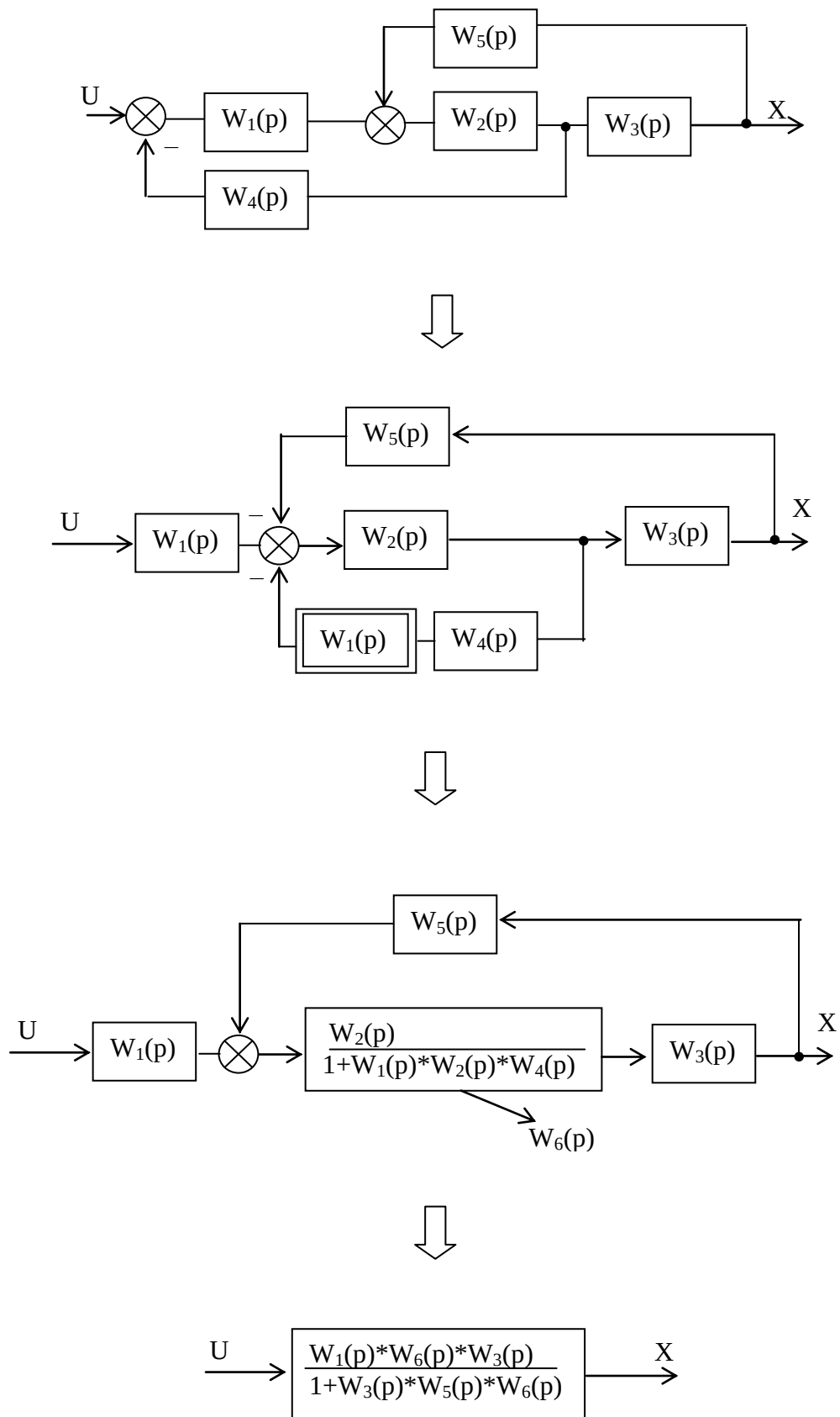
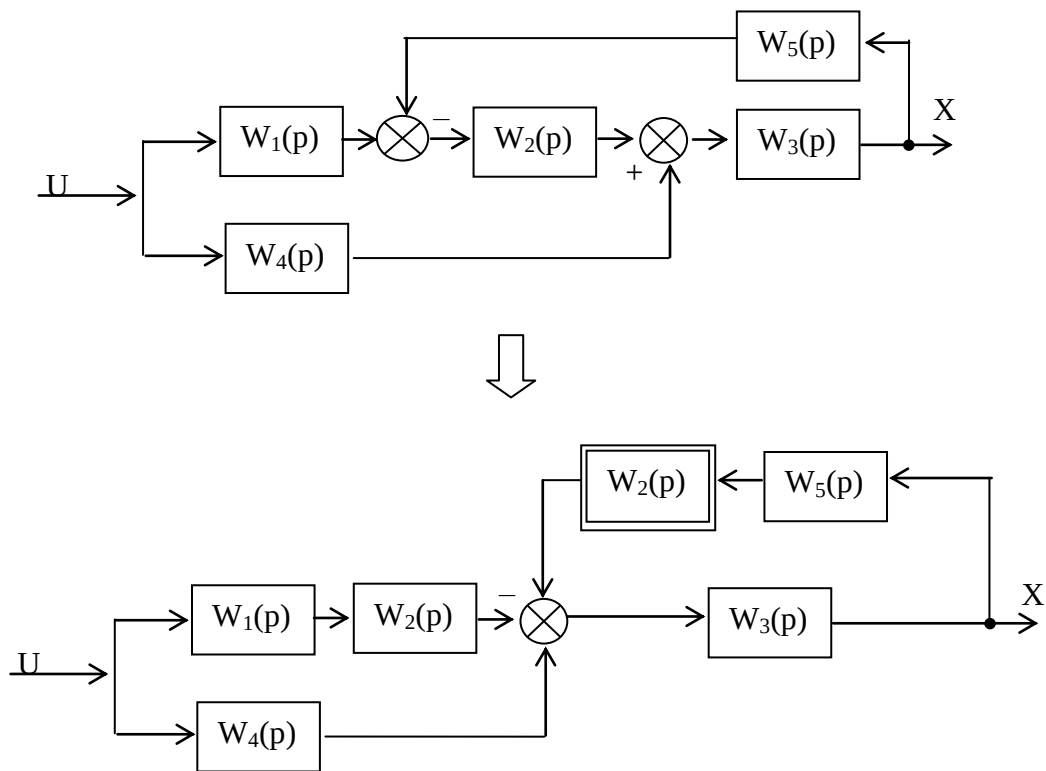


Рис.3.7. Усунення зворотніх перехресних зв'язків



$$W_{екв}(p) = \frac{(W_1(p) \cdot W_2(p) + W_4(p)) \cdot W_3(p)}{1 + W_2(p) \cdot W_3(p) \cdot W_5(p)}$$

Рис.3.8.Усунення перехресних прямих і зворотніх зв'язків

3.2. Структурна схема та передавальні функції типової замкненої автоматичної системи регулювання

Ця схема є основою для розв'язання різних задач аналізу і синтезу, а її особливістю є те, що на ній вказуються передавальні функції автоматичного регулятора $W_{рег}(p)$ і об'єкта за каналами проходження сигналу керування $W_{ок}(p)$ та збурення $W_{озб}(p)$ (рис.3.9). Інші функціональні елементи (датчики, виконавчі механізми, регулюючі органи) на цій схемі окремо не враховуються. При необхідності вони можуть включатись в схему за допомогою окремих передавальних функцій або приєднуватись до інших елементів, наприклад об'єкта [3, 8].

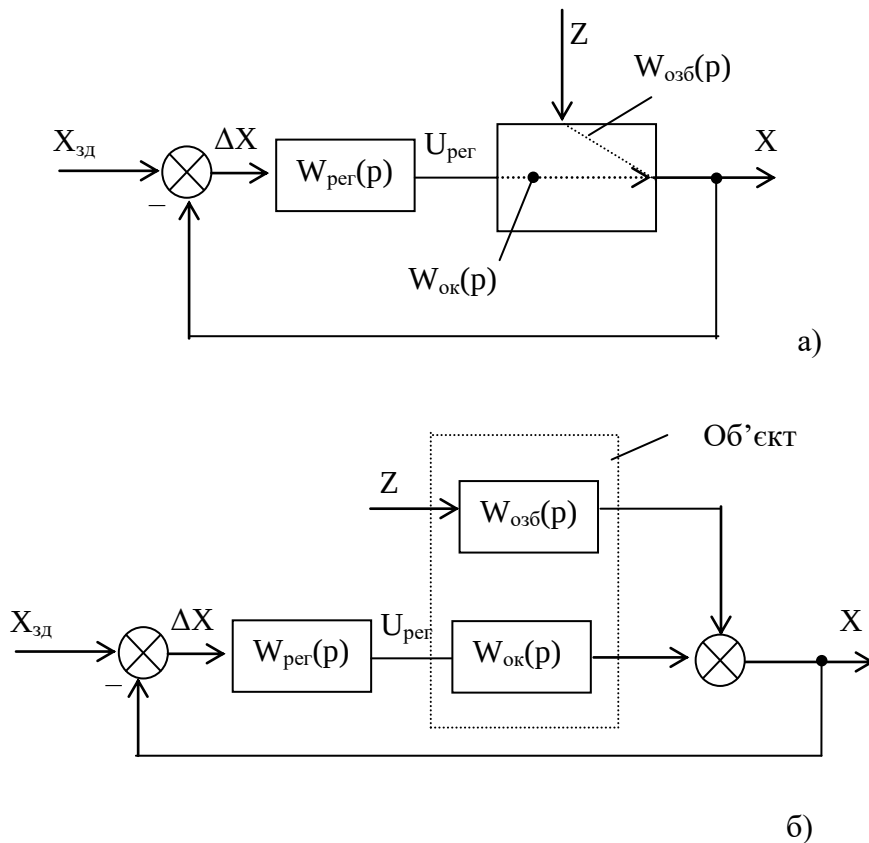


Рис.3.9. Структурна схема АСР, а – спрощена, б – з виділенням каналів керування і збурення для об'єкта

В розрахунках АСР використовуються такі передавальні функції [3, 8]:

- відносно зміни завдання для регульованої координати (цю передавальну функцію називають головною для замкненої системи):

$$W_{з\partial}(p) = \frac{X(p)}{X_{з\partial}(p)} \quad (3.19)$$

- відносно зміни завдання для похибки :

$$W_{з\partial}^{\Pi}(p) = \frac{\Delta X(p)}{X_{з\partial}(p)} \quad (3.20)$$

- відносно збурення для регульованої координати :

$$W_{збур}(p) = \frac{X(p)}{Z(p)} \quad (3.21)$$

- відносно збурення для похибки :

$$W_{збур}^{\Pi}(p) = \frac{\Delta X(p)}{z(p)} \quad (3.22)$$

Передавальні функції (3.19) – (3.22) виводяться на основі принципу суперпозиції, який справедливий лише для лінійних систем : можна окремо розглядати реакцію системи на один із сигналів, приймаючи інші рівними нулю. Загальна реакція системи буде сумою частинних реакцій. Вирази для відповідних передавальних функцій виводяться на основі залежностей, які характеризують проходження відповідних сигналів через передавальні функції [3, 8].

Для отримання передавальної функції (3.19) приймаємо $Z=0$. Тоді :

$$X(p) = W_{pez}(p) \cdot W_{ок}(p) \cdot \Delta X(p) \quad (3.23)$$

$$\text{Позначимо : } W_{pez}(p) \cdot W_{ок}(p) = W_{роз}(p) \quad (3.24)$$

де $W_{роз}(p)$ – передавальна функція розімкненої системи;

$$\text{Запишемо вираз для } \Delta X = X_{зд} - X(t) : \Delta X(p) = X_{зд}(p) - X(p) \quad (3.25)$$

і підставимо його в (3.23), тоді з урахуванням (3.24) :

$$X(p) = W_{роз}(p) \cdot (X_{зд}(p) - X(p)) \quad (3.26)$$

звідки :

$$(1 + W_{роз}(p)) \cdot X(p) = W_{роз}(p) \cdot X_{зд}(p) \quad (3.27)$$

Передавальна функція замкненої системи:

$$W_{зд}(p) = \frac{X(p)}{X_{зд}(p)} = \frac{W_{роз}(p)}{1 + W_{роз}(p)} \quad (3.28)$$

Передавальна функція (3.20) отримується так [3, 8]:

$$\Delta X(p) = X_{зд}(p) - X(p) = X_{зд}(p) - \Delta X(p) \cdot W_{роз}(p) \quad (3.29)$$

$$(1 + W_{роз}(p)) \cdot \Delta X(p) = X_{зд}(p)$$

$$W_{зд}^{II}(p) = \frac{\Delta X(p)}{X_{зд}(p)} = \frac{1}{1 + W_{роз}(p)} \quad (3.30)$$

Для отримання передавальних функцій (3.21),(3.22) використовуємо попередні вирази за умови $X_{зд}(p) = 0$. Тоді при дії збурення $Z(p)$ змінювання $X(p)$ буде :

$$X(p) = W_{озб}(p) \cdot Z(p) - X(p) \cdot W_{роз}(p) \quad (3.31)$$

$$(1 + W_{poz}(p)) \cdot X(p) = W_{озб}(p) \cdot Z(p) \quad (3.32)$$

Передавальна функція (3.21) буде :

$$W_{збур}(p) = \frac{X(p)}{Z(p)} = \frac{W_{озб}(p)}{1 + W_{poz}(p)} \quad (3.33)$$

Передавальна функція системи для похибки виводиться так (при $X_{зд}(p)=0$) :

$$\Delta X(p) = -X(p) = -(\Delta X(p) \cdot W_{poz}(p) + Z(p) \cdot W_{озб}(p)) \quad (3.34)$$

звідки :

$$(1 + W_{poz}(p)) \cdot X(p) = -W_{озб}(p) \cdot Z(p) \quad (3.35)$$

Передавальна функція (3.22) буде :

$$W_{збур}^{II}(p) = \frac{\Delta X(p)}{Z(p)} = -\frac{W_{озб}(p)}{1 + W_{poz}(p)} \quad (3.36)$$

Таким чином всі чотири передавальні функції мають однаковий знаменник, а також всі вони включають передавальні функції об'єкта за різними каналами та автоматичного регулятора. Виходячи з цього, необхідно чітко засвоїти : властивості системи однаково залежать від властивостей як об'єкта, так і автоматичного регулятора, тому в наступних розділах розглядаються характеристики об'єктів та автоматичних регуляторів. Між різними передавальними функціями системи можна виявити такі взаємозв'язки [3, 8]:

$$W_{зд}^{II}(p) = 1 - W_{зд}(p); \quad W_{збур}^{II}(p) = -W_{збур}(p) \quad (3.37)$$

На основі принципу суперпозиції для замкненої лінійної АСР можна записати :

$$X(p) = W_{зд}(p) \cdot X_{зд}(p) + W_{збур}(p) \cdot Z(p) \quad (3.38)$$

$$\Delta X(p) = W_{зд}^{II}(p) \cdot X_{зд}(p) + W_{збур}^{II}(p) \cdot Z(p) \quad (3.39)$$

3.3.Об'єкти керування та їх властивості

В першому розділі відзначалось, що в широкому розумінні термін “об’єкт керування “ може означати як елементарні процеси перетворення речовини та енергії, так і технологічний комплекс або підприємство в цілому. Тут розглядаються елементарні об’єкти автоматичного регулювання, для яких важливо підтримувати необхідний режим роботи із заданими показниками щодо стійкості та якості перехідних процесів. В задачах аналізу і синтезу використовуються математичні моделі об’єктів у вигляді залежностей вихідної змінної (регульованої координати) від вхідних змінних. Для оцінки властивостей об’єктів використовуються також різні динамічні характеристики. Математичні моделі об’єктів використовуються для різних цілей : розробка системи стабілізації технологічних режимів, оптимізація їх в статиці і динаміці. Для одного і того ж об’єкта може бути кілька математичних моделей в залежності від розв’язуваної задачі та ступені деталізації моделей. При цьому враховуються такі особливості об’єктів як зосередженість чи розподіленість параметрів, нелінійність, нестационарність, запізнювання [1, 2, 5, 7].

Математичні моделі (ММ) **статики** об’єктів із зосередженими параметрами описуються виразом :

$$X = f(u, z, a), \quad (3.40)$$

де : f – вектор-функція; u, z – вхідні змінні (керування та збурення), a – вектор параметрів моделі, який враховує особливості процесів, режимів та конструкцій об’єкта. Зосередженість параметрів означає, що технологічні змінні в різних точках об’єкта мають однакові значення. Це можливо при інтенсивному перемішуванні робочого середовища об’єкта, наприклад в мішалках. Вектор a в ММ в явному вигляді може не фігурувати.

Якщо значення змінних в різних точках об’єкта, наприклад в трубопроводі, різні, то статика враховує *розподіленість* параметрів [8, 9]:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u, z, a) \quad (3.41)$$

де : l – просторова координата.

Динаміка об'єкта із зосередженими параметрами описуються диференціальним рівнянням [8, 9]:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u, z, a) \quad (3.42)$$

Тут приймається, що швидкість змінювання координат X в будь-якій точці об'єкта однакова.

Динаміка об'єктів з *розподіленими* параметрами описується диференціальними рівняннями в частинних похідних для урахування змінювання X за часом та за просторовою координатою [8, 9]:

$$\frac{dx}{dl}, \frac{dx}{dt} = f(x, u, z, a) \quad (3.43)$$

Для нестационарних об'єктів враховуються змінювання їх властивостей за часом, тоді диференціальні рівняння мають змінні коефіцієнти.

Загальні властивості об'єктів регулювання. Об'єкти мають різне призначення, в них протікають різні процеси, вони відрізняються конструкцією, але з точки зору процесу керування ними можна виділити деякі загальні особливості і властивості [1, 2, 3, 5, 7]:

- самовирівнювання – властивість об'єкта переходити самостійно з одного рівноважного стану в інший після нанесення певного вхідного сигналу, збурення. Наприклад, теплообмінні процеси при змінюванні навантаження самостійно переходять з одного стану рівноваги в інший з різними температурами середовища, збірники, в яких відбувається вільний витік рідини. Самовирівнювання – це наслідок внутрішнього від'ємного зворотнього зв'язку в стійкому об'єкті, що проявляється як вплив значення регульованої координати на приток та (чи) виток речовини або енергії. Ця властивість об'єкта полегшує процес регулювання, зменшує відхилення регульованих координат;

- інерційність, що проявляється в тривалості перехідних процесів і оцінюється постійними часу T . Як відзначалось вище, тривалість перехідного процесу $t_n = (3-4)T$;
- ємкість – кількість речовини чи енергії, яку може накопичувати та витрачати об'єкт в процесі регулювання. Для гідравлічних об'єктів – маса речовини, для теплових – кількість теплоти, для рухомих – момент інерції.
- запізнювання – час між подачею вхідного сигналу та моментом появи вихідної змінної. Розрізняють транспортне (чисте) запізнювання $\tau_{зп} = \frac{l}{v}$ (l – довжина шляху, v - швидкість) та перехідне, або ємкісне, яке викликається наявністю в об'єкті кількох ємкостей та опорів між ними.

Методи отримання математичних моделей об'єктів можна поділити на ряд класів в результаті чого отримують [1, 2, 3, 7]:

- аналітичні ММ (неформальні). При їх виведенні використовуються фундаментальні закони перетворення речовини та енергії, тепло- та масообміну, гідродинаміки та інше. В результаті отримують ММ, які описують клас об'єктів, є універсальними, і саме в цьому їх значущість і перевага перед іншими моделями. В той же час отримання аналітичних ММ потребує розкриття природи та механізмів процесів, що приводять до громіздких і незручних для використання математичних моделей. Крім того, при виведенні аналітичних ММ не можна обійтись без певних спрощень, що зменшує цінність цих ММ. В теорії автоматичного керування аналітичні моделі розробляють для елементарних об'єктів і приводять до зручного виду, наприклад до стандартної форми диференціальних рівнянь;
- Формальні моделі, для отримання яких використовується метод “чорного ящика”, коли не розкривається природа процесів, які протікають в об'єкті, а знаходяться такі математичні залежності, які

з прийнятною точністю описують зв'язок між вхідними і вихідними змінними. Формальні моделі отримують експериментальним шляхом та перевіряють їх методами комп'ютерного моделювання;

- Комбіновані, які певною мірою об'єднують аналітичні та формальні методи, наприклад структура моделі визначається після вивчення природи об'єкта, а параметри моделі оцінюються експериментально.

Порядок отримання **аналітичних ММ** для елементарних об'єктів може бути таким [1, 2, 3, 7]:

- вивчаються в загальному вигляді природа об'єкта, процеси, які протікають в ньому, визначаються регульовані координати, збурення та можливі дії керування, складається так звана параметрична схема. Кількість регульованих координат визначає порядок математичної моделі;
- складаються рівняння матеріального та енергетичного балансів, визначаються математичні моделі для розкриття складових цих балансів;
- виконуються процедури лінеаризації нелінійних залежностей, приймаються припущення, які можуть спростити математичну модель, наприклад щодо зосередженості параметрів, постійних значень констант процесів і інш.;
- розглядаються порушення балансів і приймається припущення, що швидкість змінювання регульованих координат пропорційна величині небалансу. Диференціальні рівняння приводяться, по можливості, до стандартної форми;
- аналізуються отримані математичні моделі, складаються структурні схеми, проводиться комп'ютерне моделювання.

Аналітичні ММ повинні бути адекватними (відповідними) об'єкту та задачі, з необхідною точністю відтворювати статичні та динамічні властивості, бути зручними, наочними та, по можливості, простими.

Розглянемо приклади отримання аналітичних ММ елементарних об'єктів.

Приклад 1. Математична модель збірника як об'єкта регулювання рівня Н (рис.3.10.а) [8]. Характерною особливістю роботи об'єкта є те, що витрата речовини з нього здійснюється насосом, продуктивність якого не залежить від рівня Н.

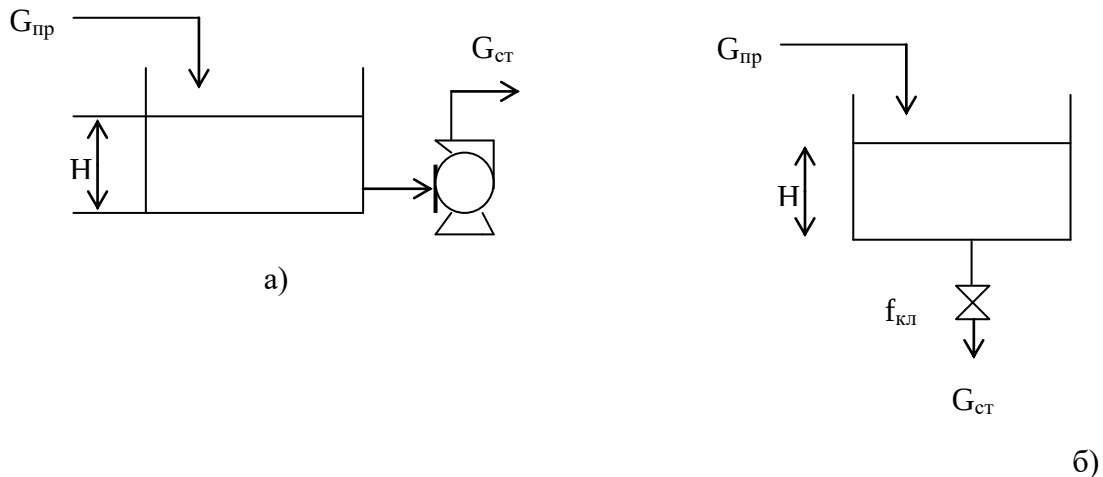


Рис.3.10.Збірники рідини як об'єкти регулювання рівня

Матеріальний баланс визначає рівність потоків на вході і виході збірника :

$$G_{пр} = G_{ст}, \quad (3.44)$$

$$H = \text{const}$$

Порушення балансу приводить до змінювання Н :

$$\Delta G_{пр} - \Delta G_{ст} = F \frac{d(\Delta H)}{dt} \quad (3.45)$$

Рівняння (3.45) записано у відхилення змінних від їх номінального (розрахункового) значення. Домножимо рівняння (3.45) на величину

$$\frac{H_0}{G_{cm0}}, \text{ де індекс "0" означає номінальне значення змінної (розрахунковий}$$

режим) , тоді :

$$\frac{F \cdot H_0}{G_{cm0}} \cdot \frac{d(\Delta H)}{dt} = \frac{H_0}{G_{cm0}} \cdot \Delta G_{пр} - \frac{H_0}{G_{cm0}} \cdot \Delta G_{ст} \quad (3.46)$$

або :

$$T \frac{d(\Delta H)}{dt} = K_1 \cdot \Delta G_{пр} - K_2 \cdot \Delta G_{ст} \quad (3.47)$$

де : T – постійна часу, K_1, K_2 – коефіцієнти передачі.

Рівняння (3.47) відповідає елементарній інтегральній ланці. При виведенні ММ приймалися припущення, що площа поперечного перерізу збірника F по висоті постійна, в противному випадку ММ необхідно доповнити рівнянням для визначення $F=f(H)$.

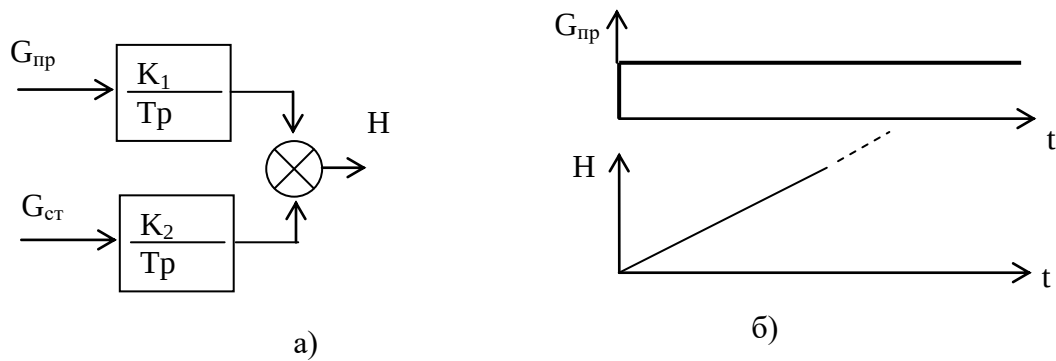


Рис.3.11. Структурна схема (а) та часова характеристика (б) збірника

Структурна схема (рис.3.11,а) складається з двох передавальних функцій (інтегральних ланок), а часова характеристика показує, що збірник не має самовирівнювання.

Приклад 2. Для збірника, схема якого показана на рис.3.10.б, рівняння матеріального балансу та його порушення (3.44,3.45) мають такий же вигляд, але величина стоку $G_{ст}$ залежить від рівня і визначається рівнянням Бернуллі [8]:

$$G_{ст} = \mu \cdot f_{кл} \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot H} \quad (3.48)$$

де : μ - коефіцієнт витрати, $f_{кл}$ – площа поперечного перерізу клапана, g – прискорення вільного падіння. Залежність (3.48) нелінійна, оскільки регульована координата знаходиться під знаком кореня і є також добутком двох змінних H та $f_{кл}$. Лінеаризацію цього виразу можна провести при нульових умовах за рівнянням :

$$\Delta G_{ст} = \left(\frac{\partial G_{ст}}{\partial H} \right)_0 \cdot \Delta H + \left(\frac{\partial G_{ст}}{\partial f_{кл}} \right)_0 \cdot \Delta f_{кл} \quad (3.49)$$

В результаті отримаємо :

$$\Delta G_{пр} = \frac{G_{ст0}}{2 \cdot H_0} \cdot \Delta H + \mu \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot H_0} \cdot \Delta f_{кл} \quad (3.50)$$

В (3.50) $G_{cm_0} = \mu \cdot f_{кл} \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot H_0}$ отримано після взяття похідної та домножування чисельника і знаменника на $\sqrt{H_0}$. Підставимо (3.50) в (3.45) :

$$\Delta G_{np} - \frac{G_{cm_0}}{2 \cdot H_0} \cdot \Delta H - \mu \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot H_0} \cdot \Delta f_{кл} = F \frac{d(\Delta H)}{dt} \quad (3.51)$$

Приведемо вираз (3.51) до стандартного виду : перенесемо регульовану координату ΔH в ліву частину і поділимо на коефіцієнт при ΔH :

$$\frac{2H_0 F}{G_{cm_0}} \cdot \frac{d(\Delta H)}{dt} + \Delta H = \frac{2H_0}{G_{cm_0}} \cdot \Delta G_{np} - \frac{2H_0 \mu \sqrt{2gH_0}}{G_{cm_0}} \cdot \Delta f_{кл} \quad (3.52)$$

або остаточно :

$$T \cdot \frac{d(\Delta H)}{dt} + \Delta H = K_1 \Delta G_{np} - K_2 \Delta f_{кл} \quad (3.53)$$

Структурна схема та часова характеристика збірника показані на рис.3.12.

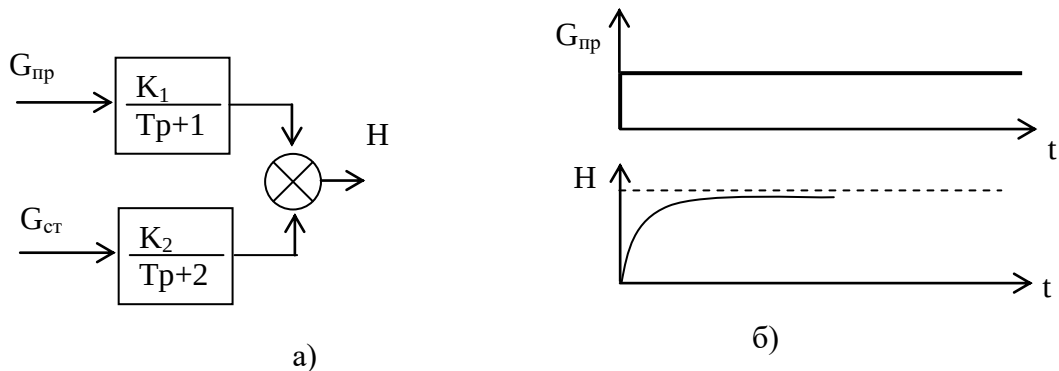


Рис. 3.12. Структурна схема (а) та часова характеристика (б) збірника

Головною особливістю цього об'єкта є наявність самовирівнювання, тобто здатність приходити самостійно в новий усталений стан після нанесення збурення. Наявність самовирівнювання в передавальних функціях відображається одиницею в знаменнику.

Поняття про типові моделі об'єкта. В ряді випадків можна скористатись при математичному моделюванні конкретних апаратів типовими моделями, до яких можна віднести :

- модель ідеального витіснення;
- модель ідеального змішування;
- однопараметрична дифузійна модель;
- комбіновані моделі.

Модель ідеального витіснення. Приймається поршнева течія рідини без перемішування вздовж потоку при рівномірному розподілі речовини (енергії) в напрямку, перпендикулярному рухові. Час перебування всіх часток в системі однаковий та дорівнює відношенню об'єму до об'ємної витрати рідини. Рівняння моделі [8, 9]:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -W \frac{\partial C}{\partial X} \quad (3.54)$$

де : C – концентрація речовини; W – лінійна швидкість; X – координата.

Приклад : модель трубчастого апарату при відношенні довжини труби до діаметра >100 [8].

Модель ідеального змішування. Приймається рівномірний розподіл речовини (енергії) в потоці :

$$\frac{dC_{\text{вих}}}{dt} = \frac{V_c}{V} \cdot (C_{\text{вх}} - C_{\text{вих}}) \quad (3.55)$$

де : V_c – об'ємна швидкість потоку; V – об'єм системи.

Приклад: модель коротких трубопроводів, циліндричних апаратів з інтенсивним перемішуванням.

Однопараметрична дифузійна модель. Основою тут є модель ідеального витіснення, тобто поршковий потік, але при наявності зворотного перемішування, яке формально визначається законом дифузії [8]. При складанні моделі приймаються припущення : зміна концентрації речовини (енергії) – неперервна функція координати (відстані); концентрація в даному поперечному перерізі постійна; об'ємна швидкість потоку та коефіцієнт поздовжнього перемішування не змінюється по довжині та перерізу потоку :

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -w \cdot \frac{\partial C}{\partial X} + D_L \cdot \frac{\partial^2 C}{\partial X^2} \quad (3.56)$$

де : D_L – коефіцієнт турбулентного перемішування (дифузії). Знаходиться експериментально.

Приклад : моделі структури потоків в апаратах, не розділених на ступені, наприклад в масообмінних апаратах з неперервним контактом.

Ячеїста (чарункувата, коміркувата) модель . Згідно моделі апарат умовно розподіляють на ряд послідовно з'єднаних ячеек, в кожній з них

приймається повне перемішування потоку, а перемішування між ячееками відсутнє [8]. Кількість ячеек – параметр моделі.

Приклад : каскад апаратів з мішалками.

Комбіновані моделі. При математичному моделюванні апаратів з байпасними та циркуляційними потоками, застоїними зонами, одну модель використати не вдається. Тому використовується певне з'єднання типових моделей.

При експериментальному визначенні статичних та динамічних характеристик об'єктів використовуються різні входні сигнали : стрибкоподібний, імпульсний, гармонічний. Часто багатомісні об'єкти з невідомими характеристиками подаються у вигляді простих передавальних функцій, наприклад для об'єкта із самовирівнюванням (рис.3.13,а) задається така структура передавальної функції [2, 3, 7]:

$$W(p) = \frac{K}{T_p + 1} \cdot e^{-p\tau_{zn}}, K = \frac{\Delta X}{\Delta U} \quad (3.57)$$

що відповідає послідовному з'єднанню аперіодичної ланки та ланки запізнювання.

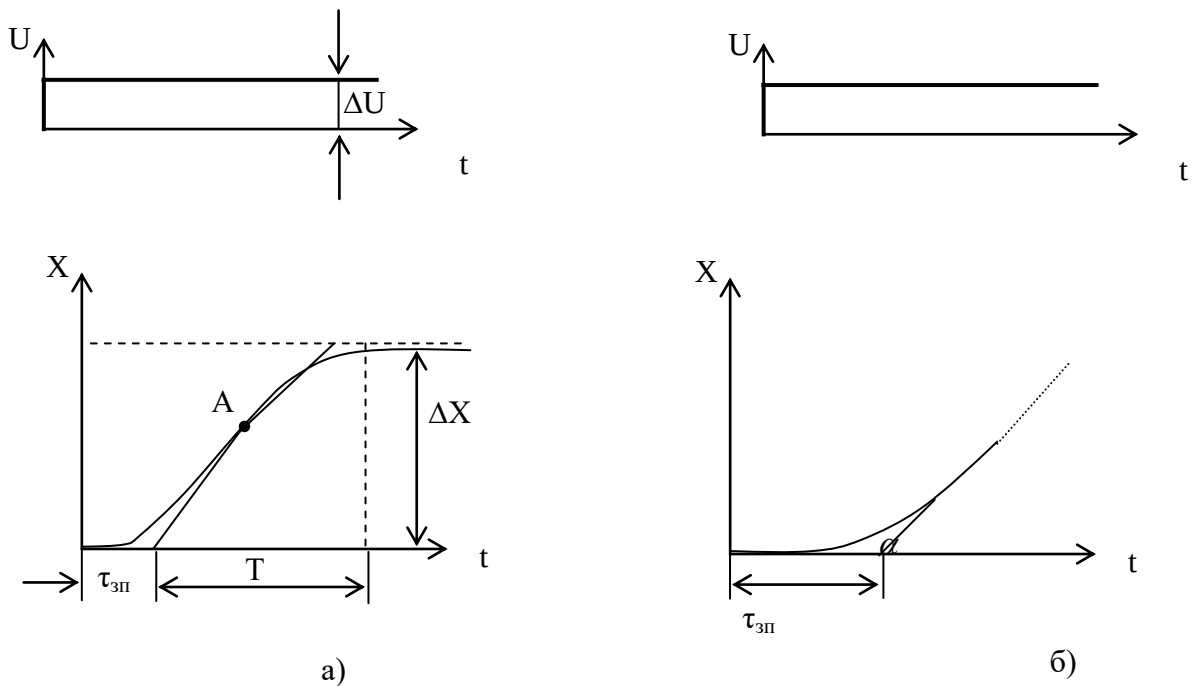


Рис 3.13. Часові характеристики об'єктів : а) – із самовирівнюванням; б) – без самовирівнювання

В точці перегину А проводиться дотична, що дає можливість отримати оцінки постійної часу T та часу запізнювання τ_{zn} , а коефіцієнт передачі визначається відношенням ΔX до ΔU , тобто зміни вихідного сигналу (регульованої координати) до вхідного. Властивості об'єктів без самовирівнювання (рис.13.3,б) можна оцінювати послідовним з'єднанням інтегральної ланки і ланки запізнювання [2, 3, 7]:

$$W(p) = \frac{\varepsilon}{p} \cdot \ell^{-p\tau_{zn}} \quad (3.58)$$

де: ε - швидкість розгону, $\varepsilon = \tan \alpha$, а $\frac{1}{\varepsilon} = T_a$, час розгону.

Використовуються також інші передавальні функції:

$$W = \frac{K \cdot \ell^{-p\tau_{zn}}}{(Tp+1)^n}, W(p) = \frac{K \cdot \ell^{-p\tau_{zn}}}{\prod_{k=1}^n (T_k p + 1)} \quad (3.59)$$

для яких експериментально визначається кількість ланок T, K, n .

Одним з методів експериментального визначення характеристик об'єкта є так званий пасивний, коли використовуються дані, які характеризують роботу об'єкта в режимі нормальної експлуатації, без внесення додаткових сигналів. Ці методи об'єднуються в окремий напрям – *ідентифікація* [2, 3, 7].

Використовуються також спеціальні методи планування експериментів.

3.4. Закони керування та автоматичні регулятори

В попередніх розділах було показано, що в автоматичних системах завжди формуються керуючі дії, спрямовані на забезпечення бажаного режиму функціонування об'єкта з урахуванням діючих збурень та характеристик об'єкта і зовнішнього середовища. Пристрій керування, а в автоматичних системах керування – автоматичний регулятор постійно перетворює отримувану інформацію в сигнал керування, який залежить в загальному випадку від відхилення ΔX , збурення Z , а також від інтегральних показників та похідної регульованої координати. Ця залежність називається **законом** регулювання (керування). В теорії автоматичного керування

використовуються два підходи до вибору та застосування автоматичних регуляторів [2, 3, 8]:

- визначення необхідного закону керування, виходячи з властивостей об'єкта та вимог до якості системи. В цьому випадку закон керування – математична залежність, яка може бути довільної форми будь-якої складності. В технічній літературі процедури отримання необхідного закону керування називають *аналітичним конструюванням регуляторів*;
- застосування типових законів керування, тоді для конкретного випадку обирається один з них та проводиться підбір параметрів (настроювання) для конкретних умов, тобто здійснюється *параметричний синтез* автоматичних регуляторів.

При реалізації законів керування технічними засобами автоматичні регулятори можуть бути неперервними (аналоговими) та дискретними. В неперервних вхідні та вихідні сигнали регуляторів є неперервними функціями часу, в дискретних, до яких відносяться релейні (позиційні), імпульсні та цифрові, вихідний сигнал має стрибкоподібну форму або є послідовністю імпульсів.

До **типових** неперервних законів керування відносяться [3, 4, 5, 6]:

- пропорційний (статичний) :

$$U_{рег} = K_{рег} \cdot \Delta X, \quad (3.60)$$

де : $K_{рег}$ – коефіцієнт передачі регулятора, $\Delta X = X_{зд} - X(t)$;

- інтегральний (астатичний) :

$$U_{рег} = K_{рег}^{ин} \int_0^{t_n} \Delta X dt \quad (3.61)$$

- диференціальний :

$$U_{рег} = K_{д} \frac{d(\Delta X)}{dt} \quad (3.62)$$

- пропорційно-диференціальний :

$$U_{peg} = K_{peg} \cdot \Delta X + K_{\partial} \frac{d(\Delta X)}{dt} \quad (3.63)$$

- пропорційно-інтегральний :

$$U_{peg} = K_{peg} \Delta X + K_{peg}^{in} \int_0^{t_n} \Delta X dt \quad (3.64)$$

- пропорційно-інтегрально-диференціальний :

$$U_{peg} = K_{peg} \Delta X + \frac{K_{peg}}{T_i} \int_0^{t_n} \Delta X dt + K_{\partial} \frac{d(\Delta X)}{dt} \quad (3.65)$$

де : K_d – коефіцієнт диференціювання, часом його замінюють добутком $K_d \cdot T_d$ (T_d – час диференціювання), T_i – час інтегрування (ізодрому).

У відповідності до наведених законів автоматичні регулятори називають : П-, І-, Д-, ПД-, ПІ- та ПІД-регуляторами. Ці закони керування та відповідні їм автоматичні регулятори є певною мірою універсальними, тобто можуть застосовуватись на різних об'єктах, в різних системах. Універсальність їм надає можливість змінювання в певних межах постійних коефіцієнтів рівнянь (3.60 – 3.65), які називають параметрами налаштування. У відповідності з цими параметрами налаштуваннями є : $K_{рег}$, $K_{рег}^{in}$, K_d , T_i . В сучасних технічних засобах, в тому числі в мікропроцесорних контролерах передбачається можливість використання найбільш універсального ПІД-регулятора, який може реалізувати і більш прості закони, наприклад при $T_i \rightarrow \infty$ і $K_d = 0$ ПІД-регулятор перетворюється в П-регулятор [2, 3, 8].

Як відзначалось раніше, динамічні властивості автоматичної системи регулювання визначаються як характеристиками об'єкта, так і автоматичного регулятора. З рівнянь (3.60-3.65) видно, що типові закони керування можна описати елементарними ланками (підсилювальною, інтегральною, диференціальною) та їх сполученням. При цьому необхідно враховувати, що наведені залежності відображають ідеалізовані закони регулювання. В задачах аналізу і синтезу використовуються передавальні функції автоматичних регуляторів, які відповідають рівнянням (3.60-3.65) [2, 3, 8]:

- пропорційний регулятор :

$$W_{pez}^{\Pi}(p) = K_{pez} \quad (3.66)$$

- інтегральний регулятор :

$$W_{pez}^i(p) = \frac{K_{pez}^{int}}{p} \quad (3.67)$$

- диференціальний регулятор :

$$W_{pez}^D(p) = K_{\delta} \cdot p \quad (3.68)$$

- пропорційно-диференціальний регулятор :

$$W_{pez}^{PD}(p) = K_{pez} + K_{\delta} \cdot p \quad (3.69)$$

- пропорційно-інтегральний регулятор :

$$W_{pez}^{PI}(p) = K_{pez} + \frac{K_{pez}}{T_i \cdot p} \quad (3.70)$$

- пропорційно-інтегрально-диференціальний регулятор :

$$W_{pez}^{PID}(p) = K_{pez} + \frac{K_{pez}}{T_i \cdot p} + K_{\delta} \cdot p \quad (3.71)$$

Для кожного з цих регуляторів можна розглядати також часові та частотні характеристики, частина з них для прикладу наведена в табл.3.1 [2, 3, 8].

Аналізуючи процес регулювання з різними регуляторами, необхідно звернути увагу на такі головні показники як точність, наприклад підтримання $X_{зд}$, та тривалість перехідних процесів.

Пропорційний регулятор характеризується високою швидкодією, він практично безінерційний. Запишемо його рівняння у вигляді [2, 3, 8]:

$$\frac{dU_{pez}}{dt} = K_{pez} \frac{d(\Delta X)}{dt} \quad (3.72)$$

Таким чином процес регулювання починається одразу, коли $\frac{d(\Delta X)}{dt} \neq 0$,

тоді $\frac{dU_{pez}}{dt} \neq 0$. Але процес регулювання закінчується при $\frac{d(\Delta X)}{dt} = 0$, а це може бути при $\Delta X = \text{const}$, тобто $X(t) \neq X_{зд}$. Це так звана статична похибка $\Delta X_{ст}$ (рис.3.14).

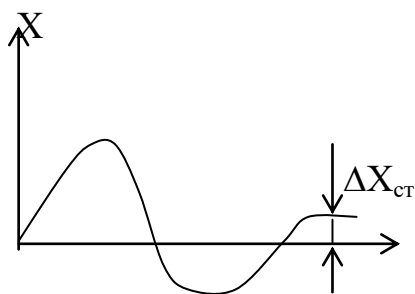


Рис.3.14.Перехідний процес в системі з П-регулятором

Таблиця 3.1. Характеристики типових автоматичних регуляторів

№ п/п	Регулятор	Перехідна функція $h(t)$	Частотна характеристика
1.	Пропорційний		
2.	Інтегральний		
3.	Диференціальний		
4.	Пропорційно-інтегральний		
5.	Пропорційно-інтегрально-диференціальний		
6.	Пропорційно-диференціальний		

В такій системі можлива множина станів рівноваги, вона називається *статичною*. Цим самим і визначається область застосування П-регуляторів : якщо статична похибка перевищує допустиме значення, то ці регулятори не застосовуються. Особливо важливим є оцінка процесу регулювання при різному навантаженні об'єкта : в статичних системах $\Delta X_{ст}$ зростає при збільшенні навантаження (статична нерівномірність).

Аналогічно аналізується робота інших регуляторів [2, 3, 8]:

- І-регулятор забезпечує в системі єдину точку рівноваги, але процес керування розпочинається пізніше, ніж з П-регулятором. Це видно з виразу :

$$\frac{dU_{pez}}{dt} = K_{pez}^{im} \Delta X \quad (3.73)$$

В цьому випадку єдина точка рівноваги можлива лише за умови $\Delta X=0$, тобто $X(t)=X_{зд}$, відсутня статична похибка, система є **астатичною** [2, 3, 8]. В той же час тривалість перехідного процесу зростає і, крім того, І-регулятор не може застосовуватись на об'єктах без самовирівнювання;

- Д-регулятор починає реагувати на прискорення сигналу похибки [3, 9]:

$$\frac{dU_{pez}}{dt} = K_{\partial} \frac{d^2(\Delta X)}{dt^2} \quad (3.74)$$

тобто процес регулювання розпочинається ще раніше, ніж в системі з П-регулятором, але закінчується перехідний процес при $\frac{d^2(\Delta X)}{dt^2} = 0$, тобто Д-регулятор не реагує на постійне відхилення ΔX . Цей регулятор використовується лише як допоміжний пристрій для введення сигналу за похідною регульованої координати, так званого форсуючого сигналу, який діє лише на початку перехідного процесу;

- ПІ-регулятор розпочинає роботу так само швидко, як П-регулятор, але процес регулювання закінчується за умови $\Delta X=0$, тому час перехідного процесу буде більшим, ніж в системі з П-регулятором. Параметри налаштування ПІ-регулятора можна визначити за його часовою характеристикою(рис.3.15) :

$K_{рег} = \frac{U_{рег}}{\Delta X}$, в точці $t=0$, а T_i – проекція на вісь часу лінії, яка відповідає удвоєнню ($K_{рег} * \Delta X$), тому T_i називають ще часом удвоєння П-складової;

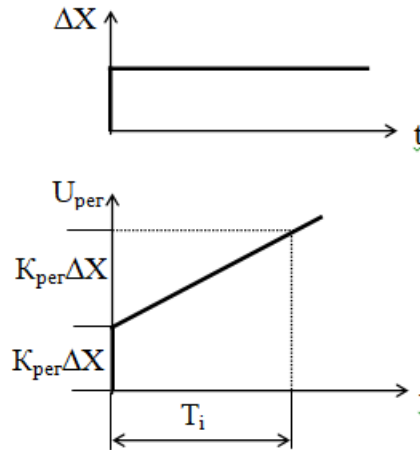


Рис.3.15.Часова характеристика ПІ-регулятора

- ПІД-регулятор разом з ПІ-регулятором є найбільш поширеними за рахунок того, що змінювання налаштувань дозволяє застосовувати ці регулятори з найбільшою ефективністю. При використанні ПІД-регулятора можна забезпечити необхідну точність та тривалість перехідного процесу, але знаходження оптимальних значень $K_{рег}$, T_i , K_d є досить складною задачею [10].

При комп'ютерному моделюванні використовують структурні схеми ПІ- та ПІД-регуляторів (рис.3.16).

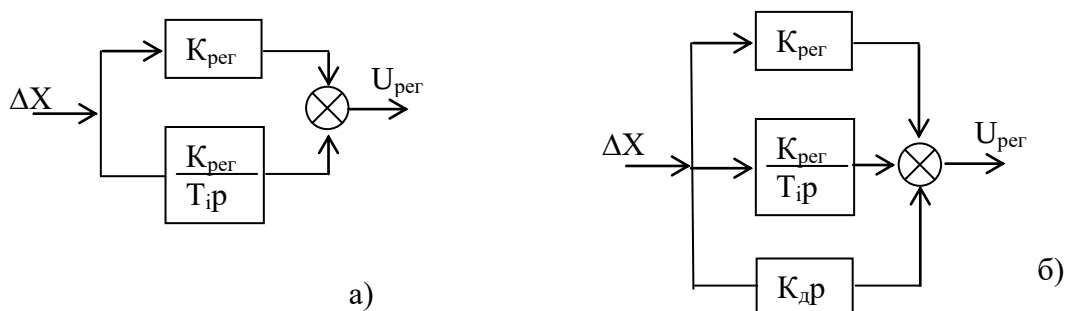


Рис.3.16.Структурні схеми а) ПІ-регулятора; б) ПІД-регулятора

При технічній реалізації автоматичних регуляторів типові закони керування формуються за рахунок введення необхідних *зворотніх зв'язків*, крім І-регулятора, який не має зворотнього зв'язку. Для визначення типу зворотнього зв'язку автоматичний регулятор АР подається у вигляді двох частин з передавальними функціями регулюючого блока $W_{p\delta}(p)$ та зворотнього зв'язку $W_{зз}(p)$ (рис.3.17) [8].

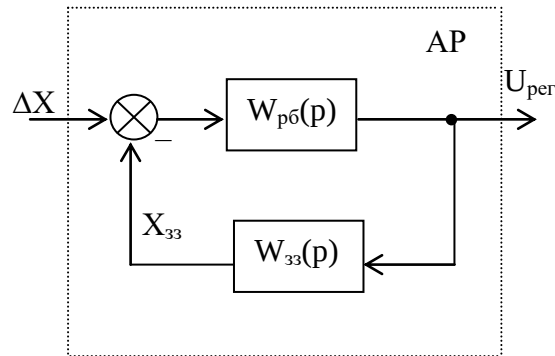


Рис.3.17. Структурна схема автоматичного регулятора

В цьому випадку передавальна функція регулятора буде :

$$W_{рег}(p) = \frac{W_{p\delta}(p)}{1 + W_{p\delta}(p) \cdot W_{зз}(p)} \quad (3.75)$$

або :

$$W_{рег}(p) = \frac{1}{\frac{1}{W_{p\delta}(p)} + W_{зз}(p)} \quad (3.76)$$

Якщо прийняти досить великим коефіцієнт передачі регулятора ($K_{рег} \rightarrow \infty$), то можна записати :

$$W_{рег}(p) \approx \frac{1}{W_{зз}(p)} \quad (3.77)$$

Тобто властивості регулятора визначаються характером зворотнього зв'язку, звідки :

$$W_{зз}(p) = \frac{1}{W_{рег}(p)} \quad (3.78)$$

Цей вираз дає можливість зробити такі висновки для автоматичних регуляторів щодо зворотніх зв'язків в них :

- П-регулятор :

$$W_{33}(p) = \frac{1}{K_{pez}} \quad (3.79)$$

$$X_{33}(p) = \frac{1}{K_p} \cdot U_{pez} \quad (3.80)$$

що відповідає підсилювальній ланці, яка реалізує жорсткий від'ємний зворотній зв'язок;

- ПІ-регулятор :

$$W_{33}(p) = \frac{1}{K_{pez} + \frac{K_{pez}}{T_i p}} = \frac{\frac{T_i p}{K_{pez}}}{T_i p + 1} \quad (3.81)$$

$$T_i \frac{dX_{33}}{dt} + X_{33} = \frac{T_i}{K_{pez}} \cdot \frac{dU_{pez}}{dt} \quad (3.82)$$

Це реальна диференціальна ланка, яка реалізує *гнучкий* від'ємний зворотній зв'язок (ізодромний). Характерною особливістю цього зворотнього зв'язку є те, що з часом його дія зменшується до нуля ($X_{33} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$);

- ПІД-регулятор :

$$W_{33}(p) = \frac{1}{K_{pez} + \frac{K_{pez}}{T_i p} + K_{\partial} p} = \frac{p}{K_{pez} p + \frac{K_{pez}}{T_i} + K_{\partial} p^2} = \frac{\frac{T_i}{K_{pez}} \cdot p}{\frac{T_i}{K_{pez}} \cdot K_{\partial} p^2 + T_i p + 1} \quad (3.83)$$

$$\frac{T_i}{K_{pez}} \cdot K_{\partial} \frac{d^2 X_{33}}{dt^2} + T_i \frac{dX_{33}}{dt} + X_{33} = \frac{T_i}{K_{pez}} \cdot \frac{dU_{pez}}{dt} \quad (3.84)$$

Цей зворотній зв'язок відповідає послідовному з'єднанню реальної диференціальної і аперіодичної ланок, це – *інерційний гнучкий* від'ємний зворотній зв'язок;

- ПД-регулятор :

$$W_{33}(p) = \frac{1}{K_{pez} + K_{\partial} p} = \frac{\frac{1}{K_{pez}}}{1 + \frac{K_{\partial}}{K_{pez}} \cdot p} \quad (3.85)$$

$$\frac{K_{\partial}}{K_{pez}} \cdot \frac{dX_{33}}{dt} + X_{33} = \frac{1}{K_{pez}} U_{pez} \quad (3.86)$$

Цей зв'язок називається *інерційним жорстким* від'ємним зворотнім зв'язком, який реалізується аперіодичною ланкою.

Наведені закони керування відповідають ідеальним регулятором, а реальні регулятори мають відхилення від наведених залежностей в зв'язку з неточним відтворенням математичних моделей, можливих нелінійностей і т.д. Відхилення характеристик реальних регуляторів від ідеальних допускається : за модулем – до 100%, за фазою – до 15% на робочій частині [1, 8, 9].

Контрольні питання

1. Що таке структурні схеми і де вони використовуються?
2. Наведіть приклади типових з'єднань елементів системи і отримання еквівалентних передавальних функцій.
3. Покажіть роль зворотніх зв'язків в автоматичних системах.
4. Які основні правила використовуються при перетворенні структурних схем?
5. Наведіть приклади спрощення структурних схем, зокрема усунення перехресних зв'язків.
6. Які чотири передавальні функції характеризують властивості одноконтурної замкненої АСР? Виведіть вирази для них.
7. Що таке математична модель об'єкта? В чому особливості математичних моделей об'єктів із зосередженими та розподіленими параметрами?
8. Які загальні властивості мають об'єкти різної природи?
9. Наведіть класифікацію математичних моделей об'єктів та методику отримання аналітичних моделей елементарних об'єктів.
10. Типові математичні моделі, область їх застосування.
11. Експериментальні методи визначення динамічних характеристик об'єктів. Які передавальні функції використовуються для опису об'єктів?

12. Наведіть типові закони регулювання : рівняння, передавальні функції, часові та частотні характеристики автоматичних регуляторів.
13. Проаналізуйте особливості процесів керування з різними регуляторами. Що таке органи налаштування автоматичних регуляторів?
14. Охарактеризуйте зворотні зв'язки в автоматичних регуляторах, наведіть їх рівняння та передавальні функції.
15. Наведіть рівняння динаміки багатовимірної системи, векторно-матрична форма його представлення.
16. Фазові координати, фазовий простір, математичні моделі в координатах стану.
17. Спостережність та керованість багатовимірних систем. Приклад.

4. АНАЛІЗ СТІЙКОСТІ ЛІНІЙНИХ СИСТЕМ

4.1. Загальні умови стійкості

В попередніх розділах відзначалось, що в автоматичних системах повинні виконуватись умови стійкості. Стійкість автоматичних систем – це їх властивість повертатись в початковий стан після того, коли будь-яка дія вивела систему з цього стану. Ознакою стійкості є збіжні перехідні процеси, наприклад для систем стабілізації [1, 2, 3, 5, 8, 9]:

$$\Delta X(t) = X_{\text{зд}}(t) - X(t) \rightarrow 0, t \rightarrow \infty \quad (4.1)$$

де: $X_{\text{зд}}(t), X(t)$ - відповідно задане та поточне значення регульованої координати.

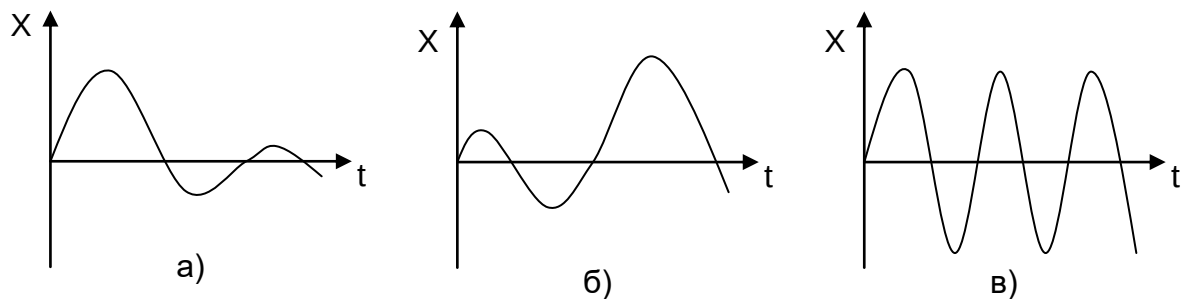


Рис.4.1. Перехідні процеси системи: а) – стійкої; б) – нестійкої;
в) - на межі стійкості

Лінійна АСР може знаходитись в трьох станах: бути стійкою, нестійкою та на межі стійкості (рис.4.1). Варто відзначити, що коли лінійна АСР знаходиться в одному з двох останніх станів, вона непрацездатна. Важливо також відзначити, що форма перехідного процесу, а також його показники (амплітуда, тривалість) при оцінці стійкості значення не мають, головне – перехідні процеси повинні бути збіжними. Виходячи з цього, можна зробити висновок, що стійкість АСР є умовою необхідною, але недостатньою, але в задачах аналізу і синтезу АСР в першу чергу оцінюється стійкість системи. Умова (4.1) відповідає стійкості системи в усталеному стані. В реальних умовах на систему постійно діють збурення, тому умова стійкості може відповідати вимозі: регульована координата повинна бути

обмеженою при дії обмежених за величиною збурень. В задачах аналізу та синтезу проблема стійкості ставить не лише визначення цієї оцінки, а також факторів, від яких залежить стійкість [1, 2, 3, 5, 8, 9].

Враховуючи, що стійкість лінійних АСР залежить від вільного руху системи, можна записати відповідне однорodne диференціальне рівняння:

$$a_n \frac{d^n X}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} X}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dX}{dt} + a_0 X = 0 \quad (4.2)$$

Змушена складова руху системи, яка відповідає певному виду зовнішньої дії, на стійкість не впливає. Тоді математичним визначенням стійкості є:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} X(t) = 0 \quad (4.3)$$

Зрозуміло, що вихідна змінна системи буде наближатись до змущеної складової, яка визначається правою частиною диференціального рівняння, а при виконанні умови (4.3) стійкість називається асимптотичною. Тоді для нестійкої системи

$$\lim_{t \rightarrow \infty} X(t) = \infty \quad (4.4)$$

На межі стійкості в системі виникає перехідний процес з постійною амплітудою (рис.4.1,в).

Вільна (перехідна) складова перехідного процесу, яка визначає стійкість системи, є розв'язком диференціального рівняння (4.2):

$$X_n(t) = \sum_{i=1}^n C_i \cdot e^{\lambda_i t}, \quad (4.5)$$

де: C_i - постійні інтегрування, які залежать від початкових умов;

λ_i - корені характеристичного рівняння:

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0 = 0 \quad (4.6)$$

Таким чином $X_n(t)$ має суму складових, кількість яких визначається порядком системи n . В загальному випадку в рівнянні (4.6) оператор p замінюється на комплексну змінну λ . Тоді корені рівняння (4.6) є комплексними та утворюють пари спряжених комплексних чисел

$$\lambda_{i,i+1} = \alpha_i \pm j\beta_i \quad (4.7)$$

Дійсна частина кореня α_i може бути додатньою або від'ємною. Перехідна складова $X_n(t)$ прямує до нуля лише тоді, коли кожна складова $C_i \cdot e^{\lambda_i t} \rightarrow 0$. Тоді можна визначити залежність стійкості системи від коренів характеристичного полінома [1, 2, 3, 5, 8, 9]:

- корені дійсні: $X_{1,2} = \pm\alpha$. Якщо $\alpha < 0$, то в системі виникає неколивальний (аперіодичний) перехідний процес, який при $t \rightarrow \infty$ прямує до нуля, тобто система стійка. При $\alpha > 0$ перехідний процес розбіжний, тобто система нестійка (рис.4.2,а);
- корені комплексні попарно спряжені (рис.4.2,б) викликають коливальний перехідний процес, причому при $\alpha < 0$ - збіжний;
- корені уявні (рис.4.2,в) відповідають перехідному процесу у вигляді синусоїди (система на межі стійкості).

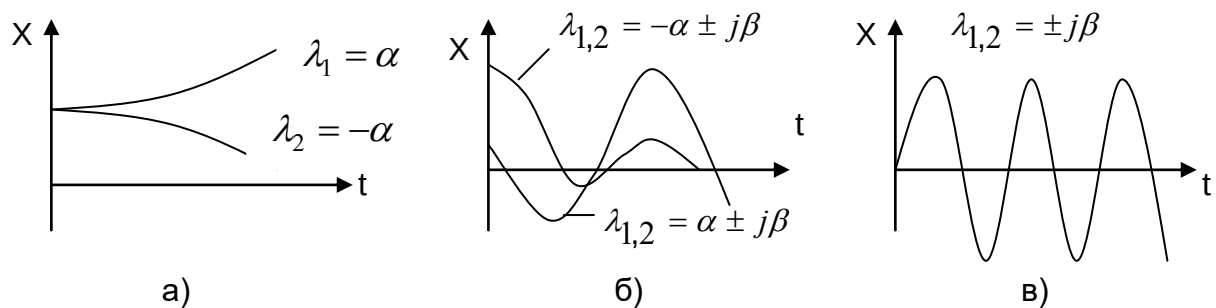


Рис.4.2. Залежність $X_n(t)$ від коренів характеристичного полінома

Може бути також нульовий корінь, тоді значення X приймає постійну величину.

Наведений матеріал дозволяє зробити такі висновки:

- перехідний процес в системі – сума коливальних та аперіодичних складових, при цьому кожна коливальна складова відповідає парі комплексних спряжених коренів, а кожна аперіодична складова – дійсному кореню;

- загальною умовою загасання всіх складових і перехідного процесу в цілому є від'ємність дійсних частин всіх коренів характеристичного рівняння системи, тобто полюсів (нулів знаменника) передавальної функції системи;
- якщо є хоча б один корінь з додатньою дійсною частиною, то йому відповідає розбіжна складова перехідного процесу, тобто система нестійка;
- при наявності уявних коренів характеристичного рівняння в системі виникають назагасаючі коливання з частотою, яка дорівнює β_i - границя стійкості.

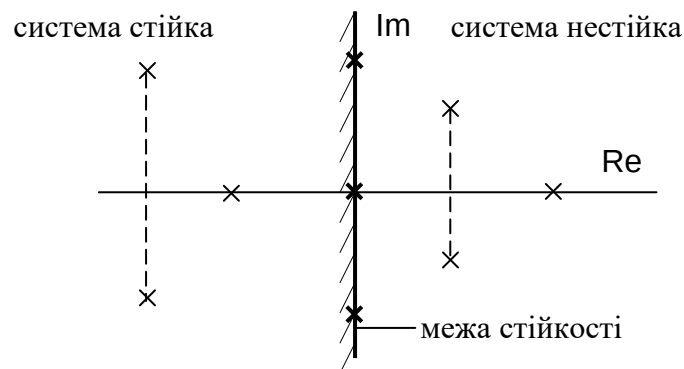


Рис.4.3 Розташування коренів характеристичного рівняння на комплексній площині

Розташування коренів характеристичного полінома на комплексній площині показано на рис.4.3. Для стійкості системи всі корені повинні лежати в лівій напівплощині (бути “лівими”), а уявна вісь є межею стійкості. На межі стійкості може розташовуватись нульовий корінь або пара чисто уявних коренів. Необхідною, але недостатньою, умовою стійкості є додатність всіх коефіцієнтів характеристичного полінома [1, 2, 3, 5, 8, 9].

Для отримання характеристичного полінома можна використовувати передавальні функції системи, наприклад для замкненої системи відносно зміни завдання:

$$W_{zd}(p) = \frac{W_{poz}(p)}{1 + W_{poz}(p)} \quad (4.8)$$

Подамо $W_{poz}(p)$ у вигляді:

$$W_{poz}(p) = \frac{R(p)}{Q(p)}, \quad (4.9)$$

тоді

$$W_{zd}(p) = \frac{\frac{R(p)}{Q(p)}}{1 + \frac{R(p)}{Q(p)}} = \frac{R(p)}{Q(p) + R(p)} = \frac{R(p)}{D(p)}, \quad (4.10)$$

де: D – характеристичний поліном, який співпадає з лівою частиною рівняння системи (4.2).

Розв'язуючи проблему стійкості, знаходять відповіді на ряд частинних питань [1, 2, 3, 5, 8, 9]:

- визначають структуру системи, в якій забезпечується стійкість;
- оцінюють межі змінювання параметрів системи, за яких вона зберігає стійкість та їх критичні значення, які виводять систему на межу стійкості (будують область стійкості);
- формують ряд додаткових заходів щодо збереження чи забезпечення стійкості, наприклад введення додаткових елементів чи зв'язків.

Таким чином, стійкість системи визначають на основі аналізу перехідного процесу або коефіцієнтів та коренів характеристичного поліному. В теорії автоматичного керування є ще один ефективний метод оцінки стійкості – використання критеріїв стійкості – узагальнених показників, які не потребують розв'язувати рівняння системи. Використовуються алгебраїчні та частотні критерії.

4.2. Алгебраїчні критерії стійкості

Алгебраїчні критерії встановлюють необхідні та достатні умови стійкості на основі визначників, складених з коефіцієнтів характеристичного рівняння системи. Англійський математик Є.Раус (1877 р.) та швейцарський математик А.Гурвіц (1893 р.) в різній формі запропонували критерій, згідно якого умови стійкості зводяться до виконання нерівностей, які зв'язують коефіцієнти рівняння системи. Для розв'язання прикладних задач ці критерії об'єднують в один – Рауса-Гурвіца. В загальному випадку ці критерії призначались для розв'язання чисто математичної задачі – дослідження стійкості розв'язків лінійного диференціального рівняння. Вище було показано, що за допомогою такого рівняння описується поведінка лінійної АСР [3, 8, 9].

На основі характеристичного полінома:

$$D(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 \quad (4.11)$$

складається визначник:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & a_{n-7} & \dots & 0 & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & a_{n-6} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & a_4 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} \quad (4.12)$$

Вираз (4.12) називається визначником Гурвиця і при його складанні виконуються правила [3, 8, 9]:

- визначник має n рядків та n стовпців, в першому рядку розташовуються “непарні” коефіцієнти, після чого рядок доповнюється до числа n нулями;
- другий рядок включає всі “парні” коефіцієнти і також доповнюється нулями до числа n ;

- третій та четвертий рядки отримують зсувом вправо відповідно першого та другого рядків на один елемент, а зліва проставляється нуль. Аналогічно отримують і наступні рядки;
- в головній діагоналі визначника розташовуються всі коефіцієнти, крім a_n .

Критерій стійкості Рауса-Гурвиця формулюється так: автоматична система, яка описується характеристичним поліномом (4.11) стійка, якщо при $a_n > 0$ визначник Δ_n та всі його діагональні мінори додатні. (Мінор – визначник, складений з елементів, розташованих на перетині будь-яких k рядків та k стовпців визначника). У виразі (4.12) мінори виділені пунктиром.

Останній стовпець визначника Δ_n має лише один елемент $a_0 > 0$, тому використовується відома залежність [3, 8, 9]:

$$\Delta_n = a_0 \cdot \Delta_{n-1}, \quad (4.13)$$

яка розпадається на дві за умови $\Delta_n = 0$: $a_0 = 0, \Delta_{n-1} = 0$. Коли $\Delta_n = 0$, система знаходиться на межі стійкості. При цьому при $a_0 = 0$ існує один нульовий корінь (аперіодична межа стійкості), а при $\Delta_{n-1} = 0$ існує пара уявних коренів (коливальна межа стійкості).

Розглянемо використання алгебраїчного критерія для системи різних порядків. Для системи першого порядку характеристичний поліном має вигляд:

$$D(\lambda) = a_1 \lambda + a_0, \quad (4.14)$$

а умова стійкості:

$$\Delta_1 = a_0, a_1 > 0. \quad (4.15)$$

Для системи другого порядку:

$$D(\lambda) = a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0, \quad (4.16)$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ a_0 & a_0 \end{vmatrix} = a_1 a_0 > 0, \Delta_1 = a_1, a_2 > 0, a_0 > 0, \quad (4.17)$$

Таким чином, для системи першого і другого порядків необхідною і достатньою умовою стійкості є додатність всіх коефіцієнтів характеристичного рівняння.

Для системи третього порядку:

$$D(\lambda) = a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0, \quad (4.18)$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} \quad (4.19)$$

Умови стійкості:

$$a_3 > 0, \Delta_1 = a_2 > 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix} = a_2a_1 - a_0a_3 > 0, \Delta_3 = a_0\Delta_2 > 0 \quad (4.20)$$

Остання нерівність за умови $a_0 > 0$ потребує $\Delta_2 > 0$. Таким чином, для системи 3-го порядку забезпечення стійкості вимагає не лише додатності всіх коефіцієнтів характеристичного рівняння, а й певного співвідношення між ними.

Для системи 4-го порядку:

$$D(\lambda) = a_4\lambda^4 + a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 \quad (4.21)$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 & 0 & 0 \\ a_4 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_4 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} \quad (4.22)$$

Умова стійкості:

$$a_4 > 0; \Delta_1 = a_3 > 0; \Delta_2 = a_2a_3 - a_1a_4 > 0; \\ \Delta_3 = a_1\Delta_2 - a_3 \begin{vmatrix} a_3 & 0 \\ a_4 & 0 \end{vmatrix} = a_1\Delta_2 - a_3^2a_0 > 0; \Delta_4 = a_0\Delta_3 > 0 \quad (4.23)$$

Для систем високих порядків ($n \geq 3$) використання алгебраїчного критерія Рауса-Гурвиця стає незручним і потребує громіздких виразів. Крім того, цей критерій не дає можливості визначити, які заходи необхідно здійснити для забезпечення стійкості [3, 8, 9].

В теорії автоматичного керування використовується також алгебраїчний критерій Ляпунова-Шіпара (1914 р.), який спрощує використання критерія Рауса-Гурвиця. Доведено, що необхідною і достатньою умовою стійкості при $a_i > 0$ є вимога додатності всіх визначників з парними індексами $\Delta_2 > 0, \Delta_4 > 0 \dots$ або всіх визначників з непарними індексами $\Delta_1 > 0, \Delta_3 > 0 \dots$

4.3. Частотні критерії стійкості

Один з частотних критеріїв був запропонований в 1932 р. американським фізиком Х.Найквістом, який досліджував властивості електронних підсилювачів із зворотніми зв'язками. Цей критерій потім став одним з найбільш уживаних при дослідженнях стійкості автоматичних систем [1, 2, 3, 8, 9].

На відміну від інших критеріїв, заснованих на аналізі характеристичного рівняння системи, цей критерій використовує амплітудно-фазову характеристику розімкненої системи $W_{роз}(j\omega) = W_{рег}(j\omega) \cdot W_{ок}(j\omega)$, тобто послідовне з'єднання (добуток) відповідних характеристик і передавальних функцій автоматичного регулятора і об'єкта по каналу керування. Саме це забезпечує наочність та зручність використання критерія, можна застосовувати експериментальні динамічні характеристики об'єкта. Цей критерій особливо зручний для одноконтурних систем, які можна представити у вигляді типових ланок [8, 9].

Основне застосування критерія Найквіста відноситься до систем, які є стійкими в розімкненому стані, що виконується в більшості випадків для технологічних об'єктів. Для цього випадку критерій Найквіста формулюється так: автоматична система керування стійка, якщо амплітудно-фазова характеристика розімкненої системи $W_{роз}(j\omega)$ не охоплює точку з координатами $(-1; j0)$ (рис.4.3).

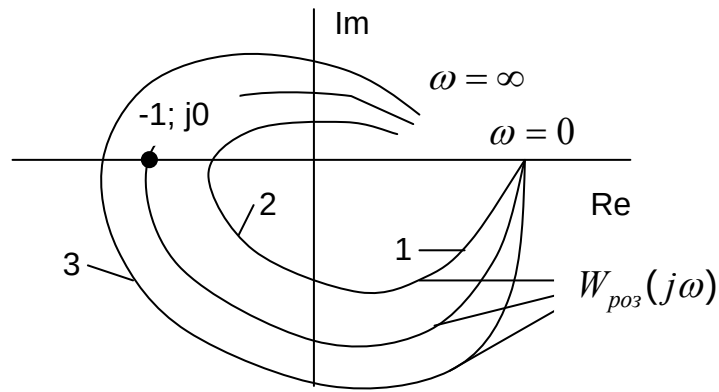


Рис.4.3. Амплітудно-фазові характеристики розімкненої системи (статичної)

Годограф 1 відповідає стійкій системі, 3 – нестійкій, 2 – на межі стійкості. Цей випадок справедливий для статичних систем. Для астатичних систем відповідні характеристики наведені на рис.4.4.

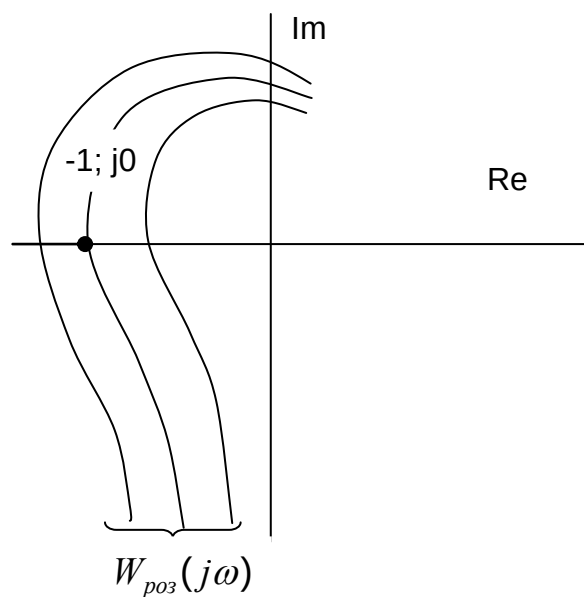


Рис.4.4. Амплітудно-фазові характеристики розімкненої системи (астатичної)

При подальшому аналізі використовуються такі значення частоти:

- частота зрізу, коли $A(\omega)$ (модуль $W_{poz}(j\omega)$) $= 1 - \omega_{зр}$;
- частота, при якій фазовий зсув $\varphi(\omega) = -\pi - \omega_{\pi}$.

Тоді умова знаходження системи на межі стійкості буде:

$$\omega_{зр} = \omega_{\pi} \quad (4.24)$$

Якщо проаналізувати проходження гармонійного сигналу через систему, то роль особливої точки $(-1; j0)$ полягає в тому, що [3, 8, 9]:

- вона відповідає претворенню від'ємного зворотнього зв'язку в додатній;
- вона є межею між режимами підсилення і ослаблення зовнішнього сигналу системою.

Може бути випадок, коли системи є нестійкою, в розімкненому стані. Тоді критерій Найквіста формулюється так: АСР буде стійкою, коли $W_{роз}(j\omega)$ охоплює $\ell/2$ разів точку з координатами $(-1; j0)$, ℓ - число правих коренів характеристичного рівняння розімкненої системи.

Критерій Найквіста зручно використовувати для аналізу систем, які мають в своїй структурі ланки запізнювання. В цьому випадку АФХ розімкненої системи можна подати у вигляді [8]:

$$W_{роз}(j\omega) = W_{осн}(j\omega) \cdot e^{-j\omega\tau_{зн}}, \quad (4.25)$$

де: $W_{осн}(j\omega)$ - АФХ основних елементів системи;

$e^{-j\omega\tau_{зн}}$ - АФХ ланки запізнювання.

Наявність ланки запізнювання погіршує, як правило, стійкість і існує критичне запізнювання, при якому система виходить на межу стійкості - $\omega_{зн}^{кр}$.

Частотний критерій стійкості А.В.Михайлова (1936 р.) заснований на аналізі характеристичного полінома системи, в який підставляється $\lambda = j\omega$:

$$D(j\omega) = a_n(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \dots + a_1(j\omega) + a_0 \quad (4.26)$$

Вираз (4.26) можна подати у вигляді суми дійсної та уявної частини [3, 8, 9]:

$$D(j\omega) = U_D(\omega) + jV_D(\omega), \quad (4.27)$$

де: $U_D(\omega)$ - дійсна частина, складена з членів з парними степенями ω ;

$V_D(\omega)$ - уявна частина, яка утримує члени з непарними степенями ω .

Кожному фіксованому значенню ω відповідає комплексне число, яке можна зобразити вектором на комплексній площині. При змінюванні ω від 0

до ∞ цей вектор описує криву, яка називається годограф Михайлова. За видом годографа можна оцінювати стійкість системи. При $\omega = 0$ функція $D(j\omega) = a_0$, що випливає з виразу (4.26), а при $\omega \rightarrow \infty$ функція $D(j\omega)$ необмежено зростає, але проходить різну кількість квадрантів в залежності від порядку системи.

Критерій стійкості Михайлова формулюється так: автоматична система керування, якій відповідає рівняння (4.26), стійка, якщо при змінюванні ω від 0 до ∞ годограф $D(j\omega)$ огинає проти годинникової стрілки початок координат та проходить n квадрантів (n – порядок системи). Якщо система знаходиться на межі стійкості, то годограф проходить через початок координат (це відповідає наявності пари спряжених коренів) [3, 8, 9].

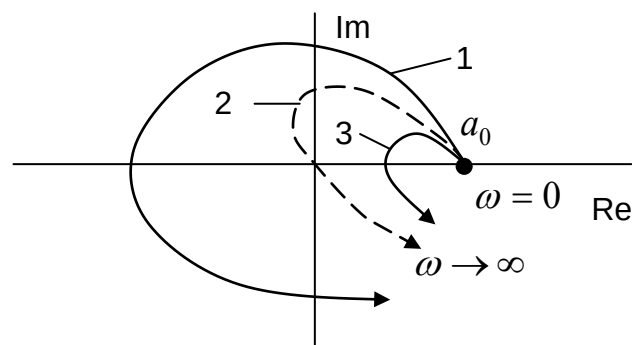


Рис.4.5. Годограф Михайлова

На рис.4.5 годограф 1 відповідає стійкій системі ($n=4$), 2 – на межі стійкості, 3 – нестійкій. При практичному використанні годографа Михайлова спочатку знаходять точки перетину його з координатними осями: при $U_D(\omega) = 0$ знаходять частоту, коли $D(j\omega)$ пересікається з уявною віссю і підставляють її значення у вираз для $V_D(\omega)$. Коли знайдено умови, за яких $D(j\omega)$ перетинає осі координат, тобто знайдено нулі $U_D(\omega)$ і $V_D(\omega)$, то повністю годограф будувати не потрібно: стійкість має місце, якщо нулі $U_D(\omega)$ та $V_D(\omega)$ чергуються з ростом ω , починаючи з $\omega = 0$, тобто $V_D(\omega) = 0$, а $U_D(\omega) > 0$ [9].

Якщо систему можна розбити на ланки, то годограф $D(j\omega)$ можна отримати за правилами перемноження векторів.

Для оцінки стійкості системи можна використовувати також логарифмічні частотні характеристики. Це засновано на висновках, які випливають з критерія стійкості Найквіста: система буде стійкою тоді, коли при досягненні фазовою частотною характеристикою значення -180° логарифмічна частотна характеристика буде від'ємною (криві 1, рис.4.6). Це значить, що АФХ розімкненої системи не охоплює точку $(-1; j0)$. Кривим 3 рис.4.6 відповідає нестійка система, 2 – на межі стійкості [9].

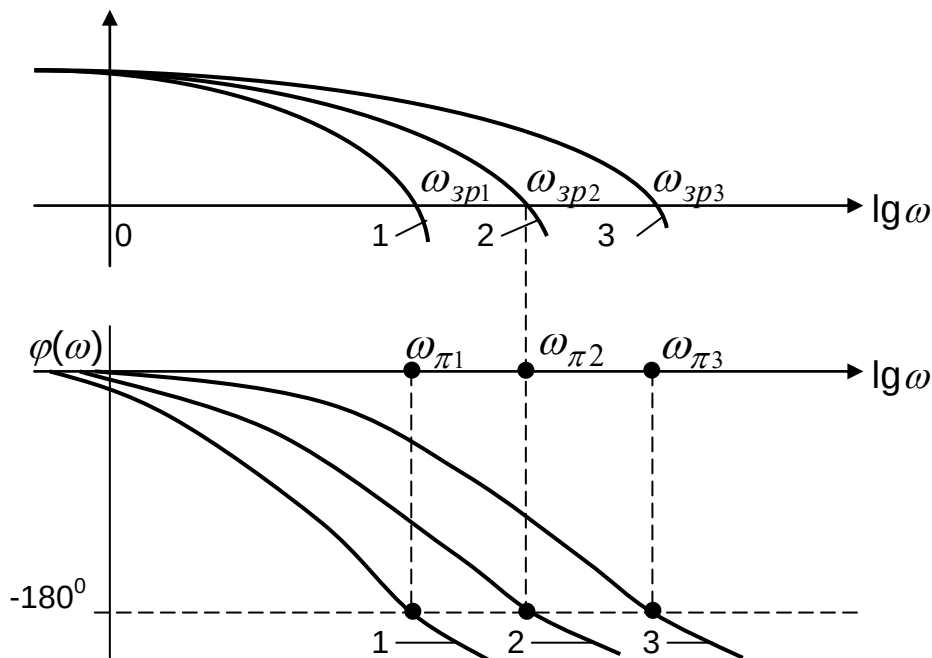


Рис.4.6. Логарифмічні частотні характеристики статичної системи

4.4. Область стійкості. Запас стійкості

Реальні системи повинні бути не лише стійкими, а й забезпечувати запас стійкості, тобто зберігати стійкість при змінюваних умовах роботи та параметрів системи. Фактично це означає, що система за своїми властивостями повинна бути на певній відстані від межі стійкості. Запас стійкості встановлюється в зв'язку з тим, що [1, 2, 3, 4, 8]:

- розрахунок системи приводиться з використанням спрощених, ідеалізованих моделей, які не враховують ряд факторів, важливих для роботи системи;
- проводиться лінеаризація математичних залежностей, а саме нелінійності відіграють суттєву роль при роботі системи;
- параметри окремих елементів, особливо об'єкта, можуть значно змінюватись в процесі роботи, наприклад коефіцієнти теплопередачі.

Наведені фактори приводять до того, що стійка системи за розрахунками при практичному використанні може виявитись нестійкою.

Запас стійкості можна оцінювати за розташуванням коренів характеристичного рівняння на комплексній площині: чим далі вліво від уявної осі будуть розташовані корені, тим більшим буде запас стійкості. Для оцінки запасу стійкості можна використовувати і частотний критерій Найквіста, а саме – за віддаленням АФХ розімкненої системи $W_{роз}(j\omega)$ від “небезпечної” точки $(-1; j0)$ на комплексній площині. Кількісно оцінюють запас стійкості системи за амплітудою (модулем) та фазою. Запас стійкості за амплітудою (модулем) показує, на скільки можна збільшити коефіцієнт передачі системи, щоб вона вийшла на межу стійкості. При розрахунках цей запас береться подвійним. Запас стійкості по фазі показує, на скільки повинно зрости запізнювання на частоті зрізу $\omega_{зр}$, щоб система вийшла на межу стійкості. При розрахунках приймається запас по фазі $\geq 30^0$ [8].

При створенні та експлуатації автоматичних систем часто необхідно визначати вплив змінюваних параметрів системи на стійкість. Область стійкості будується в координатах, якими є змінювані параметри і виділяє простір, в кожній точці якого система стійка. Лінія або поверхня, які обмежують область стійкості, є межею області. Коли змінюваних параметрів два, наприклад $K_{рег}$ і T_i для ІІІ-регулятора, тоді область стійкості виділяється на площині $K_{рег} - T_i$. Для позначення області стійкості лінія (межа стійкості) штрихується, при цьому штриховка направляється всередину області. Межа

області може будуватись шляхом багатократного застосування одного з критеріїв стійкості при різних значеннях змінюваних параметрів [9].

Розглянемо приклад побудови області стійкості для статичної системи третього порядку, передавальна функція якої задана у вигляді:

$$W(p) = \frac{K_1 K_2 K_3}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)(T_3 p + 1)}, \quad (4.28)$$

що відповідає трьом послідовно з'єднаним аперіодичним ланкам з коефіцієнтами передачі K_i та постійними часу T_i , $i = \overline{1,3}$. Характеристичний поліном системи приймає вигляд [3]:

$$D(\lambda) = K_1 K_2 K_3 + (T_1 p + 1)(T_2 p + 1)(T_3 p + 1) \quad (4.29)$$

$$\text{або:} \quad D(\lambda) = a_3 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0, \quad (4.30)$$

$$\text{де: } a_3 = T_1 T_2 T_3; a_2 = T_1 T_2 + T_2 T_3 + T_1 T_3; a_1 = T_1 + T_2 + T_3; a_0 = 1 + K_1 K_2 K_3 \quad (4.31)$$

$$\text{Позначимо:} \quad K_1 K_2 K_3 = K, \quad (4.32)$$

K – коефіцієнт передачі системи.

Для визначення області та межі стійкості можна застосувати алгебраїчний критерій Рауса-Гурвиця, тоді умовою стійкості буде:

$$T_1 T_2 T_3 > 0 \quad (4.33)$$

$$T_1 T_2 + T_2 T_3 + T_1 T_3 > 0 \quad (4.34)$$

$$T_1 + T_2 + T_3 > 0 \quad (4.35)$$

$$1 + K > 0 \quad (4.36)$$

Будемо вважати, що змінюваними параметрами є T_1 та K , тоді область стійкості будується в площині цих параметрів (рис.4.7).

Рівняння (4.33)÷(4.35) не мають особливої цінності, тому що в реальних системах завжди розглядаються додатні значення T_1, T_2, T_3 . Рівняння (4.36) показує, що K за абсолютним значенням повинно бути менше одиниці, тобто система втратить стійкість при наявності додатного, а не від'ємного зворотнього зв'язку [8, 9].

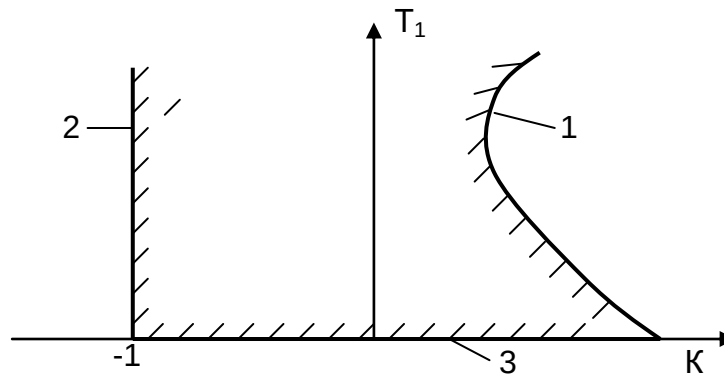


Рис.4.7. Область стійкості системи

Коли K зростає, система також виходить на межу стійкості, а потім стає нестійкою, що видно з виразу для визначника Δ_3 :

$$a_2 a_1 - a_3 a_0 = (T_1 T_2 + T_2 T_3 + T_1 T_3)(T_1 + T_2 + T_3) - T_1 T_2 T_3 (1 + K) > 0 \quad (4.37)$$

З цього виразу можна отримати значення критичного коефіцієнта передачі системи:

$$K_{кр} = (T_1 + T_2 + T_3) \left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} + \frac{1}{T_3} \right) - 1 \quad (4.38)$$

Для стійкої системи $K < K_{кр}$. Межа 1 для області стійкості (рис.4.7) відповідає умові (4.38) для різних значень змінюваного параметра T_1 , при яких $K = K_{кр}$. Межа 2 відповідає умові [8, 9]

$$K + 1 > 0, K = 1 \quad (4.39)$$

Межа 3 відповідає умові $T_1 = 0$.

Необхідно підкреслити ще раз, що збільшення коефіцієнта передачі системи підвищує її точність, але може привести до втрати стійкості. Цікавою особливістю є те, що критичне значення коефіцієнта передачі $K_{кр}$ не залежить від абсолютних значень постійних часу, а визначається лише їх відношенням (вираз (4.36)) [1, 8, 9].

Контрольні питання

1. Дайте визначення поняття “ стійка автоматична система регулювання”.

2. Зобразіть перехідні процеси для стійкої, нестійкої системи та знаходження її на межі стійкості.
3. Що таке вільний (перехідний) та змушений рух системи?
4. Проведіть аналіз характеристичного рівняння системи. Поясніть, чому дійсні корені цього рівняння повинні бути від'ємними для забезпечення стійкості?
5. Покажіть розташування коренів характеристичного рівняння на комплексній площині.
6. Як тримати характеристичне рівняння системи за її передавальними функціями?
7. Наведіть формулювання алгебраїчного критерія стійкості Рауса-Гурвиця.
8. Визначте умови стійкості системи 1-го, 2-го, 3-го порядків на основі критерія Рауса-Гурвиця.
9. Сформулюйте частотний критерій стійкості Найквіста.
10. Покажіть годограф $W_{роз}(j\omega)$ для статичних та астатичних систем при використанні критерія Найквіста.
11. Наведіть формулювання та математичні залежності для частотного критерія стійкості Михайлова.
12. Що таке області стійкості, від чого залежать їх розміри?
13. Чому необхідно забезпечувати запас стійкості АСР? Які показники запасу стійкості?
14. Що таке критичне значення коефіцієнта передачі системи. Наведіть приклад .
15. Наведіть приклад побудови області стійкості для системи 3-го порядку.
16. Що таке D-розбиття і як цей метод використовується при побудові областей стійкості.
17. Наведіть приклад структурно нестійкої системи.
18. Як впливає значення коефіцієнта передачі системи на стійкість?

5. ЯКІСТЬ ПЕРЕХІДНИХ ПРОЦЕСІВ В ЛІНІЙНИХ АВТОМАТИЧНИХ СИСТЕМАХ РЕГУЛЮВАННЯ

5.1. Поняття та показники перехідних процесів

Якість автоматичних систем регулювання в цілому визначається комплексом показників: надійністю, вартістю, відповідністю світовому науково-технічному рівню, точністю. В теорії та практиці автоматизації поняття “якість системи”, “якість керування” зводиться в першу чергу до якості перехідних процесів відносно збурення та зміни завдання та забезпечення необхідної точності в усталеному режимі. В попередньому розділі відзначалось, що стійкість системи необхідна, але недостатня умова її працездатності, тому після перевірки та забезпечення стійкості системи розглядаються можливості гарантування якості процесів керування. При цьому якість перехідних процесів необхідно розглядати відносно збурень та зміни завдання. Якість перехідних процесів визначається властивостями як об’єкта, так і автоматичного регулятора, а показники або оцінки якості формуються, виходячи з технологічних вимог до функціонування об’єкта. Використовують прямі показники перехідного процесу та узагальнені показники [1, 2, 3, 4, 7, 8].

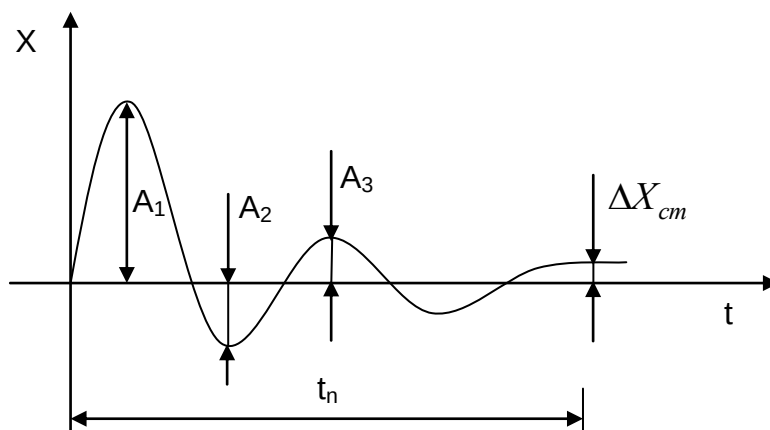


Рис.5.1. Графік перехідного процесу АСР відносно збурення

Прямі показники якості перехідного процесу визначають безпосередньо за його графіком (рис.5.1). До них відносяться [1, 2, 3, 8]:

- динамічна похибка A_1 , яка визначає найбільше відхилення регульованої координати від заданого значення, $A_1 \leq A_1^{don}$, тобто ця похибка не повинна перевищувати допустимої за технологічними вимогами;
- статична похибка $\Delta X_{cm} \leq \Delta X_{cm}^{don}$, яка виникає лише в статичних системах, наприклад з П-регулятором;
- час перехідного процесу, $t_n \leq t_n^{don}$, який визначається як інтервал часу, за який перехідний процес закінчується ($\Delta X_{cm} = const$ або $\Delta X_{cm} = 0$ відповідно для статичних та астатичних систем). В практичних розрахунках приймається як інтервал часу, коли $X \leq 0.05 A_1$;
- перерегулювання

$$a = \frac{A_2}{A_1} \cdot 100\%, \quad (5.1)$$

який характеризує відхилення регульованої координати з різним знаком, що не допускається для деяких об'єктів. Для реальних систем $a = 20 \div 50\%$;

- оцінка коливальності (ступінь затухання)

$$\psi = \frac{A_1 - A_3}{A_1}. \quad (5.2)$$

Показник ψ може приймати різні значення: при $\psi = 1$ в системі відбувається аперіодичний процес, при $\psi = 0$ - незагасаючі коливання однакової амплітуди, $\psi < 0$ - розбіжний перехідний процес. Для реальних АСР значення ψ приймається в межах $0.75 \div 0.9$ [3].

При існуючих властивостях об'єкта перехідні процеси залежать від типу автоматичного регулятора та значень параметрів налаштувань. Для

можливості порівняння різних систем введемо поняття типового перехідного процесу [3, 8]:

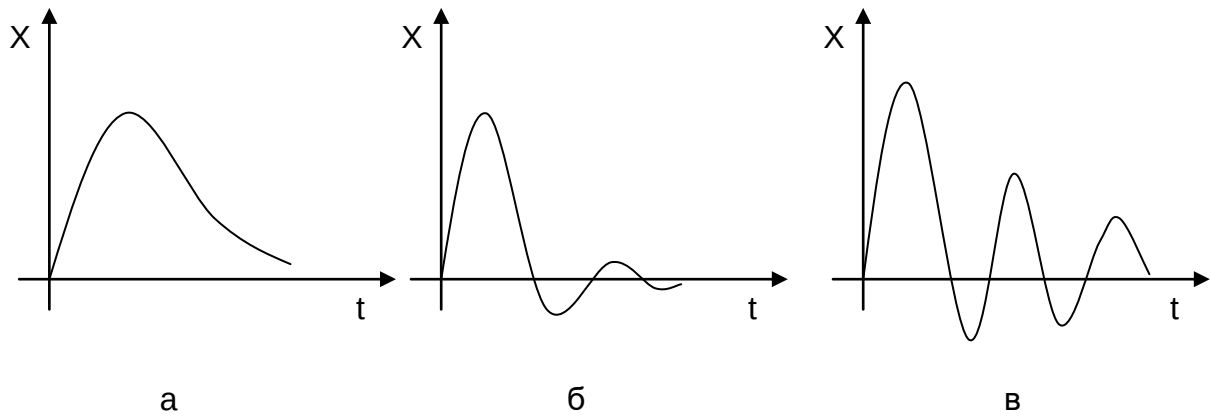


Рис.5.2. Типові перехідні процеси АСР

- граничний аперіодичний (рис.5.2,а), який характеризується значним динамічним відхиленням (динамічною похибкою), але має мінімальний час регулювання. Підкреслимо ще раз, що є ряд об'єктів, які не допускають змінювання регульованої координати з різними знаками відносно заданого значення;
- коливальний з 20%- (рис.5.2,б) або 50%-вим (рис.5.2,в) перерегулюванням. Перший з них характеризується мінімальним часом першого напівперіода та дещо меншою динамічною похибкою, другий має мінімальне значення динамічної похибки та найменшу оцінку у вигляді інтегралу $\int_0^{t_n} X^2 dt$, але при цьому зростає час перехідного процесу.

Прямі показники перехідного процесу зв'язані між собою: зменшення A_1 приводить до збільшення коливальності та часу перехідного процесу [8, 9].

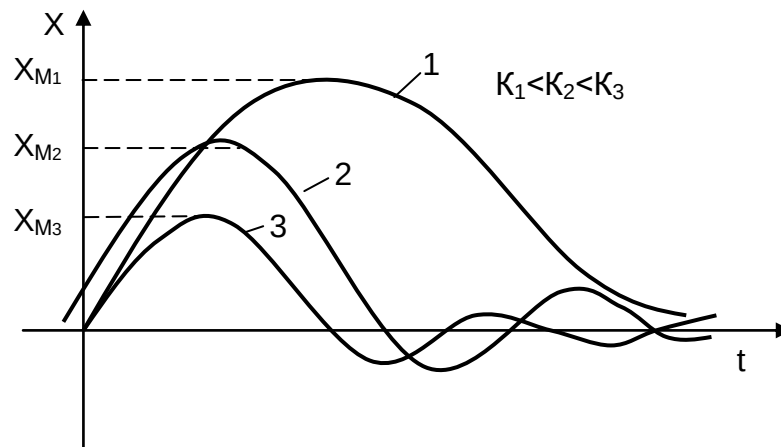


Рис.5.3. Вплив коефіцієнта передачі розімкненої системи на показники якості перехідного процесу

На рис.5.3 показані перехідні процеси при різних значеннях K , звідки видно, що при синтезі АСР завжди необхідно шукати компроміс між значеннями динамічної похибки, коливальності та тривалістю перехідного процесу.

Наведені прямі показники якості перехідних процесів зручно використовувати при експериментальних дослідженнях АСР та комп'ютерному моделюванні. На стадії синтезу АСР використовуються непрямі показники (критерії) якості, які дають можливість визначити, якою буде майбутня АСР за її характеристиками.

5.2. Критерії якості перехідних процесів АСР

Якість перехідних процесів АСР можна визначити за частотними, кореневими або інтегральними критеріями [1, 2, 3, 4, 8].

Найбільшу наочність мають частотні критерії якості, які використовують властивості частотних характеристик замкненої та розімкненої системи. Так, за видом амплітудно-частотної характеристики замкненої системи за зміною завдання (рис.5.4) можна визначити частотний показник коливальності [3]:

$$M = \frac{A_M(\omega)}{A(0)} \quad (5.3)$$

Чим більше це відношення, тим сильніша коливальність і, як наслідок, тривалість перехідного процесу t_n . Якість вважається задовільною при $M = 1.1 \div 1.5$. Непрямими частотними показниками швидкодії системи є характерні частоти: резонансна ω_p , незагасаючих коливань ω_0 (часто можна прийняти $\omega_0 \approx \omega_p$) та частота пропускання $\omega_n \approx 3 \cdot \omega_0$.

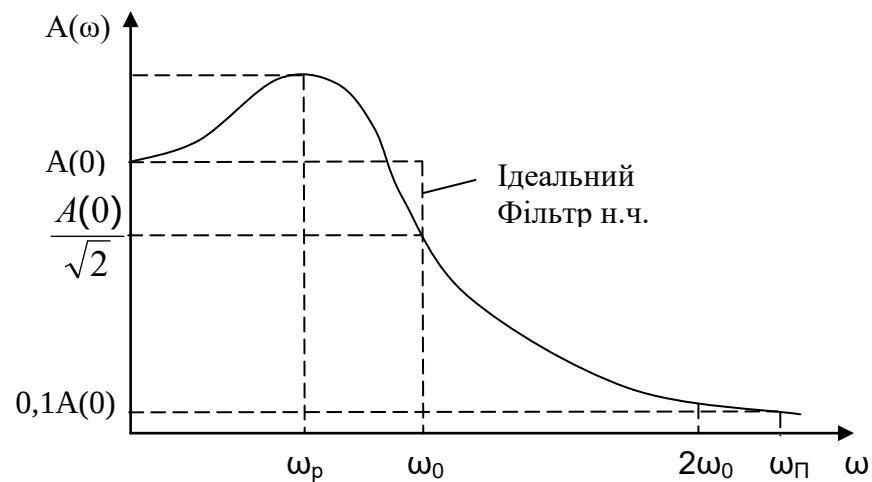


Рис.5.4. Амплітудно-частотна характеристика замкненої системи

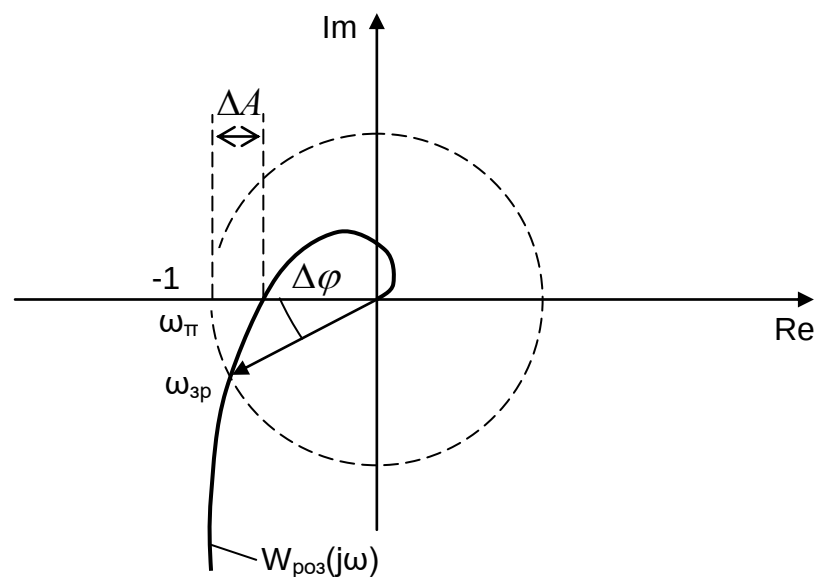


Рис.5.5. Показники запасу стійкості

За амплітудно-фазовою характеристикою розімкненої системи $W_{роз}(j\omega)$ (рис.5.5) можна визначити запас за амплітудою [1, 2, 3, 4, 8]:

$$\Delta A = 1 - A(\omega_{\pi}) \quad (5.4)$$

та за фазою:

$$\Delta \varphi = \left| \pi - \varphi(\omega_{\pi}) \right| \quad (5.5)$$

Ці показники фактично характеризують віддаленість кривої $W_{роз}(j\omega)$ від критичної точки на комплексній площині з координатами $(-1; j0)$. Раніше відзначалось, що при проектуванні систем приймається запас стійкості за амплітудою $\Delta A = 0.5 \div 0.6$ і за фазою $\Delta \varphi = 30 \div 60^\circ$. Такі показники запасу стійкості забезпечують і необхідну якість перехідних процесів [8, 9].

Між частотними та часовими характеристиками системи існує однозначний зв'язок. Так визначено, що перехідна функція замкненої системи може визначатись за дійсною $U(\omega)$ або уявною $V(\omega)$ частотними характеристиками замкненої системи [8]:

$$h(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{U(\omega) \sin(\omega t)}{\omega} d\omega, \quad (5.6)$$

$$h(t) = U(0) + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{V(\omega) \cos(\omega t)}{\omega} d\omega, \quad (5.7)$$

де: $h(t)$ - перехідна функція замкненої системи, тобто часова характеристика при одиничному ступінчатому діянні [8].

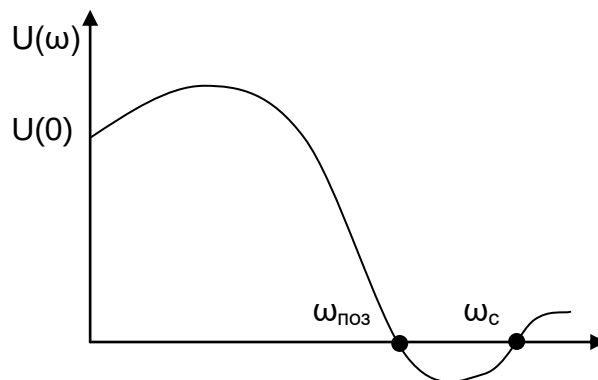


Рис.5.6. Дійсна частотна характеристика замкненої системи

Для оцінки якості перехідних процесів можна використовувати дійсну частотну характеристику замкненої системи, наприклад за зміною завдання (рис.5.6). Інтервал частот $0 \div \omega_{\text{ноз}}$ - називається інтервалом позитивних частот, $0 \div \omega_c$ - суттєвих. Після ω_c $U(\omega)$ мало впливає на якість перехідного процесу. Якщо для частоти $\omega > \omega_n$ виявиться, що $U(\omega) < 0.2 \cdot U(0)$, то в першому наближенні можна приймати до уваги лише інтервал позитивності $0 \div \omega_n$. Значення $U(0)$ при частотах $\omega > \omega_n$ та $\omega > \omega_c$ впливає лише на початок перехідного процесу і їх можна відкинути, а початок $U(\omega)$ визначає головним чином кінцеву частину перехідного процесу. Аналіз інтегралів (5.6)-(5.7) та графіку $U(\omega)$ (рис.5.6) дає можливість зробити такі оцінки щодо якості перехідного процесу [2, 3, 8]:

- статична похибка $X(\infty)$ після нанесення одиничного стрибка дорівнює $U(0)$. Якщо це зміна завдання, то $U(0)=1$ або деякому коефіцієнту K_0 (з урахуванням відтворення зміни завдання). При оцінці характеристик відносно збурення $U(0) \rightarrow \min$, а в астатичній системі $U(0)=0$;
- порівняння графіків рис.5.7,а та 5.7,б показує відповідність $h(t)$ та $U(\omega)$. При наявності екстремума $U(\omega)$ перехідний процес коливальний, при відсутності – аперіодичний;
- перехідний процес тим швидше загасає, чим більше значення ω_n (при цьому менша інерційність);
- для мінімально-фазових систем замість $U(\omega)$ можна використовувати $A(\omega)$.

Кореневі критерії якості дають можливість оцінити або задати показники перехідного процесу за розташуванням коренів характеристичного полінома на комплексній площині. При цьому необхідно аналізувати не лише полюси (як при аналізі стійкості), а й нулі передавальної функції системи. Наприклад, передавальна функція замкненої системи відносно збурення має вид [8]:

$$W_{\text{зб}}(p) = \frac{W_{\text{озб}}(p)}{1 + W_{\text{поз}}(p)} = \frac{M(p)}{D(p)}, \quad (5.8)$$

де:

$$M(p) = b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p^1 + b_0 \quad (5.9)$$

$$D(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p^1 + a_0 \quad (5.10)$$

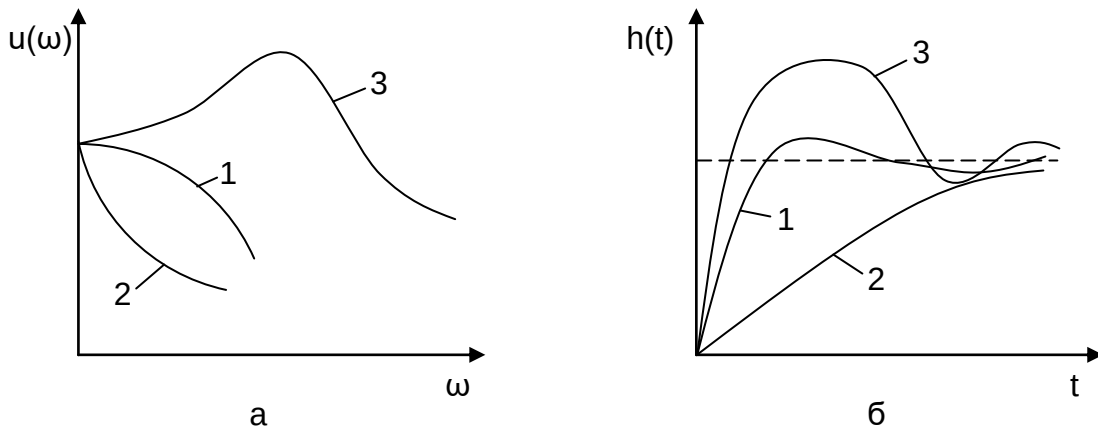


Рис.5.7. Дійсна частотна (а) та перехідна (б) характеристики замкненої системи

Розклавши багаточлени $M(p)$ і $D(p)$ на множники, передавальну функцію (5.8) можна виразити так [8]:

$$W_{\text{зб}}(p) = \frac{b_m \prod_{j=1}^m (p - \lambda_{0j})}{a_n \prod_{i=1}^n (p - \lambda_i)} \quad (5.11)$$

де: λ_i, λ_{0i} - відповідно полюси та нулі передавальної функції. При цьому значення нулів залежить від місця, де прикладене діяння.

Розглянемо частинний випадок, коли передавальна функція (5.11) не має нулів:

$$W_{\text{зб}}(p) = \frac{b_m}{a_n \prod_{i=1}^n (p - \lambda_i)} \quad (5.12)$$

Для цього випадку перехідний процес, який визначається лише полюсами $W_{зб}(p)$, має вид:

$$X_n(t) = \sum_{i=1}^n C_i e^{\lambda_i t} \quad (5.13)$$

Як відомо в цьому перехідному процесі є аперіодична та коливальні складові (відповідно визначаються дійсними та попарно спряженими комплексними коренями). Тоді можна знайти тривалість найбільш тривалої та коливальність найбільш коливальної складових, що і визначить ці оцінки всього перехідного процесу (їх верхні границі) [2, 3, 8].

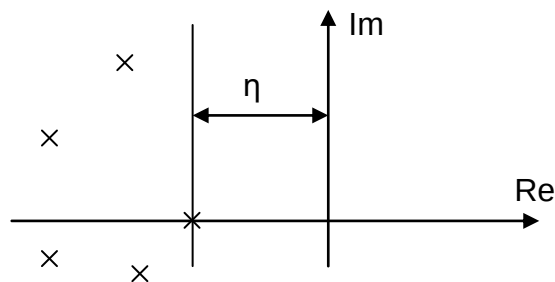


Рис.5.8. Ступінь стійкості системи

Критерій тривалості – ступінь стійкості η (рис.5.8) показує відстань від уявної осі (яка є межею стійкості) до найбільшого кореня характеристичного рівняння замкненої системи. Час затухання окремої складової перехідного

процесу визначається величиною $e^{\alpha_i t}$, або $e^{-\frac{t}{T_i}}$, де $T_i = \frac{1}{|\alpha_i|}$ - постійна часу

загасання, α_i - дійсна частина i -го кореня характеристичного рівняння.

Тривалість певної складової $t_{ni} \approx 3T_i$, тобто вона обернено пропорційна абсолютному значенню дійсної частини відповідного кореня. Таким чином, самою тривалою складовою є така, яка визначається коренем з мінімальною величиною дійсної частини [2, 3, 8]:

$$\eta = |\alpha|_{\min} \quad (5.14)$$

Тоді тривалість перехідного процесу буде:

$$t_n \leq \frac{3}{\eta} \quad (5.15)$$

Назва показника “ступінь стійкості” пов’язана з тим, що η показує фактично відстань від межі стійкості.

Критерій коливальності – ступінь коливальності [3, 8]. Коливальність коливальної складової перехідного процесу

$$C_i e^{\alpha_i t} \sin(\beta_i t + \varphi_i) \quad (5.16)$$

визначається відношенням амплітуд перехідного процесу:

$$\frac{X_{2\max}}{X_{1\max}} = \frac{C_i e^{\alpha_i(t_1 + \tau_i)}}{C_i e^{\alpha_i t_1}} = e^{\alpha_i \tau_i} \quad (5.17)$$

де: $\tau_i = 2\pi / \beta_i$ - період коливань даної складової. Тоді коливальність

дорівнює $e^{\frac{2\pi\alpha_i}{\beta_i}}$, а при $\alpha_i < 0$ буде $e^{-\frac{2\pi|\alpha_i|}{\beta_i}}$. Таким чином, мірою

коливальності є відношення $\frac{\beta_i}{|\alpha_i|}$: чим більше це відношення, тим більше

коливальність складової перехідного процесу, а найбільш коливальною є складова, для якої це відношення буде максимальним [3, 8]:

$$\mu = \left| \frac{\beta}{\alpha} \right|_{\max} \quad (5.18)$$

На комплексній площині корінь, який визначає найбільшу коливальність, відповідає куту $\gamma = \arctg \left| \frac{\beta_i}{\alpha_i} \right|$ (рис.5.9).

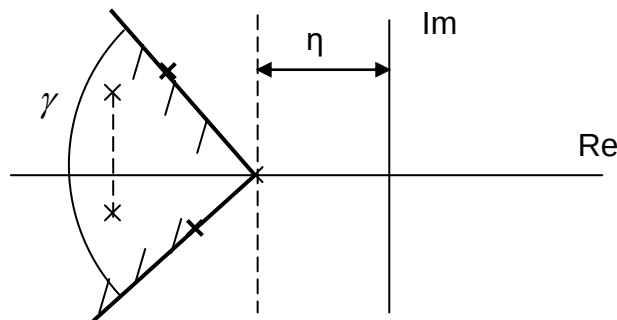


Рис.5.9. Ступінь коливальності системи

В практичних розрахунках використовують показник $m = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{\mu}$, який приймають в межах $m = 0.2 \div 0.5$ [3]. Варто зауважити, що в системі довільного порядку найбільш швидкий аперіодичний перехідний процес має місце, коли всі n коренів рівні. На комплексній площині корінь, який визначає найбільш коливальну складову, відповідає найбільшому значенню кута γ (рис.5.9).

Для визначення критеріїв якості η та μ можна використовувати критерії стійкості Рауса-Гурвиця або Михайлова. В задачах синтезу систем обирають один - два параметри, які можуть змінюватись в певних межах, і визначають їх вплив на ступінь стійкості η побудовою області стійкості в площині, наприклад η і одного з параметрів системи. Можна отримати також лінії однакового ступіню стійкості з різними значеннями η .

При використанні критеріїв η і μ необхідно враховувати, що оцінки тривалості та коливальності перехідних процесів є граничними, тобто перехідний процес в системі може мати кращу якість. Якщо розглядати загальний випадок, коли передавальна функція системи має нулі, то це відповідає наявності правої частини рівняння, тому оцінка якості може бути неточною, але завжди якість перехідних процесів тим краще, чим більше η і менше μ .

В технічній літературі наводиться приклад оптимального розташування коренів характеристичного полінома та значення відповідних коефіцієнтів. Для реальних систем значна частина коефіцієнтів характеристичного рівняння фіксована, тому свобода вибору щодо розташування коренів обмежена. В цьому випадку обирають два - три корені, які визначають якість перехідних процесів, а решту розташовують в глибині комплексної напівплощини шляхом обмежень на дійсні частини. При цьому відношення уявної та дійсної частини цих коренів не регламентується, оскільки

швидкість загасання буде значною та виявляться лише на початку перехідного процесу.

Визначення показників η та μ за рівнянням з відомими коефіцієнтами – трудомістка задача, тому частіше розв’язується обернена задача – визначення коефіцієнтів рівнянь та параметрів системи, при яких всі корені лежать в області із заданими значеннями η і μ . Для систем невисоких порядків розроблено метод кореневого годографа, коли на комплексній площині будуються траєкторії (годографи) переміщення коренів характеристичного рівняння при зміні параметрів системи, що приводить до бажаного розташування цих коренів.

Вплив розташування коренів на якість перехідного процесу та стійкість добре ілюструє діаграма І.О.Вишнеградського (1876 р.), побудована для систем третього порядку (рис.5.10).

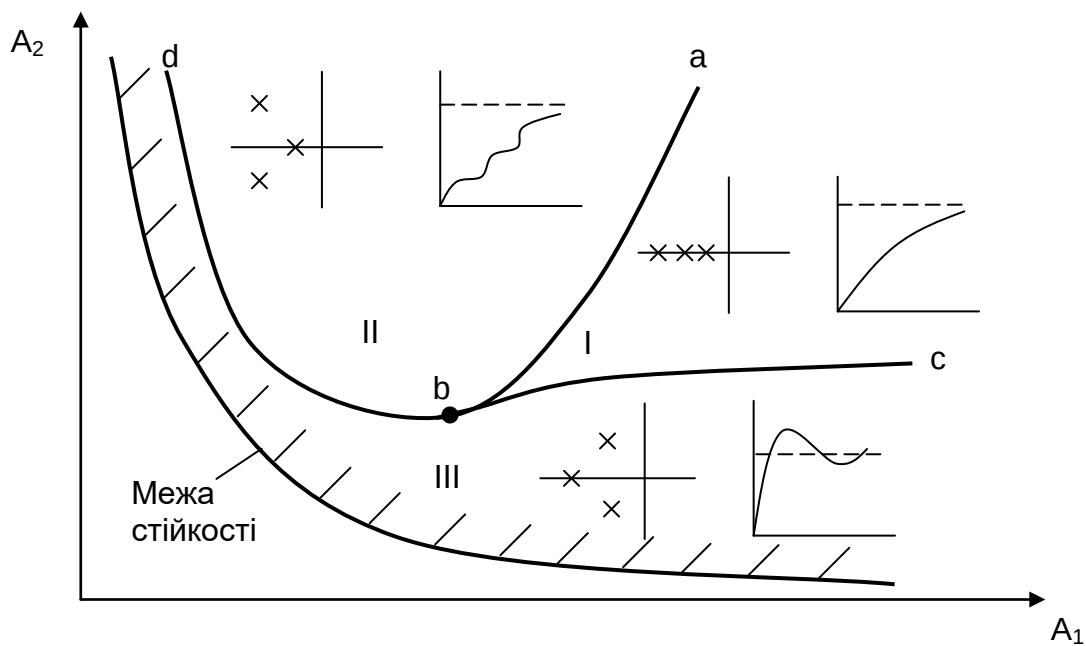


Рис.5.10. Діаграма І.О.Вишнеградського

Характеристичне рівняння системи:

$$a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = 0 \quad (5.19)$$

приводиться до нормованого вигляду шляхом ділення на a_0 і введення нової

змінної $\bar{p} = p \cdot \sqrt[3]{\frac{a_3}{a_0}}$:

$$\bar{p}^3 + A_1 \bar{p}^2 + A_2 \bar{p} + 1 = 0 \quad (5.20)$$

$$\text{де: } A_1 = \frac{a_2}{\sqrt[3]{a_3^2 \cdot a_0}}; A_2 = \frac{a_1}{\sqrt[3]{a_3 \cdot a_0^3}}.$$

Приймаючи $A_1 > 0, A_2 > 0$ в площині параметрів A_1 - A_2 будується область стійкості, яка розділяється на три складові [1, 8]:

- I – обмежена лініями abc, відповідає трьом дійсним кореням (різним), що приводить до аперіодичних процесів;
- II – обмежена лініями abd, відповідає парі комплексним коренів та одному дійсному, розташованому ближче до уявної осі – монотонний перехідний процес;
- III – обмежена лінією dbc та межею стійкості, відповідає також парі комплексних коренів та одному дійсному, але до уявної осі ближче знаходяться комплексні корені – коливальний перехідний процес.

Одними з найбільш зручних для оцінки якості перехідних процесів є інтегральні критерії якості, особливо при використанні комп'ютерного моделювання. Це узагальнені показники, які фактично дають оцінку величини площі під кривою перехідного процесу, і тоді однозначно формулюється вимога зменшення відхилення та тривалості перехідного процесу. Використовуються такі інтегральні критерії [2, 8, 9]:

- лінійний

$$I_1 = \int_0^{t_n} \Delta X dt; \quad (5.21)$$

- квадратичний

$$I_2 = \int_0^{t_n} (\Delta X)^2 dt; \quad (5.22)$$

- покращений квадратичний

$$I_3 = \int_0^t \left((\Delta X)^2 + T_e^2 \left(\frac{d\Delta X}{dt} \right)^2 \right) dt \quad (5.23)$$

Лінійний інтегральний критерій I_1 є найбільш простим, його зручно використовувати для оцінки якості аперіодичних перехідних процесів, а для коливальних необхідно визначати площі різного знаку під кривими і складати їх за абсолютним значенням. Оцінка $I_1 \rightarrow \min$ може привести до перехідного процесу з малим відхиленням, але з недостатнім затуханням.

Найбільш зручним є квадратичний інтегральний критерій I_2 . При його використанні найбільшу вагу мають перші амплітуди, що також може привести до перехідних процесів з недостатнім затуханням. Цей критерій безпосередньо зв'язаний з характеристиками системи, його значення можна знайти за формулою Релея [8]:

$$I_2 = \frac{1}{T} \int_0^{\infty} |W_{збур}(j\omega)|^2 \cdot |Z(j\omega)|^2 d\omega \quad (5.24)$$

де: $W_{збур}(j\omega)$ - АФХ замкненої системи за каналом збурення;

$Z(j\omega)$ - Фур'є-перетворення збурення.

Урахування в критерії I_3 швидкості відхилення змінної розширює діапазон його застосування, а ваговий коефіцієнт T_v безпосередньо пов'язаний з часом перехідного процесу: $\frac{t_n}{6} \leq T_v \leq \frac{t_n}{3}$, де t_n - бажана тривалість перехідного процесу. Квадратичний інтегральний критерій можна обчислити за коефіцієнтами передавальної функції системи без побудови перехідного процесу [8, 9].

Різні інтегральні критерії зв'язані між собою та з прямими показниками якості перехідних процесів. Так зменшення I_2 приводить до зменшення I_1, ψ, A_1 , а також до збільшення t_n (зменшення запасу стійкості системи). В проектних розрахунках зв'язують безпосередньо значення I_2 з $\psi = 0.7 \div 0.9$ при обмеженні на A_1 .

Критерії якості перехідних процесів залежать від сукупності характеристик системи, тому в процесі розробки АСР відбирають найбільш

суттєві фактори, наприклад відомий сильний вплив відношення $\frac{\tau_{zn}}{T}$ (τ_{zn} - час запізнювання, T - постійна часу об'єкта) на значення критерія I_2 та динамічну похибку A_1 . Суттєво змінюється значення критеріїв та показників якості при змінюванні коефіцієнта регулятора $K_{рег}$ та коефіцієнтів передачі об'єкта за каналами керування $K_{ок}$ та збурення $K_{озб}$ [1, 3, 8, 9].

5.3. Точність та чутливість АСР

Призначенням будь-якої АСР є відтворення сигналу вхідного сигналу завдання та зменшення або повна компенсація дії збурення. В умовах функціонування при детермінованих діях в АСР можна виділити два режими: стаціонарний (усталений) і перехідний. В свою чергу стаціонарний режим може бути статичним або динамічним. Статичний режим характеризується тим, що система знаходиться в стані спокою, не змінюються зовнішні дії та параметри системи. Динамічний стаціонарний режим виникає тоді, коли зовнішні дії змінюються за усталеним законом і система знаходиться в стані змушеного руху. Цей режим може встановлюватись під впливом детермінованих або випадкових сигналів. Статичні та астатичні системи в цьому режимі мають різні показники якості перехідних процесів [1, 2, 7, 9].

Статичний режим статичних систем можна визначити за допомогою передавальної функції замкненої системи, наприклад відносно збурення. Регульована координата в цьому випадку визначається так [7]:

$$X(p) = W_{зб}(p) \cdot Z(p) = \frac{W_{озб}(p)}{1 + W_{рег}(p) \cdot W_{ок}(p)} \cdot Z(p) \quad (5.25)$$

В статиці, тобто при $p=0$, в статичній системі виникає приріст

$$\Delta X_{cm}(p)|_{p=0} = \frac{K_{озб}(p)}{1 + K_{рег}(p) \cdot K_{ок}(p)} \cdot \Delta Z(p) \quad (5.26)$$

З аналізу виразу (5.26) можна зробити такі висновки:

- в статичній системі завжди виникає статична похибка ΔX_{cm} (рис.5.11, 1 - аперіодичний процес, 2 - коливальний);

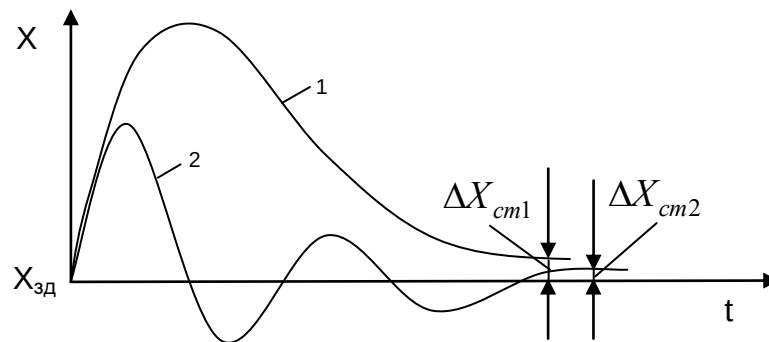


Рис.5.11. Перехідні процеси в статичній системі

- статична похибка залежить від $K_{сист.} = K_{рег} \cdot K_{ок}$;
- при збільшенні коефіцієнта передачі регулятора $K_{рег} \rightarrow \infty$ можна значно зменшити ΔX_{cm} , але існує межа – критичне значення $K_{рег}^{крит}$, при якому система втрачає стійкість.

Такий аналіз можна виконувати лише після того, коли АСР приведена до одноконтурної, тому що статична система може мати інтегральні ланки, охоплені від'ємним зворотнім зв'язком, що перетворює їх на аперіодичні (статичні). На рис.5.12 показано таке з'єднання, для якого еквівалентна передавальна функція буде [7, 8]:

$$W_{екв}(p) = \frac{\frac{K}{p}}{1 + \frac{K}{p} K_{33}} = \frac{K}{p + K_{33} \cdot K} \quad (5.27)$$

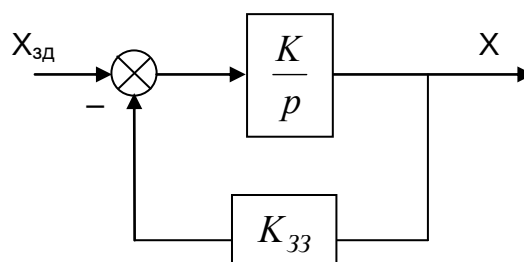


Рис.5.12. Інтегральна ланка із зворотнім зв'язком

При дії збурення Z відношення:

$$\delta_{стат} = \frac{\Delta X_{ст}}{Z} = \frac{K_{озб}}{1 + K_{рег} \cdot K_{ок}} \quad (5.28)$$

називається статизмом і показує величину статичного відхилення на одиницю зміни Z . В слідкуючих системах

$$\Delta X_{ст} = \frac{1}{1 + W_{роз}(p)} \Delta X_{зд} = \frac{1}{1 + K_{суст}} \Delta X_{зд} \quad (5.29)$$

Якщо в системі діє кілька збурень, то [7]

$$\Delta X_{ст} = \frac{\sum_{i=1}^n K_{озбі} \Delta Z_i}{1 + K_{суст}} = \sum_{i=1}^n \delta_{суст} \Delta Z_i \quad (5.30)$$

Статизм, за винятком спеціальних випадків, є небажаним тому, що в цьому випадку неточно підтримується заданий режим: $X(t) \neq X_{зд}$. В більшості випадків приймаються спеціальні заходи для усунення статизму:

- створення такої структури системи, для якої $W_{озб}(p) = 0|_{p=0} (K_{озб} = 0)$, що можна реалізувати в багатоконтурних системах, наприклад в комбінованій та з додатковими сигналами;
- введення інтегральної ланки, наприклад інтегрального регулятора, тоді:

$$\Delta X_{ст} = \frac{K_{озб}}{1 + \frac{K_{рег}^i}{p}} \Delta Z \bigg|_{p=0} = 0 \quad (5.31)$$

Таким чином усувається $\Delta X_{ст}$, але це справедливо лише тоді, коли інтегральна ланка знаходиться за межами об'єкта. Якщо ж об'єкт має інтегральну ланку, то статична похибка не усувається [7, 9]:

$$\Delta X_{ст} = \frac{\frac{1}{p} W'_{озб}(p)}{1 + \frac{1}{p} W'_{роз}(p)} Z \bigg|_{p=0} = \frac{K_{озб}}{K_{рег}^i K_{ок}} Z \quad (5.32)$$

де: $W'_{об}(p), W'_{роз}(p)$ - передавальні функції об'єкта та розімкненої системи, з яких попередньо винесено множник $\frac{1}{p}$.

Таким чином, астатичною ($\Delta X_{ст} = 0$) буде система, в якій інтегральна ланка входить в регулятор або в об'єкт, але при статичному регуляторі і астатичному об'єкті $\Delta X_{ст} \neq 0$ [2, 8, 9].

Динамічні стаціонарні режими можуть виникати в тих випадках, коли на систему діють сигнали:

- гармонійний, тоді стаціонарний динамічний сигнал визначається частотними характеристиками;
- з постійною швидкістю $Z = V \cdot t$ або з прискоренням $Z = \frac{at^2}{2}$.

Для аналізу динамічних стаціонарних режимів в загальному випадку приймається, що зовнішній сигнал змінюється з постійною m -ою похідною, тобто [8]

$$Z_{уст}^{(m)}(p) = p^m \cdot Z(p) \quad (5.33)$$

Тоді:

$$\Delta X(p) = \frac{W_{об}(p)}{1 + W_{роз}(p)} Z(p) = \frac{W_{об}(p)}{1 + W_{роз}(p)} \cdot \frac{Z_{уст}^{(m)}(p)}{p^m} \quad (5.34)$$

З аналізу (5.34) видно, що в статичній системі при $p=0$

$$\Delta X_{уст}(p) = \left. \frac{W_{об}(p)}{(1 + W_{роз}(p)) \cdot p^m} \right|_{p=0} Z_{уст}^{(m)}(p) \quad (5.35)$$

$\Delta X_{уст} \rightarrow \infty$ при будь-якому значенні $K_{сист} = K_{рег} K_{ок}$. При введенні інтегральних ланок приймемо, що:

- в $W_{роз}(p)$ входить r інтегральних ланок;
- в $W_{об}(p)$ - l таких ланок.

Тоді:

$$\Delta X_{уст}(p) = \frac{p^{-l} W'_{озб}(p)}{(1 + p^{-r} W'_{роз}(p)) \cdot p^m} Z_{уст}^{(m)}(p) = \frac{p^{(r-l)-m} W'_{озб}(p)}{(p^r + W'_{роз}(p))} \Big|_{p=0} \cdot Z_{уст}^{(m)}(p) \quad (5.36)$$

В цьому загальному випадку можуть бути такі режими роботи [8, 9]:

- при $(r - l) > m$ статичне відхилення $\Delta X_{уст}(p) = 0$;
- при $(r - l) < m$ $\Delta X_{уст}(p) \rightarrow \infty$;
- при $(r - l) = m$ $\Delta X_{уст}(p) = \frac{K_{озб}}{K_{сист}} Z_{уст}^{(m)}(p)$.

Кількість інтегральних ланок в системі визначає її порядок астатизму. При визначенні порядку m збурення (порядку фіксованої похідної) можна зробити такі загальні висновки:

- якщо в передавальній функції об'єкта за каналом збурення $W_{озб}(p)$ немає інтегральних ланок, то $\Delta X_{уст}(p) = 0$, коли порядок астатизму системи вищий порядку діяння;
- $\Delta X_{уст}(p)$ має кінцеве значення при рівності цих порядків;
- якщо $W_{озб}(p)$ має l інтегруючих ланок, то для отримання таких же результатів порядок астатизму системи необхідно збільшити на l .

На рис.5.13 показані амплітудно-частотні характеристики типової системи. Аналізуючи сигнал похибки (рис.5.13,а), можна зробити такі висновки:

- якщо частота зовнішнього сигналу $\omega_{зовн} \ll \omega_p$, то амплітуда сигналу похибки мала і система добре виконує функції відтворення та подавлення;
- якщо $\omega_{зовн} \gg \omega_p$, то амплітуда сигналу похибки дорівнює амплітуді зовнішнього сигналу, тобто система некорисна. Це пояснюється тим, що система має інерційний об'єкт і не встигає реагувати на високочастотні діяння;

- при $\omega_{зовн} \approx \omega_p$ амплітуда сигналу похибки навіть більша амплітуди діяння, тобто система може бути шкідливою.

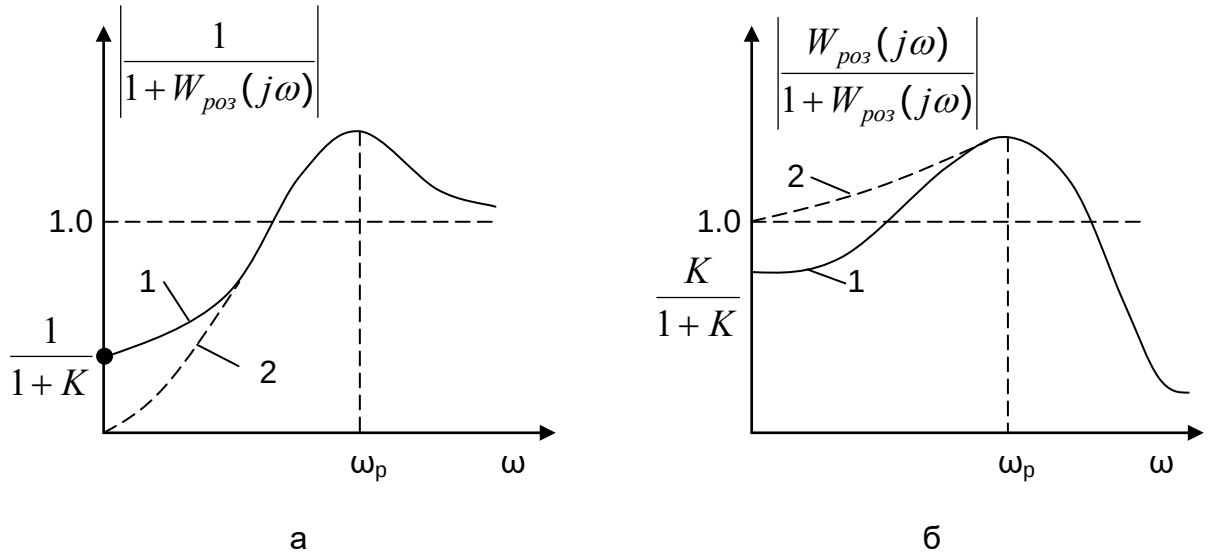


Рис.5.13. Амплітудно-частотні характеристики типової системи: 1 – статичної, 2 – астатичної

З рис.5.13,б видно, що при значних частотах перешкода гаситься за рахунок інерційності об'єкта та регулятора [7].

При малих частотах $|W_{poz}(j\omega) \gg 1|$, тому

$$|W_{zd}^n(j\omega)| \approx \left| \frac{1}{W_{poz}(j\omega)} \right| \quad (5.37)$$

При великих частотах $|W_{poz}(j\omega) \ll 1|$, тому

$$|W_{zd}(j\omega)| \approx |W_{poz}(j\omega)| \quad (5.38)$$

Наближені співвідношення (5.39) і (5.40) можна використати для вибору форми та розташування $|W_{poz}(j\omega)|$ за відомою частотою зовнішнього сигналу та максимальною допустимою амплітудою сигналу похибки. Різні регулятори функціонують в залежності від частоти по-різному [10]:

- збільшення коефіцієнта передачі $K_{\text{рег}}$ пропорційного регулятора підвищує точність на низьких частотах, але збільшує коливальність системи;
- введення інтегральної складової зменшує похибку на низьких частотах, зсуває резонансний пік в сторону низьких частот та збільшує коливальність системи;
- введення D-складової зсуває резонансний пік в сторону високих частот і збільшує точність системи на низьких частотах.

Як і в інших випадках, при гармонійних діях точність системи покращується при збільшенні коефіцієнта передачі системи (в тому числі регулятора), але необхідно враховувати обмеження щодо стійкості системи.

Для безпосередньої оцінки якості системи в задачах аналізу та синтезу АСР необхідно отримати перехідні процеси при дії різних зовнішніх сигналів. Для цього використовуються: аналітичні методи розв'язання диференціальних рівнянь системи; графо-аналітичні методи на основі частотних характеристик; методи чисельного інтегрування та комп'ютерного моделювання. Найбільш зручними і наочними є, безумовно, останні методи, в яких використовуються програмний засіб MATLAB з широкими функціональними можливостями.

Графо-аналітичний метод побудови перехідних процесів заснований на використанні дійсної частотної характеристики замкненої системи $U(\omega)$, з якою перехідна функція зв'язана відомою залежністю [9]:

$$h(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{U(\omega) \sin \omega t}{\omega} d\omega \quad (5.39)$$

Безпосередньо вираз (5.41) використовувати не зручно, тому розроблено графо-аналітичний метод, який дістав назву трапецеїдальних частотних характеристик. Графік частотної характеристики $U(\omega)$ замінюється сумою типових трапецеїдальних характеристик (рис.5.14), кожній з яких відповідає певна складова перехідного процесу. За

коефіцієнтом нахил $\alpha = \omega_1 / \omega_2$ за таблицями знаходять значення $h_\alpha(\bar{t})$, де $\bar{t}$ - відносний час. Перехідний процес в системі буде сумою складових $h_\alpha(\bar{t})$.

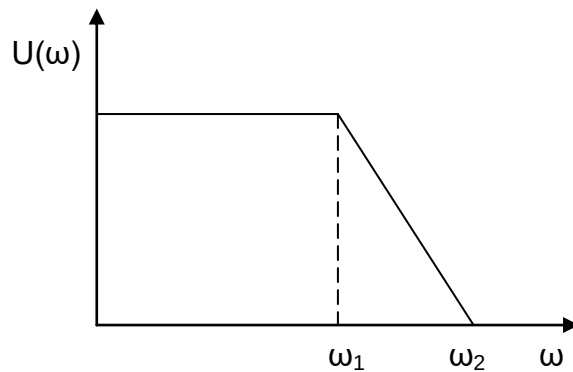


Рис. 5.14. Типова трапецеїдальна дійсна частотна характеристика

В реальних системах автоматичного регулювання завжди є параметри, які змінюються в процесі роботи. Це стосується в першу чергу змін параметрів об'єкта, наприклад коефіцієнтів тепло- та масообміну, що приводить до того, що реальні перехідні процеси відрізняються від розрахункових. Вплив варіацій параметрів на характеристики системи називають параметричними збуреннями, які приводять до параметричних похибок. Змінювання властивостей системи (вихідних змінних, координат стану, показників якості перехідних процесів) при відхиленні параметрів системи від розрахункових, початкових значень називають чутливістю системи. Реальні системи повинні зберігати свої властивості при параметричних збуреннях, бути “трубими” (робастними). Кільнісною оцінкою чутливості є функції та коефіцієнти чутливості [3].

Функція чутливості – частинна похідна характеристики системи за одним із змінюваних параметрів. Наприклад, якщо передавальна функція системи залежить від коефіцієнта K_i , то функція чутливості буде [7]:

$$S_{K_i}^W(p) = \left(\frac{\partial W(p, K_i)}{\partial K_i} \right)_{K_i = K_{i0}}, \quad (5.40)$$

де: K_{i0} - розрахункове (початкове) значення K_i .

Використовується також відносна функція чутливості:

$$S_{K_i}^W(p) = \left(\frac{\partial W(p, K_i)}{\partial K_i} \right)_{K_i=K_{i0}} \cdot \frac{K_i}{W(p, K_i)} \quad (5.41)$$

З виразу (5.42) отримують так звану додаткову передавальну функцію

$$\Delta_{K_i} W(p, K_i) \cong S_{K_i}^W(p) \Delta K_i \quad (5.42)$$

При дії ступінчастого координатного збурення додатковій передавальній функції (5.44) відповідає додатковий перехідний процес

$$\Delta_{K_i} X(t) = S_{K_i}^h(t) \Delta K_i \quad (5.43)$$

де: $S_{K_i}^h(t) = \left| \frac{\partial h(t, K_i)}{\partial K_i} \right|_{K_i=K_{i0}}$ - функція чутливості перехідної характеристики

$h(t)$ до параметра K_i .

Наведені математичні залежності приводять до висновку: чим менше значення функції чутливості (більш груба система), тим менше відхилення регульованої координати, тобто краща якість системи. Якщо функція чутливості – комплексне число, то її значення оцінюють за модулем [7, 8].

Для АСР відносна функція чутливості при використанні передавальної функції відносно зміни завдання приводить до виразу [7]:

$$S_{K_{OK}}^W(p) = (1 + W_{pez}(p)W_{OK}(p))^{-1}, \quad (5.44)$$

тобто чутливість типової АСР до зміни властивостей об'єкта (коефіцієнта K_{OK}) повністю визначається властивостями розімкненої системи $W_{роз}(p) = W_{pez}(p)W_{OK}(p)$. Якщо передавальні функція залежить від кількох параметрів, то додаткову передавальну функцію можна визначити, застосувавши принцип суперпозиції:

$$\Delta W(p, K_1, K_2 \dots K_m) \cong \sum_{i=1}^m S_{K_i}^W(p) \Delta K_i, \quad (5.45)$$

а відповідний додатковий перехідний процес

$$\Delta X(t) \approx \sum_{i=1}^m S_{K_i}^W(t) \Delta K_i \quad (5.46)$$

Функції чутливості є основною для оцінки необхідності розробки та ефективності адаптивних систем [1, 8, 9].

Контрольні питання

1. Які прямі показники якості перехідних процесів використовуються для характеристики АСР?
2. Охарактеризуйте типові перехідні процеси.
3. Як впливає коефіцієнт передачі системи на якість перехідних процесів?
4. В чому полягає методика використання частотних показників якості?
5. Як на основі дійсної частотної характеристики системи визначити якість перехідних процесів?
6. Наведіть приклади кореневих критеріїв якості: тривалості та коливальності перехідних процесів.
7. Як використовуються кореневі критерії якості в задачах аналізу та синтезу АСР?
8. Прокоментуйте діаграму І.О.Вишнеградського.
9. Охарактеризуйте інтегральні критерії якості та область їх застосування.
10. Наведіть математичні залежності для оцінки статичного режиму статичних систем.
11. Наведіть оцінки точності астатичних систем.
12. Охарактеризуйте динамічні стаціонарні режими АСР.
13. Як оцінюється точність АСР при гармонійних зовнішніх діях?
14. Які методи використовуються для побудови перехідних процесів?
15. Що таке чутливість АСР? Наведіть приклади функцій чутливості.

6. МЕТОДИ АНАЛІЗУ І СИНТЕЗУ ЛІНІЙНИХ СИСТЕМ КЕРУВАННЯ

6.1. Основні поняття та постановка задач аналізу і синтезу

В попередніх розділах відзначалось, що всі задачі теорії автоматичного керування можна об'єднати в два класи – аналізу та синтезу автоматичних систем керування. В *задачах аналізу* відома структура системи та визначені, як правило, її параметри, і необхідно оцінити властивості системи : стійкість, якість перехідних процесів, точність в ustalених режимах [1, 3, 5, 6, 8].

Задачі синтезу є оберненими до задач аналізу : в них необхідно визначити структуру та параметри системи за поставленими показниками якості. Виходячи з цього, розрізняють параметричний та структурний синтез АСР. Прикладом простої задачі параметричного синтезу є визначення коефіцієнта передачі розімкненої системи за відомою похибкою або за умовою мінімуму інтегральної ланки [8].

Таким чином, *синтезом* автоматичної системи називають процедури визначення структури та параметрів системи за необхідними (заданими) показниками якості. Процедури синтезу є формалізованими, що забезпечує єдиність результату на відміну від неформалізованих прийомів вибору системи на основі досвіду та інших факторів, якими користується розробник системи. В загальному випадку необхідно визначити алгоритмічну та функціональну структуру системи.

Алгоритмічну структуру системи (або її частину) знаходять за допомогою математичних методів на основі вимог, які записані в чіткій математичній формі. В цьому розумінні створення алгоритмічної структури називають теоретичним синтезом або аналітичним конструюванням системи керування. Добре відома задача *аналітичного* конструювання оптимальних регуляторів (АКОР) [8, 9].

Синтез функціональної або технічної структури передбачає формування комплексу виконуваних функцій та технічних засобів для їх реалізації, узгодження характеристик різних елементів та зв'язків між ними.

Крім того, виконувані функції повинні певним чином розподілятися між пунктами управління. В загальному випадку синтез функціональної та технічної структур не може бути повністю формалізованим, а розв'язання технічних проблем виходить за рамки теорії автоматичного керування.

В цілому можна виділити такі етапи синтезу систем керування [1, 2, 3, 8]:

- формування сукупності функціонально необхідних елементів (датчики, автоматичні регулятори, перетворювачі, виконавчі механізми, регулюючі органи). Ці елементи складають незмінну частину системи;
- вибір додаткових елементів для забезпечення необхідної якості системи : компенсаторів, пристроїв корекції, введення додаткових сигналів, наприклад за похідними від змінних;
- визначення оптимальної структури на основі компромісу між точністю і якістю та простотою і надійністю;
- параметрична оптимізація, тобто визначення значень налаштувань регулятора і інших елементів, які забезпечують найкращим чином вимоги до системи.

6.2.Принципи синтезу алгоритмічної структури системи керування.

Для виконання процедур синтезу системи керування повинні бути відомими передавальні функції об'єкта за каналами зміни керування $W_{ок}(p)$ та збурення $W_{озб}(p)$, кількісні оцінки збурень, а також перешкоди в каналах завдання та вимірювання. Найкращою (ідеальною) буде система, яка найбільш точно відтворює на виході корисні сигнали (завдання) і максимально зменшує або компенсує дію збурення [3].

Розглянемо приклади визначення ідеальної структури системи керування. Коли на об'єкт не діє збурення (рис.6.1,а), то передавальну функцію регулятора можна отримати у вигляді [8]:

$$W_{рег}(p) = \frac{1}{W_{ок}(p)} \quad (6.1)$$

Розімкнена система.

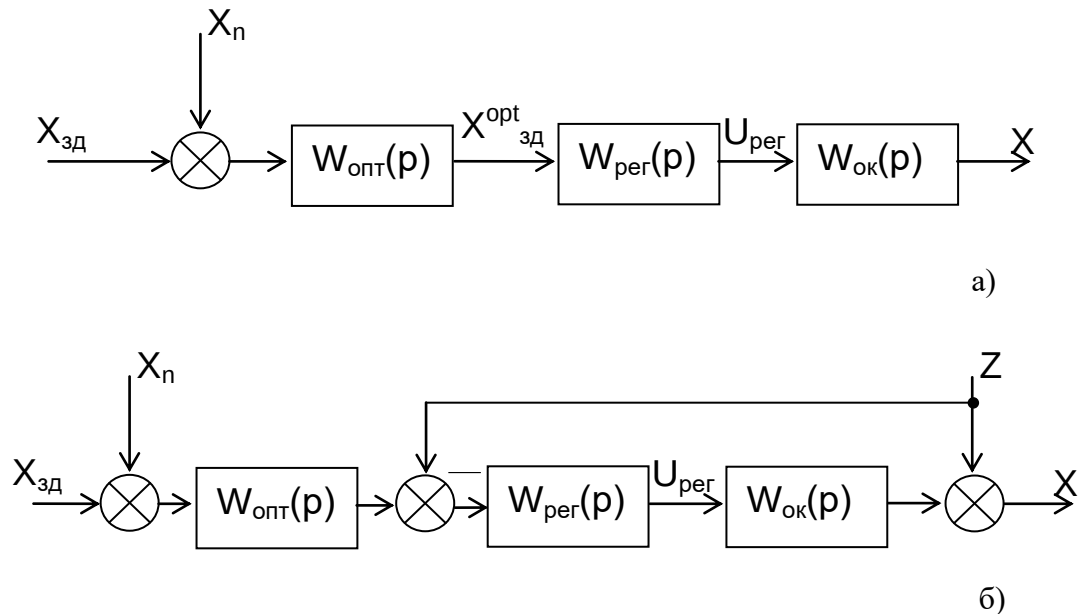


Рис.6.1.Алгоритмічні структури ідеальних розімкнених систем

В цьому випадку забезпечується повна (структурна) компенсація інерційності об'єкта, і система буде миттєво відтворювати на виході об'єкта сигнал $X = X_{\text{зд}}^{\text{opt}}$, який формується спеціальним фільтром з передавальною функцією $W_{\text{опт}}(p)$. Цей фільтр повністю пропускає корисний сигнал завдання $X_{\text{зд}}$ та зменшує вплив перешкоди X_n . Якщо на виході об'єкта діє збурення Z , яке можна вимірювати, то його компенсацію забезпечують введенням додаткового сигналу. В цьому випадку також для регулятора обирають передавальну функцію (6.1), тоді $W_{\text{рег}}(p) \cdot W_{\text{ок}}(p) = 1$, тобто корисна складова вихідного сигналу X буде компенсувати Z . Якщо збурення Z не можна вимірювати, то система створюється по замкненій схемі з використанням сигналу зворотнього зв'язку.

В ідеальній замкненій системі використовується метод непрямого вимірювання збурення Z за допомогою моделі об'єкта (рис.6.2) [3, 8].

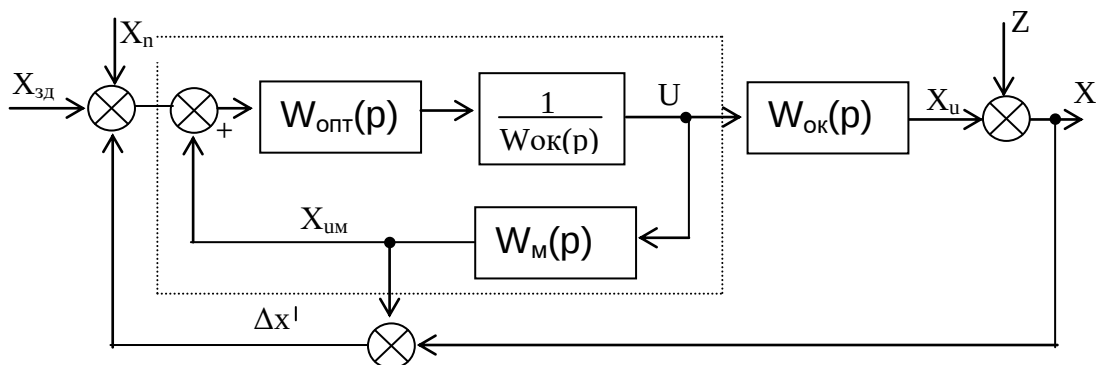


Рис.6.2.Алгоритмічна структура ідеальної замкненої системи

Передавальна функція моделі $W_m(p)$ і об'єкта $W_{ок}(p)$ повинні бути однаковими [8]:

$$W_m(p) = W_{ок}(p), \quad (6.2)$$

тоді сигнал ΔX^1 дорівнює :

$$\Delta X^1 = X - X_{ум} = (X_u + X_z) - X_{ум} = X_z \quad (6.3)$$

де : $X_u, X_{ум}$ – сигнал об'єкта та моделі, викликані сигналом регулятора U , а X_z – складова, яка визначається збуренням Z . На розрахунковому режимі $X_u = X_{ум}$. Таким чином, дія збурення Z оцінюється складовою сигналу X_z , яка вводиться в автоматичний регулятор.

Коли на систему діють збурення Z і перешкода X_n , то в структуру системи необхідно також ввести фільтр для формування оптимального значення $X_{зд}^{opt}$.

В ідеальній системі використовується передавальна функція $\frac{1}{W_{ок}(p)}$, що створює принципову основу для структурного і параметричного синтезу системи керування, це – *метод компенсації інерційності об'єкта*. В практичних задачах реалізувати обернену передавальну функцію об'єкта точно неможливо, тому застосовується частинна компенсація інерційності об'єкта. Наприклад, послідовно з інерційним об'єктом, передавальна функція якого [8, 9]:

$$W_{ок}(p) = \frac{K_{ок}}{(T_1 p + 1) \cdot (T_2 p + 1) \dots (T_n p + 1)} \quad (6.4)$$

($T_1 > T_2 > T \dots T_n$ – постійні часу), включають форсуючу ланку першого – другого порядків з передавальною функцією :

$$W_k(p) = K_k (T_{K_1} p + 1)(T_{K_2} p + 1) \quad (6.5)$$

причому : $T_{K_1} = T_1, T_{K_2} = T_2, K_K = \frac{1}{K_{ок}}$ (6.6)

Не дивлячись на те, що точно реалізувати передавальні функції $\frac{1}{W_{ок}(p)}$ та (6.5) неможливо, основний принцип структурно-параметричної оптимізації систем керування полягає в тому, що автоматичний регулятор (пристрій управління) повинен включати передавальну функцію $\frac{1}{W_{ок}(p)}$ або близьку до неї. Передавальна функція регулятора (обведено пунктиром) буде [3, 8]:

$$W_{рег}(p) = \frac{W_{онм}(p) \cdot \frac{1}{W_{ок}(p)}}{1 - \frac{W_{онм}(p) \cdot W_{м}(p)}{W_{ок}(p)}} \quad (6.7)$$

Приймаючи, що $W_{м}(p) = W_{ок}(p)$, отримаємо :

$$W_{рег}(p) = \frac{W_{онм}(p)}{1 - W_{онм}(p)} \cdot \frac{1}{W_{ок}(p)} \quad (6.8)$$

Ланка з передавальною функцією $W_{опт}(p)$ здійснює оптимальну фільтрацію зовнішніх сигналів та формує $X_{зд}^{опт}$.

6.3. Часові методи аналізу і синтезу систем керування.

В основі часових методів синтезу лежить можливість отримання перехідних процесів, які відповідають заданим показникам якості при використанні різних законів керування. Ці *методи* називають також *прямими*. Необхідно відзначити, що отримати результати синтезу прямим методом можливо лише для ідеальних систем, без урахування нелінійностей, фізичних явищ при передачі та перетвореннях сигналів і т.д., тому ці методи мають, в першу чергу, методологічне значення, що дає можливість отримати загальні положення та залежності [3, 8].

Розглянемо часові методи аналізу і синтезу систем керування для простих структур. Автоматична система регулювання подається в спрощеному вигляді (рис.6.3) [1, 2, 3].

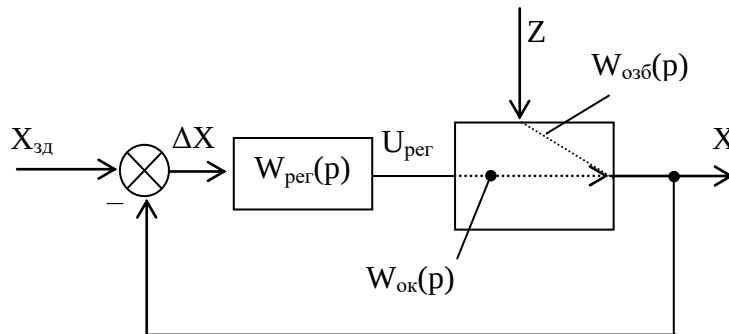


Рис.6.3.Структура одноконтурної АСР

Приклад 1. Система складається з пропорційного регулятора та об'єкта 1-го порядку із самовирівнюванням. Аналіз системи виконується в такому порядку [8]:

- записуються необхідні передавальні функції :

$$\text{регулятора} - W_{\text{рег}}(p) = K_{\text{рег}} \quad (6.9)$$

$$\text{об'єкта} - \text{за каналом керування} - W_{\text{ок}}(p) = \frac{K_{\text{ок}}}{Tp+1} \quad (6.10)$$

$$\text{за каналом збурення} - W_{\text{озб}}(p) = \frac{K_{\text{озб}}}{Tp+1} \quad (6.11)$$

- визначаються передавальні функції замкненої системи :

- відносно зміни завдання – $W_{\text{зд}}(p)$

$$W_{\text{зд}}(p) = \frac{W_{\text{роз}}(p)}{1+W_{\text{роз}}(p)} = \frac{\frac{K_{\text{ок}}}{Tp+1} \cdot K_{\text{рег}}}{1+\frac{K_{\text{ок}}}{Tp+1} \cdot K_{\text{рег}}} = \frac{K_{\text{сист}}}{T_{\text{сист}}p+1} \quad (6.12)$$

$$\text{де : } K_{\text{сист.}} - \text{коефіцієнт передачі системи} - K_{\text{сист}} = \frac{K_{\text{рег}} \cdot K_{\text{ок}}}{1+K_{\text{рег}} \cdot K_{\text{ок}}} \quad (6.13)$$

$$T_{\text{сист.}} - \text{постійна часу системи} - T_{\text{сист}} = \frac{T}{1+K_{\text{рег}} \cdot K_{\text{ок}}} \quad (6.14)$$

- відносно збурення – $W_{\text{зб}}(p)$

$$W_{зб}(p) = \frac{W_{озб}(p)}{1+W_{поз}(p)} = \frac{\frac{K_{озб}}{Tp+1}}{1+\frac{K_{ок}}{Tp+1} \cdot K_{рег}} = \frac{K_{сист}}{T_{сист}p+1} \quad (6.15)$$

$$\text{де: } K_{сист} = \frac{K_{озб}}{1+K_{рег}K_{ок}} \quad (6.16)$$

$$T_{сист} = \frac{T}{1+K_{рег}K_{ок}} \quad (6.17)$$

– отримують перехідні процеси, наприклад за допомогою оберненого перетворення Лапласа при стрибкоподібному вхідному сигналі :

$$X(t)_{зд} = L^{-1} \left[\frac{W_{зд}(p)}{p} \right] \quad (6.18)$$

$$X(t)_{збур} = L^{-1} \left[\frac{W_{збур}(p)}{p} \right] \quad (6.19)$$

Перехідний процес відносно зміни завдання показано на рис.6.4.

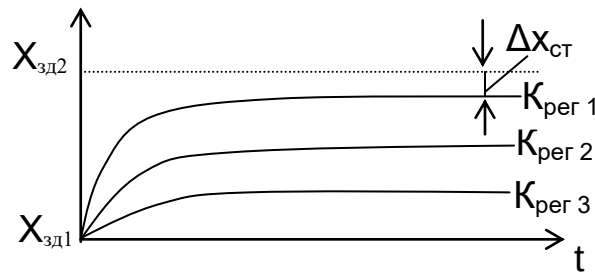


Рис.6.4.Перехідні процеси відносно зміни завдання ($K_{рег 1} > K_{рег 2} > K_{рег 3}$)

Система з точки зору динаміки еквівалентна аперіодичній ланці з передавальною функцією (6.12). Перехідний процес описується рівнянням :

$$X(t) = K_{сист} (1 - e^{-\frac{t}{T_{сист}}}) \quad (6.20)$$

Характеристичне рівняння системи $T_{сист}p+1=0$ має один дійсний корінь $p = -\frac{1}{T_{сист}}$, що відповідає аперіодичному процесу. При зміні $K_{рег}$ змінюються лише числові значення кореня, а перехідний процес залишається аперіодичним. Як видно з виразів (6.13), (6.14) збільшення $K_{рег}$ змінює загальний коефіцієнт передачі системи та її постійну часу. Зменшення $T_{сист}$ скорочує час регулювання та зменшує статичну похибку (рис.6.4), тобто застосування П-регулятора покращує властивості системи, але статична

похибка залишається. Такий же характер мають перехідні процеси відносно збурення (рис.6.5).

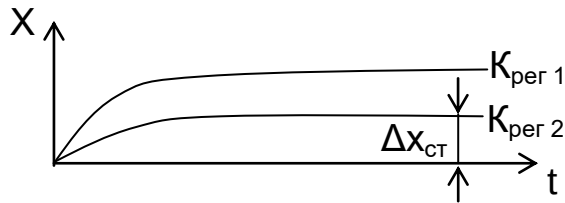


Рис.6.5.Перехідні процеси відносно збурення ($K_{рег\ 2} > K_{рег\ 1}$)

В реальних системах необхідно враховувати динамічні властивості датчиків, виконавчих механізмів, регулюючих органів, що може привести до коливальних процесів і навіть до втрати стійкості при $K_{рег} \rightarrow \infty$.

Задача параметричного синтезу в цьому випадку полягає у визначенні такого $K_{рег}$, при якому $\Delta X_{ст} \leq X_{ст}^{доп}$ за умови виконання інших обмежень, наприклад щодо стійкості.

Приклад 2. АСР складається з П-регулятора та об'єкта без самовирівнювання [8]. Прийнемо, що передавальні функції об'єкта за каналами керування та збурення будуть відповідно :

$$W_{ок}(p) = \frac{K_{ок}}{p} \quad (6.21)$$

$$W_{озб}(p) = \frac{K_{озб}}{p} \quad (6.22)$$

Після виконання дій, які визначені в попередньому прикладі, отримаємо такі результати :

- передавальна функція замкненої системи відносно зміни завдання має вигляд (6.12), але $K_{сист.}=1$, а $T_{сист.} = \frac{1}{K_{рег} \cdot K_{ок}}$: перехідний процес не має статичної похибки;
- в передавальній функції відносно збурення значення параметрів такі :

$$K_{сист} = \frac{K_{озб}}{K_{рег} \cdot K_{ок}} \quad (6.23)$$

$$T_{сист.} = \frac{1}{K_{рег} \cdot K_{ок}} \quad (6.24)$$

Приклад 3. АСР включає І-регулятор з передавальною функцією

$W(p) = \frac{K_{pez_i}}{p}$ та об'єкт без самовирівнювання з передавальною функцією

$W_{озб}(p) = \frac{K_{озб}}{Tp}$ [8]. Передавальна функція замкненої системи відносно збурення буде :

$$W(p) = \frac{\frac{K_{озб}}{Tp}}{1 + \frac{K_{pez_i} \cdot K_{ок}}{p \cdot Tp}} = \frac{K_{озб} \cdot p}{Tp^2 + K_{pez_i} \cdot K_{ок}} \quad (6.25)$$

Виразу (6.25) відповідає перехідний процес :

$$X(t) = \frac{K_{озб}}{\sqrt{K_{pez_i} \cdot K_{ок} \cdot T}} \cdot \sin \sqrt{\frac{K_{pez_i} \cdot K_{ок}}{T}} \cdot t \quad (6.26)$$

Таким чином, перехідний процес – це синусоїда з амплітудою $\frac{K_{озб}}{\sqrt{K_{pez_i} \cdot K_{ок} \cdot T}}$ і

частотою $\omega = \sqrt{\frac{K_{pez_i} \cdot K_{ок}}{T}}$, тобто ідеалізована система знаходиться на межі стійкості. Реальна система з урахуванням характеристик додаткових елементів та нелінійностей буде нестійкою. Це підтверджує висновок про те, що І-регулятор не може працювати на об'єкті без самовирівнювання, тому що в цьому випадку система є структурно нестійкою.

Для прикладів з ПІ- та ПІД- регуляторами часовий аналіз приводить до громіздких виразів, не зручних для роботи. Такі системи зручно досліджувати за допомогою комп'ютерного моделювання, застосовуючи програмні засоби MATLAB і Simulink.

6.4. Частотні методи аналізу та синтезу АСР

Для виконання задач аналізу та синтезу АСР використовуються різні частотні характеристики.

Частотні характеристики розімкненої системи отримуються на основі виразу [3]:

$$W_{роз}(j\omega) = W_{рег}(j\omega) \cdot W_{ок}(j\omega), \quad (6.27)$$

Підставляючи у вираз (6.27) передавальні функції регулятора і об'єкта при $p=j\omega$, отримують частотну характеристику розімкненої системи :

– для системи з П-регулятором [3]:

$$W_{роз}(j\omega) = K_{рег} \cdot W_{ок}(j\omega) \quad (6.28)$$

В цьому і наступних прикладах приймається, що об'єкт є статичним, тобто із самовирівнюванням (рис.6.6).

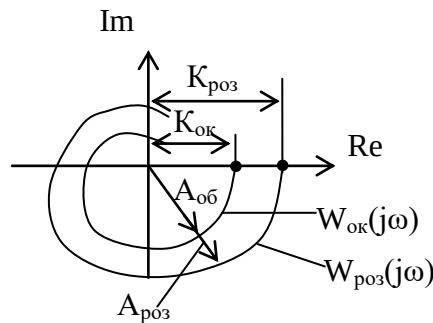


Рис.6.6.Частотні характеристики системи з П-регулятором

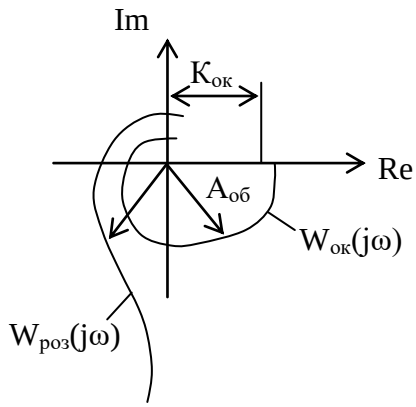
Як видно з виразу (6.28) при $K_{рег}=1$ частотна характеристика розімкненої системи $W_{роз}(j\omega)$ відрізняється від частотної характеристики об'єкта лише розмірністю. При $K_{рег} \neq 1$ кожен вектор $W_{ок}(j\omega)$ змінюється по довжині в $K_{рег}$ разів, не змінюючи свого положення на комплексній площині;

– для систем з І-регулятором (рис.6.7) :

$$W_{роз}(j\omega) = \frac{K_{регi}}{j\omega} \cdot W_{оу}(j\omega) = \frac{K_{регi}}{j\omega} \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}} \cdot W_{оу}(j\omega) \quad (6.29)$$

Цей вираз можна переписати так :

$$W_{роз}(j\omega) = \left(\frac{K_{регi}}{\omega} \cdot A_{об}(\omega) \right) \cdot e^{-j(\varphi_{об}(\omega) + \frac{\pi}{2})} \quad (6.30)$$



Таким чином, кожний вектор АФХ об'єкта повертається на 90° за годинниковою стрілкою (в сторону відставання) та змінюється по довжині в $\frac{K_{регi}}{\omega}$ разів;

Рис.6.7. Частотні характеристики АСР з І-регулятором

- для системи з ПІ-регулятором (рис.6.8) [3]:

$$W_{роз}(j\omega) = K_{рег} \cdot \left(1 + \frac{1}{j\omega T_i}\right) \cdot W_{ок}(j\omega) \quad (6.31)$$

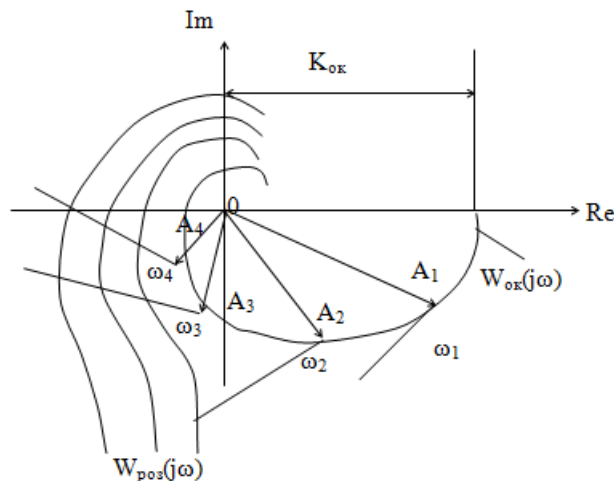


Рис.6.8. Частотні характеристики системи з ПІ-регулятором

Побудова $W_{роз}(j\omega)$ виконується так [3]:

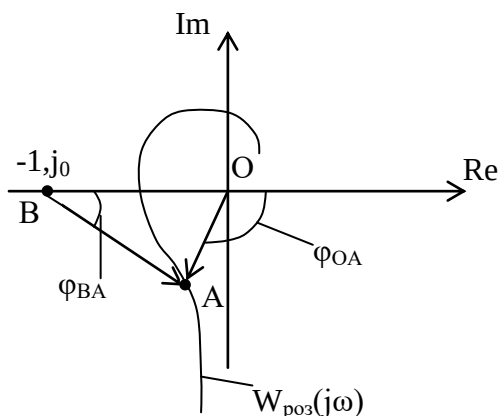
- на АФХ об'єкта обирається кілька точок з частотами $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4 \dots$ з відповідними векторами $OA_1, OA_2, OA_3, OA_4 \dots$;
- до кожного вектора проводиться перпендикуляр;
- на кожному перпендикулярі відкладаються відрізки $\frac{OA_1}{\omega_1 T_i}, \frac{OA_2}{\omega_2 T_i} \dots$ і отримують $W_{роз}(j\omega)$ при $K_{рег}=1$;
- домножається кожний вектор на потрібний $K_{рег}$. Крім того, отримують сімейство $W_{роз}(j\omega)$ при різних значеннях T_i .

Необхідно відзначити, що $W_{роз}(j\omega)$ безрозмірна. Дійсно, при $\omega=0$ $W_{роз}(j\omega)=K_{рег}K_{ок}$.

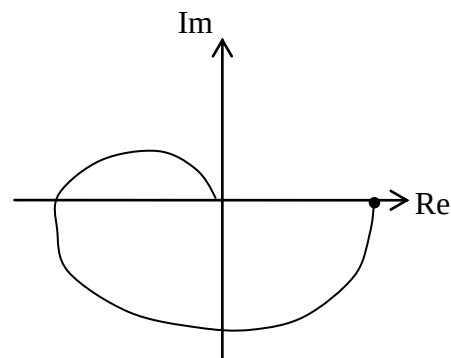
Маючи $W_{роз}(j\omega)$, можна побудувати частотні характеристики замкненої системи [3]:

- відносно зміни завдання (рис.6.9). Для цього використовується вираз:

$$W_{зд}(j\omega) = \frac{W_{роз}(j\omega)}{1+W_{роз}(j\omega)} \quad (6.32)$$



а)



б)

Рис.6.9. Частотні характеристики АСР: а) розімкненої, б) замкненої, відносно зміни завдання

В чисельнику виразу (6.32) – вектор АФХ розімкненої системи, а в знаменнику – суми векторів : $Z_1=W_{роз}(j\omega)$; $Z_2=1+i0$. Тоді значення $W_{зд}(j\omega_i)$ на певній частоті ω_i знаходиться як результат ділення двох векторів, причому АЧХ [3]:

$$A_{зд}(\omega) = \frac{|OA|}{|BA|} \quad (6.33)$$

а ФЧХ : $\varphi_{зд}(\omega) = \varphi_{OA} - \varphi_{BA}$

- відносно збурення (рис.6.10). Для отримання частотної характеристики замкненої системи використовують вираз [3]:

$$W_{збур}(j\omega) = \frac{W_{озб}(j\omega)}{1+W_{роз}(j\omega)} \quad (6.34)$$

Для побудови графіка АФХ замкненої АСР необхідно поділити вектор АФХ об'єкта за каналом збурення на вектор проведений з точки В $(-1, j_0)$.

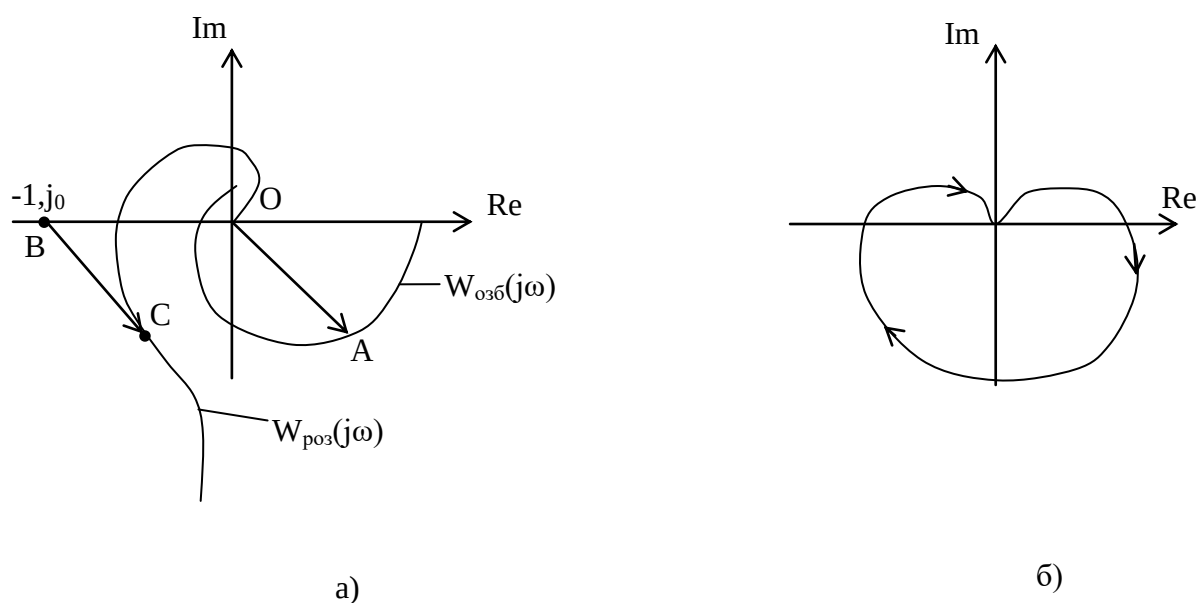


Рис.6.10.Частотні характеристики АСР, а) – розімкненої та об'єкта, б) замкненої, відносно збурення

Тоді АЧХ буде :

$$A_{зб}(\omega) = \frac{|OA|}{|BC|} \quad (6.35)$$

$$\text{а ФЧХ : } \varphi_{зб}(\omega) = \varphi_{OA} - \varphi_{BC} \quad (6.36)$$

Необхідно відзначити, що значення вектора на різних годографах беруться на однаковій частоті ω_i .

Однією із задач дослідження АСР є визначення умов її знаходження на межі стійкості, що відповідає критичним значенням налаштувань регулятора. Для системи з П-регулятором (рис.6.11) умовою знаходження АСР на межі стійкості є [3, 8]:

$$R^{\text{крит}} * K^{\text{крит}}_{\text{рег}} = 1 \quad (6.37)$$

де : $R^{\text{крит}}$ – значення вектора АФХ об'єкта ; $K^{\text{крит}}_{\text{рег}}$ – критичне значення коефіцієнта передачі регулятора. Ці значення оцінюються на частоті ω_{π} . Тоді:

$$K^{\text{крит}}_{\text{рег}} = \frac{1}{R^{\text{крит}}} \quad (6.38)$$

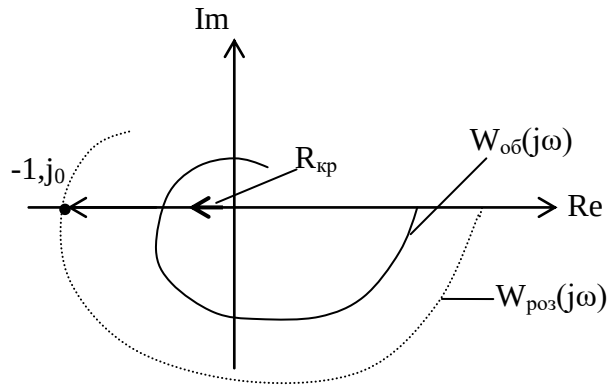
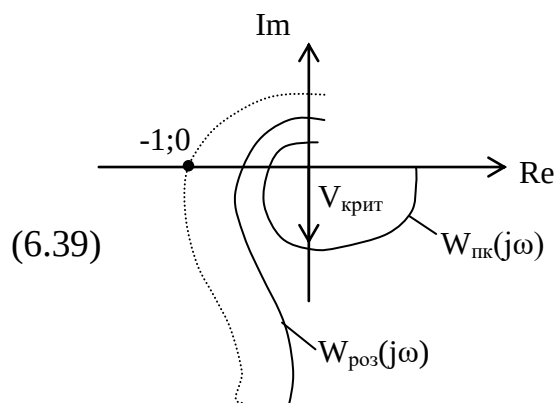


Рис.6.11. Частотні характеристики АСР з П-регулятором

Для систем з І-регулятором (рис.6.12) необхідно враховувати, що кожен вектор АФХ об'єкта повертається на -90^0 , а довжина змінюється в $\frac{K_{регi}}{\omega}$ разів [3, 8].



(6.39)

Тоді значення $K_{регi}^{крит}$ знаходять

з виразу :

$$K_{регi}^{крит} \cdot V^{крит}(\omega^{крит}) = 1$$

$$K_{регi}^{крит} = \frac{1}{V^{крит}(\omega^{крит})}$$

(6.40)

Рис.6.12. Частотні характеристики АСР з І-регулятором

Цей вираз ще раз показує, що І-регулятор може працювати лише з об'єктом із самовирівнюванням. Якщо об'єкт астатичний, то АФХ системи буде охоплювати точку з координатами $(-1;j_0)$ при будь-якому значенні $K_{регi}$, тому що мінімальний зсув фаз в такій системі при частоті $\omega=0$ буде -180^0 .

Для системи з ПІ-регулятором будується сімейство АФХ розімкненої системи (рис.6.8) при $K_{рег} = 1$ та різних значеннях T_i . З виразу (6.37) визначається критичне значення $K_{рег}^{крит}$. В цьому випадку $R^{крит}$ – відрізки, які відсікаються на дійсні від'ємні напівосі сімейства АФХ $W_{роз}(j\omega)$. За цими даними будують область стійкості (рис.6.13) [3, 8].

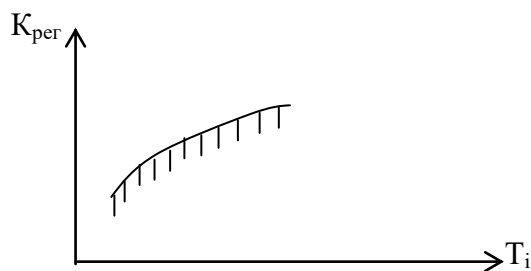


Рис.6.13. Область стійкості АСР з ПІ-регулятором

Для ПІД-регуляторів на площині параметрів налаштувань $K_{peg} - T_i$ будують сімейство кривих для різних значень відношення $T_d/T_i = \text{const}$ (рис.6.14).

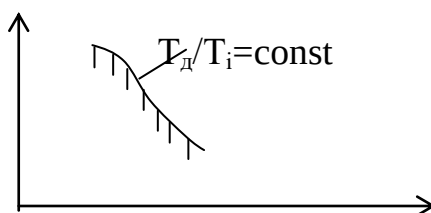


Рис.6.14. Область стійкості АСР з ПІД-регулятором

Якщо частотні характеристики об'єкта задані аналітичними виразами, то при відомих АФХ регуляторів умовою знаходження АСР на межі стійкості є вираз [3, 8]:

$$W_{pez}(j\omega) \cdot W_{ok}(j\omega) = 1 \quad (6.41)$$

який розпадається на два :

$$\begin{cases} A_{pez}(\omega) = \frac{1}{A_{ok}(\omega)} \\ \varphi_{pez}(\omega) = \varphi_{ok}(\omega) \end{cases} \quad (6.42)$$

Амплітудно-фазові характеристики об'єкта і регулятора записують в такій формі [3, 8]:

$$W_{ok}(j\omega) = A_0(\omega)e^{-j\varphi_0(\omega)} \quad (6.43)$$

$$W_{pez}(j\omega) = A_{pez}(\omega)e^{-j\varphi_{pez}(\omega)} \quad (6.44)$$

Тоді налаштування регулятора з урахуванням (6.42) можна знайти в явному вигляді [3, 8]:

$$K_{рег} = f(\omega, K_{ок}, T_1, T_2 \dots \tau_{zn}) \quad (6.45)$$

$$T_i = f(\omega, K_{ок}, T_1, T_2 \dots \tau_{zn}) \quad (6.46)$$

де : $K_{ок}$ – коефіцієнт передачі об'єкта по каналу керування, $T_1, T_2 \dots$ – постійні часу об'єкта, τ_{zn} – час запізнювання.

Користуючись частотними характеристиках, можна отримати також параметри системи, які забезпечують заданий **запас стійкості** за модулями і фазою (рис.6.15).

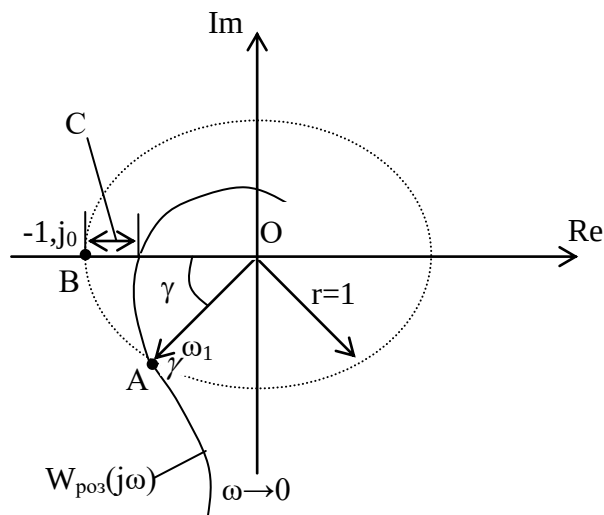


Рис.6.15. Визначення запасу стійкості АСР

Якщо на фазовій площині нанести коло радіусом $r=1$, то можна визначити :

- запас стійкості по модулю C , який показує, на скільки повинен змінитись модуль $W_{роз}(j\omega)$, щоб система вийшла на межу стійкості;
- запас стійкості по фазі – кут γ , який показує, на скільки повинен змінитись зсув по фазі в розімкненій системі при існуючому модулі $W_{роз}(j\omega)$, щоб система вийшла на межу стійкості. Запас стійкості безпосередньо зв'язаний з величиною максимуму АЧХ замкненої системи (рис.6.16) відносно зміни завдання :

$$A_{зд}(\omega) = \frac{|OA|}{|BA|} = \frac{|W_{роз}(j\omega)|}{|1+W_{роз}(j\omega)|} \quad (6.47)$$

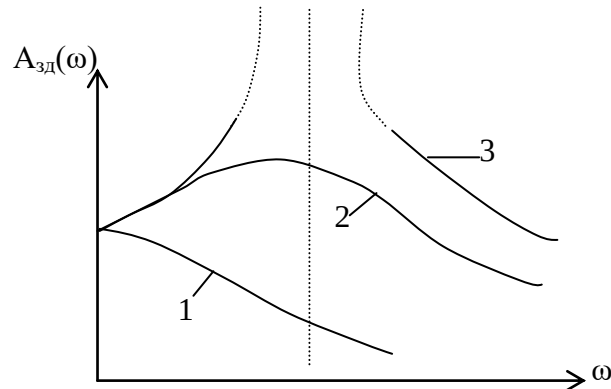


Рис.6.16. АЧХ замкненої системи

В залежності від розташування $W_{роз}(j\omega)$ на комплексній площині змінюється вид АЧХ. При $\omega=0$ $W_{роз}(j\omega) \rightarrow \infty$, $OA=BA$, $A_{зд}(0)=1$. При збільшенні частоти т.А переміщується угору, тоді можливі такі випадки [8]:

- якщо $W_{роз}(j\omega)$ знаходиться достатньо далеко від точки $B(-1; j0)$, то відрізок BA буде завжди більшим відрізка OA . При $\omega \rightarrow \infty$ $BA=1$, $OA \rightarrow 0$, $A_{зд}(\omega) \rightarrow 0$ (рис.6.16, крива 1);
- якщо $W_{роз}(j\omega)$ проходить достатньо близько від т. $B(-1; j0)$, то відрізок BA при низьких частотах $< OA$, тому в діапазоні частот $[\omega=0, \omega_{рез}]$ $A_{зд}(\omega)$ зростає до максимуму. При $\omega \rightarrow \infty$ $OA \rightarrow 0$, $BA=1$, $A_{зд}(\omega) \rightarrow 0$ (рис.6.16, крива 2). Чим ближче $W_{роз}(j\omega)$ до точки $B(-1; j0)$, тим більший максимум $A_{зд}(\omega)$;
- якщо $W_{роз}(j\omega)$ проходить через точку $B(-1; j0)$, то $\max A_{зд}(\omega) \rightarrow \infty$, $BA \rightarrow 0$ (крива 3, рис.6.16).

Таким чином, чим більший $\max A_{зд}(\omega)$, тим ближче годограф $W_{роз}(j\omega)$ до точки $B(-1; j0)$, тим менший запас стійкості. Для забезпечення необхідного запасу стійкості $W_{роз}(j\omega)$ повинна розташовуватись на певній відстані від точки $B(-1; j0)$, тобто не повинно перевищуватись деяке значення відношення :

$$A_{3\partial}(\omega) = \frac{|OA|}{|BA|} = M \quad (6.48)$$

де : M – показник коливальності

$$M = \frac{A_{3\partial}(\omega_{pe3})}{A_{3\partial}(0)} \quad (6.49)$$

Таким чином, для того, щоб $\max A_{3\partial}(\omega)$ не перевищував деякої заданої наперед величини, $W_{3\partial}(j\omega)$ не повинна заходити в область, обмежену колом радіусом r (рис.6.17) [3]:

$$r = \frac{M}{M^2 - 1} \quad (6.50)$$

центр якого розташований на відстані :

$$R_0 = \frac{M^2}{M^2 - 1} \quad (6.51)$$

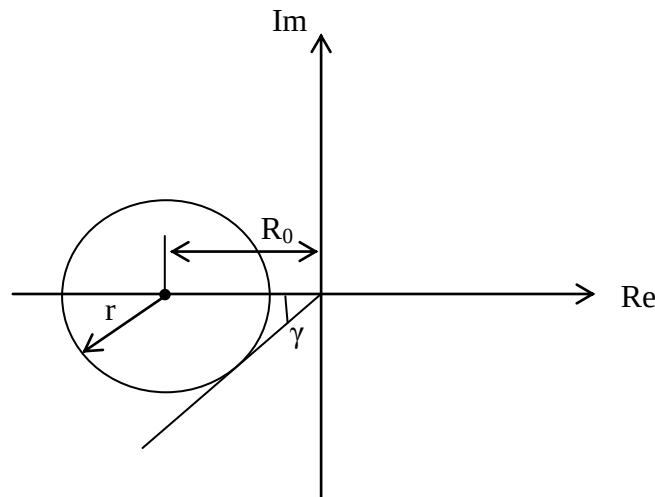


Рис.6.17. До визначення запасу стійкості

Для технічних систем приймається $M = 1,1 \div 1,6$. Існує однозначний зв'язок між показником коливальності M , ступенем затухання Ψ , запасом по модулю C і фазі γ [8, 9]:

$$\begin{array}{lll} \Psi = 0,7 & 0,8 & 0,9 \\ M = 2,7 & 2,09 & 1,55 \\ C = 0,28 & 0,33 & 0,44 \\ \gamma = 21^0 & 28^0 & 45^0 \end{array} \quad (6.52)$$

Виходячи з наведених міркувань, розроблено методику визначення

параметрів системи, які забезпечують заданий запас стійкості. Для цього [3]:

- наноситься коло, яке відповідає показнику коливань M ;

- змінюючи параметри налаштування регулятора, добиваються, щоб $W_{роз}(j\omega)$ була дотичною до цього кола;
- приймаючи певне значення M , наприклад, $M=1,62$ ($\Psi \approx 0,85 \div 0,9$),

визначають:

$$\begin{cases} r = \frac{M}{M^2-1} = \frac{1,62}{1,62^2-1} = 1 \\ \gamma = \arcsin \frac{1}{1,62} = 38^\circ \end{cases} \quad (6.53)$$

Графічна побудова зводиться до того, щоб визначити радіус r кола, яке одночасно дотикається до годографа $W_{роз}(j\omega)$ і прямої, проведеної з початку координат під кутом $\gamma = 38^\circ$. В площині параметрів налаштування ПІ-регулятора (рис.6.18) будується область заданого запасу стійкості АСР [8].

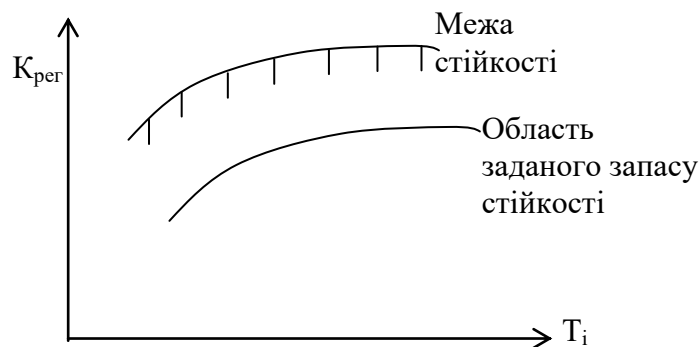


Рис.6.18. Область заданого запасу стійкост АСР

6.5. Визначення оптимальних параметрів системи.

Однією з центральних задач прикладної теорії автоматичного керування є визначення оптимальних параметрів, зокрема значень налаштувань регуляторів. Для цього використовуються різні методи : аналітичні, графо-аналітичні та за наближеними залежностями [3, 7, 8, 9].

При однаковій коливальності перехідні процеси в АСР можуть мати різну тривалість, статичну та динамічну похибку і інш. В умовах непередбачуваних збурень необхідно забезпечити задану якість перехідних процесів. Оптимальними налаштуваннями регуляторів будуть такі, які

забезпечують досягнення найкращих результатів в конкретній ситуації при існуючих ресурсах та обмеженнях у відповідності до обраного критерія. Можна записати таку залежність [8]:

$$A^* = \operatorname{argextr} I, \\ U \in \Omega_u \quad (6.54)$$

де : A^* - вектор оптимальних значень параметрів налаштувань регулятора ($K_{\text{рег}}, T_i, T_d$); I – критерій оптимальності; U – сигнал керування. В задачах знаходження оптимальних значень параметрів налаштувань регуляторів використовуються також математичні моделі об'єкта та формуються обмеження на координати стану X , вихідні змінні Y та збурення Z .

Загальний критерій оптимальності для АСР формується так : система повинна найкраще (найбільш точно) відпрацьовувати корисні сигнали, в першу чергу вектор сигналу завдання $X_{\text{зд}}$ та компенсувати або принаймні зменшувати дію збурення Z . При цьому необхідно враховувати, що зовнішні сигнали мають різні частотні спектри, а складові гармоніки при проходженні через систему змінюються за амплітудою та фазою.

Абсолютна фільтрація (компенсація) збурень забезпечується, коли АЧХ системи відносно збурення дорівнює нулю у діапазоні частот від $\omega=0$ до $\omega \rightarrow \infty$, тобто [8]:

$$|W_{\text{збур}}(j\omega)| = \left| \frac{X(j\omega)}{Z(j\omega)} \right| = 0 \quad (6.55)$$

Вимога точного відтворення $X_{\text{зд}}$ потребує, щоб :

$$|W_{\text{зд}}(j\omega)| = \left| \frac{X(j\omega)}{Z(j\omega)} \right| = 1 \quad (6.56)$$

В реальних системах залежності (6.55) та (6.56) не можуть виконуватись точно, тому оптимальними параметрами налаштувань вважаються такі, які забезпечують максимальне наближення АЧХ реальної системи до характеристик ідеальної. Крім того, оптимізацію налаштувань неможливо забезпечити у всьому діапазоні частот, а для інерційних технологічних об'єктів найбільш “небезпечними” є низькі частоти [8].

Одним з методів отримання значень оптимальних налаштувань регуляторів є введення поняття фільтра для збурення Z (рис.6.19) та перенесення його на вхід системи. Виходячи з еквівалентності структур, які відповідають рис.6.19,а та 6.19,б можна записати [8]:

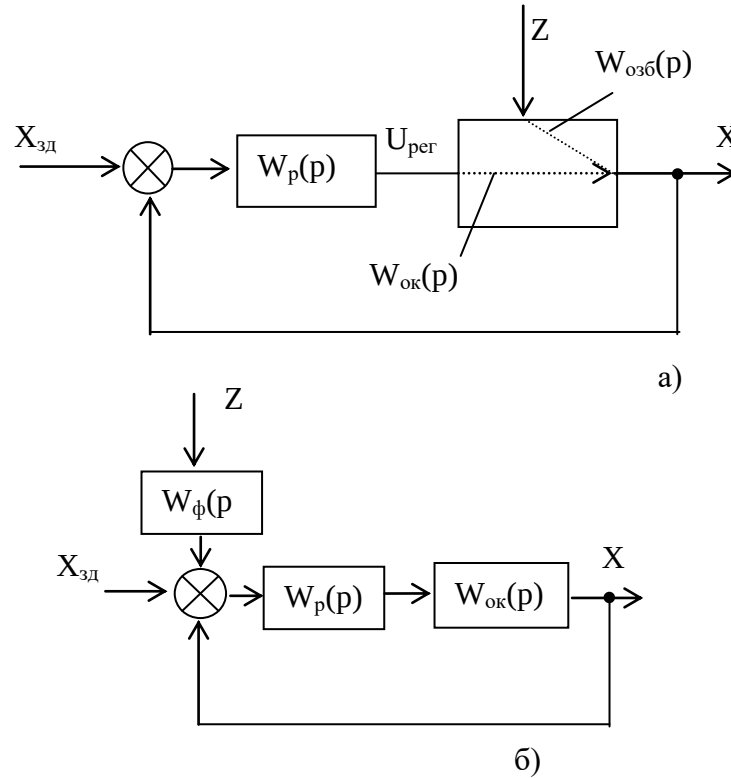


Рис.6.19. Структура одноконтурної АСР а) стандартної; б) з фільтром для збурення

Для схеми а) :

$$X(p) = W_{зд}(p)X_{зд}(p) + W_{збур}(p)Z(p) \quad (6.57)$$

Для схеми б) :

$$X(p) = W_{зд}(p)X_{зд}(p) + W_{зд}(p)W_{ф}(p)Z(p) \quad (6.58)$$

Порівнюючи праві частини виразів (6.57) та (6.58), знаходимо необхідну передавальну функцію $W_{ф}(p)$ [8]:

$$W_{ф}(p) = \frac{W_{збур}(p)}{W_{зд}(p)} = \frac{W_{озб}(p)}{1+W_{роз}(p)} \cdot \frac{1+W_{роз}(p)}{W_{роз}(p)} = \frac{W_{озб}(p)}{W_{роз}(p)} \quad (6.59)$$

Якщо властивості об'єкта залишаються постійними, то налаштування регулятора оптимізуються так, щоб АЧХ фільтра і її похідні дорівнювали нулю, тобто :

$$\begin{aligned} |W_{\phi}(j0)| &= 0 \\ |W_{\phi}(j0)|' &= 0 \end{aligned} \quad (6.60)$$

Якщо об'єкт статичний, то при $\omega \rightarrow 0$ $W_{озб}(0)=K_{озб}$, $W_{ок}(0)=K_{ок}$. Для системи з П-регулятором вираз (6.59) прийме вид :

$$|W_{\phi}(j\omega)| = \frac{K_{озб}}{K_{ок}} \cdot \frac{1}{K_{рег}} \quad (6.61)$$

Таким чином, в околі точки $\omega=0$ АЧХ фільтра буде наближатись до нуля, коли $K_{рег} \rightarrow \infty$. Висновок про підвищення точності системи при збільшенні значення $K_{рег}$ вже був зроблений в попередніх розділах, але завжди існує обмеження : при $K_{рег} = K_{рег}^{крит}$ система виходить на межу стійкості, а при $K_{рег} > K_{рег}^{крит}$ стійкість втрачається.

Для системи з ПІ-регулятором АЧХ фільтра має вигляд [8]:

$$|W_{\phi}(j\omega)| = \left| \frac{W_{озб}(j\omega)}{W_{ок}(j\omega)} \right| \cdot \frac{1}{K_{рег}} \cdot \frac{T_i \cdot \omega}{\sqrt{1+T_i^2 \omega^2}} \quad (6.62)$$

При $\omega=0$ цей вираз також дорівнює нулю, тобто відсутня статична похибка. Перша похідна від (6.62) має вид :

$$|W_{\phi}(j\omega)|' = \left| \frac{W_{озб}(j\omega)}{W_{ок}(j\omega)} \right|' \cdot \frac{1}{K_{рег}} \cdot \frac{T_i \omega}{\sqrt{1+T_i^2 \omega^2}} + \left| \frac{W_{озб}(j\omega)}{W_{ок}(j\omega)} \right| \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1+T_i^2 \omega^2}} - \frac{T_i^2 \omega^2}{(\sqrt{1+T_i^2 \omega^2})^3} \right) \cdot \frac{T_i}{K_{рег}} \quad (6.63)$$

При $\omega=0$ вираз (6.63) набуває виду :

$$|W_{\phi}(j\omega)|' = \frac{K_{озб}}{K_{ок}} \cdot \frac{T_i}{K_{рег}} \quad (6.64)$$

Таким чином, в цьому випадку необхідно щоб відношення $\frac{K_{рег}}{T_i}$ було максимальним. На площині параметрів налаштувань ПІ-регулятора це відповідає т.А (рис.6.20), яку отримують за допомогою дотичної до лінії межі області заданого запасу стійкості [8].

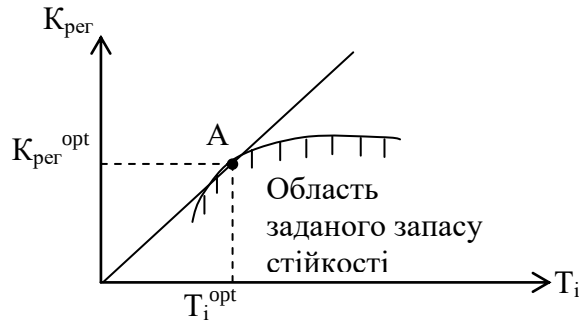


Рис.6.20.Визначення оптимальних налаштувань ПІ-регулятора

Параметри налаштувань ПІ-регулятора, які відповідають т.А, будуть оптимальними і відрізняються від інших лише тим, що саме ці налаштування забезпечують максимальне зменшення збурення і точне відтворення $X_{зд}$.

Для розрахунку оптимальних налаштувань автоматичних регуляторів використовуються також *розширені частотні* характеристики (РЧХ) [3]. На відміну від звичайних при отриманні РЧХ вхідний сигнал має вигляд:

$$U = U_{\max} \cdot \sin \omega t \cdot e^{-m\omega t} \quad (6.65)$$

або в показниковій формі :

$$U = U_{\max} \cdot e^{-m\omega t} \cdot e^{j\omega t} \quad (6.66)$$

де : m – постійний параметр.

Як видно з виразів (6.65), (6.66) амплітуда коливань $U_{\max}e^{-m\omega t}$ зменшується і викликані цим сигналом змушені коливання будуть мати такі ж значення частот і степені затухання, але відрізнятись за амплітудою і фазою [3]:

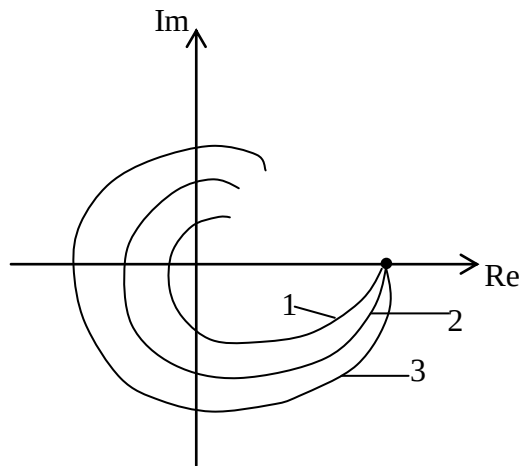
$$X = X_{\max} \cdot e^{-m\omega t} \cdot e^{j(\omega t - \varphi)} \quad (6.67)$$

$$\psi = \frac{A_1 - A_3}{A_1} = 1 - e^{-2\pi m} \quad (6.68)$$

Тоді розширена частотна характеристика буде мати вигляд :

$$W(m, j\omega) = \frac{X_{\max} \cdot e^{-m\omega t} \cdot e^{j(\omega t - \varphi)}}{U_{\max} \cdot e^{-m\omega t} \cdot e^{j\omega t}} = \frac{X_{\max}}{U_{\max}} \cdot e^{-j\varphi} \quad (6.69)$$

Для визначення РЧХ в передавальну функцію необхідно підставити $p=(j-m)\omega$. При $m=0$ це відповідає звичайним (нормальним) частотним характеристикам (рис.6.21) [3].



Для годографа 1 $m=0, \psi=0$;
 для РЧХ 2 : $m=0,221$ ($\psi=0,75$);
 для 3 : $m=0,366$ ($\psi = 0,9$).

Рис.6.21.Звичайна та розширені частотні характеристики

Методика розрахунку налаштувань регулятора по аналогії з критерієм стійкості Найквіста базується на твердженні : якщо розімкнена система має ступінь коливальності не нижче заданого, то замкнена система буде мати такі ж показники тоді, коли РЧХ розімкненої системи пройде через точку з координатами $-1; j_0$.

Розрахунок виконують в такій послідовності [3]:

- визначають параметри регулятора, при яких система має запас стійкості не нижче заданого;
- з попередньої умови обирають такі налаштування, які забезпечують мінімум обраного критерія (лінійного або квадратичного).

Перехідні процеси в системі визначаються парою комплексних коренів, які розташовані поблизу уявної осі на комплексній площині. Тоді процес буде коливальним, а запас стійкості оцінюється ступенем затухання $\psi=0,75 \div 0,9$; $m=0,221 \div 0,366$. Основною розрахунковою залежністю є умова :

$$\begin{cases} W(m, j\omega)_{ок} \cdot W_{pez}(m, j\omega) = 1 \\ A_{pez}(m, \omega) = \frac{1}{A_{ок}(m, \omega)} \\ \varphi_{pez}(m, \omega) = \varphi_{ок}(m, \omega) \end{cases} \quad (6.70)$$

На площині параметрів налаштувань ПІ-регулятора наносять лінії рівного ступеню коливальності (рис.6.22,а) при $m_i = \text{const}$ [3].

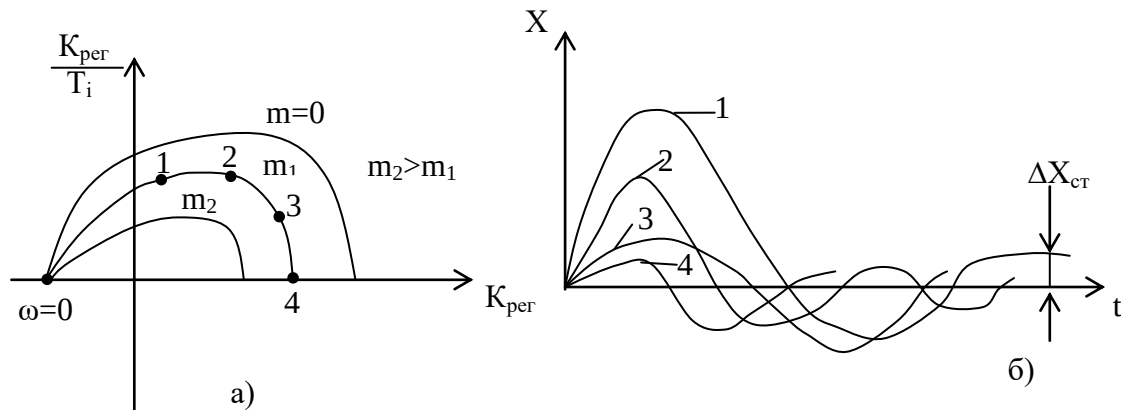


Рис.6.22. Лінії рівної степені коливальності (а) та перехідні процеси системи (б)

Якщо прийняти $\psi=0,75$, то згасання перехідного процесу недостатнє, а при $\psi=0,9$ можливі значні відхилення регульованої координати. Крім того, якщо змінюються динамічні властивості об'єкта, то необхідно прийняти більший ступінь згасання. На рис.6.22,б показані перехідні процеси для точок 1-4 [3].

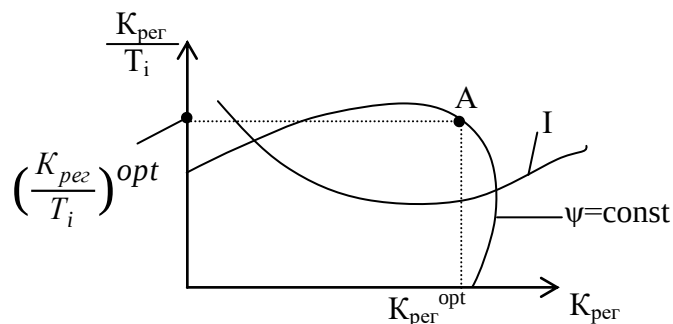


Рис.6.23. До визначення оптимальних налаштувань регулятора

На площині параметрів налаштувань ПІ-регулятора можна написати значення квадратичного критерія оптимальності. Тоді т.А буде відповідати

оптимальним налаштуванням, для яких $I \rightarrow \min$. Значення параметрів налаштувань правіше т.А приводить до перехідних процесів, в яких зтягується кінцева частота, тому значення критерія I знову зростає [3].

При аналізі кривих (рис.6.23) необхідно звернути увагу на такі обставини [8]:

- зліва від т.А розташована низькочастотна область, зправа – високочастотна. Високочастотна частина кривої рівного ступеню затухання розташована майже вертикально, тому поблизу оптимальної точки А ступінь затухання більше визначається значеннями $K_{\text{рег}}$ і мало залежить від T_i ;
- поблизу т.4 (рис.6.22,а) з'являється аперіодична складова, процес зтягується, що само по собі означає знаходження точки налаштувань на високочастотній частині лінії;
- для перехідних процесів, які відповідають високочастотній частині лінії характерним є те, що вони мало відрізняються динамічною похибкою, а значення критерія I залежить, в основному, від розмірів аперіодичної складової. Таким чином, якщо рухатись догори, то оптимум буде тоді, коли пропаде аперіодична складова, або вона буде незначною; значення T_i^{opt} залишається майже постійним при різних значеннях ψ ;
- для реальних систем оптимальні налаштування відповідають не точці А, а області навколо неї;
- значення T_i можна вважати оптимальним, коли пропадає аперіодична складова перехідного процесу;
- значення $K_{\text{рег}}$ є оптимальним, коли забезпечується задане значення ψ при T_i^{opt} ;
- значення налаштувань зліва від т.А погіршують якість перехідних процесів.

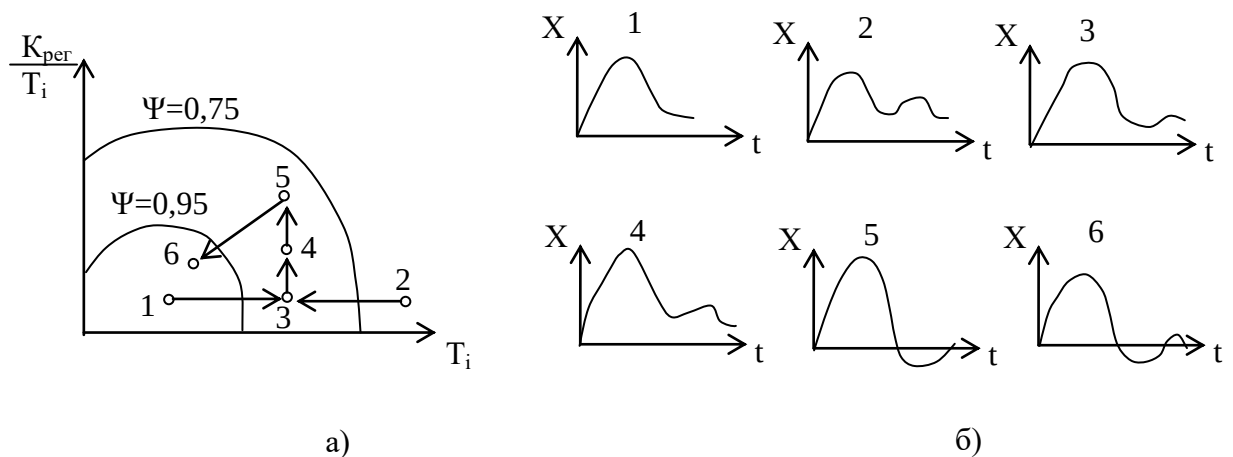


Рис.6.24. Ілюстрація алгоритму покрокової оптимізації, а – криві рівного ступеню затухання, б – перехідні процеси

Процес пошуку точки оптимальних налаштувань можна алгоритмізувати.

Алгоритм покрокової оптимізації включає такі етапи [8]:

- з початкових точок 1 або 2 (рис.6.24) здійснюється вихід на високочастотну частину лінії рівного ступеню затухання, для чого приймається явно завищені значення T_i та довільне значення $K_{\text{рег}}$. Ці налаштування можуть потрапити в зону аперіодичності (т.1 і відповідний перехідний процес 1) або значної коливальності (т.2, 2). Далі при $T_i = \text{const}$, змінюючи $K_{\text{рег}}$, добиваються, щоб перехідний процес мав коливальну складову (т.3, 3) при $\psi = 0,75 \div 0,9$;
- при $K_{\text{рег}} = \text{const}$ зменшенням T_i добиваються, щоб повністю зникла аперіодична складова (точки 4,5 та перехідні процеси 4,5). При наближенні до т.5 необхідно зменшити крок змінювання $K_{\text{рег}}$;
- зміною $K_{\text{рег}}$ при $T_i = T_i^{\text{opt}}$ добиваються потрібного ступеню коливальності (т.6,6).

Розроблено також наближені методи розрахунку налаштувань регуляторів, які дають перші оцінки цих параметрів. Часто динамічні властивості об'єкта можна подати у вигляді послідовного з'єднання двох елементарних ланок : аперіодичної та запізнювання. Тоді передавальна функція буде [2, 3, 8, 9]:

$$W_{ок}(p) = \frac{K_{ок}}{Tp+1} \cdot e^{-p\tau_{зн}} \quad (6.71)$$

де : $K_{ок}$, T , $\tau_{зн}$ – відповідно коефіцієнт передачі об'єкта по каналу керування, постійна часу та час запізнювання можуть визначатись експериментально. Для прикладу в табл.6.1 наведені наближені формули розрахунку параметрів налаштувань регуляторів [2, 3, 8, 10].

Таблиця 6.1

Наближені формули для розрахунку параметрів налаштувань регуляторів

Регулятор	Типовий перехідний процес		
	Аперіодичний	3 20 - % перерегулюванням	Min $\int x^2 dt$
П	$K_{рег} = \frac{0,3}{K_{ок} \frac{\tau_{зн}}{T}}$	$K_{рег} = \frac{0,7}{K_{ок} \frac{\tau_{зн}}{T}}$	$K_{рег} = \frac{0,9}{K_{ок} \frac{\tau_{зн}}{T}}$
ПІ	$K_{рег} = \frac{0,6}{K_{ок} \frac{\tau_{зн}}{T}}$ $T_i = 0,6T$	$K_{рег} = \frac{0,7}{K_{ок} \frac{\tau_{зн}}{T}}$ $T_i = 0,7T$	$K_{рег} = \frac{1,0}{K_{ок} \frac{\tau_{зн}}{T}}$ $T_i = T$
ПІД	$K_{рег} = \frac{0,95}{K_{ок} \frac{\tau_{зн}}{T}}$ $T_i = 2,4\tau_{зн}$ $T_d = 0,4\tau_{зн}$	$K_{рег} = \frac{1,2}{K_{ок} \frac{\tau_{зн}}{T}}$ $T_i = 2,0\tau_{зн}$ $T_d = 0,4\tau_{зн}$	$K_{рег} = \frac{1,4}{K_{ок} \frac{\tau_{зн}}{T}}$ $T_i = 1,3\tau_{зн}$ $T_d = 0,5\tau_{зн}$

Другим наближеним методом розрахунку параметрів налаштувань регуляторів є метод *незагасаючих* коливань (в технічній літературі його називають методом Ціглера-Нікольса). Замкнену систему автоматичного регулювання з П-регулятором переводять в режим автоколивань за допомогою збільшення $K_{рег}$. Якщо в системі працює ПІ-регулятор, то $T_i \rightarrow \infty$, при ПІД-регуляторі $T_i \rightarrow \infty$, $T_d \rightarrow 0$. Для отримання автоколивань визначають

критичні значення $K_{\text{рег}}^{\text{крит}}$ і період $T_{\text{п}}^{\text{крит}}$. Тоді наближеними параметрами налаштувань будуть [8]:

$$\text{П-регулятор : } K_{\text{рег}} = 0,55 K_{\text{рег}}^{\text{крит}} \quad (6.72)$$

$$\text{ПІ-регулятор : } K_{\text{рег}} = 0,35 K_{\text{рег}}^{\text{крит}} ; T_i = 1,25 T_{\text{п}} \quad (6.73)$$

Зменшення коефіцієнта передачі регулятора дозволяє забезпечити необхідний запас стійкості, хоча в цілому отримані налаштування не гарантують досягнення екстремуму показника якості, наприклад, інтегрального критерію. В процесі налагодження АСР наближені параметри налаштувань уточнюються [1, 8, 9].

Контрольні питання

1. Як формулюються задачі аналізу та синтезу систем керування?
2. Назвіть етапи синтезу АСР.
3. Що таке ідеальна структура АСР?
4. Як використовуються передавальні функції об'єкта в задачах аналізу та синтезу?
5. Наведіть алгоритмічні структури ідеальних замкнених та розімкнених АСР.
6. Наведіть приклади часових методів аналізу та синтезу АСР.
7. В чому полягають особливості частотних методів аналізу та синтезу АСР?
8. Як використовуються частотні характеристики замкнених та розімкнених АСР?
9. Чому для систем з ПІ-регулятором існує сімейство частотних характеристик $W_{\text{роз}}(j\omega)$?
10. Як будуються частотні характеристики замкнених АСР?
11. Як визначається область стійкості АСР з ПІ-регулятором?
12. Як визначаються параметри системи на межі стійкості?
13. Як визначаються параметри системи, що гарантують заданий

запас стійкості?

14. Які параметри системи називають оптимальними?

15. Чому в системі з ПІ-регулятором відношення $K_{\text{рег}}/T_i$ повинно бути максимальним?

16. Що таке розширені частотні характеристики?

17. Як використовуються розширені частотні характеристики для синтезу АСР?

НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНІ МАТЕРІАЛИ

1. Попович М.Г., Ковальчук О.В. Теорія автоматичного керування: Підручник. – 2-ге вид., – К.: Либідь, 2007. - 656 с.
2. Теория автоматического управления. Линейные системы [Текст] / И.В. Мирошник – СПб.: Питер, 2005. – 336 с., ил.
3. Теория автоматического управления: ученик для вузов / В.Я. Ротач. – 5-е изд., перереб. и доп. – М.: Издательский дом МЭИ, 2008. – 396 с., ил.
4. Åström K.J., Hägglund T. Advanced PID control. – ISA (The Instrumentation, System, and Automation Society) , 2006. — 460 p.
5. Astrom K.J. Advanced PID Control [Текст] / Astrom K.J., Hagglund T. - Instrumentation, Systems, and Automation Society, USA, 2006. – 250 p.
6. Astrom K.J. Control System Design. Lecture notes for ME 155A [Текст] / Astrom K.J. - Department of Automatic Control Lund Institute of Technology, Sweden, 2002. – 168 p.
7. Современные системы управления [Текст] / Р. Дорф, Р. Бишоп. Пер. с англ. Б.И.Копылова – М.: Лаборатория базовых знаний, 2002. – 832 с., ил.
8. Ладанюк А.П. Теорія автоматичного керування: курс лекцій (частина перша) – К.: НУХТ, 2004 –124 с.
9. Автоматизація технологічних процесів і виробництв харчової промисловості: Підручник/ Ладанюк А.П.,Трегуб В.Г., Ельперін І.В., Цюцюра В.Д. – К.: Аграрна освіта, 2001 – 224 с.
10. Денисенко В.В. ПИД-регуляторы: принципы построения и модификации. Ч. 1. [Текст]/ В.В. Денисенко // Современные технологии автоматизации. – 2007. – №1. – С.66–74.